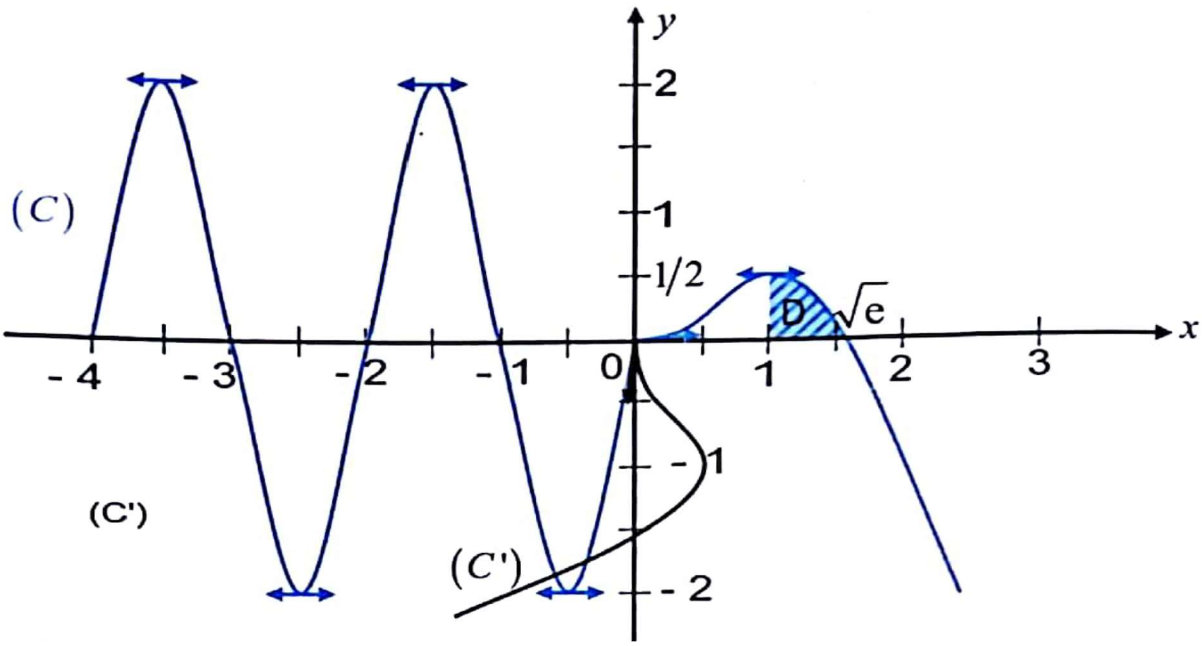
EXERCICES DE MATHEMATIQUES DESTINES AUX ELEVES DE TERMINALE C, D ET E



- NOMBRES COMPLEXES
- FONCTIONS
- SUITES NUMÉRIQUES
- INTÉGRALES
- ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
- ESPACES VECTORIELS
- STATISTIQUES
- PROBABILITÉS

$$\begin{cases} f(x) = 1 + x - e^{1-x} & si\ x \leq 1 \\ f(x) = \dfrac{2x - x^2 + \ln x}{x} & si\ x > 1 \end{cases}$$

Par

Amour NLEMVO MENGA

Professeur de l'enseignement secondaire

NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1

On donne : $Z_1 = 2 - 3i$ et $Z_2 = -1 + i$.

Ecrire les nombres complexes suivants sous la forme algébrique : $A = Z_1 + Z_2$; $B = Z_1 - Z_2$; $C = Z_1.Z_2$; $D = \frac{Z_1}{Z_2}$; $E = \frac{1}{Z_1}$;

$F = \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$

Exercice 2

Donner le module et un argument des nombres complexes suivants : $Z_1 = 1 + i$; $Z_2 = -\sqrt{3} - i$; $Z_3 = 3 - 3\sqrt{3}i$; $Z_4 = 2$; $Z_5 = -4$;

$Z_6 = \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$

Exercice 3

Donner le module et un argument de :

a) $Z = 3\left(cos\frac{\pi}{5} + isin\frac{\pi}{5}\right)$

b) $Z = -2\left(cos\frac{\pi}{7} + isin\frac{\pi}{7}\right)$

c) $Z = 4\left(sin\frac{\pi}{9} + icos\frac{\pi}{9}\right)$

d) $Z = 2\left(-sin\frac{\pi}{5} + icos\frac{\pi}{5}\right)$

Exercice 4

1) Trouver le module et un argument de : $Z = \frac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1-i)^3}$
2) Montrer que $(\sqrt{2}+i\sqrt{6})^{2400}$ est un réel positif

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ le système d'équation ci-après : $\begin{cases}(1-i)Z + (3+2i)Z' = 5 + 3i \\ (7+i)Z - 2(1+i)Z' = 3 - 4i\end{cases}$

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

a) $Z^2 + Z + 1 = 0$

b) $iZ^2 - 4Z - 4i1 = 0$

c) $2iZ^2 - 3Z - (1+3i) = 0$

d) $(-4-2i)Z^2 + (7-i)Z + 1 + 3i = 0$

e) $Z^4 + (3-6i)Z^2 + 2(16-63i) = 0$

f) $(1+cos2\theta)Z^2 - (2sin2\theta)Z + 2 = 0$; avec $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

g) $Z^6 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$

Exercice 7

1) Calculer $(3\sqrt{3} - i)^2$
2) Soit $\mathbb{C}$ le corps des complexes et P un polynôme défini par :
   $P(Z) = Z^3 + (2i - \sqrt{3})Z^2 + (i\sqrt{3} - 5)Z + 8i$

   a) Montrer que P admet une imaginaire pure

   b) En déduire la résolution de l'équation $P(Z) = 0$

   c) Dans le plan complexe, on nomme A l'image de i ; B et C les images des deux autres racines de l'équation. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A

Exercice 8

Soit le complexe

$Z_n = (\sqrt{3})^n\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$

1) Ecrire Z_0 ; Z_1 et Z_2 sous la forme algebrique
2) Donner le module et un argument de $U = Z_1 \times Z_2$; $T = Z_0 \times Z_1$
3) Calculer U^8 et T^6

Exercice 9

On donne : $Z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $Z_2 = 1 - i$

1) Ecrire Z_1 ; Z_2 ; $Z = \frac{Z_1}{Z_2}$ sous la forme trigonométrique
2) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

Exercice 10

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère le polynôme P défini par :

$P(Z) = 2Z^3 - (5 + 3i\sqrt{3})Z^2 - (1 - 7i\sqrt{3})Z + 6 - 2i\sqrt{3}$

a) Montrer que $P(Z)$ admet une solution réelle pure

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ $P(Z) = 0$. On notera Z_0 la solution réelle ; Z_1 la solution imaginaire pure et Z_2 la 3ème racine de cette équation

c) Dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O;\vec{U};\vec{V})$; on considère les points A ; B et C d'affixes respectives $Z_A = Z_0$; $Z_B = Z_1$; $Z_C = Z_2$. Déterminer l'affixe Z_D du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme

Exercice 11

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$Z^2 - 5(1+i)Z - 12 + 9i = 0$
2) Vérifier que le quotient des deux racines est un imaginaire pur.
3) Déterminer les réels a et b tels que :
$(a+ib)^4 = \frac{73}{16} - \frac{11}{2} i\sqrt{3}$

Exercice 12 (Bac C 2009)

Le plan rapporté à un repère orthonormé de sens direct $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation :
$(E) : Z^2 + (\sqrt{3}+i)Z + 1 = 0.$
2) Ecrire les solutions Z' et Z'' de (E) sous leur forme trigonométrique.

Exercice 13

1) Soit x un réel. Pour quelles valeurs de x le complexe $Z = (x+i)[x+5-i(x-7)]$ est – il imaginaire pure ?
2) On considère les complexes $Z_1 = 2 + 2i\sqrt{3}$ et $Z_2 = 3 + 3i$
   a) Ecrire $A = Z_1 \times Z_2$ et $B = \frac{Z_1}{Z_2}$ sous la forme trigonométrique
   b) Donner la forme algébrique de $Z = (\frac{Z_1}{Z_2})^{110}$
3) Soit le complexe $a = 1 + i$
   a) Calculer la puissance quatrième de a
   b) On pose $K = (b-a)(b-\overline{a})(b+a)(b+\overline{a})$ développer et réduire K ; avec b un complexe.
   c) Déduire les solutions de $b + 4 = 0$

Exercice 14 (2e session Bac D 1997)

1) Résoudre dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ le système d'équation ci-après : $\begin{cases} Z.\overline{Z} = 2 \\ iZ + \overline{Z} = 0 \end{cases}$; avec $\overline{Z}$ le conjugué de Z
2) On note Z_1 le nombre complexe dont la partie réelle et la partie imaginaire sont positives ; Z_2 le conjugué de Z_1 ; Z_3 le nombre complexe dont la partie réelle et la partie imaginaire sont négatives ; Z_4 le conjugué de Z_3. Soit Z_1 ; Z_2 ; Z_3 et Z_4 les affixes respectives des points A ; B ; C et D dans le plan rapporté à un repère orthonormé. Montrer que le quadrilatère ABCD est un carré.

Exercice 15 (Bac D 2014)

1) Qu'appelle-t-on conjugué d'un nombre complexe ?
2) a. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $(E) : Z^3 = 1$. On donnera les résultats sous forme algébrique.
   b. Montrer que les solutions non réelles sont conjuguées entre elles.
3) Montrer que $Z_1 = -1 - i\sqrt{3}$ est solution de l'équation $(E') : Z^3 = 8$.
4) Soit Z'_0, Z'_1, Z'_2 les solutions de (E') où Z'_1 et Z'_2 sont deux complexes conjugués.
   a. Utiliser les solutions de (E) pour déduire les solutions de l'équation (E').
   b. Montrer que $\frac{Z'_1}{Z'_2}$ est solution de (E).

Exercice 16 (Bac D 2019)

1) On considère, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $(E) : Z^2 - 4Z + 8 = 0.$
   a. Résoudre l'équation (E).
   b. Écrire la solution dont la partie imaginaire est négative sous la forme trigonométrique.
2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $2 - 2i$ et $2 + 2i$.
   a. Écrire sous forme algébrique, le complexe $U = \frac{Z_B}{Z_A}$.
3) b. En déduire la nature du triangle OAB.
4) On considère l'application f du plan P dans lui-même qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' tel que $Z' = e^{i\frac{\pi}{3}} Z.$
5) a. Préciser la nature de f.
6) b. Écrire sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique, l'affixe $Z_{A'}$ du point A' tel que $A' = f(A)$.
c. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 17

1) Soit $\theta \in [0;\pi]$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : Z^2 - (2^{\theta+1}\cos\theta)Z + 2^{2\theta} = 0$; on donnera les solutions Z_1 et Z_2 sous forme trigonométrique
2) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{U};\vec{V})$. Soit A et B les points d'affixes Z_1 et Z_2 ; solution de (E). Déterminer le réel θ pour que le triangle OAB soit équilatéral

Exercice 18

1) On pose : $Z_1 = 1 - cos\theta - isin\theta$ et $Z_2 = 1 + cos\theta + isin\theta$ avec $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. Déterminer le module et un argument de Z_1 et Z_2
2) On pose $Z = 1 + itan\alpha$; $\alpha \in]0\,;\pi[$ différent de $\frac{\pi}{2}$. Déterminer le module et un argument de $Z' = \frac{Z}{1-Z}$
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $Z^2 - 2Zsin\theta + 2(1 + cos\theta) = 0$

Exercice 19*

A) Soit l'équation : $(E) : Z^3 + (3 - 2i)Z^2 + (1 - 4i)Z - 2i - 1 = 0$
1) Vérifier que (E) admet une solution imaginaire puis résoudre (E)
2) Dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O; \vec{U}; \vec{V})$, on désigne les points A ; B et C d'affixes respectives $Z_A = -1$; $Z_B = -2 + i$; $Z_C = i$
   a) Donner le module et un argument de $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$ puis déduire la nature du triangle ABC
   b) Construire ce triangle
   c) Donner le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC

B) On donne : $f(Z) = 3Z^4 + Z^3 - 10Z^2 - Z + 3$
1) Montrer que $\forall\, Z \neq 0$; on a : $f(Z) = Z^2\left[a(Z - \frac{1}{Z})^2 + b\left(Z - \frac{1}{Z}\right) + c\right]$ où a ; b et c sont des réels à déterminer
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(Z) = 0$.

Exercice 20

Soit $\alpha \in [0\,;\pi]$. on donne le polynôme P tel que : $P(Z) = Z^3 - (1 - 2sin\alpha)Z^2 + (1 - 2sin\alpha)Z - 1$;
1) Calculer $P(1)$
2) Déterminer les réels a ; b et c tels que $P(Z) = (Z - 1)(aZ^2 + bZ + c)$; puis résoudre l'équation $P(Z) = 0$. On note Z_1=1 ; Z_2 et Z_3 les autres solutions
3) Pour quelle(s) valeur(s) de α les réels $|Z_2 + 1|$; $|Z_1|$ et $|Z_3 - 1|$ pris dans cet ordre forment-ils une progression géométrique ?

Exercice 21

On considère le polynôme
$F(Z) = (\sin^2 t)Z^2 + (sin2t)Z + 1 + \cos^2 t$;
1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $F(Z) = 0$. On notera $Z_1\, et\, Z_2$ les solutions de cette équation sachant que $t \in]0\,;\pi[$
2) Vérifier que ${Z_1}^2 + {Z_2}^2 = -2$
3) On donne les nombres complexes $A = -\frac{1}{sint}(cost + i)\ et\ \ B = -\frac{1}{sint}(cost - i)$. Vérifier que $F(A) = F(B)$

Exercice 22

Dans le plan complexe $\mathbb{C}$ rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{U}; \vec{V})$; on considère pour tout $x \in [0\,;\pi]$; l'équation
$(E) : Z^2 - (cosx + isinx)Z + 1$
1) Démontrer que $Z' = e^{ix} + \sqrt{2sinx}.e^{i\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$ et $Z'' = e^{ix} - \sqrt{2sinx}.e^{i\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$
2) Soit le nombre complexe $U = i + e^{ix}$
   a) Mettre U sous la forme trigonométrique
   b) Démontrer que $Z' + i\ et\ Z'' + i$ ont le même argument.
3) On désigne par A ; B ; C ; $M' et\, M''$ les ponts d'affixes respectives e^{ix}; i ; $-i$; $Z'\ et\ Z''$
   a) Démontrer que M' est le symétrique de M'' par rapport à A
   b) Démontrer que A ; M' ; $M''\ et\ C$ sont alignés
4) Démontrer que $Z' - i\ \ et\ \ Z'' - i$ ont le même module.

Exercice 23

Dans le plan complexe $\mathbb{C}$, on considère l'application f définie par :
$f(Z) = \frac{2Z}{Z^2 - 1}$ avec $Z \neq \pm 1$
1) Montrer que $f\left(e^{i\theta}\right)$ est imaginaire pur
2) Montrer que $\forall\, Z \neq \pm 1$; $f(Z) = \frac{2Z(\overline{Z^2} - 1)}{|Z^2 - 1|}$
3) On pose $Z = X + iY = 2Z(\overline{Z^2} - 1)$ et $w = x + iy$. Déterminer les réels $X\, et\, Y$ en fonction de $x\ et\ y$
4) Résoudre l'équation $f(Z) = \frac{1}{2}i$

Exercice 24

On considère le polynôme P de l'ensemble $\mathbb{C}$ définie par : $P(Z) = (Z^2 + 3Z)^2 + (3Z + 5)^2$

1) Factoriser $P(Z)$ en deux polynômes du second degré à coefficients complexes
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
   $Z^2 + 3(1 + i)Z + 5i = 0$
   En déduire les solutions de l'équation $P(Z) = 0$, puis montrer que $P(Z)$ est le produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels

Exercice 25

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, unité graphique $1\ cm$.
Soient M le point d'affixe Z et M' le point d'affixe $f(Z) = 3iZ + 13 - 9i$.

1) Soit A le point de coordonnées $(5\,;5)$.
   Quelle set son affixe Z_A ? Calculer $f(Z_A)$ et en déduire les coordonnées de son image A'.
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $f(Z) = Z$ et écrire la solution sous la forme $a + ib$, a et b étant des réels.
3) Soit I le point d'affixe $4 + 3i$. Calculer IA, IA' et AA'. En déduire que le triangle IAA' est rectangle en un point que l'on précisera. Faire une figure.

Exercice 26

Dans cet exercice, a désigne le complexe $1 + i$.

1) Calculer la puissance quatrième de a, de son conjugué $\bar{a}$, de l'opposé de a et de l'opposé de $\bar{a}$.
2) Soit Z un nombre complexe, développer et réduire les produits :
   a. $(Z - a)(Z - \bar{a})$
   b. $(Z + a)(Z + \bar{a})$
   c. $(Z - a)(Z - \bar{a})(Z + a)(Z + \bar{a})$.
3) En déduire les solutions de l'équation $Z^4 + 4 = 0$

Exercice 27 **(Bac C 2003)**

1) Déterminer sous la forme trigonométrique les solutions, dans $\mathbb{C}$ de l'équation
   $(E) : Z^4 = 8\left(1 - i\sqrt{3}\right)$
2) Vérifier que $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ est solution de (E).
3) En déduire l'écriture des autres solutions sous la forme algébrique.

Exercice 28

Soit un réel $\propto \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$. On considère l'équation (E) d'inconnue Z tel que :
$(1 + iZ)^3(1 - itan \propto) = (1 - iZ)^3(1 + itan \propto)$

1) Montrer que $|1 + iZ| = |1 - iZ|$
2) En déduire que Z est un réel
3) Exprimer le nombre complexe $\frac{1-itan\propto}{1+itan\propto}$ en fonction de $e^{i\propto}$.
4) On pose $Z = tan\varphi$ avec $\varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$. Montrer que (E) équivaut à l'équation d'inconnue φ : $e^{6i\varphi} = e^{2i\propto}$. Résoudre cette équation
5) Déterminer les solutions Z_1, Z_2 et Z_3 de l'équation de (E).

Exercice 29

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
   $Z^2 - 2(e^{i\frac{\pi}{12}})Z + (1 - i)e^{i\frac{\pi}{6}} = 0$.
2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $e^{i\frac{\pi}{12}}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\frac{\pi}{12}}$.
   a. Justifier que le quadrilatère $OACB$ est un losange.
   b. Placer les points A, B et C dans le repère.
   c. Calculer l'air du losange $OACB$

Exercice 30

Soit Z un nombre complexe non nul de module r et d'un argument θ. On pose $T(Z) = \frac{Z}{\bar{Z}}$ où $\bar{Z}$ désigne le conjugué de Z.

1) Déterminer le module et un argument de $T(Z)$.
2) On pose $Z_0 = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$
   a. Déterminer la forme algébrique de $T(Z_0)$
   b. En déduire un argument de Z_0 puis calculer son module.
3) Déterminer les valeurs exactes de $cos\frac{\pi}{8}$ et $sin\frac{\pi}{8}$.

Exercice 31

Soit $Z = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + isin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

1) Montrer que Z est une racine 5ème de l'unité
2) Trouver le module et un argument de : $A = 1 + Z$ et $B = 1 - Z$.
3) Déterminer en fonction de $\alpha\ et\ \beta$ le module et un argument du complexe $H = \frac{1+cos\alpha+isin\alpha}{1-cos\beta-isin\beta}$. On suppose que $\alpha\ et\ \beta \in [0; 2\pi]$.

Exercice 32 (Bac D 2002)

On considère le polynôme

$P(Z) = Z^2 - 2Z + \frac{1}{co\ ^2t}$, $t \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right[$.

1) Montrer que $P(Z)$ peut s'écrire sous la forme : $P(Z) = (Z) = Z^2 - 2Z + tan^2t + 1$.
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z) = 0$.
3) Soient Z_1 et Z_2 les deux solutions de l'équation $P(Z) = 0$. Donner suivant les valeurs de t, le module et un argument de Z_1 et Z_2.
4) Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, on désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives Z_1 et Z_2. On suppose désormais $t \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et désigne le temps.
   a. Quelles sont les trajectoires des points mobiles M_1 et M_2 ?
   b. Déterminer les coordonnées de $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ vecteurs vitesses des points M_1 et M_2.
   c. Montrer qu'à chaque instant : $\|\vec{V}_1\| = \|\vec{V}_2\|$.

Exercice 33

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $Z^3 = 4\sqrt{2}(1 + i)$.

1) Montrer, en les trouvant sous la forme trigonométrique, que cette équation admet trois solutions Z_1, Z_2 et Z_3 dont on donnera le module et un argument.
2) Calculer l'argument de $\frac{Z_1.Z_2}{{Z_3}^2}$.
3) Soient les points M_1, M_2 et M_3 images respectives des nombres complexes Z_1, Z_2 et Z_3. Représenter ces points dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.
4) Déterminer l'ensemble des valeurs de n pour les quelles ${Z_1}^n$ est imaginaire pure.

Transformations du plan

Exercice 34

Donner l'écriture complexe et l'expression analytique des applications suivantes :

a) Translation de vecteur $\vec{u}(-2\,;3)$
b) Symétrie centrale de centre $A(1\,;2)$
c) Homothétie de centre $B(2\,;\,-1)$ et de rapport $K = -\frac{1}{2}$
d) Rotation ce centre $A(0\,;2)$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$
e) Similitude plane directe de centre $D(1\,;\,1)$, de rapport $K = 2$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{4}$

Exercice 35

Caractériser l'application F dans les cas suivants :

a) $Z' = Z + 2 - 3i$
b) $Z' = 4Z + 2 - 2i$
c) $Z' = -Z + 1 - i$
d) $Z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)Z - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
e) $Z' = (1 - i)Z + 2 + 2i$

Exercice 36

Déterminer et construire l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ dans chacun des cas suivants. On donne $AB = 4$;

$a.\left(\overline{\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}}\right) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$; $b.\,\overline{(MA\,;MB)} = \frac{\pi}{6}[\pi]$

$c.\,|Z - Z_A| = 2$; $d.\,|Z - Z_A| = |Z - Z_B|$ avec $Z_A = 2$ et $Z_B = 1 + i$

Exercice 37 (Bac D 2011)

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation :

(E) : $Z^2 - (1 + 3i)Z + 4 + 4i = 0$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E). On appellera Z_1 la solution imaginaire pure et Z_2 l'autre solution.
2) Dans le plan complexe $(\mathcal{P})$ rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, on considère les quatre points A ; B ; C ; D d'affixes respectives 3 ; $4i$; $-2 + 3i$; $1 - i$.
   a. Placer les points A, B, C et D dans le plan.
   b. Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{DA}$.
   c. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

Exercice 38

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2 - 2Z + 2 = 0$
2) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, soit les points K, L et M d'affixes respectives $1+i\,;1-i$ et $-i\sqrt{3}$

a) Placer les points $K, L\ et\ M$ dans le repère

b) Soit N le symétrique de M par rapport à L, vérifier que $Z_N = 2 + i(\sqrt{3}-2)$

c) La rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme M en A et N en C. Déterminer les affixes de $A\ et\ C$

d) La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $2i$ transforme $M\ en\ D\ et\ N\ en\ B$. Déterminer les affixes de $D\ et\ B$

e) Montrer que K est le milieu de $[DB]$ et $[AC]$

f) Montrer que : $\frac{Z_C - Z_K}{Z_B - Z_K} = i$. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$

Exercice 39 ('Bac D 2010)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$, on considère les nombres complexes $Z_1 = \sqrt{3} + i$, $Z_2 = -\sqrt{3} + i$ et $Z_3 = -2i$

1) Écrire une équation de degré 3 dont Z_1, Z_2 et Z_3 sont solutions.
2) Écrire les nombres complexes Z_1, Z_2 et Z_3 sous la forme trigonométrique.
3) a. Placer les points A, B et C d'affixes respectives Z_1, Z_2 et Z_3dans le repère $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$.

b. Montrer qu'une mesure de chacun des angles du triangle ABC est $\frac{\pi}{3}$ radians.

c. En déduire la nature du triangle ABC.

Exercice 40 (Bac D 2012)

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $(E): Z^2 + 8\sqrt{3} - 8i = 0$.
   a. En utilisant la forme trigonométrique.
   b. En utilisant la forme algébrique. On pourra admettre que $8 + 4\sqrt{3} = \left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2$.2
2) Placer les images des solutions Z_1 et Z_2 de (E) sur un cercle trigonométrique.
3) Déduire de ce qui précède, la valeur exacte de $cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Exercice 41 (Bac D 2013)

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) : $Z^3 + 8 = 0$. On donnera les solutions de (E) sous la forme algébrique.

Soit A, B, et C les points d'affixes des complexes : $Z_A = 1 + i\sqrt{3}$; $Z_B = -2$; $Z_C = 1 - i\sqrt{3}$.

2) a. Calculer le module et un argument de U tel que : $U = \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$.

3) b. En déduire la nature du triangle ABC.

Soit S, la rotation définie dans (P) telle que : $S(A) = C$ et $S(C) = B$.

3) a. Déterminer l'expression complexe de S.

b. Déterminer les éléments caractéristiques de S.

Exercice 42 (Bac D 2015)

On considère l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes et on rappelle que $i^2 = -1$.

1) Déterminer les racines carrées du nombres complexe $u = 6 + 6i\sqrt{3}$.
2) Soit l'équation (E) définie dans $\mathbb{C}$ telle que : (E) : $4Z^3 - 6i\sqrt{3}Z^2 - (9 + 3i\sqrt{3})Z - 4 = 0$.

a. Vérifier que $Z_0 = -\frac{1}{2}$ est solution de l'équation (E).

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

3) Le plan complexe $\mathbb{C}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$. On donne les trois points A, B, C d'affixes respectives $Z_A = -\frac{1}{2}$, $Z_B = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $Z_C = 1 + i\sqrt{3}$.

a. Déterminer l'écriture complexe de la similitude plane directe S qui transforme A en B et B en C.

b. Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude S.

Exercice 43 (Bac D 2018)

Le plan complexe $\mathbb{C}$ étant rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $Z_A = 1 + 2i$; $Z_B = -1 + 2i$; $Z_C = 1 - i$; $Z_D = 1$.

1) a. Déterminer l'affixe $Z_{\overrightarrow{BC}}$ du vecteur $\overrightarrow{BC}$.

b. Déterminer l'expression analytique de la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

c. Trouver l'affixe du point A' image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

2) a. Prouver qu'une mesure, en radian, de l'angle $(\overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AB})$ est $-\frac{\pi}{2}$.
   b. Écrire l'expression analytique de la rotation R de centre A et d'angle $(\overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AB})$.
   c. Trouver l'affixe du point C' image du point C par la rotation R.
3) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude plane directe S de centre A et qui transforme B en A.

Exercice 44 (Bac D 2020)

1) Trouver dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes les nombres Z_1, Z_2 et Z_3 tels que :
$$\begin{cases} Z_1 + Z_2 = -3 + i \\ i\overline{Z_2} = 1 - 2i \\ Z_2 \times Z_3 = -1 - 2i \end{cases}$$
2) On considère le polynôme complexe P tel que : $P(Z) = Z^3 + (3 - 2i)Z^2 + (1 - 4i)Z - 1 - 2i$.
   a. Vérifier que $Z = i$ est une racine de $P(Z)$.
   b. Trouver le nombre complexe Z_0 tel que : $P(z) = (Z - i)(Z - Z_0)(Z + 2 - i)$.
   c. Donner l'ensemble des solutions de l'équation $P(Z) = 0$.
3) Dans le plan complexe, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectifs $Z_A = -1$; $Z_B = -2 + i$ et $Z_C = i$.
   a. Donner l'écriture complexe de la rotation R de centre A et qui transforme B en C.
   b. En déduire l'angle de la rotation R.

Exercice 45 (Bac D 2021)

1) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation (E) : $Z^3 + 8i = 0$ où Z désigne l'inconnue.
   a. Vérifier que le nombre $a = 2i$ est une solution de (E).
   b. Prouver que l'équation (E) peut s'écrire : $(Z - 2i)(Z^2 + 2iZ - 4) = 0$.
   c. Achever la résolution de l'équation.
2) Dans un plan complexe muni d'un repère orthonormal direct$(O ; \vec{u} ; \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $2i$, $-\sqrt{3} - i$ et $\sqrt{3} - i$.
   a. Calculer le module et un argument du complexe : $U = \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$
   b. En déduire la nature du triangle ABC.
3) On note I le point d'affixe $-i$ et S la similitude plane directe de centre A qui transforme C en I.
   a. Donner l'écriture complexe de S.
   b. Déterminer l'angle et le rapport de S.

Exercice 46

Le plan complexe $\mathbb{C}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$,

1) Montrer que $(1 + i)^6 = -8i$
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E): $Z^3 = -8i$
3) On considère le point A d'affixe $Z_A = 2i$ et la rotation R de centre O, d'angle $\frac{2\pi}{3}$

a) Déterminer les affixes Z_B et Z_C des points B et C tels que : $R(A) = B$ et $R(B) = C$

b) Vérifier que Z_B et Z_C sont solutions de (E)

4) On considère les points A, B et C d'affixes $Z_A = 2i$, $Z_B = -\sqrt{3} - i$ et $Z_C = \sqrt{3} - i$. Après avoir représenter les points A, B et C, préciser la nature du triangle ABC

Exercice 47

Dans plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{U}; \vec{V})$; on considère les points A et B les points d'affixes $Z_A = 4 + 2i$ et $Z_B = -2 - i$. Soit l'application $Z' = \frac{Z - Z_A}{Z - Z_B}$

1) Interpréter géométriquement le module puis l'argument de Z'.
2) Déterminer x' et y' de Z' en fonction de x et y de Z.
3) Déterminer puis construire les ensembles suivants

a) (E) : $|Z'| = 1$; b) (F) : $|Z'| = 2$; c) Z' soit un réel ; d) (G) : Z' soit une imaginaire pure.

Exercice 48

A tout point M d'affixe $Z \neq 1$ on associe le point M' d'affixe Z' tel que : $Z' = \frac{1+Z}{1-Z}$

1) Déterminer et construire l'ensemble (E_1) tel que $Arg(Z') = \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

2) Déterminer puis construire les ensembles $(E_2) = \{M(Z) \in \mathcal{P} \ / \ |Z| = 1\}$; $(E_3) = \{M(Z) \in \mathcal{P} \ / \ |Z| = 2\}$.

Exercice 49

Le plan complexe est rapporte a un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$. Unité graphique : 2 cm.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations (E): $Z^3 = 8$
2) On désigne par A ; B et C les points d'affixes respectives Z_A ; Z_B et Z_C définies par : $Z_A = 2$; $Z_B = -1 + i\sqrt{3}$ et $Z_C = -1 - i\sqrt{3}$. On appelle r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r' la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. On pose $B' = r'(B)$ et $C' = r(C)$ et on note $Z_{B'}$ et $Z_{C'}$ les affixes respectives de B' et C'.
   a) Placer les points A, B et C dans le repère.

Dans la suite, on complètera cette figure.

   b) Montrer que $Z_{B'} = 2 + \sqrt{3} + 3i$.
   c) Montrer que $Z_{B'}$ et $Z_{C'}$ sont des nombres complexes conjugués.
3) On appelle M, N, P et Q les milieux respectifs des segments $[CB]$; $[BB']$; $[B'C']$ et $[C'C]$. On note Z_M ; Z_N ; Z_P et Z_Q leurs affixes.
   a) Montrer que l'affixe $Z_N = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(1 + i\sqrt{3})$. En déduire que les points O, N et C sont alignés.
   b) Montrer que $Z_N + 1 = i(Z_Q + 1)$. Que peut-on en deduire pour le triangle MNQ ?
   c) Montrer que $MNPQ$ est un carré.
4) Soit S la similitude plane directe telle que $S(A) = C$ et $S(C) = B$.

a) Déterminer l'expression complexe de S

b) Déterminer les éléments caractéristiques de S. Déduire l'image de la droite (AC) par S.

Exercice 50 (Bac D 2016)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, on considère l'application (S) définie par : $z' = (1 + i)z$

1) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de (S)
2) Soit le point A d'affixe $z_A = 2i$. Détermine les affixes des points B et C définis par $S(A) = B$ et $S(B) = C$
3) Place les points A, B et C dans le repère
4) Soit I le milieu du segment $[OC]$. Montre que le triangle ABI est rectangle isocèle en B
5) Ecrire une équation du 3ème degré dont les affixes z_A, z_B et z_C définis ci – dessus sont solutions

Exercice 51 (Bac D 2017)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$. $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2cm$. Soit le polynôme P défini par : $P(Z) = Z^3 + Z^2 - 2$

1) a) Montrer que 1 est une racine de $P(Z)$
   b) Vérifier que $P(Z)$peut s'écrire sous la forme $P(Z) = (Z-1)(Z^2 + 2Z + 2)$
   c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z) = 0$
2) On considère les points A ; B et C d'affixes respectives $Z_A = 1$; $Z_B = -1 + i$ et $Z_C = -1 - i$
   a) Construire le triangle ABC
   b) Déterminer l'affixe Z_D du point D telle que ABCD soit un parallélogramme
3) Soit R la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$
   a) Montrer que l'expression complexe de R est telle que : $Z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
   b) Soit M et M' les points d'affixes respectives $Z = x + iy$ et $Z' = x' + iy'$. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

Exercice 52 (Bac C 2012)

1) Résoudre dans C, l'équation : $Z^4 - \sqrt{2}Z^3 - 4\sqrt{2}Z - 16 = 0$ sachant qu'elle admet deux solutions imaginaires pures.
2) On considère dans le plan complexe muni d'un repère $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = 2i$, $z_B = -\sqrt{2}$, $z_C = -2i$ et $z_D = 2\sqrt{2}$.
   a. Représenter les points A, B, C et D dans le repère $(O;\vec{U}\,;\vec{V}\,)$.
   b. Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle $(C\,)$ dont on précisera le rayon et le centre.

Exercice 53 (Bac C 2013)

On considère l'équation complexe (E) telle que (E) : $Z^3 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)Z^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)Z + 1 = 0$

1) Montrer que -1 est solution de (E).

2) Démontrer que si Z_0 est solution de (E) alors son inverse $\frac{1}{Z_0}$ est aussi solution de (E).
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E') telle que$(E') : Z^2 - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right)Z + 1 = 0$.
4) Déterminer toutes les solutions de l'équation (E)

Exercice 54 (Bac C 2014)

1) Soit (E) l'équation d'inconnue Z :
$Z^2 - (2ie^{i\theta}cos\theta)Z - e^{i2\theta} = 0$ où $\theta \in \mathbb{R}$.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). On présentera les solutions sous forme exponentielle.
2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}\,; \vec{v})$, A et B sont les points d'affixes respectives $Z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $Z_B = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)}$. On note Z_0 l'affixe de O.
   a. Exprimer $arg\left(\frac{Z_B - Z_0}{Z_A - Z_0}\right)$ en fonction de θ.
   b. En déduire l'ensemble des valeurs de θ pour lesquelles $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
   c. On suppose que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Écrire le conjugué de $Z_A + Z_B$ sous forme exponentielle.

Exercice 55

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,; \vec{u}\,; \vec{v})$ (unité 2 cm).
1) Déterminer les complexes Z_1 et Z_2 vérifiant le système : $\begin{cases} iZ_1 - Z_2 = -(\sqrt{3}+1) + 2i \\ Z_1 - iZ_2 = i(\sqrt{3}-1) \end{cases}$
2) On note $A, B\ et\ C$ les points d'affixes respectives $Z_A = 1 + i\sqrt{3}$; $Z_B = 1 - i$ et $Z_C = Z_A \times Z_B$
a) Placer les points $A, B\ et\ C$ dans le repère
b) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes Z_A , Z_B et Z_C
c) En déduire $|Z_C|$ et $Arg(Z_C) = \theta$
d) Mettre Z_C sous la forme algébrique
e) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$
3) Soit M un point quelconque du plan complexe d'affixe Z.
   a) Interpréter géométriquement les modules $|Z - (1-i)|$ et $\left|Z - \left(1 + i\sqrt{3}\right)\right|$
   b) Déterminer, puis construire l'ensemble (Γ) des points M d'affixe Z tels que : $\left|Z - \left(1 + i\sqrt{3}\right)\right| = |Z - (1-i)|$

Exercice 56

On donne les nombres complexes $Z_1 = 1 + i$ et $Z_2 = 1 - i\sqrt{3}$
1) Déterminer le module et un argument de Z_1 et Z_2
2) On pose : $Z = \frac{Z_1}{Z_2}$
   a. Ecrire Z sous la forme algébrique
   b. Déterminer la forme trigonométrique de Z
3) En déduire les valeurs exactes de $cos\frac{7\pi}{12}$ et $sin\frac{7\pi}{12}$

Exercice 57

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$. On considère l'application f, qui à tout point $M(Z)$ associe le point $M'(Z')$ tel que : $Z' = \frac{Z-1}{Z+i}$ avec $Z = x + iy$ et $Z' = x' + iy'$
1) Déterminer la partie réelle et imaginaire de Z' en fonction de x et y
2) Déterminer puis construire l'ensemble (E) des points M, tels que Z' soit réel
3) Déterminer puis construire les ensembles (F) et (Γ) des points M du plan tels que : $|Z'| = 1$ et $|Z'| = 2$

Exercice 58

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.
1) Déterminer puis construire l'ensemble des points M du plan dont l'affixe Z vérifie :
   a. $|Z - i| = |Z - 1 + i|$
   b. $\left|\bar{Z} - \sqrt{3} + i\right| = 2$
2) Déterminer le nombre complexe Z tel que : $|Z| = |Z - 2| = |Z - i|$. D'affixes $A, B\ et\ C$ respectivement
3) On considère les nombres complexes $Z_1 = 1 + i$; $Z_2 = 1 - i\sqrt{3}$; $Z = Z_1^3 \times Z_2$
   a. Donner la forme algébrique de Z
   b. Déterminer le module et un argument de Z
   c. En déduire la forme trigonométrique de Z

d. Déterminer les valeurs exactes de : $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

Exercice 59

On considère l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

1) Soit Q un polynôme du deuxième degré d'inconnue Z à coefficient complexe. Déterminer Q pour que $3+i$ et $1+2i$ soient ses racines
2) On considère le polynôme P tel que : $P(Z)=Z^3-2(2+i)Z^2+(4+3i)Z-7+i$ où Z est un complexe
   a. Déterminer les complexes a, b et c tel que : $P(Z)=(Z+i)(aZ^2+bZ+c)$
   b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z)=0$
3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$. On donne les points A et B d'affixes respectives $Z_A=3+i$ et $Z_B=1+2i$. Déterminer la nature du triangle BOA
4) Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' tel que : $\overrightarrow{OM'}=-3\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}$
   a. Montrer que : $Z'=-2Z+8+i$
   b. Donner la nature et les éléments caractéristiques de f

Exercice 60

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): iZ^2-2Z-4i=0$. On notera Z_1 et Z_2 ses solutions, avec $Re(Z_1)<0$.
   b. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

$(E'): i(Z+2\sqrt{3}-2i)^2-2(Z+2\sqrt{3}-2i)-4i=0$
on notera Z_3 et Z_4 ses solutions, avec $Re(Z_3)<Re(Z_4)$

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{\mathrm{u}},\vec{\mathrm{v}})$. On considère les points A, B et C d'affixes $Z_A=-\sqrt{3}-i$, $Z_B=\sqrt{3}-i$ et $Z_C=3Z_4-Z_3$
   a) Montrer que $Z_C=2i$
   b) Placer les points A, B et C dans le repère
   c) Calculer le module et un argument de $\frac{Z_B-Z_A}{Z_C-Z_A}$
   d) En déduire la nature du triangle ABC
3) Déterminer l'affixe Z_D du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme
4) Soit S la similitude plane directe qui laisse invariant le point A et transforme C en B
   a) Montrer que l'expression complexe de S est : $Z'=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z-\sqrt{3}+i$
   b) Donner les éléments caractéristiques de S, puis la nature exacte de S
   c) On pose $Z'=x'+iy'$ et $Z=x+iy$, exprimer x' et y' en fonction de x et y

Exercice 61

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$. Unité graphique 1 cm. Les questions suivantes sont indépendantes.

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $\overline{Z}-3iZ-3+6i=0$, $\overline{Z}$ étant le conjugue de Z.
2) On considère le point A d'affixe $4-2i$. Determiner la forme algébrique de l'affixe du point B tel que OAB soit un triangle équilatéral de sens direct.
3) Soit le point D d'affixe $2i$.
   a) Représenter l'ensemble (E) des points M d'affixe $Z\neq 2i$ tels que : $Arg(Z-2i)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.
   b) Representer l'ensemble (F) des points M d'affixe Z tels que $Z=2i+2e^{i\theta}$, $\theta\in\mathbb{R}$.
4) A tout point M d'affixe $Z\neq-2$, on associe le point M' d'affixe Z' telle que $Z'=\frac{Z-1}{Z+2}$. Déterminer l'ensemble des points M tels que $|Z'|=1$.

Exercice 62

Le plan complexe est rapporte au repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{\mathrm{u}},\vec{\mathrm{v}})$.

1) On considère le point I d'affixe i et le point A d'affixe $Z_A=\sqrt{3}+2i$.
   a) Montrer que le point A appartient au cercle (C) de centre I et de rayon 2.

Sur une figure (unité graphique 1 cm), qu'on complétera au fur et à mesure de l'exercice, placer le point I, tracer le cercle $(\mathbb{C})$, puis construire le point A.

b) On considère la rotation r de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Démontrer que le point B image de A par la rotation r a pour affixe $Z_B = -1 + i(1+\sqrt{3})$. Justifier que le point B appartient au cercle $(\mathbb{C})$.

c) Calculer l'affixe du point C symétrique de A par rapport à I.

2) Quelle est la nature du triangle ABC ? On considère les points $E\ et\ F$ tels que : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BI}$. Que peut-on conjecturer pour les droites (BF) et (CE) ? Valider cette conjecture a l'aide d'une démonstration.

Exercice 63 : (Bac C 2000)

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, unité graphique $4\ cm$, on considère les points A d'affixe $Z_A = 1$ et B d'affixe $Z_B = 2$. Soit le réel $\theta \in]0\,;\,\pi[$. On note M le point d'affixe $Z = 1 + e^{2i}$

1) Montre que le point M appartient au cercle $(\mathcal{C})$ de centre A et de rayon 1
2) Exprime l'angle $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AM})$ en fonction de θ. En déduire l'ensemble des points M quand θ décrit l'intervalle $]0\,;\,\pi[$
3) On appelle M' l'image de M par la rotation de centre O et d'angle -2θ et on note Z' l'affixe de M'. Montre que $Z' = \overline{Z}$ puis que M' appartient à $(\mathcal{C})$
4) Dans toute la suite on choisit $\theta = \frac{\pi}{3}$. On appelle r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ et A' l'image de A par r

a) Définis l'image $(\mathcal{C}')$ du cercle $(\mathcal{C})$ par r. Placer sur une figure $A, B, (\mathcal{C}), M\ et\ (\mathcal{C}')$ puis le point M' image de M par r

b) Montre que le triangle AMO est équilatéral

c) Montre que $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ se coupent en O et M'

d) Soit le point P symétrique de M par rapport à A. Montre que M' est le milieu de $[A'P]$

Exercice 64 (Composition C 2018)

$\propto$ est un complexe non nul. On définit le polynôme P par : $P(\propto) = \propto^2 - 2i\propto -1$

1) Factoriser $P(\propto)$
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 - \propto(\propto + i)Z + i\propto^3 = 0$
3) On désigne par $\rho\ et\ \theta$ le module et un argument de $\propto$. Soit $Z_1 = i\propto$ et $Z_2 = \propto^2$

a) Déterminer en fonction de $\rho\ et\ \theta$ le module et un argument de Z_1 et Z_2

b) Quelle condition faut – il donner à $\propto$ pour que Z_1 soit un réel ?

4) Dans le plan complexe $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$. Soit $S_\propto$ la transformation ponctuelle qui à tout point M de Z associe M' de Z' tel que : $Z' = i\propto Z + \propto^2$

a) Existe – t – il une valeur de $\propto$ pour laquelle $S_\propto$ est l'identité du plan ?

b) Pour quelle valeur de $\propto$, $S_\propto$ est – elle une rotation d'angle de mesure $\frac{5\pi}{6}$?

Exercice 65

Le complexe $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$

1) Pour tout nombre complexe Z, on pose : $P(Z) = Z^4 - 1$

a. Factorise $P(Z)$ en facteurs du 1er degré puis en déduis les solutions de l'équation $P(Z) = 0$ dans l'ensemble $\mathbb{C}$.

b. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $\left(\frac{Z}{2+3i}\right)^4 = 1$

2) a. Place dans le plan $\mathcal{P}$ les points A, B, C et D d'affixes respectives : $Z_A = 2 + 3i$, $Z_B = -3 + 2i$, $Z_C = -2 - 3i$ et $Z_D = 3 - 2i$.

b. Calcule les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.

c. Calcule le module et l'argument du nombre complexe $\frac{Z_A - Z_C}{Z_D - Z_B}$.

d. Déduis des questions précédentes la nature du quadrilatère $ABCD$.

3) Démontre que l'ensemble $(\mathcal{H})$ des points $M(x\,;y)$ d'affixe Z tel que : $\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|$ est un cercle de rayon OA et de centre G dont on précisera l'affixe, tracer $(\mathcal{H})$. Une résolution par le barycentre est envisageable.

FONCTIONS NUMERIQUES

Exercice 1

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$; $g(x) = \sqrt{\left|\frac{x+1}{2-x^2}\right|}$;

$h(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}}$; $j(x) = \frac{\sqrt{2x+1}}{2-\sqrt{x^2-1}}$;

$k(x) = \frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{-x+3}+1-x}$

Exercice 2

Trouver les limites des fonctions suivantes

1 $\lim_{x\to\pm\infty}(x^2+x+5)$

2 $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+5}{x^3+2x^2-4}\right)$

3 $\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

4 $\lim_{x\to1}\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}}\right)$

5 $\lim_{x\to a}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}-\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}\right)$

6 $\lim_{x\to1}\left(\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}\right)$

7 $\lim_{x\to\infty}(-4x+3-cosx)$

8 $\lim_{x\to0} xsin\left(\frac{1}{x}\right)$

9 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x.sinx}{x^2+1}\right)$

10 $\lim_{x\to1}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-x}$

11 $\lim_{x\to0}\frac{\sin^3x}{x^2}$

12 $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{3x-\pi}$

13 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{x-\frac{\pi}{2}}$

14 $\lim_{x\to\infty} x^2\left(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}}\right)$

Exercice 3

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2+4x-4}{x^2-2x+2}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f
2) Montrer que $g(x) = 0$ admet un réel $\propto \in \left[\frac{1}{2}\,;1\right]$
3) Déterminer $\propto$
4) Soit g la restriction de f sur $[0\,;2]$. Montrer que g admet une bijection réciproque notée g^{-1} dont on dressera le tableau de variation.

Exercice 4

On considère la fonction g définie par :

$g(x) = \frac{1-cos}{x}$

1) Déterminer son ensemble de définition
2) Montrer que g admet un prolongement par continuité au point $x = 0$
3) Soit f, le prolongement par continuité de g en $x = 0$
   a. Définir la fonction f
   b. En déduire l'ensemble de définition de la fonction f

Exercice 5

On considère la fonction f_m définie par :

$f_m(x) = \frac{2x^2-m(x+1)}{x+m}$ où m est un paramètre réel.

1) Pour quelle valeur de m les courbes $(\mathcal{C}_m)$ admettent la droite d'équation $x = -2$ pour asymptote
2) Détermine m pour que le reste de $f_m(x)$ soit 4
3) Montre que toutes les courbes $(\mathcal{C}_m)$ passent par deux points fixes que l'on déterminera.

Exercice 6

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^3-4}{x^2+1}$; $(\mathcal{C}_f)$ désigne sa courbe dans un repère orthonormé $(o\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

A) g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3+3x+8$

1. Etudier les variations de g, puis dresser son tableau de variations
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\propto \in [-1{,}52\,;-1{,}51]$
3. Etudier le signe de la fonction g suivant les valeurs de x.

B) 1. a) montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$

b) Etudier les variations de f.

c) Démontrer que $\frac{f(\propto)}{\propto} = \frac{3}{2}$. En déduire un encadrement de $f(\propto)$.

2. a) Vérifier que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x - \frac{x+4}{x^2+1}$

b) En déduire que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique (Δ) en $+\infty$ et en $-\infty$

c) Etudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (Δ)

3. Soit h la restriction de f à l'intervalle $I = [0\,;\,+\infty[$. Montrer que h admet une bijection réciproque notée h^{-1}, puis dresser son tableau de variation

Exercice 7

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 3ax + 2 \;;\; si\; x \leq -1 \\ f(x) = \frac{2x+5}{x+2} \quad ; \quad si\; x > 1 \end{cases}$$

a étant un paramètre réel

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Déterminer a pour que f soit continue en $x_0 = -1$
3) On pose $a = 0$, étudier la dérivabilité de f en $x_0 = -1$ puis préciser les conséquences graphiques à (C_f)

Exercice 8

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2 - \sqrt{x^2 - 1} \quad ; \quad si\; x < -1 \\ f(x) = 2(1 + sin\pi x) \quad ; \quad si - 1 \leq x \leq 1 \end{cases} ;$$

on note (C) la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$.

1) Préciser l'ensemble de définition de f
2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = -1$ et à gauche de 1
3) Etudier les variations de f
4) Monter que (C) admet sur $\left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right]$ un point d'inflexion A dont on déterminera les coordonnées
5) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $]-3\,;-2[$ une solution $\propto$ que l'on déterminera puis tracer (C)

Exercice 9

Soit f une fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2+ax+3}{x+1} \quad ; \quad si\; x \leq 1 \\ f(x) = 2x^2 - bx + 1 \;;\; si\; x > 1 \end{cases}$$

Détermine $a\; et\; b$ pour que f soit dérivable en $x_0 = 1$

Exercice 10

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\propto x^2+\beta x+3}{x+1}$.

1) Déterminer $\propto\; et\; \beta$ sachant que (C_f) rencontre l'axe des abscisses en $x = 1$ et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = 2x - 1$
2) Monter que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$; $a\,;\,b\; et\; c$ sont des réels à déterminer.

Exercice 11

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x+2}$

1) Etudier les variations de f
2) Démontrer que $\forall\, x \in [2\,;3]\,;\; |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$
3) Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in [2\,;3]$
4) En déduire que $|f(x) - \propto| \leq \frac{1}{4}|x - \propto|$
5) Trouver la valeur exacte de $\propto$

Exercice 12

Soit h la fonction définie par : $h(x) = \frac{ax^2+bx+c}{dx-}$.

Déterminer les réels $a\,;b\,;c\; et\; d$ pour que :

— La courbe (C_h) admette la droite d'équation $x = 2$ comme asymptote verticale
— La courbe (C_h) passe par le point $A(1\,;2)$
— La courbe (C_h) admette au point 3 un minimum égal à 6

Exercice 13

On considère la fonction f_m définie par :

$f_m(x) = \frac{mx^2-2x+m}{x^2-2mx+1}$; $m \in \mathbb{R}$

1) Suivant les valeurs de m, donner l'ensemble de définition de f_m
2) Montrer que les courbes (C_{f_m}) passent par deux points fixes que l'on déterminera
3) Pour $m \in]-1\,;1[$, étudier les variations de f_m
4) On pose $m = 0$
   a) Montrer que la courbe (C_{f_0}) admet un point d'inflexion en $x_0 = 0$
   b) Déduire de ce qui précède le tableau de variation de f_0 puis tracer (C_{f_0}) dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. Unité $2\,cm$
5) Soit h la restriction de f_0 sur $[0\,;\,+\infty[$ et on définie la fonction g telle que $g(x) = -h(x)$. Déduire le tableau de variation de g puis tracer (C_g)

Exercice 14

A. Soit la fonction g définie par :

$g(x) = \frac{1}{2}cos2x + \frac{\sqrt{3}}{2}sin2x$

1) Déterminer les réels $a\,;b\ et\ c$ tels que : $g(x) = ccos(ax+b)$
2) Montrer que g est périodique de période π

B. On considère la fonction f telle que :

$\begin{cases} f(x) = x - 2 + \sqrt{1-x}\ ; \quad si\ x < 0 \\ f(x) = -2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\ ;\ si\ 0 \le x \le \pi \end{cases}$

1) Donner l'ensemble de définition de f
2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 0$
3) Etudier les variations de f
4) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(o\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$.
5) Soit h la fonction définie telle que : $\forall\, x \in E_f\ ;\ h(x) = -f(x)$
   a. Dresser le tableau de variation de h
   b. Tracer $(\mathcal{C}_h)$ dans le même repère que $(\mathcal{C}_f)$

Exercice 15

On considère la fonction f définie par :

$\begin{cases} f(x) = x - \sqrt{1+x^2} \quad ; \quad si \le 0 \\ f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x} \quad ; \qquad si\ x > 0 \end{cases}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 0$
3) Etudier les variations de f
4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\propto \in \left]\frac{3}{2}\,;3\right[$
5) Soit g la restriction de f sur $]-\infty\,;\,0\,]$.
   a) Montrer que h admet une bijection réciproque notée g^{-1}
   b) Sans explicité $g^{-1}(x)$. Calculer $g^{-1}(3)$ et $(g^{-1})'(3)$.
   c) Explicité $g^{-1}(x)$.
6) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ dans le même repère.

Fonctions logarithmes népériens et exponentielles

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$

1) $lnx + \ln(x-1) - ln6 = 0$
2) $ln[x(x-1)] - ln6 = 0$
3) $(lnx)^2 - 2lnx - 3 = 0$
4) $(lnx)^2 = 16$
5) $\ln(x+5) + \ln(x+4) \le \ln(x+13)$
6) $ln(x^2 - 4e^2) < 1 + ln3x$
7) $\ln\left(\frac{2x+1}{x-2}\right) \ge 0$
8) $\begin{cases} x + y = 25 \\ lnx + lny = ln100 \end{cases}$
9) $\begin{cases} ln(x.y) = 9 \\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) = 1 \end{cases}$
10) $\begin{cases} \log_x e + \log_y e = \frac{3}{4} \\ \ln(x.y) = 6 \end{cases}$

Exercice 2

1) $e^{3x-4} = e^{2x+1}$
2) $e^{\frac{x}{x-1}} = 2$
3) $e^{2x+5} = -3$
4) $e^{2x} - 14 = 5e^x$
5) $e^{-6x} + 3e^{-4x} - e^{-2x} - 3 = 0$
6) $e^{2x} - 3e^x + 2 > 1$
7) $e^{2+lnx} < 2$
8) $3^x - 2.3^{-x} - 10 = 0$
9) $-7^{x+1} + 49^x + 10 = 0$
10) $\begin{cases} 3e^x + 4e^y = 19 \\ e^x - 6e^y = -1 \end{cases}$
11) $\begin{cases} e^x.e^y = e^3 \\ lnx - lny = ln3 - ln2^x \end{cases}$
12) $\begin{cases} \log_2(-x+2y) = \log_2(2x-3y+4) \\ 3^{5x+y}.3^{-x-6y} = 81 \end{cases}$
13) $\begin{cases} a^x = y^a \\ a^{x+2} = y^{a+1} \end{cases}$

Exercice 3

Préciser l'ensemble de définition des fonctions suivantes et leurs dérivées usuelles

1. $f(x) = ln(x^2 - 2x - 8)$
2. $f(x) = \ln(2x+1)^2 + lnx$
3. $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+3x+2}{x-3}\right)$
4. $f(x) = ln|-x^2 + 2x + 3|$
5. $f(x) = e^{-5x^2+4x+1}$
6. $f(x) = e^{\sqrt{x+4}}$
7. $f(x) = e^{\ln(x+3)}$
8. $f(x) = e^{\frac{-x+3}{5x^2-4x-1}}$
9. $f(x) = 2^{2x+5}$

Exercice 4

Calculer les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln(x+1)}{x}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x - lnx)$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} x[ln(x+1) - lnx]$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - e^x)$

Exercice 5

Soit l'équation $(E) : 2x + e^y - e^{-y} = 0$; $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$

1) Donner l'expression de y en fonction de x
2) On pose : $y = f(x)$, étudier les variations de la fonction f puis représenter sa courbe (C_f) dans un repère orthonormé $(o\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$

Exercice 6

Soit le polynôme P définit par :
$P(x) = 2x^3 - 9x^2 - 2x + 9$

1) Calculer $P(1)$
2) Déterminer trois réels a, b et c tels que : $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx = c)$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$
3) En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ des équations

a. $2ln^3(x+1) - 9ln^2(x+1) - 2\ln(x+1) = -9$

b. $2e^{6x+3} - 9e^{4x+2} - 2e^{2x+1} + 9 = 0$

Exercice 7

On considère une fonction f définie pour tout réel x par : $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}xe^{\frac{1}{x}}\,; si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0\ ;\ \ si\ x = 0 \end{cases}$

1) Donner l'ensemble de définition de f
2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition
3) Etudier les variations de f
4) Soit $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. Montrer que cette droite est une asymptote de f au voisinage de $\pm\infty$; donner sa position par rapport à la courbe (C_f). Tracer (C_f) dans un repère orthonormé (unité $1\ cm$)

Problème 1 (bac D 2006)

Partie A : On définie sur $]0\,;+\infty[$ la fonction g par : $g(x) = x - lnx$

1) Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variations
2) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0\,;+\infty[$

Partie B : Soit f la fonction de la variable réelle x définie par :

$\begin{cases} f(x) = x\sqrt{1-x}\quad ;\quad si\ x \leq 1 \\ f(x) = \frac{x}{x - lnx} - 1\ \ ;\ si\ x > 1 \end{cases}$

1) Préciser l'ensemble de définition de la fonction f
2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 1$
3) Etudier les variations de la fonction f
4) Construire la représentation graphique (C_f) de la fonction f dans un repère orthonormé $(o;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ d'unité 2 cm
5) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[e\,;+\infty[$

a) Montrer que h admet une bijection réciproque notée h^{-1}

b) Dresser le tableau de variations de h^{-1}

c) Construire $(C_{h^{-1}})$ dans le même repère que (C_f)

Problème 2 (Bac C 2018)

Partie A

Soit g la fonction numérique définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = xe^x - 1$.

1) Calculer la dérivée g' de g.
2) Dresser le tableau de variation de g. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$
3) a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\,;1\right[$.

b. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0\,;+\infty[$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = e^x - ln\,x$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

4) Calculer les limites de f en O^+ et $+\infty$.
5) Montrer que la dérivée f' de f est $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.

6) a. Dresser le tableau de variation de f. On admet que la courbe (C) admet une branche parabolique de direction (Oy).
b. Montrer que f admet un minimum $f(\alpha) = \alpha + \frac{1}{\alpha}$.
7) Tracer la courbe (C). On prendra $\alpha = 0{,}6$ et $f(\alpha) = 2{,}3$.

Problème 3

Le repère $(0;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ est orthonormé. Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 + \frac{1}{x} & ; \quad si\ x \leq 1 \\ f(x) = 1 - (lnx)^2 & ; \quad si\ x > 1 \end{cases}$$

1. a) Démontrer que f est continue et dérivable en 1
   b) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et préciser les branches infinies de la courbe représentative (C_f).
   c) Etudier les variations de f.
   Démontrer que le point d'abscisse e est un point d'inflexion de (C_f).
   d) Tracer (C_f).
2. Soit h la restriction de f à l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.
   a) Démontrer que h réalise une bijection sur $]1\,;\,+\infty[$ vers un intervalle que l'on précisera.
   b) En déduire que h admet une fonction réciproque h^{-1} dont on précisera le sens de variation.
   c) Tracer la courbe représentative de h^{-1}

Problème 4 (Bac D 2017)

Partie A : On considère la fonction g définie sur$]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = -\frac{1}{x} + lnx$

1) Calculer les limites de g en 0^+ et en $+\infty$
2) a) Calculer la dérivée g' de g sur $]0\,;\,+\infty[$
   b) Dresser le tableau de variations de g
3) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$, admet une solution unique $\propto \in \left]\frac{3}{2}\,;2\right[$

b) en déduire le signe de $g(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$

Partie B : On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x - (x-1)lnx$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

1) Calculer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$
2) a) montrer que la dérivée f' de f est $f'(x) = -g(x)$
   b) Dresser le tableau de variation de f. On prendra $\propto = 1{,}7$ et $f(\propto) = 1{,}3$
3) on admet que l'équation $f(x) = 0$, admet deux solutions x_0 et x_1 avec $x_0 \in \left]\frac{1}{2}\,;1\right[$ et $x_1 \in \left]\frac{7}{2}\,;4\right[$
   a) Etudier les branches infinies à (C)
   b) Tracer la courbe (C)
4) Tracer la courbe (C') de la fonction h définie par $h(x) = -f(x)$ dans le même repère de (C)

Problème 5 (Bac D 2001)

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x + ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| & si\ x \in]-\infty\,;\,-1[\,\cup\,]-1\,;0[\\ f(x) = x^2e^{-x} & si\ x \in [0\,;\,+\infty[\end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(0\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ avec $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 2\ cm.$

Partie A

1) Quel est le domaine de définition de f. Calculer $f(-2) et\ f(3)$
2) Montrer que la fonction f est continue en zéro
3) a) Etablir que la dérivée f' de f a pour expression
   $f'(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ $si\ x \in]-\infty\,;\,-1[\,\cup\,]-1\,;0[$
   $f'(x) = xe^{-x}(2-x)$ $si\ x \in [0\,;\,+\infty[$
   b) La fonction f est – elle dérivable en 0 ? justifier
4) Dresser le tableau de variation de f
5) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine unique $\propto$ comprise entre $-1{,}6 \text{ et } -1{,}5$
6) a) Justifier que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) quand x tend vers $-\infty$
   b) Etudier la position de (C) par rapport (D) dans $]-\infty\,;0\,[-\{-1\}$
7) Tracer la courbe (C) en représentant sur la même figure les asymptotes ; les demi –

tangentes en 0 et les points d'intersection avec les axes de coordonnées.

Partie B

Soit g la restriction de f à $[0\,;2]$

1) Montrer que g définit une bijection de $[0\,;2]$ sur un intervalle J à préciser
2) On note g^{-1} la bijection réciproque de g
 a) Résoudre l'équation $g^{-1}(x) = 1$
 b) Montrer que $(g^{-1})'\left(\frac{1}{e}\right) = e$
3) On appelle (C') la courbe représentative de g^{-1}. Tracer (C') en utilisant la courbe et une transformation à préciser (on placera sur la courbe (C') le point d'ordonnée 1 et la tangente au point d'abscisse $\frac{1}{e}$)

Problème 6 (Bac Blanc C 2008 zone I)

Partie B

Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$g(x) = x - 2 - \ln(x^2 - 2x + 1)$. On note (C_g) sa courbe représentative dans le plan $(\mathcal{P})$ rapporté au repère orthonormé de sens direct $(O\,;\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OJ})$ où $I(1\,;0)$ et $J(0\,;1)$.

1) Dresser le tableau des variations de g
2) Calculer $g(0)$, $g(2)$, $g(4)$ et $g(5)$. En déduire que la courbe (C_g) coupe l'axe $(O\,;\overrightarrow{OI})$ en trois points d'abscisses x_1, x_2 et x_3 telle que $x_1 \in]0\,;1[$, $x_2 \in]4\,;5[$. On donnera la valeur exacte de x_3.
3) a. Etudier les branches infinies de (C_g).
 b. Trouver les points d'intersection de (C_g) avec la droite (D) d'équation $y = x$
 c. Tracer (C_g) dans le repère $(O\,;\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OJ})$

Partie C

Le plan $(\mathcal{P})$ est identifier au plan complexe. On considère les points A, B et Ω d'affixes respectives : $Z_A = 1 + i$, $Z_B = -i$ et $Z_\Omega = 1 - i$.

Soit S la similitude plane directe de centre Ω telle que $S(O) = A$.

1) Déterminer l'écriture complexe de S. Préciser son rapport K et une mesure θ de son angle.
2) Montrer que pour tout point M d'affixe Z et M' d'affixe Z' où $S(M) = M'$, $Z' - Z = -i(Z - Z_\Omega)$.
3) a. Montrer que pour tout point M distinct de Ω, le triangle $\Omega MM'$ est rectangle isocèle en M.
 b. Placer le point $C = (SoSoS)(B)$
4) trouver l'expression analytique de S.
5) Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f définie par : $f(x) = -x + e^{x-1}$.
 a. Montrer que l'image de (C_f) par S est une partie de (C_g) que l'on précisera.
 b. En déduire, sans étude de variations de f, le tracer de (C_f) dans le même repère que (C_g).

Problème 7 (Bac D 2020)

Partie A

Soit h la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $h(x) = (1 - x)\,e^{2-x} + 1$.

1) a. Pour tout réel x de $\mathbb{R}$, calculer $h'(x)$.
 b. En déduire le signe de $h'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
 c. On admet que $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 1$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Dresser le tableau de variation de h sur $\mathbb{R}$.
2) En utilisant les questions précédentes, déduire le signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(1 + e^{2-x})$. On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ (unité graphique : $1\,cm$).

1) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
2) a. Montrer que pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $f'(x) = h(x)$.
 b. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$ sachant que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
3) a. Montrer que f admet une bijection réciproque notée f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.
 b. Dresser le tableau de variation de f^{-1}.
4) a. Préciser la nature de la branche infinie de f au voisinage de $-\infty$.
 b. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$.
 c. Étudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ).
5) Construire (Δ), les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ où $(\mathcal{C}')$ représente la courbe de f^{-1} dans le repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

SUITES NUMERIQUES

Exercice1

On considère la suite complexe (U_n) de premier terme $U_0 = -3$ et définie par la relation : $2U(n+1) = iU(n) - 2 + i,\ n \in \mathbb{N}$

1) Soit la suite (Vn) de terme général $V(n)$ tel que : $Vn = Un + 1$
   a) Montrer que Vn est une SG dont on précisera la raison et le premier terme
   b) Donner en fonction de n, le module et l'argument de Vn. Déterminer n pour que (Vn) soit réel
2) Soit Kn et θ_n le module et l'argument de (Vn). Montrer que Kn et θ_n sont les termes généraux d'une suite géométrique et d'une suite arithmétique dont on précisera les raisons et les premiers termes.

Exercice 2

On considère le polynôme complexe $P(Z)$ défini par : $P(Z) = Z^3 + (1-3i)Z^2 - (5+2i)Z + 3i - 1$

1) Montrer que $P(Z) = 0$ admet une solution imaginaire pure Z_0 que l'on calculera
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z) = 0$. On notera Z_1 et Z_2 les autres solutions telles que $|Z_1| < |Z_2|$
3) Soit (U_n) la suite définie par :
   $\begin{cases} U_0 = Z_0 \\ U_{n+1} = (-3-2i)U_n + 4i - 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$
   a) Calculer U_1 et U_2
   b) On pose $V_n = U_n - \frac{2+9i}{10}$. Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme V_0
   c) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n

Exercice 3

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison $r = \frac{1}{2}$ et de premier terme$U_0 = -3$

1. Calculer U_{100} puis résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $U_n = 50$
2. Calculer $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_{24}$ et $S_n{}' = U_{25} + U_{26} + \cdots + U_{60}$

Exercice 4

(U_n) et (V_n) sont deux suites définies par :

$U_n = \frac{2V_n+1}{V_n+1}$ et $\begin{cases} V_0 = 1 \\ V_{n+1} = \frac{-3V_n-1}{2V_n} \end{cases}$

1. Montrer que (U_n) est une suite géométrique, préciser son premier terme et sa raison
2. Exprimer $U_n\ et\ V_n$ en fonction de n

Exercice 5

Trois nombres a, b, c sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite arithmétique ; cependant b, a, c sont dans ce nouvel ordre trois termes consécutifs d'une suite géométrique. Sachant que $a.b.c = 512$.

1) Déterminer ces trois nombres a, b et c
2) Déterminer r la raison de la suite arithmétique et q la raison de la suite géométrique

Exercice 6

Soit Z_1 ; Z_2 ; Z_3 trois nombres complexes tels que : $Z_1 = [r_1\,; \theta_1]$; $Z_2 = [r_2\,; \theta_2]$; $Z_3 = [r_3; \theta_3]$

Déterminer ces trois nombres tels que :

- ✓ Leurs arguments θ_1; θ_2; θ_3 pris dans cet ordre forment une progression arithmétique de raison $\frac{\pi}{2}$
- ✓ Leurs modules r_1; r_2; r_3 pris dans cet ordre forment une progression géométrique de raison 2
- ✓ Leurs produits $Z_1 \times Z_2 \times Z_3 = 4 + 4i\sqrt{3}$

Exercice 7

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q telle que : $U_1 - U_2 - U_3 = \frac{125}{8}$ et $\left(U_1 - \frac{5}{12}\right), U_2, U_3$ forment dans cet ordre une progression arithmétique

1) Déterminer $U_1\ et\ q$
2) Calculer U_{18} et $S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i$

Exercice 8

Soit une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme U_1. Déterminer q et U_1 sachant que $625U_{12} = 16U_8$ et $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$ avec $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n$

Exercice 9

Soit (U_n) une suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{1}{e}U_n + \frac{e-1}{2e} \end{cases} ; n\epsilon\mathbb{N}$$

1) Montrer par récurrence que $U_n \leq \frac{1}{2}$; en déduire que la suite (U_n) est croissante
2) On pose $V_n = U_n - \frac{1}{2}$. Donner la nature de la suite (V_n) ; préciser son premier terme et sa raison

Exercice 10

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies par : $\forall\, n \,\epsilon\, \mathbb{N}\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 2$ et $V_n = a.U_n - 6$; avec $a \,\epsilon\, \mathbb{R}^*$

1) Déterminer a pour que (V_n) soit une suite géométrique. En déduire sa raison et son premier terme. Cette suite est-elle croissante ?
2) Exprimer V_n *et* U_n en fonction de n
3) Calculer $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$ et $S'_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

Exercice 11

Soit la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = e \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n} \end{cases} ; n \in \mathbb{N}$$

1) On pose $\forall\, n \in\ \mathbb{N}$; $\mathrm{V_n} = \ln U_n$
   a) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) En déduire l'expression de V_n puis celle de U_n en fonction de n
2) Calculer le produit $P_n = U_0 \times U_1 \times \ldots \times U_n$ en fonction de n, puis la limite de P_n à $+\infty$

Exercice 12

Soit (U_n) une suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 3 \end{cases}$$

1) Montrer par récurrence que $(U_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est majorée par 6
2) Montrer que la suite (U_n) est décroissante
3) En déduire la convergence de la suite (U_n) vers une limite l puis calculer l
4) Soit $V_n = U_n - 6$
   a) Donner la nature de la suite (V_n)
   b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n
   c) Calculer $\lim_{n\to+\infty} V_n$
   d) Soit $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$ *et* $T_n = \sum_{i=0}^{n} U_i$ calculer S_n et T_n

Exercice 13 (Bac D 2003)

On définie la suite (U_n) par $U_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$;

$$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

1) a. Calculer U_1 ; U_2 ; U_3
   b. Prouver que $U_n = 2(1 - \frac{1}{2^{n+1}})$
   c. La suite (U_n) est-elle convergente ? Calculer $\lim_{n\to+\infty} U_n$
2) On pose $S_0 = 1$; $\forall n \in \mathbb{N}$,

$S_n = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n$

   a) Prouver que $\forall\, n \in \mathbb{N}$; $S_n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$
   b) La suite (S_n) est – elle convergente ? justifier.

Exercice 14 (Bac D 2006)

On considère la suite (U_n) ; n entier naturel, telle que : $U_0 = 1$ et $U_1 = 4$; $U_{n+1} = \frac{U_n + U_{n-1}}{2}$ $\forall\, n > 1$

Soit la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $V_n = U_{n+1} - U_n$

1) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme $\boldsymbol{V_0}$ et la raison $\boldsymbol{q}$.
2) Exprimer V_n en fonction de n.
3) Calculer $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_{n-1}$
4) Etudier la convergence de S_n
5) Exprimer le terme général U_n en fonction de n, puis calculer la limite de U_n à $+\infty$

Exercice 15 (Bac D 2007)

On considère la suite (V_n) de premier terme $V_0 = 3$, définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = \frac{-1+4V_n}{2+V_n}$

1. a) Démontrer en raisonnant par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ V_n \geq 1$
   b) Déduire que (V_n) est une suite décroissante
   c) Déduire que (V_n) est convergente puis calculer sa limite à $+\infty$

2. Soit (U_n) la suite définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $U_n = \frac{1+8V_n}{-1+V_n}$
   a) Calculer la limite de U_n à $+\infty$
   b) Démontrer que (U_n) est une suite arithmétique croissante
   c) Exprimer V_n en fonction de n

Exercice 16

Soit θ un réel tel que : $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. La suite (U_n) est définie par : $U_0 = 2cos\theta$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \sqrt{2+U_n}$

1. Calculer les trois premiers termes de (U_n) en fonction de θ
2. Montrer par récurrence que : $U_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$
3. Montrer que la suite (U_n) est convergente ; quelle est sa limite ?

Exercice 17

θ est un réel et $n \in \mathbb{N}$, on se propose de calculer les sommes suivantes : $C = 1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta$ et $S = \sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \cdots + \sin n\theta$. On pose $U = \cos\theta + i\sin\theta$

1) Montrer que : $C + iS = 1 + U + U^2 + \cdots + U^n$
2) Pour $\theta = 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$, montrer que $C = n+1$ et $S = 0$
3) On suppose que $\theta \neq 2k\pi$
   a) Calculer la somme $Z = U^0 + U^1 + \cdots + U^n$
   b) Montrer que $C + iS = \frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} . e^{in\frac{\theta}{2}}$
   c) En déduire C et S

Exercice 18

Soit la suite (U_n) définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 0\,;\ U_1 = 1 \\ U_{n+2} = \frac{2}{5}U_{n+1} + \frac{3}{5}U_n \end{cases}$$

1. On considère la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $V_n = U_{n+1} - U_n$
   a) Montrer que (V_n) est une suite géometrique dont on précisera la raison et le premier terme
   b) Donner l'expression de V_n et de U_n en fonction de n
   c) Déterminer la limite de V_n quand n tend vers $+\infty$
2. Soit (W_n) la suite définie par : $W_0 = 1$; $W_1 = e$; $W_{n+2} = \sqrt[5]{(W_{n+1})^2 \times (W_n)^3}$ (1)
   a) Montrer que la suite (T_n) définie par $T_n = \ln(W_n)$ vérifie la relation (1) ;
   b) En déduire la limite de T_n puis celle de W_n à $+\infty$

Exercice 19

On considère deux suites (X_n) et (Y_n)définies par : $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $X_0 = Y_0 = 2$ et
$$\begin{cases} X_n = \frac{Y_{n-1}}{4} \\ Y_n = \frac{3}{4}X_{n-1} + \frac{1}{2}Y_{n-1} \end{cases}$$

1. On pose (V_n) une suite définie par : $V_n = X_n + Y_n$
   a) Donner la nature de la suite (V_n)
   b) Démontrer que $X_n > 0$ et $Y_n > 0$
2. On donne la suite (U_n) telle que $U_n = \frac{X_n}{Y_n}$. Démontrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$; $U_{n+1} = \frac{1}{3U_n+2}$
3. On définie la suite (W_n) par : $W_n = \frac{U_n - \frac{1}{3}}{U_n+1}$. Donner la nature de (W_n) en précisant la raison et le premier terme

Exercice 20*

Soit (Z_n) la suite définie par :
$Z_n - Z_{n-1} = i(Z_{n-1} - Z_{n-2})$ $n \geq 2$; $Z_0 = 0$; $Z_1 = i$

1. Exprimer $Z_n - Z_{n-1}$ en fonction de n
2. Etablir que $Z_n = \frac{1-i}{2}(i^n - 1)$
3. Démontrer que (Z_n) est périodique puis représenter les images de Z_{100} ; Z_{101} ; Z_{102} ; Z_{103} dans un repère

Exercice 21 (Bac C 2015)

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1-x\ln x}{x}$. On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $I = \left[\frac{3}{2}\,;2\right]$.

Le but de cet exercice est de donner une valeur approchée de α.

Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

On définit la suite numérique (U_n) telle que :
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = g(U_n) \end{cases}$$

1) Sachant que $f(\alpha) = 0$, montre que α est solution de l'équation $g(x) = x$.
2) Montre par récurrence que pour tout entier n, $U_n \in I$.

3) On suppose que pour tout x de I, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
En appliquant le théorème de l'inégalité des accroissements finis, montre que :
$|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

4) a. Montre que : $\forall n \geq 0$,
$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$

b. En déduire que $\forall n \geq 0$, $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

c. Montre que la suite (U_n) converge vers α

5) a. Déterminer un entier n_0 tel que $|U_{n_0} - \alpha| \leq 10^{-1}$.

b. Détermine la valeur approchée U_{n_0} de α.

Exercice 22

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [3\,;4]$ par $f(x) = e^{1+\frac{1}{x}}$

1) Etudier les variations de f sur l'intervalle I
2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α telle que $3 \leq \alpha \leq 4$
3) a. Démontrer que pour tout x élément de I, $|f'(x)| \leq \frac{4}{9}$

b. Montrer en utilisant le théorème des accroissements finis que $\forall\, x \in I$, $|f(x) - \alpha| \leq \frac{4}{9}|x - \alpha|$

4) On considère la suite (U_n) définie par :
$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a. Montrer par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $3 \leq U_n \leq 4$

b. Montrer en utilisant le théorème des accroissements finis que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{9}|U_n - \alpha|$

c. En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$

d. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Problème 1

Partie A

Soit f la fonction définie par :
$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{x\ln x}{x+1}\,;si\ x > 0 \end{cases}$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0
2) Soit k la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $k(x) = \ln x + x + 1$

c. Etudier les variations de k

d. Démontrer que l'équation $k(x) = 0$ admet une solution unique telle que $0{,}27 \leq \beta \leq 0{,}28$

3) a. Exprimer $f'(x)$ en fonction de $k(x)$ et en déduire les variations de f (y compris le tableau de variations)

b. Vérifier que $f(\beta) = -\beta$

4) tracer la courbe (C) de la fonction f

Partie B

1) on définit la fonction h par $h(x) = f(x) - 1$

a. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\propto \in [3\,;4]$

b. Démontrer que les équations $h(x) = 0$ et $e^{1+\frac{1}{x}} = x$ sont équivalentes

2) a. Etudier les variations de la fonction g pour tout x positif au sens strict avec $g(x) = e^{1+\frac{1}{x}}$

b. Démontrer que $\forall x \in [3\,;4]$, $g(x) \in [3\,;4]$

c. Démontrer que $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$

3) Montrer que $|g(x) - \propto| \leq \frac{1}{2}|x - \propto|$

4) a. Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = g(U_n)$. Montrer $|U_{n+1} - \propto| \leq \frac{1}{2}|U_n - \propto|$

b. En déduire que $|U_n - \propto| \leq \frac{1}{2^n}$

c. Calculer $\lim U_n$

Problème 2 (Bac D 2014)

Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$, on considère la fonction g de la variable réelle x, définie par : $g(x) = \frac{e^x}{e^x+1} - x$.

1) Préciser l'ensemble de définition de g.
2) Déterminer $g'(x)$, la fonction dérivée de g puis en déduire son signe.
3) Dresser le tableau de variation de g.
4) Démontrer que l'équation $\frac{e^x}{e^x+1} = x$ admet une solution unique $\propto \in\,]-\infty\,;\,+\infty[$.
5) Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$. Unité graphique $2\ cm$.

a. Montrer que pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $h'(x) > 0$

b. Dresser le tableau de variation de h.

c. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq h(x) \leq 1$.

6) On définit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = h(U_n) \end{cases}$

a. Démontrer en utilisant le raisonnement par récurrence que (U_n) est majorée par 1.

b. Démontrer en utilisant le raisonnement par récurrence que (U_n) est croissante

c. En déduire la convergence de (U_n), puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \propto$

Problème 3 **(Bac C 2020)**

On considère la fonction numérique f sur $]0\,;+\infty[$ [par : $f(x) = \frac{x^2-1}{4} - 2lnx$.

1) a. Calculer la dérivée f' de f.
   b. Étudier le sens de variation de f.
   c. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\propto \in [3;\ 4]$.
2) Soit g la fonction définie sur $[3; +\infty[$ par : $g(x) = \sqrt{1+8lnx}$.
   a. Montrer que les équations $f(x) = 0$ et $g(x) = x$ sont équivalentes sur l'intervalle $[3; +\infty[$.
   b. On suppose que : $\forall\, x \in [3\,;\ 4]$, $g(x) \in [3\,;\ 4]$ et $|g'(x)| \leq \frac{4}{9}$. Montrer que $\forall\, x \in [3\,;\ 4]$, $|g'(x) - \propto| \leq \frac{4}{9}|x - \propto|$.
3) On considère la suite numérique (U_n) définie par $U_0 = 3$ et $\forall\, x \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = g(U_n)$.
4) a. Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{N}$, $U_n \in [3\,;\ 4]$.
   b. Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \propto| \leq \frac{4}{9}|U_n - \propto|$
   c. En déduire que $\forall\, x \in \mathbb{N}$, $|U_n - \propto| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$
   d. Montrer que la suite U_n converge vers le réel $\propto$.
   e. Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que U_{n_0} soit une valeur approchée de $\propto$ à 10^{-2} près.

Problème 4 **(Bac Blanc D zone 1)**

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \ln(x+1) - \frac{1}{1+x} & ;\quad si\ x \geq 0 \\ f(x) = e^{\frac{1}{x}} - 1 & ;\quad si\ x < 0 \end{cases}$$

On note par (C_f) sa courbe représentative rapporté au repère orthonormé $(0; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ dierect. Unité $2\ cm$

Partie A

1) Préciser l'ensemble de définition de f
2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 0$
3) Dresser le tableau de variation de f
4) Calculer $f(\frac{1}{2})$ et $f(1)$. En déduire que (C_f) coupe l'axe (ox) en un point unique d'abscisse x_1 / $x_1 \in \left]\frac{1}{2}; 1\right[$
5) a) Démontrer que la courbe (C_f) admet la courbe (H) d'équation $y = ln(x+1)$ comme courbe asymptote
   b) tracer les courbes (C_f) et (H) dans le repère

Partie B

Soit g la fonction définie par : $g(x) = -f(x)$ pour $x \geq 0$.

1) Déduire de la partie A, la construction de la courbe (C_g) et dresser son tableau de variation
2) On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = g(e^n - 1)$
   a) Démontrer que $U_n = e^{-n} - n$
   b) Exprimer $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ en fonction de n
   c) En déduire la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$

PRIMITIVES ET INTEGRALES

Exercice 1

Donner les primitives des fonctions suivantes

$f(x) = x^5 - 5x^4 + 3x^2 - 2$;

$g(x) = 2\cos\left(-x + \frac{\pi}{3}\right)$; $h(x) = \ln(3x - 1)$;

$i(x) = \sqrt{2x + 3}$; $j(x) = e^{-2x+1}$

Exercice 2

A. calculer les intégrales suivantes

$I_1 = \int_0^1 2x\sqrt{1 + x^2}dx$; $I_2 = \int_{-1}^1 x^5\sqrt{x^2 + 1}.dx$

$I_3 = \int_0^1 x^4.3^{x^5}$; $I_4 = \int_0^1 \frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$;

$I_5 = \int_1^e \frac{lnx}{x}dx$; $I_6 = \int_e^{e^2} \frac{1}{xlnx}dx$;

$I_7 = \int_1^3 \frac{2|x-2|}{(x^2-4x)^2}dx$;

$I_8 = \int_0^1 \frac{e^x+2}{(e^x+2x-e)^3}dx$; $I_9 = \int_0^1 \frac{3x^4+3}{(x^5+5x+2)^2}dx$

B. Calculer chacune des intégrales suivantes au moyen du changement de variable indiqué

$I_{10} = \int_{-1}^0 \frac{e^x}{e^x+1}dx$ Poser $x = lnt$;

$I_{11} = \int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$ Poser $x = t^2$

$I_{12} = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$ $(a > 0)$ Poser $x = asint$

Exercice 3

1) Déterminer les réels a et b tels que $\frac{1}{x(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+2}$ Puis calculer $I = \int_1^2 \frac{dx}{x(x+2)}$
2) Calculer $J = \int_0^{\pi/4} \frac{tanx}{2+cosx}dx$
3) Vérifier que $x^2 - 1 = \frac{(2x-1)(2x+1)-3}{4}$. Calculer $K = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{cos^3x}{1-2sinx}dx$

Exercice 4

Soit f une fonction définie par : $f(x) = e^{-x}\ln(1 + e^x)$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f
2) On pose : $F(\propto) = \int_0^{\propto} f(x)\,dx$
   a) Quel est le signe de $F(\propto)$
   b) Déterminer les réels a et b tels que, $\forall x$; $\frac{e^x}{1+e^x} = a + \frac{b}{1+e^x}$ en déduire le calcul de $A = \int_0^{\propto} \frac{1}{1+e^x}dx$
   c) Calculer $f + f'$; où f' est la dérivée de f
   d) Calculer $F(\propto)$

Exercice 5

1) Déterminer deux nombres réels a et b tels que $\forall\, x \in \mathbb{R} - \{0\}$; $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx}{x^2+1}$
2) Soit $I(\propto) = \int_1^{\propto} \frac{2xlnx}{(x^2+1)^2}dx$ où $\propto > 0$
   a) Calculer $I(\propto)$ par une intégration par parties
   b) Comparer $I(\propto)$ et $I\left(\frac{1}{\propto}\right)$
3) En déduire les limites éventuelles de $I(\propto)$ quand $\propto \longrightarrow +\infty$; $quand\ \propto \longrightarrow 0^+$

Exercice 6

On donne $I = \int_0^{\pi/4}(2x + 1)cos^2x.dx$ et $J = \int_0^{\pi/4}(2x + 1)sin^2x.dx$

1) Calculer $I + J$ et $I - J$
2) En déduire $I\ et\ J$

Exercice 7

On considère l'intégrale $I_n = \int_0^{\pi/2}(cosx)^{2n+1}dx$; $n \in \mathbb{N}$

1) Justifier l'existence de I_n et montrer que $I_n\ est$ positive
2) Calculer I_0 et I_1
3) a) Par une intégration par parties, montrer que : $I_n = \frac{2n}{2n+1}.I_{n-1}$; $n \in \mathbb{N}^*$
   $b)$ Calculer I_2 et I_3
4) calculer $A = \int_0^{\pi/2}(-6cosx + 3cos^3x + 15cos^5x + 35cos^7x)dx$

Exercice 8

On considère la suite (U_n) définie par : $U_n = \int_0^e t(lnt)^n.dt\ \forall n \in \mathbb{N}$

1) démontrer que la suite (U_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$
2) calculer U_0
3) démontrer que : $U_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2}U_n$. En déduire U_1 ; U_2 et U_3

Exercice 9

Soit les intégrales $I = \int_0^\pi cos4x\, dx$ et $J = \int_0^\pi sin4x\, dx$

1. Montrer que :

a) I peut s'écrire

$$I = \int_0^\pi cosx(cosx - cosx.sin^2x)\, dx$$

b) Par une intégration par partie : $J = \int_0^\pi sin4x\, .dx - \frac{1}{3}I$ et $I = \int_0^\pi cos^2x.dx - \frac{1}{3}J$

2. Montrer que $I + J = \frac{3\pi}{4}$ et que $I - J = 0$. En déduire $I\ et\ J$

Exercice 10 (Bac C 2011)

On pose $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, cos^2\, x\, dx$, $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, sin^2\, xdx$.

1) Calculer $A + B$.
2) Calculer $A - B$ à l'aide d'une intégration par parties.
3) Déduire des questions 1. et 2, les valeurs de A et B.

Exercice 11 (Bac C 2012)

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la suite (I_n) définie par : $I_n = \int_0^1 x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

1) Calculer I_1.
2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n \geq 0$.
3) Par une intégration par parties, montrer que$I_n = -e^{-\frac{1}{2}} + (n-1)I_{n-2}$ (On pourra écrire $x^n = x^{n-1}.x$).
4) Étudier le sens de variation de la suite (I_n). En déduire que la suite (I_n) est convergente et converge vers une limite l.
5) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. Calculer l.

Exercice 12

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2-7x+10}{(x+1)^2}$

1) Trouver les réels a, b et c tels que $f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$
2) Etudier les variations de f puis construire sa courbe dans le repère $(0\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$
3) On considère la fonction F définie par : $F(x) = \int_0^x f(t)dt$
   a. Exprimer $F(x)$ en fonction de x
   b. Etudier le sens de variation de F et donner son tableau de variation
4) Calculer l'air de la partie $(\mathcal{D})$ du plan limité par $(\mathcal{C}_f)$, la droite $(o\vec{\imath})$ et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 5$

Exercice 13

1) Calculer l'intégrale $I_1 = \int_2^3 \frac{x^2}{(x-1)(x+2)(x+1)} dx$ sachant que la fraction rationnelle peut s'écrire sous la forme : $\frac{x^2}{(x-1)(x+2)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+1}$
2) Déterminer les primitives : $I_2 = \int \frac{dx}{(x+1)^2(x-2)}$ on cherchera à décomposer la fraction rationnelle sous la forme : $\frac{1}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$

Exercice 14 (Bac C 2014)

Soit la fonction f_n définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = e^{-x}x^{n+1}$ où $n \in \mathbb{N}$

1) Déterminer l'ensemble de définition E_{f_n} de f_n.
2) On suppose que n est impair.
   a. Calculer la dérivée de f_n et étudier le signe de cette dérivée.
   b. Calculer les limites de f_n aux bornes de E_{f_n}.
   c. Dresser le tableau de variation de f_n.
3) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_{n,p} = \int_0^p f_n(x)dx$ et $J_n = \lim_{p\to+\infty} I_{n,p}$
   a. En intégrant $I_{n,p}$ par parties, montrer que $J_{n+1} = (n + 2)J_n$.
   b. En déduire l'expression de J_n en fonction de n et J_0.

Exercice 15 (Bac C 1999)

On considère les intégrales suivantes :

$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} sin^2x.cos^4x.dx$ et $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^2x.sin^4x.dx$

Calculer successivement : $I + K$, $I - K$, I et K

Problème 1 (Bac D 2010)

Partie A

Soit g la fonction de la variable réelle x définie sur $]-\infty\,;0[$ par : $g(x) = 2\,ln\,(-x)$.

1) Étudier les variations de g, puis dresser son tableau de variation.
2) Calculer $g(-1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur $]-\infty\,;0[$.

Partie B

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 + 2x\ln|x| & ; si\ x < 0 \\ (x+2)e^{-x} - 1 & ; si\ \geq 0 \end{cases}$$

On désigne par (C), la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ d'unité graphique : $1\ cm$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2) a. Étudier la continuité et la dérivabilité de f au point $x = 0$.
   b. Pour $x \in]-\infty\,;0[$, exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.
3) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
4) Montrer que qu'il existe deux solutions et deux seulement $\propto$ et β de l'équation $f(x) = 0$ vérifiant les inégalités suivantes : $1 <\propto< \frac{3}{2}$ et $-4 < \beta < -3$ (on ne cherchera pas à calculer $\propto$ et β)
5) Étudier les branches infinies à $(C\ )$.
6) Tracer la courbe (C).
7) $\propto$ désigne le réel tel que : $1 <\propto< \frac{3}{2}$.
   a. Calculer l'aire $\mathcal{A}(\propto)$ de l'ensemble des points M des coordonnées $(x\,;\,y)$ tels que : $\begin{cases} 0 \leq x \leq \propto \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$
   b. Calculer la limite de $\mathcal{A}(\propto)$ lorsque $\propto$ tend vers 0.

Partie C

Soit h la restriction de f à l'intervalle $I =]-\infty\,;-1[$

1) Montrer que h définit une bijection de I vers un intervalle J à déterminer. On note h^{-1} la réciproque de h.
2) Dresser le tableau de variation de h^{-1}.
3) Tracer $(\mathcal{H})$ la courbe représentative de h^{-1} dans le même repère que (C).

<u>Problème 2</u> (Bac D 2015)

On considère la fonction numérique f à variable réelle x, définie telle que $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$. $(\mathcal{C})$ désigne la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ du plan.

1) Montrer que f est définie sur $]0\,;1[\ \cup]1\,;+\infty[$.
2) Vérifier que la dérivée f' de f est $f'(x) = \frac{-1-\ln x}{(x\ln x)^2}$.
3) a. Étudier le signe de f'.
   b. Dresser le tableau de variation de f.
   c. Étudier les branches infinies à $(\mathcal{C})$.
   d. Tracer $(\mathcal{C})$.
4) a. Montrer que f peut encore s'écrire $f(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$.
   b. Calculer l'intégrale $I = \int_e^3 f(x)dx$.
   c. En déduire l'aire $\mathcal{A}$ du domaine du plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$ de f, l'axe (Ox) des abscisses et les droites d'équations $x = e$ et $x = 3$. Unité graphique : $2\ cm$.

<u>Problème 3</u> (Bac D 2013)

Partie A

Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$g(x) = 1 - x^2 - \ln x$

1) Étudier les variations de g, puis dresser son tableau de variation.
2) Calculer $g(1)$, puis en déduire le signe de g sur $]0\,;+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x - e^{1-x} & ; si\ x \leq 1 \\ \frac{2x - x^2 + \ln x}{x} & ; si\ x > 1 \end{cases}$$

On désigne par $(\mathcal{C})$, la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ du plan d'unité graphique : $2\ cm$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2) a. Etudier la continuité et la dérivabilité de f au point $x = 1$.
   b. Pour $x \in]1\,;+\infty[$, exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.
3) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
4) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y\ =\ 2 - x$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ de la fonction f et étudier la position de la droite (Δ) par rapport à cette courbe.
5) Ecrire l'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ de f en $x = 0$.
6) Etudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C})$ de la fonction f.
7) Construire dans le même repère, la courbe $(\mathcal{C})$ de f, la droite (Δ) et la tangente (T).

8) Calculer l'aire $\mathcal{A}(D)$ du domaine du plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (Δ) et les axes $x = \frac{3}{2}$ et $x = e$.

On prendra $ln2 = 0,7$; $e = 2,7$.

<u>Problème 4</u> (Bac D 2011)

Partie A

1) Montrer qu'il existe deux nombres réels a et b tels que : $\forall t \in \mathbb{R} - \{-1\}, \frac{1-t}{1+t} = a + \frac{b}{1+t}$
2) Calculer $\int_0^x \frac{1-t}{1+t} dt$

Partie B

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :
$f(x) = -x + ln(x+1)^2$ où ln désigne le logarithme népérien

1) Donner l'ensemble de définition E_f de f.
2) Déterminer les variations de f.
3) Dresser le tableau de variation de f.
4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\propto$ dans l'intervalle $]2\,;\,3[$.
5) Calculer $f(x)$ et $f'(x)$ pour les valeurs de x suivantes : -2 ; $-\frac{3}{2}$; 0 ; 5.
6) Etudier les branches infinies à $(\mathcal{C})$, courbe représentative de f.
7) Tracer la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de f dans un plan $(\mathcal{P})$ muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ d'unité graphique $1\ cm$, ainsi que les tangentes à cette courbe aux points d'abscisses -2 et 0.

Partie C

Soit h, la fonction définie par $h(x) = -f(x)$ pour tout $x \in]1\,;\,+\infty[$.

1) Dresser le tableau de variation de h.
2) Tracer $(\mathcal{C}')$ la courbe de la fonction h dans le même repère que $(\mathcal{C})$.

<u>Problème 5</u> (Bac D 2016)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ d'unité graphique $1\ cm$, on considère la fonction f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$. On note $(\mathcal{C})$, la courbe de f dans le plan.

1) Calculer les limites de f en 0 à droite et en $+\infty$.
2) Déduire que la fonction f admet deux asymptotes que l'on précisera.
3) a. Montrer que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}_+^*$, on a $f'(x) = -\frac{e^x}{(e^x-1)^2}$.
   b. Donner le sens de variation de f.
   c. Dresser son tableau de variation.
4) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ ainsi que ses asymptotes.
5) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = -f(x)$. Construire la courbe $(\mathcal{C}')$ de g dans le même repère que $(\mathcal{C})$.
6) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la portion du plan délimitée par les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

<u>Problème 6</u> (Bac D 2018)

Soit la fonction numérique f à variable réelle x, définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{lnx}{-1+ln} & ;\ si\ x > 0 \\ e^{-2x} & ;\ si\ x \leq 0 \end{cases}$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ d'unité graphique : $2\ cm$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Vérifier que la fonction f est continue en $x = 0$.
3) Étudier la dérivabilité de f en $x = 0$.
4) a. Déterminer la fonction dérivée f' de f.
   b. Dresser le tableau de variation de f.
5) a. Préciser les branches infinies à la courbe $(\mathcal{C})$ de f.
   b. Tracer $(\mathcal{C})$.
6) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine limité par la courbe $(\mathcal{C})$ de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$; $x = 0$.

<u>Problème 7</u> (Bac D 2019)

Partie I

Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \frac{1}{x}$ et $(\mathcal{C}')$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$, d'unité graphique : $2\ cm$.

1) Calculer la dérivée $g'(x)$ et donner son signe sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Sachant que $\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} g(x) = 0$, dresser le tableau de variation de g.

Partie II

Dans le même repère défini dans la partie I, on considère la courbe $(\mathcal{C})$ représentative de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$f(x) = \frac{lnx}{x} + \frac{1}{x}$.

1) a. Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $f(x) = g(x)$.
   b. En déduire la position relative des courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.
2) a. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
3) b. Montrer que $f'(x) = \frac{-lnx}{x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier son signe pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
4) c. Établir le tableau de variation de f.
5) En remarquant que les axes de coordonnées sont asymptotes aux courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$, tracer soigneusement ces deux courbes dans le repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ donné.

Partie III

On note h et k les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h(x) = \frac{1}{2}(lnx)^2$ et $k(x) = f(x) - g(x)$.

1) Démontrer que h est une primitive de k sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Calculer en cm^2, l'aire $\mathcal{A}$ de la portion du plan comprise entre les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

<u>Problème 8</u> (Bac D 2021)

f est une fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = (ln\,x)^2$. $(\mathcal{C})$ est sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$. Unité graphique : $2\ cm$.

Partie A

1) f' désignant la fonction dérivée de f, montrer que $f(x) = \frac{2lnx}{x}$.
2) Etudier le signe de $f'(x)$.
3) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.
4) Dresser le tableau de variation de f.
5) Montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, puis interpréter.
6) Construire $(\mathcal{C})$.

Partie B

Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = -f(x)$ et $(\mathcal{C}')$ sa courbe représentative dans le repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

1) Comment peut-on déduire $(\mathcal{C}')$ de $(\mathcal{C})$?
2) Sans étudier g, dresser son tableau de variation.
3) Construire $(\mathcal{C})$ dans le même repère que $(\mathcal{C})$.

Partie C

On désigne par H la fonction définie par $H(x) = x(lnx)^2 - 2xlnx + 2x$.

1) Montrer que H est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.
2) Calculer en cm^2, l'aire de la portion du plan délimitée par les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$.

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

<u>Exercice 1</u>

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

a) $y' + 3y = 0$
b) $y' - y = 0$ avec $y(0) = 2$
c) $y'' - cosx = 0$
d) $y'' = e^{-3x}$ avec $y(0) = \frac{10}{3}$; $y'(0) = \frac{5}{3}$
e) $y'' - y' = 0$ avec $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$
f) $y'' - 4y' + 3y = 0$.
g) $y'' + 4y' + 4y = 0$.
h) $y'' - 2y' + 5y = 0$

<u>Exercice 2</u>

A. Déterminer la solution particulière f de l'équation $y'' - 4y' + 4y = 0$ avec : $f(0) = \frac{1}{2}$; $f'(0) = \frac{1}{2}$

B. Trouver la solution particulière g de l'équation $y'' + 2y' + 10y = 0$ dont la courbe $(\mathcal{C}_g)$ passe par le point $O(0\,;0)$ et admet au point d'abscisse $x = \frac{\pi}{6}$ une tangente de pente égale à $e^{-\pi/6}$

<u>Exercice 3</u>

Soit l'équation différentielle

$(E) : my'' + ny' + \frac{1}{4}y = 0$ où m et n

représentent respectivement la partie réelle et imaginaire du nombre complexe Z de module $\sqrt{2}$ et dont un argument $\frac{7\pi}{4}\,[2\pi]$

1) Déterminer m et n
2) Résoudre l'équation (E)

3) Déterminer la solution particulière dont la courbe passe par $A(0\,;1)$ et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Exercice 4

Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle $2y'' + y' + y = 0$ dont la courbe de f passe par l'origine du repère et admet en ce point une tangente perpendiculaire à la droite $y = -x + 2$

Exercice 5

Déterminer la solution particulière de l'équation différentielle $y'' - 6y' + 8y = 0$ dont la courbe représentative passe par le point $A(0\,;k)$ et admet en ce point une tangente d'équation $y = mx + k$

Exercice 6

On considère l'équation différentielle (E) de paramètre réel a telle que $(E) :\ a^2y'' + (a-1)y' + y = 0$

1) Pour quelles valeurs de a l'équation (E) admet – elle une solution de la forme : $y = C_1.e^{\propto x} + C_2.e^{\beta x}$
2) a) Résoudre l'équation (E) pour $a = 1$
   b) Trouver la solution particulière $f(x)$ dont la courbe (C_f) admet en $A(\pi\,; -1)$ une tangente (T) parallèle à la droite $(\mathfrak{D}): y = x + 2$
   c) Ecrire $f(x)$ sous la forme : $f(x) = K.cos(\omega x + \varphi)$ où K ; ω et φ sont des réels à déterminer.

Exercice 7

On considère l'équation $(E) : y'' + y' + y = cosx$

1) Déterminer les réels A et B tels que la fonction g définie par $g(x) = Acosx + Bsinx$ soit solution de (E)
2) On note $h = f - g$. Démontrer que f est solution de (E), si et seulement si h est solution de $(\Gamma) :\ y'' + y' + y = 0$
3) Résoudre l'équation différentielle (Γ). En déduire la solution particulière de l'équation (E)

Exercice 8

On considère l'équation différentielle suivante : $(E_1) :\ y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 4x - 1$

1) Résoudre l'équation $(E_2) :\ y'' - 3y' + 2y = 0$
2) Soit P le polynôme définie par : $P(x) = ax^2 + bx + c$. Déterminer les réels $a\,;\ b\ et\ c$ pour que P soit solution de (E_1)
3) En déduire la solution générale h de (E_1)
4) Trouver la solution h telle que $f(0) = 4\ \ et\ \ f'(0) = 1$

Exercice 9

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $\boldsymbol{y' - 4y = \cos(3x + \frac{\pi}{3})}$; $\boldsymbol{y(0) = 0}$
2) $\boldsymbol{2y' + 4y = (x^2 + x + 1)e^{-x}}$; $\boldsymbol{y(0) = 2}$
3) $\boldsymbol{y' - y = (x^2 + 1)e^{x}}$
4) $\boldsymbol{y' + y = \frac{1}{x}e^{-x}}$; $\boldsymbol{y(1) = 2}$
5) $\boldsymbol{y'' + y = cosx}$
6) $\boldsymbol{y'' + 4y + \sin(2x) = 0}$; $\boldsymbol{y(\pi) = 1}$; $\boldsymbol{y'(\pi) = 1}$
7) $\boldsymbol{y'' + y' + y = x^2 + x + 1}$
8) $\boldsymbol{y'' + 2y' + y = 2e^{-x}}$; $\boldsymbol{y(0) = 3}$; $\boldsymbol{y'(0) = 1}$
9) $\boldsymbol{y'' - 4y = (2x + 3)e^{x}}$
10) $\boldsymbol{y'' - 2y' + y = e^{x}}$; $\boldsymbol{y(0) = 2}$; $\boldsymbol{y'(0) = -1}$
11) $\boldsymbol{y'' + 2ny' + n^2y = (x + 1)e^{-nx}}$
12) $\boldsymbol{y'' + y' = x + \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})}$
13) $\boldsymbol{y'' + 2y' + 5y = e^{-x}(2\cos 2x - 3\sin 2x)}$
14) $\boldsymbol{y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{1 + x^2}}$

Exercice 10 (Bac C 2016)

1) Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle : $(E) : y'' + 2y' + 2y = 0$ vérifiant les conditions initiales suivantes : $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}}$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -e^{-\frac{\pi}{2}}$.
2) On pose $f(x) = e^{-x}sinx$
   a. Déterminer les réels A et B pour que $F(x) = e^{-x}(Acosx + Bsinx)$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   b. Calculer l'intégrale $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)dx$
3) Soit (v_n) la suite numérique définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \frac{e^{-\pi}+1}{2}(-e^{-\pi})^n$, $n \in \mathbb{N}$
   a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. Calculer la somme des termes $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ en fonction de n, puis en déduire la limite de S_n en $+\infty$.

Exercice 11 (Bac C 2019)

1) Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + 3y' + 2y = 0$.
2) Déterminer la solution particulière h de (E) qui admet en $x = 0$ un extremum égal à 1.
3) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -e^{-2x} + 2e^{-x}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.
   a. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
   b. Déterminer la dérivée f' de f.
   c. Étudier le sens de variation de f.
   d. Dresser le tableau de variation de f.
   e. Trouver le point d'intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses.
   f. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$.
   g. Tracer (C).

Problème (Bac C 2010)

Partie A

1) Résoudre dans R l'équation différentielle $y'' + \pi^2 y = 0$.
2) Déterminer la solution particulière g vérifiant $g(0) = 0$ et $g'(0) = 2\pi$.

Partie B

On considère la fonction numérique f à variable réelle x définie par :
$f(x) = \begin{cases} 2\sin\pi x \ ; \ si -4 \le x \le 0 \\ x^2\left(\frac{1}{2} - \ln x\right) \ ; \ si\ x > 0 \end{cases}$; $(\mathcal{C})$ désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ d'unité graphique $2\ cm$.

3) a. Déterminer l'ensemble de définition E_f de f
   b. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x = 0$.
   c. Montrer que l'étude de f peut être réduite sur l'intervalle $I = [-2\ ;\ +\infty[$.
4) a. Étudier les variations de f sur I. On dressera un tableau résumant les variations de f.
   b. Étudier la branche infinie de $(\mathcal{C})$ et tracer $(\mathcal{C})$ sur son ensemble de définition.
5) Calculer l'aire $\mathcal{A}_0$ du domaine plan (D) limité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe (Ox) des abscisses et les droites d'équations $x = 1$, $x = \sqrt{e}$.

Partie C (Uniquement série C)

6) Soit S la similitude plane directe de centre O, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Pour $x > 0$, construire l'image $(\mathcal{C}')$ de $(\mathcal{C})$ par S.
7) On définit la suite $(\mathcal{D}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} \mathcal{D}_0 = \mathcal{D} \\ \mathcal{D}_{n+1} = S(\mathcal{D}_n) \end{cases}$
   a. Exprimer l'aire $\mathcal{A}_n$ du domaine (D_n) en fonction de n et $\mathcal{A}_0$.
   b. Exprimer la somme $S_n = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 \ldots + \mathcal{A}_n$ en fonction de n et $\mathcal{A}_0$
   c. Calculer la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$

ESPACE VECTORIEL

Exercice 1

Soit $E\ et\ F$ deux sous ensembles de $\mathbb{R}^2$ tels que

$E = \left\{\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / \ x + y = 0\right\}$

$F = \left\{\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / \ x - y = 0\right\}$

1) Montrer que $E\ et\ F$ sont deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$
2) Montrer que $E\ et\ F$ sont supplémentaires

Exercice 2 (Bac D 2008)

E est un espace vectoriel de base $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$.On considère l'endomorphisme f qui à tout vecteur $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ associe le vecteur $\vec{u}' = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$ tel que : $\begin{cases} x' = 5x - 4y \\ y' = 6x - 5y \end{cases}$

1) Démontrer que f est une symétrie vectorielle
2) Déterminer sa base E_1 et sa direction E_2
3) Soit $\vec{u} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$

a) Démontrer que $B = \{\vec{u}\ ;\ \vec{v}\}$ est une base de E
b) Déterminer la matrice M de f dans la base B

Exercice 3 **(Bac D 2009)**

Le plan vectoriel $(\vec{P})$ est rapporté à une base $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$. Soit f un endomorphisme de $(\vec{P})$ qui à tout Vecteur $\vec{u}(x,y)$ associe $\vec{u}'(x';y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \\ y' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y \end{cases}$$

1) Démonter que f est une symétrie vectorielle.
2) Déterminer sa base (ensemble des vecteurs invariants)
3) Déterminer sa direction (ensemble des vecteurs transformés en leurs opposés)

Exercice 4 **(BAC D 2007)**

E est un espace vectoriel de base $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$. On considère les sous-espaces vectoriels H et G de E tels que : $H = \{(x,y) \in E/\ 2x - y = 0\}$ et $G = \{(x,y) \in E/\ x + 3y = 0\}$

1) **a)** Démontrer que les vecteurs $\vec{u}_1 = 3\vec{\imath} + 6\vec{\jmath}$ et $\vec{v}_1 = -3\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ sont respectivement dans H et dans G

   b) Démontrer que $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{v}_1\}$ est une base de E

2) Soit f l'endomorphisme de E tel que : $\forall \vec{u} \in H,\ f(\vec{u}) = \vec{u}$ et $\forall \vec{v} \in G,\ f(\vec{v}) = \vec{0}$
   a) Démontrer que G est le noyau de f
   b) Soit $\vec{w} = 2\vec{u}_1 + 3\vec{v}_1$. Déterminer le vecteur $f \circ f \circ f(\vec{w})$
3) On considère le vecteur $\vec{w}_n = 2^n\vec{u}_1 + n\vec{v}_1$ où $n \in \mathbb{N}^*$
   a) Déterminer en fonction de n les coordonnées du vecteur $\vec{S}_n = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \cdots + \vec{w}_n$ dans B_1
   b) Démontrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $f(\vec{S}_n) = -2(1 - 2^n)\vec{u}_1$

Exercice 5 **(Bac D 2006)**

On définie une application d'un plan (P) dans lui-même par : $\begin{cases} f(\vec{\imath}) = \frac{1}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath} \\ f(\vec{\jmath}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath} - \frac{1}{2}\vec{\jmath} \end{cases}$ où $B = (\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ est une base orthonormée de (P)

1) Ecrire la matrice M de l'application f dans la base B
2) Montrer que f est un endomorphisme bijectif
3) Déterminer l'ensemble F défini par $F = \{\vec{u} \in / f(\vec{u}) = \vec{u}\}$
4) Quelle est la nature de f ?
5) Déterminer complètement Ker$f$ et Imf

Exercice 6 **(Bac D 2005)**

Dans le plan vectoriel E de base $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$. On considère les droites vectorielles F et G engendrées respectivement par les vecteurs $\vec{u} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$

1) Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E
2) Soit f l'endomorphisme de E tel que $f(\vec{u}) = \vec{u}$ et $f(\vec{v}) = -\vec{v}$. Déterminer la matrice de f dans la base $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$
3) a) Déterminer $f \circ f$. Quelle est la nature de f ?
   b) En déduire les éléments caractéristiques de f

Exercice 7 **(Bac D 2004)**

Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$, on considère l'endomorphisme f défini par son expression analytique relativement à la base $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ par : $\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \\ y' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \end{cases}$

1) Ecrire la matrice de f puis montrer que f est une symétrie vectorielle
2) On note par E la base de f et par F la direction de f. Montrer que E et F sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^2$
3) Soit $\vec{e}_1$ une base de E et $\vec{e}_2$ une base de F. montrer que $(\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ puis écrire la matrice de f dans la base $(\vec{e}_1;\vec{e}_2)$

Exercice 8 **(Bac Blanc D 2005 zone 1)**

On désigne le plan vectoriel de base $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ et f l'endomorphisme de E tel que :

$\begin{cases} f_a(\vec{\imath}) = (a-1)\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} \\ f_a(\vec{\jmath}) = a\vec{\imath} - a\vec{\jmath} \end{cases}$ a désigne un paramètre réel.

1) Déterminer la matrice M de f_a dans la base $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$
2) Pour quelles valeurs de a f_a est bijectif ?

3) On pose $a = -1$

a) Déterminer le noyau de f_{-1} ainsi qu'une base $\vec{e}_1$

b) Déterminer l'image de f_{-1} ainsi qu'une base $\vec{e}_2$

c) Démontrer que $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ est une base de E

d) Donner la matrice de f_{-1} dans la base $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$

Exercice 9 (Bac D 2017)

Soit $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$une base du plan vectoriel E, f désigne l'endomorphisme de E tel que : $\begin{cases} 5f(\vec{\imath}) = a\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} \\ f(\vec{\jmath}) = \frac{4}{5}\vec{\imath} - \frac{3}{5}\vec{\jmath} \end{cases}$

1) Déterminer la matrice de f dans la base $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$
2) Déterminer l'expression analytique de f
3) Déterminer le réel a pour que f soit une symétrie vectorielle
4) On pose : $a = 3$

a) Déterminer les éléments caractéristiques de f (base et direction)

b) Déterminer un vecteur directeur $(\vec{e}_1)$ de la base

c) Déterminer un vecteur directeur $(\vec{e}_2)$ de la direction

d) Soit $\vec{e}_1 = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\vec{e}_2 = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ deux vecteurs, démontrer que $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$

e) Donner la matrice de f relativement à la base $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$

Exercice 10 (Bac Blanc D 2010 zone 1)

E est un espace vectoriel de base canonique $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$. Soit f l'endomorphisme de E défini par : $f(\vec{\imath}) = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$ et $f(\vec{\jmath}) = -3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$

1) Démontrer que f est une bijection de E
2) Déterminer les valeurs du réel λ tels que $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$ où $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ est un vecteur de E
3) H et G sont deux sous-ensembles de E tels que : $H = \{\vec{u} \in E \,/\, f(\vec{u}) = -\vec{u}\}$ et G= $\{\vec{u} \in E \,/\, f(\vec{u}) = 4\vec{u}\}$

a) Montrer que H est une droite vectorielle et en donner une base $(\vec{e}_1)$

b) Montrer que G est une droite vectorielle et en donner une base $(\vec{e}_2)$

c) Montrer que la famille $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ est une base de E

d) Ecrire la matrice de f dans la base $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$

Exercice 11 (Bac D 1995)

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $\vec{u}_1(1\,;\,1\,;0\,;0)$; $\vec{u}_2(0\,;\,1\,;1\,;0)$ et $\vec{u}_3(0\,;\,0\,;1\,;1)$

1) Montrer que la famille $F = \{\vec{u}_1\,;\,\vec{u}_2\,;\,\vec{u}_3\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^4$
2) Soit $\vec{v}(x\,;y\,;z\,;t)$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$. On suppose que $\vec{v}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1$; $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ de F. Trouver donc une relation entre x, y, z et t
3) a) Soit le vecteur $\vec{w}(1\,;\,-1\,;1\,;3) \in \mathbb{R}^4$. Déduire de la relation obtenue au 2) que $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$

b) Déterminer les réels a ; b ; c tels que l'on ait $\vec{w} = a\vec{u}_1 + b\,\vec{u}_2 + c\,\vec{u}_3$

Exercice 12

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ on considère les vecteurs $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$; $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$; $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix}a\\2\\-a^2\end{pmatrix}$ où a est un réel.

1) Montrer que $(\vec{v}_1\,;\,\vec{v}_2)$ est une famille libre
2) Déterminer les valeurs de a pour que le vecteur $\vec{v}_3$ soit une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$

Exercice 13 (Bac Blanc D 2011 zone 1)

Soit E un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel rapporté à la base canonique $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\vec{k})$. On considère l'endomorphisme f de E qui, au vecteur $\vec{u}(x; y; z)$ associe le vecteur $\vec{u}'(x'; y'; z')$ de E ; $f(\vec{u}) = \vec{u}'$

tel que $f : \begin{cases} x' = x + 2y - 2z \\ y' = y \\ z' = 2y - z \end{cases}$

1) Donner la matrice de f dans la base $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\vec{k})$
2) Déterminer l'ensemble $(P) = \{\vec{u} \in E \,/\, f(\vec{u}) = \vec{u}\}$ ensemble des vecteurs invariants
3) Déterminer l'ensemble $(\Delta) = \{\vec{u} \in E \,/\, f(\vec{u}) = -\vec{u}\}$ ensemble des vecteurs transformés en leurs opposés

4) a) Montrer que l'endomorphisme f est une symétrie vectorielle de E

b) Caractériser f (préciser sa base et sa direction).

Exercice 14 (Bac D 2011)

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ étant rapporté à une base $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$, on considère l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui, à tout vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, sont définis par :

$$\begin{cases}x' = -x + ay + 2z\\ y' = x + 2y + z\\ z' = x + y\end{cases}$$

1) Ecrire la matrice de l'application f dans la base $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$
2) Pour quelle valeur de a f est-elle bijective ?
3) Dans la suite, on pose $a = 1$
   a) Déterminer l'ensemble E des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ invariants par f
   b) Déterminer le noyau Ker$f$ et l'image Imf de f. En déduire une base pour chacun des sous-ensembles
4) Soit $\vec{u}\,(1\,;\propto;\,\beta)$ dans la base $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$. Calculer $\propto$ et β pour que $\vec{u} \in \mathrm{Ker}f$

Exercice 15

E étant un espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ rapporté à une base $B = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ \frac{1}{2} & -2 & -1\\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

1) Définir analytiquement f
2) a) Montrer que le vecteur $\vec{e}_1 = -2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 3\vec{k}$ est une base de Ker$f$

   b) Montrer que $(\vec{e}_2;\vec{e}_3)$ avec $\vec{e}_2 = -2i + j$ et $\vec{e}_3 = i + j - k$ est une base de Imf
3) a) Montrer que $B = (\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$ est une base de E

   b) Donner la matrice de f dans la base B.

Exercice 16

Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définie par : $f(x,y,z) = \begin{pmatrix}5x+y+z\\2x+4y-2z\\x-y+3z\end{pmatrix}$

1) calculer la matrice M_f dans la base canonique (e_1, e_2, e_3)
2) a. Montrer que les vecteurs $\vec{U} = (-1\,;\,1\,;\,1)$; $\vec{V} = (1\,;-1\,;1)$; $\vec{W} = (1\,;1\,;\,-1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$

   b. Calculer la matrice M'_f dans la base $(\vec{U}\,;\vec{V}\,;\vec{W})$
3) a. Montrer que la matrice M_f est inversible

   b. Calculer M_f^{-1} de M_f

   c. En déduire la solution du système linéaire :

$$\begin{cases}5x + y + z = -1\\ 2x + 4y - 2z = 2\\ x - y + 3z = 4\end{cases}$$

Exercice 17

Soit $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$ une base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $(\vec{e}_1\,;\,\vec{e}_2\,;\,\vec{e}_3)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définis par leurs composantes dans la base canonique $\vec{e}_1(0;1\,;\,-1)$, $\vec{e}_2(2\,;3\,;1)$ et $\vec{e}_3(5\,;0\,;1)$

1) Montrer que $(\vec{e}_1\,;\,\vec{e}_2\,;\,\vec{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$
2) Soit $\vec{u}(1\,;1\,;1)$ un vecteur dans la base $(\vec{e}_1\,;\,\vec{e}_2\,;\,\vec{e}_3)$; quelles sont ses composantes dans la base $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$?
3) Soit $\vec{v}(1\,;1\,;1)$ un vecteur dans la base $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$; quelles sont ses composantes dans la base $(\vec{e}_1\,;\,\vec{e}_2\,;\,\vec{e}_3)$?

Exercice 18

On considère dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni d'une base $(\vec{e}_1\,;\,\vec{e}_2\,;\,\vec{e}_3\,;\,\vec{e}_4)$ l'application linéaire f, qui à tout vecteur $\vec{u}(x, y, z, t)$ associe le vecteur $\vec{u}'(x', y', z', t')$ tel que :

$$\begin{cases}x' = x - 2y - z + t\\ y' = -2x + z - 2t\\ z' = 3x + z - t\\ t' = -4x - 3y\end{cases}$$

1) f est-elle bijective ?
2) Vérifier que $\vec{u}(3\,;\,-4\,;16\,;5)$ appartient au noyau de f, puis montrer que $\vec{u}$ est une base de $Kerf$
3) Déterminer $\vec{v}(x\,;y\,;z\,;t)$ dont les composantes vérifient $2y + z = 0$ et tel que $f(\vec{v}) = 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 3\vec{e}_4$

Exercice 19

On considère l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie analytiquement par : $\begin{cases}x' = 2x + ay\\ y' = x - y\end{cases}$ avec a un réel non nul.

1) Pour quelle valeur de a, f n'est-elle pas un automorphisme ?

2) Pour quelle valeur de a, f est une projection vectorielle ?
3) Montrer que si f est un projecteur, alors f n'est pas bijective quelque soit $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$.
4) Dans la suite, on prendra $a = -2$
   a. Déterminer le noyau de f et en donner une base $\vec{e}_1$
   b. Déterminer l'image de f et en donner une base $\vec{e}_2$
   c. Montrer que $(\vec{e}_1\,;\,\vec{e}_2)$ est une base de f, puis donner la matrice de f dans cette base

Exercice 20

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de base canonique $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ définie par : $f(\vec{\imath}) = \vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$ et $f(\vec{\jmath}) = \frac{1}{3}\vec{u} - \frac{1}{6}\vec{v}$ où $\vec{u} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\vec{v} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$

1) Exprimer $f(\vec{\imath})$ et $f(\vec{\jmath})$ en fonction de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ puis écrire la matrice de f dans la base $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$
2) a. Déterminer le noyau de f et en donner une base $\vec{e}_1$
   b. Déterminer l'image de f et en donner une base $\vec{e}_2$
3) Montrer que $(\vec{e}_1\,;\,\vec{e}_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$
4) Déterminer la matrice de f dans la base $(\vec{e}_1\,;\,\vec{e}_2)$

Exercice 21

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}^3$, de base $B = (\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$.

1) Soit $\vec{u} = 2\vec{\imath} + \vec{k}\,;\ \vec{v} = \vec{\jmath} - \vec{k}\,;\ \vec{w} = 2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 5\vec{k}$
   a. Le système $(\vec{u}\,;\vec{v})$ est-il libre ?
   b. Le système $(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w})$ est-il libre ?
2) Soit f un endomorphisme de V tel que :
$$\begin{cases} x' = -2x + 4y + 2z \\ y' = -4x + 8y + 4z \\ z' = 5x + 8y + 4z \end{cases}$$
   a. Déterminer le noyau de f et en donner une base $(\vec{e}_1\,;\,\vec{e}_2)$
   b. Déterminer l'image de f et en donner une base $\vec{e}_3$
   c. Déterminer E, ensemble des vecteurs invariants par f et en donner une base $\vec{e}_4$
   d. Déterminer F, ensemble des vecteurs transformé en leurs opposé par f
   e. Donner la nature de l'endomorphisme f et ses éléments caractéristiques
   f. Le système de vecteur $(\vec{e}_1\,;\,\vec{e}_2\,;\,\vec{e}_3)$ est-il une base de V ?
   g. Trouver la matrice de f dans la base $(\vec{e}_1\,;\,\vec{e}_2\,;\,\vec{e}_3)$

Exercice 22

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$. Soit l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par : $\begin{cases} 2x' = x - y + z \\ 2y' = 2x - 2y + 2z \\ 2z' = 3x - 3y + 3z \end{cases}$

1) Déterminer la matrice M_f dans la base $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$
2) Montrer que f est linéaire
3) Soit $f_\lambda = \{\vec{w} \in \mathbb{R}^3 / f(\vec{w}) = \lambda\vec{w}\}$
   a. Montrer que f est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$
   b. Pour $\lambda = 0$, déterminer f_0 et en donner une base
   c. Pour $\lambda = 1$, déterminer f_1 et en donner une base
4) f_0 et f_1 sont-ils deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$?
5) a. L'application f est-elle un automorphisme ?
   b. Déterminer fof
   c. Reconnaitre et caractériser f

Exercice 23

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}^3$, de base $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$. m étant un réel ; soit f_m un endomorphisme de E qui, à tout vecteur $\vec{u}(x\,;y\,;z)$ associe le vecteur $\vec{u}'(x';y';z')$ tels que : $\begin{cases} x' = 2mx + 3y + mz \\ y' = (2-m)x + (3m-2)y + 6z \\ z' = (m-2)x + 2mz \end{cases}$

1) Calculer $f_m(\vec{\imath})$, $f_m(\vec{\jmath})$ et $f_m(\vec{k})$
2) On pose $m = 2$
   a. Démontrer que le système $\{f_m(\vec{\imath})\,;f_m(\vec{\jmath})\,;f_m(\vec{k})\}$ est libre
   b. Prouver que f_2 est bijective et déterminer analytiquement ${f_2}^{-1}$
3) On pose $m = 0$
   a. Déterminer le noyau et l'image de f_0
   b. Montrer que $Kerf_0$ et Imf_0 sont supplémentaires dans E

<u>Exercice 24</u> (Bac D 2014)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de base $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k})$ qui associe à tout élément $(x\,;\,y\,;\,z)$ de $\mathbb{R}^3$, l'élément $(x'\,;\,y'\,;\,z')$ de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + y + z \\ z' = x \end{cases}$$

1) Déterminer $f(\vec{\imath})$; $f(\vec{\jmath})$; $f(\vec{k})$ dans la base $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k})$ de $\mathbb{R}^3$.
2) Déduire la matrice de f dans la base $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k})$.
3) a. Quelles conditions faut-il remplir pour qu'un ensemble E soit un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   b. Montrer alors que l'ensemble $H = \{(x;\,y;\,z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
4) Déterminer le noyau de f et en donner une base $(\vec{e}_1)$.
5) Déterminer l'image de f, puis une base de $B = (\vec{e}_2\,;\,\vec{e}_3)$.

<u>Exercice 25</u> (Bac D 2015)

Soit E le plan vectoriel rapporté à sa base canonique $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$. On donne les vecteurs $\vec{e}_1 = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\vec{e}_2 = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$. On considère l'endomorphisme f de E telle que $f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$ et $f(\vec{e}_2) = \vec{0}$.

1) Vérifier que $(\vec{e}_1\,;\,\vec{e}_2)$ est une base de E.
2) Ecrire la matrice de f dans la base $(\vec{e}_1\,;\,\vec{e}_2)$.
3) Soit $\vec{u} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$ l'image de $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ par l'endomorphisme f telle que $f(\vec{u}) = \vec{u}'$.
   a. Montrer que $f(\vec{\imath}) = 3\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ et $f(\vec{\jmath}) = -2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$.
   b. Exprimer les coordonnées x' et y' de $\vec{u}'$ en fonction des coordonnées x et y de $\vec{u}$.
   c. Calculer $fof(\vec{u})$.
   d. En déduire la nature de f.
   e. Déterminer les caractéristiques de f.

<u>Exercice 26</u> (Bac D 2016)

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est rapporté à sa base canonique $B = (\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini dans la base $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ par : $f(\vec{\jmath}) = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$ et $fof(\vec{\jmath}) = \vec{\jmath}$.

1) Calculer $f(\vec{\imath})$ et $fof(\vec{\imath})$.
2) En déduire la nature de l'application f.
3) a. Qu'est-ce qu'un automorphisme ?
   b. Prouver que f est un automorphisme involutif.
   c. Caractériser l'application f.
4) Soit les vecteurs $\vec{u} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ et $\vec{v} = -3\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.
a. Montrer que $B' = (\vec{u}\,;\,\vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
b. Ecrire la matrice de f dans la base B'.

<u>Exercice 27</u> (Bac D 2018)

Soit E un plan vectoriel rapporté à sa base canonique $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$. On considère les deux droites vectorielles (D_1) et (D_2) d'équations cartésiennes respectives $x - 2y = 0$ et $x + y = 0$ de ce plan.

1) Vérifier que les droites (D_1) et (D_2) sont engendrées respectivement par les vecteurs $\vec{e}_1 = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\vec{e}_2 = -\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.
2) Prouver que la famille $(\vec{e}_1\,;\,\vec{e}_2)$ est une base de E.
3) Montrer que les sous-espaces vectoriels (D_1) et (D_2) sont supplémentaires dans E .
4) Soit f un endomorphisme de E défini par : $f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$ et $f(\vec{e}_2) = -\vec{e}_2$. Exprimer les vecteurs $f(\vec{\imath})$ et $f(\vec{\jmath})$ dans la base $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$.

<u>Exercice 28</u> (Bac D 2019)

L'espace vectoriel E est rapporté à sa base canonique $B(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$. Soit f l'endomorphisme de E défini par son expression analytique : quelque soit le vecteur $\vec{u}(x\,;y)$ de E, l'image de $\vec{u}$ par f est le vecteur $\vec{u}'(x';y')$ tel que : $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = -x - 2y \end{cases}$

1) Déterminer $f(\vec{\imath})$ et $f(\vec{\jmath})$.
2) En déduire la matrice de f dans la base $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$.
3) Soit $\vec{V}(3\,;\,-4)$ un vecteur de E. Donner son image $\vec{V}'$ par l'endomorphisme f.
4) Montrer que f est un endomorphisme bijectif.
5) a. Calculer $fof(\vec{\imath})$ et $fof(\vec{\jmath})$.
   b. En déduire la nature de f.
   c. Détermine alors la base et la direction de f.

<u>Exercice 29</u> (Bac D 2020)

Soit $B = (\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On considère les vecteurs $\vec{u} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\vec{v} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$.

1) a. Prouver que la famille $B' = (\vec{u}\,;\,\vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   b. Ecrire les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ dans la base B'.

2) On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par : $\begin{cases} f(\vec{u}) = \vec{u} \\ f(\vec{v}) = -\vec{v} \end{cases}$

a. Calculer $f(\vec{\imath})$ et $f(\vec{\jmath})$ en fonction de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

b. Montrer que $fof(\vec{\imath}) = \vec{\imath}$ et $fof(\vec{\jmath}) = \vec{\jmath}$.

c. En déduire la nature de f.

d. Donne alors la base E et la direction D de f.

<u>Exercice 30</u> (Bac D 2021)

L'espace vectoriel étant rapporté à une base canonique $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$, on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(\vec{v}_1) = \vec{0}$ et $f(\vec{v}_2) = \vec{v}_2$, avec $\vec{v}_1 = -\vec{\imath} + 5\vec{\jmath}$ et $\vec{v}_2 = -2\vec{\imath} + 5\vec{\jmath}$.

1) a. Montrer que $f(\vec{\imath}) = 2\vec{\imath} - 5\vec{\jmath}$ et $f(\vec{\jmath}) = \frac{2}{5}\vec{\imath} - \vec{\jmath}$.

b. En déduire la matrice de f dans la base $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$.

2) Prouver que f n'est pas bijective.

3) Soit $\vec{u}' = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$ image de $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ par f.

a. Exprimer les coordonnées x' et y' du vecteur $\vec{u}'$ en fonction de x et y du vecteur $\vec{u}$.

b. Montrer que $fof(\vec{\imath}) = f(\vec{\imath})$ et $fof(\vec{\jmath}) = f(\vec{\jmath})$.

c. En déduire la nature de f.

d. Donner les éléments caractéristiques de f.

STATISTIQUES

<u>Exercice</u> 1

Les notes de PC et des Maths d'un groupe d'élève sont les suivantes :

x_i	4	6	12	8	10
y_i	7	10	14	11	14

Où x_i est la note de PC et y_i celle des Maths

1) Combien y a – t – il d'élèves ?
2) Représenter le nuage des points dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$
3) Par la méthode des moindres carrés
   a) Déterminer l'équation cartésienne des deux droites de régression
   b) Tracer ces droites dans le repère
4) Calculer le coefficient de corrélation linéaire. Est – elle forte ou faible ?
5) Calculer l'inertie du système par rapport au point $A(1\,;1)$

<u>Exercice</u> 2

On considère la série statistique à deux variables suivante :

x_i \ y_j	0	1	2
1	3	5	0
3	1	0	1

1) Représenter le nuage des points dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$
2) Trouver les coordonnées du point moyen G
3) Déterminer l'équation des deux droites de régression par la méthode des moindres carrés
4) Calculer le coefficient de corrélation linéaire
5) Calculer l'inertie par rapport au point $C(0\,;1)$

<u>Exercice</u> 3

Soit une série statistique donnée par le tableau suivant

x	2	2	6	a
y	3	-1	3	b

Déterminer a et b sachant que l'on a une droite de régression de type $y = 0{,}75x - 0{,}5$

<u>Exercice</u> 4

1) Soit une série statistique double, ajustée par la méthode des moindres carrés a ses deux droites de régression définies par : $y = 0{,}9x + 3{,}2 \;\; et \;\; x = 1{,}02y - 3{,}1$
   a) Calculer les coordonnées du point moyen G de ce nuage
   b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre $x \; et \; y$

2) On donne :

x	1	2	1	b	4	2
y	1	a	2	0	2	3

a) Trouver a et b pour que $G(2\,;\,2)$ soit moyen

b) Calculer l'inertie du nuage par rapport à $A(1\,;\,1)$ puis par rapport à G

Exercice 5 (Bac D 2014)

On considère la série statistique $(x\,;y)$ définie par le tableau suivant:

x \ y	1	3
-1	1	2
0	0	a
2	2	0

1) Déterminer les séries marginales de $x\ et\ y$
2) Déterminer le réel a pour que l'ont ait $G(\frac{1}{6};2)$ où G désigne le point moyen de la série $(x\,;y)$
3) On donne $a=1$, calculer la variance de x, de y et la covariance de la série $(x\,;y)$

Exercice 6 (Bac D 2012)

On considère la série statistique à double variable $x\ et\ y$ définie par le tableau ci – après

x	-2	0	1	a	4
y	-10	-8	b	0	12

1. Déterminer les valeurs de a et b pour que le point moyen G du nuage statistique, ait pour coordonnées $(1\,;-2)$
2. Dans la suite, on prendra $a=2\ et\ b=-4$
   a) Représenter graphiquement les points du nuage de cette série statistique
   b) Déterminer l'équation de la droite de régression de $x\ en\ y$
   c) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre $x\ et\ y$ puis interpréter le résultat

Exercice 7 (Bac D)

On considère la série statistique double suivante

x \ y	-2	-1	3
-1	2	3	1
1	-1	2	1

1) Représenter le nuage de points de cette série
2) Déterminer les séries marginales de $x\ et\ de\ y$. Calculer les coordonnées de G, le point moyen
3) Déterminer les droites d'ajustement linéaires par la méthode des moindres carrés.

Exercice 8 (Bac D 2015)

On considère la série statistique $(x_i\ ;\ y_j\ ;\ n_{ij})$ représentée par le tableau à double entrée suivant

x \ y	-1	1
-1	2	1
0	3	2
2	1	1

1) Déterminer les deux séries marginales
2) Déterminer les coordonnées $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ du point moyen du nuage statistique
3) Calculer l'inertie du nuage par rapport au point G
4) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y

Exercice 9 (Bac blanc C 2010)

On considère la série $(x\,;y)$ déterminé par le tableau ci – après

x	-3	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	0	1	2	-3	-2	3	1	2	-4

1) Représenter le nuage de points associé à cette série
2) Déterminer le point moyen de ce nuage
3) Calculer les variances en $x\ et\ en\ y$
4) Calculer les écarts – types en $x\ et\ en\ y$
5) Calculer la covariance de cette série
6) Déterminer la droite de régression de $y\ en\ x$
7) Déterminer la valeur de x lorsque $y=1{,}3$
8) Calculer son coefficient de corrélation linéaire.

Exercice 10 (Bac blanc D 2008 Brazzaville)

Soit la série statistique à deux caractères $(x\,;y)$ données par le tableau à double entrée ci-contre où a désigne un entier naturel non nul

x \ y	-1	0	2
1	2	5	3
2	2	a	1

1) Déterminer ses séries marginales
2) Déterminer son point moyen $G(\overline{X}\,;\,\overline{Y})$
3) Déterminer a pour que G soit $G(\frac{24}{17}\,;\,\frac{4}{17})$
4) On prend $a=4$. Calculer les variances $V(X) et\, V(Y)$ de x et y
5) Calculer les écarts – types $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$
6) Calculer sa covariance $COV(X\,;Y)$
7) Déterminer la droite de régression de $x\ en\ y$
8) Déterminer la valeur de y lorsque $x=2{,}3$
9) Calculer son coefficient de corrélation linéaire

Exercice 11 (Bac D 1997)

Les caractères x et y sont distribués suivant le tableau à double entrée ci – après :

x \ y	-1	0	2
-2	4	0	2
-1	3	5	0
0	2	1	2

1) Dresser la loi marginale du couple $(x\,;\,y)$
2) Déterminer l'équation de la droite de régression de y par rapport à x notée $\Delta y/x$, puis l'équation de la droite de régression de x par rapport à y notée $\Delta x/y$
3) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de $(x\,;\,y)$
4) Donner l'inertie du nuage par rapport au point $A(0\,;\,2)$

Exercice 12 (Bac D 2001)

L'étude du poids P de la larve d'un insecte mesuré en fonction de l'âge x a conduit au tableau suivant :

$x\ (mois)$	1	2	3	4	5
$P\ (mg)$	7	13	25	47	88

1) On pose $y=lnP$ où ln désigne le logarithme népérien
   a) Calculer les différentes valeurs prises par y à 10^{-2} près
   b) Tracer le nuage de points représentant les couples $(x\,;\,y)$ dans un système d'axes orthonormés (unité 2 cm). Y placer le barycentre G du nuage
2) Déterminer une équation de la droite de régression de $y\ en\ x$
3) Si l'évolution se poursuit dans les mêmes conditions, quel sera le poids de la larve au bout de six mois ?

Exercice 13

Dans le tableau suivant :

x \ y	y_1	y_2	y_3
x_1	0	0	2
x_2	2	3	0
x_3	0	2	2

1) Déterminer $x_1\,;\,x_2\,;\,x_3\,;\,y_1\,;\,y_2\ et\ y_3$ tels que $x_1\,;\,x_2\ et\ x_3$ sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $r=2$ et vérifient la relation suivante $x_1+x_2+x_3=6$. $y_1\,;\,y_2\ et\ y_3$ sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q=3$ et vérifient la relation $y_1.y_2.y_3=27$
2) Compléter le tableau et déterminer les séries marginales de $x\ et\ y$
3) Déterminer l'inertie du nuage par rapport à $O(0\,;\,0)$.
4) Déterminer les droites de régression de $y\ en\ x$ et de $x\ en\ y$

5) Déterminer le coefficient de corrélation du couple $(x\ ;\ y)$

<u>Exercice 14</u> (Bac C 2011)

On donne en milliers de francs CFA le bénéfice d'une ferme avicole qui importe des poussins sur une période de 5 mois.

x_i (en mois)	1	2	3	4	5
y_j (en milliers de francs)	96,1	63,5	49,2	41,5	35,7

1) Représenter graphiquement cette série statistique par un nuage de points dans un repère orthogonal d'unités : $2\ cm$ pour $1\ mois$ en abscisses et $2\ cm$ pour 5 milliers de francs en ordonnées.
2) Donner une équation de la droite de régression de y en x.
3) Tracer cette droite sur le graphique. Estimer le bénéfice de la ferme avicole au $6\ ème$ mois.

<u>Exercice 15</u> (Bac C 2013)

Les caractères X et Y sont distribués suivants le tableau ci-dessous.

X	-2	-2	-1	-2	-1	0	-1	-2	-1	-2	0	-1	-1	-1
Y	-1	2	2	-1	2	2	0	-1	0	2	-1	-1	0	-1

1) Transformer ce tableau en un tableau à double entrées d'effectifs n_i.
2) Détermine le point moyen $G(X\ ;\ Y\ )$.
3) Calcule les variances $V(X)$ et $V(Y)$ de X et Y.
4) Calcule la covariance $Cov(X\ ;\ Y)$ et le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.

<u>Exercice 16</u> (Bac D 2016)

Soit le tableau statistique à double entrée :

$X \backslash Y$	0	1	2
-1	1	m	1
1	1	0	2
2	2	3	n

1) Déterminer les lois marginales de X et de Y en fonction de n et m.
2) Déterminer m et n sachant que le point moyen du nuage statistique est $G(1\ ;\ 1)$.
3) On pose $m = 1$ et $n = 1$.
   a. Déterminer l'équation de la droite de régression linéaire de Y en X sachant que la covariance de X et Y est égale à $-\frac{1}{12}$, la variance de X est $\frac{1}{2}$ et celle de Y est $\frac{1}{6}$.
   b. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y .

<u>Exercice 17</u> (Bac D 2018)

Le tableau ci-dessous représente le couple $(x\ ;\ y)$ des deux caractères d'une série statistique. x est le nombre de jours et y le poids en mg d'une larve.

x	1	2	3	4	5	6
y	0,2	1,4	1,8	2	2,6	3

1) Calculer les coordonnées $\bar{x}$ et $\bar{y}$ du point moyen G.
2) Déterminer l'équation de la droite de régression linéaire de y en x.
3) Estimer le poids de la larve au 7ème jour.

<u>Exercice 18</u> (Bac D 2021)

Une entreprise a mis au point un nouveau produit et cherche à fixer le prix de vente. Une enquête est réalisée auprès des clients potentiels. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous où X représente le nombre d'exemplaires du produit et Y représente le prix de vente du produit en milliers de francs CFA.

$X \backslash Y$	1	2	3
0	6	3	1
1	4	11	3
2	1	10	16
3	0	5	13
4	2	1	4

1) Déterminer les séries marginales respectives de X et de Y.
2) Déterminer les variances de X et de Y sachant que le point moyen G est $G(1{,}93\ ;\ 2{,}3)$.
3) On donne $cov(X\ ;\ Y) = 0{,}44$. Déterminer, par la méthode des moindres carrés, l'équation

de la droite de régression (D) de Y en fonction de X.

4) Calculer le coefficient de corrélation linéaire.

Exercice 19 (Bac C 2016)

Soit le tableau statistique à double entrée suivant :

X \ Y	-1	2	3
1	2	1	1
2	2	3	1

1) Convertir ce tableau en un tableau linéaire.
2) Déterminer le coefficient de corrélation $\rho(X;Y)$ des caractères X et Y. On donne $\bar{X} = 1{,}6$ et $\bar{Y} = 1$.
3) Donner une interprétation géométrique de cette corrélation.

Exercice 20 (Bac C 2018)

Soit la série statistique à deux caractères $(X\ ;\ Y)$ donnée par le tableau à double entrée ci-dessous.

X \ Y	-1	2	3
2	2	0	3
3	1	3	4

1) Déterminer les série marginales de X et Y.
2) Déterminer les coordonnées $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ du point moyen G du nuage statistique.
3) On admet que la variance de X est $\frac{10}{169}$ et celle de Y est $2{,}59$.

   a. Montrer que la covariance de X et Y est égale à $\frac{29}{169}$.

   b. Montrer que la droite de régression linéaire de Y en X est : $Y = \frac{29}{40}X - \frac{1}{20}$.

PROBABILITE

Exercice 1 (Bac D 2010)

Une urne contient deux boules blanches et trois boules noires toutes indiscernables au toucher ; on tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne et on note leur couleur.
On définit sur l'univers Ω de cette expérience aléatoire de la variable aléatoire réelle X par :
$X = -1$, si les deux boules tirées sont blanches.
$X = 0$, si l'une est blanche et l'autre est noire
$X = 1$, si les deux boules tirées sont noires.

1. Déterminer la loi de probabilité de X
2. Calculer l'espérance mathématique de X
3. a) Définir la fonction de répartition F de X
   b) Tracer la courbe représentative de F dans un repère orthogonal ; on prendra $1\ cm$ en abscisse et $5\ cm$ en ordonnée pour unités graphiques

Exercice 2 (Bac D 1988)

X désigne une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega\ ; P(\Omega); P)$. On donne le tableau suivant :

$X = x_i$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
P_i	$\frac{b}{2}$	$2b$	b	$4b$	$\frac{5b}{2}$

Où x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4 ; x_5 sont les valeurs prises par la variable X et b est un réel donné.

1) Calculer b
2) On prend $b = \frac{1}{10}$ et $x_4 = 7$. Déterminer x_1 ; x_2 ; x_3 et x_5 sachant que les réels x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4 ; $x_5$forment dans cet ordre une suite arithmétique de raison r et que l'espérance mathématique de X est $5{,}8$
3) Calculer la variance et l'écart – type de X
4) Déterminer la fonction de répartition de X et tracer sa courbe représentative

<u>Exercice 3</u>

Un sac contient 6 boules numérotées de 0 à 5. On extrait simultanément 2 boules qui portent les numéros a et b.

A chaque tirage on associe la variable aléatoire X définie de façon suivante :

- Si a et b sont pairs, X prend la valeur $\frac{a+b}{2}$
- Si a et b sont impairs, X prend la valeur 0
- Si a et b sont de parités différentes, on attribue à X la valeur $|a-b|$

1) Quelles valeurs la variable aléatoire X peut - elle prendre ?
2) Etablir la loi de probabilité de cette variable aléatoire et donner une représentation graphique de cette loi
3) Donner la fonction de répartition de X et tracer sa courbe représentative.

<u>Exercice 4</u> (Bac D 2004)

Une urne contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On considère l'épreuve qui consiste à tirer successivement et sans remise deux boules de l'urne. Soit U le produit des numéros portés sur les deux boules tirées. On considère la variable aléatoire réelle X qui, à chaque tirage associe la partie réelle du complexe $Z = e^{\frac{iU\pi}{4}}$

1) Donner la loi de probabilité de X
2) a. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X

   b. Définir la fonction de répartition de X et tracer son graphe.

   On répète 4 fois de suite cette épreuve. Quelle est la probabilité P d'obtenir exactement deux fois le complexe $Z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

<u>Exercice 5</u> (Bac D 2019)

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	a	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	b

1) Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de a et b.
2) a. Déterminer les réels a et b tels que : $E(X) = \frac{3}{2}$.

   b. Calculer la variance de X et l'écart-type.
3) Donner la fonction de répartition de X.

<u>Exercice 6</u> (Bac blanc D2019 « zone 1 »)

Un élève sérieux de la terminale « D » d'un lycée relevant de l'inspection des lycées zone 1 (ILZ1) a 80% de chance d'avoir son baccalauréat. Pendant les grandes vacances, il passe un concours pour intégrer une école de formation, le concours est ouvert à tous les élèves (bachelier ou non), mais le candidat a 60% de chance d'être admis dans cette école s'il est bachelier et 30% sinon. Notons B l'événement « l'élève réussi à son baccalauréat » et A l'événement « l'élève est admis dans cette école »

1) Construire un arbre de probabilité correspondant à cette expérience aléatoire
2) Quelle est la probabilité pour que l'élève réussisse à son examen et soit admis à cette école
3) Calculer la probabilité que l'élève ne réussit pas au baccalauréat et est admis dans cette école
4) Montre que $P(A) = 0{,}54$

<u>Exercice 7</u> (Bac blanc F$_{1\ ;2\ ;3\ ;4}$)

Pour contrôler la qualité de son produit, une usine de fabrication de machine effectue deux tests. Le premier test pour vérifier la partie mécanique du produit. Les deux tests sont faits indépendamment l'un de l'autre. On constate que : 81% des machines n'ont aucun défaut ; 10% des machines ont un défaut électrique. Parmi les machines ayant un défaut électrique, 30% ne présentent pas de défaut mécanique.

On note les événements suivants :

E : « la machine présente un défaut électrique »

M : « la machine présente un défaut mécanique »

1) Construire l'arbre pondéré relatif à cette situation
2) a. Déterminer les probabilités $P(E)$ et $P(\bar{E} \cap \bar{M})$

   b. En déduire que $P(\bar{M}/\bar{E}) = 0{,}9$

Exercice 8 (Bac D 2017)

On rappelle que la fonction de répartition d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau :

X	$]-\infty\,;x_1[$	$[x_1\,;x_2[$	$[x_2\,;x_3[$	…	$[x_n\,;+\infty[$
$F(X)$	0	P_1	$P_1 + P_2$	…	P_n

Où P_i est la probabilité associée à la valeur x_i.

Soit la fonction de répartition F d'une variable aléatoire X, définie par le tableau ci-après :

X	$]-\infty\,;2[$	$[2\,;3[$	$[3\,;4[$	$[4\,;5[$	$[5\,;6[$	$[6\,;+\infty[$
$F(X)$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{1}{3}$	1

1) Donner les valeurs exactes prises par X
2) Etablir la loi de probabilité de X
3) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$

Exercice 9 (Bac C 2015)

Une maladie atteint $3\ \%$ d'une population. Un test de dépistage donne les résultats suivants :

- Chez les individus malades, $95\ \%$ de tests sont positifs et $5\ \%$ sont négatifs.
- Chez les individus non malades, $1\ \%$ de tests sont positifs et $99\ \%$ négatifs.

On note :

- M l'évènement : « être malade » et,
- T l'évènement : « le test est positif ».

1) Construire un arbre pondéré correspondant à cette expérience aléatoire.
2) Donner la probabilité de l'évènement « $M \cap T$ », puis celle de « $\overline{M} \cap \overline{T}$ ».
3) Déterminer $P(T)$ et $P(\overline{T})$.
4) a. Calculer la probabilité de ne pas être malade sachant que le test est positif.
   b. Calculer la probabilité d'être malade sachant que le test est négatif.

Exercice 10 (probabilité conditionnelle)

On considère deux urnes U_1 et U_2 qui ont la même probabilité d'être prise. U_1 contient 2 boules noires et 3 boules blanches. U_2 contient 4 boules noires et 2 boules blanches.

1) Calculer la probabilité de tirer une boule noire
2) La boule noire étant tirée ; quelle est la probabilité qu'elle vienne de U_1 ?

Exercice 11 (Bac C 2017)

Jean s'amuse régulièrement sur un terrain de football avec le gardien de but. L'épreuve consiste à tirer au but et à observer le résultat obtenu. On admet que :

- La probabilité que Jean réussisse le premier tir au but est de $0{,}7$;
- S'il réussit le premier tir, alors la probabilité de réussir le second est de $0{,}8$
- S'il manque le premier tir, la probabilité de réussir le second est de $0{,}4$.

On note R_1 l'événement « premier tir au but est réussi » et R_2 l'événement « le second tir au but est réussi ».

1) Construire l'arbre de probabilité correspondant à cette expérience.
2) Calculer la probabilité pour que les deux tirs au but soient réussis.
3) Calculer la probabilité pour que le second tir au but soit réussi.
4) On note A, l'événement « Jean a réussi exactement un tir au but ». Calculer $P(A)$.

Exercice 12 (Bac C 2000)

Dans une classe de 30 élèves, sont formés un club photo et un club théâtre. Le club photo est composé de 10 membres, le club théâtre de 6 membres. Il y a deux élèves qui sont membres des deux clubs à la fois. On note $\bar{A}$ l'événement contraire de l'événement A et $P(A/B)$ la probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisable

1) on interroge un élève de la classe pris au hasard. On appelle P l'événement « l'élève fait partie du club photo » et T l'événement « l'élève fait partie du club théâtre ». montre que les événements P et T sont indépendants.
2) Lors d'une séance du club photo, les 10 membres sont tous présents. Un premier élève est tiré au sort. Il doit prendre la photo d'un autre membre du club qui sera lui aussi tiré au sort.
   a. On appelle T_1 l'événement « le premier élève appartient au club théâtre ». calculer $P(T_1)$
   b. On appelle T_2 l'événement « l'élève pris en photo appartient au club théâtre ». calculer $P(T_2/T_1)$, puis $P(T_2/\overline{T_1})$. En déduire

$P(T_2 \cap T_1)$ et $P(T_2 \cap \overline{T}_1)$. (on pourra éventuellement utiliser un arbre)

c. Montrer que la probabilité que l'élève pris en photo appartienne au club théâtre est $0,2$

3) Toutes les semaines on recommence de façon indépendante la séance de photographie avec tirage au sort du photographe et du photographié. Le même élève peut être photographié plusieurs semaines de suite. Calculer la probabilité qu'au bout de 4 semaines, aucun membre du club théâtre n'ait été photographié

Exercice 13

Une entreprise utilise des machines de type M constituées chacune de deux éléments E_1 et E_2. La défectuosité d'un seul de deux éléments E_1 et E_2 suffit à mettre la machine hors service et on exclut toute autre éventualité de panne. Soient A_1 et A_2 les deux événements.

A_1 « l'élément E_1 » tombe en panne

A_2 « l'élément E_2 » tombe en panne

On suppose que A_1 et A_2 sont deux événements indépendants de probabilité respectives

$P_1 = P(A_1) = 0,08$ et $P_2 = P(A_2) = 0,05$

1) Calculer la probabilité pour que les deux éléments soient simultanément hors service
2) Calculer la probabilité P pour que la machine M soit en panne
3) On note X la variable aléatoire égale au nombre d'éléments hors services
   a. Déterminer la loi de probabilité de X
   b. Vérifier que l'espérance mathématique de X est égale à $0,134$

Exercice 14

Une urne contient une boule noire et n boules rouges $(n > 1)$

1) On tire au hasard et successivement deux boules sans remise. On suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Calculer les probabilités des événements suivants

A « obtenir une boule noire et une boule rouge »

B « obtenir au plus deux boules rouges »

2) En déduire le nombre entier n de boules rouges sachant que $P(B) = 8P(A)$
3) Dans la suite on prendra $n = 15$. L'épreuve consiste toujours à tirer deux boules successives sans remise. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boule obtenu
   a. Déterminer la loi de probabilité de X
   b. Calculer l'écart type de la variable aléatoire X

Exercice 15 (Bac C 2014)

Dans une urne contenant quatre jetons numérotés 1, 2, 3 et 4 indiscernables au toucher, on extrait successivement sans remise deux jetons.

La variable aléatoire X est celle qui détermine «la valeur absolue de la différence des deux numéros sortis»

1) Déterminer la loi de probabilité de X.
2) Calculer l'espérance mathématiques, la variance et l'écart-type de X.

Exercice 16 (Bac D 2020)

Une entreprise fabrique des pièces pour un client. Le contrat stipule que le produit fabriqué doit être soumis à deux tests distincts de normes de qualité A et B.

La pièce est acceptée s'il a satisfait à ces deux tests qui sont indépendants l'un de l'autre. On note :

A l'événement « le produit est conforme à la norme de qualité A ».

B l'événement « le produit est conforme à la norme de qualité B ».

Une étude a démontré que la probabilité de l'événement A est $P(A) = 0,9$ et celle de l'événement B est $P(B) = 0,95$.

1) Calculer $P(A \cap B)$ avec $A \cap B$ l'événement « le produit est conforme à la norme A et à la norme B ».

2) Soit C l'événement « le produit n'est pas accepté par le client ; donc il est déclaré non conforme ». Montrer que $P(C) = 0,145$.
3) On suppose que le stock du client étant trop bas, il accepte de prendre le produit s'il satisfait soit au test A ou au test B, donc il appartient à $A \cup B$. Calculer $P(A \cup B)$.

Exercice 17 (Bac C 2019)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires. L'urne U_2 contient deux boules blanches et deux boules noires. Dans chacune des urnes, les boules sont indiscernables au toucher. On lance sur une table un dé cubique non truqué, dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

- Si le nombre apparu sur la face supérieure du dé est inférieur ou égal à 2, on tire une boule dans l'urne U_1 ;
- Si le nombre apparu sur la face supérieure du dé est strictement supérieur à 2, on tire une boule dans l'urne U_2.

On note D et E les événements suivants :
D : « le tirage s'effectue dans l'urne U_1 »
E : « le tirage s'effectue dans l'urne U_2 »
B : « Obtenir une boule blanche »
N : « Obtenir une boule noire »

1) a. Montrer que la probabilité de l'événement D est $\frac{1}{3}$.
b. En déduire la probabilité de l'événement E.
2) Traduire par un arbre de probabilités, les données de l'énoncé.
3) Montrer que la probabilité de tirer une boule noire est égale à $\frac{8}{15}$.
4) On a tiré une boule noire. Calculer la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_1.

Exercice 18 (Bac C 2020)

Une classe d'un lycée est constituée de 26 garçons et 14 filles. 13 garçons et n filles de cette classe sont inscrits dans un centre d'apprentissage de langues. On choisit au hasard une personne parmi les élèves de cette classe. On note les événements suivants :
G : « la personne choisie est un garçon »
F : « la personne choisie est une fille »
L : « la personne choisie est inscrite dans un centre d'apprentissage de langues »

1) Calculer les probabilités $P(G)$ et $P(F)$.
2) Construire un arbre de probabilités correspondant aux données de l'énoncé, sachant que $P_G(L) = \frac{1}{2}$ et $P_F(L) = \frac{n}{14}$.
3) Montrer que $P(L) = \frac{13+n}{40}$.
4) Déterminer n pour que les événements L et G soient indépendants.