MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT PRESCOLAIRE, PRIMAIRE, SECONDAIRE ET DE L'ALPHABETISATION
****
CABINET
****
DIRECTION DES EXAMENS ET CONCOURS
****
SERVICE DU BACCALAUREAT
****

REPUBLIQUE DU CONGO
Unité-Travail-Progrès

RC
BAC MD-DM 2024
MEPPSA

BACCALAUREAT SESSION DE	: JUIN 2024
EPREUVE DE	: MATHEMATIQUES
SERIES	: C
DUREE	: 4 HEURES
COEFFICIENT	: 05
DOCUMENTS AUTORISES	: NEANT

EXERCICE 1: (04 points)

On considère dans l'ensemble des entiers relatifs Z le système :

$$(S) : \begin{cases} x \equiv 3[7] \\ x \equiv 5[9] \end{cases}$$

1) Prouver que 185 est solution de (S). **(1 point)**

2) a) Montrer que si x est une solution de (S), alors $x-185$ est divisible par 7 et par 9.
(0,5 point)
b) Montrer que si un entier p est divisible par 7 et par 9, alors p est divisible par 63.
(0,5 point)
c) En déduire que si x est une solution de (S), alors $x \equiv 185[63]$. **(0,5 point)**

3) Déterminer toutes les valeurs de x, solutions de (S) telles que $680 \leq x \leq 820$.
(0,5 point)

4) Un sac contient N oranges. Si on les range par groupe de 7, il en reste 3 et si on les range par groupe de 9, il en reste 5.
a) Justifier que N est solution de (S). **(0,5 point)**
b) En déduire le nombre d'oranges contenues dans le sac sachant que : $680 \leq N \leq 750$.
(0,5 point)

EXERCICE 2: (08 points)

Dans le plan orienté (P), on considère un segment $[AB]$. C est le point du plan tel que ABC soit un triangle équilatéral de sens direct. On note O le centre du triangle ABC ; I est le projeté orthogonal de A sur le segment $[BC]$. La parallèle à la droite (AI) et passant par le point C coupe la droite (AB) au point Ω. D est le symétrique de B par rapport au point C.

1) Faire la figure. On prendra $[AB]$ horizontalement tel que $AB = 6cm$. **(1 point)**

2) Soient f et g les transformations ponctuelles du plan définies par: $f = t_{\overrightarrow{BC}} \circ r_{(A;\frac{\pi}{3})}$ et $g = f \circ r_{(B;-\frac{\pi}{3})}$.

   a) Justifier que : $t_{\overrightarrow{BC}} = S_{(\Omega C)} \circ S_{(AI)}$ **(0,5 point)**

   b) Etablir que : $r_{(A;\frac{\pi}{3})} = S_{(AI)} \circ S_{(AB)}$ **(0,5 point)**

   c) En déduire que f est une rotation de centre Ω et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$. **(0,5 point)**

   d) Montrer que g est une translation. **(0,5 point)**

   e) Montrer que $g(B) = D$. En déduire le vecteur de la translation g. **(1 point)**

3) On considère la similitude plane directe S d'angle de mesure $-\frac{\pi}{3}$ et de rapport 2, de centre Ω_1 et qui transforme A en D.

   a) Montrer que le triangle $\Omega_1 AD$ est rectangle de sens indirect en A ; (on pourra calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\Omega_1 D}.\overrightarrow{AD}$). **(0,5 point)**

   b) En déduire la construction de Ω_1. **(0,5 point)**

   c) Placer le point I' image de I par S. **(0,5 point)**

   d) Montrer que les points A, I et I' sont alignés. **(0,5 point)**

4) Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que $MB + MC = 2AC$.

   a) Montrer que A appartient à (E). **(0,5 point)**

   b) Justifier que (E) est une ellipse. Préciser l'axe focal. **(1 point)**

   c) En remarquant que I est le centre de (E) et que B et C sont des foyers de (E). Calculer l'excentricité de (E). **(0,5 point)**

EXERCICE 3: (05 points)

On se propose de déterminer un encadrement de l'intégrale suivante : $I = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2 e^{-x}} dx$.

1) Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = x^2 e^{-x}$.

   a) Calculer la fonction dérivée f' de f puis étudier son signe. **(1 point)**

b) Dresser le tableau de variation de f. (1 point)

On donne $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

c) En déduire que $\forall x \in [0,1]$, $0 \leq f(x) \leq 1$. (0,5 point)

2) a) Montrer que la fonction numérique F définie sur R par $F(x) = (-x^2 - 2x - 2)\, e^{-x}$ est une primitive de la fonction f. (0,5 point)

b) En déduire la valeur de l'intégrale $J = \int_0^1 f(x)dx$. (0,5 point)

3) a) On admet que $\forall u \in [0,1]$, $1 - u \leq \frac{1}{1+u} \leq 1 - \frac{u}{2}$.

En remplaçant u par $f(x)$, démontrer que $1 - J \leq I \leq 1 - \frac{J}{2}$. (1 point)

b) En déduire que $\frac{5}{e} - 1 \leq I \leq \frac{5}{2e}$. (0,5 point)

EXERCICE 4: (03 points)

On considère un dé à six faces numérotées de 1 à 6. Après le jet, on note le numéro de la face supérieure apparue. Le dé est truqué de la manière suivante :

- Les numéros de même parité ont la même chance d'apparition.
- Un numéro pair à deux fois plus de chance d'apparaître qu'un numéro impair.
- On définit :

  p la probabilité d'un numéro pair

  q la probabilité d'un numéro impair

On rappelle que si Ω est l'ensemble de tous les cas possibles ; alors $P(\Omega) = 1$.

1) Calculer les probabilités p et q. (1 point)

2) Soit C l'évènement : « le numéro tiré est un nombre premier ».

   a) Ecrire l'ensemble C en extension. (0,5 point)

   b) Montrer que la probabilité p' de tirer un nombre premier est : $p' = \frac{4}{9}$. (0,5 point)

3) On lance 4 fois de suite le même dé et on note X la variable aléatoire qui associe le nombre de fois qu'un numéro premier apparaît.

   a) Calculer la probabilité d'obtenir exactement une fois un numéro premier. (0,5 point)

   b) Calculer la probabilité de ne pas avoir un numéro premier. (0,5 point)

CORRIGE DU BACCALAUREAT SESSION DE JUIN 2024
EPREUVE DE MATHEMATIQUES
SERIE C

EXERCICE 1 : (4 points)

$(S)\begin{cases} x \equiv 3[7] \\ x \equiv 5[9] \end{cases}$

1) <u>Prouvons que 185 est une solution de (S)</u>

$\begin{cases} 185 = 3 + 26 \times 7 \\ 185 = 5 + 20 \times 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 185 \equiv 3[7] \\ 185 \equiv 5[9] \end{cases}$

$\boxed{\text{Donc } 185 \text{ est une solution de } (S)}$

2. a) <u>Montrons que si x est une solution de (S), alors $x - 185$ est divisible par 7 et par 9</u>

$\begin{cases} x \equiv 3[7] \\ 185 \equiv 3[7] \end{cases} \Rightarrow x - 185 \equiv 0[7] \quad (1)$

$\begin{cases} x \equiv 5[9] \\ 185 \equiv 5[9] \end{cases} \Rightarrow x - 185 \equiv 0[9] \quad (2)$

(1) et (2) impliquent que $x - 185$ est divisible par 7 et par 9

$\boxed{\text{Ainsi donc, si } x \text{ est une solution de } (S)\text{, alors } x - 185 \text{ est divisible par 7 et par 9}}$

b) <u>Montrons que si un entier p est divisible par 7 et par 9, alors p est divisible par 63</u>

p est divisible par 7 et 9, donc p est un multiple du $PPCM(7;9)$.

On a : $p = kPPCM(7;9)$, $k \in \mathbb{N}^*$.

$p = 63k \Rightarrow p \equiv 0[63]$. Par conséquent, p est divisible par 63.

$\boxed{\text{Ainsi donc, si un entier } p \text{ est divisible par 7 et par 9, alors } p \text{ est divisible par 63}}$

c) <u>Déduisons que si x est une solution de (S), alors $x \equiv 185[63]$</u>

$\begin{cases} x - 185 \equiv 0[7] \\ x - 185 \equiv 0[9] \end{cases}$, donc $x - 185 = kPPCM(7;9) = 7 \times 9 \times k$

$x - 185 = 63k \Rightarrow x \equiv 185[63]$

$\boxed{\text{Donc, si } x \text{ est une solution de } (S)\text{, alors } x \equiv 185[63]}$

3) Déterminons toutes les valeurs de x solution de (S) telles que $680 \leq x \leq 820$

$x = 185 + 63k \ ; k \in \mathbb{N}^*$

$680 \leq x \leq 820$

$680 \leq 185 + 63k \leq 820$

$7{,}85 \leq k \leq 10{,}07 \Longrightarrow k \in \{8; 9; 10\}$

Pour $k = 8$; $x = 185 + 63 \times 8 = 689$

Pour $k = 9$; $x = 185 + 63 \times 9 = 752$

Pour $k = 10$; $x = 185 + 63 \times 10 = 815$

D'où $\boxed{x \in \{689 \ ; \ 752 \ ; \ 815\}}$

4. a) Justifions que N est solution de (S)

$\begin{cases} N = 3 + 7q \\ N = 5 + 9q' \end{cases} \ ; \ (q; q') \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$

$\Longrightarrow \begin{cases} N \equiv 3[7] \\ N \equiv 5[9] \end{cases}$

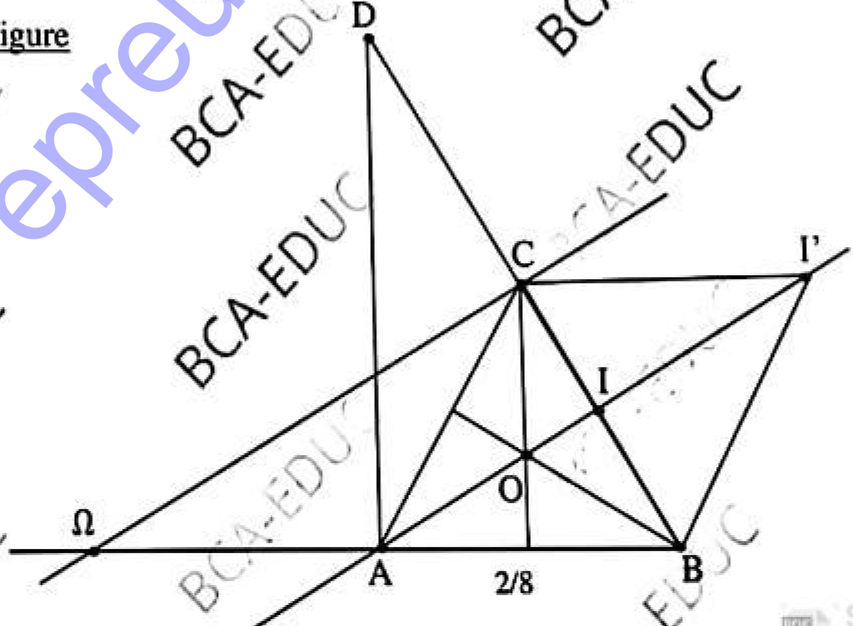
$\boxed{\text{Donc } N \text{ est solution de } (S)}$

b) Déduisons le nombre d'oranges contenues dans le sac sachant que $680 \leq N \leq 750$

$680 \leq N \leq 750 \Longrightarrow \boxed{N = 689 \text{ oranges}}$

EXERCICE 2 : (8 points)

1) Figure



2) $f = t_{\overrightarrow{BC}} \circ r\left(A; \frac{\pi}{3}\right)$; $g = f \circ r\left(B; -\frac{\pi}{3}\right)$

a) <u>Justifions que</u> $t_{\overrightarrow{BC}} = S_{(\Omega C)} \circ S_{(AI)}$

$(\Omega C) \parallel (AI)$, donc $S_{(\Omega C)} \circ S_{(AI)} = t_{2\overrightarrow{IC}}$ or $2\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{BC} \Longrightarrow \boxed{t_{\overrightarrow{BC}} = S_{(\Omega C)} \circ S_{(AI)}}$

b) <u>Etablissons que</u> $r\left(A; \frac{\pi}{3}\right) = S_{(AI)} \circ S_{(AB)}$

$(AI) \cap (AB) = \{A\}$ donc $S_{(AI)} \circ S_{(AB)} = r\left(A; 2(\overline{AB; AI})\right)$

$S_{(AI)} \circ S_{(AB)} = r\left(A; 2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \Longrightarrow \boxed{r\left(A; \frac{\pi}{3}\right) = S_{(AI)} \circ S_{(AB)}}$

c) <u>Déduisons que f est une rotation de centre Ω et d'angle de mesure</u> $\frac{\pi}{3}$

$f = t_{\overrightarrow{BC}} \circ r\left(A; \frac{\pi}{3}\right) = S_{(\Omega C)} \circ S_{(AI)} \circ S_{(AI)} \circ S_{(AB)}$

$f = S_{(\Omega C)} \circ S_{(AB)}$ or $(\Omega C) \circ (AB) = \{\Omega\}$

$f = R\left(\Omega; 2(\overline{AB; AI})\right)$ car $(\Omega C) \parallel (AI) \Longrightarrow f = R\left(\Omega; 2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$\Longrightarrow \boxed{f = R\left(\Omega; \frac{\pi}{3}\right)}$

d) <u>Montrons que g est une translation</u>

$g = f \circ r\left(B; -\frac{\pi}{3}\right)$

$g = R\left(\Omega; \frac{\pi}{3}\right) \circ r\left(B; -\frac{\pi}{3}\right)$

g est la composée de deux rotations dont la somme des angles est nulle

$\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 0\right)$, donc g est une translation. $g = t_{\vec{u}}$

e) <u>Montrons que $g(B) = D$</u>

$g = f \circ r\left(B; -\frac{\pi}{3}\right)$

$g(B) = f\left[r\left(B; -\frac{\pi}{3}\right)(B)\right] = f(B) = t_{\overrightarrow{BC}}\left[r\left(A; \frac{\pi}{3}\right)(B)\right] = t_{\overrightarrow{BC}}(C) = D$

D'où $\boxed{g(B) = D}$

<u>Déduisons le vecteur de g.</u>

$g(B) = t_{\vec{u}}(B) = D \Longrightarrow$ $\boxed{\vec{u} = \overrightarrow{BD}}$ et $g = t_{\overrightarrow{BD}}$

$\begin{cases} S(B) = B \\ S(I) = I' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} BI' = 2BI \\ (\overrightarrow{BI};\overrightarrow{BI'}) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ (voir figure)

d) <u>Montrons que les points $A; I$ et I' sont alignés</u>

$(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{II'}) \equiv (\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{IB};\overrightarrow{BI'}) + (\overrightarrow{BI'};\overrightarrow{II'})[2\pi]$

Or $S(I) = I' \Longrightarrow BII'$ est rectangle en I, on a : $(\overrightarrow{I'I};\overrightarrow{I'B}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ et

$(\overrightarrow{BI};\overrightarrow{BI'}) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$, ainsi : $(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{II'}) \equiv \frac{\pi}{2} + \pi + (\overrightarrow{BI};\overrightarrow{BI'}) + (\overrightarrow{I'B};\overrightarrow{I'I})[2\pi]$

$(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{II'}) \equiv \frac{\pi}{2} + \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}[2\pi] \Longrightarrow (\overrightarrow{IA};\overrightarrow{II'}) \equiv \frac{3\pi}{6} - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + \pi[2\pi]$

$\Longrightarrow (\overrightarrow{IA};\overrightarrow{II'}) \equiv \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} + \pi[2\pi] \Longrightarrow (\overrightarrow{IA};\overrightarrow{II'}) \equiv \pi[2\pi]$.

Les vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{II'}$ sont colinéaires de sens contraires. Par conséquent, les points A, I et I' sont alignés

4) $(E) = \{M \in \mathcal{P} / MB + MC = 2AC\}$

a) <u>Montrons que $A \in (E)$</u>

$A \in (E) \Leftrightarrow AB + AC = 2AC$.

ABC est un triangle équilatéral, donc $AB = AC = BC$. Donc $AB + AC = 2AC$

D'où $A \in (E)$.

b) <u>Justifions que (E) est une ellipse</u>

B et C étant deux points fixes du plan et M un point quelconque du plan tel que $MB + MC = 2AC$, alors d'après la définition bifocale de l'ellipse, (E) est une ellipse de foyers B et C, d'axe focal (BC).

c) <u>Calculons l'excentricité de (E)</u>

I est le centre de (E), B et C les foyers de (E), (AI) la médiatrice de $[BC]$ et $A \in (E)$. Donc A est un sommet de (E) situé sur l'axe non focal.

$e = \frac{c}{a}$; $c = IB = IC = \frac{BC}{2}$; $a^2 = c^2 + b^2$ et $b = AI$

$AB^2 = IB^2 + AI^2 \Longrightarrow AI^2 = AB^2 - IB^2 \Longrightarrow AI^2 = AB^2 - \frac{AB^2}{4} = \frac{3}{4}AB^2$

$AI^2 = \frac{3}{4}BC^2$

$a^2 = \frac{1}{4}BC^2 + \frac{3}{4}BC^2 = BC^2 \Longrightarrow a = BC$

$e = \frac{c}{a} \Longrightarrow e = \frac{\frac{BC}{2}}{BC} \Longrightarrow \boxed{e = \frac{1}{2}}$

EXERCICE 3 : (5 points)

$I = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2e^{-x}}dx$

1) $f(x) = x^2e^{-x}$

a) Calculons la dérivée $f'(x)$ puis étudions son signe

$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} \Longrightarrow \boxed{f'(x) = x(2-x)e^{-x}}$

Le signe de $f'(x)$ dépend de $x(2-x)$ car $e^{-x} > 0$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b) Dressons le tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0

c) Déduisons que $\forall\, x \in [0;1],\ 0 \leq f(x) \leq 1$

$\forall\, x \in [0;2]$, $f'(x) \geq 0$, or $[0;1] \subset [0;2]$, donc $x \in [0;1]$, $f'(x) \geq 0$, donc f est strictement croissante sur $[0;1]$.

On a : $0 \leq x \leq 1 \Longrightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(1)$ or $f(0) = 0$ et $f(1) = \frac{1}{e}$

$\Longrightarrow 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{e} < 1 \Longrightarrow \boxed{0 \leq f(x) \leq 1}$

2.a) Montrons que F est une primitive de f

$F(x) = (-x^2 - 2x - 2)e^{-x}$

F est une primitive de f si et seulement si $F'(x) = f(x)$

$F'(x) = (-2x - 2)e^{-x} - (-x^2 - 2x - 2)e^{-x}$

$F'(x) = (-2x - 2 + x^2 + 2x + 2)e^{-x}$

$F'(x) = x^2e^{-x} \Rightarrow F'(x) = f(x)$. Donc F est une primitive de f

b) Déduisons la valeur de J

$$J = \int_0^1 f(x)dx = [F'(x)]_0^1 \Rightarrow J = F(1) - F(0)$$

$\Rightarrow J = (-1 - 2 - 2)e^{-1} - (-2) \Rightarrow J = 2 - 5e^{-1}$

D'où $\boxed{J = 2 - \frac{5}{e}}$

3. a) Démontrons que $1 - J \leq I \leq 1 - \frac{J}{2}$

$$1 - u \leq \frac{1}{1+u} \leq 1 - \frac{u}{2}\ ;\ \forall u \in [0;1]$$

$$1 - f(x) \leq \frac{1}{1 + x^2e^{-x}} \leq 1 - \frac{1}{2}f(x)$$

$$\int_0^1 [1 - f(x)]dx \leq \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2e^{-x}}dx \leq \int_0^1 \left[1 - \frac{1}{2}f(x)\right]dx$$

$[x]_0^1 - J \leq I \leq [x]_0^1 - \frac{J}{2}$

D'où $\boxed{1 - J \leq I \leq 1 - \frac{J}{2}}$

b) Déduisons que $\frac{5}{e} - 1 \leq I \leq \frac{5}{2e}$

$1 - J \leq I \leq 1 - \frac{J}{2}$

$$1 - 2 + \frac{5}{e} \leq I \leq 1 - 1 + \frac{5}{2e} \Rightarrow \boxed{\frac{5}{e} - 1 \leq I \leq \frac{5}{2e}}$$

EXERCICE 4 : (3 points)

1) Calculons les probabilités p et q

$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$ or $p_1 = p_3 = p_5 = q$ et $p_2 = p_4 = p_6 = p$

$\Rightarrow 3p + 3q = 1$. De plus $p = 2q \Rightarrow 3(2q) + 3q = 1 \Rightarrow 6q + 3q = 1$

$\Rightarrow 9q = 1 \Rightarrow \boxed{q = \frac{1}{9}}$; $p = 2q \Rightarrow \boxed{p = \frac{2}{9}}$

2) C l'événement « le numéro obtenu est un nombre premier »

a) Ecrivons l'ensemble C en extension

$\boxed{C = \{2; 3; 5\}}$

b) Montrons que la probabilité p' d'obtenir un nombre premier est $p' = \frac{4}{9}$

$$p' = p_2 + p_3 + p_5 = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \Rightarrow \boxed{p' = \frac{4}{9}}$$

3) X suit une lois binomiale de paramètre 4 et $\frac{4}{9}$

a) Calculons la probabilité d'obtenir exactement une fois un numéro premier

$$P(X = k) = C_4^k p^k q^{4-k}$$

$$P(X = 1) = C_4^1 \left(\frac{4}{9}\right)^1 \left(\frac{5}{9}\right)^3 \Rightarrow P(X = 1) = 4 \times \frac{4}{9} \times \frac{125}{729} = \frac{2000}{6561} \approx 0{,}305$$

D'où $\boxed{P(X = 1) \approx 0{,}305}$

c) Calculons la probabilité de ne pas avoir un numéro premier

$$P(X = 0) = C_4^0 \left(\frac{4}{9}\right)^0 \left(\frac{5}{9}\right)^4 \Rightarrow \boxed{P(X = 0) = \frac{625}{6561}}$$