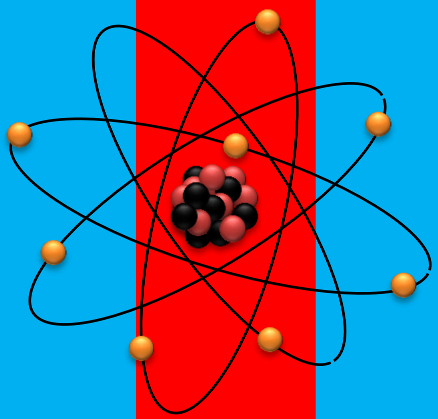


BAC Plus

5 10,811 B BORE

15 30,974 P PHOSPHORE

Le meilleur coach pour s'entraîner, réussir et aller plus loin !

PHYSIQUE - CHIMIE

Cours et Exercices

Terminales C, D & E

Séquence 1.

- Rappels mathématiques & incertitudes ;
- Cinématique du point ;
- Dynamique de translation & rotation ;
- Energies ;
- Oscillateurs mécaniques ;
- Lois physiques ;
- Spectre de l'atome d'hydrogène ;
- Noyau atomique & Réactions nucléaires ;
- Cinétique & Equilibres chimiques ;
- Réactions d'estérification.

Par :

Yann Norfé BEMBA D.

Ing. Le – Sage KIF.

Professeurs certifiés des lycées.

AVANT – PROPOS

Ce document, destiné aux élèves de Terminales scientifiques est spécialement conçu pour les préparer au Baccalauréat en Sciences – Physiques. Il présente un condensé plus ou moins détaillé de tout le programme de Terminale en vigueur. Rédigé d'une manière simple, il évite tout formalisme ou abstraction inutile et suit au plus près les commentaires officiels. Conformément à la nouvelle évaluation du Baccalauréat, il permet à l'élève de bien assimiler les notions présentées dans chaque chapitre, car on y trouve des définitions simples et claires appuyées par des exemples, des énoncés des lois et théorèmes ainsi que des démonstrations détaillées dont les démarches sont expliquées.
L'introduction des couleurs dans les figures et le texte les rend plus claires et plus suggestives, afin de souligner l'importance des termes et expressions pour faciliter la compréhension et l'assimilation. Certains chapitres sont appuyés par des « applications résolues » incorporées à la leçon ou à la fin de celle – ci pour permettre une compréhension progressive du cours et une mise en œuvre des notions introduites.

Compte tenu du jumelage des deux matières dans ce même document, rendant ainsi le programme très long, nous avons jugé nécessaire de le subdiviser en plusieurs séquences comprenant chacune à la fois quelques chapitres de physique et de chimie, afin de couvrir l'ensemble du programme. Chaque chapitre est clos par une fiche d'évaluation « travaux dirigés » comprenant une série de questionnaires de nature variable (Définitions des termes, questions à réponses constructives, questions à alternative vrai ou faux, appariement, texte à trous…) dans la rubrique « l'essentiel du cours » ainsi qu'une diversité d'exercices dans la rubrique « résolution d'un problème », dont l'ordre de difficulté va de la couleur verte à la couleur rouge en passant par l'orange, le tout conçu pour préparer l'élève à aborder l'épreuve de Sciences – physiques au baccalauréat.

Nous espérons présenter ainsi un ouvrage clair et utile, propre à motiver les élèves de classes à vocation essentiellement scientifique ou technique.
Nous serions reconnaissants à nos collègues utilisateurs de nous faire part de leurs remarques et nous les en remercions d'avance.

Table des matières

DOMAINE D'ETUDE I : MECANIQUE

DOMAINE D'ETUDE II : REACTION CHIMIQUE

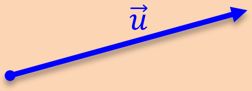
DOMAINE D'ETUDE I : MECANIQUE

OG$_1$: UTILISER LES OUTILS MATHEMATIQUES DANS L'ETUDE DES PHENOMENES PHYSIQUES.

1 LES OUTILS MATHEMATIQUES.

I. Calcul vectoriel.

I.1. Définition d'un vecteur : *On appelle vecteur, tout segment de droite orienté.*



Il est caractérisé par :

- ✓ *Un point d'application : c'est l'origine du vecteur ;*
- ✓ *Une direction : c'est la droite d'action ;*
- ✓ *Un sens : c'est l'orientation ;*
- ✓ *Une intensité : c'est la norme ou module du vecteur.*

I.2. Opérations élémentaires sur les vecteurs.

a) Addition de deux vecteurs.

a$_1$. Vecteurs colinéaires de même sens.

Soient deux vecteurs colinéaires et de même sens $\vec{u}$ et $\vec{v}$, représentés par la figure 1 ci – dessous :

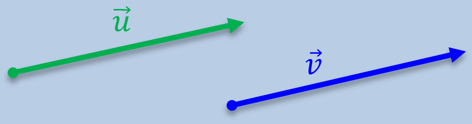


Figure 1.

Le vecteur $\vec{F}$ obtenu par la somme vectorielle $\vec{F} = \vec{u} + \vec{v}$ est tel que (figure 2) :

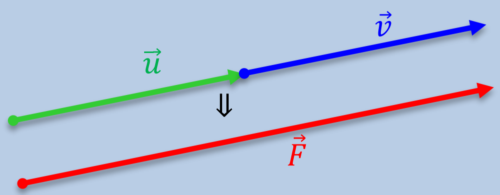


Figure 2.

Le vecteur résultant $\vec{F}$ a :

- ✓ *La même direction que $\vec{u}$ et $\vec{v}$;*
- ✓ *Le même sens que $\vec{u}$ et $\vec{v}$;*
- ✓ *Une intensité telle que :*

$$\boxed{F = u + v}$$

a$_2$. Vecteurs colinéaires de sens contraires.

Soient deux vecteurs colinéaires et de sens contraires $\vec{u}$ et $\vec{v}$, représentés par la figure 3 ci – dessous :

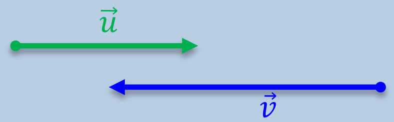


Figure 3.

Le vecteur $\vec{F}$ obtenu par la somme vectorielle $\vec{F} = \vec{u} + \vec{v}$ est tel que (figure 4) :

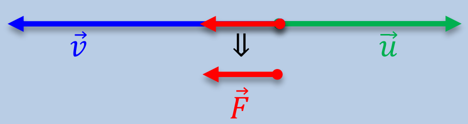


Figure 4.

Le vecteur résultant $\vec{F}$ a :

- ✓ *La même direction que $\vec{u}$ et $\vec{v}$;*
- ✓ *Le même sens que le vecteur ayant la plus grande intensité : donc $\vec{v}$;*
- ✓ *Une intensité telle que :*

$$\boxed{F = |u - v|}$$

a₃. Vecteurs de directions quelconques.

Soient deux vecteurs de directions quelconques $\vec{u}$ et $\vec{v}$, tels que représentés par la figure 5 ci – dessous :

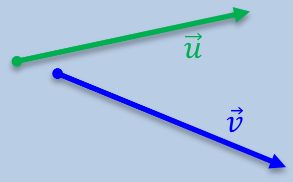


Figure 5.

Le vecteur $\vec{F}$ obtenu par la somme vectorielle $\vec{F} = \vec{u} + \vec{v}$ est tel que (figure 6) en utilisant la règle du parallélogramme :

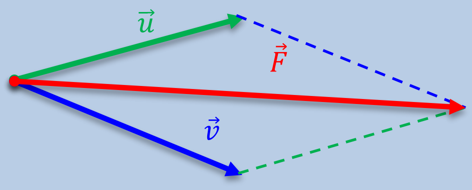


Figure 6.

Le vecteur résultant $\vec{F}$ a :

- ✓ *Une direction indépendante de celle des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$;*
- ✓ *Un sens moyen par rapport à ceux des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$;*
- ✓ *Une intensité telle que :*

$$\boxed{F = \sqrt{u^2 + v^2 + 2u.v\cos(\vec{u},\vec{v})}}$$

b) Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Soit un vecteur $\vec{F} = k.\vec{u}\,;\, k \in \mathbb{R}^*$

Le vecteur $\vec{F}$ a :

- ✓ *La même direction que $\vec{u}$;*
- ✓ *Un sens qui dépend du signe de k :*
  - ♣ *Si $k < 0$, $\vec{F}$ et $\vec{u}$ sont de sens contraires ;*
  - ♣ *Si $k > 0$, $\vec{F}$ et $\vec{u}$ sont de même sens ;*
- ✓ *Une intensité qui vaut :*

$$\boxed{F = |k|.u}$$

c) Produit scalaire de deux vecteurs.

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $\vec{u}.\vec{v}$ est *scalaire k* (un nombre réel $k \in \mathbb{R}$) obtenu par le calcul ci – dessous :

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = k = u.v.\cos(\vec{u},\vec{v})}$$

Remarque : Dans la base cartésienne $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$:
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'écrivent :

$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

$\vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k}$

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'}$$

x, y, z, et *z', y', z'* sont les composantes ou coordonnées cartésiennes respectives de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exemple :

On donne les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définis par :

$\vec{u} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 3\vec{k}$ et $\vec{v} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$

Le produit scalaire entre ces deux vecteurs donne :

$\vec{u}.\vec{v} = 2(3) + 3(-1) - 3(2) = 6 - 3 - 6$

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = -3}$$

Note :

- ✓ Le produit scalaire d'un vecteur par lui – même vaut le carré de son intensité ($\vec{u}.\vec{u} = u^2$).
- ✓ Le produit scalaire de deux vecteurs colinéaires vaut le produit de leurs intensités ; son signe dépend de leurs sens ($\vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{u}.\vec{v} = \pm u.v$) ;
  - ✓ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens : $\vec{u}.\vec{v} = +u.v$;
  - ✓ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraires : $\vec{u}.\vec{v} = -u.v$.
- ✓ Le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est nul :
  Si $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$) ;
- ✓ $\vec{\imath}.\vec{\imath} = 1$; $\vec{\jmath}.\vec{\jmath} = 1$; $\vec{k}.\vec{k} = 1$;
- ✓ $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = 0$; $\vec{\imath}.\vec{k} = 0$; $\vec{\jmath}.\vec{k} = 0$.

d) Produit vectoriel de deux vecteurs.

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ donne un *vecteur* dont la direction est perpendiculaire au plan formé par les deux vecteurs.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$$

telque représenté par la figure 7 ci – dessous :

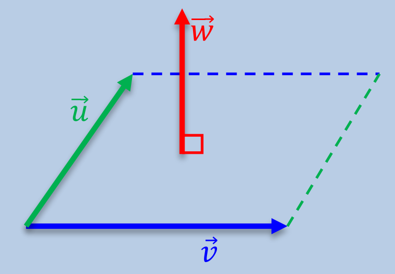


Figure 7.

- ✓ Le *sens* de $\vec{w}$ est tel qu'il forme un trièdre direct avec les deux vecteurs ; c'est – à – dire le sens de rotation des trois vecteurs est le sens trigonométrique (sens contraire des aiguilles d'une montre) comme indiqué sur la figure 8 ci – dessous.

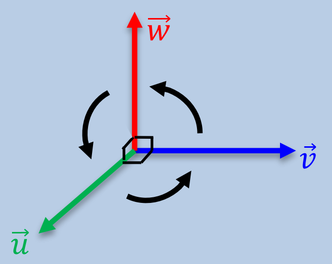


Figure 8.

- ✓ Son *intensité* est telle que :

$$w = u.v|sin(\vec{u}, \vec{v})|$$

Exemple :

- ♣ $\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}$; $k = i.j.|sin(\vec{\imath}, \vec{\jmath})|$
- ♣ $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$; $F = |q|v.B.\left|sin(q\vec{v}, \vec{B})\right|$

Note :

- ✓ Le produit vectoriel d'un vecteur par lui – même est nul ($\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$).
- ✓ Le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est nul :
Si $\vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- ✓ Le produit vectoriel de deux vecteurs orthogonaux donne un vecteur orthogonal aux deux vecteurs :
Si $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{u} \\ \vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{v} \end{cases}$.
- ✓ Si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$ alors $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{w}$
- ✓ $\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}$; $\vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \vec{\imath}$; $\vec{k} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath}$
- ✓ $\vec{\jmath} \wedge \vec{\imath} = -\vec{k}$; $\vec{k} \wedge \vec{\jmath} = -\vec{\imath}$; $\vec{\imath} \wedge \vec{k} = -\vec{\jmath}$
- ✓ $\vec{\imath} \wedge \vec{\imath} = \vec{0}$; $\vec{\jmath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{0}$; $\vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$.

I.3. Projection d'un vecteur par rapport aux axes d'un repère.

Considérons un vecteur $\vec{v}$ dans le repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) comme l'indique la figure 9 ci – dessous :

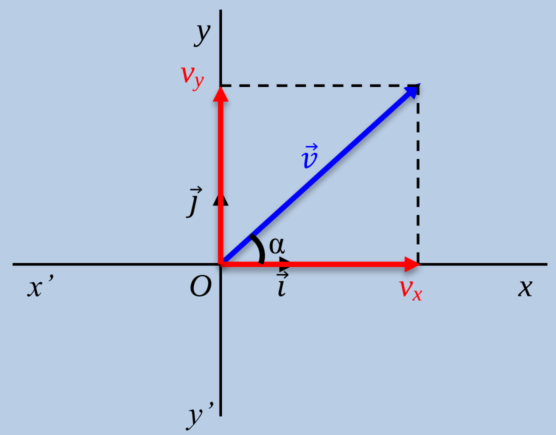


Figure 9.

- ✓ La projection de $\vec{v}$ sur l'axe (Ox) permet d'obtenir sa composante v_x :

$$cos\alpha = \frac{v_x}{v} \Rightarrow v_x = vcos\alpha$$

- ✓ La projection de $\vec{v}$ sur l'axe (Oy) permet d'obtenir sa composante v_y :

$$sin\alpha = \frac{v_y}{v} = \Rightarrow v_y = vsin\alpha$$

Ainsi : $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath}$
Le vecteur $\vec{v}$ peut donc s'écrire en fonction de l'angle qu'il fait avec l'axe (Ox) et de son module :
D'où :

$$\vec{v} = (vcos\alpha)\vec{\imath} + (vsin\alpha)\vec{\jmath}$$

I.4. Egalité des angles.

- ✓ Considérons le schéma de la figure 10 ci – dessous :

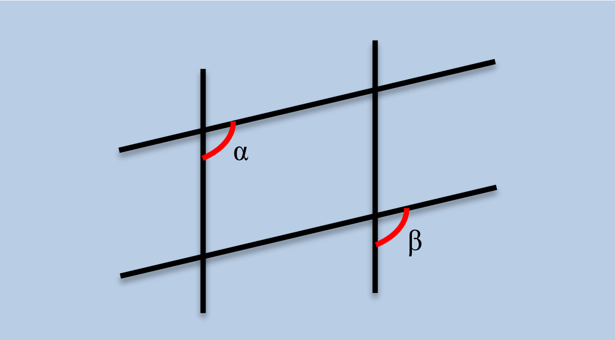


Figure 10.

Théorème 1 : *Deux angles à côtés parallèles deux à deux sont égaux.*

$$\alpha = \beta$$

- ✓ Considérons le schéma de la figure 11 ci – dessous :

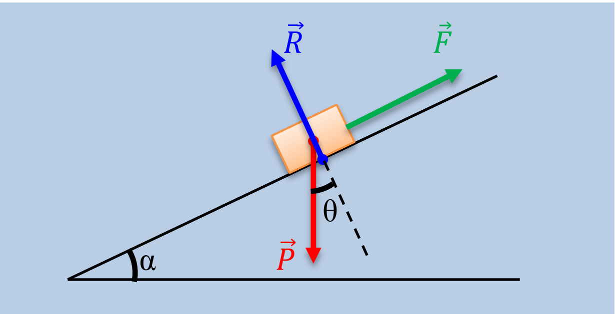


Figure 11.

Théorème 2 : Deux angles à côtés perpendiculaires deux à deux sont égaux.

$$\alpha = \theta$$

Remarque : La connaissance de ces deux théorèmes est capitale, étant donné que dans la résolution de certains problème de physique, nous serons amené à déterminer des angles inconnus en fonction de ceux connus, en utilisant des schémas comportant des droites parallèles ou perpendiculaires.

II. Calculs des dérivées et primitives.

II.1. Calcul des dérivées.

a. Définition : *Soit f une fonction de la variable t, on appelle dérivée de la fonction f(t), la fonction f'(t) obtenue en dérivant f(t), soit :*

$$f'(t) = \frac{df(t)}{dt}$$

b. Quelques dérivées des fonctions usuelles.

En physique, on se servira d'une liste réduite de fonctions usuelles, dont voici les plus utilisées.

Fonction *f*	Dérivée *f'*
$k\,;k \in \mathbb{R}$	0
$at\,;\; a \neq 0$	a
t^2	$2t$
$t^n\,; n > 1$	nt^{n-1}
$U^n\,; n > 1$	$nU'U^{n-1}$
$cost$	$-sint$
$sint$	$cost$
$U.V$	$U'.V + U.V'$
$\frac{U}{V}$	$\frac{U'V - U.V'}{V^2}$
$kcos(at+b)$	$-aksin(at+b)$
$ksin(at+b)$	$akcos(at+b)$
$kcos[U(t)]$	$-kU'sin[U(t)]$
$ksin[U(t)]$	$kU'cos[U(t)]$

Exemples :

- ♣ $f(t) = t^4 + 3t^2 - 1 \Rightarrow f'(t) = 4t^3 + 6t$
- ♣ $g(t) = 2cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$

  $\Rightarrow g'(t) = -\pi sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right).$

Note : La dérivée *f'(t)* se note aussi $\frac{df(t)}{dt}$.

Exemples :

- ♣ $f(t) = asin(\omega t + \varphi)$

  $\Rightarrow f'(t) = \frac{df(t)}{dt} = a\omega cos(\omega t + \varphi)$
- ♣ $g(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$

  $\Rightarrow g'(t) = \frac{dg(t)}{dt} = at + v_0$

Remarque :
Si $y = f(x)$ et $x = g(t)$
La dérivée de y par rapport à t vaut :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Exemple : $y = x^2 + 2x - 1$; avec $x = t^2 - 2$

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 2 = 2(t^2 - 2) + 2 \quad et \quad \frac{dx}{dt} = 2t$$

Ainsi on a :

$$\frac{dy}{dt} = [2(t^2 - 2) + 2] \times 2t = 4t^3 - 4t$$

D'où :

$$\frac{dy}{dt} = 4t^3 - 4t$$

II.2. Calcul des primitives.

a. Définition : *Soit f une fonction de la variable t, on appelle primitive de la fonction f(t), la fonction F(t) obtenue en intégrant f(t).*
On note :

$$F(t) = \int f(t)dt$$

b. Quelques primitives des fonctions usuelles.
Comme dans le cas des fonctions dérivées, on se servira d'une liste réduite de fonctions usuelles, dont voici les plus utilisées.

Fonction f	Primitive F
0	$k\,;\,k \in \mathbb{R}$
$a\,;\; a \neq 0$	$at + cte$
t	$\frac{1}{2}t^2 + cte$
$t^n\,;\, n > 1$	$\frac{t^{n+1}}{n+1} + cte$
$U'U^n\,;\, n > 1$	$\frac{U^{n+1}}{n+1} + cte$
$cost$	$sint + cte$
$sint$	$-cost + cte$
$kcos(at + b)$	$\frac{k}{a}sin(at + b) + cte$
$ksin(at + b)$	$-\frac{k}{a}cos(at + b) + cte$
$\frac{U'}{U}\,;\, U \neq 0$	$lnU + cte$

Exemples :

- ♣ $f(t) = 3t^2 - t + 6$

  $\Rightarrow F(t) = t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 6t + cte$
- ♣ $f(t) = 2\cos(3t - 6)$

  $\Rightarrow F(t) = \frac{2}{3}\sin(3t - 6) + cte$
- ♣ $f(t) = asint\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

  $\Rightarrow F(t) = -\frac{a}{\omega}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + cte$

Note : La détermination de la constante (cte) nécessite la connaissance des conditions précises des images de la fonction dérivée ; ainsi par la résolution d'un système d'équations, on détermine la constante exacte de la fonction dérivée qui vérifie ces conditions.

III. Trigonométrie.

III.1. Relation dans un triangle rectangle.

Considérons le triangle *ABC* rectangle en *B*, ayant pour angles aux sommets α en A et β en C comme l'indique la figure 12.

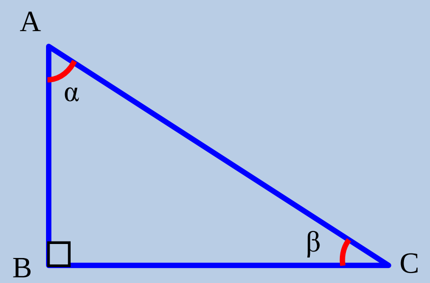


Figure 12.

$$sin\alpha = \frac{côté\ opposé}{hypothénuse} = \frac{BC}{AC}$$

$$cos\alpha = \frac{côté\ adjacent}{hypothénuse} = \frac{AB}{AC}$$

$$tan\alpha = \frac{côté\ opposé}{côté\ adjacent} = \frac{BC}{AB}$$

$$sin\beta = \frac{côté\ opposé}{hypothénuse} = \frac{AB}{AC}$$

$$cos\beta = \frac{côté\ adjacent}{hypothénuse} = \frac{BC}{AC}$$

$$tan\beta = \frac{côté\ opposé}{côté\ adjacent} = \frac{AB}{BC}$$

$$Si\ \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} sin\alpha = cos\beta \\ sin\beta = cos\alpha \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} tan\alpha &= \frac{CB}{AB} \\ cotan\beta &= \frac{CB}{AB} \end{aligned}\right\} \Rightarrow tan\alpha = cotan\beta$$

- ♣ $AC^2 = AB^2 + BC^2$: C'est le *Théorème de PYTHAGORE.*
- ♣ $cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$: C'est la *relation fondamentale de la trigonométrie*.

III.2.Relation dans un triangle quelconque.

Considérons le triangle quelconque *ABC*, d'angles aux sommets *α, β* et *θ* (figure 13).

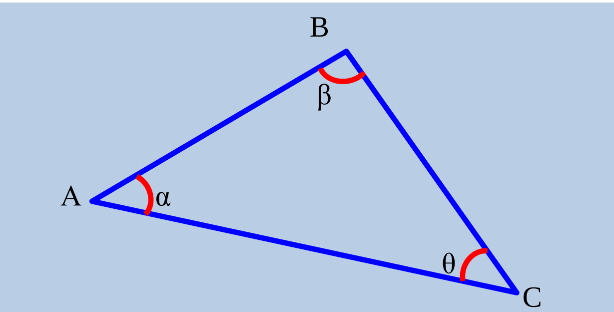


Figure 13.

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC.BC.cos\theta$$
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC.cos\beta$$
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.cos\alpha$$

C'est le *théorème d'Al – Kashi* ou *théorème de Pythagore généralisé*.

III.3. Cercle trigonométrique.

Traçons le *cercle trigonométrique*, de centre *O*, de rayon égal à l'unité (*R = 1*), et deux axes de coordonnées rectangulaires *Ox* et *Oy* (voir figure 14 ci – dessous.

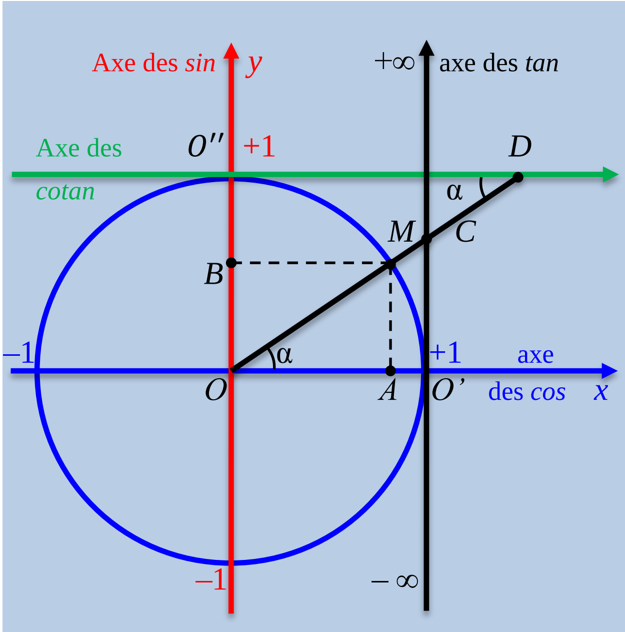


Figure 14.

$OM = R = 1$: rayon du cercle trigonométrique.

$$cos\alpha = \frac{OA}{OM} = OA$$

$$sin\alpha = \frac{AM}{OM} = AM$$

$$tan\alpha = \frac{AM}{OA} = \frac{O'C}{OO'} = \frac{O'C}{OM} = O'C$$

$$cotan\alpha = \frac{OA}{AM} = \frac{OO'}{O'C} = \frac{O''D}{O''O} = \frac{O''D}{OM} = O''D$$

III.4. Angles remarquables.

Il est utile de retenir quelques valeurs des rapports trigonométriques (sinus et cosinus) pour certains angles (0° ; 30° ; 45° ; 60° ; 90°). On en déduira immédiatement les valeurs des tangentes et cotangentes.

Angle		$sin\alpha$	$cos\alpha$	$tan\alpha$	$cotan\alpha$
Degrés	Radians				
0°	0	0	1	0	$+\infty$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$+\infty$	0

III.5. Formules de transformation.

Ce sont des formules obtenues à partir des formules trigonométriques de base, et ayant une grande utilité dans la résolution de certains problèmes de physique ; en voici quelques unes :

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$$
$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$$
$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$

$$\sin 2a = 2\cos a.\sin a$$
$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a$$
$$\frac{1}{\cos^2 a} = 1 + \tan^2 a$$

$$\sin p + \sin q = 2\cos\frac{p-q}{2}\sin\frac{p+q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

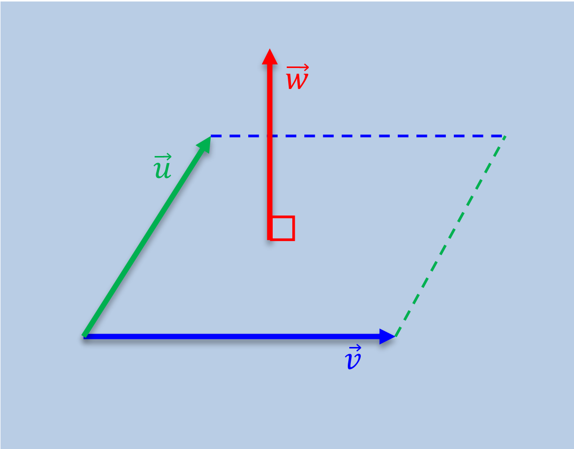
$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$$
$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\alpha$$
$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha$$
$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha$$

$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$$
$$\sin(\alpha - \pi) = -\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$$
$$\cos(\alpha - \pi) = -\cos\alpha$$

TRAVAUX DIRIGES I

Conseils pratiques :

1. Techniques de réalisation des schémas.
2. Coordonnées cartésiennes.
3. Projection des vecteurs. Etude des systèmes en équilibre.
4. Formules trigonométriques. Formules de transformation.



RESOLUTION DES PROBLEMES

EXERCICE 1 : Après avoir rappelé les formules usuelles sur les dérivées, détermine les dérivées des fonctions suivantes :

$f(t) = t^{-5} + 2t - 100$;

$g(t) = -2\cos(-5t^4 + 6t + t^7)$;

$i(t) = a\sin(\omega t + \varphi)$ où a, ω et φ sont des constantes ;

$j(t) = \dfrac{2t}{1-t^2}$.

EXERCICE 2 : Calcule les dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(t) = 5t^3 - 6t^2 + 10t + 4$

b) $f(t) = -\dfrac{1}{2}t^4 - 6t^3 - 5t^2$

c) $f(t) = \dfrac{6t^2 - 5}{3t + 1}$

d) $f(t) = 5sin8t - 9cos4t$

e) $f(t) = t^2cos4t$

f) $f(t) = 3cos\left(2co\pi t - \dfrac{\pi}{4}\right)$

g) $f(t) = \sqrt{6t^2 - 2t}$

h) $f(t) = 4t^2(3t - 1)^3$

i) $f(t) = \dfrac{t^4}{4} + t^3 + \dfrac{6}{t} + 5$

j) $f(t) = 5sint.cost$

EXERCICE 3 : Après avoir rappelé les formules usuelles sur les primitives, détermine les primitives des fonctions suivantes :

$f(t) = t^{\frac{2}{3}} + 3t - 1$; $g(t) = \dfrac{2t}{t^2 - 25}$;

$i(t) = 3t^2 sin(t^3 - 9)$; $j(t) = 4t^3 + 3t$;

$h(t) = acos(at + b)$ où a et b sont des constantes ;

EXERCICE 4 : Soit la fonction f définie par :

$f(t) = 2cos\left(3t - \dfrac{\pi}{4}\right)$

a) Détermine sa période ;
b) Détermine les fonctions dérivées f' et f'' de f.

EXERCICE 5 : Intègre les fonctions suivantes :

a) $f(t) = \dfrac{t^2}{3} + 3t - 4$

b) $g(t) = sin3t + cos(2t - 1)$

c) $h(t) = 2sint.cost$

EXERCICE 6 : Quelle est la norme d'un vecteur $\vec{F}$ dont les modules des composantes F_x et F_y valent respectivement $8N$ et $6N$? Quel angle ce vecteur fait – il avec l'axe des abscisses.

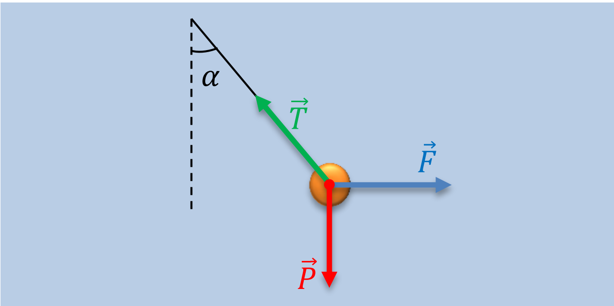
EXERCICE 7 : Deux enfants veulent desceller un anneau fixé à un mur.
Ils accrochent chacun une corde à cet anneau. L'un d'eux tire horizontalement et perpendiculairement au mur, l'autre obliquement vers le haut en formant un angle de $60°$ avec l'horizontale.

Sachant que $F_2 = 2F_1$, après avoir tracé la résultante de ces deux forces, donne l'expression de son intensité en fonction de F_1 et α. Calcule – la pour $F_1 = 10N$.

EXERCICE 8 : Dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$), on considère les vecteurs ci – après : $\vec{u} = x\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$.
1°) Calcule le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$.
2°) Que vaut le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$.
3°) Soit un vecteur $\vec{w} = 2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$. Détermine x pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ soient colinéaires.

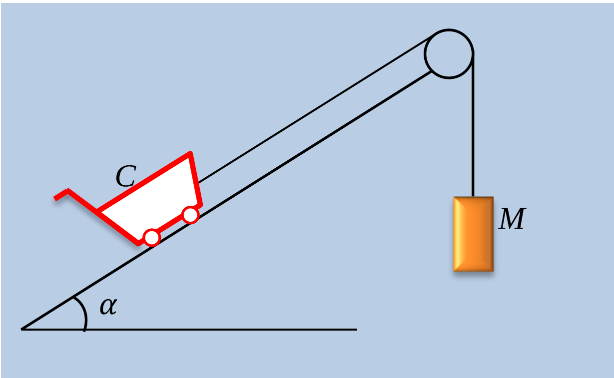
EXERCICE 9 : Un skieur de masse *60Kg* descend une piste inclinée de $\alpha = 20°$ sur une ligne horizontale. La force de frottements $\vec{f}$ est telle que le skieur possède une vitesse constante. Calcule dans la base orthonormée, les coordonnées et les normes des trois vecteurs forces : $\vec{P}$ (poids), $\overrightarrow{R_n}$ (action normale de la piste sur le skieur) et $\vec{f}$. On donne : $g = 9{,}8N/Kg$.

EXERCICE 10 :



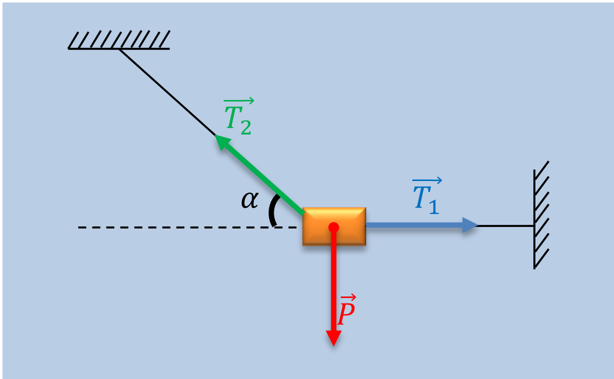
Une boule métallique de masse (m) en équilibre dans un champ électrostatique (uniforme) est soumise aux forces représentées dans le schéma ci – dessus. Exprime en fonction de m, g et α, les expressions de la force électrostatique et la tension du fil.

EXERCICE 11 :



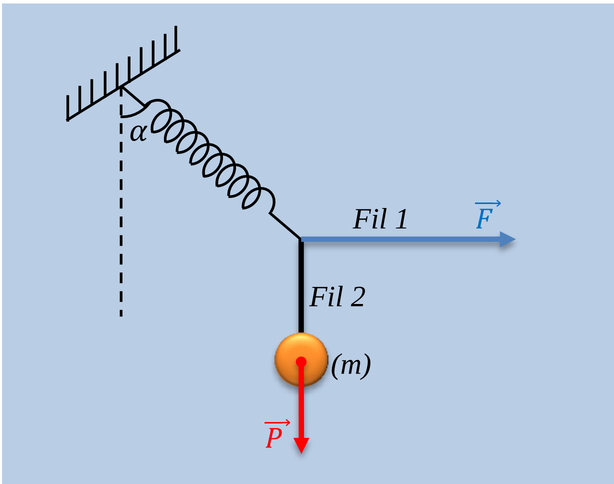
Le chariot C de masse $m = 5Kg$ se trouve sur un plan incliné faisant un angle $\alpha = 35°$ par rapport à l'horizontal. Une masse M servant de contrepoids permet de maintenir le chariot en équilibre. Calcule M (on suppose négligeable les frottements ainsi que la masse du fil, de la poulie et du plateau). Quelle est la tension du fil ?

EXERCICE 12 : Un corps de masse m est suspendu par l'intermédiaire de deux fils, l'un horizontal et l'autre oblique faisant un angle $\alpha = 45°$ avec l'horizontal.



1°) Sachant que la tension du fil horizontal est $T_1 = 50N$, détermine la tension T_2 de l'autre fil pour que le corps soit en équilibre.
2°) Calcule la masse m du corps suspendu.
On donne $g = 10N/Kg$.

EXERCICE 13 :



Le système ci – dessus représente un corps de masse m en équilibre ; $\vec{F}$ est la force horizontale exercée par un opérateur.
Etablis les relations permettant de déterminer L, longueur du ressort et F en fonction des données : m ; g ; α ; K ; L_0 ; longueur à vide du ressort.

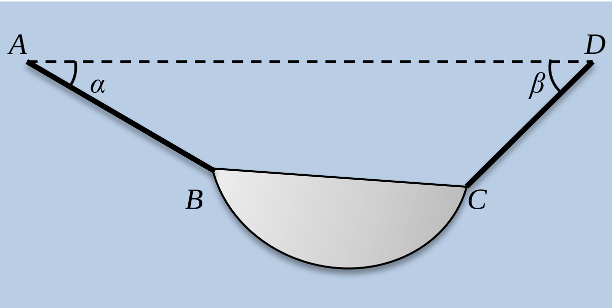
EXERCICE 14 : Une personne monte une caisse de masse *50Kg* sur un plan incliné d'angle $\alpha = 30°$, à l'aide d'un câble faisant un angle β par rapport à la ligne de plus grande pente du plan incliné. Sous l'action des forces de frottements, la réaction s'incline de la normale au plan, de telle sorte qu'elle soit orthogonale à la force de traction.

1°) Montre par calcul que le produit scalaire entre la réaction et la force de traction est nul.

2°) Calcule le produit vectoriel $\vec{F} \wedge \vec{R}$.

3°) Sachant que $F = 520N$ et $f = 10N$, calcule la valeur de l'angle β, pour une vitesse constante.

EXERCICE 15 :



La figure ci – contre représente un élève reposant dans un hamac. *A* et *D* sont à la même hauteur et le poids de l'élève vaut $P = 800N$.

Le poids du hamac est négligé. $\alpha = 30°$ et $\beta = 50°$.

Le système (élève + hamac), soumis à trois forces est en équilibre.

Détermine la valeur T_1 de la tension de la corde *AB* ainsi que la valeur T_2 de la tension de la corde *CD*.

DOMAINE D'ETUDE I : MECANIQUE

OG_1 : UTILISER LES OUTILS MATHEMATIQUES DANS L'ETUDE DES PHENOMENES PHYSIQUES.

2 LES INCERTITUDES DES GRANDEURS PHYSIQUES.

I. Les incertitudes.

I.1. Les phénomènes physiques.

L'échauffement ou le refroidissement de l'eau, sa transformation en vapeur d'eau par évaporation ou ébullition, ou en glace par congélation, l'échauffement d'un conducteur par effet Joule, la dispersion de la lumière blanche par un prisme sont autant des *phénomènes physiques*.

On appelle ainsi des transformations ou des modifications qui n'affectent pas la *nature* des corps mis en jeu.

Un phénomène physique est généralement une *transformation temporaire* dont l'effet peut être annulé par celui de la transformation inverse ; par exemple, en se vaporisant ou se solidifiant, l'eau reste de l'eau et peut revenir à l'état initial par liquéfaction ou fusion.

I.2. Les grandeurs physiques ; la mesure des grandeurs.

Imaginons qu'on veuille étudier les phénomènes qui accompagnent le passage du courant électrique dans un fil conducteur : on est amené à mesurer la *longueur* du fil et sa *section*, la *durée* et l'*intensité* du courant, la *masse* en eau d'un calorimètre et la variation de sa *température*…

Une *longueur*, une *section*, une *intensité* de courant, une *masse*, un *accroissement de température*…, sont autant de grandeurs physiques ; on voit par ces exemples que le terme *grandeur* a un sens très général :

On appelle grandeur physique, tout ce qui peut prendre une valeur déterminée dans les conditions bien définies.

Exemple : *Intensité, pression, volume, vitesse, masse, énergie, surface…*

Mesurer une grandeur physique, revient à la comparer à une grandeur de la même espèce prise comme unité.

D'une manière générale :

Une grandeur est mesurable si l'on sait définir : le rapport ou bien l'égalité et la somme de deux grandeurs de la même espèce.

I.3. Valeur approchée et valeur exacte d'une grandeur physique.

Soit à mesurer une certaine grandeur A, une longeur par exemple.

Si l'on recommence plusieurs fois la mesure, avec le même soin, les nombres trouvés sont en général légèrement différents : on n'a aucune raison d'affirmer que l'un plutôt que l'autre de ces nombres exprime la *valeur exacte* de *A*.

C'est dire que *le nombre a, résultat de la mesure d'une grandeur A, n'est qu'une valeur approchée de A.*

- ✓ *La valeur approchée d'une grandeur physique A est le résultat de sa mesure dans certaines conditions.* Elle est notée a.
- ✓ La *valeur exacte est la valeur réelle de cette grandeur physique prise dans certaines conditions.* Elle est notée a_e.

Remarques :
R$_1$: a est une *valeur concrète.*

R$_2$: Lorsqu'on obtient plusieurs valeurs à la suite de la mesure d'une grandeur physique, on prend la moyenne de ces valeurs comme valeur approchée. Soient a_i, les valeurs obtenues au cours de *n mesures*, la valeur approchée est telle que :

$$a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

I.4. Erreur et incertitude absolues.
I.4.1. Erreur absolue.

L'expérience prouve que dans les mêmes conditions et pour la même grandeur physique, on obtient plusieurs valeurs approchées. Ce qui nous permet de comprendre que nous commettons des erreurs.

L'erreur absolue est l'erreur commise lors de la mesure de la grandeur physique A.

Elle vaut la différence :

$$\delta a = a - a_e$$

Note : L'erreur absolue est un *nombre concret* ; de plus bien qu'elle soit qualifée d' *« absolue »* cette erreur est un nombre *algébrique* puisqu'elle peut être positive ou négative.

L'erreur absolue est généralement la « résultante » de plusieurs erreurs de causes diverses :

- **Les erreurs systématiques.**

Ce sont celles qu'entraîne l'emploi de méthodes ou instruments imparfaits.
Par exemple, si les divisions de la règle sont toutes un peu trop courtes, les nombres trouvés seront tous un peu trop grands.
Dans toutes les mesures précises les erreurs systématiques sont autant que possible élimées par un contrôle soigneux des appareils de mesure et, souvent aussi, par l'emploi successif de méthodes différentes.

- **Les erreurs accidentelles.**

Ces erreurs sont imputables à l'imperfection des sens de l'opérateur ; contrairement aux précédentes, elles sont commises tantôt « en plus », tantôt « en moins » de sorte que, dans une suite de mesure de la même grandeur, les nombres obtenus sont tantôt approchés *par axcès*, tantôt approchés *par défaut*.
On diminue les erreurs accidentelles, d'une part, en choisissant des méthodes de mesure bien étudiées et des instruments perfectionnés qui minimisent l'importance des imperfections sensorielles, d'autre part, en s'exerçant à la pratique des mesures ; mais jamais l'expérimentateur le mieux outillés et le plus habile ne peut être sûr d'atteindre la valeur exacte de la grandeur qu'il mesure : aussi doit – on considérer que *le résultat de toute mesure comporte une erreur*.

Remarque : La valeur exacte a_e n'est jamais rigoureusement connue pour une grandeur physique. Ainsi l'erreur absolue ne sera point connue.

I.4.2. Incertitude absolue.

L'erreur absolue δa n'étant pas connue, on doit se contenter d'en rechercher une *limite supérieure* Δa.

L'incertitude absolue est la limite supérieure de l'erreur absolue. On la note Δa telle que :

$$|\delta a| \leq \Delta a$$

Cela veut dire que *l'incertitude absolue est une valeur maximale que l'erreur absolue n'atteint probablement pas*, mais qu'elle pourrait atteindre dans le cas le plus défavorable, sans toutefois la dépasser.

Remarque : Comme la valeur approchée a d'une grandeur, l'incertitude absolue Δa est un nombre essentiellement positif ($\Delta a \geq 0$) et concret ; il doit toujours *être suivi du symbole* ou *du nom de l'unité de mesure*.

I.5. Erreur et incertitude relatives
I.5.1. Erreur relative.

On se rend mieux compte de l'approximation d'une grandeur en comparant l'erreur à la grandeur mesurée :

On appelle erreur relative, le rapport entre l'erreur absolue et la valeur exacte.
Elle est notée :

$$\frac{\delta a}{a_e} = \frac{a - a_e}{a_e}$$

Remarque : La valeur exacte a_e n'étant pas rigouresement connue, alors $\frac{\delta a}{a_e}$ ne le sera pas non plus.

I.5.2. Incertitude relative.

δa et a_e n'étant pas connues, on doit, là encore se contenter d'une limite supérieure, appelée incertitude relative, que l'on calcule en remplaçant l'erreur absolue δa par l'incertitude absolue Δa et en prenant pour a_e la valeur approchée a.

On appelle incertitude relative, le rapport entre l'incertitude absolue et la valeur approchée.
Elle est notée $\frac{\Delta a}{a}$.

Note : l'incertitude relative est la *limite supérieure* de l'erreur relative.

$$\left|\frac{\delta a}{a_e}\right| \leq \frac{\Delta a}{a}$$

Remarques :
R₁ : L'erreur et l'incertitude relatives sont des *grandeurs abstraites*.

R₂ : L'incertitude relative est une grandeur positive qui s'exprime en pourcentage : c'est *la précision de la mesure.*

R₃ : Une mesure est d'autant plus précise que l'incertitude du résultat est plus petite, comparée à ce résultat : c'est pourquoi *l'on se sert de l'incertitude relative* $\frac{\Delta a}{a}$ *pour caractériser la précision d'une mesure*.

Exemple : Dans le cas de la mesure d'une longueur, dont la valeur approchée a donné $l = 210mm$, avec une incertitude absolue $\Delta l = 0{,}5mm$, on a comme incertitude relative :

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{0{,}5}{210} = 2{,}4.10^{-3}$$

Soit :

$$\frac{\Delta a}{a} = 2{,}4‰ \ (2{,}4 \ pour \ mille)$$

On dira que la mesure a été effectuée à *2,4 millièmes près*, ou encore que sa précision est de 2,4‰.

I.6. Détermination des incertitudes des grandeurs physiques.

Soit une grandeur physique g.

a. *Si g est une somme algébrique de grandeurs :*

Soit $g = a + b - c + \cdots$

- L'erreur absolue est :

$$\delta g = \delta a + \delta b - \delta c + \cdots$$

- L'incertitude absolue est :

$$\Delta g = \Delta a + \Delta b + \Delta c + \cdots$$

b. *Si g est un produit ou un quotient de grandeurs :*

Soit $g = a.b$ ou $g = \frac{c}{d}$

- Les erreurs relatives sont :

$$\frac{\delta g}{g_e} = \frac{\delta a}{a_e} + \frac{\delta b}{b_e} \quad ou \quad \frac{\delta g}{g_e} = \frac{\delta c}{c_e} - \frac{\delta d}{d_e}$$

- Les incertitudes relatives sont :

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} \quad ou \quad \frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta c}{c} + \frac{\Delta d}{d}$$

Note : Lors de la détermination des incertitudes, les coefficients ne sont pas pris en compte.

Exemple : On donne :

$$X = \frac{2A.B}{3C}$$

- L'erreur relative est :

$$\frac{\delta X}{X_e} = \frac{\delta A}{A_e} + \frac{\delta B}{B_e} - \frac{\delta C}{C_e}$$

- L'incertitude relative est :

$$\frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B} + \frac{\Delta C}{C}$$

c. Si g est une fonction puissance :

Soit $g = a^n$

- L'erreur relative est :

$$\frac{\delta g}{g_e} = n\frac{\delta a}{a_e}$$

- L'incertitude relative est :

$$\boxed{\frac{\Delta g}{g} = |n|\frac{\Delta a}{a}}$$

Ou plus généralement :

Si $g = a^n.b^m.c^p$ ...

$$\boxed{\frac{\Delta g}{g} = |n|\frac{\Delta a}{a} + |m|\frac{\Delta b}{b} + |p|\frac{\Delta c}{c} + \cdots}$$

Exemple : La masse volumique d'un cube d'arête a est :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{a^3} = m.a^{-3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + 3\frac{\Delta a}{a}}$$

I.7. Présentation du résultat.

Soit a la valeur mesurée ou calculée de la grandeur physique g dont l'incertitude absolue est Δa, on présente le résultat de la manière suivante :

$$g = a \pm \Delta a$$

Soit : $\boxed{a - \Delta a \leq g \leq a + \Delta a}$

Remarque : Lorsque l'incertitude absolue d'une grandeur physique de valeur connue, n'est pas donnée, on prend :

R_1 : *L'unité comme incertitude absolue pour une valeur entière.*

Exemple :

- *d = 20cm ⇒ Δd = 1cm.*
- *U = 220V ⇒ ΔU = 1V.*

R_2 : *La valeur unitaire décimale lorsque la valeur de la grandeur physique est décimale.*

Exemple :

- *t = 4,008s ⇒ Δt = 0,001s.*
- *I = 0,052A ⇒ ΔI = 0,001A.*

II. Formules d'approximation.

Soit $\alpha \leq 7°$ et ε un nombre petit tel que $\varepsilon \leq 10^{-2}$, il en est de même pour ε'.

- $sin\alpha \simeq tan\alpha \simeq \alpha$
- $cos\alpha \simeq 1 - \frac{\alpha^2}{2}$
- $(1+\varepsilon)(1+\varepsilon') \simeq 1 + \varepsilon + \varepsilon'$
- $(1+\varepsilon)^n \simeq 1 + n\varepsilon$
- $\frac{1}{1+\varepsilon} = (1+\varepsilon)^{-1} \simeq 1 - \varepsilon$
- $\sqrt[n]{1+\varepsilon} = (1+\varepsilon)^{1/n} \simeq 1 + \frac{\varepsilon}{n}$
- $\frac{1}{\sqrt[n]{1+\varepsilon}} = (1+\varepsilon)^{-1/n} \simeq 1 - \frac{\varepsilon}{n}$
- $\sqrt[n]{(1+\varepsilon)^p} = (1+\varepsilon)^{p/n} \simeq 1 + \frac{p}{n}\varepsilon$

III. Unités du système international (U.S.I).

Parmi les unités du système international, on distingue :

- **Les unités de base :** *Ce sont les unités principales des différentes grandeurs physiques.*

Exemples :

- ✓ *Le mètre (m) pour la distance ;*
- ✓ *Le Kilogramme (Kg) pour la masse ;*
- ✓ *La seconde (s) pour le temps ;*
- ✓ *L'ampère (A) pour l'intensité du courant ;*
- ✓ *Le Kelvin (K) pour la température.*

- **Les unités secondaires :** *Elles sont souvent déduites des unités principales (de base).*

Exemples :

- ✓ *Le mètre carré (m^2) pour la surface ;*
- ✓ *Le mètre cube (m^3) pour le volume ;*
- ✓ *Le mètre par seconde (m/s) pour la vitesse ;*
- ✓ *Le mètre par seconde au carré (m/s^2) pour l'accélération ;*
- ✓ *Le Joule (J) pour le travail et l'énergie ;*
- ✓ *Le Watt (W) pour la puissance ;*
- ✓ *Le Newton (N) pour la force.*

- **Les autres unités :** *Elles s'adoptent par rapport à l'ordre de grandeur des grandeurs physiques considérées.*

Exemples :

- ✓ *L'unité de masse atomique ($1u = 1,66.10^{-27}Kg$) pour la masse ;*

- *L'Angström ($1A° = 10^{-10}m$) pour la distance ;*
- *Le micromètre ($1\mu = 10^{-6}m$) pour la distance*
- *L'électronvolt ($1eV = 1{,}6.10^{-19}J$) Pour L'énergie ;*
- *Le dégré celcius (°C) pour la température ;*
- *Le dégré sexagésimal (°) pour les angles ;*
- *La minute (1mn = 60s), l'heure (1h = 3600s), le mois et l'année pour le temps.*
- *La tonne (1t = 1000Kg) pour la masse.*

Remarque : Lorsque la valeur d'une grandeur physique est trop grande ou trop petite pour être exprimer en fonction de l'unité principale, on l'exprime en fonction d'un *multiple* ou d'un *sous – multiple* afin que cette valeur ait un sens significatif, pour permettre une comparaison facile sur une échelle macroscopique ou microscopique.

Pour cela on utilise des *préfixes* que l'on fait précéder au nom de l'unité principale pour avoir un multiple ou un sous – multiple de l'unité considérée.

Le tableau ci – dessous donne la correspondance des multiples et sous – multiples des grandeurs physiques.

Multiples	*Sous – multiples*
Déca (da) = 10^{1}	Déci (d) = 10^{-1}
Hecto (h) = 10^{2}	Centi (c) = 10^{-2}
Kilo (K) = 10^{3}	Milli (m) = 10^{-3}
Méga (M) = 10^{6}	Micro (µ) = 10^{-6}
Giga (G) = 10^{9}	Nano (n) = 10^{-9}
Téra (T) = 10^{12}	Pico (p) = 10^{-12}

Exemples

- *Le millimètre : 1mm = 10^{-3}m ;*
- *Le kilogramme : 1Kg = 10^{3}g ;*
- *Le microampère : 1µA = 10^{-6}A ;*
- *Le giga – électronvolt : 1GeV = 10^{9}eV ;*
- *Le mégawatt : 1MW = 10^{6}W ;*
- *Le décinewton : 1dN = 10^{-1}N ;*
- *L'hectogramme : 1hg = 10^{2}g ;*
- *Le nanomètre : 1nm = 10^{-9}m.*

Exercices d'application.

Exercice 1 : Donne les valeurs approchées des opérations suivantes :

a) $\frac{1{,}0004}{0{,}9989}$; b) $\sqrt{100{,}09}$; c) $cos0{,}07\ (rad)$

Corrigé 1.

Valeurs approchées des opérations.

$$a)\ \frac{1{,}0004}{0{,}9989} = \frac{1 + 0{,}0004}{1 - 0{,}0011}$$
$$= (1 + 0{,}0004)(1 - 0{,}0011)^{-1}$$
$$\simeq (1 + 0{,}0004)(1 + 0{,}0011)$$
$$\simeq 1 + 0{,}0004 + 0{,}0011$$
$$\simeq 1 + 0{,}0015$$

$$\boxed{\frac{1{,}0004}{0{,}9989} \simeq 1{,}0015}$$

$$b)\ \sqrt{100{,}09} = \sqrt{1{,}0009.10^2}$$
$$= (1{,}0009)^{1/2}.10$$
$$= 10.(1 + 0{,}0009)^{\frac{1}{2}}$$
$$\simeq 10\left(1 + \frac{0{,}0009}{2}\right)$$
$$\simeq 10(1 + 0{,}00045)$$
$$\simeq 10(1{,}00045)$$

$$\boxed{\sqrt{100{,}09} \simeq 10{,}0045}$$

$$c)\ cos0{,}07 \simeq 1 - \frac{(0{,}07)^2}{2}$$
$$\simeq 1 - 0{,}00245$$
$$\simeq 0{,}99755$$

$$\boxed{cos0{,}07 \simeq 0{,}9975}$$

Exercice 2 : Un mobile est soumis dans son mouvement à la loi horaire suivante :

$$x = 2t^2 + 4$$

1°) Que vaut la position occupée par ce mobile à la date 4s.

2°) Détermine la précision de cette opération effectuée à la première question, sachant que le temps est mesuré au $1/_{100}$è près.

3°) A quelle date ce mobile occupe – t – il la position 8m ?
Déduis – en un encadrement de la valeur obtenue si la distance est connue à $^{2}/_{10}$è de mètre près.

Corrigé 2.

$x = 2t^2 + 4$; $\frac{\Delta t}{t} = \frac{1}{100}$; $\Delta x = \frac{2}{10}m$

1°) Position occupée par le mobile à la date 4s.

Sachant que **:** $x = 2t^2 + 4$
A la date $t = 4s$, on a : $x = 2(4)^2 + 4 = 36$

$$\boxed{x = 36m}$$

2°) Précision de cette opération.

$x = 2t^2 + 4 \Rightarrow \frac{\Delta x}{x} = 2\frac{\Delta t}{t}$

D'où: $\boxed{\frac{\Delta x}{x} = 2\frac{\Delta t}{t}}$

$\boldsymbol{A.N}$: $\frac{\Delta x}{x} = 2 \times \frac{1}{100} = 0{,}02 = 2\%$

$$\boxed{\frac{\Delta x}{x} = 2\%}$$

3°) Date à laquelle le mobile occupe la position 8m.

$x = 2t^2 + 4 \Rightarrow \boxed{t = \left(\frac{x-4}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}$

$\boldsymbol{A.N}$: $t = \sqrt{\frac{x-4}{2}} = \sqrt{\frac{8-4}{2}} = \sqrt{2} = 1{,}41$

$$\boxed{t = 1{,}41s}$$

Déduisons un encadrement de la valeur de t.

- ✓ *Déterminons d'abord l'incertitude absolue sur le temps t.*

$t = \left(\frac{x-4}{2}\right)^{1/2} \Rightarrow \frac{\Delta t}{t} = \frac{1}{2}.\frac{\Delta x}{x}$

D'où :

$$\boxed{\Delta t = \frac{1}{2}.t.\frac{\Delta x}{x}}$$

A.N : $\Delta t = \frac{1}{2} \times 1{,}41 \times \frac{0{,}2}{8}$

$$\Delta t = 0{,}017s$$

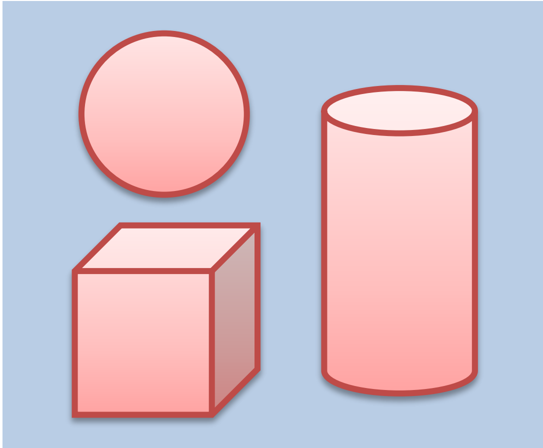
D'où l'ncadrement de t sera :

$$1{,}41 - 0{,}017 \leq t \leq 1{,}41 + 0{,}017$$

Soit :

$$\boxed{1{,}393 \leq t \leq 1{,}427}$$

TRAVAUX DIRIGES II



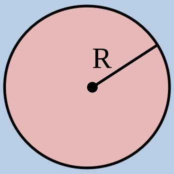
Conseils pratiques :

1. Grandeurs physiques : unités.
2. Erreurs et incertitudes des grandeurs physiques.
3. Présentation du résultat d'une grandeur physique.
4. Formules d'approximation.
5. Unité du système international (USI).

RESOLUTION DES PROBLEMES

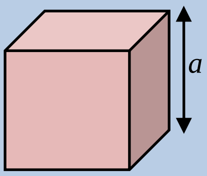
EXERCICE 1 :

1°) Calcule la surface de la figure suivante :

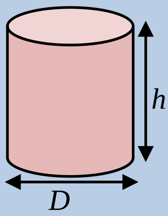


Disque de rayon *R = 0,25m*

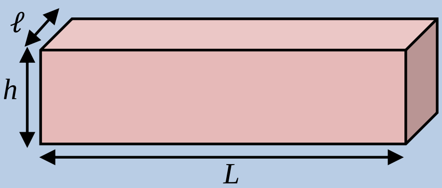
2°) Calcule la surface et le volume de chacune des figures suivantes :



Cube d'arrête *a = 0,5m*



Cylindre de diamètre *D = 10cm* et de hauteur *h = 40cm*



Parallélépipède rectangle de longueur *L = 30cm* de largeur *ℓ = 5cm* et de hauteur *h = 12cm.*

EXERCICE 2 : a, b, c subissent des variations Δa, Δb, Δc. Déduis – en les variations absolue ou relative de X et Y tel que :

a) X = $5(2a + 3{,}1b + 6)$ b) Y = $200\sqrt{\frac{a}{c}}.b^2$

EXERCICE 3 : La longueur et la largeur d'un rectangle sont *L = 50cm* et *ℓ = 25cm* mesurées à *1mm* près.

1°) Comment se présente les résultats ?

2°) Calcule l'incertitude relative sur la longueur et la largeur de ce rectangle.

3°) Calcule avec quelle précision est connue le périmètre et l'aire de ce rectangle.

4°) Quelle est l'incertitude absolue sur la mesure de cette aire.

EXERCICE 4

Calcule $L = \dfrac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{w}$ avec $w = 3{,}14 rad/s$;

$Z = (16 \pm 1{,}5)\Omega$; $R = (12{,}6 \pm 0{,}9)\Omega$

Détermine la précision sur la détermination de L (s'exprime en Henry : H).

EXERCICE 5 : L'expression de l'équation horaire de la chute libre est donnée par la relation $h = \frac{1}{2}gt^2$(m). Une balle tombe en chute libre d'une hauteur de 30m mesurés à 10cm près. La durée de la chute vaut $t = (2{,}42 \pm 0{,}05)s$.

Détermine :

1°) La valeur approchée de *g*.

2°) L'incertitude absolue de cette mesure.

3°) La précision de la mesure.
4°) L'encadrement de la valeur.

EXERCICE 6 : On démontre que dans un mouvement uniformément varié, les espaces parcourus pendant les intervalles de temps successifs de même valeur θ forment une progression arithmétique de raison $r = a\theta^2$. Sachant que $r = (3{,}84 \pm 0{,}01)mm$ et $\theta = (1/16 \pm 0{,}0001)s$

1°) Donne la valeur de l'accélération de ce mouvement.
2°) Quelle est la précision sur la mesure de a (accélération) ?
3°) Encadre le résultat sur la mesure de a.

EXERCICE 7 : On dispose des données suivantes pour une sphère *m = (35,0 ± 0,60)g* ; rayon *r = 4cm* à *1/10è* près.

a) Avec quelle précision connaît – on la masse volumique ?
b) Présente le résultat.

EXERCICE 8 : Pour mesurer l'épaisseur d'un cylindre creux, on mesure les diamètres intérieur d_1 et extérieur d_2 et on trouve :
$d_1 = (19{,}5 \pm 0{,}1)mm$; $d_2 = (26{,}7 \pm 0{,}1)mm$. Donne le résultat de la mesure et sa précision.

EXERCICE 9 : La résistance d'un conducteur métallique est donnée par l'expression :
$R = \rho\dfrac{l}{S}$. On cherche à trouver la résistivité ρ d'un conducteur cylindrique et des mesures ci – dessous ont été effectuées :

- ✓ la mesure de sa résistance : on donne 49Ω à $0{,}05\Omega$ près.
- ✓ celle de son diamètre vaut *1cm* à *5* millièmes près.
- ✓ et celle de sa longueur on donne : $(49{,}9 \le l \le 50{,}1cm)$. Quel est le résultat de la mesure ? Quelle est sa précision ?

EXERCICE 10 : La mesure des dimensions (hauteur et diamètre) d'un cylindre homogène en acier a donné : $H = D = 4{,}000 \pm 0{,}005cm$; celle de sa masse a conduit au résultat :
$m = 392{,}05 \pm 0{,}05g$.
Calcule son volume et la masse volumique de l'acier dont il est fait.

EXERCICE 11 : Soit la formule universelle de Newton suivante :

$$F = G\frac{m_A m_B}{d^2}$$

Supposons que l'on connaisse toutes les incertitudes des grandeurs du second membre de cette formule, donne l'expression de l'incertitude relative sur la force, puis déduis – en son incertitude absolue.

EXERCICE 12 : 1°) Un cylindre de dimensions : Rayon *R = 2,10m* et d'épaisseur *e = 1,25cm* ont été mesurés à *0,1mm* près.

a) Calcule en cm^3 le volume du cylindre.
b) Calcule l'incertitude absolue du résultat.
c) Présente l'écriture correcte.

2°) On a mesuré le poids volumique de ce cylindre. On a trouvé $w = (26{,}46 \pm 0{,}02)N/cm^3$.

a) Calcule la valeur de l'accélération g du lieu expérimental.
b) Calcule l'incertitude absolue du résultat.
c) Présente l'écriture correcte. On donne : $\Delta m = 0{,}01Kg$; masse du cylindre *m = 46,71Kg*.

EXERCICE 13 : 1°) Effectue les calculs suivants en utilisant les formules d'approximation :

a) $(1{,}007)^2$; $(0{,}986)^2$; $\sqrt{1{,}0004}$; $\sqrt{0{,}992}$;

b) $\sqrt{100{,}8}$; $\dfrac{1}{1{,}0003}$; $\dfrac{1}{0{,}995}$; $\dfrac{1}{(1{,}002)^2}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{1{,}0032}}$; $\dfrac{1}{\sqrt{0{,}992}}$; $1{,}0081 \times 1{,}004$

d) $1{,}0061 \times 0{,}987$; $\sqrt[3]{997{,}9}$; $0{,}99 \times 0{,}98$

e) $\sqrt[4]{9991{,}6}$; $\dfrac{1{,}0041}{1{,}0015}$; $\dfrac{0{,}996}{0{,}983}$; $\dfrac{1{,}003}{0{,}996}$; $\dfrac{1{,}007}{1{,}005}$

2°) Calcule cos0,05 (radian) avec une incertitude relative inférieure au dix – millième.

EXERCICE 14 : Une valeur a est estimée à :

$$a = \frac{1}{(1 - 10^{-2})^6}$$

1°) Utilise une transformation pour montrer que *a = 1,06.*
2°) Avec quelle précision connait – on a ?

EXERCICE 15 : 1°) Un fil de cuivre a une longueur de $(102{,}5 \pm 0{,}2)mm$; son diamètre est de $(1{,}10 \pm 0{,}05)mm$; sa résistance et de $(0{,}0173 \pm 0{,}0001)\Omega$.

a) Quelle est la résistivité du cuivre ?
b) Calcule son incertitude relative et déduis – en la présentation de l'écriture.

2°) On a mesuré le courant ayant traversé ce cylindre. On a trouvé $I = (20{,}5 \pm 0{,}05)A$.

a) Calcule la valeur de la tension et son incertitude relative.
b) Présente l'écriture correcte. On donne : $\Delta U = 0{,}01V$

EXERCICE 16 : Une sphère de masse m suspendu à un fil métallique fin est assimilable à un pendule simple de longueur ℓ = *99,6cm* déterminée à *2mm* près.
1°) La durée de *100* oscillations est *3min20s*. L'expression de la période (durée d'une oscillation) est : $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$;
Détermine la valeur approchée de *g*.
2°) La mise en marche ou l'arrêt du chronomètre par l'observateur crée une incertitude de *0,1s*.
Quelle est la précision sur la mesure de g, exprime le résultat de ce calcul.

EXERCICE 17
L'intensité de la pesanteur g est donnée par la relation : $g = g_o \frac{R^2}{(R+Z)^2}$ où R est le rayon de la Terre supposée sphérique et Z l'altitude au – dessus de la Terre.
1°) Montre que si Z est faible devant R, g est pratiquement une fonction du 1er degré de Z.
2°) Quel erreur relative commet – on en prenant $g = g_o$ à *3200m* d'altitude. *R = 6400Km.*
3°) Détermine l'altitude h à laquelle g subit une diminution de $\frac{1}{1000}$ par rapport à l'intensité de pesanteur g_o au sol (*h = 0*).

EXERCICE 18 : Un pendule pesant assimilable à un pendule simple est constitué par une masse de *50g* suspendu à un fil métallique fin. Sa période en un lieu où *g = 9,81N/Kg* quand sa température est de *0°C* est de $T_0 = 2s$.
Calcule, dans le cadre des oscillations de faible amplitude :
1°) La longueur du pendule ainsi que l'incertitude absolue sur la période T_0.
2°) Le coefficient de dilatation linéaire du fil, sachant qu'une élévation de température de 0 à *25°C* fait varier la période de $3.10^{-4}s$.
3°) Quelle devrait être la variation d'altitude pour que à *25°C*, le pendule ait la même période qu'au sol à *0°C* ? on montrera que si on passe, sur une verticale, de l'altitude zéro à l'altitude *z* (*z > 0* et *z << R*, *R = rayon* de la terre) la valeur de l'accélération de la pesanteur subit une valeur relative :
$\frac{g_z - g_0}{g_0} \approx -\frac{2z}{R}$ Avec g_z et g_0 intensité de la pesanteur à l'intensité à l'altitude *z* et l'altitude zéro.
On donne pour les oscillations de faible amplitude :
$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g_0}}$

DOMAINE D'ETUDE I : MECANIQUE

OG_2 : CONNAÎTRE LES PRINCIPAUX MOUVEMENTS ETUDIES EN CINEMATIQUE.

3 CINEMATIQUE DU POINT.

I. Généralités.
I.1. Définition de la cinématique.

La cinématique est l'étude en fonction du temps des mouvements des corps indépendemment de leurs causes.

I.2. Définitions des notions fondamentales
I.2.1. Référentiel.

C'est tout objet à partir duquel on étudie le mouvement d'un corps.

On distingue :
- Le *référentiel terrestre* ou de laboratoire : utilisé pour l'étude des mouvements des corps sur la terre et à son voisinage.
- Le *référentiel géocentrique* : utilisé pour l'étude des mouvements des corps autour de la terre.
- Le *référentiel de Copernic* : utilisé pour l'étude des mouvements des planètes autour du soleil.

I.2.2. Repère.

C'est un référentiel mathématique composé d'une origine, et d'un ou de plusieurs axes orientés.

Exemple : *le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.*

I.2.3. Vecteur position.

C'est tout vecteur $\overrightarrow{OM}$ qui permet de déterminer à chaque instant la position du mobile M dans un repère d'origine O.

Exemple : Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ $\overrightarrow{OM}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

N.B : x, y et z sont les coordonnées cartésiennes ou composantes du mobile M.

I.2.4. Trajectoire.

C'est l'ensemble des positions successives occupées par le mobile M au cours de son mouvement.

I.2.5. Abscisse curviligne.

C'est la mesure de l'arc décrit par le mobile M au cours de son mouvement sur une courbe orientée.

On note : $s = \overset{\frown}{M_0M}$

Considérons le mouvement d'un mobile M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. A l'instant initial le mobile M se trouve en M_0 comme l'indique la figure 1 ci – dessous :

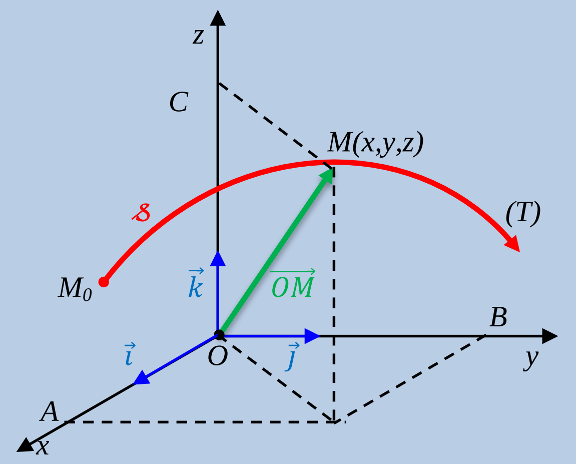


Figure 1.

OA = x ; OB = y ; OC = z ; (T) : Trajectoire ;
$\overrightarrow{OM}$: Vecteur position ;
$\overset{\frown}{M_0M} = s$: abscisse curviligne.

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

I.2.6. Equation horaire.

C'est toute équation qui dépend du temps.

Note : Les composantes x, y, z de M et l'abscisse curviligne s sont des équations horaires.
$x = f(t)$; $y = g(t)$; $z = h(t)$ et $s = i(t)$.

I.2.7. Equation de la trajectoire.

C'est toute équation indépendante du temps liant entre elles les composantes d'un mobile M.

Exemple : Dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, les coordonnées d'un mobile M sont à chaque instant :

$$\begin{cases} x = 2t + 1 & (1) \\ y = 4t^2 + 2 & (2) \\ z = 0 & (3) \end{cases}$$

Donnons l'équation de la trajectoire de M.

Réponse :

$$(1) : \ x = 2t + 1 \ \Rightarrow \ t = \frac{x-1}{2}$$

$$dans \ (2) : y = 4\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 2$$

D'où :

$$\boxed{y = x^2 - 2x + 3}$$

I.2.8. Vecteur vitesse.

C'est la variation du vecteur position par unité de temps. On distingue :

➢ Le vecteur vitesse moyenne.

C'est l'accroissement moyen du vecteur position entre deux instants.

Considérons le mouvement d'un mobile M dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soient M_1 la position de M l'instant t_1 et M_2 celle à l'instant t_2 (voir figure 2 ci – dessous) :

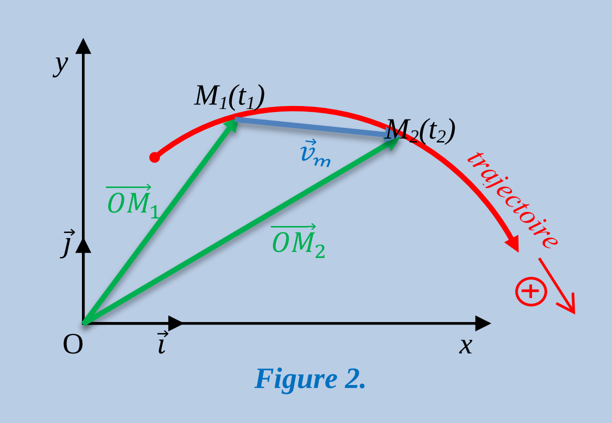


Figure 2.

$$\vec{v}_m = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t}$$

N.B : Le module de $\vec{v}_m$ s'exprime en mètre par seconde (m/s)ou $(m.s^{-1})$. On peut aussi utiliser le kilomètre par heure.

$1Km/h = \frac{1}{3,6}$ m/s.

➢ Le vecteur vitesse instantanée.

C'est le vecteur vitesse du mobile à chaque instant.

Il est toujours tangent à la trajectoire du mobile.

Considérons la figure 3 ci – dessous :

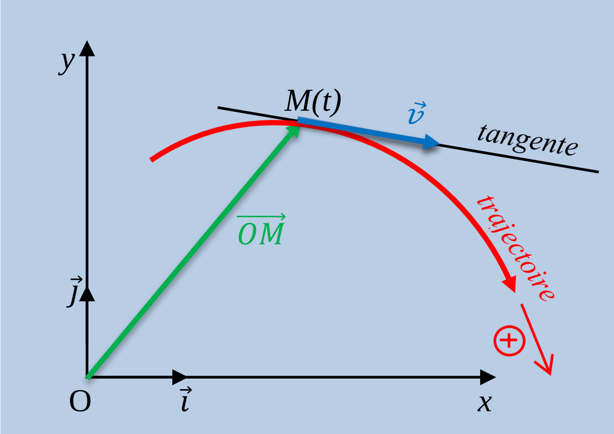


Figure 3.

En reprenant la définition de de la vitesse instantannée, $\vec{v}$ est la limite de $\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2 - t_1}$ quand t_2 *tend vers* t_1, c'est – à – dire Δt tend vers zéro.

$$\vec{v} = \lim_{t_2 \to t_1} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t}\right) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

Autrement dit, le vecteur vitesse instantannée $\vec{v}(t)$, à la date t d'un mobile M, de vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ dans le repère $\mathcal{R}$, est égal à la dérivée, par rapport au temps, du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Le vecteur vitesse caractérise les variations du vecteur position au cours du temps.

Remarque :
L'expression de la vitesse instantannée dépend des caractéristiques de la base dans laquelle on travaille, c'est ainsi que l'on peut établir les expressions de $\vec{v}$ dans la base cartésienne et dans la base curviligne ou base de ***Frenet***.

1. Dans la base cartésienne.

La base cartésienne *est constituée de trois vecteurs unitaires orthogonaux deux à deux : $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$*. Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$, dans la base cartésienne associée au repère $\mathcal{R}(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

Alors : $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k})$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k}}$$

Ou encore :

$$\boxed{\vec{v} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}}$$

Cette égalité est l'expression mathématique de la dérivée du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ par rapport à la variable temps.

Le vecteur vitesse $\vec{v}$ a pour composantes :

$$\vec{v}\left|\begin{array}{l} v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \\ v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} \\ v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \end{array}\right.$$

Le vecteur vitesse $\vec{v}$, à l'instant t, d'un point matériel M, est tangent en M à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement. Son module est donné par la relation :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

soit : $\boxed{v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}$ (*m/s*)

2. Dans la base curviligne ou base de Frenet.

La base de Frenet *est constituée de deux vecteurs unitaires orthogonaux $\vec{\tau}$ et $\vec{\eta}$*. Le vecteur $\vec{\tau}$ est le vecteur unitaire tangent en M à la trajectoire et dont l'orientation est fixée par celle de la trajectoire, $\vec{\eta}$ est le vecteur unitaire orthogonal à $\vec{\tau}$ et orienté vers l'intérieur de la trajectoire (voir figure 4).

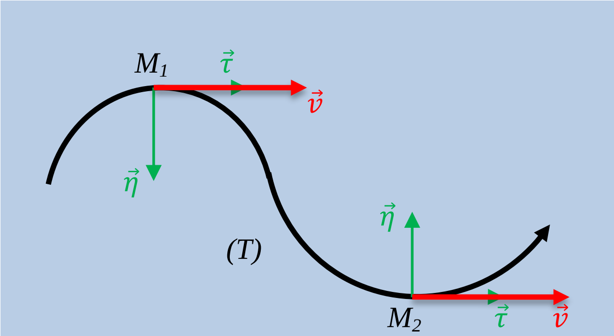


Figure 4.

$$\vec{v}\left|\begin{array}{l} v_\tau = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \\ v_\eta = 0 \end{array}\right.$$

Sachant que : $\vec{v} = v_\tau\vec{\tau} + v_\eta\vec{\eta}$
Et comme $v_\eta = 0$, alors

$$\boxed{\vec{v} = v_\tau\vec{\tau} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau} \quad et \quad v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}}$$

Remarque :
Les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}$ d'un point mobile M à la date t sont les dérivées, par rapport au temps, des coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ au même instant.

I.2.9. Vecteur accélération.

En général, la vitesse d'un point mobile varie en valeur, et / ou en direction au cours du temps, on introduit donc une nouvelle grandeur : l'*accélératon*.

Dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ à la date t_1, le vecteur vitesse du point M est $\vec{v}_1$, à la date t_2, il est $\vec{v}_2$ (voir figure 5).

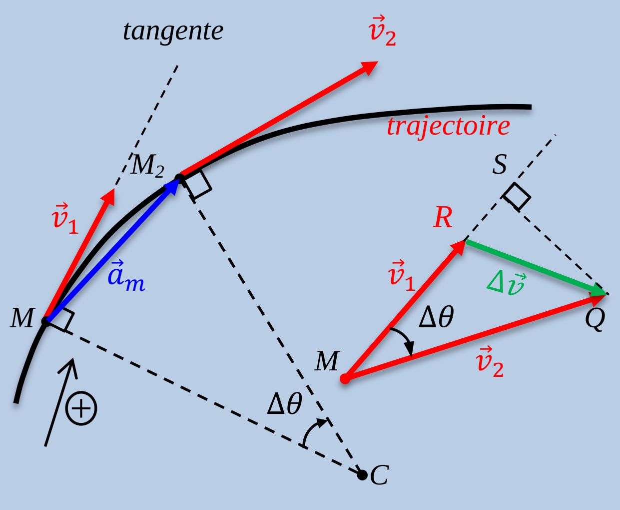


Figure 5.

$\overrightarrow{RS}$: Composante tangentielle de $\Delta\vec{v}$;
$\overrightarrow{SQ}$: Composante normale de $\Delta\vec{v}$;

On définit le vecteur accélération $\vec{a}$ d'un mobile comme étant la variation du vecteur vitesse du mobile par unité de temps. On distingue :

➢ Le vecteur accélération moyenne.

C'est l'accroissement moyen du vecteur vitesse entre deux instants.

$$\boxed{\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}}$$

Note : Le module de $\vec{a}_m$ s'exprime en mètre par seconde au carré (m/s^2)ou $(m.s^{-2})$.

➢ Le vecteur accélération instantanée.

C'est le vecteur accélération du mobile à chaque instant.

Le vecteur accélération instantannée, $\vec{a}$ est la limite de $\frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$ quand t_2 *tend vers* t_1, c'est – à – dire Δt tend vers zéro.

$$\boxed{\vec{a} = \lim_{t_2 \to t_1} \vec{a}_m = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\right) = \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

Le vecteur accélération instantannée $\vec{a}(t)$, à la date t d'un mobile M, de vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ dans le repère $\mathcal{R}$, est égal à la dérivée, par rapport au temps, du vecteur $\vec{v}$.

Remarque :

1. Dans la base cartésienne

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}$$

Alors : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k})$

$$\vec{a} = \frac{d\dot{x}}{dt}\vec{\imath} + \frac{d\dot{y}}{dt}\vec{\jmath} + \frac{d\dot{z}}{dt}\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{a} = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k}}$$

Le vecteur accélération $\vec{a}$ a pour composantes cartésiennes :

$$\vec{a}\left|\begin{array}{l} a_x = \frac{d\dot{x}}{dt} = \ddot{x} \\ a_y = \frac{d\dot{y}}{dt} = \ddot{y} \\ a_z = \frac{d\dot{z}}{dt} = \ddot{z} \end{array}\right.$$

Son module est tel que :

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$\boxed{a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}} \quad (m/s^2)$$

Note :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right) = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}}$$

Le vecteur accélération instantannée $\vec{a}(t)$, à la date t d'un mobile M, de vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ dans le repère $\mathcal{R}$, est égal à la dérivée seconde , par rapport au temps, du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

2. Dans la base de Frenet.

Considérons le mouvement d'un mobile M décrivant une trajectoire curviligne. Localement autour de M, la trajectoire peut être assimilée à un arc de cercle dont le centre C est appelé centre de courbure et dont le rayon $CM = R$ est le rayon de courbure en M de la trajectoire curviligne (voir figure 6 ci – dessous) :

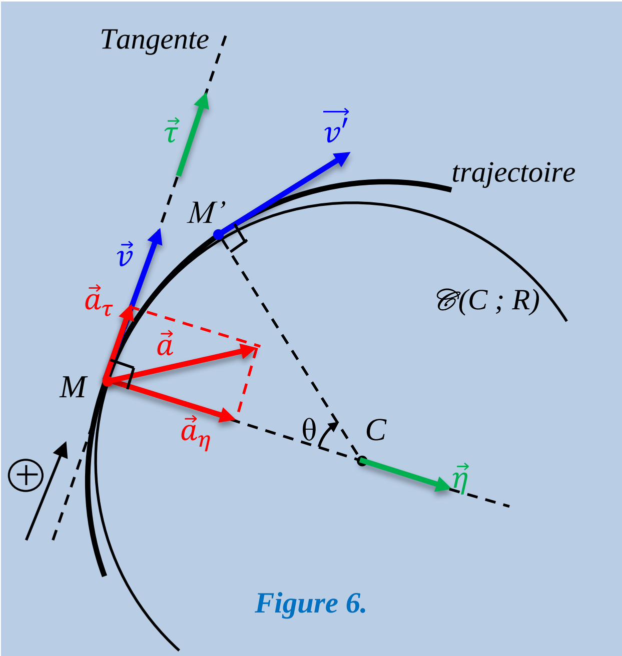


Figure 6.

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau} \quad et \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\vec{\tau}\right) = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{\tau} + \frac{ds}{dt}.\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{\tau} + v.\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

L'accélération a donc dans la base de Frenet deux composantes : $\vec{a} = \overrightarrow{a_\tau} + \overrightarrow{a_\eta}$

La première est colinéaire à $\vec{\tau}$; elle est appelée *composante tangentielle* de l'accélération et notée $\overrightarrow{a_\tau}$. La seconde, orthogonale à $\vec{\tau}$ est appelée *composante normale* de l'accélération et est notée $\overrightarrow{a_\eta}$. On démontre en mathématique que :

$$\overrightarrow{a_\eta} = v.\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{v^2}{R}\vec{\eta}$$

D'où :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{\eta}}$$

Il est important de noter que, puisque $\frac{v^2}{R}$ est positif, le vecteur accélération est toujours dirigé vers l'intérieur de la trajectoire.

Ainsi :

$$\vec{a}\left|\begin{array}{l} a_\tau = \dfrac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s} = R\ddot{\theta} \\[2ex] a_\eta = \dfrac{v^2}{R} \end{array}\right.$$

Avec :

$s = R\theta$: abscisse curviligne;

v : vitesse du mobile (m/s) ;

R : rayon de courbure ; $\theta = \left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CM'}\right)$.

Le module de $\vec{a}$ est tel que :

$$\boxed{a = \sqrt{\ddot{s}^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}} \quad (m/s^2)$$

II. Etude cinématique de quelques mouvements.

II.1. Mouvement rectiligne.

Soit un mobile M ponctuel. Ce mobile est animé d'un mouvement rectiligne lorsque *sa trajectoire est une droite*.

Exemples :

- ✓ *Le mouvement d'une voiture sur une route rectiligne.*
- ✓ *Le mouvement d'une cabine d'ascenseur.*
- ✓ *Le mouvement d'un corps en chute libre.*

La position de M est déterminée à chaque instant par son vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans un repère à *une dimension* (voir figure 7).

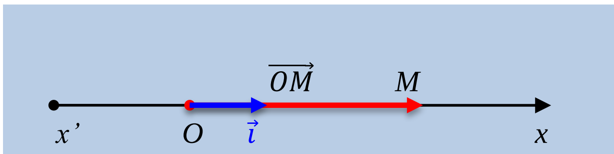


Figure 7.

L'axe $x'Ox$ du repère est porté par la trajectoire.

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i}.$$

Le vecteur vitesse du point M est :

$$\vec{v} = v_x\vec{i} = \frac{dx}{dt}\vec{i} = \dot{x}\vec{i}$$

Son vecteur accélération est défini par :

$$\vec{a} = a_x\vec{i} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} = \ddot{x}\vec{i}$$

Remarques :

- Les *vecteurs position, vitesse et accélération* d'un point en mouvement rectiligne *sont portés par la trajectoire*. Ils n'ont chacun qu'une composante.
- L'équation de la trajectoire de M est celle de l'axe des abscisses, c'est – à – dire $y = 0$ et $z = 0$.

II.1.1. Mouvement rectiligne uniforme (MRU).

Un mobile M est animé d'un MRU lorsque

- ✓ Son vecteur accélération est nul $(\vec{a} = \vec{0})$;
- ✓ Son vecteur vitesse est constant $(\vec{v} = \overrightarrow{cte})$;
- ✓ Son équation horaire est de la forme :

$$x = v_x t + x_0.$$

Avec :

x : position du mobile à chaque instant (m) ;

v_x : vitesse constante du mobile (m/s) ;

x_0 : position du mobile à l'instant initial ; c'est la valeur de x à t = 0, on l'appelle encore élongation initiale ou abscisse initiale.

Les équations caractéristiques d'un MRU sont les suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned} a_x &= 0 \\ v_x &= cte \\ x &= v_x t + x_0 \end{aligned}}$$

II.1.2. Mouvement rectiligne uniformément varié (MRUV).

Un mobile *M* est animé d'un MRUV lorsque :

- ✓ Son vecteur accélération est constant au cours du mouvement (en sens et en direction) : $\vec{a} = \overrightarrow{cte}$;
- ✓ Son vecteur vitesse est une fonction linéaire du temps, dont la composante est de la forme :

$$v_x = a_x t + v_{0_x} \qquad (1)$$

- ✓ Son équation horaire est de la forme :

$$x = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{0_x} t + x_0 \qquad (2)$$

Avec v_{0_x} : vitesse initiale du mobile (à t = 0).

De (1) et (2), on établit l'expression de la *relation espace – vitesse (REV)* ou *relation indépendante du temps (RIT)* :

$$\boxed{v_x^2 - v_{0_x}^2 = 2a_x(x - x_0)}$$

Les équations caractéristiques d'un MRUV sont les suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned} a_x &= cte \neq 0 \\ v_x &= a_x t + v_{0_x} \\ x &= \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{0_x} t + x_0 \\ v_x^2 - v_{0_x}^2 &= 2a_x(x - x_0) \end{aligned}}$$

Remarques :

R₁ : Quand $\vec{a}.\vec{v} > 0$, alors $\vec{a}$ et $\vec{v}$ sont de même sens, la vitesse $\vec{v}$ augmente au cours du temps, le mouvement est dit *accéléré*.

R₂ : Quand $\vec{a}.\vec{v} < 0$, alors $\vec{a}$ et $\vec{v}$ sont de sens opposés, la vitesse $\vec{v}$ diminue au cours du temps, le mouvement est dit *décéléré* ou *retardé*.

R₃ : De la relation (1) $v_x = a_x t + v_{0_x}$

$\Rightarrow v_x - v_{0_x} = a_x t$, soit

$$\boxed{v_x - v_{0_x} = a_x(t - t_0) \text{ ou } \Delta v_x = a_x \Delta t}$$

C'est *la relation vitesse – temps (RVT).*

♣ Espaces parcourus par un mobile animé d'un MRUV.

Considérons un mobile *M* animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié. A t = 0 : $x_0 = 0$; $v_0 = 0$ et étudions les espaces (distances) parcourus pendant des intervalles de temps successifs et égaux (figure 8).

- Soit $x = \frac{1}{2}a_x t^2$ à la date t ;
- Soit $x_1 = \frac{1}{2}a_x t_1^2 = \frac{1}{2}a_x(t+\theta)^2$ à la date $t_1 = t + \theta$:

  $x_1 = \frac{1}{2}a_x t^2 + a_x\theta t + \frac{1}{2}a_x\theta^2$
- Soit $x_2 = \frac{1}{2}a_x t_2^2 = \frac{1}{2}a_x(t_1+\theta)^2$ $= \frac{1}{2}a_x(t+2\theta)^2$ à la date $t_2 = t_1 + \theta = t + 2\theta$:

  $x_2 = \frac{1}{2}a_x t^2 + 2a_x\theta t + 2a_x\theta^2$
- Soit $x_3 = \frac{1}{2}a_x t_3^2 = \frac{1}{2}a_x(t_2+\theta)^2$ $= \frac{1}{2}a_x(t+3\theta)^2$ à la date $t_3 = t_2 + \theta = t + 3\theta$:

$$x_3 = \frac{1}{2}a_x t^2 + 3a_x\theta t + \frac{9}{2}a_x\theta^2$$

Les espaces parcourues pendant les intervalles de temps θ sont :

$$e_1 = x_1 - x = \frac{1}{2}a_x t^2 + a_x\theta t + \frac{1}{2}a_x\theta^2 - \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$e_1 = a_x\theta t + \frac{1}{2}a_x\theta^2$$

$$e_2 = x_2 - x_1 = \frac{1}{2}a_x t^2 + 2a_x\theta t + 2a_x\theta^2 - \frac{1}{2}a_x t^2 - a_x\theta t - \frac{1}{2}a_x\theta^2$$

$$e_2 = a_x\theta t + \frac{3}{2}a_x\theta^2$$

$$e_3 = x_3 - x_2 = \frac{1}{2}a_x t^2 + 3a_x\theta t + \frac{9}{2}a_x\theta^2 - \frac{1}{2}a_x t^2 - 2a_x\theta t - 2a_x\theta^2$$

$$e_3 = a_x\theta t + \frac{5}{2}a_x\theta^2$$

$$e_2 - e_1 = a_x\theta t + \frac{3}{2}a_x\theta^2 - a_x\theta t - \frac{1}{2}a_x\theta^2$$

$$e_2 - e_1 = a_x\theta^2$$

$$e_3 - e_2 = a_x\theta t + \frac{5}{2}a_x\theta^2 - a_x\theta t - \frac{3}{2}a_x\theta^2$$

$$e_3 - e_2 = a_x\theta^2$$

On constaque que :

$$\boxed{e_3 - e_2 = e_2 - e_1 = a_x\theta^2}$$

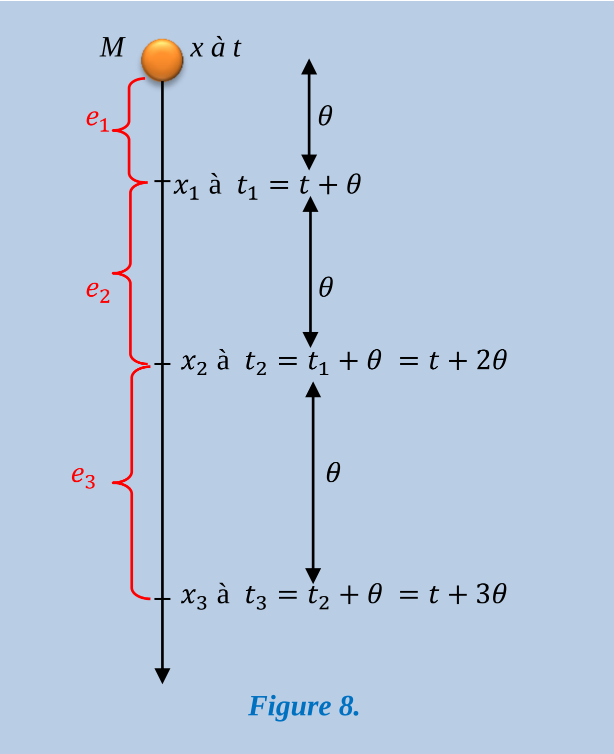


Figure 8.

Conclusion : Les espaces parcourus par un mobile animé d'un MRUV pendant des intervalles de temps successifs égaux θ augmentent progressivement de la valeur $a\theta^2$. On dit qu'ils forment une progression arithmétique de raison $a\theta^2$.

II.2. Mouvement circulaire.

Soit un mobile *M* ponctuel (voir figure 9). Ce mobile est animé d'un mouvement ciculaire lorsque *sa trajectoire est un cercle*.

Exemples :

- ✓ *Le mouvement d'une hélice d'hélicoptère.*
- ✓ *Le mouvement d'un tourne – disque.*

Le repérage du point *M* peut se faire de plusieurs façons :

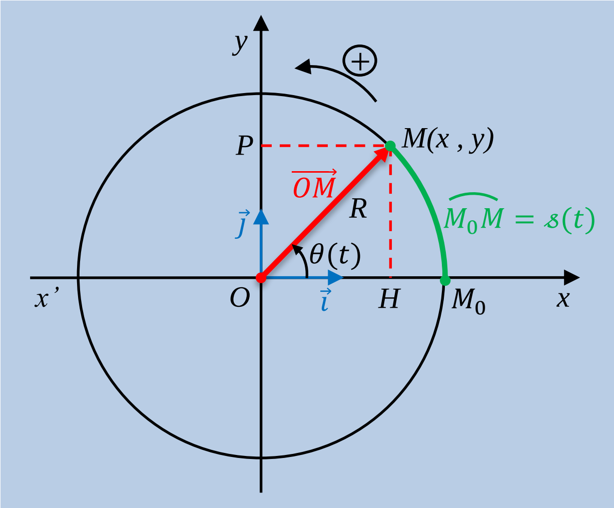


Figure 9.

- ✓ Par son *abscisse curviligne* $s(t)$ qui est la valeur algébrique de l'arc $\overset{\frown}{M_0M}$ à l'instant t. Le point M_0 est une position origine choisie sur la trajectoire préalablement orientée. Il correspond à la position du mobile à l'instant t = 0 ;

- ✓ Par son *abscisse angulaire ou angle polaire* $\theta(t)$ qui est la valeur de l'angle $(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM})$ à chaque instant.

- ✓ Par ses *coordonnées cartésiennes* dans le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) dont l'origine est le centre du cercle de rayon *OM* = *R*. Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'écrit alors :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} ;$$

Avec :

$$\begin{cases} cos\theta = \frac{OH}{OM} = \frac{x}{R} \Rightarrow x = Rcos\theta \\ sin\theta = \frac{OP}{OM} = \frac{y}{R} \Rightarrow y = Rsin\theta \end{cases}$$

Alors :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = (Rcos\theta)\vec{\imath} + (Rsin\theta)\vec{\jmath}}$$

Remarque :
L'équation de la trajectoire de M se détermine de la manière suivante :

$$\begin{cases} x = Rcos\theta \\ y = Rsin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = (Rcos\theta)^2 & (1) \\ y^2 = (Rsin\theta)^2 & (2) \end{cases}$$

En faisant la somme des relations (1) et (2) membre à membre on obtient :

$$x^2 + y^2 = R^2(cos^2\theta + sin^2\theta)$$

D'où :

$$\boxed{x^2 + y^2 = R^2}$$

*C'est l'équation du cercle **C** de centre O(0 ; 0) et de rayon R = OM.*

La relation liant l'abscisse curviligne s et l'angle polaire θ est :

$$\boxed{s = R\theta} \quad (\theta \text{ en radians})$$

La *vitesse linéaire* v du mobile est donnée par la relation :

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(R\theta)}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\dot{\theta}$$

Car le rayon R est constant.
D'où :

$$\boxed{v = R\dot{\theta}}$$

$\dot{\theta}$ est appelée vitesse angulaire du mobile M et s'exprime en radian par seconde (rad.s^{-1}).

Exprimons les composantes normale et tangentielle de l'accélation en fonction des grandeurs angulaires.

➢ Accélaration tangentielle

$$a_t = \frac{dv}{dt} \quad or \quad v = R\dot{\theta},$$

$$a_t = \frac{d(R\dot{\theta})}{dt} = R\frac{d\dot{\theta}}{dt}$$

Donc :

$$\boxed{a_t = R\ddot{\theta}}$$

$\ddot{\theta}$ est l'accélération angulaire du mobile M et s'exprime en radian par seconde au carré (rad.s^{-2}).

➢ Accélaration normale

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(R\dot{\theta})^2}{R}$$

Donc :

$$\boxed{a_n = R\dot{\theta}^2}$$

Dans la base de Frenet $(\vec{t}, \vec{n})$: $\vec{a} = a_t\vec{t} + a_n\vec{n}$, alors :

$$\boxed{\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{t} + R\dot{\theta}^2\vec{n}}$$

II.2.1. Mouvement circulaire uniforme (MCU).

Un mobile M est animé d'un MCU lorsque :

- ✓ Son accélération angulaire est *nulle* ($\ddot{\theta} = 0$) ;
- ✓ Sa vitesse angulaire est *constante* ($\dot{\theta} = cte$) ;
- ✓ Son équation horaire est une *fonction linéaire* de la forme :

$$\theta = \dot{\theta}t + \theta_0.$$

Avec :

θ : abscisse angulaire du mobile à chaque instant (rad) ;

$\dot{\theta}$: vitesse angulaire du mobile (rad/s) ;

θ_0 : abscisse angulaire du mobile à l'instant initial, c'est la valeur de θ à $t = 0$, on l'appelle encore élongation initiale ou abscisse angulaire initiale.

Les équations caractéristiques d'un MCU sont :

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{\theta} &= 0 \\ \dot{\theta} &= cte \\ \theta &= \dot{\theta}t + \theta_0 \end{aligned}}$$

Remarque :
L'accélération angulaire (et par conséquent la composante tangentielle du vecteur accélération) d'un mouvement circulaire est nulle. *Le vecteur accélération d'un tel mouvement, réduit à sa composante normale est toujours dirigé vers le centre du cercle de trajectoire*. On dit qu'il est *centripète.*

II.2.2. Mouvement circulaire uniformément varié (MCUV).

Un mobile M est animé d'un MCUV lorsque :

- ✓ Son accélération angulaire est *constante* ($\ddot{\theta} = cte$) ;
- ✓ Sa vitesse angulaire est une *fonction linéaire* du temps de la forme :

$$\dot{\theta} = \ddot{\theta}t + \dot{\theta}_0 \qquad (1)$$

- ✓ Son équation horaire est de la forme :

$$\theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 + \dot{\theta}_0 t + \theta_0 \qquad (2)$$

Avec $\dot{\theta}_0$: vitesse angulaire initiale du mobile.

De (1) et (2), on établit l'expression :

$$\boxed{\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2 = 2\ddot{\theta}(\theta - \theta_0)}$$

C'est *la relation espace – vitesse (REV) ou relation indépendante du temps (RIT) :*

Les équations caractéristiques d'un MCUV sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= cte \neq 0 \\ \dot{\theta} &= \ddot{\theta}t + \dot{\theta}_0 \\ \theta &= \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 + \dot{\theta}_0 t + \theta_0 \\ \dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2 &= 2\ddot{\theta}(\theta - \theta_0) \end{aligned}$$

Remarques :

R₁ : Quand $\ddot{\theta}.\dot{\theta} > 0$, $\dot{\theta}$ augmente, le mouvement est dit *accéléré*.

R₂ : Quand $\ddot{\theta}.\dot{\theta} < 0$, $\dot{\theta}$ diminue, le mouvement est dit *décéléré* ou *retardé*.

R₃ : L'angle balayé par le mobile *M* au cours de son mouvement est : $\theta = 2\pi n$
Avec *n : nombre de tours.*

R₄ : Sa vitesse de angulaire est telle que :

$$\dot{\theta} = 2\pi N$$

Avec *N : Vitesse de rotation (tr/s).*

R₅ : De la relation (1) $\dot{\theta} = \ddot{\theta}t + \dot{\theta}_0$
$\Rightarrow \dot{\theta} - \dot{\theta}_0 = \ddot{\theta}t$, soit

$$\boxed{\dot{\theta} - \dot{\theta}_0 = \ddot{\theta}(t - t_0) \text{ ou } \Delta\dot{\theta} = \ddot{\theta}\Delta t}$$

C'est *la relation vitesse – temps (RVT).*

II.3. Mouvement sinusoïdal.

Définition : *On appelle mouvement sinusoïdal, un mouvment dont l'équation horaire obéit à une fonction sinusoïdale du temps.*

Exemples :

- ✓ *Le mouvement d'un corps suspendu à un ressort, tiré vers le bas puis lâché.*
- ✓ *Le mouvement du balancier d'une horloge.*

On distingue 2 types de mouvements sinusoïdaux : le *mouvement rectiligne sinusoïdal* (MRS) et le *mouvement sinusoïdal de rotation* (MSR).

II.3.1. Mouvement rectiligne sinusoïdal (MRS).

II.3.1.1 Définition : *On dit qu'un mobile M est en mouvement rectiligne sinusoïdal lorsque son équation horaire est de la forme :*

$$x = x_m sin(\omega t + \varphi)$$
ou
$$x = x_m cos(\omega t + \varphi)$$

x : élongation de M (m)

x_m : amplitutde du mouvement ou élongation maximale (m)

$(\omega t + \varphi)$: phase du mouvement à l'instant t.

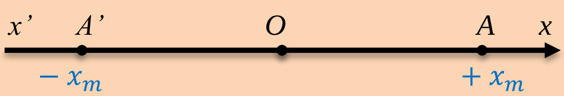
ω : pulsation du mouvement (rad/s)

φ : phase initiale (rad)

Remarque :

- ✓ x_m, ω et φ sont des constantes déterminées à partir des conditions initiales du mouvement.
- ✓ Le mobile se déplace entre deux positions extrêmes $-x_m$ et $+x_m$ telque :

$$-x_m \leq x \leq +x_m.$$



Au cours d'un tel mouvement, le mobile parcourt le segment *A'A* de longueur $2x_m$ alternativement dans un sens et dans l'autre : On dit qu'il *oscille de part et d'autre de l'origine O.*

$$\boxed{A'A = L = 2x_m}$$

Représentation graphique du sinusoïde.

$$x = x_m sin(\omega t + \varphi)$$

Conditions initiales : à $t = 0$; $x = 0$

$\Rightarrow 0 = x_m sin\varphi \Rightarrow \varphi = 0$

Ainsi : $x = x_m sin\omega t$

La figure 10 ci – dessous donne l'allure de la sinusoïde en fonction du temps d'un mouvement rectiligne sinusoïdal.

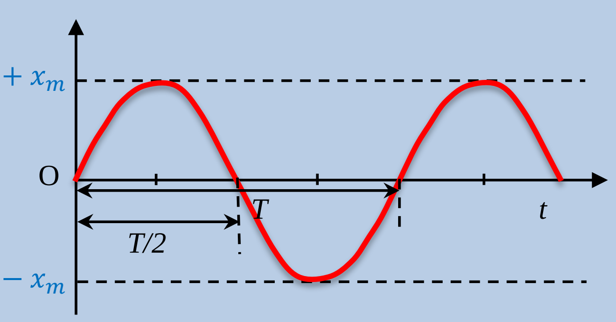


Figure 10.

II.3.1.2. Périodicité du mouvement.

A partir d'un instant *t* quelconque, le mouvement se reproduit identique à lui – même chaque fois que le temps augmente d'une période *T*.
Un tel mouvement est *dit périodique*, de période :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

Avec : $\omega = 2\pi N = 2\pi f$

$$\Rightarrow \boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}}$$

II.3.1.3. Vitesse linéaire.

$x = x_m sin(\omega t + \varphi)$

$v = \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = \omega x_m cos(\omega t + \varphi)$

$$\boxed{\dot{x} = \omega x_m cos(\omega t + \varphi)}$$

II.3.1.4. Accélération linéaire.

$\dot{x} = \omega x_m cos(\omega t + \varphi)$

$a = \ddot{x}(t) = \frac{d\dot{x}}{dt} = -\omega^2 x_m sin(\omega t + \varphi)$

$\Rightarrow a = -\omega^2 x_m sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$

D'où :

$$\boxed{\ddot{x} = -\omega^2 x}$$

II.3.1.5. Equation différentielle.

$\ddot{x} = -\omega^2 x \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$

Soit :

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

Ceci est une équation différentielle du second ordre sans second membre, caractéristique d'un mouvement rectiligne sinusoïdal admettant des solutions de la forme :

$$x = x_m sin(\omega t + \varphi)$$
ou
$$x = x_m cos(\omega t + \varphi)$$

II.3.2. Mouvement sinusoïdal de rotation (MSR).

II.3.2.1 Définition : *On dit qu'un mobile M est en mouvement sinusoïdal de rotation lorsque son équation horaire est de la forme :*

$$\theta = \theta_m sin(\omega t + \varphi)$$
ou
$$\theta = \theta_m cos(\omega t + \varphi)$$

θ : élongation de M (rad)
θ_m : amplitutde du mouvement ou élongation maximale (rad)
$(\omega t + \varphi)$: phase du mouvement à l'instant t.
ω : pulsation du mouvement (rad/s)
φ : phase initiale (rad)

On obtient de façcon analogue les mêmes expressions pour un mouvement sinusoïdal de rotation que pour un mouvement rectiligne sinusoïdal.

II.3.2.2. Vitesse angulaire.

$\theta = \theta_m sin(\omega t + \varphi)$

$\dot{\theta}(t) = \frac{d\theta}{dt} = \omega\theta_m cos(\omega t + \varphi)$

$$\boxed{\dot{\theta} = \omega\theta_m cos(\omega t + \varphi)}$$

II.3.1.4. Accélération angulaire.

$\dot{\theta} = \omega\theta_m cos(\omega t + \varphi)$

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = -\omega^2\theta_m sin(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{\theta} = -\omega^2\ddot{\theta}_m sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2\theta$$

D'où :

$$\boxed{\ddot{\theta} = -\omega^2\theta}$$

II.3.1.5. Equation différentielle.

$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta$

$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$ soit : $\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0}$

Ceci est une équation différentielle du second ordre sans second membre, caractéristique d'un mouvement sinusoïdal de rotation admettant des solutions de la forme :

$$\theta = \theta_m sin(\omega t + \varphi)$$
ou
$$\theta = \theta_m cos(\omega t + \varphi)$$

❖ Notion d'origines.

Les paramètres initiaux $x_0, v_0, \theta_0, \dot{\theta}_0$ *et* φ d'un mouvement (rectiligne, circulaire sinusoïdal) sont déterminés en utilisant les origines d'étude : *l'origine des espaces qui fait référence à un repère et l'origine des dates fait référence à la notion de temps*.

- L'*origine des espaces est un lieu* choisi comme origine du repère associé à l'étude du mouvement. Comme l'indique son nom, en ce lieu, le point correspondant a pour coordonnées nulles. Les positions occupées par le mobile en mouvement sont comptés par rapport à ce point. Si l'on se réfère au repère cartésien, sur l'axe horizontal ; les abscisses sont comptées négatives à gauche de l'origine et positives à droite de celle – ci.
  Tandis que sur l'axe vertical ; les ordonnées sont comptées négatives en – dessous de l'origine et positives au – dessus de celle – ci.

- L'*origine des dates est un instant* choisi comme temps de référence. La durée du mouvement d'un mobile sera comptée à partir de ce moment où le top est donné. Pour cela quel que soit l'heure à laquelle où l'on commence à étudier le mouvement, le chronomètre est mis à zéro.

Illustration.

Lors d'une course vitesse, les athlètes sont tous alignés, un pied posé sur *la ligne de départ*, pour parcourir une distance donnée ; *cette ligne est l'origine des espaces*, car la distance de la course sera comptée à partir de cette ligne.

Au départ, lorsque *le top est donné*, tous les athlètes s'élancent dans la course, pour parcourir la distance requise et franchir la ligne d'arrivée tout en souhaitant être le premier ; *cette instant où le top est donné est l'origine des* dates, car la performance (temps) de chaque athlète est mesurée à partir de cet instant.

Exercices d'application.

Exercice 1 : Deux mobiles quittent la gare G_1 pour se diriger vers la gare G_2. Le premier M_1 part de la gare G_1 avec une vitesse constante $v_1 = 15Km/h$; *20min* plus tard le second M_2, quitte la gare G_1 avec une vitesse constante $v_2 = 40Km/h$.

1°) A quelle date (en min) le mobile M_2 va – t – il rattraper le mobile M_1 ?

2°) A quelle distance de G_1 (en Km) s'effectue ce rattrapage ?

Corrigé 1.

$M_1 \mid v_1 = 15Km/h$; $M_2 \mid v_2 = 40Km/h$. $\theta = 20min$

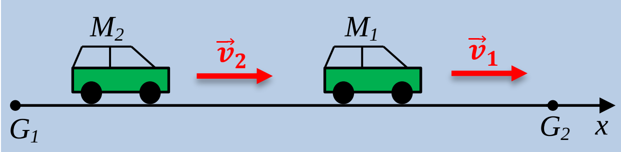


Figure.

1°) Date à laquelle M_2 va rattraper le mobile M_1.

Equations horaires des deux mobiles.

Origine des dates **:** instant de départ de M_1.

Origine des espaces **:** la gare G_1.

Ainsi cette position est prise comme origine du repère d'étude (un seul axe, horizontal) dont l'abscisse est nulle.

✓ ***Pour M_1.***

$v_1 = cte \Rightarrow$ MRU d'équation : $x_1 = v_{0_1}t + x_{0_1}$

A t = 0 ; $x_{0_1} = 0$; $v_{0_1} = v_1$

Alors : $x_1 = v_1 t$
D'où : $x_1 = 4{,}17t$ (m)

✓ ***Pour M_2.***
$v_2 = cte \Rightarrow$ MRU d'équation : $x_2 = v_{0_2}t' + x_{0_2}$
A t = 0 ; $x_{0_2} = 0$; $v_{0_2} = v_2$
Alors : $x_2 = v_2(t - \theta) = 11{,}11(t - 1200)$
D'où : $x_2 = 11{,}11t - 13332$ (m)

Au lieu de rattrapage $x_1 = x_2$
$\Rightarrow 4{,}17t = 11{,}11t - 13332$
$\Rightarrow 6{,}93t = 13332 \Rightarrow t = \dfrac{13332}{6{,}93} = 1923{,}8s$

$$\boxed{t = 1923{,}8s = 32{,}06min}$$

2°) Distance à laquelle s'effectue ce rattrapage.
Le lieu de rattrapage est : $x_1 = x_2 = x$
$x = 4{,}17(1923{,}8) = 8022{,}24m$

$$\boxed{x = 8{,}02 \simeq 8Km}$$

Le rattrapage a lieu à $x = 8Km$ de la gare G_1.

Exercice 2 : Deux villages A et B sont situés le long d'une route rectiligne, à *100Km* l'un de l'autre. Une personne du village A voulant envoyer un colis au village B arrive au lieu d'embarquement après le départ de l'autobus qui assure la liaison entre les deux villages.
L'autobus a un mouvement tel qu'il atteint la vitesse constante de *108Km.h⁻¹* après un parcours de *300m*. Ensuite son mouvement se poursuit à la vitesse constante de *108Km.h⁻¹*.
1°) En prenant pour origine des espaces, la position de l'autobus au moment du démarrage et l'instant du démarrage comme origine des dates :
a) Calcule l'accélération du mouvement durant cette phase ;
b) Écris l'équation horaire du mouvement de l'autobus dans la première phase ;
c) A quelle date la première phase du mouvement prend – t – elle fin ?
d) Trouve l'équation horaire de la deuxième phase, les conditions initiales n'étant pas modifiées.
2°) Une personne de bonne volonté se propose de rattraper l'autobus à l'aide d'une moto pour donner le colis. *2min* plus tard, la moto démarre du village A avec une accélération de *4m.s⁻²*.
a) Écris l'équation horaire du mouvement de la moto en conservant les mêmes conditions initiales ;
b) Détermine la date et le lieu où la moto rattrapera l'autobus (on assimilera la moto et l'autobus à des points).

Corrigé 2.
$AB = 100Km$; $v_1 = 108Km/h$; $d = 300m$

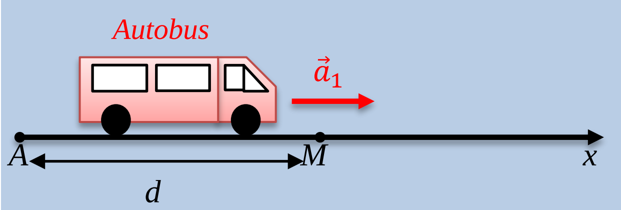


Figure 1.

1°) a) Accélération du mouvement durant cette phase.
Origine des dates : instant du démarrage de l'autobus ;
Origine des espaces : position de l'autobus au moment du démarrage.

Parti sans vitesse initiale, l'autobus atteint une vitesse de *108Km/h* sur un parcours de *300m*, son mouvement est donc rectiligne uniformément varié (M.R.U.V).
D'après la R.E.V on a : $v_1^2 - v_{0_1}^2 = 2a_1(x_1 - x_{0_1})$
Conditions initiales :
A $t = 0$: $x_{0_1} = 0$; $v_{0_1} = 0$ (au démarrage)
$\Rightarrow v_1^2 = 2a_1(x_1)$; avec $x_1 = d$
D'où :

$$\boxed{a_1 = \frac{v_1^2}{2d}}$$

$\boldsymbol{A.N}$: $a_1 = \dfrac{(30)^2}{2 \times 300} = 1{,}5 \Rightarrow \boxed{a_1 = 1{,}5m/s^2}$

b) Equation horaire du mouvement de l'autobus dans la première phase.
$a_1 = 1{,}5m.s^{-2} = cte \neq 0$, l'autobus est animé d'un M.R.U.V d'équation :

$$x_1 = \frac{1}{2}a_1t^2 + v_{0_1}t + x_{0_1}$$

Conditions initiales :
A $t = 0$: $v_{0_1} = 0$; $x_{0_1} = 0$
Alors : $x_1 = \frac{1}{2}a_1t^2$

D'où :

$$\boxed{x_1 = 0{,}75t^2 \quad (\text{m})}$$

c) Date à laquelle prend fin la première phase du mouvement.

1ère méthode.

$$x_1 = \frac{1}{2}a_1t^2$$

A la fin de la première phase : $x_1 = d$, alors :

$$d = \frac{1}{2}a_1t^2$$

D'où :

$$\boxed{t = \sqrt{\frac{2d}{a_1}}}$$

$$\textbf{A.N}:\ t = \sqrt{\frac{2 \times 300}{1{,}5}} = 20$$

$$\boxed{t = 20s}$$

2ème méthode.

D'après la R.V.T on a : $v_1 - v_{0_1} = a_1t$

Avec $v_{0_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = a_1t$

D'où :

$$\boxed{t = \frac{v_1}{a_1}}$$

$$\textbf{A.N}:\ t = \frac{30}{1{,}5} = 20 \quad \Rightarrow \boxed{t = 20s}$$

d) Equation horaire de la deuxième phase.

$v_1 = 30m.s^{-1} = cte$, l'autobus est animé d'un M.R.U d'équation :

$$x_1' = v_{0_1}'t + x_{0_1}'$$

Conditions initiales : A t = 0 ; $x_{0_1}' = d$; $v_{0_1}' = v_1$

Alors : $x_1' = v_1t + d$

D'où :

$$\boxed{x_1' = 30t + 300 \quad (\text{m})}$$

2°) $\theta = 2min$; $a_2 = 4m/s^2$.

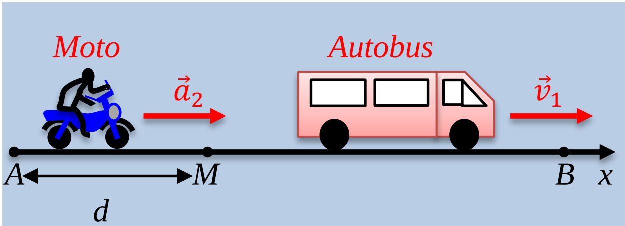


Figure 2.

a) Équation horaire du mouvement de la moto.

$a_2 = 4m.s^{-2} = cte \neq 0$, la moto est animée d'un M.R.U.V d'équation :

$$x_2 = \frac{1}{2}a_2t'^2 + v_{0_2}t' + x_{0_2}$$

Conditions initiales :

A $t = 0$: $x_{0_2} = 0$; $v_{0_2} = 0$ (au démarrage)

$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}a_2t'^2$; $Or\ t = t' + \theta \Rightarrow t' = t - \theta$

$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}a_2t'^2 = \frac{1}{2}a_2(t-\theta)^2$

$x_2 = 2(t-120)^2 = 2(t^2 - 240t + 14400)$

D'où :

$$\boxed{x_2 = 2t^2 - 480t + 28800 \quad (m)}$$

b) Date et lieu où la moto rattrapera l'autobus.

Le rattrapage de l'autobus par la moto a lieu dans phase uniforme de l'autobus.

Lorsque la moto rattrapera l'autobus, son abscisse sera égale à celle de l'autobus.

Ainsi : $x_1' = x_2$

$\Rightarrow 30t + 300 = 2t^2 - 480t + 28800$

Alors : $2t^2 - 510t + 28500 = 0$

Le calcul du discriminant réduit donne :

$\Delta' = (-255)^2 - 2 \times 28500 = 8025 > 0$

Les racines de cette équation sont :

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{-(-255) - \sqrt{8025}}{2} = 82{,}70 \\[2ex] t_2 = \dfrac{-(-255) + \sqrt{8025}}{2} = 172{,}29 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 = 82{,}70s < \theta = 120s \\ t_2 = 172{,}29s > \theta = 120s \end{cases}$$

On choisit le temps le plus élevé $t_2 = 172{,}29s$, qui correspond à une durée supérieure au retard de la moto ($\theta = 120s$).

Donc le rattrapage a lieu à : $\boxed{t = 172{,}29s}$

Le lieu de rattrapage est : $x_1' = x_2 = x$

$\Rightarrow x = 30(172{,}29) + 300 = 5468{,}7.$

$$\boxed{x = 5468{,}7m}$$

Exercice 3 : On fait tourner un disque initialement au repos jusqu'à atteindre une vitesse de $8rad.s^{-1}$.
1°) L'accélération angulaire au cours de cette phase étant de $2,5rad.s^{-2}$, calcule l'angle balayé par un rayon du disque au cours du mouvement.
2°) Écris l'équation horaire du mouvement du disque (on prendra $\theta = 0$ à $t = 0$).
3°) Tournant à la vitesse de $8rad.s^{-1}$, le disque est freiné. Il s'arrête alors au bout de $2s$.
a) Calcule la valeur de cette nouvelle accélération.
b) Quelle est la valeur de l'angle balayé par un rayon du disque depuis le début du freinage jusqu'à l'arrêt complet.
c) Déduis le nombre de tours effectués par le disque au cours de cette deuxième phase.

Corrigé 3.
$\dot{\theta}_1 = 8rad.s^{-1}$; $\ddot{\theta}_1 = 2,5rad.s^{-2}$

1°) Calcul de l'angle balayé par un rayon du disque au cours du mouvement.
$\ddot{\theta}_1 = cte \neq 0$, alors le mouvement est circulaire uniformément varié (M.C.U.V).
D'après la relation espace – vitesse (R.E.V), on a :

$$\dot{\theta}_1^2 - \dot{\theta}_{0_1}^2 = 2\ddot{\theta}_1(\theta_1 - \theta_{0_1})$$

Origine des dates **:** instant du lancement du disque.
Origine des espaces **:** la position du disque avant le lancement.
Conditions initiales :
A $t = 0$: $\theta_{0_1} = 0$; $\dot{\theta}_{0_1} = 0$.
Ainsi : $\dot{\theta}_1^2 = 2\ddot{\theta}_1(\theta_1)$
D'où :

$$\boxed{\theta_1 = \frac{\dot{\theta}_1^2}{2\ddot{\theta}_1}}$$

$$\boldsymbol{A.N} : \theta_1 = \frac{(8)^2}{2 \times 2,5} = 12,8 \Rightarrow \boxed{\theta_1 = 12,8rad}$$

2°) *Equation horaire du mouvement du disque.*
Le mouvement étant circulaire uniformément varié (M.C..UV), l'équation est de la forme :

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\ddot{\theta}_1 t^2 + \dot{\theta}_{0_1} t + \theta_{0_1}$$

Avec : $\theta_{0_1} = 0$; $\dot{\theta}_{0_1} = 0$.

$$\Rightarrow \theta_1 = \frac{1}{2}\ddot{\theta}_1 t^2 \Rightarrow \theta_1 = \frac{1}{2}(2,5)t^2$$

D'où :

$$\boxed{\theta_1 = 1,25t^2}$$

3°) $t = 2s$.
a) Calcul de la valeur de cette nouvelle accélération.
En freinant le disque, sa vitesse diminue progressivement puis s'annule.
Le mouvement est toujours uniformément varié (précisément décéléré).
D'après la relation vitesse – temps (RVT) :

$$\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_2(t - t_0)$$

t_0 étant nul $\Rightarrow \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_2 t$
A l'arrêt du disque : $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_f = 0$
$\Rightarrow -\dot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_2 t$
D'où :

$$\boxed{\ddot{\theta}_2 = -\frac{\dot{\theta}_1}{t}}$$

$$\boldsymbol{A.N} : \ddot{\theta}_2 = -\frac{8}{2} = -4 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta}_2 = -4rad.s^{-2}}$$

b) Valeur de l'angle balayé par un rayon du disque depuis le début du freinage jusqu'à l'arrêt complet.
$\ddot{\theta}_2 = cte \neq 0$, M.C.U.V.
D'après la R.E.V, on a : $\dot{\theta}_2^2 - \dot{\theta}_{0_2}^2 = 2\ddot{\theta}_2(\theta_2 - \theta_{0_2})$
Origine des dates **:** l'instant du début du freinage du disque.
Origine des espaces **:** la position du disque juste avant le freinage.
Conditions initiales :
à t = 0, $\theta_{0_2} = 0$; $\dot{\theta}_{0_2} = \dot{\theta}_1$.
Ainsi : $\dot{\theta}_2^2 - \dot{\theta}_1^2 = 2\ddot{\theta}_2(\theta_2)$
A l'arrêt du disque : $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_f = 0$
$\Rightarrow -\dot{\theta}_1^2 = 2\ddot{\theta}_2.\theta_2$
D'où :

$$\boxed{\theta_2 = -\frac{\dot{\theta}_1^2}{2\ddot{\theta}_2}}$$

$$\boldsymbol{A.N} : \theta_2 = -\frac{(8)^2}{2 \times (-4)} = 8 \Rightarrow \boxed{\theta_2 = 8rad}$$

c) Déduction du nombre de tours effectués par le disque au cours de cette deuxième phase.

Par définition : $\theta_2 = 2\pi n_2 \Rightarrow \boxed{n_2 = \frac{\theta_2}{2\pi}}$

$$\boldsymbol{A.N} : n_2 = \frac{8}{2 \times 3,14} = 1,27$$

$$\boxed{n_2 = 1,27tour}$$

Exercice 4 : Deux mobiles se suivent à *28m* l'un de l'autre à la vitesse constante de *96Km/h*. A une date choisie comme origine des temps, les mobiles freinent simultanément. La décélération du premier est de - *7,7m/s²*. Le deuxième manquant d'adhérence freine avec une accélération de - *4,2m/s²*. En prenant l'origine du repère, la position du mobile (1) au début du freinage :
1°) Établis les équations horaires des mouvements des deux mobiles ;
2°) Détermine la date de rattrapage du mobile (1) par le mobile (2) ;
3°) Avec quelle vitesse le mobile (2) arrive – t – il au niveau du mobile (1) ?
4°) Quelle aurait dû être la décélération minimale du deuxième mobile pour que le rattrapage soit impossible ?

Corrigé 4.

d = 28m

$M_1 \left| \begin{array}{l} v_1 = 96Km/h\,; \\ a_1 = -7{,}7m/s^2 \end{array} \right.$ $\quad M_2 \left| \begin{array}{l} v_2 = 96Km/h. \\ a_2 = -4{,}2m/s^2 \end{array} \right.$

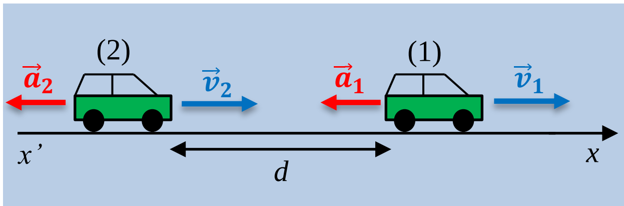


Figure 2.

1°) J'établis les équations horaires des mouvements des deux mobiles :

Origine des espaces : Position du mobile (1) au début du freinage

Origine des dates : instant du début du freinage.

✓ ***Pour le mobile (1)***.

$a_1 = cte \neq 0 \Rightarrow$ MRUV d'équation :

$$x_1 = \frac{1}{2}a_1t^2 + v_{0_1}t + x_{0_1}$$

A t = 0 ; $x_{0_1} = 0$; $v_{0_1} = v_1$

alors : $x_1 = \frac{1}{2}a_1t^2 + v_1t$

D'où :

$$\boxed{x_1 = -3{,}85t^2 + 26{,}66t} \text{ (m)}$$

✓ ***Pour le mobile (2).***

$a_2 = cte \neq 0 \Rightarrow$ MRUV d'équation :

$$x_2 = \frac{1}{2}a_2t^2 + v_{0_2}t + x_{0_2}$$

A t = 0 ; $x_{0_2} = -d$; $v_{0_2} = v_2$

alors : $x_2 = \frac{1}{2}a_2t^2 + v_2t - d$

D'où :

$$\boxed{x_2 = -2{,}1t^2 + 26{,}66t - 28} \text{ (m)}$$

2°) Je détermine la date de rattrapage du mobile (1) par le mobile (2) ;

Au lieu de rattrapage $x_1 = x_2 = x$

$\Rightarrow -3{,}85t^2 + 26{,}66t = -2{,}1t^2 + 26{,}66t - 28$

$\Rightarrow \; 1{,}75t^2 = 28 \;\Rightarrow\; t = \sqrt{\frac{28}{1{,}75}} = 4s$

$$\boxed{t = 4s}$$

3°) Vitesse avec laquelle le mobile (2) arrive au niveau du mobile (1) ?

$v_2 = \frac{dx_2}{dt} = -4{,}2t + 26{,}66$

D'où :

$$\boxed{v_2 = -4{,}2t + 26{,}66}$$

A.N : $v_2 = -4{,}2 \times 4 + 26{,}66 = 9{,}86$

$$\boxed{v_2 = 9{,}86m/s}$$

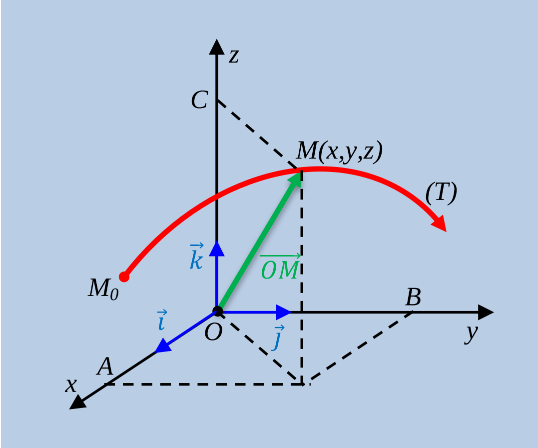
4°) Pour que le rattrapage soit impossible il faut que la décélération du mobile (2) soit supérieure à celle de mobile (1), soit à la limite :

$$\boxed{a_{2_{min}} = a_1 = a_1 = -7{,}7m/s^2}$$

TRAVAUX DIRIGES III

Conseils pratiques :

1. Caractéristiques du mouvement.
2. Base cartésienne et base de Frenet : repères et trajectoire.
3. Nature du mouvement : uniforme et uniformément varié ; équations caractéristiques.
4. Notion d'origines.



L'ESSENTIEL DU COURS

I – Définitions des notions.

Définis les termes suivants : Référentiel ; Vecteur position ; Trajectoire ; Abscisse curviligne ; Vecteur vitesse.

II – Questions à alternative vrai ou faux.

Réponds par vrai ou faux aux affirmations suivantes. Exemple : 9°) – Vrai :
1°) Un référentiel est un objet lié à la Terre.
2°) Un référentiel est défini par un repère d'espace et un repère de temps.
3°) Un objet est en mouvement si sa position varie au cours du temps.
4°) Le mouvement d'un objet doit être décrit par rapport à un autre objet.
5°) Une personne se déplaçant en voiture est forcément en mouvement.
6°) Une personne assise par terre est obligatoirement immobile.

III – Vérification des connaissances.

On envisage le mouvement d'un point mobile décrivant une trajectoire curviligne ou non. Réponds par vrai ou faux.
1°) Le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire au point considéré.
2°) Dans un mouvement curviligne, le vecteur accélération peut être tangent à la trajectoire au point considéré.
3°) Une accélération tangentielle nulle implique un mouvement uniforme.
4°) Si $\vec{a}.\vec{v} < 0$, le mouvement est retardé.
5°) Une accélération tangentielle constante implique un mouvement uniformément accéléré ou retardé.
6°) Le vecteur accélération normal est dirigé vers l'intérieur d'une trajectoire curviligne.
7°) Si, à un instant t, la vitesse $\vec{v}$ est nulle, alors l'accélération $\vec{a}$ est aussi nulle.

IV – Questions de cours

Assise à l'arrière de la voiture conduite par son père, Heïdi fait signe à Arthur qui est resté immobile sur le trottoir.
1°) Le siège d'Heïdi est – il en mouvement dans les référentiels suivants ?
a) La voiture ; b) Arthur.
2°) Réponds à la même question pour Arthur.
3°) Lequel de ces référentiels est un référentiel terrestre ? Justifie.

V – Appariement.

Relie un élément – question de la colonne A à un élément – réponse de la colonne B dans le tableau ci – dessous : ***Exemple*** $a_8 = b_{10}$.

Colonne A		**Colonne B**	
a_1	Relation indépendante du temps d'un mouvement rectiligne uniformément varié.	b_1	$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$
a_2	Abscisse curviligne	b_2	$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$
a_3	Equation horaire d'un mouvement rectiligne uniformément varié ;	b_3	$\ddot{\theta} = cte \neq 0$
a_4	Vitesse angulaire	b_4	$x = x_m cos(\omega t + \varphi)$
a_5	Elongation d'un mouvement rectiligne sinusoïdal.	b_5	$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$
a_6	Mouvement circulaire uniformément varié.	b_6	$\dot{\theta} = \ddot{\theta}t + \dot{\theta}_0$
a_7	Equation différentielle.	b_7	$s = R\theta$

RESOLUTION DES PROBLEMES

EXERCICE 1 : Sur l'axe $x'x$ d'origine O, l'équation horaire de l'abscisse x d'un point mobile M est : $x(t) = 2t^3 - 6t$.

1°) Donne l'expression de la composante du vecteur vitesse de M à l'instant t.

2°) Donne la composante du vecteur accélération au même instant.

3°) Détermine les intervalles de temps pendant lesquels le mouvement est accéléré ou retardé.

EXERCICE 2 : Dans le repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$), la position d'un point M est définie à chaque instant par

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t - 2 \\ z = 0 \end{cases} \text{(en mètres).}$$

1°) Représente ce point aux dates *0s*, *1s*, *2s*, et *3s*.

2°) Déduis – en l'équation de la trajectoire suivie par ce point et donne la nature du mouvement.

EXERCICE 3 : La position du point M est donnée à chaque instant, le repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$) par

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x = 2t \\ y = t^2 + 1 \\ z = 0 \end{cases} \text{(en mètres).}$$

1°) Représente les positions respectives de ce point aux instants *0s*, *1s* et *2s*.

2°) Calcule les composantes du vecteur vitesse à ces dates et représente – les aux mêmes instants.

EXERCICE 4 : La position d'un point matériel se déplaçant dans un plan muni d'un repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) est définie à chaque instant par les équations paramétriques suivantes:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -t^2 + 2t \end{cases} \quad \text{avec } t \geq 0s.$$

Le point matériel est mis en mouvement à la date $t = 0s$.

1°) Donne l'équation cartésienne de la trajectoire.

2°) Détermine le vecteur vitesse du point matériel :

a) Lorsque ce point passe par le sommet de la trajectoire ;

b) Lorsque ce point rencontre le plan $y = 0$.

EXERCICE 5 : Les équations paramétriques du mouvement d'un mobile se déplaçant dans un plan muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont :

$$\begin{cases} x(t) = 3t \\ y(t) = -4t^2 + 5t \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

1°) Détermine l'équation cartésienne de la trajectoire.

2°) Donne les caractéristiques du vecteur vitesse lorsque le mobile passe par son ordonnée maximale.

3°) Calcule l'abscisse du mobile lorsque celui – ci repasse par l'ordonnée $y = 0$.

4°) Calcule la valeur de la vitesse à la date $t = 6s$.

EXERCICE 6 : Une particule se déplace dans une région de l'espace munie d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Cette particule est soumise à une accélération constante : $a = -2{,}6.10^{13}(m/s^2)$.

1° Détermine, en fonction du temps, l'expression du vecteur vitesse sachant qu'à la date t = 0 son expression est : $\vec{v}_0 = 3{,}6.10^6\vec{\imath} + 1{,}44.10^7\vec{\jmath}$ (m.s^{-1}).

2°) Détermine, en fonction du temps l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ sachant qu'à la date $t = 0$ on a $\overrightarrow{OM}_0 = 10^2\vec{k}\ (en\ m)$.

3°) Etablis les équations paramétriques du mouvement. Déduis – en l'équation de la trajectoire.

4°) A quelles dates le mouvement est il accéléré ? le mouvement est – il retardé ?

EXERCICE 7 : Les équations paramétriques d'un mobile M à l'instant t sont données par :

$$\begin{cases} x = 2cos\pi t + 1 \\ y = 2sin\pi t - 2 \end{cases} \text{(en m)}$$

1°) Montre que la trajectoire de ce point est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
2°) Calcule à un instant t quelconque :
a) Le module du vecteur vitesse ;
b) Le module du vecteur accélération.

EXERCICE 8 : Les équations paramétriques d'un point mobile M sont :

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = \frac{1}{2}t^2 + 4 \quad \text{(en cm)} \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

1°) Le mouvement du mobile est – il plan ? Pourquoi ?
2°) Détermine :
a) Le module du vecteur vitesse du mobile à l'instant $t = 0$; $t = 2s$.
b) Le module du vecteur accélération du mobile à un instant t quelconque. Conclus.
3°) Quelle est l'équation de la trajectoire ? Donne sa nature.

EXERCICE 9 :
A – Les coordonnées cartésiennes d'un point M dans un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) sont :

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x = 2t - 2 \\ y = t + 1 \end{cases} \quad x \text{ et } y \text{ en mètre ; } t \text{ en seconde.}$$

1°) Donne l'expression du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans le repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) en fonction du paramètre t (écris $\overrightarrow{OM}$ sous la forme $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$).
2°) Calcule $\overrightarrow{OM}_0$ pour $t = 0$; donne les coordonnées du point M_0.
3°) Trouve une relation entre x et y (relation indépendante du temps). Représente y en fonction de x dans le repère. Donne la nature de la trajectoire.
4°) a) Calcule $\overrightarrow{OM}_1$ pour $t = 5$ secondes ;
b) Calcule la norme du vecteur $\overrightarrow{M_0M_1}$.

B – Même exercice pour $\overrightarrow{OM}\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2t + 3 \end{cases}$ et $\overrightarrow{OM}\begin{cases} x = 2t \\ y = 4t^2 + 3 \end{cases}$

EXERCICE 10 : Les équations horaires des coordonnées du point mobile M sont données par :

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x(t) = Acos\omega t \\ y(t) = Asin\omega t \end{cases}$$

A et ω sont des constantes positives.
1°) Donne les expressions du vecteur vitesse $\vec{V}$ et du vecteur accélération $\vec{a}$ du mobile.
2°) Exprime le vecteur accélération $\vec{a}$ en fonction du vecteur position $\overrightarrow{OM}$. Montre que $\vec{a}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$.
3°) Quelle est l'équation de la trajectoire de M dans le repère cartésien ? Donne sa nature.
4°) Donne également l'équation horaire de l'abscisse curviligne du point M en prenant comme origine M_0, position du mobile à l'instant $t = 0$.

EXERCICE 11 : Soit deux axes rectangulaires Ox et Oy. Un point mobile M se déplace dans le plan xOy. Ses projections sur les axes Ox et Oy sont définies par :

$$\begin{cases} x(t) = 1 + cost \\ y(t) = sint \end{cases}$$

Montre que le mouvement de M est circulaire uniforme.

EXERCICE 12 : A l'instant $t = 0$, un mobile M se trouve en un point de coordonnées x_0 et y_0 (en cm). Sa vitesse est donnée par :

$$\vec{v}\begin{cases} v_x(t) = v_0 \\ v_y(t) = 2t \end{cases} \text{(en cm.s}^{-1}\text{).}$$

1°) Donne les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$.
2°) Déduis – en l'équation de la trajectoire $y = f(t)$, ainsi que le module v de la vitesse de M.
A.N : $x_0 = 1\text{cm}$; $y_0 = 0$; $v_0 = 1\text{cm.s}^{-1}$.

EXERCICE 13 : Le mouvement d'un mobile M est étudié dans le repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$). A l'instant initial $t = 0$, le mobile est lancé avec une vitesse $\vec{v_0} = 2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$ à partir d'un point mobile M_0 tel que $\overrightarrow{OM}_0 = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ et d'accélération constante $\vec{a} = -10\vec{\jmath}$.
1°) Par intégration successives, établis les équations horaires $x = f(t)$ et $y = g(t)$ du mouvement.
2°) Déduis – en l'équation de la trajectoire et donne sa nature.
3°) Détermine à $t = 1s$:
a) Le vecteur vitesse ;
b) Son module.
4°) Donne la vecteur vitesse du mobile lorsque le mobile passe par le point $x = 0$.

EXERCICE 14 : Les équations horaires du mouvement d'un mobile se déplaçant dans un plan muni d'un repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) sont :

$\overrightarrow{OM}\begin{cases}x(t) = t^2 - 2\\ y(t) = 2t^2 - 2\end{cases}$ (x et y en m avec $t \geq 0s$).

Le mobile est mis en mouvement à la date $t_0 = 0$.

1°) Détermine l'équation cartésienne $y = f(x)$ de la trajectoire. Déduis – en la nature de la trajectoire.

2°) Détermine les coordonnées du mobile au début du mouvement et 5s après le début du mouvement.

3°) Détermine l'expression de la distance parcourue par le mobile entre l'instant initial et un instant quelconque. Calcule la distance *10s* après le début du mouvement.

4°) A quel instant le mobile passe – t – il par le point d'abscisse nul ? Quelle est alors son ordonnée ?

EXERCICE 15 : Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la position d'un point M en mouvement est donnée à chaque instant t par ses coordonnées cartésiennes x et y. Le vecteur accélération $\vec{a}$ du mouvement de M est constant. Il est parallèle et opposé à l'axe $(O, \vec{\jmath})$, son module est égal à $8m.s^{-2}$. A l'instant $t = 0$, M passe au point *A(0 ;1)* avec la vitesse $\vec{V_0} = 2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$.

1°) Établis les équations horaires $x = f(t)$ et $y = g(t)$ du point M.

2°) Déduis l'équation de la trajectoire de M.

2°) A quel instant le point M traverse t – il l'axe $(O, \vec{\imath})$? Calcule la vitesse de M à cet instant.

EXERCICE 16 : Un mobile est lancé sur un plan incliné muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, le plan coïncide avec le plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Le mobile est assimilé à un point A qui coïncide à l'instant t = 0 avec l'origine O. Le vecteur position du mobile est $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.

Au cours du mouvement, son accélération est $\vec{a} = -4\vec{\jmath}$ (m/s^2). A l'instant du lancement sa vitesse est $\vec{v}_0 = 2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$ (m/s).

1°) Détermine le vecteur vitesse à l'instant t du mobile et le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ à l'instant t. Déduis – en que le mouvement est plan.

2°) Détermine l'équation cartésienne *y(x)* de la trajectoire, donne l'allure de cette trajectoire.

3°) Le centre d'inertie du mobile coupe l'axe $(x'x)$ en un point A à la date t_1.

a) Détermine x_A et t_1.

b) Détermine le vecteur vitesse $\vec{v}_A$.

4°) L'ordonnée y de M passe par un maximum en un point S. Détermine :

a) L'ordonnée y_S et l'abscisse x_S correspondante ;

b) L'instant de passage en S ;

c) Le vecteur vitesse $\vec{v}_S$.

EXERCICE 17 : Dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'axe Ox horizontal et Oy vertical descendant, la position d'un point mobile M animé d'un mouvement curviligne de chute libre est donnée par les équations horaires suivantes :

$$\begin{cases}x(t) = 3t + 2\\ y(t) = 4{,}9t^2\end{cases}$$

1°) Exprime dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les vecteurs position et vitesse du point M.

2°) Montre que le vecteur accélération $\vec{a}$ est constant. Calculer $\|\vec{a}\|$.

3°) Détermine les vecteurs position $\overrightarrow{OM_0}$ et vitesse $\vec{v_0}$ à l'instant initial.

4°) Montre que pour un tel mouvement (vecteur accélération constant), le vecteur position est de la forme : $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}t^2\vec{a} + t\vec{v_0} + \overrightarrow{OM_0}$.

EXERCICE 18 : Sur la route Total – Nganga Lingolo supposée rectiligne, roulent à vitesse constante deux véhicules en sens contraires. On assimile Total et Nganga Lingolo à des points A et B respectivement, distants de *18Km*.

Le véhicule (1) passe en A avec une vitesse de *36Km/h* se dirigeant vers *B*. Le véhicule (2) passe en B au même moment que le véhicule (1) franchissant A avec une vitesse de *72Km/h*.

1°) a) Ecris les équations horaires des véhicules (1) et (2), en précisant les origines des espaces et des temps.

b) A quel instant se fera le croisement ?

2°) Réponds aux mêmes questions si le véhicule (2) franchit B deux minutes après le passage du véhicule (1) en A.

EXERCICE 19 : Trois villes A_1, A_2, A_3 sont situées le long d'une route rectiligne. $A_1A_2 = 5Km$; $A_1A_3 = 10Km$.

1°) A l'instant $t = 0$, un mobile M_1 passe par la ville A_1 et se dirige vers A_2 avec une vitesse constante $V_1 = 90Km.h^{-1}$.

a) Ecris l'équation horaire de M_1 ;

b) A quelle date t_1 le mobile passe – t – il par la ville A_2 ?

2°) A l'instant $t = 0$, un mobile M_2 passe par la ville A_2. Il se déplace dans le même sens que M_1 à la vitesse constante de $61{,}2Km.h^{-1}$.

a) Ecris l'équation horaire du mouvement de M_2 ;

b) A quelle date t_2 et en quel lieu M_1 et M_2 se croisent – ils ?

3°) Un mobile M_3 passe par la ville A_2 à l'instant $t_3 = 120s$. Son mouvement est rectiligne et uniforme de vitesse $V_3 = 63{,}2Km.h^{-1}$.

a) Donne l'équation horaire du mouvement de M_3 ;
b) A quel instant t_4 et en quel lieu M_1 rejoint – il M_3 ?
c) A quelle date M_3 passe – t – il par la ville A_3 ?

L'origine des espaces sera prise au niveau de la ville A_1 et l'origine des temps l'instant de passage de M_1 par la ville A_1.

EXERCICE 20 : On considère une montre comportant trois aiguilles : l'aiguille des heures, celle des minutes et celle des secondes (trotteuse).
1°) Détermine la vitesse angulaire de chacune de ces aiguilles.
2°) La trotteuse a une longueur de *13mm*.
   a) Quelles sont les caractéristiques du vecteur vitesse de son extrémité ?
   b) Quelles sont les caractéristiques du vecteur accélération de son extrémité ?

EXERCICE 21 : On considère deux positions *A* et *B* sur une autoroute rectiligne. A l'instant initial ($t = 0$), un véhicule M_1 roulant à la vitesse constante de $54Km.h^{-1}$ passe par *A* et se dirige vers *B*. Une minute plus tard, un véhicule M_2 roulant à la vitesse constante de $90Km.h^{-1}$ passe par *B* et se dirige vers *A*. Sachant que *AB = 2Km*, on demande :
1°) L'équation horaire du véhicule M_1.
2°) L'équation horaire du véhicule M_2.
3°) La date où M_1 passe par *B*.
4°) La date où M_2 passe par *A*.
5°) La date et le lieu de leur rencontre.
N.B : On prendra pour origine des abscisses le point *A* et pour sens positif, celui de *A* vers *B*.

EXERCICE 22 : Deux villages M_1 et M_2 sont distants de *2Km*. A l'instant initial une voiture V_1 démarre du village M_1 avec une accélération de $1m.s^{-2}$. A la même date une voiture V_2 passe par le village M_2 en direction de M_1 avec une vitesse de *60Km/h*. On suppose que la route séparant les deux villages est rectiligne et bornée de M_1 vers M_2.
1°) Trouve l'instant et le lieu de croisement.
2°) Quelle distance parcourt chaque véhicule depuis l'instant initial ? Déduis – en la précision sur chaque mesure si le temps est connu à $1/10^{ème}$ de seconde près, l'accélération à $2/10^{ème}$ de m/s^2 près et la vitesse à $1/5^{ème}$ de *m/s* près.

EXERCICE 23 : Une autoroute présente un tronçon rectiligne entre deux aires de repos *A* et *B* distantes de *5Km*. Un véhicule M_1 passe devant *A* à *11h* et se dirige vers *B* à une vitesse constante de *72Km/h*. Un véhicule M_2 passe devant *B* à *11h02min* et se dirige vers *A* à la même vitesse de *72Km/h*.
1°) Écris les équations horaires des mouvements de M_1 et M_2.
N.B : Origine des espaces : le point *A*.
Origine des dates : instant du départ de M_1.
2°) Déduis – en l'heure et le lieu du croisement des deux véhicules.

EXERCICE 24 : Un volant de *2m* de rayon tourne à une vitesse de *120* tours par minute.
1°) Calcule la vitesse angulaire, la vitesse linéaire et l'accélération d'un point A situé à la périphérie du volant.
2°) A la suite d'un freinage, le volant entame un mouvement uniformément varié pour s'arrêter après *30s*.
a) Calcule l'accélération angulaire du mouvement du volant durant cette phase ;
b) Etablis l'équation horaire du mouvement angulaire pendant le freinage ;
c) Combien de tours fera le volant pendant ces *30s* ?
d) Calcule la vitesse angulaire et l'accélération normale du point *A 15s* après le début du freinage.

EXERCICE 25 : On considère une hélice mobile autour de son axe de révolution. Partant du repos, elle atteint en *10* secondes, d'un mouvement uniformément varié, une vitesse de *90* tours par minute.
1°) Calcule :
   a) L'accélération angulaire de cette phase ;
   b) Le nombre de tours effectués.
2°) On freine ensuite l'hélice en réduisant sa vitesse de *90* à *60* tours par minute ; sachant que le freinage est uniformément varié et qu'il dure *5* secondes, on demande :
a) L'accélération angulaire de ce mouvement ;
b) Le nombre de tours effectués au cours de ce ralentissement.

EXERCICE 26 : Un volant peut tourner dans un plan vertical autour d'un axe passant par son centre *O*. Initialement au repos, on le lance de sorte qu'il atteigne une vitesse de rotation égale à $90tr.min^{-1}$ en *120 secondes*.
1°) Calcule :
a) L'accélération angulaire du mouvement du volant ;
b) Le nombre de tours effectués par le volant pendant cette phase de lancement ;

2°) Tournant à la vitesse de *90tr.min⁻¹*, le volant est freiné. On constate qu'au bout de *25 tours* de rotation, la vitesse du volant devient égale à *30tr.min⁻¹*.

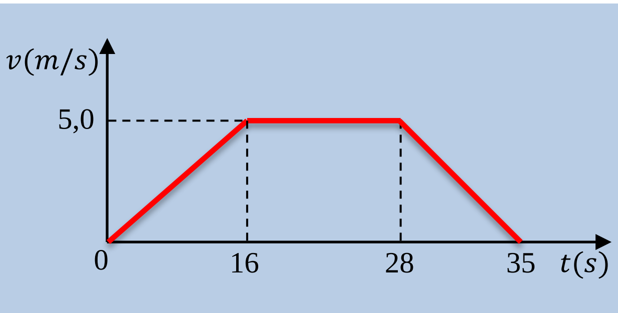
a) Calcule la décélération du mouvement du volant au cours de cette phase ;
b) Déduis la durée de ce freinage.

EXERCICE 27 : Un mobile en mouvement circulaire uniforme sur un cercle de rayon $R = 1{,}5m$ met *2* secondes pour effecteur un tour complet.

1°) Précise les valeurs de la période et de la fréquence du mouvement.
2°) Calcule la vitesse angulaire et la vitesse linéaire du mobile.
3°) Quelle est la valeur de l'accélération du mouvement ?
4°) Sachant qu'à l'instant initial ($t = 0$), l'abscisse angulaire est $\theta_0 = 0{,}44\text{rad}$; détermine l'abscisse angulaire et l'abscisse curviligne du mobile à l'instant $t = 4s$.

EXERCICE 28 : Un mobile décrit une trajectoire rectiligne. On donne la représentation graphique de sa vitesse en fonction du temps.

1°) Calcule son accélération au cours des trois phases du mouvement.
2°) Calcule la distance parcourue par le mobile jusqu'à son arrêt à la date *35s*.



EXERCICE 29 : La loi horaire du mouvement d'un point M_1 suivant la verticale ascendante $(O, \vec{j})$ est : $y_1(t) = -5t^2 + 20t$ (m) avec l'instant t en seconde.

A l'origine des dates ($t = 0$), le mobile M_1 est en au point *O(0 ; 0)* du sol horizontal.

1°) Détermine la vitesse du mobile M_1 à l'instant initial (origine des dates).
2°) A quelle date t_1, le mobile M_1 s'arrête – t – il au cours de son mouvement ? Déduis la hauteur maximale atteinte par le mobile M_1.
3°) Une (1) seconde après le départ du mobile M_1, un autre mobile M_2 part du même point *O(0 ; 0)* avec une vitesse de *20m/s* et une accélération $a_y = -10\text{m/s}^2$.

Pour les conditions initiales : origine des dates : l'instant de départ de M_1 ($t = 0$) ; origine des espaces : le point *O(0 ; 0)* du sol horizontal.

Détermine :

a) L'équation horaire du mobile M_2 ;
b) Le(s) instant(s) de rencontre de deux mobiles M_1 et M_2.

EXERCICE 30 : Une voiture roule avec une vitesse constante de $108 \pm 0{,}1$Km/h sur une route horizontale portant la mention : « vitesse limite : *60Km/h* ». Lors de son passage devant une station (A) ; le chauffeur freine et la voiture s'arrête en parcourant une distance de $150{,}00 \pm 0{,}85$m pendant le freinage.

On prendra pour :

- ✓ origine des dates : l'instant de passage en (A) ;
- ✓ origine des espaces : la station (A) ($x_A = 0$).

Détermine :

1°) L'équation horaire du mouvement de la voiture pendant le freinage en fonction de l'accélération a, de l'instant t et de la vitesse initiale v_0.
2°) La valeur de l'accélération a et la précision $\left(\frac{\Delta a}{a}\right)$ sur l'accélération.
3°) La durée du freinage.

EXERCICE 31 : L'hélice d'un ventilateur de *50cm* de rayon, tourne à raison de *300trs/min*. A la suite d'une coupure de courant, l'hélice entame un mouvement uniformément varié pour s'arrêter après *1min*.

1°) Etablis l'équation horaire du mouvement angulaire.
2°) Combien de tours fera l'hélice avant de s'arrêter ?
3°) Trouve à l'instant $t = 30s$, la vitesse linéaire et l'accélération d'un point situé à l'extrémité de l'hélice.

EXERCICE 32 : On considère une hélice mobile autour de son axe de révolution. Partant du repos, elle atteint en *8* secondes, d'un mouvement uniformément varié, une vitesse de *60 tours* par minute.

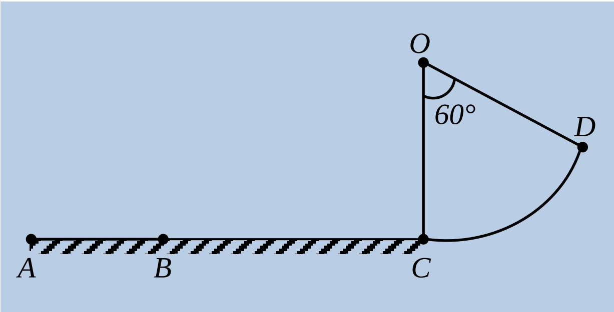
1°) Calcule :

a) L'accélération angulaire de cette phase ;
b) Le nombre de tours effectués.

2°) Tournant à cette vitesse, on freine ensuite l'hélice jusqu'à l'arrêt. Sachant que le freinage est uniformément varié et qu'il dure *5* secondes, on demande :

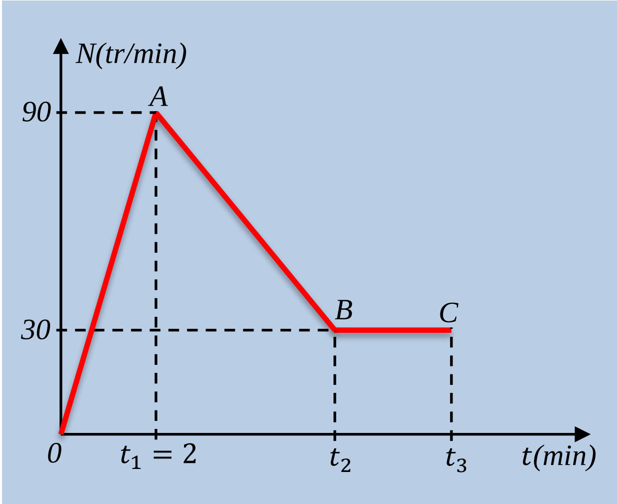
a) L'accélération angulaire de ce mouvement ;
b) Le nombre de tours effectués au cours de ce ralentissement.

EXERCICE 33 : Un mobile supposé ponctuel *M* effectue un trajet *ABCD* constitué de trois portions et représenté par la figure ci – dessous :
AB et *BC* sont rectilignes. $AC = 350m$. *CD* est un tronçon circulaire de rayon $OC = 5m$. L'angle $C\hat{O}D$ vaut $60°$. *M* part du point *A* avec une vitesse $V_A = 10m.s^{-1}$. Le mouvement sur le tronçon *AB* est uniforme.



1°) Écris l'équation du mouvement de *M* pour cette première phase (à $t = 0s$, le mobile se trouve au point *A* considéré comme origine des espaces).
2°) Détermine la distance *AB* sachant que le parcours s'est effectué en $5s$.
3°) La deuxième phase du mouvement (*BC*) est uniformément accélérée.
a) Détermine la valeur de l'accélération sachant que le mobile arrive en *C* avec une vitesse $V_C = 25m.s^{-1}$. Déduis – en la durée de ce parcours.
b) Établis l'équation du mouvement de *M* pour cette phase en prenant pour origine des dates l'instant où le mobile se trouve en *B*.
4°) Le mobile parcourt l'arc *CD* d'un mouvement uniformément accéléré. Sachant que la vitesse du mobile en *D* vaut $5,5rad.s^{-1}$. Détermine :
a) L'accélération angulaire de *M* pour cette phase ;
b) Les équations horaires $\theta = f(t)$ et $\dot{\theta} = g(t)$ en considérant qu'à l'instant initial le mobile se trouve au point *C* ;
c) La durée du trajet ;
d) La distance totale parcourue par le mobile *M* de *A* à *D*.

EXERCICE 34 : On veut étudier le mouvement d'un volant en rotation dans un plan vertical autour d'un axe de révolution passant par son centre *O*. Le résultat nous donne le graphe $N = f(t)$ ci – dessous ; *N* sa vitesse de rotation à un instant quelconque.



1°) Donne la nature du mouvement de la première phase et calcule son accélération angulaire.
2°) Calcule le nombre de tours effectués par le volant pendant cette phase.
3°) Lorsqu'il atteint la vitesse de $90tr/min$, le volant est freiné. On constate qu'au bout de $25trs$ de rotation, la vitesse du volant devient égale à $30trs/min$.
a) Calcule l'accélération angulaire de cette phase ;
b) Calcule la durée de ce freinage et déduis – en t_2.
4°) Déduis – en t_3 pour *45 tours* effectués dans la première phase.

EXERCICE 35 : Dans un parc d'attraction, deux élèves de la classe de terminale scientifique (Elvic et Prestige) veulent mettre à profit leurs connaissances sur les mouvements cinématiques. Ils participent pour cela à un jeu de voitures qui se déplacent en sens inverses sur deux voies parallèles supposées rectilignes.
Elvic dit à Prestige : si les deux voitures animées de la vitesse de $18Km/h$ passent par les points *A* et *B* distants de $3m$ avec un intervalle de temps correspondant à $1s$, ils se croiseront vers *B*.
Prestige répond : cela n'est vrai à cette vitesse que si l'intervalle de temps qui les sépare est inférieur à $0,6s$. Qui des deux a raison ?
Pour répondre à la question, on envisage les deux possibilités suivantes :
1°) On suppose d'abord que la voiture (1) animée d'une vitesse constante de $18Km/h$ passe par la position *A* que l'on considère comme origine des espaces à une date $t = 0$ et se dirige vers le point *B* situé à $3m$ de *A*. Une seconde plus tard, la voiture (2) animée de la même vitesse de $18Km/h$ passe par le point *B* et se dirige vers *A*.
a) Ecris les équations horaires des deux voitures ;

b) Détermine :
   b.1. La date supposée de croisement des deux voitures ;
   b.2. Le lieu supposé de leur croisement.

2°) On suppose maintenant que la voiture (2) se déplaçant vers A à la même vitesse de *18Km/h* passe par le point *B* *0,5s* plus tard. Les conditions initiales étant les mêmes que précédemment.

a) Ecris l'équation horaire du véhicule (2) ;
b) Trouve la date de croisement des deux voitures ;
c) Déduis le lieu de leur croisement ;
d) Qui de Elvic ou de Prestige a raison ? Justifie.

EXERCICE 36 : On considère un mobile en mouvement rectiligne qui parcourt une certaine distance en trois phases :

1ère phase : le mobile démarre en gardant une accélération constante de $0,8 m/s^2$ jusqu'à atteindre la vitesse de *8m/s*.

2ème phase : le mobile parcourt une distance de *24m* à la vitesse constante de *8m/s*.

3ème phase : le mobile freine enfin jusqu'à l'arrêt en parcourant une distance de *8m* d'un mouvement uniformément varié.

1°) Calcule la distance parcourue au cours de la première phase et déduis – en la distance totale parcourue par le mobile.

2°) Calcule la durée de chaque phase et déduis – en la durée totale du mouvement.

EXERCICE 37 : L'étude du mouvement d'une hélice tournant autour de son axe de révolution a donné les indications suivantes :

- A l'instant t = 1s, l'hélice ayant tourné de 22rad a acquis une vitesse angulaire de 23rad/s.
- A l'instant t = 3s, l'hélice ayant tourné de 74rad a acquis une vitesse angulaire de 29rad/s.

Sachant que le mouvement est circulaire uniformément varié, on demande :

1°) L'équation horaire de l'abscisse angulaire.

2°) Le nombre de tours effectués une minute après l'instant initial t = 0 et la fréquence atteinte par l'hélice.

EXERCICE 38 : L'accélération du mouvement d'un mobile est donnée en fonction de son abscisse *x* : $a = -9x$ (*a* en $m.s^{-2}$ et *x* en *m*).

1°) Quelle caractéristique du mouvement peux – tu calculer ?

2°) L'accélération maximale du mobile est $4,5 m.s^{-2}$, d'autre part à $t = 0$, le mobile se déplace dans le sens positif. En tenant compte de ces conditions, trouve l'équation horaire du mouvement.

3°) Calcule *V* pour $x = 0,25m$.

EXERCICE 39 : Un volant de *2m* de rayon tourne à la vitesse de *120trs/min*.

1°) Calcule la vitesse angulaire, la vitesse linéaire et l'accélération d'un point *A* situé à la périphérie du volant.

2°) *A* la suite d'un freinage, le volant entame un mouvement uniformément retardé puis s'arrête après *30s*.

a) Etablis l'équation horaire du mouvement angulaire du volant pendant le freinage ;
b) Combien de tours effectue le volant pendant ces *30s* ?
c) Calcule la vitesse linéaire, l'accélération angulaire et l'accélération normale du point A, *15s* après le début du freinage.

EXERCICE 40 : Un mobile est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal, il parcourt un segment de *8cm*, la fréquence du mouvement est égale à *10Hz* et à $t = 0$, le mobile est à son maximum d'élongation. Écris l'équation du mouvement. Calcule l'accélération au temps $t = 0$.

EXERCICE 41 : Le mouvement d'une roue immobile au départ est accéléré de telle sorte que sa vitesse croit jusqu'à *120trs/min* en une minute. Après avoir tourné un certain temps à cette vitesse, la roue est freinée régulièrement et il faut *5min* pour l'arrêter. Le nombre de tour étant de *1560*. Calcule la durée totale de rotation.

EXERCICE 42 : Sur le quai d'une gare, une voyageuse, en retard court pour essayer de prendre son train à une vitesse constante d'intensité $v = 8 m.s^{-1}$.

Le train démarre alors qu'elle est encore à *100m* du dernier wagon. L'accélération constante du train a une intensité $a = 0,5 m.s^{-2}$.

1°) La voyageuse rejoindra – t – elle son train ? Si non, à quelle distance minimale s'en trouvera – t – elle ?

2°) Reprends la question 1°) dans le cas où le démarrage du train a lieu lorsque le dernier wagon est à *40m* de la voyageuse.

3°) Quelle devrait être, à l'instant du démarrage, la distance minimale entre le train et la voyageuse pour que celle – ci atteigne effectivement le dernier wagon ?

EXERCICE 43 : Deux cyclistes *A* et *B* s'exercent à une course poursuite sur une piste rectiligne. Le premier *A* est animé d'un mouvement uniforme de

vitesse *4,4 m/s* ; lorsqu'il se trouve à *10m* de *B*, ce dernier démarre avec une accélération de $2 m/s^2$ pendant *2s*, puis il maintient sa vitesse constante jusqu'à la fin de la course.
En prenant pour origine des abscisses, la position de *A* au départ de *B* et pour origine des temps, l'instant de démarrage de *B* :
1°) Montre que le rattrapage n'a pas lieu dans la phase accélérée de *B*.
2°) Détermine la date et le lieu de rattrapage.
3°) Calcule les distances parcourues par chaque cycliste.

EXERCICE 44 : 1°) Une automobile roule sur une route droite à la vitesse constante de $108Km.h^{-1}$. Soudain, le conducteur perçoit à *150m* devant lui un panneau de limitation de vitesse à $60Km.h^{-1}$. Le conducteur actionne le frein et atteint le panneau avec la vitesse de $45Km.h^{-1}$.

a) Donne les caractéristiques (sens et intensité) du vecteur accélération supposé constant de l'automobile durant la phase de ralentissement ;
b) Calcule le temps mis par le conducteur pour atteindre le panneau à partir du début du freinage.

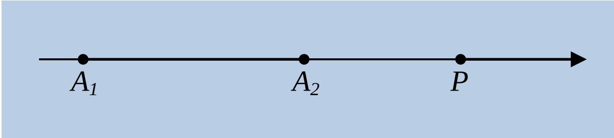
2°) Quelle devraient être l'accélération algébrique de l'automobile et la durée du freinage pour que le conducteur atteigne le panneau à la vitesse de $60Km.h^{-1}$.
3°) En réalité, le conducteur commence par freiner *0,8s* après avoir vu le panneau. Il impose à son automobile l'accélération calculée au 1-a). Avec quelle vitesse arrive – t – il au niveau du panneau ? Est – il en infraction ?
4°) Le conducteur maintient constante après le panneau la vitesse précédemment calculée. A cette vitesse, il doit négocier un virage de *150m* de rayon.

a) Détermine les caractéristiques (sens et intensité) du vecteur accélération pendant le virage.
b) Calcule la durée du virage si on l'assimile à un quart de cercle.

EXERCICE 45 : Deux véhicules M_1 et M_2 partent en même temps de deux points respectifs A_1 et A_2 distants de $d = 2m$. Leurs mouvements ont lieu dans le même sens sur une droite A_1A_2. Leurs accélérations constantes sont respectivement $\overrightarrow{a_1}$ et $\overrightarrow{a_2}$.
1°) Les véhicules partent avec des vitesses initiales nulles et des accélérations telles que $a_1 = 5m.s^{-2}$ et $a_2 = 3m.s^{-2}$. Détermine :

a) L'instant de croisement ;
b) Le lieu de croisement.

2°) Quelles devraient être leurs vitesses initiales et leurs accélérations pour que partant du repos à l'instant $t = 0$, ils se rencontrent à l'instant $t = 2s$ au point *P* situé à *1m* de A_2 avec une vitesse nulle.



EXERCICE 46 : Deux mobiles se suivent à *28m* l'un de l'autre à la vitesse constante de *96Km/h*. A une date choisie comme origine des temps, les mobiles freinent simultanément. La décélération du premier est de $7,7m/s^2$. Le deuxième manquant d'adhérence freine avec une accélération de $4,2m/s^2$. En prenant l'origine du repère, la position du mobile (1) au début du freinage :

a) Établis les équations horaires des mouvements des deux mobiles ;
b) Détermine la date de rattrapage du mobile (1) par le mobile (2) ;
c) Avec quelle vitesse le mobile (2) arrive – t – il au niveau du mobile (1) ?
d) Quelle aurait dû être la décélération minimale du deuxième mobile pour que le rattrapage soit impossible ?

EXERCICE 47 : Un cerceau initialement au repos est animé d'un mouvement circulaire d'accélération angulaire constante de $1rad.s^{-2}$. Un point de la périphérie de ce cerceau décrit un cercle. En *5s*, il parcourt la même distance qu'un mobile animé d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $18Km.h^{-1}$.
1°) Quel est le rayon de ce cercle ?
2°) Calcule les vitesses angulaire et linéaire à la date $t = 5s$.
3°) Détermine le nombre de tours effectués.
4°) Donne la valeur du vecteur accélération.

EXERCICE 48 : Une automobile démarre lorsque le feu passe au vert avec une accélération de $2,5m.s^{-2}$ pendant *7s*, ensuite l'automobile roule à la vitesse constante. A ce même moment où le feu passe au vert, un camion roule à la vitesse constante de $45Km.h^{-1}$ derrière l'automobile à *20m* du feu.
1°) A quel instant le camion rejoint – il l'automobile ?
2°) A cet instant de rencontre, l'automobile aborde un tronçon d'arc de cercle *AB* de rayon $OB = 10m$ et d'angle $\widehat{BOA} = 30°$, d'un mouvement d'accélération angulaire égale à $0,2rad.s^{-2}$.

a) Donne l'expression de la vitesse angulaire de l'automobile au point *A*.
b) Écris l'équation horaire $\theta = f(t)$ sachant qu'à *t = 0*, l'automobile est au point *A*.

EXERCICE 49 : Un mobile ponctuel *M* se déplace sur un axe *x'Ox* d'origine O. La loi horaire de son mouvement est :

$$x = 2.10^{-2}\cos\left(40\pi t - \frac{\pi}{6}\right) (x \text{ en } m)$$

1°) De quel mouvement s'agit – il ?
2°) Précise l'amplitude, la pulsation, la période, la fréquence et la phase initiale du mouvement.
3°) Quelle est la longueur du segment décrit par *M* ?
4°) Quelle est la vitesse de *M* à la date *t* ? Déduis – en :

   a) La vitesse maximale de *M*;
   b) La vitesse de *M* à la date *t = 1s*.

5°) Détermine la date du premier passage du mobile *M* à la position $x = 10^{-2}m$.
6°) Détermine la phase à l'instant *t = 2s* du mouvement de *M*.
7°) Détermine l'équation différentielle du mouvement de *M*. Déduis – en son accélération lorsqu'il passe par le point d'abscisse $x = 10^{-2}m$.

EXERCICE 50 : Sur une route rectiligne, une voiture roule à la vitesse de $90Km.h^{-1}$. Soudain, un enfant traverse la route alors que le conducteur se trouve à la distance *d = 30m* de ce dernier. Il freine immédiatement et sa vitesse devient égale à $45Km.h^{-1}$ sur un parcours de *20m*.
1°) Calcule la valeur de la décélération supposée constante.
2°) Calcule la durée de tout le freinage.
3°) Montre que l'accident n'aura pas lieu.
4°) On désire maintenant que l'accident se produise au moment où la voiture aura une vitesse de $3Km.h^{-1}$. Quelle devrait être la valeur de la vitesse initiale en début de freinage si l'on admet que la décélération conserve la même valeur qu'à la question précédente. Le freinage débute toujours au moment où la voiture se trouve à *30m* de l'enfant.

EXERCICE 51 : Un élève en retard pour son cours de physique court prendre son autobus à une vitesse constante de $6m.s^{-1}$; alors qu'il est à *30m* de l'autobus, celui – ci démarre. Il est animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié d'accélération $a = 0{,}8m.s^{-2}$.

a) L'élève rattrapera – t – il son autobus ? Si non, à quelle distance minimale de l'autobus se trouvera – t – il ?
b) Reprends la question dans le cas où l'élève se trouve à *20m* de l'autobus au moment du démarrage. Si oui, quelle est la durée de la poursuite ?

EXERCICE 52 : Une roue initialement au repos, lancée en rotation effectue au total *300* tours. Son mouvement est d'abord uniformément accéléré d'accélération $2trs/s^2$, puis uniformément décéléré de décélération $1tr/s^2$.
1°) Calcule la durée du mouvement.
2°) Détermine le nombre de tours de chaque phase.

DOMAINE D'ETUDE I : MECANIQUE

OG_3 : ANALYSER LES SYSTEMES MECANIQUES EN MOUVEMENT.

4 DYNAMIQUE DE TRANSLATION.

I. Eléments de la dynamique.
I.1. Définition de la dynamique.

La dynamique est une partie de la physique qui étudie les relations entre les mouvements des corps et leurs causes.

I.2. Définitions des notions.
a) Point matériel.

On appelle point matériel, toute portion de la matière assimilable à un point.

b) Système matériel.

On appelle système matériel, un ensemble de points matériels (figure 1).

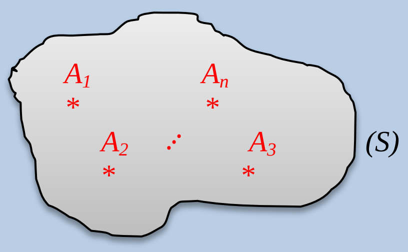


Figure 1.

A_1, A_2, A_3, …, A_n sont des points matériels.

c) Milieu intérieur, milieu extérieur d'un système.

- ✓ *On appelle milieu intérieur d'un système, tout l'espace qui contient les points matériels de ce système.*
- ✓ *On appelle milieu extérieur d'un système, tout l'espace qui ne contient pas les points matériels de ce système (figure 2).*

Figure 2.

d) Force intérieure, force extérieure appliquée à un système.

- ✓ *On appelle force intérieure, toute interaction du système matériel avec une partie de celui – ci.*
- ✓ *On appelle force extérieure, toute interaction du système matériel avec le milieu extérieur.*

Exemple : Considérons un solide accroché à un ressort (figure 3).

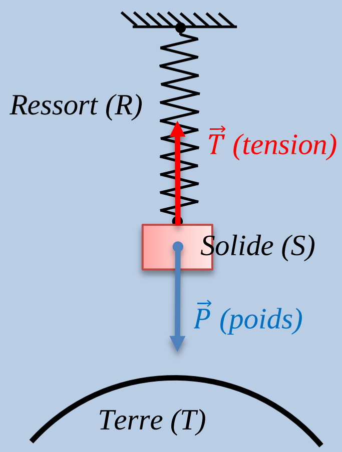


Figure 3.

Considérons comme :

- ***Système 1*** : *Le ressort* (R)
  $\vec{P}$: force extérieure ;
  $\vec{T}$: force interieure.
- ***Système 2*** : *Le solide* (S)
  $\vec{P}$: force extérieure ;
  $\vec{T}$: force extérieure.
- ***Système 3*** : *Solide + ressort*
  $\vec{P}$: force extérieure ;
  $\vec{T}$: force intérieure.
- ***Système 4*** : *Solide + ressort + terre*
  $\vec{P}$: force intérieure ;
  $\vec{T}$: force intérieure.
- ***Système 5*** : *La terre (T)*
  $\vec{P}$: force interieure ;
  $\vec{T}$: force extérieure.

e) Système isolé, système pseudo – isolé.

Un système est isolé lorsqu'il n'est soumis à aucune action extérieure. Un tel système n'existe pas dans la pratique car, quelque soit le système objet – Terre choisi, il est difficile de négliger l'attraction des autres planètes.
Il existe dans ce cas un seul système isolé : l'*univers*.
A défaut d'un système isolé, on peut obtenir un système *pseudo – isolé* à l'aide d'une table soufflante. *Un système est pseudo – isolé lorsque la somme des forces extérieures est nulle*. Un palet mobile sur une table soufflante est un système pseudo – isolé. En effet le poids du palet est équilibré par la réaction de la table.

f) Masse d'un système.

La masse est la quantité de matière que contient un corps.
Elle mesure la somme des masses des points matériels qu'il contient.
Soient $A_1, A_2,\dots, A_n$ les points matériels de masses respectives $m_1, m_2, \dots, m_n$ constituant un système, la masse du système sera :

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

g) Centre d'inertie d'un système.

C'est le centre de masse G, encore appelé barycentre des points matériels du système.

C'est en ce point que se concentre la masse du système.
G étant le barycentre des points A_i affectés des masses m_i, alors G vérifie la relation vectorielle :

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

Soit :

$$m_1\overrightarrow{GA_1} + m_2\overrightarrow{GA_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$$

h) Position du centre d'inertie G dans un système.

Pour déterminer la position de G, centre d'inertie des points A_i, on :

- *Choisit un point de réference, par exemple O.*
- *Applique la relation vectorielle :*
  $$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{OA_n}}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$$

- *Projette cette expression sur un axe correctement choisi.*

Activité 1 : On considère une boule de pétanque de centre O, de masse $M = 2Kg$ et de rayon $R = 10cm$ sur la quelle on fixe aux extrêmités d'un diamètre, deux sphères de masses respectives $m_1 = 500g$ et $m_2 = 1Kg$ et de rayons respectifs $r_1 = 4cm$ et $r_2 = 6cm$.
Détermine la position du centre d'inertie G de ce système (figure 4).

Corrigé 1 :
$M = 2Kg$; $R = 10cm$; $m_1 = 500g$; $m_2 = 1Kg$
$r_1 = 4cm$; $r_2 = 6cm$.

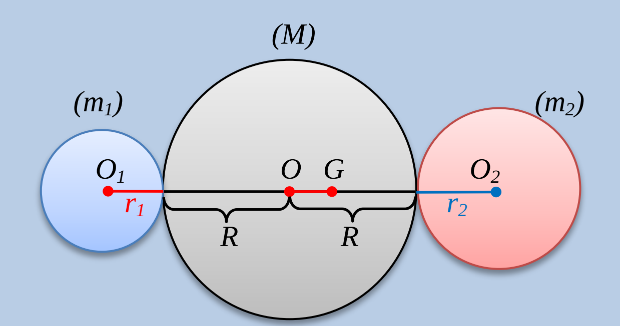


Figure 4.

Position du centre d'inertie G.

Soit *G* le centre d'inertie de ce système :

- ♣ Choisissons le point O comme point de référence ;
- ♣ Appliquons la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^{3} m_i}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OO_1} + M\overrightarrow{OO} + m_2\overrightarrow{OO_2}}{m_1 + M + m_2}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OO_1} + m_2\overrightarrow{OO_2}}{m_1 + M + m_2} \quad car\ \overrightarrow{OO} = \vec{0}$$

➢ Projection de $\overrightarrow{OG}$ suivant (OO_2)

$$\overline{OG} = \frac{-m_1\overline{OO_1} + m_2\overline{OO_2}}{m_1 + M + m_2}$$

Avec $M = 4m_1$; $m_2 = 2m_1$; $R = r_1 + r_2$

$\overline{OO_1} = R + r_1 = 2r_1 + r_2$

$\overline{OO_2} = R + r_2 = r_1 + 2r_2$

On trouve :

$$\boxed{\overline{OG} = \frac{3}{7}r_2}$$

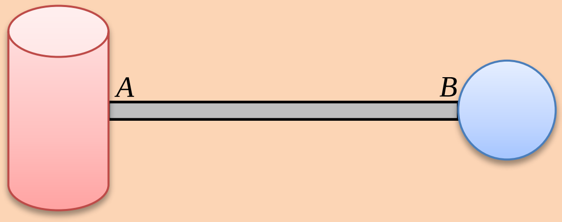
$$\boldsymbol{A.N}\ :\ \overline{OG} = \frac{3\times 6}{7} = 2{,}57$$

$$\boxed{\overline{OG} = 2{,}57cm}$$

Conclusion : *G est situé à 2,57cm à droite de O.*

Activité 2 : On dispose d'une tige homogène de centre O, de masse *m = 250g* et de longueur *ℓ = AB = 80cm*. On fixe à l'une de ses extrémités un cylindre homogène de masse m_1 = *2Kg* et de rayon r_1 = *6cm*, et à l'autre extrêmité, une sphère homogène de masse m_2 = *2Kg* et de rayon r_2 = *4cm* comme l'indique la figure ci – dessous.

Détermine la position du centre d'inertie G (figure 5).



Corrigé 2 :

m = 250g ; ℓ = AB = 80cm ; $m_1 = m_2 = 2Kg$ *;*
$r_1 = 6cm$ *;* $r_2 = 4cm$.

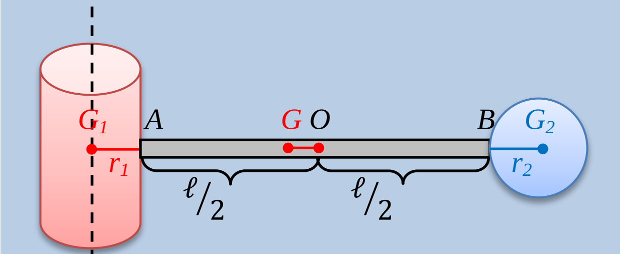


Figure 5.

Position du centre d'inertie G.

Soit G, le centre d'inertie de ce système ;

- ♣ Choisissons le point O comme point de référence ;
- ♣ Appliquons la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^{3} m_i}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OG_1} + m\overrightarrow{OO} + m_2\overrightarrow{OG_2}}{m_1 + m + m_2}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OG_1} + m_2\overrightarrow{OG_2}}{m_1 + m + m_2}, avec\ \overrightarrow{OO} = \vec{0}$$

➢ Projection de $\overrightarrow{OG}$ suivant (OB)

$$\overline{OG} = \frac{-m_1\overline{OG_1} + m_2\overline{OG_2}}{m_1 + m + m_2}$$

$$\text{avec} \begin{cases} m_1 = m_2 = 8m \\ \overline{OG_1} = \dfrac{\ell}{2} + r_1 \\ \overline{OG_2} = \dfrac{\ell}{2} + r_2 \end{cases}$$

On trouve :
$$\boxed{\overline{OG} = \frac{8(r_2 - r_1)}{17}}$$

$$\boldsymbol{A.N}\ :\ \overline{OG} = \frac{8 \times (4 - 6)}{17} = -0{,}94$$

$$\boxed{\overline{OG} = -0{,}94cm}$$

Conclusion : *G est situé à 0,94cm à gauche de O.*

i) Vecteur quantité de mouvement.

Le vecteur quantité de mouvement est une grandeur qui caractérise le produit de la masse d'un point matériel par son vecteur vitesse à l'instant t.
On le note :

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}} \quad \text{soit} \quad \boxed{p = mv}$$

Le module de $\vec{p}$ s'exprime en Kg.m/s.

Remarques :

R₁ : Le vecteur quantité de mouvement d'un système matériel vaut la somme des vecteurs quantités de mouvement de ses points matériels.

$$\boxed{\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_n}$$

R₂ : Le vecteur quantité de mouvement d'un système se conserve au cours des chocs.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_{i_{av}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_{i_{ap}}}$$

Activité 3 : Un solide (S_1) de masse *m_1 = 100g*, roulant sur un plan horizontal à la vitesse *v_1 = 20m/s* vient heurter un solide (S_2) de masse *m_2 = 50g*, initialement au repos. Sachant que les deux solides restent accrochés après le choc, détermine la vitesse de l'ensemble formé par les deux solides.

Corrigé 3 :

m_1 = 100g ; m_2 = 50g ; v_1 = 20m/s.

Vitesse de l'ensemble après le choc.

✓ *Avant le choc :*

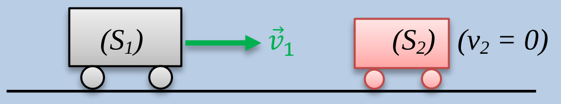


Figure 6.a.

$$\vec{p}_{av} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

$$\vec{p}_{av} = m_1\vec{v}_1 \ (\text{car } \vec{v}_2 = \vec{0})$$

✓ *Après le choc :*

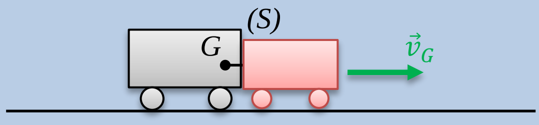


Figure 6.b.

$$\vec{p}_{ap} = \vec{p}_G = (m_1 + m_2)\vec{v}_G$$

D'après la conservation du vecteur quantité de mouvement, on a :

$$\vec{p}_{av} = \vec{p}_{ap}$$

$$\Rightarrow\ m_1\vec{v}_1 = (m_1 + m_2)\vec{v}_G$$

Soit $m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v_G$

D'où :

$$\boxed{v_G = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1}$$

$$\boldsymbol{A.N}:\ v_G = \frac{100}{100 + 50} \times 20 = 13{,}33$$

$$\boxed{v_G = 13{,}33m/s}$$

Activité 4 : Deux billes *B_1* et *B_2* de masses respectives *m_1 = 30g* et *m_2 = 80g*, se suivent l'une derrière l'autre. La bille *B_1* vient heurter à la vitesse constante *v_1 = 8m/s*, la bille *B_2* roulant à la vitesse *v_2 = 6m/s*. Sachant qu'après le choc parfaitement élastique, la bille *B_2* roule à la vitesse *v_2' = 8m/s*.
Quels sont la vitesse et le sens de déplacement de la bille *B_1* ?

Corrigé 4 :

$m_1 = 30g$; $m_2 = 80g$; $v_1 = 8m/s$; $v_2 = 6m/s$

$v'_2 = 8m/s$.

Vitesse et sens de déplacement de la bille B_1.

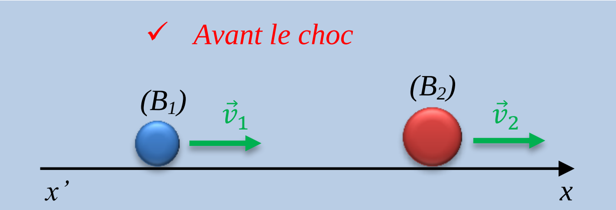


Figure 7.a.

$$\vec{p}_{av} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

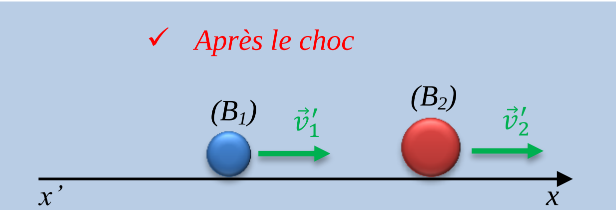


Figure 7.b.

$$\vec{p}_{ap} = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2$$

D'après la conservation du vecteur quantité de mouvement, on a :

$$\vec{p}_{av} = \vec{p}_{ap}$$

$\Rightarrow \quad m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2$

Projection suivant $(x'x)$:

$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2$

$\Rightarrow \quad m_1v'_1 = m_1v_1 + m_2(v_2 - v'_2)$

D'où :

$$\boxed{v'_1 = v_1 + \frac{m_2}{m_1}(v_2 - v'_2)}$$

$$A.N : \ v'_1 = 8 + \frac{80}{30}(6 - 8) = 2{,}66$$

$$\boxed{v'_1 = 2{,}66 m.s^{-1}}$$

***Conclusion** : $v'_1 > 0$, la bille B_1 se déplace dans le même sens que la bille B_2 après le choc.*

Activité 5 : Moussa et Tamko jouent aux billes dans une cours horizontale que l'on supposera parfaitement lisse. La bille de Moussa lancée à la vitesse de v_1 = *10cm.s^{-1}* rencontre la bille de Tamko immobile.
Après le choc, la bille de Moussa rebondit dans une direction qui fait un angle de *60°* avec $\vec{v}_1$. La bille de Tamko, quant à elle se met en mouvement avec une vitesse $\vec{v}'_2$, qui fait avec la direction initiale de $\vec{v}_1$, un angle de *30°*.
Calcule les vitesses $\vec{v}'_1$ et $\vec{v}'_2$ des deux billes après le choc, sachant qu'elles ont la même masse.

Corrigé 5 :

$v_1 = 10cm.s^{-1}$; $\alpha = 60°$; $\beta = 30°$ $m_1 = m_2 = m$.

Vitesses $\vec{v}'_1$ et $\vec{v}'_2$ des deux billes.

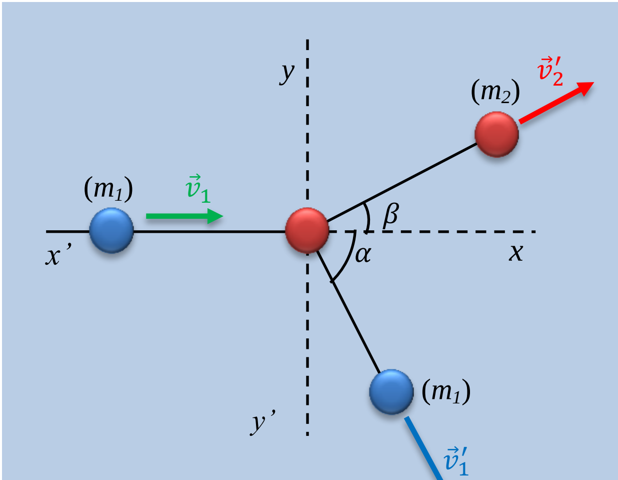


Figure 8.

✓ *Avant le choc.*

$\vec{p}_{av} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$

$\vec{p}_{av} = m_1\vec{v}_1$ (car $\vec{v}_2 = \vec{0}$)

✓ *Après le choc.*

$\vec{p}_{ap} = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2$

D'après la conservation du vecteur quantité de mouvement, on a :

$$\vec{p}_{av} = \vec{p}_{ap}$$

$\Rightarrow \quad m_1\vec{v}_1 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2$

Projection suivant $(x'x)$.

$m_1v_1 = m_1v'_{1x} + m_2v'_{2x}$

$\Rightarrow m_1v_1 = m_1v'_1 cos\alpha + m_2v'_2 cos\beta$

Projection suivant (*y'y*).

$$0 = -m_1v'_{1y} + m_2v'_{2y}$$

$$\Rightarrow -m_1v'_1 sin\alpha + m_2v'_2 sin\beta = 0$$

Avec $m_1 = m_2 = m$

$$\Rightarrow \begin{cases} mv'_1cos\alpha + mv'_2cos\beta = mv_1 \\ -mv'_1sin\alpha + mv'_2sin\beta = 0 \end{cases}$$

Après simplification des masses :

$$\Rightarrow \begin{cases} v'_1cos\alpha + v'_2cos\beta = v_1 & (1) \\ -v'_1sin\alpha + v'_2sin\beta = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2): \quad v'_2 = \frac{sin\alpha}{sin\beta}v'_1 \quad (3)$$

En remplaçant la relation (3) dans (1), on a :

$$v'_1cos\alpha + \frac{sin\alpha}{sin\beta}v'_1.cos\beta = v_1$$

$$\Rightarrow v'_1\left(\frac{cos\alpha sin\beta + sin\alpha cos\beta}{sin\beta}\right) = v_1$$

$$\Rightarrow v'_1\left[\frac{sin(\alpha + \beta)}{sin\beta}\right] = v_1$$

D'où :

$$\boxed{v'_1 = \frac{sin\beta}{sin(\alpha + \beta)}v_1}$$

Dans (2) : $v'_2 = \dfrac{sin\alpha}{sin\beta}.\dfrac{sin\beta}{sin(\alpha + \beta)}v_1$

D'où :

$$\boxed{v'_2 = \frac{sin\alpha}{sin(\alpha + \beta)}v_1}$$

A.N :

$$v'_1 = \frac{sin30°}{sin(60° + 30°)} \times 10 = 5{,}00$$

$$v'_2 = \frac{sin60°}{sin(60° + 30°)} \times 10 = 8{,}66$$

$$\boxed{\begin{aligned} v'_1 &= 5{,}00cm.s^{-1} \\ v'_2 &= 8{,}66cm.s^{-1} \end{aligned}}$$

II. Principes de la dynamique ou lois de Newton.

II.1. Principe de l'inertie ou 1ère loi de Newton.

➢ **Enoncé.**

Il existe des référentiels dits galiléens dans lesquels un point particulier d'un solide isolé ou pseudo – isolé appelé centre d'inertie (G) :

- *Soit conserve son état de repos :*
- *Soit est animé d'un mouvement rectiligne uniforme.*

De ce fait :

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}}$$

II.2. Principe fondamental de la dynamique (PFD) ou 2ème loi de Newton.

➢ **Enoncé.**

Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle $\vec{F}$ des forces appliquées à un point matériel est égale à la dérivée par rapport au temps de son vecteur quantité de mouvement.

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}}$$

Où le terme de masse doit être considéré comme une mesure quantitative de l'inertie.

♣ Théorème du centre d'inertie (T.C.I).

C'est une *conséquence de la deuxième loi de Newton* permettant de passer du point matériel au solide.

De la relation $\vec{F} = m\vec{a}$, valable pour le point matériel, il est possible de passer au solide en écrivant :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$$

➢ **Enoncé.**

Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces appliquées à un solide est égale au produit de sa masse et du vecteur accélération de son centre d'inertie.

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G}$$

II.3. Principe d'interaction ou principe des actions mutuelles (PAM) ou 3ème loi de Newton.

C'est le principe de l'*égalité de l'action et de la réaction.*

➢ **Enoncé.**

Lorsqu'un corps 1 exerce sur un corps 2 une action mécanique représentée par une force $\vec{F}_{1/2}$ localisée en B, le corps 2 exerce sur le corps 1 une action mécanique représentée par la force $\vec{F}_{2/1}$ localisée en A.

Ces deux forces sont opposées et ont même support (la droite AB) et sont telles que :

$$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$$

Soit :

$$F_{1/2} = F_{2/1}$$

Exemples :

1. Cas des forces extérieures.

Considérons *un solide posé sur une table horizontale (figure 11)*.

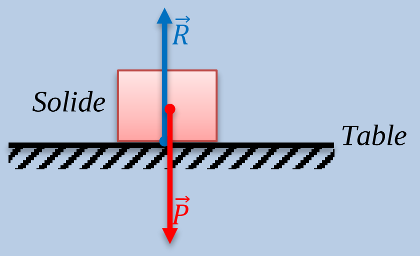


Figure 9.

$\vec{P}$: Poids (action du solide sur la table)
$\vec{R}$: Réaction (action de la table sur le solide)

$$\vec{P} = -\vec{R} \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$$

C'est la condition d'équilibre ;
Soit :

$$P = R$$

2. Cas des forces intérieures.

Considérons *deux wagons reliés par une barre d'attache (figure 12).*

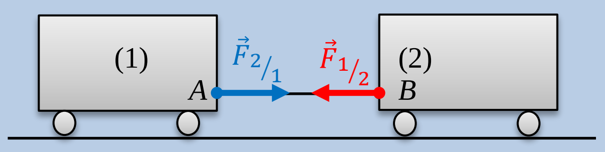


Figure 10.

$$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1} \Rightarrow \vec{F}_{1/2} + \vec{F}_{2/1} = \vec{0}$$

Soit :

$$F_{1/2} = F_{2/1}$$

III. Application des principes de la dynamique aux mouvements de translation.

➢ **Plan de résolution d'un problème de dynamique de translation.**

Pour resoudre un problème de dynamique de translation on :

- ➢ *Réalise un schéma grand et claire comportant toutes les forces extérieures appliquées au système d'étude ;*
- ➢ *Choisit un référentiel d'étude ;*
- ➢ *Définit clairement le système d'étude ;*
- ➢ *Fait le bilan ou l'inventaire de toutes les forces extérieures appliquées au système ;*
- ➢ *Applique l'expression vectorielle du T.C.I des corps en mouvement de translation ;*
- ➢ *Projette l'expression vectorielle du T.C.I par rapport à un axe (axe du mouvement) ou par rapport à un axe correctement choisi ;*
- ➢ *Applique selon les cas, les autres principes ou relations nécessaires pour l'étude.*

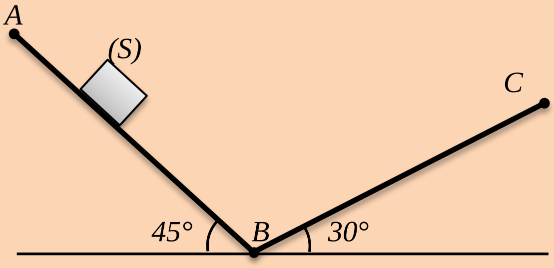
A. Etude des systèmes mécaniques en mouvement de translation rectiligne.

Définitions :

- ➢ *Un solide est animé d'un mouvement de translation lorsque le segment de droite qui joint deux points quelconques du solide en mouvement garde la même direction.*
- ➢ *Un mouvement de translation est dit rectiligne lorsque la trajectoire décrite par le solide en mouvement est une droite.*

A.1. Glissement d'un solide sur un plan incliné.
a) Glissement sans frottements.

Activité 6 : Partant de *A* sans vitesse initiale (voir figure), un chariot dévale un plan incliné à *45°* sur l'horizontale. On néglige les frottements. *g = 10N/Kg.*



1°) Sachant que *AB = 2m*, calcule sa vitesse en B.
2°) Au passage en *B*, grâce à un raccordement convenable, le mobile aborde, sans perdre de vitesse, un deuxième plan *BC* d'inclinaison *30°*. Sachant qu'en *C* il rebrousse chemin, calcule la distance *BC* parcourue par le chariot.
3°) Quelle est la durée du trajet *BC* ?

Corrigé 6 :
α = 45° ; β = 30° ; g = 10N/Kg ; AB = 2m.

1°) Vitesse du chariot en B.

- ***Nature du mouvement.***
- ✓ ***Schéma.***

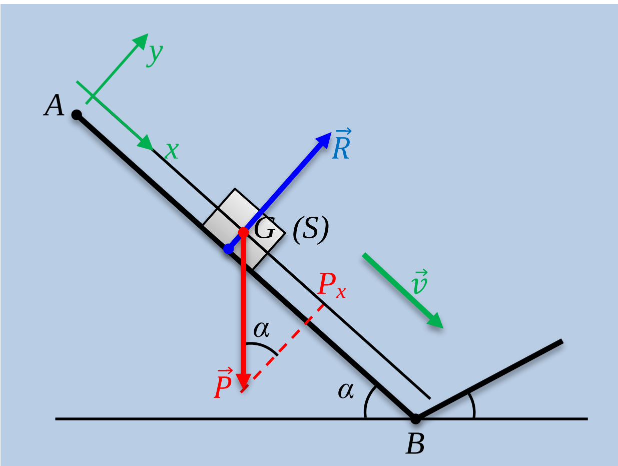


Figure 11.a.

- ✓ ***Référentiel d'étude*** : Terrestre supposé galiléen (R.T.S.G) ;
- ✓ ***Système d'étude*** : Chariot de masse (m) en translation rectiligne ;
- ✓ ***Bilan des forces extérieures appliquées au système (B.F.E.A)*** : $\vec{P}$; $\vec{R}$.

- ✓ ***Théorème du centre d'inertie (T.C.I) :***

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_{1G}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}_{1G}$$

- ✓ ***Projection du T.C.I suivant (Ax) :***

$P_x + 0 = ma_{1G} \quad \Rightarrow \quad P_x = ma_{1G}$

$or \quad sin\alpha = \frac{P_x}{P} \quad \Rightarrow \quad P_x = Psin\alpha$

$\Rightarrow \quad mgsin\alpha = ma_{1G}$

D'où :

$$\boxed{a_{1G} = gsin\alpha}$$

$\boldsymbol{A.N}$: $a_{1G} = 10 \times sin45° = 7{,}07$

$$\boxed{a_{1G} = 7{,}07 m/s^2}$$

Conclusion : $a_{1G} = 7{,}07m/s^2 = cte \neq 0$, *alors le chariot est animé d'un M.R.U.V.*

D'après la relation espace – vitesse (R.E.V), on a :

$$v_B^2 - v_A^2 = 2a_{1G}(x_B - x_A)$$

- *Origine des espaces : le point A.*
- *Origine des dates : Instant du départ du chariot en A.*

A $t = 0$: $v_A = 0$; $x_A = 0$

En bas du plan incliné : $x_B = AB$, alors :

$$v_B^2 = 2a_{1G}AB$$

D'où :

$$\boxed{v_B = \sqrt{2a_{1G}AB}}$$

$\boldsymbol{A.N}$: $v_B = \sqrt{2 \times 7{,}07 \times 2} = 5{,}31$

$$\boxed{v_B = 5{,}31 m.s^{-1}}$$

2°) Distance BC parcourue par le chariot.

- ***Nature du mouvement.***
- ✓ ***Schéma***

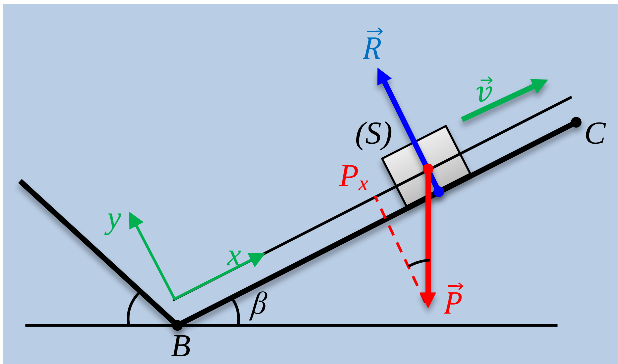


Figure 11.b

- ***Système d'étude :*** Chariot de masse (m) en translation rectiligne ;
- ***Bilan des forces extérieures appliquées au système (B.F.E.A) :*** $\vec{P}$; $\vec{R}$.
- ***Théorème du centre d'inertie (T.C.I) :***

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_{2G}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}_{2G}$$

- ***Projection du T.C.I suivant (Bx) :***

$$-P_x + 0 = ma_{2G} \quad \Rightarrow \quad -P_x = ma_{2G}$$

$$or \quad sin\beta = \frac{P_x}{P} \Rightarrow P_x = Psin\beta$$

$$\Rightarrow -mgsin\beta = ma_{2G}$$

D'où :

$$\boxed{a_{2G} = -gsin\beta}$$

$$\mathbf{A.N} : a_{1G} = 10 \times sin30° = -5$$

$$\boxed{a_{1G} = -5m/s^2}$$

Conclusion : $a_{1G} = cte = -5m/s^2 \neq 0$, *alors le chariot est animé d'un M.R.U.V.*

D'après la relation espace – vitesse (R.E.V), on a :

$$v_C^2 - v_B^2 = 2a_{2G}(x_C - x_B)$$

Au point C : $v_C = 0$; $x_C - x_B = BC$; alors on a :

$$v_B^2 = 2a_{2G}BC$$

D'où :

$$\boxed{BC = -\frac{v_B^2}{2a_{2G}}}$$

$$\mathbf{A.N} : BC = -\frac{(5{,}31)^2}{2 \times (-5)} = 2{,}81$$

$$\boxed{BC = 2{,}81m}$$

3°) Durée du trajet BC.

D'après la relation vitesse – temps (R.V.T), on a :

$$v_C - v_B = a_{2G}t$$

Avec $v_C = 0 \quad \Rightarrow -v_B = a_{2G}t$

D'où :

$$\boxed{t = -\frac{v_B}{a_{2G}}}$$

$$\mathbf{A.N} : t = -\frac{5{,}31}{(-5)} = 1{,}06$$

$$\boxed{t = 1{,}06s}$$

b) Glissement avec forces de frottement.

Activité 7 : On se propose de décharger des sacs de ciment de la carrosserie d'un véhicule situé à *2m* du sol. Pour cela, on utilise une planche de *3m* de long que l'on fixe entre la carrosserie et le sol en formant un plan incliné.
On abandonne chaque sac de ciment au sommet de la planche qui oppose au mouvement de chaque sac des forces de frottement dont la résultante vaut *5N*.
1°) Quelle est la nature du mouvement pris par chaque sac ?
2°) Quelle est la vitesse de chaque sac de ciment en bas de la planche ainsi que la durée du mouvement.
3°) Donne les caractéristiques de la réaction qu'oppose la planche sur chaque sac.
On donne : *m = 50Kg ; g = 9,8N/Kg.*

Corrigé 7 :
h = 2m ; ℓ = 3m ; f = 5N ; m = 50Kg ;
g = 9,8N/Kg.

1°) Nature du mouvement pris par chaque sac.

Trouvons l'accélération a_G.

- ***Schéma.***

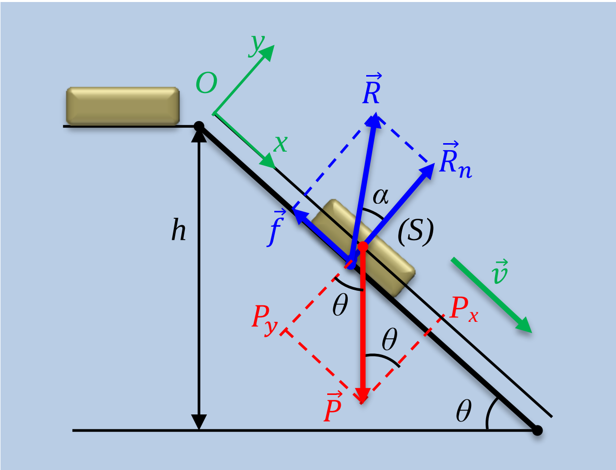


Figure 12.

- ***R.T.S.G ;***
- ***Système d'étude :*** Sac de ciment de masse (m) en translation rectiligne ;
- ***B.F.E.A :*** $\vec{P}$; $\vec{R}$.
- ***T.C.I :*** $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$

$$\Rightarrow \quad \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}_G$$

- ***Projection du T.C.I suivant (Ox) :***

$$P_x - f = ma_G$$

$$or \quad sin\theta = \frac{P_x}{P} \Rightarrow P_x = Psin\theta$$

$avec\ \ sin\theta = \frac{h}{\ell} \Rightarrow P_x = P\frac{h}{\ell}$

$\Rightarrow mg\frac{h}{\ell} - f = ma_G$

D'où :

$$\boxed{a_G = g\frac{h}{\ell} - \frac{f}{m}}$$

$\boldsymbol{A.N} : a_G = 9{,}8 \times \frac{2}{3} - \frac{5}{50} = 6{,}43$

$$\boxed{a_G = 6{,}43m/s^2}$$

Conclusion : $a_G = 6{,}43m/s^2 = cte \neq 0$, *alors chaque sac de ciment est animé d'un M.R.U.V.*

2°) Vitesse de chaque sac de ciment.

Le mouvement étant R.U.V ; on a d'après la *R.E.V* :

$$v^2 - v_0^2 = 2a_G(x - x_0)$$

- *Origine des espaces : le sommet de la planche ;*
- *Origine des dates : Instant où le sac de ciment est laché.*

$A\ t = 0 : v_0 = 0\ ; x_0 = 0$

En bas de la planche : $x = \ell$, alors :

$$v^2 = 2a_G.\ell$$

D'où :

$$\boxed{v = \sqrt{2a_G.\ell}}$$

$\boldsymbol{A.N} : v = \sqrt{2 \times 6{,}43 \times 3} = 6{,}21$

$$\boxed{v = 6{,}21m.s^{-1}}$$

➢ *Durée du mouvement.*

D'apères la R.V.T, on a :

$$v - v_0 = a_G.t$$

Avec $v_0 = 0 \Rightarrow v = a_G t$

D'où :

$$\boxed{t = \frac{v}{a_G}}$$

$\boldsymbol{A.N} : t = \frac{6{,}21}{(6{,}43)} = 0{,}96$

$$\boxed{t = 0{,}96s}$$

3°) Caractéristiques de la réaction $\vec{R}$.

➢ *Module de $\vec{R}$.*

$$\vec{R} = \vec{f} + \vec{R}_n \Rightarrow R = \sqrt{f^2 + R_n^2}$$

- ***Projection du T.C.I suivant (Oy) :***

$-P_y + R_n = 0 \Rightarrow R_n = P_y$

$or\ \ cos\theta = \frac{P_y}{P} \Rightarrow P_y = Pcos\theta$

$\Rightarrow R_n = mgcos\theta$

$ainsi\ \ R = \sqrt{f^2 + R_n^2} = \sqrt{f^2 + (mgcos\theta)^2}$

$de\ plus : cos^2\theta = 1 - sin^2\theta = 1 - \frac{h^2}{\ell^2}$

D'où :

$$\boxed{R = \sqrt{f^2 + (mg)^2\left(1 - \frac{h^2}{\ell^2}\right)}}$$

$\boldsymbol{A.N} : R = \sqrt{(5)^2 + (50 \times 9{,}8)^2\left(1 - \frac{2^2}{3^2}\right)}$

$$\boxed{R = 365{,}25N}$$

➢ *Direction de $\vec{R}$.*

Trouvons α.

D'après le schéma :

$sin\alpha = \frac{f}{R} \Rightarrow \boxed{\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{f}{R}\right)}$

$\boldsymbol{A.N} : \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{5}{365{,}25}\right) = 0{,}78$

$$\boxed{\alpha = 0{,}78°}$$

Conclusion : $\vec{R}$ *a une direction qui fait un angle de 0,78° avec la normale de la planche.*

D'où les caractéristiques de la réaction $\vec{R}$ sont :

- ✓ ***Point d'application :*** *point de contact entre le sac de ciment et le plan ;*
- ✓ ***Sens :*** *du bas vers le haut ;*
- ✓ ***Module :*** $R = 365{,}25N$ *;*
- ✓ ***Direction :*** $\alpha = 0{,}78°$.

A.2. Glissement d'un solide sur un plan horizontal avec force motrice $\vec{F}$ et force de frottement $\vec{f}$.

Activité 8 : Une voiture de masse $m = 1\ tonne$ roule sur une route rectiligne horizontale qui oppose des frottements dont la résultante vaut $f = 200N$.

Partie d'un point *A* à la vitesse de *60Km/h*, le conducteur veut atteindre la vitesse de *100Km/h* en un point *B* situé à *200m* de *A*.
1°) Calcule la valeur de la force de traction développée par le moteur de la voiture. En combien de temps parcourt – elle cette distance ?
2°) En *B*, un obstacle vu de loin, oblige le conducteur de s'arrêter, roues bloquées sur une distance de *90m*, sous l'action d'une force de freinage constante $\vec{f_f}$.
a) Calcule la valeur de la force de freinage ;
b) Quelle est la durée du freinage ?

Corrigé 8 :
m = 1t ; f = 200N ; v_A *= 60Km/h ;*
v_B *= 100Km/h ; AB = 200m.*

1°) Valeur de la force de traction développée par le moteur de la voiture.

- ***Nature du mouvement.***
- ✓ ***Schéma***

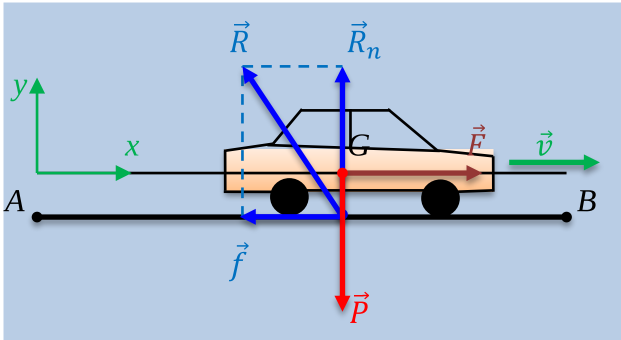


Figure 13.a.

- ✓ ***R.T.S.G*** *;*
- ✓ ***Système d'étude :*** Voiture de masse (m) en translation rectiligne ;
- ✓ ***B.F.E.A*** : $\vec{P}$; $\vec{R}$; $\vec{F}$.
- ✓ ***T.C.I*** : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_{1G}$

$\Rightarrow \quad \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{a}_{1G}$

- ✓ ***Projection du T.C.I suivant (Ax)*** *:*

$-f + F = ma_{1G}$

$$\Rightarrow \boxed{F = ma_{1G} + f}$$

- ***Trouvons*** a_{1G}

Le mouvement étant R.U.V ; on a d'après la R.E.V :

$$v_B^2 - v_A^2 = 2a_{1G}(x_B - x_A)$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{1G} = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2AB}}$$

$$\textbf{A.N : } a_{1G} = \frac{(27{,}77)^2 - (16{,}66)^2}{2 \times 200} = 1{,}23$$

$$a_{1G} = 1{,}23 m/s^2$$

Ainsi : $F = 1000 \times 1{,}23 + 200 = 1430$

$$\boxed{F = 1430N}$$

- ***Durée du parcourt.***

M.R.U.V d'équation :

$$x = \frac{1}{2}a_{1G}t^2 + v_0 t + x_0$$

$$v = \frac{dx}{dt} = a_{1G}t + v_0$$

Au point B : $v_B = a_{1G}t + v_0$; avec $v_0 = v_A$
D'où :

$$\boxed{t = \frac{v_B - v_A}{a_{1G}}}$$

$$\textbf{A.N : } t = \frac{27{,}77 - 16{,}66}{1{,}23} = 9{,}03$$

$$\boxed{t = 9{,}03s}$$

2°) d = 90m.

a) Calculons la valeur de la force de freinage.

- ***Nature du mouvement***
- ✓ ***Schéma***

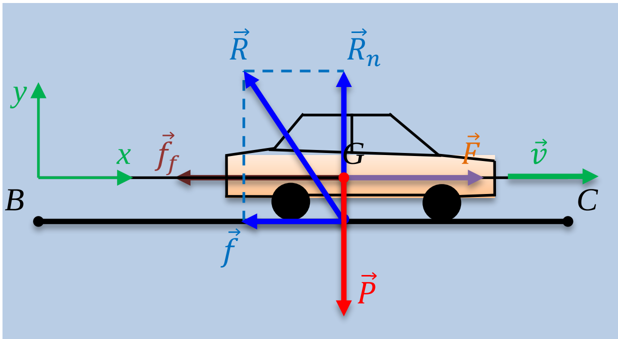


Figure 13.b

- ✓ ***B.F.E.A*** : $\vec{P}$; $\vec{R}$; $\vec{F}$; $\vec{f_f}$
- ✓ ***T.C.I*** : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_{2G}$

$\Rightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{f_f} = m\vec{a}_{2G}$

- ✓ ***Projection du T.C.I suivant (Ax)*** *:*

$$0 - f + F - f_f = ma_{2G}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_f = F - f - ma_{2G}}$$

- ***Trouvons a_{2G}***

Le mouvement étant R.U.V ; on a d'après la R.E.V :

$$v_f^2 - v_B^2 = 2a_{2G}.d$$

A l'arrêt $v_f = 0 \quad \Rightarrow \quad -v_B^2 = 2a_{2G}.d$

$$\Rightarrow \boxed{a_{2G} = -\frac{v_B^2}{2d}}$$

$$\boldsymbol{A.N} : a_{2G} = -\frac{(27{,}77)^2}{2 \times 90} = -4{,}28$$

$$a_{2G} = -4{,}28 m/s^2$$

Ainsi :

$$f_f = 1430 - 200 + 1000 \times 4{,}28 = 5510$$

$$\boxed{f_f = 5510N}$$

- ***Durée du parcourt.***

M.R.U.V d'équation :

$$x = \frac{1}{2}a_{2G}t^2 + v_0 t + x_0$$

$$v_f = \frac{dx}{dt} = a_{2G}t + v_B$$

A l'arrêt : $v_f = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{2G}t + v_B = 0$

D'où :

$$\boxed{t = -\frac{v_B}{a_{2G}}}$$

$$\boldsymbol{A.N} : t = -\frac{27{,}77}{(-4{,}28)} = 6{,}48$$

$$\boxed{t = 6{,}48s}$$

A.3. Mouvement de chute libre.

Définition : *On appelle chute libre, le mouvement d'un corps qui n'est soumis qu'à la seule action de son poids.*

a) Chute libre sans vitesse initiale.

C'est le mouvement des corps qui tombe suivant une verticale sous l'effet de la seule force à laquelle ils sont soumis : *le poids*.

Activité 9 : Sous un temps orageux, une noix de coco de *500g* s'arrache du haut d'un cocotier, à *30m* du sol sous l'effet du vent. En supposant que la résistance de l'air est négligeable, détermine la date à laquelle cette noix frappe le sol et avec quelle vitesse celle – ci arrive – t – elle au sol ?

Corrigé 9 :

m = 500g ; h = 30m.

- ***Trouvons la date à laquelle cette noix frappe le sol.***
  - ***Nature du mouvement.***
  - ✓ ***Schéma***

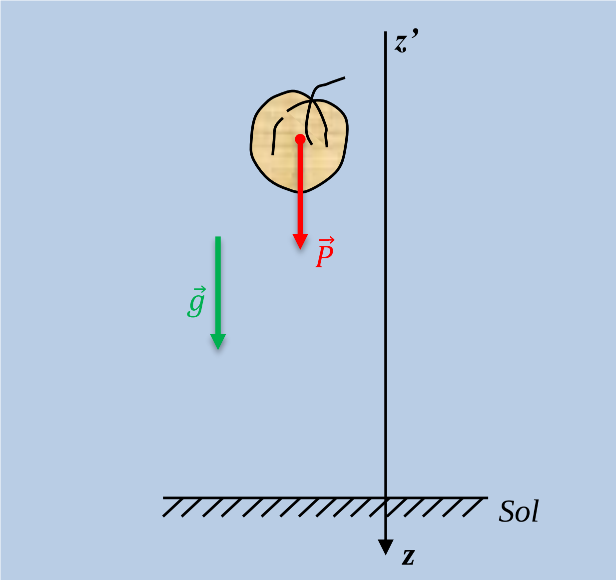


Figure 14.

- ✓ ***R.T.S.G*** ;
- ✓ ***Système d'étude*** : Noix de coco de masse (m) en translation rectiligne ;
- ✓ ***B.F.E.A*** : $\vec{P}$
- ✓ ***T.C.I*** : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$

$$\Rightarrow \vec{P} = m\vec{a}_G$$

- ✓ ***Projection du T.C.I suivant (z'z)*** :

$$P = ma_G \quad \Rightarrow \quad a_G = g$$

Conclusion : $a_G = g = cte \neq 0$, *alors la noix de coco est animé d'un M.R.U.V d'équation :*

$$z = \frac{1}{2}a_G t^2 + v_{0z}t + z_0$$

- *Origine des espaces : position de la noix avant de s'arracher ;*
- *Origine des dates : Instant où la noix s'arrache.*

à $t = 0$: $z_0 = 0$; $v_{0z} = 0$.

$$\Rightarrow \quad z = \frac{1}{2}a_G t^2$$

Au sol : $z = h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{1}{2}gt^2$

D'où :

$$\boxed{t = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

$$\boldsymbol{A.N} : t = \sqrt{\frac{2\times 30}{10}} = 2{,}45$$

$$\boxed{t = 2{,}45s}$$

- *Vitesse de la noix à l'arrivée au sol.*

$$z = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow v = \frac{dz}{dt} = gt$$

D'où :

$$\boxed{v = gt}$$

A.N :

$$v = 10 \times 2{,}45 = 24{,}5$$

$$\boxed{v = 24{,}5m.s^{-1}}$$

b) Chute libre avec vitesse initiale ascendante.

Activité 10 : On lance un corps vers le haut, avec une vitesse initiale de *20m/s*, d'un point situé à une altitude de *200m*. On négligera la résistance de l'air et on prendra $g = 9{,}8m/s^2$.

1°) A quelle hauteur compté à partir du point de lancement monte – il ?

2°) Au bout de combien de temps repasse – il – à sa position initiale ?

3°) Avec quelle vitesse repasse – t – il à sa position initiale ?

4°) Au bout de combien de temps atteint – il le sol ?

5°) Avec quelle vitesse atteint – il le sol ?

Corrigé 10 :

$v_0 = 20m/s$; $h_0 = 200m$; $g = 9{,}8m/s^2$.

1°) Hauteur à laquelle monte le corps.

- *Nature du mouvement.*
- ***Schéma***

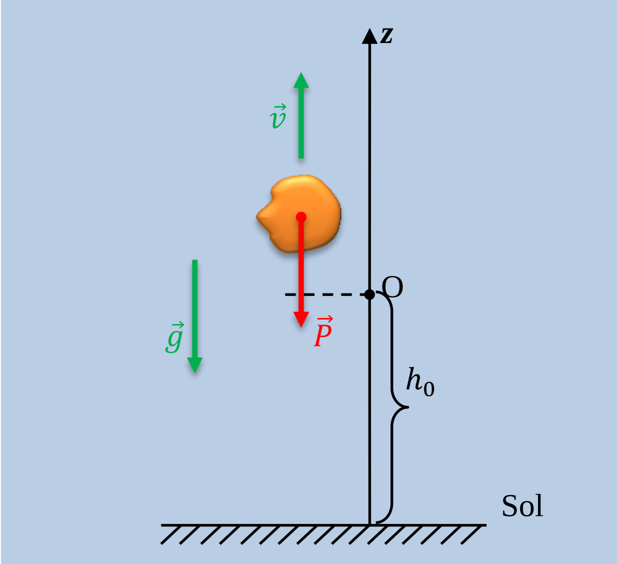


Figure 15.

- ***R.T.S.G*** ;
- ***Système d'étude*** : Corps de masse (m) en translation rectiligne ;
- ***B.F.E.A*** : $\vec{P}$
- ***T.C.I*** : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$

$\Rightarrow \quad \vec{P} = m\vec{a}_G$

- ***Projection du T.C.I suivant (Oz)*** :

$-P = ma_G \quad \Rightarrow \quad a_G = -g$

Conclusion : $a_G = -g = cte \neq 0$, *alors le corps est animé d'un M.R.U.V :*

D'après la R.E.V, on a :

$$v_z^2 - v_{0z}^2 = 2a_G(z - z_0)$$

- *Origine des espaces : le point O de lancement ;*
- *Origine des dates : Instant de lancement du corps.*

à $t = 0$: $z_0 = 0$; $v_{0z} = v_0$.

$\Rightarrow \quad v_z^2 - v_0^2 = 2a_G(z)$

A l'altitude maximale : $v_z = 0$ *et* $z = h_{max}$

$$\Rightarrow \; -v_0^2 = -2gh_{max}$$

D'où :

$$\boxed{h_{max} = \frac{v_0^2}{2g}}$$

$$\boldsymbol{A.N} : h_{max} = \frac{(20)^2}{2\times 9{,}8} = 20{,}4$$

$$\boxed{h_{max} = 20{,}4m}$$

2°) Temps au bout duquel le corps repasse par la position initiale.

M.R.U.V d'équation :

$$z = \frac{1}{2}a_G t^2 + v_{0z}t + z_0$$

à $t = 0$: $z_0 = 0$; $v_{0z} = v_0$.

$$\Rightarrow \quad z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$$

Au passage par la position initiale $z = 0$.

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t = 0$$

$$\Rightarrow \quad t\left(-\frac{1}{2}gt + v_0\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 0 \ (au\ moment\ du\ lancement) \\ -\frac{1}{2}gt + v_0 = 0 \end{cases}$$

D'où :

$$\boxed{t = \frac{2v_0}{g}}$$

$$\boldsymbol{A.N} : t = \frac{2 \times 20}{9{,}8} = 4{,}08 \quad \boxed{t = 4{,}08s}$$

3°) Vitesse avec laquelle le corps repasse à la position initiale.

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \Rightarrow v = \frac{dz}{dt} = -gt + v_0$$

D'où :

$$\boxed{v = -gt + v_0}$$

$$\boldsymbol{A.N} : v = -9{,}8 \times 4{,}08 + 20 = -19{,}98$$

$$\boxed{v = -20m/s}$$

4°) Temps d'arrivée du corps au sol.

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$$

A l'arrivée au sol : $z = -h_0$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0 = 0$$

Le calcul du discriminant donne :

$$\Delta = v_0^2 + 2gh_0 > 0$$

Les racines de l'équation sont :

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}{g} > 0 \\[2ex] t_2 = \dfrac{v_0 - \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}{g} < 0 \end{cases}$$

Le temps n'étant jamais négatif, donc la valeur t_S du temps au sol correspond est :

$$\boxed{t_S = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}{g}}$$

$$\boldsymbol{A.N}: t_S = \frac{20 + \sqrt{20^2 + 2 \times 9{,}8 \times 200}}{9{,}8} = 8{,}75$$

$$\boxed{t_S = 8{,}75s}$$

5°) Vitesse du corps à l'arrivée au sol.

$$v = -gt + v_0$$

Au sol, on a :

$$\boxed{v_S = -gt_S + v_0}$$

$$\boldsymbol{A.N} : v = -9{,}8 \times 8{,}75 + 20 = -65{,}75$$

$$\boxed{v = -65{,}75m.s^{-1}}$$

A.4. Mouvement d'une machine d'ATWOOD.

Activité 11 : On considère une poulie simple de masse négligeable. Par l'intermédiaire d'un fil inextensible et de masse négligeable sont reliées deux masses m_1 et m_2. Les frottements sont négligeables, on abandonne le système.

1°) Calcule les accélérations a_1 et a_2 auxquelles sont soumises les deux masses.

2°) Calcule la durée du mouvement du système après un parcours de *0,5m*. Déduis – en la vitesse de l'esemble à cet instant.

3°) Calcule la tension du fil qui relie les deux masses.

On donne : $m_1 = 0{,}5Kg$; $m_2 = 1Kg$; $g = 10m.s^{-2}$.

Corrigé 11 :

$m_1 = 0{,}5Kg$; $m_2 = 1Kg$; $g = 10m.s^{-2}$.
$d = 0{,}5m$.

1°) Calcul des accélérations a_1 et a_2 des deux masses.

✓ ***Schéma***

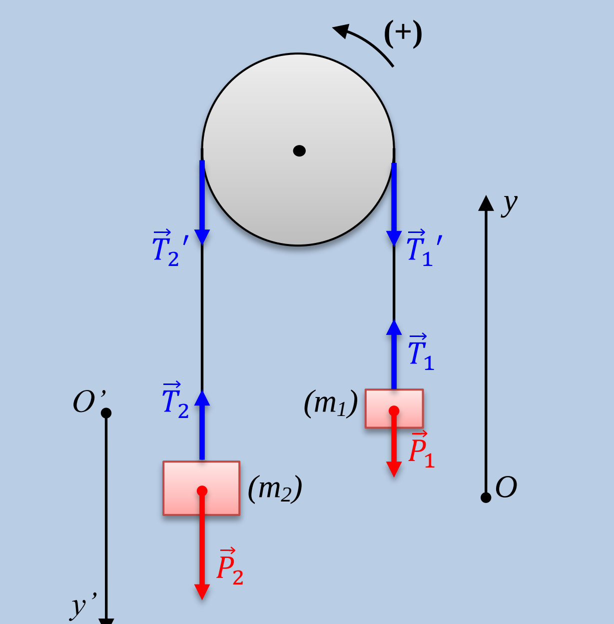


Figure 16.

- ***R.T.S.G ;***
- ***Système d'étude I*** : Solide de masse (m_1) en translation rectiligne ;
- ***B.F.E.A*** : $\vec{P}_1\ ;\ \vec{T}_1$
- ***T.C.I*** : $\sum \vec{F}_{ext} = m_1\vec{a}_{1G}$

  $\Rightarrow\ \vec{P}_1 + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}_{1G}$
- ***Projection du T.C.I suivant (Oy)*** :

  $-P_1 + T_1 = m_1 a_{1G}$

  $\Rightarrow\ T_1 = m_1 g + m_1 a_{1G} \qquad (1)$

- ***Système d'étude II*** : Solide de masse (m_2) en translation rectiligne ;
- ***B.F.E.A*** : $\vec{P}_2\ ;\ \vec{T}_2$
- ***T.C.I*** : $\sum \vec{F}_{ext} = m_2\vec{a}_{2G}$

  $\Rightarrow\ \vec{P}_2 + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}_{2G}$
- ***Projection du T.C.I suivant (O'y')*** :

  $P_2 - T_2 = m_2 a_{2G}$

  $\Rightarrow\ T_2 = m_2 g - m_2 a_{2G} \qquad (2)$

Le fil étant inextensible, d'après le P.A.M ($3^{ème}$ loi de Newton), le long de la corde toutes les tensions ont la même intensité ; ainsi on a :

$$T_1 = T_1' = T_2' = T_2 \ \Rightarrow\ T_1 = T_2$$

Le fil ayant une masse négligeable, tous les points de la corde auront la même vitesse, par conséquent la même accélération, alors :

$$a_{1G} = a_{2G} = a_G$$

Ainsi : $m_1 g + m_1 a_{1G} = m_2 g - m_2 a_{2G}$

D'où :

$$\boxed{a_{1G} = a_{2G} = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g}$$

A.N : $a_{1G} = a_{2G} = \dfrac{1 - 0{,}5}{0{,}5 + 1} \times 10 = 3{,}33$

$$\boxed{a_{1G} = a_{2G} = 3{,}33 m/s^2}$$

2°) Calcul de la durée du mouvement.

$a_G = cte \neq 0 \ \Rightarrow\ M.R.U.V$ d'équation :

$$y = \frac{1}{2}a_G t^2 + v_{0y} t + y_0$$

- *Origine des espaces : Position de l'ensemble avant l'abandon ;*
- *Origine des dates : Instant où le système est abandonné.*

à $t = 0$: $y_0 = 0$; $v_{0y} = 0$.

$$\Rightarrow\ y = \frac{1}{2}a_G t^2$$

A l'instant t : $y = d$, alors :

$$d = \frac{1}{2}a_G t^2 \ \Rightarrow\ \boxed{t = \sqrt{\frac{2d}{a_G}}}$$

A.N: $t = \sqrt{\dfrac{2 \times 0{,}5}{3{,}33}} = 0{,}54$

$$\boxed{t = 0{,}54 s}$$

- ***Vitesse de l'ensemble à cet instant :***

$$y = \frac{1}{2}a_G t^2 \ \Rightarrow\ v = \frac{dy}{dt} = a_G t$$

D'où :

$$\boxed{v = a_G t}$$

A.N: $v = 3{,}33 \times 0{,}54 = 1{,}82$

$$\boxed{v = 1{,}82 m/s}$$

3°) Calcul de la tension du fil.

$$T_1 = T_2 = T \ \Rightarrow\ \boxed{T = m_1(g + a_G)}$$

A.N : $T = 0{,}5 \times (10 + 3{,}33) = 6{,}66$

$$\boxed{T = 6{,}66 N}$$

A.5. Mouvement d'un pendule dans un véhicule.

Activité 12 :
1°) Un fil à plomb de masse *m = 100g* est suspendu dans une automobile qui démarre sur une route droite et horizontale et aquiert une vitesse de *72Km/h* après avoir parcouru *100m.*
L'accélération de l'automobile étant supposée constante, on demande l'inclinaison et la tension du fil.
2°) Après un parcours de *100m*, le chauffeur freine en voulant atteindre une vitesse de *20Km/h* après un parcours de *20m*. Dans quel sens s'incline le fil ? Déduis – en sa tension.

Corrigé 12 :
M = 100g ; v_1 = 72Km/h ; d = 100m.

1°) Calcul de l'inclinaison du fil à plomb.

- ***Schéma***

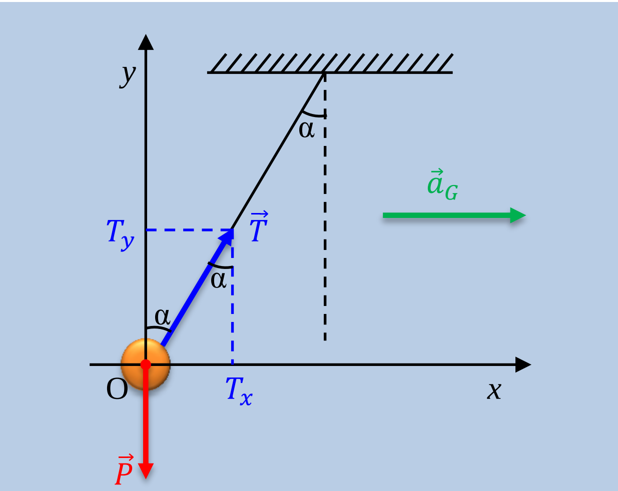


Figure 17.

- ***R.T.S.G ;***
- ***Système d'étude :*** Fil à plomb de masse (*m*) en translation rectiligne ;
- ***B.F.E.A :*** $\vec{P}$; $\vec{T}$;
- ***T.C.I :*** $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_{1G}$
  $\Rightarrow \quad \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}_G$
- ***Projection du T.C.I suivant (Ox) :***

$$T_x = ma_G \quad ; \quad sin\alpha = \frac{T_x}{T}$$

$$\Rightarrow \quad Tsin\alpha = ma_G \quad (1)$$

- ***Projection du T.C.I suivant (Oy) :***

$$-P + T_y = 0 \; ; \; cos\alpha = \frac{T_y}{T}$$

$$\Rightarrow \quad Tcos\alpha = mg \quad (2)$$

En faisant le rapport des relation (1) et (2) :

$$\frac{(1)}{(2)} = \frac{Tsin\alpha}{Tcos\alpha} = \frac{ma_G}{mg}$$

$$\Rightarrow \quad tan\alpha = \frac{a_G}{g} \quad \Rightarrow \quad \alpha = tan^{-1}\left(\frac{a_G}{g}\right)$$

Trouvons a_G
D'après la R.E.V, on a :

$$v_1^2 - v_0^2 = 2a_G(x_1 - x_0)$$

$$avec \;\; v_0 = 0 \;\; et \;\; x_1 - x_0 = d$$

$$\Rightarrow \quad a_G = \frac{v_1^2}{2d}$$

D'où :

$$\boxed{\alpha = tan^{-1}\left(\frac{v_1^2}{2gd}\right)}$$

$$\textbf{A.N} : \alpha = tan^{-1}\left(\frac{20^2}{2 \times 10 \times 100}\right) = 11{,}3$$

$$\boxed{\alpha = 11{,}3°}$$

Conclusion : *$\alpha > 0$, l'inclinaison se fait dans le sens contraire du mouvement du véhicule.*

Calcul de la tension.

$$(1) \quad Tcos\alpha = mg \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{mg}{cos\alpha}}$$

$$\textbf{A.N} : T = \frac{0{,}1 \times 10}{\cos(11{,}3°)} = 1{,}02$$

$$\boxed{T = 1{,}02N}$$

2°) v_2 = 20Km/h ; d_1 = 20m
Sens d'inclinaison du fil à plomb.
D'après ce qui précède, on a :

$$tan\alpha_1 = \frac{a'_G}{g} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = tan^{-1}\left(\frac{a'_G}{g}\right)$$

D'après la R.E.V, on a :

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a'_G d_1 \quad \Rightarrow \quad a'_G = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2d_1}$$

D'où :

$$\boxed{\alpha_1 = tan^{-1}\left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2gd_1}\right)}$$

$$\textbf{A.N} : \alpha_1 = tan^{-1}\left(\frac{(5{,}55)^2 - (20)^2}{2 \times 10 \times 20}\right) = -42{,}67$$

$$\boxed{\alpha_1 = -42{,}67°}$$

Conclusion : *$\alpha_1 < 0$, l'inclinaison a lieu dans le sens du mouvement du véhicule.*

- ***Calcul de la tension.***

(1) $T\cos\alpha_1 = mg \Rightarrow \boxed{T = \frac{mg}{\cos\alpha_1}}$

$$\mathbf{A.N} : T = \frac{0{,}1 \times 10}{\cos(-42{,}67°)} = 1{,}36$$

$$\boxed{T = 1{,}36N}$$

B. Etude des systèmes mécaniques en mouvement de translation curviligne.

Définition : *Un mouvement de translation est dit curviligne lorsque la trajectoire décrite par le solide en mouvement est une courbe.*

B.1. Mouvement d'un projectile dans un champ de pesanteur.

Activité 13 : Une bille est lancée à partir du sol avec une vitesse de *8,0m.s*$^{-1}$. La direction du vecteur vitesse fait un angle $\alpha = 30°$ avec l'horizontale.

1°) Après avoir donné les équations horaires, montre que la trajectoire de la bille est parabolique.

2°) Sans utiliser la dérivation, cherche l'altitude maximale atteinte par la bille.

3°) A quelle distance du point de lancement retombe – t – elle ?

4°) Cette distance étant appelée portée de la bille, pour quelle valeur de α cette portée de la bille est – elle maximale ? Calcule – la.

5°) Détermine les caractéristiques de la vitesse à la portée.

On donne $g = 10m/s^2$.

Corrigé 13 :

$v_0 = 8{,}40m.s^{-1}$; $\alpha\ \ 30°$; $g = 10m.s^{-1}$.

1°) Montrons que la trajectoire de la bille est parabolique.

- ✓ ***Schéma***

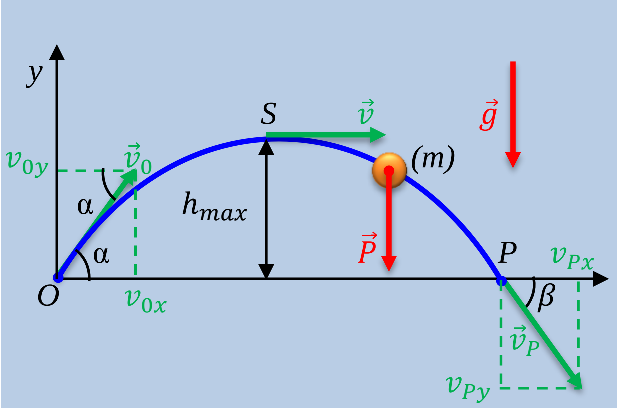


Figure 18.

- ✓ ***R.T.S.G ;***
- ✓ ***Système d'étude :*** Bille de masse (m) en translation curviligne ;
- ✓ ***B.F.E.A :*** $\vec{P}$
- ✓ ***T.C.I :*** $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$

$$\Rightarrow \vec{P} = m\vec{a}_G$$

- ✓ ***Projection du T.C.I suivant (Ox) :***

$0 = ma_{Gx}$; $m \neq 0 \Rightarrow a_{Gx} = 0$

Alors M.R.U d'équation : $x = v_{0x}t + x_0$

- *Origine des espaces : le point O ;*
- *Origine des dates : Instant de lancement de la bille.*

à t = 0 : $x_0 = 0$; $v_{0x} = v_0\cos\alpha$.

$$\Rightarrow \boxed{x = (v_0\cos\alpha)t} \quad (1)$$

- ✓ ***Projection du T.C.I suivant (Oy) :***

$-P = ma_{Gy} \Rightarrow a_{Gy} = -g = cte \neq 0$

Alors M.R.U.V. d'équation :

$$y = \frac{1}{2}a_{Gy}t^2 + v_{0y}t + y_0$$

à t = 0 : $y_0 = 0$; $v_{0y} = v_0\sin\alpha$.

$$\Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0\sin\alpha)t} \quad (2)$$

dans (1) $t = \dfrac{x}{v_0\cos\alpha}$ (3)

En remplaçant la relation (3) dans (2), on obtient l'équation :

$$y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 + (v_0\sin\alpha)\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)$$

D'où :

$$\boxed{y = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha}$$

Conclusion : *L'équation de la trajectoire est de la forme : $y = ax^2 + bx + c$, avec $c = 0$, caractéristique d'une parabole. Donc la trajectoire de la bille est parabolique.*

2°) Altitude maximale atteinte par la bille.

Cette altitude est appelée flèche de la trajectoire.

Définition : *La flèche d'un projectile est la hauteur maximale atteinte par le projectile.*

Plusieurs méthodes existent pour établir l'expression de la flèche parmi lesquelles :

1ère Méthode.

$$\begin{cases} x = (v_0 cos\alpha)t & (1) \\ y = -\dfrac{1}{2}gt^2 + (v_0 sin\alpha)t & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = v_0 cos\alpha \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = -gt + v_0 sin\alpha \end{cases}$$

Au sommet de la trajectoire, c'est – à – dire au point S : $v_y = 0$ et $y = h_{max}$

$v_y = 0 \Rightarrow -gt + v_0 sin\alpha = 0$

$$\Rightarrow t = \frac{v_0 sin\alpha}{g} \qquad (4)$$

La relation (4) dans (2) donne :

$$y = h_{max} = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 sin\alpha}{g}\right)^2 + \frac{(v_0 sin\alpha)^2}{g}$$

$$\Rightarrow h_{max} = -\frac{v_0^2 sin^2\alpha}{2g} + \frac{v_0^2 sin^2\alpha}{g}$$

D'où :

$$\boxed{h_{max} = \frac{v_0^2 sin^2\alpha}{2g}}$$

2ème Méthode :

D'après la R.E.V suivant l'axe (Oy), on a :

$v_y^2 - v_{0y}^2 = 2a_{Gy}(y - y_0)$

Avec $v_y = 0$; à l'altiitude maximale et

$y - y_0 = h_{max}$

$\Rightarrow -v_{0y}^2 = 2a_{Gy}h_{max}$

$\Rightarrow -(v_0 sin\alpha)^2 = -2gh_{max}$

D'où :

$$\boxed{h_{max} = \frac{v_0^2 sin^2\alpha}{2g}}$$

A.N : $h_{max} = \dfrac{(8{,}40)^2 \times sin^2(30°)}{2 \times 10} = 0{,}88$

$$\boxed{h_{max} = 0{,}88m}$$

3°) Distance du point de lancement où retombe la bille : portée de la bille.

Définition : *La portée d'un projectile est la distance qui sépare son point d'impact du point de lancement.*

D'après l'équation de la trajectoire :

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 cos^2\alpha}x^2 + xtan\alpha$$

Au point d'impact sur le sol, c'est – à – dire au point P, on a : $y(x_P) = 0$.

$$\Rightarrow -\frac{g}{2v_0^2 cos^2\alpha}x_P^2 + x_P tan\alpha = 0$$

$$\Rightarrow x_P\left(-\frac{g}{2v_0^2 cos^2\alpha}x_P + tan\alpha\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_P = 0 \ (au\ point\ de\ lancement) \\ x_P = \dfrac{2v_0^2 cos^2\alpha . tan\alpha}{g} \end{cases}$$

D'où :

$$\boxed{x_P = \frac{v_0^2 sin2\alpha}{g}}$$

Avec : $2cos\alpha . sin\alpha = sin2\alpha$

A.N : $x_P = \dfrac{(8{,}40)^2 \sin(2 \times 30°)}{10} = 6{,}11$

$$\boxed{x_P = 6{,}11m}$$

4°) Valeur de α pour laquelle la portée est maximale.

Cette portée est maximale pour $sin2\alpha = 1$.

$\Rightarrow 2\alpha = 90°$

D'où :

$$\boxed{\alpha = 45°}$$

Et

$$\boxed{x_{Pmax} = \frac{v_0^2}{g}}$$

A.N : $x_{Pmax} = \dfrac{(8{,}40)^2}{10} = 7{,}05$

$$\boxed{x_{Pmax} = 7{,}05m}$$

5°) Caractéristiques de la vitesse à la portée.

- **Module de $\vec{v}_P$**

A la portée : $\vec{v}_P = v_{Px}\vec{i} + v_{Py}\vec{j}$

Alors $v_P = \sqrt{v_{Px}^2 + v_{Py}^2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{Px} = v_0 cos\alpha \\ v_{Py} = -gt + v_0 sin\alpha \end{cases}$$

A la portée $y = 0$.

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 sin\alpha)t = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \dfrac{2v_0 sin\alpha}{g} \end{cases}$$

$\Rightarrow t = \dfrac{2v_0 sin\alpha}{g}$ est la durée de la chute.

Ainsi : $v_{Py} = -g\left(\dfrac{2v_0 sin\alpha}{g}\right) + v_0 sin\alpha$

$$\Rightarrow v_{Py} = -2v_0 sin\alpha + v_0 sin\alpha$$

$$\Rightarrow v_{Py} = -v_0 sin\alpha$$

Alors : $v_P = \sqrt{v_0^2 cos^2\alpha + v_0^2 sin^2\alpha}$

$$\Rightarrow v_{Py} = \sqrt{v_0^2(cos^2\alpha + sin^2\alpha)} = \pm v_0$$

D'où :

$$\boxed{v_P = -v_0}$$

v_P est négative pour la simple raison que le vecteur vitesse $\vec{v}_P$ *est dirigé vers le bas.*

- **Angle de $\vec{v}_P$ avec l'horizontale**

$$tan\beta = \frac{v_{Py}}{v_{Px}} = -\frac{v_0 sin\alpha}{v_0 cos\alpha} = -tan\alpha$$

$$\Rightarrow tan\beta = -tan\alpha$$

D'où :

$$\boxed{\beta = -\alpha}$$

Conclusion : *v_P a une direction qui fait un angle $\beta = 30°$ par rapport à l'axe (Ox) vers le bas.*

D'où les caractéristiques du vecteur vitesse au point P sont :

- *Point d'application : Le point P ;*
- *Sens : Du haut vers le bas ;*
- *Module : $v_P = v_0 = 8{,}40 m/s$;*
- *Direction : $\beta = 30°$.*

Remarques :

R₁ : *Angles de tirs possibles :*

Pour atteindre une *cible $C(x_C\,;\,y_C)$* à l'aide d'un projectile, on utilise l'équation de la trajectoire du mouvement :

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 cos^2\alpha}x^2 + x tan\alpha$$

Au point C, on a :

$$y_C = -\frac{g}{2v_0^2 cos^2\alpha}x_C^2 + x_C tan\alpha$$

$$avec\ \frac{1}{cos^2\alpha} = 1 + tan^2\alpha$$

$$\Rightarrow y_C = -\frac{gx_C^2}{2v_0^2}(1 + tan^2\alpha) + x_C tan\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{gx_C^2}{2v_0^2}tan^2\alpha - x_C tan\alpha + y_C + \frac{gx_C^2}{2v_0^2} = 0$$

Ensuite on resoud cette équation du second degré en $tan\alpha$. On obtient deux valeurs positives de α qui représentent les angles de tirs possibles (figure 19).

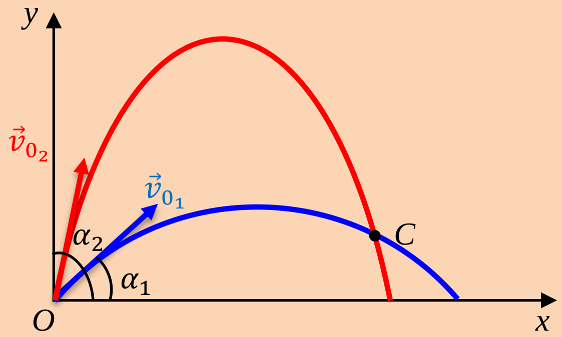
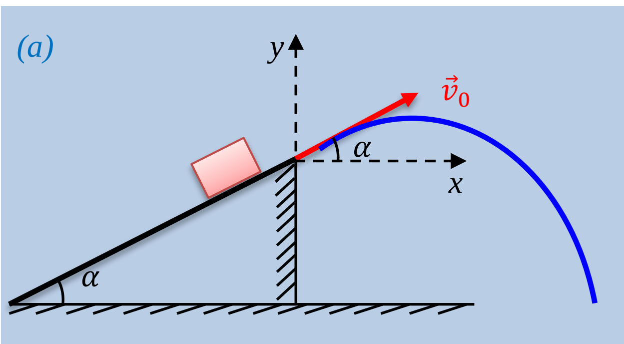


Figure 19.

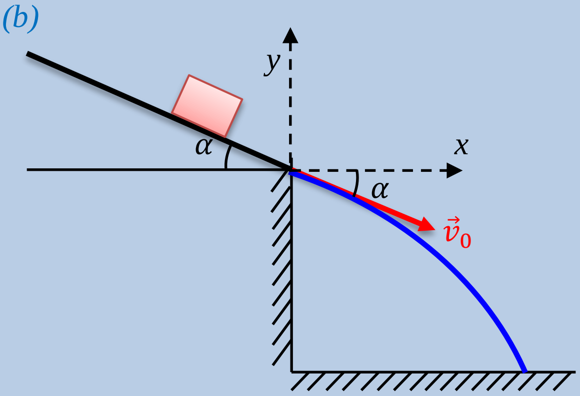
- ✓ Pour $0 < \alpha_1 < 45°$ (trajectoire en bleu) ; le tir est dit *tendu.*
- ✓ Pour $45° < \alpha_2 < 90°$ (trajectoire en rouge) ; le tir est dit *en cloche.*

R₂ : Suivant la direction du vecteur vitesse initiale, on peut distinguer parmi tant d'autres, les cas des projectiles suivants (figures 20):



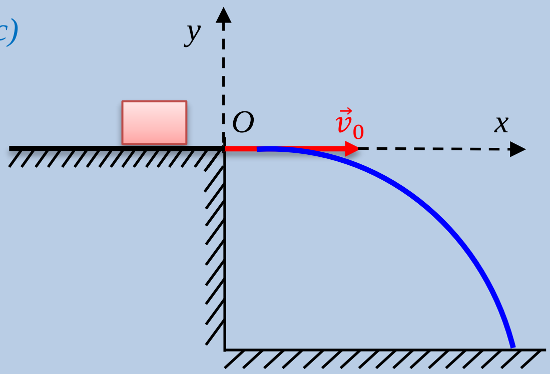
$$\vec{v}_0 = (v_0 cos\alpha)\vec{i} + (v_0 sin\alpha)\vec{j}$$

(b)



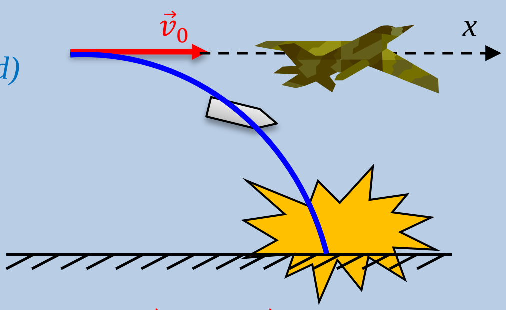
$$\vec{v}_0 = (v_0 cos\alpha)\vec{i} - (v_0 sin\alpha)\vec{j}$$

(c)



$$\vec{v}_0 = v_0\vec{i}$$

(d)



$$\vec{v}_0 = v_0\vec{i}$$

Figure 20.

B.2. Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique $\vec{E}$.

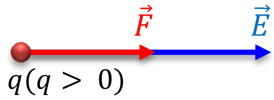
Définition : *On appelle champ électrostatique $\vec{E}$, toute région de l'espace où une charge électrique se trouve soumise à une force électrostatique $\vec{F}$ telle que :*

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E}}$$

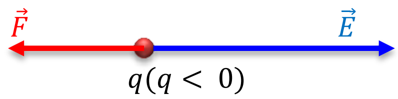
Soit :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad et \quad \boxed{F = |q|.E}$$

- Si $q > 0$, $\vec{F}$ et $\vec{E}$ sont de *même sens*.



- Si $q < 0$, $\vec{F}$ et $\vec{E}$ sont de *sens contraires*.



❖ *Le champ électrostatique est constant en direction, sens et valeur entre deux plaques. Il est dit uniforme dans cette région.*

Le dispositif permettant d'obtenir un champ uniforme est appelé *condensateur plan* : les deux plaques en sont les *armatures* (figure 21).

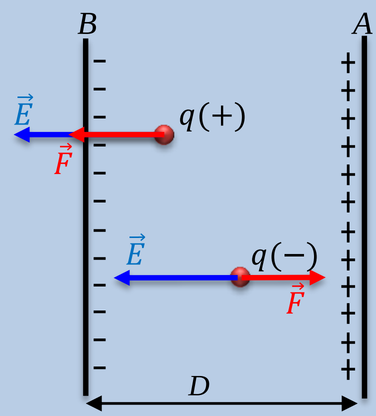


Figure 21.

❖ *Le vecteur champ électrostatique est toujours orienté dans le sens des potentiels décroissants (de la plaque positive vers la plaque négative.*

❖ Le *travail effectué par la force électrostatique* $\vec{F}$, lorsque la charge q se déplace de l'armature A vers l'armature B, *est égal au produit de la charge par la d.d.p* (différence de potentiels) entre les armatures A et B.

$$W_{AB}(\vec{F}) = q(V_A - V_B)$$

❖ Si $V_A - V_B = U_{AB}$ désigne la tension entre les plaques, d la distance qui les sépare, l'intensité du champ électrique (ou électrostatique) uniforme en tout point entre les plaques vaut :

$$E = \frac{U_{AB}}{d} \quad (V/m)$$

❖ *L'énergie potentielle électrostatique d'une charge est égale au produit de sa charge par la valeur du potentiel V au point où elle se trouve.*

En un point M du champ :

$$\mathcal{E}_{P_M} = qV_M$$

Activité 14 : Un faisceau de particules identiques, de masse m, de charge $q = -e$, pénètre à la vitesse initiale $\vec{v}_0$ dans un champ électrostatique $\vec{E}$ uniforme créé par deux plaques horizontales reliées à un générateur électrostatique. On s'arrange en outre, pour que les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{v}_0$ soient perpendiculaires.

1°) Détermine l'équation de la trajectoire.

2°) Soient d, la distance entre les plaques et ℓ, la longueur de chaque plaque. Calcule la vitesse de la particule à la sortie des plaques après avoir donné les coordonnées du point de sortie S.

3°) Calcule la déviation α du faisceau à la sortie des plaques.

4°) Calcule l'ordonnée du point d'impact I, du faisceau sur un écran (E) situé à une distance D du point d'entrée O.

5°) Quelle condition doit satisfaire la vitesse v_0 pour que le faisceau d'électrons sorte du champ électrique ?

Données : v_0 = *25.000Km/s ; U = 100V ;*
m = 9,1.10^{-31}*Kg ; e = 1,6.10*$^{-19}$*C ; D = 0,4m ;*
ℓ = 0,1m ; d = 2,5cm.

Corrigé 14 :

1°) Détermination de l'équation de la trajectoire.

✓ ***Schéma***

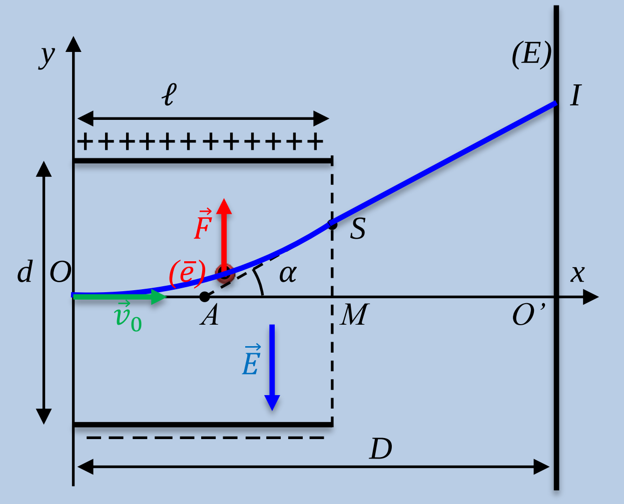


Figure 22.

✓ ***R.T.S.G ;***

✓ ***Système d'étude :*** Particule de masse (m) en translation curviligne ;

✓ ***B.F.E.A :*** $\vec{F}$

On néglige le poids $\vec{P}$ de l'électron devant la force $\vec{F}$, $(P \ll F)$.

✓ ***T.C.I :*** $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$

$\Rightarrow \quad \vec{F} = m\vec{a}_G \quad \Rightarrow \quad q\vec{E} = m\vec{a}_G$

✓ ***Projection du T.C.I suivant (Ox) :***

$0 = ma_{Gx} \; ; \; m \neq 0 \; \Rightarrow \; a_{Gx} = 0$

Alors M.R.U d'équation : $x = v_{0x}t + x_0$

- *Origine des espaces : le point O ;*
- *Origine des dates : L'instant où l'électron pénètre dans le champ.*

à t = 0 : $x_0 = 0$; $v_{0x} = v_0$.

$\Rightarrow \quad x = v_0 t \quad (1)$

✓ ***Projection du T.C.I suivant (Oy) :***

$$-qE = ma_{Gy} \Rightarrow a_{Gy} = -\frac{qE}{m} = cte \neq 0$$

Alors M.R.U.V. d'équation :

$$y = \frac{1}{2}a_{Gy}t^2 + v_{0y}t + y_0$$

à t = 0 : $y_0 = 0$; $v_{0y} = 0$.

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}a_{Gy}t^2 = -\frac{1}{2}\frac{qE}{m}t^2$$

Avec $q = -e \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}t^2 \quad (2)$

Dans (1) $t = \frac{x}{v_0}$ (3)

En remplaçant la relation (3) dans (2), on obtient l'équation :

$$y = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 = \frac{eE}{2mv_0^2}x^2$$

$avec \ E = \frac{U}{d}$

D'où : $$\boxed{y = \frac{eU}{2mdv_0^2}x^2}$$

***Conclusion** : L'équation de la trajectoire est de la forme : $y = ax^2 + bx + c$, avec b = 0 et $c = 0$, caractéristique d'une parabole. Donc la trajectoire de l'électron est parabolique.*

2°) Coordonnées du point de sortie S.

La particule sort du champ électrostatique S(x_S ; y_S) tel que :

$$\begin{cases} x_S = \ell \\ y_S = \frac{eU}{2mdv_0^2}x_S^2 = \frac{eU}{2mdv_0^2}\ell^2 \end{cases}$$

D'où :

$$\boxed{S\left(\ell \ ; \ \frac{eU}{2mdv_0^2}\ell^2\right)}$$

A.N : $$\begin{cases} x_S = 0{,}1 \\ y_S = \frac{1{,}6.10^{-19} \times 100 \times (0{,}1)^2}{2 \times 9{,}1.10^{-31} \times 2{,}5.10^{-2} \times (25.10^6)^2} \end{cases}$$

$$\boxed{S(0{,}1 \ ; \ 5{,}6210^{-3}) \quad (m)}$$

Vitesse de l'électron au point de sortie S.

$\vec{v}_S = v_{Sx}\vec{i} + v_{Sy}\vec{j} \Rightarrow v_S = \sqrt{v_{Sx}^2 + v_{Sy}^2}$

$$Or \begin{cases} x = v_0 t & \Rightarrow v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \\ y = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}t^2 & \Rightarrow v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{eU}{md}t \end{cases}$$

Au point de sortie S :

$x_S = v_0 t = \ell \Rightarrow t = \frac{\ell}{v_0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{Sx} = v_0 \\ v_{Sy} = \frac{eU\ell}{mdv_0} \end{cases}$$

D'où :

$$\boxed{v_S = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{eU\ell}{mdv_0}\right)^2}}$$

A.N :

$$v_S = \sqrt{(25.10^6)^2 + \left(\frac{1{,}6.10^{-19} \times 100 \times 0{,}1}{9{,}1.10^{-31} \times 2{,}5.10^{-2} \times 25.10^6}\right)^2}$$

$$\boxed{v_S = 2{,}51.10^7 m/s}$$

3°) Calcul de la déviation α du faisceau à la sortie des plaques.

Considérons le triangle AMS, on a :

$tan\alpha = \frac{MS}{AM}$

$$Avec \begin{cases} MS = y_S = \frac{eU\ell^2}{2mdv_0^2} \\ AM = \ell/2 \end{cases}$$

$\Rightarrow tan\alpha = \frac{y_S}{\ell/2} = \frac{2eU\ell^2}{2mdv_0^2\ell}$

D'où :

$$\boxed{\alpha = tan^{-1}\left(\frac{eU\ell}{mdv_0^2}\right)}$$

A.N :

$$\alpha = tan^{-1}\left(\frac{1{,}6.10^{-19} \times 100 \times 0{,}1}{9{,}1.10^{-31} \times 2{,}5.10^{-2} \times (25.10^6)^2}\right)$$

$$\boxed{\alpha = 6{,}42°}$$

4°) Calcul de l'ordonnée du point d'impact I sur l'écran.

Considérons le triangle IAO', on a :

$tan\alpha = \frac{O'I}{AO'} \Rightarrow O'I = AO'tan\alpha$

$$avec \begin{cases} AO' = D - \frac{\ell}{2} \\ tan\alpha = \frac{eU\ell}{mdv_0^2} \end{cases}$$

D'où :

$$\boxed{O'I = y_I = \frac{eU\ell}{mdv_0^2}\left(D - \frac{\ell}{2}\right)}$$

A.N :

$$y_I = \frac{1{,}6.10^{-19} \times 100 \times 0{,}1}{9{,}1.10^{-31} \times 2{,}5.10^{-2} \times (25.10^6)^2}\left(0{,}4 - \frac{0{,}1}{2}\right)$$

$$\boxed{y_I = 3{,}93.10^{-2}m = 3{,}93cm}$$

5°) Condition que doit satisfaire v_0 pour que l'électron sorte du condensateur.

Pour que l'électron sorte du condensateur (du champ), il faut que :

$$\begin{cases} x_S = \ell \\ y_S < \dfrac{d}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{eU\ell^2}{2mdv_0^2} < \frac{d}{2} \Rightarrow \frac{eU\ell^2}{md^2v_0^2} < 1$$

$$\Rightarrow v_0^2 > \frac{eU\ell^2}{md^2}$$

D'où :

$$\boxed{v_0 > \frac{\ell}{d}\sqrt{\frac{eU}{m}}}$$

$$\textbf{A.N : } v_0 > \frac{0{,}1}{2{,}5.10^{-2}}\sqrt{\frac{1{,}6.10^{-19} \times 100}{9{,}1.10^{-31}}}$$

$$\boxed{v_0 > 1{,}67.10^7 m/s}$$

Note :

- Si $v_0 < \frac{\ell}{d}\sqrt{\frac{eU}{m}}$ et $y_S = \frac{d}{2}$

L'électron frappe l'une des armatures (ne sort pas du champ).

- Si $v_0 = \frac{\ell}{d}\sqrt{\frac{eU}{m}}$

L'électron ne sortira pas du condensateur, car il n'aura pas assez d'énergie.

Remarques :

R₁ : Les particules de *charge négative* $(q < 0)$ sont : les *anions* (ions négatifs) et les *électrons* ; celles de *charge positive* $(q > 0)$ sont : les *cations* (ions positifs) et les *protons*.

R₂ : A l'extérieur du champ électrostatique, *le mouvement d'une particule est rectiligne et uniforme.*

R₃ : La trajectoire décrite par la particule chargée dans un champ électrique dépend de la *direction du vecteur vitesse* par rapport à celle des plaques chargées, mais aussi du *signe de la charge électrique*. Sa concavité se trouve du même côté que la force électrique.

C'est ainsi que l'on peut distinguer suivant les cas, les trajectoires suivantes (figure 23).

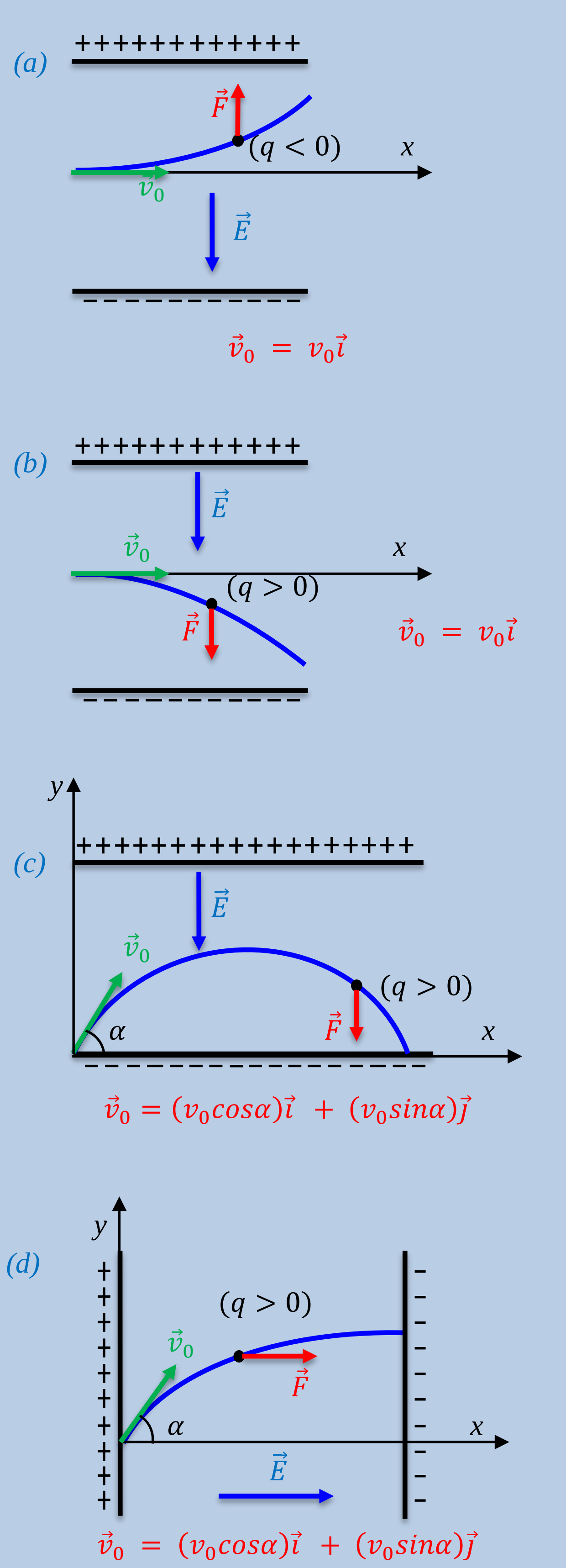


Figure 23.

B.3. Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique d'induction $\vec{B}$.

Définition : *On appelle champ magnétique d'induction $\vec{B}$, toute région de l'espace où une particule de charge q, animée d'une vitesse $\vec{v}$, subit une force magnétique appelée force de Lorentz, telle que :*

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

- La *direction* de la force est *perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{B}$.*
- Son *sens* est tel que le *trièdre formé par les vecteurs $q\vec{v}$, $\vec{B}$ et $\vec{F}$ dans cet ordre soit direct* ; le sens du vecteur $q\vec{v}$ dépend évidemment du *signe de la charge q*.
- Son *intensité* est donnée par la relation :

$$F = |q|v.B.|sin\alpha|$$

Avec :

α : l'angle inférieur à π formé par $q\vec{v}$ et $\vec{B}$.
F en (N) ; v en (m/s) ; q en (C) ; B en tesla (T).

- Pour l'étude dynamique considérons le cas où :

$$\vec{v} \perp \vec{B} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}\,(rad)$$

- Les *sens de la courbure de la trajectoire* d'une particule de charge *q* dans un champ magnétique uniforme *orthogonal à $\vec{v}_0$* sont donnés par la figure 24 ci – dessous :

Remarquons d'abord que la trajectoire est contenue dans le plan formé par les vecteurs $q\vec{v}$ et $\vec{F}$. Le vecteur $\vec{B}$ est donc perpendiculaire à ce plan. Pour cela, il sera représenté par une flêche qui ne sera visible que soit par son origine, soit par son extrémité.

Origine  *Extrémité*

$\otimes$: $\vec{B}$ est « *entrant* »

$\odot$: $\vec{B}$ est « *sortant* ».

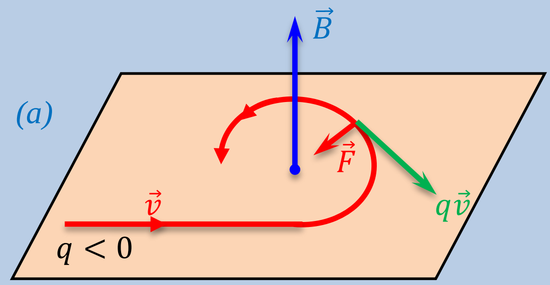


Fig.a : Une particule de charge négative « s'enroule » autour de $\vec{B}$ dans le sens trigonométrique.

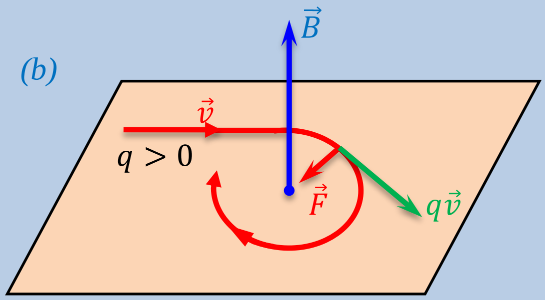


Fig.b : Une particule de charge positive « s'enroule » autour de $\vec{B}$dans le sens inverse du sens trigonométrique.

Figure 24.

Pour trouver le sens de rotation, remarquons que la *force (ou l'accélération) est nécessairement centripète* ; les particules de charge négative tournent autour de $\vec{B}$ dans le sens trigonométrique (sens inverse des aiguilles d'une montre) (figure 24.a), tandis que les particules de charge positive en sens contraire (figure 24.b).

Activité 15 : Un faisceau homocinétique d'électrons pénètre en O à la vitesse $\vec{v}_0$ dans un domaine de largeur ℓ où règne un champ magnétique uniforme de vecteur induction $\vec{B}$ orthogonal à $\vec{v}_0$.

1°) a) On désire obtenir une déviation des particules vers le haut par le champ magnétique $\vec{B}$. Précise sur la figure le sens du vecteur $\vec{B}$.

b) Montre que dans le champ magnétique le mouvement des particules est circulaire et uniforme dans un plan que l'on précisera.

2°) A sa sortie du champ, le faisceau d'électrons semble provenir d'un point *I* proche du centre de l'espace champ magnétique. Un écran est placé à la distance *D = 10cm* du point *I* perpendiculairement à $\vec{v}_0$.

a) Exprime la déviation angulaire α (ou angle α de déflexion) du faisceau électronique en fonction de q, m, ℓ, B, et v_0.

b) Détermine l'expression de la déviation linéaire Y du faisceau d'électrons sur l'écran.

c) Que valent le champ magnétique B et le rayon R de la trajectoire si on observe sur l'écran une distance de déflexion $Y = 4cm$.

On donne : $v_0 = 100Km.s^{-1}$; $\ell = 2cm$; $q = -e = -1{,}6.10^{-19}C$; $m = 9{,}1.10^{-31}Kg$.

Corrigé 15 :

$v_0 = 100Km.s^{-1}$; $\ell = 2cm$; $D = 10cm$

$q = -e = -1{,}6.10^{-19}C$; $m = 9{,}1.10^{-31}Kg$.

1°) a) Précisons sur la figure le sens du vecteur $\vec{B}$.

En utilisons la règle des trois doigts de la main droite (le pouce pour $\vec{F}$; l'index pour $q\vec{v}$ et le majeur pour $\vec{B}$ de sorte que les trois doigts forment un trièdre direct), on constate que le champ magnétique $\vec{B}$ est dirrigé vers l'avant : le champ $\vec{B}$ est « sortant » et représenté par $\odot$

b) Montrons que le mouvement est circulaire uniforme dans un plan donné.

✓ ***Schéma***

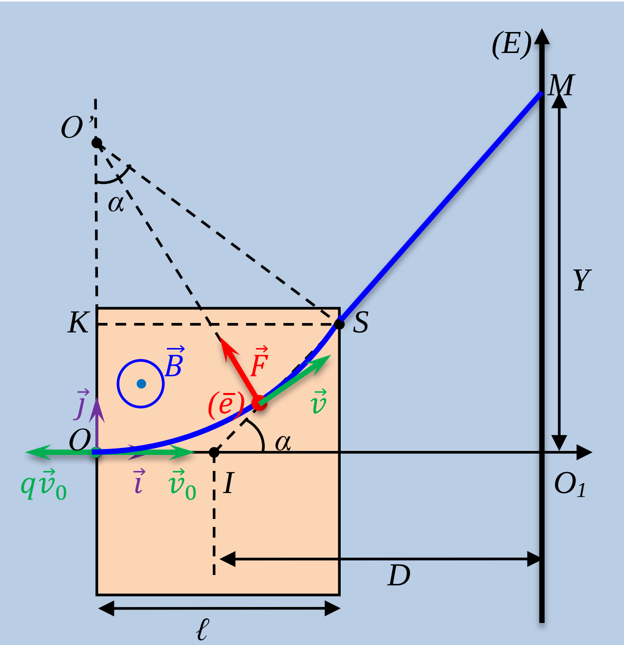


Figure 25.

- ✓ ***R.T.S.G*** ;
- ✓ ***Système d'étude*** : Particule de masse (m) en translation curviligne ;
- ✓ ***B.F.E.A*** :
  - La force magnétique de Lorentz $\vec{F}$;
  - Le poids $\vec{P}$.

  On néglige le poids $\vec{P}$ de l'électron devant la force $\vec{F}$, $(P \ll F)$.
- ✓ ***T.C.I*** : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$

$$\Rightarrow \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow q\vec{v} \wedge \vec{B} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{q\vec{v} \wedge \vec{B}}{m}$$

❖ ***Montrons que le mouvement est uniforme :***

$$\vec{a} = \frac{q\vec{v} \wedge \vec{B}}{m} \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{v}$$

$\vec{v}$ étant toujours tangent à la trajectoire, alors $\vec{a}$ est normal à la trajectoire.

$$ainsi\ a_t = \frac{dv}{dt} = 0, \qquad soit\ v = v_0 = cte$$

Le mouvement est donc uniforme.

❖ ***Montrons que le mouvement est circulaire.***

$$\vec{a} = \frac{q\vec{v} \wedge \vec{B}}{m}$$

$$\vec{a} \perp \vec{v} \Rightarrow a_t = 0 \ \ et\ \ a = a_n$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{|q|v.B.\sin(q\vec{v}, \vec{B})}{m}$$

$$avec\ \sin(q\vec{v}, \vec{B}) = 1, \qquad car\ \vec{v} \perp \vec{B}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{|q|v.B}{m} = \frac{v^2}{R}$$

Soit :

$$R = \frac{mv}{|q|B} = \frac{mv_0}{|q|B}$$

m, v_0, q *et* B *sont des constantes, donc* R *est une constante*.

Le rayon R étant constant, le mouvement est donc circulaire.

❖ ***Précisons le plan du mouvement.***

Soit $(z'z)$ l'axe associé au vecteur $\vec{B}$:

$$\vec{a} = \frac{q\vec{v} \wedge \vec{B}}{m} \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{B}$$

Alors $a_z = 0$.

D'après l'énoncé $\vec{v} \perp \vec{B}$, donc $v_z = 0$.

$a_z = 0$ et $v_z = 0$, il n'y a donc pas de mouvement suivant l'axe $(z'z)$: par conséquent *le mouvement se fait dans un plan perpendiculaire à $\vec{B}$, autrement dit dans le plan contenant les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{v}$*.

Conclusion : *Dans le champ magnétique, le mouvement de la particule est circulaire et uniforme dans le plan contenant les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{v}$.*

Note : Dans un champ magnétique uniforme d'induction $\vec{B}$ orthogonal à sa vitesse initiale $\vec{v}_0$, une particule chargée est animée d'un mouvement circulaire uniforme dans un plan orthogonal à $\vec{B}$.
Le rayon de le trajectoire est :

$$\boxed{R = \frac{mv_0}{|q|B}}$$

2°) a) Déviation angulaire α.

Considérons le triangle $O'KS$, on a :

$$sin\alpha = \frac{KS}{O'S} = \frac{\ell}{R} \Rightarrow sin\alpha = \frac{\ell|q|.B}{mv_0}$$

D'où :

$$\boxed{\alpha = sin^{-1}\left(\frac{\ell|q|.B}{mv_0}\right)}$$

b) Déviation linéaire sur l'écran (E).

En considérant le triangle IO_1M, on a :

$$tan\alpha = \frac{O_1M}{IO_1} = \frac{Y}{D} \Rightarrow Y = Dtan\alpha$$

α étant petit, alors $tan\alpha \simeq sin\alpha$

D'où :

$$\boxed{Y = \frac{D.\ell|q|.B}{mv_0}}$$

c) Valeurs de B et R.

$$tan\alpha = \frac{Y}{D} \Rightarrow \alpha = tan^{-1}\left(\frac{Y}{D}\right)$$

$$\textbf{A.N}:\ \alpha = tan^{-1}\left(\frac{0{,}04}{0{,}1}\right) = 21{,}8 \Rightarrow \alpha = 21{,}8°$$

Ainsi : $sin\alpha = \dfrac{\ell|q|.B}{mv_0}$

D'où :

$$\boxed{B = \frac{mv_0 sin\alpha}{\ell|q|}}$$

$$\textbf{A.N}:\ B = \frac{9{,}1.10^{-31} \times 10^5 \times \sin(21{,}8°)}{0{,}02 \times 1{,}6.10^{-19}}$$

$$\boxed{B = 1{,}05.10^{-5}T}$$

D'après ce qui précède, on a :

$$\boxed{R = \frac{mv_0}{|q|B}}$$

$$\textbf{A.N}:\ R = \frac{9{,}1.10^{-31} \times 10^5}{1{,}6.10^{-19} \times 1{,}05.10^{-5}} = 5{,}14.10^{-2}$$

$$\boxed{R = 5{,}14.10^{-2}m = 5{,}14cm}$$

Remarques :

R₁ : On peut aussi déterminer d'autres paramètres du mouvement de la particule dans le champ magnétique. Ce sont :

❖ **La Quantité de mouvement de la particule dans le champ.**

$\vec{p} = m\vec{v}$, soit $p = mv$

$$Avec\ v = v_0\ et\ R = \frac{mv_0}{|q|B} \Rightarrow v_0 = \frac{|q|B.R}{m}$$

$$Ainsi\ :\ p = m.\frac{|q|B.R}{m} = |q|B.R$$

D'où :

$$\boxed{p = |q|B.R}\ \ (\text{Kg.m.s}^{-1})$$

❖ **La Vitesse angulaire de la partiule.**

$$v_0 = R\omega \Rightarrow \omega = \frac{v_0}{R} \Rightarrow \omega = v_0.\frac{|q|B}{mv_0}$$

D'où :

$$\boxed{\omega = \frac{|q|B}{m}}\ \ (rad.s^{-1})$$

❖ **La Période de rotation et la fréquence du mouvement de la particule.**

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\frac{m}{|q|.B}}\ \ (s)$$

$$\boxed{N = \frac{1}{T} = \frac{|q|.B}{2\pi.m}}\ \ (Hz)$$

R₂ : A l'extérieur du champ magnétique, *le mouvement de la particule est rectiligne et uniforme.*

R₃ : Suivant la nature de la charge électrique, on peut aussi avoir des trajectoires représentées sur la figure 26 ci – dessous :

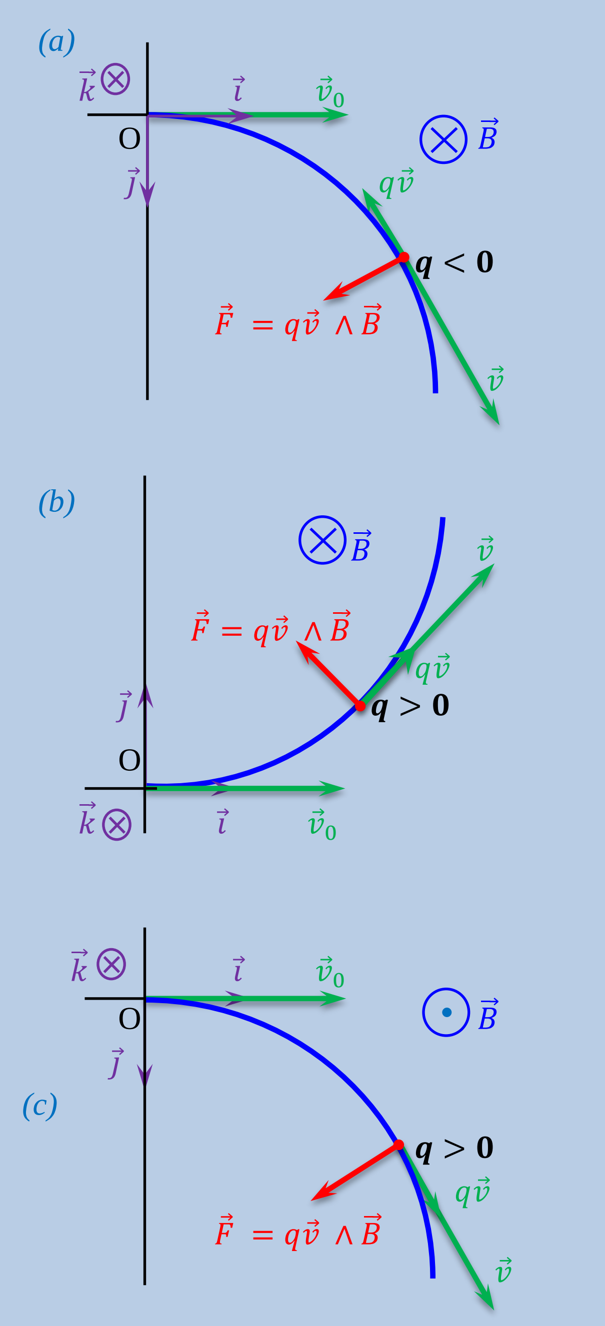


Figure 26.

B.4. Mouvement d'un satellite autour de la terre.

a) Loi d'interaction gravitationnelle : Loi de Newton.

Considérons deux corps ponctuels de masses respectives m_A et m_B, situés à une distance r l'une de l'autre (figure 27).

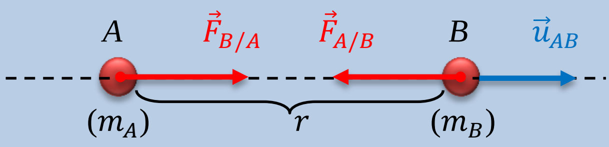


Figure 27.

❖ **Enoncé :**
Deux corps ponctuels A et B, de masse m_A et m_B, exercent l'un sur l'autre des forces d'attraction directement opposées, dirigées suivant la droite (AB), d'intensités proportionnelles à leurs masses et inversement proportionnelles au carré de leur distance :

$$\vec{F}_{A/B}=-\vec{F}_{B/A}=-G\frac{m_A.m_B}{r^2}\vec{u}_{AB}$$

$$Avec\ r=\|\overrightarrow{AB}\|\ \ et\ \ \vec{u}_{AB}=\frac{1}{r}\overrightarrow{AB}$$

La constante G est appelée *constante de la gravitation universelle.* Dans le système international :

$$G=6{,}67.10^{-11}m^3.Kg^{-1}.s^{-2}.$$

Ces forces d'attraction obéissent au principe d'interaction. Aussi parle – t – on d'*interaction gravitationnelle*.
De cette loi d'interaction entre solides ponctuels découle la *loi d'interaction entre les astres.*
Ces forces ont la même droite d'action (AB) et ont une *intensité commune :*

$$\boxed{F_{B/A}=F_{A/B}=F=G\frac{m_A.m_B}{r^2}}$$

Avec *m_A et m_B en (Kg) ; r en (m) ; F et F' en (N) ; G en $m^3.Kg^{-1}.s^{-2}$.*

b) Champ de gravitation terrestre.

❖ **Enoncé :**
Un corps de masse m, placé en un point où le vecteur champ de gravitation est $\vec{\mathcal{G}}$ subit la force gravitationnelle $\vec{F}$ telle que :

$$\boxed{\vec{F}=m\vec{\mathcal{G}}}$$

- L'*intensité du champ de gravitation* créé au point considéré par un objet de masse M à l'altitude h (figure 28) est donnée par :

$$\mathcal{G} = \frac{F}{m} = G\frac{M}{r^2}$$

Avec $\mathcal{G}$ en N.Kg^{-1}.

- Le *champ de gravitation* créé par la terre en un point de sa surface ($h = 0$) vaut :

$$\mathcal{G}_0 = G\frac{M}{R^2}$$

Avec *R : rayon de la terre ; M : masse de la terre.*

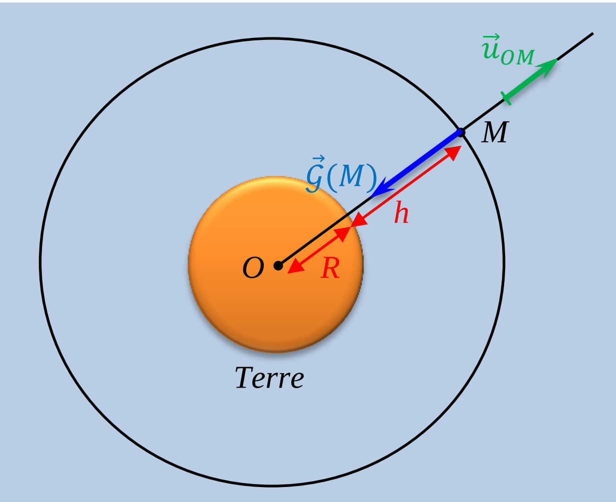


Figure 28.

A l'altitude h au – dessus de la terre :

$$\mathcal{G} = G\frac{M}{r^2} = G\frac{M}{(R + h)^2}$$

c) Champ de gravitation terrestre et champ de pesanteur.

Dans les classes antérieures, le poids $\vec{P}$ d'un corps de masse m a été défini comme la force exercée à distance par la Terre sur ce corps, et le champ de pesanteur $\vec{g}$, par la relation :

$$\vec{P} = m\vec{g}.$$

Le poids et la force d'attraction gravitationnelle ne sont – ils pas une seule force ? En fait, les deux champs $\vec{\mathcal{G}}$ et $\vec{g}$ ne sont pas, en toute rigueur, confondus (cela est dû à la rotation de la terre par rapport au référentiel géocentrique) ; néanmoins, ils diffèrent très peu :

- ✓ Leurs directions font un angle de quelques minutes maximum ;
- ✓ L'écart relatif de leur intensité est inférieur à 3.10^{-4}.

La différence est minime. Aussi assimilerons – nous dorénavant, en négligeant les effets de rotation terrestre, *le poids à la force d'attraction gravitationnelle et le chmp de pesanteur au champ gravitationnel :*

$$\vec{P} \simeq \vec{F} \text{ et } \vec{g} \simeq \vec{\mathcal{G}}$$

Ainsi on a alors :

- ➢ Au sol (h = 0) :

$$g_0 = G\frac{M}{R^2}$$

- ➢ A l'altitude h :

$$g = G\frac{M}{(R + h)^2} = \frac{g_0 R^2}{(R + h)^2}$$

D'où :

$$g = g_0\frac{R^2}{(R + h)^2}$$

C'est l'expression de l'intensité du champ de pesanteur g à l'altitude h, en fonction de g_0, intensité de la pesanteur au sol.

Activité 16 : Un satellite artificiel de masse *M = 60Kg* décrit autour de la terre une orbite à l'altitude h sous la seule action de son poids. A cette altitude l'intensité du champ de pesanteur est :

$$g = g_0\frac{R^2}{(R + h)^2}$$

Avec g_0, l'intensité du champ de pesanteur au sol et *R*, le rayon de la terre supposée homogène et sphérique. On prendra g_0 = *9,8m/s^2 et R = 6400Km.*

1°) a) Quelle est la nature du mouvement du centre d'inertie du satellite ?

b) Etablis l'expression de la durée T d'une révolution autour de le terre.

c) Quelles sont les expressions de la vitesse angulaire ω et de la vitesse linéaire v du satellite sur sa trajectoire ?

2°) Sachant que le satellite est géostationnaire (sa trajectoire est circulaire dans le plan équatorial de la terre et il a la même vitesse de rotation que la terre), calcule :

a) Son altitude h ;

b) Son énergie cinétique.

Corrigé 16 :
$M = 60Kg$; $g_0 = 9{,}8m/s^2$; $R = 6400Km$.

1°) a) Nature du mouvement du centre d'inertie du satellite.

✓ ***Schéma***

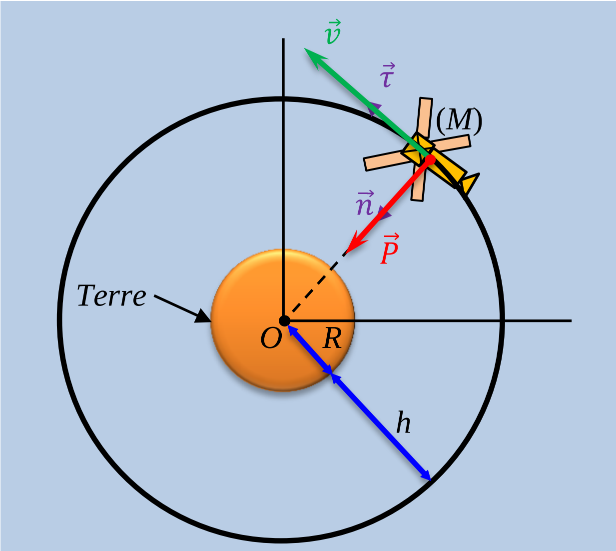


Figure 29.

✓ ***Référentiel d'étude : géocentrique.***
✓ ***Système d'étude :*** Satellite de masse (M) en translation curviligne ;
✓ **B.F.E.A :** $\vec{P}$.
✓ ***T.C.I :*** $\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_G$
$\Rightarrow \quad \vec{P} = M\vec{a}_G$
✓ ***Projection suivant l'axe tangentiel :***

$$0 = Ma_{G\tau} \Rightarrow M\frac{dv}{dt} = 0$$

$$M \neq 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0, \ alors\ v = cte$$

✓ ***Projection suivant l'axe normal :***

$$P = Ma_{Gn} \Rightarrow a_n = g = g_0\frac{R^2}{(R+h)^2}$$

$$\Rightarrow a_n = cte$$

Conclusion :

$$\begin{cases} a_\tau = \dfrac{dv}{dt} = 0, \ alors\ v = cte \\ a_n = g = g_0\dfrac{R^2}{(R+h)^2} = cte \end{cases}$$

Le satellite est animé d'un mouvement circulaire uniforme (MCU).

b) Expression de la période T de révolution :

Par définition : $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

or $v = (R+h)\omega \Rightarrow \omega = \dfrac{v}{R+h}$

Ainsi $T = \dfrac{2\pi(R+h)}{v}$

De plus $a_n = g \Rightarrow \dfrac{v^2}{R+h} = g_0\dfrac{R^2}{(R+h)^2}$

$\Rightarrow v = \sqrt{\dfrac{g_0R^2}{R+h}}$

D'où :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{(R+h)^3}{g_0}}}$$

c) Expressions de ω et v.

$$a_n = \frac{v^2}{R+h} = g_0\frac{R^2}{(R+h)^2}$$

D'où :

$$\boxed{v = R\sqrt{\frac{g_0}{R+h}}}$$

$$\omega = \frac{v}{R+h} = \frac{R}{R+h}\sqrt{\frac{g_0}{R+h}}$$

D'où :

$$\boxed{\omega = R\sqrt{\frac{g_0}{(R+h)^3}}}$$

2°) a) Calcul de h.

$$T = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{(R+h)^3}{g_0}}$$

$$\Rightarrow T^2 = \left(\frac{2\pi}{R}\right)^2 \cdot \frac{(R+h)^3}{g_0}$$

$$\Rightarrow (R+h)^3 = \frac{g_0 . T^2 . R^2}{4\pi^2}$$

D'où :

$$\boxed{h = \sqrt[3]{\frac{g_0 . T^2 . R^2}{4\pi^2}} - R}$$

A.N : avec $T = 24h$.

$$h = \sqrt[3]{\frac{9{,}8 \times (8{,}64.10^4)^2 \times (64.10^5)^2}{4 \times (3{,}14)^2}} - 64.10^5$$

$$\boxed{h = 3{,}595.10^7 m \simeq 36.000Km}$$

c) Energie cinétique.

Par définition :

$$E_C = \frac{1}{2}Mv^2$$

D'où :

$$\boxed{E_C = \frac{MR^2 g_0}{2(R + h)}}$$

$$\boldsymbol{A.N}: \; E_C = \frac{60 \times (64.10^5)^2 \times 9{,}8}{2(64.10^5 + 3{,}595.10^7)}$$

$$\boxed{E_C = 2{,}84.10^8 J}$$

Remarques:

R₁ : *Un satellite géostationnaire est un satellite qui tourne sur une orbite circulaire dans le même sens que la terre, avec la même vitesse angulaire qu'elle, autour du même axe puisque sa trajectoire est dans le plan équatorial.*

Sa *période de révolution* vaut celle de la terre $(T \simeq 24h)$.

R₂ : *L'orbite est la trajectoire circulaire suivie par le satellite autour de la terre ; elle dépend de la hauteur :*

$$\boxed{s = 2\pi(R + h)}$$

B.5. Mouvement d'un pendule conique.

- **Description :**

Le pendule conique est composé :

- ✓ *D'un point matériel de masse m ;*
- ✓ *D'un fil inextensible auquel se fixe le point matériel à son extrémité inférieure, tandis que son extrémité supérieure est attachée à une tige verticale en rotation autour d'elle – même.*

Lorsque la rotation de la tige entrainant le fil et le point matériel atteint une valeur ω_0, le fil s'écarte de la tige d'un angle θ et le point matériel décrit une trajectoire circulaire : *l'ensemble forme un cône d'angle au sommet* 2θ *et dont la base est délimitée par la trajectoire circulaire du point matériel.*

On obtient ainsi un pendule conique (figure 30).

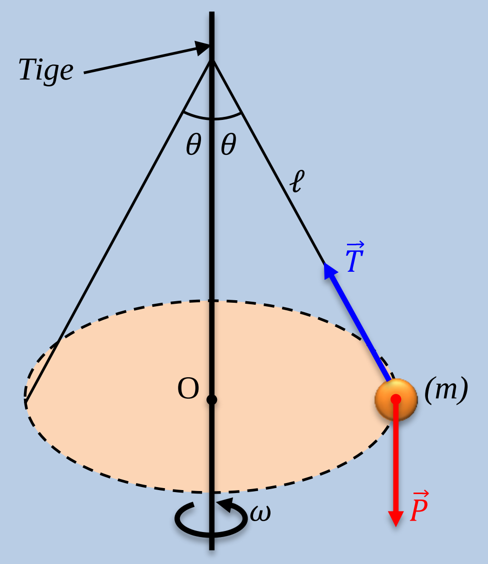


Figure 30.

Activité 17 : On considère une bille ponctuelle de masse m suspendue à un fil de longueur ℓ et de masse négligeable. Le pendule est mis en rotation uniforme autour d'un axe vertical passant par un point d'attache du fil.

1°) On appelle α l'angle dont le fil est incliné par rapport à la verticale quand le pendule est en rotation uniforme.

Exprime α en fonction de la longueur du fil, de la vitesse angulaire ω, et de l'accélération de la pésanteur g.

2°) Montre que la situation précedente est atteinte si ω est supérieure à une valeur ω_0 que l'on déterminera.

3°) Calcule la tension du fil.

Données : m = 5g ; ℓ = 20cm ; g = 9,8m.s⁻² ;
ω = 8rad.s⁻¹.

Corrigé 17 :

$m = 5g$; $\ell = 20cm$; $g = 9{,}8 m.s^{-2}$; $\omega = 8 rad.s^{-1}$.

1°) Expression de α en fonction de ℓ, ω et g.

- ✓ ***Schéma***

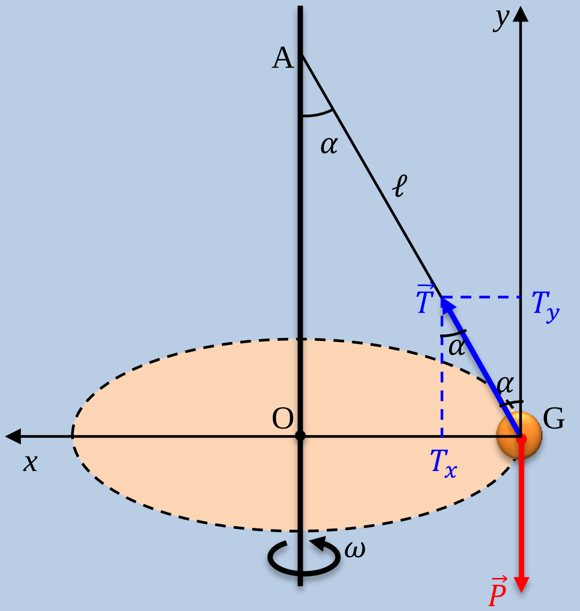


Figure 31.

- ✓ ***R.T.S.G ;***
- ✓ ***Système d'étude :*** Point matériel de masse (m) en translation curviligne ;
- ✓ ***B.F.E.A*** : $\vec{P}$; $\vec{T}$;
- ✓ ***T.C.I :*** $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_{1G}$

$$\Rightarrow \quad \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}_G$$

- ✓ ***Projection du T.C.I suivant (Gx) :***

$$0 + T_x = ma_{Gn} \quad ; \quad \sin\alpha = \frac{T_x}{T}$$

$$\Rightarrow \quad T\sin\alpha = ma_{Gn} \quad (1)$$

- ✓ ***Projection du T.C.I suivant (Oy) :***

$$-P + T_y = 0 \quad ; \quad \cos\alpha = \frac{T_y}{T}$$

$$\Rightarrow \quad T\cos\alpha = mg \quad (2)$$

En faisant le rapport des relations (1) et (2) :

$$\frac{(1)}{(2)} = \frac{T\sin\alpha}{T\cos\alpha} = \frac{ma_G}{mg}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{a_n}{g}\cos\alpha$$

Or dans le triangle OAG, on a :

$$\sin\alpha = \frac{R}{\ell}$$

Alors :

$$\frac{R}{\ell} = \frac{v^2}{Rg}\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{R^2 g}{\ell v^2} = \frac{R^2 g}{\ell R^2 \omega^2}$$

D'où :

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{g}{\ell\omega^2}}$$

2°) Montrons que le fil s'écarte de la tige pour $\omega \geq \omega_0$

$$\cos\alpha = \frac{g}{\ell\omega^2}$$

$$or \quad \cos\alpha \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{g}{\ell\omega^2} \leq 1 \Rightarrow \omega^2 \geq \frac{g}{\ell}$$

D'où :

$$\boxed{\omega \geq \sqrt{\frac{g}{\ell}}}$$

Si on pose

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad , \quad alors \quad \boxed{\omega \geq \omega_0}$$

Conclusion : *Pour que le fil s'écarte de la tige, il faut que la vitesse de rotation de cette tige soit supérieure à la valeur limite :*

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}}$$

$$A.N : \omega_0 = \sqrt{\frac{9{,}8}{0{,}2}} = 7$$

$$\boxed{\omega \geq \omega_0 = 7 rad.s^{-1}}$$

3°) Tension du fil.

De la relation (2) : $T\cos\alpha = mg$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{mg}{\cos\alpha} = mg.\frac{\ell\omega^2}{g} = m\ell\omega^2$$

D'où :

$$\boxed{T = m\ell\omega^2}$$

$$A.N : \quad T = 0{,}05 \times 0{,}2 \times 8^2 = 0{,}64$$

$$\boxed{T = 0{,}64N}$$

Remarque :

Dans le cas où le fil est remplacé par un ressort de constante de raideur K :

$$\boxed{T = K\Delta\ell = K(\ell - \ell_0)}$$

Avec :

K : Constante de raideur du ressort (N/m) ;
ℓ : Longueur du ressort en mouvement ;
ℓ_0 : Longueur à vide du ressort ;
$\Delta\ell$: Allongement du ressort.

B.6. Mouvement d'un cycliste abordant un virage.

Activité 18 : Un cycliste aborde en roue libre un virage circulaire de rayon $r = 100m$ à la vitesse $v = 36Km/h$. La piste est telle qu'il n'y a aucun frottement.
1°) Montre que si la piste a un profil horizontal, le mouvement s'effectue à la vitesse constante et que, en conséquence le cycliste ne peut pas prendre le virage.
2°) Dans un deuxième temps, envisage le cas où la piste est relevée et calcule l'angle α dont il faut relever la piste pour que le cycliste puisse prendre le virage.

Corrigé 18 :
r = 100m ; v = 36Km/h.

1°) Montrons que si la piste a un profil horizontal et que la vitesse est constante, le cycliste ne peut pas prendre le virage.

- ***Schéma***

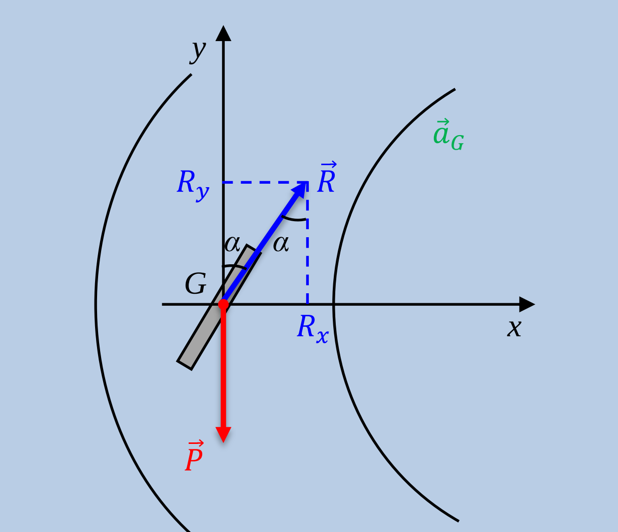


Figure 32.

- ***R.T.S.G*** ;
- ***Système d'étude :*** Cycliste de masse (m) en translation curviligne ;
- ***B.F.E.A*** : $\vec{P}$; $\vec{R}$;
- ***T.C.I*** : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$

$\Rightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}_G$
- ***Projection du T.C.I suivant (Gx) :***

$0 + R_x = ma_{Gn}$; $sin\alpha = \dfrac{R_x}{R}$

$\Rightarrow Rsin\alpha = ma_{Gn} \quad (1)$

- ***Projection du T.C.I suivant (Gy) :***

$-P + R_y = 0$; $cos\alpha = \dfrac{R_y}{R}$

$\Rightarrow Rcos\alpha = mg \quad (2)$

En faisant le rapport des relations (1) et (2) :

$$\frac{(1)}{(2)} = \frac{Rsin\alpha}{Rcos\alpha} = \frac{ma_{Gn}}{mg}$$

$$\Rightarrow tan\alpha = \frac{a_n}{g}, \qquad avec\ a_n = \frac{v^2}{r}$$

d'où :

$$\boxed{tan\alpha = \frac{v^2}{rg}}$$

Conclusion : $v = cte \neq 0 ; r \neq 0 ; g \neq 0$
Alors $tan\alpha = cte \neq 0$ *donc* $\alpha \neq 0$.
Si le cycliste ne s'incline pas d'un angle α, il derrape, donc il ne pas prendre le virage.

Par conséquent pour qu'un cycliste puisse prendre un virage sur une piste plane horizontale, il doit s'incliner d'un angle α, par rapport à la verticale, vers l'intérieur du virage.

2°) Valeur de l'angle α dont il faut relever la piste pour que le cycliste puisse prendre le virage.

Pour que le cycliste puisse prendre le virage à une vitesse constante, sur une piste relevée d'un angle α par rapport à l'horizontal, il doit se placer perpendiculairement à la piste.

- ***Schéma***

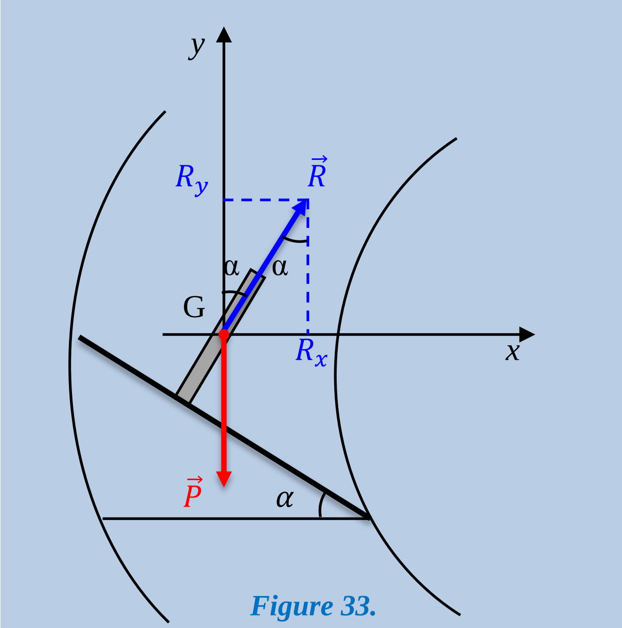


Figure 33.

- ***R.T.S.G*** ;
- ***Système d'étude*** : Cycliste de masse (m) en translation curviligne ;
- ***B.F.E.A*** : $\vec{P}$; $\vec{R}$;
- ***T.C.I*** : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$

$\Rightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}_G$

- ***Projection du T.C.I suivant (Gx)*** :

$0 + R_x = ma_{Gn}$; $sin\alpha = \frac{R_x}{R}$

$\Rightarrow Rsin\alpha = ma_{Gn} \quad (1)$

- ***Projection du T.C.I suivant (Gy)*** :

$-P + R_y = 0$; $cos\alpha = \frac{R_y}{R}$

$\Rightarrow Rcos\alpha = mg \quad (2)$

En faisant le rapport des relations (1) et (2) :

$$\frac{(1)}{(2)} = \frac{Rsin\alpha}{Rcos\alpha} = \frac{ma_{Gn}}{mg}$$

$$\Rightarrow tan\alpha = \frac{a_n}{g}$$

avec $a_n = \frac{v^2}{r} \Rightarrow tan\alpha = \frac{v^2}{rg}$

D'où :

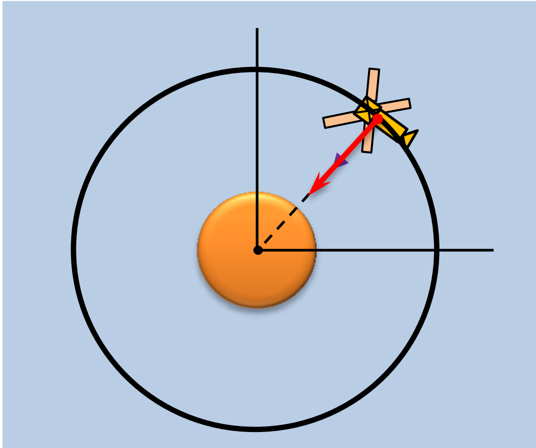
$$\boxed{\alpha = tan^{-1}\left(\frac{v^2}{rg}\right)}$$

$$\boldsymbol{A.N}: \alpha = tan^{-1}\left(\frac{10^2}{100 \times 10}\right) = 5{,}71$$

$$\boxed{\alpha = 5{,}71\,°}$$

Conclusion : *Pour que le cycliste puisse prendre le virage à la vitesse constante de 36Km/h, il faut que la piste soit relevée d'un angle $\alpha = 5{,}71°$ par rapport à l'horizontal.*

TRAVAUX DIRIGES IV



Conseils pratiques :

1. Techniques de réalisation des schémas.
2. Projection des forces dans un repère.
3. Principes de la dynamique ou lois de Newton.
4. Etude dynamique d'un système en mouvement.
5. Caractéristiques d'un mouvement (trajectoire, vitesse, accélération…)

L'ESSENTIEL DU COURS

I – Définitions notions.

Définis les termes suivants : Point matériel, Système matériel, Force intérieure, Force extérieure, Masse d'un système, Centre d'inertie d'un système, Vecteur quantité de mouvement, Flèche et portée.

II – Questions à réponses courtes.

Réponds aux questions suivantes :

1°) Enonce les trois lois de Newton relatives à la dynamique.

2°) Quand dit – on qu'un mobile est animé d'un mouvement de :

a) Translation ;
b) Translation rectiligne ;
c) Translation curviligne.

Donne un exemple dans chaque cas.

3°) Enonce le théorème du centre d'inertie puis donne son expression mathématique.

4°) Ecris l'expression mathématique de la loi de gravitation universelle entre deux corps de masses respectifs m_A et m_B et distants de d.

III – Texte à Trous.

Ecris les phrases suivantes en complétant les mots manquants :

1°) Une force ….(1)…. est une force exercée par une partie du système sur une autre ….(2)…. de ce dernier ; alors qu'une force extérieure est exercée par une partie du système avec le ….(3)…. extérieur.

2°) Dans un référentiel galiléen, le centre d'inertie d'un système isolé est soit au ….(4)…. soit en mouvement rectiligne ….(5)…. C'est le principe de….(6)…. ou ….(7)…. de Newton.

3°) A l'intérieur d'un condensateur dont les plaques sont appelées….(8)…. règne un champ ….(9)…. uniforme dirigé dans le sens des potentiels ….(10)…. Lorsqu'une particule de charge q animé d'une vitesse $\vec{v}$ pénètre dans cet espace où règne un champ électrostatique uniforme $\vec{E}$, il est soumis à la force de….(11)…. ou force ….(12)…. $\vec{F} = q.\vec{E}$; tandis qu'elle est soumise à la force magnétique….(13)…. , encore appelée force de ….(14)…. , lorsqu'elle pénètre dans un champ magnétique d'….(15)…. $\vec{B}$.

IV – Appariement.

Relie un élément – question de la colonne A à un élément – réponse de la colonne B dans le tableau ci – dessous : *Exemple $a_{11} = b_{13}$.*

Colonne A		Colonne B	
a_1	Lois de la gravitation universelle	b_1	$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G$
a_2	Force de coulomb	b_2	Pendule conique

a_3	Intensité du champ de pesanteur	b_3	$s = 2\pi(R + h)$
a_4	Force de Lorentz	b_4	Corps de masse m en chute libre
a_5	Théorème du centre d'inertie	b_5	$\vec{F} = q.\vec{E}$
a_6	Satellite géostationnaire	b_6	Particule chargé dans un champ électrique
a_7	Mouvement circulaire uniforme	b_7	$F = F' = K\frac{m_A.m_B}{r^2}$
a_8	Mouvement curviligne	b_8	Particule chargée dans un champ magnétique
a_9	Mouvement rectiligne uniformément varié	b_9	h = 36000Km
a_{10}	Accélération normale	b_{10}	$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$
a_{11}	Orbite d'un satellite	b_{11}	$g = g_0.\frac{R^2}{(R + h)^2}$

V – Questions à alternative vrai ou faux.

Réponds par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

1°) Au cours d'un mouvement de chute libre, l'accélération du solide prend la valeur $\vec{a} = -\vec{g}$.
2°) Le vecteur quantité de mouvement $\vec{p}$ se conserve au cours des chocs.
3°) Le vecteur vitesse d'un corps en mouvement est toujours tangent à la trajectoire.
4°) Le théorème du centre d'inertie (TCI) ne s'applique qu'aux systèmes en mouvement de translation rectiligne.
5°) La trajectoire décrite par une particule chargée dans un champ magnétique est curviligne.
6°) Lorsque l'accélération d'un mobile est normale à sa trajectoire, celui est animé d'un mouvement circulaire.
7°) La trajectoire d'un satellite est nécessairement dans le plan équatorial.
8°) Pour qu'un cycliste abordant un virage à vitesse constante, sur une chaussé relevée d'un angle α, réussisse son virage, il doit se placer perpendiculairement à la chaussée.
9°) Un pendule placé dans un véhicule s'incline dans le sens contraire de celui du vecteur accélération du véhicule.
10°) Un satellite géostationnaire tourne à la même vitesse de rotation de la terre ; pour cela il paraît immobile pour un observateur terrestre.

VI – Réarrangement

Ordonne le texte suivant qui est écrit en désordre.

suspendu à / est composé d'un point / Un pendule conique / l'extrémité inférieure / d'elle – même / d'un fil inextensible / matériel de masse m / en rotation autour / attaché à une tige verticale.

RESOLUTION DES PROBLEMES

Mouvement d'un solide sur un plan incliné.

EXERCICE 1 : Sur un plan incliné de *30°* par rapport à l'horizontale, on tire à l'aide d'un câble, une caisse de masse *5Kg*. Partie sans vitesse initiale, celle – ci atteint la vitesse de *2m/s* lorsqu'elle s'élève de *1m*.
1°) Quelle est la durée de cette élévation ?
2°) Quelle doit – être la force de traction pour qu'il en soit ainsi ?
On admettra que les forces de frottement sont négligeables. On prendra $g = 10m/s^2$.

EXERCICE 2 : Un wagon de *20 tonnes* est lâché sans vitesse initiale sur une voie dont la pente est de *2%.*
1°) En négligeant les frottements et la résistance de l'air, écris l'équation du mouvement du wagon le long de la voie. Calcule en *Km/h* la vitesse acquise à *500m* du point de départ.
2°) Le wagon ayant ainsi parcouru *500m*, les freins sont serrés ; leur action équivaut à une force opposée au vecteur vitesse et égale au *1/10* du poids du wagon. Quel est, à partir de cet instant, le chemin parcouru par le wagon jusqu'à l'arrêt complet ?

3°) En prenant pour origine des dates l'instant du lâché, détermine la date de l'arrêt.
On prendra $g = 10m/s^2$.

EXERCICE 3 : Un solide de masse $m = 20\ Kg$ glisse le long d'une ligne de plus grande pente d'un plan incliné d'un angle $\alpha = 30°$ avec l'horizontale, la réaction $\vec{R}$ supposé constante, exercée par le plan sur le solide, fait un angle avec la normale au plan.
1°) Enonce le théorème du centre d'inertie et exprime l'accélération du mobile en fonction de α, m, R et g.
2°) Lâché sans vitesse initiale, le mobile parcourt une distance $d = 5{,}0m$ en une durée $t = 1{,}5s$. Calcule l'accélération du mobile.
3°) Calcule la norme de $\vec{R}$ et déduis – en la valeur de l'angle β que font la réaction $\vec{R}$ et la normale plan. Prendre : $g = 10m/s^2$.

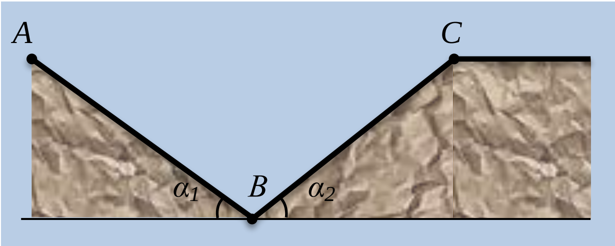
EXERCICE 4 : Dans un parc d'attraction, un élève de la classe de terminale scientifique veut vérifier l'état de la surface de contact de la piste d'un toboggan incliné de $20°$ par rapport à l'horizontale. Il part avec l'hypothèse que s'il existe des forces de frottement sur la piste, la durée d'un parcours de longueur $3m$ sera supérieure à $1{,}8s$. Pour le vérifier, il lâche du sommet O de cette piste un solide de masse $m = 200g$ qui glisse sur une distance $OB = L = 3m$. On prendra $g = 10m.s^{-2}$.
1°) Il suppose les frottements négligeables.

a) En appliquant le théorème du centre d'inertie, donne l'expression de l'accélération du mouvement de ce solide et fais l'application numérique.
b) Donne les équations horaires du mouvement en supposant qu'à l'instant initial, la position du mobile est nulle.
c) Détermine la durée de la descente et la vitesse atteinte en B.

2°) En réalité, la durée du parcours est $t = 2s$. Il conclut qu'il existe des forces de frottement sur la piste. Détermine alors l'accélération réelle du mouvement.
3°) Déduis – en l'intensité des forces de frottement sur la piste.

EXERCICE 5 : Une voiture de masse $m = 800Kg$, monte un plan incliné de pente 8%. A la date $t = 0$, le centre d'inertie G de la voiture est en A qui sera pris comme origine des abscisses et sa vitesse vaut $V_A = 72Km/h$. A la date t_1, G est en B et sa vitesse vaut $V_B = 90Km/h$. Au cours de la montée, le mouvement de la voiture est assimilable à celui d'un solide en translation rectiligne et les frottements équivalent à une force $\vec{f}$ parallèle à $x'x$ et d'intensité constante $f = 400N$.
La force motrice $\vec{F}$ parallèle à $x'x$ a une intensité constante de $F = 1800N$.
1°) Etablis l'expression de l'accélération de la voiture en fonction de F, f, m, g et l'angle θ du plan incliné.
2°) Calcule la durée t_1 du trajet AB ainsi que la distance parcourue.
3°) Lorsque G passe en B la force motrice est supprimée, la vitesse de la voiture s'annule en un point C et la force de frottement a les mêmes caractéristiques.
Etablis l'expression de la distance $BC = L$ en fonction de V_B, f, m et θ, puis calcule L. Prendre $g = 10m.s^{-2}$.

EXERCICE 6 : Un cycliste de masse $m = 80Kg$, partant du repos descend sans pédaler une côte AB de longueur $30m$ et il atteint B avec une vitesse de $36Km/h$.
1°) Quelle est approximativement la pente de la route exprimer en %.
2°) Arrivé en B, le cycliste remonte, en pédalant cette fois – ci une côte BC longue de $100m$ et de pente 2%, il exerce une force de $25N$. Avec quelle vitesse aborde – t – il le palier horizontal qui succède en C un tronçon en remontant, sachant que le plan oppose des frottements dont la résultante a pour norme $f = 1N$?
3°) Quelle est la durée du trajet ABC ?
On donne : $g = 10m.s^{-2}$.



EXERCICE 7 : Un skieur de masse $m = 80Kg$ descend une côte de pente égale à 6%. Il commence la descente avec une vitesse égale à $15m.s^{-1}$. La vitesse devient égale à $18m.s^{-1}$ après un parcourt de $100m$.
1°) Montre que le skieur est soumis à une action de freinage. Détermine les caractéristiques (point d'application, direction, module) du vecteur réaction $\vec{R}$ de la piste sur le skieur.
2°) Calcule la variation de la quantité de mouvement du skieur après un parcourt de 100m ;

vérifie qu'elle est égale à l'impulsion I reçue. On donne : $g = 10m.s^{-2}$.

Mouvement d'un solide sur un plan horizontal.

EXERCICE 8 : 1°) Un camion dont la masse totale a pour valeur *M = 7 tonnes* démarre sur une route rectiligne et horizontale. Il atteint une vitesse de *60Km/h* en *4* minutes et continue ensuite sa route à vitesse constante. Les forces de frottements sont opposés à la vitesse et d'intensité $f = 500N$. Calcule l'intensité de la force de traction développée par le moteur.

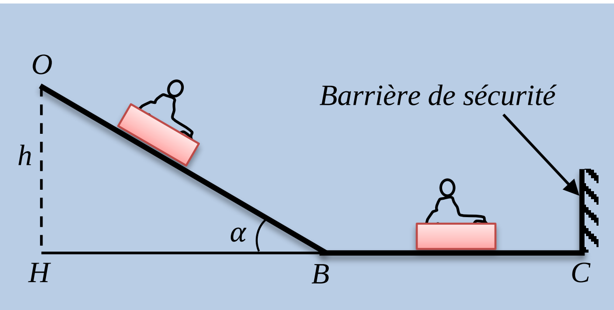
a) Quand le mouvement est rectiligne uniforme ;
b) Au cours du démarrage, en mouvement rectiligne uniformément accéléré.

2°) Pour arrêter le camion, le chauffeur débraie le moteur supprimant ainsi la force de traction et en même temps il serre les freins. Le mouvement toujours rectiligne devient alors uniformément retardé. Le véhicule a la vitesse de *60Km/h* et s'arrête sur un parcours de *200m*. Calcule la force de freinage et le temps mis pour s'arrêter.

EXERCICE 9 : Au cours d'un jeu d'attraction, deux enfants se plaisent à glisser le long d'une piste *OBC*. Le jeu consiste à communiquer une vitesse à celui qui prend place sur une luge afin qu'il atteigne le point *C* avec une vitesse nulle puisqu'au – delà de ce point, il y risque de heurter la barrière de sécurité.

On veut évaluer la distance parcourue par la luge sur la partie horizontale de la piste connaissant la vitesse de départ au point *O*.

Pour ce faire, un enfant prend place sur la luge au sommet *O* d'une piste parfaitement plane, de longueur $\ell = OB = 50m$ et de dénivellation $OH = h = 10m$ (voir figure).



L'ensemble forme un solide de masse $m = 50Kg$. Les forces de frottement exercées par la piste sur la luge sont équivalentes à une force $\vec{f}$ parallèle et opposée à la trajectoire et d'intensité $f = 41,5N$. On donne $g = 10m.s^{-2}$.

1°) Un autre enfant communique à l'ensemble (luge – enfant) en *O* une vitesse initiale $V_0 = 2m.s^{-1}$, dirigée vers le bas et selon la ligne de plus grande *OB*.

a) Donne l'expression de l'accélération de la luge en fonction de *f*, *g*, *m*, *ℓ* et *h*. Fais l'application numérique ;
b) Détermine la valeur V_B de la vitesse de la luge au point *B* ;
c) Déduis la durée de la descente.

2°) Au bas de la pente, la luge aborde une piste horizontale ; les forces de frottement gardent la même valeur. On admettra qu'en *B*, il n'y a pas de modification de la valeur de la vitesse. Détermine :

a) La nouvelle accélération de la luge ;
b) La distance parcourue jusqu'à l'arrêt sur la piste horizontale ;
c) La distance *BC = 73m*, la luge heurte – t – elle la barrière de sécurité ? Justifie.

EXERCICE 10 : Une automobile de masse *M = 1000Kg* tire une caravane de masse *M' = 2000Kg* sur une route rectiligne horizontale. Les forces de frottement et la résistance de l'air sont équivalentes à deux forces $\vec{f}$ et $\vec{f}'$, exercées respectivement sur l'automobile et sur la caravane, de même direction que celle du mouvement, de sens contraire et d'intensité $f = f' = 200N$.

1°) Le convoi passe devant le point *A* à la vitesse de $72Km.h^{-1}$ et le conducteur veut atteindre la vitesse de $108Km.h^{-1}$ en un point *B* situé à *125m* de *A*. Détermine :

a) La force motrice développée par le moteur de l'automobile.
b) La tension de la barre d'attache entre l'automobile et la caravane (la masse de la barre est négligeable).

2°) La barre d'attache entre l'automobile et la caravane se casse.

a) Quel est le mouvement ultérieur de la caravane ?
b) Calcule l'intensité de la réaction du sol sur la caravane.

3°) Quelle distance a – t – il parcouru pendant cette période ?

Mouvement d'un solide en chute libre.

EXERCICE 11 : Un joueur de tennis lance une balle de masse *m* à la verticale pour effectuer un service. On prendra $g = 10m.s^{-2}$. A $t = 0$, il lance la balle, animée d'une vitesse $v_0 = 6,9m.s^{-1}$ à la hauteur $z_0 = 1,6m$.

1°) – Détermine l'expression de la côte z en fonction du temps.
2°) – Le joueur frappe la balle à l'instant t_1 lorsqu'elle se trouve à une hauteur $z_1 = 2{,}5m$. Que vaut t_1 si la balle est alors :

- en phase ascendante ?
- en phase descendante ?

3°) – Détermine la hauteur maximale atteinte en fonction de v_0, z_0 et g si le joueur ne frappe pas la balle dans la phase ascendante.
4°) – Quelle devrait être la valeur de v_0 pour que la balle atteigne exactement la hauteur z_1 avant de retomber ?

EXERCICE 12 : Une bille B_1 est lancée vers le haut à partir d'un point A, avec une vitesse initiale $v_0 = 15m.s^{-1}$.
1°) Ecris l'équation horaire du mouvement de B_1 en prenant comme origine des abscisses le point A et l'origine des temps l'instant du lancement.
2°) Quelle est l'altitude maximale atteinte par la bille ? Quelle est la durée de l'ascension ?
3°) Une seconde après le départ de B_1, on lance une bille B_2 dans les mêmes conditions.
a) A quelle altitude et à quel instant B_1 et B_2 se rencontrent elles ?
b) Quelles sont les vitesses de B_1 et B_2 juste avant la rencontre ?

EXERCICE 13 : On étudie le mouvement de chute suivant une même verticale de deux billes assimilables à des points matériels de masse respective m et m'. On donne $a = 10m.s^{-2}$.
1°) D'un point O, on lance une première bille A verticalement vers le haut avec une vitesse $\overrightarrow{V_0}$.
a) Ecris l'équation horaire de son mouvement en précisant les repères de temps et d'espaces choisis.
b) Quelle est l'altitude maximale atteinte par cette bille ? A quelle date atteint – elle ce maximum ? On prendra $V_0 = 30m.s^{-1}$.
2°) Trois secondes après le départ de la bille A, on lance une deuxième bille B verticalement à partir du même point O avec la même vitesse $\overrightarrow{V_0}$.
a) Ecris l'équation du mouvement de B en prenant les mêmes repères que précédemment.
b) Quand et où les deux billes se rencontrent – elle ?

EXERCICE 14 : Un enfant lance du haut d'une falaise un caillou vers le haut avec une vitesse initiale $V_0 = 10m.s^{-1}$ et avec un retard θ, il laisse tomber un deuxième caillou vers le bas. La falaise ayant une hauteur de 20m :
1°) Quel doit être le retard θ pour que les deux billes arrivent ensemble au sol ?
2°) Calcule la vitesse des cailloux à l'arrivée au sol.
3°) – Où se trouvait le premier caillou lorsque le deuxième a été lâché, quel est le signe de sa vitesse à ce moment – là ? (On prendra le sens positif vers le haut).

EXERCICE 15 : Deux oranges O_1 et O_2 tombent en chute libre sans vitesse initiale. L'orange O_1 tombe d'une hauteur h_1 ; une seconde plus tard, l'orange O_2 tombe à son tour d'une hauteur h_2 $(h_1 - h_2) = 10m$. Les deux oranges O_1 et O_2 arrivent en même temps au sol.
Si t_1 et t_2 sont les durées de chute de O_1 et O_2.
1°) Ecris les équations horaires des mouvements de O_1 et O_2 en précisant les origines choisies.
2°) Calcule t_1 et déduis – en h_1, h_2 et t_2.
3°) Calcule les modules des vecteurs vitesses $\vec{v}_1$ de O_1 et $\vec{v}_2$ de O_2 à l'arrivée au sol.

EXERCICE 16 : Deux billes A et B sont placées sur la même verticale, A est au – dessus de B et distante de $1m$. A l'instant initial $t = 0$, on lâche A et dès qu'elle parcourt $50cm$, on lâche B toujours sans vitesse initiale.
1°) Etablis les équations horaires en prenant pour origine des espaces le point A.
2°) Au bout de quelle durée y aura – t – il choc entre les deux billes, supposées comme des points matériels ? A quelle distance le choc a – t – il lieu ?

EXERCICE 17 : Deux billes (A) et (B) assimilables à deux points matériels, sont lancées du même point suivant la verticale ascendante, l'une après l'autre. La vitesse initiale de la bille (A) est $V_A = 20m.s^{-1}$, celle de (B) est $V_B = 29m.s^{-1}$.
1°) – Quelle est l'altitude maximale atteinte par la bille (A) ? Quelle est la durée de son mouvement ascendant ?
2°) – On veut que la bille (B) touche la bille (A) à l'instant où celle – ci atteint l'altitude maximale. Calcule l'intervalle de temps qui doit s'écouler entre les instants de départ des deux billes. Détermine la vitesse de la bille (B) à l'instant du contact. On donne $g = 10m.s^{-2}$.

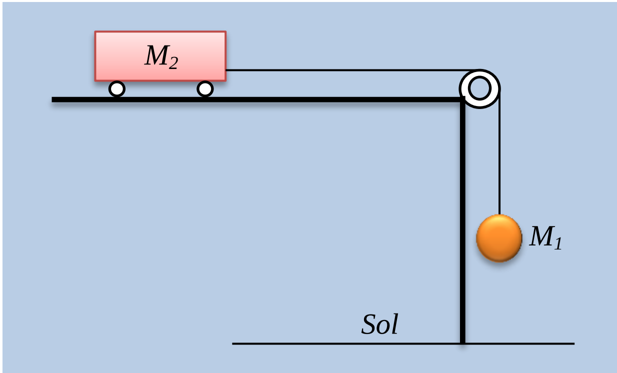
EXERCICE 18 : Une élève de la terminale scientifique veut connaitre la profondeur d'un puits. Il lâche à l'orifice du puits une bille. Il entend $5s$ plus tard le bruit du choc de la bille sur l'eau. Sachant que la hauteur de l'eau dans le puits est $2m$ et que la vitesse du son dans l'air est $340m.s^{-1}$. On demande de calculer la profondeur du puits. On donne $g = 9,8m.s^{-2}$.

EXERCICE 19 : Un observateur situé au bord d'une terrasse à la hauteur de *10m* au – dessus du sol, lance une pierre vers le haut. Quand celle – ci descend, il s'écoule *0,5s* entre son passage à côté de l'observateur et son arrivée au sol.
1°) Avec quelle vitesse la pierre est – elle passé à côté de l'observateur ?
2°) Jusqu'à quelle hauteur est – elle montée ?
3°) Ecris l'équation horaire du mouvement.
4°) Calcule l'intervalle de temps qui s'écoule entre le lancer de la pierre et son arrivée au sol.
On prendra $g = 10m.s^{-2}$.

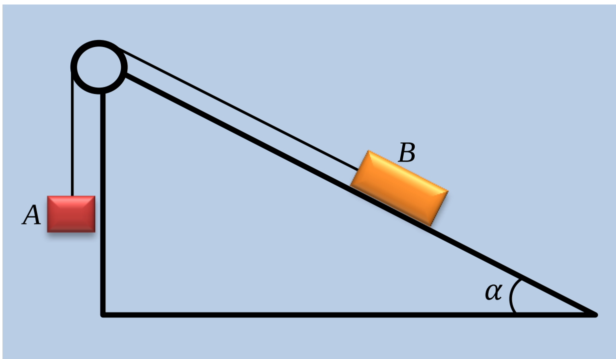
Mouvement d'une machine d'ATWOOD.

EXERCICE 20 : Une machine d'ATWOOD est constituée par deux masses $M = M' = 200g$, reliées par un fil passant sur une poulie de masse négligeable. On pose sur M une surcharge $m = 100g$ et l'on abandonne le système à lui – même.
1°) – Quelle est l'accélération prise par le système ?
2°) – Quelle vitesse possède le système lorsque les masses ont parcouru une distance de *0,245m* et combien de temps a duré ce parcourt.
3°) – Au bout du temps calculé précédemment la surcharge m est enlevée à l'aide d'un curseur. Quelle est alors la nature du mouvement des deux masses ?
Ce mouvement durant *0,25s*, quelle est la nouvelle distance parcourue ?
4°) – A ce moment le fil reliant les deux masses se rompt. Quel est le mouvement ultérieur de la masse *M'* ? Quelle est la distance parcourue par *M'* avant de redescendre ?

EXERCICE 21 : Une sphère de masse $M_1 = 2Kg$ est suspendue par un fil inextensible de masse négligeable qui, passant sur une poulie de masse également négligeable, tire un chariot de masse $M_2 = 3Kg$.
1°) Le chariot se déplace sur des rails horizontaux. On abandonne le système sans vitesse initiale, le fil étant bien tendu. Le mouvement étant supposé sans frottements, calcule :
   a) L'accélération du mouvement ;
   b) La tension du fil.
2°) Quand on abandonne le système à lui – même, la sphère se trouve à *10m* au – dessus du sol. En réalité, les frottements sont équivalents à une force de *2N* opposée au mouvement. Calcule :
   a) Le temps mis par la sphère pour toucher le sol ;
   b) La vitesse de cette sphère quand elle heurte le sol.

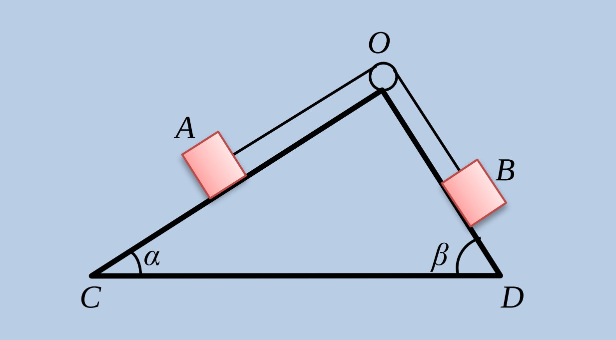


EXERCICE 22 : Un corps B de masse $M = 80g$ glisse sans frottement sur un plan incliné de *30°* par rapport au plan horizontal. Il est relié à un corps A de masse $m = 70g$ par un fil qui passe sur la gorge d'une poulie dont on négligera la masse.
1°) Quel est le sens du mouvement de ce système abandonné à lui – même ?
2°) Evalue l'accélération du système.
On donne : $g = 10m.s^{-2}$.
3°) Quelle est la tension du fil ?
4°) On suppose que A est à *3m* au – dessus du sol.
On abandonne à nouveau le système. Quelle est la durée du mouvement de A ?



EXERCICE 23 : Deux plans inclinés, parfaitement polis OC et OD, supportant respectivement deux corps A et B, attachés aux extrémités d'un fil inextensible de masse négligeable passant par la gorge d'une poulie d'axe horizontal passant par O. Les corps A et B, de masses M_A et M_B ont la forme de parallélépipède rectangle. Les brins du fil sont parallèles aux lignes de plus grande pente des plans inclinés et leur prolongement passe par le centre de gravité de chacun des corps. La poulie est parfaitement mobile autour de son axe. Le plan incliné OC, supportant M_A fait un angle $\alpha = 30°$

avec le plan horizontal ; le plan *OD* supportant M_B fait un angle $\beta = 45°$ avec le plan horizontal.



1°) Quelle devrait être la valeur de M_B pour que le système soit en équilibre si $M_A = 2Kg$?
2°) La masse $M_B = 1,8Kg$. Le système se met en mouvement de glissement, à compter d'un instant pris pour origine. Dis pourquoi le système se met – il en mouvement. En utilisant le principe fondamental de la dynamique et en négligeant la masse de la poulie, calcule :

a) L'accélération du mouvement ;
b) La vitesse acquise et l'espace parcouru au bout de *2s* par M_B.
c) La tension du fil.

Mouvement d'un pendule dans un véhicule.

EXERCICE 24 : 1°) Un fil suspendu en *O* au plafond d'un wagon, supporte en *A* une boule ponctuelle de masse $m = 500g$. Le wagon au repos sur une voie horizontale, démarre selon un mouvement uniformément accéléré et acquiert la vitesse de $36Km.h^{-1}$ en 5,0s. Détermine l'angle α formé par le fil *OA* et la verticale de *O*.
2°) Le wagon descend une rampe incliné de l'angle $\beta = 30°$ sur le plan horizontal. Le mouvement est uniformément accéléré, d'accélération $0,2m.s^{-2}$. Quelle est l'inclinaison α' du fil *OA* par rapport à la verticale ? Quelle est le module de la tension du fil.

Mouvement d'un projectile dans un champ de pesanteur.

EXERCICE 25 : Lors d'un match de football, un joueur frappe le ballon posé sur le sol. Celui – ci part avec une vitesse initiale $v_0 = 20m.s^{-1}$ faisant un angle $\alpha = 20°$ avec le sol horizontal. L'accélération de la pesanteur est $g = 10m.s^{-2}$. On néglige l'action de l'air. L'origine Des dates coïncide avec le lancer du ballon et le mouvement du centre d'inertie du ballon est étudié dans le repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).

a) Etablis en fonction de g, v_0 *et* α, l'équation de la trajectoire du ballon. Fais l'application numérique.
b) Un joueur de l'équipe adverse tente d'intercepter le ballon qui arrive au sol. A quelle distance doit – il se trouver pour réussir.

EXERCICE 26 : En un point *O*, à une date $t = 0$, un projectile *M* de masse *m* est lancé avec un vecteur vitesse $\vec{V_0}$ de norme V_0 faisant un angle de tir α avec l'horizontal *Ox*.
1°) Etablis dans le référentiel que l'on précisera, l'équation de la trajectoire du point *M*. Déduis – en la nature du mouvement.
2°) Quelle est l'altitude (hauteur) maximale *h*, atteinte par le projectile en *S*, sommet de la trajectoire ? Cette altitude maximale est appelée la flèche. Quelle est alors la vitesse au point *S* ?
3°) Détermine la portée du tir c'est – à – dire la distance (*OP*) entre le point de chute *P* sur l'horizontale te le point de lancement *O*.
4°) Quelle est l'énergie mécanique du système (M – terre) ? Retrouve l'altitude maximale calculée en 2).

EXERCICE 27 : Un projectile de masse *m* est lancé dans le champ de pesanteur terrestre considéré. La vitesse de lancement fait avec le plan horizontal un angle α. La résistance de l'air est négligeable. On étudie le mouvement du centre d'inertie du projectile : $V_0 = 200m.s^{-1}$; $g=9,8m.s^{-2}$.
1°) Etablis les équations horaires du mouvement.
2°) Etablis l'équation de la trajectoire. Déduis – en la nature du mouvement.
3°) Etablis l'expression de la portée horizontale.
4°) Détermine la portée maximale.
5°) Etablis l'expression de la flèche c'est – à – dire l'altitude maximale h_{max} atteinte par le projectile. Quelle est la valeur maximale de la flèche.
6°) Détermine la vitesse à l'altitude $h = 100m$ si $\alpha = 30°$.
7°) Le projectile étant lancé avec la vitesse V_0 calcule pour une portée horizontale $d = 2500m$:

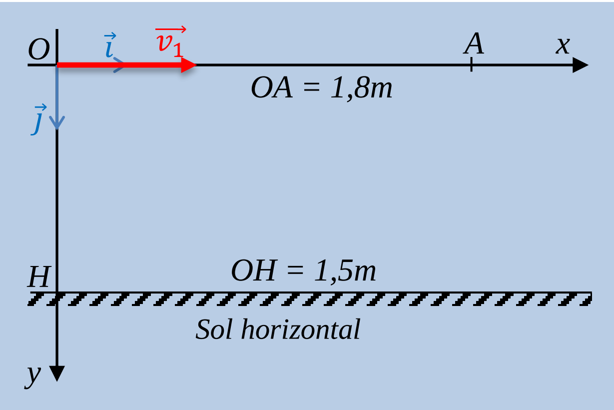
a) Les angles possibles de tir ;
b) La flèche ;
c) La durée du tir, l'impact se faisant sur le sol, plan horizontal contenant le point de lancement ;
d) La vitesse lors de l'impact.

EXERCICE 28 : Au cours d'un championnat, un athlète remporte l'épreuve du lancer de poids avec un jet de $x_1 = 19,43m$. Le « poids » a une masse de $7,35Kg$. La trajectoire part de *A* à une hauteur $h = 1,80m$ au – dessus du sol. Le vecteur vitesse $\vec{V_0}$

fait un angle α avec l'horizontale. On assimile le solide à un point matériel.
1°) Etablis l'équation cartésienne de la trajectoire en fonction de *h, tanα* et *g*.
Application numérique : $g = 9,8 m.s^{-2}$; $\alpha = 45°$.
2°) Détermine la norme de la vitesse initiale en fonction de *h, α, g* et x_1. Calcule V_0.
3°) Calcule la hauteur maximale et les coordonnées du vecteur vitesse au sommet de la trajectoire du projectile.
4°) Détermine la norme et la direction du vecteur vitesse du projectile au point $C(x_1 ; 0)$
On rappelle que $V^2 = V_x^2 + V_y^2$ et

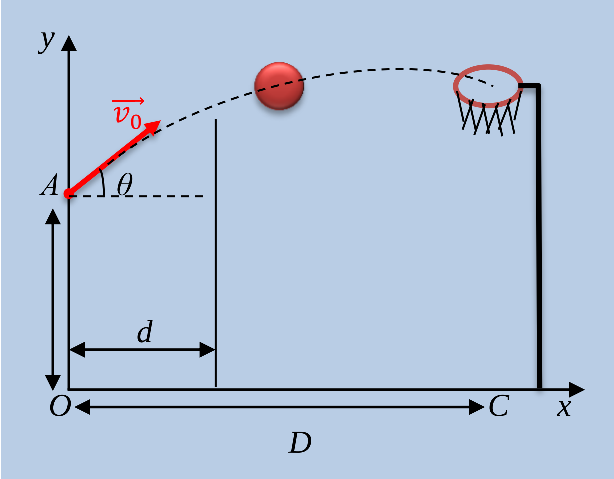
$$tan\beta = \frac{V_y}{V_x} \text{ avec } \beta = (\vec{\imath}, \vec{V}).$$

EXERCICE 29 : On étudie la chute de deux billes ponctuelles B_1 et B_2. La résistance de l'air est négligée et on prendra $g = 10 m.s^{-2}$. On raisonnera dans le repère (o, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) lié à la terre. L'origine des dates correspond à l'instant où les billes quittent le plan horizontal contenant *O* et *A*.



La bille B_1 de masse $m_1 = 10g$ est lancée horizontalement en *O* avec une vitesse $\vec{v_1}$. Au même instant la bille B_2 de masse $m_2 = 20g$ est lâchée sans vitesse en *A*.
1°) Fais une étude dynamique du mouvement de chaque bille et déduis – en l'expression de leur vecteur accélération dans le repère choisi.
2°) Etablis les équations des trajectoires de chaque bille. On prendra $v_1 = 2 m.s^{-1}$.
3°) Calcule les ordonnées de chaque bille à l'instant $t = 0,30s$.
4°) Calcule la durée de chute de chaque bille jusqu'au sol.

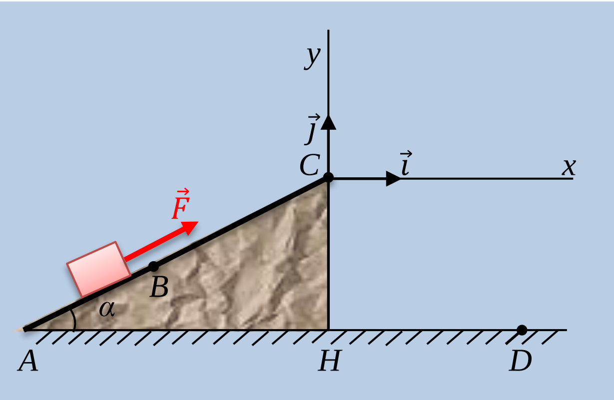
EXERCICE 30 : A/- D'un point A situé à *2m* du sol, un basketteur, sans adversaire lance le ballon au panier avec une vitesse $\vec{v_0}$ contenu dans le plan (*Oxy*) dont la direction du vecteur $\vec{v_0}$ fait un angle $\theta = 45°$ avec l'horizontale.
Etablis l'équation de la trajectoire suivie par le ballon dans le système d'axe indiqué en fonction de v_0.



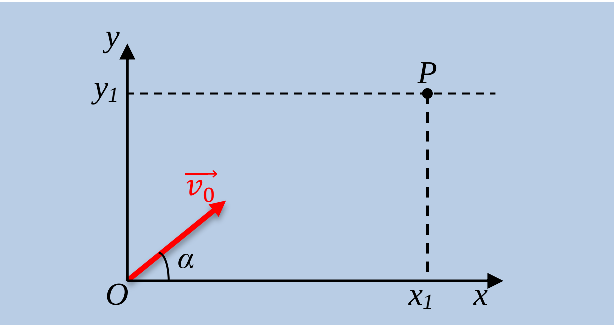
B/- Les verticales *A* du ballon et *C* du panier sont distants de *7,10m* et le centre est à *3,05m* de l'horizontale.
a) Quelle doit être la valeur de v_0 pour que le panier soit réussi ?
b) Quelle est la durée du trajet effectué par le ballon du point *A* au point *C* (centre du panier) ?
c) Voulant arrêter le ballon un adversaire situé à *0,90m* du tireur, verticalement, en levant les mains tendues atteint la hauteur de *2,80m* par rapport au sol. Le panier sera – t – il réussi si les valeurs de v_0 et de θ restant les mêmes que dans le cas précédent ?

EXERCICE 31 : Un corps assimilable à un point matériel de masse $m = 200g$ se déplace sans frottements sur une piste *ABC* rectiligne, inclinée de 30° par rapport au plan horizontal (voir figure).
1°) Le corps est lancé à partir de *A* sans vitesse initiale avec une force de traction $\vec{F}$ constante ne s'exerçant que sur la partie *AB* de longueur $\ell = 0,4m$.
a) Exprime la vitesse V_B d'arrivée en *B* en fonction de *g, m, F, ℓ* et *α* ;
b) Calcule l'intensité de la force de traction $\vec{F}$ pour que le corps parvienne en *C* avec une vitesse $\vec{V_C}$ de module 3,16m/s.
On donne : $BC = \ell' = 0,6m$; $g = 10 m/s^2$.
2°) A partir du point *C*, se produit une brusque rupture de pente et le corps ponctuel n'est plus soumis qu'à l'action de la pesanteur *g*.

a) Donne les équations horaires $x = f(t)$ et $y = g(t)$ du point matériel dans le repère $(C, \vec{i}, \vec{j})$ et déduis – en la trajectoire de son mouvement ultérieure.
b) Détermine les coordonnées du point d'impact D au sol.

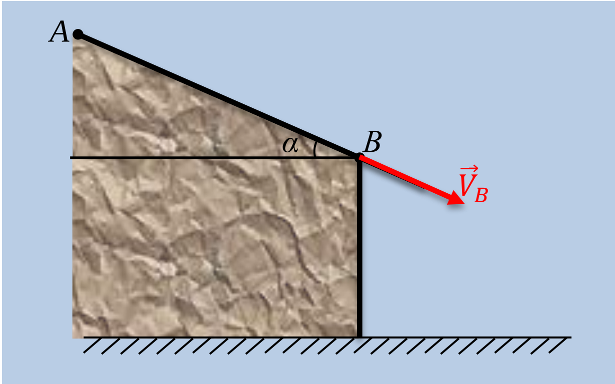


EXERCICE 32 : Dans le repère $(O,\vec{i}, \vec{j})$, on désire atteindre le point $P(x_1,y_1)$.



1°) – Etablis l'équation permettant de calculer la tangente de l'angle. Etudie les conditions d'existence des solutions, écris $y_1 = f(x_1)$ et Déduis – en l'ensemble des points susceptibles d'être atteint par le projectile.
2°) – **A.N :** $v_0 = 70m.s^{-1}$; $g = 9,8m.s^{-2}$.
Trace la courbe qui délimite l'ensemble des points P.
3°) – On considère le point P_1 de coordonnées $x_1 = 200m$ et $y_1 = 50m$.
a) Calcule les deux angles de tirs α et β, permettant d'atteindre P_1 et donne dans chaque cas la portée du projectile. Sur le graphique précédent, trace les trajectoires.
b) Calcule le rapport $\frac{t_\alpha}{t_\beta}$, rapport des durées des parcours de O à P_1 $(\alpha > \beta)$.

EXERCICE 33 : 1°) Un solide S, que l'on assimilera à un point matériel de masse $M = 200g$, peut glisser en suivant la ligne de plus grande pente d'un plan incliné qui forme un angle de $30°$ avec le plan horizontal.



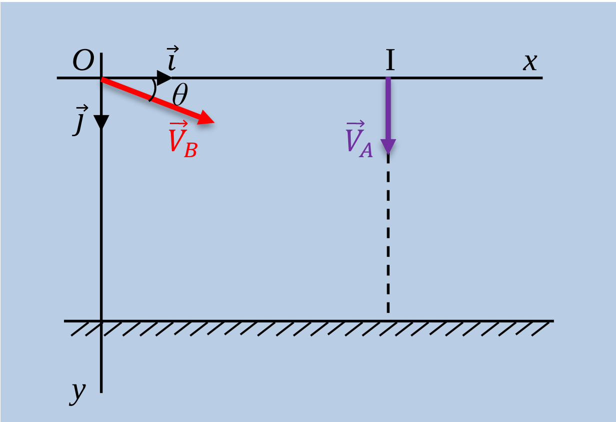
Le solide S est lâché sans vitesse initiale du point A. Il parcourt la distance $AB = \ell = 2,5m$ sur le plan incliné.
a) Détermine la nature du mouvement pris par S et calcule la durée du trajet AB.
b) Calcule le module V_B de la vitesse $\vec{V}_B$ de S en B. Quelles sont les composantes horizontale et verticale V_{Bx} et V_{By}.
2°) Arrivé en B, le solide S animé de la vitesse V_B tombe sur un plan horizontal situé en bas à une distance h de B. La chute dure $0,5s$.
a) Calcule la distance horizontale d comprise entre la verticale passant par B et le point d'impact sur le plan horizontal, puis la hauteur h.
b) Calcule l'énergie cinétique du solide S à son arrivée sur le plan horizontal.

EXERCICE 34 : Un avion de guerre, de type F-16, vole horizontalement à l'altitude de $7840m$. Sa vitesse constante est de $450Km.h^{-1}$. Il laisse tomber une bombe sur un objet en passant par la verticale.
1°) Dans combien de temps le contact avec le sol aura – t – il lieu ?
2°) Quelle distance aura parcourue l'avion à ce moment – là depuis l'instant où il a lâché la bombe ?
3°) A quelle distance du point A se produira le contact avec le sol ? $g = 9,8m.s^{-2}$.

EXERCICE 35 : Un avion, en vol horizontal à l'altitude de $2500m$, lâche une bombe en passant à la verticale d'un point P situé sur le sol horizontal. L'avion vole à une vitesse de $720Km/h$, qu'il conserve après avoir lâché la bombe.
1°) Quelle est la trajectoire de la bombe ? Justifie.
2°) Au bout de combien de temps la bombe touche – t – elle le sol ?
3°) A quelle distance de P tombe – t – elle ?

4°) La vitesse de l'avion est toujours de *720Km/h*, mais la bombe est lâchée en vol piqué, l'axe de l'avion faisant un angle de *10°* avec la verticale.
De quelle hauteur doit être lâché la bombe pour qu'elle tombe dans un rayon inférieur à *100m* ?
On prendra comme origine des axes du repère le point P se trouvant au sol.

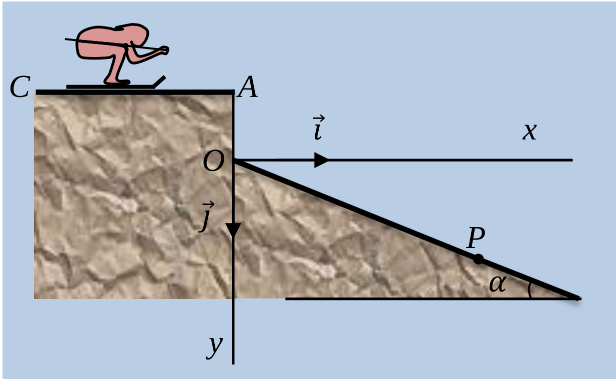
EXERCICE 36 : 1°) Une bille (A) assimilable à un point matériel est lancée du point *I* à l'instant $t = 0$, avec une vitesse verticale orientée vers le bas de norme $V_A = 7m/s$. En appliquant le théorème du centre d'inertie :



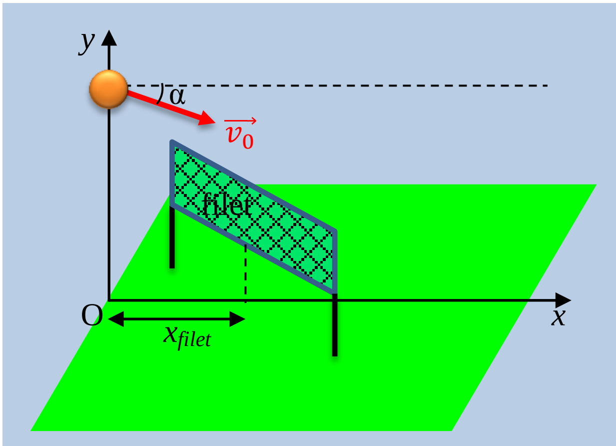
a) Montre que l'accélération est égale à *g* ;
b) Etablis l'équation horaire du mouvement de la bille (A).

2°) Au même instant $t = 0$, on lance d'un point *O*, une deuxième bille (B) assimilable à un point matériel avec une vitesse $\vec{V}_B$ faisant un angle θ égal à 30° avec l'horizontal (voir figure ci – contre).
a) Etablis les équations horaires du mouvement suivant les axes *Ox* et *Oy* ;
b) Calcule la norme V_B de la vitesse initiale de la bille (B) pour que la rencontre des deux billes se produise ;
c) Détermine l'instant et l'endroit de la rencontre.
On donne : $g = 10m/s^2$; $OI = 3m$.

EXERCICE 37 : Un skieur de masse $m = 80Kg$ est en mouvement rectiligne et uniforme sur un plan horizontal $\overline{CA}$ avec une vitesse $V_0 = 54Km/h$. Il arrive en A sur une brusque rupture de pente (voir figure) ; il décolle à la vitesse $\vec{V}_0$ horizontale et tombe sur une piste inclinée *OF* située en contre – bas.
Données : $h = \overline{OA} = 2m$; $\tan\alpha = 0,8$; $g = 10m/s^2$.
1°) Dans le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), détermine l'équation de la trajectoire du skieur assimilé à un point matériel.
2°) Détermine les coordonnées du point *P* où le skieur entre en contact avec la piste de réception. Quelle est la longueur du saut ($\overline{OP}$).
3°) Quelle est la norme de la vitesse $\vec{V}_P$ du skieur lorsqu'il touche le sol ?



EXERCICE 38 : Le mouvement à étudier s'effectue dans un terrain de volley – ball. Un jouer smatch un ballon de masse *m* considéré comme un point matériel à une hauteur $h_0 = 2,50$ mesurée à partir du sol. Il communique au ballon une vitesse initial $v_0 = 2m/s$ faisant un angle α avec l'horizontale (voir schéma). Le filet se trouve à l'abscisse $x_{filet} = 50cm$. le sommet du filet est à l'altitude $h_1 = 2,00m$ du sol.



1°) – Dans un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) établis l'équation de la trajectoire du ballon. Fais l'application pseudo – numérique. Quelle est la nature de cette trajectoire ?
2°) – Le ballon passe – t – il au – dessus du filet ? Justifie la réponse.
3°) – A quelle abscisse, le ballon touche –t – il le sol ?
4°) –Déduis – en la distance qui se trouve après le filet.
Données : $g = 10m.s^{-2}$; $\alpha = 10°$.

EXERCICE 39 : Un point matériel est lancé dans le champ de pesanteur. Son vecteur vitesse initial a pour norme V_0. L'angle de tir est α. En un point M de sa trajectoire, à l'instant t, son vecteur vitesse $\vec{V}$ fait l'angle θ avec le plan horizontal passant par M.

1°) Démontre que l'altitude du point M peut s'écrire :

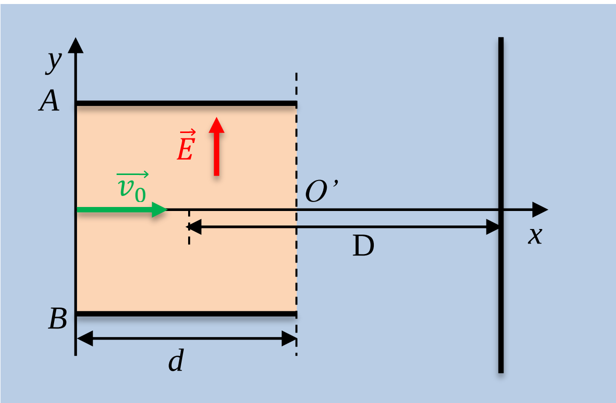
$$y = \frac{V_0^2}{2g}\left[1 - \frac{cos^2\alpha}{cos^2\theta}\right]$$

2°) Calcule l'altitude maximale atteinte par le projectile.

On donne : $V_0 = 20m/s$; $\alpha = \frac{\pi}{4}$ rad, $g = 9{,}8m/s^2$.

Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme.

EXERCICE 40 : Un électron animé d'une vitesse $\vec{v}_0$ horizontale, pénètre en O dans un champ électrostatique uniforme créé entre les plaques A et B d'un condensateur. Le vecteur champ électrique $\vec{E}$ est vertical dirigé vers le haut (voir schéma).



1°) – En appliquant la R.F.D :

a) Exprime le vecteur accélération $\vec{a}$ en fonction du vecteur champ électrostatique $\vec{E}$.

b) Etablis les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ puis l'équation de la trajectoire.

2°) – Quelles sont les coordonnées du point S, point de sortie de l'électron du champ électrostatique ?

3°) – Calcule l'ordonnée du point d'impact de l'électron sur un écran vertical, situé à la distance D du milieu OO'.

Données : $E = 2.10^3V.m^{-1}$; $L = OO' = 10cm$; $v_0 = 10^7m.s^{-1}$; $D = 25cm$; $m_e = 9{,}1.10^{-31}Kg$.

EXERCICE 41 : Une particule α (He^{2+}) ayant une vitesse de $2000m.s^{-1}$ pénètre en un point O dans une région où existe un champ électrostatique uniforme $\vec{E}$ d'intensité $1000V.m^{-1}$. Son vecteur vitesse initiale a la même direction que $\vec{E}$ mais de sens contraire. On néglige P devant F.

1°) – Etablis l'équation de son mouvement en prenant pour origine des temps l'instant où la particule passe en O.

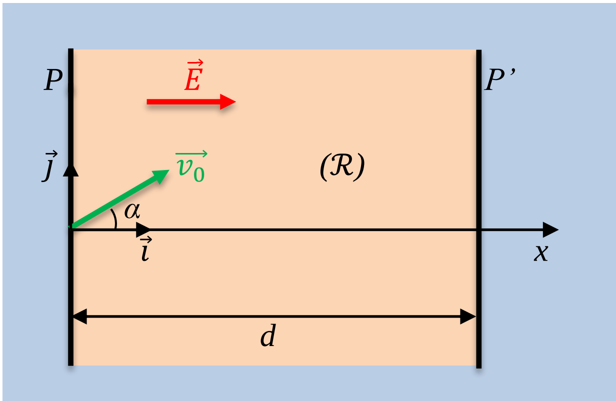
2°) – A quelle distance maximale la particule s'éloigne – t – elle de O ?

3°) – A quelle date et avec quelle vitesse la particule repasse – t – elle au point O ?

On donne : $e = 1{,}6.10^{-19}$; $m_\alpha = 6{,}67.10^{-27}Kg$.

EXERCICE 42 : Dans la région d'espace $\mathcal{R}$ comprise entre deux plans P et P' distants de d, il existe un champ électrique $\vec{E}$ crée par des électrodes constituées de fins grillages métalliques disposés suivant P et P' : $\vec{E} = \vec{0}$ à l'extérieur de $\mathcal{R}$ (voir figure).

Une particule ponctuelle de masse m et de charge électrique positive, arrive en O à $t = 0$ et pénètre dans $\mathcal{R}$. La vitesse à $t = 0$ se trouve dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ elle a pour valeur v_0 et fait un angle α avec l'horizontale.



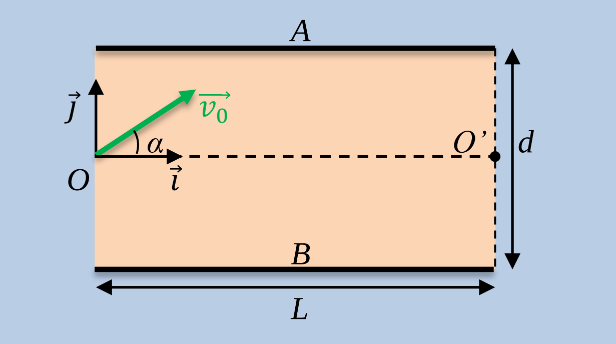
1°) Représente la force $\vec{F}$ (électrique) s'exerçant sur la particule en O.

2°) Etablis l'équation de la trajectoire de la particule en négligeant le poids devant $\vec{F}$. Quelle est sa nature ?

3°) Détermine la composante v_x de la vitesse en fonction de x.

4°) Détermine V_F vitesse de la particule et l'angle β qu'elle fait avec l'horizontale au moment où elle arrive dans le plan P'. Montre que le rapport $\frac{sin\alpha}{sin\beta}$ est égale a une constante k qui sera exprimée en fonction de E, d, q, m, v_0.

EXERCICE 43 : Un condensateur plan est constitué de deux plaques parallèles métalliques rectangulaires horizontales A et B de longueur L et séparées par une distance d.



On a choisi un repère (O, $\vec{\imath}$,$\vec{j}$) dans un plan vertical. Le point *O* est équidistant des deux plaques. Un faisceau homocinétique de proton pénètre en *O* en formant l'angle *α* avec $\vec{\imath}$, dans le champ électrostatique supposé uniforme $\vec{E}$ du condensateur.

1°) – a) Indique en le justifiant le signe de $V_A - V_B = U$ tel que le faisceau de protons puisse passer par le point *O'*.

b) Donne l'équation de la trajectoire des protons dans le repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{j}$) en fonction de *U*, *α* et *d*. Quelle est la nature du mouvement des protons ?

c) Calcule la valeur numérique de *U* qui permet de réaliser la sortie des protons en *O'*.

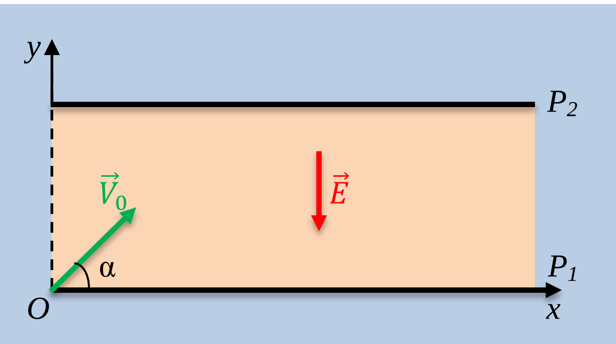
On donne : $\alpha = 30°$, $L = 20cm$; $d = 7cm$; $v_0 = 10^6 m.s^{-1}$; $m_p = 1{,}67.10^{-27}Kg$; $e = 1{,}6.10^{-19}C$.

2°) – Dans ce cas où la tension *U* a la valeur précédemment calculée, détermine à quelle distance minimale du plateau supérieur passe le faisceau de protons.

EXERCICE 44 : 1°) Un champ électrique $\vec{E}$ est réalisé entre deux plaques horizontales P_1 et P_2 de longueur infinie. Les deux plaques, distantes de *d*, sont soumises à une différence de potentiel *U*. Une particule alpha de masse *m*, arrive à l'instant $t = 0$ en un point *O* de P_1 avec une vitesse qui fait avec la plaque un angle α (voir figure).

a) Indique la polarité des plaques ;

b) Etabli l'équation de la trajectoire de la particule alpha.



2°) Détermine l'écart maximale entre la particule et la plaque P_1.

3°) Détermine la position du point *I* où retombe la particule sur la plaque P_1.

4°) Donne les caractéristiques du vecteur vitesse au point *I*.

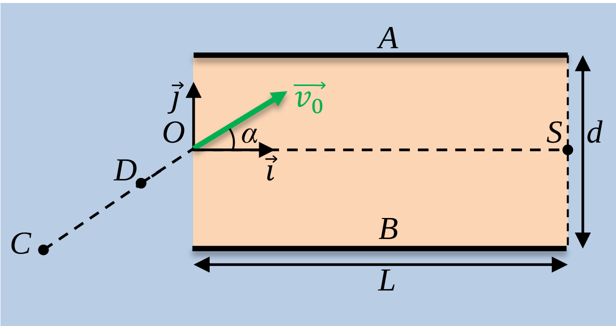
Données : $d = 10cm$; $U = 10000V$; $\alpha = 45°$; $e = 1{,}6.10^{-19}C$; $V_0 = 10^6 m/s$; Alpha = He^{2+} ; $m = 6{,}68.10^{-28}Kg$.

EXERCICE 45 : Un condensateur plan est constitué de deux plaques parallèles métalliques rectangulaires horizontales *A* et *B* de longueur *L* et séparées par une distance *d*. On raisonnera dans le repère (O, $\vec{\imath}$,$\vec{j}$) ; Le point *O* est équidistant des deux plaques. Un faisceau de protons émis en *C* avec une vitesse nulle est accéléré entre les points *C* et *D* situés dans le plan (O, $\vec{\imath}$,$\vec{j}$). Ils pénètrent en *O*, en formant l'angle *α* avec $\vec{\imath}$ dans le champ électrique $\vec{E}$ supposé uniforme du condensateur (voir figure).

1°) – a) Indique en le justifiant le signe de $(V_D - V_C)$;

b) Calcule en fonction de $U_0 = |V_D - V_C|$, la vitesse de sortie des protons au point *D*.

Données : $U_0 = 1000V$; $m_p = 1{,}6.10^{-27}Kg$; $e = 1{,}6.10^{-19}C$.



2°) – Le faisceau pénètre en *O* dans le champ électrique uniforme avec la vitesse v_0 calculée précédemment et ressort au point *S* du condensateur.

a) Indique en le justifiant le signe de $V_A - V_B$.

b) Montre que l'équation de la trajectoire des protons dans le repère (O, $\vec{\imath}$,$\vec{j}$) en fonction de U_0, $U = V_A - V_B$, *α* et *d* s'écrit :

$$y = -\frac{U}{4U_0 d\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha$$

On négligera $\vec{P}$.

3°) a) Détermine l'expression de *U* pour que le faisceau sorte effectivement en *S*.

b) Calcule la valeur de *U*.

c) Détermine à quelle distance minimale du plateau *A* passe le faisceau de protons.

Données : $\alpha = 30°$; $L = 20cm$; $d = 7cm$.

Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique d'induction uniforme.

EXERCICE 46 : Un noyau d'hélium animé d'une vitesse $\overrightarrow{v_0}$, horizontale, pénètre en O dans une région de l'espace de longueur horizontale L, où règne un champ magnétique uniforme dont le vecteur indiction $\vec{B}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{v_0}$.

1°) Montre que la trajectoire de l'hélium dans le champ magnétique est circulaire. Calcule la valeur du rayon de la trajectoire.

2°) Calcule la valeur de l'angle de déviation de la trajectoire sous l'action du champ magnétique.

3°) Quel est le mouvement de la particule à la sortie du champ magnétique ?

4°) On reçoit le noyau d'hélium sur un écran fluorescent qui se trouve à une distance D de la sortie du champ. Calcule l'ordonnée y_E du point d'impact sur l'écran.

Données : $v_0 = 10^6 m.s^{-1}$; $B = 10^{-2}T$; $L = 10cm$; $D = 20cm$; $e = 1,6.10^{-19}C$; $m_\alpha = 6,67.10^{-27}Kg$.

EXERCICE 47 : Un faisceau protonique horizontal homocinétique, de vitesse $V_0 = 16000Km/s$ traverse un champ magnétique d'intensité $B = 10^{-3}T$, vertical.

1°) Calcule le rayon de la trajectoire décrite par le proton. (Masse du proton : m_p $1,67.10^{-27}Kg$ et charge $e = 1,6.10^{-19}C$).

2°) Le champ magnétique est uniforme à l'intérieur d'un cercle horizontal de centre I et de diamètre $D = 1,6cm$. La vitesse $\vec{V}_0$ est dirigée vers I. Un écran est placé à la distance L de I, perpendiculairement à $\vec{V}_0$. Lorsque l'induction B est nulle le spot est en H sur l'écran.

Quelle déviation subit – il lorsque l'induction prend la valeur de $10^{-3}T$?

Prendre $L = 10cm$.

EXERCICE 48 : Dans un tube cathodique, des électrons sont émis sans vitesse initiale par une cathode C, puis accélérés par l'anode A ; ils pénètrent en O avec une vitesse horizontale $\overrightarrow{v_0}$ dans un champ magnétique $\vec{B}$ orthogonal au plan de la figure. Le champ $\vec{B}$ n'existe que sur une zone de longueur L.

1°) – Calcule la tension accélératrice $U_{AC} = U$ entre l'anode et la cathode.

Données : $v_0 = 10^7 m.s^{-1}$; $m_e = 9,1.10^{-31}Kg$; $e = 1,6.10^{-19}C$.

2°) – Etudie la nature du mouvement d'un électron dans le champ magnétique et calcule la grandeur caractéristique de la trajectoire sachant que $B = 10^{-3}T$.

3°) – Un écran E placé à une distance $D = 50cm$ de O reçoit le faisceau d'électrons provoqué par le champ magnétique. Détermine la déviation électromagnétique du faisceau d'électrons sachant que $L = 1cm$ est très inférieure à D.

4°) – Dans l'espace de longueur $L = 1cm$, on fait agir simultanément le champ magnétique précédent et un champ électrique $\vec{E}$ afin de ne plus observé la déviation sur l'écran (mouvement rectiligne). Calcule l'intensité du champ électrique ; représente sur un schéma les vecteurs $\vec{E}$, $\vec{B}$ et les forces appliquées à l'électron.

EXERCICE 49 : L'uranium naturel contient essentiellement deux isotopes : l'uranium 235 et l'uranium 238. On désire séparer les deux isotopes de l'uranium à l'aide d'un spectrographe de masse (voir figure). Les ions $^{235}U^+$ de masse m_1 et $^{238}U^+$ de masse m_2 produits dans une chambre d'ionisation sont introduits avec une vitesse initiale négligeable en O dans une chambre d'accélération entre deux plaques P_1 et P_2 soumises à une tension $U = V_{P_1} - V_{P_2}$, ces ions sortent par la fente A.

1°) Représente sur un schéma le sens du champ électrique $\vec{E}$ régnant entre les plaques P_1 et P_2 permettant l'accélération des ions.

a) Exprime les vitesses V_1 et V_2 des ions $^{235}U^+$ et $^{238}U^+$ en fonction de q, U et ses masses respectives m_1 et m_2.

b) Déduis – en une relation entre m_1, m_2, V_1 et V_2.

2°) A la sortie en A de la chambre d'accélération les ions pénètrent dans une région où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ perpendiculaire au plan de la figure.

a) Quel doit être le sens de $\vec{B}$ pour que les ions soient déviés vers la plaque sensible ?

b) Démontre que les ions prennent dans le champ magnétique un mouvement circulaire uniforme dans un plan que tu préciseras.

c) Détermine les rayons de courbures R_1 et R_2 des trajectoires des ions en fonction de $U = V_{P_1} - V_{P_2}$, q, B et de la masse m de l'ion correspondant.

d) Détermine l'ion qui correspond à chacune des traces K et T sur la plaque sensible. Calcule la distance KT.

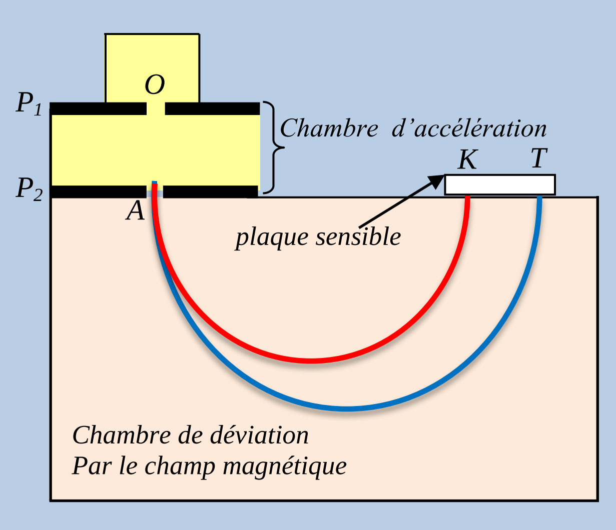
3°) Le courant d'ions issu de la chambre d'ionisation à une intensité de $10\mu A$. Sachant que l'uranium naturel contient en nombre d'atomes

0,7% d'isotope légers, calcule en *mg* la masse de chaque isotope recueillie en *24h*.

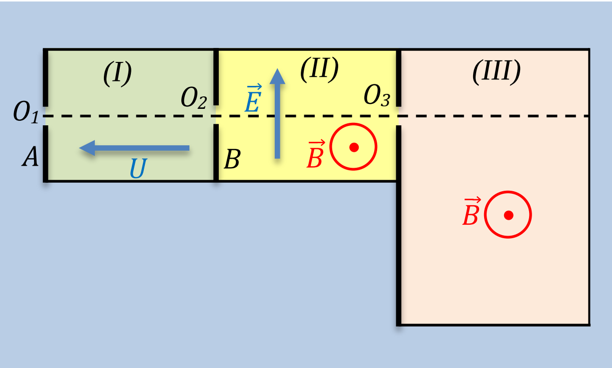
Données numériques : $B = 10^{-3}T$; $U = 4KV$; $e = 1,6.10^{-19}\ C$; $1u = 1,66.10^{-27}Kg$.

Masse de l'uranium 235 : $m_1 = 235u$;

Masse de l'uranium 238 : $m_2 = 238u$.



EXERCICE 50 : Un spectrographe de masse est composé de 3 enceintes notées *(I)*, *(II)* et *(III)* sur la figure ci – dessous :



1°) Des ions potassium K^+ pénètrent sans vitesse initiale dans l'enceinte *(I)* par l'ouverture O_1 et sont ensuite accélérés par une tension $U_{AB} = U$ appliquée entre les plaques *A* et *B*. Etablis l'expression de la vitesse *V* des ions à leur sortie en O_2, en fonction de leur charge *q* et de leur masse *m*.

2°) Les ions pénètrent par l'ouverture O_2 dans l'enceinte *(II)* où règnent simultanément un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{B}$ dont les directions et sens sont indiqués sur le schéma.

a) Détermine les caractéristiques (directions, sens et module) des forces électrique $\vec{F_e}$ et magnétique $\vec{F_m}$ agissant sur un ion K^+ à son entrée en O_2.

b) Déduis – en que seuls les ions dont la vitesse est telle que $V = E/B$ pourront sortir par l'ouverture O_3.

c) Les valeurs de *E* et *B* sont fixées : $E = 5.10^4 V.m^{-1}$ et $B = 0,5T$. Quelle valeur doit – on donner à la tension accélératrice *U* pour sélectionner les ions de l'isotope ^{39}K ?

On donne : $e = 1,6.10^{-19}C$; $m_p = m_n = 1,67.10^{-27}Kg$

3°) Les ions ainsi sélectionnés pénètrent dans l'enceinte *(III)* par l'ouverture O_3 et ne sont plus soumis qu'au seul champ magnétique $\vec{B}$ (précédent). On observe sur la plaque sensible (*P*) une trace *T* due à l'impact des ions.

Interprète la position de cette trace et calculer la distance O_3T.

Mouvement d'un satellite autour de la terre.

EXERCICE 51 : La loi de l'attraction universelle appliquée à deux corps *A* et *B* de masse respectives m_A et m_B, dont les centres sont distants de *r*, en rotation autour de la terre s'écrit :

$$F = K\frac{m_A.m_B}{r^2}$$

1°) Exprime l'accélération de la pesanteur au sol en fonction de *K*, *R* et *M* avec *R* et *M* respectivement le rayon et la masse de la terre, en supposant celle – ci concentrée en son centre. Déduis – en *M* sachant que $R = 6400Km$; $K = 6,67.10^{-11}USI$ et $g_0 = 9,8m/s^2$.

2°) Exprime en fonction de g_0, *R* et *z*, l'intensité de la pesanteur à une altitude *z*. Montre que si *z* est petit devant *R*, *g* est une fonction linéaire de *z*. Dans ce cas calcule l'erreur que l'on commet en prenant $g = g_0$ à 3200m d'altitude.

3°) Calcule la vitesse d'un satellite artificiel évoluant à 36000Km d'altitude. Quelle est à cette altitude la durée d'une révolution ?

Quelle réflexion vous inspire ce résultat quand l'orbite est située dans le plan équatorial ?

EXERCICE 52 : 1°) A partir de la loi de l'attraction universelle, établis l'expression de l'intensité du champ de gravitation terrestre $\vec{g}$ en fonction de *G*, *M*, *R* et *h*. Quelle est l'expression de l'intensité du vecteur champ de gravitation terrestre $\vec{g_0}$ au sol ? Déduis – en que :

$$g = g_0\left(\frac{R}{R+h}\right)^2$$

2°) La navette spatiale Columbia a été placée sur une orbite circulaire à l'altitude $h = 250Km$.

Etablis dans un repère géocentrique les expressions de la vitesse *V* de ce satellite et sa période de révolution *T* en fonction de g_o, *R* et *h*.

AN : *R = 6370Km ;* $g_0 = 9{,}81 m.s^{-2}$.

EXERCICE 53 : On étudie le mouvement d'un satellite dans le repère géocentrique. Le satellite, assimilé à une masse ponctuelle *m = 300Kg* décrit une orbite circulaire dans le plan équatorial de la terre à l'altitude *h = 36000Km.*

1°) a) Montre que la vitesse du satellite est constante.

b) Calcule la valeur de la vitesse du satellite et sa période de révolution.

2°) En réalité le satellite est géostationnaire.

Explique l'expression « satellite géostationnaire »

3°) L'énergie potentielle de gravitation du système « satellite – Terre » a pour expression :

$$E_p = -\frac{mG_0R_0}{(R_0 + h)}$$

Evalue l'énergie mécanique du satellite dans le champ de gravitation.

Données : $R_0 = 6{,}37.10^3 Km$. Champ de gravitation de la terre à l'altitude *h = 0* ; $G_0 = 9{,}8 N/Kg$.

EXERCICE 54 : Un satellite artificiel de la terre de masse *M = 1500Kg* décrit une trajectoire circulaire d'un mouvement uniforme à une altitude *z = 1000Km.*

L'accélération de la pesanteur à l'altitude *z* est donnée par la relation

$$g_z = g_0\left(\frac{R}{R+z}\right)^2$$

dans laquelle *R* est le rayon de la sphère terrestre (*R* = 6400 km) et g_0 l'accélération de la pesanteur à l'altitude zéro (g_0 = 10 m. s^{-2}).

1°) Calcule la vitesse linéaire du satellite.

2°) Calcule la période de rotation du satellite autour de la terre.

3°) Calcule l'énergie cinétique du satellite.

4°) Calcule la variation d'énergie potentielle du système formé par le satellite et la terre quand, au cours de son lancement, le satellite passe de l'altitude zéro à l'altitude *z*.

L'accélération de la pesanteur varie avec l'altitude selon la relation indiquée plus haut.

EXERCICE 55 : La terre tourne sur elle – même autour de la ligne des pôles *NS*, avec une période de révolution *T* voisine de *24* heures.

1°) Calcule la vitesse angulaire de rotation de la terre.

2°) Quelle est la vitesse d'un point de la surface terrestre situé à la latitude λ ? (la latitude λ du point M est l'angle que fait le rayon de la terre passant par le point M sur l'équateur). Le rayon de la terre *R = 6400Km* et *θ = 45°.*

3°) Montre qu'à l'altitude *z* au – dessus de la terre l'intensité du champ de pesanteur est égale à :

$$g_z = g_0\,\frac{R^2}{(R+z)^2}$$

4°) A l'aide d'une fusée de masse *m = 10 tonnes*, on satellise autour de la terre, un satellite de masse *m'*, assimilable à un point matériel, sur une orbite circulaire, à l'altitude : *z = 36000Km*. Détermine :

a) L'accélération de la fusée.
b) L'intensité de la pesanteur à l'altitude *z*.

EXERCICE 56 : Une fusée de masse totale *M = 1000* tonnes est destinée à mettre un satellite sur une orbite circulaire à une altitude *h = 600 km.* La force de pesanteur avec la terre qui agit sur un corps de masse *m* est de la forme $F = Km/r^2$, r étant la distance du centre de la terre à l'objet considéré et *K* une constante (loi de newton).

1°) La terre étant assimilée à une sphère de rayon *R = 6400 Km*, trouve la valeur du coefficient *K* de la formule précédente sachant qu'au niveau du sol l'accélération de la pesanteur est $g_0=10 m.s^{-2}$, déduis – en la masse de la terre *M'* sachant que la constante de gravitation universelle est $G = 6{,}67.10^{-11} N.M^2.Kg^{-2}$.

Quelle est l'accélération de la pesanteur à l'altitude à laquelle devra être le satellite ?

2°) Quel doit être au départ l'intensité de la poussée des moteurs si l'on sait que la fusée s'élève avec une accélération verticale, dirigée vers le haut égale à $5 m.s^{-2}$?

3°) En fait ce satellite de masse *m = 20* tonnes est destiné à se poser sur une autre planète. On le propulse donc au voisinage de cette planète, sur laquelle, il tombe verticalement. A une altitude de *50Km* alors que sa vitesse est de $2{,}778.10^3 m.s^{-1}$, on allume les rétrofusées destinées à freiner sa chute.

a) Quelle doit être la force de freinage constante de ces rétrofusées pour que le satellite arrive au sol de ladite planète avec une vitesse nulle ?
   On suppose que l'accélération de la pesanteur due à cette planète est constante de *0* et *50Km* d'altitude et égale à $g = 25 m.s^{-2}$;
b) Pendant combien de temps ces rétrofusées fonctionnent – elles ?

EXERCICE 57 : 1°) a) On lance un satellite de masse *m* avec une vitesse verticale d'une altitude z_1 par rapport au sol. Quelle est la vitesse du satellite à l'altitude z_2 ;

b) On donne :

$$g_z = g_0 \frac{R^2}{(R+z)^2}$$

où g_0 est l'accélération de la pesanteur au sol, R = rayon de la terre, z l'altitude du satellite par rapport au sol. Montre que l'énergie potentielle de pesanteur du projectile qui se trouve à une altitude z par rapport au sol est :

$E_P = -\frac{mgR^2}{R+z}$ (on négligera les frottements)

c) Que vaut l'énergie potentielle à l'infinie ?

2°) on appelle vitesse de libération du satellite la vitesse minimale qu'on peut communiquer à un satellite pour qu'il s'échappe de l'attraction terrestre.

a) Ecris l'expression de l'énergie mécanique totale du satellite de masse *m* se trouvant à l'altitude z.
b) En considérant que le satellite se trouve à l'infini (considération impossible)
   Calcule la vitesse de libération du satellite de la surface de la terre.

On donne : $g_0 = 9{,}8 m.s^{-2}$; *6400Km.*

EXERCICE 58 : 1°) Dans un repère R, on considère deux astres ou satellites : *A* (de masse *M*) et *B* (de masse *m*). *A*, dont la masse est très grande devant celle de *B*, *B* tourne autour de *A* avec un mouvement uniforme et son centre décrit un cercle de rayon *R*.

a) Etablis la relation qui lie la vitesse *V* du centre de *B*, le rayon *R* de l'orbite, la masse *M* de *A* et la constante de gravitation universelle *K*.
b) On connait la période révolution *T* de *B* autour de *A* ; exprime *V* en fonction de *T*, déduis – en la troisième loi de Kepler : $$\frac{R^3}{T^2} = C.M$$ et donne l'expression littérale de *C* en fonction de *K*.

2°) *Application* : Un satellite artificiel tourne autour de la terre en *134min*, selon une orbite circulaire dont le rayon est $R_S = 8{,}713.10^3 Km$. Sachant que la terre décrit autour du soleil en *365,25* jours une orbite qu'on pourra considérer comme circulaire de rayon $R_T = 1{,}496.10^8 Km$, calcule le rapport de la masse de la terre à celle du soleil.

Mouvement d'un pendule conique.

EXERCICE 59 : On considère un point matériel *A* de masse *100g* suspendu a un point fixe *O* par un fil fin inextensible de masse négligeable $L = 1m$.

A/ Cet ensemble est mis en mouvement de rotation uniforme autour d'un axe (Δ) vertical passant par *O*. *A* décrit à partir de A_0 un cercle dans le plan horizontal et la direction du fil fait un angle $\alpha = 30°$ avec l'axe (Δ).

1°) Fais l'inventaire des forces agissant sur le point matériel *A*. Donne les caractéristiques de chaque force. On prend $g = 10 m/s^2$.

2°) Calcule la vitesse angulaire de la rotation de l'ensemble ainsi que l'accélération du point *A*.

3°) Ecris l'équation horaire de *A*.

4°) Quelle est la tension du fil ?

5°) On impose au système une autre vitesse angulaire $\omega_1 = \omega_2$ parmi les grandeurs calculées précédemment, quelles sont celles qui vont varier ?

B/ Le fil est remplacé par un ressort de longueur à vide $l_0 = 20cm$ et de raideur $K = 49N/m$. L'ensemble tourne à la vitesse angulaire de *6rad/s* en faisant un angle β avec la verticale.

1°) Calcule la longueur du ressort pendant la rotation ;

2°) Déduis – en l'angle β.

3°) Calcule la vitesse linéaire du point *A*.

EXERCICE 60 : Une nacelle est accrochée par une tige rigide de masse négligeable de longueur *4cm* à un axe verticale qui tourne avec la vitesse angulaire ω_1. L'angle entre la tige et l'axe vertical est 30°. Une personne s'accroche en *B* pour se distraire. Sa masse est de *70Kg*.

1°) Exprime le vecteur accélération du centre d'inertie du passager en fonction de α, ω et *L*.

2°) Déduis – en la valeur de ω ; $g = 9{,}8 m/s^2$.

3°) Calcule la réaction de l'axe.

4°) Détermine la valeur minimale de la vitesse angulaire qui permet à la tige de prendre une inclinaison par rapport à la verticale.

EXERCICE 61 : Un ressort de masse négligeable et à spires non jointives, a pour longueur à vide $L_0 = 20cm$, sa constante de raideur $K = 20 N.m^{-1}$. Il porte un solide *A* de masse $m = 100g$. Il est fixé en *O* à une tige verticale.

On considère le mouvement de rotation uniforme du système autour de la verticale (Δ). On appelle θ l'angle que font la tige verticale et le ressort.

1°) – Donne l'expression de l'angle θ en fonction de *L*, *g* et $\dot{\theta}$.

2°) – Montre que la vitesse de rotation doit être supérieure à une valeur limite pour que le solide *A* s'écarte de la tige verticale. Détermine cette valeur limite.

3°) – Donne l'expression de l'allongement $X = L - L_0$ du ressort en fonction de $\dot{\theta}$, *m*, L_0 et *K*.

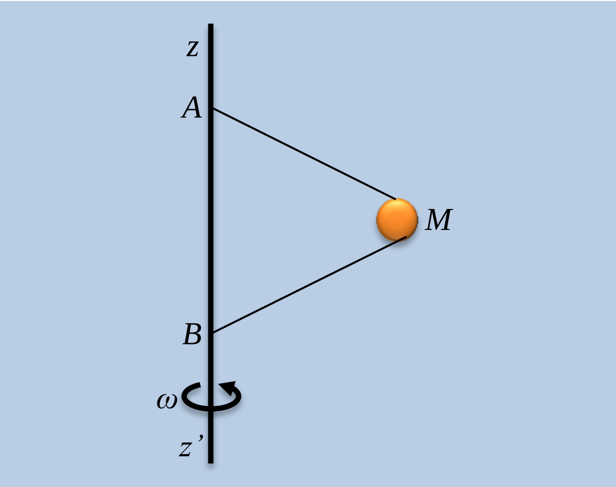
A.N : $\dot{\theta} = 9 rad.s^{-1}$.

4°) – La limite d'élasticité du ressort est atteinte lorsque celui – ci double sa longueur à vide. Quelle vitesse de rotation ne doit – on pas dépasser si l'on ne veut pas détériorer le ressort.

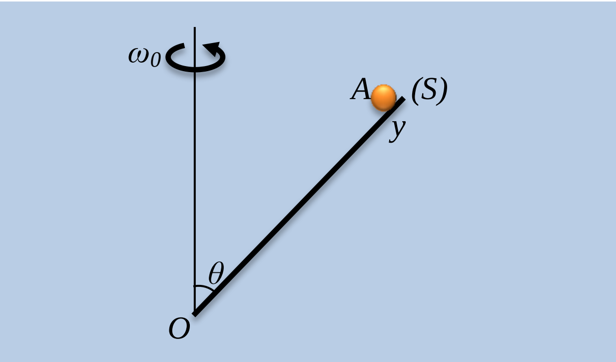
EXERCICE 62 : Une barre vertical $z'z$ tourne sur elle – même à la vitesse angulaire constante ω. On prendra $g = 10m.s^{-2}$. Soient deux points A et B de $z'z$ tels que $AB = 2{,}4m$ (voir figure). Une masse ponctuelle M est reliée à ces deux points par deux fils souples inextensibles de longueur $AM = BM = \ell = 1{,}5m$. On donne : $m = 0{,}5Kg$ et $\omega = 6rad.s^{-1}$.

1°) Quelles sont les tensions de AM et BM lorsque la vitesse de régime est atteinte ?

2°) Pour quelle valeur de ω la tension du fil BM est – elle nulle ? Quelle est alors la valeur de la tension du fil AM ?



EXERCICE 63 : Une tige Oy est soudée en O à un axe vertical (Δ) et fait avec cet axe un angle θ (voir figure). Un petit anneau (S), solide ponctuel de masse m, coulisse sans frottements sur Oy.



L'axe (Δ) entraine Oy dans un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire ω_0. On constate que l'anneau (S) se fixe en un point A, $OA = a$.

a) Détermine a en fonction de ω_0, θ et g. Exprime la valeur de la force de réaction $\vec{R}$ exercée par la tige Oy sur l'anneau (S).

A.N : $\theta = 60°$; $\omega_0 = 6rad.s^{-1}$; $m = 10g$; $g = 9{,}8m.s^{-2}$.

b) On double la vitesse de rotation. Quelle devrait être la valeur de l'angle pour que (S) demeure au même emplacement sur la tige Oy.

Mouvement d'un cycliste abordant un virage.

EXERCICE 64 : Sur une route horizontale, un pilote prend un virage de rayon $R = 70m$ à la vitesse de $72Km.h^{-1}$.

1°) Quelle est l'angle d'inclinaison par rapport à la verticale du pilote et de sa machine pour éviter tout dérapage.

2°) Le virage étant un quart de cercle, calcule la durée du parcours circulaire.

EXERCICE 65 : Un cycliste aborde en roue libre un virage horizontal circulaire de rayon $r = 100m$ à la vitesse $V = 36Km.h^{-1}$. La piste est telle qu'il n'y a aucun frottement. Montre que si la piste a un profil horizontal, le mouvement s'effectue à la vitesse constante et que, en conséquence, le cycliste ne peut pas prendre le virage. Dans un $2^{ème}$ temps, envisage le cas où la piste est relevée et calcule l'angle α dont il faut relever la piste pour que le cycliste puisse prendre le virage.

EXERCICE 66 : Une planche à roulettes de masse $2{,}5Kg$ est munie de 4 roues. Un enfant de masse $40Kg$ utilise cette planche. Dans tout l'exercice on négligera la résistance de l'air et on prendra $g = 9{,}8m.s^{-2}$.

1°) L'enfant se place sur la planche au sommet d'un plan incliné de longueur $25m$ et de pente 40%.

a) En négligeant les résistances passives, quelle est la vitesse de l'enfant au bas de la pente ?

b) En réalité sa vitesse en bas de la pente n'est que de $13m.s^{-1}$. Calcule l'accélération supposée constante du mouvement. Détermine l'intensité de la force de frottement supposée constante et parallèle à la direction du mouvement, qui s'exerce sur le système.

2°) En bas du plan incliné, l'enfant désire prendre un virage circulaire à la vitesse de $13m.s^{-1}$. Les résistances passives sont négligeables.

a) Montre qu'il doit s'incliner pour pouvoir tourner.

b) Sachant qu'il s'incline de 20° par rapport à la verticale, quel est le rayon du virage ?

DOMAINE D'ETUDE I : MECANIQUE

OG_3 : ANALYSER LES SYSTEMES MECANIQUES EN MOUVEMENT.

5 DYNAMIQUE DE ROTATION.

I. Notion de moment cinétique.
I.1. Cas d'un point matériel.

Définition : *On appelle moment cinétique d'un point M par rapport à un axe (Δ), le moment du vecteur quantité de mouvement $\vec{p}$ par rapport à cet axe.*

Considérons un point matériel M de masse (m), décrivant une trajectoire circulaire de centre O et de rayon R, à la vitesse linéaire $\vec{v}$ (figure 1).

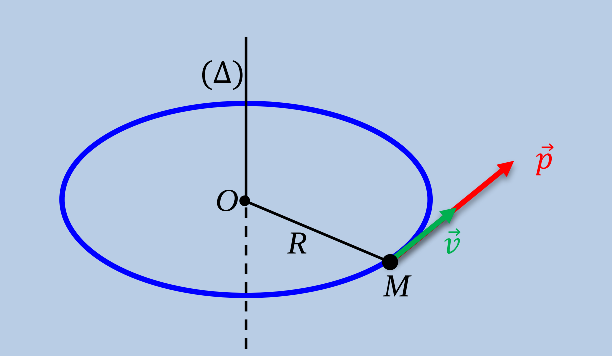


Figure 1.

Le moment cinétique du point matériel M par rapport à l'axe (Δ) vaut :
$\sigma = p.R = mv.R$; avec $v = R\omega$
D'où :

$$\boxed{\sigma = mR^2\omega}$$

σ s'exprime en Kg.m^2.rad/s.

I.2. Cas d'un système matériel.

Pour un système matériel, le moment cinétique vaut :

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 \omega$$

D'où :

$$\boxed{\sigma = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2}$$

II. Notion de moment d'inertie.
II.1. Rappels sur le moment d'une force.

Définition : *Le moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un axe (Δ) est le produit de l'intensité de la composante orthogonale de la force par la distance entre la droite d'action de la force et l'axe.*

$$\boxed{\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = F_\perp . d} \quad \text{(N.m)}$$

C'est une grandeur algébrique qui s'exprime en *Newton – mètre* et dont le signe dépend du sens positif arbitrairement choisi.

Le moment d'une force par rapport à un axe caractérise l'effet de rotation de cette force.

Exemples :

- *Mouvement de rotation d'une porte autour de ses charnières* (figure 2).

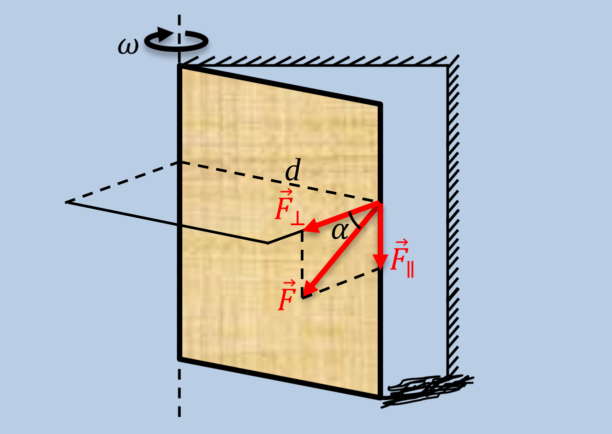


Figure 2.

$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = F_\perp . d$ avec $F_\perp = F.\cos\alpha$

D'où :

$$\boxed{\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = F.d.\cos\alpha}$$

Note : *L'ouverture ou la fermeture d'une porte nécessite l'application d'une force perpendiculaire à celle – ci.*

- *Mouvement de rotation d'un disque dans le plan vertical* (figure 3).

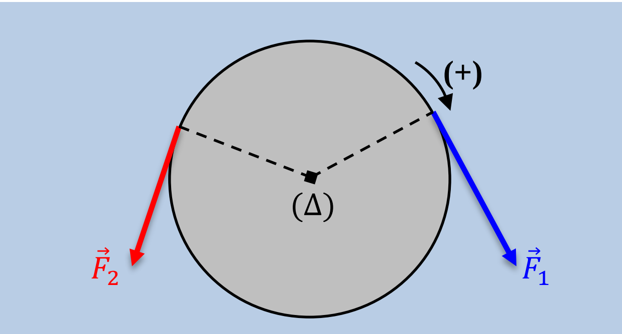


Figure 3.

$$\boxed{\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_1) = F_1.R} \quad \boxed{\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_2) = -F_2.R}$$

- *Rotation d'une tige dans le plan vertical* (figure 4).

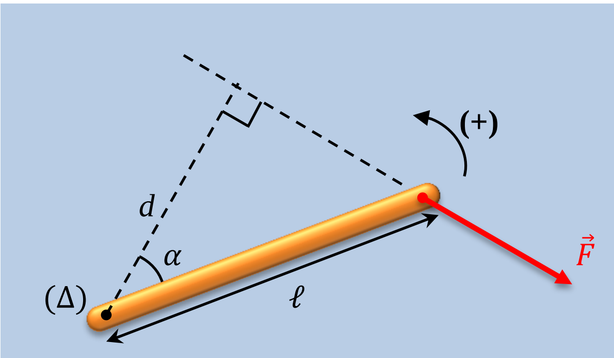


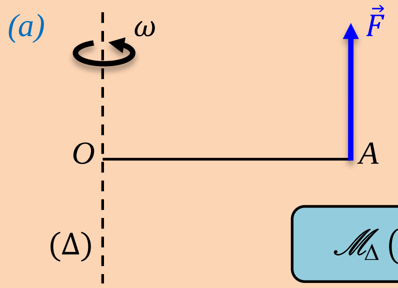
Figure 4.

$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = -F.d$; avec $d = \ell.\cos\alpha$

$$\boxed{\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = -F.\ell.\cos\alpha}$$

Remarques : On peut distinguer plusieurs cas paticiliers suivant la direction de $\vec{F}$ (figure 5).

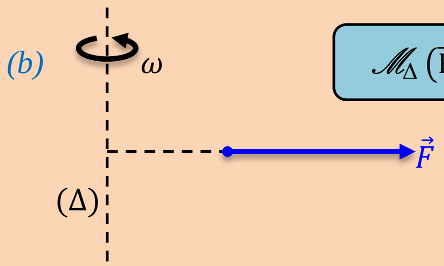
R_1 : Si $\vec{F}$ //(Δ)



$$\boxed{\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = 0}$$

Le moment d'une force $\vec{F}$ parallèle à l'axe de rotation (Δ) est nul.

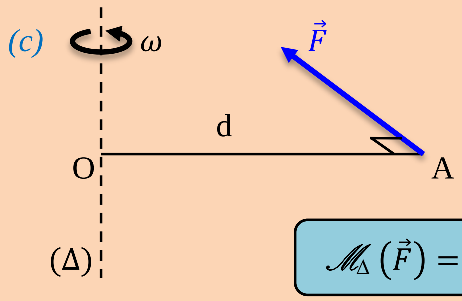
R_2 : Si $\vec{F} \perp (\Delta)$



$$\boxed{\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = 0}$$

Le moment d'une force $\vec{F}$ Perpendiculaire à l'axe de rotation (Δ) est nul.

R_3 : Si $\vec{F} \perp (d)$



$$\boxed{\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = F.d}$$

Dans ce cas, le moment de $\vec{F}$ est maximal.
Le moment d'une force $\vec{F}$ perpendiculaire au bras de Levier est maximal.

Figure 5.

Définition : *On appelle bras de Levier , la distance orthogonale qui sépare la direction de la force et l'axe de rotation.*

II.2. Moment d'inertie.

II.2.1. Cas d'un point matériel.

Considérons un point matériel de masse m décrivant une trajectoire circulaire de rayon R. (figure 6).

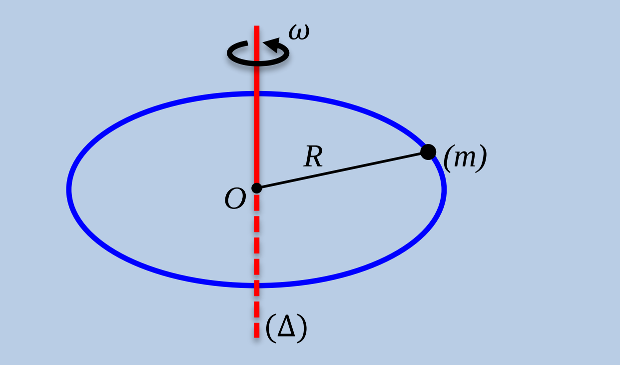


Figure 6.

Le moment d'inertie du point matériel est donné par la relation ci – dessous :

$$\boxed{J_\Delta = mR^2} \quad (Kg.m^2)$$

II.2.2. Cas d'un système matériel.

Considérons un système matériel (S) en rotation autour de l'axe (Δ) (figure 7).

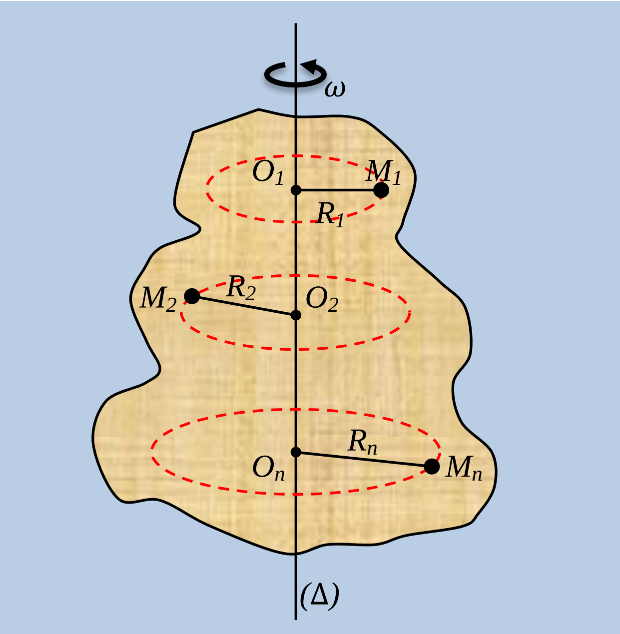


Figure 7.

Le moment d'inertie du système vaut:

$$J_\Delta = \sum_{i\,=\,1}^{n} J_{i_\Delta} = J_{1_\Delta} + J_{2_\Delta} + \cdots + J_{n_\Delta}$$

$$\boxed{J_\Delta = \sum_{i\,=\,1}^{n} m_i R_i^2}$$

II.3. Théorème de l'accélération angulaire (T.A.A).

❖ **Enoncé :**

Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique est égale à la somme des moments des forces extérieures appliquées au système.

$$\frac{d\sigma}{dt} = \sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(mR^2\omega) = \sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(J_\Delta\omega) = \sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$$

$$\Rightarrow J_\Delta\frac{d\dot{\theta}}{dt} = \sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$$

$$\Rightarrow J_\Delta\ddot{\theta} = \sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$$

D'où:

$$\boxed{\sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = J_\Delta\ddot{\theta}}$$

Exemple : *Disque en rotation dans le plan vertical* (figure 8).

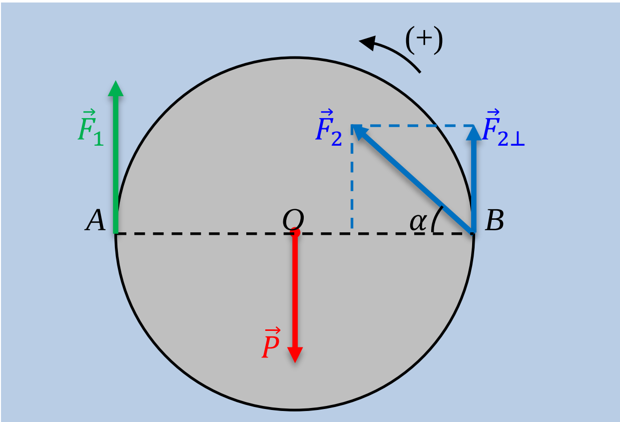


Figure 8.

Bilan des forces : $\vec{P}$; $\vec{F}_1$; $\vec{F}_2$

D'après le *T.A.A* on a :

$$\sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = J_\Delta\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_1) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_2) = J_\Delta\ddot{\theta}$$

$\Rightarrow \quad 0 - F_1.OA + F_2.OB.sin\alpha = J_\Delta \ddot{\theta}$

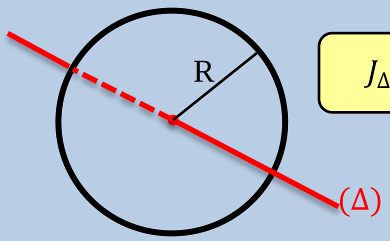
D'où :

$$- F_1.R + F_2.R.sin\alpha = J_\Delta \ddot{\theta}$$

II.4. Quelques moments d'inertie des solides par rapport à un axe de symétrie.

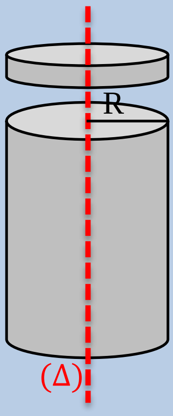
Certains solides à répartition symétrique ont un moment d'inertie dépendant de leurs caractéristiques. La figure 9 ci – dessous donne les moments d'inertie de quelques solides.

a) *Jante, Volant, Cerceau : ce sont des circonférences pesantes.*



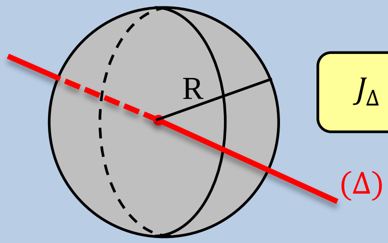
$$J_\Delta = mR^2$$

b) *Disque et cylindre pleins homogènes.*



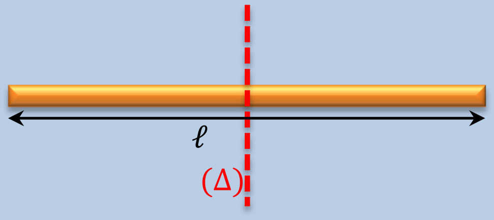
$$J_\Delta = \frac{1}{2} mR^2$$

c) *Sphère homogène.*



$$J_\Delta = \frac{2}{5} mR^2$$

d) *Tige homogène de longueur ℓ.*



$$J_\Delta = \frac{1}{12} m\ell^2$$

Figure 9.

II.5. Théorème d'Huygens.

Si l'axe de rotation ne passe pas par le centre de gravité du système (figure 10) :

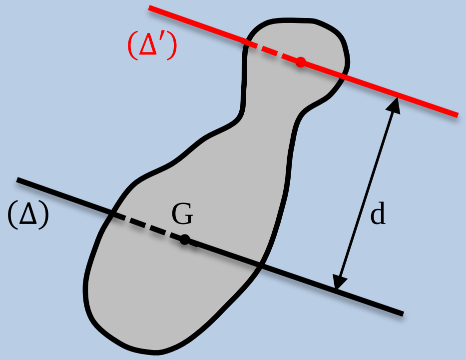


Figure 10.

$$J_{\Delta'} = J_\Delta + md^2$$

❖ **Enoncé :**

Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe quelconque (Δ') est égal à son moment d'inertie par rapport à l'axe (Δ), parallèle à (Δ') et passant par le centre de gravité, augmenté du produit de la masse du solide par le carré de la distance des deux axes.

Exemples :

a) *Tige ou barreau homogène* (figure 11)

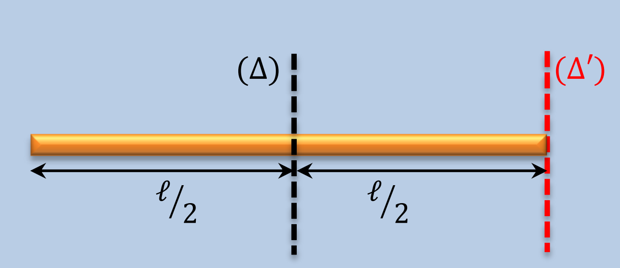


Figure 11.

$$J_{\Delta'} = J_\Delta + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}m\ell^2 + \frac{1}{4}m\ell^2$$

D'où :

$$\boxed{J_{\Delta'} = \frac{1}{3}m\ell^2}$$

b) Disque homogène.

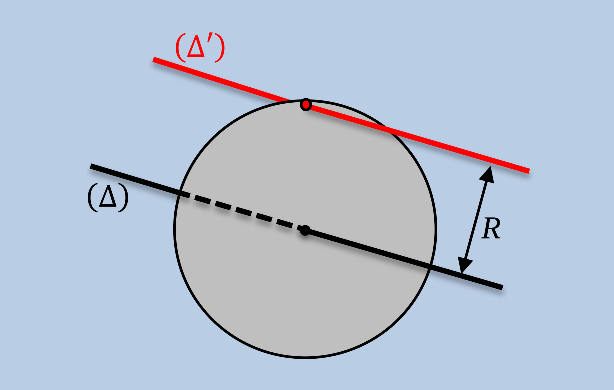


Figure 12.

$$J_{\Delta'} = J_\Delta + m(R)^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2$$

D'où :

$$\boxed{J_{\Delta'} = \frac{3}{2}mR^2}$$

Exercices d'application.

Exercice 1 : A l'extrémité d'un couple moteur $M_m = 0{,}1N.m$, on fait tourner autour d'un axe (Δ) horizontal, un disque plein et homogène de rayon $r = 50cm$, initialement au repos, jusqu'à atteindre au bout de *2s* une vitesse angulaire $\dot{\theta} = 10rad/s$.

1°) Exprime l'accélération angulaire du disque en fonction de M_m et du moment d'inertie *J* du disque par rapport à l'axe (Δ).

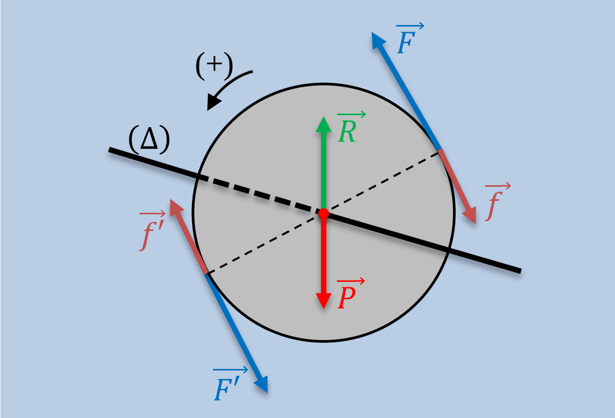
2°) Calcule *J*.

3°) Détermine le nombre de tours effectués par le disque pendant ces *2* secondes.

4°) Au bout de *2s* de rotation, on supprime l'action du couple moteur et la roue s'arrête au bout de *10 tours*. Calcule le moment du couple résistant supposé constant.

Corrigé 1.

$M_m = 0{,}1N.m$; $r = 50cm$; $t = 2s$; $\dot{\theta} = 10rad/s$.



1°) Expression de l'accélération angulaire du disque en fonction de M_m et de J.

Système d'étude : disque de masse en rotation autour de l'axe (Δ).

Bilan des forces : $\vec{P}$; $\vec{R}$; couple moteur $(\vec{F}, \vec{F'})$

T.A.A : $\sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = J_\Delta\ddot{\theta}$

$\Rightarrow \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}, \vec{F'}) = J_\Delta\ddot{\theta}$

Avec $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = 0$; $\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = 0$

$\Rightarrow \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}, \vec{F'}) = J_\Delta\ddot{\theta} \Rightarrow M_m = J\ddot{\theta}$

D'où :

$$\boxed{\ddot{\theta} = \frac{M_m}{J}}$$

2°) Calcul de J.

$\ddot{\theta} = cte \neq 0$, le mouvement est circulaire uniformément varié.

D'après la relation vitesse – temps (RVT) :

$$\dot{\theta} - \dot{\theta}_0 = \ddot{\theta}(t - t_0)$$

t_0 étant nul $\Rightarrow \dot{\theta} - \dot{\theta}_0 = \ddot{\theta}t$

Origine des dates **:** l'instant du début du mouvement du disque.

Origine des espaces **:** position du disque juste avant le début du mouvement.

A $t = 0$: $\dot{\theta}_0 = 0 \quad \Rightarrow \dot{\theta} = \ddot{\theta}t$

D'où :

$$\boxed{\ddot{\theta} = \frac{\dot{\theta}}{t}}$$

$\boldsymbol{A.N}$: $\ddot{\theta} = \frac{10}{2} = 5 \Rightarrow \ddot{\theta} = 5rad.s^{-2}$

Ainsi :

$\ddot{\theta} = \frac{M_m}{J} \Rightarrow \boxed{J = \frac{M_m}{\ddot{\theta}}}$

$\boldsymbol{A.N}$: $J = \frac{0{,}1}{5} = 0{,}02 \Rightarrow \boxed{J = 0{,}02Kg.m^2}$

3°) Détermination du nombre de tours.

1ère méthode.

$\ddot{\theta} = cte \neq 0 \Rightarrow$ M.C.U.V d'équation :

$$\theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 + \dot{\theta}_0 t + \theta_0$$

Avec : $\theta_0 = 0 ; \dot{\theta}_0 = 0.$

$\Rightarrow \theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2$; or $\theta = 2\pi n$

Ainsi : $2\pi n = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2$

D'où :

$$\boxed{n = \frac{\ddot{\theta}t^2}{4\pi}}$$

$\boldsymbol{A.N}$: $n = \frac{5 \times 2^2}{4 \times 3{,}14} = 1{,}59 \Rightarrow \boxed{n = 1{,}59tr}$

2ème méthode.

$\ddot{\theta} = cte \neq 0 \Rightarrow$ M.C.U.V

D'après la REV, on a :

$$\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2 = 2\ddot{\theta}(\theta - \theta_0)$$

Avec : $\theta_0 = 0 ; \dot{\theta}_0 = 0. \Rightarrow \dot{\theta}^2 = 2\ddot{\theta}.\theta$

or $\theta = 2\pi n \Rightarrow \dot{\theta}^2 = 4\pi n.\ddot{\theta}.$

D'où :

$$\boxed{n = \frac{\dot{\theta}^2}{4\pi\ddot{\theta}}}$$

$\boldsymbol{A.N}$: $n = \frac{10^2}{4 \times 3{,}14 \times 5} = 1{,}59$

$$\boxed{n = 1{,}59tr}$$

4°) n_1 =10 tours

Calcul du moment du couple résistant supposé constant.

Système d'étude : disque de masse en rotation autour de l'axe (Δ).

Bilan des forces : $\vec{P}$; $\vec{R}$; couple résistant $(\vec{f}, \vec{f'})$

T.A.A : $\sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = J_\Delta \ddot{\theta}_1$

$\Rightarrow \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{f}, \vec{f'}) = J_\Delta \ddot{\theta}_1$

Avec $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = 0$; $\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = 0$

$\Rightarrow \mathcal{M}_\Delta(\vec{f}, \vec{f'}) = J_\Delta \ddot{\theta}_1 \Rightarrow M_r = J\ddot{\theta}_1$

Trouvons $\ddot{\theta}_1$

$\ddot{\theta}_1 = cte \neq 0 \Rightarrow$ M.C.U.V

D'après la REV, on a : $\dot{\theta}_1^2 - \dot{\theta}_{0_1}^2 = 2\ddot{\theta}_1(\theta_1 - \theta_{0_1})$

Origine des dates **:** l'instant où l'on supprime le moment moteur.

Origine des espaces **:** la position du disque juste avant qu'on ne supprime le moment moteur.

A $t = 0$: $\dot{\theta}_{0_1} = \dot{\theta}$; $\theta_{0_1} = 0$

$\Rightarrow \dot{\theta}_1^2 - \dot{\theta}^2 = 2\ddot{\theta}_1\theta_1$

A l'arrêt $\dot{\theta}_1 = 0 \Rightarrow -\dot{\theta}^2 = 2\ddot{\theta}_1.\theta_1$

avec $\theta_1 = 2\pi n_1 \Rightarrow \ddot{\theta}_1 = -\frac{\dot{\theta}^2}{4\pi n_1}$

D'où :

$$\boxed{M_r = -J\frac{\dot{\theta}^2}{4\pi n_1}}$$

$\boldsymbol{A.N}$: $Mr = \frac{-0{,}02 \times 10^2}{4 \times 3{,}14 \times 10} = -0{,}016$

$$\boxed{M_r = -0{,}016N.m}$$

Exercice 2 : Un disque plan *D*, vertical et homogène, de masse *m = 1Kg* et de rayon *R = 10cm*, d'épaisseur constante, peut tourner autour d'un axe horizontal, perpendiculaire à son plan et passant par son centre *O*. Les frottements sont équivalents à un couple résistant constant de moment $\mathcal{M}_r$.

Le disque *D*, parti du repos, acquiert en un temps *t = 10s* une vitesse *N = 300tr/min* sous l'action d'un couple moteur constant de moment $\mathcal{M}_m = 1{,}82.10^{-2}N.m$.

1°) Détermine l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ du mouvement.

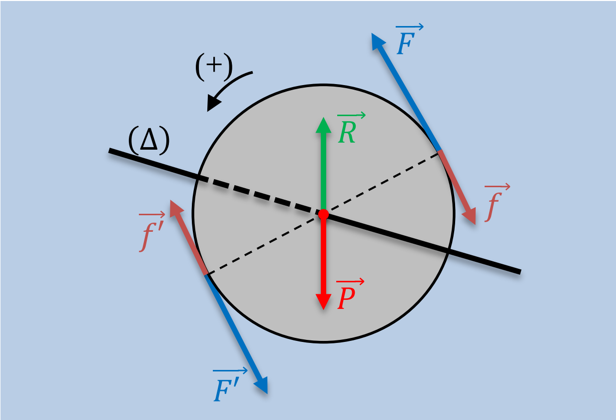
2°) Déduis – en :

a) Le moment $\mathcal{M}_r$ du couple résistant.

b) Le nombre de tours effectués par le disque.

Corrigé 2.

$m = 1Kg$; $R = 10cm$; $t = 10s$; $N = 300tr/min$; $\mathscr{M}_m = 1{,}82.10^{-2}N.m$.



1°) Je détermine l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ du mouvement.

Système d'étude : disque de masse en rotation autour de l'axe (Δ).

Bilan des forces : $\vec{P}$; $\vec{R}$; couple moteur $(\vec{F}, \vec{F'})$ couple résistant $(\vec{f}, \vec{f'})$

T.A.A : $\sum \mathscr{M}_\Delta(\vec{F}) = J_\Delta\ddot{\theta}$

$$\mathscr{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathscr{M}_\Delta(\vec{R}) + \mathscr{M}_\Delta\left(\vec{F}, \vec{F'}\right) + \mathscr{M}_\Delta\left(\vec{f}, \vec{f'}\right) = J_\Delta\ddot{\theta}$$

Avec $\mathscr{M}_\Delta(\vec{P}) = 0$; $\mathscr{M}_\Delta(\vec{R}) = 0$

$$\Rightarrow \mathscr{M}_\Delta\left(\vec{F}, \vec{F'}\right) + \mathscr{M}_\Delta\left(\vec{f}, \vec{f'}\right) = J_\Delta\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \mathscr{M}_m + \mathscr{M}_r = J\ddot{\theta}$$

$\ddot{\theta} = cte \neq 0$, le mouvement est circulaire uniformément varié.

D'après la relation vitesse – temps (RVT) :

$$\dot{\theta} - \dot{\theta}_0 = \ddot{\theta}(t - t_0)$$

t_0 étant nul $\Rightarrow \dot{\theta} - \dot{\theta}_0 = \ddot{\theta}t$

Origine des dates : l'instant du début du mouvement du disque.

Origine des espaces : position du disque juste avant début du mouvement.

A $t = 0$: $\dot{\theta}_0 = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = \ddot{\theta}t$

D'où :

$$\boxed{\ddot{\theta} = \frac{2\pi N}{t}}$$

$$\boldsymbol{A.N} : \ddot{\theta} = \frac{2 \times 3{,}14 \times 5}{10} = 3{,}14$$

$$\boxed{\ddot{\theta} = 3{,}14\ rad.s^{-2}}$$

2°) Je déduis :

a) Le moment $\mathscr{M}_r$ du couple résistant.

$$\mathscr{M}_m + \mathscr{M}_r = J\ddot{\theta} \Rightarrow \mathscr{M}_r = J\ddot{\theta} - \mathscr{M}_m$$

Avec : $J = \frac{1}{2}mR^2$

D'où :

$$\boxed{\mathscr{M}_r = \frac{1}{2}mR^2\ddot{\theta} - \mathscr{M}_m}$$

$$\textbf{A.N :}\ \mathscr{M}_r = \frac{1}{2} \times 1 \times 0{,}1^2 \times 3{,}14 - 1{,}82.10^{-2}$$

$$\boxed{\mathscr{M}_r = -2{,}5.10^{-3}N.m}$$

b) Le nombre de tours effectués par le disque.

$\ddot{\theta} = cte \neq 0 \Rightarrow$ M.C.U.V d'équation :

$$\theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 + \dot{\theta}_0 t + \theta_0$$

Avec : $\theta_0 = 0$; $\dot{\theta}_0 = 0$.

$$\Rightarrow \theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2\ ;\ or\ \ \theta = 2\pi n$$

Ainsi : $2\pi n = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2$

D'où :

$$\boxed{n = \frac{\ddot{\theta}t^2}{4\pi}}$$

$$\boldsymbol{A.N} : n = \frac{3{,}14 \times 10^2}{4 \times 3{,}14} = 25$$

$$\boxed{n = 25\ trs}$$

Exercice 3 : Un corps *A* de masse *M = 1Kg* peut glisser sur un plan incliné dont la ligne de plus grande pente fait un angle $\alpha = 30°$ avec le plan horizontal. Les forces de frottement qui agissent sur le corps *A* sont équivalentes à une force unique $\vec{f}$ parallèle au déplacement et de sens contraire, d'intensité égale au dixième du poids $\left(f = \frac{1}{10}P\right)$.

Le corps *A* est relié à un fil enroulé sur un cylindre et fixé à celui – ci.

Ce cylindre de rayon *r = 6cm* est mobile sans frottement autour d'un axe horizontal *O* passant par son axe de symétrie et a un moment d'inertie $J = 9.10^{-4}Kg.m^2$.

1°) On lâche le corps :

a) Donne l'expression de l'accélération du centre de gravité de A ;

b) Déduis la nature du mouvement de A.

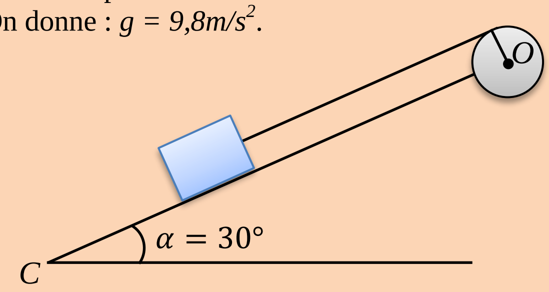
2°) Calcule la tension T du fil.

3°) Après un parcours de *2m* sur le plan incliné, le fil reliant *A* au cylindre est coupé.

a) Calcule la vitesse du corps *A* à l'issue du parcours de *2m*.

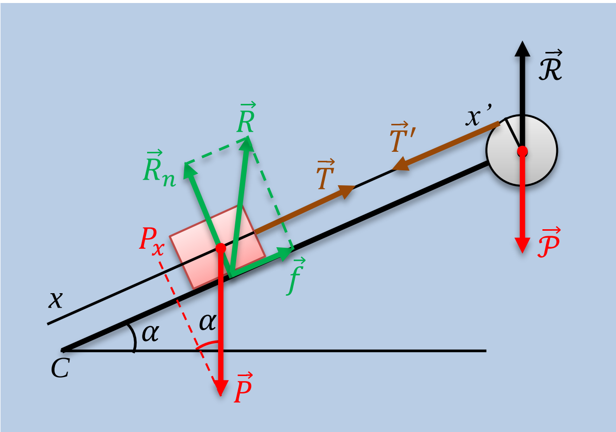
b) Calcule la nouvelle valeur *a'* de l'accélération du corps *A*.

On donne : *g = 9,8m/s²*.



Corrigé 3.

$M = 1Kg$; $\alpha = 30°$; $f = \frac{1}{10}P$; $r = 6cm$; $J = 9.10^{-4} Kg.m^2$; $g = 9,8m/s^2$



1°) a) Je donne l'expression de l'accélération du centre de gravité de A ;

- ✓ ***R.T.S.G.***
- ✓ ***Système d'étude I :*** corps A de masse M en translation rectiligne.
- ✓ ***Bilan des forces :*** $\vec{P}$; $\vec{R}$; $\vec{T}$
- ✓ ***T.C.I :*** $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$

$\Rightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = M\vec{a}_G$

- ✓ ***Projection suivant (x'x) :*** $P_x - f - T = Ma_G$

$\Rightarrow Mg\sin\alpha - f - T = Ma_G$

D'où : $T = Mg\sin\alpha - Ma_G$ (1)

- ✓ ***Système d'étude II :*** cylindre de moment d'inertie J en rotation.
- ✓ ***Bilan des forces :*** $\vec{\mathcal{P}}$; $\vec{\mathcal{R}}$; $\vec{T}'$
- ✓ ***T.A.A*** : $\sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = J_\Delta\ddot{\theta}$

$\mathcal{M}_\Delta(\vec{\mathcal{P}}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{\mathcal{R}}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}') + = J\ddot{\theta}$

Avec $\mathcal{M}_\Delta(\vec{\mathcal{P}}) = 0$; $\mathcal{M}_\Delta(\vec{\mathcal{R}}) = 0$

$\Rightarrow \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}') + = J\ddot{\theta}$

$\Rightarrow T'r = J\ddot{\theta}$ (2)

Le fil étant inextensible, on a d'après le P.A.M : $T = T'$, alors :

$(Mg\sin\alpha - f - Ma_G)r = J\ddot{\theta}$

$\Rightarrow (Mg\sin\alpha - f - Ma_G)r = J\frac{a_G}{r}$; $avec\ \ddot{\theta} = \frac{a_G}{r}$

$\Rightarrow Mg\sin\alpha - f - Ma_G = J\frac{a_G}{r^2}$

$\Rightarrow \left(M + \frac{J}{r^2}\right)a_G = Mg\sin\alpha - f$

$\Rightarrow \left(M + \frac{J}{r^2}\right)a_G = Mg\sin\alpha - \frac{1}{10}Mg$

D'où :

$$\boxed{a_G = \frac{Mg\left(\sin\alpha - \frac{1}{10}\right)}{\left(M + \frac{J}{r^2}\right)}}$$

b) Je déduis la nature du mouvement de A.

$$\boldsymbol{A.N} : a_G = \frac{1 \times 9,8\left(\sin 30° - \frac{1}{10}\right)}{\left(1 + \frac{9.10^{-4}}{(0,06)^2}\right)} = 3,14$$

$$\boxed{a_G = 3,14m/s^2}$$

$a_G = 3,14m/s^2 =$ cte $\neq 0$, le mouvement de *A* est R.U.V.

2°) Je calcule la tension T du fil.

D'après ce qui précède :

$T = Mg\sin\alpha - f - Ma_G$

$\Rightarrow T = Mg\sin\alpha - \frac{1}{10}Mg - Ma_G$

D'où :

$$\boxed{T = Mg\left(\sin\alpha - \frac{1}{10} - \frac{a_G}{g}\right)}$$

$$\boldsymbol{A.N}: T = 1 \times 9,8\left(\sin 30° - \frac{1}{10} - \frac{3,14}{9,8}\right) = 0,78$$

$$\boxed{T = 0,78N}$$

3°) d = 2m

a) Je calcule la vitesse du corps A à l'issue du parcours de 2m.

$a_G = 3{,}14 m/s^2 = cte \neq 0 \Rightarrow$ *M.R.U.V.*

D'après la relation espace – vitesse (R.E.V), on a :

$$v^2 - v_0^2 = 2a_G(x - x_0)$$

- ***Origine des espaces :*** *position de A avant le lâché.*
- ***Origine des dates :*** *Instant du lâché de A.*

$A\ t = 0 : v_0 = 0 ; x_0 = 0$

Après un parcours de 2m : $x = d$, alors :

$$v^2 = 2a_G d$$

D'où :

$$\boxed{v = \sqrt{2a_G d}}$$

$\boldsymbol{A.N} : v = \sqrt{2 \times 3{,}14 \times 2} = 3{,}96$

$$\boxed{v_B = 3{,}54 m.s^{-1}}$$

b) Je calcule la nouvelle valeur a' de l'accélération du corps A.

D'après ce qui précède :

$T = Mgsin\alpha - \frac{1}{10}Mg - Ma_G$

Lorsque le fil est coupé : $T = 0$, alors :

$Mgsin\alpha - \frac{1}{10}Mg - Ma'_G = 0$

D'où :

$$\boxed{a'_G = g\left(sin\alpha - \frac{1}{10}\right)}$$

$\boldsymbol{A.N} : a'_G = 9{,}8\left(sin30° - \frac{1}{10}\right) = 3{,}92$

$$\boxed{a'_G = 3{,}92 m/s^2}$$

DOMAINE D'ETUDE I : MECANIQUE

OG_3 : ANALYSER LES SYSTEMES MECANIQUES EN MOUVEMENT.

6 LES ENERGIES
Energies Cinétique, Potentielle et Mécanique.

I. Rappels et compléments.
I.1. Travail d'une force.
I.1.1. Travail d'une force dans un déplacement rectiligne.

Considérons une force $\vec{F}$ en déplacement rectiligne entre deux points A et A' (figure 1).

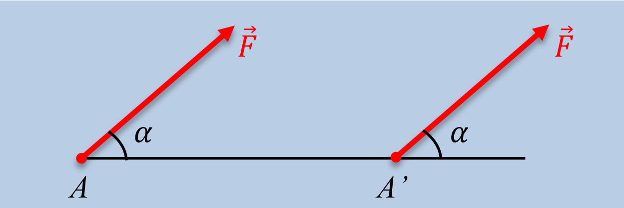


Figure 1.

Le travail de la force $\vec{F}$ au cours du déplacement rectiligne AA' est égal au produit scalaire des vecteurs $\vec{F}$ et $\overrightarrow{AA'}$.

$$W_{\vec{F}} = \vec{F}.\overrightarrow{AA'} = F.AA'.cos\left(\vec{F},\overrightarrow{AA'}\right)$$

D'où :

$$\boxed{W_{\vec{F}} = F.AA'.cos\alpha}$$

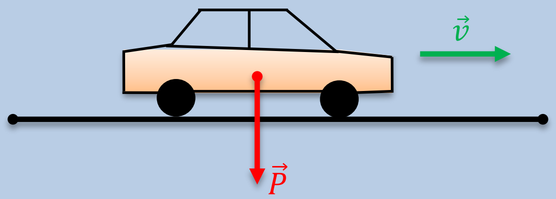
Le travail s'exprime en joules (J)

Conséquences :

✓ *Le travail d'une force non nulle peut être nul, si la direction de la force est perpendiculaire au déplacement* (figure 2).

$$\left(\vec{F},\overrightarrow{AA'}\right) = \frac{\pi}{2}\ ;\ cos\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{W_{\vec{F}} = 0}$$

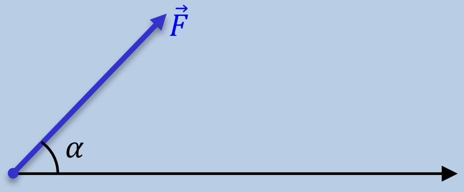
$$\boxed{W_{\vec{F}} = 0}$$



$$\boxed{W_{\vec{P}} = 0}$$

➢ *Le travail d'une force peut être positif si :*

$$0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}\ ;\ cos\alpha > 0$$

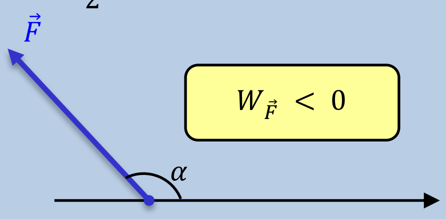


$$\boxed{W_{\vec{F}} > 0}$$

Dans ce cas, le *travail est dit moteur.*

➢ *Le travail d'une force peut être négatif si :*

$$\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi\ ;\ cos\alpha < 0$$



$$\boxed{W_{\vec{F}} < 0}$$

Dans ce cas, *le travail est dit résistant.*

Figure 2.

I.1.2. Travail du poids.

Considérons un corps de masse (*m*) décrivant une trajectoire *(t)* quelconque entre deux points *A* et *A'* d'altitudes différentes (figure 3).

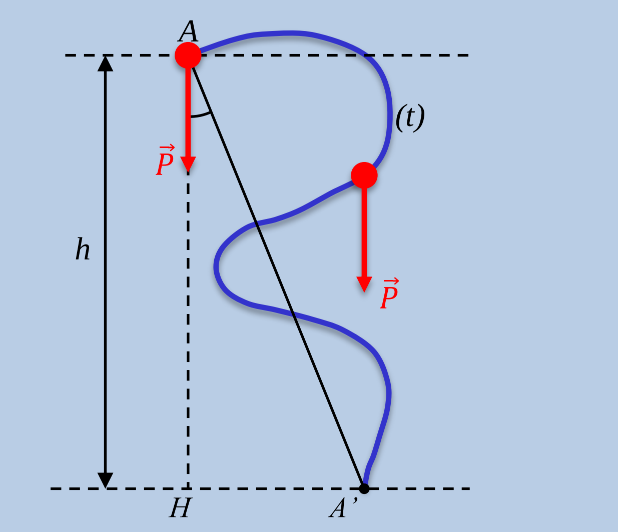


Figure 3.

Le travail du poids du corps entre les points *A* et *A'* est tel que :

$$W_{\vec{P}} = \vec{P}.\overrightarrow{AA'} = P.AA'.\cos\left(\vec{P},\overrightarrow{AA'}\right)$$

$$W_{\vec{P}} = P.AH = P.h$$

D'où :

$$\boxed{W_{\vec{P}} = P.h}$$

Le travail du poids ne dépend pas du chemin suivi, mais de la différence d'altitude entre les points A et A'.

Si l'altitude du point *A'* est supérieure à celle du point *A*, le travail du poids est résistant.

$$\boxed{W_{\vec{P}} = -P.h}$$

***N.B :** Le travail du poids ne dépend pas du chemin suivi, mais seulement de la différence de niveau entre la position initiale et la position finale.*

Au cours d'une monté le travail du poids est *résistant*, tandis qu'au cours d'une descente le travail du poids est *moteur*.

Il est évident que : $W_{\vec{P}} = P.h = m.g.h$

- ✓ Pour un déplacement *horizontal h = 0.*
- ✓ Pour un déplacement *vertical h = x* ou *h = z.*
- ✓ Pour un déplacement *oblique h = xsinα* ; avec α l'angle de l'inclinaison.

I.1.3. Travail d'une force appliquée à un solide en mouvement de rotation.

Considérons un disque en rotation par rapport à un axe (Δ) et une force tangentielle appliquée au disque en mouvement $\vec{F}$ (figure 4).

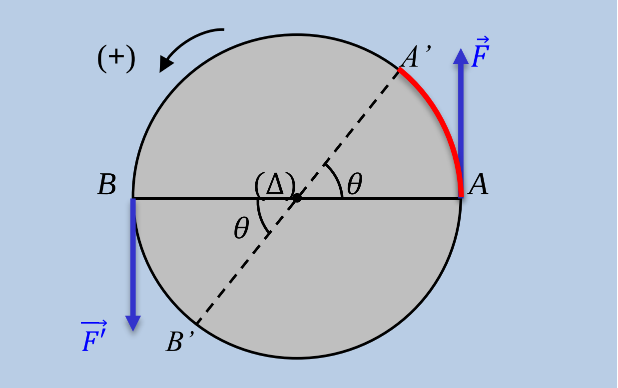


Figure 4.

Le travail de la force $\vec{F}$ entre les points *A* et *A'* est tel que :

$W_{\vec{F}} = F.\overset{\frown}{AA'} = F.R\theta$

Avec $\overset{\frown}{AA'} = R\theta$ $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = F.R$

d'où:

$$\boxed{W_{\vec{F}} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}).\theta}$$

Travail d'un couple de force.

Définition : *On appelle couple de force, un ensemble de deux forces parallèles, opposés et de même intensité, localisées de part et d'autre de l'axe de rotation, à égale distance de l'axe.*

Dans la figure 4 ci – dessus, les forces $\vec{F}$ et $\vec{F'}$ forment un couple de forces noté $\left(\vec{F},\vec{F'}\right)$; ainsi le travail de ce couple de force dans un déplacement d'angle θ on a :

$W_{(\vec{F},\vec{F'})} = F.R\theta + F'.R\theta$

Avec $F = F'$, alors : $W_{(\vec{F},\vec{F'})} = 2F.R\theta$

Soit :

$$\boxed{W_{(\vec{F},\vec{F'})} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F},\vec{F'}).\theta}$$

Remarques :

R₁ : Si le couple de force $\left(\vec{F},\vec{F'}\right)$ provoque la rotation du système, *on dit que le couple est moteur et son moment est un moment moteur.*

R_2 : Si le couple de force $(\vec{F}, \vec{F'})$ s'oppose au mouvement de rotation du système ou contribue au freinage de celui – ci, on dit que *le couple est résistant et son moment est un moment résistant.*

I.2. Puissance d'une force.

Définition : *La puissance d'une force est le travail effectué par cette force par unité de temps. On la note :*

$$\mathcal{P} = \frac{W_{\vec{F}}}{t} \quad (W)$$

I.2.1. Cas d'un solide en mouvement de translation.

Dans un mouvement de translation rectiligne :

$$W_{\vec{F}} = F.dcos\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{P} = \frac{F.dcos\alpha}{t} = F.vcos\alpha$$

D'où :

$$\boxed{\mathcal{P} = F.vcos\alpha}$$

I.2.2. Cas d'un solide en mouvement de rotation.

Dans un mouvement de translation rectiligne :

$$W_{\vec{F}} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}).\theta$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{P} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}).\frac{\theta}{t} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}).\dot{\theta}$$

D'où :

$$\boxed{\mathcal{P} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}).\dot{\theta}}$$

II. L'énergie cinétique :
II.1. Cas d'un point matériel.

Définition : *On appelle énergie cinétique d'un point matériel à un instant donné, le demi – produit de sa masse par le carré du module de sa vitesse à cet instant.*

On la note : $\boxed{E_C = \frac{1}{2}mv^2}$ (J)

II.2. Cas d'un système matériel.

Pour un système matériel en mouvement de translation :

$$E_C = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}m_i v^2 = \frac{1}{2}v^2 \sum_{i=1}^{n} m_i$$

en posant $\sum_{i=1}^{n} m_i = M$

D'où :

$$\boxed{E_C = \frac{1}{2}Mv^2}$$

➤ *Si le solide est animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe (Δ).*

$$E_C = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}m_i v^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}m_i (R_i\omega)^2$$

$$E_C = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}m_i R_i^2\omega^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2$$

comme $\sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 = J_\Delta$

D'où :

$$\boxed{E_C = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2}$$

➤ *Si le solide est animé d'un mouvement complexe, c'est – à – dire une translation et une rotation simultanément :*

$$\boxed{E_C = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2}$$

Exemple : Evaluons l'énergie cinétique d'une bille homogène de masse M, qui roule sans glisser sur un plan quelconque (figure 5).

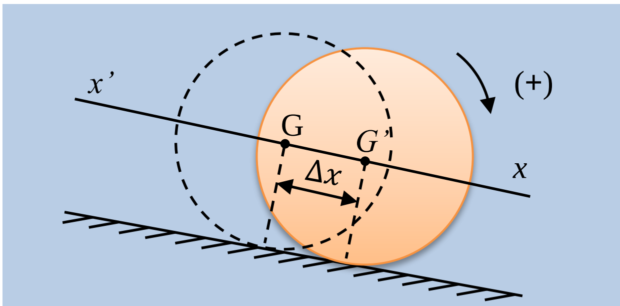


Figure 5.

$$E_C = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2$$

avec $J_\Delta = \frac{2}{5}MR^2$; $\dot{\theta} = \frac{v}{R}$

$$\Rightarrow \quad E_C = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}MR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2$$

$$E_C = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{5}Mv^2$$

D'où :

$$\boxed{E_C = \frac{7}{10}Mv^2}$$

II.3. Théorème de l'énergie cinétique.

❖ **Enoncé :**

La variation de l'énergie cinétique d'un système matériel entre deux instants donnés est égale à la somme algébrique des travaux effectués entre ces instants par toutes les forces (intérieures et extérieures) qui s'exercent sur les diverses parties du système.

$$\boxed{\Delta E_C = \sum W_{\vec{F}_{ext}} + \sum W_{\vec{F}_{int}}}$$

➢ *Pour un système indéformable :*

$$\sum W_{\vec{F}_{int}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta E_C = \sum W_{\vec{F}_{ext}}$$

Soit :

$$\boxed{\Delta E_C = E_{C_f} - E_{C_i} = \sum W_{\vec{F}_{ext}}}$$

Note : Un système matériel est :

- ***Déformable*** *si les distances entre les points matériels qui le composent sont variables* ; c'est le cas d'un ressort, d'un fil de torsion, d'une balle élastique, … ,ou encore du système solaire comprenant le soleil, les planètes et leurs satellites.
- ***Indéformable****, si au contraire ses éléments matériels démeurent dans des positions relatives invariables*. Ce que nous appelons un solide, tel qu'une masse marquée, une pierre, un projectile avant son éclatement, … est un système matériel pratiquement indéformable.

III. L'énergie potentielle.

III.1. Définition.

L'énergie potentielle est l'énergie liée à la position ou à la déformation d'un système mécanique.

C'est aussi l'énergie en reserve que possède un système et qu'il peut utiliser pour accomplir un travail.

III.2. Energie potentielle de quelques systèmes.

a) Energie potentielle de pesanteur

Considérons un corps de masse m qui tombe en décrivant une trajectoire quelconque entre une position (1) d'altitude z_1 et une position (2) d'altitude z_2 (figure 6).

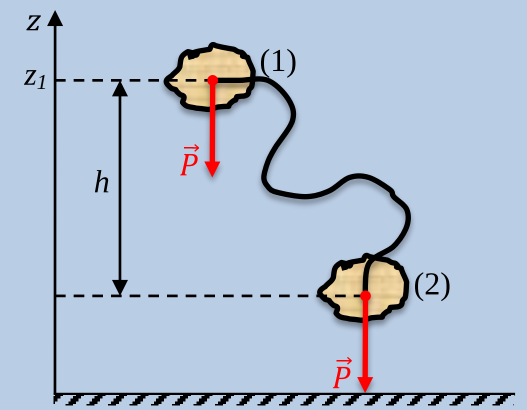


Figure 6.

$$\boxed{E_{P_P} = mgh}$$

b) Energie potentielle élastique.

Considérons un corps de masse m suspendu à un ressort de *constante de raideur K*, tiré vers le bas puis lâché. Sa position en mouvement est donnée par l'abscisse x (figure 7).

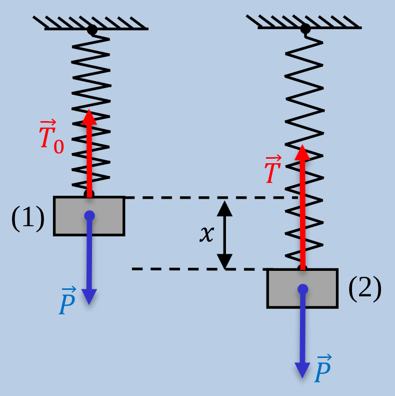


Figure 7.

$$E_{P_e} = \frac{1}{2}Kx^2$$

c) Energie potentielle de torsion.

Considérons une tige homogène de masse m suspendu à un fil de torsion de *constante de torsion* C, écarté d'un angle θ puis lâché. Sa position en mouvement est donnée par l'*abscisse angulaire* θ (figure 8).

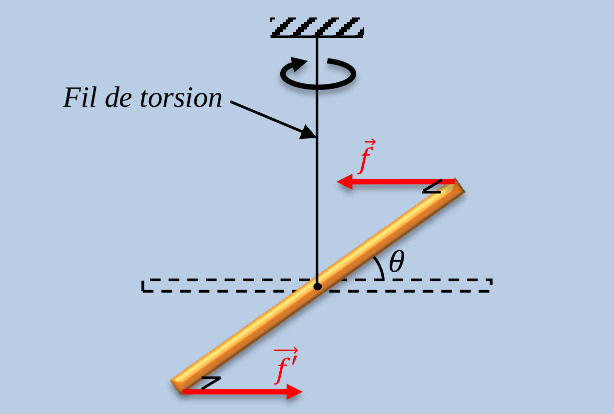


Figure 8.

$$E_{P_t} = \frac{1}{2}C\theta^2$$

III.3. Théorème de l'énergie potentielle.

❖ **Enoncé :**

Entre l'état final et l'état initial, la variation de l'énergie potentielle d'un système isolé est l'opposé de la somme des travaux des forces conservatives appliquées au système.

$$\Delta E_P = -\sum W_{\vec{F}_{cons}}$$

Soit :

$$E_{P_f} - E_{P_i} = -\sum W_{\vec{F}_{cons}}$$

IV. Energie mécanique.

IV.1. Expression de l'énergie mécanique.

L'énergie mécanique d'un système dans un état donné est égale à la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle dans cet état.

$$E_M = E_C + E_P$$

IV.2. Energie mécanique de quelques systèmes.

a) Energie mécanique d'un corps qui tombe en chute libre.

Considérons un corps de masse m qui tombe en chute libre, d'une *hauteur* h, animé d'une vitesse v (figure 9).

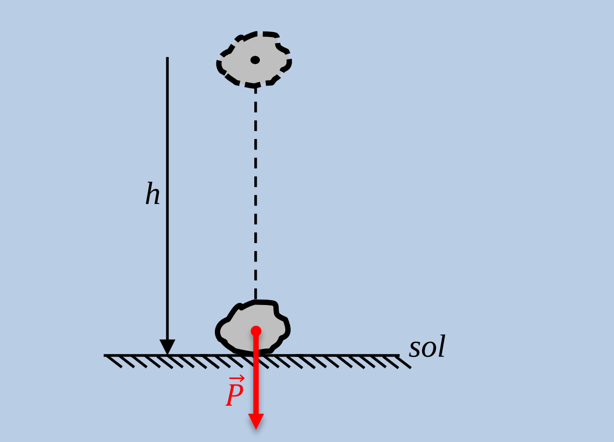


Figure 9.

$$E_M = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

b) Energie mécanique d'un pendule élastique horizontal.

Considérons un corps de masse m accroché à un ressort de *constante de raideur* K, l'ensemble est posé sur un plan horizonatl. On écarte le corps de sa position d'équilibre puis on le lâche. Animé de la vitesse $v = \dot{x}$, sa position est donée par l'abscisse x (figure 10).

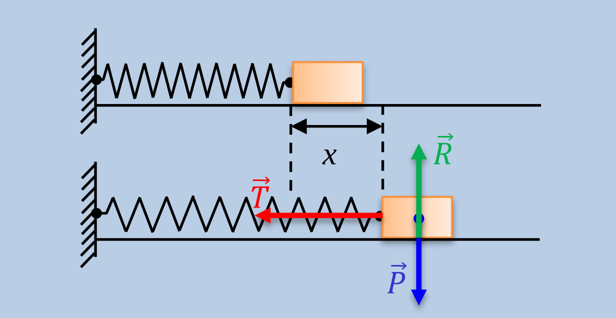


Figure 10.

$$E_M = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Kx^2$$

c) Energie mécanique d'un pendule élastique vertical.

Considérons un corps de masse m suspendu à un ressort de *constante de raideur* K, tiré vers le bas puis lâché. Animé de la vitesse $v = \dot{x}$, sa position est donée par l'abscisse x (figure 11).

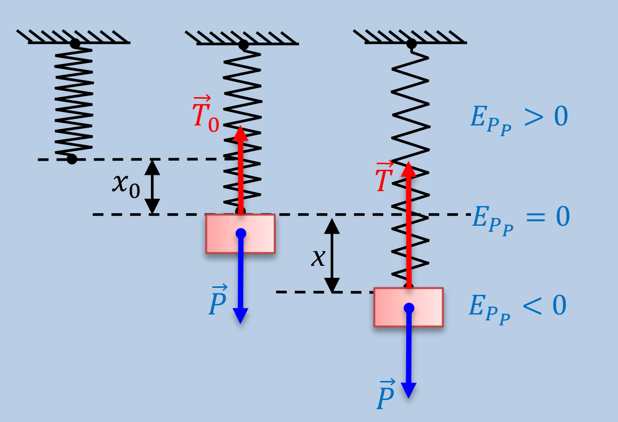


Figure 11.

$$E_M = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}K(x_0 + x)^2 - mgx$$

d) Energie mécanique d'un pendule de torsion.

Considérons une tige homogène de masse m suspendu à un fil de torsion de *constante de torsion* C, écarté d'un angle θ puis lâché. Animé de la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$, sa position est donée par l'abscisse angulaire θ (figure 12).

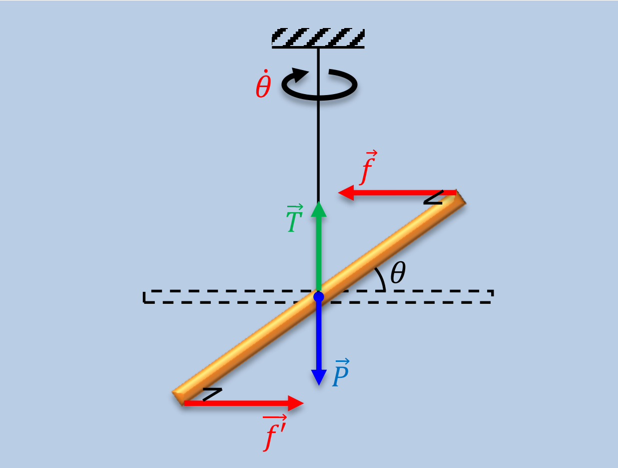


Figure 12.

$$E_M = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\theta^2$$

e) Energie mécanique d'un pendule pesant.

Considérons un solide de masse m suspendu à un axe de rotation, écarté d'un angle θ puis lâché. Animé de la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$, sa position est donée par l'abscisse angulaire θ (figure 12).

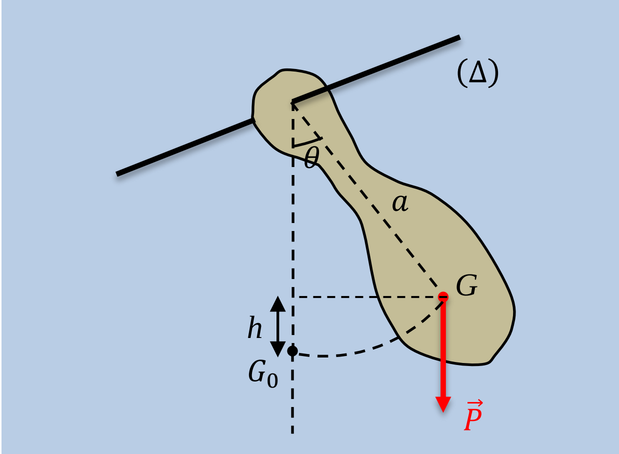


Figure 12.

$$E_M = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 + mga(1 - cos\theta)$$

IV.3. Théorème de l'énergie mécanique (T.E.M).

❖ **Enoncé :**

Entre l'état final et l'état initial, la variation de l'énergie mécanique d'un système non conservatif, vaut la somme des travaux des forces extérieures et des forces intérieures non conservatives.

$$\Delta E_M = \sum W_{\vec{F}_{ext}} + \sum W_{\vec{F}_{int(nc)}}$$

Soit :

$$E_{M_f} - E_{M_i} = \sum W_{\vec{F}_{ext}} + \sum W_{\vec{F}_{int(nc)}}$$

Remarques :

R₁ : Si la somme des travaux des forces extérieures est nulle le T.E.M s'écrit :

$$\Delta E_M = E_{M_f} - E_{M_i} = \sum W_{\vec{F}_{int(nc)}}$$

R₂ : Si le système est conservatif, le T.E.M s'écrit :

$$\Delta E_M = E_{M_f} - E_{M_i} = \sum W_{\vec{F}_{ext}}$$

R$_3$: *On appelle force conservative, une force dont le travail ne dépend pas du chemin suivi.*

IV.4. Conservation de l'énergie mécanique.

Lorsque seules les forces conservatives travaillent, le système devient conservatif, donc isolé. Son énergie mécanique devient constante.

Ainsi : $\sum W_{\vec{F}_{ext}} = 0$

Soit : $\Delta E_M = \Delta E_C + \Delta E_P = 0$

$\Rightarrow E_{C_f} - E_{C_i} + E_{P_f} - E_{P_i} = 0$

$\Rightarrow E_{C_f} + E_{P_f} - \left(E_{C_i} + E_{P_i}\right) = 0$

$\Rightarrow E_{M_f} = E_{M_i} = cte$

D'où :

$$E_M = cte \Rightarrow \frac{dE_M}{dt} = 0$$

V. Etude d'un choc élastique.

Définition : *On appelle choc élastique, une interaction entre deux mobiles au cours de laquelle la quantité de mouvement et l'énergie cinétique se conservent.*

Après le choc, les deux mobiles se séparent.

Considérons un choc élastique entre deux solides (billes) de masses respectives m_1 et m_2, tel que le solide de masse m_1 animé d'une vitesse $\vec{v}_1$ vienne heurter le solide de masse m_2, au repos (figure 13).

- *Avant le choc*

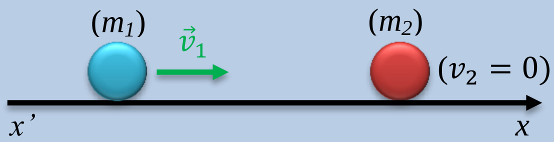


Figure 13.

$$\begin{cases} \vec{p}_{av} = \vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1 \\ E_{C_{av}} = E_{C_1} = \dfrac{1}{2}m_1 v_1^2 \end{cases}$$

- *Après le choc*

Les deux solides se séparent et se déplacent respectivement à des vitesses $\vec{v}_1'$ et $\vec{v}_2'$ (figure 14)

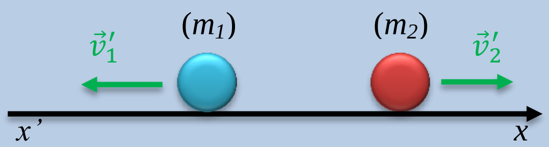


Figure 14.

$$\begin{cases} \vec{p}_{ap} = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' \\ E_{C_{ap}} = E_{C_1}' + E_{C_2}' = \dfrac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \dfrac{1}{2}m_2 v_2'^2 \end{cases}$$

D'après la conservation du vecteur quantité de mouvement et de l'énergie cinétique, on a :

$$\begin{cases} \vec{p}_{ap} = \vec{p}_{av} \\ E_{C_{ap}} = E_{C_{av}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' = m_1\vec{v}_1 \\ \dfrac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \dfrac{1}{2}m_2 v_2'^2 = \dfrac{1}{2}m v_1^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' = m_1\vec{v}_1 \\ m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 = m_1 v_1^2 \end{cases}$$

Après projection on trouve :

$$\begin{cases} m_1 v_1' + m_2 v_2' = m_1 v_1 \\ m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 = m_1 v_1^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1(v_1 - v_1') = m_2 v_2' \quad (1) \\ m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2 v_2'^2 \quad (2) \end{cases}$$

En faisant le rapport des relations (2) et (1), on trouve : $v_1 + v_1' = v_2'$ (3).

En remplaçant la relation (3) dans (1), on trouve finalement :

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

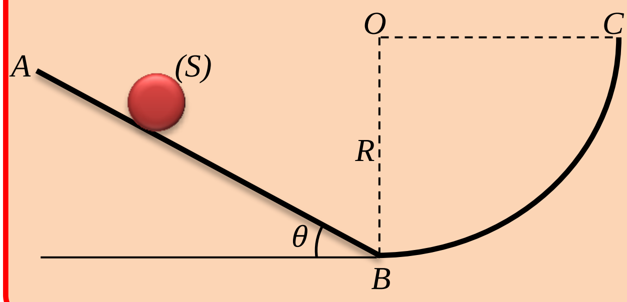
Conclusion :

- Si $m_1 < m_2$, alors $v_1' < 0$, le solide de masse m_1 rebrousse chemin après le choc. *Les deux solides se déplacent en sens inverses.*

- Si $m_1 > m_2$, alors $v'_1 > 0$, le solide de masse m_1 *se déplace dans le même sens* que celui de masse m_2.

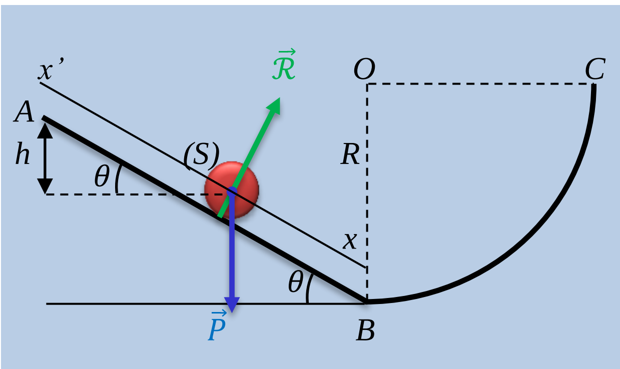
Exercices d'application.

Exercice 1 : 1°) Une sphère homogène de masse *m = 500g* et de rayon *r = 10cm* part sans vitesse initiale du sommet *A* du plan incliné de pente *14%*. Elle roule sans glisser jusqu'au pied *B* de la pente.
a) En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, établis l'expression de l'accélération.
b) Quelle est l'énergie cinétique de la sphère au pied *B* de la pente ? *AB = 200cm ; g =10m.s*$^{-2}$.
2°) La sphère aborde le tronçon circulaire *BC*. On considère qu'elle ne perd pas d'énergie en *B*.
a) La sphère atteindra – t – elle le lieu *C* ? justifie ta réponse.
b) A quelle altitude s'arrêtera – t – elle avant de rebrousser chemin ?
On donne : $H_C = R = 40cm$.



Corrigé 1.
m = 500g ; r = 10cm ; sinθ *= 14% ;*
AB = 200cm ; g = 10m.s^{-2} *;* $H_C = R = 40cm$.

Schéma.



1°) a) Expression de l'accélération.
Système d'étude : Sphère de masse (m) en translation et rotation.
Bilan des forces extérieures : $\vec{P}$; $\vec{\mathcal{R}}$
D'après le théorème de l'énergie cinétique (T.E.C), on a :

$$\Delta E_C = \sum W_{\vec{F}_{ext}}$$

$\Rightarrow E_{C_f} - E_{C_i} = \sum W_{\vec{F}_{ext}}$

$\Rightarrow E_{C_f} - E_{C_i} = W_{\vec{P}} + W_{\vec{\mathcal{R}}}$

La sphère étant partie sans vitesse initiale :

$v_i = 0 \;\Rightarrow\; E_{C_i} = 0$ et $W_{\vec{\mathcal{R}}} = 0$

ainsi $E_{C_f} = W_{\vec{P}}$

$\Rightarrow E_{C_t} + E_{C_r} = W_{\vec{P}}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = P.h$

avec $h = x\sin\theta$; $J = \frac{2}{5}mr^2$ et $\dot{\theta} = \frac{v}{r}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}.\frac{2}{5}mr^2\left(\frac{v}{r}\right)^2 = mgx\sin\theta$

$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{5}mv^2 = mgx\sin\theta$

$\Rightarrow \frac{7}{10}mv^2 = mgx\sin\theta$

Dérivons membre à membre :

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{7}{10}v^2\right) = \frac{d}{dt}(gx\sin\theta)$

$\Rightarrow \frac{7}{10}.\frac{d}{dt}(\dot{x}^2) = g\sin\theta.\frac{dx}{dt}$

$\Rightarrow \frac{7}{10}(2\ddot{x}\dot{x}) = g\sin\theta(\dot{x})$

Avec $\ddot{x} = a$ et $\dot{x} = v$

Alors : $\frac{7}{5}av = gv\sin\theta$

D'où :

$$\boxed{a = \frac{5}{7}g\sin\theta}$$

A.N : $a = \frac{5}{7}\times 10 \times \frac{14}{100} = 1$

$$\boxed{a = 1m/s^2}$$

b) Energie cinétique de la sphère au pied B de la pente.
D'après ce qui précède, on a : $E_{C_f} = W_{\vec{P}}$
Au pied *B* de la pente : $E_{C_B} = W_{\vec{P}}$

$\Rightarrow E_{C_B} = P.h$

$\Rightarrow E_{C_B} = mgx\sin\theta$

Au pied *B* de la pente $x = AB$

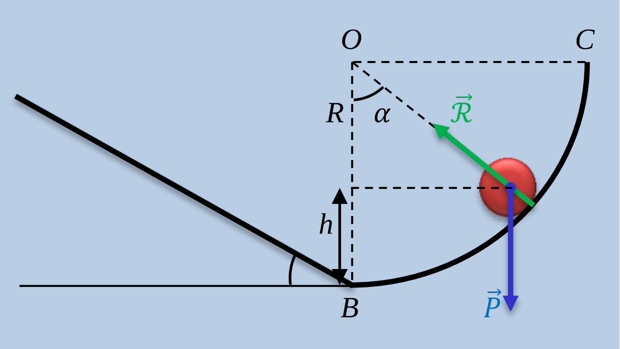
D'où :

$$\boxed{E_{C_B} = mgAB.\sin\theta}$$

A.N : $E_{C_B} = 0{,}5 \times 10 \times 2 \times \frac{14}{100} = 1{,}4$

$$\boxed{E_{C_B} = 1{,}4J}$$

2°) a) Vérifions si la sphère atteindra le lieu C.



La sphère atteindra le lieu C si $\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} \\ v_C \geq 0 \end{cases}$

D'après le T.E.C, on a :

$$\Delta E_C = \sum W_{\vec{F}_{ext}}$$

$\Rightarrow E_{C_C} - E_{C_B} = W_{\vec{P}} + W_{\vec{\mathcal{R}}}$; avec $W_{\vec{\mathcal{R}}} = 0$

$\Rightarrow E_{C_C} - E_{C_B} = W_{\vec{P}}$

$\Rightarrow \frac{7}{10}mv_C^2 - E_{C_B} = -mgh$

Au point C, $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow h = H_C = R$

$\Rightarrow \frac{7}{10}mv_C^2 - E_{C_B} = -mgR$

D'où :

$$\boxed{v_C^2 = \frac{10}{7}\left(\frac{E_{C_B}}{m} - gR\right)}$$

A.N : $v_C^2 = \frac{10}{7}\left(\frac{1{,}4}{0{,}5} - 10 \times 0{,}4\right) = -1.71$

$v_C^2 = -1.71 < 0$, impossible v_C n'existe pas, donc la sphère n'atteindra pas le point C.

b) Altitude à laquelle s'arrêtera la sphère avant de rebrousser chemin ?

D'après ce qui précède : $E_{C_f} - E_{C_i} = W_{\vec{P}}$

$E_{C_f} - E_{C_B} = -mgh'$

A l'arrêt $v_f = 0 \Rightarrow E_{C_f} = 0$

Alors : $-E_{C_B} = -mgh'$

D'où :

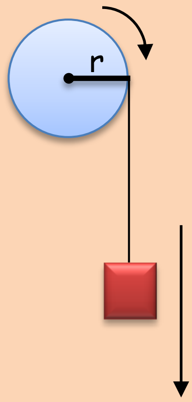
$$\boxed{h' = \frac{E_{C_B}}{mg}}$$

A.N : $h' = \frac{1{,}4}{0{,}5 \times 10} = 0{,}28$

$$\boxed{h' = 0{,}28m}$$

Exercice 2 : Sur un cylindre plein de masse $m = 200g$, de rayon $r = 10cm$, est enroulé un fil inextensible de masse négligeable qui soutient un solide (S) de même masse $m = 200g$. Le système est abandonné sans vitesse et le solide descend d'une hauteur $h = 30cm$ en faisant tourner le cylindre autour de son axe horizontal.

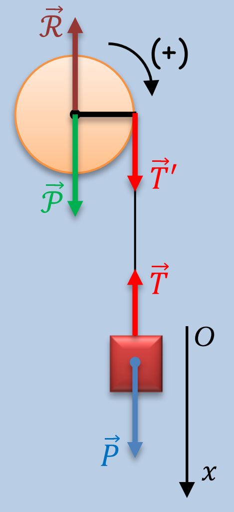
1°) Etablis l'expression de l'accélération linéaire du mouvement en fonction de g puis calcule sa valeur.
2°) Calcule la durée du mouvement du solide.
3°) Détermine la vitesse du solide à cet instant. Déduis – en la vitesse angulaire du cylindre.



Corrigé 2.

$m = 200g$; $r = 10cm$; $h = 30cm$.

Schéma :



1°) J'établis l'expression de l'accélération linéaire du mouvement en fonction de g.

- ✓ ***Système d'étude :*** Sphère de masse (m) en translation et rotation.
- ✓ ***Bilan des forces extérieures :*** $\vec{\mathcal{P}}$; $\vec{\mathcal{R}}$; $\vec{P}$

D'après le théorème de l'énergie cinétique (T.E.C), on a :

$$\Delta E_C = \sum W_{\vec{F}_{ext}}$$

$\Rightarrow \; E_{C_f} - E_{C_i} = \sum W_{\vec{F}_{ext}}$

$\Rightarrow \; E_{C_f} - E_{C_i} = W_{\vec{\mathcal{P}}} + W_{\vec{\mathcal{R}}} + W_{\vec{P}}$

La sphère étant partie sans vitesse initiale :

$v_i = 0 \;\Rightarrow\; E_{C_i} = 0$ et $W_{\vec{\mathcal{R}}} = 0$; $W_{\vec{\mathcal{P}}} = 0$

ainsi $E_{C_f} = W_{\vec{P}}$

$\Rightarrow \; E_{C_t} + E_{C_r} = W_{\vec{P}}$

$\Rightarrow \; \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = P.h$

avec $h = x$; $J = \frac{1}{2}mr^2$ et $\dot{\theta} = \frac{v}{r}$

$\Rightarrow \; \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}mr^2\left(\frac{v}{r}\right)^2 = mgx\sin\theta$

$\Rightarrow \; \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}mv^2 = mgx$

$\Rightarrow \; \frac{3}{4}mv^2 = mgx$

Dérivons membre à membre :

$\Rightarrow \; \frac{d}{dt}\left(\frac{3}{4}v^2\right) = \frac{d}{dt}(gx)$

$\Rightarrow \; \frac{3}{4}.\frac{d}{dt}(\dot{x}^2) = g.\frac{dx}{dt}$

$\Rightarrow \; \frac{3}{4}(2\ddot{x}\dot{x}) = g.\dot{x}$; avec $\ddot{x} = a$ et $\dot{x} = v$

Alors : $\frac{3}{2}av = gv$

D'où :

$$\boxed{a = \frac{2}{3}g}$$

$\boldsymbol{A.N}$: $a = \frac{2}{3} \times 10 = 6{,}67$

$$\boxed{a = 6{,}67 m/s^2}$$

2°) Calcule la durée du mouvement du solide.

$a = cte \neq 0$; le mouvement du solide est RUV, d'équation : $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$

Origine des espaces : position du solide avant l'abandon ;

Origine des dates : instant de l'abandon.

A t = 0 ; $x_0 = 0$; $v_0 = 0$.

A l'instant t : $x = h \;\Rightarrow\; h = \frac{1}{2}at^2$

D'où :

$$\boxed{t = \sqrt{\frac{2h}{a}}}$$

$\boldsymbol{A.N}$: $t = \sqrt{\frac{2 \times 0{,}3}{6{,}67}} = 0{,}3$

$$\boxed{t = 0{,}3s}$$

3°) Je détermine la vitesse du solide à cet instant.

D'après la R.V.T, on a : $v - v_0 = at$; $v_0 = 0$

D'où :

$$\boxed{v = at}$$

$\boldsymbol{A.N}$: $v = 6{,}67 \times 0{,}30 = 2{,}001$

$$\boxed{v = 2m/s}$$

J'en déduis la vitesse angulaire du cylindre.

Par définition :

$v = r\dot{\theta} \;\Rightarrow\; \boxed{\dot{\theta} = \frac{v}{r}}$

$\boldsymbol{A.N}$: $\dot{\theta} = \frac{2}{0{,}1} = 20$ $\boxed{\dot{\theta} = 20rad/s}$

Exercice 3 **:** On étudie le mouvement d'un solide ponctuel *S* dans le référentiel terrestre supposé galiléen dans l'objectif de de le faire parvenir au sommet d'une piste ; on veut déterminer la force à exercer sur le solide pour y arriver. Ce solide, de masse m, est initialement au repos en *A*. On le lance sur la piste *ACD*, en faisant agir sur lui, le long de la partie *AB* de sa trajectoire une force $\vec{F}$ horizontale et d'intensité constante. On pose *AB* = *L*. La portion *AC* de la trajectoire est horizontale et la portion *CD* est un demi – cercle de centre O et de rayon r ; ces deux portions sont dans un même plan vertical (voir figure).
On suppose que la piste *ACD* est parfaitement lisse et que la résistance de l'air est négligeable.
1°) Détermine, en fonction de *F*, *L* et *m* la valeur V_B de la vitesse de *S* en *B*.

2°) Au point M défini par l'angle $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OM}) = \theta$, établis, en fonction de F, L, m, r, θ et g, l'expression de :

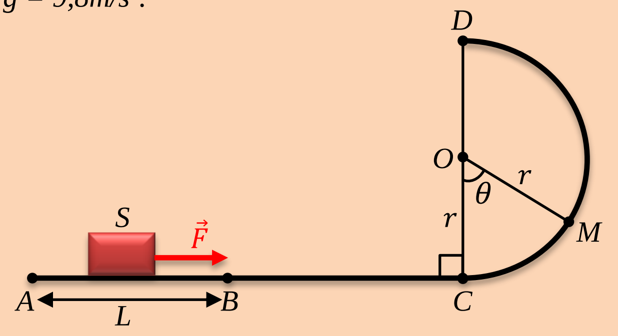
a) La valeur V de la vitesse de S ;

b) L'intensité R de la réaction $\vec{R}$ de la piste.

3°) a) De l'expression de R, déduis, en fonction de m, g, r et L, la valeur minimale F_0 de F pour que S atteigne D.

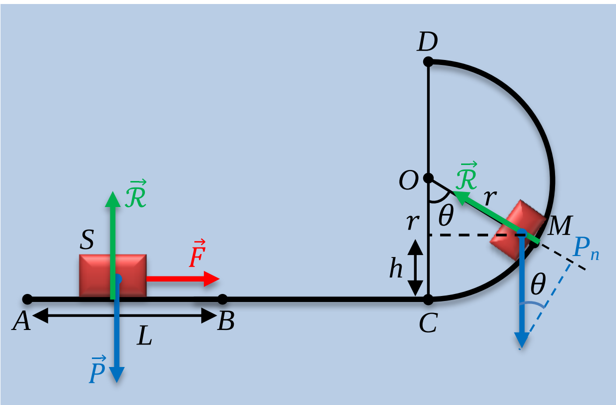
b) Calcule F_0.

On donne : $m = 0{,}5Kg$; $r = 1m$, $L = 1{,}5m$; $g = 9{,}8m/s^2$.



Corrigé 3.

$m = 0{,}5Kg$; $r = 1m$, $L = 1{,}5m$; $g = 9{,}8m/s^2$.



1°) Je détermine, en fonction de F, L et m la valeur V_B de la vitesse de S en B.

- ✓ ***Système d'étude :*** Sphère de masse (m) en translation.
- ✓ ***Bilan des forces extérieures :*** $\vec{P}$; $\vec{F}$; $\vec{\mathcal{R}}$

D'après le théorème de l'énergie cinétique (T.E.C), on a :

$$\Delta E_C = \sum W_{\vec{F}_{ext}}$$

$\Rightarrow E_{C_B} - E_{C_A} = \sum W_{\vec{F}_{ext}}$

$\Rightarrow E_{C_B} - E_{C_A} = W_{\vec{P}} + W_{\vec{F}} + W_{\vec{\mathcal{R}}}$

La sphère étant partie sans vitesse initiale :

$v_i = 0 \Rightarrow E_{C_A} = 0$; $W_{\vec{P}} = 0$ et $W_{\vec{\mathcal{R}}} = 0$

ainsi $E_{C_B} = W_{\vec{F}}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_B^2 = F.AB$

D'où : $$\boxed{v_B = \sqrt{\frac{2F.\ell}{m}}}$$

2°) J'établis, en fonction de F, L, m, r, θ et g, l'expression de :

a) La valeur V de la vitesse de S.

D'après le théorème de l'énergie cinétique (T.E.C), on a :

$$\Delta E_C = \sum W_{\vec{F}_{ext}}$$

$\Rightarrow E_{C_M} - E_{C_B} = \sum W_{\vec{F}_{ext}}$

$\Rightarrow E_{C_B} - E_{C_A} = W_{\vec{P}} + W_{\vec{F}} + W_{\vec{\mathcal{R}}}$

La sphère étant partie sans vitesse initiale :

$v_i = 0 \Rightarrow E_{C_A} = 0$; $W_{\vec{F}} = 0$ et $W_{\vec{\mathcal{R}}} = 0$

ainsi $E_{C_B} - E_{C_A} = W_{\vec{P}}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_B^2 = -mgh$

$\Rightarrow v^2 - v_B^2 = -2gh$; $avec\ h = r(1 - cos\theta)$

$\Rightarrow v^2 = v_B^2 - 2gr(1 - cos\theta)$

D'où :

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2F.\ell}{m} - 2gr(1 - cos\theta)}}$$

b) L'intensité R de la réaction $\vec{\mathcal{R}}$ de la piste.

- ✓ ***Système d'étude :*** Sphère de masse (m) en translation.
- ✓ ***Bilan des forces extérieures :*** $\vec{P}$; $\vec{\mathcal{R}}$

T.C.I : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$

$\Rightarrow \vec{P} + \vec{\mathcal{R}} = m\vec{a}$

Projection suivant l'axe normal : - P_n + $\mathcal{R}$ = ma_n

$\Rightarrow -Pcos\theta + \mathcal{R} + ma_n$

$\Rightarrow \mathcal{R} = m\left(\frac{v^2}{r} + gcos\theta\right)$

$\Rightarrow \mathcal{R} = m\left[\frac{2F.\ell}{mr} - \frac{2gr}{r}(1 - cos\theta) + gcos\theta\right]$

$\Rightarrow \mathcal{R} = \frac{2F.\ell}{r} - 2mg(1 - cos\theta) + gcos\theta$

$\Rightarrow \mathcal{R} = \frac{2F.\ell}{r} - 2mg + 3mgcos\theta$

D'où :

$$\boxed{\mathcal{R} = \frac{2F.\ell}{r} + mg(3cos\theta - 2)}$$

3°) a) De l'expression de R, je déduis, en fonction de m, g, r et L, la valeur minimale F_0 de F pour que S atteigne D.

Lorsque S atteint D : $\begin{cases} \theta = \pi \\ \mathcal{R} = 0 \end{cases}$

Alors : $\frac{2F_0.\ell}{r} + mg(3cos\pi - 2) = 0$

$\Rightarrow \frac{2F_0.\ell}{r} - 3mg = 0$

D'où :

$$\boxed{F_0 = \frac{3mgr}{2\ell}}$$

b) Je calcule F_0.

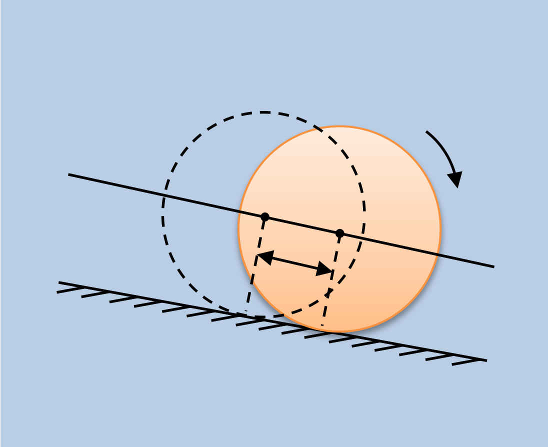
$\boldsymbol{A.N}$: $F_0 = \frac{3 \times 0,5 \times 9,8 \times 1}{2 \times 1,5} = 4,9$

$$\boxed{F_0 = 4,9N}$$

TRAVAUX DIRIGES V

Conseils pratiques :

1. Techniques de réalisation des schémas.
2. Projection des forces dans un repère.
3. Théorème de l'accélération angulaire (T.A.A)
4. Energies des systèmes mécaniques.
5. Théorèmes des énergies : T.E.C ; T.E.P et T.E.M.
6. Conservation de l'énergie mécanique.



L'ESSENTIEL DU COURS

I – Définitions des notions.

Définis les termes suivants : Moment cinétique d'un point matériel, Moment d'une force, Moment d'inertie d'un système, Energie cinétique et énergie potentielle d'un point matériel.

II – Questions à réponses courtes.

Réponds aux questions suivantes.

1°) Enonce :

a) Le théorème de l'accélération angulaire ;
b) Le théorème de l'énergie cinétique ;
c) Le théorème d'Huygens.

2°) Le travail du poids d'un corps dépend – il du chemin suivi ?

3°) Quand dit – on qu'un travail est moteur ? résistant ?

4°) Donne l'expression de l'énergie mécanique des systèmes suivants :

a) Sphère de masse *m*, de rayon *R*, roulant sur un plan incliné d'angle α par rapport à l'horizontale.
b) Solide de masse *m* accroché à l'extrémité inférieure d'un ressort vertical suspendu à un support fixe, tiré vers le bas puis lâché sans vitesse initiale.
c) Pendule pesant de masse *m*, de centre d'inertie *G*, écarté d'un angle θ faible par rapport à la verticale puis lâché sans vitesse initiale.

III – Texte à Trous.

Ecris les phrases suivantes en complétant les mots manquants :

Lorsque seules les forces …(1)… travaillent, le système devient …(2)…, donc isolé. Entre l'état final et l'état initial, la variation de l'énergie …(3)… d'un système non conservatif, vaut la somme des …(4)… des forces extérieures et forces intérieures non …(5) …. C'est le théorème de l'énergie mécanique. Le travail du …(6)… ne dépend pas du chemin suivi, mais de la différence d'…(7)… entre deux …(8)… A et A'.

IV – Appariement.

Relie un élément – question de la colonne A à un élément – réponse de la colonne B dans le tableau ci – dessous : ***Exemple $a_9 = b_{10}$.***

Colonne A		Colonne B	
a_1	Conservation de l'énergie mécanique	b_1	$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = F_\perp . d$
a_2	Théorème de l'accélération angulaire	b_2	$E_C = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2$

a_3	Energie cinétique d'une sphère roulant sur un plan horizontal.	b_3	$\frac{dE_M}{dt} = 0$
a_4	Moment d'une force	b_4	$\Delta E_C = \sum W_{\vec{F}_{ext}}$
a_5	Moment d'inertie d'une barre homogène	b_5	$E_M = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\theta^2$
a_6	Energie mécanique d'un pendule de torsion	b_6	$\Sigma \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{ext}) = J_\Delta\ddot{\theta}$
a_7	Théorème de l'énergie cinétique	b_7	$J_\Delta = \frac{1}{12}m\ell^2$

V – Questions à alternative vrai ou faux.

Réponds par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

1°) Le moment d'inertie d'un système est une grandeur algébrique.
2°) Le moment d'une force est nul lorsque :
  a) La force est perpendiculaire au bras de Levier.
  b) La force est parallèle à l'axe de rotation.
  c) La direction de la force rencontre l'axe de rotation.
3°) Le moment d'un couple de force résistant est négatif.
4°) Le théorème d'Huygens s'applique dans la détermination du moment d'inertie d'un système lorsque l'axe de rotation passe par le centre d'inertie du système.
5°) Le travail du poids est résistant lorsque le système se déplace sur un plan horizontal.
6°) L'énergie cinétique est l'énergie liée à la position ou à la déformation d'un corps.
7°) Le travail du poids ne dépend pas du chemin suivi, mais seulement de la différence de niveau entre la position initiale et la position finale.
8°) Le moment d'inertie d'une tige homogène par rapport à un axe passant par l'une de ses extrémités vaut : $J_\Delta = \frac{1}{3}m\ell^2$.
9°) L'énergie potentielle d'un solide en chute parabolique s'annule au sommet de sa trajectoire, lorsque le niveau de référence est pris au sol.
10°) L'énergie mécanique d'un système isolé se conserve.

RESOLUTION DES PROBLEMES

EXERCICE 1 : Un disque *D*, mince et homogène a pour centre *O*, pour rayon $R = 20cm$ et pour masse *M*. Il peut osciller sans frottements dans un plan vertical, autour d'un axe horizontal (Δ) perpendiculaire à son plan et passant par le milieu O_1 d'un de ses rayons. En un point *A* symétrique de O_1 par rapport à *O*, centre de masse du disque, on place une surcharge ponctuelle *S* de masse $m = \frac{M}{2}$. Etablis l'expression du moment d'inertie de l'ensemble.

EXERCICE 2 : Une sphère homogène de rayon $R = 5{,}0cm$ et de masse $M = 0{,}2Kg$ peut tourner sans frottements autour de son axe de révolution horizontal (Δ). La sphère est traversée suivant un diamètre passant par son centre de symétrie *O*, par une tige *(T)* considérée sans masse, portant à son extrémité *A* une masse ponctuelle $m = \frac{M}{2} = 0{,}1\ Kg$.
La longueur totale est $AB = 2L = 90cm$ et $OA = OB = L$.
1°) Montre que la position du centre d'inertie *G* du système est $OG = \frac{1}{3}L$ puis fais l'application numérique.
2°) Montre que le moment d'inertie du système par rapport à (Δ) est :

$$J_{S/\Delta} = M\left(\frac{2R^2}{5} + \frac{L^2}{2}\right)$$

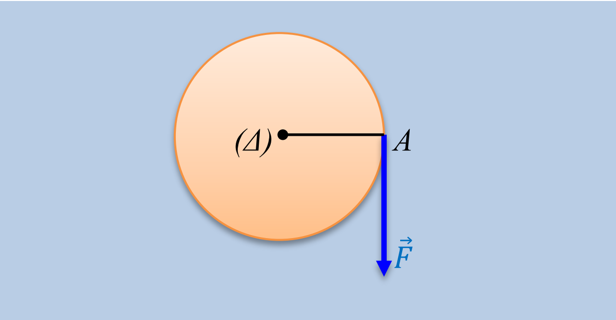
EXERCICE 3 : Le schéma ci – dessous représente un disque homogène de moment d'inertie J_Δ et de rayon *r*, mobile autour de son axe de révolution.
1°) Partant du repos, sous l'effet de la force tangentielle $\vec{F}$, le disque atteint une vitesse angulaire ω en un temps Δt_1.
a) Détermine le moment $\mathcal{M}_f$ des forces de frottement.

b) Quel est le nombre de tours effectués par le disque ?

2°) Lorsque le disque atteint la vitesse ω, la force $\vec{F}$ cesse d'agir.

a) Calcule la décélération du mouvement ultérieur du disque.

b) Déduis – en la durée Δt_2 de cette phase décélérée.



On donne : $J_\Delta = 10^{-2}Kg.m^2$; $r = 10cm$; $F = 10N$; $\omega = 200\pi rad.s^{-1}$; $\Delta t_1 = 10s$.

EXERCICE 4 : Sur une tige homogène de masse $m = 200g$ et de longueur $60cm$, on fixe deux masses ponctuelles $m_1 = 3m$ et $m_2 = 2m$ à chaque extrémité. On fait tourner l'ensemble autour d'un axe passant par le centre d'inertie.

1°) Calcule la position du centre d'inertie du système.

2°) Calcule le moment d'inertie du système par rapport à G.

3°) On soumet le système à un moment du couple moteur.

a) Calcule ce moment si la vitesse est de $2tr/s$ au bout de $10s$;

b) On supprime le couple moteur puis on le soumet à un couple de freinage permettant un arrêt au bout de $3,6$ tours. Calcule son module.

EXERCICE 5 : Soit une tige homogène (AB), de section constante, de masse $m = 150g$, de longueur $L = 60cm$ sont fixées deux masses ponctuelles : $m_1 = 50g$ en A et $m_2 = 100g$ en B.

O est le milieu de la tige. L'ensemble est mobile autour d'un axe vertical perpendiculaire à la tige et passant par le centre d'inertie G du système.

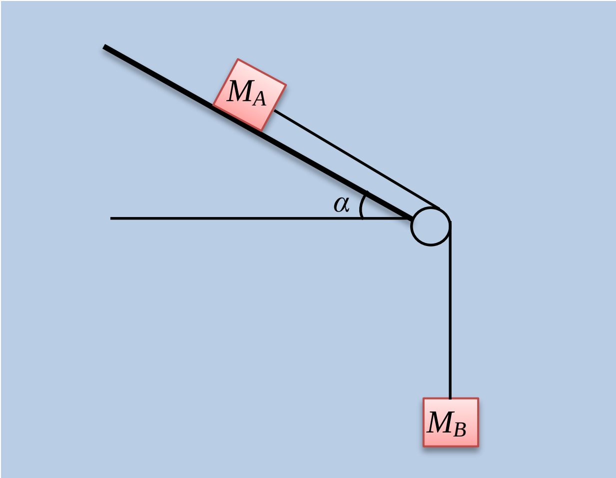
1°) Détermine la position du centre d'inertie G par rapport à O.

2°) Calcule le moment d'inertie du système par rapport à l'axe (Δ) passant par G.

3°) L'ensemble est lancé par un moteur à une vitesse angulaire de rotation de $120r/min$ quelle est son énergie cinétique ?

4°) A la vitesse angulaire de $120tr/min$, on supprime le moteur et on applique des forces de frottement qui immobilisent le système après $500trs$ de rotation.
Calcule le moment de ces forces de frottement.

EXERCICE 6 : On considère le système représenté par la figure ci – dessous :



$M_A = M_B = M$. Les résistances de l'air parallèles au plan incliné ont une intensité $f = 2N$. La poulie est de masse négligeable, le système étant abandonné à lui – même sans vitesse initiale.

1°) En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, détermine l'accélération du mouvement.

2°) Calcule la tension du fil.

Données : $M = 2Kg$; $\alpha = 30°$.

EXERCICE 7 : Un disque plan D, vertical et homogène, de masse $m = 1Kg$ et de rayon $R = 10cm$, d'épaisseur constante, peut tourner autour d'un axe horizontal, perpendiculaire à son plan et passant par son centre O. Les frottements sont équivalents à un couple résistant constant de moment $\mathcal{M}_r$.

Le disque D, parti du repos, acquiert en un temps $t = 10s$ une vitesse $N = 300tr/min$ sous l'action d'un couple moteur constant de moment $\mathcal{M}_m = 1,82.10^{-2}N.m$.

1°) Détermine l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ du mouvement.

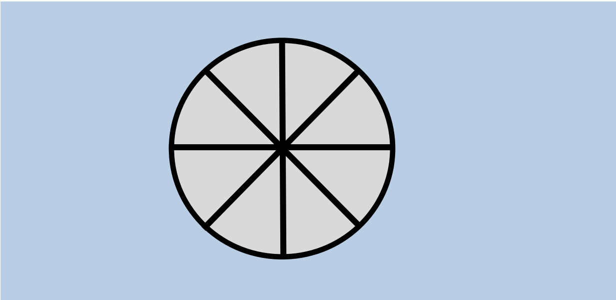
2°) Déduis – en :

b) Le moment $\mathcal{M}_r$ du couple résistant.

c) Le nombre de tours effectués par le disque.

d) Le travail fourni par le couple moteur dans l'intervalle du temps considéré.

EXERCICE 8 : Une roue est constituée d'une jante de masse M, de rayon R et de quatre tiges homogènes de masse chacune m et de longueur L.
Les tiges régulièrement espacées se coupent au centre de la jante (le croisement des tiges ne modifie pas l'homogénéité de celles – ci).
1°) Calcule le moment d'inertie de la roue par rapport à un axe (Δ) passant par son centre.
A.N : $M = 0{,}10Kg$; $R = 30{,}0cm$; $m = 0{,}5Kg$.



2°) La roue est dans le plan horizontal. On applique au volant, un couple moteur, supposé constant pendant $\Delta t = 0{,}2s$. La roue atteint la vitesse de *20tr/s*. On supprime l'action du couple moteur, la roue s'arrête au bout de *100* tours. Calcule :
a) Le moment du couple moteur supposé constant.
b) La norme de l'accélération linéaire d'un point de la périphérie de la roue à la fin de la première phase.
c) Le moment du couple résistant supposé constant.

EXERCICE 9 : Une platine de tourne disque de moment d'inertie $3.10^{-2}Kg.m^2$ par rapport à son axe de rotation (Δ) est entrainé à la vitesse de $33{,}3tr.min^{-1}$.
1°) La platine ne supportant pas de disque, on coupe l'alimentation du moteur. Elle effectue 15 tours avant de s'immobiliser. Calcule le moment supposé constant des forces de frottement
2°) La platine tournant de nouveau à la vitesse de $33{,}3tr.min^{-1}$, on pose sur celle – ci un disque de masse m et de rayon *30cm*. La vitesse passe de $33{,}3tr.min^{-1}$ à $18{,}315tr.min^{-1}$ en *30s*. Détermine :
a) L'accélération angulaire du mouvement ;
b) Le nombre de tours effectués durant ce ralentissement ;
c) En admettant que le moment des forces de frottement est resté le même, détermine le moment d'inertie J' de l'ensemble par rapport à l'axe (Δ) ;
d) Déduis – en la masse m du disque.

EXERCICE 10 : Un cylindre creux, homogène, de rayon $R = 0{,}2m$ et de masse $M = 50Kg$ peut tourner sans frottement autour de son axe de révolution disposé horizontalement. Il est mu par un moteur électronique qui exerce sur le cylindre un couple de moment constant.
A l'aide d'un câble inextensible de masse négligeable enroulé sur le cylindre creux, on élève un solide (S) fixé à l'autre extrémité du câble. Le solide de masse *150Kg* s'élève en partant du repos d'une hauteur $h = 50m$ en un temps $t = 25s$. Le câble ne glisse pas sur le cylindre.
1°) Montre que le mouvement du solide (S) est uniformément accéléré.
2°) Calcule son accélération et la tension du câble.
3°) Calcule le moment du couple moteur.
4°) Au bout de ces *50m* de montée, le câble se casse et on débraye le moteur, le cylindre est alors arrêté en *10* tours sous l'effet d'un couple de freinage. Calcule la valeur du moment de ce couple.

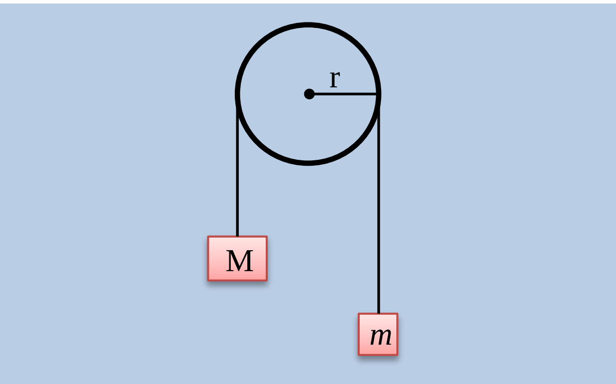
EXERCICE 11 : Un volant de moment d'inertie J est lancé par un moteur développant un couple de moment constant $M = 50m.N$ et effectue *100* tours. Partant du repos à la vitesse nulle, il atteint la vitesse de $10tr.s^{-1}$ au bout du temps t, on néglige les frottements.
1°) Calcule l'énergie cinétique du volant.
2°) Déduis – en le moment d'inertie J du volant au temps t.
3°) Quelle est l'accélération angulaire du volant au cours du démarrage.
4°) Déduis – en le temps nécessaire pour atteindre la vitesse de $10trs.s^{-1}$.

EXERCICE 12 : Un cylindre de rayon $r = 10cm$, de moment d'inertie $J = 5.10^{-2}Kg.m^2$ mobile sans frottement autour d'un axe horizontal passant par son centre d'inertie, tourne à la vitesse constante de $720tr.min^{-1}$. On l'arrête au bout de *4s* en le soumettant à l'action d'un couple de freinage constant.
1°) Détermine :
a) La masse M du cylindre en supposant qu'il est plein et homogène ;
b) Le moment du couple de freinage ;
c) Le nombre de tours effectués jusqu'à l'arrêt ;
d) La puissance instantanée P développée par le couple de freinage,
2°) Un corps A de masse m est accroché à l'extrémité d'un fil inextensible de masse négligeable, qui s'enroule sans glisser sur le cylindre. On abandonne le système sans vitesse initiale.

a) Détermine la nature du mouvement du corps *A* ;
b) Sachant que *2s* après le début du mouvement, le corps *A* à parcouru *2,4m*, détermine la valeur de la masse *m*. On prendra $g = 10 m.s^{-2}$; $\pi^2 = 10$.

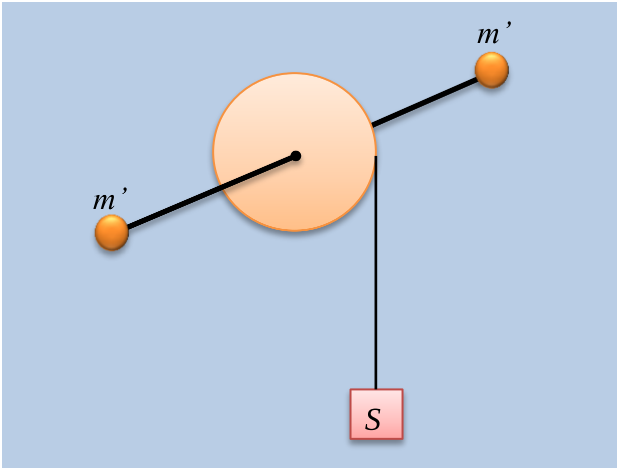
EXERCICE 13 : Un volant en fonte de *2,02m* de diamètre extérieur est entrainé par un moteur qui en régime normal, lui donne une vitesse constante de 300tr/min autour d'un axe horizontal. Toute la matière est considérée comme répartie sur une jante homogène de *10cm* de largeur (ℓ), de *2cm* d'épaisseur (*e*) et de rayon moyen $\rho = 1m$.
1°) Quelle est la vitesse angulaire du volant et son moment d'inertie par rapport à l'axe ?
2°) Le volant est freiné par un couple constant et s'arrête après avoir tourné *50* fois. On demande de calculer le travail effectué par le frein ainsi que le couple de freinage. On donne la masse volumique de la fonte $\mu = 7,7 g/cm^3$.

EXERCICE 14 : Sur la gorge d'une poulie de masse *100g* de rayon $r = 6cm$ mobile sans frottements autour d'un axe horizontal, passe un fil de masse négligeable. Ce fil porte une masse $M = 300g$ et une masse $m = 100g$, on suppose que la masse de la poulie est repartie à la périphérie d'une jante.



La masse *M* se trouve à *3m* du sol, la masse *m* est au niveau du sol sans toutefois y reposer. On abandonne le système à $t = 0$, $g = 9,8 m/s^2$.
1°) Quelle est l'équation horaire de *M* ?
2°) Calcule la tension de chaque brin de fil pendant le mouvement.
3°) Calcule la vitesse de *M* quand elle arrive au sol.
4°) Quelle est alors la vitesse angulaire de la poulie ?
Quelle force $\vec{f}$ appliquer tangentiellement à la poulie pour qu'elle s'arrête au bout de *6 tours* ; le fil supportant *m* étant coupé quand *M* arrive au sol ?

EXERCICE 15 : Un cylindre homogène de rayon $R = 5cm$ de masse $m_1 = 1Kg$, peut tourner autour de son axe de révolution horizontal ; il soutient un solide de masse $m_2 = 10Kg$ par l'intermédiaire d'une corde enroulé sur le cylindre.
Le cylindre est traversé suivant un diamètre, par la tige *T* portant deux masses égales de valeurs $m' = 0,5Kg$, pratiquement confondues avec leurs centres de masses situés à $\ell = 50cm$ de l'axe. Le système est abandonné à lui – même sans vitesse initiale.



1°) En négligeant les masses de la corde et de la tige *T* ainsi que les résistances passives, calcule l'accélération du mouvement de *S* et la tension de la corde pendant ce mouvement.
2°) La corde quitte le cylindre quand *S* est descendu de $h = 5m$. Calcule la vitesse angulaire du cylindre à cet instant (en $rad.s^{-1}$ et en $tr.s^{-1}$) et le nombre de tours effectués par le cylindre depuis le départ.
On donne : $g = 10 m.s^{-2}$.

EXERCICE 16 : Une automobile (avec son conducteur) a une masse de *1000Kg*. Pour simplifier, on admettra dans tout le problème que la somme de toutes les forces de frottement est constante, parallèle au déplacement et égale à *150N*.
1°) Calcule la puissance que doit développer le moteur de cette automobile pour maintenir une vitesse de *72Km/h* sur une route horizontale.
2°) A cette vitesse de *72Km/h* cette voiture aborde une courbe horizontale de *200m* de rayon. De quel angle doit être relevée la route pour qu'il n'y ait aucune force tendant à faire déraper le véhicule ?
3°) L'automobile monte une pente de *2%*. Calcule la nouvelle puissance pour maintenir la vitesse de *72Km/h*.

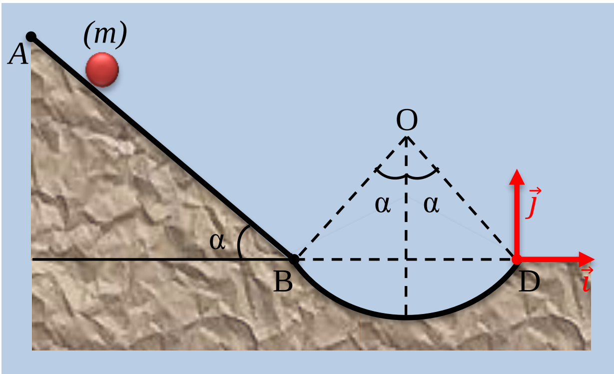
EXERCICE 17 : Deux corps *A* et *B* de même masse $m = 200g$ d'une machine d'ATWOOD s'équilibrent exactement. On lance *A* vers le bas avec une vitesse de $2m/s$, il parcourt une distance $h = 50cm$ au cours de laquelle sa vitesse diminue régulièrement et s'annule.
En utilisant le théorème de l'énergie mécanique :
1°) Calcule l'intensité des forces de frottement assimilables à un couple tangentiel constant sachant que la masse de la poulie uniformément repartie sur la jante est $M = 100g$.
2°) Quelle serait la valeur d'une surcharge qui placée en *A* permettrait au dispositif lancé à la vitesse de $2m/s$ comme précédemment, de conserver cette vitesse ?

EXERCICE 18 : Soit une tige homogène (AB), de section constante, de masse $m = 150g$, de longueur $L = 60cm$ sont fixées deux masses ponctuelles : $m_1 = 50g$ en *A* et $m_2 = 100g$ en *B*.
O est le milieu de la tige. L'ensemble est mobile autour d'un axe vertical perpendiculaire à la tige et passant par le centre d'inertie *G* du système.
1°) Détermine la position du centre d'inertie *G* par rapport à *O*.
2°) Calcule le moment d'inertie du système par rapport à l'axe (Δ) passant par *G*.
3°) L'ensemble est lancé par un moteur à une vitesse angulaire de rotation de $120r/min$ quelle est son énergie cinétique ?
4°) A la vitesse angulaire de $120tr/min$, on supprime le moteur et on applique des forces de frottement qui immobilisent le système après $500trs$ de rotation.
Calcule le moment de ces forces de frottement.

EXERCICE 19 : Une barre rigide *AB*, de milieu *O*, pesant $125g$, longue de $60cm$ est solidaire d'un tambour cylindrique *T*, d'un axe horizontale, de masse négligeable de $3cm$ de rayon. Le système tambour – masse est mis en rotation grâce à un poids *P* de $50\ g$ suspendu à un fil enroulé sur le tambour. Quand le poids *P* a parcouru $96\ cm$, il est coupé et la force motrice est supprimée instantanément.
1°) Etudie, sans calculer, les deux phases du mouvement du système *S*,
2°) Calcule le moment d'inertie du système par rapport à son axe.
3°) Quelles sont pendant la deuxième phase du mouvement la vitesse angulaire du système *S* et la vitesse linéaire du point *A*.
4°) En réalité, le système est effectivement lancé à la vitesse précédemment calculée, et s'arrête après avoir fait 120 tours à partir du moment où la force motrice est supprimée. Calcule le moment du couple, supposé constant, auquel sont équivalentes les forces de frottements.

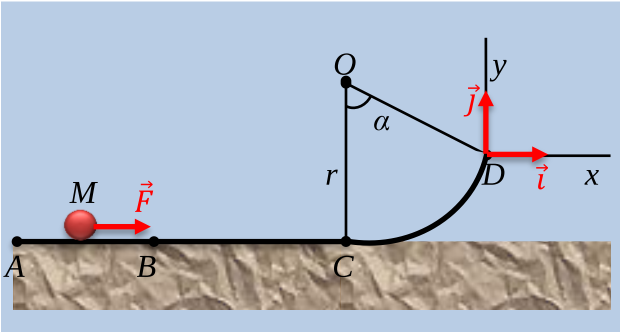
EXERCICE 20 : Un disque homogène de diamètre $d = 20cm$ de moment d'inertie par rapport à son axe de symétrie $J_0 = 5.10^{-2}Kg.m^2$, mobile sans frottement autour de son centre de gravité horizontale tourne à la vitesse constante de 360 tours par minute. On l'arrête en $12s$ en la soumettant à l'attraction d'un couple des forces de freinage constant.
Détermine :
1°) La masse du disque.
2°) La nature du mouvement du disque pendant les $12s$.
3°) En utilisant la méthode énergétique, la valeur du moment M_C du couple des forces de freinage.
4°) Le nombre de tours effectués jusqu'à la fin du mouvement.

EXERCICE 21 : Une piste est constituée par un plan *AB*, de longueur $L = 0,8m$, incliné d'un angle $\alpha = 60°$ sur l'horizontale se raccordant tangentiellement à une surface cylindrique *BCD* de rayon $r = OB = 0,5m$. L'extrémité *D* de la piste est au même niveau que *B*. Un solide supposé ponctuel de masse $m = 50g$ est posé, sans vitesse initiale, au point *A* et glisse sans frottement le long de la piste.



1°) Calcule la vitesse du solide lors de son passage en *D*.
2°) Détermine en appliquant le T.C.I, la force exercée par la piste sur le solide en *D*.
3°) Etablis dans le repère (D, $\vec{i}$, $\vec{j}$), l'équation de la trajectoire du solide au – delà de *D*.
4°) Quelle est l'ordonnée du point *S*, sommet de la trajectoire.

EXERCICE 22 : La piste de lancement d'un projectile *M* comprend une partie rectiligne *ABC* et une portion circulaire CD, centrée en O, de rayon $r = 1m$, d'angle au centre $\alpha = 60°$ et telle que OC soit perpendiculaire à AC. Le projectile M assimilable à un point matériel de masse $m = 0,5Kg$, est lancé suivant AB de longueur $1m$ avec une force $\vec{F}$, horizontale et ne s'exerçant que sur AB (voir figure).



1°) a) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, détermine l'intensité minimale à donner à $\vec{F}$ pour que le projectile quitte la piste en D.

b) L'intensité de la force est $150N$. Donne la valeur numérique de la vitesse V_D avec laquelle le projectile quitte la piste en D.

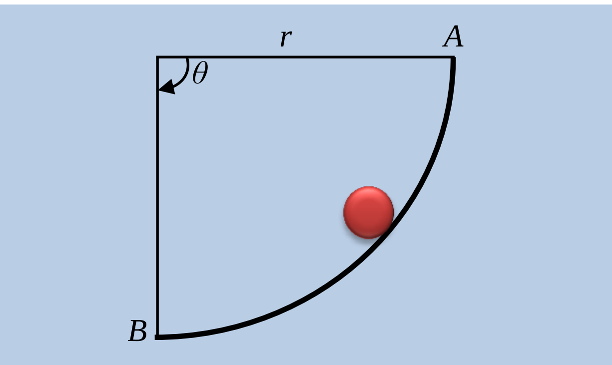
2°) a) Donne l'équation de la trajectoire du solide au – delà de D dans le repère orthonormé d'origine D.

b) Quelle est la hauteur maximale atteinte au – delà de l'horizontal ABC ?

c) Quelle est l'intensité de la force exercée par le projectile sur la piste au moment de la quitté en D avec la vitesse $\vec{V_D}$ précédente ?

Données : $g = 10m/s^2$.

EXERCICE 23 : Un solide de masse $m = 1Kg$ roule le long d'une piste ayant la forme d'un arc de cercle de rayon $r = 40cm$ et d'angle $\theta = 90°$ (voir figure). On considère que les frottements qui s'exercent lors de son déplacement sont tangents à sa trajectoire et opposés au mouvement, d'intensité $f = 2N$.



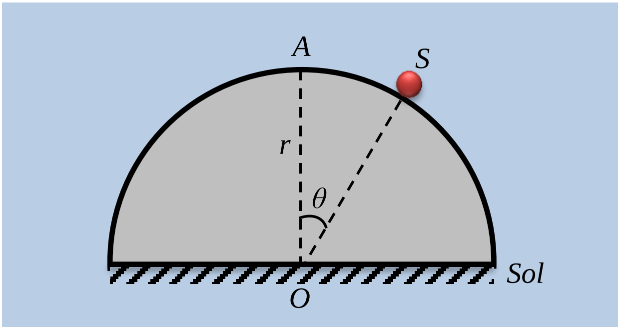
1°) En utilisant le T.E.C, calcule la vitesse acquise par le solide en B lorsqu'on l'abandonne en A sans vitesse initiale.

2°) Donne l'expression littérale de la réaction exercée par la piste sur le solide en fonction de m, g, f et θ ; calcule – la.

3°) Le solide quitte la piste en B et tombe en chute libre. Etudie la nature de son mouvement de chute (équations horaires et forme de sa trajectoire).

4°) On sait que la piste est placée à $1m$ au – dessus de B. Avec quelle vitesse le solide arrive – t – il au sol ? (utilise la méthode énergétique). Prendre $g = 10m/s^2$.

EXERCICE 24 : Un petit solide S de masse m, glisse sans frottements sur un demi – cylindre de rayon r, de centre O. Il est lâché du sommet A sans vitesse initiale et sa position est déterminée par l'angle $\theta = (OA, OS)$.



1°) Exprime la vitesse de S en fonction de r, g et θ.

2°) Donne une expression de l'intensité de la réaction R, exercée par le cylindre sur le solide en fonction de m, g et θ.

3°) Le solide ne reste pas en contact avec le cylindre jusqu'au sol.

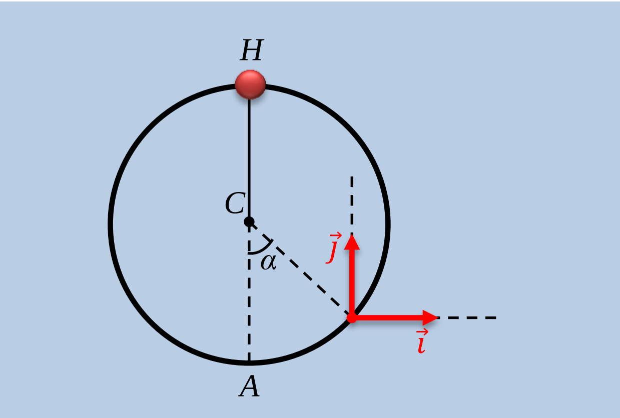
a) Détermine l'angle θ_0 pour lequel S décolle du cylindre.

b) Quel est le mouvement ultérieur de S ?

c) Quelles sont les caractéristiques du vecteur vitesse $\vec{v}_0$ au point de décollage (module et direction).

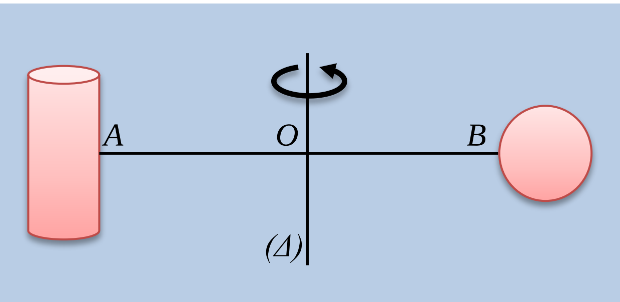
On donne : $g = 10m/s^2$; $r = 1m$.

EXERCICE 25 : Une bille de masse $m = 50g$, supposée ponctuelle, est utilisée comme projectile d'une fronde. Elle est accrochée à l'extrémité d'un fil inextensible, de masse négligeable, de longueur $\ell = 0,40m$. On fait tourner l'ensemble dans un plan vertical. La bille effectue un mouvement circulaire de centre C. Elle passe au point H le plus élevé de sa trajectoire avec une vitesse $V_H = 15,0m/s$. On négligera les frottements de l'air.



1°) Détermine la tension T du fil quand la bille passe au point *H*.
2°) La bille est lâchée en *A* tel que le rayon *CA* fasse avec la verticale du centre *C* un angle $\alpha = 30°$. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, calcule la vitesse de la bille en *A*.
3°) Etablis dans le repère (A, $\vec{i}$, $\vec{j}$), l'équation cartésienne de la trajectoire de la bille après qu'elle soit lâchée. Quelle altitude maximale la bille atteint – elle si le centre *C* est à *1,40m* au – dessus du sol ?
4°) Quelle est la durée du vol de la bille ?
Prendre $g = 10m.s^{-2}$.

EXERCICE 26 : On dispose d'une tige homogène de masse négligeable et de longueur $\ell = AB = 80cm$. On fixe à l'une de ses extrémités un cylindre de masse $m_1 = 2Kg$ et de rayon $r_1 = 4cm$ et à l'autre extrémité, une sphère homogène de masse $m_2 = 2Kg$ et de rayon $r_2 = 5cm$ comme l'indique la figure ci – dessous.



1°) Détermine la position du centre d'inertie de ce système.
2°) On fait tourner la tige autour d'un axe passant par le centre de la tige. Calcule le moment d'inertie du système par rapport à l'axe.
3°) Initialement au repos, la tige est mise en rotation sous l'action d'un couple moteur de moment constant.
Sa vitesse devient égale à *33tr/min* après *5* tours. Détermine la nature du mouvement du système. Calcule la valeur du moment moteur.
4°) Les frottements étant considérés négligeables, quelle sera la nature du mouvement quand on supprimera l'action du couple moteur. Calcule la vitesse tangentielle du point de la périphérie extérieure de la sphère placé le long de la tige dans ce cas.

EXERCICE 27 : Un appareil de levage utilisé sur un chantier se présente de la façon suivante :
Un cylindre creux *B*, homogène, de rayon $R = 0,20m$ et de masse $m = 50Kg$ peut tourner sans frottement autour de son axe de révolution disposé horizontalement. Il est mu par un moteur électrique qui exerce sur le cylindre un couple de moment constant *M*.
Un câble inextensible de masse négligeable est enroulé sur le cylindre, une extrémité étant fixée au cylindre. A l'autre extrémité on suspend un corps *A* de masse $m' = 1000Kg$.
1°) Le corps s'élève en partant du repos ; le câble ne glisse pas sur le cylindre.
a) Montre par deux méthodes que le mouvement de *A* est uniformément accéléré ;
b) *A* s'élève d'une hauteur h = 50m en un temps $t = 25s$; calcule son accélération ;
c) Calcule la tension du câble. Quel serait l'allongement d'un dynamomètre de raideur $K = 10^5 N.m^{-1}$ intercalé entre *A* et le câble ?
d) Calcule le moment du couple moteur.
e) Calcule le travail fourni par le moteur électrique lorsque *A* s'est élevé d'une hauteur de *50m*.
2°) Au bout de *50m* de montée la charge est délestée automatiquement sans un coup et le moteur électrique débrayé. Le cylindre est alors arrêté en *10* tours sous l'effet d'un couple de freinage de moment constant. Quelle est la valeur de ce couple ? $g = 10m.s^{-2}$.

EXERCICE 28 : Un point matériel *M* de masse *m* part sans vitesse initiale d'un point *I* situé à l'altitude *h* au – dessus du plan horizontal *(H)*. Il glisse le long d'une piste *ABOC* se raccordant tangentiellement en *O* à *(H)*. Sur la piste *ABO* le glissement s'effectue sans frottements.
Sur le plan horizontal *(H)*, l'existence des frottements fait que l'action $\vec{R}$ exercée par *(H)* sur *M* est incliné de $\theta = 10°$ sur la verticale.
1°) Calcule la vitesse de *M* lors de son passage au point *O*.
On donne : $m = 0,10kg$; $h = 1,2m$; $g = 9,8m.s^{-2}$.

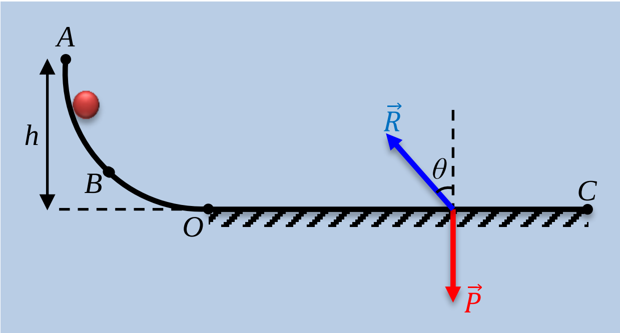
2°) Après le passage de M au point O, par application de la RFD :

a) Calcule R.

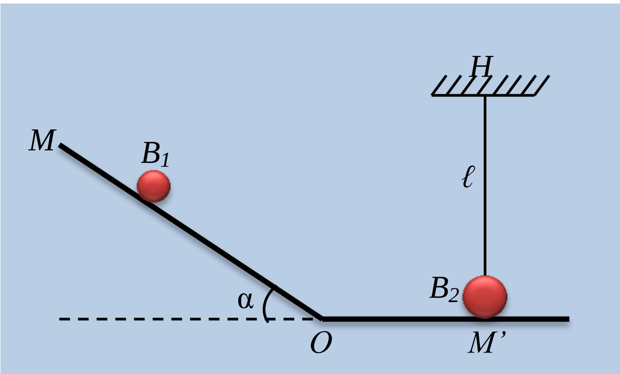
b) Calcule l'accélération du mouvement de M ;

c) Donne l'équation horaire du mouvement de M ;

d) Calcule à quel instant et à quelle distance de O, M s'arrête.



EXERCICE 29 : Une bille B_1, sphérique, de masse m_1 et de rayon R, de centre d'inertie G roule sans glisser le long de la ligne de plus grande pente d'un plan incliné, sous la seule action de son poids ; tous les frottements sont négligeables. La bille est abandonnée sans vitesse initiale en un point M du plan incliné d'un angle $\alpha = 10°$ par rapport à l'horizontale (voir figure).



1°) Exprime, en fonction de m_1, g, $\overline{MO}$ et α, l'énergie potentielle de la bille B_1 au point le plus haut de la pente.

2°) Exprime, en fonction de sa masse m_1 et de la vitesse V_G de son centre d'inertie, l'énergie cinétique de la bille B_1 au point le plus bas de la pente.

3°) En utilisant le principe de la conservation de l'énergie mécanique d'un système, exprime, en fonction de $\overline{MO}$, g et α, la vitesse de la bille B_1 au passage par le point O.

A.N : $\overline{MO} = 15cm$; $\alpha = 10°$; $g = 9{,}8m/s^2$.

4°) La bille B_1 continue de rouler d'un mouvement uniforme sur le plan horizontal $\overline{OM'}$ sans frottements. Au point M', B_1 heurte une autre bille B_2, supposée ponctuelle et située au bout d'un fil inextensible de masse négligeable, de longueur ℓ, accroché en un point H fixe. La bille B_2 a une masse $m_2 = \frac{3}{2}m_1$.

a) Exprime, en fonction de V_G, la vitesse de chacune des billes immédiatement après le choc, sachant que B_2 est initialement immobile. Fais l'application numérique.

b) Déduis de la question précédente, le sens du mouvement de chacune des billes juste après le choc.

c) Calcule l'altitude à laquelle remonte la bille B_1 sur le plan incliné MO et l'amplitude angulaire θ_m du pendule simple constitué par la bille B_2 et le fil auquel elle est fixée. On pourra utiliser le théorème de l'énergie cinétique. On donne $\ell = 1m$.

Dans tout l'exercice, le choc est considéré comme parfaitement élastique.

EXERCICE 30 : Un solide ponctuel (S) de masse $m = 100g$ est lancé d'un point A d'une glissière ABC avec une vitesse de $20m/s$. Sur la portion AB qui est horizontale, les frottements sont équivalents à une force d'intensité $f = 75N$. Sur la portion circulaire BC, les frottements sont négligeables. On donne $g = 10m/s^2$ et $AB = 20cm$.

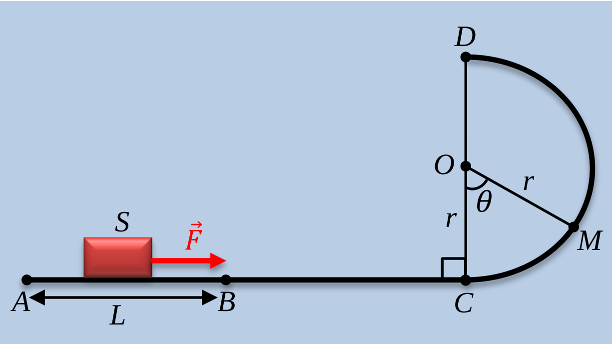
1°) Détermine la valeur V_B du solide (S) au point B.

2°) Etablis l'expression de la vitesse V_M du solide au point M en fonction de V_B, g, r et θ.

3°) Etablis l'expression de la réaction R de la glissière sur le solide (S) au point M en fonction de V_B, g, r et θ.

4°) Déduis – en la valeur numérique de la réaction au point C.

EXERCICE 23 : On étudie le mouvement d'un solide ponctuel S dans le référentiel terrestre supposé galiléen dans l'objectif de de le faire parvenir au sommet d'une piste ; on veut déterminer la force à exercer sur le solide pour y arriver. Ce solide, de masse m, est initialement au repos en A. On le lance sur la piste ACD, en faisant agir sur lui, le long de la partie AB de sa trajectoire une force $\vec{F}$ horizontale et d'intensité constante. On pose $AB = L$. La portion AC de la trajectoire est horizontale et la portion CD est un demi – cercle de centre O et de rayon r ; ces deux portions sont dans un même plan vertical (voir figure).



On suppose que la piste ACD est parfaitement lisse et que la résistance de l'air est négligeable.

1°) Détermine, en fonction de F, L et m la valeur V_B de la vitesse de S en B.

2°) Au point M défini par l'angle $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OM}) = \theta$, établis, en fonction de F, L, m, r, θ et g, l'expression de :

c) La valeur V de la vitesse de S ;

d) L'intensité R de la réaction $\vec{R}$ de la piste.

3°) a) De l'expression de R, déduis, en fonction de m, g, r et L, la valeur minimale F_0 de F pour que S atteigne D.

b) Calcule F_0.

On donne : $m = 0,5Kg$; $r = 1m$, $L = 1,5m$; $g = 9,8m/s^2$.

EXERCICE 22 : Un solide de ponctuel (S) de masse $m = 100g$ est au repos au sommet A d'une sphère de rayon $r = 0,6m$.

On déplace légèrement (S) pour qu'il quitte A avec une vitesse initiale nulle et glisse sans frottement. Le long de la sphère et dans un plan vertical contenant le centre O de la sphère. La position de (S) est déterminée par l'angle θ.

1°) Représente sur la figure toutes les forces agissant sur (S).

2°) Etablis l'expression de la réaction R de la sphère en fonction de m, r et θ.

3°) Détermine la position θ_0 où le solide (S) quitte la sphère.

4°) Déduis – en la vitesse V_0 de (S) au moment où elle quitte la sphère.

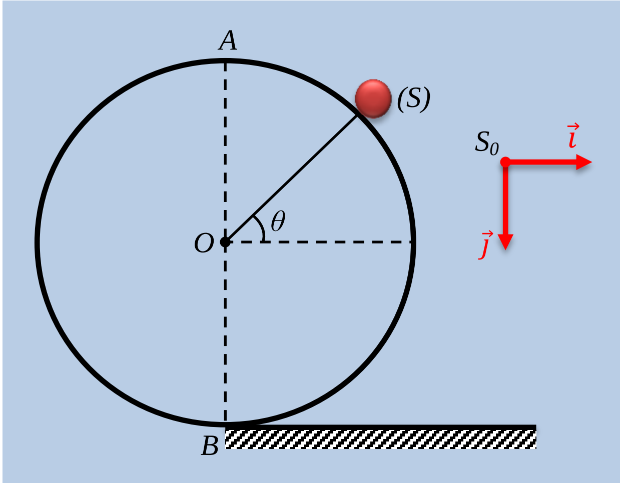
5°) On admet que le solide (S) quitte la sphère avec une vitesse $V_0 = 2m/s$ en un point S_0 tel que $\theta_0 = 42°$.

a) Etudie le mouvement de (S) dans le repère orthonormé, puis établis l'équation de la trajectoire ;

NB : on néglige la poussée de l'air.

On prendra $g = 10m/s^2$.

b) Quelle sont, dans le repère $(S_0, \vec{i}, \vec{j})$ les composantes du point de chute H de (S) sur le sol ainsi que celles de sa vitesse V_H lorsqu'il atteint le sol.



DOMAINE D'ETUDE : MECANIQUE

OG_3 : ANALYSER LES SYSTEMES MECANIQUES EN MOUVEMENT.

7 LES OSCILLATEURS MECANIQUES.

Définitions.

- *Un oscillateur mécanique est un système en mouvement de part et d'autre de sa position d'équilibre stable.*

Dans ce cas, on dit que le système effectue un *mouvement oscillatoire*.

- *Un mouvement oscillatoire est un mouvement périodique de va et vient autour d'une position d'équilibre qui se répète identique à lui – même à des intervalles de temps successifs égaux.*

- *La période T est la durée d'une oscillation complète ; c'est – à – dire l'intervalle de temps constant qui sépare deux passages au même point dans le même sens.*
  Elle se mesure en seconde (s).

- *La fréquence correspond au nombre de périodes par seconde.*

$$f = \frac{1}{T}$$

Elle se mesure en hertz (Hz).

- *Les oscillations sont libres si, une fois écarté de sa position d'équibre, le système susceptible d'osciller, est abondonné à lui – même.*
- Si l'oscillateur n'est sousis à aucune *force dissipative* (frottements, résistance de l'air…), l'énergie mécanique totale est conservée.

On distingue deux types d'oscillateurs mécaniques :

- *Les oscillateurs mécaniques harmoniques ;*
- *Les oscillateurs mécaniques non harmoniques.*

A. Oscillateurs mécaniques harmoniques.

Définition : *Un oscillateur mécanique harmonique est un oscillateur dont l'élongation du mouvement obéit a une fonction sinusoïdale du temps.*

Suivant la nature de la trajectoire décrite par l'oscillateur, on distingue :

✓ ***Les oscillations de translation.***
Exemple : Mouvement d'une masse accrochée à un ressort.
✓ ***Les oscillations de rotation.***
Exemple : Mouvement d'un pendule de torsion ou celui du balancier d'une horloge.

I. Mouvement rectiligne sinusoïdal (MRS).
I.1. Etude cinématique.

I.1.1. Définition : *On dit qu'un point M est en mouvement rectiligne sinusoïdal lorsque son équation horaire est de la forme :*

$$x = x_m sin(\omega t + \varphi)$$

x : élongation de M (m)
x_m : amplitutde du mouvement ou élongation maximale (m)
$(\omega t + \varphi)$: phase du mouvement à l'instant t.
ω : pulsation du mouvement (rad/s)
φ : phase initiale (rad)

Remarque :
✓ x_m, ω et φ sont des constantes déterminées à partir des conditions initiales du mouvement.

✓ Le mobile se déplace entre deux positions extrêmes $-x_m$ et $+x_m$ telque :

$$-x_m \leq x \leq +x_m$$

Représentation graphique du sinusoïde.

$$x = x_m sin(\omega t + \varphi)$$

Conditions initiales : $à\ t = 0\ ;\ x = 0$

$\Rightarrow 0 = x_m sin\varphi \Rightarrow \varphi = 0$

Ainsi : $x = x_m sin\omega t$

La représentation graphique de l'élongation x du mobile M aux différents instants t tels que consignés dans le tableau ci – dessous, en considérant des *inervalles de temps successifs et réguliers variant de* $\frac{T}{4}$ donne la courbe sinusoïdale (*sinusoïde*) décrite par M.

t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T	$\frac{5T}{4}$	$\frac{3T}{2}$
x	0	$+x_m$	0	$-x_m$	0	$+x_m$	0

On obtient alors la courbe de la figure 1 ci – dessous :

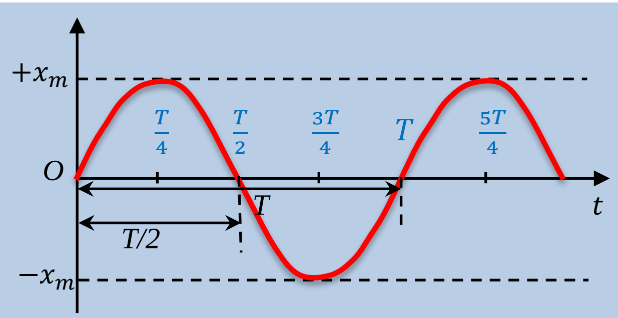


Figure 1.

I.1.2. Périodicité du mouvement.

A partir d'un instant t quelconque, le mouvement se reproduit identique à lui – même chaque fois que le temps augmente d'une *période*.

Un tel mouvement est dit *périodique* , de période :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

Avec : $\omega = 2\pi N = 2\pi f$

$$\Rightarrow \boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}}$$

I.1.3. Vitesse linéaire.

L'élongation de M étant de la forme :

$x = x_m sin(\omega t + \varphi)$

$v = \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = \omega x_m cos(\omega t + \varphi)$

$$\boxed{\dot{x} = \omega x_m cos(\omega t + \varphi)}$$

I.1.4. Accélération linéaire.

La vitesse de M obtenue en dérivant l'élongation de M est telle que :

$\dot{x} = \omega x_m cos(\omega t + \varphi)$

$a = \ddot{x}(t) = \frac{d\dot{x}}{dt} = -\omega^2 x_m sin(\omega t + \varphi)$

$\Rightarrow a = -\omega^2 x_m sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$

D'où :

$$\boxed{\ddot{x} = -\omega^2 x}$$

I.1.5. Equation différentielle.

Une équation différentielle est une équation qui établit une relation entre une fonction et ses dérivées. Dans notre cas d'étude, en considérant l'expression établis de l'accélération du mobile, on a :

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Soit :

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

Ceci est une équation différentielle du second ordre sans second membre, caractéristique d'un mouvement rectiligne sinusoïdal admettant des solutions de la forme :

$$x = x_m sin(\omega t + \varphi)$$

ou

$$x = x_m cos(\omega t + \varphi)$$

I.2. Etude dynamique et énergétique.

I.2.1. Etude du pendule élastique.

Un pendule élastique est constitué d'un *solide de masse m* accroché à l'exremité d'un *ressort à spire non jointives*, de *constante de raideur K* tandis que l'autre extrémité du ressort est fixe.

I.2.1.1. Pendule élastique horizontal.

Schéma : Le système est posé sur un plan horizontal immobile comme l'indique la figure 2 ci – dessous. On écarte le pendule de sa position d'équilibre en le tirant d'une distance x_m, puis on le lâche sans vitesse initiale à $t = 0$. Le système oscille entre les points A et A'.

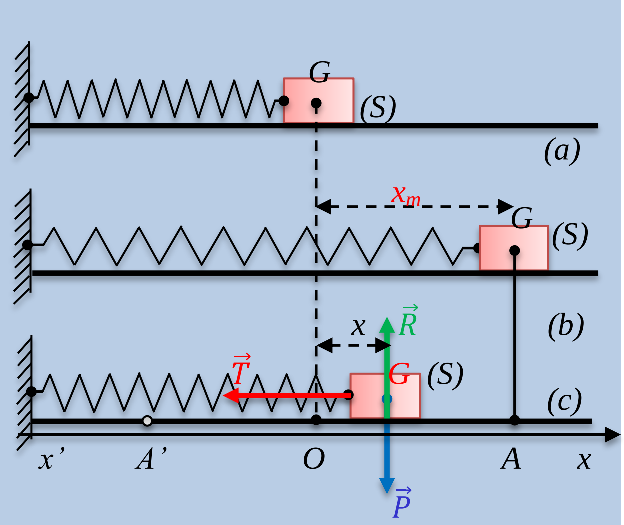


Figure 2

a) Etude dynamique:

- ✓ **R.T.S.G** ;
- ✓ **Système d'étude :** Solide de masse (m) en translation rectiligne ;
- ✓ **B.F.E.A :** $\vec{P}$; $\vec{R}$; $\vec{T}$.
- ✓ **T.C.I :** $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$

$\Rightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}_G$

- ✓ **Projection du T.C.I suivant (x'x) :**

$-T = ma_{Gx}$

Avec $T = Kx$ et $a_{Gx} = \ddot{x}$

$\Rightarrow -Kx = m\ddot{x}$

$\Rightarrow m\ddot{x} + Kx = 0$

D'où :

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0}$$

En posant $\omega^2 = \dfrac{K}{m}$, on obtient :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$
ou
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Conclusion : *Ceci est une équation différentielle du second ordre sans second membre, caractéristique d'un mouvement rectiligne sinusoïdal dont les solutions sont de la forme :*

$$x = x_m \sin(\omega t + \varphi)$$

avec $\omega^2 = \dfrac{K}{m}$ *et* $\boxed{\omega = \sqrt{\dfrac{K}{m}}}$

- ***La période T est telle que :***

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}}$$

- ***La fréquence sera :***

$$N = f = \frac{1}{T} \Rightarrow \boxed{N = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}}$$

Note : La détermination des autres paramètres du mouvement du mobile (amplitude x_m et phase initiale φ) nécessite la connaissance des contidions initiales du mouvement.

b) Etude énergétique.

- ✓ **R.T.S.G** ;
- ✓ **Système d'étude :** Solide + ressort + terre.

Le système devient isolé, donc conservatif : l'énergie mécanique se conserve.

$$E_M = cte \Rightarrow \frac{dE_M}{dt} = 0$$

- ***Expression de l'énergie mécanique E_M***

$$E_M = E_{C_t} + E_{P_e}$$

$\Rightarrow E_M = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \dfrac{1}{2}Kx^2 = cte$

$\dfrac{dE_M}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + K\dot{x}x = 0$

$\Rightarrow \dot{x}(m\ddot{x} + Kx) = 0$

$\dot{x} \neq 0 \Rightarrow m\ddot{x} + Kx = 0$

D'où :

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0}$$

En posant $\omega^2 = \dfrac{K}{m}$, on obtient :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$
ou
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Conclusion : *Ceci est une équation différentielle du second ordre sans second membre, caractéristique d'un mouvement rectiligne sinusoïdal dont les solutions sont de la forme :*

$$x = x_m sin(\omega t + \varphi)$$

- ***La période T est telle que :***

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

- ***La fréquence sera :***

$$N = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$$

I.2.1.2. Pendule élastique vertical.

Schéma : L'extrémité supérieure du ressort est fixée à un support immobile comme l'indique la figure 3 ci – dessous. On écarte le pendule de sa position d'équilibre en le tirant d'une distance x_m vers le bas, puis on le lâche sans vitesse initiale à $t = 0$. Le système oscille entre les points A et A'.

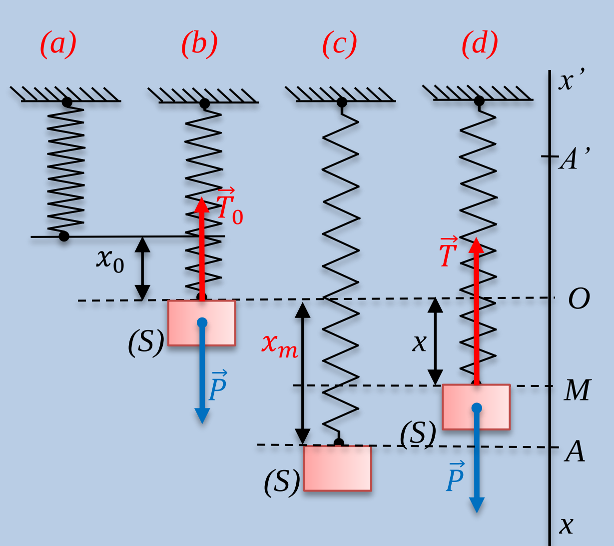


Figure 3.

a) Etude dynamique:

- ***R.T.S.G ;***
- ***Système d'étude :*** Solide de masse (m) en translation rectiligne ;
- ***B.F.E.A :*** $\vec{P}$; $\vec{T}$.
- ***T.C.I :*** $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$

$$\Rightarrow \quad \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}_G$$

- ***Projection du T.C.I suivant (x'x) :***

$$\Rightarrow P - T = ma_{Gx}$$

Avec $T = K\Delta\ell = K(x_0 + x)$ et $a_{Gx} = \ddot{x}$

$\Rightarrow mg - K(x_0 + x) = m\ddot{x}$

$\Rightarrow mg - Kx_0 - Kx = m\ddot{x}$

A l'équilibre (fig. b), on a :

$$\vec{P} + \vec{T}_0 = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} = -\vec{T}_0$$

$soit\ P = T_0,\ alors\ mg = Kx_0$

$\Rightarrow mg - Kx_0 = 0$

Ainsi, on obtient : $-Kx = m\ddot{x}$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + Kx = 0$$

d'où :

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$$

En posant $\omega^2 = \frac{K}{m}$, on obtient :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$
ou
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Conclusion : *Ceci est une équation différentielle du second ordre sans second membre, caractéristique d'un mouvement rectiligne sinusoïdal dont les solutions sont de la forme :*

$$x = x_m sin(\omega t + \varphi)$$

- ***La période T est telle que :***

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

- ***La fréquence sera :***

$$N = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$$

b) Etude énergétique.

- ✓ ***R.T.S.G** ;*
- ✓ ***Système d'étude :*** Solide + ressort + terre.

Le système devient isolé, donc conservatif : l'énergie mécanique se conserve.

$$E_M = cte \Rightarrow \frac{dE_M}{dt} = 0$$

- ***Expression de l'énergie mécanique E_M***

$$E_M = E_{C_t} + E_{P_e} + E_{P_P}$$

$$E_M = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}K(x_0 + x)^2 - mgx = cte$$

$$\frac{dE_M}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + K\dot{x}(x_0 + x) - mg\dot{x} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{x}(m\ddot{x} + Kx_0 + Kx - mg) = 0$$

$$\dot{x} \neq 0 \Rightarrow m\ddot{x} + Kx_0 + Kx - mg = 0$$

A l'équilibre : $Kx_0 - mg = 0$

Ainsi :

$$m\ddot{x} + Kx = 0$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0}$$

En posant $\omega^2 = \frac{K}{m}$, on obtient :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

***Conclusion** : Ceci est une équation différentielle du second ordre sans second membre, caractéristique d'un mouvement rectiligne sinusoïdal dont les solutions sont de la forme :*

$$x = x_m sin(\omega t + \varphi)$$

- ***La période T est telle que :***

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}}$$

- ***La fréquence sera :***

$$\boxed{N = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}}$$

II. Mouvement sinusoïdal de rotation (M.S.R).

II.1. Etude cinématique.

II.1.1. Définition : *On dit qu'un point M est animé d'un mouvement sinusoïdal de rotation lorsque son équation horaire est de la forme :*

$$\boxed{\theta = \theta_m sin(\omega t + \varphi)}$$

θ : élongation angulaire de M (rad) ;
θ_m : amplitutde du mouvement ou élongation angulaire maximale (rad) ;
$(\omega t + \varphi)$: phase du mouvement à l'instant t ;
ω : pulsation du mouvement (rad/s) ;
φ : phase initiale (rad) ;

Remarque :

- ✓ θ_m, ω et φ sont des constantes déterminées à partir des conditions initiales du mouvement.
- ✓ Le mobile se déplace entre deux positions extrêmes $-\theta_m$ et $+\theta_m$ telque : $-\theta_m \leq \theta \leq +\theta_m$.
- ✓ Si à t = 0 ; $\theta = 0$, alors : $\theta = \theta_m sin\omega t$
- ✓ Le mouvement est périodique de période :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

Représentation graphique du sinusoïde.

$$\theta = \theta_m sin(\omega t + \varphi)$$

Conditions initiales : $à\ t = 0 ; \theta = 0$

$\Rightarrow 0 = \theta_m sin\varphi \Rightarrow \varphi = 0$

Ainsi : $\theta = \theta_m sin\omega t$

t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T	$\frac{5T}{4}$	$\frac{3T}{2}$
θ	0	$+\theta_m$	0	$-\theta_m$	0	$+\theta_m$	0

On obtient alors la courbe de la figure 4 ci – dessous :

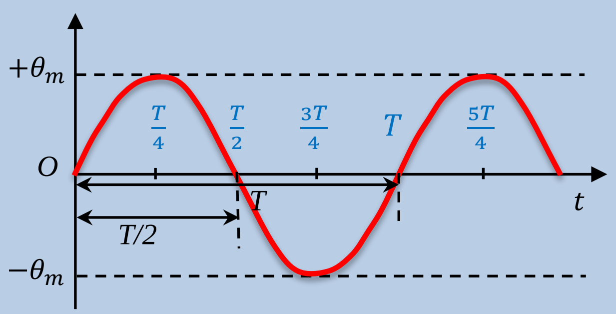


Figure 4.

II.1.2. Vitesse angulaire.

L'élongation de M étant de la forme :

$$\theta = \theta_m sin(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{\theta}(t) = \frac{d\theta}{dt} = \omega\theta_m cos(\omega t + \varphi)$$

$$\boxed{\dot{\theta} = \omega\theta_m cos(\omega t + \varphi)}$$

II.1.3 Accélération angulaire.

$$\dot{\theta} = \omega\theta_m cos(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = -\omega^2\theta_m sin(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow \ \ddot{\theta} = -\omega^2\theta_m sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2\theta$$

$$\boxed{\ddot{\theta} = -\omega^2\theta}$$

II.1.4. Equation différentielle.

$$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta \ \Rightarrow \ \ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$$

Soit :

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0}$$

Ceci est une équation différentielle du second ordre sans second membre, caractéristique d'un mouvement sinusoïdal de rotation admettant des solutions de la forme :

$$\boxed{\begin{gathered}\theta = \theta_m sin(\omega t + \varphi) \\ \text{ou} \\ \theta = \theta_m cos(\omega t + \varphi)\end{gathered}}$$

II.2. Etude dynamique et énergétique.

II.2.1. Etude d'un pendule de torsion.

Le pendule de torsion est un système constitué d'une tige (t) suspendue par son centre d'inertie G à un fil de torsion de constante C.

Ce fil de torsion dont l'extrémité est fixe, est vertical et matérialise l'axe de rotation (Δ) autour duquel peut tourner la tige, qui reste dans un plan horizontal.

Le système est en équilibre quand le fil n'est pas tordu.

On rappelle que lorsque la tige tourne d'un angle θ, le moment du couple de torsion $\mathcal{M}_\Delta\left(\vec{f}, \vec{f'}\right)$ est proportionnel à θ :

$$\mathcal{M}_\Delta\left(\vec{f}, \vec{f'}\right) = -C\theta$$

Schéma : Le fil de torsion est fixé à son extrémité supérieur à un point (figure 5).

Ecartons le pendule de sa position d'équilibre d'un angle θ_m et lâchons – le. Il effectue alors des oscillations de rotation autour de l'axe (Δ).

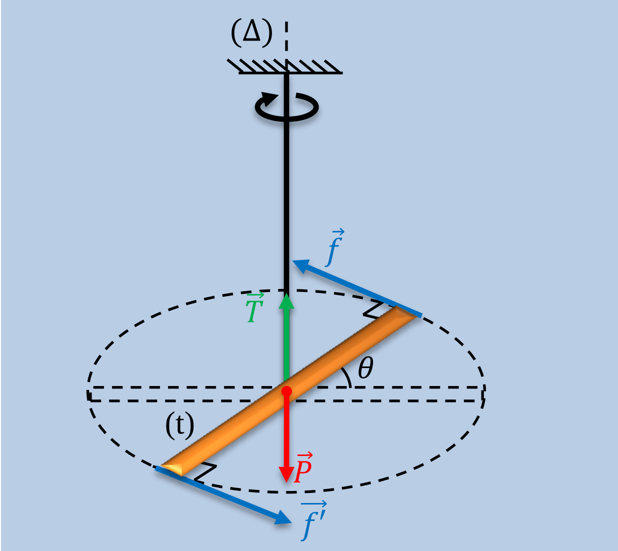


Figure 5

a) Etude dynamique.

- ✓ ***R.T.S.G.***
- ✓ ***Système :*** Tige de masse *m* en rotation.
- ✓ ***B.F.E :*** $\vec{P}$, $\vec{T}$, Couple résistant $\left(\vec{f}, \vec{f'}\right)$.
- ✓ ***T.A.A :*** $\sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = J_\Delta\ddot{\theta}$

$$\Rightarrow \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}) + \mathcal{M}_\Delta\left(\vec{f}, \vec{f'}\right) = J_\Delta\ddot{\theta}$$

Or $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = 0$ et $\mathcal{M}_\Delta(\vec{T}) = 0$.

$$\Rightarrow \mathcal{M}_\Delta(\vec{f}, \vec{f'}) = J_\Delta \ddot{\theta}$$

Ainsi : $-C\theta = J_\Delta \ddot{\theta}$

$$\Rightarrow J_\Delta \ddot{\theta} + C\theta = 0$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}\theta = 0}$$

En posant $\omega^2 = \frac{C}{J_\Delta}$, on obtient :

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$$

ou

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

Conclusion : *Ceci est une équation différentielle du second ordre sans second membre, caractéristique d'un mouvement sinusoïdal de rotation admettant des solutions de la forme :*

$$\theta = \theta_m \sin(\omega t + \varphi)$$

avec $\omega^2 = \frac{C}{J_\Delta}$ et $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}}$

- ***La période T est telle que :***

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}}$$

- ***La fréquence sera :***

$$N = f = \frac{1}{T} \Rightarrow \boxed{N = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}}$$

b) Etude énergétique.

- ✓ ***R.T.S.G ;***
- ✓ ***Système d'étude :*** Tige (t) + fil de torsion + terre.

Le système devient isolé, donc conservatif : l'énergie mécanique se conserve.

$$E_M = cte \Rightarrow \frac{dE_M}{dt} = 0$$

- ***Expression de l'énergie mécanique E_M***

$$E_M = E_{C_r} + E_{P_t}$$

$$\Rightarrow E_M = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\theta^2 = cte$$

$$\frac{dE_M}{dt} = J_\Delta\ddot{\theta}\dot{\theta} + C\dot{\theta}\theta = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}(J_\Delta\ddot{\theta} + C\theta) = 0$$

$$\dot{\theta} \neq 0 \Rightarrow J_\Delta\ddot{\theta} + C\theta = 0$$

D'où :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}\theta = 0}$$

En posant $\omega^2 = \frac{C}{J_\Delta}$, on obtient :

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$$

ou

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

Conclusion : *Ceci est une équation différentielle du second ordre sans second membre, caractéristique d'un mouvement sinusoïdal de rotation admettant des solutions de la forme :*

$$\theta = \theta_m \sin(\omega t + \varphi)$$

avec $\omega^2 = \frac{C}{J_\Delta}$ et $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}}$

- ***La période T est telle que :***

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}}$$

- ***La fréquence sera :***

$$N = f = \frac{1}{T} \Rightarrow \boxed{N = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}}$$

Remarque : Tout comme dans le cas des oscillations de translation, la détermination des autres paramètres du mouvement du mobile (amplitude θ_m et phase initiale φ) nécessite la connaissance des contidions initiales du mouvement.

B. Oscillateurs mécaniques non harmoniques.

Définitions : *Un oscillateur mécanique non harmonique est un oscillateur dont l'élongation du mouvement n'obéit pas à une fonction sinusoïdale du temps de la forme :*

$$\theta = \theta_m sin(\omega t + \varphi)$$

I. Etude d'un pendule pesant.

I.1. Définition : *On appelle pendule pesant tout corps solide mobile autour d'un axe ne passant pas par son centre de gravité.*

Exemple :

- ✓ *Une balançoire ;*
- ✓ *Le balancier d'une horloge.*

La *position d'équilibre stable* est celle pour laquellle le *centre d'inertie G se trouve sur la verticale de l'axe* (Δ)*, au – dessus de cet axe* (voir figure 6).
On pose $OG = a$, distance de l'axe de rotation (Δ) au centre d'inertie G.

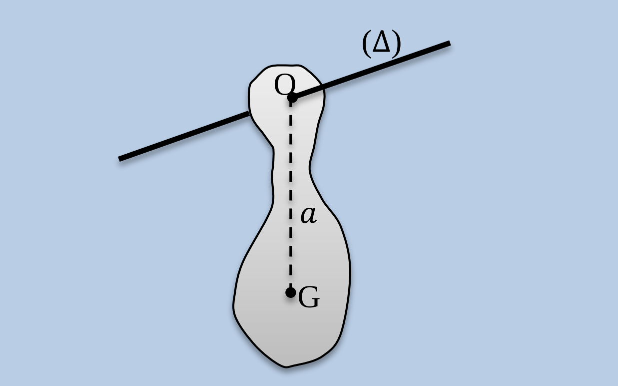


Figure 6.

I.2. Etude dynamique et énergétique.

Ecartons le pendule de sa position d'équilibre d'un angle θ_m et lâchons – le. Il effectue alors des oscillations de rotation autour de l'axe (Δ) (figure 7).

Schéma :

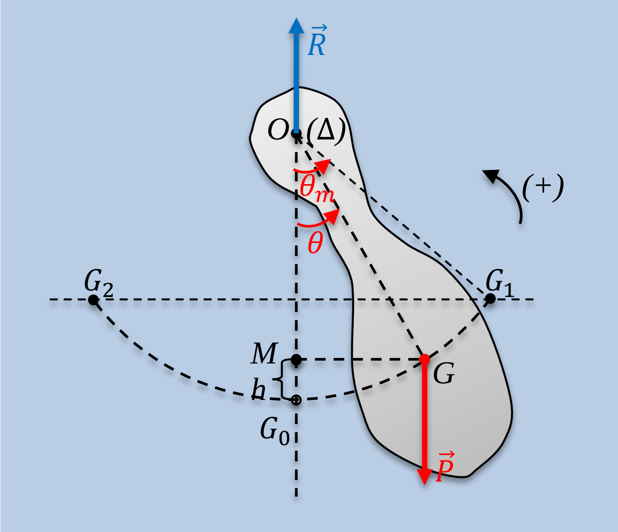


Figure 7.

a) Etude dynamique.

- ✓ ***R.T.S.G.***
- ✓ ***Système :*** solide de masse m en rotation.
- ✓ **B.F.E :** $\vec{P}$; $\vec{R}$.
- ✓ **T.A.A :** $\sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = J_\Delta\ddot{\theta}$

$$\Rightarrow \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = J_\Delta\ddot{\theta}$$

Avec $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -P.d$ et $\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = 0$.

Ainsi : $-Pd = J_\Delta\ddot{\theta}$

$Or\ sin\theta = \dfrac{d}{OG} \Rightarrow d = OGsin\theta$.

$$\Rightarrow -POGsin\theta = J_\Delta\ddot{\theta}$$
$$-mgasin\theta = J_\Delta\ddot{\theta}$$
$$\Rightarrow J_\Delta\ddot{\theta} + mgasin\theta = 0$$

D'où :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{mga}{J_\Delta}sin\theta = 0}$$

En posant $\omega^2 = \dfrac{mga}{J_\Delta}$, on obtient :

$$\ddot{\theta} + \omega^2 sin\theta = 0$$

ou

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 sin\theta = 0$$

Conclusion : *Ceci est une équation différentielle non linéaire du second ordre sans second membre, n'admettant pas des solutions de la forme :*

$$\theta = \theta_m \sin(\omega t + \varphi)$$

Alors l'oscillateur est non harmonique.

- ***Cas des oscillations de faibles amplitude.***

Pour que le pendule oscille sinusoïdalement il faut que le moment de rappel soit proportionnel à θ.

Si θ_m est petit ($\theta < 8°$), θ est également petit. On peut confondre $\sin\theta$ et θ exprimé en radians.

L'équation différentielle devient, dans ce cas :

$$\ddot{\theta} + \frac{mga}{J_\Delta}\theta = 0$$

ou

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

Conclusion : *Ceci est une équation différentielle du second ordre sans second membre, caractéristique d'un mouvement sinusoïdal de rotation admettant des solutions de la forme :*

$$\theta = \theta_m \sin(\omega t + \varphi)$$

Avec

$$\omega = \sqrt{\frac{mga}{J_\Delta}}$$

- ***La période T est telle que :***

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{mga}}$$

- ***La fréquence sera :***

$$N = f = \frac{1}{T} \Rightarrow N = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mga}{J_\Delta}}$$

Conclusion : *Dans le cas particulier d'oscillations de faible amplitude, le pendule pesant est un oscillateur harmonique de rotation.*

b) Etude énergétique.

- ✓ ***R.T.S.G*** ;
- ✓ ***Système d'étude :*** Pendule pesant + terre.

Le système étant isolé, donc conservatif : l'énergie mécanique se conserve.

$$E_M = cte \Rightarrow \frac{dE_M}{dt} = 0$$

- ***Expression de l'énergie mécanique E_M***

$$E_M = E_{C_r} + E_{P_P}$$

$$\Rightarrow E_M = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 + mgh$$

$$Or\ \cos\theta = \frac{OG_0 + MG_0}{OG} = \frac{a-h}{a}$$

$$\Rightarrow h = a(1-\cos\theta)$$

Alors : $E_M = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 + mga(1-\cos\theta) = cte$

$$\frac{dE_M}{dt} = J_\Delta\ddot{\theta}\dot{\theta} + mga(\dot{\theta}\sin\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}\left(J_\Delta\ddot{\theta} + mga\sin\theta\right) = 0$$

$$\dot{\theta} \neq 0 \Rightarrow J_\Delta\ddot{\theta} + mga\sin\theta = 0$$

D'où :

$$\ddot{\theta} + \frac{mga}{J_\Delta}\sin\theta = 0$$

En posant $\omega^2 = \frac{mga}{J_\Delta}$, on obtient :

$$\ddot{\theta} + \omega^2\sin\theta = 0$$

- ***Cas des oscillations de faible amplitude.***

$$E_M = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 + mga(1-\cos\theta)$$

Pour θ faible : $1-\cos\theta \simeq \frac{\theta^2}{2}$

Ainsi : $E_M = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mga\theta^2$

$$\frac{dE_M}{dt} = J_\Delta\ddot{\theta}\dot{\theta} + mga\dot{\theta}\theta = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}\left(J_\Delta\ddot{\theta} + mga\theta\right) = 0$$

$$\dot{\theta} \neq 0 \Rightarrow J_\Delta\ddot{\theta} + mga\theta = 0$$

D'où :

$$\ddot{\theta} + \frac{mga}{J_\Delta}\theta = 0$$

ou

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$$

Conclusion : *Ceci est une équation différentielle du second ordre sans second membre, caractéristique d'un mouvement sinusoïdal de rotation admettant des solutions de la forme :*

$$\theta = \theta_m \sin(\omega t + \varphi)$$

- ***La période T est telle que :***

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{mga}}$$

➢ ***La fréquence sera :***

$$N = f = \frac{1}{T} \Rightarrow \boxed{N = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mga}{J_\Delta}}}$$

Remarque : Si l'angle θ devient supérieur à 8°, la période T augmente légèrement avec l'amplitude par la relation :

$$\boxed{T = T_0\left(1 + \frac{\theta_m^2}{16}\right)}$$

avec : $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{mga}}}$

II. Etude du pendule simple.

II.1. Définition : *On appelle pendule simple, un point matériel de masse m, accroché à un fil inextensible de masse négligeable et de longueur ℓ en rotation autour de sa position d'équilibre.*

Le point matéreil est écarté de sa position d'équilibre stable (fil vertical) d'un angle θ_m puis lâché sans vitesse initiale. Le point matériel initialement situé en A décrit une trajectoire circulaire entre les points A et A' en passant par sa position d'équilibre. On dit que le système effectue des oscillations autour de sa position d'équlibre (figure 8).

Schéma :

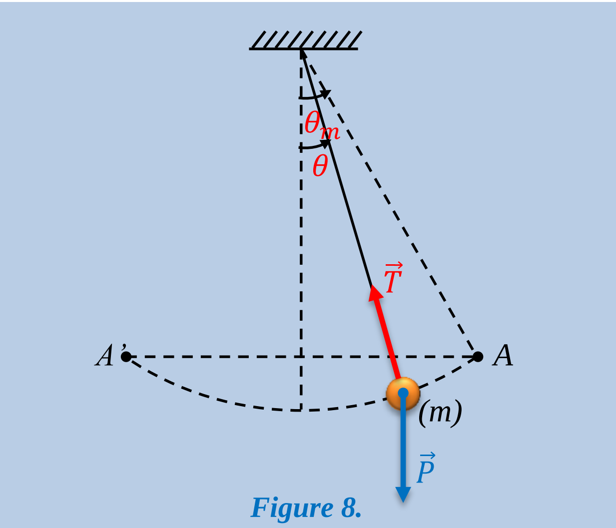


Figure 8.

Les résultats obtenus pour le pendule pesant sont valables pour le pendule simple.

II.2. Equation différentielle.

Elle peut se déduire de celle du pendule pesant, précédemment établie.
Pour le pendule pesant :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mga}{J_\Delta}\sin\theta = 0$$

Dans le cas d'un pendule pesant harmonique :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mga}{J_\Delta}\theta = 0$$

Pour le pendule simple :

$$a = \ell \quad et \quad J_\Delta = m\ell^2$$

L'équation différentielle du pendule simple est alors :

$$\ddot{\theta} + \frac{mg\ell}{m\ell^2}\theta = 0$$

D'où :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0}$$

Soit :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0}$$

Conclusion : *Ceci est une équation différentielle du second ordre sans second membre, caractéristique d'un mouvement sinusoïdal de rotation admettant des solutions de la forme :*

$$\theta = \theta_m \sin(\omega t + \varphi)$$

II.3. Expression de la période.

La période du pendule simple est définie par :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \ ; \text{avec} \ \omega^2 = \frac{g}{\ell} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

D'où :

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$$

II.4. Pendule simple sychrone d'un pendule pesant.

Définition : *On appelle pendule simple synchrone d'un pendule pesant, un pendule simple de même période que le pendule pesant.*

- ***Longueur du pendule simple synchrone du pendule composé.***
  - Pour un pendule pesant :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{mga}} \qquad (1)$$

  - Pour un pendule simple :

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \qquad (2)$$

On a $T = T'$ alors $(1) = (2)$

$$\Rightarrow \quad 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{mga}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad \Rightarrow \quad \frac{J_\Delta}{mga} = \frac{\ell}{g}$$

D'où :

$$\boxed{\ell = \frac{J_\Delta}{ma}}$$

Remarques :

R$_1$: La période d'un pendule simple est indépendante de la masse du point matériel, mais dépend de la longueur ℓ du pendule.

R$_2$: Un pendule *bat la seconde* lorsque sa période des oscillations propres vaut $T_0 = 2s$.

R$_3$: La longueur du pendule simple peut varier avec la température suivant la relation :

$$\boxed{\ell = (1 + \lambda t)\ell_0}$$

avec :
ℓ_0 : longueur du pendule à la température initiale t_0 ;
ℓ : longueur du pendule correspondant à la température t quelconque ;
λ : Coefficient de dilatation linéaire ;
t : température considérée.

Exercice d'application.

Soit un ressort *R* de masse négligeable et de longueur à vide ℓ_0 = *30cm* disposé verticalement, est accroché à un support par son extrémité supérieure. Si on fixe à l'autre extrémité une masse *M = 500g*, *R* s'allonge de *5cm*. On retire la masse *M* et on la remplace par une masse ponctuelle *m = 100g*. A partir de la position d'équilibre, on tire *m* vers le bas, verticalement de *3cm* puis on l'abandonne sans vitesse. Détermine :

1°) a) En utilisant la méthode énergétique, la nature et l'équation horaire du mouvement. On prendra pour origine des dates l'instant du lâché.

b) La vitesse de *m* au passage par la position d'équilibre.

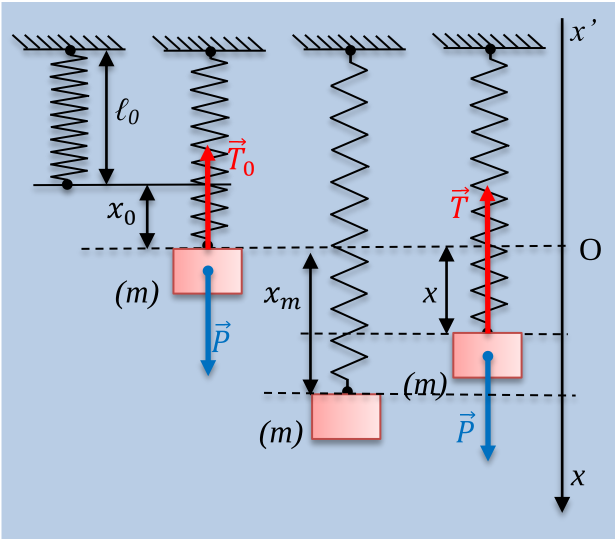
c) La date de premier passage à l'abscisse *1,5cm* en allant dans le sens positif.

2°) On recommence l'expérience en lâchant *m* (dans les mêmes conditions) avec une vitesse verticale V_0 = *0,3m/s*, détermine l'équation du mouvement de *m*. On prendra $g = 10m/s^2$.

Corrigé.

ℓ_0 = 30cm ; M = 500g ; $\Delta\ell$ = 5cm ; m = 100g ; x_m = 3cm ; g = 10m/s^2.

1°) a) Nature et l'équation horaire du mouvement.



- ***R.T.S.G ;***
- ***Système d'étude :*** Solide + ressort + terre.

Le système devient isolé, donc conservatif : l'énergie mécanique se conserve.

$$E_M = cte \quad \Rightarrow \quad \frac{dE_M}{dt} = 0$$

- ***Expression de l'énergie mécanique E_M***

$$E_M = E_{C_t} + E_{P_e} + E_{P_P}$$

$$E_M = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}K(x_0 + x)^2 - mgx = cte$$

$$\frac{dE_M}{dt} = m\ddot{x}\dot{x} + K\dot{x}(x_0 + x) - mg\dot{x} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x}(m\ddot{x} + Kx_0 + Kx - mg) = 0$$

$$\dot{x} \neq 0 \quad \Rightarrow m\ddot{x} + Kx_0 + Kx - mg = 0$$

A l'équilibre : $Kx_0 - mg = 0$

Ainsi : $m\ddot{x} + Kx = 0$

d'où :

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$$

Conclusion : *Ceci est une équation différentielle du second ordre sans second membre, caractéristique d'un mouvement rectiligne sinusoïdal dont les solutions sont de la forme :*

$$x = x_m sin(\omega t + \varphi)$$

- ***Equation horaire du mouvement.***

$$\begin{cases} x = x_m sin(\omega t + \varphi) \\ \dot{x} = \omega x_m cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

A l'instant $t = 0$: $x = x_m$; $\dot{x} = 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_m sin\varphi = x_m \\ \omega x_m cos\varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sin\varphi = 1 \\ cos\varphi = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} rad$$

Trouvons ω.

$$\omega^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Avec le solide de masse M, on a à l'équilibre :

$$\vec{P} + \vec{T}_0 = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} = -\vec{T}_0$$

soit $P = T_0$, alors $Mg = K\Delta\ell \Rightarrow K = \frac{Mg}{\Delta\ell}$

d'où :

$$\omega = \sqrt{\frac{Mg}{m.\Delta\ell}}$$

$$\textbf{A.N}: \omega = \sqrt{\frac{0{,}5 \times 10}{0{,}1 \times 0{,}05}} = 31{,}62 \Rightarrow \omega = 31{,}62 rad/s$$

D'où l'équation horaire du mouvement est :

$$x = 0{,}03 sin\left(31{,}62t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (m)$$

Ou

$$x = 0{,}03 cos(31{,}62t) \quad (m)$$

b) La vitesse de m au passage par la position d'équilibre.

$$\dot{x} = \omega x_m cos(\omega t + \varphi)$$

Au passage par la position d'équilibre $x = 0$.

$\Rightarrow x_m sin(\omega t + \varphi) = 0$

$x_m \neq 0 \Rightarrow sin(\omega t + \varphi) = 0 \Rightarrow \omega t + \varphi = 0$

Ainsi : $V = \dot{x} = \omega x_m cos(0)$

D'où :

$$V = \omega x_m$$

A.N : $V = 31{,}62 \times 0{,}03 = 0{,}94$

$$V = 0{,}94 m/s$$

c) La date de premier passage à l'abscisse 1,5cm en allant dans le sens positif.

$x = x_m sin(\omega t + \varphi)$

à l'instant t $x = \frac{x_m}{2} \Rightarrow \frac{x_m}{2} = x_m sin(\omega t + \varphi)$

$$\Rightarrow sin(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \omega t + \varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{6} - \varphi + 2k\pi$$

$$\omega t = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \omega t = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

Au premier passage à la position d'équilibre : $k = 0$.

$$\Rightarrow t = \left|-\frac{\pi}{3\omega}\right| \Rightarrow \quad t = \frac{\pi}{3\omega}$$

$$\textbf{A.N}: t = \frac{3{,}14}{3 \times 31{,}62} = 0{,}033$$

$$t = 0{,}033 s$$

2°) $V_0 = 0{,}3 m/s$,

Détermination de l'équation horaire du mouvement de m.

$$\begin{cases} x = x_m sin(\omega t + \varphi) \\ \dot{x} = \omega x_m cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

A l'instant $t = 0$: $x = x_m$; $\dot{x} = V_0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_m sin\varphi = x_m \\ \omega x_m cos\varphi = V_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sin\varphi = 1 \\ cos\varphi = \frac{V_0}{\omega x_m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow tan\varphi = \frac{\omega x_m}{V_0}$$

d'où :

$$\varphi = tan^{-1}\left(\frac{\omega x_m}{V_0}\right)$$

$$\textbf{A.N}: \varphi = tan^{-1}\left(\frac{31{,}62 \times 0{,}03}{0{,}3}\right) = 1{,}26$$

$$\varphi = 1{,}26 rad$$

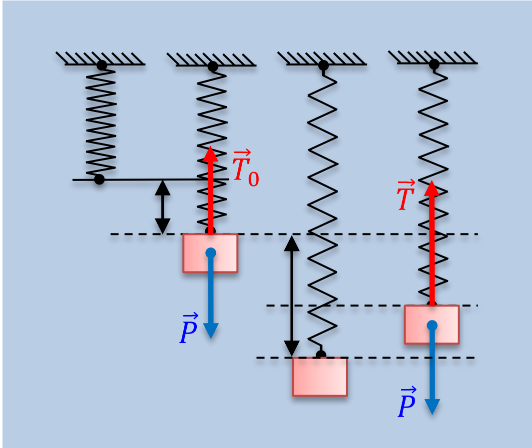
D'où la nouvelle équation du mouvement est :

$$x = 0{,}03 sin(31{,}62t + 1{,}26) \quad (m)$$

TRAVAUX DIRIGES VI

Conseils pratiques :

1. **Techniques de réalisation des schémas.**
2. **Principes de la dynamique ou lois de Newton.**
3. **Energie mécanique d'un pendule.**
4. **Etude dynamique et énergétique d'un oscillateur.**
5. **Equation horaire du mouvement d'un oscillateur.**
6. **Période des oscillations d'un oscillateur.**



L'ESSENTIEL DU COURS

I – Définitions des notions.

Définis les termes suivants : Oscillateur mécanique ; Oscillateur mécanique harmonique ; Oscillateur mécanique non harmonique ; Mouvement périodique ; Mouvement sinusoïdal ; Pendule pesant ; Pendule simple.

II – Questions à réponses construites.

Réponds aux questions suivantes :

1°) Quand dit – on qu'un pendule bat la seconde ?

2°) Quelle différence fais – tu entre un pendule simple et un pendule conique ?

3°) Qu'appelle – t – on pendule simple synchrone d'un pendule pesant ?

4°) On considère le mouvement d'un pendule élastique dont l'équation horaire est de la forme : $x = x_m sin(\omega t + \varphi)$. Donne l'expression de sa vitesse au premier passage par la position d'équilibre.

5°) Quelle est l'équation horaire du mouvement d'un pendule de torsion abandonné sans vitesse initiale à $t = 0$, sachant que son élongation est maximale et négative. On donne : $\omega = \pi\ rad.s^{-1}$ et $\theta_m = \frac{\pi}{6}\ rad$.

6°) **LE SAGE** dit à propos du pendule simple : « Si un pendule a une longueur 16 fois supérieure à celle d'un autre pendule, celui – ci effectuera 4 oscillations pendant que celui – là en accomplira une seule **».** LE SAGE a – t – il raison ? Justifie ta réponse par une démonstration.

III – Questions à choix multiples.

Choisis la bonne réponse. ***Exemple 8 = b.***

1°) La pulsation du pendule élastique horizontal non amorti est

a) $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$; b) $\omega_o = \sqrt{\frac{m}{k}}$; c) $\omega_o = \sqrt{\frac{l}{g}}$.

2°) L'équation différentielle du pendule élastique verticale non amorti est :

a) $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_o^2 x = 0$ b) $\ddot{x} + \omega_o^2 \dot{x} = 0$ c) $\ddot{x} + \frac{4\pi^2}{T_o^2} x = 0$ d) $\ddot{x} + \frac{2\pi}{T_o} x = 0$.

3°) La période du pendule de torsion non amorti est :

a) $T_o = \sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}$; b) $T_o = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}$; c) $T_o = 2\pi\sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}$; d) $T_o = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

4°) La période du pendule pesant est indépendant de :

a) La masse ; b) Du rayon ; c) Intensité de pesanteur.

5°) Quand on double l'amplitude d'un pendule élastique :

a) La constante de raideur est double ; b) La période est doublée ;
c)L'énergie mécanique est modifiée ; d) La masse reste constante.

6°) L'équation différentielle du pendule pesant dans le cas générale est :

a) $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_o^2 x = 0$; b) $\ddot{\theta} + \omega_o^2\dot{\theta} = 0$; c) $\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_\Delta}x = 0$; d) $\ddot{\theta} + \frac{J_\Delta}{mgd}\theta = 0.$

e) $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{J_\Delta}sin\theta = 0$; f) $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{J_\Delta}sin\theta = 0$; g) $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{J_\Delta}{mgd}sin\theta = 0.$

7°) La longueur du pendule simple synchrone du pendule pesant est :

a) $\ell = \frac{T_o^2 g}{4\pi^2}$; b) $\ell = \frac{T_o^2 mgd}{J_\Delta}$; c) $\ell = \frac{J_\Delta}{md}$.

IV – Questions à alternative vrai ou faux.

Réponds par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

1°) Un mouvement sinusoïdal de rotation obéit à la loi horaire suivante : $x = x_m sin(\omega t + \varphi)$.
2°) L'équation différentielle d'un mouvement rectiligne sinusoïdal est de la forme : $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$.
3°) Un mouvement sinusoïdal est dit périodique lorsque sa période vaut une seconde.
4°) La période d'un pendule simple ne dépend pas de sa masse.
5°) L'énergie mécanique d'un pendule élastique se conserve.
6°) L'amplitude d'un mouvement oscillatoire est $x_m cos\varphi$.
7°) Le pendule pesant est toujours un oscillateur non harmonique.
8°) Un oscillateur mécanique est dit harmonique lorsque son équation différentielle est de la forme : $\ddot{\theta} + \omega^2 sin\theta = 0$.
9°) Le mouvement du pendule de torsion est dû au couple de rappel dont le moment est proportionnel à l'angle de rotation θ.
10°) La vitesse d'un pendule simple est nulle au passage par la position d'équilibre.

V – Appariement.

Relie un élément – question de la colonne A à un élément – réponse de la colonne B dans le tableau ci – dessous : *Exemple : $a_{11} = b_{16}$.*

Colonne A		Colonne B	
a_1	Période d'un pendule élastique	b_1	$E_m = \frac{1}{2}C\theta_m^2$
a_2	Pendule battant la seconde	b_2	$\theta = \theta_m \sin(\omega t + \varphi)$
a_3	Oscillateur mécanique non harmonique	b_3	$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$
a_4	Système conservatif	b_4	$\ddot{\theta} + \frac{mgOG}{J_\Delta}sin\theta = 0$
a_5	Couple de rappel d'un pendule de torsion	b_5	Même période que le pendule pesant
a_6	Equation horaire d'un mouvement sinusoïdal de rotation de faible amplitude	b_6	$T_0 = 2\pi\sqrt{\ell/g}$
a_7	Période d'un pendule simple	b_7	$T_0 = 2s$
a_8	Pendule simple synchrone	b_8	$\mathcal{M}_\Delta(\vec{f}, \vec{f'}) = - C\theta$
a_9	Energie mécanique d'un pendule de torsion	b_9	$\ddot{\theta} + \omega^2 sin\theta = 0$
a_{10}	Equation différentielle d'un pendule pesant	b_{10}	$\frac{dE_M}{dt} = 0$

RESOLUTION DES PROBLEMES

EXERCICE 1 : Soit la loi horaire :

$$x = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{3}\right) cm ;$$

celle d'un oscillateur.

1°) Détermine les constantes x_m, ω, φ et T.

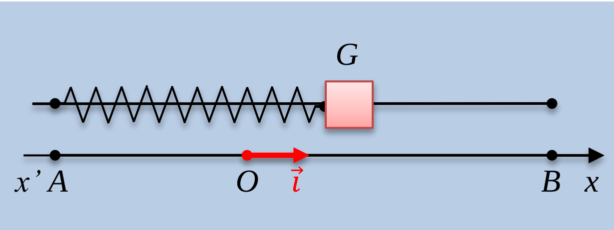
2°) Montre que cet oscillateur est harmonique.

3°) Détermine les expressions de la vitesse et de l'accélération.

4°) Représente la trajectoire du mouvement, la position, les vecteurs vitesse et l'accélération à l'instant t = 0.

5°) Représente les trois fonctions x, $\dot{x}$ et $\ddot{x}$ sur le même graphe pour une période.

EXERCICE 2 : Un ressort à spires non jointives, de masse négligeable, de raideur *K*, est enfilé sur une tige horizontale *AB*. Une de ses extrémités étant fixée en *A*, un corps de masse *m*, de centre d'inertie *G*, est attaché à l'autre extrémité. Le ressort et le corps de masse *m* peuvent coulisser sans frottements le long de la tige *AB*. Au repos, le centre d'inertie *G* est en *O*. On associe à la tige horizontale un repère $(O, \vec{i})$.



Le corps de masse *m* est écarté de sa position d'équilibre dans le sens positif d'une distance $OG = x_m = 5cm$, puis lâché sans vitesse initiale à la date $t = 0$.

1°) Etablis la nature du mouvement.

2°) Calcule sa période et détermine son équation horaire $x = f(t)$.

On donne : $K = 45N.m^{-1}$; $m = 0{,}20Kg$.

3°) Calcule l'énergie mécanique du système masse – ressort.

Déduis – en la vitesse de *G* au passage par la position d'équilibre.

EXERCICE 3 : Lors d'un cours de pratique de physique, il est demandé aux élèves de terminale de déterminer la constante de raideur d'un ressort à partir de la période des oscillations du système constitué avec un ressort et un solide de masse $m = 500g$.

1°) Le système solide – ressort est vertical.

Trouve une relation entre la masse *m* du solide, la constante de raideur *K*, l'intensité de la pesanteur *g* et l'allongement Δl_0 à l'équilibre.

2°) Pour obtenir les oscillations, un des élèves écarte le solide de sa position d'équilibre, puis on l'abandonne sans vitesse initiale.

a) Etablis l'équation différentielle du mouvement du centre d'inertie du solide.

b) Déduis – en l'expression de la période *T* des oscillations en fonction de *m* et *K*.

3°) Les élèves mesurent la durée de *10* oscillations et trouvent *8,00* secondes.

a) Quelle est la période des oscillations ?

b) Déduis – en la constante de raideur *K* du ressort. On donne $g = 9{,}81U.S.I$

EXERCICE 4 : Un pendule de torsion est constitué par un fil de torsion de constante $C = 0{,}043N.m.rad^{-1}$ auquel est suspendue une barre horizontale. La période des oscillations libres est $T_0 = 0{,}85s$.

1°) Quel est le moment d'inertie de la barre ?

La barre est écarté de sa position d'équilibre de $\pi/3$ *rad* et lancée de cette position vers la position d'équilibre avec une vitesse angulaire de *2,0rad/s* à l' origine des dates. Quelle est l'énergie totale du pendule ?

2°) Déduis – en l'amplitude du mouvement. Quelle est l'équation horaire du mouvement de la barre ?

3°) Calcule la vitesse angulaire au passage par la position d'équilibre.

EXERCICE 5 : On dispose d'un disque homogène de masse *M* et de rayon *R*. Le moment d'inertie du disque par rapport à son axe de révolution est $J = 0{,}5MR^2$.

On suspend ce disque au centre *O* à un fil de torsion verticale fixé à son extrémité supérieure, en un point *O'*. A partir de sa position d'équilibre, on fait tourner le disque autour de *O'O* d'un angle θ_m, dans le sens positif choisi, puis on l'abandonne sans vitesse initiale à la date $t = 0$. Il prend alors un mouvement de période *T*.

1°) Etablis l'équation horaire du mouvement pris par le disque.

A.N : $\theta_m = 2$ *rad* ; $T = 2s$.

2°) Détermine la vitesse angulaire et l'énergie cinétique du disque lors d'un passage par la position d'équilibre.

AN : $M = 0{,}4Kg$; $R = 0{,}1m$.

3°) Calcule la constante de torsion du fil.

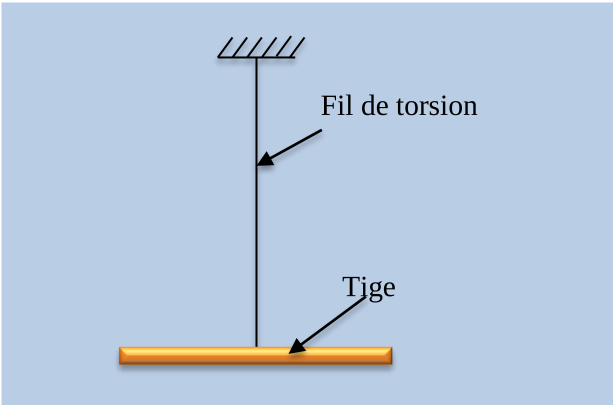
4°) Comment se répartissent l'énergie cinétique et l'énergie potentielle élastique lorsque $\theta = \frac{\theta_m}{2}$.
5°) Quelle est l'énergie mécanique totale de cet oscillateur ?

EXERCICE 6 : Un solide ponctuel *A* de masse *m* est attaché à l'extrémité d'un fil fin, inextensible de masse négligeable, de longueur ℓ dont l'autre extrémité est fixée en *O*.
On écarte d'un angle α_m à partir de sa position d'équilibre et on l'abandonne sans vitesse initiale. Un mouvement pendulaire prend naissance.
1°) A une date quelconque t, écris l'expression de l'énergie mécanique totale du système dans le champ de pesanteur, en fonction des données littérales. On adoptera comme niveau d'énergie potentielle nulle, le plan horizontal passant par la position d'équilibre de *A*.
2°) On envisage le cas des petits angles. Après avoir montré que la conservation de l'énergie mécanique totale du système entraine $\frac{dE}{dt} = 0$, établis l'équation différentielle du mouvement de *A*. Quelle est la nature de ce mouvement ? Calcule la période des oscillations de faible amplitude.
A.N : $\ell = 60cm$; $g = 10m.s^{-2}$.
3°) L'amplitude des oscillations est $\alpha_m = 5°$.
a) Ecris l'équation horaire du mouvement de *A*, l'élongation étant nulle à la date $t = 0$. Montre qu'il y a deux solutions.
b) Quelle est l'énergie d'oscillation du pendule ? ***A.N :*** $m = 50g$.
c) Calcule le module *V* de la vitesse de *A* lorsqu'il passe par la verticale.

EXERCICE 7 : Un pendule pesant est constitué d'un disque homogène (D) solidaire d'une tige *OA* sans masse, de longueur *L* dont l'extrémité *O* coïncide avec le centre du disque. L'extrémité *A* porte une bille de masse *m* assimilable à un point. Le disque à pour masse *m* et pour rayon $r = L/3$, le pendule peut osciller sans frottement autour d'un axe (Δ) horizontal passant par *O* et perpendiculaire au disque.
1°) Exprime en fonction de *m* et *L* le moment d'inertie du système par rapport à (Δ). Fais le calcul pour $m = 100g$; $L = 60\ cm$.
2°) Le pendule est écarté de sa position d'équilibre stable d'un petit angle $\theta_0 = 0{,}1rad$ et lâché sans vitesse initiale. Montre que les oscillations sont sinusoïdales. Calcule la vitesse angulaire au passage à la position d'équilibre,
3°) On écarte maintenant le pendule de sa position d'équilibre stable, d'un angle droit et on le lâche sans vitesse initiale. Calcule la vitesse de la bille au passage par la position d'équilibre. $g = 10m.s^{-2}$.

EXERCICE 8 : Un pendule simple de longueur $\ell = 1m$ est constitué par une bille *A* de masse $m = 100g$; on écarte ce pendule d'un angle $\alpha = 30°$ et on l'abandonne.
1°) Quelle est la vitesse *V* de *A* quand il passe par la verticale ? Prendre $g = 9{,}8m/s^2$.
2°) Quelles sont à cet instant, la quantité de mouvement et l'énergie cinétique de la bille *A* ?
3°) En arrivant à la verticale, la bille *A* heurte une bille *B* de masse *M*, au repos. On admet que le choc est parfaitement élastique, exprime en fonction de *m*, *M* et *V* la vitesse de *A* et de *B* juste après le choc. Fais l'application numérique pour $M = 50g$.

EXERCICE 9 : Un pendule de torsion est constitué au moyen d'une tige de longueur $L = 60cm$ et de masse $m = 100g$, fixée à l'une des extrémités d'un fil de torsion dont l'autre extrémité est fixée à un support fixe. Le centre de gravité de la tige est sur l'axe du fil. Cette tige oscille dans un plan horizontal comme l'indique la figure.



1°) On écarte la tige de sa position d'équilibre d'un angle $\theta_0 = \frac{\pi}{6}\ rad$, puis on l'abandonne sans vitesse initiale. Etablis l'équation du mouvement oscillatoire autour de sa position d'équilibre et déduis – en *C* sachant que le pendule bat la seconde ;
2°) Ecris l'équation du mouvement en prenant pour $t = 0$, l'instant où la tige est à $\theta_0 = \frac{\pi}{6}\ rad$.
Déduis – en sa vitesse au passage par sa position d'équilibre.

EXERCICE 10 : Un ressort parfaitement élastique, de masse négligeable est fixé par une extrémité et

soutient, à l'autre extrémité un objet de masse $M = 5Kg$. On écarte cet objet de sa position d'équilibre de $5cm$ vers le bas, selon la verticale, puis on l'abandonne sans vitesse initiale.
1°) Montre en utilisant le théorème d'énergie mécanique totale, que le centre d'inertie de l'objet effectue un mouvement sinusoïdal.
2°) La durée de 10 oscillations est $8,4s$. Calcule la constante de raideur du ressort. Quel est son allongement sous l'action d'une force de $49N$?
3°) Ecris l'équation horaire de ce mouvement. A quels instants l'objet passe – t – il pour la première et la deuxième fois par la position d'équilibre, et avec quelles vitesses ?

EXERCICE 11 : Un pendule de torsion se compose d'une barre AB de longueur ℓ, de masse m, fixée en son milieu M à un fil d'acier verticale OM suspendu au point fixe O.
1°) Calcule le moment d'inertie J de la barre AB par rapport à l'axe OM si $m = 200g$ et $\ell = 20cm$.
2°) On écarte la barre d'un angle θ_m de sa position d'équilibre et on l'abandonne sans vitesse initiale, le fil OM restant vertical.
a) Montre que le système effectue des oscillations sinusoïdales dont on donnera la période T en fonction de J et de la constante de torsion C du fil OM ;
b) Détermine l'équation horaire du mouvement du système, $\theta = f(t)$, si $T = 2s$ et $\theta_m = 1rad$.
c) Calcule C.
3°) Montre que l'énergie mécanique totale du système reste constante au cours du mouvement.

EXERCICE 12 : I/ Un ressort vertical de raideur K, de masse négligeable, de longueur à vide $\ell_0 = 30cm$ est fixé à son extrémité supérieure. On accroche à son extrémité inférieure un solide S de masse $m = 200g$ supposée ponctuel. La longueur du ressort est alors $\ell_1 = 36,2cm$. Le système est en équilibre.
1°) Calcule K.
2°) On déplace S verticalement vers le bas de $4cm$ puis on le lâche avec une vitesse initiale de $20m/s$.
a) Montre que le solide S a un mouvement rectiligne sinusoïdal et détermine la période propre T_0 de l'oscillateur.
b) Etablis l'équation horaire du mouvement.
II/ S toujours accroché au même ressort est maintenant posé sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontal, l'autre extrémité du ressort est fixée en un point O du sommet de la pente. S peut glisser le long de la pente sans frottements.
1°) Calcule l'allongement du ressort dans cette nouvelle position à l'équilibre.
2°) On tire S vers le bas de sorte que la longueur du ressort soit $\ell_2 = 38,1cm$ et on le lâche sans vitesse initiale à cet instant pris égal à 0. Détermine la période et l'équation horaire du mouvement du système.

EXERCICE 13 : Un pendule simple est constitué d'un fil inextensible de masse négligeable et de longueur ℓ et d'un solide ponctuel de $m = 100g$. L'extrémité libre du fil est fixée à un point O d'un support.
Le pendule effectue des oscillations de faibles amplitudes, de période $T = 2s$ au tour de l'axe horizontal (Δ) passant par le point O.
1°) Calcule :
a) La longueur du fil
b) L'incertitude absolue sur la mesure de la longueur sachant que g = $(9,80 \pm 0,01) m/s^2$ et que la période a été mesurée à $0,02s$ près.
2°) On écarte le pendule de sa position d'équilibre d'un angle de 60° et on l'abandonne sans vitesse initiale. Détermine :
a) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, la vitesse linéaire du solide à son passage par la position $\theta = 45°$.
b) La tension du fil à cette position.
3°) Calcule l'énergie cinétique du solide lorsqu'il passe par la position verticale.

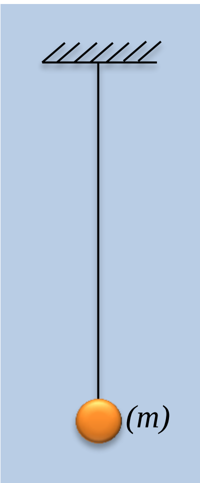
EXERCICE 14 : Sur un solide est inscrit $m = 12g$. On veut vérifier si cette inscription est exacte. Pour cela on accroche ce solide à l'extrémité libre d'un ressort de coefficient de raideur K à spires non jointives. Il peut glisser sans frottements sur un plan horizontal. On le tire de sa position d'équilibre puis on le lâche sans vitesse.
1°) Fais le schéma du dispositif.
2°) Par la méthode énergétique :
a) Etablis l'équation différentielle du mouvement ;
b) Exprime K en fonction de m et ω ;
c) Exprime $x = f(t)$ solution de cette équation différentielle.
3°) Démontre que l'énergie mécanique E_m du système (ressort + solide) est fonction de m, ω et x_m.
4°) Déduis – en la valeur de m. Cette valeur est – elle identique à celle inscrite sur le solide ?
On donne : $x_m = 1cm$; $\omega = 7,85 rad.s^{-1}$ et $E_m = 3,7.10^{-5} J$.

EXERCICE 15 : Un barreau parallélépipédique homogène peut osciller horizontalement par la torsion d'un fil OA de $1m$ de longueur, fixé en A et dont l'axe passe par le centre O de l'une des grandes faces du barreau. La durée de 10 oscillations est $96,3s$. On surcharge le barreau à l'aide de deux petites masses m et m' de $10g$, de dimensions négligeables, placées symétriquement par rapport au fil à $8cm$ de celui – ci ; la durée de 10 oscillations devient $101,4s$. Calcule :

1°) Le moment d'inertie J_0 du barreau par rapport à l'axe AO et la constante de torsion C du fil ;

2°) La vitesse angulaire du barreau quand il passe à sa position d'équilibre au cours d'oscillations d'amplitude $1rad$.

EXERCICE 16 : Un système mécanique est constitué d'un fil métallique sans masse et de longueur $\ell = 1m$ et auquel est suspendue une boule en fer de masse $m = 50g$ considérée comme ponctuelle. On prendra $g = 10m/s^2$.



1°) Ce système peut osciller dans un plan vertical, calcule alors la période T_0 des oscillations du système. On donne $\pi^2 = 10$.

2°) On écarte le système de sa position d'équilibre, d'un angle de $30°$, puis on le lâche sans vitesse initiale. Un mouvement pendulaire prend naissance.

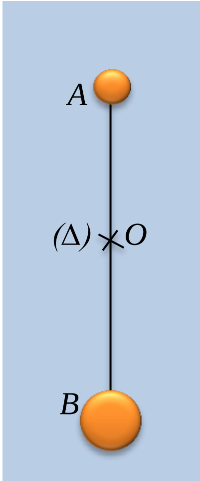
a) Par une étude dynamique puis énergétique, établis la loi horaire du mouvement en prenant pour origine des dates, l'instant où le pendule est lâché.

b) Etablis l'expression de la vitesse V de la boule dans une position quelconque au cours du mouvement. Déduis – en sa vitesse V_m au passage par la position d'équilibre.

c) Donne une expression de la tension T du fil dans une position quelconque de la boule au cours du mouvement. Déduis – en la tension T_m du fil au passage par la verticale.

d) Montre que l'énergie mécanique totale du système fil – masse – terre est constante. Calcule sa valeur.

EXERCICE 17 : Un pendule est constitué d'une tige de masse négligeable, de longueur $AB = L$, pouvant osciller sans frottements autour d'un axe horizontal (Δ) passant par le milieu O de AB. A l'extrémité inférieure B, on place un point matériel de masse m_B et à l'extrémité supérieure A un point matériel de masse m_A telle que $m_B = 3m_A$.



1°) Détermine :

a) L'expression du moment d'inertie du système par rapport à l'axe (Δ) en fonction de m_A et L.

b) La position G du centre d'inertie du système en fonction de L.

2°) Le pendule est écarté d'un petit angle θ_0 à partir de sa position d'équilibre stable.

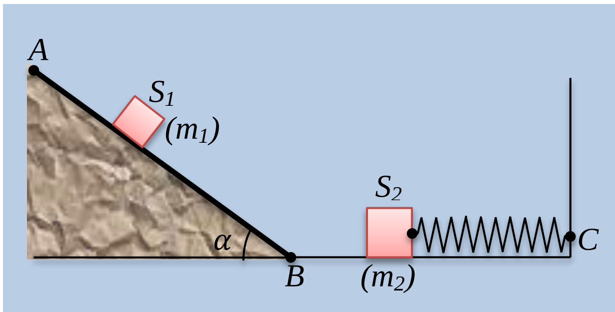
a) En appliquant la méthode énergétique, établis l'équation différentielle du mouvement ;

b) Déduis – en son équation horaire pour $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$ *rad*.

c) Calcule la période des oscillations.

On prendra : $L = 20cm$ et $g = 10m.s^{-2}$.

EXERCICE 18 : Un solide S_1 de masse $m_1 = 50g$ est lâché sans vitesse initiale d'un point A et glisse sur le plan incliné de pente 50%. Après un parcours $AB = \ell = 1m$, il aborde un plan horizontal sur lequel il continu à glisser avant de heurter un solide S_2 de masse $m_2 = 200g$, immobile avant le choc.



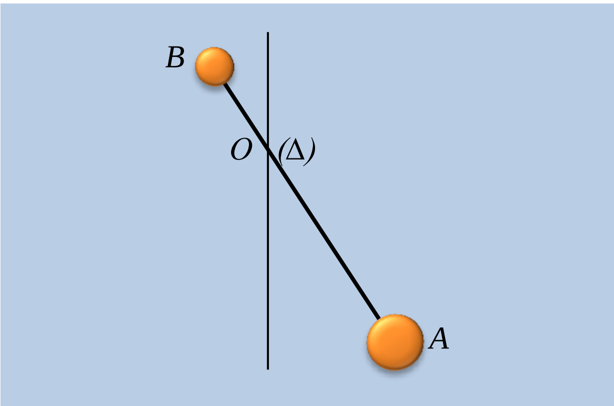
1°) Calcule la norme de la vitesse $\overrightarrow{V_1}$ de S_1 juste avant le choc.

2°) Au moment du choc S_1 et S_2 s'accroche pour former un système de centre de masse G. Calcule la norme de la vitesse $\overrightarrow{V_G}$ de G juste après le choc.

3°) S_2 est relié à un ressort de masse négligeable à spires non jointives de constante de raideur $K = 50N/m$ et dont l'autre extrémité C est fixé avant le choc. Après le choc, l'ensemble et le ressort sont en mouvement. Calcule l'abscisse x_m de G lorsque V_G s'annule pour la première fois.

EXERCICE 19 : Un pendule de torsion de moment d'inertie J est suspendu à un fil dont la constante de torsion est C.
1°) La période des oscillations est 5 secondes. Si l'on ajoute deux masses ponctuelles de $50g$ de part et d'autre de l'axe à $10cm$ de celui – ci la période devient $5,25s$.
a) Calcule le moment d'inertie J du pendule ;
b) Calcule la constante de torsion C ;
2°) Le pendule sans masses additionnelles est écarté de sa position d'équilibre de $\frac{\pi}{3}$ rad dans le plan horizontal et lancé de cette position d'équilibre avec une vitesse angulaire de $2rad/s$ à l'origine des dates. Quelle est l'énergie totale du pendule ?
3°) Déduis – en l'amplitude du mouvement. Quelle est l'équation horaire du mouvement de la barre ?
4°) Calcule la vitesse angulaire au passage par la position l'équilibre.

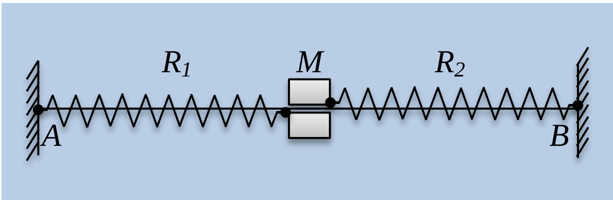
EXERCICE 20 : Deux petites billes assimilables à des points matériels, l'une en A et l'autre en B, de masses $M_A = 5m$ et $M_B = 3m$, sont placées aux extrémités A et B d'une tige rigide (T) de masse négligeable. Cette tige est mobile en O autour d'un axe perpendiculaire à (T).
On pose $OA = \frac{2}{3}L$ et $OB = \frac{1}{3}L$. On donne $L = 0,24m$.



1°) Donne pour le pendule pesant ainsi constitué l'expression de son moment d'inertie et de son centre d'inertie OG.
2°) On écarte ce pendule d'un petit angle par rapport à sa position d'équilibre stable et on l'abandonne sans vitesse initiale. On suppose le système conservatif.
a) Détermine l'équation différentielle qui régit le mouvement du pendule pesant. Quelle est la nature du mouvement ?
b) Calcule la période des oscillations du pendule ainsi que la longueur du pendule simple synchrone du pendule composé.

EXERCICE 21 : On réalise un pendule de torsion en suspendant un disque de cuivre par un fil de suspension dont la direction passe par son centre d'inertie G. Le disque est un solide (S) homogène de moment d'inertie $J = 10^{-3}Kg.m^2$ par rapport à l'axe qui lui est perpendiculaire en G. Le fil de suspension vertical ayant pour constante de torsion C ; la période des oscillations libres est $T_0 = 0,5s$.
1°) Etablis l'équation du mouvement du disque autour de sa position d'équilibre, et déduis – en C.
2°) Le disque est initialement écarté de sa position d'équilibre d'un angle $\theta_0 = \frac{\pi}{6}\,rad$, puis lancé vers sa position d'équilibre à l'instant $t = 0$ avec une vitesse angulaire initiale $\dot{\theta}_0$. Le disque passe pour la première fois par sa position d'équilibre à l'instant $t = 6,25.10^{-2}s$. Ecris l'équation horaire du mouvement. Déduis – en $\dot{\theta}_0$.

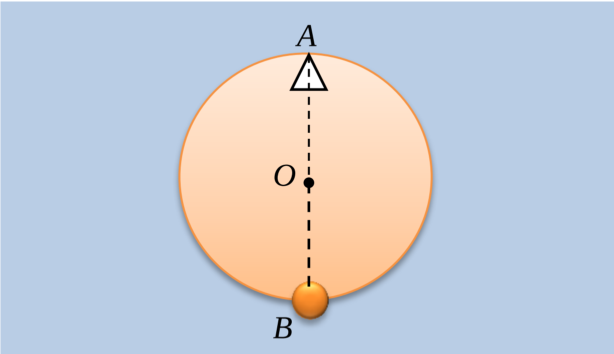
EXERCICE 22 : On dispose de deux ressorts R_1 et R_2 identiques de longueurs à vide $\ell_0 = 20cm$. Quand un ressort est vertical sous l'effet d'une masse de $100g$, sa longueur est de $29,8cm$. On prendra $g = 9,8m.s^{-2}$.
On réalise le montage comme l'indique la figure. La masse $M = 200g$, glisse sans frottements sur la tige $AB = 60cm$.
1°) Détermine la position d'équilibre de M dans le montage.



2°) On écarte M de sa position d'équilibre et on le lâche sans vitesse initiale. Etudie, par la méthode dynamique la nature du mouvement de M.
3°) Calcule la période T_0 des oscillations de M.

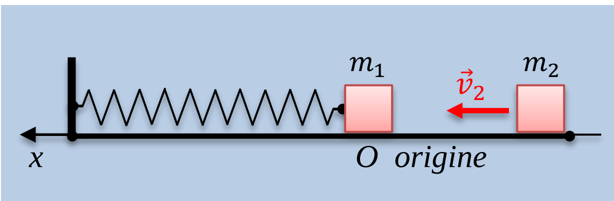
EXERCICE 23 : Dans tout le problème, prendre $g = 10m.s^{-2}$.
Un disque homogène de masse $M = 0,250Kg$ et de rayon $R = 0,25m$ peut tourner sans frottement autour d'un axe (Δ) passant par un point A de sa circonférence. Cet axe perpendiculaire en A au plan du disque, est horizontal. En un point B, symétrique

de *A* par rapport au milieu *O* du disque, on fixe une masse *m* ponctuelle et telle que $m = \frac{M}{2}$ (voir figure).



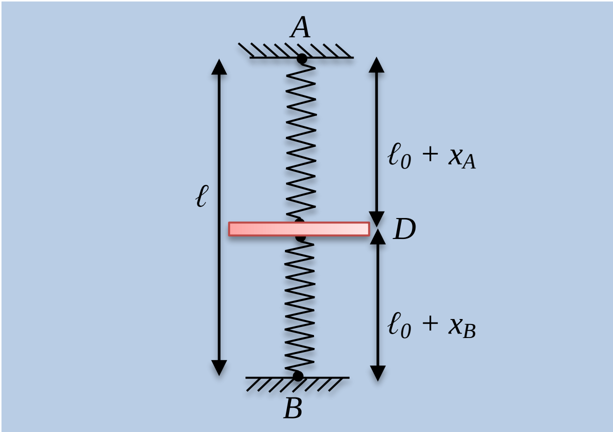
1°) Donne l'expression du moment d'inertie du système ainsi constitué par rapport à (Δ) en fonction de *M* et de *R*.
2°) Exprime la position du centre d'inertie *G* du système en fonction de *R*.
3°) Le système étant au repos dans sa position d'équilibre stable, on l'écarte d'un petit angle $\alpha_0 = 0{,}2rad$ de cette position puis on le lâche sans vitesse initiale à la date $t = 0$.
a) Etablis la nature du mouvement du système puis calcule sa période ;
b) Ecris l'équation horaire traduisant ce mouvement ;
c) Exprime en fonction de *R*, la longueur du pendule simple synchrone de ce pendule composé.

EXERCICE 24 : Un ressort de constante de raideur $K = 100N/m$, d'axe horizontal, est lié à un corps (A) de masse $m_1 = 360g$ qui peut glisser sans frottement sur un plan horizontal. L'autre extrémité du ressort est fixée. Un deuxième corps (B) de masse $m_2 = m_1/2$, animé d'une vitesse $\vec{v}_2$ parallèle à l'axe du ressort, heurte le corps (A) au repos.



1°) Calcule la vitesse du corps (A) juste après le choc supposé élastique, sachant que $v_2 = 0{,}8m/s$.
2°) Après le choc, détermine :
a) L'équation différentielle du mouvement du solide (A) ; Déduis – en la nature du mouvement ;
b) L'équation horaire de ce mouvement. On prendra pour instant initial, l'instant du choc.

EXERCICE 25 : Deux ressorts identiques, de longueur à vide ℓ_0 et de raideur *K* sont tendus entre deux points *A* et *B* distants de ℓ. Un disque *D* de masse *m* et d'épaisseur négligeable, est fixée entre ces ressorts (voir figure). On donne : $\ell = 45cm$; $\ell_0 = 15cm$; $K = 20N/m$; $g = 10m/s^2$; $m = 0{,}1Kg$.



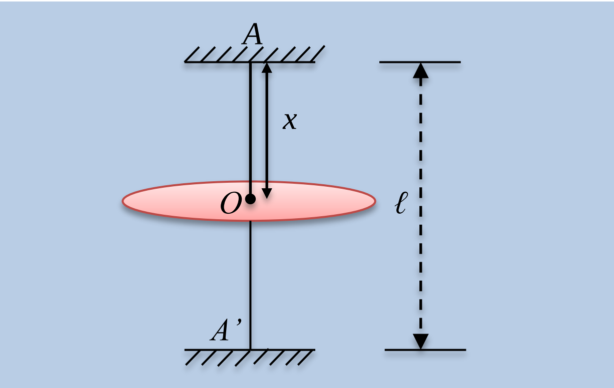
1°) Détermine la position d'équilibre stable du disque *D*.
2°) Le disque D est écarté de sa position d'équilibre verticalement vers le bas de $x_m = 3cm$.
a) Par une étude dynamique, donne l'équation différentielle du mouvement (on choisira l'axe *x'x* comme sur la figure, son origine coïncidant avec la position d'équilibre).
b) Déduis – en la période et l'équation horaire du mouvement du disque *D*.
c) Retrouve l'équation horaire par une étude énergétique.

EXERCICE 26 : Un disque plat homogène, d'épaisseur négligeable, de rayon $R = 15cm$ est suspendu par son centre d'inertie *O* à un fil de torsion, de constante de torsion *C*. *C* est inversement proportionnelle à la longueur ℓ du fil. L'autre extrémité du fil est fixée en un point *A*. On écarte le disque de sa position d'équilibre d'un angle de $\frac{\pi}{3}$ *rad*, le fil étant maintenu vertical, et on l'abandonne sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$. On constate alors que *20* oscillations de période T_0 ont une durée $t = 40{,}0s$.
1°) Détermine la nature du mouvement du disque et écris l'équation horaire de ce mouvement dans un repère fixe.

2°) Calcule la constante de torsion C du fil sachant que le moment d'inertie du disque est $J_\Delta = 2{,}25.10^{-3} Kg.m^2$.

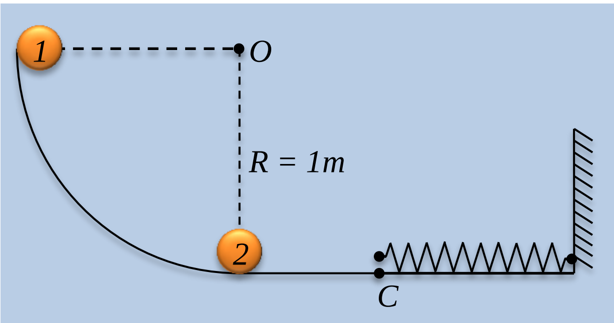
3°) Le disque est maintenu à présent à la distance $AO = x$ sur le fil dont les extrémités A et A' sont fixées (voir figure). Détermine en fonction de T_0, ℓ et x la période des oscillations du disque.

Pour quelle valeur de x est – elle maximale ? Quelle est alors la valeur de cette période ?



EXERCICE 27 : On considère le dispositif dans lequel tous les frottements sont négligeables. A l'instant initial la bille B_2 de masse $m_2 = 2m_1$ est immobile en B et on lâche en A, sans vitesse initiale la bille B_1 de masse m_1 telle que $m_1 = 100g$.

1°) En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, détermine la vitesse de la bille B_1 juste avant le choc parfaitement élastique.



2°) Détermine les vitesses V_1 et V_2 respectives des billes B_1 et B_2 juste après le choc. Déduis – en la hauteur maximale h_m à laquelle remonte la bille B_1 après le choc.

3°) Après le choc, la bille B_2 va percuter un ressort fixe à spires non jointives de constante de raideur K et de masse négligeable auquel il reste accroché.

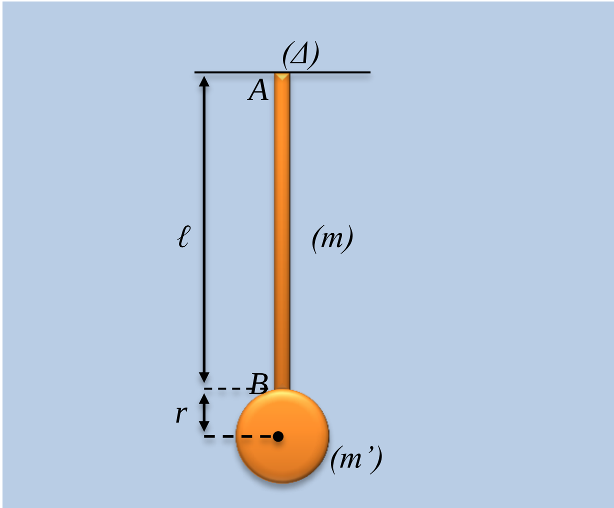
a) Détermine le raccourcissement maximal x_m du ressort.

b) Détermine la nature du mouvement du système terre – ressort – bille B_2. Déduis – en la période du mouvement pour la bille B_2.

c) En prenant pour origine des temps l'instant où la bille B_2 percute le ressort et pour origine des espaces le point C, donne l'expression de son équation horaire.

On donne $K = 500N/m$, $g = 10m/s^2$.

EXERCICE 28 : Un pendule est constitué d'une tige homogène AB de longueur ℓ et de masse m. A son extrémité B inférieure, on soude une sphère homogène de rayon r et de masse m'.



L'ensemble constitue un système mobile autour d'un axe (Δ) horizontal passant par A. On l'écarte de sa position d'équilibre d'un angle petit $\alpha_0 = 0{,}1rad$. On le lance avec une vitesse initiale de $0{,}5rad/s$ à l'instant $t = 0$.

1°) Détermine la position du centre d'inertie de ce pendule et son moment d'inertie par rapport à l'axe (Δ).

2°) Montre par la méthode énergétique, qu'il effectue des oscillations sinusoïdales. Déduis – en l'équation du mouvement de ce pendule.

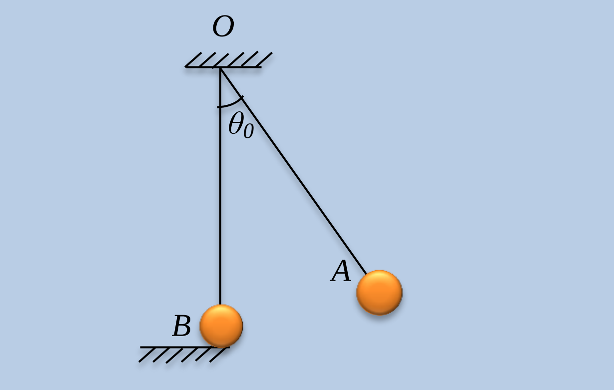
3°) Calcule la période T des oscillations du pendule.

4°) Calcule la longueur L du pendule simple synchrone de ce pendule composé.

5°) Calcule l'énergie mécanique du pendule pesant.

Données : $\ell_0 = 1m$; $m = 100g$, $m' = 500g$; $r = 10cm$; $g = 10m/s^2$.

EXERCICE 29 : Un pendule simple est constitué par un point matériel A de masse $m_A = 50g$ suspendu à un point fixe O par l'intermédiaire d'un fil de longueur $\ell = 50cm$. A partir de sa position d'équilibre, on écarte le pendule d'un angle $\theta_0 = 60°$ et on l'abandonne sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$.



1°) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, détermine la vitesse linéaire du point matériel :

a) A son passage à la position $\theta = 30°$;

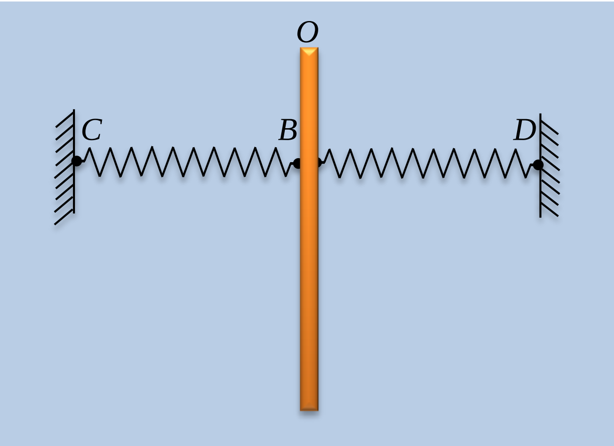
b) A son passage par la verticale et représente ce vecteur vitesse.

2°) Calcule la tension du fil à la position verticale.

3°) Lorsque le point matériel A arrive à la verticale, il rencontre un solide ponctuel B de masse $m_B = 100g$, immobile placé sur une table. Détermine les vitesses de A et B après le choc supposé parfaitement élastique.

Prendre $g = 10m.s^{-2}$.

EXERCICE 30 : Une tige de masse $m = 0,500Kg$ peut osciller dans le champ de pesanteur autour d'un axe horizontal O. Elle est fixée par le point B à deux ressorts identiques de même longueur, tendus entre les points fixes C et D.



Les deux ressorts sont horizontaux dans le plan vertical des oscillations de la tige (plan de la figure). Leur raideur commune est $K = 10N.m^{-1}$. On pose $OB = b = 20cm$; $OG = d$: distance de l'axe au centre de gravité de la tige ; J : moment d'inertie de la tige.

1°) Donne l'expression de la période en fonction de b, d, J, m et K.

2°) Si on supprime les deux ressorts, la période devient deux fois plus grande, égale à 1,20s. Calcule d et J ; on donne $g = 9,8m.s^{-2}$.

DOMAINE D'ETUDE I : STRUCTURE DE LA MATIERE

OG_1 : UTILISER LES LOIS PHYSIQUES DANS LA DETERMINATION DES MASSES MOLAIRES.

1 LOIS PHYSIQUES RELATIVES AUX GAZ ET AUX SOLUTIONS DILUEES.

I. Rappels et compléments

I.1. La mole.

Tous les objets autour de nous sont constitués d'un très grand nombre d'atomes. Par exemple, 1 gramme de cuivre d'un ustensile chirurgical contient environ *10^{22} atomes* de cuivre.

Afin de ne pas manipuler de trop grands nombres, les atomes sont comptés par paquets. Comme les œufs sont comptabilisés par douzaines ou les timbres par carnet, les atomes sont comptabilisés en ***moles***.

1 mole est un « paquet » contenant $6{,}02.10^{23}$ entités élémentaires (atomes, molécules, ions).

On peut alors dire qu'*un gramme de cuivre contient environ 0,016 mole*.

- *La mole (symbole : **mol**) est le nombre d'entités élémentaires $\mathcal{N}_A$ contenues dans 12,0 grammes de carbone 12.*

$\mathcal{N}_A$ est la constante d'*AVOGADRO*. Sa valeur approchée est $6{,}02.10^{23}\text{mol}^{-1}$.

- La quantité de matière n (exprimée en mol) est le quotient du nombre d'entités N par la constante d'*AVOGADRO* $\mathcal{N}_A$.

$$\boxed{n = \frac{N}{\mathcal{N}_A}} \quad (mol)$$

I.2. Masse molaire

Définition : *On appelle **masse molaire**, la masse d'une mole d'un corps pur.*
Elle s'exprime en g/mol ou g.mol^{-1}.

- Les masses molaires de tous les éléments chimiques connus sont consignées dans le tableau périodique des éléments. La masse molaire atomique, exprimée en gramme (g) est du même ordre de grandeur que le nombre de masse de l'atome.

Exemple :

$M(C) = 12\text{g.mol}^{-1}$; $M(O) = 16\text{g.mol}^{-1}$
$M(H) = 1\text{g.mol}^{-1}$; $M(Cu) = 63{,}5\text{g.mol}^{-1}$

- La masse molaire atomique attribuée à un élément chimique tient compte des proportions des différents isotopes qu'il renferme à l'état naturel.

Exemple du chlore :

à l'état naturel le chlore existe sous deux formes isotopiques :

${}^{35}_{17}C\ell$ d'abondance relative 75,7% et de masse molaire $M_1 = 35{,}0\text{g.mol}^{-1}$;

${}^{37}_{17}C\ell$ d'abondance relative 24,3% et de masse molaire $M_2 = 37{,}0\text{g.mol}^{-1}$;

La masse molaire de l'élément chlore $M(C\ell)$ à l'état naturel est égale à :

$$M(C\ell) = 35{,}0 \times \frac{75{,}7}{100} + 37{,}0 \times \frac{24{,}3}{100} = 35{,}5$$

$$M(C\ell) = 35{,}5\text{g.mol}^{-1}$$

- Pour une molécule, un solide ionique ou un ion, on obtient la masse molaire en faisant la somme des masses molaires atomiques de tous les atomes qui le ou la constituent.

Exemple :

1) Masse molaire moléculaire de l'eau (H_2O)

$$M(H_2O) = 2M(H) + M(O) = 2 \times 1 + 16$$

$$M(H_2O) = 18\text{g.mol}^{-1}$$

Conclusion : *une mole de molécules d'eau a une masse de 18g, ou 18g d'eau représentent la masse d'une quantité de 1 mole de molécules.*

2) Masse molaire moléculaire du sulfate de cuivre ($CuSO_4$)

$$M(CuSO_4) = M(Cu) + M(S) + 4 \times M(O)$$

$M(CuSO_4) = 63,5 + 32,1 + 4 \times 16$
$M(CuSO_4) = 159,6g.mol^{-1}$

Conclusion : *une mole de sulfate de cuivre a une masse de 159,6g, ou 159,6g de sulfate de cuivre représentent la masse d'une quantité de 1 mole de solide ionique.*

- ***Relation entre le nombre de mole, la masse molaire et la masse d'un corps solide.***

La masse molaire M est liée à la masse m de l'échantillon et à la quantité de matière n qu'il contient par la relation :

$$\boxed{n = \frac{m}{M}} \ (mol)$$

Conséquence : $\boxed{m = n.M}$

m : masse du corps (g)
M : masse molaire moléculaire ($g.mol^{-1}$)
n : nombre de mole (quantité de matière)

I.3. Volume molaire (V_m)

Définition : *Le volume molaire d'une substance est le volume occupé par une mole de cette substance.*

Il peut être déterminé pour toute substance dans toutes les phases (gaz ; liquide ; solide)
Le volume molaire s'exprime en $L.mol^{-1}$. Ce volume dépend de la température et de la pression.

Par exemple :

- A 0°C sous 1,013bar : $V_m = 22,4L.mol^{-1}$ (Conditions normales de température et de pression CNTP) ;
- A 20°C sous 1,00bar : $V_m = 24,4L.mol^{-1}$

❖ ***Loi d'AVOGADRO – AMPERE :*** *dans les mêmes conditions de température et de pression, tous les gaz ont le même volume molaire V_m.*

Dans d'autres conditions, le volume molaire pourra être calculé à partir de la *loi des gaz parfaits.*

Remarque :
Les CNTP sont des conditions pratiques, en partie arbitraires, d'expérimentation et de mesure en physique et en chimie. Elles permettent des comparaisons commodes entre résultats expérimentaux. Elles veulent dire :

$n_0 = 1mol$
$T_0 = 273K$
$P_0 = 760mmHg$
$V_0 = V_m = 22,4L$

Remarque :
Pour la pression d'un gaz, il existe une correspondance entre les différentes unités :
1atm = 760mmHg = 101.325Pa = 1bar.

Avec :
atm = atmosphère ;
mmHg = millimètre de mercure ;
Pa = Pascal.

- ***Relation entre le nombre de mole et le volume d'un corps gazeux.***

Le volume molaire V_m d'un gaz, dans des conditions de température et de pression données, est lié au volume V de l'échantillon et à la quantité de matière n qu'il contient par la relation :

$$\boxed{n = \frac{V}{V_m}} \ (mol)$$

Conséquence : $\boxed{V = n.V_m}$

V : Volume du corps gazeux (L).

Remarque :
Pour un même corps changeant d'état :

$$n = \frac{m}{M} = \frac{V}{V_m} \Rightarrow \boxed{M = \frac{m.V_m}{V}}$$

II. Lois physiques.

II.1. Définition : *On appelle lois physiques, toute opération réalisée sur un corps et qui conduit à la détermination de sa masse molaire moléculaire.*

Les lois physiques permettent de déterminer la masse molaire moléculaire du composé à analyser.

II.2.Lois physiques relatives aux gaz.

II.2.1. Loi des gaz parfaits.

C'est la loi d'Avogadro – Ampère.

Dans les mêmes conditions de température et de pression, des volumes égaux des gaz différents contiennent le même nombre de molécules.

On note :

$$\boxed{PV = nRT}$$

Avec :

- *P : Pression du gaz en Pascal (Pa) ;*
- *V : Volume du gaz en m^3 ;*
- *R : Constante des gaz parfaits ;*
- *T = t°C + 273 : Température du gaz en Kelvin (K) ;*
- *n : Quantité de matière en mole.*

Remarques :

R_1 : Si la pression P est en *Pa* ; le volume V en *m^3* ; la température T en *Kelvin* (K), alors :

$R = 8{,}314 J.K^{-1}mol^{-1}$.

R_2 : Si la pression P est en *atmosphère* (atm) ; le volume V en *litre* (L) ; la température T en *Kelvin* (K), alors :

$R = 0{,}082 J.K^{-1}mol^{-1}$.

II.2.2. Equation du changement d'etat.

- Dans les conditions expérimentales, on a :

$$PV = nRT \quad (1)$$

- Dans les conditions normales de température et de pression (CNTP), on a :

$$P_0V_0 = nRT_0 \quad (2)$$

Le rapport $\frac{(1)}{(2)}$ membre à membre donne :

$$\frac{PV}{P_0V_0} = \frac{nRT}{nRT_0} \Rightarrow \boxed{\frac{P_0V_0}{T_0} = \frac{PV}{T}}$$

C'est l'équation du cangement d'état, avec :

- *P_0 = 760mm de Hg = 101.325Pa : Pression normale ;*
- *V_0 : Volume normal du gaz ;*
- *T_0 = 273K : Température du gaz dans les C.N.T.P.*

II.2.3. Détermination de la masse molaire moléculaire d'un composé.

D'après la loi des gaz parfaits : $PV = nRT$

Avec $n = \frac{m_S}{M_S} \Rightarrow PV = \frac{m_S}{M_S}RT$

D'où :

$$\boxed{M_S = \frac{m_SRT}{PV}}$$

De plus : $\rho_S = \frac{m_S}{V} \Rightarrow m_S = \rho_S.V$

D'où :

$$\boxed{M_S = \frac{\rho_SRT}{P}}$$

De même : $n = \frac{V_0}{V_m} = \frac{m_S}{M_S} \Rightarrow M_S = m_S.\frac{V_m}{V_0}$

Or $\frac{P_0V_0}{T_0} = \frac{PV}{T} \Rightarrow V_0 = \frac{PVT_0}{P_0T}$

D'où :

$$\boxed{M_S = \frac{m_SV_mP_0T}{PVT_0}}$$

Avec $V_m = 22{,}4L$: Volume molaire d'un gaz.

II.2.4. Densité d'un gaz par rapport à l'air.

Définition : *La densité d'un gaz est le rapport entre la masse du gaz et la masse d'un égal volume d'air.*

On note :

$$\boxed{d = \frac{m}{m'}}$$

Avec *m : masse du gaz ; m' : masse d'air.*

Conséquence :

$$\begin{cases} \rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho.V \\ \rho' = \frac{m'}{V} \Rightarrow m' = \rho'.V \end{cases}$$

Ainsi : $d = \frac{\rho.V}{\rho'.V} = \frac{\rho}{\rho'} \Rightarrow \boxed{d = \frac{\rho}{\rho'}}$

Pour $V = V_m = 22{,}4L$; $\rho' = 1{,}3g/L$ et $n = 1mol$.

Alors : $n = \frac{m}{M} = 1 \Rightarrow m = M$

$$\Rightarrow d = \frac{m}{m'} = \frac{M}{m'} = \frac{M}{\rho'V_m}$$

$$\Rightarrow d = \frac{M}{22{,}4 \times 1{,}3} \simeq \frac{M}{29}$$

D'où :

$$\boxed{d = \frac{M}{29}}$$

Remarques :

R_1 : Lorsque le gaz à étudier est mélangé à de la vapeur d'eau dont la pression est notée *f*, la pression totale du mélange vaut :

$$H = P + f \Rightarrow \boxed{P = H - f}$$

Avec :

H : Pression totale du mélange ou pression atmosphérique ;

P : Pression du gaz à étudier ;

f : Pression de la vapeur d'eau saturante.

R_2 : Dans l'expérience de V. Meyer, lorsque le mélange provoque un déplacement d'eau d'une hauteur h dans l'éprouvette :

$$H = P + f + \frac{h}{\rho_{Hg}} \Rightarrow \boxed{P = H - f - \frac{h}{13,6}}$$

Avec ρ_{Hg} : masse volumique du mercure.

III. Lois physiques relatives aux solutions diluées : lois de Raoult.

III.1. Définitions :

- *On appelle soluté, tout corps qui est dissout dans un liquide ;*
- *On appelle solvant, le liquide qui dissoud le soluté ;*
- *On appelle solution, le mélange de soluté et de solvant ;*
- *On appelle cryométrie, la science des mesures relatives à la congélation ;*
- *On appelle ébulliométrie, la science des mesures relatives à la vaporisation.*
- *Une solution diluée non électrolysable est une solution dont la décomposition en ces éléments constitutifs ne se fait pas lors du passage du courant électrique.*

III.2. Concentration massique d'une solution non électrolysable.

Définition : *C'est le rapport entre la masse du soluté et la masse du solvant*. On note :

$$\boxed{C = \frac{m}{m'}}$$

m : masse du soluté ;

m' : masse du solvant.

III.3. Lois de Raoult.

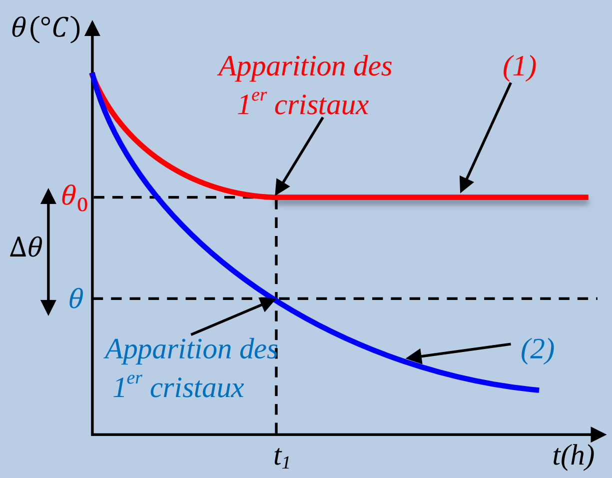
III.3.1. 1ère loi de Raoult : cryométrie.

a) Expérience :

- On refroidit progressivement un liquide pur utilisé comme solvant. Lorsque les *premiers cristaux de ce liquide apparaissent, on note cette température* θ_0, qui reste *constante* pendant toute la congélation.

- Lorsqu'on refroidit *une solution non électrolysable* dont le solvant est le liquide précédent, on constate que *les premiers cristaux de ce liquide apparaissent à une température* $\theta < \theta_0$. La température de la solution continue *à baisser* pendant toute la congélation du liquide (du solvant). θ est donc appelé *température de congélation commençante de la solution*.

- Les courbes de refroidissement du solvant pur et du solvant mélangé au soluté sont obtenues par la relation $\theta = f(t)$ (avec t : temps de congélation) et se présente de la manière suivante (figure 1) :



(1) Courbe de refroidissement du solvant pur.

(2) Courbe de refroidissement de la solution.

Figure 1.

b) Abaissement cryométrique.

C'est la différence ou variation de température d'apparition des premiers cristaux lors du refroidissement d'un solvant pur et d'une solution.

Pour une solution diluée non électrolysable dans laquelle le refroidissent ne fait apparaitre que les cristaux du solvant pur l'abaissement cryométrique de la solution est :

- *Proportionelle à la concentration massique de la solution ;*
- *Inversement proportionnelle à la masse molaire moléculaire du soluté dissout dans la solution.*

$$\Delta\theta = \theta_0 - \theta = K\frac{C}{M} = K\frac{m}{m'M}$$

$\Delta\theta$: abaissement cryométrique de la solution (°C) avec $\Delta\theta > 0$;
θ_0 : température de congélation du solvant pur (°C) ;
θ : température de congélation commançante de la solution (°C) ;
K : Constante cryométrique du solvant ;
$C = \frac{m}{m'}$: concentration massique de la solution ;
M : Masse molaire moléculaire du soluté.

Note : Le tableau ci – dessous donne quelques constantes des solvants :

Solvant	Température de congélation θ_0	Constante cryométrique K
Eau	0°C	1850
Benzène	5,5°C	5700
Phénol	41°C	7200
Acide éthanoïque	16,6°C	3900

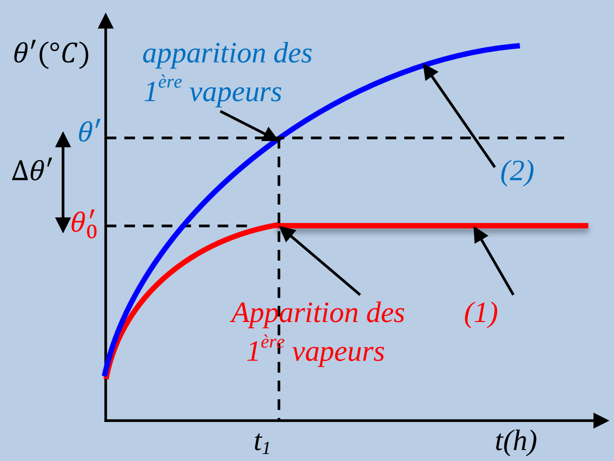
Remarque : Connaissant $\Delta\theta$, K, m et m' on en déduit la masse molaire moléculaire du soluté dilué, soit :

$$M = \frac{Km}{m'\Delta\theta} = \frac{Km}{m'(\theta_0 - \theta)}$$

III.3.2. 2ème loi de Raoult : ébulliométrie.

a) Expérience :

- Lorsqu'on chauffe *un solvant pur, les premières vapeurs apparaissent à la température θ'_0*, qui reste *constante* pendant toute l'ébullition.
- Lorsqu'on mélange à ce solvant pur un soluté tel que le mélange constitue *une solution diluée non électrolysable, les premières vapeurs du solvant lors de l'échauffement de la solution, apparaissent à une température $\theta' > \theta'_0$ appelée température d'ébullition commençante de la solution*. La température de la solution continue à s'élever pendant toute l'évaporation.
- Les courbes d'échauffement du solvant pur et du solvant mélangé au soluté sont obtenues par la relation $\theta' = f(t)$ (avec t : temps d'ébullition) et se présente de la manière suivante (figure 2) :



(1) Courbe d'échauffement du solvant pur.
(2) Courbe d'échauffement de la solution.

Figure 2.

b) Elevation ébulliométrique.

C'est la différence ou variation de température d'apparition des premières vapeurs lors de l'échauffement d'un solvant pur et d'une solution.

Pour une solution diluée non électrolysable dans laquelle l'échauffement ne fait apparaitre que les vapeurs du solvant pur l'élévation ébulliométrique de la solution est :

- *Proportionelle à la concentration massique de la solution ;*
- *Inversement proportionnelle à la masse molaire moléculaire du soluté dissout dans la solution.*

$$\Delta\theta' = \theta' - \theta'_0 = K'\frac{C}{M} = K'\frac{m}{m'M}$$

$\Delta\theta'$: élévation ébulliométrique de la solution (°C) avec $\Delta\theta' > 0$;
θ'_0: température d'ébullition du solvant pur (°C) ;
θ' : température d'ébullition commançante de la solution (°C) ;
K' : Constante ébulliométrique du solvant ;
$C = \frac{m}{m'}$: concentration massique de la solution ;
M : Masse molaire moléculaire du soluté.

Remarque : Connaissant $\Delta\theta'$, K', m et m' on en déduit la masse molaire moléculaire du soluté dilué, soit :

$$M = \frac{K'm}{m'\Delta\theta'} = \frac{K'm}{m'(\theta' - \theta'_0)}$$

IV. Détermination de la formule moléculaire d'un composé.

IV.1. Combustion dans l'oxygène de l'air.

Soit un composé quaternaire du type $C_xH_yO_zN_t$, on a l'équation :

$$C_xH_yO_zN_t + nO_2 \longrightarrow xCO_2^{\nearrow} + \frac{y}{2}H_2O + \frac{t}{2}N_2^{\nearrow}$$

Avec : $z + 2n = 2x + \frac{y}{2} \Rightarrow n = x + \frac{y}{4} - \frac{z}{2}$

D'où l'équation (1) :

$$C_xH_yO_zN_t + \left(x + \frac{y}{4} - \frac{z}{2}\right)O_2 \longrightarrow xCO_2^{\nearrow} + \frac{y}{2}H_2O + \frac{t}{2}N_2^{\nearrow}$$

IV.2. Combustion dans l'oxyde de cuivre II.

Soit un composé ternaire du type $C_xH_yO_z$, on a l'équation :

$$C_xH_yO_z + nCuO \longrightarrow xCO_2^{\nearrow} + \frac{y}{2}H_2O + nCu$$

Avec : $z + n = 2x + \frac{y}{2} \Rightarrow n = 2x + \frac{y}{2} - z$

D'où l'équation (2) :

$$C_xH_yO_z + \left(2x + \frac{y}{2} - z\right)CuO \longrightarrow xCO_2^{\nearrow} + \frac{y}{2}H_2O + \left(2x + \frac{y}{2} - z\right)Cu$$

D'après l'équation (1) on a par proportion :

$$\frac{1}{n_S} = \frac{x}{n_{CO_2}} = \frac{y}{2n_{H_2O}} = \frac{t}{2n_{N_2}}$$

Et $$M_S = 12x + y + 16z + 14t$$

♣ Composition centésimale :

Soit le composé $C_xH_yO_zN_t$.
$M_S = 12x + y + 16z + 14t$
100% = %C + %H + %O + %N

$$\Rightarrow \frac{M_S}{100\%} = \frac{12x}{\%C} = \frac{y}{\%H} = \frac{16z}{\%O} = \frac{14t}{\%N}$$

♣ Composition massique.

Soit le composé $C_xH_yO_zN_t$.
$M_S = 12x + y + 16z + 14t$
$m_S = m_C + m_H + m_O + m_N$

$$\Rightarrow \frac{m_S}{M_S} = \frac{m_C}{12x} = \frac{m_H}{y} = \frac{m_O}{16z} = \frac{m_N}{14t}$$

Avec

$$m_C = \frac{3}{11}m_{CO_2} \quad et \quad m_H = \frac{1}{9}m_{H_2O}$$

Remarque :

- Le dioxyde de carbone (CO_2) augmente les tubes à potasse (KOH) ou à soude (NaOH).
- L'eau (H_2O) augmente les tubes à ponce sulfurique (H_2SO_4).
- L'oxygène augmente les tubes à phosphore.

V. Méthodes de séparation des isotopes.

V.1. Définition : *On appelle isotopes des atomes qui possèdent le même nombre de protons mais de nombre de masse différent.*

V.2. Electrolyses successives.

Exemple : Séparation du deutérium ^2_1H

Cette méthode utilise le courant électrique pour la séparation des isotopes. Par exemple H_2O et D_2O (eau lourde) sont séparées par électrolyse fractionnée.

L'hydrogène naturel a trois isotopes : ^1_1H ; ^2_1H (^2_1D) ; ^3_1H. L'eau naturel est un mélange des molécules suivantes H_2O ; D_2O. En soumettant une grande quantité d'eau naturelle à des électrolyses successives, on obtient un résidu liquide contenant environ 99% d'*eau lourde* D_2O. *La réduction chimique de l'eau lourde donne le gaz detérium*.

$$2H_2O \xrightarrow{I} 2H_2 + O_2$$
$$2D_2O \xrightarrow{I} 2D_2 + O_2$$

V.3. Diffusion gazeuse.

Exemple : Séparation de l'uranium 235.

Méthode inventée par les savants Anglais en 1941, elle repose sur le fait que deux substances gazeuses de poids différents diffusent à une vitesse différente à travers une barrière poreuse.

Elle est généralement utilisée pour séparer les isotopes d'uranium dont le plus « intéressant » est le 235 ; on doit donc *enrichir* le mélange naturel en cet isotope (2 à 3% pour les centrales nucléaires), et même l'isoler, pour les bombes atomiques

L'uranium naturel a deux isotopes : $^{235}_{92}U$ et $^{238}_{92}U$. Les minerais d'uranium sont transformés en hexafluorure d'uranium (UF_6) qui est gazeux.

Le procédé consiste à faire passer l'hexafluorure d'uranium à l'état gazeux à travers une barrière poreuse (membrane percée de trous minuscules). Les molécules d'hexafluorure d'uranium 235 ($^{235}UF_6$) plus légères que celles d'hexafluorure d'uranium 238 ($^{238}UF_6$) traversent un peu plus rapidement la barrière à une vitesse inversement proportionnelle à la racine carrée de sa masse molaire : $v = \dfrac{1}{\sqrt{M}}$.

L'opération répétée 1400 fois permet produire un uranium assez *enrichi* en uranium 235.

V.4. Ultracentrifugation.

Exemple : Séparation de l'uranium 235.

Dans cette méthode, on soumet les molécules à séparer à une rotation ultrarapide : les plus « lourdes » sont projetés vers l'extérieur, les plus « légères » restent près de l'axe de rotation : Ce n'est rien d'autre que le principe de l'***écrémeuse*** (machine servant à enlever la crème du lait par centrifugation).

Ce principe utilise une centrifugeuse ou ultracentrifugeuse qui, tournant à grande vitesse, près de 20.000 trs/min, projette plus vite à sa périphérie l'hexafluorure d'uranium 238 ($^{238}UF_6$)que l'hexafluorure d'uranium 235($^{235}UF_6$) qu'elle contient. La très légère différence de masse entre les deux molécules permet d'augmenter petit à petit la concentration de l'uranium 235.

V.5. Spectroscopie de masse.

Exemple : Séparation des isotopes du lithium.

Cette méthode utilise un appareil appelé *spectrographe de Dempster ou de masse* inventé par le Physicien Anglais *John Joseph THOMSON* qui permet de « trier » des ions de masses différentes et, donc, de séparer les isotopes d'un élément grâce au champ électromagnétique de telle sorte que ces ions décrivent des demi – cercles de rayon $R = \dfrac{mv_O}{|q|B}$ comme trajectoire.

Le spectrographe comporte 3 parties où règne un vide poussé :

- ***Une chambre d'ionisation*** où l'on produit avec une vitesse nulle, des ions de masses différentes mais de même charge.
- ***Une chambre d'accélération*** où, entre les fentes F et F' les ions sont accélérés par un champ électrostatique.
- ***Une chambre de déviation*** où les ions décrivent une trajectoire de rayon R qui dépend de la masse de la particule. Deux ions de masses différentes m_1 et m_2 viennent alors se rassembler dans les collecteurs C_1 et C_2 où ils sont recueillis séparément à l'état d'atome en fait.

Le lithium naturel a deux isotopes : ^6_3Li et ^7_3Li.

On introduit les atomes de lithium dans une chambre d'ionisation où ils se transforment en ions. Après accélération dans la chambre d'accélération, les ions sont émis à la vitesse $\vec{v}_0$. Le lithium 6 (^6_3Li), plus léger que le lithium 7 (^7_3Li) décrit une trajectoire de rayon R_1, plus petit que celle de rayon

R_2 décrite par le lithium 7. Ainsi le lithium 6 est reçu dans le collecteur C_1 et le lithium 7 dans le collecteur C_2 (figure 3).

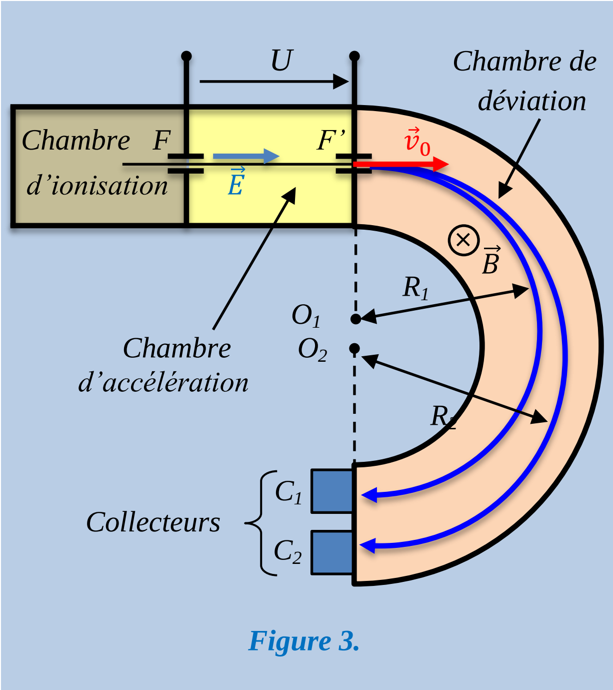


Figure 3.

Exercices d'application :

Exercice 1 : L'analyse d'un composé organique ne contenant que carbone, hydrogène et oxygène donne les résultats suivants :
1,491g de substance fournit par combustion complète : *3,540g* de CO_2 et *1,810g* de H_2O.
La vaporisation de cette substance produit à *100°C* et sous la pression de *75cm* de mercure, une vapeur d'eau de masse *2,560g* et de volume *1072cm³*.
1°) Calcule la masse molaire moléculaire du composé.
2°) Déduis – en sa formule moléculaire.

Corrigé 1 :

$m_S = 1{,}491g$; $m_{CO_2} = 3{,}540g$; $m_{H_2O} = 1{,}810g$
$t = 100°C$; $P = 75cm$ de Hg ; $m'_S = 2{,}560g$;
$V_S = 1072cm^3$

1°) Calcul de la masse molaire moléculaire du composé.

Pour calculer cette masse molaire moléculaire, on peut utiliser deux méthodes :

1ère Méthode

D'après la loi des gaz parfaits, on a :

$PV_S = nRT$ avec $n = \frac{m'_S}{M_S} \Rightarrow PV_S = \frac{m'_S}{M_S}RT$

D'où :

$$\boxed{M_S = \frac{m'_S RT}{PV_S}}$$

A.N : $m'_S = 2{,}560g$; $R = 8{,}314 J.K^{-1}mol^{-1}$
$T = 100 + 273 = 373K$;
$P = 9{,}9992.10^4 Pa$;
$V_S = 1072cm^3 = 1{,}072.10^{-3}m^3$;

Avec:

$$P = 75\text{cm de Hg} = \frac{75\text{cm de Hg} \times 101.325Pa}{76\text{cm de Hg}}$$

$$P = 9{,}9992.10^4 Pa$$

$$M_S = \frac{2{,}560 \times 8{,}314 \times 373}{9{,}9992.10^4 \times 1{,}072.10^{-3}} = 74{,}06$$

$$\boxed{M_S = 74{,}06g/mol}$$

2ème Méthode

D'après la quantité de matière, on a :

$$n = \frac{V_0}{V_m} = \frac{m'_S}{M_S} \Rightarrow M_S = m'_S.\frac{V_m}{V_0}$$

$$Or \ \frac{P_0V_0}{T_0} = \frac{PV_S}{T} \Rightarrow V_0 = \frac{PV_ST_0}{P_0T}$$

D'où :

$$\boxed{M_S = \frac{m'_S V_m P_0 T}{PV_S T_0}}$$

A.N : $m'_S = 2{,}560g$; $V_m = 22.400cm^3$
$P_0 = 76cm\ de\ Hg$; $T = 373K$;
$P = 75cm\ de\ Hg$; $V_S = 1.072cm^3$
$T_0 = 273K$

$$M_S = \frac{2{,}560 \times 22.400 \times 76 \times 373}{75 \times 1.072 \times 273} = 74{,}06$$

$$\boxed{M_S = 74{,}06g/mol}$$

2°) Déduction de sa formule moléculaire.

Le composé étant constitué de carbone, d'hydrogène et d'oxygène, sa formule moléculaire est de la forme : $C_xH_yO_z$

Equation de la combustion dans l'oxygène de l'air.

$$\boxed{C_xH_yO_z + \left(x + \frac{y}{4} - \frac{z}{2}\right)O_2 \longrightarrow xCO_2\nearrow \; + \; \frac{y}{2}H_2O}$$

D'après l'équation, on a par proportion :

$$\frac{1}{n_S} = \frac{x}{n_{CO_2}} = \frac{y}{2n_{H_2O}}$$

$$\frac{1}{n_S} = \frac{x}{n_{CO_2}} \Rightarrow x = \frac{n_{CO_2}}{n_S} = \frac{m_{CO_2}.M_S}{M_{CO_2}.m_S}$$

$$\boxed{x = \frac{m_{CO_2}.M_S}{M_{CO_2}.m_S}}$$

$$\textbf{A.N}: x = \frac{3{,}540 \times 74{,}06}{44 \times 1{,}491} = 3{,}99 \simeq 4 \Rightarrow x = 4$$

$$\frac{1}{n_S} = \frac{y}{2n_{H_2O}} \Rightarrow y = \frac{2n_{H_2O}}{n_S} = \frac{2m_{H_2O}.M_S}{M_{H_2O}.m_S}$$

$$\boxed{y = \frac{2m_{H_2O}.M_S}{M_{H_2O}.m_S}}$$

$$\textbf{A.N}: y = \frac{2 \times 1{,}81 \times 74{,}06}{18 \times 1{,}491} = 9{,}98 \simeq 10$$

$$\Rightarrow y = 10$$

De plus : $M_S = 12x + y + 16z + 14t$

Ainsi :

$$\boxed{z = \frac{1}{16}(M_S - 12x - y)}$$

$$\textbf{A.N}: z = \frac{1}{16}(74{,}06 - 12 \times 4 - 10) = 1 \Rightarrow z = 1$$

D'où la formule moléculaire du composé est :

$$\boxed{C_4H_{10}O}$$

Exercice 2 : L'analyse élémentaire de *0,372g* d'une substance organique ne contenant que du carbone, hydrogène et oxygène fournit *0,223g* d'eau et *0,546g* de gaz carbonique.
D'autre part, la dissolution de *5,0g* de cette substance dans *100g* d'eau entraine un abaissement du point de congélation égal à *0,513°C*. On sait que, pour une solution renfermant, dans *200g* d'eau *1/10* de mole d'un corps non électrolysable, l'abaissement du point de congélation est égal à *0,925°C*.
1°) Détermine la masse molaire moléculaire approchée de cette substance.
2°) Déduis – en la formule moléculaire de la substance.

Corrigé 2 :

m_S = *0,372g* ; m_{CO_2} = *0,546g* ; m_{H_2O} = *0,223g*
m_1 = *0,372g* ; m'_1 = *100g* ; $\Delta\theta_1$ = *0,513°C.*
m'_2 = *200g* ; $n_2 = \frac{1}{10}$*mol* ; $\Delta\theta_2$ = *0,925°C.*

1°) Calcul de la masse molaire moléculaire du composé.

D'après la 1ère loi de RAOULT, on a :

- Pour la solution (1)

$$\Delta\theta_1 = K_1\frac{C_1}{M_1} = K_1\frac{m_1}{M_1.m'_1} \qquad (1)$$

- Pour la solution (2)

$$\Delta\theta_2 = K_2\frac{C_2}{M_2} = K_2\frac{n_2}{m'_2} \qquad (2)$$

En faisant le rapport de ces deux expressions membre à membre, on obtient :

$$\frac{\Delta\theta_1}{\Delta\theta_2} = K_1\frac{m_1}{M_1.m'_1}.\frac{m'_2}{K_2.n_2}$$

Le solvant étant le même on a : $K_1 = K_2$, ainsi :

$$\frac{\Delta\theta_1}{\Delta\theta_2} = \frac{m_1}{M_1.m'_1}.\frac{m'_2}{n_2} \Rightarrow M_1 = \frac{\Delta\theta_2.m_1.m'_2}{\Delta\theta_1.m'_1.n_2}$$

$$Avec\ m'_2 = 2m'_1 \Rightarrow M_1 = \frac{\Delta\theta_2.m_1.2m'_1}{\Delta\theta_1.m'_1.n_2}$$

D'où :

$$\boxed{M_1 = \frac{2\Delta\theta_2.m_1}{\Delta\theta_1.n_2}}$$

$$\textbf{A.N}: M_1 = \frac{2 \times 0{,}925 \times 5 \times 10}{0{,}513 \times 1} = 180{,}31$$

$$\boxed{M_1 = 180{,}31 g/mol}$$

2°) Déduction de sa formule moléculaire.

Le composé étant constitué de carbone, d'hydrogène et d'oxygène, sa formule moléculaire est de la forme : $C_xH_yO_z$

Equation de la combustion dans l'oxygène de l'air.

$$\boxed{C_xH_yO_z + \left(x + \frac{y}{4} - \frac{z}{2}\right)O_2 \longrightarrow xCO_2^{\nearrow} + \frac{y}{2}H_2O}$$

D'après l'équation, on a par proportion :

$$\frac{1}{n_S} = \frac{x}{n_{CO_2}} = \frac{y}{2n_{H_2O}}$$

$$\frac{1}{n_S} = \frac{x}{n_{CO_2}} \Rightarrow x = \frac{n_{CO_2}}{n_S} = \frac{m_{CO_2}.M_S}{M_{CO_2}.m_S}$$

$$\boxed{x = \frac{m_{CO_2}.M_S}{M_{CO_2}.m_S}}$$

$$\boldsymbol{A.N} : x = \frac{0{,}546 \times 180{,}31}{44 \times 0{,}372} = 6{,}01 \simeq 6 \Rightarrow x = 6$$

$$\frac{1}{n_S} = \frac{y}{2n_{H_2O}} \Rightarrow y = \frac{2n_{H_2O}}{n_S} = \frac{2m_{H_2O}.M_S}{M_{H_2O}.m_S}$$

$$\boxed{y = \frac{2m_{H_2O}.M_S}{M_{H_2O}.m_S}}$$

$$\boldsymbol{A.N} : y = \frac{2 \times 0{,}223 \times 180{,}31}{18 \times 0{,}372} = 12{,}01 \simeq 12$$

$$\Rightarrow y = 12$$

De plus : $M_S = 12x + y + 16z + 14t$

Ainsi :

$$\boxed{z = \frac{1}{16}(M_S - 12x - y)}$$

$$\boldsymbol{A.N} : z = \frac{1}{16}(180{,}31 - 12 \times 6 - 12) = 6{,}01 \simeq 6$$

$$\Rightarrow z = 6$$

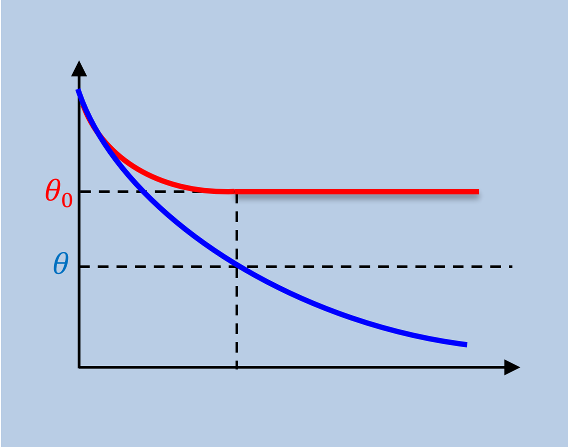
D'où la formule moléculaire du composé est :

$$\boxed{C_6H_{12}O_6}$$

TRAVAUX DIRIGES I

Conseils pratiques :

1. Lois d'Avogadro – Ampère.
2. Lois des gaz parfaits ; Equation du changement d'état.
3. Densité d'un corps gazeux par rapport à l'air.
4. Lois de Raoult : cryométrie et ébulliométrie.
5. Combustion complète d'un composé organique dans le dioxygène de l'air et dans le dioxyde de cuivre.
6. Composition centésimale ; composition massique.



L'ESSENTIEL DU COURS

I – Définitions des notions.

Définis les termes et expressions suivants : Lois physiques ; Densité d'un gaz ; Soluté ; Solvant ; Solution ; Cryométrie ; Ebulliométrie.

II – Questions à réponses courtes.

Réponds aux questions suivantes :

1°) Qu'appelle – t – on solution diluée non électrolysable ?
2°) Quelle différence fais – tu entre une température de congélation et une température de congélation commençante ?
3°) Enonce la loi des Gaz parfaits ou loi d'AVOGADRO – AMPERE.
4°) Qu'appelle – t – on concentration massique d'une solution ?

III – Appariement.

Relie un élément – question de la colonne A à un élément – réponse de la colonne B dans le tableau ci – dessous : *Exemple $a_9 = b_{10}$*.

Colonne A		Colonne B	
a_1	Lois d'AVOGADRO – AMPERE	b_1	$d = \frac{\rho}{\rho_{air}}$
a_2	Lois DE RAOULT	b_2	Température d'ébullition commençante.
a_3	Méthode de MEYER	b_3	Pourcentage
a_4	Densité d'un gaz	b_4	Liquide volatil
a_5	Composition massique d'un composé organique	b_5	$\Delta\theta = K\frac{m}{m'.M}$
a_6	Ebulliométrie	b_6	Gaz parfaits
a_7	Abaissement cryométrique	b_7	Solutions diluées non électrolysables.

III – Questions à alternative vrai ou faux.

Réponds par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

1°) Dans l'équation des gaz parfaits, lorsque la pression est en pascal, le volume en m^3 et la température en Kelvin, la valeur de la constante des gaz parfaits est $R = 0{,}082 J.K^{-1}.mol^{-1}$.
2°) La correspondance entre les différentes unités de la pression est : *1atm = 76cm de Hg* = $1{,}01325.10^5 Pa$.
3°) Dans toute expérience de cryométrie, le solvant est toujours l'eau.
4°) La température d'ébullition de l'eau est égale à *0°C*.

5°) La 2e loi de Raoult s'écrit $\Delta\theta = K\,\frac{m}{m'M}$.
6°) Le benzène et l'eau se congèle à la même température de *5,5°C*, dans les C.N.T.P.
7°) L'élévation ébulliométrique est proportionnelle à la masse molaire et inversement proportionnelle à la masse du soluté.
8°) L'abaissement cryométrique est toujours positif.
9°) Lors de la combustion complète d'un composé organique, il se dégage toujours du gaz carbonique (CO_2).
10°) Dans certaines expériences d'ébulliométrie, la température d'ébullition commençante d'une solution peut être inférieure à la température d'ébullition du solvant utilisé.

RESOLUTION DES PROBLEMES

EXERCICE 1 : On vaporise *1,28g* d'un composé à *100°C* sous la pression de *750mm* de mercure et on trouve que le volume est *536,4cm*^{3}.
1°) Calcule la masse molaire moléculaire du composé.
2°) Détermine sa formule chimique sachant qu'il contient en masse *64,9%* de carbone, *13,5%* d'hydrogène et *21,6%* d'oxygène.

EXERCICE 2 : L'analyse d'une substance contenant du carbone, de l'hydrogène, de l'azote et d'oxygène a donné les pourcentages : *40,68%* de carbone, *8,17%* d'hydrogène et *23,76%* d'azote.
Une valeur approchée de la masse molaire a été déterminée par ébulliométrie dans l'alcool éthylique.
La température d'ébullition commençante à la pression normale, d'une solution contenant *2,00g* de substance pour *100g* d'alcool absolu a été trouvée égale à *78,81°C*.
Détermine :
1°) La masse molaire approchée de la substance.
2°) Sa formule brute.
3°) Sa formule semi – développée la plus simple et son nom.
On donne : θ_0 = *78,40°C* ; *K' = 1200* pour l'alcool éthylique.

EXERCICE 3 : 1°) La vaporisation d'une masse de *1,6g* d'un composé organique par la méthode de Meyer a donné *0,530L* de vapeur mesuré à *27°C* et sous la pression de *763,15 mm Hg*. Calcule la masse molaire moléculaire approchée de ce composé organique.
2°) D'autre part, la combustion complète de *0,75g* de ce composé organique de formule générale $C_xH_yO_z$ a fourni *0,91g* d'eau et *896 mL* de dioxyde de carbone, volume mesuré dans les conditions normales.

a) Ecris l'équation bilan de la combustion ;
b) Détermine la formule massique des éléments du composé.

EXERCICE 4 : 1°) On place *1g* d'une substance A dans un ballon de capacité *1L*, préalablement vidé d'air et hermétiquement fermé après introduction de la substance. A la température de *80°C*, on constate que cette substance est entièrement vaporisée et que la pression régnant dans le ballon est *29,7cm* de mercure. Quel est la masse molaire de A ?
2°) On fait dissoudre *0,05mol* de cette substance dans *200g* de benzène. A quelle température va – t – on constater l'apparition des premiers cristaux au cours de refroidissement de la solution obtenue ?
On donne : point de fusion - solidification du benzène pur : θ_0 = *5,5°C*.
Constante cryométrique du benzène pur *K = 5700*.

EXERCICE 5 : Un composé organique est formé de carbone, d'hydrogène et d'oxygène. On réalise la combustion de *3,00g* de ce composé, il se forme *2,19g* d'eau et un volume de *3,05L* de dioxyde de carbone mesuré à la température de *25°C* sous la pression de *740mm* de mercure.
D'autre part la dissolution de *6,40g* de ce composé dans *100g* d'eau commence à se congeler à *– 1,60°C*.
1°) Ecris l'équation de la réaction de combustion.
2°) Calcule la masse molaire moléculaire approchée du composé.
3°) Etablis sa formule brute.
On donne : K_{eau} = *1850*.

EXERCICE 6 : L'analyse d'une substance organique a donné les pourcentages suivants : *20%* de carbone ; *6,6%* d'hydrogène ; *26,4%* d'oxygène et *47%* d'azote.
La cryométrie de la substance donne un abaissement de *0,885°C* lorsqu'elle est effectuée sur *2,75g* de substance dans *100g* d'eau.

1°) Détermine la masse molaire approchée de la substance.
2°) Quelle est sa formule moléculaire.
3°) Exprime le résultat de la masse molaire. On donne : $K = 1850$.

EXERCICE 7 : Lorsqu'on dissout *5,030g* d'un corps C dans *100g* d'un alcool, la température d'ébullition sous la pression normale est *79,17°C*. Si dans la même quantité d'alcool, on dissout *5g* de benzène, le point d'ébullition est de *79,27°C*.
1°) Trouve le point d'ébullition de l'alcool pur.
2°) Déduis la constante ébulliométrique de cet alcool. On donne : formule de l'alcool : $C_2H_2O_4$.

EXERCICE 8 : La solution de *0,3g* d'un corps A dans *100g* d'un liquide B n'est pas électrolysable, sa température de solidification commençante est de *16,55°C*. Celle d'une solution contenant *0,6g* de A dans *100g* de B est de *16,40°C*.
1°) Déduis – en la température de solidification commençante d'une solution contenant *0,9g* de A dans *100g* de B.
2°) Calcule la température de solidification de B pur.

EXERCICE 9 : Le point de congélation du benzène pur est *5,5°C*. Une solution de *2g* de sulfure de carbone (CS_2) dans *100g* de benzène commence à se congeler à *4°C*.
1°) Calcule la valeur de la constante cryométrique du benzène.
2°) On dissout *2g* de phénol (C_6H_5OH) dans *100g* de benzène. Calcule :
a) Le point de congélation commençante de cette solution.
b) Le point d'ébullition commençante de cette solution sachant que *1/100* de mole d'un corps pur quelconque dissoute dans *100g* de benzène, élève la température d'ébullition de *0,23°C*.
Le point d'ébullition du benzène pur est *80°C*.

EXERCICE 10 : L'analyse élémentaire d'une substance organique a donné les résultats suivants :
- Masse de la substance utilisée : *0,270g*.
- Masse d'eau obtenue : *0,330g*.
- Masse de dioxyde de carbone recueilli : *0,600g*.

Des déterminations cryométriques ont donné les résultats suivants : une solution de *3,72g* de la substance A dans *100g* d'eau commence à se congeler à *– 1,14°C*. D'autre part, une solution de *1,48g* d'acétone (C_3H_6O) dans *100g* d'eau commence à se congeler à *– 0,472°C*.
1°) Détermine la masse molaire moléculaire approchée de A. En déduire sa formule moléculaire.
2°) Donne la formule semi – développée et le nom de A.
3°) On refroidi d'avantage la solution du composé A jusqu'à une température de *– 2,50°C*. Quelle est la masse de glace formée ?
On donne les masses molaire atomiques en g/mol : *C : 12 ; H : 1 ; O : 16.*

EXERCICE 11 : 1°) On réalise une expérience sur la cryométrie pour déterminer la masse molaire moléculaire d'un corps A. Pour une solution de *2g* du corps A dans *100g* d'un solvant, on constate un abaissement cryométrique de *0,62°C*, alors que pour une solution de *1g* d'éthanol (C_2H_6O) dans *100g* de même solvant, l'abaissement est de *0,40°C*. Détermine la masse molaire moléculaire du corps A.
2°) La combustion dans l'air de *3g* du composé A avait donné *3,60g* d'eau et *3,70L* de CO_2 mesuré à *20°C* sous une pression de *740mm* de mercure.
a) Calcule le pourcentage en masse des éléments carbone et hydrogène dans le composé A ;
b) Montre que le corps A est constitué d'un troisième élément dont on précisera l'identité ;
c) Calcule le pourcentage en masse de cet élément.

EXERCICE 12 : En dissolvant *5g* d'un composé organique B dans *100g* d'eau, on constate que la température de congélation commençante s'abaisse de *0,513°C*, tandis que pour une solution renfermant, dans 100g d'eau $\frac{1}{100}$ de mole d'un corps non électrolysable, l'abaissement du point de congélation vaut *18,5°C*. D'autre part l'analyse de *0,372g* du composé B formé de C, H et O a donné par combustion *0,223g* d'eau et *0,306L* de dioxyde de carbone pris à *20°C*, sous la pression de *74cm* de mercure.
1°) Ecris l'équation de la combustion et déduis – en la formule brute de B.
2°) Donne la composition centésimale du composé B.

EXERCICE 13 : La combustion de *0,304g* d'une substance A de formule $C_xH_yO_z$ a donné *0,178g* d'H_2O et *0,696g* de CO_2.
La solution de *5g* de A dans *100g* d'éther présente une élévation ébulliométrique de *0,75°C*.
1°) Calcule la masse molaire approchée de A.
2°) Etablis sa formule moléculaire.

3°) On chauffe d'avantage la solution A. L'élévation ébulliométrique devient alors *0,80°C*. Quelle est la masse de la vapeur dégagée ?
On donne : *K' = 2100*.

EXERCICE 14 : Une substance organique est formée de carbone, d'hydrogène et d'oxygène. Soumise à l'oxydation vive, *0,5000g* de substance ont fourni *0,4888g* de dioxyde de carbone et *0,1000g* d'eau.
Lorsqu'on dissout *5,0g* de ce corps dans *100g* d'éthanol, la température d'ébullition est de *78,91°C*, alors que l'alcool pur bout à *78,30°C*. Si dans *100g* d'alcool, on dissout *5,0g* de benzène, le point d'ébullition est de *79,00°C*. Quelle est la formule moléculaire du corps ?

EXERCICE 15 : On donne les températures de solidification et les constantes cryométriques des solvants purs :

Solvant	Température de solidification θ_0 (°C)	Constantes Cryométriques
Eau	*0*	*1850*
Benzène	*5,5*	*5700*
Acide éthanoïque	*16,5*	*3900*

L'abaissement cryométrique d'une solution de *5g* d'un composé A dans *100g* d'un liquide B est *0,513°C*. Celui d'une solution de *0,1mole* de méthylamine ($CH_3 - NH_2$) dans *200g* du liquide B est de *0,925°C*.
1°) Calcule la constante cryométrique du liquide B. Identifie ce liquide B.
2°) Calcule la masse molaire moléculaire approchée du composé A.
3°) Détermine la formule moléculaire du composé A sachant que la combustion complète de *0,372g* de A a donné *0,223g* d'eau et *0,546g* de dioxyde de carbone.
4°) Calcule la masse molaire moléculaire exacte de A et déduis – en sa précision.

EXERCICE 16 : On prépare une solution S_1 en dissolvant *2,5g* d'un alcool A dans *50g* d'un liquide L_1 de constante cryométrique K_1 puis une solution S_2 en dissolvant *4g* du même alcool A dans *50g* d'un liquide L_2 de constante cryométrique K_2.
On refroidit chaque solution et l'on constate que les abaissements cryométriques sont identiques.

1°) Calcule le rapport des constantes cryométriques $\frac{K_1}{K_2}$.
2°) Déduis – en la valeur de K_1 si $K_2 = 325$.
3°) Sachant que l'abaissement cryométrique constaté est égal à *0,81°C*, calcule la masse molaire approchée de A.
4°) Déduis – en la formule moléculaire de A sachant que la formule chimique de l'alcool A est de la forme : $C_nH_{2n+1}OH$.

EXERCICE 17 : L'analyse d'une substance organique ternaire non azoté est faite sur *0,290g* de composé. La combustion complète de cette masse dans un tube à combustion contenant de l'oxyde de cuivre a donné une augmentation des tubes à ponce sulfurique de *0,270g* et *0,660g* de gaz absorbable par la potasse.
On désire déterminer la masse molaire par la méthode de Meyer en opérant sur *0,15g* de substance. On recueille *62,4cm*^{3} d'air mesuré sur la cuve à eau à *17°C* et sous la pression atmosphérique de *750mm* de Hg. La pression de la vapeur saturante du liquide est *13mm* de Hg.
1°) Détermine la densité de la substance par rapport à l'air.
2°) Quelle est sa masse molaire approchée.
3°) Etablis la formule moléculaire de la substance puis en déduire l'incertitude relative commise sur la masse molaire. On donne : $\rho_{air} = 1,29.10^{-3} g/cm^3$.

EXERCICE 18 : On fait tomber dans l'appareil de Meyer une ampoule de verre contenant *0,481g* d'un liquide dont le point de congélation est inférieur à celui de l'eau. L'ampoule se brise et l'on recueille sous l'éprouvette, primitivement pleine d'eau, l'air qui se dégage.

a) On demande de déduire de cette expérience la densité de vapeur et la masse molaire du liquide introduit d'après les données numériques suivantes : volume d'air recueilli : *100cm*^{3}, température de l'éprouvette *20°C* ; hauteur d'eau h restant dans l'éprouvette : *20cm* ; pression atmosphérique : *74,97cm* de mercure ; pression maximale de la vapeur d'eau à *20°C* : *1,8cm* de mercure.
b) Etablis la formule du liquide employé pour lequel l'analyse en masses a donné la composition centésimale suivante : *C = 10,1%* ; *H = 0,8%* ; *Cℓ = 89,1%*.

On donne masse volumique du mercure : *13,6g/cm*^{3}.

EXERCICE 19 : 1°) L'analyse élémentaire de *4,4g* d'une substance organique A a fourni *11g* de gaz carbonique et *5,4g* d'eau. D'autre part la dissolution de *2g* de A, dans un liquide L, abaisse le point de congélation de *0,42°C* et élève le point d'ébullition de *0,12°C*. Sachant que la constante cryométrique de L est égale à sa constante ébulliométrique plus *1330*. Détermine la formule brute de A.
2°) La vaporisation d'une masse m de A dans l'appareil de **Meyer** provoque le déplacement de *96mL* d'air à *27°C* sous la pression atmosphérique de *74,3cm* de Hg. Calcule m si la pression des vapeurs saturantes de l'eau à *27°C* est *2cm*.

EXERCICE 20 : La combustion complète dans l'oxyde de cuivre II d'un composé organique $C_xH_yO_z$ a fourni *0,45g* d'eau, *0,88g* de gaz carbonique et un dépôt de cuivre. D'autre part l'évaporation de *1,85g* de ce composé donne *632mL* de vapeur mesuré à *27°C* et sous la pression de *740mm Hg*
1°) Ecris l'équation de la combustion complète.
2°) Détermine :
a) La masse molaire moléculaire du composé ;
b) La plus simple relation entre *x* et *y* ;
c) La formule brute du composé sachant que son atomicité est égale à 15.

EXERCICE 21 : On dissout *2,3g* d'un composé organique A de formule C_xH_yO dans *100g* de solvant B. On obtient une solution dont l'abaissement cryométrique vaut *0,71°C*. D'autre part, la dissolution de $5{,}2073.10^{22}$molécules d'un composé C dans *100g* de même solvant B provoque un abaissement cryométrique de *1,60°C*.
1°) Trouve la masse molaire approchée de A.
2°) Trouve la formule moléculaire de A sachant qu'il renferme 60% en masse de carbone. Déduis – en la masse molaire exacte de A.
3°) Quelle est la plus petite erreur commise dans la mesure de cette masse molaire ?
4°) L'oxydation ménagée de A conduit à un composé D qui rougit le papier imbibé de Liqueur de Fehling et donne un test positif avec la *DNPH*. Ecris les FSD de A et D.

EXERCICE 22 : Dans la détermination de la densité par rapport à l'air d'une substance organique par la **méthode de MEYER**, on a recueilli un volume d'air de $43cm^3$ sur une cuve à eau à la température de *17°C* et sous une pression de la vapeur saturante d'eau à *17°C* de valeur *14,5mm* de mercure. Sachant que la masse m du corps étudié était *0,2g* et $H = 774{,}5$mm de mercure.
1°) Détermine la densité de ce corps et déduis – en sa masse molaire approchée.
2°) Ce corps est du ***bromure d'éthyle*** de formule brute C_2H_5Br.
a) Calcule la précision de cette masse molaire approchée.
b) Donne un encadrement et une écriture correcte de cette masse approchée.
On donne : $C:12$; $Br:80$; $H:1\ (en\ g/mol)$

EXERCICE 23 : La formule d'un alcool A est de type : $C_nH_{2n+2}O$.
La température d'ébullition commençante d'une solution S_1 contenant *1g* de A dans *200g* d'un liquide B est de *80,20°C*. Lorsqu'on ajoute *50g* du liquide B dans S_1, la température d'ébullition commençante de la solution S_2 obtenue est *80,16°C*.
1°) Calcule le rapport $\frac{K'}{M}$ de la constante ébulliométrique du liquide B sur la masse molaire moléculaire de A.
2°) Calcule la masse moléculaire de A sachant qu'il contient *26,66%* en masse d'oxygène.
Déduis – en la valeur de l'entier naturel n et donne les différents isomères de A.
3°) Calcule la constante ébulliométrique et la température d'ébullition commençante du liquide B pur.

EXERCICE 24 : Une solution aqueuse préparée avec *1,0g* d'un composé organique azoté dans *100g* d'eau se solidifie à *– 0,31°C*.
1°) Détermine la masse molaire moléculaire approchée du composé à 1/100 près.
2°) On fait réagir *0,30g* de ce composé avec de l'hypobromite de sodium, on obtient *0,22g* de dioxyde de carbone ; *0,18g* d'eau, *120mL* de diazote recueilli dans les CNTP et une certaine quantité de bromure de sodium.
a) Ecris l'équation de la réaction avec la forme indéterminée $C_xH_yO_zN_t$;
b) Détermine la formule moléculaire exacte du composé ;
c) Déduis – en la masse molaire moléculaire exacte du composé et la précision sur cette valeur. On donne : V_m = *24L*.

DOMAINE D'ETUDE I : STRUCTURE DE LA MATIERE

OG₂ : CONNAITRE LE SPECTRE DE L'ATOME D'HYDROGENE.

2 LE SPECTRE DE L'ATOME D'HYDROGENE.

I. Les modèles atomiques.

I.1. Modèle de Rutherford.

En 1911, Ernest Rutherford, physicien anglais, réalisa l'expérience qui porte son nom, en envoyant les particules α (noyau d'hélium) sur une mince feuille d'or. Il constata que la plupart des particules traversèrent la feuille et une seule sur 10^5 était déviée.

Il déduisit que l'atome avait une structure lacunaire. C'est ainsi qu'il proposa un modèle planétaire de l'atome : *« un atome est formé d'un noyau central (chargé positivement), autour duquel gravitent un ou plusieurs électrons selon les trajectoires circulaires »* (voir figure 1).

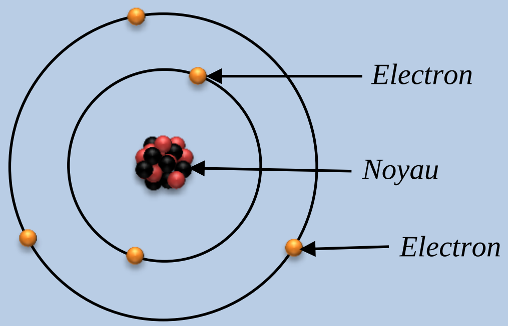


Figure 1.

Mais ce modèle présentait des insuffisances ; *il ne permettait pas d'expliquer l'émission du rayonnement électromagnétique observé en restituant l'énergie absorbée par un atome, après avoir reçu de l'énergie du milieu extérieur.*

I.2. Modèle de Bohr.

De son côté Niels Bohr, physicien danois, grâce à la théorie de Planck sur la quantification de l'énergie atomique postula que :

- L'électron gravite autour du noyau suivant un mouvement circulaire uniforme (M.C.U) ;
- L'atome n'émet pas de l'énergie aussi longtemps que son électron reste sur une orbite ;
- Au cours d'une transition électronique l'atome peut absorber ou émettre un quanta ou photon, d'énergie :

$$\Delta E = h\mathcal{V} \text{ avec } \mathcal{V} = \frac{C}{\lambda} \Rightarrow \boxed{\Delta E = h\frac{C}{\lambda}}$$

Avec :

$h = 6{,}62.10^{-34}$ J.s : Constante de Planck ;

$C = 3.10^8$ m/s : Célérité ou vitesse de la lumière dans le vide ;

$\mathcal{V}$: Fréquence du photon (Hz) :

λ : Longeur d'onde du photon (m).

- Chaque niveau d'énergie a un moment angulaire quantifié :

$$\boxed{p = mvr = n\frac{h}{2\pi} = n\hbar}$$

Avec :

n : Nombre quantique principal ;

v : vitesse de l'électron ;

r : rayon de l'orbite ;

$m = 9{,}1.10^{-31}$ Kg : masse de l'électron.

Le modèle de Bohr bien qu'étant amélioré, présentait aussi des insuffisances. *Bohr fût incapable d'interpréter les propriétés des autres atomes, car n'ayant travailler que sur l'atome d'hydrogène, dont l'orbite de l'électron est particulièrement circulaire.*

C'est pour cette raison que l'atome d'hydrogène est encore appelé *« atome de Bohr ».*

I.3. Modèle actuel de l'atome.

A cause des insuffisances que présentent les modèles ci – dessus cités, le modèle actuel de l'atome se présente de la manière suivante :
« l'atome est formé d'un noyau central autour duquel gravitent des électrons dans une zone appelée nuage électronique en décrivant des trajectoires elliptiques » (voir figure 2).
On parle de la *probabité* de rencontrer l'électron en un point se trouvant au voisinage du noyau.

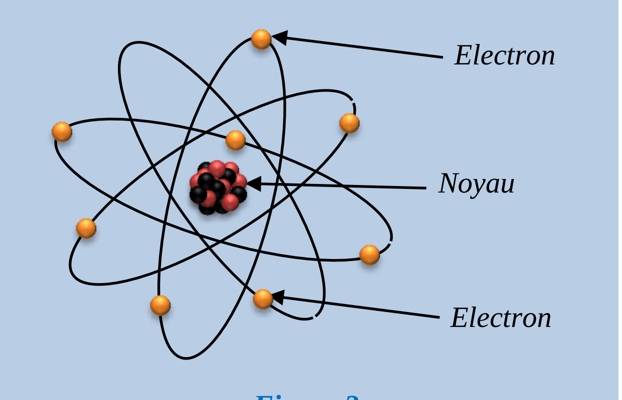


Figure 2.

II. Notion de niveau d'énergie.

L'énergie que possède un atome est *quantifiée*, c'est – à – dire qu'elle ne peut prendre que certaines valeurs discontinues et bien déterminées.

Les valeurs de l'énergie que peut avoir l'atome sont appelés *niveaux ou états d'énergie.*

Le plus bas niveau d'énergie est appelé *niveau ou état fondamental*. Les autres niveaux sont appelés *niveaux ou états excités*. Celui correspondant à une énergie nulle est dit *état ionisé ou niveau d'ionisation*.

Les énergies des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sont données par la relation :

$$\boxed{E_n = -\frac{E_0}{n^2}}\ (eV)$$

Avec $n \geq 1$ *et* $E_0 = 13{,}6\ eV$.
$1eV = 1{,}6.10^{-19} J$.

♣ Diagramme énergétique de l'atome d'hydrogène.

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2} = -\frac{13{,}6}{n^2}$$

- Pour $n = 1 \Rightarrow E_1 = -13{,}6eV$:
  C'est l'état fondamental ;
- Pour $n = 2 \Rightarrow E_2 = -3{,}4eV$:
  C'est le premier état excité ;
- Pour $n = 3 \Rightarrow E_3 = -1{,}51eV$:
  C'est le 2è état excité ;
- Pour $n = 4 \Rightarrow E_4 = -0{,}85eV$:
  C'est le 3è état excité ;
- Pour $n = 5 \Rightarrow E_5 = -0{,}54eV$:
  ⋮
- Pour $n = \infty \Rightarrow E_\infty = 0$: C'est l'état ionisé.

Ainsi on obtient le diagramme donnée par la figure 3 ci – dessous :

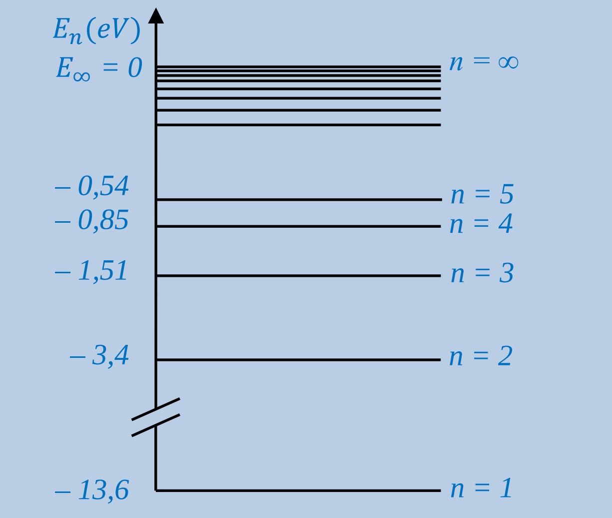


Figure 3.

III. Transitions électroniques.

On appelle transition électronique, le passage de l'atome d'un niveau d'énergie à un autre.
On distingue : *l'absorption et l'émission.*

III.1. L'absorption.

Définition : *C'est le passage de l'atome d'un niveau d'énergie inférieur vers un niveau d'énergie supérieur, après avoir absorbé un photon* (figure 4).

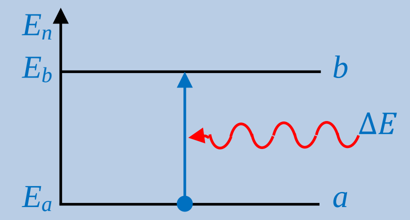


Figure 4.

L'énergie absorbée est telle que :

$$\Delta E = E_b - E_a = h\frac{C}{\lambda}$$

Ainsi en tenant compte de l'énergie du niveau n : $E_n = -\frac{E_0}{n^2}$; pour les niveau a et b, on obtient par la suite :

$$h\frac{C}{\lambda} = -\frac{E_0}{b^2} + \frac{E_0}{a^2} \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{E_0}{hC}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)$$

En posant : $\frac{E_0}{hC} = R_H = 1{,}096776.10^7 m^{-1}$

D'où :

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)$$

R_H : Constante de Rydberg.

Note : L'inverse de la longueur d'onde $\frac{1}{\lambda}$ désigne le nombre d'onde.

III.2. L'émission.

Définition : *C'est le passage de l'atome d'un niveau d'énergie supérieur vers un niveau d'énergie inférieur, en émettant un photon* (figure 5).

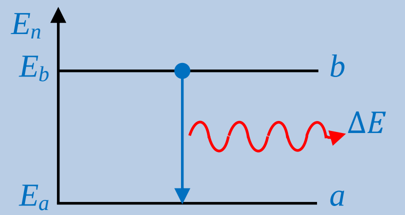


Figure 5.

L'énergie émise est telle que :

$$\Delta E = |E_a - E_b| = h\frac{C}{\lambda}$$

$$\Delta E = |-(E_b - E_a)| = h\frac{C}{\lambda}$$

$$\Delta E = E_b - E_a = h\frac{C}{\lambda}$$

IV. Séries de raies.

Le retour d'un atome excité vers l'état fondamental peut se faire directement ou par bond, ce qui nous donne une série de raies.

Définition : *On appelle série de raies, l'ensemble des radiations correspondant aux transitions qui aboutissent au même niveau d'énergie.*

A chaque série spectroscopique mise en évidence expérimentalement correspond un même niveau d'énergie final.

C'est ainsi que la série de *LYMAN* concerne toutes les désexcitations qui aboutissent à l'état fondamental (n = 1), la série de *BALMER*, au premier niveau excité (n = 2), la série de *PASCHEN* à n = 3, celle de *BRACKETT* à n = 4 et celle de *PFUND* à n = 5 (voir figure 6).

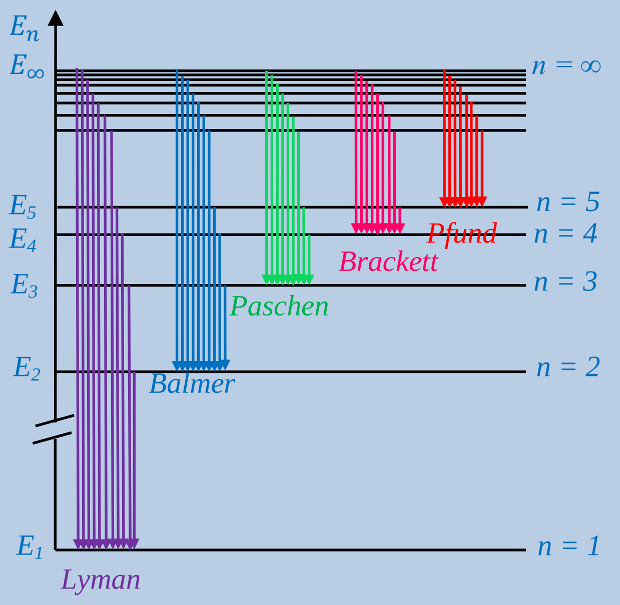


Figure 6.

➢ ***Série de LYMAN (n > 1 ⟶ p = 1)***

$$\Delta E = E_n - E_1 = -\frac{E_0}{n^2} + E_0 = h\frac{C}{\lambda_{n,1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\lambda_{n,1}} = R_H\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}$$

➢ ***Série de BALMER (n > 2 ⟶ p = 2)***

$$\Delta E = E_n - E_2 = -\frac{E_0}{n^2} + \frac{E_0}{2^2} = h\frac{C}{\lambda_{n,2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\lambda_{n,2}} = R_H\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right)}$$

➢ ***Série de PASCHEN (n > 3 ⟶ p = 3)***

$$\Delta E = E_n - E_3 = -\frac{E_0}{n^2} + \frac{E_0}{3^2} = h\frac{C}{\lambda_{n,3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\lambda_{n,3}} = R_H\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{n^2}\right)}$$

➢ ***Série de BRACKETT (n > 4 ⟶ p = 4)***

$$\Delta E = E_n - E_4 = -\frac{E_0}{n^2} + \frac{E_0}{4^2} = h\frac{C}{\lambda_{n,4}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\lambda_{n,4}} = R_H\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{n^2}\right)}$$

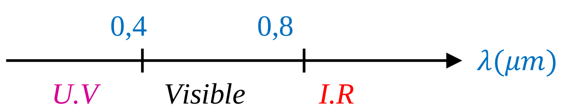
➢ ***Série de PFUND (n > 5 ⟶ p = 5)***

$$\Delta E = E_n - E_5 = -\frac{E_0}{n^2} + \frac{E_0}{5^2} = h\frac{C}{\lambda_{n,5}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\lambda_{n,5}} = R_H\left(\frac{1}{25} - \frac{1}{n^2}\right)}$$

➢ Domaine spectral.

Suivant les valeurs des longueurs d'onde des raies, on distingue le domaine spectral suivant :



U.V : Ultraviolet ; I.R : Infrarouge ; 1μm = 10^{-6}m.

Note :

- La série de *LYMAN* appartient au domaine spectral *U.V* ;
- La série de Balmer appartient au domaine spectral *Visible* ;

- Les séries de *PASCHEN*, *BRACKETT* et PFUND appartiennent au domaine spectral *I.R*.

Exercice d'application

Exercice 1 : 1°) L'énergie des différents niveaux de l'atome d'hydrogène sont donnés en électron volt (eV) par l'expression :

$$E_n = -\frac{13{,}6}{n^2},\ n \geq 1$$

a) Détermine en eV, l'énergie d'un photon permettant le passage de l'atome d'hydrogène de son état fondamental à son troisième état excité.

b) Quelle est la longueur d'onde de la radiation émise lors du passage de l'atome d'hydrogène de son troisième état excité à son deuxième état excité ?

Déduis – en la série de raies et à quel domaine spectral appartient cette radiation.

2°) Détermine et calcule l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène

3°) On considère la série de LYMAN.

a) Qu'appelle – t – on série de raies ?

b) Calcule la plus courte longueur d'onde de cette série.

c) L'analyse spectroscopique permet de déceler la radiation de fréquence *N = 3,08.10^{15}Hz* ; à quelle transition correspond cette radiation ?

On donne : *h = 6,62.10^{-34}J.S ; C = 3.10^{8}m/s ; 1eV = 1,610^{-19}J.*

Corrigé 1.

$$E_n = -\frac{13{,}6}{n^2}\ ;\ n \geq 1$$

1°) a) Energie d'un photon permettant le passage d'un atome de son état fondamental à son 3^{è} état excité.

L'énergie absorbée est telle que :

$$\Delta E_{(1,4)} = E_4 - E_1 = -\frac{13{,}6}{4^2} + \frac{13{,}6}{1^2}$$

$$\boxed{\Delta E_{(1,4)} = 12{,}75eV}$$

b) Longueur d'onde de la radiation émise lors du passage de l'atome d'hydrogène de son état excité à son deuxième état excité.

L'énergie du photon émis lors de cette transition est telle que :

$$\Delta E_{(4,3)} = E_4 - E_3 = h\frac{C}{\lambda_{(4,3)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_{(4,2)} = \frac{hC}{E_4 - E_3}}$$

$$\boldsymbol{A.N}:\ \lambda_{(4,3)} = \frac{6{,}62.10^{-34} \times 3.10^8}{\left(-\frac{13{,}6}{4^2} + \frac{13{,}6}{3^2}\right) \times 1{,}6.10^{-19}}$$

$$\boxed{\lambda_{(4,3)} = 1{,}88.10^{-6}m}$$

Cette longueur d'onde appartient à la *série de PASCHEN*, car l'atome retourne à l'état $n = 3$.

➢ ***Domaine spectral.***

$\lambda_{(4,3)} = 1{,}88.10^{-6}m = 1{,}88\mu m > 0{,}8\mu m$

Cette longueur d'onde appartient au domaine spectral Infra – rouge (I.R).

2°) Energie d'ionisation de l'atome d'hydrogène.

$$\boxed{E_i = E_\infty - E_1}$$

$$\boldsymbol{A.N}:\ E_i = 0 + \frac{13{,}6}{1^2} = 13{,}6$$

$$\boxed{E_i = 13{,}6eV}$$

3°) On considère la série de LYMAN.

a) *On appelle série de raies, l'ensemble des radiations correspondant aux transitions qui aboutissent au même niveau d'énergie.*

b) Calcul de la plus courte longueur d'onde de cette série.

La plus courte longueur d'onde correspond à la plus grande valeur de l'énergie ; celle de la transition du niveau $n = \infty$ au niveau $n = 1$.

En effet cette énergie est telle que :

$$\Delta E_{max} = E_\infty - E_1 = h\frac{C}{\lambda_{min}}$$

D'où :

$$\boxed{\lambda_{min} = \frac{hC}{E_\infty - E_1}}$$

$$\boldsymbol{A.N}:\lambda_{min} = \frac{6{,}62.10^{-34} \times 3.10^8}{(0 + 13{,}6) \times 1{,}6.10^{-19}} = 9{,}12.10^{-8}$$

$$\boxed{\lambda_{min} = 9{,}12.10^{-8}m}$$

c) $N = 3{,}08.10^{15}Hz$

Transition à laquelle correspond cette radiation.

Soit n le niveau initial de cette transition, on a :

$\Delta E = E_n - E_1 = hN$

$$\Rightarrow -\frac{13{,}6}{n^2} + 13{,}6 = hN$$

$$\Rightarrow \frac{13{,}6}{n^2} = 13{,}6 - hN$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2} = \frac{13{,}6 - hN}{13{,}6}$$

D'où :

$$\boxed{n = \sqrt{\frac{13{,}6}{13{,}6 - hN}}}$$

A.N :

$$n = \sqrt{\frac{13{,}6 \times 1{,}6.10^{-19}}{13{,}6 \times 1{,}6.10^{-19} - 6{,}62.10^{-34} \times 3{,}08.10^{15}}}$$

$$n = 3{,}98 \simeq 4$$

D'où :

$$\boxed{n = 4}$$

Cette transition correspond à la transition du niveau $n = 4$ au niveau $n = 1$.

Exercice 2 : On détermine les énergies des niveaux de l'atome d'hydrogène par la relation :

$E_n = -\frac{13{,}6}{n^2}\ (en\ eV)$ et n : entier naturel non nul.

1°) Calcule les énergies des niveaux $n = 1 ; 2 ; 3 ; 4$ et ∞.

2°) Trace le diagramme des niveaux d'énergie.

3°) Un électron d'énergie cinétique E_C vient heurter un atome d'hydrogène à l'état fondamental ; ce dernier s'excite au niveau $n = 3$.

a) Quelle relation vérifie E_C pour qu'il y ait cette transition d'excitation ?

b) Transcris cette transition dans le diagramme.

c) Calcule la vitesse minimale que devrait posséder l'électron au moment du choc.

4°) L'atome précédemment excité perd une certaine quantité d'énergie. L'électron tombe au niveau $n = 2$ tout en émettant un photon de lumière. Calcule la longueur d'onde de ce photon.

Corrigé 2.

On détermine les énergies des niveaux de l'atome d'hydrogène par la relation :

$E_n = -\frac{13,6}{n^2}$ $(en\ eV)$ et n : entier naturel non nul.

1°) Je calcule les énergies des niveaux n = 1 ; 2 ; 3 ; 4 et ∞.

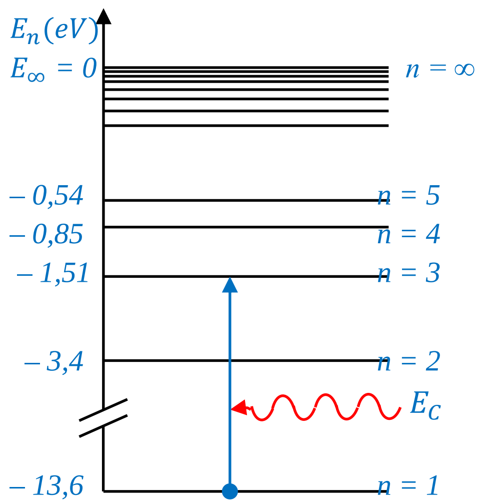
- Pour $n = 1 \Rightarrow E_1 = -13,6eV$
- Pour $n = 2 \Rightarrow E_2 = -3,4eV$
- Pour $n = 3 \Rightarrow E_3 = -1,51eV$
- Pour $n = 4 \Rightarrow E_4 = -0,85eV$

⋮

- Pour $n = \infty \Rightarrow E_\infty = 0.$

2°) Je trace le diagramme des niveaux d'énergie.

En reportant les valeurs des énergies trouvées sur un axe on obtient le diagramme des niveaux d'énergie suivant :



3°) a) Relation que vérifie E_C pour qu'il y ait cette transition d'excitation.

Pour qu'il y ait cette transition d'excitation il faut que l'énergie cinétique de l'électron soit supérieure ou égale à l'énergie de transition correspondante, soit :

$$\boxed{\Delta E = E_C \geq E_3 - E_1}$$

b) Transcription de cette transition dans le diagramme (voir figure).

c) Je calcule la vitesse minimale que devrait posséder l'électron au moment du choc.

$\Delta E = E_C \geq E_3 - E_1$

Soit : $E_{C_{min}} = E_3 - E_1$

$\Rightarrow \frac{1}{2} m_{\bar{e}} v_{min}^2 = E_3 - E_1$

D'où :

$$\boxed{v_{min} = \sqrt{\frac{2(E_3 - E_1)}{m_{\bar{e}}}}}$$

$$\boldsymbol{A.N} : v_{min} = \sqrt{\frac{2(-1,51 + 13,6) \times 1,6.10^{-19}}{9,1.10^{-31}}}$$

$$\boxed{v_{min} = 2,06.10^{6} m.s^{-1}}$$

4°) Je calcule la longueur d'onde de ce photon.

L'énergie du photon émis lors de cette transition est telle que :

$\Delta E_{(3,2)} = E_3 - E_2 = h\frac{C}{\lambda_{(3,2)}}$

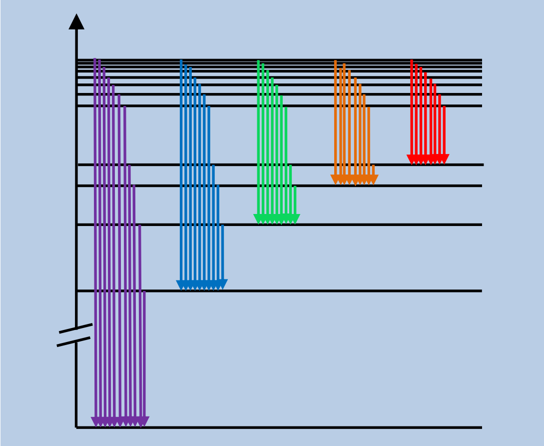
D'où :

$$\boxed{\lambda_{(3,2)} = \frac{hC}{E_3 - E_2}}$$

$$\boldsymbol{A.N} : \lambda_{(3,2)} = \frac{6,62.10^{-34} \times 3.10^{8}}{(-1,51 + 3,4) \times 1,6.10^{-19}}$$

$$\boxed{\lambda_{(3,2)} = 6,57.10^{-7} m}$$

TRAVAUX DIRIGES II



Conseils pratiques :

1. **Modèle atomique de Bohr : Postulats de Bohr.**
2. **Energie atomique.**
3. **Transitions électroniques : absorption et émission.**
4. **Spectre de l'atome d'hydrogène : séries de raies.**
5. **Domaine spectral**

L'ESSENTIEL DU COURS

I – Définitions des notions.

Définis les termes et expressions suivants : Absorption ; Emission ; Transition électronique ; Etat fondamental ; Etat ionisé ; Energie d'ionisation ; Série de raies.

II – Questions à réponses courtes.

Réponds aux questions suivantes :

1°) Pourquoi dit – on que l'énergie de l'atome d'hydrogène est quantifiée ?
2°) Enonce les postulats de BOHR.
3°) A quoi correspondent les états d'énergie $n = 1$; $n = 2$; $n = \infty$?
4°) Au cours d'une transition électronique du niveau $n \rightarrow p$ ($n > p$). Quelle est la transition qui émet le photon de longueur d'onde minimale et celle qui émet le photon de longueur d'onde maximale ?
5°) Quels sont les niveaux de retour d'un atome dans les séries de BALMER et de BRACKETT ?
6°) Choisis parmi les longueurs d'onde suivantes celles qui appartiennent au domaine ultra – violet (U.V) : *653,3nm ; 410,2nm : 387,9nm ; 103nm*.
7°) Donne l'expression de la longueur d'onde de la radiation émise lors d'une désexcitation de l'atome du niveau n vers le niveau p en fonction de E_n ; E_p ; h et C.

III – Questions à alternative vrai ou faux.

Réponds par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

1°) L'énergie d'ionisation est l'énergie qu'il faut fournir à un atome pour le faire passer de l'état fondamental au premier état excité.
2°) La longueur d'onde de la radiation émise lors de la transition de n vers p est l'inverse de celle de la transition de p vers n.
3°) A une énergie maximale correspond une longueur d'onde minimale.
4°) L'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène vaut $-13{,}6eV$.
5°) La longueur d'onde d'une onde lumineuse est proportionnelle à sa fréquence.
6°) La série de Balmer appartient au domaine spectral des radiations infrarouges.
7°) La constante de RYDBERG est donnée par l'expression : $R_H = \frac{E_0}{hC}$.
8°) Selon la théorie de Bohr sur le model atomique, les électrons gravitent autour du noyau en décrivant des trajectoires elliptiques.
9°) Le spectre d'émission de l'atome d'hydrogène est continu.
10°) Le niveau d'énergie $0eV$ correspond à l'atome d'hydrogène dans son état non excité (état fondamental).

IV – Appariement.

Relie un élément – question de la colonne A à un élément – réponse de la colonne B dans le tableau ci – dessous ; *Exemple :* $a_8 = b_{10}$.

Colonne A		Colonne B	
a_1	Energie des différents niveaux de l'atome d'hydrogène	b_1	Absorption
a_2	Energie d'ionisation de l'atome d'hydrogène	b_2	Méga électronvolt
a_3	Série de BALMER	b_3	$E_n = -\frac{E_0}{n^2}$; $E_0 = 13{,}6eV$
a_4	Nombre d'onde	b_4	Longueur d'onde minimale
a_5	Energie atomique maximale	b_5	Retour des atomes excités vers le niveau d'énergie n = 2.
a_6	Unité d'énergie	b_6	E = 13,6eV
a_7	Transition électronique	b_7	$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)$

RESOLUTION DES PROBLEMES

EXERCICE 1 : On donne l'énergie des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène :

$E_n = -\frac{E_0}{n^2}$ avec $E_0 = 13{,}6eV$ et n est un nombre entier qui désigne le niveau d'énergie ($n = 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; ...$).

1°) Calcule les énergies des 6 premiers niveaux.

2°) Montre à partir de cette formule que l'énergie de l'atome d'hydrogène ne peut pas prendre n'importe quelle valeur.

3°) Comment qualifie – t – on l'énergie à cause du fait qu'elle ne peut pas prendre n'importe quelle valeur ?

4°) A quoi correspond :

a) Le niveau de plus basse énergie ;

b) Un niveau d'énergie élevé ?

5°) Calcule l'énergie qu'il faut apporter à l'atome d'hydrogène à l'état fondamental pour l'ioniser. Comment appelle – t – on cette énergie ?

6°) On envoie tour à tour sur un atome d'hydrogène à l'état fondamental :

a) Un rayonnement de longueur d'onde *122nm* ;

b) Un rayonnement de longueur d'onde *420nm*.

Calcule dans chacun des cas l'énergie du rayonnement et dis si le rayonnement sera absorbé.

EXERCICE 2 : L'atome d'hydrogène peut s'exciter à différents niveaux d'énergie dont la relation est :

$E_n = -\frac{E_0}{n^2}$ avec $E_0 = 13{,}6eV$.

Indique si les affirmations suivantes sont exactes ou fausses en justifiant votre réponse éventuellement par calcul.

1°) La valeur de l'énergie de l'atome d'hydrogène au niveau $n = 3$ est de $-2{,}42.10^{-19}J$.

2°) Le spectre d'émission de l'atome d'hydrogène est continu.

3°) L'atome d'hydrogène peut avoir une énergie égale à $-2{,}8eV$.

4°) Le niveau d'énergie *0eV* correspond à l'atome d'hydrogène dans son état non excité (état fondamental).

EXERCICE 3

On donne : $E_n = -\frac{E_0}{n^2}$ avec $E_0 = 13{,}6eV$.

1°) Détermine en *eV*, l'énergie d'un photon permettant le passage de l'atome d'hydrogène de son état fondamental à son troisième état excité.

2°) Quelle est la longueur d'onde de la radiation émise lors du passage de l'atome d'hydrogène de son troisième état excité à son deuxième état excité ?

3°) Déduis – en la série de raies et à quel domaine spectral appartient cette radiation.

EXERCICE 4 : 1°) Un photon a pour longueur d'onde dans le vide $\lambda = 656{,}30nm$. Calcule sa fréquence, son énergie en joule puis en électronvolt.
2°) Un photon a une énergie de *2,55eV*. Calcule son énergie en joules puis sa fréquence. En déduis sa longueur d'onde dans le vide en nanomètre.
3°) Un photon a une fréquence de $6{,}91.10^{14}Hz$. Calcule sa longueur d'onde en nanomètre, son énergie en électronvolt.
4°) De façon générale, montre que la longueur d'onde λ du rayonnement émis et l'énergie du photon correspondant est donnée par la relation :
$\lambda = \dfrac{1241}{E}$, lorsque λ est en nanomètre et E en électron volt.

EXERCICE 5 : Les niveaux d'énergies de l'atome d'hydrogène sont définis par la relation :

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2} \quad avec\ n\ entier\, naturel\ \geq 1$$

1°) Qu'est – ce qu'une absorption et une émission d'un photon ?
2°) Pour un photon de fréquence $\mathcal{V}_{p,n}$ absorbé par un atome lors de la transition de p à n (n > p). Donner l'expression de $\mathcal{V}_{p,n}$ en fonction E_n , E_p et de h.
3°) On considère les niveaux d'énergie partant de p = 2 à n = 4.

a) Etablis en fonction de E_0 et de h l'expression de la fréquence $\mathcal{V}_{4,2}$ émise lors de la désexcitation.
b) Sachant que la longueur d'onde de la radiation émise lors de la transition est $E_4 \longrightarrow E_2$ est $\lambda_{4,2} = 4{,}87.10^{-7}m$, calcule la valeur de E_0 en joule et en électronvolt.

EXERCICE 6 : Les niveaux d'énergie quantifiée de l'atome d'hydrogène sont données par la relation :

$$E_n = -\frac{13{,}6}{n^2} \quad (\text{eV}\ ;\ \ n \geq 1)$$

1°) Quelle est l'énergie d'ionisation d'un atome d'hydrogène ?
2°) Quelle est l'énergie qu'il faut fournir à l'atome d'hydrogène pour l'excité au niveau $n = 2$?
3°) L'atome d'hydrogène préalablement excité au niveau 2 revient à l'état fondamental avec émission d'un photon. Quelle est sa longueur d'onde ?
4°) Etablis la relation littérale donnant la fréquence des ondes lumineuses émises lorsque les atomes d'hydrogènes préalablement excités passent d'un état d'énergie $n > 2$ à l'état d'énergie $p = 2$. Calcule la plus grande longueur d'onde de cette série.

EXERCICE 7 : Les niveaux d'énergies de l'atome d'hydrogène sont donnés par la relation :

$$E_n = -\frac{13{,}6}{n^2}\ (en\ eV)\ \ et\ \ n \geq 1$$

1°) Quelle est l'énergie du niveau fondamental de l'atome d'hydrogène ?
2°) Donne son énergie d'ionisation et la longueur d'onde de la radiation correspondant à cette énergie.
3°) Place sur un diagramme : le niveau d'ionisation (niveau de référence), le niveau fondamental et les trois premiers niveaux excités.
4°) Calcule l'énergie de transition électronique dans l'atome d'hydrogène lors du passage de l'électron du niveau fondamental au premier niveau excité.

EXERCICE 8 : Les énergies des différents niveaux (en eV) de l'atome d'hydrogène sont données par la formule :

$$E_n = -\frac{13{,}6}{n^2}\ ;\ \ n \geq 1$$

1°) Calcule les énergies correspondant à $n = 1$; $n = 2$; $n = 3$; $n = \infty$ et représente le diagramme des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène.
2°) Quelle énergie minimale doit – on fournir à un atome d'hydrogène pour qu'il passe de l'état fondamental à un état excité ? Transcris – la sur le diagramme.
3°) Cette énergie est apportée à l'atome par une radiation lumineuse monochromatique. Calcule sa longueur d'onde. A quel domaine du spectre appartient cette radiation ?
4°) Calcule la longueur d'onde de la radiation susceptible d'ioniser l'atome d'hydrogène ?
On donne : $C = 3.10^8 m.s^{-1}$; $h = 6{,}62.10^{-34} J.s$.

EXERCICE 9 : Les niveaux énergétiques de l'atome d'hydrogène sont donnés par la formule :

$$E_n = -\frac{13{,}6}{n^2} \quad (\text{n} \geq 1)$$

1°) Calcule en *nm* :

a) La longueur d'onde minimale de la série de BALMER ;
b) La longueur d'onde maximale de la série de BALMER ;
c) L'écart $\Delta\lambda$ entre ces deux longueurs d'onde.

2°) On décèle, toujours dans la série de Balmer, une radiation de longueur d'onde $\lambda = 410nm$. A quelle transition correspond – elle ?
3°) On considère un atome d'hydrogène dans son état fondamental. On envoie sur celui – ci des

photons d'énergie $W_1 = 10,2eV$; $W_2 = 12,75eV$ et $W_3 = 13,6eV$.
On constate que tous ces photons sont absorbés. Donne les transitions correspondant à chaque photon.

EXERCICE 10 : Les niveaux d'énergies quantifiées de l'atome d'hydrogène sont donnés par la relation :

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2}\ (en\ eV)\ \ et\ \ n \geq 1$$

1°) Quelle est l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène ?
2°) Quelle énergie faut – il fournir à un atome d'hydrogène pour le faire passer de l'état fondamental au premier état excité ?
3°) L'atome précédemment excité revient à l'état fondamental en émettant un photon de lumière. Calcule la longueur d'onde cette radiation.
4°) On fournit à un atome d'hydrogène à l'état fondamental une énergie $W = 10,8eV$.
Qu'observe – t – on si cette énergie est transférée par un électron ? Par un photon ?
5°) Etablis la relation littérale donnant les longueurs d'onde des radiations lumineuses émises dans la série de PASCHEN, lorsque les atomes d'hydrogène excités au – delà de $n = 3$ retournent à l'état $n = 3$.
On donne : $h = 6,62.10^{-34} J.s$; $C = 3.10^8 m.s^{-1}$;
$1eV = 1,6.10^{-19} J$.

EXERCICE 11 : On détermine les énergies des niveaux de l'atome d'hydrogène par la relation :

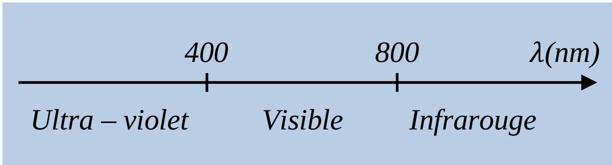
$$E_n = -\frac{13,6}{n^2}\ (en\ eV)\ \ \text{et}\ \ n : \text{entier naturel non nul.}$$

1°) Calcule les énergies des niveaux $n = 1 ; 2 ; 3 ; 4$ et ∞.
2°) Trace le diagramme des niveaux d'énergie.
3°) Un électron d'énergie cinétique E_C vient heurter un atome d'hydrogène à l'état fondamental ; ce dernier s'excite au niveau $n = 3$.
d) Quelle relation vérifie E_C pour qu'il y ait cette transition d'excitation ?
e) Transcris cette transition dans le diagramme.
f) Calcule la vitesse minimale que devrait posséder l'électron au moment du choc.
4°) L'atome précédemment excité perd une certaine quantité d'énergie. L'électron tombe au niveau $n = 2$ tout en émettant un photon de lumière. Calcule la longueur d'onde de ce photon.

EXERCICE 12 : L'énergie des différents niveaux de l'atome d'hydrogène est donnée en électronvolt (eV) par l'expression :

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2}\ (en\ eV)\ et\ \ n \geq 1$$

1°) Calcule les valeurs des quatre premiers niveaux d'énergie.
2°) a) Calcule la longueur d'onde maximale λ_{max} de la radiation que peut absorber l'atome pris dans son état fondamental.
b) A quel domaine spectral cette radiation appartient – elle ?
3°) Calcule la valeur minimale de la longueur d'onde d'un photon capable d'ioniser l'atome dans son état fondamental. Déduis la valeur de la longueur d'onde de la radiation correspondante.
4°) Un électron d'énergie cinétique $E_C = 11eV$ peut – il interagir avec l'atome pris dans son état fondamental ? Si oui, dans quel état se trouvera l'atome ? Calcule la valeur de l'énergie cinétique de l'électron après l'interaction avec l'atome.
On donne : $h = 6,62.10^{-34} J.s$; $C = 3.10^8 m.s^{-1}$;
$1eV = 1,6.10^{-19} J$; $1nm = 10^{-9} m$.
Domaine spectral :



EXERCICE 13 : Les niveaux d'énergies quantifiées de l'atome d'hydrogène sont donnés par la relation :

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2}\ (en\ eV)\ \ \text{et}\ \ n \geq 1$$

1°) Exprime E_n en joule.
2°) a) Calcule les énergies des trois premiers niveaux excités.
b) Un atome d'hydrogène effectue une transition mettant en jeu deux de ces niveaux d'énergie.
- Quelle est la transition qui émet le photon de longueur d'onde minimale ?
- Calcule cette longueur d'onde ;
- A quelle série appartient cette longueur d'onde ?

3°) Au cours de la transition de $E_m \longrightarrow E_p$, l'atome émet une radiation de fréquence $\nu_{m,p}$. Pour la transition de $E_p \longrightarrow E_n$, l'atome émet la radiation de fréquence $\nu_{p,n}$.
a) Compare m et p ; p et n. Justifie.
b) Etablis la relation entre les fréquences $\nu_{m,p}$; $\nu_{p,n}$ et la fréquence $\nu_{m,n}$ de la transition $E_p \longrightarrow E_n$.

c) Vérifie ce résultat dans le cas où $m = 4$; $p = 3$; $n = 2$.

4°) L'atome d'hydrogène dans son état fondamental, reçoit des photons d'énergies respectives : $20{,}4.10^{-19}J$; $16{,}8.10^{-19}J$. Lequel des photons est absorbé ?

EXERCICE 14 : L'énergie du niveau n de l'atome d'hydrogène est donnée par :

$$E_n = -\frac{13{,}6}{n^2}\ (eV)\ ;\ n \geq 1$$

1°) Fais le diagramme classique des cinq premiers niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène.

2°) Les atomes d'hydrogène sont capables d'effectuer les transitions suivantes :

Transition 1 : du niveau $n = 4$ au niveau $n = a$. Le photon émis a pour fréquence $N_1 = 1{,}59.10^{14}Hz$.

Transition 2 : du niveau $n = 3$ au niveau $n = b$. Le photon émis a pour fréquence $N_2 = 2{,}92.10^{15}Hz$.

Détermine :

a) Le niveau final a de la transition 1.
b) Le niveau final b de la transition 2.
c) A quelle série appartient chacune des radiations émises ?

3°) Un atome d'hydrogène effectue la transition du niveau $n = 3$ au niveau $n = 2$.

a) S'agit – il d'une émission ou d'une absorption de photon ?
b) Calcule la fréquence correspondante du photon.

On donne : $h = 6{,}62.10^{-34}J.s$; $C = 3.10^8m.s^{-1}$; $1eV = 1{,}6.10^{-19}J$; $1nm = 10^{-9}m$.

EXERCICE 15 : La transition de l'électron de l'atome d'hydrogène du niveau $n = 3$ vers le niveau $p = 2$ correspond à une radiation dont la longueur d'onde est $\lambda_{(3,2)} = 6{,}57.10^{-7}$m.

1°) Calcule la fréquence $N_{(3,2)}$ et le nombre d'onde $\sigma_{(3,2)} = \frac{1}{\lambda_{(3,2)}}$ de cette radiation.

2°) Déduis – en la valeur numérique de la constante de Rydberg R_H.

3°) Soit la transition entre deux niveaux d'hydrogène correspondant à $\Delta E = 2{,}86eV$.

a) Calcule la longueur d'onde correspondante

b) De quelle transition s'agit – il sachant que le niveau inférieur est $p = 2$.

EXERCICE 16 : Les états d'énergie quantifiés de l'atome d'hydrogène sont définis par la relation :

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2}\ avec\ E_0 = 13{,}6eV\ et\ n = 1\,;2\,;3\,;...$$

1°) Donne la valeur de E_0 en joules.

2°) Un électron heurte à la vitesse v un atome d'hydrogène dans son état fondamental. On admet que toute l'énergie cinétique de l'électron projectile est transférée à l'énergie interne de l'atome et le fait passer de son état fondamental E_1 à l'état excité E_n $(n > 1)$.

a) Montre que le nombre n et la vitesse v de l'électron sont liés par la relation :

$$n^2 = \frac{2E_0}{2E_0 - mv^2}.$$

b) Déduis – en la vitesse minimale de l'électron capable d'ioniser un atome d'hydrogène.

c) L'atome d'hydrogène préalablement excité revient à son état fondamental avec émission d'une onde lumineuse de fréquence $\nu = 3{,}082.10^{15}Hz$.

Détermine le niveau d'excitation n où se trouvait cet atome.

Données : $h = 6{,}62.10^{-34}J.s$; $m_{\bar{e}} = 9{,}1.10^{-31}Kg$; $1eV = 1{,}6.10^{-19}J$.

EXERCICE 17 : On donne :

$$E_n = -\frac{13{,}6}{n^2}$$

Où n est un nombre entier non nul et E_0 une constante.

Des atomes d'hydrogène, préalablement excités, se désexcitent.

1°) Un premier atome se désexcite du niveau d'énergie E_2 au niveau d'énergie E_1. Il émet la radiation de longueur d'onde $\lambda_{(2,1)}$.

a) Exprime, en fonction de E_0 ; l'énergie E_1 et l'énergie E_2.

b) Etablis la relation qui lie ces deux énergies avec la fréquence $\nu_{(2,1)}$ correspondante.

2°) Calcule la valeur de la constante E_0, en joule et en électron – volts.

3°) Un deuxième atome d'hydrogène effectue la transition du niveau E_3 au niveau E_1. Il émet une radiation de longueur d'onde $\lambda_{(3,1)}$. Un troisième atome d'hydrogène effectue une transition du niveau E_3 au niveau E_2, il émet une radiation de longueur d'onde $\lambda_{(3,2)}$.

a) Calcule les valeurs de la longueur d'onde $\lambda_{(3,1)}$ et la fréquence $\nu_{(3,1)}$ correspondante.

b) Vérifie que : $\nu_{(3,1)} = \nu_{(3,2)} + \nu_{(2,1)}$.

EXERCICE 18 : Les niveaux d'énergies de l'atome d'hydrogène sont donnés par la relation :

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2}\ (eV)$$

1°) Calcule les énergies correspondant à $n = 1$; $n = 2$; $n = 3$; $n = 4$ et $n = \infty$ et place – les dans le diagramme des niveaux d'énergie.

2°) Montre que la longueur d'onde des radiations émises par un atome d'hydrogène obéit à la relation empirique :

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad (n > p)$$

où $R_H = 1{,}097.10^7 m^{-1}$.

3°) Le spectre d'émission de l'atome d'hydrogène comporte les radiations de longueur d'onde λ_1 = *102,6nm* ; λ_2 = *121,6nm* ; λ_3 = *486,1nm* ; λ_4 = *656,3nm.*

a) Quelles sont parmi ces radiations, celles qui appartiennent à la série de LYMAN, et celles qui appartiennent à la série da BALMER ?

b) A quelles transitions correspondent les radiations λ_2 et λ_4 ?

EXERCICE 19 : Dans l'atome d'hydrogène, l'énergie du niveau *n* est donnée par :

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2}\ (eV)\ ;\ n \geq 1$$

1°) Calcule les énergies des niveaux correspondant à *n = 1, 2, 3 , 4, 5* et l'infini.

2°) Le spectre de l'atome d'hydrogènes contient des radiations de fréquence : $N_a = 6{,}16.10^{14} Hz$ et $N_b = 6{,}91.10^{14}\ Hz$.

Sachant que, pour ces deux radiations, le niveau final de la transition est *n = 2*.

a) Détermine les numéros *a* et *b* des niveaux initiaux.

b) A quelle série de raies ces radiations appartiennent elles ?

c) Déduis – en la plus courte longueur d'onde de cette série de raie.

EXERCICE 20 : La transition de l'électron de l'atome d'hydrogène du niveau *n = 3* vers le niveau *p = 2* correspond à une radiation dont la longueur d'onde est λ = *656,3nm*.

1°) Calcule la fréquence et le nombre d'onde de cette radiation.

2°) Déduis – en la valeur numérique de la constante de Rydberg.

3°) Une transition possible entre deux niveaux de l'atome *H* correspond à une énergie *E = 2,856 eV*.

Calcule la longueur d'onde et le nombre d'onde correspondant de la radiation émise ; à quel domaine appartient cette radiation ?

4°) La série de LYMAN comporte les transitions vers le niveau *p = 1*.

La série de BALMER comporte les transitions vers le niveau *p = 2*.

Précise les niveaux *p* et *n* correspondant à la radiation étudiée.

EXERCICE 21 : Les différents niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sont donnés par la relation :

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2} = -\frac{2{,}176.10^{-18}}{n^2}$$

$$avec \begin{cases} E_0\ en\ joule\ ; \\ h.C = 1{,}985.10^{-11} J.nm \end{cases}$$

1°) Calcule, en *nm*, les longueurs d'ondes des radiations émises lors des transitions du niveau d'énergie E_3 au niveau d'énergie E_1 (λ_3). Du niveau d'énergie E_2 au niveau E_1 (λ_2). Du niveau d'énergie E_3 au niveau E_2 (λ).

2°) Une ampoule contient de l'hydrogène porté à la température de *2800K*. Les atomes sont dans leur état fondamental ; une lumière constituée des trois radiations λ_3 ; λ_2 et λ traverse ce gaz.

Quelles sont les radiations absorbées ? Justifie.

2°) Sur l'ampoule précédente, on envoie une radiation monochromatique de longueur d'onde λ = *76nm*.

a) Calcule en eV, l'énergie des photons.

b) Montre que l'atome peut être ionisé.

c) Calcule l'énergie cinétique acquise par l'électron.

EXERCICE 22 : Les niveaux énergétiques de l'atome d'hydrogène sont donnés par la formule

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2} \quad n \geq 1$$

1°) Calcule E_1, E_2, E_3, E_4, E_∞.

2°) a) Pour exciter l'atome d'hydrogène au niveau *n = 4*, on lui communique une énergie par choc avec un électron. Calcule l'énergie minimale que l'atome d'hydrogène devrait recevoir pour son excitation ;

b) Déduis – en la longueur d'onde $\lambda_{1,4}$ de cette transition.

c) Quelle est la vitesse de l'électron, sachant que $\Delta E = \frac{1}{2}mv^2$.

3°) a) Etablis la relation littérale donnant la fréquence des photons émis par l'atome

d'hydrogène excité, passant d'un état d'énergie $n > 4$ à $n = 4$.
b) Nomme cette série de raies ;
c) Pour quelle valeur de *n* obtient – on la plus petite fréquence ?

EXERCICE 23 : L'énergie des niveaux de l'atome d'hydrogène est donnée par la relation :

$$E_n = -\frac{13{,}6}{n^2} \quad n \geq 1$$

1°) Représente les cinq premiers niveaux sur un diagramme (échelle : $1cm \rightarrow$ eV).
2°) a) Quelle est l'énergie minimale de l'atome d'hydrogène ?
b) A quoi correspond – elle ?
c) A quoi correspond l'énergie $E = 0eV$?
3°) L'analyse du spectre démission de l'atome d'hydrogène montre la présence des radiations de longueur d'onde $H_\alpha = 656{,}28nm$; $H_\beta = 486{,}13nm$; $H_\gamma = 434{,}05nm$.
Ces radiations sont émises lorsque cet atome passe d'un état excité $p > 2$ à l'état $n = 2$.
4°) a) Donne les valeurs correspondantes de *p*.
b) Montre que les longueurs d'ondes des radiations correspondant à la série de raies étudiées tendent, lorsque *p* tend vers la valeur infini, vers une limite λ_0 que l'on calculera.
c) Dans quel domaine des ondes électromagnétiques se situent les raies de cette série ?
5°) BALMER en 1885, écrivait la loi de détermination des raies de la série de BALMER sous la forme : $\lambda = \lambda_0 \dfrac{p^2}{p^2 - 4}$

a) Retrouve cette loi ;
b) Détermine la valeur de λ_0 dans cette formule de BALMER ;
c) Montre que cette formule de BALMER permet de retrouver le résultat de la question 4-b).

EXERCICE 24 : On attribue aux niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène les valeurs quantifiées suivants la relation :

$$E_n = -\frac{13{,}6}{n^2}(eV) \text{ avec } n \geq 1$$

1°) Qu'appelle – t – on série de raies ?
2°) Calcule pour chaque série de raies de l'atome d'hydrogène la plus grande et la plus petite longueur d'onde émise. Précise la nature de la lumière émise. On se limitera aux trois premières raies.
3°) Pour chacune de ces raies, le nombre d'onde reste inférieur à un nombre d'onde limite donné par les valeurs suivantes :
- ✓ LYMAN : $10{,}96776.10^6 m^{-1}$.
- ✓ BALMER : $2{,}74194.10^6\ m^{-1}$.
- ✓ PASCHEN : $1{,}21864.10^6 m^{-1}$.

a) A quelle variation d'énergie correspondrait, pour l'atome, l'émission des raies limites si ces raies pouvaient être absorbées ?
b) Calcule en eV, les énergies des niveaux correspondant aux trois raies limites données.

EXERCICE 25 :

Dans le but de vérifier la relation $E_n = \dfrac{E_1}{n^2}$, l'énergie relative au niveau *n* quelconque par rapport au niveau 1, on excite l'atome d'hydrogène. Les séries de LYMAN et de BALMER du spectre d'hydrogène sont au cours des transitions quantiques de l'atome respectivement vers le niveau (1) et le niveau (2).
1°) Que représente pour l'atome d'hydrogène les niveaux (1) et (2) ?
2°) Calcule l'énergie du niveau d'ionisation puis déduis – en l'énergie d'ionisation en joules puis en électron – volt. On donne $E_1 = -13{,}599eV$.
3°) Les longueurs d'onde associées aux différentes raies des séries sont : $\lambda_{(2,1)} = 0{,}1216\mu m$; $\lambda_{(3,2)} = 0{,}6465\mu m$; $\lambda_{(4,2)} = 0{,}4863\mu m$.
a) Déduis des résultats ci – dessus, les énergies correspondant aux trois premiers niveaux excités de l'atome d'hydrogène en joule et en *eV*.
b) Vérifie que : $E_n = \dfrac{E_1}{n^2}$.
c) Trace le diagramme des niveaux d'énergie des quatre (4) premiers niveaux puis représente les raies de la série de LYMAN.
On donne : $h = 6{,}6.10^{-34} J.s$; $C = 3.10^8 m.s^{-1}$.

DOMAINE D'ETUDE I : STRUCTURE DE LA MATIERE

OG_3 : CONNAITRE LES PROPRIETES DES REACTIONS NUCLEAIRES

3 LE NOYAU ATOMIQUE.

Les *réactions chimiques* s'expliquent par les *liaisons entre atomes*, ces liaisons s'effectuant au niveau des *électrons périphériques et n'affectent pas du tout les noyaux* des atomes mis en jeu.
A l'opposé, les *réactions nucléaires* sont des réactions faisant intervenir les *noyaux* des atomes.
Nous savons qu'un atome est formé d'un noyau autour duquel gravitent des électrons. C'est le physicien anglais Ernest Rutherford qui mît en évidence le noyau, chargé positivement, *possédant pratiquement toute la masse de l'atome et occupant une très petite place.*

1. Composition du noyau atomique.

Le noyau d'un atome est formé de particules appelées *nucléons* qui sont de deux sortes : les *protons* et les *neutrons*.

- Le proton est une particule de masse $m_p = 1{,}67.10^{-27} Kg = 938 MeV/C^2$, et de charge $q_p = + e = 1{,}6.10^{-19} C$.
- Le neutron, comme l'indique son nom, *ne porte pas de charge électrique* ($q_n = 0$). Sa masse est sensiblement la même que celle du proton : $m_n = 939 MeV/C^2$.

2. Nombre de charge, nombre de masse, représentation d'un nucléide.

- *Le nombre de charge Z d'un atome est le nombre de protons contenus dans son noyau*. Il est égal au numéro atomique puisque dans un atome le nombre de protons est égal au nombre d'électrons.
- *Le nombre de masse A d'un atome est le nombre des nucléons contenus dans un noyau.*

Le nombre de neutron d'un atome est donc :

$$N = A - Z$$

- *Un nucléide est l'ensemble des atomes dont les noyaux ont le même nombre de protons et le même nombre de neutrons, c'est – à – dire même valeur de A et même valeur de Z.*

On représente un nucléide par le symbole : ${}_{Z}^{A}X$
Avec *A : nombre de masse ;*
Z : nombre de charge ;
X : élément chimique.

Exemple : ${}_{1}^{1}H$; ${}_{6}^{12}C$; ${}_{8}^{16}O$; ${}_{92}^{238}U$; ${}_{82}^{206}Pb$

3. Isotopie.

En général, un élément chimique est un mélange de plusieurs nucléides. Ces nucléides sont des isotopes de l'élément considéré.

Définition : *On appelle isotopes d'un élément, les nucléides ayant le même nombre de charge Z mais des nombres de masse A différents.*

Exemple :

- Pour l'hydrogène on a : ${}_{1}^{1}H$; ${}_{1}^{2}H$ (${}_{1}^{2}D$) ; ${}_{1}^{3}H$.
- Pour le carbone on a : ${}_{6}^{12}C$; ${}_{6}^{14}C$.
- Pour l'azote on a : ${}_{7}^{14}N$; ${}_{7}^{15}N$.

Remarque : La masse atomique moyenne de l'élément chimique est :

$$M_{at} = \frac{\sum A_i f_i}{\sum f_i} = \frac{A_1 f_1 + A_2 f_2 + \cdots + A_n f_n}{100}$$

Avec :

A_i : nombres de masse des nucléides isotopes ;
f_i : abondance naturelle ou pourcentage en masse des nucléides.

Exemple : Le chlore est un mélange de deux variétés isotopiques : ${}^{35}_{17}C\ell$ (f_1 = 75%) et ${}^{37}_{17}C\ell$ (f_2 = 25%).
Sa masse moyenne atomique est :

$$M_{at} = \frac{\sum A_i f_i}{\sum f_i} = \frac{A_1 f_1 + A_2 f_2}{100}$$

$$M_{at} = \frac{35 \times 75 + 37 \times 25}{100} = 35{,}5$$

$$\boxed{M_{at} = 35{,}5 g/mol}$$

Conséquences.
Suivant le nombre de masse et le nombre de charge des nucléides, on distingue aussi :

❖ *Les isotones.*

On appelle isotones, des nucléides différents ayant un même nombre de neutrons mais le nombre de charge différent (N = N' ; Z ≠ Z').
Exemple : ${}^{16}_{8}O$; ${}^{15}_{7}N$

❖ *Les isobares.*

On appelle isobares, les nucléides différents ayant le même nombre de masse (A = A').
Exemple : ${}^{14}_{6}C$; ${}^{14}_{7}N$

4. Défaut de masse.

La masse d'un noyau est toujours inférieure à la somme des masses de ses nucléons. La différence entre les deux est le défaut de masse Δm.

$$m_X < Zm_p + (A-Z)m_n$$

Ainsi le défaut de masse est tel que :

$$\boxed{\Delta m = Zm_p + (A-Z)m_n - m_X}$$

Avec *m_p : masse du proton ;*
m_n : masse du neutron ;
m_X : masse du noyau.

Remarque *:* En physique nucléaire est utilisé une autre unité de masse : l'unité de masse atomique dont le symbole est *u*.
L'unité de masse atomique est par definition égale au douzième $(1/_{12})$ de masse d'un atome de carbone 12.

$$1u = \frac{12.10^{-3}}{12 N_A} Kg$$

Soit *$1u = 1{,}66055.10^{-27} Kg$*
Ou encore : *$1g = 6{,}022.10^{23} u$.*
$1u = 1{,}66.10^{-27} Kg = 931{,}5 MeV/C^2$

Les valeurs des masses du proton, du neutron et de l'électron sont alors les suivantes :

Particules	Masse en *u*	Masse en Kg	Masse en MeV/C^2
Proton	1,00727647	$1{,}67265.10^{-27}$	938,280
Neutron	1,008665	$1{,}67496.10^{-27}$	939,573
Electron	0,0005486	$9{,}10953.10^{-27}$	0,511003

5. Energie de liaison du noyau.

D'après la relation d'Einstein $\Delta E = \Delta m.C^2$, *à toute perte de masse Δm correspond une libération d'énergie ΔE*, celle liberée par la formation du noyau, à partir de ses nucléons. C'est l'*énergie de liaison* ou *de cohésion* du noyau, c'est donc aussi *celle qu'il faudrait lui fournir pour séparer ses differents nucléons les uns des autres.*

Définition : *L'énergie de liaison d'un noyau au repos est l'énergie qu'il faut lui fournir pour séparer les nucléons qui le constituent, ceux – ci se trouvant au repos à l'état final.*

L'énergie de liaison d'un noyau est égale à la somme des énergies de masse des nucléons qui le constituent diminuée de son énergie de masse.
Ainsi pour le nucléide ${}^{A}_{Z}X$: $\Delta E = \Delta m.C^2$, soit :

$$\boxed{\Delta E = E_\ell = \left[zm_p + (A-z)m_n - m_X\right].C^2 > 0}$$

Cette énergie, positive, correspond aussi à l'énergie libérée lors de la formation d'un noyau au repos à partir des nucléons initialement au repos et séparés.
Une énergie de liaison est généralement exprimée en MeV (*$1MeV = 1{,}6.10^{-13} J$*) et son calcul est facilité si on exprime les masses en MeV.C^{-2}.
Plus un noyau est lourd, plus son énergie de liaison est grande. Mais cela n'implique pas qu'il soit stable. Ainsi l'énergie de liaison de l'uranium 238 est 1802MeV et celle du fer 56, 492MeV, alors que le fer 56 est plus stable que l'uranium 238.

6. Stabilité du noyau.

Pour comparer les différents noyaux entre eux, et juger de la stabilité d'un nucléide on definit l'*énergie de liaison par nucléon* (ou *énergie de cohésion par nucleon*) $\frac{\Delta E}{A}$.

$$E = \frac{E_\ell}{A} = [zm_p + (A-z)m_n - m_X].\frac{C^2}{A}$$

Ainsi : pour $^{238}_{92}U$, E_ℓ/A = 7,57MeV/nucléon.
pour $^{56}_{26}Fe$, E_ℓ/A = 8,79MeV/nucléon.

Plus cette énergie est grande , plus le noyau est stable .

Note : $E = \frac{E_\ell}{A} \leq 8{,}79MeV/nucléon.$
Un nucléide est d'autant plus stable que son énergie de liaison par nucléon est grande.

L'étude de l'énergie de cohésion par nucléon des nucléides des différents éléments montre qu'*elle est plus faible pour les noyaux légers et lourds que pour les noyaux de nombres de masse moyens*, ce qui explique la grande libération d'énergie dans les réactions de fission et de fusion.

Soit un noyau ^A_ZX. D'après ci qui précède, on a :
$m_{^A_ZX} < Zm_p + (A-Z)m_n$ et
$\Delta E = \left[m_{^A_ZX} - Zm_p - (A-Z)m_n\right].C^2 < 0$

Traçons la courbe $\frac{|\Delta E|}{A} = f(A)$ (figure 1).

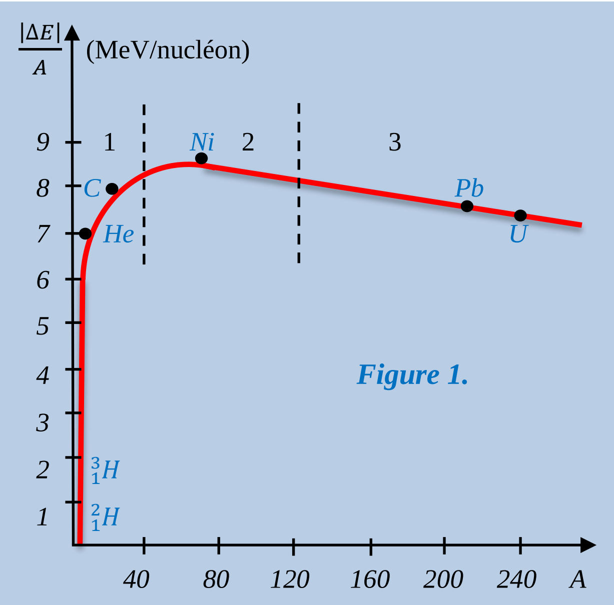


Figure 1.

L'examen de cette courbe montre que :

- Les noyaux les plus stables sont situés aux environs du sommet de la courbe, c'est – à – dire pour *l'énergie de liaison par nucléon maximale*, égale en moyenne à *8,7MeV* (région 2).

- Dans la région 1, on trouve les *noyaux légers* qui peuvent subir le *phénomène de fusion* : deux nucléides de faibles nombres de masse fusionnent pour donner un seul nucléide de nombre de masse plus élevé. Cette réaction *libère une très grande quantité d'énergie nucléaire*. Elle trouve son application dans la *bombe « H »* (bombe à hydrogène) ; dans la nature, elle est à l'origine de l'énergie phénoménale dégagée par les étoiles (entre autre le soleil).

- Dans la région 3 se trouve les *noyaux lourds* qui subissent le *phénomène de fission*. Bombardés par des neutrons, ces noyaux sont capables de se scinder en noyaux plus légers. C'est par exemple le cas de l'uranium 235 qui éclate en deux noyaux différents. Ces réactions de fission *libèrent également une très grande quantité d'énergie* ; elles sont utilisées dans les *réacteurs nucléaires* (centrales nucléaires, bateaux et sous – marins …) et la *bombe atomique* (bombe A).

Exercice d'application

Exercice 1 : Un noyau de lithium *Li* a pour masse *m = 7,0160u*.
1°) Exprime et calcule la perte de masse d'un noyau de lithium au cours de sa formation en unité de masse atomique.
2°) Définis l'énergie de liaison d'un noyau.
Quelle est son expression ?
3°) Calcule en MeV l'énergie libérée lors de la formation d'un noyau de lithium à partir de ses nucléons au repos.
4°) Calcule l'énergie de liaison moyenne par nucléon pour un noyau de lithium.

Corrigé 1.

m_X = 7,0160u. ($^{7}_{3}Li$)

1°) Expression de la perte de masse d'un noyau de lithium au cours de sa formation.

Par définition :

$$\Delta m = Zm_p + (A-Z)m_n - m_X$$

A.N :

$\Delta m = 3 \times 1{,}007276 + (7-3) \times 1{,}008665 - 7{,}0160$

$$\Delta m = 0{,}0405u$$

2°) *L'énergie de liaison d'un noyau au repos est l'énergie qu'il faut lui fournir pour séparer les nucléons qui le constituent, ceux – ci se trouvant au repos à l'état final.*

$$\Delta E = E_\ell = [zm_p + (A-z)m_n - m_X].C^2$$

3°) Calcul de l'énergie libérée lors de la formation d'un noyau de lithium en MeV.

$$\Delta E = \Delta m.C^2$$

$A.N\colon\ \Delta E = E_\ell = (0{,}0405) \times 931{,}5MeV.C^{-2}.C^2$

$$E_\ell = 37{,}73MeV$$

4°) Calcul de l'énergie de liaison moyenne par nucléon pour un noyau de lithium.

$$E = \frac{E_\ell}{A}$$

$$A.N\colon\ E = \frac{E_\ell}{A} = \frac{37{,}73}{7}$$

$$E = 5{,}39MeV/\text{nucléon}$$

Exercice 2 : 1°) Quelle est l'énergie de liaison par nucléon d'un noyau du nucléide $^{20}_{10}Ne$? La masse de ce noyau est égale à *19,9867u*.
2°) Calcule, en MeV, l'énergie de liaison par nucléon d'un noyau d'uranium *235*. La masse de ce noyau est *234,9942u*.
3°) L'énergie de liaison du nucléide $^{56}_{26}Fe$ est E_{ℓ_1} = *492,24MeV* ; celle du nucléide $^{142}_{58}Ce$ est E_{ℓ_2}= *1199,9MeV*. Détermine le nucléide le plus stable des deux.

Corrigé 2.

m_X = 19,9867u. ($^{20}_{10}Ne$)

1°) Energie de liaison par nucléon d'un noyau du nucléide $^{20}_{10}Ne$

Par définition : $E = \dfrac{E_\ell}{A} = \dfrac{\Delta m.C^2}{A}$

D'où : $$E = \frac{[zm_p + (A-z)m_n - m_X].C^2}{A}$$

$$\mathbf{A.N}: E = \frac{1}{20}[10 \times 1{,}007276 + (20-10) \times 1{,}008665 - 19{,}9867] \times 931{,}5$$

$$E = 8{,}04MeV/\text{nucléon}$$

2°) m_X = 234,9942u. ($^{235}_{92}U$).

Je calcule, en MeV, l'énergie de liaison par nucléon d'un noyau d'uranium 235.

$$E = \frac{[zm_p + (A-z)m_n - m_X].C^2}{A}$$

$$\mathbf{A.N}: E = \frac{1}{235}[92 \times 1{,}007276 + (235-92) \times 1{,}008665 - 234{,}9942] \times 931{,}5$$

$$E = 7{,}58MeV/\text{nucléon}$$

3°) $^{56}_{26}Fe$: E_{ℓ_1} = 492,24MeV ;
$^{142}_{58}Ce$: E_{ℓ_2} = 1199,9MeV.

Je détermine le nucléide le plus stable des deux.

Pour cela, je détermine les *énergies de liaison par nucléon* des deux nucliéides.

- ✓ Pour $^{56}_{26}Fe$:

$$E_1 = \frac{E_\ell}{A} = \frac{492{,}24}{56} = 8{,}79MeV/\text{nucléon}$$

- ✓ Pour $^{142}_{58}Ce$:

$$E_2 = \frac{E_\ell}{A} = \frac{492{,}24}{56} = 8{,}45MeV/\text{nucléon}$$

$E_1 > E_2$: donc le nucléide $^{56}_{26}Fe$ est plus stable que le nucléide $^{142}_{58}Ce$

DOMAINE D'ETUDE I : STRUCTURE DE LA MATIERE

OG_3 : CONNAITRE LES PROPRIETES DES REACTIONS NUCLEAIRES.

4 LES REACTIONS NUCLEAIRES.

Les *réactions nucléaires* sont des réactions qui concernent les noyaux des atomes.
Il existe deux catégories de noyaux atomiques :

- Ceux qui ne subissent aucune transformation au cours du temps ; ce sont des *noyaux stables* ;
- Ceux qui émettent un rayonnement à un moment donné de leur existence ; ce sont des *noyaux instables* ou *noyaux radioactifs*.

On distingue deux types de réactions nucléaires :

- ✓ *Les réactions nucléaires spontanées ou radioactivité et ;*
- ✓ *Les réactions nucléaires provoquées.*

I. Réactions nucléaires spontanées : Radioactivité.

I.1. Définition : *La radioactivité est la transformation spontanée d'un noyau atomique en un noyau différent, au cours de laquelle il émet un rayonnement.*

Suivant la nature de la particule émise, on distingue :

- ♣ La *radioactivité α* : avec émission d'un *noyau d'hélium* ${}_{2}^{4}He$ (particule α) avec des vitesses de l'ordre de 20.000Km.s^{-1}.
- ♣ La *radioactivité β^-* : avec émission d'un *électron* ${}_{-1}^{0}e$ à des vitesses très grandes, de l'ordre de 280.000Km.s^{-1}.
- ♣ La *radioactivité β^+* : avec émission d'un *positon* ou *positron* ${}_{+1}^{0}e$ avec la même vitesse que l'électron.

Ces radioactivités s'accompagnent toujours d'un *rayonnement d'un photon* ${}_{0}^{0}\gamma$, lors de la désexcitation des noyaux obtenus à l'état excité.

A côté de ces radioactivités, on distingue aussi les captures de particules telles que :

- La *capture électronique* : avec capture d'un *électron* ${}_{-1}^{0}e$;
- La *capture protonique* : avec capture d'un *proton* ${}_{1}^{1}p$;
- La *capture neutronique* : avec capture d'un *neutron* ${}_{0}^{1}n$.

I.2. Propriétés des réactions nucléaires.

Toutes les réactions nucléaires vérifient les lois de conservation suivantes :

- *Conservation du nombre de masse A ;*
- *Conservation du nombre de charge Z ;*
- *Conservation du vecteur quantité de mouvement $\vec{p}$;*
- *Conservation de l'énergie cinétique E_C.*

I.3. Equations des réactions nucléaires.

Soit ${}_{Z}^{A}X$, le noyau radioactif appelé noyau père, il se désintègre en un noyau fils ${}_{Z'}^{A'}Y$ en émettant une particule ${}_{Z''}^{A''}P$, suivant l'équation :

$${}_{Z}^{A}X \longrightarrow {}_{Z'}^{A'}Y + {}_{Z''}^{A''}P$$

D'après la conservation du nombre de masse et du nombre de charge on a :

$$\begin{cases} A = A' + A'' \\ Z = Z' + Z'' \end{cases}$$

a) Radioactivité α.

Dans une radioactivité α il y a émission d'un noyau d'hélium (${}_{2}^{4}He$) encore appelé *particule alpha*.

$$\boxed{{}_{Z}^{A}X \longrightarrow {}_{Z-2}^{A-4}Y + {}_{2}^{4}He}$$

Exemples :

$${}_{92}^{238}U \longrightarrow {}_{90}^{234}Th + {}_{2}^{4}He$$

$$^{210}_{84}Po \longrightarrow \; ^{206}_{82}Pb + \; ^{4}_{2}He$$

Bilan énergétique.

D'après la loi de conservation de l'énergie, l'énergie de masse perdue :

$$\Delta m.C^2 = (m_X - m_Y - m_\alpha).C^2$$

est égale à l'énergie E libérée.

Ainsi :

$$\boxed{E = (m_X - m_Y - m_\alpha)C^2}$$

Cette énergie doit se retrouver sous forme d'énergie cinétique acquise par la particule et le noyau fils.

$$\boxed{E = E_{C_Y} + E_{C_\alpha}}$$

On peut alors écrire :

$$\boxed{E_{C_Y} + E_{C_\alpha} = (m_X - m_Y - m_\alpha).C^2}$$

Conservation du vecteur quantité de mouvement.

- Avant la désintégration, on a :

$$\vec{p}_{av} = \vec{p}_X = m_X\vec{v}_X = \vec{0}$$

Car le noyau père X est immobile : $\vec{v}_X = \vec{0}$.

- Après la désintégration, on a :

$$\vec{p}_{ap} = \vec{p}_Y + \vec{p}_\alpha = m_Y\vec{v}_Y + m_\alpha\vec{v}_\alpha$$

D'après la conservation du vecteur quantité de mouvement, on a :

$$\vec{p}_{av} = \vec{p}_{ap} \Rightarrow m_Y\vec{v}_Y + m_\alpha\vec{v}_\alpha = \vec{0}$$

$$\Rightarrow m_Y\vec{v}_Y = -m_\alpha\vec{v}_\alpha$$

Soit : $m_Y v_Y = m_\alpha v_\alpha \quad (1)$

D'où :

$$\boxed{v_Y = \frac{m_\alpha v_\alpha}{m_Y}}$$

C'est la *vitesse de recul* du noyau fils Y.

Comparons les énergies cinétiques E_{C_α} de la particule α et E_{C_Y} du noyau fils Y formé (énergie cinétique de recul) :

$$E_{C_Y} = \frac{1}{2}m_Y v_Y^2 \quad \text{et} \quad E_{C_\alpha} = \frac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2$$

$$\frac{E_{C_Y}}{E_{C_\alpha}} = \frac{m_Y v_Y^2}{m_\alpha v_\alpha^2} = \frac{m_\alpha}{m_Y}$$

En tenant compte de la relation (1), ainsi :

$$\boxed{\frac{E_{C_Y}}{E_{C_\alpha}} = \frac{m_\alpha}{m_Y}}$$

L'énergie cinétique se partage en raison inverse des masses. La radioactivité α affectant les noyaux lourds :

$$m_Y \gg m_\alpha \quad \text{et} \quad \boxed{E_{C_Y} \ll E_{C_\alpha}}$$

L'énergie cinétique de la particule α est nettement supérieure à celle du noyau fils Y.

Dans la pratique, on négligera E_{C_Y} devant E_{C_α}.

b) Radioactivité β^-.

Dans la radioactivité β^- il y a <u>émission</u> d'un électron $_{-1}^{0}e$.

$$\boxed{^{A}_{Z}X \longrightarrow \; ^{A}_{Z+1}Y + \; ^{0}_{-1}e + \bar{\nu}}$$

Exemples :

$$^{210}_{83}Bi \longrightarrow \; ^{210}_{84}Po + \; ^{0}_{-1}e + \bar{\nu}$$

$$^{60}_{27}Co \longrightarrow \; ^{60}_{28}Ni + \; ^{0}_{-1}e + \bar{\nu}$$

Note : Le noyau père n'étant pas constitué des électrons, il faut admettre que *celui qui est émis provient de la transformation d'un neutron noté $^{1}_{0}n$ en un proton $^{1}_{1}p$ et un électron.*

$$^{1}_{0}n \longrightarrow \; ^{1}_{1}p + \; ^{0}_{-1}e$$

Dans la classification périodique, le noyau fils Y est situé une case après celle du noyau père X.

c) Radioactivité β^+.

Dans la radioactivité β^+ il y a émission d'un positon $_{+1}^{0}e$.

$$\boxed{^{A}_{Z}X \longrightarrow \; ^{A}_{Z-1}Y + \; ^{0}_{+1}e + \nu}$$

Exemples :

$$^{19}_{10}Ne \longrightarrow \; ^{19}_{9}F + \; ^{0}_{+1}e + \nu$$

$$^{80}_{35}Br \longrightarrow \; ^{80}_{34}Se + \; ^{0}_{+1}e + \nu$$

$$^{14}_{7}N \longrightarrow \; ^{14}_{6}C + \; ^{0}_{+1}e + \nu$$

Note : Tout comme les électrons, les positons émis ne se trouvent pas dans le noyau. Pour interpréter le phénomène, *il faut admettre qu'un proton du noyau se transforme en un neutron et un positon*.

$$^{1}_{1}p \longrightarrow {}^{1}_{0}n + {}^{0}_{+1}e$$

Dans la classification périodique, le noyau fils Y est situé une case avant celle du noyau père X.

Remarque : Le neutrino ν et l'antineutrino $\bar{\nu}$ sont des particules neutres, de masse extrêmement faible (pratiquement nulle) se déplaçant à la vitesse de la lumière. Leur énergie est celle qui manque au bilan de la désintégration nucléaire qui leur donne naissance.

d) Rayonnement γ.

Ce sont des radiations électromagnétiques de très courtes longueurs d'onde λ, émises lors du passage d'un noyau d'atome d'un état excité à un état fondamental.

$$\boxed{^{A}_{Z}Y^{*} \longrightarrow {}^{A}_{Z}Y + {}^{0}_{0}\gamma}$$

Les radioactivités α, β^{-} et β^{+} s'accompagne toujours de l'émission d'un rayonnement γ car les *noyaux fils obtenus après désintégration se trouvent à l'état excité*.

Exemples :

- Pour une radioactivité α

$$^{210}_{84}Po \longrightarrow {}^{206}_{82}Pb^{*} + {}^{4}_{2}He$$

$$^{206}_{82}Pb^{*} \longrightarrow {}^{206}_{82}Pb + {}^{0}_{0}\gamma$$

- Pour une radioactivité β^{-}

$$^{32}_{15}P \longrightarrow {}^{32}_{16}S^{*} + {}^{0}_{-1}e + \bar{\nu}$$

$$^{32}_{16}S^{*} \longrightarrow {}^{32}_{16}S + {}^{0}_{0}\gamma$$

I.4. Loi de décroissance radioactive et période radioactive.

I.4.1. Loi de décroissance radioactive.

Soit un échantillon de noyaux radioactifs, contenant initialement N_0 *noyaux*.

Après le début de la désintégration, le nombre de noyaux N non désintégrés contenus dans l'échantillon, décroit exponentiellement avec le temps.

Soit l'équation :

	X	$\longrightarrow$	Y	$+$	P
à t = 0	N_0		*0*		
à t ≠ 0	N		N'		

La variation élémentaire dN du nombre de noyaux d'un nucléide pendant une durée dt est :

$$dN = -\lambda N dt \Rightarrow \frac{dN}{N} = -\lambda dt$$

En intégrant membre à membre cette expression, on a :

$$\int \frac{dN}{N} = -\lambda \int dt \Rightarrow lnN = -\lambda t + cte$$

à $t = 0 \Rightarrow lnN_0 = cte$

Ainsi : $lnN = -\lambda t + lnN_0$

$$\Rightarrow ln\frac{N}{N_0} = -\lambda t \Rightarrow \frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t}$$

D'où :

$$\boxed{N = N_0 e^{-\lambda t}}$$

C'est la *loi de la décroissance radioactive*, où λ est la *constante radioactive du nucléide*.

Sachant que : $N = \frac{m\mathcal{N}}{A}$

On trouve aussi : $\boxed{m = m_0 e^{-\lambda t}}$

Avec *m_0 : masse initiale de l'échantillon ;*
m : masse de l'échantillon à l'instant t.

I.4.2. Période radioactive.

Définition : *La période radioactive ou « demi – vie » d'un radionucléide est la durée T nécessaire pour que la moitié des noyaux initialement présents dans l'échantillon se désintègrent.*

Sachant que : $N = N_0 e^{-\lambda t}$

à $t = T$, $N = \frac{N_0}{2}$

$$\Rightarrow \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T} \Rightarrow e^{-\lambda T} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\lambda T = -ln2$$

D'où :

$$\boxed{T = \frac{ln2}{\lambda}} \quad (s)$$

Remarque : A cet instant où $t = T$;

$\Rightarrow \quad m = m_0 e^{-\lambda T} = m_0 e^{-\frac{ln2}{T}.T} = m_0 \frac{1}{e^{ln2}}$

D'où :

$$\boxed{m = \frac{m_0}{2}}$$

A un instant *t* donné, on a :

$$\boxed{m = \frac{m_0}{2^{t/T}}}$$

Le nombre de noyaux *N'* désintégrés à l'instant *t* est tel que :

$$N_0 = N + N' \Rightarrow N' = N_0 - N$$

$$\Rightarrow N' = N_0 - N_0 e^{-\lambda t}$$

D'où :

$$\boxed{N' = N_0(1 - e^{-\lambda t})}$$

Par analogie, on trouve la masse :

$$\boxed{m' = m_0(1 - e^{-\lambda t})}$$

I.4.3. Activité radioactive.

Définition : *On appelle activité radioactive d'un échantillon de radionucléides, le nombre de désintégration par unité de temps.*

$$\mathcal{A} = -\frac{dN}{dt} = \frac{\lambda N dt}{dt} = \lambda N$$

Car $dN = -\lambda N dt$

D'où :

$$\boxed{\mathcal{A} = \lambda N}$$

Remarque :

Sachant que : $\mathcal{A} = \lambda N$ avec $N = N_0 e^{-\lambda t}$

$\Rightarrow \quad \mathcal{A} = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$

En posant $\mathcal{A}_0 = \lambda N_0$ (activité à l'instant $t = 0$), d'où :

$$\boxed{\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 e^{-\lambda t}}$$

$\mathcal{A}$ s'exprime en *Becquerel* (Bq) correspondant à 1 désintégration/seconde ou en *Curie* (Ci), avec :

$$1Ci = 3{,}70.10^{10} Bq.$$

II. Réactions nucléaires provoquées.

Les radioactivités α, β^- et β^+ sont des réactions nucléaires spontanées, c'est – à – dire se produisant sans aucune action extérieure.

Les physiciens ont découvert qu'*il était possible de provoquer des réactions nucléaires en bombardant des noyaux (appelés pour cela noyaux – cibles) à l'aide des particules*. Selon la nature des noyaux – cibles et des particules, ainsi que l'énergie de ces dernières, on obtient différents types de réactions.

II.1. Les transmutations.

Lorsqu'une particule entre en collision avec un noyau, il peut apparaitre un noyau nouveau : c'est la *transmutation.*

Exemple : Bombardement de $A\ell$ par une particule α.

$${}^{4}_{2}He + {}^{27}_{13}A\ell \longrightarrow {}^{30}_{15}P + {}^{1}_{0}n$$

C'est la première *transmutation provoquée*, réalisée par Frédéric et Irène Joliot – Curie.

Ce fut la découverte de la *radioactivité artificielle.*

Le phosphore 30 obtenu au cours de la réaction est radioactif β^+.

Le plus souvent, les particules utilisées pour provoquer des transmutations sont des neutrons.

La plupart des radionucléides utilisées dans le traitement des cancers ou comme traceurs radioactifs sont obtenus par transmutation provoquée.

II.2. Les fissions nucléaires.

II.2.1. Définition : *Une fission nucléaire est la rupture d'un noyau sous l'action d'un neutron de faible énergie cinétique (de l'ordre de 0,1eV).*

Elle se rencontre chez les nucléides lourds, dits *fissiles*, car les noyaux peuvent éclater sous l'action des neutrons.

Exemple : La fission de l'uranium 235.

$${}^{1}_{0}n + {}^{235}_{92}U \longrightarrow {}^{94}_{38}Sr + {}^{140}_{54}Xe + 2{}^{1}_{0}n$$

$${}^{1}_{0}n + {}^{235}_{92}U \longrightarrow {}^{95}_{39}Y + {}^{138}_{53}I + 3{}^{1}_{0}n$$

On peut schématiser la réaction de fission par la figure 1 ci – dessous :

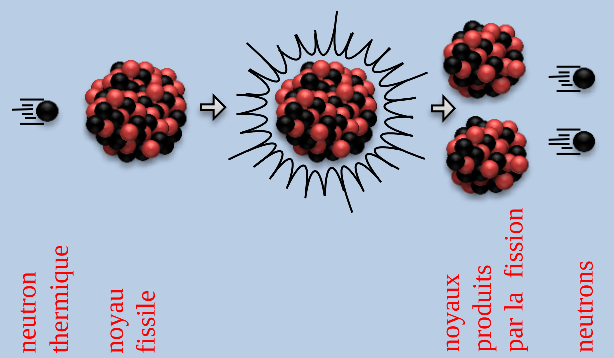


Figure 1.

Les noyaux formés sont généralement radioactifs β^-. Les *réactions de fission sont très exoénergétiques car elles libèrent de grandes quantités d'énergie*.
Les neutrons émis au cours de la fission peuvent, à leur tour provoquer la fission d'autres noyaux. On obtient alors une *réaction en chaîne*.
Si la réaction en chaîne n'est pas contrôlée, une énergie énorme est libérée en quelques microsecondes ; il y a explosion brutale. C'est ce qui se passe dans la *bombe A*, appelée communément *bombe atomique*.
On peut contrôler la réaction en ralentissant les neutrons émis, par l'eau, le graphite… de sorte qu'un nombre déterminé de neutrons sert à produire une nouvelle fission. Les réactions en chaîne contrôlées ont lieu dans les réacteurs nucléaires.

II.2.2. Nucléides fissiles et nucléides fertiles.

Un nucléide est dit *fissile* si un neutron thermique peut provoquer la fission du noyau. Quatre nucléides fissiles sont actuellement utilisés :

$$^{235}_{92}U \;;\; ^{233}_{92}U \;;\; ^{239}_{94}Pu \;;\; ^{241}_{94}Pu.$$

Parmi eux, l'uranium 235 ($^{235}_{92}U$) est le *seul nucléide naturel*. L'élément uranium naturel en contient 0,71% ; le reste 99,29%, est de l'uranium 238 (en négligeant l'uranium 234).
Les nucléides fissiles artificiels s'obtiennent par bombardement neutronique à partir de nucléides naturels relativement abondants dans la nature, par exemple l'uranium 238 ou le thorium 232. De tels nucléides naturels qui peuvent *engendrer des nucléides fissiles* sous l'action de neutrons sont dits *fertiles*.

II.3. La fusion nucléaire.

Définition : *Une fusion nucléaire est la réaction au cours de laquelle deux nucléides légers fusionnent pour donner un nucléide plus lourd.*

Exemples :

- ✓ La fusion du deutérium avec le tritium.

$$^{2}_{1}H + ^{3}_{1}H \longrightarrow ^{4}_{2}He + ^{1}_{0}n$$

- ✓ La fusion de deux deutériums.

$$^{2}_{1}H + ^{2}_{1}H \longrightarrow ^{3}_{1}H + ^{1}_{1}H$$

On peut schématiser la réaction de fusion par la figure 2 ci – dessous :

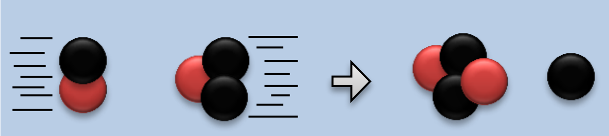


Figure 2.

C'est une schématisation simple de la fusion :

$$^{2}_{1}H + ^{3}_{1}H \longrightarrow ^{4}_{2}He + ^{1}_{0}n$$

La réaction de fusion est difficile à réaliser car elle implique le rapprochement de deux noyaux, donc de particules positives. Il faut donc à ces noyaux une *très grande énergie* (de l'ordre de 200KeV), d'où la nécessité d'une température de l'ordre de 10^8K. C'est pourquoi les réactions de fusion sont appelées *réactions thermonucléaires.*
A cette température la matière est sous forme de *plasma*, gaz ionisé formé de noyaux et d'électrons.

Les réactions de fusion libèrent des énergies considérables. Ainsi l'*énergie libérée par le soleil et, d'une façon générale par le étoiles, provient des réactions de fusions nucléaires*.
Comme exemple de réactions produites dans le soleil, nous pouvons citer :

$$^{1}_{1}H + ^{1}_{1}H \longrightarrow ^{2}_{1}H + ^{0}_{+1}e + \nu$$

$$^{2}_{1}H + ^{1}_{1}H \longrightarrow ^{3}_{2}He + \gamma$$

$$^{3}_{2}He + ^{3}_{2}He \longrightarrow ^{4}_{2}He + 2\,^{1}_{1}H$$

Ce processus s'appelle le *cycle du soleil* ou *cycle proton – proton.*

Dans les *bombes H* (bombes à hydrogène) il y a fusion entre le *deutérium* et le *tritium.*

$${}_{1}^{2}H + {}_{1}^{3}H \longrightarrow {}_{2}^{4}He + {}_{0}^{1}n$$

Pour porter le mélange à haute température, on utilise une petite bombe A.

II.4. Energie libérée au cours d'une réaction nucléaire provoquée.

Les réactions de fission et de fusion sont très exoénergétiques, les énergies moyennes de liaisons par nucléon des noyaux formés étant supérieures à celles des noyaux qui ont subi la fission ou la fusion.

Au cours d'une réaction nucléaire provoquée, l'énergie libérée est telle que :

$$\Delta E = \Delta E_1 - \Delta E_2$$

Avec :

ΔE_1 : énergie de liaison des noyaux avant la réaction.

ΔE_2 : énergie de liaison des noyaux après la réaction.

Soit :

$$\boxed{\Delta E = \sum E_{\ell_i}(av) - \sum E_{\ell_i}(ap)}$$

Exemple : Pour la réaction :

$${}_{0}^{1}n + {}_{92}^{235}U \longrightarrow {}_{38}^{94}Sr + {}_{54}^{140}Xe + 2{}_{0}^{1}n$$

$$\boxed{\Delta E = E_\ell(U) - E_\ell(Sr) - E_\ell(Xe)}$$

Sachant que :

$E = \frac{E_\ell}{A}$: énergie de liaison par nucléon ;

$$\Rightarrow E_\ell = E.A$$

D'où : $\boxed{\Delta E = \sum E_i A_i(av) - \sum E_i A_i(ap)}$

Application :

Après plusieurs émissions β^- des noyaux formés, l'un des modes de fission de l'uranium 235 donne finalement :

$${}_{0}^{1}n + {}_{92}^{235}U \longrightarrow {}_{58}^{140}Ce + {}_{41}^{93}Nb + 3{}_{0}^{1}n + 7{}_{-1}^{0}e$$

L'énergie de liaison par nucléon est de 7,7MeV pour ${}^{235}U$, de 8,45MeV pour ${}^{140}Ce$ et de 8,7MeV pour ${}^{93}Nb$.

Détermine approximativement l'énergie libérée au cours de cette réaction.

Réponse : L'énergie libérée au cours de cette fission est :

$$\Delta E = \sum E_i A_i(av) - \sum E_i A_i(ap)$$

$$\boxed{\Delta E = E_1 A_1 - E_2 A_2 - E_3 A_3}$$

A.N : $\Delta E = 7{,}7 \times 235 - 8{,}45 \times 140 - 8{,}7 \times 93$

$$\boxed{\Delta E = -182{,}6 MeV}$$

La réaction est exothermique et produit 2 neutrons supplémentaires.

Notons que l'énergie libérée vaut *environ 0.8MeV par unité de masse atomique, soit 8.10^{13}J.Kg^{-1}, 2 millions de fois plus que* l'essence brûlant dans le dioxygène de l'air.

III. Applications et conséquences liées aux propriétés radioactives des éléments.

III.1. Applications des radionucléides.

Parmi les nombreuses utilisations des radionucléides, citons :

- ✓ *La datation au carbone 14 ;*
- ✓ *La radiothérapie ;*
- ✓ *Les traceurs radioactifs ;*
- ✓ *La production de l'énergie électrique.*

III.1.1. La datation au carbone 14.

Le carbone 14 est radioactif β^-. Il est produit de façon permanente dans l'atmosphère. Dans le dioxyde de carbone, les atomes de carbone 14 et de carbone 12 sont dans *un rapport constant*. Les êtres vivants, animaux et végétaux, absorbent les deux isotopes qui restent dans les mêmes proportions tant que les organismes sont vivants. *Après la mort, la quantité de carbone 14 diminue à cause de sa radioactivité*. En déterminant les quantités de carbone 14 et de carbone 12 contenues dans un échantillon de vestiges d'organismes vivant, il est possible de trouver l'âge de la mort de l'être vivant d'où provient l'échantillon, la période du carbone 14 étant connue.

On a ainsi pu déterminer l'âge de tombes égyptiennes en analysant un échantillon de bois du cercueil. Il en est de même de manuscrits faits en papyrus.

III.1.2. La radiothérapie.

Le rayonnement γ émis par un corps radioactif, essentiellement celui du *cobalt 60*, permet de détruire les cellules localisées dans la *tumeur cancéreuse*, c'est ainsi que le rayonnement γ est utilisé dans le *traitement des cancers*.

III.1.3. Les traceurs radioactifs.

En remplaçant partiellement un isotope stable d'un élément par un isotope radioactif, on ne change pas les propriétés chimiques et on peut suivre la trace de ce dernier grâce au rayonnement émis.
Les applications sont nombreuses :

- ✓ *en chimie* : étude du *mécanisme réactionnel* et de la *cinétique* de certaines réactions ;
- ✓ *en médecine* : étude du *fonctionnement de certains organes* comme la *glande thyroïde* ;
- ✓ *en biologie* : étude des *mécanismes de biosynthèse*.

III.1.4. La production de l'énergie électrique.

Les réactions de fission sont très *exoénergétiques*, les énergies moyennes de liaison par nucléon des noyaux formés étant supérieures à celle du noyau qui subit la fission. Un atome d'*uranium 235 libère environ 200MeV.*
Il est possible d'utiliser l'uranium 235 comme source importante d'énergie. Encore faut – il qu'une grande quantité d'uranium subisse la fission. Celle – ci est produite par une réaction en chaîne.
Dans les centrales nucléaires, on utilise l'uranium enrichi en uranium 235 comme combustible. Grâce à certaines conditions permettant d'auto – entretenir la réaction en chaîne dans un réacteur nucléaire, on obtient des *réactions contrôlées*, qui produisent une importante *énergie calorifique*, qui est transformée, grâce à des dispositifs adéquats, en *énergie électrique*, destinée à la consommation. Outre l'uranium 235, on peut aussi utiliser l'*uranium naturel sous forme d'oxyde de* ^{239}Pu*, l'uranium enrichi et thorium, uranium et plutonium.*
Les trois quarts environ de l'électricité fabriquée actuellement en France sont d'origine nucléaire.

III.2. Conséquences liées aux propriétés radioactives des éléments.

III.2.1. Absorption des particules et du rayonnement.

Ejectés du noyau qui se désintègre, les particules et les photons, dont l'énergie est de l'ordre du MeV, peuvent traverser la matière inerte ou vivante. Ces projectiles entrent en collision avec les atomes ou les molécules qui constituent la matière traversée.
Au cours des chocs, *la perte d'énergie cinétique provoque des ionisations ou même des réactions nucléaires.*
On peut définir un *parcours moyen* d'un ensemble de particules dans une substance donnée comme la distance moyenne parcourue par ces particules avant d'être arrêtées. Ce parcours moyen dépend de la nature des particules, de leur énergie cinétique initiale et de la substance traversée.

1. *Les particules* α sont facilement arrêtées. On admet qu'une feuille de papier suffit à les arrêter.
2. Légères, *les particules* β peuvent subir de nombreuses collisions successives avant d'être arrêtées ; elles *sont plus pénétrantes* que les particules α, mais *moins ionisantes*. Leur parcours moyen est inversement proportionnel à la masse volumique de la substance traversée. Une feuille d'aluminium de 5mm d'épaisseur permet d'arrêter les particules β, dont l'énergie cinétique est inférieure à 2MeV.
3. *Les rayons* γ sont *très pénétrants*. Plutôt qu'un parcours moyen, on détermine, pour un matériau donné, l'*épaisseur de demi – absorption*, c'est – à – dire l'épaisseur qui absorbe, en moyenne, la moitié des photons incidents.
4. *Les neutrons* sont *très pénétrants*. Ils interagissent plus ou moins avec les noyaux selon la substance traversée, provoquant d'autres réactions nucléaires et par conséquent des ionisations en chaîne. Ils sont plus facilement arrêtés par des chocs avec des noyaux légers (noyaux d'hydrogène, par exemple) que par des chocs avec des noyaux lourds.

III.2.2. Les effets physiologiques des rayonnements.

L'homme a, de tout temps, été soumis à des rayonnements naturels (rayons cosmiques, radioactivité du sol…) sans danger pour sa santé.
L'utilisation actuelle de substances radioactives (médecine, centrales nucléaires, bombes…) modifie les données du problème. En effet, *l'irradiation des tissus humains peut entraîner la mort.*
Il convient donc de définir dans quelles conditions des précautions doivent être prises.
On appelle dose absorbée, l'énergie cédée au tissu par le rayonnement par unité de masse. Elle s'exprime en *gray* ($1J.Kg^{-1}$) ou en *rad* ($0{,}01J.Kg^{-1}$).
Les effets des différents rayonnements ne sont pas identiques, à énergie égale. On définit donc l'*équivalent – dose* qui est égal à la dose multipliée

par un facteur de qualité qui dépend du rayonnement reçu. L'équivalent – dose s'exprime en *rem*.

Les effets des radiations sont cumulatifs. Un homme qui reçoit moins de *100 rems*, ne présentera aucun trouble. Celui qui en reçoit plus de *900* mourra à plus ou moins longue échéance.

Une personne habitant au voisinage d'une centrale nucléaire reçoit environ *3mrem/an*. S'il vit jusqu'à 80 ans, il aura reçu *240mrem = 0,24rem*, à peu près la même dose que celui qui porte constamment une montre à cadran lumineux, ce qui est infime.

III.2.3. Les effets biologiques des rayonnements.

En traversant la matière vivante, *les particules α et β et les rayonnements γ provoquent des ionisations, ou des excitations, d'atomes, susceptibles d'entraîner des réactions chimiques anormales*.

Quelques heures ou même quelques années après une exposition au rayonnement, des réactions secondaires peuvent apparaître ; des *macromolécules fondamentales* au niveau cellulaire (*ARN, ADN*) sont touchées. Des *altérations morphologiques* sont observées, notamment des *effets génétiques* ; des cellules sont détruites ou leur processus de division altéré, provoquant ainsi dans certains cas la *stérilité*.

Lors de retombées radioactives, les nucléides sont absorbés par les plantes et se retrouvent ainsi dans la chaîne alimentaire. Les aliments ingérés véhiculent des radionucléides émetteurs α, β ou γ, qui peuvent alors atteindre n'importe quelle cellule de l'organisme. C'est la raison du grand émoi suscité par la catastrophe de Tchernobyl du 25 avril 1986, où des quantités importantes d'isotopes radioactifs (iode, cobalt, césium, …) furent émises puis véhiculées par les vents sur une grande partie de l'Europe occidentale.

IV. Familles radioactives.

La radioactivité entraîne la transformation d'un nucléide en un autre nucléide. Si ce dernier est lui – même radioactif, il se transforme à son tour, et ainsi de suite, jusqu'à ce que le nucléide obtenu ne soit plus radioactif mais stable. L'ensemble des nucléides issus d'un même noyau père a reçu le nom de *famille radioactive*, la filiation radioactive étant le processus de transformation. Les éléments radioactifs naturels ont été classé en quatre familles : *famille du neptunium, famille de l'uranium – radium, famille de l'actinium, famille du thorium.*

Exercices d'application

Exercice 1 : 1°) Qu'appelle – t – on radioactivité naturelle d'un élément ?

2°) La désintégration radioactive du polonium *210* peut s'écrire sous la forme :

$$^{210}_{84}Po \longrightarrow {}^{a}_{b}X + {}^{206}_{82}Pb$$

Trouve *a*, *b* et *X*. De quel type de radioactivité s'agit – il ?

3°) a) Calcule en MeV l'énergie libérée lors de la désintégration d'un noyau de polonium *210*.

b) Calcule l'énergie cinétique en MeV ainsi que la vitesse de la particule *X* émise.

4°) Sachant que la demi – vie du polonium *210* est de *138* jours, calcule le temps au bout duquel le quart d'une masse initiale m_0 de polonium *210* se sera désintégrée.

5°) Si à $t = 0$, $m_0 = 0{,}1mg$ de polonium *210*, détermine l'activité de cet échantillon aux instants $t = 0$ et $t = T$.

On donne : *M(Po) = 209,9360u ; M(Pb) = 205,9296u ; M(He) = 4,00150u.*

Corrigé 1.

1°) *On appelle radioactivité, la transformation spontanée d'un noyau atomique en un noyau différent, au cours de laquelle il émet un rayonnement.*

2°) On donne : $^{210}_{84}Po \longrightarrow {}^{a}_{b}X + {}^{206}_{82}Pb$

Trouvons a, b et X.

D'après la *conservation du nombre de masse A et du nombre de charge Z*, on a :

$$\begin{cases} 210 = a + 206 \\ 84 = b + 82 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 210 - 206 = 4 \\ b = 84 - 82 = 2 \end{cases}$$

D'où :

$$\boxed{a = 4 \ ; \ b = 2 \ \ et \ \ X = He}$$

L'équation devient alors :

$$\boxed{^{210}_{84}Po \longrightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{206}_{82}Pb}$$

Il s'agit de la *radioactivité α* puisqu'il y a émission d'un *noyau d'hélium $^{4}_{2}He$.*

3°) a) Calcul de l'énergie libérée en MeV lors de la désintégration d'un noyau de polonium 210.

L'énergie libérée est telle que :

$$\boxed{E = (m_X - m_Y - m_\alpha)C^2}$$

$$E = (209{,}9360 - 205{,}9296 - 4{,}00150) \times 931{,}5$$

$$\boxed{E = 4{,}56MeV}$$

b) Calcul de l'énergie cinétique en MeV ainsi que la vitesse de la particule X émise.

L'énergie libérée se retrouve sous forme d'*énergie cinétique* acquise par la particule et le noyau fils.

En effet :

$$E = E_{C_Y} + E_{C_\alpha} \Rightarrow E = \frac{1}{2}m_Y v_Y^2 + E_{C_\alpha}$$

Trouvons la vitesse v_Y du noyau fils en utilisant la *conservation du vecteur quantité de mouvement*.

- Avant la désintégration, on a :

$\vec{p}_{av} = \vec{p}_X = m_X\vec{v}_X = \vec{0}$ car $\vec{v}_X = \vec{0}$

- Après la désintégration, on a :

$\vec{p}_{ap} = \vec{p}_Y + \vec{p}_\alpha = m_Y\vec{v}_Y + m_\alpha\vec{v}_\alpha$

D'après la *conservation du vecteur quantité de mouvement*, on a :

$\vec{p}_{av} = \vec{p}_{ap} \Rightarrow m_Y\vec{v}_Y + m_\alpha\vec{v}_\alpha = \vec{0}$

$\Rightarrow m_Y\vec{v}_Y = -m_\alpha\vec{v}_\alpha$

Soit : $m_Y v_Y = m_\alpha v_\alpha \Rightarrow v_Y = \dfrac{m_\alpha v_\alpha}{m_Y}$

Ainsi : $E = \dfrac{1}{2}m_Y\left(\dfrac{m_\alpha v_\alpha}{m_Y}\right)^2 + E_{C_\alpha}$

$$E = \frac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2.\frac{m_\alpha}{m_Y} + E_{C_\alpha} = E_{C_\alpha}.\frac{m_\alpha}{m_Y} + E_{C_\alpha}$$

$$E = E_{C_\alpha}\left(1 + \frac{m_\alpha}{m_Y}\right) \Rightarrow \boxed{E_{C_\alpha} = \frac{E}{1 + \frac{m_\alpha}{m_Y}}}$$

$$\textbf{A.N} : E_{C_\alpha} = \frac{4{,}56}{1 + \frac{4{,}00150}{205{,}9296}} = 4{,}47$$

$$\boxed{E_{C_\alpha} = 4{,}47MeV}$$

La vitesse de la particule *X* émise est telle que :

$$E_{C_\alpha} = \frac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2 \Rightarrow \boxed{v_\alpha = \sqrt{\frac{2E_{C_\alpha}}{m_\alpha}}}$$

$$\textbf{A.N}: v_\alpha = \sqrt{\frac{2 \times 4{,}47 \times 1{,}6.10^{-13}}{4{,}0015 \times 1{,}66.10^{-27}}} = 1{,}46.10^7$$

$$\boxed{v_\alpha = 1{,}46.10^7 m/s}$$

4°) T = 138j,

Calcul du temps au bout duquel le quart d'une masse initiale m_0 de polonium 210 se sera désintégrée.

Par définition : $m = m_0e^{-\lambda t}$

A l'instant t $m' = \frac{1}{4}m_0$

Or $m_0 = m + m' \Rightarrow m = m_0 - m'$

$$\Rightarrow m = m_0 - \frac{1}{4}m_0 \Rightarrow m = \frac{3}{4}m_0$$

Ainsi : $\dfrac{3}{4}m_0 = m_0e^{-\lambda t} \Rightarrow e^{-\lambda t} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow -\lambda t = ln\dfrac{3}{4}$

D'où : $\boxed{t = \dfrac{T}{ln2}ln\dfrac{4}{3}}$ *avec* $\lambda = \dfrac{ln2}{T}$

$\textbf{A.N} : t = \dfrac{138}{ln2}ln\dfrac{4}{3} \Rightarrow \boxed{t = 57{,}27j}$

5°) à t = 0, m_0 = 0,1mg

Activité de cet échantillon aux instants t = 0 et t = T.

Par définition : $\mathcal{A} = \lambda N$

- ✓ A l'instant $t = 0$ on a : $\mathcal{A}_0 = \lambda N_0$

or $\dfrac{N_0}{m_0} = \dfrac{\mathcal{N}_A}{M} \Rightarrow N_0 = \dfrac{\mathcal{N}_A.m_0}{M}$

Ainsi : $\mathcal{A}_0 = \dfrac{\lambda.\mathcal{N}_A.m_0}{M}$ *avec* $\lambda = \dfrac{ln2}{T}$

D'où :

$$\boxed{\mathcal{A}_0 = \frac{ln2.\mathcal{N}_A.m_0}{T.M}}$$

$$\textbf{A.N} : \mathcal{A}_0 = \frac{ln2 \times 6{,}02.10^{23} \times 10^{-4}}{138 \times 24 \times 3600 \times 210} = 1{,}67.10^{10}$$

$$\boxed{\mathcal{A}_0 = 1{,}67.10^{10}Bq}$$

- ✓ à l'instant $t = T$:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0e^{-\lambda t} = \mathcal{A}_0e^{-\frac{ln2}{T}\times T} = \frac{\mathcal{A}_0}{e^{ln2}} = \frac{\mathcal{A}_0}{2}$$

D'où :

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{\mathcal{A}_0}{2}}$$

$$\textbf{A.N} : \mathcal{A} = \frac{1{,}67.10^{10}}{2} = 8{,}33.10^9$$

$$\boxed{\mathcal{A} = 8{,}33.10^9Bq}$$

Exercice 2 : La glande thyroïde produit des hormones essentielles à différentes fonctions de l'organisme à partir de l'iode alimentaire. Pour vérifier la forme ou le fonctionnement de cette glande, on procède à une scintigraphie thyroïdienne en utilisant les isotopes 131 ($^{131}_{53}I$) ou 123 ($^{123}_{53}I$) de l'iode.

Pour cette scintigraphie, un patient ingère une masse $m_0 = 10^{-6}g$ de l'isotope $^{131}_{53}I$.

1°) Calcule le nombre N_0 de noyaux radioactifs initialement présents dans la dose ingérée.

2°) L'isotope $^{131}_{53}I$ est radioactif β^-. Ecris l'équation de la désintégration.

3°) La demi – vie ou la période de l'isotope $^{131}_{53}I$ vaut $T = 8{,}0$ jours.

a) Après avoir défini l'activité radioactive, établis l'expression de l'activité A à la date t en fonction de T, A_0 et t.

b) Calcule l'activité A_0 de l'échantillon $^{131}_{53}I$ à l'instant initial.

c) Calcule l'activité A à l'instant où l'examen est pratique, c'est – à – dire 5 heures après l'ingestion de l'iode radioactif $^{131}_{53}I$.

On donne : $N_A = 6{,}02.10^{23} mol^{-1}$; $M(^{131}_{53}I) = 131 g/mol$.

Extrait du tableau périodique : $_{51}Sb$; $_{52}Te$; $_{53}I$; $_{54}Xe$; $_{55}Cs$.

Corrigé 2.

$m_0 = 10^{-6}g$

1°) Je Calcule le nombre N_0 de noyaux radioactifs initialement présents dans la dose ingérée.

Par proportion : $\frac{N_0}{m_0} = \frac{\mathcal{N}}{A} \Rightarrow \boxed{N_0 = \frac{m_0 \mathcal{N}}{A}}$

$$\boldsymbol{A.N} : N_0 = \frac{10^{-6} \times 6{,}02.10^{23}}{131} = 4{,}6.10^{15}$$

$$\boxed{N_0 = 4{,}6.10^{15} noyaux}$$

2°) J'écris l'équation de désintégration.

Elle est de la forme :

$$^{131}_{53}I \longrightarrow {}^{A}_{Z}X + {}^{0}_{-1}e + \bar{\nu}$$

D'après la *conservation du nombre de masse A et du nombre de charge Z*, on a :

$$\begin{cases} 131 = A + 0 \\ 53 = Z - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 131 \\ Z = 54 \end{cases}$$

L'équation devient alors :

$$\boxed{^{131}_{53}I \longrightarrow {}^{A}_{Z}Xe + {}^{0}_{-1}e + \bar{\nu}}$$

3°) T = 8,0 jours.

a) Définition : *On appelle activité radioactive d'un échantillon de radionucléides, le nombre de désintégration par unité de temps.*

J'établis l'expression de l'activité A à la date t en fonction de T, A_0 et t.

D'après la loi de décroissance radioactive, on a : $N = N_0 e^{-\lambda t}$

$Or\ \mathcal{A} = \lambda N \Rightarrow \mathcal{A} = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$

En posant $\mathcal{A}_0 = \lambda N_0$ (activité à l'instant t = 0), d'où :

$$\boxed{\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 e^{-\lambda t}}$$

b) Je calcule l'activité A_0 de l'échantillon $^{131}_{53}I$ à l'instant initial.

✓ A l'instant $t = 0$ on a : $\mathcal{A}_0 = \lambda N_0$

or $\frac{N_0}{m_0} = \frac{\mathcal{N}_A}{M} \Rightarrow N_0 = \frac{\mathcal{N}_A . m_0}{M}$

Ainsi : $\mathcal{A}_0 = \frac{\lambda . \mathcal{N}_A . m_0}{M}$ $\quad avec\ \lambda = \frac{ln2}{T}$

D'où :

$$\boxed{\mathcal{A}_0 = \frac{ln2 . \mathcal{N}_A . m_0}{T.M}}$$

$$\boldsymbol{A.N} : \mathcal{A}_0 = \frac{ln2 \times 6{,}02.10^{23} \times 10^{-6}}{8{,}0 \times 24 \times 3600 \times 131} = 4{,}61.10^9$$

$$\boxed{\mathcal{A}_0 = 4{,}61.10^9 Bq}$$

c) Je calcule l'activité A de l'échantillon $^{131}_{53}I$ à l'instant t = 5 heures.

à l'instant $t = 5\ heures$:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 e^{-\lambda t} = \mathcal{A}_0 e^{-\frac{ln2}{T} \times t} = 4{,}61.10^9 e^{-\frac{ln2}{8 \times 24} \times 5}$$

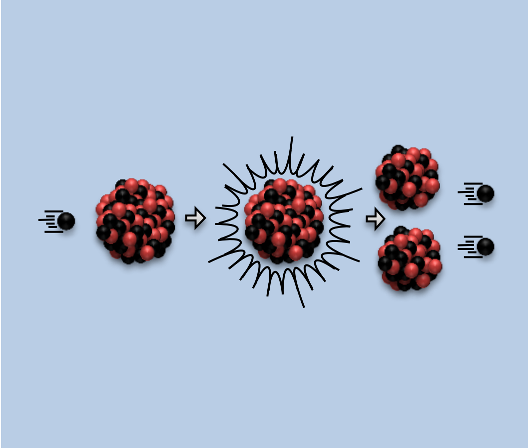
D'où :

$$\boxed{\mathcal{A} = 4{,}53.10^9 Bq}$$

TRAVAUX DIRIGES III

Conseils pratiques :

1. **Composition d'un noyau atomique.**
2. **Energie de liaison par nucléon d'un nucléide.**
3. **Réactions nucléaires spontanées et provoquées.**
4. **Energie libérée au cours d'une réaction nucléaire.**
5. **Loi de décroissance radioactive.**
6. **Activité d'un radionucléide.**



L'ESSENTIEL DU COURS

I – Définitions des notions.

Définis les termes et expressions suivants : Nucléons, Nucléide, Isotopes d'un élément, Energie de liaison, Energie de liaison par nucléon, Radioactivité, Période radioactive, Transmutation, Fission et Fusion nucléaire.

II – Questions à réponses courtes.

Réponds aux questions suivantes :

1°) Pourquoi les nucléides ^{235}U et ^{239}Pu sont – ils dits fissiles ?

2°) Les réactions nucléaires dans les étoiles sont – elles dues à des réactions de fusion ou de fission ?

3°) Pourquoi les radioactivités α, β^- et β^+ s'accompagnent généralement d'une émission d'un rayonnement γ ?

4°) Sous quelle forme se présente l'énergie libérée lors d'une désintégration radioactive d'un nucléide ?

5°) Ecris l'équation de la première réaction nucléaire provoquée réalisée par Irène et Frédéric – Joliot Curie.

6°) Explique l'origine de l'électron expulsé lors de la radioactivité β^-, étant donné que le noyau initial ne contient pas d'électrons.

III – Questions à alternative vrai ou faux.

Réponds par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

1°) Plus un noyau est stable, plus l'énergie de liaison par nucléon est élevée.

2°) L'énergie de liaison par nucléon est la plus grande pour les noyaux les plus légers.

3°) L'énergie moyenne de liaison par nucléon des noyaux les plus stables est de l'ordre de 8MeV.

4°) Les nucléides $^{135}_{53}X$ et $^{135}_{55}X'$ sont des isotopes.

5°) Dans une réaction nucléaire, seul le nombre de charges se conserve.

6°) Dans une désintégration β^-, le nombre de charges du noyau fils augmente d'une unité.

7°) La radioactivité α consiste en une émission d'un ion hélium.

8°) L'émission de photon γ ne s'observe que dans la radioactivité α.

9°) La radioactivité β^+ s'observe généralement avec des nucléides artificiels.

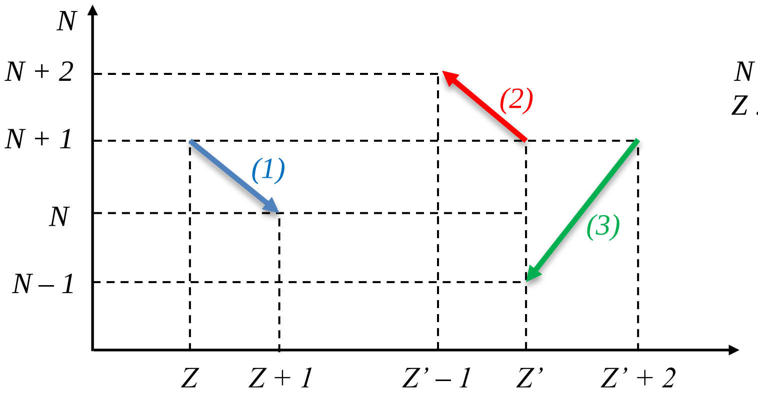
10°) La radioactivité β^- est due à l'émission d'un électron par les couches profondes d'un atome.

11°) L'activité d'une substance radioactive augmente au cours du temps.

12°) La radioactivité α se produit avec les noyaux lourds.

IV – Identification des réactions nucléaires.

Indique sur le diagramme les trois types de radioactivité α, β^+ et β^-.



N : Nombre de neutrons
Z : Nombre de protons

V – Equations des réactions nucléaires.

Complète les réactions suivantes :

1°) Noyaux émetteurs α : $^{210}_{84}Po \rightarrow ... + {}^{...}_{...}Pb$

$^{...}_{...}Th \rightarrow ... + {}^{219}_{88}Ra$

2°) Noyaux émetteurs β^- : $^{14}_{6}C \rightarrow {}^{...}_{...}B + {}^{0}_{-1}e + \bar{\nu}$

$^{...}_{...}P \rightarrow {}^{32}_{16}S + ... + \bar{\nu}$

$^{56}_{...}Mn \rightarrow {}^{...}_{26}... + {}^{...}_{...}... + \bar{\nu}$

3°) Noyaux émetteurs β^+ : $^{12}_{7}N \rightarrow {}^{...}_{...}C + {}^{...}_{...}e + \nu$

$^{...}_{...}Cd \rightarrow {}^{107}_{47}Ag + {}^{...}_{...}... + \nu$

VI – Réarrangement.

Ordonne le texte suivant qui est écrit en désordre.

est une réaction / de nombre de masse élevé / au cours de laquelle / un nucléide / fusionnent pour donner / au faible nombre de masse / Une fusion nucléaire / deux nucléides.

VII – Texte à trous.

Ecris le texte suivant en complétant les mots manquants :

Les réactions nucléaires concernent les …(1) …des atomes. Ces noyaux peuvent être classés en deux catégories : les noyaux stables et les noyaux …(2) …. Seuls les nucléides dits instables, c'est – à – dire ceux possédant une …(3)… énergie de liaison par …(4)… sont capables de se …(5) … spontanément pour se transformer en d'autres noyaux avec émission des particules : c'est la ...(6) …. On distingue la radioactivité α, β^- et β^+, celles – ci s'accompagnent généralement d'un …(7)… γ, car les nucléides fils obtenus se trouvent souvent à l'état …(8)…. Bombardés par des particules de faible énergie, les …(9)… par exemple, les noyaux lourds subissent la réaction de …(10)… pour donner des nucléides plus légers. C'est le cas des noyaux $^{235}_{92}U$ et $^{241}_{94}Pu$ par exemple, qui sont dits …(11)…. Au cours des réactions nucléaires, le nombre de noyaux contenus dans un échantillon de radionucléides …(12)… exponentiellement avec le temps. Au bout d'une ...(13)…, il ne reste plus que la moitié du nombre initial de noyaux. Le nombre de …(14)… par seconde d'un échantillon de radionucléides s'exprime en …(15)… ou en Curies : c'est l'…(16)… radioactive.

RESOLUTION DES PROBLEMES

N.B : Dans tous les exercices, on prendra :

Masse du proton : $m_p = 1{,}007276u = 938{,}28MeV/C^2$

Masse du neutron : $m_n = 1{,}008665u = 939{,}57MeV/C^2$

Masse de l'électron : m_e = 0,000549u = 0,51MeV/C^2
1u = 1,66.10^{-27}Kg = 931,5MeV/C^2 ; 1eV = 1,6.10^{-19}J et $\mathcal{N}$ = 6,02.$10^{23}$$mol^{-1}$

Noyaux atomiques.

EXERCICE 1 : Complète le tableau ci – après :

Nucléide	${}^{35}_{17}C\ell$				${}^{241}_{94}Pu$					${}^{94}_{38}Sr$
Elément		*La*		*Si*				*P*		
Nombre de nucléons		148	14	28			4		222	
Nombre de protons		57				92	2	15	86	
Nombre de neutrons			8			143		15		

EXERCICE 2 : On rappelle qu'un noyau d'hélium contient deux protons et deux neutrons.
Calcule le défaut de masse du noyau d'hélium et son énergie de cohésion en MeV.

EXERCICE 3 : La masse de l'atome ${}^{16}_{8}O$ vaut *15,995u.*
1°) Calcule la masse du noyau correspondant et conclus.
2°) Calcule l'énergie de liaison par nucléon du noyau ${}^{16}_{8}O$.

EXERCICE 4 : Un noyau de lithium Li a pour masse *m = 7,0160u.*
1°) Exprime et calcule la perte de masse d'un noyau de lithium au cours de sa formation en unité de masse atomique.
2°) Définis l'énergie de liaison d'un noyau. Quelle est son expression ?
3°) Calcule en MeV l'énergie libérée lors de la formation d'un noyau de lithium à partir de ses nucléons au repos.
4°) Calcule l'énergie de liaison moyenne par nucléon pour un noyau de lithium.

EXERCICE 5 **:** 1°) Quelle est la valeur d'une unité de masse atomique (on partira de la définition et établira sa valeur en *Kg*)
2°) Calcule le défaut de masse du nucléide d'uranium ${}^{235}_{92}U$
Déduis – en l'énergie de cohésion de ce nucléide (énergie de liaison).
Quelle énergie serait libérée par la fission de *1mg* d'uranium *235* ? On donne :
- ✓ masse de l'uranium 235 : m_u = *234,9942u ;*
- ✓ nombre d'Avogadro : N_A = 6,02.$10^{23}mol^{-1}$.

EXERCICE 6 : L'énergie de liaison par nucléon du noyau O est égale à *7,981MeV.*
1°) Calcule l'énergie de liaison du noyau O.
2°) a) Exprime l'énergie de liaison en fonction de la perte de masse d'un noyau.
b) Déduis – en la masse du noyau O en unité de masse atomique.

EXERCICE 7 : 1°) Calcule le défaut de masse du nucléide ${}^{235}_{92}U$. Déduis – en l'énergie de liaison de ce nucléide.
2°) Quelle serait l'énergie libérée par la fission de 2mg d'uranium ?
On donne : masse de l'uranium 235 : m_U = *234,9942u.*

EXERCICE 8 : On considère les noyaux ci – après : ${}^{226}_{88}Ra$; ${}^{7}_{3}Li$; ${}^{14}_{7}N$.
1°) Donne la composition de chaque noyau.
2°) Définis puis calcule l'énergie de liaison de chaque noyau. Peut – on à partir des énergies de liaison dire quel est le noyau le plus stable ?
3°) Calcule pour chaque noyau l'énergie de liaison par nucléon. Classe ces nucléides par ordre de stabilité décroissant.
On donne : $m({}^{226}Ra)$ = *225,97712u ;*
$m({}^{7}Li)$ = *7,0158u ;* $m({}^{14}N)$ = *14,0031u.*

EXERCICE 9 : On donne les masses des atomes correspondant aux nucléides suivants :
$M({}^{16}_{8}O)$ = *15,9994u ;* $M({}^{15}_{8}O)$ = *15,0030u ;*
$M({}^{14}_{7}N)$ = *14,003u.*
1°) Calcule, en MeV, les énergies de liaison par nucléon des trois nucléides. On tiendra compte de la masse des électrons.

2°) Quelle énergie faut – il pour extraire un proton de $^{16}_{8}O$?
3°) Quelle énergie faut – il pour extraire un neutron de $^{16}_{8}O$?

EXERCICE 10 : On considère deux variétés suivantes de l'élément Uranium $^{235}_{92}U$ et $^{238}_{92}U$
1°) a) Que représente les nombres qui figurent à gauche du symbole *U* ?
b) Indique la composition des noyaux des deux variétés d'uranium.
c) Que peut – on dire des propriétés chimiques de ces deux variétés d'uranium ? Pourquoi ?
2°) Rappelle la définition de l'énergie de liaison d'un noyau atomique.
3) Calcule pour chaque variété d'uranium
a) le défaut de masse ;
b) l'énergie de liaison en MeV ;
c) l'énergie de liaison par nucléon.
4) L'uranium naturel est un mélange contenant *99,29%* de l'uranium *238* pour seulement *0,71%* d'uranium *235*. Calcule en unité de masse atomique la masse d'un atome de l'élément uranium.
On donne :
- ✓ masse du noyau uranium 235 : m_1 = *234,9942u ;*
- ✓ masse du noyau uranium 238 : m_2 = *238,0508u.*
- ✓ *1u = 931,5 MeV/*c^2 *= 1,66.*10^{-27}*Kg.*

EXERCICE 11 : 1°) Le cuivre naturel est un mélange de deux isotopes contenant *34* et *36* neutron respectivement. Le premier isotope constitue *69%* du mélange. Trouve la masse atomique du cuivre naturel. On donne *Z = 29*.
2°) L'oxygène naturel présente 3 variétés isotopiques de nombres de masse *A, A'* et *A''*, dont les pourcentages respectifs sont *99,76%, 0,04%* et *0,20%. A, A'* et *A''* sont des nombres en progression arithmétique de raison 1.
a) Détermine les nombres de masses *A, A'* et *A''* ;
b) Donne les structures des nucléides représentatifs des isotopes.
On donne : *Z = 8 et* M_{at} *= 16,0044g/mol*.

Réactions nucléaires.

EXERCICE 12 : Le polonium $^{210}_{84}Po$, noyau instable, subit une désintégration α en donnant un noyau de plomb (Pb) dans son état fondamental.
1°) Calcule en joule, l'énergie de liaison du noyau de polonium.
2°) Ecris l'équation de la réaction de désintégration en précisant les nombres de masse et de charge du noyau fils Pb.
3°) Calcule en MeV, l'énergie libérée lors de la désintégration d'un noyau de polonium en utilisant les données suivantes :
m_{Po} *= 209,9369u ;* m_{Pb} *= 205,9296u ;*
m_{He} *= 4,0015u*
4°) La période du nucléide $^{210}_{84}Po$ est *T = 138* jours.
a) Défini la demi – vie ou période d'un nucléide ;
b) Un échantillon de polonium 210 a une masse initiale m_0 *= 20g*. Calcule le nombre de noyaux de polonium 210 correspondant ;
c) Montre que la masse de polonium à la date *t* peut s'écrire $m = m_0 e^{-\frac{ln2}{T}t}$;
d) Calcule la masse de polonium disparu au bout de *414* jours.

EXERCICE 13 : Lors de la catastrophe de Tchernobyl, du césium *134* et du césium *137* ont été libérée dans l'atmosphère.
1°) Le césium *137* est radioactif β^-. Ecris les lois de conservation intervenant dans cette réaction et l'équation bilan de désintégration, en précisant les produits formés.
2°) La période du césium *134* est *T = 2ans*. Déduis – en la constante radioactive λ. Au bout de combien de temps *99%* du césium *134* libéré auront disparu ?
Même question pour le césium *137*, dont la période est *30ans*.

EXERCICE 14 : Le potassium $^{40}_{19}K$ est radioactif, émetteur beta plus, avec une période radioactive de *T = 1,5.*10^9 années.
1°) Ecris l'équation de la désintégration radioactive.
2°) Un échantillon d'obsidienne (roche volcanique) de *10g*, contient : *3%* en masse de potassium, *0,012%* (en masse) du potassium est sous forme du radio – isotope potassium *40*.
Quelle est l'activité de cet échantillon ?
Au bout de combien de temps *80%* de noyaux se désintègrent – ils ?

EXERCICE 15 : Une source radioactive contient *1mg* de polonium $^{210}_{84}Po$. Elle émet des particules alpha avec formation de noyaux de plomb stables (*Pb*).
1°) Ecris l'équation de cette désintégration nucléaire.
2°) Calcule le nombre de noyaux de polonium contenus dans la masse m_0 = *1mg* ainsi que son activité radioactive.

3°) a) Calcule en *MeV* l'énergie libérée lors de la désintégration d'un noyau de polonium 210.

b) Calcule en joules l'énergie libérée par la source en *276* jours.

On donne:

période du polonium : *T = 138* jours ;

masse du noyau de polonium : m_{P_o}= *209,9368u* ;

masse du noyau de plomb : m_{P_b}= *205,9295u* ;

masse de la particule alpha : m_α = *4,0015u ;*

nombre d'Avogadro : $N_A = 6{,}02.10^{23}\ mol^{-1}$.

EXERCICE 16 : L'isotope *210* de bismuth Bi est émetteur beta moins.

1°) Ecris l'équation de sa désintégration. On donne les numéros atomiques : *Pb*(Z = 82) ; *Bi*(Z = 83) ; *Po*(Z = 84).

2°) Calcule, en *MeV*, la valeur de l'énergie libérée au cours de cette désintégration ; on donne:

masse du noyau émetteur : *210,05088u* ;

masse du noyau fils : *210,0462u* ; 1*u* = 931,5 MeV/c^2.

3°) Un échantillon de bismuth *210* a la masse m_0= *2mg* à l'instant $t = 0$; sa periode est égale a *5* jours. Calcule sa masse à l'instant :

- ✓ $t =\ 4$ jours ;
- ✓ $t = 10$ jours.

EXERCICE 17 : 1°) On considère les noyaux $^{238}_{92}U$ et $^{206}_{82}Pb$

Calcule, pour chacun de ces noyaux, l'énergie de liaison moyenne par nucléon en *MeV* par nucléon ; Quel est donc le noyau le plus stable ?

2°) L'uranium *238* subit plusieurs désintégrations successives de type alpha et beta moins et se transforme en plomb *206*.

Ecris l'équation de la transformation globale et détermine le nombre des particules alpha et beta moins émises.

3°) On s'intéresse à la première désintégration de l'uranium *238*. Il s'agit d'une désintégration alpha. Ecris l'équation de la réaction nucléaire correspondant à cette désintégration. Quel est le noyau formé ?

On donne : m_U = *238,086 u* ; m_{Pb} = *205,9295 u* ; *Ra*(Z = 88) ; *Ac*(Z = 89) ; *Th*(Z = 90) ; *Pa*(Z = 91) ; *Np*(Z = 93) ; *Pu*(Z = 94).

EXERCICE 18 : Le césium $^{139}_{53}Cs$ est radioactif beta moins. On obtient un noyau de baryum (*Ba*). La durée de la demi – vie du césium est *T = 7* minutes.

1°) Ecris l'équation de la réaction nucléaire.

2°) Détermine la constante radioactive λ de cette réaction.

3°) Quel est le temps au bout duquel $1/100$ des noyaux présents à $t = 0$ restera – t – il ?

Calcule l'activité de ce noyau à cet instant si la masse de césium restant est égale à *1g*.

On donne : M_{Cs} = *139g/mol* ; N_A= *6,02*. $10^{23} mol^{-1}$.

EXERCICE 19 : L'américium est un émetteur α. Le noyau fils correspondant est le neptunium (Np).

1°) Ecris en le justifiant, l'équation bilan de la désintégration d'un noyau $^{241}_{95}Am$.

2°) a) Calcule, en MeV puis en joule, l'énergie libérée au cours de cette réaction ;

On donne : m_α = *4,00260u ;* m_{Am} = *241,05682u ;* m_{Np} = *237,04817u.*

b) Dis sous quelle forme se retrouve cette énergie si le noyau fils est obtenu à l'état fondamental.

c) La désintégration s'accompagne d'un rayonnement γ.

- ➢ Explique ce phénomène ;
- ➢ La somme des énergies cinétiques Ec_α de la particule α et Ec_{Np} du noyau fils est 5MeV. Calcule l'énergie du rayonnement γ.

EXERCICE 20 : Le phosphore $^{32}_{15}P$ est radioactive émetteur β^-.

1°) a) Ecris l'équation de la désintégration sachant qu'il se forme un isotope de soufre *S*.

b) La demi – vie du phosphore *32* est égale à *14,3* jours. Calcule sa constante radioactive λ.

2°) a) Donne l'expression de l'activité *A* d'un échantillon en fonction du nombre de noyaux radioactifs qu'il contient.

b) Calcule la masse d'un échantillon de phosphore *32* pur ayant une activité de *1,20* 10^{16}*Bq* à $t = 0$.

On donne : Masse d'un atome de phosphore *32* est *5,31* 10^{-26}*Kg*.

c) Quelle sera la masse de phosphore *32* dans cet échantillon au bout de *40,0* jours ?

NB : On pourra utiliser la constante d'Avogadro N_A= *6,022* . $10^{23}\ mol^{-1}$.

EXERCICE 21 : Le noyau du radium $^{226}_{88}Ra$ se transforme en noyau de radon après une désintégration α.

1°) Ecris l'équation bilan de la réaction de désintégration.

2°) Calcule en MeV puis en joule, l'énergie libérée par cette désintégration.

On donne : m_{Ra} = *226,0960u ;* m_{Rn} = *222,0869u ;* m_α = *4,0039u.*

3°) a) Exprime en utilisant la loi de conservation de la quantité de mouvement, le rapport entre l'énergie cinétique de la particule α et celle du noyau de radon, en fonction de la masse m_α de la particule α et de la masse m_{Rn} du noyau de radon.

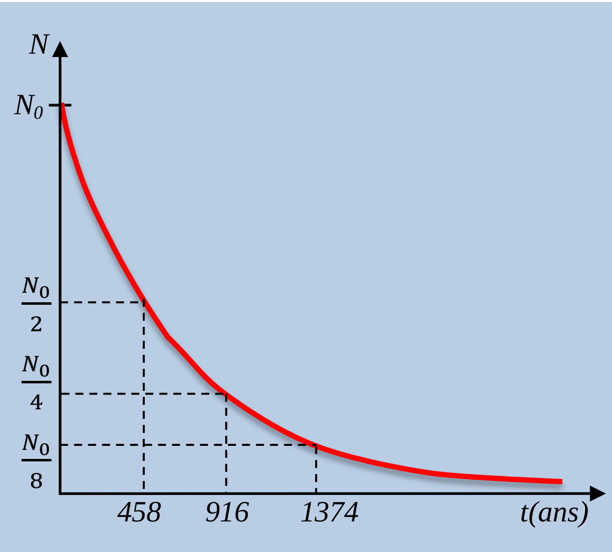
b) Calcule l'énergie cinétique de la particule α.

EXERCICE 22 : La constante radioactive du ${}^{210}_{84}Po$ est $\lambda = 5{,}8.10^{-8}s^{-1}$.

1°) Calcule en secondes et en jours, la période radioactive T.

2°) On considère un échantillon contenant initialement N_0 noyaux de ${}^{210}_{84}Po$. Calcule combien il en reste en moyenne aux instants *T/2*, *T*, *2T* et *3T*. Donne l'allure de la courbe de décroissance.

EXERCICE 23 : 1°) L'Américium ${}^{243}_{95}Am$ est un émetteur α. La courbe de décroissance exponentielle du nombre de noyaux non désintégrés d'un échantillon est la suivante :



a) Ecris l'équation de cette désintégration.
b) Rappelle la définition de la demi – vie et calcule – là.
c) Déduis – en la constante radioactive.
d) Au bout de combien de temps les *8/9* de noyaux de l'échantillon initial sont – ils désintégrés ?

2°) Les particules α obtenues sont utilisées pour bombarder le béryllium ${}^{9}_{4}Be$. Il se forme un nucléide *X* avec libération d'un neutron. Ecris l'équation de désintégration et identifie le nucléide *X*.

EXERCICE 24 : Le mendélévium (${}^{256}_{101}Md$) se désintègre en capturant un électron avec émission d'un neutrino ${}^{0}_{0}\nu$.

1°) Ecris l'équation de la réaction de désintégration du mendélévium.

On donne : Einsteinium : ${}_{99}Es$; Fermium : ${}_{100}Fm$; Nobelium : ${}_{102}No$.

2°) Le noyau ainsi obtenu est spontanément fissile. Il peut de désintégrer en xénon ${}^{138}_{54}Xe$ et palladium ${}^{114}Pd$ avec émission de neutrons. Ecris la réaction nucléaire correspondante.

3°) Le mendélévium a une période radioactive de *20j*. Le nombre de noyaux initiaux de *Md* étant N_0, au bout de combien de jours le nombre de noyaux désintégrés est – il $\frac{3}{4}N_0$?

EXERCICE 25 : On appelle activité $\mathcal{A}$ d'une substance radioactive le nombre de désintégration par seconde : $\mathcal{A} = -\frac{dN}{dt}$.

1°) Donne l'expression de $\mathcal{A}$ en fonction de *t*, de la constante radioactive λ et du nombre de noyau N_0 à l'instant *t = 0*.

2°) La constante radioactive du bismuth *210* est $\lambda = 5{,}77.10^{-4}s^{-1}$. Calcule la période radioactive *T*.

Un échantillon contient, à l'instant *t = 0*, *1mg* de bismuth *210*. Détermine l'activité de cet échantillon aux instants *t = 0* et *t = T*.

EXERCICE 26 : Une réaction de fission peut s'écrire : ${}^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{139}_{53}I \ {}^{94}_{x}Y + y{}^{1}_{0}n$

1°) Détermine x et y (y est le nombre de neutrons émis).

2°) Données : m_U = *235,044 u* ; m_Y = *93,906 u* ; m_I = *138,905 u* ; m_n = *1,009 u* ; N_A = *1.66* $10^{-27}Kg$; $C = 3{,}0.10^8 m/s$.

Calcule le défaut de masse accompagnant cette réaction.

3°) Calcule en joules l'énergie libérée au cours de cette réaction, par *1Kg* d'uranium 235.

4°) L'iode ${}^{139}_{53}I$, obtenu est radioactif β^-.

Ecris l'équation de sa désintégration. On donne :

${}_{51}Sb$	${}_{52}Te$	${}_{54}Xe$

Cette désintégration s'accompagne aussi de l'émission de rayons δ. Quelle est l'origine de leur énergie ?

EXERCICE 27 : Le thorium ${}^{227}_{90}Th$ subit une désintégration de type α et conduit au radium *Ra*.

1°) Ecris l'équation de cette réaction nucléaire .

2°) La période (ou demi – vie) du thorium *227* est *T =18,3* jours.

Que veut dire « demi – vie » ?
A la date $t = 0$ on considère un échantillon de thorium *227* de masse m_0 =*1g*. Calcule l'activité A_o de cet échantillon à $t = 0$.
Calcule la masse de thorium *227* considéré qui a disparu au bout de *30* jours. Quelle est alors l'activité de l'échantillon ?
Au bout de combien de temps ne restera – t – il que les $2/3$ de la masse initiale ?
On donne :
Nombre d'Avogadro : *N = 6,02* $10^{23} mol^{-1}$; Masse molaire du thorium : *M = 227g/mol*.

EXERCICE 28 : Par radioactivité α, le radium $^{226}_{88}Ra$ se transforme en radon *Rn*.
1°) Ecris l'équation bilan de cette désintégration.
2°) On donne : $m_{Ra} = 226,0960u$;
$m_{Rn} = 222,0869u$; $m_{\alpha} = 4,0039u$.
Calcule en MeV et en joule, l'énergie libérée par cette désintégration.
3°) Montre que la particule α remporte la quasi – totalité de cette énergie. Calcule la vitesse d'émission de la particule α.
4°) En réalité cette énergie libérée est repartie entièrement entre la particule α et le photon γ de longueur d'onde $\lambda = 10^{-12}m$. Calcule la vitesse réelle d'émission de la particule α.
On donne : $h = 6,62.10^{-34} J.s$; $1u = 931,5 MeV/C^2$; $1u = 1,66.10^{-27} Kg$.

EXERCICE 29 : 1°) A haute altitude l'azote $^{14}_{7}N$ se transforme en carbone $^{14}_{6}C$ sous l'action d'un bombardement de neutrons. Ecris l'équation de cette réaction.
2°) Le $^{14}_{6}C$ est radioactif β^-. Ecris l'équation de sa désintégration.
3°) La période du carbone $^{14}_{6}C$ est *5590 ans*. Un échantillon de bois préhistorique donne *180* désintégrations par seconde. Un échantillon de même masse d'un bois contemporain donne *1350* désintégrations par seconde. Quel est l'âge du bois préhistorique ?

EXERCICE 30 : Un noyau de radium $^{226}_{88}Ra$ se désintègre spontanément en émettant une particule α.
1°) Ecris l'équation de désintégration, en précisant les lois de conservation utilisées. Identifie le nouveau nucléide *X* formé.
2°) a) La constante radioactive du radium $^{226}_{88}Ra$ vaut $\lambda = 1,36.10^{-11} s^{-1}$. Calcule en secondes et en années la période radioactive ou demi – vie *T* du radium $^{226}_{88}Ra$.
b) On considère un échantillon radioactif contenant *1mg* de radium *226*. Recopie et complète le tableau suivant :

t	0	T	2T	3T	4T	5T
m($^{226}_{88}Ra$)						

3°) Le radium *226* par une série de désintégration α et β^- conduit au plomb $^{206}_{82}Pb$.
Quels sont les nombres de désintégrations du type α et du type β^- qui permettent de passer du noyau $^{226}_{88}Ra$ au noyau $^{206}_{82}Pb$.

EXERCICE 31 : 1°) Dans la haute atmosphère l'azote $^{14}_{7}N$ se transforme en carbone $^{14}_{6}C$ par des chocs avec des neutrons.
Le nucléide $^{14}_{6}C$ est radioactif et émetteur beta moins ; écris l'équation – bilan de sa désintégration.
2°) Les plantes vivantes assimilent le carbone par chlorophylle en présence de la lumière (réaction photochimique). A leur mort, le processus d'assimilation cesse et leur téneur en $^{14}_{6}C$.
On se propose de déterminer l'âge d'un bois préhistorique. Pour cela, on mesure l'activité radioactive du carbone $^{14}_{6}C$ dans un échantillon du bois préhistorique et dans un échantillon de bois fraichement coupé, de même masse. On constate que l'activité du nucléide dans le bois préhistorique est environ 8 fois plus faible que le bois fraichement coupé. Quel est l'âge approximatif du bois préhistorique ?
On donne : période de $^{14}_{6}C$: *T = 5600 ans*.

EXERCICE 32 : Le polonium $^{210}_{84}Po$ est un noyau instable qui donne par désintégration α un noyau stable de plomb *Pb*, avec émission de rayonnement γ.
1°) Quelle est la signification des nombres placés à gauche du symbole *Po* ? Déduis – en la composition de ce noyau.
2°) On rappelle que l'énergie de cohésion par nucléon d'un noyau est donnée par l'expression : $E = \frac{(\Delta m).C^2}{A}$. Calcule en joule et en MeV l'énergie de cohésion par nucléon pour le noyau de polonium.
3°) Ecris l'équation de désintégration du noyau de polonium. Quelle est, exprimée en MeV, l'énergie libérée au cours de cette désintégration ? Sous quelle forme se répartit cette énergie ?

4°) Les particules α émises servent à bombarder des noyaux d'aluminium $^{27}_{13}Al$ qui se transforment alors en un isotope radioactif du phosphore $^{30}_{15}P$ avec émission d'une particule. Le noyau $^{30}_{15}P$ se transforme à son tour en un noyau stable de silicium $^{30}_{14}Si$.
Ecris les équations de ces transformations successives. Quelles sont les caractéristiques de la particule émise dans la dernière transformation.
On donne : $m_{Po} = 210{,}0482u$; $m_{Pb} = 206{,}0385u$.

EXERCICE 33 : L'uranium 238 se transforme en radium *226* après avoir subi successivement *x* désintégrations α et *y* désintégrations β^-. Détermine *x* et *y*.

EXERCICE 34 : Sous l'impact d'un neutron lent, un noyau d'uranium *235* peut subir la fission suivante :
$^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{139}_{54}Xe + ^{94}_{x}Sr + y^{1}_{0}n$ où $^{1}_{0}n$ représente le neutron.
Détermine *x* et *y* en précisant les lois utilisées.

EXERCICE 35 : 1°) Le noyau d'uranium $^{235}_{92}U$ se désintègre spontanément en noyau de thorium (*Th*) avec émission d'une particule α.
Ecris l'équation – bilan de la réaction nucléaire.
Calcule en joules, puis en *MeV*, l'énergie libérée par la désintégration d'un noyau d'uranium 238.
Masses des noyaux :
Uranium 238 : *238,0860 u* ;
Thorium 234 : *234,0781 u* ;
Particule : *4,0026 u*. $1u = 1{,}66.10^{-27}$ *Kg* = *931,5* MeV/C^2.
Calcule la vitesse communiqué à la particule α et celle communiqué au noyau de thorium.
2°) Le noyau d'uranium $^{235}_{92}U$ bombardé par les neutrons subit une réaction de fission.
En supposant que les noyaux produits sont de l'yttrium ($^{94}_{39}Y$) et de l'iode ($^{130}_{53}I$). Calcule l'énergie libérée par la fission d'un noyau d'uranium 235.
Calcule l'énergie libérée par la fission d'un noyau d'uranium 235.
Masses des noyaux et particule : Uranium 235: *235,044 u* ; Iode 139 :*138,90 u* ; Yttrium 94 : *93,906 u* ; neutron : *1,009 u*
Dans un réacteur nucléaire, *0,037g* d'uranium 235 subissent la fission chaque seconde. Calcule l'énergie libérée par cette quantité d'uranium.
On donne : masse molaire atomique :
$M(^{235}_{92}U) = 235g/mol$.

EXERCICE 36 : 1°) Le potassium $^{40}_{19}K$ est radioactif et se désintègre en donnant de l'argon $^{40}_{18}Ar$. Ecris l'équation de cette réaction nucléaire. De quel type de désintégration s'agit – il ?
2°) a) Exprime, en fonction du temps, les nombres N_K d'atomes de potassium *40* et N_{Ar} d'argon *40* présents à une date *t* dans un échantillon ne contenant initialement que du potassium (nombre d'atomes N_0).
b) Représente sur un même graphique les fonctions $N_K = f(t)$ et $N_{Ar} = g(t)$.
3°) Certaines roches volcaniques comme l'obsidienne contiennent du potassium dont une partie est du potassium *40*. Au moment de sa formation, cette roche ne contient pas d'argon. Un géologue analyse un échantillon d'obsidienne et constate que les atomes d'argon *40* y sont deux fois moins nombreux que les atomes de potassium *40*. Quel est l'âge de la roche, si la période radioactive du potassium *40* est 10^9*ans*.

EXERCICE 37 : La désintégration du polonium $^{210}_{84}P_o$ engendre la formation des particules α et plomb *Pb*.
1°) Ecris l'équation de cette réaction nucléaire.
2°) a) Quelle est en joules et en électronvolts, l'énergie libérée par la désintégration d'un noyau de polonium 210 ?
On donne :
masse du noyau de polonium : m_1 = *210,04821 u* ;
masse de la particule α : m_2 = *4,00260 u* ;
masse du noyau de plomb : m_3 = *206,03853 u*.
b) En admettant que cette énergie est entièrement acquise par la particule α sous forme d'énergie cinétique, calcule en appliquant les lois de la mécanique classique la vitesse d'émission de cette particule.
c) En réalité, l'énergie libérée par cette désintégration est réparti entièrement entre la particule α et un photon γ de longueur d'onde $\lambda = 10^{-12}m$. Calcule la valeur réelle de la vitesse d'émission de la particule α. On donne : constant de Planck $h = 6{,}62\ 10^{-34} J.s$.
3°) La période radioactive ou demi – vie du polonium *210* est égale à *140* jours. A la date $t = 0$, on dispose d'une masse m_o = *2g* de polonium 210.
Calcule la masse restante au bout de t_1 = *280* jours, t_2 = *420* jours et t_3 = 2 années (1 année = *365,25* jours)
Calcule le temps correspondant à la disparition de $2/3$ de la masse initiale de polonium.

Calcule l'activité du polonium a la date t_1 = *280* jours.
Quelle est à la date t_1 = *280* jours, la masse d'hélium obtenue ? Quel est son volume dans les conditions normales ?
On donne : masse molaire du polonium : $M(P_o)$ = *210g/mol* ; masse molaire de l'helium : *M(He)* = *4g/mol* ; volume molaire : *22,4L/mol*.

EXERCICE 38 : Pour mesurer le volume sanguin d'un individu, on lui injecte dans son sang $10cm^3$ d'une solution contenant initialement du sodium *24* à une concentration molaire de $10^{-3}mol/L$. Le sodium *24* utilisé est radioactif β^- et est obtenu en bombardant le sodium *23* par les neutrons. Sa demi – vie est *T* = *15 heures*.
1°) Ecris l'équation de la réaction de formation et de désintégration du sodium *24*.
2°) Soit n_0 le nombre de mole de sodium *24* à l'injection à *t* = *0* et *n(t)* le nombre de mole restant à la date *t*.
a) Calcule le nombre n_0 de mole de sodium *24* introduite dans le sang à l'injection ;
b) Exprime *n(t)* en fonction de n_0, *T* et *t* ;
c) Calcule le nombre de mole de sodium *24* présents dans le sang au bout de *5h* ;
d) An bout de *5h*, on prélève $10cm^3$ de sang de l'individu et on constate qu'il contient $1{,}57.10^{-8}mol$ de sodium *24*. Calcule le volume de ce sang pendant ce temps.

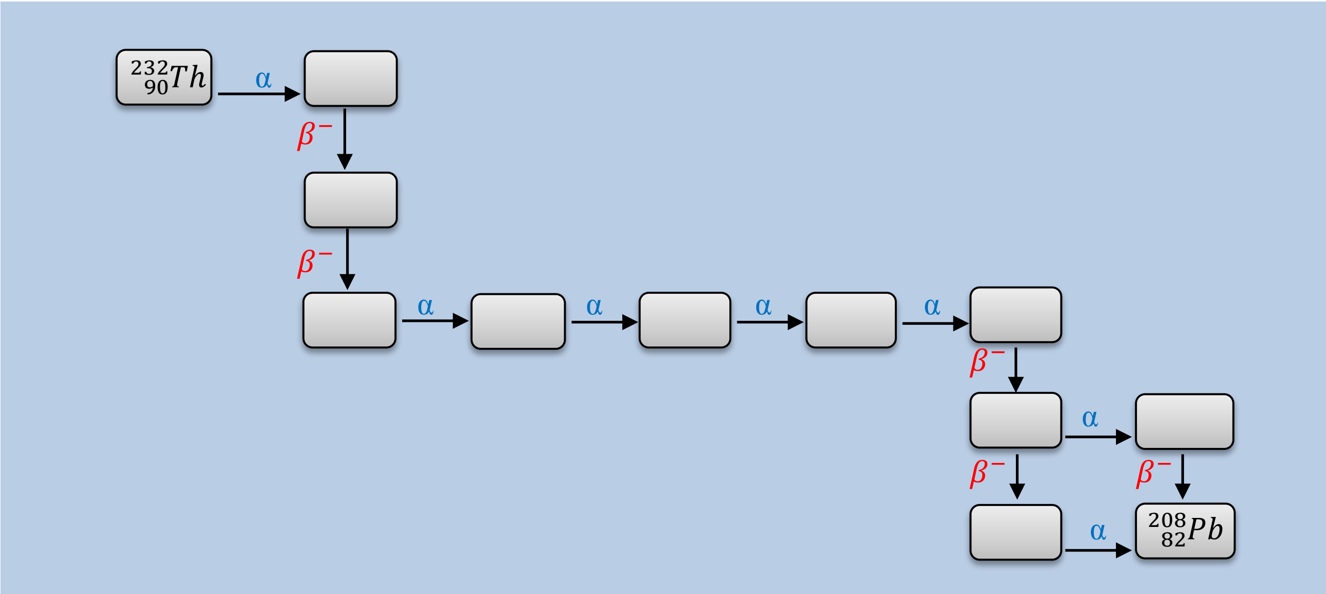
EXERCICE 39 : En 1934, Fréderic et Irène Joliot – Curie bombardèrent des noyaux d'aluminium ${}^{27}_{13}Al$ par des noyaux d'hélium ${}^{4}_{2}He$. Ils obtinrent des noyaux de phosphore ${}^{30}_{15}P$ et une particule *X*.
1°) Détermine la nature de la particule *X*, en précisant les lois appliquées. Ecris l'équation de cette réaction nucléaire.
2°) Le phosphore obtenu est radioactif ; il se désintègre en donnant des particules β^+ et du silicium.
a) Ecris, en la justifiant l'équation de désintégration du phosphore.
b) A l'aide d'un compteur de particules, on mesure le nombre moyen de désintégration par seconde ; ce nombre est proportionnel au nombre de noyaux ${}^{30}_{15}P$ non encore désintégrés. Détermine la constante radioactive et la demi – vie du noyau de phosphore, sachant que le compteur affiche au bout de *500s* un nombre moyen de désintégration par seconde dix fois plus grand qu'au début.

EXERCICE 40 : L'américium *241* est émetteur α. Le noyau fils correspondant est un noyau de neptunium (*Np*). Le noyau père est au repos dans le référentiel terrestre.
1°) Cas où le noyau de neptunium est obtenu à l'état fondamental.
a) Ecris (en la justifiant) l'équation de désintégration d'un noyau ${}^{241}_{95}Am$.
b) Calcule en ($MeV.C^{-2}$) le défaut de masse de la réaction nucléaire. Sous quelle forme apparait l'énergie correspondante ?
Données : masse d'un noyau d'américium *241* :
m_1 = *241,0046u*
Masse d'un noyau de neptunium : m_2 = *236,9970u*.
Masse d'un noyau d'hélium *4* : m_3 = *4,0025u*.
c) Parmi les particules produites, laquelle a la plus grande énergie cinétique ? Evalue sa vitesse (on justifiera la réponse).
2°) Cas où le noyau de neptunium est obtenu dans un état excité. On observe alors l'émission d'un rayonnement γ.
a) Justifie l'existence de ce rayonnement.
b) L'énergie cinétique des particules α émises est : $E_{C_{min}}$ = *5,1MeV*. Déduis – en l'énergie maximale que pourrait avoir un photon γ.

EXERCICE 41 : 1°) Le thorium ${}^{232}_{90}Th$, bombardé par des neutrons peut capter l'un d'entre eux, pour former un isotope qui se trouve dans un état excité. Cet isotope revient ensuite à son état fondamental. Ecris l'équation bilan de la réaction nucléaire et précise les lois de conservation utilisées.
2°) L'atome de thorium formé est radioactif et donne naissance après deux émissions nucléaires de même type à l'isotope ${}^{233}_{92}U$. Détermine le type d'émission en le justifiant.
3°) L'uranium 233 est radioactif α.
a) Ecris l'équation de la désintégration.
b) Quelle est en MeV l'énergie totale libérée par cette réaction ?
c) En négligeant les énergies cinétiques du noyau ${}^{233}_{92}U$ et du noyau formé, calcule l'énergie cinétique maximale de la particule émise.
d) L'analyse du rayonnement révèle l'existence d'un photon γ. D'autre part, la vitesse de la particule α émise peut avoir pour énergie cinétique, outre la valeur maximale trouvée précédemment, les valeurs suivantes :
$E_{C_{\alpha_1}}$ = *4,85MeV* ; $E_{C_{\alpha_2}}$ = *4,89MeV*. Interprète l'origine de cette émission γ. Donne le nombre de raies observé et leurs fréquences.
On donne : $h = 6{,}64.10^{-34}J.s$; $e = 1{,}6.10^{-19}C$;
$1u = 931{,}5MeV.C^{-2}$

^{233}U : m_U = 233,0395u ; ^{232}Th : m_{Th} = 232,0382u ; ^{229}Th: m_{Th} = 229,0316u ; ^{4}He : m_{He} = 4,0026u ; $^{233}_{91}Pa$.

EXERCICE 42 : La famille radioactive du thorium *232* aboutit à l'isotope de plomb *208*. L'organigramme de cette famille est représenté ci – dessous. En t'aidant de la classification périodique, inscris le nucléide correspondant à chaque case vide.



EXERCICE 43 : On considère la famille radioactive dont le nucléide père est l'uranium $^{238}_{92}U$ et le nucléide final stable, le plomb $^{206}_{82}Pb$.

1°) Le radium $^{226}_{88}Ra$ est un nucléide de cette famille qui, à la suite de désintégrations de type α et β^-, conduit au plomb $^{206}_{82}Pb$.

a) Donne l'équation générale de la radioactivité α. En utilisant des éléments de cette famille notés dans le tableau ci – après, écris l'équation d'une désintégration de ce type.

$^{226}_{88}Ra$	$^{222}_{86}Rn$	$^{210}_{84}Po$	$^{206}_{82}Pb$

b) Donne l'équation générale de la radioactivité β^-.

c) Quels sont les nombres de désintégration de type α et de type β^- permettent de passer du noyau $^{226}_{88}Ra$ au noyau $^{206}_{82}Pb$?

2°) On considère une masse m_0 de radon à une date choisie comme origine des temps. La période du radon est de 3,825 jours.

a) Détermine la masse de radon restant au bout de *1, 2, …, n* périodes. Déduis – en la masse de radon désintégrée au bout de *n* périodes.

b) Calcule les durées nécessaires pour désintégrer les *4/9* et les *9/10* de la masse m_0 de radon.

EXERCICE 44 : La désintégration du polonium $^{210}_{84}Po$ engendre la formation des particules α et du plomb.

1°) Ecris l'équation de cette réaction nucléaire.

2°) a) Quelle est, en joules et en électronvolts, l'énergie libérée par la désintégration d'un noyau de polonium *210* ?

On donne : *masse du noyau de polonium :* m_1 = *210,0482u ; masse du noyau de plomb :* m_2 = *206,03853u*.

b) En admettant que cette énergie est entièrement acquise par la particule α sous forme d'énergie cinétique, calcule, en appliquant les lois de la mécanique classique, la vitesse d'émission de cette particule.

a) En réalité, l'énergie libérée par cette désintégration est repartie entièrement entre la particule α et un photon de longueur d'onde $\lambda = 10^{-12}m$. Calcule la valeur réelle de la vitesse d'émission de la particule α.

3°) La période radioactive ou demi – vie du polonium *210* est égale à *140* jours. A la date $t = 0$, on dispose d'une masse $m_0 = 2g$ de polonium *210*.

a) Calcule la masse restante au bout de *420* jours et au bout d'une année (*365,25* jours).

b) Calcule le temps correspondant à la disparition des 2/3 de la masse initiale du polonium.

c) Quelle est à la date t = *280* jours, la masse d'hélium obtenue ? Quel est son volume dans les conditions normales ?

On donne :
masse molaire du polonium $M(Po) = 210g.mol^{-1}$; *masse molaire de l'hélium :* $M(He) = 4g.mol^{-1}$; *volume molaire :* $V_m = 22{,}4L.mol^{-1}$.

EXERCICE 45 : Le plutonium $^{241}_{94}Pu$ est un nucléide fissile formé dans les réacteurs nucléaires.

1°) En supposant que la réaction de fission du plutonium *241* engendre deux noyaux X et Y de masse atomique *95* et *145*, calcule la valeur approchée E de l'énergie libérée par *1,00Kg* de combustible.

2°) Le plutonium *241* est radioactif β^- et sa période radioactive est *13,2ans*, il engendre ainsi l'américium (*Am*) lui – même radioactif α (période *460ans*) qui se désintègre en un noyau de neptunium (*Np*).

b) Ecris les équations des deux réactions de désintégrations successives.

c) On évalue à *30Kg* la masse de plutonium *241* non « fissionné » dans la charge de combustible irradié extrait d'un réacteur nucléaire. Calcule l'activité de cet échantillon due au plutonium. Que devient cette activité un an après ?

Données : *masse du noyau* $^{241}_{94}Pu$ *: 241u ;*
$1u = 1{,}66.10^{-27}Kg$.
Energies de liaison par nucléon : $E_1(^{241}Pu)$ = *7,70MeV/nucléon ;* $E_2(^{95}X)$ = *8,80MeV/nucléon ;* $E_3(^{145}Y)$ = *8,41MeV/nucléon.*

EXERCICE 46 : La réaction thermodynamique :

$$^{2}_{1}H + ^{3}_{1}H \longrightarrow ^{4}_{2}He + ^{1}_{0}n.$$

est l'une des plus énergétiques. Calcule l'énergie libérée (en *J*) par cette réaction pour former *1g* d'hélium. Sachant que les énergies moyennes de liaison par nucléon valent *1,11 MeV* pour le deutérium, *2,83MeV* pour le tritium et *7,07MeV* pour l'hélium.

EXERCICE 47 : On considère la succession suivante des réactions nucléaires :

$$^{1}_{1}H + ^{1}_{1}H + ^{0}_{-1}e \rightarrow X \qquad (1)$$

$$X + ^{1}_{1}H \rightarrow Y \qquad (2)$$

$$Y + ^{4}_{2}He \rightarrow Z \qquad (3)$$

$$Z + ^{0}_{-1}e \rightarrow W \qquad (4)$$

$$W + ^{1}_{1}H \rightarrow 2\,^{4}_{2}He \qquad (5)$$

1°) Equilibre les cinq réactions nucléaires précédentes. Donne les nucléides X, Y, Z et W sous la forme $^{A}_{Z}X$.

2°) a) Par quelle réaction globale peut – on remplacer l'ensemble des réactions (1), (2), (3), (4) et (5) ?

b) Nomme et définis ce type de réaction.

On donne :

$_1H$							$_2He$
$_3Li$	$_4Be$	$_5B$	$_6C$	$_7N$	$_8O$	$_9F$	$_{10}Ne$

EXERCICE 48 : L'uranium *235* sous l'action d'un neutron lent, donne la réaction suivante :

$$^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n \longrightarrow ^{94}_{x}Sr + ^{A}_{54}Xe + 11\,^{1}_{0}n$$

1°) a) Quel nom donne – t – on à ce type de réaction ?

b) Détermine x et A. Quelle sont les lois de conservation utilisées ?

2°) La réaction précédente a lieu dans une centrale nucléaire. Elle consomme actuellement une énergie électrique égale à $3.10^{16}J$. Calcule le rendement de la centrale.

3°) L'un des sous – produits des centrales thermonucléaires est l'iode $^{131}_{53}I$. Cet iode se désintègre en *Xe* (xénon) en émettant des particules β^-.

Ecris l'équation – bilan de cette désintégration.

Définis la période radioactive T et l'activité A d'un échantillon radioactive à l'instant t.

La période de l'iode *131* est de *8,1* jours.

Quelle est l'activité de l'iode à l'instant de date $t = 60$ jours sachant que son activite A_0 à l'instant $t = 0$ est égale à $2{,}6\,.10^9Bq$.

On donne : $1u = 1{,}67.10^{-27}Kg$; $e = 1{,}6.10^{-19}C$.

DOMAINE D'ETUDE II : REACTION CHIMIQUE

OG_1 : REALISER L'ETUDE CINETIQUE D'UNE REACTION.

5 LA CINETIQUE CHIMIQUE.

Introduction.

Un *système chimique* est l'ensemble des espèces chimiques que l'on étudie au cours d'une transformation chimique. *La transformation chimique* est l'évolution du système chimique observée au niveau macroscopique. Elle est modélisée par une *réaction chimique*, qui rend compte des interactions ayant lieu entre les entités chimiques au niveau microscopique.
La réaction chimique est associée à la transformation. L'*équation chimique* symbolise la réaction chimique.

I. Définition.

La cinétique chimique est un domaine de la chimie qui étudie le déroulement des réactions chimiques en fonction du temps, ainsi que les facteurs qui influencent la vitesse d'évolution des réactions ; il s'agit de la concentration des réactifs, de la température, de la pression et des catalyseurs.

Rappels.

- ***Réactif*** : *c'est une espèce chimique qui disparaît au cours de la transformation chimique.*
- ***Produit*** : *c'est une espèce chimique qui apparaît au cours d'une transformation chimique.*

Exemple : Combustion du carbone dans le dioxygène.

- *Réactifs* : carbone (C) et dioxygène (O_2);
- *Produit* : dioxyde de carbone CO_2.
- L'*équation chimique* de la réction est :

$$C \ + \ O_2 \ \longrightarrow \ CO_2.$$

II. Vitesse et ordre d'une réaction chimique.

II.1. Vitesse d'une réaction chimique.

Considérons la réaction chimique du type :

$$aA \ + \ bB \ \longrightarrow \ cC \ + \ dD. \quad (1)$$

La vitesse d'une réaction est définie à partir de la vitesse de disparition des réactifs A et B ou d'apparition des produits C et D, au cours du temps.

Considérons un système chimique constitué initialement des réactifs *A* et *B*. Il est évident qu'au cours de la transformation chimique les corps *A* et *B* disparaîtront progressivement tandis qu' apparaîtront les produits *C* et *D*.
Supposons que *les concentrations du réactif A et du produit D* évoluent comme l'indique les courbes de la figure 1 ci – dessous :

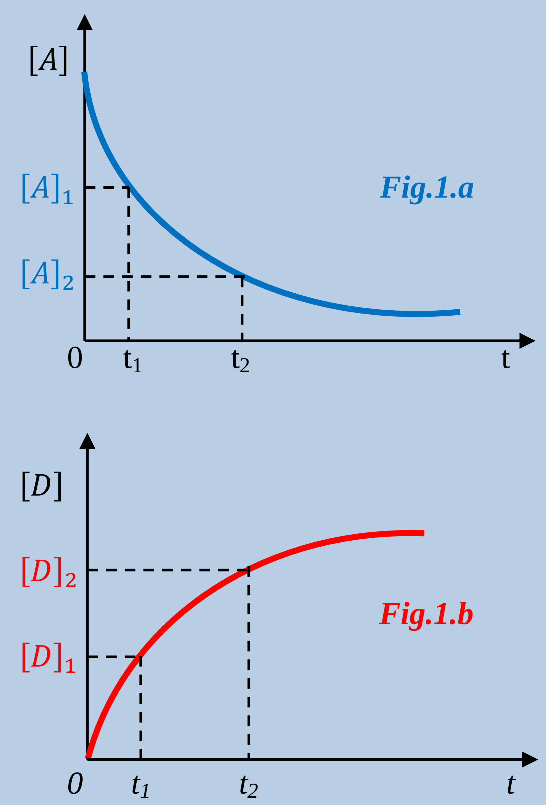


Figure 1.

II.1.1. Vitesse moyenne.

Définition : *La vitesse moyenne d'un corps est la variation de la concentration de ce corps entre deux instants.*

- *La vitesse moyenne de disparition du réactif A* entre les instants t_1 et t_2 (Fig.1.a) est :

$$v_m(A) = -\frac{[A]_2 - [A]_1}{t_2 - t_1} = -\frac{\Delta[A]}{\Delta t}$$

Avec $[A]_2 < [A]_1$.
$[A]_1$*: concentration du réactif A à l'instant* t_1 *;*
$[A]_2$*: concentration du réactif A à l'instant* t_2 *;*

- *La vitesse moyenne d'apparition du produit D* entre les instants t_1 et t_2 (Fig.2.b) est :

$$v_m(D) = \frac{[D]_2 - [D]_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta[D]}{\Delta t}$$

Avec $[D]_2 > [D]_1$.
$[D]_1$*: concentration du produit D à l'instant* t_1 *;*
$[D]_2$*: concentration du produit D à l'instant* t_2 *;*

Remarque : La vitesse moyenne d'un corps est toujours positive et s'exprime en mol.L.s^{-1}.

II.1.2. Vitesse instantanée.

Définition : *La vitesse instantannée d'un corps, est la vitesse d'évolution de ce corps à un instant donné.*

- *La vitesse instantanée de disparition du réactif A* est :

$$v_i(A) = -\frac{d[A]}{dt}$$

- *La vitesse instantanée de formation ou d'apparition du produit D* est :

$$v_i(D) = \frac{d[D]}{dt}$$

Remarque : La vitesse instantanée de disparition d'un réactif ou de formation d'un produit mesure le coefficient directeur de la tangente à la courbe d'évolution du réactif ou du produit à un instant donné (figure 2).

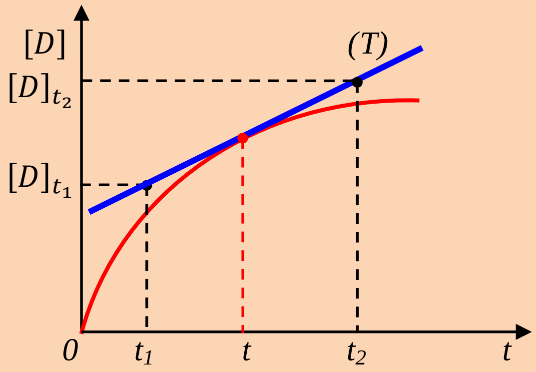


Figure 2.

Pour déteminer la vitesse instantanée de formation de D, par exemple, à un instant t :

- ✓ *On trace la tangente (T) à la courbe à cet instant ;*
- ✓ *On choisi deux points quelconques de la tangente de part et d'autre du point d'intersection de la coure avec la tangente ;*
- ✓ *On projette ces points sur l'axe des temps pour trouver les valeurs de* t_1 *et* t_2*, et sur l'axe de la concentration pour trouver les concentrations correspondant à ces dates* t_1 *et* t_2 *;*
- ✓ *On calcule la vitesse avec l'expression :*

$$v_i(D) = \frac{[D]_{t_2} - [D]_{t_1}}{t_2 - t_1}$$

II.1.3. Vitesse globale de la réaction.

Soit la réaction chimique du type :

$$aA + bB \longrightarrow cC + dD. \quad (1)$$

La vitesse globale de la réaction s'exprime en fonction des vitesses instantanées :

$$v = -\frac{1}{a}\frac{d[A]}{dt} = -\frac{1}{b}\frac{d[B]}{dt} = \frac{1}{c}\frac{d[C]}{dt} = \frac{1}{d}\frac{d[D]}{dt}$$

Ainsi on a :

$$v = \frac{1}{a}v_i(A) = \frac{1}{b}v_i(B) = \frac{1}{c}v_i(C) = \frac{1}{d}v_i(D)$$

II.2. Ordre d'une réaction.

Dans certains domaines de la température, la vitesse de la réaction (1) peut s'exprimer en fonction des concentrations des réactifs A et B suivant la relation :

$$\boxed{v = K[A]^{\alpha}.[B]^{\beta}}$$

C'est *la loi de la vitesse* dans laquelle :
K est la constante de vitesse, α et β sont les ordres partiels des réactifs A et B respectivement.
La somme :

$$\boxed{n = \alpha + \beta}$$

est *l'ordre global* de la réaction.

Remarque : Les valeurs de K, α et β sont déterminées expérimentalement.

III. Temps de demi – réaction.
III.1. Définition.

On appelle temps de demi – réaction, le temps au bout duquel la moitié de l'un des réactifs disparait.

A cet instant :

$$\boxed{[A] = \frac{[A]_0}{2}}$$

III.2. Expression du temps de demi – réaction.
III.2.1. Réaction d'ordre 0.

Elle est représentée par la réaction du type :

$$aA \longrightarrow bB$$

La vitesse de cette réaction peut s'écrire :

$$\begin{cases} v = K[A]^0 = K & (1) \\ v = -\frac{1}{a}.\frac{d[A]}{dt} & (2) \end{cases}$$

En égalant les deux expressions, on obtient :

$$-\frac{1}{a}.\frac{d[A]}{dt} = K \Rightarrow -d[A] = aKdt$$

$$\Rightarrow \int d[A] = -aK\int dt$$

$$\Rightarrow [A] = -aKt + cte$$

à $t = 0 \Rightarrow [A]_0 = cte$

D'où :

$$\boxed{[A] = -aKt + [A]_0}$$

➢ Temps de demi – réaction.

à $t = t_{\frac{1}{2}}$ on a : $[A] = \frac{[A]_0}{2}$

$$\Rightarrow \frac{[A]_0}{2} = -aKt_{\frac{1}{2}} + [A]_0$$

D'où :

$$\boxed{t_{\frac{1}{2}} = \frac{[A]_0}{2aK} = \frac{C_0}{2aK}} (s)$$

III.2.2. Réaction d'ordre 1.

Elle est représentée par la réaction du type :

$$aA \longrightarrow bB + cC$$

La vitesse de cette réaction peut s'écrire :
$v = K[A]^{\alpha}$ avec $\alpha = 1$.

$$\begin{cases} v = K[A]^1 = K[A] & (1) \\ v = -\frac{1}{a}.\frac{d[A]}{dt} & (2) \end{cases}$$

En égalant les deux expressions, on obtient :

$$-\frac{1}{a}.\frac{d[A]}{dt} = K[A] \Rightarrow \frac{d[A]}{[A]} = -aKdt$$

$$\Rightarrow \int \frac{d[A]}{[A]} = -aK\int dt$$

$$\Rightarrow ln[A] = -aKt + cte$$

à $t = 0 \Rightarrow ln[A]_0 = cte$

$$\Rightarrow ln\frac{[A]}{[A]_0} = -aKt$$

D'où :

$$\boxed{[A] = [A]_0 e^{-aKt}}$$

➢ Temps de demi – réaction.

à $t = t_{\frac{1}{2}}$ on a : $[A] = \frac{[A]_0}{2}$

$$\frac{[A]_0}{2} = [A]_0 e^{-aKt_{\frac{1}{2}}}$$

D'où :

$$\boxed{t_{\frac{1}{2}} = \frac{ln2}{aK}} (s)$$

Remarque : les expressions obtenues pour une réaction d'ordre 1 sont comparables à celle d'une réaction nucléaire spontanée :

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad et \quad T = \frac{ln2}{\lambda}$$

Donc on peut dire que *la radioactivité est une réaction d'ordre 1.*

III.2.3. Réaction d'ordre 2.

Elle est représentée par la réaction du type :

$$aA + bB \longrightarrow cC + dD$$

Cas où $[A] = [B]$

La vitesse de cette réaction peut s'écrire :

$v = K[A]^{\alpha}[B]^{\beta}$ avec $\alpha = \beta = 1$

$$\begin{cases} v = K[A]^1[A]^1 = K[A]^2 & (1) \\ v = -\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{d[A]}{dt} & (2) \end{cases}$$

En égalant les deux expressions, on obtient :

$$-\frac{1}{a}\cdot\frac{d[A]}{dt} = K[A]^2 \Rightarrow \frac{d[A]}{[A]^2} = -aKdt$$

$$\Rightarrow \int \frac{d[A]}{[A]^2} = -aK\int dt$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{[A]} = -aKt + cte$$

$$\text{à } t = 0 \Rightarrow -\frac{1}{[A]_0} = cte$$

D'où :

$$\boxed{\frac{1}{[A]} = aKt + \frac{1}{[A]_0}}$$

Soit :

$$\boxed{\frac{1}{C} = aKt + \frac{1}{C_0}}$$

➢ Temps de demi – réaction.

à $t = t_{\frac{1}{2}}$ on a : $[A] = \dfrac{[A]_0}{2}$

$$\frac{2}{[A]_0} = aKt_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{[A]_0} \Rightarrow t_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{aK}\left(\frac{2}{[A]_0} - \frac{1}{[A]_0}\right)$$

D'où :

$$\boxed{t_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{aK[A]_0} = \frac{1}{aKC_0}} \quad (s)$$

IV. Détermination de l'ordre global d'une réaction.

Pour déterminer l'ordre globale d'une réaction à partir des données expérimentales, on trace la courbe :

- ➢ $[A] = f(t)$, *pour une réaction d' ordre 0 ;*
- ➢ $ln[A] = f(t)$, *pour une réaction d'ordre 1 ;*
- ➢ $\dfrac{1}{[A]} = f(t)$, *pour réaction d'ordre 2 .*

Si *on obtient une droite*, l'ordre supposé est alors l'ordre de la réaction considérée.

Exemple : Pour la réaction d'ordre 2, on obtient la courbe $\dfrac{1}{[A]} = f(t)$ représentée par la figure 3 ci – dessous :

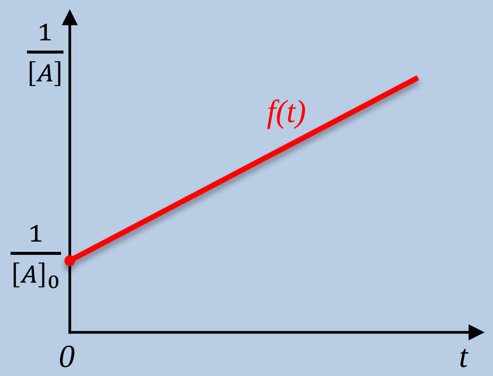


Figure 3.

V. Facteurs cinétiques influençant une transformation chimique.

Les facteurs cinétiques sont les paramètres qui ont une influence sur la durée d'une transformation chimique, et donc sur la vitesse de la réaction. Ce sont : *la concentration initiale, la température et les catalyseurs.*

V.1. Influence de la concentration initiale des réactifs.

Plus la concentration initiale des réactifs est grande, plus la durée de la transformation est courte, ce qui explique que la vitesse de la réaction est grande.

V.2. Influence de la température.

La vitesse de la réaction augmente avec la température. Plus la température est élevée, plus la vitesse de la réaction est grande.

V.3. Influence des catalyseurs.

L'utilisation des catalyseurs augmente la vitesse d'évolution d'une réaction chimique.

Un catalyseur est une substance qui accélère une réaction chimique sans la modifier.

Exercices d'application.

Exercice 1 : A) Au cours de la réaction $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{2B} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, la concentration du composé *C* augmente de $5.10^{-3}mol/L$ en *1min20s*.

1°) Calcule la vitesse moyenne d'apparition ou de formation de *C*.

2°) Calcule la vitesse moyenne de disparition du corps *A* et déduis – en la vitesse moyenne de disparition de *B*.

B) On considère la réaction de saponification de l'éthanoate d'éthyle :

$CH_3COOC_2H_5 + OH^- \longrightarrow CH_3COO^- + C_2H_5OH$

On a mesuré la concentration des ions OH^- restant au temps *t*, en partant à *t = 0* d'un mélange équimolaire des réactifs *0,01mol/L*. Les valeurs obtenues sont consignés dans le tableau ci – dessous :

t(min)	0	2	6	10	20	40
$[OH^-] \times 10^{-3}$ $mol.L^{-1}$	10	8,2	6,0	4,6	2,9	2,1

1°) Calcule la concentration en éthanol pour chaque valeur de *t*.

2°) Détermine la vitesse moyenne de disparition des ions OH^- entre 6 et *10min*.

Corrigé 1.

A) $[C] = 5.10^{-3}mol/L$; $t = 1min20s = 80s$.

1°) Vitesse moyenne d'apparition ou de formation de C.

Par définition la vitesse moyenne de C est :

$$v_m(C) = \frac{[C] - [C]_0}{t - t_0}, or\ [C]_0 = 0, t_0 = 0$$

D'où :

$$\boxed{v_m(C) = \frac{[C]}{t}}$$

$$\boldsymbol{A.N} : v_m(C) = \frac{5.10^{-3}}{80} = 6{,}25.10^{-5}$$

$$\boxed{v_m(C) = 6{,}25.10^{-5} mol/L.s}$$

2°) a) Vitesse moyenne de disparition de A.

Par définition la vitesse moyenne de A est :

$$v_m(A) = -\frac{[A] - [A]_0}{t - t_0}$$

$$Or\ [A]_0 = [A] + x \Rightarrow [A] = [A]_0 - x\ \ et\ t_0 = 0$$

$$\Rightarrow v_m(A) = -\frac{[A]_0 - x - [A]_0}{t - t_0} = \frac{x}{t}$$

Avec $x = [C]$, soit : $\boxed{v_m(A) = \frac{[C]}{t}}$

$$\boldsymbol{A.N} : v_m(A) = \frac{5.10^{-3}}{80} = 6{,}25.10^{-5}$$

$$\boxed{v_m(A) = 6{,}25.10^{-5} mol/L.s}$$

b) Vitesse moyenne de disparition de B.

Par définition la vitesse moyenne de B est :

$$v_m(B) = -\frac{[B] - [B]_0}{t - t_0}$$

$$Or\ [B]_0 = [B] + 2x \Rightarrow [B] = [B]_0 - 2x\ \ et\ t_0 = 0$$

$$\Rightarrow v_m(B) = -\frac{[B]_0 - 2x - [B]_0}{t - t_0} = \frac{2x}{t}$$

$$\boxed{v_m(B) = 2\frac{[C]}{t} = 2v_m(A)}$$

$$\boldsymbol{A.N} : v_m(A) = 2 \times 6{,}25.10^{-5}$$

$$\boxed{v_m(A) = 1{,}25.10^{-4} mol/L.s}$$

B) 1°) Concentration en éthanol.

Par définition : $[OH^-]_0 = [OH^-] + x$

$$\Rightarrow x = [C_2H_5OH] = [OH^-]_0 - [OH^-]$$

$$\boxed{\boldsymbol{A.N} : [C_2H_5OH] = 0{,}01 - [OH^-]}$$

De cette relation, on calcule pour chaque valeur du temps correspondant la valeur de la concentration de méthanol. Ainsi on obtient les valeurs reportées dans le tableau ci – dessous :

t(min)	0	2	6	10	20	40
$[OH^-] \times 10^{-3}$ $mol.L^{-1}$	10	8,2	6,0	4,6	2,9	2,1
$[C_2H_5OH] \times$ 10^{-3} $mol.L^{-1}$	0	1,8	4	5,4	7,1	7,9

2°) Vitesse moyenne de disparition des ions OH^-.

Elle est définie par :

$$\boxed{v_m(OH^-) = -\frac{[OH^-]_2 - [OH^-]_1}{t_2 - t_1}}$$

$$\boldsymbol{A.N} : v_m(OH^-) = -\frac{4{,}6.10^{-3} - 6.10^{-3}}{(10 - 6) \times 60}$$

$$\boxed{v_m(OH^-) = 5{,}83.10^{-5}\,mol/L.s}$$

Exercice 2 : On considère l'étude cinétique de la réaction :

$$NH_4^+ + NO_2^- \longrightarrow N_2 + 2H_2O.$$

Les deux réactifs ont la même concentration initiale notée C_0. Le tableau suivant donne le temps de demi – réaction relatif à chaque concentration initiale.

$C_0(10^{-1}mol.L^{-1})$	1	2,5	5
$t(min)$	625	250	125

1°) En calculant la constante de vitesse relative à chaque concentration, vérifie que la réaction est d'ordre 2.

2°) Partant d'une concentration initiale $C_0 = 5.10^{-1}mol.L^{-1}$, calcule :

a) La concentration de chaque réactif au bout d'un temps $t = 100min$.

b) Le temps au bout duquel *80%* des réactifs seront consommés. Quelle est la vitesse de la réaction à cet instant ?

Corrigé 2.

On considère l'étude cinétique de la réaction

$$NH_4^+ + NO_2^- \longrightarrow N_2 + 2H_2O.$$

$C_0(10^{-1}mol.L^{-1})$	1	2,5	5
$t(min)$	625	250	125

1°) Je calcule la constante de vitesse relative à chaque concentration.

Pour une réaction d'ordre 2, on a :

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{aKC_0}, avec\ a = 1 \Rightarrow t_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{KC_0}$$

D'où :

$$\boxed{K = \frac{1}{t_{\frac{1}{2}}.C_0}}$$

- ***Pour*** $t_{\frac{1}{2}}$ ***= 625min***

$$K_1 = \frac{1}{625 \times 10^{-1}} = 0{,}016$$

$$\boxed{K_1 = 0{,}016L.mol^{-1}.min^{-1}}$$

- ***Pour*** $t_{\frac{1}{2}}$ ***= 250min.***

$$K_2 = \frac{1}{250 \times 2{,}5.10^{-1}} = 0{,}016$$

$$\boxed{K_2 = 0{,}016L.mol^{-1}.min^{-1}}$$

- ***Pour*** $t_{\frac{1}{2}}$ ***= 125min***

$$K_3 = \frac{1}{125 \times 5.10^{-1}} = 0{,}016$$

$$\boxed{K_3 = 0{,}016L.mol^{-1}.min^{-1}}$$

Je vérifie que la réaction est d'ordre 2.

$K_1 = K_2 = K_3 = 0{,}016L.mol^{-1}.min^{-1}$

Donc la réaction est d'ordre 2.

2°) $C_0 = 5.10^{-1}mol.L^{-1}$,

Je calcule :

c) La concentration de chaque réactif au bout d'un temps t = 100min.

Réaction d'ordre 2, on a :

$$\frac{1}{C} = Kt + \frac{1}{C_0} \Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{KtC_0 + 1}{C_0}$$

D'où :

$$\boxed{C = \frac{C_0}{KtC_0 + 1}}$$

$$A.N:\ C = \frac{5.10^{-1}}{0{,}016 \times 100 \times 5.10^{-1} + 1} = 0{,}278$$

$$\boxed{C = 0{,}278mol.L^{-1}}$$

d) Le temps au bout duquel 80% des réactifs seront consommés.

Sachant que : $\frac{1}{C} = Kt + \frac{1}{C_0}$

A l'instant t : $C = 20\%C_0 = \frac{1}{5}C_0\ \frac{1}{C} = Kt + \frac{1}{C_0}$

$$\Rightarrow Kt = \frac{1}{C} - \frac{1}{C_0} = \frac{1}{\frac{1}{5}C_0} - \frac{1}{C_0}$$

$$\Rightarrow Kt = \frac{5}{C_0} - \frac{1}{C_0} = \frac{4}{C_0}$$

D'où :

$$\boxed{t = \frac{4}{K.C_0}}$$

$$A.N : \; t = \frac{4}{0{,}016 \times 5.10^{-1}} = 500$$

$$\boxed{t = 500min}$$

Vitesse de la réaction à cet instant

La vitesse globale de la réaction est telle que :

$$v = K[A]^2 = K.C^2 = K.\left(\frac{1}{5}C_0\right)^2$$

D'où :

$$\boxed{v = \frac{KC_0^2}{25}}$$

$$A.N : \; v = \frac{0{,}016 \times (5.10^{-1})^2}{25} = 1{,}6.10^{-4}$$

$$\boxed{v = 1{,}6.10^{-4} mol.L^{-1}.min^{-1}}$$

Exercice 3 : La transformation de l'azométhane $CH_3N_2CH_3(g)$ en éthane $C_2H_6(g)$ et en diazote $N_2(g)$ est donnée par l'équation suivante :

$$CH_3N_2CH_3(g) \longrightarrow C_2H_6(g) + N_2(g)$$

La concentration de l'azométhane à un instant $t = 20min$ est $1{,}1.10^{-2}mol/L$. Celle de l'éthane est $10^{-3}mol/L$. Après deux heures elle est de $6.10^{-3}mol/L$.

1°) Quelle est la concentration initiale de l'azométhane ?

2°) Calcule sa vitesse moyenne de disparition entre $t = 0$ et $t = 2h$.

3°) a) Montre que la transformation de l'azométhane obéit à une réaction d'ordre zéro.

b) Déduis – en la constante de vitesse de cette réaction.

4°) Calcule la fraction de l'azométhane qui subsistera après *1h30min*.

Corrigé 3.

$$[CH_3N_2CH_3] = C / \begin{cases} C = 1{,}1.10^{-2}mol/L \\ C' \quad \text{à } t = 2h \end{cases}$$

$$[C_2H_6] = x / \begin{cases} x = 10^{-3}mol/L \text{ à } t = 20min \\ x' = 6.10^{-3}mol/L \quad \text{à } t = 2h \end{cases}$$

1°) Concentration initiale de l'azométhane.

	$CH_3N_2CH_3(g)$	$\longrightarrow C_2H_6(g)$	$+ \; N_2(g)$
à $t = 0$	C_0	0	0
à $t = 20min$	$C = C_0 - x$	x	x
à $t = 2h$	$C' = C_0 - x'$	x'	x'

La concentration initiale de l'azométhane est :

$C = C_0 - x \Rightarrow \quad C_0 = [CH_3N_2CH_3]_0 = C + x$

$$A.N : \; C_0 = 1{,}1.10^{-2} + 10^{-3} = 1{,}2.10^{-2}$$

$$\boxed{C_0 = [CH_3N_2CH_3]_0 = 1{,}2.10^{-2}mol/L}$$

2°) a) Vitesse moyenne de disparition.

Par définition la vitesse moyenne est :

$$v_m(CH_3N_2CH_3) = -\frac{C - C_0}{t_{2h} - t_0} = -\frac{C_0 - x' - C_0}{t_{2h} - t_0}$$

$$\boxed{v_m(CH_3N_2CH_3) = \frac{x'}{t_{2h}}}$$

$$A.N : v_m(CH_3N_2CH_3) = \frac{6.10^{-3}}{2 \times 3600} = 8{,}33.10^{-7}$$

$$\boxed{v_m(CH_3N_2CH_3) = 8{,}33.10^{-7} mol.L^{-1}.s^{-1}}$$

3°) a) Montrons que la transformation de l'azométhane obéit à une réaction d'ordre zéro.

L'équation de vitesse intégrée d'une réaction d'ordre zéro est de la forme :

$[A] = -aKt + [A]_0, soit \; C = -Kt + C_0 \,; a = 1$

Cette réaction est d'ordre zéro si :

$K = \frac{1}{t}(C_0 - C) =$ cte pour toutes les valeurs de t

✓ ***Pour $t_1 = 20min$.***

$$K_1 = \frac{1}{t_1}(C_0 - C) = \frac{1}{20}\left(1{,}2.10^{-2} - 1{,}1.10^{-2}\right)$$

$$K_1 = 5.10^{-5} mol.L^{-1}.min^{-1}$$

✓ ***Pour $t_2 = 2h = 120min$.***

$$K_2 = \frac{1}{t_2}(C_0 - C') = \frac{1}{120}\left(1{,}2.10^{-2} - 1{,}1.10^{-2}\right)$$

$Or \; C' = C_0 - x' = 1{,}2.10^{-2} - 6.10^{-3}$

$\Rightarrow \; C' = 6.10^{-3}mol.L^{-1}$

Ainsi : $K_2 = \frac{1}{120}\left(1{,}2.10^{-2} - 6.10^{-3}\right)$

$$K_2 = 5.10^{-5} mol.L^{-1}.min^{-1}$$

On constate que $K_1 = K_2 = cte$. Donc cette transformation obéit à ***une réaction d'ordre zéro***.

b) Déduisons la constante de vitesse de cette réaction.

Elle se calcule par la relation : $\boxed{K = \frac{K_1 + K_2}{2}}$

$$\boxed{K = 5.10^{-5} mol.L^{-1}.min^{-1}}$$

4°) Calcul la fraction de l'azométhane qui subsistera après 1h30min.

Elle est de la forme : $\boxed{f = \frac{C}{C_0} = \frac{C_0 - Kt}{C_0}}$

$\boldsymbol{A.N}$: $f = \dfrac{1,2.10^{-2} - 5.10^{-5} \times 90}{1,2.10^{-2}} = 0,625$

$$\boxed{f = 0,625}$$

DOMAINE D'ETUDE II : REACTION CHIMIQUE

OG_2 : CARACTERISER LES EQUILIBRES CHIMIQUES

6 LES EQUILIBRES CHIMIQUES.

Introduction.

Un *système chimique* est l'ensemble des espèces chimiques que l'on étudie au cours d'une transformation chimique.
L'état d'un système chimique dépend de plusieurs paramètres :

- *La température ;*
- *La pression ;*
- *L'état physique des espèces chimiques : solide (S), liquide (L), gazeux (G) ;*
- *La quantité de matière des espèces chimiques présentes.*

Une transformation chimique correspond à l'apparition d'une ou de plusieurs espèces chimiques au cours de l'évolution du système. *Il y a alors passage d'un état initial à un état final.*

I. Notion d'équilibre chimique.

Considérons la réaction chimique suivante :

$$aA + bB \longrightarrow cC + dD$$

La plupart des réactions chimiques évoluent dans certaines conditions de température et de pression vers un *état final où coexistent les réactifs et les produits* de la réaction.

Exemple : *La synthèse de l'ammoniac* (NH_3).

$$N_2 + 3H_2 \longrightarrow 2NH_3$$

Le mélange initial étant composé de N_2 et de H_2, alors le mélange final contient le N_2, H_2 et NH_3.
Cet état final où l'on trouve les réactifs N_2 et H_2 et le produit NH_3 est appelé *état d'équilibre chimique.*

II. Transformation limitée, transformation totale.

Il existe deux types de transformations chimiques : *les transformations dites totales et les transformations limitées* conduisant à un état d'équilibre.

II.1. Transformation limitée.

Une transformation limitée conduit à un état d'équilibre, où les concentrations des produits et des réactifs n'évoluent plus. C'est un état dynamique, *qui ne se traduit pas par l'absence de réaction mais par la coexistence de deux réactions inverses se produisant à la même vitesse au niveau microscopique*.

Au niveau macroscopique, aucune transformation n'est observée. *Tout système chimique évolue spontanément vers l'état d'équilibre.*

Considérons la réaction chimique suivante :

$$aA + bB \longrightarrow cC + dD$$

Le système chimique (A + B) conduit à un état d'équilibre si :

- Les réactions :

$$aA + bB \xrightarrow{(1)} cC + dD \text{ et}$$

$$cC + dD \xrightarrow{(2)} aA + bB$$

sont *inverses l'une de l'autre*.

- Les réactions (1) et (2) *peuvent se produire d'une manière simultanée*.

L'ensemble de ces deux réactions (1) et (2) constituent une réaction réversible que l'on représente par une double flèche.

$$aA + bB \underset{(2)}{\overset{(1)}{\rightleftharpoons}} cC + dD$$

Une transformation chimique est dite limitée ou équilibrée, lorsque les produits obtenues peuvent réagir pour redonner les réactifs de départ. La transformation est alors reversible.

Exemples :

- $N_2 + 3H_2 \rightleftharpoons 2NH_3$
- $CO + NO_2 \rightleftharpoons CO_2 + NO$

II.2. Transformation totale.

Une transformation chimique est dite totale lorsque l'un des réactifs au moins disparaît à la fin de la réaction. La réaction n'est pas reversible.

Exemples :

- $C \ + \ O_2 \longrightarrow CO_2$
- $S \ + \ O_2 \longrightarrow SO_2$

II.3. Loi d'action de masse.

II.3.1. Constante d'équilibre d'une réaction chimique.

Dans une transformation réversible en état d'équilibre chimique, on définit un rapport constant entre les concentrations des produits et les concentrations des réactifs.

Soit la transformation chimique réversible dont la réaction est :

$$aA \ + \ bB \underset{(2)}{\overset{(1)}{\rightleftharpoons}} cC \ + \ dD$$

- La vitesse de la réaction (1) est :
  $v_1 = K_1[A]^a[B]^b$ (1)
- La vitesse de la réaction (2) est :
  $v_2 = K_2[C]^c[D]^d$ (2)
- A l'équilibre les deux réactions inverses se produisant à la même vitesse, alors : $v_1 = v_2$

$\Rightarrow \ K_1[A]^a[B]^b = K_2[C]^c[D]^d$

$\Rightarrow \ \dfrac{K_1}{K_2} = \dfrac{[C]^c[D]^d}{[A]^a[B]^b}$

En posant : $\dfrac{K_1}{K_2} = K_C$

C'est la *constante d'équilibre de la réaction, relative à la concentration.*

D'où :

$$\boxed{K_C = \frac{[C]^c[D]^d}{[A]^a[B]^b}}$$

Exemples :

- $N_2 \ + \ 3H_2 \rightleftharpoons 2NH_3$

$$K_C = \frac{[NH_3]^2}{[N_2].[H_2]^3}$$

- $CO \ + \ NO_2 \rightleftharpoons CO_2 \ + \ NO$

$$K_C = \frac{[CO_2].[NO]}{[CO].[NO_2]}$$

Remarque :

R_1 : Si l'eau (H_2O) est un solvant (ou réctif) dans une transformation chimique, on ne prend pas en compte sa concentration.

Exemple :

$$NH_3 \ + \ H_2O \rightleftharpoons NH_4^+ \ + \ OH^-$$

$$K_C = \frac{[NH_4^+].[OH^-]}{[NH_3]}$$

Note : l'eau est solvant lorsqu'elle est un réactif.

R_2 : Si l'un des composés est solide, on ne prend pas en compte sa concentration.

Exemple :

$$CO_2 \ + \ C \rightleftharpoons 2CO$$

$$K_C = \frac{[CO]^2}{[CO_2]}$$

R_3 : On peut aussi exprimer la constante d'équilibre d'une tranformation chimique mettant en jeu des composés gazeux, en fonction des pressions partielles des reactifs et des produits.

Ainsi on a pour la réaction :

$$aA \ + \ bB \underset{(2)}{\overset{(1)}{\rightleftharpoons}} cC \ + \ dD$$

$$\boxed{K_P = \frac{(P_C)^c.(P_D)^d}{(P_A)^a.(P_B)^b}}$$

Où K_P est la *constante d'équilibre de la réaction, relative à la pression.*

Exemples :

- $N_2 \ + \ 3H_2 \rightleftharpoons 2NH_3$

$$K_C = \frac{[NH_3]^2}{[N_2].[H_2]^3}$$

- $CO \ + \ NO_2 \rightleftharpoons CO_2 \ + \ NO$

$$K_C = \frac{[CO_2].[NO]}{[CO].[NO_2]}$$

II.3.2. Pression partielle, pression totale.

D'après la loi des gaz parfaits, on a :

$$PV = nRT$$

Soit P_t : la pression totale du mélange ;

$n_t = n_A + n_B + n_C + n_D$: la quantité totale du mélange.

✓ Pour le mélange, on a :

$$P_tV = n_tRT \qquad (1)$$

- ✓ Pour chaque composé du mélange, on :

$$P_iV = n_iRT \qquad (2)$$

En faisant le rapport entre les relations (1) et (2), on obtient l'expression des pressions partielles de chaque gaz.

$$\frac{(1)}{(2)} : \frac{P_tV}{P_iV} = \frac{n_tRT}{n_iRT}$$

$$\boxed{P_i = \frac{n_i}{n_t}P_t = \frac{n_i}{(n_A + n_B + n_C + n_D)}P_t}$$

P_i : pression partielle de chaque gaz dans le mélange.

II.3.3. Relation entre K_C et K_P.

D'après la loi des gaz parfaits, on peut écrire pour chaque réactif et chaque produit :

$$\begin{cases} P_AV = n_ART \Rightarrow [A] = \frac{P_A}{RT} \\ P_BV = n_BRT \Rightarrow [B] = \frac{P_B}{RT} \\ P_CV = n_CRT \Rightarrow [C] = \frac{P_C}{RT} \\ P_DV = n_DRT \Rightarrow [D] = \frac{P_D}{RT} \end{cases}$$

D'après ce qui précède :

$$K_C = \frac{[C]^c[D]^d}{[A]^a[B]^b} = \frac{\left(\frac{P_C}{RT}\right)^c\left(\frac{P_D}{RT}\right)^d}{\left(\frac{P_A}{RT}\right)^a\left(\frac{P_B}{RT}\right)^b}$$

$$K_C = \frac{(P_C)^c.(P_D)^d}{(P_A)^a.(P_B)^b}.\frac{(RT)^{a+b}}{(RT)^{c+d}}$$

$$K_C = \frac{(P_C)^c.(P_D)^d}{(P_A)^a.(P_B)^b}.(RT)^{a+b-(c-d)}$$

$$K_C = K_P.(RT)^{a+b-(c-d)}$$

$$\Rightarrow K_P = K_C.(RT)^{c+d-(a+b)}$$

En posant : $\Delta n = c + d - (a + b)$

D'où :

$$\boxed{K_P = K_C.(RT)^{\Delta n}}$$

III. Loi générale du déplacement d'équilibre : loi de Chatelier.

Enoncé : *Lorsqu'un système chimique est à l'état d'équilibre, la modification de l'un des facteurs de la réaction favorise la réaction qui tend à s'opposer à cette modification.*

III.1. Influence de la concentration.

Lorsqu'on *introduit dans le mélange à l'équilibre, une certaine quantité d'un réactif ou d'un produit, de la transformation, on favorise la réaction qui fait consommer* le dit réactif ou le dit produit.

Exemple : Pour la transformation :

$$N_2 + 3H_2 \underset{(2)}{\overset{(1)}{\rightleftharpoons}} 2NH_3$$

- Si on *augmente* $[N_2]$, *en ajoutant* dans le mélange une certaine quantité de N_2, *l'équilibre se déplace dans le sens de la disparition de N_2* : le sens (1).
- Si *on augmente* $[NH_3]$, *en ajoutant* dans le mélange une certaine quantité de NH_3, *l'équilibre se déplace dans le sens de la disparition de NH_3* : le sens (2).
- Si *on diminue* $[NH_3]$, *en enlevant* dans le mélange une certaine quantité de NH_3, *l'équilibre se déplace dans le sens d'apparition de NH_3* : le sens (1).

III.2. Effet de la température.

L'*augmentation de la température favorise la réaction endothermique*, c'est – à – dire celle qui absorbe de la chaleur, par contre *la diminution de le température favorise la réaction exothermique*, c'est – à – dire celle qui dégage de la chaleur.

III.3. Influence de la pression.

Lorsqu'un système chimique à l'équilibre contient des corps gazeux, *l'augmentation de la pression favorise la réaction qui contribue à la diminution du nombre de molécule gazeuses* et la *diminution de la pression favorise l'augmentation du nombre de molécule gazeuse*.

Exemple : Pour la transformation :

$$N_2 + 3H_2 \underset{(2)}{\overset{(1)}{\rightleftharpoons}} 2NH_3$$

(1) : Diminution du nombre de molécules.
(2) : Augmentation du nombre de molécules.

- *Si on augmente la pression, l'équilibre se déplace dans le sens (1).*
- *Si on diminue la pression, l'équilibre se déplace dans le sens (2).*

Coefficient de dissociation.

Définition : *Le coefficient ou degré de dissociation (ou d'ionisation) est le rapport entre la concentration de l'espèce dissociée et la concentration initiale.*

$$\alpha = \frac{[espèce\ dissociée]}{[espèce\ initiale]}$$

Exemple : Pour la transformation chimique :

$$NH_3 + H_2O \rightleftharpoons NH_4^+ + OH^-$$

$$\alpha = \frac{[NH_4^+]}{[NH_3]_0}$$

Exercices d'application.

Exercice 1 : Les concentrations à l'équilibre pour le système réactionnel : $2NO + O_2 \rightleftharpoons 2NO_2$ sont égales à $[NO]$ = *0,03mol/L*, $[O_2]$ = *0,06mol/L et* $[NO_2]$ = *0,04mol/L.*

1°) Trouve la constante d'équilibre et les concentrations initiales des réactifs NO et O_2.

2°) On rappelle que la cinétique de cette réaction est suivie à partir de la variation de la concentration du monoxyde d'azote NO.

a) Exprime la vitesse de disparition du monoxyde d'azote NO en fonction de la variation de sa concentration C dans le temps.

b) Sachant que la loi d'action de masse indique que $V_{(NO)} = k.C^2$. Détermine la constante de vitesse k de cette réaction si le temps de demi – réaction est égal à 30 minutes.

Corrigé 1 :

$[NO]$ = *0,03mol/L*, $[O_2]$ = *0,06mol/L et* $[NO_2]$ = *0,04mol/L.*

1°) Constante d'équilibre et concentrations initiales

✓ Constante d'équilibre.

Elle est donnée par la formule :

$$K = \frac{[NO_2]^2}{[O_2][NO]^2}$$

$$\boldsymbol{A.N} : K = \frac{(0{,}04)^2}{(0{,}06)(0{,}03)^2} = 29{,}63$$

$$K = 29{,}63$$

✓ Concentrations initiales

	$2NO$	$+\ O_2$	$\rightleftharpoons$	$2NO_2$
à t = 0	n_1	n_2		0
à téq	$n_1 - 2x$	$n_2 - x$		$2x$

Dans le même volume à l'équilibre on a les relations suivantes :

$$[NO] = \frac{n_1 - 2x}{V} = \frac{n_1}{V} - 2\frac{x}{V} \quad (1)$$

$$[O_2] = \frac{n_2 - x}{V} = \frac{n_2}{V} - \frac{x}{V} \quad (2)$$

$$[NO_2] = \frac{2x}{V} \Rightarrow \frac{x}{V} = \frac{[NO_2]}{2} \quad (3)$$

(3) dans (1) donne : $[NO] = \frac{n_1}{V} - 2\frac{[NO_2]}{2}$

$[NO] = \frac{n_1}{V} - [NO_2] \Rightarrow \quad C_1 = [NO] + [NO_2]$

$A.N : \ C_1 = 0{,}03 + 0{,}04 = 0{,}07$

$$C_1 = 0{,}07mol/L$$

(3) dans (2) donne : $[O_2] = \frac{n_2}{V} - \frac{[NO_2]}{2}$

$$\Rightarrow C_2 = [O_2] + \frac{[NO_2]}{2} = 0{,}06 + \frac{0{,}04}{2} = 0{,}08$$

$$C_2 = 0{,}08mol/L$$

2°) a) Vitesse de disparition de NO.

Elle est de la forme :

$$V_{(NO)} = -\frac{1}{2}\frac{d[NO]}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{dC}{dt}$$

b) $V_{(NO)} = k.C^2$; $t_{\frac{1}{2}} = 30min$.

Détermination de la constante de vitesse k de cette réaction.

D'après la loi d'action de masse on a :

$$V_{(NO)} = k.C^2 \quad (1)$$

D'autre part : $V_{(NO)} = -\frac{1}{2}\frac{dC}{dt} \quad (2)$

En égalant les deux expressions on aura :

$$k.C^2 = -\frac{1}{2}\frac{dC}{dt} \Rightarrow kdt = -\frac{1}{2}\frac{dC}{C^2}$$

$$\Rightarrow k\int dt = \frac{1}{2}\int -\frac{dC}{C^2} \Rightarrow kt = \frac{1}{2}.\frac{1}{C} + cte$$

à $t = 0$: $\frac{1}{2}.\frac{1}{C_0} + cte \Rightarrow cte = -\frac{1}{2}.\frac{1}{C_0}$

ainsi : $kt = \frac{1}{2}.\frac{1}{C} - \frac{1}{2}.\frac{1}{C_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{C_0}\right)$

$$k = \frac{1}{2t}\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{C_0}\right)$$

Pour $t = t_{\frac{1}{2}} \Rightarrow C = \frac{C_0}{2}$

Alors : $k = \frac{1}{2t_{\frac{1}{2}}C_0}$; $or\ C_0 = [NO]_0 = C_1$

D'où :

$$\boxed{k = \frac{1}{2t_{\frac{1}{2}}C_1}}$$

A.N : $k = \frac{1}{2 \times 30 \times 0{,}07} = 2{,}38.10^{-1}$

$$\boxed{k = 2{,}38.10^{-1} L/mol.min}$$

Exercice 2 : A *200K*, la constante d'équilibre de la réaction d'équation suivante :
$H_2 + CO_2 \rightleftharpoons H_2O + CO$ vaut *4,4.*
Détermine la composition du système final à l'équilibre si on place simultanément *1mol* d'hydrogène, *1mol* de gaz carbonique et *1mol* d'eau dans un ballon de *4* litres,

Corrigé 2 :

$n_{H_2} = 1mol$; $n_{CO_2} = 1mol$; $n_{H_2O} = 1mol$
V = 4L.

1°) Concentration initiale de l'azométhane.

	H_2	+	CO_2	$\rightleftharpoons$	H_2O	+	CO
à t = 0	*1*		*1*		*1*		*0*
à téq	*1 – x*		*1 – x*		*1 + x*		*x*

A l'équilibre la constante de vitesse est :

$$K = \frac{[H_2O][CO]}{[H_2][CO_2]} = \frac{x(1+x)}{(1-x)(1-x)} = 4{,}4$$

$\Rightarrow x^2 + x = 4{,}4(x^2 - 2x + 1)$

$\Rightarrow 3{,}4x^2 - 9{,}8x + 4{,}4 = 0$

Soit le discriminant :

$\Delta = (9{,}8)^2 - 4(3{,}4)(4{,}4) = 36{,}2 > 0$

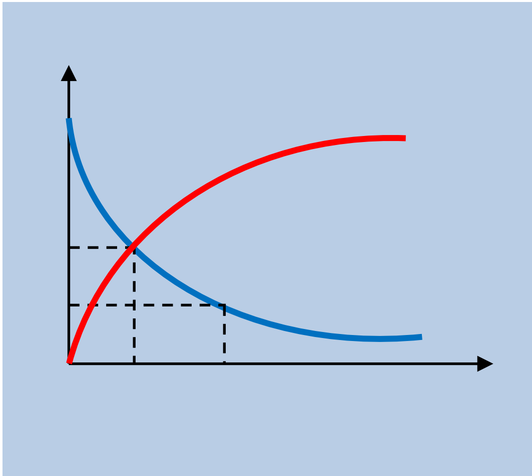
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{9{,}8 - \sqrt{36{,}2}}{2 \times 3{,}4} = 0{,}55mol \\ x_2 = \frac{9{,}8 + \sqrt{36{,}2}}{2 \times 3{,}4} = 2{,}32mol \end{cases}$$

$x_2 = 2{,}32mol$ est à rejeter car étant supérieur à la quantité initiale. On retient donc $x = 0{,}55mol$.

D'où à l'équilibre on aura :

$$\boxed{\begin{cases} n_{H_2} = 1 - x = 1 - 0{,}55 = 0{,}45mol \\ n_{CO_2} = 1 - x = 1 - 0{,}55 = 0{,}45mol \\ n_{CO} = x = 0{,}55mol \\ n_{H_2O} = 1 + x = 1 + 0{,}55 = 1{,}55mol \end{cases}}$$

TRAVAUX DIRIGES IV



Conseils pratiques :

1. Vitesse et ordre d'une réaction chimique.
2. Temps de demi – réaction.
3. Facteurs cinétiques influençant une transformation chimique.
4. Notion d'équilibre chimique.
5. Transformation limitée, transformation totale.
6. Loi d'action de masse : constante d'équilibre d'une réaction chimique.
7. Loi générale du déplacement d'équilibre : loi de Chatelier.

L'ESSENTIEL DU COURS

I – Définitions des notions.

Définis les termes et expressions suivants : Cinétique chimique ; vitesse d'une réaction ; transformation équilibrée ; transformation totale ; coefficient de dissociation ; Temps de demi – réaction.

II – Questions à réponses construites.

Réponds aux questions suivantes :

1°) Cite les différents facteurs qui peuvent influencer la vitesse d'une réaction chimique.
2°) Quel est le rôle d'un catalyseur dans une réaction chimique ?
3°) Dresse un tableau récapitulatif liant le temps de demi réaction, la loi horaire et l'ordre d'une réaction.
4°) Enonce la loi de Chatelier.
5°) On considère la réaction chimique suivante : $N_2(g) \;+\; 3H_2(g) \;\rightleftharpoons\; 2NH_3(g)$.

a) Comment peux – tu modifier l'équilibre de cette réaction dans le sens (1)
b) Que se passerait – il si on augmente la pression totale du mélange ?

6°) Après avoir définit le temps de demi – réaction, établis le temps de demi – réaction d'ordre n.

III – Questions à alternative vrai ou faux.

Réponds par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

1°) La vitesse d'une réaction chimique dépend de la concentration initiale.
2°) La réaction $C(s) \;+\; O_2(g) \;\longrightarrow\; CO_2(g)$ est une réaction équilibrée.
3°) Plus la concentration initiale d'un réactif est élevée, plus la vitesse de la réaction est importante, la réaction est rapide.
4°) Lorsqu'on élève la température d'une réaction, sa vitesse diminue.
5°) La réaction de désintégration radioactive est une réaction d'ordre 2.
6°) L'ordre d'une réaction est la somme des coefficients stœchiométriques des réactifs.
7°) La diminution de la pression modifie l'équilibre d'une réaction dans le sens de diminution du nombre de molécules gazeuses.
8°) L'augmentation de la pression modifie l'équilibre d'une réaction dans le sens de diminution du nombre de molécules gazeuses.
9°) Un catalyseur intervient dans une réaction chimique en augmentant son rendement.
10°) Une réaction chimique endothermique est une réaction qui dégage de la chaleur.

IV – Appariement.

Relie un élément – question de la colonne A à un élément – réponse de la colonne B dans le tableau ci – dessous : *Exemple : $a_9 = b_{10}$.*

Colonne A		Colonne B	
a_1	Réaction d'ordre 0	b_1	$t_{1/2} = \frac{1}{KC_0}$
a_2	Réaction d'ordre 1	b_2	$K = \frac{[C]^c[D]^d}{[A]^a[B]^b}$
a_3	Equation de vitesse intégrée	b_3	$\frac{[Espèce\ dissociée]}{[Espèce\ initiale]}$
a_4	Réaction d'ordre 2	b_4	$v = K[A]^\alpha[B]^\beta$
a_5	Constante d'équilibre	b_5	$[A] = \frac{[A]_0}{2}$
a_6	Temps de demi – réaction	b_6	$t_{1/2} = \frac{C_0}{2K}$
a_7	Coefficient de dissociation	b_7	$[A] = [A]_0e^{-Kt}$

RESOLUTION DES PROBLEMES

EXERCICE 1 : L'ammoniac peut s'oxyder selon la réaction suivante :

$$4NH_3 + 5O_2 \longrightarrow 4NO + 6H_2O$$

A l'instant t, l'ammoniac disparait à la vitesse de $0,2\ mol.L^{-1}.s^{-1}$. Calcule :

1°) La vitesse de disparition de dioxygène.
2°) La vitesse de formation de l'eau.
3°) La vitesse de la réaction à cet instant.

EXERCICE 2 : On considère l'équation chimique suivante :

$$N_2O_5(g) \rightarrow 2NO_2\,(g) + \frac{1}{2}O_2(g)$$

Calculer $[NO_2]$ et $[O_2]$ après 50 minutes, sachant qu'à cet instant $[N_2O_5]$ = *0,28mol/L*. On donne $[N_2O_5]_0$ = *1,24mol/L*.

EXERCICE 3 : Soit l'équilibre chimique $CO_2(g) + C(s) \rightleftharpoons 2CO(g)$.

a) Applique la loi d'action de masse pour exprimer K.
b) Le volume restant constant, dans quel sens se déplace l'équilibre :
   - Si on introduit du *CO*.
   - Si on introduit da carbone
   - Si on enlève du CO_2.

EXERCICE 4 : On administre par voie intraveineuse de la digitaline à un malade. L'élimination de ce médicament se fait suivant la loi du 1er ordre. La demi – vie de ce dernier est de *7* jours. Calcule le temps nécessaire pour éliminer *80%* de ce médicament.

EXERCICE 5 : On considère la réaction d'ordre *0* par rapport à A telle que $A \longrightarrow B$ avec une constante de vitesse $K = 0,00175 mol.l^{-1}s^{-1}$. Sachant que la concentration initiale de A est $C_0 = 0,015 mol/L$, calcule le temps nécessaire pour que *80%* de A disparaisse.

EXERCICE 6 : La réaction

$2SO_2(g) + O_2(g) \rightleftharpoons 2SO_3(g)$ à 800K et sous 1atm a un rendement (degré de dissociation) α = 95,6%.

1°) Ecris l'expression de la constante d'équilibre K.
2°) Calcule la concentration de SO_2 à l'équilibre sachant que la concentration initiale de SO_2 est $10^{-2} mol/L$.
3°) Comment évolue l'équilibre si :
   - On élève la température ?
   - On élève la pression ?
   - On diminue la température ?
   - On ajoute le SO_3 ?

EXERCICE 7 : La réaction $A \longrightarrow B + 2C$ est une réaction d'ordre 1 tel que $[A]_0 = 0,5 mol/L$ et que le temps de demi – réaction est de *42s*.

1°) Donne l'équation de vitesse intégrée de cette réaction.
2°) Calcule la constante de vitesse K de la réaction.
3°) Calcule la concentration du réactif après *3* minutes.
4°) Quelle est la vitesse moyenne de disparition du réactif A entre *0* et *3* minutes ?
Déduis – en la vitesse moyenne de formation du corps *C*.

EXERCICE 8 : On chauffe à *250°C* une quantité de $PC\ell_5$ dans un récipient de *12L*. A l'équilibre, on

trouve : *0,21mole* de $PC\ell_5$, *0,32mole* de $PC\ell_3$ et *0,32mole* de $C\ell_2$.
1°) Calcule la valeur de la constante d'équilibre K_C à *250°C* de la réaction :

$$PC\ell_5 \rightleftharpoons PC\ell_3 + C\ell_2$$

2°) Déduis – en K_P.
3°) Comment évolue l'équilibre si :
On élève la température ?
On élève la pression ?
On enlève une certaine quantité de $C\ell_2$?
On ajoute le $PC\ell_3$?

EXERCICE 9 : La décomposition du peroxyde d'hydrogène, de formule H_2O_2, conduit à la formation du dioxygène et de l'eau. La réaction a lieu à température constante et en présence d'un catalyseur. On suppose que le volume de la solution reste constant pendant la durée de la réaction.
On considère une solution S de peroxyde d'hydrogène, de volume $V = 500mL$ et de concentration initiale $0{,}08mol.L^{-1}$. On mesure le volume de dioxygène formé toutes les *5min* et on obtient le tableau suivant :

t(min)	0	5	10	15	20
$V(O_2)(mL)$	0	72	138	192	228
$V(H_2O_2)$					

t(min)	25	30	35	40
$V(O_2)(mL)$	252	270	288	300
$V(H_2O_2)$				

1°) Ecris l'équation – bilan de la réaction de décomposition du peroxyde d'hydrogène.
2°) a) Donne une relation liant la concentration du peroxyde d'hydrogène à l'instant *t* et le volume de dioxygène formé au même instant.
b) Complète la dernière ligne du tableau donné ci – dessus. Le volume molaire des gaz dans les conditions de l'expérience est $V_m = 24L.mol^{-1}$.
3°) Calcule la vitesse moyenne de disparition du peroxyde d'hydrogène entre les instants : $t = 15min$ et $t = 25min$.
4°) a) Définis le temps de demi réaction.
b) Etablis la relation liant la constante de vitesse *K* et le temps de demi – réaction *T*, sachant que la réaction est du premier ordre. Calcule *K* pour $T = 22min$.

EXERCICE 10 : A *100°C*, une mole de pentan – 1ol est mélangée avec une mole d'acide A.
1°) Ecris l'équation – bilan, nomme – la, ainsi que le produit obtenu E.
2°) Trace la courbe de formation de E selon les valeurs consignées dans le tableau ci – dessous.
3°) Calcule la vitesse de formation de E à $t = 20$ *min*.
4°) Trace le graphe traduisant les variations de l'acide A en fonction du temps.
5°) Calcule la vitesse de disparition de A à $t = 30$ *min*.

t(min)	0	5	10	15	20
$n_E(mol)$	0	0,26	0,40	0,48	0,54

25	30	35	40	45	50
0,58	0,62	0,64	0,66	0,67	0,67

EXERCICE 11 : Une réaction de la forme :
$\boldsymbol{A + B \longrightarrow C + D}$ est du second ordre. Pour des concentrations initiales de *0,1mol/L* de A et B, on remarque que *20%* des produits initiaux ont disparu au bout de *30 minutes*.
1°) Quelle est la valeur de la constante de vitesse de cette réaction ?
2°) Quel est le temps de demi – réaction ?
3°) Quel est ce même temps de demi – réaction si les concentrations initiales étaient de *0,01mol/L*.

EXERCICE 12 : Pour quelle molarité d'une solution d'acide acétique obtiendrait – on un coefficient de dissociation $\alpha = 0{,}02\%$, la valeur de la constante d'équilibre à *25°C* étant $K_C = 1{,}8.10^{-5}$.

EXERCICE 13 : La période radioactive ou demi – vie du polonium 210 est $T = 140j$
1°) Ecris la loi cinétique de la réaction nucléaire du polonium ^{210}Po sachant qu'elle est d'ordre 1.
2°) Détermine la constante de vitesse de la réaction de désintégration.
3°) Combien de temps faut – il pour que *70%* de masse du polonium soit désintégrés.

EXERCICE 14 : La décomposition de N_2O_5 en solution dans le tétrachlorure de carbone est une réaction du premier ordre. On fait les mesures suivantes :

t(s)	0	4450
$[N_2O_5]$ *(mol/L)*	3.10^{-2}	$2{,}7.10^{-2}$

1°) Calcule la constante de vitesse K.
2°) Calcule le temps de demi – réaction $t_{1/2}$
3°) Calcule la constante de vitesse si l'on doublait la concentration initiale.

4°) Quel serait le temps de demi – réaction si l'on doublait la concentration initiale ?

EXERCICE 15 : La réaction de synthèse du trioxyde de soufre conduit à l'équilibre représenté par :

$$2SO_2(g) + O_2(g) \rightleftharpoons 2SO_3(g)$$

La réaction est exothermique dans le sens (1).
1°) Quels sont les différents facteurs susceptibles de modifier cet équilibre et dans quel sens agissent – ils ?
2°) Ecris la constante d'équilibre de ce système en fonction des pressions partielles des constituants.

EXERCICE 16 : 1°) On a mis *192g* de *HI* dans un ballon de *1,5L*. La réaction : $2HI \longrightarrow H_2 + I_2$ est de premier ordre. La vitesse de cette réaction est égale à *0,05mol/L.min*. Détermine la constante de vitesse de cette réaction ; sa concentration au bout de *10min* et le temps de demi – réaction.
2°) La réaction $A \longrightarrow B + C$ est du premier ordre. Le temps de demi – réaction est égal à *18min*. Détermine la concentration du corps B au bout de *30min* si la concentration initiale du corps A est égale à *1mol/L*.
N.B : Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

EXERCICE 17 : Calcule à *900K* la constante d'équilibre K_C de la réaction :

$$2SO_2(g) + O_2(g) \rightleftharpoons 2SO_3(g)$$

Sachant qu'à l'équilibre on a : $P_{SO_2} = 0{,}28atm$, $P_{O_2} = 0{,}14atm$ et $P_{SO_3} = 0{,}58atm$ (pressions partielles).

EXERCICE 18 : Dans un ballon de *5L*, on réalise à la température ambiante de *17°C* le mélange de trois gaz suivants : *28g* de diazote ; *4g* de dioxygène ; *5,5g* de dioxyde de carbone. Calcule la pression totale du mélange dans le ballon, puis la pression partielle de chaque gaz.
On donne : $R = 0{,}082\ atm.K^{-1}.mol^{-1}$.

EXERCICE 19 : Deux moles d'un réactif gazeux A dans un ballon de *1,5L* se décomposent selon l'équation bilan :

$$2A \longrightarrow B + C$$

A l'équilibre, *20%* de A reste à se décomposer.
1°) Calcule la constante d'équilibre de cette réaction.
2°) Cette réaction étant du premier ordre :
a) Exprime la concentration de A à l'instant *t* en fonction de sa concentration initiale et du temps.
b) Au bout d'une heure, *40%* du réactif A s'est décomposé, calcule la constante de vitesse de cette réaction.
c) Au bout de combien de temps, la moitié du réactif A s'est décomposé ?

Déduis – en la concentration du réactif restant au bout de dix heures.

EXERCICE 20 : On a étudié la vitesse de la réaction de décomposition de l'azométhane $CH_3N_2CH_3$ (g) à la température de *300°C* suivant la réaction :

$$CH_3N_2CH_3(g) \longrightarrow CH_3CH_3(g) + N_2(g)$$

On a obtenu les résultats suivants:

Expérience n°	*1*	2	3
$[CH_3N_2CH_3]_0$ *(mol.L⁻¹)*	0,6004	0,913	1,701
$V_0\ (mol.L^{-1}.s^{-1})$	$2{,}42.10^{-4}$	$3{,}64.10^{-4}$	$6{,}80.10^{-4}$

1°) Détermine l'ordre de la réaction ainsi que la constante de vitesse.
2°) Ecris l'équation de vitesse intégrée de cette réaction.
3°) En considérant l'expérience n°2, calcule le temps de demi – réaction.
4°) Calcule le temps qu'il faut pour que le réactif soit consommé à *75%*.

EXERCICE 21 : La cinétique de la réaction ci – dessous a été étudiée et on a obtenu les résultats suivants aux instants initiaux (t = 0).

$$2NOC\ell(g) \longrightarrow 2NO(g) + C\ell_2(g)$$

Experiences	$[NOC\ell]_0 (mol.L^{-1})$	*Vitesse initiale* $(mol.L^{-1}.s^{-1})$
1	0,25	$1{,}75.10^{-6}$
2	0,42	$4{,}96.10^{-6}$
3	0,65	$1{,}18.10^{-6}$

1°) Détermine l'ordre de cette réaction et la constante de vitesse *K* correspondante.
2°) Pour l'expérience n°2 :
a) Ecris l'équation de vitesse.
b) Définis et calcule le temps de demi – réaction *T*.
c) Au bout de combien de temps t les quatre cinquième de $NOC\ell$ sont – ils décomposés.

EXERCICE 22 : Pour la réaction décrite suivante :

$$SO_2C\ell_2(g) \longrightarrow SO_2(g) + C\ell_2(g)\ ;$$

on a réalisé trois expérience :

Expériences	$[SO_2C\ell_2]$ *(mol/L)*	V_0 *mol.L*$^{-1}$*s*$^{-1}$
1	0,74	$1{,}63.10^{-5}$
2	1,25	$2{,}75.\ 10^{-5}$
3	1,86	$4{,}09.\ 10^{-5}$

1°) Détermine l'ordre de la réaction.
2°) Détermine la valeur de la constante de vitesse K.

EXERCICE 23 : Soit la réaction chimique suivante :
$NH_4^+ (aq) + NO_2(aq) \rightarrow N_2(g) + 2H_2O(\ell)$
On a réalisé trois expériences et les résultats suivants ont été obtenus :

Expérience	$[NH_4^+]_0$ (mol/L)	$[NO_2]_0$ (mol/L)	V_0 $(mol/L.s)$
1	0,100	0,005	$1{,}35.10^{-7}$
2	0,100	0,010	$2{,}70.10^{-7}$
3	0,200	0,010	$5{,}40.10^{-7}$

1°) Calcule les ordres partiels de cette réaction.
2°) Déduis – en l'ordre global et calcule la constante de vitesse *K* de cette réaction.
3°) Ecris la loi de vitesse pour cette réaction.

EXERCICE 24 **:** A *25°C,* la décomposition du pentaoxyde d'azote de concentration initiale C_0 *= 0,1mol/L* fournit les résultats suivants :

$$N_2O_5(g) \longrightarrow N_2O_4(g) + \frac{1}{2}O_2(g)$$

t(min)	0	20	30	40	50	60
$[O_2].10^{-2}$ *(mol/L)*	0	9,2	13,8	18,4	23	27,8

1°) Montre qu'il s'agit d'une réaction d'ordre zéro.
2°) Calcule la constante de vitesse.

EXERCICE 25 **:** La réaction de décomposition de *NOBr*, à une température déterminée, selon l'équation :

$$2NOBr(g) \longrightarrow 2NO(g) + Br_2(g)$$

fournit les résultats suivants:

t(s)	0	6,2	10,8
[NOBr] mol.L^{-1}	0,0250	0,0198	0,0162

t(s)	14,7	20,0	24,5
[NOBr] mol.L^{-1}	0,0144	0,0125	0,0112

1°) En se servant de ces résultats, détermine le temps de demi – réaction.
2°) Sachant que la réaction est d'ordre deux :
a) Calcule la constante de vitesse de la réaction ;
b) Ecris la loi de vitesse de cette réaction ;
c) Détermine le temps nécessaire à la disparition de *80%* du réactif puis calcule la vitesse de disparition du réactif à cette date.

EXERCICE 26 **:** La réaction d'isomérisation suivante : $CH_3NC(g) \longrightarrow CH_3CN(g)$ **;** obéit à une cinétique du premier ordre. A *t = 200°C*, la concentration de CH_3NC restant, atteint *85%* de sa valeur initiale après *247s*.
1°) Détermine la constante de vitesse de cette réaction à cette température.
2°) A quel instant la concentration en CH_3NC aura – t – elle atteint *75%* de sa valeur initiale ?
3°) Détermine le temps de demi – réaction.

EXERCICE 27 **:** La réaction $2A + B \longrightarrow 3C$ est du deuxième ordre. La concentration initiale du corps A est égale à *3mol/L*. Dans 2heures, *1,5mol/L* du corps C sont formés. Trouve la constante de vitesse de cette réaction et le temps de demi – réaction.

EXERCICE 28 **:** La réaction de décomposition de l'iodure d'hydrogène en dihydrogène et diiode est une réaction de 1er ordre. La mesure du temps de demi – réaction a donné : $t_{1/2}$ *= 10 minutes*.
A la température de *600K*, dans un ballon de un litre, on introduit *1,5mol* de l'iodure d'hydrogène qu'on chauffe.
1°) Calcule la constante de vitesse de cette réaction.
2°) Ecris l'équation de la réaction.
3°) Détermine la composition du milieu réactionnel à l'instant *t = 25min*.
4°) Déduis – en la vitesse de la réaction et la vitesse de disparition de HI à cette date.
5°) Calculer à *t = 25min*, la pression totale dans le ballon.

EXERCICE 29 **:** Pour la réaction :
$OH - C_2H_4C\ell + OH^- \longrightarrow OH - C_2H_4 - OH + C\ell^-$
on a obtenu les résultats consignés dans le tableau ci – dessous :

Expérience	n°1	n°2	n°3
Vitesse en mol.L^{-1}*.s*$^{-1}$	$2{,}27.10^{-5}$	$5{,}67.10^{-7}$	$5{,}68.10^{-5}$
$[OH - C_2H_4C\ell]_0$ *(mol/L)*	0,2	0,01	0,5
$[OH^-]_0$*(mol/L)*	0,1	0,05	0,1

1°) Quels sont les ordres partiels par rapport à $OH - C_2H_4C\ell$ et OH^- ?
2°) Déduis – en l'ordre global de cette réaction.
3°) Calcule la constante de vitesse.
4°) Pour l'expérience n°3, calcule pour les ions OH^-, le temps au bout duquel la moitié de ce réactif aura disparu.
5°) Pour cette même expérience, calcule le temps au bout duquel *70%* du même réactif aura disparu.

EXERCICE 30 : Le tableau suivant indique l'évolution de $[NO_2]$ en fonction du temps pour la réaction :

$$NO_2(g) \longrightarrow NO(g) + \frac{1}{2}O_2(g)$$

t(min)	0	4,2	7,9
$[NO_2]$*(mol/L)*	0,0831	0,0666	0,0567

t(min)	11,4	15
$[NO_2]$*(mol/L)*	0,0497	0,0441

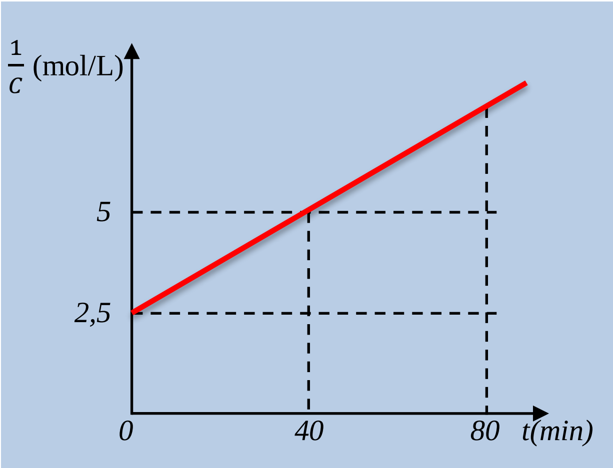
1°) Montre que cette réaction est d'ordre 2 en mettant en graphique $\frac{1}{[NO_2]}$ en fonction du temps et détermine la valeur de la constante de vitesse.
2°) Détermine le temps de demi – vie de cette réaction.
3°) Calcule le temps nécessaire pour que la réaction soit complète à *90%*.

EXERCICE 32 : On considère l'étude cinétique de la réaction $NH_4^+ + NO_2^- \longrightarrow N_2 + 2H_2O$.
Les deux réactifs ont la même concentration initiale notée C_0. Le tableau suivant donne le temps de demi – réaction relatif à chaque concentration initiale.

$C_0\,(10^{-1}mol.L^{-1})$	1	2,5	5
t(min)	625	250	125

1°) En calculant la constante de vitesse relative à chaque concentration, vérifie que la réaction est d'ordre 2.
2°) Partant d'une concentration initiale $C_0 = 5.10^{-1}mol.L^{-1}$, calcule :
e) La concentration de chaque réactif au bout d'un temps *t = 100min*.
f) Le temps au bout duquel *80%* des réactifs seront consommés. Quelle est la vitesse de la réaction à cet instant ?

EXERCICE 33 : La courbe cinétique de la fonction $\frac{1}{C} = f(t)$ est une droite affine représentée par la figure ci – dessous où *C* représente la concentration du réactif à un instant *t*. En tenant compte de cette droite :
1°) Déduis – en la concentration initiale C_0 du réactif.
2°) Calcule la constante de vitesse K.
3°) Que représente le temps *t = 40min* ?
4°) Quel est la concentration à l'instant *t = 60min* ?



EXERCICE 34 : On étudie la saponification du formiate d'éthyle par la soude à *25°C*. Les concentrations initiales de la soude et de l'ester sont égales à 10^{-2}*mol/L*, les quantités en mol/L d'éthanol en fonction du temps *t* sont rapportées dans le tableau suivant :

t(s)	0	180	240	300	360
$[C_2H_5OH].10^{-3}$ (mol/L)	0	2,6	3,17	3,66	4,11

1°) Ecris l'équation de la réaction.
2°) Complète le tableau en calculant à chaque instant la concentration du formiate d'éthyle.
3°) Montre que cette réaction est d'ordre 2 par rapport au formiate d'éthyle. Déduis – en le temps de demi – réaction.

EXERCICE 35 : Le temps de demi – réaction d'une réaction d'ordre *n* est donné par la relation :

$$t_{1/2} = \frac{A}{C_0^{n-1}}$$

Où A est une constante et C_0 la concentration initiale du réactif.

1°) Au cours d'une réaction chimique d'équation $\boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$, si la concentration initiale de A est de $6.10^{-3}mol/L$, le temps de demi – réaction est de *12,6min*. Si cette concentration initiale est de $2,1.10^{-2}mol/L$, le temps de demi – réaction est de *3,6min*. Détermine l'ordre de cette réaction.
Déduis – en la valeur de A et celle de la constante de vitesse K.
2°) On considère la concentration initiale $C_0 = 6.10^{-3}mol/L$.

a) Calcule la vitesse initiale de cette réaction.
b) Au bout de combien de temps *60%* de A disparaissent ?

EXERCICE 36 : On étudie la réaction équilibrée endothermique suivante :

$$\boldsymbol{CO}(\boldsymbol{g}) + \boldsymbol{H_2O}(\boldsymbol{g}) \rightleftharpoons \boldsymbol{CO_2}(\boldsymbol{g}) + \boldsymbol{H_2}(\boldsymbol{g})$$

1°) Dans quel sens se déplace l'équilibre quand :

a) On élève la température ;
b) On augmente la pression.

2°) Exprime la constante d'équilibre K_P à une température *T*.
A *1000K* (*727°C*), $K_P = 0,9$, calcule la valeur des pressions partielles des divers constituants à l'équilibre sachant que la pression totale du mélange gazeux est de *1atm* et qu'initialement, il y avait une *mole* de *CO* et *2 moles* de H_2O.

DOMAINE D'ETUDE II : REACTION CHIMIQUE

OG_3 : CARACTERISER LES REACTIONS D'ESTERIFICATION, DE SAPONIFICATION ET LES PRODUITS OBTENUS

7 LES REACTIONS D'ESTERIFICATION.

I. Rappels sur les composés organiques.

I.1. Les monoalcools saturés.

I.1.1. Formule brute et nomenclature.

a) Formule brute.

La formule brute d'un monoalcool non cyclique s'écrit :

$$R - OH$$

Où *R est un groupement alkyle* C_nH_{2n+1} ;
n : nombre d'atome de carbone.
OH : désigne la fonction alcool.

Exemples :

- ✓ $n = 1 : CH_3 - OH$
- ✓ $n = 2 : C_2H_5 - OH$
- ✓ $n = 5 : C_5H_{11} - OH$

b) Nomenclature.

Pour déterminer le nom d'un alcool $R - OH$, on utilise le nom de l'alcane $R - H$ correspondant et on substitue le « *e* » terminal par le suffixe « *ol* ». D'où le nom général des alcools est « *alcanol* ».

Ainsi on obtient pour :

- ✓ $n = 1 : CH_3 - OH$: *Méthane* ⟶ *Méthanol*
- ✓ $n = 2 : C_2H_5 - OH$: *Ethane* ⟶ *Ethanol*
- ✓ $n = 3 : C_3H_7 - OH$: *Propane* ⟶ *Propanol*
- ✓ $n = 4 : C_4H_9 - OH$: *Butane* ⟶ *Butanol*
- ✓ $n = 5 : C_5H_{11} - OH$: *Pentane* ⟶ *Pentanol*

Remarque : A partir de $n = 3$ atomes de carbone (C), on peut avoir des *isomères* (*on appelle isomères, des composés ayant la même formule brute mais des formules développée et semi – developpée différentes*) par rapport à la chaine carbonée ou la position du groupement fonctionnel *OH*. Ainsi, *il serait hasardeux de nommer un composé organique à partir de sa formule brute*.

- ➢ Le nom d'un composé organique, en général s'obtient à partir de sa formule semi – développée.
- ➢ Pour nommer un alcool ayant plus de deux atomes de carbone :
  - *on choisit la chaîne carbonée principale (la plus longue) ;*
  - *on détermine le nom de l'alcane correspondant au nombre d'atome de carbone ;*
  - *on indique le numéro du carbone fonctionnel* et / ou le ou les numéros des carbones portant des ramifications.
  - *on nomme les ramifications en les faisant précéder des numéros des carbones qui les portent. Ceux – ci précèdent le nom de l'alcool de la chaîne principale.*
- ➢ Le *sens de nomenclature est celui dont la somme des numéros des carbones concernés est le plus petit possible*, le carbone fonctionnel (carbone lié à la fonction alcool) ayant le *plus petit numéro*.

Exemple : Pour $n = 4 : C_4H_9 - OH$

1°)
$$\overset{1}{\underset{4}{CH_3}} - \overset{2}{\underset{3}{CH_2}} - \overset{3}{\underset{2}{CH_2}} - \overset{4}{\underset{1}{CH_2}} - OH$$

Butan – 1 ol.

2°)
$$\overset{1}{\underset{4}{CH_3}} - \overset{2}{\underset{3}{CH_2}} - \overset{3}{\underset{2}{\underset{|}{CH}}} - \overset{4}{\underset{1}{CH_3}}$$
$$\qquad\qquad\quad OH$$

Butan – 2 ol.

3°)
$$\qquad\quad CH_3$$
$$\overset{1}{\underset{3}{CH_3}} - \overset{2\ |}{\underset{2}{CH}} - \overset{3}{\underset{1}{CH_2}} - OH$$

2 – méthylpropan – 1 ol.

4°) $\begin{array}{c} \scriptstyle 1 \quad\; 2 \quad OH \;\; 3 \\ CH_3 - \overset{|}{\underset{|}{C}} - CH_3 \\ \scriptstyle 3 \quad\; 2 \quad CH_3 \;\; 1 \end{array}$ *:2 – méthylpropan – 2 ol.*

I.1.2. Les trois classes d'alcools.

Suivant la position du carbone fonctionnel dans un monoalcool, on distingue *trois classes ou familles d'alcools* de propriétés chimiques distinctes.

a) Les alcools primaires.

Pour les alcools primaires, le *carbone fonctionnel est lié à au plus un atome de carbone, ou la fonction alcool est en bout de chaine*.

Leur formule générale est : $R - CH_2 - OH$

R : groupement alkyle.

Exemples :

- ✓ $CH_3 - OH$: *méthanol.*
- ✓ $CH_3 - CH_2 - OH$: *éthanol.*
- ✓ $C_2H_5 - CH_2 - OH$: *propan – 1 ol.*
- ✓ $CH_3 - \overset{CH_3}{\overset{|}{C}H} - CH_2 - OH$

  2 – méthylpropan – 1 ol.

b) Les alcools secondaires.

Pour les alcools secondaires, le *carbone fonctionnel est lié à deux atomes de carbone*.

Leur formule générale est :

$$R - \underset{OH}{\underset{|}{C}H} - R'$$

Où *R* et *R'* sont des groupements alkyles.

Exemples :

- ✓ $CH_3 - \underset{OH}{\underset{|}{C}H} - CH_3$: *propan – 2 ol.*
- ✓ $CH_3 - CH_2 - \underset{OH}{\underset{|}{C}H} - CH_3$: *butan – 2 ol.*
- ✓ $CH_3 - \underset{OH}{\underset{|}{C}H} - \underset{CH_3}{\underset{|}{C}H} - CH_3$

  3 – méthylbutan – 2 ol.

c) Les alcools tertiaires.

Pour les alcools tertiaires, le *carbone fonctionnel est lié à trois atomes de carbone*.

Leur formule générale est :

$$R - \overset{R'}{\overset{|}{\underset{R''}{\underset{|}{C}}}} - OH$$

Où *R*, *R'* et *R''* sont des groupements alkyles.

Exemples :

- ✓ $CH_3 - \overset{CH_3}{\overset{|}{\underset{CH_3}{\underset{|}{C}}}} - OH$:

  2 – méthylpropan – 2 ol.

- ✓ $CH_3 - CH_2 - \overset{CH_3}{\overset{|}{\underset{OH}{\underset{|}{C}}}} - CH_2 - CH3$:

  3 – méthylpentan – 3 ol.

I.1.3. Caractères distinctifs des trois classes d'alcools.

Il existe plusieurs caractères distinctifs des trois classes d'alcools.

a) Oxydation ménagée.

L'oxydation d'un alcool en solution aqueuse par des oxydants puissants, comme les ions permangantes MnO_4^- ou dichromate $Cr_2O_7^{2-}$ produit :

> - ✓ *Pour un alcool primaire, un aldéhyde puis un acide carboxylique.*
> - ✓ *Pour un alcool secondaire, une cétone.*
> - ✓ *Pour un alcool tertiaire, rien, car l'alcool tertiaire n'est pas oxydable par cette voie.*

La différence existant entre les produits obtenus pour les trois classes d'alcool permet leur différenciation.

❖ *Alcool I* $\xrightarrow{[O]}$ *Aldéhyde* $\xrightarrow{[O]}$ *Acide Carboxylique*

$$R - CH_2 - OH \xrightarrow{[O]} R - C\begin{matrix} /\!\!/ O \\ \diagdown H \end{matrix} \xrightarrow{[O]} R - C\begin{matrix} /\!\!/ O \\ \diagdown OH \end{matrix}$$

Exemple :

$$\underset{Ethanol}{CH_3 - CH_2 - OH} \xrightarrow{[O]} \underset{éthanal}{CH_3 - C\begin{matrix} /\!\!/ O \\ \diagdown H \end{matrix}} \xrightarrow{[O]}$$

$$\underset{acide\ éthanoïque}{CH_3 - C\begin{matrix} /\!\!/ O \\ \diagdown OH \end{matrix}}$$

❖ *Alcool II* $\xrightarrow{[O]}$ *Cétone*

$$R-\underset{\underset{OH}{|}}{CH}-R' \xrightarrow{[O]} R-\underset{\underset{O}{\parallel}}{C}-R'$$

Exemple :

$$CH_3-\underset{\underset{OH}{|}}{CH}-CH_3 \xrightarrow{[O]} CH_3-\underset{\underset{O}{\parallel}}{C}-CH_3$$

Propan – 2 ol *propanone*

❖ *Alcool III* $\xrightarrow{[O]}$ *Rien*

$$R-\overset{\overset{R'}{|}}{\underset{\underset{R''}{|}}{C}}-OH \xrightarrow{[O]} Rien$$

b) Réactions d'estérification.

Par action d'un acide carboxylique sur un alcool, on obtient pour un *mélange équimolaire* (même quantité de matière initiale) à l'équilibre :

- ✓ *67% d'ester avec un alcool primaire ;*
- ✓ *60% d'ester avec un alcool secondaire ;*
- ✓ *5 à 10% d'ester avec un alcool tertiaire.*

Remarque : Les composés obtenus par oxydation ménagée des alcools s'identifient par les tests à partir de :

- ➢ La *D.N.P.H* (Dinitrophényl – 2,4 hydrazine) qui donne un *test positif avec les aldéhydes et les cétones* ;
- ➢ La *liqueur de Féhling* qui donne un *test positif avec les aldéhydes mais négatif avec les cétones* ;
- ➢ Le *réactif de Tollens ou N.A.A* (Nitrate d'argent ammoniacal) qui donne un *test positif avec les aldéhydes mais négatif avec les cétones* ;
- ➢ Le *réactif de Schiff* qui donne un *test positif avec les aldéhydes mais négatif avec les cétones*.

Tableau récapitulatif

	Produits d'oxydation ménagée	
Tests	Aldéhyde	Cétone
D.N.P.H	+	+
Liqueur de Féhling	+	–
N.A.A	+	–
Réactif de Schiff	+	–

I.2. Les composés carbonylés.

Parmi les composés carbonylés, on distingue :

- ✓ *Les aldéhydes ;*
- ✓ *Les cétones.*

I.2.1. Les aldéhydes.

a) Formule générale.

Les aldéhydes ont pour formule générale :

$$R-C\begin{smallmatrix}\nearrow O\\ \searrow H\end{smallmatrix}$$

Où R est un radical alkyle.

Leur formule brute est : $C_nH_{2n}O$

b) Nomenclature.

Comme les alcools, les aldéhydes aussi tirent leurs noms de ceux des alcanes correspondant au nombre d'atomes de carbone, en remplaçant le *« e »* terminal par *« al »*. D'où leur nom général *« alcanal »*.

Exemples :

- ✓ *Pour n = 2 :* C_2H_4O

$$CH_3-C\begin{smallmatrix}\nearrow O\\ \searrow H\end{smallmatrix}$$ *: éthanal*

- ✓ *Pour n = 4 :* C_4H_8O

$$CH_3-CH_2-CH_2-C\begin{smallmatrix}\nearrow O\\ \searrow H\end{smallmatrix}$$ *: butanal*

N.B : Le groupement carbonyl est : $-C\begin{smallmatrix}\nearrow O\\ \searrow \end{smallmatrix}$

Remarque : La fonction aldéhyde ($-C\begin{smallmatrix}\nearrow O\\ \searrow H\end{smallmatrix}$) se trouve toujours en bout de chaine.

I.2.2. Les cétones.

a) Formule générale.

Les cétones ont pour formule générale :

$$R-\underset{\underset{O}{\parallel}}{C}-R'$$

Où R et R' des radicaux. alkyles.

$R \neq H$ et $R' \neq H$

Leur formule brute est : $\boxed{C_nH_{2n}O}$

b) Nomenclature.

Comme les alcools, les cétones aussi tirent leurs noms de ceux des alcanes correspondant au nombre d'atomes de carbone, en remplaçant le *« e »* terminal par *« one »*. D'où leur nom général *« alcanone »*.

Exemples :

- ✓ *Pour n = 3 :* C_3H_6O

$CH_3-\underset{\underset{O}{\|}}{C}-CH_3$: *propan<u>one</u>*

- ✓ *Pour n = 4 :* C_4H_8O

$CH_3-CH_2-\underset{\underset{O}{\|}}{C}-CH_3$: *butan<u>one</u>*

> ***Remarque :*** A partir de cinq (5) atomes de carbone, on distingue des isomères. Pour cela, il est indispensable de préciser le numéro du carbone fonctionnel.
>
> ***Exemple :*** *Pour n = 5 :* $C_5H_{10}O$
>
> $\overset{1}{C}H_3-\overset{2}{C}H_2-\underset{\underset{O}{\|}}{\overset{3}{C}}-\overset{4}{C}H_2-\overset{5}{C}H_3$: *pentan – 3 one*
>
> $\overset{5}{C}H_3-\overset{4}{C}H_2-\overset{3}{C}H_2-\underset{\underset{O}{\|}}{\overset{2}{C}}-\overset{1}{C}H_3$: *pentan – 2 one*

I.3. Les composés carboxylés.

Parmi les composés carboxylés, on distingue:

- ✓ *Les acides carboxyliques ;*
- ✓ *Les esters.*

I.3.1. Les acides carboxyliques.

a) Formule générale.

Les acides carboxyliques ont pour formule générale :

$\boxed{R-C\begin{array}{l}/\!\!/ O\\ \diagdown OH\end{array}}$ *Où R est un radical alkyle.*

Leur formule brute est : $\boxed{C_nH_{2n}O_2}$

b) Nomenclature.

En substituant le *« e »* terminal des alcanes par *« oïque »* et en le faisant précéder par le préfixe *« acide »*, on obtient le nom général des acides : *« acide alcanoïque »*.

Exemples :

- ✓ *Pour n = 1 :* CH_2O_2

$H-C\begin{array}{l}/\!\!/ O\\ \diagdown OH\end{array}$: *Acide méthan<u>oïque</u> ou acide formique*

- ✓ *Pour n = 2 :* $C_2H_4O_2$

$CH_3-C\begin{array}{l}/\!\!/ O\\ \diagdown OH\end{array}$: *<u>Acide</u> éthan<u>oïque</u> ou acide acétique*

- ✓ *Pour n = 3 :* $C_3H_6O_2$

$CH_3-CH_2-C\begin{array}{l}/\!\!/ O\\ \diagdown OH\end{array}$: *<u>Acide</u> propan<u>oïque</u>*

- ✓ *Pour n = 5 :* $C_5H_{10}O_2$

$CH_3-CH_2-CH_2-CH_2-C\begin{array}{l}/\!\!/ O\\ \diagdown OH\end{array}$

<u>Acide</u> pentan<u>oïque</u>

$CH_3-\underset{\underset{CH_3}{|}}{CH}-CH_2-C\begin{array}{l}/\!\!/ O\\ \diagdown OH\end{array}$

<u>Acide 3 – méthyl</u>butan<u>oïque</u>

> ***Remarque :***
>
> - ✓ La fonction acide est $-C\begin{array}{l}/\!\!/ O\\ \diagdown OH\end{array}$
> - ✓ La fonction acide se trouve toujours en bout de chaine.

I.3.2. Les esters.

a) Formule générale.

La formule générale des esters est :

$\boxed{R-C\begin{array}{l}/\!\!/ O\\ \diagdown O-R'\end{array}}$ *Où R' est un radical alkyle.*

Avec $R' \neq H$ et $n \geq 2$

$R = H$ ou $R \neq H$

Leur formule brute est : $\boxed{C_nH_{2n}O_2}$

b) Nomenclature.

Les noms des esters s'obtiennent en substituant le « *e* » terminal des alcanes par « *oate* » et en le faisant suivre par les noms des radicaux alkyles. D'où le nom général des esters : « *alcanoate d'alkyl* ».

Exemples :

- ✓ *Pour n = 2 :* $C_2H_4O_2$

$H-C(=O)-O-CH_3$: *méthanoate de méthyl*

- ✓ *Pour n = 3 :* $C_3H_6O_2$

$CH_3-C(=O)-O-CH_3$: *éthanoate de méthyl*

$H-C(=O)-O-CH_2-CH_3$: *méthanoate d'éthyl.*

- ✓ *Pour n = 5 :* $C_5H_{10}O_2$

$CH_3-C(=O)-O-\overset{1}{CH_2}-\overset{2}{CH_2}-\overset{3}{CH_3}$

éthanoate de propyl – 1.

$CH_3-C(=O)-O-\overset{2}{CH}(\,{}_1CH_3)-\overset{3}{CH_3}$

Ethanoate de propyl – 2 ou éthanoate de méthyléthyl ou éthanoate d'isopropyl.

$CH_3-CH-C(=O)-O-CH_2-CH_3$

Propanoate d'éthyl.

$H-C(=O)-O-C(CH_3)_2-CH_3$

Méthanoate d'isobutyl.

Ou Méthanoate de méthyl – 2 propyl – 2.

II. Réactions d'estérification et d'hydrolyse.

II.1. Réactions d'estérification.

II.1.1. Définition : *L'estérification est une réaction chimique entre un alcool et un acide carboxylique, conduisant à la formation d'un ester et de l'eau.*

II.1.2. Equation générale.

Elle est de la forme :

Acide + alcool ⟶ ester + eau

Soit :

$$R-C(=O)-OH + R'-OH \longrightarrow R-C(=O)-O-R' + H_2O$$

Exemple :

$$\underset{\text{Acide éthanoïque}}{CH_3-C(=O)-OH} + \underset{\text{éthanol}}{CH_3-CH_2-OH} \longrightarrow \underset{\text{Éthanoate d'éthyl}}{CH_3-C(=O)-O-CH_2-CH_3} + \underset{\text{eau}}{H_2O}$$

II.1.3. Caractéristiques de la réaction.

A la température ordinaire et en absence de catalyseur, la réaction est :

- *Lente ;*
- *Athermique ;*
- *Limitée ;*
- *Réversible.*

II.2. Réaction d'hydrolyse.

II.2.1. Définition : *C'est la réaction inverse de l'estérification, c'est – à – dire une réaction entre un ester et l'eau, conduisant à la formation d'un acide carboxylique et d'un alcool.*

II.2.2. Equation générale.

Elle est de la forme :

Ester + eau ⟶ acide + alcool

Soit :

$$R-C\begin{array}{l}/\!\!/ O\\ \diagdown O-R'\end{array} + H_2O \longrightarrow R-C\begin{array}{l}/\!\!/ O\\ \diagdown OH\end{array} + R'-OH$$

Exemple :

$$CH_3-C\begin{array}{l}/\!\!/ O\\ \diagdown O-CH_3\end{array} \quad + \quad \underset{eau}{H_2O} \quad \longrightarrow$$

Ethanoate de méthyl

$$CH_3-C\begin{array}{l}/\!\!/ O\\ \diagdown OH\end{array} \quad + \quad \underset{méthanol}{CH_3-OH}$$

Acide éthanoïque

II.2.3. Caractéristiques de la réaction.

Comme la réaction d'estérification, la réaction d'hydrolyse est :

- *Lente ;*
- *Athermique ;*
- *Limitée ;*
- *Réversible.*

N.B : L'estérication et l'hydrolyse sont deux réactions réversibles ou équilibrées.

$$Acide \ + \ alcool \ \underset{(2)}{\overset{(1)}{\rightleftharpoons}} \ ester \ + \ eau$$

Soit :

$$R-C\begin{array}{l}/\!\!/ O\\ \diagdown OH\end{array} + R'-OH \underset{(2)}{\overset{(1)}{\rightleftharpoons}} R-C\begin{array}{l}/\!\!/ O\\ \diagdown O-R'\end{array} + H_2O$$

(1) : Esterification ;
(2) : Hydrolyse.

II.3. Composition du mélange à l'équilibre.
II.3.1. Etude expérimentale (Cas de l'estérification).

Considérons la *réaction entre une mole d'acide éthanoïque et une mole d'éthanol* $(n_0 = 1)$ à laquelle on ajoute *une goutte d'acide sulfurique* qui permet d'accélérer la réaction.

- Réalisons ce mélange dans plusieurs tubes à essai bien sceller que l'on place dans une *étuve* ;
- A une date donnée t_1, on sort un tube de l'étuve, puis *on le plonge dans l'eau glacée* pour arrêter la réaction ;
- Ensuite on *dose l'acide restant* par une solution de *soude (NaOH)* de concentration connue. Il faut verser un certain volume de base pour atteindre l'*équivalence* ;
- On répète l'opération avec d'autres tubes à essai. On détermine à chaque date la *quantité d'acide restant* ;
- Lorsque l'*état d'équilibre* est atteint, cette quantité ne varie plus, elle reste constante et égale $n_{ac} = 0{,}33$ mole ;
- On en déduit ainsi la quantité d'ester formée : $n_{est} = 0{,}67$ mole.

II.3.2. Dosage de l'acide restant.

- **Equation de la réaction.**

L'équation de dosage de l'acide restant dans le mélange est de la forme :

$$R-COOH + NaOH \longrightarrow (R-COO^- + Na^+) + H_2O$$

A l'équivalence :

$$\frac{1}{n_{ac}} = \frac{1}{n_b} \Rightarrow n_{ac} = n_b = C_bV_b$$

D'où:

$$\boxed{n_{ac} = n_{al} = C_bV_b}$$

La quantité d'acide restant est égale à celle d'alcool restant.

D'après la conservation de la matière, on a :

$$n_0 = n_{ac} + n_{est} \Rightarrow n_{est} = n_0 - n_{ac}$$

D'où :

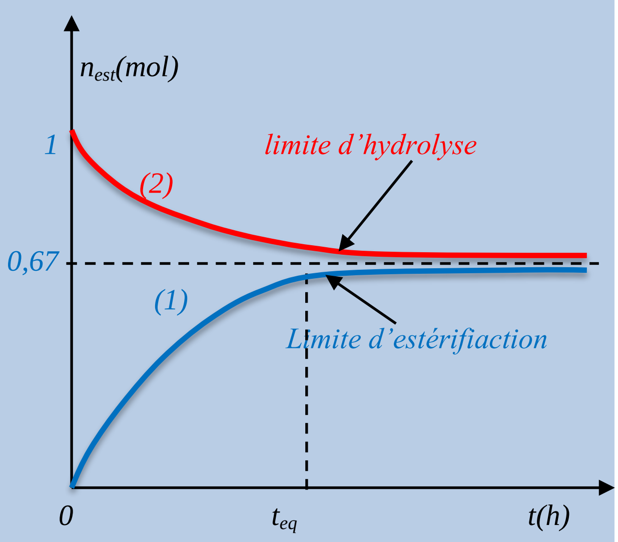
$$\boxed{n_{est} = n_{eau} = n_0 - C_bV_b}$$

La quantité d'ester formée est égale à la quantité d'eau formée.

II.3.3. Courbes d'évolution des réactions d'estérification et d'hydrolyse.

Elles sont obtenues à partir de la quantité d'ester formée (estérification) ou disparue (hydrolyse) à chaque instant suivant la relation :

$$\boxed{n_{est} = f(t)}$$



(1) : courbe d'estérification ;
(2) : courbe d'hydrolyse.

II.4. Rendement des réactions d'estérification et d'hydrolyse.

II.4.1. Rendement d'estérification.

C'est le rapport entre la quantité d'ester formé à chaque instant et la quantité initiale d'acide ou d'alcool dans un mélange équimolaire (même quantité initiale d'acide et d'alcool).
On note :

$$r = \frac{n_{est}}{n_0} \times 100$$

Remarque : Le rendement de la réaction d'estérification dépend de la classe d'alcool ; à l'équilibre, on obtient :

- ✓ $r = 67\%$ pour un alcool *primaire* ;
- ✓ $r = 60\%$ pour un alcool *secondaire* ;
- ✓ $5\% \leq r \leq 10\%$ pour un alcool *tertiaire*.

N.B : Lorsque le mélange est non équimolaire (quantités initiales différentes en acide et alcool), le rendement vaut le rapport entre la quantité d'ester et la quantité initiale du réactif en défaut.

$$r = \frac{n_{est}}{n_{0(def)}} \times 100$$

Avec $n_{0(\text{def})}$: quantité initiale du réactif en défaut c'est – à – dire réactif ayant la plus petite quantité de matière.

Dans ce cas, *on obtient des rendements supérieurs aux rendements des mélanges équimolaires* ; on a alors :

- ✓ $r > 67\%$ pour un alcool *primaire* ;
- ✓ $r > 60\%$ pour un alcool *secondaire* ;
- ✓ $r > 10\%$ pour un alcool *tertiaire*.

II.4.2. Rendement d'hydrolyse.

C'est le rapport entre la quantité d'acide formé à chaque instant et la quantité initiale d'ester ou d'eau. On note :

$$r = \frac{n_{ac}}{n_0} \times 100$$

Remarques :

R₁ : Pour un mélange équimolaire, on obtient :

- ✓ $r = 33\%$ pour un ester donnant un alcool *primaire* ;
- ✓ $r = 40\%$ pour un ester donnant un alcool *secondaire* ;
- ✓ $90\% \leq r \leq 95\%$ pour un ester donnant un alcool *tertiaire*.

R₂ : Lorsque le mélange est non équimolaire n_0 correspond à la quantité initiale du réactif en défaut.

$$r = \frac{n_{ac}}{n_{0(def)}} \times 100$$

Ainsi on obtient des rendements tels que :

- ✓ $r > 33\%$ pour un ester donnant un alcool *primaire* ;
- ✓ $r > 40\%$ pour un ester donnant un alcool *secondaire* ;
- ✓ $r > 95\%$ pour un ester donnant un alcool *tertiaire*.

R₃ : Pour une classe d'alcool donnée, on a :

$$\ell_E + \ell_H = 100\%$$

ℓ_E : limite d'estérification ;
ℓ_H : limite d'hydrolyse.

***N.B** : la limite d'une réaction est le rendement de la réaction à l'équilibre.*

III. Réaction de saponification.

III.1. Définition : *La réaction de saponification est une réaction entre un ester et une base forte et conduisant à l'obtention d'un alcool et d'un sel appelé savon.*

N.B : Pour réaliser la saponification, on utilise la *soude* ou *la potasse* comme base.

III.2. Equation – bilan génarale de la saponification.

Elle est de la forme :

$$\underset{\text{Ester}}{R-C\begin{matrix}\nearrow O\\ \searrow O-R'\end{matrix}} \quad + \quad \begin{cases}(Na^+ + OH^-) & (\text{soude})\\ (K^+ + OH^-) & (\text{potasse})\end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases}R-COO^- + Na^+ + R'-OH\\ R-COO^- + K^+ + R'-OH\end{cases}$$

Carboxylate de sodium ou de potassium — *alcool*

Exemple :

$$CH_3-C\begin{matrix}\nearrow O\\ \searrow O-CH_3\end{matrix} \quad + (Na^+ + OH^-) \longrightarrow$$

Ethanoate de méthyl

$$\underbrace{CH_3-COO^- + Na^+}_{\text{Éthanoate de sodium}} + \underset{\text{méthanol}}{CH_3-OH}$$

III.3. Caractéristiques de la réaction.

La réaction de saponification est une réaction :

- *Rapide ;*
- *Totale : car il y a consommation totale d'au moins un réactif.*

III.4. Obtention du glycérol.

Le glycérol ou propanetriol est fabriqué par saponification des huiles ou graisses. Parmi ces dernières, la *palmitine* a pour formule :

$$\begin{array}{l}CH_2-\mathbf{O}-C\begin{matrix}\nearrow O\\ \searrow C_{15}H_{31}\end{matrix}\\ \mid\\ CH-\mathbf{O}-C\begin{matrix}\nearrow O\\ \searrow C_{15}H_{31}\end{matrix}\\ \mid\\ CH_2-\mathbf{O}-C\begin{matrix}\nearrow O\\ \searrow C_{15}H_{31}\end{matrix}\end{array}$$

• Equation de la saponification.

L'équation de la saponification de la palmitine en présence de la soude est telle que :

$$\begin{array}{l}CH_2-\mathbf{O}-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-C_{15}H_{31}\\ \mid\\ CH-\mathbf{O}-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-C_{15}H_{31} \quad + \quad 3(Na^+ + OH^-)\\ \mid\\ CH_2-\mathbf{O}-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-C_{15}H_{31}\end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{l}CH_2-OH\\ CH-OH\\ CH_2-OH\end{array} + 3(C_{15}H_{31}-COO^- + Na^+)$$

On obtient le glycérol de formule :

$$\boxed{\begin{array}{ccccc}CH_2 & - & CH & - & CH_2\\ \mid & & \mid & & \mid\\ OH & & OH & & OH\end{array}}$$

Et un savon : $\boxed{C_{15}H_{31}COONa}$

Exercices d'application.

Exercice 1 : On se propose de préparer l'acétate d'amyle de nom systématique éthanoate de pentyl – 1, ester à odeur de bonbon anglais. On laisse réagir dans une étuve, un mélange comprenant *18g* d'acide éthanoïque et *26,4g* de pentan – 1 ol.

1°) Ecris l'équation de la réaction d'estérification.

2°) Au bout de *30 heures*, la composition du mélange n'évolue plus.

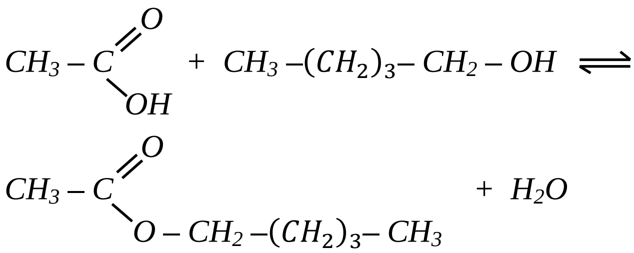
On dose l'acide restant par une solution de soude de molarité C_b = *3mol/L*. Il faut *33cm³* de soude pour atteindre l'équivalence.

a) Etablis l'équation – bilan de la réaction acide – base ;
b) Détermine la composition du mélange réactionnel à l'équilibre ;
c) Calcule le rendement de la réaction d'estérification.

Corrigé 1.

m_{ac} = 18g ; m_{al} = 26,4g ;

1°) Ecrivons l'équation de la réaction d'estérification.



2°) C_b = 3mol/L ; V_b = 33cm³

a) Etablissons l'équation – bilan de la réaction acide – base.

L'équation du dosage de l'acide restant dans le mélange par la base est de la forme :

$CH_3-COOH + NaOH \longrightarrow (CH_3-COO^- + Na^+) + H_2O$

b) Déterminons la composition du mélange réactionnel à l'équilibre.

➢ ***Composition du mélange initial.***

$$n_{0_{ac}} = \frac{m_{ac}}{M_{ac}} = \frac{18}{60} = 0,3 \Rightarrow n_{0_{ac}} = 0,3mol$$

$$n_{0_{al}} = \frac{m_{al}}{M_{al}} = \frac{26,4}{88} = 0,3 \Rightarrow n_{0_{al}} = 0,3mol$$

$n_{0_{ac}} = n_{0_{al}} = n_0 = 0,3mol$, le mélange initial est équimolaire.

➢ ***Quantité d'acide et d'alcool restant.***

D'après l'équation de la réaction de dosage de l'acide on a à l'équivalence :

$$\frac{1}{n_{ac}} = \frac{1}{n_b} \Rightarrow n_{ac} = n_b = C_bV_b$$

D'où:

$$\boxed{n_{ac} = n_{al} = C_bV_b}$$

A.N : $n_{ac} = 3 \times 33.10^{-3} = 0,099$

$$\Rightarrow n_{ac} = n_{al} = 0,099mol$$

➢ ***Quantité d'ester et d'eau formés.***

D'après la conservation de la matière, on a :

$$n_0 = n_{ac} + n_{est} \Rightarrow n_{est} = n_0 - n_{ac}$$

D'où :

$$\boxed{n_{est} = n_0 - C_bV_b}$$

A.N : $n_{est} = 0,3 - 3 \times 33.10^{-3} = 0,201$

$$\Rightarrow n_{est} = n_{eau} = 0,201mol$$

D'où la composition du mélange à l'équilibre est :

$$\boxed{\begin{array}{l} n_{ac} = n_{al} = 0,099mol \\ n_{est} = n_{eau} = 0,201mol \end{array}}$$

c) Calculons le rendement de la réaction d'estérification.

Le rendement de la réaction est tel que :

$$\boxed{r = \frac{n_{est}}{n_0} \times 100}$$

A.N : $r = \dfrac{0,201}{0,3} \times 100 = 67$

D'où :

$$\boxed{r = 67\%}$$

Exercice 2 : On prépare un ester à odeur de rhum présent dans les boissons alcoolisées en mélangeant dans un ballon *0,40mol* d'acide méthanoïque (*HCOOH*) et *1,00mol* d'éthanol ($CH_3 - CH_2 - OH$). On ajoute quelques gouttes d'acide sulfurique puis on chauffe à reflux pendant *4* heures.

Après refroidissement, on dose l'acide méthanoïque présent dans le ballon par une solution d'hydroxyde de sodium ($Na^+ + OH^-$) de concentration molaire C_b = *1,6 mol.L⁻¹*.

Le volume de base versé pour doser tout l'acide méthanoïque restant est V_b = *30 mL*.

1°) Ecris l'équation – bilan de la réaction d'estérification qui a lieu puis nomme l'ester formé.

2°) Ecris l'équation – bilan de la réaction de dosage de l'acide méthanoïque par la base.

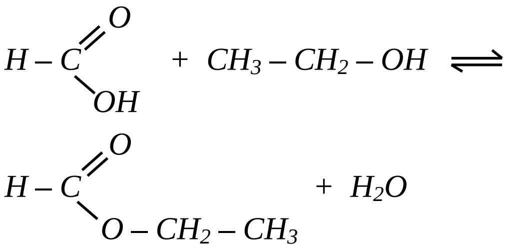
3°) En te servant de la réaction de dosage, détermine (en mol) la quantité d'acide méthanoïque présent à l'équilibre.

4°) Déduis la composition (en mol) du mélange final.
5°) Calcule le rendement de la réaction.

Corrigé 2.

$n_{0_{ac}}$ = 0,40mol ; $n_{0_{al}}$ = 1,00 mol ;

1°) J'écris l'équation – bilan de la réaction d'estérification qui a lieu.



L'ester formé est le *méthanoate d'éthyle*.

2°) C_b = 1,6 mol.L^{-1} ; V_b = 30 mL
J'écris l'équation – bilan de la réaction de dosage de l'acide méthanoïque par la base.

Elle est de la forme :

$$HCOOH + NaOH \longrightarrow (HCOO^- + Na^+) + H_2O$$

3°) Je détermine (en mol) la quantité d'acide méthanoïque présent à l'équilibre.

D'après l'équation de la réaction de dosage de l'acide on a à l'équivalence :

$$\frac{1}{n_{ac}} = \frac{1}{n_b} \Rightarrow n_{ac} = n_b = C_b V_b$$

D'où:

$$\boxed{n_{ac} = C_b V_b}$$

A.N : $n_{ac} = 1{,}6 \times 30.10^{-3} = 0{,}048$

$$\boxed{n_{ac} = 0{,}048mol}$$

4°) Je déduis la composition (en mol) du mélange final.

- ***Quantité d'ester et d'eau formés.***

D'après la conservation de la matière, on a :

$n_{0_{ac}} = n_{ac} + n_{est} \Rightarrow n_{est} = n_{0_{ac}} - n_{ac}$

D'où :

$$\boxed{n_{est} = n_{0_{ac}} - C_b V_b}$$

A.N : $n_{est} = 0{,}4 - 0{,}048 = 0{,}352$

$\Rightarrow n_{est} = n_{eau} = 0{,}352mol$

- ***Quantité d'alcool restant.***

D'après la conservation de la matière, on a :

$n_{0_{al}} = n_{al} + n_{est} \Rightarrow n_{al} = n_{0_{al}} - n_{est}$

D'où :

$$\boxed{n_{al} = n_{0_{al}} - n_{est}}$$

A.N : $n_{al} = 1{,}00 - 0{,}048 = 0{,}952$

$\Rightarrow n_{al} = 0{,}952mol$

D'où la composition du mélange à l'équilibre est :

$$\boxed{\begin{array}{l} n_{ac} = 0{,}048mol \\ n_{al} = 0{,}952mol \\ n_{est} = n_{eau} = 0{,}352mol \end{array}}$$

5°) Je calcule le rendement de la réaction.

Le rendement de la réaction est tel que :

$$\boxed{r = \frac{n_{est}}{n_{0_{ac}}} \times 100}$$

A.N : $r = \frac{0{,}352}{0{,}4} \times 100 = 88$

D'où :

$$\boxed{r = 88\%}$$

TRAVAUX DIRIGES V

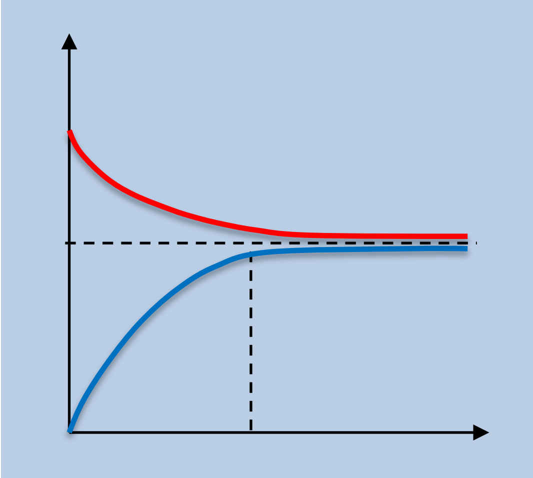
Conseils pratiques :

1. Formules semi – développées et nomenclature des composés organiques (alcools, acides, ester ...).

2. Réaction d'estérification et d'hydrolyse : composition à l'équilibre.

3. Rendement d'estérification et d'hydrolyse.

4. Réaction de saponification (équation générale et caractéristiques)



L'ESSENTIEL DU COURS

I – Définitions des notions.

Définis les termes et expressions suivants : Réaction d'estérification ; réaction d'hydrolyse ; réaction de saponification.

2°) Après avoir défini les composés suivants, donne un exemple pour chacun d'eux : Composé organique ; Composé carbonylé ; Composé carboxylé ; Isomères.

II – Questions à réponses construites.

Réponds aux questions suivantes :

1°) Peut – on nommer un composé organique à partir de sa formule brute ? Pourquoi ?
2°) Combien de classes d'alcool distingue t – on ? Cite – les et donne deux exemples pour chaque classe.
3°) Comment distinguer les trois classes d'alcool ?
4°) Quels composés obtient – on par oxydation ménagée d'un alcool primaire et d'un alcool secondaire ? Cite les différents tests que l'on utilise pour distinguer les composés obtenus par oxydation ménagée des alcools primaire et secondaire. Quels résultats obtient – on ?
5°) Cite les caractéristiques d'une réaction d'estérification.
6°) Quelle différence fais – tu entre le rendement et la limite d'estérification ?

III – Questions à alternative vrai ou faux.

Réponds par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

1°) La formule brute d'un alcool, quelle que soit sa classe, s'écrit : $C_nH_{2n+1}O$.
2°) La réaction d'estérification est une réaction totale.
3°) Le rendement d'une réaction d'estérification d'un mélange non équimolaire est inférieur à celui d'un mélange équimolaire.
4°) La limite d'estérification est le rendement à l'équilibre.
5°) Le rendement d'estérification d'un alcool secondaire est deux fois supérieur à celui d'un alcool primaire, pour un mélange équimolaire.
6°) La réaction d'hydrolyse est la réaction inverse de celle d'estérification.
7°) L'oxydation d'un alcool secondaire produit une cétone, puis un acide carboxylique.
8°) La dinitro – 2,4 phénylhydrazine ne réagit qu'avec les cétones.
9°) Les aldéhydes réduisent la liqueur de Fehling.
10°) La réaction d'estérification est une réaction exothermique.

IV – Appariement.

Relie un élément – question de la colonne A à un élément – réponse de la colonne B dans le tableau ci – dessous : *Exemple :* $a_{11} = b_{13}$.

Colonne A		Colonne B	
a_1	Alcool primaire	b_1	Acide + Alcool
a_2	Rendement d'estérification d'un alcool secondaire.	b_2	$R-\underset{\underset{O}{\parallel}}{C}-R'$
a_3	Mélange équimolaire	b_3	$R-\underset{\underset{O}{\parallel}}{C}-OH$
a_4	Oxydation ménagée d'un alcool secondaire	b_4	$r\ =\ 60\%$
a_5	Limite d'estérification	b_5	$r\ =\ 67\%$
a_6	Acide carboxylique	b_6	$n_{0ac} = n_{0al}$
a_7	Saponification	b_7	Alcool secondaire
a_8	Ethanoate d'éthyl	b_8	Rendement d'estérification à l'équilibre
a_9	Test positif avec la *DNPH* mais négatif avec le réactif de Schiff.	b_9	$CH_3-\overset{\overset{O}{\parallel}}{C}-O-CH_2-CH_3$
a_{10}	Estérification	b_{10}	Ester + base

V – Formules semi – développée et nomenclature des isomères.

Ecris toutes les formules semi – développées possibles des composés organiques suivants puis les nommer :

- Alcool : $C_4H_{10}O$; $C_6H_{14}O$; précise leurs classes.
- Acide : $C_4H_8O_2$; $C_5H_{10}O_2$.
- Ester : $C_4H_8O_2$; $C_5H_{10}O_2$.

VI – Nomenclature et formules semi – développées des composés organiques.

1°) Ecris les formules semi – développées des composés dont les noms suivent :

a) Butan – 1 ol
b) 3 – méthylpentan – 2 ol
c) 2,3 – diméthylpentan – 3 ol
d) Acide butanoïque
e) Acide 2,3 – diméthylpentanoïque
f) Ethanoate de méthyléthyl
g) Propanoate d'isobutyl
h) Méthanoate de propyl – 1
i) Pentanoate d'éthyl
j) 2,2,3 – triméthylhexan – 3 ol

2°) Nomme les composés organiques suivants :

a) $CH_3-(CH_2)_3-CH_2-OH$

b) $CH_3-CH_2-\underset{\underset{OH}{|}}{CH}-CH_3$

c) $CH_3-\overset{\overset{CH_3}{|}}{\underset{\underset{CH_3}{|}}{C}}-CH_2-\underset{\underset{OH}{|}}{CH}-CH_3$

d) $H-C\begin{array}{l}/\!\!/O\\ \backslash O-CH_2-CH_3\end{array}$

e) $CH_3-\underset{\underset{CH_3}{|}}{CH}-CH_2-C\begin{array}{l}/\!\!/O\\ \backslash OH\end{array}$

f) $CH_3-CH_2-\overset{\overset{CH_3}{|}}{\underset{\underset{OH}{|}}{C}}-CH_2-CH_3$

g) $CH_3-CH_2-C\begin{array}{l}/\!\!/O\\ \backslash O-CH_3\end{array}$

h) $CH_3-\underset{\underset{O}{\parallel}}{C}-\overset{\overset{CH_3}{|}}{CH}-CH_3$

i) $CH_3-\underset{\underset{CH_3}{|}}{CH}-CH_2-C\begin{array}{l}/\!\!/O\\ \backslash OH\end{array}$

j) $CH_3-C\begin{array}{l}/\!\!/O\\ \backslash O-\overset{\overset{CH_3}{|}}{\underset{\underset{CH_3}{|}}{CH}}\end{array}$

k) $CH_3-CH_2-C\begin{array}{l}/\!\!/O\\ \backslash H\end{array}$

l) $CH_3-CH_2-CH_2-C\begin{array}{l}/\!\!/O\\ \backslash O-\underset{\underset{CH_3}{|}}{CH}-CH_3\end{array}$

RESOLUTION DES PROBLEMES

EXERCICE 1 : Les esters sont des composés organiques, souvent à l'origine de l'arôme naturel des fruits. A côté de leur production naturelle, ils sont aussi synthétisés pour satisfaire les besoins de l'industrie agroalimentaire, de la parfumerie et d'autres secteurs industriels.
Le butanoate d'éthyle est par exemple, un ester à l'odeur d'ananas, l'éthanoate de propyl rappelle l'odeur de poire…
Cet exercice consiste à synthétiser le butanoate d'éthyl à partir de l'acide butanoïque de formule

$CH_3 - CH_2 - CH_2 - C\begin{matrix} \diagup\!\!\diagup O \\ \diagdown OH \end{matrix}$ et de

l'éthanol *($CH_3 - CH_2 - OH$)*.
Dans un récipient, on réalise un mélange de *1,76g* d'acide butanoïque et *0,92g* d'éthanol. On ferme ce récipient et on chauffe à reflux.
1°) Ecris l'équation bilan de la réaction qui se produit.
2°) Montre que ce mélange est équimolaire.
3°) Après un temps suffisant, on arrête le chauffage et on refroidit le mélange. On prélève *2/5* de ce mélange et on dose l'acide présent par une solution de soude de concentration $C_b = 0{,}15 mol.L^{-1}$. Il faut *17,6mL* pour atteindre l'équivalence.

a) Ecris l'équation de la réaction de dosage ;
b) Trouve la quantité d'acide restant dans le mélange total à l'équilibre ;
c) Calcule le rendement de la réaction.

On donne les masses atomiques molaires en $g.mol^{-1}$: *C : 12 ; H : 1 ; O : 16.*

EXERCICE 2 : Un composé organique *A* de formule moléculaire $C_nH_{2n}O_2$ contient en masse *43,25%* d'oxygène.
1°) Calcule la masse molaire moléculaire de ce composé.
2°) Etablis la formule brute puis la formule semi – développée de *A* sachant que *A* est un acide.
3°) On réalise un mélange constitué de *3,7g* de *A* et *2,3g* d'éthanol. Ce mélange est scellé puis chauffé.

a) Ecris l'équation – bilan de la réaction qui a lieu et donne ses caractéristiques essentielles ;
b) Détermine les quantités initiales des réactifs et précise la nature du mélange ;
c) Donne la composition (molaire) du mélange à l'équilibre.

EXERCICE 3 : *A* désigne un acide carboxylique à chaîne saturée.
1°) Si l'on désigne par *n* le nombre d'atomes de carbone contenus dans le radical *R* fixé au groupement carboxyle, exprime en fonction de *n*, la formule générale de cet acide.
2°) *B* est un alcool de formule brute CH_4O. Précise sa formule développée possible, sa classe et son nom.
3°) a) L'acide *A* est estérifié par l'alcool *B*. A partir de la formule de l'acide *A* (déterminée en 1°)), écris l'équation de la réaction.
b) Sachant que la masse molaire de l'ester obtenu est *88g/mol*, quels sont la formule et le nom de *A* ?

EXERCICE 4 : Le transfert d'informations par signaux chimiques entre individus d'espèces différentes ou de même espèce, est courant chez les êtres vivants. Une phéromone est une substance (ou un mélange de substances) qui, après avoir été sécrétée en quantité très faible à l'extérieur par un individu (émetteur) est perçue par un individu de même espèce (récepteur) chez lequel elle provoque une réaction comportementale spécifique, voire une modification physiologique.
1°) On étudie la phéromone d'alarme de l'abeille de formule brute $C_7H_{14}O_2$ appelée éthanoate de 3 – méthylbutyl. Elle peut être synthétisée à partir de l'acide éthanoïque (CH_3COOH) et d'un alcool *A*.

a) Ecris l'équation de la réaction associée à la transformation chimique de synthèse de la phéromone à partir de l'acide éthanoïque et de l'alcool *A* ;
b) Donne la formule semi – développée et le nom de l'alcool *A* ;
c) Comment appelle – t – on cette réaction chimique ? Précise ses caractéristiques essentielles.

2°) La même transformation est réalisée en présence d'acide sulfurique. Les affirmations suivantes qui décrivent le rôle de l'acide sulfurique sont – elles vraies ou fausses ? On ne demande pas de justification.

- ***Affirmation 1*** : L'acide sulfurique est une espèce chimique qui modifie l'état d'équilibre du système.
- ***Affirmation 2*** : L'acide sulfurique permet d'atteindre un rendement plus élevé.
- ***Affirmation 3*** : L'acide sulfurique augmente la vitesse de la réaction sans apparaitre dans l'équation de la réaction.

3°) On réalise un mélange de *12g* d'acide éthanoïque et de *44g* d'alcool *A*. A l'équilibre on obtient *22,95g* de phéromone. Donne la composition du mélange à l'équilibre puis déduis – en le rendement de la réaction d'estérification.
On donne en $g.mol^{-1}$ les masses molaires atomiques : *C = 12 ; C = 16 ; H = 1.*

EXERCICE 5 : On introduit dans un ballon *14,8g* de butan – 2 ol avec *m* grammes d'acide éthanoïque. On chauffe le mélange à reflux pendant *2 heures*. Après refroidissement du mélange on le dose par une solution d'hydroxyde de sodium de concentration molaire *5mol/L* en présence de la phénolphtaléine. Il faut *16mL* de *NaOH* pour faire virer l'indicateur coloré.
1°) Calcule *m* pour que le mélange soit équimolaire.
2°) Ecris l'équation de la réaction et nomme l'ester formé.
3°) Donne la composition du mélange à l'équilibre et déduis – en la limite de la réaction.
4°) Calcule la constante d'équilibre de la réaction relative aux concentrations molaires.

EXERCICE 6 : Un ester contient *36,4%* en masse d'oxygène.
1°) Trouve les formules semi – développées possibles et les noms correspondants.
2°) Une masse *m = 13,2g* de cet ester est saponifié par une solution de *NaOH*. On obtient une masse *m = 9,0g* d'un alcool *A* et un corps *B*.
a) Donne la formule de cet alcool.
b) Peut – on identifier l'alcool et l'ester ?
3°) On fait subir à cet alcool, une oxydation ménagée ; on obtient un corps *C* carbonylé qui est sans action sur la liqueur de Fehling. Identifie l'alcool et l'ester.

EXERCICE 7 : On réalise un mélange équimolaire d'acide pentanoïque et du propanol – 2 ; à l'équilibre on recueille *2,16g* d'eau.
1°) Ecris l'équation de la réaction et donne le nom de l'ester.
2°) En admettant que le rendement de la réaction soit *60%.*
a) Détermine la composition du mélange à l'équilibre.
b) Quelle était la masse du mélange initial ?
3°) Pour augmenter le rendement de cette réaction, on mélange *51g* d'acide pentanoïque avec la même quantité initiale de propanol – 2. L'équilibre est atteint au bout de *8 heures*. On prélève alors la moitié du mélange et on dose l'acide restant par une solution de soude à *2 mol/L*, il faut verser $92cm^3$ de cette solution de soude. Calcule le nouveau rendement.

EXERCICE 8 : En dissolvant *1g* d'ester dans *100g* d'eau, on constate que la température de congélation commençante s'abaisse de *0,21°C.*
1°) Donne :
a) La masse molaire moléculaire de l'ester.
b) La formule brute de l'ester sachant qu'elle est du type $C_nH_{2n}O_2$.
c) Les formules semi – développées possibles.
2°) On réalise un mélange équimolaire de cet ester avec *0,18g* d'eau à *100°C*. Quand l'équivalence est atteinte, on dose l'acide formé. Il faut $40cm^3$ de soude décimolaire pour atteindre l'équivalence.
a) Ecris les équations :
- De l'hydrolyse de l'ester ;
- Du dosage de l'acide.
b) Donne la composition du mélange à l'équilibre.
c) Calcule le rendement de l'hydrolyse. Déduis – en la formule semi – développée et le nom de l'ester.
On donne : *K = 1850.*

EXERCICE 9 : On réalise un mélange de *12g* d'acide éthanoïque avec *14,8g* d'un alcool *A* saturé non cyclique. Le corps organique *B* obtenu contient *62%* en masse de carbone.
L'oxydation ménagée de *A* conduit à un corps *C* qui est sans action sur le réactif de Schiff, alors qu'il réagit avec la *DNPH.*
1°) Montre que la formule de *B* peut s'écrire $C_nH_{2n}O_2$.
2°) Calcule *n.*
3°) Détermine respectivement les formules semi – développées et les noms de *A* et *B.*
4°) a) Vérifie que le mélange initial est équimolaire.
b) Calcule approximativement la masse formée à l'équilibre.

EXERCICE 10 : Un ester a pour formule moléculaire brute : $C_4H_8O_2$.
1°) Ecris les formules semi – développées possibles, précise les noms de l'acide et de l'alcool correspondant.
2°) On fait agir *1,8g* d'eau sur cet ester, lorsque l'équilibre chimique est atteint, on constate que *5,28g* n'ont pas été hydrolysé.
a) Quelle est alors, parmi les formules semi – développées écrites à la question 1°) celle qui correspond à l'ester utilisé ?
b) Précise les formules semi – développées des corps présents à l'équilibre.

EXERCICE 11 : 1°) Une solution de *1,4g* d'un alcool saturé *A* dans *100g* de benzène n'est pas électrolysable. Sa température de congélation commençante est de *4,42°C*. Détermine la masse molaire approchée et la formule moléculaire de l'alcool.
2°) On réalise *2,33g* d'un mélange équimolaire de *A* et d'acide éthanoïque à *100°C*. L'équilibre étant atteint, on dose l'acide restant dans la moitié du mélange final par une solution de soude à *0,5mol/L*. Il faut verser *16,5mL* de soude pour atteindre l'équivalence. Détermine :
a) La composition du mélange initial ;
b) La composition du mélange final ;
c) Le rendement de cette opération. Déduis – en l'alcool utilisé.
On donne : Température de congélation du benzène : *5,5°C* ;
Constante cryométrique du benzène : *5700*.

EXERCICE 12 : L'oxydation ménagée d'un alcool *A* donne un monoacide carboxylique *B*. L'action de l'alcool *A* sur le monoacide donne un ester dont l'analyse élémentaire de *0,66g* donne *1,32g* de dioxyde de carbone et *0,54g* d'eau. D'autre part, la dissolution de *2g* de cet ester dans *100g* d'eau abaisse le point de congélation de *0,42*°C.
1° Détermine :
a) La formule de l'ester ;
b) Les formules semi – développées possibles.
2°) La saponification de l'ester donne l'éthanoate de sodium. Retrouve les formules de *A* et *B*.
On donne K_{eau} = *1850* (constante cryométrique de l'eau).

EXERCICE 13 : Un composé organique *A*, a une densité de vapeur de *1,56*. L'abaissement cryométrique d'une solution de *1g* de *A* dans *100g* d'eau est *0,45°C*. Sachant que l'abaissement cryométrique des substances de *2,5g* d'un corps *A'* dans *100g* d'eau est *0,44°C*. Détermine la masse molaire moléculaire de *A'*.
1°) *A'* est un ester dont l'hydrolyse donne l'acide éthanoïque et un mono alcool à chaine saturée et ramifiée. Détermine la formule moléculaire de l'ester et celle de l'alcool.
2°) Quelles sont les formules semi – développées possibles de cet alcool. Sachant que cet alcool chauffé avec du permanganate de potassium en présence de l'acide sulfurique ne rougit pas le papier imbibé du réactif de Schiff, aussi en présence de *D.N.P.H* rien ne se produit.
Donne la formule exacte de cet alcool.

EXERCICE 14 : Un ester $C_nH_{2n}O_2$ contient *36,36%* en masse d'oxygène.
1°) Détermine sa formule brute.
2°) Ecris les formules semi – développées possibles de cet ester ainsi que le nom officiel de chaque isomère.
3°) On réalise un mélange équimolaire de cet ester avec *0,18g* d'eau à *100°C*. Quand l'équilibre est atteint, on dose l'acide formé par *40mL* de soude (*NaOH*) de concentration molaire $0,1mol.L^{-1}$.
a) Trouve le rendement d'hydrolyse ;
b) Identifie l'ester parmi les isomères précédents.
c) Ecris l'équation – bilan de la réaction d'hydrolyse et nomme les produits formés.

EXERCICE 15 : L'ester *E* de masse molaire $102g.mol^{-1}$ résulte de l'action de l'éthanol sur un acide carboxylique *A*.
1°) Ecris la formule brute de cet ester.
2°) On hydrolyse *5,1g* de propanoate d'éthyle, isomère de *E*, le mélange étant équimolaire ;
a) Ecris l'équation – bilan de la réaction d'hydrolyse ;
b) Au bout d'un temps suffisamment long ; on dose l'acide formé par une solution d'hydroxyde de sodium de concentration *C = 1mol/L*. Il faut verser *V = 16,8mL* de la solution basique pour obtenir l'équivalence. Calcule la limite de l'hydrolyse et conclus.
3°) On fait réagir *5,1g* de l'ester *E* avec une solution concentrée et chaude d'hydroxyde de sodium, pendant un temps suffisant pour obtenir la quantité maximale de carboxylate de sodium.
a) Nomme cette réaction et écris l'équation – bilan ;
b) Quelle masse minimale d'hydroxyde de sodium doit – on utiliser ?
On donne : *H : 1 ; C : 12 ; O : 16 ; Na : 23 en* $g.mol^{-1}$.

EXERCICE 16 : 1°) On réalise une réaction d'estérification avec *12g* d'acide éthanoïque et *12g* de propan – 2 ol, en présence de quelques gouttes d'acide sulfurique.
a) Ecris l'équation de la réaction ;
b) Quel est le rôle de l'acide sulfurique ?
c) Détermine la composition du mélange à l'équilibre ;
d) Montre que la constante d'équilibre *K* est égale à *2,25*.
2°) On reprend l'expérience en utilisant cette fois – ci *12g* d'acide éthanoïque et *36g* de propan – 2 ol. On désigne par *x* la quantité de matière d'ester formé à l'équilibre.

a) Exprime toutes les quantités de matières à l'équilibre en fonction de x ;
b) Exprime la constante d'équilibre K en fonction de x ;
c) Déterminer x en supposant que la valeur de K reste égale à 2,25 ;
d) Déduis – en la composition du mélange à l'équilibre.

EXERCICE 17 : Un ester A a pour formule

$R - \overset{\overset{O}{\|}}{C} - O - R'$, où R et R' sont des radicaux alkyles. La masse molaire de cet ester A est $M = 116g/mol$. Par hydrolyse de cet ester on obtient deux composés B et C.

1°) Ecris l'équation chimique traduisant la réaction d'hydrolyse.

2°) Le composé B obtenu est un acide carboxylique. On en prélève une masse $m = 1{,}5g$ que l'on dilue dans l'eau pure. La solution obtenue est dosée par une solution de soude à $2mol/L$. L'équivalence a lieu lorsqu'on a versé $V = 12{,}5cm^3$ de la solution d'hydroxyde de sodium.

a) Quelle est la masse molaire du composé B ?
b) Donne sa formule semi – développée et son nom.

3°) Le composé C a pour formule brute $C_4H_{10}O$. L'oxydation de C conduit à un composé D qui donne avec la *DNPH* un précipité jaune mais est sans action sur le réactif de Schiff.

a) Quels sont la formule semi – développée et le nom de D ?
b) Quel est le composé C ?
c) Donne la formule semi – développée et le nom de A.

EXERCICE 18 : L'acétate d'isoamyle

$CH_3 - \overset{\overset{O}{\|}}{C} - O - CH_2 - CH_2 - CH - \overset{\overset{CH_3}{|}}{C}H_3$, est présent entre autres dans les bananes et utilisé comme arôme artificiel de ce fruit. Sa masse volumique est égale à $0{,}87g/cm^3$. On mélange $10{,}0cm^3$ de cet ester avec $5{,}0cm^3$ d'eau ; $0{,}5cm^3$ d'acide sulfurique et on chauffe à reflux jusqu'à ce que l'équilibre chimique soit atteint. On dose les acides présents dans le mélange par une solution aqueuse d'hydroxyde de sodium ou soude $(Na^+ + OH^-)$ de concentration $C_B = 2{,}0mol/L$. Le volume de soude nécessaire est $V_B = 22{,}0cm^3$.

Par ailleurs, on mesure le volume de soude nécessaire pour réagir avec $0{,}5cm^3$ d'acide sulfurique et on trouve $V_B' = 9{,}0cm^3$.

1°) Ecris l'équation – bilan de la réaction d'hydrolyse de l'ester.

2°) Ecris l'équation – bilan de la réaction de dosage de l'acide formé par la soude.

3°) a) Calcule la quantité de soude nécessaire au dosage de l'acide sulfurique.

b) Déduis – en la quantité d'acide formé à l'équilibre.

c) Calcule les quantités initiales d'ester et d'eau. Ce mélange est – il équimolaire ?

d) Calcule le rendement de la réaction et donne la composition du mélange à l'équilibre.

Données : masse volumique de l'eau : $\rho = 1g/cm^3$.
Masse molaire atomiques : $C = 12g/mol$; $H = 1g/mol$; $O = 16g/mol$.

EXERCICE 19 : On veut préparer le méthanoate d'éthyle ($HCOOCH_2CH_3$) par action d'un acide A sur un alcool B.

1°) a) Donne les formules semi – développées de l'acide A et de l'alcool B.

b) Ecris l'équation bilan de cette réaction :
- Comment l'appelle – t – on ?
- Quelles sont ses caractéristiques ?

2°) Dans un ballon, on mélange un volume $V_A = 20cm^3$ de A dont la masse volumique est $\rho_A = 1{,}2g/cm^3$ et un volume V_B (cm^3) de B dont la masse volumique est $\rho_B = 0{,}79g/cm^3$.

a) Détermine le volume V_B pour que le mélange soit équimolaire
b) Ce mélange est acidifié par quelques gouttes d'acide sulfurique concentré puis chauffé à reflux. On obtient à l'équilibre $26g$ de méthanoate d'éthyle.
c) Calcule le rendement de la réaction.

On donne les masses molaires atomiques en g/mol : $H = 1$; $C = 12$; $O = 16$.

EXERCICE 20 : L'acide benzoïque est un solide blanc. On dissout $24{,}4g$ de cet acide dans $27mL$ d'eau distillée, puis on verse $18g$ de propan – 2 ol.

1°) Ecris l'équation de la réaction qui a lieu dans ce mélange. Quelles sont les caractéristiques d'une telle réaction.

2°) Calcule :

a) Les quantités de matière des espèces chimiques dans le mélange avant la réaction ;
b) La composition théorique du mélange à la fin de la réaction.

3°) Quelle masse d'alcool doit – on employer pour estérifier 80% de cet acide ? On donne les constantes d'équilibre des alcools suivants :
- Alcool primaire : *4*
- Alcool secondaire : *2,25*.

EXERCICE 21 : 1°) On réalise un mélange équimolaire d'acide pentanoïque et de propanol – 2. A l'équilibre, on recueille *1,08g* d'eau.

a) Ecris l'équation de la réaction et donne le nom de l'ester formé.
b) Quelle était la masse totale du mélange initial ? quelle est la masse de l'ester formé ?

2°) Pour augmenter le rendement, on modifie les proportions initiales. On mélange *51g* d'acide pentanoïque et *12g* de propanol – 2.

a) Au bout de $t = 5h$, on prélève la moitié du mélange, on le refroidit et on dose l'acide restant par une soude de concentration *2mol/L*. l'équivalence est obtenue pour $V_B = 92cm^3$. Quelle est la quantité d'ester formé à l'instant $t = 5h$ dans le mélange ?
b) L'équilibre est atteint au bout de *8h*. on dose l'acide restant dans l'autre moitié du mélange en utilisant $V_B' = 82{,}5cm^3$ de soude de même concentration pour obtenir l'équivalence. Calcule le rendement de la réaction.

EXERCICE 22 : On prépare un ester (A) à partir de l'acide butanoïque et d'un alcool (B). L'abaissement cryométrique d'une solution de *3,448g* de (A) dans *100g* d'eau est de *0,55°C*.

1°) Détermine :

a) La masse molaire moléculaire approchée de l'ester ;
b) Sa formule brute et sa formule semi – développée ;
c) Déduis – en la formule semi –développée du monoalcool (B)

2°) On réalise à *200°C*, l'hydrolyse de l'ester (A) en partant de *5* moles d'eau et d'une mole d'ester. L'état d'équilibre est atteint au bout de *24h*. Le volume du mélange à l'équilibre est de $220cm^3$. On en prélève un échantillon de $10cm^3$ que l'on dose avec de la soude de concentration molaire *2mol/L*. l'équivalence est atteinte pour *14,4mL* de soude versée.

a) Ecris l'équation – bilan d'hydrolyse de l'ester (A) ;
b) Ecris l'équation – bilan de la réaction du dosage ;
c) Déduis – en le rendement de la réaction.

On donne : Constante cryométrique de l'eau : $K_e = 1850$.

EXERCICE 23 : On réalise à *200°C*, l'hydrolyse du butanoate d'éthyle en portant un mélange de *5mol* d'eau et de *1mol* d'ester. L'état d'équilibre du système, atteint au bout de *24h* est déterminé par dosage de l'acide formé. Le volume total du mélange à l'équilibre est *180mL*. On en prélève un échantillon de *10mL* que l'on refroidit, puis que l'on dose avec une solution **B** de soude à $2mol.L^{-1}$. L'équivalence est atteint pour $V_{BE} = 17{,}6mL$.

1°) Ecris l'équation – bilan de la réaction d'hydrolyse.
2°) Pourquoi refroidit – on l'échantillon dosé ?
3°) Détermine la quantité d'acide présent à l'équilibre dans un échantillon. Déduis – en la quantité d'ester présent à l'équilibre et le rendement de cette hydrolyse.
4°) Compare celui – ci à celui d'un mélange équimolaire d'eau et d'acétate d'éthyle. Justifie le résultat obtenu dans cette expérience. Dans quel sens l'équilibre a – t – il été déplacé ?

EXERCICE 24 : Deux élèves étudient la réaction d'estérification dans des tubes placés à la température constante $\theta = 80°C$. Ils introduisent le même mélange équimolaire de *50mmol* d'acide éthanoïque et de *50mmol* de propan – 1 ol.

1°) Ecris l'équation – bilan de la réaction
2°) Après une heure de chauffage, un tube est refroidi dans de l'eau glacée. Un dosage montre que la quantité d'acide restant est *16,6mmol*. La même opération menée après trois heures montre qu'il reste toujours *16,6mmol* d'acide.

a) Pourquoi refroidit – on le mélange avant le dosage ? Comment appelle t – on cette opération ?
b) Peut – on considérer que l'équilibre est atteint au bout d'une heure ? Justifie ;
c) Détermine la composition du mélange à l'équilibre puis détermine la constante d'équilibre K.
d) Deux autres élèves étudient la même réaction à la même température avec un mélange initial de *70mmol* d'acide et de *50mmol* d'alcool. Détermine le rendement de la réaction lorsque l'équilibre est atteint.