PLAN DU DOCUMENT

Nombres complexes : 2.. 11

Algèbres linéaires : 12.. 18

Fonctions : 19.. 41

Suites numériques : 42.. 43

Équations différentielles : 44... 46

Courbes paramétriques : 47..48

Statistiques : 49.. 54

Probabilités : 55.. 57

Nombres complexes

Exercice 1

Le plan $(\mathscr{P})$ est rapporté d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\mathrm{u}}, \vec{\mathrm{v}})$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $z^3 + 8 = 0$.
2. Soit A, B et C les points d'affixes respectives : $z_{\mathrm{A}} = 1 + i\sqrt{3}$, $z_{\mathrm{B}} = -2$ et $z_{\mathrm{C}} = 1 - i\sqrt{3}$.
   Calculer $\frac{z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{B}}}{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{B}}}$ puis en déduire la nature du triangle ABC.
3. (a) Déterminer l'affixe du point D pour que le quadrilatère ABCD soit parallélogramme.
   (b) Placer le point D dans le repère, puis déterminer la nature du triangle DAC.
4. Soit S la similitude plane directe qui transforme A en C et C en B.
   (a) Déterminer l'expression complexe de S.
   (b) Déterminer le rapport k, l'angle θ et le centre Ω de la similitude plane directe S.
   (c) En déduire que S est une rotation.

Exercice 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\mathrm{u}}, \vec{\mathrm{v}})$, on considère le polynôme complexe P défini par :
$P(z) = z^3 - 10iz^2 - (12 - 16i)z + 160 + 120i$.

1. Montrer que l'équation $P(z) = 0$, admet une solution z_0 de la forme $i\alpha$; $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
2. Déterminer les nombres complexes a, b, c tels que $P(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.
4. Soit I, J et K les points du plan complexe dont les affixes respectives sont :
   $z_1 = -4 + 2i$; $z_2 = 4 - 2i$ et $z_3 = 10i$.
   (a) Donner l'écriture complexe de la similitude S telle que $\mathrm{S(K) = K}$ et $\mathrm{S(J) = I}$.
   (b) Donner les éléments caractéristiques de S.

Exercice 3

Le plan complexe $(\mathscr{P})$ est muni du repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique $2cm$.
On considère le polynôme p défini par : $p(z) = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2$.

1. (a) En remarquant $z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2 = (z^4 - 2z^3 + 2z^2) + (z^2 - 2z + 2)$, montrer que $p(z) = (z^2 + 1)(z^2 - 2z + 2)$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(z) = 0$.
2. Soit A, B, C et D quatre points d'affixes respectives i ; $-i$; $1 - i$ et $1 + i$.
   (a) Placer les points A ; B ; C et D dans le plan complexe.
   (b) Déterminer les affixes des points E et F symétriques respectives des points D et C par l'origine O du repère.

(c) En déduire la nature du quadrilatère $ECDF$.

3. Soit S une similitude plane directe de centre E d'affixe $z_E = -1 - i$, de rapport $k = \sqrt{2}$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$.
   (a) Montrer que l'écriture complexe de S est : $z' = (1+i)z - 1 + i$.
   (b) Déterminer l'expression analytique de la similitude S.

Exercice 4

Soit le polynôme P défini par : $P(z) = z^3 - 3z^2 + (3-i)z - 2 + 2i$.

1. (a) Calculer $P(2)$. Que peut-on conclure ?
   (b) Trouver les nombres a, b et c tels que : $P(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$.
   (c) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.
2. Soit A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 2$, $z_B = -i$ et $z_C = 1 + i$.
   (a) Montrer que $U = \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = i$
   (b) Quelle est la nature du triangle ABC.
3. (a) Déterminer l'expression complexe de la similitude S, de centre O c'est-à-dire $S(O) = O$ et qui transforme B en A.
   (b) Préciser les éléments caractéristiques de S.

Exercice 5

On donne les nombres complexes $z_1 = -1 + i$, $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z = z_1 \times z_2$.

1. Écrire z_1 et z_2 sous la forme trigonométrique.
2. (a) Écrire z sous la forme trigonométrique.
   (b) Écrire z sous la forme algébrique.
   (c) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)$.

Exercice 6

On donne deux nombres complexes définis par : $z_1 = -1 - i$ et $z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2.
2. Écrire z sous la forme algébrique et sous la forme trigonométrique tel que : $z_1 = z \times z_2$.
3. (a) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
   (b) Montrer que z^{12} est un réel.

Exercice 7

Dans le plan complexe muni d'un plan repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère l'application S définie par : $z' = (1+i)z$.

1. Déterminer la nature, le rapport et l'angle de S.
2. Soit le A d'affixe $z_A = i$. Déterminer les affixes des points B et C définis par $S(A) = B$ et $S(B) = C$.
3. Placer les points A, B et C dans un plan.
4. Déterminer l'affixe du point D telle que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.
5. Déterminer l'expression complexe de la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
6. En déduire l'expression analytique de la rotation R.

Exercice 8

Le plan complexe $\mathbb{C}$ étant rapporté au repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives.

$$Z_A = 1+2i\,;\ Z_B = -1+2i\,;\ Z_C = 1-i\,;\ Z_D = 1.$$

1. (a) Déterminer l'affixe $Z_{\overrightarrow{BC}}$ du vecteur $\overrightarrow{BC}$.
   (b) Déterminer l'expression analytique de la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
   (c) Trouver l'affixe du point A' image du point A par la translation du vecteur $\overrightarrow{BC}$.
2. (a) Prouver qu'une mesure, en radian, de l'angle $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$ est $-\frac{\pi}{2}$.
   (b) Écrire l'expression complexe puis analytique de la rotation R de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
   (c) Trouver l'affixe du point C' image du point C par rotation R.

Exercice 9

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère les nombres suivants : $z_1 = 1+i$, $z_2 = \sqrt{3}+i$ et $z_3 = (z_1)^3 \times z_2$.

1. Écrire le nombre complexe z_3 sous la forme algébrique : $a+ib$.
2. Écrire les nombres complexes z_1, z_2, z_3 sous la forme trigonométrique.
3. En comparant les écritures algébrique et trigonométrique de z_3, donner les valeurs réelles de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $(\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

Exercice 10

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$, des nombres complexes, le polynôme : $P(Z) = (\sin^2 t)Z^2 + (\sin 2t)Z + 1 + \cos^2 t$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(Z) = 0$; les solutions Z_1 et Z_2 seront données en fonction de t.
2. Vérifier que $Z_1^2 + Z_2^2 = -2$.
3. On donne $A = \frac{1}{\sin t}(\cos t + i))$ et $B = \frac{1}{\sin t}(\cos t - i)$. Vérifier que $P(A) = P(B)$.

Exercice 11

On considère le complexe $U = -3+3i$.

1. Calculer le module et un argument de U.
2. Déterminer le complexe Z sachant que : $U \cdot Z = 6\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right)$.
   (a) sous la forme trigonométrique.
   (b) sous la forme algébrique.
3. Écrire $U \cdot Z$ sous la forme algébrique et en déduire $\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)$.
4. On donne le nombre complexe $U = \frac{x+iy}{2-3i}$ où x et y sont deux réel.
   Déterminer x et y sachant que U a pour module $\sqrt{2}$ et un argument $\frac{3\pi}{4}[2\pi]$.

Exercice 12

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - 2i\overline{z} = 0$.
2. Soit le polynôme $P(z) = z^3 - 3z^2 + (3-i)z - 2(1-i)$.
   (a) Montrer que $p(z)$ admet une racine réelle notée z_0.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $p(z) = 0$, on notera z_1 la solution imaginaire pure et z_3 la troisième.
3. Soit A, B et C les points d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2. Calculer le module du nombre complexe $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$. En déduire la nature du triangle ABC.
4. (a) Déterminer l'expression complexe de la similitude plane directe de centre O qui transforme B en A.
   (b) Préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 13

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2 + (1 - 2i\sqrt{2})Z - 2i\sqrt{2} = 0$.
2. En déduire les valeurs de $Z^6 + (1 - 2i\sqrt{2})Z^3 - 2i\sqrt{2} = 0$

Exercice 14

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $Z^4 - \sqrt{2}Z^3 - 4\sqrt{2}Z - 16 = 0$, sachant qu'elle admet deux solutions imaginaires pures.
2. On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = 2i$; $z_B = -\sqrt{2}$; $z_C = -2i$ et $z_D = 2\sqrt{2}$.
   (a) Représenter les points A, B, C et D dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
   (b) Montrer que les points A, B, C et D sont cocycliques.

Exercice 15

Soit α un réel appartenant à $[-\pi; \pi]$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2 - (4\sin\alpha)Z + 4 = 0$.
   On appellera Z_1 et Z_2 les deux solutions de cette équation.
   Calculer le module et l'argument de chacun.
2. Calculer $S = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$ et $S' = z_1^4 + z_2^4$.

Exercice 16

Soit le polynôme P défini dans $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^3 - 4(1+i)z^2 + 12iz + 8 + 8i$.

1. Montrer que le polynôme $P(z)$ admet une racine imaginaire.
2. Factoriser $P(z)$ puis déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$.
3. Dans le plan complexe ; on considère les points A_0, A_1 et A_3 d'affixes respectives : $z_0 = 5 - 4i$, $z_1 = -1 - 4i$ et $z_2 = -4 - i$ et la similitude S telle que $S(A_0) = A$; $S(A_1) = A_2$.
   (a) Montrer que l'écriture complexe de S s'écrit : $z' = \left(\frac{1+i}{2}\right)z + \frac{-3+i}{2}$.
   (b) Donner les éléments caractéristiques de S.

Exercice 17

1. On donne $\mathrm{U} = \frac{x+iy}{2-3i}$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   Déterminer x et y pour que U ait pour module $\sqrt{2}$ et un argument $\frac{3\pi}{4}[2\pi]$.
2. Soit le polynôme $P(z) = z^2 - 2z + \frac{1}{\cos^2 t}$; $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.
   (a) Montrer que $P(z) = z^2 - 2z + 1 + \tan^2 t$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$; en présentant les résultats sous la forme trigonométrique.

Exercice 18

Soit $t \in]0;\pi[$. On donne l'équation (E) telle que : (E) : $(\sin^2 \mathrm{t})\mathrm{z}^2 - 4(\sin \mathrm{t})\mathrm{z} + 4 + 4\cos^2 \mathrm{t} = 0$. Résoudre dans $\mathbb{C}$; l'équation (E).

Exercice 19

Soit p le polynôme à variable complexe z défini par :
$p(z) = z^3 + (1-9i)z^2 - (24+6i)z - 14 + 18i$ et u un nombre complexe tel que : $u = 8i$.

1. Calculer les racines carrées δ_1 et δ_2 de u.
2. Déterminer le complexe z_0 tel que : $p(z) = (z - z_0)(z^2 - 4iz - 4 - 2i)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ de l'équation $p(z) = 0$ sachant que $z_0 = -1 + 5i$.
4. Dans le plan complexe $(\mathscr{P})$ muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $-1 + 5i$; $1 + 3i$ et $-1 + i$.
   (a) Placer les points A, B et C dans le plan $(\mathscr{P})$.
   (b) Calculer les distances AB et BC et déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}\right)$.
   (c) En déduire la nature du triangle ABC.
5. Soit I milieu du segment $[AC]$ et $(\mathscr{C})$ l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que : $(\mathscr{C}) : |z - 1 + 3i| = 2$.
   (a) Déterminer l'affixe du point I.
   (b) Déterminer et construire l'ensemble $(\mathscr{C})$.
6. Soit S la similitude plane directe qui laisse invariant le point A et que transforme C en B.
   (a) Montrer que l'écriture complexe de S est $z' = \dfrac{1}{2}(1+i)z + 2 + 3i$.
   (b) Déterminer les éléments caractéristiques de S.
   (c) Déterminer les affixes des points I' et B' images des points I et B par S.
   (d) Déterminer et construire l'ensemble $(\mathscr{C}')$ image de $(\mathscr{C})$ par S.

Exercice 20

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^4 = -7 - 24i$.

Exercice 21

Soit $z^2 - \left[i + 4\sqrt{2}(i-1)\right] z - 4\sqrt{2}(1+i) = 0$.

1. (a) Montrer que cette équation a une solution z_0 imaginaire pure.
   (b) En déduire l'autre solution z_1.
2. Soit dans $\mathbb{C}$ (E) : $z^6 - \left[i + 4\sqrt{2}(i-1)\right] z^3 - 4\sqrt{2}(1+i) = 0$.
   (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
   (b) Donner la forme algébrique des solutions.

Exercice 22

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 = -4\sqrt{2} + 4i\sqrt{2}$.
2. On donne $z_A = 3 + 2i$; $z_{A'} = 3 + i$; $z_B = 2 + 5i$ et $z_{B'} = 4 + 3i$ les affixes respectives des points A, A', B et B'.
   (a) Donner l'écriture complexe de la similitude plane directe S telle que : $S(A) = A'$ et $S(B) = B'$.
   (b) Donner les éléments caractéristiques de S.

Exercice 23

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, avec $\| \vec{u} \| = \| \vec{v} \| = 2cm$. On considère le polynôme P défini par : $P(Z) = Z^3 + Z^2 - 2$.

1. (a) Montrer que 1 est une racine de $P(Z)$.
   (b) Vérifier que $P(Z)$ peut s'écrire sous la forme : $P(Z) = (Z-1)(Z^2 + 2Z + 2)$.
   (c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(Z) = 0$.
2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $Z_A = 1$; $Z_B = -1 + i$; $Z_C = 1 - i$.
   (a) Construire le triangle ABC.
   (b) Déterminer l'affixe Z_D du point D telle que ABCD soit un parallélogramme.
3. Soit la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.
   (a) Montrer que l'expression complexe de R est telle que $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z + 1 - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   (b) Soit M et M′ les points d'affixes respectives $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.
   Exprimer les coordonnées x' et y' du point M′ en fonction de x et y'.

Exercice 24

On considère une similitude plane directe qui à tout point $M(x, y)$ du plan associé le point $M'(x', y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$$

1. Écrire la forme complexe de cette similitude.
2. Donner ses éléments caractéristiques.
3. On considère les points $A(-2, 1)$; $B(0; 2)$ et $C(-1, 2)$.
   Donner les affixes des points A', B' et C' images respectives de A, B et C par cette similitude.

Exercice 25

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f définie par son écriture complexe :

1. $z' = z + 2 + 3i$
2. $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$.
3. $z' = \frac{3}{5}z + 1 - \frac{1}{2}i$
4. $z' = (1 - i\sqrt{3})z + 1 + 2i$
5. $z' = iz + 1 + 2i$

Exercice 26

Partie A

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2 - (1+3i)z + 4 + 4i = 0$.
2. Dans le plan complexe ($\mathscr{P}$) rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$; on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $3, 4i, -2+3i, 1-i$.
   (a) Placer les points A, B, C et D dans le plan.
   (b) Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{DA}$.
   (c) En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

Partie B

On considère le complexe $U = -3 + 3i$.

1. Calculer le module et un argument de U.
2. Déterminer le complexe z tel que $U \cdot z = 6\sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + \sin\frac{17\pi}{12}\right)$.

Exercice 27

1. Calculer dans $\mathbb{C}$ les racines carrées du nombres complexes $\sigma = -2i$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : (E_1) : $z^2 - (3+3i)z + 5i = 0$.
3. Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_2) : $z^3 - (6+5i)z^2 + (3+20i)z + 10 - 15i = 0$.
   (a) Prouver que $3 + 2i$ est une racine (E_2).
   (b) Résoudre l'équation (E_2).
4. On donne les complexes $z_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$ et $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$.
   (a) Mettre z_1 sous la forme algébrique et z_2 sous la forme trigonométrique.
   (b) Trouver la forme algébrique et trigonométrique du complexe $U = z_1 \cdot z_2$.
   (c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{31\pi}{12}$ et $\sin\frac{13\pi}{12}$.

Exercice 28

Dans le plan complexe, on considère l'équation (E) : $z^2 - 2(1+i)z + 4i = 0$.

1. Montrer que l'équation (E) admet une racine réelle z_1 et une racine imaginaire z_2 que l'on déterminera.
2. Donner les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2 + 4i$, $z_B = 2i$ et $z_C = 2$ dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
   (a) Placer ces points dans le plan.
   (b) Calculer le rapport $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$. En déduire la nature du triangle ABC.
   (c) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ tels que $|z - 2 - 2i| = 2$.

Exercice 29

Soit l'équation (E) : $z^3-(1-i)z^2+(4+i)z-12-6i=0$.

1. Déterminer la racine réelle z_0 de l'équation (E).
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).
3. On donne les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=2$; $z_B=-1+2i$ et $z_C=-3i$.
   (a) Donner l'expression complexe de la similitude plane directe S telle que $S(A)=A$ et $S(B)=C$.
   (b) Donner les éléments caractéristiques de S.

Exercice 30

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes ; on considère l'équation :
(E) : $z^3+(3-2i)z^2+(1-4i)z-1-2i=0$.

1. (a) Vérifier que (E) admet une solution réelle.
   (b) Achever la résolution de (E).
2. Dans le plan complexe ; on désigne par A, B et C d'affixes respectives $z_A=-1$, $z_B=-2+i$ et $z_C=i$.
   (a) Déterminer le module et un argument de $U=\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$.
   (b) En déduire la nature du triangle ABC.
   (c) Donner le centre ; le rapport et l'angle de la similitude plane directe qui laisse invariant le point A et transforme le point B en C.

Exercice 31

soit $z_1=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2=1+i$.

1. Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2.
2. Écrire $z_1\cdot z_2$ et $\frac{z_1}{z_2}$ sous la forme algébrique et trigonométrique.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$; $\sin\frac{\pi}{12}$, $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

Exercice 32

soit $z_1=-1-i$ et $z_2=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

1. Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2.
2. Écrire $z_1\cdot z_2$ et $\frac{z_1}{z_2}$ sous la forme algébrique et trigonométrique.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{19\pi}{12}$; $\sin\frac{19\pi}{12}$, $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$.

Exercice 33

soit $z_1=-1+i$ et $z_2=1+i\sqrt{3}$ et $z=z_1\cdot z_2$.

1. Écrire z_1 et z_2 sous la forme trigonométrique.
2. Écrire $z_1\cdot z_2$ et $\frac{z_1}{z_2}$ sous la forme algébrique et trigonométrique.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{13\pi}{12}$; $\sin\frac{13\pi}{12}$.

Exercice 34

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $z^2 + z + 1 = 0$.
2. Soit le nombre complexe $Z = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}}$.
   (a) Écrire sous la forme algébrique et sous la forme trigonométrique.
   (b) En déduire la valeur exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 35

z et z' désignent les nombres complexes dont les conjugués sont $\overline{z}$ et $\overline{z}'$.

1. Déterminer le couple (z, z') vérifiant le système :
$$\begin{cases} (2-3i)z + 2z' = -1 - i \\ (2-3i)\overline{z} - 3i\overline{z}' = -11 - i \end{cases}$$
2. Mettre z et z' sous la forme trigonométrique puis calculer : $\mathrm{U} = z.z'$ et $\mathrm{V} = \mathrm{U}^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire : U^{2010} , U^{2004}, z^3, z'^3 et U^3.

Exercice 36

1. Trouver dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes les nombres z_1, z_2, z_3 et z_4 tels que :
$$\begin{cases} iz_1 + \overline{z}_4 = 2i \\ \overline{z}_2 \times z_3 = 2i \\ \overline{z}_1 - i\overline{z}_2 = 2 \\ z_4 - 1 - 2i = -2 - 3i \end{cases}$$
2. On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^4 = -4$.
   Pour cela, on rappelle que $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$ où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.
   (a) Montrer que si z_0 est solution (E) alors $\overline{z}_0$ et $-z_0$ sont aussi des solutions de (E).
   (b) On pose $z_0 = 1 + i$.
      i. Écrire z_0 sous la forme exponentielle.
      ii. Vérifier que z_0 est une solution de (E).
      iii. En déduire les trois autres solutions de (E).
3. Dans le plan complexe, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :
   (a) Déterminer l'affixe du point I centre de gravité de ABCD.
   (b) Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle $(\mathscr{C})$ de centre I.
   (c) Tracer le cercle $(\mathscr{C})$ dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$ du plan complexe, unité graphique 2 cm.
   (d) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude plane directe centre A qui transforme B en C.
   (e) En déduire l'écriture complexe de la similitude plane directe .

Exercice 37

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est muni du repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.
Soit l'équation (E)
: $z^3 + 2iz^2 - 4z - 8i = 0$.

1. Montrer que l'équation (E) admet deux solutions réelles z_0 et z_1 que l'on déterminera.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).
3. Soit A, B et C trois points d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = 2$, $z_{\mathrm{B}} = -2$ et $z_{\mathrm{C}} = 2i$.
   (a) Placer ces points dans le plan complexe.
   (b) Donner l'écriture exponentielle du nombre complexe $q = \dfrac{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{B}}}{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}}$.
   (c) En déduire la nature du triangle ABC.
   (d) Montrer que les points $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ appartiennent à un même cercle $(\mathscr{C})$ de centre O, que l'on tracera.
4. Soit t la translation du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, M et M' sont des points d'affixes respectives z et z' tels que M' soit l'image de M par la translation t.
   (a) Exprimer z' en fonction de z.
   (b) Donner l'affixe du point D telle que $\mathrm{f}(\mathrm{D}) = \mathrm{A}$.
   (c) Donner la nature exacte du quadrilatère ACBD.
5. Soit l'application du plan telle que $z' = (1+i)\overline{z} + 2i$.
   (a) Déterminer l'affixe du point E telle que $f(\mathrm{D}) = \mathrm{E}$.
   (b) Déterminer l'expression analytique de f. On pourra poser $z = x + iy$ et $\overline{z} = x - iy$.

Exercice 38

Le plan complexe $(\mathscr{P})$ est muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, unité graphique $2cm$.
On considère le polynôme p défini par : $p(z) = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2$.

1. (a) En remarquant $z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2 = (z^4 - 2z^3 + 2z^2) + (z^2 - 2z + 2)$, montrer que $p(z) = (z^2+1)(z^2 - 2z + 2)$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(z) = 0$.
2. Soit A, B, C et D quatre points d'affixes respectives i ; $-i$; $1-i$ et $1+i$.
   (a) Placer les points A ; B ; C et D dans le plan complexe.
   (b) Déterminer les affixes des points E et F symétriques respectives des points D et C par l'origine O du repère.
   (c) En déduire la nature du quadrilatère $ECDF$.
3. Soit S une similitude plane directe de centre E d'affixe $z_E = -1 - i$, de rapport $k = \sqrt{2}$ et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{4}$.
   (a) Montrer que l'écriture complexe de S est : $z' = (1+i)z - 1 + i$.
   (b) Déterminer l'expression analytique de la similitude S.

Algèbre linéaire

Exercice 1

E est un espace vectoriel rapporté à une base orthonormé $B = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Soit l'endomorphisme de E qui à un vecteur $\overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$ de E associe son image $\overrightarrow{u}' = x'\,\overrightarrow{i} + y'\,\overrightarrow{j}$ par f tel que $\overrightarrow{u}' = (2x+y)\,\overrightarrow{i} + (-3x-2y)\,\overrightarrow{j}$.

1. Écrire les coordonnées de $\overrightarrow{u}'$ en fonction de celle de $\overrightarrow{u}$.
2. Écrire la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
3. (a) Déterminer les sous-ensembles E_1 et E_2 de E tels que :
   $E_1 = \left\{\overrightarrow{u} \in E / f(\overrightarrow{u}) = -\overrightarrow{u}\right\}$ et $E_2 = \left\{\overrightarrow{u} \in E / f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}\right\}$
   (b) Déterminer $f \circ f(\overrightarrow{i})$ et $f \circ f(\overrightarrow{j})$.
   (c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.
4. On donne $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} - 3\,\overrightarrow{j}$.
   (a) Qu'appelle-t-on base d'un espace vectoriel de dimension finie ?
   (b) Montrer que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base de E.
   (c) Écrire la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Exercice 2

L'espace vectoriel E est muni de sa base canonique $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$; on considère l'endomorphisme f de E définie par :

$$\begin{cases} f(\overrightarrow{i}) = a\,\overrightarrow{i} + 3\,\overrightarrow{j} \\ f(\overrightarrow{j}) = b\,\overrightarrow{i} - 4\,\overrightarrow{j} \end{cases} \quad \text{où } a, b \in \mathbb{R}.$$

Soit $\overrightarrow{u}' = x'\,\overrightarrow{i} + y'\,\overrightarrow{j}$ l'image de $\overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$ par f telle que $\overrightarrow{u}' = f(\overrightarrow{u})$.

1. Déterminer l'expression analytique de f en fonction de a et b.
2. Déterminer a et b pour que f soit une symétrie vectorielle.
3. Dans la suite de l'exercice ; on pose $a = 4$ et $b = -5$.
   (a) Déterminer la base E_1 de f et un vecteur $\overrightarrow{e_1}$ qui l'engendre.
   (b) Déterminer la direction de E_2 de f et un vecteur $\overrightarrow{e_2}$ qui l'engendre.
4. On donne $\overrightarrow{e_1} = 5\,\overrightarrow{i} + 3\,\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.
   (a) Montrer que $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ est une base de E.
   (b) Donner les matrices de f dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

Exercice 3

On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\begin{cases} x' = 2x + ay \\ y' = x - y \end{cases} \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}^*.$$

1. Pour quelle valeur de a, f n'est-elle pas un automorphisme ?
2. Pour quelle valeur de a, f est une projection vectorielle ?
3. Montrer que si f est un projecteur alors f n'est pas bijective quelque soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
   Dans la suite de l'exercice ; on prendra $a = -2$.
   (a) Déterminer le noyau de f et en donner une base $\overrightarrow{e_1}$.
   (b) Déterminer l'image de f et en donner une base $\overrightarrow{e_2}$.
   (c) Montrer que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base de $\mathbb{R}^2$; puis donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 4

Sur l'espace vectoriel E muni de la base canonique $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et f l'endomorphisme de E tel que :

$$\begin{cases} f(\overrightarrow{i}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}) \\ f(\overrightarrow{j}) = \frac{3}{4}(-\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) \end{cases}$$

1. f est-elle bijective ?
2. Soit $\overrightarrow{u}' = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}$ image de $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$.
   (a) En se servant de $f(\overrightarrow{i})$ et $f(\overrightarrow{j})$, montrer que :
   $(\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}y)\overrightarrow{i} + (-\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y)\overrightarrow{j} = x'\overrightarrow{j} + y'\overrightarrow{j}$.
   (b) En déduire les expressions x' et y' en fonction de x et y.
3. Montrer que f est une projection vectorielle.
4. Donner la base de E_1 de f.
5. Déterminer un vecteur $\overrightarrow{e}_1$ qui engendre E_1.
6. Donner la direction E_2 de f.
7. Déterminer un vecteur $\overrightarrow{e}_2$ qui engendre E_2.
8. On donne $\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.
   (a) Montrer que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base de E.
   (b) Déterminer la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Exercice 5

$(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$. f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que :

$$\begin{cases} f(\overrightarrow{e_1}) = 3\overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2} \\ f(\overrightarrow{e_2}) = 4\overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2} \end{cases}$$

1. Écrire la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.
2. On pose $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$, $U_\lambda = \left\{ \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2 / f(\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{u} \right\}$.
   (a) Montrer que U_1 et U_{-1} sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.
   (b) Écrire la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
   (c) Déterminer le noyau de f. Que peut-on conclure.

Exercice 6

1. Qu'appelle-t-on :
   (a) application linéaire ?
   (b) endomorphisme ?
   (c) automorphisme ?
2. Soit E un espace vectoriel de base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et f un endomorphisme de E tel que :
$$\begin{cases} f(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) = 2\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} \\ f(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}) = \overrightarrow{0} \end{cases}$$
   (a) Montrer que : $f(\overrightarrow{i}) = f(\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$.
   (b) Donner la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
   (c) Montrer que f n'est pas bijectif.
   (d) Déterminer l'expression analytique de f dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
   (e) Déterminer le noyau de f et en donner une base $\overrightarrow{e_1}$.
   (f) Déterminer l'image de f et en donner une base $\overrightarrow{e_2}$.
   (g) Montrer que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base de E.
   (h) Écrire la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

Exercice 7

E est un espace vectoriel de base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On considère les vecteurs $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{i} - \frac{1}{2}\overrightarrow{j}$ et l'endomorphisme f défini par : $\begin{cases} f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} \\ f(\overrightarrow{v}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{i} + \frac{1}{2}\overrightarrow{j}. \end{cases}$

1. Donner la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$
2. Déterminer l'expression analytique de f dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
3. Vérifier que l'endomorphisme f est une symétrie vectorielle.
4. Trouver la base et la direction de f.

Exercice 8

Soit $\mathscr{P}$ un plan vectoriel de base $\mathscr{B}(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On considère l'endomorphisme f_a de $\mathscr{P}$ défini par :
$$\begin{cases} f_a(\overrightarrow{i}) = a\overrightarrow{i} + (2a-2)\overrightarrow{j} \\ f_a(\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{i} - \frac{3}{2}a\overrightarrow{j} \end{cases}$$

1. Donner la matrice M de f_a dans la base $\mathscr{B}$.
2. Qu'elle est l'expression analytique de f_a ?
3. Préciser les valeurs de a pour lesquelles f_a est un automorphisme de $\mathscr{P}$.
4. Déterminer suivant les valeurs de a l'ensemble de $\mathrm{I_a}$ des vecteurs invariants par f_a.
5. On pose $a = -2$. Définir le noyau et image de I_{-2}.

Exercice 9

Dans le plan vectoriel E de base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère les droites vectorielles F et G engendrées respectivement par les vecteurs $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$.

1. Montrer que F et G sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires de E.
2. Soit f l'endomorphisme de E tel que $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ et $f(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v}$.
   Déterminer la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$
3. (a) Déterminer $f \circ f$. Quelle est la nature de f.
   (b) En déduire les éléments caractéristiques de f.

Exercice 10

Soit E, l'espace vectoriel de dimension 2 rapporté à la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

1. Déterminer a et b de manière que f une projection vectorielle.
2. Déterminer le noyau $\mathrm{Ker}f$ et l'image de $\mathrm{Im}f$ de f.
3. Soit $\overrightarrow{e}_1$ la base de $\mathrm{Ker}f$ et $\overrightarrow{e}_2$ la base de $\mathrm{Im}f$.
   (a) Montrer que $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ est une base de E.
   (b) Donner la matrice de f est la base $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$.

Exercice 11

L'espace vectoriel E est rapporté à sa base canonique $\mathscr{B}(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soit f l'endomorphisme de E défini par son expression analytique : $\forall \overrightarrow{u}(x,y) \in E$ tels que $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}'$, on a :

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = -x - 6y \end{cases}$$

1. Déterminer $f(\overrightarrow{i})$ et $f(\overrightarrow{j})$.
2. En déduire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
3. Soit $\overrightarrow{V}(3,-4) \in$ E, donner son image $\overrightarrow{V}'$ par l'endomorphisme f.
4. Montrer que f est un endomorphisme bijectif.
5. (a) Calculer $f \circ f(\overrightarrow{i})$ et $f \circ f(\overrightarrow{j})$.
   (b) En déduire la nature de f.
   (c) Déterminer alors la base et la direction de f.

Exercice 12

Soit les vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{v}_1(2,1,2)$; $\overrightarrow{v}_2(1,-3,-3)$; $\overrightarrow{v}_3(3,1,-1)$ et $\overrightarrow{v}_4(-3,1,-1)$.
Montrer que la famille $(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3)$ est liée et que la famille $(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_3, \overrightarrow{v}_4)$ est libre.

Exercice 13

Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ rapporté à la base $\mathscr{B}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ avec $\vec{e}_1(1,0,0)$, $\vec{e}_2(0,1,0)$ et $\vec{e}_3(0,0,1)$. On considère l'ensemble U des vecteurs $\vec{u}(x,y,z)$ tels que $x+y+z=0$.

1. Établir que U est un sous vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de U. Quelle est la dimension de U ?

Exercice 14

$(\vec{i}, \vec{j})$ est une base du plan vectoriel E et φ désigne l'endomorphisme de E tel que :

$$\begin{cases} \varphi(\vec{i}) = \frac{1}{4}\vec{i} - \frac{1}{4}\vec{j} \\ \varphi(\vec{j}) = -\frac{3}{4}\vec{i} + \frac{3}{4}\vec{j} \end{cases}$$

1. Quelle est la matrice de φ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
2. Donner l'expression analytique de φ.
3. Donner le noyau de φ et l'image de φ ; φ est elle bijective ?
4. Donner l'ensemble des points invariants par φ. En déduire une base.
5. On donne $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{v} = 3\vec{i} + \vec{j}$. Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de E.
6. Écrire la matrice de φ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 15

Soit f_a l'endomorphisme du plan $\mathbb{R}^2$ dans sa base canonique $(\vec{i}, \vec{j})$ défini par :

$$\begin{cases} f_a(\vec{i}) = \vec{i} - \vec{j} \\ f_a(\vec{j}) = a\vec{j} \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}$$

1. Donner la matrice de f_a en fonction de a dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
2. Déterminer le réel a pour que f_a soit une symétrie vectorielle.
3. On pose $a = -1$.
   (a) Déterminer les sous-ensembles vectoriels E et F tels que : $E = \left\{\vec{u} \in \mathbb{R}^2 / f_{-1}(\vec{u}) = \vec{u}\right\}$ et $F = \left\{\vec{u} \in \mathbb{R} / f_{-1}(\vec{u}) = -\vec{u}\right\}$ et $\vec{e_1}$ est une base de E et $\vec{e_2}$ est une base de F.
   (b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de f_{-1}.
4. (a) Montrer que $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Donner la matrice de f_{-1} dans la base de $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$.

Exercice 16

E étant un espace vectoriel de dimension 3 rapporté a une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère l'endomorphisme φ de E de matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Définir analytiquement φ.
2. Déterminer le noyau de φ et en donner une base.
3. Déterminer l'image de φ et en donner une base.
4. Étudier si le noyau de φ et l'image de φ sont deux sous espaces supplémentaires.

Exercice 17

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est rapporté à sa base canonique $\mathscr{B}=(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ par : $f(\overrightarrow{j})=3\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j}$ et $f\circ f(\overrightarrow{j})=\overrightarrow{j}$.

1. Calculer $f(\overrightarrow{i})$ et $f\circ f(\overrightarrow{i})$.
2. En déduire la nature de l'application f.
3. (a) Qu'est ce qu'un automorphisme ?
   (b) Prouver que f est un automorphisme involutif.
   (c) Caractériser l'application f.
4. Soit les vecteurs $\overrightarrow{u}=2\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v}=-3\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$.
   (a) Montrer que $\mathscr{B}'=(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.

Exercice 18

On considère les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{U}}_1(1,1,0,0)$, $\overrightarrow{\mathrm{U}}_2(0,1,1,0)$ et $\overrightarrow{\mathrm{U}}_3(0,0,1,1)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$.

1. Montrer que la famille $\mathrm{F}=\left\{\overrightarrow{\mathrm{U}}_1, \overrightarrow{\mathrm{U}}_2, \overrightarrow{\mathrm{U}}_3\right\}$ de ces trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$ est libre.
2. Soit le vecteur $\mathrm{U}(1,2,3,2)$ de l'espace $\mathbb{R}^4$. Déterminer les réels a, b et c tels que l'on ait : $\overrightarrow{\mathrm{U}}=a\overrightarrow{\mathrm{U}}_1+b\overrightarrow{\mathrm{U}}_2+c\overrightarrow{\mathrm{U}}_3$ c'est à dire que $\overrightarrow{\mathrm{U}}$ soit une combinaison linéaire des vecteurs de la famille F.
3. Soit le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{V}}(x,y,z)$ du sous espaces vectoriel E de $\mathbb{R}^4$. Trouver une relation entre les coordonnées x,y,z et du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{V}}$ de E sachant que l'on a : $\overrightarrow{\mathrm{V}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{U}}_1+\beta\overrightarrow{\mathrm{V}}_2+\gamma\overrightarrow{\mathrm{U}}_3$ avec α, β et γ des réels.
4. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{W}}_{(20,20,15,-15)}\in\mathrm{E}$.

Exercice 19

Soit E un plan vectoriel rapporté à la base $(\overrightarrow{\mathrm{i}}, \overrightarrow{\mathrm{j}})$, f est un endomorphisme de E défini par :

$$\begin{cases} f(\overrightarrow{\mathrm{i}}=2\overrightarrow{\mathrm{i}}-\overrightarrow{\mathrm{j}} \\ f(\overrightarrow{\mathrm{j}})=a\overrightarrow{\mathrm{i}}+b\overrightarrow{\mathrm{j}} \end{cases} \qquad a,b\in\mathbb{R}$$

1. Trouver la matrice et l'expression analytique de f dans la base $(\overrightarrow{\mathrm{i}}, \overrightarrow{\mathrm{j}})$.
2. Déterminer en fonction de a et b l'ensemble des points invariants par f, le noyau de f et en donner une base.
3. Déterminer les réels a et b pour que f soit une projection vectorielle de E et donner ses éléments caractéristiques.
4. Donner la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ avec $\overrightarrow{e_1}=-\overrightarrow{\mathrm{i}}+\overrightarrow{\mathrm{j}}$ et $\overrightarrow{e_2}=-2\overrightarrow{\mathrm{i}}+\overrightarrow{\mathrm{j}}$ après avoir démontré que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base de E.

Exercice 20

E désigne un plan vectoriel de base $(\overrightarrow{\mathrm{i}}, \overrightarrow{\mathrm{j}})$ et φ l'endomorphisme de E tel que :
$\varphi(\overrightarrow{\mathrm{i}}) = 2\overrightarrow{\mathrm{i}} - 5\overrightarrow{\mathrm{j}}$ et $\varphi(\overrightarrow{\mathrm{j}}) = \frac{2}{5} + a\overrightarrow{\mathrm{j}} \qquad a \in \mathbb{R}$

1. Donner la matrice de φ dans la base $(\overrightarrow{\mathrm{i}}, \overrightarrow{\mathrm{j}})$.
2. Déterminer l'expression analytique de φ.
3. Déterminer α pour que φ soit une projection vectorielle.
4. Dans la suite de l'exercice, on pose $\alpha = -1$. Déterminer :
   (a) le noyau de φ, noté $\mathrm{Ker}\varphi$ et une base $\overrightarrow{\mathrm{e_1}}$ de $\mathrm{Ker}\varphi$.
   (b) l'image de φ, notée $\mathrm{Im}\varphi$ et une base $\overrightarrow{\mathrm{e_2}}$ de $\mathrm{Im}\varphi$.
   (c) que le couple $(\overrightarrow{\mathrm{e_1}}, \overrightarrow{\mathrm{e_2}})$ est une base de E.
5. En déduire que $\mathrm{Ker}\varphi$ et $\mathrm{Im}\varphi$ sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires.

Exercice 21

Soit E un espace vectoriel de base $(\vec{i}; \vec{j})$ et f l'endomorphisme de E tel que :
$f(\vec{i} + 2\vec{j}) = \vec{i} + 2\vec{j}$ et $f(2\vec{i} - \vec{j}) = -2\vec{i} + \vec{j}$.

1. Montrer que $f(\vec{i}) = -\frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}$ et $f(\vec{j}) = \frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}$.
2. Donner la matrice de f dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$.
3. L'endomorphisme f est-elle bijective ?
4. Déterminer l'expression analytique de f puis donner la nature de f.
5. Déterminer la base (Δ) et la direction $(\mathscr{D})$ de f.
6. On donne $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$ et $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$.
   (a) Montrer que $(\vec{u}; \vec{v})$ est une base de E.
   (b) Calculer $f(\vec{u})$ et $f(\vec{v})$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. En déduire la matrice de f dans la base $(\vec{u}; \vec{v})$.

Fonctions numériques

Exercice 1

Soit la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = 1+\sqrt{x^2+x} & \text{si } \ x \geq 0 \\ f(x) = 3-x-\dfrac{4}{x+2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la continuité de f en $x=0$.
3. (a) Étudier la dérivabilité de f en $x=0$.
   (b) Donner une interprétation graphique du résultat.
4. (a) Montrer que la fonction dérivée f' de la fonction f est : $\begin{cases} f'(x) = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} & \text{si } \ x > 0 \\ f'(x) = \dfrac{-x(x+4)}{(x+2)^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$
   (b) Donner le sens de variations de f.
   (c) Dresser le tableau de variation de f.
5. (a) Montrer que pour tout $x < 0$, la droite $(\mathscr{D})$: $y=-x+3$ est une asymptote oblique.
   (b) On admet que la droite (Δ) : $y = x+\frac{3}{2}$ est une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.
6. Déterminer le point d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses.
7. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.
8. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =]-\infty;-2[$ définie par $g(x) = -f(x)$.
   (a) Dresser le tableau de variation de g.
   (b) Tracer la courbe $(\mathscr{C}')$ de g dans le même repère que la courbe $(\mathscr{C})$ de f.

Exercice 2

On considère la fonction définie par :

$\begin{cases} f(x) = 1-\cos\pi x & \text{si } -3 \leq x \leq 0 \\ f(x) = 1-\sqrt{x^2-x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la continuité de f en $x=0$.
3. (a) Étudier la dérivabilité de f en $x=0$.

(b) Donner une interprétation du résultat.

(c) Déduire les équations cartésiennes des tangentes en $x = 0$.

4. (a) Résoudre sur $[-3;0]$, l'équation $\sin \pi x = 0$.

   (b) On admet que la droite d'équation $(\mathscr{D})$: $y = -x$ est une asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.

5. Étudier les variations de f, on dressera son tableau de variation.

6. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ de f.

7. Soit g la restriction de f à l'intervalle $I = [-3;0]$, on définit la fonction h par : $h(x) = -g(x)$.

   (a) Sans étudier h, dresser son tableau de variation.

   (b) Tracer $(\mathscr{C}')$ de h dans le même repère que la courbe $(\mathscr{C})$ de f.

8. Soit F la restriction de h à l'intervalle $J = [-2;-1]$.

   (a) Montrer que F admet une bijection réciproque notée F^{-1}.

   (b) Dresser le tableau de variations de la fonction F^{-1}.

Exercice 3

On considère la fonction f à variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 1 - x + \frac{1}{x} & \text{si } \; x < -1 \\ f(x) = 1 + \sqrt{1 - x^2} & \text{si } \; -1 \leq x < 1 \\ f(x) = 1 + \sqrt{x^2 - 1} & \text{si } \; x \geq 1 \end{cases}$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.

2. Étudier la continuité de f en $x = -1$ et en $x = 1$ et déduire l'ensemble de continuité de f.

3. (a) Étudier la dérivabilité de f en $x = -1$ et en $x = 1$ et déduire l'ensemble de dérivabilité de f.

   (b) Donner une interprétation graphique du résultat.

4. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

5. Démontrer que la courbe $(\mathscr{C})$ de f admet deux asymptotes que l'on déterminera les équations cartésiennes.

6. Étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ aux asymptotes.

7. Tracer $(\mathscr{C})$ de f.

8. Soit k la restriction de f à l'intervalle $I = [-1;1[$, on définit la fonction g par : $g(x) = -k(x)$.

   (a) Sans étudier g, dresser son tableau de variation.

   (b) Tracer la courbe $(\mathscr{C}')$ de g dans le même repère que $(\mathscr{C})$ de f.

9. Soit h la restriction de f à l'intervalle $J = [-1,0]$.

   (a) Montrer que h admet une bijection réciproque notée h^{-1} sur un intervalle K que l'on déterminera.

   (b) Dresser le tableau de variation de h^{-1}.

   (c) Tracer la courbe $(\mathscr{C}'')$ de h dans le même repère que $(\mathscr{C})$ de f.

Exercice 4

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 1 - x + \dfrac{1}{2-x} & \text{si } x < 1 \\ f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition.
2. (a) Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 1$.
   (b) Déduire les tangentes à la courbe $(\mathscr{C})$ de f au point d'abscisse 1.
3. Donner le sens de variations de f et dresser son tableau de variation.
4. (a) Montrer que pour $x < 1$, la droite d'équation $(\mathscr{D})$: $y = 1 - x$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.
   (b) On admet que la droite $(\mathscr{D}')$: $y = 2x$ est une asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.
   (c) Étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ de f par rapport aux asymptotes.
5. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ de f avec les axes du repère.
6. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ de f et les tangentes au point d'abscisse 1 dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ unité 1 cm.
7. Soit h la restriction de f à l'intersection $I = [1; +\infty[$.
   (a) Montrer que h admet une fonction réciproque notée h^{-1} sur un intervalle J que l'on précisera.
   (b) Dresser le tableau de variation de h^{-1}.
   (c) Calculer $h^{-1}(3)$ et $(h^{-1})'(3)$.
8. Construire la courbe $(\mathscr{C}')$ de h^{-1} dans le même repère que la courbe $(\mathscr{C})$ de f.
9. Expliciter $h^{-1}(x)$ et vérifier les résultats obtenus au 7.(c)

Exercice 5

On considère la fonction f à variable réelle x définie par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x + 1}$

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f.
3. Étudier les branches infinies de f.
4. Donner le sens de variations de f et dresser son tableau de variation.
5. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
6. Soit h la restriction de f à l'intervalle $I =]-\infty; 1[$, on définit la fonction q par : $q(x) = -h(x)$.
   (a) Sans étudier q, dresser son tableau de variation de q.
   (b) Tracer $(\mathscr{C}')$ de h dans le même repère que la courbe $(\mathscr{C})$ de f.

Exercice 6

Le plan est muni du repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$. On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -x + \sqrt{x^2-4} & \text{si } x \leq -2 \\ f(x) = -x + \sqrt{4-x^2} & \text{si } -2 < x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{2x^2+2x-1}{x^2+x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x=-2$ et en $x=0$; déduire les ensembles de continuité et de dérivabilité de f.
3. Étudier les variations de f.
4. Étudier les branches infinies de $(\mathscr{C})$.
5. Tracer $(\mathscr{C})$.
6. On note par g, la restriction de f à l'intervalle $I =]0;+\infty[$.
   (a) Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = \frac{3}{2}$.
   (c) on désigne par g^{-1} la bijection réciproque de g. Sans expliciter $g^{-1}(x)$, calculer $(g^{-1})'(\frac{3}{2})$.

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur $I=[0;1]$ par : $f(x)=x^3+x^2+x+1$.

1. (a) Démontrer que la fonction f' est strictement croissante sur I.
   (b) Déduire que pour tout $x \in I$, $1 \leq f'(x) \leq 6$.
2. En utilisant l'inégalité des accroissements finis démontrer que :
   pour tout $x \in I$, on a : $x+1 \leq f(x) \leq 6x+1$.

Exercice 8

Soit f_n l'ensemble des fonctions définis par : $f_n(x) = x^2 - nx + n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On note $(\mathscr{C}_n)$ la courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. (a) Montrer que pour tout point $n \in \mathbb{N}$, $(\mathscr{C})$ passe par le point I à déterminer.
   (b) Donner l'équation de $(\mathscr{T}_n)$, tangente à $(\mathscr{C}_n)$ en I.
2. Étudier les variations de f_n.
3. Tracer $(\mathscr{C}_0)$, $(\mathscr{T}_0)$, $(\mathscr{C}_1)$, $(\mathscr{T}_1)$, $(\mathscr{C}_2)$ et $(\mathscr{C}_2)$.

Exercice 9

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x-|x|} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) = \frac{2x^2-3x}{x-2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\mathrm{i}}, \vec{\mathrm{j}})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$. Interpréter géométriquement les résultats de la dérivabilité. Préciser les ensembles de continuité et dérivabilité de f.
3. Déterminer la fonction dérivée f' de f, en tout point où f est dérivable.
4. Étudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à ses asymptotes oblique.

Exercice 10

On considère la fonction f de variable réelle x, définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x - \sqrt{x^2-1} & \text{si} \quad x \leq 1 \\ f(x) = \frac{x^2-x-3}{x+2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 1$?
3. Déterminer les réels a, b et c tels que l'on ait : pour $x \leq 1$, $ff(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$.
4. Déterminer que la droite d'équation $y = x - 3$, est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ de f.
5. Étudier les variations de f et étudier le tableau de variation de f.
6. Achever l'étudier les branches infinis et $(\mathscr{C})$; puis tracer la courbe.

Exercice 11

On considère la fonction numérique f à variable réelle définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1} & \text{si} \quad x \leq 2 \\ f(x) = x^2 - x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f noté Ef.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 2$.
3. Étudier les variations de f, puis dresser son tableau de variations.
4. (a) Étudier les branches infinies de la courbe $(\mathscr{C})$ de la fonction f.
   (b) Déterminer s'ils existent les points d'intersection de la courbe avec les axes du repère. Construire la courbe $(\mathscr{C})$.
5. Soit g la restriction de f à l'intervalle $\mathrm{I} = [0; 2]$.
   (a) Montrer que g admet une bijection réciproque notée g^{-1}.
   (b) Dresser le tableau de variation de g^{-1}.
   (c) Construire la courbe $(\mathscr{C}')$ de g^{-1} dans le même repère que $(\mathscr{C})$.

Exercice 12

On considère la fonction f à variable réelle définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-5x+5}{x-1} & \text{si} \quad x \leq 2 \\ f(x) = -1 + \sqrt{x^2-4} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la continuité et la dé"dérivabilité de f en $x_0 = 2$.
3. Étudier les variations de f ; on dressera son tableau de variation.

4. Construire la courbe $(\mathscr{C})$ de la fonction f.
5. Soit h la restriction de f à l'intervalle $\mathrm{I} =]-\infty; 0[$.
   (a) Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1}.
   (b) Dresser le tableau de variations de h^{-1}.
   (c) Construire la courbe $(\mathscr{C}^{-1})$

Exercice 13

Soit f une fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-2x-1}{x+1} \text{ si } x < 1 \\ f(x) = -x+\sqrt{x-1} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$.

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. (a) Déterminer l'ensemble définition de la fonction f.
   (b) Calculer les limites de f en -1 et en ∞.
2. (a) Étudier la dérivabilité de f au point d'abscisse 1.
   (b) Interpréter graphiquement les résultats, et écrire les équations des demi-tangentes.
3. (a) Calculer $f'(x)$, et étudier son signe.
   (b) En déduire le tableau variations de f.
4. (a) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que pour $x \neq -1$; $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x+1}$.
   (b) En déduire que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = x-3$ est une asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.
5. (a) Étudier la branche infinie à la courbe $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.
   (b) Tracer la droite $(\mathscr{D})$ et la courbe $(\mathscr{C})$.

Exercice 14

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[0;\pi]$ par : $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \cos x$; (x est radian).
On désigne par $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique sans un repère orthonormé $(\mathrm{o}, \overrightarrow{\mathrm{u}}, \overrightarrow{\mathrm{v}})$ du plan.

1. Étudier les variations de f sur $[0;\pi]$.
2. Déterminer une équation cartésienne des tangentes (T_1) et (T_2) à la courbe $(\mathscr{C})$ aux points d'abscisses respectives $x_0 = 0$ et $x_1 = \pi$.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]1,7;1,8[$.
4. Tracer $(\mathscr{C})$.
5. (a) Démontrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} dont on donnera le tableau de variation et calculer $f^{-1}(0)$.
   (b) Tracer la courbe $(\mathscr{C}')$ de f^{-1} dans le même repère que $(\mathscr{C})$.

Partie B On considère la fonction g à variable réelle x, définie telle que :
$\begin{cases} g(x) = f^{-1}(x) \quad \text{si} \quad x \leq 0 \\ g(x) = (1+\cos x)\sin x \quad \text{si} \quad 0 < x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

6. Préciser ensemble de définition E_g de g.

7. Étudier la continuité de g en $x_0 = 0$.
8. (a) Vérifier que pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}]$, on a : $g'(x) = (1+\cos x)(2\cos x - 1)$.
   (b) Résoudre dans $]0; \frac{\pi}{2}]$, l'équation $g'(x) = 0$.
   (c) Étudier le signe de g' sur l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}]$.
   (d) On suppose que g n'est pas dérivable en x_0 ; dresser le tableau de variation de g.

Exercice 15

On considère la fonction numérique f à variable réelle x, définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x^2 \ln x & \text{si } x > 0 \\ f(x) = \mathrm{e}^x + x - 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$
On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la continuité de f en $x = 0$.
3. Étudier la dérivabilité de f en $x = 0$.
4. (a) Déterminer la fonction dérivée f' de f.
   (b) Dresser le tableau de variations de f.
5. (a) Étudier les branches infinies à la courbe $(\mathscr{C})$ de f.
   (b) Tracer $(\mathscr{C})$, unité graphique 2 cm.
6. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la portion du plan limité par la courbe $(\mathscr{C})$, et les droites d'équations $y = x - 1$, $x = -1$ et $x = 0$.

Exercice 16

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1 - x\ln x}{x}$.
On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $I = [\frac{1}{2}; 3]$. Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.
On définit la suite numérique (U_n) telle que :
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = g(U_n) \end{cases}$$

1. Sachant que $f(\alpha) = 0$, montrer que α est solution de l'équation $g(x) = x$.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier n, $U_n \in I$.
3. On suppose que pour tout x de I, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$. En appliquant le théorème de l'inégalité des accroissements accroissements finis, montrer que $\forall x \in I$, $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$.
4. (a) Montrer que $\forall x \geq 0$; $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$.
   (b) En déduire que $\forall \geq 0$, $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}$.
   (c) Montrer que la suite (U_n) converge vers α.

Exercice 17

1. On considère la fonction numérique f à variable réelle x, définie par :
$\begin{cases} f(x) = e^{x+1} - 1 & \text{si} \;\; x \leq -1 \\ f(x) = x + 1 + \ln(x+2) & \text{si} \;\; x > -1 \end{cases}$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   (a) Donner l'ensemble de définition de f.
   (b) Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x = -1$.
   (c) Étudier les variations de f et dresser son tableau variations.
   (d) Étudier les branches infinis à la courbe $(\mathscr{C})$ puis tracer $(\mathscr{C})$, unité graphique 2 cm.
2. Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]-\infty; -1]$
   (a) Démontrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} dont on dressera un tableau de variations.
   (b) Construire la courbe $(\mathscr{C}')$ de la fonction g^{-1} dans le même repère que $(\mathscr{C})$ de f.
3. (a) Soit $0 < \alpha < 2$, calculer à l'aide d'une intégration par partie l'aire $\mathscr{A}(\alpha)$ de la portion du plan limité par la courbe $(\mathscr{C})$, et les droites d'équations $y = x$, $x = 0$ et $x = \alpha$.
   (b) Calculer la limite de $\mathscr{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

Exercice 18

I. Soit g la fonction définie sur $]-\infty; 0]$ par $g(x) = 2\ln(1-x) + \dfrac{x}{x-1}$.
   1. Étudier les variations de g puis dresser son tableau de variations sur $]-\infty; 0]$.
   2. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]-\infty; 0]$.

II. Soit f la fonction définie par :
$\begin{cases} f(x) = 1 + x^2\ln(1-x) & \text{si} \;\; x < 0 \\ f(x) = -e^{-x} + x + 2 & \text{si} \;\; x \geq 0 \end{cases}$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   5. Déterminer l'ensemble de définition de f.
   6. Étudier la continuité de f en $x = 0$.
   7. (a) Étudier la dérivabilité de f en $x = 0$.
      (b) Donner les équations cartésiennes des demi-tangentes.
   8. (a) Montrer que, pour $x < 0$, $f'(x) = xg(x)$.
      (b) Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
      (c) En déduire le tableau de variations de f.
   9. (a) Montrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = x+2$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.
      (b) Étudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à $(\mathscr{D})$.
   10. Tracer $(\mathscr{C})$.
   11. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine limité par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite $(\mathscr{D})$ et les droites d'équations $x = 0$; $x = 1$.

Exercice 19

Soit f une fonction numérique définie par : $f(x) = (x-2)\mathrm{e}^x + x$.
On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O};\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. a) Donner la solution de l'équation différentielle : $y'' - 2y' + y = 0$.
   b) Justifier que f est une solution de l'équation différentielle : $y'' - 2y' + y = x - 2$.
2. Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (x-1)\mathrm{e}^x + 1$.
   a) Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.
   b) En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.
3. a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b) Montrer la droite $(\mathscr{D})$: $y = x$ est une asymptote à $(\mathscr{C})$ en $-\infty$, puis étudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite $(\mathscr{D})$.
   c) Étudier la branche infinie à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.
4. a) Vérifier que $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$, en déduire le sens de variation de f.
   (a) Dresser le tableau de variations de f.
   b) Montrer que la fonction f admet une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I à déterminer.
   c) En déduire le tableau de variations de f^{-1}, bijection réciproque de f.
5. a) Donner une équation cartésienne de la tangente $(\mathscr{T})$ à $(\mathscr{C})$ en $x_0 = 0$.
   b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet un solution unique $\alpha \in]1; 2[$.
6. Construire $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ les courbes des fonction f et f^{-1} dans le même repère.
7. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine plan limité par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite d'équation $y = x$ et les droites d'équations respectives $x = 0$; $x = 2$.

Exercice 20

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x}$.
On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Soit h la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $h(x) = (2-x)\mathrm{e}^x - 1$.
   (a) Étudier les variations de h et dresser son tableau de variation.
   (b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [\frac{3}{2}; 2]$
   (c) En déduire, suivant les valeurs de x, le signe de $h(x)$.
2. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$, interprétation graphiquement ce résultat.
   (b) Étudier la position relation de $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite d'équation $y = 1$ en $+\infty$. (On admet que $e^x - x > 0$ sur $[0; +\infty[$).
3. (a) Montrer que pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{h(x)}{(\mathrm{e}^x - x)^2}$.
   (b) Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$ puis en déduire le tableau de variation de f.
   (c) Tracer $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{C})$ dans un même repère (on prendra $\alpha = 1,84$ et $f\alpha) = 1,20$).

Exercice 21

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(1-x^2)\mathrm{e}^{-x}$.
On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j})$.

1. Justifier que : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)=0$ et donner une interprétation graphique du résultat.
2. Calculer $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. En déduire une interprétation graphique du résultat.
3. (a) Démontrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=(x^2-2x-1)e^{-x}$.
   (b) Donner le signe de f' puis en déduire le sens de variations de f.
   (c) Dresser le tableau de variation de f.
   On admet que $f(1-\sqrt{2})=1,4$ et $f(1+\sqrt{2})=-0,4$.
4. Donner l'équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
5. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=(1+x)e^{-x}-1$.
   (a) Étudier les variations de h.
   (b) Calculer $h(0)$ et dresser son tableau de variation de h.
   (c) Justifier que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $h(x)\leq 0$.
   (d) Vérifier que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)+x-1=(1-x)h(x)$.
   (e) En déduire la position relative de la courbe $(\mathscr{C})$ et la tangente (T).
6. Tracer $(\mathscr{C})$ et (T), unité graphique 2 cm.
7. Soit λ un nombre réel de l'intervalle $]1;+\infty[$ et $\mathscr{A}(\lambda)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan limité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=\lambda$.
   (a) Démontrer, en utilisant deux intégrations par parties , que : $\mathscr{A}(\lambda)=\left[\frac{16}{e}-\frac{4(1+\lambda)^2}{e^\lambda}\right]$.
   (b) Déterminer la limite de $\mathscr{A}(\lambda)$ lorsque λ tend $+\infty$.

Exercice 22

Partie A

1. Résoudre l'équation différentielle : $y''+2y'+y=0$.
2. Déterminer la solution particulière u, sachant que $u(0)=1$ et $u'(0)=0$.

Partie B

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x)=(x+1)e^{-x} & \text{si } \ x\leq 0 \\ f(x)=1-2x+x\ln x & \text{si } \ x>0 \end{cases}$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x=0$.
3. Étudier les variations de f. On dressera un tableau de variation de f.
4. Pour $x\leq 0$, déterminer les coordonnées du point d'intersections de la courbe $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses et écrire l'équation cartésienne de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ en ce point.
5. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha\in]6;7[$.
   On ne demande pas de calculer α.
6. (a) Étudier les branches infinies à la courbe $(\mathscr{C}$.

(b) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ de f et la droite (T).

Partie C
Soit h la fonction numérique de la variable réelle x, définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = -f(x)$.

1. Dresser le tableau de variation de h.
2. Tracer la courbe $(\mathscr{C}')$ représentative de h dans le même repère que $(\mathscr{C})$ de f.
3. Calculer en cm^2, l'aire du domaine $(\mathscr{D})$ limité par les courbes $(\mathscr{C})$, $(\mathscr{C}')$ et les droites d'équations $x = -1$; $x = 0$.

Exercice 23

Soit la fonction numérique f à la variable réelle x, définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln x}{-1+\ln x} & \text{si } x > 0 \\ f(x) = e^{-2x} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\mathrm{i}}, \vec{\mathrm{j}})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Vérifier que la fonction f est continue en $x = 0$.
3. Étudier la dérivabilité de f en $x = 0$.
4. (a) Déterminer la fonction dérivée f' de f.
   (b) Dresser le tableau de variation de f.
5. (a) Préciser les branches infinies à la courbe $(\mathscr{C})$ de f.
   (b) Tracer $(\mathscr{C})$, unité graphique 2 cm.
6. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine limité par la courbe $(\mathscr{C})$ de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$; $x = 0$.

Exercice 24

Partie I
Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \frac{1}{x}$ et $(\mathscr{C}')$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{\mathrm{i}}, \vec{\mathrm{j}})$, d'unité graphique 2 cm.

1. Calculer la dérivée $g'(x)$ et donner son signe sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Sachant que $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = 0$, dresser le tableau de variation de g.

Partie II
Dans le même repère défini dans la partie I, on considère la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}$.

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $f(x) = g(x)$.
   (b) En déduire la position relative des courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.
2. (a) Calculer $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$.
   (b) Montrer que $f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier son signe pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   (c) Établir le tableau de variation de f.
3. En remarquant que les axes de coordonnées sont asymptotes aux courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$, tracer soigneusement ces deux courbes dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{\mathrm{i}}, \vec{\mathrm{j}})$ donné.

Partie III

On note h et k les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$ et $k(x) = f(x) - g(x)$.

1. Démontrer que h est une primitive de k sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Calculer en cm^2, l'aire $\mathscr{A}$ de la portion du plan comprise entre les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Exercice 25

Partie A

Soit g la fonction de la variable réelle x définie sur $]-\infty;0[$ par : $g(x) = 2\ln(-x)$.

1. Étudier les variations de g, puis dresser son tableau de variation.
2. Calculer $g(-1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur $]-\infty;0[$.

Partie B

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -2x + 1 + 2x\ln|x| & \text{si } x < 0 \\ f(x) = (x+2)e^{-x} - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On désigne par $(\mathscr{C})$, la représentative de f dans un repère orthonormé $(\text{O}, \vec{\text{i}}, \vec{\text{j}})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. (a) Étudier la continuité et dérivabilité de f au point $x = 0$.
   (b) Pour $x \in]-\infty;0[$, exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.
3. Étudier les variations de f et dresser le tableau de variation.
4. Montrer qu'il existe deux solutions et deux seulement α et β de l'équation $f(x) = 0$ vérifiant les inégalités suivants :

$$1 < \alpha < \frac{3}{2} \text{ et } -4 < \beta < -3$$

(on ne cherchera pas à calculer α et β)

5. Étudier les branches infinies à $(\mathscr{C})$.
6. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.
7. α désigne le réel tel que : $1 < \alpha < \frac{3}{2}$.
   (a) Calculer l'aire $\mathscr{A}(\alpha)$ de l'ensemble des points M des coordonnées (x, y) tels que :
   $$\begin{cases} 0 \leq x \leq \alpha \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$
   (b) Calculer la limite de α lorsque α tend vers 0.

Partie C

Soit h la restriction de f à l'intervalle $I =]-\infty;-1]$.

(a) Montrer que h définit une bijection de I vers un intervalle J à déterminer.
On note h^{-1} la réciproque de h.

(b) Dresser le tableau de variation de h^{-1}.

(c) Tracer $(\mathscr{H})$ la courbe représentative de h^{-1} dans le même repère que $(\mathscr{C})$.

Exercice 26

1. Soit g la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{x}{2x-1} - \ln(x-1)$.
   (a) Étudier le sens de variations de g.
   (b) i. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]1;+\infty[$.
   ii. Montrer que $2 < \alpha < 3$.
   (c) En déduire le signe de g sur $]1;+\infty[$.
2. On considère la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{2\ln(x-1)}{x^2-x}$.
   On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j})$.
   (a) Calculer les limites de f en 1 et en $+\infty$. Puis interpréter le résultat.
   (b) i. Montrer que pour tout $x \in]1;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2(2x-1)g(x)}{(x^2-x)^2}$.
   ii. En déduire les variations de f puis dresser son tableau de variation.
   iii. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{2}{(\alpha-1)(2\alpha-1)}$
   (c) Tracer $(\mathscr{C})$, unité graphique 2 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées.

Exercice 27

Partie A

On considère les fonctions f et g définies par :
$f(x) = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1|$ et $g(x) = x - \ln x$.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Déterminer le signe de $f(x)$ sur $[-1;+\infty[$.
3. En déduire que : $\begin{cases} \forall x \in [0;+\infty[, x - \ln(x+1) \leq \frac{x^2}{2} \\ \forall x \in [0;1], x - \ln(x+1) < \frac{x}{2} \end{cases}$.
4. Démontrer que : $\forall x \geq 1$, $g(x) \geq 1$.
5. Démontrer que la courbe $(\mathscr{C})$ de f admet deux points d'inflexions A et B.
6. Prouver que sur $]-\infty;-1[$, $(\mathscr{C})$ coupe l'axe des abscisses en un point unique dont l'abscisse $x_0 \in]-2;-1[$.
7. Soit h la restriction de f à l'intervalle $]-1;+\infty[$.
   (a) Montrer que h admet une bijection réciproque notée h^{-1} dont on précisera le tableau de variation.
   (b) Montrer qu'il existe un réel $\alpha \in]0;2[$ tel que $h'(a) = \ln\sqrt{3}$ en utilisant le théorème des accroissements finis.
   (c) En déduire qu'il existe un réel $\beta \in]0;\ln 3[$ tel que $(h^{-1})' = \frac{2}{\ln 3}$.
   (d) $(\mathscr{C}')$ désigne la courbe de h^{-1}. Tracer $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \overrightarrow{\mathrm{i}}, \overrightarrow{\mathrm{j}})$ du plan.

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser les résultats de la partie A.
Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - \ln(u_n) \end{cases}$$

1. (a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.
   (b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) puis sa convergence vers une limite ℓ que l'on calculera.
2. On pose $v_n = u_n - 1$.
   (a) Montrer que (v_n) est une suite positive, puis exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   (b) Étudier le sens de variation de la suite (v_n).
   (c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq v_n \leq 1$.
   (d) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \leq \frac{1}{2}v_n$.
   (e) En déduire la limite de la suite (v_n).

Exercice 28

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$.

1. (a) Calculer $f'(x)$ puis étudier son signe suivant les valeurs de x.
   (b) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
   (c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α telle que $\frac{1}{4} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$.
   (d) Dans cette partie on se propose de donner une valeur approchée de α.
      i. Montrer que pour tout $x \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$, $f(x) \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$.
      ii. Montrer que pour tout $x \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
   (e) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :
   $$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{4} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$
      i. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$.
      ii. Démontrer en utilisant le théorème de l'inégalité des accroissement finis que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
      iii. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.
      iv. En déduire que la suite (u_n) converge vers α.
      v. Trouver le plus petit entier n_0 tel que $|u_{n_0} - \alpha| \leq 10^{-2}$, puis en déduire une valeur approchée de α.

Exercice 29

1. La fonction f de la variable réelle x définie sur l'intervalle $\mathrm{I} = [-2; -1]$ par : $f(x) = -1 - \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$.
   (a) Étudier les variations de f sur I.
   (b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in \mathrm{I}$.

(c) En déduire que pour tout élément $x \in \mathrm{I}$, $f(x) \in \mathrm{I}$.

(d) Montrer que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}\mathrm{e}}$.

(e) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tout élément $x \in \mathrm{I}$, on a :
$|f(x) - \alpha| \frac{1}{\sqrt{2}\mathrm{e}} |x - \alpha|$.

2. On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

(a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \in \mathrm{I}$.

(b) Démontrer que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha| \frac{1}{\sqrt{2}\mathrm{e}} |u_n - \alpha|$.

(c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{(\sqrt{2})^n}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{e}^n}\right)$

(d) Calculer $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n$. En déduire la convergence de la suite (u_n).

Exercice 30

Soit g la fonction numérique à variable réelle x telle que $g(x) = -1 - \frac{1}{x} + \ln x$.

1. (a) Étudier les variations de g sur $[0; +\infty[$.

   (b) Dresser le tableau de variation de g.

2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$, admet une solution unique $\alpha \in]3; 4[$.

3. Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = e^{1+\frac{1}{x}}$.

   (a) Démontrer que les équations $f(x) = x$ et $g(x) = 0$ sont équivalentes.

   (b) Étudier les variations de f.

4. Montrer que $\forall x \in]3; 4[$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ et en déduire de ce qui précède que pour tout x de l'intervalle $]3; 4[$ on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$.

Exercice 31

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x, définie par : $f(x) = \dfrac{-x}{1 + \ln(-x)}$.

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Donner l'ensemble de définition Ef de f.
2. Étudier les variations de f. En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
3. Étudier les branches infinies à la courbe $(\mathscr{C})$ de f.
4. Tracer $(\mathscr{C})$, unité graphique 2 cm.
5. Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]\frac{1}{\mathrm{e}}; 0[$ telle que $g(x) = -f(x)$.

   (a) Dresser le tableau de variation de g.

   (b) Tracer $(\mathscr{C}')$ la courbe représentative de g.

Exercice 32

On rappelle que : $\forall x \in]0;+\infty[,\ \ln x \leq x-1$

1. Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{x-\ln x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$
On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.
   (a) Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition.
   (b) Étudier f et tracer $(\mathscr{C})$, en construira la demi-tangente en 0 et la demi-tangente au point d'abscisse 1.
2. On se propose d'étudier la fonction F définie par : $\displaystyle\int_1^x f(t)dt$ Justifier que F est définie et dérivable sur $[0;+\infty[$.
   (a) Étudier les variations de F. Donner une interprétation graphique de ce résultat.
   (b) i. Démontrer que $\forall t \in [0;1],\ f(t) \leq t$.
      ii. En déduire que : $\forall x \in [0;1],\ \dfrac{x^2-1}{2} \leq F(x) \leq 0$ et $-\frac{1}{2} \leq F(0) \leq 0$ (on ne demande pas la valeur exacte de $F(0)$.
      iii. Démontrer que : $\forall t \in [1;\infty[,\ 1 \leq f(x)$.
      iv. En déduire que : $\forall x \in [1;+\infty[,\ 1 \leq F(x)$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} F(x) = +\infty$.
   (c) Démontrer que : $\forall t \in [1,+\infty[,\ 1+\dfrac{\ln t}{t} \leq 1+\ln t$.
   (d) En déduire que : $\forall x \in [1;+\infty[,\ x+\dfrac{(\ln x)^2}{2}-1 \leq F(x) \leq x\ln x$.
   (e) Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de $F(2), F(3), F(4), F(5)$.
   (On prendra la moyenne arithmétique des valeurs qui encadrent de ces nombres)

Exercice 33

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Unité 2 cm

Partie A

Soient deux réels a et b tels que $a<0$ et $b>0$. On considère la fonction f à variable réelle x définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x + ax\ln(-x) & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x - 1 + e^{-bx} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$
On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f.
2. Étudier les variations de f.
3. Démontrer que la courbe $(\mathscr{C})$ admet deux points fixes A et B dont on déterminera les coordonnées.
4. Étudier les branches infinies de la courbe $(\mathscr{C})$.
5. On désigne par F l'ensemble des points de $(\mathscr{C})$ où la tangente est parallèles à l'axe des abscisses pour $x<0$. Déterminer F.
6. Déterminer l'équation de la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisses $x=-e$.

Partie B

Dans la suite on pose $a=-1$ et $b=1$.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Construire $(\mathscr{C})$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
3. Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty;0[$. On note h la fonction telle que $h(x) = -g(x)$.
   (a) Dresser le tableau de variation de h.
   (b) Construire la courbe $(\mathscr{H})$ de h dans le même repère que celui de $(\mathscr{C})$.
   (c) Déterminer l'aire du domaine limité par la droite d'équation $x=-e$, l'axe des ordonnées, la courbe $(\mathscr{H})$ et l'axe des abscisses.

Exercice 34

On considère la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{2}(\ln x^2 - 1) & \text{si } x<0 \\ f(0)=1 & \\ f(x) = x^{ex} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O),$\vec{i},\vec{j}$).

1. Préciser l'ensemble de définition Ef de f.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en x_0.(On rappelle que pour tout $x>0$ et $\alpha \in \mathbb{R}, x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$).
3. Étudier les variations de f.
4. Étudier les branches infinies de la courbe $(\mathscr{C})$.
5. Tracer ($\mathscr{C}$, unité graphique 2 cm.
6. Soit h la restriction de f à $\left[\frac{1}{e};+\infty\right[$.
   (a) Montrer que h admet une application réciproque h^{-1}.
   (b) Dresser le tableau de variation de h^{-1}.
   (c) Calculer $h^{-1}(1)$ puis $(h^{-1})'(1)$.
   (d) Construire dans le même repère que $(\mathscr{C})$ la courbe $(\mathscr{C}')$ de h^{-1}.

Exercice 35

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -1 + e^{x\ln(-x)} & \text{si } x<0 \\ f(x) = x + x(1-\ln x)^2 & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, $\overrightarrow{\mathrm{i}}$, $\overrightarrow{\mathrm{j}}$).

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Démontrer que $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} x(\ln x)^2 = 0$; (on pourra poser $t^2 = x$)
3. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x=0$.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Étudier les branches infinies de la courbe $(\mathscr{C})$.

6. Démontrer que les points A et B et $(\mathscr{C})$ d'abscisses respectives -1 et 1 sont des points d'inflexion.
7. Déterminer les équations des tangentes à $(\mathscr{C})$ en A et en B.
8. Déterminer le point d'intersection P, d'abscisse strictement positive, de la droite (Δ) d'équation $y = x$ et de la courbe $(\mathscr{C})$.
9. Tracer $(\mathscr{C})$.

<u>Exercice</u> 36

Soit (E) une équation différentielle définie par : $(E) : y'' - y = 0$.

1. (a) Montrer que la solution générale de l'équation (E) est : $y = A\mathrm{e}^{x} + B\mathrm{e}^{-x}$ avec $(A;B) \in \mathbb{R}^2$.
   (b) Déterminer une solution particulière f de (E) vérifiant les conditions suivantes : $f(0) = \mathrm{e}$ et $f'(0) = \mathrm{e}$.
2. Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \mathrm{e}^{-2x} f(x)$.
   On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
   (a) Montrer que $g(x) = \mathrm{e}^{1-x}$ puis calculer $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x)$.
   (b) Préciser les branches infinies à la courbe $(\mathscr{C})$.
   (c) Calculer la dérivée $g'(x)$ puis étudier son signe.
   (d) Dresser le tableau de variation de g.
   (e) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ de la fonction g.
3. Soit a un réel strictement positif. On désigne par S_1 l'aire en unité d'aire du domaine limité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$.
   Calculer S_1 en fonction de a.
4. Soit A le point de coordonnées $(a;0)$ et B le point de la courbe $(\mathscr{C})$ d'abscisse a.
   La tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ coupe l'axe des abscisses en C.
   (a) Déterminer les coordonnées du point C.
   (b) Calculer l'aire S_2 du triangle ABC (en unité d'aire).
   (c) Montrer que : $S_1 + 2S_2 = \mathrm{e}$.

<u>Exercice</u> 37

Soit g une fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x - \ln x$.

1. (a) Calculer les limites de g à droite de 0 et en $+\infty$.
   (b) Calculer la dérivée g' de g puis dresser le tableau de variation de g.
   (c) En déduire que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $g(x) > 0$.
2. Soit f une fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = 2x - (\ln x)^2$. On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, unité graphique $2cm$.
   (a) Calculer les limites de f à droite de 0 et en $+\infty$.
   (b) Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$.
   (c) Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$; $f'(x) = \dfrac{2g(x)}{x}$.

(d) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3. Soit $(\mathscr{D})$ une droite d'équation $y = 2x$.
   (a) Vérifier que $(\mathscr{D})$ est la tangente à $(\mathscr{C})$ en son point d'abscisse 1.
   (b) Montrer que $(\mathscr{C})$ admet une direction asymptotique qui est celle de $(\mathscr{D})$.
   (c) Étudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D})$.
4. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α et que $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$.
   (b) Tracer la droite $(\mathscr{D})$ et la courbe $(\mathscr{C})$ de f.
   (c) Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la droite $(\mathscr{D})$, la courbe $(\mathscr{C})$ de f et les droites d'équations $= 1$ et $x = \mathrm{e}$. Calculer en cm^2 l'aire $\mathscr{A}$.

<u>Exercice</u> 38

Soit f une fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{1}{4}x^2(2\ln x - 3)$ et $f(0) = 0$. On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer la limite de f en $+\infty$.
3. Calculer la dérivabilité de f à droite de O. Interpréter le résultat obtenu.
4. Montrer pour tout $x \in]0; +\infty[$, la dérivée de f est $f'(x) = x(\ln x - 1)$.
5. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f.
6. Étudier la branche infinie à la courbe $(\mathscr{C})$ de f.
7. Déterminer les coordonnées du point I d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ de f avec l'axe des abscisses.
8. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ de f.
9. Soit g une fonction définie par : $g(x) = -f(x)$. On désigne par $(\mathscr{C}')$ sa courbe.
   a) Sans étudier la fonction g, dresser son tableau de variation.
   b) Tracer dans le même repère que $(\mathscr{C})$ la courbe $(\mathscr{C}')$.

<u>Exercice</u> 39

Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$.
On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique $2cm$.

1. Montrer que la fonction g est impaire. Que peut-on dire de $(\mathscr{C})$?
2. (a) Montrer que pour tout réel positif x, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2x^2}{\mathrm{e}^{2x^2}}}$.
   (b) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.
   (c) En déduire la branche infinie à la courbe $(\mathscr{C})$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = (1 - 2x^2)\mathrm{e}^{-x^2}$.
4. Dresser le tableau de variations de g.
5. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ de g.
6. Soit G une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $G(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$.

(a) Montrer que G est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit $\mathscr{A}$ l'aire, exprimer en cm^2, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$. Calculer $\mathscr{A}$.

Exercice 40

Soit g une fonction définie par : $\begin{cases} g(x) = 1 + x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}; \text{ si } x \in]-\infty;0] \\ g(x) = x\ln x - x + 1; \text{ si } x \in]0;+\infty[\end{cases}$

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction de g.
2. a) Étudier la continuité et la dérivabilité de g en $x_0 = 0$.
   b) Écrire les équations des demi-tangentes à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
3. a) Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b) Étudier les branches infinies à la courbe $(\mathscr{C})$.
4. Étudier les variations de g et dresser son tableau de variations.
5. Tracer les demi-tangentes à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0 et tracer la courbe $(\mathscr{C})$ sachant que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in \left]-1;-\frac{1}{2}\right[$.
6. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite d'équation $y=1$ et les droites d'équations respectives $x=-1$ et $x=0$.

Exercice 41

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$, unité graphique $2cm$.
Soit φ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = -(2x+1)\mathrm{e}^{-2x} + 2$.

1. (a) Calculer les limites de φ en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (b) Calculer la dérivée de la fonction φ puis dresser son tableau de variation.
   (c) En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-2x} + 2x - 2$. On appelle $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le repère.
   (a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (b) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.
   (c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0;1[$.
3. (a) Montrer que la courbe $(\mathscr{C})$ admet une asymptote $(\mathscr{D})$ en $+\infty$ dont déterminera une équation.
   (b) Étudier les positions $(\mathscr{D})$ par rapport à $(\mathscr{C})$.
   (c) Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse nulle.
   (d) Construire $(\mathscr{C})$, $(\mathscr{D})$ et (T) dans le repère.
4. Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-2x}$ où a et b sont des réels.
   (a) Déterminer les réels a et b pour que F soit une primitive de la fonction $h(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-2x}$.
   (b) Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}$ de la partie délimitée par la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite $(\mathscr{D})$ et les droites d'équations : $x=0$ et $x=2$.

Exercice 42

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$.
On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$; unité graphique $2cm$.

1. (a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ puis étudier les branches infinies à $(\mathscr{C})$.
   (b) Déterminer la fonction dérivée f' de f puis dresser le tableau de variation de f.
2. (a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J que l'on précisera.
   (b) Expliciter la bijection réciproque f^{-1}.
   (c) Justifier le tracé de la courbe $(\mathscr{C}')$ de f^{-1} sans étudier ses variations puis construire dans le même repère les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.
3. Soit α un entier naturel strictement positif.
   (a) Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie du plan délimité la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations $x=0$, $x=\alpha$ et $y=0$.
   (b) Calculer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ quand α tant vers $+\infty$.
4. Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - xe^{x} - x$.
   (a) Calculer sur $\mathbb{R}$ les expressions de $g'(x)$ et $g''(x)$ dérivée première et seconde de g.
   (b) Étudier les variations de g' et en déduire le signe de $g'(x)$.
   (c) Donner le sens de variations de g puis dresser son tableau de variation.
   (d) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\beta \in [0;1]$.
5. Montrer que β est solution de l'équation $f(x) = x$.
6. Soit I un intervalle tel que $I = [0;1]$
   (a) Montrer que pour tout $x \in I$, $f(x)$ est un élément de I.
   (b) Montrer que si x est un élément de I, alors $\left(1+e^{-1}\right)^2 \leq \left(1+e^{-x}\right)^2 \leq 4$.
   (c) Prouver que pour tout x de I, $|f'(x)| \leq \left(\dfrac{e}{1+e}\right)^2$
7. On définit la suite (u_n) par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Prouver que pour tout entier naturel n, $u_n \in I$.
   (b) On pose $k = \dfrac{e}{1+e}$, montrer que pour tout x de I, $|f(x) - \beta| \leq k^2|x-\beta|$.
   (c) Prouver que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \beta| \leq k^2|u_n - \beta|$.
   (d) Prouver que $|u_n - \beta| \leq \frac{1}{2}k^{2n}$ puis déduire que la suite (u_n) converge vers m que l'on précisera.

Exercice 43

Partie I : Étude d'une fonction auxiliaire
Soit g la fonction numérique dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par : $g(x) = \ln x + x + 1$.

1. (a) Calculer les limites de g à droite de 0 et en $+\infty$.
   (b) Calculer la dérivée g' de g puis dresser le tableau de variation de g.
2. (a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet unique solution α sur $]0;+\infty[$.
   (b) Donner le signe de g sur $]0;+\infty[$.

(c) Établir la relation de $\ln(\alpha)$ en fonction de α.

Partie II : Étude de la fonction f

Soit f une fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x\ln x}{1+x};\ \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique $2cm$.

1. Calculer les limites en $+\infty$ de $f(x)$ et de $\dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter les résultats.
2. (a) Démontrer que f est continue en 0.
   (b) Étudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter graphiquement le résultat.
3. (a) Établir $f(\alpha)$ en fonction de α.
   (b) Montrer pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$ et dresser le tableau de variation de f.
   (c) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ et ses asymptotes. (On prendra $\alpha = 0,3$)

Partie III : Calcul de l'aire

On se propose de calculer $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)dx$.

1. Donner une interprétation à I.
2. Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale suivante : $J = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x dx$.
3. (a) Démontrer que pour tout $x \in [1;\mathrm{e}]$, $\dfrac{x\ln x}{\mathrm{e}+1} \leq f(x) \leq \dfrac{x\ln x}{2}$.
   (b) En déduire que pour tout $x \in [1;\mathrm{e}]$, $\dfrac{J}{\mathrm{e}+1} \leq I \leq \dfrac{J}{2}$.

Exercice 44

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = (x+1)\mathrm{e}^{kx}$ où k est un entier relatif.
On désigne par $(\mathscr{C}_k)$ sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique $2cm$.

1. Déterminer les limites de f_k en $-\infty$ et en $+\infty$ lorsque $k < 0$ et $k > 0$.
2. Montrer que toutes les courbes $(\mathscr{C}_k)$ passent par deux points dont on déterminera les coordonnées.
3. Étudier suivant les valeurs du réel x, le signe de l'expression $(x+1)(\mathrm{e}^x - 1)$.
4. En déduire $\forall\ k \in \mathbb{Z}$, les positions relatives des courbes $(\mathscr{C}_k)$ et $(\mathscr{C}_{k+1})$.
5. Calculer $f'_k(x)$ pour tout réel x et pour tout entier k non nul.
6. Dresser le tableau de variations de f_k dans les cas suivants : $k < 0$ et $k > 0$.
7. Étudier les branches infinies à $(\mathscr{C}_k)$ dans les cas suivants : $k < 0$ et $k > 0$.
8. Tracer les courbes $(\mathscr{C}_{-1})$ et $(\mathscr{C}_1)$.
9. Soit $\mathscr{A}(\alpha)$ l'aire, exprimer en cm^2, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathscr{C}_{-1})$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$.
   a) Calculer $\mathscr{A}(\alpha)$.
   b) Calculer la limite de $\mathscr{A}(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$.

Exercice 45

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln(x+3)}{x+3}$

1. Montrer que f est dérivable sur $[0;+\infty[$.
2. (a) Calculer la limite de f en $+\infty$.
   (b) Calculer la fonction $f'(x)$ de $f(x)$ puis étudier son signe.
   (c) Dresser son tableau de variation
3. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par son terme général $u_n=\displaystyle\int_n^{n+1} f(x)dx$.
   (a) Justifier que, si $n\leq x\leq n+1$, alors $f(n+1)\leq f(x)\leq f(n)$.
   (b) Montrer, sans chercher à calculer u_n, que pour tout entier naturel n, $f(n+1)\leq u_n\leq f(n)$.
   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
4. Soit F la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $F(x)=(\ln(x+3))^2$.
   (a) Justifier la dérivabilité de F sur $[0;+\infty[$ et déterminer pour tout x positif le nombre $F'(x)$.
   (b) On pose, pour tout entier naturel n, $I_n=\displaystyle\int_n^{n} f(x)dx$. Calculer I_n.
5. On pose, pour tout entier naturel n, $s_n=u_0+u_1+\cdots+u_{n-1}$. Calculer s_n. La suite (s_n) est-elle convergente ?

Exercice 46

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.
On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathrm{O},\overrightarrow{\mathrm{i}},\overrightarrow{\mathrm{j}})$.

1. (a) Déterminer que la fonction dérivée de f s'exprime pour tout $x>0$ par : $f'(x)=-\frac{1}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(2x+1)$.
   (b) Déterminer le signe de f' et en déduire le tableau de variation de f sur $]0;+\infty[$.
   (c) Démontrer que l'équation $f(x)=2$ a une racine solution α appartenant à l'intervalle $]1,10;1,11[$.
   (d) Tracer $(\mathscr{C})$.
2. Pour tout entier naturel $n\geq 2$, on considère l'intégrale I_n définie par : $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,dx$.
   (a) Calculer I_2.
   (b) Démontrer à l'aide d'une intégration par partie que ; pour tout entier naturel $n\geq 2$: $I_{n+1}=e-\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2^{n-1}}+(1-n)I_n$.
   (c) Calculer I_3.
   (d) Établir que pour tout $x\in[1;2]$; on a : $0\leq\frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\leq\frac{\mathrm{e}}{x^n}$.
   (e) En déduire un encadrement de I_n puis étudier la limite éventuelle de la suite (I_n).

Suites numériques

Exercice 1

1. On considère la suite (U_n) définie par :
$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 4 \text{ pour tout nombre entier naturel } n \geq 1 \end{cases}$
On pose, pour tout nombre entier naturel n, $V_n = U_n - 6$.
   (a) Calculer V_{n+1} en fonction de V_n. Quelle est la nature de la suite V_n ?
   (b) Démontrer que pour tout nombre entier naturel n, $U_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$.
   (c) Étudier l convergence de la suite (U_n).
2. On considère la suite (W_n) dont les termes vérifient pour tout $n \geq 1$:
$nW_n = (n+1)W_{n-1} + 1$ et $W_0 = 1$.
   (a) Calculer W_1, W_2, W_3 et W_4.
   (b) Calculer par récurrence l'expression de W_n.
   (c) Donner la nature de la suite (W_n). En déduite la valeur de W_{2010}.

Exercice 2

On considère la suite (U_n) définie par :
$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{3U_n+1}{2U_n+4} \end{cases}$

1. On introduit la suite (V_n) définie par : $V_n = \frac{2U_n-1}{U_n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
2. Expliciter alors V_n en fonction de n et calculer sa limite.
3. En déduire la convergence de la suite (U_n) et donner sa limite.

Exercice 3

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, l'on a :
$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. On considère la suite numérique (u_n) définie par :
$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, (u_{n+1})^2 - u_n = 2 \end{cases}$
   (a) Étudier la monotonie de la suite (u_n).
   (b) Montrer que cette suite est minorée.
   (c) Représenter graphiquement la suite (u_n).

Exercice 4

On définit une suite (u_n) par son premier terme $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par : $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

1. (a) Calculer u_1, u_2, u_3.
   (b) Prouver que : $u_n = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$.
   (c) La suite (u_n) est-elle convergente ? Calculer la limite de cette suite lors que n tend vers $+\infty$.
2. On pose : $S_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $S_n = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n$.
   (a) Prouver que pour tout entier naturel n : $S_n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$.
   (b) La suite (S_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

Exercice 5

On considère la suite numérique (J_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $J_n = \displaystyle\int_1^n e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt$.

1. Démontrer que la suite (J_n) est croissante.
2. On définit la suite (I_n), pour tout entier naturel n non nul, par : $I_n = \displaystyle\int_1^n (1+t)e^{-t}dt$.
   (a) Justifier que, pour tout $t \geq 1$, on a : $\sqrt{1+t} \leq 1 + t$.
   (b) En déduire que $J_n \leq I_n$.
   (c) Calculer I_n en fonction de n. En déduire que la suite (J_n) est majorée par un réel indépendante de n.
   (d) Que peut-on en conclure pour la suite (J_n) ?

Exercice 6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$.

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2^{n+1} - 2$.

Exercice 7

Montrer par récurrence que $4^n - 1$ est un multiple de 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8

Soit S_n une somme définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + n$.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
2. En déduire les nombres suivants : $A = 1+2+3+4+5+...+2020$ et $B = 48+49+50+...+627$.

Équations différentielles

Exercice 1

Soit l'équation différentielle (E) : $my'' + ny' + \frac{1}{4}y = 0$, où m et n sont respectivement la partie réelle et imaginaire du nombre complexe z de module $\sqrt{2}$ et dont l'argument est $\frac{7\pi}{4}$.

1. Déterminer m et n.
2. Résoudre l'équation (E).
3. Déterminer la solution particulière dont la courbe passe par le point $A(0;1)$ et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Exercice 2

Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + y = \cos x$.

1. Déterminer les réels a et b tels que la fonction g définie par :
   $g(x) = a\sin x + b\cos x$ soit une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
2. On pose $h = f - g$.
   (a) Démontrer que si f est solution de l'équation (E) alors h est la solution de l'équation différentielle
   (E') : $y'' + 2y' + y = 0$.
   (b) Résoudre l'équation (E').
   (c) En déduire la solution de (E).
3. En déduire la solution particulière f de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$.

Exercice 3

I. On considère les équations différentielles suivantes : $E_1 : y'' + 4y' = 0$; $E_2 : y'' + y = 0$.
   1. Déterminer la solution de l'équation E_1 dont la courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ passe par le point $A(0;2)$ et admet en ce point une tangente verticale.
   2. Déterminer la solution g de l'équation (E_2) vérifiant $g(\frac{\pi}{2}) = 1$ et $g'(\frac{\pi}{4}) = -1$.

II. Soit h la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $2h'(x) + h(x) = 0$ et telle que la courbe représentative $(\mathscr{C})$ admet en son point d'abscisse -2 une tangente de coefficient directeur $\frac{3}{5}$. Déterminer $h(x)$.

Exercice 4

Soit l'équation différentielle (E) : $\mathrm{y}' - \mathrm{y} = -\mathrm{x} + 2$.

1. Déterminer une fonction affine p solution particulière de (E).

2. Démontrer qu'une fonction g est solution de (E) si et seulement $(g-p)$ est solution de $(\mathrm{E}') : \mathsf{y}' - \mathsf{y} = 0$.
3. Résoudre l'équation (E') . En déduire les solutions de (E).
4. Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(0)=0$.

Exercice 5

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = (x+4)e^{-x}$.

1. Déterminer le réels a et b pour que la fonction $g(x) = (ax+b)e^{-x}$ soit solution de (E).
2. Démontrer qu'une fonction h est solution de (E) si et seulement $(h-g)$ est solution de (E') : $y' + 2y = 0$.
3. Résoudre (E') . En déduire les solutions de (E).
4. Déterminer la solution f de (E) qui s'annule en -1 .

Exercice 6

Soit l'équation différentielle (E) : $\frac{1}{2}\mathsf{y}'' - \mathsf{y}' + \mathsf{y} = 0$.
On pose $\mathrm{I} = \int_0^{\pi} e^x \cos x\, dx$ et $\mathrm{J} = \int_0^{\pi} e^x \sin x\, dx$.

1. En intégrant convenablement I par partie, montrer que $\mathrm{I} + \mathrm{J} = 0$.
2. Résoudre l'équation différentielle (E).
3. Déduire la solution$f$ de (E) telle que $f(0) = f'(0) = 1$. 4) Déterminer à l'aide de (E) , une primitive de la fonction f définie en 3) Vérifier $\mathrm{I} = \int_0^{\pi} f(x)\, dx$ que puis déduire I et J .

Exercice 7

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Résoudre l'équation différentielle : (E) : $y' - \frac{1}{n}y = 0$.
2. On considère l'équation différentielle : (E') : $y' - \frac{1}{n}y = -\frac{x+1}{n(n+1)}$.
   Déterminer deux réels a et b tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax+b$ soit solution de l'équation (E') .
3. Montrer que pour qu'une fonction h définie sur $\mathbb{R}$ soit solution de (E') , il faut et il suffit que $h - g$ soit solution de (E) . En déduire la solution de (E') .

Exercice 8

Soit l'équation différentielle (E) : $9y'' + 49y = 0$.

1. Résoudre (E) puis déterminer la solution f de (E) qui vérifie $f(0) = \sqrt{3}$ et $f'(0) = 7$
2. Montrer que pour tout nombre réel $f(x) = 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{7}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)$.
3. Résoudre dans $]0;2\pi[$ l'équation $f(x) = \sqrt{6}$.
4. Calculer la valeur moyenne θ de la fonction f sur l'intervalle $\mathrm{I} = \left]-\frac{3\pi}{7}; \frac{3\pi}{7}\right[$

Exercice 9

On considère l'équation différentielle : (E) : $y' - 3y = -\frac{-3e}{(1+e^{-3x})^2}$.
On donne une fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-3x}\varphi(x)$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Exprimer sur $f'(x)$ en fonction $\varphi(x)$ et de $\varphi'(x)$. 3) Sachant que $\varphi(x)$ est une solution de (E) :
   (a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de x.
   (b) Déterminer l'expression de $f(x)$ en fonction de x si $f(0) = \frac{e}{2}$.

Courbes paramétrées

Exercice 1

Le plan $(\mathscr{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \overrightarrow{\mathrm{i}}, \overrightarrow{\mathrm{j}})$. On considère la courbe paramétrée (Γ) dont la représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \cos 2t \\ y(t) = \sin t \cos 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

1. Définir la fonction vectorielle G associé à (Γ).
2. Montrer que G est périodique de période 2π.
3. Montrer que l'on peut étudier G sur l'intervalle $\mathrm{E} = [0; \pi]$.
4. Étudier les variations de la fonction x sur E.
5. Étudier les variations de la fonction y sur E.
6. Dresser le tableau conjoint des variations de x et y sur E.
7. Tracer (Γ).

Exercice 2

Un point M se déplace dans le plan rapporté au repère orthonormé $(\mathrm{O}, \overrightarrow{\mathrm{i}}, \overrightarrow{\mathrm{j}})$. A chaque instant t, sa position notée $\mathrm{M}(t)$ est donnée par les coordonnées $(x(t); y(t))$ tells que :

$$\begin{cases} x(t) = \sin 2t \cos^2 t \\ y(t) = \cos(2t) \sin^2 t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$\mathrm{M}(t)$ décrit une courbe que l'on notera $(\mathscr{C})$.

1. Comparer les points $\mathrm{M}(t+\pi)$ et $\mathrm{M}(t)$ puis les points $\mathrm{M}(t)$ et $\mathrm{M}'(-t)$.
   Donner les deux propriétés permettant de réduire l'ensemble d'étude de $(\mathscr{C})$.
2. En déduire que les fonctions x et y peuvent être étudiées dans l'intervalle $\mathrm{I} = [0; \frac{\pi}{2}]$.
3. Montrer que les dérivées des fonctions x et y sont :
   $$\begin{cases} x'(t) = 2\cos^2 t(1 - 4\sin^2 t) \\ y'(t) = \sin(2t)(1 - \sin^2 t) \end{cases}$$
4. Étudier les variations des fonctions x et y sur I.
5. Établir le tableaux de variations conjoint des deux fonctions.
6. On admettra qu'au point de paramètre $t = \frac{\pi}{6}$, la tangente forme un angle de $\frac{\pi}{6}$ avec l'axe des abscisses, et qu'au point de paramètre $t = \frac{\pi}{2}$, la tangente est horizontale.
   Tracer la courbe $(\mathscr{C})$, unité graphique : 4 cm.

Exercice 3

Partie A

1. Résoudre, dans l'ensemble des fonctions deux fois dérivables, l'équation différentielle (E) : $y'' + 9y = 0$.
2. Déterminer la solution particulière f de (E) qui vérifie : $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6$.

<u>Partie</u> B

On considère dans le plan rapporté au repère orthonormé $(\mathrm{O}, \overrightarrow{\mathrm{i}}, \overrightarrow{\mathrm{j}})$, la courbe paramétrée (Γ) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos 3t \\ y(t) = 3\sin 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

1. Définir la fonction vectorielle g associé à (Γ).
2. Montrer que g est périodique de période 2π.
3. (a) Comparer $\mathrm{M}(t)$ et $\mathrm{M}(-t)$.
   (b) En déduire que l'on peut restreindre le domaine d'étude à l'intervalle $\mathrm{I} = [0;\pi]$.
4. Étudier les variations de la fonction x sur I.
5. Étudier les variations de la fonction y sur I.
6. Dresser le tableau conjoint des variations de x et y sur I.
7. Tracer (Γ).

<u>Exercice</u> 4

Dans le plan (P) rapporté à un repère orthonormal $(\mathrm{o}, \overrightarrow{\mathrm{i}}, \overrightarrow{\mathrm{j}})$ d'unité graphiquement 3 cm, on considère la courbe $(\mathscr{C})$ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t}{t^2+1} \\ y(t) = \ln|t| \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}^*$$

1. (a) Par quelle isométrie le point $\mathrm{M}(-t)$ se déduit-il du point $\mathrm{M}(t)$?
   (b) Par quelle isométrie le point $\mathrm{M}(\frac{1}{t})$ se déduit-il du point $\mathrm{M}(t)$?
   (c) En déduire que l'intervalle d'étude peut-être réduit à $]0,1]$.
2. Étudier les variations de x et y sur $]0;1]$.
3. Tracer $(\mathscr{C})$.

Statistiques

Exercice 1

Les résultats d'une étude statistique effectuée sur une population féminine sont confinés dans le tableau ci-dessous :

Age : x	36	42	48	54	60
Tension artérielle : y	11,7	14	12,5	15	15,6

Les résultats des calculs seront donnés sous forme décimale et à 10^{-2} près.

1. Représenter le nuage de points de cette série statistique double.
   On prendra $1,5cm$ pour 12 ans et $0,5cm$ pour l'unité de tension artérielle.
2. Calculer l'âge moyen et la tension moyenne de cette série statistique.
3. Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x.
4. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y.
5. Si l'évolution de la valeur de la tension artérielle se poursuit de la même manière, une personne âgée de 65 ans pourrait-elle avoir une tension artérielle de 17 ? Justifier votre réponse.

Exercice 2

Soit le tableau statistique à double entrée suivant :

Y \ X	0	2
-1	3	2
α	1	4

avec α un entier naturel non nul.

1. Donner les lois marginales de X et Y.
2. Déterminer le réel α pour que le point moyen G ait pour coordonnées $\left(\frac{6}{5};\frac{1}{2}\right)$.
3. Calculer la covariance de (X,Y).
4. Calculer le coefficient de corrélation linéaire.

Exercice 3

La série statistique ci-dessous concerne les ventes annuelles exprimées en milliers de francs CFA de 2014 à 2019 d'un magasin de pagnes, x_i en année et y_i vente en milliers de francs CFA.

x_i	2014	2015	2016	2017	2018	2019
y_i	3400	2800	3200	3800	4300	4700

1. Déterminer les coordonnées du point moyen G.
2. Déterminer la variance de X et Y puis la covariance de (X,Y).
3. Déterminer la droite de régression de y en x.
4. Quelle prévision de vente annuelle le magasin de pagne peut-il espérer atteindre en 2025 ?

Exercice 4

A l'oral d'un examen, chaque candidat est interrogé en première langue où il obtient la note X et en seconde langue où il obtient la note Y (notes sur 20). Les résultats obtenus par 100 candidat sont donnes ci-dessous :

Y \ X	[0, 4[	[4, 8[	[8, 12[	[12, 16[	[16, 20[
[0, 4[	2	5	2	0	0
[4, 8[	1	12	10	3	0
[8, 12[	0	3	28	12	0
[12, 16[	0	1	5	10	2
[16, 20[	0	0	0	1	2

1. Représenter graphiquement la statistique double (X,Y) par un nuage de points pondérés.
2. (a) Déterminer les distributions marginales de X et Y.
   (b) Calculer les notes moyennes de X et Y.
   (c) Calculer la variance de X et Y.
   (d) En déduire l'inertie minimale de cette série statistique.
3. (a) Calculer la covariance de couple (X,Y).
   (b) Déterminer les droites de régressions linéaires de y en x et de x en y
   (c) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire puis interpréter.

Exercice 5

On considère la série statistique à deux caractères présentée dans le tableau suivant :

x_i	4	20	1	10	9	5	2	2	6	5	11	15
y_i	3,3	0,6	10,5	1,3	1,3	2,2	5	8	1,8	2	1,2	0,9

1. Représenter le nuage de points associés à cette série.
2. La forme du nuage suggère-t-elle un ajustement linéaire ?
3. On pose $z_i = \dfrac{1}{y_i}$.
   (a) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique du couple (x_i, z_i).
   (b) La valeur de ce coefficient justifie-t-elle un ajustement linéaire ?
   (c) Déterminer une équation de la droite de régression de z en x.

Exercice 6

Soit le tableau statistique linéaire suivant :

x	0	1	0	1	0	-1	1	0
y	0	0	α	α	0	0	0	0

où α est un entier nature non nul.

1. Convertir ce tableau en un tableau à double entrée.
2. Déterminer α sachant que $G\left(\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{2}\right)$ est un point moyen de cette série.
3. Dans la suite de l'exercice, on donne $\alpha = 2$.
   (a) Déterminer l'inertie minimale.
   (b) En déduire l'inertie du nuage par rapport au point $P(1,1)$.
4. Déterminer la droite $(\mathscr{D})$ de régression de y en x.
5. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de la série.
6. Donner une interprétation de cette corrélation.

Exercice 7

Une entreprise achète, utilise et vend des machines après un certain nombres x_i d'années. Après six années, l'évolution y_i en milliers de $FCFA$ du prix de vente d'une machine en fonction du nombre d'années d'utilisation, se présente comme suite :

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	150	125	90	75	50	45

1. Déterminer les coordonnées du point moyen G, puis les variances de X et Y
2. Calculer l'inertie par rapport au point moyen G, puis déduire celui du point $A(0,-1)$.
3. Déterminer une équation de la droite de régression de y en x.
4. En déduire une estimation du prix de vente d'une machine après 7 ans d'utilisation.

Exercice 8

Une série statistique est distribuée selon le tableau ci-dessous.
Une mauvaise manipulation a effacé une donne et on se propose de reconstituer la série en déterminant la donnée manquante.

x \ y	-1	1	2
1	3	2	1
-1	β	1	1

où β est entier naturel.

1. Déterminer en fonction de β les moyennes $\overline{x}$ et $\overline{y}$, les variances $V(x)$ et $V(x)$ respectives des caractères X et Y.
2. Déterminer β sachant que la covariance de la série est $cov(x,y) = -0,5$.
3. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique.

Exercice 9

Une série statistique double d'effectif total 100 est ajustée par la méthode des moindres carrés par les droites de régression dont les équations sont les suivantes :
$(\mathscr{D}_{y/x}) : y = \frac{1}{14}x + \frac{3}{14}$ et $(\mathscr{D}_{x/y}) : x = \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}$.

1. Déterminer les coordonnées du point moyen G.
2. Sachant que la variance de la variable X est : $V(X) = \frac{14}{25}$, déterminer la covariance de (X,Y).
3. Déterminer la variance de la variable Y et l'inertie minimale du nuage des points de la série.

Exercice 10

Le tableau à double entrée ci-dessous présente les résultats d'une étude faite sur un échantillon des ménages d'une ville.
Les x et y sont respectivement les revenus et épargnes mensuels de ces ménages. x et y sont en milliers de francs cfa.

x \ y	45	75	125
14	4	24	2
25	4	36	0
40	0	12	18

1. Donner les deux séries marginales associées à ce tableau.
2. Calculer le revenu moyen et l'épargne moyenne.
3. Calculer les variances de x et de y puis déduire l'inertie minimale.
4. (a) Déterminer l'équation de la droite (D) de régression qui permet d'estimer le revenu mensuel à partir de l'épargne mensuelle.
   (b) En déduire une estimation du revenu mensuel d'un ménage ayant réalisé une épargne mensuelle de $50.000 fcfa$.
5. Calculer le coefficient de corrélation linéaire r, puis interpréter le résultat.

Exercice 11

Dans une classe de terminale au lycée Emery Patrice LUMUMBA, deux élèves de la série D se disputent sur un problème statistique à deux variables X et Y de dix individus. Dans ce problème, il est question de calculer les variances de X et Y connaissant la droite de régression linéaire de y par rapport à x $(\mathscr{D}) : y = \frac{1}{2}x$, l'inertie par rapport au point $A(1;2)$ et l'inertie par rapport au point G qui sont respectivement $I_A = 100$ et $I_G = 50$ et le coefficient de corrélation linéaire de X et Y est $r = \frac{9}{10}$.
Pour les aider, votre enseigne vous demande de :

1. Déterminer les coordonnées du point moyen $G(\overline{x}, \overline{y})$ où $\overline{x} \in \mathbb{R}^*$ et $\overline{y} \in \mathbb{R}$.
2. Soit $(\mathscr{D}')$ la droite de régression linéaire de x par rapport à y d'équation cartésienne $(\mathscr{D}') : x = a'y + b'$ où a' et b' sont des réels.
   (a) Déterminer les réels a' et b'.
   (b) Montrer que $V(x) - 2a'V(y) = 0$ où $V(x)$ et $V(y)$ les variances de X et Y et a' le coefficient directeur de la droite $(\mathscr{D}')$.
   (c) Calculer les variances de X et Y.

Exercice 12

Le tableau ci-dessous représente le couple (X, Y) des deux caractères d'une série statistique. X est le nombre de jours et Y le poids en mg d'une larve.

X	1	2	3	4	5	6
Y	0,2	1,4	1,8	2	2,6	3

1. Calculer les coordonnées du point moyen G.
2. Calculer les variances de X et Y puis la covariance de (X, Y).
3. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire puis interpréter.
4. Calculer l'inertie minimale puis déduire l'inertie par rapport au point $B(1; -1)$.
5. Déterminer l'équation de la droite $(\mathscr{D})$ de régression linéaire de y en x.
6. Estimer le poids de la larve au septième jour.

Exercice 13

Le directeur des ressources humaines de l'entreprise $\ll EMERGENCE\ 2025 \gg$ doit embaucher des ouvriers. Lors de la précédente campagne de recrutement pour les postes analogues, il fait une étude statistique sur le nombre des candidatures y en fonction des salaires proposés x. Il a eu les résultats suivants :
▷ Salaire moyen : $\overline{X} = 660.000 fcfa$.

▷ Variance de X : $V(X) = 20.000$.
▷ Équation de la droite de régression de y en x : $y = 0,001125x - 56$.
▷ Coefficient de corrélation linéaire : $r = 0,922$.

1. Déterminer le nombre moyen de candidatures $\overline{Y}$.
2. Déterminer la covariance de (X, Y) de la série.
3. Déterminer l'équation de la droite de régression de x en y.
4. En déduire une estimation de salaire que doit proposer le Directeur s'il veut embaucher 30 ouvriers.

Exercice 14

Un laboratoire étudie la croissance d'une souche de bactéries. Il obtient les résultats suivants :

Temps x_i (en heures)	4	5	6	7	8	9
Nombre N_i de bactéries (en milliers)	13,6	21,3	70,9	121,5	383	590

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous. Donner les valeurs arrondies à 10^{-2} près.

Temps x_i (en heures)	4	5	6	7	8	9
Nombre N_i de bactéries (en milliers)	13,6	21,3	70,9	121,5	383	590
$y_i = \ln(N_i)$	2,61			4,80		

2. Représenter le nuage de points de coordonnées $(x_i; y_i)$. On prendra pour unités : $1cm$ en abscisse pour 1 heure, $1cm$en ordonnée pour une unité.
3. On note G_1 et G_2 les points moyens du point moyen des trois premiers points du nuage et des trois derniers points du nuage respectivement.
   (a) Déterminer les coordonnées de G_1 et G_2.
   (b) Placer G_1 et G_2 sur le graphique précédent, puis tracer la droite (G_1G_2).
   (c) Déterminer l'équation réduite de la droite (G_1G_2).
4. (a) Donner la valeur approchée à 10^{-2} près de $\ln(100)$.
   (b) A l'aide de cette valeur, déterminer le temps nécessaire qu'il faut pour obtenir 100000 bactéries.

Exercice 15

On appelle capacité vitale chez homme, le volume d'air maximum pouvant être mobilisé par une inspiration forcée suivie d'une expiration forcée. Le tableau ci-dessous donne la capacité vitale c, exprimée en cm^3, chez des hommes âgés de 40 ans en fonction de leur taille t, exprimée en cm.

t (cm)	152	156	160	166	170	174	178	180	182
c (cm^3)	3525	3620	3710	3850	3945	4035	4130	4175	4220

1. (a) Donner une valeur approchée à 10^{-5} près du coefficient de corrélation linéaire entre t et c.
   (b) Justifier que l'on peut procède à un ajustement linéaire affine par la méthode de moindres carrés de la série $(t; c)$.
   (c) Donner une équation de la droite de régression de c et t. (les coefficients seront arrondis à 10^{-2} près).
   (d) En déduire de cet ajustement une estimation de la capacité vitale d'un homme âgé de 40 ans et de taille égale $188cm$.

2. En fait, la capacité vitale c (exprimée en cm^3) chez l'homme dépend de sa taille t (exprimée en cm) et de son âge g (exprimé en années). De nombreuses expériences ont permis d'exprimer c en fonction de t et g selon la relation $c = \alpha t + \beta g + 754$, où α et β sont des constantes (ne dépendant pas de t et g).
   (a) Donner l'expression de c pour 40.
   (b) En déduire les valeurs de α et β.
3. Estimer la capacité vitale d'un homme âgé de 50 ans et mesurant $188cm$.

Probabilités

Exercice 1

On considère un échantillon de 800 personnes composé de 300 hommes et de 500 femmes. Parmi les hommes, 200 ont plus de 20 ans et parmi les femmes 350 ont plus de 20 ans. On choisit dans cet échantillon une personne au hasard. On désigne par H, F et V les événements suivants :
H " La personne choisit est un homme" ; F " La personne choisit est une femme" ; V " La personne choisit a plus de 20 ans".
On rappelle que l'arbre pondéré est un outil mathématique permettant de calculer une probabilité dans le cas d'expériences aléatoires.

1. Représenter cette situation par un arbre pondéré.
2. Calculer les probabilités suivantes : $P(H)$ et $P(F)$.
3. Soit A et B deux événements définis par :
   A : " La personne choisie est un homme et a plus de 20 ans " et B : " La personne choisie est une femme et a plus de 20 ans ". Calculer la probabilité des événements A et B
4. Calculer la probabilité que la personne choisie a plus de 20 ans.

Exercice 2

Partie I : Étude de la progression de l'épidémie pendant 30 jours

Au début de l'épidémie on constate que $0,01\%$ de la population est contaminé.
Pour t appartenant à $[0;30]$, on note $y(t)$ le pourcentage de personnes touchées par la maladie après t jours. On a donc $y(0) = 0,01$ et on admet que la fonction y ainsi définie sur $[0;30]$ est dérivable, strictement positive et vérifie : $y' = 0,05y(10-y)$. On considère la fonction z définie sur l'intervalle $[0;30]$ par $z = \frac{1}{y}$.

1. Démontrer que la fonction y satisfait aux conditions $\begin{cases} y(0) = 0,01 \\ y' = 0,05y(10-y) \end{cases}$ si et seulement si la fonction z satisfait aux conditions $\begin{cases} z(0) = 100 \\ z' = -0,5z + 0,05 \end{cases}$
2. (a) En déduire une expression de la fonction z puis celle de la fonction y.
   (b) Calculer le pourcentage de la population infectée après 30 jours. On donnera la valeur arrondie à l'entier le plus proche.

Partie II : Étude sur l'efficacité d'un vaccin

Le quart de la population est vacciné contre cette maladie contagieuse. De plus, on estime que sur la population vaccinée, 92% des individus ne tombent pas malades. Sur la population totale, on estime aussi que 10% des individus sont malades. On choisit au hasard un individu dans cette population. On note les événements :
$V =$ " l'individu est vacciné " et $M =$ " l'individu est malade "

1. (a) Déterminer $p(V)$; $p_V(\overline{M})$ et $p(M)$.
   (b) Calculer la probabilité p_1 de l'événement " l'individu n'est pas vacciné et tombent malade ".
   (c) Quelle est la probabilité p_2 de tomber malade pour un individu qui n'est pas vacciné ?
2. Construire l'arbre de probabilité correspondant.

Exercice 3

Soit A et B deux événements tels que : $P(A) = \dfrac{1}{2}$; $P(B) = \dfrac{3}{4}$ et $P(A \cap B) = \dfrac{2}{5}$.

1. a) Calculer $P_A(B)$ et $P_B(A)$.
   b) Calculer $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B})$.
2. Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau suivant :

x_i	-100	0	100	150
$p(X = x_i)$	$\dfrac{2}{9}$	$\dfrac{5}{9}$	α	$\dfrac{1}{9}$

où α est un réel positif.

   a) Déterminer le nombre réel α.
   b) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X.
   c) Déterminer et construire la fonction de répartition F de X.

exercice 4

Une enquête effectuée dans un village d'Afrique Centrale montre que 85% des habitants du village sont atteints de l'hépatite. Une équipe médicale a effectué un test de dépistage de la maladie et on pu constater que :
▷ 5% des habitants non malades ont donné un test positif.
▷ 92% des habitants malades ont donné un test positif.
On désigne par M l'évènement " être malade " et par T l'évènement " avoir un test ".

1. Interpréter les hypothèses de l'énoncé à l'aide des évènements M et T.
2. Construire l'arbre de probabilité correspondant à cette situation.
3. (a) Calculer la probabilité de chacun des évènements ci-après : $M \cap T$, $M \cap \overline{T}$, $\overline{M} \cap T$ et $\overline{M} \cap \overline{T}$.
   (b) En déduire la probabilité de l'évènement T.
4. Calculer la probabilité pour qu'un habitant du village soit malade sachant qu'il a donné un test négatif.

Exercice 5

Une urne U_1 contient 7 boules blanches et 3 boules noires et une urne U_2 contient 5 boules blanches et 5 boules noires. Toutes les boules sont indiscernables au toucher. L'expérience consiste à choisir une urne et tirer une boule, puis une deuxième sans remettre la première dans l'urne. La probabilité de choisir l'urne U_1 est $\frac{1}{3}$.

1. Faire un arbre de probabilité relatif à cette expérience.
2. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   E : ≪ obtenir aucune boule blanche ≫,
   F : ≪ obtenir la première boule noire et la deuxième boule blanche ≫,
   G : ≪ obtenir deux boules de couleurs différentes ≫,
   H : ≪ obtenir deux boules blanches sachant que l'urne U_2 a été choisie ≫.

Exercice 6

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher ; 6 boules blanches et 4 boules rouges. On tire 2 boules simultanément.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de 2 boules, associe le nombre de boules rouges tirées.

1. Donner la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance mathématiques.
3. Calculer la variance de X.

Exercice 7

Une urne contient deux boules blanches et trois boules noires toutes indiscernables au toucher. On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne et on note leur couleur.
On définit sur l'univers Ω de cette expérience aléatoire, la variable aléatoire réelle X par :
$X = -1$, si les deux boules tirées sont blanches ;
$X = 0$, si l'une est blanche et l'autre est noire ;
$X = 1$, si les deux boules tirées sont noires.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance mathématiques de X.
3. (a) Définir la fonction de répartition F de X.
   (b) Tracer la courbe représentative de F dans un repère orthogonal (on prendra 1 cm en abscisse et 5 cm en ordonnée pour unités graphique).

Exercice 8

Une entreprise fabrique des pièces pour un client. Le contrat stipule que le produit fabriqué doit être soumis à deux tests distincts de normes de qualité A et B.
La pièce est acceptée, s'il a satisfait à ces deux tests qui sont indépendants l'un de l'autre. On note :

A l'événement $\ll$ le produit est conforme à la norme de qualité A $\gg$;
B l'événement $\ll$ le produit est conforme à la norme de qualité B $\gg$.

Une étude a démontré que la probabilité de l'événement A est $\mathrm{P(A)} = 0,9$ et celle de l'événement B est $\mathrm{P(B)} = 0,95$.

1. Calculer $\mathrm{P(A \cap B)}$ avec l'événement $\ll$ le produit est conforme à la norme A et à la norme B $\gg$.
2. Soit C, l'événement $\ll$ le produit n'est pas accepté par le client ; donc il est déclaré non conforme $\gg$.
   Montrer que $\mathrm{P(C)} = 0,145$.
3. On suppose que le stock du client étant trop bas, il accepte de prendre le produit s'il satisfait soit au test A ou au test B, donc il appartient à $\mathrm{A \cup B}$.
   Calculer $\mathrm{P(A \cup B)}$.

Exercice 9

Pour prévenir l'extension d'une certaine maladie, on vaccine 60% d'une population à risque. Le vaccin n'étant pas totalement infaillible, 10% des personnes vaccinées attrapent la maladie. En revanche 30% des personnes non vaccinées ne sont pas malades.

On note V l'événement $\ll$ la personne vaccinée $\gg$ et M l'événement $\ll$ la personne est malade $\gg$.
On choisit une personne au hasard.

1. Traduire les pourcentages de l'énoncé en langages des probabilités.
2. Construire l'arbre pondéré illustrant cette situation.
3. Quelle est la probabilité que la personne soit malade et vaccinée.
4. En déduire la probabilité pour une personne de contracter la maladie.
5. Calculer la probabilité pour qu'une personne bien portante soit vaccinée.

Exercice 10

On admet que dans une famille, pour toute naissance d'un enfant, la probabilité d'avoir un garçon est la même que celle d'avoir une fille et que, lors de deux naissances séparées, les sexes des enfants sont indépendants.

1. Dans une famille de deux enfants, déterminer la probabilité des événements suivants :
   (a) A : $\ll$ les enfants sont deux garçon $\gg$;
   (b) B : $\ll$ les enfants deux filles $\gg$;
   (c) C : $\ll$ les enfants ont le même sexe ;
   (d) D : $\ll$ les enfants sont de sexes différents $\gg$.
2. Pour une famille de trois enfants (les naissances étant toujours séparées), on désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque famille, associe le nombre de garçons.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   (b) Calculer l'espérance mathématique de X.
   (c) Construire la fonction de répartition de X.

Exercice 11

Un joueur dispose d'un dé à six faces : trois sont blanches, deux sont vertes et une est rouge. Lors du lancer du dé, chaque face à la même probabilité d'apparition. Le joueur lance de dé et observe la couleur de la face supérieure.

- S'il observe une face rouge, il gagne 2 F.
- S'il observe une face verte, il gagne 1 F.
- S'il observe une face blanche, il relance le dé, il gagne alors 3 F pour une face rouge, il perd 1 F pour une face verte et le jeu est arrêté sans gain ni perte perte pour une blanche.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Déterminer la loi de probabilité de X.
3. Calculer l'espérance mathématiques de X.
4. Définir et construire la fonction de répartition de X.

Exercice 12

Une urne contient 4 boules numériques de 1 à 4. On considère l'épreuve qui consiste à tirer successivement et sans remise deux boules. Soit u le produit des numéros portés par les deux boules tirées.On considère la variable aléatoire réelle X qui à chaque tirage associe la partie réelle du complexe $z = e^{iu\frac{\pi}{4}}$.

1. Donner la loi probabilité de X.
2. (a) Calculer l'espérance mathématiques de X.
   (b) Définir la fonction de répartition de X puis tracer son graphe.
3. On répète 4 fois de suite cette épreuve.
   Quelle est la probabilité P d'obtenir exactement deux fois le complexe $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$?

Exercice 13

1. Lors de la préparation du concours de l'ENSP, un élève n'a étudié que 50 des 100 leçons. On a mis 100 papiers contenant chacun une question dans une urne, ces questions portant sur des leçons différentes. Le candidat tire simultanément au hasard 2 papiers.
   On donnera les réponses sous la forme de fractions irréductibles.
   (a) Quelle est la probabilité qu'il ne connaisse aucun de ces sujets ?
   (b) Quelle est la probabilité qu'il connaisse les deux sujets ?
   (c) Quelle est la probabilité qu'il connaisse au moins un de ces sujets ?
2. On considère maintenant que l'élève a étudié n des 100 leçons. (n étant un entier inférieur ou égal à 100).
   (a) Quelle est la probabilité p_n qu'il connaisse au moins un de ces sujets ?
   (b) Déterminer les entiers naturels tels que p_n soit supérieure ou égal à 0,95.

Exercice 14

1. Démontrer que la formule du binôme de Newton en utilisant une démonstration par récurrence.
2. Montrer que, quels que soient les entiers n et p tels que $1 \leq p \leq n$, $pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$.
3. Calculer les sommes suivantes :
   (a) $S_1 = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p C_n^p$,
   (b) $S_2 = \sum_{p=0}^{n} 2^p C_n^p$,
   (c) $S_3 = \sum_{0 \leq 2p \leq n} C_n^{2p}$,
   (d) $S_4 = \sum_{0 \leq 2p+1 \leq n} C_n^{2p+1}$
4. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3 = \frac{5}{3}n^2 - \frac{4}{3}n$.
5. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $2A_n^2 + 50 = A_{2n}^2$.
6. Montrer que $A_n^p = pA_{n-1}^{p-1} + A_{n-1}^p$.
7. Calculer $A = \sum_{i=0}^{i=3} \left(\sum_{j=0}^{j=i} ij \right)$.

Exercice 15

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	a	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	b

1. Calculer l'espérance mathématiques de X en fonction de a et b.
2. (a) Déterminer les réels a et b tels que $E(X) = \frac{3}{2}$.
   (b) Calculer la variance X et l'écart-type.
3. Donner la fonction de répartition de X.