BUREAU DES CENTRES D'ENCADREMENT
(BCE : Brazzaville)
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

ANNEE SCOLAIRE 2023-2024

BACCALAUREAT TEST SESSION DU 15 AVRIL 2024

EPREUVE DE : MATHEMATIQUES

NIVEAU : TC **DUREE : 4 heures**

COEFF : 5

Exercice 1 : (4pts)

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation $(E) : 21x - 17y = 4$

1- a) Montrer que cette équation admet au moins une solution. (0,5pt)

b) Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation $(E') : 21x \equiv 4[17]$. (0,5pt)

2- On se propose de résoudre l'équation (E'). On rappelle qu'un entier relatif a est inverse modulo n $(n \in \mathbb{N})$ d'un entier relatif b si $ab \equiv 1[n]$.

a) Déterminer l'inverse modulo 17 et 21. (1pt)

b) Montrer que les solutions de l'équation (E') sont les entiers relatifs x tels que $x = 1 + 17k\ ;\ k \in \mathbb{Z}$. (1pt)

3- En déduire l'ensemble des solutions de (E). (1pt)

Exercice 2 : (8pts)

Dans le plan orienté, on considère un carré direct $ABCD$ de côté $4\ cm$ et de centre O. On désigne par I, J et L les milieux respectifs des segments $[DA]$, $[DC]$ et $[BC]$. Soit E est le symétrique A par rapport à D et K le milieu du segment $[DE]$.

1- Faire une figure, on prendra $[AB]$ horizontal. (1pt)

2- On considère la transformation ponctuelle f définie par : $R_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)} o S_{(BC)}$ où $R_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}$ est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. $S_{(BC)}$ est la réflexion d'axe (BC).

a) Donner la nature de f. (0,5pt)

b) Déterminer les images des points B et C par la transformation f. (0,5pt)

c) Montrer que la forme réduite de f est : $f = t_{\overrightarrow{BO}} o S_{(IL)}$. (0,5pt)

d) Déterminer $f(I)$ puis placer $G = f(O)$. (0,5pt)

3- Soit g l'application du plan dans lui-même telle que : $g = h_{\left(L;\frac{1}{2}\right)} o f$ où $h_{\left(L;\frac{1}{2}\right)}$ est l'homothétie de centre L et de rapport $\frac{1}{2}$.

a) Donner la nature de l'application de g. (0,5pt)

b) Donner la forme réduite de g puis préciser ses éléments caractéristiques. (1pt)

4- Soit $(\mathcal{P})$ la parabole de foyer C, passant par B et admettant comme tangente en B la droite (BO).

a) Déterminer la directrice et l'axe focal de la parabole $(\mathcal{P})$. (0,5pt)

b) Préciser le pied et le sommet de la parabole $(\mathcal{P})$. (0,5pt)

c) Achever la construction de la parabole $(\mathcal{P})$. (0,5pt)

5- Soit $(\mathcal{P}')$ l'image de $(\mathcal{P})$ par f.

a) Vérifier que $(\mathcal{P}')$ est une parabole dont on précisera le foyer, le sommet, la tangente en un point de cette parabole. (1pt)

b) Déterminer la directrice et l'axe focal de la parabole $(\mathcal{P}')$. (0,5pt)

c) Construire la parabole $(\mathcal{P}')$. (0,5pt)

Exercice 3 : (5pts)

Soit la fonction f derivable et définie sur R par : $f(x)$= $\frac{1}{2}\, ln(1+e^{-x})$

On considère la fonction g définie sur R par $g(x) = f(x) - x$

1- Calcule les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$. (0,5pt)

2- a) Démontre que : $\forall\, x\ \in R, g'(x) = -\frac{1}{2(1+e^{x})} - 1$. (0,5pt)

b) Déduis le sens de variation de g et dresse son tableau de variation. (0,5pt+0,5pt)

c) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet dans R une unique solution $\propto$ et que $0 < \propto < 1$. (0,25pt)

3- a) Démontre que pour tout $x \geq 0, |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$. (0,5pt)

b) Vérifier que : $f(\propto) = \propto$. (0,5pt)

c) Justifie que pour tout $x \geq 0, |f(x) - \propto| \leq \frac{1}{4}|x - \propto|$. (0,5pt)

4- soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f(U_n)$

On admettra que : $\forall\, n\ \in \mathbb{N}, U_n \geq 0$

a) Justifie que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \propto| \leq \frac{1}{4}|U_n - \propto|$. (0,5pt)

b) Démontre par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, |U_n - \propto| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$. (0,5pt)

Déduis-en $lim\ U_n$. (0,25pt)

Exercice 4 : (3pts)

Un enfant décide de jouer à un jeu qui se déroule de la façon suivante ; il tire dans une urne contenant 7 jetons rouges et 2 jetons bleus :

- *S'il est bleu, il a gagné ;*
- *Sinon, il tire un tire un nouveau jeton, sans remettre le précédent dans l'urne ;*
- *S'il est bleu, il a gagné ;*
- *Sinon, il tire un troisième jeton, sans remettre les deux jetons précédents ;*
- *S'il est bleu, il a gagné, sinon il a perdu.*

1- Construire un arbre pondéré correspondant à cette situation. (1pt)

2- Déterminer la probabilité des événements suivants :

A : « l'enfant a gagné au 1er tirage » (0,5pt)

B : « l'enfant a gagné au 2e tirage » (0,5pt)

C : « l'enfant a gagné au 3e tirage » (0,5pt)

3- Montrer que la probabilité que l'enfant gagne la partie est égale à $\frac{7}{12}$. (0,5pt)