Sujet bac 2021 - Série C

Exercice 1 4 points

1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :

$$z^2 - (1 + 2\,\mathrm{e}^{i\theta})z + (1 + \mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{e}^{i\theta} = 0 \text{ avec } \theta \in [0; 2\pi]$$

2 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ d'unité graphique 2 cm.
On considère le point A d'affixe $z_A = 1$. Pour tout θ de l'intervalle $[0\,;2\pi]$, on désigne par M, P et Q les points d'affixes respectives $z = \mathrm{e}^{i\theta}$, $z_P = 1 + z$, $z_Q = z^2$.

- **a.** Montrer que l'ensemble $(\mathscr{C})$ décrit par le point M lorsque θ varie sur $[0\,;2\pi]$ est le cercle de centre O et de rayon 1.
- **b.** Le point M est sur le premier quadrant.
  Placer les points P et Q. (On pourra remarquer que $z_{\overrightarrow{OP}} = z_{\overrightarrow{OA}} + z_{\overrightarrow{OM}}$).

3 Soit B le point d'affixe $z_B = 1 + z + z^2$, où z est l'affixe du point M.

- **a.** Placer le point B dans le plan en justifiant la construction.
- **b.** Montrer que $\dfrac{z_B}{z}$ est un réel.
- **c.** En déduire que les points O, B et M sont alignés.

Exercice 2 4 points

Le plan est orienté.
On considère un triangle ABC rectangle en A, de sens direct, tel que $AC = 2AB$.
On désigne par K le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).
Soit I et J les symétriques orthogonaux respectifs du point K par rapport aux droites (AB) et (AC). $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ désignent respectivement le cercle de diamètre $[AB]$, de centre O et le cercle de diamètre $[AC]$, de centre O'.

1
- **a.** Faire une figure. (On prendra $AB = 3$ cm).
- **b.** Montrer que les droites (BI) et (AI) sont perpendiculaires.
- **c.** Montrer que les droites (CJ) et (AJ) sont perpendiculaires.

2 On note S_1 et S_2 les symétries orthogonales d'axes (AB) et (AC) respectivement.

- **a.** Caractériser la transformation ponctuelle g définie par : $g = S_2 \circ S_1$.
- **b.** En déduire que A est le milieu du segment $[IJ]$.

3 Soit f la similitude plane directe de centre A, qui transforme le cercle $(\mathscr{C}_1)$ en $(\mathscr{C}_2)$.

- **a.** Préciser le rapport k_f de f.
- **b.** Donner une mesure θ de l'angle de f.

4 **a.** En utilisant la tangente de l'angle $\widehat{C}$ dans les triangles ABC et ACK, vérifier que : $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AK}{CK}$.

b. En déduire que $CJ = JI$.

c. Soit D le projeté orthogonal de C sur la droite (BI).
Montrer que le quadrilatère $CJID$ est un carré.

5 On désigne par E le symétrique de D par rapport à C. Soit $(\mathscr{P})$ la parabole de foyer C passant par D et E, et admettant comme tangente, les droites (JE) et (JD) respectivement en E et D.

a. Montrer que les droites (JE) et (JD) sont perpendiculaires.

b. En déduire que (IJ) est la directrice de $(\mathscr{P})$.

c. Tracer (Γ), l'arc de la parabole $(\mathscr{P})$ d'extrémités E et D.

Exercice 3 — 5 points

f est la fonction numérique, dérivable sur $I = [2\,;\,3]$ définie par :

$$f(x) = 1 + \ln(1+x)$$

1 Calculer la dérivée f' de f.

2 Montrer que : $\forall\, x \in I$, on a $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{3}$.

3 Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in]2\,;3[$.

4 Montrer que : $\forall x \in I$, on a $f(x) \in I$.

5 On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

a. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.

b. En utilisant les inégalités des accroissements finis, montrer que :

$$\forall x \in I,\ |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{3}|x - \alpha|$$

.

c. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3}|u_n - \alpha|$.

d. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

e. En admettant que la suite (u_n) est convergente, calculer sa limite l quand n tend vers $+\infty$.

f. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que : $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$.

Exercice 4 — 3 points

On teste un médicament sur un ensemble d'individus ayant un taux de glycémie anormalement élevé.

Pour cela, 60 % des individus prennent le médicament, les autres reçoivent une substance neutre et l'on étudie, à l'aide d'un test, la baisse du taux de glycémie.
Chez les individus ayant pris le médicament, on constate une baisse du taux de glycémie, avec une probabilité égale à 0,8.
On ne constate aucune baisse de ce taux pour 90 % des personnes ayant reçu la substance neutre.
On désigne par M et B les événements suivants :

M : « avoir pris le médicament »
B : « avoir une baisse du taux de glycémie »

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Démontrer que la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie est égale à 0,52.
3. On soumet au test un individu pris au hasard.
   Quelle est la probabilité qu'il ait pris le médicament sachant que l'on constate une baisse de son taux de glycémie ?
4. On contrôle 5 individus au hasard.
   Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux personnes dont le taux de glycémie a baissé ?

VALÉRIEN EBERLIN
HTTP://MATHS.CONGO.FREE.FR
JUILLET 2021