Avants - Propos :

Conformément au nouveau programme de mathématiques, ce présent manuel est le résultat d'un travail réalisé par un comité d'enseignants du secondaire qui répond au souci du Ministère de l'Education Nationale pour la mise en œuvre de **l'approche par compétence (A.P.C)** dans les classes de **TSE** (Terminale Sciences Exactes) au Mali et ayant pour **objectif** d'uniformiser le niveau des élèves venant des classes antérieures afin de leur offrir les mêmes chances dans la poursuite de leurs études universitaires. Il permet en outre d'harmoniser la pédagogie des mathématiques et de mettre à la disposition des élèves l'acquisition d'une formation solide.
Chacun des chapitres recouvrant l'ensemble du programme, est composé de **04** parties :

Situation - Problème :

Une **activité ouverte** permettant d'aborder en grande partie les connaissances nouvelles.

Activités préparatoires :

Les **activités préparatoires,** approches simples des nouvelles notions à partir des connaissances acquises dans les classes antérieures.

Le cours :

Rien que **l'essentiel dans un langage clair et simple** avec des **démonstrations**. Chaque définition ou théorème est suivi d'un exemple simple, court, en situation, pouvant servir de référence et d'aide à la démonstration.

Exercices et problèmes :

- **Les exercices :** Inédits et ordonnés suivant **la progression du cours**, ils contribuent à l'acquisition et à l'assimilation du cours.

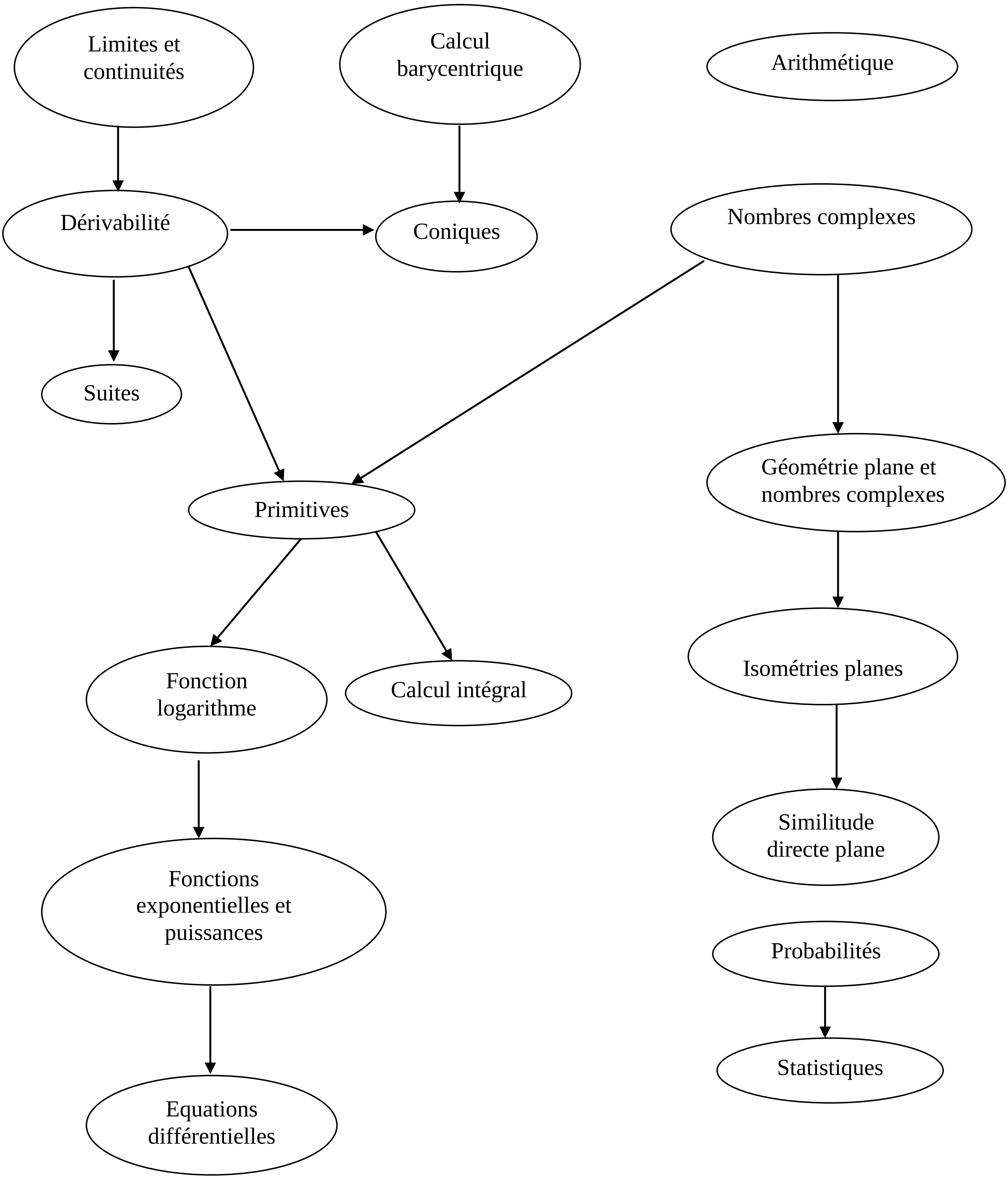
- **Les problèmes :** Variés, ce sont des **problèmes de synthèse** ou des problèmes ouverts pour aller plus loin dans l'acquisition de vos connaissances sans aller au-delà du programme en vigueur.

Nous souhaitons donc que l'utilisation de ce livre ne se substitue pas au travail des professeurs en classe, mais qu'il constitue un support efficace, utile aux élèves pour mieux comprendre les mathématiques dans toute sa diversité. A cet effet, nous tenons à remercier **les éditions SAMASSA** et tous ceux qui voudront bien nous faire part de leurs remarques, critiques, suggestions ou autres solutions plus élégantes que les nôtres, que nous publierons dans une future édition.

Les auteurs

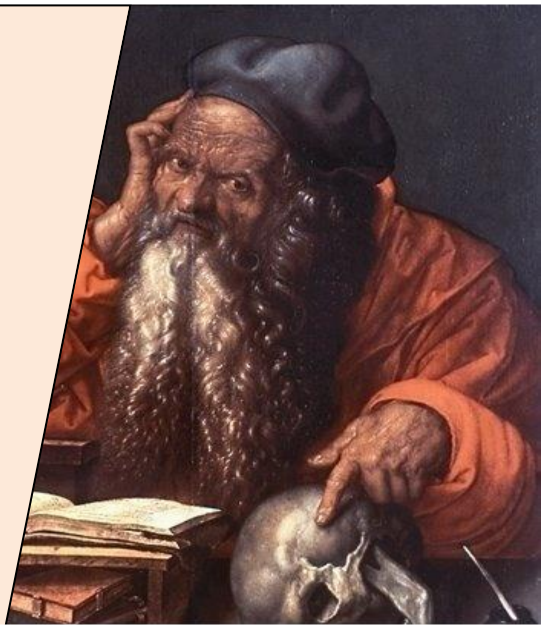
SOMMAIRE

LIEN ENTRE LES CHAPITRES DU MANUEL



Nombres Complexes

Dans les classes de 10 ième et 11 ième vous avez sans doute étudiez les équations du second degré. Mais cette notion s'étend bien au-delà.
Exemple : Jérôme Cardant (mathématicien Italien) donna naissance à un nouvel ensemble au XVI ième siècle afin de trouver des solutions pour des équations du second degré à discriminant négatif.
Cet ensemble s'appelleras : Ensemble des nombres complexes noté $\mathbb{C}$.



Jérôme Cardan (1501 – 1576)
Mathématicien, astronome, médecin et philosophe Italien.

Sommaire

Objectifs

Ce thème vise à :

- Définir l'ensemble des nombres complexes et en dégager les règles de calcul ;
- Utiliser les caractérisations complexes pour interpréter des configurations élémentaires du plan ;
- Utiliser les nombres complexes pour résoudre des problèmes.

Savoirs et savoir-faire

1) ENSEMBLE DES NOMBRES COMPLEXES

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Forme algébrique d'un nombre complexe. • Partie réelle (Re), partie imaginaire (Im). • Conjugué d'un nombre complexe, propriétés. •Somme, produit, quotient de deux nombres complexes. • Formule du binôme • Egalité de deux nombres complexes. • Module et argument d'un nombre complexe. • Module et argument du produit, de l'inverse, du quotient et de la puissance entière d'un nombre complexe • Forme trigonométrique. •Affiche d'un point, d'un vecteur • Point image et vecteur image d'un nombre complexe. • Forme exponentielle (z= $re^{i\theta}$).	• Déterminer la partie réelle, la partie imaginaire d'un nombre complexe. • Calculer la somme, le produit et le quotient de deux nombres complexes donnés sous forme algébrique. • Développer $(a+b)^n$ • Déterminer le conjugué d'un nombre complexe •déterminer le module et un argument d'un nombre complexe non nul donnés sous forme algébrique. • Représenter graphiquement un nombre complexe donné sous forme algébrique. • Calculer le produit et le quotient de deux nombres complexes écrits sous formes trigonométrique. • Passer à la forme trigonométrique à la forme algébrique et inversement.

2) NOMBRES COMPLEXES ET TRIGONOMETRIE

SAVOIR	SAVOIR-FAIRE
•Formule de Moivre, formule d'Euler	Utiliser les formules de Moivre et d'Euler pour • retrouver des formules trigonométriques ; • Linéariser des puissances de cos$x$ et sin$x$ à l'aide des nombres complexes

3) EQUATIONS DANS $\mathbb{C}$

SAVOIR	SAVOIR-FAIRE
• Racines carrées d'un nombre complexe non nul. • Equation du second degré dans $\mathbb{C}$ • Racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe non nul. •Racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité ; interprétation graphique	• Déterminer les racines carrées d'un nombre complexe écrit sous forme algébrique. • Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$ ou une équation s'y ramenant. • Déterminer sous forme trigonométrique les racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe et les représenter graphiquement

4) NOMBRES COMPLEXES ET GEOMETRIE

SAVOIR	SAVOIR-FAIRE
• $\arg\left(\frac{ZA-ZB}{ZC-ZD}\right)$ est une mesure de $\left(\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BA}}\right)$ •Caractérisations complexes : - D'un cercle ; - D'une droite.	• Déterminer que des points sont cocycliques. • Démontrer que des points sont alignés. Utiliser les caractérisations complexes pour : - Justifier une priorité géométrique ; - Déterminer des lieux géométriques

Rappels et compléments des propriétés dans $\mathbb{R}$

1) Ensemble des entiers naturels

L'ensemble des entiers naturels est noté : $\mathbb{N}$ tel que : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4 \ldots \ldots + \infty\}$

NB :

L'ensemble des entiers naturels privé de zéro est noté $\mathbb{N}^*$ tel que : $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4 \ldots + \infty\}$

2) L'ensemble des entiers relatifs

L'ensemble des entiers relatifs est noté : $\mathbb{Z}$ tel que : $\mathbb{Z} = \{ -\infty \ldots . -2 ;\ 0, 1, 2, 3, 4, \ldots + \infty\}$.

NB :

L'ensemble des entiers relatifs positifs est   noté : $\mathbb{Z}^+$ tel que $\mathbb{Z}^+ = \{0 ;\ +1 ;\ \ldots + \infty \}$
L'ensemble des entiers relatifs négatifs est   noté : $\mathbb{Z}^-$ tel que $\mathbb{Z}^- = \{-\infty \ldots - 2 ;\ -1 \ldots 0 \}$
L'ensemble des entiers relatifs privés de zéro est noté : $\mathbb{Z}^*$ tel que :
$\mathbb{Z}^* = \{ -\infty \ldots - 2 ;\ -1 \ldots + 1 ;\ +2 ; \ldots + \infty \}$
L'ensemble des entiers relatifs positifs et privés de zéro est noté : $\mathbb{Z}_+^*$ tel que **:**
$\mathbb{Z}_+^* = \{ +1 ;\ +2 ;\ \ldots + \infty \}$
L'ensemble des entiers relatifs négatifs et privés de zéro est noté : $\mathbb{Z}_-^*$ tel que **:**
$\mathbb{Z}_-^* = \{ -\infty \ldots - 2 ;\ -1 \}$

3) L'ensemble des nombres rationnels

L'ensemble des nombres rationnels est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire comme quotient de deux entiers relatifs.
L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$ tel que : $\mathbb{Q} = \left\{\frac{P}{Q} avecP \in \mathbb{Z} ; q \in\ \mathbb{Z}^*\right\}$

4) L'ensemble des nombres réels

Certains nombre comme : $\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et π ne peuvent pas s'écrire comme quotient de deux entiers relatifs. Ce sont des nombres irrationnels et l'ensemble des nombres irrationnels et rationnels forment l'ensemble des nombres réels.
L'ensemble des entiers relatifs est noté : $\mathbb{R}$ tel que :
$\mathbb{R} = \{ -\infty ;\ -\sqrt{2} ;\ \frac{-3}{2} ;\ -2 ;\ 0;\ 1 ;\ 2 ;\ \sqrt{2} ;\ \frac{3}{2}, \ldots + \infty\}$.

NB : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Evaluation diagnostique

ACTIVITÉS :

Activité 1:

Résous dans $\mathbb{N}$ puis dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x + 7 = 6$. Conclure.

Activité 2:

Résous dans $\mathbb{Z}$ puis dans $\mathbb{Q}$ l'équation : $3x = 1$. Conclure.

Activité 3:

Résous dans $\mathbb{Q}$ puis dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 - 2 = 0$. Conclure.

Activité 4:

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 + 1 = 0$. Conclure.

Remarque : quand une équation n'a pas de solutions, une démarche naturelle (et historique) consiste à en chercher dans un ensemble plus grand. Au stade de nos connaissances actuelles, l'ensemble numérique le plus grand que l'on a rencontré est $\mathbb{R}$. Ainsi un nouvel ensemble pris naissance au XVI$^{\text{ème}}$ siècle par **JEROME CARDAN (Mathématicien Italien)** afin de trouver des solutions pour l'équation : $x^2 + 1 = 0$ ou des équations du second degré à discriminant négatif. Cet ensemble s'appellera :

Ensemble des nombres complexes ou ensemble des corps complexes et sera noté $\mathbb{C}$.

Le principal élément de $\mathbb{C}$ sera noté $\boldsymbol{i}$ ($\boldsymbol{i}$ comme imaginaire).

Le nombre $\boldsymbol{i}$ est tel que $\boldsymbol{i}^2 = -1$. L'équation ci-dessus possède alors deux solutions : $x^2 + 1 = 0$ équivaut à $x^2 - \boldsymbol{i}^2 = 0$ soit $(x - \boldsymbol{i})(x + \boldsymbol{i}) = 0$ donc $x = \boldsymbol{i}$ ou $x = -\boldsymbol{i}$.

I) Définition ; vocabulaire et interprétation graphique

1) Définition :

On appelle nombre complexe, tout couple ordonné de deux nombres réels $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ tel que $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{ib}$ où $\boldsymbol{i}$ **est un imaginaire** tel que $\boldsymbol{i^2 = -1}$.

2) Notation et vocabulaire : Soit Z un nombre complexe tel que $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{ib}$.

- l'écriture $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{ib}$ est appelée forme algébrique de $\boldsymbol{Z}$.
- le nombre réel $\boldsymbol{a}$ est appelé partie réelle de $\boldsymbol{Z}$ et est noté Re$(\mathbf{Z})$
- le nombre réel $\boldsymbol{b}$ est appelé partie imaginaire de $\boldsymbol{Z}$ et est noté Im$(\mathbf{Z})$

NB :

- Si $b = 0$; alors $\boldsymbol{Z} = a$ (**Z est un nombre à la fois réel et complexe**) car $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

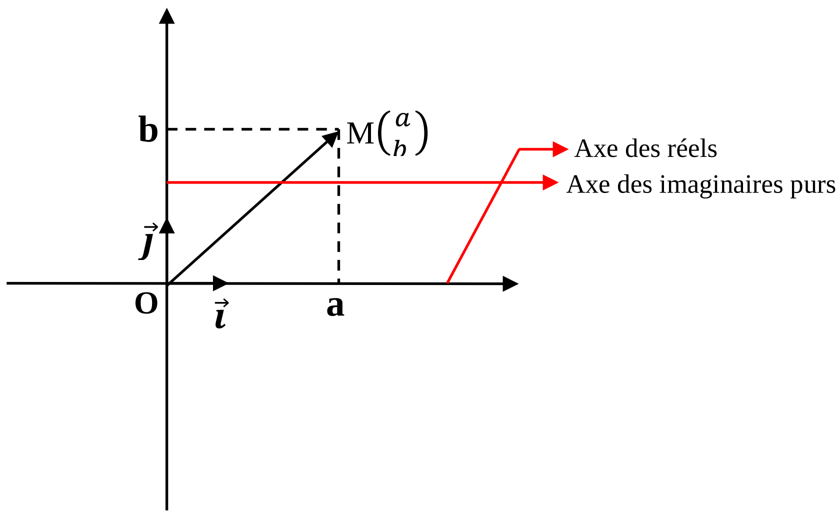
- Si $a = 0$; alors $\boldsymbol{Z} = ib$ (**Z est un imaginaire pur**).

3) Interprétation graphique :

A tout point M$\binom{a}{b}$ du plan P, on peut associer un nombre complexe Z = $a + ib$.

- M est le point image et Z l'affixe du point M.
- $\overrightarrow{OM}$ est le vecteur image du nombre complexe Z=$a + ib$ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Ainsi on a la représentation graphique du M comme suit :



(Figure 1)

Exemple

Dans chacun des nombres complexes suivants donner la partie réelle et la partie imaginaire.

a) $Z = -2 - 3i$; **b)** $Z = \frac{-1 + i\sqrt{2}}{2}$; **c)** $Z = -\sqrt{3}$; **d)** $Z = i$; **e)** $Z = 0$; **f)** $Z = 2 + \frac{i}{\sqrt{2}}$

Solution

a) $Z = -2 - 3i \Rightarrow Re(Z) = -2$ et $Im(Z) = -3$

b) $Z = \frac{-1 + i\sqrt{2}}{2} \Rightarrow Z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow Re(Z) = -\frac{1}{2}$ et $Im(Z) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $Z = -\sqrt{3} \Rightarrow Re(Z) = -\sqrt{3}$ et $Im(Z) = 0$

d) $Z = i \Rightarrow Re(Z) = 0$ et $Im(Z) = 1$

e) $Z = 0 \Rightarrow Re(Z) = 0$ et $Im(Z) = 0$

f) $Z = 2 + \frac{i}{\sqrt{2}} \Rightarrow Re(Z) = 2$et $Im(Z) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

II) Operations dans $\mathbb{C}$:

Soient Z et Z' deux nombres complexes tels que : $Z = a + ib$ et $Z' = a' + ib'$.

1) Egalité :

Deux nombres complexe Z et Z' sont égaux si et seulement si $Z = Z'$ <=> $a + ib = a' + ib'$ <=> $a = a'$ et $b = b'$.

2) Somme:

La somme des deux complexes Z et Z' est tel que : $Z + Z' = (a + a') + i(b + b')$.

3) Produit :

Le Produit des deux complexes Z et Z' est tel que :

$Z \times Z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$ **(avec $i^2 = -1$).**

4) Quotient :

Le quotient de deux complexes Z et Z' est tel que :

$$\frac{Z}{Z'} = \frac{aa' + bb'}{(a')^2 + (b')^2} + i\,\frac{a'b - ab'}{(a')^2 + (b')^2}$$

N.B : Le nombre $\frac{1}{Z}$ est appelé inverse du complexe Z tel que : $\frac{1}{Z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$

Exemple

Ecrivez les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

a) $Z = (2 - 5i)(3 + i)$

b) $Z = (4 + i)(1 + 2i)$

c) $Z = \frac{(3+2i)(1+i)}{1-i}$

d) $Z = \frac{1}{4+3i}$

e) $Z = \frac{4+3i}{4-3i}$

f) $Z = \frac{1-\sqrt{3}i}{1+i\sqrt{2}}$

Solution

a) $Z = (2 - 5i)(3 + i) \Rightarrow Z = 11 - 13i$

b) $Z = (4 + i)(1 + 2i) \Rightarrow Z = 2 + 9i$

c) Z = $\frac{(3+2i)(1+i)}{1-i}$ => Z = $\frac{(3+2i)(1+i)^2}{(1)^2+(-1)^2} = \frac{(3+2i)(1+2i-1)}{2} = \frac{(3+2i)(2i)}{2}$

=> Z = $\frac{4i^2+6i}{2} = \frac{-4+6i}{2} = -2+3i$

d) Z = $\frac{1}{4+3i}$ => Z = $\frac{(4-3i)}{(4)^2+(3)^2} = \frac{(4-3i)}{25} = \frac{4}{25} - \frac{3i}{25}$

e) Z = $\frac{4+3i}{4-3i}$ => Z = $\frac{(4+3i)(4+3i)}{(4)^2+(-3)^2} = \frac{16+24i-9}{25} = \frac{16+24i-9}{25} = \frac{7+24i}{25} = \frac{7}{25} + i\,\frac{24}{25}$

f) Z = $\frac{1-\sqrt{3}i}{1+i\sqrt{2}}$ =>Z = $\frac{1-i\sqrt{2}-i\sqrt{3}+i^2\sqrt{6}}{(1)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\left(1-\sqrt{6}\right)-i\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{3}$

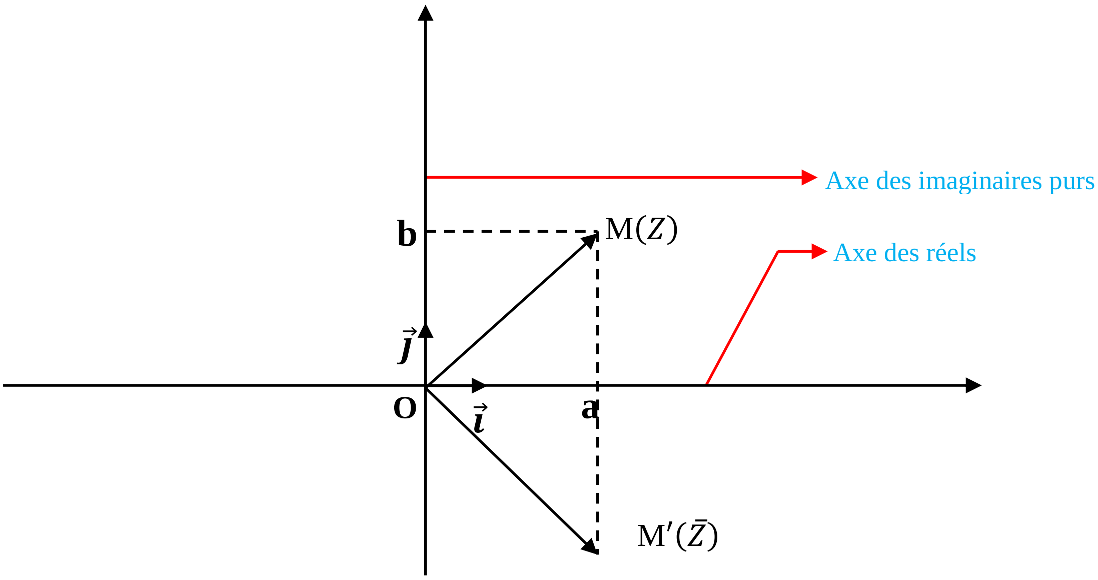
=>Z = $\frac{\left(1-\sqrt{6}\right)}{3} - i\,\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{3}$

III) Conjugué d'un nombre complexe :

1) Définition :

Soit $\mathbf{Z} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{ib}$ l'expression algébrique d'un nombre complexe. On appelle conjugué de Z, le nombre complexe noté $\bar{Z}$ tel que $\bar{Z} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{ib}$.

NB : les images des deux nombres complexes Z et $\bar{Z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.



Exemple

Donner le conjugué des nombres complexes suivants :

a) $Z = 1 - i$; **b)** $Z = i + \sqrt{3}$; **c)** $Z = i$. **d)** $Z = 3$

Solution

a) $Z = 1 - i \Rightarrow \bar{Z} = 1 + i$; **b)** $Z = i + \sqrt{3} \Rightarrow \bar{Z} = -i + \sqrt{3}$

c) $Z = i. \Rightarrow \bar{Z} = -i$; **d)** $Z = 3 \Rightarrow \bar{Z} = 3$

2) **Propriétés :**

Soient Z et Z' deux complexes :

P1 : Z = $\bar{Z}$ ⇔ Z est un réel

P2 : Z = $-\bar{Z}$⇔Z est un imaginaire pur

P3 : $\overline{Z+Z'} = \bar{Z} + \bar{Z'}$

P4 : $\overline{Z \times Z'} = \bar{Z} \times \bar{Z'}$

P5: $\overline{\left(\frac{Z}{Z'}\right)} = \frac{\bar{Z}}{\bar{Z'}}$ $(avec\ Z' \neq 0)$

P6 : $\overline{\left(\frac{a}{Z}\right)} = \frac{a}{\bar{Z}}$ $(avec\ Z' \neq 0\ \ et\ a \in \mathbb{R})$

P7 : $\overline{Z^n} = (\bar{Z})^n$

P8 : Re(Z) = $\frac{Z+\bar{Z}}{2}$ et Im (Z) = $\frac{Z-\bar{Z}}{2i}$

P9 : $Z \times \bar{Z}$ est un réel positif

Exemple

Soit A un nombre complexe tel que $= \frac{2+\bar{Z}}{1-\bar{Z}}$ $(avec\ \bar{Z} \neq 1)$

1) Ecrire A sou forme algébrique
2) Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe tel que :

a) A soit un réel

b) A soit un imaginaire pur.

Solution

1) Forme algébrique de A

Posons Z = $x + iy$ $=> \bar{Z} = x - iy$

On a : **Z** $= \frac{2+(x-iy)}{1-(x-iy)} = \frac{(2+x)+i(-y)}{(1-x)+i(y)} = \frac{[(2+x)+i(-y)][(1-x)-i(y)]}{(1-x)^2+(y)^2}$

$$= \frac{(2+x)(1-x)-i(2+x)(y)+i(-y)(1-x)-y^2}{(1-x)^2+(y)^2}$$

$$= \frac{(-x^2-y^2-x+2)+i(-3y)}{(1-x)^2+(y)^2} = \frac{(-x^2-y^2-x+2)}{(1-x)^2+(y)^2} + i\frac{(-3y)}{(1-x)^2+(y)^2}$$

2) Déterminons l'ensemble des points M du plan tel que :

a) A soit un réel

Zest un réel si sa partie imaginaire est nulle c'est-à-dire Im(**Z**)= 0

$< = > \frac{(-3y)}{(1-x)^2 + (y)^2} = 0 \; < = > -3y = 0 = > y = 0$

Alors l'ensemble des points M cherchés est la droite d'équation y = 0 ou encore l'axe des abscisses.

b) A soit un imaginaire pur.

A est un imaginaire pur si sa partie réelle est nulle c'est-à-dire Re(A) = 0

$< = > \frac{(-x^2 - y^2 - x + 2)}{(1-x)^2 + (y)^2} = 0 \; < = > -x^2 - y^2 - x + 2 = O$

$< = > x^2 + y^2 + x - 2 = 0 < = > \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 0)^2 = \frac{9}{4}$

Alors l'ensemble des points M cherchés est le cercle de centre $\left(\frac{-1}{2}\, ; 0\right)$ et de rayon r = $\frac{3}{2}$

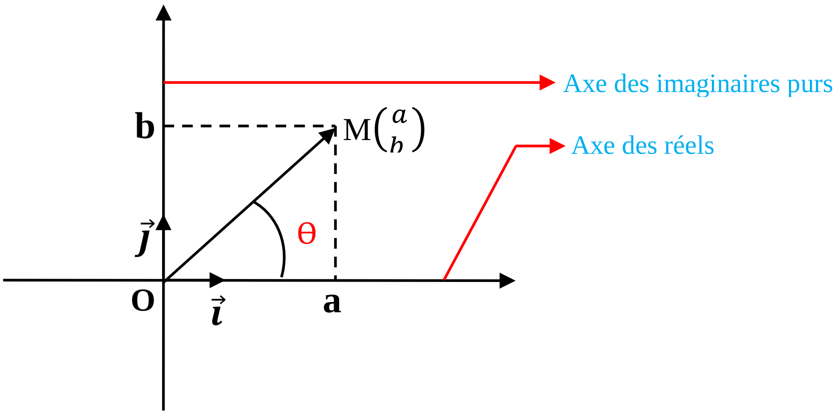
<u>NB</u> : $\boldsymbol{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \; < = > \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}}$

IV) Module et argument d'un nombre complexe :

1) Module :

Dans le plan rapporté à un repère $(o\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$; plaçons le point M de Z dont l'affixe est

$Z = a + ib \Rightarrow M\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$



Ici : $\|\overrightarrow{OM}\| = d(OM) = \sqrt{a^2 + b^2}$

a- Définition :

Soit $Z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle module de Z, le nombre réel positif ou nul noté : $|\boldsymbol{Z}|$ tel que $|\boldsymbol{Z}| = \sqrt{\boldsymbol{a^2} + \boldsymbol{b^2}}$

Si M est le point image de Z alors $|Z|$ = **d(O ; M)** = $\sqrt{\boldsymbol{a^2} + \boldsymbol{b^2}}$

Exemple

Déterminer le module des nombres complexes suivants :

a) $Z = -i$; **b)** $Z = \sqrt{3}$; **c)** $Z = \frac{1-i}{2}$; **d)** $Z = 1 - i\sqrt{3}$; **e)** $Z = 1 + i$

Solution

a) $Z = -i \Rightarrow |Z| = \sqrt{(0)^2 + (-1)^2} = \sqrt{0+1} = \sqrt{1} = 1$

b) $Z = \sqrt{3} \Rightarrow |Z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (0)^2} = \sqrt{3+0} = \sqrt{3}$

c) $Z = \frac{1-i}{2} \Rightarrow |Z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $Z = = 1 - i\sqrt{3} \Rightarrow |Z| = \sqrt{(1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

e) $Z = 1 + i \Rightarrow |Z| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

b- Propriétés :

P$_1$: $|Z|$ est toujours positif ; **P$_2$** : $|Z| = |\bar{Z}|$; **P$_3$** : $|Z| = 0 \Leftrightarrow Z = 0$

P$_4$: $|Z \times Z'| = |Z| \times |Z'|$; **P$_5$** : $|Z + Z'| \leq |Z| + |Z'|$ $(Inégalité\ triangulaire)$

P$_6$: $\left|\frac{Z}{Z'}\right| = \frac{|Z|}{|Z'|}$ $(avec\ Z' \neq 0)$; **P$_7$** : $\left|\frac{a}{Z}\right| = \frac{a}{|Z|}$ $(avec\ Z \neq 0\ et\ a \in \mathbb{R})$;

P$_8$: $|Z^n| = |Z|^n$ $(avec\ n \in \mathbb{N}^*)$

Exemple

Détermine le module des nombres complexes suivants

$Z_1 = 1 - i\sqrt{3}$; $Z_2 = 2 + 2i$; $Z_3 = -1 - i\sqrt{3}$; $Z_4 = \frac{Z_1}{Z_2}$; $Z_5 = (Z_2)^2 \times Z_3$; $Z_6 = \left(\frac{Z_3}{Z_1}\right)^3$

Solution

$Z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ $\Rightarrow |Z_1| = \sqrt{(1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$Z_2 = 2 + 2i$ $\Rightarrow |Z_2| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$Z_3 = -1 - i\sqrt{3}$ $\Rightarrow |Z_3| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$|Z_4| = \left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Z_5 $= (Z_2)^2 \times Z_3 \Rightarrow |Z_5| = |(Z_2)^2 \bullet Z_3| = |(Z_2)^2| \times |Z_3| = |Z_2|^2 \times |Z_3|$

$\Rightarrow |Z_5| = \left(2\sqrt{2}\right)^2 \times (2)$

$\Rightarrow |Z_5| = 4 \times 2 \times 2 = 16$

$|Z_6| = \left|\left(\frac{Z_3}{Z_1}\right)^2\right| = \frac{|(Z_3)^2|}{|(Z_1)^2|} = \frac{|Z_3|^2}{|Z_1|^2} = \frac{(2)^2}{(2)^2} = 1$

2) Argument :

a- Définition :

En observant la **figure 1** ci-dessus représentant un triangle rectangle d'angle θ, on a :

$$\begin{cases} Cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ Sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

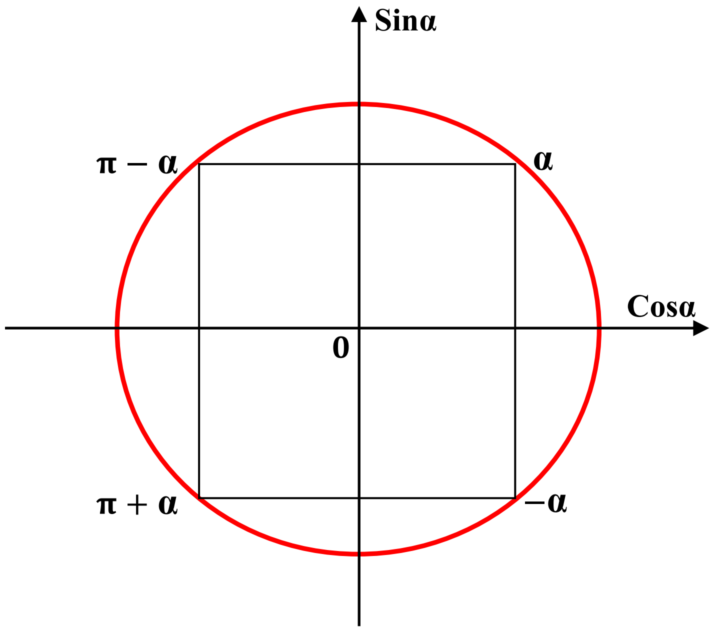
Soit **Z** est un nombre complexe de module $|\boldsymbol{Z}|$ ($avec\ |\boldsymbol{Z}| \neq 0$). On appelle argument de **Z**, le nombre réel noté **θ** ou **arg (Z)** tel que :

$$\begin{cases} Cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ Sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Cos\theta = \dfrac{a}{|\boldsymbol{Z}|} \\ Sin\theta = \dfrac{b}{|\boldsymbol{Z}|} \end{cases}$$

N.B :

Le cercle de référence trigonométrique et le tableau des angles trigonométriques sont nécessaires à connaître pour le calcul des arguments :

Cercle trigonométrique et le Tableau des angles remarquables trigonométriques



Degrés	Radians	Sinus	Cosinus
0^o	0	0	1
30^o	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45^o	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60^o	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
90^o	$\frac{\pi}{2}$	1	0
180^o	π	0	-1
360^o	2π	0	1

Exemple

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants

$Z_1 = -1 - i\sqrt{3}$; $Z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $Z_3 = 1 + i$; $Z_4 = 1 - i\sqrt{3}$

Solution

$\mathbf{Z_1 = -1 - i\sqrt{3}} \Rightarrow |Z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$\arg(Z_1)$ est tel que : $\begin{cases} Cos\Theta = \frac{-1}{2} \\ Sin\Theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \Theta = \pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \Theta = \frac{4\pi}{3}$

Z₂ = $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ => $|Z_2| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$

arg(Z_2) est tel que : $\begin{cases} Cos\Theta = \frac{\frac{-1}{2}}{1} \\ Sin\Theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} \end{cases} <=> \begin{cases} Cos\Theta = \frac{-1}{2} \\ Sin\Theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Theta = \pi - \frac{\pi}{3} => \Theta = \frac{2\pi}{3}$

Z_3 = 1 + *i* => $|Z_3| = \sqrt{(1)^2+(1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

arg(Z_3) est tel que : $\begin{cases} Cos\Theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ Sin\Theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} <=> \begin{cases} Cos\Theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ Sin\Theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} => \Theta = \frac{\pi}{4}$

Z_4 =1 – *i*$\sqrt{3}$ => $|Z_1| = \sqrt{(1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

arg(Z_4) est tel que : $\begin{cases} Cos\Theta = \frac{1}{2} \\ Sin\Theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} => \Theta = -\frac{\pi}{3}$

b- Propriétés :

Soient Z et Z' deux nombres complexes d'arguments respectifs arg(Z) et arg (Z')

P₁ : $\arg(Z \times Z') = \arg(Z) + \arg(Z')$; **P₂** : $\arg\left(\frac{Z}{Z'}\right) = \arg(Z) - \arg(Z')$

P₃ : $\arg(Z^n) = n\arg(Z)$ $(avec\ n \in \mathbb{N}^*)$; **P₄** : $\arg\left(\frac{a}{Z}\right) = -\arg(Z)$ $(avec\ Z \neq 0)$

P₅ : $\arg(\bar{Z}) = -\arg(Z)$

Exemple

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$Z_1 = 1 - i\sqrt{3}$; $Z_2 = 2 + 2i$; $Z_3 = -1 - i\sqrt{3}$; $Z_4 = \frac{Z_1}{Z_2}$; $Z_5 = (Z_2)^2 \times Z_3$; $Z_6 = \left(\frac{Z_3}{Z_1}\right)^3$

Solution

Z_1 = 1 – *i*$\sqrt{3}$ => $|Z_1| = \sqrt{(1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

arg(Z_1) est tel que : $\begin{cases} Cos\Theta = \frac{1}{2} \\ Sin\Theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ $= > \Theta = -\frac{\pi}{3} = > \Theta = \frac{-\pi}{3}$

$\mathbf{Z_2 = 2 + 2}\boldsymbol{i} = > |Z_2| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

arg(Z_2) est tel que : $\begin{cases} Cos\Theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} \\ Sin\Theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} \end{cases} = > \begin{cases} Cos\Theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ Sin\Theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} = > \Theta = \frac{\pi}{4}$

$\mathbf{Z_3 = -1 -} \ i\sqrt{3} = > |Z_3| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

arg(Z_3) est tel que : $\begin{cases} Cos\Theta = \frac{-1}{2} \\ Sin\Theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ $= > \Theta = \pi + \frac{\pi}{3} = > \Theta = \frac{4\pi}{3}$

$|Z_4| = \left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Et

$\arg(Z_4) = \arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \arg(Z_1) - \arg(Z_2) = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{-7\pi}{12}$

$Z_5 = (Z_2)^2 \times Z_3 = > |Z_5| = |(Z_2)^2 \bullet Z_3| = |(Z_2)^2| \times |Z_3| = |Z_2|^2 \times |Z_3| = \left(2\sqrt{2}\right)^2 \text{ x } (2)$

$= > |Z_5| = 4 \times 2 \times 2 = 16$

Et

$\arg(Z_5) = \arg[(Z_2)^2 \bullet Z_3] = \arg(Z_2)^2 + \arg(Z_3) = 2\arg(Z_2) + \arg(Z_3) = 2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{4\pi}{3}\right)$

$= > \arg(Z_5) = \frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3} = \frac{11\pi}{6}$

$|Z_6| = \left|\left(\frac{Z_3}{Z_1}\right)^2\right| = \frac{|(Z_3)^2|}{|(Z_1)^2|} = \frac{|Z_3|^2}{|Z_1|^2} = \frac{(2)^2}{(2)^2} = 1$

$\arg\left[\left(\frac{Z_3}{Z_1}\right)^2\right] = 2\arg\left(\frac{Z_3}{Z_1}\right) = 2[\arg(Z_3) - \arg(Z_1)] = 2\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{10\pi}{3}$

V) Forme trigonométrique d'un nombre complexe :

1) Définition :

Soit Z = $a + ib$ un nombre complexe de module $\boldsymbol{r}$ et d'argument θ. On appelle forme trigonométrique de Z toute écriture de la forme **Z = *r* (cos θ +*i* sin θ) avec r =** $\sqrt{a^2 + b^2}$ et

$$\theta \in \left[-\pi \;;\; \pi\right[\begin{cases} Cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ Sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

2) Propriétés :

Soient Z et Z' deux complexe tels que $Z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $Z' = r'\,(\cos\theta' + i\sin\theta')$

P$_1$: $Z \times Z' = r \times r'[\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')]$

P$_2$: $\dfrac{Z}{Z'} = \dfrac{r}{r'}\,[\mathrm{Cos}(\theta - \theta') + i\sin(\theta - \theta')]$

P$_3$: $Z^n = r^n[\mathrm{Cos}(n\theta) + i\sin(n\theta)]$

<u>NB</u> : si r = 1 on a : $Z^n = [\mathrm{Cos}(n\theta) + i\sin(n\theta)]$ (**formule de Moivre**)

Exemple

Ecrivez sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$Z_1 = 1 - i\sqrt{3}$; $Z_2 = 2 + 2i$; $Z_3 = -1 - i\sqrt{3}$; $Z_4 = \dfrac{Z_1}{Z_2}$; $Z_5 = (Z_2)^2 \times Z_3$; $Z_6 = \left(\dfrac{Z_3}{Z_1}\right)^3$

<u>Solution</u>

$\mathbf{Z_1 = 1 - }\boldsymbol{i}\sqrt{3} \Rightarrow |Z_1| = \sqrt{(1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

arg(Z_1) est tel que : $\begin{cases} Cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ Sin\theta = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \dfrac{-\pi}{3}$

Alors Z_1 = $2\left[\boldsymbol{Cos}\left(\dfrac{-\pi}{3}\right) + \boldsymbol{iSin}\left(\dfrac{-\pi}{3}\right)\right]$

$\mathbf{Z_2 = 2 + 2}\boldsymbol{i} \Rightarrow |Z_2| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

arg(Z_2) est tel que : $\begin{cases} Cos\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} \\ Sin\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ Sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

Alors $\mathbf{Z_2 = 2\sqrt{2}\left[Cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + iSin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]}$

$\mathbf{Z_3 = -1 -}\ i\sqrt{3} \Rightarrow |Z_3| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

arg(Z_3) est tel que : $\begin{cases} Cos\theta = \frac{-1}{2} \\ Sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{4\pi}{3}$

Alors $\mathbf{Z_3 = 2\left[Cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + iSin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right]}$

$|Z_4| = \left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Et

$\arg(Z_4) = \arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \arg(Z_1) - \arg(Z_2) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$

Alors $\mathbf{Z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[Cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + iSin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right]}$

$Z_5 = (Z_2)^2 \times Z_3 \Rightarrow |Z_5| = |(Z_2)^2 \bullet Z_3| = |(Z_2)^2| \times |Z_3| = |Z_2|^2 \times |Z_3| = \left(2\sqrt{2}\right)^2 \times (2)$

$\Rightarrow |Z_5| = 4\times2\times2 = 16$ et

$\arg(Z_5) = \arg[(Z_2)^2 \bullet Z_3] = \arg(Z_2)^2 + \arg(Z_3) = 2\arg(Z_2) + \arg(Z_3) = 2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{4\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow \arg(Z_5) = \frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3} = \frac{11\pi}{6}$

Alors $\mathbf{Z_5 = 16\left[Cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + iSin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right]}$

$|Z_6| = \left|\left(\frac{Z_3}{Z_1}\right)^2\right| = \frac{|(Z_3)^2|}{|(Z_1)^2|} = \frac{|Z_3|^2}{|Z_1|^2} = \frac{(2)^2}{(2)^2} = 1$

$\arg\left[\left(\frac{Z_3}{Z_1}\right)^2\right] = 2\arg\left(\frac{Z_3}{Z_1}\right) = 2[\arg(Z_3) - \arg(Z_1)] = 2\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3}$

Alors $\mathbf{Z_6 = \left[Cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + iSin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right]}$

VI) Forme polaire d'un nombre complexe

1) Définition :

Soit Z un nombre complexe de module r et d'argument θ. On appelle forme polaire de Z toute écriture de Z de la forme **Z= [r ; θ]**

2) Propriétés :

Soient Z et Z' deux complexe tels que Z =[r ; θ] et Z' = [r' ; θ']

P1 : $Z \bullet Z' = [r \bullet r' ; \theta + \theta']$

P2: $\frac{Z}{Z'} = \left[\frac{r}{r'} ; \theta - \theta'\right]$

P3 : $Z^n = [r^n ; n\theta]$

Exemple

Donner la forme polaire des nombres complexes suivants :

$Z_1 = -1 - i$; $Z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$; $Z_3 = 1 - i\sqrt{3}$; $Z_1 \times Z_2$; $\frac{Z_3}{Z_2}$; Z_3^4

Solution

$Z_1 = -1 - i \Rightarrow |Z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

arg(Z_1) est tel que : $\begin{cases} Cos\Theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ Sin\Theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Cos\Theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ Sin\Theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Theta = \pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \Theta = \frac{5\pi}{4}$

Alors $Z_1 = \left[\sqrt{2} ; \frac{5\pi}{4}\right]$

$Z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \Rightarrow |Z_2| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

arg(Z_2) est tel que : $\begin{cases} Cos\Theta = \frac{\frac{-1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ Sin\Theta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Cos\Theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ Sin\Theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Theta = \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \Theta = \frac{3\pi}{4}$

Alors $Z_2 = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \frac{3\pi}{4}\right]$

$Z_3 = 1 - i\sqrt{3} \Rightarrow |Z_3| = \sqrt{(1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

arg(Z_3) est tel que : $\begin{cases} Cos\Theta = \frac{1}{2} \\ Sin\Theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \Theta = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow \Theta = -\frac{\pi}{3}$

Alors $Z_3 = \left[2\ ;\ -\frac{\pi}{3}\right]$

Z_1 x Z_2 $= \left[\sqrt{2} \bullet \frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \frac{5\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right] = [1\ ;\ 2\pi]$

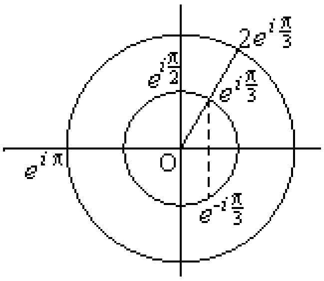
$\frac{Z_3}{Z_2} = \left[\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\ ;\ -\frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{4}\right] = \left[2\sqrt{2}\ ;\ -\frac{13\pi}{12}\right]$

$Z_3^4 = \left[2^4\ ;\ -\frac{4\pi}{3}\right]$

VII) Forme exponentielle d'un nombre complexe :

1) Définition :

Soit Z un nombre complexe de module $\mathbf{r}$ et d'argument $\boldsymbol{\Theta}$. On appelle forme exponentielle d'un nombre complexe Z, toute écriture de Z se ramenant sous la forme $\mathbf{Z} = \mathbf{r}\boldsymbol{e^{i\theta}}$ où sonconjuguéest$\overline{\boldsymbol{Z}} = \mathbf{r}\boldsymbol{e^{-i\theta}}$



2) Propriétés :

Soient Z et Z' deux nombres complexes de formes exponentielles respectives :

$\mathbf{Z} = \mathbf{r}\boldsymbol{e^{i\theta}}$ **et** $\mathbf{Z'} = \mathbf{r'}\boldsymbol{e}^{i\Theta'}$

P1 : $Z \cdot Z' = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r'}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}(\Theta+\Theta')}$

P2 : $\dfrac{Z}{Z'} = \dfrac{r}{r'}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}(\Theta-\Theta')}$

P3 : $Z \cdot \bar{Z} = \mathbf{r}^2\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}(\Theta-\Theta)} = \mathbf{r}^2\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}(\mathbf{0})} = \mathbf{r}^2\boldsymbol{e}^{\mathbf{0}} = \mathbf{r}^2 \bullet \mathbf{1} = \mathbf{r}^2$ **(Avec** $\boldsymbol{e}^{\mathbf{0}} = \mathbf{1}$ **)**

P4 : $Z^n = r^n e^{in\Theta}$

P5 : Formule d'Euler

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + \bar{e}^{i\theta}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - \bar{e}^{i\theta}}{2i} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} e^{in\theta} + \bar{e}^{in\theta} = 2\cos n\theta \\ e^{in\theta} - \bar{e}^{in\theta} = 2i\sin n\theta \end{cases}$$

Exemple 1

Compléter le tableau suivant

Formes algébriques de Z	$-5(1 + i\sqrt{3})$		
Formes trigonométriques de Z			$2\left(Cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$
Formes exponentielles de Z		$4e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$	

Exemple 2

Soient les nombres complexes :

$Z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$; $Z_2 = 1 - i$; $Z_3 = \dfrac{Z_1}{Z_2}$

1) Ecrire Z_1 , Z_2 et Z_3 sous forme trigonométrique.
2) Ecrire Z_3 sous forme algébrique.
3) Déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.
4) Calculez $(Z_3)^{24}$.

Solution1

Formes algébriques de Z	$-5(1 + i\sqrt{3})$	$\mathbf{2(-1 + i\sqrt{3})}$	$\mathbf{\sqrt{2}(1 - i)}$
Formes trigonométriques de Z	$\mathbf{10\left[Cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + iSin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right]}$	$\mathbf{4\left[Cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + iSin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]}$	$2\left(Cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$
Formes exponentielles de Z	$\mathbf{10e^{\frac{i4\pi}{3}}}$	$4e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$	$\mathbf{2e^{i\left(\frac{-\pi}{4}\right)}}$

Solution 2

Soient les nombres complexes : $Z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$; $Z_2 = 1 - i$; $Z_3 = \dfrac{Z_1}{Z_2}$

1) Ecrire Z_1 , Z_2 et Z_3 sous forme trigonométrique.

$Z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ => $|Z_1| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{8}{4}} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

arg(Z_1) est tel que : $\begin{cases} Cos\Theta = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2}} \\ Sin\Theta = -\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} \end{cases} <=> \begin{cases} Cos\Theta = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} \\ Sin\Theta = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \end{cases} <=> \begin{cases} Cos\Theta = \frac{\sqrt{2} \bullet \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ Sin\Theta = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \end{cases}$

$<=> \begin{cases} Cos\Theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ Sin\Theta = \frac{-1}{2} \end{cases}$

$=> \Theta = \frac{-\pi}{6}$

Alors $\mathbf{Z_1 = \sqrt{2}\left[Cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + iSin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right]}$

$Z_2 = 1 - i => |Z_2| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

arg(Z_2) est tel que : $\begin{cases} Cos\Theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ Sin\Theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases} => \Theta = \frac{-\pi}{4}$

Alors $\mathbf{Z_2 = \sqrt{2}\left[Cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + iSin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right]}$

$Z_3 = \dfrac{Z_1}{Z_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left[Cos\left(\frac{-\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + iSin\left(\frac{-\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)\right] = Cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + iSin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Alors $\mathbf{Z_3 = \left[Cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + iSin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]}$

2) Ecrire Z_3 sous forme algébrique.

$Z_3 = \dfrac{Z_1}{Z_2} => Z_3 = \dfrac{\frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}}{1 - i} = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2(1 - i)} = \dfrac{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(2 + 2i)}{(2)^2 + (-2)^2} = \dfrac{2(\sqrt{6} + \sqrt{2}) + 2i(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{8}$

$= > Z_3 = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4} + i\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$ **Alors** $\boldsymbol{Z_3 = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4} + i\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}}$

3) En déduisons les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Par identification des formes trigonométrique et algébrique, on a :

$$\left[\boldsymbol{Cos}\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{12}}\right) + \boldsymbol{iSin}\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{12}}\right)\right] = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4} + \boldsymbol{i}\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} < = > \begin{cases} \boldsymbol{Cos}\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{12}}\right) = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4} \\ \boldsymbol{Sin}\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{12}}\right) = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} \end{cases}$$

4) Calculons $(Z_3)^{24}$.

En utilisant la formule de Moivre **($Z^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$) ;** on a :

$(Z_3)^{24} = \boldsymbol{Cos}\left(\frac{\boldsymbol{24\pi}}{\boldsymbol{12}}\right) + \boldsymbol{iSin}\left(\frac{\boldsymbol{24\pi}}{\boldsymbol{12}}\right) = \boldsymbol{Cos}(\boldsymbol{2\pi}) + \boldsymbol{iSin}(\boldsymbol{2\pi})$

Alors $(Z_3)^{24}$ $=\boldsymbol{Cos}(\boldsymbol{2\pi}) + \boldsymbol{iSin}(\boldsymbol{2\pi})$

VIII) Formules de Moivre et formules d'Euler:

1) Définition :

Soit Z un nombre complexe **de module 1 et d'argument** θ**.** On appelle formule de **Moivre** toute écriture de Z se ramenant sous la forme $\mathbf{Z^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)}$ **avec** $(n \in \mathbb{N}^*)$

2) Triangle de Pascal :

Le triangle de Pascal est une méthode très pratique utilisée pour le développement des identités :

$(a + b)^n$ et $(a - b)^n$. Elle se présente comme suit :

1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

. . . .
.
.

3) **Application de la formule de Moivre :**

$$\begin{cases} Z = \cos\theta + i\sin\theta \\ \overline{Z} = \cos\theta - i\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{Z+\overline{Z}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{Z \ \ -\overline{Z}}{2i} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \\ \overline{Z}^n = \cos n\theta - i\sin n\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos n\theta = \dfrac{Z^n+\overline{Z}^n}{2} \\ \sin n\theta = \dfrac{Z^n-\overline{Z}^n}{2i} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z = \cos\theta + i\sin\theta \\ \overline{Z} = \cos - i\sin n\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z\times\overline{Z} = 1 \\ Z^n\times\overline{Z}^n = 1 \end{cases}$$

4) **Linéarisation : de $Cos^n\Theta$ et $Sin^n\Theta$**

Pour **Linéariser $Cos^n\Theta$et $Sin^n\Theta$ (n$\in$ ℕ)** ; on peut utiliser le procédé suivant, mettant en jeu les formules **(d'Euler ou de Moivre)** et du **(binôme de Newton ou du triangle de Pascal).**

Méthode :

- Développer et réduire : $Cos^n\Theta = \dfrac{(z+\bar{z})^n}{2^n}$ ou $\sin^n\theta = \dfrac{(z-\bar{z})^n}{(2i)^n}$ **(Moivre)**

Ou encore $\cos^n\Theta = \dfrac{(e^{i\theta}+\bar{e}^{i\theta})^n}{2^n}$ ou $\sin^n\theta = \dfrac{(e^{i\theta}-\bar{e}^{i\theta})^n}{(2i)^n}$ **(Euler)**

- Regrouper deux à deux les termes d'exposants opposés et exprimer chacun deux en fonction des termes de la forme **Coskx et Sinkx.**

Exemple

En utilisant les formules de Moivre et d'Euler, linéariser les expressions suivantes :

$A(x) = \cos^3 x$; $B(x) = \sin^3 x$; $C(x) = Cos^5\dfrac{x}{2}$; $D(x) = \cos^3 x \bullet \sin^3 x$

Solution

- **Utilisation des formules de Moivre**

$A(x) = \cos^3 x$

Posons $\Theta = x \Rightarrow A(x) = \cos^3\Theta = (Cos\theta)^3 = \left(\dfrac{Z+\bar{Z}}{2}\right)^3 = \dfrac{(Z+\bar{Z})^3}{(2)^3} = \dfrac{Z^3+3Z^2\bar{Z}+3Z\bar{Z}^2+\bar{Z}^3}{8}$

$\Rightarrow A(x) = \dfrac{(Z^3+\ \bar{Z}^3)\ +\ (3Z^2\bar{Z}+3Z\bar{Z}^2)}{8} = \dfrac{(Z^3+\bar{Z}^3)+(3Z^2\bar{Z}+3Z\bar{Z}^2)}{8} = \dfrac{(Z^3+\bar{Z}^3)+3Z\bar{Z}(Z+\bar{Z})}{8}$

Or $Z^n + \bar{Z}^n = 2\text{Cos}(n\Theta) => Z^3 + \bar{Z}^3 = 2\text{Cos}(3\Theta)$ et $Z + \bar{Z} = 2\text{Cos}\Theta$

De même $Z^n\bar{Z}^n = 1 => Z\bar{Z} = 1$

$=> A(x) = \frac{2\text{Cos}(3\theta) + 3(2\text{Cos}(\theta))}{8} = \frac{2\text{Cos}3\Theta + 6\text{Cos}\Theta}{8} = \frac{2}{8}(Cos3\Theta + 3\,Cos\Theta)$

$=> A(x) = \frac{1}{4}(Cos3\Theta + 3\,Cos\Theta)$ or $\theta = x$

$=> A(x) = \frac{1}{4}(Cos3x + 3\,Cosx)$

B(x) = Sin^3x

Posons $\theta = x => B(x) = \text{Sin}^3\theta = (Sin\theta)^3 = \left(\frac{Z - \bar{Z}}{2i}\right)^3 = \frac{(Z - \bar{Z})^3}{(2i)^3} = \frac{Z^3 - 3Z^2\bar{Z} + 3Z\bar{Z}^2 - \bar{Z}^3}{-8i}$

$=> B(x) = \frac{(Z^3 - \bar{Z}^3) + (-3Z^2\bar{Z} + 3Z\bar{Z}^2)}{-8i} = \frac{(Z^3 - \bar{Z}^3) - 3Z\bar{Z}(Z - \bar{Z})}{-8i}$

Or $Z^n - \bar{Z}^n = 2i\text{Sin}(n\Theta) => Z^3 - \bar{Z}^3 = 2i\text{Sin}(3\Theta)$ et $Z - \bar{Z} = 2i\text{Sin}\Theta$

De même $Z^n\bar{Z}^n = 1 => Z\bar{Z} = 1$

$=> B(x) = \frac{2i\text{Sin}(3\theta) + 3(2i\text{Sin}(\theta))}{-8i} = \frac{2i\text{Sin}3\Theta + 6i\text{Sin}\Theta}{-8i} = \frac{2i}{-8i}(Sin3\Theta + 3Sin\Theta)$

$=> B(x) = -\frac{1}{4}(Sin3\Theta + 3Sin\Theta)$ or $\theta = x$

$=> B(x) = -\frac{1}{4}(Sin3x + 3Sinx)$

C(x) = Cos$^5\frac{x}{2}$

Posons $\theta = \frac{x}{2} => C(x) = \cos^5\theta = (Cos\theta)^5 = \left(\frac{Z + \bar{Z}}{2}\right)^5 = \frac{(Z + \bar{Z})^5}{(2)^5}$

$C(x) = \frac{Z^5 + 5Z^4\bar{Z} + 10Z^3\bar{Z}^2 + 10Z^2\bar{Z}^3 + 5Z\bar{Z}^4 + \bar{Z}^5}{32}$

$=> C(x) = \frac{(Z^5 + \bar{Z}^5) + (5Z^4\bar{Z} + 5Z\bar{Z}^4) + (10Z^3\bar{Z}^2 + 10Z^2\bar{Z}^3)}{32}$

$=> C(x) = \frac{(Z^5 + \bar{Z}^5) + 5Z\bar{Z}(Z^3 + \bar{Z}^3) + 10Z^2\bar{Z}^2(Z + \bar{Z})}{32}$

Or $Z^n + \bar{Z}^n = 2\text{Cos}(n\theta) => Z^5 + \bar{Z}^5 = 2\text{Cos}(5\theta)$; $Z^3 + \bar{Z}^3 = 2\text{Cos}(3\theta)$ et
$Z + \bar{Z} = 2\text{Cos}\theta$

De même $Z^n\bar{Z}^n = 1 => Z\bar{Z} = 1$ et $Z^2\bar{Z}^2 = 1$

$$= > C(x) = \frac{2Cos(5\theta) + 5(2Cos(3\theta)) + 10(2\,Cos\theta)}{32} = \frac{2}{32}(Cos5\Theta + 5\,Cos3\Theta\ +\ 10Cos\Theta)$$

$= > C(x) = \frac{1}{16}(Cos5\Theta + 5\,Cos3\Theta\ +\ 10Cos\Theta)$ or $\theta = \frac{x}{2}$

$$= > C(x) = \frac{1}{16}\left(Cos\,\frac{5x}{2} + 5\,Cos\,\frac{3x}{2}\ +\ 10Cos\,\frac{x}{2}\right)$$

D(x) = $\cos^3 x \bullet \sin^3 x$

Posons $\theta = x$ = >D(x) = $\cos^3\theta \bullet \sin^3\theta$ = $(Cos\theta)^3(Sin\theta)^3$ = $\left(\frac{Z+\bar{Z}}{2}\right)^3\left(\frac{Z-\bar{Z}}{2i}\right)^3$

$$= > D(x) = \frac{(Z+\bar{Z})^3}{(2)^3} \times \frac{(Z-\bar{Z})^3}{(2i)^3} = \frac{(Z+\bar{Z})^3(Z-\bar{Z})^3}{-64i}$$

$$= > D(x) = \frac{\left(Z^3 + 3Z^2\bar{Z} + 3Z\bar{Z}^2 + \bar{Z}^3\right)\left(Z^3 - 3Z^2\bar{Z} + 3Z\bar{Z}^2 - \bar{Z}^3\right)}{-64i}$$

Après development, on a :

$$D(x) = \frac{(Z^6 - \bar{Z}^6) + (-3\,Z^4\bar{Z}^2 + 3Z^2\bar{Z}^4)}{-64i} = \frac{(Z^6 - \bar{Z}^6) - 3Z^2\bar{Z}^2(Z^2 - \bar{Z}^2)}{-64i}$$

Or $Z^n - \bar{Z}^n = 2i\text{Sin}(n\theta)$ = > $Z^6 - \bar{Z}^6 = 2i\text{Sin}(6\theta)$ et $Z^2 - \bar{Z}^2 = 2i\text{Sin}(2\theta)$

De même $Z^n\bar{Z}^n = 1$ = > $Z^2\bar{Z}^2 = 1$

$$= > D(x) = \frac{2i\text{Sin}(6\theta) - 3(2i\text{Sin}(2\theta))}{-64i} = \frac{2i}{-64i}(Sin6\Theta\ - 3Sin2\Theta) = \frac{1}{32}(Sin6\Theta\ - 3Sin2\Theta)$$

Or $\theta = x$ = > D(x) = $\frac{1}{32}(Sin6x\ - 3Sin2x)$

- **Utilisation des formules d'Euler**

A(x) = $\cos^3 x$

Posons θ = x = > A(x) = $\cos^3\theta = (Cos\theta)^3 = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^3}{(2)^3}$

= > A(x) = $\frac{e^{3i\theta}+3e^{2i\theta}e^{-i\theta}+3e^{i\theta}e^{-2i\theta}+e^{-3i\theta}}{8}$

= > A(x) = $\frac{e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}+3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}}{8} = \frac{(e^{3i\theta}+e^{-3i\theta})+3(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}{8}$

Or $e^{in\theta} + e^{-in\theta}$ = 2Cos(nθ) = >$e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}$= 2Cos(3θ)

Et $e^{i\theta} + e^{-i\theta}$= 2Cosθ

De même $e^{in\theta} \bullet e^{-in\theta}$= 1 = >$e^{i\theta} \bullet e^{-i\theta}$= 1

= > A(x) = $\frac{2\text{Cos}(3\theta)+3(2\text{Cos}(\theta))}{8} = \frac{2\text{Cos}3\Theta+6\text{Cos}\Theta}{8} = \frac{2}{8}(Cos3\Theta + 3\,Cos\Theta)$

= > A(x) =$\frac{1}{4}(Cos3\Theta + 3\,Cos\Theta)$ or Θ = x

= > A(x) =$\frac{1}{4}(Cos3x + 3\,Cosx)$

Faites-en de même avec les autres cas.

IX) Equations dans ℂ

1) Equation du premier degré :

a) Définition :
On appelle équation du premier degré dans ℂ; toute équation de la forme **aZ + b = 0.**
Avec (a ≠ 0 et a ∈ ℂ)

b) Résolution :
L'ensemble solution de l'équation **aZ + b = 0 est S =** $\left\{\frac{-b}{a}\right\}$

Exemple

Résoudre dans ℂ l'équation : $(1+2i)Z-(i-1)=iZ-3$.

Solution

$(1+2i)Z-(i-1)=iZ-3$

$=>(1+2i)Z-iZ=(i-1)-3$

$=>Z(1+i)=-4+i$

$=>Z=\frac{-4+i}{1+i}$

$=>Z=\frac{(-4+i)(1-i)}{(1)^2+(1)^2}$

$=>Z=\frac{-3+5i}{2}$

$=>Z=\frac{-3}{2}+\frac{5}{2}i$

$=>S=\left\{\frac{-3}{2}+\frac{5}{2}i\right\}$

2) **Racines carrées d'un nombre complexe :**

a) **Définition** :

On appelle racines carrées de Z, tout nombre complexe z tel que Z = z^2.

Exemple : Si Z = $9i^2$ => $z_1 = -3i$ ou $z_2 = 3i$.

b) **Résolution du cas général :**

Si Z = $a + ib$ et $z = x + iy$. On dit que z est une racine carrée de **Z** si et seulement si

$$\begin{cases} Z = z^2 \\ |Z| = |z^2| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+iy)^2 = a+ib \\ x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2+2ixy = a+ib \\ x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$$

Exemple

Trouver les racines carrées de : $Z_1 = 5 - 12i$; $Z_2 = 45 + 28i$; $Z_3 = 3 - 4i$

Solution

$Z_1 = 5 - 12i$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = -12 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(5)^2 + (-12)^2} \end{cases} <=> \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 & (1) \\ xy = -6 & (2) \\ x^2 + y^2 = 13 & (3) \end{cases}$$

Effectuons : (1) + (3)

On a : $2x^2 = 18 => x^2 = 9 => x = -3 \quad ou \quad x = 3$

(2) : $xy = -6 => y = \frac{-6}{x}$

- Si $x = -3 \quad => y = \frac{-6}{-3} = 2$ et $\delta_1 = x + iy \quad => \delta_1 = -3 + 2i$
- Si $x' = 3 \quad => y' = \frac{-6}{3} = -2$ et $\delta_2 = x' + iy' \quad => \delta_2 = 3 - 2i$

Alors les racines carrées de Z_1 sont $\delta_1 = -3 + 2i$ et $\delta_2 = 3 - 2i$

Z₂ = $\mathbf{45 + 28}\boldsymbol{i}$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 45 \\ 2xy = 28 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(45)^2 + (28)^2} \end{cases} <=> \begin{cases} x^2 - y^2 = 45 & (1) \\ xy = 14 & (2) \\ x^2 + y^2 = 53 & (3) \end{cases}$$

Effectuons : (1) + (3)

On a : $2x^2 = 98 => x^2 = 49 => x = -7 \quad ou \quad x = 7$

(2) : $xy = 14 => y = \frac{14}{x}$

- Si $x = -7 \quad => y = \frac{14}{-7} = -2$ et $\delta_1 = x + iy \quad => \delta_1 = -7 - 2i$
- Si $x' = 7 \quad => y' = \frac{14}{7} = 2$ et $\delta_2 = x' + iy' \quad => \delta_2 = 7 + 2i$

Alors les racines carrées de Z₂ sont $\boldsymbol{\delta_1 = -7 - 2i}$ et $\boldsymbol{\delta_2 = 7 + 2i}$

Z₃ = $\mathbf{3 - 4}\boldsymbol{i}$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} \end{cases} <=> \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 & (1) \\ xy = -2 & (2) \\ x^2 + y^2 = 5 & (3) \end{cases}$$

Effectuons : (1) + (3)

On a : $2x^2 = 8 => x^2 = 4 => x = -2 \quad ou \quad x = 2$

(2) : $xy = -2 => y = \frac{-2}{x}$

- Si $x = -2 \quad => y = \frac{-2}{-2} = 1$ et $\delta_1 = x + iy \quad => \delta_1 = -2 + i$
- Si $x' = 2 \quad => y' = \frac{-2}{2} = -1$ et $\delta_2 = x' + iy' \quad => \delta_2 = 2 - i$

Alors les racines carrées de Z₁ sont $\boldsymbol{\delta_1 = -2 + i}$ et $\boldsymbol{\delta_2 = 2 - i}$

Autre méthode pratique

Soit Z = a + ib, l'écriture algébrique d'un nombre complexe.

Si $\frac{b}{2}$ est un entier relatif tel que $\frac{b}{2} = b_1 \times b_2$ avec ($b_1^2 - b_2^2 = a$)

Alors les racines carrées de Z sont : $\boldsymbol{\delta_1} = b_1 + ib_2$ **et** $\boldsymbol{\delta_2} = -b_1 - ib_2$

Exemple

Déterminer les racines carrées de Z = 5 – 12i

Ici : a = 5 et b = -12

$$\frac{b}{2} = \frac{-12}{2} = -6 = -3 \times 2$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$(-\mathbf{3})^2 \qquad (\mathbf{2})^2$$

$$\| \qquad \|$$

$$\mathbf{9} \;-\; \mathbf{4} = \mathbf{5} = \mathbf{a}$$

Alors : $\boldsymbol{b_1} = -3$ et $\boldsymbol{b_2} = 2$

D'où $\boldsymbol{\delta_1} = -\mathbf{3} + \mathbf{2}\boldsymbol{i}$ **et** $\boldsymbol{\delta_2} = -(-\mathbf{3} + \mathbf{2}\boldsymbol{i}) = \mathbf{3} - \mathbf{2}\boldsymbol{i}$

En observant la solution obtenue à la page 26, on remarque que les résultats sont identiques.

Contre exemple :

Déterminer les racines carrées de Z = 20 – 16i

Ici : a = 20 et b = -16

$\frac{b}{2} = \frac{-16}{2} = -8 = -4 \quad \times \quad 2$

$(-4)^2 \quad (2)^2$

$\| \quad \|$

$16 \quad - \quad 4 = 12 \neq a$

Alors cette méthode est à rejeté.

Faites-en de même avec les complexes Z_2 et Z_3.

3) Equation du second degré :

a) Définition:

On appelle équation du second degré dans $\mathbb{C}$, toute équation de la forme :

$aZ^2 + bZ + c = 0 \ (a \neq 0)$

b) Résolution :

La résolution de telles équations nécessite d'abords le calcul du discriminant associé Δ tel que $\Delta = b^2 - 4ac$.

- **Si $\Delta > 0$, on a :** $Z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ **et** $Z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- **Si $\Delta = 0$, on a :** $Z_1 = Z_2 = \frac{-b}{2a}$
- **Si $\Delta < 0$, on a :** $Z_1 = \frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2a}$ **et** $Z_2 = \frac{-b-i\sqrt{\Delta}}{2a}$
- **Si $\Delta = a' + ib'$(sous forme algébrique), on a :** $Z_1 = \frac{-b+\delta_1}{2a}$ **et** $Z_2 = \frac{-b+\delta_2}{2a}$

Où : δ_1 et δ_2 sont les racines carrées de Δ.

Exemple

Résoudre dans ℂ les équations suivantes :

a) $Z^2 - 2Z + 2 = 0$; **b)** $-2Z^2 + Z + 1 = 0$; **c)** $Z^2 - 4Z + 4 = 0$;
d) $4Z^2 - 4(1 + i)Z - (45 + 26i) = 0$

Solution

a) $\mathbf{Z^2 - 2Z + 2 = 0}$

$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(2) = -4 = 4i^2 = (2i)^2$

$$Z_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{(2i)^2}}{2(1)} = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - 2i$$

$$\Rightarrow \mathbf{S} = \{\ \mathbf{1 - 2}\boldsymbol{i}\ ;\ \mathbf{1 + 2}\boldsymbol{i}\}$$

$$Z_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{(2i)^2}}{2(1)} = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + 2i$$

b) $\mathbf{-2Z^2 + Z + 1 = 0}$

$\Delta = (1)^2 - 4(-2)(1) = 9 = (3)^2$

$$Z_1 = \frac{-(1) - \sqrt{(3)^2}}{2(-2)} = \frac{-1-3}{2} = -2$$

$$\Rightarrow \mathbf{S} = \{\ \mathbf{-2}\ ;\ \mathbf{1}\}$$

$$Z_2 = \frac{-(1) + \sqrt{(3)^2}}{2(-2)} = \frac{-1+3}{2} = 1$$

c) $\mathbf{Z^2 - 4Z + 4 = 0}$

$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(4) = 0$

$$Z_1 = Z_2 = \frac{-(-4)}{2(1)} = \frac{4}{2} = 2 \qquad \Rightarrow \mathbf{S} = \{\ \mathbf{2}\ \}$$

d) $\mathbf{4Z^2 - 4(1 + \boldsymbol{i})Z - (45 + 26i) = 0}$

$\Delta = [-4(1+i)]^2 - 4(4)[-(45 + 26i)] = 16(1 + 2i - 1) - 16(-45 - 26i)$

$= 720 + 448i$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 720 \\ 2xy = 448 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(720)^2 + (448)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 720 & (1) \\ xy = 224 & (2) \\ x^2 + y^2 = 848 & (3) \end{cases}$$

Effectuons : (1) + (3)

On a : $2x^2 = 1568 => x^2 = 784 => x = -28 \quad ou \quad x = 28$

(2) : $xy = 224 => y = \frac{224}{x}$

- Si $x = -28 => y = \frac{224}{-28} = -8$ et $\delta_1 = x + iy => \delta_1 = -28 - 8i$
- Si $x' = 28 => y' = \frac{224}{28} = 8$ et $\delta_2 = x' + iy' => \delta_2 = 28 + 8i$

Alors les racines carrées de Z_2 sont $\delta_1 = -28 - 8i$ et $\delta_2 = 28 + 8i$

$Z_1 = \frac{-[-4(1+i)] + (-28 - 8i)}{2(4)} = \frac{-24 - 4i}{8} = -3 - \frac{1}{2}i$

= >**S** = $\left\{ \boldsymbol{-3 - \frac{1}{2}i \ ; \ 4 + \frac{3}{2}i} \right\}$

$Z_2 = \frac{-[-4(1+i)] + (28 + 8i)}{2(4)} = \frac{-24 - 4i}{8} = 4 + \frac{3}{2}i$

4) Equations se ramenant au second degré :

a) Définition :
Ceux sont des équations dont **le degré est supérieur à 2**

Exemple : $aZ^3 + bZ^2 + cZ + d = 0$;$aZ^4 + bZ^3 + cZ^2 + dZ + e = 0$; etc..

b) Résolution :

La résolution de telles équations nécessites obligatoirement la reconnaissance d'une racine évidente : **réelle($Z_0 = a$) ou imaginaire($Z_0 = ib$) ou encore$Z_0 = a + ib$**
(avec a et $b \neq 0$)afin de factorisée puis de résoudre l'équation en utilisant l'une des techniques de factorisation qui suivent : **(Division Euclidienne ; tableau d'Hörner ou par identification des coefficients).**

NB :
Pour les équations bicarrées : **($aZ^4 + bZ^2 + c = 0$)**, il suffit de ramener l'équation bicarrée au second degré en posant :**Z^2= z.** = >**$aZ^2 + bZ + c = 0$ Avec $a \neq 0$**

Exemples

Exemple 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^3 - 4i\,Z^2 - (6 + i)\,Z + 3i - 1 = 0$, sachant quelle admet une racine imaginaire pure.

Exemple 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^3 - (3 + 5i)Z^2 + (-4 + 9i)\,Z + 6 - 4i = 0$, sachant qu'elle admet une solution réelle.

Solution 1

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^3 - 4i\,Z^2 - (6 + i)\,Z + 3i - 1 = 0$, sachant quelle admet une racine imaginaire pure.

Soit $Z_0 = ib$ cette solution réelle telle que :

$Z_0^3 - 4iZ_0^2 - (6 + i)\,Z_0 + 3i - 1 = 0$,

$< = > (ib)^3 - 4i(ib)^2 - (6 + i)(ib) + 3i - 1 = 0$

$< = > - ib^3 + 4ib^2 - 6ib + b + 3i - 1 = 0$

$< = > (b - 1) + i(-b^3 + 4b^2 - 6b + 3) = 0$

$< = > \begin{cases} (b - 1) = 0 & (1) \\ (-b^3 + 4b^2 - 6b + 3) = 0 & (2) \end{cases}$

<u>NB :</u>On résous toujours l'équation qui semble la plus facile.

Ainsi résolvons l'équation **(1) qui est la plus facile à résoudre** : $b - 1 = 0 => b = 1$

Et par vérification dans **(2)** , on obtient :

$-(1)^3 + 4(1)^2 - 6(1) + 3 = 0$

$<=> -1 + 4 - 6 + 3 = 0$

$<=> -3 + 3 = 0$

$<=>$ 0 = 0 Vraie

D'où $\mathbf{Z_0} = \boldsymbol{ib} = \boldsymbol{i}$ est la solution réelle

Factorisons : $Z^3 - 4i\,Z^2 - (6 + i)\,Z + 3i - 1$ **(En utilisant la méthode d'Hörner)**

	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{-4i}$	$\boldsymbol{-6-i}$	$\boldsymbol{3i-1}$
$\boldsymbol{i}$		$\boldsymbol{i}$	$\mathbf{3}$	$\boldsymbol{-3i+1}$
	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{-3i}$	$\boldsymbol{-3-i}$	$\mathbf{0}$

$\mathbf{Z_0}$ a b c

$=> Z^3 - 4i\,Z^2 - (6 + i)\,Z + 3i - 1 =$ **$(Z - Z_0)(aZ^2 + bZ + c)$**

$<=> Z^3 - 4i\,Z^2 - (6 + i)\,Z + 3i - 1 = (Z - i)(Z^2 - 3iZ - 3 - i)$

D'où $Z^3 - 4i\,Z^2 - (6 + i)\,Z + 3i - 1 = 0 <=> (Z - i)(Z^2 - 3iZ - 3 - i) = 0$

$<=> Z - i = 0$ ou $Z^2 - 3iZ - 3 - i = 0$

$<=> Z = i$

Ou $Z^2 - 3iZ - 3 - i = 0 => \Delta = (-3i)^2 - 4(1)(-3 - i) = 3 + 4i$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} \end{cases} <=> \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 & (1) \\ xy = 2 & (2) \\ x^2 + y^2 = 5 & (3) \end{cases}$$

Effectuons : (1) + (3)

On a : $2x^2 = 8 => x^2 = 4 => x = -2 \quad ou \quad x = 2$

(2) : $xy = 2 => y = \frac{2}{x}$

- Si $x = -2 \quad => y = \frac{2}{-2} = -1$ et $\delta_1 = x + iy \quad => \delta_1 = -2 - i$
- Si $x' = 2 \quad => y' = \frac{2}{2} = 1$ et $\delta_2 = x' + iy' \quad => \delta_2 = 2 + i$

Alors les racines carrées de Z $sont$: $\delta_1 = -2 - i$ et $\delta_2 = 2 + i$

$Z_1 = \frac{-(-3i) + (-2 - i)}{2(1)} = \frac{-2+2i}{2} = -1 + i$

$Z_2 = \frac{-(-3i) + (2 + i)}{2(1)} = \frac{2+4i}{2} = 1 + 2i$

=> **S** = { $\boldsymbol{i}$; $\boldsymbol{-1 + i}$; $\boldsymbol{1 + 2i}$ }

Solution 2

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^3 - (3 + 5i)Z^2 + (-4 + 9i)Z + 6 - 4i = 0$, sachant quelle admet une solution réelle.

Soit Z_0 = a cette solution réelle telle que :

$Z_0^3 - (3 + 5i)Z_0^2 + (-4 + 9i)Z_0 + 6 - 4i = 0$,

$<=> (a)^3 - (3 + 5i)(a)^2 + (-4 + 9i)(a) + 6 - 4i = 0$

$<=> a^3 - 3a^2 - 5ia^2 - 4a + 9ai + 6 - 4i = 0$

$<=> (a^3 - 3a^2 - 4a + 6) + i(-5a^2 + 9a - 4) = 0$

$<=> \begin{cases} (a^3 - 3a^2 - 4a + 6) = 0 \quad (1) \\ (-5a^2 + 9a - 4) = 0 \quad (2) \end{cases}$

<u>NB :</u> On résous toujours l'équation qui semble la plus facile.

Ainsi résolvons l'équation **(2)** : $-5a^2 + 9a - 4 = 0$ = >$\Delta = (9)^2 - 4(-5)(-4) = 1$

= >$a_1 = 1 \quad et\ a_2 = \frac{4}{5}$

Et par vérification dans **(1)** , on remarque que :

$a_1 = 1$ est la seule solution qui vérifie l'équation (1)

D'où **Z₀ = a = 1**est la solution réelle

Factorisons : $Z^3 - (3 + 5i)Z^2 + (-4 + 9i) Z + 6 - 4i$ **(En utilisant la méthode d'Horner)**

	1	$-3-5i$	$-4+9i$	$6-4i$
1		**1**	$-2-5i$	$-6+4i$
	1	$-2-5i$	$-6+4i$	**0**
Z_0	**a**	**b**	**c**	

= >$Z^3 - (3 + 5i)Z^2 + (-4 + 9i) Z + 6 - 4i =$ **$(Z - Z_0) (aZ^2 + bZ + c)$**

< = >$Z^3 - (3 + 5i)Z^2 + (-4 + 9i) Z + 6 - 4i = (Z - 1)[Z^2 + (-2 - 5i) - 6 + 4i]$

D'où $Z^3 - (3 + 5i)Z^2 + (-4 + 9i) Z + 6 - 4i = 0$ < = >

$(Z - 1)[Z^2 + (-2 - 5i)Z - 6 + 4i] = 0$

< = > $Z - 1 = 0$ ou $(Z - 1)[Z^2 + (-2 - 5i)Z - 6 + 4i] = 0$

= > $Z = 1$

Ou $[Z^2 + (-2 - 5i)Z - 6 + 4i] = 0$ = > $\Delta = [-(2 + 5i)]^2 - 4(1)(-6 + 4i)$

= > $\Delta = 3 + 4i$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} \end{cases} < = > \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 & (1) \\ xy = 2 & (2) \\ x^2 + y^2 = 5 & (3) \end{cases}$$

Effectuons : (1) + (3)

On a : $2x^2 = 8 => x^2 = 4 => x = -2 \quad ou \quad x = 2$

(2) : $xy = 2 => y = \frac{2}{x}$

- Si $x = -2 \quad => y = \frac{2}{-2} = -1$ et $\delta_1 = x + iy \quad => \delta_1 = -2 - i$
- Si $x' = 2 \quad => y' = \frac{2}{2} = 1$ et $\delta_2 = x' + iy' \quad => \delta_2 = 2 + i$

Alors les racines carrées de Z $sont$: $\delta_1 = -2 - i$ et $\delta_2 = 2 + i$

$Z_1 = \frac{-(-3i) + (-2 - i)}{2(1)} = \frac{4i}{2} = 2i$

$Z_2 = \frac{-(-3i) + (2 + i)}{2(1)} = \frac{4 + 6i}{2} = 2 + 3i$

=> **S** = { $\mathbf{1}$; $\mathbf{2i}$; $\mathbf{2 + 3i}$ }

5) **Racines ni$^{\text{èmes}}$ d'un nombre complexe :**

a) **Définition** :

On appelle **racine n$^{\text{ième}}$ de Z** tout nombre complexe $\mathfrak{z}$ tel que : $\mathfrak{z}^n = Z$ **.**

b) **Résolution** :

Soit $Z = a + ib$ un complexe de forme polaire : **[r ; θ]**

$\mathfrak{z} = a' + ib'$ un complexe de forme polaire : **[r' ; θ']**

$\mathfrak{z}^n = Z \Leftrightarrow [r' ; \theta']^n = [r ; \theta] \Leftrightarrow [\,(r')^n ; n\theta'\,] = [r ; \theta]$

Par identification, on a :

$$< = > \begin{cases} (r')^n = r \\ n\Theta' = \Theta \end{cases}$$

Donc $\begin{cases} r' = \sqrt[n]{r} \\ \theta' = \dfrac{\theta}{n}\left[\dfrac{2k\Pi}{n}\right] = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2K\Pi}{n} \end{cases}$ avec k $\in$ [0 ; n – 1]

Ainsi les racines n$^{\text{ièmes}}$ de Z sont données par la formule :

$$Z_K = \sqrt[n]{|Z|}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2K\Pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2K\Pi}{n}\right)\right] \text{ ou } Z_K = \left[\sqrt[n]{|Z|} \quad ; \quad \frac{\theta + 2K\Pi}{n}\right]$$

Avec K $\in$ [0 ; n – 1]

6) Racines n[ièmes] de l'unité :

Soit Z un nombre complexe tel que z = 1.

Les racines de z sont obtenues en utilisant la formule qui suit : **Z$_k$ =** $\left[1;\frac{2K\prod}{n}\right]$

Exemple

Déterminer :

a) Les racines carrées de – i
b) Les racines cubiques de $4\sqrt{3}-4i$
c) Les racines quatrièmes de 1
d) Les racines cinquièmes de i
e) Les racines sixièmes de $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$

Solution

a) Déterminons les racines carrées de – i

Posons z = $-i$

$=>|Z| = \sqrt{(0)^2+(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$

Et arg(Z) est tel que : $\begin{cases} Cos\Theta = 0 \\ Sin\Theta = -1 \end{cases}$ $=> \Theta = -\frac{\pi}{2}$

Ainsi les racines carrées de Z sont données par :

$Z_k = \sqrt[2]{1}\left[Cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right) + iSin\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right)\right] = Cos\left(\frac{-\pi+4k\pi}{4}\right) + iSin\left(\frac{-\pi+4k\pi}{4}\right)$

Avec k € [0 ; 1]

- Si $k = 0$; on a : $Z_0 = Cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + iSin\left(\frac{-\pi}{4}\right)$
- Si $k = 1$; on a : $Z_1 = Cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + iSin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \mathrm{Cos}\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right) + iSin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$=> Z_1 = -Cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + iSin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

D'où les racines carrées de Z sont :

$\left\{Cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + iSin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\ ;\ -Cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + iSin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\}$

b) Déterminons les racines cubiques de : $4\sqrt{3}-4i$

Posons z = $\mathbf{4\sqrt{3} - 4i}$

$= >|Z| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + (-4)^2} = \sqrt{64} = 8$

Et arg(Z) est tel que : $\begin{cases} Cos\Theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ Sin\Theta = -\frac{1}{2} \end{cases} = >\Theta = -\frac{\pi}{6}$

Ainsi les racines cubiques de Z sont données par :

$$Z_k = \sqrt[3]{8}\left[Cos\left(\frac{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{3}\right) + iSin\left(\frac{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{3}\right)\right] = Cos\left(\frac{-\pi+12k\pi}{18}\right) + iSin\left(\frac{-\pi+12k\pi}{18}\right)$$

Avec $k \in [\,0\,;2\,]$

- $Si\ k = 0\ ;\ on\ a$: $Z_0 = Cos\left(\frac{-\pi}{18}\right) + iSin\left(\frac{-\pi}{18}\right)$
- $Si\ k = 1\ ;\ on\ a$: $Z_1 = Cos\left(\frac{11\pi}{18}\right) + iSin\left(\frac{11\pi}{18}\right)$
- $Si\ k = 2\ ;\ on\ a$: $Z_2 = Cos\left(\frac{23\pi}{18}\right) + iSin\left(\frac{23\pi}{18}\right)$

D'où les racines cubiques de Z sont :

$$\left\{\boldsymbol{Cos\left(\frac{-\pi}{18}\right) + iSin\left(\frac{-\pi}{18}\right);\ Cos\left(\frac{11\pi}{18}\right) + iSin\left(\frac{11\pi}{18}\right)\ ;\ Cos\left(\frac{23\pi}{18}\right) + iSin\left(\frac{23\pi}{18}\right)}\right\}$$

c) Déterminons les racines quatrièmes de 1

Posons z = 1
Cela revient à déterminer **les racines quatrième de l'unité** c'est-à-dire **1**.

Or elles sont données par la formule :

Z_k = $\left[1;\frac{2K\prod}{n}\right] = >Z_k = \left[\,1\,;\,\frac{2k\pi}{4}\right] = \left[\,1\,;\,\frac{k\pi}{2}\right]$ Avec k Є [0 ; 3]

- $Si\ k = 0\ ;\ on\ a$: $Z_0 = [\,1\,;\ 0\,]$
- $Si\ k = 1\ ;\ on\ a$: $Z_1 = \left[\,1\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$
- $Si\ k = 2\ ;\ on\ a$: $Z_2 = [\,1\,;\ 2\pi\,]$
- $Si\ k = 3\ ;\ on\ a$: $Z_3 = \left[\,1\,;\,\frac{3\pi}{2}\right]$

D'où les racines quatrièmes de Z sont :

$$\left\{[\,1\,;\ 0\,]\ ;\left[\,1\,;\,\frac{\pi}{2}\right]\ ;\ [\,1\,;\ 2\pi\,];\ \left[\,1\,;\,\frac{3\pi}{2}\right]\right\}$$

d) Déterminons les racines cinquièmes de $\boldsymbol{i}$

Posons $z = i$

$=> |Z| = \sqrt{(0)^2 + (1)^2} = \sqrt{1} = 1$

Et arg(Z) est tel que : $\begin{cases} Cos\Theta = 0 \\ Sin\Theta = 1 \end{cases} => \Theta = \frac{\pi}{2}$

Ainsi les racines cinquièmes de Z sont données par :

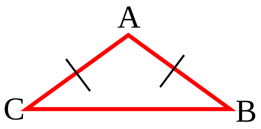
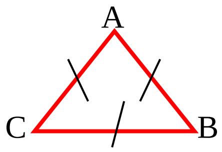
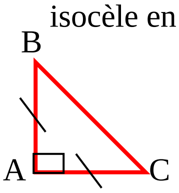
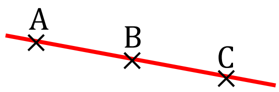
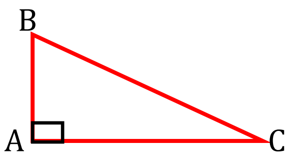
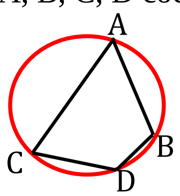
$Z_k = \sqrt[5]{1}\left[Cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{5}\right) + iSin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{5}\right)\right] = Cos\left(\frac{\pi + 4k\pi}{10}\right) + iSin\left(\frac{\pi + 4k\pi}{10}\right)$

$Avec\ k \in [\,0\,;4\,]$

- $Si\ k = 0\ ;\ on\ a : Z_0 = Cos\left(\frac{\pi}{10}\right) + iSin\left(\frac{\pi}{10}\right)$
- $Si\ k = 1\ ;\ on\ a : Z_1 = Cos\left(\frac{5\pi}{10}\right) + iSin\left(\frac{5\pi}{10}\right) = Cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + iSin\left(\frac{\pi}{2}\right)$
- $Si\ k = 2\ ;\ on\ a : Z_2 = Cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) + iSin\left(\frac{9\pi}{10}\right)$
- $Si\ k = 3\ ;\ on\ a : Z_3 = Cos\left(\frac{13\pi}{10}\right) + iSin\left(\frac{13\pi}{10}\right)$
- $Si\ k = 4\ ;\ on\ a : Z_4 = Cos\left(\frac{17\pi}{10}\right) + iSin\left(\frac{17\pi}{10}\right)$

X) Complexe et configurations géométriques du plan :

Dans le tableau ci-dessous sont caractérisées certaines configurations géométriques à l'aide des complexes :

Configurations géométriques	Caractérisations géométriques	Caractérisations complexes
Triangle ABC isocèle en A 	AB = AC $\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \alpha$ ($\alpha \in [0 ; \pi]$)	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{i\alpha}$ ou $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{i\alpha}$
Triangle ABC équilatéral 	AB = AC = BC Et $\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \frac{\pi}{3}$	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$
Triangle ABC rectangle et isocèle en A 	AB = AC Et $\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = -\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2}$	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = i$ ou $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = -i$
Points A, B, C alignés 	$\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = 0 + K\boldsymbol{\pi}$	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = a \ (a \in \mathbb{R}^*)$
Triangle ABC rectangle en A 	$\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = -\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2}$	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = ib$ ou $-ib$ avec $b \in \mathbb{R}^*$
Points A, B, C, D cocycliques 	mes$\hat{C} \equiv$ (mes D) [$\boldsymbol{\pi}$] Ou mes $\hat{C} \not\equiv 0$ [$\boldsymbol{\pi}$]	$\left.\frac{\frac{Z_C - Z_B}{Z_C - Z_A}}{\frac{Z_D - Z_B}{Z_D - Z_A}}\right\} \in \mathbb{R}^*$

Exemples

Exemple 1

Soient A, B, C trois points d'affixes respectifs : $-1 - i$; $2 + 3i$; $-10 - 13i$.
Démontrer que ces trois points sont alignés.

Exemple 2

Soient A, B, C trois points d'affixes respectifs $3 + i$; $2i$; $2 - 2i$.

1) Démontrer que ABC est un triangle rectangle et isocèle en A. (on fera une figure).
2) Déterminer l'affixe de D tel que ABCD soit un parallélogramme. (on placera le point D).

Exemple 3

Soient A, B, C, D quatre points d'affixes respectifs : $-1 + i$; $-1 - i$; $2i$; $2 - 2i$.

1) Etudier la nature des triangles ABC et BCD.
2) Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

SOLUTIONS :

Exemple 1

Soient A, B, C trois points d'affixes respectifs $-1 - i$; $2 + 3i$; $-10 - 13i$.

$Z_A = -1 - i$ => A(- 1 ; - 1)

$Z_B = 2 + 3i$ => B(2 ; 3)

$Z_C = -10 - 13i$ => C(- 10 ; - 13)

Démontrons que : A ; B ; C sont alignés :

A ; B ; C sont alignés si det($\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$) = 0

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ => $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$ => $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -9 \\ -12 \end{pmatrix}$

det($\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$) = $\begin{vmatrix} 3 & -9 \\ 4 & -12 \end{vmatrix}$ = (3)(- 12) - (4)(- 9) = - 36 + 36 = 0

Puis que det($\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$) = 0 ; alors les points A ; B ; C sont alignés.

Exemple 2

Soient A, B, C trois points d'affixes respectifs $3 + i$; $2i$; $2 - 2i$.

$Z_A = 3 + i$ => A(3 ; 1)

$Z_B = 2i$ => B(0 ; 2)

$Z_C = 2 - 2i$ => C(2 ; - 2)

1) Démontrons que ABC est un triangle rectangle et isocèle en A. (on fera une figure).

A ; B ; C est un triangle rectangle et isocèle en A si : $\begin{cases} arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \frac{-\pi}{2} \ ou \ \frac{\pi}{2} \\ et \\ AB = AC \end{cases}$

Or $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{(2-2i) - (3+i)}{(2i) - (3+i)} = \frac{-1-3i}{-3+i} = \frac{(-1-3i)(-3-i)}{(-3)^2 + (1)^2} = \frac{10i}{10} = i$

Et $\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$

AB = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(0-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{10}$

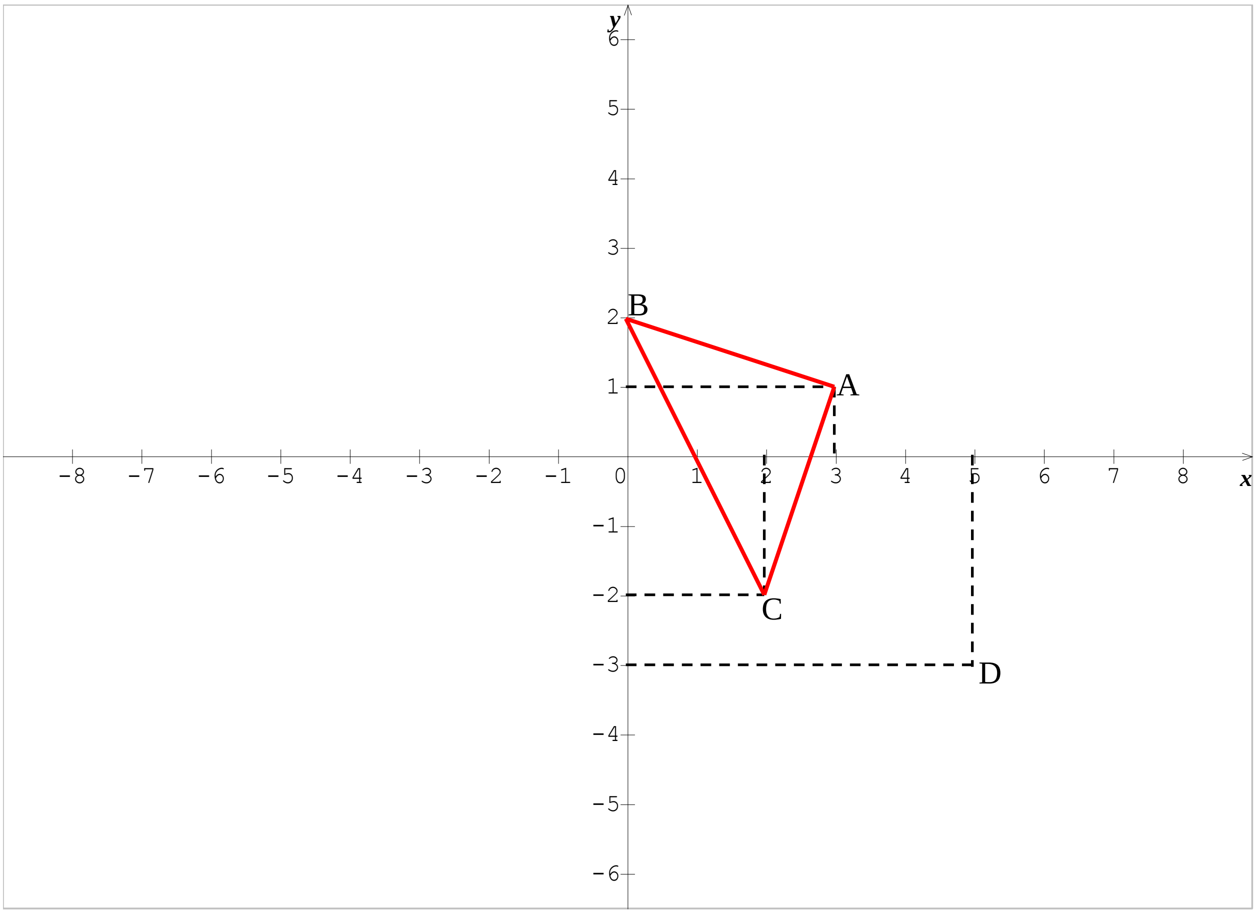
AC = $\sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(2-3)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{10}$

Conclusion :

Puisque : $\begin{cases} arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \\ et \\ AB = AC = \sqrt{10} \end{cases}$

Alors ABC est un triangle rectangle et isocèle en A.

(Figure représentant cette situation)



2) Déterminons l'affixe de D tel que ABCD soit un parallélogramme. (on placera le point D).

ABCD soit un parallélogramme si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ Avec D $\binom{x}{y}$

Or $\overrightarrow{AB} = \binom{x_B - x_A}{y_B - y_A} = \binom{0-3}{2-1} = \binom{-3}{1}$ $\overrightarrow{DC} = \binom{x_C - x_D}{y_C - y_D} = \binom{2-x}{-2-y}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} <=> \binom{2-x}{-2-y} = \binom{-3}{1} <=> \begin{cases} 2-x = -3 \\ -2-y = 1 \end{cases} => \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \end{cases}$

D'où D $\binom{5}{-3}$

Exemple 3

Soient A, B, C, D quatre points d'affixes respectifs : $-1 + i$; $-1 - i$; $2i$; $2 - 2i$.

$Z_A = -1 + i$ =>A(- 1 ; 1)

$Z_B = -1 - i$ => B(- 1 ; - 1)

$Z_C = 2i$ => C(0 ; 2)

$Z_D = -2 - 2i$ => D(2 ; - 2)

1) Etudions la nature des triangles ABC et BCD.

Pour le triangle ABC

$$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{(2i) - (-1+i)}{(-1-i) - (-1+i)} = \frac{1+i}{-2i} = \frac{(1+i)(2i)}{(0)^2 + (-2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{-2+2i}{4} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}i$$

Et $\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \arg\left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{3\pi}{4}$

AB = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-1+3)^2 + (-1-1)^2} = 2\sqrt{2}$

AC = $\sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(0+1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2}$

BC = $\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(0+1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{10}$

Alors le triangle ABC est quelconque.

Pour le triangle BCD

$$\frac{Z_D - Z_B}{Z_C - Z_B} = \frac{(2-2i) - (-1-i)}{(2i) - (-1-i)} = \frac{3-i}{1+3i} = \frac{(3-i)(1-3i)}{(1)^2 + (3)^2} = \frac{-10i}{10} = -i$$

Et $\arg\left(\frac{Z_D - Z_B}{Z_C - Z_B}\right) = \arg(-i) = \frac{-\pi}{2}$

BC = $\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(0+1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{10}$

CD = $\sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2} = \sqrt{(2-0)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{20} = 5\sqrt{2}$

BD = $\sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2} = \sqrt{(2+1)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{10}$

Alors le triangle BCD est rectangle et isocèle en B.

2) Démontrons que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Soit Ω(x ; y) les coordonnées du centre de ce cercle.

les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle si :

d(A ; Ω) = d(B ; Ω) = d(C ; Ω) = d(D ; Ω) = r d(A ; Ω) = d(B ; Ω)< = >$\sqrt{(x_\Omega - x_A)^2 + (y_\Omega - y_A)^2}$= $\sqrt{(x_\Omega - x_B)^2 + (y_\Omega - y_B)^2}$

< = >$\sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2}$= $\sqrt{(x + 1)^2 + (y + 1)^2}$

< = >$(\cancel{x + 1})^2 + (y - 1)^2 = (\cancel{x + 1})^2 + (y + 1)^2$

< = >$(y - 1)^2 = (y + 1)^2$

< = >$- 2y = 2y$ = > $\boldsymbol{y = 0}$

d(C ; Ω) = d(D ; Ω) < = > $\sqrt{(x_\Omega - x_C)^2 + (y_\Omega - y_C)^2}$= $\sqrt{(x_\Omega - x_D)^2 + (y_\Omega - y_D)^2}$

< = > $\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 2)^2}$ = $\sqrt{(x - 2)^2 + (y + 2)^2}$

< = > $(x - 0)^2 + (y - 2)^2 = (x - 2)^2 + (y + 2)^2$

En remplaçant $y = 0$ par sa valeur dans l'équation ci-dessus, on a :

$- 4x + 4 = 0$ = >$\boldsymbol{x = 1}$

D'où $\Omega\binom{1}{0}$

Or le rayon r est tel que r = d(A ; Ω) = d(B ; Ω) = d(C ; Ω) = d(D ; Ω)

= >r = $\sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2}$ = $\sqrt{(1 + 1)^2 + (0 - 1)^2}$ = $\sqrt{5}$

D'où les points A, B, C,D appartiennent à un même cercle de centre $\boldsymbol{\Omega\binom{1}{0}}$ et de rayon r = $\boldsymbol{\sqrt{5}}$

XI) Complexe et lieux géométriques :

1) Distance entre deux points A et B :

Soient A et B, deux points d'affixes respectives Z_A et Z_B.
d(A, B) = $\|\overrightarrow{AB}\| = |Z_B - Z_A|$

2) Cercle de centre A et de rayon r :

Soit M $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ d'affixe Z_M. A d'affixe Z_A.

d(A, M) = r ⇔ $|Z_M - Z_A| = r$

Exemple

Trouver l'ensemble (Γ) des points (M) du plan d'affixe Z tel que : $|Z - 1 + 4i| = 3$

Solution

Posons: Z – 1 + 4i = 0 = > Z = 1 – 4i = > A(1 ; - 4)

Ici l'ensemble chercher est le cercle de centre A (1 ; −4) et de rayon r = 3.

3) Médiatrice d'un segment :

Soit M $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ d'affixe Z_M ; A d'affixe Z_A et B d'affixe Z_B.

M appartient à la médiatrice du segment [A, B] si **d(A, M) = d(B, M) ⇔**
$|Z_M - Z_A| = |Z_M - Z_B|$

Exemple

Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan tel que : $|Z - 2| = |Z + 2 + i|$

Solution

Posons : Z – 2 = 0 et Z + 2 + i = 0

= > Z = 2 et Z = - 2 – i

= > A(2 ; 0) et B(- 2 ; - 1)

Ici l'ensemble chercher est la médiatrice du segment [AB] avec A (2, 0) et B(−2 ; − 1).

4) Droite passant par un point A et faisant un angle α avec l'horizontale

Soit M $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ d'affixe Z_M ; A un point d'affixe Z_A et (D) une droite du plan.

(D) passe par A et fait un angle α avec l'horizontale si **$\mathbf{Arg}\left(Z_M - Z_A\right) = \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{k}\boldsymbol{\pi}$**

Exemple

Déterminer puis construire l'ensemble des points M du plan tel que :

a) $\mathrm{Arg}(\, Z - 2 + 3i\,) = \frac{\pi}{3} + \mathrm{k}\pi$

b) $\mathrm{Arg}(2\,\bar{Z} - 2 + i\,) = -\frac{\pi}{4} + \mathrm{k}\pi$

Solution

Déterminons puis construisons l'ensemble des points M du plan tel que :

a) $\mathbf{arg}(\, \boldsymbol{Z} - 2 + 3\boldsymbol{i}\,) = -\frac{\boldsymbol{\pi}}{3} + \mathbf{k}\boldsymbol{\pi}$

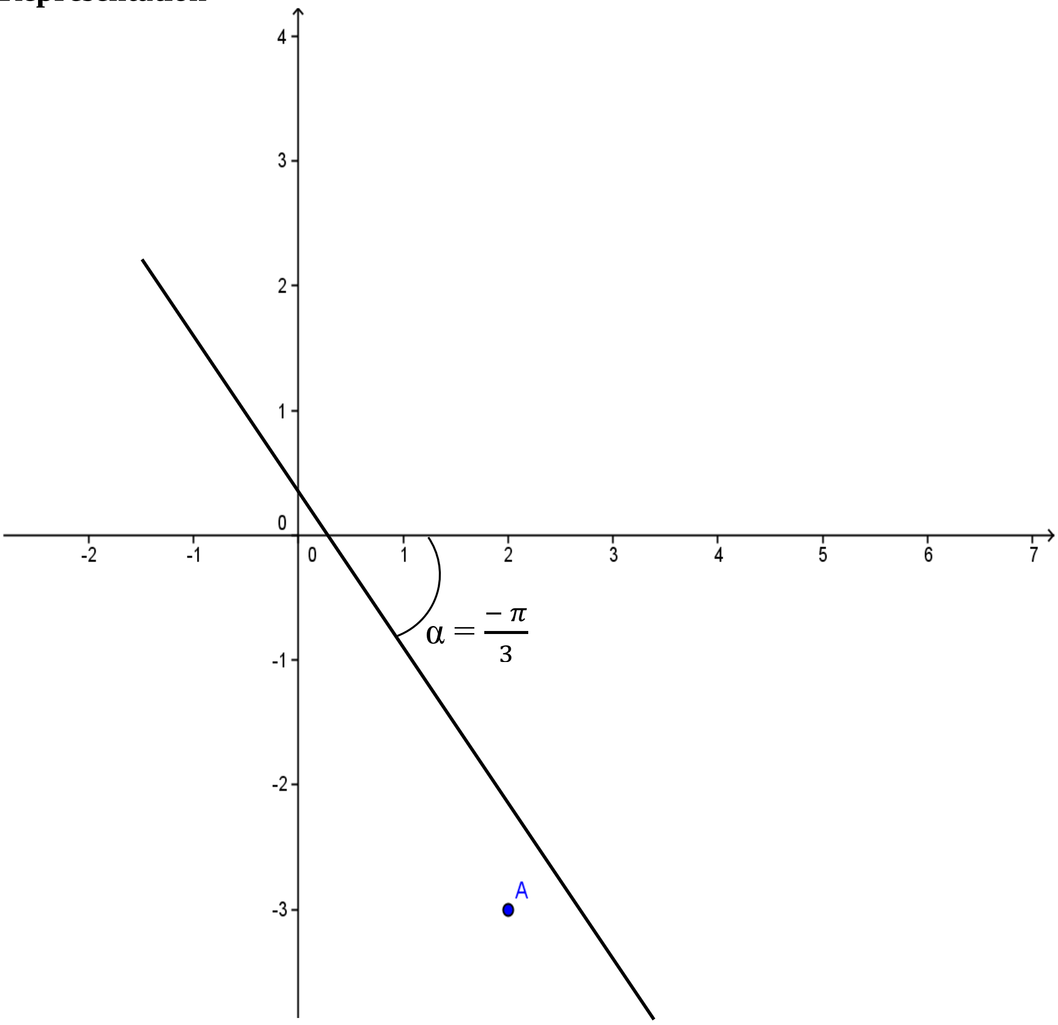
$\mathrm{arg}(\, Z - 2 + 3i\,) = -\frac{\pi}{3} + \mathrm{k}\pi \;\Rightarrow\; \mathrm{Arg}[\, Z - (2 - 3i\,)] = -\frac{\pi}{3} + \mathrm{k}\pi$

$\Leftrightarrow \mathrm{Arg}(Z_M - Z_A) = -\frac{\pi}{3} + \mathrm{k}\pi$ Avec $Z_A = 2 - 3i \Rightarrow$ A$\binom{2}{-3}$

Alors l'ensemble des points M cherchés est la droite (D) passant par le point A$\binom{2}{-3}$et faisant

un angle $\alpha = -\frac{\pi}{3}$ avec l'horizontale.

Représentation



b) Arg(2 $\bar{Z}$– 2 + i) = $\frac{-\pi}{4}$ + kπ

Arg(2 $\bar{Z}$– 2 + i) = $-\frac{\pi}{4}$ + kπ

= >$-$ Arg($2Z + 2 - i$) = $-\frac{\pi}{4}$+ kπ

= >Arg($2Z + 2 - i$) = $\frac{\pi}{4} -$ kπ

= > Arg$\left[2\left(Z + 1 - \frac{1}{2}i\right)\right]$ = $\frac{\pi}{4} -$ kπ< = > Arg(2) + Arg$\left(Z + 1 - \frac{1}{2}i\right)$ = $\frac{\pi}{4}$ $-$ kπ

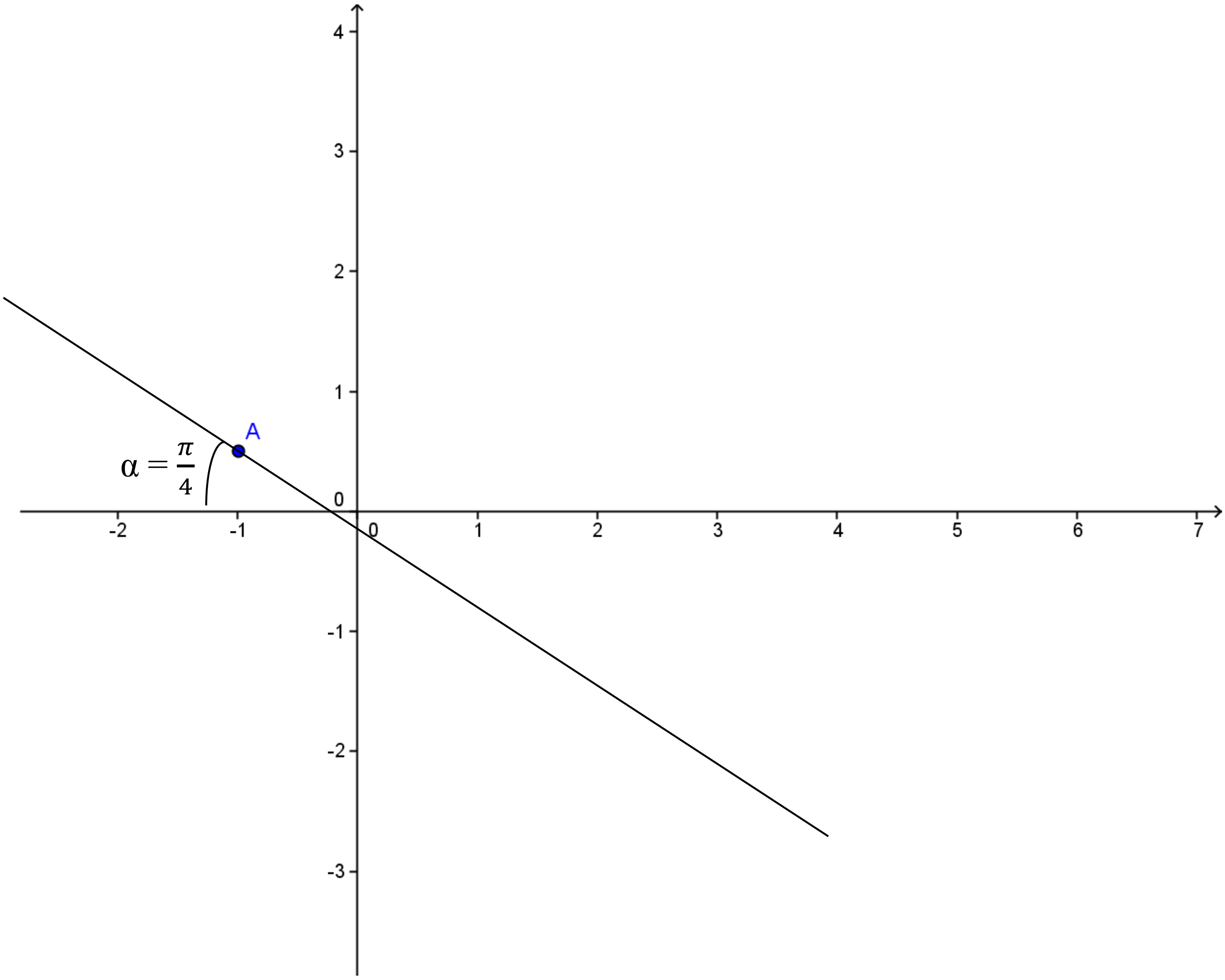
= >Arg$\left(Z + 1 - \frac{1}{2}i\right)$ = $\frac{\pi}{4} -$ kπ = > Arg$\left[Z - \left(-1 + \frac{1}{2}i\right)\right]$ = $\frac{\pi}{4}$ $-$ kπ

< = >Arg($Z_M - Z_A$) = $\frac{\pi}{4}$ $-$ kπ Avec$Z_A = -1 + \frac{1}{2}i$ => A$\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Alors l'ensemble des points M cherchés est la droite (D) passant par le point A$\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$et faisant

un angle $\alpha = \frac{\pi}{4}$ avec l'horizontale.

Représentation



XII) Complexe et transformations géométriques du plan

1) Translation :

La traduction complexe d'une translation est :

f(Z) = Z + q (avec q $\in \mathbb{C}$)

Ainsi la translation qui transforme un point A d'affixe a + ib en un point B d'affixe $a' + ib'$ est :

f(A) = B ⇔ $(a + ib)$ + q = $(a' + ib')$ => q = $(a' + ib')$ – $(a + ib)$

Ainsi on remplace q par sa valeur dans f(Z) = Z + q pour trouver la traduction complexe.

2) Homothétie :

La traduction complexe d'une homothétie de rapport k et de centre ω est :

f(Z) = k Z + q (avec q ∈⊄) ou$\overrightarrow{\Omega M'}$ = K$\overrightarrow{\Omega M}$< = >Z' – ω = k(Z – ω) avec :

- Z' : image de Z
- K : le rapport
- ω : le centre d'affixe Ω

Ainsi l'homothétie de rapport k qui transforme un point A d'affixe $a + ib$ en un point B d'affixe

$a' + ib'$ est : f(A) = B ⇔ k$(a + ib)$ + q = $(a' + ib')$ ⇔ q = $(a' + ib')$ – k $(a + ib)$.

Ainsi on remplace q par sa valeur dans f (Z) = kZ + q pour trouver la traduction complexe.

3) Rotation :

La traduction complexe d'une rotation d'angle θ et de centre ω est :
f(Z) = $Ze^{i\theta}$ + q (avec q ∈ $\mathbb{C}$) ou $\overrightarrow{\Omega M'}$ = $e^{i\Theta}$$\overrightarrow{\Omega M}$Z' – ω = $e^{i\Theta}$(Z – ω) avec :

- Z' : image de Z
- Θ : l'angle
- ω : le centre d'affixe Ω

Ainsi la rotation d'angle θ qui transforme un point A d'affixe a + ib en un point B d'affixe $a' + ib'$ est : f(A) = B ⇔ $(a + ib)e^{i\theta}$ + q = $(a' + ib')$ ⇔ q = $(a' + ib')$ –$(a + ib)e^{i\theta}$ ⇔ q = $-(a + ib)$ $(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Ainsi on remplace q par sa valeur dans f(Z) = $Ze^{i\theta}$ + q pour trouver la traduction complexe.

4) Similitude du plan :

Expression complexe :

Soit S une similitude directe du plan qui a tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' tel que :

- **Cas d'une similitude directe** :

Z' = aZ + b (où a et b sont des complexes). Ces éléments caractéristiques sont :

- son rapport k = $|a|$
- son angle θ = arg(a)
- son centre Ω d'affixe w = $\dfrac{b}{1-a}$ avec a $\neq$ 1

- **Cas d'une similitude indirecte ou inverse :**

Z' = a$\overline{Z}$ + b (où a et b sont des complexes) Ces éléments caractéristiques sont :

- son rapport k = $|a|$
- son axe (D) : y = px + q.
- son centre Ω d'affixe w = $\dfrac{b+a\overline{b}}{1-a\overline{a}}$

Retenons

Soit f la transformation : $z' = az + b$

- $si\ a = 1$, alors f est une translation de vecteur $\vec{u}$ et d'affixe b.
- si $a = -1$, alors f est la symétrie centrale de centre Ω d'affixe $w = \frac{1}{2}$b.
- $si\ a \in \mathbb{R}^* - \{-1\,;1\}$, alors f est une homothétie de rapport $k = |a|$ et de centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-b}$.
- $si\ a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| = 1$ $alors$ f est une rotation d'angle α ,d'argument Θ = arg(a) et de centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-b}$.
- $si\ a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| \neq 1$ $alors$ f est une similitude directe de rapport $k = |a|$, d'angle α ,d'argument Θ = arg(a) et de centre Ω d'affixe $w = \frac{b}{1-b}$.

Soit f la transformation : $z' = a\bar{z} + b$

- Si $|a| = 1$, alors f est une symétrie orthogonale d'axe l'ensemble des solutions de $z' = z$.
- Si $|a| \neq 1$$alors$ f est une similitude indirecte de rapport $k = |a|$, d'angle α , d'argument Θ = arg(a) , $d'\ axe\ (\Delta) : y = px + q$ et de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{b + a\bar{b}}{1 - a\bar{a}}$

Exemples

Exemple 1

Déterminer la traduction complexe de la transformation f dans chacun des cas suivants :

1) f est la translation qui transforme A d'affixe $-1 + i$ en B d'affixe $-2 + 3i$
2) f est l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ qui transforme A d'affixe $-1 + i$ en B d'affixe -2 + $3i$.
3) f est la rotation d'angle$\frac{3\pi}{4}$ qui transforme A d'affixe -1 + i en B d'affixe – 2 + i.

Exemple 2

Soit la similitude directe plane S de centre A (1 ; 1) ; de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle$\frac{\pi}{4}$par la similitude S ; le point M d'affixe Z a pour transformé le point M' d'"affixe Z'.
Exprimer Z' en fonction de Z.

Exemple 3

Soient A, B, C et D les points d'affixes :
$Z_A = -1 - i$; $Z_B = i$; $Z_C = 1 + 3i$; $Z_D = 5 + i$. Soit S la similitude directe transformant A en C et B en D.

1) Déterminer le rapport K et l'angle θ de S
2) Déterminer l'écriture complexe f associée à S.
3) Déterminer l'affixe de **Ω** le centre de S

Exemple 4

1- Sot f la transformation définie par $Z' = aZ+3i$
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f si : a = 2 puis si $a = -i$

2- Soient $A(1)$; $B(2 + i)$; $A'(2i)$; $B'(1 + i)$
Vérifier que AB = A'B'
Démontrer qu'il existe une unique rotation r telle que $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$

SOLUTION S

Exemple 1

1) **La traduction complexe d'une translation est : $f(Z) = Z + q$.**

$f(A) = B \Leftrightarrow f(-1 + i) = -2 + 3i \Leftrightarrow -1 + i + q = -2 + 3i \Rightarrow q = -1 + 2i$

d'où $f(Z) = Z - 1 + 2i$

2) **La traduction complexe d'une homothétie est $f(Z) = kZ + q$.**

$f(A) = B \Leftrightarrow f(-1 + i) = -2 + 3i \Leftrightarrow \frac{-1}{2}(-1 + i) + q = -2 + 3i \Rightarrow q = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$

d'où $f(Z) = \frac{1}{2}Z - \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$

La traduction complexe d'une rotation est $f(Z) = e^{i\theta} Z + q$.

$f(A) = B \Leftrightarrow f(-1 + i) = -2 + i \Leftrightarrow e^{i\frac{3\Pi}{4}}(-1 + i) + q = -2 + i \Rightarrow q = -2 + i(1 + \sqrt{2})$

d'où $f(Z) = Ze^{i\frac{3\pi}{4}} - 2 + i(1 + \sqrt{2})$

Exemple 2

On a :

- centre A $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$
- rapport k = $\sqrt{2}$
- angle $\theta = \frac{\Pi}{4}$

D'autre part :

Z' = aZ + b

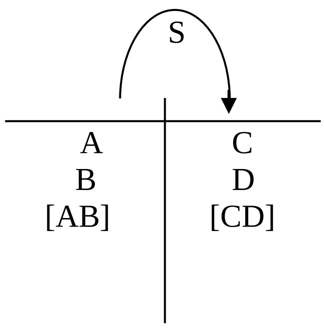
et a = $|a|$ $(\cos\theta + i\sin\theta)$ => a = $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\Pi}{4} + i\sin\frac{\Pi}{4}\right) = 1 + i$ => **a = 1 + *i***

De même cherchons b.

On sait que le centre à pour affixe $\frac{b}{1-a} = \omega \Leftrightarrow \frac{b}{1-(1+i)} = 1 + i \Leftrightarrow$ **b = 1 – *i***

D'où Z' = aZ + b ⇔**Z' = (1 + i) Z + 1 – *i***

Exemple 3



1) **Déterminons le rapport K et l'angle θ de S**

- K = $\frac{CD}{AB} = \left|\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}\right| = \left|\frac{(5+i)-(1+3i)}{i-(-1-i)}\right| = \frac{|4-2i|}{|1+2i|} = \frac{\sqrt{16+4}}{\sqrt{1+4}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{4}} = \sqrt{4} = 2$
- θ = mes $(\widehat{AB, CD})$ = arg $\left(\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}\right)$ = arg $\left(\frac{4-2i}{i+2i}\right)$ = arg $(-2i) = -\frac{\pi}{2}$

2) **Déterminons l'écriture complexe f associée à S.**

f(Z) = aZ + b.

$S(A) = C$ et $S(B) = D$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} aZ_A + b = Z_C & (1) \\ aZ_B + b = Z_D & (2) \end{cases}$$

(1) – (2) => a ($Z_A - Z_B$) = $Z_C - Z_D$ => a = $\frac{Z_C - Z_D}{Z_A - Z_B} = \frac{-4+2i}{-1-2i} = -2i$

Dans (2) on a: $aZ_B + b = Z_D$ => $b = Z_D - aZ_B$ => b = $(5 + i) - (-2i)(i)$

⇨ b = $5 + i + 2i^2 = 5 + i - 2 = 3 + i$ => b = $3 + i$

D'où l'écriture complexe f est $f(Z) = -2iZ + 3 + i$

Soit ω l'affixe de Ω tel que :

$\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{3+i}{1-(-2i)} = \frac{(3+i)(1-2i)}{(1)^2+(2)^2} = 1 - i.$

Exemple 4

1) Soit f la transformation définie par Z' = aZ + 3i
Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de f si : a = 2 puis si a = − i

Si a = 2

Z' = aZ + 3i< = > f(Z) = 2Z + 3i

- Montrons que f admet un point invariant :
  f admet un point invariant si : f(ω) = ω< = > 2ω+3i = ω< = >ω = -3i = > Ω(0 ; -3)

- Ainsi déterminons la nature de f
  Pour cela, on exprime Z'- ω en fonction de Z− ω < = >

Z' = 2Z + 3i **(1)**

ω= 2ω+3i**(2)**

En effectuant **(1) - (2)** ; **on a : Z'−ω = 2(Z− ω)** ; sous la forme :

Z' – ω = k(Z – ω) qui est l'écriture complexe d'une Homothétie

- Ces éléments caractéristiques sont :
- Centre : $\Omega(0 ; -3)$
- Rapport : $k = 2$

<u>Si $a = -i$</u>

$Z' = aZ+3i \Leftrightarrow f(Z) = -iZ + 3i$

- Montrons que f admet un point invariant :

  f admet un point invariant si : $f(\omega) = \omega \Leftrightarrow - i\omega+3i = \omega \Leftrightarrow \omega = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$

  $\Rightarrow \Omega(\frac{3}{2} ; \frac{3}{2})$
- Ainsi déterminons la nature de f

  Pour cela, on exprime $Z'-\omega$ en fonction de $Z- \omega \Leftrightarrow$

  $Z' = -iZ + 3i$ **(1)**

  $\omega= -i\omega+3i$ **(2)**

En effectuant **(1) $-$ (2)** ; on a : $\mathbf{Z'- \omega= - i(Z- \omega)}$; sous la forme

$\mathbf{Z' - \omega= e^{i\alpha}(Z - \omega)}$ qui est l'écriture complexe d'une Rotation

- Ces éléments caractéristiques sont :
- Centre : $\Omega(\frac{3}{2} ; \frac{3}{2})$
- Angle = $\arg(- i) = -\frac{\pi}{2}$

2) Soient $A(1)$; $B(2+ i)$; $A'(2i)$; $B'(1 + i)$
Vérifions que AB = A'B'
Puis démontrer qu'il existe une unique rotation r telle que r(A) = A' et r(B) = B'

$AB = A'B' = \sqrt{2}$

$r(A) = A' \Rightarrow A'-\omega = e^{i\alpha}(A- \omega) \Rightarrow 2i -\omega = e^{i\alpha}(1- \omega)$ (1)
$r(B) = B' \Rightarrow B'-\omega = e^{i\alpha}(B- \omega) \Rightarrow 1 + i -\omega = e^{i\alpha}(2+ i -\omega)$ (2)

(1) $-$ (2) donne : $e^{i\alpha} = - i \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{2}+2k\pi$

On en déduit que $2i -\omega = - i(1 - \omega) \Rightarrow \omega= \frac{3+i}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

EXERCICES

Forme algébrique

1 Déterminer les parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants :

a) $Z = 7 - 3i$; **b)** $Z = \frac{-1 + i\sqrt{2}}{2}$; **c)** $Z = (-1 - i)^3$; **d)** $Z = i^5$; **e)** $Z = 0$; **f)** $Z = 2 + \frac{i}{\sqrt{2}}$

2 Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

a) $Z_1 = \frac{i}{(1+2i)(3-i)}$; **b)** $Z_2 = (\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-2i)$; **c)** $Z_3 = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$

3 Ecrire sous forme algébrique le conjugué des nombres complexes suivants :

a) $Z = -i$; **b)** $Z = \frac{\sqrt{3} + i}{i}$; **c)** $Z = (1 + 2i)^3$; **d)** $Z = 3$; **e)** $Z = (1 + i)(-1 + 3i)^2$.

4 On donne les nombres complexes suivants : $Z_1 = 1 - 2i$ et $Z_2 = 3 + i$.

Ecrire sous forme algébrique : $Z_1 + Z_2$; $Z_1 - Z_2$; $Z_1 \times Z_2$; Z_1^2 ; $\frac{1}{Z_2}$; $\frac{Z_2}{Z_1}$

Forme trigonométrique - Forme exponentielle

5 Déterminer les formes trigonométriques et exponentielles des nombres complexes suivants :

a) $Z = -i$; **b)** $Z = \sqrt{3}$; **c)** $Z = \frac{1-i}{2}$; **d)** $Z = 1 - i\sqrt{3}$; **e)** $Z = 1 + i$

f) $Z = -1 - i$; **g)** $Z = -i$; **h)** $Z = 1 + i\sqrt{3}$; **i)** $Z = \frac{-1 + i}{2}$; **j)** $Z = (-\sqrt{3} - i)^3$

k) $Z = \frac{-\sqrt{3} - i}{1 + i}$; **l)** $Z = (1 + i)(-2 - 2i)$; **m)** $Z = 1 - i$; **n)** $Z = -i^3$

6 Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

a) $Z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; **b)** $Z_2 = \frac{1}{1+i}$; **c)** $Z_3 = (1 - i\sqrt{3})^4$; **d)** $Z_4 = \frac{(1 - i)^4}{(-\sqrt{3} - i)^3}$

e) $Z_5 = -2e^{i\frac{\pi}{4}}$; **f)** $Z_6 = (1+i)e^{i\frac{\Pi}{6}}$; **g)** $Z_7 = (1-i\sqrt{3})e^{i\frac{2\Pi}{3}}$; **h)** $Z_8 = \frac{3e^{-i\frac{\Pi}{4}}}{(1-i\sqrt{3})e^{i\frac{2\Pi}{3}}}$

i) $Z_9 = (-1 - i\sqrt{3})^3 e^{i\frac{3\pi}{4}}$; **j)** $Z_{10} = 5\left(Cos\frac{\pi}{3} - iSin\frac{\pi}{3}\right)e^{i\frac{-5\pi}{6}}$

k) $Z_{11} = \frac{(1+i\sqrt{3})(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{2(1-i)(\cos\alpha - i\sin\alpha)}$

7 Compléter le tableau suivant

Formes algébriques de Z	$-5(1 - i\sqrt{3})$		
Formes trigonométriques de Z			$2\left[Cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$
Formes exponentielles de Z		$e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$	

8 On pose : $A = 5\sqrt{2}(1+i)$; $B = -5\,(1 + i\sqrt{3})$

1) Déterminer le module et un argument de :

$A\ ;\ B\ ;\ \overline{A}\ ;\ \dfrac{1}{A}\quad ;\quad \dfrac{B}{A}\quad ;\quad B\times A\quad ;\quad \dfrac{A}{B^2}$

2) Soit Z un nombre complexe tel que : AZ = B

a) Ecrire Z sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
b) En déduire les valeurs exactes de Cos$\frac{13\pi}{12}$ et Sin$\frac{13\pi}{12}$
c) Calculer $(Z)^{2008}$

9 **On pose :** $Z = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$

1) Calculer Z^2 puis déterminer son module et son argument
2) En déduire de ce qui précède le module et un argument Z.

10 **On pose :**

$Z = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$; $Z' = 1 - i$

1) Ecrire $\dfrac{Z}{Z'}$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
2) En déduire les valeurs exactes de Cos$\frac{\pi}{12}$ et Sin$\frac{\pi}{12}$

Détermination de l'ensemble de points

11 Déterminer puis construire :

a) l'ensemble (Γ) des points M d'affixes Z tels que : $| Z - i | = 2$
b) l'ensemble (λ) des points M d'affixes Z tels que : $| Z + 1 - 2i | = | Z - 1 - i |$
c) l'ensemble (φ) des points M d'affixes Z tels que : $\arg(Z - 1 + 2i) = \frac{\pi}{6} + k\pi$
d) l'ensemble (ω) des points M d'affixes Z tels que : $\arg(3\bar{Z} - 1 + i) = -\frac{\pi}{3} + k\pi$

12 **I)** Le plan est muni d'un repère orthonormal $(o\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$

On désigne par M le point de affixe z et M' le point d'affixe Z tel que : $Z = \dfrac{z+1}{z-1}$

a) Trouver l'ensemble (D) des points M tels que Z soit un réel

b) Trouver l'ensemble (C) des points M tel que Z soit un imaginaire.
c) Trouver l'ensemble (M) des points M tels que M et M' soient alignés.

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe distinct de -1 et soit $Z = \dfrac{2iz - i}{z+1}$

II) Déterminer puis construire l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie les conditions indiquées :

a) $|Z| = 1$
b) Z est un imaginaire.
c) Z est un réel.

III) A tout nombre complexe $z \neq -1 + 2i$, on considère le nombre complexe Z tel que

$$Z = \frac{z - 2 + 4i}{z + 1 - 2i}$$

Déterminer puis construire l'ensemble des points M dont l'affixe vérifie les conditions indiquées :

a) $|Z| = 1$
b) $|Z| = 2$
c) Z est un réel
d) Z est un imaginaire.

IV) Déterminer puis construire l'ensemble (E) des points M du plan tel que :

a) $|z + 1 + 2i| = |z - 4|$
b) $|z - 3i| = 2$
c) $|\bar{z} - 2 + i| = 1$

Linéarisation.

13 Linéariser les expressions : A = $\sin^3 x$; B = $\cos^3 \frac{x}{2}$; C = $\cos^5 x$; D = $\sin^2 x \bullet \cos^3 x$

Résolution d'équations et systèmes.

14 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $Z^2 + Z + 1 = 0$; **b)** $Z^2 - 2Z + 1 = 0$; **c)** $Z + \frac{1}{Z} + 1 = 0$; **d)** $Z = \sqrt{2} - \frac{1}{Z}$

e) $Z^2 - 2\overline{Z} + 1 = 0$; **f)** $2Z^2 + 3|Z|^2 - 1 = 0$; **g)** $iZ^2 + 2\overline{Z} + 2 - i = 0$

h) $-3Z^2 + 2Z + 1 = 0$; **i)** $Z^2 + 2\sin\alpha\, Z + 1 = 0$; **j)** $Z^2 - 2\cos\alpha\, Z + 1 = 0$

k) $-iZ^2 + (2 + 2i)Z + (10 + 5i) = 0$; ***l)*** $2Z^2 - 2(3 + 2i)Z + 1 + 8i = 0$

m) $(-1 + 2i)Z^2 + (-5 + i)Z + 9i + 6 = 0$; **n)** $4Z^2 - 4(1 + i)Z - (45 + 26i) = 0$

15

1) Développer le produit de facteurs suivant : $(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)$
2) Résoudre l'équation $Z^4 = 1$
3) En déduire des questions 1) et 2) la résolution des équations suivantes :

$$Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0 \text{ puis } \left(\frac{3Z+i}{Z-1}\right)^3 + \left(\frac{3Z+i}{Z-i}\right)^2 + \left(\frac{3Z+i}{Z-i}\right) + 1 = 0$$

16 Déterminer les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de chacun des nombres complexes suivants :

$45 + 28i$; $5 + 12i$; $3 - 4i$; $120 - 22i$

17 Déterminer dans $\mathbb{C}$ **:**

a) Les racines cubiques de $4\sqrt{3} - 4i$
b) Les racines quatrièmes de 1
c) Les racines cinquièmes de i
d) Les racines sixièmes de $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

18 On donne le nombre complexe Z tel que : $Z = 2 + 3i$

a- Vérifier que $Z^4 = -119 - 120i$
b- Déterminer les racines quatrièmes de l'unité.
c- En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $Z^4 = -119 - 120i$

19 Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ les systèmes :

1) $\begin{cases} Z_1 \times Z_2 = 7 \\ Z_1 + Z_2 = 1 \end{cases}$; **2)** $\begin{cases} Z_1 \times Z_2 = 9 \\ Z_1 + Z_2 = 3 \end{cases}$; **3)** $\begin{cases} (2+3i)Z - 5Z' = -1 \\ (1-i)Z + 2Z' = 2(1+i) \end{cases}$

4) $\begin{cases} 5iZ + (2-i)Z' = 1+12i \\ (2-3i)Z + (5-2i)Z = 39-10i \end{cases}$; **5)** $\begin{cases} Z + iZ' = 2(1+i) \\ -iZ + Z' = 2(1-i) \end{cases}$

20 Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système suivant :

$$\begin{cases} x - y + iz = 0 \\ x + y - z = 0 \\ (1+i)x - 2y = 2z - 2i \end{cases}$$

21 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le polynôme P(Z) telque :
$P(Z) = Z^3 + 9i\,Z^2 + 2(6i - 11)\,Z - 3\,(4i + 12)$

a- Démontrer que l'équation P(Z) = 0 admet une solution réelle que l'on notera Z_1, dont on déterminera la valeur.

b- Factoriser P(Z) puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation P(Z) = 0

22 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le polynôme P(Z) telque :

$P(Z) = Z^3 - 4i\,Z^2 - (6 + i)\,Z + 3i - 1.$

a-Montrer que l'équation P(Z) = 0 admet une solution imaginaire pure.

b-Factoriser P(Z) puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation P(Z) = 0.

23 Soit f la fonction à variable complexe Z telle que :

$$f(Z) = Z^4 - 3Z^3 + \frac{9}{2}Z^2 - 3Z + 1$$

a-Prouver que si Z_0 est une solution de l'équation $f(Z) = 0$ alors les complexes : $\overline{z_0}$ et $\frac{1}{z_0}$ en sont aussi.
b- Déterminer $f\,(1 + i)$ et en exploitant ce qui précède, trouver toutes les solutions de l'équation $f(Z) = 0$.

24 Soit le polynôme P(Z) définie par :

$P(Z) = Z^4 - (1+\sqrt{2})\,Z^3 + (2+\sqrt{2})Z^2 - (1+\sqrt{2})Z + 1$

a- Vérifier que : P(Z) = $Z^2\left[\left(Z+\frac{1}{Z}\right)^2 - \left(Z+\frac{1}{Z}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}\right]$ avec ($Z \neq 0$)

b- En utilisant la question précédente, résoudre l'équation P(Z) = 0.

25 Soit le polynôme P(Z) définie par :

$P(Z) = Z^4 + 2Z^3 - 2Z + 1$

a- Déterminer les nombres réels a et b tel que $\forall Z \in \mathbb{C}^*$ on a :

$P(Z) = Z^2\left[\left(Z-\frac{1}{Z}\right)^2 + a\left(Z-\frac{1}{Z}\right)+b\right]$

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + aZ + b = 0$

c- En déduire la résolution de l'équation P(Z) = 0

26 Soit $P(Z) = Z^3 - (4 + 6i)Z^2 - (12 - 24i)Z + 32 - 24i$

a- Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $Z^2 - (2 + 6i)Z - 16 + 12i = 0$

b- Montrer que l'équation P(Z) = 0 admet une solution réelle notée z_0 que l'on déterminera.

c- Déterminer a, b et c trois nombres complexes tels que $P(Z) = (Z - Z_0)(aZ^2 + bZ + c)$

d- Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation P(Z) = 0

27

1) Calculer : $e^{\frac{i\pi}{3}} \times e^{\frac{-i\pi}{3}}$ et $e^{\frac{i\pi}{3}} + e^{\frac{-i\pi}{3}}$
2) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $Z^2 - Z + 1 = 0$

28 On considère dans $\mathbb{C}$ le complexe u tel que : $u = -1 - 2i\sqrt{2}$

a- Calculer les racines carrées de u.

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2Z^2 + 2iZ + i\sqrt{2} = 0$.

(On notera Z_1 et Z_2 les solutions de cette équation).

c- Montrer que $\left|\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right| = \sqrt{2}$.

29 Soit l'équation (E) définie par : $Z^3-(11+2i)Z^2+2(17+7i)Z-42=0$

1) Résoudre (E) sachant qu'elle admet une solution réelle
2) Donner la forme exponentielle de chacune des solutions de (E)
3) Montrer que si $|Z|=|Z'|=1$ alors le nombre $u=\dfrac{Z+Z'}{1+ZZ'}$ est un réel

30 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^6+1=0$

2) On pose $\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$

Soit A, B, C, D, E, F les points d'affixes respectives : 2α ; $4\alpha^3$; $4\alpha^5$; $\dfrac{1}{\alpha}$; $\dfrac{1}{\alpha^3}$; $\dfrac{2}{\alpha^5}$

Représenter ces six points dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

31 On pose $P(Z)=Z^4-6Z^3+23Z^2-34Z+26$.

1) α désigne un nombre complexe quelconque. Montrer $P(\bar{\alpha})=\overline{P(\alpha)}$.
En déduire que si $P(\alpha)=0$ alors $P(\bar{\alpha})=0$.
2) Calculer $P(1+i)$ puis en déduire deux solutions complexes de l'équations $P(Z)=0$.
3) On donne $Q(Z)=[Z-(1+i)][Z-(1-i)]$
a- Vérifier que le polynôme P(Z) est est divisible par Q(Z).
b- Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation P(Z) = 0.

32 On donne le système suivant : $\begin{cases}(1+i)\alpha = 1+3i \\ i\alpha^2 = -4+3i\end{cases}$

1) Déterminer le nombre complexe α.
2) Pour tout nombre complexe Z, on pose : $f(Z)=Z^2-(1+3i)Z+(-4+3i)$
a- Montrer que $f(Z)$ s'écrit sous la forme : $f(Z)=(Z-\alpha)(Z-i\alpha)$
b- En déduire les solutions sous forme algébrique de l'équation $f(Z)=0$.

33 Soient a et b ∈ $\mathbb{Z}$. On pose que a et b sont la somme de deux carrées.
Il existe $x, y\in\mathbb{Z}$ tels que $a=x^2+y^2$ et il existe Z , tels que $b=Z^2+t^2$.
Démontrer que le produit ab est encore la somme de deux carrées.

(Indication : Ecrire $(x^2+y^2)=|x+iy|^2$ etc.…)

Figures géométriques dans le plan.

34 Soient A, B, C trois points d'affixes respectifs : $-1 - i$; $2 + 3i$; $-10 - 13i$.
Démontrer que ces trois points sont alignés. (on fera une figure).

35 Soient A, B, C trois points d'affixes respectifs : $3 + i$; $2i$; $2 - 2i$.

a- Démontrer que ABC est un triangle rectangle et isocèle en A.
b- Déterminer l'affixe de D tel que ABCD soit un parallélogramme. (on fera une figure).

36 Soient A, B, C, D quatre points d'affixes respectifs : $-1 + i$; $-1 - i$; $2i$; $2 - 2i$.

a- Etudier la nature des triangles ABC et BCD.
b- Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon. (on fera une figure).

37 On considère un repère orthonormé directe (O ; $\vec{U}$; $\vec{V}$)du plan complexe. Soit les points A ; B ; C d'affixes respectives :

$$Z_A = -1 + i \quad ; \quad Z_B = \frac{2\left[Cos\left(\frac{7\pi}{15}\right) + iSin\left(\frac{7\pi}{15}\right)\right]}{Cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - iSin\left(\frac{\pi}{5}\right)} \quad \text{et} \quad Z_C = 2 - 2i$$

a- Ecrire les complexe Z_A ; Z_B et Z_C sous forme exponentielle.
b- Déterminer l'affixe Z_D du point D tel que le triangle OBD soit équilatéral direct, c'est-à-dire la mesure de l'angle ($\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OD}$) = $\frac{\pi}{3}$ (on fera une figure).

38 Le plan est rapporté au repère orthonormé directe (O ; $\vec{U}$; $\vec{V}$).
On considère :

- Le point A d'affixe $Z_A = 5 - i\sqrt{3}$.
- Le point B d'affixe Z_B est tel que OAB soit un triangle équilatéral direct c'est-à-dire la mesure de l'angle ($\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OB}$) = $\frac{\pi}{3}$.
- Le point Q d'affixe Z_Q est tel que le point Q soit milieu du segment $[OB]$.
- Le point K d'affixe Z_K est tel que ABQK soit un parallélogramme.

1) Déterminer les affixes Z_B ; Z_Q et Z_K respectivement des points B ; Q et K.

2) Démontrer que $\frac{Z_K - Z_A}{Z_K}$ est un imaginaire pur. En déduire la nature du triangle OKA ?
Placer les points A ; B ; Q et K dans le plan.

3) Soit C la point d'affixe Z_C tel que $Z_C = \frac{2Z_A}{3}$

a- Calculer $\frac{Z_K - Z_B}{Z_K - Z_C}$. Que peut-on en déduire pour les points B ; C et K ?
b- Placer le point C. (on fera une figure).

39 **A-** Dans le plan P muni de son repère orthonormé$(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$, on considère l'équation à variable complexe notée et déterminée par : (E) $Z^3 + (1-i)Z^2 - 2(11+i)Z - 48i = 0$

1-) Prouver que (E) admet une solution imaginaire pure que l'on notera z_0.

2-) a-) Achever la résolution de l'équation (E). On notera Z_1 et Z_2 les autres solutions trouvées telles que $|Z_2| < |Z_1|$.

b-) Donner les écritures exponentielles de Z_1 et de Z_2.

3-) On considère G et F, les points du plan d'affixes respectives Z_1 et de Z_2. Donner l'expression exponentielle du complexe $\frac{Z_1}{Z_2}$. Déduire que le triangle OGF est rectangle en O.

B- Dans le plan P muni de son repère orthonormé$(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$, on considère le polynôme complexe noté et déterminé par :

P(Z) = $Z^3 - (4-i)Z^2 + (5-4i)Z + 5i$

1-) Prouver que l'affixe du point Q(0 ;-1) est une solution de l'équation P(Z) = 0

2-) a-) Achever la résolution de l'équation P(Z) = 0

b-) En notant R et S les points du plan dont les affixes sont les autres solutions de a-), placer Q,R et S dans le repère et prouver que ces points forment un triangle isocèle.

40 On considère l'ensemble des complexes Z_n tels que : $\forall\, n \in \mathbb{C}$ on a :

$$\begin{cases} Zo = 1 \\ Z_{n+1} = \dfrac{1+i}{2} Z_n \end{cases}$$

a- On note M_n le point d'affixe Z_n dans le plan rapporté au repère $(o, \vec{u}, \vec{v})$.

- Calculer Z_1 ; Z_2 ; Z_3 et Z_4.
- Placer les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.

b- Calculer le quotient : $\dfrac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_{n+1}}$

c- Quelle est la nature du triangle $OM_n\, M_{n+1}$?

Transformations géométriques du plan.

41 Soit (S) l'application de P dans P qui à tout point M d'affixe Z associe Z' d'affixe M' tel que Z' = (1 + i) Z + 1 – i. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (S).

42 Soit la similitude directe plane S de centre A (1 ; 1) ; de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ par la similitude S ; le point M d'affixe Z a pour transformé le point M' d'affixe Z'.
Exprimer Z' en fonction de Z.

43 Soient A, B, C et D les points d'affixes $Z_A = -1 - i$; $Z_B = i$; $Z_C = 1 + 3i$; $Z_D = 5 + i$.
Soit S la similitude directe transformant A en C et B en D.

a- Déterminer le rapport K et l'angle θ de S

b- Déterminer l'écriture complexe f associée à S.

c- Déterminer l'affixe de Ω le centre de S

44 Déterminer la traduction complexe de la transformation (Γ) dans chacun des cas suivants :

a- (Γ) est la translation qui transforme A d'affixe $3 - 2i$ en B d'affixe $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

b- (Γ) est l'homothétie de rapport $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ qui transforme A d'affixe $1 + i\sqrt{3}$ en B d'affixe $-1 + i$.

c- (Γ) est la rotation d'angle $\frac{3\pi}{2}$ qui transforme A d'affixe 1 + i en B d'affixe -2 + i.

45 Soit f la transformation définie par $Z' = aZ + 3i$

a- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f si : a = 2 puis si $a = -i$.

b- Soient A(1) ; B($2 + i$) ; A'($2i$) ; B'($1 + i$).Vérifier que AB = A'B'

c- Démontrer qu'il existe une unique rotation r telle que r(A) = A' et r(B) = B'

46 Le plan est rapporté à un repère ortho normal directe (O ; I ; J). On considère l'application F qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' definie par : $Z' = u^2Z + u - 1$ où u désigne un nombre complexe.
1) a . Déterminer l'ensemble des nombres complexes u pour les quels F est une translation.
   b. Caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.
2) a. Déterminer l'ensemble des nombres complexes u pour les quels F est une rotation d'angle de mesuré $\frac{\pi}{2}$
   b. Caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.

Perfectionnement.

47 Soit f l'application de E = $\mathbb{C} - \{-i\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(Z) = \dfrac{iz}{z+i}$. Dans le plan complexe rapporté au repère ortho normal direct$(O, \vec{u}, \vec{v})$,
on note M le point d'affixe z.

1) Déterminer les coordonnées du point B dont l'affixe z_0 et telle que $f(z_0) = 1 + 2i$
2) Soit z un élément de E. on note r le module de z + i et α une mesure de son argument. Exprimer la forme trigonométrique de f(z) – i en fonction de r et α.
3) Soit A le point d'affixe $-i$

a) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M vérifiant $|f(z) - i| = \sqrt{2}$

b) Montrer que B appartient à (Γ).

48 Dans le plan complexe $\mathbb{C}$, on considère les points A d'affixe $Z_A = 1$; M d'affixe Z et N d'affixe $Z_N = iZ - (1 + i)$.

On note T_λ l'application qui à tout point d'affixe Z, associe le point M', barycentre des points pondérés (M ; λ) ; (N ; -λ) et (A ;1) où λ est un nombre réel non nul.

1) Démontrer que pour tout M du plan, le point N est l'image de M par une rotation dont on précisera les éléments caractéristiques.

2) a- Démontrer que l'affixe Z' du point M'est telle que $Z' = \lambda(1 - i)Z + \lambda(1+i)+1$.
b- Démontrer que T_λ est une similitude directe dont on précisera l'affixe du centre Ω ; le rapport et l'angle. Pour quelle valeur de λ , T_λ est-elle une rotation ? Donner dans chacun de ces cas l'angle et l'affixe de son centre.
c- Exprimer les coordonnées $(x' ; y')$ du point M' en fonction de celles $(x ; y)$ de M.

49 1) On note g l'application affine du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe Z, associe le point
M' d'affixe Z' tels que $Z' = \left[\lambda - (\lambda^2 - 1)i\right]Z - 2i$ où $\lambda \in IR$.

a) Quelle est la nature de g pour $\lambda = 1$? Préciser alors son élément caractéristique.
b) Pour quelle valeur de λ, g est-elle une homothétie ? Donner ses éléments caractéristiques.
c) Existe-t-il de valeur de λ pour que g soit une rotation ? Si oui préciser ses éléments caractéristiques.

2) a) Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude indirecte S qui, à tout point M d'affixe Z, associe le point M' d'affixe Z' tels que : $Z' = (1 - i)\bar{Z} + 1 + i$.

b) Soient les points A(2 ;− 2) ; B(−1 ; 1) et C(0 ;−1). Déterminer l'expression complexe de la similitude indirecte S.
telle que S(A) = C ; S(B) = A.

c) Soient les points P(1 ;−1) et Q(−2 ; 1). Déterminer l'expression complexe de la similitude directe s de centre
$\Omega(-1;-1)$ telle que S(Q) = P.

d) Déterminer l'expression complexe de la similitude directe s de centre $\Omega(-1;-1)$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et de rapport $\frac{1}{2}$.

50 Dans le plan complexe P rapporté au repère ortho normal direct (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$)., unité graphique 2cm, on considère les points A et B d'affixes respectives $Z_A = -1$ et $Z_B = 3i$
Soit la fonction f de P privé du point A dans P qui, à tout point M d'affixe Z, associe le point M' d'affixe Z' tel que : $Z' = i\left(\frac{Z-3i}{Z+1}\right)$ (1).

1) Soit C le point d'affixe $Z_C = 2 - i$. Montrer qu'il existe un seul point D tel que f(D) = C.
2) Déterminer la nature du triangle ABC.
3) A l'aide de l'égalité (1), montrer que, pour tout M distinct de A et B :

$$OM' = \frac{BM}{AM} \quad et \quad \left(\vec{i}, \overrightarrow{OM'}\right) = \frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \text{ (module } 2\pi \text{)}.$$

4) En déduire et construire les ensembles de points suivants :
 a) l'ensemble (E) des points M tels que l'image M' soit situé sur le cercle (Γ) de centre O de rayon 1.
 b) l'ensemble (F) des points M tels que l'affixe de M' soit réelle.

51 Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct(O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) d'unité 2cm.
Soit $\alpha \in]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, et f_α l'application du plan complexe dans lui-même qui, au point M d'affixe Z, associe le point M' d'affixe Z' telle que : $Z' = (1+i\tan\alpha)Z - i\tan\alpha$.

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f_α.
2) Soit Ω le point d'affixe 1 et M un point du plan distinct de Ω. Montrer que si α n'est pas nul, alors MM' Ω est un triangle rectangle en M. Pour quelle valeur de α, ce triangle est-il isocèle ?

3) On pose dans cette partie $\alpha = \frac{\pi}{4}$ et on note A, B, C et D les points d'affixes respectives :
i ; $2i$; -1 et $-1 + i$.
a) Placer les points A, B, C, D dans le plan.
b) Démontrer que ABDC est un parallélogramme dont on précisera l'aire en cm²
c) Donner l'expression analytique de $f_{\frac{\pi}{4}}$.

 d) En déduire les coordonnées des points A' ; B' ; C' et D', images respectives par $f_{\frac{\pi}{4}}$ des points A, B, C et D .
 e) Placer ces images dans le plan et montrer que A'B' D'C' un parallélogramme dont on précisera l'aire en cm².

Partie A : Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct(O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$).

52

1) Résoudre dans$\mathbb{C}$, l'équation $Z^2 - (2 + 6i)Z - 16 + 12i = 0$
2) Soit $P(Z) = Z^3 - (4 + 6i)Z^2 - (12 - 24i)Z + 32 - 24i$

a)Montrer que l'équation $P(Z) = 0$ admet une solution réelle notée z_0 que l'on déterminera.
b) Déterminer a, b et c trois nombres complexes tels que $P(Z) = (Z - Z_0)(aZ^2 + bZ + c)$
c)Résoudre dans **c**, l'équation $P(Z) = 0$

Partie B:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (o, i, j)
On donne les points A(2), B($4 + 2i$) et C($-2 + 4i$).
1) a- Placer les points A, B et C dans le repère (o, i, j)

b- Calculer le rapport $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ et en déduire la nature du triangle ABC

c-Montrer que le point F d'affixe $2i$ est le milieu du segment $[AC]$

d-Déterminer (Δ) l'ensemble des points du plan d'affixe z vérifiant $|z-4-2i| = |z+2-4i|$

2) Soit S la similitude du plan telle que S(A)=A et S(B)=C.
   a- Déterminer le centre, le rapport k et l'angle θ de la similitude S
   b- Déterminer l'expression de la bijection complexe associée à la similitude S .

53

Le plan est rapporté à un repère ortho normal direct$(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.

1. Déterminez l'ensemble des points M(Z) du plan P tels que : $(1 - i)Z + 2i = 2$.
2. Etudiez la transformation de P qui au point M d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe : $Z' = (1 - i)Z + 2i$.
3. En utilisant la transformation précédente, retrouvez le résultat du 1.

54

Le plan est muni du repère orthonormal direct$(O ; \vec{u} ; \vec{v})$, (unité graphique : 1cm.)
On donne les points A et B d'affixes respectives 12 et $9i$. On note f la similitude direct dont l'écriture complexe est : $Z' = \frac{3}{4}iZ + 9i$.

1. Déterminer le centre Ω, L'angle et le rapport de f.
2. Quelles sont les images par f des points A et O ? Montrez que Ω est un point commun aux cercles C_1 et C_2 de diamètres respectif $[OA]$ et $[OB]$. Etablissez que Ω est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle AOB et montrez que $\Omega A \times \Omega B = \Omega O^2$.
3. Faites une figure comportant les points A, B, Ω ainsi que les cercles C_1 et C_2.

55 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) l'unité de longueur est le centimètre. Soit ABC un triangle direct dont le point O est le centre de son cercle circonscrit. On désigne par M le milieu de $[BC]$. N celui de $[AB]$. Les affixes respectives des points M, N et P sont notées m ; n et p.

1. Dans cette question, $m = -1 - 3i$; $n = 2$.
   Construisez les triangles MNP et ABC.
2. Soit f la transformation du plan qui à chaque point M d'affixe $Z = x + iy$ associe le point M' d'affixe $Z' = x' + iy'$ telle que : $z' = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}(-z+m+n+p)$.
   Quelle est la nature de f ? Donnez ses éléments caractéristiques.
3. Soit a, b, c sont les affixes respectives des points A, B, C.
   a. Montrez que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PA}$ puis Déduisez que $a = n + p - m$
   b. Exprimez b et c en fonction de m, n et p.
4. On pose : $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$.
   On désigne par a', b' et c' les affixes respectives des points A', B' et C'.
   a. Démontrez que : $a' = (1+i)m$, $b' = (1+i)n$, $c' = (1+i)\,p$.
   b. Déduisez-en que $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{OM}$sont orthogonaux et que A appartient à la droite (BC).
   c. Montrez de même que B' appartient à la droite (AC) et que C' appartient à la droite (AB).
   5. Complétez la figure réalisée au 1, par les points A', B', C'

56 Le plan est muni d'un repère orthonormal direct(O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$). On considère les points : A d'affixe -4 ; B d'affixe 4 ; E d'affixe $4i$; C et D tels que les quadrilatères AOEC et BOEC soient des carrés.

1. Placez les points précédents dans le repère (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) et donnez les affixes des points C et D.

2. Soit $f$la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z fait correspondre le point M d'affixe Z' = (1+i) Z + 4 + 4i.
   a. Déterminez la nature et les éléments caractéristiques de f.
   b. Précisez les points $f(A)$ et $f(O)$.

   c. Déterminez l'image par f de la droite (CA), et celle de la médiatrice du segment $[AO]$.

 d. Exprimez, pour tout point M d'affixe des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MC}$ en fonction de Z. Déduisez-en que MM' = MC et, pour M distinct de C, montrez qu'une mesure de l'angle de vecteurs $\left(\overrightarrow{MM'}\ ;\ \overrightarrow{MC}\right)$ est $\frac{\pi}{2}$

   3. Soit J le milieu du segment $[EB]$ et I le milieu de$[AO]$. Déterminez l'image de J par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

57 Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormal direct$(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$. On note A le point d'affixe 2. Soit φ l'application de P vers P qui à tout point M d'affixe Z associe le

point $M'=\varphi(M)$ d'affixe Z' définie par : $Z'=\dfrac{3+\sqrt{3}i}{4}Z+\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$

1. Déterminez :
   a. L'affixe de l'image $\varphi(A)$ du point A.
   b. L'affixe du point P tel que $\varphi(P)=O$.

2. Déterminez la nature et les éléments caractéristiques de φ.

3. Lorsque le point M est distinct du point A :
   a. Démontrez que le triangle AMM', $M'=\varphi(M)$, est rectangle en M'.
   b. Le point M et le milieu du segment $[AM]$ étant donnés, déduisez-en une construction au compas du point M'.

58 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal (O; $\vec{u}$; $\vec{v}$), on donne les points A et B d'affixes respectives 1 et $1-\frac{i\sqrt{3}}{2}$
Pour chaque point M du plan, d'affixe Z, M_1 d'affixe Z_1 désigne l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, puis M'd'affixe Z' l'image de M_1 par la translation de vecteur $-\vec{u}$.
Enfin on note T la transformation qui à chaque point M associe le point M'.

1. a) Démontrer que Z'= $e^{i\frac{\pi}{3}}Z-1$
b) Déterminer l'image du point B par T.
c) Montrer que T admet un unique point invariant dont on précisera l'affixe.

2. On pose $Z = x + iy$, avec x et y des réels.
a) Pour Z non nul, calculer la partie réelle du quotient $\dfrac{Z'}{Z}$ en fonction de x $et\ de$ y.
b) Démontrer que l'ensemble (E) des points M du plan tels que le triangle OMM' soit rectangle en O, est un cercle (C), dont on précisera le centre et le rayon, privé de deux points.
c) Tracer (E).
3. Dans cette question on pose $Z = 1+i$.
a) Vérifier que M appartient à (E). Placer M et M' sur la figure.
b) Calculer le module de Z'.
c) Calculer l'aire, en cm^2, du triangle OMM'.

59 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$).
Soit I le point d'affixe 1. On note C le cercle de diamètre [OI] et on nomme son centre Ω.

Partie I

On pose : $a_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ et on note A_0 son image.
1. Montrer que le point A_0 appartient au cercle C.
2. Soit B le point d'affixe b, avec $b = -1 + 2i$, et B' le point d'affixe b'telle que $b' = a_0 b$.
a. Calculer b'.
b. Démontrer que le triangle OBB' est rectangle en B'.

Partie II
Soit a un complexe non nul et différent de 1, et A son image dans le plan complexe.
A tout point M d'affixe Z non nulle, on associe le point M' d'affixe z' telle que Z' = aZ.
1. On se propose de déterminer l'ensemble des points A tels que le triangle OMM' soit rectangle en M'.
a. Interpréter géométriquement $\arg\left(\frac{a-1}{a}\right)$

b. Montrer que $\left(\overrightarrow{M'O}\ ;\ \overrightarrow{M'M}\right) = \arg\left(\frac{a-1}{a}\right) + 2k\boldsymbol{\pi}$ ($\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$).

c. En déduire que le triangle OMM' est rectangle en M' si et seulement si A appartient au cercle C privé de O et de I.
2. Dans cette question, M est un point de l'axe des abscisses, différent de O. On note x son affixe.
3. On choisit a de manière à ce que A soit un point de C différent de I et de O.
a. Montrer que le point M' appartient à la droite (OA).
b. En déduire que M' est le projeté orthogonal de M sur cette droite.

60

1° On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $Z^3 + \left(\sqrt{3} - i\right)Z^2 + \left(1 - i\sqrt{3}\right)Z - i = 0$.
a) Déterminer le réel y tel que iy soit solution de (E)
b) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout nombre complexe Z :
$Z^3 + \left(\sqrt{3} - i\right)Z^2 + \left(1 - i\sqrt{3}\right)Z - 1 = (Z - i)\left(Z^2 + aZ + b\right)$.
c) Résoudre dans C l'équation $(E') : Z^2 + Z\sqrt{3} + 1 = 0$.
d) En déduire les solutions de (E).

2° On considère le point A d'affixe $Z_A = i$, le point d'affixe $Z_B = \frac{-\sqrt{3} + i}{2}$ et le point C symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses.
a) Placer ces points sur un graphique.
b) Déterminer le module et un argument du quotient : $\frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B}$.
c) En déduire une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$ et la nature du triangle ABC.

Arithmétiques

Objectifs

Ce chapitre vise à :
• approfondir les notions d'arithmétique vues au premier cycle ;
• mettre en place la congruence dans $\mathbb{Z}$ et l'utiliser pour résoudre des problèmes ;
• mettre en œuvre des techniques d'algorithme et de raisonnement pour résoudre des problèmes d'arithmétique.

Savoirs et savoir-faire

1. DIVISIBILITE DANS $\mathbb{Z}$

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Multiples d'un entier relatif. • Notation n $\mathbb{Z}$. • Diviseurs d'un entier relatif.	• Démontrer qu'un entier est divisible par un entier donné. • Déterminer l'ensemble des diviseurs d'une entier naturel non nul.

2. DIVISION EUCLIDIENNE

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
•Division euclidienne dans $\mathbb{N}$. • Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$.	• Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne d'un entier relatif par un entier naturel non nul.

3. CONGRUENCE MODULO n

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
•Définition. • Propriété de conformité avec les opérations.	• Utiliser les propriétés des congruences pour résoudre des problèmes de divisibilités.

4. NOMBRES PREMIERS

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
•Définition.	• Démontrer qu'un nombre est premier.

• L’ensemble des nombres premiers est infini. • Décomposition d’un entier naturel en produit de facteurs premiers	• Déterminer l’ensemble des diviseurs d’un entier naturel non nul. • Décomposer un entier en produit de facteurs premiers.

5. **PGCD, PPCM**

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
•Définition et propriétés. • Algorithme d’Euclide. • Nombres premiers entre eux. • Théorème de Bézout. • Théorème de Gauss	• Déterminer le PGCD de deux nombres : - à l’aide de l’algorithme d’Euclide ; - à l’aide de la décomposition en produit de facteurs premiers. • Déterminer le PPCM de deux nombres : - à l’aide de la décomposition en produit de facteurs premiers ; - à l’aide du PGCD. • Utiliser le théorème de Bézout pour démontrer que des entiers sont premiers entre eux. • Utiliser le théorème de Gauss pour résoudre des problèmes d’arithmétique.

I) Activité :

a- En te référent sur les notions vues dans les classes antérieurs, décompose les nombres 450 et 320 en produit de facteur premier puis en déduire le PGCD de 450 et 320.

b- Un champ a pour dimensions 4,5m et 3,2m. On souhaite carreler cette pièce avec un nombre entier de dalles carrées, sans aucune découpe. Quel est le plus grand côté possible (en cm) de la dalle carrée ?

Solution

a- Décomposons les nombres 450 et 320 en produit de facteur premier puis en déduire le PGCD de 450 et 320.

450	2
225	3
753	
25	5
5	5
1	

320	2
160	2
80	2
40	2
20	2
10	2
5	5
	1

= > $450 = 2 \bullet 3^2 \bullet 5^2$

= > $320 = 2^6 \bullet 5 \bullet 3^0$

Alors PGCD(450 ; 320) = $2 \times 5 \times 3^0 = 10$

b- Déterminons le plus grand côté possible (en cm) de la dalle carrée ?

On a : L = 4,5 m = 450 cm et l = 3,2m = 320 m.

Ainsi le côté en cm d'une dalle carrée est le PGCD(450 ; 320) = 10.

D'où le plus grand côté possible d'une dalle est 10 cm.

II) Introduction et Définition :

1) Introduction

On peut considérer que, dès l'époque préhistorique, les hommes ont utilisé leurs doigts pour compter ou effectuer des calculs sommaires. L'emploi de symboles pour désigner les nombres apparaît sans doute en Mésopotamie, vers 2000 av. J.-C, où l'on a retrouvé des tablettes babyloniennes couvertes de chiffres en base 60. Puis viennent les systèmes de numération égyptiens, grecs et romains. **C'est en Grèce qu'est fondée l'arithmétique théorique par les pythagoriciens au VI^e^ siècle av. J.-C.** À cette époque, les mathématiciens grecs savent déjà manipuler des notions arithmétiques comme les proportions, les moyennes, ou encore les progressions. Tout ce savoir a été, par la suite, regroupé dans les ***Éléments* d'Euclide**.

2) Définition

L'Arithmétique est la branche des mathématiques qui étudie les propriétés des **Nombres Entiers Naturels** $\mathbb{N}$, des **Entiers Relatifs** $\mathbb{Z}$ et des **Nombres Rationnels** $\mathbb{Q}$.

III) Ensembles d'applications

En arithmétique, on utilise trois types de nombres :
les **Nombres Entiers Naturels** $\mathbb{N}$; les **Nombres Entiers Relatifs** $\mathbb{Z}$ et les **Nombres Rationnels** $\mathbb{Q}$.

1) Ensemble des Nombres entiers naturels :

L'ensemble des entiers naturels, noté : $\mathbb{N}$ est défini en extension comme suite :

$\mathbb{N} = \{ \boldsymbol{0} \ ; \ \mathbf{1} \ ; \ \mathbf{2} \ ; \ \mathbf{3} \ ; \dots\dots\dots \ ; \ \boldsymbol{n} \ ; \ (\boldsymbol{n}+\mathbf{1}) \ ; \ \dots\dots.. \}$

On défini dans $\mathbb{N}$ deux lois de compositions internes de la fonction suivante :

- **L'addition** : $\forall\, a \in \mathbb{N}$ et $\forall\, b \in \mathbb{N}$, $a + b = S \in \mathbb{N}$.
- **La multiplication** : $\forall\, a \in \mathbb{N}$ et $\forall\, b \in \mathbb{N}$, $a \times b = p \in \mathbb{N}$.

Exemple : $2 + 1 = 3 \in \mathbb{N}$ et $4 \times 3 = 12 \in \mathbb{N}$

On défini aussi dans $\mathbb{N}$ une relation d'ordre, c'est-à-dire que pour tout a et b de $\mathbb{N}$, on a :

Soit $a \leq b$, soit : $b \leq a$.

Propriétés

P_1 : $\mathbb{N}$ a un plus petit élément noté 0.

P_2 : $\mathbb{N}$ n'a pas de plus grand élément.

P_3-Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément.

2) **Ensemble des Nombres entiers relatifs :**

L'ensemble des entiers relatifs, noté : $\mathbb{Z}$ est défini en extension comme suite :

$\mathbb{Z} = \{ -2 \ ; -1 \ ; \ 0 \ ; \ 1 \ ; \ 2 \ ; \dots\dots ; \ n \ ; \ -n \ ; \ (n + 1) \ ; \ -(n + 1), \dots\dots \}$

Cet ensemble a la structure d'un **anneau commutatif unitaire** :

On défini dans $\mathbb{Z}$ deux lois de composition interne : une addition et une multiplication.

Propriétés :

P_1 : L'addition est commutative associative dans $\mathbb{Z}$ et admet un élément neutre qui est 0.
P_2 : La multiplication est commutative associative dans $\mathbb{Z}$ et admet un élément neutre qui est 1.
P_3 : La multiplication est distributive par rapport à l'addition : $a \bullet (b + c) = ab + ac$.
P_4 :L'existence d'un élément symétrique – a, c'est-à-dire que a + (−a) = 0.

NB :

L'anneau est unitaire à cause de l'existence de l'élément neutre "1" de la multiplication.
$(\mathbb{Z} \ ; +)$ est un groupe commutatif.
$(\mathbb{Z} \ ; + ; \times)$ est un anneau commutatif unitaire.
On défini dans $\mathbb{Z}$ une **relation d'ordre** ($\leq$) vérifiant les propriétés suivantes :

1) $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
2) $a \leq b \text{ et } c > 0 \Rightarrow ac \leq bc$
3) $a \leq b \text{ et } c < 0 \Rightarrow ac \geq bc$

D'autres propriétés de $\mathbb{Z}$, que nous admettrons sans preuve sont :

P_1- Toute partie de $\mathbb{Z}$ qui est non vide et qui est majorée, a un plus grand élément.
P_2- Toute partie de $\mathbb{Z}$ qui est non vide et qui est minorée a un plus petit élément.
P_3- Si a et b sont deux entiers relatifs, et b est non nul, il existe un entier relatif n où $nb \geq a$.

3) **Ensemble des Nombres rationnels :**

L'ensemble des nombres rationnels, noté : $\mathbb{Q}$ est un ensemble qui est défini en extension comme suite :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{Q}} \;,\; \boldsymbol{P} \in \mathbb{Z} \;;\; \boldsymbol{q} \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

NB : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

IV) Raisonnement par récurrence :

Activité :

Tu disposes d'une infinité de bâtonnets alignés verticalement. On suppose que le premier tombe et qu'en tombant, il fait tombé le second, et que ce dernier en tombant fait tomber le troisième bâtonnet ainsi de suite.
Combien de bâtonnet ne vont –ils pas tomber ?

Principe :

Pour démontrer qu'une proposition P_n est vraie pour tout entier naturel n, on procède de la façon suivante :

- **1ère Etape :(Initialisation):**

On vérifie que la proposition P_n est vraie pour le terme initial, c'est-à-dire : (P_0 est vraie).

- **2ère Etape :(Transmission) :**

On suppose que la proposition P_n est vraie pour tout entier naturel et ensuite on démontre qu'elle est vraie à l'ordre $n + 1$. C'est-à-dire P_{n+1} est vraie.

- **3ère Etape :(Conclusion) :**

On conclu qu'alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

Exemple

Démontrer par récurrence les propriétés suivantes :

1) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, on\ a : 2^n > n$.

2) $\forall\, n \in \mathbb{N}, on\ a : 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

3) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, on\ a : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots . + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Solution

1) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, on\ a : 2^n > n$.

- **1ère Etape :(Initialisation) :**

Pour $n = 1$; on a : $2^1 = 2 > 1$ (vraie).
Pour $n =$; on a : $2^2 = 4 > 2$ (vraie).

- **2ère Etape :(Transmission) :**

Supposons $2^k > k$ et montrons que $2^{k+1} > k + 1$.

On sait que : $2^k > k$.

En multipliant chaque membre de l'inégalité par 2, on a :

$2 \times 2^k > 2k$. Or $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $2k \geq k + 1$ d'où : $2^{k+1} > k + k \geq k + 1$

$2^{k+1} > k + 1$

- **3ère Etape :(Conclusion) :**

D'où $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, on\ a : 2^n > n$.

2) $\forall\, n \in \mathbb{N}, on\ a : 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Posons : $P_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n \quad et\ P_n' = \frac{n(n+1)}{2}$

- **1ère Etape :(Initialisation) :**

Pour $n = 1$; on a : $\begin{cases} P_1 = 1 \\ P_1' = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow P_1 = P_1'$ (vraie)

Pour $n = 2$; on a : $\begin{cases} P_2 = 1 + 2 = 3 \\ P_2' = \frac{2(2+1)}{2} = \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$ $=> P_2 = P_2'$ (vraie)

- **<u>2ème Etape :</u>(Transmission) :**

Supposons que la proposition est vraie au rang $n = k$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n = k + 1$.

Pour $n = k + 1$, on a :

$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

Or : $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$

D'où $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

- **<u>3ème Etape :</u>(Conclusion) :**

$\forall n \in \mathbb{N}, on\ a : 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*, on\ a : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots . + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Posons : $P_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots . + n^2 \quad et\ P_n' = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

- **<u>1ère Etape :</u>(Initialisation) :**

Pour $n = 1$; on a : $\begin{cases} P_1 = 1^2 = 1 \\ P_1' = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1 \end{cases}$ $=> P_1 = P_1'$ (vraie)

Pour $n = 2$; on a : $\begin{cases} P_2 = 1^2 + 2^2 + = 5 \\ P_2' = \frac{2(2+1)(4+1)}{6} = \frac{30}{6} = 5 \end{cases}$ $=> P_2 = P_2'$ (vraie)

- **<u>2ème Etape :</u>(Transmission) :**

Supposons que la proposition est vraie au rang $n = k$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n = k+1$.

Pour $n = k + 1$, on a :

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots . + k^2 + (k + 1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

Or $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots . + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

D'où $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots. + k^2 + (k + 1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k + 1)^2$

$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

- **3ère Etape :(Conclusion) :**

  $\forall n \in \mathbb{N}^*, on\ a : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots. + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

V) Division Euclidienne dans $\mathbb{N}$

1) Définition :

Soient a et b deux entiers naturels **($b \neq 0$).**

On appelle division Euclidienne de l'entier naturel $\boldsymbol{a}$ par l'entier naturel $\boldsymbol{b}$, toute opération visant à déterminer un couple unique ($\boldsymbol{q}$; $\boldsymbol{r}$) $\in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tel que $\boldsymbol{a = bq + r}$.

Avec : $0 \leq \mathbf{r} < \boldsymbol{b}$.

2) Notation :

- **q :** est appelé le quotient de la division Euclidienne de l'entier **a** par l'entier **b.**
- **r :** est appelé le reste de la division Euclidienne de l'entier $\boldsymbol{a}$ par l'entier $\boldsymbol{b}$**.**

3) Propriétés :

P₁ : Si b divise a , alors le reste r est nul (r = 0) . Ainsi : $\boldsymbol{a = bq}$.

P₂ : Si b divise a , alors pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$, b divise $\boldsymbol{na}$ **.**

Exemples

Exemple 1 :

Effectuer la division Euclidienne de a par b dans chacun des cas suivants puis en déduire le quotient, le reste et le diviseur dans la division de a par b:

a) $a = 43\ et\ b = 5;$ **b)** $a = 54\ et\ b = 12$

Exemple 2 :

1) Soient deux entiers naturels a et b ($a > b$). La division Euclidienne de a par b donne pour quotient q = 6 et r = 47 pour reste. Par ailleurs $a + b + r$ = 591.
Déterminer a et b.

2) Quelle peuvent être le diviseur et le reste d'une division Euclidienne dont le dividende est 542 et le quotient est 12 ?

Exemple 3 :

Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $(5n^3 - n)$ divise $(n + 2)$

Solution

Exemple 1

Effectuons le reste de la division Euclidienne de a par b dans chacun des cas suivants :

a) a = 43 et b = 5 **b)** a = 54 et b = 12

$$\begin{array}{r|l} 43 & \underline{\ 5\ } \\ & 8 \\ 3 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 54 & \underline{\ 12\ } \\ & 4 \\ 6 & \end{array}$$

= > q = 8 et r = 3 = > q = 4 et r = 6

Exemple 2

1) Soient deux entiers naturels $a\ et\ b$ ($a > b$). La division Euclidienne de $a\ par\ b$ donne pour

Quotient q = 6 et r = 47 pour reste. Par ailleurs a +b + r = 591.

Déterminons a et b sachant que q = 6 ; r = 47 et a + b + r = 591**(1)** et d'autre part

a = qb + r ⇔ a = 6b + 47 **(2)** . Dans la relation **(1)** remplaçons a par sa valeur ainsi que r :

(6b + 47) + b + 47 = 591 ⇔ 7b = 591 – 94 ⇔ 7b = 497 ⇔ b = $\frac{497}{7}$ = 71 = > b = 71

Dans (2) a = b×71 + 47 => a = 473

2) Déterminons le diviseur et le reste d'une division euclidienne sachant que :
   a = 542 et q = 12.

a = qb + r ⇔ 542 = 12b + r ⇔ r = 542 – 12b (1) d'autre part on sait que 0 $\leq$ r < b

0 $\leq$ r < b ⇔ 0 < 542 – 12b < b ⇔ 12b ≤ 542 < 13b ⇔ $12 \leq \frac{542}{b} < 13$ donc on aura :

$\frac{542}{b} = 12 \Rightarrow b = \frac{542}{12} = 45 \Rightarrow$ b = 45

Dans (1) r = 542 – 12×45 = 542 – 540 = 2 = > r = 2

Exemple 3

Déterminons l'ensemble des entiers relatifs n tels que ($5n^3 - n$) divise ($n + 2$)

La division Euclidienne de ($5n^3 - n$) par ($n + 2$), donne pour quotient :

Q = $5n^2 - 10n$ +19 et pour reste r = -38

$\frac{(5n^3 - n)}{(n+2)}$ peux se ramener sous la forme : (quotient) + $\frac{reste}{diviseur}$

Alors $\frac{(5n^3 - n)}{(n+2)}$ = ($5n^2 - 10n$ +19) + $\frac{-38}{(n+2)}$

Ainsi pour que $\frac{(5n^3 - n)}{(n+2)}$ soit un entier relatif, il faut que ($n + 2$) soit égale à l'ensemble des diviseurs de 38.

Or l'ensemble des diviseurs de 38 sont : $\{-38 ; -19 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 19 ; 38\}$

= > $n + 2 \in \{-38 ; -19 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 19 ; 38\}$

Et $n \in \{-40 ; -21 ; -4 ; -3 ; -1 ; 0 ; 17 ; 36\}$

VI) Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Multiples et diviseurs d'un entier relatif :

Activité :

a- Détermine tous les multiples de -8 et 12.
b- Détermine tous les multiples de -8 et 12 comprise entre – 24 et 36.

a- Définitions :

Soient a et b deux entiers relatifs.

- On dit que a est un multiple de b , s'il existe un entier relatif k tel que : $\boldsymbol{a = kb}$.
- On dit que b est un diviseur de a , si $\boldsymbol{a = qb}$ (où q est le quotient de la division).

NB :

- **0 est un multiple de tout entier relatif.**
- **Tout entier relatif non nul divise 0, mais il ne divise aucun entier relatif.**
- **Si $b \neq 0$, on dit que b est un diviseur de a ou que b divise a. On note : $b\,/a$.**

b- Propriété :

Soient $\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{c}$ trois entiers tel que $\boldsymbol{a \neq 0}$.
Si $\boldsymbol{a}$ divise $\boldsymbol{b}$ et a divise $\boldsymbol{c}$, alors pour tout entier $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$, **a** divise la combinaisons linéaire $\boldsymbol{bu + cv}$.

VII) Système de numération

1) Définition :

Soit b un entier naturel tel que b ≥2. Tout entier naturel x peut s'écrire de façon unique

telque : $\boldsymbol{x = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \ldots\ldots + a_p b^p = \sum_{k=0}^{p} a_k b^k}$ avec $\boldsymbol{a_k} \in \mathbb{N}$.

Ainsi si $\boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{a_k} < b$ et $\boldsymbol{a_p} \neq \boldsymbol{0}$, on peut écrire : $\boldsymbol{x = \overline{a_p a_{p-1} \ldots . a_1 a_0}^{b}}$.
Cette écriture de x est appelée x dans la base b .

2) Propriétés :

P₁ : Par convention , dans le système décimal (**appelé aussi à base 10**), les nombres sont écrits à l'aide des dix chiffres décimaux , à savoir : **0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9**.
C'est-à-dire tout nombre sans barre, est écrit en base 10.

Exemple :

3201 = $\boldsymbol{\overline{3201}^{10}}$ **=** $\boldsymbol{1{\times}10^0 + 0{\times}10^1 + 2{\times}10^2 + 3{\times}10^3}$ **= 1 + 0 + 200 + 3000 = 3201**
Donc, les chiffres **1 ; 0 ; 2 ; 3** sont les coefficients respectifs des puissances croissantes de la base 10.

P₂ : Au Delas des 10 chiffres décimaux, on peut adopter les lettres : A ; B ; C ; D ; E...etc. pour : 10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 …..etc.

3) Changement de base :

a- Système binaire ou système en base 2 :

Dans le système binaire les symboles utilisés sont : 0 et 1

b- Système octal ou système en base 8 :

Dans le système octal les symboles utilisés sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

c- Système hexadécimal ou système en base 16 :

Dans le système hexadécimal les symboles utilisés sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; A ; B ; … ; F

Exemple

1) Ecrire dans le système décimal le nombre : $\overline{\mathbf{432}}^{\mathbf{5}}$
2) Ecrire dans le système binaire le nombre : $\overline{\mathbf{127}}^{\mathbf{10}}$
3) Ecrire dans le système décimal le nombre : $\overline{\boldsymbol{F0A3}}^{\mathbf{16}}$
4) Sachant que 14 = 13 + 1, écrire14^8 dans le système de base 13.
5) Un nombre s'écrit BABA (Avec : A = 10 et B = 11) dans le système hexadécimal. Ecrire ce nombre dans le système octal.

Solution

1) Ecrivons dans le système décimal le nombre : $\overline{\mathbf{432}}^{\mathbf{5}}$

$\overline{432}^5 = 4\text{x}5^2 + 3\text{x}5^1 + 2 = 117$ ou $\overline{432}^5 = \overline{117}^{10}$

2) Ecrire dans le système binaire le nombre : $\overline{\mathbf{127}}^{\mathbf{10}}$

$\overline{\mathbf{127}}^{\mathbf{10}}$ **= 127**

$$
\begin{array}{llllllll}
127 & \vert\ 2 & & & & & & \\
1 & \vert\ 63 & \vert\ 2 & & & & & \\
 & 1 & \vert\ 31 & \vert\ 2 & & & & \\
 & & 1 & \vert\ 15 & \vert\ 2 & & & \\
 & & & 1 & \vert\ 7 & \vert\ 2 & & \\
 & & & & 1 & \vert\ 3 & \vert\ 2 & \\
 & & & & & 1 & \vert\ 1 & \vert\ 2 \\
 & & & & & & 1 & \vert\ 0
\end{array}
$$

= >**127 =** $\overline{\mathbf{1111111}}^{\mathbf{2}}$

3) Ecrire dans le système décimal le nombre : $\overline{\boldsymbol{F0A3}}^{\mathbf{16}}$

$\overline{F0A3}^{16} = F\text{x}16^3 + 0\text{x}16^2 + A\text{x}16^1 + 3 = F\text{x}16^3 + A\text{x}16 + 3$

Or A = 10 et F = 15

= > $\overline{F0A3}^{16} = 15\text{x}16^3 + 10\text{x}16 + 3 = 61440 + 160 + 3 = 61603$

= > $\overline{F0A3}^{16} = 61603$ ou $\overline{F0A3}^{16} = \overline{61603}^{10}$

4) Sachant que 14 = 13 + 1, écrivons14^8 dans le système de base 13.

$14 = 13 + 1 => 14^8 = (13 + 1)^8$
Ainsi d'après le triangle de Pascal, le développement de $(13 + 1)^8$ donne :

$(13 + 1)^8 = 13^8 + 8 \bullet 13^7 + 28 \bullet 13^6 + 56 \bullet 13^5 + 70 \bullet 13^4 + 56 \bullet 13^3 + 28 \bullet 13^2 + 8 \bullet 13^1 + 1$

Or :28 = 13x2 + 2 ; 56 = 13x4 + 4 ; 70 = 13x5 + 5 . Alors, on a :

- $28 \bullet 13^6 = 13^6(13\times2 + 2) = 2x13^7 + 2x13^6$
- $56 \bullet 13^5 = 13^5(13\times4 + 4) = 4x13^6 + 4x13^5$

- $70 \bullet 13^4 = 13^4(13\times5 + 5) = 5x13^5 + 5x13^4$

- $56 \bullet 13^3 = 13^3(13\times4 + 4) = 4x13^6 + 4x13^5$
- $28 \bullet 13^2 = 13^2(13\times2 + 2) = 2x13^3 + 2x13^2$

La somme des termes de même puissance donne :

$(13 + 1)^8 = 1 \bullet 13^8 + 10 \bullet 13^7 + 6 \bullet 13^6 + 9 \bullet 13^5 + 9 \bullet 13^4 + 6 \bullet 13^3 + 2 \bullet 13^2 + 8 \bullet 13^3 + 1$

$=> \mathbf{(13 + 1)^8 = 14^8 = \overline{1A6996281}^{13}}$ **(avec A = 10)**

5) Un nombre s'écrit BABA (Avec : A = 10 et B = 11) dans le système hexadécimal. Ecrivons ce nombre dans le système octal.

$\overline{BABA}^{16} = B\times16^3 + A\times16^2 + B\times16^1 + A$ Or : A = 10 et B = 11

$=> \overline{BABA}^{16} = 11\times16^3 + 10\times16^2 + 11\times16^1 + 10$

Dans le système octal les symboles utilisés sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

Or : 11 = 8 + 3 ; 10 = 8 + 2 Alors, on a :

$=> \overline{BABA}^{16} = (8 + 3)\times16^3 + (8 + 2)\times16^2 + (8 + 3)\times16^1 + (8 + 2)$

Or : $16^3 = (8 \bullet 2)^3$; $16^2 = (8 \bullet 2)^2$; $16^1 = (8 \bullet 2)^1$; 10 = 8 + 2 Alors, on a :

$\overline{BABA}^{16} = (8 + 3)\times(8 \bullet 2)^3 + (8 + 2)\times(8 \bullet 2)^2 + (8 + 3)\times16^1 + (8 + 2)$

$= (8 + 3)\times8^3\times2^3 + (8 + 2)\times8^2\times2^2 + (8 + 3)\times8\times2$

Le développement et la somme des termes de même puissance donnent :

$\overline{BABA}^{16} = 8^5 + 3 \bullet 8^4 + 5 \bullet 8^3 + 2 \bullet 8^2 + 7 \bullet 8^1 + 2$

$=> \overline{BABA}^{16} = \overline{135272}^8$

VIII) Congruence Modulo n

Considérons les nombres entiers relatifs ci-dessous, où n est un entier naturel supérieur à 1,

a = $-2n + 1$
b = $15n + 1$

Des relations ci-dessus, on note que :

- a et b ont un même reste (à savoir 1) lorsqu'ils sont divisés par n
- a – b = $-2n - (15n) = -17n$, c'est-à-dire que a – b est un multiple de n.

De ces observations, nous donnons la définition de la congruence modulo n comme suite :

1) Définitions :

Définition 1:On dit que l'entier relatif a est congru à l'entier relatif b, modulo n, si la division de a par n, et celle de b par n, ont le même reste. Ceci est symbolisé par : $\boldsymbol{a \equiv b(n)}$**.**

Définition 1 : On dit que l'entier relatif a est congru à l'entier relatif b, modulo n, si la différence a – b est un multiple de n. Autrement dit $\boldsymbol{a \equiv b(n)}$ < = > $\exists\, k \in \mathbb{Z} ; a - b = kn$.

Remarque : $\boldsymbol{a \equiv b(n)} \Leftrightarrow \boldsymbol{a = kn + b}$ c'est-à-dire le reste de la division euclidienne de a par n est b.

2) Propriétés :

La relation de congruence modulo n est une **relation d'équivalence**, car elle met en évidence les propriétés suivantes :

P₁ : la relation de congruence modulo n est **Réflexive**, c'est-à-dire :
$\forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{Z},\ \boldsymbol{on\ a} : \ \boldsymbol{a \equiv a[n]}$**.**

P₂ : la relation de congruence modulo n est **Symétrique**, c'est-à-dire :
$\forall(\boldsymbol{a} ; \boldsymbol{b}) \in \mathbb{Z}^2,\ \boldsymbol{Si\ a \equiv b[n]}$ **Alors** $\boldsymbol{b \equiv a[n]}$

P₃ : la relation de congruence modulo n est **Transitive**, c'est-à-dire :
$\forall(\boldsymbol{a} ; \boldsymbol{b} ; \boldsymbol{c}) \in \mathbb{Z}^3,\ \boldsymbol{Si\ a \equiv b[n]}$ **et** $\boldsymbol{b \equiv c[n]}$ **alors** $\boldsymbol{a \equiv c[n]}$ **.**

3) **Autres propriétés caractéristiques :**

P₁ : $a \equiv b[n] => n$ divise $a - b$

P₂ : $a \equiv b[n] <=> \forall k \in \mathbb{N},\ ka \equiv kb[n]$

P₃ : $a \equiv b[n] <=> \forall p \in \mathbb{N},\ a^p \equiv b^p[n]$

4) **Congruences particulières (Caractères de divisibilité) :**

a- **Divisibilité par 2**

Un entier x est divisible par 2 si et seulement si son chiffre des unités simples est pair, c'est-à-dire si l'entier x est terminé par 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8.

b- **Divisibilité par 3 et par 9**

Un entier x est divisible par 3 (respectivement par 9) si et seulement si la somme de ces chiffres est divisible par 3 (respectivement par 9).

c- **Divisibilité par 5**

Un entier x est divisible par 5 si et seulement si cet entier est terminé par 0 ou 5.

d- **Divisibilité par 11**

Un entier N est divisible par 11 si et seulement si la différence de la somme des chiffres de rang pair et de la somme des chiffres de rang impair est divisible par 11.

e- **Divisibilité par 4 et par 25**

Un entier x est divisible par 4 (respectivement par 25) si et seulement si le nombre formé par les deux derniers chiffres est divisible par 4 (respectivement par 25).

Exemple

1) Déterminer le reste de la division par 5 de : 2^0 ; 2 ; 2^2 ; 2^3 et 2^n

   En déduire le reste de la division de 2^{20} par 5.

2) Déterminer le reste de la division de 7^n par 9 puis en déduire le reste de la division Euclidienne de 7^{2008} par 9.

3) Le nombre 2798793 est –il divisible par : 2 ; 3 ; 11 ?

Solution

1) Pour chacun des nombres ci-dessous, déterminons le reste de la division par 5 de : 2^0 ; 2 ; 2^2 ; 2^3 ; 2^4 et 2^n Puis en déduisons le reste de la division de 2^{20} par 5.

$2^0 = 1 \equiv 1[5]$
$2 = 2 \equiv 2[5]$
$2^2 = 4 \equiv 4[5]$
$2^3 = 8 \equiv 3[5]$
$2^4 = 8 \equiv 1[5]$

Ainsi, on remarque qu'à partir de $n = 4$, le reste 1 c'est répété.
Alors on dit que 4 est la période c'est-à-dire :

$2^{4k} \equiv 1[5]$
$2^{4k+1} \equiv 2[5]$
$2^{4k+2} \equiv 4[5]$
$2^{4k+3} \equiv 3[5]$

Si $n = 4k$, le reste de la division euclidienne de 2^n par 5 est 1.
Si $n = 4k + 1$, le reste de la division euclidienne de 2^n par 5 est 2.
Si $n = 4k + 2$, le reste de la division euclidienne de 2^n par 5 est 4.
Si $n = 4k + 3$, le reste de la division euclidienne de 2^n par 5 est 3.

Déduisons le reste de la division de 2^{20} par 5.
Pour cela, il suffit d'écrire 20 sous la forme 20 = $4k + r$

Or 20 = $4 \times 5 + 0 = 4 \times 5 \Rightarrow 2^{20} = 2^{4\times5+0}$

$2^{20} \equiv 2^0 \equiv 1[5]$

2) Déterminons le reste de la division de 7^n par 9 puis en déduisons le reste de la division Euclidienne de 7^{2008} par 9.

Pour $n = 0$; on a : $7^0 = 1 \equiv 1[9]$

Pour $n = 1$; on a : $7^1 = 7 \equiv 7[9]$

Pour $n = 2$; on a : $7^2 = 49 \equiv 4[9]$

Pour $n = 3$; on a : $7^3 = 343 \equiv 7\times4 = 28 \equiv 1[9]$

Ainsi, on remarque qu'à partir de $n = 3$, le reste 1 c'est répété.

Alors la période P = 3 = > $n =$ Pq + r = > $n =$ 3q + r

- Si r = 0 ; alors on a : $7^n = 7^{3q} = (7^3)^q \equiv (1)^q [9] = 1 \equiv 1 [9]$
- Si r = 1 ; alors on a : $7^n = 7^{3q+1} = 7^{3q} x 7^1 \equiv 7 [9]$
- Si r = 2 ; alors on a : $7^n = 7^{3q+2} = 7^{3q} x 7^2 \equiv 4 [9]$

D'où les restes possibles de la division de 7^n par 9 sont : 1 ; 7 ; 4
En déduisons le reste de la division de 7^{2008} par 9.
La division de 2008 par la période **P = 3** , donne pour quotient **q = 669** et pour reste **r = 1**

= > 2008 = 3×669 + 1

Alors$7^{2008} = 7^{3x669+1}$ (sous la forme $7^{3q+1} \equiv 7 [9]$)

D'où $7^{2008} \equiv 7 [9]$

<u>**Conclusion**</u> : Le reste de la division de 7^{2008} par 9 est r = 7

3) Vérifions si le nombre 2798793 est –il divisible par : 2 ; 3 ; 11

- **Divisibilité par 2 :**

Le nombre 2798793 n'est pas divisible par 2, car : 2798793 ne se termine pas par :
0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8

- **Divisibilité par 3 :**

le nombre 2798793 est divisible par 3, car : 2 +7 + 9 + 8+7+9 + 3 = 45 qui est divisible par 3.

- **Divisibilité par 11 :**

le nombre 2798793 n'est pas divisible par 11, car :

(7 + 8 + 9) – (2 + 9 + 7 + 3) = 24 – 21 = 3 qui n'est pas divisible par 11.

IX) Congruence et Structure d'anneau (Ensemble $\mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z}$) :

1) Classe d'équivalence modulo n

a- Définition :

Lorsqu'un nombre quelconque x de $\mathbb{Z}$ est divisé par un entier naturel n, les restes possibles sont : **0 , 1 , 2 ,…, n-1.**
On dit qu'un élément x de $\mathbb{Z}$ appartient à la **classe$\dot{p}$modulo $\boldsymbol{n}$** si : $x \equiv p \; avec \; n - 1 \geq 0$.

D'une manière générale, si$x$est un élement de $\mathbb{Z}$, alors la classe de x modulo n est l'ensemble de tous les élements de $\mathbb{Z}$ qui ont le même reste que x dans la division par n ; on le note $\boldsymbol{cl}(\boldsymbol{x}) = \dot{\boldsymbol{x}}$ tel que : $\boldsymbol{cl}(\boldsymbol{x}) = \dot{\boldsymbol{x}} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{Z} / \; \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \equiv \boldsymbol{0}[\boldsymbol{n}]\}$

b- Ensemble quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

L'ensemble des classes $\dot{p}$modulo $\boldsymbol{n}$ est noté par $\mathbb{Z}/\boldsymbol{n}\mathbb{Z}$ et s'appelle groupe quotient de $\mathbb{Z}/\boldsymbol{n}\mathbb{Z}$ **tel que :** $\mathbb{Z}/\boldsymbol{n}\mathbb{Z} = \left\{\dot{\boldsymbol{0}} \,;\; \dot{\boldsymbol{1}} \,;\; \dot{\boldsymbol{2}} \,;\; \dot{\boldsymbol{3}} \,;\; \ldots\ldots \overbrace{\boldsymbol{n-1}}^{\cdot}\right\}$.

2) Propriétés dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

a- Propriétés (Addition) :

1) L'associativité, $\dot{x} + (\dot{y} + \dot{z}) = (\dot{x} + \dot{y}) + \dot{z}$
2) La commutativité, $\dot{x} + \dot{y} = \dot{y} + \dot{x}$
3) L'élément neutre, $\dot{0}$ $(car, \dot{x} + \dot{0} = \overbrace{x+0}^{\cdot} = \dot{x})$
4) L'élément $\overbrace{-x}^{\cdot}$, symétrique de x (car $\overbrace{x+0}^{\cdot} = \overbrace{x-x}^{\cdot} = \dot{0}$)

b- Propriétés (Multiplication) :

1) L'associativité : $\dot{x} \times (\dot{y} \times \dot{z}) = (\dot{x} \times \dot{y}) \times \dot{z}$
2) La commutativité : $\dot{x} \times \dot{y} = \dot{y} \times \dot{x}$
3) L'élément neutre : $\dot{1}$ (car $\dot{1} \times \dot{x} = \overbrace{1 \times x}^{\cdot} = \dot{x}$)
4) La distributivité par rapport à l'addition, soit : $\dot{x} \times (\dot{y} + \dot{z}) = (\dot{x} \times \dot{y}) + (\dot{x} \times \dot{z})$

NB :
On dit qu'un anneau commutatif unitaire A est **intègre** si pour tout x, y de A, on a :
$x \times y = 0 \Rightarrow x = 0 \; ou \; y = 0$

Lorsque l'anneau n'est pas intègre, il existe $x\ et\ y$, tous non nuls, dont le produit est zéro. On dit alors que $x\ et\ y$ sont des **diviseurs de zéro**.

Exemple

Utiliser la définition ci-dessus pour établir la table d'addition et de multiplication de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Solution

Ici les restes possibles sont 0, 1, 2, 3. D'où les deux tables suivantes

$+$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$
$\dot{1}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{0}$
$\dot{2}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$
$\dot{3}$	$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$

$\times$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$
$\dot{1}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$
$\dot{2}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$
$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{3}$	$\dot{2}$	$\dot{1}$

Pour établir les tables ci-dessus, nous avons effectué les opérations de la manière typique suivante :

Pour la multiplication : $\dot{3} \times \dot{\mathbf{2}} = \overbrace{\mathbf{3 \bullet 2}}^{\bullet} = \dot{\mathbf{6}}$ ou **Pour l'addition** $\dot{3} + \dot{\mathbf{2}} = \overbrace{\mathbf{3 + 2}}^{\bullet} = \dot{\mathbf{5}}$

X) Nombre Entier Naturel Premier :

1) Définition :

On dit qu'un nombre entier naturel p est premier s'il a exactement deux diviseurs, 1 et p.

D'une manière générale :

Pour montrer qu'un nombre entier naturel p est premier, il suffit de le diviser par les entiers naturels premiers successifs qui lui sont inférieur afin d'obtenir un entier premier d qui ne le divise pas avec **($d^2 <$ a)**

Exemple

Montrer que 239 est un nombre entier premier.

On a : a = 239 => $\sqrt{a} = \sqrt{239} = 15{,}45$

Ainsi les nombres entiers premiers inférieurs à 15,45 sont : {1, 3, 5, 7, 13} et on remarque que 239 n'est pas divisible par aucun de ces nombres premiers c'est-à-dire : {1, 3, 5, 7, 13}.

Conclusion : 239 est un nombre premier.

2) Théorèmes :

Théorème1 : Tout entier naturel n supérieur à 1, admet au moins un diviseur premier.

Théorème 2 : L'ensemble des nombres premiers est infini.

Théorème 3 : Tout entier naturel n supérieur à 1 admet au moins un diviseur premier d tel que : $1 < d^2 \leq n$

NB :

L'ensemble des nombres premiers compris entre 1 et 100 peut s'obtenir par **l'algorithme d'Eratosthène** que nous décrivons comme suit :

1) On construit une table des nombres allant de 1 à 100.
2) On élimine le nombre 1 qui n'est pas premier
3) On garde le nombre 2 et on élimine de la table tous ses multiples
4) Le nombre suivant non éliminé est 3, que l'on garde. On élimine de la table tous les multiples de 3;
5) On procède ainsi jusqu'au nombre 100 .
6) Les nombres non éliminés de la table sont tous premiers.

On obtient alors la table suivante :

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	63	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	93	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Théorème 4 : (**Décomposition d'un nombre entier en produit de facteur premier**).
Tout entier naturel supérieur à 1 se décompose de façon unique comme un produit de facteurs premiers. La décomposition prend la forme générale : $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} P_3^{\alpha_3} \ldots . P_k^{\alpha_k}}$
où α_i est le nombre de termes de valeur p_i contenus dans n.

Exemple

1) Décomposer en produit de facteurs premiers le nombre 21200.
2) On pose N = 21200n. Déterminer la valeur de n pour que N soit un carré parfait.

Solution

1) Décomposons en produit de facteurs premiers le nombre 21200.

Nous remarquons la présence de deux zéros à la fin du nombre.

D'où : $n = 212 \times 10^2 = 212 \times 2^2 \times 5^2$

Maintenant nous utilisons la table des nombres premiers pour décomposer le terme 212 comme suite :

$$\begin{array}{r|l} 212 & 2 \\ 106 & 2 \\ 53 & 53 \\ 1 & \end{array}$$

En regroupant les termes, on a : $2^2 \text{ x } 53 \text{ x } 2^2 \text{ x } 5^2 = 2^4 \text{ x } 5^2 \text{ x } 53^1$

2) On pose N = 21200n. Déterminons la valeur de n pour que N soit un carré parfait.

N = 21200n = $2^4 \text{ x } 5^2 \text{ x } 53^1 \times n$. Alors N est un carré parfait si $n = 53^{2k+1}$ (avec k ∈ ℕ)

Où $2k + 1$ est l'écriture d'un nombre impaire.

XI) PPCM et PGCD de deux entiers naturels a et b :

1) Plus Petit Commun Multiple(PPCM)

a- Définition :

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls. On appelle plus petit commun multiple de a et b, le plus petit élement strictement positif de ($a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$).

Notation :

Le plus petit commun multiple de a et b peut être noté comme suit:

PPCM (a ; b) = ($a \vee b$) = m .

b- Propriétés

P1: $\forall\ (a\ ;\ b) \in \mathbb{Z}^2$; PPCM(a ; b) = PPCM($|a|$; $|b|$)
C'est à dire cherché le PPCM de deux entiers relatifs, revient à cherché le PPCM de deux entiers naturels non nuls.

P2: $\forall\ (a\ ;\ b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a : $ma(a\ ;\ b) \leq$ PPCM(a ; b) $\leq$ a•b

P3: $\forall\ (a\ ;\ b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a : PPCM(a ; b) = a < = > a $\in$ (b $\mathbb{Z}$).

Exemple : PPCM (12 ; 4) = 12 < = >12 $\in$ (4 $\mathbb{Z}$).

P4 : L'ensemble des multiples communs de deux entiers naturels non nuls a et b est l'ensemble des multiples de leurs PPCM, c'est-à-dire si PPCM (a ; b) = m ; alors :
($a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$) = $m\mathbb{Z}$.

Exemple : PPCM (12 ; 16) = 48 donc ($12\mathbb{Z} \cap 16\mathbb{Z}$) = $48\mathbb{Z}$.

P5 : Soit a ;b et k trois entiers naturels non nuls. On a :

PPCM (ka ; kb) = k PPCM(a ; b)

Exemple : PPCM(120 ; 168) = PPCM(24x5 ; 24x7) = 24 = 24•PPCM(5 ; 7) = 24x35 = >PPCM(120 ; 168) = 840

2) Plus Grand Commun Diviseur (PGCD)

a- Définition :

Soient $a\ et\ b$ deux entiers relatifs non nuls. On appelle Plus Grand Commun Diviseur de a et b, le plus grand élement commun strictement positif de **($\boldsymbol{a} \in \mathbb{Z} \cap \boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}$).**

Notation :

Le Plus Grand Commun Diviseur de a et b peut avoir les notations suivantes :

PGCD ($\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{b}$) = ($\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$) = d = Δ .

b- Propriétés :

P₁ :$\forall$ (a ; b) $\in \mathbb{Z}^2$; PGCD (a ; b) = PGCD ($|a|$; $|b|$)
C'est à dire cherché le PGCD de deux entiers relatifs, revient à cherché le PGCD de deux entiers naturels non nuls.

P_2 : Soient $a\ et\ b$ deux entiers naturels non nuls. On a :

PGCD (a ; b) = d => D(a ; b) = D_d où D_d désigne l'ensemble des diviseurs de d.

Exemple :

PGCD (24 ; 30) = 6 => D(24 ; 30) = D_6 = { 1 ; 2 ; 3 ; 6 }

P_3 : Soient a ; b et k trois entiers naturels non nuls. On a :

PGCD (ka ; kb) = k PGCD (a ; b) .

Exemple :

PGCD (228 ; 95) = PGCD (19×12 ; 19×5) = 19 PGCD (12 ; 5) = 19×1 = 19

P_4 : Si b > a alors PGCD(a ; b) = PGCD(a ; $b - a$) = PGCD[$b - a$; $a - (b - a)$]

Exemple 1 :

PGCD(143 ;27) = PGCD(27 ; 116) = PGCD(27; 89) = PGCD(77; 62) = PGCD(27;35) = PGCD(27 ; 8) = PGCD(8 ; 19) = 1

Exemple 2 :

PGCD($2n + 3$; $5n - 2$) = PGCD($3n - 5$; $2n + 3$) = PGCD($n - 8$; $2n + 3$)
= >PGCD($n + 11$; $n - 8$) = PGCD(19 ; $n - 8$) = 19

P$_4$:D'après l'algorithme d'Euclide, si $a = bq + r$ ($r \neq 0$) alors :
PGCD(a ; b) = PGCD(b ; r) et puis que r = $a - bq$ alors on a :
PGCD(a ; b) = PGCD$[b\ ;\ (a - bq)]$

Exemple :

Montrer que PGCD$[(5n^3 - n)\ ;\ (n + 2)]$ = PGCD$[(n + 2)\ ;\ 38]$

Solution

La division Euclidienne de $(5n^3 - n)$ par $(n + 2)$ donne pour quotient :
$q = 5n^2 - 10n + 19$ et pour reste $r = -38$.

Puisque : PGCD(a ; b) = PGCD(b ; r) alors on a :

PGCD$[(5n^3 - n)\ ;\ (n + 2)]$ = PGCD$[(n + 2)\ ;\ -38]$ = PGCD$[(n + 2)\ ;\ 38]$

P$_5$: Soit (a ; b) ∈ $(IN^*)^2$ et d leur PGCD. Un entier relatif $m$est un multiple de d si et seulement si, il existe deux entiers relatifs u et v tel que $m = au + bv$

Exemple :

38 est un multiple de 19 ; donc il existe un couple $(u\ ;\ v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$$38 = 228u + 95v \Rightarrow 38 = 228(1) + (-2)(95) \Rightarrow u = 1 \ et\ v = -2$$

Exercices d'application

1) Déterminer le PGCD et le PPCM des entiers a et b dans chacun des cas suivants :

a- $a = 1455$ et $b = 335$; **b-** $a = 24$ et $b = 33$; ***c-*** $a = 48$ et $b = 46$

Solution

a- $a = 1455$ et $b = 335$

La décomposition de a et b en produit de facteurs premiers donne :

$$\begin{cases} a = 1455 \\ b = 335 \end{cases} <=> \begin{cases} a = 3 \bullet 5 \bullet 97 \\ b = 5 \bullet 67 \end{cases} <=> \begin{cases} a = 3 \bullet 5 \bullet 97 \bullet 67^0 \\ b = 5 \bullet 67 \bullet 97^0 \bullet 3^0 \end{cases}$$

PGCD(1455 ; 335) = $3^0 \bullet 97^0 \bullet 67^0 \bullet 5^1 = 5$ = >**PGCD(1455 ; 335) = 5**
= >
PPCM(1455 ; 335) = 3•5•97•67 = 97485 = >**PPCM(1455 ; 335) = 97485**

b- $a = 24 \quad et \ b = 33$

La décomposition de $a \ et \ b$ en produit de facteurs premiers donne :

$\begin{cases} a = 24 \\ b = 33 \end{cases}$ < = > $\begin{cases} a = 2^3 \bullet 3 \\ b = 3 \bullet 11 \end{cases}$ < = > $\begin{cases} a = 2^3 \bullet 3 \bullet 11^0 \\ b = 3 \bullet 11 \bullet 2^0 \end{cases}$

PGCD(24 ; 33) = $2^0 \bullet 3 \bullet 11^0$= 3 = >**PGCD(24 ; 33) = 3**
= >
PPCM(24 ; 33) =2^3•3•11 = 264 = >**PPCM(24 ; 33) = 264**

c- $a = 48 \quad etb = 46$

La décomposition de $a \ et \ b$ en produit de facteurs premiers donne :

$\begin{cases} a = 48 \\ b = 46 \end{cases}$ <=> $\begin{cases} a = 2^4 \times 3 \\ b = 2 \times 23 \end{cases}$ <=> $\begin{cases} a = 2^4 \times 3 \times 23^0 \\ b = 2 \times 23 \times 3^0 \end{cases}$

PGCD (48 ; 46) = $2 \times 3^0 \times 23^0$ = 2 = > PGCD (48 ; 46) = 2 et

PPCM (48 ; 46) = $2^4 \times 3 \times 23$ = 1104 = > PPCM (48 ; 46) = 1104

XII) Algorithme d'Euclide :

1) Définition :

Soient a et b deux entiers tels que : $0 < b < a$ et r le reste de la division Euclidienne de a par b.
On appelle **Algorithme d'Euclide**, toute opération visant à déterminer le PGCD des deux entiers a et b en effectuant les divisions Euclidiennes successives suivantes :

- Division de a par b pour obtenir : a = $bq_0 + r_0$;Avec $0 \leq r_0 < b$.
- Division de b par r_0 pour obténir : b = $r_0 q_1 + r_1$; Avec $0 \leq r_1 < r_0$.
- Division de r_0 par r_1 pour obténir : $r_0 = r_1 q_2 + r_2$; Avec $0 \leq r_2 < r_1$.

Et ainsi de suite jusqu'à obtention du dernier reste non nul qui correspond au PGCD des deux entiers a et b .

NB : toutes ces opérations peuvent êtres résumées dans un tableau appelé : **tableau d'Algorithme.**

Quotients	q_0	q_1	q_2	….	…..	…..	……
Dividende	**Diviseur**	r_0	r_1	….	…..	…..	……
Restes	r_0	r_1	r_2	….	…..	…..	……

Exemple

En utilisant le tableau d'Algorithme, déterminer le PGCD des entiers a et b dans chacun des cas suivants :

a- $a = 1455 \quad et \quad b = 335$; **c-**$a = 46 \quad et \quad b = 43$

Solution

a- $a = 1455 \quad etb = 335$

Quotients	421	1	2		
1455335	115105	10	5		
Restes	115	105	10	5	0

Ici le dernier reste non nul est 5. D'où **PGCD(1455 ; 335) = 5**

c- $a = 46 \quad etb = 43$

Quotients	1143		
46	**43**31		
Restes	3	1	0

Ici le dernier reste non nul est 1. D'où **PGCD (1455 ; 335) = 1**

XIII) Nombres Premiers entre eux ou Nombres étrangers :

1) Définitions :

Activité : Détermine le PGCD (48 ; 43)

Synthèse

Le PGCD (48 ; 43) = 1. On dit alors que 48 et 43 sont premiers entre eux ou qu'ils sont étrangers.

Définition 1 :

Soient a et b deux nombres entiers relatifs non nuls.
On dit que a et b sont premiers entre eux (ou sont étrangers) si **PGCD (** $\boldsymbol{a}$ **;** $\boldsymbol{b}$ **) = 1.**

Définition 2:

On dit également que a et b sont premiers entre eux (ou sont étrangers) s'ils n'admettent pas de diviseur commun (en dehors de l'unité c'est-à-dire 1).

Exemple : **3** et **5** sont premiers entre eux alors PGCD (3 ; 5) = 1

2) Théorèmes :

- **Théorème 1 : (Théorème de Bézout).**

Soients a et b deux entiers relatifs non nuls. a et b sont étrangers s'il existe un couple ($\boldsymbol{u}$; $\boldsymbol{v}$) ∈ ℕ tel que : $\boldsymbol{au + bv = 1.}$

- **Théorème 2 : (Théorème de Gauss).**

Soients a ; b ; et c trois entiers relatifs non nuls. Si a divise bc et que a et b sont premier entre eux (**PGCD (** $\boldsymbol{a}$ **;** $\boldsymbol{b}$ **) = 1**), alors a divise c.

- **Théorème 3 : (Théorème de Fermat).**

Soit a un nombre entier non nul, et p un nombre premier. Si p ne divise pas a , alors il s'en suit la congruence suivante : $a^{p-1} \equiv 1[\,p\,]$

- **Théorème 4 :**

Si a et b sont premiers entre eux (**PGCD ($\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{b}$) = 1**) et si a et b divisent c, alors le produit ab divise c.

- **Théorème 5 :**

Si a et b sont premiers entre eux (**PGCD ($\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{b}$) = 1**), alors PPCM (a ; b) = ab

Exemple

1) En utilisant le théorème de Bézout, déterminer le couple (u ; v) tel que $7u + 5v = 1$.
2) En utilisant le théorème de Gauss, montrer que si n est un entier naturel, alors, le nombre N = $n^3 - n$ est divisible par 6.
3) En utilisant le théorème de Fermat, déterminer le reste de la division de 15^{401} par 17.

Solution

1) **En utilisant le théorème de Bézout, déterminons le couple ($\boldsymbol{u}$; $\boldsymbol{v}$) tel que $\boldsymbol{7u + 5v = 1}$.**

Puisque PGCD (7 ; 5) = 1, alors utilisons la table d'Algorithme pour déterminer le couple (u ; v)

Quotients	1	2	1
7	**5**	2	1
Restes	2	1	0

$=> 1 = 5 - 2x2$ or $2 = 7 - 1x5$

$=> 1 = 5 - 2(7 - 1x5)$

$=> 1 = 5 - 2x7 + 2x5$

$<=> 5 - 2x7 + 2x5 = 1$

$=> 7(-2) + 5(1 + 2) = 1$

$= > 7(-2) + 5(3) = 1$ (Sous la forme $7u + 5v = 1$). Avec $u = -2$ et $v = 3$

D'où le couple $(u\ ;\ v)$ est tel que $(u\ ;\ v) = (-2\ ;\ 3)$.

2) **En utilisant le théorème de Gauss, montrons que si n est un entier naturel, alors, le nombre N = $n^3 - n$ est divisible par 6.**

On peut écrire,
$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n + 1)(n - 1)$
⇨ $n^3 - n = (n - 1)\, n(n + 1)$
⇨ $N = (n - 1)\, n(n + 1)$

On note que les termes $(n - 1)$, n et $(n + 1)$ de N, sont des entiers successifs. Donc au moins un de ces termes est pair, donc divisible par 2. D'autre part, la division de chacun de ces termes par 3 donne les restes possibles 0, 1, ou 2. Donc,

Si $(n - 1)$ 3 donne un reste de 0, alors $(n - 1)$ est divisible par 3.
Si $(n - 1)/3$ donne un reste de 1, alors $(n + 1)$ est divisible par 3.
Si $(n - 1)/3$ donne un reste de 2, alors n est divisible par 3.
En conclusion, $n^3 - n$ est à la fois divisible par 2 et par 3. Or 2 et 3 sont premiers entre eux. Donc 6 divise $n^3 - n$.

3) **En utilisant le théorème de Fermat, déterminer le reste de la division de 15^{401} par 17.**

On note que 17 est un nombre premier et que 17 ne divise pas 15. Alors, par le Petit Théorème de Fermat, on a :

$15^{17-1} \equiv 1(17) \Rightarrow 15^{16} \equiv 1(17)$

D'autre part, on a :

$401 = 16 \times 25 + 1 \Rightarrow 15^{401} = (15^{16})^{25} \times 15^1$

Les relations ci – dessus donnent,

$15^{401} \equiv 1^{25} \times 15^1$ (17)

$= > 15^{401} \equiv 15$ (17)

D'où le reste de 15^{401} par 17 est 15.

3) **Relation Entre PGCD et PPCM :**

Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux entiers naturels non nuls. Si $\boldsymbol{d}$ et $\boldsymbol{m}$ désignent respectivement le **PGCD** et le **PPCM** des entiers naturels : $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$, on a :

- $a \bullet b = m \bullet d$

Ainsi il existe deux entiers a' et b' premiers entre eux (**PGCD(** $\boldsymbol{a'}$; $\boldsymbol{b'}$ **) = 1**) tel que :

$$a = a' \bullet d \quad \text{et} \quad b = b' \bullet d \quad => a \bullet b = d^2 \bullet a'b'$$

Puisque a' et b' sont premiers entre eux (**PGCD (** $\boldsymbol{a'}$; $\boldsymbol{b'}$ **) = 1**), alors on a le théorème Suivant :

- **PPCM(**$\boldsymbol{a'}$; $\boldsymbol{b'}$**)** $= \boldsymbol{a' \bullet b'}$

Exemple

Déterminer les entiers naturels a et b dans chacun des cas suivants :

a) $\begin{cases} a + b = 168 \\ PGCD(a\,;b) = 21 \end{cases}$; b) $\begin{cases} m + 3\Delta = 276 \\ 10 < \Delta < 30 \end{cases}$; c) $\begin{cases} a^2 - b^2 = 405 \\ 3m = a \bullet b \end{cases}$

Solution

a) $\begin{cases} a + b = 168 \\ PGCD(a\,;b) = 21 \end{cases}$

Soient a' et b' deux entiers non nul tel que : $a = a'd$ et $b = b'd$ (avec PGCD (a' ; b') = 1)

Posons : $PGCD(\,a\,;b\,) = 21 = d$. Ainsi le système devient :

$\begin{cases} a'd + b'd = 168 \\ d = 21 \end{cases} <=> \begin{cases} d(\,a' + b') = 168 \\ d = 21 \end{cases} <=> \begin{cases} 21(\,a' + b') = 168 \\ d = 21 \end{cases}$

$<=> \begin{cases} a' + b' = 8 \\ d = 21 \end{cases}$

Puisque PGCD (a' ; b') = 1 alors $(\,a'; b') \in \{(\,3\,;5\,)\,;\,(\,5\,;3\,);\,(\,7\,;1\,);\,(\,1\,;7\,)\}$

Or : $a = 21a'$ et $b = 21b'$

Pour : $\begin{cases} a' = 5 \\ et \\ b' = 3 \end{cases}$ on a : $\begin{cases} a = 105 \\ et \\ b = 63 \end{cases} => S_1 = \{(\,105\,;63\,)\}$

Pour : $\begin{cases} a' = 3 \\ \quad et \\ b' = 5 \end{cases}$ on a : $\begin{cases} a = 63 \\ \quad et \\ b = 105 \end{cases} => S_2 = \{(63\,;105)\}$

Pour : $\begin{cases} a' = 7 \\ \quad et \\ b' = 1 \end{cases}$ on a : $\begin{cases} a = 147 \\ \quad et \\ b = 21 \end{cases} => S_3 = \{(147\,;21)\}$

Pour : $\begin{cases} a' = 1 \\ \quad et \\ b' = 7 \end{cases}$ on a : $\begin{cases} a = 21 \\ \quad et \\ b = 147 \end{cases} => S_4 = \{(21\,;147)\}$

$=> \boldsymbol{S} = \{(105\,;63)\,;(63\,;105);\ (147\,;21)\,;\ (21\,;147)\}$

b) $\begin{cases} m + 3\Delta = 276 \\ 10 < \Delta < 30 \end{cases}$

Cherchons tous les diviseurs de 276

276	2
138	2
69	3
23	23
1	

$D_{276} = \{1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 4\,;\ 6\,;\ 12\,;\ 23\,;\ 46\,;\ 69\}$

Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Si Δ et $m$désignent respectivement le PGCD et le PPCM des entiers naturels : a et b , on a :

- $a \bullet b = m \bullet \Delta$

Ainsi il existe deux entiers a'et b' premiers entre eux (PGCD (a' ; b') = 1) tel que :

- $a = a' \bullet \Delta$ et $b = b' \bullet \Delta$ $=> a \bullet b = \Delta^2 \bullet a'b'$

$=> \Delta^2 \bullet a'b' = m \bullet \Delta <=> m = a'b' \bullet \Delta$

Alors le système devient :

$$\begin{cases} a'b' \bullet \Delta + 3\Delta = 276 \\ 0 < \Delta < 30 \end{cases} <=> \begin{cases} \Delta(\, a'b' + 3\,) = 276 \\ 0 < \Delta < 30 \end{cases} <=>$$

$$\begin{cases} a'b' + 3 = \frac{276}{\Delta} \\ 0 < \Delta < 30 \end{cases}$$

Or $0 < \Delta < 30 <=> \Delta \in \{ 12 ; 23 \}$car l'ensemble des diviseurs de 276 comprises entre 0 et 30 sont : 12 et 23

1er cas : Si Δ = 12, on a :

$a'b' + 3 = \frac{276}{12} <=> a'b' + 3 = 23 => a'b' = 20$

Puisque PGCD($a'b'$) = 1 alors ($a'b'$) ∈ $\{(4;5) ; (5;4) ; (20;1) ; (1;20)\}$

Or $a = 12a'$ et $b = 12b'$

Pour : $\begin{cases} a' = 4 \\ et \\ b' = 5 \end{cases}$ on a : $\begin{cases} a = 48 \\ et \\ b = 60 \end{cases}$ $=> S_1 = \{(48;60)\}$

Pour : $\begin{cases} a' = 5 \\ et \\ b' = 4 \end{cases}$ on a : $\begin{cases} a = 60 \\ et \\ b = 48 \end{cases}$ $=> S_2 = \{(60;48)\}$

Pour : $\begin{cases} a' = 20 \\ et \\ b' = 1 \end{cases}$ on a : $\begin{cases} a = 240 \\ et \\ b = 12 \end{cases}$ $=> S_3 = \{(240; 12)\}$

Pour : $\begin{cases} a' = 1 \\ et \\ b' = 20 \end{cases}$ on a : $\begin{cases} a = 12 \\ et \\ b = 240 \end{cases}$ $=> S_4 = \{(12;240)\}$

$=> \boldsymbol{S}' = \{(48;60) ; (60;48); (240;12) ; (12;240)\}$

2er cas : Si Δ = 23, on a :

$a'b' + 3 = \frac{276}{23}$ < = > $(a'b') + 3 = 12$ = >$a'b' = 9$

Puisque PGCD $(a'b')$ = 1 alors $(a'b') \in \{(9\,;1)\ ;\ (1\,;9)\}$

Or $a = 23a'$ et $b = 23b'$

Pour : $\begin{cases} a' = 9 \\ et \\ b' = 1 \end{cases}$ on a : $\begin{cases} a = 207 \\ et \\ b = 23 \end{cases}$ = >$S_1 = \{(207\,;23)\}$

Pour : $\begin{cases} a' = 1 \\ et \\ b' = 9 \end{cases}$ on a : $\begin{cases} a = 23 \\ et \\ b = 207 \end{cases}$ = >$S_2 = \{(23\,;207)\}$

= >$\boldsymbol{S''} = \{(207\,;23)\,;(23\,;207)\}$

= >$S = \boldsymbol{S'} \cap \boldsymbol{S''}$

c) $\begin{cases} a^2 - b^2 = 405 \\ 3m = a \bullet b \end{cases}$

Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Si d et m désignent respectivement le PGCD et le PPCM des entiers naturels : a et b, on a :

- $a \bullet b = m \bullet d$

Ainsi il existe deux entiers a' et b' premiers entre eux (PGCD(a' ; b') = 1) tel que :

- $a = a' \bullet d$ et $b = b' \bullet d$

Alors le système devient :

$\begin{cases} (a' \bullet d)^2 - (b' \bullet d)^2 = 405 \\ 3m = m \bullet d \end{cases}$ < = > $\begin{cases} a'^2 \bullet d^2 - b'^2 \bullet d^2 = 405 \\ d = 3 \end{cases}$ < = >

$\begin{cases} d^2(a'^2 - b'^2) = 405 \\ d = 3 \end{cases}$ < = > $\begin{cases} 3^2(a'^2 - b'^2) = 405 \\ d = 3 \end{cases}$ < = >

$\begin{cases} 9(a'^2 - b'^2) = 405 \\ d = 3 \end{cases}$ < = > $\begin{cases} a'^2 - b'^2 = 45 \\ d = 3 \end{cases}$ < = > $\begin{cases} (a' - b')(a' + b') = 45 \\ d = 3 \end{cases}$

Résoudre ce système, revient à résoudre les cas de systèmes suivants :

$\begin{cases} a' - b' = 1 \\ a' + b' = 45 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a' - b' = 5 \\ a' + b' = 9 \end{cases}$ (Car PGCD(a' ; b') = 1) Ainsi :

Pour $\begin{cases} a' - b' = 1 \\ a' + b' = 45 \end{cases}$, on a : $\begin{cases} a' = 23 \\ b' = 22 \end{cases}$ => $\begin{cases} a = 69 \\ b = 66 \end{cases}$ => $S_1 = \{(69 ; 66)\}$

Pour $\begin{cases} a' - b' = 5 \\ a' + b' = 9 \end{cases}$, on a : $\begin{cases} a' = 7 \\ b' = 2 \end{cases}$ => $\begin{cases} a = 7 \\ b = 6 \end{cases}$ => $S_1 = \{(7 ; 6)\}$

=> $\boldsymbol{S} = \{(69 ; 66) ; (7 ; 6)\}$

XIV) Résolution dans $\mathbb{Z}^2$ des équations Diophantiennes
Equations du type ($ax + by = c$)

1) Définition :

On appelle équation Diophantienne, toute équation de $\mathbb{Z}^2$ dont l'ensemble solution se présente sous forme de couple(x ; y).

Résolution d'un cas particulier : Equation du type $ax + by = c$.

$ax + by = c$ où : a ; b ; c sont tous des entiers (avec $a$et b non nul)

Théorème

L'équation : $ax + by = c$, admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$ si et seulement si c est un multiple du PGCD(a ; b).

2) Résolution

Pour résoudre de telles équations, nous pouvons utilisez deux méthodes :

- La méthode par Congruence
  Ou
- La méthode d'algorithme

Exemple

1) Montrer que l'équation : (x ; y) de $\mathbb{Z}^2$: $6y - 3x = m$, admet des solutions si et seulement si m est un multiplr de 3.
2) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, les équations suivantes :
   a- $6y - 3x = 5$
   b- $6y - 3x = 3$
3) En déduit de ce qui précède, les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation :
   $(6y - 3x - 4)(6y - 3x + 4) = 1$

Solution

1) Montrons que l'équation : (x ; y) de $\mathbb{Z}^2$: $6y - 3x = m$, admet des solutions si et seulement si m est un multiplr de 3.

$6y - 3x = m \Leftrightarrow 3(2y - x) = m \Leftrightarrow 2y - x = \frac{m}{3}$

Alors l'équation admet donc des solutions dans $\mathbb{Z}$ si 3 divise m ou encore si m est un multiple de 3.

2) Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$, les équations suivantes :

a- $6y - 3x = 5$

Puisque 5 n'est pas un multiple de 3, alors l'équation : $6y - 3x = 5$ n'admet pas de solution. Par conséquent $S = \{\emptyset\}$

b- $6y - 3x = 3$

Puisque 3 est un multiple de 3 , alors l'équation : $6y - 3x = 3$ admet des solutions .

Résolution :

$6y - 3x = 3 <=> 2y - x = 1 <=> x = 2y - 1 <=> x \equiv -1[2]$

$<=> x = 2k - 1$

En remplaçant x par sa valeur dans l'équation : $2y - x = 1$, on a : $y = k$

$=> S = \{(2k - 1 \; ; \; k)\}$

3) En déduit de ce qui précède, les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation :
$(6y - 3x - 4)(6y - 3x + 4) = 1$
Résoudre l'équation $(6y - 3x - 4)(6y - 3x + 4) = 1$, revient à résoudre les systèmes suivant :

$\begin{cases} 6y - 3x - 4 = 1 \\ 6y - 3x + 4 = 1 \end{cases}$ (S₁) ou $\begin{cases} 6y - 3x - 4 = -1 \\ 6y - 3x + 4 = -1 \end{cases}$ (S₂)

$<=> \begin{cases} 6y - 3x = 5 \\ 6y - 3x = -3 \end{cases}$ (S_1) ou $\begin{cases} 6y - 3x = 3 \\ 6y - 3x = -5 \end{cases}$ (S_2)

D'après les questions précédents, 5 et – 5 ne sont pas des multiples de 3.

Par conséquent aucun des deux systèmes n'admet de solution dans Z^2.

D'où l'équation : $(6y - 3x - 4)(6y - 3x + 4) = 1$ n'admet pas de solution
$=> S = \{\emptyset\}$.

EXERCICES

Raisonnement par récurrence.

1 Démontrer par récurrence les propositions suivantes :

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*, on\ a : 2^n > 5(n + 1)$.
2) $\forall n \in \mathbb{N}^*, on\ a : 2^n > n$.
3) $\forall n \in \mathbb{N}, on\ a : 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
4) $\forall n \in \mathbb{N}^*, on\ a : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
5) $\forall n \in \mathbb{N}^*, on\ a : 2 \times 6 \times 10 \times \ldots \times (4n - 2) = (n+1)(n+2)\ldots \times 2n$

2 Soit la suite réelle u_n définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \quad et \quad u_1 = \frac{5}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n - u_{n-1} \end{cases}$

Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2\mathrm{Cos}\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \sqrt{3}\mathrm{Sin}\left(\frac{n\pi}{3}\right)$

Divisions Euclidienne dans ℕ et dans ℤ.

3 1) Déterminer dans chacun des cas suivants, le quotient et le reste la division Euclidienne de l'entier a par l'entier b.

a- $a = 3453$ et $b = 13$; b- $a = -1454$ et $b = 22$

c- $a = 11111$ et $b = 333$; d- $a = -994567$ et $b = 3432$

e- $a = 15141$ et $b = 143$; f- $a = -396562$ et $b = 4478$

4 a- La somme de 2 entiers naturels a et b avec ($a > b$) est 444. La division Euclidienne de a par b donne $q = 4$ pour quotient et $r = 24$ pour reste. Déterminer les entiers a et b.

b- Soient 2 entier naturels a et b ($a > b$). La division Euclidienne de a par b donne pour quotient $q = 6$ et $r = 47$ pour reste. Par ailleurs $a + b + r = 591$. Déterminer a et b.

c- Quelle peuvent être le diviseur et le reste d'une division Euclidienne dont le dividende est 542 et le quotient est 12 ?

d- La division Euclidienne de l'entier naturel a par b donne pour quotient q et pour le reste r. D'autre par $(a + 15)$ diviser par $(b + 5)$ donne q pour quotient et r pour reste. Déterminer q.

e- La division Euclidienne de l'entier naturel a par b donne pour quotient q = 356 et pour le reste r = 4623.
Déterminer n pour que $(a+n)$ divisé par $(b+n)$ donne pour quotient q = 356.

Divisibilité dans $\mathbb{Z}$.

5 a) Démontrer par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, *on a* : $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

b) Démontrer par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, *on a* : $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

c) Démontrer par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, *on a* : $n^3 - n$ est un multiple de 3.

d) Démontrer par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, *on a* : $n^7 - n$ est un multiple de 7.

e) Le nombre 2798793 est –il divisible par : 2 ; 3 ; 11 ?

6 Soit la fraction $A(n) = \dfrac{n+16}{n-2}$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

1) Montrer que l'on peut écrire $A(n)$ sous la forme : $a + \dfrac{b}{n-2}$ où a, b sont deux entiers naturels à déterminer.
2) Pour quelle valeur de n, $A(n)$ est il un entier naturel.

Nombres premiers entre eux - PGCD et PPMC.

7 Dans chacun des cas suivants, vérifier si les nombres a et b sont premiers entre eux :

a- a = 122 et b = 32 ; b- a = 85631 et b = 111

c- a = 712379 et b = 1551 ; d- a = 96777 et b = 45777

e- a = 101230 et b = 1200 ; f- a = 9975462199 et b = 324411220

8 Dans chacun des cas suivants, déterminer le PGCD et le PPCM des réels a et b.

a- $a = 24$ *et* $b = 33$; **b-** $a = 48$ *et* $b = 46$; **c-** $a = 1455$ *et* $b = 335$

d- $a = 114$ *et* $b = 22$; **e-** $a = 999$ *et* $b = 18$; **f-** $a = 14422$ *et* $b = 332$

g- $a = 6666$ *et* $b = 111$; **h-** $a = 42137$ *et* $b = 41$; **i-** $a = 1655$ *et* $b = 77$

9 Soit a et b deux entiers premiers entre eux.
1) Montrer que $a + b$ et ab sont premiers entre eux : en déduire que les nombres $a + b$ et $a^2 - ab + b^2$ sont premiers entre eux ou divisibles par 3.
2) Démontrer l'égalité : PGCD $(a + b\ ;\ a^2 - ab + b^2)$ = PGCD $(a + b\ ;\ 3)$.

10 Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

a- $46x + 43y = 1$; **b-** $6x - 3y = 5$; **c-** $8x + 3y = 1$

b- $3x - 5y = 6$; **e-** $3x - 7y = 23$; **f-** $x^2 - 57 = y^2$

g- $45x - 28y = 1$; **h-** $2x - 3y = 3$; ***i-*** $x^2 - 49 = y^2$

j- $-22x + 18y = 1$; -***k*** $22x - 18y = -2$; ***l*** - $12x - 15y = 4$

11 Δ et m désignent respectivement le PGDC et le PPCM des entiers a et b.
Déterminer l'ensemble des couples $(a\ ; b)$ d'entiers relatifs vérifiant les conditions données ci-dessous :

1) $\begin{cases} a^2 - b^2 = 405 \\ 3m = ab \end{cases}$; 2) $\begin{cases} a^2 + b^2 = 801 \\ m = 120 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} \Delta = 90 \\ m = 180 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} a + b = 168 \\ \Delta = 21 \end{cases}$

5) $\begin{cases} PGCD(a\ ; b) = 354 \\ a + b = 5664 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} PPCM(a\ ; b) = 168 \\ a \times b = 1008 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} m + 3\Delta = 276 \\ 10 < \Delta < 30 \end{cases}$

8) $\begin{cases} m + 3\Delta = 276 \\ 10 < \Delta < 30 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} m + \Delta = 126 \\ 5 < \Delta < 10 \end{cases}$

12 Montrer que l'équation : $(x\ ;\ y)$ de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$: $6y - 3x = m$ admet des solutions si et seulement si m est un multiple de 3.
1) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ les équations suivantes :
   a- $6y - 3x = 5$.
   b- $6y - 3x = 3$.
2) Déduire de ce qui précède les solutions dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ de l'équation :
   $(6y - 3x - 4)(6y - 3x + 4) = 1$.

13 Pour tout entier naturel n, on considère les nombres :
$a_n = 4\times10^n - 1$; $b_n = 2\times10^n - 1$ $c_n = 2\times10^n + 1$
a) Calculer : a_i ; b_i ; c_i pour $i \in \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$.
b) Démontrer que a_n et c_n sont divisibles par 3
c) Démontrer que b_2 est un nombre premier.

d) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $b_n \times c_n = a_n$. En déduire la décomposition en produit de facteurs premiers de a_4

e) Démontrez que : PGCD(b_n ; c_n) = PGCD(b_n ; 2). En déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux c'est-à-dire sont étrangers.

14 Les suites (X_n) et (Y_n) sont définies par :

$$\begin{cases} X_0 = 3 \\ X_{n+1} = 2X_n - 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} Y_0 = 3 \\ Y_{n+1} = 2Y_n + 3 \end{cases}$$

1) Démontrer par récurrence sur que pour tout entier naturel n, on a : $X_n = 2^{n+1} + 1$.
2) a- Calculer PGCD(X_8 ; X_9) puis PGCD(X_{2002} ; X_{2003}).
Que peut-on conclure pour les entiers X_8 et X_9 d'une part et X_{2002} et X_{2003} d'autre part ?
b- X_n et X_{n+1} sont-ils étrangers pour tout entier naturel n ? Justifier votre réponse.
3) a- Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $2X_n - Y_n = 5$
b- Exprimer Y_n en fonction de n.
c- En utilisant les congruences modulo 5, étudier suivant les valeurs de l'entier naturel k, le reste de la division euclidienne de 2^k par 5. En déduire le reste de la division euclidienne l'entier N = $2^{7531}+2^{1357}$ par 5

15 1) On considère l'équation (1) d'inconnue (x ; y) de $\mathbb{Z}^2$: $11x - 24y = 1$.
a- Justifier à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution.
b- En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de (1).
2) Recherche du PGCD de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.
a- Justifier que 9 divise $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.
b- (x ; y) désignant un couple quelconque d'entiers naturels solution de (1), montrer que l'on peut écrire : $(10^{11x} - 1) - 10(10^{24y} - 1) = 9$.
c- Montrer que $10^{11} - 1$ divise $10^{11x} - 1$.
(On rappelle que : $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots\dots + a^0)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
d- Déduire de la question précédente l'existence de deux entiers N et M tels que :
$$(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9.$$
e- Montrer que $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$ divise 9.
f- Déduire des questions précédentes le PGCD de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

16

1) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, les entiers $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux.
2) On considère l'équation (E) : $87x + 31y = 2$ où x et y sont deux entiers relatifs.

a- Vérifier en utilisant la question 1), que 87 et 31 sont premiers entre eux. En déduire un couple $(u\ ;\ v)$ d'entiers relatifs tel que $87u + 31v = 1$ puis une solution $(x_0\ ;\ y_0)$ de l'équation (E).

b- Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

17

1. On considère x et y des entiers relatifs et l'équation (E) $91x + 10y = 1$.

a) Enoncer un théorème permettant de justifier l'existence d'une solution à l'équation (E).
b) Déterminer une solution particulière de (E) et en déduire une solution particulière de l'équation (E') : $91x + 10y = 412$.
c) Résoudre (E').

2. Monter que les nombres entiers $A_n = 3^{2n} - 1$, où n est un entier naturel non nul, sont divisibles par 8. (Une des méthodes possibles est un raisonnement par récurrence).

3. On considère l'équation (E") $A_3x + A_2y = 3\,296$.

a) Déterminer les couples d'entiers relatifs $(x\ ;y)$ solutions de l'équation (E")
b) Montrer que (E") admet pour solution un couple unique d'entiers naturels. Le déterminer.
Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

18

1) a) Pour $1 \le n \le 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7.

b) Démontrer que, pour tout n, $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7. En déduire que 3^n et 3^{n+6} ont le même reste dans la division par 7.

a) A l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de $3^{1\,000}$ par 7.
b) De manière générale, comment peut – on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, pour n quelconque ?
c) En déduire que, pour tout entier naturel n, 3^n est premier avec 7.

2) Soit $U_n = 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{n-1} = \sum_{i=0}^{i=n-1} 3^i$, où n est entier naturel supérieur ou égal à 2.

a) Montrer que si U_n est divisible par 7 alors $3^n - 1$ est divisible par 7.
b) Réciproquement, montrer que si $3^n - 1$ est divisible par 7 alors U_n est divisible 7. En déduire les valeurs de n telles que U_n soit divisible par 7.

19

1) Déterminer PGCD (2 688 ; 3 024).
2) Dans cette question, x et y sont deux entiers relatifs.

a) Montrer que les équations (1) et (2) sont équivalentes :
   (1): $2\,688x + 3\,024y = -3\,360$ et (2): $8x + 9y = 10$.

   b) Vérifier que (1 ; -2) est une solution particulière de l'équation (2).
   c) Déduire de ce qui précède les solutions de (2).

3) Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace. On considère les plans P et L d'équation respectives : x + 2y – z = - 2 et 3x – y + 5z = 0

   a) Montrer que P et L se coupent suivant une droite D.
   b) Montrer que les coordonnées des points de D vérifient l'équation (2).
   c) En déduire l'ensemble T des points de D dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

Système de numération et congruence modulo n.

20

a- Ecrire dans le système décimal le nombre : $\overline{\mathbf{432}}^{\mathbf{5}}$
b- Ecrire dans le système binaire le nombre : $\overline{\mathbf{127}}^{\mathbf{10}}$
c- Ecrire dans le système décimal le nombre : $\overline{\boldsymbol{F0A3}}^{\mathbf{16}}$
d- Sachant que 14 = 13 + 1, écrire14^8 dans le système de base 13.
e- Un nombre s'écrit BABA (Avec : A = 10 et B = 11) dans le système hexadécimal. Ecrire ce nombre dans le système octal.

21

On donne A = $\overline{114}^{n}$; B = $\overline{111}^{n}$ et C = $\overline{13054}^{n}$, A x B = C

Trouver n et l'écriture décimale de A, B, C.
Vérifier que le PGCD (A, B) = 1

22

On considère l'entier naturel N qui s'écrit $\overline{53x4}^{8}$
Déterminer x tel que :
a) N soit divisible par 7
b) N soit divisible par 6.
c) En déduire la valeur de x pour que N soit à la fois divisible par 6 et par 7.

23

Dans le système d'énumération de base 3, un nombre s'écrit $\overline{2101}$. Dans quel système d'énumération s'écrit $\overline{224}$. Existe – t – il un nombre de système d'énumération dans le quel ce nombre s'écrit $\overline{174}$?

24 **I-** Soit a un entier naturel supérieur à 2 on donne : $N = 2(a-1)$ et $N' = (a-1)^2$.

1) Ecrire N et N' dans le système d'énumération de base 1.
2) Vérifier que N et N' s'écrivent avec le même chiffre mais à l'ordre inverse.

II- Déterminer dans la base 10 l'entier naturel N tel que $N^2 = 244$ dans la base 6
Déterminer en raisonnant par récurrence que $\forall n \in N$ on a :
$A_n = N^{6n+2} + N^{3n+1} + 1$ est divisible par 111

III- Déterminer suivant les valeurs de n le reste de la division de 4^n par 7.
Déterminer suivants les valeurs de n le reste de la division de :
$A = 851^{3n} + 851^{2n} + 851^n + 2$ par 7

25 Un nombre de (6) chiffres s'écrit en base 7 et comporte comme chiffre de gauche le nombre (1). Un autre nombre de (6) chiffres s'écrit en base 7 et comporte comme chiffre de droite le nombre (1) D'autre par ce nombre est encore le triple du précédent. Déterminer les nombres initiaux.

26 En utilisant la factorisation de $(x^2 + 3x + 1)^2 - 1$, montré que dans tout système d'énumération dont la base est supérieure à 3 on a : $\overline{10} \times \overline{11} \times \overline{12} \times \overline{13} + 1 = (\overline{131})^2$

27 Soit $N = (x-1)^3$ et $N' = (x+2)(x-1)$. Ecrire N et N' en base x et vérifier que les mêmes chiffres sont utilisés dans N et N'.
Déterminer x et y pour que l'entier naturel qui s'écrit $x43y$ dans le système décimal soit divisible par 2 ou par 9.

28 **I-** Soit x un entier naturel à base 10 tel que $x = \overline{abcabc}$
Montrer que n est le produit du naturel $\overline{abc}$ par un naturel k. En déduire que :
x est divisible par 7, 11 et par 13
x peut être un carré parfait
II- Soit x un entier naturel $x \geq 5$ on considère les entiers $n = \overline{100x}$ et $n' = \overline{x001}$ dans le système de base $(x+1)$

a- Ecrire n et n' dans le système de base x.

b- Ecrire $n + n'$ dans le système de base x et vérifier que $n + n'$ est divisible par $(x + 1)$ puis donner le quotient q de cette division en base x.

c- Déterminer les entiers a et b tel que : $q = \overline{ab}^{x} \bullet \overline{aaa}^{x}$.

29 1) a) Déterminer, suivant les valeurs de n, le reste de la division par 7 de l'entier 3^n. En déduire le reste de la division par 7 de l'entier naturel $(506390)^{128}$

b) Donne le système de numération décimale, on considère l'entier naturel $\overline{651x}$.
Déterminer x pour que $(506390)^{128} + \overline{651x}$ soit divisible par 7.
2) a) Déterminer le plus grand diviseur commun des nombres 21590 et 9525
b) Déterminer l'ensemble des entiers x tels que $34x \equiv 2[1]$.
c) Résoudre l'équation : $(x\,;y) \in \mathbb{Z}^2\,; 21590x + 9525y = 1$
d) Quel est le chiffre des unités de l'entiers naturels 7^{19} écrit dans le système décimal ?

30 1) Déterminer dans la base dix, l'entier naturel N tel que N^2 s'écrit $\overline{244}$ dans la base six. Quel est le nombre des diviseurs de N^2 dans ℕ ?
2) Démontrer en raisonnant par récurrence que : ∀ n ∈ ℕ, on a : $N^{6n+2} + N^{3n+1} + 1$ est divisible par 111.
3) a- Soit n un entier naturel. Déterminer suivant n, le reste de la division par 7 de 3^n ; en déduire le reste de la division par 7 de 9^{991}.
b- Soit A un nombre qui s'écrit $\overline{651x}$ en base 10. Déterminer x pour que $\overline{651x} + 9^{991}$ soit divisible par 7.

Congruence et structure d'anneau

31 Résoudre dans ℤ/7ℤ les équations suivantes :

a- $\dot{4}x = \dot{3}$; b- $\dot{1}x^2 + \dot{2}x - \dot{3} = \dot{0}$; c- $-\dot{205}x^2 + \dot{32}x + \dot{678} = \dot{0}$

d- $\dot{109}x^2 - \dot{13}x + \dot{533} = \dot{-6}$; e- $\dot{1}x^4 + \dot{2}x^3 - \dot{77} = \dot{88}$

32 Résoudre dans $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^2$ le système : $\begin{cases} \overset{\circ}{3}x + \overset{\circ}{2}y = \overset{\circ}{1} \\ \overset{\circ}{2}x + \overset{\circ}{5}y = \overset{\circ}{6} \end{cases}$

33 Résoudre dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ le système : $\begin{cases} \overset{\circ}{2}x + \overset{\circ}{3}y = \overset{\circ}{2} \\ \overset{\circ}{1}x + \overset{\circ}{2} = \overset{\circ}{4} \end{cases}$

Arithmétiques dans les cas pratiques.

34 1) Décomposer les nombres 450 et 320 en produit de facteur premier puis en déduire le PGCD de 450 et 320.

2) Un champ a pour dimensions 4,5m et 3,2m. On souhaite carreler cette pièce avec un nombre entier de dalles carrées, sans aucune découpe. Quel est le plus grand côté possible (en cm) de la dalle carrée ?

35 1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation l'équation (E): $5y + 8x = 1$.
2) Soit N un entier naturel tel qu'il existe un couple (a ; b) de nombres entiers vérifiant N $=1 + 8a$ et N $= 2 + 5b$.
a) Prouver que le couple $(a\,; -b)$ est solution de (E).
b) Déterminer le reste de la division euclidienne de N par 40.
3) a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation l'équation $5y + 8x = 100$.
b) A l'occasion de la fête de tabaski, un marchand de bétail a vendu tous ses taurillons et tous ses béliers faisant ainsi une recette de 1 000 000 F au total. Sur le marché, un taurillon coûtait 80 000 F et un bélier faisait 50 000 F. Sachant que le marchand avait plus de béliers que de taurillons, on demande de trouver le nombre de taurillons et celui de béliers qu'avait ce marchand pour le marché.

36 **A)** Les jumeaux Allakan et Allakoun se rendent au champ pour un achat de mangues. Le premier dit à son frère ‘‘j'ai n F en poche'' et ce dernier répond ‘‘quant à moi, j'en ai m F ''. Sachant que ces entiers sont exprimés respectivement dans les systèmes de numération de base huit et sept, ils sont $n = \overline{X5Y70}$ et $m = \overline{(Y+1)26X0}$.
1) a) Déterminer les chiffres X et Y Sachant que l'unité de mangue coûte 15 F et que chacun des jumeaux peut avec la totalité de son argent se payer un nombre entier de mangues.
b) Préciser alors les entiers naturels λ et γ, désignant respectivement le nombre de mangues achetées par Allakan et celui par Allakoun.
2) Trouver les décompositions en produit de facteurs premiers de $(\lambda+1)$ et $(\gamma-3)$, dans le système de numération décimale. En déduire $\delta = (\lambda+1) \wedge (\gamma - 3)$.
B) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations d'inconnues x et y suivantes :
a) 7x -37y = 257 ; b) 631x+7y = 37.

37 Un Champ a la forme d'un trapèze dont les deux bases mesurent respectivement 119m et 91m; les deux autres cotés mesurent 56m et 35m. Pour la clôture, le propriétaire Mr DEMBELE a besoin des poteaux de support à égale distance mesurée en nombre entier de mètre pour un nombre minimum de poteaux, avec un poteau à chaque sommet.
1) a) Quelle est la distance entre deux poteaux quelconques?
b) Déterminer le nombre de poteaux nécessaires à la clôture.
2) Selon le type de clôture et la qualité de fil de fer choisi, Mr DEMBELE a dépensé $\overline{\alpha 1630}^{11}$ F CFA (où α = 10) pour un nombre entier x rangées de fil de fer et $\overline{53008}^{9}$ F CFA pour un nombre entier y de jours de mains d'œuvre. Après évaluation Mr DEMBELE s'est rendu compte que le coût total des travaux était de $\overline{656\alpha 5}^{13}$ F CFA et le nombre de rangées de clôture dépassait le nombre de jours de travail.

a) Exprimer tous les montants dans le système décimal.
b) Préciser le nombre de rangées de fil de fer et le nombre de jours de mains d'œuvre.

38 En un temps T_0 un athlète A_1, étant à son 2ème tour pénétrait dans le champ visuel de la caméra d'arrivée d'un marathon de tour du quartier. Six (6) minutes plus tard, avant que A_1 n'échappe à la caméra un autre athlète A_2 étant à son 1er tour y fait son entrée. Des investigations sportives ont affirmé que A_1 fait le tour du quartier en 32 minutes tandis que A_2 le fait en 58 minutes. On se propose de déterminer le nouveau temps T_1 auquel A_1 et A_2 réapparaitront ensemble dans le champ de la camera. Pour cela on note n_1 le nombre de tours effectués par A_1 et n_2 celui effectués par A_2 entre T_0 et T_1.
1) Vérifier que (n_1 ; n_2) est solution de l'équation (E) : $16x - 29y = 3$.
2) a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).
b) En déduire les valeurs de n_1 et n_2 permettant de déterminer T_1.
3) a) Déterminer le nombre de minutes s'écoulant entre T_0 et T_1.
b) Sachant que T_0 était 8h00, déterminer le temps T_1 en heures et minutes.
4) A cause d'une pane électrique, la camera manque le spectacle simultané de T_1. Combien de minutes doit on attendre pour un nouveau spectacle simultané en un autre temps T_2? Evaluer ces minutes en heures.

39 1) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système d'inconnues p et q suivant : $\begin{cases} 52p + 89q = 15103 \\ 15p + 22q = 3993 \end{cases}$

2) En Novembre 2011, Mr DEMBELE a profité de la crise pour payer x kgs de bananes et y sacs de goyaves à, seulement $\overline{284\alpha\beta}^{13}$ FCFA (avec $\alpha = 10$ et $\beta = 11$) dans le champ d'un cultivateur désespéré. A la même date en 2012, le cultivateur n'ayant pas connu de disette, Mr DEMBELE, pour avoir le même nombre de kg de bananes et le même nombre de sacs de goyaves fut contraint de dépenser $\overline{69000}^{11}$ FCFA en raison de $\overline{567}^{8}$ FCFA le kg de bananes et $\overline{202101}^{3}$ FCFA le sac de goyaves. Les statistiques locales ont montré que la disette avait occasionné une baisse de $\overline{223}^{7}$ FCFA sur le kg de bananes et une baisse de $\overline{1221}^{4}$ FCFA sur le sac de goyaves. Déterminer :
a) tous les montants donnés dans le système de numération décimale ;
b) le nombre x de kgs de bananes et le nombre y de sacs de goyaves payés par Mr DEMBELE.
c) $(x + y)$ et $(3y - 2x)$ en base 12.
Effectuer dans cette base le produit $(x + y)(3y - 2x)$.

Perfectionnement.

40 1. Soit B une boîte en forme de pavé droit de hauteur L, à base carrée de côté l, où l et L sont des entiers naturels non nuls tels que l < L. On veut remplir la boîte B avec des cubes tous identiques dont l'arête a est un entier naturel non nul (les cubes devant remplir complètement la boîte B sans laisser d'espace vide).

a) Dans cette question, l = 882 et L = 945. Quelle est la plus grande valeur possible pour a ? Quelles sont les valeurs possibles pour a ?

b) Dans cette question, le volume de la boîte B est v = 77 760. On sait que pour remplir la boîte B la plus grande valeur possible de a est 12. Montrer qu'il y a exactement deux boîtes B possibles, dont on donnera les dimensions;

2. On veut remplir une caisse cubique C, dont l'arête c est un entier naturel non nul, avec des boîtes B toutes identiques telles que décrites dans la question1. (Les boîtes B, empilées verticalement, doivent remplir complètement la caisse C sans laisser d'espace vide).

a) Dans cette question, l = 882 et L = 945. Quelle est la plus petite arête c pour la caisse C ? Quel est l'ensemble de toutes les valeurs possibles pour l'arête c ?

b) Dans cette question, le volume de la boîte B est 15 435. On sait que la plus petite arête possible pour la caisse C est 105. Quelles sont les dimensions l et L de la boîte B ?

41 1. On cherche deux entiers relatifs x et y solutions de l'équation : (1) $ax + by = 60$.
(a et b entiers naturels donnés tels que ab ≠ 0). On notera d le plus grand commun diviseur de a et b.

a) On suppose que l'équation (1) a au moins une solution (x_0 , y_0). Montrer que d divise 60.

b) On suppose d divise 60. Prouver qu'il existe alors au moins une solution (x_0, y_0) à l'équation (1).

2. On considère l'équation : (2) $24x + 36y = 60$. (x *et* y entier relatifs).

a) Donner le PGCD de 24 et 36 en justifiant brièvement. Simplifier l'équation (2).

b) Trouver une solution évidente pour l'équation (2) et résoudre cette équation. On appellera S l'ensemble des couples (x, y) solutions.

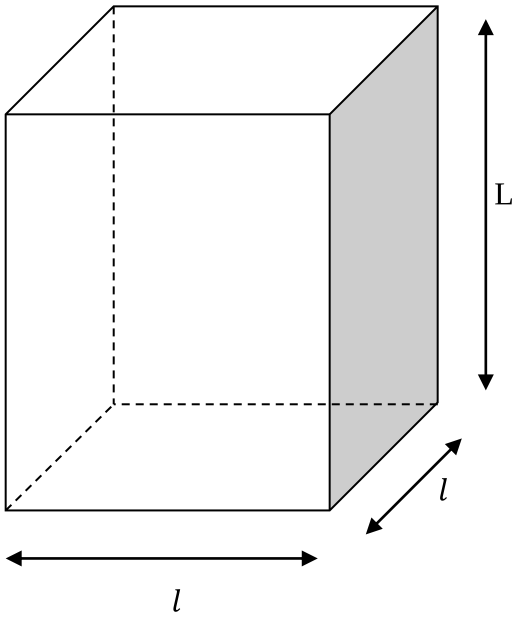
c) Enumérer tous les couples (x, y) solutions de (2) et tels que $-10 \leq x \leq 10$. Donner parmi eux, ceux pour lesquels x et y sont multiples de 5.

d) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité graphique : 1 cm), représenter l'ensemble E des points M de coordonnées (x, y) telles que : $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$ $t \in R$.

e) Montrer que les points ayant pour coordonnées les solutions (x, y) de l'équation (2) appartiennent à E. Comment peut – on caractériser s ?

42 Soit B une boîte en forme de pavé droit de hauteur L, à base carrée de côté l, où l et L sont des entiers naturels non nuls tels que $l < L$.
1. On veut remplir la boîte B avec des cubes tous identiques dont l'arête a est un entier naturel non nul (les cubes devant remplir complètement la boîte B sans laisser d'espace vide).
a) Dans cette question, l = 882 et L = 945.
Quelle est la plus grande valeur possible pour a ?

Quelles sont les valeurs possibles pour a ?
b) Dans cette question, le volume de la boîte B est v = 77 760. On sait que pour remplir la boîte B, la plus grande valeur possible de a est 12.
Montrer qu'il y a exactement deux boîtes B possibles, dont on donnera les dimensions.
2. On veut remplir une caisse cubique C, dont l'arête c est un entier naturel non nul, avec des boîtes B toutes identiques telles que décrites dans la question 1. Les boîtes B, empilées verticalement, doivent remplir complètement la caisse C sans laisser d'espace vide.
a. Dans cette question, $l = 882$ et $L = 945$.
Quelle est la plus petite arête c pour la caisse C ?
Quelle est l'ensemble de toutes les valeurs possibles pour l'arête c ?
b. Dans cette question, le volume de la boîte B est 15 435. On sait que la plus petite arête possible pour la caisse C est 105.
Quelles sont les dimensions l et L de la boîte B ?



43 Une astronome a observé au jour J_0 le corps céleste A, qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard ($J_0 + 6$), il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours. On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome. Le but de cet exercice est de déterminer la date de ce jour J_1.

1- Soient u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1.
Montrer que le couple (u ; v) est solution de l'équation (E_1) : $35x - 27y = 2$.

2- a) Déterminer un couple d'entiers relatifs $(x_0\,;\ y_0)$ solution particulière de l'équation (E_2) : $35x - 27y = 1$.
b) En déduire une solution particulière $(u_0\,;\ v_0)$ de (E_1).
c) Déterminer toutes les solutions de l'équation (E_1).
d) Déterminer la solution (u ; v) permettant de déterminer J_1.

3- a) Combien de jours s'écouleront entre J_0 et J_1 ?

b) le jour J_0 était le mardi 7 décembre 1999, quelle est la date exacte du jour J_1 ?
(l'année 2000 était bissextile).
c) Si l'astronome manque ce futur rendez – vous, combien de jours devra – t – il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux astres ?

44 Dans le plan muni d'un repère $(o,\vec{i},\vec{j})$ on donne le point A (12, 18). On désigne par B un point de l'axe $(o,\vec{i})$ et par C un point de l'axe $(o,\vec{j})$ tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=-\frac{\pi}{2}$. On appelle x l'abscisse de B et y l'ordonnée de C.

1) Démontrer que le couple (x,y) est solution de l'équation (E) = $2x+3y=78$.
2) On se propose de trouvez tous les couples (B, C) de points ayant pour coordonnés des entiers relatifs.

a) Montrer que l'on est ramené à l'équation (E) avec x et y appartenant à Z.
b) A partir de la définition de B et de C, trouvez une solution particulièrement (x_0,y_0) de (E), avec x_0 *et* y_0 appartenant à Z.
c) Démontrer qu'un couple (x, y) est solution de (E) et seulement s'il est de la forme (12+3k, 18-2k) où k appartient à Z.
d) Combien y a-t-il de couples de points (B, C) ayant pour coordonnées des entiers relatifs tels que $-6\leq x\leq 21$ *et* $-5\leq y\leq 14$?

45 1) On sait que $10^3-1=9*111$ et $10^3+1=7*11*13$. Pour tout entier naturel, on considère le nombre $A=10^{9n}+2*10^{6n}+2*10^{3n}+1$ ($*$ désigne la multiplication). Déterminer le reste de la division euclidienne de A par 11 .
2) On suppose que n est impaire ; démontrer que A est divisible par 7, par 11 et par 13.
3) On suppose que n est paire ;
   a) Démontrer que $A-6$ est divisible par 7, par 11 et par 13.
   b) Quel es le reste de la division euclidienne de A par 111*1001 ?

46 On se propose ici de démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.
1) Justifier que tout nombre impair est congru à 1 ou à 3 modulo 4, puis citer deux nombres premiers congrus à 3 modulo 4.
2) On suppose que tous les diviseurs premiers de l'entier n sont congrus à 1 modulo 4 ; démontrer qu'alors $n\equiv 1$ (4). En déduire que, si $k\equiv 3$ (4), alors k admet au moins un diviseur premier congru à 3 modulo 4.
3) Si l'ensemble des nombres premiers congrus à 3 modulo 4 est fini, on appelle p son plus grand élément.
Soit alors $k=2\times 3\times 5\times ...\times p+1$ le produit de tous les nombres premiers jusqu'à p, augmenté de 1.
A l'aide des résultats de la Question 2°, montrer qu'on aboutit alors à une contraction.

47

A) Soit n un entier naturel non nul et t un entier relatif différent de 1.

On pose $S_n(t) = 1 + t + t^2 + ... + t^{n-1}$

1) a) Donner une autre expression de $S_n(t)$.

b) En déduire que t^n et $(1 - t)$ sont premiers entre eux.

2) u et v étant deux entiers relatifs premiers entre eux, on désigne par (x_0, y_0) une solution dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ de l'équation (F) : $ux + vy = 1$. Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (F)

3) Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par D_n la droite de P d'équation $3^n x - 2y = 1$

Déterminer l'ensemble F_n des points M(x ; y) de la droite D_n dont les coordonnées sont entiers relatifs.

B) a et b sont deux entiers naturels premiers entre eux tels que $a^2 + a = 7b^3$.

1) Justifier que a et b^3 sont premiers entre eux.

2) Démontrer que a divise 7. Trouver les valeurs de a et b vérifiant les hypothèses du texte.

1) Un diviseur strict d'un entier naturel n est un entier naturel diviseur de n et distinct de n. Déterminer les diviseurs stricts de 220.

2) On dit que deux entiers naturels sont amiables si chacun d'eux est égale à la somme des diviseurs stricts de l'autre. Vérifier que 220 et 284 sont amiables.

3) Un nombre parfait est un nombre égal à la somme de ses diviseurs stricts (il est ainsi amiable avec lui-même).

a) Le nombre 28 est-il parfait ?

b) Déterminer un nombre premier p tel que le nombre $2^4 \times p$ soit parfait.

c) Plus généralement si n et p sont deux entiers naturels avec p premiers, préciser la seule expression possible de p en fonction de n pour laquelle $2^n \times p$ peut être un nombre parfait. Donner la liste des nombres parfaits de cette forme pour $n < 10$.

48

On considère la suite (U_n) d'entiers naturels définie par : $\begin{cases} U_0 = 14 \\ \forall n \in IN, \ U_{n+1} = 5U_n - 6 \end{cases}$

1) Calculer U_1, U_2, U_3 et U_4. Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers Chiffres de U_n ?

2) Montrer que, pour tout entier naturel n, $U_{n+2} \equiv U_n [4]$.

En déduire que $\forall k \in IN, \ U_{2k} \equiv 2[4] \ et \ U_{2k+1} \equiv 0[4]$.

3) a) Montrer par récurrence que $\forall n \in IN, \ 2U_n = 5^{(n+2)} + 3$.

b) En déduire que, $\forall n \in IN, \ 2U_n \equiv 28[100]$.

4) Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de U_n suivant les valeurs de n.

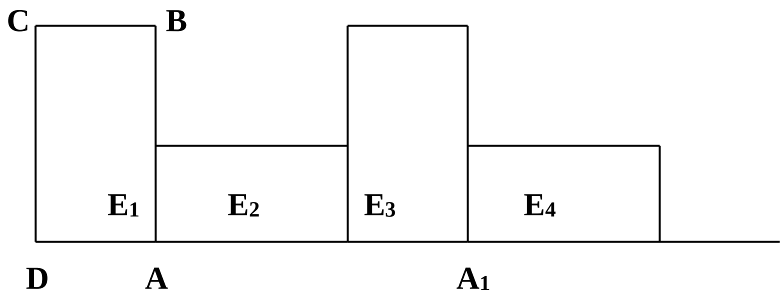
5) Montrer que, le PGDC de deux termes consécutifs de (U_n) est constant. Préciser sa valeur.

49

1. On considère l'équation (E) : $109x - 226y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.
a. Déterminer le PGCD de 109 et 226. Que peut-on en conclure pour l'équation (E) ?
b. Montrer que l'ensemble de solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme $(141 + 226k\ ;\ 68 + 109k)$, où k appartient à $\mathbb{Z}$.
En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul e tels que $109d = 1 + 226e$.
(On précisera les valeurs des entiers d et e).
2. Démontrer que 227 est un nombre premier.
3. On note A l'ensemble des 227 entiers naturels a tels que $a \leq 226$.
On considère les deux fonctions f et g de A dans A définies de la manière suivante :
A tout entier a de A, f associe le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227.
A tout entier a de A, g associe le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227.
Vérifier que $g[f(0)] = 0$.

50 1. Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\ \vec{u};\ \vec{v})$.
Soit A et B dans ce plan d'affixe respectives $a = 1 + i$ et $b = -4 - i$. Soit f la transformation du plan (P) qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$.
a. Exprimer z' en fonction de z.
b. Montrer que f admet un seul point invariant Ω dont on donnera l'affixe. En déduire que f est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
2. On se place dans le cas où les coordonnées x et y de M sont des entiers naturels avec $1 \leq x \leq 8$ et $1 \leq y \leq 8$.
Les coordonnées (x', y') de M' sont alors $x' = 3x + 2$ et $y' = 3y - 1$.
a. On appelle G et H les ensembles des valeurs prises respectivement par x' et y'. Ecrire la liste des éléments de G et H.
b. Montrer que x' et y' est un multiple de 3.
c) Montrer que la somme et la différence de deux entiers quelconques ont même parité. On se propose de déterminer tous les couples (x', y') de $G \times H$ tels que $m = x'^2 - y'^2$ soit un multiple non nul de 60.
d. Montrer que dans ces conditions, le nombre $x' - y'$ est un multiple de 6. Le nombre $x' - y'$ peut-il être un multiple de 30 ?
e. En déduire que, si $x'^2 - y'^2$ est un multiple non nul de 60, $x' + y'$ est multiple de 10 et utiliser cette condition pour trouver tous les couples (x', y') qui conviennent.
En déduire les couples (x, y) correspondant aux couples (x', y') trouvés.
On rappelle le résultat suivant appelé petit théorème de Fermat :
Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p alors $a^{p-1} \equiv 1$ module p.
b. Montrer que, quel que soit l'entier non nul a de A : $a^{226} \equiv 1$ (modulo 227).
c. En utilisant 1.b), en déduire que, quel que soit l'entier non nul a de A : $g[f(a)] = a$.
Que peut-on dire de $f[g(a)] = a$?

51 On considère un rectangle direct ABCD vérifiant AB = 10 cm.



1. Faire une figure : construire ABCD, puis les images respectives M, N et P de B, C et D par la rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
2. a. Construire le centre Ω de la rotation r' qui vérifie r'(A) = N et r'(B) = P.
Déterminer l'angle de r'.
b. Montrer que l'image de ABCD par r' est AMNP.
c. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $r^{-1} o\ r'$.
3. On considère les images successives des rectangles ABCD et AMNP par la transformation de vecteur $\overrightarrow{DM}$.
Sur la demi-droite $[DA)$, on définit ainsi la suite de points $(A_k)_{k\geq 1}$ vérifiant, en cm, $DE_n = 6{,}55n$.
a. Déterminer l'entier k tel que E_{120} appartienne à $[A_k, A_{k+1}]$. Que vaut la longueur A_kE_{120} en cm ?
b) On cherche dans cette question pour quelle valeur minimale n_0 le point E_{n_0} est confondu avec un point A_k.
Montrer que si un point E_n est confondu avec un point A_k alors : $131n - 300k = 100$.
Vérifier que les nombres $n = 7100$ et $k = 3100$ forment une solution de cette équation.
Déterminer la valeur minimale n_0 recherchée.

52 Soit N un entier naturel non nul dont la décomposition en produit de facteurs premiers est :
$N = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ... \times p_n^{\alpha_n}$.
1) Démontrer qu'un entier naturel d est un diviseur de N si, et seulement si, sa décomposition en produit de facteurs premiers est de la forme $p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times ... \times p_n^{\beta_n}$, avec, pour tout $i \in \{1;\ 2\ ;...; n\}$, $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$.
2) Quel est le nombre de diviseur de N tels que $\beta_2 = ... = \beta_n = 0$?
Et le nombre de diviseurs de N tels que $\beta_3 = ... = \beta_n = 0$?
En utilisant au besoin un arbre, démontrer que le nombre de diviseurs de N est égal à $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_n + 1)$.

53 Soit f la fonction numérique à variable réelle définie par : $f(x) = \frac{|x^2 + 2x|}{x - 2}$

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 et en 2

b) Dresser le tableau de variation de f.

2) On suppose que x est un entier naturel.

a) Déterminer x pour que $f(x)$ soit un entier naturel

b) Déterminer x pour que $f(x)$ soit une fraction irréductible (ie son numérateur et son dénominateur sont étrangers).

Pour la suite, on notera par δ le PGDC $(x^2+2x\,;x-2)$ et par μ le PPCM$(x^2+2x\,;x-2)$

c) Déterminer x pour que δ = 4. Dans ce cas trouver μ

d) Soit N = x^2+2x un entier naturel. Ecrire N dans le système de numération de base pour x ≥ 3.

54

On considère les trois entiers naturels a, b et c qui s'écrivent dans la base n respectivement $\overline{111}$, $\overline{114}$ et $\overline{13054}$.

1) Sachant que c = ab, déterminer n puis les écritures des nombres a, b et c dans le système de numération décimal.

2) Vérifier en utilisant l'algorithme d'Euclide, que a et b sont étrangers. En déduire les solutions dans ℤ² de l'équation $ax+by=1$

3) Résoudre :

a) l'équation $x\in\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $x^2+x+1=0$

b) le système $(x\,;y)\in(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$, $\begin{cases}2x-y-2=0\\3x+2y-1=0\end{cases}$

55

1) Le nombre $2^{11}-1$ est-il premier ?

2) Si p et q sont deux entiers naturels non nuls, comment la somme :

$S=1+2^p+2^{2p}+2^{3p}+\ldots+2^{p(q-1)}$

peut-elle encore s'écrire ? En déduire que $2^{pq}-1$ $\left(2^p-1\right)$.

3) Démontrer que $2^{pq}-1$ est divisible par les deux nombres 2^p-1 *et* 2^q-1.

4) En déduire que si le nombre 2^n-1 est premier, alors n est lui-même premier. La réciproque est-elle vraie ? Les nombres premiers de la forme 2^n-1 sont appelés nombres de MERSENNE.

57

1. Soit a et b deux entiers naturels dont la somme et le produit ont pour PGCD le carré d'un nombre premier p.

a. Montrer que p² divise a². (On pourra remarquer que $a^2=a(a+b)-ab$).
En déduire que p divise a. Montrer que p divise b.

b. Démontrer que le PGCD de a et b est soit p, soit p².

2. On cherche à déterminer les entiers naturels a et b tels que :
PGCD $(a+b,ab)$ = 49 et PPCM (a,b) = 231.

a. Soit a et b deux tells entiers. Montrer que leur PGCD est 7.

b. Quelles sont les solutions du problème posé ?

58

1) a) Résoudre dans ℤ×ℤ l'équation d'inconnue $\left(p\;;q\right)$ *suivante* : $11p-7q=1$

b) La division euclidienne d'un entier naturel n par 7 donne pour reste 4, le même entier divisé par 11donne pour reste 3. Quel sera son reste dans la division par 77 ?

c) Déterminer les valeurs de l'entier naturel n inférieur à 200.

2) Soit (U_n)une suite arithmétique croissante d'entiers naturels.

a) Sachant que $U_1 + U_2 + U_3 = 105$; calculer U_2.

b)On désigne par m et d respectivement le PPCM et le PGCD de U_1 et U_3.

c) En déduire l'expression de U_n en fonction de n.

d) Calculez $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n$ en fonction de n.

Déterminer n pour que S_n soit égale à 525.

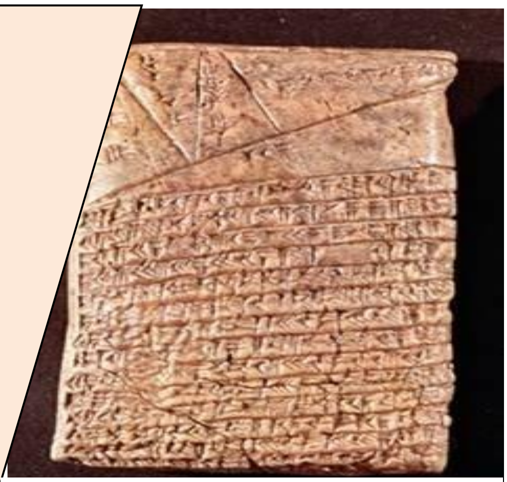
Fonctions numériques d'une variable réelle

Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646-1716)

Mathématicien suisse, philosophe et savant allemand

Euler Leonhard (1707-1783) Physicien, ingénieur et philosophe.

Depuis longtemps, l'homme a utilisé la notion de fonction à partir des objets anciens tels que la tablette de calcul babylonienne. Cependant une fonction fut une formule permettant d'obtenir un résultat. Il a fallut donc attendre le XVII$^{\text{ème}}$ siècle pour que le mot fonction et la notion $y = f(x)$ soit introduit par Leibniz et approfondie par Euler.



Tablette babylonienne

Sommaire

I- Généralité sur les fonctions

1) Définition d'une fonction :

On appelle fonction toute relation de **A vers B** qui à chaque élément de **A** on associe **au plus un élément de B**.

2) Ensemble de définition ou domaine de définition d'une fonction numérique f :

On appelle ensemble de définition ou domaine de définition d'une fonction numérique f, **l'ensemble des éléments qui ont une image par f**. On le note **Df.**

Exemple

- $Si\ f(x) = u(x)$ $(fonction\ polynôme)$; $alors\ Df = \mathbb{R} =]-\infty\ ;+\infty[$

- $Si\ f(x) = \sqrt{u(x)}$ $(fonction\ irrationnelle)$; $alors\ Df = \{x/x \in \mathbb{R};\ u(x)\ 0\}$

- $Si\ f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ $(fonction\ rationnelle), alors\ Df = \{x/x \in \mathbb{R}\ ;\ v(x) \neq 0\}$.

Evaluation

Déterminons l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{-3x^2+5x+1}{x+3}$; 2) $f(x) = (x+2)\sqrt{x^2-3x+2}$;

3) $f(x) = \frac{x+2}{x-\sqrt{x^2-2x+1}}$; 4) $f(x) = \frac{\sqrt{-x+3}}{-x^2-2x+4}$

5) $f(x) = \frac{tg(2x)}{Cos(x)}$; 6) $f(x) = \frac{8}{x+\sqrt{x^2+1}}$

Synthèse

1) $f(x) = \frac{-3x^2+5x+1}{x+3}$

$D_f = \{x/x \in \mathbb{R}\ ;\ x+3 \neq 0\}$

$x + 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3 \Rightarrow$ **$D_f = \mathbb{R} - \{-3\} =]-\infty\ ;-3[\ \cup\ ]-3\ ;+\infty[$**

2) $f(x) = (x + 2)\sqrt{x^2 - 3x + 2}$

$D_f = \{x/x \in \mathbb{R} ; x^2 - 3x + 2 \geq 0 \}$

$x^2 - 3x + 2 \geq 0$. Posons $x^2 - 3x + 2 = 0 => x_1 = 1$ et $x_2 = 2$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$=> \mathbf{D_f} = \,]-\infty ; \mathbf{1}] \cup [\mathbf{2} ; +\infty[$

3) $f(x) = \frac{x + 2}{x - \sqrt{x^2 - 3x + 2}}$

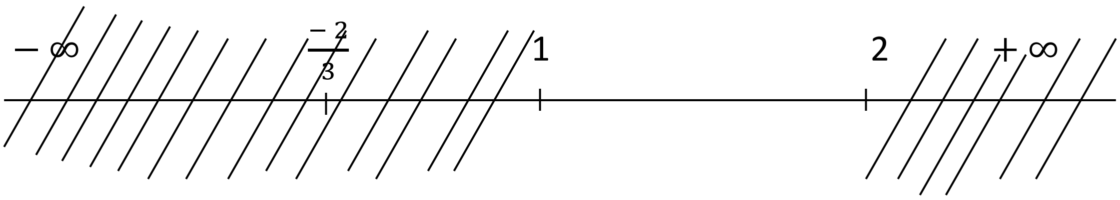
$D_f = \{x/x \in \mathbb{R} ; \; x^2 - 3x + 2 \geq 0 \quad et \; x - \sqrt{x^2 - 3x + 2} \neq 0 \}$

$x^2 - 3x + 2 \geq 0$. Posons $x^2 - 3x + 2 = 0 => x_1 = 1$ et $x_2 = 2$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x - \sqrt{x^2 - 3x + 2} \neq 0 <=> \sqrt{x^2 - 3x + 2} \neq x <=> x^2 - 3x + 2 \neq x^2$

$=> -3x + 2 \neq 0 => x \neq \frac{-2}{3}$

$=> D_f =$ 

$=> \mathbf{D_f} = [\mathbf{1} \; ; \mathbf{2}]$

4) $f(x) = \frac{\sqrt{-x + 3}}{-x^2 - 2x + 4}$

$D_f = \{x/x \in \mathbb{R} ; -x^2 - 3x + 4 \neq 0 \; et - x + 3 \geq 0\}$

(1) : $-x^2 - 3x + 4 \neq 0 => x_1 \neq 1$ et $x_2 \neq -4$

(2) : $-x + 3 \geq 0 => x \leq 3$

$-\infty \quad -4 \qquad 1 \qquad 3 \quad +\infty$

= >**Df =** $]-\infty\ ;-\mathbf{4}\,[\ \cup\ ]-\mathbf{4}\ ;\ \mathbf{1}\,[\ \cup\ ]\,\mathbf{1}\ ;\ \mathbf{3}\,]$

5) $f(x) = \frac{tg(\,2x\,)}{Cos(\,x\,)}$

Df = $\left\{x/x\ \in \mathbb{R}\,;\ 2x\ \neq \frac{\pi}{2}\ \ et\ \ Cos(\,x\,) \neq 0\right\}$

(1) : $2x\ \neq \frac{\pi}{2}$ = >$x\ \neq\ \frac{\pi}{4}$

(2) : $Cos(\,x\,) \neq 0 <=> Cos(\,x\,) \neq Cos\left(\frac{\pi}{2}\right) <=> \begin{cases} x\ \neq\ \frac{\pi}{2} +\ 2k\pi \\ x\ \neq\ -\ \frac{\pi}{2} = 2k\pi \end{cases}$

= >Df =$\mathbb{R}-\ \left\{-\ \frac{\pi}{2}\ \ ;\ \ \frac{\pi}{4}\ ;\ \ \frac{\pi}{2}\right\}$

= >**Df =** $\left]-\infty\ ;-\ \frac{\pi}{2}\right[\ \cup\ \left]-\ \frac{\pi}{2}\ ;\ \ \frac{\pi}{4}\right[\ \cup\ \left]\frac{\pi}{4}\ \ ;\ \frac{\pi}{2}\right[\ \cup\ \left]\frac{\pi}{2}\ \ ;\ +\infty\ \right[$

6) $f(x) = \frac{8}{x+\sqrt{x^2+1}}$

Df = $\left\{x\ /x \in \mathbb{R}\,; x^2+1\ \geq 0\quad etx + \sqrt{x^2+\ 1} \neq 0\ \ \right\}$

$x^2+1\ \geq 0$ (Vraie)

$x+\sqrt{x^2+\ 1} \neq 0\ <=> \sqrt{x^2+\ 1} \neq x\ <=>\ x^2+\ 1\ \neq\ x^2\ => 1\ \neq 0$ (Vraie)

= >Df = $\mathbb{R}\ =\ ]-\infty\ ;\ +\infty\,[$

3) **Opération sur les fonctions :**

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur leur ensembles de définition Df et Dg.

a- **Somme** :

$\forall x \in \mathrm{D}f$ et $\forall x \in \mathrm{D}g$; $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

b- Produit :

$\forall x \in \mathrm{D}f$ et $\forall x \in \mathrm{D}g$; $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$

c- Quotient :

$\forall x \in \mathrm{D}f$ et $\forall x \in \mathrm{D}g$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ avec $g(x) \neq 0$

II- Limites

Objectifs

Ce chapitre vise à :

• Compléter l'étude de la limite d'une fonction engagée en classe de première par :

- L'introduction de la limite d'une fonction composée ;
- La limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert.

• Introduire la continuité d'une fonction sur un intervalle et utiliser quelques théorèmes usuels liés à la continuité de cette fonction.

Savoirs et savoir-faire

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Limites - Limite d'une fonction composée. - Limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert	• Déterminer la limite d'une fonction : - en utilisant les limites de référence ou une expression conjuguée ; - en ayant recours à la définition d'un nombre dérivé. • Déterminer la limite d'une fonction composée.
• Branches paraboliques de direction (OI) et (OJ) dans un repère (O, I, J). • Continuité sur un intervalle : - Opérations, composée (propriétés admises). - Image d'un intervalle. • Fonction continue et strictement monotone sur un intervalle : **Théorème 1 :** *si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f est une bijection de I sur f(I). sa bijection réciproque* f^{-1}est continue et de même sens de variation que la fonction *f*	• interpréter graphiquement : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty\ (\text{resp.} -\infty)$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty\ (\text{resp.} -\infty)$ • Démontrer qu'une courbe admet une branche parabolique de direction (OI)(reps. (OJ)) • Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue : - en utilisant le tableau de variations ; - en utilisant une méthode algébrique. • Démontrer qu'une fonction réalise une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J dans le cas où f est donnée par une formule explicite, déterminer f^{-1} (x).
Théorème 2 : si *f* est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors pour tout m de *f*(I),	• Prouver l'existence d'une unique solution de l'équation : f(x) = m sur un intervalle I.

l’équation $f(x)$ = m admet une unique solution dans I. Corollaire : soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$. Si f(a) et f(b) sont des signes contraires, alors l’équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l’intervalle ouvert $]a, b[$. • Fonctions du type : - $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, ($n \in IR*$) - $x \mapsto x^r$ ($r \in \mathbb{Q}$, $x \in IR+*$). Définitions ; notons $x^{p/q}$ Propriétés des puissances d’exposants rationnels	

Activité 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{x^3}$

a- Complète le tableau suivant

x	-3000000	-2000000	-1000000	0	1000000	2000000	3000000
$f(x)$							

b- Donne la valeur de x pour la quelle f n'est pas définie.

c- Que peux-tu conclure quand x tend vers $-\infty$ ou $+\infty$?

Activité 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$

a- Complète le tableau suivant

x	-3000000	-2000000	-1000000	0	1000000	2000000	3000000
$f(x)$							

b- Que peux-tu conclure quand x tend vers $-\infty$ ou $+\infty$?

1) <u>Propriétés sur les limites</u> :

a) Propriété 1

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \ ; \quad \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \ ; \quad \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty \ ; \quad \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty \ ; \quad \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \ ; \quad \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

b) Propriété 2

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \ ; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \ ; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0 \ ; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{K}{x^n} = 0 \ (K \in \mathbb{R})$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \ ; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \ ; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3} = 0 \ ; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{K}{x^n} = 0 \ (k \in \mathbb{R})$$

c) Propriété 3 :

Si k est un réel non nul alors :

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{k}{x} = \infty$ (le signe de ∞ dépend du signe du zéro et du signe de k).

2) Opération sur les limites

a) Somme :

f	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
g	l'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$f + g$	$l + l'$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

b) Produit :

f	l	$l \neq 0$	0	∞
g	l'	∞	∞	∞
$f \bullet g$	$l \bullet l'$	∞ règle des signes	Forme indéterminée	∞ règle des signes

c) Quotient:

f	l	l	0	l	∞	∞
g	$l' \neq 0$	$l' = 0$	0	∞	l	∞
$\frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	+/− ∞ à gauche / à droite	Forme indéterminée	0	∞ règle des signes	Forme indéterminée

NB :

On remarque ainsi que l'on a quatre (4) formes indéterminées qui sont :

$-\infty + \infty$; $0 \times \infty$; $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$.

3) **Limite des fonctions polynômes et rationnelles à l'infini**.

a) **Limite d'une fonction polynôme à l'infini**

La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite de son terme du plus haut degré.

Exemple : $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 - 2x^2 + 3x = \lim\limits_{x \to -\infty} -2x^2 = -2\,(-\infty)^2 = -\infty$.

b) **Limite d'une fonction rationnelle à l'infini** :

La limite d'une fonction du rationnelle en $+\infty$ ou en $-\infty$est égale à la limite du quotient des termes du plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemple : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-3x + 4x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1 + x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} 4x = +\infty$

N.B : La propriété sur les limites des fonctions polynômes et des fonctions rationnelles ne peut être utilisée qu'en $+\infty$ ou en $-\infty$.
En aucun cas, elle ne peut être utilisée lorsque x tend vers un nombre réel.

4) **Limite de la composée de deux fonctions :**

Soient f et g deux fonctions et fog leur composée définie sur un intervalle I contenant « a » où a est une borne. Si : $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$ et $si \lim\limits_{x \to l} f(x) = l'$ $alors$ $\lim\limits_{x \to a} fog(x) = l'$

5) **Limite des fonctions circulaires :**

Si a est un nombre réel non nul, on a :

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{Sinx}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sinax}{ax} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tgax}{ax} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos(a\,x)}{(ax)^2} = \frac{1}{2}$

6) Limite à gauche – Limite à droite de x_0

a) Limite à gauche de x_0

On appelle limite à gauche d'un réel x_0 d'une fonction f, la limite lors qu'elle existe quand x tend vers x_0 par valeurs inferieures on note : $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.

b) Limite à droite de x_0

On appelle limite à droite d'un réel x_0 en une $fonction\ f$, la limite lors qu'elle existe quand x tend vers x_0 par valeurs supérieures on note : $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.

NB :

Une fonction admet une limite en un point x_0 si sa limite à gauche est égale à sa limite à droite.

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Exemple

Calculer la limite des fonctions suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$; b) $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x^2-4}{x^2-x-2}$; c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{2x}$; e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1-x}{x^2-3x^3+2}$ f) $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \sqrt{x^2+x+2}$

Solution

a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$ **(Forme .Indéterminée)**

Levons l'indétermination.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{(x+1)} = \frac{1}{2}$$

b) $\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{x^2-5}{x^2-x-2}$

Puisque la limite est étudiée à droite de-1, alors cherchons le signe du dénominateur x^2-x-2 à droite de -1

Posons : $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \;\; ou \;\; x_2 = 2$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x^2 - x - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\Rightarrow \lim_{x \to -1^+} \frac{x^2 - 5}{x^2 - x - 2} = \frac{-4}{0^-} = +\infty$$

<u>NB :</u> Le signe du zéro (0^-) provient de l'étude du signe du dénominateur à droite de -1

c) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \frac{0}{0}$ (**Forme Indéterminée**)

Levons l'indétermination.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \bullet \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 - 1^2}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2+1-1}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = \frac{0}{1} = 0$$

d) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{2x} = \frac{0}{0}$ **(forme indéterminée)**

Levons l'indétermination.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{5}{5} \bullet \frac{\sin 5x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{5}{2} \bullet \frac{Sin 5x}{5x} = \frac{5}{2}$$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-x}{x^2-3x^3+2} = \dfrac{1}{2}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \sqrt{x^2 + x + 2} = +\infty - \infty$ (**forme indéterminée**)

Levons l'indétermination.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(x-\sqrt{x^2+x+2}\right)\left(x+\sqrt{x^2+x+2}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+x+2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-\left(\sqrt{x^2+x+2}\right)^2}{x+\sqrt{x^2+x+2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-(x^2+x+2)}{x+\sqrt{x^2+x+2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-x^2-x-2}{x+\sqrt{x^2+x+2}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-x-2}{x+\sqrt{x^2+x+2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x-2}{x+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x-2}{x+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-x-2}{x+x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x-2}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{x} = -1$$

7) <u>Théorème sur les limites</u>

a- <u>Théorème des gendarmes</u> :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

$Si\ f(x)$ Répond à l'inégalité : $A(x) \leq f(x) \leq B(x)$.

$$et\ si \begin{cases} \lim\limits_{x \to \infty} A(x) = l \\ et \\ \lim\limits_{x \to \infty} B(x) = l \end{cases} \quad alors \lim_{x \to \infty} f(x) = l$$

Exemple

En utilisant le théorème des gendarmes, calculé $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2 + Sinx}{x + 1}$

Solution

On sait que : $-1 \leq Sinx \leq 1$

En ajoutons 2 à chaque membre de l'inégalité, on a :

$$1 \leq 2 + Sinx \leq 3$$

En divisant chaque membre de l'inégalité par $x + 1$, on a :

$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{2 + Sinx}{x+1} \leq \frac{3}{x+1}$$

En appliquant la limite à chaque membre de l'inégalité, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1} \leq \lim_{x \to +\infty} \frac{2 + Sinx}{x+1} \leq \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x+1}$$

$$\text{Or} \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1} = 0 \\ et \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{x+1} = 0 \end{cases}$$

Ainsi en appliquant le théorème des Gendarmes, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2+Sinx}{x+1} = 0$

b- **Théorème de l'Hôpital :**

Soit f et g deux fonctions continues et dérivables en un point x_0.

Si $f(x_0) = g(x_0) = 0$ *et* $g'(x_0) \neq 0$, alors : $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

Exemple

Soient f *et* g deux fonctions définies par : $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2 - 3x + 2}$ et $g(x) = x^2 - 5x + 4$

a) Etudier la continuité de f et g en $x_0 = 1$

b) Calculer $g'(1)$ et $f'(1)$ puis en déduire $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)}{g(x)}$

Solution

a) Etudions la continuité de f et g en $x_0 = 1$

- Etude de la continuité de f en $x_0 = 1$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2}{x^2 - 3x + 2} = \frac{0}{0} = \text{F.I}$$

Levons l'indétermination :

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-2)} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 0$$

- Etude de la continuité de g en $x_0 = 1$

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} x^2 - 5x + 4 = 1 - 5 + 4 = 0$$

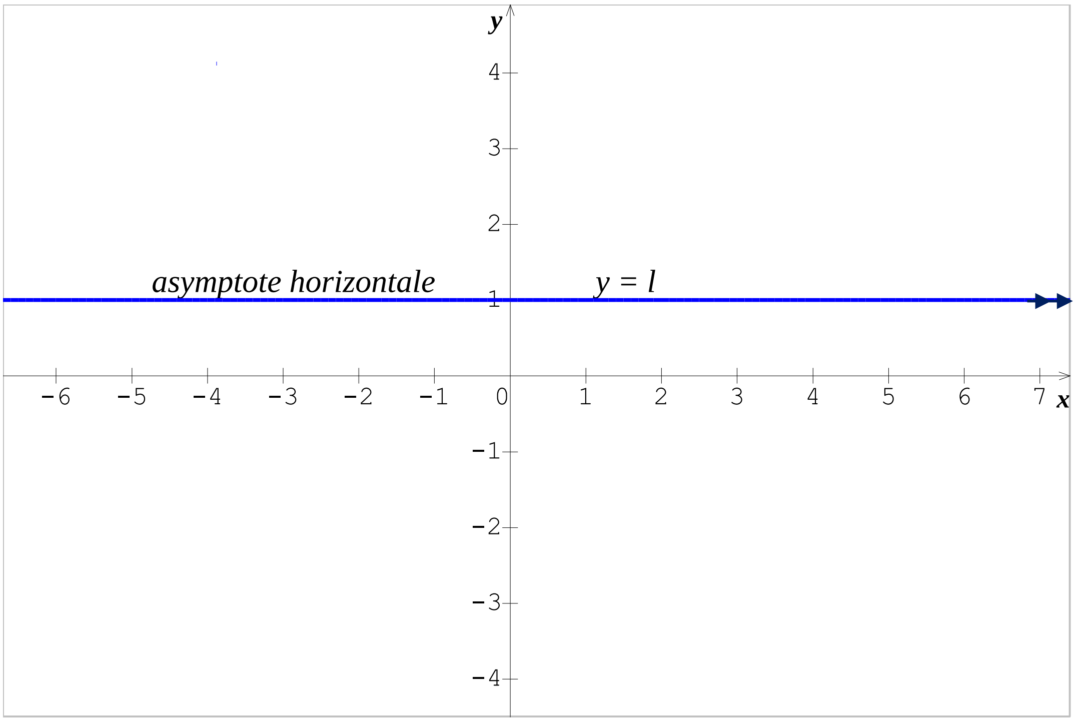
Alors $f(1) = g(1) = 0$ d'autre part $f'(1) = -1$ et $g'(1) = -3 \neq 0$

Alors $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(1)}{g'(1)} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$

6) <u>Interprétation graphique de la limite d'une fonction :</u>

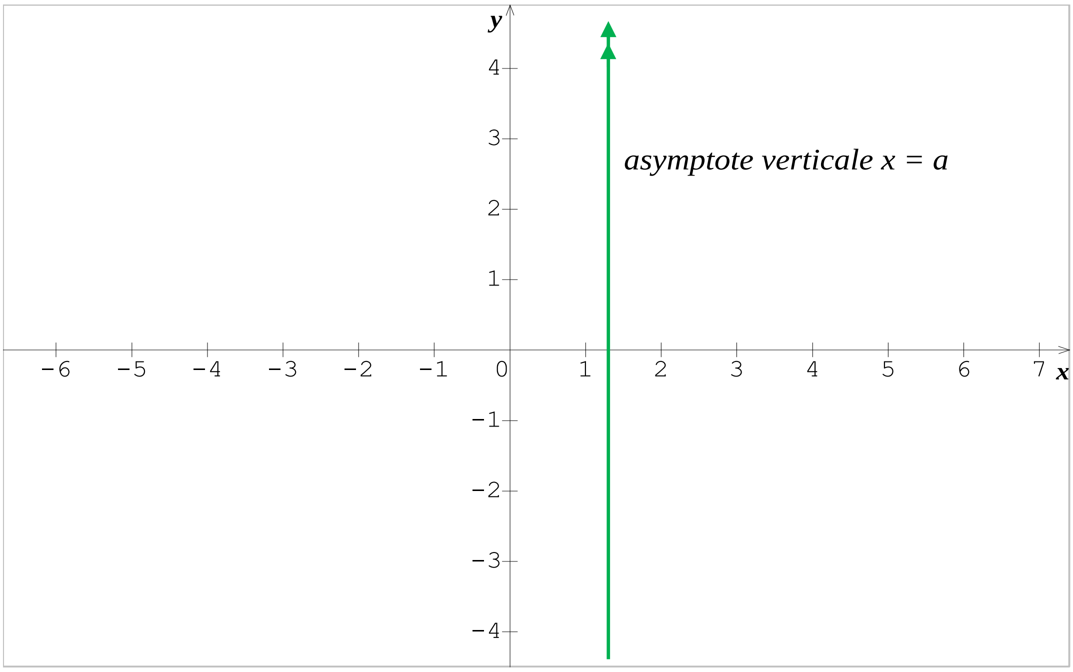
- Si $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ ou $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ (**alors la droite d'équation y = $\boldsymbol{l}$**) est asymptote

Horizontale à la combe représentative de f.



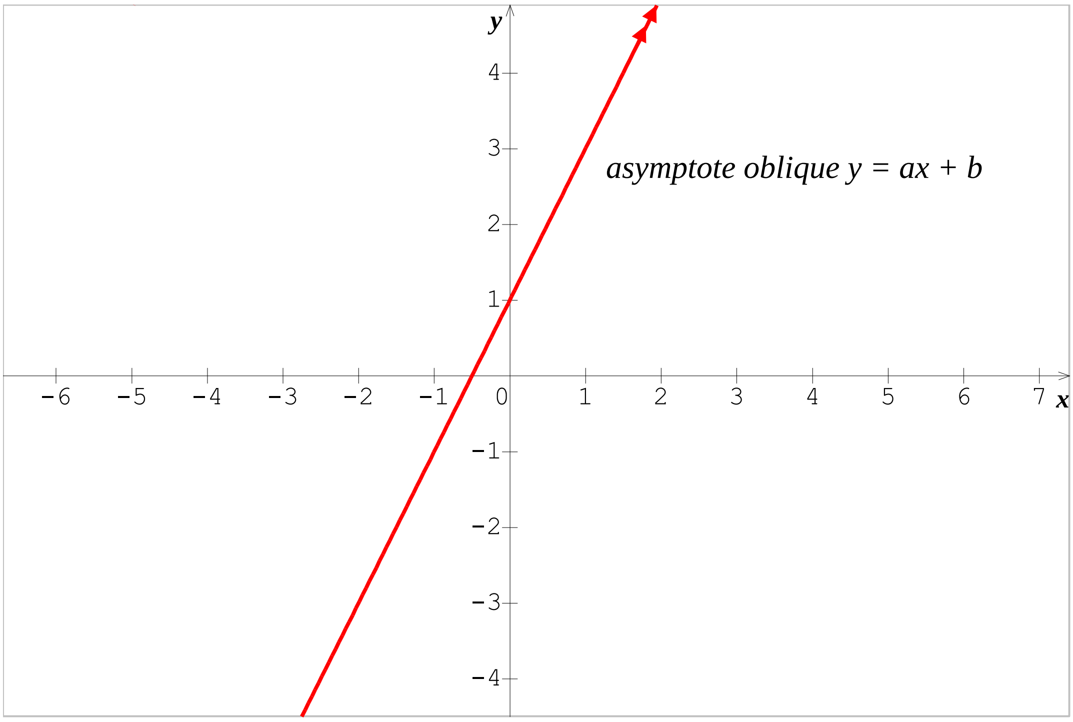
- $Si \lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ $ou \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$(**alors la droite d'équation $\boldsymbol{x}$ = a**) est

asymptote **verticale** à la combe représentative de f.



- $Si \lim\limits_{x \to +\infty} [\, f(x) - (ax + b)\,] = 0$ *ou* $\lim\limits_{x \to -\infty} [\, f(x) - (ax + b)\,] = 0$

(**alors la droite d'équation $y = a\,x + b$** est asymptote **oblique** à la combe représentatives de f).



III- Continuité

1) Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit x_0 un réel appartenant à I.

On dit que $\boldsymbol{f}$ est continue en $\boldsymbol{x}_0$ si et seulement si $\boldsymbol{f}$ est définie en $\boldsymbol{x}_0$ et si la limite de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ quand $\boldsymbol{x}$ tend vers $\boldsymbol{x}_0$ est égale à $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})$

Une fonction f est continue en $\boldsymbol{x_0}$ si et seulement si :

$f(\boldsymbol{x_0})$ existe et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(\boldsymbol{x_0}) = l\ (l\ fini)$.

Remarque : les fonctions non continues en $\boldsymbol{x_0}$ sont les fonctions non définies en $\boldsymbol{x_0}$ et les fonctions n'admettant pas de limite en $\boldsymbol{x_0}$

2) Continuité sur un intervalle :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I = $[a\ ;\ b]$ ou I = $]a\ ;\ b[$. On dit que f est continue sur I si et seulement si f est continue en tout point de I.

3) Continuité à gauche – continuité à droite

a- Continuité à gauche :

Une fonction f est continue à gauche de x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

b) Continuité à droite :

Une fonction f est continue à droit de x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

NB :

Une fonction est continue en un point de x_0 si elle est **gauche** et à **droite** de $\boldsymbol{x_0}$

4) Prolongement par continuité

Soit f une fonction numérique non définie en $\boldsymbol{x_0}$; mais admettant une limite $\boldsymbol{l}$ en ce point. La fonction g définie par : $\boldsymbol{g(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{f(x)} & \boldsymbol{si\ \ x \neq x_0} \\ \boldsymbol{l} & \boldsymbol{si\ \ x = x_0} \end{cases}$

est appelée le prolongement de la fonction f par continuité au point $\boldsymbol{x_0}$

<u>N B</u> : Si $\boldsymbol{f}$ n'est pas définie en $\boldsymbol{x_0}$ mais admet une limite en ce point, alors on dit que $\boldsymbol{f}$ est prolongeable par continuité au point $\boldsymbol{x_0}$.

Exemple

1) Etudions la continuité de la fonction f au point x_0 donné dans chacun des cas suivant:

a) $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} \\ f(2) = 4 \end{cases}$; $x_0 = 2$; b) $\begin{cases} f(x) = \frac{|x-1|+2}{x+3} \\ f(1) = 5 \end{cases}$; $x_0 = 1$

2) Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de définition de la fonction f puis dire si elle est prolongeable par continuité au point x_0

$\begin{cases} f(x) = \frac{x-\sqrt{x}}{x} \\ x_0 = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} f(x) = \frac{tgx}{x} \\ x_0 = 0 \end{cases}$

Solution

1) Etudions la continuité de la fonction f au point x_0 donné dans chacun des cas suivant:

a) $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} \quad si\ x_0 = 2 \\ f(2) = 4 \end{cases}$

f est continue en $x_0 = 2$, si $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = f(2)$

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = f(2) = \frac{0}{0}$(**Forme .Indéterminée**)

Levons l'indétermination.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} x+2 = 2+2 = 4$$

Puisque $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = f(2)$

Alors f est continue en $x_0 = 2$

b) $\begin{cases} f(x) = \frac{|x-1|+2}{x+3} & x_0 = 1 \\ f(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Ecrivons f sans le symbole de la valeur absolue :
Posons $x - 1 = 0$ = > $x = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$
$\lvert x-1 \rvert$	$-x+1$		$x-1$

= > $\begin{cases} f(x) = \frac{(-x+1)+2}{x+3} & si \ x \in \left]-\infty \ ; \ 1\right] \\ f(x) = \frac{(x-1)+2}{x+3} & si \ x \in \left]1 \ ; +\infty\right[\end{cases}$

= > $\begin{cases} f(x) = \frac{-x+3}{x+3} & si \ x \in \left]-\infty \ ; \ 1\right] \\ f(x) = \frac{x+1}{x+3} & si \ x \in \left]1 \ ; +\infty\right[\end{cases}$

Ainsi étudions la continuité de f à gauche et à droite de x_0 = 1

f est continue en x_0 = 1 si f (1) *existe et si* $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = \frac{1}{2}$

Continuité à gauche :

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{-x+3}{x+3} = \frac{1}{2}$

Continuité à droite :
$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x+1}{x+3} = \frac{1}{2}$

Puis que $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = \frac{1}{2}}$

Alors $\boldsymbol{f}$est continue en$\boldsymbol{x_0}$ = 1.

2) Dans chacun des cas suivants, précisons l'ensemble de définition de la fonction f et voyons si f est prolongeable par continuité au point x_0

a) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x - \sqrt{x}}{x} \\ x_0 = 0 \end{cases}$

- $D_f =]\,0\ ;\ +\infty\,[$
- Etudions la continuité de f en $x_0 = 0$

f n'est pas définie en $x_0 = 0$ donc elle n'est pas continue en $x_0 = 0$

Voyons si f admet une limite finie $x_0 = 0$

Levons l'indétermination.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x})}{x(x + \sqrt{x})} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - x}{x(x + \sqrt{x})} = \lim_{x \to 0} \frac{x - 1}{(x + \sqrt{x})} = \infty$$

Alors f n'est pas continue en $x_0 = 0$.

Par conséquent f n'est pas prolongeable par continuité en $x_0 = 0$.

b) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{tgx}{x} \\ x_0 = 0 \end{cases}$

- $D_f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{k\pi}{2}\ ; k \in \mathbb{Z}\right\}$
- Etudions la continuité de f en $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = 1$$

Par conséquent f est prolongeable par continuité en $x_0 = 0$
et son prolongement par continuité en $x_0 = 0$ est la fonction h définie par :

$$\boldsymbol{h}(x) = \begin{cases} f(x) = \dfrac{tgx}{x} & \textbf{si } x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$$

IV- Dérivation :

Objectifs

Ce chapitre vise à :
• consolider les notions abordées en classe de première telles que la détermination du sens de variation d'une fonction et la recherche de tangentes à une courbe en des points donnés ;
• consolider la notion de dérivé et l'étendre à la composée de deux fonctions dérivables ;
• compléter les théorèmes concernant la dérivabilité par les notions de dérivabilité à gauche et de dérivabilité à droite ;
• utiliser des propriétés des fonctions dérivables pour démontrer des inégalités ou établir des encadrements.

Savoirs et savoir-faire

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Dérivées successives ; nouvelle notations. $\frac{df}{dx}$; $\frac{d^2f}{dx^2}$ • Si une fonction est dérivable sur un intervalle, alors elle continue sur cet intervalle. • Dérivée d'une fonction composée (admise) ; application à la dérivation des fonctions de la forme : u^n $(n \in \mathbb{Z}^*)$; $\sqrt{u}$ • Existence de la dérivée d'une fonction réciproque (admise), formule de la dérivée de la fonction réciproque. • Dérivée des fonctions puissances d'exposants rationnels. • Inégalité des accroissements finis (2 formes) • nombre dérivé à droite (à gauche) d'une fonction en un point. • Demi-tangente	• Démontrer qu'une fonction composée est dérivable en un point et savoir calculer le nombre dérivé en ce point. • Préciser l'ensemble des éléments où la fonction réciproque d'une fonction donnée est dérivable. • Déterminer le nombre dérivé de la fonction réciproque en un point x_0 •Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour : - démontrer une inégalité ; - établir un encadrement. • Etudier la dérivabilité d'une fonction définie par intervalles en un point de raccordement. • Interpréter graphiquement la dérivabilité à droite (resp. à gauche) d'une fonction en un point x_0.

1) **Nombre dérivé en un point x_0 :**

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_0.

On dit que f est dérivable en x_0 si et seulement si la quantité $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0. Cette limite est appelée **nombre dérivé en** x_0 **et est noté** $f'(x_0)$.
C'est-à-dire :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

N.B : f est dérivable en x_0 est équivalente que la quantité $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers zéro ; il suffit de poser $h = x - x_0$

f est dérivable en x_0 si elle admet un nombre dérivé $f'(x_0)$

2) Lien entre la notion de limite et de continuité :

Toute fonction dérivable en un point x_0 est continue en x_0 .
N.B : La réciproque est inexacte.

3) Nombre dérivé à gauche – Nombre dérivée à droite

a) **Nombre dérivé à gauche :**

$Si \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie, alors on dit que f est dérivable à gauche en x_0

On la note $f'_g(x_0)$

b) **Nombre dérivé à droite :**

$Si \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ Existe et est finie, alors on dit que f est dérivable à droite en x_0.

On la note $f'_d(x_0)$

Théorème :

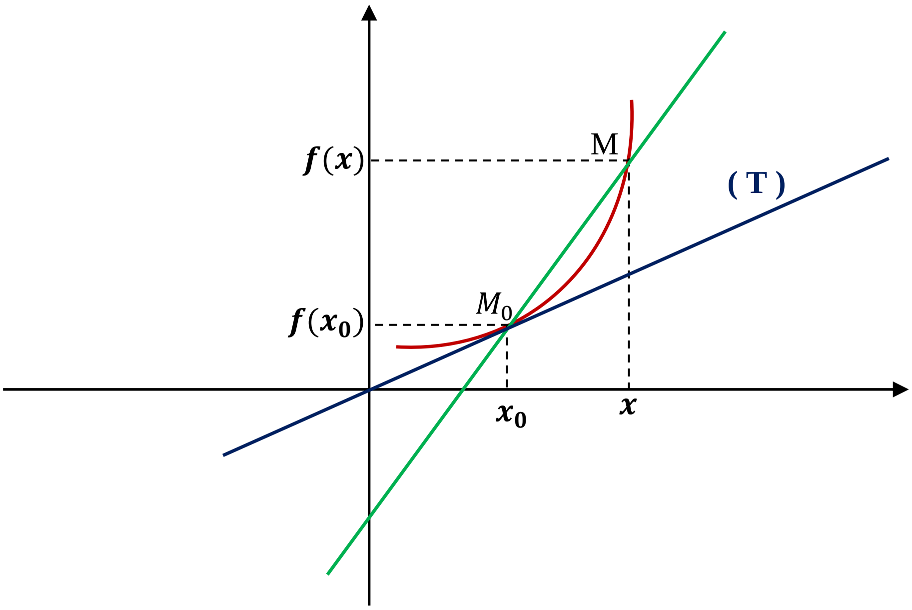
si f est dérivable à gauche et à droite en x_o et si les deux nombres dérivés sont égaux alors f est dérivable en x_o et on a **:**

$$\lim_{x \to x_o^-} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o^+} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = f'(x_o)$$

4) Interprétation graphique d'un nombre dérivé

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle et ($\mathcal{C}$) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J)

Soit $M_0\binom{x_0}{y_0}$ un point fixé de ($\mathcal{C}$). $M\binom{x}{y}$ un point courant de ($\mathcal{C}$) ; construisons la droite (M_0M) . Lorsque x tend vers x_0 la droite (M_0M) vient occuper une position limite (M_0T) appelée tangente à la courbe ($\mathcal{C}$) au point $M_0\binom{x_0}{y_0}$; $f'(xo)$ est appelé pente ou coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point $M_0\binom{x_0}{y_0}$



a) <u>Equation de la tangente au point d'abscisse x_0</u> : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Si le nombre dérivé à gauche et le nombre dérivé à droite existent et sont différents, alors la courbe admet deux demi – tangentes en M_0 de coefficients respectifs les nombres dérivés à gauche et à droite de x_0 et fait un angle en ce point.

Si la courbe ($\mathcal{C}$). de la fonction f admet en un point x_0 , une tangente parallèle à l'axe des abscisses alors $f'(xo) = 0$

5) <u>Utilisation des dérivées</u> :

Sens de variation d'une fonction.
Soit f une fonction définie par : $x \mapsto f(x)$. On appelle dérivée de f, la fonction f' définie par : $f' : x \mapsto f'(x)$ nombre dérivé de la fonction f au point x

6) <u>Formules sur les dérivées</u> :

a- <u>Dérivées usuelles</u> :

Fonctions	Dérivées	Domaines de dérivabilité
a (constante)	O	ℝ
ax	a	ℝ
ax^n	nax^{n-1}	ℝ
$\frac{a}{x^n}$	$\frac{-nax^{n-1}}{x^{2n}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^*_+$
$\sqrt{ax+b}$	$\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$	$\mathbb{R}_+$
Cos x	$-$Sin x	ℝ
Sin x	Cos x	ℝ
Tgx	$\frac{1}{Cos^2 x} = 1 + tg^2 x$	ℝ - $\left\{\frac{k\Pi}{2}\right\}$
Cos $(ax + b)$	$-$aSin $(ax + b)$	ℝ
Sin $(ax + b)$	a Cos $(ax + b)$	ℝ
tg $(ax + b)$	$\frac{a}{Cos^2\ (ax+b)} = 1 + t^2 g(ax+b)$	ℝ – {ax + b $\frac{k\ \Pi}{2}$} $k \in \mathbb{Z}$

b- Opérations sur les dérivées :

Fonctions	Dérivées
$u + v$	$U' + v'$
$au\ (a \in \mathbb{R})$	au'
$(u)\,(v)$	$u'v + v'u$
$\frac{a}{u}(a \in \mathbb{R})$	$\frac{-au'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{(u')(v)-(v')(u)}{(v)^2}$
$(u)^n$	$n(u')\,(u)^{n-1}$
$\frac{a}{u^n}\ (a \in \mathbb{R})$	$\frac{-nau'u^{n-1}}{u^{2n}}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
Cos (u)	$-u'Sin\ (u)$
Sin (u)	$u'Cos(u)$
tg (u)	$\frac{u'}{Cos^2 u}$
$u = (gof)\,(x)$	$u' = f'(x)\,g'(f(x))$

7) Dérivée de la réciproque d'une fonction f :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.
Alors f réalise une bijection de I sur sur $f\ (I)$ et admet une bijection f^{-1} de $f(I)$ dans I
Ayant même sens de variation que f
Pour calculer $(f^{-1})'(x_0)$, on peut procéder comme suite :

- On détermine la solution de l'équation $f(x) = x_0$
- On calcule $f'(x)$ et on vérifie que $f'(x)\;0$
- On conclue $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(x)}$

8) Sens de variation d'une fonction.

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On retient que les variations d'une fonction dépendent du signe de sa dérivée. Ainsi :

- Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in$ I, alors $\forall x \in$ I, f est strictement décroissante.
- Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in$ I, alors $\forall x \in$ I, f est strictement croissante.
- Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in$ I, alors $\forall x \in$ I, f est constante ou stationnaire

N.B :

Les variations d'une fonction peuvent être résumées dans un tableau appelé tableau de variation de f. Ainsi un tableau de variation comporte les éléments suivants :

- Domaine de définition
- Valeurs pour lesquelles la dérivée s'annule
- Des flèches croissantes et décroissantes montrant les variations de f.
- Une courbe (C_f) admet en un point **A(**x_0 **;** y_0**)** une tangente horizontale ou une tangente parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si : $f'(x_0) = 0$.
- Une courbe (C_f) admet en un point **A(**x_0 **;** y_0**)** une tangente de coefficient directeur **a** si et seulement si : $f'(x_0) = a$.

9) Extremum d'une fonction :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_0. Si $f'(x)$ s'annule en changeant de signe en *passant par* x_0 , alors f admet un extremum en x_0.

Si $f'(x)$ passe du signe négatif au signe positif on dit que f présente un minimum
Si $f'(x)$ passe du signe positif au signe négatif on dit que f présente un maximum

Ainsi on dit que **: (Cf) admet une tangente horizontale en $M_0(x_0 ; f(x_0))$**

Exemple

1) Etudier la dérivabilité de la fonction f au point x_0 donné :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x^2+x-6} \\ f(2) = 0 \end{cases} \quad ; \quad x_o = 2$$

2) Calculer la fonction dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x)$:

$$f(x) = \frac{-x^2+3x-5}{x^3-2}$$

3) Ecrire une équation de la tangent (T) à la courbe (C) de f aux points x_0 :

$f(x) = Cos^2\left(\frac{x\pi}{6}\right)$; on donne $x_0 = 2$

4) Dresser le tableau de variation de la fonction suivante : $f(x) = \dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$

Solution

1) Etudions la dérivabilité de la fonction f au point x_0 :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x^2+x-6} \\ f(2) = 0 \end{cases} \quad ; \quad x_o = 2$$

f est dérivable en $x_0 = 2$ si $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x-2} = l$ avec ($l \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - 0}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{(x-2)^2}{x^2+x-2}}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x^2+x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x-2)(x-1)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)^2(x-1)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{1}{x-1} = 1 \in \mathbb{R}$$

Alors f est dérivable en $x_0 = 2$ et son nombre dérivé est $f'(2) = 1$

2) Calculer la fonction dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x) = \dfrac{-x^2+3x-5}{x^3-2}$.

$$f(x) = \frac{-x^2+3x-5}{x^3-2}. \quad \left| \begin{array}{l} U(x) = -x^2+3x-5 \Rightarrow U'(x) = -2x+3 \\ V(x) = x^3-2 \Rightarrow V'(x) = 3x^2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\big(U'(x)\big)\big(V(x)\big) - \big(V'(x)\big)\big(U(x)\big)}{\big(V(x)\big)^2} = \frac{(-2x+3)(x^3-2) - (3x^2)(-x^2+3x-5)}{(x^3-2)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^4 - 6x^3 + 15x^2 + 4x - 6}{(x^3-2)^2}$$

3) Ecrivons une équation de la tangent (T) à la courbe (C) de f aux points x_0 :

$f(x) = Cos^2\left(\dfrac{x\pi}{6}\right)$; on donne $x_0 = 2$

L'équation de la tangent (T) à la courbe (C) de f aux points $x_o = 2$ est :

$$\boldsymbol{y = f'(2)(x-2) + f(2)}$$

$U(x) = \text{Cos}\left(\frac{x\pi}{6}\right)$ =>	$U'(x) = -\frac{\pi}{6}\text{Sin}\left(\frac{x\pi}{6}\right)$
$f(x)= Cos^2\left(\frac{x\pi}{6}\right)$	
$n = 2$ =>	$U^{n-1}(x) = \text{Cos}\left(\frac{x\pi}{6}\right)$s

$=> f'(x) = n\big(U'(x)\big)\big(U^{n-1}(x)\big)$

$=> f'(x) = 2\left[\left(-\frac{\pi}{6}\,Sin\left(\frac{x\pi}{6}\right)\right)\left(Cos\left(\frac{x\pi}{6}\right)\right)\right]$ $=> f'(2) = -\frac{\pi\sqrt{3}}{12}$ et $f(2) = \frac{1}{4}$

D'où : $y = -\frac{\pi\sqrt{3}}{12}(x-2) + \frac{1}{4}$ $=> \boldsymbol{y = -\frac{\pi\sqrt{3}}{12}x + \frac{2\pi\sqrt{3}+3}{12}}$

4) Dressons le tableau de variation de la fonction $f(x) = \frac{x^2+2x+2}{x+1}$

$D_f = \mathbb{R} - \{-1\} =]-\infty\ ;\ -1[\ \cup\ ]-1\ ;\ +\infty[$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x+2}{x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x+2}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-} \frac{x^2+2x+2}{x+1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} \frac{x^2+2x+2}{x+1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}. \quad \left| \begin{array}{l} U(x) = x^2 + 2x + 2 \Rightarrow U'(x) = 2x + 2 \\ \\ V(x) = x + 1 \qquad \Rightarrow V'(x) = 1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\left(U'(x)\right)\left(V(x)\right) - \left(V'(x)\right)\left(U(x)\right)}{\left(V(x)\right)^2} = \frac{(2x+2)(x+1) - (1)(x^2 + 2x + 2)}{(x+1)^2}$$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$ or $\forall\ x \in Df, (x + 1)^2 > 0$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend donc du signe du numérateur $x^2 + 2x$.

Posons $x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad ou \quad x = -2$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

$f(-2) = -2$ et $f(0) = 2$

V- Etude de fonctions :

1) Parité et périodicité d'une fonction :

a) Fonction paire :

Une fonction f est dite paire si et seulement si :

$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Df}$ ***et*** $-\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Df}\,; \boldsymbol{f}(-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

b) Fonction impaire :

Une fonction f est dite impaire si et seulement si :

$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Df}$ ***et*** $-\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Df}\,; \boldsymbol{f}(-\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

c) Fonction Périodique :

Une fonction f est dite périodique de période T s'il existe un nombre réel T tel que
$\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Df}$ ***et*** $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{T} \in \boldsymbol{Df}\;\; ; \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{T}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

Remarque :

- La fonction Cos$x$ est paire car $Cos\,(-x) = Cos\,x$
- La fonction Sin$x$ est impaire car $Sin\,(-x) = -Sin\,x$
- Les fonctions Cos $(ax + b)$ et Sin $(ax + b)$ sont périodique et de période T = $\frac{2\Pi}{|a|}$

Exemple

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1+\cos 3x}{\cos^3 x}$ et (C) sa courbe.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2) Etudier la périodicité la parité de f puis en déduire que D_f peux se réduire à $[\,0\,;\,\pi\,]$
3) Montrer que $\forall x \in Df$ on a : $f\,'(x) = \dfrac{3(1-2\cos x)\sin x}{\cos^4 x}$
4) Dresser le tableau de variation de f sur $[\,0\,;\,\pi\,]$.

Solution

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1+Cos3x}{Cos^3 x}$ et (C) sa courbe

1) Déterminons l'ensemble de définition Df

Df = $\{x\,/\,x \in \mathbb{R}\,;\,Cos^3 x \neq 0\}$
$Cos^3 x \neq 0 \Leftrightarrow Cosx \neq 0 \Leftrightarrow Cosx \neq Cos\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$=> D_f = \left]-\infty\ ; -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}\ ; +\infty\right[$

2) Etude de la parité et de la périodicité de f

- Partie : $f(-x) = \dfrac{1+Cos(-3x)}{Cos^3(-x)} = \dfrac{1+Cos3x}{Cox^3x} = f(x)$

Alors f est paire et admet donc l'axe $y'oy$ comme axe de symétrie.

- Périodicité : $T_1 = \dfrac{2\prod}{3}$ et $T_2 = \dfrac{2\prod}{1} = 2\prod \Rightarrow T = T_1 \cap T_2 = 2\prod$

Alors l'étude peut donc se fait sur le domaine $\left[-\frac{T}{2}\ ;\ \frac{T}{2}\right]$

$\Leftrightarrow$ Df = $\left[-\frac{2\pi}{2}\ ;\ \frac{2\pi}{2}\right]$ = > D_f = $[-\pi\ ;\ \pi\ ]$

Et puisque la fonction f est paire alors nous pouvons résumer le domaine d'étude à $[\ 0\ ;\ \pi\ ]$.
D'où Df = $[\ 0\ ;\ \pi\ ]$

3) Montrons que $\forall x \in$ Df, on a : $f\,'(x) = \dfrac{3(1-2Cosx)Sinx}{Cos^4x}$

$f(x) = \dfrac{1+Cos3x}{Cos^3x} \left\| \begin{array}{l} u = 1+Cos3x => u' = -3Sin3x \\ v = Cos^3x => v' = -3SinxCos^2x \end{array} \right.$

$f\,'(x) = \dfrac{-3Cos^3x \bullet Sin3x + 3Sinx\,Cos^2x(1+Cos3x)}{Cos^6x}$

$=> f\,'(x) = \dfrac{3Cos^2x(-Cosx\ Sin3x + Sinx + Sinx\,Cos3x}{Cos^6x}$

$=> f\,'(x) = \dfrac{3(Sinx \bullet Cos3x - Sin3x\ Cosx + Sinx)}{Cos^4x}$

$=> f\,'(x) = \dfrac{3(Sin(x-3x)+Sinx)}{Cos^4x} = \dfrac{3(-2Cosx+1)Sinx}{Cos^4x}$

$=> f\,'(x) = \dfrac{3(-2Cosx\ Sinx + Sinx)}{Cos^4x} = \dfrac{3(-2Cox+1)Sinx}{Cos^4x}$

$=> f\,'(x) = \dfrac{3(1-2Cosx)\sin x}{Cos^4x}$

4) Etude du signe de $(1-2\cos x)$ sur D_E puis de variations de f.

1 – 2Cos$x$ = 0 => Cos$x$ = $\dfrac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ Cos$x$ = Cos$\frac{\pi}{3}$ = > $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

D'autre par $\forall\ x\ [\ 0\ ;\ \pi\ ]$; Sin$x$ > 0 et Cos^4x > 0
Donc le signe dépend de 1 – 2 Cos$x$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	0

$f(-2) = -2$ et $f(0) = 2$

2) <u>Courbes symétriques</u> :

a) <u>Axe de symétrie</u> :

La droite **d'équation $x = a$ est dite axe de symétrie** pour la courbe (Cf) de f si :

- $f(2a - x) = f(x)$
  ou
- $f(a + x)$ est paire
  ou
- $f(a + x) = f(a - x)$

b) <u>Centre de symétrie</u> :

Le **point $\mathbf{I}\binom{a}{b}$ est dit centre de symétrie** pour la courbe (Cf) de f si

- $f(2a - x) + f(x) = 2b$

ou

- $f(a + x) - b$ est paire

ou

- $f(a + x) + f(a - x) = 2b$

<u>N.B</u> :

- **Toute fonction paire admet l'axe ($y'\,o\,y$) comme axe de symétrie.**
- **Toute fonction impaire admet le point O $\binom{0}{0}$ (origine du repère) comme centre de symétrie.**

c) Recherche de centre de symétrie et d'axe de symétrie :

- **Centre de symétrie :**

Soit f une fonction rationnelle définie par : $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{\gamma x + \beta}$ et (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\imath}$) où : a ; b ; c ; γ ; β sont tous des réels avec : $a \neq 0$ et $\gamma x + \beta \neq 0$.

Si f peux ce mettre sous la forme : $f(x) = a'x + b' + \frac{c'}{\gamma x + \beta}$

Alors le centre de symétrie à la courbe (C) de f à pour coordonnée :

$$\mathrm{I}\begin{pmatrix} x_0 = \frac{-\beta}{\gamma} \\ y_0 = a'x_0 + b' \end{pmatrix}$$

- **Axe de symétrie :**

Soit f une fonction polynôme du second degré définie par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec ($a \neq 0$)

Si f peux ce mettre sous la forme : $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$

Alors l'axe de symétrie à la courbe (C) de f à pour équation $\boldsymbol{x = -\frac{b}{2a}}$.

Exemple

1) Pour chacune des fonctions données, vérifiez si la droite d'équation x = a est un axe de symétrie pour la courbe (C) de f.

   a) $f(x) = x^2 + 2x + 3$ et $a = -1$

   b) f(x) = $3x^2 - 2x + 3$ et a = $\frac{1}{2}$

2) Pour chacune des fonctions données, vérifiez si le point I $\binom{a}{b}$ est un centre de symétrie pour la courbe (C) de f.

   a) $f(x) = \frac{3x^3 - x^2 + 4}{3x^2 - 12}$ et $I\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$

   b) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ et $I\binom{-1}{0}$

Solution

1) Pour chacune des fonctions données, vérifions si la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie pour la courbe (C) de f.

a) $f(x) = x^2 + 2x + 3$ et $a = -1$

$\boldsymbol{a = -1}$ *est un axe de symétrie si* $\boldsymbol{f(2a - x) = f(x)}$

$f(2(-1) - x) = f(-2 - x) = (-2 - x)^2 + 2(-2 - x) + 3$

$= (2 + x)^2 + 2(-2 - x) + 3$

$= 4 + 4x + x^2 - 4 - 2x + 3$

$= x^2 - 2x + 3 = f(x)$

Puisque $f(-2 - x) = f(x)$ alors $\boldsymbol{a = -1}$ est un axe de symétrie pour la courbe (C) de f.

$f(x) = 3x^2 - 2x + 3$ et $a = \frac{1}{2}$

$\boldsymbol{a = \frac{1}{2}}$ est un axe de symétrie si $\boldsymbol{f(2a - x) = f(x)}$

$f(2(\frac{1}{2}) - x) = f(1 - x) = 3(1 - x)^2 - 2(1 - x) + 3$

$= 3 - 6x + 3x^2 - 2 + 2x + 3$

$= 3x^2 - 4x + 4 \neq f(x)$

Puisque $f(1 - x) \neq f(x)$ alors $\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}$ n'est pas un axe de symétrie pour la courbe (C) de f.

2) Pour chacune des fonctions données, vérifions si le point I $\binom{a}{b}$ est un centre de symétrie pour la courbe (C) de f.

a) $f(x) = \frac{3x^3 - x^2 + 4}{3x^2 - 12}$ et I $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$

Le point I $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$ est dit centre de symétrie si $f(2(0) - x) + f(x) = 2\left(\frac{-1}{3}\right)$

$\Leftrightarrow f(-x) + f(x) = \left(\frac{-2}{3}\right)$

$f(-x) = \frac{3(-x)^3 - (-x)^2 + 4}{3(-x)^2 - 12} = \frac{-3x^3 - x^2 + 4}{3x^2 - 12}$

$\Rightarrow f(-x) + f(x) = \frac{-3x^3 - x^2 + 4}{3x^2 - 12} + \frac{3x^3 - x^2 + 4}{3x^2 - 12} = \frac{-2x^2 + 8}{3x^2 - 12} \neq -\frac{2}{3}$

Puisque $f(-x) + f(x) \neq -\frac{2}{3}$ alors $\mathbf{I}\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{\frac{-1}{3}} \end{pmatrix}$ n'est pas un centre de symétrie pour la courbe (C) de f.

b) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1}$ et $\mathrm{I}\binom{-1}{0}$

Le point $I\binom{-1}{0}$ est dit centre de symétrie si $f(2(-1) - x) + f(x) = 2(0)$

$<=> f(-2 - x) + f(x) = 0$

$f(-x-2) = \frac{(-2-x)^2 + 2(-2-x) + 2}{(-2-x)+1}$

$= \frac{4 + 4x + x^2 - 4 - 2x + 2}{-2-x+1} = \frac{x^2 + 2x}{-x-1}$

$=> f(-x-2) + f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{-x-1} + \frac{x^2 + 2x - 2}{x+1} = \frac{-x^2 - 2x - 2}{x+1} + \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1} = 0$

Puisque $f(-x-2) + f(x) = 0$ alors $\mathrm{I}\binom{-1}{0}$ est un centre de symétrie pour la courbe (C)

3) Maximum - Minimum - Extremum - Point d'inflexion

a) Minimum :

Soit f une fonction définie en un point x_0. S'il existe un intervalle I centré en x_0 tel que $\forall x \in$ I on a : $f(x) \geq f(x_0)$ alors f présente un minimu
m en x_0. Ce minimum est $m = f(x_0)$.

b) Maximum :

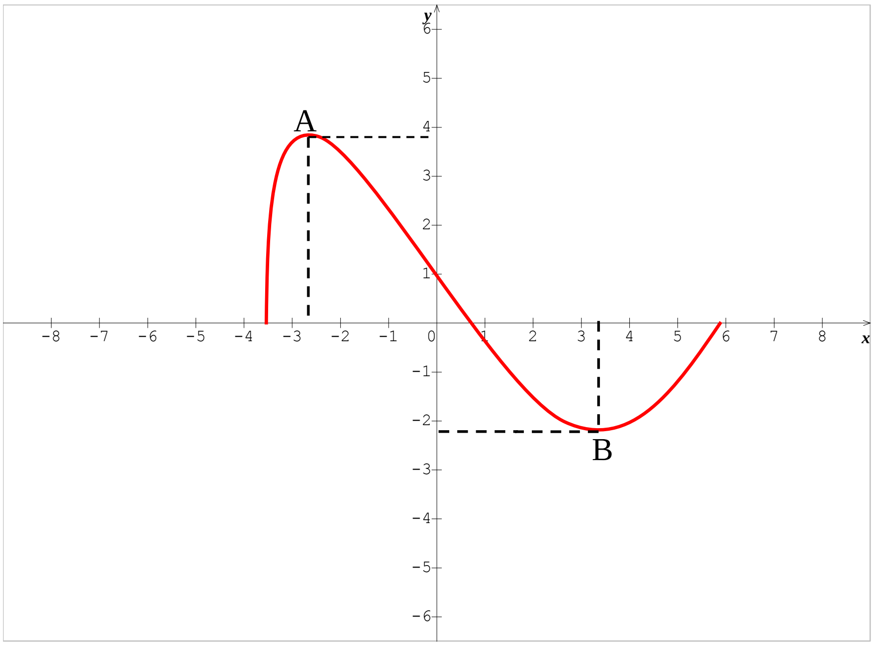
f admet un maximum relatif au point x_0, s'il existe un intervalle I centré en x_0 tel que $\forall x \in$ I on a : $f(x) \leq f(x_0)$. Le maximum est $M = f(x_0)$.

Théorème :
Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I et si $f'(x)$ s'annule en x_0 et change ce signe en passant par x_0, on dit alors que f présente un extremum en x_0. Cet extremum est égal à $f(x_0)$. Il est le minimum si f' passe du signe négatif au signe positif. Il est le maximum si f' passe du signe positif au signe négatif.

NB :
Si f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert] a ; b[, tel que la dérivée s'annule en changeant de signe au point x_0, alors la fonction f admet un extremum relatif en x_0.

c) Extremum :

Le système (Maximum-Minimum) est appelé Extremum.



- A représente le maximum relatif,
- B représente le minimum relatif,

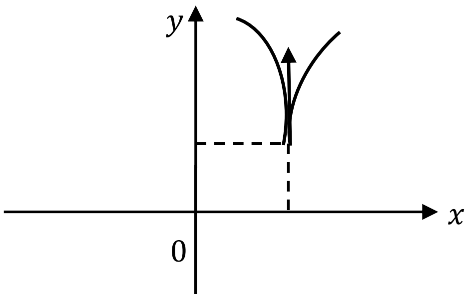
d) Point d'inflexion :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle] a ; b[. On appelle point **d'inflexion**, tout point où la **dérivée seconde f ''(x) s'annule en changeant de signe.**

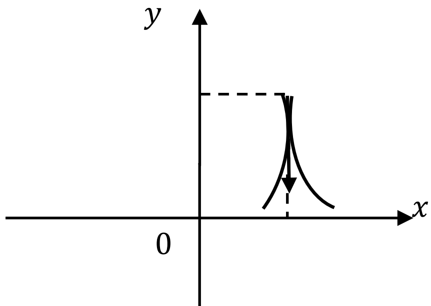
e) Point de reboursement :

$$Si \lim_{x \to x_o^+} f'(x) = \pm\infty \quad ou \quad \lim_{x \to x_o^-} f'(x) = \pm\infty$$

Alors on dit que f admet un point de reboursement x_0 à tangente parallèle à l'axe des abscisses ou des ordonnées :



a) $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$



b) $\lim_{x \to -\infty} f'(x) = -\infty$

4) Fonction réciproque

Bijection :

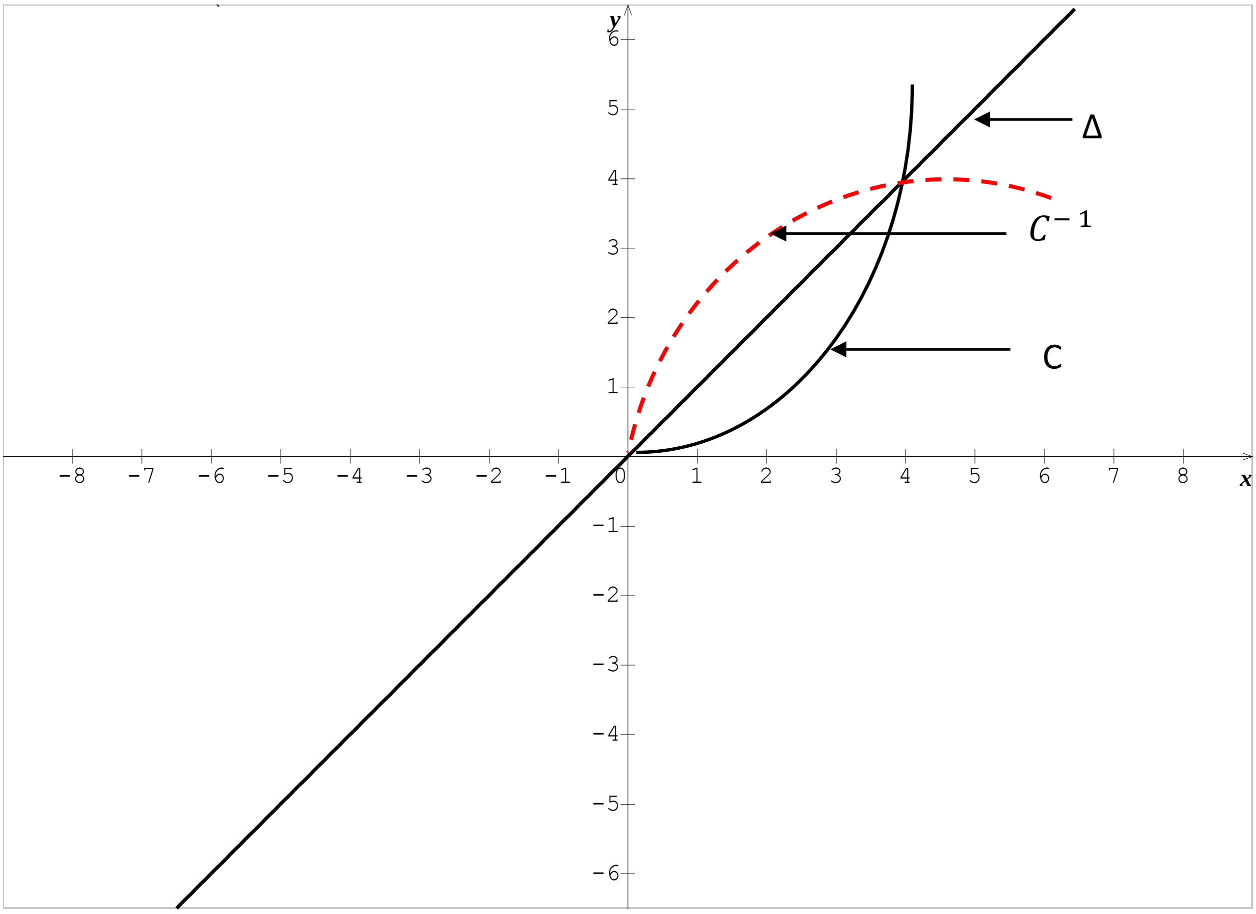
Une fonction f de E vers F est dite bijective si tout élément de l'ensemble d'arrivé F admet un et un seul antécédent dans l'ensemble de départ E.

- **En Pratique :**

Une application f est bijective si et seulement si $\forall\, y \in F \ \exists!\, x \in E$ on a **:** $\boldsymbol{f(x) = y}$

- **Graphiquement**

Les courbes représentatives d'une fonction et celle de sa fonction réciproque sont symétriques par rapport à la première bissectrice**(** Δ **)** d'équation $y = x$.



<u>**Théorème**</u> **:**

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f est une bijection de **I sur $f(I)$. et admet une bijection $réciproque$ f^{-1} de f (I) sur I ayant même sens de variation que f**

Les courbes C_f et C_f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice Δ : $y = x$

Si M $(x\,;\, y) \in C_f$ alors N $(y\,;\, x) \in C_f^{-1}$

Si $x = a$ est asymptote à C_f alors y = a devient asymptote pour C_f^{-1}

5) Théorème de valeurs intermédiaires :

L'image d'un intervalle par une fonction continue :

Théorème 1 :

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Soit f une fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit D_f son ensemble de définition. Soit I = $[\, a \;;\; b \,]$ ou I = $]\, a \;;\; b \,[$ un intervalle de D_f . Si f est continue sur I alors $f(I)$ est aussi un intervalle

Théorème 2:

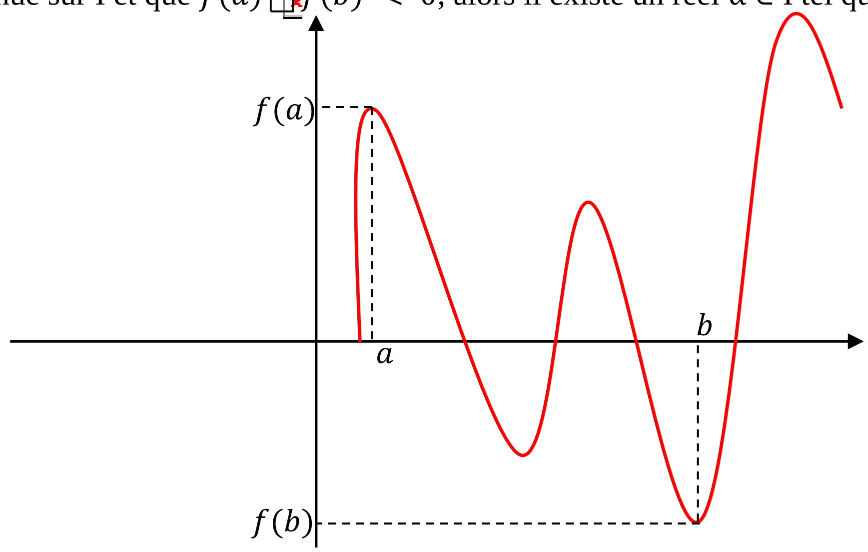
L'image d'un intervalle fermé par une fonction continue est un intervalle fermé.

1ère forme :

Soit f une fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit D_f son ensemble de définition. Soit I = $[\, a \;;\; b \,]$ ou I = $]\, a \;;\; b \,[$ un intervalle de D_f . Si f est continue sur I alors $f\ (I)$ est aussi un intervalle.

2ème forme :

Si f est continue sur I et que $f(a) \times f(b) < 0$, alors il existe un réel α ∈ I tel que **f(α) = 0**



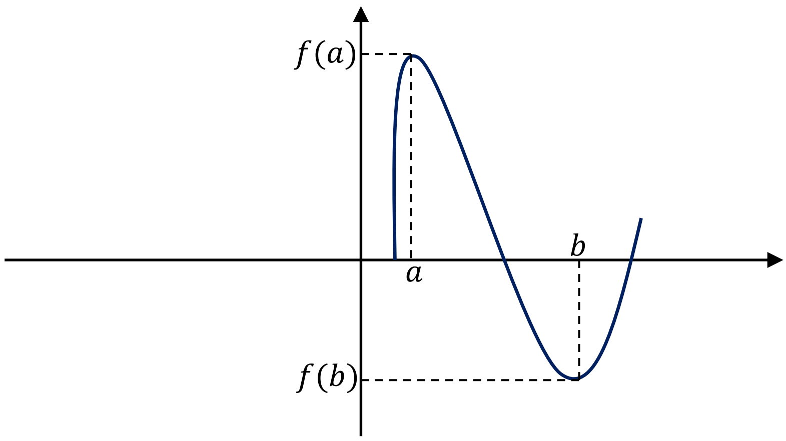
6) Théorème relatif aux fonctions continues et strictement monotones

1ère forme :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[\ a\ ;\ b\ ]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors il existe un unique point x_0 élément de $]a;b[$ tel que $f(x_0) = 0$

2ème forme :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle$[\ a\ ;\ b\ ]$ et si $f\ (a) \times f\ (b) \leq 0$ alors l'équation $f\ (x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [\ a\ ;\ b\ ]$

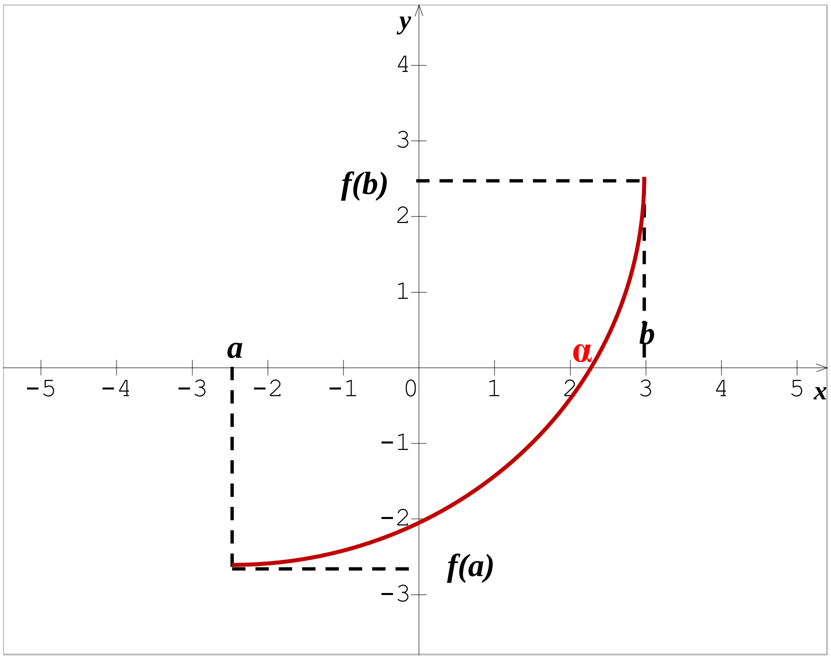


7) Approximation d'une solution α de l'équation $g(x) = 0$:

a- Méthode de dichotomie :

Soit g une fonction définie sur un intervalle $[\ a\ ;\ \ b\ ]$ tel que $g(a)\ g(b) < 0$.
Posons $a_0 = b\ \ et\ \ b_0 = b$.

- **Si g est strictement croissante sur $[a\ ;\ \ b]$**

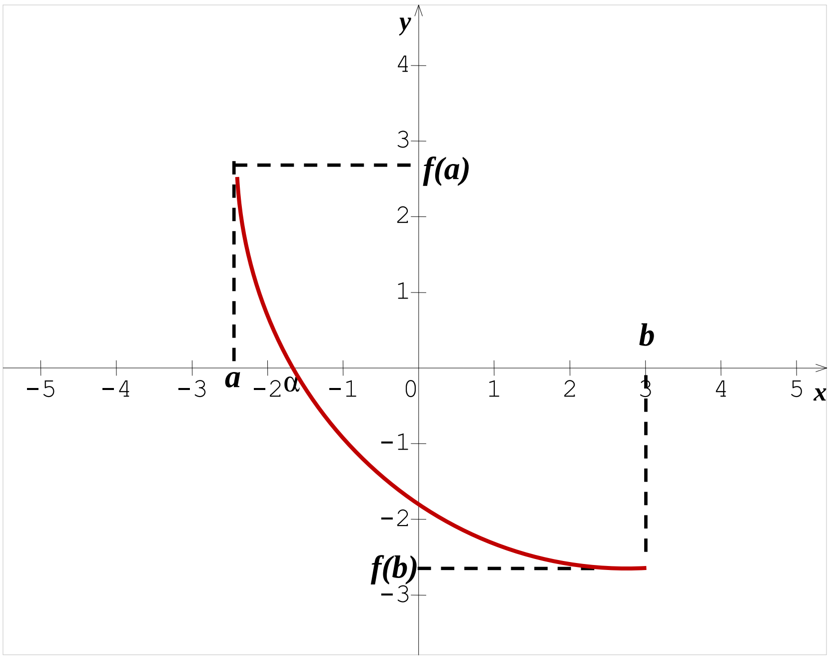


Ainsi on a deux suites numériques de termes généraux a_n et b_n tel que $\alpha \in [\ a_n\ ;\ \ b_n\ ]$.
On calcule $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$.

- Si $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$ alors $\alpha \in \left[\frac{a_n + b_n}{2}\ ;\ b_n\right]$.

- Si $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) > 0$ alors $\alpha \in \left[\ a_n\ ;\ \frac{a_n + b_n}{2}\right]$.

- **Si g est strictement décroissante sur $[a\ ;\ \ b]$**



Ainsi on a deux suites numériques de termes généraux a_n et b_n tel que $\alpha \in [\, a_n \,;\, b_n \,]$.

On calcule $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$.

- Si $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$alors $\alpha \in \left[\, a_n \,;\, \frac{a_n + b_n}{2}\right]$.
-
- Si $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) > 0$alors $\alpha \in \left[\frac{a_n + b_n}{2} \,;\, b_n\right]$.

b- <u>Méthode des balayages</u> :

C'est une méthode qui consiste à déterminée une approximation de α à partir d'un tableau de valeur où la valeur de α est obtenue en encadrant la valeur de x à partir du changement de signe obtenue entre l'antécédent positif et négatif.

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	………	x_n
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$f(x_5)$	$f(x_6)$	$f(x_7)$	………	$f(x_n)$

Si par exemple $f(x_5)\times f(x_5) < 0$ alors $\alpha \in [\, x_5 \,;\, x_6 \,]$ et par conséquent $\alpha = \dfrac{x_5 + x_6}{2}$

<u>Exemple</u>

A) Soit $f(x) = x^3 + 3x - 7$.

1- Calculer $f\,'(x)$.

2- Etudier le sens de variation de f.

3- Dresser le tableau de variation de f.

4- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $\alpha \in \;]1\,;2[$.

5- Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

B) Soit $f(x) = \sqrt{x+2}$.

1- Déterminer l'ensemble de définition Df de f.

2- Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $[-2\ ;\ +\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

C) Soit $f(x) = Cosx$ une fonction définie sur $\left[\ 0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$

2- Etudier les variations de f sur l'intervalle $\left[\ 0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$

3- Trouver une valeur approchée à 10^{-2} près de la solution α de l'équation $f(x) = x$

Solution

A) Soit $f(x) = x^3 + 3x - 7$.

1- *Calculons* $f'(x)$.

Df = ℝ

$$f(x) = x^3 + 3x - 7 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 3$$

2- Etudions le sens de variation de f.

$\forall\ x \in Df,\ f'(x) > 0$. D'où $\forall\ x \in Df,$ f est strictement croissante.

3- Dressons le tableau de variation de f.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 + 3x - 7 = \lim_{x \to -\infty} x^3 = (-\infty)^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 + 3x - 7 = \lim_{x \to +\infty} x^3 = (+\infty)^3 = +\infty$$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

4- Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $\alpha \in]1\,;\,2[$
D'après le tableau de variation, f est définie, continue et strictement croissante de $]-\infty\,;\,+\infty[$ vers $]-\infty\,;\,+\infty[$ alors l' équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α tel que $f(\alpha) = 0$.

De plus : $\begin{cases} f(1) = -4 \\ f(2) = 7 \end{cases}$ $=> f(1)\bullet f(2) < 0$

1- Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires $\alpha \in]1\,;\,2[$

2- Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
Pour cela utilisons la méthode des balayages

x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
$f(x)$	-2,36	-1,67	-0,90	-0,05	0,87	?	?	?	?

Ainsi d'après le tableau, l'image par f des différentes valeurs de x commences à changé de signe à partir des valeurs de x comprises entre 1,4 et 1,5.

Alors : $\boldsymbol{\alpha = \frac{1,4 + 1,5}{2} = 1,45}$

B) $Soit\ f(x) = \sqrt{x+2}$.

4- Déterminons l'ensemble de définition Df de f.

$D_f = \{x/x \in IR\,;\, x + 2 \geq 0\}$

$x + 2 \geq 0$. Posons $x + 2 = 0 => x = -2$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	

$=> D_f = [-2\,;\,+\infty[$

5- Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $[-2\,;\,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
Pour cela, dressons le tableau de variation de f :

$f(-2) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

$f(x) = \sqrt{x+2} => f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} => f'(x) > 0$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	-2	$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$
$f(x)$	|| 0	$\nearrow$ $+\infty$

D'après le tableau de variation , f est définie, continue et strictement croissante de $]-2\ ;+\infty[$ vers $]\,0\ ;+\infty[$ alors f réalise une bijection de $]-2\ ;+\infty[$ vers l'intervalle $J =]\,0\ ;+\infty[$

8) <u>Théorème de l'inégalité des accroissements finis</u>

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Soit a *et* b deux réels appartenant à I tel que (a < b).

-Si m et M sont deux réels tel que $m \leq f'(x) \leq$ M, alors on a :
(b – a) $\boldsymbol{m \leq f(b) - f(a) \leq}$ **(b – a) M.**

-Si f est dérivable sur I, alors il existe un réel k appartenant à I tel que $|f'(x)| \leq k$.

Ainsi par conséquent $\forall\, a \in$ I et $b \in$ I, on a : $|f(x) - f(a)| \leq$ k $|x - a|$.
(qui est le théorème de l'inégalité des accroissements fins).

<u>Exemple</u>

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 5}{x-3}$

1) Montrer que $\forall$x $\in [4\ ;5]$, on a $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$
2) En déduire que $\forall$x $\in [4\ ;5]$, on a : $\left|f(x) - \frac{15}{2}\right| \leq \frac{3}{4}|x-5|$

<u>Solution</u>

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 - x - 5}{x - 3}$

1) Montrons que $\forall\ x \in [4\ ;5]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 5}{x - 3}. \quad \left| \begin{array}{l} U(x) = x^2 - x - 5 \Rightarrow U'(x) = 2x - 1 \\ V(x) = x - 3 \qquad \Rightarrow V'(x) = 1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(U'(x))(V(x)) - (V'(x))(U(x))}{(V(x))^2} = \frac{(2x-1)(x-3) - (1)(x^2 - x - 5)}{(x-3)^2} =$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x-3)^2}$$

Or $x \in [4\ ;\ 5] \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 5$

En appliquant la fonction dérivée f' à l'inégalité, on a :

Or $f'(4) = 0$ et $f'(5) = \frac{3}{4}$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}$$

En appliquant la valeur absolue à l'inégalité, on a :

$$\Rightarrow |0| \leq |f'(x)| \leq \left|\frac{3}{4}\right|$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq |f'(x)| \leq \frac{3}{4}$$

D'où $\forall\ x \in [4\ ;5\ ]$, $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$

2) En déduisons que $\forall\ x \in [\ 4\ ;\ 5\ ]$, on a : $\left|f(x) - \frac{15}{2}\right| \leq \frac{3}{4}|x - 5|$

D'après la question 1) , on a :

$\forall x \in [4\ ;5\ ]$, $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$

Or si $|f'(x)| \leq k$, on a : d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis

$|f(x) - f(a)| \leq k\ |x - a|$

Ainsi puisque $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$, alors d'après le théorème de l'inégalité des accroissements

Finis on a : $|f(x) - f(5)\ | \leq \frac{3}{4}|x-5|$. Avec $k = \frac{3}{4}$ et a = 5

Or $f(5) = \frac{15}{2}$

$\Rightarrow \left|f(x) - \frac{15}{2}\right| \leq \frac{3}{4}|x-5|$

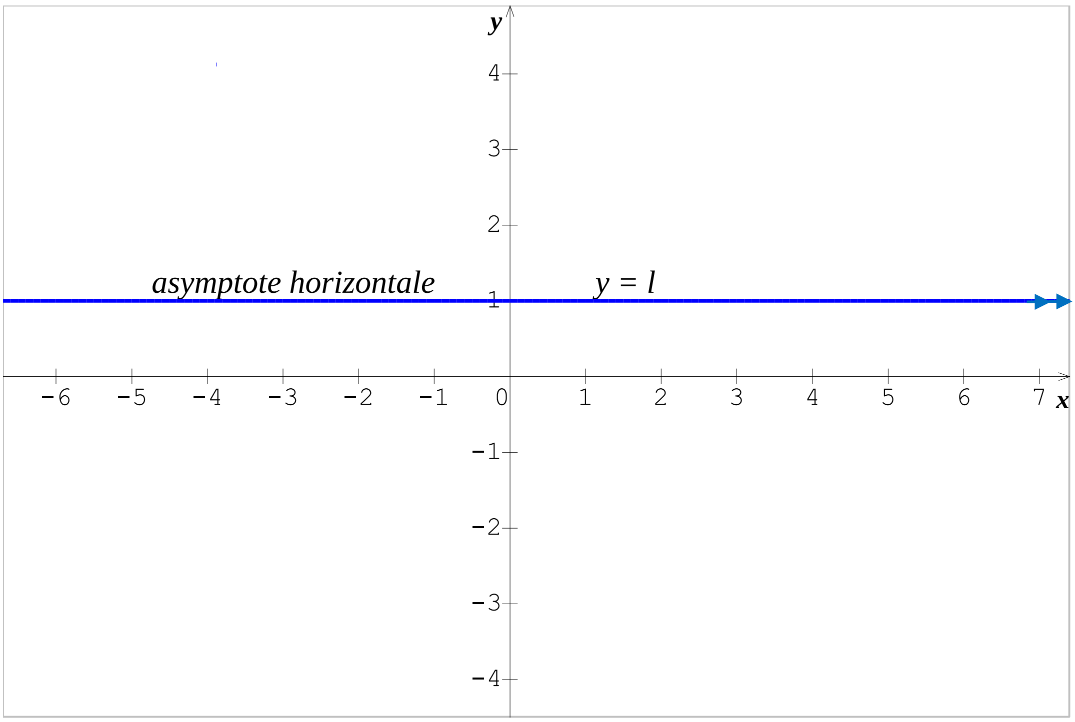
D'où $\forall\ x \in [\,4\ ;\ 5\,]$, on a : $\left|f(x) - \frac{15}{2}\right| \leq \frac{3}{4}|x-5|$

9) <u>Etude des branches infinies</u> :

<u>Notion d'asymptotes</u> :

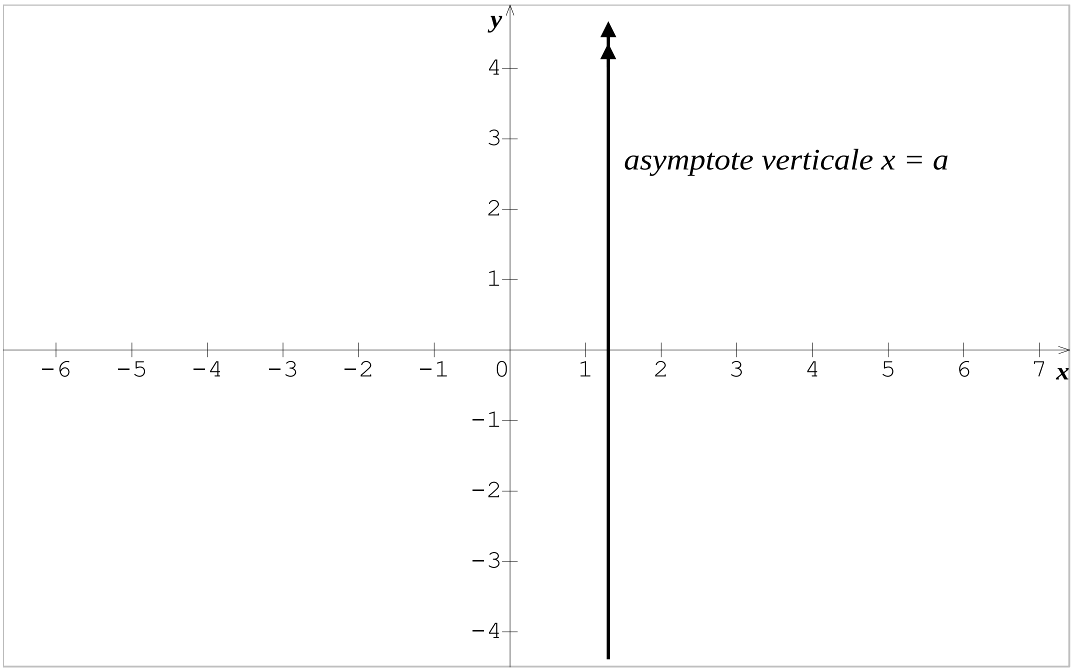
- Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ (**alors la droite d'équation y =** $\boldsymbol{l}$)

est asymptote **horizontale** à la combe représentative de f.



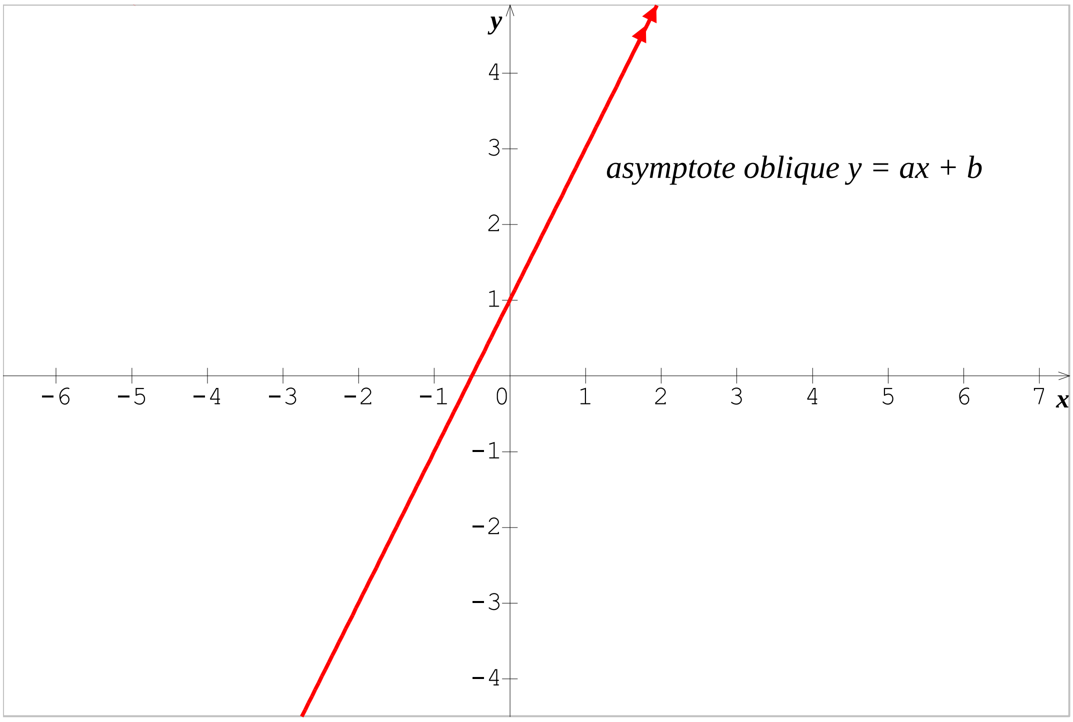
- $Si\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty\ \ ou\ \ \lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$(**alors la droite d'équation** $\boldsymbol{x}$ **= a**)

est asymptote **verticale** à la combe représentative de f.



- $Si \lim_{x \to +\infty} [\, f(x) - (ax+b)\,] = 0$ ou $\lim_{x \to -\infty} [\, f(x) - (ax+b)\,] = 0$

(**Alors la droite d'équation $\boldsymbol{y = a\,x + b}$** est asymptote **oblique** à la combe représentatives de f).

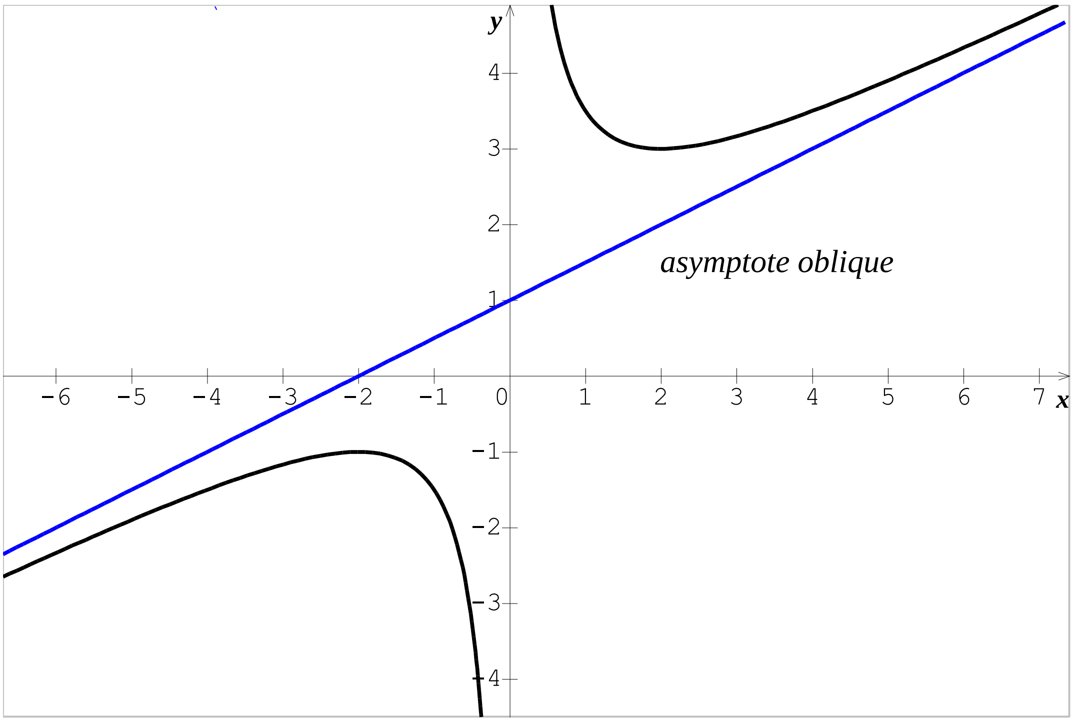


Recherche d'asymptote oblique :

Il est évident de dire que si : $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, alors on a une possibilité d'asymptote oblique.

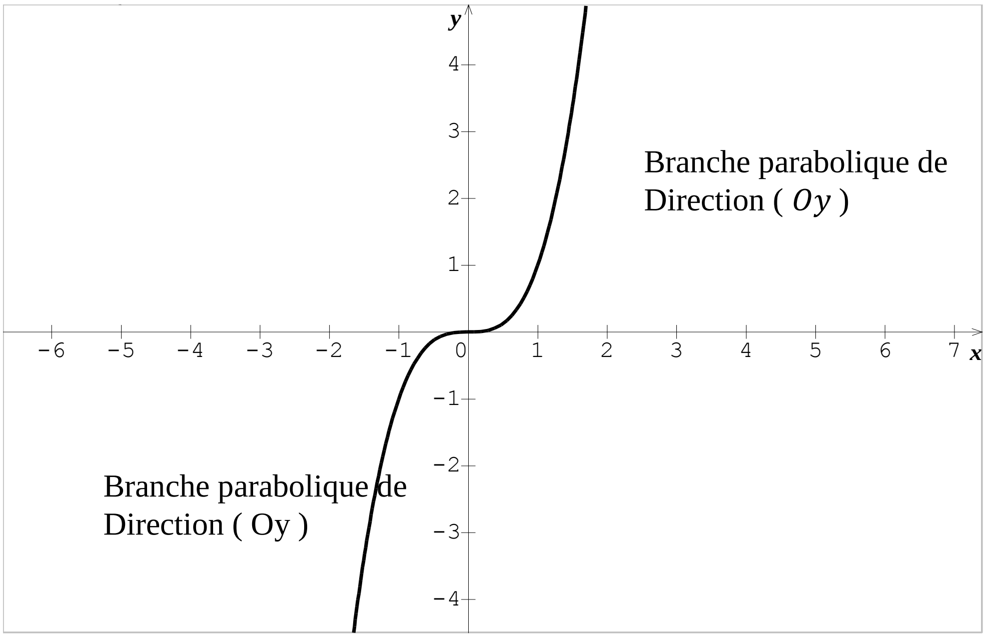
Ainsi pour chercher l'asymptote oblique, on procède comme suite :

- Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = b$ | alors la droite d'équation $y = ax + b$ est Asymptote oblique à la courbe (C) de f.

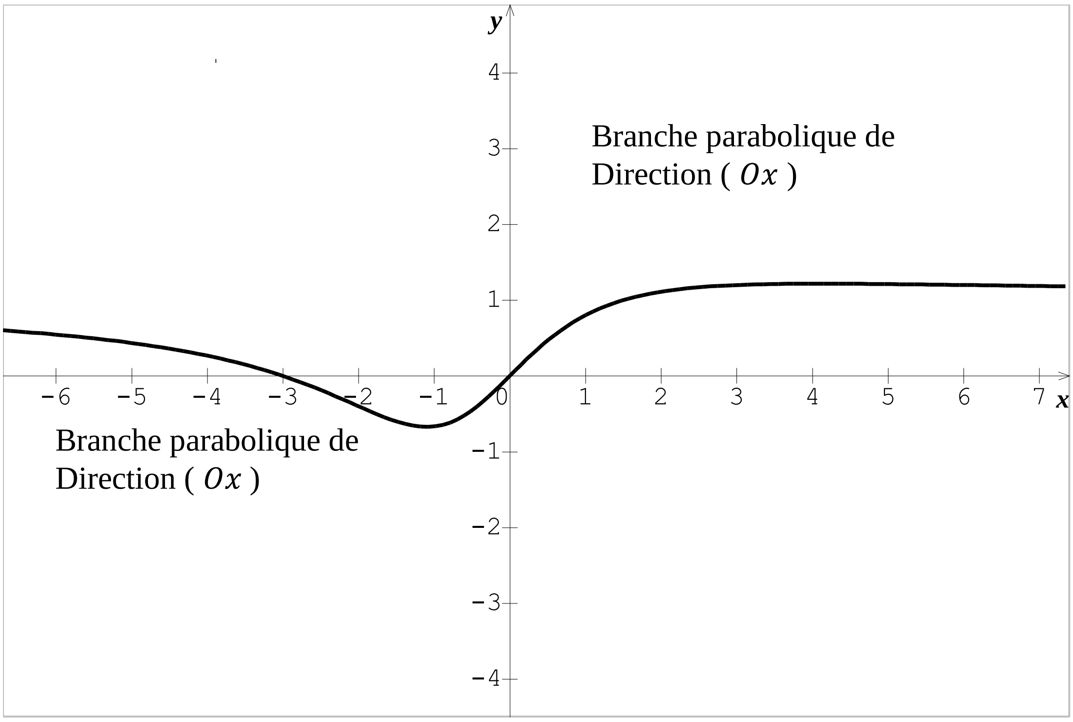


- $Si \quad \lim \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ | alors la courbe (C) de f admet l'axe $(y'oy)$

x → ± ∞ comme branche parabolique.



Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors la courbe (C) de f admet l'axe ($x'ox$) comme branche parabolique.



<u>N.B</u> :

Si f est une fonction rationnelle dont le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur d'une seule unité, alors on peut écrire $f(x)$ sous la forme :

$\boldsymbol{f(x) = Q(x) + \frac{R}{D(x)}}$ **(en effectuant une division euclidienne) .**
$\boldsymbol{Q(x) = y}$ **est le quotient et est aussi appelé Asymptote oblique.**
$\boldsymbol{D(x)}$ **= est le diviseur**
R = est le reste.

Cas Particulier d'asymptote

Toutes fonctions de la forme :
$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c} \ \ ou \ \ f(x) = \sqrt{|ax^2 + bx + c|}}$ **; (avec** $\boldsymbol{a \neq 0 \ \ et \ \ a > 0}$)

Admet deux asymptotes :

- L'une en $\boldsymbol{-\infty}$ **d'équation :** $\boldsymbol{y = -\sqrt{a}\left(x + \frac{b}{a}\right)}$

- L'une en $\boldsymbol{+\infty}$ **d'équation :** $\boldsymbol{y = \sqrt{a}\left(x + \frac{b}{a}\right)}$

10) Position relative d'une courbe (Cf) et de son asymptote oblique.

Pour déterminer la position relative d'une courbe (Cf) et de son asymptote oblique (Δ), on étudie le signe de : $f(x) - y$. Ainsi :

- Si $f(x) - y < 0$, alors la courbe (Cf) est en dessous de la droite (Δ).

- Si $f(x) - y > 0$, alors la courbe (Cf) est au dessus de la droite (Δ).

- Si $f(x) - y = 0$, alors la courbe (Cf) et la droite (Δ) sont confondues.

Exemple

1- On donne $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$

a) Démontrer que la droite (Δ) : $y = x + 2$ est asymptote oblique à la courbe(Cf) de f en $+\infty$.

b) Etudier la position de la courbe (Cf) et (Δ).

2- On donne $f(x) = \frac{2x-4}{x-3}$

a) Déterminer l'ensemble de définition Df de f.

b) Calculer les limites de f aux bornes de Df.

c) En déduire l'équation des asymptotes à la courbe (Cf).

Solution

1- On donne $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$

a) Démontrons que la droite (Δ) : $y = x + 2$ est asymptote oblique à la courbe (Cf) de f en $+\infty$.

la droite (Δ) d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à la courbe (Cf) de f en $+\infty$ si :

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x + 2)] = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x + 2)] = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-3}{x-2} - (x + 2) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^2-3) - (x+2)(x-2)}{x-2}$$

$$=> \lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x + 2)] = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x - 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$Puisque \lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x + 2)] = 0$

Alors la droite (Δ) d'équation $y = x + 2$ e st asymptote oblique à la courbe (Cf) de f en $+\infty$

b) Etudions la position de la courbe (Cf) et de la droite (Δ).

Pour cela étudions le signe de $f(x) - y$.

Posons $f(x) - y = 0 <=> \frac{1}{x - 2} = 0 => x - 2 = 0 => x = 2$

D'où le tableau de signe est le suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x - 2$	$-$	0	$+$
$f(x) - y$	(Δ) / (C)		(C) / (Δ)

$Alors \; \forall x \in]-\infty \; ; \; 2 [\; ; \; f(x) - y < 0 =>$

$\forall x \in]-\infty \; ; \; 2 [$; la courbe (C) est en dessous de la droite (Δ) .

Et

$\forall\ x \in]2\ ;\ +\infty[\ ;\ f(x) - y > 0 \Rightarrow$

$\forall$ x $\in$] 2 ; $+\infty$ [; la courbe (C) est au dessus de la droite (Δ) .

2- On donne $f(x) = \dfrac{2x-4}{x-3}$

a) Déterminer l'ensemble de définition Df de f.

$D_f = \{x/x \in \mathbb{R}\ ; x - 3 \neq 0\} \Rightarrow D_f = D_f = \mathbb{R} - \{\mathbf{3}\} =]-\infty\ ;\ \mathbf{3}[\ \cup\ ]\mathbf{3}\ ;+\infty[$

b) Calculons les limites aux bornes de D_f

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	0	$+$	

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x-4}{x-3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x-4}{x-3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{2x-4}{x-3} = \lim \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{2x-4}{x-3} = \lim \frac{2}{0^+} = +\infty$$

c) En déduisons les asymptotes à la courbe (C) de f.

Puisque $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2 \\ et \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2 \end{cases}$ Alors la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à (Cf).

Puisque $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty \\ et \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty \end{cases}$ Alors la droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à (Cf).

Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x + 2)] = 0$ Alors la droite d'équation $y = 3$ est asymptote oblique à (Cf).

11) <u>Intersection de la courbe avec les axes du repère</u> :

a) <u>Intersection de la courbe avec l'axe des abscisses (ox)</u>

Pour trouver le ou les points d'intersection de la courbe (Cf) avec l'axe des abscisses, on résous l'équation $f(x) = 0$. Ainsi la courbe passe par les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur l'axe (ox).

b) <u>Intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées (oy)</u>

Pour trouver le ou les points d'intersection de la courbe (Cf) avec l'axe des ordonnées, on calcule l'ordonnée $y = f(o)$. Ainsi la courbe passe par $y = f(o)$ sur l'axe des (oy).

12) <u>Plan d'étude d'une fonction</u> :

Pour étudier une fonction f et représenter graphiquement sa courbe (Cf) dans le repère on adopte le plan suivant :

- On donne le domaine de définition ou ensemble de définition noté D_f
- On calcule les limites aux bornes de D_f
- On étudie la parité et la périodicité de f
- On étudie la continuité de f
- On étudie le sens de variation de f qui consiste à calculer la dérivée et à étudier Son signe
- On dresse le tableau de variation qui est le résumé de toutes les études précédentes
- On peut chercher les points d'intersections éventuels avec les axes de coordonnées

<u>Exemple</u>

Etudier et représenter la courbe (C) de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = \frac{x^2+2x\ +2}{x\ +1}$

2) Soit la fonction f définie par $f(x)\ = \frac{1+\ Cos3x}{Cos^3x}$ et (C) sa courbe.

a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

b) Etudier la parité et la périodicité de f . En déduire qu'il suffit d'étudier la fonction f sur un nouvel ensemble d'étude D_E

c) Montrer que $\forall x \in Df$ on a : $f\,'(x) = \frac{3(\,1-\ 2Cosx)Sinx}{Cos^4x}$

d) Etudier le signe de $(1-2cosx)$ sur D_E puis en déduire les variations de f sur D_E.

e) Tracer la courbe (C).

<u>Solution</u>

1) Etudions et représentons la courbe (C) de la fonction $f(\,x\,) = \frac{x^2+2x+2}{x\ +\ 1}$

$D_f\ = \mathbb{R} - \{-1\}\ =\ ]-\infty\ ;\ -1\,[\ \cup\ ]-1\ ;\ +\infty\,[$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x+2}{x\ +\ 1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x\ =\ -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x+2}{x\ +\ 1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x\ =\ +\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-} \frac{x^2+2x+2}{x\ +\ 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} \frac{x^2+2x+2}{x\ +\ 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$f(x) = \frac{x^2+2x+2}{x+\ 1}$.

$U(\,x\,)\ =\ x^2+\ 2x\ +2\ \ =>U'(\,x\,)\ =\ \ 2x\ +2$

$V(\,x\,)\ = x\ +1\ \ \ \ =>\ V'(\,x\,)\ =\ 1$

$$=> f'(x) = \frac{\left(U'(x)\right)\left(V(x)\right) - \left(V'(x)\right)\left(U(x)\right)}{\left(V(x)\right)^2} = \frac{(2x+2)(x+1) - (1)(x^2+2x+2)}{(x+1)^2}$$

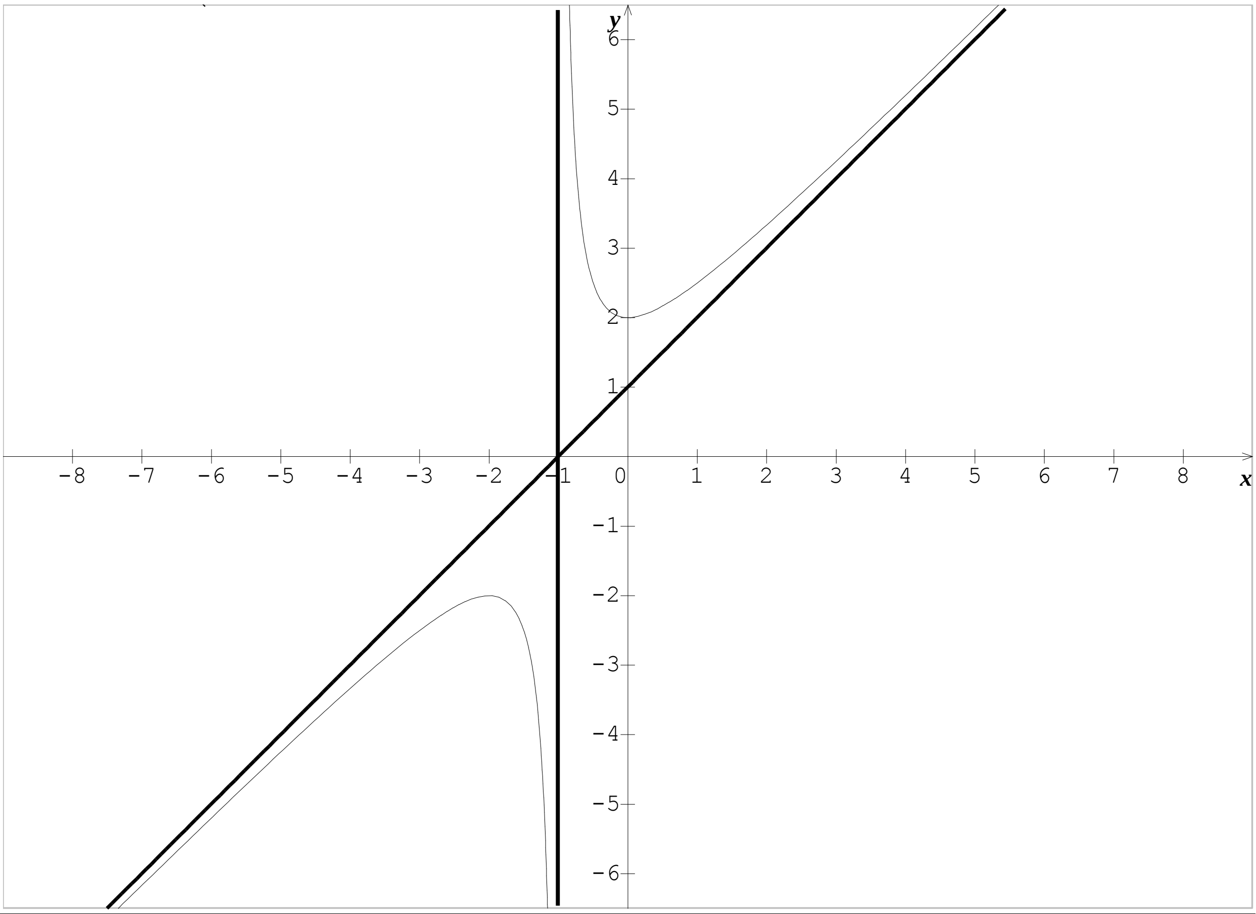
$=> f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$ or $\forall\ x \in Df, (x+1)^2 > 0$ alors le signe de $f'(x)$ dépend donc du signe du numérateur $x^2 + 2x.$

Posons $x^2 + 2x = 0 => x = 0 \quad ou \quad x = -2$
D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

$x = -1$ est asymptote verticale à (C).
$y = x + 1$ est asymptote oblique à (C) car $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x+1)] = 0$.

Ainsi on a la représentation suivante :



Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1+Cos3x}{Cos^3x}$ et (C) sa courbe

a) Déterminons l'ensemble de définition Df

Df = {x/x $\in R$; $Cos^3x \neq 0$ }
$Cos^3x \neq 0 \iff Cosx \neq 0 \iff Cosx \neq Cos\frac{\pi}{2} \iff x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\boldsymbol{\pi}$ ou
$x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\boldsymbol{\pi}$
$\Rightarrow \boldsymbol{D_f} = \left]-\infty ; -\frac{\pi}{2} + 2k\boldsymbol{\pi}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2} + 2k\boldsymbol{\pi} ; +\infty\right[$

b) Etude de la parité et de la périodicité de f

- Partie : $f(-x) = \dfrac{1+Cos(-3x)}{Cos^3(-x)} = \dfrac{1+Cos3x}{Cox^3x} = f(x)$

Alors f est paire et admet donc l'axe $y'oy$ comme axe de symétrie.

- Périodicité : $T_1 = \frac{2\pi}{3}$ et $T_2 = \frac{2\pi}{1}$ = > T = $T_1 \cap T_2$ = 2π

Alors l'étude peut donc se fait sur le domaine $\left[-\frac{T}{2}\ ;\ \frac{T}{2}\right]$

⇔ $D_E = \left[-\frac{2\pi}{2}\ ;\ \frac{2\pi}{2}\right]$ = > $D_E = [-\pi\ ;\ \pi\ ]$
Et puisque la fonction est paire alors nous pouvons résumer le domaine d'étude à $[\ 0\ ;\ \pi\ ]$
D'où $D_E = D \cap [\ 0\ ;\ \pi\ ]$

c) Montrons que $\forall x \in Df$, on a : $f\,'(x) = \dfrac{3(1-2Cosx)Sinx}{Cos^4x}$

$$f(x) = \frac{1+Cos3x}{Cos^3x} \left\| \begin{array}{l} u = 1+Cos3x \Rightarrow u' = -3Sin3x \\ v = Cos^3x \Rightarrow v' = -3SinxCos^2x \end{array} \right.$$

$$f\,'(x) = \frac{-3Cos^3x \bullet Sin3x + 3Sinx\,Cos^2x(1+Cos3x)}{Cos^6x}$$

$$\Rightarrow f\,'(x) = \frac{3Cos^2x(-Cosx\ Sin3x + Sinx + Sinx\,Cos3x}{Cos^6x}$$

$$\Rightarrow f\,'(x) = \frac{3(Sinx \bullet Cos3x - Sin3x\ Cosx + Sinx)}{Cos^4x}$$

$$\Rightarrow f\,'(x) = \frac{3(Sin(x-3x) + Sinx)}{Cos^4x} = \frac{3(-2Cosx+1)Sinx}{Cos^4x}$$

$$\Rightarrow f\,'(x) = \frac{3(-2Cosx\ Sinx + Sinx)}{Cos^4x} = \frac{3(-2Cox+1)Sinx}{Cos^4x}$$

$$\Rightarrow f\,'(x) = \frac{3(1-2Cosx)\sin x}{Cos^4x}$$

d) Etude du signe de $(1\ - 2cosx)$ sur D_E puis de variations de f.

$1 - 2\mathrm{Cos}x = 0 \Rightarrow \mathrm{Cos}x = \dfrac{1}{2}$ ⇔ $\mathrm{Cos}x = \mathrm{Cos}\frac{\pi}{3}$ = > $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

D'autre par $\forall\ x\ \in [\ 0\ ;\ \pi\ ]$ on a : $\mathrm{Sin}x > 0$ et $\mathrm{Cos}^4x > 0$
Donc le signe dépend de $1 - 2\ \mathrm{Cos}x$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	2	↘	0	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	0

Détermination des coordonnées des points d'intersections de la courbe (C) avec l'axe des abscisses puis construction de la courbe (C) de f.

.

- (C)$\cap$ (ox) $=>$ $f(x)$ $=$ 0 ⇔ 1 + Cos3x = 0 ⇔ = Cos 3x = - 1

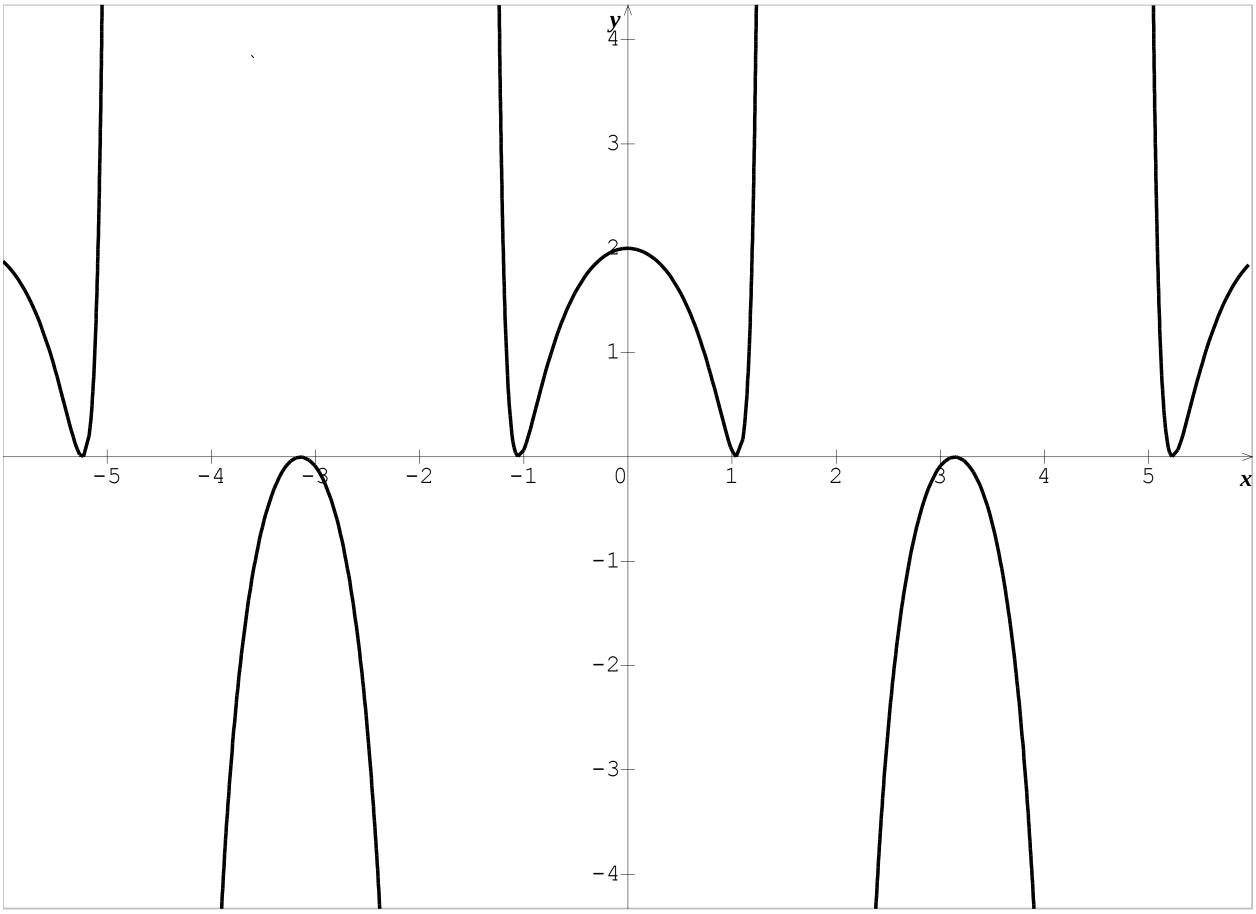
⇨ Cos 3x = Cos π ⇔ $3x = \pi$ ou $3x = -\pi$ =>

Donc (C) coupe l'axe (ox) en $-\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{\pi}{3}$

- (C) $\cap$ (oy) => = 0 ; et y $=$ 2

Donc (C) coupe l'axe oy en 2

Ainsi on a la représentation suivante :



EXERCICES

Limites

Limites en un point x_0

1 Calculer les limites suivantes aux points x_0 donnés :

a- $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x^3 - 8}{-x + 2}$; b- $\lim\limits_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$; c- $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{2x + 5}{x^2 - x - 2}$; d- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$

e- $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$; f- $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$; g- $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} + 1}{x + \sqrt{x}}$

2 Calculer les limites suivantes aux points x_0 donnés :

a- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{Sin2x}{3x}$; b- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{Cos2x}{1 - Sinx}$; c- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{Sin5x}{Sin3x}$; d- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{Sin3x}{1 - 2Cosx}$

e- $\lim\limits_{x \to \boldsymbol{\pi}} \frac{Sinx}{\pi - x}$; f- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{Sin4x}{tangx}$; g- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{Sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{3x - \pi}$; h- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tang4x - Sin2x}{5x}$

i- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1 + x^2)Sinx - x}{x^3}$; j- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{Sinx - xCosx}{x^3}$

3 On se propose d'étudier la limite en $\frac{\pi}{2}$ de la fonction f définie par :

$f(x) = \frac{Cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}}$ pour $x \neq \frac{\pi}{2}$.

1) Vérifier que l'on ait en présence d'une forme indéterminée.
En considérant l'accroissement moyenne de la fonction Cosinus en $\frac{\pi}{2}$, déterminer la limite ci-dessus.

2) Par une méthode analogue, étudier les limites des fonctions en x_0 dans les cas suivants :

a- $g(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ en $x_0 = 0$; **b-** $h(x) = \frac{\tan(x)-1}{x-\frac{\pi}{4}}$ en $x_0 = \frac{\pi}{4}$

Limites à l'infinie

4 Calculer les limites suivantes à l'infinie :

a- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-8}{x+1-x^2}$; b- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2\sqrt{x}-1}{x+2}$; c- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^2+2}{5x^2-x}$; d- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$

e- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4x+3}{\sqrt{4x^2+x-5}}$; f- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}$; g- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x-|x|}{2x-2}$

h- $\lim\limits_{x \to +\infty} 1-x+\sqrt{x^2+x+1}$; i- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2+Sinx}{x+1}$ (*théorème des gendarmes*)

Limites et asymptotes

5 Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de chacune des fonctions ci-dessous (on donnera ci-possible les éventuelles asymptotes ou possibilité d'asymptotes)

a- $f(x) = \frac{x^2+5}{-x+2}$;b-$f(x) = \frac{-x^2+5}{x^2+5x-6}$;c-$f(x) = \frac{2x^2+x+1}{-x}$;d-$f(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$

e- $f(x) = \sqrt{3x^2-2x-1}$; f-$f(x) = \frac{\sqrt{-x+2}}{-x^2+2x-1}$;g-$f(x) = \frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}$

6 Soit la fonction f dénie par : $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - x$.

On note (Cf) sa courbe dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

a- Etudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. La courbe (Cf) admet – elle une asymptote horizontale ?

b- Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = -2x - \frac{1}{2}$ est asymptote à (Cf) en $-\infty$.

7 Soit la fonction f dénie par : $g(x) = ax + b - \sqrt{x^2+1}$.

On note (Cg) sa courbe dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

a- Etudier la limite de$g$ en $-\infty$. ($Ondiscuterasuivantlesvaleursdea$).
b- Déterminer les réels a et b pour que la droite (D) d'équation $y = 2x + 2$ soit asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$.

Continuités

Continuité en un point x_0

8 Etudier la continuité des fonctions suivantes aux points x_0 donnés :

a- $\begin{cases} f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x^2+x-6} \\ f(2) = 0 \end{cases}$ et $x_0 = 2$; **b-** $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-1}{|x-1|} \\ f(1) = 2 \end{cases}$ et $x_0 = 1$

c- $\begin{cases} f(x) = x^2 - x + 1 \ si \ x \in [0\ ;\ 1] \\ f(x) = \dfrac{2x-1}{x} \quad si \ x \in]1\ ;\ 3] \end{cases}$ et $x_0 = 1$ **d-** $\begin{cases} f(x) = \dfrac{3-\sqrt{2x+5}}{x-2} \ si \ x \neq 2 \\ f(2) = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$

e- $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{2Cosx} - 1}{2Cos2x + 1} \quad si \ x \in \left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right] - \left\{\dfrac{\pi}{3}\right\} \\ f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{4} \quad \text{et} \quad x_0 = 1 \end{cases}$

f- $\begin{cases} f(x) = -x^2 - 2x + 5 \ si \ x \in]-\infty\ ;1] \\ f(x) = \sqrt{-x^2+2x+3} \ \ x \in [1\ ;3] \\ f(x) = \sqrt{-x^2+2x+3} \ \ x \in [3\ ;\ +\infty[\end{cases}$

Continuité et condition de faisabilité

9 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{3-\sqrt{2x+5}}{x-2} \ si \ x \in \mathbb{R} - \{2\} \\ f(2) = a \end{cases}$$

Déterminer la valeur de a pour que f soit continue en $x_0 = 2$

10 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + ax \quad si \ x \in]-\infty\ ;\ -1[\\ f(x) = 2x - 1 \ \ si \ \ x \in]-1\ ;\ 1[\\ f(x) = b(x^2 - 1) \quad si \ \ x \in]1\ ;\ +\infty[\end{cases}$$

a) Déterminer a pour que f soit continue au point $x_0 = -1$
b) Pouvez – vous déterminer la valeur de b pour que f soit continue au point $x_0 = 1$?

Prolongement par continuité

11 Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de définition de la fonction f et déterminer (s'il existe) le prolongement par continuité de cette fonction en x_0.

$\begin{cases} f(x) = \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ x_0 = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} f(x) = \frac{tgx}{x} \\ x_0 = 0 \end{cases}$;

12 Soient f et g deux fonctions définies respectivements par :

$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ et $g(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}$

a- Déterminer les ensembles de définitions Df et Dg respectivement des fonctions f et g.

b- Vérifier que la fonction g est le prolongement par conitinuité de la fonction f en $x_0 = 0$.

13 On considère la fonction g de la variable réelle x définie par $g(x) = \frac{\sqrt{2x}-2}{x-2}$

1) Déterminer son ensemble de définition Dg.
2) Montrer que g admet en 2 un prolongement par continuité que l'on notera par h.
3) Montrer que h est dérivable en 2 puis donner l'équation de la tangente à la courbe(C) de h au point d'abscisse 2.

Dérivabilité

Dérivabilité en un point x_0

14 Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes aux points x_0 donnés :

$$a-\begin{cases} f(x)=\frac{(x-2)^2}{x^2+x-6} \\ f(2)=0 \end{cases} \text{ et } x_0=2 \quad ; \quad \text{b-}\begin{cases} f(x)=\frac{x^2-1}{|x-1|} \\ f(1)=2 \end{cases} \text{ et } x_0=1$$

$$\text{c-}\begin{cases} f(x)=x^2-x+1 \;\; si\; x\in[0\;;\;1] \\ f(x)=\frac{2x-1}{x} \;\; si\; x\in\,]1\;;\;3] \end{cases} \text{ et } x_0=1 \quad \text{d-}\begin{cases} f(x)=\frac{3-\sqrt{2x+5}}{x-2} \;\; si\; x\neq 2 \\ f(2)=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{e-}\begin{cases} f(x)=\frac{\sqrt{2Cosx}-1}{2Cos2x+1} \;\; si\; x\in\left[0\;;\;\frac{\pi}{2}\right]-\left\{\frac{\pi}{3}\right\} \\ f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4} \quad \text{et } x_0=1 \end{cases}$$

$$\text{f-}\begin{cases} f(x)=-x^2-2x+5\; si\; x\in\,]-\infty\,;1] \\ f(x)=\sqrt{-x^2+2x+3} \;\; x\in[1\,;3] \\ f(x)=\sqrt{-x^2+2x+3} \;\; x\in[3\,;+\infty[\end{cases}$$

Dérivabilité et condition de faisabilité

15 Déterminer les réels a, et b pour que f soit continue et dérivable aux points x_0 donnés :

$$a-\begin{cases} f(x)=2x^2+ax-3\; si\; x\leq 1 \\ f(x)=\frac{2x+b}{x} \;\; si\;\; x>1 \end{cases} \qquad \text{b-}\begin{cases} f(x)=2ax^2-x+b\;\; si\; x\leq -2 \\ f(x)=\frac{3b}{x+3} \;\; si\;\; x>-2 \end{cases}$$

$$\text{c-}\begin{cases} f(x)=ax^2-3x+4 \;\; si\; x\leq -2 \\ f(x)=\frac{x+b}{x+3} \;\; si\;\; x>-2 \end{cases}$$

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\text{c-}\begin{cases} f(x)=\frac{x(x+1)}{(x+2)^2} \;\; si\;\; x\geq -1 \\ f(x)=2x+a \;\; si\;\; x<-1 \end{cases}$$

Pour quelle valeur de a la fonction f est – elle continue au point -1 ?
Pour cette valeur, étudier la dérivabilité de la fonction f au point – 1.

Application de la dérivée

16 Déterminer une équation de la tangente en $M_0(\,xo\,;\,f(xo))$ à la courbe (C) de f dans les cas suivants :

$a)\ f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 3\ \ et\ \ x_0 = -2$; $b) f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ et $x_0 = 0$

c) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}\ \ et\ \ x_0 = 3$; d) $f(x) = \dfrac{tangx}{x}$ et $x_0 = 0$

17 Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas suivants :

$a)\ f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 3$; $b)\ f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$; c) $f(x) = (-x^2 + 2x)^3$

d) $f(x) = \sqrt{2x^3 - 4x^2 + 1}$; e) $f(x) = (1 - 3x^2)(-x^2 + 1)$; f) $f(x) = \mathrm{Cos}^3 x$

g) $f(x) = (x - 1)\sqrt{x^3 - x^2}$; h) $f(x) = \mathrm{Sin}(3x - 1)^4$; i) $f(x) = Sin^4(3x - 1)$

18 Soit la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -x^2 - 2x + 5 & si\ x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt{|x^2 - 2x - 3|} & si\ x > 1 \end{cases}$$

1) Prouver que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$
2) a) Dresser le tableau de signe du trinôme $x^2 - 2x - 3$ en y plaçant le réel 1
   b) En déduire pour tout $x \geq 1$ une écriture de $f(x)$ sous le symbole de la valeur absolue.

3) a) Etudier la dérivabilité de f au point $x_0 = 3$. Que dira – t – on pour la dérivabilité de f au point 3 ?
   b) Donner une équation de la tangente à gauche et à droite de 1. Que peut – on conclure quant à la dérivabilité de f en 1 ?

4) a) Etudier le signe de f' sur chacun des intervalles sur lequel f est dérivable.
   b) Préciser les ordonnés de chaque extremum de f.

5) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

Etudes de fonctions

Analyse et interprétation d'un tableau de variation.

19 Analyser puis interpréter chacun des tableaux de variations suivants afin de préciser :

a- les domaines de définition.

b- les limites aux bornes du domaine de définition tout en mettant en évidence les éventuelles asymptotes et possibilités d'asymptotes.

c- Donner l'allure de la courbe (Cf) dans chaque cas.

1) $\boldsymbol{f}$ est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

De plus :

- La courbe (Cf) admet l'origine du repère comme centre de symétrie.
- La courbe (Cf) admet l' axe $(y'Oy)$ comme branche parabolique.

2) $\boldsymbol{g}$ est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

De plus : La courbe (Cg) admet l' axe $(y'Oy)$ comme branche parabolique.

3) $\boldsymbol{h}$ est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	
$h(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty \;\|\; -\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty \;\|\; +\infty$	$\searrow$	3

4) $\boldsymbol{p}$ est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$p'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$p(x)$	2	↘	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	2

20

Dresser le tableau de variation de la fonction numérique donnée partant de ses renseignements fournis dans les cas suivants :

1) Pour f :

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que l'équation $f'(x) = 0$ admet les solutions $x = -1$ et $x = \frac{3}{2}$
- f n'est croissante qu'entre les zéros de sa dérivée f' et les points $E_1\left(\frac{3}{2}\ ; 4\right)$ et $E_2\left(-1; -\frac{5}{2}\right)$ sont ses extremums
- les droites $y = -2$ et $y = 3$ sont ses asymptotes respectives en $-\infty$ et $+\infty$

2) Pour g :

- g est définie sur $]-\infty\ ;\ 0] \cup \left[\frac{5}{2}\ ;\ +\infty\right[$ et admet des demi tangentes verticales aux points d'abscisses 0 et $\frac{5}{2}$
- g est strictement décroissante sur son ensemble de dérivabilité.
- la droite $y = -x$ est à la fois asymptote oblique en $-\infty$ et $+\infty$
- les points de coordonnées $(0\ ;\ -3)$ et $\left(\frac{5}{2}\ ;\ 1\right)$ sont sur la courbe de g.

3) Pour h :

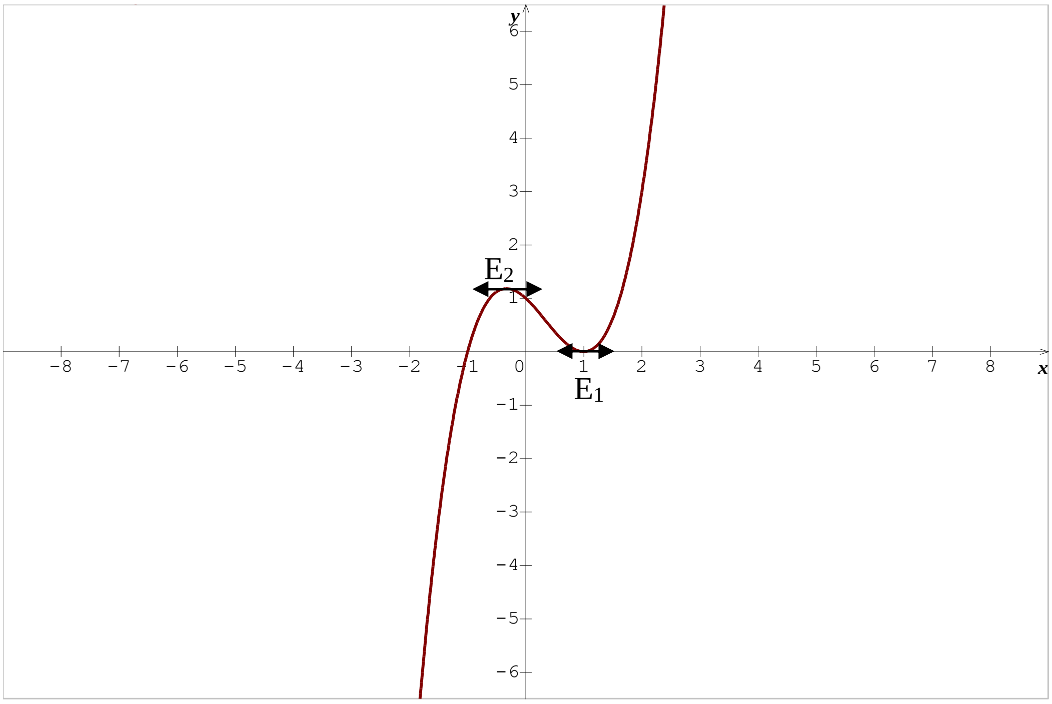
- h est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\ ;\ 2\}$ et continue sur $\mathbb{R}$.
- le point de coordonnées $(0{,}3\ ;\ 0{,}4)$ est l'extremum maximum absolue de la courbe (C_h) et h est croissante sur $[0\ ;\ 0{,}3] \cup [2\ ;\ +\infty[$
- les droites d'équations $y = -1$ *et* $y = -2x + 1$ sont asymptotes de (C_h) respectivement en $-\infty$ et $+\infty$
- les points de coordonnées $(0\ ;\ 0)$; $(1\ ;\ 0)$; et $(2\ ;\ -2)$; appartiennent à (C_h)

Analyse et interprétation d'un graphique.

21 a- Analyser chacune des courbes représentatives données dans un repère orthonormé du plan afin d'établir son tableau de variation.

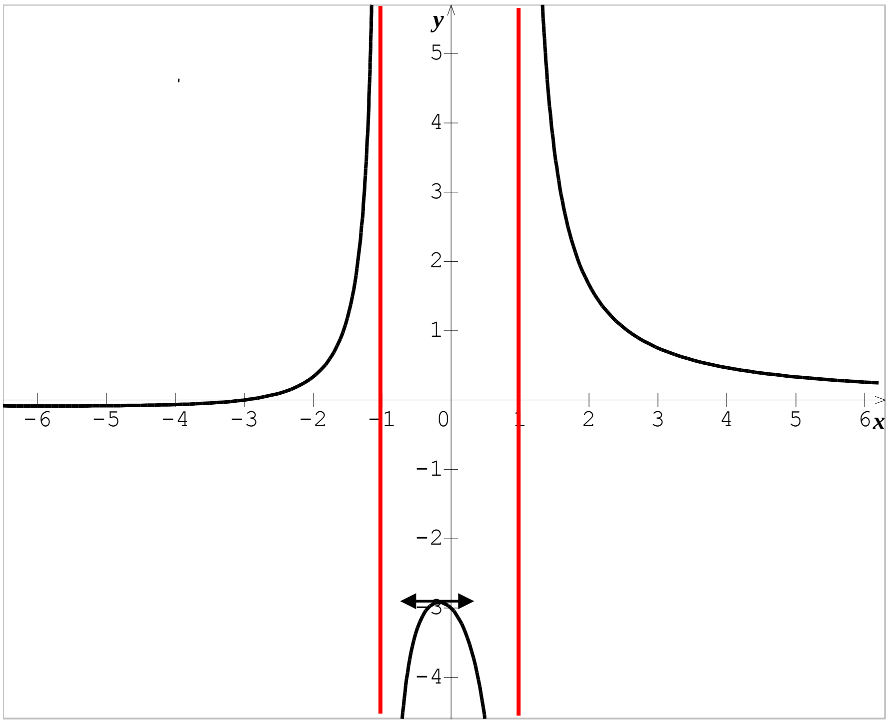
b- Déterminer les réels a ; b ; c….. en utilisant le graphique.

1) f est la fonction dont la courbe est donnée ci-dessous par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

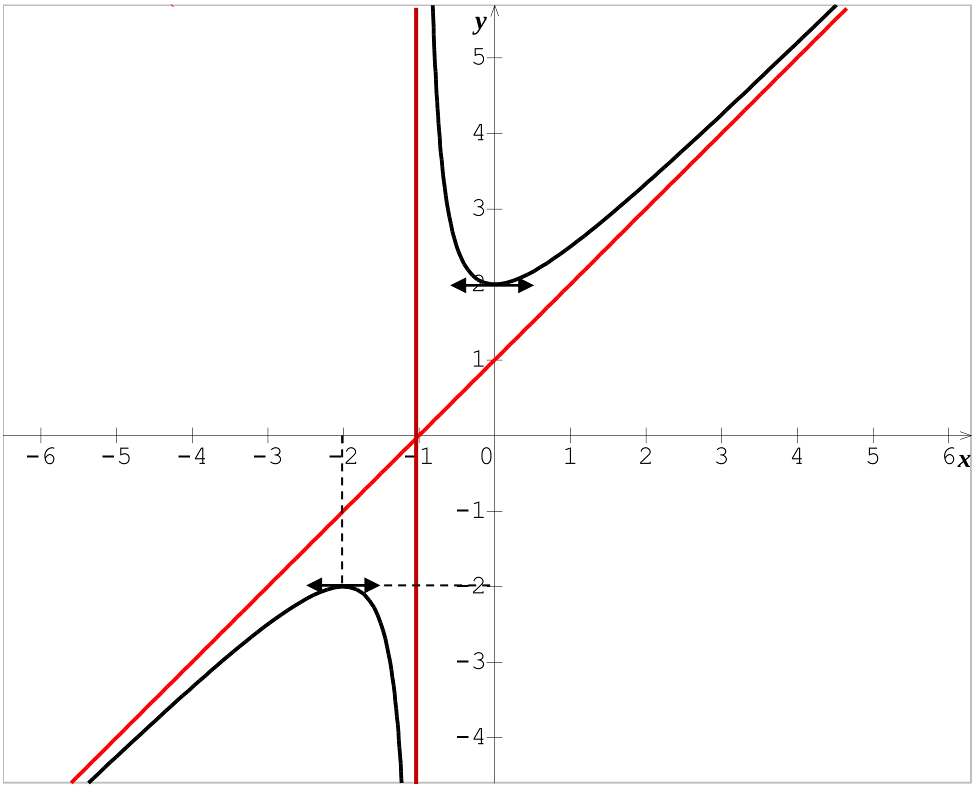


De plus : $E_1(1 \; ; \; 0)$ et $E_2\left(\frac{-1}{3} \; ; \; \frac{32}{27}\right)$ sont les sommets de la courbe (Cf)

2) La fonction donnée est g telle que : $g(x) = \dfrac{ax + b}{cx^2 + d}$



3) La fonction donnée est h telle que : $h(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$



Fonctions d'initialisations.

22 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Déterminer l'ensemble de définition Df.
2) Calculer les limites aux bornes de Df.
3) Déterminer les réels a ; b et c tel que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$
4) a- Montrer que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe Cf .
   b- Déterminer la position de la courbe Cf et de la droite (D).
5) Montrer que le point I$\binom{-1}{0}$ est centre de symétrie pour la courbe Cf.
6) Déterminer une équation de la tangente à la courbe Cf au point d'abscisse -2
7) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f au point d'abscisse nul.
8) Calculer la dérivée f' de la fonction f puis dresser le tableau de variation de f.
9) Construire la courbe Cf et la droite (D) dans le même repère.

23 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Déterminer les réels a ; b ; c et d tel que :
   a- La courbe Cf admet comme asymptote les droites $x = 2$ et $x = -1$.
   b- La courbe Cf passe par le point A$\binom{1}{-2}$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -5.
2) Etudier la fonction f puis représenter sa courbe Cf dans le repère.

24 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{cx^2 + dx - 2}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Déterminer les réels a ; b ; c et d tel que :
   a- La courbe Cf admet comme asymptote les droites $= 2$.
   b- La courbe Cf n'admet pas d'asymptote parallèle à l'axe (ox).
   c- La courbe Cf passe par le point A$\binom{1}{-1}$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 2.
2) Etudier la fonction f puis représenter sa courbe Cf dans le repère.

25 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^3 + ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx + p}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Déterminer les réels a ; b c ; m ; n et p tel que :
   - a- La courbe Cf admet comme asymptote les droites $x = 2$ et $x = -1$.
   - b- La courbe Cf passe par le point A$\binom{0}{3}$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -3.
2) Etudier la fonction f puis représenter sa courbe Cf dans le repère.

26 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^3 - 9x}{2(x^2 - 1)}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Etudier les variations de f.
2) Préciser les asymptotes à la courbe Cf.
3) Soit Δ l'asymptote non parallèle aux axes de coordonnées, déterminer la position de Cf par rapport à Δ dans l'intervalle $]-1\ ;\ 1[$.
4) Construire Cf.

27 Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 4}{2x}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Etudier et construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

2) Montrer que le point d'intersection des asymptotes est un centre de symétrie de (Cf)
3) Discuter graphiquement suivant les valeurs de m l'existence et le signe des racines de l'équation : $x^2 + 2(1 - m)x + 4 = 0$
4) Montrer que la restriction h de f à l'intervalle I = $[2\ ;+\infty[$ est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera. Construire la courbe représentative de la fonction réciproque h^{-1} de h dans le repère (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$). puis calculer $(h^{-1})'\left(\frac{7}{2}\right)$.

Fonctions dans les cas pratiques.

28 Une entreprise fabrique et commercialise chaque mois x objets dont le coût total de production, exprimé en milliers de francs est donnée par $C(x) = \frac{x^2}{2} + 5x + 200$ avec $x \in [5 \ ; \ 60]$.
On admet que toute la production est vendue chaque mois. On rappelle que le coût moyen unitaire de fabrication d'un objet est donné par $C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$.

1) Calculer $C'_m(x)$ puis en déduire le tableau de variation de $C_m(x)$.
2) Pour quel nombre d'objets le coût moyen unitaire est il minimum ?

29 La production exprimée en tonne d'une entreprise sur les cinq dernières années est donnée par la fonction suivante $t \to f(t) = -\frac{t^2}{2} + 2t + 36$ où t s'exprime en années.

1) Calculer la dérivée $f'(t)$ de la fonction $f(t)$ puis en déduire les varitions et le tableau de variation de f. Donner une interprétation commerciale en utilisant le tableau.
2) Tracer la courbe (Cf) de f dans un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).
3) La production totale sur les cinq années est donnée par $\int_0^5 f(t)dt$.
   Calculer la production totale.

30 Une entreprise produit du décapant liquide. Une étude a permis de modéliser le coût moyen de production par $f(x) = 0{,}5x + \frac{8}{x}$ où > 0.
Le coût moyen $f(x)$ est exprimé en milliers de francs CFA et la quantité produite x en hectolitres.
Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (o;$\vec{\imath}$;$\vec{\jmath}$) d'unité graphique 1cm.

1) Etudier les variations de cette fonction dans l'intervalle$]0 \ ; +\infty[$.
2) Etudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (D) d'équation $y = 0{,}5x$.
3) Pour combien d'hectolitres le coût de production est il minimum ?
4) Déterminer les coûts de production pour 4 hectolitres ; 8 hectolitres et 16 hectolitres.
5) Construire la courbe (C) et la droite (D) dans le même repère.

31 Une entreprise fabrique des objets. On estime que le bénéfice, en centaine d'euros, réalisé par la production et la vente de x centaines d'objets est : $B(x) = 3x^3 + 33x - 54$ où $1 \leq x \leq 10$

1) a- Calculer $B'(x)$. En déduire le tableau de variations de B sur $[1 \ ; 10]$.
   b - Quel est le nombre d'objets à produire, et à vendre, pour réaliser un bénéfice maximum ? Préciser la valeur de ce bénéfice.
2) a- Résoudre l'équation $B(x) = 0$. En déduire les points morts de la production.
   b-Résoudre l'inéquation $B(x) \geq 0$. En déduire la marge de bénéfice de la production.

32 On note $f(x)$ la population (en milliers) d'une ville fondée en 1960, où x désigne la durée écoulée depuis le début de l'année 1960, exprimée en années.

On donne $f(x) = \dfrac{60x + 40}{x + 10}$ où $x \in [0 ; +\infty[$.

1) Déterminer les réels a et b tels que $f(x) = a + \dfrac{b}{x + 10}$ pour $x \in [0 ; +\infty[$.
2) a- Calculer la dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x)$.
   b- Justifier que la population est croissante.
3) a- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 52$.
   b- En déduire à partir de quelle année la population de cette ville sera supérieur à 52.000 habitants.
4) a- Quelle set la limite de f en $+\infty$?
   b- En déduire une interprétation quant à la population de cette ville ;
5) Tracer la courbe (Cf) de f dans un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).
   Echelle : 1 cm → 10 ans sur l'axe des abscisses
   1 cm → 10.000 habitants sur l'axe des ordonnées.

33 Une entreprise produit d'un certain nombre x de crayons de couleur par jour où : (x exprimé en millier).
Lorsque la quantité x est comprise entre 3 et 10, on admet que le coût de production journalier, exprimé en euro est donné par : $C(x) = x^3 - 48x + 600$
L'entreprise vend chaque millier de crayons à 99 euros.
1) En supposant que toute la production du jour est vendue, déterminer la recette journalière en fonction de x que l'on notera $R(x)$.
2) Montrer que la bénéfice $B(x)$, exprimé en euro, est donnée par :
$B(x) = -x^3 + 147x - 600$ avec $\in [3 ; 10]$. ($On\ rappelle\ que\ R(x) - C(x) = B(x)$).
3) Calculer $B'(x)$ où désigne la fonction dérivée de B.
4) Etudier le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[3 ; 10]$.
Dresser le tableau de variation de la fonction B.
5) En déduire le nombre de milliers de crayons à produire quotidiennement pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est alors ce bénéfice maximal ?
6) a- Montrer qu'il existe $\alpha \in]3 ; 7[$ et $\beta \in]7 ; 10[$ tel que $B(\alpha) = B(\beta) = 0$.
   b- Calculer $B(4)$; $B(8)$; $B(5)$; $B(9)$ puis en déduire les valeurs entières minimale et maximale à l'extérieur des quelles $(x) < 0$.
7) Quelles sont les productions qui assurent à l'entreprise un bénéfice positif ?

34 Dans le Périgord, un producteur de truffes noires cultive, ramasse et conditionne de 1 à 45kg de truffes par semaine durant la période de production de la truffe. Chaque kilo de truffes est vendu 950 FCFA.
On désigne par $f(x)$ le coût moyen, en euro par kg, pour x kg de truffes traités en une semaine.
On estime que la fonction f est définie sur $[1 ; 45]$ par : $f(x) = x^2 - 60x + 1250$.
1) Justifier que le coût de production total $C(x)$ pour x kg de truffes est donné, en FCFA, par : $C(x) = x^3 - 60x^2 + 1250x$..
2) Exprimer le bénéfice $B(x)$, en euro, réaliser par ce producteur pour x kg de truffes conditionnés et vendus.

3) a) Calculer $B'(x)$ et en déduire le tableau de variations de B sur $[\,1\ ;45]$.
b) Pour quelles quantité de truffes de bénéfice du producteur est-il maximal ? Arrondir le résultat à 100g près. Quel est alors ce bénéfice maximal, à 100 FCFA près ?

35 Une entreprise fabrique entre 1000 et 4000 chats en porcelaine par mois. Ils sont tous identiques. On estime que le coût total de fabrication de x milliers de bibelots, en millier d'euros, est, pour $1 \leq x \leq 4$; $C(x) = 2x - 14\sqrt{x}$

1) Montrer que, pour tout réel x de $[\,1\ ;4]$, on a : $C'(x) = \frac{4\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}}$

2) a- Résoudre l'inéquation $4\sqrt{x} - 1 \geq 0$

b- En déduire le sens de variation du coût total C sur l'intervalle $[\,1\ ;4]$.

Interpréter économiquement.

36 Le coût, en euro, de x repas préparés dans un restaurant peut s'écrire :

$C(x) = 0{,}1x^2 - x + 640$ avec $x \in [\,40\,;160]$.

On note $C_m(x)$ le coût moyen de x repas, en euro par repas.

1) Justifier que C est croissante sur $[\,40\,;160]$. .

2) a- Calculer le coût moyen de 40 repas, puis de 100 repas.

b- Exprimer le coût moyen $C_m(x)$ par repas en fonction du nombre x de repas préparés.

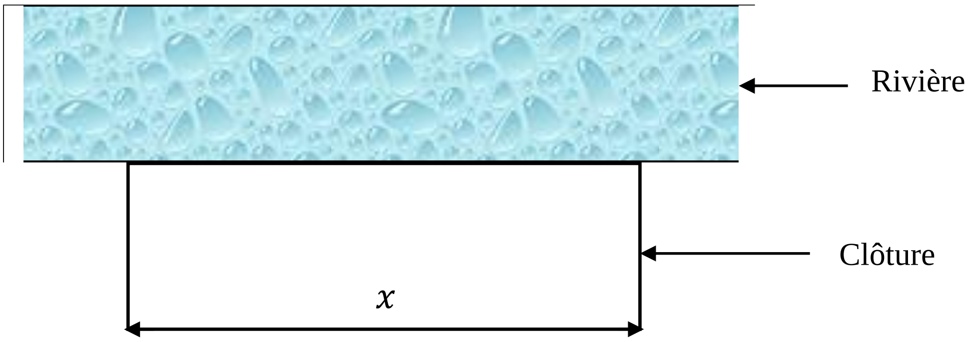
3) a- Etudier le sens de variation du coût moyen C_m

b- Quel est le nombre de repas à servir pour que le coût moyen par repas soit minimal ?

37 La société EDM désire mesurer la satisfaction de ces consommateurs par une « fonction de satisfaction » f, dont la valeur se situe dans l'intervalle$[\,0\ ;\ 100]$. Si la satisfaction vaut 0, les consommateurs ne sont pas satisfaits et quant elle vaut 100 les consommateurs sont pleinement satisfaits : on parle alors de « satisfaction ».
On définit la fonction « envie » v comme étant la dérivée de la fonction $f\ tel\ que\ v = f'$.
On dit qu'il y a « envie » lorsque v est positive. Sinon on dit qu'il y a « rejet ». Ainsi l'EDM propose différents types de formules pour la consommation de l'électricité et décide d'étudier la satisfaction de ses clients concernant la durée en jours d'une consommation.
La fonction de satisfaction f est définie sur l'intervalle $[\,1\,;21]$ par :
$f(t) = 0{,}02t^3 - 1{,}4t^2 + 22t + 640$ où t est la durée en jour de la consommation.

1) Calculer $f'(t)$, puis en étudier le signe sur $[\,0\,;\ 21]$.
2) Dresser le tableau de variations de f sur $[\,0\,;\ 21]$.
3) Quelle doit être la durée, en jour, de la consommation pour qu'il y ait saturation ?
4) Sur quel(s) intervalle(s) y a-t-il envie ? rejet ?

38 On veut construire le long d'une rivière un enclos rectangulaire d'aire 200 m^2.
Soit x la dimension exprimée en mètres du côté parallèle au cours d'eau.
On désigne par $f(x)$ la longueur totale, exprimée en mètres de clôture nécessaire à la réalisation de l'enclos.



1) Exprimer $f(x)$ en fonction de x.
2) On suppose que $f(x) = x + \frac{400}{x}$ où $x > 0$
   a- Etudier les variations de f sur l'intervalle$[\,5\ ;\ 50\,]$.
   b- Pour quelle valeur de x la longueur de la clôture est-elle minimale ?
   c- En déduire ce minimal.
   d- Tracer la courbe (Cf) de f dans un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) et sur l'intervalle$[\,5\ ;\ 50\,]$.
3) On dispose de 50 m de clôture. Quelle sont les dimensions des enclos que l'on peut construire en utilisant toute la clôture ?

39 On considère, dans le plan (P) rapporté à un repère orthonormal (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$), le cercle (Γ) de centre O et de rayon 1.
Soit A le point de coordonnées (1 ; 0) et A' le point de coordonnées (-1 ; 0) .

1) Pour tout point H du segment$[AA']$, distinct de A et A', on mène la perpendiculaire (Δ) à la droite (AA'). La droite (Δ) coupe le cercle (Γ) en M et M'.
   On pose $\overline{OH} = x$. Calculer en fonction de x l'aire du triangle AMM'.
2) Soit f la fonction définie sur $]-1\ ;\ 1\,[$ par $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$.
   a- Etudier les variations de f.
   b- Montrer que le triangle AMM' d'aire maximale est équilatéral.

Fonctions circulaires.

40 Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \frac{Sin3x}{Cos^3x}$
Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Déterminer Df
2) Etudier la périodicité et la parité de f puis en déduire un intervalle d'étude D_E.
3) Etudier les limites aux bornes de D_E.
4) Montrer que $\forall\, x \in Df, f'(x) = \frac{3Cos2x}{Cos^4x}$ puis dresser le tableau de variation de f.
5) Tracer (Cf).

41 Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1+\ Cos3x}{Cos^3x}$
Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Déterminer l'ensemble de définition Df.
2) Etudier la périodicité et la parité de f puis en déduire un intervalle d'étude D_E.
3) Montrer que $\forall\, x \in Df, f'(x) = \frac{3(1-\ 2Cosx)Sinx}{Cos^4x}$
4) Etudier le signe de $(1-2cosx)$ sur D_E puis en déduire les variations de f sur D_E.
5) Déterminer les coordonnées des points d'intersections de la courbe (C) avec l'axe des abscisses.
6) Tracer la courbe Cf.

42 On considère la fonction numérique g définie par : $g(x) = Sin2xCosx$.
Soit Cg sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) a- Prouver que la verticale $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie pour la courbe Cg et étudier la parité de g.
   b- Justifier que l'on peut étudier g sur $D_E = \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ puis décrire les étapes à suivre pour avoir la courbe Cg sur $\mathbb{R}$.
2) a- Déterminer $g'(x)$ et justifier que son signe est celui de $3Cos^4x - 2$ pour tout $x \in D_E$

   b- En admettant que Cos(0,45) = 0,9 et que Cos(2,69) = −0,9 et en exploitant les résultats obtenus en 1), établir le tableau de variation de g sur D_E

3) a- Tracer (Cg) sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$
   b- En déduire le tracer de (Cg) sur $[-\frac{3\pi}{2};\frac{3\pi}{2}]$.

43 **Partie A** : On considère la fonction numérique h de variable réelle u définie sur $[-1 \;;\; 1]$ par : $h(u) = 2u^3 + 8u^2 - 4$.

1) Déterminer l'arrondi d'ordre zéro de $h(-0{,}79)$ *et de* $h(0{,}66)$.
2) Etablir le tableau de variation de h et donner les signes de $h(u)$ pour $\in [-1 \;;\; 1]$.

Partie B : On donne la fonction numérique g telle que $g(x) = \frac{Sin2x}{Cosx + 2}$.
Soit Cg sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Déterminer l'ensemble de définition Dg.
2) En étudiant la périodicité et la parité de g puis montrer que l'on peut étudier g sur un nouvel ensemble d'étude DE = $[0 \;;\; \pi]$ d'amplitude 2π.
3) Déterminer $g'(x)$ et prouver $g'(x)$ dépend en signe et en racine de : $2cos^3x + 8cos^2x - 4$ pour tout $x \in D_E$
4) En admettant que Cos(0,85) = 0,66 et que Cos(2,49) = −0,79, établir le tableau de variation de g sur D_E.
5) a- Tracer Cg sur D_E.

   b- En déduire le tracer de Cg sur I.

44 **Partie A** :
1) Déterminer l'arrondi d'ordre quatre de Sin(−0,1396).
2) A l'aide d'un changement de variable convenable, résoudre dans $\left[-\frac{\pi}{2} \;;\; \frac{\pi}{2}\right]$ l'inéquation $-2sin^2x - 8sinx - 1 \geq 0$.

Partie B :
On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{Cos2x}{Sinx + 2}$.

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Quel est le domaine de définition Df de f ?
2) Prouver que les droites $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = -\frac{\pi}{2}$ sont des axes de symétrie pour Cf.
3) Après avoir étudié la périodicité de f, justifier que l'on peut étudier f sur $\left[-\frac{\pi}{2} \;;\; \frac{\pi}{2}\right]$ puis donner le processus à suivre pour compléter l'étude de f sur $[-\pi \;;\; \pi]$.
4) (On rappelle que $Sin2x = 2CosxSinx$ et que $Co2x = 1 - Sin^2x$)
   a- Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in D_E$ puis établir que $f'(x)$ dépend en signe et en racine de $-2sin^2x - 8sinx - 1$
   b- Comment sont les tangentes à Cf aux points d'abscisses $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = -\frac{\pi}{2}$?
5) Déterminer l'arrondi d'ordre quatre de $f(-0{,}1396)$ puis dresser le tableau de variation de f sur l'ensemble D_E.
6) Tracer Cf sur D_E en mettant en évidence les points d'intersection de Cf avec les axes de coordonnées.
   En déduire le tracé de Cf sur $[-\pi \;;\; \pi]$.

Fonctions paramétriques.

45 Soit f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_m(x) = (2m-1)x^4 - (m+4)x^2 - m + 5$.
Où x est la variable et m est un paramètre réel.
Soit (C_m) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par deux points fixes dont on déterminera les coordonnées.
2) Etudier les fonctions $f_0$et f_1 puis représenter leur courbe respectives (C_0) et (C_1).

46 Soit f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_m(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 4m}{x^2 + (5m+1)x + 3}$.
Où x est la variable et m est un paramètre réel.
Soit (C_m) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par trois points fixes dont on déterminera les coordonnées.

2) Déterminer m pour que le point d'intersection I de (C_m) et l'asymptote parallèle à $(x'ox)$ ait pour abscisse $\frac{3}{2}$.
3) Etudier les fonctions $f_0$et f_1 puis représenter leur courbe respectives courbe (C_0) et (C_1).

47 Soit f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_m(x) = \dfrac{x^2 - mx}{x^2 - 1}$.
Où x est la variable et m est un paramètre réel.
Soit (C_m) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Donner le tableau de variation de la fonction f_m suivant les valeurs de m.
(On distinguera les cas où $m \neq 1$ et $m \geq 0$).
2) Comparer $f_m(x)$ et $f_{-m}(-x)$ puis donner la position relative des courbes (C_m) et (C_{-m}).
3) Quelle sont les coordonnées des points de (C_m) à tangentes parallèles à (ox) quand ceux-ci existent ?
4) Montrer que ces points sont sur une même courbe fixe.
5) Etudier les fonctions f_0 et f_1 puis représenter leur courbe respectives (C_0) et (C_1).

Fonctions auxiliaires.

48

Partie A : On considère le polynôme P définie : $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

1) Donner le tableau de variation de P.
2) Démontrer que l'équation $P(x) = 0$ a une solution unique α dans l'intervalle$]1,6 \; ; \; 1,7[$.
3) Donner le signe de $P(x)$ dans l'intervalle$]-1 \; ; +\infty[$.

Partie B : On considère la fonction $f :]-1 \; ; +\infty[\to \mathbb{R}$

$$x \to \frac{1-x}{1+x^3}$$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) a) Justifier la dérivabilité de f sur $]-1 \; ; +\infty[$.

   b) Calculer $f'(x)$ puis établir que $f'(x) = \dfrac{P(x)}{(1+x^3)^2}$

2) Donner le tableau de variation de f.
3) Déterminer les équations des asymptotes à la courbe Cf de f.
4) Placer α puis tracer Cf.
5) Soit g la restriction de f à l'intervalle$[2 \; ; +\infty[$.
   Montrer que g réalise une bijection de $[2 \; ; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
6) On désignera g^{-1} sa bijection réciproque.

a) Donner le tableau de variation de g^{-1}

b) Tracer la courbe Cg^{-1} de g^{-1}

49

Partie A : On donne la fonction g définie par $g(x) = x^3 - 3x - 4$

1) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $2,19 < \alpha < 2,20$
3) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$

Partie B : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1 \; ; \; 1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition Df.
2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1 \; ; \; 1\}$, on a : $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$
3) Etudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f puis son tableau de variation de la fonction f.
4) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe Cf . Etudier la position de Cf et (D).
5) Tracer Cf.

50 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

<u>Partie A</u> :
Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 4$

1) Etudier la fonction g (limites et sens de variation)

2) Montrer qu'il existe un réel α unique tel que $g(\alpha) = 0$, puis déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près du réel α.
3) Etudier le signe de g sur $\mathbb{R}$

<u>Partie B</u> :

1) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition Df.
Montrer que $\forall x \in Df$ on a : $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$ puis déduire le tableau de variation de f.
2) a) Montrer que $\forall x \in Df$; $f(x) = x + 2 + \dfrac{x + 2}{x^2 - 1}$

   b) En déduire que (C) admet une asymptote oblique (D) en $-\infty$ et $+\infty$.

   c) Etudier la position de (C) par rapport à (D).

3) Tracer la courbe (C) et la droite (D).

<u>Partie C</u> :

1) Déterminer l'abscisse des points de la courbe (C) où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x + 2$.

2) Déterminer une équation de chacune de ces tangentes et les représenter.

3) En déduire graphiquement, suivant les valeurs de m, le nombre de solution de l'équation $f(x) = m + x$.

51 1) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 1}$

a) Etudier les variations de la fonction g.
b) Montrer que $g(x) = 0$ admet une solution unique α que l'on déterminera.
c) En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sqrt{x^2 + 1} - x$.
Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

On note (D) et (D') les droites d'équations respectives : $y = -3x$ et $y = x$.

a) Etudier les limites de f en +∞ et -∞
b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = \dfrac{g(x)}{\sqrt{x^2+1}}$
c) En déduire le tableau de variation de f.
d) Déterminer la limite en -∞ de $f(x) - (-3x)$. Quelle conséquence graphique peut – on déduire de ce résultat ?
e) Montrer la droite (D') est asymptote à la courbe (C) en +∞
f) Etudier la position de (C) par rapport aux deux droites (D) et (D').
g) Tracer la courbe (C), les droites (D) et (D').

52 On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^3}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

Partie A :

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 + 1$

1) Etudier la fonction g (limites et sens de variation)
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $g(x) = 0$, puis en déduis l'arrondi d'ordre 2 de l'abscisse x_0 du point d'intersection I de la courbe de g avec l'axe des abscisses.
3) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B :

1) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition Df puis donner une interprétation géométrique des résultats obtenues.
2) a- Prouver que le signe de la fonction dérivée f' de f dépend en signe et en racine de la fonction g étudier dans la **partie A.**
   b- Déterminer $g(x_0)$ où x_0 est l'abscisse x_0 du point d'intersection I de la courbe de g avec l'axe des abscisses obtenu dans la **partie A 2)**.
   c- Dresser le tableau de variation de f.
3) tracer la courbe (Cf) dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).
4) Déterminer graphiquement le nombre et le signe des solutions de l'équation paramétrique : (E_m) : $mx^3 + x - m$ où m est un paramètre réel.

Fonction irrationnelle –fonction avec valeur absolue.

53 Soit la fonction f définie par $f(x) = x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Donner l'ensemble de définition Df de f .
2) Etudier les variations de f, puis tracer avec soins sa courbe représentative dans un repère orthonormé. On donne : $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,6$ et $f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = -0,3$

54 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x + \sqrt{x^2 + 8}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) a) Démontrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $x - \sqrt{x^2 + 8} < 0$
   b) Etudier les limites de f aux bornes de Df. En déduire que la courbe (C) de f admet une asymptote horizontale dont on précisera une équation.
   c) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -2x$ est asymptote à (C) en $-\infty$

2) a) Calculer $f'(x)$. Puis en déduire de 1) a) le sens et le tableau de variation de f.
   b) Tracer (C) et (D) dans un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm)

55 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{|x^2+x|+1}{|x|+1}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Déterminer le domaine de définition de f et écrire $f(x)$ sans les symboles "valeur absolue"
2) Etudier la dérivabilité de f en -1 et en 0, puis interpréter géométriquement les résultats
3) Etudier les variations de f
4) Montrer que les droites d'équations $y = -x - 2$ et $y = x$ sont asymptotes à la courbe (C) et f
5) Tracer (C)

56 Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = \sqrt{|x^2-2x-3|}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Déterminer l'ensemble de définition de f
2) Ecrire $f(x)$ sans valeur absolue
3) Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = -1$ et en $x_0 = 3$ puis interpréter graphiquement vos résultats.
4) Montrer que la courbe (C) de f admet une asymptote oblique (Δ) au voisinage de $-\infty$ et une asymptote oblique (D) au voisinage de $+\infty$.
5) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec (Δ) et (D)
6) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation
7) Tracer dans un repère orthonormé la courbe (C) de f.

57 Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Déterminer l'ensemble de définition Df de f
2) a) Etudier la dérivabilité de f au point $x = 0$, en déduire l'ensemble de dérivabilité de f.
   b) Calculer $f'(x)$ pour x élément des intervalles de dérivabilité.
   c) Calculer les limites de $f(x)$ aux bornes de Df et préciser les équations des asymptotes à la courbe (C) de f.
   d) Dresser le tableau de variation de f
3) Soit g la restriction de f à l'intervalle I = $]-\infty, 0]$
   a) Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer. On désigne par g^{-1} la bijection réciproque de g et (Cg^{-1}) sa courbe.
   b) Calculer $f(0)$, $f(-1)$, $f(2)$, $f(3)$
   c) Construire dans le même repère orthonormé les courbes (C) et (Cg^{-1})
   d) Calculer $(g^{-1})'\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

58 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{|\ x^2 - 6x + 5\ |}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Etudier suivant les valeurs de x, le signe du polynôme et l'expression de $f(x)$ sans le symbole "valeur absolue".
2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f, en particulier en 1 et en 5. La courbe admet – elle des tangentes en ces points ?
3) Etudier les variations de f.
4) Démontrer que la droite d'équation $x = 3$ est axe de symétrie pour la courbe (C).
5) Démontrer que les droites d'équations $y = x - 3$ et $y = -x + 3$ sont asymptotes à la courbes (C).
6) Déterminer les coordonnées des points A et B d'intersection de la courbe (C) avec ses deux asymptotes, A étant le point dont l'abscisse est supérieure à 3.
7) Soit I le point de coordonnées (3 ; 0). Démontrer que $\forall\ x \in [1\ ;\ 5]$ le point M de coordonnées $(x, f(x))$ est une distance constante du point I. En déduire la nature géométrique de la courbe (C), lorsque $1 \leq x \leq 5$
8) Tracer (C) et ces asymptotes. Faire figurer les points A et B.

Perfectionnement.

59 La fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est donnée par une partie de son tableau de variation.

On sait de plus que la droite d'équation $x = 2$ est axe de symétrie pour la courbe C de f.

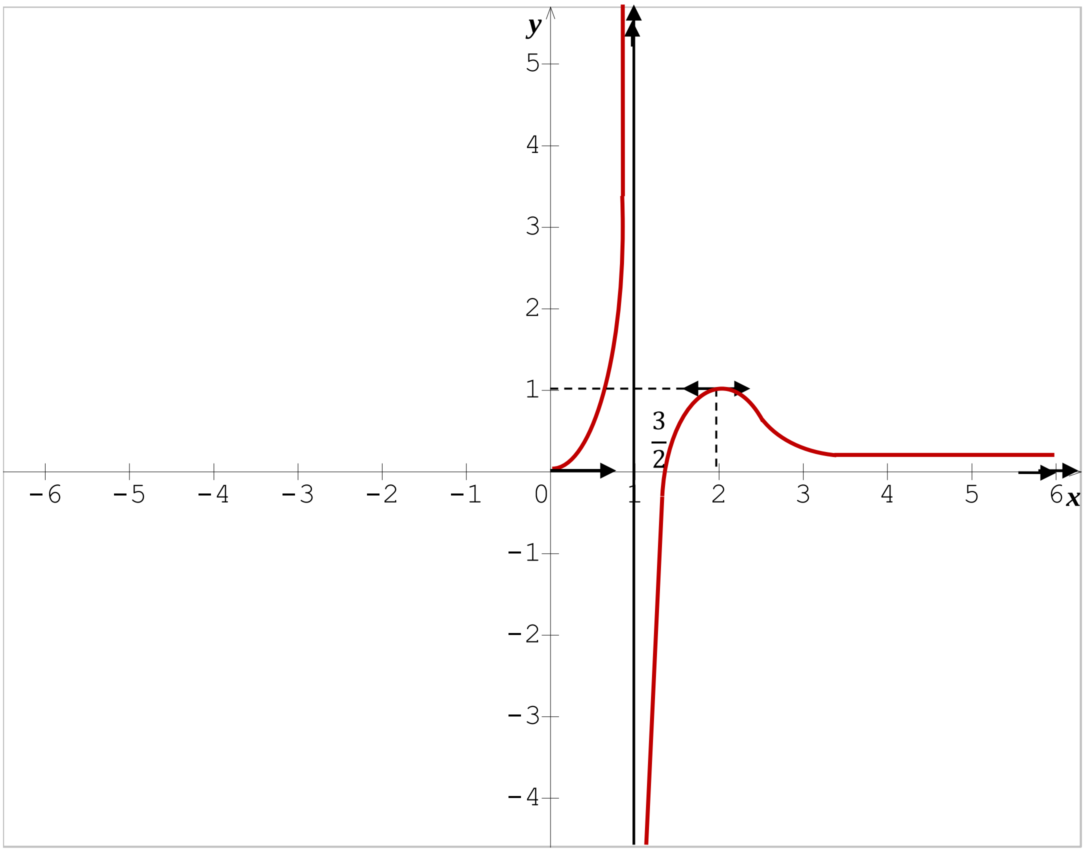
x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f'(x)$			0	$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$			1	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	3

1) Tracer la courbe C de f
2) Compléter le tableau de variation de f
3) On suppose que $f(x)$ est de la forme $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{x^2+\beta x+\alpha}$

a- Déterminer les réels a ; b ; c ; β et α

b- Montrer que la restriction g de f à $I =]\,2\ ;\ 4\,]$ réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.
c- Donner l'équation de la tangente à la courbe C' de g^{-1} au point d'abscisse 1
d- Tracer C'
e- Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre m, du nombre et des signes des solutions de $l'équation$ $(3-m)x^2 - (12 - 4m)x + 8 = 0$

60 On donne la figure ci-dessous qui représente une partie de la courbe d'une fonction g.



1) Compléter la courbe de la fonction g sachant que g est impaire.

2) Donner les équations des asymptotes à (Cg)
3) Quel est le domaine de définition de g sous forme de réunion d'intervalles
Donner les limites de g aux bornes de Dg.
4) Dresser le tableau de variation de g.

61 Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{x+d}$ où a, b, c, d sont des réels et

(Cf) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

1) Trouver les réels a ; b ; c et d sachant que la droite d'équation $x = 3$ est asymptote et (Cf) passe par les points A(2 ; 3) , B(4 ; 7) et admet au point d'abscisse 2 une tangente horizontale.

2) Dans la suite du problème on prendra $a = 1$; $b = -1$; $c = -5$ et $d = -3$

a- Etudier la fonction f

b- Etudier la position de (Cf) par rapport à son asymptote oblique

c- Montrer que la restriction g de f à l'intervalle $[\,4\,;\,+\infty[$ réalise une bijection de $[\,4\,;\,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

d- Calculer $g(5)$; $g(6)$; $(g^{-1})'\left(\dfrac{15}{2}\right)$

3) Montrer que (Cf) admet un centre de symétrie que l'on déterminera
4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β

5) a- Montrer que $\forall x \in [4,5]\ on\ a\ |f'(x)| \leq \frac{3}{4}$

b- En déduire que $\left|f(x) - \frac{15}{2}\right| \leq \frac{3}{4}|x-5|$

6) Tracer (Cf) dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ainsi que (Cg^{-1}) la courbe de g^{-1}

62 **Partie A** : Soit f la fonction numérique définie sur $Df =]\ 1\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

1) Montrer que la dérivée de f garde un signe constant sur Df.
2) Etudier les variations de f (limite et sens de variation)
3) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]\ 1\ ;\ 2[$

Partie B: On se propose de résoudre l'équation $f(x) = 0$ dans $]\ 1\ ;\ 2[$.

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$, a même ensemble de solution que l'équation $1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = x$

2) On appelle g la fonction définie sur $]\ 0\ ;\ +\infty[$ par : $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ soit α la solution de l'équation $f(x) = 0$ (On a donc g(α) = α et $1 \leq \alpha \leq 2$)
   a) Montrer que si x est élément de $]\ 1\ ;\ 2[$ alors $g(x)$ est aussi élément de $]\ 1\ ;\ 2[$.
   b) Justifier la dérivabilité de g sur $[\ 0\ ;\ +\infty[$Calculer la dérivée de g puis montrer que pour tout $x \in [1, 2]$ on a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$
   c) En déduire que pour tout x de [1, 2], on a $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

63 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2}$ et soit (C) sa courbe représentative dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Etudier la fonction f (limites, variations).
2) a- Déterminer les réels a ; b ; c et d tel que $\forall x \neq 1$ on a : $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{(x-1)^2}$

b- En déduire que la droite (D) d'équation $y = x - 2$ est asymptote à (C)
c- Préciser la position de la courbe (C) et la droite (D) et les coordonnées du point commune I à la courbe (C) et (D).
3) Tracer (C) et (D)
4) a- Déterminer l'abscisse du point J de la courbe (C) où la tangente est parallèle (D) ; puis l'équation de cette tangente. Tracer cette tangente (T).
b- En déduire graphiquement suivant les valeurs de m, le nombre de solution de l'équation $f(x) = x + m$.

5) On se propose de retrouver par calcul le résultat trouvé en 4)
a) Montrer que les abscisses des points d'intersection de (C) et de la droite d'équation

$y = x + m$ sont les solutions de l'équation :
(E) : $(m + 2)x^2 + (-2m - 7)x + m + 4 = 0$
b) Trouver suivant les valeurs de m, le nombre de solution de l'équation (E).
c) Pour quelles valeurs de m la courbe (C) et la droite d'équation $y = x + m$ ont – elles deux points communs M et N ?
d) Dans ce cas, calculer en fonction de m, l'abscisse du milieu I de [M N].
e) Montrer que lorsque m varie, le point I appartient à la courbe (C') d'équation :
$y = x + \dfrac{7-4x}{2x-2}$

64 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ et (C) sa courbe.

1) a- Démontrer que la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ est au dessus de sa tangente en tout point.

b- En déduire que $\forall \alpha \in [0 ; +\infty[$, on a : $\dfrac{1}{1+\alpha} \geq 1-\alpha$ (1)

2) Soit la fonction g définie sur $[0, +\infty[$, par $g(x) = \sqrt{x+1}$ et soit a un réel strictement positif.

3) Déterminer la dérivée première et seconde de g sur $[0 ; +\infty[$
4) Vérifier que $\forall x \in [0 ; a[$ on a : $\dfrac{1}{2\sqrt{1+a}} \leq g'(x) \leq \dfrac{1}{2}$
5) En utilisant le théorème de l'inégalité des accroissements finis à la fonction g sur l'intervalle $[0 ; a]$, démontré que $1 + \dfrac{a}{2\sqrt{1+a}} \leq \sqrt{1+a} \leq 1+\dfrac{a}{2}$ (2)

6) a) Déduire des relations (1) et (2) que :

$\forall \alpha \in [0 ; +\infty[$, on a : $1 + \dfrac{a}{2} - \dfrac{a^2}{4} \leq \sqrt{1+a} \leq 1+\dfrac{a}{2}$

b) Etablir alors l'inégalité suivante : $1{,}0475 \leq \sqrt{1{,}1} \leq 1{,}05$
c) En déduire une valeur approchée de $\sqrt{1{,}1}$ tout en précisant la marge d'incertitude.

7) Etudier la fonction f puis tracer la courbe (C).

Suites Numériques

Objectifs

Ce thème vise à :
• étudier le comportement global d'une suite numérique (majoration, minoration, convergence, variations) ;
• mettre en œuvre le raisonnement par récurrence ;
• donner des outils pour traiter des problèmes d'approximation.

Savoirs et savoir-faire

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Suites monotones • Suites majorées, minorées, bornées • Suites convergentes : - Notion de convergence. - Unicité de la limite (admise) - Toute suite croissante et majorée converge - Toute suite décroissante et minorée converge. - Si f est une fonction numérique telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = l$ alors la suite définie par $u_n = f(n)$ converge vers *l*. • si (u_n) est une suite convergeant vers a et f une fonction continue en a alors la suite $v_{n=f(u_n)}$converge vers f(a). • Convergence des suites géométriques (suites du type (a^n)). • Suites divergentes • Convergence des suites géométriques et des suites du type n^α • Suites divergentes • Théorèmes de comparaison : Soient les suites (v_n) et (u_n) 1) Si à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n$ et si (v_n) tend vers $+\infty$, alors (u_n) tend vers $+\infty$. 2) Si à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n$ et si (u_n) tend vers $-\infty$, alors (v_n)	• Démontrer qu'une suite est monotone : - Par comparaison de deux termes généraux consécutifs ; - Par l'étude des variations d'une fonction ; - Par un raisonnement par récurrence. • Démontrer qu'une suite est majorée et/ou minorée : - Par un calcul direct ; - Par l'étude des variations d'une fonction ; - Par un raisonnement par récurrence. • Démontrer qu'une suite est convergente ou divergente par : - L'étude du comportement d'une fonction ; - L'utilisation des opérations sur les limites ; - L'utilisation des théorèmes de comparaison. •conjecturer à partir d'une représentation graphique et comportement d'une suite récurrente.

tend vers $-\infty$. 3) Si à partir d'un certain rang, $\|v_{n} - l\| \leq u_n$ et si (u_n)tend vers 0, alors (v_n) tend vers *l*. 4) Si a partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n \leq w_n$ et si (v_n) et (w_n) tend vers *l*, alors (u_n) tend vers *l*. 5) Si à partir d'un certain rang $v_n \leq u_n$ et (u_n) tend vers *l* et (v_n) tend vers *l'* alors *l'* $\leq l$. •suites (a^n) et (n^α). Croissance comparée Limites et comportements asymptotiques comparés des suites (In n) ; (a^n), a> 0 et (n^α), $\alpha > 0$. Suites récurrentes définies par une relation du type : $u_{n+1} = f(u_n)$. Soit (u_n) une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. Si (u_n) converge vers *l* et si f est continue en *l* alors f(*l*) = *l*.	

I- Généralité :

1) Définition :

On appelle suite numérique toute fonction définie de $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. On note
U : $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$n \to U(n) = u_n$

Exemple :

Soit une suite u_n définie par : $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$. Calculer : u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4

$u_0 = \frac{1}{2}$; $u_1 = 1$; $u_2 = \frac{5}{4}$; $u_3 = \frac{7}{5}$; $u_4 = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

2) Mode de définition d'une suite :

- Une suite peut être définie par 1 formule explicite c'est-à-dire : u_n en fonction de n
  $u_n = f(n)$.

Exemple : $u_n = n + 3$; $v_n = \frac{2n - 4}{n + 1}$; $w_n = 4n^2 - 3n + 1$

- Une suite peut être définie par son 1er terme et une formule de récurrence, c'est-à-dire u_{n+1} s'exprime en fonction de u_n.

Exemple : soit la suite : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n + 4 \end{cases}$ .Calculer : u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4

Solution :

Pour $n = 0$, $u_1 = \frac{3}{2}u_0 + 4 = \frac{3}{2}(2) + 4 = 7$

Pour $n = 1$, $u_2 = \frac{3}{2}u_1 + 4 = \frac{29}{2}$

Pour $n = 2$, $u_3 = \frac{3}{2}u_2 + 4 = \frac{103}{4}$

Pour $n = 3$, $u_4 = \frac{3}{2}u_3 + 4 = \frac{341}{8}$

u_0 est le 1er terme de la suite et u_n est le terme général.

3) Sens de variation d'une suite

- Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$; $\forall\, n \in \mathbb{N}$ alors u_n est croissante
- Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$; $\forall\, n \in \mathbb{N}$ alors u_n est décroissante
- Si $u_{n+1} - u_n = 0$; $\forall\, n \in \mathbb{N}$ alors u_n est constante

Exemple :

Etudier le sens de variation de chacune des suites :

$u_n = \frac{2n+3}{n+2}$; $v_n = -\frac{3}{2}n + 4$

Solution :

$$u_n = \frac{2n+3}{n+2} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{2(n+1)+3}{(n+1)+2} = \frac{2n+5}{n+3}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n+5}{n+3} - \frac{2n+3}{n+2} = \frac{1}{(n+3)(n+2)} > 0$$

D'où u_n est croissante

$$v_n = -\frac{3}{2}n + 4 \Rightarrow v_{n+1} = -\frac{3}{2}(n+1) + 4 = -\frac{3}{2}n + \frac{5}{2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \left(-\frac{3}{2}n + \frac{5}{2}\right) - \left(-\frac{3}{2}n + 4\right) = -\frac{3}{2} < 0$$

$v_{n+1} - v_n = -\frac{3}{2} < 0$ D'où v_n est décroissante

4) Représentation des termes d'une suite :

Pour représenter les termes d'une suite u_n sur l'axe de abscisses, on trace la 1ère bissectrice (D) d'équation $= x$. Puis on trace la fonction associée à la suite u_n en posant $u_n = x$ et $u_{n+1} = f(x)$. On détermine les termes de la suite sur l'axe des abscisses par projection.

Exemple

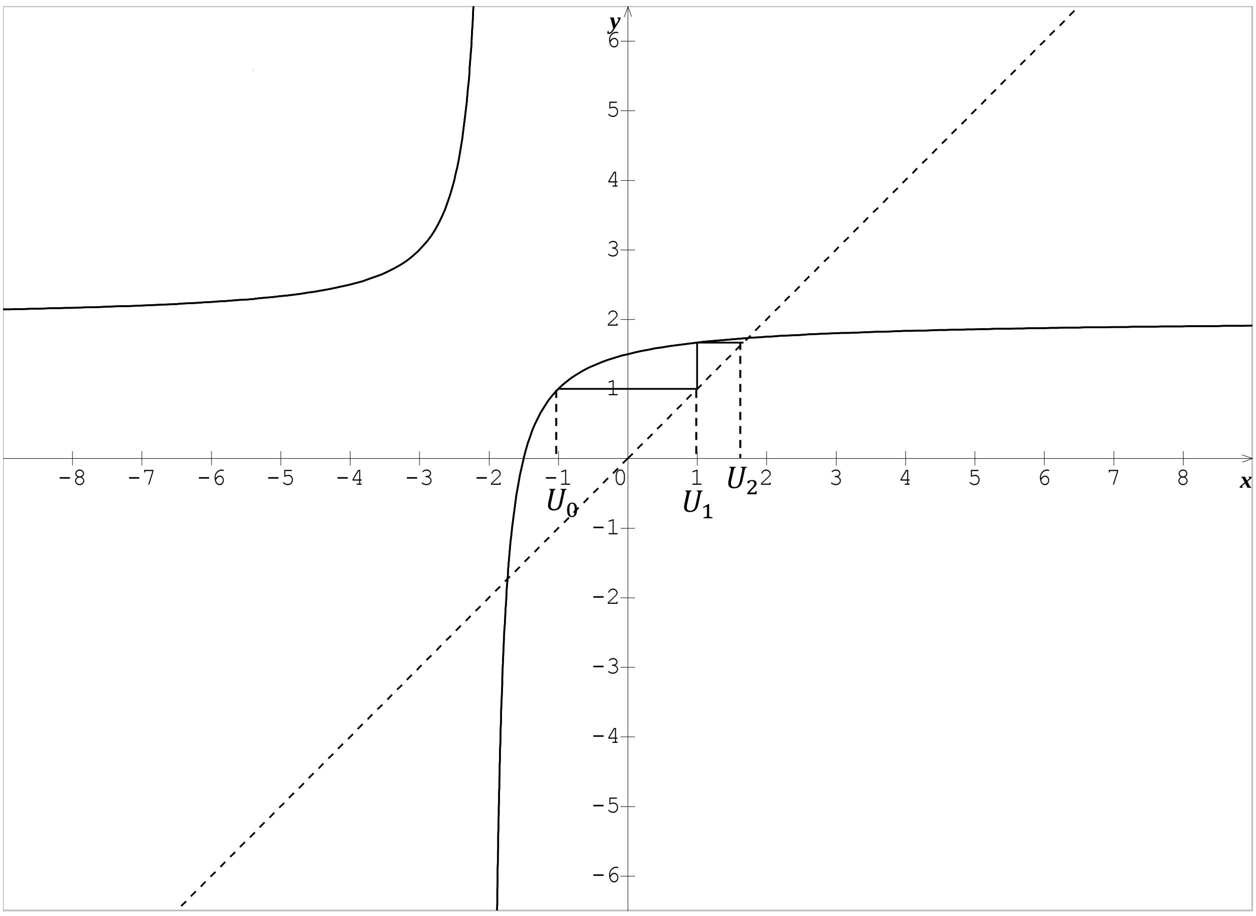
Soit (u_n) définie Par : $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \frac{3 + 2U_n}{2 + U_n} \end{cases}$

Représenter sur l'axe (ox) les 3 premiers termes de la suite u_n.

Solution

Désignons par f la fonction définie sur $]-2 \ ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{3 + 2x}{2 + x}$

En suivant les règles de constructions ci-dessous , on a la représentation suivante :



II- Convergence d'une suite

1) Activités :

Activité1 :

Soit la suite $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

1) Calculer u_1 ; u_2 ; u_{1000} ; $u_{100000000}$.

2) En déduire le sens de variation de u_n

3) Que peut – on conclure ?

Solution :

1) Calculons : u_1 ; u_2 ; u_{1000} ; $u_{100000000}$.

Pour $n = 1$ alors $u_1 = 1$

Pour $n = 2$ alors $u_2 = \frac{1}{2}$

Pour $n = 1000$ alors $u_{1000} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$

Pour $n = 100000000$ alors $u_{100000000} = \frac{1}{100000000} = 0{,}00000001$

En déduisons le sens de variation de u_n

Puis que : $u_1 > u_2 > u_{1000} > u_{100000000}$ alors u_n est une suite décroissante.

2) Conclusion : on remarque que lors que n tend vers $+\infty$ alors u_n tend vers 0.

On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

On dit alors que la valeur limite de la suite u_n est 0, quand n tant vers $+\infty$.

Activité 2 :

Soit $v_n = n + 2$. Calculer v_1 ; v_2 ; v_{1000} ; $v_{100000000}$. Puis conclure.

Solution :

1) Calculons : v_1 ; v_2 ; v_{1000} ; $v_{100000000}$

Pour $n = 1$ alors $v_1 = 3$

Pour $n = 2$ alors $v_2 = 4$

Pour $n = 1000$ alors $v_{1000} = 1002$

Pour $n = 100000000$ alors $v_{100000000} = 100000002$

2) **Définition** :

Une suite u_n est dite convergente si et seulement si son terme général u_n a une limite finie l.
on note :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l \quad \text{avec } l \in \mathbb{R}$$

Remarque :

Si $\lim\limits_{n \to -\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Alors u_n est dite divergente.

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ alors la suite u_n converge vers l.

Evaluation :

Etudier la convergence de chacune des suites suivantes :

$$u_n = \frac{n + 2}{n + 3} \; ; \; v_n = \frac{2 - 3n}{n + 4} \; ; \; w_n = 2^{-n}$$

III- Suite majorée − minorée −bornée :

1) Définitions :

- Une suite u_n est majorée si et seulement $\forall\, a \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $U_n \leq a$.
- Une suite u_n est minorée si et seulement $\forall\, a \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $U_n \geq a$.
- Une suite u_n est bornée si et seulement $\forall\, a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{R}$ et que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ on a : $b \leq u_n \leq a$

2) Théorèmes :

a) Théorème 1 :

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Exemple :

Soit la suite u_n définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots \ldots .. \frac{1}{2n}$

Montrer que la suite $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots \ldots .. \frac{1}{2n}$ est décroissante et minorée.

En déduire qu'elle est convergente.

Solution :

On remarque tous les termes de la suite u_n sont positifs.
Donc cette suite est minorée par 0. Etudions maintenant sa décroissance.

$u_{n+1} - u_n = -\frac{(3n+2)}{n(2n+1)(2n+2)} < 0$. Donc la suite Un est décroissante.

Déduction : u_n étant à la fois positive et décroissante, alors elle est convergente.

b) Théorème 2 :

Tout sous-ensemble non vide E de nombres réels a une borne supérieure A : c'est-à-dire
$\forall\, x \in E$; $x \leq$ A

3) Propriétés :

Soient u_n et v_n deux suites tel que :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} v_n = l'$$

On a les propriétés suivantes :

P1 : Si $u_n \leq v_n$: alors $l \leq l'$

P2 : $\lim_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = l + l'$

P3: Si (u_n) est bornée et si (v_n) est divergente, alors :

a) $\lim_{n \to \infty} (u_n + v_n) = +\infty$ b) $\lim_{n \to \infty} (u_n \times v_n) = \infty$

IV- Relations entre les limites :

Théorème : (Théorème des gendarmes).

Considérons les trois suites u_n ; v_n et w_n ($n > n_0$)

Tel que : $u_n \leq v_n \leq w_n$

u_n et w_n Si converge vers la même limite l ; alors v_n converge vers l.

Preuve :

A partir de la relation donnée entre les suites on a :

$$\lim_{n \to \infty} u_n \leq \lim_{n \to \infty} v_n \leq \lim_{n \to \infty} w_n$$

$$\Leftrightarrow \quad l \leq \lim_{n \to \infty} v_n \leq l$$

Alors $\lim_{n \to \infty} v_n = l$

V- Suites Adjacentes :

Définition :
Une suite (u_n) est adjacente à une autre suite (v_n) si l'une des deux suites est décroissante tandis que l'autre est croissante et si
Alors $\lim\limits_{n \to \infty} (u_n - v_n) = 0$

Théorème 1 :
Si les suites u_n et v_n sont adjacentes ($u_n$croissante et $v_n$décroissante) alors :
$\forall\ n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n \leq v_n$.

Preuve :
Supposons que le contraire de la conclusion du théorème soit vrai pour $n = k$, c'est-à-dire : $u_k \geq v_k$.
Pour $n > k$, puisque u_n est décroissante et que v_n est décroissante, on a :

$u_n \geq u_k \geq v_k \geq v_n$

$\Rightarrow (u_n - v_n) \geq (u_k - v_k)$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} (U_n - V_n) \neq 0$

Théorème 2 : si deux suites sont adjacentes, alors elles convergent à une même limite.

Preuve :
Puis que les suites sont adjacentes et que u_n est croissante et v_n décroissante, le **théorème 1** implique : $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$
On note alors que :

a) u_n est croissante et elle est majorée par v_0 , donc elle converge vers l.
b) v_n est décroissante et elle est minorée par u_0 donc elle converge vers l'.

Ainsi

$\lim\limits_{n \to \infty} (U_n - V_n) = l - l'$

$\Rightarrow$ 0 = l – l' <=> l = l'

Ce qu'il fallait prouver.

Exemple :
Considérons les deux suites suivantes : $U_{n+1} = \sqrt{U_n \bullet V_n}$ (moyenne géométrique)
Et ($0 \leq U_0 \leq V_0$)
$V_{n+1} = \dfrac{U_n + V_n}{2}$ (moyenne arithmétique)

1) Calculer $V_n^2 - U_n^2$ puis en déduire qu'il est non négatif, donc que $V_{n+1} \geq U_{n+1}$

(Pour tout $n \in \mathbb{N}$).

2) Utiliser les résultats de la question 1) pour montrer que $U_{n+1} > U_n$ et $V_{n+1} < V_n$.

C'est-à-dire que u_n est croissante et que v_n est décroissante.

3) Montrer que les suites u_n et v_n sont adjacentes.

Solution :

1) $V_{n+1}^2 - U_{n+1}^2 = \dfrac{(U_n + V_n)^2}{4} - (\sqrt{U_n \bullet V_n})^2$

$= \dfrac{U_n^2 + 2U_n \bullet V_n + V_n^2}{4} - U_n \bullet V_n$

$= \dfrac{U_n^2 + 2U_n \bullet V_n + V_n^2 - 4U_n \bullet V_n}{4}$

$V_{n+1}^2 - U_{n+1}^2 = \dfrac{(U_n - V_n)^2}{4}$

Puis que $\dfrac{(U_n - V_n)^2}{4} > 0$ alors $V_{n+1}^2 - U_{n+1}^2$ est non négatif.

$u_{n+1} = \sqrt{U_n \bullet V_n} \geq \sqrt{U_n \bullet U_n}$ puis que $u_n \leq v_n$) => $v_{n+1} \geq u_n$

$V_{n+1} = \dfrac{U_n + V_n}{2} \leq \dfrac{U_n + V_n}{2}$ puis que $U_n \leq V_n$ => $u_{n+1} \leq v_n$.

3) A partir de la définition des suites, nous avons :

$v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{U_n + V_n}{2} - \sqrt{U_n \bullet V_n} \leq \dfrac{U_n + V_n}{2} - \sqrt{U_n \bullet V_n}$

⇨ $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \dfrac{U_n + V_n}{2} - U_n$

⇨ $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(V_n - U_n)$

Cette dernière relation étant valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient par récurrence.

$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$ ce qui donne à la limite

$0 \leq \lim\limits_{n \to \infty} (v_{n+1} - u_{n+1}) \leq \lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{1}{2^n}\right) (v_0 - u_0) = 0$

=> $\lim\limits_{n \to \infty} (V_n - U_n) = 0$

Donc les deux suites sont adjacentes.

VI- Suites Arithmétiques

1) Activité :

Au 1er Janvier 2012, le prix d'un kilo de sucre est de 550 f CFA.
Sachant que le prix du kilo subit une augmentation de 50 f CFA au 1er Janvier de chaque année, quel serait le prix du kilo de sucre au 1er Janvier 2013 ? Au 1er Janvier 2014 ?
On désigne par p_n le prix du kilo du sucre au 1er Janvier $+ n$.
Calculer P_1 ; P_2 ; P_3 et p_n.
Calculer $p_{n+1} - p_n$.

Solution

Soit P_0 le prix d'un kilo de sucre au 1er Janvier 2012 tel que $P_0 = 550$.
Calculons le prix d'un kilo de sucre :

- **Au 1er Janvier 2013** , le prix d'un kilo de sucre serait $P_1 = P_0 + 50 = 550 + 50 = 600$.
- **Au 1er Janvier 2014** , le prix d'un kilo de sucre serait $P_2 = P_1 + 50 = 600 + 50 = 650$.

Soit P_n le prix d'un kilo de sucre au 1er Janvier $+ n$.
Calculons : P_1 ; P_2 ; P_3 et p_n.

- $P_0 = 550$.
- $P_1 = P_0 + 50 = 550 + 50 = 600$.
- $P_2 = P_1 + 50 = 660 + 50 = 650$.
- $P_3 = P_2 + 50 = 650 + 50 = 700$.
- $p_n = P_0 + 50n = 550 + 50n$.

Calculons $p_{n+1} - p_n$.

$p_n = 550 + 50n \Rightarrow p_{n+1} = 550 + 50(n + 1) = 550 + 50 + 50n = 600 + 50n$

$\Rightarrow p_{n+1} - p_n = (600 + 50n) - (550 + 50n) = 600 + 50n - 550 - 50n = 50$
Alors on a : une suite arithmétique de raison r = 50.

2) **Définition** :

Une suite u_n est dite arithmétique si et seulement si : $\forall n \in N$; $u_{n+1} - u_n = \boldsymbol{r}$.
$\boldsymbol{r}$ est appelé la raison de la suite u_n .

Exemple :

Soit une suite u_n définie par : $u_n = \frac{2}{3}n + 4$.
Démontrer que u_n est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le 1er terme U_0.

Solution :

$u_n = \frac{2}{3}n + 4$

$U_{n+1} = \frac{2}{3}(n+1) + 4 = \frac{2}{3}n + \frac{14}{3}$ =>

$U_{n+1} - U_n = \frac{2}{3}$ d'où U_n est une suite arithmétique de raison $r = \frac{2}{3}$ et de 1erterme $u_0 = 4$

3) **Expression du terme général :**

Soit U_n une suite de 1er de terme U_0 et de raison r.

$U1 - U0 = r$
$U2 - U1 = r$
$U3 - U2 = r$
$\vdots$

$$\frac{U_n - U_{n-1} = r}{U_n - U_0 = nr}$$

=> $u_n = u_0 + nr$

D'une façon générale si u_p est le 1er terme l'expression du terme général est :
$u_n = u_p + (n-p)r$

Exemple :

Soit la suite réel définie par $\begin{cases} U_0 = -1 \\ \forall n \in N; U_{n+1} = U_n - 3 \end{cases}$

a) Démontrer que u_n est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le 1er terme.
b) Exprimer u_n en fonction de n.

Solution :

a) $u_{n+1} = u_n - 3$ => $u_{n+1} - u_n = -3$
D'où Un est une suite arithmétique de raison $r = -3$ et de 1er terme $u_0 = -1$.

b) $U_n = U_0 + nr = -1 + n(-3)$ => $u_n = -3n - 1$

4) **<u>Termes équidistants d'une suite :</u>**

Soit $(u_n)\ n\ \in \mathbb{N}$ une suite arithmétique p un entier naturel tel que $p \leq n$ les termes u_p et u_{n-p} sont des termes équidistants des termes extrêmes u_0 et u_n car il ya p termes avant le terme u_p et p termes après le terme u_{n-p} on a :

5) **<u>Somme des termes équidistants d'une suite arithmétique</u>**

Soit p un entier naturel tel que $p \leq n$
Les termes u_p et u_{n-p} sont des termes équidistants des termes extrêmes
$u_p + u_{n-p} = (u_0 + pr) + (u_0 + (n-p)r) = u_0 + (u_0 + nr)$ d'où

$u_p + u_{n-p} = u_0 + u_n$ d'où le théorème

<u>Théorème</u> : la somme de deux termes équidistants d'une suite arithmétique est égale à la somme des termes extrêmes

6) **<u>Propriétés :</u>**

En application du théorème on a :
P1 : Trois nombres **a, b, c** forment une progression arithmétique si :

2b = a + c.
<u>Preuve</u> :

Soit $a, b\ et\ c$ trois réels
$b = a + r$
$c = b + r$
$a + c = a + b + r = 2a + 2r = 2(a + r). Alors : \boldsymbol{a + c = 2b}$

P2 : Trois nombres $\boldsymbol{a, b, c}$ forment une progression arithmétique de raison r si :

$\boldsymbol{b = a + r \quad et \quad c = a + 2r.}$

P3 : Quatre nombres $\boldsymbol{a, b, c}$, $\boldsymbol{d}$ forment une progression arithmétique de raison r si :

$\boldsymbol{3b - d = 2d}$

P4 : Soit u_n une suite arithmétique de 1er terme u_0. La somme de deux termes équidistants est toujours à la somme des extrêmes

$u_0\ , u_1\ , u_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ u_{n-2}; u_{n-1}; u_n$

$u_1; u_{n-1}$ sont équidistants

$u_0 + u_n = u_p + u_{n-p}$

Exemple

Trouver 3 nombres consécutifs a ; b et c d'une suite en progression arithmétique sachant que

$$\begin{cases} a+b+c = 3 \\ 3a-6b+c = 6 \end{cases}$$

Solution :

Trouvons 3 nombres consécutifs a ; b et c d'une suite en progression arithmétique sachant

que $\begin{cases} a+b+c = 3 \\ 3a-6b+c=6 \end{cases}$

On sait que pour une progression arithmétique de 3 termes a ; b ; c , on a : a + c = 2b
Ainsi l'équation dévient :

$$\begin{cases} 2b + b = 3 \\ 3a-6b+c=6 \end{cases} => \begin{cases} 3b = 3 \\ 3a-6b+c=6 \end{cases} => \begin{cases} b = 1 \\ 3a-6b+c=6 \end{cases}$$

D'autre part a + b + c = 3 = > a + 1 + c = 3 = > a + c = 2

$$\begin{cases} a+c = 2 \\ 3a-6+c=6 \end{cases} => \begin{cases} a + c = 2 \\ 3a + c = 12 \end{cases} => \begin{cases} -a-c = -2 \\ 3a + c = 12 \end{cases}$$

= > 2a = 10 = > a = 5 et c = -3

D'où les nombres a ; b et c sont tels que a = 5 ; b = 1 et c = -3

7) Sens de variation d'une suite arithmétique

Soit u_n une suite arithmétique de raison r. On a :
$u_{n+1} - u_n$ = r d'où :

- Si $r > 0$ alors u_n est croissante
- Si $r < 0$ alors u_n est décroissante
- Si $r = 0$ alors u_n est constante

8) Somme des termes d'une suite arithmétique :

Soit u_n une suite arithmétique de 1er terme u_0 et de raison r.

$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots\ldots + U_{n-2} + U_{n-1} + U_n$

$S_n = U_n + U_{n-1} + U_{n-2} + \ldots\ldots + U_2 + U_1 + U_0$

$2S_n = (U_0 + U_n) + (U_1 + U_{n-1}) + (U_2 + U_{n-2}) + \ldots\ldots + (U_n + U_0)$

$2S_n = (U_0 + U_n) + (U_0 + U_n) + (U_0 + U_n) + \ldots\ldots + (U_0 + U_n)$

$\Rightarrow 2S_n = (n + 1)(U_0 + U_n)$

$\boxed{S_n = \frac{n+1}{2}(U_0 + U_n)} \Leftrightarrow S_n = \frac{nombre\, de\, termes}{2}$ (1er terme + dernier terme)

ou $\boxed{S_n = \frac{(n-P+1)}{2}(U_p + U_n)}$

Remarque : une suite arithmétique est toujours divergente

VII- Suites géométriques

Situation problème

Le premier Janvier 1999, la population d'une commune rurale était de 3000 habitants.
On admet que cette population diminue de 4 % chaque année.
Calcule la population de cette commune :
a) Au 1er Janvier 2005 ;
b) Au 1er Janvier 2006
c)Au 1er Janvier 2012

Solution

Soit U_n la population de cette commune au 1er Janvier de l'année n.

Soit $U_1 = 3000$ la population initiale de cette commune.

On a :

$U_1 = 3000$.

$U_2 = U_1 - 4\ \%U_1 \Rightarrow U_2 = U_1(1 - 4\ \%) = U_1(1 - \frac{4}{100}) = U_1(0{,}96)$

$U_3 = U_2(0{,}96)$

. .
. .
. .

$U_{n+1} = U_n(0{,}96)$

$\Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = 0{,}96.$

Alors on a : une suite géométrique de raison q = 0,96.

D'où son expression est : $U_n = U_1(q)^{n-1} = 3000(0{,}96)^{n-1}$

Déterminons ainsi la population :

- **Au 1er Janvier 2005**

On sait que : $U_n = 3000(0{,}96)^{n-1}$ et $n = 2005 - 1999 = 6$

D'où la population au 1er Janvier 2005 est :$U_6 = 3000(0{,}96)^{6-1} = 3000(0{,}96)^5$

$\Rightarrow \quad U_6 = 2446{,}11 \approx 2446$

Ainsi la population au 1er Janvier 2005 est : 2244 habitants.

- **Au 1er Janvier 2006**

On sait que : $U_n = 3000(0,96)^{n-1}$ et $n = 2006 - 1999 = 7$

D'où la population au 1er Janvier 2006 est :$U_7 = 3000(0,96)^{7-1} = 3000(0,96)^6$

=> $U_7 = 2348,27 \approx 2348$

Ainsi la population au 1er Janvier 2006 est : 2348 habitants.

- **Au 1er Janvier 2012**

On sait que : $U_n = 3000(0,96)^{n-1}$ et $n = 2012 - 1999 = 13$

D'où la population au 1er Janvier 2005 est :$U_{13} = 3000(0,96)^{13-1} = 3000(0,96)^{12}$

=> $U_{13} = 1838,12 \approx 1838$

Ainsi la population au 1er Janvier 20012 est : 1838 habitants.

1) <u>Définition</u> :

U_n est une suite géométrique si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{U_n+1}{U_n} = q$ ou $U_{n+1} = qU_n$.

q est un réel fixé appelé la raison de la suite géométrique.

<u>Exemple</u> :

1, 2, 4, 8, 16, 32……….. 2^n sont les termes d'une suite géométrique de raison q = 2 et de 1er terme $U_0 = 1$
L'expression de terme général est $U_n = 2^n$

2) <u>Expression du 1er terme générale</u>

Soit u_n une suite géométrique de raison q et de 1er terme u_0

$U_1 = qU_0$
$U_2 = qU_1$
$U_3 = qU_2$
$U_4 = qU_3$
$\vdots$
$U_n = qU_{n-1}$

Multiplions membre à membre les termes de l'égalité.
$U_1 \times U_2 \times U_3 \times U_4 \times \ldots \times U_n = (qU_0)(qU_1)(qU_2)\ldots(qU_{n-1})$

$u_n = q^n \times U_0$ ou d'une manière générale $U_n = U_p.q^{n-p}$ (après simplification des facteurs semblables dans les deux membres)

Où Up désigne le 1er terme.

3) **Produit des termes équidistants des termes extrêmes d'une suite géométrique :**

Théorème : Le produit de deux termes équidistants des termes extrêmes est égal au produit des termes extrêmes c'est-à-dire $U_p \times U_{n-p} = U_0 \times U_n$

Propriétés :

P$_1$: Trois nombres $\boldsymbol{a, b, c}$ forment une progression géométrique si :

$\boldsymbol{b^2 = ac}$. **(en application du théorème précédent)**

P$_2$: Trois nombres $\boldsymbol{a, b, c}$ forment une progression géométrique de raison q si :

$\boldsymbol{b = qa}$ **et** $\boldsymbol{c = q^2 a}$.

P$_3$: Quatre nombres $\boldsymbol{a, b, c, d}$ forment une progression géométrique de raison q si :

$\boldsymbol{b = qa \quad ; \quad c = q^2 a \quad et \quad d = q^3 a}$

Exemple

Trouver 3 nombres consécutifs a ; b et c d'une suite en progression géométrique sachant que $\begin{cases} a \bullet b \bullet c = 8 \\ a + b = -1 \\ c - a = 1 \end{cases}$

On sait que pour une progression géométrique de 3 termes a ; b ; c , on a : a×c = b^2
Ainsi l'équation dévient :

$$\begin{cases} (a \bullet c) \bullet b = 8 \\ a + b = -1 \\ c - a = 1 \end{cases} => \begin{cases} (b^2) \bullet b = 8 \\ a + b = -1 \\ c - a = 1 \end{cases} => \begin{cases} b^3 = 8 \\ a + b = -1 \\ c - a = 1 \end{cases} => \begin{cases} b = 3 \\ a + b = -1 \\ c - a = 1 \end{cases} => \begin{cases} b = 3 \\ a = -4 \\ c - a = 1 \end{cases}$$

$$=> \begin{cases} b = 3 \\ a = -4 \\ c = -3 \end{cases}$$

D'où les nombres a ; b et c sont tels que $a = -4$; $b = 3$ et $c = -3$

4) Sens de variation d'une suite géométrique :

Soit u_n suite géométrique de raison et de 1er terme u_0 :

- **1er cas** $U_0 > 0$: si

- $q > 1 \Rightarrow u_n$ est croissante
- $0 < q < 1 \Rightarrow u_n$ est décroissante
- $q = 1$ alors u_n constante

- **2è Cas** $U_0 < 0$: si

- $q > 1 \Rightarrow u_n$ est croissante
- $0 < q < 1 \Rightarrow u_n$ est décroissante
- $q = 1 \Rightarrow u_n$ est constante

9) Con vergence d'une suite géométrique :

La limite d'une suite étant la limite de son terme général une géométrique est convergente si $-1 < q \leq 1$

La suite est divergente si q∈ $]-\infty;-1]u]1;+\infty[$

5) Somme des termes d'une suite géométrique :

Soit U_n une suite géométrique de raison q et de 1er terme U_0

$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + U_n$ (1)

$qS_n = qU_0 + qU_1 + qU_2 + qU_3 \ldots\ldots\ldots + qU_n$ (2)

En effectuant la différence des équations (1) et (2) , on a :

$S_n - qS_n = U_0 - qU_n$ or $U_n = U_0 \times q^n$

$S_n (1 - q) = U_0 - q(q^n \times U_0)$

$S_n (1 - q) = U_0 (1 - q^{n+1})$

$$\boxed{S_n = \frac{U_0(1-q^{n+1})}{1-q}(q \neq 1)}$$

$$S_n = \frac{1er\ terme\,(1-raison^{nombre\ de\ terme})}{1-raison}$$

D'une manière générale si Up est le 1er terme alors l'expression de la somme est :

$$S_n = \frac{U_p(1-q^{n-p+1})}{1-q} \quad \text{Avec } (q \neq 1)$$

6) Cas d'une suite géométrique :

Soit u_n une suite géométrique de raison q

- Si $|q| < 1$ alors U_n converge vers 0

- Si $|q| > 1$ alors U_n est divergente

- Si $|q| = 1$ alors U_n converge vers U_0

VIII- Suites économiques :

1) Les intérêts :

L'intérêt est la rémunération d'un placement pendant une période donnée, (c'est-à-dire entre un temps **T_1** et un temps **T_2**).

Ainsi les intérêts sont classés en deux catégories: (**intérêts simples et intérêts composés).**

NB :

- L'intérêt simple est utilisé pour des placements à court et moyen terme.
- L'intérêt composé est utilisé pour des placements à long terme.

a- Intérêts simples :

Un placement est fait à intérêt simple, lorsque, à des époques fixées d'avance celui qui prête ou place son argent en touche les intérêts de façon que le capital placé reste le même jusqu'à l'époque du remboursement.

Sa formule est :

$$I = \frac{C \bullet t \bullet n}{P} = \frac{(\text{Capital placé}) \bullet (\text{Taux d'intérêt}) \bullet (\text{Durée du placement})}{\text{Période}}$$

NB :

- **Si :** n est en **jours**, alors la **période** P **= 36.000.**
- **Si :** n est en **mois**, alors la **période** P **= 1.200.**
- **Si :** n est en **année**, alors la **période** P **= 100.**

b- Intérêts composés :

Un placement est fait à intérêt composé, lorsque, à la fin de chaque unité de temps, l'intérêt est ajouté au capital pour produire un intérêt à son tour, pendant l'unité de temps suivante.

Sa formule est :

$$I_n = C_0[(1 + i)^n - 1] = (\text{Capital initial})\left[(1 + \text{taux d'intérêt})^{\text{Durée}} - 1\right]$$

NB :

- **1 an = 2 semestres = 4 trimestres = 12 mois.**
- **1 semestre = 2 trimestres = 6 mois =** $\frac{1}{2}$**an.**
- **1 trimestre =** $\frac{1}{2}$**semestre = 3 mois =** $\frac{1}{4}$**an.**

- **1 bi - an = 4 semestres = 8 trimestres = 24 mois = 2 ans.**

c- <u>Valeurs acquises :</u>

$$C_n = C_0(1 + i)^n = (Capital\ initial)(1 + Taux\ d'intérêt)^{Durée}$$

<u>NB :</u>

Le taux d'intérêt s'exprime toujours en pourcentage (%)

2) <u>Taux de décroissance −Taux d'accroissement d'une population</u> :

a-<u>Notion de population et d'individu :</u>

L'ensemble sur le quel porte une étude statistique est appelé **population** et un élément de cet ensemble est **l'individu**.

<u>NB :</u>
Dans une étude statistique, les mots : population et individu peuvent désignés des **êtres**, des **objets animés** ou **inanimés**.

b-<u>Taux de décroissance d'une population :</u>

<u>Définition :</u>

Soi**t (en** % **)** est le taux de décroissance d'une population et U_P la population initiale à l'année n, alors le taux de décroissance de cette population représente une progression géométrique de premier terme U_P et de raison **q = 1 – t.**

Ainsi le taux de décroissance d'une population à l'année n est donné par l'expression :

$U_n = U_P(1 - t)^{n-P}$ ou $U_n = U_P(q)^{n-P}$ avec q = 1 – t.

<u>NB :</u>

Si la population initiale est U_P à l'année n_1,alors la population à l'année $n_2$est :

$$U_{n_2-n_1} = U_P(1 - t)^{(n_2-n_1)-p} \text{ ou } U_{n_2-n_1} = U_P(q)^{(n_2-n_1)-p} \text{ avec } q = 1 - t$$

c-Taux de d'accroissement d'une population :

Définitions :

Définition 1 **:**Soi**t (en %)** est le taux d'accroissement d'une population et U_P la population initiale à l'année n, alors le taux d'accroissement de cette population représente une progression géométrique de premier terme U_P et de raison **q = 1 + t.**

Ainsi le taux d'accroissement d'une population à l'année n est donné par l'expression :

$U_n = U_P(1+t)^{n-P}$ **ou** $U_n = U_P(q)^{n-P}$ **avec q = 1 + t.**

NB :

Si la population initiale est U_P à l'année n_1,alors la population à l'année $n_2$est :

$$U_{n_2-n_1} = U_P(1+t)^{(n_2-n_1)-p} \text{ ou } U_{n_2-n_1} = U_P(q)^{(n_2-n_1)-p} \quad \textbf{avec q = 1 + t}$$

Définition 2 **:** Si r exprimé **(en FCFA)** est la raison d'accroissement d'une population et u_p la population initiale à l'année n, alors la raison d'accroissement de cette population représente une progression arithmétique de premier terme u_p et de raison r.
Ainsi la raison d'accroissement d'une population à l'année n est donnée par l'expression :

$u_{n+1} - u_n = r$

Evaluation1

Ali a reçu de son père une somme de 100.000 FCFA.
Après réception, il dépose cette somme à la banque le 1er Janvier 2009 à intérêt composé au taux annuel de 5 % en vue d'acheter une moto à 300000 FCFA.

1. A partir de quelle année pourra-t-il acheter sa moto sachant qu'il ne dispose que de cette somme ?
2. Quelle serrait la nouvelle valeur acquise par Ali s'il place un capital de 100.000 FCFA au bout de 30 semestres au taux de 2 % par semestre ?

Evaluation2

Le premier Janvier 2011, le nombre d'élève d'une école était de 6000 .
Le nombre d'élève de cette école diminue chaque année de 5 % faute de performence.
Quelle sera le nombre d'élève de cette école au 1er Janvier 2015 ?

Evaluation3

Le premier Janvier 2012, le prix d'essence au Mali était de 690 FCFA.
a-Sachant que le prix du litre subit une augmentation de 5 FCFA au 1er Janvier de chaque année, calculer le prix du litre d'essence au premier Janvier 2013 ? Au premier Janvier 2014 ?
b-Soit p_n le prix du litre d'essence au premier Janvier $+\ n,$ calculer : P_n et $p_{n+1} - p_n$ puis en déduire la nature et la raison de la suite p_n

Synthèse 1 :

a-Déterminons le temps au bout du quel Ali pourra acheter sa moto.
Soient :

- C_0 = 100.000 FCFA : le capital initial.
- C_n = 300.000 FCFA : la valeur acquise.
- $i = 5\ \% = \frac{5}{100} = 0{,}05$: le taux d'intérêt.

Calculons ainsi la durée n pour que Ali puisse acheter sa moto.

On a : $C_n = C_0(\ 1+i)^n <=> (\ 1+i)^n = \frac{C_n}{C_0} => (\ 1+0{,}05\ )^n = \frac{300000}{100000}$
$=> (\ 1{,}05\ )^n = 3$ (**or** $\boldsymbol{a^n = e^{nlna}}$)

$(\ 1{,}05\ )^n = 3 <=> e^{nln(1{,}05)} = 3$ (**or** $\boldsymbol{e^a = b <=> a = lnb}$)

$e^{nln(1{,}05)} = 3 <=> nln(1{,}05) = ln3 => n = \frac{ln3}{ln(1{,}05)}$
$=> n = \frac{1{,}09}{0{,}04} => n = 27{,}25 \approx 27.$
Donc Ali pourra acheter sa moto au bout de 27 ans.

b-Déterminons la nouvelle valeur acquise par Ali au bout de 30 semestres au taux de 2 %.

$C_n = C_0(\ 1+i\ )^n => C_{30} = 100.000(\ 1+\ 2\ \%)^{30} <=> C_{30} = 100.000(\ 1+\ 0{,}02\ )^{30}$

$=> C_{30} = 100.000(\ 1{,}02\ )^{30} = 181.136$ FCFA.

Donc Ali aura une valeur acquise de 181.136 FCFA au bout de 30 semestres.

Synthèse 2

Soit U_n le nombre d'élève de cette école au 1erJanvier de l'année n .

Soit $U_1 = 6000$ le nombre d'élève de cette école au 1erJanvier 2011 .

On a :

$U_1 = 6000$.

$U_2 = U_1 - 5\,\%U_1$ = > $U_2 = U_1(1 - 5\,\%) = U_1(1 - \frac{5}{100}) = U_1(0{,}95)$

$U_3 = U_2(0{,}95)$

. .

. .

. .

$U_{n+1} = U_n(0{,}95)$

= > $\frac{U_{n+1}}{U_n} = 0{,}96$.

Alors on a : une suite géométrique de raison q = 0,95.

D'où son expression est : $U_n = U_1(q)^{n-1} = 6000(0{,}95)^{n-1}$

Déterminons ainsi le nombre d'élève de cette école au 1er Janvier 2015 :

- **Au 1er Janvier 2015**

On sait que : $U_n = 6000(0{,}95)^{n-1}$ et $n = 2015 - 2011 = 4$

D'où la population au 1er Janvier 2015 est :$U_4 = 6000(0{,}95)^{4-1} = 6000(0{,}95)^3$

= > $U_4 = 5144{,}25 \approx 5144$

Ainsi l'effectif de l'école serrait de 5144 élèves au 1er Janvier 2015.

Synthèse 3 :

a-Sachant que le prix du litre subit une augmentation de 5 FCFA au 1er Janvier de chaque année, calculons le prix du litre d'essence au premier Janvier 2013 ? Au premier Janvier 2014 ?
Soit P_0 = 690 FCFA le prix initial de l'essence au 1erJanvier 2012.
Au 1er Janvier 2013, on a : $P_1 = P_0 + 5 \Rightarrow P_1 = 690 + 5 = 695$ FCFA.
Au 1erJanvier 2014, on a : $P_2 = P_1 + 5 \Rightarrow P_2 = 695 + 5 = 700$ FCFA.

b-Si p_n est le prix du litre d'essence au premier Janvier $+ n$, calculons : p_n et $p_{n+1} - p_n$ puis en déduisons la raison et la nature de la suite p_n .

On sait que :

$P_0 = 690.$

$P_1 = P_0 + 5.$

$P_2 = P_1 + 5.$

$P_3 = P_2 + 5.$

. . .
. . .
. . .
. . .

$p_n = p_{n-1} + 5n$

Alors $\boldsymbol{p_n = P_0 + 5n}$

Calculons $p_{n+1} - p_n$

On sait que $p_n = P_0 + 5n \Rightarrow p_{n+1} = P_0 + 5(n + 1) = P_0 + 5n + 5.$

Alors $p_{n+1} - p_n = (P_0 + 5n + 5) - (P_0 + 5n) = P_0 + 5n + 5 - P_0 - 5n = 5$

$\Rightarrow p_{n+1} - p_n$ **= 5.**

Déduction :
p_n est une suite arithmétique de raison $r = 5$ et de premier terme $p_0 = 690$.

EXERCICES

Exercice 1 :

Soit Un une suite géométrique décroissante U tel que $\begin{cases} U_o x U_3 = 32 \\ U_o + U_3 = 18 \end{cases}$

1) Calculer U_o et U_3
2) Déterminer la raison de la suite U.
3) Donner l'expression de la suite U en fonction de n.
4) On pose $S_n = U_o + U_1 + \ldots.. + U_n$. Calculer S_n en fonction de n puis en déduire la somme des 20 premiers termes de la suite U_n

Exercice 2 :

Soit la suite Un définie par :

$\begin{cases} U_1 = -2 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{1-U_n} \end{cases}$ et la suite V_n définie

Par Vn = $\dfrac{U_n + 1}{U_n}$

1) Calculer V_{n+1} en fonction de U_n puis en fonction de V_n.
2) En déduire que V_n est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme V_1.
3) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.
4) On pose $S_n = V_1 + V_2 + \ldots.. + V_n$

a) Exprimer S_n en fonction de n

b) Calculer la somme de 30 premiers termes de la suite V_n

Exercice 3 :

Soit la suite $(U_n)_{n \in}$ N* à termes positifs tel que :

$\begin{cases} U_1 = 1 \\ (U_{n+1})^2 = eU_n \end{cases}$

1) Calculer U_1 ; U_2 ; U_3 ; U_4

   (on donnera les résultats sous forme de e^{v})
2) On pose $V_n = l_n U_n - a$; où (a $\in R_+^*$ et n $\in N^*$)

a) Déterminer le réel a pour que V_n soit une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme V_1.

b) Calculer la limite de V_n pui celle de U_n en $+\infty$

3) Soit a = 1, on désigne par S_n la somme des n premiers termes de la suite U_n. Déterminer Sn et P_n en fonction de n.

Exercice 4 :

On donne deux suites (U_n) et (V_n) telles que, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} U_{n+1} = 3U_n + 2V_n \\ V_{n+1} = 2U_n + 3V_n \end{cases} \text{ et } \begin{cases} Uo = 1 \\ Vo = 2 \end{cases}$$

1) Calculer U_1 ; V_1 ; U_2 ; V_2 ; U_3 et V_3.
2) On définit deux suites (X_n) et (Y_n) par : $X_n = U_n + V_n$ et $Y_n = U_n – V_n$
a) Montrer que (X_n) est une suite géométrique et (Y_n) une suite constante.
b) Exprimer U_n puis V_n en fonction de n
3) Calculer la somme des n premiers termes de la suite X_n.

Exercice 5 :
Quatre (4) entiers strictement positifs a, b, c, et d forment dans cet ordre une suite géométrique dont la raison est un entier premier avec a.
Trouver ces nombres sachant qu'ils vérifient en outre la relation $10a^2 = d – b$.

Exercice 6 :
Soit (U_n) une suite dans laquelle les dix premiers termes de la suite sont en progression arithmétique de raison r et à partir de U_{10} les termes sont en progression géométrique de raison q.

On donne : $U_1 = 0$; $U_{16} = \frac{-1}{27}$ et rq = 1

1) Calculer q ; r ; U_{10} et U_{11}
2) Calculer deux cas suivants : a) n ≤ 10
b) n > 10

Exercice 7 :
Soit la suite (Un) définie par son premier terme U_o et par la relation de récurrence

$U_{n+1} = \frac{4}{4-U_n} (n \in N)$

1) a) Déterminer U_o pour que U_n soit constante.
   b) Démontrer que si $U_n< 2$ alors
   $U_n< U_{n+1} < 2$ (n $\in N$). En déduire que si $U_o< 2$ alors pour tout entier naturel on a :
   $U_n< 2$ et que la suite est monotone.

2) On suppose maintenant que $U_o = -1$

a) Calculer U_1 ; U_2 ; U_3.

b) Soit la suite V_n définie par $V_n = \frac{1}{U_n - 2}$. Démontrer que V_n est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison.

c) Calculer U_n en fonction de n puis étudier sa limite en + ∞.

Exercice 8 :

1) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel m, les restes de la division euclidienne par 16 des entiers 5^m et 6^m.
2) Soit (U_n) la suite arithmétique de raison 16 et de premier terme $U_o = 9$ et V_p la suite géométrique de raison S et de premier terme $V_o = 1$. Démontrer que ces deux suites ont une infinité de termes égaux dont on calculera les deux premiers.
3) Soit (U'_n) la suite arithmétique de raison 16 et de premier terme $U'_o = 8$ et (V'_p) la suite géométrique de raison 6 et de premier terme $V'_o = 9$. Démontrer que ces deux suites n'ont qu'un seul terme en commun que l'on déterminera. /.

Exercice 9 :

On considère la suite numérique (U_n) définie par $\forall \in N\ ; U_n = e^{2n-1}$

1) a) Calculer U_o, U_1 ; U_2 ; U_3 et U_{n+1}

b) Démontrer que la suite Un est une suite géométrique dont on précisera la raison.

c) Exprimer en fonction de n la somme

$S_n = U_o + U_1 + U_2 + \ldots\ldots\ldots. U_n$.

d) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

e) Trouver la valeur minimum de n telle que $S_n \geq 10$

NB : On donne $e \approx 2{,}7$; $e^3 \approx 19{,}7$

$e^2 \approx 7{,}3$ et $\ln 171 \approx 5{,}14$

2) Soit la suite Vn définie par $\forall n \in N$, $V_n = l_n (U_n)$.
   a) Exprimer la somme

$S'_n = V_o + V_1 + \ldots\ldots\ldots + V_n$

   b) Exprimer le produit

$P_n = U_o \times U_1 \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times U_n$

Exercice10 :

Soit U_n la suite définie par :

$$\begin{cases} U_o = 4 \\ U_{n+1} = \ln(1+U_n) \end{cases}$$

1) Tracer la courbe représentation de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ puis en déduire une représentation graphique des 4 premiers termes de la suite U_n.
2) Démontrer que la suite (U_n) est convergente et démontrer qu'elle converge vers 0.

Exercice11:

Un commerçant place en banque une somme de 200 000 F CFA le 02/01/2008. La banque lui propose un intérêt de 5% par mois.

a) Calculer l'intérêt perçu le 31/01/2008
b) Quel montant aura – t – il le 31/12/2008.

Exercice12

Un capital A est placé à intérêts composés au taux de 3 % l'an. On appelle $C_o$le capital initial et C_n le capital après n années.

1) Expliquer la relation $C_1 = 1.03C_0$ et écrire le capital C_n en fonction de C_0et de n en justifiant soigneusement cette relation.
2) Au bout de combien d'années le capital est il doublé ?
3) Au bout de combien d'années le capital est il triplé?

Exercice13 (non corrigé)

On considère deux suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier naturel n par $U_o = 1$;
$U_{n+1} = 2U_n + 1$ et $V_n = U_{n+1} - U_n$.

a) Montrer que V_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer, pour tout entier naturel n, V_n en fonction de n.

c) Soit la somme $S_n = V_o + V_1 + V_2 + \ldots\ldots\ldots + V_{n-1}$

d) Montrer que pour tout entier naturel n, $S_n = U_n - U_o$.
e) Calculer S_n en fonction de n, puis Un en fonction de n.

Exercice14

1) soient a et b deux réels tel que (a ; a + 4b ; 5a + 2b) et (b + 3 ; 3a + 1 ; 6a + b) soit des termes consécutifs de suite respectivement arithmétique et géométrique. Trouver a et b.

2) Quatre entiers strictement positifs a ; b ; c et d , forment dans cet ordre une suite géométrique dont la raison q est un entier premier avec a. Trouver ces nombres sachant qu'is vérifient en outre la relation $10a^2 = d - b$.

3) soient Z_1 ; Z_2 $et\ Z_3$ trois nombres complexes dont le produit est $3i\sqrt{3}$, les arguments respectifs a_1 ; a_2 $et\ a_3$ forment une suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{3}$ et les modules r_1 ; r_2 $et\ r_3$ une suite géométrique de raison 2. Sachant que $0 < a_1 < \frac{2\pi}{3}$.
Déterminer : Z_1 ; Z_2 $et\ Z_3$.

Primitives-Intégrales-Calculs d'aires

Objectifs

Ce chapitre vise à :
• mettre en place la notion de primitive
•initier les élèves au calcul de primitives à partir des formules de dérivation.

Savoirs et savoir-faire

SAVOIR	SAVOIR-FAIRE
• Définition d'une primitive. •Existence de primitives d'une fonction continue sur un intervalle (admis). •Ensemble des primitives d'une fonction continue •Unicité de la primitive d'une fonction prenant une valeur donnée en un point donné •primitives des fonctions de référence. • Primitive de $u + v$, λu ($\lambda \in$ IR), $v' \times (u'ov)$, $u' \times u^n (n\ \mathbb{Q} - \{-1\})$	• Déterminer les primitives d'une fonction en utilisant les primitives des fonctions de référence. • Déterminer la primitive d'une fonction qui prend une valeur donnée en un point donné. • Déterminer les primitives d'une fonction du type : - $\alpha u + \beta v, (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$; - $v' \times (u'\ ov)$; - $u' \times u^n (n\ \mathbb{Q} - \{-1\})$

I) Primitives :

Situation problème :

1) Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x - 5$
   a- Détermine une fonction telle que $F'(x) = f(x)$
   b- Même question pour $f(x) = x^2 + 2$
   c- Peux-tu en donner d'autres ?

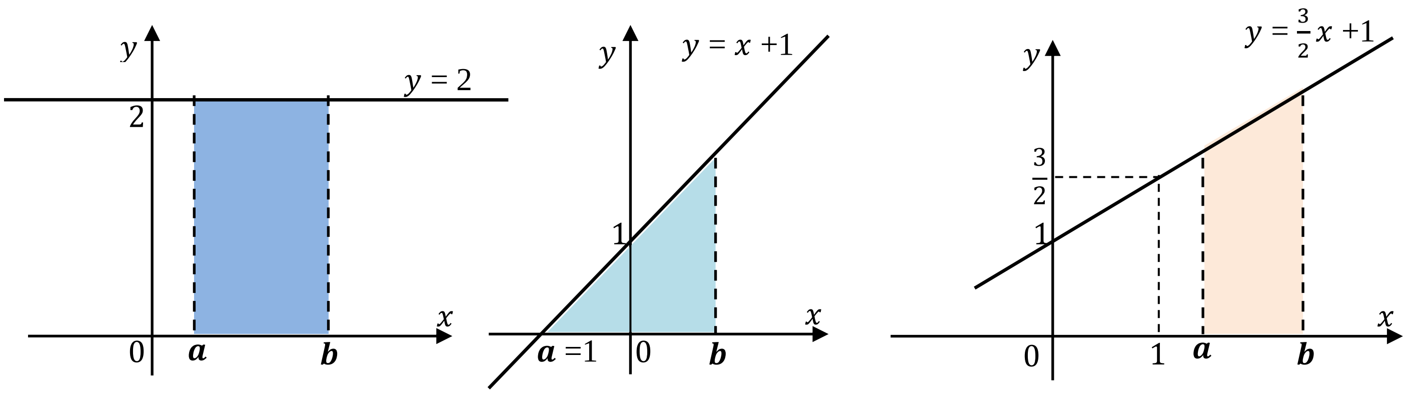
2) f est le polynôme défini par $f(x) = x + 1$
   a- Trouver une fonction F dont la dérivée est f
   b- Montrer que pour tout réel c la fonction G définie par $G(x) = F(x) + c$ est telle que $G'(x) = f(x)$

Activité 1 (Recherche de primitive)

Soit f la fonction définie par $f(x) : 3x^2 - 2x + 1$
Détermine une fonction F du 3[ième] degré telle que ; $F'(x) = f(x)$

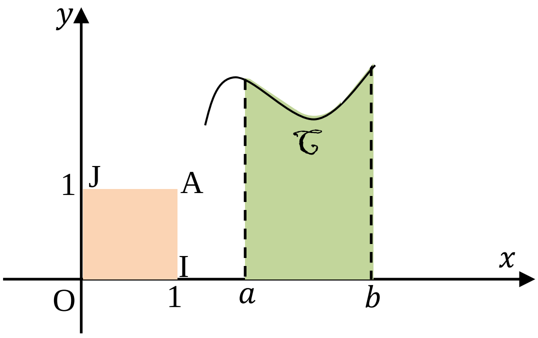
Activité 2 (Calculs d'aire et de primitive)

L'unité de longueur est le cm, l'unité d'aire est le cm^2 et les repères utilisés sont orthonormaux.



Dans chacun des cas ci-dessus :
a) Calculez l'aire du domaine colorié ;
b) Trouvez une primitive F de la fonction f représentée, puis calculez : F(b) – F(a).
c) Que constatez-vous ?

Conclusion : de façon générale, nous admettrons que lorsque ***f*** est une fonction **continue** sur intervalle$[a; b]$, alors **l'aire du domaine** colorié ci-contre est égale à **F** est **une primitive de *f*** sur $[a\ ;\ b]$ (l'unité d'aire étant l'aire du rectangle **OIAJ**).



1) Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On appelle primitive de la fonction f sur l'intervalle I toute fonction F dérivable sur I telle que $\forall\ x\ \in I\ ;\ \boldsymbol{F'(x) = f(x)}$

1. a) f est le polynôme défini par $f(x) = x + 1$.
Trouvez une primitive F de f sur ℝ, c'est-à-dire une fonction F dont la dérivée soit f.
b) Montrez que pour tout réel c, la fonction G définie par $G(x) = F(x) + c$ est une primitive de f sur ℝ.
c) Trouvez une primitive G de *f* sur ℝ telle que G(2) = -3.
Existe – t-il d'autres primitives de f qui prennent la valeur – 3 en 2 ?
2. Dans chaque cas, trouvez une primitive sur ℝ de la fonction *f* définie par :
a) $f\ (x) = 2x^2 + x + 1$. **b)** $f\ (x) = x^3 - 4x + \sqrt{2}$. ***c***) $f(x) = 2 + cos\ x$.

2) Propriétés

P₁ : Toute fonction continue sur un intervalle I admet une infinité de primitives sur cet intervalle.

P₂ : L'ensemble des primitives d'une fonction f sur un intervalle I est l'ensemble des fonctions définies sur cet intervalle par $x \to \mathrm{F}(x) + k$ où k est un nombre réel.

3) **Recherche de la primitive d'une fonction :**

La fonction $x \ \rightarrow \ x^4$ a pour dérivée $x \ \rightarrow \ 4x^3$
Donc la fonction $x \ \rightarrow \ \frac{1}{4}x^4$ a pour dérivée $x \ \rightarrow \ x^3$
Alors d'une manière générale, n étant un nombre entier nature non nul, la fonction :

$x \ \rightarrow \ x^{n+1}$ a pour dérivée $x \ \rightarrow (n+1)\, x^n$

donc $x \ \rightarrow \ \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ est une primitive de $x^{\,n}$.

Ainsi par lecture inverse des tableaux de dérivation, on établit le tableau des primitives :

a) **Primitives des fonctions usuelles**

Fonctions	**Primitives**	**Intervalles**
$a\ (a \in \mathbb{R})$	$ax \ + \ k$	$\mathbb{R} =]-\infty\ ;\ +\infty[$
$x^n \ \ (n \ \in \ \mathbb{N}^*)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + k$	$\mathbb{R} =]-\infty\ ;\ +\infty[$
ax^{n}	$\frac{ax^{n+1}}{n+1} + k$	$\begin{cases} \mathbb{R}^*\ si\ n < 0 \\ \mathbb{R}\ si\ n\ > 0 \end{cases}$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-1}{x} + k$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + k$	$\mathbb{R}^*$ avec $(n \ \neq 1)$
$\frac{a}{x^n}$	$\frac{-a}{(n-1)x^{n-1}} + k$	$\mathbb{R}^*$ avec $(n \ \neq \ 1)$
$\frac{1}{x}$	$ln\lvert x\rvert + k$	$\mathbb{R}_+^*$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$	$\mathbb{R}_+^*$
$\frac{a}{\sqrt{x}}$	$2a\sqrt{x} + k$	$\mathbb{R}_+^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x} + k$	$\mathbb{R}_+$
$\sqrt{ax+b}$	$\frac{2}{3a}(ax+b)\sqrt{ax+b} + k$	$\mathbb{R}$
Sin x	$-$ Cos$x$ + k	$\mathbb{R}$
Cos x	Sin$x$ + k	$\mathbb{R}$

$\frac{1}{Cos^2x} = 1 + tang^2x$	Tgx + k	$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + \ 2k\pi \ ; k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\frac{1}{Sin^2x} = 1 + cotang^2x$	$-$ cotg$x \ + \ k$	$\mathbb{R}- \{k\pi \ ; k \in \mathbb{Z}\}$
Sin $(ax \ + \ b)$ (a ∈ $\mathbb{R}^*$)	$-\frac{1}{a}Cos(ax + b) + \ k$	$\mathbb{R}$.
Cos$(ax \ + \ b)$ (a ∈ $\mathbb{R}^*$)	$\frac{1}{a}Sin(ax + b) + \ k$	$\mathbb{R}$
tg $(ax \ + \ b)$ (a ∈ $\mathbb{R}^*$)	$\frac{1}{a}Cos(ax + b) + \ k$	$\mathbb{R}$

b) <u>Opérations sur les Primitives</u> :

Fonctions	**Primitives**
$u' \ + \ v'$	$u \ + \ v \ + \ K$
$u'v \ + \ v'u$	$u \bullet v \ + \ K$
au' ($a \in \mathbb{R}$)	$au \ + \ K$
$u' \bullet u^n$	$\frac{(u)^{n+1}}{n+1} + k$
$\frac{u'}{(u)^n}$	$\frac{-1}{(n-1)(u)^{n-1}} + k$
$\frac{u'}{u}$	$ln\vert u\vert + k$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + k$
Sin (u)	$-\frac{1}{u'}Cos(u) + \ k$
Cos (u)	$\frac{1}{u'}Sin(u) + \ k$
$\frac{u'}{Cos^2u} = 1 + tang^2u$	tg (u) + k
$\frac{u'}{Sin^2u} = 1 + cotang^2u$	Cotg (u) + k

NB : $(u)^n\sqrt{u} = (u)^{\frac{2n+1}{2}}$

Exemple

Déterminer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes

a) $f(x) = x^3 - x^2 + 3x - 2$; b) $f(x) = 1 - \sqrt{3x-1}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{(2x+3)^5}$; d) $f(x) = (x^3+x)\sqrt{x^4+2x^2}$

e) $f(x) = (x+1)\sqrt{x+1}$; f) $f(x) = \dfrac{18x-15}{\sqrt{3x^2-5x+1}}$

Solution :

a) $f(x) = x^3 - x^2 + 3x - 2 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + K$

b) $f(x) = 1 - \sqrt{3x-1} \Rightarrow F(x) = x - \frac{2}{9}(3x-1)\sqrt{3x-1} + K$

c) $f(x) = \dfrac{1}{(2x+3)^5} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{2}\bullet\dfrac{1}{(2x+3)^5} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}\bullet\dfrac{2}{(2x+3)^5}$

$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}\bullet\dfrac{-1}{(5-1)(2x+3)^{5-1}} + K \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}\bullet\dfrac{-1}{4(2x+3)^4} + K$

$\Rightarrow F(x) = \dfrac{-1}{8(2x+3)^4} + K$

d) $f(x) = (x^3+x)\sqrt{x^4+2x^2} \Leftrightarrow f(x) = (x^3+x)(x^4+2x^2)^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{4}{4}(x^3+x)(x^4+2x^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}(4x^3+4x)(x^4+2x^2)^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(x^4+2x^2)^{\frac{1}{2}+1}\right] + K \Rightarrow F(x) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(x^4+2x^2)^{\frac{1}{2}+1}\right] + K$

$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\frac{3}{2}}(x^4+2x^2)^{\frac{3}{2}}\right] + K \Rightarrow F(x) = \frac{1}{6}(x^4+2x^2)^{\frac{3}{2}} + K$

$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{6}(x^4+2x^2)^{\frac{3}{2}} + K \Rightarrow F(x) = \frac{1}{6}(x^4+2x^2)\sqrt{x^4+2x^2} + K$

e) $f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} \Leftrightarrow f(x) = (x+1)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow F(x) = \frac{5}{2}(x+1)^{\frac{5}{2}} + K$

$=> \ \mathrm{F}(x) = \frac{5}{2}(\ x+1\ )^2\sqrt{\ x+1} + \ K$

f) $f(x) \ = \frac{18x-15}{\sqrt{3x^2-5x+1}}$ <=> $f(x) \ = 3 \bullet \frac{6x-5}{\sqrt{3x^2-5x+1}} =>$

$\mathrm{F}(x) = 3\left(\ 2\sqrt{3x^2 - \ 5x \ + \ \ 1}\right) + \ K$ $=>$ $\mathrm{F}(x) = 6\sqrt{3x^2 - \ 5x \ + \ \ 1} + \ K$

II) Intégrale d'une fonction

Objectifs

Ce thème vise à :
• Calculer des intégrales à l'aide de techniques particulières (utilisation des primitives, intégration par partie, changement de variable affine) ;
• Réinvestir dans les calculs aires les techniques du calcul intégral ;
• Elargir le champ des fonctions étudiées à des fonctions définies par une intégrale.

Savoirs et savoir-faire

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Définition de l'intégrale d'une fonction continue *f* : $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de *f*. • La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de *f* qui s'annule en a. • Interprétation graphique de l'intégrale d'une fonction continue positive. • Propriétés : - Linéarité ; - Relation de Chasles ; - Positivité ; - Si $f \leq g$ sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$; - Inégalité de la moyenne : - Si $m \leq f \leq M$ sur $[a,b]$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M\ (b-a)$; Si $\|f\| \leq M$, alors $\left\|\int_a^b f(t)dt\right\| \leq M\|b-a\|$. • Valeur moyenne d'une fonction ; • Intégration par parties ; •Changement de variable affine. •application au calcul d'aire. •La fonction du type F : $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$	• Calculer une intégrale : - En utilisant les primitives des fonctions usuelles ; - En utilisant une intégration par partie ; - En utilisant un changement de variable affine • Utiliser la relation de Chasles pour effectuer un calcul intégral. • Connaissant un encadrement d'une fonction *f* sur [a ; b], trouver un encadrement de $\int_a^b f(t)dt$. • Calculer l'aire d'une partie du plan limitée par : -La courbe représentative d'une fonction, l'axe des abscisses et les droites d'équation x = a et x = b. - Les courbes représentatives de deux fonctions et les droites d'équation x = a et x = b. • Etant donné la fonction F : $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$: -à partir d'une majoration et d'une minoration donnée, déduire l'existence ou non de la limite de F aux bornes de son ensemble de définition ; -étudier les variations de F ; -donner une allure de la présentation graphique de F.

Situation problème :

Construis dans un repère orthonormé (O ;I ;J) du plan affine la droite Δ : $y = x + 2$ et
La droite d'équation $x = 3$; on désigne par le point d'intersection de Δ et l' axe des ordonnées
Par B et C les points d'intersections de Δ et de $x = 3$ et de l'axe des abscisses avec $x = 3$

a- Calcule l'aire du quadrilatère OABC
b- Calcule une primitive de F de f tel que $f(x) = x + 2$
c- Calcule F(3)−F(0) puis compare-le à l'aire du trapèze OABC

1) Définition :

Soit f une fonction définie, dérivable sur un intervalle I = [a, b] et F une primitive de f sur I.
On appelle intégrale de la fonction f entre a et b le nombre réel A tel que :

A = $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

2) Propriétés :

Propriété 1 : (linéarité)

Soient f et g deux fonctions continues sur I = [a ; b], on a :

- $\int_a^b (f + g)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R}$; $\int_a^b (\alpha f + \beta g)dx = \int_a^b \alpha f(x)dx + \int_a^b \beta g(x)dx$

- $\forall k \in R$; $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
- Si f ≥ 0 ; alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

- Si f $\geq$ g ; alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

- Si $|f|$ est continue sur I, alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f|dx$

Propriété 2 : (Relation de Chasles).

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Soient trois réels a, b, c éléments de l'intervalle I
D'après Chasles $\int_a^c g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

Conséquences :

- si $a = b$ alors $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Propriété 3 : (Inégalité et valeur de la moyenne)

a) **Inégalité de la moyenne :**

Si $a \leq b$ et $m \leq f \leq M$, alors on a : $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$

b) **Valeur moyenne :**

On appelle valeur moyenne de f, le réel $\overline{M}$ tel que :

$\overline{M} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$ et il existe un réel C $\in [a,b]$ tel que :

$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Exemple :

Encadrer l'intégrale A= $\int_0^{2\Pi}(2-\sin x)dx$

Solution :

A = $\int_0^{2\Pi}(2-\sin x)dx$; Posons $f(x) = 2 - sin\ x.$

Puisque $0 \leq x \leq 2\pi$ et $-1 \leq sinx \leq 1$

Alors le minimum et le maximum de f sont :

$m = (2-1) = 1$; M = $(2-(-1)) = 3$

D'où l'encadrement : $m\ (b-a) \leq \int_0^{2\Pi} f(x)dx \leq M(b-a)$

est équivalent à : $1\ (b-a) \leq \int_0^{2\Pi} f(x)dx \leq 3(b-a)$

Or $a = 0$ et $b = 2\pi$

$\Rightarrow\ 1(2\pi - 0) \leq \int_0^{2\pi} f(x)dx \leq 3(2\pi - 0)$

$=> 2\pi \leq \int_0^{2\pi} f(x)dx \leq 6\pi$

III) Primitives et intégrales indéfinies :

Théorème 1 :

Si f est une fonction continue et F sa primitive, alors, on peut écrire F(x) = $\int_a^x f(t)dt$

De même on a : $\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$

1) Définition :

Si $F'(x) = f(x)$, on dit que $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ et on peut symboliquement écrire

$F(x)$ = $D^{-1}[f(x)]$

Où D^{-1} indique l'opération inverse de la dérivée.

Théorème 2 :

Si F_1 et F_2 sont deux primitives de $f(x)$, il s'en suit que : $F_1(x) = F_2(x)$ +C. Où C est une constante

Théorème 3 :

Si $F_1(x)$ est une primitive quelconque de $f(x)$, alors $F(x) = \int_a^x f(t)dt = F_1(x) - F_1(a)$

C'est-à-dire que la valeur de l'intégrale définie peut s'obtenir à partir d'une de ses primitives évaluées à la limite supérieure et à la limite inférieure.

IV) Intégration par parties – Intégration par changement de variable affine

1) Intégration par Parties

Théorème :

Si u et v sont deux fonctions différentiables sur un l'intervalle I = [a, b], alors on appelle intégration par parties, toutes opérations définie par :

$$\int_a^b u(x)\bullet v'(x)dx = [u(x)\bullet v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\bullet v(x)dx$$

2) Intégration par substitution ou par changement de variable

Dans certaines intégrales, l'intégration est effectuée plus facilement lorsqu'on substitue à la place de la variable x une autre variable qui est fonction de x.

Méthode pratique :

Pour calculer l'intégrale $\int_a^b f(\alpha t+\beta)dt\ (\alpha \neq 0)$; on utilise la méthode suivante :

- faire le changement de variable en posant :

$u = \alpha t + \beta$ et on obtient du = αdt

- utiliser l'égalité : $\int_a^b f(\alpha t+\beta)dt = \int_{\alpha b+\beta}^{\alpha b+\beta} \frac{1}{\alpha} f(u)du$

Exemple

1) En utilisant une intégration par partie, calculer les intégrales suivantes :

A= $\int_0^{\frac{\Pi}{2}} x\bullet Cos2xdx$; B = $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+2}}dx$; C = $\int_{-\frac{\Pi}{2}}^{+\frac{\Pi}{2}} x^2\cos(x+1)dx$

2) En utilisant la méthode de substitution, calculer l'intégrale

I = $\int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt{2x+3}}dx$

Posons u = 2x + 3 ⇔du = 2dx => dx = $\frac{1}{2}du$

De plus $\begin{array}{l|l} si\ x=0 \Rightarrow u=3 & u = 2x+3 \\ si\ x=-1 \Rightarrow u=1 & x = \frac{u-3}{2} \end{array}$

⇨ Donc I = $\int_1^3 \frac{\frac{u-3}{2}}{\sqrt{u}} \times \frac{1}{2}du = \frac{1}{u}\int_1^3 (\sqrt{u} - \frac{3}{\sqrt{u}})du$ I = $\frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}u\sqrt{u} - 6\sqrt{u}\right]_1^3 = \frac{4}{3} - \sqrt{3}$

D'où **I** = $\frac{4}{3} - \sqrt{3}$

V) Calculs de valeurs approchées d'une intégrale :

Méthode de rectangles :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle [a ; b] tel que $|f'|$ admet un majorant M sur cet intervalle.
Lorsque l'on partage [a ; b] en n intervalles de même amplitude et d'extrémités
a = x_0 ; x_1 ; x_2 ;............ ; x_n = b ;
on a :

- Une suite (S_n) $n \in \mathbb{N}^*$ de termes général Sn tel que ;

$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(xi)$ qui converge vers A = $\int_a^b f(t)dt$

$\forall n \in N^* ; |A - Sn| \leq \frac{M}{2n}(b-a)^2$

Exemple

Déterminer une valeur approchée de l'intégrale A = $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$ en partageant l'intervalle [0, 1] en 5 intervalles de même amplitude.

Solution

Posons $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

$\forall x \in [0,1]$; f est décroissante donc on a :

D'où $\begin{cases} s_5 = m = \frac{1}{5}\left[f(0) + f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)\right. = 0{,}83 \\ S_5 = M = \frac{1}{5}\left[f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right) + f(1)\right. = 0{,}73 \end{cases}$

On obtient ainsi s_5 = 0,83 ; et S_5 = 0,73.

De même déterminer une valeur approchée de

A = $\int_0^1 e^{\frac{x^2}{2}} dx$, en par partageant l'intervalle [0, 1] en 10 intervalles de même amplitude.

VI) Calcul d'aires :

Situation problème

L'unité de longueur est le cm ; l'unité d'aire est le cm^2 et les repères utilisés sont orthonormaux

fig$_1$ fig$_1$ fig$_1$

Dans chacun des cas ci-dessus :

a) Calcule l'aire du domaine colorié ;
b) Trouve une primitive F de la fonction f représentée puis calcule F(b)-F(a)
c) Que constates-tu ?

Synthèse :

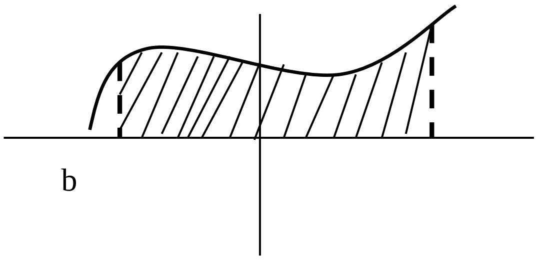
De façon générale nous admettrons que lorsque f est une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ alors l'aire du domaine colorié ci-contre est égale à F(b)-F(a) ou F est une primitive de f sur $[a; b]$ (l'unité d'aire étant l'aire du rectangle OIAJ).
Par la définition de l'intégrale définie, la surface entre une fonction $f(x)$ et l'axe des abscisses ou encore entre deux fonctions f et g ($f > g$) et l'axe des abscisses est donnée respectivement comme suit, lorsque x va de a vers b ($a < b$)

S = $\int_a^b f(x)dx$ (unité d'aire)

Ou S = $\int_a^b (f(x) - g(x))dx$ (unité d'aire)

NB : Dans cette intégration, les portions de surface au dessus de l'axe des abscisses donnent une contribution positive, tandis que les portions en dessous de l'axe des abscisses donnent une contribution négative.
Ainsi quelques méthodes de calcul des surfaces sont illustrées dans les cas de figure qui suivent :

1^er Cas :

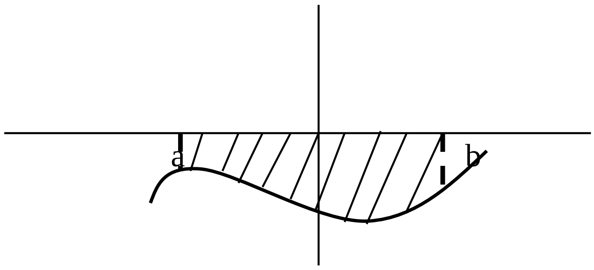


M$(x, y) \in$ D <=> $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$

Ainsi l'aire du domaine plan Da

est A(D) = $\int_a^b f(x)dx$ (unité d'aire)

2^ème Cas :

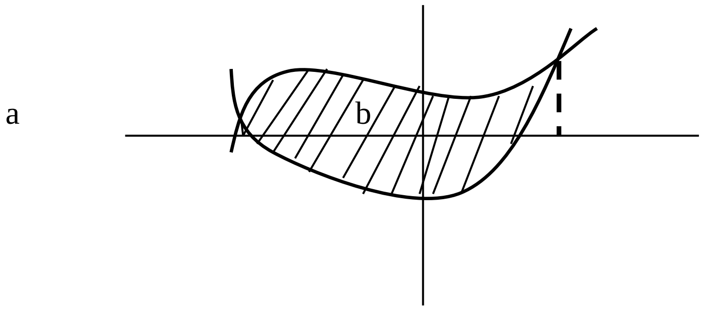


M$(x, y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$

Ainsi l'aire du domaine plan

D est A(D) = $-\int_a^b f(x)dx$ (unité d'aire)

3^ème Cas :



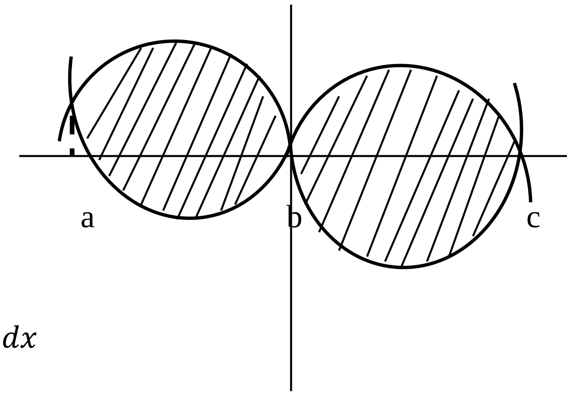
M$(x, y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x \leq b \\ g(x) \leq y \leq f(x) \end{cases}$

Ainsi l'aire du domaine plan limité
par les deux courbes (Cf) et (Cg) est :

A(D) = $\int_a^b (f(x) - g(x))dx$

(car (Cf) est au dessus de (Cg).

4^ème Cas :



M$(x, y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x \leq b \; et \; b \leq x \leq c \\ g(x) \leq y \leq f(x) \; et \\ f(x) \leq y \leq g(x) \end{cases}$

Ainsi l'aire du domaine plan limité
par les deux courbes est :

A(D) =$\int_a^b (f(x) - g(x))dx + \int_b^c (g(x) - f(x))dx$

Exemple

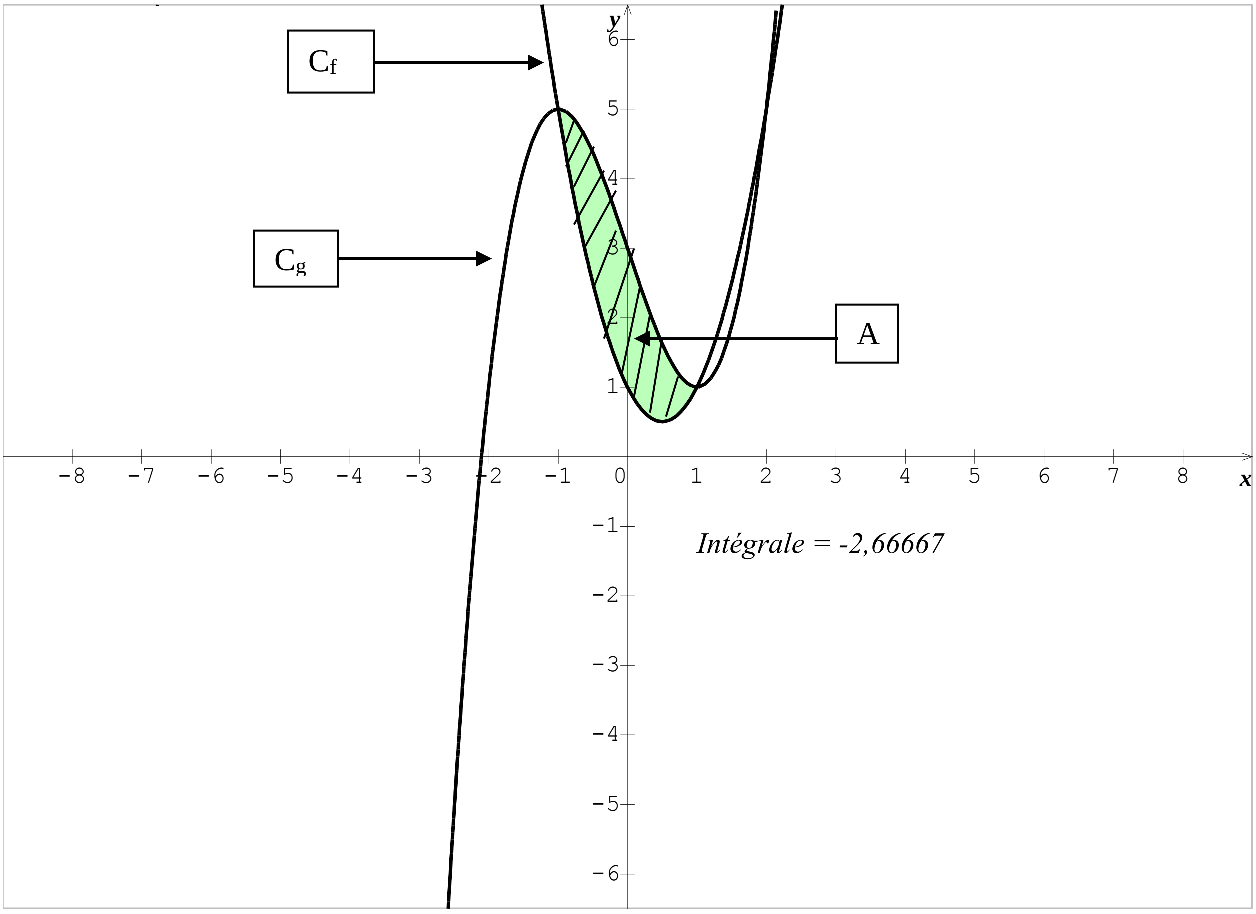
2) Calculer puis représenter l'aire A de l'ensemble des points M $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du plan compris entre les courbes (Cf) et (Cg) de fonction respectives $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$ et $g(x) = x^3 - 3x + 3$ et les droites d'équations : $x = -1$ et $x = 1$.

3) Calculer puis représenter l'aire de la portion du plan limité par la courbe (Cf) de la fonction $f(x) = 1 - x^2$ et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 2$.

Solution

1) Calculons puis représentons l'aire A de l'ensemble des points M $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du plan compris entre les courbes (Cf) et (Cg) de fonction respectives $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$ et $g(x) = x^3 - 3x + 3$ et les droites d'équations : $x = -1$ et $x = 1$

La représentation des courbes (Cf) et (Cg) dans le repère donne :



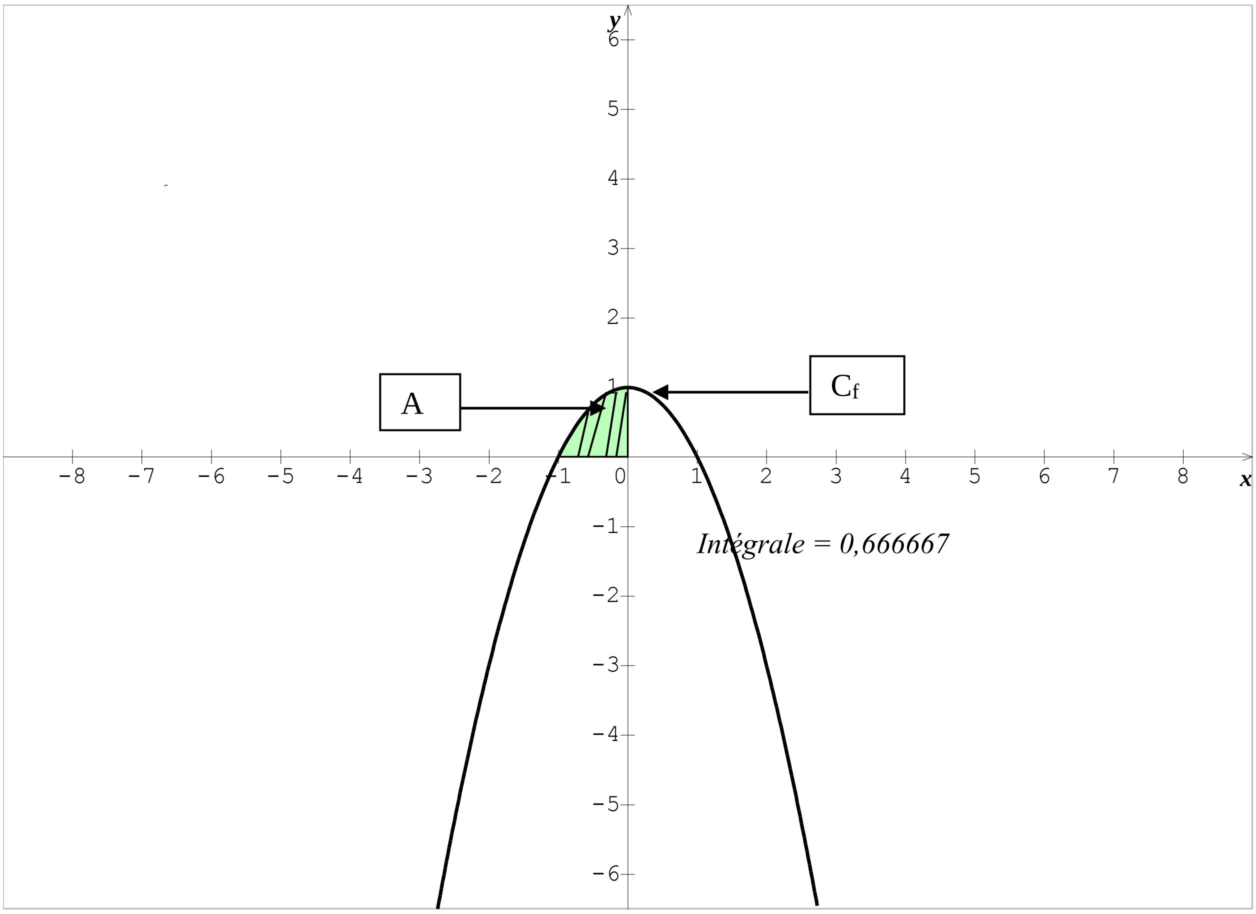
$$A = \int_{-1}^{1}\big(f(x) - g(x)\big)dx = \int_{-1}^{1}\big((2x^2 - 2x + 1) - (x^3 - 3x + 3)\big)dx$$

$$=> A = \int_{-1}^{1}(-x^3 + 2x^2 + x - 2)dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_{-1}^{1}$$

$$=> A = \left[-\frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 2\right] - \left[-\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 2\right] = -\frac{8}{3}\,(\text{u.A})$$

2) Calculons puis représentons l'aire de la portion du plan limité par la courbe (Cf) de la fonction $f(x) = 1 - x^2$ et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

La représentation de la fonction f dans le repère donne :



A $= \int_{-1}^{0} f(x)dx = \int_{-1}^{0}(1 - x^2)dx$

$=> \text{A} = \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0}$

$=> \text{A} = [\,0\,] - \left[-1 + \frac{1}{3}\right] = -\frac{2}{3}$ (u.A)

EXERCICES

Primitives

Primitives directes

1 En utilisant les formules de primitives directes, calculer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes :

1- $f(x) = 4x^3 + x^2 - 4$; 2- $f(x) = (x^2 - 3)^3$; 3- $f(x) = \frac{3}{2}x^3 - \frac{4}{3}x^2 - 1$

4- $f(x) = \sqrt{-3x + 2}$; 5- $f(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$; 6- $f(x) = 3(-x - 2)(3x + 2)^2$

7- $f(x) = Cos(-6x + 5)$; 8- $f(x) = 3Sin(1 - 4x)$; 9- $f(x) = \frac{1}{3Cos^2 3x}$

10- $f(x) = \frac{3}{(3x + 1)^3}$; 11- $f(x) = (4x - 4)(2x^2 - 4x + 1)^2$; 12- $f(x) = \frac{-6}{\sqrt{-6x + 5}}$

13- $f(x) = \frac{-5}{(7x + 3)^3}$; 14- $f(x) = (x - 1)(-3x^2 + 6x + 7)^2$; 15- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-8x + 1}}$

16- $f(x) = \frac{Sinx - Cosx}{(Cosx + Sinx)^3}$; 17- $f(x) = 3\text{Cos}(2x + 1)Sin^3(2x + 1) - 1 - tang^2x$

Primitives et linéarisation

2 En utilisant les formules de primitives directes, linéariser puis calculer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \text{Sin}^3 x$; 2) $f(x) = Cos^5 \frac{3}{2}x$; 3) $f(x) = \text{Sin}^3 x \bullet \text{Cos}^3 x$

4) $f(x) = \text{Sin}^3(-x + 3)$; 5) $f(x) = Cos^5\left(\frac{3}{2}x + 1\right)$; 6) $f(x) = \text{Cos}^3 2x \bullet \text{Sin}2x$

Primitives vérifiant une condition

3 Déterminer la primitive F de la fonction f vérifiant les conditions indiquées :

1- $f(x) = x^3 - x^2 - 1$ et $F(0) = 7$; 2- $f(x) = (x - 3)^6$ et $F(3) = 0$

3- $f(x) = \frac{2}{(3 - x)^3}$ et $F(0) = 0$; 4- $f(x) = (x - 3)^6$ et $F(3) = 0$

5- $f(x) = \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}}$ et $F(0) = \sqrt{5}$; 6- $f(x) = \frac{Sinx}{Cos^2 x}$ et $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$

7- $f(x) = \dfrac{Sinx - Cosx}{Cos^3x}$ et $F(\pi) = 1$; 8- $f(x) = SinxCos^4x$ et $F(\pi) = 0$

4 Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to \frac{3x^3 - 7x^2 + 5x + 1}{(x-1)^2}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition

2) Déterminer les réels a, b et c tel que : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{(x-1)^2}$

3) En déduire la primitive de f qui s'annule en 0

Primitives et dérivées

5 1) Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x\sqrt{x}$

a- Calculer la dérivée de g sur $]0 ; +\infty[$.

b- Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

c- Déduire des questions précédentes une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$.

6 Soit les fonctions f et F définies par : $f(x) = x\sqrt{3 - 2x}$ et $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{3 - 2x}$

Déterminer les réels a ; b et c tel que $\forall x \in \left]-\infty ; \frac{3}{2}\right]$, F soit une primitive de f sur $\left]-\infty ; \frac{3}{2}\right]$

Intégrales

Intégrations à l'aide d'une primitive

7 En utilisant les formules des primitives, calculer les intégrales suivantes :

1) $I = \int_0^1 (4x^3 - 3x^2 + 2x - 5)dx$; **6)** $I = \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

2) $I = \int_{-\pi}^{\pi} Sin(-2x + \pi)dx$; **7)** $I = \int_1^2 \frac{-x+1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}dx$

3) $I = \int_0^4 \sqrt{4x + 9}dx$; **8)** $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{Sinx - Cosx}{(Cox + Sinx)^2}dx$

4) $I = -4\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{5}{x^2}dx$; **9)** $I = \int_0^1 (x^2 - 1)(x^3 - 3x + 1)^3 dx$

5) $I = \int_{-1}^{2} (x + 2)\sqrt{x + 2}dx$; **10)** $I = \int_0^1 (-2x + 1)\sqrt{5x^2 - 5x + 4}\,dx$

Intégrations par parties

8 En utilisant la formule de l'intégration par partie, calculer les intégrales suivantes :

1) I = $\int_0^{\frac{\pi}{6}} xSin2xdx$; **4)** I = $\int_{-2}^{1}(x-5)\sqrt{2-x}dx$

2) I = $\int_{-1}^{2}\frac{x}{\sqrt{x+2}}dx$; **5)** I = $\int_{-1}^{2}(x+2)\sqrt{x+1}dx$

3) I = $\int_0^4 x\sqrt{4x+9}dx$; **6)** I = $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2Cos(x+1)dx$

9 Soient les intégrales I et J définies par : I = $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)Cos^2 2xdx$ et J = $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)Sin^2 2xdx$

1) Calculer : I + J.
2) Calculer : I – J en utilisant la technique de l'intégration par parties.
3) Déduisez – en les valeurs de I et J.

Intégrations par changement de variable

10 En utilisant un changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

1) I = $\int_{-1}^{2}\frac{x}{\sqrt{x+2}}dx$; **3)** I = $\int_{-2}^{1}(x+1)\sqrt{x^2-2}dx$

2) I = I = $\int_{-1}^{2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}}dx$; **4)** I = $\int_2^7(x+2)\sqrt{x+2}dx$

11 Soit le polynôme p définie par : $p(x) = x^3 - 12x - 16$.
1) Montrer que -2 est un zéro double de P.
2) Calculer I en utilisant la méthode de l'intégration par partie et la méthode par changement de variable, l'intégrale : I = $\int_4^5 p(x)dx$

Intégrales et suites

12 Soit l'intégrale I_n définie par :

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^n xdx$

1) En utilisant la technique d'intégration par parties, trouver une relation entre I_n et I_{n-1}
(On posera : $Sin^n x = Sin^{n-1}x \cdot Sinx$.
2) Calculer I_0 ; I_1 ; I_2 et I_4

13 Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}}dx$ $(n \geq 0)$

1) Calculer I_0
2) En intégrant par parties, montrer que $\forall\, n \geq 1$ on a : $(2n+1)I_n = \sqrt{2} - 2nI_{n-1}$.
3) En déduire la valeur de I_1 ; I_2 et I_3.

14 Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{Cos^{2n+1}x}$

1) Déterminer le seul réel a tel que : $\forall\ x \left[0\ ;\ \frac{\pi}{4}\right]$ on a : $\frac{1}{Cosx} = \frac{aCosx}{1-Sinx} + \frac{aCosx}{1+Sinx}$.
2) Calculer la valeur de I_0.
3) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ on a :
$2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^{-n}}{\sqrt{2}}$ $\left(\text{On pourra poser : } \frac{1}{Cos^{2n+1}x} = \frac{1}{Cos^{2n-1}x} \times \frac{1}{Cos^2x}\right)$

15 Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx$

1) Calculer I_1.
2) En intégrant par parties, montrer que $I_n = \frac{n-1}{n+2}I_{n-2}$ (on posera $x^n = x \bullet x^{n-1}$)

16 Soit l'intégrale In définie par :

$I_n = \int_0^1 \frac{1}{x^n+1}dx \qquad (n \in N)$

1) Montrer que $\forall n \in N$; I_n est croissante et majorée.
2) Montrer que $\forall n \in N$, on a : $1 - \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq 1$ En déduire la limite de la suite I_n.

17 Soit l'intégrale In définie par :

$I_n(x) = \int_1^x t^n(\ln t)dt \qquad (x > 0)$ avec ($n \in N$ et différent de -1)

1) En intégrant par parties ; calculer $I_n(x) = \int_1^x t^n(\ln t)dt$.
2) En déduire le calcul de $J_n(x) = \int_1^x t^n(\ln t)^2 dt$.
3) a) Calculer $I_n(e) - J_n(e)$.
c) Déterminer la limite de $\frac{I_n(e) - J_n(e)}{e^{n+1}}$ quand n tend vers $+\infty$.

18 Soit l'intégrale I_n définie par :

$I_n = \int_0^1 x^n l_n(1+x)dx.$ (n $\in N$)

Déterminer le sens de variation de I_n

Soit l'intégrale J_n définie par $J_n = \int_{-1}^{1} .(t^2 - 1)^n$ dt (n appartenant à ℕ)

1) Démontrer que $J_n = 2\int_0^1 .(t^2 - 1)^n$ dt

2) Démontrer que pour tout n appartenant à ℕ*,on a :

$J_n = \frac{-2n}{1+2n} I_{n-1}$

Calculs d'aires

7 Soient les intégrales I et J définies par : I = $\int_0^{\frac{\Pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx \quad et \quad J = \int_0^{\frac{\Pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} dx$

1) Calculer I
2) Soit la fonction définie sur [0, $\frac{\Pi}{4}$] par : $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$

a) Montrer que $\forall x$ [0, $\frac{\Pi}{4}$]on a : $f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$

b) En déduire une relation entre I et J.

c) Calculer J.

Soient les intégrales suivantes :

I= $\int_0^{\frac{\Pi}{2}} \cos^4 x \, dx$ J = $\int_0^{\frac{\Pi}{2}} \sin^4 x \quad et \quad K = \int_0^{\frac{\Pi}{2}} 2\sin^2 x \cos^2 x \, dx$

1) Calculer I – J e I + J + K
2) Calculer la primitive de Cos4x
3) En déduire la valeur de : I + J – 3K puis celles de I, J et K.

Exercice 7 :

Soient les intégrales I et J définies par :

I = $\int_0^{\frac{\Pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx \; et \; J = \int_0^{\frac{\Pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$

1) Calculer I +J et I – J.

En déduire les valeurs de I et J.

Exercice 8 :

On se propose de calculer l'intégrale J définie par J = $\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3} dx$

1) Calculer les deux intégrales A et B tel que A $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} \quad et \quad B = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$
2) Déterminer les réels a, b et c tel que $\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2}$ (1)
3) En posant t = e^x dans l'égalité (1), calculer I = $\int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2} dx$
4) a) A l'aide d'une intégration par partie, exprimer J en fonction de I.
   b) En déduire la valeur de J.

On considère les intégrales I = $\int_0^{\pi} \cos^4 x dx \quad et \quad J = \int_0^{\pi} \sin^4 x dx.$

1. a) Montrer que l'intégrale I peut s'écrire I = $\int_0^{\pi} \cos x(\cos x - \cos x \sin^2 x) dx.$

   b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que I = $\int_0^{\pi} \sin^2 x dx - \frac{1}{3} J.$

   c) Montrer de même que J = $\int_0^{\pi} \cos^2 x dx - \frac{1}{3} I.$

2. a) Montrer que I + J = $\frac{3\pi}{4}.$

   b) Montrer que J – I = 0

   c) En déduire les intégrales I et J.

Fonctions Logarithmes Népériens

Objectifs

Ce thème vise à :
• définir et étudier la fonction logarithme népérien
• mettre en place les primitives de fonction de la forme $\frac{u'}{u}$

Savoirs et savoir-faire

SAVOIR	SAVOIR-FAIRE
• Fonction logarithme népérien : - Définition, notation, propriétés, représentation graphique. - Limite de référence. - Primitives de $\frac{u'}{u}$ • Logarithme décimal : définition. •Dérivée des fonctions du type $ln\text{o}(u)$ et $ln\text{o}(\|u\|)$	• Résoudre des équations ou inéquations faisant intervenir la fonction logarithme népérien. •Déterminer les primitives d'une fonction du type $\frac{u'}{u}$ • Etant donnée une fonction f faisant intervenir la fonction logarithme népérien : - Trouver les limites de f aux bornes de son ensemble de définition ; - Etudier les variations de f - Représenter graphiquement f.

1- Situation problème :

Soit la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ sur l'intervalle$]0\ ;\ +\infty[$.

a- Construis dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) sa courbe (C).

b- Calcule l'aire de la région du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = a$ avec $a > 0$.

c- Que peut-on conclure ?

Un mathématicien du nom de Napier ou Népère trouva la solution à ce problème et lui donna son Nom : **Logarithme Népérien**.

2- Définition :

On appelle fonction Logarithme Népérien notée (**$\boldsymbol{l}$n**), la primitive de la fonction $x \to \frac{1}{x}$ qui prend la valeur 0 en 1 sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$

3- Conséquences de la définition

Par définition :

- La fonction $\boldsymbol{logarithme}$ est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et sa fonction dérivée est $\frac{1}{x}$.
- La fonction $\boldsymbol{logarithme}$ est croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$ car $\forall\, x \in\ ]0\ ;\ +\infty[$, $\frac{1}{x} > 0$.Tapez une équation ici.
- $\boldsymbol{ln1 = 0}$; $\forall\, x \in\ ]0\ ;\ 1[$, $\boldsymbol{lnx < 0}$ et ; $\forall\, x \in\ ]1\ ;\ +\infty[$, $\boldsymbol{lnx > 0}$.
- La fonction $\boldsymbol{logarithme}$ est une bijection de $]0\ ;\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$; elle admet donc une bijection réciproque de $\mathbb{R}$ dans $]0\ ;\ +\infty[$.

Remarque : un nombre négatif n'a pas de logarithme

Evaluation

Soit $\alpha \in\ ]0\ ;\ 1[$. Résous dans $\mathbb{R}$ l équation $x\ln\alpha \geq 2$

4- Ensemble de définition des fonctions logarithmiques :

- Si $f(x) = ln x \Rightarrow$ Df = $]0\ ;+\infty[$

- Si $f(x) = ln(ax + b)$ => Df = $\{x/x \in \mathbb{R};\ ax + b > 0\}$
- Si $f(x) = ln\,[u(x)]$ => Df = $\{x/x \in \mathbb{R}\ ;\ u(x) > 0\}$
- Si $f(x) = ln\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)$ => Df = $\{x/x \in \mathbb{R}\ ;\ \frac{u(x)}{v(x)} > 0\}$
- Si $f(x) = ln|u(x)|$ => Df = $\{x/x \in \mathbb{R}\ ;\ u(x) \neq 0\}$

5- <u>Propriétés Remarquables</u> :

$\forall\, a > 0$ et $\forall\, b > 0$, on a :

- **P1** : $ln\,(a \times b) = ln\,(a) + ln\,(b)$ **P6** : $ln\sqrt{a} = lna^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}ln\,a$
- **P2** : $ln\left(\frac{a}{b}\right) = lna - lnb$ **P7** : $ln\,(a) = ln\,(b) \Leftrightarrow a = b$
- **P3** : $ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\,ln\,a$ **P8** : $ln\,e^{a} = a$ et $e^{lna} = a$
- **P4** : $ln\,(a)^{n} = n\,ln\,a$ **P9** : $ln(a) \geq ln\,(b) \Leftrightarrow a \geq b$ et $ln(a) \geq ln\,(b) \Leftrightarrow a \geq b$
- **P5** : $ln\,e = 1$ et $ln1 = 0$ **P10** : $ln\,a = b \Leftrightarrow a = e^{b}$

<u>Evaluation</u>

a- Calcule les réels suivants : A = $ln2 + ln3 - 5ln9$; B = $ln\frac{5}{6} + ln5 - 3ln36$;

b- Exprime en fonction de $ln2$, les expressions suivantes : C = $ln8 + \frac{1}{2}ln16 - ln\sqrt{2}$;
D = $ln2 + ln\left(2 + \sqrt{2}\right) + ln\left(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}\right) + ln\left(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}\right)$.

c- Résous dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :
$lnx\,(2x + 7) = ln\,(x - 3)$; $ln\,(x2 - 2x - 3) = ln\,(x + 7)$
$lnx + ln(3x + 2) = ln\,(2x + 3)$; $ln\,(x - 3) = ln\,(x + 7) - ln\,(x + 1)$.
$ln\,(2x - 2) + ln(x + 2) \leq 3ln2$; $ln\,(x - 2) + ln\,(x + 3) > 2\,ln\,(x + 1)$.

6- <u>Limites remarquables</u>

$\lim\limits_{x \to 0} ln\,x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} ln\,x = +\infty$

$\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$ et $\lim_{x \to 0} x n\ln x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} x \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} x n\ln x = +\infty$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ et $\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{x^n} = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln (x+1)}{x} = 1$ et $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ (Nombre dérivé de la fonction ln $au\ point$ 1)

7- <u>Dérivées logarithmiques</u>:

La dérivée logarithmique d'une fonction u, est la dérivée de $ln|u|$

- $Si\ f(x) = ln\, x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
- $Si\ f(x) = ln|\, ax + b\, | \Rightarrow f'(x) = \frac{a}{ax+b}$
- Si $f(x) = \ln(U(x)) \Rightarrow f'(\mathrm{x}) = \frac{u'(x)}{u(x)}$
- Si $f(x) = \ln\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) \Rightarrow \mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \frac{u'(x)}{u\,(x)} - \frac{v'(x)}{v\,(x)}$
- Si $f(x) = \ln\left(U(x) \bullet v(x)\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{u\,(x)} + \frac{v'(x)}{v\,(x)}$.
- Si $f(x) = \ln\,[u(x)]^n \Rightarrow f'(x) = n\frac{u'(x)}{u\,(x)}$.

8- <u>Primitives remarquables :</u>

<u>Activité</u>

En appliquant la technique de l'intégration par parties, calcule une primitive des fonctions : $x \to ln\, x$ et $x \to ln\,(ax + b)$. Ainsi on retiendra :

- $Si\ f(x) = ln\, x \Rightarrow F(x) = x\, ln\, x - x + K$

- $Si\ f(x) = ln\,(ax + b) \Rightarrow F(x) = \left(x + \frac{b}{a}\right) ln\,(ax + b) - x + K$

- $Si\ f(x) = \frac{u'(x)}{u\,(x)} \Rightarrow F(x) = ln\,|u\,(x)| + K$

9- <u>Etude de la fonction $x \mapsto ln\, x$</u> :

Le nombre $\boldsymbol{e}$ est l'unique solution de l'équation $lnx = 1$ avec $\boldsymbol{e}$ = **2,718….**

Soit $f(x) = ln\, x$ et de courbe représentative (C).

Df =] 0 ; + ∞[

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Alors la courbe (C) admet des branches : $x = 0$ est asymptote verticale pour la courbe (C).

($x'Ox$) est branche parabolique (car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln\, x}{x} = 0$)

$f(x) = lnx \Rightarrow f\,'(x) = \frac{1}{x} > 0$

D'où le tableau de variation est le suivant :

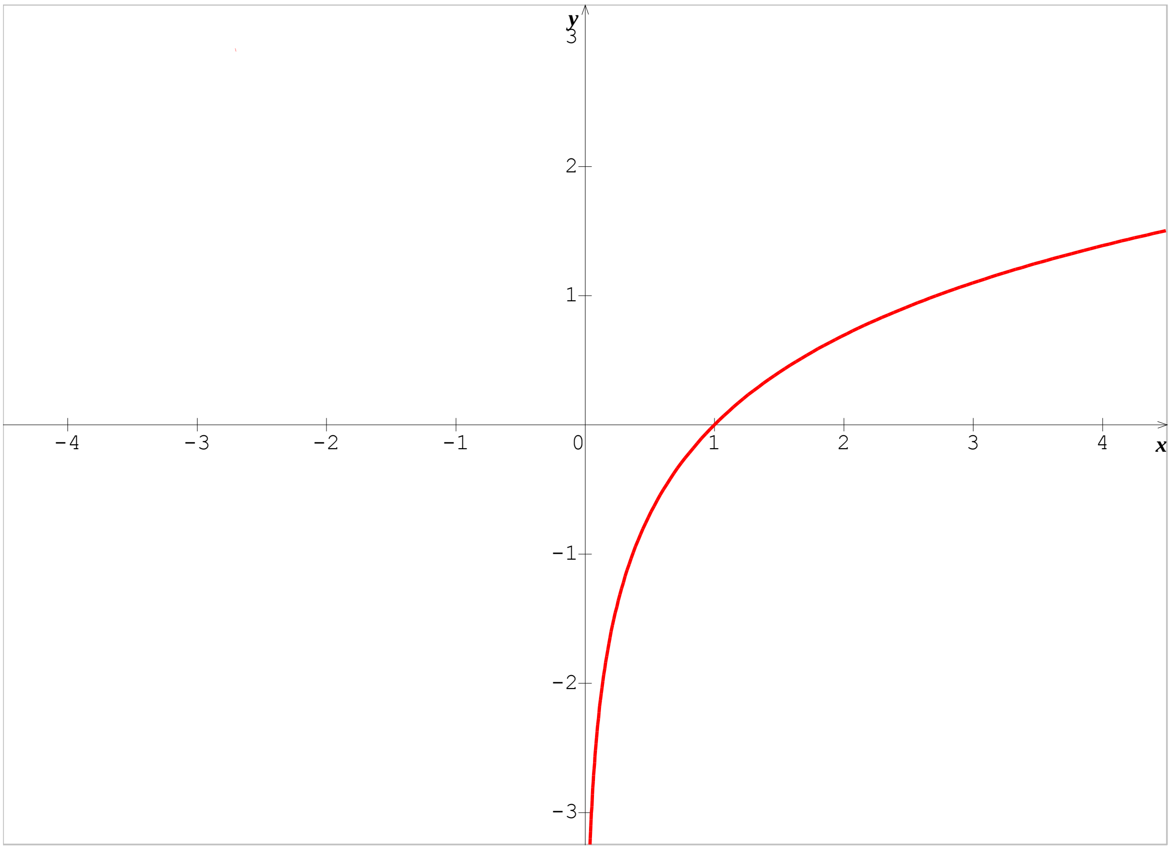
x	0		+∞
$f'(x)$	‖	+	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

- $(C) \cap (OX) \Leftrightarrow ln\, x = 0 \Leftrightarrow x = e^0 = 1$

Donc (C) coupe l'axe (ox) en 1

- $(C) \cap (OY) \Rightarrow x = 0\ et\ f(0) = ln\,(0)$ qui n'existe pas.
  Donc (C) ne coupe pas l'axe (oy).

Ainsi on a la représentation graphique suivante :



10- Fonction logarithme de base a :

a) Définition :

Soit $\boldsymbol{a}$ un réel strictement positif et différent de 1. On appelle logarithme de base $\boldsymbol{a}$, la fonction définie par : $log_a(x) : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto log_a(x) = \frac{l_n\, x}{l_n\, a}.$$

N.B : Lorsque $\boldsymbol{a}$ = 10, la fonction logarithme de base 10 est appelé fonction logarithme décimale. Ainsi la fonction logarithme d'un nombre réel positif est noté $log\ x = \frac{l_n\, x}{l_n\, 10}$

M = $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{ln10}}$ est appelée la **Mantisse** du logarithme décimal ; ainsi $log\ x$ = M• lnx.

b) Propriétés :

P$_1$: $log(ab) = loga + logb$

P$_3$: $log(\frac{a}{b}) = loga - logb$

P$_2$: $log(ab)^n = nloga$

P$_4$: $log(10)^n = n$

P$_5$: $(logx)' = \frac{1}{xln10}$

11- **Etude de la fonction $log_a(x)$:**

Soit $f(x) = log_a(x)$ et de courbe représentative (C_a).

1er Cas : 0 $< a < 1$ ($\boldsymbol{lna} < 0$)

Df =] 0 ; + ∞[

$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Alors la courbe (C) admet des branches : $x = 0$ est asymptote verticale pour la courbe (C).

($x'Ox$) est branche parabolique (car $\lim_{x \to +\infty} \frac{ln\, x}{x} = 0$)

$f(x) = lnx \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{xlna} < 0$

D'où le tableau de variation est le suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

- $(C) \cap (OX) \Leftrightarrow ln\, x = 0 \Leftrightarrow x = e^0 = 1$

Donc (C) coupe l'axe (ox) en 1

- $(C) \cap (OY) \Rightarrow x = 0$ et $f(0) = ln\,(0)$ qui n'existe pas.
  Donc (C) ne coupe pas l'axe (oy).

2ième Cas : $\boldsymbol{a} > 1$ ($\boldsymbol{lna} > 0$)

Df =] 0 ; + ∞[

$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Alors la courbe (C) admet des branches : $x = 0$ est asymptote verticale pour la courbe (C).

($x'Ox$) est branche parabolique (car $\lim_{x \to +\infty} \frac{ln\, x}{x} = 0$)

$f(x) = lnx \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{xlna} > 0$

D’où le tableau de variation est le suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

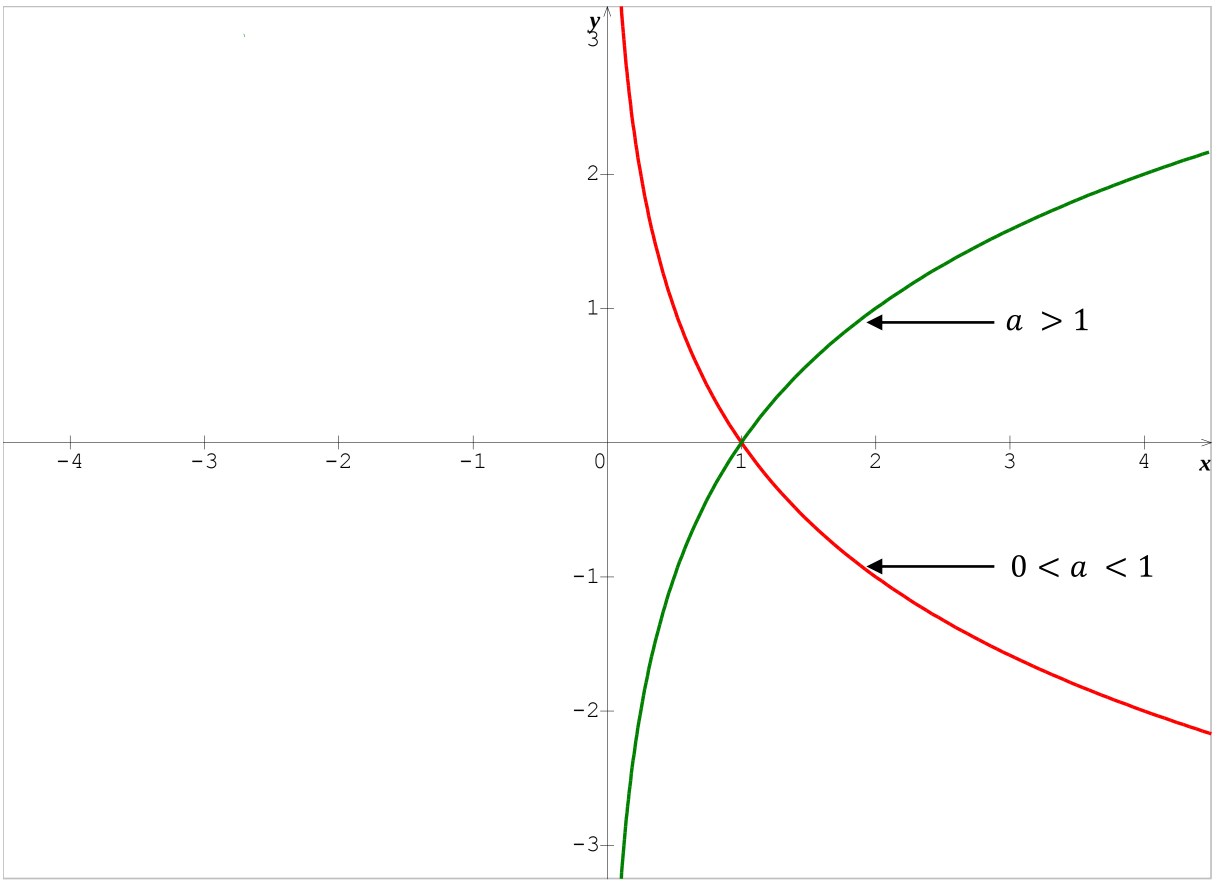
- $(C) \cap (OX) \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^0 = 1$

Donc (C) coupe l’axe (ox) en 1

- $(C) \cap (OY) \Rightarrow x = 0$ et $f(0) = \ln(0)$ qui n’existe pas.
  Donc (C) ne coupe pas l’axe (oy).

NB : dans tous les cas, $\boldsymbol{\log_a(x) = 1 <=> x = e}$

<u>Représentation</u>



EXERCICES

Exercice 1 :

1) **Exprimer en fonction de ln2 les réels suivants :**

A = ln8 + $\frac{1}{2}\ln 16$ - ln $\sqrt{2}$; B = ln 2 + ln $\left(2+\sqrt{2}\right)$ + ln $\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)+\ln\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$

C = $\ln 2\sqrt{2}+\ln 2^2-\ln\frac{1}{\sqrt{2}}$; D = 2ln $\sqrt{2}+\ln\sqrt{2^3}-\frac{\ln 2^{\sqrt{2}}}{3\ln 2^{\frac{3}{2}}}$

2) **Résoudre dans $\mathbb{R}$:**

a) **Les équations suivantes :**

ln (2x +7) = ln (x – 3) ; ln (x^2 – 2x – 3) = ln (x + 7)
lnx + ln(3x + 2) = ln (2x + 3) ; ln (x – 3) = ln (x + 7) – ln (x + 1).
ln (2x – 2) + ln(x+2) = 3ln2 ; ln (x-2) + ln (x +3) = 2 ln (x +1).
$\ln\sqrt{2x-3}=\ln(6-x)-\frac{1}{2}\ln x$; $\ln|x-1|+\ln|2x-1|=0$
ln $\sqrt{x+1}=\ln(3-x)-\frac{1}{2}\ln 2x$; ln $\left(\frac{x-1}{2x-3}\right)=0$

3 $(\ln x)^2$ – 7ln x + 2 = 0 ; -5 $(\ln x)^2$ + (ln x) + 6 = 0

b) Les inéquations suivantes :

ln(2 – 3x) > ln x ; ln (2x – 5) + ln (x + 1) $\leq$ 2 ln 2
ln (x^2 + 2x + 2) $\geq$ ln (-x^2 + x + 3) ; ln (x +8) – ln (x + 14) + ln (x + 2) $\leq$ 0
ln (2x – 1) – ln (1 – x) < ln3 ; ln (x + 1) > ln (4x – 1) – ln (x – 1).
$(\ln x)^2$ – ln x – 6 < 0 ; $(\ln x)^2$ + 2ln x + 1 = 0
ln (x^2 + 2x + 2) > ln (3 +x – x^2) ; ln (5x^2 + 6x + 1) < 0.

c) Les systèmes suivants :

$\begin{cases} x+y=15 \\ \ln x+\ln y=\ln 36 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ \ln x+\ln y=\ln 6 \end{cases}$; $\begin{cases} \ln x+\ln y=\ln\frac{3}{2} \\ x+y=\frac{7}{3} \end{cases}$

$\begin{cases} (\ln x)\bullet(\ln y)=-10 \\ \ln x+\ln y=3 \end{cases}$; $\begin{cases} 5x+4y=12 \\ \ln(x-1)+\ln y=\ln 3-\ln 5 \end{cases}$; $\begin{cases} 2\ln x-\ln y=0 \\ 4\ln x+\ln y=3 \end{cases}$

$$\begin{cases} x \bullet y = 243 \\ 4(\log_x y + \log_y x) = 17 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 2\ln(x-1) + 3\ln(x+y) = -2 \\ 3\ln(x-1) + 5\ln(x+y) = -4. \end{cases}$$

Exercice 2 :

I) Soit le polynôme p définie par $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$

a) Calculer p(-1) puis factoriser p(x) en trois produits de facteur du premier degré.
b) Résoudre l'équation p(x) = 0
c) En déduire la résolution de l'équation : $2(\ln x)^3 - 5(\ln x)^2 - 4 \ln x + 3 \leq 0$

II) Soit le polynôme q définie par $q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$.

a) Calculer q(1) puis résoudre l'équation q(x) = 0 et $q(x) \geq 0$
b) En déduire la résolution de :

- l'équation : $2(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2 - 8\ln x + 3 = 0$
- l'inéquation $2(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2 - 8\ln x + 3 \geq 0$

Exercice 3 :

I) Dresser le tableau de variation des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \ln(2 - x)$; 2) $f(x) = \ln(-x^2 + 2x + 3)$; 3) $f(x) = x\ln x - x$; 4) $f(x) = \dfrac{2x\ln x}{x+1}$

5) $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x-1}{x-3}\right)$; 6) $f(x) = \ln \left|x^2 - 3x + 2\right|$

II) Soit la fonction f définie sur R par :

$$\begin{cases} f(x) = (x+1)\ln|x+1| \ si \ x \neq -1 \\ f(x) = 0 \quad si \quad x = -1 \end{cases}$$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en -1
2) Dresser le tableau de variation de f puis construire sa courbe

III) Soit la fonction g définie sur R – {-1 ; 0 ; 1} par $g(x) = \dfrac{1}{x(x^2-1)}$

1) Déterminer les nombres réels a, b et c tel que $\forall x \in]1;+\infty[$

On ait $g(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x+1}$

2) Déterminer une primitive de la fonction g sur $]1 ; +\infty[$
3) A l'aide d'une intégration par partie, calculer : $I = \int_2^3 \dfrac{x\ln x}{(x^2-1)^2}dx$

<u>Problème 1</u> :

L'objet de ce problème est d'étudier, à l'aide d'une fonction auxiliaire, une fonction et de résoudre une équation différentielle dont elle est solution.

A. Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur R par g(x) = $\frac{e^x}{1+2e^x}$ - ln(1 + 2e^x).

1) Calculer g'(x) et montrer que ce nombre est strictement négatif pour tout x de ℝ.
2) Déterminer les limites de g en - ∞ et + ∞
3) Dresser le tableau de variation de g.
4) Donner le signe de g(x).

B. Etude d'une fonction et calcul d'une aire :

Soit f la fonction définie sur R par f(x) = e^{-2x} ln(1+ 2e^x).
On note C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.)

1) Calculer f '(x) et montrer que pour tout réel x, f '(x) = 2e^{-2x} g(x).
2) a) Déterminer la limite de f en - ∞
   b) Déterminer la limite f en + ∞. On pourra remarquer que :

si on pose X = 1 + 2e^x, f(x) s'écrit $4\frac{X}{(X-1)^2}\frac{\ln X}{X}$

3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Tracer C.
5. Soit α un réel strictement positif.

a) Vérifier que, pour tout réel x, $\frac{e^{-x}}{1+2e^x} = e^{-x} - 2\frac{e^{-x}}{e^{-x}+2}$

En déduire la valeur de l'intégrale I(α) = $\int_0^\alpha \frac{e^{-x}}{1+2e^x}dx$

b) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale : J(α) = $\int_0^\alpha f(x)dx$

Donner une interprétation graphique de J(α).

C) Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : y' + 2y = 2 $\frac{e^{-x}}{1+2e^x}$.

1. Vérifier que la fonction f étudiée dans la partie **B** est solution de (E).
2. montrer qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si φ - f est solution de l'équation différentielle. (E') : y' + 2y = 0
3. résoudre (E') et en déduire les solutions de (E).

Problème 2 :

Le but de ce problème est d'étudier dans la partie A la fonction numérique f définie sur]0, + ∞[par f(x) = x + $\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x^2}$, de déterminer ensuite dans la partie B la position de sa courbe représentative par rapport à son asymptote oblique et enfin d'étudier une suite récurrente dans la partie C, cette dernière partie étant dans une large mesure indépendante des deux autres.

Partie A :

1) Soit g la fonction numérique définie sur]0 ; +∞[par g(x) = $x^3 - x - 2\ln x + 1$
a) Montrer que la fonction g est dérivable et que pour tout x $\in$]0, +∞[

g'(x) = $\frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$

b) Etudier les variations de la fonction g puis déterminer le signe de g(x).

2) a. Déterminer les limites de f en 0 et en + ∞.

b) Montrer que pour tout x $\in$]0, + ∞[f ' (x) = $\frac{g(x)}{x^3}$ puis donner le tableau de variations de f.

Partie B :

Γ désigne la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique 2 cm.

1.1 soit h la fonction définie sur]0, + ∞[par h(x) = x + ln x.
a) Etudier le sens de variation de h puis montrer que l'équation h(x) = 0 admet une solution unique α sur l'intervalle [0,4 ; 0,7].
b) Montrer que l'on a : $e^{-\alpha} = \alpha$.

2) a) Vérifier que la droite Δ d'équation y = x est asymptote oblique à Γ en + ∞.
b) Utiliser les résultats de la question **1.a)** pour déterminer les positions relatives de Γ et Δ.

3) Construire Γ et Δ dans le repère ortho normal $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$.

4) a) Calculer au moyen d'une intégration par parties, l'intégrale I = $\int_1^2 \frac{\ln t}{t^2}\,dt.$

c) En déduire l'aire, en cm^2 de la portion de plan limitée par la courbe Γ, la droite Δ et les droites parallèles à l'axe des ordonnées d'équation x = 1 et x = 2.

<u>Partie C</u> : Etude d'une suite

Dans cette partie :

- I désigne l'intervalle [0,4 ; 0,7]
- α est le réel mis en évidence au **B. 1**.
- φ est la fonction définie sur R par φ (x) = e^{-x}
- U est la suite récurrente définie par $\begin{cases} u_0 = 0{,}4 \\ et \\ u_{n+1} = \varphi(u_n) \quad pour\,tout\,n \in N \end{cases}$

1) Montrer qu'on a pour tout x $\in$ I :

a) $\varphi(x) \in I$
b) $|\varphi'(x)| \leq 0{,}7$
c) $|\varphi(x) - \alpha| \leq 0{,}7|x - \alpha|$.

2) a) Montrer qu'on a pour tout n $\in N |u_{n+1} - \alpha| \leq 0{,}7|u_n - \alpha|$ puis en déduire par récurrence qu'on a pour tout n $\in$ N $|u_n - \alpha| \leq 0{,}3\,(0{,}7)^n$.
b) Conclure alors quant à la convergence de la suite u.

3) Déterminer un entier p tel que pour n ≥ p on ait $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$ puis donné à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de u_p à 10^{-3} près.

<u>Problème 3</u> :

Dans tout le texte e désigne le nombre réel qui vérifie ln e = 1. On considère la fonction f définie sur]0 ; + ∞[par f(x) = $\dfrac{\ln x + xe}{x^2}$
On note Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O, $\vec{u}, \vec{v}$), unité graphique : 2 cm.

<u>Partie A</u> : Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur]0 ; + ∞] par g(x) = -2ln x – xe + 1.

1) Déterminer les limites de g en 0 et en + ∞.
2) Etudier le sens de variation de g.
3) Montrer que dans [0,5 ; 1] l'équation g(x) = 0 admet une solution et une seule notée α. Déterminer un encadrement de α à 0,1 près.
4) En déduire le signe de g(x) selon les valeurs de x.

<u>Partie B</u> : Etude de la fonction f

1) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2) Soit f ' la fonction dérivée de f. Vérifier que f ' (x) = $\frac{g(x)}{x^3}$ puis étudier le sens de variation de f sur]0 ; + ∞[.

3) Montrer que f(α) = $\frac{1+\alpha e}{2\alpha^2}$

4) Donner le tableau de variation de f.

5) Construire Γ.

Partie C : Intégrale et suite

Soit $I_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{\ln t}{t^2} dt$ et $A_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} f(t)dt$ pour tout entier naturel n.

1) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que : $I_n = \frac{n+1}{e^n} - \frac{n+2}{e^{n+1}}$

2) a) Montrer que $A_n = I_n + e$.
   b) Calculer I_0 et A_0.
   c) Donner une interprétation géométrique de A_0.

3) Montrer que la suite (A_n) converge vers e.

Problème 4 :

Les butes du problème sont l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle]0 ; + ∞[par f(x) = $\frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}$, puis la recherche de primitives de cette fonction.

Première partie : Etude de fonctions auxiliaires.

1) On définit la fonction g sur l'intervalle]1 ; + ∞[par g(x) = 2x –(x-1) ln (x – 1).

a) On admet le résultat suivant : $\lim_{x \to 0} x\ln x = 0$. En déduire la limite de g(x) lorsque x tend vers 1.

b) Calculer g'(x) pour x appartenant à l'intervalle] 1 ; + ∞[.

c) Résoudre l'inéquation 1 – ln(x-1)>0, d'inconnue x appartenant à l'intervalle] 1 ; + ∞[.

d) Etudier le sens de variation de g sur l'intervalle] 1 ; + ∞[.

e) Montrer que l'équation g(x) = 0 a une solution unique, notée α, dans l'intervalle [e + 1 ; e^3 + 1], et étudier le signe de g(x) sur chacun des intervalles] 1 ; α[et]α ; + ∞[.

2) Soit φ la fonction définie sur l'intervalle] 1 ; + ∞[par φ (x) = $\frac{\ln(x^2-1)}{x}$

a) Déterminer $\lim_{x \to 1} \varphi(x)$ et prouver que $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$

b) Calculer φ ' (x) et montrer que φ ' (x) est du signe de g(x^2) sur l'intervalle] 1 ; + ∞ [

c) Montrer que φ est croissante sur l'intervalle] 1 ; $\sqrt{\alpha}$ [et décroissante sur l'intervalle] $\sqrt{\alpha}$; + ∞ [.

Deuxième partie : Etude de la fonction f

1) Vérifier que pour tout x appartenant à l'intervalle] 0 ; + ∞ [on a f(x) = $\varphi(e^x)$.
2) En déduire :
a) La limite de f(x) lorsque x tend vers 0.
b) La limite de f(x) lorsque x tend vers + ∞
c) Le sens de variation de f sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [et que f admet un maximum en $\ln(\sqrt{\alpha})$
3) Montrer que, pour tout x de l'intervalle] 0 ; + ∞ [, $f(x) \leq \dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha - 1}$
4) Reproduire le tableau suivant et le compléter en donnant des valeurs approchées à 10^{-2} près :

X	0,1	0,5	1	1,5	2	3
f(x)						

5) Représenter graphiquement f dans un repère orthogonal, d'unités 5 cm en abscisse et 10 cm en ordonnée. On prendra 10 comme valeur approchée de α.

Troisième partie : Recherche de primitives de f

1) Vérifier que f est solution de l'équation différentielle $y' + y = \dfrac{e^x}{e^x - 1} - \dfrac{e^x}{e^x + 1}$
2) On pose $h(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1} - \dfrac{e^x}{e^x + 1}$
a) Trouver une primitive H de h sur l'intervalle] 0 ; + ∞[
b) En déduire les primitives F de f sur l'intervalle] 0 ; + ∞[.

Problème 5 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [par $f(x) = x\ln(x^2) - 2x$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$; unité graphique 1 cm.

Partie A : Etude de f.

1) Montrer que, pour x >0, f(x) = 2xlnx – 2x puis que $f(x) = 2x\ln\dfrac{x}{e}$
2) a) Etudier la limite de f en + ∞.
   b) Montrer que f est dérivable en tout x > 0 ; calculer f '(x) pour x > 0.
   c) Etudier le sens de variation de f sur]0 ; + ∞[.
   d) Donner le tableau de variation de f sur]0 ; + ∞[.

3) Déterminer par le calcul l'abscisse du point d'intersection de la courbe (C) avec axe des abscisses.
4) Montrer que l'équation f(x) = 2 admet sur l'intervalle [1 ; 5] une unique solution et en donner la valeur décimale arrondie à 10^{-2}.

Partie B : Calcul d'aires.

1) Soit F la fonction définie sur l'intervalle [0 ; + ∞[par $\begin{cases} F(0) = 0 \\ F(x) = x^2 \ln x - \dfrac{3x^2}{2} \quad si > 0 \end{cases}$

a) On admet que $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$; montrer que F est dérivable en 0 et préciser F '(0).

b) Montrer que, pour tout x appartenant à]0 ; + ∞[, F '(x) = f(x).

2) On considère pour chaque entier n positif ou nul, la droite D_n d'équation y = nx. On trouvera en annexe un tracé de la courbe (C) et les droites D_0, D_1, D_2.

a) Déterminer les coordonnées du point I_n, d'abscisse strictement positive, intersection de (C) et de D_n. On appelle P_n le point de l'axe des abscisses de même abscisse que I_n. Placer les points I_0, I_1, I_2, P_0, P_1, P_2, sur la figure donnée en annexe.

b) Déterminer la position relative de (C) et de Dn pour les abscisses appartenant à]0 ; + ∞[.

3) Pour tout n ≥ 1, on considère le domaine A_n situé dans le quart de plan défini par x ≥ 0 et y ≥ 0, délimité par (C), D_{n-1} et D_n. On note a_n son aire, exprimée en unité d'aire.

a) Faire apparaître les domaines A_1 et A_2 sur la figure.

b) Calculer l'aire t_n du triangle OP_nI_n, en unités d'aire.

c) Calculer l'aire u_n, en unités d'aire, du domaine situé dans le quart de plan défini par x ≥ 0 et y ≥ 0, délimité par (C), l'axe des abscisses, et les parallèles à l'axe des ordonnées passant par P_0 et P_n.

d) Vérifier que l'aire v_n, en unités d'aire, du domaine situé dans le quart de plan défini par x ≥ 0 et y ≥ 0, délimité par (C), l'axe des abscisse et D_n, est $v_n = t_n - u_n = \dfrac{e^2}{2}(e^n - 1)$.

e) Calculer alors a_n.

4) Montrer que la suite (a_n) est une suite géométrique. En préciser la raison et le premier terme.

Problème 6 :

A) Etude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur]0 ; + ∞[par $f(x) = 1 + \dfrac{\ln x}{x}$. Sur C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$; unité graphique : 5 cm.

1) Calculer les limites de f en 0 et en + ∞. Déterminer les asymptotes de C.
2) Etudier le sens de variation de f. Dresser le tableau de variation de f.

3) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e};1\right]$ une solution unique, notée α. Déterminer un encadrement de α, d'amplitude 10^{-2}. Donner, suivant les valeurs de x, le signe de f(x) sur]0 ; + ∞[.
4) Tracer la courbe C.

B) Calcul d'aire

1) Déterminer une équation de la tangente D à C au point d'abscisse 1.
2) a) soit φ la fonction définie pour tout x > 0 par : $\varphi(x) = x - x^2 + \ln x$. Calculer $\varphi'(x)$. En déduire le sens de variation de φ, puis le signe de $\varphi(x)$, sur l'intervalle]0 ; + ∞[.

   b) Montrer que, pour tout x >0, $f(x) - x = \frac{\varphi(x)}{x}$

   c) En déduire la position relative de C et de D.

3) On considère le domaine limité sur le graphique par l'axe des abscisses, la courbe C et la tangente D.
a) Hachurer ce domaine.
b) Soit A son aire, en cm^2. Ecrire la valeur exacte de A comme expression polynomiale du second degré en α.

C) Etude d'une suite

Soit x_0 un réel appartenant à l'intervalle $\left]\frac{1}{e};\alpha\right[$ on note M_0 le point de C d'abscisse x_0.

1) a) Donner une équation de la tangente F_0 à C en M_0, en fonction de x_0, $f(x_0)$ et $f'(x_0)$.
b) Soit x_1 l'abscisse du point d'intersection de F_0 avec des abscisses. Ecrire x_1 en fonction de x0, $f(x_0)$ et $f'(x_0)$.

2) On considère la fonction h définie sur $\left]\frac{1}{e};\alpha\right[$ par $h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ (On remarquera que $h(x_0) = x_1$)

a) Montrer que $h'(x) = \frac{f''(x).f(x)}{[f'(x)]^2}$

b) Calculer f ''(x) et étudier son signe sur $\left]\frac{1}{e};\alpha\right[$.

c) En déduire que h est strictement croissante sur $\left]\frac{1}{e};\alpha\right]$, puis montrer que $x_1 < \alpha$.

d) En écrivant $h(x) - x = -\frac{f(x)}{f'(x)}$, étudier le signe de h(x) – x sur $\left]\frac{1}{e};\alpha\right[$. En déduire que $\frac{1}{e} < x_0 < x_1 < \alpha$

3) a) Démonter que, pour tout x appartenant à $\left]\frac{1}{e};\alpha\right]$, h(x) appartient à $\left]\frac{1}{e};\alpha\right]$.

b) On considère la suite (x_n) de réels définie par x_0 et $x_{n+1} = h(x_n)$ pour tout entier naturel n. Montrer que la suite (x_n) es strictement croissante.

Problème 7 :

I) Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$

1) Dresser le tableau de variation de g.
2) Calculer g(1) puis en déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

II) Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\ln x}{2x}$

1) Dresser le tableau de variation de f.
2) Démontrer que l'équation f(x) = 0 admet 2 solutions α *et* β $(\alpha < \beta)$.
3) a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$ est asymptote à la courbe (C) de f.
   b) Etudier le signe de $f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right)$ puis en déduire la position de (C) et (Δ).
4) Tracer (C) et (Δ) dans le même repère.

Problème 8

Partie A :

On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x^2 + 2 - 2 \ln x$

1- Etudier les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.
2- Dresser le tableau de variation de g puis en déduire son signe sur $]0, +\infty[$

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$f(x) = x + 2 \bullet \frac{\ln x}{x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1) a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   b) Etudier les variations de f et dresser sont tableau de variation.
   c) Montrer que la droite (Δ) d'équation y = x est asymptote à la courbe (C), puis étudier la position de (C) par rapport à la droite (Δ).

2) Déterminer les coordonnées du point A sachant que la courbe (C) admet au point A une tangente (T) parallèle à (Δ).

3) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α et que $\alpha \in \left[\frac{1}{2};1\right]$.

4) Tracer (C) et (Δ) dans le même repère.

5) Hâchurer puis calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) ; la droite (Δ) et les droites d'équation x = 1 et x = 2.

Problème 9 :

Partie A :

1) On considère la fonction numérique g définie par $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$

a) Dresser le tableau de variation de g.
b) Démontrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique α telle que $1,89 < \alpha < 1,90$.
c) Déduire de ce qui précède le signe de g(x).

2) On considère la fonction numérique f définie sur]o, +∞[par $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$ et soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique (2 cm).

a) Dresser le tableau de variation de f.
b) Vérifier que $f(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha^2}$. En déduire un encadrement de f(α) d'amplitude 2.10^{-3}.
c) Tracer (C) dans le repère.

Partie B :

On considère la fonction numérique définie sur]0, +∞[par : $F(x) = \int_1^x f(t)dt$

1) a) Prouver que F est dérivable sur]0; +∞[et préciser F'(x).
b) En déduire le sens de variation de F.

2) a) Vérifier que $\forall\ t \geq 1$ on a : $\dfrac{\ln t}{(1+t)^2} \leq f(t) \leq \dfrac{\ln t}{t^2}$

b) Pour tout x > 0 on pose $I(x) = \int_1^x \dfrac{\ln t}{t^2} dt$ et $J(x) = \int_1^x \dfrac{\ln t}{(1+t)^2}$ dt

i) a l'aide d'une intégration par parties, calculer I(x)
ii) a l'aide d'une intégration par partie et de l'égalité :
$\dfrac{1}{t(1+t)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{1+t}$ pour t > 0, calculer J(x).

c) Déduire de ce qui précède que $\forall x > 1$ on a :

$$\ln 2 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\ln x}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$$

d) On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \theta$. Sans calculer θ vérifier que $\ln 2 \leq \theta \leq 1$

Problème 10 :

On considère la fonction g définie sur l'intervalle I = $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$ par g(x) = ln (1 + x) – x + $\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$ et la fonction numérique f définie sur]-1 ; +∞[par : $\begin{cases} f(x)=\frac{x-\ln(1+x)}{x^2} \; si \; x\neq 0 \\ f(o)=\frac{1}{2} \end{cases}$

1) a) Démontrer que pour tout réel t ≥ 0 ; $-2t^3 \leq g'(t) \leq 0$

b) Démontrer que pour t $\in \left[-\frac{1}{2};0\right]$; $0 \leq g'(t) \leq -2t^3$

2) En utilisant les inégalités précédentes, démontrer que pour tout x ∈ [o ; +∞[on a :
$-\frac{1}{2}x^4 \leq g(x) \leq 0$ (on utilisera une intégration).

3) a) Vérifier que pour tout x ≥ - $\frac{1}{2}$ et x ≠ 0 ; f(x) = $\frac{-g(x)}{x^2}+\frac{1}{2}-\frac{x}{3}$

b) En utilisant l'inégalité de la question 2) ; démontrer que f est dérivable en 0.

c) f est – elle continue en 0 ? Justifier votre réponse.

4) Soit h la fonction définie sur] -1 ; +∞[par : h(x) = $\frac{-x^2-2x}{1+x}+2\ln(1+x)$

a) Etudier le sens de variation de h. Calculer h(o) et en déduire le signe de h(x) sur]-1 ; +∞[

b) Démontrer que pour tout x ∈]-1 ; +∞[U]0 ; +∞[on a : f '(x) = $\frac{h(x)}{x^3}$

c) Dresser le tableau de variation de f en précisant les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

5) On appelle (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal
(o, $\vec{i},\vec{j}$) d'unité graphique 2 cm.

a) Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C) en son point d'abscisse O.
b) Préciser les asymptotes à (C) puis construire (C).
c) Calculer en cm2 l'aire A(α) du domaine plan limité par la courbe (C) ; l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 1 et x = α (α > 1). Déterminer la limite A(α) lorsque α tend vers +∞.

Problème 11 :

A) Soit k un nombre réel strictement positif, soit la fonction numérique f_k définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f_k(x) = k^2x^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln x$.

On appelle (C_k) la courbe représentative de f_k dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ où l'unité est 5 cm.

1) Etudier les variations de f_k et dresser sont tableau de variation en précisant les limites de f_k aux bornes de son ensemble de définition.
2) Soit M_k le point de (C_k) correspondant au minimum de f_k. Déterminer dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ une équation cartésienne de l'"ensemble (Γ) des points M_k quand k décrit $]0, +\infty[$
3) Tracer sur une même figure les courbes (C_1) et (Γ) après avoir précisé leur position relative.

B) Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln x$

1) On note α un nombre réel strictement positif

a) A l'aide d'une intégration par parties calculer $\int_\alpha^1 \ln x dx.$ En déduire la valeur de $I(\alpha) = \int_\alpha^1 f(x)dx$

b) Déterminer la limite de I(α) quand α tend vers +∞.

2) Pour n entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose $S_n = \frac{1}{n}\sum_{P=1}^{n} f\left(\frac{P}{n}\right)$

a) En utilisant le sens de variation de f sur]0 ; 1], démontrer que pour p entier naturel vérifiant $1 \le p \le n - 1$ on a : $\frac{1}{n} f\left(\frac{P+1}{n}\right) \le \int_{\frac{P}{n}}^{\frac{P+1}{n}} f(x)dx \le \frac{1}{n} f\left(\frac{P}{n}\right)$

b) En déduire que : $S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \le I\left(\frac{1}{n}\right) \le S_n$ puis que $I\left(\frac{1}{n}\right) \le S_n \le I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$

c) En déduire que : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{3}$

Problème 12 :

Soit la fonction f définie sur]o, +∞[par : $f : x \to \begin{cases} \dfrac{\ln(x+1)}{x} \; si \; x > 0 \\ f(o) = 1 \end{cases}$

On note (C) sa courbe dans le repère d'unité graphique 2 cm.

Partie A : (Encadrement de ln(x+1)).

1- Montrer que $\forall x \geq 0$ on a : 1 – x ≤ $\dfrac{1}{x+1} \leq 1$

2- Etudier rapidement les fonctions x $\mapsto$ ln (x + 1) – x et x $\mapsto$ ln(x + 1) –x + $\dfrac{x^2}{2}$

puis en déduire que $\forall x \geq 0$ on a : x - $\dfrac{x^2}{2} \leq$ lin(x + 1) ≤ x (1)

Partie B : (Etude d'une fonction auxiliaire)

Soit g la fonction définie sur [0, +∞[par g(x) = ln (x + 1) - $\dfrac{2x}{x+2}$

1) Montrer que g est dérivable puis calculer g'(x).
2) Montrer que $\forall x \geq 0$, on a 0 ≤ g'(x) ≤ $\dfrac{x^2}{4}$. En déduire que $\forall x \geq 0$, on a :

0 ≤ g(x) ≤ $\dfrac{x^3}{12}$ (2)

(on pourra étudier la fonction x$\mapsto$g(x) - $\dfrac{x^3}{12}$)

Partie C : (Etude des variations de f)

1) Montrer que f est dérivable sur]o, +∞[et calculer f '(x).
2) Etablir que $\forall x \geq 0$; g(x) ≤ ln(x+1) - $\dfrac{x}{x+1}$. Puis grâce à la relation (2). En déduire le sens de variation de f.

Partie D : (Etude de f aux bornes de l'ensemble de définition)

1) Déterminer la limite de f(x) quand x tend vers +∞
2) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \ln(x+1)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ (on pourra utiliser (2))

En déduire que f est dérivable en 0 et calculer f '(0).
Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 et grâce à (1), préciser la position de (C) par rapport à (T).

3) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
4) Tracer la courbe (C) et la droite (T) dans le même repère.

Problème13 (non corrigé)

Partie A :

On considère la fonction f définie par f(x) =$\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ et soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (o,i,j).

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f def
2) Calculer les limites aux bornes deD_f puis en déduire que (C) admet deux asymptotes dont on précisera les équations.
3) Dresser le tableau de variation de f
4) a-Ecrire une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1
   b-Etudier la position de (C) et (T) puis tracer (C) et (T) dans le même repère.
5) On considère l'intégrale I définie par I=$\int_{\frac{-1}{2}}^{0} f(x)\,dx$.

   a-Calculer I en utilisant une intégration par parties.
   b-En déduire en cm^{2}l'aire A de la partie du plan délimité par la courbe (C) , la tangente (T) et la droite d'équation x=$\frac{-1}{2}$

Partie B :

On considère dans cette partie la fonction numérique h définie sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$par h (x) = $\frac{1}{2}$f(cosx) où f est la fonction définie dans la **Partie A :**

1) Vérifier que h est la primitive qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$ de la fonction g définie par

   g(x)= $\frac{1}{\sin x}$

2) Calculer l'intégrale K=$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}$ dx
3) Soit l'intégrale (I_n) ; n appartenant à IN définie par I_n = $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin x}$ dx

   a-Calculer I_0 et I_1

   b- Calculer l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin x\,dx$

   c- En déduire l'expression de I_n-I_{n+2} en fonction de n puis calculer I_2,I_3,I_4 et I_5

Problème14 (non corrigé)

PARTIE A :

Soit g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x^2 + 3x - 1 - lnx$. On désigne par C$g$ la courbe représentative de g dans un repère orthonormé(O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) d'unité graphique 1cm.

1) Etudier les limites de g en 0 et en + ∞.
2) Etudier les branches infinies de la courbe Cg.
3) Etudier les variations de g.
4) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle[2 ; 3].
   Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près par dichotomie.
5) Déduire de ce qui précède le signe de $g(x)$ en fonction de x.
   Interpréter graphiquement le résultat.
6) a- Tracer la courbe Cg.
   a- Discuter graphiquement suivant les valeurs du périmètre réel m, le nombre de solution de l'équation $g(x) = m$

PARTIE B :

Soit la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{x-1}{x^2-xlnx}$. On désigne par (C$f$) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) d'unité graphique : 1 cm.

1) a) Montrer que pour tout x de] 0 ; + ∞[, on a $x > lnx$.
   b) justifier que la fonction f est bien définie sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2) Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$. Que peut-on en déduire ?

3) a- Monter que pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$, $f\,'(x) = \frac{g(x)}{(x^2-xlnx)}$

b- Dresser le tableau de variation de f.

c – Montrer que $f(\ \alpha\ ) = \frac{1}{\alpha(\alpha-1\ )}$ puis en déduire un encadrement de $f(\ \alpha\ )$.

4) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (Cf) de f au point d'abscisse 1.

5) Résoudre l'équation $f(\ x\ ) = 0$ puis tracer la courbe (Cf) et la tangente (T) dans le même repère.

6) a- Montrer que pour tout $x \in\ ]0\ ;\ +\infty[$, on a : $f\,'(x) = \frac{1-\frac{1}{x}}{x-lnx}$

b- Soit $A(\alpha)$ l'aire de la partie du plan délimité par la courbe (Cf) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.

Montrer que $A(\alpha) = 2ln(\ \alpha\ - 1\ )$ puis en déduire un encadrement de $A(\alpha)$.

7) Soit n un entier naturel supérieur ou égale à .
   a- Calculer $a_n = \int_1^n f(x)dx$. Interpréter graphiquement ce résultat.
   b- Calculer la limite de a_n lorsque n tend vers $+\infty$.

PARTIE C :

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \int_1^{e^x} f(t)dt$. On désigne par (C_h) la courbe représentative de h dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ d'unité graphique : 1 cm.

1) a- Montrer que $h(x) = ln(e^x - x)$.

   b- Montrer que pour tout nombre réel x , on a : $e^x > x$.

2) a-Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$ puis $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{h(x)}{x}$

   Que peut-on en déduire pour la courbe (C_h) ?

   b- Montrer que pour tout nombre réel x , on a : $h(x) = x + ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)$.

   En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$

3) a- Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe (C_h) au voisinage de $+\infty$.

   b- Etudier la position relative de (C_h) et de (Δ).

4) Dresser le tableau de variation de h puis tracer.

<u>Problème15</u> (non corrigé)

PARTIE A :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ln\left(2x + \sqrt{4x^2 + 1}\right)$. On désigne par (Cf) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé$(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ d'unité graphique 1cm.

1) Montrer que f est impaire.
2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis montrer que sa dérivée $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2 + 1}}$.
3) Dresser le tableau de variation de f.
4) Etudier les branches infinies de la courbe (Cf).
5) Trouver une équation cartésienne de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse nul.
6) Préciser la position de (T) et (Cf).
7) Tracer la droite (T) et la courbe (Cf)
8) Soit α un réel strictement positif. Calculer en fonction de α , l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (Cf) et les droites d'équations respectives $x = 0$, $y = 0$ et $x = \alpha$.

PARTIE B :

1) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque g définie sur un intervalle I que l'on précisera.
2) Construis dans le même repère que (Cf) , la courbe (Cg) de la fonction g.
3) Montrer que pour tout $x \in$ I, on a : $g(x) = \frac{1}{4}(e^{x} - e^{-x})$.
4) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$ une solution unique α et que $\alpha \in \left]\frac{-\sqrt{3}}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right[$.
5) Calculer en fonction de α l'aire du domaine limité par les deux courbes (Cf) et (Cg) et situées dans le demi-plan $x \geq 0$.

PARTIE C :

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \frac{g(x)}{g'(x)}$.

1) Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.
2) On pose $h(x) = \varphi^{-1}(x)$. Donner les expressions de $h(x)$ et $h'(x)$.

Fonctions Exponentielles

Objectifs

Ce terme vise à :
• Définir et étudier les fonctions exponentielles et puissances ;
• Mettre en place les primitives de fonctions de la forme u' e^{u} et u'u^{α} ($\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$).

Savoirs et savoir-faire

SAVOIR	SAVOIR-FAIRE
• Fonction exponentielle népérienne : - définitions, notation, propriétés, représentation graphique ; - limite de référence ; - primitive de $u'e^{u}$ • Définition de la fonction exponentielle de base a ($a \in \mathbb{R}_+^*$) • Définition de la fonction puissance d'exposant réel non nul. • Primitive de $u' \times u^{n}$ ($n \in \mathbb{R} - \{-1\}$). • Croissance comparée des fonctions logarithme népérien, exponentielle et puissances. • Dérivées de fonctions du type expo, u^{α} ($\alpha \in \mathbb{R}^*$).	• Etant donnée une fonction faisant intervenir la fonction exponentielle népérienne ou une fonction puissance, l'étudier et la représenter graphiquement. • Résoudre des équations ou inéquations faisant intervenir des fonctions exponentielles. • Déterminer les primitives d'une fonction du type : - $u' \times u^{n}$ ($n \in \mathbb{R} - \{-1\}$). - $u'e^{u}$ • Utiliser les limites sur la croissance comparée pour calculer d'autres limites.

1- Situation problème :

On sait que la fonction Logarithme est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. Elle admet une bijection réciproque de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$ ayant le même sens de variation que la fonction logarithme.

2- Définition :

La fonction exponentielle noté « **expo$x$** » ou « e^x » est la fonction réciproque de la fonction lnx définie sur $\mathbb{R} =]-\infty\ ;\ +\infty[$

3- Ensemble de définition de la fonction exponentielle :

Si $f(x) = e^x$ alors Df = $\mathbb{R} =]-\infty\ ;\ +\infty[$

NB :

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ (car la fonction exponentielle est la bijection réciproque de la fonction logarithme Népérien. Elle prend ces valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$).

4- Propriétés remarquables :

P1 : $e^{a\times b} = (e^a)^b$

P2 : $e^{a+b} = e^a \times e^b$

P3 : $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$

P4 : $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$

P5 : $(e^a)^n = e^{na}$

P6 : $e^{lna} = lne^a = a$

P7 : $e^0 = 1$ et $e^1 = \mathrm{e}$

P8 : $lne = e^{ln1} = 1$

P9 : $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

P10 : $e^a \geq e^b \Leftrightarrow a \geq b$ et $e^a \leq e^b \Leftrightarrow a \leq b$

P11 : $e^a = b \Leftrightarrow a = lnb$

5- Limites remarquables :

$lim\ \ e^x = 0\ \ et$ $\qquad$ $lim\ \ e^x = +\infty$

$x \to -\infty$ $\qquad$ $x \to +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} xe^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x^n} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ et pour $a > 0$, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{a^n}{\ln x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty$

6- Dérivées remarquables :

- $Si\ f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
- $Si\ f(x) = e^{(ax + b)} \Rightarrow f'(x) = ae^{(ax + b)}$
- $Si\ f(x) = e^{[u(x)]} \Rightarrow f'(x) = u'(x)e^{[u(x)]}$

7- Primitives remarquables :

- $Si\ f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x + K$
- $Si\ f(x) = e^{(ax + b)} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{a} e^{(ax+b)} + K$
- $Si\ f(x) = u'(x)\ e^{[u(x)]} \Rightarrow F(x) = e^{[u(x)]} + K$

8- Etude de la fonction $x \to e^x$

Soit $f(x) = e^{x}$ et (C) sa courbe.

Df $= \mathbb{R} =]-\infty\ ;\ +\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

($\mathcal{C}$). admet des branches infinies : $y\ =\ 0$ est asymptote à ($\mathcal{C}$). et (Y'OY) est branche parabolique pour la courbe ($\mathcal{C}$).

$f(x)\ = e^{x} \Rightarrow f'(x)\ =\ e^{x}\ \Rightarrow\ f'(x)\ >\ 0$

D'où le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

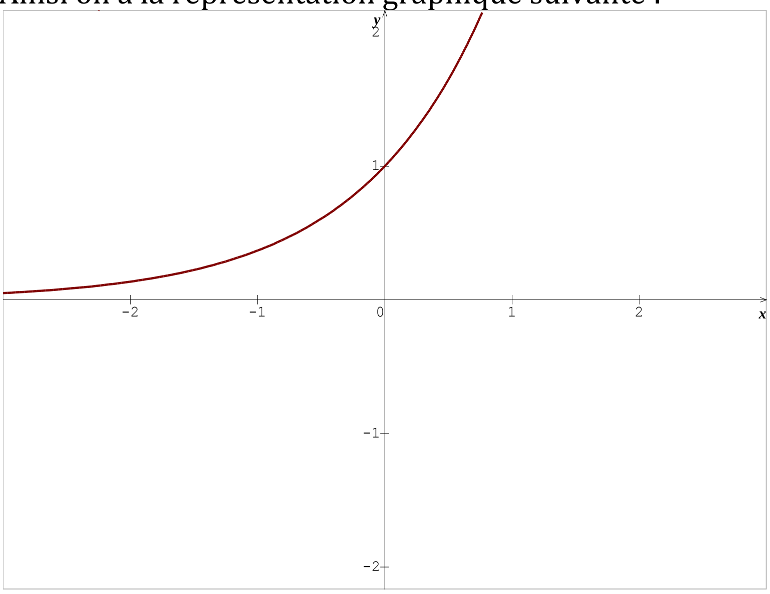
- ($\mathcal{C}$) $\cap$ (OX) $\Leftrightarrow e^{x}\ =\ 0\ \Leftrightarrow x\ =\ ln0$ impossible

Donc (C) ne coupe pas l'axe (OX).

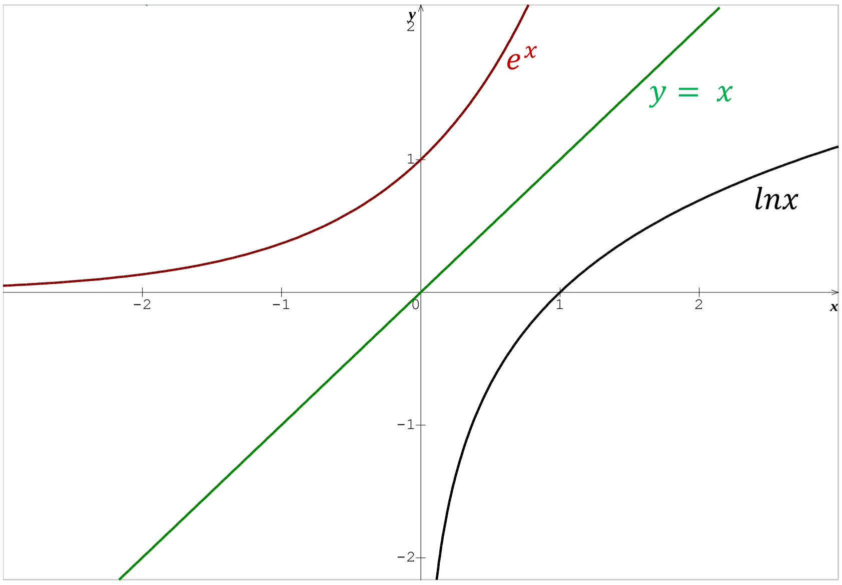
- ($\mathcal{C}$)$\cap$ $(OY) \Rightarrow\ x\ =\ 0$ et $f(0) =\ e^{0}\ = 1$.

  Donc (C) coupe l'axe (OY) en 1

Ainsi on a la représentation graphique suivante :



NB : les courbes représentatives des fonctions $x \to lnx$ et $x \to e^x$ dans un repère orthonormé, sont symétriques par rapport à la droite (D)d'équation :
$y = x$ (première bissectrice)



Evaluation

Activité 1 :

Simplifie les expressions suivantes :

A = $e^{ln3} - e^{-ln2} + e^{\frac{1}{2}ln8} - 2e^{-ln\frac{1}{4}}$; C = -2 $lne^3 + ln\sqrt{e} - ln(lne) + \frac{1}{2}ln\left(\frac{e^2}{2}\right)$

Activité 2 :

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a- $e^x = 2$; $e^x = \frac{1}{3}$; $e^x = -\frac{3}{2}$; $e^x = \sqrt{2}$

b- $e^{x-2} = 1$; $e^{3x+1} = e^{-x+3}$; $e^{x^2+1} = e^{2x}$

c- $\frac{e^x+1}{e^x-4}=\frac{1}{2}$; $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=1$; $\frac{e^{2x}}{e^x+1}=\frac{1}{e^{-x}}$

9- Fonctions puissances :

a)Définition :

On appelle fonction puissance toute fonction f_a définie sur $]\,0\ ;\ +\infty\,[$ par :
$\boldsymbol{f_a(x) = a^x = e^{x\ln a}}$**,**Où a est un nombre réel positif et différent de 1.

b) Etude des fonctions puissances :

- **Dérivée** :$f_a'(x) = (e^{x\ln a})' = \ln a\, e^{x\ln a}$, d'où : $\boldsymbol{f'_a(x) = a^x \ln a}$

- **Tableaux de variation** :

Les tableaux de variations suivants résument l'étude de f_a suivant les valeurs de a.

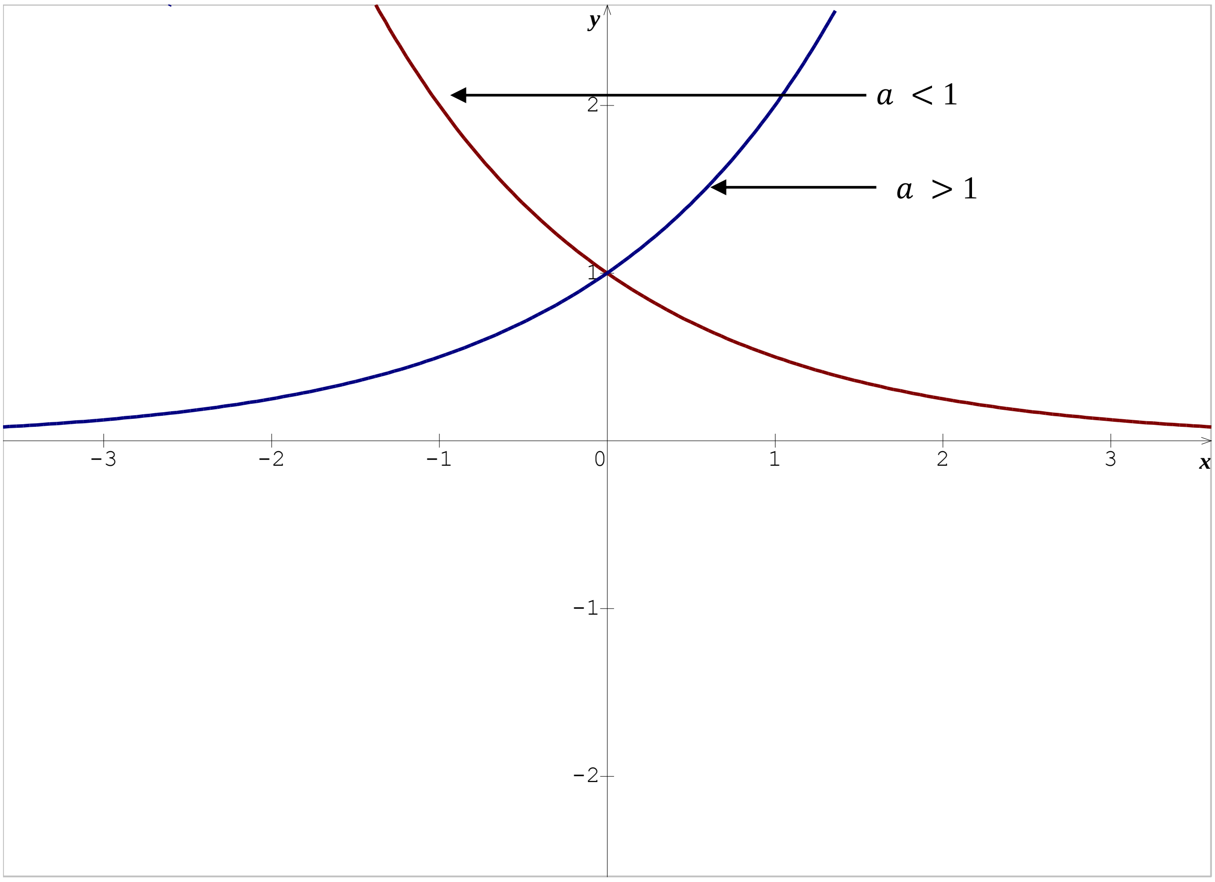
1er cas : Si $0 < a < 1$ alors on a : le tableau suivant

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f_a'(x)$	$-$
$f_a(x)$	$+\infty \searrow 0$

2ème cas : Si $a > 1$ alors on a : le tableau suivant

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f_a'(x)$	$+$
$f_a(x)$	$0 \nearrow +\infty$

- **Représentations graphiques**:



Evaluation

Activité 1

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a- $3^x = 4$; b- $2^x = 3$; c-$4^{-x} = 3$; d- $3^x > 6$; e- $2^{-x} \geq 3$; f- $3^{-x} \leq 3^{2x}$

Activité 2

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$), trace la courbe représentative de chacune des fonctions suivantes :

a- $f(x) = 2^x$; b- $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$

EXERCICES

Exercice 1 : Simplifier les expressions suivantes :

A = $e^{\ln 3} - e^{-\ln 2} + e^{\frac{1}{2}\ln 8} - 2e^{-\ln\frac{1}{4}}$ B = $e^{2\ln 3} + e^{1+\ln 2} - e^{3-\ln 2} + e^{\frac{1}{2}+\ln 4}$

C = $-2\ln e^3 + \ln\sqrt{e} - \ln(\ln e) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}e^2\right)$; D = $\frac{2-\ln\sqrt{e}}{1+\ln e^2} + \frac{1+e^{-\ln 2}}{\ln(e\ln e)}$

Exercice 2 :

I) Résolvez dans R les équations suivantes :

1) $e^x = 2$; $e^x = \frac{1}{3}$; $e^x = -\frac{3}{2}$; $e^x = \sqrt{2}$

2) $e^{x-2} = 1$; $e^{3x+1} = e^{-x+3}$; $e^{x^2+1} = e^{2x}$

3) $3^x = 4$; $2^x = 3$; $4^{-x} = 3$

4) $\frac{e^x+1}{e^x-4} = \frac{1}{2}$; $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = 1$; $\frac{e^{2x}}{e^x+1} = \frac{1}{e^{-x}}$

5) $x^2 + 3x - 4 = 0$ et $e^{2x} + 3e^x - 4 = 0$

6) $2x^2 - 5x + 2 = 0$ et $2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0$

II) Résolvez dans R les inéquations suivantes :

1) $e^x < 2$; $e^{-x} \geq 1$; $e^{-2x} \leq e^x$

2) $(e^x - 1)(e^{-x} - 4) < 0$; $(e^{2x} - 1)(2e^x + 1) \geq 0$

3) $3^x > 6$; $2^{-x} \geq 3$; $3^{-x} \leq 3^{2x}$

4) $x^2 + 2x - 3 \leq 0$ et $e^{2x} + 2e^x - 3 \leq 0$

5) $x^2 - x - 2 \geq 0$ et $4^x - 2^x - 2 \geq 0$

III) soit la fonction polynôme définie par $f(x) = x^3 - 4x^2 - 29x - 24$

1) Calculer f(-1) et f(-3) puis en déduire une factorisation de f sous forme d'un produit de 3 facteurs du premier degré.
2) Résolvez l'équation f(x) = 0
3) En déduire la résolution de l'équation : $e^{2x} - 4e^x - 29 - 24e^{-x} = 0$

IV) Résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 2e^x - e^y = 15 \\ e^x + 2e^y = 40 \end{cases}$ b) $\begin{cases} e^x + e^y = 3 \\ e^{-x} + e^{-y} = \frac{3}{2} \end{cases}$ c) $\begin{cases} e^x e^y = 8 \\ e^x + e^y = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} e^x + e^y = 5 \\ e^{x+y} = 6 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3e^x - 2\ln y = 13 \\ 5e^x + 3\ln y = 9 \end{cases}$

f) $\begin{cases} e^{x+1} \times e^{y-2} = 2 \\ \ln x + \ln y = \ln(x-1) + \ln(y-1) \end{cases}$ g) $\begin{cases} 2^x - 2^{2-y} = 0 \\ 2^x + 2^{2+y} = 0 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 3^x \times 3^{2y-1} = 1 \\ 3^{x+2} \times 3^y = 3 \end{cases}$

Exercice 3 :

I) Calculer la limite des fonctions suivantes aux bornes de leur ensemble de définition :

1) $f(x) = x - e^x$; $f(x) = x + e^{-x}$; $f(x) = xe^x$; $f(x) = xe^{-x}$

2) $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$; $f(x) = \dfrac{e^x}{(x-1)^2}$; $f(x) = e^{-x^2}$; $f(x) = \dfrac{e^x}{(x-1)^2}$

3) $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{x}$; $f(x) = x(e^{\frac{1}{x}}-1)$; $f(x) = \dfrac{\sin x}{1-e^x}$

II) Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

1) $f(x) = e^{2x+1}$; $f(x) = e^{2-3x}$; $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

2) $f(x) = (2x - 1)\, e^x$; $f(x) = (x - 1)^2\, e^x$; $f(x) = (x^2 + 1)\, e^{-2x}$

3) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$; $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$; $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

Exercice 4 :

I) Déterminer la primitive des fonctions suivantes :

1) $f(x) = e^{-x}$; $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$; $f(x) = xe^{x^2}$

2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$; $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$; $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

3) $f(x) = \dfrac{1}{e^x+1}$; $f(x) = 2^x$; $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$

II) 1) déterminer les réels a et b pour que la fonction F soit une primitive sur R de la fonction f.

a) $f(x) = (2x + 1)e^x$ et $F(x) =(ax + b)e^x$
b) $f(x) = (x + 1)e^{\frac{-x}{2}}$ et $F(x) = (ax + b)e^{\frac{-x}{2}}$

2) Déterminer les réels a, b et c pour que la fonction F soit une primitive sur R de la fonction f

a) $f(x) = x^2 -1)e^{2x}$ et $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$
b) $f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^{-3x}$ et $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-3x}$

Problème 1 :

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. L'unité graphique est 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A :

Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = (2 + \cos x)\, e^{1-x}$. On note C la courbe représentative de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que, pour tout x de R : $f(x) > 0$.
2) a) Montrer que, pour tout x de R : $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$.

   b) En déduire que, pour tout x de R : $2 + \cos x + \sin x > 0$

   c) Montrer que f est strictement décroissante sur R.

3) a) Montrer que, pour tout x de R : $e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$

   b) En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

   c) Interpréter géométriquement le résultat obtenu lors du calcul de la limite de f en $+\infty$.

4) a) Montrer que, sur l'intervalle $[o\ ;\ \pi]$, l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique α.

   b) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}

5) Représenter la courbe C sur [0 ; 4]

Partie B :

On veut calculer l'aire, A, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par la courbe C, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation x = 1.

1) Montrer que : $A = 2e - 2 + \int_0^1 e^{1-t} \cos t\, dt$
2) On pose : $I = \int_0^1 e^{1-t} \cos t\, dt \quad et \quad J = \int_0^1 e^{1-t} \sin t\, dt.$

a) A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que :
   $I = -\cos 1 + e - J$ et $J = -\sin 1 + I$.

b) En déduire la valeur de I.

3) Déterminer la valeur exacte de A en unités d'aire, puis donner une valeur approchée de A à 10^{-2} près par défaut.

Partie C :

Soit h la fonction définie sur R par $h(x) = -1 - \dfrac{\sin x}{2+\cos x}$

1) a) Montrer que la fonction h admet des primitives sur R.
   b) Calculer la primitive H de la fonction h, qui prend en 0 la valeur (1 + ln 3).

2) a) Déterminer ln (f(x)) pour tout x de R.
   b) Etudier le sens de variation de la fonction H.
   c) déterminer le tableau de variations de H.

3) On appelle Γ la courbe représentative de la fonction définie sur R par $x \to 1 - x + \ln(2 + \cos x)$. (On ne demande pas de représenter Γ). On appelle Δ la droite d'équation $y = - x + 1$.

   a) Etudier la position relative de Γ et de Δ.
   b) Déterminer les abscisses des points communs à Γ et Δ.

4) a) Etablir une équation de la tangente T à Γ au point d'abscisse 0.
   b) Etudier la position relative de Γ et T.

5) Montrer que la courbe Γ est contenue dans une bande du plan limitée par deux droites parallèles dont on donnera des équations.

<u>Problème 2</u> :

On considère la fonction numérique f définie sur R par :
$f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$
On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A) Etude de la fonction f et construction de la courbe C.

1) Etudier la limite de la fonction f en $-\infty$ puis en $+\infty$ (on pourra écrire $xe^{x-1} = \frac{1}{e}xe^{x}$).
2) Démontrer que la droite Δ d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à la courbe C en $-\infty$ et préciser la position de la courbe C par rapport à la droite Δ.
3) a) Calculer la dérivée f ' et la dérivée seconde f '' de la fonction f.
   b) Dresser le tableau de variation de la fonction f ' en précisant la limite de la fonction f ' en $-\infty$.
   c) Calculer f '(1) et en déduire le signe de f '(x) pour tout réel x.
   d) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

4) Soit I l'intervalle [1,9 ; 2]. Démontrer que, sur I, l'équation f(x) = 0 a une solution unique, α.
5) Tracer la droite Δ et la courbe C (unité graphique : 2 cm).

B) Recherche d'une approximation de α :

On considère la fonction g définie sur l'intervalle I par : $g(x) = 1 + \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$.

1) Démontrer, sur I, l'équation f(x) = 0 équivaut à l'équation g(x) = x.
2) Etudier le sens de variation de la fonction g sur I et démontrer que, pour tout x appartenant à I, g(x) appartient à I.
3) Démontrer que, pour tout x de l'intervalle I, $|g'(x)| \leq \frac{1}{9}$
4) Soit (U_n) la suite de nombres réels définie par :

$U_0 = 2$ et , pour tout n de N, $U_{n+1} = g(U_n)$.

On déduit de la question **B. 2**. que tout les termes de cette suite appartiennent à l'intervalle I. On ne demande pas de le démontrer.

a) Démontrer que, pour tout n de N, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9}|U_n - \alpha|$
b) En déduire, en raisonnant par récurrence que :

Pour tout n de N, $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{9}\right)^n \times \frac{1}{10}$

c) En déduire que la suite (U_n) converge et préciser sa limite.

C) Calcul d'aire :

1) En intégrant par parties, calculer l'intégrale $J = \int_1^{\alpha} xe^{x-1}dx$
2) a) Déterminer, en unités d'aire, l'aire A de la portion de plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses, la droite d'équation x = 1 et la droite d'équation x = α.

c) Démontrer qu'on peut écrire A = (α – 1) $\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)$.

<u>Problème 3</u> :

L'objet de ce problème est d'étudier, à l'aide d'une fonction auxiliaire, une fonction et de résoudre une équation différentielle dont elle est solution.

A) Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur R par g(x) = $\frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1+2e^x)$.

1) Calculer g'(x) et montrer que ce nombre est strictement négatif pour tout x de R.
2) Déterminer les limites de g en - ∞ et + ∞.
3) Dresser le tableau de variation de g.
4) Donner le signe de g(x).

B) Etude d'une fonction et calcul d'une aire.

Soit f la fonction définie sur R par f(x) = $e^{-2x} \ln(1 + 2e^x)$.
On note C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).

1) Calculer f '(x) et montrer que pour tout réel x, f '(x) = $2e^{-2x}$ g(x).
2) a) Déterminer la limite de f en - ∞.
   b) Déterminer la limite de f en + ∞.

On pourra remarquer que : si on pose X = 1 + $2e^x$, f(x) s'écrit $4\frac{X}{(X-1)^2}\frac{\ln X}{X}$

3) Dresser le tableau de variation de f.
4) Tracer C.
5) Soit α un réel strictement positif.

a) Vérifier que, pour tout réel x, $\frac{e^{-x}}{1+2e^x} = e^{-x} - 2\frac{e^{-x}}{e^{-x}+2}$

En déduire la valeur de l'intégrale I(α) = $\int_0^{\alpha} \frac{e^{-x}}{1+2e^x}dx.$

b) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale : J(α) = $\int_0^{\alpha} f(x)dx.$

Donner une interprétation graphique de J(α).

C) Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

(E) : y' + 2y = 2 $\frac{e^{-x}}{1+2e^x}$

1) Vérifier que la fonction f étudiée dans la partie **B** est solution de (E).

2) Montrer qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si φ - f est solution de l'équation différentielle (E ') : y' +2y = 0.
3) Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E).

Problème 4 :

Partie A : Résolution de l'équation différentielle (1) : $y' - 2y = xe^x$

1) Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' - 2y = 0$ où y désigne une fonction dérivable sur R.
2) Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur R par $u(x) = (ax + b)\, e^x$.

   a) Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1).
   b) Montrer que v est une solution de l'équation (2) si et seulement si u + v est solution de (1).
   c) En déduire l'ensemble des solutions de (1).

3) Déterminer la solution de l'équation (1) qui s'annule en 0.

Partie B : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur R par $g(x) = 2e^x - x - 2$.

1) Déterminer la limite de g en $-\infty$ et la limite de g en $+\infty$.
2) Etudier le sens de variation de g, puis dresser son tableau de variation.
3) On admet que l'équation g(x) = 0 a exactement deux solutions réelles.
a) Vérifier que 0 est l'une de ces solutions.
b) L'autre solution est appelée α. Montrer que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$.

4) Déterminer le signe de (x) suivant les valeurs du réel x.

Partie C : Etude de la fonction principale

Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$.

1) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$. (On pourra mettre e^{2x} en facteur).
2) Calculer f '(x) et montrer que f '(x) et g(x) ont le même signe. Etudier le sens de variation de f.
3) Montrer que $f(\alpha) = -\dfrac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$, où α est défini dans la **partie B**. En déduire un encadrement de f(α). (On rappelle que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$).
4) Etablir le tableau de variation de f.
5) Tracer la courbe (C), représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).

Partie D : Calcul d'aire

1) Soit m un réel négatif

Interpréter graphiquement l'intégrale $\int_m^0 f(x)dx.$ (on justifiera la réponse).

2) a) Calculer $\int_m^0 xe^x dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

b) En déduire $\int_m^0 f(x)dx.$

3) Calculer la limite de $\int_m^0 f(x)dx$, lorsque m tend vers - ∞.

Problème 5 :

Les objectifs du problème sont de déterminer une solution particulière d'une équation différentielle (partie A), d'étudier cette solution (partie B) et de la retrouver dans un contexte différent (partie C).

Partie A :

On appelle (E) l'équation différentielle y" – y = 0, où y est une fonction numérique définie et deux fois dérivable sur l'ensemble R des nombres réels.

1) Déterminer les réels r tels que la fonction h, définie par h (x) = e^{rx}, soit solution de (E).
2) Vérifier que les fonctions φ définies par φ(x) = $\alpha e^{x} + \beta e^{-x}$, où α et β sont deux nombres réels, sont des solutions de (E). On admet qu'on obtient ainsi toutes les solutions de (E).
3) Déterminer la solution particulière de (E) dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées $\left(\ln 2\,;\frac{3}{4}\right)$ et admet en ce point une tangente dont le coefficient directeur est $\frac{5}{4}$.

Partie B :

On appelle f la fonction définie sur l'ensemble R des nombres réels par : f(x) = $\frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O, $\vec{i}, \vec{j}$).

1) Soit μ un réel. Montrer que, pour tout réel x, f(x) = μ équivaut à $e^{2x} - 2\mu e^{x} - 1 = 0$

En déduire que l'équation f(x) = μ a une unique solution dans R et déterminer sa valeur en fonction de μ.

2) a) Déterminer les limites de f en - ∞ et en + ∞.
   b) Calculer f '(x) pour tout nombre réel x et en déduire le sens de variation de f sur R.

3) a) déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe au point d'abscisse 0;
   b) En étudiant le sens de variation de la fonction d définie sur R par d(x) = f(x) – x, préciser la position de (C) par rapport à (T).
   c) Tracer (C) et (T). (unité graphique : 2 cm).

4) Soit D la partie représentant sur le graphique l'ensemble des points M de coordonnées (x ; y) tels que : $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x \le y \le f(x). \end{cases}$

Calculer, en cm^2, l'aire de D.

<u>Partie C</u> :

On cherche à caractériser les fonctions ϕ, dérivables sur l'ensemble des nombres réels, telles que, pour tout réel x :

ϕ (x) - $\int_0^x (x-t)\phi(t)dt = x$

1) On suppose qu'il existe une telle fonction ϕ.

a) Justifier que, pour tout nombre réel x,

ϕ (x) = x + x $\int_0^x \phi(t)dt - \int_0^x t\phi(t)dt.$

Calculer ϕ (0).

b) Démontrer que, pour tout nombre réel x, ϕ '(x) = 1 + $\int_0^x \phi(t)\ dt$. Calculer ϕ '(0).

c) Vérifier que ϕ est une solution de l'équation différentielle (E) de la **partie A**. Déterminer laquelle, parmi toutes les solutions explicitées dans la question **A. 2**.

2) a) a l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^x t(e^t - e^{-t})dt.$

b) Démontrer que la fonction trouvée à la question 1. c) vérifie bien la relation (H).

<u>Problème 6</u> :

On considère la fonction f, définie sur l'intervalle]-1 ; + ∞[par f(x) = $\dfrac{e^x}{(1+x)^2}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O, $\vec{i}, \vec{j}$) .

A) Etude de la fonction f et tracé de (C)

1) a) Calculer la limite de cette fonction lorsque x tend vers + ∞.

b) Calculer la limite de cette fonction lorsque x tend vers – 1. Que peut – on en déduire pour la courbe (C) ?

2) Calculer f '(x) et montrer que son signe est celui de $\dfrac{x-1}{x+1}$.

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) Tracer la courbe (C), les droites d'équations respectives x = -1 et y = 1, ainsi que la tangente à cette courbe en son point d'abscisse 0.
(Unité graphique : 4 cm)
5) Montrer que l'équation f(x) = 1 admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle [1; 10]. Utiliser le graphique précédent pour donner deux nombres entiers consécutifs a et b tels que α appartient à l'intervalle [a ; b].

B) Calcul d'une aire

1) Soit g la fonction définie sur]-1 ; + ∞[par g(x) = $\dfrac{e^x}{1+x}$.
a) Etudier le sens de variation de g dans l'intervalle [1 ; 2].
b) Montrer que, pour tout x appartenant à [1 ; 2], on a : 1 ≤ g(x) ≤ 2,5.
c) En déduire un encadrement de $A_1 = \int_1^2 g(x)dx$.
2) Soit A_2 l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les droites d'équations respectives x = 1 et x = 2, la courbe (C) et l'axe des abscisses.

A l'aide d'une intégration par parties, exprimer A_2 en fonction de A_1 et en déduire un encadrement de A_2.

C) Approximation d'un nombre à l'aide d'une suite

Pour cette partie, on utilisera sans justification le fait que l'équation f(x) = x a une unique solution β et que celle – ci est élément de l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2} ; 1\right]$.

Soit h la fonction définie sur]-1 ; + ∞] par h(x) = $\dfrac{e^x}{(1+x)^3}$.

1) a) Vérifier que, pour tout x appartenant à]-1 ; + ∞], on a : f '(x) = f(x) – 2h(x).
b) Calculer h'(x).

c) En utilisant la question **a),** calculer f ''(x). En déduire le sens de variation de f ' dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

d) En déduire que, pour tout x appartenant à $\left[\frac{1}{2};1\right]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

2) On définit la suite (U_n), pour tout nombre entier naturel n, par :
$U_0 = 1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour $n \geq 0$

On admet que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$.

a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $|U_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4}|U_n - \beta|$.

b) Montrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $|U_n - \beta| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

c) En déduire une valeur approchée numérique de β à 10^{-3} près.

Problème 7 :

Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 5 cm).

Partie A :

On considère la fonction f_1 définie sur [o, + ∞[par $f_1(x) = xe^{-x^2}$ et on appelle C_1 sa courbe représentative.

1) Montrer que pour tout réel positif x, $f_1(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}$. En déduire le sens de variation de f_1.
2) Calculer la limite de f_1 en + ∞ (on pourra poser $u = x^2$). Interpréter graphiquement ce résultat.
3) Dresser le tableau de variation de f_1.
4) On appelle Δ la droite d'équation y = x. Déterminer la position de C_1 par rapport à Δ.
5) Tracer C_1 et Δ.

Partie B :

On considère la fonction f_3 définie sur [0, + ∞[par $f_3(x) = x^3e^{-x^2}$ et on appelle C_3 sa courbe représentative.

1) Montrer que pour tout réel x positif, $f'_3(x)$ a même signe que $3 - 2x^2$. En déduire le sens de variation de f_3.
2) Déterminer les positions relatives de C_1 et C_3.
3) Tracer C_3 dans le même repère que C_1 (on admettra que C_3 a la même asymptote que C_1 en +∞).
4) On appelle D la droite d'équation x = 1. Soit A_1 l'aire en unités d'aire du domaine limité par la courbe C_1, les deux axes de coordonnées et la droite D et soit A_3 l'aire en unités d'aire du domaine limité par la courbe C_3, les deux axes de coordonnées et la droite D.

a) Calculer A_1..

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $A_3 = -\frac{1}{2e} + A_1$.

Partie C :

On désigne par n un entier naturel non nul et on considère la fonction f_n définie sur [0, + ∞[par $f_n(x) = x^n e^{-x^2}$. On note C_n la courbe représentative de f_n dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que pour tout entier n ≥ 1, f_n admet un maximum pour $x = \sqrt{\frac{n}{2}}$. On note α_n ce maximum.
2) On appelle S_n le point de C_n d'abscisse $\sqrt{\frac{n}{2}}$. Montrer que, pour tout n, C_n passe par S_2. Placer S_1, S_2, S_3 sur la figure.
3) Soit la fonction g définie sur]0, + ∞[par $g(x) = e^{\frac{x}{2}\left[-1+\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right]}$ c'est-à-dire $g(x) = \exp\left[\frac{x}{2}\left(-1+\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right]$

a) Etudier le sens de variation d g.

b) Montrer que pour tout entier n ≥ 1, $\alpha_n = g(n)$. En déduire que tout point S_n on a une ordonnée supérieure à celle de S_2.

Problème 8 :

Soit f la fonction définie sur [0, + ∞[par : f(x) = $\frac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ pour x > 0 et f(0) = 0.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O ; $\vec{i}, \vec{j}$) (unité graphique 5 cm).

Partie A :

1) Démontrer que la droite (Δ) d'équation y = 1 es asymptote a C.
2) Pour x > 0, calculer $\frac{f(x)-f(0)}{x}$. Etudier la limite de cette expression quand x tend vers 0 (on pourra utiliser, pour n entier naturel non nul, $\lim\limits_{u \to +\infty} u^n e^{-u} = 0$)

Que peut – on en déduire pour la fonction f ?
Que peut – on en déduire pour la courbe C ?

3) Démontrer que pour tout x de]0, + ∞[on a f '(x) = $\frac{1-x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$.
4) Etudier les variations de la fonction f et dresser le tableau des variations de f.

Partie B :

On note g la fonction définie sur]0, + ∞[par g(x) = f(x) – xf '(x).

1) Montrer que dans]o, +∞[, les équations g(x) = 0 et $x^3 + x^2 + 2x – 1 = 0$ sont équivalentes.
2) Démontrer que l'équation $x^3 + x^2 + 2x – 1 = 0$ admet une seule racine réelle α dont on justifiera un encadrement à 10^{-2} près.
3) On pose A = $\frac{f(\alpha)}{\alpha}$. Encadrer A à 2×10^{-1} près (justifier) et montrer que A = f '(α).
4) Pour tout a > 0, on note T_a la tangente à C au point d'abscisse a. Montrer que T_αa a pour équation y = Ax. Tracer T_α, puis la courbe C.
5) Déduire des questions précédentes que de toutes les tangentes T_a à C (en des points d'abscisses non nulles), seul $T_\alpha$passe par l'origine O.
6) On admettra que $T_\alpha$est au dessus de C sur]0, +∞[.

a) Par lecture graphique (et sans justification), donner le nombre de solutions de l'équation f(x) = m, suivant le réel m donné.
b) Par lecture graphique (et sans justification), donner le nombre de solutions de l'équation f(x) = mx selon le réel m donné.

Parti C :

1) Pour n ∈ N* on pose U_n = $\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx$. Sans calculer explicitement U_n déterminer le signe de $U_{n+1} – U_n$. En déduire que la suite est croissante.
2) Démontrer que la fonction h, définie sur]0, + ∞[par h(x) = (x + 1)$e^{-\frac{1}{x}}$, est une primitive de f sur]0, + ∞[.

3) Calculer U_n. Interpréter graphiquement le résultat. Etudier la convergence de la suite (U_n).

Problème 9 :

Le but du problème est l'étude simultanée de deux fonctions f et g (partie A), utilisées ensuite pour déterminer une valeur approchée d'un certain nombre réel noté C.
Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O ; $\vec{i}, \vec{j}$) ; (unité graphique : 2 cm).

Partie A :
Soient les fonctions f et g définies sur l'ensemble des nombres réels par :
$f(x) = x - e^x$ et $g(x) = (1 - x)e^x$;
On appelle (C) et (C') leurs courbes représentatives respectives.

1) a) Déterminer les limites des fonctions f et g en + ∞ et en - ∞.
b) Montrer que la droite (Δ) d'équation y = x est asymptote à la courbe (C).
c) Etudier le sens de variation de chacune des fonctions f et g, sur l'ensemble des nombres réels.
d) Dresser les tableaux de variation des fonctions f et g.

2) Pour tout réel x, on pose h(x) = f(x) – g(x).
a) Montrer que, pour tout réel x, h'(x) = 1- g(x).
b) En déduire le sens de variation de la fonction h, sur l'ensemble des nombres réels.
c) Démontrer que les courbes (C) et (C') admettent un unique point d'intersection, dont l'abscisse, notée α, appartient à l'intervalle [1 ; 2]. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.
d) Etudier, suivant les valeurs de x, la position relative de (C) et de (C').
3) Tracer la droite (Δ) et les courbes (C) et (C').

4) Pour tout réel x, on pose $\theta(x) = \int_0^x h(t)dt.$
a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer θ(x).
b) En déduire, sous la forme d'une expression rationnelle en α, l'aire en cm^2 du domaine limité sur le graphique par les courbes (C) et (C'), l'axe des ordonnées et la droite d'équation x = α.

Partie B :
Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln n.$

1) A l'aide d'une calculatrice, déterminer un encadrement de S_{20}, d'amplitude 10^{-3}.
2) a) En utilisant le tableau de variation de la fonction g définie dans la partie A, démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle]0 ; 1[, $e^x \leq \frac{1}{1-x}$.

b) En déduire que, pour tout nombre entier k ≥ 2, $e^{\frac{1}{k}} \leq \frac{k}{k-1}$, puis que, pour tout nombre entier k ≥ 2, $\frac{1}{k} \leq \ln\left(\frac{k}{k-1}\right)$.

c) Pour tout entier naturel $n \geq 2$, calculer $S_n - S_{n-1}$. En déduire que la suite (S_n) est décroissant.

3) Pour tout entier $n > 20$, on pose $u_n = S_{20} - S_n$.

a) Vérifier que pour tout entier $n > 20$, $u_n \geq 0$.
b) En utilisant le tableau de variation de la fonction f définie dans la partie A, démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; 1]$, $1 + x \leq e^x$.
c) En déduire que pour tout nombre entier $k \geq 1$, $\frac{k+1}{k} \leq e^{\frac{1}{k}}$, puis que, pour tout nombre entier $k \geq 1$, $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$.
d) Vérifier que, pour tout entier naturel $n > 20$, $u_n = \ln\left(\frac{n}{20}\right) - \left(\frac{1}{21} + \frac{1}{22} + ... + \frac{1}{n}\right)$. En raisonnant par récurrence, démontrer que pour tout entier naturel $n > 20$, $\ln\left(\frac{n+1}{21}\right) \leq \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + ... \frac{1}{n}$.
e) En déduire que, pour tout entier naturel $n > 20$, $u_n \leq \ln\left(\frac{21}{20}\right) - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$., puis que pour tout entier naturel $n > 20$, $u_n \leq 0{,}049$.

4) On admet que la suite (S_n) est convergente de limite notée C.

a) Justifier l'encadrement $S_{20} - 0{,}049 \leq C \leq S_{20}$.
b) Déterminer un encadrement de C d'amplitude 0,05.

Problème 10 :

Le problème est composé de l'étude d'une suite de fonctions dépendant d'un paramètre, puis de la recherche d'une valeur approchée d'une solution d'une équation du type : f(x) = x.

Partie A :

Pour tout entier n strictement positif, on note f_n la fonction numérique de la variable réelle définie sur R\(1) par : $f_n(x) = \dfrac{e^x}{(x+1)^n}$

On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm).

1) Déterminer la fonction dérivée f'_n de f_n et donné l'expression de f'_n en fonction de f_n et de f_{n+1}.
2) Etudier les variations de f_n et ses limites éventuelles en $-\infty$, -1 et $+\infty$. (On distinguera les cas où n est pair et n est impair.)
3) Démontrer que toutes les courbes (C_n) passent par un même point.
4) Déterminer la limite de $\dfrac{f_n(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Que peut – on en déduire pour les courbes (C_n)? Tracer sur deux figures distinctes les courbes (C_1) et (C_2).

Partie B :

Pour tout entier n strictement positif, on note : $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx.$

1) Démontrer que la suite $(I_n)_{n\in N^*}$ est décroissante et qu'elle converge.
2) Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right) \leq I_n \leq \frac{e}{n-1}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in N^*}$.

3) Démontrer en utilisant la relation de la question **A.1.**, une relation entre I_n et I_{n+1}.

4) Démontrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} nI_{n+1} = 1$

En déduire que la suite (n $I_n)_{n\in N^*}$ converge et déterminer sa limite.

Partie C :

Dans cette partie, n = 2.

1) Démontrer que l'équation $f_2(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

Le but de cette partie est de déterminer une valeur approchée de α.

2) Etudier les variations de f'_2 dans $\left[\frac{1}{2};1\right]$ et en déduire que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2};1\right]$, on a : $-0,25 \leq f'_2(x) \leq 0$

3) Soit $(u_n)_{n\in N}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ pour\ tout\ n\ de\ N,\ u_{n+1} = f_2(u_n) \end{cases}$

   a) Démontrer que pour tout entier naturel n ; u_n est élément de $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

   b) Démontrer, en utilisant la question **C.2.**, que pour tout entier naturel n : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$.

   c) En déduire que pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ et que la suite $(u_n)_{n\in N}$ converge vers α.

4) Pour quelles valeurs de n, u_n est – elle une valeur approchée de α à 10^{-3} près ? (On donne : $\sqrt{e} = 1,65$; ln 2 = 0,69 ; ln 5 = 1,6.)

Problème 11 :

On considère la fonction f définie sur [0, +∞[par f(x) = $\dfrac{e^x - 1}{xe^x + 1}$

On note (C) sa courbe dans un repère orthonormé (o, $\vec{i}, \vec{j}$) d'unité graphique (4 cm).

Partie A : (Etude d'une fonction auxiliaire).

On définie la fonction g sur [0, +∞[par g(x) = x + 2 – e^x

1) Etudier les variations de g, dresser son tableau de variation. Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution α et que 1,14 < α < 1,15.
2) En déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

Partie B : (Etude et tracée de f).

1) Montrer que $\forall x \in [0,+\infty[$; f '(x) = $\dfrac{e^x \times g(x)}{(xe^x + 1)^2}$. En déduire le sens de variation de f.

2) a) Montrer que $\forall x \in > 0$, $f(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$

b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

3) Montrer que $\forall x \in]0,+\infty[$ f(α) = $\dfrac{1}{\alpha + 1}$ puis déterminer l'équation de la tangente au point $x_o = 0$

4) Montrer que f(x) – x = $\dfrac{(x+1)(e^x - xe^x - 1)}{xe^x + 1}$. Etudier les variations de la fonction T(x) = e^x – xe^x – 1. Puis en déduire la position de (C) par rapport à (T). Tracer (C) et (T).

Partie C :

1) Déterminer une primitive F de f en utilisant la question 2) a) de la partieB.
2) Calculer en cm^2 l'aire A du domaine plan limité par (C), la tangente (T) et droites d'équation x = 0 et x = 1
3) $\forall n \in N$ on pose In = $\int_n^{n+1} f(x)dx$

a) Calculer à 10^{-2} près les valeurs de I_1 ; I_o ; I_2.
b) Interpréter graphiquement In.
c) Montrer que $\forall n \geq 2$; f(n+1) ≤ $\int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n)$

En déduire la monotonie de la suite (In) à partir de n = 1.

d) déterminer la limite de la suite (In)

Problème 12 :

Partie A :

Soit la fonction g définie sur R par g(x) = e^x +x – 5

1) Etudier le sens de variation de g. (On ne demande pas de déterminer les limites de g, ni de construire sa courbe).
2) a) Calculer g(o) et g(2)

b) Démonter que l'équation : $\forall x \in R$, e^x + x – 5 = 0 admet une solution unique α et que 1,30 < α < 1,31

Partie B :

Soit la fonction numérique f définie sur]-∞, 5[par : f(x) = ln (5 – x).

2) Etudier le sens de variation de f. Préciser les limites de f en 5 et en -∞.
3) Prouver que f(α) = α
4) a) Démontrer que $\forall x \in [0,3]$ on a $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

b) En déduire que $\forall x \in [0,3]$ on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

c) Démontrer que si 0 ≤ x ≤ 3, alors 0 ≤ f(x) ≤ 3.

5) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (o, $\vec{i}, \vec{j}$), d'unité graphique (3 cm), on désigne son (C) la représentation graphique de la fonction f.

a) Tracer la courbe (C), puis hachurer la partie du plan formée des points de coordonnées

(x, y) tel que : $\begin{cases} \alpha \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$ on notera (S) cette partie.

b) En remarquant α que, $\forall x \neq 5 : \frac{x}{x-5} = 1 + \frac{5}{x-5}$, Montrer que $\int_{\alpha}^{4} \frac{x}{x-5} dx = 4 - 6\alpha$

c) Prouver que l'aire A de la partie (S) en cm^2est donnée par A = $-\alpha^2 + 6\alpha - 4$.
(On utilisera une intégration par partie).

Equations Différentielles

Objectifs

Ce thème vise à :
• étudier la forme des solutions de certaines équations différentielles ;
• modéliser quelques problèmes à l'aide d'une équation différentielle et en déduire une solution.

Savoirs et savoir-faire

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Equation différentielle du type $f' = kf$. • Equation différentielle du type $f'' = 0$. • Equation différentielle du type $f'' = kf$.	• Résoudre une équation différentielle du type $f' = kf$. • Equation différentielle du type $f'' = 0$. • Equation différentielle du type $f'' = kf$.

1) Définition :

On appelle équations différentielles, toutes équations faisant intervenir une fonction (l'inconnue), ses dérivées et sa variable x . Leur résolution consiste à déterminer toutes les fonctions solutions. Ainsi les équations différentielles sont classées par ordre.

2) Différents types d'équations différentielles

Equations différentielles du 1er ordre (y' – ay = 0)

a) Définition :

f étant une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, la relation $f\,'(x) - a\,f(x) = 0$; où f est une fonction inconnue, est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants, sans second membre. Cette équation est souvent notée $y' - ay = 0 = 0$.

b) Résolution :

Les solutions, définies sur$\mathbb{R}$, de l'équation différentielles $y' - ay = 0$ sont les solutions f_k qui à tout nombre réel x, associent $f_k(x) = ke^{ax}$, où k est un nombre réel quelconque.

Ainsi l'ensemble solution est : $\mathbf{S = \{ ke^{ax}\}}$

Exemple :
Résoudre les équations différentielles suivantes :

a)y' – 2y = 0 ; b) 2y' +3y = 0

Solution :

a) $y' - 2y = 0 \; => S = ke^{2x}$

b) $2y' + 3y = 0 \; <=> \; y' + \frac{2}{3}y = 0 \; => S = ke^{-\frac{2}{3}x}$

Equations différentielles du 2ème ordre :

a) Cas particulier : (Equation du 2ème ordre de la forme y'' + A(x) = 0)

Avec A(x) est une fonction quelconque.
Ce type d'équation différentielle contient uniquement la variable x et la dérivée seconde de la fonction à cherchée. Chercher y revient donc , dans un premier temps , à chercher y' puis ayant déterminer y ' à chercher y.

Exemple :

Résoudreles équations différentielles suivantes :

a) $y'' - 2x + 1 = 0$; b) $y'' - \sin x + x = 1$.

Solution

a) $y'' - 2x + 1 = 0 \Rightarrow y'' = 2x - 1$.

La fonction y ' est une primitive de y'', donc on a :

$$y' = \int (2x - 1)\, dx = x^2 - x + k \ (k \in IR)$$

La fonction y est une primitive de y', donc on a :

$$y = \int (x^2 - x + k)\, dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + kx + k' \ (k' \in IR)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + kx + k' \ (k' \in IR)$$

b) $y'' - \sin x + x = 1 \Rightarrow y'' = \sin x - x + 1$

La fonction y' est une primitive de y'', donc on a :

$$y' = \int (\sin x - x + 1)\, dx = - \cos x - \frac{1}{2}x^2 + x + k \ (k \in IR)$$

La fonction y est une primitive de y', donc on a :

$$y = \int (- \cos x - \frac{1}{2}x^2 + x + k)\, dx = - \sin x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + kx + k' \ (k' \in IR)$$

$$\Rightarrow y = - \sin x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + kx + k' \ (k' \in IR)$$

b) <u>Equation différentielle de la forme</u>: $(ay'' + by' + cy = 0)$

Pour résoudre de telles équations différentielles, on recherche d'abord une équation caractéristique de la forme $ar^2 + br + c = 0$. Ainsi on calcule le discriminant associe $\Delta = b^2 - 4ac$.

* Si $\Delta > 0$ on a deux solutions distinctes r_1 et r_2 tel que

$$\boxed{\textbf{S = f(x) = } C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \textbf{ (avec } C_1 \textbf{ et } C_2 \in R \textbf{)}}$$

* Si $\Delta = 0$, on a deux solutions doubles r_1 et r_2 tel que $r_1 = r_2$ et

$\boxed{\mathbf{S = f(x) = (C_1x + C_2)\, e^{rx} \text{ avec } (C_1 \text{ et } C_2 \in} R)}$

* Si $\Delta < 0$, on a 2 solutions complexes r_1 et r_2 tel que :

$r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ et $\boxed{\mathbf{S = f(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)}}$

Exemple :

Résoudreles équations différentielles suivantes :

a) $3y'' - 5y' + 2y = 0$; b) $y'' + y' + y = 0$; c) $y'' - 4y' + 4y = 0$

Solution :

a) $3y'' - 5y' + 2y = 0$

Equation caractéristique : $3r^2 - 5r + 2 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4(3)(2) = 25 - 24 = 1 \Rightarrow \Delta > 0$ alors : $r_1 = 1$ *et* $r_2 = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow S = \left\{C_1 e^{x} + C_2 e^{\frac{2}{3}x}\right\}$

b) $y'' + y' + y = 0$

Equation caractéristique : $r^2 + r + 1 = 0$

$\Delta = (1)^2 - 4(1)(1) = 1 - 4 = -3 = 3i^2$ alors : $r_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ *et* $r_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow S = \left\{ (C_1 Cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x + C_2 Sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x\,)e^{-\frac{1}{2}x}\right\}$

c) $y'' - 4y' + 4y = 0$

Equation caractéristique : $r^2 - 4r + 4 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(4) = 16 - 16 = 0$ alors : $r_1 = r_2 = r = -\frac{4}{2} = -2$

$\Rightarrow S = \{ (C_1 x + C_2)e^{-2x}\}$

<u>Equations différentielles de la forme</u> ($y'' + w^2 y = 0$)

Ce type d'équation différentielle est très fréquent en sciences physiques. Sa résolution est suivit d'une application.

Résolution :
La solution de telles équations est de la forme:

S = ACos (wt + φ). où A et φsont deux nombres réels quelconques.

Ou **S = ACos wx + BSin wx**

Equations différentielles de la forme ($y'' - w^2y = 0$)

Ce type d'équation différentielle est utilisé ici pour résoudre une application concrète.

Résolution :
La solution de telles équation est de la forme : $\mathbf{S = ae^{wt} + be^{-wt}}$

Exemple :

Résoudreles équations différentielles suivantes :

a) $y'' + 9y = 0$; b) $4y'' - 9y = 0$; c) $y'' + 5y = 0$

Solution

a) $y'' + 9y = 0 \Rightarrow \omega^2 = 9 \Rightarrow \omega = 3 \Rightarrow$ **S = ACos3x + BSin3x**

b) $4y'' - 9y = 0 \iff y'' - \frac{9}{4}y = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \omega = \frac{3}{2} \Rightarrow \mathbf{S = ae^{\frac{3}{2}x} + be^{-\frac{3}{2}x}}$

c) $y'' + 5y = 0 \Rightarrow \omega^2 = 5 \Rightarrow \omega = \sqrt{5} \Rightarrow \mathbf{S = ACos\sqrt{5}x + BSin\sqrt{5}x}$

EXERCICES

Exercice 1 :

Vérifiez que les fonctions f données sont solutions des équations correspondantes.

1) $f(x) = 2e^{-2x} + 3e^{2x}$; $y'' - 4y = 0$
2) $f(x) = (2x+1)e^{-x}$; $y'' + 2y' + y = 0$
3) $f(x) = x\sin x$; $y'' + y = 2\cos x$
4) $f(x) = e^{-x}\sin x$; $y'' + 2y' + 2y = 0$

Exercice 2:

Résolvez les équations différentielles proposées.

1) $y'' - 4y' + 3y = 0$
2) $y'' - y = 0$
3) $y'' - 5y' + 6y = 0$
4) $2y'' - y' - y = 0$
5) $y'' + 2y' + y = 0$
6) $y'' - 2y' + y = 0$
7) $9y'' + 6y + y = 0$
8) $4y'' + 12 y' + 9 = 0$
9) $y'' + y = 0$
10) $y'' + y' + y = 0$
11) $4y'' + 9y = 0$
12) $y'' + 3y' + 4y = 0$

Exercice 3 :

Déterminez la solution f de l'équation différentielle donnée, vérifiez les conditions données.

1) $y'' - 2y' + y = 0$; $f(0) = 1$ et $f '(0) = 1$
2) $y'' - y' - y = 0$; $f(0) = 0$ et $f '(0) = 1$
3) $y'' + 4y = 0$; $f(0) = 6$ et $f '(0) = 10$
4) $y'' + y = 0$; $f(0) = 0$ et $f '(0) = 1$
5) $y'' - 4y' - 5y = 0$; $f(0) = 0$ et $f '(0) = -6$
6) $y'' - 4y = 0$; $f(0) = 2$ et $f '(0) = -2$
7) $y'' - 3y' + 2y = 0$; $f(1) = 1$ et $f '(1) = 3$

Exercice 4 :

Etudiez les variations et tracez dans un plan muni d'un repère orthonormal la courbe représentative (C) de la solution f de l'équation différentielle proposée vérifiant la courbe des conditions (S) données.

1) $y' - 3y = 0$; (C) admet au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$.
2) $2y' - y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées (2 ; e).
3) $y'' + 2y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées (0 ; 0) et admet la droite d'équation $y = x$ comme tangente en ce point.
4) $y'' - 4y' + 4y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées (0 ; 1) et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
5) $y'' - 3y' + 2y = 0$; (C) passe par le point coordonnées (ln 2; 0) et admet en ce point une tangente de coefficient directeur – 4
6) $y'' - 2y + 2y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées $\left(\frac{\Pi}{4};0\right)$ et sa tangente au point d'abscisse 0 est parallèle à l'axe des abscisses.

Equations différentielles avec second membre :

Exercice 5

I) Soit (E) l'équation différentielle $y' + 2y = x^2$.

1) Déterminer une fonction polynôme g, de degré deux, solution de (E).
2) Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, f – g est solution de l'équation (E') : $y' + 2y = 0$
3) a) Résolvez l'équation (E').
   b) Donnez les solutions de l'équation (E).

II) 1) Résolvez l'équation différentielle : $y' - 2y = 0$

2) Déterminer un polynôme du second degré P(x) solution de l'équation différentielle :
   $y' - 2y = 8x^2 - 8x$ (1)
3) Démontrez que les fonctions f_k définies sur R par $f_k(x) = ke^{2x} - 4x^2$, où k est un réel donné quelconque, sont solutions de l'équation différentielle (1).

Exercice 6 :

on se propose de déterminer les fonctions deux fois dérivables sur R, solution de l'équation différentielle. (E)

(E) : $y'' + 2y' + y = x^2 + 2x - 2$

1) Déterminer une fonction polynôme du second degré, g, solution de l'équation (E).
2) Démontrer que φ est solution de (E) si et seulement si , φ - g est solution de l'équation différentielle (E') définie par : (E') : $y'' + 2y' + y = 0$
3) Résolvez (E') ; puis déduire J – en l'ensemble des fonctions φ solutions de l'équation différentielle (E).

Exercice 7 :

On se propose de résoudre le problème suivant :

Trouvez une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle] 0, +∞ [, s'annulant pour x = 1 et vérifiant la propriété suivante : $\forall x > 0$, $x \times f'(x) - 3 \times f(x) = 3\ln x$ (E)

1) Trouver tous les polynômes P du 3ème degré telles que, pour tout réel x ;
   $x \times P'(x) - 3 \times P(x) = 0$
2) Soit une fonction f définie et dérivable sur]0, +∞ [telle que f(1) = 0 et soit h la fonction définie sur]0, +∞ [par la relation $f(x) = x^3 \times h(x)$

a) Calculer h (1) et calculer f '(x) en fonction de h'(x) et h(x).
b) Démontrer que : f vérifie (E) ssi $\forall x \in \left]0,+\infty\right[$, $h'(x) = \dfrac{3}{x^4}\ln x$
c) On suppose que f vérifie (E). Démontrer que h est définie sur]0, +∞[par
   $h(x) = \int_1^x \dfrac{3}{t^4}\ln t\,dt$
d) Déterminer h(x) en fonction de x par une intégration par partie

e) Démontrer qu'il existe une unique fonction f solution du problème posé et donner l'expression de f(x).

<u>Exercice 8 :</u>

On se propose de résoudre l'équation différentielle :

(E_1) : $y' - 2y = \dfrac{2}{1+e^{-2x}}$

1) Déterminer la solution de l'équation différentielle (E_2) : $y' - 2y = 0$ qui prend la valeur 1 en 0.
2) Soit f une fonction dérivable sur R, telle que f(0) = ln2 et soit g la fonction définie par la relation : $f(x) = e^{2x} \times g(x)$.

a) Calculer g(0)
b) Calculer g'(x) en fonction de f '(x) et de f(x).
c) Démontrer que f est solution de (E_1) si et seulement si $g'(x) = \dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$
d) En déduire l'expression de g(x), puis celle de f(x) de telle sorte que f soit solution de (E).

Exercice 9 :

On considère le système suivant, d'équations différentielles du 1er ordre tel que :

$\begin{cases} y'+4z = 2e^{2x} \\ z'-y = e^{2x} \end{cases}$ Où y et z désignent deux fonctions inconnues de variables réels x.

a) Former l'équation différentielle du second ordre (E) à la quelle satisfait y(x)
b) Intégrer l'équation (E) et en déduire la solution générale du système.

Préciser la solution particulière pour laquelle on a : y = 1 et z = -1 pour x = 0.

Exercice10 (non corrigé)

Lors du tremblement de terre qui a secoué la centrale nucléaire de FUKUSHIMA au Japon, le nombre d'atome de radium N(t)échappé à l'instant t est donné par la relation :
$N'(t) = -25.10^{-8}N(t)$ et $N(0)=N_0$ où (t est exprimé en années).

1) Déterminer l'expression de N(t) en fonction de N_0 et t.
2) Au bout de combien d'années le nombre d'atome de radium aura –t-il diminué de moitié ?

Exercice11 (non corrigé)

1) Résoudre l'équation différentielle d'inconnue f tel que : $x^2f'(x) + 2xf(x) - 1 = 0$.
2) Soit l'équation (E): $x^2f'(x) - 2xf(x) + f^2(x) = 0$.
3) On pose $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$
   a- Montrer que l'équation (E) est équivalent à $x^2g'(x) + 2xg(x) = 1$.
   b- Déduisez-en la résolution de l'équation (E).

Exercice12 (non corrigé)

1) Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = 0$.
2) Soit (E) l'ensemble des fonctions définies et deux fois dérivables sur ℝ telles que pour tout x de ℝ, $f'(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$ où f' désigne la fonction dérivée de f.
   a) Soit g la fonction définie sur ℝ par $g(x) = cosx$. Vérifier que g est un élément de (E).
   b) Soit f un élément de (E). Vérifie que pour tout réel x, $f''(x) = f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.
   c) En déduire que si f un élément de (E) alors f est une solution de l'équation différentielle y'' + y = 0.
d) Détermine l'ensemble solution de (E).

Dénombrement-Probabilité-Variable aléatoire-Loi Binomiale-Epreuve de Bernoulli

Objectifs

Ce thème vise à :
• consolider les acquis sur le dénombrement.
• calculer la probabilité d'un événement ;
• calculer les probabilités d'événement indépendants.

Savoirs et savoir-faire

1. **PROBABILITES**

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Vocabulaire. • Définition d'une probabilité dans le cas d'une équiprobabilité. • Propriété. • Evénements indépendants - Définition ; - Propriétés.	• Dénombrer, dans le cas d'une expérience conduisant à un nombre fini d'éventualités : - Les cas possibles d'une expérience ; - Les cas favorables d'un événement • Calculer la probabilité d'un événement. • Démontrer que deux événements sont indépendants.

2. VARIABLES ALEATOIRES

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Définition • Loi de probabilité. • Fonction de répartition. • Espérance mathématique. •Variance ; écart type	• Une variable aléatoire étant donnée : - Déterminer sa loi de probabilité et sa fonction de répartition ; - Construire sa fonction de répartition ; - Calculer son espérance mathématique ; - Calculer sa variance et son écart type.

3. LOI BINOMIALE

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Probabilité d'obtenir k succès dans une suite de n épreuves Bernoulli • $E(X) = np$. • $V(X) = np(1 - p)$.	• Calculer la probabilité d'obtenir k succès dans une suite de n épreuves de Bernoulli. $(0 \leq k \leq n)$.

Dénombrement :

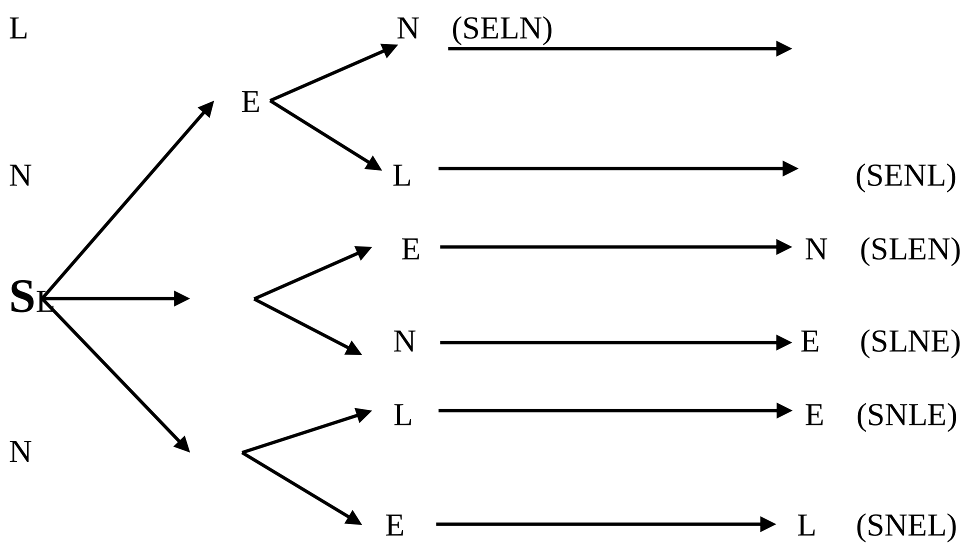
1) Théorie des ensembles :

a) Activité 1 :

Combien de mot peut-on former avec 4 lettres et sans répétition avec le mot : SELN ?

SELN ;	ESLN ;	LESN ;	NELS ;
SENL ;	……… ;	…….. ;	…….. ;
SLNE;	……… ;	…….. ;	…….. ;
SLNE;	………. ;	…….. ;	…….. ;
SLEN;	………. ;	…….. ;	…….. ;
SNLE;	………. ;	…….. ;	…….. ;
SNEL;	………. ;	…….. ;	……... ;
Pour S en 1ère Position	Pour E en 1ère Position	Pour L en 1ère Position	Pour N en 1ère Position

Ainsi on aura donc formé au total 6×4 = 24 mots. Ceci peut être résumé par l'arbre ou le diagramme suivant :



On a donc fait un arrangement de 4 lettres pour 4 places et d'une manière symbolique on écrit : $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

b) <u>activité 2</u> :

Former un bureau de 3 personnes (un directeur, un secrétaire et un commis) ; combien de bureau peut on former ? Sachant que le bureau n'admet pas de doubles postes.

<u>Solution</u> :

D	S	C

$45 \quad \times \quad 44 \quad \times \quad 43 \quad = \quad 85140$

On a donc fait un arrangement de 45 personnes pour 3 élèves. On la note ainsi A_{45}^{3} tel que $A_{45}^{3} = 45 \times 44 \times 43 = 85140$

c) <u>Activité 3</u> :

Dans un jeu de 32 cartes ordinaires, on tires successivement 3 cartes.

1) Quel est le nombre de tirage possible ?
2) Quel est le nombre de tirage contenant 1 seule carte cœur ?
3) Quel est le nombre de tirage possible contenant 1 seule carte noire ?

<u>Solution</u> :

1) On a $A_{32}^{3} = 32 \times 31 \times 30 = 29760$
2) On a : $A_{8}^{1} \times A_{24}^{2}$
3) On a : $A_{16}^{1} \times A_{13}^{2}$

2) Probabilité sur un ensemble fini :

a- Vocabulaire :

- **Expérience aléatoire** : expérience dont le résultat dépend du hasard.
- **Eventualité** : résultat possible d'une expérience aléatoire.
- **Univers ou CardE = n**: ensemble de toutes les éventualités d'une expérience aléatoire.
- **Evénement** : sous-ensemble de l'univers.
- **Evénement élémentaire :** événement réduit à un seul élément.
- **Union de 2 ensembles**: Soit A et B deux ensembles finis. On appelle Union de A et B l'ensemble des éléments de A ou B. On note : **AUB = {x/x**$\in A \quad ou \quad x \in B$**}**
- **Intersection de 2 ensemble :** L'intersection de deux ensembles A et B regroupent les éléments communs aux deux ensembles A et B. On note : **A**$\cap B = \{x / x \in A \; et \; x \in B\}$

N.B :

$A \cap \phi = \phi$

$A \cup \phi = A$

$Card\phi = 0$

Exercices d'application :

Soit E et F deux ensembles tels que :

E = {0, 1, 2, 3} , F= {1, 2, 0, a, b, c 4, 8}

1) Déterminer E $\cup$ F et E $\cap$ F
2) Déterminer cardE, cardF, card (E $\cup$ F), card (E $\cap$F)

Solution :

1) E $\cup$F = {0, 1, 2, 3, 4, 8, a, b, c}
   E $\cap$ F = {0, 1, 2}

2) Card E = 4, Card F = 8
   Card (E$\cup$F) = 9, Card (E $\cap$F) = 3

b- Propriétés :

P₁ : Card ϕ = 0

P₂ : Soient A et B deux univers finis :

- Card (A $\cup$ B) = Card A + Card B – Card (A$\cap$B)
- Card (A$\cap$B) = Card A + Card B – Card (A$\cup$B)

P₃ : Soient A et B, deux ensembles distinctes de B, on appelle produit cartésien A x B l'ensemble défini par : {(x, y) /x$\in A \; et \; y \in B$}

Exemple:

Soient A et B deux ensembles tel que :

A = {1, 2} ; B = {a, b, c}

a) Donner les éléments de A×B
b) Déterminer Card (A×B)

Solution :

a) A x B = {(1, a) ; (1, b) ; (1, c) ; (2, a) ; (2, b) ; (2, c)}
b) Card (A×B) = Card A×Card B = 3×2 = 6.

N.B :

- A×B ≠ B×A (le produit cartésien n'est pas commutatif)
- Card (A×B) = Card A×Card B.

P4 : Complémentarité : On appelle complémentaire de A dans B l'ensemble des éléments de B n'appartenant pas à A on la note $\overline{A} = C_B^A = \{x / x \in B \ et \ x \notin A\}$

Exemple :

Soit E = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} ; F = {0, 3, 4, 5}

a) Déterminer $\overline{F} = C_E^F$
b) Déterminer Card $\overline{F}$

Solution

a) $\overline{F} = C_E^F \{1,2,6,7,8\}$

b) Card $\overline{F}$ = Card E – Card F = 9 – 4 = 5

N.B : Card $\left(C_E^F\right)$ = Card E – Card F

3) Permutation−Arrangement − combinaison

a) Permutation :

- **Définition** :

On appelle permutation d'un ensemble fini F de cardinal n ; toute bijection de $[1\ ;\ n\ ]$dans F.
Le nombre de permutation d'un ensemble fini de cardinal n.
On la note : $\boldsymbol{n}!$ **(et se lit Factorielle n).**

$$\boldsymbol{n}! = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})(\boldsymbol{n}-\mathbf{2})\ldots\times\mathbf{2}\times\mathbf{1}$$

- **Propriétés** :

P1 : 1! = 1 ; **P2**: 0! = 1

b) Arrangement :

- **Définition**:

Soit **E** un ensemble à $\boldsymbol{n}$ éléments, et **P** un ensemble fini tel que : **(** $\boldsymbol{n} \geq$ **P).** On appelle arrangement de **P** éléments de **E**, toute injection de **P** dans **E**.
On le note : $\boldsymbol{A_n^P}$ et on lit : ≪ **A ,** $\boldsymbol{n}$ **, P**≫.

$$\boldsymbol{A_n^P} = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})(\boldsymbol{n}-\mathbf{2})\ldots(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}+\mathbf{1}) \quad \textbf{ou} \quad \boldsymbol{A_n^P} = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{P})!}$$

- **Propriétés**:

P1 : $\boldsymbol{A_n^0} = \mathbf{1}$ P3 : $\boldsymbol{A_n^n} = \boldsymbol{n}\,!$

P2 : $\boldsymbol{A_n^1} = \boldsymbol{n}$P4 : $\boldsymbol{A_n^{n-1}} = \boldsymbol{n}\,!$

c) Combinaison :

- **Définition** :

Soit **E** un ensemble à $\boldsymbol{n}$ éléments, et **P** un ensemble fini tel que : **(** $\boldsymbol{n} \geq$ **P)**. On appelle combinaison de **p** éléments de **E** tout sous ensemble de **E** ayant **p** éléments.
On le note : $\boldsymbol{C_n^P}$ et on lit : ≪ **C ,** $\boldsymbol{n}$ **, P**≫.

$$\boldsymbol{C_n^P} = \frac{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})(\boldsymbol{n}-\mathbf{2})\ldots(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}+\mathbf{1})}{\mathbf{n(n-1)\ldots\ldots2\times1.}} \text{ou } \boldsymbol{C_n^P} = \frac{\boldsymbol{A_n^P}}{\boldsymbol{p}!} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{p}!(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p})!}$$

- **Propriétés** :

P1 : $\boldsymbol{C_n^0} = \mathbf{1}$ P3 : $\boldsymbol{C_n^n} = \mathbf{1}$

P2 : $\boldsymbol{C_n^1} = \boldsymbol{n}$P4 : $\boldsymbol{C_n^{n-1}} = \boldsymbol{n}$
N.B : Pour calculer le $\boldsymbol{C_n^P}$, on utilise le triangle de Pascal qui est le suivant :

N \ P	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	**1**													
1	**1**	**1**												
2	**1**	**2**	**1**											
3	**1**	**3**	**3**	**1**										
4	**1**	**4**	**6**	**4**	**1**									
5	**1**	**5**	**10**	**10**	**5**	**1**								
6	**1**	**6**	**15**	**20**	**15**	**6**	**1**							

d) Nombre d'application d'un ensemble fini dans un ensemble fini (P- liste)

- **Définition** :

Soit **E** et **F** deux ensembles finis ; on appelle application de l'ensemble **E** dans **F**, toute relation qui permet d'associer à tout élément de **E**, un élément unique de **F**. Le nombre d'application distincte d'un ensemble fini de cardinal **p** dans un ensemble fini de **Cardinal n** est noté : $\boldsymbol{A_n^{\widehat{P}}}$tel que : $\boldsymbol{A_n^{\widehat{P}} = n^P}$

- **Propriétés**:

P$_1$:$\boldsymbol{A_n^{\widehat{0}} = n^0 = 1}$;

P$_2$:$\boldsymbol{A_n^{\widehat{1}} = n^1 = n}$;

4) Les différents types de tirages

a) **Tirages successif et sans remise :**

Si l'énoncé contient les mots : **successif et sans remise,** cela signifie que l'ordre dans le quel on considère les éléments a de l'importance mais que tous les éléments considérés sont distincts (**ou qu'il n'y a pas de répétition d'éléments**).
Ainsi le modèle mathématique utilisé est : **l'arrangement.**

$$A_n^P = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1) \quad \text{ou} \quad A_n^P = \frac{n!}{(n-P)!}$$

b) **Tirages successif et avec remise :**

Si l'énoncé contient les mots : **successif et avec remise,** cela signifie que l'ordre dans le quel on considère les éléments a de l'importance et qu'un élément peut éventuellement être répété.
Ainsi le modèle mathématique utilisé est : **la P-liste.**

$$A_n^{\widehat{P}} = n^P$$

c) **Tirage simultané :**

Si l'énoncé contient le mot : simultanément, cela signifie que l'ordre dans le quel on considère les éléments n'a pas d'importance.
Ainsi le modèle mathématique utilisé est : **la combinaison.**

$$C_n^P = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{n(n-1)(n-2)\dots\bullet 2\bullet 1} \text{ou } C_n^P = \frac{A_n^P}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

d) **Tirage successif :**

Si l'énoncé contient le mot : successif, il faut en tenir compte de tous les ordres dans les quels on peut obtenir un événement donné.
On doit souvent multiplier par le nombre d'ordres possibles le résultat trouvé pour un ordre déterminé.

Attention :

Il ne s'agit que d'indications, elles admettent des exceptions.

Application :

Une boite contient 11 boules rouges, 4 boules bleues, 9 boules jaunes, et 6 boules noires. Dénombrer les cas possible à cette épreuve si l'on tire 3 boules de la boite et que :

a) le tirage est simultané

b) le tirage est successif et sans remise

c) le tirage est successif et avec remise

Solution :

Ici : - le nombre d'élément qui constitue l'univers est : $\boldsymbol{n = 30}$
- le nombre d'élément tiré est : $\boldsymbol{p = 3}$

a) le tirage est simultané :

Alors le nombre de cas possible est : $\boldsymbol{C_{30}^{3}} = \frac{\mathbf{30}\,!}{\mathbf{3}!(\,\mathbf{30-3}\,)!} \;\boldsymbol{=}\; \mathbf{4060}$

b) le tirage est successif et sans remise :

Alors le nombre de cas possible est : $\boldsymbol{A_{30}^{3}} = \frac{\mathbf{30}\,!}{(\,\mathbf{30-3}\,)!} \;\boldsymbol{=}\; \mathbf{24360}$

c) le tirage est successif et avec remise :

Alors le nombre de cas possible est : $\boldsymbol{A_{30}^{\widehat{3}} = 30^{3} = 2700}$

I- Probabilité simple :

1) Définition :

Dans une épreuve où tous les évènements élémentaires d'un univers Ω sont équiprobables, la probabilité d'un évènement A est le nombre réel défini par le rapport entre le Nombre de Cas Favorable à l'évènement A et le Nombre de Cas Possible. On note P_A ou P(A).

P(A) $= \dfrac{\boldsymbol{Card(A)}}{\boldsymbol{Card(\Omega)}} = \dfrac{\boldsymbol{NombredeCasFavorables} \text{ à } \boldsymbol{lar\acute{e}alisationdeA}}{\boldsymbol{NombreTotaldeCasPossibles} \text{ à } \boldsymbol{lar\acute{e}ealisationdeA}}$

Exemple:
On jette un dé ordinaire non piqué. Soit Ω l'ensemble des résultats possibles tel que :
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ω est appelé univers ou population.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre paire ?
b) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement le chiffre 3 ?
c) Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre inférieur à 1 ?
d) Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre inférieur ou égal à 6 ?

Solution :

Le nombre de cas possible est : 6.

a) La probabilité d'obtenir 1 chiffre paire est P = $\frac{3}{6}$ = 0,5
b) La probabilité d'obtenir exactement le chiffre 3 est : P = $\frac{1}{6}$
c) La probabilité d'obtenir un chiffre inférieur à 1 est P = $\frac{0}{6}$ = 0
d) La probabilité d'obtenir un chiffre inférieur ou égale à 6 est P = $\frac{6}{6} = 1$

2) Propriétés :

Soit Ω l'univers ou l'évènement certain et A et B deux évènement élémentaires de Ω.
On a :

- $P(\Omega) = 1$
- $P(\phi) = 0$
- $P(A \cup B) = P(A) + (P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- Si A et B sont disjoints $(A \cap B) = \phi$ alors on a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Exemple :

Une urne contient 7 boules indiscernables au touché dont 3 blanches et 4 noires. On tire simultanément et au hasard 3 boules de cette urne.

1) Quelle est la probabilité d'avoir : "A" exactement 2 boules blanches.
2) Quelle est la probabilité d'avoir "B" au plus 1 boule noire.
3) Quelle est la probabilité d'avoir "C" 2 boules de même couleur.
4) Quelle est la probabilité d'avoir "D" des boules de même couleur.

Solution :

Tirage simultané : on utilise $C_n^P avec \begin{cases} n=7 \\ P=3 \end{cases}$

Désignons par NCP : le **N**ombre de **C**as **P**ossible
et
par NCF : le **N**ombre de **C**as **F**avorable

1) $Nombre\ de\ cas\ possible C_7^3 = \frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1} = 35$ | $P(A) = \frac{12}{35}$
$Nombre\ de\ cas\ favorable C_3^1 \times C_4^1 = 12$

2) $N.C.P = C_7^3 = 35$
$N.C.F = C_4^0 \times C_3^3 + C_3^2 = 12+1 = 13$ | $P(B) = \frac{13}{35}$

3) $N.C.P = C_7^3 = 35$
$N.C.F = C_3^2 \times C_4^1 + C_4^2 \times C_3^1 = 13+18 = 30$ | $P(C) = \frac{6}{7}$

4) $N.C.P = C_7^3 = 35$
$N.C.F = C_3^3 \times C_4^0 + C_4^3 \times C_3^0 = 5$ | $P(D) = \frac{5}{35}$

3) Equiprobabilité:

On parle d'équiprobabilité si la probabilité de réalisation de chaque évènement élémentaire est le même.

- Le lancé du dé est un évènement d'équiprobable car la probabilité d'apparition de chaque face est $\frac{1}{6}$
- Le lancé d'une pièce de monnaie est aussi un évènement d'équiprobable car la probabilité d'apparition de chaque face est de $\frac{1}{2}$.

II- Probabilités conditionnelles et Indépendance

1) Définition :

Soient A et B deux évènements de probabilité non nulles tels que $A \cap B \neq \emptyset$.
La probabilité de réalisation de A quand B est réalisé s'appelle probabilité conditionnelle de A par rapport à B ou probabilité de A sachant B. $\boldsymbol{P(A/B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$.

2) Indépendance :

Deux évènements A et B sont indépendants si la réalisation de l'un ne modifie pas la réalisation de l'autre. On a alors :

$$\begin{cases} \boldsymbol{P_B(A) = P(A)} \\ \boldsymbol{P_A(B) = P(B)} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}.$$

3) Variable aléatoire :

On appelle variable aléatoire réelle, toute application x de Ω dans IR. L'ensemble des valeurs prises par x, noté $x(\Omega)$ et s'appelle l'univers image de Ω par x.

4) Partie associée à une valeur image :

Etant donnée une valeur image $\boldsymbol{x_i}$, on désigne par "$\boldsymbol{X = x_i}$", l'évènement constitué par l'ensemble des éventualités $\boldsymbol{e_k}$ de Ω ayant pour image $\boldsymbol{x_i}$ par $\boldsymbol{X}$ on note "$\boldsymbol{X(e_k) = x_i}$" ou "$\boldsymbol{X = x_i}$".

N.B : L'ensemble des évènements "$\boldsymbol{X = x_i}$", constitue une partition de Ω et forme un système complet d'évènements.
On définit également les notations **:** $\boldsymbol{X > a}$; $\boldsymbol{X \geq a}$**;** ……….
C'est l'ensemble des éventualités de Ω dont l'image est strictement supérieure à $\boldsymbol{a}$, supérieure ou égale à $\boldsymbol{a}$,……….

5) Loi de probabilité d'une variable aléatoire X

On appelle loi de probabilité d'une variable aléatoire x la fonction :
P : $x \mapsto P(X = x)$ qui a toute valeur image si associe la probabilité $P_i = P(X = x_i)$.

N.B : Une loi de probabilité se présente sous forme d'un tableau de valeurs

x_i	x_1	x_2	x_3	……………	x_n
$P(X=x_i)$	P_1	P_2	P_3	…………….	P_n

Avec $P_1 + P_2 + P_3 + \ldots\ldots\ldots + P_n = 1$

6) Fonction de répartition d'une variable aléatoire X

On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire x, la fonction F définie sur R par :
$F : x \mapsto p(X \leq x)$

N.B :
Si $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, alors $F(x) = P_1 + P_2 + \ldots\ldots + P_i$

En particulier : $F(x) = 0$ pour $x < x_1$: $F(x) = 1$ pour $x > x_n$
La fonction F est une fonction en escalier, croissante de 0 à 1

7) Valeurs caractéristiques d'une variable aléatoire :

a) Espérance mathématique X

On appelle espérance mathématique d X, le nombre $\overline{X}$ = E(x) tel que :

$$\overline{X} = E(x) = \sum_{i-1}^{n} p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_n x_n$$

N.B :
C'est la moyenne pondérée des valeurs images x_i, pondérées par les probabilités P_i(**Car :** $\mathbf{P_1 + P_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + P_n = 1}$)

Propriétés :

P_1 : E(x – E(x)) = 0
P_2 : E(k) = k
P_3 : E(x + k) = E(x) + k
P_4 : E(kx) = k E(x).

b) Variance :

On appelle variance de x l'espérance mathématique du carré de la variable x – E(x). Elle est noté V(x) telle que :

$$V(x) = \sum P_i \left[x_i - E(x)\right]^2 = P_1(x_1 - E(x))^2 + P_2(x_2 - E(x))^2 + \ldots. + P_n(x_n - E(x))^2$$

Ou $V(x) = (P_1 x_1^2 + P_2 x_2^2 + \ldots\ldots + P_n x_n^x) - (E(x))^2$

Propriétés :

P_1 : V(k) = 0 ; P_2 : V(X+k) = V(x)
P_3 : V(kx) = k^2V(x)

c) Ecart – type :

On appelle écart-type la racine carré de la variance. On la note $\delta(x)$ tel que δ **(x) =** $\sqrt{v(x)}$.

Propriété:

δ (kx) = k δ (x)

6°) Epreuve de Bernoulli

On appelle épreuve de Bernoulli toute épreuve ne conduisant qu'à deux éventualités. L'une de ces deux éventualités est appelée succès avec pour probabilité p et l'autre échec avec pour probabilité q = 1 – p.

7°) Loi binomiale :

Soit une suite de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.
Soit P la probabilité du succès et q = 1 – p celle de l'échec.
Soit x la variable aléatoire désignant le nombre de succès.
La probabilité d'avoir exactement k succès est : $p(x = k) = C_n^k \, p^k \, q^{n-k}$

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Soit le tableau ci – dessous donnant la loi de probabilité de fabrication de voiture d'une société

X	0	1	2
$P(x = x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

a) Calculer l'espérance mathématique
b) Calculer la variance puis en déduire l'écart – type
c) Donner la fonction de répartition de la variable aléatoire X de cette loi de probabilité puis faite sa représentation la graphique.

Exercice 2 :

On suppose que la probabilité de faire un garçon est $\frac{1}{4}$. Une famille a 5 enfants.

Calculer la probabilité pour qu'il y ait exactement 3 garçons.

Exercice 3 :

L'objectif de cet exercice est de déterminer les quels des avions à 2 ou 4 moteurs sont les plus sûrs.
Un avion ne s'écrase pas tant que la moitié au moins de ses moteurs fonctionne. Les moteurs d'un avion tombent en panne de manière indépendante.

Partie A :
Dans cette partie on prend p = 0,1

a) Calculer la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase.
b) Calculer la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait ses 4 moteurs en panne.
c) Calculer la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait exactement 3 moteurs en panne
d) En déduire la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'crase.

Partie B :
On revient au cas général

a) Soit f(p) la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'crase. Démontrer que $f(p) = p^2$

Soit g(p) la probabilité pour qu'un avion à 4 moteur s'écrase. Démontrer que $g(p) = p^2 (-3p^2 + 4 p)$

b) On pose h(p) = f(p) – g(p).

- Etudier le signe de h(p) en fonction de P.
- En déduire, suivant les valeurs de p dans quels avions il vaut mieux monter.

Solutions :

Exercice 1 :

a) Espérance mathématique est :

$$E(x) = 0 \text{ x } \frac{2}{7} + 1\times\frac{4}{7} + 2\times\frac{1}{7} = \frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7} = 0{,}857 \Rightarrow E(x) = 0857$$

b) La variance et l'écart – type

- **<u>Variance</u>** :

$$V(x) = 0^2 \times \frac{2}{7} + 1^2 \times \frac{4}{7} + 2^2 \times \frac{1}{7} - 0{,}857^2 = \frac{4}{7} + \frac{4}{7} - 0{,}857^2 \Rightarrow V(x) = 1{,}142 - 0{,}857^2 = 0{,}407$$

- L'écart – type : δ (x) = $\sqrt{0{,}407} = 0{,}637$

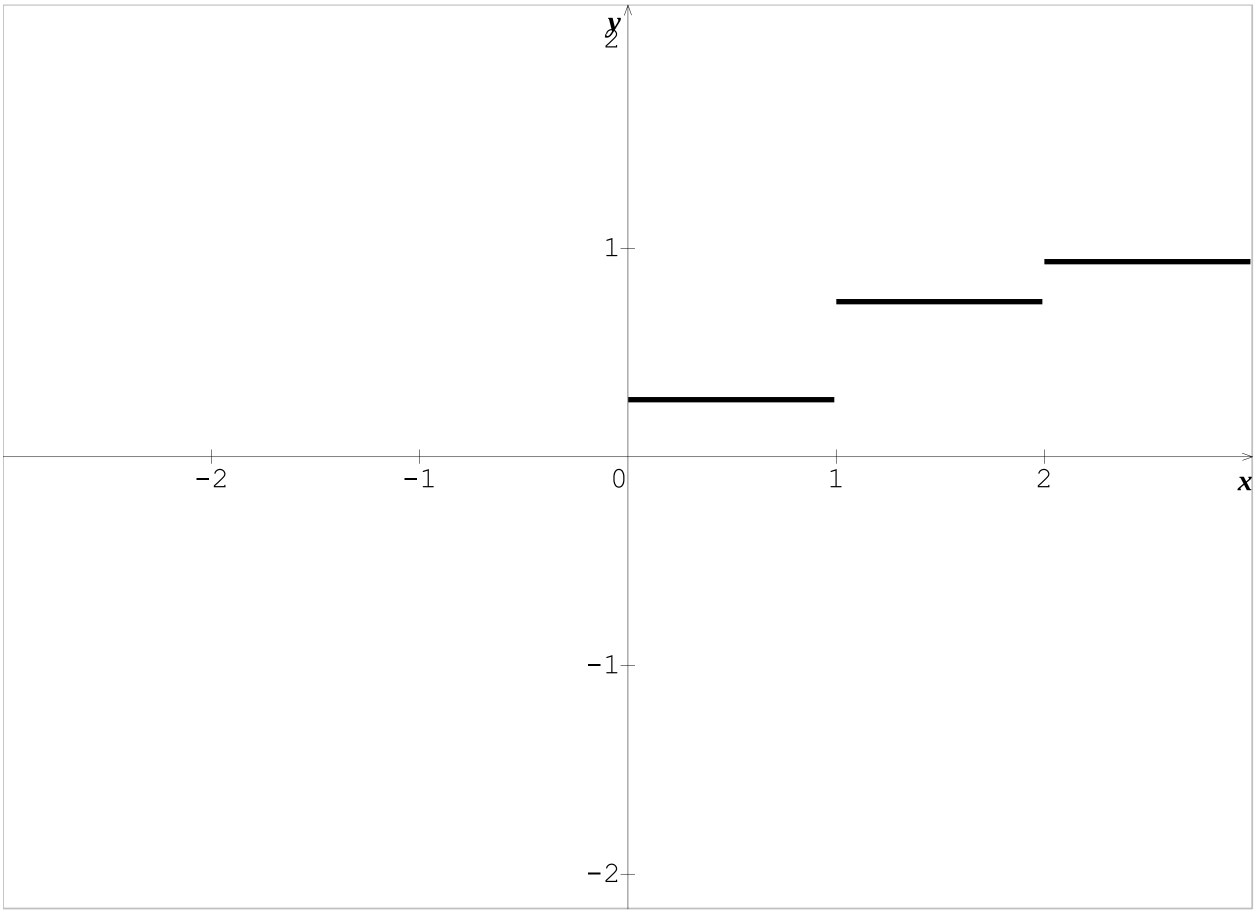
c) La fonction de répartition est :

$$P(x<0) = 0 \qquad P(x \le 1) = P(x=0) + P(x=1) = \frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{6}{7}$$

$$P(x \le 0) = \frac{2}{7} \qquad P(x \le 2) = P(x=2) + P(x=1) + P(x=0) = \frac{1}{7} + \frac{4}{7} + \frac{2}{7} = 1$$

$$D'où \quad F(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x < 0 \\ \frac{2}{7} \; si \; x \in [0;1] \\ \frac{6}{7} \; si \; x \in [1;2] \\ 1 \; si \; 2 \le x \end{cases}$$

La présentation graphique est définie par la figure suivante :


y
2
1
-1
-2
-2
-1
0
1
2
x

Exercice 2 :

Avoir une naissance simple conduit à 2 éventualités : soit on a un garçon, soit on a une fille. C'est donc une épreuve de Bernoulli. On pourrait considérer l'épreuve « avoir un garçon » comme le succès de probabilité p = $\frac{1}{4}$ et l'épreuve « avoir une fille » comme l'échec de probabilité q = 1 – p = 1 - $\frac{1}{4}$=$\frac{3}{4}$. Cinq naissances successives constituent une succession de 5 épreuves de Bernoulli. Pour Calculer la probabilité d'avoir exactement 3 garçons, on utilise alors la loi binomiale de paramètre 5 et $\frac{3}{4}$ tel que

$$p(x = 3) = C_5^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 10 \times \frac{1}{64} \times \frac{9}{16} = \frac{90}{1024} \Rightarrow p\ (x = 3) = \frac{45}{512} = 0{,}088$$

= > p (x = 3) = 0,088

Alors la probabilité d'avoir exactement 3 garçons est p(x = 3) = 0,088.

Exercice 3 :

Soit p la probabilité pour qu'un moteur tombe en panne

Partie A :

On donne p = 0,1

a) La probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase. Un avion à deux moteurs s'écrase si ses deux moteurs sont en panne. $p_1 = p \times p = p^2 = 0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}01$

b) La probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait ses 4 moteurs en panne.

$P_2 = p \times p \times p \times p = p^4 = 0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}0001$

c) La probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait exactement 3 moteurs en panne. L'état de fonctionnement d'un moteur conduit à 2 éventualités : soit il est en panne soit il ne l'est pas. Avoir un moteur en panne est donc une épreuve de Bernoulli.

La probabilité pour *q*u'un avion à 4 moteurs ait exactement 3 moteurs en panne se détermine par la loi binomiale de paramètre p = 0,1 et k = 3

$p_3 = p(x = 3) = C_4^3 (0{,}1)^3\ (0{,}9)^1 = 4 \times (0{,}001) \times (0{,}9) = 0{,}0036$

d) La probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'crase. Un avion à 4 moteurs s'écrase si ses 4 moteurs sont en panne ou s'il a 3 moteurs en panne.

$p_4 = p_2 + p_3 = 0{,}0001 + 0{,}0036 = 0{,}0037$

Partie B :

On revient au cas général

a) Soit f(p) la probabilité pour qu'n avion à 2 moteurs s'écrase.

Démontrons que $f(p) = p^2$

Un avions à 2 moteurs s'crase si ses deux moteurs sont en panne.

$f(p) = p \; p = p^2$

b) g(p) est la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'écrase.

Démontrons que $g(p) = p^2 (-3p^2 + 4p)$

Un avion à 4 moteurs s'écrase si ses 4 moteurs sont en panne ou s'il a trois moteurs en panne.

$g(p) = p^4 + p(x = 3) = p^4 + C_4^3 p^3(1-p) = p^4 + 4p^3(1-p)$

$\Rightarrow g(p) = p^4 + 4p^3 - 4p^4 = -3p^4 + 4p^3 = p^2(-3p^2 + 4p)$

$\Rightarrow g(p) = p^2(-3p^2 + 4p)$

c) On pose $h(p) = f(p) - g(p)$

$h(p) = f(p) - g(p) = p^2 - p^2(-3p^2 + 4p) = p^2(1 + 3p^2 - 4p)$

$\Rightarrow h(p) = p^2(3p^2 - 4p + 1)$

Si $p^2 > 0$ alors le signe de h (p) dépend du signe $3p^2 - 4p + 1$

Or $3p^2 - 4p + 1 = 3(p-1)(p - \frac{1}{3})$

$\Rightarrow h(p) > 0$ si $p \in]0 ; \frac{1}{3}[$; $h(p) < 0$ si $p \in]\frac{1}{3} ; 1[$; $h(p) = 0$ si $p \in \{\frac{1}{3} ; 1\}$

En déduisons, suivant les valeurs de p, dans quels avions il vaut mieux monter.

- Si $p \in]0 ; \frac{1}{3}[$, alors $h(p) > 0 \Rightarrow f(p) > g(p)$. Un avion à 4 moteurs est plus sûr.
- Si $p \in]\frac{1}{3} ; 1 [, alors h(p) < 0 \Rightarrow f(p) < g(p)$: Un avion à deux (2) moteurs est plus sûr.
- Si $p \in \{\frac{1}{3} ; 1 \}$; alors $h(p) = 0 \Leftrightarrow f(p) = g(p)$: le risque est le même.

EXERCICES

Exercice 1 :

1) calculer les expressions suivantes :

a) $5!$; $7!$; $(2^3)!$; $3(4!)$; $\frac{8!}{6!}$

b) A_8^3 ; A_{10}^4 ; A_{10}^{10} C_5^2 ; C_8^3 ; C_{10}^{10}

c) $\frac{C_{10}^5}{C_{10}^3}$; $\frac{A_8^5}{A_8^1}$; $C_{15}^{14}+C_3^0$

2) Résoudre dans N* les équations suivantes :

a) $C_n^2=5n$; $A_{n+1}^3=n(n^2-1)$
b) $A_n^2=n(2n+5)$; $A_n^2=C_n^3$
c) $C_n^2=45$; $C_n^3=2n$; $C_{2n}^1+C_{2n}^2+C_{2n}^3=475n$
d) $C_n^1+C_n^2=10$; $n^2+3C_n^2=1$

Exercice 2 :

On dispose d'un jeu de 32 cartes ordinaires

1) combien de "mains" différentes de 8 cartes peut – on constituer ?
2) combien de "mains" différentes de 8 cartes comprenant 2as peut – on constituer ?
3) combien de "mains" de 8 cartes ayant au moins 2 cœurs peut – on constituer ?

Exercice 3 :

Une association comprenant 20 personnes dont 12 hommes et 8 femmes désirent former un comité de 5 personnes dans lequel doivent se trouver au moins 2 hommes et 2 femmes. Trouver de combien de façon l'on peut former ce comité dans chaque cas :

1) chaque membre de l'association accepte de faire partir du comité
2) deux des hommes refusent d'en faire partir
3) monsieur x et madame y refusent de siéger ensemble

Exercice 4 :

Un sac contient 25 boules dont 9 rouges, 6 vertes et 10 jaunes. On tire 5 boules du sac.

I) Dénombrer les cas possible à cette épreuve si :
1) le tirage est simultané
2) le tirage est successif sans remise
3) le tirage est successif avec remise.

II) Dénombrer les cas favorables ainsi que la probabilité dans chaque cas si :
1) le tirage est successif sans remise et le résultat contient au plus 3 jaunes
2) le tirage est simultané et le résultat contient 2 rouges, 2 vertes et 1 jaune.
3) Le tirage est successif avec remise et le résultat contient au moins 7 rouges.
4) Le tirage est simultané et le résultat contient au plus 1 verte
5) Le tirage est successif sans remise et le résultat est unicolore.

<u>Exercice 5</u> :
Dans une classe de 40 élèves :
- 25 aiment la mathématique
- 30 aiment le français
- 17 aiment la mathématique et le français

Trouver le nombre d'élève :

a) qui aiment uniquement le français
b) qui aiment uniquement la mathématique
c) qui aiment la mathématique ou le français
d) qui n’aiment aucune des deux matières

<u>Exercice 6</u> :

Un sac contient 5 boules rouges et 3 boules blanches, on tire simultanément et au hasard 3 boules.

1) calculer la probabilité de chacune des évènements suivants :
a) aucune boule rouge n'est tirée
b) une boule rouge et une seule est tirée
c) deux boules rouges et deux seulement sont tirées
d) une boule rouge au moins est tirée
e) deux boules blanches au plus sont tirées
2) soit x la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de boules rouges qui se trouvent parmi les 3 boules tirées.
a) Donner la loi de probabilité de x
b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de x
c) Calculer la probabilité de l'évènement $1 \leq x \leq 2$

<u>Exercice 7</u> :
Dans tout l'exercice on suppose les tirage équiprobables ($n \in N_+^*$)

1) Une urne contient (n + 1) boules vertes et (n – 1) boules rouges

Le jeu suivant consiste à tirer une boule de l'urne :

- Si la boule est rouge, le joueur perd
- Si la boule est verte, le joueur gagne

a) Quelle est la probabilité P_1 que le joueur gagne ?
b) Quelle est la probabilité P_2 que le joueur perd ?

2) Lorsque le joueur gagne, il reçoit 200 F CFA, s'il perd il doit verser 300 F FCFA. On définit la variable aléatoire x qui à chaque tirage associe le gain en FCFA.

(le gain pouvant être négatif).

a) Déterminer la loi de probabilité de x
b) Calculer l'espérance mathématique de x
c) Pour quelle valeur de n, le jeu est – il équitable ? (le jeu est équitable si l'espérance mathématique de la variable x est nulle).

Exercice 8 :
Une étude statistique faite an le nombre de vente de voiture en une journée par un de ses représentants a conduit à la loi de probabilité suivante pour la variable aléatoire x prenant pour valeurs le nombre de ces ventes.

n	0	1	2	3	4	5 et plus
P(x=n)	0,15	0,40	0,30	0,10	0,05	0

1) Dresser le tableau de la fonction de répartition F de la variable aléatoire x et représenter cette fonction dans le plus rapporté à un repère orthogonal convenable
2) Calculer l'espérance mathématique E(x) et la variance V(x) de la variable x.

Exercice 9 :

Un établissement scolaire comporte 55% de filles et 45% de garçons.20% des filles et 40% des garçons utilisent un moyen de transport individuel pour se rendre à l'établissement ; les autres utilisent des cars de ramassage scolaire qui arrivent tous à 8 heures à l'établissement.

1) Quel est le pourcentage des élèves de l'établissement utilisant un moyen de transport individuel ?
2) On aperçoit la silhouette d'un élève descendant d'un car. Quelle est la probabilité pour que ce soit :

a) une fille ;
b) un garçon.

Exercice 10 :

Des lycéens préparent le BAC blanc de mathématique. Trois professeurs X; Y et Z sont susceptibles de donner le sujet. D'après les statistiques des années précédentes et d'autres contraintes, les lycéens évaluent à :
* 0,35 la probabilité pour que ce soit X qui choisisse le sujet;
* 0,4 la probabilité pour que ce soit Y;
* 0,25 la probabilité pour que ce soit Z.
Par ailleurs, les lycéens redoutent qu'un certain chapitre noté r ne soit donné à l'examen. Ils pensent qu'ils ont 1 chance sur 10 que le sujet porte sur r si X le choisit, 2 chances sur 5 si c'est Y qui le choisit et enfin 41 chances sur 50 si c'est Z qui fait le choix du sujet.

1) Quelle est la probabilité que le sujet porte sur le chapitre r ?
2) Au BAC blanc, le sujet porte effectivement sur le sujet r. Quelle est alors la probabilité pour que le sujet ait été choisi par :
    a) par X ?
    b) par Y ?
    c) par Z ?

Exercice 11 :

On considère deux dés cubiques identiques non pipés, dont les faces sont marquées:(0;0), $\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{4\pi}{3};\frac{4\pi}{3}\right)$.

On lance simultanément les deux dés, et on lit les résultats a et b de leurs faces supérieures.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque lancer des deux dés, associe la valeur sin(a + b)
1) Quelles sont les valeurs prises par X ? Déterminer la loi de probabilité de X.
2) Calculer l'espérance mathématique E(X) et la variable V(X) de X.

Exercice12(non corrigé)

1- On suppose que la probabilité de faire un garçon est $\frac{1}{4}$. Une famille a 5 enfants.

Calculer la probabilité pour qu'il y ait exactement 3 garçons.

2- L'objectif de cet exercice est de déterminer les quels des avions à 2 ou 4 moteurs sont les plus sûrs.

Un avion ne s'écrase pas tant que la moitié au moins de ses moteurs fonctionne. Les moteurs d'un avion tombent en panne de manière indépendante.

Partie A :

Dans cette partie on prend p = 0,1

e) Calculer la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase.
f) Calculer la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait ses 4 moteurs en panne.
g) Calculer la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait exactement 3 moteurs en panne
h) En déduire la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'crase.

Partie B :

On revient au cas général

c) Soit f(p) la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'crase. Démontrer que $f(p) = p^2$
d) Soit g(p) la probabilité pour qu'un avion à 4 moteur s'écrase. Démontrer que

$g(p) = p^2\ (-\ 3p^2 + 4\ p)$

e) On pose h(p) = f(p) – g(p).

- Etudier le signe de h(p) en fonction de P.
- En déduire, suivant les valeurs de p dans quels avions il vaut mieux monter.

Barycentre

Objectifs

Ce chapitre vise à :
• réinvestir les notions vues en classe de première ;
•étendre l'étude de l'outil barycentre à un nombre quelconque de points dans le plan et dans l'espace;
• déterminer des lignes et surfaces de niveaux et les construire.

Savoirs et savoir-faire

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Barycentre de n points pondérés Réduction de : $$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$$ Réduction de : $$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{MA}_i^2$$ • Ligne de niveau de l'application : $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{MA}\,;\,\overrightarrow{MB}}\right)$ • définition • Propriétés	• Réduire $$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$$ • Réduire $$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2$$ • Déterminer les lignes et surfaces de niveaux des applications du type : $$M \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{MA}_i^2$$ $$M \mapsto \frac{MA}{MB}$$ • Construire dans le plan les lignes de niveau de l'application $$M \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{MA}_i^2$$ • Déterminer et construire une ligne de niveau de l'application $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{MA}\,;\,\overrightarrow{MB}}\right)$

I- Introduction :

Dans ce qui suit nous faisons allusions au point dans un ensemble noté souvent E où est définit un produit scalaire et appelé espace affine à une dimension (de repère (o; $\vec{i}$) par exemple) où tout point est du type A(x_A), à 2 dimensions (de repère (o, $\vec{i}, \vec{j}$) par exemple) où tout point est du type **A(x_A ; y_A)** ou a 3 dimensions (de repère (o, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) par exemple) où tout point est du type **A(x_A ; y_A ; z_A)……..** cet espace affine sera toujours associé à un espace vectoriel (ensemble non vide particulier dont les éléments sont des vecteurs munis d'une base).

II- Rappels :

- Dans un espace affine les points A, B, C sont alignés lorsqu'il existe k є R* unique tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ on dit que B a pour abscisse k dans le repère de graduation d'origine A et de point unitaire C.

- Lorsque cette condition n'est pas remplie, les points A, B, C ne sont pas alignés on dit alors qu'ils sont coplanaires et déterminent toujours un repère du plan. En fixant A le repère est $\left(A \ ; \overrightarrow{AB} \ ; \ \overrightarrow{AC}\right)$

- Dans tous les cas :
- La relation de Charles est vérifiée par : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

- d (A,B) = $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = AB$; alors $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2$

III- Barycentre d'un système de points :

1) Système de points pondérés :

On appelle système de point pondérés tout ensemble du type :
$\left\{(\mathbf{A_1}, \alpha_1), (\mathbf{A_1} \ ; \ \alpha_2); \ ...; \ (\mathbf{A_n}; \ \boldsymbol{\alpha_n})\right\}$ où les **A_i** sont les points d'un espace affine et les α_i sont des nombres réels appelés coefficients de pondération. Chaque α_i est appelé coefficient de pondération.

2) Barycentre de deux points pondérés

On appelle barycentre du système de points pondérés$\{(A \ ; \ \alpha) \ ; \ (B \ ; \ \beta)\}$, l'unique point **G** s'il existe tel que : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$
En fixant A on a : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha + \beta)\overrightarrow{GA} = -\beta\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} = -\beta\frac{\overrightarrow{AB}}{\alpha + \beta}$

Avec $\alpha + \beta \neq 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \beta \frac{\overrightarrow{AB}}{\alpha + \beta}$

Ainsi si G est le barycentre de {(A ; α) ; (B ; β)} ; Alors A, B et G sont alignés, et G a pour abscisse $\frac{\beta}{\alpha + \beta}$ dans la graduation de repère (A ; B).

<u>Construction du barycentre de deux points pondérés</u> :

Détermine puis Construire le barycentre G (s'il existe) dans chacun des cas suivants :

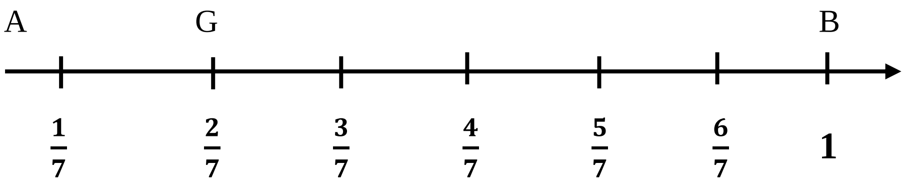
a- {(A ; 5) ; (B ; 2)}

b- {(A ; 3) : (B ; -8)}

<u>Solution</u>

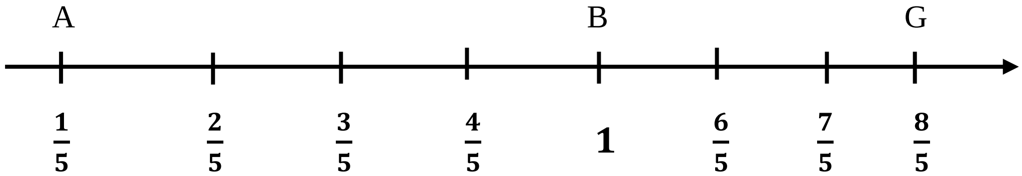
a- G = {(A ; 5) ; (B ; 2)}

5 + 2 = 7 ≠ 0 alors G existe et $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$



d- G = {(A ; 3) ; (B ; −8)}

3 – 8 = − 5 ≠ 0 donc il existe un unique point G tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{8}{5}\overrightarrow{AB}$



3) <u>Barycentre de trois points pondérés</u>

On appelle barycentre de trois points pondérés affectés au système :
{(A ; α) ; (B ; β) ; (B ; γ) } l'unique point (s'il existe) G tel que : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

En fixant A on a : $\alpha(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA}) + \beta(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) + \gamma(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$

<=> $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$ avec ($\alpha + \beta + \gamma \neq 0$)

<u>Construction du barycentre de trois points pondérés</u> :

Détermine puis construire le barycentre G dans chacun des cas suivants :

a- G = Bary $\{(A\,;\,-3)\,;\,(B\,;\,-2)\,;\,(C\,;\,3)\}$

b- G = Bary $\{(A\,;\,1)\,;\,(B\,;\,-2)\,;\,(C\,;\,1)\}$

<u>Solution :</u>

a-G = Bary {(A ; -3) ; (B ; -2) ; (C ; 3)}

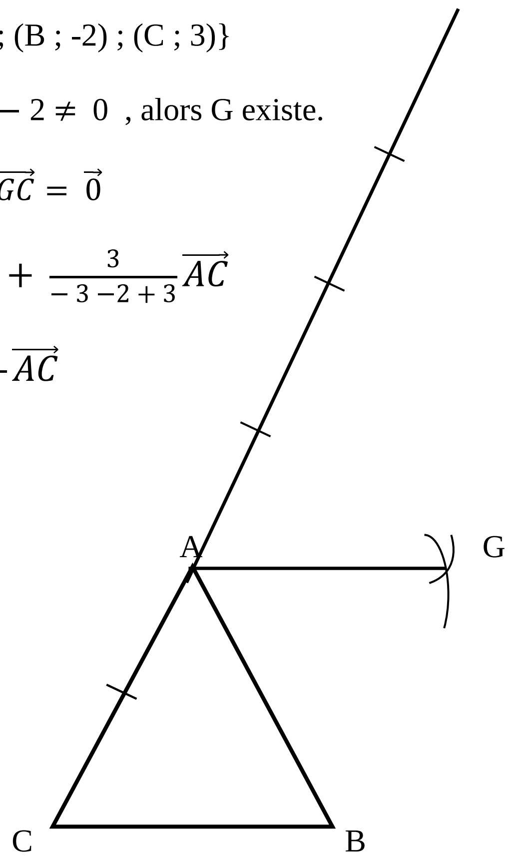
$(-3) + (-2) + (3) = -2 \neq 0$, alors G existe.

On a : $-3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$=> \overrightarrow{AG} = \frac{-2}{-3-2+3}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{-3-2+3}\overrightarrow{AC}$

$=> \overrightarrow{AG} = \frac{-2}{-2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{-2}\overrightarrow{AC}$

$=> \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$



b- G = Bary {(A ; 1) ; (B ; -2) ; (C ; 1)}

$(1) + (-2) + (1) = 0$, alors G n'existe pas.

4) **Barycentre de n points pondérés :**

a- Définition :

On appelle barycentre de n points pondérés du système :
{A1 ; α_1) ; (A2 ; α_2) ; (A3 ; α_3)…. (An ; α_n), le point G (s'il existe) tel que :
$\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + \alpha_3 \overrightarrow{GA_3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} (A_n ; \alpha_n = 0)$ ou encore $\sum_{\lambda=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$

Lorsque le plan est rapporté à un repère d'origine 0, en fixant cette origine on a : en fixant 0 on a : $\alpha_i (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_1}) + \alpha_2 (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_2}) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \alpha_n (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_n}) = \vec{O}$

<=> $\overrightarrow{GO}(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_n) + \alpha_1 \overrightarrow{OA}1 + \alpha_2 \overrightarrow{OA}2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_n \overrightarrow{OA}n = \vec{O}$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{OA}2 + \alpha_n \overrightarrow{OA}n}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots + \alpha_n)}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha_1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \overrightarrow{OA}1 + \frac{\alpha_2}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \overrightarrow{OA}2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\alpha_n}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \overrightarrow{OA}n$$

b) <u>Coordonnées du barycentre de 3 points pondérés :</u>

Dans l'espace affine, le repère (o, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) considérons le système
{(A1, α_1) ; (A2, α_2) ; (A3, α_3)} tel que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \neq 0$ alors $\exists$! G $\in \varphi$ tel que :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \overrightarrow{OA}1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \overrightarrow{OA}2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \overrightarrow{OA}3$$

Or $\overrightarrow{OG} = \left| \begin{array}{l} x_G - x_O = x_G \\ y_G - y_O = y_G \\ z_G - z_O = z_G \end{array} \right. \overrightarrow{OA} \left| \begin{array}{l} x_{A_1} \\ y_{A_1} \\ z_{A_1} \end{array} \right. \overrightarrow{OA} \left| \begin{array}{l} x_{A_2} \\ y_{A_2} \\ z_{A_2} \end{array} \right. \overrightarrow{OA} \left| \begin{array}{l} x_{A_3} \\ x_{A_3} \\ x_{A_3} \end{array} \right.$

Donc $\begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \begin{pmatrix} x_{A_1} \\ y_{A_1} \\ z_{A_1} \end{pmatrix} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \begin{pmatrix} x_{A_2} \\ y_{A_2} \\ z_{A_2} \end{pmatrix} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \begin{pmatrix} x_{A_3} \\ y_{A_3} \\ z_{A_3} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha_1 x_{A_1} + \alpha_2 x_{A_2} + \alpha_3 x_{A_3}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \\ \dfrac{\alpha_1 y_{A_1} + \alpha_2 y_{A_2} + \alpha_3 y_{A_3}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \\ \dfrac{\alpha_1 z_{A_1} + \alpha_2 z_{A_2} + \alpha_3 z_{A_3}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \end{pmatrix}$ D'où $\begin{cases} x_G = \dfrac{\alpha_1 x_{A_1} + \alpha_2 x_{A_2} + \alpha_3 x_{A_3}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \\ y_G = \dfrac{\alpha_1 y_{A_1} + \alpha_2 y_{A_2} + \alpha_3 y_{A_3}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \\ z_G = \dfrac{\alpha_1 z_{A_1} + \alpha_2 z_{A_2} + \alpha_3 z_{A_3}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \end{cases}$

<u>NB</u> :

D'une manière générale si A ; B et C sont 3 points affectés aux complexes Z_A ; Z_B et Z_C et soit G le barycentre affecté au complexe Z_G tel que Z_G bary = {(A, α) ; (B, β) ; (C, γ)}.

On a : $Z_G = \dfrac{\alpha Z_A + \beta Z_B + \gamma Z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$

5) Propriétés du barycentre de trois points pondérés :

- Le barycentre G d'un système ne dépend pas de l'ordre dans lequel sont choisis ces points pondérés.

Exemple: G = bary {(A, α) ; (B, β) ; (C, γ)}
G = bary {(B, β) ; (A, α) ; (C, γ)}
G = bary {(C, γ) ; (B, β) ; (A, α)}

- Le barycentre G d'un système ne change pas en multipliant ou en divisant chaque coefficient de pondération par une même constante non nulle.

Exemple :$\forall k \in \mathbb{R}^*$ on a G = bary {A, kα) ; (B, kβ) ; (C, kγ)}
G = $\left\{\left(A\ ;\ \frac{\alpha}{k}\right)\ ;\ \left(B\ ;\ \frac{\beta}{k}\right)\ ;\ \left(C\ ;\ \frac{\gamma}{k}\right)\right\}$

- Le barycentre G d'un système ne change pas lorsqu'on remplace dans le système un certain nombre de points pondérés par leur barycentre partiel G' à condition que ce dernier soit affecté de la somme partielle des coefficients de pondération partielle considérée.

Exemple : bary {(A, α) ; (G', $\beta + \gamma + \delta \neq 0$)}

Remarques :

- Le barycentre G d'un système du type :
  {(A_1 ; α) ; (A_2, α) ; (A_3, α) ;… (A_n ; α) avec $\alpha \neq 0$} est appelé isobarycentre.

- Coordonnées barycentriques : tous les N uplets de réels du type :
  (α_1, α_2, α_3,……… α n) tel que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots + \alpha_n \neq 0$ sont appelés des coordonnées barycentriques.

Exemple : (3, 5, -3, 2, 7) sont appelés coordonnées barycentriques car : $3 + 5 - 3 + 2 + 7 \neq 0$

6) Ensemble des barycentres d'un système

a) Barycentre de deux points pondérés :

On se rappelle que pour le système {(A, α) ; (B, β)} α + β $\neq 0$ on a : en fixant A on a :

$$\overrightarrow{AG} = \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\overrightarrow{AB}$$

⇨ G$\in (AB)$

Considérons les systèmes {A, α_i) ; (B, β)} $1 \leq i \leq n$

Si $\alpha_1 + \beta_1 \neq 0 \Rightarrow \exists ! G \in \varphi /$ en fixant A on a : $\overrightarrow{AG} = \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1+\beta_1}\right)\overrightarrow{AB} \Rightarrow G \in (AB)$

Si $\alpha_2 + \beta_2 \neq 0 \Leftrightarrow \exists ! G_2 \in \varphi /$ en fixant A on a : $\overrightarrow{AG_2} = \left(\frac{\beta_2}{\alpha_2+\beta_2}\right)\overrightarrow{AB} \Rightarrow G_2 \in (AB)$

$\vdots$

Si $\alpha_n + \beta_n \neq 0 \; \exists ! G_n \in \varphi /$ en fixant A on a : $\overrightarrow{AG_n} = \left(\frac{\beta_n}{\alpha_n+\beta_n}\right)\overrightarrow{AB}$ => $G_n \in (AB)$

D'où l'ensemble des barycentres des points A et B est engendré par la droite vectorielle (AB) donc cet ensemble est la droite affine passant par les deux points A et B.

b) Barycentre de trois points pondérés :

On a $\overrightarrow{AG_n} = \left(\frac{\beta_n}{\alpha_n+\beta_n}\right)\overrightarrow{AB} \Rightarrow G_n \in (AB)$

Rappel :

{(A, α) ; (B, β) ; (C, γ)} avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et en fixant A, il existe un point

G $\in \varphi / \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC} \Rightarrow G \in$ au plan A, B, C.

Considérons les systèmes {(A, α_i) ; (B, β_i) : (C, γ_i)} $1 \leq i \leq n$

Si $\alpha_i + \beta_i + \gamma_i \neq 0 \Rightarrow \exists ! G_1 \in \varphi /$ en fixant A

On a : $\overrightarrow{AG_1} = \frac{\beta_1}{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1} + \frac{\gamma}{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1}\overrightarrow{AC} \Rightarrow G_1 \in$ au plan A, B, C

Si $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \neq 0 \Rightarrow \exists ! G_2 \in \varphi /$ en fixant A

On a $\overrightarrow{AG_2} = \frac{\beta_2}{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma_2}{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2}\overrightarrow{AC} \Rightarrow G_2 \in$ au plan A, B, C

Si $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n \neq 0 \Rightarrow \exists ! G_n \in \varphi /$ en fixant A on a :

$$\overrightarrow{AG_n} = \frac{\beta_n}{\alpha_n+\beta_n+\gamma_n}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma_n}{\alpha_n+\beta_n+\gamma_n}\overrightarrow{AC} \Rightarrow G_n \in \text{ au plan A, B, C}$$

D'où l'ensemble des barycentres des points A, B et C est engendré par le plan vectoriel $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

III-Fonction vectorielle de Leibniz associée à un système de points pondérés :

Considérons le système de points pondérés {(A_1, α_1) ; (A_2, α_2) ; (A_3, α_3) on appelle fonction vectorielle de Leibniz associée à ce système (A_n ; α_n) la fonction notée et déterminée par : f : E$\longrightarrow$ V

M$\mapsto$ f(M) = $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i} = \alpha_1\overrightarrow{MA_1}+\alpha_2\overrightarrow{MA_2}+........+\alpha_n\overrightarrow{MA_n}$

- Pour $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+.........+\alpha_n=0$ on a :

Pour M = A_1 => f(A_1) = $\alpha_1\overrightarrow{A_1A_1}+\alpha_2\overrightarrow{A_1A_2}+\alpha_3\overrightarrow{A_1A_3}+..............+\alpha_n\overrightarrow{A_1A_n}$

f(A_1) = $\alpha_2\overrightarrow{A_1A_2}+\alpha_3\overrightarrow{A_1A_3}+...................+\alpha_n\overrightarrow{A_1A_n}$

Or par la relation de Charles on a :

$\forall\ M\in E,\ f(M)=\alpha_1\overrightarrow{MA_1}+\alpha_2(\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{A_1A_2})+\alpha_3(\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{A_1A_3}+..............+\alpha_n(\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{A_1A_n})$

$=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+..................+\alpha_n)\overrightarrow{MA_1}+\alpha_1\overrightarrow{A_1A_2}+\alpha_3\overrightarrow{A_1A_3}+..........+\alpha_n\overrightarrow{A_1A_n}$

f(M) = 0 + f(A_1) = f(A_1)

pour M = A_2 ; f(A_2) = $\alpha_1\overrightarrow{A_2A_1}+\alpha_3\overrightarrow{A_2A_3}+.........+\alpha_n\overrightarrow{A_2A_n}$

$\forall\ M\in E$, f(M) = $\alpha_1(\overrightarrow{MA_2}+\overrightarrow{A_2A_1})+\alpha_2\overrightarrow{MA_2}+\alpha_3(\overrightarrow{MA_2}+\overrightarrow{A_2A_3})+.........+\alpha_n(\overrightarrow{MA_2}+\overrightarrow{A_2A_n})$

$=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+............+\alpha_n)\overrightarrow{MA_2}+\alpha_1\overrightarrow{A_2A_1}+\alpha_3\overrightarrow{A_2A_3}+............+\alpha_n\overrightarrow{A_2A_n}$

= 0 + f(A_2)

$\forall M\in E$ on a f(M) = f(A_2)

De façon plus générale en fixant un point quelconque du plan

Posons M = P

f(P) = $\alpha_1\overrightarrow{PA_1}+\alpha_2\overrightarrow{PA_2}+................+\alpha_n\overrightarrow{PA_n}$

par la relation de Charles on a :

f(M) = $\alpha_1(\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PA_1})+\alpha_2(\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PA_2})+.............+\alpha_n(\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PA_n})$

= $\overrightarrow{MP}(\alpha_1+\alpha_2+..................+\alpha_n)+f(P)$

f(M) = f(P) qui est indépendante de M

* pour

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+..........+\alpha_n\neq 0\ alors\ \exists!G\in E\ telque\quad \alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{GA_2}+.........\alpha_n\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$

Or f(G) = $\alpha_1\overrightarrow{GA}+\alpha_2\overrightarrow{GA_2}+............+\alpha_n\overrightarrow{GA_n}$ donc f (G) = $\vec{0}$

Ainsi pour tout point M $\in$ E

On a : f(M) = $\alpha_1(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA_1})+\alpha_2(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA_2})+...........+\alpha_n(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA_n})$

= $(\alpha_1+\alpha_2+............+\alpha_n)\overrightarrow{MG}+f(G)$

f(M) = $\overrightarrow{MG}(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i)$

Montrons que f est une bijection :

f : E $\rightarrow$ V

M $\mapsto$ f(M) = $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$

Cas où $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, prouvons que f est une bijection de E sur V soit $\vec{v} \in \vartheta$ résolvons l'équation d'inconnue $M \in E, f(M) = \vec{v}$

- Lorsque $\vec{v} = \vec{0}$ alors f(M) = $\vec{v} \Leftrightarrow f(M) = \vec{0}$

Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$ alors $\exists ! G \in E / G = bary\{A_i, \alpha_i\}$ *et* $f(G) = \vec{0}$ donc l'ensemble solution est dans ce cas un singleton

Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$, on a f(M) =f(P) = $\alpha_1 \overrightarrow{PA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{PA_2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_n \overrightarrow{PA_n} = \overrightarrow{PP'}$ où P est le point fixé et P' l'extrémité du vecteur alors f(M) = $\vec{O} \Rightarrow \overrightarrow{PP'} = \vec{O} \Leftrightarrow P' = P$ donc l'ensemble solution est le singleton {P}

- Lorsque $\vec{v} \neq \vec{o}$ on a :

\- pour $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$ alors f(M) est indépendant de M donc f(M) = $\vec{v}$ alors

$\alpha_1 \overrightarrow{PA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{PA_2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_n \overrightarrow{PA_n} = \vec{v}$

Alors P est l'unique point vérifiant cette équation pour $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$ on a f(M) = $\overrightarrow{MG}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)$

Alors f(M) = $\vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{MG}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) = \vec{v}$

$$\overrightarrow{MG} = \frac{\vec{v}}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} = \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}\right)\vec{v} = \vec{w}$$

Comme $\vec{w}$ est constant (car $\vec{v}$ *et* $\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$ sont constants) alors $\exists ! M \in E$ tel que $\overrightarrow{MG} = \vec{w}$ d'où l'équation : f(M) = $\vec{v}$ n'admet qu'une solution.

<u>Conclusion</u> :

Dans tous les cas l'équation f(M) = $\vec{v}$ n'admet qu'une seule solution. On dit alors que f est une bijection de C sur $\mathcal{V}$.

Exemple

A, B et C étant 3 points non alignés du plan
détermine la nature de(Γ) tel que : {M $\in$ P ; /$\| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$}

Solution

Déterminons la nature de (γ) tel que : {M $\in \delta$ / $\| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$ }

Posons f(M) = $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$, la fonction vectorielle de Leibniz associé au système {(A ; 2) ; (B ; -1) ; (C, 3)} où $2 - 1 + 3 = 4 \neq 0$

Comme $4 \neq 0$, G existe uniquement tel que f(G) = $\vec{o}$ et f(M) = 2(
$\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) - (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) = 4\overrightarrow{MG}$ Ainsi

$\|f(M)\| = \|\overrightarrow{AB}\| \Leftrightarrow \|4\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{AB}\| \Leftrightarrow 4\|\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{AB}\| \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MG}\| = \frac{1}{4}\|\overrightarrow{AB}\| \Leftrightarrow MG = \frac{1}{4}AB$

Ainsi (γ)est un cercle de centre G et de rayon r = $\frac{1}{4}AB$

III- Fonction scalaire (au numérique) de Leibniz :

1) Définition :

On appelle scolaire de Leibniz associée au système {(Aᵢ ; α_i) } ($1 \leq i \leq n$)

L'application φ = E $\rightarrow$ R

$$M \mapsto \varphi(M) = \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_n MA_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2$$

2)-Ecriture réduite de φ(M)

Soit N $\in E$ on a φ(N) = $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i NA_1^2$ alors φ(M) - φ(N) = $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i NA_i^2$

$= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i MA_i^2 - \alpha_i NA_i^2) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (MA_i^2 - NA_i^2)$

φ(M) - φ(N) = $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{MA_i}^2 - \overrightarrow{NA_i}^2)$

$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{MA_i} + \overrightarrow{NA_i})(\overrightarrow{MA_i} - \overrightarrow{NA_i})$

$= \sum \alpha_i (\overrightarrow{MA_i} + \overrightarrow{NA_i})(\overrightarrow{MA_i} + \overrightarrow{NA_i})$

$= \sum \alpha_i (\overrightarrow{MA_i} + \overrightarrow{NA_i}) \bullet \overrightarrow{MN}$

$= \overrightarrow{MN} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{NA_i} \right)$

φ(M) - φ(N) = $\overrightarrow{MN}$ [f(M) + f(N)] où f est la fonction vectorielle de Leibniz associé au système {(Aᵢ ; α_i)

$1 \leq i \leq n$

D'où φ(M) = $\overrightarrow{MN}$ [f(M) + f(N)] + φ(N)

On distingue encore 2 cas :

<u>1^er cas</u> Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0 \; alors \; \exists ! G \in E / G = bary\{(A_i, \alpha_i)\} \; alors 1 \leq i \leq n$

φ(G) = $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i GA_i^2$

Ainsi φ(M) = $\overrightarrow{MG}(f(M)+f(G))+\varphi(G)$ or f(G) = $\vec{o}$ donc φ(M) = $\overrightarrow{MG}$. f(M) + φ(G) et f(M) = $\overrightarrow{MG}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)$ alors φ(M) = $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MG}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)+\varphi(G)$ d'où φ(M) = MG^2 $\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)+\varphi(G)$

Remarque :

- si G = bary {A; a) ; (B ; b) ; (C ; c)} et φ fonction scalaire de Leibniz associée à ce système alors on a : φ(G) = $\dfrac{abAB^2+acAC^2+bcBC^2}{a+b+c}$
- $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2}$

$\varphi\ :\ \varepsilon \to R$

M $\mapsto \varphi(M)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i MA_i^2$

φ(M) =$MG^2\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)+\varphi(G)$

1er cas : si $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$

En notant m = $\sum\alpha_i\ alors\ \forall M\in\varepsilon$ on a φ(M) = m.MG^2 + φ(G)

<=> m.MG^2 = φ(M) - φ(G)

=> MG^2 = $\dfrac{\varphi(M)-\varphi(G)}{m}$; MG^2 = $\dfrac{k-\varphi(G)}{m}$ avec k = φ(M)

MG^2 = $\dfrac{1}{m}k-\dfrac{\varphi(G)}{m}$ qui est un polynôme du 1er degré en k alors

$\dfrac{1}{m}k-\dfrac{\varphi(G)}{m}=0 \Leftrightarrow \dfrac{k-\varphi(G)}{m}=0 \Rightarrow k=\varphi(G)$ alors on a le tableau de signe suivant :

	- ∞ φ(G)	+∞
K		
MG^2	Signe contraire du signe de m	Signe de m

En notant λ(k) = $\dfrac{1}{m}k-\dfrac{\varphi(G)}{m}$ alors cette fonction est telle que λ (k) = MG^2

- lorsque λ (k) <0 alors MG^2 = λ (k) absurde donc S_k = ϕ et f n'est pas surjective donc ne peut être une bijection de ε sur R
- lorsque λ (k) = 0 <=> k = φ(G) alors S_k = {G}
- lorsque λ (k) > 0 alors MG = $\sqrt{\lambda(k)}$:

- lorsque la dimension de $\mathcal{E}$ = 3, l'ensemble S_k est appelé la sphère de centre G et de rayon $\sqrt{\lambda(k)}$ identifier sous le nom de surface de niveau k pour φ

- si la dimension de ε est 2, l'ensemble S_k est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{\lambda(k)}$ encore appelé ligne de niveau k pour φ. Ainsi pour λ (k) > 0, φ n'est pas injective donc ne peut être une bijection sur R.

Conclusion : Pour $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$, l'application φ : $\varepsilon \to$ R n'est pas bijective

2è Cas : Dans ce cas, $\ni ! \vec{u}_o \in V$ tel que pour tout m $\in \varepsilon; f(m) = \vec{u}_o$

$\forall M \in \varepsilon,\ f(M) = \vec{u}_o$

Soit N $\in \varepsilon$ alors f(N) = $\vec{u}_o$ ainsi φ(M) - φ(N) = $\overrightarrow{MN}.\left[\vec{u}_o + \vec{u}_o\right]$

φ(M) - φ(N) = 2. $\overrightarrow{MN}.\vec{u}_o$

En choisissant N dans {(A_i ; α_i) } tel que N = I

Alors on a φ(M) - φ(I) = $3\overrightarrow{MI}.\frac{1}{\vec{u}_o}$ => $\overrightarrow{MI}.\vec{u}_o = \frac{\varphi(M) - \varphi(I)}{2}$ et en posant $\varphi(M) = k$ on a

$\overrightarrow{MI} \bullet \vec{u}_0 = \frac{k - \varphi(I)}{2}$

- pour $\vec{u}_0 = \vec{o}$ $alors\ \overrightarrow{MI}.\vec{o} = \frac{k - \varphi(I)}{2}$

<=> 0 = $\frac{k - \varphi(I)}{2}$

- Si k ≠ φ(I) alors $\forall\ M \in \varepsilon\ on\ a : 0 = \frac{k - \varphi(I)}{2}$ donc absurde alors S_k = ϕ
- Si k = φ(I) on a : 0 = 0 alors S_k = {I}

- pour $\vec{u}_o \neq \vec{0}$ alors on a $\overrightarrow{MI} \bullet \vec{u}_o = \frac{k - \varphi(I)}{2}$

En notant $\vec{u}_o = \overrightarrow{IJ}$ *où* I est le point choisi du système et J l'extrême on a :

$\overrightarrow{MI} \bullet \vec{u}_o = \frac{k - \varphi(I)}{2}$

$\overrightarrow{MI} \bullet \overrightarrow{IJ} = \frac{k - \varphi(I)}{2}$

- $\overrightarrow{IM} \bullet \overrightarrow{IJ} = \frac{\varphi(I) - k}{2}$

$\overrightarrow{IM} \bullet \overrightarrow{IJ} = \frac{\varphi(I) - k}{2}$

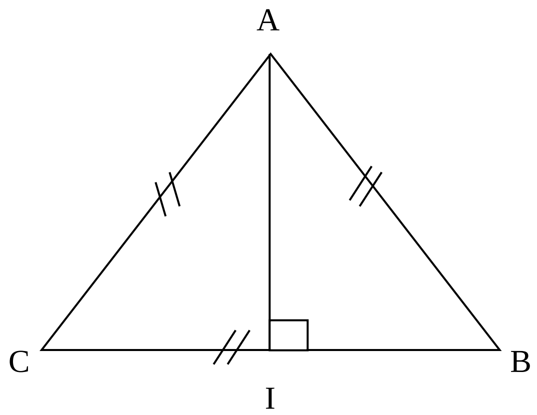
Notons H le projeté orthogonal du point M sur la droite (IJ) alors $\overrightarrow{IH} \times \overrightarrow{IJ} = \frac{\varphi(I) - k}{2}$

L'ensemble S_k cherché est :

- Le plan orthogonal en H à la droite (IJ) si la dimension de ε est 1
- Si la dimension de ε est 1, il s'agit de la droite orthogonal à IJ au point H

IV- Produit scalaire et médiane d'un triangle :

1) Triangle équilatéral



AB = AC = BC et $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60°$

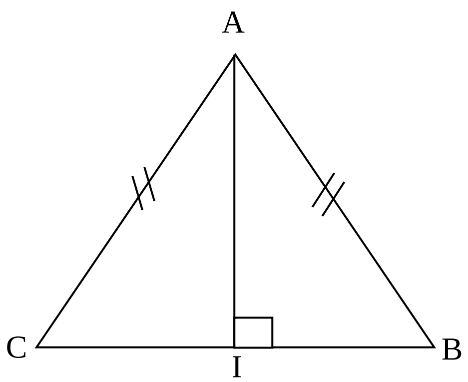
I Milieu de $[BC]$

AI Médiane de $[BC]$

On a : $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = 2AI$ et $\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

2) Triangle isocèle en A

AB = AC et $\hat{B} = \hat{C}$



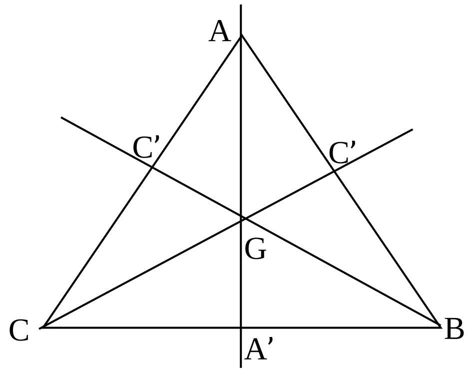
I Milieu de $[BC]$

AI Médiatrice de $[BC]$

On a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2AI$ et $\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$$

3) Médiane d'un triangle quelconque



A' Milieu de $[BC]$

B' Milieu de $[AC]$

C' Milieu de $[AB]$

G centre de gravité du triangle ABC

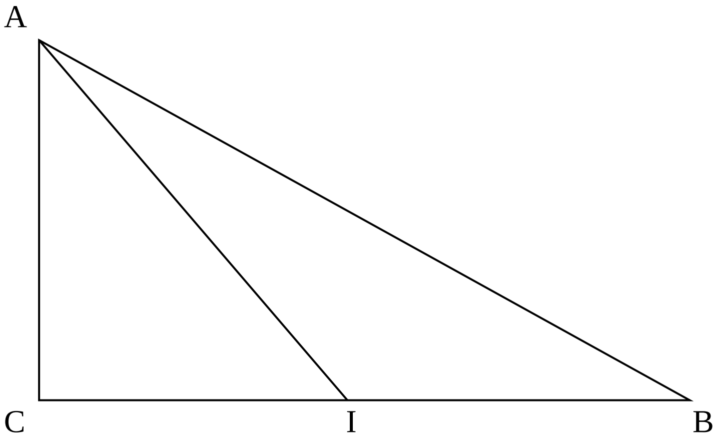
On a :

AG = $\frac{2}{3}$AA' ; BG = $\frac{2}{3}$BB' ; CG = $\frac{2}{3}$CC'

NB : Pour un triangle isocèle, on a AG = $\frac{3}{4}$AA'

4) Théorème de la médiane

Soit ABC un triangle quelconque et I milieu de $[BC]$



a- Première énoncée de la médiane

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

b- Deuxième énoncée de la médiane

$$\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$$

c- Troisième énoncée de la médiane

$$MA^2 - MB^2 = \overrightarrow{MI} \bullet \overrightarrow{AB}$$

EXERCICES

Exercice 1 :

Dans le plan affine euclidien ; on considère un triangle équilatérale A, B, C dont le côté mesure a.

1) Construire le barycentre G du système {(A, 4) ; (B, 1) ; (C, -1)}.
2) Soit f : E → R tel que : f(M) = $4MA^2 + MB^2 - MC^2$

Déterminer puis construire l'ensemble des points M du plan tel que f(M) = $\frac{63a^2}{4}$

Exercice 2 :

Soit A, B, C trois points du plan P tel que AB = AC = 5 cm et BC = 6 cm.

1) Construire le triangle ABC puis calculer $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$
2) Soit G le barycentre des points pondérés {(A, 2) ; (B, 3) ; (C, 3)}. Construire G puis calculer GA.
3) Soit f : P → R

$$M \rightarrow 2\ \overrightarrow{MB} \bullet \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \bullet \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB}$$

a) Exprimer f(M) en fonction de f(G) et MG
b) Calculer f(G).

4) Déterminer puis construire l'ensemble des points M du plan tels que : f(M) = f(A).

Exercice 3 :

Soit E un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé. On considère les points A, B, C de coordonnées respectives : A(3, 1) ; B(-2, 3) ; C(1, 0)
Soit G le barycentre des points A, B, C affectés des points 2 ; 1 ; - 1

1) Trouver les coordonnées G
2) Trouver suivant les valeurs du nombre réel K l'ensemble des points M tel que : $2MA^2 + MB^2 - MC^2 = k$
3) Construire les points M du plan tel que : $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = 8$

Exercice 4 :

Le plan P est muni d'un repère orthonormé (o, $\vec{i}, \vec{j}$). On considère les 4 points A ; B ; C ; D tel que A $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$; $D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

1) Déterminer les coordonnées x et y de D sachant que $\left\|\overrightarrow{DA}\right\| = \left\|\overrightarrow{DB}\right\| = \left\|\overrightarrow{DC}\right\|$
2) Déterminer les réels m et n tels que D soit barycentre des points (A, 1) ; B, m) ; (C, n)
3) Trouver l'ensemble (E) des points M du plan tel que $4\left\|\overrightarrow{MA}\right\|^2 + 3\left\|\overrightarrow{MB}\right\|^2 + 5\left\|\overrightarrow{MC}\right\|^2 = k$

4) Déterminer le réel k tel que $A\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ soit élément de (E) que l'on représentera.

Exercice 5 :

Soit A, B, C un triangle équilatéral de côté 3 ; B' le milieu de [AC] et un point D tel que $4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$

a) Démontrer que D est le barycentre des points pondérés (A, 3) ; (B, -2) ; (C, 3). En déduire que D appartient à la médiatrice du segment [AC].

b) Démontrer que $\overrightarrow{BB'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$

c) Calculer DA^2 et DB^2

d) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan vérifiant la relation : $3MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = 12$

e) Vérifier que l'isobarycentre du triangle A, B, C appartient à l'ensemble (E)

f) Tracer (E).

NB : on fera une figure explicite du triangle A, B, C.

Exercice 6 :

Le plan est rapporté au repère orthonormé (o, $\vec{i}, \vec{j}$) d'unité graphique 1 cm. On considère les points A, B et C d'affixes respectifs :

$Z_A = \left(3\sqrt{3} - 2\right) + i(3 + 2\sqrt{3})$

$Z_B = (1 -4\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} - 1)$

$Z_C = (1- 4\sqrt{3}) + i(-4 - \sqrt{3})$

1) a) Calculer $Z_A - Z_B + Z_C$.
b) En déduire que le point o est le barycentre du système de point pondérés {(A, 1) ; (B, - 1) ; (C, 1)}

2) Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que : $\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$

a) Vérifier que B appartient à (E)
b) Déterminer puis construire (E)
3) Déterminer puis construire l'ensemble (D) des points M du plan tel que :
$2\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\right\|$

Exercice 7 :

Dans l'espace E, on note la distance de deux points M et N par MN

1) Soit 3 points A, B, C non alignés et I le point défini par $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$ De quel coefficients a, b, c faut – il affecter respectivement les points A, B, C pour que I soi leur barycentre ?

2) On suppose maintenant que le triangle ABC est rectangle en A tel que AB = 2 AC = 1.

On suppose que : S = $\left\{M \in E / MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = -3\right\}$

Démontrer que s est une sphère de centre W et de rayons r à préciser.

EXERCICE 8 :

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que : AB = 4 ; AC = 6.
Soit I le milieu du segment $[AB]$.

1) a- Construire le barycentre G = $\{(A, 5)\ ;\ (B, -3)\ ;\ (C, 2)\}$.
   b- Calculer $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$ puis en déduire AG^2 et BC^2.
2) Déterminer puis construire l'ensemble E_1 des points M du plan tel que :

$\| 5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 2\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\|$.

3) Déterminer puis construire l'ensemble E_2 des points M du plan tel que :

$\| 5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\|$.

4) Déterminer puis construire l'ensemble E_3 des points M du plan tel que :

$5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = 24$.

5) Déterminer puis construire l'ensemble E_4 des points M du plan tel que :

$5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = k$ (on discuteras suivant les valeurs de k).

6) Déterminer puis construire l'ensemble E_5 des points M du plan tel que :

$5MA^2 - 3MB^2 - 2MC^2 = -72$.

EXERCICE 9 :

Soit ABC un trapèze tel que (AB) parallèle à (CD .
Soient I ; J et O les milieux respectifs des segments $[AB]$; $[CD]$ et $[IJ]$.

1) Déterminer puis construire l'ensemble E_1 des points M du plan tel que :

$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|$.

2) Les médiatrices des côtés $[AD]$; $[BC]$ se coupent en G. Démontrer que $GA^2 + GB^2 = GC^2 + GD^2$.
3) Démontrer que l'ensemble E_2 : $MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$ est non vide.

Applications Affines

A-LES APPLICATIONS AFFINES PLANES

Activité d'approche :

Soit $\mathscr{P}_2$ un plan affine associé au plan vectoriel ***P*** et rapporté au repère (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).
On considère l'application f de $\mathscr{P}_2$ dans $\mathscr{P}_2$ définie par :

M(x ; y) → M′(x' ; y') tel que : $\begin{cases} x' = 2x - y + 1 \\ y' = x + y - 3 \end{cases}$

a- Détermine par ses coordonnées l'image O' de O par f.

b- Montre que l'application de ***P*** dans ***P*** telle que **:**
∀ M ∈ $\mathscr{P}_2$ φ$(\overrightarrow{OM})$ = $\overrightarrow{O'M'}$ est un endomorphisme de ***P*** **(application linéaire** de ***P*** dans lui-même).

L'application f ainsi définie est dite **application affine.**

I- Définition-propriétés-points invariants expression analytique :

1) Définition

Soit E un espace affine associé à l'espace vectoriel $\vec{E}$ et f une application de E dans E.
f est une application affine de E dans E s'il existe un endomorphisme φ de $\vec{E}$ et un point M_O de E tels que ∀ M ∈ E, φ$(\overrightarrow{M_OM})$ = $\overrightarrow{M'_OM'}$ avec $M'_O = f(M_O)$ et $M' = f(M)$

L'homothétie de centre et de rapport donné. La translation de vecteur donné, la symétrie et la projection de base et de direction données et la rotation de centre et d'angle donné sont des exemples d'applications affines.
NB : les applications affines conserves le coefficient de colinéarité et toute application bijective du plan est appelée transformation affine du plan.

Définition :
Une application d'un espace vectoriel E dans lui-même est dite affine quand elle de la forme $\vec{u} \to A + \varphi(\vec{u})$ où φ est une application linéaire de E dans lui-même (endomorphisme de E) dans l'espace après le choix d'une origine O. Une application M→ M' est dite affine quand l'application est affine.

Activité:

Soit f une application affine de E dans E.

a- Montre que ∀ (M,N) ∈ E×E, $\varphi(\overrightarrow{MN})$ = $\overrightarrow{M'N'}$.

b- Montre qu'il existe un et un seule endomorphisme φ de l'espace vectoriel $\vec{E}$ tel que :
∀ (M,N) ∈ E×E, $\varphi(\overrightarrow{MN})$ = $\overrightarrow{M'N'}$.

(on pourra raisonner par l'absurde en montrant que $\forall\, \vec{u} \in \vec{E}$; $\varphi(\vec{u}) = \varphi'(\vec{u})$ avec φ et φ' étant deux endomorphismes de $\vec{E}$.

Remarque : φ est appelé l'endomorphisme associé à l'application affine f.
Par contre à un même endomorphisme peuvent être associées plusieurs application affines dans les expressions analytiques, il suffire de changer les constantes.

2) Propriétés

P₁ : Les applications affines conservent le barycentre de n points pondérés : c'est-à-dire si f est une application affine, l'image du barycentre d'un système de n points pondérés est le barycentre du système des images de ces points affectés des mêmes coefficients.
Ainsi nous retenons que :
- L'image une droite est une droite.
- L'image d'un plan est un plan.
- L'image d'un segment est un segment.

D'une manière générale :

- L'mage d'une partie convexe de E est une partie convexe de E.
- L'homothétie de centre et de rapport donné ; La translation de vecteur donné ; la symétrie et la projection de base et de direction données et la rotation de centre et d'angle donné sont des exemples d'applications affines.

P₂ : la réciproque d'une transformation affine du plan est une transformation affine du plan.

3) Application vectorielle associée à une application affine

a) Définition : soit f une application affine du plan p dans p et A ; B ; C et D quatre points du plan d'images respectives A' ; B' ; C' et D'.

On appelle application affine vectorielle associée à f , tout application vectorielle $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ dans $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ notée φ tel que : $\forall\, A \in$ p et $\forall\, B \in$ p on a : $\overrightarrow{A'B'} = \varphi(\overrightarrow{AB})$=> $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{f(A)f(B)}$.

D'où $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$.

b) Propriétés :

Soit f une application affine du plan p dans p et φ l'application linéaire associée à f. Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan vectorielle $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ et pour tout réel α donné, on a les propriétés suivantes :

P₁: $\varphi(\alpha\vec{u}) = \alpha\varphi(\vec{u})$.
P₂: $\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$.
P₃: $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$

P4: $\varphi(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \varphi(\overrightarrow{u_i})$

4) Points invariants par une application affine *f*

a) Définition

Soit f une application affine du plan P dans P. L'ensemble des points invariants par f est soit un ensemble **vide**, soit un **singleton**, soit une droite ou encore un **plan** tout entier.

b) Propriétés :

P1 : L'image d'une droite par une transformation affine est une droite.

P2 : Si (AB) et (CD) sont deux droites parallèles du plan et (A'B') et (C'D') leur images respectives par une application affine f du plan, alors les droites (A'B') et (C'D') sont parallèles.

P3 : Soit f une application affine du plan P dans P.

- Si f est bijective alors f(P) = P
- Si f n'est pas bijective alors f (P) est un singleton ou une droite.

5) Expression analytique d'une application affine *f*

a) Définition :

Le plan est muni d'une repère (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$). Soit f une application affine du plan et soit φ sont application linéaire associée. Soit $(a\ ;\ a')$; $(b\ ;\ b')$ et $(c\ ;\ c')$ les coordonnées respectives de $\varphi(\vec{\imath})$; $\varphi(\vec{\imath})$ $et\ de\ O'$ avec $O' = f(\mathrm{O})$. On a : $\overrightarrow{O'M'} = \varphi(\overrightarrow{OM})$

$$\begin{aligned}
&= \varphi(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}) \\
&= x\varphi\vec{\imath} + y\varphi\vec{\jmath} \\
&= x\left(a\vec{\imath} + a'\vec{\jmath}\right) + y\left(b\vec{\imath} + b'\vec{\jmath}\right) \\
&= xa\vec{\imath} + xa'\vec{\jmath} + yb\vec{\imath} + yb'\vec{\jmath} \\
&= (ax + by)\vec{\imath} + (a'x + b'y)\vec{\jmath}
\end{aligned}$$

$=> (x' - c')\vec{\imath} + (y' - c')\vec{\imath} = (ax + by)\vec{\imath} + (a'x + b'y)\vec{\jmath}$

Par identification on a :

$$=> \begin{cases} (x' - c') = (ax + by) \\ (y' - c') = (a'x + b'y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - c' = ax + by \\ y' - c' = a'x + b'y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = ax + by + c' \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

b) propriété:

Une application f est dite affine si sont expression analytique est sous la forme :

$$\begin{cases} x' = ax + by + c' \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

Evaluation

Dans le plan (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$). on considère les points :
A$\binom{2}{0}$; B$\binom{1}{1}$; C$\binom{-2}{-1}$; A'$\binom{3}{10}$; B'$\binom{4}{6}$ et C'$\binom{-3}{-1}$
Soit f l'application affine du plan tel que : $f(A) = A'$; $f(B) = B'$; $f(C) = C'$

1) Montrer que f est bijective
2) Déterminer l'expression analytique de f.

Synthèse

Soient les points A ; B ; C ; A' ; B' ; C' tels que :
$A\ (2, 0)$; $B\ (1, 1)$; $C\ (-2, -1)$; $A'(3, 10)$; $B'(4, 6)$; $C'\ (-3, -1)$
Soient l'application affine du plan tel que :
$f(A) = A'$; $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$.

1) Montrons que f est bijective :

f est bijective si et seulement si $\det\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right) \neq 0$ et $\det\left(\overrightarrow{A'B'}\ ;\ \overrightarrow{A'C'}\right) \neq 0$

Alors $\det\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right) = 5 \neq 0$ et $\det\left(\overrightarrow{A'B'}\ ;\ \overrightarrow{A'C'}\right) = -13 \neq 0$

Alors f est une application bijective.

2) Déterminons l'expression analytique de f. l'expression analytique de f est :

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

Soit $\begin{cases} \varphi\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{A'B'} \\ \varphi\left(\overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{A'C'} \end{cases}$ et $\begin{cases} \varphi(\vec{\imath}) = a\vec{\imath} + a'\vec{\jmath} \\ \varphi(\vec{\jmath}) = b\vec{\imath} + b'\vec{\jmath} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(-\vec{\imath} + \vec{\jmath}) = \vec{\imath} - 4\vec{\jmath} \\ \varphi(-4\vec{\imath} - \vec{\jmath}) = -6\vec{\imath} - 11\vec{\jmath} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} -\varphi(\vec{\imath}) + \varphi(\vec{\jmath}) = \vec{\imath} - 4\vec{\jmath} \\ -4\varphi(\vec{\imath}) - \varphi(\vec{\jmath}) = -6\vec{\imath} - 11\vec{\jmath} \end{cases}$$

$-5\varphi(\vec{\imath}) = -5\vec{\imath} - 15\vec{\jmath} \Leftrightarrow \varphi(\vec{\imath}) = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$

Donc $\begin{cases} \varphi(\vec{\imath}) = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath} \\ \varphi(\vec{\jmath}) = \overrightarrow{2\imath} - \vec{\jmath} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1\ ;\ b = 3 \\ a' = 2\ ;\ b' = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} x' = x + 2y + c \\ y' = 3x - y + c' \end{cases}$ or f(A) = A' $\Leftrightarrow \begin{cases} x'_A = x_A + 2y_A + c \\ y'_A = 3x_A - y_A + c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 2 + 2(0) + c \\ 10 = 3(2) - 0 + c' \end{cases}$

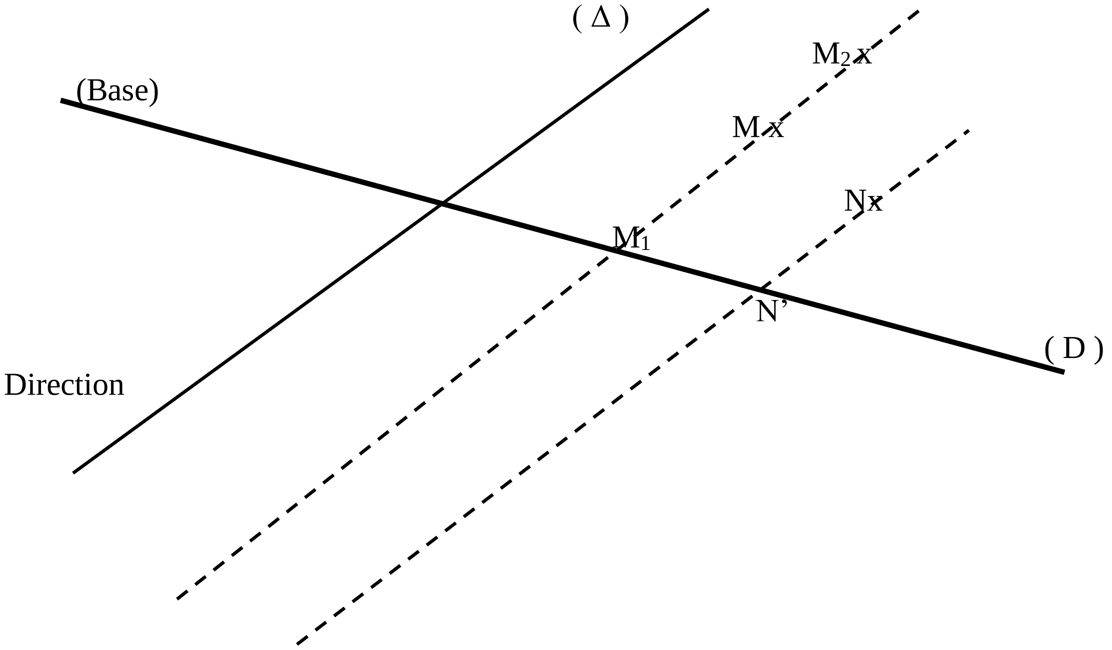
$\Leftrightarrow \begin{cases} C = 1 \\ C' = 4 \end{cases}$

Ainsi l'expression analytique de f est : $\begin{cases} x' = x + 2y + 1 \\ y' = 3x - y + 4 \end{cases}$

II- Cas des transformations affines du plan

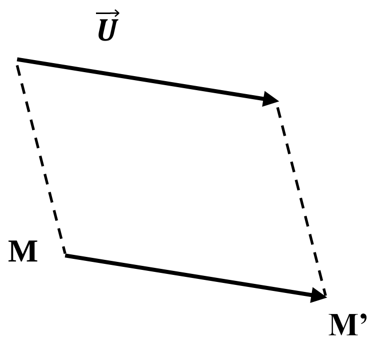
1) Définition :

Une transformation affine est une application bijective de φ dans φ. Contre exemple de transformation la projection P



$P(M_1) \neq P(M_2)$, donc n'est pas bijective.
$P(M_1) = P(M_2)$, tandis que $M_1 \neq M_2$ alors n'est pas injective par suite elle n'est pas bijective.

2) Translation de vecteur $\vec{U}$



a) Définition :

Etant donné un vecteur $\vec{u}$, on appelle translation de vecteur $\vec{u}$, l'application ponctuelle notée et déterminée par :
$t_{\vec{u}}$: P → P
M → $t_{\vec{u}}$ (M) = M'
Alors on a : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$
Cas particulier : Si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $t_{\vec{0}}$(M) = M' ⇔ $\overrightarrow{MM'} = \vec{0}$ ⇔ $M = M'$ donc $t_{\vec{0}} = id_P$

b) Point invariant :

Pour toute translation $t_{\vec{u}}$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$ on observe aucun point invariant.

c) Expression analytique d'une translation :

Soit $\vec{u}\binom{a}{b}$; M$\binom{x}{y}$; M' $\binom{x'}{y'}$
L'expression analytique de $\overrightarrow{MM'} = \binom{x'-x}{y'-y}$
$t_{\vec{u}}$(M) = M' ⇔ $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ ⇔ $\begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases}$ ⇔ $\begin{cases} x' = a + x \\ y' = b + y \end{cases}$

d) Caractéristique d'une translation :

Toute translation t$\vec{u}$ est caractérisée par son vecteur $\vec{u}$ de translation.

Exercice d'application

Dans le plan φ rapporté au repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$). , on considère la translation $t_{\vec{u}}$ définie par :
$t_{\vec{u}}$ (A) = B où $A\ (-3\ ;\ 1)$; $B(1\ ;\ 7)$

a) Caractériser cette translation
b) Déterminer le point C' image du point C par $t_{\vec{u}}$ où C(0 ; -2)

Solution

a) Caractérisons la translation

$t_{\vec{u}}$(A) = B si $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$

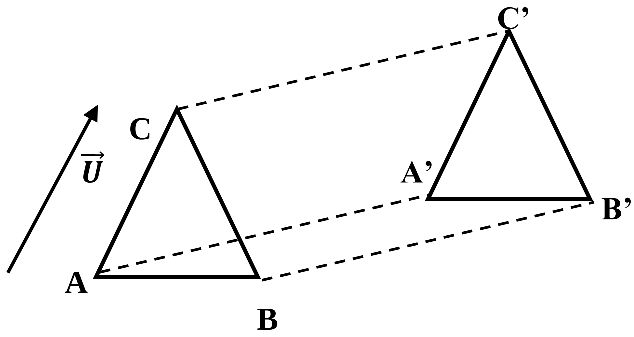
$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \binom{1+3}{7-1} = \binom{4}{6}$. D'où $\vec{u}\binom{4}{6}$ est le vecteur de translation.

b) Déterminons le point C' image de C par translation de $\vec{u}$
On a : $t_{\vec{u}}$(C) = C' <=> $\overrightarrow{CC'} = \vec{u}$

$\overrightarrow{CC'}\begin{pmatrix} x_{C'} - x_C \\ y_{C'} - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{C'} \\ y_{C'} + 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CC'} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{C'} = 4 \\ y_{C'} + 2 = 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_{C'} = 4 \\ y_{C'} = 4 \end{cases}$ D'où C' $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ tel que $t_{\vec{u}}(C) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

e) <u>Quelques propriétés de $t_{\vec{u}}$</u>

Les translations conservent l'alignement, le parallélisme, la distance, la valeur et l'orientation du plan, la nature des figures.



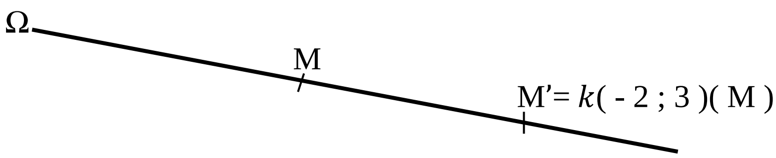
3) Homothétie

a) <u>Définition</u> :

On appelle homothétie de centre Ω et de rapport k l'application notée et déterminée par :
$k(\Omega, k)$ $\varphi \rightarrow \varphi$

$$M \mapsto M' / \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$$

<u>Exemple</u> : h(Ω, 3) ; M' = k(-2 ; 3)$^{(n)}$; $\overrightarrow{\Omega M'} = 3\overrightarrow{\Omega M}$



Pour $k \in]0 ; 1[$, M' $\in [\Omega ; M]$
Pour k >1, M' $\in [\Omega ; M]$
Pour k < 1, $\Omega' \in$ [M' M]
Pour k = 1 , M = M'

Alors h (Ω, 1) est l'application identique du plan

Si k = 0, M' = Ω alors h (Ω, 0) est l'application constante qui envoie tous les points sur Ω.

b) <u>Expression analytique</u>

Soit $\Omega\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$; M $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et M' $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ tel que h (Ω; k) (M) = M' <=> $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$

$$\begin{pmatrix}x_{M'}-x_\Omega\\y_{M'}-y_\Omega\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}x_M-x_\Omega\\y_M-y_\Omega\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x'-x_0\\y'-y_0\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x'-x_0=k(x-x_0)\\y'-y_0=k(y-y_0)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=kx-kx_0+x_0\\y'=ky-ky_0+y_0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x'=kx+x_0(1-k)\\y'=ky+y_0(1-k)\end{cases}$$

c) <u>Caractéristiques</u> :

Une homothétie est caractérisée par son centre Ω et son rapport k.

d) <u>Point invariant</u> :

Dans le plan une homothétie h(Ω, k) ne laisse invariant que son centre Ω.

e) <u>Quelques propriétés</u>:

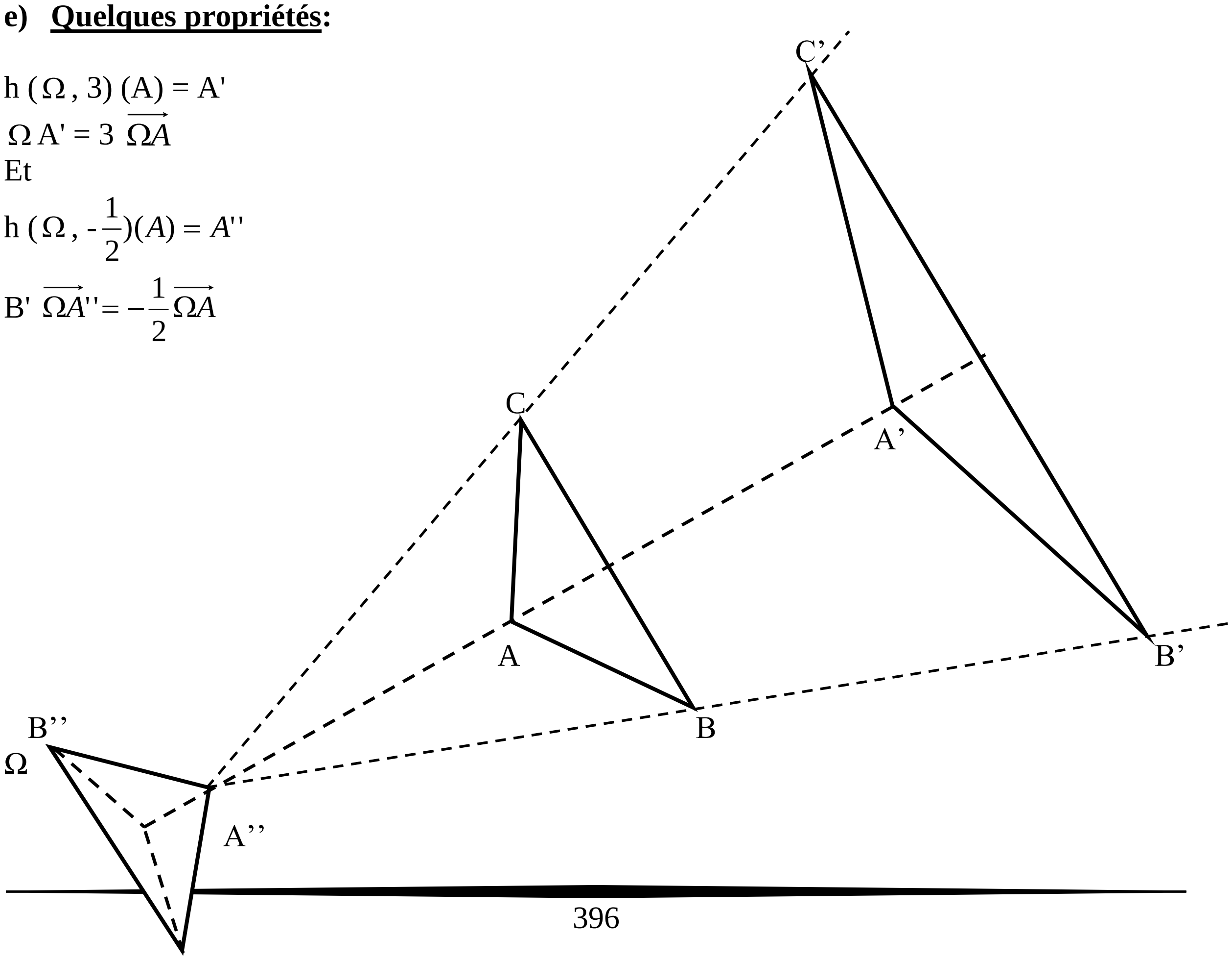
h (Ω, 3) (A) = A'

Ω A' = 3 $\overrightarrow{\Omega A}$

Et

h (Ω, -$\frac{1}{2}$)(A) = A''

B' $\overrightarrow{\Omega A''} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega A}$



C’’

L'homothétie conserve l'alignement, le parallélisme, l'orientation, la nature, des figures et multiplie les distances par $|k|$ donc ne conserve pas la distance.

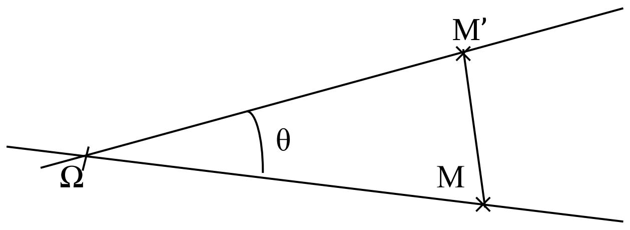
4) <u>Rotation :</u> r(Ω ; θ)

a-<u>Définition</u>: On appelle rotation r ($\Omega\,;\theta$) l'application notée et déterminée par :

r($\Omega\,;\theta$)(M) = M' <=> $\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M'}\ ;\ \overrightarrow{\Omega M}}\right) = \theta \end{cases}$

b-<u>Expression analytique :</u>

Considérons la rotation r (Ω ; θ) et le point M tel que r (Ω ; θ) (M) = M'



En rapportant le plan au repère orthonormé (o, $\vec{i}, \vec{j}$) et en notant $\Omega\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$; M $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et M' $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

on a : $\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \widehat{M\Omega M'} = \theta \end{cases}$

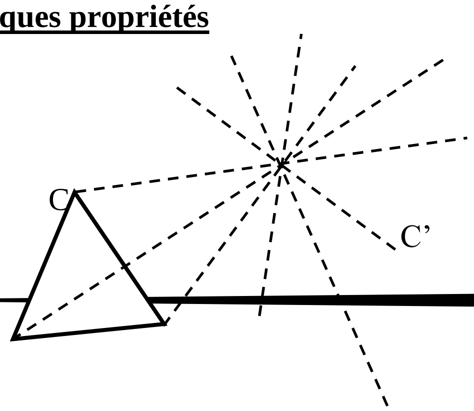
Le traitement de ces conditions aboutit au système

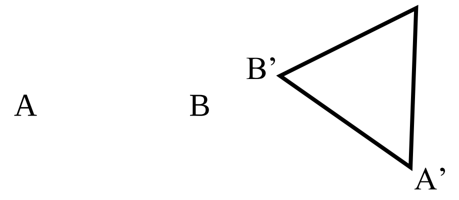
$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta - x_0\cos\theta - y_0\sin\theta + x_0 \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta + x_0\sin\theta - y_0\cos\theta + y_0 \end{cases}$$

c-<u>Caractéristique d'une rotation</u>

Une rotation est caractérisée par son centre Ω et son angle θ. Dans le plan le seul point invariant d’une rotation est son centre.

d-<u>Quelques propriétés</u>





Une rotation conserve l'alignement, la nature des figures l'orientation des angles et la distance.

5) Symétrie orthogonale

a) Définition :

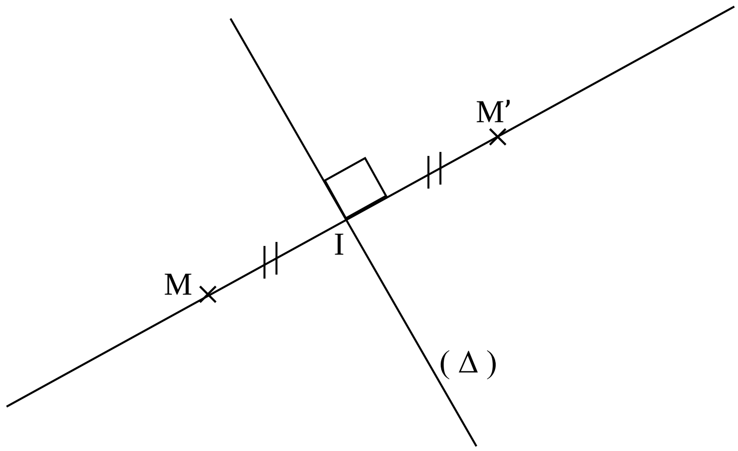
Une symétrie orthogonale d'axe (Δ) est toute application affine notée S/Δ et définie par :

$S/_{\Delta}$: P → P

$M \mapsto S/_{\Delta}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} MM' \perp \Delta \\ et\ I\ milieu\ [MM'] \in \Delta \end{cases}$

b) Expression analytique :

Considérons la symétrie orthogonale d'axe Δ noté S/Δ transformant le point M en M' avec (Δ) : $ax + by$ = C alors l'équation: $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ est dite équation normalisée de Δ



En rapportant le plan au repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$, il existe un unique angle θ tel que :

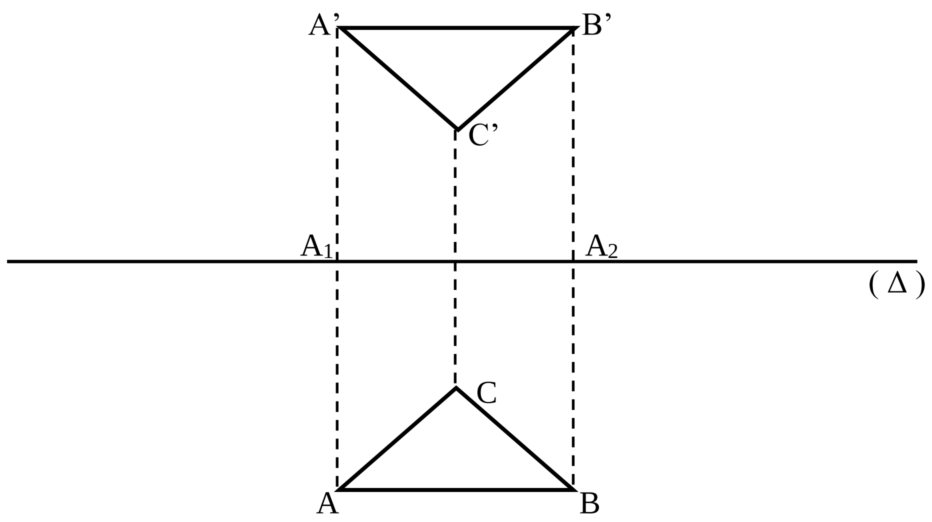
$$\theta = \begin{cases} Cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ Cos\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

Conditions aboutit au système $\begin{cases} x' = x\cos 2\theta + y\sin 2\theta - 2ab \\ y' = x\sin 2\theta - y\cos 2\theta - 2ac \end{cases}$

c) **Caractéristiques** :

Une symétrie orthogonale est caractérisée par son axe (Δ) et tout point situé sur cet axe reste invariant par la symétrie

d) **Quelques propriétés** :



Les symétries conservent l'alignement, la nature des figures, opposent les angles et conservent les distances.

Remarque : Une des caractéristiques de la symétrie orthogonale $s/_\Delta$ est : $s/_\Delta \circ s/_\Delta = \mathrm{Id}f$

B) LES APPLICATIONS AFFINES DANS L'ESPACE

L'extension de ces applications en dimension **III** fait l'objet d'une étude ultérieure. Cependant dans l'espace associé un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ tout point M$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est représenté comme l'indique les points ci-dessous A $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; B $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; C $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$; D $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

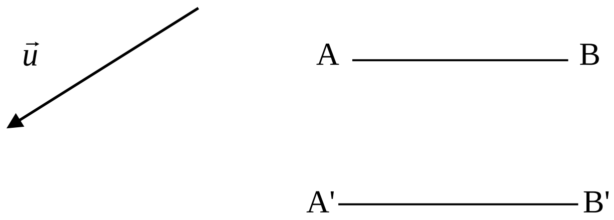
I- Isométrie et similitude plane :

1) Isométrie :

a-Définition :
Une isométrie plane et une transformation qui conserve la distance. En la notant i cela signifie que : Sii(A) = A'et$i$(B) = B' alors AB = A'B'.

Exemple :

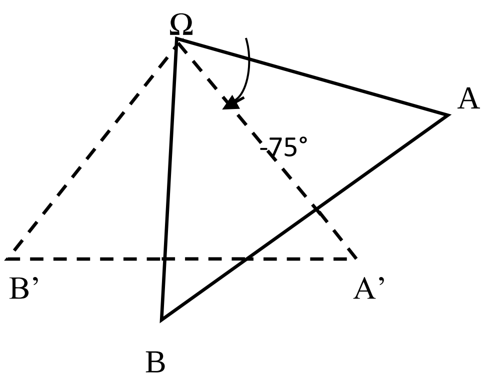
- la translation : soit $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$ fixé et A, B, A', B' les points tels que :
  A' = $t_{\vec{u}}$ (A) et B' = $t_{\vec{u}}$ (B)



On a bien AB = A'B' alors $t_{\vec{u}}$ est une isométrie plane

- **La rotation de centre Ω et d'angle θ.**

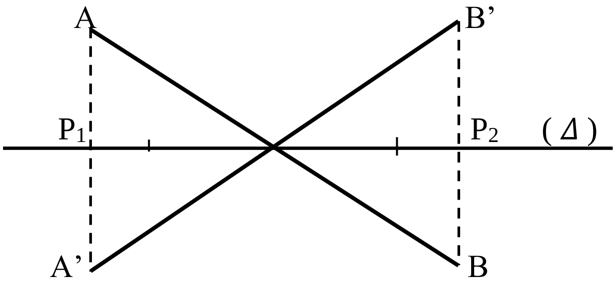
Soit $\theta = -75°$ les points A, B, A' et B' tels que r(A) = A', r(B) = B'



AB = A'B' alors r est une isométrie

- **La symétrie orthogonale** S/Δ

A' = $s_{/\Delta}$ (A) et B' = $s_{/\Delta}$ (B)



AB = A'B' donc $s_{/\Delta}$ est une isométrie

b-<u>Classification des isométries</u>

Les isométries se subdivisent en deux sous $-$ ensembles :

- les isométries positives notés $\boldsymbol{I}^{+}$dont l'expression analytique se présente sous la forme

$\vec{i}\,:\ P \rightarrow P$

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = i(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = -bx + ay + c' \end{cases} \quad avec\, a^2 + b^2 = 1$$

Ce sous ensemble regroupe les rotations et les translations

- Les isométries négatives notés $\boldsymbol{I}^{-}$ reconnues avec l'expression

$\vec{i}$: P $\rightarrow$ P

$$\mathrm{M}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = i(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = bx - ay + c' \end{cases} \quad avec - a^2 - b^2 = -(a^2 + b^2) = -1$$

Ce sous-ensemble regroupe les symétries orthogonales

c-<u> Propriétés des isométries</u>

Soit f une isométrie d'un espace affine $\mathcal{E}$.

P_1 : Si f possède deux points fixes distincts A et B alors tout point de la droite (AB) est un point fixe par f.

P_2 : Si f possède trois points fixes distincts A ; B et C non alignés alors tout point du plan (ABC) est un point fixe.

P_3 : Déplacements : translations – rotations d'axe Δ et d'angle Θ, ou les vissages.

P_4 : Antidéplacements : symétries orthogonales par rapport à un plan , composée d'un déplacement et d'une symétrie orthogonale par rapport à un plan.

Soit f une isométrie d'un plan affine $\mathcal{P}$.

P_5 : Déplacements : translations – rotations – symétries centrales.

P_6 : Antidéplacements : symétries orthogonales composées d'une symétrie orthogonale et d'une translation.
La composée de deux antidéplacements est un déplacement.

2) Similitude plane :

a-Définition

Une similitude est une transformation qui conserve le rapport de distance. En la notant s cela signifie que si S(A) = A'

S(B) = B' alors $\frac{AB}{A'B'} = k \; avec \, k \in R_*^*$

b-Propriétés :

- Pour les isométries on a établit l'égalité AB = A'B' <=> $\frac{AB}{A'B'} = 1$ donc toute isométrie est un cas particulier de similitude dont la constante est 1
- Toute similitude s est la composé commutative d'une homothétie et d'une isométrie, on écrit dont S = $\underset{\substack{\downarrow \\ hom}}{h} o \underset{\substack{\downarrow \\ iso}}{i}$ = ioh

c-Caractéristiques d'une similitude :

Comme les isométries se décomposent en 2 sous groupes (à savoir) et que chaque similitude est la composée d'une isométrie et d'une homothétie alors on distingue 2 sous groupes de similitude. Les similitudes directes (homothétie, isométrie positive) et les similitudes inverses ou indirectes (homothétie, isométrie négative)

- **<u>Cas de similitude directe</u>**

<u>Expression complexe</u>

Soit s une similitude directe du plan qui au point M d'affixe z associé le point M' d'affixe z' alors ces affixes vérifient l'égalité z' = az + b où a, b $\in \not\subset$
S est caractérisé par

- son rapport k = $|a|$
- son angle θ = arg(a)
- son centre Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$ avec a ≠ 1
- Ω est invariant pour a ≠ 1

<u>Expression exponentielle</u>

Considérons la similitude directe S : z' = az + b (1)
Pour le cas le z' = ω on a ω = aω + b (2)
Alors (1) – (2) Z' – ω = a(z$-\omega$) or a = $ke^{i\theta} = |a|e^{i\theta}$ alors z' – ω = $|a|e^{i\theta}(z-\omega)$

<u>Expression analytique</u>

Notons $z' = x' + iy'$ et $z = x + iy$

Alors $z' = az + b <=> x' + iy' = a\,(x + iy) + b$

<=> $x' + iy' = ax + ai\,y + b$ = $\begin{cases} x' = ax + b \\ y' = ay \end{cases}$

- **<u>Cas de Similitude indirecte ou inverse</u> :**

<u>Expression complexe</u>

Considérons la similitude inverse S qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' alors ces affixes vérifient l'égalité z' = a$\bar{z}$ + b où a, b $\in \not\subset$
Dans ce cas S est caractérisé par :

- son rapport k = $|a|$

- son axe $(\Delta) : y = px + q$
- son centre Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b + a\bar{b}}{1 - a\bar{a}}$

Expression analytique

$z' = x' + iy'$; $\bar{z} = x - iy$

⇨ $x' + iy' = a(x - iy) + b$

⇨ $x' + iy' = ax - aiy + b$ => $\begin{cases} x' = ax + b \\ y' = -ay \end{cases}$

Remarque :

Dans le cas où $\omega \in (\Delta)$; on observe aucun point invariant et la similitude est dite vissage.

Retenons

Soit f la transformation : $z' = az + b$

- $si\ a = 1$, alors f est une translation de vecteur $\vec{u}$ et d'affixe b.
- si $a = -1$, alors f est la symétrie centrale de centre Ω d'affixe $w = \frac{1}{2}$b.
- $si\ a \in \mathbb{R}^* - \{-1 ; 1\}$, alors f est une homothétie de rapport $k = |a|$ et de centre Ω d'affixe $w = \dfrac{b}{1 - a}$.
- $si\ a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| = 1$ $alors\ f$ est une rotation d'angle $\alpha = \arg(a)$ et de centre Ω d'affixe $w = \dfrac{b}{1 - a}$.
- $si\ a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ et $|a| \neq 1$ $alors\ f$ est une similitude directe de rapport $k = |a|$, d'angle $\alpha = \arg(a)$ et de centre Ω d'affixe $w = \dfrac{b}{1 - a}$.

Soit f la transformation : $z' = a\bar{z} + b$

- Si $|a| = 1$, alors f est une symétrie orthogonale d'axe l'ensemble des solutions de $z' = z$.
- Si $|a| \neq 1 alors\ f$ est une similitude indirecte de rapport $k = |a|$, d'angle $\alpha = \arg(a)$, $d'\ axe$ $(\Delta) : y = px + q$ et de centre Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b + a\bar{b}}{1 - a\bar{a}}$

Composée des transformations

- La composée de deux translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est une translation $\vec{u}+\vec{v}$.
- La composée de deux homothéties $h_1(\Omega\ ;\ k_1)$ et $h_2(\Omega\ ;\ k_2)$ est une homthétie $h(\Omega\ ;\ k_1 \bullet k_2)$. $Avec\ k_1 \neq k_2$.
- La composée de deux homothéties $h_1(\Omega_1\ ;\ k_1)$ et $h_2(\Omega_2\ ;\ k_2)$ est :
  - Une homothétie $h(\Omega\ ;\ k_1 \bullet k_2)$ si $k_1 \bullet k_2 \neq 1$.
  - Une translation de vecteur $\vec{u}$ si $k_1 \bullet k_2 = 1$.
- La composée d'une translation de vecteur $\vec{u}$ et d'une homothétie $h(\Omega\ ;\ k)$ est :
  - Une translation si $k = 1$.
  - Une homothétie si $\vec{u} = \vec{0}$.
  - Une homothétie si $k \neq 1\ et\ \vec{u} = \vec{0}$.
- La composée d'une homothétie et d'une isométrie est une similitude.
- La composée d'une homothétie et d'une symétrie orthogonale est une similitude indirecte.
- La composée de deux antidéplacements est un déplacement.
- La composée de deux déplacements est un déplacement.
- La composée de d'un antidéplacement et un déplacement est un antidéplacement.
- La composée de deux rotations r et r' d'angles respectifs α et α' est :
  - Une rotation d'angle α + α' si α + α'≠ 0
  - Une translation α + α'= 0
- La composée d'une rotation et d'une translation est une symétrie orthogonale.

Expressions analytiques des transformations

- **Expression analytique d'une translation de vecteur translateur $\vec{u}\binom{a}{b}$**

Si $M\binom{x}{y}$ **et** $M'\binom{x'}{y'}$ sont deux points quelconques du plan tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ < = >

$Z' - Z = \binom{a}{b}$, alors l'expression analytique d'une translation est : $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$.

- **Expression analytique d'une homothétie de rapport k et de centre $\Omega\binom{x_0}{y_0}$**

Si $M\binom{x}{y}$ **et** $M'\binom{x'}{y'}$ sont deux points quelconques du plan tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$ < = >

$Z' - \omega = k(Z - \omega)$, alors l'expression analytique d'une homothétie est :

$$\begin{cases} x' = kx + x_0(1-k) \\ y' = ky + y_0(1-k) \end{cases}.$$

- **Expression analytique d'une rotation d'angle Θ et de centre $\Omega\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$**

Si $\boldsymbol{M}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **et** $\boldsymbol{M'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont deux points quelconques du plan tel que,< = > $\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \widehat{M\Omega M'} = \theta \end{cases}$

$\boldsymbol{Z' - \omega = e^{i\theta}(Z - \omega)}$, alors l'expression analytique d'une rotation est :

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta - x_0\cos\theta - y_0\sin\theta + x_0 \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta + x_0\sin\theta - y_0\cos\theta + y_0 \end{cases}$$

- **Expression analytique d'une symétrie centrale de centre $\Omega\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$**

Si $\boldsymbol{M}\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$ **et** $\boldsymbol{M'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont deux points quelconques du plan tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{MM'}} = \boldsymbol{2\overrightarrow{O\Omega}}$ alors l'expression analytique d'une homothétie est : $\begin{cases} x' = -x + 2x_0 \\ y' = -y + 2y_0 \end{cases}$.

- **Expression analytique d'une symétrie orthogonale d'axe (Δ)** : $\boldsymbol{y = ax + b}$

Si $\boldsymbol{M}\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$ **et** $\boldsymbol{M'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont deux points quelconques du plan tel que si M $\mapsto S/_{\Delta}$ (M) = M' et

$\begin{cases} MM' \perp \Delta \\ milieu \\ [MM'] \in \Delta \end{cases}$ alors l'expression analytique d'une symétrie orthogonale est :

$$\begin{cases} x' = x\cos 2\theta + y\sin 2\theta - 2ab \\ y' = x\sin 2\theta - y\cos 2\theta - 2ac \end{cases}$$

- **Expression analytique d'une similitude directe**

Si $\boldsymbol{M}\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$ **et** $\boldsymbol{M'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont deux points quelconques du plan tel que

$\boldsymbol{z' = az + b \ avec\ a \ \ et \ \ b} \in \mathbb{C}^*$, alors l'expression analytique d'une similitude directe

est : $\begin{cases} x' = ax + b \\ y' = ay \end{cases}$.

- **Expression analytique d'une similitude indirecte**

Si $\boldsymbol{M}\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$ **et** $\boldsymbol{M'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont deux points quelconques du plan tel que

$\boldsymbol{z' = a\bar{z} + b \ avec\ a \ \ et \ \ b} \in \mathbb{C}^*$,

alors l'expression analytique d'une similitude indirecte est : $\begin{cases} x' = ax + b \\ y' = -ay \end{cases}$

- **Expression analytique d'une isométrie**

  - **Isométrie positive ou déplacement**

$$\begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = bx + ay + c' \end{cases}, avec\ \ a^2 + b^2 = 1 \quad \text{et} \quad det(\, Matf\,) = 1$$

<u>NB :</u> tout déplacement (**isométrie positive**) est une similitude directe de rapport $k = 1$ et les déplacements sont des transformations qui conservent l'angle orienté (Rotation ; translation ; symétrie centrale)

Classification des déplacements à partir de l'ensemble des points invariants

Ensemble des points invariants par f	**Nature de la transformation f**
Plan P	f est l'identité du plan
Ensemble vide $\emptyset$	f est la translation du vecteur non nul
Singleton {A}	f est la rotation de centre A

  - **Isométrie négative ou antidéplacement**

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = bx - ay + c' \end{cases}, avec - a^2 - b^2 = -1 \quad \text{et} \quad det(\, Matf\,) = -1$$

<u>NB :</u> tout antidéplacement (isométrie **négative**) est une similitude indirecte de rapport $k = 1$ et les antidéplacements sont des transformations qui conservent l'angle orienté (symétrie orthogonale ; reflextion ; symétrie glissée)

Classification des antidéplacements à partir de l'ensemble des points invariants

Ensemble des points invariants par f	**Nature de la transformation f**
Droite (D)	f est la symétrie orthogonale par rapport à (D)
Ensemble vide $\emptyset$	f est la symétrie glissée

- **Expression analytique d'une réflexion d'axe**
  - Par rapport à la droite d'équation $y = x$, on a : $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$
  - Par rapport à la droite d'équation $y = 0$, on a : $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$
  - Par rapport à la droite d'équation $x = 0$, on a : $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$

- **Déterminant – Bijection – Projection – Points invariants –Involution d'une transformation$f$**

- **Déterminant :**

Soit f l'application affine tel qu'on ait :

$$f\ :\ \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

Soit mat(f) la matrice A de f tel que mat(f) = A = $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$

Soit det(A) le déterminant de la matrice A tel qu'on ait : det(A) = $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$

- **Bijection**

f est une bijection ou réalise une bijection ssi :

det(A) = $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0$

N.B : On utilise la même méthode pour montrer que trois points A, B, C forment un repère du plan c'est-à-dire det ($\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$) ≠ 0

- **Projection**

f est une projection si et seulement si, il existe trois points :

M$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; M'$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$; M"$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ $\in$ P tel que : f(M) = f(M') = M"

C'est-à-dire $\begin{cases} x'' = ax' + by' + c \\ y'' = a'x' + b'y' + c' \end{cases} \Leftrightarrow\ fof\ =\ f$

- **Points invariants**

f admet un point invariant si et seulement si, il existe deux points

M$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; M'$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ $\in$ P tel que f(M) = M' c'est-à-dire $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = ax + by + c \\ y = a'x + b'y + c' \end{cases}$

- **Involution**

f est involutive ou réalise une involution si et seulement si : La matrice au carrée de f est égale à la matrice identité c'est-à-dire Mat(A^2) = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C) Les matrices

I-Définition :

Une matrice est un ensemble de nombres disposés en lignes et en colonnes sous forme de tableau rectangulaire. (Les lignes sont horizontales et les colonnes sont verticales).
Une matrice comportant m lignes et p colonnes est une matrice de dimension $m \times p$.
Chaque élément d'une matrice est identifiée par la position qu'il occupe dans le tableau chaque élément se situe à l'intersection d'une ligne et d'une colonne ; la position est donnée en indiquant le numéro de la ligne suivi du numéro de la colonne. Ainsi, l'élément a_{ij} d'une matrice occupe l'intersection de la ligne i et de la colonne j.

Une matrice A_{mxp} est un tableau comme suite :

$$A_{m \times p} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1j} \dots a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2j} \dots a_{2p} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} \dots a_{ij} \dots a_{ip} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mj} \dots a_{mp} \end{pmatrix}$$

Notation compact: A = $(a_{i,j})_{(1 \le i \le m \; ; 1 \le j \le p)}$

II-Matrices particulières

Soient $m, p \in \mathbb{N}^*$ et soit A = $(a_{ij})_{(1 \le i \le m \, ; 1 \le i \le p)}$ une matrice de type m, p à coefficients réels.

1) Si p = 1 on dit que A est une matrice colonne ;
2) Si m = 1 on dit que a est une matrice ligne ;
3) Si tous les a_{ij} sont nuls, on dit que A est la matrice nulle. On la note $O_{m \times p}$;
4) Si $m = p$ la matrice A est dite carrée d'ordre m. Les scalaires a_{11}, a_{22},……, a_{mm} constituent alors ce que l'on appelle la diagonale principale de A.
5) Si A est une matrice et si tous les coefficients situés hors de la diagonale principale sont nuls. On dit que A est une matrice diagonale ;
6) Si A est carrée et si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tous i , j on dit que A est matrice symétrique.

7) La matrice diagonale dont tous les coefficients situés sur la diagonale principale valent 1 est notée 1_p et est appelée matrice unité d'ordre p.
8) Si A est une matrice et si tous les coefficients situés strictement au – dessus (respectivement en dessous) de la diagonale principale sont nuls, on dit que A est triangulaire inférieure (respectivement triangulaire supérieure).

III- Relations entre les matrices

1) Définition:
Deux matrices réelles de mêmes dimensions sont égales si les éléments qui occupent la même position dans l'une et l'autre matrice sont égaux.

Soient deux matrices de même dimension : A = $(a_{ij})_{m\times p}, B = (b_{ij})_{m\times p}$

A= B ⇔ $\forall i, j, \quad a_{ij} = b_{ij}$

2) Opérations sur les matrices :

Nous définissons quatre opérations sur les matrices : une addition de deux matrices une multiplication d'une matrice par un scalaire, une multiplication de deux matrices et enfin, la transposition d'une matrice.

a)Addition de deux matrices :
L'opération addition de deux matrices crée une nouvelle matrice appelée somme. Cette opération est définie sur les matrices de même dimension. Chaque élément de la matrice somme A + B est la somme des éléments de même position des matrices A et B.

A = $(a_{ij})_{m\times p}, B = (b_{ij})_{m\times p}$ A + B = $(S_{ij})_{m\times p}$ *où* S_{ij} = $a_{ij} + b_{ij}$

Exemple : A $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 15 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ *la somme* $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 18 & 1 \end{pmatrix}$

Soit $M_{m\times p}$ l'ensemble des matrices réelles de dimension m×p. L'addition de deux matrices possède les propriétés suivantes : fermeture, associative, commutative, neutre (matrice nulle), inverse A où – A = $(a_{ij})_{m\times p}$

b) Multiplication par un scalaire :
L'opération multiplication par un scalaire est une opération qui crée une nouvelle matrice en utilisant, par exemple, une matrice A et un scalaire k. Chaque élément de la matrice ka est l'élément de même position de la matrice A multipliée par le scalaire k.

Soit un scalaire k et une matrice réelle A = $(a_{ij})_{m\times p}$ $\quad kA = (p_{ij})_{m\times p}$ où $k_{ij} = k a_{ij}$

Exemple : Si le scalaire est 2 et la matrice est

A= $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ alors la matrice produit est (-2) A = $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$

La multiplication d'une matrice par un scalaire possède les propriétés suivantes : fermeture, associative, commutative, neutre (1) distributivité sur une somme de matrices, distributivité sur une somme de scalaires.

Notez que : Pour l'addition et la multiplication par un scalaire l'ensemble M_{mp} des matrices à m lignes, p colonnes, à coefficients dans le corps K est un K espace vectoriel.

c)<u>Multiplication de deux matrices</u>:
L'opération multiplication de deux matrices est une opération qui crée une nouvelle matrice appelée produit; par exemple, une matrice AB est le produit de A et B. L'élément de la matrice AB occupant la position ij est obtenu en utilisant la ligne i de A et la colonne j de B, de la façon suivante : (1^{er} élément de la ligne i de A fois 1^{er} élément de la colonne j de B) + (2è élément de la ligne i de A fois 2è élément de la colonne j de B) +… + (dernier élément de la ligne i de A fois dernier élément de la colonne j de B). La multiplication de deux matrices A et B est possible si et seulement si le nombre de colonne de A est égal au nombre de lignes de B.

Soient deux matrices A = $(a_{ij})_{m\times p}, B = (b_{ij})_{p\times p} \;\; AB = (c_{ij})_{m\times p}$ où

$$c_{ij} = \sum a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ip}b_{pj}$$

<u>Exemple</u> : Soient les matrices suivantes :

A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; B = $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} -3 & -15 & -5 \\ 6 & 6 & 17 \end{pmatrix}$

La multiplication de deux matrices n'est pas une opération commutative ; elle possède les propriétés de fermeture, associative, neutre I, distributivité sur une somme de matrices.

<u>Exercices d'applications</u>

<u>Exercice 1</u>:

Soient les matrices suivantes

A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$; B = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Calculer : A + B ; A×B ; B×A

2. Calculer : $A^2 + B^2 + 2AB$ et $(A + B)^2$

Puis conclure.

Exercice 2 :

Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \; ; B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Calculer A + B ; A x B ; B x A
b) Calculer $(A + B)^2$

Puis conclure

d) Transposition d'une matrice :
La transposition d'une matrice est une opération qui crée une nouvelle matrice de même dimension. L'élément de la matrice transposée située sur la ième ligne et la $j^{ème}$ colonne est l'élément situé sur la $j^{ème}$ ligne et la ième colonne de A. Si une matrice A est symétrique alors elle est égale à sa transposée. On dit que A est antisymétrique si A = - A.

Ainsi si A $=(a_{ij})$, on appelle transposé de A, la matrice notée $\boldsymbol{t_A}$ tel que : $\boldsymbol{t_A = (a_{ji})}$.

Exemple :

Soit la matrice A définie par :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, déterminer la transposée de A.

Solution

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} => \boldsymbol{t_A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

e) Comatrice d'une matrice :

Soit la matrice réelle définie par : $A_{m \times p} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1j} \dots a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2j} \dots a_{2p} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} \dots a_{ij} \dots a_{ip} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mj} \dots a_{mp} \end{pmatrix}$

On appelle comatrice de A, la matrice obtenue en calculant les différentes valeurs de a_{ij}.
On la note : $\boldsymbol{C_A}$ **tel que :** $\boldsymbol{C_A} = (-\mathbf{1})^{i+j}[\mathbf{det}\, \boldsymbol{a_{ij}}.]$

f) Déterminant et inverse d'une matrice :

À chaque matrice carrée *A* est associé un nombre appelé déterminant de *A* et noté det A.

Une matrice carrée A est dite inversible s'il existe une unique matrice carrée B telle que AB = BA = I. La matrice B est alors l'inverse de A et notée A^{-1}. On démontre qu'une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Ainsi si detA $\neq$ 0, alors $\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{detA} \bullet t_{C_A}}$(où $\boldsymbol{t_{C_A}}$ est la transposée de la comatrice de A).

Exercices d'application

Exercice 1 :

Soit la matrice A tel que A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.Calculer A^{-1}

Exercice 2 :

Soit la matrice B tel que B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.Calculer B^{-1}

Solution 1 :

Soit la matrice A tel que A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.Calculons A^{-1}

$A^{-1} = \frac{1}{detA} \bullet t_{C_A}$

detA = $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$ = (1)(5) – (3)(2) = 5 – 6 = – 1

$detA \neq 0$ Alors A est inversible.

Calculons la comatrice de A.

Posons $\boldsymbol{C_A} = \begin{pmatrix} A_{11} A_{12} \\ A_{21} A_{22} \end{pmatrix}$

Calculons ainsi : A_{11} ; A_{12} ; A_{21} ; A_{22}

$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}(5) = (-1)^{2}(5) = 5$

$A_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}(3) = (-1)^{3}(3) = -3$

$A_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}(2) = (-1)^{3}(2) = -2$

$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2}(1) = (-1)^{4}(1) = 1$

Or $\boldsymbol{C_A} = \begin{pmatrix} A_{11} A_{12} \\ A_{21} A_{22} \end{pmatrix} => \boldsymbol{C_A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Et $\boldsymbol{t_{C_A}} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

D'où $A^{-1} = \frac{1}{detA} \bullet t_{C_A} => A^{-1} = \frac{1}{-1} \bullet \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$= > A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

Solution 2 :

Soit la matrice B tel que B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.Calculons B^{-1}

$B^{-1} = \frac{1}{detB} \bullet t_{C_B}$

detB = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

Appliquons la méthode de **Sarius**pour le calcul de detB

detB = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{matrix}$ = (-3 + 4 – 2) – (-6 – 2 + 2) = 5

$detB \neq 0$ Alors B est inversible.

Calculons la comatrice de A.

Posons $\boldsymbol{C_B}$= $\begin{pmatrix} A_{11}A_{12}A_{13} \\ A_{21}A_{22}A_{23} \\ A_{31}A_{32}A_{33} \end{pmatrix}$

Calculons ainsi : A_{11} ; A_{12} ; A_{13} ; A_{21} A_{22} ; A_{23} ; A_{31} ; A_{32} ; A_{33}

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}(-3+2) = (-1)^{2}(-1) = -1$$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}(1-2) = (-1)^{3}(-1) = 1$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}(2-6) = (-1)^{4}(-4) = -4$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}(-2-2) = (-1)^{3}(-4) = 4$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2}(-1+2) = (-1)^{4}(1) = 1$$

$$A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3}(-2-4) = (-1)^{5}(-6) = 6$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}(2+3) = (-1)^{4}(5) = 5$$

$$A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2}(1-1) = (-1)^{5}(0) = 0$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3}(3+2) = (-1)^{6}(5) = 5$$

$$\text{Or } \boldsymbol{C_B} = \begin{pmatrix} A_{11}A_{12}A_{13} \\ A_{21}A_{22}A_{23} \\ A_{31}A_{32}A_{33} \end{pmatrix} => \boldsymbol{C_B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 4 & 1 & 6 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Et } \boldsymbol{t_{C_B}} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{D'où } B^{-1} = \frac{1}{detB} \bullet t_{C_B} => B^{-1} = \frac{1}{5} \bullet \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & 5 \end{pmatrix} .= \begin{pmatrix} \frac{-14}{5\ 5} & 1 \\ \frac{11}{55} & 0 \\ \frac{-46}{5\ 5} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$=> B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-14}{5\ 5} & 1 \\ \frac{11}{55} & 0 \\ \frac{-46}{5\ 5} & 1 \end{pmatrix}.$$

D) <u>Applications Affines, matrice et déterminant</u>

- Soit f l'application affine tel qu'on ait :

$$f : \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

- Soit mat(f) la matrice A de f tel qu'on ait :

$$\text{Mat(f)} = A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$$

- Soit det(A) le déterminant de la matrice A tel qu'on ait :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

I- Bijection :

f est une bijection ou réalise une bijection ssi :

det(A) = $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0$

N.B : On utilise la même méthode pour montrer que trois points A, B, C forment un repère du plan c'est-à-dire det ($\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$) $\neq 0$

II- Projection :

f est une projection si et seulement si, il existe trois points :

M$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; M'$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$; M"$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ $\in$ P tel que : $f(M) = f(M') = M''$

C'est-à-dire $\begin{cases} x'' = ax' + by' + c \\ y'' = a'x' + b'y' + c' \end{cases} \Leftrightarrow fof = f$

III- Point invariant :

f admet un point invariant si et seulement si, il existe deux points

M$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; M'$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ $\in$ P tel que f(M) = M' c'est-à-dire $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = ax + by + c \\ y = a'x + b'y + c' \end{cases}$

IV- Involution :

f est involutive ou réalise une involution ssi : La matrice carrée associée à f est égale à la matrice identique c'est-à-dire Mat(A^2) = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

<=> $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ x $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

EXERCICES

Exercice 1 : Soit A(3, 0) et B(1, - 1) deux points du repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$

a) Montrer qu'il existe une application affine telle que :

$$\begin{cases} f(o) = B \\ f(B) = B \\ f(A) = A \end{cases}$$

b) Calculer les coordonnées (x', y') de $f(M) = M'$ en fonction des coordonnées (x, y) de M.

c) Calculer fof et déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'application f.

Exercice 2 : Déterminer la traduction complexe de la transformation f dans chacun des cas :

1) f est la transformation qui transforme A d'affixe $-1+i$ en B d'affixe $-2+3i$
2) f est l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ qui transforme A d'affixe $-1+i$ en B d'affixe $-2+3i$
3) f est la rotation d'angle $\frac{3\prod}{4}$ qui transforme A d'affixe $-1+i$ en B d'affixe $-2+i$

Exercice 3 : Dans le plan $(o, \vec{i}, \vec{j})$ on considère les points A $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; B $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; C $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$; A' $\begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$; B' $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$; C' $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ soit f l'application affine du plan tel que :

$f(A) = A'$; $f(B) = B'$; $f(C) = C'$

3) Montrer que f est bijective
4) Déterminer l'expression analytique de f.

Exercice 4 : Le plan est muni du repère $(o,\vec{i},\vec{j})$.
Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M de coordonnées (x,y) associe le point M' de coordonnées (x',y') tel que :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{3}(4x - 2y - 6) \\ y' = \dfrac{1}{3}(2x - y - 12) \end{cases}$$

1) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ à une direction fixe que l'on précisera.
2) Démontrer que $fof\ =\ f$
3) a) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
   b) En déduire la nature des éléments caractéristiques.

Exercice 5 : On considère dans le plan $(o,\vec{i},\vec{j})$ les points M $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{13}(5x - 12y + 24) \\ y' = \dfrac{1}{13}(-12x - 5y + 36) \end{cases}$$

1) Démontrer que fof = Id
2) Démontrer que l'ensemble des points invariants par f est une droite (D) que l'on précisera.
3) Soit M un point du plan et M' son image par f.

a) Démonter que le milieu de [MM'] appartient à la droite (D).
b) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ à une direction fixe orthogonale à celle de (D).
c) En déduire les éléments caractéristiques de f.

<u>Exercice 6</u> :

Le plan euclidien P est rapporté à un repère orthonormé (o, $\vec{i}, \vec{j}$) . Etant donné un nombre réel a, on appelle T l'application de P dans P qui a tout point M $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ fait correspondre le point M' $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que : $\begin{cases} x' = (a-1)x + 2y \\ y' = ax + y \end{cases}$

1) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles Ta est bijective.
2) Déterminer l'ensemble des points invariants par Ta.
3) Déterminer a pour que Ta soit involutive et caractériser géométriquement l'application Ta correspondant à cette valeur de a obtenue.

<u>Exercice 7</u> :

On considère l'application g de E dans E qui à tout point M $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe le point M' $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que : $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -y + 2 \end{cases}$

1) Montrer que g est affine, sans point invariant et que son endomorphisme associe φ est involutif.
2) a) Démontrer que gog est une translation.

   b) soit $\vec{u}$ le vecteur de cette translation et t la translation de vecteur $\frac{\vec{u}}{2}$.

Préciser la nature de l'application S telle que g = toS.

Prouver que toS = Sot.

3) Montrer que l'image (C') de la courbe (C_{-1}) par g a pour équation $y = -x + 2 + lnx$.
4) Construire (C') dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

<u>NB</u> : (C') Coupe l'axe des abscisses aux points : $x_o = 0{,}16$ et $x_1 = 3{,}14$.

<u>Exercice 8</u> : Soit l'application affine f.

f: P→P ; M $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ → M' $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que : $\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} \end{cases}$

a) Vérifier que f est bijective.
b) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
c) On désigne par Z et Z' les affixes respectives des points M et M'. Exprimer Z' en fonction de Z.
d) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

Exercice 9 :

Dans le plan P, on considère la translation $t_{\vec{u}}$ définie par $t_{\vec{u}}(A) = B$ où A $\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$.

a) Caractériser cette translation.

b) Déterminer le point C' image du point C $\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$ par $t_{\vec{u}}$

Exercice 10 :

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé$(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$.

Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives $a = 1 + i$ et $b = -4 - i$

Soit T la transformation du plan P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$.

b- Exprimer$(x'\,;\,y')$ en fonction de $(x\,;\,y)$ puis z' en fonction de z.

c- Montrer que T admet un seul point invariant Ω dont on donnera l'affixe. En déduire que T est un homothétie dont on précisera le centre et la rapport.

Statistique

I- Vocabulaire de la statistique

Evaluation diagnostique

Activité

Voici une liste de notes attribuées à 30 élèves d'une terminale :

- 13 personnes on une note comprise entre 0 et 3.
- 9 personnes on une note comprise entre 3 et 8.
- 4 personnes on une note comprise entre 8 et 10.
- 3 personnes on une note comprise entre 10 et 15.
- 2 personnes on une note comprise entre 15 et 18.

Utilise le tableau ci-dessous pour Classer ses notes dans des intervalles bien déterminés.

Nombre d'élève	Intervalles de notes attribuées

Solution

Nombre d'élève	Intervalles de notes attribuées
13	$[\,0\;;\;3\,[$
9	$[\,3\;;\;8\,[$
4	$[\,8\;;10\,[$
3	$[\,10\;;15\,[$
1	$[\,15;18\,[$

Le faite que tu est classé ses notes donne la notion de statistique.

1- Définition :

D_1 : La statistique est un ensemble de données chiffrés ou non.
D_2 : La statistique est la branche de la mathématique qui consiste à regrouper les données ; à les analyser et à tirer des conclusions.

Comme toutes les sciences, la statistique fait appel à un langage spécialisé.

2- **Langage statistique :**

a- **Notion de population et d'individu :**

L'ensemble sur lequel porte l'étude statistique est appelé la population, un élément de cet ensemble est l'individu.

N.B : En statistique, les mots (population – individu) peuvent désigner des êtres ou des objets animés ou inanimés.

b- **Caractères et modalités :**

Dans l'étude de statistique d'une population, l'attention est portée généralement sur un événement commun à tous les membres de la population : c'est le caractère.

Exemple : Le caractère situation matrimoniale à 4 modalités : marié, divorcé, célibataire, veuf.

Il existe deux sortes de caractères : **Les caractères qualitatifs et les caractères quantitatifs.**

- **Caractères qualitatifs :**

Un caractère est dit qualitatif si ses différentes modalités ne sont pas mesurables.

Exemple : La situation matrimoniale ; le sexe, la profession, la nationalité….

- **Caractères quantitatifs :**

Un caractère est dit quantitatif si ses différentes modalités sont mesurables c'est à dire des nombres.

Exemple : l'âge, la taille, le poids…….

Un caractère quantitatif peut être discret (discontinue) ou (continue)
Un caractère quantitatif est dit discret si ses valeurs prises sont isolées.
Exemple : le nombre de frère de chaque élève, le nombre de femme…..

Un caractère quantitatif est dit continu si ses valeurs prises sont en nombre infini dans un intervalle.

Exemple : la température du corps, la taille, l'âge…;

c- **Echantillon :**

L'étude d'un caractère sur une grande population est parfois sensible et coûteux.

Exemple : recensement de population, enquête etc… c'est pourquoi on étudie ce caractère sur un petit groupe de cette membre de cette population : c'est l'échantillon.

II- Présentation des données statistiques :

Plusieurs méthodes sont utilisées par les organismes de la statistique pour la collecte des données statistiques. Les données ayant été recueillis et est nécessaire dans une première phase de les grouper, de les présenter sous forme de tableau et de représentation graphique.

1- Cas d'un caractère qualitatif :

a- Tableau statistique :

Exemple : l'étude du caractère situation matrimoniale sur 10 élèves d'une classe a donné le résultat suivant :

A : marié
B : Divorcé
C : Célibataire
D : Célibataire
E : Marié
F : Veuf
G : Divorcé
H : Célibataire
I : Célibataire
J : Marié

Modalité (x_i)	Nombre d'élément (n_i)
Marié	3
Célibataire	4
Divorcé	2
Veuf	1
Total	10

Le caractère situation matrimoniale à 4 modalités; on dresse un tableau à deux colonnes.

- 1ère Colonne contient la nomenclature des différentes modalités. On la note x_i
- La 2ème Colonne contient le nombre d'élément de chaque modalité. On la note n_i.

n_i est l'effectif relatif de la modalité xi. C'est le nombre d'élément présentant la modalité x_i.

Exemple : $n_1 = 3$, $n_2 = 4$, $n_3 = 2$, $n_4 = 1$ (d'après le tableau).
Alors $N = \sum n_i = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 10$
N est appelé somme des ni.
A ce tableau, on peut ajouter une 3ème colonne ; celle des **fréquences notés f_i** tel que **f_i =**
$\frac{n_i}{N} = \frac{effectif\ relatif}{effectif\ total}$

Modalités	**Nombre d'éléments**	**Fréquences**
(x_i)	(n_i)	(f_i)
Marié	3	3/10 = 0,3
Célibataire	4	4/10 = 0,4

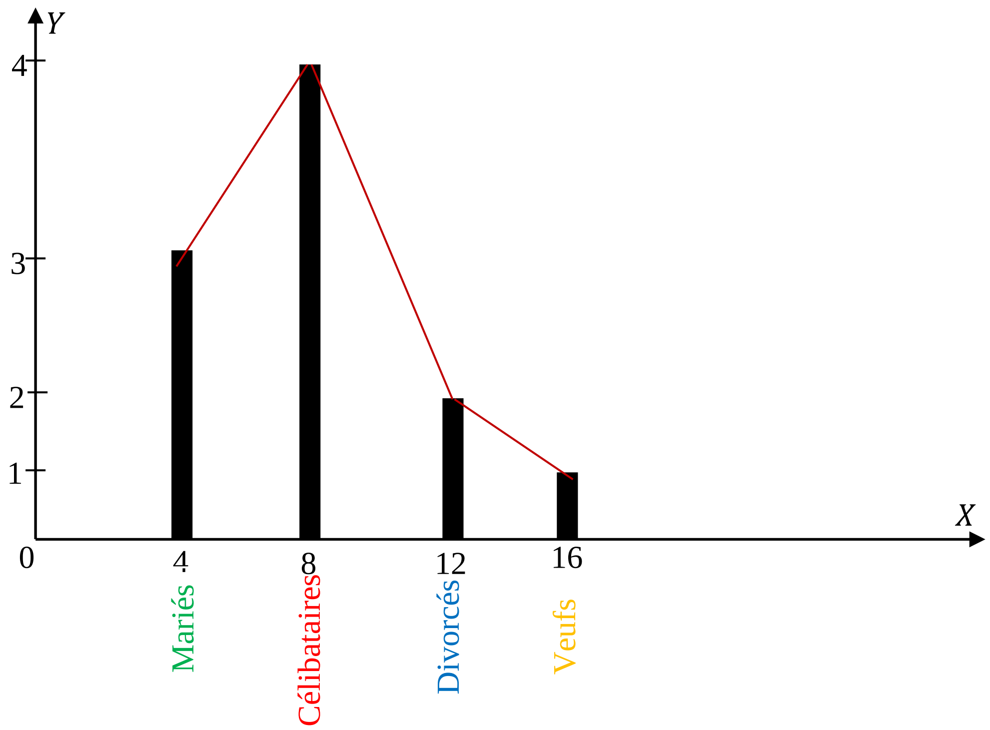
Divorcé	2	2/10 = 0,2
Veuf	1	1/10 = 0,1
Total	10	10/10 = 1

NB : la somme des fréquences est toujours égale à 1 : $\sum f_i = 1$

b- Représentation graphique :

Diagramme en bâton :

Dans un repère orthogonal, on place sur l'axe des abscisses les x_i (modalités) ; et sur l'axe des ordonnées les effectifs n_i ou les fréquences f_i.
Pour construire le diagramme en bâton des effectifs, on place les points $A_i(x_i \ ; \ 0)$ et $B_i(x_i \ ; \ n_i)$ et on construit en trait plein les segments$[A_iB_i]$.



N.B :
Si les fréquences f_i étaient en ordonnée, le digramme est appelé diagramme en bâton des fréquences. Le polygone des effectifs est la ligne brisée reliant les extrémités des bâtons dans le diagramme (Voir figure ci-dessus).
D'une manière générale, la ligne polygonale obtenue en joignant les différents points $B_i(x_i \ ; \ n_i)$

Diagramme en secteur circulaire :

Soit le demi – cercle (C) ; représentons la série précédente sur (C). Chaque modalité est représenté par un secteur angulaire proportionnel à son effectif $\boldsymbol{\alpha_i}$ tel que $\boldsymbol{\alpha_i} = f_i \times 180°$.

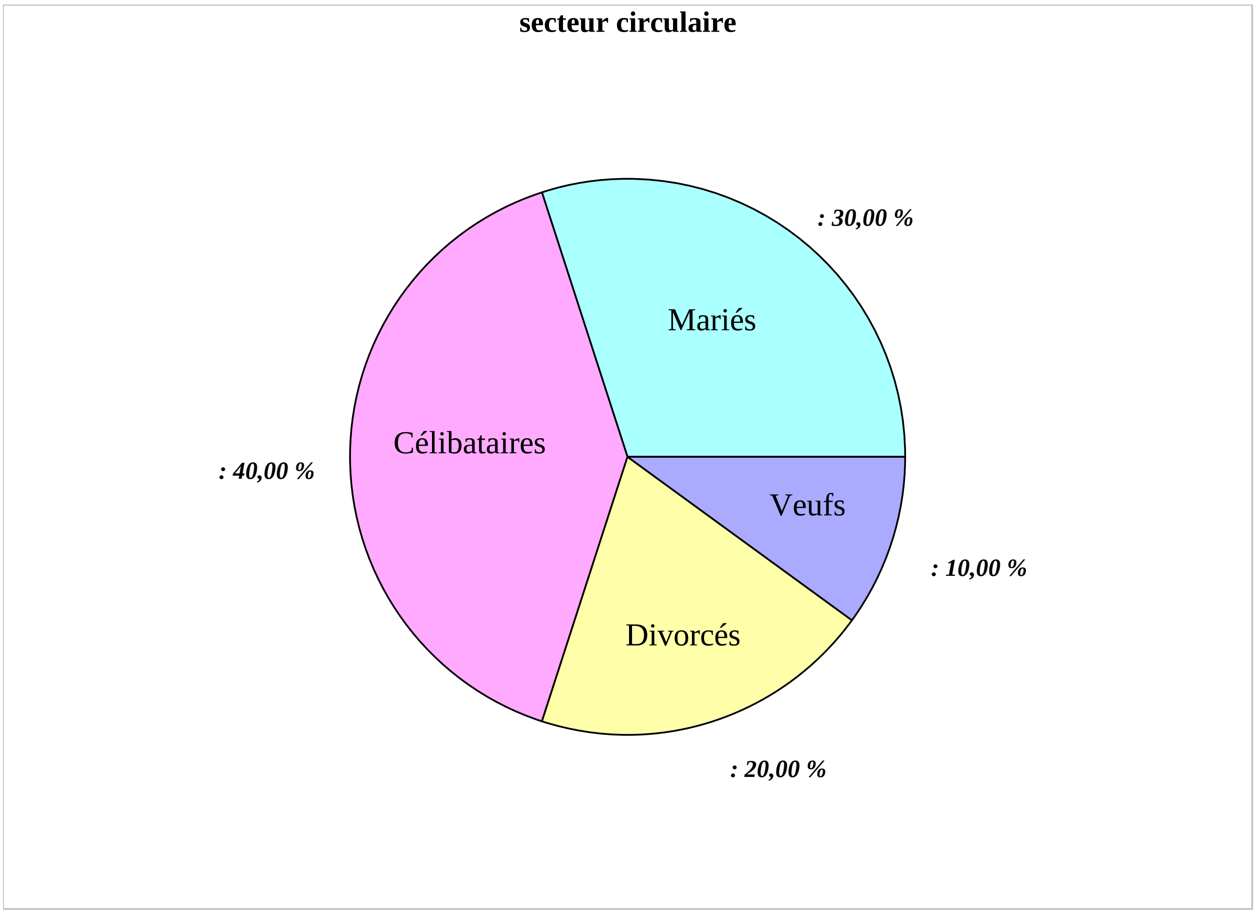
Marié : $\boldsymbol{\alpha_1}$= 0,3×180° => $\boldsymbol{\alpha_1}$= 54°

Célibataire : $\boldsymbol{\alpha_2}$= 0,4×180° => $\boldsymbol{\alpha_2}$= 72°

Divorcé : $\boldsymbol{\alpha_3}$**=** 0,2×° => $\boldsymbol{\alpha_3}$= 36°

Veuf : $\boldsymbol{\alpha_4}$= 0,1×180° => $\boldsymbol{\alpha_4}$= 18°
NB : pour le cercle tout entier le secteur angulaire $\alpha_i$est : $\alpha_i = f_i \times 360$

α_1 = 108°
α_2 = 144°
α_3 = 72°
α_4 = 36°



2- **<u>Cas d'un caractère quantitatif discret :</u>**

a- **<u>Etude du caractère nombre de frère dans un tableau statistique</u>**

L'étude du caractère nombre de frère dans une classe de 12è a donné les résultats suivants : 4 ; 2 ; 2 ; 1 ; 3 ; 2 ; 3 ; 3 ; 2 ; 1.
Regrouper ces données dans un tableau statistique.

Modalités x_i	Effectif n_i	Fréquence f_i	Effectif cumulé croissant	Effectif cumulé décroissant	Fréquence croissante	Fréquence Décroissante
1	2	0,2	2	10	0,2	1
2	4	0,4	6	8	0,6	0,8
3	3	0,3	9	4	0,9	0,4
4	1	0,1	10	1	1	0,1
Total	10	1	/	/	/	/

Le regroupement en tableau se fait de la même manière que les caractères qualitatifs.
La seule différence est que les modalités sont des nombres s'écrivant dans l'ordre croissant. A ce tableau, on peut ajouter les colonnes, les effectifs cumulés croissants et décroissants ainsi que les fréquences cumulés croissantes et de croissantes. Les valeurs du caractère étant rangées dans l'ordre croissant, on appelle :

- **Effectif cumulé croissant de x_i** :

La somme des modalités inférieures ou égales à x_i c'est-à-dire :

$n_i = (n_1 + n_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots + n_i$
$n_1 = n_1 = 2$
$n_2 = n_1 + n_2 + n_3 = 2 + 4 = 0$
$n_3 = n_1 + n_2 + n_3 = 2 + 4 + 3 = 9$

$n_4 = n_1 + n_2 + n_3$ $n_4 = 2 + 4 + 3 + 1 = 10$ et la fréquence croissante cumulé est $f_i = \frac{n_i}{N = 10}$

- **Effectif cumulé décroissant de x_i :**

On appelle effectif cumulé décroissant de la modalité x_i, la somme des modalités qui le succède ; c'est-à-dire $n_i = n_i + n_{1+1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + n_k$ et la fréquence cumulée décroissante est : $f_i\searrow = \frac{n_i}{N}\searrow$

b- <u>Diagramme en bâton des effectifs cumulés :</u>

Dans un repère orthogonal, on place sur l'axe des abscisses les x_i (modalités) ; et sur l'axe des ordonnées les effectifs n_i cumulés croissants ou décroissants.
Pour construire le diagramme en bâton des effectifs cumulés croissants ou décroissants, on place les points $A_i(x_i\ ;\ 0)$ et $B_i(x_i\ ;\ n_i)$ et on construit en trait plein les segments$[A_iB_i]$.

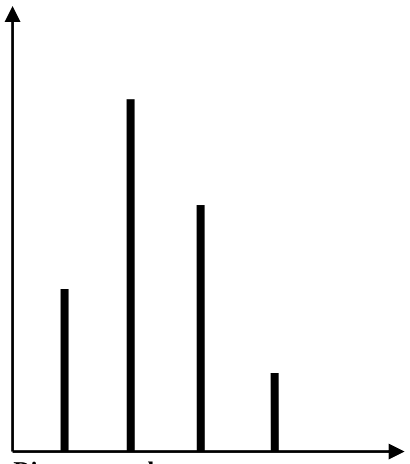


Diagramme des n_i décroissantes

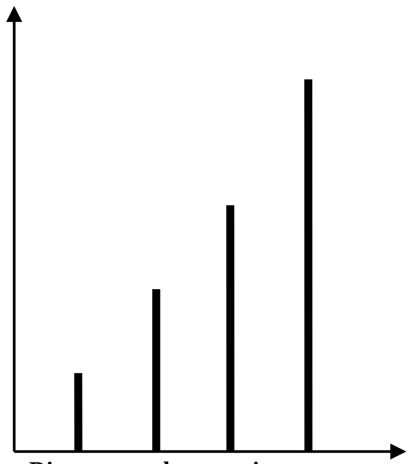


Diagramme des n_i croissantes

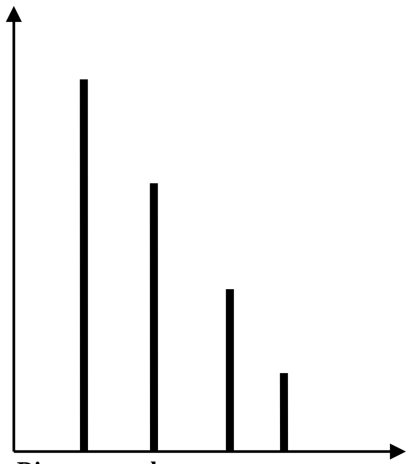


Diagramme des n_i

3- <u>Cas des caractères quantitatifs continus :</u>

a- <u>Tableau statistique :</u>

Dans le cas d'un caractère quantitatif continu, les valeurs du caractère sont regroupées dans un intervalle de même amplitude $[x_i; x_{i+1}[$soit appelées des classes.

Exemple : l'étude du caractère taille sur 30 élèves d'une classe de 12è a donné les résultats suivants en cm :

175	165	172	171	168
170	178	170	171	173
170	170	168	150	160
165	175	179	180	170
173	165	168	176	150
174	158	153	144	172

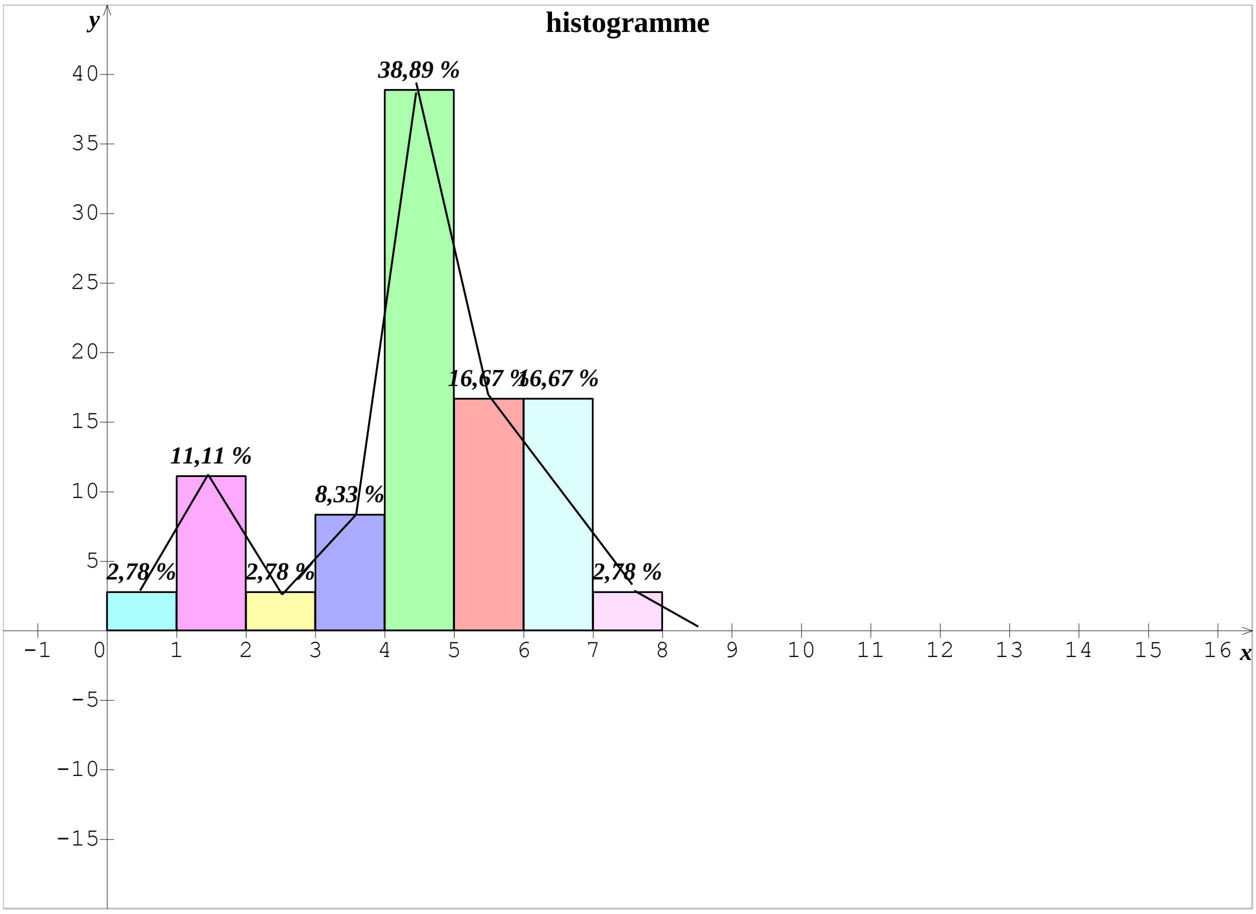
Dresser le tableau des effectifs et des fréquences cumulées.
Prenons des classes d'amplitude 6.

Classes	Effectif	Centre des classes	n_i	n_i croissante	f_i
$[x_i ; x_{i+1}]$	n_i	c_i			
[144 ; 150]	1	147	1	30	0,633
[150 ; 156]	4	153	5	29	0,166
[156 ; 162]	1	159	6	25	0,2
[162 ; 168]	3	165	9	24	0,3
[168 ; 174]	14	171	23	21	0,76
[174 ; 180]	6	177	29	7	0,966
[180 ; 186]	1	183	30	1	1
Total	30	_	_	_	_

On appelle centre (c_i) de la classe (x_i, x_{i+1}) le nombre $\mathbf{c_i} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$

Pour les calculs, nous conviendrons de prendre la valeur c_i commune à tous les individus de la classe (x_i, x_{i+1})

Histogramme des effectifs (représentation graphique)

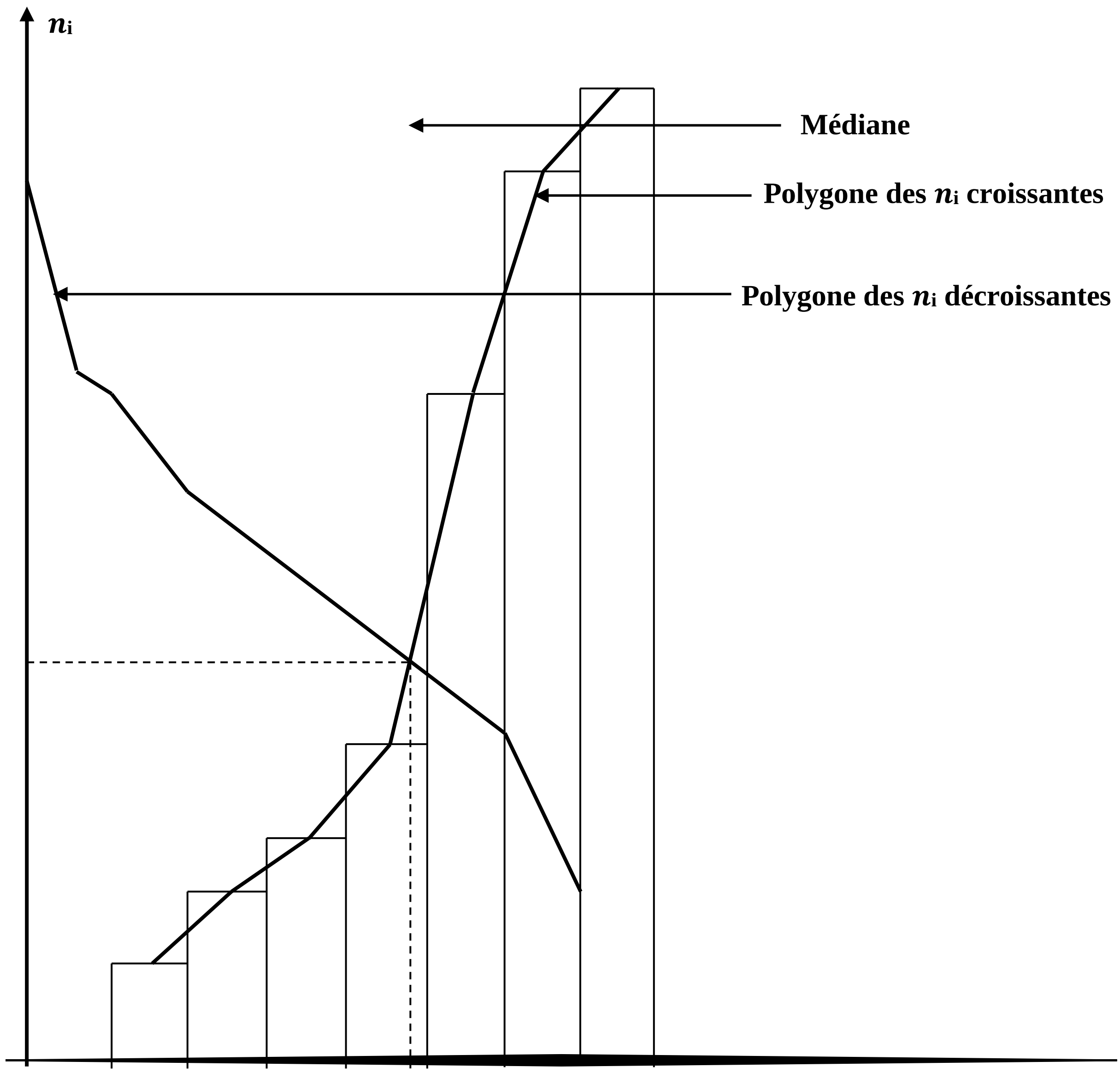


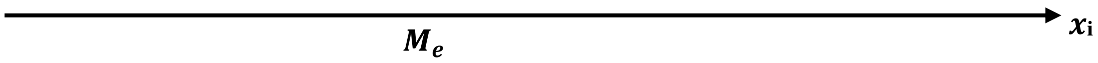
Dans un repère cartésien, les valeurs des bornes de classe sont portées en abscisse et les effectifs (ou fréquence) sont portés en ordonnées.
Pour chaque classe [x_i; x_{i+1}[, on trace le rectangle de base [x_i ; x_{i+1}[, et de hauteur (n_i ou f_i).
La représentation graphique obtenue est appelée : **Histogramme des effectifs ou des fréquences.**

Les polygones :

On appelle polygones les effectifs, la ligne brisée joignant les points (c_i ; n_i).
On appelle polygone des effectifs cumulés croissants, la ligne brisée passant par les points d'abscisse et d'ordonnées (x_{i+1} ; n_i).
On appelle polygone des effectifs cumulés décroissants, la ligne bisée joignant les points de coordonnées (x_i ; $n_{i\searrow}$)

Les deux polygones des effectifs cumulés croissant et décroissant x coupent en un point d'abscisse M_e : (M_e est la médiane).





III- Eléments caractéristiques d'une série statistique:

1- Les caractéristiques de position :

a- Le mode ou dominantes :

Le mode d'une série statistique est la valeur du caractère qui a le plus grand effectif (ou fréquence). On le note M_o.

Exemple : Déterminer le mode de la série suivante :

10, 7, 8 ; 5, 2, 7 ; 4, 4, 5 ; 7, 10
Ici : le mode est 7 (car 7 est compté plus que les autres)

b- La médiane d'une série :

Définition : La médiane d'une série est la valeur du caractère qui divise la série en deux séries de même effectif. On la note M_e.

Exemple 1 : soit la série suivante :

11, 7, 8, 3, 5, 6, 2
Déterminer la médiane. Pour cela écrivons la série dans l'ordre croissant :

2, 3, 5, 6 ,7, 8, 11

La médiane est donc Me = 6
Exemple 2 : soit la série suivante : 12, 3, 5, 7, 8, 6, 11, 4
Déterminer la médiane de cette série :

3, 4, 5, 6, 7 , 8, 11, 12. Par convention.

Ici la médiane est Me = $\frac{6+7}{2}$ = 6,5

La médiane d'une série statistique est la valeur du caractère qui correspond à l'effectif cumulé
$n_i = \frac{N}{2}$

NB :

N désignant les valeurs de la série statistique rangée dans l'ordre croissante, on a :
-Si N est impaire, la médiane correspond à la valeur de rang $\frac{N+1}{2}$
-Si N est paire, la médiane correspond à la valeur de rang $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2}+1$
Détermination de la médiane dans le cas d'un caractère continu.

Exemple :

Déterminer la médiane dans la distribution des tailles de classe de $12^{ème}$ dont les données sont dans le tableau en 3°).
La médiane Me correspond à l'effectif cumulé $\frac{N}{2}=15$
Me є [168 ; 174[est la classe médiane.
x_i : $168 < M_e < 174$
n_i : $9 < 15 < 23$
$\frac{M_e - 168}{174-168} = \frac{15-9}{23-9}$ => $M_e = 170{,}57$

c- Moyenne arithmétique d'une série :

Définition : La moyenne arithmétique d'une série est le quotient de la somme de ces valeurs par l'effectif total. Si x_1, x_2,… x_k sont les valeurs et n_1, n_2,………, n_k sont les effectifs alors la moyenne est notée :

$$\bar{x} = \frac{\sum n_1 x_1}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i}^{k} n_i x_i$$

NB : Dans le cas d'un caractère continu, les xi sont remplacés par les ci
(centre de classe [x_i, x_{i+1}])

Exemple : Soit le tableau statistique donné par :

x_i	n_i	$n_i \times x_i$
7	1	7
8	3	24
9	5	45
10	4	40
11	2	22
12	2	24
13	4	52
14	1	147
15	2	30
16	0	0
17	1	17

Total	25	275

2- **Les caractéristiques de dispersion :**

a- **Amplitude ou étendue d'une série :**

L'amplitude d'une série est la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur du caractère.

Exemple : Déterminer l'amplitude des séries suivantes :

a) – 5; 4 ; 3 ; 1 ; 10 ; 12 / Rep. : (12) – (- 5) = 12 + 5 = 17
b) 5 ; 10; 9 ; 20 ; 40 ; 30 ; 8 / Rep : (40) – (5) = 40 – 5 = 35

b- **Les quartiles**

Les valeurs du caractère étant rangées dans l'ordre croissant ou décroissant, on appelle quartiles les 3 valeurs qui divises la série en 4 groupes de même effectifs : on note : Q_1 ; Q_2 ; Q_3 ces 3 valeurs

Exemple : Déterminer les quantiles de la série suivante :

9 ; 12 ; 5 ; 11 ; 7 ; 15 ; 1 ; 2 ; 18 ; 20 ; 16 ; 19 ; 30 ; 40 ; 34

Rep : 1, 2;5 ; 7 ; 9 ; 11 ; 12 ; 15 ; 16 ; 18 ; 19 ; 20 ; 30 ; 34 ; 40

Q_1 Q_2 Q_3

Déterminer les quantiles de la série suivante : ci-dessus. On a donc $Q_1 = 7$; $Q_2 = 15$; $Q_3 = 20$
Q_2 est la médiane, il est appelé quantile centrale
Q_1 et Q_3 sont les quantiles extrémités

NB : Q_1 est la valeur du caractère qui correspond à l'effectif cumulé $n_i = \frac{N}{4}$

Q_3 est la valeur du caractère qui correspond à l'effectif cumulé $n_i = \frac{3N}{4}$

$Q_3 - Q_1$ est l'écart interquartile

$\frac{Q_3 - Q_1}{Q_2}$ Est l'écart interquartile relatif.

c- Variance ou fluctuation :

La variance d'une série est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne c'est-à-dire :
Si x_1, x_2, …………. x_k sont les valeurs du caractère et n_1 ; n_2 ;……………n_k les effectifs.
La variance est notée : V = $\frac{1}{N}\sum_{i}^{k} n_i {x_i}^2 - (\bar{x})^2$ ou encore on la note : V = $\frac{1}{N}\sum_{i}^{k}(n_i x_i - \bar{x})^2$

d- L'écart type :

C'est la racine carrée de la variance, on la note σ tel que $\sigma = \sqrt{v} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i}^{k} n_i {x_i}^2 - (\bar{x})^2}$

EXERCICE 1 :

Soit le tableau de la série statistique correspondant aux pointures des chaussures de 48 élèves.

x_i	n_i
36	5
37	11
38	12
39	8
40	4
41	3
42	4
43	1

1) Quelle est la population ?
2) le caractère étudié ?
3) Déterminer le mode
4) Déterminer la pointure moyenne

Solution

1- La population est un ensemble d'élèves.
2- Le caractère est : la pointure des chaussures.
3- Le mode est : 38
4- La moyenne des pointures : $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i$

=> $\bar{x} = \frac{1849}{48}$ => $\bar{x} = 38{,}52$

x_i	n_i	$n_i x_i$	x_i^2	$n_i x_i^2$
36	5	180	1296	6480
37	11	407	1369	15059
38	12	456	1444	17328
39	8	312	1521	12168
40	4	160	1600	6400
41	3	123	1681	5043
42	4	168	1761	7056
43	1	43	1849	1849
Total		1849		71383

EXERCICE 2 :

A l'occasion d'un concours de pêche, les 250 poissons péchés ont été mesurés et leurs tailles ont été regroupées dans le tableau suivant :

Classe des tailles (cm)	Effectifs	n_i	c_i	$n_i \quad c_i$
[10, 20[	16	16	15	240
[20, 30[	26	42	25	1050
[30, 40[	36	78	35	2730
[40, 50[	52	130	45	5850
[50, 60[	38	168	55	9240
[60, 70[	30	198	65	12870
[70, 80[	20	218	75	16350
[80, 90[	12	230	85	19530
[90, 100[	10	240	95	22800
[100, 110[	6	246	105	25830
[110, 120[	4	250	115	28750

N.B : Les parties complétées sont :

n_i : $n_1 = 16$; $n_2 = 16 + 26 = 42$, $n_3 = 16 + 26 + 36 = 78$……

c_i : $c_i = \dfrac{10+20}{2} = 15$; $c_2 = \dfrac{20+30}{2} = 25$; $c_3 = \dfrac{30+40}{2} = 35$

$n_i \quad c_i$: $n_1 \quad .c_1 = 16 \text{ x } 15 = 240$; $n_2 \quad c_2 = 42 \text{ x } 25 = 650$; $n_3c_3 = 78 \text{ x } 35 = 1260$

Évaluation

a- compléter le tableau :
b- déterminer la population, le caractère et la nature du caractère
c- déterminer les quartiles
d- déterminer la moyenne et l'écart type.

Solution

a- Complétons le tableau (voir tableau)

b- La population : les poissons

- le caractère : la taille
- nature du caractère : caractère quantitatif continu

c- Déterminons les quartiles :

$Q_1 n_i = \frac{N}{4} = \frac{250}{4} = 62{,}5 \quad alors \quad Q_1 \in [30,40[$ <=> 42 < 62,5 < 78

$\frac{Q_1 - 30}{40-30} = \frac{62{,}5-42}{78-42} \Leftrightarrow \frac{Q_1 - 30}{10} = 0{,}56 \Rightarrow Q_1 = 35{,}6$ or le n_i =

$\frac{N}{2} = \frac{250}{2} = 125 \Leftrightarrow 40 < Q_2 < 50$

$n_i = \frac{3N}{4} = \frac{3 \ x\ 250}{4} = 187{,}5$

$Q_3 \in [60 - 70[$

d- Déterminons la moyenne et l'écart type

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i \Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{250} x 13090 = 52{,}36$$

<u>L'écart type</u> :

- Variance V = $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^{2} - (\bar{x})^2 = \frac{1}{250} x(1063064) - (52,36)^2$
- Ecart type : $\sigma = \sqrt{v} = \sqrt{1510,6864} = 38,86$

σ = 38,86

IV- Série statistique à double caractères x et y

1- Nuage de points associé :

Le plan étant muni d'un repère orthogonal, on appelle nuage de points associé, l'ensemble des points M_{ij} de coordonnées (x_i, y_i).

2- Point moyen d'un nuage de points :

On appelle point moyen d'un nuage de points représentant une série, le point G de coordonnées (X_G ; Y_G) où

$$\begin{cases} X_G = \bar{X} = \dfrac{\sum x_i}{N} \\ \quad et \\ Y_G = \bar{Y} = \dfrac{\sum y_i}{N} \end{cases}$$

3- Covariance :

La covariance d'une série statistique à deux caractères x et y, de moyennes respectives $\bar{x}$ et $\bar{y}$ et d'effectif total N est le nombre réel noté Cov (X, Y) ou $\sigma_{x,y}$ tel que :

Cov (x,y) $= \dfrac{\sum n_{ij}(x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})}{Effectif\ total}$

$$ou$$

Cov (x,y) $= \dfrac{\sum n_{ij} x_i y_i}{Effectif\ total} - \bar{X}.\bar{Y}$

4- Droit de régression de y en x :

La droite (D) de régression de y en fonction de x passe par le point G ($\bar{X}, \bar{Y}$), point moyen du nuage de point son équation est y = ax + b avec :

a = $\frac{Cov(X,Y)}{V(X)} etb = \bar{Y} - a\bar{X}$

où V(X) est la variance et a pour formule : V(X) = $\frac{\sum X_i^2}{N} - \bar{X}^2$

5- <u>Droite de régression de X en Y</u> :

La droite (D') de régression de X en fonction de Y passe par le point G($\bar{X}$; $\bar{Y}$), point moyen du nuage de point. Son équation est x = a'y + b' avec :

a' = $\frac{Cov(X,Y)}{V(Y)}$ $et\ b' = \bar{X} - a\bar{Y}$

où V(Y) est la variance et a pour formule : V(Y)= $\frac{\sum Y_i^2}{N}$ - $\bar{Y}^2$

<u>Remarque</u> :

G($\bar{X}$; $\bar{Y}$) appartient aux deux droites de régression pour tracer ces droites, il suffit donc de déterminer un autre point vérifiant l'équation.

6- <u>Corrélation linéaire</u>

Deux variables statistiques X et Y sont dites en corrélation linéaire lorsque la courbe de régression de Y en X et la courbe de régression de X en y sont des droites.

7- <u>Coefficient de corrélation linéaire</u> :

a) **<u>Définition</u> :**

On appelle coefficient de corrélation linéaire d'une série statistique double decaractère (X ; Y) , le nombre réel **r** définie par $\mathbf{r} = \frac{\boldsymbol{Cov\ (X\ ;Y)}}{\sqrt{\boldsymbol{V(X).V(Y)}}}$

b) <u>Propriétés de r</u> :

P_1 : Si 0,87 ≤ $|r| \leq 1$, on considère que la corrélation linéaire entre les deux variables est forte.
P_2 : si r = 1, on dit que la corrélation est parfaite.

8- <u>Estimation et prévision</u>

Lorsqu'il existe une bonne corrélation linéaire, il est possible de prévoir la valeur de y connaissant celle de x, en utilisant l'équation de la droite de régression de y en x ; et vice – versa.

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Un pharmacien observe, durant les 6 premiers mois de l'ouverture de son officine, le chiffre d'affaire en millions de francs CFA. Le résultat de l'observation est résumé dans le tableau suivant où x désigne le numéro du mois et y le chiffre d'affaires – correspondant.

X	1	2	3	4	5	6
Y	12	13	15	19	21	22

1- Calculer $\bar{X} et \bar{Y}$ les moyennes des variables X et Y.
2- Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique double ainsi que le point G. on prendra : (Unités : 2 cm en abscisses et 1 cm pour 2 unités en ordonnées).
3- Calculer la variance V(X) de x et la covariance Cov(X,Y) de x et y.

N.B : Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

4- Démontrer qu'une équation de la droite de régression (D) de y en x est :$y = \frac{78}{35}\ x + 9{,}2$
5- Tracer la droite (D).
6- En utilisant la droite (D), calculer une estimation du chiffre d'affaires de cette pharmacie à la fin du 7ème mois.

Exercice 2 :

En prévision du lancement d'un nouveau produit, une société a effectué une enquête auprès de clients éventuels pour fixer le prix de vente (en milliers de francs) de ce produit. Les résultats sont donnés dans le tableau ci – dessous.

Prix de vente en milliers de francs xi	9	10	11	12	14	15	16	17
Nombre d'acheteurs potentiels yi	180	160	150	130	100	90	80	70

1- Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique. On prendra pour unité :

1 cm pour 1000 francs en abscisse
1 cm pour 10 acheteurs en ordonnée.

2- Déterminer les coordonnées du point G
3- Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r puis interpréter le résultat obtenu.
4- Déterminer une équation de la droite (D) de régression de y en x. Tracer (D)
5- Estimer graphiquement le prix maximum à fixer pour qu'il y ait au moins 50 acheteurs potentiels.
6- En utilisant l'équation de la droite (D) de régression de y en x, puis déterminer :

a) Le nombre d'acheteurs à prévoir si le prix est fixé à 13 000 F
b) Le prix à fixer pour que le nombre d'acheteurs potentiels soit supérieur à 250.

Solution

Exercice 1

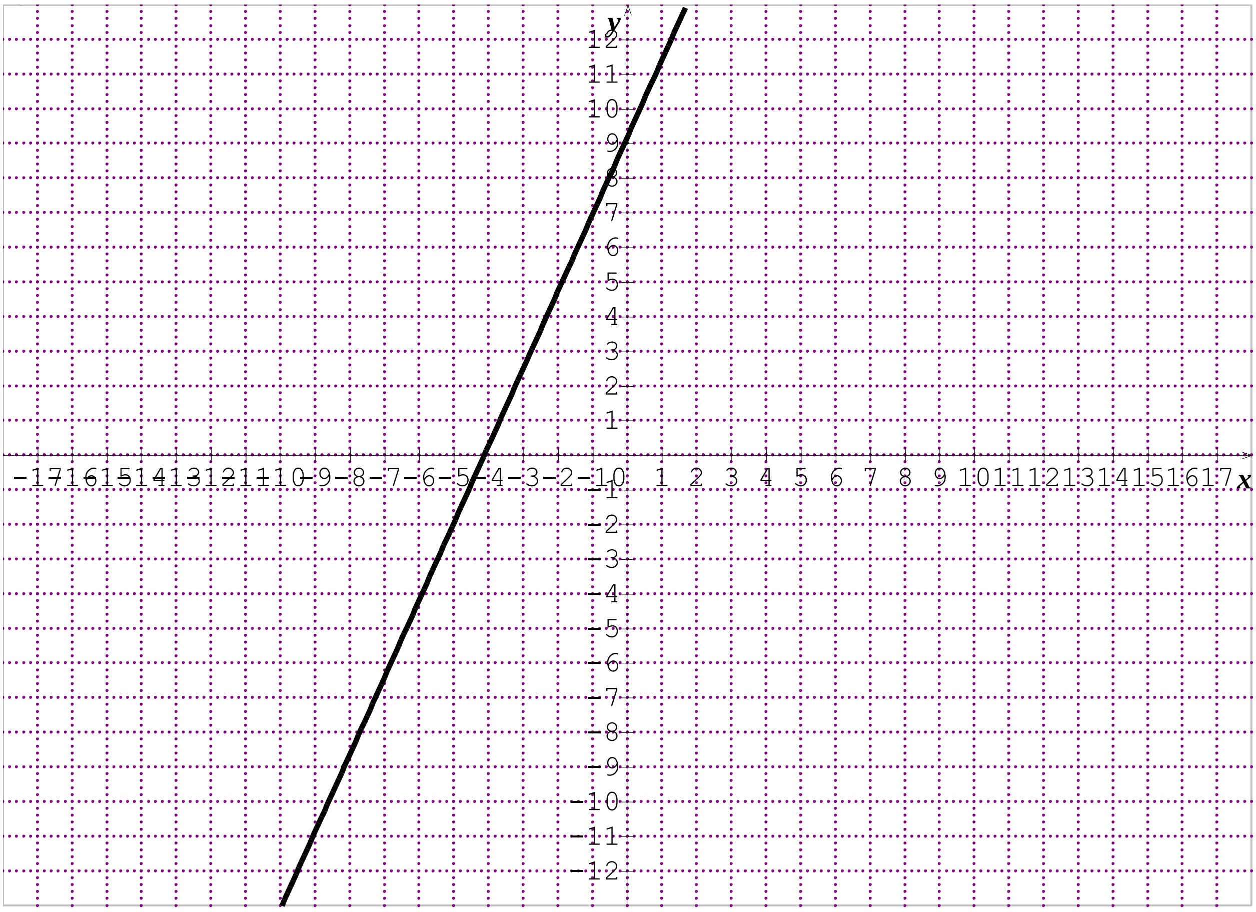
Pour le calcul, on pourra s'aider du tableau ci-dessous :

X_i	Y_i	X_i, y_i	X_i^2	Y_i^2	
1	12	12	1	144	
2	13	26	4	676	
3	15	45	9	225	
4	19	76	16	361	
5	21	105	25	441	
6	22	132	36	484	
21	102	396	91	2 331	Total

1- Calcul de $\bar{X}\ et\ \bar{Y}$ les moyennes des variables x et y.

$$\bar{X} = \frac{\sum_1^6 x_i}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3{,}5 \quad ; \quad \bar{Y} = \frac{\sum_1^6 y_i}{6} = \frac{102}{6} = 17$$

2- Le nuage de points de la série statistique ainsi que le point moyen G.



1- Calcul de la variante V(x) de x et la covariance Cov (x, y) de x et y.

V(X) = $\frac{91}{6} - (\frac{7}{2})^2 = \frac{70}{24} = \frac{35}{12}$; cov (X ; Y) = $\frac{396}{6} - \left(\frac{7}{2} \times 17\right) = \frac{39}{6} = \frac{13}{2}$

2- Montons qu'une équation de la droite de régression (D) de y en x est : y = $\frac{78}{35}x + 9,2$

a = $\frac{cov(X,Y)}{V(X)} = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{35}{12}} = \frac{13}{2} \times \frac{12}{35} = \frac{156}{70} = \frac{78}{35}$ et b = $\bar{Y} - a\bar{X} = 17 - \frac{78}{35} \times \frac{7}{2} = 9,2$

donc l'équation de la droite de régression est : y = $\frac{78}{35}\ x + 9,2$

3- Tracé de la droite (D). (Voir nuage de points)

La droite (D) passe par le point moyen point G (3,5 ; 17) et par un autre point que l'on détermine en remplaçant dans l'équation de la droite de régression, x par une valeur que l'on choisira.

Par exemple, si x = 0, on obtient y = 9,2. (D) passe donc également par le point A(0 ; 9,2).

4- Calcul d'une estimation du chiffre d'affaires de cette pharmacie à la fin du 7ème mois.

Le 7ème mois correspond à x = 7. Il s'agit de déterminer la valeur de y associée à cette valeur de x.

Pour x = 7, on a : y =$\frac{78}{35} \times 7 + 9,2 = 24,8$ millions de francs CFA.

3°) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r. interpréter le résultat obtenu.

Cov (X, Y) = $\frac{\sum X_i \,.\, Y_i}{n} - \bar{X}.\bar{Y}$

= $\frac{9 \times 180 + 10 \times 160 + 11 \times 150 + 12 \times 130 + 14 \times 100 + 15 \times 90 + 16 \times 80 + 17 \times 70}{8} -$ 13x120

Cov (X, Y) = - 103,75

r = $\frac{cov\ (X,Y)}{\sqrt{V(X).V(Y)}}$

V(X) = $\frac{\sum {X_i}^2}{N} - \ \bar{X}^2 = \frac{9^2+10^2+11^2+12^2+14^2+15^2+16^2+17^2}{8} - 13^2$

V(X) = 7,499

V(Y) = $\frac{\sum {Y_i}^2}{N}$ - $\bar{Y}^2 = \frac{180^2+160^2+150^2+130^2+100^2+90^2+80^2+70^2}{8} - 120^2$

V(X) = 1450,003

r = $\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X).V(Y)}} = \frac{-103,75}{\sqrt{7,499 \times 1450,003}} = -0,995$

0,87 ≤ $|r| \leq 1$: il existe alors une forte corrélation linéaire entre les variables X et Y. L'on peut donc faire un ajustement linéaire entre X et Y.

4°) Equation de la droite (D) de régression de y en x.

(D) : y = ax + b

a = $\frac{cov(X,Y)}{V(X)} = \frac{-\,103{,}75}{7{,}499} = -13{,}88$

$\bar{Y}$ = a$\bar{x}$ + b => b = $\bar{y} - a\bar{x} = 120 - (-13{,}88) \times 13 = 199{,}83$

(D) :y = - 13,88 x + 299,83

Tracé de (D) : (D) passe par le point moyen G(13,120), déterminons un second point en remplaçant par exemple x par 10. On trouve y = 161,03. On obtient : A (10 ; 161,03)

5°) Pour qu'il y ait au moins 50 acheteurs potentiels, on lit graphiquement que le prix à fixer ne doit pas dépasser 18 000 francs.

6°) a°) Le nombre d'acheteurs à prévoir, si le prix est fixé à 13 000 F, correspond à x = 13
y = $-$ 13,88 × 13 + 299,83 = 119,39 ≃119

b°) Il s'agit de déterminer x pour y = 250.

y = $-$ 13,88 x + 299,83 => x =$\frac{y-299{,}83}{-\,13{,}88}$

Pour y = 250, on a : x = $\frac{250-299{,}83}{-\,13{,}88} = 3{,}59\ milliers\ de\ francs = 3590\ F$

Exercice 2 :

1- Représentation graphique du nuage de points de cette série statistique (unité : 1 cm pour 1000 francs en abscisse, 1 cm pour 10 acheteurs en ordonnée).

2- Déterminons les coordonnées du point G.

$$\bar{X} = \frac{\sum_1^8 x_i}{8} = \frac{9+10+11+12+14+15+16+17}{8} = 13$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum_1^8 y_i}{8} = \frac{180+160+150+130+100+90+80+70}{8} = 120$$

=> G(13 ; 120)

3-Détermination du coefficient de corrélation linéaire r .

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov} = \frac{\sum X_i.Y_i}{N} - \bar{X}.\bar{Y}$$

$$\Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = \frac{9.180+10.160+11.150+12.130+14.100+15.90+16.80+17.70}{8} - 13.120$$

Cov(X ,Y)= −1O3,75

r = $\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X).V(Y)}}$

V(X) = $\frac{\sum X_i^2}{N} - \overline{X}^2 = \frac{9^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2 + 14^2 + 15^2 + 16^2 + 17^2}{8}$ - 13^2

V(X) = 7,499

V(Y) = $\frac{\sum Y_i^2}{N} - \overline{Y}^2 = \frac{180^2 + 160^2 + 150^2 + 130^2 + 100^2 + 90^2 + 80^2 + 70^2}{8}$ - 120^2

V(Y) = 1450,003

r = $\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X).V(Y)}} = \frac{-103,75}{\sqrt{7,499.1450,003}} = -$ 0,995

0,87≤| r |≤1 :il existe alors une forte corrélation linéaire entre et les variations X et Y.linéaire
L'on peut donc faire un ajustement linéaire entre X et Y.
4-Equation de la droite (D) de régression de Y en X

(D) : y = ax+b

A = $\frac{cov(X,Y)}{V(X)} = \frac{-103,75}{7,499} = -13,88$

Alors on a $\overline{y}$ =a$\overline{x}$+ b => b =$\overline{y} -$ a$\overline{x}$ = 120(-13 ,88) x13 = 299,83

(D) : y = −13 ,88x + 299,83
Tracé de (D) : (D) passe par le point moyen G (13 ; 120).Déterminons un second en remplaçant par exemple x par 10 .On trouve y = 161,03.On obtient : A (10 ; 161,03)

5-Pour qu'il ait au moins 50 acheteurs potentiels, on lit graphiquement que le prix à fixer ne doit pas dépasser 18000 francs.

6- a) le nombre d'acheteurs à prévoir, si le prix est fixé à 13000 F, correspond à x = 13.

Y = −13,88x13 + 299,83 = 119,39

b)il s'agit de déterminer x pour y = 250

Y = −13,88x13 + 299,83 alors x = $\frac{y-299,83}{-13,88}$

Pour y = 240 , on a : x = $\frac{250-299,83}{-13,88}$= 3,59 milliers de franc = 3590 F

EXERCICES

EXERCICE1 :

Soit tableau de la série statistique correspondant aux pointures des chemises de 48 militaires.

x_i	36	37	38	39	40	41	42	43
n_i	5	11	12	8	4	3	4	1

1) Déterminer la population et le caractère étudié.
2) Déterminer le mode des chemises
3) Calculer la pointure moyenne des chemises
4) Calculer la variance et l'écart – type de cette série.

EXERCICE 2 :

L'étude statistique faite sur la taille des voitures de la société Renault a donné les résultats suivants :

Classes $[x_i ; x_{i+1}[$	[144 ; 150[	[150 ; 156[	[156 ; 162[	[162 ; 168[	[168 ; 174[	[174 ; 180[	[180 ; 186[
Effectifs ni	1	4	1	3	14	6	1

1) Dresser el tableau des centres ci .
2) Dresser le tableau des effectifs et des fréquences cumulées (croissants et décroissants).
3) En déduire l'histogramme des effectifs (ni) puis celle effectifs (n_i et n_i).

EXERCICE 3 :

Soit la série suivante : 3 ; 8 ; 7 ; 11 ; 5 ; 13 ; 15 ; 10 ; 2 ; 17 ; 1 ; 20 ; 12.

1) Déterminer la médiane et les quartiles.
2) Faites la représentation en boîte de cette série.

EXERCICE 4 :

Une agence de voyage propose 21 voyages organisés dont voici les tarifs en euros :

152 ; 320 ; 250 ; 320 ; 137 ; 183 ; 137 ; 152 ; 244 ; 122 ; 190 ; 139 ; 202 ; 285 ; 137 ; 180 ; 143 ; 190 ; 137 ; 180 ; 190.

1) Calculer la moyenne et l'écart type de la série des prix. Quel est le premier et le troisième quartile, la médiane ?
2) Ne rentrant pas dans ses frais, l'agence hésite entre deux solutions : augmenter tous les tarifs de 190 euros ou doubler tous les tarifs. Donner pour chacune des solutions la moyenne et l'écart – type de la nouvelle série des prix. Que deviennent les quartiles et la médiane ?
3) Une des deux solutions est – elle plus avantageuse financièrement pour l'agence ? Tracer les deux diagrammes en boîte correspondants.

EXERCICE 5 :

Lors d'un concours d'entrée à l'école statistique, la moyenne générale des 600 candidats a été de 11,4 sur 20. Il y a 300 places au concours. Hélène a eu une moyenne de 12. Pourtant elle a échoué. Expliquer ce résultat.

EXERCICE 6 :

Une série statistique a pour effectif 40. Sa moyenne est égale à 15,75 et son écart – type à 11,438. On ajoute à cette série une $41^{ème}$ valeur égale à 18. Calculer la moyenne et l'écart – type de la nouvelle série.

EXERCICE 7 :

On a relevé le montant en euros de 100 chèques déposés dans un commerce dans une journée. Voici le tableau obtenu : les chèques ont été regroupés en fonction de leur montant par classes dont l'amplitude est 15 euros.

Montant des chèques	**Effectif**	**Fréquence**	**Fréquence cumulée croissante**
[0,15[	20		
[15,30[	9		
[30,45[	19		
[45,60[	27		
[60,75[	18		
[75,90[	6		
[90,105[	1		
Total			

1) compléter le tableau
2) soit s le montant de l'ensemble des 100 chèques. Donner un encadrement de S. En déduire un intervalle I tel que le montant moyen des chèques appartienne à I.
3) pour estimer la moyenne d'une série statistique où les valeurs ont été regroupées en classes de même amplitude, on procède souvent de la manière suivante : on remplace chaque classe par son centre et on calcule la moyenne de la série des centres (avec les mêmes effectifs).

Faire le calcul pour la série ci-dessus. Vérifier que la moyenne obtenue est le centre de l'intervalle I trouvé à la question précédente.

4) Quelle est la classe pour laquelle la fréquence cumulée croissante passe la « barre » des 50 % ? Justifier pourquoi on appelle cette classe la classe médiane.

Exercice 8 : (non corrigé)

En prévision du lancement d'un nouveau produit, une société a effectué une enquête auprès de clients éventuels pour fixer le prix de vente (en milliers de francs) de ce produit. Les résultats sont donnés dans le tableau ci – dessous.

Prix de vente en milliers de francs xi	9	10	11	12	14	15	16	17
Nombre d'acheteurs potentiels yi	180	160	150	130	100	90	80	70

1- Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique. On prendra pour unité :
1 cm pour 1000 francs en abscisse
1cm pour 10 acheteurs en ordonnée.

2- Déterminer les coordonnées du point G
3- Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r puis interpréter le résultat obtenu.
4- Déterminer une équation de la droite (D) de régression de y en x. Tracer (D)
5- Estimer graphiquement le prix maximum à fixer pour qu'il y ait au moins 50 acheteurs potentiels.
6- En utilisant l'équation de la droite (D) de régression de y en x, puis déterminer :

a) Le nombre d'acheteurs à prévoir si le prix est fixé à 13 000 F
b) Le prix à fixer pour que le nombre d'acheteurs potentiels soit supérieur à 250.

Exercice 1

Soit tableau de la série statistique correspondant aux pointures des chemises de 48 militaires.

x_i	36	37	38	39	40	41	42	43
n_i	5	11	12	8	4	3	4	1

5) Déterminer la population et le caractère étudié.
6) Déterminer le mode des chemises
7) Calculer la pointure moyenne des chemises
8) Calculer la variance et l'écart – type de cette série.

EXERCICE 2 :

L'étude statistique faite sur la taille des voitures de la société Renault a donné les résultats suivants :

Classes $[x_i ; x_{i+1}[$	[144 ; 150[	[150 ; 156[	[156 ; 162[	[162 ; 168[	[168 ; 174[	[174 ; 180[	[180 ; 186[
Effectifs ni	1	4	1	3	14	6	1

4) Dresser el tableau des centres ci .
5) Dresser le tableau des effectifs et des fréquences cumulées (croissants et décroissants).
6) En déduire l'histogramme des effectifs (ni) puis celle effectifs (n_i et n_i).

EXERCICE 3 :

Soit la série suivante : 3 ; 8 ; 7 ; 11 ; 5 ; 13 ; 15 ; 10 ; 2 ; 17 ; 1 ; 20 ; 12.

3) Déterminer la médiane et les quartiles.
4) Faites la représentation en boîte de cette série.

EXERCICE 4 :

Une agence de voyage propose 21 voyages organisés dont voici les tarifs en euros :

152 ; 320 ; 250 ; 320 ; 137 ; 183 ; 137 ; 152 ; 244 ; 122 ; 190 ; 139 ; 202 ; 285 ; 137 ; 180 ; 143 ; 190 ; 137 ; 180 ; 190.

4) Calculer la moyenne et l'écart type de la série des prix. Quel est le premier et le troisième quartile, la médiane ?
5) Ne rentrant pas dans ses frais, l'agence hésite entre deux solutions : augmenter tous les tarifs de 190 euros ou doubler tous les tarifs. Donner pour chacune des solutions la moyenne et l'écart – type de la nouvelle série des prix. Que deviennent les quartiles et la médiane ?
6) Une des deux solutions est – elle plus avantageuse financièrement pour l'agence ? Tracer les deux diagrammes en boîte correspondants.

EXERCICE 5 :

Lors d'un concours d'entrée à l'école statistique, la moyenne générale des 600 candidats a été de 11,4 sur 20. Il y a 300 places au concours. Hélène a eu une moyenne de 12. Pourtant elle a échoué. Expliquer ce résultat.

EXERCICE 6 :

Une série statistique a pour effectif 40. Sa moyenne est égale à 15,75 et son écart – type à 11,438. On ajoute à cette série une $41^{ème}$ valeur égale à 18. Calculer la moyenne et l'écart – type de la nouvelle série.

EXERCICE 7 :

On a relevé le montant en euros de 100 chèques déposés dans un commerce dans une journée. Voici le tableau obtenu : les chèques ont été regroupés en fonction de leur montant par classes dont l'amplitude est 15 euros.

Montant des chèques	effectif	Fréquence	Fréquence cumulée croissante
[0,15[	20		
[15,30[	9		
[30,45[	19		
[45,60[	27		
[60,75[	18		
[75,90[	6		
[90,105[	1		
Total			

4) compléter le tableau
5) soit s le montant de l'ensemble des 100 chèques. Donner un encadrement de S. En déduire un intervalle I tel que le montant moyen des chèques appartienne à I.
6) pour estimer la moyenne d'une série statistique où les valeurs ont été regroupées en classes de même amplitude, on procède souvent de la manière suivante : on remplace chaque classe par son centre et on calcule la moyenne de la série des centres (avec les mêmes effectifs).

Faire le calcul pour la série ci-dessus. Vérifier que la moyenne obtenue est le centre de l'intervalle I trouvé à la question précédente.

4) Quelle est la classe pour laquelle la fréquence cumulée croissante passe la « barre » des 50 % ? Justifier pourquoi on appelle cette classe la classe médiane.

Exercice 8 : (non corrigé)

En prévision du lancement d'un nouveau produit, une société a effectué une enquête auprès de clients éventuels pour fixer le prix de vente (en milliers de francs) de ce produit. Les résultats sont donnés dans le tableau ci – dessous.

Prix de vente en milliers de francs xi	9	10	11	12	14	15	16	17
Nombre d'acheteurs potentiels yi	180	160	150	130	100	90	80	70

7- Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique. On prendra pour unité :

1 cm pour 1000 francs en abscisse
1 cm pour 10 acheteurs en ordonnée.

8- Déterminer les coordonnées du point G
9- Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r puis interpréter le résultat obtenu.
10- Déterminer une équation de la droite (D) de régression de y en x. Tracer (D)
11- Estimer graphiquement le prix maximum à fixer pour qu'il y ait au moins 50 acheteurs potentiels.
12- En utilisant l'équation de la droite (D) de régression de y en x, puis déterminer :

c) Le nombre d'acheteurs à prévoir si le prix est fixé à 13 000 F
d) Le prix à fixer pour que le nombre d'acheteurs potentiels soit supérieur à 250.

Coniques

Objectifs

Ce chapitre vise à :
• Déduire des propriétés géométriques des coniques, différentes méthodes de construction de ces courbes ;
•Utiliser des outils analytiques, géométriques, complexes dans la résolution des problèmes.

Savoirs et savoir-faire

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Définition géométrique : - Définition par foyer et directrice - Vocabulaire : foyers, directrices, excentricité, sommets, axe focal. - Définition bifocale de l'ellipse et de l'hyperbole. • Equations cartésiennes : - Equations réduites d'une parabole, d'une ellipse et d'une hyperbole - Eléments remarquable : paramètre, sommets, axe focal, foyers, directrices, asymptotes, demi- distance focale. • représentation graphique des coniques.	• Déterminer l'équation réduite d'une conique : - A l'aide de la définition par foyer et directrice ; - A l'aide de la définition bifocale ; - Par un changement de repère (l'équation étant de la forme $ax^2 + by^2 + cx+dy+e = 0$) • Connaissant l'équation réduite d'une conique déterminer ses éléments remarquables. • Représenter graphiquement une conique à l'aide de ses éléments remarquables.

A) Généralité :

Définition :

On appelle courbe du second degré, la représentation M dans le plan de l'ensemble des points

M$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que : $Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$ où $|A| + |B| \neq 0$

Exemples :

1) $-3x^2 + 5y^2 - xy - 7y - 2 = 0$; ici : a = -3 ; B = 5 ; c = 1 ; d = 0 ; E = -7 et F = -2

2) $7x^2 + \frac{3}{7}y^2 - 8x + 9y = 0$; $ici : A = 7; \quad B = \frac{3}{7}; \quad C = 0; \quad F = 0; \quad D = -4 \ et \ E = \frac{9}{2}$

3) $-\frac{4}{3}y^2 + 6y - xy - 7 = 0; \ ici : A = D = 0; \ B = -\frac{4}{7}; \ C = -\frac{1}{2}; \ E = 3 \ et \ F = -7$

4) $-x^2 + 6xy = 1$; ici : A = F =-1 ; B = E = D = 0 ; C = 3

B)coniques

I INTRODUCTION ET PRÉSENTATION

Coniques, courbes planes obtenues par l'intersection d'un cône de révolution avec un plan ne contenant pas le sommet du cône. Les coniques se rencontrent dans plusieurs domaines de la physique, notamment en optique et en mécanique céleste.

II CLASSIFICATION DES CONIQUES

a) Considérons un cône de révolution, et notons α l'angle entre l'axe et la génératrice du cône. Si le cône est coupé par un plan qui forme avec l'axe un angle supérieur à α, l'intersection est une courbe fermée appelée ellipse.

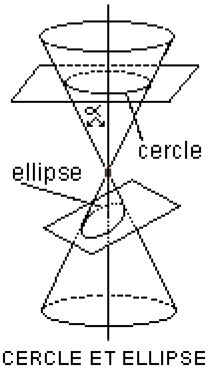


Figure 1

b) Si le plan est perpendiculaire à l'axe, l'intersection est un cercle, que l'on considère comme un cas particulier d'ellipse. Si le plan coupe l'axe selon un angle égal à α, de sorte que le plan est parallèle à la surface latérale du cône, l'intersection est une courbe ouverte appelée parabole.

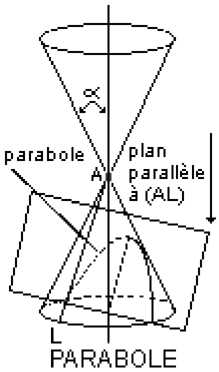


Figure 2

Si le cône est coupé par un plan parallèle à son axe ou formant avec l'axe un angle inférieur à α, l'intersection est une hyperbole.

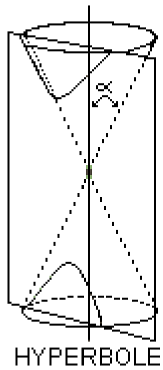


Figure 3

Dans ce cas, les deux nappes du cône étant coupées par le plan, il en résulte que l'hyperbole a deux branches, qui sont chacune de longueur infinie.

III DÉFINITION MÉTRIQUE

Les coniques étant des courbes planes, on peut les définir sans recourir à la figure tridimensionnelle du cône. Une de ces définitions fait appel aux notions de foyer et de directrice. Soient D une droite du plan, F un point du plan n'appartenant pas à (D), et *e* un réel strictement positif. La conique de foyer F et de directrice (D) est l'ensemble des points M du plan tels que MF / MH = *e*, où H est le projeté orthogonal de M sur (D) (MH est donc la distance de M à la droite D). *e* est appelé l'excentricité de la conique.

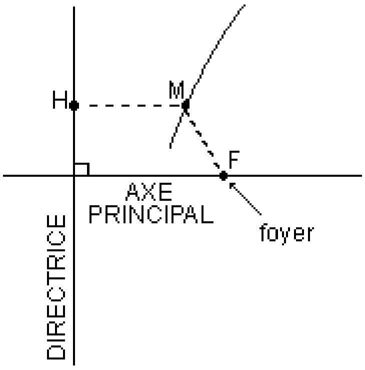


Figure 4

— Si $e = 1$, la conique est une parabole ;

— si $e > 1$, c'est une hyperbole ;

— si $e < 1$, il s'agit d'une ellipse.

Le cercle est une ellipse particulière dont les foyers seraient confondus, la directrice étant rejetée à l'infini. Son excentricité est nulle.

Toutes les coniques ont au moins un axe de symétrie : la perpendiculaire à la directrice passant par le foyer. L'intersection de la conique par cet axe s'appelle sommet (un pour la parabole, deux pour l'ellipse et l'hyperbole).

Voir cercle ; ellipse ; hyperbole ; parabole (mathématiques).

IV ÉQUATIONS CARTÉSIENNES ET RÉDUITES

Dans un repère cartésien (*voir* coordonnées), les coniques ont une équation, appelée équation

cartésienne, de la forme : $ax^2 + by^2 + cxy + dx + fy + g = 0$

Avec a, b, c, d, f et g, 6 réels (*voir* nombres), a, b et c étant non tous nuls.

Notons O le milieu de $[S_1S_2]$, S_1 et S_2 étant les sommets de la conique (ellipse ou hyperbole). On appelle foyer secondaire F' le point symétrique de F par rapport au point O. Considérons alors le repère orthonormé d'origine O et dont l'axe des abscisses est l'axe focal (droite contenant les foyers), orienté de O vers le foyer F (situé à la droite de O). Si la conique est une parabole, on choisit le repère ayant pour origine le sommet de la parabole, et pour axe des ordonnées l'axe de symétrie de la parabole. Dans ces repères appropriés, les équations des coniques, appelées équations réduites, deviennent :

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ pour l'ellipse ($a \neq b$) ou pour le cercle ($a = b$) ;

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ pour l'hyperbole ;

$y^2 = 2px$ (p réel strictement positif) pour la parabole .

La lettre *p* est appelée le paramètre de la parabole.

V **APPLICATIONS**

Les coniques ont de nombreuses propriétés mathématiques et sont très fréquemment rencontrées en physique. Par exemple, en astronomie, d'après les lois de Kepler, la trajectoire d'un satellite naturel, tel qu'une planète ou une comète, est toujours une conique (*voir* orbite). En astronautique, il en va de même pour les satellites artificiels ou les sondes spatiales. En optique, on utilise les propriétés des coniques ou des surfaces qu'elles engendrent (notamment les paraboloïdes de révolution) pour construire des miroirs ou des antennes qui, par réflexion, concentrent la lumière ou des ondes électromagnétiques ou émettent celles-ci en un faisceau rigoureusement parallèle.

C) APROFONDISSEMENT:

I- Définition :

Une conique est un cas particulier de courbe du second degré (Γ) représentant dans le repère orthonormé du plan l'ensemble des points M$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifiant l'équation (Γ) :

$Ax^2 + By^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0$. Avec ($|A| + |B| \neq 0$)

Ainsi divers cas se présentent :

II- Représentation de la courbe d'une conique :

1) Les Paraboles d'équation : ($Ax^2 + By^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0$)

a) 1er Cas : (B = 0)

La courbe (Γ) devient : $Ax^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0 \Rightarrow y = \dfrac{-Ax^2 - 2Cx - E}{2D}$

⇨ $y = \dfrac{-A\left(x^2 + \frac{2C}{A}x + \frac{E}{A}\right)}{2D}$

⇨ $y = \dfrac{-A}{2D}\left(x^2 + \dfrac{2C}{A}x + \dfrac{E}{A}\right)$ (en utilisant la forme canonique)

⇨ $y = \dfrac{-A}{2D}\left[\left(x + \dfrac{C}{A}\right)^2 - \dfrac{C^2 - AE}{A^2}\right]$

⇨ Alors (Γ) est une parabole dont les éléments caractéristiques sont :

- Sommet : S $\left(\dfrac{-C}{A} \;\; ; \;\; \dfrac{C^2 - AE}{2AD}\right)$
- Axe de symétrie : $x = \dfrac{-C}{A}$ (Suivant l'axe y' o y)

N.B :

- Si $\dfrac{-A}{2D} < 0$ alors la concavité de la parabole (Γ) est orientée vers le bas.
- Si $\dfrac{-A}{2D} > 0$; alors la concavité de la parabole (Γ) est orientée vers le haut;

Exemple :

Donner la nature et les éléments caractéristiques de la courbe (Γ) définie par
(Γ) : $-x^2 + 4x - y + 3 = 0$ puis représenter (Γ).

Solution :

(Γ) : $-x^2 + 4x - y + 3 = 0$; ici A = -1 ; C = 2 ; D = $\dfrac{-1}{2}$; E = 3.

Or $y = \dfrac{-A}{2D}\left[\left(x + \dfrac{C}{A}\right)^2 - \dfrac{C^2 - AE}{2AD}\right]$

$\Rightarrow$ y = -$\left[(x-2)^2 - \frac{7}{1}\right] \Rightarrow y = -\left[(x-2)^2 - 7\right]$

Donc (Γ) est une parabole dont les éléments caractéristiques sont :

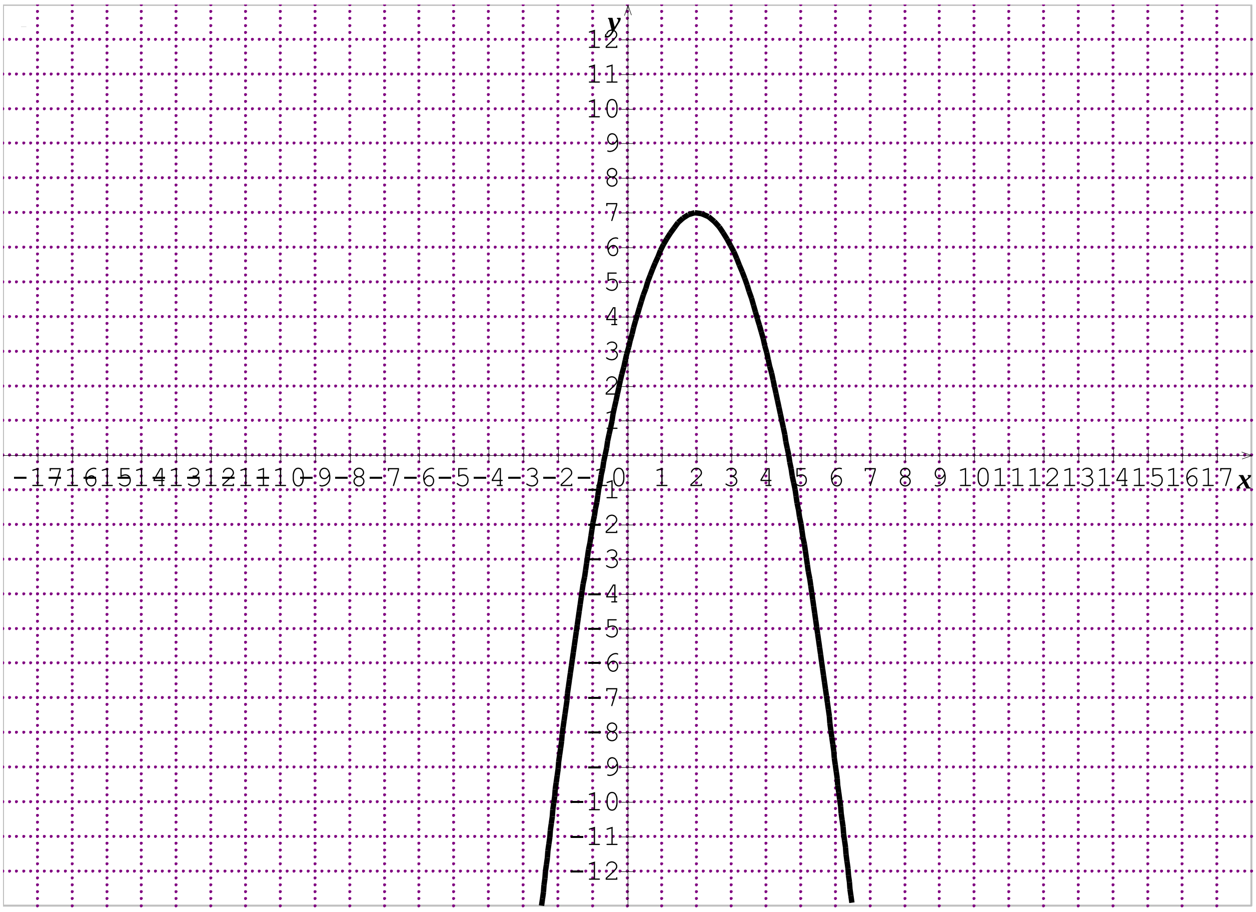
- Sommet : S (2 ; 7)
- Axe de Symétrie : x = 2

(Γ) $\cap (0x) \Rightarrow y = 0 \Leftrightarrow x = 4{,}64$ ou x = -0,64

Donc (Γ) coupe l'axe (ox) en 4,64 et -0,64

(Γ) $\cap$(oy) => x = 0 ; <=> y = 3

Donc (Γ) coupe l'axe (oy) en 3. et $\frac{-A}{2D} = -1 < 0$ donc (Γ) est orienté vers bas.



b) **<u>2è Cas</u>** (A = 0)

La courbe (Γ) dévient : $By^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0$

De la même manière ou obtient x = $\frac{-B}{2C}\left[\left(y + \frac{D}{B}\right)^2 - \frac{D^2 - BE}{B^2}\right]$

Alors (Γ) est une parabole dont les éléments caractéristiques sont :

- Sommet : S $\left(\frac{D^2 - BE}{2CB} \quad ; \quad \frac{-D}{B}\right)$

- Axe de symétrie : y = $\frac{-D}{B}$

N.B :

* Si $\frac{-B}{2C} < 0$; alors la concavité de courbe (┌) est orientée vers la gauche.

* Si $\frac{-B}{2C} > 0$; alors la concavité de la courbe (┌) est orientée vers la droite.

Exemple :

Donner la nature et les éléments caractéristiques de la courbe (┌) définie par :

(┌) : -2y + x + 2y^2 – 1 = 0 puis représenter (┌)

Solution :

(┌) : - 2y + x 2y^2 – 1 = 0 <=> 2y^2 + x 2y – 1 = 0

Ici B = 2 ; C = $\frac{1}{2}$; D = -1; E = -1

Or x = $\frac{-B}{2C}\left[\left(y+\frac{D}{B}\right)^2 - \frac{D^2-BE}{B^2}\right]$

⇨ x = -2 $\left[\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}\right]$

Donc (┌) est une parabole dont les éléments caractéristiques sont :

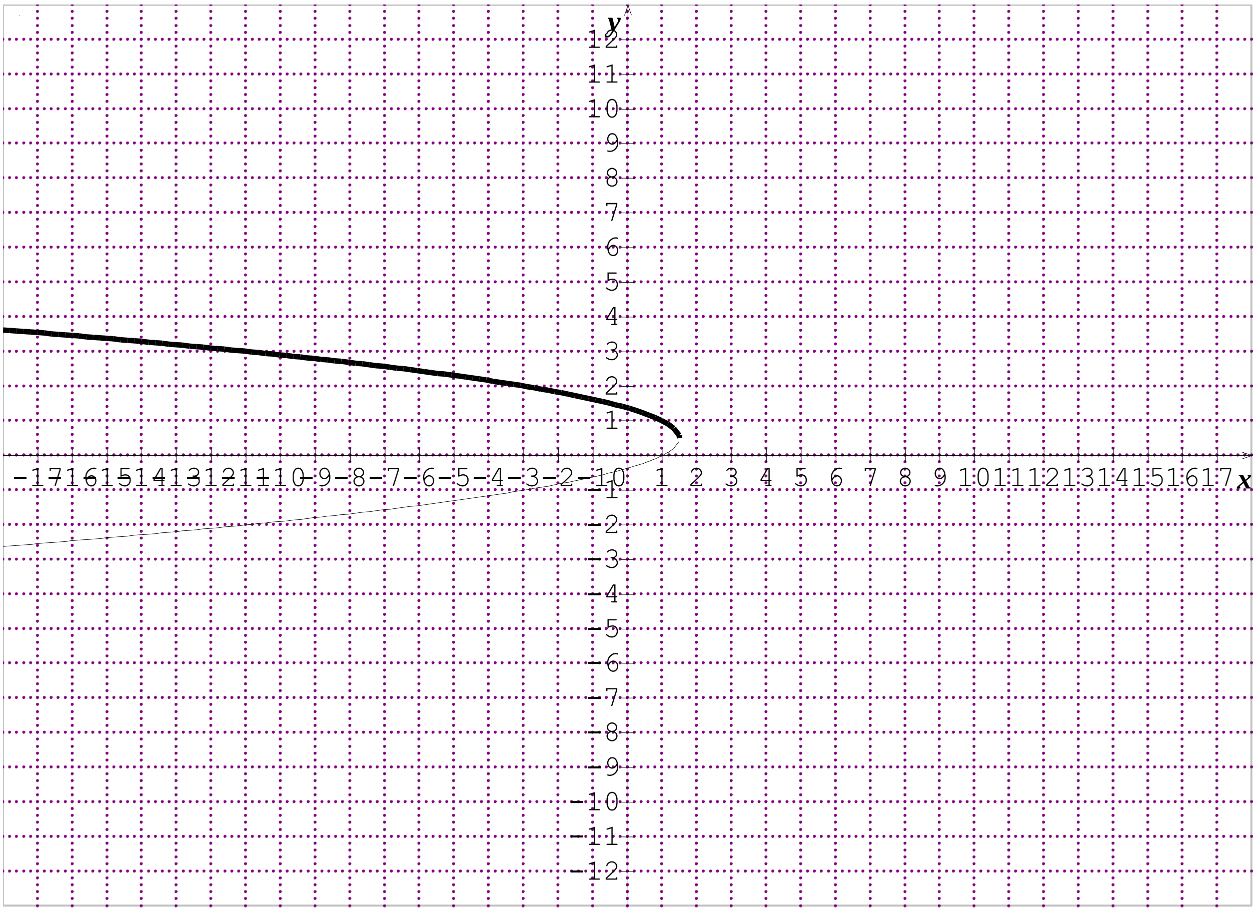
- Sommet : S $\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$
- Axe de symétrie : Y = $\frac{1}{2}$

(┌) $\cap$ (ox) => y = 0 <=> x = 1

Donc (┌) coupe l'axe (ox)en 1

(┌) $\cap$(oy) => x = 0 ⇔ y = 1,36 ou y = -0,36

Donc (┌) coupe l'axe (oy) en 1,36 et -0,36. et $\frac{-B}{2C} = -2 < 0$



2) Les ellipses :

Equation cartésienne : $Ax^2 + by^2 + Cx + Dy + E = 0$

Equation réduite : $A\left(x+\dfrac{C}{2A}\right)^2 + B\left(y+\dfrac{D}{2B}\right)^2 = \dfrac{AD^2+BC^2-4ABE}{4AB}$

Equation caractéristique : $\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}=1$

a) 1^er^ Cas : (a > b)

L'ellipse est portée par l'axe x' Ω x qui est le grand axe de l'ellipse. Ainsi les éléments caractéristiques sont :

- Centre : $\Omega\begin{pmatrix} xo \\ yo \end{pmatrix}$ où $\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$
-
- Foyers : $F\left(\sqrt{a^2-b^2}\,;\,0\right)$; $F'\left(-\sqrt{a^2-b^2}\,;\,0\right)$
-

- L'excentricité : e = $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$
-
- Les Directrices : (D) : X = $\frac{a}{e}$; (D') : X' = $\frac{-a}{e}$
-
- Les sommets : A(a ; 0) ; A'(-a ; 0) ; B(o ; b) ; B'(o ; - b)

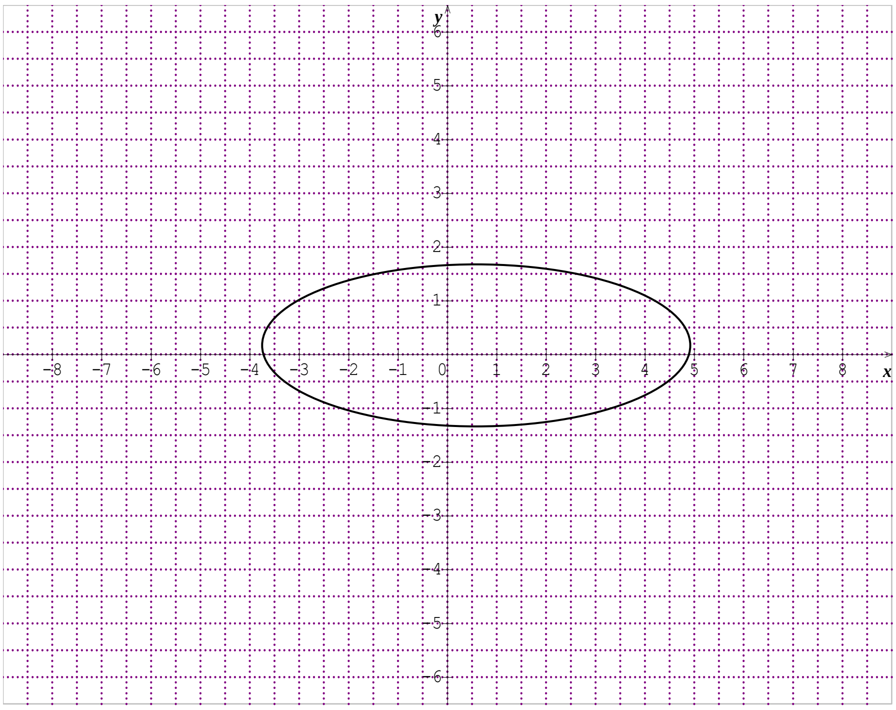
b) <u>2è Cas</u> : (a < b)

L'ellipse est portée par l'axe y' Ω y qui est le petit axe de l'ellipse.
Ainsi les éléments caractéristiques sont :

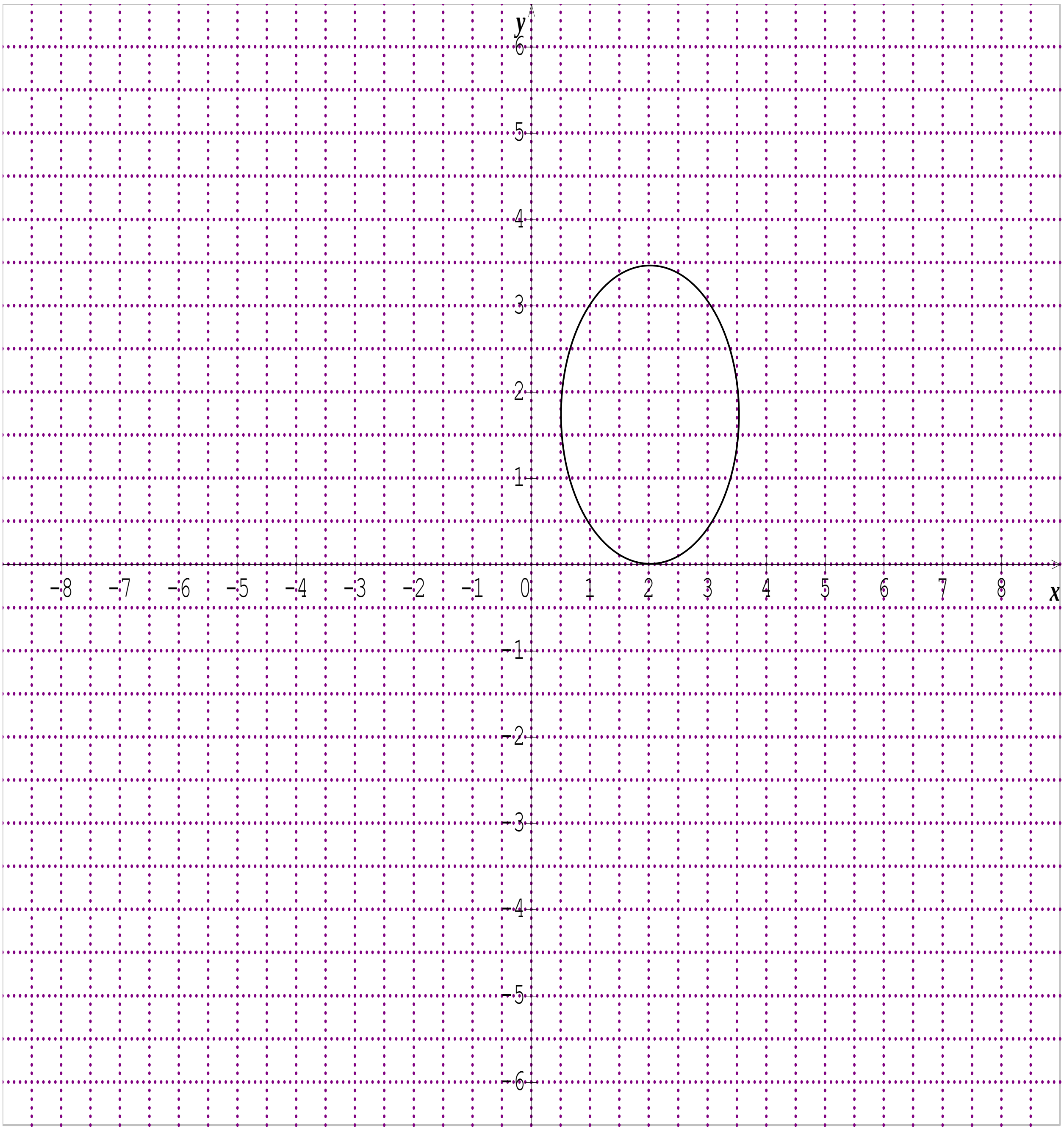
- centre : $\Omega \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix}$ ou $\begin{cases} X = x - x_o \\ Y = y - y_o \end{cases}$
- foyers : F (o ; $\sqrt{b^2 - a^2}$) ; F' (o ; - $\sqrt{b^2 - a^2}$)
- l'excentricité : e = $\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$
- les Directrices : (D) : y = $\frac{b}{e}$; (D') : y' = $\frac{-b}{e}$
- les sommets : A(a, o) ; A'(-a ; o) B(o ; b) ; B'(o ; - b)

c) <u>Représentation graphique</u> :

<u>1er Cas</u> : (a > b)



$2^{ème}$ Cas **(a < b)**



Exemple :

Déterminer les éléments caractéristiques de (M) puis construire sa courbe dans le repère.

a) (M) : $\left\{ M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in P / 9x^2 + y^2 18x - 4y = -4 \right\}$

b) (M) : $\left\{ M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in P / x^2 + 4y^2 - 2x + 16y + 13 = 0 \right\}$

Solution :

a) $9x^2 + y^2 – 18x – 4y = -4 \Leftrightarrow 9x^2 + y^2 – 18x – 4y + 4 = 0$

$\Rightarrow$ A = 9 ; B = 1 ; C = -18 ; D = -4 ; E = 4

$\Rightarrow$

Or A $\left(x + \frac{C}{2A}\right)^2 + B\left(y + \frac{D}{2B}\right)^2 = \frac{AD^2 + BC^2 - 4ABE}{4AB}$

$<=> 9\left(x + \frac{-18}{2(9)}\right)^2 + 1\left(y + \frac{-4}{2(1)}\right)^2 = \frac{9(-4)^2 + 1(-18)^2 - 4(9)(1)(4)}{4(9)(1)}$

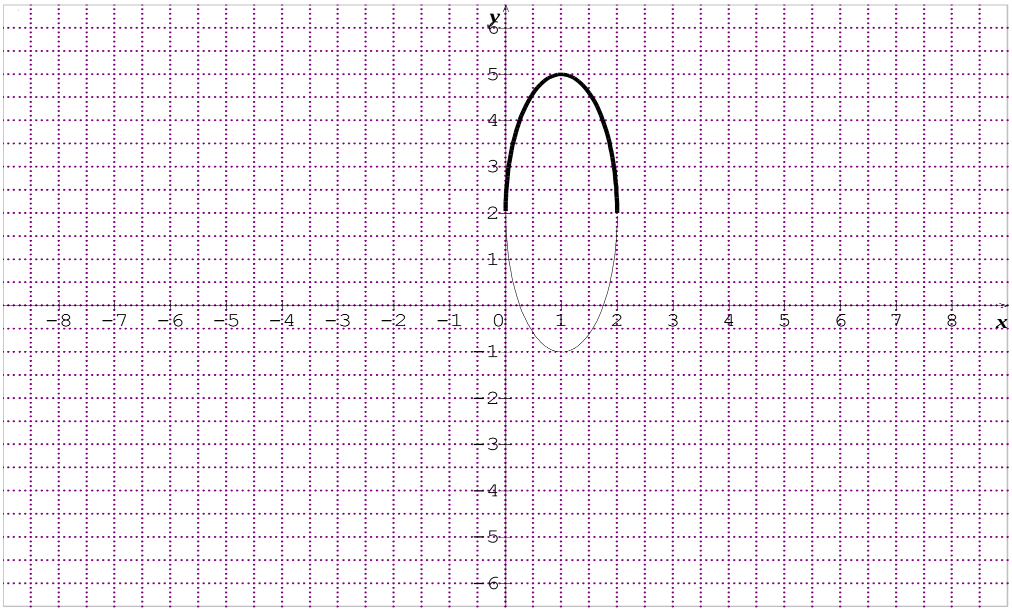
$<=> 9(x-1)^2 + 1(y-2)^2 = 9$. (en divisant le tout par 9) on a :

$<=> \frac{(x-1)^2}{1} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ (en posant X = x-1 et Y = y-2) on a :

$\frac{X^2}{1} - \frac{Y^2}{9} = 1$ Avec $\begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow (a < b)$

Alors l'ellipse est porté par l'axe (y' Ω y)
Ainsi les éléments caractéristiques sont :

- Centre : Ω (1 ; 2)
- Foyers : F(o; $\sqrt{8}$) ; F' (o ; -$\sqrt{8}$)
- Excentricité : e = $\frac{\sqrt{8}}{3} = 0{,}9$
- Directrice : (D) : y = $\frac{9}{\sqrt{8}} = 3{,}18$; (D') : y' = $\frac{-9}{\sqrt{8}} = -3{,}18$
- Sommets : A(1 ; 0) ; A'(-1 ; 0) ; B(0 ; 3) ; B'(0 ; -3).



b) $x^2 + 4y^2 - 2x + 16y + 13 = 0$

⇨ A = 1 ; B = 4 ; C = -2 ; D = 16 ; E = 13

⇨

Or $A\left(x+\frac{C}{2A}\right)^2 + B\left(y+\frac{D}{2B}\right)^2 = \frac{AD^2+BC^2-4ABE}{4AB}$

$\Leftrightarrow 1\left(x+\frac{-2}{2(1)}\right)^2 + 4\left(y+\frac{16}{2(4)}\right)^2 = \frac{1(16)^2+4(-2)^2-4(1)(4)(13)}{4(1)(4)}$

⇔ $(x-1)^2 + 4(y+2)^2 = 4$ (en divisant le tout par 4) on a :

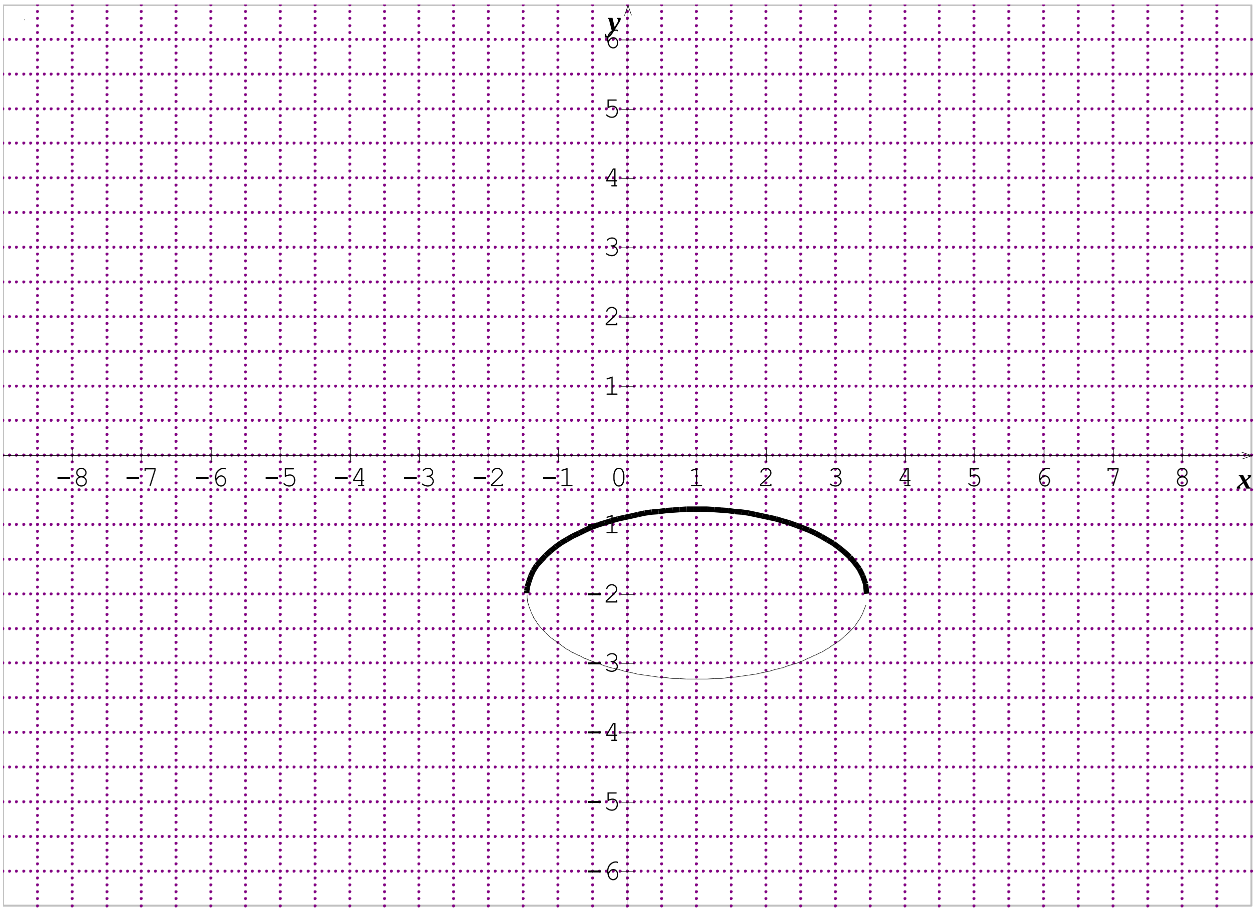
$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{1} = 1$ (En posant X = x – 1 et Y = y + 2) on a :

$\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{1} = 1$ Avec $\begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow (a > b)$

Alors l'ellipse est portée par l'axe ($x'\Omega x$)
Ainsi les éléments caractéristiques sont :

- Centre : Ω (1 ; -2)
- Foyers : F$\left(\sqrt{3};0\right)$ F'$\left(-\sqrt{3};0\right)$
- Excentricités : e = $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- Directrices : (D) : X = $\frac{4}{\sqrt{3}}$; (D') : X'= $\frac{-4}{\sqrt{3}}$

- Sommets : A(2 ; 0) ; A'(-2 ; 0) ; B(0 ; 1) B'(0 ; -1)



3) Les Hyperboles

Equation cartésienne : $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

Equation réduite : $A\left(x+\dfrac{C}{2A}\right)^2 + B\left(y+\dfrac{D}{2B}\right)^2 = \dfrac{AD^2+BC^2-4ABE}{4AB}$

Equations caractéristiques : $\dfrac{X^2}{a^2}-\dfrac{Y^2}{b^2}=1$ ou $\dfrac{-x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

a) **1er Cas** : $\left(\dfrac{X^2}{a^2}-\dfrac{Y^2}{b^2}=1\right)$

L'hyperbole est portée par l'axe $(X'\Omega X)$
Ainsi les éléments caractéristiques sont :

- Centre $\Omega\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ ou $\begin{cases}X = x-x_0\\Y = y-y_0\end{cases}$
- Foyers : $F\left(\sqrt{a^2+b^2}\,;0\right)$; $F'\left(-\sqrt{a^2+b^2}\,;0\right)$
- L'excentricité : e = $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$
- Les Asymptotes (D) : Y = $\dfrac{b}{a}x$; (D') : Y'= $\dfrac{-b}{a}x$
- Les sommets : A(a ; o) ; A'(-a ; o)

b) **2ème Cas** : $\left(\dfrac{-X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}=1\right)$

Les éléments caractéristiques dans ce cas sont :

- Centre $\Omega\begin{pmatrix}x_o\\y_o\end{pmatrix}$ où $\begin{cases}X = x-x_o\\Y = y-y_o\end{cases}$
-
- Foyers : $F\left(0;\sqrt{a^2+b^2}\right)$; $F'\left(0;-\sqrt{a^2+b^2}\right)$
-
- L'excentricité : e = $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$
- Les Asymptotes : (D) : X = $\dfrac{a}{b}y$; (D') : X' = $\dfrac{-a}{b}y$
-
- Les sommets : B(o ; b) ; B'(o ; -b).

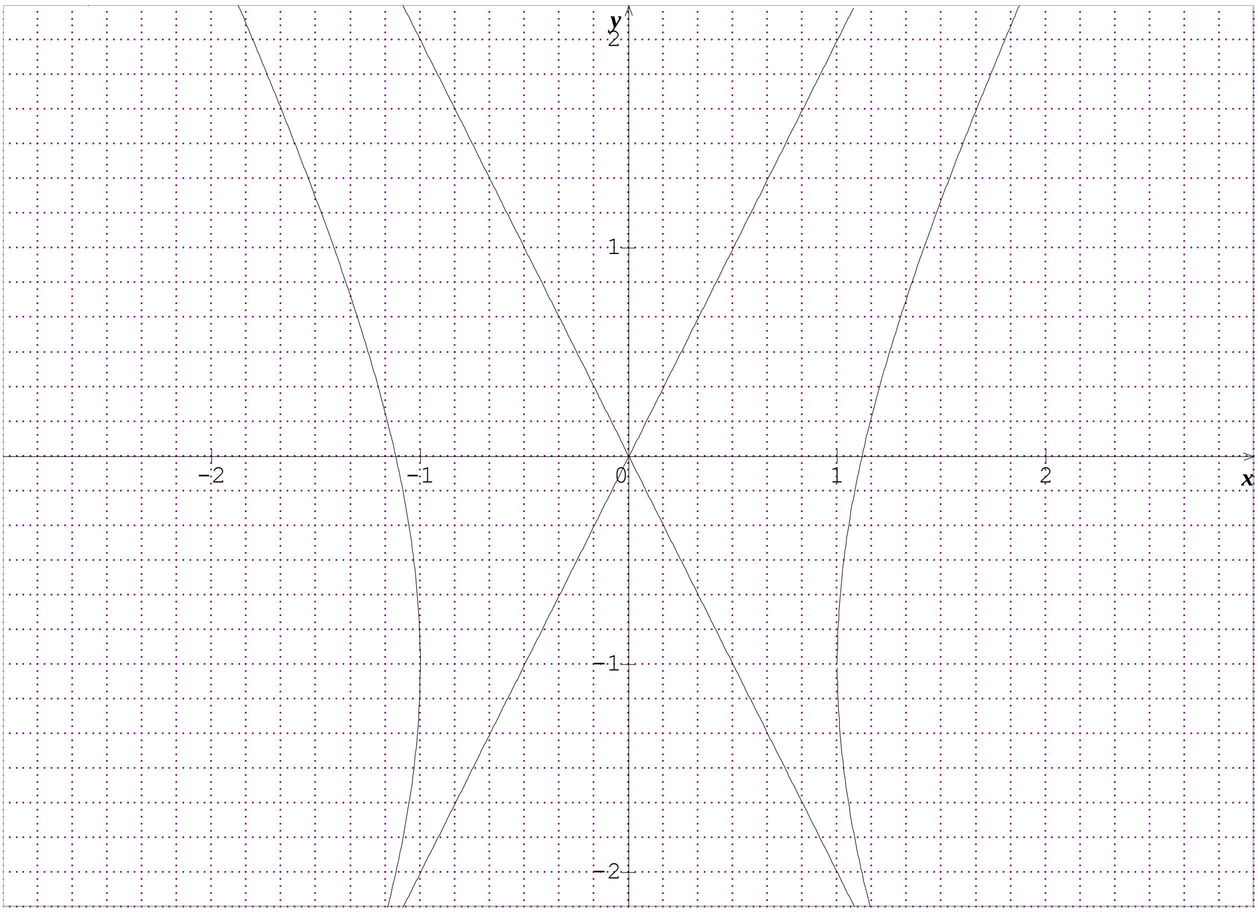
NB:

Dans les deux cas de parabole, on a :

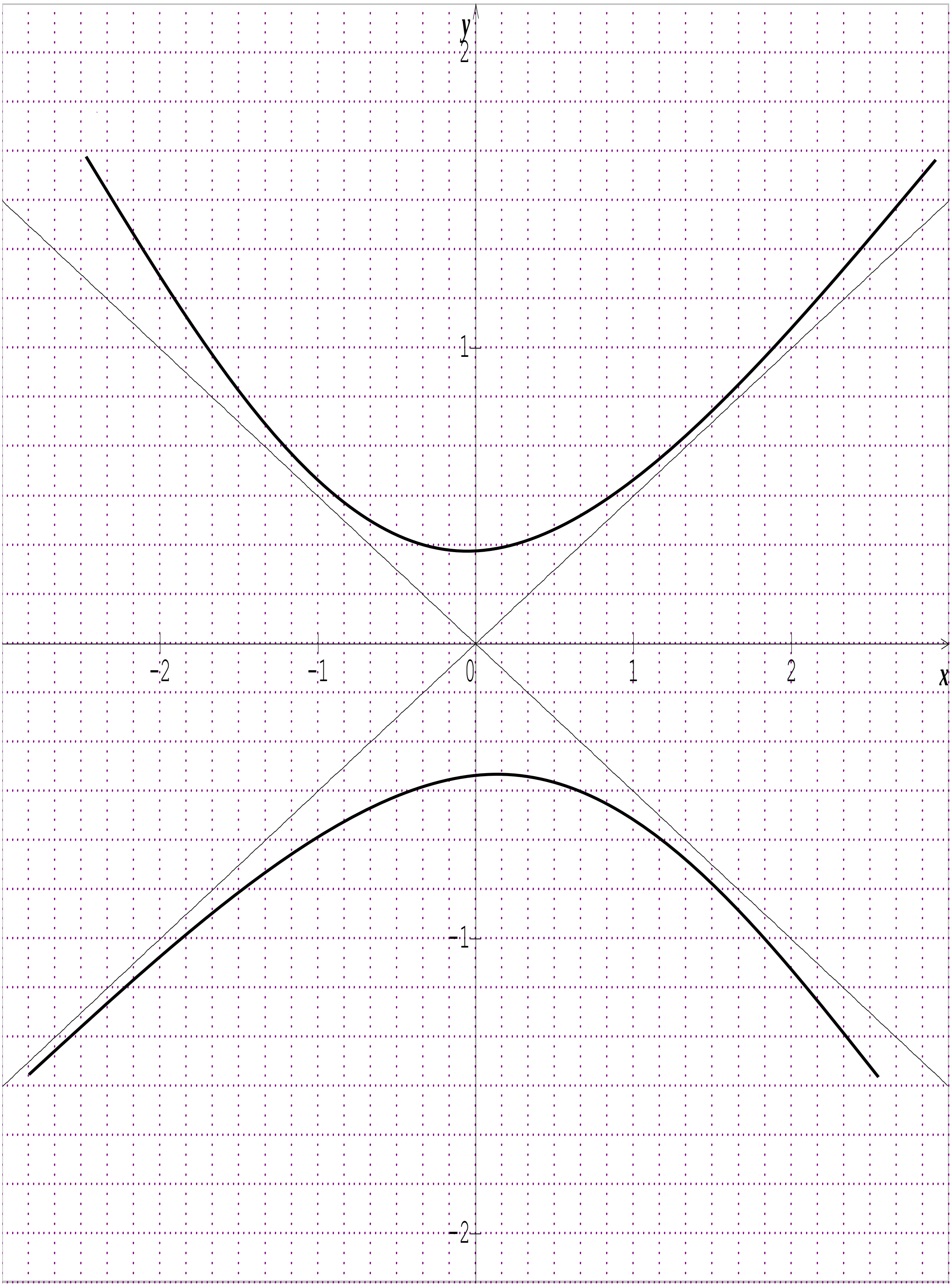
- X' Ω X et y' Ω y sont des axes de symétrie.
- Si a > b ; alors l'hyperbole est portée par l'axe (x' Ω x)
- Si a < b ; alors l'hyperbole est portée par l'axe (y' Ω y)
-

C) Représentation graphique :

1er Cas (a < b)



<u>2ème Cas</u> (a > b)



Exemple :

Déterminer les éléments caractéristiques de (Γ) puis construire sa courbe dans le repère.

c) (┌) : $\left\{ M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in P / 4x^2 - y^2 - 2y - 5 = 0 \right\}$

d) (┌) : $\left\{ M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in P / - x^2 + 4y^2 + 2x + 16y = -13 \right\}$

Solution :

a) $4x^2 - y^2 - 2y - 5 = 0 \Rightarrow A = 4$; $B = -1$; $C = 0$; $D = -2$; $E = -5$

Or $A\left(x + \frac{C}{2A}\right)^2 + B\left(y + \frac{D}{2B}\right)^2 = \frac{AD^2 + BC^2 - 4ABE}{4AB}$

$\Leftrightarrow 4\left(x + \frac{0}{2(4)}\right)^2 - 1\left(y + \frac{-2}{2(-1)}\right)^2 = \frac{4(-2)^2 - 1(0)^2 - 4(4)(-1)(-5)}{4(4)(-1)}$

$\Leftrightarrow 4(x + 0)^2 - (y + 1)^2 = 1$ (en divisant le tout par 4) on a :

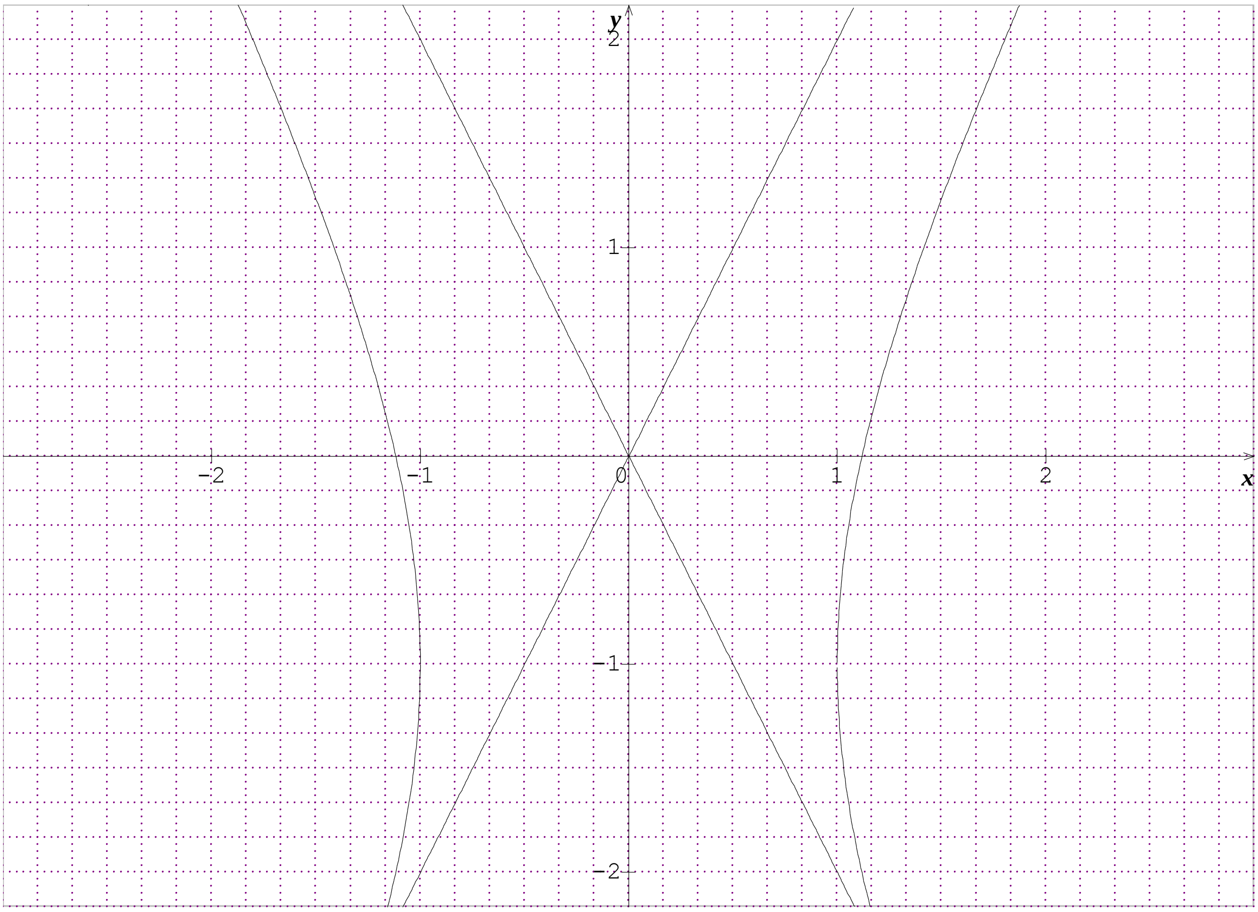
$\Leftrightarrow \frac{(x+0)^2}{1} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$ (en posant X = x + 0 et Y = y + 1), on a :

$\frac{X^2}{1} - \frac{Y^2}{4} = 1$ avec $\begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow (a < b)$

Alors l'hyperbole est portée par l'axe (y' Ω y)
Ainsi les éléments caractéristiques sont :

- Centre : Ω (0 ; -1)
- Foyers : F $\left(\sqrt{5}; 0\right)$; F' $\left(-\sqrt{5}; 0\right)$
- L'excentricité : e = $\frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5} = 2{,}23$
- Les Asymptotes : (D) : y = $\sqrt{4}.x = 2x$; (D') : y' = - 2x
- Les sommets : A(1 ; 0) ; A'(-1 ; 0)

NB : Pour construit les Asymptotes (D) et (D') on fait un tableau de valeur.


y
2
1
−2
−1
0
1
2
x
−1
−2

b) $-x^2 + 4y^2 + 2x + 16y = -13 \Leftrightarrow -x^2 + 4y^2 + 2x + 16y + 13 = 0$

c)

⇨ A = -1 ; B = 4 ; C = 2 ; D = 16 ; E = 13

Or $A\left(x+\frac{C}{2A}\right)^2 + B\left(y+\frac{D}{2B}\right)^2 = \frac{AD^2 + BC^2 - 4ABE}{4AB}$

$\Leftrightarrow -1\left(x+\frac{2}{2(-1)}\right)^2 + 4\left(y+\frac{16}{2(4)}\right)^2 = \frac{-1(16)^2 + 4(2)^2 - 4(-1)(4)(13)}{4(-1)(4)}$

$\Leftrightarrow \frac{-(x-1)^2}{2} + 2(y+2)^2 = 1$

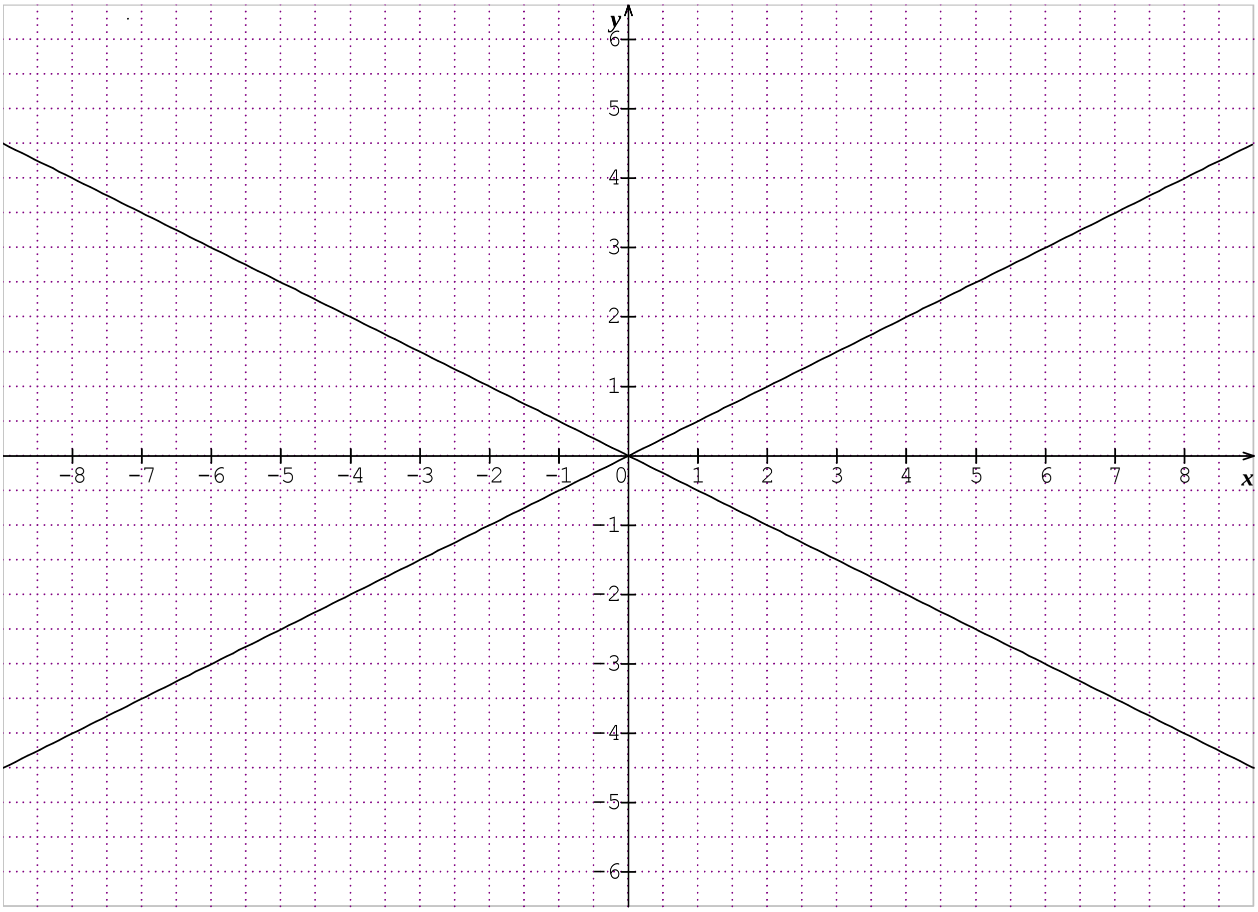
$\Leftrightarrow - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(y+2)^2}{\frac{1}{2}} = 1$ (en posant X = x-1 et Y = y + 2) on a :

$\frac{-X^2}{2} + \frac{Y^2}{\frac{1}{2}} = 1$ avec $\begin{cases} a^2 = 2 \\ b^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow (a > b)$

Alors l'hyperbole est porté par l'axe (X' Ω X)
Ainsi les éléments caractéristiques sont :

- Centre : Ω (1 ; -2)
- Foyers : F$\left(0\,;\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$; F'$\left(0\,;-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$
- L'excentricité : e = $\sqrt{5} = 2{,}23$
- Les Asymptotes : (D) : X = 2y ; (D') : X = -2y
- Les sommets : B$\left(0\,;\sqrt{\frac{2}{2}}\right)$; B'$\left(0\,;-\sqrt{\frac{2}{2}}\right)$

Reproduire vous-même le schema de cette courbe



N B : Pour la construction des Asymptotes, on fait un tableau de valeur.

EXERCICES

EXERCICE 1 :

Déterminer la nature puis tracer la courbe (M) dans chacun des cas suivants.

1) $-x^2 + 4x - y + 3 = 0$
2) $3x^2 + 4y^2 - 3x - 2y - 5 = 0$
3) $4x^2 - y^2 - 2y - 5 = 0$
4) $-2y + x + 2y^2 - 1 = 0$
5) $-x^2 + 4y^2 + 2x + 16y = -13$
6) $x^2 - 4y^2 - 4x + 16y + 4 = 0$
7) $9x^2 - 36y^2 + 18x + 144y = 176$
8) $-6x^2 - 4y^2 + y - 2 = 0$
9) $9x^2 + y^2 - 18x - 4y = -4$
10) $x^2 + 2y^2 - 4x = 1$

EXERCICE 2 :

A tout nombre complexe z, on associe f(z) tel que $f(z) = 2z - \bar{z}$

1) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tel que $|f(z) - 3| = 3$
2) Préciser la nature de (Γ) puis ses éléments caractéristiques (centre, axes, sommets, excentricité, foyers et directrices).

EXERCICE 3 :

On considère la courbe (C) d'équation $xy - 2x - 3y - 1 = 0$ et la transformation f du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{1-i}{2} z - 2 + 2i$

1) Démontrer que f admet un point invariant P que l'on déterminera.
2) Reconnaître la nature de f puis donner ces éléments caractéristiques
3) Exprimer les coordonnées (x, y) de M en fonction des coordonnées (x, y) de M'.
4) Démontrer que l'image de la courbe (C) par f est la courbe (C') d'équation
$x^2 - y^2 - x + 3y - 9 = 0$
5) en déduire la nature de (C') puis construire (C').

EXERCICE 4 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$. A tout réel m élément de l'intervalle]o, 1[, on associe la conique (E_m) d'équation (E_m) : $y^2 = 2x - \frac{x^2}{m}$

a) Quelle est la nature de (E_m) ?
b) Déterminer, par leurs coordonnées, les centres et les sommets de (E_m).

c) Déterminer la courbe (P) constituant l'ensemble des commets du grand axe de (E_m) quand m varie ans l'intervalle indiqué.
d) Déterminer la courbe (C) constituant l'ensemble des foyers de (E_m) quand m varie dans l'intervalle indiqué.
e) Construire $E_{3/4}$

Systèmes Linéaires

1) Définitions :

a) Cas général :

On appelle **système linéaire de p équations à n inconnues** tout système d'équations de la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{12}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + a_{p3}x_3 + \cdots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases} \qquad (S)$$

Dans lequel a_{ij} et b_i ($1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq n$) sont des réels ou des complexes donnés.
Une **solution** de (S) est un n – uplet (x_1 ; x_2 ; … ; x_n) de nombres réels ou complexes vérifiant simultanément les p équations de (S). Résoudre un tel système c'est trouver l'ensemble des solutions de (S).
Deux systèmes (S_1) et (S_2) sont équivalents, s'ils ont même ensemble de solutions, c'est-à-dire si toute solution de (S_1) est solution de (S_2) et réciproquement, si toute solution de (S_2) est solution de (S_1).

Exemple :

$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -10 \\ 4x_1 + 7x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$ est un système de 2 équations à 3 inconnues. (1 ; -2 ; 2) en est une solution.

b) Cas particuliers :

Un système est dit carré si p = n.
Un système carré est dit **triangulaire à diagonale unité** si l'on a :

$a_{ij} = 0$ pour $i > j$ et $a_{ii} = 1$, avec $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$.

Par exemple, la forme générale d'un système de 3 équations a 3 inconnues, triangulaire à diagonale unité est :

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \qquad\quad x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad x_3 = b_3 \end{cases}$$

La résolution d'un tel système est très simple et, de plus on admet :

Propriété

Un système triangulaire à diagonale unité admet, quelque soit le second membre, une et une seule solution.

Exemple :

Résoudre le système

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 9 \qquad L_1 \\ \qquad x_2 + 4x_3 = 7 \qquad L_2 \\ \qquad\qquad x_3 = 2 \qquad L_3 \end{cases}$$

Les solutions successives des équations L_3 puis L_2 puis L_1 montrent que (S) admet une solution et une seule (1 ; -1 ; 2).

2) Opérations élémentaires

a) Exemple et notations

Soit le système :

$$(S)\begin{cases} 2x + 12y + 17z = 53 \\ x + 5y + 7z = 22 \\ 3x + 22y + 19z = 35. \end{cases}$$

On va ramener la résolution de (S) à celle d'un système de (3 – 1) équations à (3 – 1) inconnues. Pour cela on forme un système équivalent à (S), en éliminant une inconnue dans deux équations du système.

- Echangeons les lignes 1 notée L_1, et 2 notée L_2.

Codage	**Système**
$L_1 \leftrightarrow L_2$	$(S_1)\begin{cases} x + 5y + 7z = 22 \\ 2x + 12y + 17z = 53 \\ 3x + 22y + 19z = 35. \end{cases}$

- Multiplions les deux membres de L_1 par – 2 et ajoutons l'équation obtenue à L_2, membre à membre, afin d'éliminer x dans la deuxième équation. Procédons de même avec L_3.

Codage	**Système**
$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$	$(S_2)\begin{cases} x+5y+7z=22 \\ \quad 2y+3z=9 \\ \quad 7y-2z=-31. \end{cases}$

- Appliquons à nouveau le procédé au système de 2 équations à 2 inconnues en éliminant y dans L_3.

Codage	**Système**
$L_2 \leftarrow \dfrac{L_2}{2}$	$(S_3)\begin{cases} x+5y+7z=22 \\ \quad y+\dfrac{3}{2}z=\dfrac{9}{2} \\ \quad 7y-2z=-31. \end{cases}$
$L_3 \leftarrow L_3 - 7L_2$	$(S_4)\begin{cases} x+5y+7z= \quad 22 \\ \quad y+\dfrac{3}{2}z= \quad \dfrac{9}{2} \\ \quad -\dfrac{25}{2}z=-\dfrac{125}{2}. \end{cases}$

Nous obtenons un système triangulaire (S_4). On vérifie que :
(S_4) est équivalent à (S) ;
(S_4) admet une solution et une seule : (2 ; -3 ; 5)

On en déduit que (S) admet une solution et une seule (2 ; -3 ; 5).

b) <u>Opérations élémentaires</u>

On note de haut en bas L_1, L_2………, L_n les n équations ou lignes du système.
On définit sur ces lignes les opérations suivantes, dites **élémentaires** :

- Echange de deux lignes :
$L_i \leftrightarrow L_j$.
- Multiplication d'une ligne par un réel non nul :
$L_i \leftarrow \mu L_i (\mu \in R^*)$.
- Addition à une ligne d'un multiple d'une autre ligne :
$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j (\lambda \in R, i \neq j)$.

On admet le théorème suivant.

<u>Théorème :</u>

Etant donné un système linéaire de p lignes L_1, L_2 …., L_p, on obtient un système équivalent en effectuant une des opérations élémentaires suivantes :

- $L_i \leftrightarrow L_j$
- $L_i \leftarrow \mu L_i \ (\mu \in R^*)$
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j (\lambda \in R, i \neq j)$.

La méthode du pivot de Gauss consiste à exécuter, dans un ordre bien déterminé, des opérations élémentaires sur les lignes d'un système, conduisant à un système triangulaire (équivalent) plus facile à résoudre ; cette méthode est en fait un algorithme susceptible d'être exécuté par un ordinateur.

<u>Exercice d'application :</u>

Résoudre dans R^4 le système :

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 \qquad\quad + 7x_4 = -8 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 2 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 20. \end{cases}$$

<u>Solution</u>

1ère Etape :

On fait apparaître 1 pour coefficient de x_1 dans la première ligne.

$$L_1 \leftarrow \frac{L_1}{2} \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 \quad + 3x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 \qquad\quad + 7x_4 = -8 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 2 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 \quad - 6x_4 = 20 \end{cases}$$

2ème Etape :

On élimine x_1 dans les lignes 2, 3 et 4.

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{matrix} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 0 + \ 0 - 2x_3 + 4x_4 = -10 \\ 0 + \ x_2 - 2x_3 - x_4 = -4 \\ 0 - 2x_2 + 7x_3 - 3x_4 = 22 \end{cases}$$

3ème Etape :

Le pivot de rang 2, coefficient de x_2 dans la deuxième équation, est nul, on échange L_2 et une autre ligne de façon à obtenir un pivot non nul.

$$L_2 \leftrightarrow L_3 \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = -4 \\ -2x_3 + 4x_4 = -10 \\ -2x_2 + 7x_3 - 3x_4 = 22. \end{cases}$$

Puis on élimine x_2 dans la ligne 4.

$$L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2 \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = -4 \\ -2x_3 + 4x_4 = -10 \\ 3x_3 - 5x_4 = 14. \end{cases}$$

4ème Etape :

On fait apparaître 1 pour coefficient de x_3 dans la troisième ligne, puis on élimine x_3 dans la ligne 4.

$$L_3 \leftarrow \frac{L_3}{-2} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = -4 \\ x_3 - 2x_4 = 5 \\ 3x_3 - 5x_4 = 14. \end{cases}$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 3L_3 \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = -4 \\ x_3 - 2x_4 = 5 \\ x_4 = -1. \end{cases}$$

En résolvant L_4, puis L_3, L_2 et L_1, on obtient $x_4 = -1$, $x_3 = 3$, $x_2 = 1$ et $x_1 = 0$.
Le système admet donc une solution unique (0 ; 1 ; 3 ; -1)

Remarque :

Lorsqu'il est impossible d'obtenir un pivot non nul on dit que la méthode de Gauss "se bloque" ; c'est le cas dans l'exercice 2.

Exercice d'application

Résoudre dans R⁴ le système :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 - 9x_4 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 13x_4 = a + 4 \ (a \in R). \end{cases}$$

Solution

1ère Etape : on élimine l'inconnue x_1 dans les lignes 2, 3 et 4.

$$\begin{array}{l} l_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 0 + 2x_2 - 4x_3 - 6x_4 = -2 \\ 0 + 2x_2 - 4x_3 - 7x_4 = -1 \\ 0 - 3x_3 + 6x_3 + 11x_4 = a + 3. \end{cases}$$

2ème Etape : on élimine l'inconnue x_2 dans les lignes 3 et 4.

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_4 \leftarrow 2L_4 + 3L_2 \end{array} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 0 \quad 2x_2 - 4x_3 - 6x_4 = -2 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad x_4 = -1 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 4x_4 = 2a. \end{cases}$$

Deux cas sont à envisager :

1er Cas : a ≠ -2, le système initial n'a pas de solution S = Ø.

2ème Cas : a = - 2, le système initial (ou final) admet une infinité de solutions :

S = {(7 – k ; 2k – 4 ; k ; - 1) ; k ∈ R}.

EXERCICES

Exercise 1 :

Résoudre dans R^3 les systèmes donnés.

1) $\begin{cases} 3x+4y-5z=7 \\ 3y-7z=1 \\ 8z=16. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x+3y-4z=12 \\ x+3y+z=6 \\ -x-2y+3z=-8 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+3y+2z=2 \\ x+4y+3z=3 \\ 2x+7y+6z=8 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x-2y+3z=2 \\ x-y+7z=7 \\ 2x+4y+9z=15. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x-2y+3z=1 \\ x-y+7z=-4 \\ 2x+4y+9z=-9 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x+y = a \\ x + z = b \\ y + z = c \end{cases}$

a, b et c sont trois nombres réels donnés.

7) $\begin{cases} 2x+y+z=4 \\ x+2y+z=4 \\ x+y+2z=4. \end{cases}$

8) $\begin{cases} 4x-2y+7z=20 \\ 3x-y+3z=10 \\ 2x-3y-z=3. \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x+3y-5z=4 \\ x+y-z=1 \\ -3x-4y+z=-5 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 2x+4y = 16 \\ 3x+9y+18z = 9 \\ 4x+8y+z = 29 \end{cases}$

11) a) $\begin{cases} x+y+z = 1 \\ x+2y-2z = 0 \\ 2x+3y-z = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y-2z=0 \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$

Exercice 2 :

Résoudre dans R^4 les systèmes donnés.

1) $\begin{cases} 2x + 3y - z + 4t = -1 \\ 3y - 2z - 2t = -6 \\ z + 6t = -1 \\ -4t = 2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+2y+4z+6t = 8 \\ 3x+4y+11z+15t = 21 \\ 5x+8y+27z+17t = 57 \\ 4x+2y-5z+27t = -5 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 8x_1 + 40x_2 - 32x_3 + 24x_4 = 16 \\ 2x_1 + 13x_2 + 4x_3 - 6x_4 = -2 \\ -3x_1 - 17x_2 + 6x_3 - 7x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 - 11x_3 + 5x_4 = -7 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 6x_4 = -4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 14x_3 + 3x_4 = 8 \\ x_1 + 3x_2 + 14x_3 - 9x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 10x_4 = -3 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x + 6y + 4z + 2t = -2 \\ -2x - 3y + 5z - 5t = 2 \\ -3x - 8y - 3z + 2t = 1 \\ -x - 2y + z + 10t = 0. \end{cases}$

Exercice 3 :

Résoudre dans R^5 les systèmes donnés.

1) $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_5 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 3x_5 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 - 5x_5 = -5 \\ 2x_2 + 10x_3 + 8x_4 + 16x_5 = 18 \\ 5x_1 + 9x_2 - x_3 + 10x_4 + 12x_5 = -2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 4y + 6z + 8t + 10u = -2 \\ -x + z + 2t - 7u = -3 \\ -2x - 5y - 6z - 15t - 15u = 2 \\ -x - 4y - 7z - 10t - 3u = 5 \\ -2x - 7y - 10z - 20t - 9u = -6 \end{cases}$

Exercice 4 :

1) Trouver un polynôme P de degré inférieur ou égal à 2 vérifiant :

P(0) = 1 ; P(1) = 3 et P(-1) = 1.

2) Trouver un polynôme P de degré inférieur ou égal à 2 vérifiant :

P(2) = P(-2) = 1 ; P(0) = - 1

3) Trouver un polynôme P de degré inférieur ou égal à 2 vérifiant :

P(1) = 0 ; P(3) = 16 ; P'(2) = 8

4) Trouver un polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant :

$P(1) = 1$; $P(2) = 15$; $P(3) = 51$; $P'(-1) = 11$.

5) Trouver un polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 qui prenne la valeur 1 en 0 et la valeur – 4 en 1 et dont la courbe représentative C admette des tangentes de coefficients directeurs – 6 et 6 respectivement aux points de C d'abscisses 0 et 2.

<u>Exercice 5</u> :

Un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace est donné

1) Déterminer l'intersection des plans P_1, P_2 et P_3.

$P_1 : 2x + 2y + 6z = -1$
$P_2 : -3x - 4y - 9z = 1$
$P_3 : -y + 2z = 4$.

2) Déterminer l'intersection des plans P_1, P_2 et P_3.

$P_1 : 3x + 3y - 3z = -3$
$P_2 : -3x - 3y = -1$
$P_3 : 2x + 2y - 8z = -8$

<u>Exercice 6</u> :

1) Résoudre dans R^3 le système suivant :

$$\begin{cases} 5x + 7y - 3z = 22 \\ x + 2y - z = 6 \\ 2x - 2y + 5z = -7 \end{cases}$$

2) En déduire la solution des systèmes suivants :

a) $$\begin{cases} 5|a| + 7|b| - 3|c| = 22 \\ |a| + 2|b| - |c| = 6 \\ 2|a| - 2|b| + 5|c| = -7 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} \dfrac{10}{x-1} + \dfrac{7}{2y} - 3(z+2) = 22 \\ \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{1}{y} - (z+2) = 6 \\ \dfrac{4}{x-1} - \dfrac{1}{y} + 5(z+2) = -7 \end{cases}$$

Exercice 7 :

a) Résoudre dans R^4 le système :

$$\begin{cases} x+y+z+t = -4 \\ -x+y-z+t = 4 \\ 8x+4y+2z+t = 1 \\ 3x+2y+z = 0. \end{cases}$$

b) Déterminer les coefficients a, b, c, d de la fonction.
f : R → R
X $\mapsto$ $aX^3 + bX^2 + cX + d$

Sachant que f(1) = - 4, f(-1) = 4, f(2) = 1 et que f admet un minimum pour 1.

1) Résoudre dans R^4 le système linéaire à quatre inconnues réelles a, b, c, d :

$$\begin{cases} a+b+c+d = -\dfrac{13}{2} \\ 4a+3b+2c+d = 0 \\ 8a+4b+2c+d = -2 \\ 32a+12b+4c+d = 0 \end{cases}$$

2) Application : Soit f la fonction de R dans R définie par :

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e.$

Déterminer les réels a, b, c, d, e sachant que la courbe représentative C passe par les points O(0 ; 0), A $\left(1;-\dfrac{13}{2}\right)$, B (2 ; -4), et que C admet en chacun des points A et B une tangente de vecteur directeur $\vec{i}$.

Exercice 8 :

1) Déterminer la fonction polynôme P, de degré 5 qui coïncide avec la fonction sinus en 0 et en π, dont la dérivée première coïncide avec celle de la fonction sinus en 0 et en π, et dont la dérivée seconde coïncide avec celle de la fonctions sinus en 0 et en π.

2) Soit f_0, f_1, f_2 et f_3 les fonctions définies sur R par :

$f_0(x) = 1$; $f_1(x) = 1 + x$; $f_2(x) = 1 + x + x^2$; $f_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3$.

a) On considère la fonction φ définie sur R par :

$\varphi(x) = -\frac{4}{5}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + x - 7$

Etablir qu'il existe un quadruplet de réels (a ; b ; c ; d) et un seul tel que :

$\varphi = af_0 + bf_1 + cf_2 + df_3$.

b) soit Ψ la fonction définie sur R par :

$\Psi(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$, où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des réels donnés.

Démontrer qu'il existe un quadruplet (a ; b ; c ; d) et un seul tel que :

$\Psi = af_0 + bf_1 + cf_2 + df_3$.

3) Triangle

On considère un triangle ABC tel que AB = 5 cm, AC = 6 cm et BC = 7 cm.
Le cercle inscrit dans le triangle ABC est tangent à (BC) en A', à (AC) en B' et à (AB) en C'.
Calculer AC', AB', BA', CA' et CB'.