<u>Exercice 4 :</u> Etude de fonction et Intégration. (54 points)

I) On pose : $I_n = \frac{1}{n!}\int_0^2 (2-x)^n e^x \; dx;\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

1) Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties

2)

a) Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$; $0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n\,!}(e^2 - 1) \quad (*)$

b) Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$; $I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)\,!}$

c) Démontrer que : $e^2 = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k!} + I_n$

3) On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*;\ u_n = \frac{2^n}{n!}$

a) Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$; puis démontrer que : $\forall\, n \geq 3;\ u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$

b) Démontrer que : $0 \leq u_n \leq u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$; $\forall\, n \geq 3$

4)

a) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$; puis déduire à partir de la relation $(*)$; $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

b) Démontrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k!}\right) = e^2 - 1$

II) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$; on pose : $F(x) = \int_0^x ln(1 + e^{-2t})\; dt$

1) Étudier le sens de variation de la fonction F.

2) On désigne par α un réel strictement positif.

a) Montrer que : $\forall\, t \in [1; 1+\alpha]$; $\frac{1}{1+\alpha} \leq \frac{1}{t} \leq 1$; puis déduire en utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis que : $\frac{\alpha}{1+\alpha} \leq ln(1+\alpha) \leq \alpha$

b) Soit $x > 0$. Déduire alors que :

- $\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}\; dt \leq F(x) \leq \int_0^x e^{-2t}\; dt$;
- $\frac{1}{2}[ln2 - ln(1 + e^{-2x})\ ] \leq F(x) \leq \frac{1}{2}(1 - e^{-2x})$

3) On admet que : $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = l$; montrer que $\frac{1}{2} ln2 \leq l \leq \frac{1}{2}$

4) On pose : $w_n = \int_n^{n+1} ln(1 + e^{-2t})\; dt$; $\forall\, n \in \mathbb{N}$

Démontrer que : $0 \leq w_n \leq ln(1 + e^{-2n})$; puis déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n$.

5) On pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$

a) Exprimer S_n en fonction de F et n.

b) Montrer que la suite (S_n) est convergente