Projet PRENUM-AC

Année 2014

Ressource Terminale scientifique

LES ANGLES ORIENTES

Angles orientés de vecteurs-Angles orientés de droites-Angles particuliers : Angles alternes internes, Angles à cotés perpendiculaires, Angles inscrits, Angles au centre, Angle tangentes-cordes.

Table des matières

Introduction

Historique

Public ciblé

Cette ressource est destinée aux enseignants et aux élèves des séries scientifiques.

Objectifs pédagogiques

A la fin de ce cours l'apprenant devra être capable de :

▶ Reconnaitre les angles : alternes-internes, angles alternes-externes, angles à côtés perpendiculaires, angles inscrits, angles au centre à partir d'une construction ou d'un schéma géométrique donné ;

▶ Etablir la relation entre un angle au centre et un angle inscrit interceptant un même arc dans cercle ;

▶ Etablir la relation entre un angle inscrit et un angle formé par une tangente et une corde interceptant un même arc dans un cercle.

Pré-requis

Avant de commencer ce cours, l'apprenant devra être capable de :

▶ Orienter un angle soit dans le sens direct (sens trigonométrique), soit dans le sens indirect (sens des aiguilles d'une montre ou sens rétrograde) ;

▶ Tracer un triangle : rectangle, équilatéral, isocèle et quelconque ;

▶ Tracer la bissectrice d'un angle ;

▶ Tracer la médiatrice d'un segment ;

▶ Tracer la médiane dans un triangle ;

▶ Construire le centre du cercle circonscrit et celui du cercle inscrit dans un triangle donné ;

▶ Tracer une tangente à un cercle donné ;

▶ Tracer une corde dans un cercle donné ;

Chapitre 1

LES ANGLES ORIENTES

Activités préparatoires

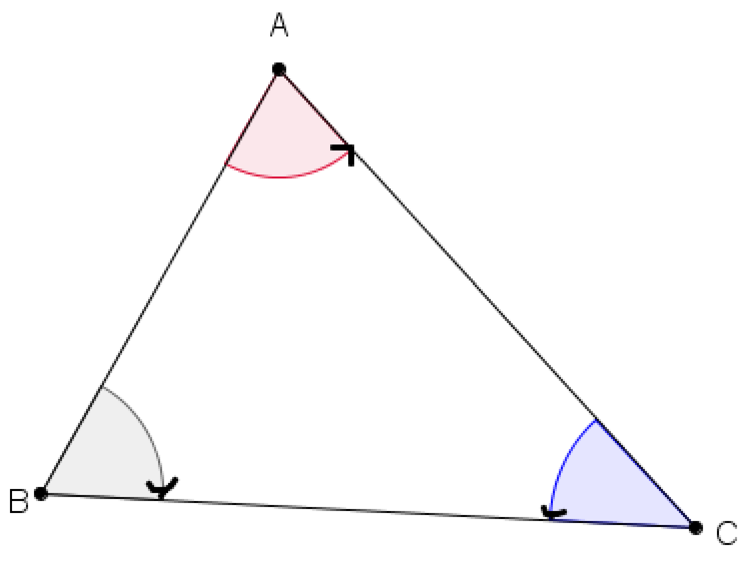
Activité 1

Enoncé :

Dans un plan orienté, on considère un triangle quelconque ABC.

1. Ecrire les angles intérieurs de ce triangle dans le sens direct.
2. Démontrer que leur somme est égale à $\pi[2\pi]$.

Solution



1. Ecrivons les angles intérieurs de ce triangle dans le sens direct

Soit $\widehat{A}=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$; $\widehat{B}=(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$; $\widehat{C}=(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$

(Voir figure ci-dessus)

2. Démontrons que la somme de ces angles orientés est égale à $\pi[2\pi]$

Posons α =$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$+$(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$+$(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})[2\pi]$

or $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$=$(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CA})[2\pi]$
On peut écrire :
α=$(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$+$(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CA})$+$(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})[2\pi]$
D'après la relation de Chasles
$\alpha=(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CB})[2\pi]$
$\alpha=(-\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CB})[2\pi]$
$\alpha=\pi+\underbrace{(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CB})}_{0}[2\pi]$

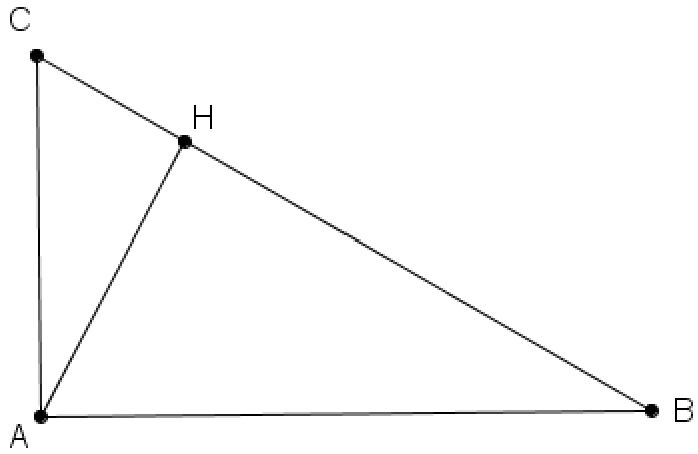
Donc $\underline{\alpha=\pi[2\pi]}$

Activité 2

<u>Enoncé :</u>

Soit ABC est un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).
Démontrer que $\overline{(CA,CB)}$=$\overline{(AB,AH)}[\pi]$.

<u>Solution</u>



Démontrons que : $\overline{(CA,CB)}$=$\overline{(AB,AH)}[\pi]$
La droite (CA) est perpendiculaire à la droite (AB) et la droite (CB) perpendiculaire à la droite (AH) par hypothèse, d'après la propriété des angles à cotés perpendiculaires on a :
$\overline{(CA,CB)}$=$\overline{(AB,AH)}[\pi]$

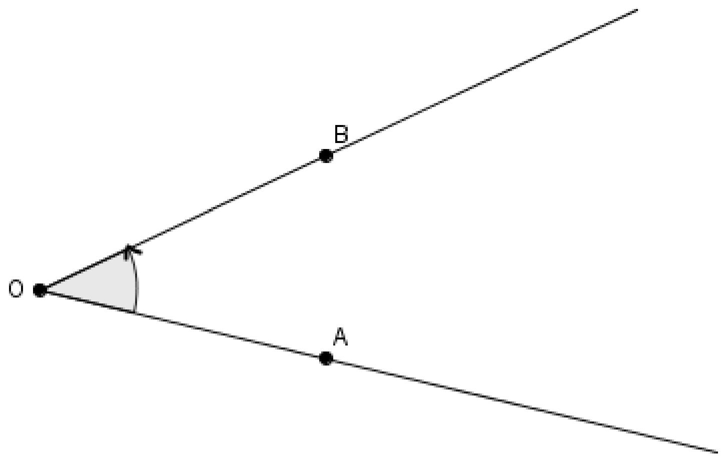
Deuxième méthode
Par hypothèse $\overline{(CA,AB)}$=$\frac{\pi}{2}[\pi]$ et $\overline{(CB,AH)}$=$\frac{\pi}{2}[\pi]$
$\Rightarrow$ $\overline{(CA,AB)}$=$\overline{(CB,AH)}[\pi]$

par permutation des moyens,
d'où $\overline{(CA, CB)}$=$\overline{(AB, AH)}[\pi]$

1.1 Angles orientés de demi-droites

1.1.1 Définition

On appelle angle orienté de deux demi-droites, le couple formé par deux de demi-droite ([OA), [OB)) de même origine O, noté $(\widehat{OA, OB})$.



1.1.2 Propriétés

Soient [OA), [OB), [OC) et [OD) quatre demi-droites de même origine O, on a :
P_1 $\overline{(OA, OB)}$= - $\overline{(OB, OA)}[2\pi]$
P_2 $\overline{(OA, OB)}+\overline{(OB, OC)}=\overline{(OA, OC)}[2\pi]$
P_3 $\overline{(OA, OA)}= 0[2\pi]$
P_3 $\overline{(OA, OB)}=\overline{(OC, OD)}[2\pi]$ par permutation des moyens $\overline{(OA, OC)}=\overline{(OB, OD)}[2\pi]$

1.2 Angles orientés des droites

1.2.1 Définition

Soient (D_1) et (D_2) deux droites du plan de vecteur directeur respectif $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
On appelle angle orienté de deux droites (D_1) et (D_2) noté $(\widehat{D_1, D_2})$, l'angle de leur vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

1.2.2 Propriétés

Pour toutes droites (D_1), (D_2)et (D_3) du plan orienté,
P_1.$\overline{(D_1, D_2)}$+$\overline{(D_2, D_3)}$=$\overline{(D_1, D_3)}[\pi]$
P_2.$\overline{(D_1, D_2)}$= - $\overline{(D_2, D_1)}[\pi]$
P_3.$\overline{(D_1, D_1)} = 0[\pi]$

1.2.3 Angles égaux

Deux angles orientés $(\widehat{D_1, D_2})$ et $(\widehat{D_3, D_4})$ sont dits égaux, lorsqu'ils ont le même sens d'orientation et de même mesure.
On écrit : $\overline{(D_1, D_2)}$=$\overline{(D_3, D_4)}[\pi]$

1.3 Angles orientés de vecteurs

1.3.1 Définition :

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté.
On appelle angle orienté de vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, le couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ noté $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$.

Notation :
Dans cette ressource, on notera $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ l'angle orienté et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ sa mesure.

1.3.2 Mesures principale d'un angle orienté

On appelle mesure principale d'un angle orienté tout nombre réel appartenant à l'intervalle]-π, π]

1.3.3 Mesures d'un angle orienté

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté.
Si α est une mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ alors tout réel β de la forme β=α+2kπ (où k est un entier relatif) est une mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On écrit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$=$\alpha$+2k$\pi$ avec k un entier relatif, ou $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$=$\alpha[2\pi]$.

Remarque :
Toutes les mesures de l'angle nul sont de la forme 2kπ et celle de l'angle plat sont de la forme (2k+1)π où k est un entier relatif.

Exemples :
► 0, 2π, -2π, 4π, -4π... sont des mesures de l'angle nul.
► π, -π, 3π, -3π, 5π,...sont des mesures de l'angle plat.

1.3.4 Propriétés :

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{t}$ quatre vecteurs non nuls, on a :

P_1. $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u})=0[2\pi]$ (l'angle formé par deux vecteurs colinéaires de même sens)

P_2. $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{-u})=(\overrightarrow{-u}, \overrightarrow{u})=\pi[2\pi]$ (angle formé par deux vecteurs opposés)

P_3. $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{-v})=\pi+(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})[2\pi]$ (Angles supplémentaires)

P_4. $(\overrightarrow{-u}, \overrightarrow{v})=\pi+(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})[2\pi]$

P_5. $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})=$ -$(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})[2\pi]$ (Angles opposés)

P_6. $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})= (\overrightarrow{-u}, \overrightarrow{-v})[2\pi]$(Angles égaux)

P_7. $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})= (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})+(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})[2\pi]$ (Relation de Chasles)

P_8. Si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})=(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{t})[2\pi]$, alors par permutation des extrêmes et des moyens on a :
$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})=(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{t})[2\pi]$ et $(\overrightarrow{t}, \overrightarrow{v})=(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u})[2\pi]$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{t}$ sont les extrêmes, et les vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont les moyens.

Démonstration

Pour P_2. $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{-u})=(\overrightarrow{-u}, \overrightarrow{u})=\pi[2\pi]$.
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{-u}$ sont deux vecteurs colinéaires de sens contraire, donc ils forment un angle plat.
Ainsi $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{-u})=(\overrightarrow{-u}, \overrightarrow{u})=\pi[2\pi]$.

Pour P_3. $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{-v})=(\overrightarrow{-u}, \overrightarrow{v})=\pi+(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})[2\pi]$.
D'après la relation de Chasles , $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{-v})=(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})+(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{-v})[2\pi]$ or $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{-v})=\pi[2\pi]$ d'après P_2.
D'où $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{-v})=\pi+(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})[2\pi]$

Pour P_5. $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})=$ -$(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})[2\pi]$
D'après la relation de Chasles, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})+(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})= (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u})[2\pi]$ or $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u})=0(2\pi)$
$\Rightarrow (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})+(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})[2\pi]=0(2\pi)$. D'où $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})=$ -$(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})[2\pi]$

Pour P_6. $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})= (\overrightarrow{-u}, \overrightarrow{-v})$
D'après la relation de Chasles,
$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})= (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{-u})+(\overrightarrow{-u}, \overrightarrow{-v})+(\overrightarrow{-v}, \overrightarrow{v})[2\pi] = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})[2\pi]=\pi+(\overrightarrow{-u}, \overrightarrow{-v})[2\pi]+\pi=2\pi+(\overrightarrow{-u}, \overrightarrow{-v}[2\pi])=(\overrightarrow{-u}, \overrightarrow{-v})[2\pi]$
car $2\pi\equiv0[2\pi]$ d'où $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})= (\overrightarrow{-u}, \overrightarrow{-v})[2\pi]$

Théorème

Soit k et k' deux réels non nuls, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls.
a. Si k et k' sont de même signe, alors $(k\overrightarrow{u}, k'\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})[2\pi]$
b. Si k et k' sont de signe contraire, alors $(k\overrightarrow{u}, k'\overrightarrow{v}) = \pi + (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})[2\pi]$

Démonstration

a. Montrons que si k et k' sont de même signe, alors $(k\overrightarrow{u}, k'\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})[2\pi]$
D'après la relation Chasles, on a :
$(k\overrightarrow{u}, k'\overrightarrow{v}) = (k\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) + (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{v}, k'\overrightarrow{v})[2\pi]$

Pour k> 0, k'> 0 :
Les vecteurs $k\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}$ d'une part, et les vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $k'\overrightarrow{v}$ d'autre part sont colinéaires de même sens, donc $(k\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) = 0[2\pi]$ et $(\overrightarrow{v}, k'\overrightarrow{v}) = 0[2\pi]$
d'où $\underline{(k\overrightarrow{u}, k'\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})[2\pi]}$

Pour k< 0, k'< 0 :
Les vecteurs $k\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}$ d'une part, et les vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $k'\overrightarrow{v}$ d'autre part sont colinéaires de sens contraires ou opposés, donc $(k\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) = \pi[2\pi]$ et $(\overrightarrow{v}, k'\overrightarrow{v}) = \pi[2\pi]$
alors $(k\overrightarrow{u}, k'\overrightarrow{v}) = \pi + \pi + (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})[2\pi]$
$\Rightarrow (k\overrightarrow{u}, k'\overrightarrow{v}) = 2\pi + (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})[2\pi]$
d'où $\underline{(k\overrightarrow{u}, k'\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})[2\pi]}$

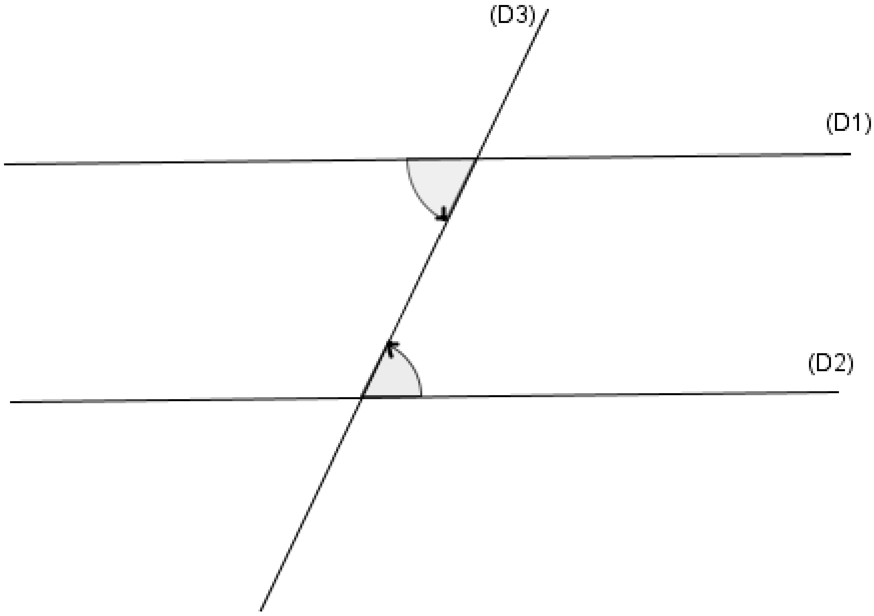
b. Montrons que Si k et k' sont de signe contraire, alors $(k\overrightarrow{u}, k'\overrightarrow{v}) = \pi + (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})[2\pi]$
D'après la relation de Chasles
$(k\overrightarrow{u}, k'\overrightarrow{v}) = (k\overrightarrow{u}, k\overrightarrow{v}) + (k\overrightarrow{v}, k'\overrightarrow{v})[2\pi]$
or d'après la propriété(P_6) $(k\overrightarrow{u}, k\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$; les vecteurs $k\overrightarrow{v}$ et $k'\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de sens contraires, alors $(k\overrightarrow{v}, k'\overrightarrow{v}) = \pi[2\pi]$
Donc $\underline{(k\overrightarrow{u}, k'\overrightarrow{v}) = \pi + (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})[2\pi]}$

1.4 Angles particuliers

1.4.1 Propriétés

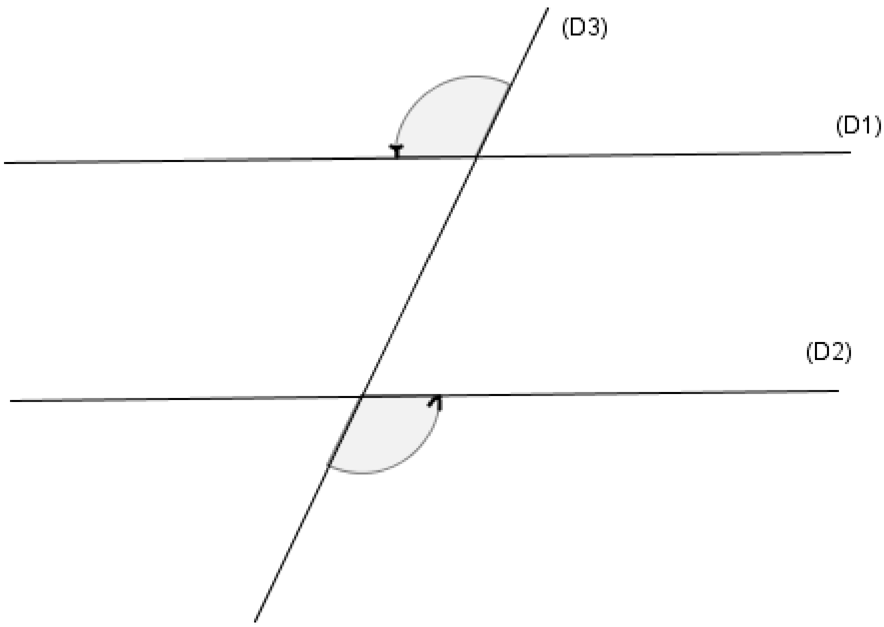
soient (D_1), (D_2) et (D_3) trois droites telles que :
(D_1) parallèle à (D_2), et (D_3) sécante à (D_1) et à (D_2) respectivement en A et B

1.4.2 Angles alternes internes



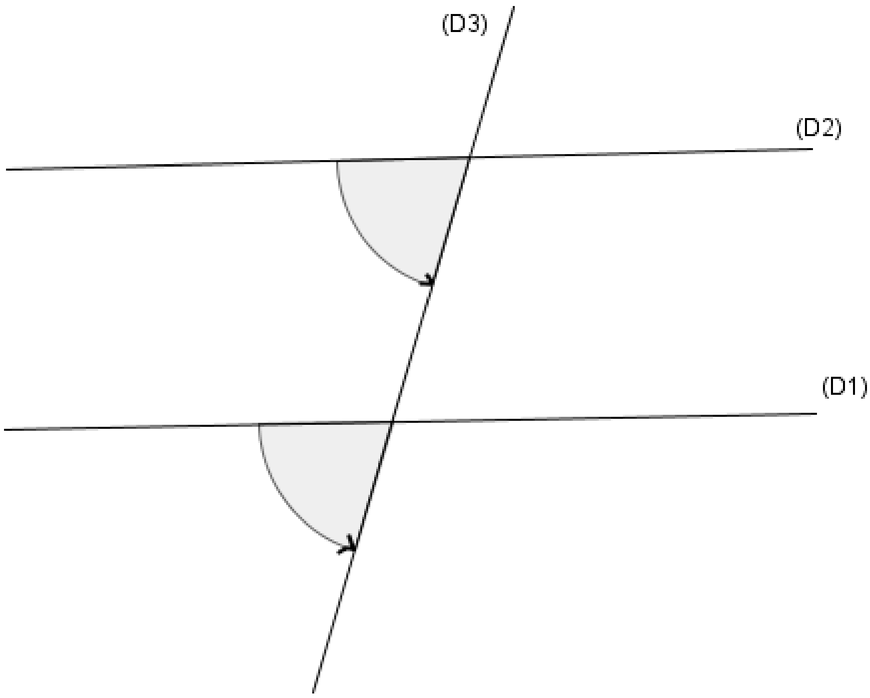
Les angles $(\widehat{AC, AB})$ et $(\widehat{BD, BA})$ sont deux angles alternes internes, ils ont de mesure égale : $\overline{(AC, AB)} = \overline{(BD, BA)}[\pi]$

1.4.3 Angles alternes externes



Les angles $(\widehat{AE, AC})$ et $(\widehat{BD, BG})$ sont deux angles alternes externes, ils ont de mesure égale : $\overline{(AE, AC)} = \overline{(BD, BG)}[\pi]$

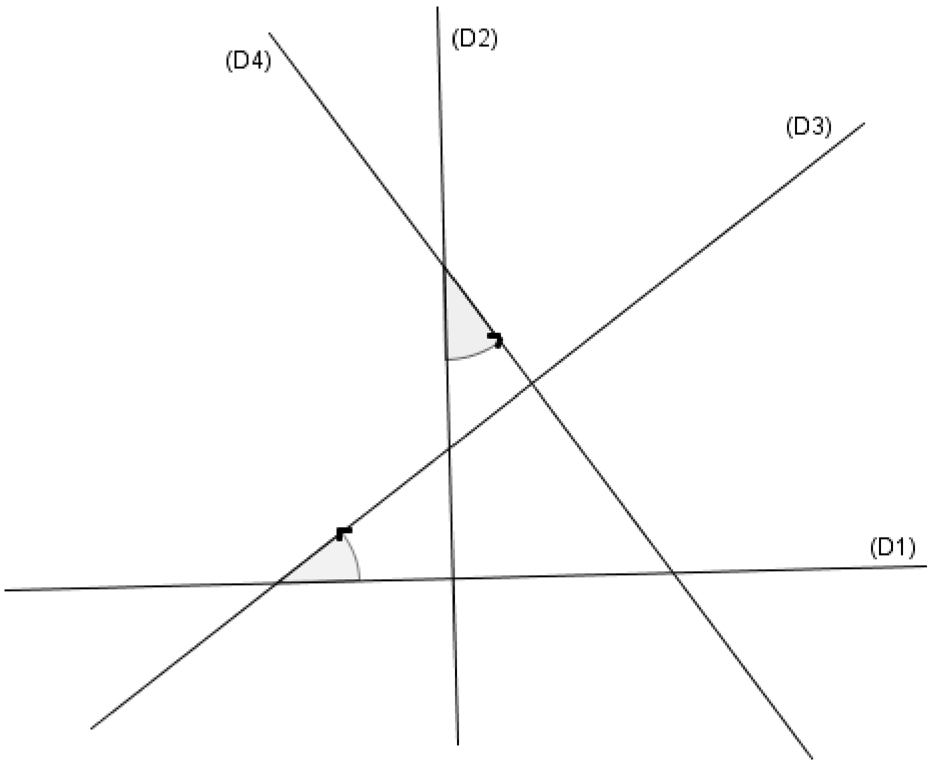
1.4.4 Angles correspondants



Les angles $(\widehat{AC, AB})$ et $(\widehat{BF, BG})$ sont deux angles correspondants, ils ont de mesure égale : $\overline{(AC, AB)}=\overline{(BF, BG)}[\pi]$

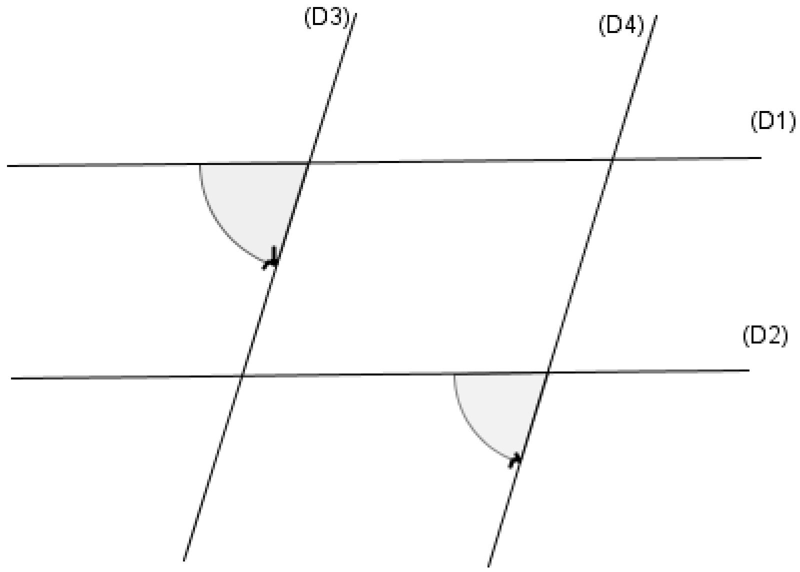
1.4.5 Angles à cotés perpendiculaires

Soient (D_1), (D_2), (D_3) et (D_4) quatre droites du plan.
Si (D_1) perpendiculaire à (D_2) et (D_3) perpendiculaire à (D_4) alors les angles $(\widehat{D_1, D_3})$ et $(\widehat{D_2, D_4})$ sont deux angles à cotés perpendiculaires, ils ont de mesure égale : $\overline{(D_1, D_3)}=\overline{(D_2, D_4)}[\pi]$



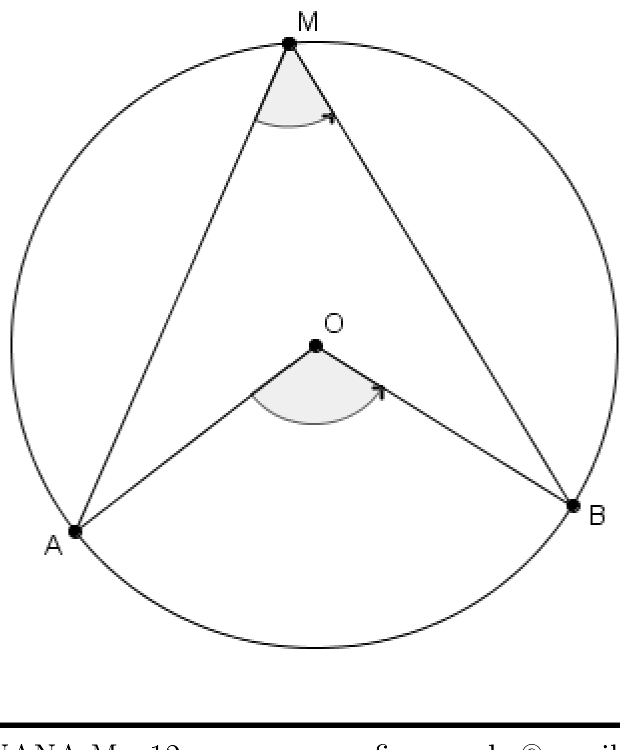
1.4.6 Angles à cotés parallèles

Soient (D_1), (D_2), (D_3) et (D_4) quatre droites du plan.
Si (D_1) parallèle à (D_2) et (D_3) parallèle à (D_4) telles que (D_1) sécante à (D_3) et à (D_4), (D_2) sécante à (D_3) à et (D_4) alors les angles $(\widehat{D_1, D_2})$ et $(\widehat{D_3, D_4})$ sont deux angles à cotés perpendiculaires, ils ont de mesure égale :
$\overline{(D_1, D_3)} = \overline{(D_2, D_4)}[\pi]$



1.4.7 Angles au centre-angle inscrit

Angle inscrit : $(\widehat{MA, MB})$;
Angle au centre : $(\widehat{OA, OB})$;

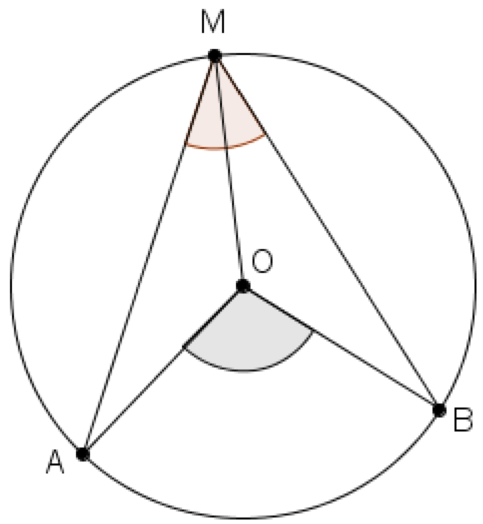


Théorème :

Soient M, A et B trois points distincts d'un cercle de centre O.

Un angle au centre est égal au double de son angle inscrit interceptant le même arc, c'est-à-dire :
$\overline{(OA,OB)} = 2\overline{(MA,MB)}[\pi]$

Démonstration :



D'après la relation de Chasles

$\overline{(MA,MB)}$=$\overline{(MA,MO)}$+$\overline{(MO,MB)}[\pi]$ (1)

En additionnant (1)+(1) membre à membre, on a :

$2(\overline{(MA,MB)}$=$\overline{(MA,MO)}$+$\overline{(MO,MB)}$+$\overline{(MA,MO)}$+$\overline{(MO,MB)}[\pi]$

or les triangles AOM et BOM sont isocèles en O, on peut écrire :

$\overline{(MA,MO)}$=$\overline{(AO,AM)}[\pi]$ et $\overline{(MO,MB)}$=$\overline{(BM,BO)}[\pi]$=$\overline{(BM,OB)}[\pi]$

$\Rightarrow 2\overline{(MA,MB)}$=$\overline{(AO,AM)}$+$\overline{(MA,MO)}$+$\overline{(MO,MB)}$+$\overline{(MB,BO)}[\pi]$

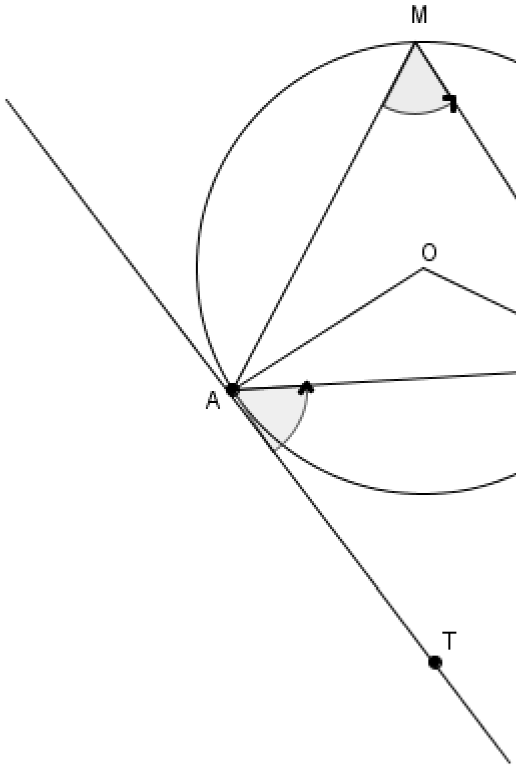
$\Rightarrow 2\overline{(MA,MB)}$=$\overline{(OA,MA)}$+$\overline{(MA,OB)}[\pi]$

$\Rightarrow 2\overline{(MA,MB)}$=$\overline{(OA,OB)}[\pi]$

d'où $\overline{(OA,OB)}$= $2\overline{(MA,MB)}[\pi]$ ou $\overline{(MA,MB)}$=$\frac{1}{2}\overline{(OA,OB)}[\pi]$

1.4.8 Angles tangentes-cordes

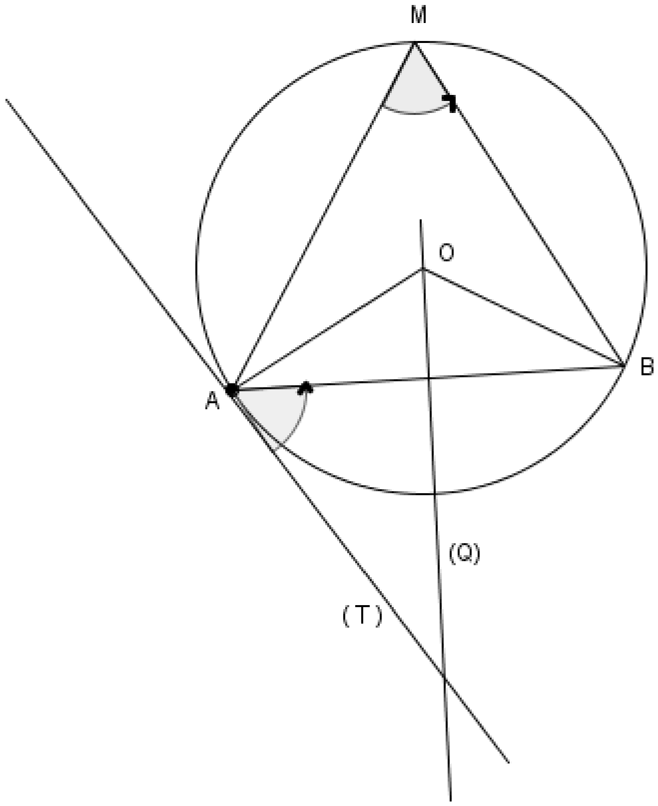
Soient A, B et M trois points distincts d'un cercle de centre O, et (T) est tangente à ce cercle en A, alors on a : $\overline{(MA,MB)}$=$\overline{(AT,AB)}[\pi]$



Théorème :

Soient A, B et M trois points distincts d'un cercle de centre O.
Si la droite (T) est tangente au cercle en A, alors on a :
$\overline{(MA, MB)}=\overline{(AT, AB)}[\pi]$

Démonstration



Soit (Q) une droite passant par O et perpendiculaire à la corde AB.
La droite (OA) est perpendiculaire à la droite (AT), et la droite (OQ) perpendiculaire à la droite (AB)
D'après la propriété des angles à cotés perpendiculaires, on a :
$\overline{(OA, OQ)} = \overline{(AT, AB)}[\pi]$
la droite (OQ) est la bissectrice de l'angle $(\widehat{OA, OB})$ alors $\overline{(OA, OQ)} = \frac{1}{2}\overline{(OA, OB)}[\pi]$, on a :
$\frac{1}{2}\overline{(OA, OB)} = \overline{(AT, AB)}[\pi]$
d'après le théorème sur l'angle inscrit angle au centre, on a :
$\overline{(MA, MB)} = \frac{1}{2}\overline{(OA, OB)} = \overline{(AT, AB)}[\pi]$
d'où $\overline{(MA, MB)} = \overline{(AT, AB)}[\pi]$

Exercices d'applications

Exercice 1 :
Soit ABC un triangle quelconque, et H sont orthocentre.
Démontrer que $\overline{(AB, AC)} + \overline{(HB, HC)} = 0[\pi]$

Exercice 2 :
Soit ABC un triangle de sommet M inscrit dans un cercle de centre O, (Δ) et (Δ') deux bissectrices respectives des angles $(\widehat{OA, OM})$ et $(\widehat{OM, OB})$.
Montrer que $\overline{(OA, OM)} = 2\overline{(MA, MA)}[\pi]$

Exercice 3 :

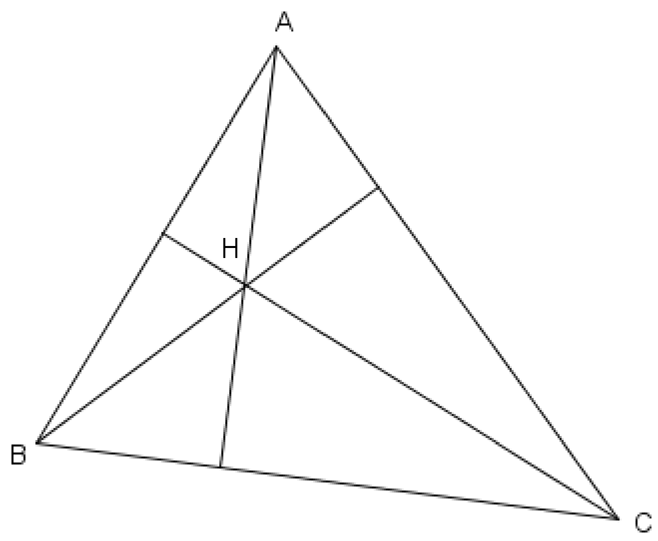
Soient (C) et (C') deux cercles sécantes en A et B, et (Δ) une droite passant par A coupe le cercle (C) en M et le cercle (C') en N. Les tangentes à (C) en M et à (C') en N se coupent en T.

Montrer que $\overline{(MT, MB)}=\overline{(NT, NB)}[\pi]$

Solutions des exercices d'applications

Exercice 1 :

Démontrons que $\overline{(AB, AC)}+\overline{(HB, HC)}=0[\pi]$



Par hypothèse, la droite (AB) est perpendiculaire à la droite (HC) d'une et la droite (AC) est perpendiculaire à la droite (HB) d'autre part. c'est-à-dire :

$\begin{cases} (AB) \perp (HC) \\ (AC) \perp (HB) \end{cases}$ D'après la propriété des angles à côtés perpendiculaires

On a :

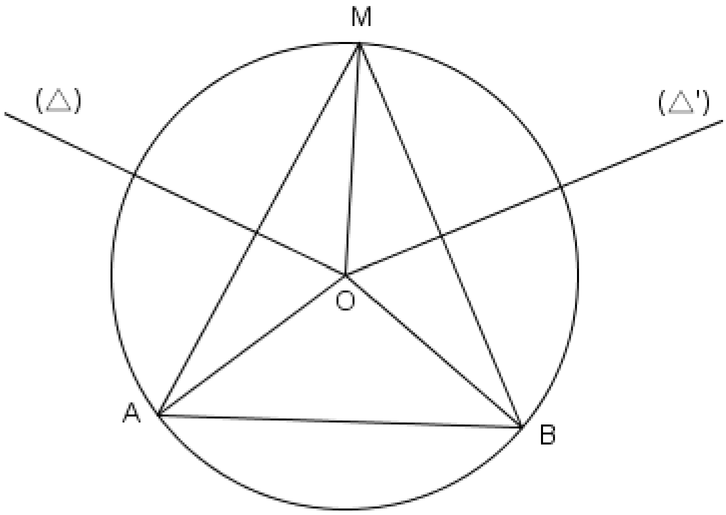
$\overline{(AB, AC)}=\overline{(HC, HB)}[\pi]$

$\overline{(AB, AC)}$-$\overline{(HC, HB)} = 0[\pi]$

D'où $\overline{(AB, AC)}+\overline{(HB, HC)} = 0[\pi]$

Exercice 2 :

Démontrons que $\overline{(OA, OM)}=2\overline{(MA, MA)}[\pi]$



D'après la relation de Chasles, on peut écrire :

$\overline{(OA,OB)}=\overline{(OA,OM)}+\overline{(OM,OB)}[\pi]$

Or (Δ) et (Δ') sont les bissectrices respectives des angles $(\widehat{OA,OM})$ et $(\widehat{OM,OB})$

on a : $\begin{cases} \overline{(OA,OM)} = 2\overline{(\Delta,OM)}[\pi] \\ \overline{(OM,OB)} = 2\overline{(OM,\Delta')}[\pi] \end{cases}$

$\Rightarrow \overline{(OA,OB)}=2\overline{(\Delta,OM)}+2\overline{(OM,\Delta')}[\pi]$

$\Rightarrow \overline{(OA,OB)}=2\overline{(\Delta,\Delta')}[\pi]$

Or $\begin{cases} (\Delta)\perp(MA) \\ (\Delta')\perp(MB) \end{cases} \Rightarrow \overline{(\Delta,\Delta')} = \overline{(MA,MB)}[\pi]$

D'où $\overline{(OA,OB)} = 2\overline{(MA,MB)}[\pi]$