

*BUREAU DU CENTRE ACADEMIQUE*



# *Fascicule de Mathématiques*

*Terminale D*

NKODIA-LOEMBA  
Edition 2024-2025

Exercices types :

- ❖ Composition du premier trimestre
- ❖ Composition du deuxième Trimestre
- ❖ Bac test
- ❖ Bac blanc

## ***Avant-propos***

*Ce fascicule a été conçu pour répondre aux besoins spécifiques des élèves en classe de Terminale D.*

*Nous avons rassemblé une sélection d'exercices rigoureusement choisis, qui couvrent l'ensemble du programme de mathématiques de cette classe.*

*L'objectif principal de ce fascicule est de vous offrir un outil complet et pratique pour vous entraîner efficacement en vue des examens d'état. Chaque exercice proposé ici a été conçu pour refléter fidèlement les exigences du programme officiel. Vous y trouverez des exercices stimulants issus des sujets proposés par les inspections des différentes zones du Congo-Brazzaville qui vous permettront de consolider vos connaissances, d'approfondir votre compréhension des concepts clés et de développer vos compétences en résolution de problèmes mathématiques.*

*Nous vous souhaitons à tous une excellente préparation aux examens d'état. Que ce fascicule de mathématiques devienne un précieux allié dans votre réussite académique et un tremplin vers un avenir prometteur.*

*L'auteur*

# **PARTIE A**

# ***Analyse***

## FONCTIONS NUMÉRIQUES

### Exercice 1

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 1}} + 2$$

1) Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .

En déduire que la courbe de  $f$  a deux asymptotes dont on précisera les équations.

2) a) Montrer que la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et déterminer sa dérivée  $f'$  de  $f$ .

b) Dresser le tableau de variation de  $f$  et en déduire le signe de  $f$

3) a) Montrer que la fonction  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  vers un intervalle que l'on précisera.

b) En déduire que la courbe de  $f$  coupe l'axe des abscisses en un point unique  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

### Exercice 2

1. On considère la fonction  $g$  définie par  $g(x) = x^3 + 3x + 4$

a. Calculer  $g'(x)$ . Déterminer alors le sens de variation de  $g$ .

b. En déduire le signe de  $g(x)$  (on pourra calculer  $g(-1)$ )

2. On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x^2 + 1}$ . On note  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

b. Calculer  $f'(x)$ .

c. En déduire que  $f'(x)$  et  $xg(x)$  ont le même signe.

d. Dresser alors le tableau de variation de  $f$ .

3.

a. Montrer que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - \frac{x+2}{x^2+1}$ . En déduire que la droite  $(D)$  d'équation  $y = x$  est asymptote à  $(C)$ .

b. Préciser les positions relatives de  $(C)$  et  $(D)$ .

c. Représenter sur un même graphique  $(C)$  et  $(D)$  (on prendra 1cm comme unité graphique).

### Exercice 3

#### Partie A

Soit  $g$  la fonction définie par  $g(x) = x^3 - 3x - 4$

1. Etudier les variations de  $g$  sur  $\mathbb{R}$  (on dressera un tableau de variation de  $g$ )

2. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha \in ]2; 3[$

3. Déduire le signe de  $g$  sur  $\mathbb{R}$

#### Partie B

On considère la fonction numérique  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$

$(\mathcal{C})$  désigne la courbe représentative de  $f$  dans le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan : unité graphique 1cm.

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$
2. Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de  $f$
3. Exprimer la dérivée de  $f$  en fonction de  $g$ . En déduire le signe de  $f'$ .
4. Dresser le tableau de variations de  $f$
5. Etudier les branches infinies à  $(\mathcal{C})$
6. De l'inégalité  $2 < \alpha < 3$ , donner un encadrement de  $f(\alpha)$  à  $10^{-2}$  près, puis tracer  $(\mathcal{C})$  et ses asymptotes dans le même repère.

#### Exercice 4

A/ On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$ .

- 1) Dresser le tableau de variation de  $g$
- 2) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  tel que  $1,6 < \alpha < 1,7$
- 3) En déduire le signe de  $g$ .

B/ On considère la fonction  $f$  définie sur  $]-1; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$ .

- 1) Calculer les limites de  $f$  en  $-1$  et en  $+\infty$ .
- 2) a) Montrer que, pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x^3)^2}$ .

b) Déduire le signe de  $f'$  sur  $]-1; +\infty[$ .

c) Dresser le tableau de variation de  $f$

- 3) Etudier les branches infinies de  $f$

C/ Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $h(x) = \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition  $E_h$  de  $h$ .
- 2) Peut-on calculer  $h(2)$  ? Pourquoi ?
- 3)  $h$  est-elle continue en  $x_0 = 2$  ?
- 4) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$  ; puis déduire la fonction  $g$  prolongement par continuité de  $h$  en  $x_0 = 2$ .

#### Exercice 5

Soit la fonction numérique  $h$  de l'intervalle  $I = [1; +\infty[$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :

$$h(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

1. a) Dresser le tableau de variations de  $h$  sur l'intervalle  $I$ .
- b) Justifier que l'équation  $h(x) = x$  admet une solution unique  $\alpha \in I$ .
2. a) Démontrer que pour tout  $x$  élément de  $I$ , on a :  $|h'(x)| \leq \frac{1}{2}$
- b) Déduire que pour tout  $x$  de l'intervalle  $I$ ,  $|h(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$

#### Exercice 6

1. Enoncer le théorème des inégalités des accroissements finis

2. Soit la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \sqrt{x+2}$

- Préciser l'ensemble de définition  $E_f$  de  $f$
- Etudier les variations de  $f$  puis dresser son tableau de variation.
- Démontrer que quel que soit  $x \in [2; 3]$  ;  $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$
- En déduire que quel que soit  $x \in [2; 3]$  ;  $|f(x) - 2| \leq \frac{1}{4}|x - 2|$

### Exercice 7

Soient  $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$  et  $h(x) = x^3 g(x)$  ;  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

On suppose que  $g(x) \geq 2$  ;  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

- Déterminer les limites en  $+\infty$  et  $-\infty$  de la fonction  $h$ .
- Calculer  $f'(x)$
- Montrer que, pour tout réel  $x \in [0,5; 1]$  :  $\frac{1}{2\sqrt{3}} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$ .
- Utiliser l'inégalité des accroissements finis, pour déduire un encadrement de  $f$  sur  $[0,5; 1]$  par deux fonctions affines et interpréter géométriquement ce résultat.

### Exercice 8

Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $I = ]-1; +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{1+x}$

- Montrer que  $f$  est continue et dérivable sur  $I = ]-1; +\infty[$
- Montrer que  $\forall x \in [0; \frac{1}{2}]$  on a :  $\frac{1}{\sqrt{6}} \leq f'(x) \leq 1 + \frac{1}{2}$  où  $f'$  est la dérivée de  $f$
- a) Enoncer le théorème des inégalités des accroissements finis  
b) En appliquant le théorème des inégalités des accroissements finis à  $f$  sur l'intervalle  $[0; x]$  montrer que  $1 + \frac{x}{\sqrt{6}} \leq f(x) \leq 1 + \frac{x}{2}$   
c) Déterminer un encadrement de  $\sqrt{1,1}$  d'amplitude  $10^{-2}$

### Exercice 9

Vrai ou Faux ?

Cet exercice comporte six affirmations. Indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie ( $V$ ) ou fausse ( $F$ ), en justifiant la réponse.

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x$

- La fonction  $f$  est impaire
- La fonction  $f$  est périodique de période  $2\pi$
- On peut restreindre l'étude de  $f$  à l'intervalle  $[0; \pi]$
- La courbe  $(\mathcal{C})$  de  $f$  est symétrique par rapport à la droite  $(D)$  d'équation  $x = \frac{\pi}{2}$
- Il est possible de restreindre l'étude de  $f$  à l'intervalle de  $[0; \frac{\pi}{2}]$
- La dérivée  $f'$  de  $f$  est définie par :  $f'(x) = (\cos x)(\cos 2x)$

### Exercice 10

On considère la fonction  $f$  de la variable réelle  $x$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \sqrt{x^2 + 4} - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Et on désigne par  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Unité graphique : 1cm.

1. Préciser l'ensemble de définition de  $f$
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  en  $x_0 = 0$ . Interpréter ce résultat.
3. Etudier les variations puis dresser le tableau de variation de  $f$
4. Montrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x - 2$  est asymptote à  $(\mathcal{C})$  au voisinage de  $-\infty$  puis étudier la position de  $(\mathcal{C})$  par rapport à  $(\Delta)$ .
5. Construire  $(\Delta)$  et  $(\mathcal{C})$

### Exercice 11

Soit  $g$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :  $g(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}$

Soit  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . (unité 1 cm).

- 1) Etudier suivant les valeurs de  $x$ , le signe du polynôme  $x^2 - 6x + 5$  et écrire l'expression de  $g(x)$  sans le symbole « valeur absolue ».
- 2) Etudier la continuité et la dérivabilité de  $g$ , en particulier aux points d'abscisse 1 et 5.
- 3) Etudier les variations de  $g$ .
- 4) Démontrer que la droite d'équation  $x = 3$  est axe de symétrie de  $(\mathcal{C})$ .
- 5) Démontrer que les droites d'équations  $y = x - 3$  et  $y = x + 3$  sont asymptotes à la courbe.
- 6) Déterminer les coordonnées des points  $A$  et  $B$  d'intersection de la courbe  $(\mathcal{C})$  avec les deux asymptotes.  $A$  étant le point dont l'abscisse est supérieure à 3.
- 7) Tracer  $(\mathcal{C})$ .

### Exercice 12

On considère la fonction  $f$  de la variable réelle  $x$  définie par :  $f(x) = \frac{x^2 + x}{|x^2 - 1| + 1}$

Et on désigne par  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Unité graphique 4cm.

1. Préciser l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Ecrire sur les intervalles convenables de  $\mathbb{R}$ ,  $f(x)$  sans valeur absolue.
3. Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  en  $x_0 = 1$ . Interpréter ce résultat puis en déduire les équations cartésiennes des demi-tangentes s'il y a lieu au point d'abscisse  $x_0 = 1$ .
4. Etudier les variations de  $f$  puis dresser son tableau de variation.
5. Etudier la position de la courbe  $(\mathcal{C})$  par rapport à la droite  $(\mathcal{D})$  d'équation  $y = 1$
6. Déterminer une équation cartésienne de la tangente  $(\mathcal{T})$  à  $(\mathcal{C})$  en  $x_1 = -1$ .
7. Construire les demi-tangentes,  $(\mathcal{D})$ ,  $(\mathcal{T})$  et  $(\mathcal{C})$ .

### Exercice 13

On considère la fonction  $f$  de la variable réelle  $x$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 1 + x\sqrt{2-x} & \text{si } x \leq 2 \\ f(x) = x - 3 + \frac{6}{x+2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Et on désigne par  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans un plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) Préciser l'ensemble de définition de  $f$ .
- 2) Etudier la continuité et la dérивabilité de  $f$  au point d'abscisse  $x_0 = 2$  et déterminer les équations des demi-tangentes.
- 3) Etudier les variations de  $f$  puis dresser son tableau de variation.
- 4) Montrer que pour  $x \leq 2$ , l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha \in [-1; 0]$ .
- 5) Etudier les branches infinies de  $(C)$ .
- 6) Construire  $(C)$ .
- 7) Pour  $x \leq 2$ , on pose  $g(x) = -f(x)$ . Sans étudier la fonction  $g$  dresser le tableau de variation de  $g$  puis construire dans le même repère que  $(C)$  la courbe  $(C')$  représentative de  $g$ .

### Exercice 14

On donne les fonctions  $f$  et  $g$  telles que :  $f(x) = x^2 + x\sqrt{1+x^2}$ ;  $g(x) = 2x^2 + \frac{1}{2}$ .

- 1) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x^2]$ . En déduire que les courbes  $(C_f)$  et  $(C_g)$  sont asymptotes.
- 2) Etudier les variations de  $f$ .
- 3) Déterminer l'équation cartésienne de la tangent  $(T)$  à  $(C_f)$  au point O origine du repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
- 4) Tracer la courbe  $(C_f)$ , ainsi que cette tangente dans le même repère.
- 5) Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$ .
- 6) Dresser le tableau de variation de  $f^{-1}$ .
- 7) Calculer  $f^{-1}(1 + \sqrt{2})$  et  $(f^{-1})'(1 + \sqrt{2})$ .
- 8) Expliciter  $f^{-1}(x)$ , puis vérifier la valeur de  $(f^{-1})'(1 + \sqrt{2})$ .
- 9) Tracer  $(C')$  courbe de  $f^{-1}$  dans le même repère que  $(C_f)$ .

### Exercice 15

Soit la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x-1}{x+2}, & x < 1 \\ x + \sqrt{x^2 - 1}, & x \geq 1 \end{cases}$

$(C)$  désigne la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
- 2) Etudier la continuité de  $f$  en  $x_0 = 1$
- 3) a) Etudier la dérивabilité de  $f$  en  $x_0 = 1$   
b) Interpréter les résultats obtenus.

- 4) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
- 5) Pour  $x < 1$ 
  - a) Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$
  - b) Montrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x + 1$  est asymptote à la courbe  $(C)$ .
  - c) Etudier la position de la courbe  $(C)$  par rapport à la droite  $(\Delta)$
  - d) Que représente la droite  $x = -2$  ?

### Exercice 16

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = 2 - x^3, & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

On désigne par  $(C)$  la représentation graphique de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. La fonction  $f$  étant continue en 1, montrer que  $(C)$  admet au point d'abscisse 1 deux demi tangentes dont on précisera les directions.
2. a) On donne :  $f'(x) = -3x^2$ , si  $x < 1$ .  
Montrer que :  $f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2+x-2}+2x+1}{2\sqrt{x^2+x-2}}$ , si  $x \geq 1$   
b) Déterminer le sens de variation de  $f$ .
3. On admet que :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 
  - a) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
  - b) Montrer que le point d'abscisse 0 est un point d'inflexion de  $(C)$ .
4. a) Montrer que la droite  $(D)$  :  $y = 2x + \frac{1}{2}$  est une asymptote à  $(C)$  en  $+\infty$ .  
b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ , puis donner une interprétation graphique du résultat.
5. Tracer la courbe  $(C)$ .
6. a) Prouver que la fonction  $f$  est bijective de  $I = [1; +\infty[$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.  
b) Donner l'équation de la tangente à  $(C')$ , la courbe de la fonction réciproque de  $f$ , au point d'abscisse 1.  
c) Donner l'équation de l'asymptote  $(D')$  de  $(C')$ .  
d) Tracer la courbe  $(C')$  dans le même repère que  $(C)$ .

### Exercice 17

Dans le plan rapporté au repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ,  $(C)$  désigne la courbe représentative de la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = x^3 + 1, & x < 0 \\ f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Unité graphique 2 cm.

- 1) On admet que  $f$  est continue en  $x_0 = 0$ 
  - a) Etudier la dérивabilité de  $f$  en  $x_0 = 0$

- b) En déduire la nature du point  $A$  de  $(C)$  d'abscisse  $x_0$
- 2) a) Déterminer la dérivée  $f'$  de  $f$ .  
b) Dresser le tableau de signe de  $f'$  sur  $\mathbb{R}$ .
- 3) On donne  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$
- 4) Déterminer le point d'intersection de la courbe  $(C)$  avec l'axe des ordonnées.
- 5) La courbe  $(C)$  admet une branche parabolique de direction  $(Oy)$  au voisinage de  $-\infty$  et une asymptote oblique  $(D)$ :  $y = 2x$  au voisinage de  $+\infty$ . Tracer soigneusement la courbe  $(C)$ .
- 6) Soit  $h$  la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $I = [0; +\infty[$ .  
a) Montrer que  $h$  est une bijection de  $I$  sur un intervalle  $J$  à préciser.  
b) On note  $h^{-1}$  la bijection réciproque de  $h$  sur  $I$ . Déterminer l'expression analytique de  $h^{-1}$   
c) Tracer soigneusement la courbe  $(C')$  de  $h^{-1}$  dans le même repère que  $(C)$ .

## Exercice 18

### Partie A

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

- a)  $3\sqrt{x^2 - 4} + 4x < 0$   
b)  $3\sqrt{x^2 - 4} + 4x > 0$

### Partie B

On considère la fonction numérique  $f$  de la variable réel  $x$  définie par :

$$f(x) = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}\sqrt{|4 - x^2|}.$$

On considère par  $(C_f)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan  $(P)$  muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) Préciser l'ensemble de définition de  $f$
- 2) Etudier la continuité de  $f$  sur l'ensemble de définition.
- 3) Etudier la dérivable de  $f$ , en particulier en  $x_0 = -2$  et  $x_1 = 2$ . Que dire alors de la courbe  $(C_f)$  en chacun de ces points ?
- 4) Etudier les variations de  $f$
- 5) Montrer que  $(C_f)$  admet deux asymptotes obliques dont on déterminer les équations. Déterminer la position de  $(C_f)$  par rapport à ces asymptotes.
- 6) Tracer  $(C_f)$ .
- 7) Soit  $g$  la fonction telle que  $\forall x \in E_f, g(x) = -f(x)$ 
  - a) Dresser le tableau de variation de  $g$
  - b) Construire la courbe représentative de  $g$  dans le même repère que la courbe de  $f$

## Exercice 19

Soit  $f$  une fonction dérivable et strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$  telle que :

$$\begin{cases} f(\mathbb{R}) = ]0; +\infty[ \\ f(0) = 1 \\ f'(0) = -2 \end{cases}$$

- 1) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 2)  $f$  admet-elle une bijection réciproque notée  $f^{-1}$ ? (On justifiera la réponse).
- 3) Calculer  $(f^{-1})'(1)$ .
- 4) Soit  $g$  la fonction définie par :  $g(x) = \frac{2}{f^{-1}(x)}$ 
  - a) Préciser  $E_g$ , l'ensemble de définition de  $g$ .
  - b) Exprimer  $g'(x)$  en fonction  $f^{-1}(x)$ . En déduire le sens de variation de  $g$ .

## Exercice 20

### Partie A

Soit  $g$  la fonction définie par :  $g(x) = 2x^2 + x^2 - 1$ .

- 1) Etudier les variations de  $g$ .
- 2) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha \in \left] \frac{1}{2}; 1 \right[$ .
- 3) En déduire le signe de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Partie B

On donne  $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x+2}$  ( $a$  et  $b$  sont des réels).

- 1) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  pour que la fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  vérifie :

  - Sa courbe représentative passe par le point  $A(-1; -1)$ .
  - Sa courbe représentative admet une tangente horizontale au point d'abscisse 3.

- 2) Montrer que le point  $I(-2; -3)$  est un centre de symétrie pour la courbe de  $f$ .

### Partie C

Soit  $f$  la fonction numérique définie par :  $f(x) = -1 - 4x^2 + x^4$ .

- 1) Etudier les variations de  $f$
- 2) Soit  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[0; \sqrt{2}]$ 
  - a) Montrer que  $g$  admet une bijection réciproque noté  $g^{-1}$  dont on précisera les variations.
  - b) Construire  $(C_g)$  et  $(C_{g^{-1}})$  dans le même repère.
- 3) Résoudre l'équation  $g(x) = 0$  puis calculer  $(g^{-1})'(0)$ .
- 4) Expliciter  $g^{-1}(x)$  puis vérifier le calcul de 3).

## Exercice 21

Soit  $f$  la fonction numérique définie par :  $\begin{cases} f(x) = \frac{-x+1}{x+1}, & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \cos \frac{\pi}{2}x, & \text{si } 0 < x \leq 4 \end{cases}$

On désigne par  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$ , noté  $E_f$ .
2. On admet que la fonction  $f$  est continue en  $x_0 = 0$ . Etudier la dérivabilité de  $f$  en  $x_0 = 0$
3. a) Calculer la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$ .

- b) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de  $E_f$
- 4. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 5. Déterminer l'équation de la tangente ( $T$ ) à ( $\mathcal{C}$ ) au point d'abscisse  $x_0 = -2$ .
- 6. a) Montrer que pour tout  $x \in ]-1; 0[, -2 < f'(x) < 0$   
b) Démonter en utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis dans l'intervalle  $[x; 0]$  que :  $\forall x \in ]-1; 0[, 1 < f(x) < -2x + 1$ . Conclure.
- 7. Tracer la courbe ( $\mathcal{C}$ ) et les droites ( $D_1$ ):  $y = 1$  et ( $D_2$ ):  $y = -2x + 1$

### Exercice 22

On considère la fonction numérique  $f$  à variable réelle  $x$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 + 1} & \text{si } x \in ]0; +\infty[ \\ f(x) = \cos \pi x & \text{si } x \in [-2; 0] \end{cases}$$

( $\mathcal{C}$ ) désigne la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan.

- 1. Préciser l'ensemble de définition  $E$  de  $f$
- 2. Etudier la continuité de  $f$  sur  $E$ .
- 3. Etudier la dérivabilité de  $f$  au point d'abscisse 0.
- 4. Déterminer la dérivée  $f'$  de  $f$  puis préciser le signe de  $f'(x)$
- 5. Etudier les branches infinies de la courbe ( $\mathcal{C}$ )
- 6. Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ .

### Exercice 23

On considère la fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par :

$$\begin{cases} h(x) = -|x| - \sqrt{m + x^2}, & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ h(x) = -\cos \pi x, & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \text{ où } m \in \mathbb{R}_+ \\ h(x) = \frac{1}{1-x} + \sqrt{|x|}, & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

- 1) Quel est l'ensemble de définition de  $h$  ?
- 2) Donner les différentes expressions de  $h$  sans valeur absolue.
- 3) a) Déterminer le réel  $m$  pour que  $h$  soit continue en 0.  
b) Etudier la dérivabilité de  $h$  en 0 et 4 puis en déduire l'ensemble de dérivabilité de  $h$ .

### Exercice 24

Soit  $f_m$  la fonction numérique à variable réelle  $x$ , définie par :

$$f_m(x) = \frac{x^2 + m + 1}{x^2 + 1} \quad (m \text{ un paramètre réel non nul})$$

- 1) Prouver que  $f$  est définie pour tout  $x$  réel.
- 2) Calculer la dérivée première  $f'_m$  de la fonction  $f_m$ .
- 3) Discuter selon les différentes valeurs du paramètre  $m$ , le signe de la dérivée  $f'_m$  puis déduire les variations de la fonction numérique  $f_m$  (On dressera le tableau de variations pour chaque cas).

## Exercice 25

### Partie A

Soit  $g$  la fonction numérique de la variable  $x$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$g(x) = x^3 - 3x - 3$$

- 1) Etudier les variations de  $g$  puis dresser son tableau de variation.
- 2) a) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha \in [2; 3]$ .
- b) En déduire le signe de  $g(x)$  sur  $]0; +\infty[$ .

### Partie B

On considère la fonction  $f$  de la variable réelle  $x$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2 + \sqrt{x^2 + 1} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{2x^3 + 3}{1 - x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Et on désigne par  $(C)$  sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Préciser l'ensemble de définition de  $f$ .
- 2) On admet que  $f$  est continue en  $x_0 = 0$ , étudier la dérivabilité de  $f$  en  $x_0 = 0$ .
- 3) a) Montrer que  $\forall x \in ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[, f'(x) = \frac{-2xg(x)}{(1-x^2)^2}$ .
- b) En déduire les variations de  $f$  puis dresser son tableau de variation
- c) Montrer que  $f(\alpha) = -3\alpha$  puis donner un encadrement de  $f(\alpha)$ .
- 4) Montrer que les droites d'équations respectives  $(D): y = -x + 2$  et  $(\Delta): y = -2x$  sont asymptotes à  $(C)$  aux voisinages respectifs de  $-\infty$  et  $+\infty$ .
- 5) Construire  $(D)$ ;  $(\Delta)$  et  $(C)$ .

## Exercice 26

### Partie A

Soit la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = x\sqrt{x}$  sur  $[2; 4]$

- 1) Montrer que pour tout  $x \in [2; 4]$ ,  $\frac{3}{2}\sqrt{2} \leq g'(x) \leq 3$ .
- 2) En déduire que pour tout  $x \in [2; 4]$  :  $\frac{3}{2}x\sqrt{2} - \sqrt{2} \leq g'(x) \leq 3x + 2\sqrt{2} - 6$

### Partie B

$f$  est la fonction définie sur  $]1; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

1. Etudier les variations de  $f$
2. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $]1; 2[$ .
3. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  est équivalente à l'équation  $1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = x$
4. Notons  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ 
  - a) Montrer que pour tout  $x$  dans  $[1; +\infty[$ ,  $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$
  - b) En utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis à  $g$  sur l'intervalle  $[\alpha; x]$  déduire que pour tout  $x \in [1; +\infty[$  :  $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} \leq |x - \alpha|$

## Exercice 27

### Partie A

On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = x\sqrt{1+x^2} - 1$

1. Etudier les variations de  $g$  puis dresser son tableau de variation.
2. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha \in ]0,7; 0,8[$
3. En déduire le signe de  $g$  dans  $\mathbb{R}$ .

### Partie B

On considère la fonction  $f$  de la variable réelle  $x$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^3 - 3x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \sqrt{1+x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On note  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
2. On admet que  $f$  est continue en  $x_0 = 0$ , étudier la dérivabilité de  $f$  en  $x_0 = 0$
3. Montrer que pour tout  $x \geq 0$ ,  $f'(x) = \frac{xg(x)}{\sqrt{1+x^2}}$
4. Etudier les variations de  $f$  puis dresser son tableau de variation
5. a) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\beta \in ]1; 2[$   
b) Montrer que  $f(\alpha) = \frac{1}{3}\alpha^3 - \frac{1}{\alpha}$   
c) Donner un encadrement de  $f(\alpha)$  à  $10^{-1}$  près.

### Exercice 28

On considère la fonction  $f$  de la variable réel  $x$  définie par :  $f(x) = \frac{|x^2 - 4|}{x^2 + 2}$

Et on désigne par  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . Unité graphique 1cm.

1. Préciser l'ensemble de définition  $E_f$ .
2. Ecrire sur les intervalles convenables de  $\mathbb{R}$ ,  $f(x)$  sans barre de valeur absolue.
3. Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  en  $x_0 = -2$  et  $x_1 = 2$   
En déduire une interprétation géométrique.
4. Etudier les variations de  $f$  puis dresser son tableau de variation.
5. Montrer que la droite  $\Delta$  d'équation  $y = 1$  est asymptote, puis étudier la position de la courbe  $(\mathcal{C})$  par rapport à  $\Delta$
6. Construire  $\Delta$ ,  $(\mathcal{C})$  ainsi que ses demi-tangentes.
7. On désigne par  $g$  la fonction définie sur  $[-2; 2]$  par  $g(x) = -f(x)$ 
  - a) Par quelle transformation du plan, peut-on déduire la courbe  $(\mathcal{C}_g)$  ?
  - b) Sans étudier la fonction  $g$ , dresser le tableau de variation de  $g$
  - c) Construire dans le même repère que  $(\mathcal{C})$  la courbe  $(\mathcal{C}_g)$

## SUITES NUMERIQUES

### Exercice 1

On considère la suite  $(U_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par : 
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n}{U_n + 2} \end{cases}$$

- 1) a) Démontrer que la suite  $(V_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $V_n = \frac{1}{U_n}$  est suite arithmétique.
- b) Préciser sa raison et son premier terme.
- c) Exprimer  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de  $n$ .
- 2) Calculer la somme  $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$  en fonction de  $n$ .
- 3) Etudier la convergence de la suite  $(U_n)$ .

### Exercice 2

On considère la suite  $(U_n)$  définie par :  $U_{n+1} = \frac{3U_n - 1}{U_n + 1}; n \geq 1$  et  $U_1 = 3$ .

- 1) Calculer  $U_2$  et  $U_3$ .
- 2) a) Montrer que la suite  $(U_n)$  est majorée par 1.  
b) Montrer que la suite  $(U_n)$  est décroissante.  
c) En déduire que  $(U_n)$  est convergente.
- 3) On pose  $V_n = \frac{U_n + 1}{U_n - 1}$ .  
a) Montrer que  $(V_n)$  est une suite arithmétique. Préciser son premier terme.  
b) Exprimer  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de  $n$ .  
c) Déterminer la limite de la suite  $(V_n)$ .

### Exercice 3

Soit  $(U_n)$  et  $(V_n)$  deux suites définies pour tout entier naturel  $n$  par :

$$U_n = \frac{n}{n+1} \text{ et } V_n = \frac{n+2}{n+1}$$

- 1) Etudier la monotonie des suites  $(U_n)$  et  $(V_n)$ .
- 2) Vérifier que  $V_n - U_n > 0$
- 3) Calculer la limite des suites  $(U_n)$  et  $(V_n)$ .
- 4) En déduire que les suites  $(U_n)$  et  $(V_n)$  sont adjacentes.

### Exercice 4

On donne la suite réelle  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par : 
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 3 \end{cases}$$

Soit  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , la suite réelle définie par :  $V_n = U_n + a$  où  $a \in \mathbb{R}$ .

- 1) Déterminer le réel  $a$  pour que  $(V_n)$  soit une suite géométrique.
- 2) On pose  $a = -6$ , déterminer le premier terme et la raison de la suite  $(V_n)$ .

- 3) Ecrire  $V_n$  et  $U_n$  en fonction de  $n$ .
- 4) Calculer  $S_{50} = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{50}$ .

### Exercice 5

On considère la suite numérique  $(U_n)$  définie par  $U_0 = 3$  et pour tout

$$n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{U_n}{1+U_n}.$$

- 1) Prouver que la suite  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de terme général  $V_n = \frac{1}{U_n}$  est une arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison.
- 2) Exprimer  $V_n$  en fonction de  $n$ , puis  $U_n$  en fonction de  $n$ .
- 3) Calculer  $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ .

### Exercice 6

Soit  $(U_n)$  la suite numérique définie par :

$$U_0 = 0; U_1 = 1 \text{ et } U_{n+2} = \frac{1}{3}U_{n+1} + \frac{2}{3}U_n; n \in \mathbb{N}$$

On considère les suites  $(V_n)$  et  $(W_n)$  par :  $V_n = U_{n+1} - U_n$  et  $W_n = U_{n+1} + \frac{2}{3}U_n; \forall n \in \mathbb{N}$

1. Calculer  $V_0$  et  $W_0$
2. Montrer que  $(V_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison.
3. Démontrer que  $(W_n)$  est une suite constante.
4. Montrer que :  $U_n = \frac{3}{5}(W_n - V_n), \forall n \in \mathbb{N}$
5. a) Calculer la limite de  $(V_n)$   
b) En déduire la convergence de la suite  $(U_n)$

### Exercice 7

On considère les suites  $(U_n)$  et  $(V_n)$  telles que :  $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 3U_n \end{cases}$  et  $V_{n+1} = \ln U_n$ .

- 1) a) Montrer que  $(U_n)$  est une suite géométrique.  
b) Exprimer son terme général en fonction de  $n$ .
- 2) a) Montrer que  $(V_n)$  est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme  $V_0$  et la raison  $r$ .  
b) Exprimer son terme général en fonction de  $n$ .
- 3) a) Calculer la somme  $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} V_k$ .  
b) En déduire en fonction de  $n$ , le produit  $P_n = \prod_{k=0}^{n-1} U_k$ .

### Exercice 8

Soit  $(V_n)$  la suite définie par :  $\begin{cases} V_1 = 6 \\ 5V_{n+1} = V_n + 16 \end{cases} (n \in \mathbb{N}^*)$

- 1) Démontrer que  $(V_n)$  est minorée par 4 et décroissante.

- 2) En déduire que  $(V_n)$  est convergente. Quelle est sa limite ?
- 3) Pour tout nombre entier naturel non nul  $n$ , on pose  $W_n = V_n - a$ ,  $a$  étant un nombre réel donné. Déterminer le nombre  $a$  pour que la suite  $(W_n)$  de terme général  $W_n$  soit une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

### Exercice 9

La suite de terme  $U_n$  est définie par  $U_1 = 2$  ;  $U_2 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N} - \{0; 1; 2\}$  :

$$U_n = \frac{2}{3}U_{n-1} + \frac{1}{3}U_{n-2}.$$

La suite de terme général  $W_n$  est définie par  $\forall n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$  :  $W_n = U_n - U_{n-1}$ .

- 1) Calculer  $W_n$  en fonction de  $W_{n-1}$ .
- 2) Montrer que  $(W_n)$  est une suite géométrique dont on calculera le premier terme  $W_2$ . Exprimer  $W_n$  en fonction de  $n$ .
- 3) Calculer  $S_n = W_2 + W_3 + \dots + W_n$
- 4) Calculer  $S_n$  en fonction de  $U_n - U_1$ .
- 5) En déduire l'expression de  $U_n$  en fonction de  $n$ .
- 6) Quelle est la limite de  $U_n$  lorsque  $n$  tend vers l'infini ?

### Exercice 10

1- Soit la suite réelle  $(U_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n}{1+u_n} \end{cases}$  ; pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

- a) Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .
- b) Montrer, par récurrence, que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ;  $0 \leq u_n \leq 3$ .
- 2- Soit la suite  $(v_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$ .

- a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $q = \frac{1}{4}$ .
- b) Exprimer  $(v_n)$  et  $(u_n)$  en fonction de  $n$ .
- c) Calculer la limite de la suite  $u_n$ .

3- On considère la suite  $(w_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $w_n = \frac{3}{u_n}$  et on pose :

$S_n = w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n$ .

- a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ;  $w_n = 1 - v_n$ .
- b) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ;  $S_n = (n+1) + \frac{8}{3} \left[ 1 - \left( \frac{1}{4} \right)^{n+1} \right]$
- c) Calculer la limite de  $\frac{S_n}{n}$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### Exercice 11

On considère la suite complexe  $(U_n)$  de premier terme  $U_0 = -3$  et définie par la relation :  $2U_{n+1} = iU_n - 2 + i$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

- 1) Soit la suite  $(V_n)$  de terme général  $V_n$  tel que :  $V_n = U_n + 1$ 
  - a) Montrer que  $(V_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
  - b) Donner en fonction de  $n$ , le module et l'argument de  $(V_n)$ .  
Déterminer  $n$  pour que  $(V_n)$  soit réel.
- 2) Soient  $k_n$  et  $\theta_n$  le module et l'argument de  $(V_n)$ . Montrer que  $k_n$  et  $\theta_n$  sont les termes généraux d'une suite géométrique et d'une suite arithmétique dont on précisera les raisons et les premiers termes.

### Exercice 12

On considère les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 , \quad u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \end{cases} \quad \text{et} \quad v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$$

1. a) Calculer  $v_0$ .
- b) Montrer  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison  $q$
- c) Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .
2. On définit la suite  $w_n$  par :  $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ 
  - a) Calculer  $w_0$ .
  - b) Montrer que  $(w_n)$  est une suite arithmétique de raison  $r = 2$ .
3. a) Montrer que, pour tout entier  $n$ , on a :  $u_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$
- b) On pose  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ . Démontrer par récurrence que :  $S_n = 2 - \frac{2^{n+3}}{2^n}$ .

### Exercice 13

Soit  $S$  l'ensemble des suites définies sur  $\mathbb{N}$  et vérifiant la relation de récurrence : pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ;  $U_{n+2} = \frac{5}{6}U_{n+1} - \frac{1}{6}U_n$  ; sachant que  $U_0 = -1$  et  $U_1 = 2$ .

1. Trouver deux suites géométriques  $(\alpha^n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\beta^n)_{n \in \mathbb{N}}$  appartenant à  $S$ .
2. Montrer que la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tel que :  $U_n = \lambda\alpha^n + \mu\beta^n$  où  $(\lambda; \beta) \in \mathbb{R}^2$  appartient à  $S$
3. Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un élément de  $S$ .

Calculer  $U_n$  en fonction de  $n$ , puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

## FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

### Exercice 1

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = -(lnx)^2 + 4(lnx) - 3.$$

On désigne par  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé.

1.  $f'$  étant la fonction dérivée de  $f$ , montrer que  $f'(x) = \frac{4-2lnx}{x}$
2. En déduire le tableau de variation de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .
3. a) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $x^2 - 4x + 3 = 0$  et déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe  $(\mathcal{C})$  avec l'axe des abscisses.  
b) En déduire dans  $\mathbb{R}$ , une résolution de l'inéquation  $f(x) > 0$

### Exercice 2

Soit  $f$  la fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$f(x) = 2x^2 - 1 - lnx$ .  $(\mathcal{C})$  désigne la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Calculer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$
2. Etudier le sens de variation de  $f$  et dresser son tableau de variation.
3. Etudier les branches infinies de la courbe  $(\mathcal{C})$
4. Tracer la courbe  $(\mathcal{C})$ .
5. Soit la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = -f(x)$ .
  - a) Sans étudier les variations de  $g$ , dresser son tableau de variation.
  - b) Déduire une construction de la courbe  $(\mathcal{C}')$
  - c) Tracer la courbe  $(\mathcal{C}')$  de  $g$ .

### Exercice 3

Soit la fonction  $f$  de la variable réelle  $x$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x + xlnx^2 & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Etudier la continuité et la dérивabilité de  $f$  en  $x_0 = 0$
3. Déterminer trois points d'intersection de  $(\mathcal{C})$  et l'axe des abscisses.
4. Vérifier que  $f$  est impaire.
5. Etudier les variations de  $f$
6. Tracer sa courbe  $(\mathcal{C})$ .

### Exercice 4

Soit la fonction  $g$  définie sur  $]-\infty; 0[$  par :  $g(x) = 1 + x - \ln(-x)$

1. Calculer les limites de  $g$  en  $-\infty$  et en 0.
2. Etudier les variations de  $g$ , puis dresser son tableau de variation.
3. Calculer  $g(-1)$ , puis en déduire le signe de  $g(x)$  sur  $]-\infty; 0[$ .
4. On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln(-x)$  et on désigne par  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
  - a) Préciser l'ensemble de définition  $E_f$  de  $f$ .
  - b) Calculer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en 0.
  - c) Montrer que pour tout  $x \in ]-\infty; 0[$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
  - d) Etudier le signe de  $f'(x)$  puis dresser le tableau de variation de  $f$ .
  - e) Etudier les branches infinies de  $(\mathcal{C})$ , puis tracer  $(\mathcal{C})$ .

### Exercice 5

Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

#### Partie A

On considère la fonction numérique  $f$  définie par :  $f(x) = -x + 1 - 2\ln x$ .

1. Résoudre dans l'intervalle  $]0; +\infty[$ , l'équation  $f(x) = 0$
2. Etudier les variations de  $f$ .
3. En déduire le signe de  $f(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

#### Partie B

Soit la fonction numérique  $g$  définie par :  $g(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$

1. Donner l'ensemble de définition de  $g$
2. Déterminer les limites de  $g$  aux bornes de son ensemble de définition.
3. Montrer que  $g'(x) = \frac{f(x)}{x^3}$
4. Dresser le tableau de variation de  $g$ .
5. Construire la courbe représentative de  $g$ . Unité graphique : 2 cm.

### Exercice 6

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $\begin{cases} f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}, & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$  et  $(\mathcal{C})$  sa courbe

représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Unité graphique : 2 cm.

#### Partie A

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = x + 1 + \ln x$

1. Etudier les variations de  $f$ , puis dresser son tableau de variations.
2. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$ , admet une solution unique  $\alpha \in ]0, 1; 0, 4[$ .
3. En déduire le signe de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

### Partie B

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  en  $x_0 = 0$ , puis interpréter graphiquement le résultat.
2. Montrer que pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$
3. a) Démontrer que  $f(\alpha) = -\alpha$   
b) Etudier les variations de  $f$ , puis dresser son tableau de variation.  
c) Déterminer l'équation de la tangente ( $T$ ) à ( $\mathcal{C}$ ) en  $x_0 = 1$ .
4. Tracer la courbe ( $\mathcal{C}$ ). On prendra  $\alpha = 0,3$ .
5. Soit  $h$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $I = [1; +\infty[$ .
  - a) Montrer que  $h$  admet une bijection réciproque notée  $h^{-1}$ , puis dresser son tableau de variation.
  - b) Construire la courbe ( $\mathcal{C}'$ ) de  $h^{-1}$ .

## Exercice 7

### Partie A

Soit  $g$  la fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$g(x) = x^2 - 2 + \ln x$$

1. Etudier les variations de  $g$ .
2. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  sur  $[1,30; 1,35]$ .
3. En déduire le signe de  $g(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .

### Partie B

On considère la fonction numérique de la variable  $x$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$f(x) = x + \frac{1-\ln x}{x}$  et on désigne par ( $\mathcal{C}$ ) la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté au repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Unité graphique : 2 cm.

1. a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$   
b) Montrer que  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et étudier son signe pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .  
c) Etablir le tableau de variation de  $f$
2. a) Montrer que la droite ( $\mathcal{D}$ ) d'équation  $y = x$  est asymptote à la courbe ( $\mathcal{C}$ ) puis étudier la position de la courbe ( $\mathcal{C}$ ) par rapport à la droite ( $\mathcal{D}$ )  
b) Déterminer le point d'intersection B de la courbe ( $\mathcal{C}$ ) avec la droite ( $\mathcal{D}$ ), puis déterminer une équation cartésienne de la tangente à ( $\mathcal{C}$ ) au point B.
3. Sans étudier les variations de  $h$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Dresser le tableau de variation de  $h$  telle que  $h(x) = -f(x)$
4. Tracer la courbe ( $\mathcal{C}$ ) de  $f$ , la droite ( $\mathcal{D}$ ) et la courbe ( $\mathcal{C}'$ ) de  $h$ .

On donne :  $\alpha = 1,33$  et  $f(\alpha) = 1,87$ .

### Exercice 8

Soit  $f$  la fonction numérique d'une variable réelle  $x$  définie par :  $f(x) = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{\ln x}{x}$

On désigne par  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Unité graphique 2 cm.

1. a) Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
- b) Déterminer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .
2. On pose  $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$ 
  - a) Dresser le tableau de variation de  $g$ .
  - b) En déduire le signe de  $g(x)$  sur  $]0; +\infty[$
3. a) Montrer que pour tout  $x > 0$ ,  $f(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ 
  - b) En déduire le signe de  $f'(x)$  sur  $]0; +\infty[$
4. Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$
5. a) Montrer que la droite  $(\mathcal{D})$ , d'équation  $y = \frac{1}{2}x + 1$  est une asymptote à  $(\mathcal{C})$ .
  - b) Etudier la position de  $(\mathcal{C})$  par rapport à l'asymptote  $(\mathcal{D})$ .
  - c) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha \in \left] \frac{1}{2}; 1 \right[$ .
6. Construire la courbe  $(\mathcal{C})$  et la droite  $(\mathcal{D})$ .

### Exercice 9

#### Partie I

Soit la fonction  $g$  de la variable réelle  $x$  définie par :  $g(x) = x^2 - 1 + 2\ln x$

1. a) Déterminer l'ensemble de définition  $E_g$  de  $g$ .
  - b) Calculer les limites de  $g$  en  $0^+$  et  $+\infty$
  - c) Déterminer la dérivée  $g'(x)$  de  $g$ .
  - d) Calculer  $g(1)$
  - e) Dresser le tableau de variation de  $g$
  - f) Etudier le signe de  $g(x)$  sur son ensemble de définition.

#### Partie II

Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On considère la fonction  $f$  de la variable réelle  $x$  définie par :  $f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x^2}$  et  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans ce repère.

1. Préciser l'ensemble de définition de  $f$ .
2. a) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 
  - b) Montrer que  $\forall x \in ]0; +\infty[$ ;  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ 
    - c) En déduire le signe de  $f'$  dérivée de la fonction  $f$ .
    - d) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
    - e) Tracer avec soin la courbe  $(\mathcal{C})$  de la fonction  $f$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

### Exercice 10

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]1; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$  et  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans le plan d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. a) Donner l'ensemble de définition  $E_f$  de  $f$ .
- b) Calculer les limites suivantes  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- c) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Interpréter graphiquement le résultat.
2. a) Vérifier que pour tout  $x \in ]1; +\infty[$  ;  $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$
- b) Résoudre l'inéquation  $f'(x) \geq 0$  sur  $]1; +\infty[$ .
- c) Déduire le signe de la fonction  $f'(x)$ .
- d) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
3. Soit  $h$  la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $[e; +\infty[$ .
  - a) Montrer que  $h$  réalise une bijection de  $[e; +\infty[$  sur  $[e; +\infty[$ . On note  $h^{-1}$  la réciproque de  $h$ .
  - b) Donner le tableau de variation de la fonction  $h^{-1}$ .
4. Tracer les courbes  $(\mathcal{C}_f)$  et  $(\mathcal{C}_{h^{-1}})$  dans le même repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

### Exercice 11

#### Partie A

On considère la fonction numérique  $g$  à variable réelle  $x$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$g(x) = x + 1 + \ln x.$$

1. Calculer les limites de  $g$  à droite de 0 et en  $+\infty$ .
2. Etudier le sens de variations de  $g$ .
3. Dresser le tableau de variation de  $g$ .
4. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha \in ]0,27; 0,28[$ .
5. En déduire le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

#### Partie B

Soit la fonction numérique  $f$  définie par  $f(x) = \frac{4x \ln x}{x+1}$

1. Déterminer le domaine de définition  $D_f$  de  $f$
2. Calculer les limites de  $f$  à droite de 0 et en  $+\infty$
3. Montrer que pour tout  $x \in D_f$ ,  $f'(x) = \frac{4g(x)}{(x+1)^2}$
4. Etudier le sens de variations de  $f$  et dresser le tableau de variation.
5. Montrer que  $f(\alpha) = -4\alpha$
6. Après une étude de la branche infinie, tracer la courbe de  $f$ .

### Exercice 12

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(-2 + \ln x)$

Et on désigne par  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

Unité graphique : 2cm.

1. Déterminer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ . Calculer  $f'(x)$ .
2. Soit  $u$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $u(x) = x - 3 + \ln x$ 
  - a) Etudier les variations de  $u$
  - b) Montrer que l'équation  $u(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $[2; 3]$
  - c) En déduire le signe de  $u(x)$  sur  $]0; +\infty[$
3. Dresser le tableau des variations de  $f$
4. Montrer que  $f(\alpha) = -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$
5. Tracer la courbe  $(\mathcal{C})$
6. Soit  $h$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $h(x) = -f(x)$ .
  - a) Donner le tableau des variations de  $h$
  - b) Sans étudier la fonction  $h$ , construire sa courbe  $(\mathcal{C}_h)$  dans le même repère que  $(\mathcal{C})$ .

### Exercice 13

I- On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = -2(x^2 - 1) - \ln x$

1. Dresser le tableau de variation de  $g$  sur  $]0; +\infty[$

2. Calculer  $g(1)$  et déduire le signe de  $g(x)$  sur  $]0; +\infty[$

II- Soit la fonction numérique  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{-1 + \ln x}{x} - 2(x - e)$

On note  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Unité graphique : 2 cm.

1. a) Montrer que  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ 
  - b) Calculer les limites en  $0^+$  et en  $+\infty$  de  $f$
  - c) Dresser le tableau de variation de  $f$
2. a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + 2(x - e)]$ . Que peut-on déduire ?
  - b) Etudier la position relative de  $(\mathcal{C})$  par rapport à son asymptote oblique  $(D)$
3. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  appartenant à l'intervalle  $]0,4; 0,5[$
4. Tracer la courbe  $(\mathcal{C})$  et la droite  $(D)$  dans le même repère.

### Exercice 14

1. On considère la fonction  $h$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $h(x) = x - 1 + x \ln x$ .
  - a) Etudier les variations de la fonction  $h$ .
  - b) Calculer  $h(1)$ . En déduire le signe de la fonction  $h$  sur chacun des intervalles  $]0; 1]$  et  $[1; +\infty[$ .
2. On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = 1 + (x - 1) \ln x$  et on désigne par  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .
  - a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ . Interpréter graphiquement le résultat.
  - b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Interpréter graphiquement le résultat.
3. a) Montrer que pour tout réel  $x \in ]0; +\infty[$ ;  $f'(x) = \frac{h(x)}{x}$ .  
b) Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .
4. a) Résoudre dans l'intervalle  $]0; +\infty[$ , l'équation  $f(x) = x$ .  
b) Montrer que,  $f(x) \leq x$ , si et seulement si  $x \in [1; e]$   
c) En déduire la position relative de la courbe  $(C)$  et de la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x$ .
5. Construire la courbe  $(C)$ .

### Exercice 15

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Soit  $f$  la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 + \frac{1}{x}, & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = 1 - (\ln x)^2, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1. a) Démontrer que  $f$  est continue et dérivable en 1.  
b) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition  $E_f$ .  
c) Préciser les branches infinies de la courbe représentative  $(C)$  de  $f$ .  
d) Etudier les variations de  $f$ . Démontrer que le point d'abscisse  $e$  est un point d'inflexion à la courbe  $(C)$ .  
e) Tracer  $(C)$ .
2. Soit  $h$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $]1; +\infty[$ 
  - a) Démontrer que  $h$  réalise une bijection de  $]1; +\infty[$  vers un intervalle  $J$  que l'on précisera.
  - b) En déduire que  $h$  admet une fonction réciproque  $h^{-1}$  dont on précisera le tableau de variation.
  - c) Tracer la courbe  $(C')$  représentative de  $h^{-1}$  dans le même repère que  $(C)$ .

## FONCTION EXPONENTIELLE

### Exercice 1

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (x - 2)e^{-x}$  et on désigne par  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans un plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . Unité graphique : 2cm.

1. Calculer la limite de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$
2. Etudier les variations de  $f$  puis dresser le tableau de variation
3. Etudier les branches infinies de  $(\mathcal{C})$
4. Construire la courbe  $(\mathcal{C})$ .

### Exercice 2

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x + 1 - (x^2 + 1)e^x$ . Soit  $(\mathcal{C}_f)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , unité 2cm.

1. Montrer que la droite  $(\mathcal{D})$  d'équation  $y = x + 1$  est une asymptote à la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  au voisinage de  $-\infty$ .
2. Montrer que la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  admet au voisinage de  $+\infty$  une branche parabolique dont on déterminera la direction.
3. Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
4. Montrer que la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  possède deux points d'inflexion d'abscisse  $-3$  et  $-1$ .
5. Construire la droite  $(\mathcal{D})$  et la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ .

### Exercice 3

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$ . On désigne par  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans un plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  d'unité graphique : 2 cm.

- a) Montrer que la courbe  $(\mathcal{C})$  admet une branche parabolique de direction  $(oy)$  et une asymptote parallèle à l'axe des abscisses.
  - b) Montrer que la dérivée  $f'$  de  $f$  est telle que :  $f'(x) = (1 - 2x)e^{-x}$
  - c) Etudier le signe de  $f'(x)$  puis dresser le tableau de variations de  $f$
  - d) Tracer la courbe  $(\mathcal{C})$  dans le repère.
3. Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $h(x) = -f(x)$ 
    - a) Sans étude détaillée, dresser le tableau de variations de  $h$
    - b) Tracer la courbe  $(\mathcal{C}')$  de  $h$  dans le même repère que  $(\mathcal{C})$ .

### Exercice 4

On considère la fonction définie dans  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = 1 - e^{2x} - 2xe^{2x}$

1. Démontrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$
2. Etudier le sens de variations de  $g$ . Calculer  $g(0)$ .
3. Déduire des variations de  $g$  le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .
4. On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = x + 3 - xe^{2x}$  et  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  unité 2cm.
  - a) Etudier les variations de  $f$ .
  - b) Démontrer que  $f$  admet pour asymptote en  $-\infty$  la droite  $(D)$ :  $y = x + 3$ .
  - c) Etudier les positions relatives de  $(D)$  et de  $(C)$
5. Tracer la courbe  $(C)$  et la droite  $(D)$ .

### Exercice 5

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^2e^{1-x} + 1$ .

On désigne par  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ; unité graphique 1 cm.

1. Calculer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
2.  $f$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
  - a) Déterminer la dérivée  $f'$  de  $f$ .
  - b) Donner le sens de variation de  $f$ .
  - c) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
3. a) Etudier la branche infinie de  $(C)$  au voisinage de  $-\infty$ . On admet que la droite  $(D) : y = 1$  est asymptote à  $(C)$  en  $+\infty$ .  
b) Tracer la courbe  $(C)$
4. Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $h(x) = -f(x)$ .
  - a) Dresser le tableau de variation de  $h$ .
  - b) Construire la courbe  $(C')$  de  $h$  dans le même repère que  $(C)$ .

### Exercice 6

Soit  $f$  la fonction de la variable réelle  $x$ , définie par :  $f(x) = \frac{e^{-x}}{e^x - 1}$ .

On désigne par  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Unité graphique : 2 cm.

1. Montrer que  $f$  est définie sur  $]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$ .
2. a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Interpréter les résultats obtenus.  
b) Vérifier que la dérivée  $f'$  de  $f$  est  $f'(x) = \frac{e^{-x}-2}{(e^x-1)^2}$ .  
c) Préciser le signe de  $f'(x)$ .

3. Dresser le tableau de variation de  $f$  sachant que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
4. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ . Interpréter le résultat.
5. Soit  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $I = ]-\infty; -\ln 2]$ .
  - a) Montrer que  $g$  admet une bijection réciproque  $g^{-1}$ .
  - b) Dresser le tableau de variation de  $g^{-1}$ .
6. Tracer les courbes  $(\mathcal{C})$  et  $(\mathcal{C}')$  où  $(\mathcal{C}')$  représente la courbe de la fonction  $g^{-1}$ .

## Exercice 7

### Partie A

Soit  $g$  la fonction sur  $\mathbb{R}$  définie par :  $g(x) = 1 - xe^{1+x}$

1. Dresser le tableau de variation de  $g$ .
2. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $x_0 \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$
2. Déduire suivant les valeurs de  $x$  le signe de  $g(x)$

### Partie B

On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{x+1}{1+e^{x+1}}$ .

$(\mathcal{C})$  désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Unité graphique 2 cm.

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$
2. Montrer que  $f'(x) = \frac{g(x)}{(1+e^{x+1})^2}$  et  $f(x_0) = x_0$
3. Dresser le tableau de variation de  $f$
4. Montrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = x + 1$  est asymptote à la courbe  $(\mathcal{C})$ .  
Achever l'étude des branches infinies à  $(\mathcal{C})$ .
5. Etudier la position de  $(D)$  par rapport à  $(\mathcal{C})$ .
6. Construire  $(\mathcal{C})$  et  $(D)$ .

## Exercice 8

### Partie I

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (x+4)e^{-\frac{1}{2}x}$

Et on note  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Unité graphique : 2 cm.

1.  $f'$  désignant la fonction dérivée de  $f$ , montrer que :  $f'(x) = \left(-\frac{1}{2}x - 1\right)e^{-\frac{1}{2}x}$ .
2. Etudier le signe de  $f'(x)$ .
3. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .
4. Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  sachant que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .
5. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ , puis interpréter le résultat.
6. Construire la courbe  $(\mathcal{C})$ .

## Partie II

Soit  $f^{-1}$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[-2; +\infty[$ .

1. Montrer que  $f$  admet une bijection réciproque notée  $f^{-1}$ .
2. Dresser le tableau de variation de  $f^{-1}$ .
3. Construire  $(\mathcal{C}')$ , la courbe représentative de  $f^{-1}$ .

## Exercice 9

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^x + 2e^{-x} + x$ .

On désigne par  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Montrer que, pour tout  $x$ , on a :  $f(x) = e^{-x}(e^{2x} + 2 + xe^x)$
2. Calculer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
3. a) La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{(e^x - 1)(e^x + 2)}{e^x}$   
b) Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
4. On admet que la courbe représentative  $(\mathcal{C})$  de  $f$  admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées ( $Oy$ ) au voisinage de  $+\infty$ .
  - a) Etudier la branche infinie de  $(\mathcal{C})$  au voisinage de  $-\infty$ .
  - b) Tracer la courbe  $(\mathcal{C})$  dans le repère.
5. Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur  $I = [0; +\infty[$ .
  - a) Montrer que la fonction  $g$  est bijective sur  $I$
  - b) Tracer la courbe  $(\mathcal{C}')$  de la bijection réciproque  $g^{-1}$  de  $g$ .

## Exercice 10

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ .

On désigne par  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

Unité graphique : 2 cm.

1. Montrer que le point O est un centre de symétrie de la courbe  $(\mathcal{C})$
2. a) Vérifier que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $f(x) = x + 1 - \frac{2}{e^x + 1}$ .  
b) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .
3. a) La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$   
b) Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  sachant que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
4. a) Montrer que la droite  $(\mathcal{D}): y = x + 1$  est asymptote à  $(\mathcal{C})$  au voisinage de  $+\infty$ .
  - b) Etudier la position de  $(\mathcal{C})$  et  $(\mathcal{D})$ .
  - c) Ecrire une équation de la tangente  $T$  à la courbe  $(\mathcal{C})$  au point d'abscisse 0.
  - d) Construire  $T$ ,  $(\mathcal{D})$  et  $(\mathcal{C})$

## Exercice 11

### Partie A

Soit  $g$  la fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par :

$$g(x) = e^{-x} + 1 + xe^{-x}$$

1. Etudier les variations de  $g$ .
2. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha \in ]-1,28; -1[$
3. En déduire le signe de  $g$  sur son ensemble de définition.

### Partie B

On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{x}{e^{-x}+1}$ . On désigne par  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan. Unité graphique 3cm.

1. Montrer que  $f(\alpha) = \alpha + 1$ ,  $\alpha$  étant le réel défini dans la partie A.
2. En déduire un encadrement de  $f(\alpha)$  en utilisant l'encadrement de  $\alpha$  établi dans la partie A.
3. a) Etudier les variations de  $f$ .  
b) Montrer qu'il existe un réel  $\beta \in ]0; 1[$  tel que  $f'(\beta) = \frac{e}{1+e}$ . En donner une interprétation graphique.  
c) Tracer  $(\mathcal{C})$ .

## Exercice 12

On considère la fonction  $g$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ , définie par :  $g(x) = 1 - e^{2x} - 2xe^{2x}$

1. Démontrer que :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$ .
2. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .
3. Calculer  $g'(x)$  puis donner son signe.
4. Dresser le tableau de variation de  $g$ .
5. Calculer  $g(0)$  et en déduire le signe de  $g$ .
6. On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$ , par  $f(x) = x + 3 - xe^{2x}$  et  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Unité graphique 2cm.
  - a) Calculer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$
  - b) Montrer que  $f'(x) = g(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$
  - c) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
2. Démontrer que  $(\mathcal{C})$  admet en  $-\infty$  une asymptote  $(\mathcal{D})$ , d'équation  $y = x + 3$ .
3. Déterminer suivant les valeurs de  $x$  la position relative de  $(\mathcal{C})$  et de  $(\mathcal{D})$ .
4. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution  $\alpha \in ]-3; -1[$  et une autre solution  $\beta \in ]0; 1[$ .
5. Tracer  $(\mathcal{C})$  et  $(\mathcal{D})$ .

## Exercice 13

### Partie A

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = -2e^{-x-1} + 2x$

1. Calculer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ 
  - a) Déterminer la fonction dérivée  $f'$  de  $f$
  - b) Dresser le tableau de variation de  $f$
2. a) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$ , admet une solution unique  $\alpha \in ]0; 1[$   
b) En déduire le signe de  $f(x)$  sur  $\mathbb{R}$

### Partie B

On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = 2e^{-x-1} + x^2 - 3$

On désigne par  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

Unité graphique 2cm.

1. Calculer les limites de  $g$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$
2. a) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g'(x) = f(x)$   
b) En déduire le tableau de variation de  $g$
3. a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$   
b) Construire la courbe  $(\mathcal{C})$ , sachant qu'elle admet une branche parabolique de direction  $(Oy)$  en  $-\infty$  et on donne  $g(\alpha) = -2,56$

## Exercice 14

Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

On considère la fonction  $f$  de la variable réelle  $x$  définie par :  $f(x) = (2+x)e^{-\frac{1}{2}x}$ .  $(\mathcal{C})$  est sa courbe représentative.

1. a) Déterminer l'ensemble de définition  $E_f$  de  $f$   
b) Donner la dérivée  $f'$  de  $f$  puis son signe.  
c) Déduis-en le sens de variation de  $f$ .  
b) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de  $E_f$ .
2. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
3. a) Montrer que la courbe  $(\mathcal{C})$  de  $f$  admet un point d'inflexion noté  $I$ .  
b) Déterminer les coordonnées de ce point d'inflexion  $I$ .
4. a) Etudier les éventuelles branches infinies de  $(\mathcal{C})$   
b) Construire  $(\mathcal{C})$  dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , d'unité graphique : 2 cm.
5. On considère la fonction  $r$  définie par  $r(x) = -f(x)$ . Sans expliciter  $r$ , construire sa courbe  $(\mathcal{C}_r)$  dans le même repère que  $(\mathcal{C})$ .
6. Calculer la dérivée de la fonction  $U(x)$  définie par :  $U(x) = (4+x)e^{-\frac{x}{2}}$

### Exercice 15

1. On considère la fonction numérique  $g$  définie par :  $g(x) = (2x + 1)e^x + 1$ .
  - a) Justifier que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$
  - b) Calculer  $g'(x)$  et dresser le tableau variation de  $g$ .
  - c) En déduire que pour tout réel  $x$ ,  $g(x) > 0$ .
- 2) On considère la fonction numérique  $f$  définie par :  $f(x) = x + 2 + (2x - 1)e^x$ . Soit  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .
  - a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .
  - b) Calculer et interpréter graphiquement  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ .
  - c) Montrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = x + 2$  est une asymptote à  $(\mathcal{C})$  au voisinage de  $-\infty$  puis déterminer leurs positions relatives.
3. Ecrire  $f'(x)$  en fonction de  $g(x)$  et dresser le tableau de variation de  $f$ .
4. a) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera.  
 b) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  puis vérifier que  $-0,86 < \alpha < -0,85$ .
5. a) Montrer qu'il existe un point  $A$  en lequel la tangente  $(T)$  à  $(\mathcal{C})$  est parallèle à l'asymptote oblique. Préciser les coordonnées de  $A$  et donner l'équation de  $(T)$ .  
 b) Construire la courbe  $(\mathcal{C})$ , la tangente  $(T)$  et l'asymptote  $(D)$ .

### Exercice 16

#### Partie A

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = 2 - 2x + e^x$

1. Calculer  $g'(x)$  pour tout réel  $x$ .
2. a) Etudier le signe de  $g'(x)$ , puis en déduire le sens de variations de  $g$ .  
 b) En déduire que  $g(x) > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

#### Partie B

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + xe^{-x}$ .

1. a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  puis interpréter le résultat graphiquement.  
 b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (1 + \frac{1}{2}x)]$ , puis interpréter graphiquement le résultat.  
 c) Etudier la position relative de la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  par rapport à la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = 1 + \frac{1}{2}x$ .
2. a) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = \frac{1}{2} \frac{g(x)}{e^x}$   
 b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
3. a) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha \in ]-1; 0[$

- b) Déterminer l'équation de la tangente ( $T$ ) à la courbe ( $\mathcal{C}_f$ ) au point d'abscisse 0.
4. Calculer  $f''(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , puis déterminer le point d'inflexion de la courbe ( $\mathcal{C}_f$ ).
5. Tracer la courbe ( $\mathcal{C}_f$ ) dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . On prendra  $e \approx 2,7$  et  $\frac{2}{e^2} \approx 0,27$ .

## Exercice 17

### Partie I

1. Etudier les variations de la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = 3x - 1 + e^x$
2. En déduire que l'équation  $g(x) = 0$  admet 0 pour seule solution dans  $\mathbb{R}$ .

### Partie II

1. On considère la fonction  $f$  de la variable réelle  $x$ , définie par :

$$f(x) = -x + x^2 + x^3 + xe^x$$

- a) Démontrer que, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f'(x) = (1+x)g(x)$
  - b) Etudier les variations de  $f$ .
  - c) Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $x_0$  dans l'intervalle  $[-2; -1]$
  - d) Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $x_0$  dans l'intervalle  $[-2; -1]$ .
2. Construire la courbe ( $\mathcal{C}$ ) représentative de  $f$  dans un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  où l'on prendra 2cm pour unité sur l'axe des abscisses et 1cm pour unité sur l'axe des ordonnées.

### Partie III

Soit la fonction  $S$  de la variable réelle  $x$ , définie par :  $S(x) = x^3 - x^2 - x + xe^{-x}$

1. Démontrer que pour tout réel  $x$  :  $f(-x) = -S(x)$
2. Sans étudier les variations de  $S$ . Construire tout en expliquant le raisonnement, la courbe ( $\mathcal{C}'$ ) de  $S$  dans le même repère que ( $\mathcal{C}$ ).

## Exercice 18

### Partie A

Soit  $g$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = (x+1)e^{-x} + 1$

1. a) Pour tout réel  $x$  de  $\mathbb{R}$ , calculer  $g'(x)$ .  
b) En déduire le signe de  $g'(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .  
c) On admet que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ .  
Dresser le tableau de variation de  $g(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$ , admet une solution unique  $\alpha \in ]-1,28; -1,27[$ .
3. En utilisant les questions précédentes, déduire le signe de  $g(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Partie B

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{xe^x}{e^x+1}$ .

On désigne par  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Unité graphique : 2 cm.

1. Montrer que, pour tout  $x$ , on a :  $f(x) = \frac{x}{e^{-x}+1}$
2. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
3. a) Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^{-x}+1)^2}$ .  
b) Dresser le tableau de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  sachant que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ .
4. On admet que la courbe représentative  $(\mathcal{C})$  de  $f$  admet une asymptote de direction l'axe des abscisses ( $Ox$ ) d'équation  $y = 0$  au voisinage de  $-\infty$ .
  - a) Montrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x$  est asymptote à  $(\mathcal{C})$  au voisinage de  $+\infty$
  - b) Etudier la position de  $(\mathcal{C})$  par rapport à  $(\Delta)$
5. a) Montrer que  $f(\alpha) = \alpha + 1$   
b) En déduire l'encadrement de  $f(\alpha)$
6. Tracer  $(\mathcal{C})$  et  $(\Delta)$ .

## **STATISTIQUE**

### **Exercice 1**

On donne la série statistique suivante, où  $\alpha$  est un réel non nul donné.

$x_i$	1,2	1,4	1,6	1,8	2
$y_i$	13	12	$\alpha$	16	20

Une équation de la droite de régression de  $y$  en  $x$  est :  $y = 9x + 0,6$

1. Calculer  $\bar{X}$
2. a) Exprimer  $\bar{Y}$  en fonction de  $\alpha$ 
  - b) Déterminer  $\alpha$
3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de  $x$  et  $y$ . Cette corrélation est-elle faible ou forte ?
4. Estimer la valeur de  $y$  relative à  $x = 3,2$

### **Exercice 2**

Soit  $A(-1; 0)$ ;  $B(-1; 1)$ ;  $C(1; 0)$ ;  $D(1; 1)$ ;  $E(2; 0)$  et  $F(2; 1)$  les points du nuage d'une série statistique double X et Y d'effectifs respectifs 2 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 et 2.

1. Représenter ce nuage dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .
2. Dresser le tableau non linéaire à double entrée de cette série.
3. Déterminer les lois marginales de X et Y.
4. Calculer l'inertie minimale de cette série.

### **Exercice 3**

Les caractères X et Y sont distribués suivant le tableau ci-dessous :

X	1	1	2	1	2	0	2	0	2	1	0	2	2	2	1
Y	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	0	1	0	-1	0	-1	1

1. Transformer ce tableau en un tableau à double entrée d'effectifs  $n_{ij}$
2. Déterminer le point moyen  $G(\bar{X}; \bar{Y})$
3. Calculer les variances de X et Y.
4. Déterminer l'inertie minimum du nuage.
5. En déduire l'inertie du nuage par rapport au point  $A(1; 0)$

### **Exercice 4**

Un pays est attaqué par une nouvelle pandémie : le CORONAVIRUS. On a relevé les différents cas constatés durant les semaines. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous.

Rang des semaines	$x_i$	1	2	3	4	5	6
Nombres de cas confirmés	$y_i$	65	70	63	68	76	81

1. Calculer les coordonnées du point moyen  $G$  de cette série statistique double  $(x_i; y_i)$
2. Calculer  $V(X)$ , la variance de  $X$
3. On suppose que cette tendance reste uniforme (la pandémie évolue de la même façon). Déterminer par la méthode des moindres carrés la droite de régression de  $Y$  en  $X$ .
4. Combien de cas de CORONAVIRUS seront enregistrés à la dixième semaine ?

### Exercice 5

Un commerçant observe durant les 6 premiers mois de l'ouverture de son officine, le chiffre d'affaires est en millions de francs CFA. Le résultat de l'observation est résumé dans le tableau où  $x$  désigne le numéro du mois et  $y$  le chiffre d'affaires correspondant. En moyenne, le nombre de mois de l'observation de cette officine est de 8 et réalise un chiffre d'affaires de 18 millions.

X	4	5	6	$x_4$	10	15
Y	3	5	15	20	$y_5$	40

1. a) Déterminer les valeurs de  $x_4$  et  $y_5$
- b) On donne  $x_4 = 8$  et  $y_5 = 25$ . Calculer la variance de  $X$ .
2. On note  $(\Delta)$  la droite de régression de  $Y$  en  $X$  de pente égale à 3,33.
  - a) Déterminer une équation cartésienne de  $(\Delta)$
  - b) En déduire le nombre de mois pour lequel le commerçant possède un chiffre d'affaires de 48 millions.

### Exercice 6

On considère la série statistique à deux variables réelles  $X$  et  $Y$  définie par les tableaux des distributions marginales suivantes :

X	-1	0	1
$n_i$	$a$	5	2

Y	1	2
$n_j$	6	$b$

1. Déterminer les valeurs de  $a$  et  $b$  pour que les coordonnées du point moyen soient  $G \left( \frac{-1}{10}; \frac{7}{5} \right)$ .

On admet que  $a = 3$  et  $b = 4$

2. Transformer ces deux tableaux en un tableau linéaire à une entrée
3. En déduire le tableau non linéaire à double entrée.
4. Calculer la covariance de cette série
5. Calculer l'inertie minimale.

### Exercice 7

Le tableau ci-dessous présente la taille  $x$  (*en centimètre*) et la pointure  $y$  de chaussure (*en centimètre*) de dix élèves choisis au hasard dans une classe de terminale D

$x$	150	159	158	160	165	168	170	172	175	171
$y$	40	41	43	43	42	44	44	44,5	44,5	44

1. Calculer les coordonnées du point moyen  $G$  du nuage de cette série statistique.
2. a) En prenant la covariance de la série  $(x; y)$  égale à 9,6 et pour écart-types marginaux  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  respectivement égaux à 7,4 et 1,4 calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série  $(x; y)$
- b) Utiliser la méthode des moindres carrées pour donner une équation cartésienne de l'ajustement linéaire de  $y$  en  $x$
- c) En déduire au centimètre près la pointure d'un élève de cette série dont la taille est 163 cm, dans le cas où le comportement général est proche de cet échantillon.

### Exercice 8

Soit la série statistique double suivante :

$X \backslash Y$	-1	1
-2	2	1
-1	3	2
3	1	1

1. Représenter le nuage des points de la série.
2. Déterminer les lois marginales de  $X$  et  $Y$
3. Déterminer la droite régression de  $Y$  en  $X$
4. a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre  $X$  et  $Y$
- b) Apprécier cette corrélation.

### Exercice 9

On considère la série statistique à double variables  $X$  et  $Y$  telle que  $(x_i, y_i, n_{ij})$  définie par le tableau à double entrées suivant :

$X \backslash Y$	1	2
-1	2	1
0	3	2
1	1	1

1. Déterminer les deux séries statistiques marginales associées à cette série double.
2. Déterminer les coordonnées  $\bar{X}$  et  $\bar{Y}$  du point moyen  $G$  du nuage statistique.
3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre les caractères  $X$  et  $Y$ .

4. Calculer l'inertie du nuage statistique par rapport au point  $A(-2; 2)$ .

### Exercice 10

On considère la série statistique double définie par le tableau suivant :

$X \backslash Y$	1	3
-1	1	2
0	0	$a$
2	2	0

1. Déterminer les séries marginales de X et Y en fonction de  $a$ .
2. Déterminer le réel  $a$  pour que le point moyen  $G$  ait pour coordonnées  $\left(\frac{1}{6}; 2\right)$ .
3. On donne  $a = 1$ . Calculer :
  - a) La variance de X.
  - b) La variance de Y.
  - c) La covariance de X et Y de cette série statistique.
4. En déduire le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y. Que peut-on en déduire ?

### Exercice 11

On considère les notes obtenues : X en mathématiques et Y en SVT par des élèves d'une classe de Terminale D.

2 élèves ont obtenu 4 en Mathématiques et 7 en SVT  
5 élèves ont obtenu 6 en Mathématiques et 10 en SVT  
3 élèves ont obtenu 8 en Mathématiques et 11 en SVT  
4 élèves ont obtenu 10 en Mathématiques et 14 en SVT  
1 élève a obtenu 12 en Mathématiques et 14 en SVT

1. Faire un tableau à double entrée.
2. Donner les séries marginales de X et de Y.
3. Déterminer les coordonnées du point moyen  $G$  du nuage des points de cette série.
4. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.
5. Déterminer une équation de la droite de régression linéaire de X en Y.

### Exercice 12

Dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , on donne les points

$A(-2; -1), B(1; 1), C(-2; 0), D(1; 0), E(-2; 1)$  et  $F(1; 1)$ . On suppose que ces points sont affectés des coefficients respectifs : 2; 3 ; 1; 2 ; 2 et 0. Unité : 1cm.

1. Représenter le nuage des points de la série ainsi définie.

2. Dresser le tableau non linéaire à double entrée de cette série.
3. Déterminer les séries marginales associées à cette série statistique.
4. Déterminer les coordonnées du point moyen  $G(\bar{X}; \bar{Y})$ .
5. Calculer la covariance entre  $X$  et  $Y$
6. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire  $r$
7. Calculer l'inertie du nuage par rapport au point  $H(-1; 1)$

### Exercice 13

Le directeur des ressources humaines de l'entreprise \*\*\*POLOKOMA 2025\*\*\* doit embaucher des ouvriers. Lors de la précédente campagne de recrutement pour les postes analogues, il fait une étude statistique sur le nombre des candidats  $Y$  en fonction des salaires  $X$  proposés.

Il a eu les résultats suivants :

- Salaire moyen :  $\bar{X} = 600.000 \text{ FCFA}$
- Variance de  $X$  :  $V(X) = 20000$
- Équation de la droite de régression de  $y$  en  $x$  :  $y = 0,001125x - 56$
- Le coefficient de corrélation :  $r = 0,922$

1. Déterminer le nombre moyen des candidatures  $\bar{Y}$
2. Déterminer la covariance de  $(X; Y)$  de la série
3. Déterminer la droite de régression de  $x$  en  $y$
4. En déduire une estimation de salaire que doit proposer le directeur s'il veut embaucher 30 ouvriers.

### Exercice 14

Une usine fabrique des voitures. Dans le tableau suivant, on a indiqué pour les huit mois de l'année 2023 la production journalière moyenne de voiture. Le résultat du sondage est résumé dans le tableau suivant où  $x$  désigne le numéro du mois et  $y$  la production journalière moyenne.

Mois	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août
$x$	1	2	3	4	5	6	7	8
$y$	250	400	185	900	459	178	500	245

La direction de l'usine devra fermer l'atelier de production des voitures si la production journalière moyenne n'atteint pas 750 à la fin de 2023 à la fin de l'année 2023.

1. Déterminer les coordonnées du point moyen  $G$ .
2. Calculer la variance de  $x$  et la covariance  $\text{cov}(x, y)$  de  $x$  et  $y$ .
3. a) Déterminer la droite de régression linéaire ( $\mathcal{D}$ ) de  $y$  en  $x$ .  
b) Calculer la production journalière de voiture en décembre 2023.

## **INTEGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE**

### **Exercice 1**

Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$

1. Calculer la dérivée  $g'$  de  $g$
2. Calculer la primitive de la fonction  $f$  sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{1}{x} \ln x$
3. En déduire la primitive de  $f$  pour  $x = e$  et  $F(e) = 0$ .

### **Exercice 2**

Calculer chacune des intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 (x^3 - x + 2) dx ; J = \int_0^{e^2} \frac{dx}{x} ; K = \int_0^1 3xe^{x^2} dx$$

$$L = \int_0^1 \frac{-x}{\sqrt{3+2x^2}} dx ; M = \int_1^3 \frac{x-1}{(x^2-2x+2)^2} dx$$

### **Exercice 3**

1. Trouver les réels  $a, b$  et  $c$  tels que :  $\frac{2x^2-x+1}{x+2} = ax + b + \frac{c}{x+2}$  puis calculer

$$I = \int_0^2 \frac{2x^2 - x + 1}{x + 2} dx$$

2. Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que :  $\frac{x+2}{(x+1)^4} = \frac{a}{(x+1)^3} + \frac{b}{(x+1)^4}$  puis calculer

$$J = \int_1^3 \frac{x+2}{(x+1)^4} dx$$

3. A l'aide de deux intégrations par parties successives, calculer

$$I = \int_1^e x(1 - \ln x) dx \text{ et } J = \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2x} \cos 2x dx$$

4. On donne :  $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^x \cos^2 x dx$  et  $J = \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^x \sin^2 x dx$

- a) Calculer  $I + J$  et  $I - J$
- b) En déduire les valeurs de  $I$  et  $J$ .

### **Exercice 4**

Soit la fonction numérique  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{-1+\ln x}{x} - 2(x-e)$  et  
 $(D): y = -2(x-e)$  son asymptote oblique.

On note  $(C)$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . Unité graphique : 2 cm.

Calculer l'aire de la partie du plan qui délimite la courbe  $(C)$  et la droite  $(D)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = 2$

### Exercice 5

On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = 2e^{-x-1} + x^2 - 3$

On désigne par  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

Unité graphique 2cm.

Calculer l'aire  $\mathcal{A}$  en  $cm^2$  du domaine plan délimité par la courbe  $(\mathcal{C})$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = 2$

### Exercice 6

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = e^x + 2e^{-x} + x$ .

On désigne par  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . Soit  $\lambda$  un réel strictement positif.

- Calculer l'aire  $\mathcal{A}(\lambda)$  du domaine plan limités par la courbe  $\mathcal{C}$  et les droites  $\Delta$ ,  $D_1$  et  $D_2$  d'équation respectives  $y = x$ ;  $x = 0$  et  $x = \lambda$
- Calculer la limite de  $\mathcal{A}(\lambda)$  lorsque  $\lambda$  tend vers l'infini.

### Exercice 7

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$

On désigne par  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  d'unité graphique : 2 cm

- A partir d'une intégration par parties, déterminer une primitive  $F$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$
- En déduire, en  $cm^2$ , l'aire  $A$  du domaine délimité par les courbes  $(\mathcal{C})$  et  $(\mathcal{C}')$ , les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 2$ . Où  $(\mathcal{C}')$  est la courbe de la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $h(x) = -f(x)$

### Exercice 8

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (x - 2)e^{-x}$  et on désigne par  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans un plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

Unité graphique : 2cm.

Soit  $F$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $F(x) = (ax + b)e^{-x}$

- Déterminer les nombres réels  $a$  et  $b$  pour que  $F$  soit une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$
- Calculer en  $cm^2$ , l'aire  $\mathcal{A}$  du domaine plan délimité par la courbe  $(\mathcal{C})$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 2$  et  $x = 4$

### Exercice 9

1. Démontrer que, pour tout réel  $x$  :  $\frac{e^{2x}}{1+e^x} = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}$

2. Calculer l'intégrale  $I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$

3. Soit la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  par :  $f(x) = \ln(1 + e^x)$

- Calculer la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$ .
- En déduire à l'aide d'une intégration par parties, la valeur exacte de  
$$J = \int_0^1 e^x \ln(1 + e^x) dx$$

### Exercice 10

On considère la suite numérique  $(I_n)$  définie par :  $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx, n \in \mathbb{N}$

1. Calculer  $I_0$ .
2. Démontrer, en utilisant une intégration par parties, que :  
$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$$
3. En déduire la valeur de  $I_1$ .

### Exercice 11

En utilisant l'intégration par parties, calculer :

1. Les intégrales  $I_1$  et  $I_2$  telles que :  $I_1 = \int_1^e x \ln x dx$  et  $I_2 = \int_1^e x (\ln x)^2 dx$
2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $I_n = \int_1^e x (\ln x)^n dx$   
Démontrer, pour  $n \geq 2$  l'égalité  $I_n = \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2} I_{n-1}$
3. Calculer  $I_4$

### Exercice 12

On pose, pour tout nombre entier naturel  $n$  non nul :  $I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$ , où  $\ln$  désigne la fonction logarithme népérien et  $I_0 = \int_1^e x^2 dx$ .

1. Calculer  $I_0$
2. En utilisant une intégration par parties, calculer  $I_1$
3. En utilisant une intégration par partie, démontrer que pour tout nombre entier naturel  $n$  non nul :  $3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3$ . En déduire la valeur de  $I_2$

### Exercice 13

Pour tout entier naturel  $n$ , on définit  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x dx$  et  $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x dx$

1. Calculer  $I_0$  et  $J_0$
2. En intégrant par partie  $I_n$  puis  $J_n$ , montrer que 
$$\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$
3. En déduire les expressions de  $I_n$  et  $J_n$  en fonction de  $n$
4. Déterminer la limite de  $I_n$  et celle de  $J_n$  quand  $n$  tends vers  $+\infty$

## EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

### Exercice 1

Résoudre les équations différentielles suivantes :

- $y'' = x + \frac{1}{x^2}$
- $y'' = 2\sin^2 x$

### Exercice 2

- Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , l'équation différentielle  $(E)$ :  $2y'' - 5y' + 3y = 0$
- Déterminer la solution  $f$  telle que  $f(0) = 1$  et  $f'(0) = -2$

### Exercice 3

Résoudre les équations différentielles suivantes :

- $y'' - 2y' - 3y = 0$ , vérifiant  $f(0) = 3$  et  $f'(0) = 1$
- $4y'' - 4y' + y = 0$ , vérifiant  $g(0) = 4$  et  $g'(0) = 2$
- $y'' + \pi^2 y = 0$ ,  $y = h(x)$  est une fonction impaire et  $h\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

### Exercice 4

- Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle  $(E)$  :  $y'' + 2y' + y = 0$
- Déterminer la solution particulière  $h$  de  $(E)$  dont la courbe passe par le point  $A(0; -2)$  et admet en ce point une tangente  $(T)$  d'équation  $y = 3x - 2$ .

### Exercice 5

On donne l'équation différentielle  $(E)$  :  $y'' + 4y' + 4y = 0$ , où  $y$  est la fonction inconnue.

- Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , l'équation différentielle  $(E)$
- Déterminer la solution particulière  $h$  de  $(E)$  dont la courbe représentative passe par le point  $A(0; 1)$  et admet en ce point, une tangente de pente  $-1$ .

### Exercice 6

On considère l'équation différentielle  $(E)$  :  $y' + 3y = -x + 5$

- Déterminer la solution particulière de  $(E)$
- Résoudre l'équation différentielle  $(E')$  :  $y' + 3y = 0$
- En déduire les solutions de  $(E)$

### Exercice 7

On considère l'équation différentielle  $(E)$  :  $y'' - y = 4xe^x$

1. Déterminer les réels  $a$  et  $b$  pour que la fonction  $g(x) = (ax^2 + bx)e^x$  soit solution de  $(E)$
2. Vérifier qu'une fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  est solution de  $(E)$  équivaut à  $f - g$  est solution de l'équation  $(E')$  :  $y'' - y = 0$
3. Résoudre dans  $\mathbb{R}$ ,  $(E')$  puis en déduire la solution générale de  $(E)$

### Exercice 8

On considère l'équation différentielle  $(E)$  :  $y' - y = 2\cos x$

- a) Montrer que la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = -\cos x + \sin x$  est solution de  $(E)$ .
- b) Démontrer que  $\varphi$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $f = \varphi - g$  est solution de  $(E')$  :  $y' - y = 0$
- c) En déduire les solutions de  $(E)$

### Exercice 9

On considère une équation différentielle  $(E)$ :  $y'' + 2y' + y = 0$

1. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle  $(E)$
2. Déterminer la fonction  $f$  solution de  $(E)$  dont la courbe admet au point  $A(1; 0)$  une tangente de pente  $\frac{1}{e}$
3. Calculer  $I = \int_0^1 (x - 1)e^{-x} dx$

### Exercice 10

Soit à résoudre sur  $\mathbb{R}$  , l'équation  $(E_1)$  :  $y'' - 2y' + 5y = e^{-2x}$

- a) Déterminer le nombre réel  $m$  tel que la fonction  $g$  définie par  $g(x) = me^{-2x}$  soit solution de  $(E_1)$
- b) Démontrer que  $f + g$  est solution de  $(E_1)$  si et seulement si  $f$  est solution de  $(E_2)$  :  $y'' - 2y' + 5y = 0$ . Résoudre  $(E_2)$
- c) En déduire les solutions sur  $\mathbb{R}$  de  $(E_1)$  vérifiant  $h(0) = 1$  et  $h'(0) = 0$

### Exercice 11

Soit l'équation différentielle  $(E)$  définie par :  $y'' - ay' + by = 0$

Déterminer les réels  $a$  et  $b$  pour que  $(E)$  admette pour solution générale des fonctions de la forme  $f(x) = Ae^{2x} + Be^{3x}$  avec  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

Après avoir déterminé les réels  $a$  et  $b$  ; trouver la solution particulière  $f$  de l'équation  $(E)$  sachant que la courbe de  $f$  admet une tangente au point  $A(0; 1)$  perpendiculaire à la droite d'équation  $y = -x$

### Exercice 12

1. Intégrer l'équation différentielle :  $y'' + 2y' + 5y = 0$  ( $E$ )
2. Déterminer la solution  $f$  de ( $E$ ) dont la courbe représentative admet au point  $I(0; 1)$  une tangente parallèle à la droite d'équation  $y = -x + 2$
3. Soit  $F$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $F(x) = -\frac{1}{5}[f'(x) + 2f(x)]$ 
  - a) Montrer que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$
  - b) Expliciter  $F(x)$
  - c) En déduire l'intégrale  $I = \int_0^{\pi} f(t)dt$ .

### Exercice 13

On considère l'équation différentielle ( $E$ ) :  $y'' + 4y = 3\sin x$

1. Déterminer le réel  $\alpha$  pour que la fonction  $g$  définie par  $g(x) = \alpha \sin x$  soit une solution de ( $E$ )
2. Démontrer qu'une fonction  $f$ , deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  est solution de ( $E$ ) si et seulement si  $f - g$  est solution de l'équation ( $E'$ ) :  $y'' + 4y = 0$
3. Résoudre l'équation différentielle ( $E'$ ) et en déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle ( $E$ )
4. Trouver la solution de ( $E$ ) vérifiant les conditions  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$  et  $f'(\pi) = 0$ .

## **PROBABILITES**

### **Exercice 1**

On lance trois fois de suite un dé cubique dont deux faces portent le chiffre 1 et les autres le chiffre 2. On note à chaque lancer le chiffre obtenu.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir le résultat (1; 2; 1) ?
2. Calculer la probabilité d'obtenir exactement une fois le chiffre 1
3. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois le chiffre 1.

### **Exercice 2**

Dans un jeu de 32 cartes bien battues, on a 4 familles "trèfle" et "pique", de couleur noire, "carreau" et "cœur" de couleur rouge. Chaque famille contient trois "figures" : Dame, Roi et valet. On tire au hasard et d'une seule main deux cartes de ce jeu et on considère les événements suivants :

- A* : "les deux cartes sont de même famille" ;  
*B* : "les deux cartes sont pique et roi de "trèfle" et de "cœur" respectivement" ;  
*C* : "tirer des cartes de couleurs différentes"
1. Calculer le nombre de tirages possibles de deux cartes de ce jeu.
  2. Calculer la probabilité de *A*.
  3. Calculer la probabilité de *B*.
  4. Calculer la probabilité de *C*.

### **Exercice 3**

On dispose d'un dé cubique dont chaque face a la même probabilité d'apparaître. Le dé possède 3 faces rouges, une face orange et deux faces vertes.

Un jeu consiste à lancer une fois le dé. La règle est la suivante : le joueur mise 10 francs.

- Si la face supérieure du dé est rouge, il ne reçoit rien.
- Si la face supérieure du dé est orange, il reçoit 10 francs.
- Si la face supérieure du dé est verte, il reçoit  $m$  francs avec  $m \in \mathbb{N}$  et  $m > 10$ .

On appelle gain algébrique du joueur la différence entre ce qu'il reçoit à l'issue d'une partie et sa mise et soit  $X$  la variable aléatoire réelle associant à chaque lancer ce gain algébrique.

1. Quelles sont les valeurs prises par  $X$  ?
2. Déterminer la loi de probabilité de  $X$
3. Déterminer en fonction de  $m$  l'espérance mathématique de  $X$
4. Déterminer  $m$  pour que le jeu soit équitable c'est-à-dire  $E(X) = 0$

### Exercice 4

Lors d'un examen, 25% des élèves ont obtenu une note inférieure à la moyenne en Mathématiques. 15% des élèves ont obtenu une note inférieure à la moyenne en Physique et 10% de élèves ont obtenu une note inférieure à la moyenne en Mathématiques et en Physique.

1. Si un élève a obtenu une note inférieure à la moyenne en Physique, quelle est la probabilité pour qu'il ait obtenu une note inférieure à la moyenne en Mathématiques ?
2. Si un élève a obtenu une note inférieure à la moyenne en Mathématiques, quelle est la probabilité pour qu'il ait obtenu une note inférieure à la moyenne en Physique ?
3. Quelle est la probabilité pour qu'un élève ait obtenu une note inférieure à la moyenne en Mathématiques et en Physique ?

### Exercice 5

Un établissement compte trois professeurs X, Y et Z de sciences physiques.

Un sujet commun de cette discipline est composé par l'un de ces trois professeurs avec les probabilités suivantes :  $P(x) = 0,35$  ;  $P(y) = 0,40$  ;  $P(z) = 0,25$ .

Où  $P(I)$  désigne la probabilité pour que le sujet soit composé par le professeur  $I$ . Les étudiants craignent un sujet portant sur la relativité (événement R), et connaissant leurs professeurs ils pronostiquent :  $P(R/x) = 0,2$  ;  $P(R/y) = 0,5$  ;  $P(R/z) = 0,8$

1. a) Traduire l'hypothèse  $P(R/x) = 0,2$  par une phrase liée aux probabilités conditionnelles  
b) Traduire à l'aide d'un arbre de pondération (arbre de choix) les données de l'énoncé.
2. A l'examen, le sujet porte sur la relativité.

Quelle est la probabilité pour que le professeur X ait composé ce sujet ? On donne  $P(R) = 0,47$

### Exercice 6

Un élève sérieux de la terminale « D » d'un lycée relevant de l'inspection des lycées zone I (ILZ1) a 80% de chance d'avoir son baccalauréat.

Pendant les grandes vacances, il passe un concours pour intégrer une école de formation. Le concours est ouvert à tous les élèves (bachelier ou non), mais le candidat a 60% de chance d'être admis dans cette école s'il est bachelier et 30% si non.

Notons  $B$  l'évènement « l'élève réussi à son baccalauréat » et  $A$  l'évènement « l'élève est admis à cette école »

1. Construire un arbre de probabilité correspondant à cette expérience aléatoire.
2. Quelle est la probabilité pour que l'élève réussisse à son baccalauréat et soit admis à cette école.
3. Calculer la probabilité que l'élève ne réussit pas au baccalauréat et est admis dans cette école.
4. Montrer que  $P(A) = 0,54$

### Exercice 7

Pour prévenir l'extension d'une certaine maladie, on vaccine 60% d'une population à risques. Le vaccin n'étant pas totalement infaillible, 10% des personnes vaccinées attrapent la maladie. En revanche 30% des personnes non vaccinées ne sont pas malades.

On note  $V$  l'événement « la personne est vaccinée » et  $M$  l'événement « la personne est malade ». On choisit une personne au hasard.

1. Traduire les pourcentages de l'énoncé en langages des probabilités.
2. Construire l'arbre pondéré illustrant cette situation.
3. Quelle est la probabilité que la personne soit malade et vaccinée ?
4. En déduire la probabilité pour une personne de contracter la maladie
5. Calculer la probabilité pour qu'une personne bien portante soit vaccinée.

### Exercice 8

Pour prévenir l'extension d'une épidémie virale, on décide de soumettre la population menacée à un test. D'une façon générale, le résultat du test est positif pour les porteurs du virus, négatif pour les personnes qui ne sont pas atteintes ; mais il y a des exceptions. On choisit un individu  $X$  et on considère les événements suivants :

$V$  : «  $X$  est porteur du virus » ;  $\bar{V}$  «  $X$  n'est pas porteur du virus »

$T$  : « Le test appliqué à  $X$  est positif » ;  $\bar{T}$  « Le test appliqué à  $X$  est négatif »

En désignant par  $p(E)$  la probabilité de l'événement  $E$ , on admet que  $p(V) = 0,1$  d'où

$p(\bar{V}) = 0,9$  ;  $p(T \text{ sachant } V) = 0,95$  d'où  $p(\bar{T} \text{ sachant } V) = 0,05$  et

$p(T \text{ sachant } \bar{V}) = 0,03$ .

1. Construire l'arbre pondéré à cette situation.

2. Calculer la probabilité des événements :

$A$  «  $X$  est porteur du virus et le test appliqué à  $X$  est négatif »

$B$  «  $X$  n'est pas porteur du virus et le test appliqué à  $X$  est positif »

En déduire la probabilité de  $T$  puis celle de  $\bar{T}$

3. Calculer la probabilité que  $X$  soit porteur du virus et que le test soit négatif

4. En déduire la probabilité que  $X$  soit porteur du virus sachant que le test est négatif.

### Exercice 9

Le sang humain est classé en quatre groupes distincts : A, B, AB et O.

Indépendamment du groupe, le sang peut posséder le facteur Rhésus. Si le sang d'un individu possède ce facteur, il est dit Rhésus positif (noté  $Rh^+$ ) et s'il ne possède pas ce facteur, il est dit Rhésus négatif (noté  $Rh^-$ ). Dans une certaine population P, on sait que 40% des individus ont un groupe sanguin A, 10% ont un groupe sanguin B, 5% ont un groupe sanguin AB et 45% ont un groupe sanguin O. Pour chaque groupe sanguin, la population d'individus possédant ou non le facteur Rhésus se répartit comme suit :

Groupe	A	B	AB	O
$Rh^+$	82%	81%	83%	80%
$Rh^-$	18%	19%	17%	20%

Un individu ayant un sang du groupe O et de Rhésus négatif est appelé donneur universel. On choisit un individu au hasard dans la population P. Calculer la probabilité des événements suivants :

- L'individu a un sang de groupe O
- L'individu est un donneur universel
- L'individu a un sang de Rhésus négatif
- Si l'individu choisit a du sang de Rhésus négatif, quelle est la probabilité que cet individu soit du groupe O ?

### Exercice 10

Un pisciculteur dispose de deux étangs identiques  $B_1$  et  $B_2$ . Il y'a 7 silures et 3 carpes dans  $B_1$  et, 5 silures et 2 carpes dans  $B_2$ .

Le pisciculteur a faim. Il veut manger un poisson. Il choisit au hasard un étang et veut en extraire un poisson.

- Construire l'arbre pondéré traduisant les données.
- Quelle est la probabilité d'extraire :
  - Un silure sachant qu'il provient de  $B_1$  ?
  - Une carpe sachant qu'elle provient de  $B_2$  ?
- Il souhaite manger une carpe. Quelle est la probabilité d'en avoir une ?
- Il est chanceux, il vient d'extraire une carpe. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de  $B_1$  ?

### Exercice 11

On dispose de deux urnes. L'urne A contient trois boules blanches et deux boules noires, l'urne B contient deux boules blanches et trois boules noires. Les boules sont

indiscernables au toucher. On tire simultanément et au hasard deux boules de chaque urne.

1. Qu'appelle-t-on en probabilité deux évènements indépendants de même univers ?
2. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

- A « Avoir quatre boules d'une même couleur »
- B « Avoir deux boules blanches et deux boules noires »
- C « Avoir trois boules blanches et une boule noire »

### Exercice 12

Une urne contient huit boules : 3 boules rouges, 3 boules vertes et deux boules blanches (indiscernables au toucher).

On tire au hasard, successivement et sans remise, deux boules de l'urne.

1. On considère les événements suivants :

- A : « obtenir au moins une boule blanche »
- B : « obtenir deux boules de la même couleur »

Montrer que :  $P(A) = \frac{13}{28}$  et  $P(B) = \frac{1}{4}$

2. Soit  $X$  la variable aléatoire associée au nombre de boules blanches tirées.

- a) Montrer que  $P(X = 2) = \frac{1}{28}$
- b) Déterminer la loi de probabilité de  $X$
- c) Calculer l'espérance mathématique.

### Exercice 13

Un récipient contient un gaz constitué de deux sortes de particules, 75% de particules A et 25% de particules B. Les particules sont projetées sur une cible formée de deux compartiments  $K_1$  et  $K_2$ . L'expérience est modélisée de la façon suivante :

- Une particule au hasard parmi les particules de type A entre dans  $K_1$  avec la probabilité  $\frac{1}{3}$  et dans  $K_2$  avec la probabilité  $\frac{2}{3}$  ;
- Une particule au hasard parmi les particules de type B entre dans chacun des compartiments avec la probabilité  $\frac{1}{2}$ .

1. Soit une particule au hasard. On définit les événements :

- $A_1$  : « la particule isolée est du type A et elle entre dans  $K_1$  » ;
- $A_2$  : « la particule isolée est du type A et elle entre dans  $K_2$  » ;
- $B_1$  : « la particule isolée est du type B et elle entre dans  $K_1$  » ;
- $B_2$  : « la particule isolée est du type B et elle entre dans  $K_2$  » ;
- C : « la particule entre dans  $K_2$  »

- a) Calculer  $P(A_1)$  et  $P(B_1)$
- b) Montrer que  $P(A_2) = 0,50$  et  $P(B_2) = 0,125$

- c) Montrer que  $P(C) = P(A_2) + P(B_2)$
2. On procède cinq fois de suite et de façon indépendante à l'épreuve décrite en 1. On admet que les proportions 75% et 25% restent constantes. Calculer la probabilité de l'événement  
D : « il y a exactement deux particules dans  $K_2$  »

### Exercice 14

Soit X la variable aléatoire dont la loi de probabilité est définie par le tableau ci-après :

$x_i$	1	2	3	4	5
$p_i$	0,25	$p_2$	0,18	$p_4$	0,37

1. Déterminer les probabilités  $p_2$  et  $p_4$  sachant que  $[X = 2]$  et  $[X = 4]$  sont équiprobables.
2. Dans la suite de l'exercice, on prendra  $p_2 = p_4 = 0,1$ 
  - a) Déterminer la probabilité  $p = p(1 \leq x \leq 3)$
  - b) Déterminer l'espérance mathématique  $E(X)$  et la variance  $V(X)$ .

### Exercice 15

Une urne contient 5 boules indiscernables au toucher et numérotées : 0, 1, 2, 3 et 4. On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe la somme des nombres inscrits sur les boules tirées.

1. Donner les différentes valeurs prises par X.
2. a) Etablir la loi de probabilité de X.  
b) Calculer l'espérance mathématique de X.
3. Déterminer la fonction de répartition F de X.

### Exercice 16

Un sac contient 10 jetons, indiscernables au toucher dont 6 jetons numérotés 1 et 4 jetons numérotés 3. On tire simultanément 3 jetons du sac.

On désigne par X la variable aléatoire égale à la somme des numéros sortis.

1. Donner les différentes valeurs prises par X.
2. Donner la loi de probabilité de X.
3. Calculer l'espérance mathématique  $E(X)$
4. Déterminer la fonction de répartition F de X.

### Exercice 17

Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition F est définie ci-dessous :

$x < -1$	$-1 \leq x < 0$	$0 \leq x < 2$	$2 \leq x < 3$	$x \geq 3$
$F(x) = 0$	$F(x) = \frac{1}{8}$	$F(x) = \frac{1}{2}$	$F(x) = \frac{7}{8}$	$F(x) = 1$

1. Représenter la fonction de répartition  $F$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  d'unités graphiques : 2 cm pour 1 en abscisse et 1 cm pour  $\frac{1}{8}$  en ordonnée.
2. Déterminer l'univers image  $X(\Omega)$  de  $X$ .
3. Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .
4. Montrer que l'espérance mathématique est  $E(X) = 1$
5. Calculer la variance  $V(X)$  et l'écart type  $\sigma(X)$  de  $X$ .

### Exercice 18

Une urne contient quatre jetons marqués respectivement 1 ; 2 ; 3 et  $m \in \mathbb{R}^*$ .

On tire au hasard un jeton dans l'urne. On note  $P_1$  ;  $P_2$  ;  $P_3$  et  $P_m$  les probabilités de tirer le jeton marqué 1 ; 2 ; 3 et  $m$ .

$P_1$  ;  $P_2$  ;  $P_3$  et  $P_m$  constituent dans cet ordre une suite arithmétique de raison  $\frac{1}{8}$

1. Montrer que  $P_1 = \frac{1}{16}$ , puis calculer  $P_2$  ;  $P_3$  et  $P_m$ .
2. On définit la variable aléatoire  $X$  qui à chaque tirage d'un jeton associe le double de son numéro.
  - a) Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .
  - b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de  $X$  en fonction de  $m$ .
  - c) Déterminer la valeur de  $m$  pour laquelle l'espérance mathématique de la variable  $X$  est égale à 7,125

## **EXERCICES D'ANALYSE**

### **Exercice 1**

On considère la fonction numérique  $f$  définie par :  $f(x) = 1 + x - \ln|e^x - e|$ .

Soit  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Déterminer l'ensemble de définition  $E_f$  de  $f$ .

- Montrer que :  $f(x) = 1 - \ln|1 - e^{1-x}|, \forall x \in E_f$ .
- Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

2. a) Montrer que :  $\forall x \in E_f, f'(x) = \frac{-1}{e^{x-1}-1}$ .

b) Dresser le tableau de signe de  $f'$  sur  $E_f$ .

c) Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $E_f$ .

On donne :  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

3. a) Montrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = x$  est une asymptote à la courbe  $(\mathcal{C})$  en  $-\infty$ .

b) Montrer qu'il existe un réel unique  $\alpha$  appartenant à l'intervalle  $]-1; 0[$  tel que  $f(\alpha) = 0$ .

c) Le point  $A(1 + \ln 2; 1 + \ln 2)$  appartient à la courbe  $(\mathcal{C})$ . Construire la courbe  $(\mathcal{C})$  et la droite  $(D)$ .

4. Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur  $I = ]1; +\infty[$ .

- Tracer la courbe  $(\mathcal{C}')$  de  $g^{-1}$ , la bijection réciproque de  $g$  sur  $I$ .
- Déterminer l'expression analytique de  $g^{-1}$ .

### **Exercice 2**

On considère la fonction  $f$  définie par : 
$$\begin{cases} f(x) = (x+1)e^{-2x}, & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = 1+x-x\ln x, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. On admet que  $f$  est continue en  $x_0 = 0$ . Etudier la dérивabilité de  $f$  en  $x_0 = 0$

2. a) On admet que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , calculer les limites de  $f$

en  $+\infty$  et en  $-\infty$

b) Calculer la dérivée de  $f$  dans chaque intervalle où elle est dérivable.

c) Préciser le sens de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

d) Etablir le tableau de variation de  $f$

2. a) Etudier les branches infinies de  $(\mathcal{C})$

b) Sachant que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha \in ]3; 4[$ , tracer la courbe  $(\mathcal{C})$

### Exercice 3

#### Partie A

1. Résoudre l'équation différentielle ( $E$ ):  $y'' + 2y' + y = 0$
2. Déterminer la solution  $\rho$  de ( $E$ ), vérifiant  $\rho(0) = 1$  et  $\rho'(0) = 0$

#### Partie B

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $\begin{cases} f(x) = x \ln(-x) + 1; & \text{si } x < 0 \\ f(x) = (x+1)e^{-x}; & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

On admet que  $f$  est continue en  $x_0 = 0$

1. Etudier la dérivable de  $f$  en  $x_0 = 0$
2. a) Calculer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ 
  - b) Pour tout réel  $x$ , calculer  $f'(x)$  suivant les intervalles de  $x$ .
  - c) Donner le sens de variation de  $f$
  - d) Etablir le tableau de variation de  $f$
3. Pour  $x < 0$ , on admet que la courbe ( $\mathcal{C}$ ) de  $f$  admet une branche parabolique de direction ( $Oy$ ). Tracer la branche infinie de ( $\mathcal{C}$ ) en  $+\infty$
4. Construire la courbe ( $\mathcal{C}$ ) dans un repère orthonormé. Unité 2cm.

### Exercice 4

1. On considère l'équation différentielle ( $E$ ) :  $y'' + 2y' + y = 0$ 
  - a) Résoudre l'équation différentielle ( $E$ )
  - b) Déterminer la solution particulière  $g$  de ( $E$ ) dont la courbe passe par le point  $A(0; -2)$  et admet la droite d'équation  $y = 3x$  comme tangente.
2. Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{x}{e^x} - 2e^{-x}$ . On désigne par ( $\mathcal{C}$ ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé ( $O; \vec{i}; \vec{j}$ ). Unité graphique : 2 cm.
  - a) Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$
  - b) Calculer la dérivée  $f'$  de  $f$  puis préciser son signe.
  - c) Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$
  - d) Etudier les branches infinies à la courbe ( $\mathcal{C}$ )
  - e) Tracer la courbe ( $\mathcal{C}$ ) dans le repère.
3. Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $h(x) = (ax + b)e^{-x}$ 
  - a) Déterminer les nombres réels  $a$  et  $b$  pour que la fonction  $h$  soit une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$
  - b) Calculer l'aire  $\mathcal{A}$  en  $cm^2$  du domaine délimité par la courbe ( $\mathcal{C}$ ), l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 2$  et  $x = 4$

### Exercice 5

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (x^2 - x)e^{-x} + x$

Soit  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Calculer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$
2. a) Montrer que  $f'(x) = g(x)e^{-x}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Où  $g(x) = e^x - x^2 + 3x - 1$ .  
b) En déduire le sens de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$   
c) Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$
3. a) Montrer que la droite  $D$  d'équation  $y = x$  est asymptote à la courbe  $(\mathcal{C})$  en  $+\infty$   
b) Etudier la position de la courbe  $(\mathcal{C})$  par rapport à la droite  $D$ .  
c) Montre que  $(\mathcal{C})$  admet une branche parabolique de direction  $(Oy)$  en  $-\infty$
4. Construire la courbe  $(\mathcal{C})$  et la droite  $D$  dans le même repère.
5. On considère la suite numérique  $(U_n)$  définie par :  $U_0 = \frac{1}{2}$  et  $U_{n+1} = f(U_n)$  pour tout entier naturel  $n$ 
  - a) Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq U_n \leq 1$
  - b) Montrer que la suite  $(U_n)$  est décroissante.
  - c) En déduire que la suite  $(U_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

## Exercice 6

On considère la fonction numérique  $f$  à variable réelle  $x$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = -e^{\frac{1}{x}} + 1 ; & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x + 1 - \ln(x+1) ; & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$(\mathcal{C})$  désigne sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. Calculer la limite de  $f$  à  $-\infty$  et à  $+\infty$
2. a) Etudier la continuité de  $f$  en 0.  
b) Etudier la dérivabilité de  $f$  en 0.  
c) Donner une interprétation graphique de ce résultat.
3. Calculer  $f'(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .
4. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
5. Montrer que le point de  $(\mathcal{C})$  d'abscisse 0 est un point d'inflexion.
6. a) Etudier les branches infinies à la courbe  $(\mathcal{C})$   
b) Pour  $x \geq 0$ , étudier la position de la courbe par rapport à la droite d'équation  $y = x$ .
7. Tracer la courbe  $(\mathcal{C})$ .

## Exercice 7

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2} - x + e^{x-1} , & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{3}{2} - x + \ln(2x-1) , & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On désigne par  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , unité graphique 2 cm. On admet que  $f$  est continue en  $x_0 = 1$ .

1. a) Etudier la dérivabilité de  $f$  en  $x_0 = 1$
- b) Interpréter graphiquement les résultats.
2. Calculer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$
3. Calculer la dérivée  $f'$  de  $f$
- 4 Dresser le tableau de variation de  $f$
5. a) Montrer que la droite  $(\mathcal{D})$  d'équation :  $y = -x + \frac{1}{2}$  est asymptote oblique à  $(\mathcal{C})$  en  $-\infty$
- b) Achever l'étude des branches infinies de  $(\mathcal{C})$
6. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$ , admet une solution unique  $\alpha$  appartenant à l'intervalle  $[3; 3,5[$
7. Tracer la droite  $(\mathcal{D})$  et la courbe  $(\mathcal{C})$
8. Calculer, en  $cm^2$ , l'aire  $\mathcal{A}$  de la partie du plan délimitée par la courbe  $(\mathcal{C})$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = 2$

### Exercice 8

I. Soit  $g$  la fonction numérique définie par  $g(x) = 1 - xe^{-x}$

1. Etudier le sens de variation de  $g$
2. En déduire le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$

II. On considère la fonction  $f$  de la variable réelle  $x$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{-4\ln(-x)}{x}, & \text{si } x < -1 \\ f(x) = (x+1)(1+e^{-x}), & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

On désigne par  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Unité graphique : 2cm.

1. Préciser l'ensemble de définition de  $f$
2. Etudier la continuité de  $f$  en  $x = -1$
3. Etudier la dérivabilité de  $f$  en  $x = -1$ . Interpréter graphiquement le résultat.
4. a) Montrer que pour  $x < -1$ ,  $f'(x) = \frac{4[\ln(-x)-1]}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variation de  $f$

5. Etudier les branches infinies de  $(\mathcal{C})$
6. Tracer  $(\mathcal{C})$  et ses asymptotes.

III. Soit  $\lambda$  un nombre réel supérieur à  $-1$

1. Calculer les intégrales  $I = \int_{-e}^{-1} \frac{\ln(-x)}{x} dx$  et  $J = \int_{-1}^{\lambda} (x+1)e^{-x} dx$
2. On note  $A(\lambda)$  l'aire en  $cm^2$  de la partie du plan au-dessus de l'axe des abscisses, délimité par  $(\mathcal{C})$ , la droite  $(D)$ :  $y = x + 1$  et les droites d'équations  $x = -e$  et  $x = \lambda$ .

- Démontrer que  $A(\lambda) = 8 + 4e - 4(\lambda + 2)e^{-\lambda}$
- Calculer  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$

### Exercice 9

On considère la fonction  $f$  de la variable réelle  $x$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2(e^{x+1}-1)}{e^{x+1}-2} & \text{si } x \leq -1 \\ f(x) = x + 1 + \ln(x+2) & \text{si } x > -1 \end{cases} \quad \text{et on désigne par } (\mathcal{C}) \text{ la courbe représentative}$$

de  $f$  dans un plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique 2cm)

- Préciser l'ensemble de définition de  $f$
- Etudier la continuité et la dérивabilité de  $f$  en  $x_0 = -1$
- Etudier les variations de  $f$  puis dresser son tableau de variation
- Etudier les branches infinies à la courbe  $(\mathcal{C})$
- Construire les asymptotes s'il y a lieu et la courbe  $(\mathcal{C})$
- Soit  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $I = ]-1; +\infty[$ 
  - Montrer que  $g$  admet une bijection réciproque notée  $g^{-1}$  dont on dressera un tableau de variation.
  - Construire dans le même repère que  $(\mathcal{C})$  la courbe  $(\mathcal{C}')$  représentative de  $g^{-1}$
  - Soit  $\alpha$  un réel strictement positif, calculer en  $cm^2$  l'aire  $A(\alpha)$  de la partie du plan délimitée par la courbe  $(\mathcal{C})$  et les droites d'équations respectives  
 $y = x ; x = 0$  et  $x = \alpha$
  - Calculer  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha)$

### Exercice 10

#### Partie A

Soit  $g$  la fonction définie par :  $g(x) = e^x - \frac{1}{x}$

- Etudier les variations de  $g$  puis dresser son tableau de variation.
- Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  appartenant à l'intervalle  $I = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$
- Etudier suivant les valeurs de  $x$  le signe de  $g(x)$

#### Partie B

On donne la fonction  $f$  de la variable réelle  $x$  définie par :

$f(x) = e^x - \ln|x|$  et on désigne par  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans un plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  d'unités graphiques 2cm sur l'axe des abscisses et 1cm sur l'axe des ordonnées.

- Préciser l'ensemble de définition  $E_f$  de  $f$
- Calculer les limites de  $f$  en  $-\infty ; 0$  et  $+\infty$  puis donner une interprétation graphique.
- Montrer que pour tout  $x \in E_f$ ,  $f'(x) = g(x)$

4. Dresser le tableau de variation de  $f$
5. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\beta$  appartenant à l'intervalle  $J = [-2; -1]$
6. Montrer que  $\sqrt{e} \leq f(\alpha) \leq e + \ln 2$ , donner un encadrement à  $10^{-1}$  près de  $f(\alpha)$  et construire  $(\mathcal{C})$
7. Soit  $a$  un nombre réel strictement négatif tel que :  $a < -1$ . Calculer  $cm^2$  l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe  $(\mathcal{C})$  et les droites d'équations respectives  $x = a$  et  $x = -1$ . On prendra  $a = 0,75$  et  $f(a) = 2$

### Exercice 11

1. On considère la fonction numérique  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = e^x + x - 5$ 
  - Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$
  - Dresser le tableau de variations de  $g$  sur  $\mathbb{R}$
  - Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  sur  $[0; 3]$
2. Soit  $f$  la fonction définie sur  $]-\infty; 5[$  par :  $f(x) = \ln(5 - x)$ 
  - Calculer les dérivées  $f'$  et  $f''$  de  $f$
  - Montrer que  $f(\alpha) = \alpha$
  - Démontrer que  $\forall x \in [0; 3]$  on a  $f(x) \in [0; 3]$
  - Montrer qu'on a :  $\forall x \in [0; 3], |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$  et en utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis montrer aussi que :  

$$\forall x \in [0; 3], |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$$
3. On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par : 
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n); n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
  - Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_n \in [0; 3]$
  - Démontrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$
  - En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$
  - Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite convergente puis préciser sa limite.

### Exercice 12

Soit l'entier naturel non nul  $n \in \mathbb{N}$ . On considère la fonction numérique  $f_n$  à variable réelle  $x$ , définie par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^n \ln x ; si x \neq 0 \\ f_n(x) = 0 \end{cases}$$

On désigne par  $(\mathcal{C}_n)$  la famille des courbes représentatives des fonctions  $f_n$  dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  du plan. Unité graphique 2 Cm.

1. Préciser l'ensemble de définition de la fonction  $f_n$
2. Déterminer le point fixe aux courbes  $(\mathcal{C}_n)$

3. Vérifier que la dérivée  $f'_n$  est  $f'_n = x^{n-1}(1 + n \ln x)$
4. Calculer la limite de  $f_n$  en  $+\infty$
5. Dresser le tableau de variations de la fonction  $f_n$
6. Dans la suite de l'exercice, on pose  $n = 2$ 
  - a) En déduire le tableau de variations de la fonction  $f_2$
  - b) Etudier la branche infinie à  $(\mathcal{C}_2)$
  - c) Tracer la courbe  $(\mathcal{C}_2)$  de la fonction  $f_2$
7. Calculer en  $Cm^2$ , l'aire A du domaine limité par la courbe  $(\mathcal{C}_2)$ , l'axe  $(Ox)$  des abscisses et les droites d'équations  $x = \frac{1}{e}$ ;  $x = 1$

# **PARTIE B**

# ***Algèbre***

## NOMBRES COMPLEXES

### Exercice 1

- 1) On considère le nombre complexe :  $u = \sqrt{2 - \sqrt{3}} + i\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ 
  - a) Qu'appelle-t-on conjugué d'un nombre complexe ?
  - b) Montrer que  $u^2 = -2\sqrt{3} + 2i$ .
  - c) Donner le conjugué de  $u^2$ .
  - d) Calculer le module et l'argument de  $u^2$ .
  - e) Ecrire sous forme trigonométrique  $u^2$ .
- 2) Ecris sous forme algébrique le nombre complexe  $z = e^{i\frac{\pi}{4}}$ .
- 3) On pose  $Z = z \cdot u^2$ .
  - a) Ecrire sous la forme algébrique le nombre complexe  $Z$ .
  - b) Ecrire sous la forme trigonométrique  $Z$ .
  - c) En déduire des questions précédentes les valeurs exactes de  $\cos \frac{13\pi}{12}$  et  $\sin \frac{13\pi}{12}$ .

### Exercice 2

On considère les nombres complexes  $Z_1 = \sqrt{3} - i$  et  $Z_2 = 2 - 2i$  et  $A = \frac{Z_1^4}{Z_2^3}$

1. a) Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes :  $Z_1$  ;  $Z_2$  ;  $Z_1^4$  et  $Z_2^3$ .
- b) Déterminer la forme algébrique des nombres complexes  $Z_1^4$  et  $Z_2^3$  et  $A$ .
2. Calculer le module et un argument de  $A$ .
3. Déduire les valeurs exactes de  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$ .

### Exercice 3

On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $Z^2 + (1 - i\sqrt{3})Z - (1 + i\sqrt{3}) = 0$ , ( $E$ )

- a) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  ( $E$ ), on notera  $Z_1$  et  $Z_2$  les solutions de ( $E$ ) avec la partie réelle de  $Z_1$  inférieure de zéro.
- b) Vérifier que  $Z_1 = -a + b$  et  $Z_2 = a + b$  où  $a = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$  et  $b = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ .
- c) Donner les formes trigonométriques de  $a$  et  $b$ .

### Exercice 4

- 1) Soit le polynôme  $P(z) = z^4 + z^3 - 3z^2 - 4z - 4$ 
  - a) Calculer  $P(2)$  et  $P(-2)$ .
  - b) Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que :  $P(z) = (z - 2)(z + 2)(az^2 + bz + c)$
- 2) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$
- 3) On considère le nombre complexe  $z = \frac{1-e^{-i\frac{\pi}{3}}}{1+e^{-i\frac{\pi}{3}}}$

Déterminer le module et un argument de  $z$ .

### Exercice 5

A.

On considère la fonction  $f$  de la variable complexe  $Z$  définie par :

$$f(Z) = Z^3 - 2(\sqrt{3} + i)Z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})Z - 8i$$

1) Vérifier que  $f(Z) = (Z - 2i)(Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 4)$ .

2) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $f(Z) = 0$ .

3) Ecrire les solutions sous forme algébrique et trigonométrique.

B.

I) Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . On considère les trois nombres complexes  $Z_1 = \sqrt{3} - i$ ;  $Z_2 = \sqrt{3} + i$  et  $Z_3 = 2i$ .

Représenter dans le plan complexe les trois points  $M_1, M_2$  et  $M_3$  d'affixes  $Z_1, Z_2$  et  $Z_3$  et démontrer qu'ils sont sur un même cercle de centre O.

II) Calculer  $Z_1 - Z_2$  et  $Z_2 - Z_3$ . Démontrer que le quadrilatère  $OM_1M_2M_3$  est un losange.

### Exercice 6

1. Résoudre dans  $\mathbb{C}^2$ , le système d'équations suivant :  $\begin{cases} (2 - 3i)z_1 + 2z_2 = -1 - i \\ (-3 + 2i)\bar{z}_1 - 3i\bar{z}_2 = -11 - i \end{cases}$

On rappelle que :  $\bar{\bar{z}} = z$

2. On donne les nombres complexes :  $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ ,  $z_2 = 1 - i$  et  $Z = \frac{z_1}{z_2}$

- Déterminer la forme algébrique de  $Z$
- Déterminer le module et un argument de  $z_1$ , de  $z_2$  puis de  $Z$ .
- Donner la forme trigonométrique de  $Z$
- En déduire les valeurs exactes de  $\cos \frac{7\pi}{12}$  et  $\sin \frac{7\pi}{12}$

3. On donne le complexe  $U = \frac{x+iy}{2-3i}$  où  $x$  et  $y$  sont des nombres réels.

Déterminer  $x$  et  $y$  sachant que  $U$  a pour module  $\sqrt{2}$  et a pour argument  $\frac{3\pi}{4}$

### Exercice 7

Une fonction  $f$  de  $P$  dans  $P$  associée au point  $M$  d'affixe  $Z = x + iy$  le point  $M'$

d'affixe  $Z' = \frac{Z-1}{Z-2i}$ .

1) Ecrire le nombre complexe  $Z'$  sous la forme algébrique. On précisera la partie réelle  $Re(Z')$  et la partie imaginaire  $Im(Z')$ .

2) Déterminer et construire l'ensemble  $(C_1)$  des points  $M$  d'affixe  $Z$  tels que  $Z'$  soit imaginaire pur.

3) Déterminer et construire l'ensemble  $(C_2)$  des points  $M$  d'affixe  $Z$  tels que  $|Z'| = 2$ .

4) Déterminer l'intersection de  $(C_1)$  et  $(C_2)$ .

### Exercice 8

I) Soit les nombres complexes définis par :  $Z_1 = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}$ ;  $Z_2 = -\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ ;  
 $Z_3 = -2 \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$  et  $Z_4 = 5 \left( \sin \frac{\pi}{3} - i \cos \frac{\pi}{3} \right)$  et  $Z_5 = 1 + \cos \theta + i \sin \theta$ .

Déterminer le module et un argument de ces nombres complexes.

II) A tout nombre complexe  $z \neq -1$ , on associe le nombre complexe  $Z$  tel que :

$$Z = \frac{iz}{z+1}.$$

- 1) On pose  $z = x + iy$ . Donner la forme algébrique de  $Z$  en fonction de  $x$  et de  $y$ .
- 2) Déterminer l'ensemble  $(E)$  des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $Z$  soit réel.

### Exercice 9

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  et pour nombre complexe  $z \in \mathbb{C} - \{2\}$ , on pose  $Z = \frac{z-4i}{z-2}$ .

- 1) Mettre  $Z$  sous la forme algébrique (indication : poser  $z = x + iy$ ).
- 2) En déduire la partie réelle et la partie imaginaire de  $Z$ .
- 3) Déterminer et construire l'ensemble des points  $M$  du plan tels que :
  - a)  $Z$  soit réel.
  - b)  $Z$  soit imaginaire pur
  - c) Le module de  $Z$  soit égal à 1.

### Exercice 10

Le plan complexe  $\mathcal{P}$  est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{U}; \vec{V})$  (unité graphique : 2cm). On désigne par  $A$  et  $B$  les points d'affixes respectives  $i$  et  $-2$ .

A tout point  $M$  de  $\mathcal{P}$ , distinct de  $A$ , d'affixe  $z$ , on associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  définie par :  $z' = \frac{z+2}{z-i}$

- 1) On note  $I$  le milieu du segment  $[AB]$ . Déterminer l'affixe du point  $I'$  associé à  $I$ . Placer les points  $A, B, I$  et  $I'$ .
- 2) Etant donné un nombre complexe  $z$  distinct de  $i$ , on pose :  $z = x + iy$  et  $z' = x' + iy'$  avec  $x, y, x', y'$  réels.
  - a. Déterminer  $x'$  et  $y'$  en fonction de  $x$  et  $y$ .
  - b. Déterminer et construire l'ensemble  $\mathcal{E}$  des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $z'$  soit réel.
  - c. Déterminer et construire l'ensemble  $\mathcal{F}$  des points  $M$  d'affixe  $z$  tel que  $z'$  soit imaginaire pur.

- 3) Soit  $M$  un point de  $\mathcal{P}$ , distinct de  $A$  et  $B$ , d'affixe  $z$ . Interpréter géométriquement un argument de  $z'$ .

### Exercice 11

I- On considère deux nombres complexes :  $z_1 = \sqrt{3} + i$  et  $z_2 = \sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3} + 1)i$

1. Calculer le module et un argument de  $z_1$
2. Vérifier que  $z_2 = (1 + i)z_1$ . En déduire le module et un argument de  $z_2$  puis en déduire les valeurs exactes de  $\cos \frac{5\pi}{12}$  et  $\sin \frac{5\pi}{12}$

II- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on associe à tout nombre complexe  $z$  distinct de  $-1 + i$  le nombre complexe  $T = \frac{2z-i}{z+1-i}$

1. En posant  $z = x + iy$ ; écrire  $T$  sous la forme algébrique puis en déduire la partie réelle et la partie imaginaire de  $T$ .
2. Déterminer et construire l'ensemble  $(\mathcal{C})$  des points  $M$  d'affixe  $z$  tel que  $T$  soit réel.
3. Déterminer et construire l'ensemble  $(\mathcal{D})$  des points  $M$  d'affixe  $z$  tel que  $T$  soit imaginaire pur.
4. Soit  $B$  le point d'affixe  $z_B = \frac{1}{2}i$ . Vérifier que  $B$  appartient à  $(\mathcal{C})$  et à  $(\mathcal{D})$

### Exercice 12

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . On note  $A$  et  $B$  les points d'affixes respectives  $z_A = 4 + 2i$  et  $z_B = -2 - i$ .

On considère l'application  $P$  qui, à tout point  $M$  différent de  $B$  et ayant pour affixe  $z$ , associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  définie par :

$$z' = \frac{z - 4 - 2i}{z + 2 + i}$$

- 1) Interpréter géométriquement le module de  $z'$ , puis un argument de  $z'$ .
- 2) Déterminer la partie réelle  $x'$  et la partie imaginaire  $y'$  de  $z'$  en fonction de la partie réelle  $x$  et de la partie imaginaire  $y$  de  $z$ .
- 3) Déterminer, puis construire dans le plan complexe, les ensembles suivants :
  - a)  $E_1$  ensemble des points  $M$  tels que  $|z'| = 1$ .
  - b)  $E_2$  ensemble des points  $M$  tels que  $|z'| = 2$ .
  - c)  $E_3$  ensemble des points  $M$  tels que  $z'$  soit un réel.
  - d)  $E_4$  ensemble des points  $M$  tels que  $z'$  soit imaginaire pur.

### Exercice 13

Dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes, on considère le polynôme :

$$P(z) = z^4 - z^3 + z - 1$$

1. Développer, réduire puis ordonner suivant les puissances décroissantes de  $z$ , l'expression  $(z^2 - 1)(z^2 - z + 1)$

2. En déduire une factorisation de  $P(z)$

3. Donner l'ensemble des solutions de l'équation  $P(z) = 0$

4. On considère les points  $A, B, C$  et  $D$  d'affixes respectives :

$$z_A = 1 ; z_B = -1 ; z_C = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \text{ et } z_D = \overline{z_C}$$

a) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes

$z_A, z_B, z_C$  et  $z_D$

b) Représenter dans le plan complexe, muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , les points  $A, B, C$  et  $D$

5. Calculer  $z_C^{2018}$

### Exercice 14

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .  $A, B$  et  $C$  désignent les points d'affixes  $z_A = -2\sqrt{3}$ ,  $z_B = \sqrt{3} - 3i$  et  $z_B = 2i$ .

1) Ecrire  $z_B$  sous forme exponentielle

2) On désigne par  $E$  le barycentre du système  $\{(A; 1); (C; 3)\}$  et  $F$  celui du système  $\{(A; 2); (B; 1)\}$ .

a) Déterminer l'affixe  $z_E$  et  $z_F$  des points  $E$  et  $F$ .

b) Placer les points  $A, B, C, E$  et  $F$  dans le repère.

c) Démontrer que les points  $A, C$  et  $E$  d'une part et les points  $A, B$  et  $F$  sont alignés.

3) a) Démontrer que le quotient  $\frac{z_E - z_C}{z_E - z_B}$  peut s'écrire  $ki$  où  $k$  est un nombre réel à déterminer.

En déduire que, dans le triangle  $ABC$ ,  $E$  est le pied de la hauteur issue du point  $B$ .

b) Démontrer que quotient  $\frac{z_F - z_C}{z_F - z_B}$  peut s'écrire  $k'i$  où  $k'$  est un nombre réel à déterminer.

En déduire que, dans le triangle  $ABC$ ,  $F$  est le pied de la hauteur issue du point  $C$

c) En déduire que les points  $B, C, E$  et  $F$  sont cocycliques.

4) On désigne par  $H$  le barycentre du système  $\{(A; 2); (B; 1); (C; 6)\}$ .

a) Démontrer que  $H$  est le point d'intersection des droites  $(BE)$  et  $(CF)$ .

b) Qu'en déduit-on pour le point  $H$  par rapport au triangle  $ABC$  ?

### Exercice 15

Dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes, on considère le polynôme  $f$  définie par :

$$f(z) = z^3 + (1 + 5i)z^2 + (-10 + 6i)z - 16 - 8i$$

1) Montrer que l'équation  $f(z) = 0$  admet une solution réelle que l'on précisera.

- 2) Déterminer les nombres complexes  $a$  et  $b$  tels que :  $f(z) = (z + 2)(z^2 + az + b)$
- 3) Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $f(z) = 0$ .
- 4) On munit le plan complexe d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  et on considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives  $z_A = -2$ ,  $z_B = -1 - 3i$  et  $z_C = 2 - 2i$ .
  - a) Calculer  $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A}$  et en déduire la nature du triangle  $ABC$ .
  - b) Déterminer l'affixe du point  $D$  pour que  $ABCD$  soit un parallélogramme.
  - c) Construire et donner la nature du quadrilatère  $ABCD$ .

### Exercice 16

Le plan complexe  $\mathbb{C}$  est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ .

1. Déterminer les racines sixièmes de l'unité ( $z^6 = 1$ ). On donnera les solutions sous la forme algébrique.
2. Soit l'équation  $(E)$ :  $Z^6 = -64$ .
  - a) Montrer que  $(1 + i)^{12} = -64$
  - b) Déterminer une solution de l'équation  $(E)$ .
  - c) Déduire toutes les solutions de l'équation  $(E)$ .
3. Démontrer que toutes les solutions de l'équation  $(E)$  appartiennent à un même cercle de centre O et de rayon à préciser.
4. a) Placer toutes les solutions de  $(E)$  dans un repère.  
b) Donner la nature de la figure obtenue.
5. Soit  $M_0$ ;  $M_1$  et  $M_2$  les points d'affixes respectives :  $Z_0 = 2i$ ;  $Z_1 = -\sqrt{3} + i$  et  $Z_2 = -\sqrt{3} - i$ 
  - a) Démontrer que  $\text{Arg} \frac{Z_0 - Z_1}{Z_2 - Z_1} = \left( \widehat{\overrightarrow{M_1 M_2}} ; \widehat{\overrightarrow{M_1 M_0}} \right)$
  - b) Calculer l'angle  $\left( \widehat{\overrightarrow{M_1 M_2}} ; \widehat{\overrightarrow{M_1 M_0}} \right)$ .

### Exercice 17

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives  $z_A = i$ ;  $z_B = -1$  et  $z_C = 1 + i$ .

1. Donner l'écriture complexe de la similitude plane directe  $S$  qui transforme  $C$  en  $A$  et  $A$  en  $B$ .
2. Donner les éléments caractéristiques de  $S$ .
3. Pour tout point  $M$  du plan distinct du centre  $\Omega$  de  $S$ , on note  $M' = S(M)$ 
  - a) Préciser la mesure principale de l'angle  $\left( \overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'} \right)$
  - b) En déduire la nature du triangle  $\Omega MM'$ .

### Exercice 18

Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation :

$$(E) : z^3 + (3 - 2i)z^2 + (1 - 4i)z - 1 - 2i = 0$$

1. a) Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle  $z_0$   
b) Résoudre l'équation (E)
2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on désigne par  $A, B$  et  $C$  les points d'affixes respectives :  $z_A = -1$ ;  $z_B = -2 + i$ ;  $z_C = i$ 
  - a) Déterminer le module et un argument du nombre complexe  $U = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$
  - b) Placer les points  $A, B$  et  $C$
  - c) En déduire la nature du triangle  $ABC$
3. On considère l'application  $f$  de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  qui à tout complexe  $Z$  associe  $Z'$  tel que :  
$$Z' = Z_C Z + Z_B$$
  - a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de  $f$
  - b) En posant  $Z' = x' + iy'$  et  $Z = x + iy$ , exprimer  $x'$  et  $y'$  en fonction de  $x$  et  $y$

### Exercice 19

Dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes,  $i$  est le nombre de module 1 et d'argument  $\frac{\pi}{2}$

1. Montrer que  $(1 + i)^6 = -8i$
2. On considère l'équation (E) :  $z^2 = -8i$ 
  - a) Déduire de 1. une solution de l'équation (E)
  - b) L'équation (E) possède une autre solution ; écrire cette solution sous forme algébrique.
3. Déduire également de 1. une solution de l'équation (E') :  $z^3 = -8i$
4. On considère le point  $A$  d'affixe  $2i$  et la rotation  $r$  de centre  $O$  et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$ 
  - a) Déterminer l'affixe  $z_B$  du point  $B$ , image de  $A$  par  $r$ , ainsi que l'affixe  $z_C$  du point  $C$ , image de  $B$  par  $r$ .
  - b) Montrer que  $z_B$  et  $z_C$  sont solution de (E')
5. a) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  (unité graphique 2cm), représenter les points  $A, B$  et  $C$ .  
b) Quelle est la nature du triangle  $ABC$ ?  
c) Déterminer le centre de gravité du triangle  $ABC$ .

### Exercice 20

1. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(1 - i)z^2 - 2z - 11 - 3i = 0$

2. On donne le polynôme  $P$  défini par :

$$P(z) = (1 - i)z^3 - (2 + 4i)z^2 + (-15 + i)z - 28 + 16i$$

- a) Déterminer deux nombres réels  $a$  et  $b$  tel que  $z \in \mathbb{C}$

$$P(z) = (z + a + ib)[(1 - i)z^2 - 2z - 11 - 3i]$$

- b) En déduire la solution de l'équation  $P(z) = 0$

3. Le plan complexe  $P$  est muni d'un repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . Soit  $A ; B$  et  $C$  les points d'affixes respectives  $z_A = -2 + 2i$  ;  $z_B = 3 + 2i$  et  $z_C = -2 - i$

- a) Placer les points  $A ; B$  et  $C$  dans le repère.

- b) On pose  $Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ . Calculer le module et un argument de  $Z$  puis en déduire la nature du triangle  $ABC$ .

- c) Déterminer l'affixe du point  $D$  pour que le quadrilatère  $ABCD$  soit un rectangle.

4. Soit  $f$  la transformation du plan qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z' = \alpha z + \beta$

- a) Déterminer les nombres complexes  $\alpha$  et  $\beta$  telle que  $f$  laisse le point  $A$  invariant et transforme  $C$  en  $B$ .

- b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de  $f$ .

## Exercice 21

$\mathbb{C}$  est l'ensemble des nombres complexes  $z$

1.a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe  $Z = -3 + 4i$

b) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^2 + 8iz - 13 - 4i = 0$

2. Dans le repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  du plan complexe, on donne les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives  $-3 - 2i$  ;  $-1 + 2i$  et  $1 - 2i$

- a) Placer les points  $A, B$  et  $C$  dans le repère.

- b) Montrer que le triangle  $ABC$  est isocèle en  $B$

- c) Déterminer l'affixe du point  $D$  tel que le quadrilatère  $ABCD$  soit un parallélogramme.

3. Soit  $R$  la rotation de centre  $B$  qui transforme  $A$  en  $C$ .

- a) Montrer que la forme complexe de  $R$  est :  $z' = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)z + \frac{6}{5} + \frac{8}{5}i$

- b) Déterminer l'affixe du point  $E$  l'antécédent du point  $F$  d'affixe  $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$  par  $R$ .

## Exercice 22

Les parties A et B sont indépendantes.

A/1) Caractériser les applications  $f$  et  $g$  définies par :

$$f: z' = 2iz + 1 + i \text{ et } g: z' = z + 2 - 3i$$

2) Donner l'expression analytique de l'homothétie de centre  $\Omega$  d'affixe  $z_\Omega = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$

et de rapport  $k = 2$

B/ On donne les nombres complexes suivants :

$$z_A = 1 - i ; z_B = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i \text{ et } z_C = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i$$

- 1) a) Mettre sous la forme trigonométrique puis sous la forme exponentielle les nombres complexes suivants  $T = \frac{z_C}{z_A}$  et  $Z = \frac{z_B}{z_A}$
- b) Déduire la forme trigonométrique de  $z_B$  et  $z_C$
- 2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . On considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives  $z_A, z_B$  et  $z_C$
- Montrer que  $OABC$  est un parallélogramme
  - Montrer que les droites  $(OB)$  et  $(AC)$  sont perpendiculaires
  - Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixes  $z$  tel que :
- $$|z - z_C| = |z - z_A|$$

### Exercice 23

- I- On considère l'équation  $(E) : z^3 + (-6 - 4i)z^2 + (12 + 21i)z + 9 - 45i = 0$
- Déterminer la solution imaginaire pure  $z_0$  de  $(E)$
  - Achever la résolution de  $(E)$ .
- II- Dans le plan complexe  $(P)$  est rapporté au repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , on considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives  $3i ; 3 + 3i$  et  $3 - 2i$ .
- Placer les points  $A, B$  et  $C$  dans le repère.
  - a) Calculer le nombre  $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ 
    - En déduire la nature du triangle  $ABC$ .
  - Soit  $f$  la similitude plane directe qui laisse invariant le point  $B$  et transforme  $A$  en  $C$ .
    - Donner l'écriture complexe de  $f$
    - Donner les éléments caractéristiques de  $f$ .

### Exercice 24

$\mathbb{C}$  est l'ensemble des nombres complexes.

On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E) : z^3 + (1 + 8i)z^2 + (-25 + 13i)z - 30 - 30i = 0$

- Déterminer le nombre complexe imaginaire pur  $z_0$  solution de  $(E)$ .
- Déterminer les complexes  $a, b$  et  $c$  tels que  $(E)$  s'écrive sous la forme  $(z + 3i)(az^2 + bz + c) = 0$ .
- a) Déterminer les racines carrées du complexe  $Z = 16 - 30i$ .
  - Résoudre alors dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E)$
- Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on considère les points  $A, B, C$  et  $D$  d'affixes respectives  $z_A = -3 - i$ ,  $z_B = 2 + 4i$ ,  $z_C = 3 - i$  et  $z_D = -2$ .
  - Construire dans le plan les droites  $(AD)$  et  $(BC)$ .
  - Démontrer que les droites  $(AD)$  et  $(BC)$  sont perpendiculaires.

- 5) On désigne par  $S$  la similitude plane directe qui laisse invariant le point  $I$  d'affixe  $z_I = 2$  et qui transforme le point  $C$  et  $D$ .
- Déterminer l'expression complexe de  $S$ .
  - Déterminer le rapport et l'angle de  $S$ .

### Exercice 25

On considère l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes.

- Soit  $Q$  un polynôme du deuxième degré d'inconnus à coefficients complexes. Déterminer  $Q$  pour que  $3 + i$  et  $1 + 2i$  soient ses racines.
- On considère le polynôme :  $P(Z) = Z^3 - 2(2 + i)Z^2 + (4 + 3i)Z - 7 + i$ . Où  $Z$  est un complexe.
  - Déterminer les complexes  $a, b$  et  $c$  tels que :  $P(Z) = (Z + i)(aZ^2 + bZ + c)$
  - Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(Z) = 0$
- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , on considère les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives  $Z_A = 3 + i$  et  $Z_B = 1 + 2i$ . Déterminer la nature du triangle  $BOA$ .
- Soit  $f$  la transformation du plan qui à tout point  $M$  d'affixe  $Z$  associe le point  $M'$  telle que :  $\overrightarrow{OM'} = -3\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$ 
  - Montrer que  $Z' = -2Z + 8 + i$
  - Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $f$

### Exercice 26

- On considère l'équation  $(E)$  :  $Z^3 - (4 + i)Z^2 + (13 + 4i)Z - 13i = 0$  où  $Z$  est un nombre complexe.

- Vérifier que le nombre complexe  $i$  est solution de l'équation  $(E)$
- Déterminer les nombres complexes  $a, b$  et  $c$  tels que  $(E)$  s'écrive :  
$$(Z - i)(aZ^2 + bZ + c) = 0$$
- Résoudre  $(E)$  dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes.

- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , on désigne par  $A, B$  et  $C$  les points d'affixes respectives :  $Z_A = i$ ;  $Z_B = 2 + 3i$  et  $Z_C = 2 - 3i$  et par  $R$  la rotation de centre  $B$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ 
  - Ecrire l'écriture complexe de  $R$ .
  - Déterminer l'affixe du point  $A'$  image du point  $A$  par la rotation  $R$ .
  - Démontrer que les points  $A', B$  et  $C$  sont alignés.
  - Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan tels que :  $|Z - Z_B| = |Z - Z_C|$

### Exercice 27

On considère dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes, l'équation

$(E): z^2 - (2\alpha + i)z + \alpha^2 + i\alpha + 2 = 0$ , où  $\alpha$  est un nombre complexe. Soit  $J$  et  $K$  les points du plan complexe  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  dont les affixes sont solutions de  $(E)$ .

1. a) Vérifier que  $\alpha + 2i$  est solution de  $(E)$
- b) Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $(E)$
- c) Déterminer  $\alpha$  pour que le triangle  $OJK$  soit isocèle rectangle en  $O$
2. On donne  $z_J = \frac{3}{2}(1 - i)$  et  $z_K = \frac{3}{2}(1 + i)$ .
  - a) Déterminer une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle  $OJK$
  - b) Déterminer l'écriture complexe de la similitude plane directe  $S$  qui transforme  $J$  en  $K$  et  $K$  en  $O$ .
  - c) Préciser les éléments caractéristiques de  $S$ .

### Exercice 28

Le plan complexe  $\mathbb{C}$  est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .  $i$  désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument  $\frac{\pi}{2}$

1. Montrer que  $(1 + i)^6 = -8i$
2. Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $(E) : Z^6 = -8i$
3. On considère le point  $A$  d'affixe  $Z_A = 2i$  et la rotation  $R$  de centre  $O$ , d'angle  $\frac{2\pi}{3}$ 
  - a) Déterminer l'affixe  $Z_B$  du point  $B$ , image de  $A$  par la rotation  $R$ .
  - b) Déterminer l'affixe  $Z_C$  du point  $C$ , image de  $B$  par la rotation  $R$
  - c) Vérifier que  $Z_B$  et  $Z_C$  sont les solutions de l'équation  $(E)$ .
4. On considère maintenant les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives  $Z_A = 2i ; Z_B = -\sqrt{3} - i$  et  $Z_C = \sqrt{3} - i$ 
  - a) Représenter les points  $A, B$  et  $C$  dans un repère du plan.
  - b) Préciser la nature du triangle  $ABC$ .

### Exercice 29

On considère le polynôme  $P$  défini sur  $\mathbb{C}$  par :  $P(z) = 4z^3 - 6i\sqrt{3}z^2 - (9 + 3i\sqrt{3})z - 4$

1. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $4z^2 + (-2 - 6i\sqrt{3})z - 8 = 0$
2. Calculer  $P\left(-\frac{1}{2}\right)$ 
  - a) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que  $P(z) = (z + \frac{1}{2})(4z^2 + az + b)$
  - b) Achever la résolution de l'équation  $P(z) = 0$
3. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . On considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives :  $z_A = -\frac{1}{2} ; z_B = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i ; z_C = 1 + i\sqrt{3}$ 
  - a) Placer les points  $A, B$  et  $C$  dans le repère

4. a) Déterminer l'écriture complexe de la similitude plane directe  $S$  qui transforme  $A$  en  $B$  et  $B$  en  $C$ .
- b) Déterminer le centre, le rapport et l'angle de la similitude plane directe.
- c) Ecrire l'expression analytique de la similitude plane directe
- d) Déterminer l'affixe du point  $E$  image de  $C$  par la similitude plane directe.

### Exercice 30

1. a) Déterminer le nombre complexe  $\beta$  tel que :  $\beta(1+i) = 1+3i$   
b) En déduire le nombre complexe  $i\beta^2$  sous la forme algébrique.
2. On considère le polynôme  $P(Z) = Z^2 - (1+3i)Z - 4 + 3i$ 
  - a) Montrer que  $P(Z)$  peut s'écrire sous la forme :  $P(Z) = (Z - \beta)(Z - i\beta)$
  - b) En déduire la résolution dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $P(Z) = 0$
3. Dans le plan complexe  $\mathbb{C}$  muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . On considère les points  $A(2; 1)$ ,  $B(-1; 2)$  et  $C(-2; -1)$ . Soit  $S$  la transformation du plan complexe qui fait correspondre au point  $M$  d'affixe  $Z$ , le point  $M'$  d'affixe  $Z'$  telle que :  $Z' = aZ + b$  ; où  $a$  et  $b$  sont des nombres complexes.
  - a) Déterminer  $a$  et  $b$  sachant que  $S(A) = A$  et  $S(B) = C$
  - b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de  $S$ .
  - c) Déterminer l'affixe du point  $D$  tel que  $ABCD$  soit un parallélogramme.
  - d) Déterminer l'affixe du point  $E$ , image de  $D$  par la transformation  $S$ .

### Exercice 31

On considère un nombre complexe  $P$  défini par :

$$P(z) = z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i$$

1. Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $z^2 - 8z + 17 = 0$
2. Calculer  $P(-i)$
3. Déterminer les nombres complexes  $a$  et  $b$  tels que :  $P(z) = (z+i)(z^2 + az + b)$
4. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$
5. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  on considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives :  $z_A = 4+i$ ;  $z_B = 4-i$  et  $z_C = -i$ .
  - a) Placer les points  $A, B$  et  $C$ .
  - b) Démontrer que  $ABC$  est un triangle rectangle en  $B$ .
6. Soit le point  $D$  d'affixe  $z_D = 2$  et  $F$  l'image de  $A$  par la rotation de centre  $D$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ 
  - a) Déterminer l'écriture complexe de la rotation
  - b) Déterminer l'affixe du point  $F$
  - c) Exprimer  $x'$  et  $y'$  en fonction de  $x$  et  $y$

### Exercice 32

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , unité graphique 2cm.

On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E)$ :  $z^3 - (7+i)z^2 + 2(8+3i)z - 10(1+i) = 0$

1. a) Montrer que  $z_0 = 1 + i$  est une solution de  $(E)$ .  
b) Déterminer les complexes  $a$  et  $b$  tels que  $(E)$  :  $(z - 1 - i)(z^2 + az + b)$   
c) Achever la résolution de l'équation  $(E)$
2. On considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives :  $1 + i; 3 + i$  et  $3 - i$ .
  - a) Construire le triangle  $ABC$ , dans ce repère.
  - b) Ecrire sous la forme exponentielle  $T = \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$
  - c) En déduire la nature du triangle  $ABC$ .
3. Soit  $(\Delta)$  l'ensemble des points  $M$  du plan d'affixe  $z$  vérifiant la relation :  
$$|z - 1 - i| = |z - 3 + i|$$
  - a) Déterminer l'ensemble  $(\Delta)$
  - b) Démontrer que le point  $F$  d'affixe  $4 + 2i$  appartient à  $(\Delta)$

### Exercice 33

Dans le plan complexe  $\mathbb{C}$  des nombres complexes, on considère l'équation

$$(E): Z^2 + (-1 + 2i)Z - 3 + 4i = 0$$

1. Sachant que  $Z_0 = i$  est une solution de l'équation  $(E)$ , écrire  $(E)$  sous la forme :  $(Z - i)(aZ^2 + bZ + c) = 0$ , où  $a, b$  et  $c$  sont des nombres complexes à déterminer.
2. Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $(E)$ .
3. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , on considère les points  $A, B$  et  $C$  les points d'affixes respectives  
 $Z_A = i; Z_B = -1 - 2i; Z_C = 2 - i$ 
  - a) Placer les points  $A, B$  et  $C$  dans le plan.
  - b) Montrer que le triangle  $ABC$  est isocèle en  $B$ .
4. Déterminer  $(\Gamma)$ , l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $Z$  tels que  $|Z - i| = \sqrt{10}$  (on pourra poser  $Z = x + iy$ )
5. a) Montrer que  $B \in (\Gamma)$   
b) Construire  $(\Gamma)$
6. a) Calculer le produit  $Z_A \cdot Z_B$   
b) En déduire que le point  $C$  est l'image du point  $B$  par la rotation de centre  $O$ , dont on précisera une mesure d'angle.

### Exercice 34

On considère dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes le polynôme :

$$P(z) = z^3 + (-3 + 5i)z^2 - 2(4 + 5i)z + 10 - 10i$$

1. Déterminer les racines carrées du nombre complexe  $u = -8i$

2. a) Démontrer que  $P$  peut s'écrire :  $P(z) = [z - (3 - i)][z^2 + 4iz - 4 + 2i]$
- b) En déduire les solutions de l'équation  $P(z) = 0$
3. Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . On considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives :  $z_A = 3 - i$ ;  $z_B = 1 - 3i$  et  $z_C = -1 - i$ .
  - a) Calculer le rapport :  $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$
  - b) En déduire la nature du triangle  $ABC$ .
  - c) Déterminer l'affixe du point  $D$ , centre de la rotation  $R$  d'angle de mesure  $\frac{\pi}{2}$  qui transforme  $C$  en  $A$ .
4. Soit  $S$  la similitude plane directe qui transforme  $A$  en  $B$  et  $B$  en  $C$ .
  - a) Donner l'écriture complexe de  $S$ .
  - b) Déterminer les éléments caractéristiques de  $S$ .

### Exercice 35

Soit  $P$  le polynôme de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  défini par :

$$P(z) = z^3 - (1 - 2\sin\theta)z^2 + (1 - 2\sin\theta)z - 1 ; \theta \in ]0; \pi[$$

1. a) Calculer  $P(1)$  et conclure.
- b) Déterminer les réels  $a, b$  et  $c$  tels que :  $P(z) = (z - 1)(az^2 + bz + c)$
2. Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $P(z) = 0$ . On appellera  $z_1$  la solution réelle,  $z_2$  la solution dont la partie imaginaire est négative et  $z_3$  l'autre solution.
3. Donner la forme trigonométrique de chacune des solutions de l'équation ci-dessus.
4. Dans la suite, on pose  $\theta = -\frac{\pi}{4}$ 
  - a) Donner la forme algébrique des nombres complexes  $z_2$  et  $z_3$
  - b) On désigne par  $B$  et  $C$  les points d'affixes respectives  $z_2$  et  $z_3$ . Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude plane directe  $S$  de centre  $O$  qui transforme  $B$  en  $C$ .
  - c) Déterminer le module et un argument du nombre complexe  $U = \frac{z_C - z_O}{z_B - z_O}$  puis en déduire la nature du triangle  $BOC$ .

### Exercice 36

Le plan complexe  $P$  est rapporté au repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . Unité : 2cm.

On considère les points  $A, B, C$  et  $D$  d'affixes respectives :

$$z_A = 2 + i ; z_B = 1 + 2i ; z_C = 6 + 3i \text{ et } z_D = -1 + 6i$$

1. Représenter les points  $A, B, C$  et  $D$  sur la figure.
2. Soit  $f$  l'application du plan  $P$  dans lui-même qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  telle que  $z' = az + b$ 
  - a) Déterminer les nombres complexes  $a$  et  $b$  telle  $f$  transforme  $A$  en  $B$  et  $C$  en  $D$ .

- b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de  $f$
3. Soit  $J$  le point d'affixe  $3 + 5i$ . Montrer que la rotation de centre  $J$  et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$  transforme  $A$  en  $D$  et  $C$  en  $B$ .
4. On appelle  $I$  le point d'affixe  $1 + i$ .  $P$  et  $Q$  les points tels que les quadrilatères  $IAPB$  et  $ICQD$  sont des carrés.
- Calculer les affixes  $z_P$  et  $z_Q$  des points  $P$  et  $Q$ . Placer  $I, J, P$  et  $Q$ .
  - Déterminer  $\frac{IP}{IA}$  et  $\frac{IQ}{IC}$  ainsi qu'une mesure des angles orientés  $(\overrightarrow{IA}; \overrightarrow{IP})$  et  $(\overrightarrow{IC}; \overrightarrow{IQ})$

### Exercice 37

- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E)$ :  $z^2 - 2z + 4 = 0$
- Soient  $A$ ;  $B$  et  $C$  les points d'affixes respectives  $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ ;  $z_B = 1 - i\sqrt{3}$  et  $z_C = 4$ 
  - Déterminer le module et un argument du nombre complexe  $U = \frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$
  - En déduire la nature du triangle  $ABC$ .
- On considère la transformation ponctuelle  $f$  du plan complexe dans lui-même qui à tout point  $M(z)$  associe le point  $M'(z')$  tel que :  $\overrightarrow{MM'} = i\sqrt{3}$ 
  - Exprimer  $z'$  en fonction de  $z$
  - En déduire la nature de  $f$
- Déterminer les affixes  $z_E$  et  $z_D$  des points  $E$  et  $D$  tels que  $f(A) = D$  et  $f(E) = C$
- Soit  $K$  milieu du segment  $[AC]$ 
  - Déterminer l'affixe  $z_K$  du point  $K$
  - Déterminer le nombre complexe  $\frac{z_D - z_E}{z_D - z_K}$
  - Que peut-on en déduire ?

### Exercice 38

A- On rappelle que  $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$  et  $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

- Qu'appelle-t-on argument d'un nombre complexe  $z$  d'image  $M$  ?
- On note  $Z = 1 - \cos\alpha + i\sin\alpha$  avec  $\alpha \in [0; 2\pi]$ 
  - Etablir que  $Z = 2i\sin\frac{\alpha}{2} \left( \cos\frac{\alpha}{2} - i\sin\frac{\alpha}{2} \right)$
  - Déduire en fonction de  $\alpha$ , le module et un argument de  $Z$
- B- On considère les nombres complexes suivants:  $z_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ ;  $z_2 = \frac{2+i}{3-i}$  et  $z_3 = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$ 
  - Montrer que  $z_2 = \bar{z}_1$  où  $\bar{z}_1$  est le nombre complexe conjugué de  $z_1$
  - On note  $Z$  le nombre complexe défini par :  $Z = \frac{z_2}{z_3}$ 
    - Mettre  $Z$  sous la forme algébrique
    - Déterminer le module et un argument de  $Z$

- c) En déduire la valeur exacte de  $\cos \frac{\pi}{12}$ ,  $\sin \frac{\pi}{12}$  et  $\tan \frac{\pi}{12}$

### Exercice 39

1. Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $U^4 = 1$
2. a) Calculer  $(1 + 2i)^4$ 
  - b) En déduire dans  $\mathbb{C}$ , les solutions de l'équation  $Z^4 + 7 + 24i = 0$
2. Le plan  $P$  est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . On considère les points  $A, B, C$  et  $D$  d'affixes respectives  $Z_A = 1 + 2i$ ;  $Z_B = -2 + i$ ;  $Z_C = -1 - 2i$  et  $Z_D = 2 - i$ .
  - a) Placer les points  $A ; B ; C$  et  $D$  sur le repère.
  - b) Montrer que  $OA = OB = OC = OD$
  - c) En déduire que les points  $A, B, C$  et  $D$  sont situés sur un même cercle ( $\mathcal{C}$ ) dont on précisera le centre et le rayon.
4. Soit  $f$  la transformation du plan qui, à tout point  $M$  d'affixe  $Z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $Z'$  telle que  $Z' = aZ + b$ 
  - a) Déterminer les nombres complexes  $a$  et  $b$  telle que  $f$  laisse le point  $B$  invariant et transforme  $D$  en  $A$ .
  - b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de  $f$

### Exercice 40

On considère dans  $\mathbb{C}$ , le polynôme  $p$  défini par :

$$p(z) = 2z^3 + (5 + 3i)z^2 + (13 - 5i)z + 10 + 2i$$

1. L'équation  $p(z) = 0$  admet une racine imaginaire pure. Déterminer cette racine.
2. Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $p(z) = 0$
3. Dans le plan complexe, muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , on considère les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives  $z_A = \sqrt{3} + i$  et  $z_B = \sqrt{3} - i$ . Soit  $S$  la similitude plane directe définie par :  $\begin{cases} x' = x - y + 2 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$ 
  - a) Montrer que l'écriture complexe de  $S$  est :  $z' = (1 + i)z + 2 - i$
  - b) En déduire les éléments caractéristiques de  $S$ .
  - c) Calculer l'affixe  $z_{A'}$ , du point  $A'$  image de  $A$  par  $S$ .
4. On note  $h$  l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $-\frac{1}{2}$ . Calculer l'affixe  $z_{B'}$ , du point  $B'$  image de  $B$  par  $h$ .

### Exercice 41

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . Unité graphique : 4cm.

Soit  $A$  le point d'affixe  $z_A = i$  et  $B$  le point d'affixe  $z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

1. Soit  $r$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$ . On appelle  $C$  l'image de  $B$  par  $r$ 
  - a) Déterminer une écriture complexe de  $r$
  - b) Montrer que l'affixe de  $C$  est  $z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}}$
  - c) Ecrire  $z_B$  et  $z_C$  sous la forme algébrique
  - d) Placer les points  $A, B$  et  $C$ .
2. Soit  $D$  le barycentre des points  $A, B$  et  $C$  affectés respectivement des coefficients : 2; -1 et 2
  - a) Montrer que l'affixe de  $D$  est  $z_D = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$  et placer le point  $D$
  - b) Montrer que les points  $A, B, C$  et  $D$  sont sur un même cercle
3. Soit  $h$  l'homothétie de centre  $A$  et de rapport 2. On appelle  $E$  l'image de  $D$  par  $h$ 
  - a) Déterminer une écriture complexe de  $h$
  - b) Montrer que l'affixe de  $E$  est  $z_E = \sqrt{3}$ . Placer le point  $E$
4. a) Calculer le rapport  $\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C}$ . On écrira le résultat sous la forme exponentielle.
- b) En déduire la nature du triangle  $CDE$ .

### Exercice 42

I- Dans le plan complexe  $\mathbb{C}$  des nombres complexes, on considère l'équation  $(E) : (z - \sqrt{2})^2 + 2 = 0$

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E)$ . On considère par  $z_1$  la solution dont la partie image est positive et par  $z_2$  l'autre racine.

II- On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . (Unité graphique 1Cm) les points  $B, C$  et  $A$  d'affixes respectives  $\sqrt{2}(1+i)$ ;  $\sqrt{2}(1-i)$  et  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

1. Placer ces points dans le repère puis compléter la figure progressivement.
2. Déterminer l'expression complexe de l'homothétie  $h$  de centre  $A$  et de rapport -3. En déduire l'affixe du point  $D$  image de  $C$  par l'homothétie  $h$ .
3. Déterminer l'expression complexe de la rotation  $R$  de centre  $O$  et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ . En déduire l'affixe du point  $E$  image de  $C$  par  $R$ .
4. Placer le point  $F$  d'affixe  $i\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$  dans le repère.
5. Montrer que  $\frac{z_E - z_D}{z_F - z_D} = i$  puis déduire que  $BDFE$  est un carré.

### Exercice 43

On considère le polynôme  $P$  défini sur  $\mathbb{C}$  par :

$$P(z) = z^4 - (2 + i\sqrt{2})z^3 + 2(1 + i\sqrt{2})z - 2i\sqrt{2}$$

1. Vérifier que le nombre complexe  $z_0 = i\sqrt{2}$  est une racine de  $P$ .

2. a) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que :  $P(z) = (z - i\sqrt{2})(z^2 + az + b)$   
b) En déduire les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $P(z) = 0$
3. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . On considère les points  $A, B, J$  et  $K$  d'affixes respectives  $z_A = 1 + i$ ;  $z_B = 1 - i$ ;  $z_J = i\sqrt{3}$  et  $z_K = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ 
  - a) Placer les points  $A, B, J$  et  $K$  dans le repère.
  - b) Soit  $C$  le symétrique du point  $J$  par rapport à  $K$ . Montrer que l'affixe de  $C$  est  $z_C = -\sqrt{2}$
  - c) Montrer que les points  $A, B, J$  et  $C$  appartiennent à un même cercle.
4. Soit  $D$  le point d'affixe  $z_D = -1 + i$ . On considère la rotation  $r$  de centre  $O$  qui transforme  $J$  en  $D$ .
  - a) Déterminer l'écriture complexe de la rotation  $r$ .
  - b) Déterminer l'affixe du point  $E$  image de  $C$  par  $r$ .

### Exercice 44

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , on considère les points  $A, B, C$  et  $P$  d'affixes respectives :  $Z_A = \frac{3}{2} + 6i$ ;  $Z_B = \frac{3}{2} - 6i$ ;  $Z_C = -3 - \frac{1}{4}i$  et  $Z_P = 3 + 2i$ .  $\vec{W}$  est le vecteur d'affixe  $Z_{\vec{W}} = -1 + \frac{5}{2}i$ .

1. a) Déterminer l'affixe  $Z_Q$  du point  $Q$  image du point  $B$  par la translation  $T$  de vecteur  $\vec{W}$ .  
b) Déterminer l'affixe  $Z_R$  du point  $R$  image du point  $P$  par l'homothétie  $H$  de centre  $C$  et de rapport  $-\frac{1}{3}$
2. a) Déterminer l'affixe  $Z_S$  du point  $S$  image du point  $P$  par la rotation de centre  $A$  et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$   
b) Placer les points  $P, Q, R$  et  $S$ .
3. a) Démontrer que le quadrilatère  $PQRS$  est un parallélogramme.  
b) Calculer le rapport :  $\frac{Z_R - Z_Q}{Z_P - Z_Q}$   
c) En déduire la nature exacte du quadrilatère  $PQRS$ .
4. Justifier que les points  $P, Q, R$  et  $S$  appartiennent à un même cercle  $\mathcal{C}$
5. Déterminer l'expression analytique de la similitude plane directe de centrer  $A$ , de rapport  $\frac{1}{3}$  et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$

### Exercice 45

Le plan complexe  $\mathbb{C}$  est muni de repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , soit le point  $A$  d'affixe  $Z_A = 1 + i$  et  $f$  une transformation plane qui, au point  $M(x; y)$  d'affixe  $Z_M = x + iy$  associe le point  $M'(x'; y')$  d'affixe  $Z_{M'} = x' + iy'$  tel que :  $f(Z) = Z'$  avec

$Z' = \frac{1}{2}(Z + i\bar{Z})$  où le nombre complexe  $\bar{Z}$  désigne le conjugué du nombre complexe  $Z$ .

1. Déterminer l'expression analytique de  $f$  (on exprimera  $x'$  et  $y'$  en fonction de  $x$  et  $y$ ).
2. En déduire que le point  $M'(x'; y')$  appartient à la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x$
3. Déterminer l'ensemble  $inv(f)$  des points invariants par  $f$
4. Démontrer que pour tout point  $M$  du plan  $\overrightarrow{MM'}$  et  $\overrightarrow{OA}$  sont orthogonaux.
5. On considère l'application  $g$  définie dans  $\mathbb{C}$  telle que  $g : Z' = \frac{1}{2}(Z + iZ)$ 
  - a) Déterminer les nombres complexes  $a$  et  $b$  tels que l'application  $g$  s'écrive sous la forme  $g(Z) = aZ + b$
  - b) Déterminer le module et un argument du nombre complexe  $a$
  - c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'application  $g$ .

### Exercice 46

Soit  $a$  un entier relatif et  $f$  une transformation du plan complexe  $P$  qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  telle que :

$$f(z) = z' = (2 - i)z^3 + (3 + i)z^2 + 2(1 + ai)z + 8 + 16i$$

1. Déterminer les polynômes  $g$  et  $h$  tels que :  $\forall x \in \mathbb{R} f(ix) = g(x) + ih(x)$
2. Déterminer la valeur de  $a$  pour laquelle l'équation  $f(z) = 0$  admet une solution imaginaire pure  $z_0$  que l'on précisera.
3. Déterminer les nombres complexes  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  tel que :  $f(z) = (z - z_0)(\alpha z^2 + \beta z + \gamma)$
4. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $f(z) = 0$
5. Dans le plan complexe  $P$  on donne les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives  $2i ; 1 - i$  et  $-2 - 2i$ 
  - a) Donner l'écriture complexe de la similitude plane directe  $S$  qui laisse le point  $A$  invariant et qui transforme  $C$  en  $B$ .
  - b) Déterminer les éléments caractéristiques de  $S$

### Exercice 47

#### Partie A

1. Déterminer dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes les racines carrées de  $\Delta = 8 - 6i$ .
2. On considère dans  $\mathbb{C}$  le polynôme  $P$  tel que :  $P(z) = 2z^3 - (1 + i)z^2 - (1 + i)z + 2$ 
  - a) Vérifier que  $1 + i$  est une racine de  $P$
  - b) Déterminer les nombres complexes  $a, b$  et  $c$  tels que :  
$$P(z) = (z - 1 - i)[az^2 + bz + c]$$
  - c) Résoudre alors dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$

#### Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

On désigne par  $A, B$  et  $C$  les points du plan complexe d'affixes respectives

$$z_A = -1 ; z_B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \text{ et } z_C = 1 + i$$

1. Ecrire le nombre complexe  $U = \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$  sous la forme exponentielle

2. En déduire la nature du triangle  $ABC$

3. Soit  $S$  la similitude plane directe de rapport  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , d'angle  $\frac{\pi}{4}$  et qui transforme  $A$  en  $B$ .

On désigne par  $D$  le point tel que  $A$  soit le milieu du segment  $[CD]$ .

- Déterminer l'affixe du point  $D$ .
- Donner l'écriture complexe de  $S$ .
- En déduire le centre de  $S$ .
- Déterminer l'affixe du point  $E$  tel que  $S(D) = E$ .

### Exercice 48

1. On considère le polynôme  $P$  à variable complexe  $Z$  définie par :

$P(Z) = Z^3 - (5 + i)Z^2 + (a + ib)Z - 8 - 16i$ . Où  $a$  et  $b$  sont deux nombres réels non nuls.

- Déterminer les valeurs de  $a$  et  $b$  pour que  $2i$  soit une solution de l'équation  $P(Z) = 0$
  - Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $P(Z) = 0$
2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , on considère les points  $I, J, K$  et  $A$  d'affixes respectives :  $Z_I = 2i$  ;  $Z_J = 3 + i$  ;  $Z_K = 2 - 2i$  et  $Z_A = \sqrt{3} + i$
- Placer les points  $I, J, K$  et  $A$  dans le repère.
  - Démontrer que les droites  $(JI)$  et  $(JK)$  sont perpendiculaires.
3. Soit  $B$  le point du plan tel que  $Z_B = \bar{Z}_A$
- Calculer les distances  $OA$  ;  $OB$  et  $AB$ . En déduire la nature du triangle  $AOB$ .
  - Calculer l'affixe du point  $C$  pour que  $AOBC$  soit un losange.
4. Soit  $S$  la similitude plane directe qui transforme  $B$  en  $C$  et laisse invariant le point  $O$ .
- Déterminer l'écriture complexe de  $S$ .
  - Déterminer les éléments caractéristiques de  $S$ .
  - Déterminer l'expression analytique de  $S$  puis en déduire une équation cartésienne de la droite  $(\Delta')$  image de la droite  $(\Delta)$  :  $-4x - 6y + 11 = 0$ .

### Exercice 49

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{U}; \vec{V})$ .

1) Donner l'écriture complexe de chacune des transformations suivantes :

- Translation  $T$  de vecteur  $\vec{v}(1; -2)$

- b. La rotation  $R$  de centre  $I(-1; 1)$  et d'angle de mesure  $\frac{\pi}{6}$ .
- 2) On donne les points  $K$ ,  $L$  et  $M$  d'affixes respectives :  $z_K = 1 + i$ ,  $z_L = 1 - i$ ,  $z_K = -i\sqrt{3}$
- Montrer que l'affixe du point  $N$ , symétrique de  $M$  par rapport à  $L$  est  $z_N = 2 + i(\sqrt{3} - 2)$ .
  - Déterminer les affixes  $z_A$  et  $z_C$  des points  $A$  et  $C$ , images respectives de  $M$  et  $N$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .
- 3) Déterminer les affixes  $z_D$  et  $z_B$  des points  $D$  et  $B$ , images respectives de  $M$  et  $N$  par la translation de vecteur  $\vec{w}$  d'affixe  $2i$ .
- 4) Montrer que les segments  $[BD]$  et  $[AC]$  ont un même milieu  $K$ .
- 5) Calculer  $\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K}$  puis en déduire la nature du quadrilatère  $ABCD$ .

### Exercice 50

Le polynôme  $P$  est tel que :  $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = z^3 - (5 - i)z^2 + (10 - 6i)z - 8 + 16i$

- Montrer que le polynôme  $P$  admet une racine imaginaire pure  $z_0$  que l'on déterminera.
- a) Déterminer les complexes  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :  $P(z) = (z + 2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$ .  
b) Développer et réduire  $(1 - 3i)^2$ .  
c) En déduire toutes les racines du polynôme  $P$ .
- On désigne par  $A, B, C$  et  $D$  les points d'affixes respectives  $-1 - i$ ,  $2 + 2i$ ,  $-2i$  et  $2i$ .
  - Etudier la nature du triangle  $ABC$ . On pourra calculer  $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$
  - Déterminer l'affixe du point  $E$  le symétrique de  $D$  par rapport au milieu  $I$  du segment  $[BC]$ .
  - Montrer que les points  $A, B, C$  et  $D$  sont tous sur un même cercle  $(\mathcal{C})$ .
  - Caractériser alors le cercle  $(\mathcal{C})$ .

### Exercice 51

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , on considère le point  $A$  d'affixe  $z_A = 1$  et le cercle  $(\mathcal{C})$  de centre  $A$  et de rayon 1 cm. Soit  $B$  le point d'affixe  $z_B = 1 + e^{\frac{\pi}{3}i}$ ,  $E$  le point d'affixe  $z_E = 1 + z_B^2$  et  $F$  le point d'affixe  $z_F = 2$ .

- Construire le cercle  $(\mathcal{C})$ .
- Montrer que  $B$  appartient à  $(\mathcal{C})$ .
- Déterminer la forme exponentielle de  $\frac{z_B - z_A}{z_F - z_A}$ .
  - En déduire la mesure de l'angle  $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB})$  et la nature du triangle  $AFB$ .
  - Placer alors le point  $B$  sur  $(\mathcal{C})$ .
- On donne  $z_B = \sqrt{3} \cdot e^{\frac{\pi}{6}i}$

Montrer que les points  $A, B$  et  $E$  sont alignés.

4. Soit  $f$  la similitude plane directe de centre  $O$ , de rapport 2 et d'angle de mesure  $\frac{\pi}{3}$ .
- Déterminer l'expression complexe de  $f$ .

Déterminer l'affixe de  $B'$  image de  $B$  par  $f$ .

### Exercice 52

Dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes, on considère le polynôme  $P$  à variable complexe  $z$  défini par :  $P(z) = z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4$

1. a) Déterminer deux nombres complexes  $a$  et  $b$  tels que :

$$P(z) = (z-1)(z-2-2i)(az+b)$$

- b) Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $P(z) = 0$ .

2. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . Unité graphique : 1cm. On considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixe respectives  $z_A = 1 ; z_B = 2 + 2i ; z_C = 1 - i$ .

- Déterminer la forme trigonométrique du complexe  $U = \frac{2+2i}{1-i}$

- En déduire la nature du triangle  $ABC$ .

- Déterminer l'affixe  $z_E$  du point  $E$  pour que  $ABEC$  soit un parallélogramme direct.

3. Démontrer que l'ensemble  $(\mathcal{C})$  des points  $M(z)$ , tels que  $|z - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i| = \frac{\sqrt{10}}{2}$  est le cercle circonscrit au triangle  $ABC$ .

4. Soit  $f$  la transformation ponctuelle du plan dans lui-même, qui à tout point  $M'(x'; y')$  tel que :  $\begin{cases} x' = x + y - 1 \\ y' = -x + y + 2 \end{cases}$

- Montrer que l'écriture complexe de  $f$  est :  $z' = (1-i)z - 1 + 2i$ .

- Déterminer la nature de  $f$ .

- Déterminer l'affixe  $z_D$  du point  $D$ , tel que  $f$  envoie  $D$  en  $O$ .

### Exercice 53

On considère le polynôme  $P$  défini par :  $P(z) = (z-2i)[(z+1)^2 - (2+i)^2]$

1. a) Déterminer les réels  $a, b, c$  et  $d$  tels que :  $P(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$

- b) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$ .

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  unité graphique 1cm. On désigne par  $A, B$  et  $C$  les points d'affixes respectives  $2i ; 1+i$  et  $-3-i$  et  $(\mathcal{C})$  le cercle de diamètre  $[BC]$ .

- Placer les points  $A, B$  et  $C$  dans ce plan.

- Déterminer l'affixe du point  $I$  centre de  $(\mathcal{C})$  et de rayon  $r$ .

- c) Montrer que le point  $A$  appartient au cercle  $(\mathcal{C})$  puis tracer  $(\mathcal{C})$ .
- d) En déduire la nature exacte du triangle  $ABC$ .
3. Soit  $h$  l'homothétie de centre  $A$  et de rayon 3,  $R$  la rotation de centre  $A$  et d'angle de mesure  $-\frac{\pi}{2}$ . On pose  $S = h(A; 3)oR\left(A; -\frac{\pi}{2}\right)$
- Ecrire l'expression complexe de  $h$  et de  $R$ .
  - En déduire que l'écriture complexe de  $S$  est  $z' = -3iz - 2(3 - i)$
  - Donner la nature et les éléments caractéristiques de  $S$ .

### Exercice 54

Le plan complexe  $(\mathcal{P})$  muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

On considère dans l'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$  l'équation

$$(E) : z^2 - 5(1+i)z - 2(1-7i) = 0$$

- a) Vérifier que  $(3-i)^2 = 8-6i$   
b) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E)$ .
- Soit  $A$  et  $B$  deux points de  $(\mathcal{P})$  d'affixes respectives :  $z_A = 4 + 2i$  et  $z_B = 1 + 3i$ 
  - Placer les points  $A$  et  $B$  dans ce repère.
  - Montrer que  $(z_A - z_B) \times \overline{z_B} = -10i$  puis en déduire que le triangle  $OAB$  est rectangle isocèle en  $B$ .
- Soit  $(\mathcal{C})$  le cercle de centre  $O$  et de rayon  $2\sqrt{5}$ .  
Vérifier que le point  $A$  appartient au cercle  $(\mathcal{C})$ .
- Soit  $D$  le point d'affixe  $z_D = 3 - i$ . On désigne par  $S$  la similitude plane directe dont l'expression analytique est :  $\begin{cases} x' = x - y - 1 \\ y' = x + y - 3 \end{cases}$ 
  - Montrer que l'écriture complexe de  $S$  est :  $z' = (1+i)z - 1 - 3i$ .
  - Montrer que le centre de la similitude  $S$  est le point  $D$ .
  - Déterminer le rapport et l'angle de la similitude  $S$ .

# **PARTIE C**

# **Géométrie**

## **REPERAGE DANS L'ESPACE**

### **Exercice 1**

L'espace  $E$  est muni d'un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ . On donne les points

$A(-1; 1; 0)$ ;  $B(-2; 0; -1)$ ;  $C(1; 0; 1)$  et  $D(-2; 1; \alpha)$

1. Calculer les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ;  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{AD}$

2. Déterminer le nombre réel  $\alpha$  pour lequel les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ;  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{AD}$  soient coplanaires.

3. a) Montrer que  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$

b) Calculer l'aire du triangle ABC.

### **Exercice 2**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ , on considère les points

$A(3; -2; 1)$ ,  $B(5; 2; -3)$  et  $C(6; -2; -2)$ .

1. a) Calculer le produit scalaire  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  puis les longueurs  $AB$  et  $BC$

b) En déduire que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés.

2. On suppose que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  définissent un plan.

a) Montrer que le vecteur  $\vec{n}(2; 1; 2)$  est normal au plan  $(ABC)$

b) En déduire une équation cartésienne du plan  $(ABC)$

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $D$ , passant pas  $A$  et orthogonale au plan  $(ABC)$ .

### **Exercice 3**

L'espace  $E$  est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ . On considère les points

$A$ ;  $B$  et  $C$  de coordonnées respectives :  $A(1; 2; -3)$ ,  $B(-3; 1; 4)$  et  $C(2; 6; -1)$

1. Montrer que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  déterminent un plan.

2. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan  $(ABC)$  est :  $2x - y + z + 3 = 0$

3. Soit  $I$  le point de coordonnées  $(-5; 9; 4)$ . Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite  $D$  passant par  $I$  et perpendiculaire au plan  $(ABC)$

4. Déterminer les coordonnées du point  $J$ , intersection de la droite  $D$  et du plan  $(ABC)$ .

### **Exercice 4**

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ , les points  $A$ ;  $B$ ;  $C$  et  $D$  ont pour coordonnées respectives :  $A(3; 0; 0)$ ,  $B(0; 6; 0)$ ;  $C(0; 0; 4)$  et  $D(-5; 0; 1)$

1. Calculer  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ , puis déduire les coordonnées du vecteur normal au plan  $(ABC)$ .

2. Déterminer alors une équation cartésienne du plan  $(ABC)$ .

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $\Delta$ , orthogonale au plan  $(ABC)$  et passant par  $D$ .
4. En déduire les coordonnées du point  $H$ , projeté orthogonal du point  $D$  sur le plan  $(ABC)$

### Exercice 5

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ , on considère les points  $A(1; 1; 0)$ ,  $B(1; 2; 1)$  et  $C(3; -1; 2)$ .

1. Démontrer que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés.
2. Démontrer que le plan  $(ABC)$  a pour équation cartésienne  $2x + y - z - 3 = 0$
3. On considère les plans  $(P)$  et  $(Q)$  d'équations respectives

$$x + 2y - z - 4 = 0 \text{ et } 2x + 3y - 2z - 5 = 0$$

Démontrer que l'intersection des plans  $(P)$  et  $(Q)$  est une droite  $(D)$  dont une

représentation paramétrique est :  $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ .

4. Quelle est l'intersection des trois plans  $(ABC)$ ,  $(P)$  et  $(Q)$  ?

### Exercice 6

L'espace  $E$  est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ . Les points  $A$  ;  $B$  et  $C$  ont pour coordonnées respectifs :  $A(3; -2; 2)$ ,  $B(6; 1; 5)$  et  $C(6; -2; -1)$

1. Montrer que  $ABC$  est un triangle rectangle.
2. Soit  $P$  le plan d'équation cartésienne  $x + y + z - 3 = 0$ . Montrer que le plan  $P$  est orthogonal à la droite  $(AB)$  et passant par  $A$ .
3. Soit  $P'$  le plan orthogonal à la droite  $(AC)$  et passant par  $A$ . Déterminer une équation cartésienne de  $P'$ .
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $D$ , droite d'intersections des plans  $P$  et  $P'$

### Exercice 7

L'espace est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ . On considère les points  $A(2; 1; 3)$ ,  $B(3; 2; 1)$ ,  $C(4; 1; 4)$ ,  $D(5; 3; -2)$  et  $E(6; -2; -4)$

1. Calculer  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{DE}$ . Vérifier que le vecteur  $\overrightarrow{DE}$  est normal au plan  $(ABC)$
2. Déterminer une équation cartésienne du plan  $(ABC)$
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(DE)$
4. Déterminer les coordonnées du point  $F$  projeté orthogonal de  $D$  sur le plan  $(ABC)$
5. Déterminer un réel  $k$  tel que  $\overrightarrow{EF} = k\overrightarrow{DF}$ .

### Exercice 8

L'espace est rapporté à un repère orthonormal où on considère :

- Les points  $A(2; -1; 0)$ ,  $B(1; 0; -3)$ ,  $C(6; 6; 1)$  et  $E(1; 2; 4)$
- Le plan  $\mathcal{P}$  d'équation cartésienne :  $2x - y - z + 4 = 0$

1. a) Démontrer que le triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$ .  
b) Calculer le produit scalaire  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  puis les longueurs  $BA$  et  $BC$
2. a) Démontrer que le plan  $\mathcal{P}$  est parallèle au plan  $(ABC)$   
b) En déduire une équation cartésienne du plan  $(ABC)$   
c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $\mathcal{D}$  orthogonale au plan  $(ABC)$  et passant par le point  $E$   
d) Démontrer que le projeté orthogonal  $H$  du point  $E$  sur le plan  $(ABC)$  a pour coordonnées  $(4; \frac{1}{2}; \frac{5}{4})$

## ALGEBRE LINEAIRE

### Exercice 1

Dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ , on donne les ensembles suivants :

$$D = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3; x = -y = z\}; P = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3; x + y - z = 0\}$$

1. Montrer que  $D$  et  $P$  sont deux sous espaces vectoriels.

2. Donner les vecteurs de base  $\vec{e}_1$  de  $D$  et  $\vec{e}_2; \vec{e}_3$  de  $P$ .

3. Démontrer que  $D$  et  $P$  sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires.

### Exercice 2

A- On considère les vecteurs  $\vec{U}_1(1; 1; 0; 0)$ ,  $\vec{U}_2(0; 1; 1; 0)$  et  $\vec{U}_3(0; 0; 1; 1)$  de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^4$

1. Montrer que la famille  $F = \{\vec{U}_1; \vec{U}_2; \vec{U}_3\}$  des vecteurs de l'espace  $\mathbb{R}^4$  est libre.

2. Soit  $\vec{U}(1; 2; 3; 1)$  un vecteur de l'espace  $\mathbb{R}^4$ . Montrer que  $\vec{U}$  est une combinaison linéaire des vecteurs de la famille  $F$ .

B- Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :  $f(x, y, z) = 2x - y + z$

1. Montrer que  $f$  est une application linéaire.

2. Déterminer le noyau et l'image de  $f$  puis donner une base  $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$  du noyau de  $f$

### Exercice 3

A- On considère les vecteurs  $\overrightarrow{U_1}(1; 1; 0; 0)$ ;  $\overrightarrow{U_2}(0; 1; 1; 0)$  et  $\overrightarrow{U_3}(0; 0; 1; 1)$  de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^4$ .

1) Montrer que la famille  $F = (\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}, \overrightarrow{U_3})$  des trois vecteurs de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^4$  est libre.

2) Soit le vecteur  $\vec{U}(1; 2; 3; 2)$  de l'espace  $\mathbb{R}^4$ , déterminer les réels  $a, b$  et  $c$  tels que l'on ait :  $\vec{U} = a\overrightarrow{U_1} + b\overrightarrow{U_2} + c\overrightarrow{U_3}$ , c'est-à-dire que  $\vec{U}$  soit une combinaison linéaire des vecteurs de la famille  $F$ .

3) Soit le vecteur  $\vec{V}(x; y; z; t)$  du sous espace  $E$  de  $\mathbb{R}^4$ , trouver une relation entre les coordonnées  $x, y, z$  et  $t$  du vecteur  $\vec{V}$  de  $E$  sachant que l'on a :  $\vec{V} = \alpha\overrightarrow{U_1} + \beta\overrightarrow{U_2} + \gamma\overrightarrow{U_3}$ , où  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont des réels.

B- Dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  muni de sa base canonique  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  on considère les sous espaces vectoriels :

$$E = \{\vec{u}(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + y + z = 0\} \text{ et } F = \{\vec{u}(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y = z\}$$

1) Déterminer  $E \cap F$ .

2) a) Déterminer une base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  de  $E$  et une base  $(\vec{e}_3)$  de  $F$ .

b) Montrer que les sous espaces vectoriels  $E$  et  $F$  sont supplémentaires.

### Exercice 4

Le plan vectoriel  $E$  est muni de la base canonique  $B = (\vec{i}; \vec{j})$ . Soit  $f$  l'endomorphisme de  $E$  défini par :  $f(\vec{i}) = 3\vec{i} - 6\vec{j}$  et  $f(3\vec{i} - 6\vec{j}) = f(\vec{i})$ .

1. a) Déterminer le vecteur  $f(\vec{i})$ .
- b) Ecrire la matrice  $M_f$  de  $f$  dans  $B = (\vec{i}; \vec{j})$ .
2. a) Montrer que  $f$  est une projection vectorielle de  $E$ .
  - b) Déterminer sa base puis la direction.
3. Soit  $G$  la droite vectorielle de  $E$  engendrée par le vecteur  $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j}$  et  $F$  celle engendrée par le vecteur  $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j}$ .
  - a) Montrer que  $(\vec{u}; \vec{v})$  est une base de  $E$ .
  - b) Déterminer une équation cartésienne de  $G$  puis celle de  $F$ .
  - c) Montrer que  $G$  et  $F$  sont supplémentaires.
  - d) Déterminer la matrice  $P$  de  $f$  dans la base  $(\vec{u}; \vec{v})$ .

### Exercice 5

On considère l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  de base canonique  $(\vec{i}; \vec{j})$  défini par  $f(\vec{u}) = \vec{u}$  et  $f(\vec{v}) = -\vec{v}$  avec  $\vec{u} = -4\vec{i} + \vec{j}$  et  $\vec{v} = -2\vec{i} + \vec{j}$ .

1. a) Montrer que  $(\vec{u}; \vec{v})$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ 
  - b) Donner la matrice de  $f$  dans la base  $(\vec{u}; \vec{v})$
2. a) Montrer que  $f(\vec{i}) = 3\vec{i} - \vec{j}$  et  $f(\vec{j}) = 8\vec{i} - 3\vec{j}$ 
  - b) Montrer que  $f$  est bijectif
  - c) Donner l'expression analytique de  $f$
  - d) Calculer  $(f \circ f)(\vec{u})$  puis en déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme  $f$ .

### Exercice 6

Soit  $f$  l'endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de base canonique  $(\vec{i}; \vec{j})$  défini par :  $f(\vec{e}_1) = -\vec{e}_1$  et  $f(\vec{e}_2) = \vec{e}_2$ , avec  $\vec{e}_1 = -2\vec{i} + 3\vec{j}$  et  $\vec{e}_2 = -\vec{i} + \vec{j}$

1. a) Montrer que le couple  $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$  est une base de  $E$ .
  - b) Ecrire la matrice de  $f$  dans la base  $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$
2. Montrer que  $f(\vec{i}) = 5\vec{i} - 6\vec{j}$  et  $f(\vec{j}) = 4\vec{i} - 5\vec{j}$
3. a) Déterminer  $f \circ f(\vec{i})$  et  $f \circ f(\vec{j})$  puis en déduire la nature de  $f$ 
  - b) Déterminer les éléments caractéristiques de  $f$
4. On donne le vecteur  $\vec{w} = \vec{i} - 3\vec{j}$ 
  - a) Ecrire  $\vec{w}$  comme combinaison linéaire des vecteurs  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$
  - b) Donner l'expression de  $f(\vec{w})$  dans la base  $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ .

### Exercice 7

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 2 muni de la base canonique  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

On considère un vecteur  $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $f(\vec{i}) = \vec{u}$  et  $f(\vec{j}) = 3\vec{u}$ .

1. Exprimer  $f(\vec{i})$  et  $f(\vec{j})$  en fonction des vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ .
2. On note  $M_f$  la matrice de l'endomorphisme  $f$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .
  - a) Déterminer la matrice  $M_f$  et l'expression analytique de  $f$ .
  - b) Déterminer le noyau  $Ker f$  de  $f$ .
  - c) Déterminer l'image  $Im f$  de  $f$ .

(On donnera une base pour les deux sous-espaces vectoriels  $Ker f$  et  $Im f$ ).
3. On pose  $\vec{v} = -3\vec{i} + \vec{j}$ 
  - a) Montrer que  $(\vec{u}, \vec{v})$  est une base de  $E$ .
  - b) Donner la matrice de  $f$  dans la base  $(\vec{u}, \vec{v})$ .
4. Soit  $\vec{w}$  un vecteur quelconque de  $E$  de coordonnées  $(x, y)$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  et  $(a, b)$  dans la base  $(\vec{u}, \vec{v})$ . Exprimer  $a$  et  $b$  en fonction de  $x$  et  $y$ .

### Exercice 8

On considère l'espace vectoriel  $E$  muni de sa base canonique  $(\vec{i}; \vec{j})$ .

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs de  $E$  définis par :  $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j}$  et  $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$

1. Quelle est la dimension de l'espace  $E$  ? Justifier la réponse.
2. Montrer que  $(\vec{u}; \vec{v})$  est une base de  $E$ .
3. Exprimer le vecteur  $\vec{w} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$  dans la base  $(\vec{u}; \vec{v})$ .
4. Soit  $f$  l'endomorphisme de  $E$  défini relativement à la base  $(\vec{u}; \vec{v})$  par :  
 $f(\vec{u}) = \vec{u}$  et  $f(\vec{v}) = -\vec{v}$ 
  - a) Exprimer  $f(\vec{i})$  et  $f(\vec{j})$  dans la base  $(\vec{i}; \vec{j})$ .
  - b) Déterminer l'expression analytique de  $f$  relativement à la base  $(\vec{i}; \vec{j})$ .
  - c) Déterminer  $f \circ f$  puis déduire la nature de  $f$

### Exercice 9

Le plan vectoriel  $\mathbb{R}^2$  est muni de sa base canonique  $(\vec{i}; \vec{j})$ . On considère  $f_a$

l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  défini par :  $f_a(\vec{i}) = \frac{2}{3}\vec{i} + a\vec{j}$  et  $f_a(\vec{j}) = -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j}$  où  $a$  est un nombre réel.

1. Ecrire la matrice  $M$  de  $f_a$  dans la base  $(\vec{i}; \vec{j})$
2. Déterminer le réel  $a$  pour que  $f_a$  soit une projection vectorielle
3. Dans la suite on donne  $a = -\frac{1}{3}$ . Soit  $\vec{e}_1 = 2\vec{i} - \vec{j}$  et  $\vec{e}_2 = \vec{i} + \vec{j}$ , montrer que  $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$

4.  $f$  étant une projection vectorielle, déterminer  $f(\vec{e}_1)$  et  $f(\vec{e}_2)$  en fonction de  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$ .

Déduire de ce qui précède pour tous réels  $x$  et  $y$  on a :  $f(x\vec{e}_1) = x\vec{e}_1$  et  $f(y\vec{e}_2) = \vec{0}$

5. Quelles sont la base et la direction de  $f$ .

### Exercice 10

Dans le plan vectoriel  $\mathbb{R}^2$  muni de sa base canonique  $(\vec{i}; \vec{j})$ , on considère les ensembles  $(D_1)$  et  $(D_2)$  définies par :

$$(D_1) = \{\vec{u}(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x + 6y = 0\} \text{ et } (D_2) = \{\vec{u}(x; y) \in \mathbb{R}^2 / -2x + 3y = 0\}$$

I- 1. Justifier que  $(D_1)$  et  $(D_2)$  sont des sous-espaces vectorielles de  $\mathbb{R}^2$

2. Montrer que les droites  $(D_1)$  et  $(D_2)$  sont respectivement engendrées par les vecteurs  $\vec{e}_1 = -6\vec{i} + \vec{j}$  et  $\vec{e}_2 = 3\vec{i} + 2\vec{j}$

3. Monter que  $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$

II- Soit  $f$  la symétrie vectorielle de base  $(D_1)$  et de direction  $(D_2)$

1. Exprimer  $f(\vec{e}_1)$  et  $f(\vec{e}_2)$  dans la base  $(\vec{i}; \vec{j})$

2. Calculer  $f(\vec{i})$  et  $f(\vec{j})$  dans la base  $(\vec{i}; \vec{j})$

3. Vérifier que  $f \circ f$  est égale à l'identité de  $\mathbb{R}^2$ .

### Exercice 11

Dans le plan vectoriel  $E$  muni de sa base canonique  $(\vec{i}; \vec{j})$ , on considère les droites vectorielles  $(D_1)$  et  $(D_2)$  définies par :

$$(D_1) = \{\vec{u}(x; y) \in E / 2x - y = 0\} \text{ et } (D_2) = \{\vec{u}(x; y) \in E / x + y = 0\}$$

1. Montrer que les droites  $(D_1)$  et  $(D_2)$  sont respectivement engendrées par les vecteurs  $\vec{e}_1 = \vec{i} + 2\vec{j}$  et  $\vec{e}_2 = \vec{i} - \vec{j}$

2. Vérifier que  $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$  est une base de  $E$ .

3. Soit  $f$  la symétrie vectorielle de base  $(D_1)$  et de direction  $(D_2)$

a) Calculer  $f(\vec{e}_1)$  et  $f(\vec{e}_2)$  en fonction des vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$

b) Calculer les vecteurs  $f(\vec{i})$  et  $f(\vec{j})$  en fonction des vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$

c) Ecrire la matrice de  $f$  dans la base  $(\vec{i}; \vec{j})$

4. Soit le vecteur  $\vec{u}' = x'\vec{i} + y'\vec{j}$  image de  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$  par  $f$ .

a) Exprimer les coordonnées  $x'$  et  $y'$  de  $\vec{u}'$  en fonction de  $x$  et  $y$  de  $\vec{u}$

b) Vérifier que  $f \circ f$  est l'identité du plan vectoriel  $E$ .

### Exercice 12

On rappelle qu'une partie  $U$  d'un espace vectoriel  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , si et seulement si :

a)  $U$  est non vide

b)  $\forall \vec{u}, \vec{v} \in U$  et  $\forall \alpha, \lambda \in \mathbb{R}, (\alpha\vec{u} + \lambda\vec{v}) \in U$

Soit  $U_1$  et  $U_2$  deux sous espaces vectoriels de  $E$ .

1. Démontrer  $U_1 \cap U_2$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
2. Dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$ , on considère les ensembles  $U_1$  et  $U_2$  définis par :  
 $U_1 = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 2z = 0\}$ ;  $U_2 = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / y = 2x \text{ et } z = x\}$
- a) Déterminer le réel  $a$  pour que le vecteur  $\vec{w}(2; a; 1) \in U_1$
- b) Démontrer que  $U_1$  et  $U_2$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$
- c) Les sous-espaces vectoriels  $U_1$  et  $U_2$  sont-ils supplémentaires de  $\mathbb{R}^3$  ?

### Exercice 13

Soit  $E$  est un espace vectoriel de dimension 2 muni de sa base canonique

$B = (\vec{i}; \vec{j})$ . Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $E$  tels que :  $\vec{u} = \vec{i} + 6\vec{j}$  et  $\vec{v} = -\vec{i} + 6\vec{j}$

On désigne par  $f$  l'endomorphisme de  $E$  dont l'expression analytique est :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + 3y \\ y' = \frac{1}{12}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$$

1. Déterminer  $f(\vec{i})$  et  $f(\vec{j})$  dans la base  $B$ .
2. Donner la matrice  $M$  de  $f$  dans la base  $B$ .
3. a) Calculer  $f \circ f(\vec{i})$ . En déduire la nature de  $f$ .  
 b) Donner les éléments caractéristiques de  $f$  (base et direction)
4. a) Montrer que  $(\vec{u}; \vec{v})$  est une base de  $E$ .  
 b) Exprimer  $f(\vec{u})$  et  $f(\vec{v})$  dans la base  $(\vec{u}; \vec{v})$   
 c) Donner la matrice  $N$  de  $f$  dans la base  $(\vec{u}; \vec{v})$ .

### Exercice 14

$E$  est un espace vectoriel muni d'une base canonique  $B = (\vec{i}; \vec{j})$ . On considère

l'endomorphisme  $f$  de  $E$  définie par :  $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = -x + \frac{1}{2}y \end{cases}$

1. a) Donner la matrice de  $f$  dans la base  $(\vec{i}; \vec{j})$   
 b) Déterminer  $f(\vec{i})$  et  $f(\vec{j})$  en fonction de  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$
2. a) Déterminer le noyau de  $f$  noté  $\text{Ker}(f)$   
 b) Déterminer l'image de  $f$  notée  $\text{Im}(f)$
3. Soit  $g$  la symétrie vectorielle de base  $B = \{\vec{u} \in E / 2x - y = 0\}$  et de direction  
 $D = \{\vec{u} \in E / x + 2y = 0\}$ 
  - a) Déterminer  $g(\vec{i})$  et  $g(\vec{j})$  dans la base  $(\vec{i}; \vec{j})$
  - b) Déterminer l'expression analytique de  $g$
4. On donne les vecteurs  $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$  et  $\vec{v} = -2\vec{i} + \vec{j}$ 
  - a) Monter que  $(\vec{u}; \vec{v})$  est une base de  $E$ .
  - b) Donner la matrice de  $g$  dans la base  $(\vec{u}; \vec{v})$ .

### Exercice 15

On considère l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  défini par  $f: \begin{cases} x' = -2x + y + z \\ y' = x - 2y + z \\ z' = x + y - 2z \end{cases}$

1. a) Ecrire la matrice  $M$  de  $f$  dans la base canonique  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de  $\mathbb{R}^3$ .
  - b) Montrer que  $f$  n'est pas un automorphisme.
  2. Déterminer le noyau  $Ker f$  de  $f$  et en donner une base  $\overrightarrow{e_1}$ .
  3. Déterminer l'image  $Im f$  de  $f$  et en donner une base  $(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ .
  4. Montrer que  $Ker f$  et  $Im f$  sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $\mathbb{R}^3$ .
  5. On donne  $\vec{u}_1 = (1; 1; 1)$ ,  $\vec{u}_2 = (-1; 1; 0)$  et  $\vec{u}_3 = (-1; 0; 1)$  trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ 
    - a) Montrer que  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
- Déterminer la matrice de  $f$  dans la base  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ .

### Exercice 16

Dans le plan vectoriel  $E$  de base  $(\vec{i}; \vec{j})$  on considère les droites vectorielles  $F$  et  $G$  engendrées respectivement par la base  $(\vec{i}; \vec{j})$  par  $\overrightarrow{e_1} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$  et  $\overrightarrow{e_2} = \vec{i} - \vec{j}$

1. a) Déterminer les équations cartésiennes des droites  $F$  et  $G$ .
- b) Montrer que  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.
2. Qu'appelle-t-on un endomorphisme de  $f$  ?
3. Soit  $f$  l'endomorphisme de  $E$  tel que  $\begin{cases} f(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1} \\ f(\overrightarrow{e_2}) = -\overrightarrow{e_2} \end{cases}$ 
  - a) Déterminer la matrice de  $f$  dans la base canonique  $B' = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$
  - b) Calculer  $f(\vec{i})$  et  $f(\vec{j})$  en fonction des vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$
  - c) Donner la matrice de  $f$  dans la base  $B = (\vec{i}; \vec{j})$
4. Soit  $\vec{u}' = x'\vec{i} + y'\vec{j}$  image de  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ 
  - a) Exprimer les coordonnées  $x'$  et  $y'$  en fonction de  $x$  et  $y$  de  $f$
  - b) Calculer  $f \circ f(\vec{u})$
  - c) En déduire la nature de  $f$
  - d) Déterminer les éléments caractéristiques de  $f$ .

### Exercice 17

Soit  $f$  l'endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  dans la base canonique  $(\vec{i}; \vec{j})$  défini par :  $\begin{cases} f(\vec{i}) = \vec{i} - 2\vec{j} \\ f(\vec{j}) = -3\vec{i} + 2\vec{j} \end{cases}$

1. Déterminer la matrice de  $f$  dans la base  $(\vec{i}; \vec{j})$
2. Démontrer que  $f$  est une bijection de  $E$

3. Déterminer les valeurs du réel  $\lambda$  telles que  $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$  ; où  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$  est un vecteur de  $E$ .

4.  $H$  et  $G$  sont deux sous-ensembles de  $E$  tels que :

$$H = \{\vec{u} \in E / f(\vec{u}) = -\vec{u}\} \text{ et } G = \{\vec{u} \in E / f(\vec{u}) = 4\vec{u}\}$$

- a) Montrer que  $H$  est une droite vectorielle et en donner une base  $\vec{e}_1$
- b) Montrer que  $G$  est une droite vectorielle et en donner une base  $\vec{e}_2$
- c) Montrer que la famille  $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$  est une base de  $E$ .
- d) Ecrire la matrice de  $f$  dans la base  $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ .

### Exercice 18

I- Qu'appelle-t-on :

- a) Application linéaire ?
- b) Endomorphisme ?

II- Soit  $E$  un espace vectoriel de la base  $(\vec{i}; \vec{j})$  et  $f$  l'endomorphisme de  $E$  tel que :

$$f(\vec{i} + \vec{j}) = 2\vec{i} + 4\vec{j} \text{ et } f(\vec{i} - \vec{j}) = \vec{0}$$

- 1. Montrer que  $f(\vec{i}) = f(\vec{j}) = \vec{i} + 2\vec{j}$
- 2. Donner la matrice de  $f$  dans la base  $(\vec{i}; \vec{j})$
- 3. Montrer que  $f$  n'est pas bijectif
- 4. Déterminer l'expression analytique de  $f$  dans la base  $(\vec{i}; \vec{j})$
- 5. Déterminer le noyau de  $f$ . En donner une base  $(\vec{e}_1)$
- 6. Déterminer l'image de  $f$ . En donner une base  $(\vec{e}_2)$
- 7. On donne  $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$  et  $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$ 
  - a) Montrer que  $(\vec{u}; \vec{v})$  est une base de  $E$
  - b) Ecrire la matrice de  $f$  dans la base  $(\vec{u}; \vec{v})$ .

### Exercice 19

I- Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  vers  $F$ . Définir les termes suivants :

- a) épimorphisme
- b) isomorphisme
- c) endomorphisme

II- Dans  $\mathbb{R}^2$  muni de sa base  $(\vec{i}; \vec{j})$ , on considère l'application  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  telle que

$$f(\vec{i}) = -3\vec{i} - 2\vec{j} \text{ et } f(\vec{j}) = 4\vec{i} + 3\vec{j}$$

- 1. Donner la matrice  $M$  de  $f$  dans la base  $(\vec{i}; \vec{j})$
- 2. Déterminer l'expression analytique de  $f$
- 3. Donner la nature et les éléments caractéristiques de  $f$
- 4. On donne  $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$  et  $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$ 
  - a) Montrer que  $(\vec{u}; \vec{v})$  est une base de  $\mathbb{R}^2$
  - b) Exprimer  $f(\vec{u})$  et  $f(\vec{v})$  en fonction de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$

- c) Donner la matrice N de  $f$  dans la base  $(\vec{u}; \vec{v})$

### Exercice 20

Dans le plan vectoriel  $E$  muni de la base canonique  $B = (\vec{i}; \vec{j})$ , on considère les vecteurs  $\vec{e}_1(-2; \alpha)$  et  $\vec{e}_2(6; 4)$  où  $\alpha$  est un réel.

1. Déterminer la valeur de  $\alpha$ , pour que  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$  soient orthogonaux.

Dans la suite, on posera  $\alpha = 3$

2. Montrer que  $B' = (\vec{e}_1; \vec{e}_2)$  est une base orthogonale du plan  $E$ .
3. Soit  $(D)$  la droite vectorielle engendrée par le vecteur  $\vec{e}_2$ , d'équation cartésienne  $2x - 3y = 0$ .
  - a) Déterminer une équation cartésienne de la droite vectorielle  $(D')$  de base  $\vec{e}_1$
  - b) Déterminer l'intersection  $(D') \cap (D)$
4. En déduire que  $(D)$  et  $(D')$  sont deux sous espaces supplémentaires de  $E$ .
5. Soit  $f$  la projection vectorielle de  $E$  de direction  $(D)$  et de base  $(D')$ 
  - a) Exprimer les vecteurs  $f(\vec{e}_1)$  et  $f(\vec{e}_2)$  dans la base  $B' = (\vec{e}_1; \vec{e}_2)$
  - b) Exprimer les vecteurs  $f(\vec{i})$  et  $f(\vec{j})$  en fonction de  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$
  - c) Ecrire la matrice de  $f$  dans la base  $B = (\vec{i}; \vec{j})$

### Exercice 21

$E$  est un plan vectoriel,  $(\vec{i}; \vec{j})$  une base de  $E$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$  défini par :

$$\begin{cases} f(\vec{i}) = 2\vec{i} - \vec{j} \\ f(\vec{j}) = 3\vec{i} - 2\vec{j} \end{cases}$$

1. Déterminer la matrice M de  $f$  dans la base  $(\vec{i}; \vec{j})$ .
2. Pour tout réel  $\alpha$ , on note  $E_\alpha$  l'ensemble des vecteurs  $\vec{u}$  de  $E$  tel que :  $f(\vec{u}) = \alpha\vec{u}$ .
  - a) Montrer que, si  $\alpha$  est différent de 1 et  $-1$ ,  $E_\alpha$  est réduit au vecteur nul.
  - b) Déterminer les ensembles  $E_1$  et  $E_{-1}$  en donner une base pour chacune, nommée respectivement  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$ .
3. a) Démontrer que le couple  $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$  est une base de  $E$ .  
 b) Peut-on connaître  $f(\vec{e}_1)$  et  $f(\vec{e}_2)$  sans calcul ? Justifier.  
 c) Si oui donner la matrice A de  $f$  dans la base  $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$
4. a) Montrer que  $f$  est involutif, c'est-à-dire :  $\begin{cases} f \circ f(\vec{i}) = \vec{i} \\ f \circ f(\vec{j}) = \vec{j} \end{cases}$  ou  $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$   
 b) En déduire la nature de  $f$  et donner les éléments caractéristiques.

### Exercice 22

L'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  est muni de sa base canonique  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ . On donne

$\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$ ;  $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{k}$  et  $\vec{w} = 2\vec{i} - \vec{k}$ . Soit  $E_1$  le sous ensemble de  $\mathbb{R}^3$  tel que

$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + z = 0\}$  et  $E_2$  le sous espace de  $\mathbb{R}^3$  engendré par le vecteur  $\vec{w}$

1. a) Montrer que  $E_1$  est un sous espace de  $\mathbb{R}^3$
- b) Montrer que la famille  $(\vec{u}; \vec{v})$  est une famille génératrice de  $E_1$
- c) Montrer que la famille  $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$  est une base de  $\mathbb{R}^3$
- d) Montrer que  $E_1$  et  $E_2$  sont deux sous espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$
2. On considère l'application linéaire  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  vers  $\mathbb{R}^3$  tel que :  $f(\vec{u}) = \vec{u}$ ,  $f(\vec{v}) = \vec{v}$  et  $f(\vec{w}) = -\vec{w}$ 
  - a) Déterminer  $f(\vec{i})$ ,  $f(\vec{j})$  et  $f(\vec{k})$  dans la base  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$
  - b) Donner la matrice de  $f$  dans la base  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$
  - c) Déterminer l'expression analytique de  $f$ .

### Exercice 23

Soit l'espace vectoriel réel  $E$ , rapporté à sa base canonique  $(\vec{i}; \vec{j})$ . On considère les vecteurs  $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$  et  $\vec{v} = \vec{i} - 3\vec{j}$ , soit  $f$  l'endomorphisme de l'espace vectoriel  $E$  défini dans la base  $(\vec{i}; \vec{j})$  par :  $f(\vec{u}) = \vec{i} - \vec{j}$  et  $f(\vec{v}) = -\vec{i} + 3\vec{j}$

1. Déterminer les vecteurs  $f(\vec{i})$  et  $f(\vec{j})$  dans la base  $(\vec{i}; \vec{j})$
2. Soit le vecteur  $\vec{u}' = x'\vec{i} + y'\vec{j}$  image de  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$  par l'endomorphisme  $f$  tel que  $f(\vec{u}) = \vec{u}'$ 
  - a) Exprimer les coordonnées  $x'$  et  $y'$  du vecteur  $\vec{u}'$  en fonction de  $x$  et  $y$  celles de  $\vec{u}$
  - b) Calculer la composée  $f \circ f(\vec{u})$
  - c) En déduire la nature de l'endomorphisme  $f$
3. a) Montrer que le sous ensemble  $B$  de  $E$  défini tel que :  $B = \{(x, y) \in E / x + y = 0\}$  est la base de l'endomorphisme  $f$
- b) Montrer que le sous ensemble  $D$  de  $E$  défini tel que  $D = \{(x, y) \in E / 3x + y = 0\}$  est la direction de l'endomorphisme  $f$
4. a) Vérifier que  $(\vec{u}; \vec{v})$  tels que  $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$  et  $\vec{v} = \vec{i} - 3\vec{j}$ , est une base de l'espace  $E$ .
- b) Ecrire la matrice de l'endomorphisme  $f$  dans la base  $(\vec{u}; \vec{v})$ .

### Exercice 24

$E$  est un espace vectoriel muni de sa base canonique  $B = (\vec{i}; \vec{j})$  et  $f$ , un endomorphisme de  $E$ .

1. Montrer que l'ensemble  $E_\lambda = \{\vec{u} \in E / f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}\}$  est un sous espace vectoriel de  $E$ .

2. Soit l'endomorphisme  $f$  défini par : 
$$\begin{cases} f(\vec{i}) = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} \\ f(\vec{j}) = \frac{4}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j} \end{cases}$$

- Déterminer les sous espaces vectoriels  $E_1$  et  $E_{-1}$  tels que :  
 $E_1 = \{\vec{u} \in E / f(\vec{u}) = \vec{u}\}$  et  $E_{-1} = \{\vec{u} \in E / f(\vec{u}) = -\vec{u}\}$
  - Montrer que  $f$  est une symétrie vectorielle.
- En déduire les éléments caractéristiques de  $f$
  - On donne  $\vec{e}_1 = \vec{i} - \vec{j}$  et  $\vec{e}_2 = 2\vec{i} + \vec{j}$ 
    - Montrer que le couple  $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$  est une base de  $E$ .
    - Déterminer la matrice de  $f$  dans la base  $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$

### Exercice 25

L'espace vectoriel  $\mathbb{R}^2$  est muni de sa base canonique  $(\vec{i}; \vec{j})$ . On considère

l'endomorphisme  $h$  de  $\mathbb{R}^2$  tel que :  $\begin{cases} h(\vec{i}) = 5\vec{i} - 2\vec{j} \\ h(\vec{j}) = 10\vec{i} - 4\vec{j} \end{cases}$

- Exprimer  $h(\vec{j})$  en fonction de  $h(\vec{i})$ .
- Soit  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$  et  $\vec{u}' = x'\vec{i} + y'\vec{j}$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  tels que  $\vec{u}'$  soit l'image de  $\vec{u}$  par  $h$ . Exprimer  $x'$  et  $y'$  en fonction de  $x$  et  $y$
- Ecrire la matrice de  $h$  dans la base  $(\vec{i}; \vec{j})$
- Déterminer l'ensemble  $E_1 = \{\vec{u}(x; y) \in \mathbb{R}^2 / h(\vec{u}) = \vec{u}\}$  et en déduire sa base  $(\vec{e}_1)$
- Déterminer l'ensemble  $E_2 = \{\vec{u}(x; y) \in \mathbb{R}^2 / h(\vec{u}) = \vec{0}\}$  et en déduire sa base  $(\vec{e}_2)$
- Déterminer  $hoh(\vec{i})$  et  $hoh(\vec{j})$  et en déduire la nature de  $h$ .
- Caractériser  $h$ .
- Donner la matrice de  $h$  dans la base  $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$

### Exercice 26

1. On donne l'ensemble  $D$  défini par :  $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x - 2y = 0\}$

Montrer que l'ensemble  $D$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$

- On considère l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  défini par :  $\begin{cases} 3f(\vec{i}) = \vec{i} + 2\vec{j} \\ 3f(\vec{j}) = 4\vec{i} - \vec{j} \end{cases}$ 
  - Déterminer la matrice A de l'endomorphisme  $f$  dans la base  $(\vec{i}; \vec{j})$
  - Montrer que le produit  $A \times A = I$  où  $I$  est la matrice identité d'ordre 2.
  - En déduire la nature de l'endomorphisme  $f$
  - Déterminer la base  $B$  et la direction  $D$  de l'endomorphisme  $f$
- On considère les vecteurs  $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$  et  $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$ 
  - Montrer que la famille  $\{\vec{u}; \vec{v}\}$  est une base de  $\mathbb{R}^2$
  - Exprimer  $f(\vec{u})$  et  $f(\vec{v})$  en fonction des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$
  - En déduire la matrice M de  $f$  dans la base  $(\vec{u}; \vec{v})$

### Exercice 27

$E = (\mathbb{R}^2; +, \cdot)$  est l'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  muni de la base canonique  $B = (\vec{i}; \vec{j})$ . Soit  $g$  l'endomorphisme de  $E$  défini par :  $3g(\vec{i}) = \vec{i} - \vec{j}$  et  $3g(\vec{j}) = -8\vec{i} - \vec{j}$

1. a) Montrer que la matrice de  $g$  dans la base  $B$  est  $M_g = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 3 & 3 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

b) Montrer que  $g$  est un isomorphisme de  $E$ .

2. Soit le sous-espace vectoriel de  $E$  :  $D_1 = \{\vec{U}(x; y) \in E / x + 4y = 0\}$ .

Soit  $\vec{V}_1 = a_1\vec{i} + b_1\vec{j}$  un vecteur de  $D_1$ .

Montrer que  $g(\vec{V}_1) = \vec{V}_1$ .

3.  $D_2 = \{\vec{U}(x; y) \in E / x - 2y = 0\}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

Soit  $\vec{V}_2 = a_2\vec{i} + b_2\vec{j}$  un vecteur de  $D_2$ .

Montrer que  $g(\vec{V}_2) = -\vec{V}_2$ .

4. Calculer  $M_g \times M_g$ . En déduire que  $g$  est une symétrie vectorielle.

5. a) Donner les éléments caractéristiques de  $g$

b) Justifier que  $D_1$  et  $D_2$  sont deux sous espaces supplémentaires de  $E$ .

### Exercice 28

Soit  $\mathbb{R}^2$  un espace vectoriel muni de sa base canonique  $(\vec{i}; \vec{j})$ .

1. L'endomorphisme  $g$  de  $\mathbb{R}^2$  est défini par :  $g(\vec{i}) = 2\vec{i} - \vec{j}$  et  $g(\vec{j}) = a\vec{i} + b\vec{j}$  où  $a$  et  $b$  sont des réels.

a) Déterminer  $gog(\vec{i})$  et  $gog(\vec{j})$  en fonction de  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$

b) Déduire les valeurs de  $a$  et  $b$  pour les quelles  $g$  est une projection vectorielle.

2. On donne les vecteurs  $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$  et  $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$

Montrer que  $(\vec{u}; \vec{v})$  est une base de  $\mathbb{R}^2$

3. On considère l'endomorphisme  $f$  de matrice  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  dans la base  $(\vec{u}; \vec{v})$ .

a) Déterminer  $f(\vec{i})$  et  $f(\vec{j})$  dans la base  $(\vec{i}; \vec{j})$

b) En déduire l'expression analytique de  $f$

c) Déterminer le noyau  $Ker f$  de  $f$

d) Déterminer l'ensemble  $G$  définis par  $G = \{\vec{X} \in \mathbb{R}^2 / f(\vec{X}) = \vec{X}\}$

e) Montrer que  $f$  est une projection vectorielle. Préciser sa base et sa direction.

f) On donne  $\vec{w} = \vec{i} - 2\vec{j}$ . Déterminer  $f o f o f o f o f o f(\vec{w})$

### Exercice 29

I. On considère l'ensemble  $(H)$  tel que :  $(H) = \{\vec{u}(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - 2z = 0\}$

1. Montrer que  $(H)$  est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$

2. a) Déterminer une base de  $(H)$

b) ( $H$ ) admet-il d'autres bases ? Justifier la réponse.

c) Préciser la dimension de ( $H$ )

II. L'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  est rapporté à sa base canonique  $(\vec{0}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$f$  est l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  qui, au vecteur  $\vec{u}(x; y; z)$  associe le vecteur  $\vec{u}'(x'; y'; z')$

$$\text{tel que : } f = \begin{cases} x' = x + 2y - 2z \\ y' = y \\ z' = 2y - z \end{cases}$$

1. Soit les ensembles  $(E_1)$  et  $(E_2)$  tels que :  $(E_1) = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 / f(\vec{u}) = \vec{u}\}$  et

$(E_2) = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 / f(\vec{u}) = -\vec{u}\}$

a) Montrer qu'une équation de  $(E_1)$  est  $y - z = 0$ . Préciser une base de  $(E_1)$ .

b) Montrer qu'une équation de  $(E_2)$  est :  $\begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ . Préciser une base de  $(E_2)$

2. Déterminer  $f \circ f$

3. En déduire la nature de  $f$  ; puis préciser les éléments caractéristique de  $f$ .

### Exercice 30

L'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  est muni de sa base canonique  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  ; soit  $\varphi$  l'endomorphisme

$$\text{de } \mathbb{R}^3 \text{ défini par : } \begin{cases} x' = -2x + 4y + 2z \\ y' = -4x + 8y + 4y \\ z' = 5x - 10y - 5z \end{cases}$$

1. Déterminer le noyau  $Ker(\varphi)$  de  $\varphi$  et en donner une base  $\beta_1(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$

2. Déterminer l'ensemble des vecteurs invariants  $Inv(\varphi)$  par  $\varphi$  et en donner une base  $\beta_2(\vec{e}_3)$ .

3. Montrer que  $\beta = \beta_1 \cup \beta_2$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . Que peut-on dire de  $Ker(\varphi)$  et  $Inv(\varphi)$  ?

4. On donne  $\vec{W}(5; 5; -4)$  de  $\mathbb{R}^3$ , trouver les vecteur  $\vec{U}$  de  $Kerf(\varphi)$  et  $\vec{V}$  de  $Inv(\varphi)$  tels que  $\vec{W} = \vec{U} + \vec{V}$

5. Donner la matrice de  $\varphi$  dans la base  $\beta$ .

### Exercice 31

Dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  rapporté à sa base canonique  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ , on considère les vecteurs  $\vec{e}_1 = \vec{i}$ ;  $\vec{e}_2 = \vec{j} + \vec{k}$  et  $\vec{e}_3 = \vec{i} + \vec{k}$ . Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  défini par :

$$f(\vec{i}) = \vec{i}; f(\vec{i} - \vec{j}) = -(\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}) \text{ et } f(\vec{j} + \vec{k}) = \vec{j} + \vec{k}$$

1. Déterminer les vecteurs  $f(\vec{j})$  et  $f(\vec{k})$  en fonction de  $\vec{i}$ ;  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$

2. Ecrire la matrice M de l'endomorphisme  $f$  dans la base  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

3. Montrer que  $f$  est bijectif puis en déduire le noyau et l'image de  $f$ .

4. Déterminer l'expression analytique de  $f$  dans la base  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

5. a) Montrer que  $f$  est une symétrie vectorielle de  $\mathbb{R}^3$ .

- b) Déterminer la base  $B$  et la direction  $D$  de  $f$   
6. a) Montrer que  $(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$   
b) Ecrire la matrice  $M'$  de  $f$  dans la base  $(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ .

### Exercice 32

L'espace  $\mathbb{R}^3$  est rapporté à une base  $B = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  et  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$

définit analytiquement par : 
$$\begin{cases} x' = x + 2y - 2z \\ y' = 2x + y - 2z \\ z' = 2x + 2y - 3z \end{cases}$$

1. Donner la matrice  $M$  de  $f$  dans la base  $B$
2. Déterminer  $f(\vec{i}) ; f(\vec{j}) ; f(\vec{k})$
3. Montrer que  $f$  est une symétrie vectorielle que l'on caractérisera
4. On donne  $\vec{e}_1(1; 1; 1)$ ,  $\vec{e}_2(1; 0; 1)$  et  $\vec{e}_3(0; 1; 1)$ 
  - a) Montrer que  $(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  et exprimer  $f(\vec{e}_1) ; f(\vec{e}_2)$  et  $f(\vec{e}_3)$  en fonction de  $\vec{e}_1 ; \vec{e}_2$  et  $\vec{e}_3$
  - b) Donner la matrice  $M'$  de  $f$  dans la base  $(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$

### Exercice 33

Le plan vectoriel  $(\mathcal{V})$  est muni de sa base canonique  $(\vec{i}; \vec{j})$ . On considère  $f_a$  l'endomorphisme de  $(\mathcal{V})$  défini par :  $f_a(\vec{i}) = a\vec{i} + (2a - 2)\vec{j}$  et  $f_a(\vec{j}) = \vec{i} - \frac{3}{2}a\vec{j}$  où  $a$  est un nombre réel.

1. Donner l'expression analytique de  $f_a$
2. Déterminer les valeurs de  $a$  pour lesquelles  $f_a$  est un automorphisme de  $(\mathcal{V})$ .
3. Déterminer suivant les valeurs de  $a$ , l'ensemble des vecteurs invariants par  $f_a$
4. Pour quelle valeur de  $a$   $f_a$  est une projection vectorielle ?
5. Dans la suite on donne  $a = -2$ , déterminer le noyau et l'image de  $f_{-2}$