

Terminales C, D, E, TI

Eric Simo, Editeur

# PHYSIQUE

## Nouvelle Edition

Emmanuel Simo, Maurice Noubissi

Avec 474 schémas d'illustration  
et 184 exercices corrigés



Eric Simo, Msc.-Ing. TU-BS (Editeur)  
An den Äckern 2  
31224 Peine  
Allemagne  
kuateric@gmail.com

Physique Terminales C, D, E, TI. Nouvelle Edition

Auteurs: Emmanuel Simo, Maître Es Sciences; Maurice Nombissi, Maître Es Sciences (Cameroun)

Contributions: E. S. (Allemagne); F. W., J. T. (Cameroun); E. A. F. (Italie, R-U); T. v. P. (Pays-Bas); A. Z., L. S., I. D. (Ukraine); D. R., P. B. (Italie); M. B. (Zimbabwe); F. K. (Pakistan); A. K. (Russie); R. K. (Maroc)

Conception graphique des couvertures: R. A. (Bangladesh)  
Thème artistique des couvertures 2017: Intelligence Artificielle

ISBN 978-3-947242-01-6 • Maison d'Edition SIMO • Bandjoun Brunswick Belfast Rotterdam • 2017

Sous réserve des exceptions légales, toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle, faite, par quelque procédé que ce soit sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit, est illicite et constitue une contrefaçon sanctionnée par le Code de la Propriété Intellectuelle. En cas d'utilisation aux fins de vente, de location, de publicité ou de promotion, l'accord de l'auteur ou des ayants droit est nécessaire.

Site Internet: [www.simo.education](http://www.simo.education)

## Avant-propos

---

Vous avez choisi ce livre parce que vous avez un objectif à atteindre. C'est un instrument réellement utile et efficace pour aider les apprenants des **classes de terminales scientifiques et techniques**, quel que soit leur niveau, à améliorer leurs performances en **physique**.

Inspirée de la pédagogie nouvelle, la conception de ce livre se fonde sur deux outils à savoir : le *cours* et les *exercices corrigés*.

Le cours a été conçu selon le projet pédagogique suivant :

- Une présentation claire parfaitement lisible qui permet de faciliter le travail de l'apprenant.
- Un enseignement expérimental : comme le programme le demande, l'exposé privilégie l'expérience. A chaque fois que cela est possible les notions sont présentées grâce à une expérience décomposée en un dispositif suivi d'observations. L'interprétation qui suit systématiquement ces expériences conduit aux définitions et aux grandes lois de la physique.
- Un cours bien structuré allant à l'essentiel : conforme aux contenus du programme, ce cours prépare aux compétences exigibles, mais en se limitant strictement aux notions qui doivent être étudiées. Nous l'avons donc voulu bref.

Les exercices résolus et commentés, soutenus par des *méthodes de résolution* permettent à l'apprenant d'acquérir l'esprit scientifique et les principaux modes de raisonnement qu'il devra savoir développer. C'est une bonne façon d'aborder les nombreux exercices de chaque chapitre. Dans le souci d'efficacité qui a fait le succès de cette édition, nous attirons votre attention dans les solutions proposées, sur la schématisation, la représentation graphique, le choix des notations, la conduite littérale et enfin l'application numérique.

Notons cependant qu'il ne sert à rien de lire à priori la solution d'un exercice, mais qu'il faut chercher cette solution après avoir lu l'énoncé en entier et ne consulter la solution proposée dans le livre que pour contrôler son propre résultat ou en cas d'hésitation.

Nous formons le vœu que cet ouvrage constitue un outil efficace pour les apprenants des **classes de terminales scientifiques et techniques** et qu'il apporte à nos collègues professeurs l'aide qu'ils sont en droit d'attendre. Nous attendons avec plaisir toutes les remarques et suggestions.





# Table des matières

1	<b>Forces et champs</b>	1
1.1	<b>Les forces de gravitation et le champ gravitationnel</b>	2
1.1.1	Les forces de gravitation : Loi de l'attraction universelle ou loi de Newton	2
1.1.2	Notion de champ de gravitation	2
1.1.3	Champ de gravitation créé par une masse ponctuelle	2
1.1.4	Les lignes de champ	3
1.1.5	Champ de gravitation d'un objet à symétrie sphérique	3
1.1.6	Champ de gravitation et champ de pesanteur	4
1.1.7	Variation de l'intensité de la pesanteur	4
1.2	<b>Les forces électriques et le champ électrique</b>	5
1.2.1	Les charges électriques	5
1.2.2	Unité de charge électrique	6
1.2.3	Interaction entre les charges : La loi de Coulomb	6
1.3	<b>Le champ électrostatique</b>	7
1.3.1	Lignes de champ	9
1.3.2	Champ électrique uniforme	10
1.4	<b>Les forces magnétiques – Le champ magnétique</b>	10
1.4.1	Les forces magnétiques	10
1.4.2	Le champ magnétique	11
1.4.3	Le champ magnétique terrestre ou champ géomagnétique	13
1.4.4	Champ magnétique créée par un courant	13
1.4.5	Cas d'une bobine plate circulaire	14
1.4.6	Le champ magnétique créé par un solénoïde infiniment long	14
1.4.7	Action d'un champ magnétique sur un élément de circuit parcouru par un courant. Loi de Laplace	15
1.4.8	La force de Laplace	18
1.4.9	La force magnétique de Lorentz	18
1.5	<b>Enoncés des exercices et problèmes</b>	19
1.6	<b>Solutions des exercices et problèmes</b>	26
2	<b>Généralités sur les mouvements</b>	41
2.1	<b>Notions mathématiques sur la dérivation et l'intégration</b>	42
2.1.1	La dérivation	42
2.1.2	L'intégration	42
2.2	<b>Le mouvement</b>	42
2.2.1	Caractère relatif du mouvement	42
2.2.2	Notion de point mobile	42
2.2.3	Repérage dans le temps	43
2.2.4	Les paramètres cinématiques	43
2.3	<b>Les mouvements rectilignes</b>	45
2.3.1	Mouvement rectiligne uniforme (m.r.u.)	45
2.3.2	Mouvement rectiligne uniformément varié (m.r.u.v.)	45
2.3.3	Mouvement rectiligne sinusoïdal	46
2.4	<b>Mouvements circulaires</b>	47
2.4.1	Généralités	47
2.4.2	Mouvement circulaire uniforme	48
2.4.3	Mouvement circulaire uniformément varié	48
2.4.4	Mouvement circulaire sinusoïdal	48
2.5	<b>Mouvement d'un solide</b>	49
2.5.1	Mouvement de translation	49
2.5.2	Mouvement de rotation	49

2.6	<b>Enoncés des exercices et problèmes</b>	50
2.7	<b>Solutions des exercices et problèmes</b>	53
3	<b>Les lois de Newton</b>	63
3.1	<b>Système dynamique et milieu extérieur</b>	64
3.1.1	Système dynamique	64
3.1.2	Notion de point matériel	64
3.1.3	Caractéristiques d'un système	64
3.1.4	Forces intérieures et forces extérieures	65
3.1.5	Système isolé - Système pseudo-isolé	66
3.2	<b>Principes des actions réciproques</b>	66
3.3	<b>Principe d'inertie</b>	66
3.3.1	Les référentiels galiléens	66
3.4	<b>Théorème du centre d'inertie</b>	67
3.5	<b>Dynamique du solide en translation</b>	67
3.6	<b>Dynamique du solide en rotation</b>	67
3.7	<b>Théorème de Huygens</b>	68
3.8	<b>Méthode de résolution des problèmes de dynamique</b>	69
3.9	<b>Enoncés des exercices et problèmes</b>	69
3.10	<b>Solutions des exercices et problèmes</b>	72
4	<b>Application des lois de Newton aux mouvements rectilignes uniformément variés</b>	79
4.1	<b>Généralités</b>	80
4.2	<b>Les mouvements rectilignes</b>	80
4.2.1	Chute libre des corps	80
4.2.2	Etude dynamique de la chute libre	80
4.3	<b>Mouvement d'un solide sur un plan incliné</b>	81
4.3.1	Le plan incliné est parfaitement lisse	81
4.3.2	Le plan incliné est rugueux	82
4.4	<b>Les mouvements plans</b>	83
4.4.1	Mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur supposé uniforme	83
4.5	<b>Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme</b>	84
4.5.1	Cadre d'étude	84
4.6	<b>Enoncés des exercices et problèmes</b>	87
4.7	<b>Solutions des exercices et problèmes</b>	91
5	<b>Application des lois de Newton aux mouvements circulaires uniformes</b>	103
5.1	<b>Mouvement d'un pendule conique</b>	104
5.2	<b>Mouvement d'un véhicule dans un virage</b>	104
5.3	<b>Mouvement d'un satellite</b>	105
5.3.1	Étudions le mouvement du satellite	105
5.3.2	Expression de la vitesse du satellite	106
5.3.3	Période de révolution du satellite	106
5.4	<b>Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme</b>	106
5.4.1	Etude dynamique : déviation d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme	106
5.5	<b>Enoncés des exercices et problèmes</b>	108
5.6	<b>Solutions des exercices et problèmes</b>	110



6	<b>Généralités sur les systèmes oscillants</b>	117
6.1	<b>Généralités sur les phénomènes périodiques</b>	118
6.1.1	Caractéristiques d'un phénomène périodique	118
6.2	<b>Phénomènes oscillatoires ou vibratoires</b>	118
6.2.1	Définition et exemple	118
6.2.2	Amortissement et entretien des oscillations	118
6.3	<b>Etude expérimentale des phénomènes périodiques</b>	119
6.3.1	Examinons quelques cas particuliers	119
6.4	<b>Cas particulier des phénomènes périodiques sinusoïdaux</b>	121
6.4.1	Représentation d'une fonction sinusoïdale par le vecteur de Fresnel	121
6.4.2	Différence de phase entre deux fonctions sinusoïdales de même période	122
6.5	<b>Enoncés des exercices et problèmes</b>	124
6.6	<b>Solutions des exercices et problèmes</b>	125
7	<b>Les oscillateurs mécaniques</b>	129
7.1	<b>Introduction</b>	130
7.2	<b>Exemples d'oscillateurs mécaniques. Généralités sur les oscillateurs</b>	130
7.2.1	Généralités sur les oscillateurs	130
7.3	<b>Etude du pendule élastique</b>	130
7.3.1	Description	130
7.3.2	Etude de pendule élastique horizontal	130
7.3.3	Etude du pendule élastique vertical	132
7.4	<b>Etude du pendule de torsion</b>	134
7.4.1	Description	134
7.4.2	Etude dynamique	134
7.4.3	Solution de l'équation différentielle du mouvement	135
7.4.4	Etude énergétique	135
7.5	<b>Etude du pendule pesant</b>	135
7.5.1	Description	135
7.5.2	Etude dynamique	136
7.5.3	Etude énergétique	137
7.5.4	Le pendule simple	137
7.6	<b>Notions d'oscillations forcées et de résonance</b>	138
7.6.1	Amortissement des oscillations	138
7.6.2	Entretien des oscillations : oscillations forcées	138
7.7	<b>Enoncés des exercices et problèmes</b>	139
7.8	<b>Solutions des exercices et problèmes</b>	143
8	<b>Les oscillateurs électriques</b>	157
8.1	<b>Introduction</b>	158
8.1.1	Les oscillations électriques libres dans le circuit $LC$	158
8.1.2	Equation différentielle régissant les oscillations électriques non amorties	158
8.1.3	Lois horaires et diagrammes	160
8.2	<b>Energie électromagnétique d'un circuit</b>	160
8.2.1	Energie magnétique d'une bobine	160
8.2.2	Energie électrique d'un condensateur	160
8.2.3	Conservation de l'énergie électromagnétique	161
8.3	<b>Entretien des oscillations électriques</b>	161
8.3.1	Amortissement des oscillations	161
8.3.2	Equation différentielle pour un oscillateur électrique amorti	161
8.3.3	Tensions aux bornes d'un dipôle $RLC$	162
8.3.4	Caractéristiques du dipôle $RLC$	162
8.3.5	Etude de la résonance d'intensité	164

8.3.6	Puissance électrique en régime sinusoïdal . . . . .	165
8.4	<b>Analogie mécano – électrique</b> . . . . .	167
8.5	<b>Enoncés des exercices et problèmes</b> . . . . .	168
8.6	<b>Solutions des exercices et problèmes</b> . . . . .	172
9	<b>Les ondes mécaniques</b> . . . . .	183
9.1	<b>Les signaux</b> . . . . .	184
9.1.1	Signal transversal . . . . .	184
9.1.2	Signal longitudinal . . . . .	185
9.1.3	Signal de torsion . . . . .	185
9.2	<b>Propagation d'un signal</b> . . . . .	185
9.3	<b>Propriétés de la célérité</b> . . . . .	185
9.4	<b>Mise en évidence du phénomène de propagation d'une onde mécanique</b> . . . . .	185
9.4.1	Le long d'une corde . . . . .	185
9.4.2	A la surface d'un liquide . . . . .	186
9.5	<b>Superposition des ondes progressives de faible amplitude</b> . . . . .	186
9.5.1	Les interférences . . . . .	187
9.5.2	Expérience d'interférences mécaniques à la surface de l'eau . . . . .	187
9.6	<b>Les ondes stationnaires</b> . . . . .	188
9.6.1	Expérience de Melde . . . . .	188
9.6.2	Relation entre la longueur $l$ et la tension $F$ de la corde vibrante . . . . .	190
9.7	<b>Enoncés des exercices et problèmes</b> . . . . .	190
9.8	<b>Solutions des exercices et problèmes</b> . . . . .	194
10	<b>La lumière</b> . . . . .	207
10.1	<b>Introduction</b> . . . . .	208
10.2	<b>Les interférences lumineuses</b> . . . . .	208
10.2.1	L'expérience de fentes de young . . . . .	208
10.2.2	Expression de la différence de marche . . . . .	209
10.2.3	Expression de l'interfrange . . . . .	209
10.2.4	Définition et calcul de l'interfrange . . . . .	210
10.2.5	Les interférences en lumière blanche . . . . .	210
10.3	<b>L'effet photoélectrique</b> . . . . .	211
10.3.1	Mise en évidence expérimentale de l'effet photoélectrique . . . . .	211
10.3.2	Etude quantitative . . . . .	212
10.3.3	Etude des caractéristiques . . . . .	212
10.4	<b>Courbe de Millikan</b> . . . . .	213
10.4.1	Interprétation . . . . .	214
10.5	<b>Enoncés des exercices et problèmes</b> . . . . .	215
10.6	<b>Solutions des exercices et problèmes</b> . . . . .	218
11	<b>La radioactivité</b> . . . . .	229
11.1	<b>Introduction</b> . . . . .	230
11.2	<b>Composition des émissions radioactives</b> . . . . .	230
11.3	<b>Origine des rayonnements et equation-bilan des transformations radioactives</b> . . . . .	230
11.3.1	Origine des rayonnements . . . . .	230
11.3.2	Equation-bilan des transformations radioactives . . . . .	230
11.3.3	La radioactivité $\alpha$ . . . . .	230
11.3.4	La radioactivité $\beta^-$ . . . . .	230
11.3.5	La radioactivité $\beta^+$ . . . . .	231
11.3.6	La radioactivité $\gamma$ . . . . .	231
11.4	<b>Propriétés générales des désintégrations</b> . . . . .	231
11.4.1	La loi de décroissance radioactive . . . . .	231



11.4.2	Période radioactive $T$ . . . . .	231
11.5	<b>D'autres réactions nucléaires</b> . . . . .	231
11.5.1	La fission . . . . .	232
11.5.2	La fusion . . . . .	232
11.6	<b>Enoncés des exercices et problèmes</b> . . . . .	232
11.7	<b>Solutions des exercices et problèmes</b> . . . . .	234
12	<b>Sujets d'examen – Baccalauréat Physique – Séries C, E</b> . . . . .	239
12.1	<b>Enoncé des sujets d'examen</b> . . . . .	240
12.1.1	Enoncé – Baccalauréat 2012 . . . . .	240
12.1.2	Enoncé – Baccalauréat 2013 . . . . .	242
12.1.3	Enoncé – Baccalauréat 2014 . . . . .	244
12.1.4	Enoncé – Baccalauréat 2015 . . . . .	245
12.1.5	Enoncé – Baccalauréat 2016 . . . . .	247
12.1.6	Enoncé – Baccalauréat 2017 . . . . .	249
12.2	<b>Solution des sujets d'examen</b> . . . . .	250
12.2.1	Solution – Baccalauréat 2012 . . . . .	250
12.2.2	Solution – Baccalauréat 2013 . . . . .	253
12.2.3	Solution – Baccalauréat 2014 . . . . .	256
12.2.4	Solution – Baccalauréat 2015 . . . . .	259
12.2.5	Solution – Baccalauréat 2016 . . . . .	261
12.2.6	Solution – Baccalauréat 2017 . . . . .	264
13	<b>Sujets d'examen – Baccalauréat Physique – Séries D, TI</b> . . . . .	265
13.1	<b>Enoncé des sujets d'examen</b> . . . . .	266
13.1.1	Enoncé – Baccalauréat 2012 . . . . .	266
13.1.2	Enoncé – Baccalauréat 2013 . . . . .	267
13.1.3	Enoncé – Baccalauréat 2014 . . . . .	269
13.1.4	Enoncé – Baccalauréat 2015 . . . . .	270
13.1.5	Enoncé – Baccalauréat 2016 . . . . .	271
13.1.6	Enoncé – Baccalauréat 2017 . . . . .	272
13.2	<b>Solution des sujets d'examen</b> . . . . .	273
13.2.1	Solution – Baccalauréat 2012 . . . . .	273
13.2.2	Solution – Baccalauréat 2013 . . . . .	275
13.2.3	Solution – Baccalauréat 2014 . . . . .	278
13.2.4	Solution – Baccalauréat 2015 . . . . .	281
13.2.5	Solution – Baccalauréat 2016 . . . . .	284
13.2.6	Solution – Baccalauréat 2017 . . . . .	286





# Forces et champs

1.1	<b>Les forces de gravitation et le champ gravitationnel</b>	2
1.1.1	Les forces de gravitation : Loi de l'attraction universelle ou loi de Newton	2
1.1.2	Notion de champ de gravitation	2
1.1.3	Champ de gravitation créé par une masse ponctuelle	2
1.1.4	Les lignes de champ	3
1.1.5	Champ de gravitation d'un objet à symétrie sphérique	3
1.1.6	Champ de gravitation et champ de pesanteur	4
1.1.7	Variation de l'intensité de la pesanteur	4
1.2	<b>Les forces électriques et le champ électrique</b>	5
1.2.1	Les charges électriques	5
1.2.2	Unité de charge électrique	6
1.2.3	Interaction entre les charges : La loi de Coulomb	6
1.3	<b>Le champ électrostatique</b>	7
1.3.1	Lignes de champ	9
1.3.2	Champ électrique uniforme	10
1.4	<b>Les forces magnétiques – Le champ magnétique</b>	10
1.4.1	Les forces magnétiques	10
1.4.2	Le champ magnétique	11
1.4.3	Le champ magnétique terrestre ou champ géomagnétique	13
1.4.4	Champ magnétique créé par un courant	13
1.4.5	Cas d'une bobine plate circulaire	14
1.4.6	Le champ magnétique créé par un solénoïde infiniment long	14
1.4.7	Action d'un champ magnétique sur un élément de circuit parcouru par un courant. Loi de Laplace	15
1.4.8	La force de Laplace	18
1.4.9	La force magnétique de Lorentz	18
1.5	<b>Enoncés des exercices et problèmes</b>	19
1.6	<b>Solutions des exercices et problèmes</b>	26



## 1.1 Les forces de gravitation et le champ gravitationnel

On appelle gravitation, le phénomène suivant lequel tous les corps s'attirent réciproquement par des forces dont nous allons étudier les propriétés au cours de ce paragraphe.

### 1.1.1 Les forces de gravitation : Loi de l'attraction universelle ou loi de Newton

#### Définition.

Deux objets ponctuels  $A$  (de masse  $m_A$ ) et  $B$  (de masse  $m_B$ ), situés à la distance  $d = AB$  l'un de l'autre s'attirent réciproquement. La force d'attraction est :

- proportionnelle aux masses  $m_A$  et  $m_B$  ;
- inversement proportionnelle au carré de la distance  $d$ .

Le corps  $A$  de masse  $m_A$  exerce sur le corps  $B$  une force  $\vec{F}_{A/B}$  (lire  $\vec{F}$  de  $A$  vers  $B$ ). Réciproquement, le corps  $B$  de masse  $m_B$  exerce sur le corps  $A$  une force  $\vec{F}_{B/A}$ .  $\vec{F}_{A/B}$  et  $\vec{F}_{B/A}$  ont même droite d'action, même module mais sont de sens contraire.

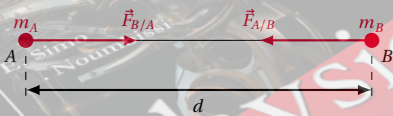


Figure 1.1

$\vec{F}_{A/B}$  et  $\vec{F}_{B/A}$  portent le nom de **forces de gravitation** ou **forces d'interaction gravitationnelle**. Leur intensité commune a pour expression :

$$F_{A/B} = F_{B/A} = \epsilon \cdot \frac{m_A \cdot m_B}{d^2}$$

Avec :

- $F_{A/B}$  et  $F_{B/A}$  en newton [N] ;
- $m_A$  et  $m_B$  en [kg] ;
- $\epsilon$  : constante d'attraction (ou de gravitation) universelle ; sa valeur dans le SI est :

$$\epsilon = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$$

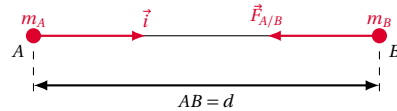
### Expression vectorielle de la force de gravitation

Définissons sur la droite  $AB$  un vecteur unitaire  $\vec{i}$  orienté de  $A$  vers  $B$ . Alors,

$$\vec{F}_{A/B} = -\epsilon \cdot \frac{m_A \cdot m_B}{d^2} \vec{i}$$

$$\vec{F}_{B/A} = \epsilon \cdot \frac{m_A \cdot m_B}{d^2} \vec{i}$$

Figure 1.2



#### Remarque.

La loi d'attraction universelle reste valable lorsque les masses ne sont pas ponctuelles. Dans ce cas, on suppose que la masse est concentrée en son centre d'inertie.

### 1.1.2 Notion de champ de gravitation

On appelle champ, un domaine de l'espace où se manifeste un phénomène mécanique, électrique ou magnétique.

#### Définition.

On dit qu'il existe un champ de gravitation en un point de l'espace si une masse placée en ce point est soumise à une force de gravitation.

Du point de vue quantitatif, notons  $M$  la masse de l'objet ponctuel placée en un point  $A$  de l'espace ; soit  $\vec{F}$  la force gravitationnelle à laquelle elle est soumise. la grandeur  $\vec{F}/M$  définit le vecteur champ de gravitation en  $A$ . On le note  $\vec{G}$ . Donc :

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{M}$$

La valeur  $G$  du champ de gravitation est :

$$G = \frac{F}{M}$$

où :

- $F$  : force de gravitation [N] ;
- $M$  : masse [kg] ;
- $G$  : valeur du champ de gravitation [ $\text{N kg}^{-1}$ ].

### 1.1.3 Champ de gravitation créé par une masse ponctuelle

Déterminons le champ de gravitation créé au point  $B$  par un objet ponctuel de masse  $m$  placée en  $A$  ( $AB = d$ ).

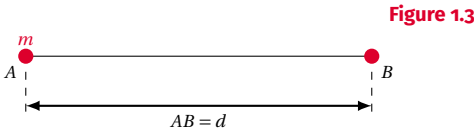


Figure 1.3

Plaçons en  $B$  un objet ponctuel de masse  $M$  (appelé objet d'essai).  $M$  est soumise à la force de gravitation,

$$\vec{F} = -\epsilon \cdot \frac{m \cdot M}{d^2} \vec{i} \quad (1.1)$$

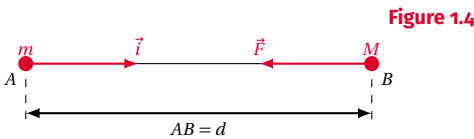


Figure 1.4

D'après la définition du vecteur champ de gravitation,

$$\vec{F} = M \cdot \vec{G} \quad (1.2)$$

Identifions les expressions (1.1) et (1.2) :

$$M \cdot \vec{G} = -\epsilon \cdot \frac{m \cdot M}{d^2} \vec{i}$$

$$\vec{G} = -\epsilon \cdot \frac{m}{d^2} \vec{i}$$

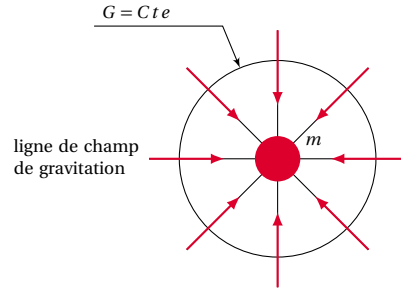
La valeur de ce champ est :

$$G = \epsilon \cdot \frac{m}{d^2}$$

**Conclusion:** Le champ de gravitation  $\vec{G}$  créé par la masse  $m$  en un point  $B$  est toujours dirigé et orienté vers la masse  $m$ . Sa valeur  $G$  est :

- proportionnelle à la masse  $m$ ;
- inversement proportionnelle à  $d^2$ .

Figure 1.5



### 1.1.5 Champ de gravitation d'un objet à symétrie sphérique

#### Définition.

Un objet à symétrie sphérique est un objet qui présente les mêmes propriétés dans toutes les directions issues d'un point  $O$ , à la même distance  $r$  du point  $O$ .

#### Valeur de champ

Les astres sont des objets à symétrie sphérique. Du point de vue de la gravitation, un astre peut être remplacé par un objet ponctuel coïncidant avec son centre et dont la masse est égale à la masse de l'astre.

#### Exemple.

Cas de la Terre dont la masse est notée  $m_T$ . La valeur du champ de gravitation créé par la Terre en un point  $B$  de l'espace est :

$$G = \epsilon \cdot \frac{m_T}{d^2}$$

où :

- $d = R_T + z$ ;
- $R_T$  est le rayon de la Terre :  $R_T \approx 6400$  km;
- $z$  est l'altitude du point considéré.

Donc :

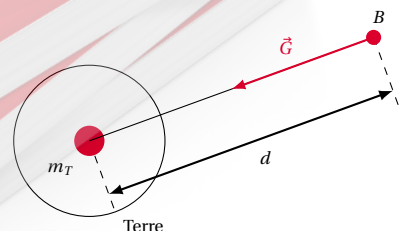
$$G = \epsilon \cdot \frac{m_T}{(R_T + d)^2} \quad (1.3)$$

### 1.1.4 Les lignes de champ

On appelle ligne de champ de gravitation une ligne qui en chacun de ses points, est tangente au vecteur champ de gravitation  $\vec{G}$  en ce point.

Conventionnellement, on oriente les lignes de champ dans le sens du vecteur  $\vec{G}$ .

Figure 1.6



## Quelques cas particuliers de la valeur du champ

### À la surface de la Terre

Où  $z = 0$ , l'expression (1.3) nous donne la valeur de  $G_0$  du champ de gravitation au sol :

$$G_0 = \epsilon \cdot \frac{m_T}{R_T^2}$$

### À l'altitude $z$

Notons  $G(z)$  la valeur du champ de gravitation à l'altitude  $z$  :

$$G(z) = \epsilon \cdot \frac{m_T}{(R_T + z)^2} = \frac{\epsilon \cdot m_T}{(R_T + z)^2}$$

D'après l'expression de  $G_0$ , on a :

$$G_0 = \epsilon \cdot \frac{m_T}{R_T^2} \Rightarrow G_0 \cdot R_T^2 = \epsilon \cdot m_T$$

Donc

$$G(z) = G_0 \cdot \frac{R_T^2}{(R_T + z)^2}$$

$$G(z) = G_0 \cdot \left( \frac{R_T}{R_T + z} \right)^2$$

### Au voisinage de la Terre

$$R_T + z = R_T \Rightarrow G(z) = G_0$$

Dans un domaine restreint autour de la Terre, les verticales sont pratiquement parallèles. Donc le vecteur champ de gravitation  $\vec{G}$  conserve même direction, même sens et même valeur : on dit que le champ de gravitation  $\vec{G}$  est **sensiblement uniforme**.

## 1.1.6 Champ de gravitation et champ de pesanteur

Nous avons défini en classe de seconde le poids d'un corps de masse  $M$  par la relation  $\vec{P} = M \cdot \vec{g}$ . C'est aussi la force que la Terre, exerce sur ce corps. Notons que dans la relation ci-dessus,  $\vec{g}$  est le vecteur champ de pesanteur. Or d'après la loi de Newton, tout objet au voisinage de la Terre subit une force de gravitation  $\vec{F} = M \cdot \vec{G}$  où  $M$  est la masse de l'objet et  $\vec{G}$  le vecteur champ de gravitation.

Donc en négligeant l'effet de la rotation terrestre, le poids  $\vec{P}$  du corps s'identifie à la force de gravitation universelle :

$$\vec{F} = \vec{P} \Rightarrow m \cdot \vec{G} = M \cdot \vec{g} \Rightarrow \vec{G} = \vec{g}$$

Le champ de pesanteur  $\vec{g}$  et le champ de gravitation  $\vec{G}$  en un point sont deux vecteurs égaux.

## 1.1.7 Variation de l'intensité de la pesanteur

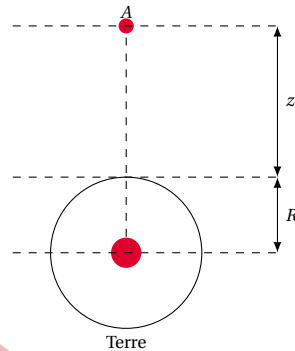
### Au niveau du sol

$$g_0 = G_0 \Rightarrow g_0 = \epsilon \cdot \frac{m_T}{R_T^2}$$

### À l'altitude $z$

$$g(z) = G(z) \Rightarrow g(z) = g_0 \cdot \frac{R_T^2}{(R_T + z)^2}$$

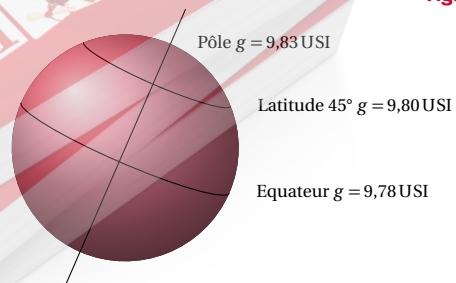
Figure 1.7



### Avec la latitude

$g$  dépend aussi de la rotation de la Terre sur elle-même. Cette rotation fait que la Terre a tendance à renvoyer les objets vers l'extérieur (comme un manège). Cet effet "de manège" est de plus en plus sensible des pôles à l'équateur. C'est ce qui explique la variation de  $g$  avec la latitude.

Figure 1.8





## 1.2. Les forces électriques et le champ électrique

### Remarque.

Tous les astres exercent des forces d'attraction sur les objets situés à leur voisinage ; on peut ainsi définir un "g" sur chaque astre.

Par exemple :

Astre	Intensité de la pesanteur
Lune	$g_{\text{L}} = 1,62 \text{ N kg}^{-1}$
Vénus	$g_{\text{V}} = 8,90 \text{ N kg}^{-1}$
Jupiter	$g_{\text{J}} = 1,62 \text{ N kg}^{-1}$
Mars	$g_{\text{M}} = 3,60 \text{ N kg}^{-1}$

**NB:** Il ne faut pas confondre l'action que ces astres exercent sur les objets situés à travers leurs voisinages (actions souvent très intense) à l'attraction (très faible à cause de la distance) que ces astres exercent sur les objets situés à proximité de la Terre.

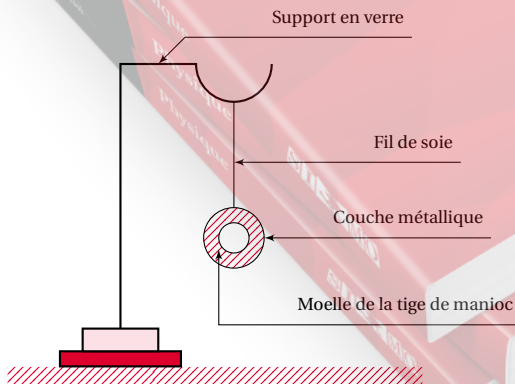
## 1.2 Les forces électriques et le champ électrique

### 1.2.1 Les charges électriques

#### Expérience mettant en évidence les charges électriques

- Approchons un stylo en matière plastique ou une règle en plexiglas des petits morceaux de papier légers : rien ne se produit.
- Frottons ce stylo ou cette règle avec un tissu ou sur nos cheveux, puis approchons-les des petits morceaux de papier : ils sont attirés par la partie frottée du stylo ou de la règle.

Figure 1.9



**Conclusion:** Le stylo (ou la règle) frotté, acquiert des propriétés nouvelles qui lui permettent d'attirer des objets légers : on dit qu'il est électrisé (ou chargé d'électricité) par frottement.

### Propriétés des charges électriques

#### Expérience

Nous utiliserons pour cette expérience :

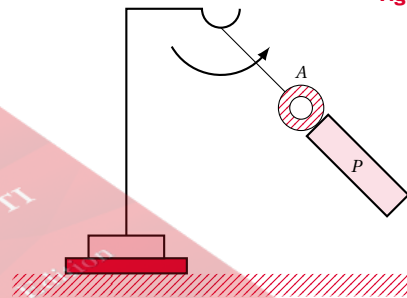
- une tige en verre et la laine ;
- une tige en matière plastique et une peau de chat ;
- un pendule électrique constitué par une petite boule très légère (moelle de tige sèche de manioc par exemple, liège, ...) dont la surface est recouverte par une fine couche métallique ; cette boule est suspendue par un fil de soie (*isolant*) à un support en verre (*isolant*).

Les schémas de la Figure 1.10, 1.11 et 1.12 illustrent l'expérience.

On observe :

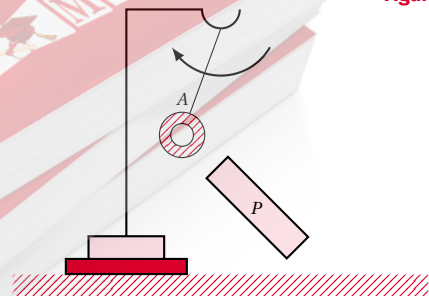
- La tige de verre  $P$ , préalablement frottée avec un chiffon de laine, est approchée du pendule  $A$ .
- La boule, attirée par  $P$ , vient à son contact (Figure 1.10), puis s'en écarte vivement.

Figure 1.10



- La boule  $A$  continue à être repoussée quand on approche la tige  $P$ .

Figure 1.11



- La tige en matière plastique  $N$ , préalablement frottée avec une peau de chat, est approchée de  $A$ . La

boule A est attirée par N.

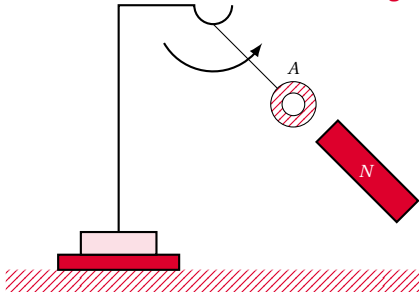


Figure 1.12

### Interprétation

- La tige P, électrisée par le frottement, attire la légère boule du pendule. Par suite du contact, la tige cède à la boule une partie d'électricité qu'elle porte. On parle d'électrisation par contact.
- La tige et la boule, alors chargées d'une même électricité, se repoussent.
- Puisque A est attirée par N et repoussée par P, nous admettons que les électricités portées par N et P sont différentes. De plus, la tige N et la boule, chargées d'électricités différentes, s'attirent.

**Conclusion:** Tous les corps électrisés se comportent soit comme le verre frotté avec la laine, soit comme la matière plastique frottée avec la fourrure.

Donc il n'existe que deux sortes d'électricité et deux seulement. Par convention, on les désigne par :

- électricité positive notée (+), celle qui apparaît sur le verre;
- électricité négative notée (−), celle qui apparaît sur la matière plastique;
- deux corps chargés d'électricité de même signe se repoussent.
- Deux corps chargés d'électricité de signes contraires s'attirent.

### Remarque.

- Le choix des signes (+) et (−) se justifie par la possibilité qu'ont ces électricités de pouvoir annuler leurs effets : on dit qu'elles se neutralisent. Mais l'attribution du signe (+) à l'une plutôt qu'à l'autre est purement conventionnelle.
- Tout corps à l'état naturel est électriquement neutre c'est-à-dire qu'il contient autant d'électricités (+) que d'électricités (−).
- Lorsqu'un corps possède un excédent de l'une des électricités, on dit qu'il est chargé.

## 1.2.2 Unité de charge électrique

Dans le système international, les charges électriques s'expriment en *coulomb*<sup>1</sup>, symbole C.

Dans la nature, la plus petite particule chargée d'électricité a une importance fondamentale : c'est l'**électron**, portant une électricité (−). Ainsi, on note la charge d'un électron :

$$e^{-1} = -1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

## 1.2.3 Interaction entre les charges : La loi de Coulomb

### Expression de la loi de Coulomb

#### Valeur des forces électriques

Nous savons que deux charges peuvent s'attirer ou se repousser selon leurs signes. La loi de Coulomb précise les caractéristiques de ces forces électrostatiques entre deux charges.

Les forces d'attraction ou de répulsion qui s'exercent entre deux charges ponctuelles  $Q_A$  et  $Q_B$  placées respectivement aux points A et B,

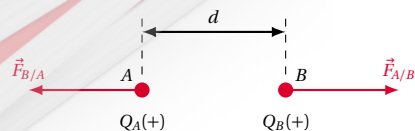
- ont la même droite d'action, la droite AB ;
- sont opposées ;
- ont la même intensité. Cette intensité est proportionnelle à  $Q_A$  et  $Q_B$  et inversement proportionnelle au carré de la distance  $d = AB$  qui sépare les deux charges.

$$F_{B/A} = F_{A/B} = K \cdot \frac{|Q_A| \cdot |Q_B|}{d^2}$$

Avec :

- $|Q_A|$  et  $|Q_B|$  valeurs absolues des charges en coulomb [C];
- $d$  en mètre [m];
- $K = 9 \times 10^9$  en unités SI, constante de proportionnalité;
- $F$  en newton [N].

Figure 1.13



1. Du nom du physicien français Charles Auguste de Coulomb (1736–1806).

### 1.3. Le champ électrostatique

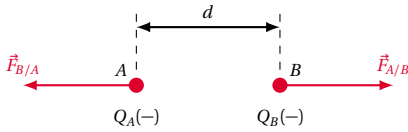


Figure 1.14 Analogie

Dans les deux cas, l'intensité de la force est :

- inversement proportionnelle au carré de la distance;
- proportionnelle aux grandeurs caractérisant les corps en interaction.

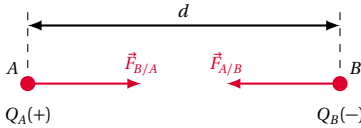


Figure 1.15 Différence

- Les forces gravitationnelles sont toujours attractives (en effet, il n'existe pas de masse négative).
- Les forces électriques peuvent être attractives ou répulsives.

#### Expression vectorielle des forces électriques

Définissons sur l'axe  $AB$  un vecteur unitaire  $\vec{i}$  orienté de  $A$  vers  $B$ . L'expression vectorielle de la loi de Coulomb est :

$$\vec{F}_{A/B} = K \cdot \frac{|q_A| \cdot |q_B|}{d^2} \cdot \vec{i}$$

$$\vec{F}_{B/A} = -K \cdot \frac{|q_A| \cdot |q_B|}{d^2} \cdot \vec{i}$$

$q_A$  et  $q_B$  peuvent être de mêmes signes (Figure 1.16) ou de signes contraires (Figure 1.17).

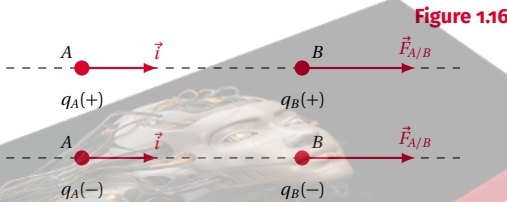


Figure 1.16

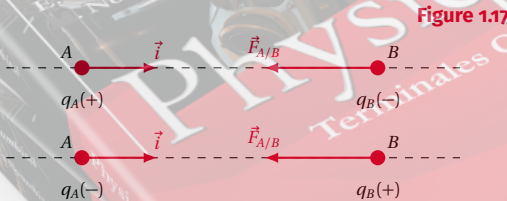


Figure 1.17

#### Comparaison entre les lois de Newton et de Coulomb

Écrivons les expressions de la force gravitationnelle et celles de la force électrique.

##### Loi de Newton

$$\vec{F} = G \cdot \frac{|m_A| \cdot |m_B|}{d^2} \cdot \vec{i}$$

$$F = G \cdot \frac{|m_A| \cdot |m_B|}{d^2}$$

##### Loi de Coulomb

$$\vec{F} = K \cdot \frac{|q_A| \cdot |q_B|}{d^2} \cdot \vec{i}$$

$$F = K \cdot \frac{|q_A| \cdot |q_B|}{d^2}$$

## 1.3 Le champ électrostatique

Considérons par exemple l'action du corps électrisé  $A$  sur le corps électrisé  $B$ .

#### Définition.

Il existe au voisinage de  $A$ , une région de l'espace où son influence peut s'exercer sur une autre charge électrique : cette région de l'espace est appelée champ électrostatique créé par le corps électrisé  $A$ .

En général, on dit qu'il existe un champ électrostatique dans une région de l'espace si une charge électrique, placée dans cette région, est soumise à une force électrostatique.

#### Le vecteur champ électrostatique

Plaçons successivement en un point  $M$  d'un champ électrostatique des charges  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ .

#### Définition.

Le bilan des forces a montré que les forces électrostatiques  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$  qui agissent sur ces charges sont liées par la relation :

$$\frac{\vec{F}_1}{q_1} = \frac{\vec{F}_2}{q_2} = \frac{\vec{F}_3}{q_3} = \dots = \frac{\vec{F}_n}{q_n}$$

Le terme commun à ces quotients ne dépend que du point  $M$  considéré et non des charges placées en ce point. C'est ce rapport constant qui nous permet de définir le vecteur champ au point  $M$ , noté  $\vec{E}_M$ . D'où :

$$\vec{E}_M = \frac{\vec{F}}{q}$$

où  $\vec{F}$  est la force électrostatique qui s'exerce sur une charge  $q$  placée au point  $M$ .

1

On pourrait aussi dire qu'une charge  $q$  placée dans un champ électrostatique  $\vec{E}$ , subit une force  $\vec{F}$  telle que :

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

### Caractéristiques du vecteur champ électrostatique $\vec{E}_M$ au point $M$

Les caractéristiques de  $\vec{E}_M$  se déduisent de celles de la force  $\vec{F}$  que subit une charge  $q$  quelconque placée en  $M$  :

- origine : le point  $M$  ;
- direction : celle de  $\vec{F}$  ;
- sens : celui de  $\vec{F}$  si  $q(+)$  (Figure 1.18) et celui de  $-\vec{F}$  si  $q(-)$ . (Figure 1.19) ;
- intensité :  $E_M = \frac{F}{|q|}$ .

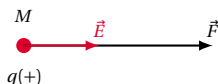


Figure 1.18



Figure 1.19

### Unité de $E$

La règle de formation du nom des unités dérivées, appliquée à la formule précédente donne  $E$  en newton par coulomb ( $\text{NC}^{-1}$ ). Mais l'unité SI de  $E$  est le *volt par mètre* ( $\text{Vm}^{-1}$ ), notons cependant que ( $1 \text{ Vm}^{-1} = 1 \text{ NC}^{-1}$ )

### Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

Soit une charge ponctuelle  $q_A$  placée en un point  $A$ .

Déterminons les caractéristiques du vecteur champ électrostatique créé par  $q_A$  (on l'appelle "charge source") en un point quelconque  $M$  de l'espace. On le note  $\vec{E}_M$ .

Pour cela, plaçons en  $M$  une charge  $q$  (appelée "charge d'essai"). D'après la loi de Coulomb, la charge  $q$  est soumise à une force électrostatique (exercée par  $q_A$ )

$$\vec{F} = K \cdot \frac{q_A \cdot q}{AM^2} \vec{u}$$

où  $\vec{u} = \frac{\vec{AM}}{\|\vec{AM}\|}$  = vecteur unitaire de la droite  $AB$

par ailleurs  $\vec{E}_M$  est lié à  $\vec{F}$  et à  $q$  par  $\vec{E}_M = \frac{\vec{F}}{q}$

A partir de l'expression  $\vec{F}$ , nous avons :

$$\vec{E}_M = K \cdot \frac{q_A}{AM^2} \vec{u}$$

Les caractéristiques du vecteur champ créé par  $q_A$  au point  $M$  sont :

- origine : le point  $M$  ;
- direction : la droite  $AM$  ;
- sens : il dépend de signe de  $q_A$ .

Si  $q_A (+)$  plaçons en  $M$  une charge  $q$

- $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$  si  $q(+)$   $\Rightarrow \vec{F}$  et  $\vec{E}$  ont même sens (Figure 1.20) ;
- $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$  si  $q(-)$   $\Rightarrow \vec{F}$  et  $\vec{E}$  sont de sens opposés (Figure 1.21).



Figure 1.20

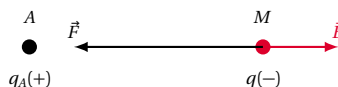


Figure 1.21

Donc le champ  $\vec{E}$  créé par une charge  $(+)$  est orienté de la charge vers l'extérieur ; on dit que le champ est centrifuge si  $q_A(-)$ . On démontre de la même manière que ci-dessus, que le champ  $\vec{E}$  créé par une charge  $(-)$  est orienté vers la charge (Figure 1.22).

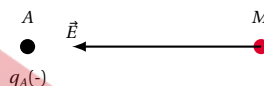


Figure 1.22

On dit que le champ est centripète. Intensité :  $E = K \cdot \frac{q_A}{AM^2}$ .

Cette intensité ne dépend que de la valeur de la charge  $q_A$  et de la distance  $AM$ .

### Exercice

Calculer l'intensité du champ électrostatique créé par le proton d'un atome d'hydrogène sur l'orbite décrite par l'électron.

- Préciser le sens du vecteur  $\vec{E}$  décrivant ce champ.
- Quelle est l'intensité de la force qui s'exerce sur l'électron en mouvement sur cette orbite ? Préciser le sens du vecteur force  $\vec{F}$ .

On donne :

- $r = 53,3 \times 10^{-12} \text{ m}$  ( $r$  = rayon de l'orbite) ;
- $+e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$  (charge du proton) ;
- $-e = -1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$  (charge de l'électron).



### 1.3. Le champ électrostatique

#### Solution

#### Intensité du champ électrostatique

$$E = K \cdot \frac{q}{r^2}$$

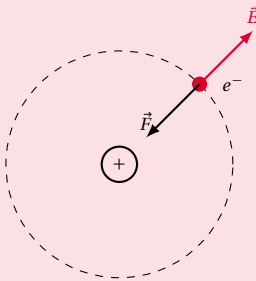
$$= 9 \times 10^9 \cdot \frac{1,6 \times 10^{-12}}{(53,3 \times 10^{-12})^2}$$

$$= 5,06 \times 10^{11} \text{ V m}^{-1}$$

#### Sens du vecteur champ $\vec{E}$

$\vec{E}$  est centrifuge car il est créé par une charge (+), le proton (Figure 1.23).

Figure 1.23



#### Intensité de la force que subit l'électron

$$F = q \cdot E = e \cdot E$$

$$= 1,6 \times 10^{-19} \cdot 5,06 \times 10^{11}$$

$$= 8,1 \times 10^{-8} \text{ N}$$

#### Sens du vecteur force $\vec{F}$

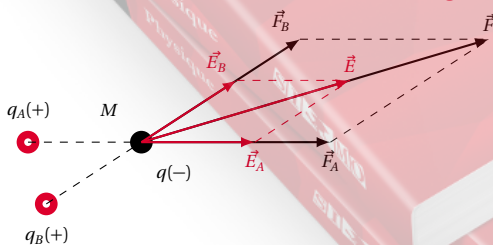
$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$  avec  $q = -e \rightarrow \vec{F} = -e \cdot \vec{E}$ . Donc  $\vec{F}$  est opposé à  $\vec{E}$ .

### Champ électrostatique créé par plusieurs charges ponctuelles

#### Cas de deux charges

Considérons deux charges  $q_A$  et  $q_B$  (charges sources) qui, respectivement placées en  $A$  et  $B$  créent un champ  $\vec{E}$  en un point  $M$ . Etudions les caractéristiques de  $\vec{E}$ . Pour cela, plaçons une charge  $q$  (charge d'essai) au point  $M$  (voir figure).

Figure 1.24



- Soit  $\vec{E}_A$  le champ qui existerait si la charge  $q_A$  était

seule; la force développée sur  $q$  serait :

$$\vec{F}_A = q \cdot \vec{E}_A$$

- Soit  $\vec{E}_B$  le champ qui existerait si la charge  $q_B$  était seule; la force développée sur  $q$  serait :

$$\vec{F}_B = q \cdot \vec{E}_B$$

Par définition, le champ électrostatique  $\vec{E}$  résultant de la présence simultanée des deux charges est :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{\vec{F}_A + \vec{F}_B}{q} = \frac{\vec{F}_A}{q} + \frac{\vec{F}_B}{q} = \vec{E}_A + \vec{E}_B$$

soit :  $\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B$

**Généralisation : cas de plusieurs charges  $q_1, q_2, \dots, q_n$ .**

Le vecteur champ électrostatique  $\vec{E}_M$  créé par plusieurs charges ponctuelles  $q_1, q_2, \dots, q_n$  en un point  $M$  est égal à la somme vectorielle des vecteurs champ créés par chacune des charges agissant seule.

$$\vec{E}_M = \vec{E}_{1M} + \vec{E}_{2M} + \dots + \vec{E}_{nM}$$

### 1.3.1 Lignes de champ

On appelle ligne de champ une courbe qui, en chacun de ces points, est tangente au vecteur champ électrostatique  $\vec{E}$ . Cette courbe est orientée dans le même sens que le vecteur  $\vec{E}$ .

Figure 1.25

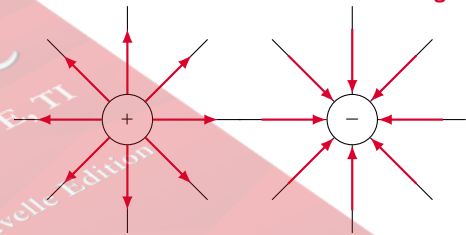
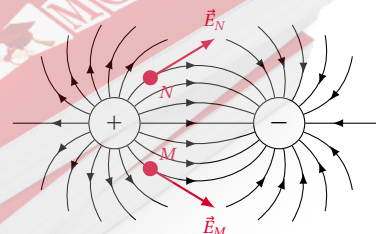


Figure 1.26



- lignes de champ créés par une charge ponctuelle (+);
- lignes de champ créés par une charge ponctuelle (-);

- lignes de champ créés par deux charges ponctuelles égales et de signes contraires.

### 1.3.2 Champ électrique uniforme

#### Définition.

Un champ électrique est uniforme dans un domaine de l'espace si, en tout point de ce domaine, le vecteur champ électrique  $\vec{E}$  conserve même direction, même sens et même valeur.

#### Propriété importante

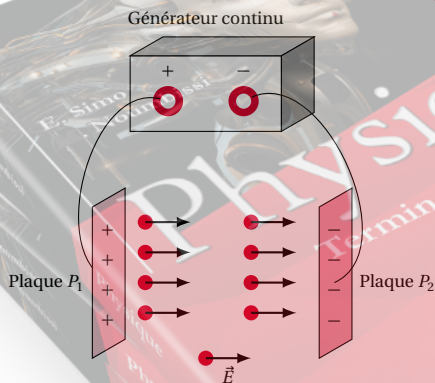
Dans un domaine de l'espace où le champ électrique est uniforme, les lignes de champ électrique sont des droites parallèles.

#### Réalisation d'un champ électrique uniforme

#### Dispositif

On utilise une petite coupelle contenant de l'huile de paraffine : on saupoudre sur ce liquide des grains de sémoule. Ces grains sont alors orientés dans toutes les directions du plan. Grâce à un générateur continu, on établit, entre deux plaques planes et parallèles qui plongent dans le liquide, une tension continue.

Figure 1.27



#### Observations

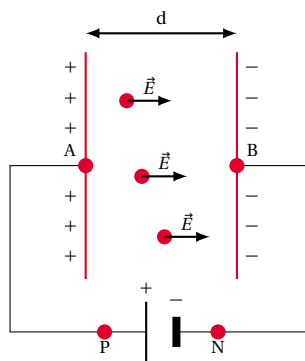
On constate que les grains de sémoule s'orientent et dessinent des lignes parallèles. Nous admettons que ces lignes sont les lignes de champ électrique et puisqu'elles sont parallèles, le champ créé est uniforme. L'ensemble constitué par deux plaques planes et parallèles entre lesquelles on établit une tension constante est un condensateur plan chargé : les plaques portent

le nom d'armatures. L'armature reliée au pôle (+) du générateur porte des charges positives et l'armature reliée au pôle (−) des charges négatives. Le vecteur  $\vec{E}$  correspondant au champ uniforme est :

- perpendiculaire aux armatures ;
- dirigé de l'armature positive vers l'armature négative c'est-à-dire de l'armature de plus haut potentiel vers l'armature de plus bas potentiel.

A l'intérieur d'un condensateur plan chargé, il existe un champ électrique uniforme. La Figure 1.28 est la représentation symbolique du condensateur plan chargé :

Figure 1.28



la valeur du champ uniforme obtenu est proportionnelle à la tension  $U$  entre les plaques (égale à la f.é.m.  $E$  du générateur car :  $U = U_{AB} = U_{PN}$  et  $U_{PN} = E - rI = E$  puisque  $I = 0$ ) et inversement proportionnelle à la distance  $d$  entre les plaques :

$$E = \frac{U}{d}$$

Cette formule montre que la valeur  $E$  du champ s'exprime en V/m ou  $V\,m^{-1}$  qui est l'unité SI de champ électrique (unité qu'il faut donc utiliser préférentiellement au  $NC^{-1}$ ). D'où la formule à retenir avec les unités.

## 1.4 Les forces magnétiques – Le champ magnétique

### 1.4.1 Les forces magnétiques

#### Les aimants

#### Définition.

Un aimant est un corps capable d'attirer le fer.

Un aimant peut être :

**Naturel** C'est le cas du minerai de fer appelé magnétite et constitué de l'oxyde de fer ( $Fe_3O_4$ ) (appelé pour cette raison oxyde magnétique de fer).



## 1.4. Les forces magnétiques – Le champ magnétique

**Artificiel** C'est le cas d'un morceau d'acier frotté toujours dans le même sens avec un aimant. Un aimant artificiel peut être permanent ou temporaire.

Les aimants artificiels ont des formes variées. Les plus usuels sont : (Figure 1.29)

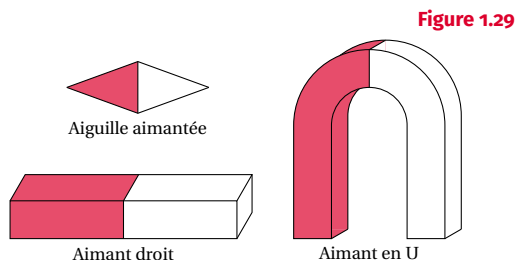


Figure 1.29

### Les pôles d'un aimant

Plongeons un aimant dans la limaille de fer. Quelle que soit sa forme, nous constatons que l'aimant ne retient la limaille de fer qu'en certaines régions voisines de ses extrémités : ces régions sont appelées pôles de l'aimant. Un aimant possède en général deux pôles :

- le pôle nord orienté vers le Nord;
- le pôle sud orienté vers le Sud.

### Interaction entre un aimant et le fer

Approchons un objet en fer d'un aimant suspendu. Nous constatons l'attraction de l'aimant par l'objet. Inversement, un objet en fer suspendu auquel on approche un aimant subit l'attraction de l'aimant.

#### Remarque.

1. L'interaction entre l'aimant et l'objet en fer est une action à distance. Elle peut s'exercer à travers des substances que l'aimant n'attire pas (papier, verre, aluminium, cuivre...)
2. L'aimant attire aussi le nickel ainsi que les alliages contenant le fer et le nickel.

### Interaction entre les aimants

Si on approche un barreau aimanté d'une aiguille également aimantée et mobile sur un pivot, on s'aperçoit que son pôle nord repousse le pôle nord de l'aiguille (Figure 1.30) tandis que son pôle sud est attiré (Figure 1.31).

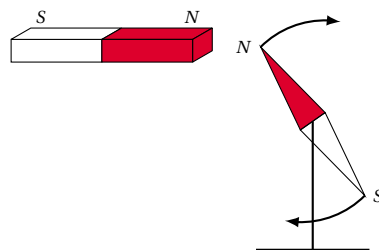


Figure 1.30

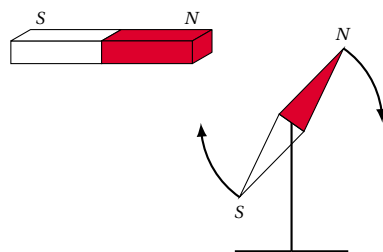


Figure 1.31

Ces expériences montrent que :

- deux pôles de même nom se repoussent;
- deux pôles de noms différents s'attirent.

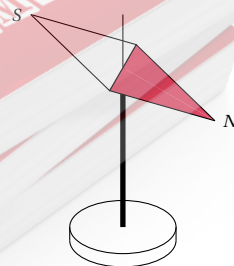
**Conclusion:** Les forces d'interaction magnétique sont des forces opposées; leur intensité commune diminue rapidement avec la distance des objets en interaction.

## 1.4.2 Le champ magnétique

#### Définition.

On appelle champ magnétique, toute région de l'espace dans laquelle un aimant est soumis à des forces magnétiques.

Figure 1.32



Le meilleur détecteur de champ magnétique est une aiguille aimantée montée sur un pivot (donc libre de s'orienter)

## Le vecteur champ magnétique

L'état magnétique d'un point  $M$  est décrit grâce à un vecteur qu'on appelle vecteur champ magnétique  $\vec{B}$  en ce point. Les caractéristiques de ce vecteur sont :

- **origine** : le point  $M$  du champ magnétique;
- **direction** : celle de l'aiguille aimantée libre de s'orienter dans toutes les directions de l'espace et dont le centre d'inertie  $G$  est placé en  $M$ ;
- **sens** : celui qui va du pôle sud vers le pôle nord de l'aiguille soit le sens du vecteur  $\vec{SN}$ ;
- **norme de  $\vec{B}$**  : elle est égale à l'intensité du champ magnétique en ce point; on dit plus simplement au champ magnétique en ce point.

Cette grandeur champ magnétique  $B$  s'exprime en *tesla* T dans de SI d'unités. Ce nom vient de celui de l'ingénieur croate Nikola Tesla (1857–1943).

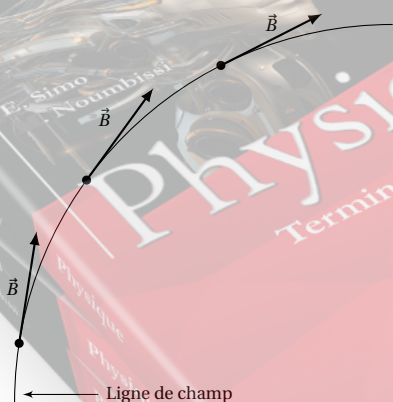
Le champ magnétique est mesurable à l'aide d'un appareil appelé *Teslamètre*.

### Remarque.

Le tesla est une unité trop grande de champ magnétique. Par exemple, les champs magnétiques créés par des aimants permanents sont de l'ordre du tesla. Pour créer un champ de 30 T, il faut une technologie lourde. Dans les centres de recherche, on préfère une autre unité, le gamma, qui permet de mesurer les petites variations de champ magnétique.

$$1 \text{ T} = 10^9 \text{ gammas}$$

Figure 1.33



## Les lignes de champ. Le spectre magnétique

### Les lignes de champ

Les lignes de champ sont des courbes qui, en chacun de leurs points, sont tangentes au vecteur champ magnétique  $\vec{SN}$ . La ligne de champ est orientée dans le sens de  $\vec{SN}$ .

Pour matérialiser une ligne de champ magnétique, on peut utiliser plusieurs aiguilles aimantées ou de la limaille de fer.

### Le spectre magnétique

L'ensemble des lignes de champ constitue le spectre magnétique de l'aimant considéré. Ainsi donc, les grains de la limaille de fer qui s'aimantent sous l'action du champ magnétique, s'orientent suivant les lignes de champ.

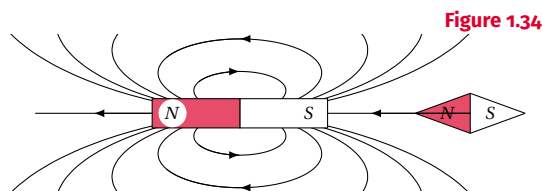
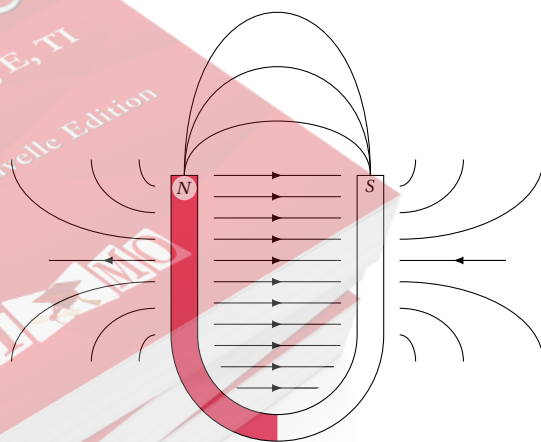


Figure 1.34

### Spectre magnétique de quelques aimants

- **Cas d'un aimant droit** On détermine le sens des lignes de champ en imaginant la position prise par une petite aiguille aimantée placée dans le champ et en appliquant les lois d'interaction des aimants. On constate donc que les lignes de champ "sortent" par le pôle nord d'un aimant droit et "entrent" par le pôle sud.
- **Cas d'un aimant en U**

Figure 1.35



## Le champ magnétique uniforme

On dit qu'un champ magnétique est uniforme quand le vecteur champ magnétique  $\vec{S}\vec{N}$  a même direction, même sens et même intensité en tout point de l'espace champ. Les lignes de champ d'un champ uniforme sont des droites parallèles.

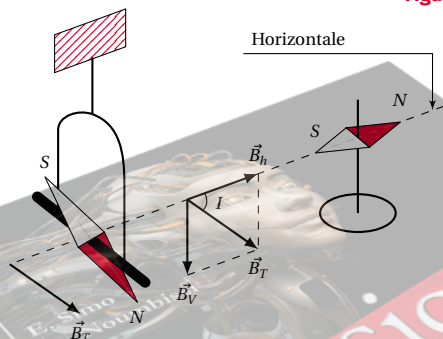
### Exemple.

Entre les branches d'un aimant en  $U$ , le champ magnétique est uniforme.

## 1.4.3 Le champ magnétique terrestre ou champ géomagnétique

Eloignée de toute substance magnétique, une aiguille aimantée mobile adopte une position d'équilibre bien déterminée, son pôle nord indiquant le nord magnétique. Il en est de même pour une bobine suspendue à un fil sans torsion et parcourue par un courant.

Figure 1.36



En effet il existe à la surface de la Terre, un champ magnétique qui agit sur l'aimant (ou la bobine parcourue par un courant) et lui impose sa position d'équilibre. La Terre est la source principale de ce champ magnétique terrestre (ou champ géomagnétique).

Dans un espace de dimensions restreintes, ce champ peut être considéré comme localement uniforme. Il est décrit par le vecteur champ magnétique terrestre  $\vec{B}_T$  ayant les caractéristiques suivantes :

- $\vec{B}_T$  est contenu dans un plan vertical passant par les pôles magnétiques terrestres (plan méridien magnétique).
- $\vec{B}_T$  fait avec l'horizontale un angle  $\hat{I}$  appelé inclinaison. L'aiguille aimantée d'une boussole, lestée de manière qu'elle reste horizontale, n'obéit qu'à la composante horizontale  $\vec{B}_h$  du champ magnétique terrestre. On peut écrire :

$$\vec{B}_T = \vec{B}_h + \vec{B}_v$$

où  $\vec{B}_v$  est la composante verticale du champ magnétique terrestre.

- L'intensité de  $\vec{B}_T$  est comprise entre  $3,3 \times 10^{-5} \text{ T}$  (dans le plan équateur magnétique) et  $6,6 \times 10^{-5} \text{ T}$  (aux pôles magnétiques).

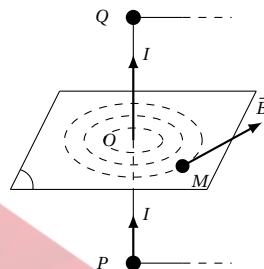
Enfin, signalons qu'à proximité d'un aimant ou d'une bobine parcourue par un courant, le champ magnétique terrestre, très peu intense, peut généralement être négligé par rapport au champ magnétique que créent ces sources.

## 1.4.4 Champ magnétique créée par un courant

Nous avons vu dans l'étude des effets du courant électrique (classe de seconde) que le courant électrique crée un champ magnétique dont le sens dépend du sens du courant électrique. Nous allons étudier dans ce paragraphe les caractéristiques de ce champ magnétique en fonction de la géométrie du circuit.

### Champ magnétique créé par un fil infiniment long et parcouru par un courant

Figure 1.37



### Expérience

Le dispositif expérimental comprend :

- Un conducteur  $PQ$  alimenté par un générateur.
- Ce conducteur traverse perpendiculairement une feuille de carton ou de plexiglas.

On explore le champ magnétique dans le plan perpendiculaire en  $O$  à  $PQ$ . Les points  $M$  sont situés à une faible distance de  $O$ . Dans ces conditions, le conducteur  $PQ$  est considéré comme infiniment long. En saupoudrant de la limaille de fer sur la feuille, on constate que les petits grains de limaille qui s'aimantent dans le champ créé par le courant s'orientent suivant des cercles concentriques autour du conducteur. Une aiguille aimantée montée sur un pivot permet de déterminer les lignes de champ.

### Les caractéristiques du vecteur champ magnétique au point $M$

- **Direction** : le vecteur champ magnétique  $\vec{B}$  au point  $M$  est tangent à la ligne de champ passant par  $M$ .
- **Sens** : le sens du champ magnétique  $\vec{B}$  créé au point  $M$  est donné par le pouce (disposé perpendiculairement aux quatre doigts joints) d'une main droite, la paume tournée vers le point  $M$ , le courant sortant par les quatre doigts joints. Une aiguille aimantée placée en  $M$  permet de vérifier ce sens. Cette méthode n'est qu'un moyen (parmi beaucoup d'autres) mnémotechnique de déterminer le sens de  $\vec{B}$ .
- **L'intensité de  $\vec{B}$**  : l'intensité du champ magnétique au point  $M$  est proportionnelle à l'intensité  $I$  du courant et inversement proportionnelle à la distance  $OM = d$ .

On écrit :

$$B = K \cdot \frac{I}{d}$$

Avec  $K = 2 \times 10^{-7}$  dans le vide ou dans l'air.

$$B = 2 \times 10^{-7} \cdot \frac{I}{d}$$

- $I$  en ampères (A);
- $d$  en mètres (m);
- $B$  en tesla (T).

### Le champ magnétique créé par une spire circulaire parcourue par un courant

#### Expérience

Le dispositif expérimental comporte :

- une spire circulaire alimentée par un générateur;
- cette spire traverse perpendiculairement une plaque de plexiglas.

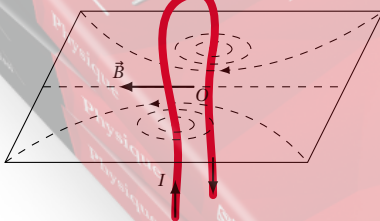


Figure 1.38

On se propose d'étudier le champ créé par ce courant circulaire dans le plan perpendiculaire à la spire et passant par son centre. Pour cela, on saupoudre de la limaille de fer sur la plaque. Les grains de la limaille de fer qui s'aimantent dans le champ magnétique créé par le courant électrique, s'orientent suivant les lignes de champ. Pour trouver le sens des lignes de champ, on uti-

lise des aiguilles aimantées dont la direction sud-nord indique le sens du vecteur  $\vec{B}$ .

### Caractéristiques du vecteur champ magnétique au centre de la spire

- **Direction** : Le champ magnétique  $\vec{B}$  est perpendiculaire au plan de la spire.
- **Sens** : Le sens de  $\vec{B}$  est donné par le pouce (disposé perpendiculairement aux quatre doigts joints) d'une main droite posée sur la spire, la paume tournée vers le centre de la spire et le courant sortant par les quatre doigts joints.
- **Intensité** : L'intensité  $B$  du champ magnétique au centre  $O$  de la spire est proportionnelle à l'intensité  $I$  du courant et inversement proportionnel au rayon  $R$  de la spire.

$$B = 2 \times 10^{-7} \cdot \frac{I}{R}$$

- $I$  en ampères (A);
- $R$  en mètres (m);
- $B$  en tesla (T).

### 1.4.5 Cas d'une bobine plate circulaire

Une bobine plate est formée de  $N$  spires circulaires dont le rayon est proche du rayon moyen  $R$ . Le champ magnétique au centre  $O$  de la bobine est donnée par la relation :

$$B = 2\pi \times 10^{-7} \cdot \frac{N \cdot I}{R}$$

### 1.4.6 Le champ magnétique créé par un solénoïde infiniment long

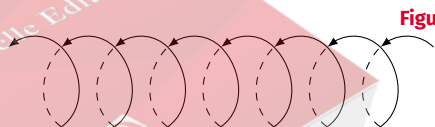


Schéma d'un solénoïde



Schéma simplifié d'un solénoïde

Un solénoïde est une bobine longue qu'on obtient en enroulant sur un support isolant cylindre  $N$  spires circulaires de fil conducteur. Le solénoïde est dit infiniment long lorsque le diamètre  $D$  de la spire est très faible devant la longueur  $L$  du solénoïde.



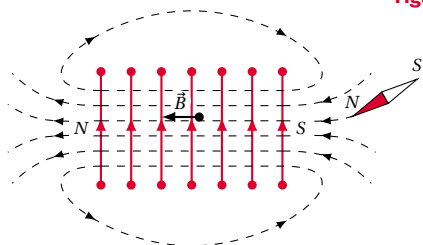
## 1.4. Les forces magnétiques – Le champ magnétique

### Expérience

On se propose d'étudier le champ magnétique créé par le courant dans un plan passant par l'axe du solénoïde. On réalise donc l'expérience suivante :

- Un solénoïde est alimenté par un générateur.
- Les spires traversent une plaque de plexiglas passant par l'axe du solénoïde. Lorsqu'on saupoudre de la limaille de fer sur la plaque, on constate que :
  - les grains de limaille qui s'aimantent dans le champ du solénoïde s'orientent suivant des courbes fermées sur elles-mêmes et partant d'une extrémité de la bobine à l'autre ;
  - à l'intérieur du solénoïde, les lignes de champ sont parallèles ; le champ magnétique est uniforme à l'intérieur du solénoïde.

Figure 1.40



Nous constatons que le spectre obtenu est semblable à celui d'un aimant droit.

### Les caractéristiques du vecteur champ magnétique $\vec{B}$

- **Direction** : Le vecteur champ magnétique  $\vec{B}$  est dirigé suivant l'axe du solénoïde.
- **Sens** : Le sens du vecteur champ magnétique  $\vec{B}$  est donné par le pouce (disposé perpendiculairement aux quatre doigts joints) d'une main droite posée sur le solénoïde, la paume tournée vers l'intérieur du solénoïde et le courant sortant par les quatre doigts joints.

#### Remarque.

Il ne faut pas confondre le sens de  $\vec{B}$  (sens du vecteur) avec celui de l'aiguille aimantée détectrice de  $\vec{B}$  et les pôles Sud et Nord du solénoïde. Ainsi, le pouce de la main droite indique en même temps le sens de  $\vec{B}$  et la face Nord de la bobine plate ou le pôle Nord du solénoïde. (Figure 1.40).

- **Intensité** : L'expérience montre que  $B$  au centre  $O$  du solénoïde est proportionnel à l'intensité  $I$  du courant, au nombre  $N$  de spires et inversement proportionnel à la longueur  $L$  du solénoïde. Dans le vide et pratiquement dans l'air,

$$B = 4\pi \times 10^{-7} \cdot \frac{N \cdot I}{L}$$

- $I$  en ampères (A) ;
- $L$  en mètres (m) ;
- $B$  en tesla (T).

Le rapport  $N$  over  $L$  représente le nombre de spires par unité de longueur. On le désigne souvent par la lettre  $n$  et la formule ci-dessus devient :

$$B = 4\pi \times 10^{-7} \cdot nI$$

### Remarque.

- Le coefficient  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  est appelé perméabilité magnétique du vide. Ce coefficient est pratiquement le même dans l'air.
- La formule  $B = 4\pi \times 10^{-7} \cdot nI$  n'est valable que pour un solénoïde infiniment long, c'est-à-dire pour une bobine dont la longueur est supérieure à 10 fois son rayon.

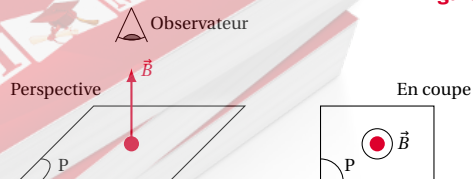
## 1.4.7 Action d'un champ magnétique sur un élément de circuit parcouru par un courant. Loi de Laplace

### Notions préliminaires

#### Représentation conventionnelle d'un vecteur perpendiculaire à un plan

Pour des raisons de clarté, on préfère quelquefois les schémas en coupe plutôt qu'en perspective. Les vecteurs perpendiculaires au plan de la figure sont alors représentés ainsi qu'il suit : Le vecteur  $\vec{B}$  perpendiculaire au plan  $P$  est orienté vers l'observateur (Figure 1.41).

Figure 1.41



Le vecteur  $\vec{B}$  perpendiculaire au plan  $P$  "fuit" l'observateur (Figure 1.42).

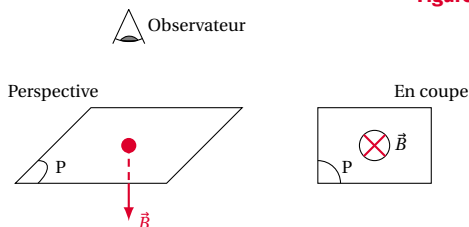


Figure 1.42

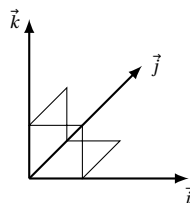


Figure 1.45

Nous pouvons vérifier à l'aide de cette règle que sur la Figure 1.43, c'est le trièdre  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de la Figure 1.45 qui est direct.

### Notion de trièdre direct

Soit une base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace vectoriel  $E$ .  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  étant donnés, il existe deux orientations possibles pour  $\vec{k}$  : (Figure 1.43). En fonction de l'orientation du vecteur  $\vec{k}$  le trièdre  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est direct ou non.

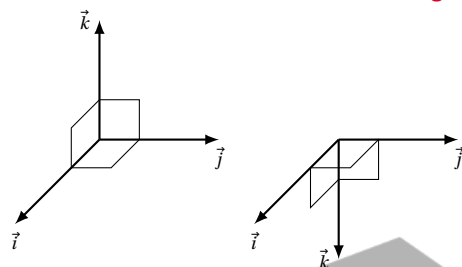


Figure 1.43

Plusieurs méthodes permettent de vérifier qu'un trièdre est direct ou non. Nous retiendrons la règle des trois doigts de la main droite. On dispose perpendiculairement le pouce aux autres doigts joints (Figure 1.44).

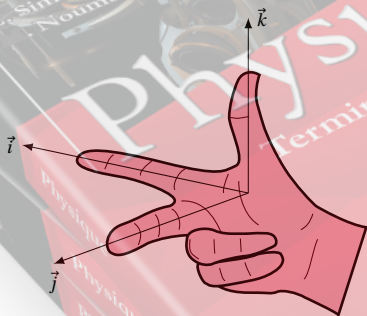


Figure 1.44

- L'index indique la direction de la et le sens de  $\vec{i}$ ;
- Le doigt du milieu est dirigée vers  $\vec{j}$ ;
- Le pouce indique la direction et le sens de  $\vec{k}$ .

### Le produit vectoriel

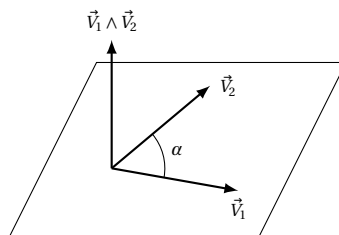


Figure 1.46

Soient deux vecteurs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  de l'espace vectoriel orienté. On appelle produit vectoriel de  $\vec{v}_1$  par  $\vec{v}_2$ , noté  $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ , le vecteur défini par :

- $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \vec{0}$  si  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  sont colinéaires ou si l'un des vecteurs est nul.
- si  $\vec{v}_1$  n'est pas colinéaire à  $\vec{v}_2$  et si aucun des deux n'est nul, alors :
  - $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$  est perpendiculaire au plan formé par  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ .
  - Le sens de  $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$  est tel que le trièdre  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2)$  est direct.
  - La norme de  $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$  est :

$$\|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2\| = V_1 \cdot V_2 \cdot \sin \alpha$$

où  $\alpha$  est l'angle compris entre  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ .

### Expériences

#### Expérience 1

#### Dispositif expérimental

Le conducteur  $OA$  est une tige de cuivre. Son extrémité  $A$  plonge dans le mercure contenu dans une cuve. Le champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme est produit par un aimant en  $U$  (non représenté pour des raisons de clarté). La zone où règne le champ est représentée par le petit rectangle en pointillés.



## 1.4. Les forces magnétiques – Le champ magnétique

## Observations

Figure 1.47

- Si on ferme l'interrupteur  $K$ , le conducteur  $OA$  dévie vers la droite.
- Si on ouvre l'interrupteur  $K$ , le conducteur  $OA$  revient à sa position initiale.

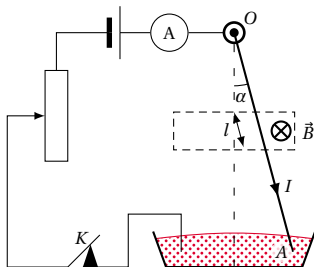


Figure 1.47

Figure 1.48

Du dispositif expérimental, on n'a représenté que la partie sur laquelle porte les observations.

- L'interrupteur étant toujours fermé, si on change le sens du courant, la tige  $OA$  dévie vers la gauche.
- L'interrupteur étant toujours fermé, si on augmente l'intensité du courant à l'aide du rhéostat, on constate que l'angle  $\alpha$  de déviation augmente.

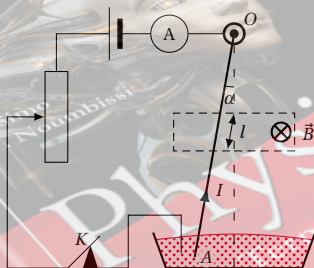


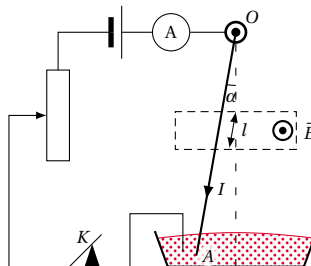
Figure 1.48

## Expérience 2

## Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est le même que celui de la Figure 1.47. Seul le sens de  $\vec{B}$  a changé.

Figure 1.49

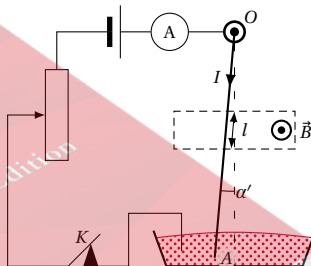


## Observation

- Figure 1.49 : lorsque l'interrupteur est fermé, la tige  $OA$  dévie vers la gauche.
- Figure 1.50 : on conserve le sens du courant et on remplace le champ magnétique  $\vec{B}$  par un champ  $\vec{B}'$  de même direction et de même sens, mais d'intensité  $B' < B$ .

On constate alors que l'angle  $\alpha'$  de déviation est inférieur à  $\alpha$

Figure 1.50



**Conclusion:** Le conducteur  $OA$  placé dans un champ magnétique uniforme et parcouru par un courant est soumis à une force dite force électromagnétique :

- Le sens de cette force dépend du sens du courant.
- L'intensité de cette force est proportionnelle à l'intensité du courant.

Expérience 3

Dispositif expérimental

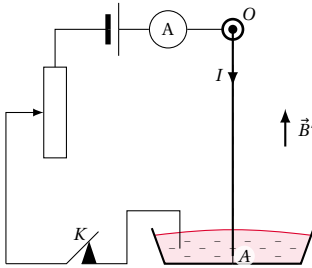


Figure 1.51

Le dispositif expérimental est le même que ceux des Figures 1.47 et 1.48. Ici, le champ magnétique  $\vec{B}$  est parallèle au conducteur  $OA$ .

Observation

Lorsque l'interrupteur  $K$  est fermé, le conducteur  $OA$  (parcouru par un courant) reste immobile.

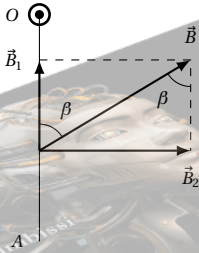


Figure 1.52

**Conclusion:** La force électromagnétique n'existe que si le conducteur "coupe" les lignes de champ. Si le vecteur  $\vec{B}$  fait un angle  $\beta$  avec le conducteur  $OA$ , on peut le décomposer en deux vecteurs  $\vec{B}_1$  et  $\vec{B}_2$ .  $\vec{B}_1$ , parallèle au conducteur, n'a aucun effet. Seules la composante  $B_2 = B \sin \beta$  intervient dans la force électromagnétique.

## 1.4.8 La force de Laplace<sup>2</sup>

Les résultats des expériences ci-dessus ont conduit à énoncer la loi suivante, dite loi de Laplace :

**Enoncé 1.1: loi de Laplace**

Une portion de conducteur de longueur  $l$  parcourue par un courant d'intensité  $I$  et placée dans un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme, est soumise à une force électromagnétique  $\vec{F}$  dite force de Laplace, définie par :

$$\vec{F} = I \vec{l} \wedge \vec{B}$$

Le vecteur  $I \vec{l}$  est orienté dans le sens du courant.

### Les caractéristiques du vecteur $\vec{F}$

- La direction de  $\vec{F}$  est orthogonale au plan formé par les vecteurs  $I \cdot \vec{l}$  et  $\vec{B}$ .
- Le sens de  $\vec{F}$  est tel que le trièdre  $(I \vec{l}, \vec{B}, \vec{F})$  est direct. Rappelons que le sens de  $\vec{F}$  est donné par le pouce (disposé perpendiculairement aux autres doigts joints) de la main droite, la paume indiquant le sens de  $\vec{B}$  et le courant sortant par les quatre doigts joints.
- L'intensité de  $\vec{F}$  est :

$$F = I l B \sin \alpha$$

où :

- $I$  en ampères (A) ;
- $l$  en mètre (m) ;
- $B$  en tesla (T) ;
- $F$  en newton (N) ;
- $\alpha$  est l'angle compris entre  $I \vec{l}$  et  $\vec{B}$ .
- Le point d'application de  $\vec{F}$  est le milieu de la portion de circuit soumise au champ.

## 1.4.9 La force magnétique de Lorentz<sup>3</sup>

**Enoncé 1.2.**

Une particule de charge  $q$ , animée d'un mouvement de vitesse  $\vec{v}$  dans le champ magnétique  $\vec{B}$ , subit une force magnétique appelée force de Lorentz définie par :

$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

2. Pierre-Simon, marquis de Laplace (1749–1827), mathématicien et physicien français.

3. Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928), physicien hollandais.

## 1.5. Enoncés des exercices et problèmes

Caractéristiques de la force de Lorentz  $\vec{F} = q \vec{V} \wedge \vec{B}$ 

- Sa direction est perpendiculaire au plan formé par  $\vec{V}$  et  $\vec{B}$ .
- Son sens est tel que le trièdre  $(q \vec{V}, \vec{B}, \vec{F})$  soit direct. Ce sens est donné par le pouce lorsqu'on utilise la méthode de la main droite;  $q \vec{V}$  étant parallèle aux quatre doigts joints et la paume dirigée vers  $\vec{B}$ .
- Son intensité est donnée par :

$$F = |q V B \sin \alpha|$$

avec :

- $F$  en newton (N);
- $q$  en coulomb (C);
- $V$  en mètre par seconde ( $\text{m s}^{-1}$ );
- $B$  en tesla (T).

## Propriétés de la force de Lorentz

Le champ magnétique est sans action (force de Lorentz nulle) sur :

- une particule chargée au repos ( $v = 0$ ) contrairement à la force électrique  $\vec{F} = q \vec{E}$  qui existe même quand la particule chargée est au repos).
- une particule chargée se déplaçant dans la direction de  $\vec{B}$  (dans ce cas  $\alpha = 0$  ou  $\alpha = \pi \Rightarrow \sin \alpha = 0$ ).
- Une particule neutre ( $q = 0$ ) même en mouvement.

## 1.5 Enoncés des exercices et problèmes

## Forces gravitationnelles et champ gravitationnel

## Exercice 1.

Un astronaute emporte un paquet de sucre de masse  $m = 1 \text{ kg}$  sur la Lune. Déterminer la masse et le poids du paquet de sucre sur la Lune. On donne masse de la lune  $M_L = 7,34 \times 10^{22} \text{ kg}$ ; Rayon de la Lune  $R_L = 16,17 \times 10^5 \text{ m}$ .

## Exercice 2.

Calculer l'attraction exercée par le Soleil, puis par la Lune, sur un corps de masse  $10 \text{ kg}$ , situé à la surface de la Terre. Comparer cette force d'attraction au poids du corps. On donne :

- masse du Soleil :  $M_S = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$
- masse de la Lune :  $M_L = 7,34 \times 10^{22} \text{ kg}$
- masse de la Terre :  $M_T = 6 \times 10^{24} \text{ kg}$
- rayon de la Terre :  $R_T = 64 \times 10^5 \text{ m}$
- distance Terre-Soleil :  $D = 1,49 \times 10^{11} \text{ m}$
- distance Terre-Lune :  $d = 3,84 \times 10^8 \text{ m}$

## Exercice 3.

Un satellite artificiel a une masse  $m = 200 \text{ kg}$ . Calculer son poids au niveau du sol, puis à l'altitude  $h = 1000 \text{ km}$ . On donne :

- masse de la Terre :  $M_T = 6 \times 10^{24} \text{ kg}$
- rayon de la Terre :  $R_T = 64 \times 10^5 \text{ m}$

## Exercice 4.

On donne en  $\text{N kg}^{-1}$ , les valeurs du champ de pesanteur à la surface des différents astres.

- Venus :  $G_V = 8,9$
- Lune :  $G_L = 1,62$
- Jupiter :  $G_J = 22,6$
- Mars :  $G_M = 3,6$
- Terre :  $G_T = 9,8$
- Uranus :  $g_U = 8,3$

I

4.1. Le poids d'un corps sur Jupiter est  $1130 \text{ N}$ . Quel est le poids de ce corps sur Mars?

4.2. Quelle est la masse du corps qui a le même poids ( $1130 \text{ N}$ ) sur la Lune?



## II

Un objet de masse 1,8 tonne est posé sur la Lune. La distance Terre – Lune est d'environ 377 600 km soit 59 fois le rayon de la Terre. Sachant que le champ varie avec l'altitude  $h$  selon la relation :

$$g_h = g_0 \cdot \frac{R}{(R+h)^2}$$

avec  $g_0 = 9,8 \text{ N/kg}$  et  $R = 6400 \text{ km}$  (rayon de la terre)

**4.1.** Calculer le poids lunaire de cet objet (attraction que la lune exerce sur cet objet)

**4.2.** Calculer le poids terrestre de cet objet (l'attraction que la Terre exerce encore sur l'objet posé sur la lune)

**Exercice 5.**

Calculer la masse de la Terre, sachant qu'en réalité son rayon est de 6370 km. En déduire la masse volumique moyenne de la terre et comparer à la masse volumique au niveau des couches superficielles qui est de  $3000 \text{ kg m}^{-3}$  environ. On donne  $g_0 = 9,78 \text{ kg}$ .

**Forces électriques****Exercice 6.**

Une charge électrique ponctuelle de  $-10^{-6} \text{ C}$  est placée en un point  $O$  d'un axe  $Ox$ . Trouver la valeur de la charge qu'il faut placer au point  $M$ , tel que  $OM = 5 \text{ cm}$ , pour que ces deux charges exercent entre elles une force répulsive d'intensité  $F = 3,6 \text{ N}$ .

**Exercice 7.**

Trois charges égales et de même signe sont placées aux points  $A, B, C$ , comme l'indique la figure.



$AB = 2a$  et  $BC = a$ . La force exercée par  $q_A$  sur  $q_B$  est  $F = 10^{-6} \text{ N}$ .

**7.1.** Quelle est la force exercée par  $q_C$  sur  $q_B$  ?

**7.2.** Quelle est la force subie par  $q_B$  ?

**7.3.** Calculer  $q_A = q_B = q_C$  lorsque  $a = 2 \text{ cm}$

**Exercice 8.**

Une petite boule  $A$  de dimensions négligeables, de masse  $m = 0,5 \text{ g}$ , est suspendue à un fil isolant. Soit  $q_A$  la charge de la boule  $A$ . On approche de  $A$  une boule  $B$  portant la charge  $q_B = 10^{-6} \text{ C}$ . La boule  $A$  s'éloigne de  $B$ . A l'équilibre,  $A$  et  $B$  sont sur une même horizontale et distantes de  $d = 1 \text{ m}$ . Le fil de suspension de  $A$  fait avec la verticale un angle de  $30^\circ$ .

**8.1.** Quel est le signe de la charge de  $A$  ?

**8.2.** Calculer  $F_{A/B}$  (action de  $A$  sur  $B$ ).

**8.3.** Calculer la valeur numérique de  $q_A$ . On donne  $g = 10 \text{ USI}$ .

**Exercice 9.**

**9.1.** Donner l'énoncé de la loi de Coulomb.

**9.2.** Deux charges  $q_A$  et  $q_B$  sont placées en deux points  $A$  et  $B$  distants de  $10 \text{ cm}$

**9.2.1.** Trouver la valeur de chaque charge sachant que ces deux charges exercent l'une sur l'autre une force d'attraction d'intensité  $F = 2 \times 10^{-4} \text{ N}$  et que  $|q_A| = 2 \cdot |q_B|$ .

**9.2.2.** Peut-on déterminer, à partir des renseignements ci-dessus, le signe de chaque charge ?

**Exercice 10.**

Deux charges ponctuelles de même signe  $q_A = +2 \times 10^{-6} \text{ C}$  et  $q_B = +8 \times 10^{-6} \text{ C}$  sont placées en deux points  $A$  et  $B$  distants de  $20 \text{ cm}$ .

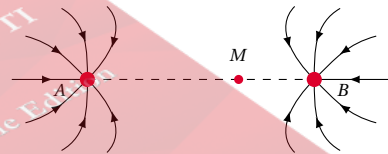
**10.1.** A quelle distance  $x$  du point  $A$  doit-on placer une charge  $q$  de signe (+) pour qu'elle soit en équilibre ?

**10.2.** La position d'équilibre est-elle modifiée si  $q_C$  est de signe (–) ?

**10.3.** L'équilibre est-il maintenu si on remplace la charge  $q_A$  par une charge  $q_{A'} = -q_A = -2 \times 10^{-6} \text{ C}$ ,  $q_B$  restant inchangée ?

**Champ électrique****Exercice 11.**

Deux charges ponctuelles  $q_A$  et  $q_B$  sont fixées respectivement en  $A$  et  $B$ . On a dessiné quelques lignes de champ du champ électrostatique produit par la source ( $q_A, q_B$ ).



**11.1.** Ce champ est-il uniforme? Justifier votre réponse.

**11.2.** Déterminer les signes de  $q_A$  et  $q_B$ . Justifier vos réponses.

**11.3.** Soit  $M$  le point de segment  $AB$  qui est situé à  $4 \text{ cm}$  de  $A$ . Déterminer le module du champ électrique produit par  $q_A$  au point  $M$ , sachant que  $|q_A| = 0,4 \mu\text{C}$ . Représenter le vecteur-champ  $\vec{E}_A(M)$ .

**11.4.** Sachant que le champ électrique produit par la source ( $q_A, q_B$ ) au point  $M$  est nul, déterminer  $q_B$  sachant que la distance est égale à  $6 \text{ cm}$ .

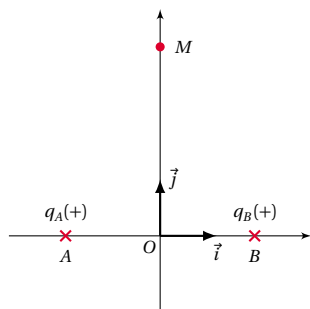
**Exercice 12.**

Dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , deux charges positives et égales sont placées aux points  $A(-a, 0)$  et  $B(a, 0)$ . Quelles sont les caractéristiques du vecteur champ élec-



## 1.5. Enoncés des exercices et problèmes

trostatique :



**12.1.** A l'origine des axes  $O(0,0)$ ?

**12.2.** En un point  $M(0, y)$  de l'axe des  $y$ ?

A.N. :  $a = 5 \text{ cm}$ ;  $q = 2 \times 10^{-5} \text{ C}$ ;  $y = 10 \text{ cm}$ .

### Exercice 13.

Deux charges électriques  $q_1 = 2 \times 10^{-6} \text{ C}$  et  $q_2 = -3 \times 10^{-6} \text{ C}$  sont placées respectivement en deux points  $A$  et  $B$  distants de  $1 \text{ m}$ .

Trouver la position du point  $C$  tel que le champ créé par l'ensemble des deux charges soit nul.

### Exercice 14.

Deux plaques métalliques  $A$  et  $B$ , planes, distantes de  $50 \text{ cm}$ , sont placées dans le vide. Un électron sortant de la plaque  $A$  est attiré par  $B$ .

**14.1.** Faire un schéma sur lequel apparaîtront les signes des charges des plaques.

**14.2.** Quels sont le sens et le module du vecteur champ électrostatique  $\vec{E}$ , sachant que  $V_A - V_B = -4000 \text{ V}$  et que le champ est uniforme?

**14.3.** Quel est le travail de la force électrostatique qui agit sur l'électron lorsque celui-ci passe de la plaque  $A$  à la plaque  $B$ ? Ce travail dépend-il du chemin suivi? Pourquoi?

### Exercice 15.

Un ion hydrogène  $H^+$  est placé entre deux plaques planes et parallèles, distantes de  $5 \text{ cm}$  et entre lesquelles existe une  $d.d.p.$  de  $2 \text{ V}$ .

**15.1.** Calculer l'intensité du champ électrostatique existant entre les deux plaques.

**15.2.** Montrer que dans ce champ, le poids du proton est négligeable devant la force d'origine électrostatique.

**15.3.** En est-il de même pour un électron?

A.N. :

■ charge du proton :  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ;

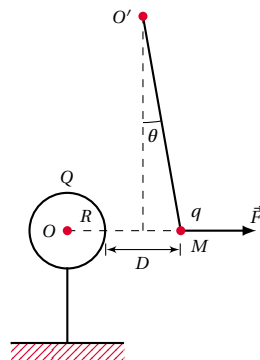
■ masse du proton :  $m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ;

■  $g = 9,8 \text{ N kg}^{-1}$ .

### Exercice 16.

Une sphère métallique creuse de centre  $O$  et de rayon  $R$ , portant une charge  $Q$  uniformément répartie à sa surface, est fixée au sol par l'intermédiaire d'un support iso-

lant. Un pendule électrostatique est formé d'une petite sphère légère, métallisée, de masse  $m = 1,5 \text{ g}$ , suspendue par l'intermédiaire d'un fil isolant au point  $O'$ .



Lorsque la petite sphère porte une charge  $q$ , on constate que le fil du pendule dévie d'un angle  $\theta = 10^\circ$  par rapport à la verticale.

**16.1.** Calculer l'intensité de la force électrostatique  $\vec{F}$  à laquelle est soumise la petite sphère.

**16.2.** En déduire les caractéristiques du vecteur champ  $\vec{E}$  créé au point  $M$  par la sphère creuse chargée. on donne  $q = -17,6 \times 10^{-9} \text{ C}$ .

**16.3.** Quels sont le signe et la valeur numérique de la charge  $Q$ ?

On donne  $R = 10 \text{ cm}$ ,  $D = 20 \text{ cm}$ .

N.B. : dans tout le problème, on prendra  $g = 10 \text{ N kg}^{-1}$ ;

On utilisera le résultat suivant dû au théorème de Gauss : le champ à l'extérieur de la sphère de rayon  $R$  est le même que celui d'une charge ponctuelle égale à  $Q$  placée en  $O$ .

### Exercice 17.

Un ion  $\text{SO}_4^{2-}$  est abandonné entre deux plaques  $A$  et  $B$  soumises à une tension  $V_A - V_B = 2000 \text{ V}$  et distantes de  $10 \text{ cm}$ .

On donne  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ , charge élémentaire.



**17.1.** Calculer l'intensité du champ électrique uniforme existant entre les plaques.

**17.2.** Représenter le vecteur champ électrique  $\vec{E}$  au point  $P$ , en justifiant de sens.

**17.3.** Représenter la force électrique s'exerçant sur l'ion au point  $N$ . Justifier le sens de ce vecteur force.

**17.4.** Calculer l'intensité de cette force.

**17.5.**  $|V_P - V_N| = 1200 \text{ V}$ . Calculer la distance séparant les surfaces équipotentiels contenant  $P$  et  $N$ .

**17.6.** La particule chargée se déplace de  $N$  à  $P$ . Calculer le travail de la force électrique au cours de ce déplacement.

### Exercice 18.

Dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , un champ électrostatique uniforme est représenté au point  $O$  par un vecteur champ  $\vec{E}$  porté par l'axe  $Ox$ .

**18.1.** Montrer que tout plan perpendiculaire à  $\vec{E}$  est une surface équipotentielle.

**18.2.** Soit un point  $M$  du plan  $xOy$  défini par  $(\vec{Ox}, \vec{OM}) = \alpha$  et  $\|\vec{OM}\| = r$ . Exprimer le potentiel  $V_M$  du point  $M$  en fonction de  $r$  et  $\alpha$ . On désignera par  $V_O$  le potentiel du point  $O$ .

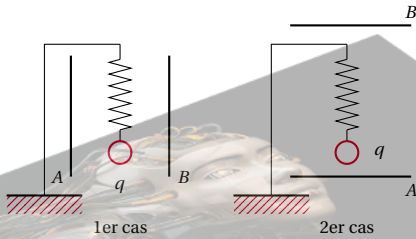
**18.3.** Calculer le travail de la force électrostatique qui agit sur une charge  $q = 2 \times 10^{-10} \text{ C}$  qui passe du point  $O$  à un point  $M$  défini par :  $\vec{Ox}, \vec{OM} = \frac{\pi}{2}$  et  $\|\vec{OM}\| = 1 \text{ cm}$ . Conclure.

A.N. :  $E = 100 \text{ V m}^{-1}$  ;  $V_O = 0 \text{ V}$ .

### Exercice 19.

Un ressort élastique porte à l'une de ses extrémités une sphère, isolée du ressort, chargée ( $q = +10^{-6} \text{ C}$ ) et de masse  $m = 20 \text{ g}$ . Le ressort est fixé par l'autre extrémité à un support. On prendra  $g = 10 \text{ N kg}^{-1}$ .

**19.1.** On demande quelle est la direction prise par le ressort et quelle est la tension du ressort lorsque l'ensemble est placé entre deux plaques métalliques identiques et parallèles distantes de  $10 \text{ cm}$ , telle que  $V_A - V_B = 10,000 \text{ V}$  dans les deux cas ci-dessous.



**19.2.** Quel est l'allongement du ressort dans chaque cas, sachant que le coefficient de raideur du ressort est  $k = 10 \text{ N m}^{-1}$ ?

Extrait Probatoire série C 1981 Côte d'Ivoire

## Champ magnétique

### Exercice 20.

Sur les schémas ci-dessous, on a représenté quelques lignes de champ magnétique non orientées. Le point  $O_1$  est sur l'axe de symétrie de l'aimant droit, le point  $O_3$  est sur l'axe de symétrie de la bobine parcourue par un courant.

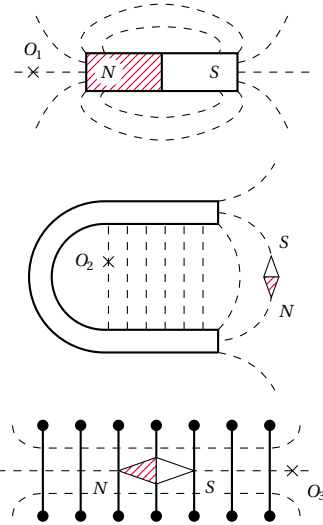
**20.1.** Orienter les lignes de champ, préciser les pôles de l'aimant en  $U$ , les faces de la bobine, le sens du courant dans cette dernière. Représenter les vecteurs champ magnétique en  $O_1$ ,  $O_2$  et  $O_3$ .

**20.2.** peut-on dire que le pôle nord d'une aiguille aimantée

mobile dans toutes les directions est toujours attiré par le pôle sud ou la face sud de la source de champ magnétique?

**20.3.** Comment peut-on reconnaître qu'un espace champ magnétique est uniforme?

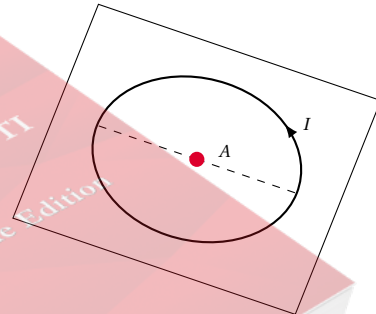
**20.4.** Quel est l'ordre de grandeur du champ magnétique en  $O_1 : 10 \text{ T}, 10^{-5} \text{ T}, 10^{-2} \text{ T}$ ?



### Exercice 21.

Donner le sens et la direction du vecteur champ magnétique créé en  $A$  pour les deux cas ci-contre.

**21.1.** Une bobine plate parcourue par un courant  $I$ .



**21.2.** Un solénoïde parcouru par un courant  $I$ .



Dessiner approximativement le vecteur champ magnétique en  $A$ .

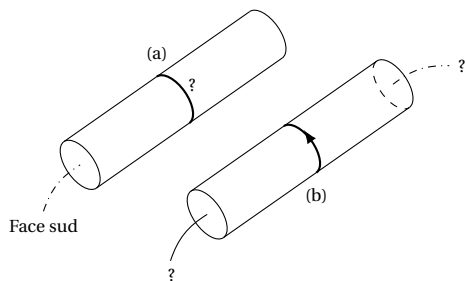
### Exercice 22.

**22.1.** Un solénoïde parcouru par un courant a sa face Sud placée comme l'indique la figure (a) ci-dessous. Donner le sens du courant dans le solénoïde en justifiant votre réponse.

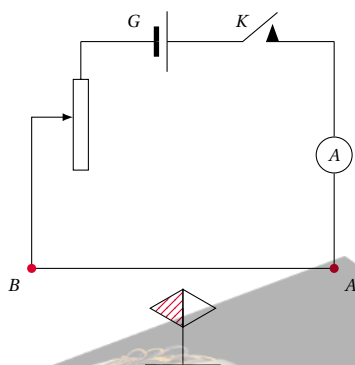


## 1.5. Enoncés des exercices et problèmes

**22.2.** Quel est le nom des faces du solénoïde de la figure (b) ci-dessus, lorsque celui-ci est parcouru par un courant circulant dans le sens indiqué?

**Exercice 23.**

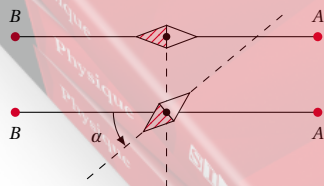
On réalise une expérience avec le dispositif schématisé par la figure ci-dessous :



- $G$  est un générateur de f.é.m.  $E = 90\text{ V}$  et de résistance interne  $r = 1,5\Omega$ ;
- $Rh$  est un rhéostat dont la résistance est comprise entre 0 et  $10\Omega$ ;
- $AB$  est un fil de cuivre de résistance négligeable, placé parallèlement au méridien magnétique;
- la petite aiguille aimantée est mobile autour d'un axe vertical;
- $K$  est un interrupteur.

**23.1.** Pourquoi a-t-on utilisé un fil de cuivre au lieu d'un fil de fer, par exemple?

**23.2.** Lorsque le circuit est ouvert, comment s'oriente la petite aiguille aimantée?

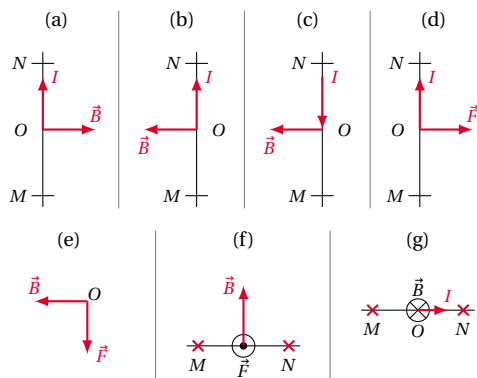


**23.3.** On ferme le circuit et on donne au rhéostat la valeur  $Rh = 8,5\Omega$ . On constate que l'aiguille dévie d'un angle  $\alpha$ . Expliquer pourquoi il y a déviation de l'aiguille aimantée. Les positions de l'aiguille aimantée (vue de dessus) avant et après le passage du courant sont représentées ci-dessus.

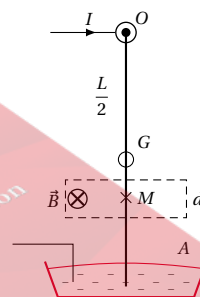
**23.4.** Calculer l'angle  $\alpha$ , sachant que la distance du fil de cuivre au centre de l'aiguille est  $d = 5\text{ cm}$ . On donne la composante horizontale du champ magnétique terrestre  $B_0 = 3,2 \times 10^{-5}\text{ T}$ .

**Exercice 24.**

Le conducteur  $MN$  parcouru par un courant d'intensité  $I$  est placé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme. Il est soumis à la force de Laplace  $\vec{F}$ . Sur les schémas ci-dessous, représenter au point  $O$ , le vecteur qui manque :

**Exercice 25.**

La figure ci-dessous représente un conducteur pendule dans sa position initiale (circuit ouvert). C'est un fil cylindrique et homogène de longueur  $OA = L = 30\text{ cm}$  et de masse  $m = 20\text{ g}$ .



Il est mobile autour du point  $O$  et soumis, sur la distance  $d = 3\text{ cm}$  à l'action d'un champ magnétique horizontal et uniforme tel que  $B = 0,1\text{ T}$ . Ce champ s'applique autour du point  $M$  tel que  $OM = 20\text{ cm}$ . Le courant d'intensité  $I$  qui parcourt le fil a le sens indiqué sur la figure.

On donne  $I = 6\text{ A}$ .

**25.1.** Montrer que le fil dévie vers la droite. Dessiner la force électromagnétique  $\vec{F}$  qui s'applique sur lui.

**25.2.** Déterminer la valeur de l'angle d'inclinaison  $\theta$ .

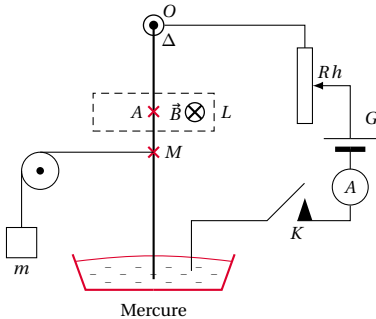
On supposera que l'inclinaison  $\theta$  est faible, de sorte que le fil est soumis à l'action du champ magnétique sur une longueur voisine de  $d$ .

On admettra aussi que le point d'application de  $\vec{F}$  se confond avec le point  $M$ .

On prendra  $g = 9,8\text{ U.S.I.}$

**Exercice 26.**

Pour vérifier la loi de Laplace, on utilise le dispositif expérimental ci-dessous. Une portion de conducteur pendule de longueur  $L$ , de milieu  $A$ , est placée dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$  qui lui est perpendiculaire. Lorsque l'interrupteur  $K$  est fermé, le conducteur pendule s'incline d'un angle  $\alpha$  par rapport à la position d'équilibre (verticale). Pour ramener à cette position d'équilibre, on utilise un contrepoids de masse  $m$ . On néglige le poids des conducteurs.



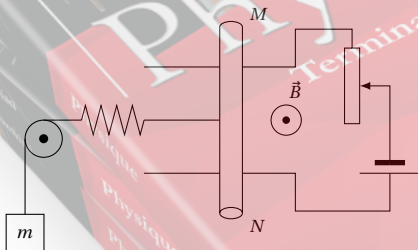
**26.1.** Représenter sur le schéma les différentes forces qui s'appliquent sur le conducteur-pendule à la position d'équilibre.

**26.2.** Etablir la relation qui existe entre la masse  $m$  du contrepoids, l'intensité  $I$  du courant, l'intensité  $B$  du champ magnétique, l'intensité  $g$  de la pesanteur, les distances  $OA$  et  $OM$ , et la longueur  $L$ .

**26.3.** Calculer  $m$  sachant que  $I = 5\text{ A}$ ;  $B = 0,3\text{ T}$ ;  $L = 4\text{ cm}$ ;  $OA = 20\text{ cm}$

**Exercice 27.**

Dans le montage représenté ci-dessous,  $MN$  est une tige de cuivre rigide, homogène de longueur  $l = 13\text{ cm}$ , pouvant rouler sur deux rails parallèles et horizontaux. L'ensemble est placé dans un champ magnétique uniforme perpendiculaire au plan des rails et d'intensité  $B = 1\text{ T}$ .



Pour maintenir la tige en équilibre, on utilise un contrepoids de masse  $m = 130\text{ g}$  et un ressort de raideur  $K = 26\text{ N m}^{-1}$

**27.1.** Représenter sur un schéma toutes les forces appliquées à la tige en équilibre.

**27.2.** Ecrire la condition d'équilibre de la tige.

**27.3.** Calculer l'intensité du courant dans le circuit à l'équilibre.

**27.4.** Calculer l'allongement  $x$  du ressort. On prendra

$g = 10\text{ USI}$ .

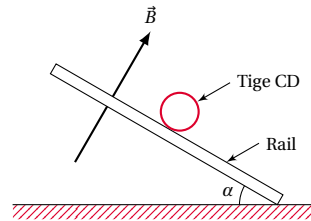
**Exercice 28.**

On dispose une tige  $CD$  sur deux rails. La figure ci-dessous présente le dispositif expérimental vu de côté. Les rails sont inclinés de  $30^\circ$  par rapport à l'horizontale, le champ magnétique  $\vec{B}$  perpendiculaire aux rails a une intensité de  $1,5\text{ T}$ .

On fait passer un courant électrique dans la tige  $CD$  de masse  $100\text{ g}$  et longueur  $l = 10\text{ cm}$ . La tige est alors en équilibre sur les rails.

Déterminer le sens et l'intensité du courant dans la tige  $CD$ .

On néglige les frottements et  $g = 10\text{ ms}^{-2}$ .

**Exercice 29.**

Une roue de Barlow est formée d'un disque de cuivre de rayon  $r = 5\text{ cm}$  pouvant tourner autour d'un axe horizontal. La partie inférieure du disque trempe dans le mercure. La roue est alimentée par un courant continu de  $10\text{ A}$  qui arrive par le mercure et sort par l'axe du disque. Un électro-aimant produit un champ magnétique uniforme de  $0,5\text{ T}$  perpendiculaire au plan du disque. Le disque soumis à la force électromagnétique tourne à vitesse constante à raison de 3 tours par seconde.

**29.1.** Faire un schéma montrant la force électromagnétique et le sens de la rotation du disque. On considérera les deux sens possibles de  $\vec{B}$ .

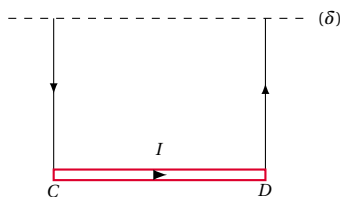
**29.2.** Calculer l'intensité de la force électromagnétique ainsi que son moment par rapport à l'axe de rotation. On supposera que la force est appliquée au point  $C$ , milieu du rayon du disque.

**29.3.** Le disque qui tourne constitue un petit moteur électrique. Calculer sa puissance.

**Exercice 30.**

Un fil de cuivre  $CD$ , horizontal, est suspendu par deux fils conducteurs souples et de masses négligeables. Grâce à un électroaimant, le fil  $CD$  peut être soumis sur toute sa longueur à l'action d'un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$  qui s'exerce dans toute région de l'espace où le fil peut être amené à se déplacer. Un courant d'intensité  $I$  parcourt le fil dans le sens  $C \rightarrow D$ .

## 1.5. Enoncés des exercices et problèmes



Indiquer clairement, en s'aidant de schéma, comment il faut placer les pôles nord et sud de l'électroaimant pour que :

**30.1.** le fil  $CD$  soit déplacé verticalement vers le haut. Quelle est l'intensité minimale nécessaire? A.N.  $CD = 10\text{ cm}$ ; masse linéaire de  $CD$  :  $\mu = 1,5 \times 10^{-2} \text{ kg m}^{-1}$ ;  $B = 0,04 \text{ T}$ ;  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$

**30.2.** Le fil  $CD$  s'écarte d'un angle  $\alpha$  du plan vertical contenant  $(\delta)$ , sous l'action d'une force électromagnétique horizontale. Calculer  $\alpha$  si l'intensité  $I$  du courant est égale à  $1 \text{ A}$ .

**30.3.** Le fil ne subisse aucune action magnétique.

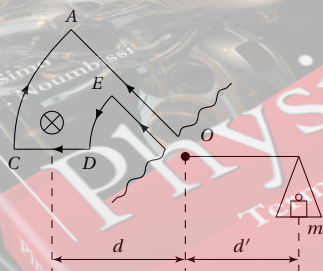
## Exercice 31.

La balance de Cotton schématisée ci-dessous peut osciller autour d'un axe horizontal dont la section avec le plan de la figure est le point  $O$ . La portion  $CD$  baigne dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$ .

**31.1.** Déterminer les caractéristiques de la force électromagnétique s'exerçant sur l'élément de circuit  $CD$  et écrire la condition d'équilibre de la balance. (Les forces s'exerçant sur  $AC$  et  $DE$  n'interviennent pas.)

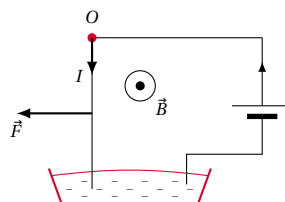
**31.2.** Montrer que ce dispositif permet la mesure des champs magnétiques. Démontrer pour cela la relation liant  $B$  avec  $m$ ,  $g$ ,  $l$ ,  $d$  et  $d'$ .

**31.3.** Connaissant un champ  $B_0$ , montrer que l'on peut en déduire un champ inconnu  $B$  par une simple mesure de masse.



## Exercice 32.

Un fil de cuivre rigide, rectiligne, homogène, de longueur  $R$  est susceptible de se mouvoir dans un plan vertical, autour d'une de ses extrémités. L'autre extrémité plonge dans un bac de mercure qui permet de maintenir le contact électrique avec un générateur de tension continue. L'intensité du courant dans le circuit est  $I$ . Le dispositif peut être plongé dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$ , horizontal, et orthogonal au plan de la figure. (Voir figure ci-dessous)

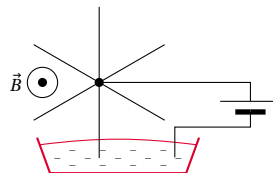


**32.1.** Que se passe-t-il lorsque :  $I = 0$ ,  $B \neq 0$ ?  $I \neq 0$ ,  $B = 0$ ?  $I \neq 0$ ,  $B \neq 0$ ?

Modifie-t-on quelque chose quand on permute les bornes du générateur?

**32.2.** On néglige la longueur de la partie de la tige située dans le mercure et on admet que la ligne d'action de la force électromagnétique passe par le milieu de la tige. Calculer la déviation angulaire de la tige quand elle atteint sa position d'équilibre dans le cas où  $I = 6 \text{ A}$ ,  $B = 2 \times 10^{-2} \text{ T}$ ,  $R = 10 \text{ cm}$ . Le poids de la tige est  $8 \times 10^{-2} \text{ N}$ .

**32.3.** Soit le dispositif suivant : une roue mobile autour d'un axe horizontal  $(\Delta)$  est constituée de rayons rigides en cuivre de longueur  $R$  régulièrement répartis. Le dispositif est plongé dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$ .



**32.4.** Expliquer pourquoi on observe un mouvement de rotation. Préciser son sens.

**32.5.** La vitesse de rotation est 90 tours/minute. Calculer la puissance développée par la force électromagnétique, supposée appliquée au milieu d'un rayon.

On donne  $B = 2 \times 10^{-2} \text{ T}$ ;  $R = 10 \text{ cm}$ ;  $I = 6 \text{ A}$ .

## 1.6 Solutions des exercices et problèmes

### Forces gravitationnelles et champ gravitationnel

#### Solution 1. (p. 19)

La masse est une grandeur scalaire indépendante du lieu. Par conséquent, la masse du paquet du sucre à la Lune est la même qu'à Terre.

L'intensité de la pesanteur au voisinage de la Lune est donnée par :

$$g_L = \epsilon \cdot \frac{m_L}{R_L^2}$$

Le poids du paquet du sucre est :

$$\begin{aligned} P &= mg_L = m \cdot \epsilon \cdot \frac{M_L}{R_L^2} \\ &= \frac{1 \cdot 6,67 \times 10^{-11} \cdot 7,34 \times 10^{22}}{(16,17 \times 10^5)^2} = 1,7 \text{ N} \end{aligned}$$

#### Solution 2. (p. 19)

La force d'attraction exercée par une planète de masse  $M_P$  sur un corps de masse  $m$  et situé à une distance  $d$  d'elle est, d'après la loi de Newton  $F_P$  telle que :

$$F_P = \epsilon \cdot \frac{m \cdot M_P}{d^2}$$

Ainsi, la force d'intensité  $F_S$  exercée par le soleil sur un corps de masse  $m$ , situé sur la terre est :

$$\begin{aligned} F_S &= \epsilon \cdot \frac{m \cdot M_S}{D^2} \\ &= 1 \cdot 6,67 \times 10^{-11} \cdot \frac{10 \cdot 1,99 \times 10^{30}}{(1,49 \times 10^{11})^2} = 0,059 \text{ N} \end{aligned}$$

De même la force d'intensité  $F_L$  exercée par la lune sur ce même corps situé sur la terre est :

$$\begin{aligned} F_L &= \epsilon \cdot \frac{m \cdot M_L}{d^2} \\ &= 6,67 \times 10^{-11} \cdot \frac{107,34 \times 10^{22}}{(3,84 \times 10^8)^2} = 3,32 \times 10^{-4} \text{ N} \end{aligned}$$

Au voisinage de la terre, le poids du corps de masse  $m$  est :

$$\begin{aligned} P &= \epsilon \cdot \frac{m \cdot M_T}{R^2} \\ &= 6,67 \times 10^{-11} \cdot \frac{10 \cdot 6 \times 10^{24}}{(64 \times 10^5)^2} = 97,7 \text{ N} \end{aligned}$$

Pour comparer  $F_S$  et  $F_L$  au poids  $P$  du corps, on a :

$$\frac{P}{F_S} = \frac{97,7}{0,059} = 1656$$

$$\frac{P}{F_L} = \frac{97,70}{3,32 \times 10^{-4}} = 294277$$

On constate que  $F_S$  et  $F_L$  sont négligeables devant le poids terrestre du corps situé à la surface de la terre.

#### Solution 3. (p. 19)

Poids du satellite au niveau du sol.

$$\begin{aligned} P_s &= mg_0 = \epsilon \cdot \frac{m \cdot M_T}{R^2} \\ &= 200 \cdot \frac{6,67 \times 10^{-11} \cdot 6 \times 10^{24}}{(64 \times 10^5)^2} = 1,95 \times 10^3 \text{ N} \end{aligned}$$

Poids du satellite à l'altitude  $h$

$$\begin{aligned} P_h &= mg_h = \epsilon \cdot \frac{m \cdot M_T}{(R+h)^2} \\ &= 200 \cdot \frac{6,67 \times 10^{-11} \cdot 6 \times 10^{24}}{(64 \times 10^5 + 10^6)^2} = 1,46 \times 10^3 \text{ N} \end{aligned}$$

#### Solution 4. (p. 19)

4.1. Le poids d'un corps sur la planète Jupiter étant  $P_J = 1130 \text{ N}$ , déterminons la masse de ce corps.

$$\begin{aligned} P_J &= M \cdot g_J \Rightarrow M = \frac{P_J}{g_J} \\ &= \frac{1130}{22,6} = 50 \text{ kg} \end{aligned}$$

Le poids de ce corps sur Mars est :

$$P_M = M \cdot g_M = 50 \cdot 3,6 = 180 \text{ N}.$$

4.2. Détermination de la masse d'un corps à la surface de la Lune

$$\begin{aligned} P_J &= M' \cdot g_J \Rightarrow M' = \frac{P_J}{g_J} \\ &= \frac{1130}{1,62} = 697,5 \text{ kg} \end{aligned}$$

4.3. Poids lunaire de l'objet :

$$P_J = M \cdot g_J = 1800 \cdot 1,62 = 2916 \text{ N}$$

4.4. Poids terrestre de l'objet

$$P_{\oplus} = mg_{\oplus}(h) = \frac{M \cdot g_0 \cdot R^2}{(R+h)^2}$$

avec  $h = 59R$ .

$$P_{\oplus} = \frac{M \cdot g_0 \cdot R^2}{60R^2} = \frac{mg_0}{3600}$$

A.N.  $M = 1,8 \text{ tonne} = 1800 \text{ kg}$ ;  $g = 9,8 \text{ N kg}^{-1}$ ;

$$P_{\oplus} = \frac{1800 \cdot 9,8}{3600} = 4,9 \text{ N}$$

Conclusion : L'attraction de la Terre sur un objet situé sur la Lune est négligeable par rapport à l'attraction qu'exerce la Lune sur ce corps. Ce corps ne peut tomber sur la Terre.



## 1.6. Solutions des exercices et problèmes

## Solution 5. (p. 20)

La masse de la Terre est liée à l'intensité de la pesanteur au niveau de la mer par la relation :

$$g_0 = \epsilon \cdot \frac{M_T}{R^2} \Rightarrow M_T = \frac{g_0 \cdot R^2}{\epsilon}$$

A.N.  $g_0 = 9,78 \text{ N kg}^{-1}$ ;  $\epsilon = 6,67 \times 10^{-11}$ ;  
 $R = 6370 \text{ km} = 637 \times 10^4 \text{ m}$

$$M_T = \frac{9,78 \cdot (637 \times 10^4)^2}{6,67 \times 10^{-11}} = 5,94 \times 10^{24} \text{ kg}$$

La masse volumique de la terre est :

$$\rho = \frac{M_T}{V}$$

avec  $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ ,  $\rho = \frac{3M_T}{4\pi R^3}$ .

A.N.

$$\rho = \frac{3 \cdot 5,94 \times 10^{24}}{4 \cdot 3,14 \cdot (637 \times 10^4)^3} = 5490 \text{ kg m}^{-3}$$

Soit  $\rho'$  la masse volumique des couches superficielles de la Terre.

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{5490}{3000} = 1,8$$

On constate que la masse volumique de la Terre est 1,8 fois la masse volumique des couches superficielles de la Terre. On en déduit que les couches profondes de la Terre sont plus denses.

## Forces électriques

## Solution 6. (p. 20)

Soient  $q = -10^{-6} \text{ C}$ , la charge électrique ponctuelle placée en  $O$  et  $q_x$  la charge qu'il faut placer au point  $M$ . La loi de Coulomb s'écrit :

$$F = K \cdot \frac{|q| \cdot |q_x|}{OM^2} \Rightarrow |q_x| = F \cdot \frac{OM^2}{K \cdot |q|}$$

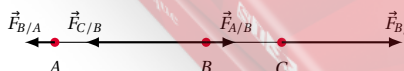
$$|q_x| = \frac{3,6 \cdot (5 \times 10^{-2})^2}{9 \times 10^9 \cdot 10^{-6} \text{ C}} = 10^{-6} \text{ C}$$

La force étant répulsive,  $q_x$  est de même signe que  $q$ .  
 Donc :

$$q_x = -10^{-6} \text{ C}$$

## Solution 7. (p. 20)

7.1. Intensité de la force  $\vec{F}_{C/B}$  exercée par  $q_C$  sur  $q_B$ .



Posons  $q_A = q_B = q_C = q$  et  $\vec{F}_{A/B} = \vec{F}$  la force exercée par  $q_A$  sur  $q_B$ . D'après la loi de Coulomb,

$$F_{A/B} = F = K \cdot \frac{|q_A| \cdot |q_B|}{AB^2} = K \cdot \frac{q^2}{4a^2}$$

$$F_{C/B} = K \cdot \frac{|q_B| \cdot |q_C|}{BC^2} = K \cdot \frac{q^2}{a^2}$$

Nous remarquons que :

$$F = K \cdot \frac{q^2}{4a^2} = \frac{1}{4} \cdot K \cdot \frac{q^2}{a^2} = \frac{1}{4} \cdot F_{C/B}$$

$$\Leftrightarrow F_{C/B} = 4 \cdot F = 2,4 \times 10^{-5} \text{ N}$$

7.2. Force  $\vec{F}'$  subie par  $q_B$ ,  $q_B$  est soumise à deux forces :  $\vec{F}_{A/B}$  exercée par  $q_A$  et  $\vec{F}_{C/B}$  exercée par  $q_C$

$$\vec{F}' = \vec{F}_{A/B} + \vec{F}_{C/B}$$

$\vec{F}_{A/B}$  et  $\vec{F}_{C/B}$  ont la même droite d'action, mais sont opposées.

Donc  $\vec{F}'$  a la même droite d'action que  $\vec{F}_{A/B}$  et  $\vec{F}_{C/B}$  :  $\vec{F}'$  a le sens de la force la plus intense ( $\vec{F}_{C/B}$ ). Son intensité est :

$$F' = F_{C/B} - F_{A/B}$$

$$= 4F - F = 3F = 1,8 \times 10^{-5} \text{ N}$$

7.3. Calcul de  $q_A = q_B = q_C = q$ , pour  $a = 2 \text{ cm}$ .  
 Nous avons vu que :

$$F = K \cdot \frac{q^2}{4a^2}$$

On en déduit que :

$$q = \sqrt{\frac{4a^2 \cdot F}{K}}$$

$$= \frac{\sqrt{4 \cdot (2 \times 10^{-2})^2 \cdot 6 \times 10^{-6}}}{9 \times 10^9}$$

$$= \pm 1,3 \times 10^{-9} \text{ C}$$

Donc :

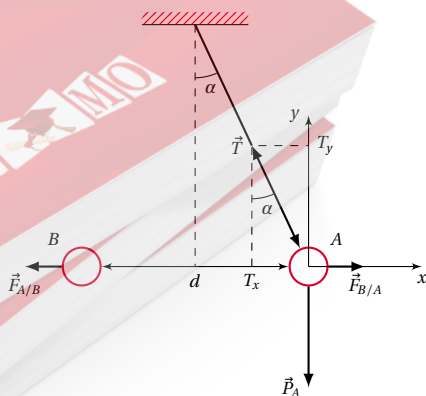
$$q_A = q_B = q_C = +1,3 \times 10^{-9} \text{ C ou}$$

$$q_A = q_B = q_C = -1,3 \times 10^{-9} \text{ C}$$

## Solution 8. (p. 20)

8.1. Signe de la charge de A.

Quand on approche la boule B de la boule A, la boule A s'éloigne. Il y a donc répulsion. Les deux boules portent des charges de même signe.  $q_B$  étant de signe (+),  $q_A$  est aussi de signe (+).





**8.2. Calcul de  $\vec{F}_{A/B}$** 

D'après le principe des interactions,

$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A} \Rightarrow \vec{F}_{A/B} = \vec{F}_{B/A}$$

Calculons alors  $\vec{F}_{B/A}$ .

Étudions l'équilibre de la boule A (considérée comme le système). Bilan des forces agissant sur A :

- Le poids  $\vec{P}'_A = m \cdot \vec{g}$
- la tension  $\vec{T}$  du fil
- la force  $\vec{F}_{B/A}$  exercée par la boule B.

La boule A étant en équilibre, on a :

$$\vec{P}'_A + \vec{T} + \vec{F}_{B/A} = \vec{0} \quad (\text{S1.1})$$

Projetons l'équation (S1.1) sur les axes Ax et Ay :

$$\text{Sur Ax : } 0 - T \sin \alpha + F_{B/A} = 0 \quad (\text{S1.2})$$

$$\text{Sur Ay : } -mg + T \cos \alpha + 0 = 0 \quad (\text{S1.3})$$

$$(\text{S1.2}) \Rightarrow T \cdot \sin \alpha = \vec{F}_{B/A} \quad (\text{S1.4})$$

$$\text{et } (\text{S1.3}) \Rightarrow T \cdot \cos \alpha = mg \quad (\text{S1.5})$$

$$\frac{(\text{S1.4})}{(\text{S1.5})} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{F_{B/A}}{m \cdot g} \quad (\text{S1.6})$$

$$\Rightarrow F_{B/A} = mg \cdot \tan \alpha \quad (\text{S1.7})$$

A.N.

$$F_{B/A} = 0,5 \times 10^{-3} \cdot 10 \cdot \tan 30^\circ$$

$$\Rightarrow F_{B/A} = 2,9 \times 10^{-3} \text{ N}$$

Donc,  $F_{A/B} = F_{B/A} = 2,9 \times 10^{-3} \text{ N}$ .

**8.3. Valeur numérique de  $q_A$ .**

D'après la loi de Coulomb,

$$F_{B/A} = K \cdot \frac{|q_A| \cdot |q_B|}{d^2} \Rightarrow |q_A| = \frac{F_{B/A} \cdot d^2}{K \cdot |q_B|}$$

$$q_A = \frac{2,9 \times 10^{-3} \cdot (1)^2}{9 \times 10^9 \cdot 10^{-6}}$$

$$\Leftrightarrow |q_A| = 3,2 \times 10^{-7} \text{ C}$$

$q_A$  étant de signe (+)  $q_A = +3,2 \times 10^{-7} \text{ C}$ .

**Solution 9. (p. 20)**

**9.1.** Énoncé de la loi de Coulomb : (voir le cours)

**9.2.** Valeur de chaque charge.

La force d'interaction entre les deux charges a pour intensité :

$$F_{A/B} = F_{B/A} = K \cdot \frac{|q_A| \cdot |q_B|}{AB^2} = F$$

Pour  $|q_A| = 2 \cdot |q_B|$

$$F = 2 \cdot K \cdot \frac{|q_B| \cdot |q_B|}{AB^2}$$

$$|q_B|^2 = \frac{F \cdot AB^2}{2 \cdot K}$$

$$|q_B| = AB \cdot \sqrt{\frac{F}{2 \cdot K}}$$

A.N.

$$|q_B| = 10^{-1} \sqrt{\frac{2 \times 10^{-4}}{2 \cdot 9 \times 10^9}} = 10^{-8};$$

$$q_B = \mp 10^{-8} \text{ C};$$

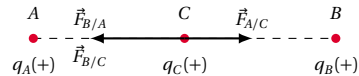
$$|q_A| = 2 \cdot |q_B| = 2 \times 10^{-8} \text{ C}$$

**9.3. Signe de chaque charge.**

D'après les renseignements de l'énoncé, les deux charges exercent l'une sur l'autre une action attractive. Nous en déduisons que les deux charges ont des signes opposés. Mais aucun renseignement ne nous permet d'attribuer le signe (+) à l'une des charges et le signe (-) à l'autre.

**Solution 10. (p. 20)**

**10.1.** Considérons le système constitué par la charge  $q_C$ .



Ce système est soumis à deux forces :

- L'action de  $q_B$  :  $\vec{F}_{B/C}$  (répulsive)
- L'action de  $q_A$  :  $\vec{F}_{A/C}$  (répulsive)

Lorsque le système est en équilibre,

$$\vec{F}_{B/C} + \vec{F}_{A/C} = \vec{0} \Leftrightarrow F_{B/C} = F_{A/C}$$

avec

$$F_{A/C} = K \cdot \frac{|q_A| \cdot |q_C|}{AB^2} = K \cdot \frac{|q_A| \cdot |q_C|}{x^2}$$

$$F_{B/C} = K \cdot \frac{|q_B| \cdot |q_C|}{BC^2} = K \cdot \frac{|q_B| \cdot |q_C|}{(d-x)^2}$$

où  $d = AB$ .

$$F_{B/C} = F_{A/C} \quad (\text{S1.1})$$

$$\Leftrightarrow K \cdot \frac{|q_A| \cdot |q_C|}{x^2} = K \cdot \frac{|q_B| \cdot |q_C|}{(d-x)^2} \quad (\text{S1.2})$$

$$\Leftrightarrow \frac{|q_A|}{x^2} = \frac{|q_B|}{(d-x)^2} \quad (\text{S1.3})$$

Nous obtenons une équation de second degré en  $x$ . Simplifions cette équation en remplaçant  $q_A$ ,  $q_B$  et  $d$  par leurs valeurs numériques :

$$\frac{2 \times 10^{-6}}{x^2} = \frac{8 \times 10^{-6}}{(0,2-x)^2}$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 0,4x - 0,04 = 0$$

La résolution de cette équation donne deux valeurs de  $x$  qui sont :

$$x = 0,067 \text{ m} = 6,7 \text{ cm}$$

$$x' = -0,2 \text{ m} = -20 \text{ cm}$$

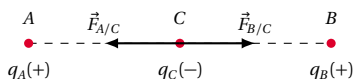
La distance  $x$  étant une grandeur positive, nous retenons la valeur :

$$x = 0,067 \text{ m} = 6,7 \text{ cm}$$

**10.2.** Observations lorsque  $q_C$  est de signe (-).

$q_C$  (-) est toujours soumise à deux actions  $\vec{F}_{A/C}$ ,  $\vec{F}_{B/C}$  attractives. Les deux actions sont opposées et leurs intensités conservent les valeurs ci-dessus. La condition d'équilibre de  $q_C$  conduit au même résultat que ci-dessus.

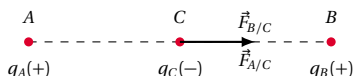
## 1.6. Solutions des exercices et problèmes



Donc la position d'équilibre n'est pas modifiée.

**10.3.** Observations lorsqu'on remplace  $q_A$  par une charge  $q_A' = -q_A$ ,  $q_B$  étant inchangée.

Supposons  $q_C$  de charge  $(-)$ .



$q_C$  est soumise à deux actions  $\vec{F}_{B/C}$  et  $\vec{F}_{A/C}$  ayant la même direction et le même sens. Donc :

$$\vec{F}_{B/C} + \vec{F}_{A/C} \neq \vec{0}$$

La condition d'équilibre ne pouvant être satisfaite,  $q_C$  n'est plus en équilibre ; elle se met en mouvement.

$$K \cdot \frac{|q_A|}{AM^2} = K \cdot \frac{|q_B|}{BM^2} \Rightarrow |q_B| = |q_A| \cdot \frac{BM^2}{AM^2}$$

Où  $BM = AB - AM = 6 - 4 = 2$  cm Donc :

$$|q_B| = 0,4 \times 10^{-6} \cdot \frac{(2 \times 10^{-2})^2}{(4 \times 10^{-2})^2} = 10^{-7}$$

$q_B$  étant de signe  $(-)$ ,  $q_B = -10^{-7}$  C.

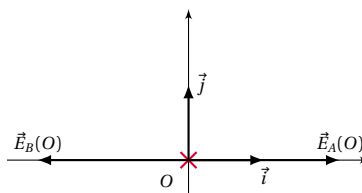
## Solution 12. (p. 20)

**12.1.** Caractéristiques du vecteur champ électrostatique en  $O(0,0)$

soient :

■  $\vec{E}_A(0)$  le vecteur-champ créé par  $q_A(+)$  au point  $O$ .  
 $\vec{E}_A(0)$  est centrifuge (donc orienté dans le sens de  $\vec{i}$ )

$$\vec{E}_A(0) = K \cdot \frac{q_A}{AO^2} \cdot \vec{i} = k \cdot \frac{q_A}{a^2} \cdot \vec{i}$$



■  $\vec{E}_B(0)$  le vecteur-champ créé par  $q_B(+)$  au point  $O$ .  
 $\vec{E}_B(0)$  est centrifuge (donc orienté dans le sens de  $-\vec{i}$ )

$$\vec{E}_B(0) = -K \cdot \frac{q_B}{BO^2} \cdot \vec{i} = -k \cdot \frac{q_B}{a^2} \cdot \vec{i}$$

Le champ créé simultanément par les deux charges en  $O$  est :

$$\vec{E}_O = \vec{E}_A(0) + \vec{E}_B(0) \quad (S1.1)$$

$$k \cdot \frac{q_A}{a^2} \cdot \vec{i} - k \cdot \frac{q_B}{a^2} \cdot \vec{i} = \frac{K}{a^2} \cdot (q_A \cdot \vec{i} - q_B \cdot \vec{i}) = \vec{0} \quad (S1.2)$$

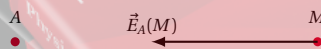
car  $q_A = q_B \Rightarrow \vec{E}_O = \vec{0}$ . Le champ créé simultanément par les deux charges en  $O$  est nul

**12.2.** Caractéristiques du vecteur champ électrostatique en un point  $M(0, y)$

$$E_A(M) = K \cdot \frac{|q_A|}{AM^2}$$

$$E_A(M) = 9 \times 10^9 \cdot \frac{0,4 \times 10^{-6}}{(4 \times 10^{-2})^2} = 2,25 \cdot 10^6 \text{ V m}^{-1}$$

Représentons le vecteur-champ  $\vec{E}_A(M)$ .



Ce champ a pour origine le point  $M$ , est porté par la droite  $AM$  et est orienté de  $M$  vers  $A$  (vecteur-champ centripète).

**11.4.** Valeur de  $q_B$

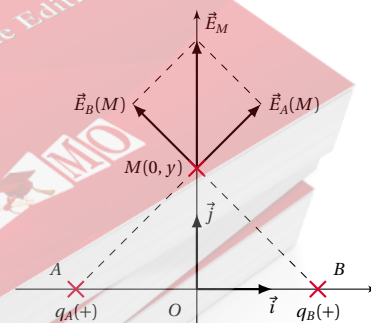
Le vecteur-champ créé par la source ( $q_A q_B$ ) au point  $M$  est :

$$\vec{E} = \vec{E}_A(M) + \vec{E}_B(M) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow E_A(M) = E_B(M)$$

Avec :

$$E_A(M) = K \cdot \frac{|q_A|}{AM^2}, \quad E_B(M) = K \cdot \frac{|q_B|}{BM^2}$$



■  $\vec{E}_A(M)$  = vecteur-champ créé en  $M$  par  $q_A$  ;  
 ■  $\vec{E}_B(M)$  = vecteur-champ créé en  $M$  par  $q_B$ .

$$\vec{E}_A(M) = K \cdot \frac{q_A}{AM^2} \cdot \frac{\vec{AM}}{|\vec{AM}|}$$

$$\begin{aligned} A\vec{M} &= (x_M - x_A) \cdot \vec{i} + (y_M - y_A) \cdot \vec{j} \\ &= [0 - (a)] \cdot \vec{i} + (y - 0) \cdot \vec{j} \\ &= a \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} \\ |A\vec{M}| &= \sqrt{a^2 + y^2} \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \vec{E}_A(M) &= K \cdot \frac{q_A}{(a^2 + y^2) \cdot \sqrt{a^2 + y^2}} (a \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}) \\ \vec{E}_B(M) &= K \cdot \frac{q_B}{BM^2} \cdot \frac{B\vec{M}}{|B\vec{M}|} \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \vec{E}_B(M) &= K \cdot \frac{q_B}{(a^2 + y^2) \cdot \sqrt{a^2 + y^2}} (-a \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}) \\ B\vec{M} &= (x_M - x_B) \cdot \vec{i} + (y_M - y_B) \cdot \vec{j} \\ &= [0 - (a)] \cdot \vec{i} + (y - 0) \cdot \vec{j} \\ &= -a \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} \\ \Rightarrow |B\vec{M}| &= \sqrt{a^2 + y^2} \end{aligned}$$

Le champ créé simultanément par les deux charges en  $M$  est :

$$\begin{aligned} \vec{E}_M &= \vec{E}_A(M) + \vec{E}_B(M) \\ \vec{E}_M &= K \cdot \frac{1}{(a^2 + y^2) \cdot \sqrt{a^2 + y^2}} \cdot \\ &\quad \cdot [q_A(a \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}) + q_B(-a \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j})] \end{aligned}$$

pour  $q_A = q_B = q$ .

$$\vec{E}_B(M) = \frac{2 \cdot K \cdot q \cdot y}{(a^2 + y^2) \cdot \sqrt{a^2 + y^2}} \vec{j}$$

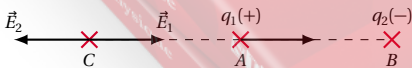
Donc  $\vec{E}_B(M)$  a pour origine, le point  $M$ , pour direction et sens ceux de  $\vec{j}$ , et pour intensité,

$$\begin{aligned} E_B(M) &= \frac{2Kqy}{(a^2 + y^2) \cdot \sqrt{a^2 + y^2}} \\ &= \frac{2 \cdot 9 \times 10^{-9} \cdot 2 \times 10^{-5} \cdot 10^{-1}}{(0,05^2 + 0,1^2) \cdot \sqrt{0,05^2 + 0,1^2}} \\ E_B(M) &= 2,57 \times 10^7 \text{ V m}^{-1} \end{aligned}$$

### Solution 13. (p. 21)

Désignons par :

- $\vec{E}_1$  le vecteur-champ créé par la charge  $q_1(+)$ . Au point  $C$   $\vec{E}_1$  est centrifuge.
- $\vec{E}_2$  le vecteur-champ créé par la charge  $q_2(-)$ . Au point  $C$   $\vec{E}_2$  est centripète.



Le champ créé simultanément par les deux charges au point  $C$  est :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Si le champ créé par l'ensemble des deux charges est nul,

alors,

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{E}_1 = -\vec{E}_2$$

Donc au point  $C$  où le champ est nul,  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$  ont la même direction, des sens opposés et ont la même intensité.

- Les points de l'espace où  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$  ont la même direction se trouvent sur la droite  $[A, B]$ .
- Les points de la droite  $(A, B)$  où  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$  ont des sens opposés se trouvent à l'extérieur du segment  $[AB]$ .
- Munissons la droite  $(A, B)$  du repère  $(A, \vec{i})$ .

Dans ce repère, les abscisses des points  $A$ ,  $B$ , et  $C$  sont :

$$x_A = 0$$

$$x_B = 1$$

$$x_C = x$$

$$\Rightarrow d(A, C) = x_C - x_A = x$$

$$\Rightarrow d(B, C) = x_C - x_B = x - 1$$

$$E_1 = k \cdot \frac{|q_1|}{AC^2} = k \cdot \frac{|q_1|}{x^2}$$

$$E_2 = k \cdot \frac{|q_2|}{BC^2} = k \cdot \frac{|q_2|}{(x-1)^2}$$

Au point  $C$ ,  $E_1 = E_2$

$$\Rightarrow k \cdot \frac{|q_1|}{x^2} = k \cdot \frac{|q_2|}{(x-1)^2}$$

$$|q_1| \cdot (x-1)^2 = |q_2| \cdot x^2$$

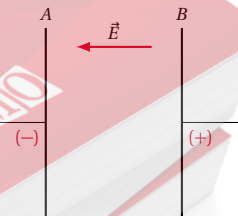
En remplaçant  $|q_1|$  et  $|q_2|$  par leurs valeurs numériques, nous obtenons après développement

$$-x^2 - 4x + 2 = 0$$

Cette équation du second degré admet pour solution,  $x_1 = -4,45$  et  $x_2 = 0,45$ . La solution  $x_2 = 0,45$  est à écarter car ce point ne se trouve pas à l'extérieur du segment  $[AB]$ . Donc le point  $C$  où le champ créé par l'ensemble des deux charges est nul se trouve à gauche du point  $A$ , à la distance  $AC = 4,45$  m.

### Solution 14. (p. 21)

#### 14.1. Schéma avec les signes des charges des plaques.



Si un électron de charge  $(-)$  est attiré par la plaque  $B$ , nous déduisons que la plaque  $B$  est chargée  $(+)$ . Par conséquent,  $A$  est chargée  $(-)$ .

#### 14.2. Sens et module du vecteur champ électrostatique $\vec{E}$ .

- Sens de  $\vec{E}$ .

$\vec{E}$  est toujours orienté dans le sens des potentiels décroissants. Or  $V_A < V_B \Rightarrow \vec{E}$  est orienté de  $B$  vers

## 1.6. Solutions des exercices et problèmes

A. (voir figure ci-dessus)

■ Autre méthode de justification.

Considérons l'électron de charge  $(-)$ . Cet électron est attiré par la plaque B. Il est donc soumis à une force  $\vec{F} = q\vec{E}$ .  $q$  étant de charge  $(-)$ ,  $\vec{F}$  et  $\vec{E}$  ont des sens opposés. Donc  $\vec{E}$  est orienté de B vers A. Module de  $\vec{E}$  :

$$E = \frac{V_B - V_A}{d_{AB}} = \frac{4000}{0,5} = 8 \times 10^3 \text{ V m}^{-1}$$

**14.3.** Travail de la force agissant sur l'électron lorsqu'il se déplace de A à B.

$$\begin{aligned} W_{AB}(\vec{F}) &= q \cdot (V_A - V_B) \\ W_{AB}(\vec{F}) &= (-1,6 \times 10^{-19}) \cdot (-4000) \\ &= 6,4 \times 10^{-16} \text{ J} \end{aligned}$$

Ce travail ne dépend que des potentiels des points de départ et d'arrivée. Il ne dépend donc pas du chemin suivi.

### Solution 15. (p. 21)

**15.1.** Intensité  $E$  du champ électrostatique :

$$\begin{aligned} E &= \frac{V_B - V_A}{d_{AB}} = \frac{U}{d} \\ E &= \frac{2}{0,05} = 40 \text{ V m}^{-1} \end{aligned}$$

**15.2.** Comparons le poids  $p$  du proton à la force électrostatique  $F$ .

$P = m_p g$  et  $F = qE = eE$ . Faisons le rapport  $F$  over  $P$  :

$$\begin{aligned} \frac{F}{P} &= \frac{e \cdot E}{m_p \cdot g} = \frac{1,6 \times 10^{-19} \cdot 40}{1,67 \times 10^{-27}} \\ &= 3,91 \times 10^8 \Rightarrow F = 391 \times 10^6 P \end{aligned}$$

Donc  $F$  est 391 millions de fois plus grande que  $P$ . Le poids  $P$  du proton est donc négligeable devant la force électrique.

**15.3.** Comparons le poids  $P'$  de l'électron à la force électrique subie par l'électron dans ce champ.

La force électrique subie par l'électron dans ce champ est :

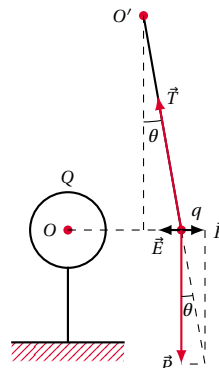
$$F' = |q| \cdot E = eE$$

Le poids  $P'$  de l'électron étant environ 1836 fois plus petit que celui du proton, le rapport  $\frac{F'}{P'}$  est encore plus grand.

Donc le poids  $P'$  de l'électron est encore plus négligeable devant la force électrique qu'il subit dans le champ électrique.

### Solution 16. (p. 21)

**16.1.** Intensité de la force  $\vec{F}$



Considérons le système constitué par la petite sphère de masse  $m$  et de charge  $q$ . A l'équilibre du système,

$$\tan \theta = \frac{F}{P} \Rightarrow F = P \cdot \tan \theta = mg \cdot \tan \theta$$

$$F = 1,5 \times 10^{-3} \cdot 10 \cdot \tan(10) = 2,64 \times 10^{-3} \text{ N}$$

**16.2.** Caractéristiques du vecteur champ  $\vec{E}$  au point M. Au point M, la charge  $q$  est soumise à une force électrique.  $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ .  $q$  étant de charge  $(-)$ ,  $\vec{F}$  et  $\vec{E}$  ont des sens opposés.

Caractéristiques de  $\vec{E}$  au point M :

- Origine : le point M ;
- Direction : celle de  $\vec{F}$
- sens : de M vers O
- Intensité :

$$\begin{aligned} F &= |q| \cdot E \Rightarrow E = \frac{F}{|q|} \\ &= \frac{2,64 \times 10^{-3}}{17,6 \times 10^{-9}} = 1,5 \times 10^5 \text{ V m}^{-1} \end{aligned}$$

**16.3.** Signe et valeur numérique de la charge  $Q$ .

Nous constatons que  $q$  s'éloigne de  $Q$ . Il y a donc répulsion entre les deux charges. Nous déduisons que ces deux charges ont le même signe. Donc  $Q$  est de signe  $(-)$ .

**16.4.** Valeur de  $Q$ .

La force d'interaction entre  $Q$  et  $q$  a pour expression :

$$F = k \cdot \frac{|q| \cdot |Q|}{OM^2} \text{ avec } OM = R + D$$

$$F = k \cdot \frac{|q| \cdot |Q|}{(R + D)^2}$$

$$\Rightarrow |Q| = \frac{F \cdot (R + D)^2}{k \cdot |q|}$$

$$\begin{aligned} |Q| &= \frac{2,64 \times 10^{-3} (0,1 + 0,2)^2}{9 \times 10^9 \cdot 17,6 \times 10^{-9}} \\ &= 1,5 \times 10^{-6} \text{ C} \end{aligned}$$



**Solution 17. (p. 21)****17.1.** Intensité du champ électrique :

$$E = \frac{V_A - V_B}{d} = \frac{2000}{0,1}$$

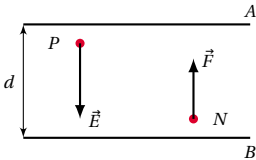
$$E = 20000 \text{ V m}^{-1}$$

**17.2.** Représentation du vecteur champ  $\vec{E}$  au point  $P$  :

$$V_A - V_B > 0 \Rightarrow V_A > V_B$$

Sachant que le vecteur champ a le sens des potentiels décroissants,  $\vec{E}$  est orienté de  $A$  vers  $B$ . Caractéristiques de  $\vec{E}$  au point  $P$  :

- Origine : le point  $P$  ;
- direction : la perpendiculaire aux plaques passant par  $P$  ;
- Sens : de  $A$  vers  $B$ .

**17.3.** Représentation de la force  $\vec{F}$  subie par l'ion au point  $N$ .
 $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$  où  $q = -2e$  est la charge de l'ion  $\text{SO}_4^{2-}$ .

Donc  $\vec{F} = -2e \cdot \vec{E} \Rightarrow \vec{F}$  et  $E \vec{E}$  ont des sens opposés donc  $\vec{F}$  est orienté de  $B$  vers  $A$ . (voir schéma ci-dessus).

**17.4.** Intensité de  $\vec{F}$ 

$$F = |q| \cdot E = 2e \cdot E$$

$$= 2 \cdot 1,6 \times 10^{-19} \cdot 20000 = 6,4 \times 10^{-15} \text{ N}$$

**17.5.** Distance séparant les surfaces équipotentielles passant par  $P$  et  $N$ .

Ces surfaces équipotentielles sont des plans perpendiculaires à  $\vec{E}$  et contenant  $P$  et  $N$ .  $\vec{E}$  étant uniforme.

$$E = \frac{|V_P - V_N|}{d_{PN}}$$

où  $d_{PN}$  est la distance séparant les plans parallèles à  $A$  et  $B$  et passant par  $P$  et  $N$ .

$$d_{PN} = \frac{|V_P - V_N|}{E}$$

$$= \frac{1200}{20000} = 0,06 \text{ m} = 6 \text{ cm}$$

**17.6.** Travail de la force agissant sur l'ion au cours du déplacement de  $N$  à  $P$ .

Soit  $W_{N \rightarrow P}(\vec{F})$  ce travail.

$$W_{N \rightarrow P}(\vec{F}) = q \cdot (V_N - V_P)$$

où  $q = -2e$  et  $|V_N - V_P| = -1200 \text{ V}$ .

En effet, d'après le sens de  $\vec{E}$ ,  $V_P > V_N$  et  $V_N - V_P < 0$

$$W_{N \rightarrow P}(\vec{F}) = -2 \cdot 1,6 \times 10^{-19} \cdot (-1200)$$

$$= 3,84 \times 10^{-16} \text{ J}$$

**Solution 18. (p. 22)****18.1.** Montrons que tout plan perpendiculaire à  $\vec{E}$  est une surface équipotentielle

Soient 2 points  $A$  et  $B$  appartenant à un plan perpendiculaire à  $\vec{E}$ . Calculons la différence de potentiel existant entre  $A$  et  $B$ .

$$V_A - V_B = \vec{E} \cdot \vec{AB}$$

$$\text{Or } \vec{E} \perp \vec{AB} \Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{AB} = 0$$

$$\Rightarrow V_A - V_B = \vec{E} \cdot \vec{AB} = 0$$

$$\Rightarrow V_A = V_B$$

Tous les points de ce plan sont au même potentiel. Nous concluons que ce plan est une surface équipotentielle.

**18.2.** Expression du potentiel  $V_M$  du point  $M$ .

Calculons la différence de potentiel  $V_O - V_M = \vec{E} \cdot \vec{OM}$ .

$$\text{où } \vec{E} = \begin{cases} E_x = E \\ E_y = 0 \end{cases}$$

$$\text{et } \vec{OM} = \begin{cases} x = r \cdot \cos \alpha \\ y = r \cdot \sin \alpha \end{cases}$$

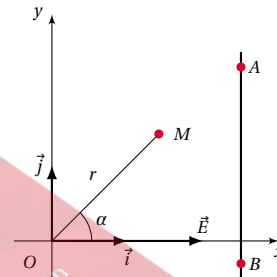
$$\vec{E} \cdot \vec{OM} = x \cdot E_x + y \cdot E_y$$

$$= E \cdot r \cos \alpha + 0$$

$$\vec{E} \cdot \vec{OM} = x E_x + y E_y = E \cdot \cos \alpha + 0. \text{ Donc :}$$

$$V_O - V_M = E \cdot r \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow V_M = V_O - E \cdot r \cdot \cos \alpha$$

**18.3.** Travail de la force électrique qui agit sur une charge  $q$  qui se déplace de  $O$  à  $M$ .

$$W_{O \rightarrow M}(\vec{F}) = q \cdot (V_O - V_M)$$

$$\text{avec } V_O - V_M = E \cdot r \cdot \cos \alpha$$

$$W_{O \rightarrow M}(\vec{F}) = q \cdot E \cdot r \cdot \cos \alpha$$

A.N.

$$q = 2 \times 10^{-10} \text{ C};$$

$$E = 100 \text{ V m}^{-1};$$

$$r = 1 \text{ m};$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2};$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$W_{O \rightarrow M}(\vec{F}) = 0$$

Conclusion : Lorsqu'une charge se déplace sur une sur-



## 1.6. Solutions des exercices et problèmes

face équipotentielle, le travail de la force électrostatique qui agit sur cette charge est nul.

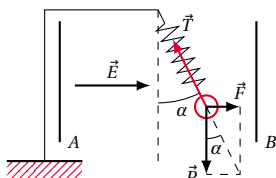
**Solution 19. (p. 22)**

**19.1.** La différence de potentiel appliquée aux plaques parallèles crée, dans l'espace qui les sépare, un champ électrique uniforme  $\vec{E}$ , de direction perpendiculaire aux plaques, orienté dans le sens des potentiels décroissants.

$$V_A - V_B > 0 \Rightarrow V_A > V_B$$

Donc  $\vec{E}$  est orienté de A vers B. Le système à étudier étant la sphère électrisée de masse  $m$  et de charge  $q(+)$ , faisons le bilan des forces agissant sur ce système :

- Le poids  $\vec{P} = m\vec{g}$ ;
- la tension  $\vec{T}$  du ressort.
- La force électrique  $\vec{F} = q\vec{E}$



Lorsque la sphère est en équilibre, on a :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F} = \vec{0}$$

1er Cas (Fig 1)

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{F}{P} = \frac{q \cdot E}{mg} \\ \text{avec } E &= \frac{V_A - V_B}{d} \\ \Rightarrow \tan \alpha &= \frac{q \cdot (V_A - V_B)}{mg \cdot d} \end{aligned}$$

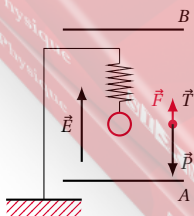
A.N.

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \frac{10^{-6} \cdot 10 \times 10^4}{20 \times 10^{-3} \cdot 10 \times 10^{-1}} = 0,5 \\ \Rightarrow \alpha &= 26,5^\circ \end{aligned}$$

Tension du ressort :

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{P}{T} \Rightarrow T = \frac{P}{\cos \alpha} = \frac{mg}{\cos \alpha} \\ T &= \frac{20 \times 10^{-3} \cdot 10}{\cos(26,5^\circ)} = 0,22 \text{ N} \end{aligned}$$

2e cas (Fig 2)



$\vec{P}$ ,  $\vec{T}$  et  $\vec{F}$  sont colinéaires, de direction verticale. La projection de la relation vectorielle d'équilibre sur l'axe  $y y'$

nous donne :

$$-P + T + F = 0 \Rightarrow T = P - F$$

avec  $P = mg$ ;

$$\text{et } F = q \cdot E = q \cdot \frac{V_A - V_B}{d}$$

Donc :

$$\begin{aligned} T &= mg - \frac{q(V_A - V_B)}{d} \\ T &= 20 \times 10^{-3} \cdot 10 - \frac{10^{-6} \cdot 10^4}{10^{-1}} \\ &= 0,1 \text{ N} \end{aligned}$$

**19.2.** Allongement  $x$  du ressort dans chaque cas :

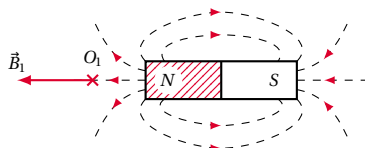
$$T = K \cdot x \Rightarrow x = \frac{T}{K}$$

$$\text{1er cas : } x = \frac{0,22}{10} = 0,022 \text{ m} = 2,2 \text{ cm};$$

$$\text{2er cas : } x = \frac{0,1}{10} = 0,01 \text{ m} = 1,0 \text{ cm}$$

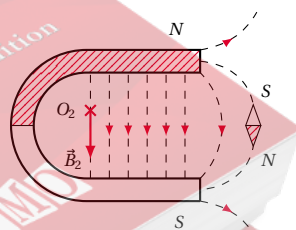
**Champ magnétique****Solution 20. (p. 22)**

**20.1.** Cas de l'aimant droit.



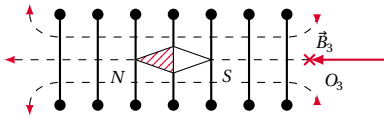
Le pôle nord étant connu, nous savons que les lignes de champ "sortent" par le pôle nord et "entrent" par le pôle sud. Le point  $O_1$  étant sur l'axe de symétrie, le vecteur champ magnétique en ce point est porté par cet axe et a le sens des lignes de champ.

**20.2.** Cas de l'aimant en U.



La petite aiguille aimantée  $\vec{s}_h$  nous permet d'orienter la ligne de champ qui passe par l'aiguille : elle a le sens du vecteur  $\vec{s}_h$  vec. Cette ligne de champ "sort" par le pôle nord N de l'aimant en U. Les autres lignes de champ ayant le même sens, nous déduisons le sens du vecteur champ magnétique au point  $O_2$ .

**20.3.** Cas de la bobine.



La petite aiguille aimantée  $sn$ , nous permet d'orienter la ligne de champ qui passe par l'aiguille : elle "sort" par le pôle  $n$  de l'aiguille.

Par suite, cette ligne sortant par la face nord  $N$  de la bobine, nous pouvons préciser cette face, orienter ensuite les autres lignes de champ, et dessiner le vecteur champ magnétique  $\vec{B}$  en  $O_3$ , parallèle à l'axe de symétrie.

#### 20.4. Sens du courant dans la bobine.

Grâce à la règle de la main droite, le pouce pointant dans le sens de  $\vec{B}$ , la paume tournée au centre de la bobine, les quatre doigts joints (disposés perpendiculairement au pouce) indiquent le sens du courant. (Voir schéma ci-dessus).

**20.5.** Dans la bobine, l'aiguille aimantée placée à l'intérieur de la source, a son pôle nord qui pointe vers la face nord de la bobine.

La loi d'interaction "un pôle nord est attiré par un pôle ou une face de nom contraire" n'est donc plus valable si l'on se place à l'extérieur de la source (ce qui est toujours le cas pour les aimants)

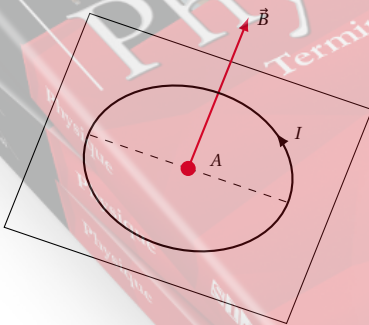
**20.6.** Un espace champ magnétique est uniforme (c'est-à-dire à le même vecteur champ magnétique en tous ses points) si les lignes de champ magnétique sont parallèles. C'est le cas du champ magnétique existant entre les branches d'un aimant en  $U$ . C'est aussi le cas du champ magnétique à l'intérieur d'une bobine longue.

#### 20.7. Ordre de grandeur du champ magnétique en $O_1$ .

Le champ magnétique terrestre qui est de l'ordre de  $10^{-5}$  T est négligeable devant le champ magnétique créé par les aimants. Donc nous devons éliminer la deuxième proposition. Quant à la première proposition, elle est aberrante puisque dans les gros électro-aimants, le champ magnétique n'atteint que quelques teslas. Il ne reste plus d'acceptable que l'ordre de grandeur  $10^{-2}$  T.

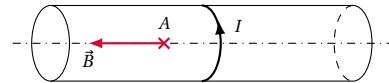
### Solution 21. (p. 22)

#### 21.1. Cas d'une spire.



Le champ magnétique en  $A$  est perpendiculaire au plan de la spire. Le sens de  $\vec{B}$  est donné par le pouce (disposé perpendiculairement aux quatre doigts joints) d'une main droite, la paume tournée vers le centre de la bobine et le courant sortant par les autres doigts joints. D'où le vecteur  $\vec{B}$  en  $A$  (voir figure ci-dessus).

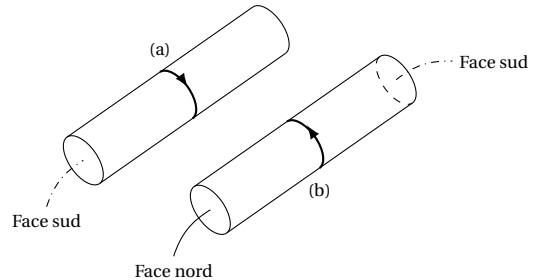
#### 21.2. Cas du solénoïde.



Le vecteur champ magnétique est porté par l'axe du solénoïde. Le sens de  $\vec{B}$  est donné par le pouce (disposé perpendiculairement aux autres doigts joints) d'une main droite posée sur la spire, la paume tournée vers le centre de la spire, le courant sortant par les quatre doigts joints. D'où le vecteur  $\vec{B}$  en  $A$ . (Voir figure ci-dessus)

### Solution 22. (p. 22)

#### 22.1. Le sens du courant dans le solénoïde de la figure (a).



On déduit la face Nord de la bobine à partir de sa face Sud. Sachant que la règle de la main droite donne en même temps le sens de  $\vec{B}$  et la face Nord de la bobine, nous plaçons la main droite sur la bobine, la paume tournée vers son centre et le pouce dans le sens de la face nord; les quatre doigts joints donnent le sens du courant.

#### 22.2. Nom des faces du solénoïde.

Posons la main droite sur le solénoïde, la paume tournée vers le centre, le courant sortant par les quatre doigts joints. Le pouce indique alors le pôle nord du solénoïde. On en déduit la face sud.

### Solution 23. (p. 23)

#### 23.1. Nécessité d'utiliser un fil de cuivre au lieu d'un fil de fer.

Le fer ou un de ses alliages possède des propriétés magnétiques pouvant influencer de façon naturelle l'aiguille aimantée. Pour éviter cette influence sur l'étude de l'effet magnétique du courant électrique, on utilise un métal n'ayant aucune propriété magnétique à l'état naturel. C'est le cas du cuivre.

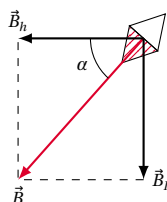
#### 23.2. Orientation de l'aiguille lorsque $K$ est ouvert :

Lorsque  $K$  est ouvert, aucun courant ne circule dans le conducteur  $AB$ . L'aiguille aimantée n'étant sensible qu'à la composante horizontale  $\vec{B}_h$  du champ magnétique terrestre, elle s'oriente suivant la direction et le sens de  $\vec{B}_h$ .

**23.3.** Quand l'interrupteur est fermé, le conducteur  $AB$  traversé par un courant électrique, crée dans l'espace qui l'entoure un champ magnétique  $\vec{B}_h$  qui se superpose au champ magnétique terrestre et influence de ce fait l'orientation de l'aiguille aimantée. C'est ce qui explique sa déviation.

#### 23.4. Valeur de l'angle $\alpha$ .

## 1.6. Solutions des exercices et problèmes



Représentons (vue de dessus) les différents vecteurs champ magnétiques :

- $\vec{B}_h$  est la composante horizontale du champ magnétique terrestre.
- $\vec{B}_I$  représente le champ magnétique créé par le conducteur  $AB$  parcouru par un courant  $I$ .
- $\vec{B}$  est la résultante des deux vecteurs champ magnétique.

$$\vec{B} = \vec{B}_h + \vec{B}_I$$

L'angle  $\alpha$  est donné par :

$$\tan \alpha = \frac{B_I}{B_h} \quad (\text{S1.1})$$

Calculons  $B_I$  :

$$B_I = 2 \times 10^{-7} \cdot \frac{I}{d}$$

D'après la loi de Pouillet,

$$E = (R_h + r) \cdot I$$

$$\Rightarrow I = \frac{E}{R_h + r}$$

$$I = \frac{90}{8,5 + 1,5} = 9 \text{ A}$$

$$\Rightarrow B_I = 2 \times 10^{-7} \cdot \frac{9}{5 \times 10^{-2}} = 3,6 \times 10^{-5} \text{ T}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{B_I}{B_h} \\ &= \frac{3,6 \times 10^{-5}}{3,2 \times 10^{-5}} = 1,125 \\ \Rightarrow \alpha &= 48,4^\circ \end{aligned}$$

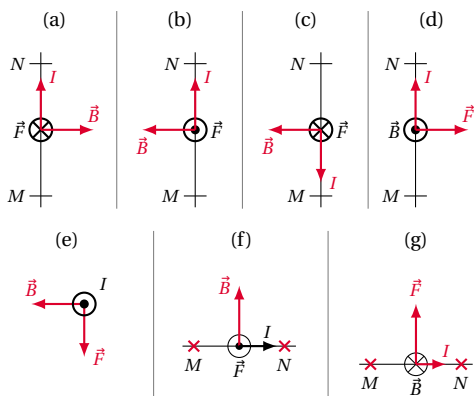
## Solution 24. (p. 23)

Les vecteurs  $I\vec{l}$ ,  $\vec{B}$  et  $\vec{F}$  sont reliés par la relation,

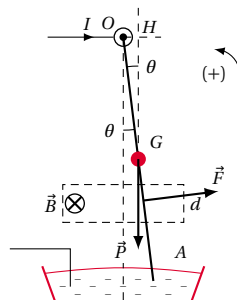
$$\vec{F} = I\vec{l} \wedge \vec{B}$$

le trièdre  $(I\vec{l}, \vec{B}, \vec{F})$  étant direct. On le reconnaît par la règle de la main droite où :

- $\vec{B}$  sort par la paume,
- $\vec{F}$  est donné par le pouce disposé perpendiculairement aux autres doigts joints,
- $I\vec{l}$  est donné par les quatre doigts joints.



## Solution 25. (p. 23)



## 25.1. Caractéristiques de la force électromagnétique.

$$\vec{F} = I\vec{l} \wedge \vec{B}$$

La force  $\vec{F}$  étant perpendiculaire à  $\vec{B}$  et au fil, elle est donc dans le plan de la figure. Son sens est tel que le trièdre  $(I\vec{l}, \vec{B}, \vec{F})$  soit direct, (Reconnaissable par la règle de la main droite). Nous constatons que  $\vec{F}$  est orientée de la gauche vers la droite, donnant ainsi le sens du mouvement du fil.

25.2. Valeur de l'inclinaison  $\theta$ .

Notons que c'est une question de statique (équilibre d'un solide susceptible de tourner autour d'un axe. Voir cours secondes C,T).

## 25.3. Le système est le fil. Bilan des forces agissant sur le système :

- son poids  $\vec{P}$  appliqué en G.
- la force électromagnétique  $\vec{F}$  appliquée en M.

En choisissant un sens positif pour évaluer les moments, à l'équilibre du système, le théorème des moments permet d'écrire :

$$M_{\Delta}(\vec{P}) + M_{\Delta}(\vec{F}) = 0$$

L'axe  $(\Delta)$  de rotation étant perpendiculaire en O au plan de la figure.

- $M_{\Delta}(\vec{F}) > 0$ ; la distance de O à la ligne d'action de  $\vec{F}$  est OM. Donc :

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = +F \cdot OM$$

- $M_{\Delta}(\vec{P}) < 0$  car  $\vec{P}$  tend à faire tourner le fil en sens opposé du sens positif choisi;

La distance de  $O$  à la ligne d'action de  $\vec{P}$  est  $OM$ .

$$M_{\Delta}(\vec{P}) = -P \cdot OH$$

$OH$  se calcule dans le triangle rectangle  $OGH$  où l'angle  $\widehat{OGH} = \theta$  (angles alternes-internes)

$$\sin \theta = \frac{OH}{OG} \Rightarrow OH = OG \cdot \sin \theta$$

$$OG = \frac{L}{2} \Rightarrow M_{\Delta}(\vec{P}) = -P \cdot \frac{L}{2} \cdot \sin \theta$$

D'où :

$$\begin{aligned} F \cdot OM - P \cdot \frac{L}{2} \cdot \sin \theta &= 0 \\ \Rightarrow \sin \theta &= \frac{2 \cdot F \cdot OM}{P \cdot L} \end{aligned}$$

Déterminons alors  $F$ .

$$F = I \cdot l \cdot B \cdot \sin \alpha$$

D'après l'énoncé,  $l \simeq d$  et  $\alpha = 90^\circ$  car  $\vec{B}$  est perpendiculaire au fil. D'où finalement, en remarquant que :

$$\begin{aligned} OM &= \frac{2}{3} \cdot L, \\ \sin \theta &= \frac{2IdB2L}{3MGL} = \frac{4}{3} \cdot \frac{IdB}{mg} \end{aligned}$$

A.N.

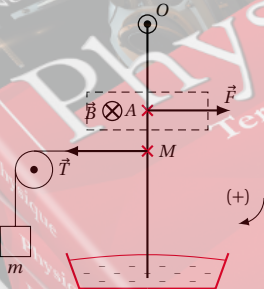
$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 10^{-2} \cdot 0,1}{3 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8} = 0,122 \\ \Rightarrow \theta &= 7,03^\circ \end{aligned}$$

### Solution 26. (p. 24)

**26.1. Bilan et représentation des forces agissant sur le conducteur-pendule :**

Le poids  $\vec{P}$  du conducteur-pendule étant négligeable, les autres forces sont :

- la force électromagnétique  $\vec{F}$  appliquée en A.  $\vec{F}$  est perpendiculaire à  $\vec{B}$  et au conducteur. Le sens de  $\vec{F}$  est tel que le trièdre  $(\vec{l}, \vec{B}, \vec{F})$  est direct.
- la tension  $\vec{T}$  du fil relié au contre-poids.



**26.2. La relation d'équilibre.**

Le conducteur-pendule constitue le système susceptible de tourner autour de l'axe  $(\Delta)$  passant par  $O$ . En tenant compte du sens positif choisi, le théorème des moments peut s'écrire :

$$\begin{aligned} M_{\Delta}(\vec{T}) + M_{\Delta}(\vec{F}) &= 0 \\ \Leftrightarrow T \cdot OM - F \cdot OA &= 0 \\ \text{où } F &= I \cdot L \cdot B \text{ et } T = m \cdot g \end{aligned}$$

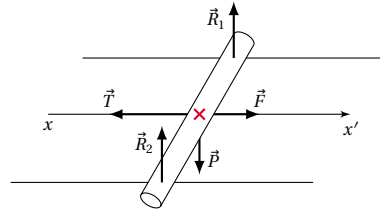
$$\Rightarrow mg \cdot OM - I \cdot L \cdot B \cdot OA = 0 \quad (S1.1)$$

**26.3. Valeur de  $m$ .**

La relation (S1.1) permet d'écrire :

$$\begin{aligned} m &= \frac{I \cdot L \cdot B \cdot OA}{g \cdot OM} \\ m &= \frac{5 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 0,3 \cdot 20 \cdot 10^{-2}}{10 \cdot 30 \cdot 10^{-2}} \\ m &= 4 \times 10^{-3} \text{ kg} = 4 \text{ g} \end{aligned}$$

### Solution 27. (p. 24)



**27.1. Les forces appliquées à la tige sont :**

- Son poids  $\vec{P}$ , vertical, dirigé vers le bas et appliquée au milieu  $I$  de la tige.
- la tension  $\vec{T}$  du ressort, perpendiculaire à la tige et dirigée vers la gauche.
- la force de Laplace  $\vec{F}$ , perpendiculaire à la tige, dirigée vers la droite et appliquée au milieu de la tige.
- les réactions  $\vec{R}_1$  et  $\vec{R}_2$  des rails appliquées aux points de contact de la tige et des rails. Ces réactions sont verticales (en supposant le contact sans frottements et dirigées vers le haut).

**27.2. La condition d'équilibre de la tige s'écrit :**

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F} + \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = \vec{0}$$

**27.3. Intensité du courant dans le circuit :**

Projetons la relation vectorielle ci-dessus sur l'axe  $x'$  horizontal et perpendiculaire à la tige :

$$0 - T + F + 0 + 0 = 0 \Rightarrow T = F \text{ avec } T = mg \text{ et } F = I \cdot l \cdot B.$$

Donc :

$$\begin{aligned} mg &= I \cdot l \cdot B \\ \Rightarrow I &= \frac{mg}{lB} \\ I &= \frac{0,13 \cdot 10}{13 \cdot 10^{-2} \cdot 1} = 10 \text{ A} \end{aligned}$$

**27.4. Allongement  $x$  du ressort**

$$\begin{aligned} T &= mg \text{ et } T = Kx \\ \rightarrow mg &= Kx \\ \rightarrow x &= \frac{mg}{K} \\ x &= \frac{0,13 \cdot 10}{26} = 0,05 \text{ m} = 5 \text{ cm} \end{aligned}$$

### Solution 28. (p. 24)

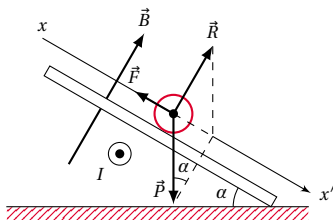
**28.1. Sens du courant  $I$ .**

Déterminons d'abord le sens de  $\vec{F}$  afin d'en déduire le sens de  $I$ . Bilan des forces agissant sur la tige :



## 1.6. Solutions des exercices et problèmes

- le poids  $\vec{P}$
- la résultante  $\vec{R}$  des réactions des rails
- la force  $\vec{F}$  de Laplace.



A l'équilibre, nous avons :

$$\begin{aligned}\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} &= \vec{0} \\ \rightarrow \vec{F} &= -(\vec{P} + \vec{R})\end{aligned}\quad (S1.1)$$

$\vec{F}$  est opposée à la somme  $\vec{P} + \vec{R}$ . Connaissant le sens de  $\vec{B}$  et de  $\vec{F}$ , nous en déduisons, par la règle de la main droite, le sens de  $I$ . (Voir la figure ci-dessus).

**28.2. Intensité de  $I$ .**

Projetons la relation vectorielle d'équilibre (S1.1) sur l'axe  $x'x$ .

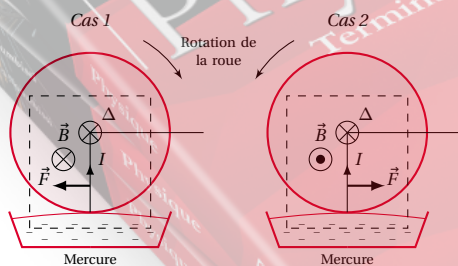
$$\begin{aligned}P \cdot \sin \alpha + 0 - F &= 0 \\ P = mg \text{ et } F &= I \cdot l \cdot B \\ \rightarrow mg \cdot \sin \alpha - I \cdot l \cdot B &= 0 \\ \rightarrow I &= \frac{mg \cdot \sin \alpha}{l \cdot B} \\ I &= \frac{0,1 \cdot 10 \cdot \sin 30^\circ}{0,1 \cdot 1,5} = 3,33 \text{ A}\end{aligned}$$

**Solution 29. (p. 24)****29.1. Schéma montrant la force électromagnétique.**

Le sens de  $\vec{F}$  est donné par le pouce lorsqu'on utilise la règle de la main droite (voir le cours).

Cas 1 :  $\vec{B}$  est orienté vers l'arrière du plan de la figure ;  $\vec{F}$  est alors orienté vers la gauche et la roue tourne dans le sens des aiguilles d'une horloge.

Cas 2 :  $\vec{B}$  est orienté vers l'avant du plan de la figure ;  $\vec{F}$  est alors orientée vers la droite et la roue tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une horloge.

**29.2. Intensité de la force de Laplace.**

$F = I \cdot l \cdot B \cdot \sin \alpha$  avec  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  car  $\vec{B}$  est perpendiculaire au rayon, donc à  $I \cdot \vec{l}$  et  $l = r$ , le rayon de la roue.

$F = I \cdot r \cdot B = 10 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 0,5 = 0,25 \text{ N}$ .

Moment de  $\vec{F}$  par rapport à  $(\Delta)$  :

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = F \cdot \frac{r}{2} = \frac{0,25 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{2}$$

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = 6,25 \times 10^{-3} \text{ N m}$$

**29.3. Puissance du disque.**

La force  $\vec{F}$  est appliquée à un solide en mouvement de rotation. Sa puissance est :

$$P = M_{\Delta}(\vec{F}) \cdot \omega$$

$$\text{où } \omega = 3 \text{ rad s}^{-1} = 3 \text{ rad s}^{-1} \times 2\pi \text{ rad s}^{-1}$$

$\omega$  est la vitesse de rotation du disque.

$$P = 6,25 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3,14 = 0,12 \text{ W}$$

**Solution 30. (p. 24)**

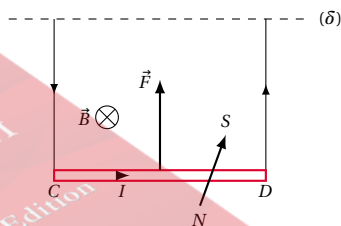
Rappelons que les lignes de champ "sortent" par le pôle nord et "entrent" par le pôle sud de l'aimant source du champ magnétique. On peut aussi utiliser une aiguille aimantée pour sonder le champ : nous savons que le vecteur champ magnétique  $\vec{B}$  a la même orientation que le vecteur  $\vec{SN}$  formé par les pôles sud (S) et nord (N) de l'aiguille aimantée. On applique ensuite la loi d'interaction des aimants pour déterminer les pôles de l'aimant, source du champ  $\vec{B}$ .

**30.1. Pôles nord et sud de l'électroaimant quand le fil se soulève.**

Pour que le fil  $CD$  se déplace vers le haut, il faut que la force de Laplace  $\vec{F}$  créée par le champ magnétique  $\vec{B}$  soit orientée vers le haut. Or :

$$\vec{F} = I \cdot \vec{CD} \wedge \vec{B}$$

La règle de la main droite nous permet de déterminer le sens de  $\vec{B}$  (voir Figure ci-dessous).  $\vec{B}$  est orienté vers l'arrière du plan de la figure, ce qui signifie que le pôle nord de l'électroaimant est en avant du plan de la figure et le pôle sud en arrière.



Intensité minimale du courant qui doit circuler dans le fil. Cette intensité minimale est obtenue quand la force de Laplace équilibre exactement le poids du fil  $CD$ . Dans ce cas,

$$\begin{aligned}\vec{P} + \vec{F} &= \vec{0} \Rightarrow P = F \\ P &= mg = \mu \cdot CD \cdot g \\ F &= I \cdot CD \cdot B \text{ car } \vec{B} \perp \vec{CD}\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\mu \cdot CD \cdot g &= I \cdot CD \cdot B \\ \Rightarrow I &= \frac{\mu \cdot CD \cdot g}{CD \cdot B} = \frac{\mu \cdot g}{B} \\ \text{A.N. } I &= \frac{1,5 \cdot 10^{-2} \cdot 10}{0,04} = 3,75 \text{ A}\end{aligned}$$

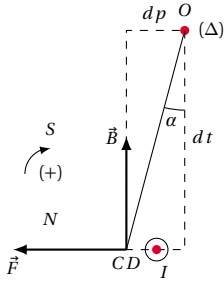
**30.2. Pôles nord et sud de l'électroaimant quand le fil s'écarte de la verticale.**



La force de Laplace  $\vec{F}$  est maintenant horizontale.

$$\vec{F} = I \cdot \vec{CD} \wedge \vec{B}$$

La règle de la main droite donne le sens de  $\vec{B}$ . (Voir figure ci-dessous).



On pourrait envisager aussi le cas où le fil dévie vers la droite. Dans ce cas,  $\vec{B}$  est orienté vers le bas. Dans le premier cas, le pôle nord est au-dessous du fil et le pôle sud est au-dessus. Dans le second cas, le pôle nord est au-dessus et le pôle sud est au dessous.

Valeur de l'angle  $\alpha$ .

L'équilibre est obtenu lorsque :

$$M_{\Delta}(\vec{P}) + M_{\Delta}(\vec{F}) = 0 \quad (\text{S1.1})$$

$$M_{\Delta}(\vec{F}) > 0 \text{ et } M_{\Delta}(\vec{F}) = F \cdot d_F$$

$$F = I \cdot CD \cdot B \text{ et } d_F = OD \cdot \cos \alpha$$

$$M_{\Delta}(\vec{P}) < 0 \text{ et } M_{\Delta}(\vec{P}) = -P \cdot d_P$$

$$P = mg = \mu \cdot CD \cdot g \text{ et } d_P = OD \cdot \sin \alpha$$

De (S1.1) nous déduisons :

$$\mu \cdot CD \cdot g \cdot OD \cdot \sin \alpha + I \cdot CD \cdot B \cdot OD \cdot \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow -\mu \cdot g \cdot \sin \alpha = I \cdot B \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{IB}{\mu \cdot g}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha = \frac{IB}{\mu \cdot g}$$

$$\tan \alpha = \frac{1 \cdot 0,04}{1,5 \cdot 10^{-2} \cdot 10} = 0,267$$

$$\Rightarrow \alpha = 14,9^\circ \approx 15^\circ$$

**30.3.** Cas où le fil ne subit aucune action magnétique.

Il faut que la force  $\vec{F}$  soit nulle. Si  $\vec{B}$  et  $I$  ne sont pas nuls, il faut que le produit vectoriel  $\vec{CD} \wedge \vec{B}$  soit nul donc que  $\vec{CD}$  et  $\vec{B}$  soient parallèles.

### Solution 31. (p. 25)

**31.1.** Caractéristiques de la force de Laplace  $\vec{F}_{CD}$  s'exerçant sur la branche  $CD$ .

$$\vec{F}_{CD} = I \cdot \vec{CD} \wedge \vec{B}$$

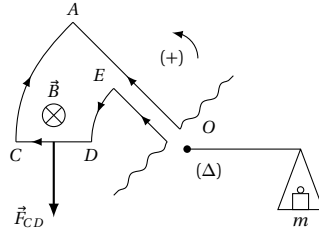
$\vec{F}_{CD}$  est dans le plan de la figure, orthogonal à  $CD$  et à  $\vec{B}$

■ Son point d'application : il est appliquée au milieu de  $CD$ .

■ La règle de la main droite permet de déterminer son sens (orienté vers le bas).

■ Son intensité est :

$$F_{CD} = I \cdot l \cdot B \sin \alpha = CD$$



**31.2.** Condition d'équilibre de la balance.

La balance de Cotton constitue un système mobile autour d'un axe  $(\Delta)$  perçant le plan de la figure au point  $O$ . Bilan des forces extérieures agissant sur ce système :

■ La force de Laplace  $\vec{F}_{CD}$

■ Le poids  $\vec{P}$  de la masse  $m$ .

D'après le théorème des moments, le système est en équilibre si la somme algébrique des moments par rapport à  $(\Delta)$  des forces appliquées est nulle. En prenant arbitrairement un sens positif de rotation, nous avons :

$$M_{\Delta}(\vec{F}_{CD}) + M_{\Delta}(\vec{P}) = 0 \quad (\text{S1.1})$$

$$M_{\Delta}(\vec{F}_{CD}) = F_{CD} \cdot d = I \cdot l \cdot B \cdot d$$

$$M_{\Delta}(\vec{P}) = -P \cdot d' = -mg \cdot d'$$

$$(\text{S1.1}) \Rightarrow IlBd - mg \cdot d' = 0$$

C'est la condition d'équilibre de la balance.

**31.3.** Montrons que ce dispositif peut être utilisé pour mesurer les champs magnétiques :

D'après la relation d'équilibre ci-dessus, on a :

$$I \cdot l \cdot B \cdot d - mg \cdot d' = 0$$

$$\Rightarrow B = \frac{mg \cdot d'}{I \cdot l \cdot d} \quad (\text{S1.2})$$

La connaissance de  $m$ ,  $d'$ ,  $d$  et  $l$  permet de calculer  $B$ .

**31.4.** Montrons qu'on peut par une simple pesée déterminer le champ  $\vec{B}$  connaissant un champ  $\vec{B}_0$ .

La balance, plongée dans un champ  $\vec{B}_0$ , serait équilibrée par une masse  $m_0$  telle que :

$$B_0 = \frac{m_0 \cdot g \cdot d'}{I \cdot l \cdot d} \quad (\text{S1.3})$$

Faisons le rapport membre à membre

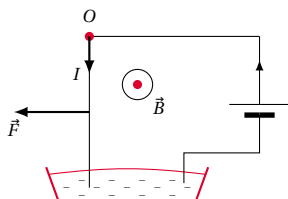
$$\frac{(\text{S1.2})}{(\text{S1.3})} \Rightarrow \frac{B}{B_0} = \frac{m}{m_0}$$

$$\Rightarrow B = B_0 \cdot \frac{m}{m_0}$$

La mesure de  $B$  revient à une simple mesure de masses.

## 1.6. Solutions des exercices et problèmes

## Solution 32. (p. 25)



## 32.1. Expériences.

D'après la loi de Laplace, la force qui agit sur un élément de circuit de longueur  $l$ , parcouru par un courant d'intensité  $I$  et placé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  est :

$$\vec{F} = I \cdot \vec{l} \wedge \vec{B}$$

où  $\vec{l}$  est un vecteur orienté dans le sens du courant.  $\vec{B}$  étant perpendiculaire à  $I \cdot \vec{l}$ , l'intensité de  $\vec{F}$  est :

$$F = I \cdot l \cdot B$$

32.1.1. Premier cas :  $I = 0$ ,  $B \neq 0$ 

$$F = I \cdot l \cdot B = 0 \Rightarrow \vec{F} = \vec{0}$$

La force est nulle.

32.1.2. Deuxième cas :  $I \neq 0$ ,  $B = 0$ 

$$F = I \cdot l \cdot B = 0 \Rightarrow \vec{F} = \vec{0}$$

La force est nulle.

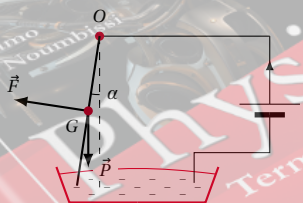
## 32.1.3. Troisième cas

$$I \neq 0,$$

$$B \neq 0$$

$$\Rightarrow F = I l B \neq 0$$

La règle de la main droite donne le sens de la force  $\vec{F}$ . Elle est orientée vers la gauche de la figure. Quand on permute les bornes du générateur, le courant change de sens et la force  $\vec{F}$  aussi.



## 32.2. Déviation angulaire de la tige.

Soit  $\alpha$  la déviation angulaire de la tige. La tige peut tourner autour du point  $O$ , sous l'action de son poids  $\vec{P}$  et de la force de Laplace  $\vec{F}$ . A l'équilibre de la tige, le théorème des moments nous donne :

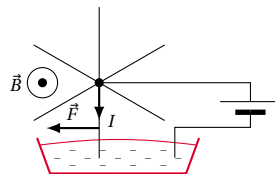
$$P \cdot OG \cdot \sin \alpha = F \cdot OG$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{F}{P} \text{ où } F = I \cdot R \cdot B$$

Donc

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{I \cdot R \cdot B}{P} \\ &= \frac{6 \cdot 10^{-1} \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{8 \cdot 10^{-2}} = 0,15 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha = 8,6^\circ$$



## 32.3. Mouvement de rotation.

Quand on plonge un rayon dans le mercure, il est soumis à une force de Laplace et tourne en entraînant la roue. Le rayon suivant plonge à son tour dans le mercure et subit la force de Laplace, et ainsi de suite. D'après le schéma, le courant dans le rayon plongeant dans le mercure va de haut en bas. Comme dans la première question, chaque rayon tourne vers la gauche et l'ensemble de la roue tourne dans le sens des aiguilles d'une montre.

## 32.4. Puissance développée par la force magnétique.

La puissance développée est :

$$P = M_O(\vec{F}) \cdot \omega$$

$$M_O(\vec{F}) = F \cdot OG = F \cdot \frac{R}{2}$$

$$= I \cdot R \cdot B \cdot \frac{R}{2} = \frac{I \cdot R^2 \cdot B}{2}$$

$$\omega = \frac{2\pi \cdot N}{60} \text{ rads}^{-1}$$

D'où :

$$P = \frac{I \cdot R^2 \cdot B \cdot 2\pi \cdot N}{2 \cdot 60}$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{6 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 14,90}{2 \cdot 60} \\ &= 5,665 \times 10^{-3} \text{ W} \end{aligned}$$



## Généralités sur les mouvements

2.1	<b>Notions mathématiques sur la dérivation et l'intégration</b>	42
2.1.1	La dérivation	42
2.1.2	L'intégration	42
2.2	<b>Le mouvement</b>	42
2.2.1	Caractère relatif du mouvement	42
2.2.2	Notion de point mobile	42
2.2.3	Repérage dans le temps	43
2.2.4	Les paramètres cinématiques	43
2.3	<b>Les mouvements rectilignes</b>	45
2.3.1	Mouvement rectiligne uniforme (m.r.u)	45
2.3.2	Mouvement rectiligne uniformément varié (m.r.u.v.)	45
2.3.3	Mouvement rectiligne sinusoïdal	46
2.4	<b>Mouvements circulaires</b>	47
2.4.1	Généralités	47
2.4.2	Mouvement circulaire uniforme	48
2.4.3	Mouvement circulaire uniformément varié	48
2.4.4	Mouvement circulaire sinusoïdal	48
2.5	<b>Mouvement d'un solide</b>	49
2.5.1	Mouvement de translation	49
2.5.2	Mouvement de rotation	49
2.6	<b>Enoncés des exercices et problèmes</b>	50
2.7	<b>Solutions des exercices et problèmes</b>	53



## 2.1 Notions mathématiques sur la dérivation et l'intégration

### 2.1.1 La dérivation

Déjà étudiée en classe de première, la dérivation est l'opération qui consiste à calculer la dérivée d'une fonction.

Soit  $f$  une fonction de la variable  $t$ . La dérivée de  $f$  par rapport à  $t$  est  $\frac{df}{dt}$ . On note aussi cette dérivée  $f'(t)$ . Rappelons cependant quelques règles de dérivation :  $u$  et  $v$  étant des fonctions de la variable  $t$  et  $C$  une constante :

$$\frac{dC}{dt} = 0$$

$$\frac{dCt}{dt} = C$$

$$\frac{dt^n}{dt} = n t^{n-1}$$

$$\frac{duv}{dt} = u \frac{dv}{dt} + v \frac{du}{dt}$$

$$\frac{du^n}{dt} = n u^{n-1} \frac{du}{dt}$$

$$\frac{du+v}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{d \sin u}{dt} = \cos u \frac{du}{dt}$$

$$\frac{d \cos u}{dt} = -\sin u \frac{du}{dt}$$

$$\frac{d \tan u}{dt} = \frac{1}{\cos^2 u} \frac{du}{dt}$$

$$\frac{de^t}{dt} = e^t$$

#### Remarque.

Notons qu'il existe des dérivées d'ordre supérieur. Par exemple, la dérivée seconde de la fonction  $u(t)$ , notée  $u''(t)$  est :

$$u''(t) = \frac{du'}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{du}{dt} \right) = \frac{d^2 u}{dt^2}$$

### 2.1.2 L'intégration

L'intégration consiste à déterminer la fonction (appelée *primitive* ou *intégrale*) connaissant sa dérivée. Puisque la dérivée d'une constante est nulle, l'intégrale est toujours déterminée à une constante près.

Nous nous limiterons à quelques exemples de fonctions couramment utilisées en physique :  $u$  étant une fonction de la variable temps notée  $u(t)$ , sa dérivée est notée  $u'(t)$ ,  $C$  et  $K$  sont des constantes.

Dérivée : $u'(t) = \frac{du}{dt}$	Fonction : $u(t)$
0	$C$
$K$	$Kt + C$
$Kt$	$\frac{1}{2} K t^2 + C$
$\sin(Kt)$	$-\frac{1}{K} \cos(Kt) + C$
$\cos(Kt)$	$\frac{1}{K} \sin(Kt) + C$

## 2.2 Le mouvement

La cinématique est l'étude du mouvement des corps. La cinématique ne s'intéresse pas aux causes du mouvement (objet de la dynamique que nous étudierons plus loin)

### 2.2.1 Caractère relatif du mouvement

Considérons un voyageur assis dans une voiture en mouvement, et un observateur :

- l'observateur est assis dans la même voiture que le voyageur : le voyageur est immobile par rapport à l'observateur (on dit aussi que le voyageur est au repos). En effet, la distance entre les deux est invariable au cours du temps ;
- l'observateur est fixe au sol et regarde la voiture passer. Dans ce cas le voyageur est bien en mouvement par rapport à l'observateur ou à la terre.

**Conclusion :** Les notions de mouvement ou de repos ont un caractère relatif.

Le mouvement ou le repos ne peut être défini que par rapport à un solide de référence appelé référentiel.

Dans l'exemple ci-dessus, le compartiment de la voiture et la terre sont les deux référentiels successivement choisis pour étudier le mouvement du voyageur.

Il est donc indispensable de préciser le référentiel dans lequel on observe un mouvement ; l'objet en mouvement étant appelé mobile.

### 2.2.2 Notion de point mobile

Un mobile dont les dimensions sont très petites compte tenu des moyens d'observation peut être assimilé à un point.



## 2.2. Le mouvement

### Exemple.

Un avion loin dans le ciel vu à l'oeil nu peut être assimilé à un point alors qu'une paramécie vu au microscope n'est pas un point.

### Coordonnées cartésiennes

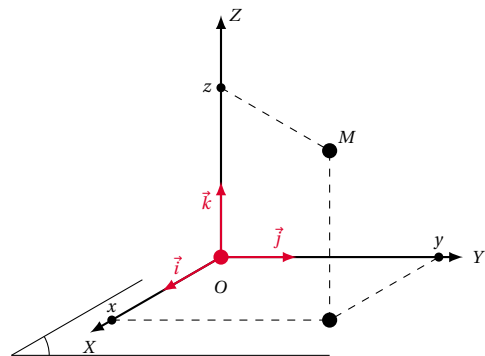
Dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  la position du point mobile  $m$  est définie à chaque instant par le vecteur-position  $\vec{OM}$  qui s'écrit :

$$\vec{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$

où  $x, y, z$  étant les coordonnées cartésiennes de  $m$  dans ce repère.

Etant donné que le point  $M$  est en mouvement, l'une au moins de ses coordonnées varie en fonction du paramètre temps et les fonctions  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$  constituent les équations paramétriques ou équations horaires du mouvement de  $M$ .

Figure 2.1



L'ensemble des positions successives occupées par le mobile au cours de son déplacement est appelée *trajectoire du mobile*.

L'équation de la trajectoire d'un point est une relation liant les coordonnées  $x, y$  et  $z$  de ce point. Elle s'obtient en éliminant le temps  $t$  entre les équations paramétriques donnant  $x, y, z$ .

Si la trajectoire est une droite, le mouvement est dit rectiligne sinon, il est curviligne.

### Exemple.

- la *minute* : 1 min = 60 s;
- l'*heure* : 1 h = 60 min = 3600 s;
- le *jour* : 1 j = 24 h;
- l'*année solaire* : 1 année = 365 j;
- le *siècle* : 1 siècle = 100 ans.

- mouvement circulaire (la trajectoire est un cercle ou un arc de cercle);
- mouvement parabolique (la trajectoire est une parabole).

La forme de la trajectoire dépend du référentiel d'étude choisi.

### Abscisse curviligne

Sur la trajectoire orientée dans le sens du mouvement et munie d'une origine  $M_0$ , la position d'un point mobile  $m$  peut être repéré à chaque instant par l'abscisse curviligne.

$$S = M_0M$$

## 2.2.3 Repérage dans le temps

Nous avons tous la notion intuitive du temps qui s'écoule irréversiblement du passé vers le futur en passant par le présent.

A chaque instant du temps on associe un nombre réel appelé date.

L'origine du temps correspond à la date  $t = 0$ . Cette origine est arbitraire.

### Exemple.

- dans le calendrier grégorien, la date  $t = 0$  correspond à la naissance de Jésus Christ;
- dans le calendrier républicain la date  $t = 0$  correspond au 22 septembre 1792 à 0 heure;
- dans le calendrier musulman la date  $t = 0$  correspond au refuge de Mahomet à Médine (an 622);
- la date  $t = 0$  correspond à un coup de feu (course), à un coup de gong (boxe), ...

Tous les événements qui ont lieu après l'instant considéré comme origine ont une date positive. Ceux qui ont lieu avant cet instant ont des dates comptées négativement.

On appelle durée, l'intervalle de temps séparant deux dates  $t_1$  et  $t_2$  soit  $\Delta t = t_2 - t_1$ .

Tout dispositif permettant de mesurer une durée est appelé une horloge. (chronomètre, montre, ...).

L'unité SI de la durée est la *seconde* (symbole s).

Les autres unités de durée :

## 2.2.4 Les paramètres cinématiques

### Les paramètres de position

Le référentiel d'étude étant choisi, on connaît le mouvement d'un point mobile si on connaît à chaque instant la position de ce point dans le repère. Cette position peut être déterminée de deux manières :

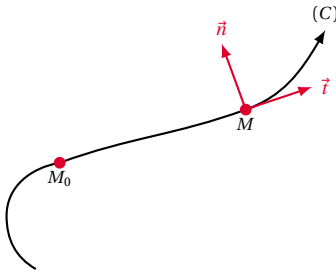


Figure 2.2

L'abscisse curviligne est liée au temps par la relation  $s = f(t)$  appelée équation horaire du mouvement.

En chaque point de la trajectoire on définit une base curviligne  $(\vec{t}, \vec{n})$  appelée base de Frenet.

- $\vec{t}$  est tangent en  $m$  à la trajectoire  $(c)$ ;
- $\vec{n}$  est perpendiculaire à  $\vec{t}$ .

### Vecteur vitesse

Dans le référentiel lié au point  $O$ , le vecteur vitesse du point mobile  $m$  est défini par :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$$

Les caractéristiques du vecteur-vitesse sont :

- sa direction : c'est la tangente à la trajectoire
- son sens : celui du mouvement
- son intensité  $v$

Le vecteur-vitesse peut être exprimé dans deux bases :

- dans la base cartésienne  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , il a trois composantes

$$\vec{v} = \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = x' \\ v_y = \frac{dy}{dt} = y' \\ v_z = \frac{dz}{dt} = z' \end{cases}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

- dans la base de Frenet  $(\vec{t}, \vec{n})$

$$\vec{v} = \begin{cases} v_x = \frac{ds}{dt} \\ v_y = 0 \end{cases}$$

En effet,  $\vec{v}$  étant porté par la tangente à la trajectoire, sa composante suivant  $\vec{n}$  est toujours nulle.

### Remarque.

Lorsque la norme  $v$  du vecteur vitesse est constante, le mouvement est dit uniforme. Si elle varie au cours du temps, le mouvement est dit varié. Dans ce cas, il peut

être accéléré (le module du vecteur vitesse augmente au cours du temps) ou retardé (ou freiné) (le module du vecteur-vitesse diminue au cours du temps.)

### Vecteur accélération

Dans le référentiel lié au point  $O$ , le vecteur accélération s'obtient en dérivant le vecteur vitesse par rapport au temps.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}$$

Le vecteur accélération peut s'exprimer dans deux bases :

- dans la base cartésienne  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , il a trois composantes

$$\vec{a} = \begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = x'' \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = y'' \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = z'' \end{cases}$$

- dans la base de Frenet  $(\vec{t}, \vec{n})$  :

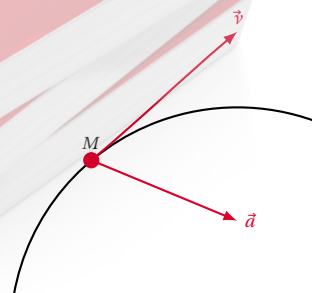
$$\vec{a} = \begin{cases} a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \\ a_n = \frac{v^2}{\rho} \end{cases}$$

où  $\rho$  est le rayon de courbure de la trajectoire au point  $M$  (c'est le rayon du cercle qui coïncide avec la trajectoire sur une petite portion entourant le point  $M$ ).

### Remarque.

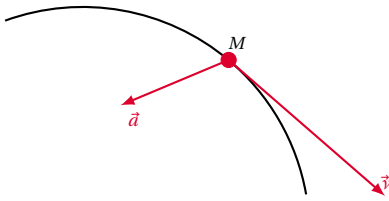
- Dans la base curviligne,  $a_t$  caractérise les variations de la norme du vecteur-vitesse,  $a_n$  caractérise les variations en direction du vecteur vitesse.
- Si le mouvement est accéléré, les vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{v}$  ont même sens, ce qui implique que le produit  $\vec{a} \cdot \vec{v} > 0$  (Figure 2.3). A l'inverse, le mouvement est retardé si  $\vec{a} \cdot \vec{v} < 0$  (les vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{v}$  sont de sens contraire) (Figure 2.4).

Figure 2.3



## 2.3. Les mouvements rectilignes

Figure 2.4

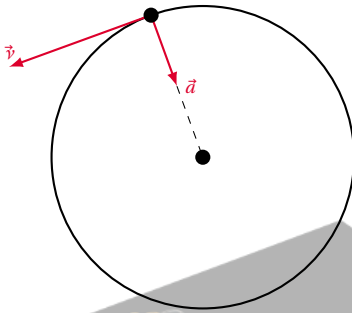


■ Le mouvement est uniforme si  $\vec{a} \cdot \vec{v} = 0$ .

Deux cas peuvent alors se présenter :

- soit  $\vec{a} = \vec{0}$  et  $\vec{v} \neq 0$ . Le mouvement est rectiligne uniforme. En effet,  $\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \text{constante}$ .
- $\vec{a} \neq \vec{0}$  et  $\vec{a} \perp \vec{v}$ . Le vecteur vitesse a un module constant, mais le vecteur vitesse  $\vec{v}$  n'est pas constant. le mouvement est circulaire uniforme. (Figure 2.5)

Figure 2.5



## 2.3 Les mouvements rectilignes

**Définition.**

Le mouvement d'un point mobile  $m$  est dit rectiligne lorsque sa trajectoire est une droite.

Dans ce cas, les vecteurs :

- position :  $\vec{OM} = x\vec{i}$
- vitesse :  $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} = x'\vec{i}$
- accélération :  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dx'}{dt}\vec{i} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} = x''\vec{i}$

sont tous portés par la trajectoire ( $x'x$ ).

Le vecteur vitesse  $\vec{v}$  a le sens du mouvement, mais  $\vec{a}$  n'a pas forcément le sens du mouvement.

Figure 2.6



## 2.3.1 Mouvement rectiligne uniforme (m.r.u)

**Définition.**

Dans un repère donné, un point  $m$  est animé d'un mouvement rectiligne uniforme si et seulement si son vecteur-vitesse  $\vec{v}$  reste constant, donc la direction, le sens et le module de  $\vec{v}$  ne varient pas au cours du temps.

**Caractéristiques d'un mouvement rectiligne uniforme**

$$\vec{v} = v_x \vec{i} = \text{vecteur constant}$$

$$\Rightarrow v_x = \frac{dx}{dt} = \text{constante}$$

On en déduit :

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0$$

$$\text{et } \vec{a} = \vec{0}$$

Donc pour un mouvement rectiligne uniforme (m.r.u),  $\vec{a} = \vec{0}$ .

**Equation horaire d'un mouvement rectiligne uniforme**

Quelle est la fonction du temps  $x(t)$  qui, dérivée une fois par rapport au temps, donne une constante ( $v_x$ )?

C'est une fonction de  $t$  du premier degré (voir notions mathématiques).

$$x(t) = v_x t + C$$

Déterminons la constante  $C$  :

À  $t = 0$ ,  $x = v_x t_0 + C = C$ . Donc  $C$  est la valeur de l'abscisse  $x$  à  $t = 0$ . On la note  $x_0$  et on l'appelle élongation ou abscisse initiale. On la détermine aisément si on connaît la position du mobile à un instant donné.

L'équation horaire d'un m.r.u. est de la forme :

$$x(t) = v_x t + x_0$$

Il ressort de cette équation horaire :

$$x_2 - x_1 = v_x (t_2 - t_1)$$

La distance parcourue  $\Delta x = x_2 - x_1$  est proportionnelle à la durée de parcours  $\Delta t = t_2 - t_1$

## 2.3.2 Mouvement rectiligne uniformément varié (m.r.u.v.)

### Définition.

Dans un repère donné, un point  $m$  est animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié si et seulement si son vecteur accélération  $\vec{a}$  reste constant.

### Caractéristiques d'un mouvement rectiligne uniformément varié

#### Vecteur-vitesse

Il a une composante  $v_x$  telle que :

$$\frac{dv_x}{dt} = a_x = \text{constante}$$

Par intégration de  $a_x$ , nous avons :

$$v_x(t) = a_x t + C$$

Déterminons la constante  $C$  :

À  $t = 0$ ,  $v = a_x t_0 + C = C$ . Donc  $C$  est la valeur de la vitesse  $v$  à  $t = 0$ . On la note  $v_{0x}$  et on l'appelle vitesse initiale. On détermine  $v_{0x}$  à partir de la valeur de  $v_x$  à un instant  $t$  quelconque.

#### Equation horaire

On l'obtient par intégration de  $v_x$ . C'est une fonction du second degré de la forme.

$$x(t) = \frac{1}{2} a_x t^2 + v_{0x} t + x_0$$

On détermine  $x_0$  à partir de la valeur de  $x$  à une date  $t$  quelconque.

#### D'autres relations caractéristiques d'un m.r.u.v.

Soit un point mobile en m.r.u.v. Soient respectivement  $x_1$  et  $v_1$  l'élongation et la vitesse du mobile à la date  $t_1$ ;  $x_2$  et  $v_2$  son élongation et sa vitesse à la date  $t_2$ . On démontre que :

$$v_2 - v_1 = a_x(t_2 - t_1)$$

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a_x(x_2 - x_1)$$

## 2.3.3 Mouvement rectiligne sinusoïdal

### Définition.

On dit qu'un point  $m$  est en mouvement rectiligne sinusoïdal quand son élongation  $x$  est une fonction sinusoïdale du temps.

L'équation horaire d'un tel mouvement est de la forme :

$$x = X_m \cos(\omega t + \phi)$$

où :

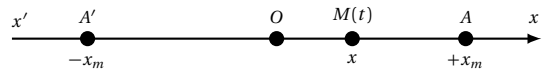
- $X_m$  est l'amplitude du mouvement;  $X_m$  est toujours positif et s'exprime dans la même unité que  $x$ ;
- $\omega$  est la pulsation du mouvement;  $\omega$  s'exprime en *radians par secondes* ( $\text{rad s}^{-1}$ );
- $(\omega t + \phi)$  est la phase du mouvement à l'instant  $t$ ; elle s'exprime en *radians* (rad);

À l'instant  $t = 0$ , la phase du mouvement devient :

$$\omega \cdot 0 + \phi = \phi. \text{ Donc } \phi \text{ est la phase à l'origine.}$$

Au cours d'un tel mouvement, le mobile parcourt le segment  $aa'$  de longueur  $2X_m$ , alternativement dans un sens et dans l'autre : on dit qu'il oscille de part et d'autre de l'origine  $O$ .

Figure 2.7



On appelle période du mouvement, l'intervalle de temps constant  $t$  qui sépare deux passages consécutifs du mobile au même point et dans le même sens.

On appelle oscillation le mouvement effectué par le mobile pendant une période. On démontre que la période  $T$  est liée à la pulsation  $\omega$  par la relation :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

- $T$  en secondes;
- $\omega$  en radians par seconde ( $\text{rad s}^{-1}$ ).

La fréquence  $f$  est le nombre d'oscillations par seconde. Comme chaque oscillation dure  $T$ , on a :

$$f = \frac{1}{T}$$

$f$  s'exprime en *hertz* (Hz) dans le SI.

#### Remarque.

1. L'élongation  $x$  peut aussi s'exprimer de la manière suivante :

$$x = X_m \sin(\omega t + \phi')$$

avec  $\phi' = \phi + \frac{\pi}{2}$ .

2. Vitesse du mobile à l'instant  $t$  :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = x'$$

$$= -X_m \omega \sin(\omega t + \phi)$$

3. Accélération du mobile à l'instant  $t$  :

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = x''$$

$$a'' = -X_m \omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$



## 2.4. Mouvements circulaires

En remarquant que :

$$X_m \cos(\omega t + \phi) = x$$

on a :

$$\begin{aligned} a_x &= x'' = -\omega^2 x \\ \Leftrightarrow x'' + \omega^2 x &= 0 \end{aligned}$$

Cette relation est appelée équation différentielle du mouvement. Cette équation différentielle est caractéristique du mouvement rectiligne sinusoïdal. Cette équation admet pour solution :

$$x = X_m \cos(\omega t + \phi)$$

où  $X_m$  et  $\phi$  sont des constantes déterminées par la connaissance de  $x$  et de  $v$  à une date  $t$  quelconque.

## 2.4 Mouvements circulaires

### 2.4.1 Généralités

#### Définition.

Un point  $m$  est animé d'un mouvement circulaire si sa trajectoire est un cercle.

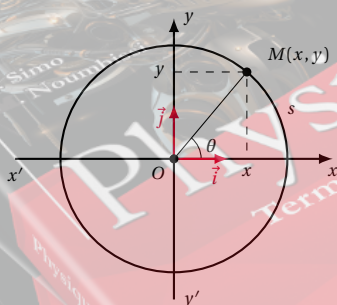


Figure 2.8

#### Repérage du point M

On peut repérer le point M par :

- ses coordonnées cartésiennes  $x$  et  $y$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ;
- son abscisse curviligne  $s(t) = M_0 M$ ;
- son abscisse angulaire  $\theta(t) = \text{l'angle } (O\vec{M}_0 O\vec{M})$  à chaque instant.

La relation liant,  $s$ ,  $R$  et  $\theta$  est :

$$s = R\theta$$

#### Vecteur-vitesse $\vec{v}$ ; vitesse angulaire $\theta'$

Le vecteur vitesse a pour caractéristiques :

- direction : c'est la tangente à la trajectoire;
- sens : celui du mouvement;
- module :  $V = \frac{ds}{dt}$ .

La vitesse angulaire  $\theta'$  est définie par :

$$\theta' = \frac{d\theta}{dt} \text{ exprimé en rad s}^{-1}.$$

Relation entre  $v$  et  $\theta'$

$$s = R\theta$$

$$V = \frac{ds}{dt} = \frac{d(R\theta)}{dt}$$

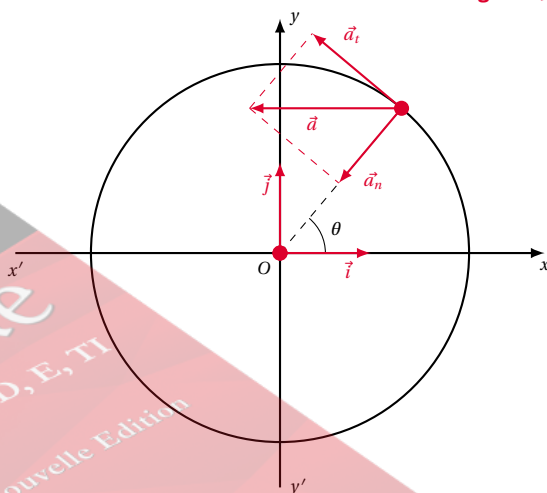
$$V = R \frac{d\theta}{dt} = R\theta'$$

$$\Rightarrow V = R\theta'$$

avec  $v$  en  $m/s$ ;  $r$  en  $m$  et  $\theta'$  en  $\text{rad s}^{-1}$ .

#### Vecteur accélération $\vec{a}$

Figure 2.9



Dans la base de Fresnet  $(\vec{t}, \vec{n})$ ,  $\vec{a}$  possède deux composantes  $a_t$  et  $a_n$ .

$$\vec{a} = \begin{cases} a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(R\theta')}{dt} = R\theta'' \\ a_n = \frac{V^2}{R} = (R\theta')^2 R \\ a_n = \frac{(R\theta')^2}{R} = R\theta'^2 = \theta' v \end{cases}$$



### 2.4.2 Mouvement circulaire uniforme

#### Définition.

C'est un mouvement circulaire dont le module du vecteur-vitesse du mobile reste constant pendant le mouvement ( $v = \text{constante}$ ).

#### Conséquences

- $\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow a_t = 0$ , l'accélération du mobile se réduit à chaque instant à sa seule composante normale, toujours dirigée vers le centre. On dit qu'elle est centripète. Donc  $a = a_n = R\theta'^2$
- si  $v = R\theta' = \text{constante} \Rightarrow \theta' = \text{constante}$  car  $r$  est une constante.
- équation horaire du mouvement  $\theta(t)$ , on l'obtient par intégration de la constante  $\theta'$ , on obtient une fonction du premier degré :

$$\theta(t) = \theta' t + \theta_0$$

où  $\theta_0$  est l'élongation angulaire initiale qu'on détermine à partir de la valeur de  $\theta$  à une date  $t$  quelconque.

La période d'un mouvement circulaire uniforme est la durée que met le mobile pour effectuer un tour complet.

$$T = \frac{2\pi}{\theta'}$$

avec  $T$  en seconde et  $\theta'$  en  $\text{rad s}^{-1}$ .

La fréquence  $f$  est le nombre de tours effectués pendant une seconde.

$$f = \frac{1}{T}$$

$f$  peut aussi s'exprimer en tours par seconde tr/s.

Relation entre  $f$  et  $\theta'$  :

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\theta'} \\ T &= \frac{1}{f} \\ \Rightarrow \theta' &= 2\pi f \end{aligned}$$

### 2.4.3 Mouvement circulaire uniformément varié

#### Définition.

C'est un mouvement de trajectoire circulaire et d'accélération angulaire ( $\theta''$ ) constante.

Le vecteur accélération a pour composante :

$$\begin{cases} a_t = R\theta'' \\ a_n = R\theta'^2 \end{cases}$$

#### Vitesse angulaire $\theta'(t)$

Par intégration de la constante  $\theta''$ , on obtient la fonction du premier degré

$$\theta'(t) = \theta'' t + \theta'_0$$

où  $\theta'_0$  est la vitesse angulaire initiale du mobile.

#### Equation horaire du mouvement $\theta(t)$

C'est la fonction du second degré obtenue par intégration de la fonction du premier degré  $\theta'(t)$ .

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \theta'' t^2 + \theta'_0 t + \theta_0$$

On démontre que :

$$\begin{cases} \theta'_2 - \theta'_1 = \theta''(t_2 - t_1) \\ \theta''_2 - \theta''_1 = 2\theta''(\theta_2 - \theta_1) \end{cases}$$

### 2.4.4 Mouvement circulaire sinusoïdal

#### Définition.

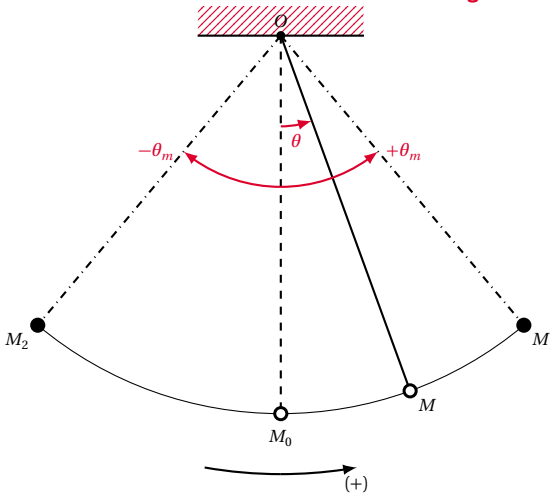
C'est un mouvement circulaire dont l'élongation angulaire  $\theta$  est une fonction sinusoïdale du temps.

L'équation horaire est de la forme :

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \phi)$$

avec  $\theta$  et  $\theta_m$  en rad,  $\omega$  en  $\text{rad s}^{-1}$  et  $\phi$  en rad.

Figure 2.10

**Exemple.**

Le mouvement d'un pendule simple, constitué d'un point matériel suspendu en un point  $O$  par un fil inextensible et de masse négligeable, légèrement écarté de sa position d'équilibre stable  $M_0$  et abandonné.

- Une oscillation de durée  $T$  correspond au trajet  $M_0M_1M_0M_2M_0$  (Figure 2.9)
- Un battement est une demi-oscillation de durée  $\frac{T}{2}$ . Ainsi, un pendule qui bat la seconde a une période  $T = 2\text{ s}$ .
- Un battement est une demi-oscillation de durée  $\frac{T}{2}$ .

**Vitesse instantanée d'un mouvement circulaire sinusoïdal**

$$\theta' = \frac{d\theta}{dt} = -\theta_m \omega \sin(\omega t + \phi)$$

**Accélération d'un mouvement circulaire sinusoïdal**

$$\begin{aligned} \theta'' &= \frac{d\theta'}{dt} = -\theta_m \omega^2 \cos(\omega t + \phi) \\ &= -\omega^2 \theta \end{aligned}$$

Nous retrouvons l'équation différentielle

$$\theta'' + \omega^2 \theta = 0$$

**2.5 Mouvement d'un solide**

En mécanique, un solide est un ensemble indéformable (au cours du temps) de points matériels. On distingue deux mouvements fondamentaux des solides.

**2.5.1 Mouvement de translation**

Un solide a un mouvement de translation lorsque tous ses points ont des trajectoires identiques et parallèles.

Si ces trajectoires sont des droites, la translation est dite rectiligne.

**Exemple.**

- mouvement d'un train sur une voie rectiligne;
- mouvement du té sur la planche à dessin.

La translation est dite curviligne lorsque les trajectoires des points du solide ne sont pas des droites.

- Les cabines d'une roue téléphérique ont un mouvement de translation circulaire.

**Remarque.**

Tous les points d'un solide en translation ont la même vitesse à chaque instant.

**2.5.2 Mouvement de rotation**

Un solide a un mouvement de rotation quand il tourne autour d'une droite fixe appelée axe de rotation.

**Exemple.**

- mouvement du battant d'une porte autour de l'axe des paumelles;
- mouvement d'une poulie autour de son axe.

**Remarque.**

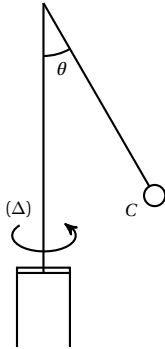
Tous les points du solide ont pour trajectoire des cercles centrés sur l'axe de rotation et ont la même vitesse angulaire et la même accélération angulaire à chaque instant.

En revanche, la vitesse et l'accélération linéaires (proportionnelles à  $R$ ) augmentent quand on s'éloigne de l'axe de rotation.

## 2.6 Énoncés des exercices et problèmes

### Exercice 1.

Un axe vertical  $(\Delta)$  tourne à vitesse constante. Un objet ponctuel  $C$  est accroché à l'axe par l'intermédiaire d'un fil  $AC$  de masse négligeable et de longueur  $l = 1$  m.



**1.1.** Quelle est la nature du mouvement de  $C$  lorsque le fil fait un angle  $\theta$  avec l'axe  $(\Delta)$  ?

**1.2.** Précisez les caractéristiques de la trajectoire décrite par  $C$  lorsque l'angle que fait le fil avec  $(\Delta)$  est  $\theta = 30^\circ$  ?

### Exercice 2.

Les équations paramétriques d'un mobile sont (en cm) :

$$\begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = \frac{1}{2}t^2 \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

**2.1.** Le mouvement du mobile est-il plan ? Pourquoi ?

**2.2.** Déterminer le module du vecteur vitesse du mobile à l'instant  $t$ .

A.N. :  $t = 0$ .

**2.3.** Déterminer le vecteur accélération à un instant  $t$  quelconque. Conclure.

**2.4.** Quelle est l'équation de la trajectoire de ce mobile ?

### Exercice 3.

L'équation paramétrique d'un mobile en mouvement rectiligne est en mètre :

$$x = \frac{1}{2}t^2 + 2t + 1$$

**3.1.** Quelle est l'équation de sa trajectoire ?

**3.2.** Déterminer :

- la position initiale du mobile (position à  $t = 0$  s) ;
- la vitesse initiale du mobile (vitesse à  $t = 0$  s) ;
- le module de l'accélération du mobile à un instant quelconque. Conclure.

**3.3.** Calculer la vitesse moyenne  $v_m$  du mobile entre les

instants  $t_1 = 0$  s et  $t_2 = 2$  s.

**3.4.** Calculer les vitesses  $v_1$  et  $v_2$  du mobile aux instants respectifs  $t_1 = 0$  s et  $t_2 = 2$  s.

**3.5.** Comparer  $v_1$  et  $v_2$  à  $v_m$ . Conclure.

### Exercice 4.

Soit la relation  $V^2 = Kg(x - x_0)$  exprimant la vitesse instantanée  $v$  d'un mobile en mouvement rectiligne, en fonction de sa position.  $x$ ,  $K$ ,  $g$  et  $x_0$  sont des grandeurs constantes dans le temps. Déterminer la valeur de l'accélération de ce mobile :

A.N.  $K = \frac{1}{4}$  ;  $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ .

### Exercice 5.

Les équations horaires d'un mobile  $M$  sont en centimètre :

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos(\pi t) \\ y(t) = 2 \sin(\pi t) \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

**5.1.** Montrer que le mouvement de ce mobile a lieu dans un plan et que sa trajectoire est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

**5.2.** Déterminer :

- le module du vecteur vitesse du mobile à l'instant  $t$  ;
- le module du vecteur accélération du mobile à l'instant  $t$ .

**5.3.** Montrer que le vecteur  $\vec{a}$  est à chaque instant colinéaire et de sens contraire au vecteur position  $\vec{OM}$  du mobile.

### Exercice 6.

Les équations horaires du vecteur vitesse d'un mobile à un instant  $t$  quelconque sont données en  $\text{ms}^{-1}$  par :

$$\begin{cases} V_x = 0,1 \\ V_y = 0,2t \end{cases}$$

**6.1.** Déterminer les équations horaires  $x(t)$  et  $y(t)$  des coordonnées de ce mobile à l'instant  $t$  sachant qu'à  $t = 0$  s, le mobile se trouve en un point de coordonnées  $x_0 = 0,1$  m et  $y_0 = 0,1$  m.

**6.2.** Donner l'équation de sa trajectoire.

### Exercice 7.

Un mobile parcourt une droite à la vitesse constante de  $12 \text{ ms}^{-1}$ . À la date  $t = 2$  s, il se trouve à l'abscisse  $x = -5$  m. Quelle est son abscisse à la date  $t = 20$  s ?

### Exercice 8.

Déterminer à quel instant et pour quelle élongation le mouvement d'équation :  $x = -12t^2 + 3t - 5$  change de sens.

## 2.6. Enoncés des exercices et problèmes

## Exercice 9.

Un mobile démarre sur une trajectoire rectiligne et atteint au bout de 3 s une vitesse de  $10 \text{ m s}^{-1}$ .

**9.1.** Quelle est la nature de son mouvement?

**9.2.** Calculer son accélération sachant qu'elle est constante.

**9.3.** Quelle est la longueur du trajet parcouru par le mobile pendant ce temps?

## Exercice 10.

Démontrer que pour un mouvement rectiligne uniformément varié d'accélération  $a$ , les espaces parcourus pendant les intervalles de temps successifs égaux  $\theta$  forment une progression arithmétique de raison  $r = a\theta^2$ .

## Exercice 11.

Un dispositif permet d'enregistrer à des intervalles de temps égaux, les positions d'un point matériel en mouvement rectiligne. Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau suivant :

$t$	(s)	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$x$	(cm)	5	15	29	47	69	95

$t$	(s)	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	
$x$	(cm)	124,5	154,5	184,5	214,5	244,5	

**11.1.** Montrer que le mouvement admet une première phase uniformément accélérée et calculer son accélération. Etablir l'équation du mouvement dans cette phase.

**11.2.** Montrer que le mouvement devient uniforme vers la fin de l'enregistrement. Etablir l'équation horaire pour cette phase. On considérera qu'à l'instant initial  $V = V_0 = 0$ .

## Exercice 12.

Partant du repos, un mobile en mouvement rectiligne acquiert une vitesse de  $10 \text{ m s}^{-1}$  après 25 m de parcours. Il parcourt ensuite 50 m avec cette vitesse et s'arrête à 125 m de son point de départ. On considère les mouvements de la première phase et de la troisième phase comme uniformément variés.

**12.1.** Etablir les équations horaires des trois phases du mouvement en précisant les origines de date et d'espace.

**12.2.** Construire les diagrammes des espaces sur un même graphique.

## Exercice 13.

On étudie le mouvement de chute suivant une même verticale de deux billes assimilables à des points matériels. On admet que les mouvements sont uniformément variés. Le vecteur accélération est vertical et dirigé de haut en bas. Son module :  $a = 10 \text{ m s}^{-2}$ .

**13.1.** D'un point  $O$ , on lance une première bille  $A$  verti-

calement vers le haut avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0$ .

**13.1.1.** Ecrire l'équation horaire de son mouvement en précisant les repères de temps et d'espace choisis.

**13.1.2.** Quelle est l'altitude maximale atteinte par cette bille? A quelle date atteint-elle ce maximum? On prendra  $v_0 = 30 \text{ m s}^{-1}$ .

**13.2.** Trois secondes après le départ de la bille  $A$ , on lance une deuxième bille  $B$  verticalement à partir du même point  $O$  avec la même vitesse  $\vec{v}_0$ .

**13.2.1.** Ecrire l'équation du mouvement de  $B$  en prenant les mêmes repères que précédemment.

**13.2.2.** Quand et où les deux billes se rencontrent-elles?

## Exercice 14.

Un mobile ponctuel  $M$  se déplace sur un axe  $x'Ox$  d'origine  $O$ . La loi horaire de son mouvement est en mètre :

$$x = 2 \times 10^{-2} \cos \left( 40\pi t - \frac{\pi}{6} \right)$$

**14.1.** De quel mouvement s'agit-il?

**14.2.** Préciser l'amplitude, la pulsation, la période, la fréquence et la phase initiale du mouvement.

**14.3.** Quelle est la longueur du segment décrit par  $M$ ?

**14.4.** Quelle est la vitesse de  $M$  à la date  $t$ ? En déduire :  
■ la vitesse maximale de  $M$  ;  
■ la vitesse de  $M$  à la date  $t = 1 \text{ s}$ .

**14.5.** Déterminer la date du premier passage du mobile  $M$  à la position  $x = 10^{-2} \text{ m}$ .

**14.6.** Déterminer la phase à l'instant  $t = 2 \text{ s}$  du mouvement de  $M$ .

**14.7.** Déterminer l'équation différentielle du mouvement de  $M$ . En déduire son accélération lorsqu'il passe par le point d'abscisse  $x = 10^{-2} \text{ m}$ .

## Exercice 15.

L'équation horaire du mouvement d'un mobile est :

$$x = 2 \times 10^{-2} \sin(100\pi t + \phi).$$

Calculer  $\phi$  pour chacun des cas suivants :

**15.1.** à l'instant initial, le mobile passe par l'origine des espaces dans le sens des elongations croissantes ;

**15.2.** à l'instant initial, le mobile passe par l'origine des espaces dans le sens des elongations décroissantes ;

**15.3.** à l'instant initial, le mobile passe par l'elongation maximale ;

**15.4.** à l'instant initiale, le mobile passe par l'elongation minimale.

## Exercice 16.

La vitesse linéaire d'un mobile ponctuel en mouvement circulaire uniforme est de  $14 \text{ m s}^{-1}$ . Calculer :

**16.1.** sa vitesse angulaire si le rayon de la trajectoire est de 2 m ;

**16.2.** sa fréquence.



**Exercice 17.**

On fait tourner un disque initialement au repos jusqu'à atteindre une vitesse constante de  $8 \text{ rad}^{-2}$ .

**17.1.** Quelle est la valeur de l'angle balayé par un rayon du disque au cours de ce mouvement si l'accélération vaut  $2,5 \text{ rad}^{-2}$  ?

**17.2.** Ecrire l'équation horaire du mouvement du disque sachant que à  $t = 0 \text{ s}$ ,  $\theta = \theta_0 = 0 \text{ rad}$ .)

**17.3.** Lancé à la vitesse ci-dessus, le disque est freiné. Il s'arrête alors au bout de  $2 \text{ s}$ .

**17.3.1.** Calculer la valeur de sa nouvelle accélération.

**17.3.2.** Quelle est la valeur de l'angle balayé par un rayon du disque depuis le début du freinage jusqu'à l'arrêt complet.

**17.3.3.** Quel est le nombre de tours complets effectués par un rayon du disque pendant cette deuxième phase du mouvement.

**Exercice 18.**

Un mobile  $M$  supposé ponctuel effectue un trajet  $ABCD$  constitué de trois portions et représenté par la figure ci-contre.  $AB$  et  $BC$  sont rectilignes.  $AC = 350 \text{ m}$ .  $CD$  est un tronçon circulaire de rayon  $OC = 5 \text{ m}$ . L'angle  $\hat{C}OD$  vaut  $60^\circ$ .  $M$  part du point  $A$  avec une vitesse  $V_A = 10 \text{ m s}^{-1}$ . Le mouvement sur le tronçon  $AB$  est uniforme.

**18.1.** Ecrire l'équation du mouvement de  $M$  pour cette première phase (à  $t = 0 \text{ s}$ , le mobile se trouve au point  $A$  considéré comme origine des espaces).

**18.2.** Déterminer la distance  $AB$  sachant que le parcours s'est effectué en  $5 \text{ s}$ .

**18.3.** La deuxième phase du mouvement ( $BC$ ) est uniformément accélérée.

**18.3.1.** Déterminer la valeur de l'accélération sachant que le mobile arrive en  $C$  avec une vitesse  $V_C = 25 \text{ m s}^{-1}$ . En déduire la durée de ce parcours.

**18.3.2.** Etablir l'équation du mouvement de  $M$  pour cette phase en prenant pour origine des dates, l'instant où le mobile se trouve en  $B$ .

**18.4.** Le mobile, parcourt l'arc de cercle  $CD$  d'un mouvement uniformément accéléré. Sachant que la vitesse du mobile en  $D$  vaut  $5,5 \text{ rad s}^{-1}$ . Déterminer :

**18.4.1.** l'accélération angulaire de  $M$  pour cette dernière phase ;

**18.4.2.** l'équation horaire  $\theta = f(t)$  en considérant qu'à l'instant initial le mobile se trouve au point  $C$  ;

**18.4.3.** la durée du trajet  $CD$  ;

**18.4.4.** la distance totale parcourue par le mobile  $M$  de  $A$  à  $D$ .

**Exercice 19.**

Comment expliquez-vous qu'un point animé d'un mouvement circulaire uniforme ait une accélération, bien que la valeur du module de sa vitesse soit constante ? Que savez-vous de cette accélération ?

**Exercice 20.**

On veut mesurer la période  $T_1$  d'un pendule composé  $P_1$  par la méthode des coïncidences. Pour cela, on observe à l'aide d'un viseur les coïncidences de  $P_1$  avec le balancier d'une horloge qui bat exactement la seconde. Les deux pendules oscillent dans des plans parallèles mais le balancier va un peu plus vite que  $P_1$ . La durée  $t$  qui sépare deux coïncidences successives c'est-à-dire deux passages ensemble des deux pendules par leur position d'équilibre stable en allant dans le même sens, est de  $10 \text{ minutes}$ . Quelles est alors la période  $T_1$  du pendule ?



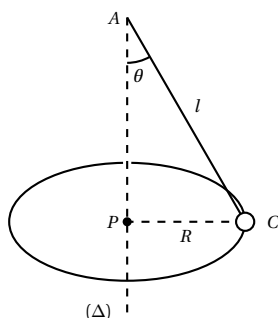
## 2.7 Solutions des exercices et problèmes

### Solution 1. (p. 50)

Le dispositif, décrit dans l'énoncé est un pendule conique.

#### 1.1. Nature du mouvement de C.

Observons le mouvement de C en vue de dessous (figure ci-dessous)



Quand le fil fait un angle  $\theta$  avec l'axe  $\Delta$ , l'objet C décrit une circonférence à vitesse constante. Donc, C a un mouvement circulaire uniforme.

#### 1.2. Caractéristiques de cette trajectoire de C pour $\theta = 30^\circ$ .

La trajectoire de C est un cercle de centre P. P est un point de  $(\Delta)$  tel que :

$$AP = l \cos \theta$$

A.N.  $AP = 1 \cos 30^\circ = 0,866 \text{ m}$

Le rayon R de ce cercle a pour valeur :

$$R = l \sin \theta = 1 \sin 30^\circ = 0,5 \text{ m}$$

### Solution 2. (p. 50)

#### 2.1. Le mouvement du mobile est-il plan? Pourquoi?

L'une des coordonnées du point mobile est constante. En effet  $z(t) = 0 = \text{constante}$ , le mouvement a lieu dans un plan.

#### 2.2. Module du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ .

Le vecteur vitesse a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x' = \frac{dx}{dt} = 2 \\ y' = \frac{dy}{dt} = t \\ z' = \frac{dz}{dt} = 0 \end{cases}$$

Nous en déduisons le module du vecteur vitesse :

$$\begin{aligned} \|\vec{v}(t)\| &= v = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \\ &= \sqrt{4 + t^2} \end{aligned}$$

A.N. à  $t = 0$ ,  $v = \sqrt{4 + 0^2} = \sqrt{4} = 2 \text{ cm s}^{-1}$ .

#### 2.3. Module du vecteur accélération $\vec{a}(t)$ .

Le vecteur accélération est :

$$\begin{cases} x'' = \frac{dx'}{dt} = 0 \\ y'' = \frac{dy'}{dt} = 1 \\ z'' = \frac{dz'}{dt} = 0 \end{cases}$$

Nous en déduisons le module du vecteur accélération

$$\begin{aligned} \|\vec{a}(t)\| &= a = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} \\ &= 1 \text{ cm s}^{-2} \end{aligned}$$

$a(t) = \text{constante} \Rightarrow$  le mouvement est donc uniformément varié.

#### 2.4. Equation de la trajectoire du mobile.

Éliminons la variable  $t$  dans les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 2t \end{cases} \quad (\text{S2.1})$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}t^2 \end{cases} \quad (\text{S2.2})$$

$$\begin{cases} z = 0 \end{cases} \quad (\text{S2.3})$$

De (S2.1) on tire :

$$t = \frac{x}{2} \quad (\text{S2.4})$$

(S2.4) dans (S2.2) :

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \left( \frac{x}{2} \right)^2 = \frac{x^2}{8} \\ y &= \frac{1}{8} x^2 \end{aligned}$$

c'est l'équation d'une parabole. Nous concluons que la trajectoire du mobile étudié est parabolique.

### Solution 3. (p. 50)

#### 3.1. Equation de la trajectoire.

Dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , le mouvement rectiligne a lieu suivant la direction de  $\vec{i}$ . La trajectoire n'étant déterminée qu'après avoir fixé  $y$  et  $z$ .

#### 3.2. Déterminons :

##### 3.2.1. la position initiale du mobile :

$$x_0 = x(t=0) = \frac{1}{2} \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + 1 = 1 \text{ m}$$

##### 3.2.2. la vitesse initiale du mobile :

$$v_0 = v(t=0) = \frac{dx}{dt} = t + 2$$

$$v(t=0) = 2 \text{ m s}^{-1}$$

##### 3.2.3. le module de l'accélération :

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 1 = \text{constante}$$

Nous concluons que le mouvement du mobile est uniformément varié.

#### 3.3. Calculons la vitesse moyenne $v_m$ entre $t_1 = 0$ et

$$t_2 = 2 \text{ s}$$

$$v_m = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$v_m = \frac{x_{(t=2)} - x_{(t=0)}}{t_2 - t_1}$$

$$v_m = \frac{7-1}{2-0} = 3 \text{ m s}^{-1}$$

### 3.4. Calculons : $v_1$ et $v_2$

$$v_1 = v_{(t=0)} = 0 + 2 = 2 \text{ m s}^{-1}$$

$$v_2 = v_{(t=2)} = 2 + 2 = 4 \text{ m s}^{-1}$$

### 3.5. Comparons à $v_1$ et $v_2$ à $v_m$ .

$$v_1 < v_m < v_2$$

On constate que :

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \\ &= \frac{1}{2}(2 + 4) = 3 \text{ m s}^{-1} \end{aligned}$$

Nous concluons que : pour un mouvement rectiligne uniformément varié, la vitesse moyenne entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$  est égale à la moyenne des vitesses instantanées à ces deux instants.

### Solution 4. (p. 50)

Soit un mobile en mouvement rectiligne, dont la vitesse instantanée est donnée par :

$$V^2 = K g (x - x_0) \quad (\text{S2.1})$$

où  $k$ ,  $g$  et  $x_B$  sont des constantes. Déterminons l'accélération de ce mobile.

Dérivons membre à membre l'équation (S2.1) :

$$\frac{d(V^2)}{dt} = K g \frac{dx}{dt} \quad (\text{S2.2})$$

$$\Leftrightarrow 2V \frac{dV}{dt} = K g \frac{dx}{dt} \quad (\text{S2.3})$$

En remarquant que  $\frac{dx}{dt} = V$  et que  $\frac{dV}{dt} = a$ ,

$$\begin{aligned} (\text{S2.3}) \Rightarrow 2Va &= K g V \\ \Rightarrow a &= \frac{K g}{2} \end{aligned}$$

$$\text{A.N. } a = \frac{0,25 \times 10}{2} = 1,25 \text{ m s}^{-2}.$$

### Solution 5. (p. 50)

5.1. L'une des coordonnées du mobile  $M$  étant constante ( $z = 0$ ), le mouvement a lieu dans le plan  $z = 0$ .

Équation de la trajectoire du mobile : éliminons  $t$  dans les 2 équations paramétriques

$$x^2 = 4 \cos^2 \pi t \quad (\text{S2.1})$$

$$y^2 = 4 \sin^2 \pi t \quad (\text{S2.2})$$

(S2.1) plus (S2.2) donne :

$$x^2 + y^2 = 4 (\cos^2 \pi t + \sin^2 \pi t)$$

En remarquant que :

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

c'est l'équation d'un cercle de centre  $C(0,0)$  de rayon 2 cm.

### 5.2. Module du vecteur-vitesse en $\text{cm s}^{-1}$ à la date $t$ :

$$\vec{v} = \begin{cases} x' = \frac{dx}{dt} = -2\pi \sin \pi t \\ y' = \frac{dy}{dt} = 2\pi \cos \pi t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\| &= \sqrt{x'^2 + y'^2} \\ &= \sqrt{4\pi^2 \sin^2 \pi t + 4\pi^2 \cos^2 \pi t} \\ &= 2\pi \sqrt{\sin^2 \pi t + \cos^2 \pi t} = 2\pi \end{aligned}$$

En effet :  $\sin^2 \pi t + \cos^2 \pi t = 1$ . Et  $v = 2\pi = 6,28 \text{ cm s}^{-1}$

### 5.3. Module du vecteur accélération à la date $t$ :

$$\vec{a}(t) = \begin{cases} a_x = \frac{dx'}{dt} = -2\pi^2 \cos \pi t \\ a_y = \frac{dy'}{dt} = -2\pi^2 \sin \pi t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \|\vec{a}(t)\| &= \sqrt{x''^2 + y''^2} \\ &= 2\pi^2 = 19,72 \text{ cm s}^{-2} \end{aligned}$$

Autre méthode de calcul de  $a$ .

Le mouvement étant circulaire, on a :

$$\begin{aligned} a &= \frac{V^2}{R} = \frac{4\pi^2}{2} = 2\pi^2 \\ &= 19,72 \text{ cm s}^{-2} \end{aligned}$$

### 5.4. Direction et sens de $\vec{a}$ par rapport à ceux du vecteur position $\vec{OM}$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= -2\pi^2 \cos \pi t \vec{i} - 2\pi^2 \sin \pi t \vec{j} \\ &= -\pi^2 (2 \cos \pi t \vec{i} + 2 \sin \pi t \vec{j}) \\ &= -\pi^2 \vec{OM} \end{aligned}$$

Donc  $\vec{a}$  a même direction que  $\vec{OM}$  mais a un sens opposé à celui de  $\vec{OM}$ .

### Solution 6. (p. 50)

6.1. Déterminons les équations horaires  $x(t)$  et  $y(t)$  sachant qu'à  $t = 0$ ,  $x_0 = 0,1 \text{ m}$  et  $y_0 = 0,1$ .

Le problème revient à déterminer les fonctions  $x(t)$  et  $y(t)$  dont les dérivées par rapport à  $t$  donnent respectivement  $V_x(t)$  et  $V_y(t)$ .

$$V_x = \frac{dx}{dt}$$

La fonction  $x(t)$  qui a pour dérivée 0,1 est à une constante  $k$  près :

$$x(t) = 0,1t + K$$

Pour déterminer  $K$ , nous nous plaçons à une date où  $x$

## 2.7. Solutions des exercices et problèmes

est connu. A  $t = 0$ ,

$$x_{(t=0)} = x_0 = 0,1 = 0,1 \cdot 0 + K$$

$$\Rightarrow K = x_0 = 0,1$$

$$x(t) = 0,1t + 0,1$$

De même, la fonction  $y(t)$  qui a pour dérivée  $0,2t$  est à une constante  $K'$  près :

$$y(t) = 0,2 \frac{1}{2} t^2 + K' = 0,1t^2 + K'$$

A  $t = 0$ ,

$$y(t=0) = y_0 = 0,1 = 0,10^2 + K'$$

$$\Rightarrow K' = 0,1$$

$$\Rightarrow y(t) = 0,1t^2 + 0,1$$

D'où l'équation horaire du mouvement du mobile :

$$\begin{cases} x(t) = 0,1t + 0,1 & (S2.1) \\ y(t) = 0,1t^2 + 0,1 & (S2.2) \end{cases}$$

### 6.2. Equation de la trajectoire :

Éliminons  $t$  entre les deux équations paramétriques (S2.1) et (S2.2) :

$$x = 0,1t + 0,1$$

$$\Rightarrow t = \frac{(x-0,1)}{0,1} \Rightarrow 10x - 1$$

$$y = 0,1t^2 + 0,1$$

$$\Rightarrow y = 0,1(10x - 1)^2 + 0,1$$

$$\Rightarrow y = 10x^2 - 2x + 0,2$$

C'est l'équation d'une parabole. Donc la trajectoire est parabolique.

### Solution 7. (p. 50)

La trajectoire du mobile étant une droite, le mouvement est rectiligne. De plus sa vitesse est constante : le mouvement de ce mobile est rectiligne uniforme d'équation horaire :

$$x(t) = vt + B$$

où  $B$  est une constante à déterminer.

À  $t = 2$  s,  $x = -5$  m

$$x_{(t=2)} = 12 \cdot 2 + B = -5$$

$$B = -29$$

D'où l'équation horaire du mouvement :

$$x(t) = 12t - 29$$

Son abscisse à  $t = 20$  s est :

$$x = 12 \cdot 20 - 29 = 211 \text{ m}$$

### Solution 8. (p. 50)

Pour que le mouvement change de sens, la vitesse doit s'annuler. A ce moment, le mobile s'arrête d'abord avant de rebrousser chemin. Nous avons donc :

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{d(-12t^2 + 3t - 5)}{dt} \\ &= -24t + 3 \end{aligned}$$

Pour

$$\begin{aligned} v &= 0 \\ -24t + 3 &= 0 \\ t &= \frac{3}{24} = 0,125 \text{ s} \end{aligned}$$

Donc, le mouvement de ce mobile change de sens à la date  $t = 0,125$  s. L'élongation du mouvement à cette date est :

$$\begin{aligned} x_{(t=0,125 \text{ s})} &= -12 \cdot (0,125)^2 + 3 \cdot 0,125 - 5 \\ &= -4,81 \text{ m} \end{aligned}$$

### Solution 9. (p. 51)

#### 9.1. Nature du mouvement.

La trajectoire est rectiligne nous concluons que ce mouvement rectiligne. La vitesse de ce mobile varie au cours du temps. Nous concluons que ce mouvement est varié. En définitive, le mouvement de ce mobile est rectiligne et varié.

#### 9.2. Calcul de l'accélération de ce mouvement.

L'accélération étant constante, le mouvement rectiligne est uniformément varié et l'une de ses propriétés est :

$$\begin{aligned} \Delta V &= a \Delta t \Rightarrow a = \frac{\Delta V}{\Delta t} \\ &= \frac{V_{(t=3)} - V_{(t=0)}}{t - t_0} \\ &= \frac{10 - 0}{3 - 0} = 3,34 \text{ m s}^{-2} \end{aligned}$$

#### 9.3. Distance parcourue par le mobile pendant le démarrage.

Le mouvement étant rectiligne uniformément varié, il possède aussi la propriété suivante :

$$\Delta V^2 = 2a \Delta x$$

De cette propriété, nous avons :

$$V_{(t=3)}^2 - V_{(t=0)}^2 = 2a(x_3 - x_0)$$

Avec  $x_3 - x_0$  = distance parcourue

$$\begin{aligned} x_3 - x_0 &= \frac{V^2 - V_0^2}{2a} \\ &= \frac{10^2 - 0}{2 \cdot 3,34} = 15 \text{ m} \end{aligned}$$

### Solution 10. (p. 51)

Calculons les distances parcourues pendant les intervalles de temps successifs égaux à  $\theta$ .

En admettant  $v_0 = 0$  et  $x_0 = 0$ , l'équation horaire du mouvement est :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2} a t^2 \\ x_1(t + \theta) &= \frac{1}{2} a (t + \theta)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2}at^2 + at\theta + \frac{1}{2}a\theta^2 \\
 x_2(t+2\theta) &= \frac{1}{2}a(t+2\theta)^2 \\
 &= \frac{1}{2}at^2 + 2at\theta + \frac{1}{2}4a\theta^2 \\
 x_3(t+3\theta) &= \frac{1}{2}a(t+3\theta)^2 \\
 &= \frac{1}{2}at^2 + 3at\theta + \frac{1}{2}9a\theta^2
 \end{aligned}$$

Distance parcourue pendant le premier  $\theta$  :

$$x_1 - x = at\theta + \frac{1}{2}a\theta^2$$

Distance parcourue pendant le deuxième  $\theta$  :

$$x_2 - x_1 = at\theta + \frac{1}{2}3a\theta^2$$

Distance parcourue pendant le troisième  $\theta$  :

$$x_3 - x_2 = at\theta + \frac{1}{2}5a\theta^2$$

D'un intervalle de temps  $\theta$  à l'intervalle de temps  $\theta$  suivant, la distance parcourue augmente de :

$$\begin{aligned}
 &\left(at\theta + \frac{1}{2}3a\theta^2\right) - \left(at\theta + \frac{1}{2}a\theta^2\right) \\
 &= \left(at\theta + \frac{1}{2}5a\theta^2\right) - \left(at\theta + \frac{1}{2}3a\theta^2\right) \\
 &= a\theta^2
 \end{aligned}$$

Donc les distances parcourues pendant les intervalles de temps successifs égaux  $\theta$  forment une progression arithmétique de raison  $r = a\theta^2$

### Solution 11. (p. 51)

Complétons le tableau des positions en y reportant les distances parcourues  $(x_{i+1} - x_i) = \Delta x$  pendant les intervalles de temps successifs égaux à  $\theta = 0,1$  s, ainsi que les valeurs de la vitesse  $v(t) = \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i}$ . Entre les positions la vitesse moyenne est égale à la vitesse instantanée à la date  $\frac{t_{i+1} + t_i}{2}$ .

$t$ (s)	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$x$ (cm)	5	15	29	47	69	95
$t$ (s)	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	
$x$ (cm)	124,5	154,5	184,5	214,5	244,5	

Dates	0,05	0,15	0,25	0,35	0,45
$\Delta x$ (cm)	10	14	18	22	26
$v(t)$ (cm s <sup>-1</sup> )	100	140	180	220	260

Dates	0,55	0,65	0,75	0,85	0,95
$\Delta x$ (cm)	29,5	30	30	30	30
$v(t)$ (cm s <sup>-1</sup> )	295	300	300	300	300

#### 11.1. Nature du mouvement à la première phase.

Pour  $0 < t < 0,5$  s, les distances parcourues pendant les intervalles de temps successifs égaux ( $\theta = 0,1$  s) forment une progression arithmétique de raison  $r = 4$  cm. Cette phase est donc rectiligne et uniformément accéléré (réciproque de la propriété démontrée à l'exercice 10).

##### 11.1.1. Calcul de l'accélération du mouvement :

$$\begin{aligned}
 r &= a\theta^2 \\
 a &= \frac{r}{\theta^2} \\
 &= \frac{4 \times 10^{-2}}{e - 2} = 4 \text{ m s}^{-2}
 \end{aligned}$$

##### 11.1.2. Equation du mouvement dans cette phase.

Le mouvement étant rectiligne uniformément accéléré, on a :

$$v(t) = at + K$$

Pour  $a = 4 \text{ m s}^{-2}$  déterminons  $K$ .

Pour  $t = 0,05$  s,  $v = 1 \text{ m s}^{-1}$  (voir tableau),

$$1 = 4 \cdot 0,05 + K$$

$$K = 0,8$$

d'où l'expression de  $v$  :

$$v(t) = 4t + 0,8$$

Déterminons la fonction  $x(t)$  qui a pour dérivée

$$v(t) = 4t + 0,8.$$

C'est la fonction :

$$\begin{aligned}
 x(t) &= 4 \cdot \frac{1}{2}t^2 + 0,8t + C \\
 &= 2t^2 + 0,8t + C
 \end{aligned}$$

Pour déterminer  $C$ ,

plaçons-nous à  $t = 0$  où  $x = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$  :

$$0,05 = 2 \cdot 0 + 0,8 \cdot 0 + C$$

$$C = 0,05 \text{ m}$$

$$x(t) = 2t^2 + 0,8t + 0,05 \text{ en m.}$$

#### 11.2. Etude du mouvement vers la fin de l'enregistrement.

Pour  $0,5 \text{ s} \leq t < 1$  s, les distances parcourues pendant la même durée  $\theta = 0,1$  s sont égales (voir tableau). La vitesse est donc constante et le mouvement est rectiligne uniforme.

##### 11.2.1. Equation horaire pour cette phase.

Le mouvement étant rectiligne uniforme, son équation horaire est de la forme :

$$x(t) = Vt + C'$$

où  $V = 3 \text{ m s}^{-1}$  (voir tableau).

Déterminons la constante  $C'$  :

à  $t = 0,7$  s,  $x = 1,545 \text{ m}$  (voir tableau)

$$1,545 = 3 \cdot 0,7 + C'$$

$$C' = 1,545 - 2,1 = -0,555$$

d'où l'équation horaire du mouvement :

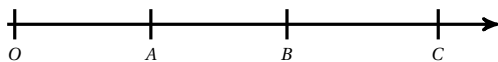
$$x(t) = 3t - 0,555 \text{ en m}$$

## 2.7. Solutions des exercices et problèmes

## Solution 12. (p. 51)

Soit un mobile dont le mouvement sur une trajectoire rectiligne comporte trois phases :

$t = 0 \text{ s}$



$V_0 = 0 \text{ ms}^{-1}$	$V_A = 10 \text{ ms}^{-1}$	$V_B = 10 \text{ ms}^{-1}$	$V_C = 0 \text{ ms}^{-1}$
$x_0 = 0 \text{ m}$	$x_A = 25 \text{ m}$	$x_B = x_A + 50 = 75 \text{ m}$	$x_C = 125 \text{ m}$

## 12.1. Equation horaire des trois phases.

12.1.1. 1<sup>re</sup> phase : tronçon OA.

Le mouvement est rectiligne uniformément varié d'accélération donnée par :

$$\begin{aligned} V_A^2 - V_0^2 &= 2a(x_A - x_0) \\ \Rightarrow a &= \frac{V_A^2 - V_0^2}{2(x_A - x_0)} \\ a &= \frac{10^2 - 0}{2(25 - 0)} = 2 \text{ ms}^{-2} \end{aligned}$$

En intégrant l'accélération  $a$ , nous obtenons la vitesse instantanée du mouvement de cette phase :

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} \\ \Rightarrow dv &= a dt \\ \Rightarrow v(t) &= \int a dt \\ \Leftrightarrow v(t) &= at + C \\ \Leftrightarrow v(t) &= 2t + C \end{aligned}$$

Déterminons  $C$  à  $t = 0$ ,  $V_0 = 0 \text{ ms}^{-1}$

$$\begin{aligned} 0 &= 20 + C \\ C &= 0 \end{aligned}$$

D'où l'expression de  $V(t)$  :

$$V(t) = 2t$$

En intégrant la vitesse instantanée, nous obtenons l'équation horaire du mouvement de la première phase.

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{dx}{dt} \\ \Leftrightarrow dx &= v(t) dt \\ \Leftrightarrow x &= \int v(t) dt \\ \Leftrightarrow x &= \int 2t dt \\ \Leftrightarrow x &= 2 \cdot \frac{1}{2} t^2 + K \end{aligned}$$

Déterminons  $K$  à  $t = 0$ ,  $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 0^2 + K \\ K &= 0 \end{aligned}$$

$$x(t) = t^2$$

Date d'arrivée en A :

$$\begin{aligned} x_A &= t_A^2 \\ \Rightarrow 25 &= t_A^2 \\ \Rightarrow t_A &= \sqrt{25} = 5 \text{ s} \end{aligned}$$

12.1.2. 2<sup>e</sup> phase : tronçon AB.

$v = \text{constante} \Rightarrow$  mouvement rectiligne uniforme :

$$x(t) = Vt + C$$

où  $V = 10 \text{ ms}^{-1}$

$$x(t) = 10t + C$$

Déterminons  $C$ .

En gardant les mêmes origines de dates et des positions qu'à la 1<sup>ère</sup> phase, on a : à  $t = 5 \text{ s}$  (date d'arrivée en A),  $x = 25 \text{ m}$

$$\begin{aligned} 25 &= 10 \cdot 5 + C \\ \Rightarrow C &= 25 - 50 = -25 \end{aligned}$$

D'où l'expression de l'équation horaire de la deuxième phase :

$$x(t) = 10t - 25$$

12.1.3. 3<sup>ème</sup> phase : tronçon BC.

Le mouvement est rectiligne uniformément varié. Dans ces conditions l'accélération " $a$ " est donnée par :

$$\begin{aligned} V_C^2 - V_B^2 &= 2a(x_C - x_B) \\ \Rightarrow a &= \frac{V_C^2 - V_B^2}{2(x_C - x_B)} \\ a &= \frac{0^2 - 10^2}{2(125 - 75)} = -1 \text{ ms}^{-2} \end{aligned}$$

En intégrant l'accélération  $a$ , nous obtenons la vitesse instantanée du mouvement de cette phase :

$$v(t) = at + K = -t + K$$

à  $t = 10 \text{ s}$ ,  $V_C = 10 \text{ ms}^{-1}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 10 &= -10 + K \\ \Rightarrow K &= 20 \\ V(t) &= -t + 20 \end{aligned}$$

En intégrant la vitesse instantanée, nous obtenons l'équation horaire du mouvement de la troisième phase.

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{1}{2} t^2 + 20t + K' \\ \text{à } t = 10 \text{ s}, x &= 75 \text{ m} \\ 75 &= -\frac{1}{2} 10^2 + 20 \cdot 10 + K' \\ \Rightarrow K' &= -75 \\ x(t) &= -\frac{1}{2} t^2 + 20t - 75 \end{aligned}$$

Date d'arrivée en C : c'est la date à laquelle la vitesse s'annule.

$$\begin{aligned} V(t_C) &= 0 \\ \Leftrightarrow -t_C + 20 &= 0 \\ \Rightarrow t_C &= 20 \end{aligned}$$

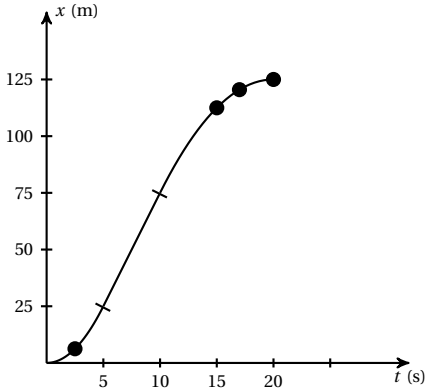


**12.2.** Construire les diagrammes des espaces revient à représenter le graphique  $x(t)$ .

$$0 \leq t < 5 \text{ s } x(t) = t^2$$

$$5 \leq t < 10 \text{ s } x(t) = 10t - 25$$

$$10 \leq t \leq 20 \text{ s } x(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 20t - 75$$



### Solution 13. (p. 51)

**13.1.** Mouvement de la 1ère bille :

$$\vec{a} = -10\vec{k}$$

$$\Rightarrow \|\vec{a}\| = 10 \text{ m s}^{-2}$$

**13.1.1.** Equation horaire du mouvement de la 1ère bille :

À  $t = 0$ ,  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{k}$  et  $Z_0 = 0$ .

Première intégration :

$$v_z = -at + C = -10t + C$$

A partir des conditions initiales on détermine.  $C = v_0$

d'où  $v(t) = -10t + v_0$

Deuxième intégration :

$$\begin{aligned} z_1 &= -10\frac{1}{2}t^2 + v_0 t + C' \\ &= -5t^2 + v_0 t + C' \end{aligned}$$

A partir des conditions initiales, on détermine  $C' = 0$  d'où l'équation horaire de la première bille :

$$z_1(t) = -5t^2 + v_0 t$$

**13.1.2.** Altitude maximale atteinte par cette bille pour  $v_0 = 30 \text{ m s}^{-1}$ .

Au moment où la bille atteint cette altitude maximale, sa vitesse s'annule. Le mouvement étant rectiligne et uniformément varié, on a :

$$\begin{aligned} v^2 - v_0^2 &= 2a\Delta z \\ \Rightarrow \Delta z &= h = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \\ &= \frac{0^2 - 30^2}{2 \cdot (-10)} = 45 \text{ m} \end{aligned}$$

Date à laquelle cette bille atteint son altitude maximale.

Deux possibilités :

**13.1.2.1.** Soit on résout l'équation :

$$45 = -5t^2 + 30t$$

**13.1.2.2.** Soit on résout l'équation :

$$-10t + 30 = 0$$

Dans les deux cas on trouve :

$$t = 3 \text{ s}$$

**13.2.** Mouvement de la deuxième bille

**13.2.1.** Equation horaire de la deuxième bille.

Dans les mêmes conditions que la première bille,

$$a_z = -10 \text{ m s}^{-2}$$

Une première intégration de  $a$  donne :

$$v_z = -10t + k$$

à  $t = 3 \text{ s}$ ;  $v_z = 30 \text{ m s}^{-1}$

$$30 = -10 \cdot 3 + K$$

$$\Rightarrow k = 60$$

et  $v_z = -10t + 60$ .

Une deuxième intégration donne :

$$z_2 = -10\frac{1}{2}t^2 + 60t + K'$$

à  $t = 3 \text{ s}$ ,  $z_2 = 0 \text{ m}$

$$\Rightarrow 0 = -5 \cdot 3^2 + 60 \cdot 3 + K'$$

$$\Rightarrow K' = -135$$

D'où :  $z_2 = -5t^2 + 60t - 135$

**13.2.2.** Date et lieu de rencontre des deux billes.

Les deux billes se rencontrent lorsque :

$$z_1 = z_2$$

$$\Rightarrow -5t^2 + 30t = -5t^2 + 60t - 135$$

$$\Rightarrow t = 4,5 \text{ s}$$

Lieu de rencontre :

$$z_2 = -5 \cdot 4,5^2 + 60 \cdot 4,5 - 135 = 33,75 \text{ m}$$

### Solution 14. (p. 51)

**14.1.** Nature du mouvement.

Le mobile  $M$  se déplace sur l'axe  $xOx'$  son mouvement est rectiligne. La loi horaire étant une fonction sinusoidale, le mouvement est donc rectiligne sinusoïdal.

**14.2.** Caractéristiques du mouvement.

Par identification à l'équation horaire :

$$x = X_m \cos(\omega t + \phi),$$

■ l'amplitude du mouvement est :  $X_m = 2 \times 10^{-2} \text{ m}$

■ la pulsation du mouvement est :  $\omega = 40\pi$ . Nous en déduisons :

■ la période :

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{40\pi} \\ &= \frac{1}{20} = 0,05 \text{ s} \end{aligned}$$

## 2.7. Solutions des exercices et problèmes

■ la fréquence :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,05} = 20 \text{ Hz}$$

■ la phase initiale du mouvement : d'après l'expression de  $x(t)$ ,  $\phi = -\frac{\pi}{6}$ .

**14.3. Longueur du segment décrit par le mobile.**

Sur l'axe  $x'o x$ , le mobile décrit le segment délimité par les points d'abscisse  $-X_m$  et  $+X_m$  de longueur :

$$\begin{aligned} L &= X_m - (-X_m) = X_m + X_m \\ &= 2X_m = 2 \cdot 2 \times 10^{-2} = 4 \times 10^{-2} \text{ m} \end{aligned}$$

**14.4. Vitesse du mobile à la date  $t$  :**

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{dx}{dt} \\ &= -2 \times 10^{-2} 40\pi \sin\left(40\pi t - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= -0,8\pi \sin\left(40\pi t - \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

**14.5. Vitesse maximale de  $M$  :**

$v(t)$  est maximale pour

$$\begin{aligned} \sin\left(40\pi t - \frac{\pi}{6}\right) &= \pm 1 \\ \|v_m\| &= 80\pi 10^{-2} = 2,51 \text{ ms}^{-1} \end{aligned}$$

la vitesse de  $M$  à la date  $t = 1 \text{ s}$

$$\begin{aligned} v_{(t=1\text{s})} &= -80\pi 10^{-2} \sin\left(40\pi 1 - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= 1,256 \text{ ms}^{-1} \end{aligned}$$

**14.6. Date du premier passage de  $M$  au point d'abscisse  $x = 10^{-2} \text{ m}$ .**

Cette date est solution de l'équation :

$$\begin{aligned} x(t) &= 10^{-2} \\ 10^{-2} &= 2 \times 10^{-2} \cos\left(40\pi t - \frac{\pi}{6}\right) \\ \Leftrightarrow \cos\left(40\pi t - \frac{\pi}{6}\right) &= \frac{10^{-2}}{2 \times 10^{-2}} = 0,5 \end{aligned}$$

Or  $0,5 = \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2K\pi\right)$ , donc :

$$\begin{aligned} 40\pi t - \frac{\pi}{6} &= \frac{\pi}{3} + 2K\pi \\ \Rightarrow t &= \frac{1}{80} + \frac{K}{20} \end{aligned}$$

Pour le premier passage de  $M$  en cette position,

$$K = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{80} = 0,0125 \text{ s}$$

**14.7. Phase du mouvement du mobile à la date  $t = 2 \text{ s}$ .**

La phase du mouvement à l'instant est :

$$40\pi t - \frac{\pi}{6}$$

A l'instant  $t = 2 \text{ s}$  cette phase est :

$$40\pi 2 - \frac{\pi}{6} = 479\frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

**14.8. Equation différentielle du mouvement :**

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 \cdot 10^{-2} \cos\left(40\pi t - \frac{\pi}{6}\right) \\ v(t) &= \frac{dx}{dt} \\ &= -80\pi 10^{-2} \sin\left(40\pi t - \frac{\pi}{6}\right) \\ a(t) &= x''(t) = \frac{dv}{dt} \\ &= -1600\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cos\left(40\pi t - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= -1600\pi^2 x(t) \end{aligned}$$

$$x''(t) + 1600\pi^2 x(t) = 0$$

**14.9. Accélération du mouvement à la position  $x = 10^{-2} \text{ m}$ .**

De l'équation différentielle, nous tirons :

$$a(t) = -1600\pi^2 x(t)$$

Pour  $x = 10^{-2} \text{ m}$ ,

$$\begin{aligned} a &= -1600\pi^2 10^{-2} \\ &= -16\pi^2 = -157,9 \text{ ms}^{-2} \end{aligned}$$

**Solution 15. (p. 51)**

Pour calculer  $\phi$ , on se place à un instant où la vitesse et la position sont connues :

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 \cdot 10^{-2} \sin(100\pi t + \phi) \\ v(t) &= \frac{dx}{dt} = 2\pi \cos(100\pi t + \phi) \end{aligned}$$

**15.1. A  $t = 0$ ,  $x_0 = 0$ ;  $v_0 > 0$  (car le mouvement a lieu dans le sens des elongations croissantes).**

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} x_0 &= 0,02 \sin(100\pi 0 + \phi) = 0 \\ \Rightarrow 0,02 \sin \phi &= 0 \\ \Rightarrow \phi &= 0 \text{ ou } \phi = \pi \\ v_0 &= 2\pi \cos(100\pi 0 + \phi) > 0 \\ \Rightarrow v_0 &= 2\pi \cos \phi \end{aligned}$$

Si  $\phi = 0 \Rightarrow v_0 = 2\pi \cos 0 = 2\pi > 0$  (conforme à l'hypothèse de la question 1 où  $v_0 > 0$ ).

Si  $\phi = \pi \Rightarrow v_0 = 2\pi \cos \pi = -2\pi < 0$  (contraire à l'hypothèse de la question 1 où  $v_0 > 0$ ). La phase  $\phi$  est donc  $\phi = 0$ .

**15.2. A  $t = 0$ ,  $x_0 = 0$  et  $v_0 < 0$  (car le mouvement a lieu dans le sens des elongations décroissantes).**

De même que ci-dessus nous avons deux valeurs possibles de  $\phi$  :  $\phi = 0$  et  $\phi = \pi$ . Mais dans ce cas, c'est la valeur  $\phi = \pi$  qui satisfait l'hypothèse  $v_0 < 0$ .

**15.3. Si à  $t = 0$ ,  $x = +X_m$**

$$\begin{aligned} 2 \cdot 10^{-2} \sin(100\pi 0 + \phi) &= +2 \cdot 10^{-2} \\ \Rightarrow \sin \phi &= +1 \\ \Rightarrow \sin \phi &= \sin \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$$

A l'élongation maximale, le mobile s'arrête et  $v = 0$ . Vérifions si pour  $\phi = \frac{\pi}{2}$ , et  $t = 0$ ,  $v_0 = 0$ ?

$$\begin{aligned} v_0 &= 2\pi \cos\left(100\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2\pi \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ &\Rightarrow (\text{conforme à l'hypothèse}) \end{aligned}$$

**15.4.** Si à  $t = 0$ ,  $x = -x_m$ .

Par le même raisonnement qu'à la question 3, on trouve :

$$\phi = -\frac{\pi}{2}$$

### Solution 16. (p. 51)

**16.1.** Calcul de la vitesse angulaire  $\theta'$  du mobile.

Pour un mouvement circulaire uniforme,

$$\begin{aligned} V &= R\theta' \Rightarrow \theta' = \frac{V}{R} \\ &= \frac{14}{2} = 7 \text{ rad s}^{-1} \end{aligned}$$

où  $R$  est le rayon de la trajectoire.

**16.2.** Calcul de sa fréquence  $f$ .

$$\begin{aligned} f &= 2 \frac{\pi}{\theta'} \\ \Rightarrow f &= \frac{1}{T} = \frac{\theta'}{2\pi} \\ &= \frac{7}{2 \cdot 3,14} = 1,114 \text{ Hz} \end{aligned}$$

### Solution 17. (p. 52)

**17.1.** Valeur de l'angle balayé au cours de cette phase du mouvement pour  $\theta'' = 2,5 \text{ rad s}^{-2}$ .

Pour un mouvement circulaire uniformément accéléré, on a :

$$\begin{aligned} \theta_2'^2 - \theta_1'^2 &= 2\theta''(\theta_2 - \theta_1) \\ \Rightarrow \theta_2 - \theta_1 &= \frac{\theta_2'^2 - \theta_1'^2}{2\theta''} \end{aligned}$$

A.N.  $\theta_2' = 8 \text{ rad s}^{-1}$ ;  $\theta_1' = 0$ ;  $\theta'' = 2,5 \text{ rad s}^{-2}$ ;  $\theta_2 - \theta_1 = 12,8 \text{ rad}$ .

**17.2.** Equation horaire sachant qu'à  $t = 0 \text{ s}$ ,  $\theta_0 = 0 \text{ rad}$  et  $\theta_0' = 0 \text{ rad s}^{-1}$ .

Par intégrations successives, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \theta'(t) &= \theta''t + \theta_0 \\ \Rightarrow \theta(t) &= \frac{1}{2}\theta''t^2 + \theta_0't + \theta_0 \end{aligned}$$

Pour

$$\begin{aligned} \theta'' &= 2,5 \text{ rad s}^{-2}, \theta_0' = 0 \\ \theta_0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\theta(t) = 1,25t^2 (\text{rad})$$

**17.3.** A la vitesse  $\theta' = 8 \text{ rad s}^{-1}$ , le disque est freiné et

s'arrête au bout de 2 s.

$$\begin{aligned} \theta_2' - \theta_1' &= \theta_2''(t_2 - t_1) \\ \Rightarrow \theta_2'' &= \frac{\theta_2' - \theta_1'}{t_2 - t_1} = \frac{0 - 8}{2} \\ &= -4 \text{ rad s}^{-2} \end{aligned}$$

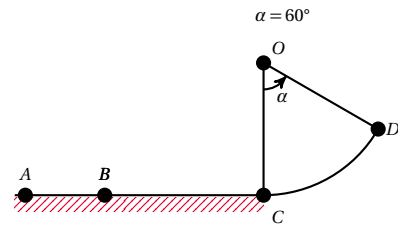
**17.4.** Angle balayé par un rayon du disque au cours du freinage.

$$\begin{aligned} \theta_2'^2 - \theta_1'^2 &= 2\theta_2''(\theta_2 - \theta_1) \\ \Rightarrow \theta_2 - \theta_1 &= \frac{\theta_2'^2 - \theta_1'^2}{2\theta_2''} \\ &= \frac{0 - 8^2}{2(-4)} = 8 \text{ rad} \end{aligned}$$

**17.5.** Nombre de tours  $n$  effectués par un rayon pendant le freinage.

$$\begin{aligned} \theta_2 - \theta_1 &= 2\pi n \\ \Rightarrow n &= \frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi} = \frac{8}{2 \cdot 3,14} = 1,27 \text{ tr} \end{aligned}$$

### Solution 18. (p. 52)



Etude du mouvement sur la portion AB.

**18.1.** Equation du mouvement sur la portion AB sachant que sur cette portion, le mouvement est uniforme et qu'à  $t = 0$ , le mobile est en A avec une vitesse  $V_A = 10 \text{ ms}^{-1}$ .

$x = V_A t + K$  où  $K = 0$  car A est origine des positions  $\Rightarrow x = 10t$

**18.2.** Distance AB sachant que le parcours a duré 5 s :

$$x_B = 10t_B = 105 = 50 \text{ m}$$

**18.3.** Distance AB sachant que le parcours a duré 5 s :

Étude de la phase BC

**18.3.1.** Déterminons l'accélération sachant que  $V_C = 25 \text{ ms}^{-1}$ .

Pour un mouvement rectiligne uniformément accéléré entre B et C,

$$\begin{aligned} V_C^2 - V_B^2 &= 2a(x_C - x_B) \\ \Rightarrow a &= \frac{V_C^2 - V_B^2}{2(x_C - x_B)} \\ &= \frac{25^2 - 10^2}{2(50 - 0)} = 0,875 \text{ ms}^{-2} \end{aligned}$$

Durée du parcours BC :

$$\begin{aligned} V_C - V_B &= a(t_C - t_B) \\ \Rightarrow t_C - t_B &= \frac{V_C - V_B}{a} \end{aligned}$$

## 2.7. Solutions des exercices et problèmes

$$t_C - t_B = \frac{25 - 10}{0,875} = 17,14 \text{ s}$$

**18.3.2.** Equation du mouvement pour cette phase avec pour les conditions initiales suivantes :  $t_0 = 0 \text{ s}$ ;  $x_0 = x_B = 50 \text{ m}$ ;  $a = 0,875 \text{ m s}^{-2}$ ;  $V_0 = V_B = 10 \text{ m s}^{-1}$ . Par intégrations successives de  $a$ , on obtient :

$$x = 0,4375t^2 + 10t + 50$$

**18.4.** Étude de la phase CD.

La vitesse angulaire en D est  $\theta_D' = 5,5 \text{ rad s}^{-1}$ .

**18.4.1.** Calculons la vitesse angulaire en C :

$$\begin{aligned} V_C &= R\theta_C' \\ \Rightarrow \theta_C' &= \frac{V_C}{R} \\ \theta_C' &= \frac{25}{5} = 5 \text{ rad s}^{-1} \end{aligned}$$

Le mouvement étant uniformément accéléré.

$$\begin{aligned} \theta_D'^2 - \theta_C'^2 &= 2\theta''(\theta_D - \theta_C) \\ \Rightarrow \theta'' &= \frac{\theta_D'^2 - \theta_C'^2}{2(\theta_D - \theta_C)} \\ \theta'' &= \frac{5,5^2 - 5^2}{2\left(\frac{\pi}{3}\right)} = 2,5 \text{ rad s}^{-2} \end{aligned}$$

**18.4.2.** Equation du mouvement ( $\theta = f(t)$ ) pour cette phase avec pour conditions initiales suivantes :  $t_0 = 0 \text{ s}$ ,  $\theta_0 = \theta_C = 0 \text{ rad}$ ;

Par intégrations successives de  $\theta''$ , on obtient :

$$\theta = 1,25t^2 + 5t \text{ (en rad)}.$$

**18.4.3.** Durée du trajet CD.

Le mouvement étant uniformément accéléré,

$$\begin{aligned} \theta_D' - \theta_C' &= \theta''(t_D - t_C) \\ \Rightarrow t_D - t_C &= \frac{\theta_D' - \theta_C'}{\theta''} \\ t_D - t_C &= \frac{5,5 - 5}{2,5} = 0,2 \text{ s} \end{aligned}$$

Autre méthode pour calculer  $t$  :

L'origine des dates étant l'instant où le mobile est en C, résolvons l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \frac{\pi}{3} \\ \Rightarrow 1,25t^2 + 5t &= \frac{\pi}{3} \\ \Rightarrow 1,25t^2 + 5t - \frac{\pi}{3} &= 0 \\ \Rightarrow t &= 0,2 \text{ s} \end{aligned}$$

**18.4.4.** Distance totale  $d$  parcourue par M de A à D :

$d = AC + CD$ . Avec  $CD = R\theta$  où  $R = OC =$  rayon de l'arc CD et  $\theta = 60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$ .

$$d = 350 + 5 \cdot \frac{3,14}{3} = 355,2 \text{ m}$$

## Solution 19. (p. 52)

Pour un mouvement circulaire uniforme,  $a \neq 0$  bien que  $V = \text{cte}$  car :

$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$ , le vecteur accélération  $\vec{a}$  caractérise les variations du vecteur-vitesse  $\vec{V}$ . Or pour un mouvement circulaire (uniforme ou non) la direction du vecteur vitesse change à chaque position de sorte que le vecteur accélération  $\vec{a}$  caractérise ce changement de la direction du vecteur-vitesse  $\vec{V}$ , bien que le module de ce vecteur vitesse soit constant. Donc pour un mouvement circulaire uniforme, bien que  $V = \text{cte}$ ,  $\vec{V} \neq c\vec{e}$  (car sa direction change au cours du temps) et  $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} \neq \vec{0}$

## Solution 20. (p. 52)

Déterminons  $T_1$ .

Pendant la durée  $T_1$ , le balancier (qui oscille un peu plus vite) fait

$$1 \text{ oscillation} + 1 \text{ fraction} \left(\frac{1}{k}\right)^e \text{ oscillation.}$$

Pendant la durée  $2T_1$ , il fera

$$2 \text{ oscillations} + 1 \text{ fraction} \left(\frac{2}{k}\right)^e \text{ oscillation.}$$

Ainsi de suite, pendant la durée  $K T_1$  le balancier aura effectué

$$K \text{ oscillations} + k \left(\frac{1}{K}\right)^e \text{ oscillation}$$

pendant que le pendule a effectué exactement  $K$  oscillations. Il y a alors coïncidence. La durée nécessaire pour cette coïncidence est  $t$ . Pour le pendule  $P_1$  :

$$t = K T_1 \Rightarrow K = \frac{t}{T_1} \quad (\text{S2.1})$$

pour le balancier :

$$t = (K + 1)T \quad (\text{S2.2})$$

(S2.1) et (S2.2)

$$\Rightarrow t = \left(\frac{t}{T_1} + 1\right) T$$

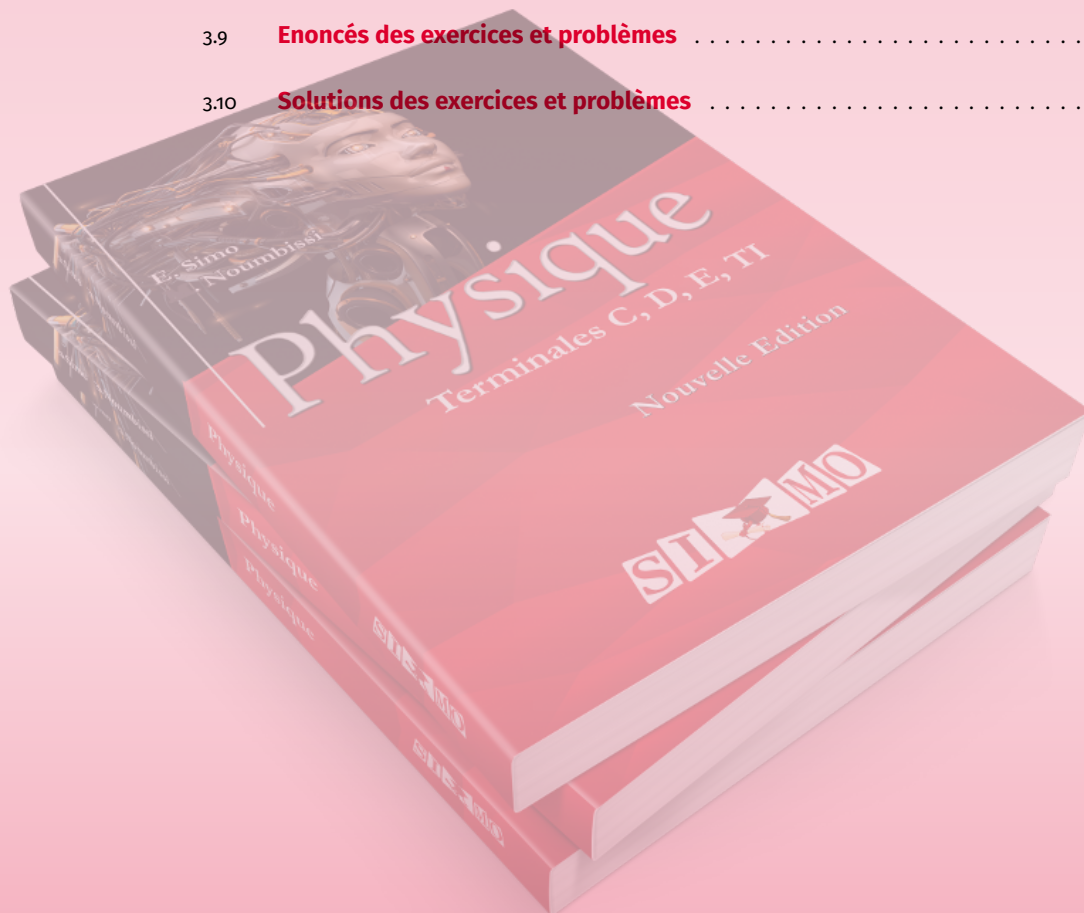
$$\begin{aligned} \Rightarrow T_1 &= \frac{tT}{t - T} \\ T_1 &= \frac{10 \cdot 60 \cdot 2}{10 \cdot 60 - 2} = 2,006 \text{ s} \end{aligned}$$





## Les lois de Newton

3.1	<b>Système dynamique et milieu extérieur</b>	64
3.1.1	Système dynamique	64
3.1.2	Notion de point matériel	64
3.1.3	Caractéristiques d'un système	64
3.1.4	Forces intérieures et forces extérieures	65
3.1.5	Système isolé - Système pseudo-isolé	66
3.2	<b>Principes des actions réciproques</b>	66
3.3	<b>Principe d'inertie</b>	66
3.3.1	Les référentiels galiléens	66
3.4	<b>Théorème du centre d'inertie</b>	67
3.5	<b>Dynamique du solide en translation</b>	67
3.6	<b>Dynamique du solide en rotation</b>	67
3.7	<b>Théorème de Huygens</b>	68
3.8	<b>Méthode de résolution des problèmes de dynamique</b>	69
3.9	<b>Enoncés des exercices et problèmes</b>	69
3.10	<b>Solutions des exercices et problèmes</b>	72



## 3.1 Système dynamique et milieu extérieur

### 3.1.1 Système dynamique

En mécanique, on appelle système l'ensemble (constitué d'un ou plusieurs objets) sur lequel porte l'étude.

La dynamique étudie le mouvement des objets. On appelle système dynamique tout objet dont on étudie le mouvement.

Tout ce qui ne fait pas partie du système constitue le milieu extérieur

### 3.1.2 Notion de point matériel

On appelle point matériel une "petite" portion de matière ayant une masse et des dimensions suffisamment "petites" (compte tenu des moyens d'observation) pour que l'on puisse l'assimiler à un point.

#### Exemple.

Un satellite artificiel au repos sur la terre ne saurait être considéré comme un point; cependant, dans son mouvement orbital autour de la Terre, il peut être assimilé à un point matériel.

### 3.1.3 Caractéristiques d'un système

1. Un système est un ensemble de points matériel.
2. Un système peut être *déformable* ou *indéformable* : si la distance entre deux points quelconques du système reste constant, ce système est *indéformable*. On lui donne alors le nom de *solide*.
3. Un système a une masse  $M$  :

$$M = \sum m_i$$

où  $m_i$  est la masse de chaque point matériel. Dans le SI  $M$  s'exprime en *kilogramme* (kg).

4. Un système a un centre d'inertie  $G$ . Le centre d'inertie  $G$  est la barycentre des points du système ayant pour coefficient les masses de chacun de ces points. Dans le champ de pesanteur, (localement uniforme),  $G$  coïncide avec le centre de gravité du système.

## Rappel : a propos du barycentre $G$ de $n$ points

### Relation de définition

$G$  est le barycentre des points  $A_1, A_2, A_i, \dots, A_n$  s'il vérifie la relation

$$m_1 \overrightarrow{GA_1} + m_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + m_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$$

Soit :

$$\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

Cette expression vectorielle peut s'exprimer d'une autre manière :  $O$  étant un point quelconque du plan, on démontre que :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1 \overrightarrow{OA_1} + m_2 \overrightarrow{OA_2} + \dots + m_n \overrightarrow{OA_n}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

Si le plan est muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , les coordonnées de  $G$  sont :

$$G = \begin{cases} X_G = \frac{m_1 X_{A_1} + m_2 X_{A_2} + \dots + m_n X_{A_n}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \\ Y_G = \frac{m_1 Y_{A_1} + m_2 Y_{A_2} + \dots + m_n Y_{A_n}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \end{cases}$$

### Propriété importante du barycentre

Le barycentre de deux points distincts  $A$  et  $B$  est un point situé sur la droite  $(A, B)$ .

Position du centre de masse  $G$  de quelques solides homogènes de formes simples :

1. Sphère.

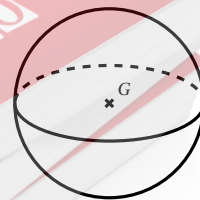


Figure 3.1

2. Cylindre.  $G$  est le point de l'axe du cylindre situé à mi-hauteur.

## 3.1. Système dynamique et milieu extérieur

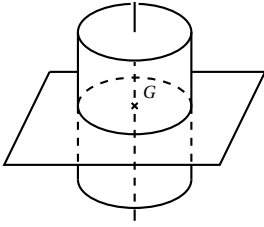


Figure 3.2

3. Parallélépipède rectangle.  $G$  est le point de concours des diagonales.

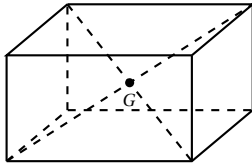


Figure 3.3

4. Anneau ou cerceau.  $G$  est centre du cerceau ou de l'anneau.

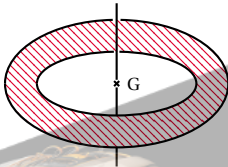


Figure 3.4

5. Plaque triangulaire.  $G$  est le point de concours des médianes.

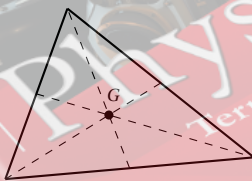


Figure 3.5

6. Plaque rectangulaire.  $G$  est le point de concours des diagonales.

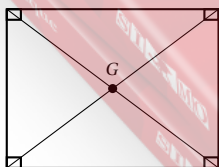


Figure 3.6

## 3.1.4 Forces intérieures et forces extérieures

On appelle forces intérieures, les forces exercées par une partie du système sur une autre partie du système. On appelle forces extérieures, les forces exercées sur le système par des corps du milieu extérieur. Il est donc nécessaire de définir au préalable le système de façon précise.

## Exemple.

Considérons un dispositif expérimental constitué par un solide ( $S$ ), suspendu par un fil ( $f$ ) à un crochet ( $C$ ).

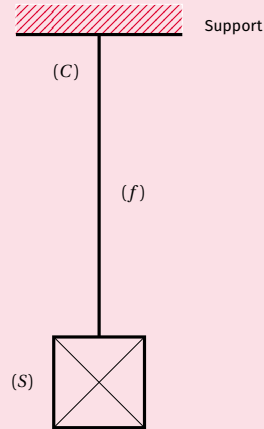
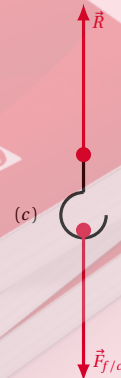


Figure 3.7

Décomposons ce dispositif en trois parties ( $c$ ), ( $f$ ) et ( $S$ ) et faisons l'inventaire des forces agissant sur chacune des parties :

Figure 3.8



( $c$ ) est soumis à deux forces :

- la force exercée par le fil notée  $\vec{F}_{f/c}$  ;
- la force exercée par le support notée  $\vec{R}$ .

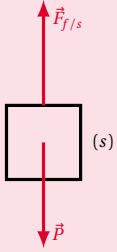
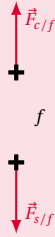
Sur ( $f$ ) :

Figure 3.9

( $f$ ) est soumis à deux forces :

- la force exercée par le crochet ( $c$ ) notée  $\vec{F}_{c/f}$
- la force exercée par le solide ( $S$ ) notée  $\vec{F}_{s/f}$

Sur ( $S$ ) : ( $S$ ) est soumis à deux forces :

- son poids (exercée par la Terre) notée  $\vec{P}$
- la force exercée par le fil ( $f$ ) notée  $\vec{F}_{f/s}$

En considérant le système ( $S$ ), ( $f$ ), ( $c$ ),  $\vec{R}$  et  $\vec{P}$  sont des forces extérieures et  $\vec{F}_{f/c}$ ,  $\vec{F}_{c/f}$ ,  $\vec{F}_{s/f}$  et  $\vec{F}_{f/s}$  sont des forces intérieures.

D'après le principe des interactions,

$$\vec{F}_{f/c} = -\vec{F}_{c/f} \Rightarrow \vec{F}_{s/f} + \vec{F}_{c/f} + \vec{F}_{f/s} = \vec{0}$$

$$\vec{F}_{s/f} = -\vec{F}_{f/s} \Rightarrow \vec{F}_{s/f} + \vec{F}_{f/s} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{f/c} + \vec{F}_{c/f} + \vec{F}_{s/f} + \vec{F}_{f/s} = \vec{0}$$

Nous retiendrons que :

- la somme de toutes les forces intérieures d'un système est nulle ;
- seules, les forces extérieures peuvent modifier le mouvement ou la forme du système.

### 3.1.5 Système isolé - Système pseudo-isolé

Un système est isolé lorsqu'il n'est soumis à aucune action extérieure. Un tel système n'existe pas dans la pratique car, quelque soit le système objet-Terre choisi, on ne peut négliger l'attraction des autres planètes.

Cependant, certains systèmes sont soumis à des forces extérieures dont la somme vectorielle est nulle. De tels systèmes se comportent comme s'ils n'étaient soumis à aucune action extérieure ; on dit que ces systèmes sont pseudo-isolés ou libres.

#### Exemple.

Tout objet en mouvement sur une table (ou banc) à coussin d'air appelé aérotable (aérobanc) ou table soufflante (banc soufflant). Ici le poids  $\vec{P}$  de l'objet est compensé par la réaction  $\vec{R}$  de la surface. (Les frottements étant presque supprimés par la couche d'air.)

## 3.2 Principes des actions réciproques

Cette loi universelle de la physique porte encore le nom de principe des interactions ou encore principe de "l'action et de la réaction".

#### Définition.

Lorsqu'un corps  $A$  exerce sur un corps  $B$  une action ( $\vec{F}_{A/B}$ ), le corps  $B$  exerce simultanément sur le corps  $A$  une action ( $\vec{F}_{B/A}$ ), de même droite d'action, de sens contraire et d'égale intensité. On peut donc écrire :

$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$$

#### Remarque.

1. On distingue des interactions de contact et des interactions à distance (attraction universelle)
2. Le principe des interactions est valable, que les corps soient en mouvement ou au repos.

## 3.3 Principe d'inertie

#### Définition.

Le centre d'inertie  $G$  d'un système isolé ou pseudo-isolé est soit immobile  $\vec{V}_G = \vec{0}$ , soit en mouvement rectiligne uniforme :

$$(\vec{V}_G = \text{Cte} \neq \vec{0})$$

#### Réciproquement

Lorsque le centre d'inertie d'un système est immobile ou en mouvement rectiligne uniforme, la somme des forces extérieures qui agissent sur lui est nulle :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

### 3.3.1 Les référentiels galiléens

#### Définition.

On appelle référentiel galiléen, un référentiel dans lequel le principe d'inertie est rigoureusement exact.

### 3.4. Théorème du centre d'inertie

#### Exemple: Référentiels galiléens

1. Le référentiel héliocentrique est le meilleur référentiel galiléen connu. A ce référentiel est associé le repère héliocentrique
  - Origine : le centre du soleil
  - Vecteurs unitaires : dirigés vers trois étoiles lointaines qui paraissent immobiles.
2. Tout référentiel en mouvement de translation rectiligne et uniforme par rapport à un référentiel galiléen est galiléen. Certains référentiels, sans être rigoureusement galiléens, permettent d'étudier avec une bonne approximation les mouvements de courte durée. Ces référentiels peuvent être considérés comme galiléens. Nous pouvons citer dans ce cas :
  - Le référentiel géocentrique auquel est associé le repère géocentrique qui a pour origine : le centre de la Terre et dont les vecteurs unitaires sont orientés vers trois étoiles lointaines supposées immobiles.
  - Le référentiel terrestre ou référentiel du laboratoire auquel est associé un repère terrestre (origine : un point de la terre; vecteurs unitaires liés à la Terre)

#### Limites de validité du théorème du centre d'inertie

La relation

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = M \vec{a}_G$$

n'est applicable qu'en dynamique classique (ou newtonienne). C'est le domaine de la dynamique où la vitesse des corps en mouvement reste assez faible devant la célérité  $c$  des ondes électromagnétiques dans le vide ( $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ ). Pour être un peu précis, le domaine de la dynamique classique est délimité par :

$$v \leq 0,14c \text{ soit } v \leq 42 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$$

## 3.4 Théorème du centre d'inertie

#### Définition.

Tout système de masse  $M$  soumis à des forces extérieures, acquiert sous l'action de ces forces une accélération  $\vec{a}_G$  qui est celle de son centre d'inertie  $G$  et telle que :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = M \vec{a}_G$$

#### Remarque.

Cas particulier d'un système pseudo-isolé où  $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = 0$ . Par conséquent,

$$M \neq 0 \Rightarrow \vec{a}_G = \vec{0}$$

Sachant que  $\vec{a}_G = \frac{d\vec{V}_G}{dt}$ ,

$$\vec{a}_G = \frac{d\vec{V}_G}{dt} = \vec{0}$$

signifie que  $\vec{V}_G$  est constant et par conséquent que le système a un mouvement rectiligne et uniforme. C'est le principe d'inertie qui nous apparaît alors comme un simple cas particulier du théorème du centre d'inertie.

## 3.5 Dynamique du solide en translation

#### Rappel

Lorsqu'un solide est animé d'un mouvement de translation, tous les points du solide possèdent la même vitesse instantanée, donc la même accélération.

De ce fait, le mouvement du solide est alors entièrement déterminé par celui de son centre d'inertie auquel on applique la relation :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = M \vec{a}_G$$

## 3.6 Dynamique du solide en rotation

Un solide en rotation autour d'un axe fixe soumis à des forces extérieures acquiert sous l'action de ces forces une accélération angulaire  $\theta''$  telle que :

$$\sum M(\vec{F}_{\text{ext}}) = J_{\Delta} \theta''$$

où  $J_{\Delta}$  est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe de rotation  $\Delta$ .

Rappelons l'expression du moment d'inertie de quelques solides par rapport à un axe ( $\Delta$ )

1. Masse ponctuelle  $m$  tournant autour de ( $\Delta$ ) sur un cercle de rayon  $r$  :

$$J_{\Delta} = m r^2$$



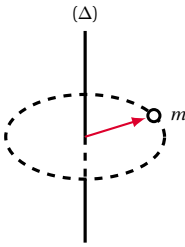


Figure 3.10

2. Cerceau de masse  $m$  de rayon  $r$  par rapport à un axe  $\Delta$ , perpendiculaire à son plan et passant par son centre  $O$ .

$$J_{\Delta} = m r^2$$

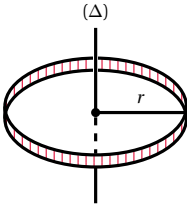


Figure 3.11

3. Cylindre creux de masse  $m$ , de rayon  $r$ , par rapport à son axe de révolution. Remarquons qu'un cylindre creux est une superposition de cerceaux.

$$J_{\Delta} = m r^2$$



Figure 3.12

4. Disque de masse  $m$ , de rayon  $r$  par rapport à un axe  $\Delta$  perpendiculaire à son plan et passant par  $O$ .

$$J_{\Delta} = \frac{1}{2} m r^2$$

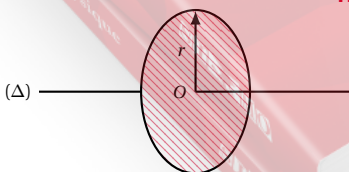


Figure 3.13

5. Cylindre plein de masse  $m$ , de rayon  $r$  par rapport

à son axe de révolution.

$$J_{\Delta} = \frac{1}{2} m r^2$$

Remarquons qu'un cylindre plein est une superposition de disques pleins.



Figure 3.14

6. Sphère pleine homogène de masse  $m$ , de rayon  $r$ , par rapport à un diamètre.

$$J_{\Delta} = \frac{2}{5} m r^2$$

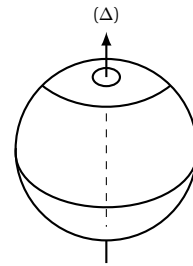


Figure 3.15

7. Tige homogène de masse  $m$ , de longueur  $l$  par rapport à une axe  $(\Delta)$  de symétrie perpendiculaire au plan de rotation de la tige.

$$J_{\Delta} = \frac{1}{12} m l^2$$

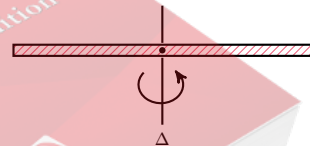


Figure 3.16

## 3.7 Théorème de Huygens

Les moments d'inertie ci-dessus déterminés ont été calculés par rapport à un axe  $(\Delta)$  qui passe par le centre de gravité du solide.

Or il arrive qu'on ait besoin du moment d'inertie par rapport à un axe  $(D)$  parallèle à  $(\Delta)$ , ne passant pas par le centre de gravité. On utilise alors le *théorème de Huy-*

### 3.8. Méthode de résolution des problèmes de dynamique

gens :

$$J_D = J_\Delta + m d^2$$

avec

- $J_\Delta$  : moment d'inertie par rapport à l'axe  $(\Delta)$  passant par le centre de gravité du solide ;
- $m$  : masse du solide
- $d$  : distance entre les deux axes.

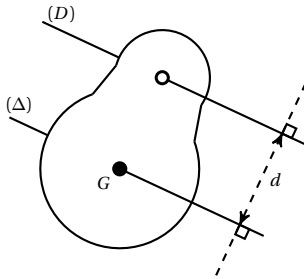


Figure 3-17

## 3.8 Méthode de résolution des problèmes de dynamique

Pour résoudre un problème de dynamique, nous conseillons la démarche suivante :

1. Délimiter avec précision le système à étudier en considérant successivement chacune de ses parties.
2. Choisir le référentiel d'étude. Celui-ci doit être Galiléen si on veut appliquer la R.E.D. ou le théorème de l'énergie cinétique.
3. Faire sur un schéma clair le bilan des forces extérieures appliquées au système.
4. Appliquer dans le référentiel Galiléen choisi, la R.E.D. ou le théorème de l'énergie cinétique.
5. Exploiter cette relation. Si elle est vectorielle, on l'utilise en projetant les vecteurs sur un système d'axes orthonormés.
6. En déduire les conséquences cinématiques :
  - La R.E.D. permet de calculer l'accélération  $a_G$ . Il faut alors tenir compte des conditions initiales et chercher les primitives successives de l'accélération pour obtenir la vitesse, les équations horaires et l'équation de la trajectoire du centre d'inertie  $G$ .
  - Le théorème de l'énergie cinétique permet de calculer directement la vitesse du centre d'inertie

## 3.9 Enoncés des exercices et problèmes

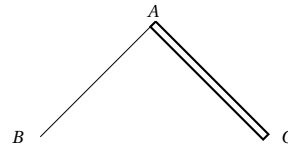
### Exercice 1.

Une pirogue de longueur  $L = 5 \text{ m}$  et de masse  $M = 150 \text{ kg}$  est au repos sur une eau tranquille. Lorsqu'elle est vide, le centre se trouve à égale distance des extrémités. Déterminer la nouvelle position du centre de gravité lorsque la pirogue a un passager de masse  $m = 60 \text{ kg}$  assis à l'une de ses extrémités. On admettra que le centre de gravité de la pirogue non chargée est sur la même horizontale que le centre de gravité du passager.

(On assimilera la pirogue à une barre rigide horizontale. On admettra que toute la matière constituant la pirogue est uniformément répartie sur cette barre.)

### Exercice 2.

Deux règles homogènes de même longueur  $AC = AB = 10 \text{ cm}$  sont fixées rigidement à angle droit.  $AC$  pèse deux fois plus que  $AB$ .



Déterminer la position du centre de gravité de ce solide par rapport au point A.

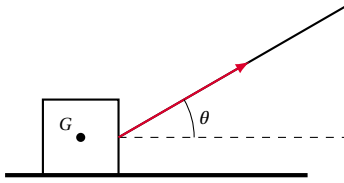
### Exercice 3.

Deux solides  $S_1$  et  $S_2$ , de masse respectives  $m_1$  et  $m_2$ , sont reliés par une tige de masse négligeable. L'ensemble se déplace sur un plan horizontal sans frottement, grâce à une force de traction  $\vec{F}$ , de direction horizontale et d'intensité constante, qui s'exerce sur le solide  $S_2$ . Exprimer en fonction de  $F$ ,  $m_1$  et  $m_2$  :

- 3.1. l'accélération  $a$  du centre d'inertie du système ;
  - 3.2. les tensions  $T_1$  et  $T_2$  exercées par la tige respectivement sur les solides  $S_1$  et  $S_2$ .
- Calculer  $T_1$  et  $T_2$  pour  $F = 10 \text{ N}$  et  $m_1 = m_2$ .

### Exercice 4.

On considère un solide de masse  $m = 10 \text{ kg}$  animé d'un mouvement de translation uniforme de direction horizontale. Le solide est tiré par une ficelle faisant un angle  $\theta = 30^\circ$  avec le plan horizontal, avec une force de traction  $F = 50 \text{ N}$ .



Déterminer la direction et l'intensité de la réaction  $\vec{R}$  du plan sur le solide et de la force de frottement  $\vec{F}$  entre le plan et le solide. On prendra  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ .

### Exercice 5.

Sur un solide de masse  $m = 10 \text{ kg}$  s'exerce une force de traction  $F = 50 \text{ N}$  au moyen d'une corde dont la direction fait un angle  $\beta = 45^\circ$  avec l'horizontale; Le solide monte le long d'un plan incliné d'un angle  $\alpha = 30^\circ$  sur l'horizontale, animé d'un mouvement rectiligne uniforme. Déterminer l'intensité de la réaction  $\vec{R}$  du plan incliné sur le solide. On prendra  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ .

### Exercice 6.

Un volant en fonte, de diamètre 2 m tourne autour d'un axe de rotation horizontal, passant par son centre, et situé à 2,05 m au-dessus du sol. Son moment d'inertie par rapport à son axe de rotation est  $10 \text{ kg m}^2$ ; On admet que sa masse est entièrement répartie sur sa circonférence. Il tourne à raison de  $\frac{900}{\pi}$  tours par minute.

**6.1.** Quelle est la masse de ce volant?

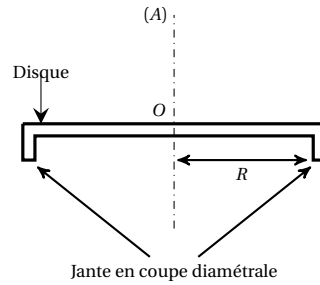
**6.2.** Quelle est sa vitesse angulaire, en radians par seconde?

A un moment donné, on demande un supplément de travail au moteur sur l'arbre duquel est calé le volant. La vitesse qui était  $\frac{900}{\pi}$  tours par minute diminue jusqu'à  $\frac{885}{\pi}$  tours par minute. Calculer l'énergie restituée par le volant. Sachant que le ralentissement a duré 3 s. Quelle est la puissance moyenne développée par le volant pendant ce temps?

**6.3.** Le volant ayant retrouvé sa vitesse constante de  $\frac{900}{\pi}$  tours par minute, un fragment de fonte de masse 100 g, se détache par suite d'une rupture, alors qu'il se trouve à l'extrémité supérieure du diamètre vertical. Quelle est sa vitesse linéaire au moment précis de l'arrachement et son énergie cinétique?

### Exercice 7.

Le plateau d'un électrophone, réalisé par moulage d'un alliage métallique homogène d'épaisseur constante, peut se décomposer en deux parties : Un disque horizontal de diamètre  $D = 2R = 30 \text{ cm}$  et de masse  $M = 1,60 \text{ kg}$ , portant à sa périphérie une jante verticale de masse  $m = 0,20 \text{ kg}$  et dont l'épaisseur constante est petite par rapport à  $R$ . L'ensemble est mobile sans frottement autour d'un axe vertical ( $\Delta$ ), perpendiculaire au disque en son milieu  $O$ . On pourra confondre  $\pi^2$  avec 10.



**7.1.** Former l'expression du moment d'inertie,  $J$ , du plateau par rapport à l'axe ( $\Delta$ ). Vérifier que sa valeur est :  $J = 2,25 \times 10^{-2} \text{ SI}$  (on précisera l'unité). Calculer l'énergie cinétique du plateau tournant à  $\frac{100}{3}$  trs/min et la vitesse linéaire d'un point situé à sa périphérie.

**7.2.** Le plateau, initialement au repos, acquiert en 5 secondes la vitesse de régime précédente, selon un mouvement uniformément varié. Calculer, pendant cette période de démarrage,

**7.2.1.** l'accélération angulaire du plateau

**7.2.2.** le nombre de tours effectués

**7.2.3.** le moment du couple moteur

**7.2.4.** la puissance moyenne fournie par le moteur, tous les frottements étant négligés.

### Exercice 8.

Un solide  $A$  de masse  $M$  peut glisser sans frottement sur un rail horizontal. Un fil inextensible et de masse négligeable relie  $A$ , en passant sur une poulie d'axe horizontal, à un solide  $B$  de masse  $m$  qui peut descendre verticalement. Ce fil est parallèle au rail entre  $A$  et la poulie. On négligera la masse de la poulie devant  $M$  et  $m$  ainsi que tout frottement.

Pour les applications numériques, on prendra  $M = 0,30 \text{ kg}$ ,  $m = 0,15 \text{ kg}$  et  $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$ .

**8.1.** L'ensemble est abandonné sans vitesse initiale à l'instant,  $t = 0$  l'abscisse de  $A$  étant nulle à cette date.

**8.1.1.** Etablir l'équation du mouvement de  $A$ .

**8.1.2.** Quelle distance parcourt  $A$  avant d'atteindre une vitesse de  $2,2 \text{ m s}^{-1}$ ?

**8.1.3.** Quelle est la tension du fil pendant le mouvement?

**8.2.** La poulie a un diamètre de 7 cm. Quand  $B$  touche le sol, sa vitesse étant alors  $2,2 \text{ m s}^{-1}$ , le fil saute hors de la poulie qui tourne librement à partir de cet instant. Quelles sont alors la vitesse angulaire de la poulie en radians par seconde et sa vitesse de rotation en tours par seconde?

**8.3.** Après l'arrêt de  $B$  au sol,  $A$  qui continue à glisser sur le rail horizontal heurte un corps  $A'$  de masse  $M'$ , alors immobile et qui peut également glisser sans frottement. Sachant que le choc est élastique, déterminer les vitesses de  $A$  et de  $A'$  après la collision en fonction de  $M$  et  $M'$ .

A.N. :  $M' = M$  puis  $M' = \frac{M}{2}$

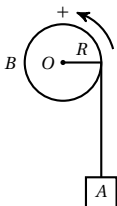
## 3.9. Énoncés des exercices et problèmes

## M

## Exercice 9.

Un appareil de levage utilisé sur un chantier se présente de la façon suivante :

- Un cylindre creux  $B$  (toute sa masse est répartie à sa périphérie), homogène, de rayon  $R = 0,20\text{ m}$  et de masse  $m = 50\text{ kg}$  peut tourner sans frottement autour de son axe de révolution disposé horizontalement. Il est mû par un moteur électrique qui exerce sur le cylindre un couple de moment constant  $M$ .



- Un câble inextensible de masse négligeable est enroulé sur le cylindre, une extrémité étant fixée au cylindre. A l'autre extrémité on suspend un corps  $A$  de masse  $m' = 1000\text{ kg}$ .

**9.1.** Le corps s'élève en partant du repos; le câble ne glisse pas sur le cylindre.

**9.1.1.** Montrer par deux manières différentes (en utilisant le théorème de l'énergie cinétique à l'appareil de levage complet, puis sans utiliser ce théorème, mais en considérant la tension  $T$  du câble) que le mouvement de  $A$  est uniformément accéléré.

**9.1.2.** A s'élève d'une hauteur  $h = 50\text{ m}$  en un temps  $t = 25\text{ s}$ ; calculer son accélération.

**9.1.3.** Calculer la tension du câble; quel serait l'allongement d'un dynamomètre de raideur  $k = 10^5\text{ N m}^{-1}$  intercalé entre  $A$  et le câble?

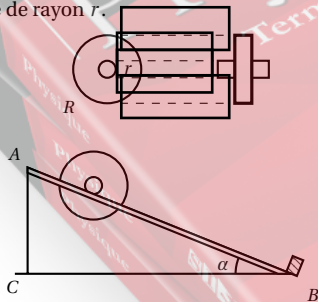
**9.1.4.** Calculer le moment  $M$  du couple moteur.

**9.1.5.** Calculer le travail fourni par le moteur électrique lorsque  $A$  s'est élevé d'une hauteur de  $50\text{ m}$ .

**9.2.** Au bout de  $50\text{ m}$  de montée la charge est délestée automatiquement sans à coup et le moteur électrique débrayé. Le cylindre est alors arrêté en 10 tours sous l'effet d'un couple de freinage de moment constant. Quelle est la valeur de ce couple? On prendra  $g = 10\text{ m s}^{-2}$ .

## Exercice 10.

On dispose d'un plan constitué de deux rails parallèles sur lesquels peut rouler un volant de rayon  $R$  roulant sans glisser lorsque la pente n'est pas trop forte autour de l'arbre de rayon  $r$ .



L'inclinaison des rails par rapport à l'horizontale est réglable par un support de hauteur variable.

Le volant est placé en un point du plan des rails dont l'abscisse est repérée sur une graduation. Une fois libéré, il descend le long du plan et vient percuter en bout de

course une butée d'arrivée  $B$  placée à l'extrémité inférieure de la graduation. La distance  $e$  (m) parcourue par le volant est donnée par la différence entre l'abscisse finale  $x(B) = 1,8\text{ m}$  et les abscisses initiales  $x_i$ .

**10.1.** Nature du mouvement du volant, pente constante.

Positions	$x_i$ (m)	$e$ (m)	$t_i$ (s)	$t_i^2$ (s <sup>2</sup> )	$\frac{e}{t^2}$
1	1,4		3,1		
2	1,3		3,5		
3	1,2		3,8		
4	1,1		4,1		
5	1,0		4,3		
6	0,9		4,7		
7	0,8		5,0		

On fait partir successivement le volant des positions d'abscisses  $x_1, x_2, \dots$  données dans le tableau des mesures ci-contre. On chronomètre la durée  $t_1, t_2, \dots$  des différents parcours. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Expérience	$\sin \alpha = \frac{h}{e}$	$t$ (s)	$t^2$ (s <sup>2</sup> )	$a$ (m s <sup>-2</sup> )
1	$4 \times 10^{-2}$	2,8		
2	$5 \times 10^{-2}$	2,5		
3	$6 \times 10^{-2}$	2,3		
4	$8 \times 10^{-2}$	2,0		

**10.1.1.** Recopier et compléter par colonne.

**10.1.2.** L'ensemble des valeurs expérimentales du rapport  $\frac{e}{t^2}$  permet de définir la nature du mouvement de chute du volant le long du plan incliné. Quelle est la nature de ce mouvement?

**10.1.3.** Calculer l'accélération  $a$  du mouvement. Pour ce faire on utilisera la valeur de  $\frac{e}{t^2}$  qui correspond au plus grand effectif statistique.

**10.2.** Variation de l'accélération avec la pente du plan. A partir de la position horizontale du plan, on donne des inclinaisons croissantes en augmentant la hauteur  $AC = h$ . Dans chaque expérience, le volant parcourt la même distance  $e = 1\text{ m}$ . On chronomètre la durée de chacun des parcours du volant.

**10.2.1.** Compléter le tableau ci-contre. Tracer le graphe de  $a = f(\sin \alpha)$ . Quelle est la nature de cette courbe.

**10.2.2.** Déterminer la pente de ce graphe. En déduire l'expression de  $a$  en fonction de  $\sin \alpha$ . Comparer cette valeur moyenne de  $a$  à  $g \sin \alpha$ .

**10.2.3.** Sachant que l'expression théorique de  $a$  est :

$$a = g \sin \alpha \frac{1}{1 + \frac{J}{mr^2}}$$

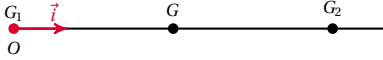
Calculer la valeur du moment d'inertie du volant. On donne la masse du volant  $m = 2 \times 10^{-1}\text{ kg}$  et  $r = 5 \times 10^{-3}\text{ m}$ ; on prendra  $g = 9,8\text{ m s}^{-2}$ .



## 3.10 Solutions des exercices et problèmes

### Solution 1. (p. 69)

Soient  $G_1$  le centre de gravité de la pirogue à vide et  $G_2$  le centre de gravité du passager.



Définissons un repère  $(O, \vec{i})$  sur la droite  $G_1G_2$  afin de pouvoir appliquer la relation barycentrique. L'origine  $O$  peut être placée en principe n'importe où, ce qui nous donne la possibilité de choisir  $G_1$  ou  $G_2$  comme origine (pour simplifier les calculs).

Le centre de gravité de la pirogue chargée du passager est donné par le barycentre  $G$  des points  $G_1$  et  $G_2$  affectés respectivement des coefficients  $M$  et  $m$ .

$$\vec{OG} = \frac{M \cdot \vec{OG}_1 + m \cdot \vec{OG}_2}{M + m}$$

La projection de cette relation vectorielle dans le repère  $(O, \vec{i})$  nous donne :

$$OG = \frac{M \cdot OG_1 + m \cdot OG_2}{M + m}$$

Choisissons l'origine  $O$  du repère en  $G_1$ . On obtient :

$$\begin{aligned} G_1G &= \frac{M \cdot G_1G_1 + m \cdot G_1G_2}{M + m} \\ &= \frac{m \cdot G_1G_2}{M + m} \quad (\text{puisque } G_1G_1 = 0) \end{aligned}$$

$$\text{A.N. } G_1G_2 = \frac{L}{2} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ m.}$$

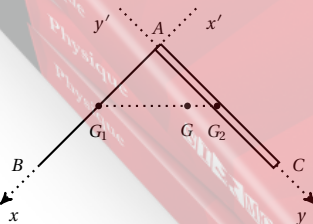
$$M = 150 \text{ kg}$$

$$m = 60 \text{ kg}$$

$$\begin{aligned} G_1G &= \frac{60 \cdot 2,5}{150 + 60} \\ &= 0,71 \text{ m} = 71 \text{ cm} \end{aligned}$$

### Solution 2. (p. 69)

Position du centre de gravité de ce solide.



Le centre de gravité de chaque règle est situé en son milieu. Dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , les coordon-

nées du centre de gravité  $G_1$  de la règle  $AC$  sont :

$$\vec{OG}_1 = \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 5 \end{cases}$$

Dans ce même repère ceux du centre de gravité  $G_2$  de la règle  $AB$  sont :

$$\vec{OG}_2 = \begin{cases} x_2 = 5 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

Le centre de gravité de ce solide est donné par la relation du barycentre

$$\vec{OG} = \frac{m_1 \vec{OG}_1 + m_2 \vec{OG}_2}{m_1 + m_2}$$

Avec  $m_1$  = masse de la règle  $AC$  et  $m_2$  = masse de la règle  $AB$ . Puisque la règle  $AC$  pèse deux fois plus que la règle  $AB$ ,  $m_1 = 2m_2$ . En posant  $m_2 = m$ , on a  $m_1 = 2m$ .

Par projection de cette relation sur les axes  $xOx'$  et  $yOy'$ , et en prenant  $A$  comme origine, nous obtenons les coordonnées du barycentre  $G$  dans le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

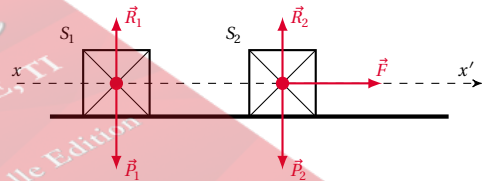
$$\vec{AG} = \begin{cases} x_G = \frac{2m \cdot x_1 + m \cdot x_2}{2m + m} = \frac{2m \cdot 0 + m \cdot 5}{3 \cdot m} = \frac{5}{3} \\ y_G = \frac{2m \cdot y_1 + m \cdot y_2}{2m + m} = \frac{2m \cdot 5 + m \cdot 0}{3 \cdot m} = \frac{10}{3} \end{cases}$$

On constate que le centre de gravité, bien que lié au solide, n'appartient pas à ce solide.

### Solution 3. (p. 69)

3.1. Accélération  $a$  du centre d'inertie du système.

- Système étudié :  $\{S_1, S_2\}$ .
- Référentiel : référentiel terrestre supposé galiléen.
- Bilan des forces appliquées au système :



Le poids  $\vec{P}_2$  de  $S_2$ , la réaction  $\vec{R}_2$  du plan sur  $S_2$ , le poids  $\vec{P}_1$  de  $S_1$ , et la réaction  $\vec{R}_1$  du plan sur  $S_1$ . Appliquons la R.F.D. au système.

$$\vec{P}_1 + \vec{R}_1 + \vec{P}_2 + \vec{R}_2 + \vec{F} = (m_1 + m_2) \cdot \vec{a}$$

Projetons cette relation sur  $xx'$  :

$$0 + 0 + 0 + 0 + F = (m_1 + m_2) \cdot a$$

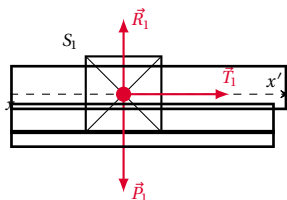
$$\Rightarrow a = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

3.2. Tension  $T_1$  exercée par la tige sur  $S_1$ .

Considérons le sous-système  $S_1$ , soumis aux forces  $\vec{P}_1$ ,  $\vec{R}_1$  et  $\vec{T}_1$  :



## 3.10. Solutions des exercices et problèmes



Ecrivons la R.E.D. pour  $S_1$ .

$$\vec{P}_1 + \vec{R}_1 + \vec{T}_1 = m_1 \vec{a}$$

Projetons cette relation sur  $xx'$  :

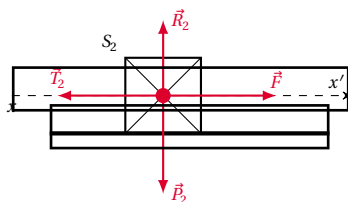
$$0 + 0 + T_1 = m_1 \cdot a$$

$$\text{avec } a = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot F$$

### 3.3. Tension $T_2$ exercée par la tige sur $S_2$ .

Considérons le sous-système  $S_2$ , soumis aux forces  $\vec{P}_2$ ,  $\vec{R}_2$ ,  $\vec{T}_2$  et  $\vec{F}$ .



Ecrivons la R.E.D. pour  $S_2$ .

$$\vec{P}_2 + \vec{R}_2 + \vec{T}_2 = m_2 \cdot \vec{a}$$

Projetons cette relation sur  $xx'$  :

$$0 + 0 + T_2 + F = m_2 \cdot a$$

$$\Rightarrow T_2 = F - m_2 \cdot a$$

$$\begin{aligned} \text{avec } a &= \frac{F}{m_1 + m_2} \Rightarrow T_2 = \left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) \cdot F \\ &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot F \\ &= T_1 \end{aligned}$$

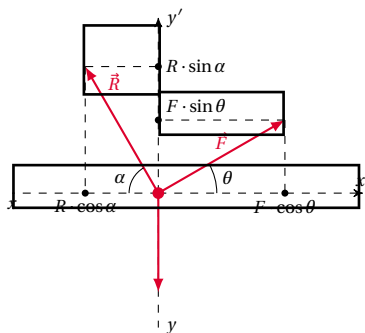
Pour  $F = 10 \text{ N}$ , et  $m_1 = m_2$

$$T_1 = T_2 = \frac{m_1}{2 \cdot m_1} \cdot 10 = 5 \text{ N}$$

### Solution 4. (p. 69)

#### 4.1. Direction et intensité de $\vec{R}$ .

- Système étudié : le solide de centre d'inertie  $G$ .
- Le référentiel est un référentiel terrestre supposé galiléen.
- Bilan des forces agissant sur le système :
  - le poids  $\vec{P}$  du solide;
  - la réaction  $\vec{R}$  du plan;
  - la force de traction  $\vec{F}$ .



Appliquons la R.E.D. au système  $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m \cdot \vec{a}$ .  
Le mouvement étant uniforme,

$$\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = \vec{0}$$

Projetons cette relation sur les axes  $xx'$  et  $yy'$  :

$$xx' : 0 - R \cos \alpha + F \cos \theta = 0$$

$$\Rightarrow R \cos \alpha = F \cos \theta \quad (\text{S3.1})$$

$$yy' : -P + R \sin \alpha + F \sin \theta = 0$$

$$\Rightarrow R \sin \alpha = P - F \sin \theta \quad (\text{S3.2})$$

Faisons le rapport  $\frac{(\text{S3.1})}{(\text{S3.2})}$  :

$$\begin{aligned} \frac{R \sin \alpha}{R \cos \alpha} &= \frac{P - F \sin \theta}{F \cos \theta} \\ \Rightarrow \tan \alpha &= \frac{P - F \sin \theta}{F \cos \theta} \end{aligned}$$

$$\text{A.N. : } P = mg = 10 \cdot 10 = 100 \text{ N};$$

$$F = 50 \text{ N}$$

$$\sin \theta = 0,5$$

$$\cos \theta = 0,866$$

$$\tan \alpha = 1,732$$

$$\Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

#### 4.2. Intensité de $\vec{R}$ .

De l'équation (S3.1) on a :

$$R \cos \alpha = F \cos \theta \Rightarrow R = \frac{F \cos \theta}{\cos \alpha} = 86,6 \text{ N}$$

#### 4.3. Direction et intensité de la force de frottement.

La composante horizontale de  $\vec{R}$  constitue la force de frottement. Ainsi

$$f = R \cos \alpha = 86,6 \cdot 0,5 = 43,3 \text{ N}$$

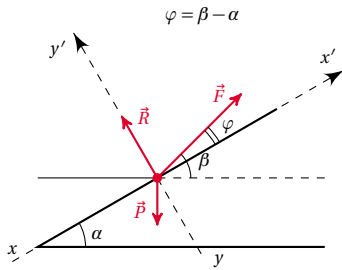
### Solution 5. (p. 70)

Déterminons l'intensité de la réaction  $\vec{R}$  du plan incliné sur le solide.

Réduisons le système étudié à son centre d'inertie, le référentiel est un référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des forces agissant sur le système :

- le poids  $\vec{P}$  du solide,
- la réaction  $\vec{R}$  du plan,
- la force de traction  $\vec{F}$ .



Ecrivons la R.E.D. pour le système :  $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{a}$ .  
Le mouvement étant uniforme  $\vec{a} = \vec{0}$ , donc :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = \vec{0}$$

Projetons cette relation sur  $y y'$  :

$$\begin{aligned} -P \cos \alpha + R + F \sin(\beta - \alpha) &= 0 \\ \Rightarrow R &= mg \cos \alpha - F \sin(\beta - \alpha) \\ \text{A.N. : } m &= 10 \text{ kg} \\ g &= 10 \text{ m s}^{-2} \\ F &= 50 \text{ N} \\ \cos \alpha &= 0,866 \\ \sin(\beta - \alpha) &= \sin 15^\circ = 0,260 \\ \Rightarrow R &= 73,6 \text{ N} \end{aligned}$$

### Solution 6. (p. 70)

#### 6.1. Calculons la masse du volant :

La masse du volant est uniformément répartie sur un anneau. Son moment d'inertie par rapport à l'axe  $\Delta$  (axe qui passe par le centre de l'anneau) est :

$$J = MR^2$$

avec

$$\begin{aligned} R &= \frac{D}{2}, \\ J &= \frac{MD^2}{4}, \\ \Rightarrow M &= \frac{4J}{D^2} = \frac{4 \cdot 10}{2^2} = 10 \text{ kg} \end{aligned}$$

#### 6.2. Vitesse angulaire en $\text{rad s}^{-1}$ .

Soit  $N$  la fréquence de mouvement de rotation et  $\theta'$  la vitesse angulaire.  $N$  est le nombre de tours par seconde et 1 tour =  $2\pi$  rad.

$$\theta' = 2\pi N$$

Avec

$$\begin{aligned} N &= \frac{900}{\pi} \text{ tour/min} \\ N &= \frac{900}{\pi \cdot 60} = \frac{15}{\pi} \text{ tour/s} \\ \Rightarrow \theta' &= 2\pi \cdot \frac{15}{\pi} = 30 \text{ rad s}^{-1} \end{aligned}$$

Calculons l'énergie restituée par le volant lorsque sa vi-

$$\text{tesse passe de } N_1 = \frac{900}{\pi} \text{ tour/min à } N_2 = \frac{885}{\pi} \text{ tour/min}$$

$$\begin{aligned} E &= -(E_{c2} - E_{c1}) \\ &= \frac{1}{2} J \theta_1'^2 - \frac{1}{2} J \theta_2'^2 \text{ avec} \end{aligned}$$

$$\theta_2' = \frac{885}{\pi \cdot 60} 2\pi = 29,5 \text{ rad s}^{-1} \Rightarrow E = 148,75 \text{ J}$$

Cette énergie  $E$  correspond à l'opposé de la perte d'énergie cinétique du volant. Puissance moyenne développée par le volant.

$$P = \frac{E}{t} = \frac{148,75}{3} = 49,6 \text{ W}$$

### 6.3. Vitesse linéaire du fragment de 100 g au moment de l'arrachement.

$$V = R\theta'$$

avec

$$\begin{aligned} R &= \frac{D}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ m} \\ \theta' &= 30 \text{ rad s}^{-1} \\ \Rightarrow V &= 30 \text{ m s}^{-1} \end{aligned}$$

Energie cinétique du fragment.

$$E_c = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot 30^2 = 45 \text{ J}$$

### Solution 7. (p. 70)

#### 7.1. Expression du moment d'inertie du plateau.

Le moment d'inertie  $J$  du plateau est la somme des moments d'inertie de ces différentes parties.

$$J = J_{\text{jante}} + J_{\text{disque}} = mR^2 + \frac{1}{2} MR^2$$

A.N.

$$\begin{aligned} m &= 0,2 \text{ kg} \\ M &= 1,6 \text{ kg} \\ R &= 0,15 \text{ m} \end{aligned}$$

$$J = 2,25 \times 10^{-2} \text{ kg m}^2$$

Calculons l'énergie cinétique du plateau lorsqu'il tourne à la vitesse  $N$ .

$$E_c = \frac{1}{2} J \theta'^2$$

avec

$$\begin{aligned} \theta' &= 2\pi N \\ \Leftrightarrow E_c &= \frac{1}{2} J \cdot 4\pi^2 N^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2,25 \times 10^{-2} \cdot 4 \cdot (3,14)^2 \cdot \left(\frac{100}{3} \frac{1}{60}\right)^2 \\ &= 0,14 \text{ J} \end{aligned}$$

Vitesse linéaire d'un point situé à la périphérie.  $V = R\theta'$ .

A.N.

$$R = 0,15 \text{ m}$$

$$\theta' = 2\pi \left(\frac{100}{3} \frac{1}{60}\right) \text{ rad s}^{-1}$$

## 3.10. Solutions des exercices et problèmes

$$\Rightarrow V = 0,52 \text{ ms}^{-1}$$

**7.2. Accélération angulaire du plateau pendant la phase de démarrage.**

Le mouvement étant circulaire uniformément accéléré, on a :

$$\theta' = \theta'' \cdot t + \theta_0$$

avec

$$\theta_0 = 0$$

$$\theta' = \theta''$$

$$t \Rightarrow \theta'' = \frac{\theta'}{t} = \frac{\frac{2\pi \cdot 5}{9}}{5} = 0,7 \text{ rad s}^{-2}$$

**7.3. Nombre de tours effectués pendant cette phase.**

L'équation horaire de ce mouvement est :

$$\theta = \frac{1}{2} \theta'' \cdot t^2 + \theta_0 \cdot t + \theta_0$$

si  $\theta_0 = 0$  et  $\theta_0' = 0$ , alors  $\theta = \frac{1}{2} \theta'' \cdot t^2$  A  $t = 5 \text{ s}$ ,  $\theta = \frac{1}{2} \cdot 0,7 \cdot 5^2 = 8,75 \text{ rad}$ . Or si  $n$  est le nombre de tours effectués,

$$\theta = 2\pi \cdot n \Rightarrow n = \frac{\theta}{2\pi} = 1,4 \text{ tour}$$

**7.4. Calculons le moment du couple moteur.**

Appliquons au plateau la R.E.D. :

$$\Sigma M = J_{\Delta} \theta''$$

où  $M$  est le moment du couple moteur.

$$M = J_{\Delta} \theta'' = 2,25 \times 10^{-2} \cdot 0,7 = 1,57 \times 10^{-2} \text{ N m}$$

**7.5. Calculons la puissance moyenne fournie par le moteur.**

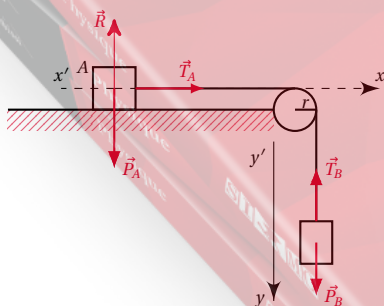
$$P = M \theta' = 1,57 \times 10^{-2} \cdot 2\pi \cdot \left(\frac{5}{9}\right) = 0,055 \text{ W}$$

**Solution 8. (p. 70)****8.1. Equation du mouvement de A.**

Le système comprend deux parties reliées par un fil inextensible : le corps A et le corps B.

Considérons d'abord le corps A :

Faisons le bilan des forces qui agissent sur A dans un référentiel terrestre, donc Galiléen. Son poids  $\vec{P}_A$ , la réaction  $\vec{R}$  du rail, la tension  $\vec{T}_A$  exercée par le fil.



Appliquons la R.E.D. à A :

$$\vec{P}_A + \vec{R} + \vec{T}_A = M \vec{a}$$

Projetons cette relation sur  $x'x$  :

$$0 + 0 + T_A = M \cdot a_x$$

$$\Rightarrow T_A = M a_x \quad (\text{S3.1})$$

Considérons ensuite le corps B :

Faisons le bilan des forces qui agissent sur B dans un référentiel terrestre, donc Galiléen. Son poids  $\vec{P}_B$ , la tension  $\vec{T}_B$  exercée par le fil.

Appliquons la R.E.D. à B :

$$\vec{P}_B + \vec{T}_B = m \vec{a}$$

Projetons cette relation sur  $y'y$  :

$$P_B + T_B = M a_y \quad (\text{S3.2})$$

Faisons (S3.1) dans (S3.2) en tenant compte de ce que :

$$T_B = T_A = T$$

$$a_x = a_y = a$$

$$P_B = mg$$

$$mg - Ma = ma$$

$$\Rightarrow a = \frac{m}{m+M} g$$

A.N.

$$m = 0,15 \text{ kg}$$

$$M = 0,30 \text{ kg}$$

$$g = 9,8 \text{ ms}^{-2}$$

$$\Rightarrow a = 3,26 \text{ ms}^{-2} = \text{constante}$$

Par intégrations successives de  $a$ , et en tenant compte des conditions initiales à  $t = 0$ ,  $v = v_0 = 0$ ,  $x = x_0 = 0$ )

$$x = \frac{1}{2} a t^2 = 1,63 t^2$$

**8.2. Distance parcourue par A avant d'atteindre la vitesse de  $2,2 \text{ ms}^{-1}$ .**

L'accélération  $a$  étant constante, le mouvement de A est rectiligne, et uniformément accéléré. Nous pouvons écrire :

$$V^2 - V_0^2 = 2a(x - x_0)$$

avec  $V_0 = 0$ ,  $x_0 = 0$  et  $x = d$ .

$$d = \frac{V^2}{2a} = \frac{2,2^2}{2 \cdot 3,26} = 0,74 \text{ m}$$

**8.3. Tension du fil au cours du mouvement.**

$$(\text{S3.1}) \Rightarrow T = Ma = 0,3 \cdot 3,26 = 0,98 \text{ N}.$$

**8.4. Vitesse angulaire  $\theta'$  (rad s<sup>-1</sup>) et vitesse de rotation N (tour/s) de la poulie.**

Au moment où B touche le sol, sa vitesse  $V_B = 2,2 \text{ ms}^{-1}$  est aussi la vitesse linéaire  $V$  de la poulie. Or  $V = R \theta'$  où  $\theta'$  est la vitesse angulaire de la poulie. Donc :

$$\theta' = \frac{V}{R} = \frac{2,2}{3,5 \times 10^{-2}} = 62,85 \text{ rad s}^{-1}$$

Vitesse de rotation :

$$\theta' = N 2\pi \Rightarrow N = \frac{\theta'}{2\pi} = \frac{62,85}{2 \cdot 3,14} = 10 \text{ tour/s}$$

**8.5. Vitesse V(A) de A et vitesse V(A') de A' après la collision.**

La collision entre  $A$  (projectile de masse  $M$ , de vitesse initiale  $V = 2,2 \text{ m s}^{-1}$ ) et  $A'$  (cible de masse  $M'$  et initialement immobile) est un choc élastique. Après la collision,

$$V(A) = \frac{M - M'}{M + M'} \cdot V$$

$$V(A') = \frac{2M}{M + M'} \cdot V$$

A.N.

**8.5.1.** Pour

$$M' = M$$

$$V(A) = 0$$

$$V(A') = V = 2,2 \text{ m s}^{-1}$$

**8.5.2.** Pour

$$M' = \frac{M}{2}$$

$$V(A) = \frac{0,5 \cdot V}{1,5} = 0,75 \text{ m s}^{-1}$$

$$V(A') = \frac{2V}{1,5} = 2,93 \text{ m s}^{-1}$$

### Solution 9. (p. 71)

**9.1.** Montrons, en utilisant deux méthodes différentes que le mouvement de  $A$  est uniformément accéléré.

#### Méthode 1. Utilisation du théorème de l'énergie cinétique.

Système étudié : l'ensemble {cylindre, câble et masse  $A$ }. Bilan des forces agissant sur le système :

- le poids  $\vec{P}_B$  du cylindre  $B$  ;
- la réaction  $\vec{R}$  de l'axe.
- l'action du couple moteur  $M$  ;
- les tensions  $\vec{T}_A$  et  $\vec{T}_B$  du câble ;
- le poids  $\vec{P}_A$  du corps  $A$ .

Appliquons alors le théorème de l'énergie cinétique au système entre le départ et un instant quelconque du mouvement. (la charge  $A$  s'est alors élevée de  $x$  et sa vitesse est  $v$ . Au même instant, la poulie a effectué une rotation d'angle  $\theta$  et a acquis une vitesse angulaire  $\theta'$ ).

$$\begin{aligned} \Delta E_c &= \sum W(\vec{F}) \\ E_c - 0 &= W(\vec{P}_B) + W(\vec{R}) \\ &\quad + W_c + W(\vec{T}_A) \\ &\quad + W(\vec{T}_B) + W(\vec{P}_A) \end{aligned}$$

$$W(\vec{P}_B) = W(\vec{R}) = 0$$

(leurs points d'application ne se déplacent pas)

$$W(\vec{T}_A) + W(\vec{T}_B) = 0$$

car les deux tensions ont la même intensité et sont opposées.

$$W_c = M\theta,$$

$$W(\vec{P}_A) = -m'gx$$

Donc :

$$\frac{1}{2} J_\Delta \theta'^2 + \frac{1}{2} m' v^2 = M\theta - m'gx$$

Le câble ne glisse pas sur la poulie. Dans ces conditions :

$$x = r\theta \Rightarrow \theta = \frac{x}{r}$$

$$v = r\theta' \Rightarrow \theta' = \frac{v}{r}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} J_\Delta \frac{v^2}{r^2} + \frac{1}{2} m' v^2 &= \frac{Mx}{r} - m'gx \\ \Rightarrow \frac{v^2}{2} \left( \frac{J_\Delta}{r^2} + m' \right) &= x \left( \frac{M}{r} - m'g \right). \end{aligned}$$

En dérivant par rapport au temps les deux membres. Rappel :

$$\frac{d(v^2)}{dt} = 2v \frac{dv}{dt} = 2va$$

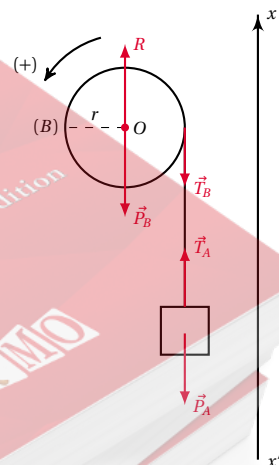
$$va \left( \frac{J_\Delta}{r^2} + m' \right) = v \left( \frac{M}{r} - m'g \right)$$

En simplifiant par  $v$  on obtient :

$$a = \frac{\frac{M}{r} - m'g}{\frac{J_\Delta}{r^2} + m'}$$

Pour que le corps  $A$  s'élève, il faut que  $\frac{M}{r} > m'g$ . Donc  $a$  est constant et positif. Le mouvement de  $A$  est uniformément accéléré.

#### Méthode 2. Utilisation de la R.F.D.



Le système est constitué de deux parties : la masse  $A$  en mouvement de translation et le cylindre  $B$  animé d'un mouvement de rotation. Appliquons la R.F.D. à chaque partie du système en tenant compte du bilan des forces fait ci-dessous. Sur la charge  $A$  on a :

$$\vec{T}_A + \vec{P}_A = m'\vec{a} \quad (\text{S3.1})$$

## 3.10. Solutions des exercices et problèmes

Sur le cylindre  $B$  on a :

$$\sum M_{\Delta}(\vec{F}) = J_{\Delta} \theta''$$

Avec

$$\sum M_{\Delta} = M_{\Delta}(\vec{T}_B) + M_{\Delta}(\vec{P}_B) + M_{\Delta}(\vec{R}) + M$$

$$M_{\Delta}(\vec{T}_B) = -T_{B,r}$$

$$M_{\Delta}(\vec{P}_B) = 0$$

$$M_{\Delta}(\vec{R}) = 0$$

La droite d'action de  $\vec{P}_B$  et  $\vec{R}$  passent par  $\Delta$ . Donc,

$$-T_{B,r} + M = J_{\Delta} \theta'' \quad (\text{S3.2})$$

Projetons (S3.1) sur l'axe  $x'x$  :

$$T_A - m'g = m'a \quad (\text{S3.3})$$

Le câble ne glisse pas sur la poulie. Dans ces conditions,

$$\begin{aligned} x &= r\theta \Rightarrow v = r\theta' \\ \Rightarrow a &= r\theta'' \Rightarrow \theta'' = \frac{a}{r} \end{aligned} \quad (\text{S3.4})$$

(S3.4) dans (S3.2)

$$\Rightarrow -T_{B,r} + M = J_{\Delta} \frac{a}{r} \quad (\text{S3.5})$$

Le câble étant inextensible,  $T_A = T_B$  (S3.3) et (S3.5) permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} m'a + m'g &= \frac{M}{r} - \frac{J_{\Delta}}{r^2} a \\ \Rightarrow a(m' + \frac{J_{\Delta}}{r^2}) &= \frac{M}{r} - m'g \\ \Rightarrow a &= \frac{\frac{M}{r} - m'g}{\frac{J_{\Delta}}{r^2} + m'} \end{aligned}$$

Nous retrouvons le même résultat que ci-dessus.

### 9.2. Calcul de l'accélération $a$

$a$  est une constante. En tenant compte des conditions initiales (à  $t = 0$ ,  $v = 0$  car le corps s'élève en partant du repos), on obtient par intégrations successives de  $a$ ,

$$x = \frac{1}{2} at^2.$$

Pour  $x = h$ , nous avons  $a = \frac{2h}{t^2}$ .

A.N.

$$h = 50 \text{ m}$$

$$t = 25 \text{ s}$$

$$a = 0,16 \text{ m s}^{-2}$$

### 9.3. Tension du câble.

Cette tension est telle que :

$$\begin{aligned} T &= T_A = T_B \\ (\text{S3.3}) \Rightarrow T_A &= m'a + m'g = m'(a + g) \end{aligned}$$

A.N.

$$m' = 1000 \text{ kg}$$

$$a = 0,16 \text{ m s}^{-2}$$

$$g = 10 \text{ m s}^{-2}$$

$$\Rightarrow T_A = 1,016 \times 10^4 \text{ N}$$

Donc  $T = T_A = T_B = 1,016 \times 10^4 \text{ N}$ .

Allongement d'un dynamomètre intercalé entre  $A$  et le câble. La tension de ce dynamomètre est égale à la tension du câble.

$$T = K \cdot \Delta l \Rightarrow \Delta l = \frac{T}{K}.$$

A.N.

$$T = 1,016 \times 10^4 \text{ N}$$

$$K = 10^5 \text{ N m}^{-1}$$

$$\Delta l = 0,106 \text{ m} = 10,6 \text{ cm}$$

### 9.4. Moment $M$ du couple moteur

$$(\text{S3.5}) \Rightarrow M = J_{\Delta} \frac{a}{r} + Tr$$

Avec  $J_{\Delta} = mr^2 \Rightarrow M = r(ma + T)$

A.N.

$$r = 0,20 \text{ m}$$

$$m = 50 \text{ kg}$$

$$a = 0,16 \text{ m s}^{-2}$$

$$T = 1,016 \times 10^4 \text{ N}$$

$$\Rightarrow M = 2,034 \times 10^3 \text{ N m}$$

### 9.5. Travail $W_C$ fourni par le moteur pour une ascension $h = 50 \text{ m}$ de $A$ .

$$W_C = M\theta$$

$$h = r\theta \Rightarrow \theta = \frac{h}{r}$$

$$W_C = \frac{Mh}{r}$$

A.N.

$$M = 2,034 \times 10^3 \text{ N m}$$

$$h = 50 \text{ m}$$

$$r = 0,20 \text{ m}$$

$$\Rightarrow W_C = 5,09 \times 10^5 \text{ J}$$

### 9.6. Calcul du couple de freinage du cylindre.

- Système étudié : le cylindre.
- Bilan des forces : le poids  $\vec{P}_B$ .
- La réaction  $\vec{R}$  de l'axe.
- Le couple de freinage de moment  $M'$ .

Appliquons à ce système le théorème de l'énergie cinétique entre le début du freinage et l'arrêt :

$$0 - E_c = W(\vec{P}_B) + W(\vec{R}) + W_{c'} \quad (\text{S3.6})$$

or

$$W(\vec{P}_B) = W(\vec{R}) = 0$$

car leurs points d'application sont immobiles.

$$W_{c'} = -M'\theta$$

$$E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta} \theta'^2$$

pour  $\theta' = \frac{v_h}{r}$  et  $J_{\Delta} = mr^2$ ,

$$E_c = \frac{1}{2} m v_h^2$$



Où  $v_h$  est la vitesse linéaire du cylindre lorsque  $A$  s'est élevé de  $h = 50$  m.

(S3.6) peut donc s'écrire :

$$-\frac{1}{2} m v_h^2 = -M' \theta \Rightarrow M' = \frac{m \cdot v_h^2}{\theta}$$

A.N.

$$h = 50 \text{ m}$$

$$t = 25 \text{ s}$$

$$v_h = a t = 0,16 \cdot 25 = 4 \text{ m s}^{-1}$$

$$m = 50 \text{ kg}$$

$$\theta = 2\pi \cdot n = 20\pi \Rightarrow M' = 12,7 \text{ N m}$$

### Solution 10. (p. 71)

10.1. Complétons le tableau sachant que  $e = x_B - x_i$

Positions	$x_i$ (m)	$e$ (m)	$t_i$ (s)	$t_i^2$ (s <sup>2</sup> )	$\frac{e}{t^2}$
1	1,4	0,4	3,1	9,61	0,0416
2	1,3	0,5	3,5	12,25	0,0408
3	1,2	0,6	3,8	14,44	0,0415
4	1,1	0,7	4,1	16,81	0,0416
5	1,0	0,8	4,3	18,49	0,0432
6	0,9	0,9	4,7	22,09	0,0407
7	0,8	1,0	5,0	25,00	0,0400

10.1.1. Nature du mouvement de chute du volant le long du plan incliné.

Nous constatons que  $\frac{e}{t^2}$  est à quelques écarts près constant. Soit  $K$  cette constante :

$$\frac{e}{t^2} = K \Rightarrow e = K t^2$$

C'est la loi horaire du mouvement du volant. Cette loi horaire est celle d'un mouvement rectiligne uniformément varié.

10.1.2. Calcul de l'accélération  $a$ .

Le mouvement du volant étant uniformément varié, la loi horaire est :

$$e = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + e_0$$

Par identification à  $e = K t^2$ , on a :

$$v_0 = 0$$

$$e_0 = 0$$

$$\frac{1}{2} a = K \Rightarrow a = 2K$$

A.N.  $K = 0,0416$  (valeur la plus fréquente de  $\frac{e}{t^2}$ ).

$$\Rightarrow a = 0,0832 \text{ m s}^{-2}$$

10.2. Variation de l'accélération du mouvement avec la pente du plan.

10.2.1. Complétons le tableau.

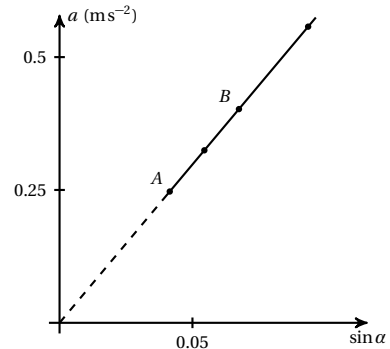
Nous avons déjà établi que

$$e = \frac{1}{2} a t^2$$

$$\Rightarrow a = \frac{2e}{t^2}$$

Expérience	$\sin \alpha = \frac{h_i}{e}$	$t$ (s)	$t^2$ (s <sup>2</sup> )	$a$ (m s <sup>-2</sup> )
1	$4 \times 10^{-2}$	2,8	7,84	0,255
2	$5 \times 10^{-2}$	2,5	6,25	0,320
3	$6 \times 10^{-2}$	2,3	5,29	0,378
4	$8 \times 10^{-2}$	2,0	4,00	0,500

■ Traçons la courbe  $a = f(\sin \alpha)$



■ Nature de la courbe : c'est une droite.

■ Pente de ce graphe. Elle est donnée par le quotient :

$$\frac{a_2 - a_1}{(\sin \alpha)_2 - (\sin \alpha)_1}$$

En se plaçant aux points A et B du graphe on a :

$$\frac{0,378 - 0,255}{0,06 - 0,04} = 6,15$$

■ Expression de  $a$  en fonction de  $\sin \alpha$ . Par extrapolation du graphe, il passe par  $(0,0)$ , donc  $a$  est une fonction linéaire de  $\sin \alpha$ . Si  $K$  est la pente de ce graphe,

$$a = K \cdot \sin \alpha = 6,15 \sin \alpha$$

■ Comparons cette valeur moyenne de  $a$  à  $g \sin \alpha$ .

$$g \sin \alpha = 9,8 \sin \alpha > 6,15 \sin \alpha = a$$

$$a < g \sin \alpha$$

10.2.2. Valeur du moment d'inertie  $J$

$$a = g \cdot \sin \alpha \frac{1}{1 + \frac{J}{mr^2}}$$

$$= 6,15 \sin \alpha$$

$$\Rightarrow J = \left( \frac{g}{6,15} - 1 \right) m r^2$$

A.N.

$$g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$$

$$m = 0,2 \text{ kg}$$

$$r = 0,005 \text{ m}$$

$$\Rightarrow J = 2,96 \times 10^{-6} \text{ kg m}^2$$

## Application des lois de Newton aux mouvements rectilignes uniformément variés

4.1	<b>Généralités</b>	80
4.2	<b>Les mouvements rectilignes</b>	80
4.2.1	Chute libre des corps	80
4.2.2	Etude dynamique de la chute libre	80
4.3	<b>Mouvement d'un solide sur un plan incliné</b>	81
4.3.1	Le plan incliné est parfaitement lisse	81
4.3.2	Le plan incliné est rugueux	82
4.4	<b>Les mouvements plans</b>	83
4.4.1	Mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur supposé uniforme	83
4.5	<b>Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme</b>	84
4.5.1	Cadre d'étude	84
4.6	<b>Enoncés des exercices et problèmes</b>	87
4.7	<b>Solutions des exercices et problèmes</b>	91



## 4.1 Généralités

Les lois de Newton vont nous permettre d'établir les lois des mouvements dans un champ uniforme. Pour cette étude, nous appliquons la démarche suivante :

1. Délimiter avec précision le système à étudier en considérant successivement chacune de ses parties.
2. Choisir le référentiel d'étude. Celui-ci doit être *galiléen* si on veut appliquer le théorème du centre d'inertie, ou le théorème de l'énergie cinétique.
3. Faire sur un schéma clair le bilan des forces extérieures appliquées au système.
4. Appliquer dans le référentiel Galiléen choisi, le théorème du centre d'inertie, ou le théorème de l'énergie cinétique.
5. Exploiter cette relation. Si elle est vectorielle, on l'utilise en projetant les vecteurs sur un système d'axes orthonormés.
6. En déduire les conséquences cinématiques :
  - Le théorème du centre d'inertie, permet de calculer l'accélération  $a_G$ . Il faut alors tenir compte des conditions initiales et chercher les primitives successives de l'accélération pour obtenir la vitesse, les équations horaires et l'équation de la trajectoire du centre d'inertie  $G$ .
  - Le théorème de l'énergie cinétique permet de calculer directement la vitesse du centre d'inertie

chimède et résistance de l'air par rapport au poids. La chute dans l'air devient ainsi assimilable à une chute libre.

### Exemple.

Le mouvement de chute d'une bille d'acier dans l'air est une chute libre.

## 4.2.2 Etude dynamique de la chute libre

### Accélération

Considérons un objet ponctuel ou un solide de centre d'inertie  $G$  et de masse  $m$ . Il est lâché sans vitesse initiale d'un point d'altitude  $h$  au-dessus du niveau du sol. Nous allons déterminer les caractéristiques du mouvement de cet objet, en utilisant la démarche préconisée ci-dessus. Ainsi,

- le système étudié est l'objet de masse  $m$  ;
- l'étude est faite dans le référentiel terrestre supposé galiléen ;
- bilan des forces appliquées au système.

L'objet en chute libre est soumis à la seule action de son poids  $\vec{P}$ . Dans le référentiel choisi, appliquons le théorème du centre d'inertie au système.

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}$$

avec

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{P}$$

d'où

$$\vec{P} = m\vec{a}$$

Or dans le champ de pesanteur terrestre,

$$\vec{P} = m\vec{g} \Rightarrow m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g} \quad (4.1)$$

**Conclusion:** Le vecteur accélération du centre d'inertie dans les mouvements de chute libre est égal au vecteur champ de pesanteur  $\vec{g}$ .

**Remarque.**

$$\vec{a} = \vec{g} \Rightarrow a = g$$

### Remarque.

Dans certaines conditions (corps de densité suffisante et de forme convenable, animé d'une vitesse assez faible, on peut négliger le rôle de l'air (poussée d'Ar-

Donc l'intensité de la pesanteur  $g$  s'identifie à une accélération ; c'est pourquoi on lui donne le nom d'accélération de la pesanteur et on doit l'exprimer, comme toutes les accélérations en  $\text{m.s}^{-2}$ .

L'accélération des mouvements de chute libre est constante dans l'environnement terrestre

## 4.2 Les mouvements rectilignes

### 4.2.1 Chute libre des corps

#### Définition.

Un corps est en chute libre si au cours de son évolution, il est soumis à la seule action de son poids.

#### Exemple.

Toute chute dans le vide est une chute libre.

### 4.3. Mouvement d'un solide sur un plan incliné

$a = g = 9,8 \text{ ms}^{-2}$ . Ce résultat est valable pour les corps quelle que soient leur forme et leur masse.

#### Equation du mouvement de chute libre

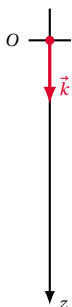


Figure 4.1

Exploitions la relation vectorielle (4.1) dans le repère  $(O, \vec{k})$ :

$$a_z = g$$

Par intégration de  $a_z$ , nous avons :

$$v_z = g t + v_0$$

avec  $v_0 = 0$  car l'objet est lâchée sans vitesse initiale.

Par intégration de  $v_z$ ,

$$z = \frac{1}{2} g t^2 + z_0$$

à  $t = 0$  l'objet est à l'origine des abscisses donc :

$$z = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (4.2)$$

(4.2) est l'équation horaire du mouvement de chute libre sans vitesse initiale.

#### Remarque.

Dans le cas où le solide est lancé avec une vitesse initiale et sa position d'origine ne coïncide pas forcément avec l'origine de l'axe, l'équation donnant l'abscisse  $z$  en fonction du temps s'écrit :

$$z = \frac{1}{2} a_z t^2 + v_0 t + z_0$$

$$a_z = +g \quad \text{si l'axe est orienté vers le bas}$$

$$a_z = -g \quad \text{si l'axe est orienté vers le haut}$$

## 4.3 Mouvement d'un solide sur un plan incliné

### 4.3.1 Le plan incliné est parfaitement lisse

#### Accélération

Considérons un solide  $S$  de masse  $m$  pouvant glisser sur un plan incliné parfaitement lisse.

**NB:** L'expression "parfaitement lisse" signifie qu'il n'y a pas de frottement.

Déterminons les caractéristiques du mouvement de  $S$  sur le plan incliné. Nous allons utiliser la démarche préconisée ci-dessus :

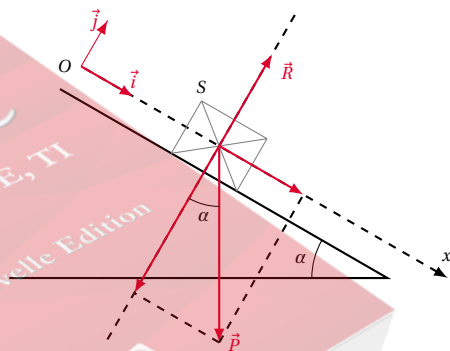
#### Système étudié : le solide $S$

L'étude est faite dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des forces appliquées au système :

- le poids  $\vec{P}$  du solide  $S$ ;
- la réaction  $\vec{R}$  du plan incliné.

Figure 4.2



Dans le référentiel choisi, appliquons le théorème du centre d'inertie au système :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{a}$$

avec

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{P} + \vec{R}$$

D'où :

$$\vec{P} + \vec{R} = m \vec{a}$$

Projetons cette relation sur les deux axes  $O\vec{i}$  et  $O\vec{j}$ .

Sur  $O\vec{j}$ ,

$$-P \cos \alpha + R = 0$$

**NB:** Le vecteur accélération  $\vec{a}$  est parallèle au plan incliné.

Sur  $O\vec{i}$

$$P \cdot \sin \alpha + 0 = m \cot a_x \text{ Avec } P = m \cdot g.$$

Nous déduisons :

$$a = g \sin \alpha \quad (4.3)$$

**Conclusion:**  $g$  et  $\alpha$  étant des constantes telle que  $g \sin \alpha > 0$ ,  $a_x$  est une constante positive. Donc le centre d'inertie du solide  $S$  a un mouvement uniformément accéléré le long du plan incliné.

### Equation horaire d'un solide sur plan incliné parfaitement lisse

Par intégration de  $a_x$ , nous avons :

$$v_x = g \sin \alpha t + v_0$$

avec  $v_0 = 0$  si le solide  $S$  est lâché sans vitesse initiale.

Donc :

$$v_x = g \sin \alpha t \quad (4.4)$$

Par intégration de  $v_x$ , nous avons :

$$x = \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2 + x_0$$

Avec  $x_0 = 0$  si on considère que le solide est lâché à l'instant initial à l'origine  $O$ .

$$x = \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2 \quad (4.5)$$

(4.5) est l'équation horaire du mouvement du solide sur un plan incliné parfaitement lisse.

### 4.3.2 Le plan incliné est rugueux

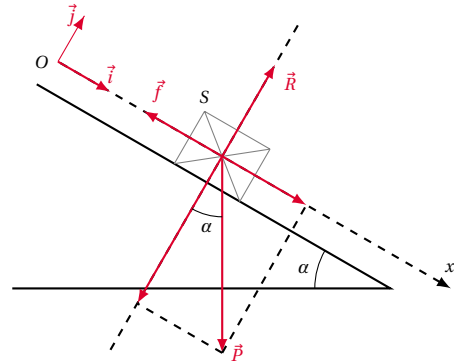
Il y a alors des frottements entre le solide  $S$  et le plan incliné.

En reprenant l'étude ci-dessus à partir du bilan des forces, nous avons :

- le poids  $\vec{P}$  du solide  $S$  ;
- la réaction  $\vec{R}$  du plan incliné ;
- la résultante  $\vec{f}$  des forces.

$\vec{f}$  est parallèle au plan incliné et opposée au mouvement.

Figure 4.3



Dans le référentiel choisi, appliquons le théorème du centre d'inertie au système :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{a}$$

avec

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{f}$$

D'où :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = m \vec{a} \quad (4.6)$$

Projetons cette relation (4.6) sur les deux axes  $O\vec{i}$  et  $O\vec{j}$ .

$$\text{Sur } O\vec{j} \quad -P \cos \alpha + R = 0 \quad (4.7)$$

$$\text{Sur } O\vec{i} \quad P \sin \alpha + 0 - f = m a_x \quad (4.8)$$

avec  $P = mg$ .

De (4.8), nous en déduisons :

$$a_x = g \sin \alpha - \frac{f}{m}$$

**Conclusion:** L'accélération trouvée pour le plan lisse ( $g \sin \alpha$ ) est diminuée de la quantité  $\frac{f}{m}$ . Mais on a encore un mouvement uniformément accéléré le long du plan incliné.

### Equation horaire d'un solide sur plan incliné rugueux lisse

Par intégration de  $a_x$ , nous avons :

$$v_x = \left( g \sin \alpha - \frac{f}{m} \right) t + v_0$$

avec  $v_0 = 0$  si le solide  $S$  est lâché sans vitesse initiale.

Donc :

$$v_x = \left( g \sin \alpha - \frac{f}{m} \right) t$$



#### 4.4. Les mouvements plans

Par intégration de  $v_x$ , nous avons :

$$x = \frac{1}{2} \left( g \sin \alpha - \frac{f}{m} \right) t^2 + x_0$$

Avec  $x_0 = 0$  si on considère que le solide est lâché à l'instant initial à l'origine  $O$ .

$$x = \frac{1}{2} \left( g \sin \alpha - \frac{f}{m} \right) t^2 \quad (4.9)$$

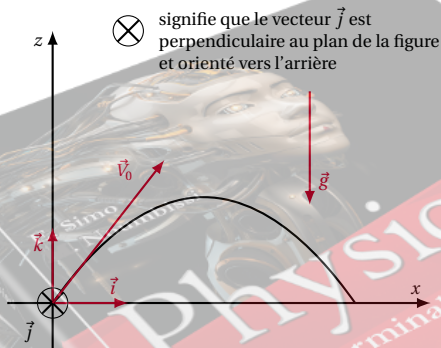
(4.9) est l'équation horaire du mouvement du solide sur un plan incliné rugueux.

## 4.4 Les mouvements plans

### 4.4.1 Mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur supposé uniforme

Considérons un projectile de centre d'inertie  $G$  et de masse  $m$ , lancé vers le haut avec une vitesse initiale  $\vec{V}_0$ , incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale.

Figure 4.4



Utilisons la méthode de résolution pour étudier le mouvement de ce projectile dans le champ de pesanteur. Ainsi,

- système étudié : le projectile de masse  $m$ .
- choisissons un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  lié au référentiel terrestre, supposé galiléen,  $\vec{V}_0$  étant situé dans le plan  $xOz$ . Dans cette base,  $G$  a pour coordonnées  $(x, y, z)$ .
- Bilan des forces appliquées au système : le poids  $\vec{P}$ .
- Appliquons le théorème du centre d'inertie au projectile en mouvement.

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_{\text{ext}} &= m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} = m\vec{a} \\ \Rightarrow m\vec{g} &= m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g} \end{aligned}$$

- Exploitions la relation vectorielle ci-dessus dans le

repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Dans ce repère, les coordonnées des vecteurs sont :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} a_x &= 0 \\ a_y &= 0 \\ a_z &= -g \end{aligned}$$

En tenant compte des conditions initiales (à  $t = 0$ ,  $G$  est en  $O \Rightarrow x_0 = 0; y_0 = 0; z_0 = 0$ ) et des composantes de  $\vec{V}_0$  ( $V_{0x} = v_0 \cos \alpha; V_{0y} = 0; V_{0z} = V_0 \sin \alpha$ ).

Nous obtenons par intégration de  $\vec{a}$ , les coordonnées du vecteur vitesse  $\vec{V}$  et du vecteur position  $\vec{OG}$  à un instant  $t$  quelconque.

$$\vec{V} = \begin{cases} V_x = x' = V_0 \cos \alpha \\ V_y = y' = 0 \\ V_z = z' = -gt + V_0 \sin \alpha \end{cases}$$

et

$$\vec{OG} = \begin{cases} x = (V_0 \cos \alpha)t \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + (V_0 \sin \alpha)t \end{cases}$$

De ces équations, horaires, nous concluons :

- le mouvement de  $G$  est uniforme suivant l'axe  $Ox$  et uniformément varié suivant  $Oz$ .
- $y = 0$  quel que soit  $t$  signifie que le mouvement du projectile se fait dans le plan vertical  $(O, \vec{i}, \vec{k})$  contenant  $\vec{V}_0$ .

### Equation de la trajectoire

Eliminons  $t$  entre les expressions de  $x$  et  $z$ .

$$x = (V_0 \cos \alpha)t \Rightarrow t = \frac{x}{V_0 \cos \alpha}$$

avec  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ .

Portons cette valeur de  $t$  dans l'expression de  $z$ . On obtient :

$$z = -\frac{1}{2} \frac{g}{V_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$$

$g$ ,  $V_0$ , et  $\alpha$  étant constants,  $z$  est de la forme  $Ax^2 + Bx$ . C'est l'équation d'une parabole.

**Conclusion:** Si le vecteur vitesse initiale  $\vec{V}_0$  est non nul et est incliné d'un angle  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$  par rapport à l'horizontale, le mouvement de chute libre est alors parabolique dans un plan vertical.

## Remarque.

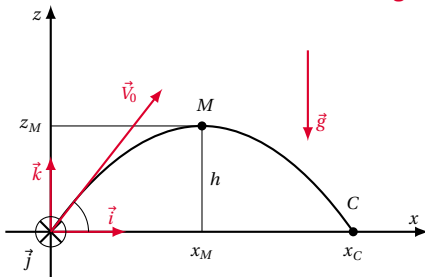


Figure 4.5

La trajectoire décrite présente les caractéristiques suivantes.

- La flèche : c'est la hauteur maximale atteinte par le projectile  $h = z_M$ .
- La portée horizontale : c'est l'abscisse  $x_C$  du point C d'ordonnée 0.
- L'angle de tir : c'est l'angle  $\alpha$ .

## 4.5 Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme

### 4.5.1 Cadre d'étude

Une *champ électrique* est une région de l'espace où une charge électrique est soumise à une force électrostatique. Ainsi, en un point d'un champ électrostatique, si une charge  $q$  est soumise à une force de vecteur  $\vec{F}$ , le vecteur champ électrostatique  $\vec{E}$  en ce point est défini par la relation :

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

$\vec{E}$  et  $\vec{F}$  ont le même sens si  $q$  est une charge (+) et ont des sens opposés si  $q$  est une charge (-).

Un champ électrique est uniforme si le vecteur  $\vec{E}$  est le même en tous ses points. Le champ électrique uniforme le plus usuel est celui créé entre deux plaques P et N, planes, parallèles, entre lesquelles on maintient une tension constante  $U = V_P - V_N$ .

Le vecteur champ électrostatique  $\vec{E}$  est :

- perpendiculaire aux plaques
- dirigé de la plaque le plus haut potentiel vers la plaque de plus bas potentiel.

$\vec{E}$  a pour intensité :

$$E = \frac{U}{d}$$

où  $E$  en  $V m^{-1}$ ;  $U$  en V;  $d$ , distance séparant les deux plaques en mètre.

Rappelons aussi que le travail de la force électrique appliquée à une charge  $q$  dans un champ électrique quelconque, lorsque cette charge se déplace d'un point A à un point B est :

$$W = q(V_A - V_B)$$

avec  $W$  en joules,  $q$  en coulombs et  $V$  en volts.

### Problème

Une particule de masse  $m$ , portant une charge électrique  $q$ , est lancée à la vitesse  $\vec{V}_0$  dans un champ électrostatique uniforme  $\vec{E}$  constant.

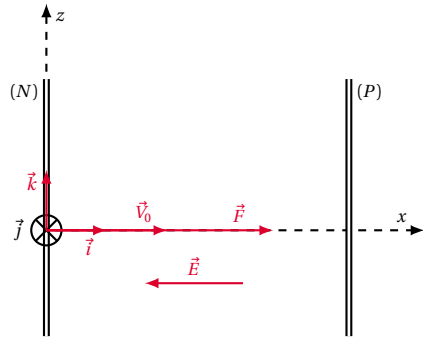


Figure 4.6

### Étudions le mouvement de cette particule

- Système étudié : particule de masse  $m$ , de charge  $q$ , et de centre d'inertie  $G$ .
- Référentiel : le référentiel du laboratoire considéré comme galiléen.
- Bilan des forces appliquées : la force électrostatique  $\vec{F} = q\vec{E}$ , le poids de la particule est généralement négligeable devant cette action.
- Appliquons le théorème du centre d'inertie au système :

$$\sum F_{\text{ext}} = m\vec{a} \Rightarrow q\vec{E} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$$

Exploitation cinématique de la relation vectorielle ci-dessus, dans les deux cas suivants :

1. Cas où le vecteur-vitesse initiale  $\vec{V}_0$  est colinéaire au vecteur champ électrostatique  $\vec{E}$ .

Dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  les vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{E}$  ont pour coordonnées :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{E} = \begin{pmatrix} -E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x = -\frac{q}{m}E \\ a_y = 0 \\ a_z = 0 \end{pmatrix}$$

En tenant compte des conditions initiales, (à  $t = 0$ ,  $G$  est en  $O \Rightarrow x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0$ ) et des com-

#### 4.5. Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme

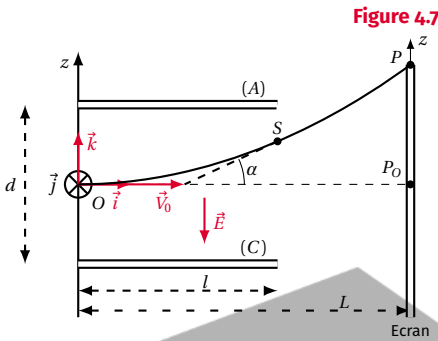
posantes de  $\vec{V}_O$  ( $V_{0x} = V_0$ ;  $V_{0y} = 0$ ;  $V_{0z} = 0$ ), nous obtenons par intégration de  $a$ , les coordonnées du vecteur-vitesse  $\vec{V}$  et du vecteur position  $\vec{OG}$  à un instant  $t$  quelconque.

$$\vec{V} = \begin{cases} V_x = x' = -\frac{qE}{m}t + V_0 \\ V_y = y' = 0 \\ V_z = z' = 0 \end{cases}$$

et

$$\vec{OG} = \begin{cases} x = -\frac{qE}{2m}t^2 + V_0 t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

##### Conclusion:



Si  $\vec{V}_O$  est colinéaire à  $\vec{E}$ , le mouvement de la particule est alors rectiligne uniformément varié, de trajectoire parallèle à la direction de  $\vec{E}$ .

2. Cas où le vecteur-vitesse initiale  $\vec{V}_O$  est orthogonal au vecteur champ électrostatique  $\vec{E}$ . Cette fois, les armatures du condensateur sont horizontales. En projetant la relation  $\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , nous avons :

$$\vec{a} = \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = -\frac{q}{m}E \end{cases}$$

On en déduit par intégration et en tenant compte des conditions initiales,

$$\vec{V} = \begin{cases} V_x = x' = V_0 \\ V_y = y' = 0 \\ V_z = z' = -\frac{qE}{m}t \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{OG} = \begin{cases} x = V_0 t \\ y = 0 \\ z = -\frac{qE}{2m}t^2 \end{cases}$$

##### Conclusion:

- Le mouvement de la particule est uniforme suivant l'axe  $Ox$  parallèle à la direction de  $\vec{V}_O$ .
- Le mouvement de la particule est uniformément varié suivant  $Oz$ .
- $y = 0$  quel que soit  $t$ , donc la particule se déplace dans le plan  $xOz$  contenant  $\vec{V}_O$ .

##### Equation de la trajectoire

Éliminons  $t$  entre les expressions de  $x(t)$  et  $z(t)$ . On obtient alors :

$$z = -\frac{1}{2} \frac{qE}{mV_0^2} x^2$$

pour  $0 \leq x \leq l$ .

Donc à l'intérieur des plaques, le mouvement de la particule est parabolique.

##### Durée du passage à l'intérieur des plaques

Soit  $S$  le point de sortie de la particule du champ  $\vec{E}$ .  $x_S$  étant l'abscisse du point  $S$  à la date  $t_S$  telle que :

$$x_S = V_0 t_S$$

(d'après l'équation horaire  $x = V_0 t$ ) avec  $x_S = l \Rightarrow t_S = \frac{l}{V_0}$ .

##### Coordonnée du point de sortie $S$

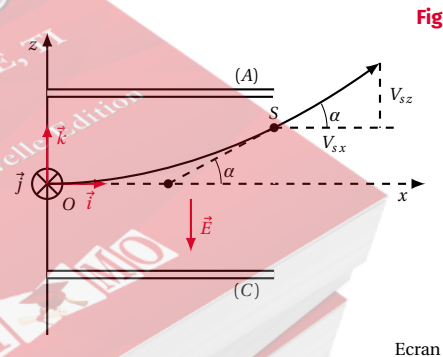


Figure 4.8

$S$  a pour abscisse  $x_S = l$ . L'équation de la trajectoire donne l'ordonnée de  $S$ .

$$z_S = -\frac{1}{2} \frac{qE}{mV_0^2} l^2$$

### Caractéristiques du vecteur-vitesse $\vec{v}_S$ , à la sortie des plaques

Les coordonnées du vecteur-vitesse à l'instant  $t$  sont :

$$\vec{v} = \begin{cases} V_x = x' = V_0 \\ V_y = y' = 0 \\ V_z = z' = -\frac{q \cdot E}{m} t \end{cases}$$

La particule est au point S à la date  $t_S = \frac{l}{V_0}$ .

Son vecteur vitesse  $\vec{v}_S$  est alors :

$$\vec{v}_s = \begin{cases} V_{sx} = V_0 \\ V_{sy} = 0 \\ V_{sz} = -\frac{qE}{m} t_S = -\frac{qEl}{mV_0} \end{cases}$$

Soit  $\alpha$ , l'angle compris entre les vecteurs vitesses à l'entrée et à la sortie du champ.  $\alpha$  mesure la déviation angulaire infligée à la particule par le champ électrostatique  $\vec{E}$ . On obtient  $\alpha$  en calculant sa tangente.

$$\tan \alpha = \frac{V_{sz}}{V_{sx}} = -\frac{qEl}{mV_0^2}$$

Pour  $E = \frac{U_{AC}}{d}$ ,

$$\tan \alpha = -\frac{ql}{mdV_0^2} U_{AC}$$

### Mouvement de la particule à l'extérieur des plaques ( $x > l$ )

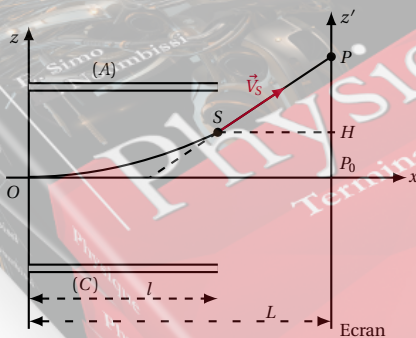


Figure 4.9

Calculons  $z_P$

$$z_P = P_0H + HP$$

$$\text{avec } \overline{P_0H} = z_S = -\frac{qE}{2mV_0^2} l^2 = -\frac{qU_{AC}l^2}{2mdV_0^2}.$$

Calculons  $HP$ .

Dans le triangle rectangle  $SHP$ ,

$$\tan \alpha = \frac{HP}{HS} \Rightarrow HP = HS \tan \alpha$$

où  $HS = L - l$  et  $\tan \alpha = -\frac{qlU_{AC}}{mdV_0^2}$  donc :

$$HP = -(L-l) \frac{qlU_{AC}}{mdV_0^2}$$

et

$$z_P = -\frac{qU_{AC}l^2}{2mdV_0^2} - (L-l) \frac{qlU_{AC}}{mdV_0^2}$$

Après simplification, on a :

$$z_P = -\frac{ql}{mdV_0^2} (L - l_2) U_{AC}$$

■ Le facteur  $\left(-\frac{q}{mV_0^2}\right)$  caractérise la particule déviée.

■ Le facteur  $\frac{l}{d} \left(L - \frac{l}{2}\right)$  caractérise la géométrie de l'appareillage utilisé.

Pour un dispositif expérimental et une particule donnés, les facteurs ci-dessus sont constants. On peut donc écrire :

$$z_P = KU_{AC}$$

$$\text{avec } K = -\frac{ql}{mdV_0^2} \left(L - \frac{l}{2}\right).$$

**Conclusion:** La déflexion électrostatique sur l'écran est proportionnelle à la tension  $U_{AC}$  appliquée aux plaques de déviation.

A l'extérieur des plaques,

$$\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} = q\vec{E} = \vec{0}$$

Le poids de la particule étant négligeable, elle peut être assimilée à un système isolé et son mouvement devient rectiligne uniforme de vecteur vitesse  $\vec{v}_S$ .

Déterminons les coordonnées du point d'impact  $P$  de la particule sur l'écran. Le point  $P$  a pour coordonnées ( $x_P = L$ ,  $z_P = P_0P = ?$ )  $z_P$  mesure le déplacement ou *déflexion électrostatique* de la particule sur l'écran.



## 4.6 Enoncés des exercices et problèmes

### Exercice 1.

Un corps abandonné sans vitesse initiale tombe en chute libre d'une hauteur  $h$  du sol. Il arrive au sol avec une vitesse  $v = 40 \text{ m s}^{-1}$ . Calculer la hauteur  $h$  et la durée  $t$  de la chute. On donne :  $g = 9,80 \text{ m s}^{-2}$ .



### Exercice 2.

Au départ de la lune et au moment d'entrer dans l'engin pour son retour sur la Terre, un astronaute laisse tomber de la même hauteur, 3,2 m, deux objets A et B de masse respectives  $m_A = 3 \text{ kg}$  et  $m_B = 100 \text{ g}$ . Les deux objets étant lâchés en même temps.

**2.1.** Comparer les instants d'arrivée des deux objets A et B sur le sol lunaire.

**2.2.** Sachant que le poids lunaire de l'objet A est 4,8 N, calculer l'accélération de la pesanteur lunaire  $g_L$ , le temps de chute et la vitesse de l'objet B à l'arrivée au sol lunaire.

### Exercice 3.

On veut connaître la profondeur d'un puits. Un observateur lâche à l'orifice du puits un objet dont il entend 4 secondes plus tard le bruit du choc sur l'eau.

Calculer la profondeur du puits sachant que la hauteur de l'eau dans le puits est 3 m et que la vitesse du son dans l'air vaut  $330 \text{ m s}^{-1}$ . On donne  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ .

### Exercice 4.

Deux oranges  $O_1$  et  $O_2$  tombent en chute libre sans vitesse initiale. L'orange  $O_1$  tombe d'une hauteur  $h_1$  ; une seconde plus tard, l'orange  $O_2$  tombe à son tour d'une hauteur  $h_2$ .  $h_1 - h_2 = 10 \text{ m}$ .

Les oranges  $O_1$  et  $O_2$  arrivent en même temps au sol. Si  $t_1$  et  $t_2$  sont les durées de chute de  $O_1$  et  $O_2$ ,

**4.1.** Ecrire les équations horaires des mouvements de

chute de  $O_1$  et de  $O_2$  en précisant les origines choisies.

**4.2.** Calculer  $t_1$  et en déduire  $h_1$ ,  $h_2$  et  $t_2$ .

**4.3.** Calculer les modules des vecteurs vitesses  $\vec{V}_1$  de  $O_1$  et  $\vec{V}_2$  de  $O_2$  à l'arrivée au sol.

On donne  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ .

### Exercice 5.

Un solide, de centre d'inertie  $G$ , animé d'une vitesse  $v = 2 \text{ m s}^{-1}$ , aborde un plan incliné qu'il monte en glissant sans frottement ; l'angle d'inclinaison du plan incliné par rapport à l'horizontale vaut  $\alpha = 30^\circ$ .

**5.1.** Quelle est la nature du mouvement de  $G$  ?

**5.2.** Quelle est la distance parcourue par le solide sur le plan incliné avant l'arrêt ?

**5.3.** Une fois arrêté, que va faire le solide ? On prendra  $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$ .

### Exercice 6.

Pour faire glisser un corps  $M$  de masse  $m = 70 \text{ kg}$  le long de la ligne de plus grande pente d'un plan incliné à  $30^\circ$  sur l'horizontale, on le tire à l'aide d'un câble  $C$ . Au cours de ce déplacement le plan exerce sur  $M$  une force de frottement de module  $f$ , parallèle au plan, de sens opposé à celui du mouvement et égale au dixième du poids du corps. On prendra  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ .

Dans une première phase du mouvement, le câble exerce sur  $M$  une force constante de module  $F$ , parallèle au plan, telle que  $M$ , parti sans vitesse initiale d'un point  $A$  de la pente, atteigne un point  $B$  distant de  $A$  de 5 m, avec une vitesse de  $5 \text{ m s}^{-1}$ .

A cet instant, la force prend une nouvelle valeur constante, telle que le mouvement de  $M$  devienne uniforme sur une longueur  $BD$  égale à 25 m.

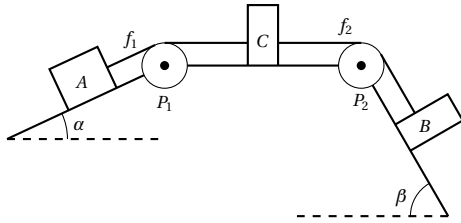
**6.1.** Calculer dans chacun de ces deux cas la valeur de la force de traction  $F$ .

**6.2.** Après ce parcours de 30 m, le câble casse. Etudier le mouvement ultérieur de  $M$ . Combien de temps après son départ de  $A$  le corps repassera-t-il à nouveau en  $A$  ?

### Exercice 7.

Un solide  $A$  de masse  $M_1$  peut glisser sans frottement sur un plan incliné faisant un angle  $\alpha$  avec le plan horizontal. Un autre solide  $B$  de masse  $M_2$  peut glisser sans frottement sur un autre plan incliné faisant un angle  $\beta$  avec le plan horizontal. Un solide  $C$  de masse  $M_3$  peut glisser sans frottement sur un plan horizontal. Les solides  $A$  et  $C$  sont reliés par un fil inextensible ( $f_1$ ) de masse négligeable passant sur une poulie  $P_1$ . De même, les solides  $C$  et  $B$  sont reliés par un fil inextensible ( $f_2$ ) de masse négligeable passant sur une poulie  $P_2$ . Les poulies peuvent tourner sans frottement autour de leurs axes perpendiculaires au plan de la figure. Ce plan de figure est vertical. Il contient les lignes de plus grande pente des plans de glissement des solides. Les masses des poulies sont négligeables.





**7.1.** Quelle relation doivent vérifier les masses des solides et les angles  $\alpha$  et  $\beta$  pour que les solides soient au repos ou aient un mouvement uniforme.

**7.2.** Application numérique :  $M_1 = 400 \text{ g}$ ;  $M_2 = 300 \text{ g}$ ;  $\alpha = 30^\circ$ . En déduire la valeur de l'angle  $\beta$ .

**7.3.** On donne maintenant à  $\beta$  la valeur  $60^\circ$ .

**7.3.1.** Etablir l'expression de l'accélération  $a$ , du mouvement des solides  $A$ ,  $B$ , et  $C$  en fonction de  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $g$  (accélération de la pesanteur).

**7.3.2.** Application numérique :  $M_1 = 400 \text{ g}$ ;  $M_2 = 300 \text{ g}$ ;  $M_3 = 300 \text{ g}$ ;  $\alpha = 30^\circ$ ;  $\beta = 60^\circ$ ;  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ . Calculer  $a$ .

**7.4.** La vitesse initiale du système est nulle. Calculer la vitesse des solides après un parcours de 2 m. Calculer la durée de ce parcours.

**7.5.** A la fin du parcours précédent, le solide  $B$  se décroche; le centre d'inertie  $G$  du solide  $C$  se trouve alors en un point  $M$ .

**7.5.1.** Calculer la nouvelle accélération  $a'$  du mouvement des solides  $A$  et  $C$ . Décrire le mouvement ultérieur de  $A$  et  $C$ .

**7.5.2.** Deux secondes après le décrochage de  $B$ , le centre d'inertie  $G$  se trouve en un point  $M'$ . Calculer la distance  $MM'$ .

N.B. Les plans sont suffisamment longs pour permettre les mouvements étudiés.

### Exercice 8.

Un dispositif permet de lancer une bille à la vitesse  $V_0 = 16 \text{ m s}^{-1}$ . La bille part d'un point  $O$ , situé à 4 m au-dessus du sol. La bille monte suivant une direction faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontal. On donne  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ .

**8.1.** Déterminer les équations horaires  $x = f(t)$  et  $y = g(t)$ .

**8.2.** Quelle est l'équation de la trajectoire.

**8.3.** Pendant combien de temps la bille s'élève-t-elle avant de descendre? Quelle est sa vitesse à la fin de cette phase ascendante? Application numérique  $\alpha = 50^\circ$ .

**8.4.** Quelle est l'altitude maximale atteinte par la bille, comptée à partir de son point de départ  $O$ . A.N.  $\alpha = 50^\circ$ .

**8.5.** La bille retombe sur l'axe  $ox$  en  $P$ . Déterminer la distance  $OP$ . Pour quelle valeur  $\alpha$   $OP$  est-elle maximale? Quelle est alors sa valeur numérique?

**8.6.** Soit  $Q$  un point de l'axe  $Ox$  d'abscisse  $x_0 = 10 \text{ m}$ . Montrer qu'il y a deux angles de tir  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  permettant d'atteindre  $Q$ .

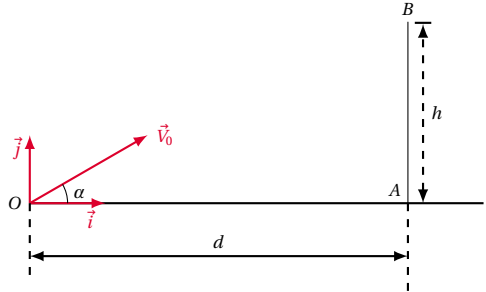
**8.7.** La bille retombe sur le sol en un point  $R$ . Déterminer la portée maximale au sol.

### Exercice 9.

On se propose d'étudier un "coup franc" direct en football en faisant les hypothèses simplificatrices suivantes :

- le ballon est un solide ponctuel;
- l'influence de l'air est négligeable;
- le champ de pesanteur est uniforme et a une intensité  $g = 10 \text{ N/kg}$ .

Le ballon est posé en  $O$  sur le sol horizontal, face au but  $AB$  de hauteur  $h = 2,44 \text{ m}$  et à une distance  $d = 25 \text{ m}$  de celui-ci.



Le joueur, tirant le coup franc, communique au ballon une vitesse initiale  $\vec{v}_0$  dans le plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , inclinée par rapport à l'horizontale d'un angle  $\alpha = 30^\circ$ .

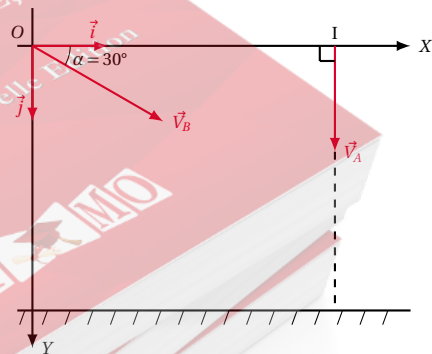
**9.1.** Montrer que la trajectoire du ballon est dans le plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**9.2.** Déterminer l'équation de cette trajectoire dans le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  en fonction de  $g$ ,  $\alpha$  et  $V_0$ .

**9.3.** Quelle doit être la vitesse initiale du ballon pour qu'il pénètre dans le but au ras de la barre transversale.

### Exercice 10.

Dans tout le problème, on négligera l'action de l'air. On prendra  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ . On raisonnera dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  lié à la Terre. On choisira comme origine des dates l'instant où les mobiles quittent le plan horizontal contenant les points  $O$  et  $I$ .



**10.1.** Une bille  $A$  assimilable à un point matériel passe en  $I$  à l'instant  $t = 0$  avec une vitesse verticale, vers le bas, de norme  $V_A = 7 \text{ m s}^{-1}$ . Etablir l'équation du mouvement de la bille.

**10.2.** A l'instant  $t = 0$ ; on lance d'un point  $O$  une deuxième bille  $B$ , assimilable à un point matériel, dans les conditions précisées sur la figure ci-dessus :

## 4.6. Énoncés des exercices et problèmes

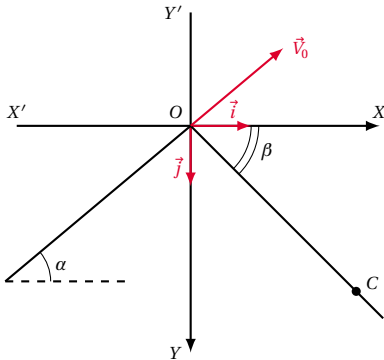
$(\vec{Ox}, \vec{V}_B) = 30^\circ$ ;  $OI = 3 \text{ m}$ .

**10.2.1.** Établir l'équation horaire du mouvement projeté sur l'axe  $Ox$  ainsi que celle du mouvement projeté sur l'axe  $Oy$ .

**10.2.2.** Calculer la norme  $V_B$  de la vitesse initiale pour que le choc entre les deux billes se produise. Déterminer l'instant et l'endroit du choc.

**Exercice 11.**

Un skieur parcourt une côte inclinée d'un angle  $\alpha = 40^\circ$  sur l'horizontale. Au sommet  $O$  de cette côte, sa vitesse est  $\vec{v}_0$  telle que  $V_0 = 12 \text{ ms}^{-1}$ .

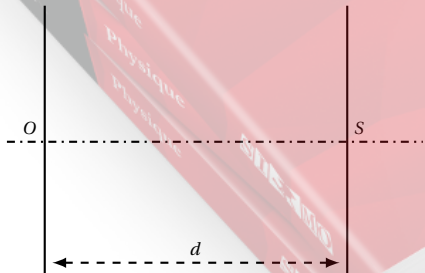


Après  $O$ , se présente une descente inclinée d'un angle  $\beta = 45^\circ$  sur l'horizontale. Le skieur accomplit un saut et reprend contact avec la piste au point  $C$ . Déterminer la nature de la trajectoire correspondant au saut du skieur, les coordonnées du point  $C$  dans le repère orthonormé  $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$  indiqué sur la figure ci-dessus, la longueur  $OC$  et la durée du saut.

On prendra  $g = 10 \text{ ms}^{-2}$  et on négligera la résistance de l'air. La masse du skieur n'est pas donnée car elle s'élimine dans les calculs. On étudiera le mouvement du centre d'inertie du skieur.

**Exercice 12.**

Un électron, initialement immobile au point  $O$  est accéléré par un champ électrique  $\vec{E}$  uniforme créé entre deux plaques verticales, parallèles entre elles. La tension électrique existant entre les deux plaques métalliques est égale à  $U = 100 \text{ V}$ . La distance  $d$  séparant les deux plaques a pour valeur  $d = 5 \text{ cm}$ .



Données : masse de l'électron  $m = 9,10 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ; charge électrique de l'électron :  $q = -e = -1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ;

intensité du champ de pesanteur  $g = 9,80 \text{ ms}^{-2}$ .

**12.1.** Indiquer sur un schéma comment le générateur de tension doit être relié aux plaques (polarité des plaques). Indiquer le sens du champ électrique  $\vec{E}$ . Calculer son intensité.

**12.2.** Comparer l'intensité de la force électrostatique à l'intensité du poids de l'électron. Conclusion.

**12.3.** Calculer la vitesse  $V_S$  de l'électron au point  $S$ .

**12.4.** Comment évolue la vitesse  $V_S$  lorsque la tension augmente.

**Exercice 13.**

Une tension  $U$  est maintenue entre deux plaques métalliques horizontales  $P_1$  et  $P_2$  et distantes de  $d$ . Un faisceau d'électron pénètre dans le champ électrique avec un vecteur-vitesse horizontal  $\vec{V}_0$ . La longueur des plaques est notée  $l$ . Un écran vertical permet de repérer le point d'impact des électrons.

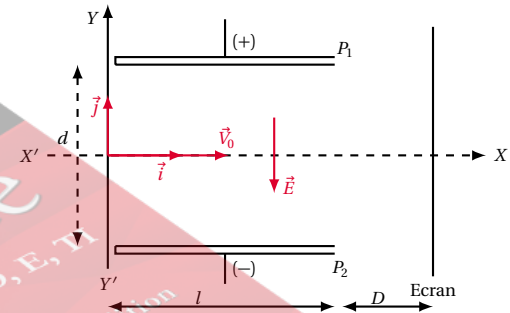
**13.1.** Calculer l'intensité du champ électrique  $\vec{E}$ .

**13.2.** Déterminer la position du point de sortie  $S$ . Quelle est la vitesse  $V_S$  des électrons en  $S$ ?

**13.3.** Calculer la valeur de l'angle de déviation  $\alpha$  du faisceau d'électrons.

**13.4.** Déterminer la position du point d'impact  $I$  du faisceau sur l'écran.

Données :  $l = 2,5 \text{ cm}$ ;  $d = 1,5 \text{ cm}$ ;  $D = 50 \text{ cm}$ ;  $U = 100 \text{ V}$ ;  $V_0 = 8,10 \times 10^6 \text{ ms}^{-1}$ ; masse de l'électron :  $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ; charge électrique de l'électron :  $q_e = -e = -1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ .

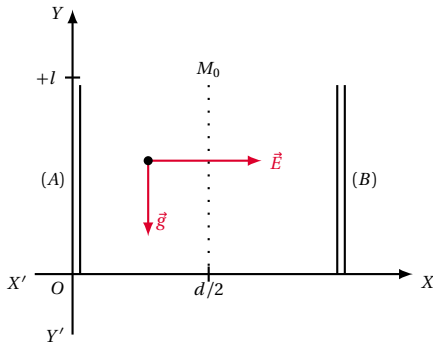
**Exercice 14.**

Deux plaques métalliques verticales  $A$  et  $B$  sont placées dans le vide à une distance  $d$  l'une de l'autre et sont soumises à une tension  $V_A - V_B = U$  positive. La hauteur des plaques est  $l$ . Entre les plaques, se superposent deux champs :

- le champ de pesanteur supposé uniforme, caractérisé par le vecteur  $\vec{g}$ .
- un champ électrique uniforme, caractérisé par le vecteur  $\vec{E}$ .

Une petite sphère  $M$  ponctuelle, de masse  $m$ , pesante portant une charge électrique positive  $q(+)$ , est abandonnée sans vitesse initiale à l'instant  $t = 0$  en un point  $M$  dont les coordonnées dans le système d'axes  $x'Ox, y'Oy$

sont  $\left(x_0 = \frac{d}{2}; y_0 = l\right)$ .



**14.1.** Trouver les deux forces qui agissent sur la petite sphère. Montrer que cette dernière reste dans le plan de figure  $(Oxy)$ .

**14.2.** En déduire les composantes sur les axes  $Ox$  et  $Oy$  du vecteur accélération  $\vec{a}$  du mouvement de la sphère.

**14.3.** Déterminer, en fonction du temps, les composantes du vecteur vitesse  $\vec{V}$  ainsi que celles du vecteur position  $\vec{OM}$  : Ecrire l'équation de la trajectoire. Quelle est sa nature.

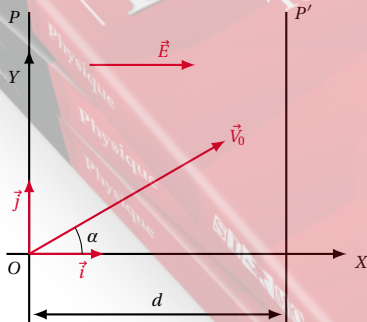
**14.4.** Calculer la date d'arrivée de la sphère dans le plan horizontal passant par  $O$ .

**14.5.** Quelle valeur doit-on donner à  $U_{AB}$  pour que la trajectoire de la sphère passe par le point  $P$  de coordonnées  $(d, 0)$ ?

On donne :  $d = 4\text{ cm}$ ;  $l = 1\text{ m}$ ;  $\frac{q}{m} = 10^{-6}\text{ C kg}^{-1}$ ;  $g = 10\text{ m s}^{-2}$ .

### Exercice 15.

Dans la région d'espace  $R$  comprise entre deux plans parallèles  $P$  et  $P'$  distants de  $d$ , il existe un champ électrique  $\vec{E}$  créé par des électrodes constituées de fins grillages métalliques disposés suivant  $P$  et  $P'$ ;  $\vec{E}$  sera considéré comme nul à l'extérieur de  $R$ . Une particule ponctuelle, de masse  $m$  et de charge électrique positive, arrive en  $O$  à  $t = 0$  et pénètre dans la région  $R$ . La vitesse à  $t = 0$  se trouve dans le plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , elle a pour valeur  $V_0$ , et fait un angle  $\alpha$  avec l'horizontale.



**15.1.** Représenter la force électrique s'exerçant sur la particule en  $O$ .

**15.2.** On néglige le poids de la particule devant la force

électrique. Etablir l'équation de la trajectoire. Quelle est sa nature?

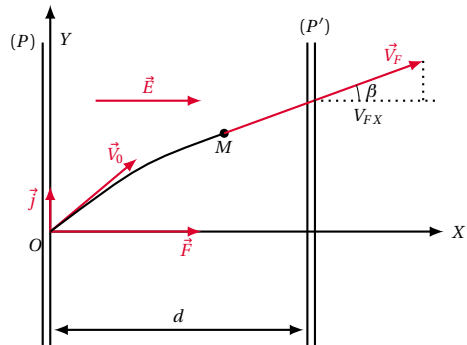
**15.3.** Déterminer la composante  $V_x$  de la vitesse en fonction de  $x$  (on pourra utiliser le théorème de l'énergie cinétique).

**15.4.** Calculer la valeur  $V_F$  de la vitesse de la particule et l'angle  $\beta$  qu'elle fait avec l'horizontale au moment où elle arrive dans le plan  $P'$ .

**15.5.** On donne  $V_0 = 2 \times 10^7\text{ m s}^{-1}$ ;  $m = 9,1 \times 10^{-31}\text{ kg}$ ;  $q = 1,6 \times 10^{-19}\text{ C}$ ;  $E = 5 \times 10^4\text{ V m}^{-1}$ ;  $d = 10^{-2}\text{ m}$ ;  $\alpha = 10^\circ$ .

**15.6.** Quelle sera la trajectoire de la particule après la traversée du plan  $P'$ ?

Montrer que le rapport  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$  est égal à une constante  $K$  qui sera exprimée en fonction de  $E, d, q, m, V_0$ .



## 4.7 Solutions des exercices et problèmes

### Solution 1. (p. 87)

Soit un corps en chute libre le long de l'axe  $z'Oz$ .

A  $t = 0$ ,  $V = V_0 = 0 \text{ m s}^{-1}$ . A la position  $z = h$ ,  $V = 40 \text{ m s}^{-1}$ .

Calculons la hauteur  $h$ .

La chute étant libre, le mouvement du corps est rectiligne uniformément accéléré d'accélération  $a = g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$ . De la propriété :

$$\Delta V^2 = 2a \Delta z$$

Avec  $\Delta z = h$  nous tirons :

$$h = \frac{\Delta(v^2)}{2g} = \frac{v^2 - v_0^2}{2g}$$

$$h = \frac{40^2 - 0^2}{2 \cdot 9,8} = 81,6 \text{ m}$$

Calculons la durée  $t$  de la chute.

En utilisant la propriété  $\Delta v = a \Delta t$ , avec  $\Delta V = V - V_0$  et  $a = g$  et  $\Delta t = t = \text{durée de chute}$ , on tire :

$$t = \frac{V - V_0}{g} = \frac{40 - 0}{9,8} = 4,08 \text{ s}$$

Remarque en utilisant l'équation horaire, on arrive au même résultat :

$$z = \frac{1}{2} g t^2$$

$$\text{pour } z = h, t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 81,6}{9,8}} = 4,08 \text{ s}$$

### Solution 2. (p. 87)

Comparons les dates d'arrivée au sol des objets A et B.

Si les deux objets ont des densités suffisantes et des formes convenables pour qu'on puisse assimiler leur mouvement à une chute libre, leur mouvement est indépendant de leur masse. Donc les deux objets arrivent au sol en même temps.

**2.1.** Pour  $P_A = 4,8 \text{ N}$ , déterminons  $g_l$ .

$$P_A = m_A g_l$$

$$\Rightarrow g_l = \frac{P_A}{m_A} = \frac{4,8}{3} = 1,6 \text{ m s}^{-2}$$

**2.2.** Durée de la chute.

La chute étant libre, sans vitesse initiale, on a :

$$z = \frac{1}{2} g_l t^2$$

Pour  $z = h = 3,2 \text{ m}$

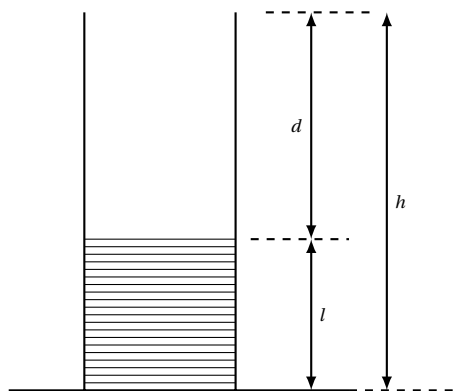
$$t = \sqrt{\frac{2h}{g_l}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3,2}{1,6}} = 2 \text{ s}$$

**2.3.** Vitesse d'arrivée de B au sol lunaire.

$$V = g_l t = 1,6 \times 2 = 3,2 \text{ m s}^{-1}$$

### Solution 3. (p. 87)

Calculons la profondeur  $h$  du puits.



Soit  $t'$  la durée de la descente de l'objet jusqu'à la surface de l'eau et  $d$  la distance de l'orifice du puits à la surface de l'eau.

$$d = \frac{1}{2} g t'^2 \quad (\text{S4.1})$$

soit  $t''$  la durée mise par le bruit pour parvenir à l'observateur :

$$d = v_a t'' \quad (\text{S4.2})$$

De (S4.1) et (S4.2) nous déduisons :

$$\frac{1}{2} g t'^2 = v_a t'' \quad (\text{S4.3})$$

De plus nous savons que

$$t = t' + t'' \quad (\text{S4.4})$$

A.N.  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ ;  $v_a = 330 \text{ m s}^{-1}$ ;  $t = 4 \text{ s}$   
(S4.3) devient :

$$5 t'^2 = 330 t'' \quad (\text{S4.5})$$

(S4.4) devient :

$$t' + t'' = 4 \quad (\text{S4.6})$$

(S4.6) donne :

$$t'' = 4 - t' \quad (\text{S4.7})$$

(S4.7) dans (S4.5) donne :

$$5 t'^2 = 330(4 - t')$$

Equation de second degré dont la solution compatible avec les hypothèses est :  $t' = 3,783 \text{ s}$ . Nous en déduisons :

$$d = 5 \cdot (3,783)^2 = 71,55 \text{ m}$$

Calculons alors  $h$ .

$$h = d + l = 71,55 + 3 = 74,55 \text{ m}$$



## Solution 4. (p. 87)

4.1. Equation horaire de chute de  $O_1$  et  $O_2$ .

Soit  $z = 0$  la position de départ de l'orange  $O_1$ , A la date  $t = 0$  s. Dans ce repère d'espace et du temps, la position de départ de l'orange  $O_2$  a pour cote :  $z = 10$  m à la date  $t = 1$  s. L'accélération de la chute libre étant  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ . La chute libre de l'orange  $O_1$  a pour équation horaire :

$$z_1 = \frac{1}{2} g t^2 = 5 t^2$$

Pour l'orange  $O_2$  d'accélération  $g$ , procédons par intégrations successives :

$$v(t) = g t + K$$

Déterminons  $K$  :

À  $t = 1$  s, l'orange  $O_2$  est lâchée sans vitesse initiale,

$$v = 0$$

$$\Rightarrow 0 = 10 \cdot 1 + K$$

$$\Rightarrow K = -10$$

$$\Rightarrow v(t) = 10t - 10$$

2ème intégration :

$$z_2(t) = 10 \frac{1}{2} t^2 - 10t + C = 5t^2 - 10t + C. \text{ Or}$$

à  $t = 1$  s,  $z_2 = 10$  pour l'orange  $O_2$ . Donc  $10 = 5 \cdot 1^2 - 10 \cdot 1 + C \Rightarrow C = 15$ . D'où l'équation horaire de l'orange  $O_2$  :

$$z_2 = 5t^2 - 10t + 15$$

4.2. Calcul de  $t_1$ ,  $h_1$ ,  $h_2$  et  $t_2$ 

■ Durée  $t_1$  de la chute de l'orange  $O_1$ . Les deux oranges arrivant au sol au même moment,

$$z_1(t) = z_2(t)$$

$$\Rightarrow 5t^2 = 5t^2 - 10t + 15$$

$$\Rightarrow -10t + 15 = 0$$

$$\Rightarrow t = 1,5 \text{ s}$$

L'orange  $O_1$  étant lâchée à l'origine des dates, sa durée de chute est donc  $t_1 = t = 1,5$  s.

■ Hauteur de chute  $h_1$  de l'orange  $O_1$

$$h_1 = z_1(t_1 = 1,5 \text{ s})$$

$$= 5 \cdot (1,5)^2 = 11,25 \text{ m}$$

■ Hauteur de chute de l'orange  $O_2$

$$h_1 - h_2 = 10 \text{ m}$$

$$\Rightarrow h_2 = h_1 - 10 = 11,25 - 10 = 1,25 \text{ m}$$

■ Durée de chute de l'orange  $O_2$

$$t_1 - t_2 = 1$$

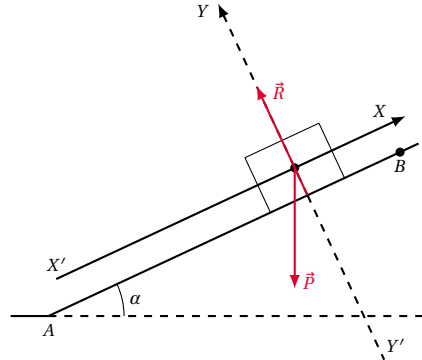
$$\Rightarrow t_2 - 1 = 1,5 - 1 = 0,5 \text{ s}$$

## 4.3. Vitesse des deux oranges au sol

$$v_1(t) = 10t$$

$$\Rightarrow v_1(t = 1,5 \text{ s}) = 10 \cdot 1,5 = 15 \text{ m s}^{-1}$$

## Solution 5. (p. 87)

5.1. Nature du mouvement de  $G$ .

- Le système étudié est le solide de centre d'inertie  $G$ , de masse  $m$ .
- Référentiel : référentiel terrestre supposé galiléen.
- Bilan des forces extérieures agissant sur le système :
  - Le poids  $\vec{P}$  et la réaction  $\vec{R}$  du plan incliné
- Appliquons au système, le principe fondamental de la dynamique.  $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$ .

Projetons cette relation sur les axes suivants :

$$y y' : -p \cos \alpha + R = 0 \quad (\text{S4.1})$$

$$x x' : -P \sin \alpha + 0 = m a_x \quad (\text{S4.2})$$

avec

$$P = mg \Rightarrow a_x = -g \sin \alpha$$

$g$  et  $\alpha$  étant des constantes telles que  $g \sin \alpha > 0$ ,  $a_x$  est une constante négative. Le mouvement est donc rectiligne uniformément retardé.

## 5.2. Distance parcourue par le solide avant l'arrêt.

Par intégration de  $a_x$ , on obtient :

$$\begin{aligned} V_x &= a_x t + V_0 \\ &= -g \sin \alpha \cdot t + V_0 \end{aligned} \quad (\text{S4.3})$$

Par intégration de  $V_x$ , on obtient :

$$x(t) = -\frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot t^2 + V_0 t + x_0$$

avec  $x_0 = 0$ .

$$x(t) = -\frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot t^2 + V_0 t$$

Date à laquelle le solide s'arrête.

À l'arrêt,  $V_x(t) = 0$ ;

$$(\text{S4.3}) \Rightarrow -g \sin \alpha t + V_0 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{V_0}{g \sin \alpha} = \frac{2}{9,8 \sin 30^\circ} = 0,408 \text{ s}$$

Position du solide à cette date :

$$x = -\frac{1}{2} 9,8 \sin 30^\circ (0,408)^2 + 2 \cdot 0,408$$

$$x(t) = 0,408 \text{ m}$$

La distance parcourue sur le plan incliné avant l'arrêt est  $d = 0,408$  m.

## 5.3. Comportement du solide après l'arrêt.



## 4.7. Solutions des exercices et problèmes

Le système est encore soumis aux mêmes forces. D'après la R.E.D.,

$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

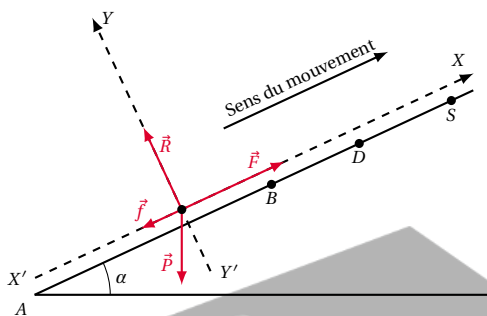
$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{1}{m}(\vec{P} + \vec{R})$$

avec  $\vec{P} + \vec{R} \neq \vec{0}$ . Après l'arrêt, le solide se remet en mouvement rectiligne d'accélération  $\vec{a} = \frac{1}{m}(\vec{P} + \vec{R})$  dans le sens opposé à  $xx'$ .

## Solution 6. (p. 87)

**6.1.** Valeur de la force de traction  $F$  sur les portions AB et BD.

- Système étudié : le corps  $M$ .
- Le référentiel est un référentiel terrestre supposé galiléen.
- Bilan des forces agissant sur le système. Le poids  $\vec{P}$  du corps  $M$ , la réaction  $\vec{R}$  du plan, la force de traction  $\vec{F}$ , la force de frottement  $\vec{f}$



Ecrivons la R.E.D. pour le système :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{f} = m\vec{a}$$

Projetons cette relation sur l'axe  $xx'$  :

$$-P \sin \alpha + 0 + F - f = ma_x$$

avec

$$f = \frac{P}{10} = 0,1P$$

$$\Rightarrow F = ma_x + P \sin \alpha + 0,1P \quad (\text{S4.1})$$

**6.1.1.** Sur le tronçon AB, le mouvement de  $M$  est uniformément accéléré.  $a_x$  est telle que :

$$V_B^2 - V_A^2 = 2a_x(x_B - x_A)$$

$$= 2a_x AB$$

$$\Rightarrow a_x = \frac{V_B^2 - V_A^2}{2AB}$$

A.N. :

$$V_B = 5 \text{ m s}^{-1}, V_A = 0, AB = 5 \text{ m} \Rightarrow a_x = 2,5 \text{ m s}^{-2}.$$

De (S4.1) nous déduisons la valeur numérique de  $F$  :

$$F = 70 \cdot 2,5 + 70 \cdot 10 \sin 30 + 0,1 \cdot 70 \cdot 10$$

$$= 595 \text{ N}$$

**6.1.2.** Sur le tronçon BD, le mouvement de  $M$  est uniforme.

$a_x = 0$  et l'équation (S4.1) devient :

$$F = P \sin \alpha + 0,1P$$

$$\Rightarrow F = 70 \cdot 10 \sin 30 + 0,1 \cdot 70 \cdot 10 = 420 \text{ N}$$

**6.2.** Mouvement de  $M$  après la rupture du câble.

A la rupture du câble  $\vec{F} = \vec{0}$  la relation (S4.1) devient :

$$0 = ma'_x + P \sin \alpha + 0,1P$$

$$\Rightarrow a'_x = -g(0,1 + \sin \alpha)$$

$g$  et  $\alpha$  étant constant,  $a_x$  est constant et négatif. Donc le mouvement de  $M$  est rectiligne uniformément retardé. Date à laquelle  $M$  repassera par A.

Soit S, le point culminant de  $M$  sur le plan incliné.

Calculons la durée de parcours et la longueur du trajet DS.

Par intégration de  $a'_x$  en tenant compte de  $V_D$  :

$$V'_x(t) = -g(0,1 + \sin \alpha)t + V_D$$

Au point S,  $V'_x(t) = 0$ .

Date d'arrivée de  $M$  en S (égale à la durée de parcours DS)

$$-g(0,1 + \sin \alpha)t_s + V_D = 0$$

$$\Rightarrow t_s = \frac{V_D}{g(0,1 + \sin \alpha)} = 0,833 \text{ s}$$

Distance DS. L'équation horaire de  $M$  sur DS est :

$$x(t) = -g(0,1 + \sin \alpha)t^2 + V_D t$$

$$\Delta t = t_s = 0,833 \text{ s},$$

$$x(t_s) = DS = 2,08 \text{ m}$$

Distance totale parcourue par le corps  $M$  avant l'arrêt suivi du retour.

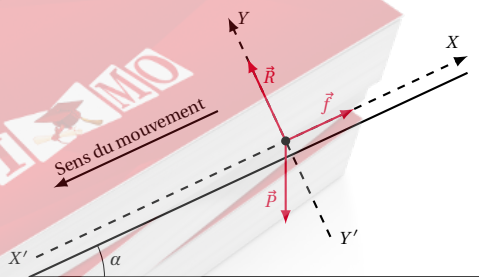
$$AS = AB + BD + DS$$

$$= 5 + 25 + 2,08 = 32,08 \text{ m}$$

Au point S, le corps  $M$  rebrousse chemin avec une vitesse initiale nulle.

Déterminons l'accélération de ce mouvement de descente.

- Système étudié : le corps  $M$ .
- Le référentiel est toujours un référentiel terrestre supposé galiléen.
- Bilan des forces agissant sur le système. Le poids  $\vec{P}$  du corps  $M$ , la réaction  $\vec{R}$  du plan, et la force de frottement  $\vec{f}$  opposée au mouvement.



Ecrivons la R.E.D. pour le système :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = m\vec{a}''$$

Projetons cette relation sur l'axe  $x'x$  orienté dans le sens

du mouvement :

$$P \sin \alpha + 0 - f = m a_x''$$

avec  $f = \frac{P}{10} = 0,1P$ .

$$\Rightarrow a_x'' = g(\sin \alpha - 0,1) = 0,4g$$

L'équation du mouvement de  $M$  à la descente est :

$$x(t) = \frac{1}{2} a_x'' t^2$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2x(t)}{a_x''}} = \sqrt{\frac{32,08}{2}} = 4 \text{ s}$$

Durée du parcours AB.

Le mouvement de  $M$  étant rectiligne uniformément varié,  $V_x = a_x t + V_{0x}$  où  $V_{0x} = 0$

$$t = \frac{V_x}{a_x}$$

A.N.  $V = 5 \text{ ms}^{-1}$ ;  $a_x = 2,5 \text{ ms}^{-2}$ ;  $\Rightarrow t = 2 \text{ s}$ .

Durée du parcours BD où le mouvement de  $M$  est uniforme.

$$x = V t \Rightarrow t = \frac{x}{V}$$

A.N.  $x = 25 \text{ m}$ ;  $V = 5 \text{ m}$ ;  $t = 5 \text{ s}$ .

Durée totale du parcours ASA.

$$t = t_{AB} + t_{BD} + t_{DS} + t_{SA}$$

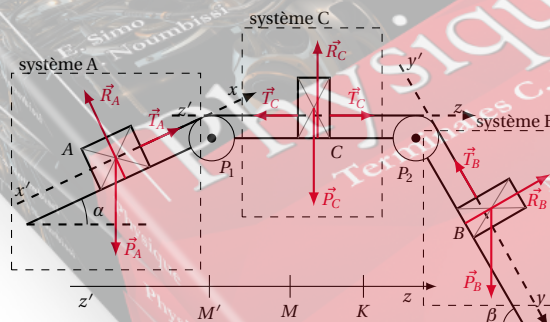
A.N.  $t_{AB} = 2 \text{ s}$ ;  $t_{BD} = 5 \text{ s}$ ;  $t_{DS} = 0,833 \text{ s}$ ;  $t_{SA} = 4 \text{ s}$   
 $\Rightarrow t = 11,8 \text{ s}$ .

### Solution 7. (p. 87)

#### 7.1. Conditions d'équilibre des solides A, B et C.

Découpons le système à étudier en trois parties :

- le solide A de masse  $M_1$ ;
- le solide B de masse  $M_2$ ;
- le solide C de masse  $M_3$ .



#### ■ Intéressons-nous au solide A.

Il est soumis à son poids  $\vec{P}_A = M_1 \vec{g}$ , à la réaction  $\vec{R}_A$  du plan incliné et à la tension  $\vec{T}_A$  du fil.

La condition d'équilibre ou du mouvement uniforme du solide A se traduit par :

$$\vec{P}_A + \vec{R}_A + \vec{T}_A = \vec{0}.$$

La projection de cette relation sur l'axe  $x'$  donne :

$$-P_A \sin \alpha + T_A = 0 \quad (\text{S4.1})$$

#### ■ Intéressons-nous au solide B.

Il est soumis à son poids  $\vec{P}_B = M_2 \vec{g}$ , à la réaction  $\vec{R}_B$  du plan incliné et à la tension  $\vec{T}_B$  du fil.

La condition d'équilibre ou du mouvement uniforme de B traduit par :

$$\vec{P}_B + \vec{R}_B + \vec{T}_B = \vec{0}$$

La projection de cette relation sur l'axe  $y'y$  donne :

$$-P_B \sin \alpha + T_B = 0 \quad (\text{S4.2})$$

#### ■ Intéressons-nous au solide C.

Il est soumis à son poids  $\vec{P}_C = M_3 \vec{g}$ , à la réaction  $\vec{R}_C$  du plan horizontal, à la tension  $\vec{T}'_C$  du fil ( $f_1$ ) et à la tension  $\vec{T}_C$  du fil ( $f_2$ ). La condition d'équilibre ou du mouvement uniforme du solide C se traduit par :

$$\vec{P}_C + \vec{R}_C + \vec{T}'_C + \vec{T}_C = \vec{0}$$

La projection de cette relation sur l'axe  $z'z$  donne :

$$-T'_C + T_C = 0 \quad (\text{S4.3})$$

Le fil ( $f_1$ ) est inextensible, sa tension est la même le long du fil.

$$T_A = T'_C = T'$$

Pour le fil ( $f_2$ ) inextensible aussi, on aura :

$$T_B = T_C = T$$

Les équations (S4.1), (S4.2), et (S4.3) deviennent :

$$\begin{cases} -M_1 g \sin \alpha + T = 0 & (\text{S4.1}) \\ M_2 g \sin \beta - T' = 0 & (\text{S4.2}) \\ -T + T' = 0 & (\text{S4.3}) \end{cases}$$

avec  $P_A = M_1 g$ ;  $P_B = M_2 g$  et  $P_C = M_3 g$ . Ce qui donne, par addition membre à membre,

$$-M_1 g \sin \alpha + M_2 g \sin \beta = 0 \quad (\text{S4.4})$$

C'est la relation qui lie les masses des solides et les angles  $\alpha$  et  $\beta$  pour que les solides soient au repos ou aient un mouvement uniforme.

#### 7.2. Dédution de la valeur de $\beta$ .

De la relation (S4.4), on a :

$$\sin \beta = \frac{M_1}{M_2} \sin \alpha$$

$$\sin \beta = \frac{0,4}{0,3} \sin 30^\circ = 0,66$$

$$\Rightarrow \beta = 41,3^\circ$$

#### 7.3. Expression de l'accélération $a$ pour $\beta = 60^\circ$ .

Pour  $\beta = 60^\circ$ , la relation (S4.4) n'est plus vérifiée. En effet,

$$-0,3 \sin 30 + 0,4 \sin 60 = 0,196$$

Le système n'est plus en équilibre :  $M_2$  descend le long du plan incliné entraînant  $M_1$  et  $M_3$ . Appliquons le théorème du centre d'inertie à chacun des solides A, B, et C.

Le référentiel choisi est terrestre donc galiléen.

Le bilan des forces est

■ Pour le solide A, le théorème du centre d'inertie se traduit par :

$$\vec{P}_A + \vec{R}_A + \vec{T}_A = M_1 \vec{a}$$

## 4.7. Solutions des exercices et problèmes

La projection de cette relation sur l'axe  $x'x$  donne :

$$-P_A \sin \alpha + T_A = M_1 a_x \quad (\text{S4.5})$$

- Pour le solide  $B$ , le théorème du centre d'inertie se traduit par :

$$\vec{P}_B + \vec{R}_B + \vec{T}_B = M_2 \vec{a}$$

La projection de cette relation sur l'axe  $y'y$  donne :

$$P_B \sin \alpha - T_A = M_2 a_y \quad (\text{S4.6})$$

- Pour le solide  $C$ , le théorème du centre d'inertie se traduit par :

$$\vec{P}_C + \vec{R}_C + \vec{T}'_C + \vec{T}_C = M_3 \vec{a}$$

La projection de cette relation sur l'axe  $z'z$  donne :

$$-T'_C + T_C = M_3 a_z \quad (\text{S4.7})$$

$$T_A = T'_C = T' \text{ et } T_B = T_C = T$$

Les fils étant inextensibles, les corps  $A$ ,  $B$  et  $C$  ont la même accélération. Donc :

$$a_x = a_y = a_z = a$$

Les équations (S4.5), (S4.6), et (S4.7) deviennent :

$$\begin{cases} -M_1 g \sin \alpha + T = M_1 a & (\text{S4.5}) \\ M_2 g \sin \beta - T' = M_2 a & (\text{S4.6}) \\ -T + T' = M_3 a & (\text{S4.7}) \end{cases}$$

avec  $P_A = M_1 g$ ;  $P_B = M_2 g$  et  $P_C = M_3 g$ .

Ce qui donne, par addition membre à membre,

$$\begin{aligned} -M_1 g \sin \alpha + M_2 g \sin \beta &= (M_1 + M_2 + M_3) a \\ \Rightarrow a &= \frac{M_2 \sin \beta - M_1 \sin \alpha}{M_1 + M_2 + M_3} g \end{aligned}$$

A.N.  $M_1 = 0,4 \text{ kg}$ ;  $M_2 = 0,3 \text{ kg}$ ;  $\alpha = 30^\circ$ ;  $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ ;  $\beta = 60^\circ$ ;  $a = 0,6 \text{ ms}^{-2}$ .

L'accélération  $a$  est une constante positive, le mouvement du système est uniformément varié.

#### 7.4. Vitesse des solides après un parcours de 2 m

$$V^2 - V_0^2 = 2ax$$

$$\Rightarrow V = \sqrt{2ax} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 0,6} = 1,55 \text{ ms}^{-1}$$

- Calcul de la durée de ce parcours.

Par intégrations successives de  $a$  et en tenant compte des conditions initiales qui sont : (à  $t = 0$ ,  $v_0 = 0$  et  $x_0 = 0$ ),

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} a t^2 \\ \Rightarrow t &= \sqrt{\frac{2x}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2}{0,6}} = 2,6 \text{ s} \end{aligned}$$

#### 7.5. Nouvelle accélération $a'$ après le décrochage du solide $B$ .

Le solide étant décroché, le système continue son mouvement dans le même sens que ci-dessus mais avec une accélération  $a'$  dont l'expression littérale s'obtient en remplaçant dans l'expression de  $a$  ci-dessus  $M_2$  par 0.

$$\begin{aligned} a' &= \frac{0 - M_1 \sin \alpha}{M_1 + 0 + M_3} g \\ \Rightarrow a' &= -\frac{M_1 \sin \alpha}{M_1 + M_3} g a' = -2,85 \text{ ms}^{-2} \end{aligned}$$

Description du mouvement ultérieur de  $A$  et  $C$ .

$a'$  est une constante négative. Donc, immédiatement après le décrochage de  $B$ , le système ( $A$  et  $C$ ) a un mouvement uniformément retardé dans le sens  $x'x$  pour  $A$  et  $y'y$  pour  $C$ .

La vitesse du système ( $A$  et  $C$ ) décroît alors, puis s'annule au point  $K$ . À partir du point  $K$  le système rebrousse chemin avec un mouvement accéléré dans le sens  $xx'$  pour  $A$  et  $yy'$  pour  $C$ .

Le bilan des forces n'ayant pas changé l'accélération  $a'' = -a'$ .

#### 7.6. Calcul de la distance $MM'$ .

Calculons la distance  $MK = y$  (distance parcourue pendant la phase retardée).

$$V_K^2 - V_M^2 = 2a'y$$

avec  $V_K = 0$ ,

$$y = -\frac{V_M^2}{2a'} = \frac{-(1,55)^2}{2(-2,85)} = 0,42 \text{ m}$$

Calculons le temps mis par le système pour parcourir cette distance.

En intégrant  $a'$  on obtient :  $V = a't + H$  avec  $H = C^{te}$  à déterminer.

Prenons pour origine des espaces le point  $M$  et pour origine des dates  $t = 0$ . À ce moment  $V_0 = V_M = 1,55 \text{ ms}^{-1}$ . Donc, pour  $t = 0$ ,

$$V = V_M = 0t + H$$

$$\Rightarrow H = V_M$$

d'où l'équation horaire de la vitesse de ce système :

$$V = a't + V_M$$

Au point  $K$  on a :  $V_K = a't + V_M$ . Or au point  $K$ ,

$$V_K = 0$$

$$\Rightarrow a't + V_M = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{-V_M}{a'} = \frac{-1,55}{-2,85} = 0,54 \text{ s}$$

On constate que la phase retardée du mouvement du système dure  $t_1 = 0,54 \text{ s}$  et la phase accélérée dure :  $t_2 = 2 - 0,54 = 1,46 \text{ s}$

Calculons alors la distance  $KM'$ .

Par intégrations successives de  $a''$  et en tenant compte des conditions initiales (à  $t = 0$ ,  $v_0 = V_K = 0$  et  $y_0 = 0$ ),

$$\begin{aligned} KM' &= y' = \frac{1}{2} a'' t^2 \\ y' &= \frac{1}{2} \cdot 2,85 \cdot (1,46)^2 = 3,04 \text{ m} \end{aligned}$$

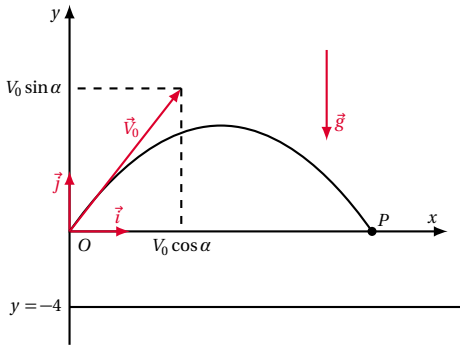
La distance  $MM'$  est alors :

$$MM' = MK + KM' = 0,42 - 3,04 = -2,62$$

$M'$  se trouve entre  $M$  et la poulie  $p_1$  à 2,62 m de  $M$ .

#### Solution 8. (p. 88)

##### 8.1. Équations horaires du mouvement de la bille.



Système étudié : la bille dans l'espace champ de pesanteur. Dans le repère terrestre donc galiléen, la bille est soumise à la seule action de son poids. D'après le théorème du centre d'inertie, on a :

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}_{\text{ext}} &= m\vec{a} \\ \Rightarrow m\vec{g} &= m\vec{a} \\ \Rightarrow \vec{a} &= \vec{g}\end{aligned}\quad (\text{S4.1})$$

La projection de (S4.1) sur les axes  $x'Ox$  et  $y'Oy$  donne :

$$\text{suivant } x'Ox : a_x = 0$$

$$\text{suivant } y'Oy : a_y = -g$$

En intégrant successivement  $a_x$  et  $a_y$  en tenant compte des conditions initiales (à  $t = 0$  la bille est au point  $O$  avec une vitesse  $V_0$  de composante,  $V_x = V_0 \cos \alpha$  et  $V_y = V_0 \sin \alpha$ ) on obtient la vitesse et la position de la bille à un instant quelconque.

$$\begin{cases} V_x = V_0 \cos \alpha \\ V_y = -gt + V_0 \sin \alpha \end{cases} \quad (\text{S4.2})$$

$$\quad \quad \quad (\text{S4.3})$$

$$\begin{cases} x = V_0 \cos \alpha t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + (V_0 \sin \alpha)t \end{cases} \quad (\text{S4.4})$$

$$\quad \quad \quad (\text{S4.5})$$

### 8.2. Équation de la trajectoire.

Elle s'obtient en éliminant  $t$  entre les équations (S4.4) et (S4.5) de (S4.4)

On a :  $t = \frac{x}{V_0 \cos \alpha}$  et (S4.5) devient :

$$y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{V_0 \cos \alpha}\right)^2 + (V_0 \sin \alpha)\left(\frac{x}{V_0 \cos \alpha}\right)$$

d'où :

$$y = \frac{-1,95 \times 10^{-2}}{\cos^2 \alpha} x^2 + (\tan \alpha)x$$

### 8.3. Calcul du temps $t$ mis par la bille pour monter avant de descendre.

La hauteur atteinte par la bille au cours de cette montée correspond au sommet de la trajectoire. A ce sommet, la composante  $V_y$  de la vitesse s'annule. ( $V_y = 0$ ).

$$(\text{S4.3}) \Rightarrow V_y = -gt + V_0 \sin \alpha = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{V_0 \sin \alpha}{g}$$

$$t = \frac{16 \sin 50^\circ}{10} = 1,23 \text{ s}$$

Vitesse de la bille à la fin de la phase ascendante.

A la fin de cette phase, la vitesse de la bille est réduite à sa composante  $V_x$  puisque  $V_y = 0$ . Donc :

$$V = V_x = V_0 \cos \alpha$$

$$V = 16 \cos 50^\circ = 10,3 \text{ m s}^{-1}$$

### 8.4. Calcul de l'altitude maximale $h$ atteinte par la bille.

Première méthode

$h$  est donnée par la relation (S4.5) :

$$h = y(t = 1,23 \text{ s}) = -\frac{1}{2}t^2 + V_0 \sin \alpha t$$

$$h = -\frac{1}{2} \cdot (1,23)^2 + 16 \sin(50^\circ) \cdot 1,23$$

$$h = 7,51 \text{ m}$$

Deuxième méthode

A partir de l'équation de la trajectoire :

$$y = \frac{-1,95 \times 10^{-2}}{\cos^2 \alpha} x^2 + (\tan \alpha)x$$

Au sommet  $S$  de la trajectoire,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_s} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{g}{V_0^2 \cos^2 \alpha} x + \tan \alpha = 0$$

$$\Rightarrow x_s = \frac{\tan \alpha V_0^2 \cos^2 \alpha}{g} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha V_0^2}{g}$$

$$y_s = -\frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} x_s^2 + x_s \tan \alpha$$

$$= -\frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} \left(\frac{V_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g}\right)^2$$

$$+ \frac{V_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g \tan \alpha} \alpha$$

$$y_s = h = \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{16^2 \cdot (\sin 50^\circ)^2}{20} = 7,51 \text{ m}$$

Troisième méthode.

En utilisant la conservation de l'énergie mécanique. Système {bille, Terre} En  $O$ ,

$$E_1 = \frac{1}{2}mV_0^2 + 0 (E_p(O) = 0)$$

En  $S$ ,

$$E_2 = \frac{1}{2}mV_s^2 + mgh$$

(avec  $V_s = V_0 \sin \alpha$ )

$$E_1 = E_2$$

$$\frac{1}{2}mV_0^2 = \frac{1}{2}mV_0^2 \cos^2 \alpha + mgh$$

$$\Rightarrow h = \frac{V_0^2 - V_0^2 \cos^2 \alpha}{2g}$$

$$= \frac{V_0^2}{2g} (1 - \cos^2 \alpha)$$

$$= \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$



## 4.7. Solutions des exercices et problèmes

$$\text{car } 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$$

$$h = \frac{256 \sin^2(50)}{2 \times 10} = 7,51 \text{ m}$$

**8.5. Calcul de la distance OP.**

Le point  $P$  étant situé sur l'axe  $x'Ox$ , a pour coordonnées  $P(x_P, y_P = 0)$ . A ce point, l'équation de la trajectoire de la balle se traduit par :

$$0 = \frac{-g}{2V_O^2 \cos^2 \alpha} x_P^2 + (\tan \alpha) x_P = 0$$

Cette équation de second degré en  $x_P$  admet deux solutions :

$$x_P = 0 \quad (\text{C'est le point de départ de la balle})$$

$$\begin{aligned} x_P &= \frac{2V_O^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} \\ &= \frac{2 \cdot (16)^2 \sin(50^\circ) \cos(50^\circ)}{10} \\ &= 25,21 \text{ m} \quad (\text{C'est la portée } OP \text{ du tir}) \end{aligned}$$

Calcul de la valeur de  $\alpha$  pour que la distance  $OP$  soit maximale.

Rappelons que :  $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin(2\alpha)$ . La distance  $OP$  est maximale pour

$$\sin 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin 2\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

Pour  $\alpha = 45^\circ$

$$OP = x = \frac{16^2 \sin(45^\circ \cdot 2)}{10} = 25,6 \text{ m}$$

Détermination des angles de tir  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$

Au point  $Q$  de coordonnées  $x_Q = 10$  et  $y_Q = 0$ , l'équation de la trajectoire s'écrit :

$$y = \frac{-g}{2V_O^2 \cos^2 \alpha} 10^2 + (\tan \alpha) 10 = 0$$

$$\text{avec } \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$$

$$\begin{aligned} -\frac{g}{2V_O^2} (1 + \tan^2 \alpha) 100 + 10 \tan \alpha &= 0 \\ \Rightarrow -\tan^2 \alpha + 5,12 \tan \alpha - 1 &= 0 \end{aligned}$$

La résolution de cette équation de second degré en  $\tan \alpha$  admet deux solutions :

$$\tan \alpha_1 = 0,20$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 11,5^\circ$$

$$\tan \alpha_2 = 4,91$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = 78,5^\circ$$

**8.6. Détermination des coordonnées du point R au sol.**

La balle est lancée à partir d'un point situé à 4 m du sol donc tout point au sol a pour ordonnée  $y = -4$ . Le point  $R$  a pour coordonnées  $(x_R, y_R = -4)$ . Les coordonnées du point  $R$  vérifient l'équation de la trajectoire.

$$-4 = -\frac{1}{2} g \frac{x_R^2}{V_O^2 \cos^2 \alpha} + x_R \tan \alpha$$

La portée est maximale pour  $\alpha = 45^\circ$  :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{x_R^2}{16^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} + x_R \cdot 1 + 4 &= 0 \\ \Rightarrow -0,039 x_R^2 + x_R + 4 &= 0 \end{aligned}$$

La résolution de cette équation donne deux valeurs de  $x_R$  :

$$x_R = x_1 = 29,15 \text{ m}$$

$$x_2 = -3,51 \text{ m}$$

$x_2$  est incompatible avec les hypothèses.

**Solution 9. (p. 88)**

**9.1. Montrons que la trajectoire du ballon est dans le plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .**

Système étudié : le ballon assimilé à un point matériel. Dans le repère terrestre donc galiléen, le ballon est soumis à la seule action de son poids. D'après le théorème du centre d'inertie, on a :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g} \quad (\text{S4.1})$$

Les coordonnées de  $\vec{a}$  dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  sont :

$$\vec{a} = \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \\ a_z = 0 \end{cases}$$

Les coordonnées du vecteur vitesse et vecteur position du ballon à un instant quelconque, s'obtiennent en intégrant successivement  $\vec{a}$  en tenant compte des coordonnées du ballon et celles du vecteur vitesse à l'instant  $t = 0$  : à  $t = 0$

$$\vec{O}G = \begin{cases} x_O = 0 \\ y_O = 0 \\ z_O = 0 \end{cases}$$

$$\vec{V}_O = \begin{cases} V_{Ox} = V_O \cos \alpha \\ V_{Oy} = V_O \sin \alpha \\ V_{Oz} = 0 \end{cases}$$

à  $t$  quelconque

$$\vec{V} = \begin{cases} V_x = V_O \cos \alpha \\ V_y = -gt + V_O \sin \alpha \\ V_z = 0 \end{cases}$$

et

$$\vec{O}G = \begin{cases} x = (V_O \cos \alpha) t \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + (V_O \sin \alpha) t \\ z = 0 \end{cases}$$

$z = 0$  quel que soit  $t$ , nous concluons que le mouvement du ballon se fait dans le plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

**9.2. Equation de la trajectoire.**



Elle s'obtient en éliminant  $t$  entre les expressions  $x$  et  $y$

$$t = \frac{x}{V_O \cos \alpha}$$

et

$$y = -\frac{1}{2}g \left( \frac{x}{V_O \cos \alpha} \right)^2 + (V_O \sin \alpha) \left( \frac{x}{\cos \alpha} \right)$$

d'où :

$$y = \frac{-g}{2V_O^2 \cos^2 \alpha} x^2 + (\tan \alpha)x$$

### 9.3. Calcul de la vitesse du ballon.

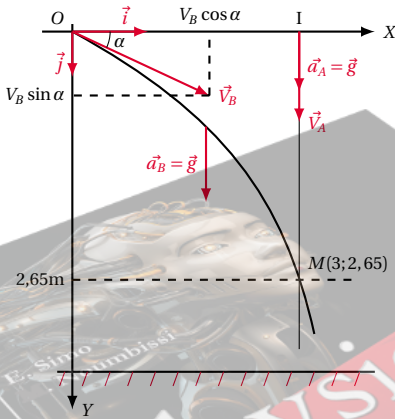
Pour que le ballon pénètre dans les buts au ras de la barre transversale, la trajectoire le point  $B$  de coordonnées,  $x_B = d = 25$  et  $y_B = h = 2,44$  doit appartenir à la trajectoire. Donc :

$$h = \frac{-g}{2V_O^2 \cos^2 \alpha} d^2 + (\tan \alpha)d$$

$$\Rightarrow V_O = \frac{gd^2}{2 \cos^2 \alpha (d \tan \alpha - h)} = 18,6 \text{ ms}^{-1}$$

## Solution 10. (p. 88)

### 10.1. Equation horaire de la bille A.



Dans l'air, la bille A n'est soumise qu'à la seule action de son poids. D'après le théorème du centre d'inertie, on a :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

Projetons cette équation vectorielle sur les axes  $yOy'$  et  $xOx'$  du repère  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  lié à un référentiel terrestre. On obtient :

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = g \end{cases}$$

En intégrant "a" deux fois de suite en tenant qu'à l'instant  $t = 0$  la bille A est au point  $I(3, 0)$  animé de la vitesse  $\vec{V}_A$ , on a l'équation horaire de la bille A.

$$\begin{cases} y_A = \frac{1}{2}gt^2 + V_A t = 5t^2 + 7t & (S4.1) \\ x_A = 3 & (S4.2) \end{cases}$$

### 10.2. Equations horaires du mouvement de la bille B. La

démarche étant la même qu'en 3.1, on obtient :

$$\begin{cases} x_B = (V_B \cos \alpha)t & (S4.3) \\ y_B = \frac{1}{2}gt^2 + (V_B \sin \alpha)t & (S4.4) \end{cases}$$

### 10.3. Calcul de $V_B$ .

Il y a choc entre les deux billes quand  $y_B = y_A$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}gt^2 + (V_B \sin \alpha)t &= \frac{1}{2}gt^2 + V_A t \\ \Rightarrow V_B &= \frac{V_A}{\sin \alpha} = \frac{7}{\sin(30^\circ)} = 14 \text{ ms}^{-1} \end{aligned}$$

Détermination de l'instant  $t$  du choc.

De (S4.3) on a :

$$t = \frac{x_B}{V_B \cos \alpha} = \frac{3}{7 \cos(30^\circ)} = 0,25 \text{ s}$$

Détermination du lieu du choc

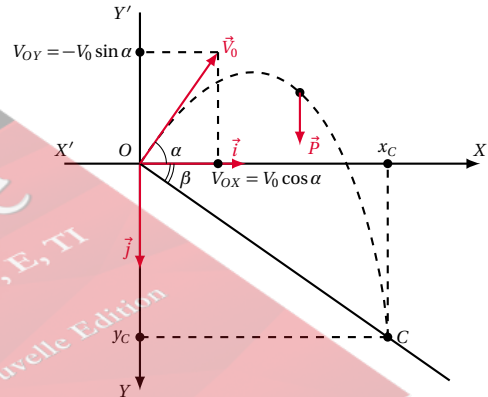
De (S4.1) on a :

$$y = 5 \cdot (0,25)^2 + 7 \cdot 0,25 = 2,06 \text{ m}$$

Dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  le choc a lieu en un point  $M$  de coordonnées  $x = 3$  et  $y = 2,06$ .

## Solution 11. (p. 89)

Nature de la trajectoire du skieur.



Au point O, le skieur est soumis à une seule force, son poids. D'après le théorème du centre d'inertie,

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

Projetons cette équation vectorielle sur les axes  $yOy'$  et  $xOx'$  du repère  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  lié à un référentiel terrestre

$$\vec{a} = \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = g \end{cases}$$

En intégrons "a" deux fois en tenant compte qu'à l'instant  $t = 0$ , le skieur se trouve en O animé de la vitesse

## 4.7. Solutions des exercices et problèmes

 $\vec{v}_0$ 

$$\begin{cases} x = V_0 \cos \alpha t \\ y = \frac{1}{2} g t^2 - (V_0 \sin \alpha) t \end{cases} \quad (\text{S4.1})$$

$$(\text{S4.2})$$

En éliminant  $t$  entre (S4.1) et (S4.2), on a :

$$y = \frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 - (\tan \alpha) x$$

A.N.  $y = 0,059 \cdot x^2 - 0,84x$ .

Cette équation est de la forme :

$$y = Ax^2 + Bx$$

Nous concluons que la trajectoire du skieur est parabolique.

Coordonnées du point C

Le point C est l'intersection de cette parabole avec la droite d'équation :

$$\begin{aligned} y &= x \tan \beta \\ \beta &= 45^\circ \\ \tan 45^\circ &= 1 \\ y &= x \end{aligned}$$

L'abscisse du point C est :

$$\begin{aligned} 0,059x^2 - 0,84x &= x \\ \Rightarrow x &= 0 \\ x &= 31,1 \text{ m} \end{aligned}$$

L'ordonnée du C est donc :  $y = 31,1 \text{ m}$ .

Longueur OC.

$$OC^2 = x^2 + y^2$$

avec

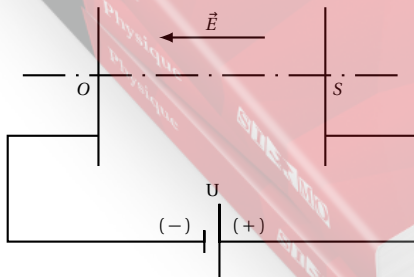
$$\begin{aligned} y &= x \\ \Rightarrow OC^2 &= 2x^2 \\ \Rightarrow OC &= x\sqrt{2} \\ OC &= 44 \text{ m} \end{aligned}$$

Durée du saut :

$$\begin{aligned} x &= V_0 \cos \alpha t \\ \Rightarrow t &= \frac{x}{V_0 \cos \alpha} = \frac{31,1}{12 \cos 40^\circ} = 3,4 \text{ s} \end{aligned}$$

### Solution 12. (p. 89)

#### 12.1. Etude du champ électrique $\vec{E}$ .



L'électron, parti de O est accéléré. Donc la force élec-

trique qu'il subit est orientée de O vers S. Cette force a pour expression :

$\vec{F} = q\vec{E}$ , avec  $q = -e$ , charge  $(-) \Rightarrow \vec{F}$  et  $\vec{E}$  sont opposés.  $\vec{E}$  est orienté de S vers O. Nous savons aussi que  $\vec{E}$  est orienté du potentiel le plus élevé au potentiel le plus bas. Donc, le potentiel du point S ( $V_S$ ) est supérieur au potentiel du point O ( $V_O$ ) et  $V_S - V_O > 0$ .  $\vec{E}$  a pour intensité :

$$E = \frac{U}{d} = \frac{100}{5 \times 10^{-2}} = 2000 \text{ V m}^{-1}$$

#### 12.2. Comparaison du poids de l'électron à la force électrique.

■ Le poids de l'électron est :  $P = mg = 9 \times 10^{-31} \cdot 9,80 = 8,82 \times 10^{-30} \text{ N}$ .

■ L'intensité de la force électrique est :  $F = qE = 1,6 \times 10^{-19} \cdot 2000 = 3,2 \times 10^{-16} \text{ N}$ .

Calculons le rapport  $\frac{F}{P} = \frac{3,2 \times 10^{-16}}{8,82 \times 10^{-30}} = 3,6 \times 10^{13} \Rightarrow F = 3,6 \times 10^{13} P$ .

On remarque que  $F$  vaut 36.000 milliards  $P$  ! Le poids d'un électron est négligeable devant la force électrique.

#### 12.3. Vitesse $v_S$ de l'électron au point S.

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique à l'électron entre le point O et le point S.

$$E_{cS} - E_{cO} = W(\vec{F})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_S^2 - \frac{1}{2} m v_O^2 = q(V_O - V_S)$$

avec  $V_O = 0$ ;  $q = -e$ ;  $V_O - V_S = -U$ .

Nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v_S^2 &= -e(-U) = eU \\ \Rightarrow v_S &= \sqrt{\frac{2eU}{m}} = 5,96 \times 10^6 \text{ m s}^{-1} \end{aligned}$$

#### 12.4. Évolution de la vitesse $V_S$ quand $U$ augmente.

De l'expression  $v_S = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$ , nous remarquons que lorsque  $U$  augmente,  $V_S$  augmente aussi. Mais  $V_S$  ne peut augmenter indéfiniment. En effet  $V_S$  est limitée par la célérité de la lumière dans le vide  $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ .

### Solution 13. (p. 89)

#### 13.1. Intensité du champ électrique.

$\vec{E}$  a pour intensité :

$$E = \frac{U}{d} = \frac{100}{1,5 \times 10^{-2}} = 6667 \text{ V m}^{-1}$$

#### 13.2. Coordonnées du point de sortie S.

■ Système étudié : l'électron.

■ Référentiel d'étude : référentiel du laboratoire considéré comme galiléen.

■ Bilan des forces agissant sur le système : la force électrique  $\vec{F} = q\vec{E}$ . (le poids étant négligeable.)

D'après le théorème du centre d'inertie,

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_{\text{ext}} &= m\vec{a} \\ \Rightarrow q\vec{E} &= m\vec{a} \\ \Rightarrow \vec{a} &= \frac{q}{m} \vec{E} \end{aligned}$$

Projetons cette relation vectorielle dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . puis intégrons successivement  $\vec{a}$  et en tenant compte des conditions initiales, nous avons :

$$\vec{a} = \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -\frac{q}{m} E \\ a_z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{V} = \begin{cases} V_x = 0 \\ V_y = -\frac{q}{m} E t \\ V_z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{OG} = \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{q}{2m} E t^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

En éliminant  $t$  entre les équations horaires, on obtient :

$$y = -\frac{qE}{2mV_0^2} x^2$$

Au point de sortie S, on a :

$$x_S = l \text{ et } y_S = -\frac{qE}{2mV_0^2} l^2. \text{ A.N. } x_S = 2,5 \text{ cm} = 25 \text{ mm},$$

$$y_S = 5,72 \times 10^{-3} \text{ m} = 5,72 \text{ mm}.$$

Vitesse  $V_S$  de l'électron en S.

Au point S,

$$x_S = l = V_0 t_S$$

$$\Rightarrow t_S = \frac{l}{V_0}$$

$$\vec{V}_{(t=t_S)} = \begin{cases} V_{Sx} = 0 \\ V_{Sy} = -\frac{q}{m} E t_S = -\frac{qEl}{mV_0} \\ V_{Sz} = 0 \end{cases}$$

D'où l'expression de  $V_S$  :

$$V_S = \sqrt{V_{Sx}^2 + V_{Sy}^2}$$

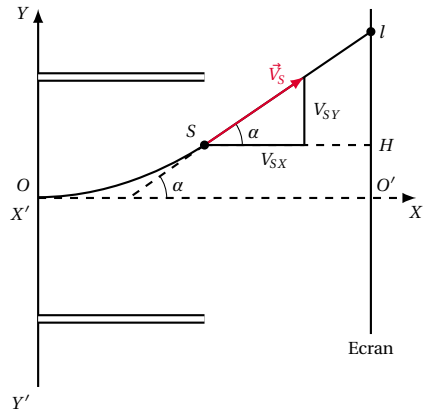
$$= \sqrt{V_0^2 + \left(\frac{qEl}{mV_0}\right)^2}$$

A.N.  $l = 2,5 \text{ cm}$ ;  $d = 1,5 \text{ cm}$ ;  $U = 100 \text{ V}$ ;  
 $V_0 = 8 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$ ;  $m_{\text{électron}} = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ;  
 $q_e = -e = -1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ;  $E = 6667 \text{ V m}^{-1}$ ;  
 $V_S = 8,8 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$ .

**13.3.** Angle de déviation  $\alpha$  du faisceau d'électron.

C'est l'angle compris entre  $\vec{V}_S$  et  $\vec{V}_0$ . Il est donné par :

$$\tan \alpha = \frac{V_{Sy}}{V_{Sx}} = -\frac{qEl}{mV_0^2} = -\frac{(-e)El}{mV_0^2}$$



A.N.  $l = 2,5 \text{ cm}$ ;  $V_0 = 8 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$ ;  $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ;  
 $q_e = -e = -1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ;  $E = 6667 \text{ V m}^{-1}$ ;  
 $V_S = 8,8 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$ ;  $E = 6667 \text{ V m}^{-1}$ .

$$\tan \alpha = 0,4579 \Rightarrow \alpha = 24,6^\circ$$

**13.4.** Position du point d'impact I sur l'écran.

À la sortie des plaques, le mouvement de l'électron est rectiligne uniforme de vecteur vitesse  $\vec{V}_S$ . Le point I a pour coordonnées  $x_I = l + D$  et  $y_I = ?$  (que nous allons calculer).

$$y_I = O'H + HI$$

avec  $O'H = y_S = -\frac{qEl^2}{2mV_0^2}$

Calculons  $HI$ .

$HI$  est donnée par :

$$\tan \alpha = \frac{HI}{SH} = \frac{HI}{D}$$

$$\Rightarrow HI = D \tan \alpha$$

Donc

$$y_I = y_S + D \tan \alpha$$

$$y_S = 5,72 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$D = 0,5 \text{ m}$$

$$\tan \alpha = 0,458$$

$$y_I = 0,23 \text{ m}$$

$$x_I = 52,5 \text{ cm}$$

### Solution 14. (p. 89)

**14.1.** Bilan des forces agissant sur la sphère.

Le poids  $\vec{P} = m\vec{g}$  vertical et la force électrique  $\vec{F} = q\vec{E}$  horizontal.

Montrons que la sphère dans son mouvement reste dans le plan  $(Oxy)$ .

Appliquons le théorème du centre d'inertie à la sphère.

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}$$

$$\Leftrightarrow \vec{P} + \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\Leftrightarrow m\vec{g} + q\vec{E} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{1}{m}(m\vec{g} + q\vec{E})$$

## 4.7. Solutions des exercices et problèmes

$\vec{g}$  et  $\vec{E}$  étant des vecteurs constants,  $\vec{a}$  est un vecteur contenu dans le plan  $(\vec{E}, \vec{g})$ . De plus  $\vec{V}_O = \vec{0}$ . Nous pouvons dire que le mouvement a lieu dans le plan  $((\vec{E}, \vec{g}))$  confondu au plan  $(Ox, Oy)$ .

**14.2.** Composantes du vecteur  $\vec{a}$  sur les axes  $Ox$  et  $Oy$ . Les composantes sur  $Ox$  et  $Oy$  des vecteurs  $\vec{g}$  et  $\vec{E}$  sont :

$$\vec{g} = \begin{cases} g_x = 0 \\ g_y = -g \end{cases}$$

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = E \\ E_y = 0 \end{cases}$$

Nous avons les composantes de  $\vec{a} = \vec{g} + \frac{q}{m} \vec{E}$  qui sont :

$$\vec{a} = \begin{cases} a_x = g_x + \frac{q}{m} E_x = \frac{q}{m} E \\ a_y = g_y + \frac{q}{m} E_y = -g \end{cases}$$

**14.3.** Composantes du vecteur vitesse  $\vec{V}$ .

En tenant compte des conditions initiales à savoir :

$$\vec{V}_O = \vec{0}$$

( $\Rightarrow V_{Ox} = 0$  et  $V_{Oy} = 0$ ) par intégration des composantes de  $\vec{a}$ , nous avons :

$$\vec{V} = \begin{cases} V_x = \frac{qE}{m} t + V_{Ox} = \frac{qE}{m} t \\ V_y = -gt + V_{Oy} = -gt \end{cases}$$

**14.3.1.** Composantes du vecteur position  $O\vec{M}$ .

À  $t = 0$ , la sphère se trouve en  $M_0$  de coordonnées  $x_0 = \frac{d}{2}$  et  $y_0 = l$ .

Intégrons les composantes du vecteur vitesse. Nous obtenons :

$$O\vec{M} = \begin{cases} x = \frac{qE}{2m} t^2 + x_0 = \frac{qE}{2m} t^2 + \frac{d}{2} & (S4.1) \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + y_0 = -\frac{1}{2} g t^2 + l & (S4.2) \end{cases}$$

**14.3.2.** Equation de la trajectoire.

Éliminons  $t$  entre les équations horaires (S4.1) et (S4.2)

$$\begin{cases} (S4.1) \Rightarrow x - \frac{d}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{qE}{m} t^2 & (S4.3) \\ (S4.2) \Rightarrow y - l = -\frac{1}{2} g t^2 & (S4.4) \end{cases}$$

Le rapport

$$\frac{(S4.3)}{(S4.4)} \Rightarrow \frac{x - \frac{d}{2}}{y - l} = -\frac{qE}{mg}$$

$$\Rightarrow (y - l)qE = -mg \left( x - \frac{d}{2} \right)$$

En développant cette égalité, avec  $E = U/d$ , nous obtenons l'équation de la trajectoire.

$$y = -\frac{mgd}{qU} x + \frac{mgd^2}{2qU} + l$$

Cette équation est de la forme  $y = Ax + B$ . C'est l'équation d'une droite. La trajectoire de la sphère chargée est une droite.

**14.4.** Date d'arrivée de la sphère dans le plan horizontal.

Dans ce plan,  $y = 0$ . Posons alors

$$y(t) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} g t^2 + l = 0$$

$$\Rightarrow t^2 = \frac{2l}{g}$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2l}{g}}$$

A.N.  $l = 1 \text{ m}$ ;  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$

$$\Rightarrow t^2 = 0,2$$

$$\Rightarrow t = 0,447 \text{ s}$$

**14.5.** Déterminons  $U$  pour que le point  $P(d, 0)$  appartienne à la trajectoire.

Pour appartenir à la trajectoire, les coordonnées du point  $P$  doivent vérifier l'équation de la trajectoire. Ainsi :

$$0 = -\frac{mgd}{qU} + \frac{mgd^2}{2qU} + l$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{mgd^2}{2qU} + l$$

$$\Rightarrow U = \frac{mgd^2}{2ql}$$

A.N.  $U = 8000 \text{ V}$

## Solution 15. (p. 90)

**15.1.** Représentation de la force électrique en  $O$ .

Cette force a pour expression  $\vec{F} = q\vec{E}$ .  $\vec{E}$  est uniforme et  $q$  est une charge positive  $\Rightarrow \vec{F}$  et  $\vec{E}$  ont même direction et même sens.

**15.2.** Equation et nature de la trajectoire.

■ Système étudié : particule de charge  $q(+)$  et de masse  $m$ .

■ Référentiel d'étude : référentiel du laboratoire supposé galiléen.

■ Bilan des forces extérieures appliquées au système : la force électrique  $\vec{F} = q\vec{E}$  (le poids de la particule est négligeable devant la force électrique).

D'après le théorème du centre d'inertie,

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow q\vec{E} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m} \vec{E}$$

En projetant cette relation vectorielle dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , nous avons :

$$\vec{a} = \begin{cases} a_x \\ a_y \end{cases}$$

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = E \\ E_y = 0 \end{cases}$$

$$\vec{a} = \begin{cases} a_x = \frac{q}{m} E_x = \frac{q}{m} E \\ a_y = \frac{q}{m} E_y = 0 \end{cases}$$

En tenant compte des conditions initiales, (à  $t = 0$ ,  $\vec{V}_O$  ( $V_{Ox} = V_O \cos \alpha$ ;  $V_{Oy} = V_O \sin \alpha$ ) et la particule est en  $O$  ( $x_0 = 0$ ;  $y_0 = 0$ ), intégrons les composantes de  $\vec{d}$ ; nous avons :

$$\vec{V} = \begin{cases} V_x = \frac{qE}{m}t + V_O \cos \alpha \\ V_y = V_O \sin \alpha \end{cases}$$

$$O\vec{M} = \begin{cases} x = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2 + (V_O \cos \alpha) t & (S4.1) \\ y = (V_O \sin \alpha) t & (S4.2) \end{cases}$$

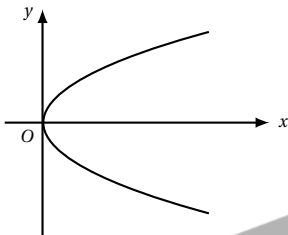
Éliminons  $t$  entre les équations (S4.1) et (S4.2).

$$x = \frac{1}{2} \frac{qE}{m V_O^2 \sin^2 \alpha} y^2 + \frac{1}{\tan \alpha} y$$

A.N.  $V_O = 2 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}$ ;  $m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ;  $q = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ;  $E = 5 \times 10^4 \text{ V m}^{-1}$ ;  $d = 10^{-2} \text{ m}$ ;  $\alpha = 10^\circ$ .

$$x = 3,64 y^2 + 5,67 y$$

C'est l'équation d'une parabole de la forme.



**15.3.** Composante  $V_x$  de la vitesse en fonction de  $x$ .  
Considérons la particule sur sa trajectoire dans la région  $R$ , en un point  $M$  d'abscisse  $x$ . Soit  $\vec{V}$  (de composantes  $V_x$  et  $V_y$ ) le vecteur vitesse de la particule en  $M$ . Suivant l'axe  $Ox$ , appliquons le théorème de l'énergie cinétique à la particule.

$$\frac{1}{2} m v_x^2 - \frac{1}{2} m v_{Ox}^2 = W(\vec{F})_{\text{suivant } Ox} = q(V_O - V_M)$$

$V_O$  et  $V_M$  sont les potentiels respectivement en  $O$  et  $M$ .  
Or

$$\frac{V_O - V_M}{x} = E \Rightarrow V_O - V_M = xE$$

$x$  est la distance qui sépare les plans parallèles passant par  $O$  et  $M$ . Donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v_x^2 - \frac{1}{2} m v_{Ox}^2 &= qEx \\ \Rightarrow v_x^2 &= \frac{2qE}{m} + v_O^2 \cos^2 \alpha \\ v_{Ox} &= v_O \cos \alpha \\ \Rightarrow v_x &= \sqrt{\frac{2qE}{m} + v_O^2 \cos^2 \alpha} \end{aligned}$$

$$\text{A.N. } v_x = \sqrt{1,76 \times 10^{16} x + 3,88 \times 10^{14}}$$

**15.4.** Valeur de la vitesse  $v_F$  de la particule quand elle arrive dans le plan  $P'$ .

Dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , appliquons le théorème de l'énergie cinétique à la particule entre les plaques  $P$  et  $P'$ .

$$\frac{1}{2} m v_F^2 - \frac{1}{2} m v_O^2 = q(V_P - V_{P'})$$

avec  $V_P - V_{P'} = Ed$

$$\begin{aligned} \Rightarrow v_F^2 &= v_O^2 + \frac{2qEd}{m} \\ \Rightarrow v_F &= \sqrt{v_O^2 + \frac{2qEd}{m}} \end{aligned}$$

A.N.  $v_F = 2,4 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}$ .

Angle  $\beta$  compris entre  $v_F$  et l'horizontale

$$\cos \beta = \frac{v_{Fx}}{v_F}$$

Calculons  $v_{Fx}$

En faisant  $x = d$  dans l'expression de  $v_x$ .

$$v_{Fx} = \sqrt{1,76 \times 10^{16} + 3,88 \times 10^{14}} = 2,375 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}$$

$$\cos \beta = \frac{2,375 \times 10^7}{2,4 \times 10^7} = 0,989$$

$$\Rightarrow \beta = 8,2^\circ$$

**15.5.** Trajectoire de la particule après la traversée du plan ( $P'$ ).

À l'extérieur de la région  $R$ ,  $\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} = q\vec{E} = \vec{0}$ . Le poids de la particule étant négligeable, la particule se comporte comme un système isolé. Son mouvement est alors rectiligne uniforme de vecteur-vitesse  $\vec{v}_F$ .

Expression de  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$  :

$$\begin{aligned} \text{À l'entrée de la région } R, \sin \alpha &= \frac{V_{Oy}}{V_O} \\ \text{À la sortie de la région } R, \sin \beta &= \frac{V_{Fy}}{V_F} \end{aligned}$$

Par ailleurs,  $\vec{V}$  a pour coordonnées dans la région  $R$  :

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{qE}{m} t + V_O \cos \alpha \\ V_y &= V_O \sin \alpha \end{aligned}$$

Nous constatons que  $V_y = \text{constante}$  quel que soit  $t$ .  
Donc  $V_{Oy} = V_{Fy} = V_O \sin \alpha$ .

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{V_{Oy}}{V_O} \cdot \frac{V_F}{V_{Fy}} = \frac{V_F}{V_O}$$

$$\text{avec } v_F = \sqrt{v_O^2 + \frac{2qEd}{m}}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} &= \sqrt{\frac{v_O^2 + \frac{2qEd}{m}}{v_O^2}} \\ &= \sqrt{1 + \frac{2qEd}{m v_O^2}} = K \end{aligned}$$

$q, E, d, m$  et  $v_O$  étant constants,  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \text{constante}$



## Application des lois de Newton aux mouvements circulaires uniformes

5.1	<b>Mouvement d'un pendule conique</b>	104
5.2	<b>Mouvement d'un véhicule dans un virage</b>	104
5.3	<b>Mouvement d'un satellite</b>	105
5.3.1	Étudions le mouvement du satellite	105
5.3.2	Expression de la vitesse du satellite	106
5.3.3	Période de révolution du satellite	106
5.4	<b>Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme</b>	106
5.4.1	Etude dynamique : déviation d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme	106
5.5	<b>Enoncés des exercices et problèmes</b>	108
5.6	<b>Solutions des exercices et problèmes</b>	110



## 5.1 Mouvement d'un pendule conique

Le dispositif ci-dessous représente un pendule conique.

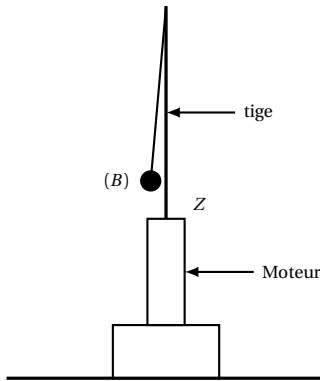
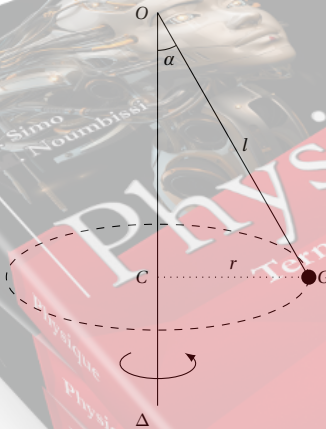


Figure 5.1

Lorsque le moteur tourne à une vitesse  $\omega$ , le fil s'écarte de la tige. Pendant que la boule tourne autour de l'axe vertical  $Oz$  d'un mouvement de rotation uniforme, le fil engendre un cône de révolution de demi-angle au sommet  $\alpha$ .

Figure 5.2



Le centre d'inertie  $G$  de la boule décrit alors un cercle horizontal de rayon  $r = l \sin \alpha$  (où  $l = OG$  = longueur du pendule)

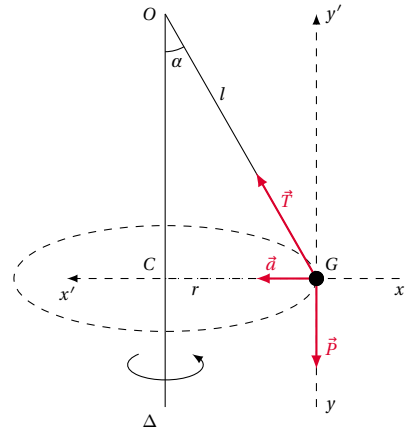
Nous allons déterminer la relation entre la vitesse  $\omega$  et l'angle  $\alpha$ .

Nous utiliserons la méthode de résolution préconisée au chapitre précédent.

- Système étudié : la boule ( $B$ ) de masse  $m$  et de centre d'inertie  $G$ .

- Le référentiel d'étude choisi est le référentiel terrestre supposé galiléen.
- Bilan des forces appliquées au système :
  - le poids  $\vec{P}$  de la boule;
  - la tension  $\vec{T}$  du fil.

Figure 5.3



Appliquons le théorème du centre d'inertie au système :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} \quad (5.1)$$

Projetons (5.1) sur les axes  $xx'$  et  $yy'$ .

$$\text{Suivant } xx' : 0 + T \sin \alpha = ma \quad (5.2)$$

$$\text{Suivant } yy' : -P + T \cos \alpha = 0 \quad (5.3)$$

Dans le triangle  $OCG$ ,

$$GC = r = l \sin \alpha$$

Le mouvement de  $G$  étant circulaire, désignons par  $\omega$ , la vitesse angulaire de  $G$ . L'accélération  $\vec{a}$  du mouvement de  $G$  a pour intensité :

$$a = r\omega^2 = \omega^2 l \sin \alpha$$

De (5.2) on tire :

$$T \sin \alpha = m\omega^2 l \sin \alpha \Rightarrow T = m\omega^2 l \quad (5.4)$$

Dans l'équation (5.3) remplaçons  $T$  par valeur :

$$-mg + m\omega^2 l \cos \alpha = 0$$

d'où l'on tire :

$$\omega^2 l \cos \alpha = g \Rightarrow \cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 l}$$

$$\cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 l}$$

## 5.2 Mouvement d'un véhicule dans un virage

Considérons un cycliste qui aborde en roue libre (c'est-à-dire sans pédaler), un virage circulaire de rayon  $r$ . Soit le système (homme-vélo) de masse totale  $M$ , et de centre d'inertie  $G$ . Appliquons à  $G$  le théorème de centre d'inertie dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Les forces appliquées à l'ensemble sont :

- la réaction  $\vec{R}$  de la piste;
- le poids  $\vec{P}$  de l'ensemble.

On peut donc écrire :

$$\vec{P} + \vec{R} = M \vec{a}_G$$

Si la piste est parfaitement horizontale et qu'il n'y a pas de frottement, la réaction  $\vec{R}$  est perpendiculaire à la piste et il n'y a aucun mouvement du cycliste suivant la verticale. On a donc :

$$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0} \quad \text{soit} \quad \vec{a}_G = \vec{0}$$

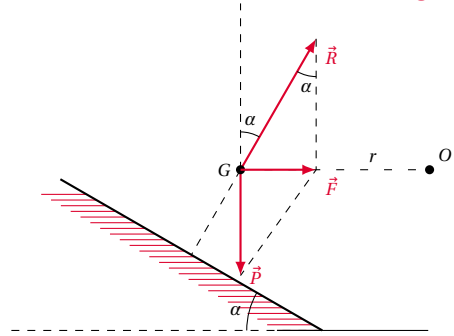
Le mouvement du cycliste est nécessairement rectiligne uniforme, le cycliste ne peut donc pas prendre le virage.

Le cycliste ne peut prendre le virage que si la somme  $\vec{F} = \vec{P} + \vec{R}$  des forces appliquées est centripète. La réaction  $\vec{R}$  doit donc être inclinée d'un angle  $\alpha$ , par rapport à la verticale. Deux cas sont alors possibles :

1. soit il y a frottements, le cycliste peut alors s'incliner sans risque de dérapage; (voir Figure 5.4);

2. soit la piste est inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale (voir Figure 5.5).

Figure 5.5



La figure ci-dessus permet d'écrire que :

$$\tan \alpha = \frac{F}{P} = \frac{M a_G}{M g}$$

or

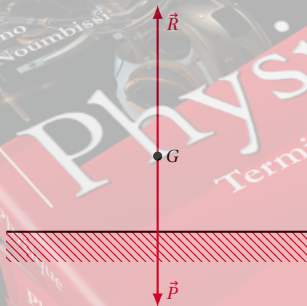
$$a_G = \frac{V^2}{r}$$

( $V$  étant la vitesse du cycliste). Donc

$$\tan \alpha = \frac{V^2}{r g}$$

L'angle  $\alpha$  ne dépend que de la vitesse  $V$  et du rayon de courbure  $r$  du virage.

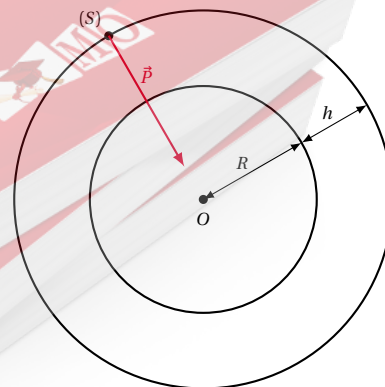
Figure 5.4



## 5.3 Mouvement d'un satellite

Soit un satellite (S) de masse  $m$ , évoluant sur une orbite circulaire à la distance  $r = R + h$  où  $R$  est le rayon de la Terre,  $h$  est l'altitude du satellite par rapport à la surface de la Terre (Figure 5.6).

Figure 5.6



### 5.3.1 Étudions le mouvement du satellite

- Système étudié : le satellite.
- Référentiel d'étude : le référentiel géocentrique supposé galiléen.
- Bilan des forces extérieures appliquées au système : son poids  $\vec{P} = m\vec{g}_h$

Appliquons le théorème du centre d'inertie au système :

$$\sum F_{\text{ext}} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{g}_h = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}_h$$

Exploitions la relation vectorielle ci-dessus dans la base de Frenet  $(\vec{t}, \vec{n})$  (Figure 5.7).

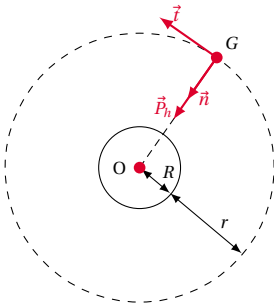


Figure 5.7

Dans cette base, les coordonnées des vecteurs sont :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_t \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{g}_h = \begin{pmatrix} 0 \\ g_h \end{pmatrix}$$

nous en déduisons

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_t = 0 \\ a_n = g_h \end{pmatrix}$$

Conséquences cinématiques de ce résultat :

- $a_t = \frac{dV}{dt} = 0 \Rightarrow V = \text{constante}$ ; le mouvement est *uniforme*.
- $a_n = g_h = \frac{V^2}{\rho} = \text{constante}$ ; le rayon de courbure  $\rho$  est constant. Donc la trajectoire est circulaire. Le mouvement du satellite est donc *circulaire uniforme*.

### 5.3.2 Expression de la vitesse du satellite

On sait que  $a_n = \frac{V^2}{\rho}$  où  $\rho = R + h$  est le rayon de courbure de la trajectoire. Par ailleurs,  $g_h = g_0 \frac{R^2}{(R + h)^2}$ .

De l'égalité  $a_n = g_h$  nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{V^2}{R + h} &= g_0 \frac{R^2}{(R + h)^2} \\ \Rightarrow V &= R \sqrt{\frac{g_0}{R + h}} \end{aligned}$$

### 5.3.3 Période de révolution du satellite

C'est la durée d'un tour complet. Soit  $\theta'$  sa vitesse angulaire.

$$\theta' = \frac{V}{R + h}$$

et

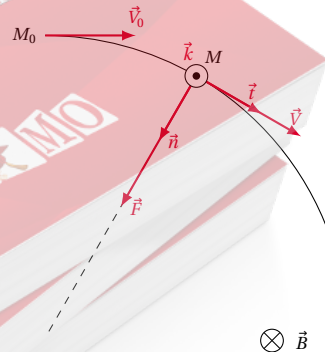
$$T = \frac{2\pi}{\theta'} = 2\pi \frac{R + h}{V}$$

En remplaçant  $V$  par sa valeur, on a :

$$T = \frac{2\pi}{R} \sqrt{\frac{(R + h)^3}{g_0}}$$

## 5.4 Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme

Figure 5.8



### 5.4.1 Etude dynamique : déviation d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme

**Cas où le vecteur vitesse initiale  $\vec{V}_O$  est parallèle à  $\vec{B}$**

Dans ce cas, la force magnétique

$$\vec{F} = \vec{0}$$

(propriété de la force de Lorentz).

Le poids  $\vec{P}$  de la particule étant toujours négligeable, appliquons le théorème du centre d'inertie à la particule :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{0} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$$

Donc le vecteur-vitesse  $\vec{V}$  est constant en module, sens et direction au cours du mouvement de la particule. La particule est alors animée d'un mouvement *rectiligne uniforme*.

**Cas où le vecteur vitesse initiale  $\vec{V}_O$  est perpendiculaire à  $\vec{B}$**

Considérons une particule chargée (un électron par exemple) pénétrant dans le champ magnétique uniforme  $\vec{B}$  avec un vecteur vitesse initiale  $\vec{V}_O$  tel que  $\vec{V}_O \perp \vec{B}$ .

Étudions le mouvement de cet électron dans  $\vec{B}$ .

- Système étudié : particule de charge  $q = (-e)$  et de masse  $m$ .
- Référentiel d'étude : référentiel du laboratoire supposé galiléen.
- Bilan des forces extérieures agissant sur le système :
  - la force de Lorentz :  $\vec{F} = q\vec{V}_O \wedge \vec{B}$  ;
  - le poids  $\vec{P}$  de la particule et les forces de frottement qui sont négligeables devant la force magnétique.

Appliquons le théorème du centre d'inertie au système :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a} &\Rightarrow q\vec{V}_O \wedge \vec{B} = m\vec{a} \\ \Rightarrow \vec{a} &= \frac{q}{m} \vec{V}_O \wedge \vec{B} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Exploitions cette relation vectorielle en choisissant comme base de projection, le repère curviligne  $(\vec{r}, \vec{n}, \vec{k})$ . La figure ci-dessus concerne une charge négative, un électron par exemple.

$$\vec{a} = \begin{cases} a_t = \frac{dV}{dt} = 0 & \text{car } V = \text{constante} \\ a_n = \frac{v^2}{\rho} \\ a_k = 0 \end{cases}$$

$\rho$  = rayon de courbure de la trajectoire. En  $M$ ,

$$\vec{V} \wedge \vec{B} = \begin{cases} 0 \\ VB & \text{car } \vec{V} \perp \vec{B} \\ 0 \end{cases}$$

1. La trajectoire de la particule est plane.

Projetons le mouvement de la particule suivant  $\vec{k}$  :

$$a_k = \frac{q}{m} (\vec{V} \wedge \vec{B})_k = 0.$$

$$a_k = 0 \Rightarrow V_z = \text{constante} = V_{Oz}$$

et

$$z = V_{Oz}t$$

(car  $z = 0$  pour  $t = 0$ ). Or  $V_{Oz} = 0$  car  $\vec{V}_O$  est perpendiculaire à  $\vec{k}$  et quel que soit  $t$ ,  $z = 0$ . Donc, le mouvement de la particule s'effectue dans le plan  $z = 0$  perpendiculaire à  $\vec{B}$ .

2. La trajectoire de la particule est circulaire. La projection de (5.1) suivant  $\vec{n}$  nous donne :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{|q|}{m} (\vec{V} \wedge \vec{B})_n \\ \Rightarrow \frac{V^2}{\rho} &= \frac{|q|}{m} V \cdot B \Rightarrow \rho = \frac{mV}{|q|B} \end{aligned} \quad (5.6)$$

$m$ ,  $|q|$ ,  $B$ , et  $V$  étant constants  $\rho$  est aussi constant. Le rayon de courbure de la trajectoire étant constant, celle-ci est un cercle et le mouvement de la particule est circulaire. On écrit alors  $\rho = R$ .

Le module de la quantité de mouvement étant  $p = mV$ , la relation (5.6) peut d'écrire :

$$R = \frac{p}{|q|B}$$

On peut donc déterminer la quantité de mouvement de la particule chargée en mesurant le rayon de courbure  $R$  de sa trajectoire,  $q$  et  $B$  étant connus.



## 5.5 Énoncés des exercices et problèmes

### Exercice 1.

On considère un point matériel A, de masse  $m = 100\text{ g}$ , suspendu à un point fixe O par un fil fin, inextensible et de masse négligeable, de longueur  $l = 1\text{ m}$

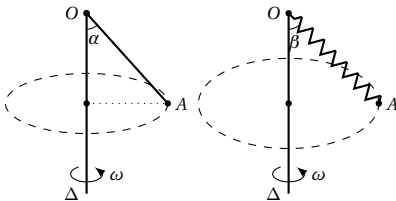
**1.1.** Cet ensemble est mis en mouvement de rotation uniforme autour d'un axe vertical ( $\Delta$ ) passant par O. A décrit alors un cercle dans un plan horizontal et la direction du fil fait un angle  $\alpha = 30^\circ$  avec l'axe  $\Delta$ .

**1.1.1.** Quelle est la vitesse angulaire  $\omega$  de rotation de l'ensemble.

**1.1.2.** Quelle est la tension du fil?

**1.1.3.** A partir de quelle vitesse angulaire  $\omega_{\min}$  la bille A se décolle-t-elle de l'axe.

**1.1.4.** Pour quelle valeur de  $\omega$ , l'angle  $\alpha$  est égal à  $90^\circ$ ?



**1.2.** Le fil de suspension est remplacé par un ressort à spires non jointives, de longueur à vide  $l_0 = 20\text{ cm}$ , de coefficient de raideur  $K = 49\text{ N m}^{-1}$ .

La vitesse de rotation de l'ensemble est alors  $8\text{ rad s}^{-1}$ . Le point A décrit toujours un cercle dans un plan horizontal, l'axe du ressort étant incliné sur la verticale d'un angle  $\beta$ . Calculer la longueur du ressort lors de ce mouvement, ainsi que l'angle  $\beta$ .

### Exercice 2.

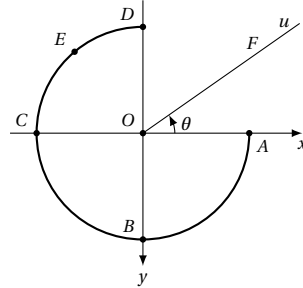
Sur une place horizontale, une petite voiture radioguidée décrit un cercle de rayon  $r = 20\text{ cm}$ , à une vitesse constante. La masse de la voiture est  $m = 16\text{ kg}$ . On néglige ses dimensions devant celle de la trajectoire.

**2.1.** La force de frottement longitudinale  $\vec{f}$ , parallèle au vecteur  $\vec{v}$ , de sens opposé, a un module constant  $f = 50\text{ N}$ . La force de frottement latérale  $\vec{f}'$ , perpendiculaire au vecteur vitesse, qui permet à la voiture de tenir sa trajectoire circulaire a pour module  $f' = 90\text{ N}$ . En déduire la force de traction du moteur  $F$  et la vitesse curviligne  $v$ .

**2.2.** La voiture roule maintenant à vitesse constante  $v = 10\text{ ms}^{-1}$  sur une piste circulaire relevée d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale. La voiture décrit un cercle horizontal de rayon  $r = 20\text{ cm}$ . L'angle  $\alpha$  est tel que la force de frottement latérale  $f' = 0$ . (cela veut dire que la voiture n'a alors aucune tendance à déraiper même si la piste est très glissante). Evaluer  $\alpha$ . On prendra  $g = 9,8\text{ m s}^{-2}$

### Exercice 3.

Une petite bille de masse  $m$  décrit une gouttière de forme circulaire  $ABCD$ , d'épaisseur négligeable, de rayon  $r$  et de masse  $M$ , située dans un plan vertical. Soit  $Ou$  la ligne de plus grande pente d'un plan incliné faisant l'angle  $\theta$  avec l'horizontale passant par O et A. On note  $Ox$  et  $Oy$  les deux axes orthonormés passant par A et B. On néglige tous les frottements.



Soit  $\vec{R}$  la réaction fournie par la gouttière sur la bille. On pose  $\alpha = (\vec{R}, \vec{P})$ , l'angle que font entre eux la réaction  $\vec{R}$  et le poids  $\vec{P}$  de la bille ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ).

**3.1.** Si  $\vec{V}$  est la vitesse de la bille en un point quelconque de la gouttière, montrer que le module de  $\vec{R}$  peut se mettre sous la forme :

$$\|\vec{R}\| = m \left( \frac{\|\vec{V}\|^2}{r} - g \cos \alpha \right)$$

**3.2.** La bille partant du point A à l'instant initial, exprimer le travail des forces extérieures appliquées à la bille entre l'instant de départ et un instant quelconque  $t$  en fonction du rayon  $r$  et de l'angle  $\alpha$ ;

**3.3.** En déduire l'expression générale de la vitesse  $\|\vec{V}\|$  en fonction de la vitesse de la bille au point A, notée  $\|\vec{V}_A\|$ , de  $R$  et de l'angle  $\alpha$ ;

**3.4.** En utilisant l'expression de  $\|\vec{R}\|$  trouvée à la question 1., donner la relation générale permettant d'écrire  $\|\vec{R}\|$  en fonction de  $\|\vec{V}_A\|$ ,  $r$  et  $\theta$ .

**3.5.** Soit E le point milieu de l'arc CD :

**3.5.1.** Quelle doit être la valeur minimale de  $\|\vec{V}_A\|$  pour que la bille ne décolle pas de la gouttière au point E?

**3.5.2.** Même question concernant le point D.

Calculer alors les coordonnées de F, point d'arrivée de la bille sur  $Ou$ .

$r = 50\text{ cm}$ ;  $g = 9,81\text{ m s}^{-2}$ ;  $\theta = 30^\circ$ .

### Exercice 4.

Un satellite artificiel de la Terre, de masse  $m$ , se déplace à vitesse constante sur une orbite circulaire dans un référentiel galiléen lié au centre de la Terre à l'altitude  $h = 3,6 \times 10^7\text{ m}$  comptée à partir de la surface de la terre. La trajectoire est située dans le plan de l'équateur et le satellite tourne dans le sens de rotation de la terre. Le rayon de la terre est  $R = 6,4 \times 10^6\text{ m}$ .

**4.1.** Calculer la valeur de l'intensité  $\|\vec{g}\|$  du champ de pesanteur à l'altitude  $h$ , sachant qu'à la surface de la Terre  $\|\vec{g}_O\| = 9,8\text{ m s}^{-2}$ . On rappelle la loi de la gravitation uni-

## 5.5. Enoncés des exercices et problèmes

verselle  $\|\vec{f}\| = K \frac{Mm}{d^2}$  où  $M$  est la masse de la Terre et  $d$  la distance du satellite au centre de terre.

**4.2.** Faire le bilan des forces appliquées au satellite supposé ponctuel et en déduire sa vitesse.

**4.3.** Déterminer la période du mouvement dans le repère galiléen considéré ici.

## Exercice 5.

On considère un satellite en rotation sur une orbite circulaire autour de la Terre. L'altitude du satellite est  $h = 3200$  km. On donne : rayon de la Terre : 6400 km.

**5.1.** Calculer la vitesse de ce satellite.

**5.2.** Calculer le temps nécessaire pour faire un tour de la Terre. On donne  $g_0$  à la surface de la terre  $= 9,81 \text{ m s}^{-2}$ .

**5.3.** Quelle devrait être l'altitude  $h'$  du satellite pour qu'il paraisse immobile à un observateur terrestre? Le plan de l'orbite est celui de l'équateur terrestre.

**5.4.** L'énergie potentielle de pesanteur du système (satellite-Terre) s'écrit :

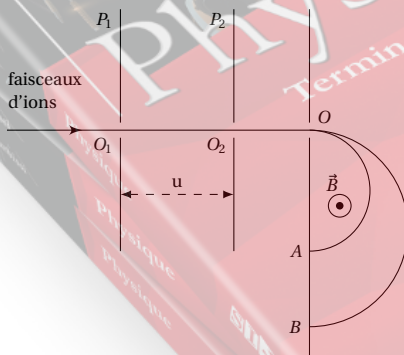
$$E_p = -\frac{mg_0 R^2}{R+h}$$

Si  $m$  est la masse du satellite.  $E_p = 0$  quand  $h = \infty$ . Donner, en fonction de  $m, g_0, R$  et  $h$  l'expression de l'énergie mécanique du système.

**5.5.** Quelle énergie faut-il fournir au satellite, de masse 1 tonne, pour le faire passer de l'orbite d'altitude  $h$  à l'orbite d'altitude  $h'$ ?

## Exercice 6.

Dans tout le problème, on négligera le poids des particules devant les autres forces et on appliquera les lois de la mécanique classique. On envisage la séparation d'isotopes du Xénon (Xe) au moyen d'un spectrographe de Dempster. Une chambre d'ionisation produit des ions positifs  $^{129}_{54}\text{Xe}^+$  et  $^{136}_{54}\text{Xe}^+$ . Ces ions sont accélérés entre deux plaques métalliques parallèles  $P_1$  et  $P_2$  puis soumis à l'action d'un champ magnétique qui permet de les séparer.



On donne : charge électrique élémentaire :

$$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C},$$

$$m_p = \text{masse du proton}$$

$$m_p \approx 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$m_n = \text{masse du neutron}$$

$$m_n \approx 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

**6.1.** Accélération des ions. Les ions traversent la plaque  $P_1$  en  $O_1$  sans vitesse initiale. Ils sont alors soumis, entre  $P_1$  et  $P_2$ , à une tension accélératrice  $U = 1000$  V.

**6.1.1.** Dans quel sens cette tension doit-elle être établie?

**6.1.2.** Montrer que l'énergie cinétique, acquise par les ions lorsqu'ils traversent la plaque  $P_2$  en  $O_2$ , est indépendante de l'isotope envisagé et calculer sa valeur en joules.

**6.1.3.** Calculer la vitesse  $v$  acquise par les ions  $^{129}_{54}\text{Xe}^+$  en  $O_2$ . On assimilera la masse de l'ion à la somme des masses de ses nucléons.

**6.1.4.** Exprimer, en fonction de  $x$  et  $v$ , la vitesse  $v'$  acquise par les ions  $^{129}_{54}\text{Xe}^+$  en  $O_2$ .

**6.2.** Séparation des ions. Les ions, animés des vitesses  $v$  et  $v'$  calculées ci-dessus, pénètrent en  $O$  dans une région où règne un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme perpendiculaire au plan de la figure. On rappelle que la force électromagnétique  $\vec{f}$  agissant sur une charge  $q$  animée d'une vitesse  $\vec{v}$  est normale au plan défini par  $\vec{v}$  et  $\vec{B}$  et telle que le trièdre  $\vec{v}, \vec{B}, \vec{f}$  soit direct. La norme de la force est donnée par  $f = qvB$  lorsque  $\vec{v}$  et  $\vec{B}$  sont orthogonaux.

**6.2.1.** On s'intéresse au mouvement des ions. Montrer que celui-ci est plan, circulaire et uniforme. Donner l'expression littérale du rayon de courbure  $R$ . Calculer  $R$  pour  $B = 0,1$  T.

**6.2.2.** Les ions  $^{129}_{54}\text{Xe}^+$  et  $^{136}_{54}\text{Xe}^+$  décrivent un demi-cercle avant de tomber sur une plaque photographique, respectivement en  $A$  et en  $B$ .

On mesure la distance  $AB = 8$  mm. En déduire la valeur de  $x$  ( $B = 0,1$  T).

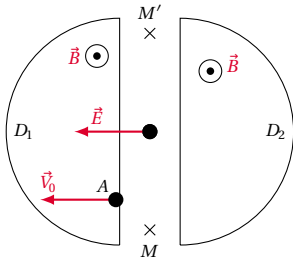
## Exercice 7.

Soit un cyclotron à fréquence fixe. Un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$  est créé dans deux "dees",  $D_1$  et  $D_2$ , parallèlement à leurs axes. Un champ électrostatique  $\vec{E}$  est créé dans l'intervalle étroit entre les "dees", perpendiculairement aux surfaces qui délimitent l'intervalle entre  $D_1$  et  $D_2$ . La tension électrique établie entre les deux "dees", et qui crée le champ électrostatique est alternative de fréquence  $N$  de valeur maximale  $U_M$  (le champ électrostatique est nul à l'intérieur des "dees"). Les particules accélérées sont des protons, ils pénètrent en  $A$  avec une vitesse  $\vec{V}_0$ ;  $\vec{V}_0$  est orthogonale à  $\vec{B}$  et à  $MM'$ .

**7.1.** Montrer que, dans un "dee", le mouvement d'un proton est circulaire uniforme. (On admet que le poids du proton est négligeable devant la force magnétique qu'il subit). Exprimer littéralement la durée d'un demi-tour. Vérifier qu'elle est indépendante de la vitesse; donner sa valeur numérique. En déduire la fréquence  $N$  de la tension alternative.

**7.2.** Quelle est l'énergie cinétique transmise au proton à chaque tour?

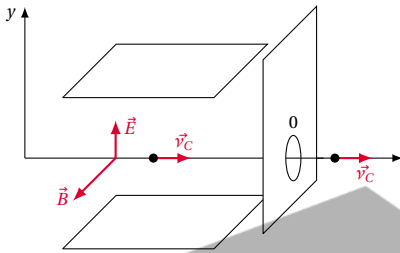
**7.3.** On veut que la vitesse finale des protons soit  $20000 \text{ km s}^{-1}$ . Quel est le nombre de tours effectués par les protons pour acquérir cette vitesse? On admet que la vitesse initiale  $V_0$  des protons quand ils pénètrent dans le cyclotron a une valeur très faible par rapport à  $20000 \text{ km s}^{-1}$ .



A.N.  $B = 1 \text{ T}$ ;  $U_M = 4000 \text{ V}$ ; masse du proton  $m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ; charge du proton :  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ .

### Exercice 8.

Pour obtenir un faisceau homocinétique à l'entrée d'un spectromètre de masse, on place avant la chambre de déviation un sélecteur de vitesses (filtre de Wien). Ce filtre ne laissera passer par une ouverture  $O$  que les particules ayant une certaine vitesse  $v_0$  et déviéra les particules ayant une vitesse différente.



Le principe du filtre considéré est le suivant :

- des particules chargées positivement sont projetées dans l'appareil suivant l'axe des abscisses;
- deux plaques parallèles distantes de  $d$  entre lesquelles existe une tension  $U$  produisent un champ électrique  $\vec{E}$ ;
- dans toute la région où règne  $\vec{E}$  existe un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$  orthogonal à  $\vec{E}$  et à l'axe des abscisses.

**8.1.** On observe que pour une certaine vitesse  $v_0$  les particules ne sont pas déviées. Montrer que  $v_0 = \frac{E}{B}$ .

**8.2.** Décrire comment seront déviées les particules de vitesse  $v > v_0$  et celles de vitesse  $v < v_0$ .

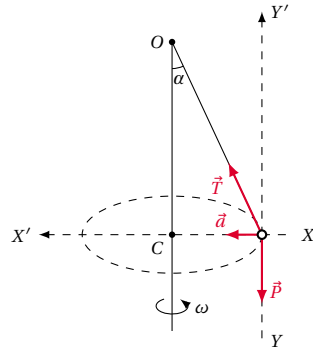
**8.3.** Calculer  $v_0$  dans le cas où  $B = 0,10 \text{ T}$ ,  $d = 0,5 \text{ cm}$  et  $U = 50 \text{ V}$ .

## 5.6 Solutions des exercices et problèmes

### Solution 1. (p. 108)

**1.1. 1.1.1.** Calcul de la vitesse angulaire de rotation de l'ensemble.

Système étudié : le point matériel  $A$ . Dans un repère lié à la Terre donc pratiquement galiléen, le point  $A$  est soumis à son poids  $\vec{P} = m\vec{g}$  et à la tension  $\vec{T}$  du fil.



D'après le théorème du centre d'inertie, on a :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} \quad (\text{S5.1})$$

Projetons (S5.1) sur les axes  $xx'$  et  $yy'$ .

$$\begin{cases} \text{suivant } xx' : 0 + T \sin \alpha = ma & (\text{S5.2}) \\ \text{suivant } yy' : -P + T \cos \alpha = 0 & (\text{S5.3}) \end{cases}$$

Dans le triangle  $OCA$ ,  $CA = OA \sin \alpha$  avec  $OA = l$ .

Le mouvement de  $A$  étant circulaire uniforme, désignons par  $\omega$  la vitesse angulaire de  $A$ . L'accélération du mouvement est :  $a = \omega^2 l \sin \alpha$ .

$$(\text{S5.2}) \Rightarrow T \sin \alpha = m\omega^2 l \sin \alpha$$

$$\Rightarrow T = m\omega^2 l \quad (\text{S5.4})$$

(S5.4) dans (S5.2) donne :

$$-mg + m\omega^2 l \cos \alpha = 0 \quad (\text{S5.5})$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l \cos \alpha}} = 3,36 \text{ rad s}^{-1}$$

**1.1.2.** Calcul de la tension du fil.

Elle est donnée par la relation (S5.4) :

$$T = m\omega^2 l = 0,1 \cdot 3,36^2 \cdot 1 = 1,13 \text{ N}$$

**1.1.3.** Vitesse angulaire minimale pour que le point  $A$  décolle de l'axe de rotation.

$$(\text{S5.5}) \Rightarrow -mg + m\omega^2 l \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 l} \quad (\text{S5.6})$$

## 5.6. Solutions des exercices et problèmes

Pour que le point A décolle, il faut que :

$$\alpha > 0 \Rightarrow \cos \alpha < 1$$

D'après (S5.6),

$$\begin{aligned} \frac{g}{\omega^2 l} &< 1 \\ \Rightarrow \omega^2 &> \frac{g}{l} \\ \Rightarrow \omega &> \sqrt{\frac{g}{l}} \\ \omega_{\min} &= \sqrt{\frac{9,8}{1}} = 3,13 \text{ rad s}^{-1} \end{aligned}$$

### 1.1.4. Valeur de $\omega$ pour $\alpha = 90^\circ$ .

De (S5.6) nous constatons que pour  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\cos \alpha = 0 \Rightarrow$

$$0 = \frac{g}{l\omega^2}.$$

Or  $g$  et  $l$  sont constants donc  $0 = \frac{g}{l\omega^2} \Rightarrow \omega = \infty$  ! Condition irréalisable.

### 1.2. Calcul de la longueur $l$ du ressort.

$$T = m\omega^2 l = Kx$$

avec  $l = l_0 + x$

$$m\omega^2(l_0 + x) = Kx$$

$$\Rightarrow x = \frac{m\omega^2 l_0}{K - m\omega^2}$$

$$\begin{aligned} l &= l_0 + \frac{m\omega^2 l_0}{K - m\omega^2} \\ &= 0,2 + \frac{0,1 \cdot 8^2 \cdot 0,2}{49 \cdot 0,1 \cdot 64} = 0,23 \text{ m} \end{aligned}$$

Calcul de  $\beta$ .

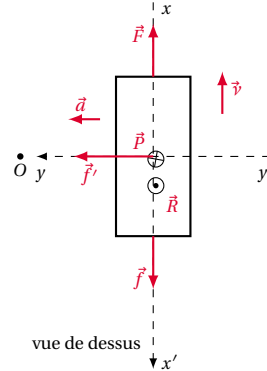
$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{P}{T} \\ &= \frac{mg}{m\omega^2 l} \\ &= \frac{g}{\omega^2 l} \\ &= \frac{9,8}{8^2 \cdot 0,23} = 0,66 \\ \Rightarrow \beta &= 48,47^\circ \end{aligned}$$

## Solution 2. (p. 108)

**2.1.** Soit à déduire la force de traction du moteur  $F$  et la vitesse curviligne  $v$ .

- Le système étudié est la voiture.
- Le repère lié à la Terre est pratiquement galiléen.
- Bilan des forces agissant sur la voiture. La voiture est soumise à :
  - son poids  $\vec{P}$  (représentée par  $\oplus$  sur la figure ci-dessous, ce qui signifie que  $\vec{P}$  est perpendiculaire au plan de la figure, dirigée vers l'arrière de la feuille);
  - la réaction  $\vec{R}$  de la route (représenté par  $\odot$  sur la figure, ce qui signifie que  $\vec{R}$  est perpendiculaire à la figure, dirigée vers l'avant de la feuille);
  - la force de traction  $\vec{F}$ , parallèle à  $\vec{v}$  de même sens;
  - la forces de frottement longitudinale  $\vec{f}$ , parallèle à  $\vec{v}$ , de sens contraire.

- la forces de frottement latérale  $\vec{f}'$ , perpendiculaire à  $\vec{v}$ , dirigée vers l'intérieur du virage.



Le centre de gravité  $G$  de la voiture décrit un cercle horizontal de centre  $O$ , de rayon  $OG = r$ , à la vitesse curviligne constante  $v$ . Le vecteur accélération  $\vec{a}$  de  $G$  est donc centripète dirigé suivant  $GO$ , donc perpendiculaire au vecteur vitesse de module constant  $a = \frac{v^2}{r}$ . D'après le théorème de centre d'inertie, on a :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{f} + \vec{f}' = m\vec{a} \quad (\text{S5.1})$$

Projetons (S5.1) sur un axe  $zz'$  orienté de l'arrière de la feuille vers l'avant :

$$-P + R = 0 \Rightarrow R = P \quad (\text{S5.2})$$

Projetons (S5.1) sur un axe  $xx'$ , parallèle à  $\vec{v}$  :

$$-F + f = 0 \Rightarrow F = f \quad (\text{S5.3})$$

c'est la force de traction demandée.

$$F = f = 50 \text{ N}$$

En tenant compte de (S5.2) et (S5.3) le théorème (S5.1) s'écrit :

$$\vec{f}' = m\vec{a} \quad (\text{S5.4})$$

La projection de (S5.4) sur l'axe  $yy'$  donne :

$$f = m \frac{v^2}{r}$$

De cette relation nous tirons  $v$  :

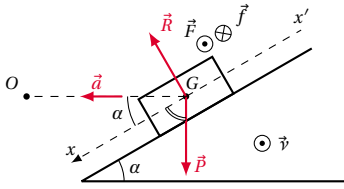
$$v = \sqrt{\frac{f'r}{m}}$$

$$\text{A.N. } v = \sqrt{\frac{90 \cdot 20}{16}} = 10,6 \text{ m s}^{-2}.$$

### 2.2. Evaluons l'angle $\alpha$ .

- Le système est toujours la voiture.
- Le repère lié à la Terre est quasi galiléen.
- La voiture est soumise aux forces  $\vec{P}$ ,  $\vec{R}$ ,  $\vec{F}$  et  $\vec{f}$ .





Le centre de gravité  $G$  de la voiture décrit un cercle horizontal de centre  $O$ , de rayon  $OG = r$ , à la vitesse curviligne constante  $v$ . Le vecteur accélération  $\vec{a}$  de  $G$  est donc centripète dirigé suivant  $GO$ , donc perpendiculaire au vecteur vitesse de module constant  $a = \frac{v^2}{r}$ . D'après le théorème de centre d'inertie, nous avons :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{f} = m\vec{a}$$

Projetons sur  $x'x$ , axe perpendiculaire à  $\vec{R}$ ,  $\vec{F}$  et  $\vec{f}$ , on obtient :

$$P \sin \alpha = ma \cos \alpha$$

De cette relation nous tirons :

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g}$$

Or  $a = \frac{v^2}{r}$  d'où :

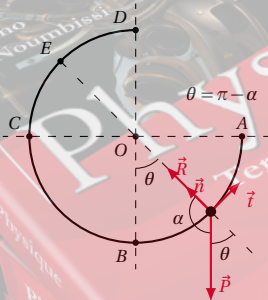
$$\tan \alpha = \frac{v^2}{rg}$$

$$\text{A.N. } \tan \alpha = \frac{10^2}{20 \cdot 9,8} = 0,51 \text{ et } \alpha = 27^\circ.$$

### Solution 3. (p. 108)

3.1. Montrons que :

$$R = m \left( \frac{V^2}{r} - g \cos \alpha \right)$$



Dans le référentiel terrestre, considéré comme galiléen, la bille est soumise à son poids  $\vec{P}$  et à la réaction  $\vec{R}$  de la gouttière. D'après le théorème du centre d'inertie, on a :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a} \quad (\text{S5.1})$$

En projetant (S5.1) dans la base de Frenet :

$$\text{suivant } \vec{n} : R - P \cos(\pi - \alpha) = ma_n$$

$$\text{suivant } \vec{t} : 0 - P \sin(\pi - \alpha) = ma_t$$

avec

$$a_n = \frac{V^2}{r}$$

$$a_t = \frac{dV}{dt}$$

$$(\text{S5.1}) \Rightarrow R - P \cos(\pi - \alpha) = m \frac{V^2}{r}$$

avec

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\Rightarrow R + mg \cos \alpha = m \frac{V^2}{r}$$

$$\Rightarrow R = m \left( \frac{V^2}{r} - g \cos \alpha \right)$$

3.2. Travail des forces extérieures appliquées à la bille. Le bilan des forces étant inchangé, on a :

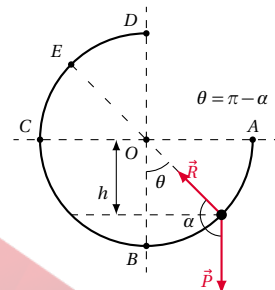
$$W = W(\vec{R}) + W(\vec{P})W(\vec{R}) = 0$$

car  $\vec{R}$  est orthogonale à chaque instant à la trajectoire de la bille dans la gouttière.

$$W = W(\vec{P}) = mgh$$

avec

$$h = r \cos(\pi - \alpha) = -r \cos \alpha \Rightarrow W = -mgr \cos \alpha$$



3.3. Déduction de l'expression générale de la vitesse  $V$ . D'après le théorème de l'énergie cinétique, on a :

$$\frac{1}{2} m V^2 - \frac{1}{2} m V_A^2 = -mgr \cos \alpha$$

$$\Rightarrow V = \sqrt{V_A^2 - 2gr \cos \alpha}$$

3.4. Expression générale de  $R$ .

$$R = m \left( \frac{V^2}{r} - g \cos \alpha \right)$$

$$= m \left( \frac{V_A^2 - 2gr \cos \alpha}{r} - g \cos \alpha \right)$$

$$\Leftrightarrow R = m \left( \frac{V_A^2}{r} - 3g \cos \alpha \right)$$

3.5.

3.5.1. Valeur minimale de  $V_A$  pour que la bille ne décolle pas au point  $E$ .

Pour que la bille ne décolle pas en  $E$ , il faut que :

$$R > 0$$



## 5.6. Solutions des exercices et problèmes

$$\Rightarrow m \left( \frac{V_A^2}{r} - 3g \cos \alpha \right) > 0$$

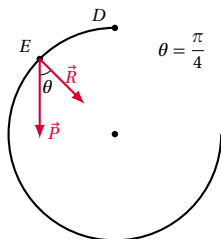
$$\Rightarrow V_A > \sqrt{3rg \cos \alpha}$$

E étant le milieu de l'arc  $CD$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  et

$$V_{A_{\min}} = \sqrt{3rg \cos \alpha}$$

$$= \sqrt{3 \cdot 0,5 \cdot 9,81 \cdot \cos \frac{\pi}{4}} = 3,22 \text{ ms}^{-1}$$

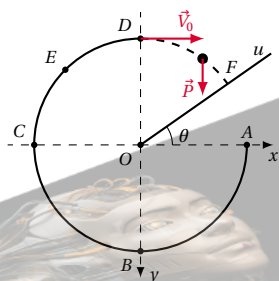
**3.5.2.** Valeur minimale de  $V_A$  pour que la bille ne décolle pas au point  $D$ .



Même démarche qu'à la question 8.5.1 avec  $\alpha = 0^\circ$  au point  $D$ .

$$V_{A_{\min}} = \sqrt{3 \cdot 0,5 \cdot 9,81 \cdot \cos 0^\circ} = 3,84 \text{ ms}^{-1}$$

**3.5.3.** Détermination des coordonnées du point  $F$ .



Après le point  $D$ , la bille n'est plus soumise qu'à la seule action de son poids  $\vec{P}$ . Dans le référentiel terrestre donc galiléen, le théorème du centre d'inertie, s'écrit :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

En projetant (S5.1) sur les axes  $x'x'$  et  $y'y'$ , on a :

$$a_x = 0 \text{ et } a_y = g.$$

Choisissons comme origine des dates l'instant où la bille quitte la gouttière. A cet instant sa vitesse en  $D$  de coordonnées  $(0, -r)$  est donnée par :

$$V_D = \sqrt{V_A^2 - 2gr \cos 0}$$

$$= \sqrt{3,84^2 - 2 \cdot 9,81 \cdot 0,5 \cdot 1} = 2,22 \text{ ms}^{-1}$$

Intégrons successivement a, en tenant compte des conditions initiales choisies.

$$\vec{V} = \begin{cases} V_x = V_D \\ V_y = gt \end{cases}$$

$$O\vec{M} = \begin{cases} x = V_D t \\ y = \frac{1}{2}gt^2 - r \end{cases} \quad (\text{S5.2})$$

$$(\text{S5.3})$$

En éliminant  $t$  entre (S5.2) et (S5.3) on obtient l'équation de la trajectoire de bille dans le repère  $(xOy)$  :

$$y = \frac{1}{2}g \frac{x^2}{V_D^2} - r = 0,157x^2 - 0,5$$

en mètre.

Dans ce même repère, l'équation de la droite du plan incliné est :

$$y' = -x \tan \theta = -0,58x$$

L'abscisse du  $F$  est donnée par :

$$0,157x^2 - 0,5 = -0,58x$$

$$\Rightarrow 0,157x^2 + 0,58x - 0,5 = 0$$

La résolution de cette équation donne deux valeurs de  $x$  qui sont  $x = 0,72 \text{ m}$ , valeur à retenir et  $x' = -4,4 \text{ m}$  valeur à rejeter car  $x < 0$ . L'ordonnée de  $F$  est donc :

$$y' = -x \tan \theta = -0,57 \cdot 0,72 = -0,42 \text{ m}$$

$F$  est donc pour coordonnées  $F(0,72; -0,42)$

## Solution 4. (p. 108)

**4.1.** Calcul de la valeur de l'intensité  $g$  du champ de pesanteur à l'altitude  $h$ .

À l'altitude  $h$ , la force de gravitation entre la Terre et le satellite est :

$$f = \frac{KMm}{(R+h)^2}$$

loi de la gravitation universelle. Par ailleurs,  $P_h = mgh$ , attraction de la Terre sur le satellite,

$$f = P_h$$

$$\Rightarrow gh = \frac{KM}{(R+h)^2} \quad (\text{S5.1})$$

Au niveau du sol, on a  $h = 0$  et le poids  $P_0$  est :

$$P_0 = \frac{KMm}{R^2} = mg_0 \quad (\text{S5.2})$$

$$\Rightarrow g_0 = \frac{KM}{R^2} \quad (\text{S5.3})$$

En faisant le rapport (S5.1)/(S5.3) on obtient :

$$\frac{g_h}{g_0} = \frac{\frac{KM}{(R+h)^2}}{\frac{KM}{R^2}}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{R+h}{R}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2}$$

$$\Rightarrow g_h = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

$$\text{A.N. } g_h = 9,8 \frac{(6,4 \times 10^6)^2}{(6,4 \times 10^6 + 3,6 \times 10^7)^2} = 0,22 \text{ ms}^{-2}.$$

**4.2. Bilan des forces appliquées au satellite.**

Sur son orbite, le satellite est soumis à une seule force : son poids  $\vec{P}_h$ .

Déduction de la vitesse du satellite.

Dans le référentiel lié au centre de la Terre (donc galiléen), appliquons la R.F.D. au mouvement du satellite.

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}_{\text{ext}} &= m\vec{a} \\ \Rightarrow m\vec{g} &= m\vec{a} \\ \Rightarrow \vec{a} &= \vec{g}\end{aligned}$$

En projetant cette relation vectorielle sur le rayon de l'orbite circulaire dirigé vers le centre de la Terre, on a :

$$a = g_h \quad (\text{S5.4})$$

L'orbite étant circulaire,  $a = \frac{V^2}{R+h}$  et (S5.4) devient :

$$\begin{aligned}a &= \frac{V^2}{R+h} = g_h \\ \Rightarrow V &= \sqrt{g_h(R+h)} \\ &= 3054,17 \text{ ms}^{-1}\end{aligned}$$

**4.3. Détermination de la période  $T$  du mouvement du satellite.**

La période  $T$  est le temps que met le satellite pour effectuer un tour complet de la Terre.

$$VT \Rightarrow 2\pi(R+h) \Rightarrow T = \frac{2\pi(R+h)}{V}$$

A.N.

$$\begin{aligned}T &= \frac{2 \cdot 3,14 \cdot (6,4 \times 10^6 + 3,6 \times 10^7)}{3054,17} \\ &= 87183,1 \text{ s} \approx 24 \text{ h}\end{aligned}$$

**Solution 5. (p. 109)****5.1. Calcul de la vitesse du satellite.**

$$V = \sqrt{g_h(R+h)}$$

avec

$$g_h = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

A.N.

$$\begin{aligned}g_h &= 9,81 \cdot \frac{(6,4 \times 10^6)^2}{(6,4 \times 10^6 + 3,2 \times 10^6)^2} \\ &= 4,36 \text{ ms}^{-2} \\ V &= \sqrt{4,36 \cdot (6,4 \times 10^6 + 3,2 \times 10^6)} \\ &= 6496,62 \text{ ms}^{-1}\end{aligned}$$

**5.2. Temps  $T$  mis pour faire un tour de la Terre.**

Pour faire 1 tour de la terre, le satellite parcourt une distance linéaire égale à  $2\pi(R+h)$

$$T = \frac{2\pi(R+h)}{V}$$

$$T = \frac{2 \cdot 3,14(6,4 \times 10^6 + 3,2 \times 10^6)}{6496,62}$$

$$T = 9276,9 \text{ s}$$

**5.3. Calcul de  $h'$ .**

Pour que le satellite paraisse immobile, il faut que sa période soit égale à celle de la Terre. Or pour faire un tour complet sur elle-même, la Terre met un temps  $T' = 24 \text{ h} = 86400 \text{ s}$ .  $h'$  est donnée par :

$$\begin{aligned}T' &= \frac{2\pi(R+h')}{V} \\ \Rightarrow h' &= \frac{T'V}{2\pi} - R \\ h' &= \frac{86400 \cdot 6496,62}{6,28} - 6,4 \times 10^6 \\ &\approx 8,3 \times 10^7 \text{ m} \\ h' &= 83000 \text{ km}\end{aligned}$$

**5.4. Expression de l'énergie mécanique.**

$$E_m = \frac{1}{2}mV^2 - mg_0 \frac{R^2}{R+h}$$

**5.5. Énergie à fournir pour que le satellite passe de  $h$  à  $h'$ .**

$$\begin{aligned}E_{mh} &= \frac{1}{2}mV^2 - mg_0 \frac{R^2}{R+h} \\ E_{mh'} &= \frac{1}{2}mV^2 - mg_0 \frac{R^2}{R+h'} \\ \Delta E_m &= E_{mh} - E_{mh'} \\ &= \frac{1}{2}mg_0 R^2 \left( \frac{1}{R+h} - \frac{1}{R+h'} \right) \\ \Delta E_m &= \frac{1}{2}1000 \cdot 9,81 \cdot (6,4 \times 10^6)^2\end{aligned}$$

$$\left( \frac{1}{6,4 \times 10^6 + 3,2 \times 10^6} - \frac{1}{6,4 \times 10^6 + 8,3 \times 10^7} \right) = 1,87 \times 10^{10} \text{ J}$$

**Solution 6. (p. 109)****6.1. Accélération des ions.****6.1.1. Sens de la tension  $U$  pour que les ions  $\text{Xe}^+$  soient accélérés.**

- Système étudié : ion  $\text{Xe}^+$ .
- Référentiel d'étude : référentiel du laboratoire supposé galiléen.
- Bilan des forces agissant sur le système entre  $P_1$  et  $P_2$  : la force électrique  $\vec{F} = q\vec{E}$ . Le poids de la particule étant négligeable.

Appliquons le théorème du centre d'inertie au système :

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}_{\text{ext}} &= m\vec{a} \\ \Rightarrow q\vec{E} &= m\vec{a} \\ \Rightarrow \vec{a} &= \frac{q}{m}\vec{E}\end{aligned}$$

$q$  étant une charge positive,  $\vec{a}$  et  $\vec{E}$  ont le même sens. Les particules étant accélérées,  $\vec{a}$  et  $\vec{V}$  ont le même sens. Nous en déduisons que  $\vec{E}$  et  $\vec{V}$  ont le même sens. Or  $\vec{V}$

## 5.6. Solutions des exercices et problèmes

est orienté de  $P_1$  vers  $P_2$ , ainsi que  $\vec{E}$ . Par ailleurs  $\vec{E}$  est toujours orienté dans le sens des potentiels décroissants. Nous déduisons que :

$$\begin{aligned} V(P_2) &< V(P_1) \\ \Rightarrow U_{P_1 P_2} &= V(P_1) - V(P_2) > 0 \end{aligned}$$

### 6.1.2. Énergie cinétique acquise par l'ion $\text{Xe}^+$ .

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique à l'ion  $\text{Xe}^+$  entre  $O_1$  et  $O_2$ .

$$\begin{aligned} \Delta E_c &= W(\vec{F}) \\ \Leftrightarrow E_c(P_2) - E_c(P_1) &= q[V(P_1) - V(P_2)] \end{aligned}$$

avec  $E_c(P_1) = 0$ ,  $q = +e$ ,

$$\begin{aligned} V(P_1) - V(P_2) &= U \\ E_c(P_2) &= eU \end{aligned}$$

L'énergie cinétique en  $P_2$  est indépendante de la masse de l'ion. Elle ne dépend donc pas de l'isotope envisagé. Sa valeur est :

$$E_c(P_2) = 1,6 \times 10^{-19} \cdot 10^3 = 1,6 \times 10^{-16} \text{ J}$$

### 6.1.3. Vitesse de l'ion $^{129}_{54}\text{Xe}^+$ en $O_2$ .

$$E_c(P_2) = \frac{1}{2} m_1 v^2$$

avec

$$\begin{aligned} m_1 &= 54m_p + (129 - 54)m_n \\ (m_n &= m_p \Rightarrow m = 129m_p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_c(P_2) &= \frac{1}{2} 129m_p v^2 \\ \Rightarrow v &= \sqrt{\frac{2E_c(P_2)}{129m_p}} \end{aligned}$$

A.N.  $E_c(P_2) = 1,6 \times 10^{-16} \text{ J}$ ;  $m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ;  $v = 3,85 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}$ .

### 6.1.4. Vitesse $v'$ de l'ion $^{129}_{54}\text{Xe}^+$ en $O_2$ en fonction de $v$ et de $x$ . La masse de $^{129}_{54}\text{Xe}^+$ est :

$$m' = 54m_p + (x - 54)m_n$$

pour  $m_p = m_n$ ,  $m' = x m_p$ . L'énergie cinétique étant indépendante de l'isotope on a :

$$\frac{1}{2} m v^2 = eU \quad \text{pour } ^{129}_{54}\text{Xe}^+ \quad (\text{S5.1})$$

$$\frac{1}{2} m' v'^2 = eU \quad \text{pour } ^{x}_{54}\text{Xe}^+ \quad (\text{S5.2})$$

$$\frac{(\text{S5.1})}{(\text{S5.2})} \Rightarrow \frac{m v^2}{m' v'^2} = 1$$

$$\Rightarrow v'^2 = v^2 \frac{m}{m'} = v^2 \frac{129m_p}{x m_p}$$

$$\Rightarrow v' = v \sqrt{\frac{129}{x}}$$

## 6.2. Séparation des ions.

### 6.2.1. Montrons que le mouvement de $^{129}_{54}\text{Xe}^+$ dans $\vec{B}$ est plan, circulaire et uniforme.

#### ■ Mouvement plan :

En choisissant comme repère de projection, le repère curviligne  $(M, \vec{t}, \vec{n}, \vec{k})$ , on montre (voir le cours)

quelque soit  $t$ ,  $z = 0 \Rightarrow$  le mouvement se produit dans le plan  $(\vec{t}, \vec{n})$ . Le mouvement est donc plan.

#### ■ Mouvement circulaire :

On établit (voir cours) l'expression du rayon de courbure  $\rho = \frac{mv}{qB}$  de la trajectoire et on constate que  $\rho$  est une constante. Donc la trajectoire est circulaire.

#### ■ Mouvement uniforme : (Voir cours)

$\vec{F}_m$  (force magnétique de Lorentz) étant l'unique force extérieure agissant sur l'ion dans  $\vec{B}$ ,  $\Delta E_c = W(\vec{F}_m) = 0$  car  $\vec{F}_m \perp \vec{v}$  donc à la trajectoire,  $E_c = \text{constante} \Rightarrow v = \text{constante}$ . Donc le mouvement est uniforme.

### 6.2.2. Expression littérale du rayon de courbure de la trajectoire.

$R = \frac{mv}{qB}$  (voir le cours) pour  $m = 129m_p$  et  $q = e$ ,

$$R = \frac{129m_p v}{eB}$$

A.N.  $m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ;  $v = 3,85 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}$ ;  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ;  $B = 0,1 \text{ T}$ ,  $R = 0,518 \text{ m} = 51,8 \text{ cm}$ .

### 6.2.3. Valeur de $x$ .

Le rayon de courbure de la trajectoire de  $^{x}_{54}\text{Xe}^+$  est :

$$R' = \frac{x m_p v'}{eB}$$

avec  $v' = v \sqrt{\frac{129}{x}}$ . Or

$$AB = 2R' - 2R = 2 \left( \frac{x m_p v'}{eB} - \frac{129 m_p v}{eB} \right)$$

$$AB = \frac{2m_p}{eB} \left( x v \sqrt{\frac{129}{x}} - 129 v \right)$$

$$\Rightarrow AB = \frac{2m_p v}{eB} (\sqrt{129x} - 129)$$

$$\Rightarrow \sqrt{129x} = \frac{ABeB}{2m_p v} + 129$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{129} \left( \frac{ABeB}{2m_p v} + 129 \right)^2$$

A.N.  $m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ;  $v = 3,85 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}$ ;  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ;  $B = 0,1 \text{ T}$ ;  $AB = 8 \times 10^{-3} \text{ m}$ .

$$x = 131$$

## Solution 7. (p. 109)

### 7.1.

7.1.1. Montrons que dans un "dee", le mouvement d'un proton est circulaire et uniforme. (Voir cours).

### 7.1.2. Expression littérale de la durée d'un demi-tour.

La trajectoire d'un proton est circulaire et a pour rayon :

$$R_i = \frac{m v_i}{eB}$$

$V_i$  étant la vitesse du proton au cours d'un passage dans un "dee". Le parcours du proton dans un "dee" est un demi-cercle dont la longueur  $d_i$  a pour expression  $d_i = \pi R_i$ . Ce parcours est effectué en une durée  $t_i$  telle

que :

$$t_i = \frac{\pi R_i}{V_i}$$

Avec

$$V_i = \frac{e B R_i}{m} \\ \Rightarrow t_i = \frac{\pi m}{e B}$$

Cette durée est constante et ne dépend pas de la vitesse de la particule.

A.N.  $m = m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ;  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ;  $B = 1 \text{ T}$ ;  $t_i = 3,27 \times 10^{-8} \text{ s}$ .

Fréquence  $N$  de la tension alternative.

Si on néglige la durée de transfert dans l'intervalle étroit entre les "dees", la période de rotation du proton est :  $T = 2t_i$  et sa fréquence  $N$  est :

$$N = \frac{1}{T} = \frac{1}{2t_i} = \frac{e B}{2\pi m}$$

La fréquence  $N'$  de la tension alternative alimentant les lèvres des "dees" doit être telle que :

$$N' = N = \frac{e B}{2\pi m}$$

A.N.  $m = m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ;  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ;  $B = 1 \text{ T}$ ;  $N' = 15,25 \times 10^6 \text{ Hz} = 15,25 \text{ MHz}$ .

### 7.2. Énergie cinétique transmise au proton à chaque tour.

À l'intérieur des "dees", le proton garde sa vitesse d'entrée; la variation d'énergie cinétique au cours de ce parcours est donc nulle. La variation d'énergie cinétique a lieu lorsque le proton passe d'un "dee" à l'autre.

- Système étudié : le proton.
- Référentiel d'étude : référentiel terrestre supposé Galiléen.
- Forces extérieures agissant sur le système : la force électrique  $\vec{F}$ .

L'action du poids du proton étant négligeable. Au cours d'un tour, le proton franchit deux fois l'espace champ électrique. Le théorème de l'énergie cinétique donne donc :

$$\Delta E_c = W_{D_1 \rightarrow D_2}(\vec{F}) + W_{D_2 \rightarrow D_1}(\vec{F})$$

or

$$W_{D_1 \rightarrow D_2}(\vec{F}) = W_{D_2 \rightarrow D_1}(\vec{F}) = e U$$

$$\Delta E_c = 2e U = 1,28 \times 10^{-15} \text{ J}.$$

### 7.3. Nombre $n$ de tours effectués par les protons dans le cyclotron.

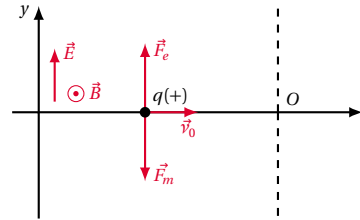
L'énergie cinétique initiale étant considérée comme nulle, l'énergie cinétique finale  $E_{cf}$  est égale à  $n$  fois la variation d'énergie cinétique  $\Delta E_c$ .  $E_{cf} = n \Delta E_c$  soit  $\frac{1}{2} m V_f^2 = n 2e U$

$$\Rightarrow n = \frac{m v_f^2}{4e U} = 261 \text{ tours}$$

### Solution 8. (p. 110)

#### 8.1. Montrons que $v_0 = \frac{E}{B}$ .

- Système étudié : particule de charge  $q(+)$  et de masse  $m$ .
- Référentiel d'étude : référentiel terrestre supposé galiléen.
- Bilan des forces agissant sur le système :
  - la force électrique :  $\vec{F}_e = q \vec{E}$ ;
  - la force magnétique :  $\vec{F}_m = q \vec{v}_0 \wedge \vec{B}$ ;
 (On néglige le poids de la particule)



Pour que la particule ne soit pas déviée, il faut que les forces agissant sur la particule compensent, c'est-à-dire :  $\vec{F}_e + \vec{F}_m = \vec{0}$ .

En intensité :

$$F_e = F_m \text{ avec } F_e = q E \text{ et } F_m = q v_0 B$$

$$\Leftrightarrow q E = q v_0 B \Rightarrow v_0 = \frac{E}{B}.$$

#### 8.2. Sens de déviation des particules de vitesse $v > v_0$ .

Si  $v > v_0$  avec  $v_0 = \frac{E}{B}$ , nous pouvons écrire

$$v > \frac{E}{B} \Rightarrow v B > E \quad (S5.1)$$

En multipliant (S5.1) par  $q$  (charge (+)),

$$q v B > q E \Rightarrow F_m > F_e$$

Donc les particules sont déviées vers le bas (sens de  $\vec{F}_m$ ). Si  $v < v_0$ , un raisonnement analogue montre que les particules sont déviées vers le haut (sens de  $\vec{F}_e$ ).

#### 8.3. Valeur numérique de $v_0$ .

Pour  $B = 0,10 \text{ T}$ ,  $d = 0,5 \text{ cm} = 5 \times 10^{-3} \text{ m}$  et  $U = 50 \text{ V}$

$$v_0 = \frac{E}{B} = \frac{U}{d B} = \frac{50}{5 \times 10^{-3} \cdot 0,1} = 10^5 \text{ ms}^{-1}$$

## Généralités sur les systèmes oscillants

6.1	<b>Généralités sur les phénomènes périodiques</b> . . . . .	118
6.1.1	Caractéristiques d'un phénomène périodique . . . . .	118
6.2	<b>Phénomènes oscillatoires ou vibratoires</b> . . . . .	118
6.2.1	Définition et exemple . . . . .	118
6.2.2	Amortissement et entretien des oscillations . . . . .	118
6.3	<b>Etude expérimentale des phénomènes périodiques</b> . . . . .	119
6.3.1	Examinons quelques cas particuliers . . . . .	119
6.4	<b>Cas particulier des phénomènes périodiques sinusoïdaux</b> . . . . .	121
6.4.1	Représentation d'une fonction sinusoïdale par le vecteur de Fresnel . . . . .	121
6.4.2	Différence de phase entre deux fonctions sinusoïdales de même période . . . . .	122
6.5	<b>Enoncés des exercices et problèmes</b> . . . . .	124
6.6	<b>Solutions des exercices et problèmes</b> . . . . .	125





## 6.1 Généralités sur les phénomènes périodiques

### Définition.

Un phénomène est dit *périodique* lorsqu'il se reproduit identique à lui-même à des intervalles de temps réguliers.

### 6.1.1 Caractéristiques d'un phénomène périodique

#### Grandeur physique associée

Cette grandeur peut être :

- l'abscisse linéaire  $x(t)$  : cas du mouvement rectiligne sinusoïdal;
- l'abscisse angulaire  $\theta(t)$  : cas du mouvement circulaire uniforme;
- la tension  $u(t)$  et l'intensité  $i(t)$  : cas du courant alternatif;
- l'élongation  $y(t)$  mesurant la déformation du milieu propageur : cas du signal émis en un point d'une corde élastique ou en un point de la surface libre de l'eau.

#### Période

La période  $T$  d'un phénomène périodique est le plus petit intervalle de temps au bout duquel le phénomène se reproduit identique à lui-même.  $T$  s'exprime en seconde (s) dans le SI.

#### Fréquence

La fréquence  $f$  d'un phénomène périodique est le nombre de périodes par unité de temps (1 seconde). Ainsi,

$$f = \frac{1}{T}$$

$f$  s'exprime en *hertz* (Hz) dans le SI.

## 6.2 Phénomènes oscillatoires ou vibratoires

### 6.2.1 Définition et exemple

Un phénomène périodique est dit oscillatoire ou vibratoire si la grandeur associée varie de part et d'autre d'une valeur moyenne. Si de plus la grandeur associée est une fonction sinusoïdale du temps, le phénomène vibratoire est dit *sinusoïdal*.

#### Exemple.

- Mouvement des oscillateurs mécaniques.
- Courant alternatif.
- Mouvement d'une lame vibrante ou d'un diapason (qui vibrent en émettant un son d'où l'appellation oscillateur acoustique). (Figure 6.1)

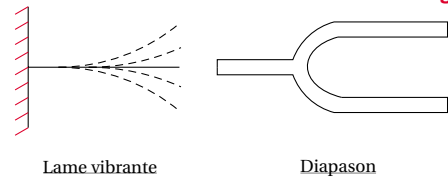


Figure 6.1

### 6.2.2 Amortissement et entretien des oscillations

Au cours des mouvements vibratoires, l'amplitude du mouvement diminue progressivement pour s'annuler, à cause des forces de frottement : on parle d'*amortissement* des oscillations. Grâce à une source d'énergie extérieure, on peut compenser la perte d'énergie, ce qui permet de conserver à l'oscillateur une amplitude constante : on dit que la vibration est *entretenu*.

### 6.3. Etude expérimentale des phénomènes périodiques

#### Exemple.

Une lame vibrante entretenue par un électro-aimant. (Figure 6.2)

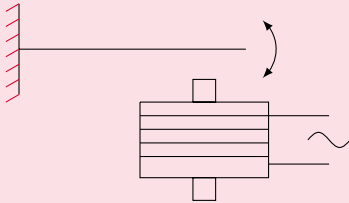


Figure 6.2

La lame est attirée deux fois par période du courant. Donc sa fréquence est égale à deux fois celle du courant.

#### Exemple.

Un son capté par un microphone peut être visualisé à l'oscilloscope.

3. Le ralenti cinématographique. Ce procédé consiste à filmer à grande vitesse un phénomène rapide et à projeter le film au ralenti.
4. La stroboscopie. Un stroboscope est une source lumineuse qui émet périodiquement des éclairs très brefs, dont on peut faire varier la période  $T_e$  donc la fréquence  $f_e$ . On substitue ainsi au mouvement réel, un *mouvement apparent* dont les caractéristiques dépendent des valeurs de  $T$  (période du mouvement) et de  $T_e$ .

#### Remarque.

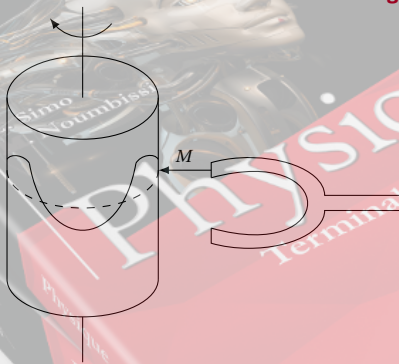
Si la fréquence des éclairs est supérieure à 10 Hz (donc  $T_e > 0,1$  s durée de la persistance rétinienne) l'oeil a l'impression d'une lumière continue, ce qui donne un mouvement apparent non "saccadé".

## 6.3 Etude expérimentale des phénomènes périodiques

Les dispositifs d'étude des phénomènes périodiques sont très variés.

1. Dispositifs d'enregistrement graphique dont le principe consiste à enregistrer le mouvement vibratoire sur un cylindre tournant à vitesse constante. (Figure 6.3)

Figure 6.3



2. Oscilloscope électronique. A l'aide d'un capteur, la grandeur associée au phénomène vibratoire est converti en une tension électrique de même fréquence. Cette tension visualisée à l'oscilloscope permet d'étudier le phénomène vibratoire.

#### Exemple d'utilisation du stroboscope

Observons la rotation d'un ventilateur. L'une des pâles est peinte en blanc. Notre attention sera portée sur cette pâle. Plaçons-nous dans l'obscurité, puis éclairons le ventilateur en marche à l'aide d'un stroboscope dont nous faisons varier la fréquence des éclairs. Pour certaines valeurs de la fréquence, le ventilateur paraît immobile (on observe un disque blanc); pour d'autres, il paraît tourner lentement, soit dans le sens réel, soit dans le sens contraire.

#### Expliquons les apparences observées

Bien que l'oeil ait l'impression de lumière continue, en réalité, il ne voit la pâle que lorsqu'elle est éclairée. Donc pour expliquer l'apparence observée, il nous suffit de répondre à la question : *Quel mouvement effectue la pâle entre deux éclairs consécutifs ?*

### 6.3.1 Examinons quelques cas particuliers

#### Cas 1

$T_e = kT$  ou  $f = kf_e$  avec  $k \in \mathbb{N}$ .

Entre deux éclairs consécutifs (intervalle de temps  $T_e$ ), la pâle fait un nombre entier  $k$  de tours. La pâle est donc

toujours surprise par l'éclair dans la même position. Le ventilateur semble immobile et muni d'une seule pale blanche.

Retenons : la plus grande fréquence des éclairs pour laquelle on observe l'immobilité apparente est égale à la fréquence  $f$  du phénomène observé.

### Cas 2

$$T = K T_e \Rightarrow T_e = \frac{1}{kT} \text{ ou } f_e = kf \Rightarrow f = \frac{1}{kf_e}.$$

Entre deux éclairs, (durée  $T_e$ ) la pale effectue  $k$  tours et une fraction  $\frac{1}{n}$  de tours. Elle est donc surprise  $n$  fois pendant un tour complet, toujours aux mêmes endroits. En apparence, le ventilateur est immobile et possède  $n$  pâles blanches.

Exemple d'aspect observé pour certaines valeurs de  $n$  (Figure 6.4).

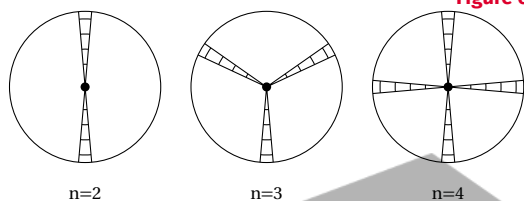


Figure 6.4

#### Remarque.

Lorsque la pale est surprise plusieurs dizaines de fois pendant un tour, l'observateur a l'impression de voir un disque blanc immobile.

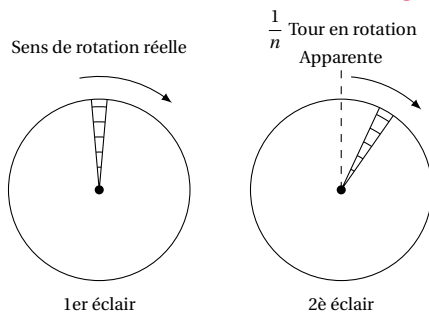
### Cas 3

Reprenons le cas où  $T_e = K T$  (une seule pale immobile), puis faisons varier légèrement  $T_e$ .

1.  $T_e$  est légèrement supérieure à  $kT$  (ou  $f_e$  est légèrement inférieure à  $\frac{f}{k}$ ).

Entre deux éclairs consécutifs, la pale fait  $k$  tours et une fraction  $1/n$  de tour. L'observateur a l'impression que la pale n'a effectué que  $\frac{1}{n}$  tour dans le sens réel. La pale semble tourner *lentement* dans le *sens réel*. On parle de mouvement *apparent ralenti direct* (Figure 6.5).

Figure 6.5



Calculons la fréquence  $f_a$  du mouvement apparent. Dans l'intervalle de temps  $T_e$ , la pale fait  $\left(k + \frac{1}{n}\right)$  tours. La durée de 1 tour étant  $T$ , nous avons :

$$T_e = \left(k + \frac{1}{n}\right) T \quad (6.1)$$

Pendant la même durée, la pale semble avoir fait  $\frac{1}{n}$  tour. La durée de 1 tour en mouvement apparent étant  $T_a$  (période du mouvement apparent), nous pouvons écrire :

$$T_e = \frac{1}{n} T_a \Rightarrow \frac{1}{n} = \frac{T_e}{T_a} \quad (6.2)$$

(6.2) dans (6.1) donne :

$$T_e = \left(k + \frac{T_e}{T_a}\right) T \quad (6.3)$$

Faisons  $\frac{(6.3)}{T T_e}$ , nous avons :

$$\frac{1}{T} = \frac{k}{T_e} + \frac{1}{T_a}$$

qui est équivalent à :

$$f = k f_e + f_a \Rightarrow f_a = f - k f_e$$

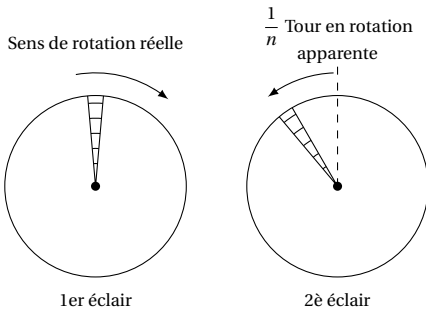
2.  $T_e$  est légèrement inférieure à  $kT$  (ou  $f_e$  est légèrement supérieure à  $\frac{f}{k}$ ).

Entre deux éclairs consécutifs, la pale effectue un peu moins de  $k$  tours (à une fraction  $\frac{1}{n}$  de tour près).

L'observateur a l'impression que la pale n'a effectué que  $\frac{1}{n}$  tour en sens inverse. La pale semble tourner *lentement* dans le sens inverse du mouvement réel : on parle de mouvement *apparent ralenti rétrograde* (Figure 6.6).

## 6.4. Cas particulier des phénomènes périodiques sinusoïdaux

Figure 6.6



De la même manière que précédemment, on calcule la fréquence du mouvement apparent ralenti rétrograde

$$f_a = k f_e - f$$

## 6.4 Cas particulier des phénomènes périodiques sinusoïdaux

Pour un phénomène périodique sinusoïdal, la grandeur physique associée est une fonction sinusoïdale du temps. Soit  $x$  cette grandeur.  $x$  est de la forme :

$$x = a \cos(\omega t + \phi)$$

où :

- $a$  est l'amplitude du phénomène.  $A$  est toujours positif et s'exprime dans la même unité que  $x$ .
- $\omega$  est la pulsation du phénomène.  $\omega$  s'exprime en  $\text{rad s}^{-1}$ .
- $(\omega t + \phi)$  est la phase du phénomène à la date  $t$ . Elle s'exprime en radians (rad).
- à  $t = 0$ , la phase du mouvement devient  $\omega \cdot 0 + \phi = \phi$ . Donc  $\phi$  est la phase à l'origine.

### 6.4.1 Représentation d'une fonction sinusoïdale par le vecteur de Fresnel

Pour faciliter les opérations (comparaison et somme de plusieurs fonctions) sur les fonctions sinusoïdales, on convient de représenter chaque fonction sinusoïdale par un vecteur appelé *vecteur de Fresnel*.

### Construction de Fresnel<sup>1</sup>

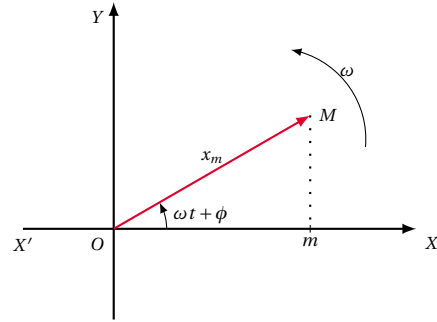
#### Représentation de Fresnel d'une grandeur sinusoïdale

Soit une fonction sinusoïdale :

$$x = X_m \cos(\omega t + \phi)$$

Avec  $X_m > 0$ ;  $\omega > 0$  et  $-\pi < \phi < \pi$ .

Figure 6.7



Soit un plan  $P$  muni d'un repère  $(X'OX, Y'OY)$ ,  $X'OX$  étant l'origine des phases.

A la fonction sinusoïdale

$$x = X_m \cos(\omega t + \phi)$$

on associe un vecteur  $\vec{OM}$  appelé vecteur de Fresnel, tel que :

- son module est  $X_m$  ;
- ce vecteur tourne à la vitesse angulaire  $\omega$  égale à la pulsation de  $x$  ;
- ce vecteur fait, à la date  $t$ , avec l'axe origine des phases, l'angle,  $(\vec{OX}, \vec{OM}) = (\omega t + \phi)$ .

#### Remarque.

La projection de  $\vec{OM}$  sur l'axe  $X'OX$  est :

$$\overline{Om} = X_m \cos(\omega t + \phi) = x$$

**Conclusion:** A toute grandeur sinusoïdale de pulsation  $\omega$ , on peut faire correspondre un vecteur du plan tournant à la vitesse  $\omega$ .

Inversement, à tout vecteur tournant du plan, on pourra faire correspondre une grandeur sinusoïdale ayant une pulsation égale à la vitesse angulaire de rotation.

1. Augustin Fresnel (1788–1827), physicien français.



### Application de cette représentation : somme des fonctions sinusoïdales de même pulsation

Soient :

$$x_1 = X_1 \cos(\omega t + \phi_1)$$

et

$$x_2 = X_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

deux grandeurs sinusoïdales de même nature et de même pulsation.

Soit à déterminer les caractéristiques de la somme  $x = x_1 + x_2$ .

Nous allons utiliser les vecteurs de Fresnel  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  associés respectivement à  $x_1$  et  $x_2$  (Figure 6.8).

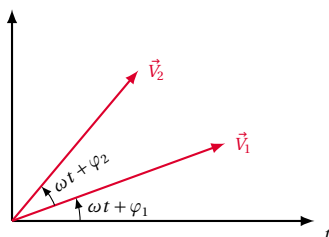


Figure 6.8

Le vecteur  $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$  représente alors la somme  $x = x_1 + x_2$ .

Choisissons (pour simplifier) de représenter les vecteurs à l'instant  $t = 0$ . Pour faire la somme  $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$ , portons le vecteur  $\vec{V}_2$  à l'extrémité de  $\vec{V}_1$  (Figure 6.9)

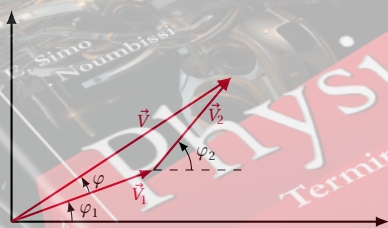


Figure 6.9

Le vecteur  $\vec{V}$  représente donc la fonction sinusoïdale

$$x = X_m \cos(\omega t + \phi) = x_1 + x_2$$

$X_m$  et  $\phi$  peuvent s'exprimer en fonction de  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $\phi_1$  et  $\phi_2$ . Il est donc nécessaire d'utiliser la même fonction trigonométrique pour caractériser  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x$  (soit le cosinus pour les trois soit le sinus pour les trois).

### 6.4.2 Différence de phase entre deux fonctions sinusoïdales de même période

Soient deux mouvements sinusoïdaux d'équation horaire :

$$x_1 = a_1 \sin(\omega t + \phi_1)$$

et

$$x_2 = a_2 \sin(\omega t + \phi_2)$$

Calculons la différence de phase,  $\phi$  entre les deux mouvements :

$$\phi = (\omega t + \phi_2) - (\omega t + \phi_1) = \phi_2 - \phi_1$$

si  $\phi_2 - \phi_1 > 0$ ,  $x_2$  est en avance de phase sur  $x_1$

si  $\phi_2 - \phi_1 < 0$ ,  $x_2$  est en retard de phase sur  $x_1$

si  $\phi_2 - \phi_1 = 0$ ,  $x_2$  est en phase avec  $x_1$

$\vec{V}_1$  est le vecteur de Fresnel associé à  $x_1$ ,  $\vec{V}_2$  est le vecteur de Fresnel associé à  $x_2$   $\phi$  = l'angle  $(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$  (Figure 6.10).

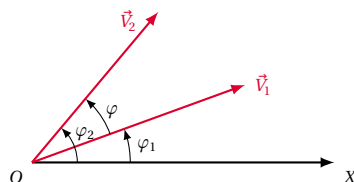


Figure 6.10

Comment reconnaître sur la courbe  $x(t)$  laquelle des sinusoïdes est en avance par rapport à l'autre?

Des deux grandeurs sinusoïdales, celle qui est en avance par rapport à l'autre est celle qui s'annule la première, ou bien qui atteint sa valeur maximale la première.

#### Exemple.

Nous constatons sur la Figure 6.11 que  $x_2(t)$  atteint sa valeur maximale (à la date  $t_2$ ) avant  $x_1(t)$  (à la date  $t_1$ ). Donc  $x_2$  est en avance sur  $x_1$

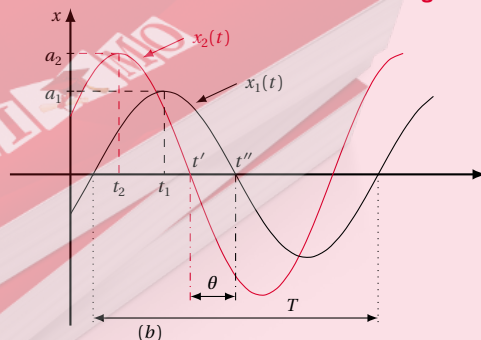


Figure 6.11

On aurait pu constater que  $x_2$  s'annule pour la première



#### 6.4. Cas particulier des phénomènes périodiques sinusoïdaux

fois "en descendant" (à la date  $t'$  avant  $x_1$  (à la date  $t''$ )).

Comment déterminer le déphasage  $\phi$  sur la courbe  $x(t)$ ?

Au déphasage  $\phi$  correspond un décalage temporel  $\theta$  (entre les deux courbes  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$ ) tel que :

$$\frac{\phi}{2\pi} = \frac{\theta}{T} \Rightarrow \phi = \frac{2\pi}{T} \theta = \omega \theta$$

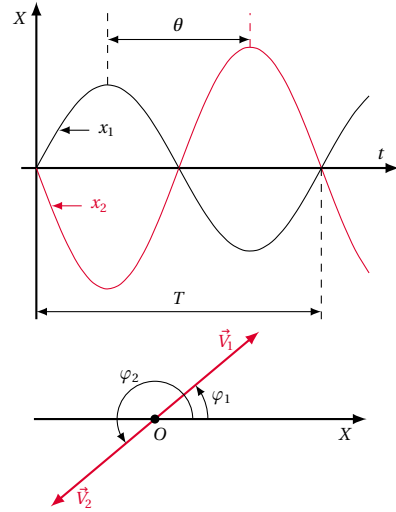
Ceci signifie que le déphasage en fraction de tour est égal au déphasage temporel évalué en fraction de période.

avec

$$\begin{aligned} \phi &= (2K+1)\pi \\ \Rightarrow \theta &= (2K+1) \frac{T}{2} \end{aligned}$$

$\theta$  est égal à un nombre impair de demi-période.

Figure 6.13



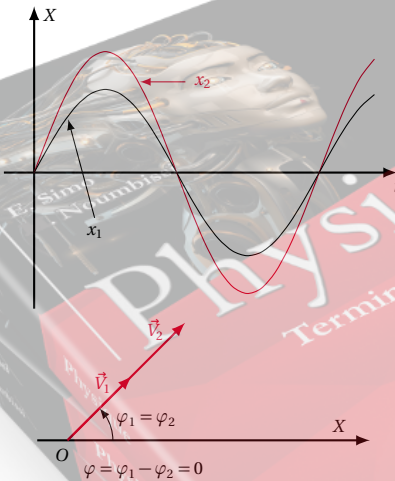
#### Quelques déphasages particuliers

$$\phi = 2K\pi$$

avec  $K \in \mathbb{Z}$  (entier relatif).

Les fonctions  $x_1$  et  $x_2$  s'annulent en même temps, sont minimales ou maximales aux mêmes instants (Figure 6.12). On dit que  $x_1$  et  $x_2$  sont *en phase*. Le décalage horaire  $\theta$  est nul ou égal à un nombre entier de période  $T$ ,  $\theta = kT$ .

Figure 6.12



$$\phi = \pi + 2K\pi = (2K+1)\pi$$

Les deux grandeurs  $x_1$  et  $x_2$  s'annulent encore en même temps, mais quand l'une est maximale, l'autre est minimale et inversement (Figure 6.13). On dit que  $x_1$  et  $x_2$  sont en *opposition de phase*. Le décalage horaire  $\theta$  vaut :

$$\theta = T \frac{\phi}{2\pi}$$

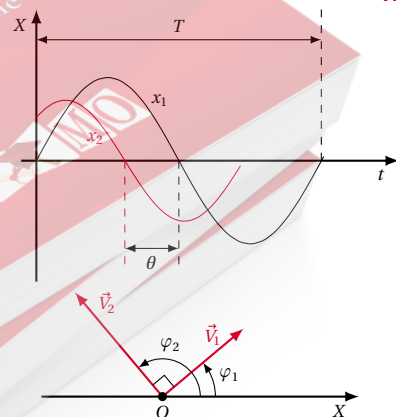
Dans ce cas, lorsque  $x_2$  est extrême,  $x_1$  est nulle et inversement (Figure 6.14). Le décalage horaire vaut :

$$\theta = T \frac{\phi}{2\pi}$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} + 2K\pi \Rightarrow \theta = (4K+1) \frac{T}{4}$$

Les fonctions sont en *quadrature de phase*.

Figure 6.14



## 6.5 Enoncés des exercices et problèmes

### Exercice 1.

L'enregistrement du mouvement d'un oscillateur mécanique est effectué à l'aide d'un cylindre tournant de sorte qu'un point de sa périphérie ait une vitesse de  $20 \text{ cm s}^{-1}$ .



En utilisant le graphique obtenu représenté ci-dessous, déterminer :

- 1.1. l'amplitude du mouvement de l'oscillateur;
- 1.2. sa période et sa fréquence;
- 1.3. son équation horaire.

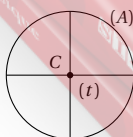
### Exercice 2.

On éclaire, à l'aide d'un stroboscope, la lame d'un vibreur, de fréquence  $f$ .

- 2.1. Pour quelles fréquences  $f_e$  des éclairs la lame paraîtra-t-elle unique et immobile,
  - si le premier éclair surprend la lame à un passage par sa position d'équilibre,
  - si le premier éclair surprend la lame dans une position quelconque?
- 2.2. La plus grande valeur de la fréquence des éclairs pour laquelle la lame paraît unique et immobile dans une position quelconque est 100 Hz. Quelle est la fréquence du vibreur?
- 2.3. La fréquence des éclairs est 200 Hz. Qu'observe-t-on?

### Exercice 3.

On considère un anneau (A) dont quatre points régulièrement espacés sont reliés à une tige ( $t$ ) perpendiculaire au plan de l'anneau et passant par son centre C. La tige ( $t$ ) est reliée à l'arbre d'un moteur. L'anneau étant immobile à la date  $t = 0$ , on lui communique un mouvement de rotation autour d'un axe matérialisé par la tige ( $t$ ). La vitesse de rotation croît de 0 à 9 tours/s. On se propose d'étudier la nature du mouvement de l'anneau au cours du démarrage par une méthode stroboscopique. Le stroboscope émet 12 éclairs par seconde.



- 3.1. Combien de fois observe-t-on l'immobilité apparente des fils tendus au cours du mouvement? Déterminer les valeurs de la vitesse de rotation quand se sont

produites ces immobilités.

- 3.2. Les dates des immobilités successivement observées étant 4 s, 8 s, 12 s, représenter graphiquement la vitesse de rotation en fonction du temps. En déduire la nature du mouvement.

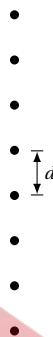
### Exercice 4.

Une roue de bicyclette possède 28 rayons supposés tous dans un plan perpendiculaire à l'axe et régulièrement espacés. La roue tourne à la vitesse de 6 tours/s. On l'éclaire à l'aide d'un stroboscope dont les éclairs ont une fréquence réglable entre 50 et 300 Hz.

- 4.1. Pour certaines valeurs de la fréquence des éclairs, la roue paraît immobile. Expliquer le phénomène et calculer la valeur de ces fréquences.
- 4.2. Indiquer ce qu'on observerait dans les deux cas suivants :
  - 4.2.1. fréquence légèrement supérieure à 168 Hz;
  - 4.2.2. fréquence légèrement inférieure à 168 Hz.

### Exercice 5.

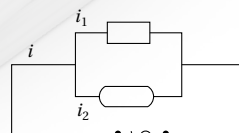
Des gouttes d'eau s'échappent d'un robinet à une cadence régulière. A partir d'une certaine hauteur de chute, à cause de la résistance de l'air, le mouvement devient uniforme. On éclaire alors les gouttes à l'aide d'un stroboscope.



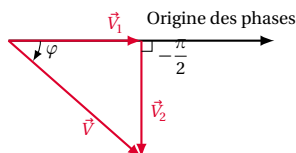
- 5.1. La fréquence la plus grande des éclairs pour laquelle les gouttes semblent immobiles est 500 Hz. Elles sont alors distantes de 2 cm.
  - 5.1.1. Quelle est la fréquence de sortie des gouttes?
  - 5.1.2. Quelle est leur vitesse de chute?
- 5.2. Qu'observe-t-on si la fréquence des éclairs vaut 490 Hz, 510 Hz? Déterminer dans chaque cas la fréquence apparente de sortie des gouttes.

### Exercice 6.

Un circuit alimenté en courant alternatif se partage en deux dérivations.



## 6.6. Solutions des exercices et problèmes



Les intensités des courants dans chacune des dérivations sont données par les relations :

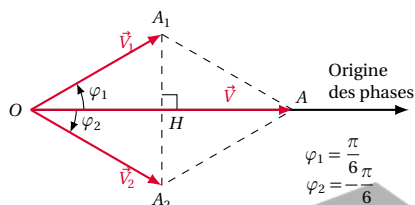
$$i_1 = 9 \cos 100\pi t \quad i_2 = 12 \cos \left( 100\pi t - \frac{\pi}{2} \right).$$

Donner l'expression de l'intensité  $i$  du courant principal. On précise que les lois des courants dérivés étudiées en 1ère s'appliquent aux valeurs instantanées des intensités :  $i = i_1 + i_2$

**Exercice 7.**

En un point  $M$  se superposent deux mouvements d'équation horaires :

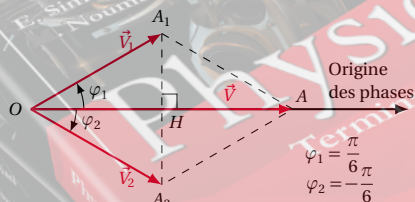
$$x_1 = 10 \cos \left( 120\pi t + \frac{\pi}{6} \right) \quad x_2 = 10 \cos \left( 120\pi t - \frac{\pi}{6} \right)$$



Etablir l'équation  $y(t)$  du mouvement du point  $M$  sachant que  $x = x_1 + x_2$

**Exercice 8.**

Un oscilloscope permet de visualiser deux tensions alternatives  $u_1$  et  $u_2$ .



**8.1.** Quelle est, de ces deux tensions, celle qui est en avance sur l'autre?

**8.2.** Sachant que  $u_1$  est de la forme  $u_1 = 6 \cos 100\pi t$ , trouver le déphasage entre ces deux tensions et l'expression de  $u_2(t)$ .

## 6.6 Solutions des exercices et problèmes

**Solution 1. (p. 124)**

**1.1.** Amplitude du mouvement de l'oscillateur.

Cette amplitude est égale à celle de la courbe obtenue sur le graphique.

$$a = M'M = 2,5 \text{ cm}$$

**1.2.** Période et fréquence du mouvement.

Sur le document ci-dessus, une sinusoïde (correspondant à une période de durée  $T$ ) occupe une longueur  $OA = 4 \text{ cm}$  sur l'axe horizontal. La durée de traçage de cette sinusoïde est égale à la période  $T$ . Si  $V$  est la vitesse d'un point de la surface du cylindre ( $V = 20 \text{ cm s}^{-1}$ ), nous pouvons écrire :

$$OA = VT$$

$$\Rightarrow T = \frac{OA}{V} = \frac{4}{20} = 0,2 \text{ s}$$

Fréquence  $f$  du mouvement :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,2} = 5 \text{ Hz}$$

**1.3.** Equation horaire du mouvement de l'oscillateur.

Cette équation est de la forme :

$$x = a \cos(\omega t + \phi)$$

avec  $a = 2,5 \text{ cm}$  (amplitude du mouvement),

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = 2\pi \cdot 5 = 10\pi$$

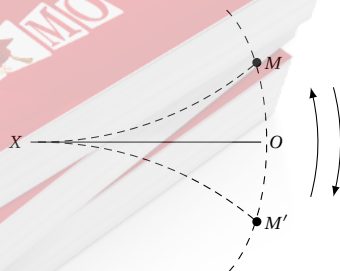
est la pulsation,  $\phi$  est la phase à l'origine. Sa valeur dépend des conditions d'excitation de l'oscillateur. Donc :

$$x = 2,5 \cos(10\pi t + \phi)$$

$X$  en cm.

**Solution 2. (p. 124)**

Soit  $O$  la position d'équilibre et  $M$  une position quelconque.



**2.1.** Fréquences  $f_e$  des éclairs pour lesquelles la lame paraît unique et immobile.

**2.1.1.** La lame est surprise par le 1er éclair au passage

par  $O$ .

Pour que la lame paraisse unique et immobile, il faut que les prochains éclairs la surprennent en  $O$  (quel que soit le sens de son mouvement). Or chaque passage par  $O$  dans ces conditions correspond à une  $\frac{1}{2}$  oscillation de durée  $\frac{T}{2}$ . Donc entre 2 éclairs consécutifs (durée  $T_e$ ) la lame effectue  $k$  demi-oscillations de durée  $k \frac{T}{2}$ . Donc :

$$T_e = k \frac{T}{2} \text{ avec } k \in \mathbb{N}^*.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_e} &= \frac{k}{2} \frac{1}{f} \\ \Rightarrow f_e &= \frac{2f}{k} \end{aligned}$$

**2.1.2.** La lame est surprise par le 1er éclair en une position  $M$  quelconque.

Pour que la lame paraisse unique et immobile, il faut que les prochains éclairs la surprennent dans la même position et se déplaçant dans le même sens. Or deux passages consécutifs par la même position et dans le même sens correspondent à une oscillation de durée  $T$ .

Entre deux éclairs consécutifs (durée  $T$ ) la lame effectue  $k$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) oscillation de durée  $kT$ . Donc :  $T_e = kT$ . En posant  $T_e = \frac{1}{f_e}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_e} &= k \frac{1}{f} \\ \Rightarrow f_e &= \frac{f}{k} \end{aligned}$$

**2.2.** Fréquence du vibreur :

Sachant que  $f_e(\max)$  pour laquelle la lame est unique et immobile dans une position quelconque est  $f_e(\max) = 100 \text{ Hz}$  or  $f_e = \frac{f}{k} \Rightarrow f_e$  est maximale pour  $k$  minimal ( $k \in \mathbb{N}^*$ )  $\Rightarrow k(\min) = 1$  donc

$$\begin{aligned} f_e(\max) &= \frac{f}{1} = 100 \text{ Hz} \\ \Rightarrow f &= 100 \text{ Hz} \end{aligned}$$

**2.3.** Pour  $f_e = 200 \text{ Hz}$ , qu'observe-t-on ? Faisons le rapport  $\frac{f_e}{f}$

$$\begin{aligned} \frac{f_e}{f} &= \frac{200}{100} = 2 \\ \Rightarrow f_e &= 2f \\ \Rightarrow \frac{1}{T_e} &= 2 \frac{1}{T} \\ \Rightarrow T_e &= \frac{1}{2} T \end{aligned}$$

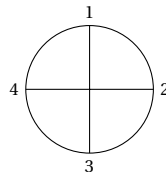
Entre deux éclairs consécutifs, la lame effectue une demi-oscillation. On peut envisager les deux cas suivants.

- 1 cas : si le 1er éclair a surpris la lame en  $O$ . On observe 1 lame unique et immobile en  $O$ .
- 2 cas : si le 1er éclair a surpris la lame dans une position  $m$  quelconque, on observe deux lames immobiles en  $M$  et  $M'$ .  $M$  et  $M'$  sont symétriques par rapport à  $O$

### Solution 3. (p. 124)

**3.1.** Nombre de fois que l'immobilité apparente est observée.

Les quatre rayons étant identiques, attribuons à chaque rayon un numéro.



L'anneau  $A$  paraît immobile si entre deux éclairs (durée  $T_e$ ) :

- le rayon 1 occupe la position du rayon 2, ce qui correspond à  $\left(k + \frac{1}{4}\right) = \frac{k'}{4}$  tour.
- le rayon 1 occupe la position du rayon 3, ce qui correspond à  $\left(k + \frac{3}{4}\right) = \frac{k'''}{4}$  tour.
- le rayon 1 occupe la position du rayon 4, ce qui correspond à  $\left(k + \frac{2}{4}\right) = \frac{k''}{4}$  tour.

$k', k'', k'''$  étant des entiers naturels, nous retenons qu'il y a immobilité apparente lorsqu'entre deux éclairs,  $A$  fait  $\frac{k}{4}$  tours (de durée  $k \frac{T}{4}$ ) ( $k$  étant entier naturel). Donc

$$\begin{aligned} T_e &= \frac{kT}{4} \\ \Rightarrow T &= \frac{4T_e}{k} \end{aligned}$$

Soit  $f = \frac{1}{T} = \frac{k}{4T_e}$  la fréquence de rotation de  $A$ .  $f$  est aussi la vitesse de rotation de  $A$ . Pour  $f_e = 12$  (éclairs par seconde), nous avons la double inégalité suivante :

$$0 < 3k \leq 9 \Rightarrow k \in \{1, 2, 3\}$$

Donc l'immobilité apparente est perçue 3 fois

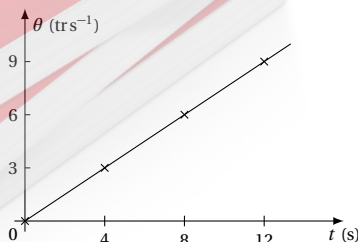
Valeurs de la vitesse de  $A$  à chaque immobilité. Cette vitesse est égale à la fréquence  $f$  de rotation de  $A$ . Nous avons établi la relation entre  $f$  et  $f_e$  :  $f = \frac{k}{4T_e} = \frac{k}{4} f_e$  avec  $f_e = 12 \Rightarrow f = 3k$ .

$$\text{Pour } k=1, \theta'_1 = f_1 = 3 \cdot 1 = 3 \text{ tours/s}$$

$$\text{Pour } k=2, \theta'_2 = f_2 = 3 \cdot 2 = 6 \text{ tours/s}$$

$$\text{Pour } k=3, \theta'_3 = f_3 = 3 \cdot 3 = 9 \text{ tours/s}$$

**3.2.** Courbe  $\theta' = f(t)$ . Sachant qu'à  $t=0$ ,  $\theta'=0$ , présentons dans un tableau les valeurs de  $\theta'$  à chaque date.





## 6.6. Solutions des exercices et problèmes

Nous pouvons donc tracer la courbe  $\theta' = f(t)$ . Le graphique  $\theta' = f(t)$  est une droite passant par l'origine, et de pente positive. Donc  $\theta' = at$  où  $a$  est la pente de cette droite. L'accélération de  $A$  est :

$$\frac{d\theta'}{dt} = a \neq 0$$

Donc le mouvement de  $A$  est un mouvement *circulaire uniformément accéléré*

**Solution 4. (p. 124)**

*Stroboscopie d'une roue à 28 rayons* (voir exercice précédent).

**4.1.**

**4.1.1.** La roue paraît immobile lorsqu'entre deux éclairs, un rayon occupe exactement la position d'un autre rayon.

**4.1.2.** Calcul des fréquences  $f_e$  des éclairs pour lesquelles il y a immobilité apparente.

Entre deux éclairs (durée  $T_e$ ), la roue effectue  $k \frac{1}{28}$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) tours de durée  $k \frac{T}{28}$ . Donc :

$$\begin{aligned} T_e &= k \frac{T}{28} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{f_e} &= \frac{k}{28} \frac{1}{f} \\ \Rightarrow f_e &= \frac{28f}{k} \end{aligned}$$

or  $f_e$  varie de 50 à 300 Hz  $\Rightarrow 50 \leq f_e \leq 300$  soit :

$$50 \leq \frac{28f}{k} \leq 300$$

avec  $f = 6$  Hz (trs/s)

$$\begin{aligned} 50 &\leq \frac{168}{k} \leq 300 \\ \Leftrightarrow 50k &\leq 168 \leq 300k \\ 50k &\leq 168 \\ \Rightarrow k &\leq \frac{168}{50} \\ \Rightarrow k &\leq 3 \\ \Rightarrow k &= \{1; 2; 3\} \end{aligned}$$

Différentes valeurs de  $f_e$  pour lesquelles il y a immobilité apparente. Avec  $f_e = \frac{28f}{k} = \frac{168}{k}$ .

$$\text{Pour } k = 1 \Rightarrow f_e = 168 \text{ Hz}$$

$$\text{Pour } k = 2 \Rightarrow f_e = \frac{168}{2} = 84 \text{ Hz}$$

$$\text{Pour } k = 3 \Rightarrow f_e = 56 \text{ Hz}$$

**4.2. Mouvement observé pour :**

**4.2.1.**  $f_e$  légèrement supérieure à 168 Hz (cas où  $k = 1$ ).

$$\begin{aligned} f_e &> 28f \\ \Rightarrow \frac{1}{T_e} &> \frac{28}{T} \\ \Rightarrow T_e &< \frac{T}{28} \end{aligned}$$

Donc entre deux éclairs, la roue effectue un peu moins de  $\left(\frac{1}{28}\right)^{\text{ème}}$  de tour. Chaque rayon se rapproche de la position du rayon voisin, mais sans l'atteindre. Chaque rayon semble donc se déplacer dans le sens inverse du mouvement réel. Donc le mouvement apparent est ralenti, rétrograde.

**4.2.2.**  $f_e$  est légèrement inférieure à 168 Hz.

$$f_e < 28f \Rightarrow T_e > \frac{T}{28}$$

Entre deux éclairs, la roue effectue un peu plus de  $\left(\frac{1}{28}\right)^{\text{ème}}$  tour. Chaque rayon dépasse légèrement la position du rayon voisin. Chaque rayon semble se déplacer très lentement dans le sens réel du mouvement. Le mouvement apparent est ralenti direct.

**Solution 5. (p. 124)**

**5.1.** Soit  $d$  la distance séparant deux gouttes d'eau.

**5.1.1.** Fréquence  $f$  de sortie des gouttes.

$f = \frac{1}{T}$  où  $T$  est la durée qui sépare la sortie de deux gouttes. Il y a immobilité apparente lorsque, entre 2 éclairs (durée  $T_e$ ), une goutte occupe la position d'une autre goutte située plus bas. Donc entre 2 éclairs, la goutte a parcouru la distance  $kd$  (correspondant à la durée  $KT$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ ). donc :

$$\begin{aligned} T_e &= kT \\ \Rightarrow \frac{1}{f_e} &= k \frac{1}{f} \\ \Rightarrow f_e &= \frac{f}{k} \end{aligned}$$

$f_e$  est maximale pour la plus petite valeur de  $k$ , à savoir  $k = 1$ . Donc  $f_e(\text{max})$ . Pour

$$\begin{aligned} f_e(\text{max}) &= 500 \text{ Hz} \\ \Rightarrow f &= 500 \text{ Hz} \end{aligned}$$

(ce qui correspond à 500 gouttes/s)

**5.1.2.** Vitesse de chute des gouttes.

Pour  $k = 1$ , entre deux éclairs (durée  $T_e$ ), la goutte parcourt la distance  $d$ . Le mouvement étant rectiligne et uniforme, on a :

$$\begin{aligned} d &= v T_e \\ \Rightarrow v &= \frac{d}{T_e} \\ &= d f_e \\ v &= 2 \times 10^{-2} \cdot 500 = 10 \text{ m s}^{-1} \end{aligned}$$

**5.2.** Fréquence de sortie des gouttes, nature et vitesse apparente du mouvement des gouttes.

**5.2.1.** Pour  $f_e = 490$  Hz,

$$f_e < f \Rightarrow T_e > T$$

$\Rightarrow$  entre deux éclairs, la goutte d'eau parcourt une distance  $d' > d$ . L'observateur a l'impression qu'entre deux éclairs, la goutte d'eau n'a parcouru qu'une distance  $d' - d > 0$ . Le mouvement apparent est *ralenti direct*.



- La fréquence apparente  $f_a$  de sortie des gouttes est :  
 $f_a = f - kf_e$  (voir le cours). Pour  $k = 1$ ,  $f_a = f - f_e$ ,  
 $f_a = 500 - 490 = 10 \text{ Hz}$ .
- Vitesse apparente  $v_a$  du mouvement des gouttes :  
 Entre deux éclairs (durée  $T_e$ ) la goutte parcourt une distance  $d' = vT_e$ . Or l'observateur a l'impression que la goutte s'est déplacée de :

$$\begin{aligned} d_a &= d' - d \\ &= vT_e - vT = v(T_e - T) \end{aligned}$$

La vitesse apparente est :

$$\begin{aligned} v_a &= \frac{d_a}{T_e} = v \left( 1 - \frac{T}{T_e} \right) \\ &= v \left( 1 - \frac{f_e}{f} \right) \\ &= 10 \left( 1 - \frac{490}{500} \right) = 0,2 \text{ ms}^{-1} \end{aligned}$$

**5.2.2.** Pour  $f_e = 510 \text{ Hz}$ .

$$f_e > f \Rightarrow T_e < T$$

$\Rightarrow$  entre deux éclairs, la goutte parcourt une distance  $d''$  légèrement inférieure à  $d$ . L'observateur a l'impression qu'entre éclairs, la goutte remonte de  $d - d''$  (fait bien curieux!)

- Le mouvement apparent est ralenti rétrograde
- Fréquence apparente  $f_a$  de sortie des gouttes :

$$f_a = kf_e - f$$

avec  $k = 1$ .

$$\Rightarrow f_a = f_e - f = 510 - 500 = 10 \text{ Hz}$$

- Vitesse apparente  $v_a$  du mouvement des gouttes :  
 Le même raisonnement que ci-dessus nous donne :

$$v_a = v \left( \frac{f_e}{f} - 1 \right) = 0,2 \text{ ms}^{-1}$$

### Solution 6. (p. 124)

Soient :

$$\begin{aligned} i_1 &= 9 \cos 100\pi t \\ i_2 &= 12 \cos \left( 100\pi t - \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

L'intensité  $i = i_1 + i_2$ .

$$i = 9 \cos(100\pi t) + 12 \cos \left( 100\pi t - \frac{\pi}{2} \right).$$

Posons  $i = a \cos(\omega t + \phi)$ .  $i$  (somme de deux fonctions sinusoidales de même pulsation) est une fonction sinusoidale de même pulsation que  $i_1$  et  $i_2 \Rightarrow \omega = 100\pi$ . Déterminons  $a$  et  $\phi$  à l'aide du diagramme de Fresnel. Associons à  $i_1$  le vecteur  $\vec{V}_1$  de module 9 et à  $i_2$  le vecteur  $\vec{V}_2$  de module 12.

$A_i$  est associé le vecteur  $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$

$$a = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15A$$

$$\tan \phi = \frac{V_2}{V_1} = \frac{12}{9} = 1,333$$

En tenant compte de l'origine des phases,

$$\begin{aligned} \phi &= -53^\circ \approx -\frac{3\pi}{10} \\ \Rightarrow i &= 15 \cos \left( 100\pi t - \frac{3\pi}{10} \right) \end{aligned}$$

### Solution 7. (p. 125)

En utilisant la construction de Fresnel,  $x_1$  est représenté par  $\vec{V}_1$  et  $x_2$  par  $\vec{V}_2$ . Soit  $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$ .  $\vec{V}$  représente la grandeur  $x = x_1 + x_2$ . Si nous écrivons  $x = a \cos(\omega t + \phi)$ ,  $\omega = 120\pi$ , pulsation de  $x_1$  et  $x_2$ . A est donné par le module  $V$ .  $V_1 = V_2 \Rightarrow$  le quadrilatère  $OA_1AA_2$  est un losange dont les diagonales se coupent en leur milieu et à angle droit.

$$\cos \phi_1 = \frac{OH}{V_1} = \frac{a}{V_1}$$

$$\Rightarrow a = 2V_1 \cos \phi_1$$

$$\text{A.N. } a = 2 \times 10 \cos \left( \frac{\pi}{6} \right) = 17,32.$$

$\phi_1$  étant égal à  $\phi_2$ , la diagonale  $OA$  du losange  $OA_1AA_2$  est portée par l'origine des phases. Donc  $\phi$  (qui est égal à l'angle compris entre l'origine des phases et  $\vec{V}$ ) est nul et  $x = 17,32 \cos 120\pi t$ .

### Solution 8. (p. 125)

**8.1.**  $u_1$  s'annule et atteint sa valeur maximale avant  $u_2$ . Donc  $u_1$  est en avance de phase sur  $u_2$ .

**8.2.** Trouvons le déphasage  $\phi$  entre  $u_1$  et  $u_2$ .

Entre le déphasage  $\phi$  et le décalage horaire  $\theta$ , nous pouvons écrire :

$$\frac{\phi}{2\pi} = \frac{\theta}{T} \Rightarrow \phi = 2\pi \frac{\theta}{T}$$

Sur la courbe,  $T$  occupe 6 cm et  $\theta$  occupe 1 cm.

$$\text{Donc } \frac{\theta}{T} = \frac{1}{6} \Rightarrow \phi = 2\pi \frac{1}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

Expression de  $u_2(t)$ .

Soient  $\psi_1 =$  phase de  $u_1(t)$  à la date  $t$  et  $\psi_2 =$  phase de  $u_2(t)$  à la date  $t$ .  $\psi_1 - \psi_2 = \phi \Rightarrow \psi_2 = \psi_1 - \phi$  avec

$$\psi_1 = 100\pi t \Rightarrow \psi_2 = 100\pi t - \frac{\pi}{3}.$$

Déterminons l'amplitude de  $u_2(t)$ .

Sur la courbe, l'amplitude  $U_1$  de  $u_1$  mesure 1,5 cm. En admettant que les deux voies de l'oscillographe ont la même sensibilité, l'amplitude de  $u_2(t)$  est alors :

$$\frac{6V \times 2,5 \text{ cm}}{1,5 \text{ cm}} = 10V$$

$$\text{et } u_2(t) = 10 \cos \left( 100\pi t - \frac{\pi}{3} \right)$$

## Les oscillateurs mécaniques

7.1	<b>Introduction</b>	130
7.2	<b>Exemples d'oscillateurs mécaniques. Généralités sur les oscillateurs</b>	130
7.2.1	Généralités sur les oscillateurs	130
7.3	<b>Etude du pendule élastique</b>	130
7.3.1	Description	130
7.3.2	Etude de pendule élastique horizontal	130
7.3.3	Etude du pendule élastique vertical	132
7.4	<b>Etude du pendule de torsion</b>	134
7.4.1	Description	134
7.4.2	Etude dynamique	134
7.4.3	Solution de l'équation différentielle du mouvement	135
7.4.4	Etude énergétique	135
7.5	<b>Etude du pendule pesant</b>	135
7.5.1	Description	135
7.5.2	Etude dynamique	136
7.5.3	Etude énergétique	137
7.5.4	Le pendule simple	137
7.6	<b>Notions d'oscillations forcées et de résonance</b>	138
7.6.1	Amortissement des oscillations	138
7.6.2	Entretien des oscillations : oscillations forcées	138
7.7	<b>Enoncés des exercices et problèmes</b>	139
7.8	<b>Solutions des exercices et problèmes</b>	143



## 7.1 Introduction

De nombreux systèmes physiques, dans des domaines très variés, possèdent un état d'équilibre stable. De tels systèmes réagissent à toutes les petites perturbations par des *actions de rappel* vers cette position d'équilibre.

Le retour vers la position d'équilibre s'effectue généralement par des oscillations : un tel système constitue un *oscillateur mécanique*.

## 7.2 Exemples d'oscillateurs mécaniques. Généralités sur les oscillateurs

1. Le pendule élastique. Le pendule élastique est constitué d'un solide accroché à l'extrémité d'un ressort à spires non jointives. (Figure 7.1). Ce système effectue des oscillations de translation autour de la position d'équilibre.
2. Le pendule de torsion. Il est constitué par une barre (s) suspendue en son centre d'inertie  $G$  à un fil de torsion de constante  $C$ . (voir Figure 7.5). Ce système effectue des oscillations de rotation autour de la position d'équilibre vers laquelle il est constamment rappelé par le couple de torsion (appelé pour cette raison couple de rappel).
3. Le pendule pesant. C'est un dispositif effectuant des oscillations de rotation autour de sa position d'équilibre vers laquelle il est constamment rappelé par son poids.

### Exemple.

- la balançoire;
- le balancier d'une horloge. (Figure 7.7)

devrait osciller indéfiniment en gardant la même amplitude (car l'énergie d'excitation se conserve au cours des oscillations).

- En réalité, à cause des forces de frottements, l'amplitude des oscillations diminue progressivement jusqu'à l'immobilisation de l'oscillateur. On dit que l'oscillateur est *amorti*.

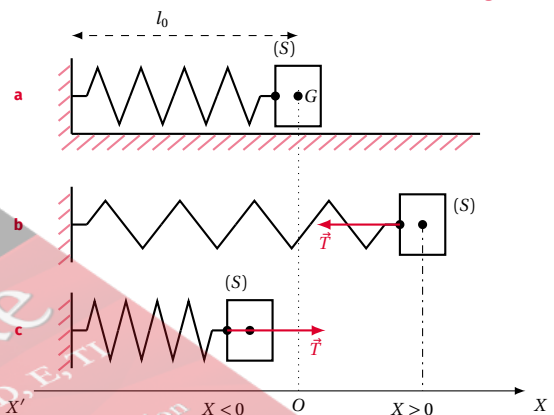
Dans la suite, nous n'étudierons que les oscillateurs mécaniques non amortis.

## 7.3 Etude du pendule élastique

### 7.3.1 Description

Lorsque le ressort est au repos (ni tendu, ni comprimé) sa longueur est  $l_0$ . (Figure 7.1a).

Figure 7.1



Ecartons le solide (S) de sa position d'équilibre. Le ressort le ramène vers cette position d'équilibre ( $x = 0$ ) par une force de rappel  $\vec{T}$  appelée *tension*. (Figure 7.1b et Figure 7.1c).

Dans les deux cas (ressort tendu ou comprimé), la projection de  $\vec{T}$  sur l'axe  $X'X$  est :

$$T_x = -Kx$$

où  $K$  est la constante de raideur du ressort,  $x = \Delta l = l - l_0$  est la variation de la longueur du ressort.

### 7.2.1 Généralités sur les oscillateurs

- Lorsque les oscillateurs suivent une loi sinusoïdale du temps, l'oscillateur est dit *harmonique*.
- En écartant un oscillateur de sa position d'équilibre stable, on lui fournit de l'énergie mécanique (énergie potentielle de pesanteur ou élastique, énergie cinétique) : on dit qu'on *excite* l'oscillateur.
- En l'absence de frottements, un oscillateur excité

### 7.3.2 Etude de pendule élastique horizontal

Considérons le pendule élastique de la Figure 7.1a. Ecartons le solide (S) de sa position d'équilibre de façon à amener G au niveau du point A de l'axe X'X et lâchons-le. Il se met alors à effectuer des oscillations autour de sa position d'équilibre O. Faisons l'étude dynamique et énergétique de ces oscillations.

#### Etude dynamique

L'étude est faite dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

- Système : solide (S) à un instant quelconque  $t$  ; son abscisse est alors  $x$ .
- Les forces extérieures appliquées au système :
  - le poids  $\vec{P}$ , vertical ;
  - la réaction  $\vec{R}$  du plan, verticale et perpendiculaire au plan (car il n'y a pas de frottements) ;
  - la tension  $\vec{T}$  exercée par le ressort.

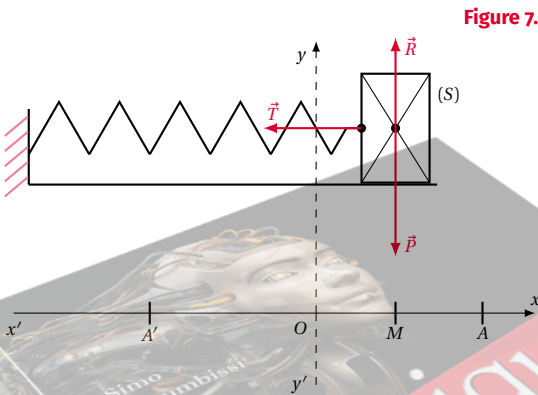


Figure 7.2

Appliquons le théorème du centre d'inertie au système :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a} \quad (7.1)$$

Les vecteurs s'expriment dans le système d'axes  $(x', y')$  par :

$$\vec{P} = \begin{cases} P_x = 0 \\ P_y = -P \end{cases} \quad \vec{R} = \begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = R \end{cases}$$

$$\vec{T} = \begin{cases} T_x = -Kx \\ T_y = 0 \end{cases} \quad \vec{a} = \begin{cases} a_x = \frac{d^2x}{dt^2} \\ a_y = 0 \end{cases}$$

La projection de la relation (7.1) sur les différents axes donne :

$$\begin{aligned} \text{sur } y'y : \quad -P + R &= 0 \Rightarrow P = R \\ \text{sur } x'x : \quad P_x + R_x + T_x &= ma_x \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow -Kx = m \frac{d^2x}{dt^2} \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0 \quad (7.2)$$

(7.2) est l'équation différentielle du mouvement.

Quelle est la solution de l'équation différentielle du mouvement ? L'étude mathématique de cette équation fournit comme solution la fonction :

$$x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \phi)$$

Vérifions sa validité : rappelons que :

$$\begin{aligned} \frac{d \cos u}{dt} &= -\sin u \frac{du}{dt} \\ \frac{d \sin u}{dt} &= \cos u \frac{du}{dt} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X_m \omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -X_m \omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \phi) \\ &= -\omega_0^2 x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad (7.3)$$

(7.3) est une équation différentielle du même type que (7.2). En identifiant (7.2) et (7.3) nous avons :

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

**Conclusion:** Le pendule élastique horizontal non amorti est un oscillateur harmonique de translation. L'équation différentielle de son mouvement est :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0$$

Son équation horaire est de la forme :

$$x = X_m \sin(\omega_0 t + \phi)$$

avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$  où  $X_m > 0$  est l'amplitude du mouvement et  $\omega_0$  est la pulsation propre du mouvement.

#### Remarque.

1.  $-1 \leq \sin(\omega_0 t + \phi) \leq 1, \Rightarrow -X_m \leq x \leq X_m$ . (S) oscille entre les points A' et A d'abscisses respectivement  $-X_m$  et  $X_m$ .
2. La période propre de l'oscillateur est :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

3.  $\omega_0$  et  $\theta_0$  ne dépendent que des caractéristiques (raideur  $K$ , masse  $m$ ) de cet oscillateur. Elles ne dépendent pas des conditions initiales d'excita-

tion.

4.  $X_m$  est l'amplitude du mouvement.  $X_m$  est toujours positive.  $(\omega_0 t + \phi)$  est la phase à la date  $t$ .  $\phi$  est donc la phase à l'origine du temps.  $X_m$  et  $\phi$  sont deux constantes, déterminées par les conditions initiales d'excitation (abscisse et vitesse initiales)

### Etude énergétique

Lorsqu'on excite l'oscillateur en l'écartant de sa position d'équilibre de  $X_m$ , on lui fournit une énergie mécanique initiale.  $E_i = \frac{1}{2} K X_m^2$ .

Que devient cette énergie lorsque le pendule est abandonné à lui-même et qu'il oscille sans frottement?

En prenant le plan horizontal comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur, l'énergie mécanique de l'oscillateur à un instant quelconque est :

$$E = E_c + E_{pe}$$

où  $E_c$  est l'énergie cinétique et  $E_{pe}$  l'énergie potentielle élastique.

Donc à un instant  $t$  donné :

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} K x^2$$

avec  $x = X_m \sin(\omega_0 t + \phi)$  et

$$v = \frac{dx}{dt} = X_m \omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi).$$

$$E = \frac{1}{2} m X_m^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi) + \frac{1}{2} K X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi)$$

En remarquant que :

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow m \omega_0^2 = K$$

Donc :

$$E = \frac{1}{2} K X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi) + \frac{1}{2} K X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi)$$

$$= \frac{1}{2} K X_m^2 [\cos^2(\omega_0 t + \phi) + \sin^2(\omega_0 t + \phi)]$$

$$E = \frac{1}{2} K X_m^2 = E_i$$

car

$$\cos^2(\omega_0 t + \phi) + \sin^2(\omega_0 t + \phi) = 1$$

Donc l'énergie mécanique totale d'un pendule élastique horizontale non amorti reste constante au cours des oscillations. Elle est proportionnelle au carré de l'amplitude.

$$E = \frac{1}{2} K X_m^2$$

### Remarque.

1. On aurait pu montrer que l'énergie mécanique d'un oscillateur horizontal reste constante en dérivant  $E$  par rapport au temps.

$$E = \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} K x^2$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} m \frac{dV^2}{dt} + \frac{1}{2} K \frac{dx^2}{dt}$$

avec

$$\frac{dV^2}{dt} = 2V \frac{dV}{dt}$$

et

$$\frac{dx^2}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = mV \frac{dV}{dt} + Kx \frac{dx}{dt}$$

En tenant compte que :

$$V = \frac{dx}{dt}$$

et

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{dE}{dt} = mV \frac{dx}{dt} + KxV = V \left( m \frac{dx}{dt} + Kx \right)$$

Comme  $m \frac{dx}{dt} + Kx = 0$  (équation différentielle du mouvement),  $\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow E$  est constante.

2. Réciproquement, en considérant que l'énergie mécanique d'un oscillateur non amorti est constante, on peut retrouver l'équation différentielle du mouvement. Il suffit de dériver  $E$  par rapport au temps et d'écrire que  $\frac{dE}{dt} = 0$ .

### 7.3.3 Etude du pendule élastique vertical

On utilise le même pendule précédent, mais disposé verticalement. La Figure 7.3b correspond à l'équilibre stable du système. Dans cet état, la position du centre d'inertie  $G$  est repérée par le point  $O$  de l'axe  $x'x$ .

Ecartons le solide ( $S$ ) de sa position d'équilibre de façon à amener  $G$  à hauteur du point  $A$  de l'axe  $x'x$  (Figure 7.3c) et lâchons-le. Il se met à effectuer des oscillations que nous allons étudier comme au paragraphe précédent.



### 7.3. Etude du pendule élastique

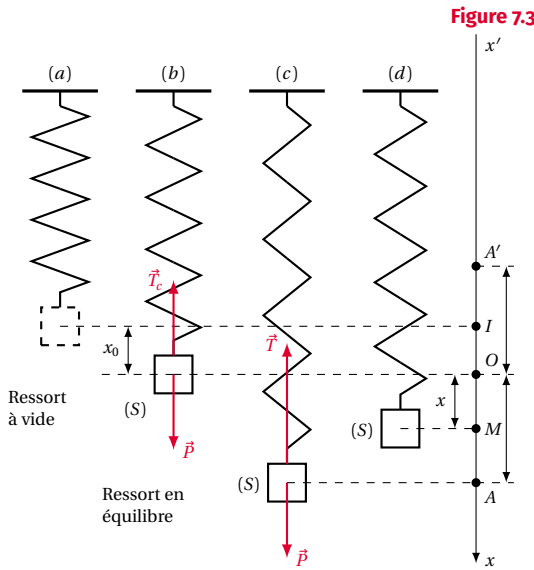


Figure 7.3

Nous obtenons alors :

$$-Kx = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{K}{m} x = 0$$

C'est la même équation différentielle que pour le pendule élastique horizontal. Donc le pendule élastique vertical non amorti est un oscillateur harmonique de translation.

L'équation différentielle de son mouvement est :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

Son équation horaire est de la forme :

$$x = X_m \sin(\omega_0 t + \phi)$$

avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$

Sa période propre est :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

### Etude dynamique

- L'étude est faite dans le référentiel terrestre, donc galiléen; le système étudié étant le solide (S).
- Les forces extérieures agissant sur le système sont :
  - le poids  $\vec{P}$ ;
  - la tension  $\vec{T}$  du ressort.

Appliquons le théorème du centre d'inertie au système, en prenant soin d'étudier d'abord la condition l'équilibre.

A l'équilibre, (Figure 7.3b),

$$\vec{P} + \vec{T}_e = \vec{0}$$

La projection de cette relation sur  $x'x$  donne :

$$P - T_e = 0$$

avec  $P = mg$  et  $T_e = Kx_0$ .

$$mg - Kx_0 = 0 \quad (7.4)$$

Pour une position quelconque  $M$  (tel que  $OM = x$ ) du centre d'inertie (Figure 7.3d),

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

En projetant cette relation vectorielle sur  $x'x$ , nous avons :

$$mg - T = ma_x$$

avec  $T = KIM = K(IO + OM) = K(x_0 + x)$ , donc :

$$mg - K(x_0 + x) = ma_x$$

$$\Rightarrow mg - Kx_0 - Kx = ma_x \quad (7.5)$$

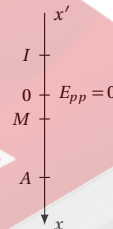
(7.4) dans (7.5) donne

$$-Kx = ma_x \quad \text{or} \quad a_x = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

### Etude énergétique

Par rapport au pendule élastique horizontal, une nouvelle forme d'énergie est à considérer : l'énergie potentielle de pesanteur ( $E_{pp}$ ) de la masse  $m$ . Prenons arbitrairement comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur  $E_{pp} = 0$  le plan horizontal passant par  $O$ .

Figure 7.4



Lorsqu'on excite l'oscillateur en amenant  $G$  au niveau du point  $A$ , on lui communique une énergie potentielle élastique ( $\frac{1}{2} K I A^2$ ), mais on diminue l'énergie potentielle de pesanteur du système (Terre-oscillateur).  $I$  correspond à la position de  $G$  si le ressort est au repos (ni allongé, ni comprimé).

Notons  $IO = x_0$ , allongement du ressort à l'équilibre.  $OA = X_m$  élongation maximale des oscillations.

Calculons l'énergie mécanique initiale du système

Oscillateur - Terre :

$$E_i = \frac{1}{2} K (x_o + X_m)^2 - mg X_m$$

$$E_i = \frac{1}{2} K x_o^2 + K x_o X_m + \frac{1}{2} K X_m^2 - mg X_m$$

$$E_i = \frac{1}{2} K x_o^2 + \frac{1}{2} K X_m^2 + X_m (K x_o - mg)$$

Or d'après (7.4),

$$mg - K x_o = 0 \Rightarrow K x_o - mg = 0$$

Donc :

$$E_i = \frac{1}{2} K x_o^2 + \frac{1}{2} K X_m^2$$

Calculons l'énergie mécanique totale du système oscillateur - Terre pour une position quelconque  $M(x)$  de  $G$ .

$$E = E_c + E_{pp} + E_{pe} \quad (\text{énergie potentielle élastique})$$

$$E = \frac{1}{2} m V^2 - mg x + \frac{1}{2} K (x_o + x)^2$$

$$= \frac{1}{2} m V^2 - mg x + \frac{1}{2} K x_o^2 + K x_o x + \frac{1}{2} K x^2$$

$$E = \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} K x^2 + x (K x_o - mg) + \frac{1}{2} K x_o^2$$

or d'après (7.4),

$$K x_o - mg = 0$$

et sachant que :

$$x = X_m \sin(\omega_o t + \phi)$$

et que :

$$V = \frac{dx}{dt} = X_m \omega_o \cos(\omega_o t + \phi)$$

Nous avons montré que :

$$\frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} K x^2 = \frac{1}{2} K X_m^2$$

Donc :

$$E = \frac{1}{2} K X_m^2 + \frac{1}{2} K x_o^2 = E_i$$

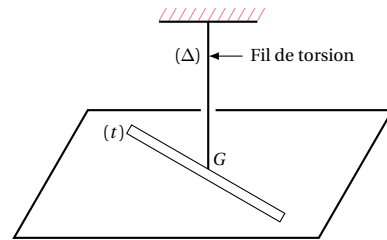
**Conclusion:** L'énergie mécanique totale du pendule élastique vertical non amorti reste constante au cours des oscillations.

## 7.4 Etude du pendule de torsion

### 7.4.1 Description

Un pendule de torsion peut être constitué par une tige  $(t)$ , suspendue par son centre d'inertie  $G$  à un fil de torsion de constante  $C$ .

Figure 7.5



La tige  $(t)$  est susceptible de tourner autour d'un axe vertical  $(\Delta)$  matérialisé par le fil de torsion.

Le système est en équilibre quand le fil n'est pas tordu.

Tournons la tige d'un angle  $\theta$  par rapport à cette position ; le fil (tordu aussi de  $\theta$ ), la ramène vers la position d'équilibre ( $\theta = 0$ ) par un couple de torsion dont le moment est :

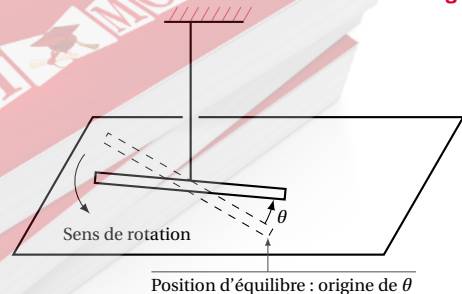
$$M = -C\theta \quad (\text{voir cours de seconde})$$

Le couple de torsion est donc un couple de rappel.

### 7.4.2 Etude dynamique

#### Equation du mouvement du solide

Figure 7.6



- La résolution dynamique est faite dans le référentiel Terrestre supposé galiléen.

## 7.4. Etude du pendule de torsion

- Système : la tige ( $t$ ) à un instant quelconque. Sa position est repérée par  $\theta$ .
- Actions extérieures agissant sur le système :
  - le poids  $\vec{P}$  de la tige ( $t$ );
  - la tension  $\vec{T}$  du fil;
  - le couple de torsion de moment  $M$ .

D'après la relation fondamentale de la dynamique de rotation,

$$\sum M_{\Delta} = J_{\Delta} \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (7.6)$$

$$\Rightarrow M_{\Delta}(\vec{P}) + M_{\Delta}(\vec{T}) + M = J_{\Delta} \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (7.7)$$

Or :

$$M_{\Delta}(\vec{P}) = 0$$

$$M_{\Delta}(\vec{T}) = 0$$

car  $\vec{P}$  et  $\vec{T}$  rencontre l'axe ( $\Delta$ ).

Par ailleurs

$$M = -C\theta$$

(7.7) devient :

$$-C\theta = J_{\Delta} \frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{C}{J_{\Delta}}\theta = 0 \quad (7.8)$$

(7.8) est l'équation différentielle du mouvement.

### 7.4.3 Solution de l'équation différentielle du mouvement

L'équation différentielle (7.8) admet comme solution une fonction sinusoïdale de la forme :

$$\theta = \theta_m \sin(\omega_0 t + \phi)$$

avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J_{\Delta}}}$ . Donc le pendule de torsion est un oscillateur harmonique.

La pulsation propre de ses oscillations est :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J_{\Delta}}}$$

Sa période est :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J_{\Delta}}{C}}$$

$\omega_0$  et  $T_0$  ne dépendent que des caractéristiques ( $C$  et  $J_{\Delta}$ ) de l'oscillateur.  $\theta_m$  et  $\phi$  dépendent des conditions initiales d'excitation.

### 7.4.4 Etude énergétique

Lorsqu'on écarte le pendule de sa position d'équilibre d'un angle  $\theta_m$ , on lui communique une énergie mécanique initiale sous forme d'énergie potentielle élastique.

$$E_i = \frac{1}{2} C \theta_m^2$$

Que devient cette énergie lorsque le pendule est abandonné à lui-même et qu'il oscille librement ?

Calculons l'énergie mécanique de l'oscillateur à un instant quelconque : la tige restant horizontale, l'énergie potentielle de pesanteur ne varie pas au cours du mouvement. En prenant, comme niveau de référence de cette énergie le plan d'oscillation de la tige, elle sera constamment nulle.

L'énergie mécanique totale s'écrit alors :

$$E = E_c + E_{pe}$$

$E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$  est l'énergie cinétique et  $E_{pe} = \frac{1}{2} C \theta^2$  est l'énergie potentielle élastique.

Or :

$$\theta = \theta_m \sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \theta_m \omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$$

alors :

$$E = \frac{1}{2} J_{\Delta} \theta_m^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi) + \frac{1}{2} C \theta_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi)$$

or

$$\omega_0^2 = \frac{C}{J_{\Delta}} \Rightarrow J_{\Delta} \omega_0^2 = C$$

Donc

$$E = \frac{1}{2} C \theta_m^2 [\cos^2(\omega_0 t + \phi) + \sin^2(\omega_0 t + \phi)]$$

$$E = \frac{1}{2} C \theta_m^2 = E_i$$

**Conclusion :** L'énergie mécanique totale d'un pendule de torsion non amorti reste constante au cours des oscillations. Elle est proportionnelle au carré de l'amplitude angulaire  $\theta_m$ .

$$E = \frac{1}{2} C \theta_m^2$$

## 7.5 Etude du pendule pesant

### 7.5.1 Description

Le pendule pesant est constitué par un solide (S) mobile autour d'un axe horizontal ( $\Delta$ ) ne passant pas par son centre d'inertie  $G$ .

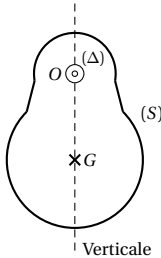


Figure 7.7

La position d'équilibre stable est celle pour laquelle, il n'y a pas rotation ( $\sum M = 0$ ). (Voir cours seconde). Dans ce cas, le centre d'inertie  $G$  se trouve sur la verticale de l'axe ( $\Delta$ ) au-dessous de cet axe.

Posons  $OG = a$ , distance de l'axe de rotation ( $\Delta$ ) au centre d'inertie  $G$ .

### 7.5.2 Etude dynamique

#### Equation du mouvement du solide

Le solide effectue un mouvement de rotation autour de l'axe ( $\Delta$ ) Figure 7.8a.

Au cours de ses oscillations, le centre d'inertie  $G$  décrit un arc de cercle centré en  $O$  et de rayon  $a$ . (Figure 7.8b).

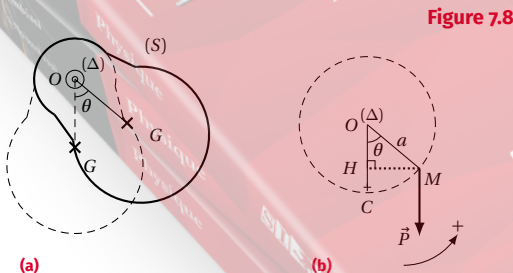


Figure 7.8

- Le mouvement est étudié dans le référentiel terrestre donc galiléen;
- Système : le solide (S);
- Forces extérieures agissant sur le système : le poids  $\vec{P}$  et la réaction  $\vec{R}$  de l'axe.

Appliquons le théorème du centre d'inertie au système en rotation.

$$\sum M_{\Delta} = J_{\Delta} \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\Rightarrow M_{\Delta}(\vec{P}) + M_{\Delta}(\vec{R}) = J_{\Delta} \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (7.9)$$

or

$$M_{\Delta}(\vec{R}) = 0$$

car  $\vec{R}$  rencontre l'axe ( $\Delta$ )

$$M_{\Delta}(\vec{P}) = -PHM = -mga \sin \theta$$

#### Remarque.

Quel que soit le sens positif de rotation choisi,

$$M_{\Delta}(\vec{P}) = -P.a \sin \theta$$

Le moment du poids est un moment de rappel. La relation (7.9) s'écrit alors :

$$-mga \sin \theta = J_{\Delta} \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} + \frac{mga}{J_{\Delta}} \sin \theta = 0 \quad (7.10)$$

(7.10) est l'équation différentielle du mouvement. Le second terme de l'équation (7.10) comporte  $\sin \theta$  et non  $\theta$ . Donc la solution  $\theta(t)$  de (7.10) n'est pas une fonction sinusoïdale.

C'est pourquoi, dans le cas général, le pendule pesant n'est pas un oscillateur harmonique.

#### Condition d'oscillations sinusoïdales pour le pendule pesant

Si  $\theta_m$  est petit ( $< 8^\circ$ ),  $\theta$  est aussi petit. Alors  $\sin \theta$  est approximativement égal à  $\theta$  avec  $\theta$  exprimé en radians.

L'équation différentielle devient, dans ce cas :

$$\frac{d\theta}{dt} + \frac{mga}{J_{\Delta}} \theta = 0 \quad (7.11)$$

(7.11) admet une solution  $\theta(t)$  de la forme

$$\theta = \theta_m \sin(\omega_0 t + \phi)$$

avec

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{J_{\Delta}}}$$

Donc, dans le cas d'oscillations de faible amplitude, le pendule pesant se comporte comme un oscillateur harmonique de rotation de pulsation propre :

## 7.5. Etude du pendule pesant

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{J_\Delta}}$$

et de période :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_\Delta}{mga}}$$

$$= \frac{1}{2} J_\Delta \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + mga(1 - \cos \theta)$$

$$E = \frac{1}{2} J_\Delta \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} mga\theta^2$$

avec  $\theta = \theta_m \sin(\omega_0 t + \phi)$ .

$$E = \frac{1}{2} J_\Delta \theta_m^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi) + \frac{1}{2} mga\theta_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi)$$

avec  $\omega_0^2 = \frac{mga}{J_\Delta}$ .

Donc

$$E = \frac{1}{2} mga\theta_m^2$$

## 7.5.3 Etude énergétique

Reprenons le pendule pesant précédent en nous intéressant au mouvement de son centre d'inertie  $G$ . En écartant le pendule de sa position d'équilibre d'un angle  $\theta_m$ , de façon à amener  $G$  de  $C$  en  $A$ , on communique au système *pendule – Terre* une énergie mécanique initiale sous forme d'énergie potentielle de pesanteur.

$$E_i = mgh_m = mga(1 - \cos \theta_m)$$

Le plan horizontal passant par  $C$  étant pris comme niveau de référence de l'énergie potentielle de pesanteur.

A un instant quelconque ( $G$  est alors en  $M$ ) l'énergie mécanique est :

$$E_M = E_c(M) + E_{pp}(M)$$

avec  $E_{pp}(M) = mgh$ .

Calculons  $E_c(M)$  en appliquant au système, le théorème de l'énergie cinétique entre  $M$  et  $A$ .

$$E_c(M) - E_c(A) = mg(h_m - h)$$

or

$$E_c(A) = 0$$

Donc :

$$E_c(M) = mg(h_m - h)$$

$$\begin{aligned} E(M) &= mg(h_m - h) + mgh \\ &= mgh_m = E_i \end{aligned}$$

L'énergie mécanique totale reste donc constante au cours des oscillations.

**Remarque.**

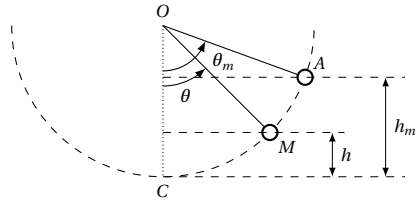
Dans le cas d'oscillations de faible amplitude,  $\theta$  est petit et  $\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$ ,  $\theta$  étant exprimé en radians.

$$E_i = mga(1 - \cos \theta_m) = \frac{1}{2} mga\theta_m^2$$

En  $M$ ,

$$E = E_c(M) + Mgh$$

Figure 7.9

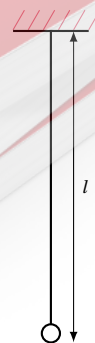


## 7.5.4 Le pendule simple

**Définition.**

Un pendule simple est constitué d'un point matériel oscillant, sous l'action de la pesanteur, à une distance constante d'un axe horizontal fixe ( $\Delta$ ). La distance  $l$  séparant l'axe ( $\Delta$ ) du point matériel est appelée *longueur* du pendule simple.

Figure 7.10





## Période d'un pendule simple pour des oscillations de faible amplitude

Le pendule simple est un cas particulier de pendule pesant. Donc l'équation différentielle du mouvement est :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mga}{J_\Delta} \sin\theta = 0$$

Dans le cas d'oscillations de faible amplitude,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mga}{J_\Delta} \theta = 0$$

avec  $a = l$  et  $J_\Delta = ml^2$  et  $m$  étant la masse du point matériel. L'équation différentielle devient alors :

$$\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

et

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

La période propre du pendule simple pour des oscillations de faible amplitude est donc :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

## Pendule simple synchrone d'un pendule pesant

Deux pendules synchrones ont la même période. Ainsi, en comparant les deux expressions de la période, on a :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

pour le pendule simple, et

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{mga}}$$

pour le pendule pesant.

Nous pouvons calculer la longueur  $l$  du pendule simple :

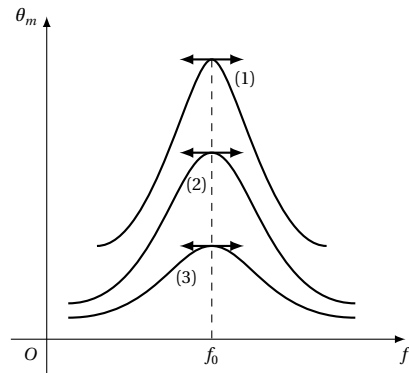
$$\begin{aligned} 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} &= 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{mga}} \\ \Rightarrow l &= \frac{J_\Delta}{ma} \end{aligned}$$

## 7.6 Notions d'oscillations forcées et de résonance

### 7.6.1 Amortissement des oscillations

Lorsqu'il y a des phénomènes dissipatifs, en particulier en présence de frottements, l'énergie mécanique initiale fournie lors de l'excitation, diminue au cours des oscillations. L'amplitude de l'oscillation décroît jusqu'à l'arrêt de l'oscillateur. C'est le phénomène d'*amortissement*.

Figure 7.11



### 7.6.2 Entretien des oscillations : oscillations forcées

Pour éviter la diminution d'amplitude, on peut, à l'aide d'un dispositif approprié, fournir à chaque instant à l'oscillateur une énergie égale à celle qu'il a perdue à cause des frottements ; l'agent extérieur (opérateur ou dispositif) qui compense l'énergie perdue est appelée *excitateur*. Les oscillations ne sont plus libres, elles sont *entretenu*es (ou forcées).

L'amplitude des oscillations forcées dépend de la période  $T$  des excitations et de l'amortissement. En particulier, lorsque la période  $T$  des excitations est égale à la période propre de l'oscillateur, l'amplitude des oscillations devient très grande : c'est le phénomène de *résonance*.

- Si l'oscillateur est peu amorti, l'amplitude des oscillations est très supérieure à l'amplitude communiquée par l'excitateur. La résonance est dite *aiguë* et le sélecteur est appelé dans ce cas *résonateur* (courbe 1)
- Si l'oscillateur est amorti, l'amplitude pour  $T = T_0$  est moins importante. C'est le phénomène de *résonance floue* (courbe 2)
- Si l'oscillateur est très amorti, l'amplitude est constante quelle que soit la période de l'oscillateur. (courbe 3)

## 7.7 Enoncés des exercices et problèmes

### Exercice 1.

Un point matériel  $M$  est repéré sur un axe  $OX$ , par l'abscisse  $x = OM$  telle que  $\frac{d^2x}{dt^2} + 1444x = 0$ , en unité SI. A la date  $t = 0$ , le mobile est au point  $M_0$  d'abscisse  $x_0 = +1$  cm et a pour vitesse  $v_0 = -0,5$  m s<sup>-1</sup>. Quelle est la loi horaire du mouvement?

### Exercice 2.

L'équation horaire du mouvement d'un oscillateur mécanique rectiligne sinusoïdal est  $x = 2 \times 10^{-2} \cos\left(40\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$  avec  $x$  en mètre et  $t$  en secondes.

**2.1. 2.1.1.** Préciser l'amplitude, la pulsation, la période et la fréquence des oscillations.

**2.1.2.** Calculer la durée de 10 oscillations.

**2.1.3.** Quelle est la longueur du segment décrit par l'oscillateur?

**2.2. 2.2.1.** Quelle est la vitesse de l'oscillateur à la date  $t$ ?

**2.2.2.** En déduire la vitesse maximale de l'oscillateur

**2.2.3.** Calculer sa vitesse à la date  $t = 1$  s.

**2.3. 2.3.1.** Quelle est l'accélération de l'oscillateur à la date  $t$ .

**2.3.2.** En déduire l'accélération maximale.

**2.3.3.** Calculer son accélération à la date  $t = 1$  s.

**2.4.** Déterminer l'équation différentielle du mouvement. En déduire l'accélération de  $M$  lorsque le mobile passe par le point d'abscisse  $x = -10^{-2}$  m.

### Exercice 3.

Un ressort à spires non jointives, de masse négligeable, de raideur  $K$ , est enfilé sur une tige horizontale  $AB$ . Une de ses extrémités étant fixée en  $A$ , un corps de masse  $m$ , de centre d'inertie  $G$ , est attaché à l'autre extrémité. Le ressort et le corps de masse  $m$  peuvent coulisser sans frottement le long de la tige  $AB$ . Au repos, le centre d'inertie  $G$  est en  $O$ . On associe à la tige horizontale un repère  $(O, \vec{i})$ . Le corps de masse  $m$  est écarté de sa position d'équilibre dans le sens positif d'une distance  $OG = X_m = 5$  cm, puis lâché sans vitesse initiale à la date  $t = 0$ .

**3.1.** Etablir la nature du mouvement.

**3.2.** Calculer sa période et déterminer son équation horaire  $x = f(t)$ . On donne  $K = 45$  N m<sup>-1</sup>;  $m = 0,2$  kg.

**3.3.** Calculer l'énergie mécanique du système masse-ressort. En déduire la vitesse de  $G$  au passage par la position d'équilibre.

### Exercice 4.

Un ressort, à spires non jointives de masse négligeable, a une constante de raideur  $K$ . L'une des extrémités du ressort est fixée à un support rigide lié à la Terre. A l'autre extrémité  $E$  est suspendu un solide  $S$  de masse  $m = 100$  g. On donne  $g = 9,8$  m s<sup>-2</sup>.

**4.1.** A l'équilibre le ressort est allongé de  $b = 4$  cm. Quelle est la constante de raideur du ressort?

**4.2.** On tire le solide  $S$ , verticalement, vers le bas et on l'abandonne sans vitesse initiale.  $S$  prend alors un mouvement de translation rectiligne verticale.

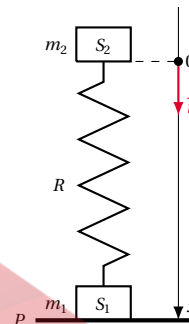
**4.3.** Quelle est la nature du mouvement de  $S$ ?

**4.4.** A la date  $t = 0$ ,  $S$  passe par sa position la plus basse située 2 cm sous sa position la plus élevée. Quelle est la loi horaire du mouvement?

**4.5.** L'énergie potentielle totale du système (solide  $S$ , Terre, ressort), comprenant l'énergie potentielle élastique et l'énergie potentielle de pesanteur, est prise égale à zéro pour la position d'équilibre. Montrer qu'avec cette convention l'énergie mécanique de l'oscillateur est égale à l'énergie cinétique maximale de  $S$  et qu'elle est proportionnelle au carré de l'amplitude des oscillations.

### Exercice 5.

On considère le dispositif représenté par le schéma ci-contre.



Le solide  $S_1$  de masse  $m_1$  est posé sur un support horizontal  $P$ . Un ressort  $R$  dont on suppose la masse négligeable, de raideur  $K$ , assujéti à rester vertical, relie les deux solides  $S_1$  et  $S_2$ . Le solide  $S_2$  a pour masse  $m_2$ .

**5.1.** Lorsqu'on pose le solide  $S_2$  sur l'extrémité du ressort, celui-ci s'abaisse d'une longueur  $a$  (longueur mesurée à l'équilibre). En déduire la raideur du ressort en fonction de  $m_2$ ,  $a$  et de l'intensité de la pesanteur  $g$ . A.N.  $m_2 = 200$  g;  $a = 10$  cm;  $g = 10$  m s<sup>-2</sup>. Calculer la valeur numérique de  $K$ .

**5.2.** La position d'équilibre du solide  $S_2$  sera prise comme origine des espaces (cas du schéma). Un opérateur appuie sur le solide  $S_2$  de telle sorte que le ressort se trouve comprimé d'une longueur supplémentaire  $b$ ; le ressort est alors comprimé de la longueur  $a + b$ . A l'instant  $t = 0$ , l'opérateur lâche le système sans vitesse initiale; on constate que le solide  $S_1$  ne décolle pas et reste en contact permanent avec le support  $P$ .

**5.2.1.** Pour étudier le mouvement de  $S_2$ , on repère sa position par son abscisse  $x$  comptée sur un axe vertical

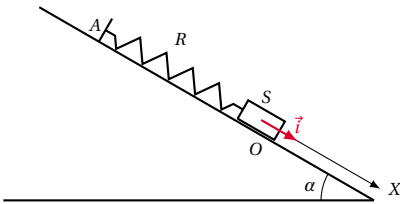
orienté vers le bas, d'origine la position d'équilibre  $O$  de  $S_2$ . Etablir, à l'instant  $t$ , l'équation différentielle satisfaite par  $x$ .

**5.2.2.** Etablir l'équation du mouvement donnant  $x$  en fonction de  $t$ , compte tenu des conditions initiales.

**5.2.3.** Expliquer de façon qualitative c'est-à-dire sans aucun calcul que le solide  $S_1$  peut décoller si on a communiqué au solide  $S_2$  un déplacement initial  $b$  trop important.

### Exercice 6.

Sur un plan incliné d'angle  $\alpha$  par rapport au plan horizontal, on dispose d'un ressort  $R$  de masse négligeable et de constante de raideur  $K$ , de longueur à vide  $l_0$ , fixé par une de ses extrémités à un point  $A$  d'une butée fixe. A son autre extrémité se trouve un petit solide  $S$  de masse  $m$ , de centre d'inertie  $G$ , pouvant glisser sans frottements le long du plan incliné.



**6.1.** Quand  $S$  est au repos, la longueur du ressort est  $l$  et  $G$  est en  $O$ . Déterminer, lorsque  $S$  est au repos, l'expression de l'allongement du ressort en fonction de  $K$ ,  $m$ ,  $g$ ,  $\alpha$ . A.N.  $K = 10 \text{ N m}^{-1}$ ;  $m = 400 \text{ g}$ ;  $g = 10 \text{ N kg}^{-1}$ ;  $\alpha = 30^\circ$ .

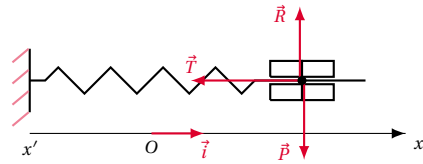
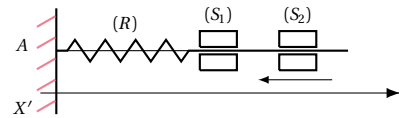
**6.2.** En tirant sur le ressort de façon que son axe demeure toujours parallèle à une droite de plus grande pente du plan incliné, on écarte  $S$  de sa position d'équilibre de  $x_0 = 8 \text{ cm}$ . Puis on le libère en le lançant vers le haut avec une vitesse  $v = 0,3 \text{ m s}^{-1}$ . Des oscillations prennent alors naissance.

**6.2.1.** Déterminer l'énergie mécanique totale du système [Ressort  $R$  – Solide  $S$  – Terre] à l'instant  $t$  pendant les oscillations. On prendra l'énergie potentielle de pesanteur nulle au point  $O$ .

**6.2.2.** En déduire l'équation différentielle du mouvement et écrire l'équation horaire du mouvement du centre d'inertie  $G$  de  $S$ , dans le repère  $(O, \vec{i})$ , l'instant du début des oscillations étant pris comme origine des temps.

### Exercice 7.

Deux solides  $S_1$  et  $S_2$  en forme de bague, de masse  $m_1 = 0,10 \text{ kg}$  et  $m_2 = 0,60 \text{ kg}$ , peuvent glisser sans frottement sur une tige horizontale  $T$ . Le solide  $S_1$  est lié à l'extrémité d'un ressort  $R$ , à spires non jointives, de masse négligeable et de constante d'élasticité  $K = 35 \text{ N m}^{-1}$ . L'autre extrémité du ressort est fixée en  $A$  à la tige  $T$ . L'ensemble  $(S_1, R)$  est à l'équilibre, le ressort étant non déformé. On lance de l'extrémité de  $T$  le solide  $S_1$  vers  $S_2$ . Au moment du choc il y a accrochage des deux solides qui forment alors un ensemble solidaire  $S$  de centre d'inertie  $G$ .



**7.1.** Juste après le choc la vitesse  $\vec{V}_G$  du centre d'inertie  $G$  a le sens de  $x$  vers  $x'$  et  $\vec{V}_G = 0,42 \text{ m s}^{-1}$ . Calculer la norme de  $\vec{V}_2$ , vitesse de centre d'inertie de  $S_2$  avant le choc.

**7.2.** Après le choc, l'ensemble  $S$  lié au ressort, poursuit son mouvement, les spires du ressort restant non jointives. La position de  $G$  sera repérée sur l'axe  $x'x$ , de direction parallèle à la tige et dont l'orientation est précisée sur le schéma. L'origine des abscisses correspond à la position de  $G$  à l'instant du choc et l'origine des temps est choisie à l'instant du choc.

**7.2.1.** Calculer l'énergie mécanique du système  $(S, R)$ ; en déduire l'abscisse  $x$  de  $G$  lorsque  $V_G = 0$  pour la première fois.

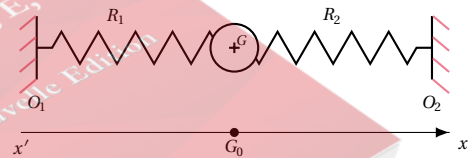
**7.2.2.** Etablir l'équation différentielle du mouvement de  $G$ .

**7.2.3.** En déduire l'équation horaire du mouvement de  $G$ .

**7.2.4.** Déterminer les caractéristiques de la somme vectorielle des forces qui s'exercent sur l'ensemble  $S$  lorsque la vitesse de son centre d'inertie s'annule pour la deuxième fois.

### Exercice 8.

Un mobile de masse  $m = 700 \text{ g}$  et de rayon  $r = 5 \text{ cm}$  placé sur une table horizontale à coussin d'air est relié à 2 ressorts identiques  $R_1$  et  $R_2$  comme l'indique la figure.



Ces ressorts ont des axes colinéaires horizontaux et ont leurs extrémités fixées en  $O_1$  et  $O_2$ . Ils ont une longueur à vide  $l_0 = 20 \text{ cm}$  et s'allongent de  $4 \text{ cm}$  sous l'action d'une force de  $1 \text{ N}$ . La distance  $O_1 O_2$  est de  $70 \text{ cm}$ .

**8.1.** Préciser quelle est, à l'équilibre, la position de  $G$ , centre d'inertie du mobile. Calculer la valeur  $\Delta l$  de l'allongement de chaque ressort à l'équilibre.

**8.2.** On écarte le mobile de sa position d'équilibre de  $x = 5 \text{ cm}$  vers  $O_1$ , dans la direction  $O_1 O_2$  et on l'abandonne sans vitesse initiale. Il prend alors un mouvement oscillatoire. Montrer en appliquant le théorème du centre d'inertie que le mouvement est harmonique. Exprimer et calculer la pulsation et la période du mouvement.

**8.3.** Sachant qu'à  $t = 0$ ,  $G$  est à  $2 \text{ cm}$  de sa position

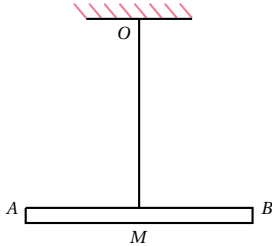
## 7.7. Enoncés des exercices et problèmes

d'équilibre vers  $O_2$  et se déplace vers  $O_1$ , donner l'expression qui permet de situer  $G$  à chaque date.

**8.4.** Le système (mobile,  $R_1$  et  $R_2$ ) est conservatif. Exprimer son énergie mécanique à une date  $t$  quelconque et retrouver l'équation différentielle du 9.2.

## Exercice 9.

Un pendule de torsion se compose d'une barre  $AB$  de longueur  $l$ , de masse  $m$ , fixée en son milieu  $M$  à un fil d'acier vertical  $OM$  suspendu au point  $O$ .



**9.1.** Calculer le moment d'inertie  $J$  de la barre  $AB$  par rapport à l'axe  $OM$  si  $m = 200\text{ g}$  et  $l = 20\text{ cm}$ .

**9.2.** On écarte la barre d'un angle  $\theta_m$  de sa position d'équilibre et on l'abandonne sans vitesse initiale, le fil  $OM$  restant vertical.

**9.2.1.** Montrer que le système effectue des oscillations sinusoïdales dont on donnera la période  $T$  en fonction de  $J$  et de la constante de torsion  $C$  du fil  $OM$ .

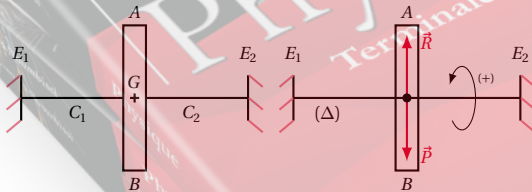
**9.2.2.** Déterminer l'équation horaire du mouvement du système,  $\theta = f(t)$ , si  $T = 2\text{ s}$  et  $\theta_m = 1\text{ rad}$ .

**9.2.3.** Calculer  $C$ .

**9.3.** Montrer que l'énergie mécanique totale du système reste constante au cours du mouvement.

## Exercice 10.

Une tige  $E_1 E_2$ , horizontale, traverse une barre  $AB$  au niveau de son centre d'inertie  $G$ . Une soudure, en  $G$  lie rigidement la barre  $AB$  à la tige  $E_1 E_2$ . La tige  $E_1 E_2$  a une masse négligeable devant celle de  $AB$ . Les extrémités de la tige  $E_1 E_2$  sont fixées à un support rigide.



Les constantes de torsion de  $GE_1$  et de  $GE_2$  sont respectivement  $C_1 = 8 \times 10^{-2}\text{ N m rad}^{-1}$  et  $C_2 = 6 \times 10^{-2}\text{ N m rad}^{-1}$ . ( $C_1$  est plus grand que  $C_2$  car  $GE_1$  est plus court que  $GE_2$ ). Lorsque  $AB$  est en équilibre, les deux portions de tige ne sont pas tordues. On tourne la barre  $AB$  de  $90^\circ$  autour de l'axe horizontal  $\Delta$ , matérialisé par  $E_1 E_2$ , et on la laisse aller sans vitesse.

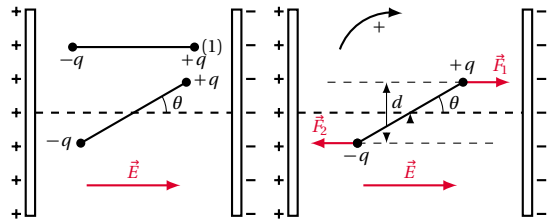
**10.1.** Montrer, de deux façons différentes que l'oscillateur en rotation autour de  $\Delta$  est harmonique. On néglige les frottements.

**10.2.** Sachant que la durée de 10 oscillations est  $\tau = 7,0\text{ s}$ , quel est le moment d'inertie de la barre  $AB$  par rapport à  $\Delta$ ?

**10.3.** Quelle est la vitesse curviligne maximale,  $v_{\max}$  du point  $A$ ? Ce point est situé à la distance  $l = 20\text{ cm}$  de l'axe  $\Delta$ .

## Exercice 11.

Deux charges électriques ponctuelles  $q$  et  $-q$  sont placées aux extrémités d'une tige isolante de longueur  $l$ . Le moment d'inertie de l'ensemble par rapport à un axe passant par le centre de la tige est  $J_\Delta$ . L'ensemble est placé dans un champ électrostatique uniforme créé par deux plaques parallèles (voir figure). On néglige le poids de l'ensemble devant les forces électriques.



**11.1.** Montrer que la position d'équilibre correspond à la position (1) de la Figure.

**11.2.** Montrer que la tige, écartée d'un angle  $\theta$  par rapport à la position d'équilibre, subit de la part du champ  $\vec{E}$  un couple de force. Déterminer le moment de ce couple.

**11.3.** Donner l'équation liant  $\theta$  et  $\frac{d^2\theta}{dt^2}$  à chaque instant.

**11.4.** A quelle condition la tige effectue-t-elle des oscillations harmoniques? Calculer alors la pulsation propre des oscillations en fonction de  $q$ ,  $E$ ,  $l$ ,  $J_\Delta$ .

## Exercice 12.

Un pendule ( $P$ ) est constitué d'un fil inextensible et de masse négligeable auquel est accrochée une boule de rayon  $r$ . On appelle  $a$  la distance du point de suspension du fil au centre d'inertie de la boule.



**12.1.** Calculer la longueur du pendule simple synchrone du pendule ( $P$ ).

**12.2.** Exprimer, en fonction de  $a$  et de  $r$  l'erreur relative commise si on assimile le pendule ( $P$ ) à un pendule simple de longueur  $a$ . Quelle relation doit exister entre  $r$  et  $a$  pour que l'erreur relative soit inférieure à  $4 \times 10^{-5}$ ?



**Exercice 13.**

Un pendule est constitué d'une tige rigide  $AB$  de masse négligeable, de longueur  $l = 0,55 \text{ m}$ , suspendue à son extrémité  $A$  et portant à l'extrémité  $B$  une masse de fer  $m_1 = 100 \text{ g}$  considéré comme ponctuelle et en son milieu  $C$  une autre masse ponctuelle  $m_2 = 2m_1$  non métallique.

**13.1.** On étudie le mouvement de petites oscillations non amorties du pendule dans le champ de pesanteur terrestre. Etablir l'équation du mouvement et calculer sa période  $T$ . On donne  $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$ .

**13.2.** On place sous la masse  $m_1$ , une bobine munie d'un noyau de fer doux et alimentée en courant continu. Cette bobine exerce sur la masse  $m_1$  seule, une force d'attraction magnétique verticale, dirigée vers le bas, de module supposé constant et égal à  $F_1 = 2 \text{ N}$ . Trouver la nouvelle équation du mouvement de petites oscillations du pendule et sa nouvelle période  $T'$ .

**Exercice 14.**

*Pendule réversible.* On considère un pendule, de masse  $m$ , de centre d'inertie  $G$ , pouvant osciller autour de plusieurs axes horizontaux situés dans un même plan contenant  $G$ . Soit  $J_G$  le moment d'inertie du pendule par rapport à un axe horizontal passant par  $G$ .

**14.1.** Donner l'expression de la période des oscillations de faible amplitude de ce pendule par rapport à un axe  $(\Delta_1)$  distant de  $a_1$  de  $G$ .

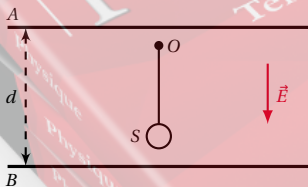
**14.2.** On montre que la période de ce pendule est la même lorsqu'il oscille autour d'un axe  $(\Delta_2)$  situé de l'autre côté de  $G$  et à une distance  $a_2$  de  $G$  ( $a_2 \neq a_1$ ).

Montrer que  $a_1 a_2 = \frac{J_G}{m}$ .

**14.3.** Montrer que la longueur du pendule simple synchrone de ce pendule oscillant autour de  $(\Delta_1)$  ou de  $(\Delta_2)$  est  $l = a_1 + a_2$ .

**Exercice 15.**

Une sphère conductrice  $S$  assimilable à un point matériel, de masse  $m = 2 \text{ g}$  est suspendue à un point fixe  $O$  par l'intermédiaire d'un fil isolant, inextensible, de masse négligeable et de longueur  $l = 10 \text{ cm}$ .  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ .



**15.1.** Calculer la période des petites oscillations de ce pendule simple.

**15.2.** Le pendule est placé entre deux armatures métalliques  $A$  et  $B$ , planes et horizontales, de grandes dimensions, distantes de  $d = 20 \text{ cm}$ . Le point de suspensions,  $O$ , est à  $5 \text{ cm}$  de l'armature supérieure,  $A$ . On applique entre les deux armatures une différence de potentiel constante  $u_{AB} = 2000 \text{ V}$  créant ainsi entre  $A$  et  $B$  un champ élec-

trique vertical dirigé de haut en bas d'intensité  $E = \frac{U_{AB}}{d}$ .

La sphère porte une charge  $q = 2 \times 10^{-7} \text{ C}$ .

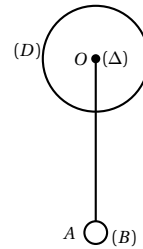
**15.2.1.** Quelle est la nouvelle période des petites oscillations de ce pendule?

**15.2.2.** Le pendule est écarté de sa position d'équilibre d'un angle de  $90^\circ$  avec une pince isolante et abandonné sans vitesse initiale. Quelle est tension du fil au passage à la verticale?

**15.2.3.** Au passage à la verticale le fil casse. Quelles sont alors la nature et l'équation de la trajectoire de  $S$ ? Quelle est la durée du mouvement jusqu'au moment où  $S$  touche  $B$ ?

**Exercice 16.**

Un pendule pesant est constitué d'un disque  $(D)$  homogène solidaire d'une tige  $OA$ , de masse négligeable de longueur  $l$  dont l'extrémité  $O$  coïncide avec le centre du disque et l'extrémité  $A$  porte une bille  $(B)$ , de masse  $M$ , assimilable à un point. Le disque a une masse  $M' = 2M$  et un rayon  $r = \frac{l}{3}$ . Le pendule peut osciller sans frottement autour d'un axe  $(\Delta)$  horizontal, perpendiculaire en  $O$  au plan du disque.



**16.1.** Exprimer, en fonction de  $M$  et de  $l$ , le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe  $(\Delta)$ . A.N.  $M = 100 \text{ g}$ ;  $l = 60 \text{ cm}$ .

**16.2.** Le pendule est écarté de sa position d'équilibre stable d'un très petit angle  $\theta_0 = 0,1 \text{ rad}$  et lâché sans vitesse initiale. Montrer que ses oscillations sont sinusoïdales. Quelle est la valeur de la vitesse angulaire au passage à la position d'équilibre sachant que  $\theta_0 = 0,1 \text{ rad}$ ?

**16.3.** On écarte maintenant le pendule de sa position d'équilibre stable, d'un angle de  $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$  et on le lâche sans vitesse initiale. Calculer sa vitesse angulaire au passage à la position d'équilibre. En déduire la vitesse de la bille  $(B)$ .

$g = 10 \text{ m s}^{-2}$ .



## 7.8 Solutions des exercices et problèmes

### Solution 1. (p. 139)

Établissons la loi horaire du mouvement de  $M$ . L'équation différentielle du mouvement de  $M$  ( $\frac{d^2x}{dt^2} + 1444x = 0$ ) est de la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

avec  $\omega^2 = 1444 \Rightarrow \omega = \sqrt{1444} = 38 \text{ rad s}^{-1}$ . Le mouvement de  $M$  est donc sinusoïdal, de loi horaire :

$$x = X_m \sin(38t + \phi)$$

en unité SI.

Déterminons  $X_m$  et  $\phi$  à partir de  $x$  et  $v$  à  $t = 0$ .

D'après les hypothèses,

$$A_{t=0} = \begin{cases} x_O = +10^{-2} \\ v = -0,5 \end{cases} \quad (\text{S7.1})$$

$$(\text{S7.2})$$

$v_0 < 0$  car le mouvement s'effectue dans le sens opposé à  $xx'$ . D'après les expressions

$$\begin{cases} x = X_m \sin(38t + \phi) \\ V = \frac{dx}{dt} = 38X_m \cos(38t + \phi) \end{cases}$$

on a :

$$A_{t=0} = \begin{cases} x_O = X_m \sin \phi \\ v_O = 38X_m \cos \phi \end{cases} \quad (\text{S7.3})$$

$$(\text{S7.4})$$

La comparaison de (S7.1), (S7.2), (S7.3) et (S7.4), on en déduit :

$$\begin{cases} X_m \sin \phi = 10^{-2} \\ 38X_m \cos \phi = -0,5 \end{cases} \quad (\text{S7.5})$$

$$(\text{S7.6})$$

Cherchons donc un couple ( $X_m > 0$  et  $\phi$ ) qui convienne.

Faisons le rapport  $\frac{(\text{S7.5})}{(\text{S7.6})}$  :

$$\frac{1}{38} \tan \phi = -\frac{10^{-2}}{0,5}$$

$$\Rightarrow \tan \phi = -76 \times 10^{-2}$$

$$\phi = -0,65 \text{ rad}$$

$$\phi = -0,65 + 3,14 = 2,49 \text{ rad}$$

En reportant  $\phi = -0,65 \text{ rad}$  dans (S7.1), on trouve une valeur négative de  $X_m$ . En reportant  $\phi = 2,49 \text{ rad}$  dans (S7.1) on trouve :

$$x_m = \frac{10^{-2}}{\sin 2,49} = 1,65 \times 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow x_m > 0.$$

$X_m$  étant une grandeur toujours positive, nous retenons donc la valeur  $\phi = 2,49 \text{ rad}$ . La loi horaire du mouvement de  $M$  est donc :  $x = 1,65 \times 10^{-2} \sin(38t + 2,49)$  en m.

### Solution 2. (p. 139)

#### 2.1.

**2.1.1.** Amplitude, pulsation, période et fréquence de l'oscillateur.

La loi horaire du mouvement de l'oscillateur est :

$$x = 2 \times 10^{-2} \cos\left(40\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$$

Elle est de la forme :

$$x = X_m \cos(\omega t + \phi)$$

Par identification des deux expressions de  $x$ , on obtient :

■ amplitude du mouvement :  $X_m = 2 \times 10^{-2} \text{ m}$

■ pulsation des oscillations :  $\omega = 40\pi \text{ rad s}^{-1}$

■ période  $T$  :  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{40\pi} = 5 \times 10^{-2} \text{ s}$

■ fréquence  $N$  :  $N = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = 20 \text{ Hz}$

**2.1.2.** Durée de 10 oscillations.

Soit  $\Gamma$  cette durée. Chaque oscillation dure une période  $T = 5 \times 10^{-2} \text{ s}$  donc :

$$\Gamma = 10T = 10 \cdot 5 \cdot 10^{-2} = 0,5 \text{ s}$$

**2.1.3.** Longueur du segment décrit par l'oscillateur lorsque  $t$  varie.

$$-1 \leq \cos\left(40\pi t - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$$

$$-2 \times 10^{-2} \leq x \leq 2 \times 10^{-2}$$

La masse de l'oscillateur décrit un segment de droite de longueur  $4 \times 10^{-2} \text{ m} = 4 \text{ cm}$ .

#### 2.2.

**2.2.1.** Vitesse de l'oscillateur à la date  $t$ .

$$V = \frac{dx}{dt} = -2 \times 10^{-2} \cdot 40\pi \sin\left(40\pi t - \frac{\pi}{6}\right) \\ = -2,51 \sin\left(40\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$$

**2.2.2.** Vitesse maximale.  $v(t)$  est maximale lorsque,

$$\sin\left(40\pi t - \frac{\pi}{6}\right) = -1 \Rightarrow v_m = 2,51 \text{ m s}^{-1}$$

**2.2.3.** Vitesse à la date  $t = 1 \text{ s}$ .

$$v(t = 1 \text{ s}) = -2,51 \sin\left(40\pi t - \frac{\pi}{6}\right) = 1,255 \text{ m s}^{-1}$$

#### 2.3.

**2.3.1.** Accélération à la date  $t$ .

$$a = \frac{dv}{dt} = -2,51 \cdot 40\pi \cos\left(40\pi t - \frac{\pi}{6}\right) \\ = -315,25 \cos\left(40\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$$

**2.3.2.** Accélération maximale.  $a(t)$  est maximale pour :

$$\cos\left(40\pi t - \frac{\pi}{6}\right) = -1 \Rightarrow a_m = 315,25 \text{ m s}^{-2}$$

**2.3.3.** Accélération à la date  $t = 1 \text{ s}$ .

$$a = -315,25 \cos\left(40\pi \cdot 1 - \frac{\pi}{6}\right) = -273 \text{ m s}^{-2}$$

## 2.4. Equation différentielle du mouvement.

$$a(t) = -315,25 \cos\left(40\pi t - \frac{\pi}{6}\right) \quad (\text{S7.1})$$

De l'équation horaire,

$$x = 2 \times 10^{-2} \cos\left(40\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$$

Nous tirons,

$$\cos\left(40\pi t - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{x}{2 \times 10^{-2}} \quad (\text{S7.2})$$

(S7.1) dans (S7.2) donne :

$$a(t) = \frac{d^2 x}{dt^2} = -315,25 \frac{x}{2 \times 10^{-2}}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 1,576 \times 10^4 x = 0$$

C'est l'équation différentielle du mouvement.

Accélération du mobile

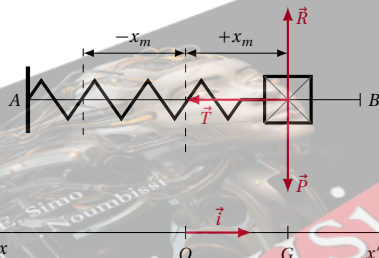
Pour :  $x = -10^{-2}$  m. De l'équation différentielle nous avons :  $a(t) = -1,576 \times 10^4 x$ . Pour  $x = -10^{-2}$  m,

$$a = -1,576 \times 10^4 (-10^{-2}) = 1,576 \times 10^2 \text{ ms}^{-2}.$$

## Solution 3. (p. 139)

3.1. Nature du mouvement du corps de masse  $m$ .

- Système étudié : le corps de masse  $m$ .
- L'étude est faite dans le référentiel terrestre, donc galiléen.
- Les forces appliquées au système sont : le poids  $\vec{P}$ , la réaction  $\vec{R}$  et la tension  $\vec{T}$ .



Appliquons le théorème du centre d'inertie au système :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$$

Projetons cette relation dans le repère  $(O, \vec{i})$  :

$$-Kx = ma_x$$

avec

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{K}{m} x = 0$$

C'est l'équation différentielle du mouvement du système. L'équation horaire du mouvement est de la forme :

$$x = X_m \sin(\omega_0 t + \phi)$$

avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ . Le mouvement est donc rectiligne sinusoïdal.

3.2. Période  $T$  du mouvement.

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} = 2 \cdot 3,14 \sqrt{\frac{0,2}{45}} = 0,42 \text{ s}$$

Equation horaire du mouvement.

$$x = X_m \sin(\omega_0 t + \phi).$$

Avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{45}{0,2}} = 15 \text{ rad s}^{-1}$ . Déterminons  $X_m$  et  $\phi$  à partir des données de l'excitation initiale. D'après les hypothèses, à  $t = 0$ ,  $x_0 = x_m = 5 \times 10^{-2}$  m et  $v_0 = 0$ . D'après les expressions :

$$x = X_m \sin(15t + \phi)$$

$$V = \frac{dx}{dt} = 15X_m \cos(15t + \phi)$$

A  $t = 0$ ,

$$\begin{cases} x_0 = X_m \sin \phi \\ V_0 = 15X_m \cos \phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_m \sin \phi = 5 \times 10^{-2} \\ 15X_m \cos \phi = 0 \end{cases} \quad (\text{S7.1})$$

$$(\text{S7.2})$$

Cherchons le couple  $(X_m > 0 \text{ et } \phi)$  qui convienne de (S7.2), on tire :

$$\cos \phi = 0 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$$

ou  $\phi = -\frac{\pi}{2}$ . En reportant  $\phi = -\frac{\pi}{2}$  dans (S7.1), on trouve une valeur négative de  $X_m$ . En reportant  $\phi = \frac{\pi}{2}$  dans (S7.1) on trouve  $X_m = 5 \times 10^{-2}$  m  $> 0$ .  $X_m$  étant une grandeur toujours positive, nous retenons donc la valeur  $\phi = \frac{\pi}{2}$  rad. L'équation horaire du mouvement est donc :

$$x = 5 \times 10^{-2} \sin\left(15t + \frac{\pi}{2}\right).$$

## 3.3. Energie mécanique du système masse-ressort.

$$E_m = \frac{1}{2} K X_m^2$$

$$E_m = \frac{1}{2} 45 (5 \times 10^{-2})^2 = 5,62 \times 10^{-2} \text{ J}$$

Vitesse de G au passage par la position d'équilibre. En une position quelconque,

$$E_m = \frac{1}{2} K x^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

A la position d'équilibre on a :

$$x_e = 0$$

et

$$E_m = \frac{1}{2} m V_e^2 \Rightarrow V_e = \sqrt{\frac{2E_m}{m}}$$

A.N.  $E_m = 5,62 \times 10^{-2}$  J ;  $m = 0,2$  kg ;  $V_e = 0,75 \text{ ms}^{-1}$ .

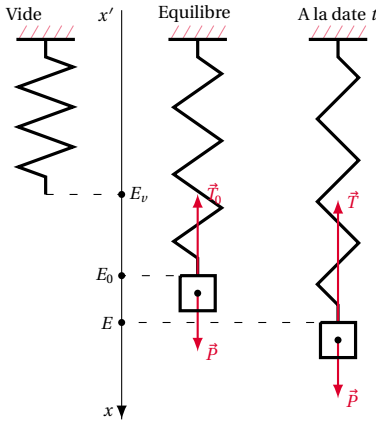
## Solution 4. (p. 139)

## 4.1. Constante de raideur du ressort.

- Système étudié : le solide de masse  $m$ .
- L'étude est faite dans le référentiel terrestre, donc galiléen.

## 7.8. Solutions des exercices et problèmes

- Les forces appliquées au système sont : le poids  $\vec{P}$ , et la tension  $\vec{T}$ .



À l'équilibre, on a :  $\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$ . Par projection de cette relation sur  $xx'$  on a :

$$P - T_0$$

avec

$$T_0 = K E_v$$

$$E_0 = K b$$

$$P = mg$$

$$\Rightarrow K = \frac{mg}{b}$$

A.N.  $m = 100 \text{ g} = 0,1 \text{ kg}$ ;  $g = 9,8 \text{ ms}^{-2}$ ;  $b = 4 \text{ cm} = 4 \times 10^{-2} \text{ m}$ ;  $K = 24,5 \text{ N m}^{-1}$ .

## 4.2.

## 4.2.1. Nature du mouvement de S.

Considérons le système ci-dessus à une date  $t$ . Le bilan des forces étant le même, appliquons la R.E.D. au système :  $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$ . Projétons cette relation sur  $xx'$  :

$$P - T = ma_x \quad (\text{S7.1})$$

avec  $P = mg$  et  $T = K E_v E$ . Décomposons l'allongement  $E_{vE} : E_{vE} = E_{vE_0} + E_0 E$ . En prenant  $E_0$  comme origine de l'axe  $xx'$ ,  $E_v E = b + x$  (S7.1) devient :

$$\begin{aligned} P - K(b + x) &= ma_x \\ \Rightarrow P - Kb - Kx &= ma_x \end{aligned}$$

En tenant compte de la question 4.1. où  $P - Kb = 0$  et sachant que

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{d^2 x}{dt^2} \\ -Kx &= m \frac{d^2 x}{dt^2} \\ \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{K}{m} x &= 0 \end{aligned}$$

Cette équation différentielle montre que le solide a un mouvement de translation rectiligne sinusoïdal de pulsation propre  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = 15,65 \text{ rad s}^{-1}$ .

## 4.2.2. La loi horaire du mouvement.

Elle est de la forme :  $x = X_m \sin(\omega t + \phi)$ . La position la plus basse est séparée de la position la plus haute de la

distance  $2X_m$ .

$$2X_m = 2 \times 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow X_m = 10^{-2} \text{ m}$$

Déterminons alors la phase  $\phi : A_{t=0}, x_0 = X_m$  (d'après l'énoncé). D'après l'expression

$$x = X_m \sin(\omega_0 t + \phi)$$

à  $t = 0$ ;  $x_0 = X_m \sin \phi$ . Par comparaison, on en déduit :

$$\sin \phi = 1 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$$

Donc la loi horaire du mouvement est :

$$x = 10^{-2} \sin\left(15,65 t + \frac{\pi}{2}\right)$$

(en mètre)

## 4.2.3. Énergie mécanique de l'oscillateur.

Considérons le système (ressort-solide-Terre). Son énergie mécanique est  $E = E_{pp} + E_{pe} + E_c$  avec  $E_{pp}$  énergie potentielle de pesanteur,  $E_{pe}$  énergie potentielle élastique et  $E_c$  l'énergie cinétique. En négligeant les frottements,  $E$  est constant. Évaluons  $E$  à la position d'équilibre  $G_0$  :

$$E = E_{pp0} + E_{pe0} + E_{c0} \quad (\text{S7.2})$$

$$E_{pp0} + E_{pe0} = 0 \quad (\text{S7.3})$$

(origine des énergies potentielles)

$$\Rightarrow E = E_{c0} \quad (\text{S7.4})$$

$$E_{c0} = \frac{1}{2} m V_O^2 \quad (\text{S7.5})$$

où

$$V_O = \frac{dx}{dt} = X_m \omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (\text{S7.6})$$

A la position d'équilibre

$$x = 0$$

$$\Rightarrow X_m \sin(\omega_0 t + \phi) = 0$$

$$\Rightarrow \sin(\omega_0 t + \phi) = 0$$

D'après la relation :

$$\sin^2(\omega_0 t_0 + \phi) + \cos^2(\omega_0 t_0 + \phi) = 1$$

avec

$$\sin(\omega_0 t_0 + \phi) = 0$$

Nous avons :

$$\cos^2(\omega_0 t_0 + \phi) = 1 \quad (\text{S7.7})$$

Élevons l'expression de la vitesse au carré. Nous obtenons :

$$V_0^2 = X_m^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

En tenant compte de (S7.7) on a :  $V_0^2 = X_m^2 \omega_0^2$  et

$$E_{c0} = \frac{1}{2} m X_m^2 \omega_0^2.$$

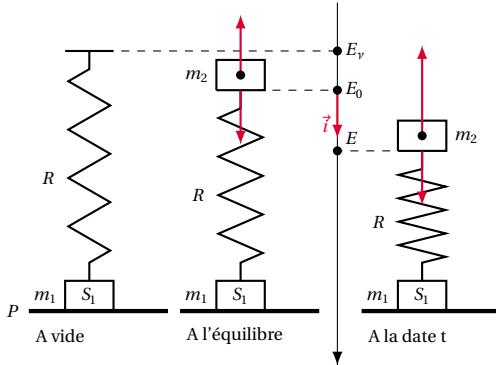
Conclusion.

L'énergie mécanique  $E = E_{c0} = \frac{1}{2} m X_m^2 \omega_0^2$  est proportionnelle au carré de l'amplitude du mouvement.

## Solution 5. (p. 139)

## 5.1. Constante de raideur du ressort.

- Système étudié : le solide  $S_2$  de masse  $m_2$ .
- L'étude est faite dans le référentiel terrestre, donc galiléen.
- Les forces appliquées au système sont : le poids  $\vec{P}_2$ , et la tension  $\vec{T}_O$ .



A l'équilibre, on a :  $\vec{P}_2 + \vec{T}_O = \vec{0}$ . Par projection de cette relation sur  $x'x''$  on a :

$$m_2 g - T_0$$

avec

$$T_0 = K E_v E_0 = K a \Rightarrow m_2 g - K a = 0 \quad (S7.1)$$

$$\Rightarrow K = \frac{m_2 g}{a} \quad (S7.2)$$

A.N.  $m_2 = 200 \text{ g} = 0,2 \text{ kg}$ ;  $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ ;  $a = 10 \text{ cm} = 10^{-1} \text{ m}$ ;  $K = 20 \text{ N m}^{-1}$ .

## 5.2.

5.2.1. Equation différentielle satisfaite par  $x$ .

Considérons le système ci-dessus. Le bilan des forces étant le même appliquons la R.F.D. au système :

$$\vec{P}_2 + \vec{T} = m_2 \vec{a}$$

Projetons cette relation sur  $x'x''$  :

$$P_2 - T = m a_x \quad (S7.3)$$

avec  $P_2 = m_2 g$  et  $T = K E_v E$ .  $E_v E = E_v E_0 + E_0 E$ . En prenant  $E_0$  comme origine de l'axe  $x'x''$ ,  $E_v E = a + x$ . (S7.3) devient :

$$m_2 g - K(a + x) = m a_x \Rightarrow m_2 g - K a - K x = m a_x$$

En tenant compte de la question 5.1. où  $m_2 g - K a = 0$

et sachant que  $a_x = \frac{d^2 x}{dt^2}$ , on a :

$$-K x = m_2 \frac{d^2 x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{K}{m_2} x = 0 \quad (S7.4)$$

C'est équation différentielle satisfaite par  $x$ .

5.2.2. Equation  $x = f(t)$ .

La solution de l'équation différentielle (S7.4) est de la forme :  $x = X_m \sin(\omega t + \phi)$  avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m_2}} = 10 \text{ rad s}^{-1}$  pulsation propre de l'oscillateur. Déterminons  $X_m$  et  $\phi$  à partir de  $x$  et  $v$  à la date  $t = 0$ . D'après les hypothèses, à  $t = 0$ ,  $x_0 = b$  et  $v_0 = 0$ . D'après les expressions :

$$x = X_m \sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = X_m \omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$$

A  $t = 0$ ,  $x_0 = X_m \sin \phi$  et  $v_0 = X_m \omega_0 \cos \phi$ . Par comparaison on trouve :

$$\phi = \frac{\pi}{2} \text{ et } X_m = b$$

Donc la loi horaire du mouvement est :

$$x = b \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$$

(en mètre)

5.2.3. Considérons le système  $\{S_1 + S_2\}$ .

En communiquant au solide  $S_2$  une compression  $b$  importante, le ressort exerce une tension  $\vec{T}$  proportionnelle à  $b$  telle que :

$$T > P_1 + P_2$$

$$\vec{T} + \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = (m_1 + m_2) \vec{a} \neq \vec{0}$$

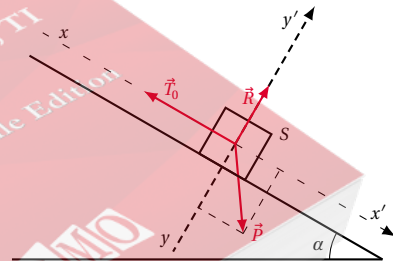
$$\Rightarrow \vec{a} \neq \vec{0}$$

donc  $S_1$  se met en mouvement.

## Solution 6. (p. 140)

## 6.1. Allongement du ressort à l'équilibre.

- Système étudié : le solide de masse  $m$ .
- L'étude est faite dans le référentiel terrestre, donc galiléen
- Les forces appliquées au système sont : le poids  $\vec{P}$  du solide  $S$ , la réaction  $\vec{R}$  du plan incliné, la tension  $\vec{T}_0$  du ressort.



A l'équilibre, on a :  $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T}_0 = \vec{0}$ . La projection de cette relation sur  $x'x''$  donne :

$$P \sin \alpha + 0 - T_0 = 0 \quad (S7.1)$$

avec  $T_0 = K(l - l_0)$  où  $(l - l_0)$  est l'allongement du ressort et  $P = mg$ . On a alors :

$$mg \sin \alpha - K(l - l_0) = 0 \quad (S7.2)$$

D'où l'on tire :

$$l - l_0 = \frac{mg \sin \alpha}{K}$$

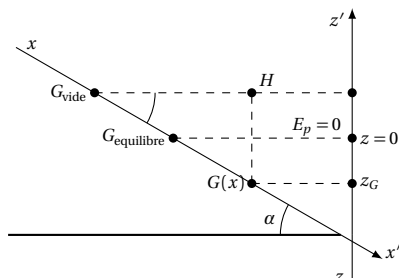


## 7.8. Solutions des exercices et problèmes

$$l - l_0 = \frac{0,4 \cdot 10 \sin 30^\circ}{10} = 0,2 = 20 \text{ cm}$$

## 6.2.

**6.2.1.** *Energie mécanique totale du système (Ressort – Solide – Terre) à une date  $t$ .*



L'énergie mécanique de ce système est :

$$E = E_{pp} + E_{pe} + E_c \quad (\text{S7.3})$$

$E_{pp}$  est l'énergie potentielle de pesanteur du système.  $G$  étant en dessous de la position de référence,  $E_{pp}(G)$  est négatif (voir orientation de l'axe  $z'z$ ). Dans le triangle  $OHG$ , on a :

$$HG = OG \sin \alpha$$

avec

$$HG = IZ_G I$$

$$OG = x$$

$$\Rightarrow Z_G = x \sin \alpha$$

$$E_{pp}(G) < 0$$

$$\Rightarrow E_{pp}(G) = -mgx \sin \alpha$$

$E_{pe}$  est l'énergie potentielle élastique.

$$E_{pe} = \frac{1}{2} K (G_v G)^2$$

$$G_v G = G_v O + OG = (l - l_0) + x$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E_{pe} &= \frac{1}{2} K [(l - l_0) + x]^2 \\ &= \frac{1}{2} K (l - l_0)^2 + K (l - l_0)x + \frac{1}{2} K x^2 \end{aligned}$$

$E_c$  est l'énergie cinétique du système.

$$E_c = \frac{1}{2} m V^2$$

L'énergie mécanique totale du système est donc :

$$\begin{aligned} E &= -mgx \sin \alpha + \frac{1}{2} K (l - l_0)^2 \\ &\quad + K (l - l_0)x + \frac{1}{2} K x^2 + \frac{1}{2} m V^2 \\ E &= x[K(l - l_0) - mg \sin \alpha] \\ &\quad + \frac{1}{2} K (l - l_0)^2 + \frac{1}{2} K x^2 + \frac{1}{2} m V^2 \end{aligned}$$

D'après la condition d'équilibre  $mg \sin \alpha - K(l - l_0) = 0$  (voir 7.1) on a :

$$E = \frac{1}{2} K (l - l_0)^2 + \frac{1}{2} K x^2 + \frac{1}{2} m V^2$$

**6.2.2.** ■ *Equation différentielle du mouvement.*

En négligeant les frottements, l'énergie mécanique se

conservé. Donc,

$$\frac{1}{2} K (l - l_0)^2 + \frac{1}{2} K x^2 + \frac{1}{2} m V^2 = \text{constante}$$

Dérivons cette égalité par rapport au temps en remarquant que :

$$\frac{dx^2}{dt} = 2x \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dV^2}{dt} = 2V \frac{dV}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = V$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} K (2xV) + \frac{1}{2} \left( m 2V \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow V \left( Kx + m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = 0$$

Si  $V \neq 0$ , nous aurons :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{K}{m} x = 0$$

C'est l'équation différentielle du mouvement.

■ *Equation horaire du mouvement.*

L'équation différentielle est de la forme :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_o^2 x = 0$$

avec  $\omega_o = \sqrt{\frac{K}{m}} = 5 \text{ rad s}^{-1}$ . La solution de l'équation différentielle est de la forme :

$$x = X_m \sin(5t + \phi)$$

où  $x$  est la loi horaire du mouvement.  $X_m$  et  $\phi$  sont à déterminer. D'après les données de l'exercice,

$$A(t=0) = \begin{cases} x_0 = +8 \times 10^{-2} \text{ m} \\ v = +0,3 \text{ ms}^{-1} \end{cases} \quad (\text{S7.4})$$

$$v = +0,3 \text{ ms}^{-1} \quad (\text{S7.5})$$

D'après les expressions

$$\begin{cases} x = X_m \sin(\omega_o t + \phi) \\ v = \frac{dx}{dt} = X_m \omega_o \cos(\omega_o t + \phi) \end{cases}$$

$$A(t=0) = \begin{cases} x_0 = X_m \sin \phi \\ v_0 = X_m \omega_o \cos \phi \end{cases} \quad (\text{S7.6})$$

$$v_0 = X_m \omega_o \cos \phi \quad (\text{S7.7})$$

La comparaison de (S7.4), (S7.5) (S7.6) et (S7.7) :

$$\begin{cases} X_m \sin \phi = 8 \times 10^{-2} \\ 5X_m \cos \phi = 0,3 \end{cases} \quad (\text{S7.8})$$

$$\begin{cases} X_m \sin \phi = 8 \times 10^{-2} \\ 5X_m \cos \phi = 0,3 \end{cases} \quad (\text{S7.9})$$

$$\frac{(\text{S7.8})}{(\text{S7.9})} \Rightarrow \tan \phi = 1,33 \Rightarrow \phi = 0,927 \text{ rad} \quad (\text{S7.10})$$

(S7.10) dans (S7.4)

$$\Rightarrow X_m = 0,1 \text{ m} = 10 \text{ cm}$$

$$x = 0,1 \sin(5t + 0,927)$$



**Solution 7. (p. 140)****7.1. Vitesse  $V_2$  de  $S_2$  avant le choc.**

Le choc se fait avec accrochage, c'est un choc mou. La vitesse  $V_2$  de  $S_2$  avant le choc est liée à la vitesse  $V_G$  de l'ensemble  $\{S_1 + S_2\}$  par la relation : (voir cours chap. 5).

$$\begin{aligned} -(m_1 + m_2)V_G &= -m_2 V_2 \\ \Rightarrow V_2 &= \frac{m_1 + m_2}{m_2} V_G \end{aligned}$$

A.N.  $m_1 = 0,1 \text{ kg}$ ;  $m_2 = 0,6 \text{ kg}$ ;  $V_G = 0,42 \text{ ms}^{-1}$ ;  $V_2 = 0,49 \text{ ms}^{-1}$ .

**7.1.1. Énergie mécanique du système.**

$$E = E_{pp} + E_{pe} + E_c$$

avec  $E_{pp}$  = énergie potentielle de pesanteur;  $E_{pe}$  = énergie potentielle élastique;  $E_c$  = énergie cinétique. Choisissons pour origine des  $E_{pp}$  le plan horizontal, contenant la tige  $T$ ,  $E_{pp} = 0$ . En nous plaçant à la date  $t = 0$ ,  $E_{pe} = 0$  car le ressort n'est ni comprimé ni tendu.

$$E_O = E_{co} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V_{Go}^2 = 0,0617 \text{ J}$$

**7.1.2. Abscisse  $x$  de  $G$  lorsque  $V_G = 0$  pour la première fois.**

À une date  $t$  quelconque, l'énergie mécanique du système est :

$$E = \frac{1}{2} K x^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_G^2$$

Le système n'étant pas soumis aux forces de frottement, son énergie mécanique reste constante. Ainsi :

$$\begin{aligned} E(t) &= E_O \\ \Rightarrow \frac{1}{2} K x^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_G^2 &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_{Go}^2 \end{aligned}$$

Quand

$$\begin{aligned} V_G &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{2} K x^2 &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_{Go}^2 \\ \Rightarrow x &= \pm V_{Go} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{K}} \end{aligned}$$

En tenant compte de l'orientation de l'axe et du sens du mouvement du système à la date  $t = 0$ , l'abscisse  $x$  lorsque  $V_G = 0$  pour la première fois est :

$$\begin{aligned} x &= -V_{Go} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{K}} \\ &= -0,42 \sqrt{\frac{0,1 + 0,6}{35}} = -0,059 \text{ m} \end{aligned}$$

**7.1.3. Équation différentielle du mouvement de  $G$ .**

- Système étudié :  $\{S_1 + S_2\}$  de masse  $(m_1 + m_2)$  (après le choc).
- L'étude est faite dans le référentiel terrestre, donc galiléen.
- Les forces appliquées au système sont : le poids  $\vec{P}$ , la réaction  $\vec{R}$  de la tige et la tension  $\vec{T}$  du ressort.

Appliquons la R.F.D. au système :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = (m_1 + m_2) \vec{a}$$

Projetons cette relation sur  $xx'$  :

$$0 + 0 - T = (m_1 + m_2) a_x$$

Avec

$$T = K x$$

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{K}{m_1 + m_2} x = 0 \quad (\text{S7.1})$$

**7.1.4. Equation horaire du mouvement de  $G$ .**

La solution de l'équation différentielle (S7.1) est de la forme :

$$x = X_m \sin(\omega_O t + \phi)$$

avec  $\omega_O = \sqrt{\frac{K}{m_1 + m_2}} = 7,07 \text{ rad s}^{-1}$ .

Déterminons  $X_m > 0$  et  $\phi$  à partir de  $x$  et  $v$  à  $t = 0$ . D'après les hypothèses,

$$A(t=0) \begin{cases} x_O = +0 \\ v_O = -0,42 \text{ ms}^{-1} \end{cases} \quad (\text{S7.2})$$

$$v_O = -0,42 \text{ ms}^{-1} \quad (\text{S7.3})$$

D'après les expressions

$$\begin{cases} x = X_m \sin(\omega_O t + \phi) \\ v = \frac{dx}{dt} = X_m \omega_O \cos(\omega_O t + \phi) \end{cases}$$

On a :

$$A(t=0) \begin{cases} x_O = X_m \sin \phi \\ v_O = X_m \omega_O \cos \phi \end{cases} \quad (\text{S7.4})$$

$$v_O = X_m \omega_O \cos \phi \quad (\text{S7.5})$$

La comparaison de (S7.2), (S7.3), (S7.4) et (S7.5) :

$$\begin{cases} X_m \sin \phi = 0 \\ X_m 7,07 \cos \phi = 0,42 \end{cases} \quad (\text{S7.6})$$

$$X_m 7,07 \cos \phi = 0,42 \quad (\text{S7.7})$$

(S7.6)  $\Rightarrow \phi = 0$  ou  $\phi = \pi$ .

La valeur de  $\phi = 0$  dans (S7.5)  $\Rightarrow X_m < 0$ .

Donc la solution  $\phi = 0$  est à écarter.

La solution  $\phi = \pi$  dans (S7.5)  $\Rightarrow$

$$X_m = \frac{-0,42}{\omega_O \cos \pi} = 0,059 \text{ m.}$$

Donc l'équation horaire du mouvement est :

$$x = 0,059 \sin(7,07 t + \pi) = -0,059 \sin(7,07 t)$$

**7.1.5. Caractéristique de la somme vectorielle des forces appliquées au système lorsque sa vitesse s'annule pour la deuxième fois.**

D'après le théorème du centre d'inertie :

$$\sum \vec{F} = (m_1 + m_2) \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{i}$$

Or d'après l'équation différentielle (S7.3)

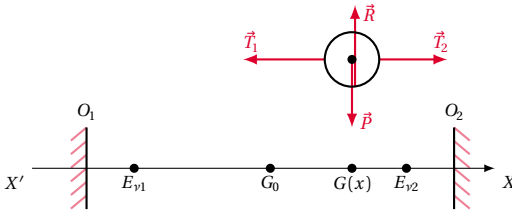
$$(m_1 + m_2) \frac{d^2 x}{dt^2} = -K x$$

Donc  $\sum \vec{F} = -K x \vec{i}$ . La vitesse du système s'annule pour la deuxième fois en  $x = +X_m$ . Alors,

$$\sum \vec{F} = -K X_m \vec{i} = -350,059 \vec{i} = -2,065 \vec{i}$$

**Solution 8. (p. 140)****8.1. Position de G à l'équilibre.**

- Système étudié : le mobile de masse  $m$ .
- L'étude est faite dans le référentiel terrestre, donc galiléen.
- Les forces appliquées au système sont : le poids  $\vec{P}$  du mobile, la tension  $\vec{T}_1$  du ressort  $R_1$ , la tension  $\vec{T}_2$  du ressort  $R_2$ .



D'après la condition d'équilibre de G, on a :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0} \quad (S7.1)$$

(S7.1), projetée sur  $xx'$ , nous donne :

$$0 + 0 - T_1 + T_2 = 0 \Rightarrow T_1 = T_2 \Rightarrow K_1 \Delta l_1 = K_2 \Delta l_2$$

$R_1$  étant identique à  $R_2$ ,

$$K_1 = K_2 \Rightarrow \Delta l_1 = \Delta l_2$$

Donc G se trouve entre  $O_1$  et  $O_2$  tel que :

$$G O_1 = l_{01} + \Delta l_1 + r$$

$$G O_2 = l_{02} + \Delta l_2 + r$$

avec  $l_{01} = l_{02}$  (car les deux ressorts sont identiques), et  $\Delta l_1 = \Delta l_2$ . Donc  $G O_1 = G O_2$ . Nous déduisons qu'à l'équilibre, G est au milieu de  $O_1 O_2$ .

Valeur  $\Delta l$  de l'allongement de chaque ressort.

$$2l_0 + 2r + 2\Delta l = O_1 O_2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta l &= \frac{1}{2}(O_1 O_2 - 2l_0 - 2r)\Delta l \\ &= \frac{1}{2}(70 - 2.20 - 2.5) = 10 \text{ cm} \end{aligned}$$

**8.2. Montrons que le mouvement de G est harmonique.**

Le bilan des forces est le même qu'en 9.1. Appliquons la R.F.D. au système.

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = m\vec{a} \quad (S7.2)$$

Projetons cette relation sur  $xx'$ . Nous obtenons :

$$0 + 0 - T_1 + T_2 = m a_x \quad (S7.3)$$

$$T_1 = K E_{v1} G$$

$$\text{où } E_{v1} G = E_{v1} G_0 + G_0 G = \Delta l + x$$

$$\text{et } T_2 = K E_{v2} G = K(E_{v2} G_0 - G_0 G) = K(\Delta l - x)$$

(S7.3) devient avec  $a_x = \frac{d^2 x}{dt^2}$  et on a

$$\begin{aligned} -K \Delta l - K x + K \Delta l - K x &= m \frac{d^2 x}{dt^2} \\ \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{2K}{m} x &= 0 \end{aligned} \quad (S7.4)$$

L'équation différentielle du mouvement est de la forme :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_O^2 x = 0$$

avec  $\omega_O = \sqrt{\frac{2K}{m}}$ . Donc le mouvement est harmonique.

Calcul de la constante de raideur K.

$$T = K \Delta l \Rightarrow K = \frac{T}{\Delta l} = \frac{1}{0,04} = 25 \text{ N m}^{-1}$$

Expression et valeur numérique de la pulsation  $\omega_O$  :

$$\omega_O = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 25}{0,7}} = 8,45 \text{ rad s}^{-1}$$

Période du mouvement :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_O} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2K}} = 0,74 \text{ s}$$

**8.3. Loi horaire du mouvement.**

La solution de l'équation différentielle (S7.4) est de la forme :

$$x = X_m \sin(\omega_O t + \phi)$$

avec  $\omega_O = 8,45 \text{ rad s}^{-1}$

Déterminons  $X_m$  et  $\phi$  à partir de  $x$  et  $v$  à  $t = 0$ . D'après les hypothèses,

$$A(t=0) \begin{cases} x_0 = +2 \times 10^{-2} \\ v < 0 \end{cases} \quad (S7.5)$$

$$v < 0 \quad (S7.6)$$

$V_0 < 0$  car le mouvement s'effectue dans le sens opposé à  $xx'$ . D'après les expressions

$$x = X_m \sin(\omega_O t + \phi)$$

$$V = \frac{dx}{dt} = X_m \omega_O \cos(\omega_O t + \phi)$$

$$X_m = 5 \times 10^{-2}$$

(voir énoncé).

$$A(t=0) \begin{cases} x_0 = X_m \sin \phi \\ v_0 = X_m \omega_O \cos \phi \end{cases} \quad (S7.7)$$

$$v_0 = X_m \omega_O \cos \phi \quad (S7.8)$$

La comparaison de (S7.5), (S7.6) (S7.7) et (S7.8) :

$$\begin{cases} 5 \times 10^{-2} \sin \phi = 2 \times 10^{-2} \\ 5 \times 10^{-2} \cdot 8,45 \cos \phi < 0 \end{cases} \quad (S7.9)$$

$$5 \times 10^{-2} \cdot 8,45 \cos \phi < 0 \quad (S7.10)$$

De (S7.9) on a :

$\phi = 0,4115 \text{ rad}$  ou  $\phi = 3,14 - 0,4115 \text{ rad} = 2,73 \text{ rad}$ . Pour  $\phi = 0,4115 \text{ rad}$ , on a :

$$v_0 = 5 \times 10^{-2} \cdot 8,45 \cos(0,4115) = 0,387 \text{ m s}^{-1} > 0$$

Donc la solution  $\phi = 0,4115$  est à écarter car elle ne vérifie l'hypothèse posée.

Pour  $\phi = 2,73 \text{ rad}$ , on a :

$v_0 = 5 \times 10^{-2} \cdot 8,45 \cos(2,73) = -0,387 \text{ m s}^{-1} < 0$ , solution à retenir puisqu'elle vérifie l'hypothèse posée.

Donc l'équation horaire du mouvement est :  $x = 0,05 \sin(8,45 t + 2,73)$ .

**8.4. Énergie mécanique totale du système (mobile,  $R_1$ ,  $R_2$ ) à une date  $t$ .**

En négligeant les frottements, l'énergie mécanique de ce

système est constante :

$$E = E_{pp} + E_{pe}(R_1) + E_{pe}(R_2) + E_c$$

Prenons comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur, le plan horizontal contenant le dispositif  $\Rightarrow E_{pp} = 0$

$$E_{pe}(R_1) = \frac{1}{2} K (\Delta l_1)^2$$

$$\text{avec } \Delta l_1 = E_{V1} G = E_{V1} G_O + G_O G = E_{v1} G_O + x$$

$$E_{pe}(R_2) = \frac{1}{2} K (\Delta l_2)^2$$

$$\text{avec } \Delta l_2 = E_{V2} G = E_{V2} G_O - G_O G = E_{V2} G_O - x$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

$$E = \frac{1}{2} K (E_{V1} G_O + x)^2 + \frac{1}{2} K (E_{V2} G_O - x)^2 + \frac{1}{2} m v^2 \quad (S7.11)$$

Développons et simplifions (S7.11) en tenant compte de ce que  $E_{v1} G_O = E_{v2} G_O$  (voir équilibre). On obtient :

$$E = K (E_{vG_O})^2 + K x^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

Retrouvons, à partir de  $E$ , l'équation différentielle du mouvement.

Le système étant conservatif, son énergie mécanique se conserve donc  $E = \text{constante}$ .

$$E = \text{constante}$$

$$\Rightarrow K x^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \text{constante} - K (E_{vG_O})^2 \quad (S7.12)$$

Dérivons par rapport au temps l'équation (S7.12). On trouve :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{2K}{m} x = 0$$

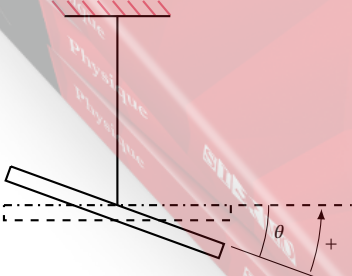
(démarche voir Exercice 6. question 6.2.2)

### Solution 9. (p. 141)

**9.1.** Calcul du moment d'inertie  $J$  de la barre par rapport à l'axe ( $\Delta$ ) passant par  $OM$ .

$$J_{\Delta} = \frac{1}{12} M l^2$$

$$\text{A.N. } M = 0,2 \text{ kg}; l = 0,2 \text{ m}; J_{\Delta} = 6,67 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2.$$



### 9.2.

**9.2.1.** Montrons que le système effectue des oscillations

sinusoïdales.

■ Système étudié : la barre  $AB$ .

■ Les forces appliquées à la barre  $AB$  dans le référentiel terrestre, donc galiléen, sont : le poids  $\vec{P}$ , la tension  $\vec{T}$  du fil de torsion et le couple de torsion de moment  $M$ .

D'après le théorème du centre d'inertie appliqué au système en rotation on a :

$$M_{\Delta}(\vec{P}) + M_{\Delta}(\vec{T}) + M = J_{\Delta} \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad (S7.1)$$

$\vec{P}$  et  $\vec{T}$  passent par  $\Delta$ . Donc

$$M_{\Delta}(\vec{P}) = 0 \quad M_{\Delta}(\vec{T}) = 0$$

Par ailleurs  $M = -C \theta$  (S7.1) devient :

$$0 + 0 - C \theta = J_{\Delta} \frac{d^2 \theta}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{C}{J_{\Delta}} \theta = 0 \quad (S7.2)$$

(S7.2) est une équation différentielle de la forme :

$$\frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = 0$$

$$\text{avec } \omega_0^2 = \frac{C}{J_{\Delta}} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J_{\Delta}}}$$

Donc le système constitue un oscillateur harmonique de pulsation propre  $\omega_0$ .

Période des oscillations :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J_{\Delta}}{C}}$$

### 9.2.2. Equation horaire du mouvement.

La solution de l'équation différentielle (S7.2) est de la forme :

$$\theta = \theta_m \sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$\text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J_{\Delta}}}$$

$\theta_m$  étant connu ( $\theta_m = 1 \text{ rad}$ ).

Déterminons  $\phi$  à partir de  $x$  et  $v$  à  $t = 0$ .

D'après les hypothèses,

$$A(t=0) \begin{cases} \theta_0 = +\theta_m = 1 \text{ rad} \\ v_0 = 0 \end{cases} \quad (S7.3)$$

$$(S7.4)$$

D'après les expressions

$$\begin{cases} \theta = \theta_m \sin(\omega_0 t + \phi) \\ v = \frac{d\theta}{dt} = \theta_m \omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \end{cases}$$

on a

$$A(t=0) \begin{cases} \theta_0 = \theta_m \sin \phi \\ v_0 = \theta_m \omega_0 \cos \phi \end{cases} \quad (S7.5)$$

$$(S7.6)$$

La comparaison de (S7.3), (S7.4) (S7.5) et (S7.6) :

$$\begin{cases} 1 \sin \phi = 1 \\ 1 \omega_0 \cos \phi = 0 \end{cases} \quad (S7.7)$$

$$(S7.8)$$

$$\text{On trouve } \phi = \frac{\pi}{2}.$$

## 7.8. Solutions des exercices et problèmes

Calcul de  $\omega_0$  :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ rad s}^{-1}$$

L'équation horaire du mouvement du système est donc :

$$\theta = \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \pi t$$

**9.2.3.** Calculons  $C$  :

$$\begin{aligned}\omega_O^2 &= \frac{C}{J_\Delta} \\ \Rightarrow C &= J_\Delta \omega_O^2 = 6,67 \times 10^{-4} \cdot 3,14^2 \\ &= 6,58 \times 10^{-3} \text{ N m rad}^{-1}\end{aligned}$$

**9.3.** Montrons que l'énergie mécanique totale du système reste constante au cours du mouvement.

À instant quelconque  $t$ , l'énergie mécanique totale est :

$$E = E_{pp} + E_{pe} + E_c$$

avec  $E_{pp}$  = énergie potentielle de pesanteur;  $E_{pe}$  = énergie potentielle élastique;  $E_c$  = énergie cinétique. Choisissons pour origine des  $E_{pp}$  le plan horizontal, contenant la barre,  $E_{pp} = 0$ .

$$E_{pe} = \frac{1}{2} C \theta^2 \quad E_c = \frac{1}{2} J \theta'^2$$

avec

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_m \sin(\omega_O t - \phi) \\ \theta' &= \frac{d\theta}{dt} = \theta_m \omega_O \cos(\omega_O t + \phi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E &= 0 + \frac{1}{2} C \theta_m^2 \sin^2(\omega_O t + \phi) \\ &\quad + \frac{1}{2} J_\Delta \theta_m^2 \omega_O^2 \cos^2(\omega_O t + \phi)\end{aligned}$$

En remarquant que

$$\begin{aligned}\omega_O^2 &= \frac{C}{J_\Delta} \\ \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \Rightarrow E = \frac{1}{2} C \theta_m^2\end{aligned}$$

### Solution 10. (p. 141)

**10.1.** Montrons en utilisant deux méthodes différentes que l'oscillateur en rotation autour de  $(\Delta)$  est harmonique.

*Méthode 1.* Utilisons la relation fondamentale de la dynamique.

■ Système étudié : la barre  $AB$ .

■ Les actions agissant sur la barre  $AB$  dans le référentiel terrestre, donc galiléen, sont : le poids  $\vec{P}$ , l'action  $\vec{R}$  des deux portions de la tige. Les deux couples de torsion  $M_1$  et  $M_2$ .

D'après la R.F.D. de rotation on a :

$$M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\vec{R}) + M_1 + M_2 = J_\Delta \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad (\text{S7.1})$$

$\vec{P}$  et  $\vec{R}$  passent par  $\Delta \Rightarrow M_\Delta(\vec{P}) = 0$  et  $M_\Delta(\vec{R}) = 0$ .

Par ailleurs  $M_1 = -C_1 \theta$  et  $M_2 = -C_2 \theta$ .

(S7.1) devient :

$$\begin{aligned}0 + 0 - C_1 \theta - C_2 \theta &= J_\Delta \frac{d^2 \theta}{dt^2} \\ \Rightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{C_1 + C_2}{J_\Delta} \theta &= 0\end{aligned} \quad (\text{S7.2})$$

(S7.2) est une équation différentielle de la forme :

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \omega_O^2 \theta = 0$$

avec

$$\omega_O^2 = \frac{C_1 + C_2}{J_\Delta} \Rightarrow \omega_O = \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{J_\Delta}}$$

Donc le système constitue un oscillateur harmonique de pulsation propre  $\omega_0$ .

*Méthode 2.* Utilisons la conservation de l'énergie mécanique.

Le système est la barre  $AB$  et les deux portions de tige  $GE_1$  et  $GE_2$ , subissant la torsion  $\theta$  lorsque l'abscisse angulaire est  $\theta$ .

■ Bilan des actions agissant sur le système.

■ Le poids  $\vec{P}$ , l'action du support  $E_1$  et l'action du support  $E_2$ .

Toutes ces forces ne travaillent pas. Le système est donc conservatif et son l'énergie mécanique se conserve.

$$E = E_p(GE_1) + E_p(GE_2) + E_c(\text{barre } AB) = \text{constante}$$

Avec

$$E = \frac{1}{2} C_1 \theta^2 + \frac{1}{2} C_2 \theta^2 + \frac{1}{2} J_\Delta \theta'^2$$

où  $\theta' = \frac{d\theta}{dt}$ . La dérivée de  $E$  par rapport au temps est

nulle. En remarquant que la dérivée de  $\theta^2 = 2\theta \cdot \frac{d\theta}{dt}$  et

que la dérivée de  $\theta'^2 = 2\theta' \cdot \frac{d\theta'}{dt}$ , nous avons :

$$C_1 + C_2 \theta \frac{d\theta}{dt} + J_\Delta \theta' \frac{d\theta'}{dt} = 0$$

$$\text{avec } \theta' = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\Rightarrow \left[ (C_1 + C_2) \theta + J_\Delta \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right] \frac{d\theta}{dt} = 0$$

$$\text{Pour } \frac{d\theta}{dt} \neq 0$$

$$\Rightarrow (C_1 + C_2) \theta + J_\Delta \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{C_1 + C_2}{J_\Delta} \theta = 0$$

Cette équation différentielle est de la forme  $\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \omega_O^2 \theta = 0$  avec  $\omega_O = \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{J_\Delta}}$ . Donc l'oscillateur en rotation autour de  $(\Delta)$  est harmonique de pulsation propre  $\omega_0$ .

**10.2.** Calculons le moment d'inertie  $J_\Delta$  de la barre sachant que  $10t_0 = \tau$ .

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J_\Delta}{C_1 + C_2}} \Rightarrow T_0^2 = 4\pi^2 \frac{J_\Delta}{C_1 + C_2}$$



avec  $T_O = \frac{\tau}{10}$ .

$$J_\Delta = \frac{(C_1 + C_2)\tau^2}{400\pi^2} = \frac{(8 \times 10^{-2} + 6 \times 10^{-2})7^2}{400\pi^2} = 1,74 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-2}$$

### 10.3. Vitesse curviligne $v_{\max}$ du point A.

La loi horaire du mouvement est de la forme  $\theta = \theta_m \sin(\omega_0 t + \phi)$ . Comme on a excité l'oscillateur en l'écartant de  $90^\circ = \frac{\pi}{2}$  rad et l'abandonnant sans vitesse initiale, l'amplitude de son mouvement est  $\theta_m = \frac{\pi}{2}$  rad. La vitesse angulaire étant :

$$\theta' = \frac{d\theta}{dt} = \theta_m \omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$$

La vitesse angulaire maximale est :

$$\theta_{m'} = \theta_m \omega_0 = \theta_m \frac{2\pi}{T_O} = \frac{10\theta_m 2\pi}{\tau} = \frac{10\pi \cdot 2\pi}{2\tau} = 14,1 \text{ rad s}^{-1}$$

Le point A situé à la distance  $l = 0,2 \text{ m}$  de l'axe  $\Delta$  a pour vitesse angulaire maximale  $\theta_{m'}$  et pour vitesse curviligne maximale,  $v_m = l\theta_{m'} = 2,82 \text{ m s}^{-1}$ .

## Solution 11. (p. 141)

### 11.1. Position d'équilibre de la tige.

- Système étudié : la tige munie des charges  $+q$  et  $-q$ .
- Bilan des forces agissant sur le système : la force  $\vec{F}_1 = q\vec{E}$  agissant sur  $(+q)$  et la force  $\vec{F}_2 = -q\vec{E}$  agissant sur  $(-q)$ .

Les deux conditions d'équilibre doivent être satisfaites :

$$\begin{cases} \sum M_\Delta = 0 & \text{absence de rotation} \\ \sum \vec{F} = \vec{0} & \text{absence de translation} \end{cases} \quad \begin{matrix} (S7.1) \\ (S7.2) \end{matrix}$$

D'après (S7.1)

$$\begin{aligned} \frac{F_1 l}{2} \sin \theta + \frac{F_2 l}{2} \sin \theta &= 0 \\ \Rightarrow \frac{l}{2} (F_1 + F_2) \sin \theta &= 0 \\ \Rightarrow \sin \theta &= 0 \\ \Rightarrow \theta &= 0 \end{aligned}$$

Donc à l'équilibre  $\theta = 0$  et la position d'équilibre correspond à la position (S7.1) de la Figure.

### 11.2. Montrons que dans une position où $\theta \neq 0$ , la tige est soumise à un couple de forces.

Dans cette position, la tige est soumise à deux forces électriques :  $\vec{F}_1 = q\vec{E}$  et  $\vec{F}_2 = -q\vec{E}$ .  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  ont la même direction que  $\vec{E}$  donc  $\vec{F}_1$  est parallèle à  $\vec{F}_2$ .

Par ailleurs  $\vec{F}_1$  est opposée à  $\vec{F}_2$ , mais les deux forces n'ont pas le même support. Nous concluons que  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  constituent un couple de forces.

Moment de ce couple :  $M_\Delta = Fd$  avec  $F = qE$  (intensité commune aux deux forces) et  $d$  = distance séparant les droites d'action des deux forces.

$$d = l \sin \theta$$

avec  $\theta < 0$ .

$$M_\Delta = -qEl \sin \theta$$

### 11.3. Relation liant $\theta$ et $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ . D'après la R.F.D. de rotation,

$$\begin{aligned} M_\Delta &= J_\Delta \frac{d^2\theta}{dt^2} \\ \Rightarrow -qEl \sin \theta &= J_\Delta \frac{d^2\theta}{dt^2} \\ \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{qEl}{J_\Delta} \sin \theta &= 0 \end{aligned} \quad (S7.3)$$

### 11.4. Condition pour que la tige effectue des oscillations. Il faut que $\theta$ soit petit, de sorte que $\sin \theta \approx \theta$ et alors (S7.3) devient :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{qEl}{J_\Delta} \theta = 0 \quad (S7.4)$$

C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique.

Pulsation propre des oscillations ( $\omega_0$ ).

L'équation (S7.4) est de la forme

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0$$

$$\text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{qEl}{J_\Delta}}.$$

## Solution 12. (p. 141)

### 12.1. Longueur $l$ du pendule simple synchrone du pendule (P).

Soient  $T$  la période du pendule pesant (P) et  $T'$  la période du pendule simple (P').

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_\Delta}{mga}} \quad T' = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

(P') est synchrone à (P) si

$$\begin{aligned} T &= T' \\ \Rightarrow T &= 2\pi \sqrt{\frac{J_\Delta}{mga}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \\ \Rightarrow l &= \frac{J_\Delta}{ma} \end{aligned}$$

Où

$$J_\Delta = J_G + mOG^2 = \frac{2}{5}mr^2 + ma \Rightarrow l = \frac{2r^2 + 5a^2}{5a}$$

### 12.2. Erreur relative si on assimile le pendule (P) à un pendule simple de longueur $a$ .

Expressions des périodes  $T$  et  $T'$  des pendules pesant et simple :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_\Delta}{mga}} \quad T' = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

L'incertitude absolue est :

$$\Delta T = T - T' = 2\pi \left( \sqrt{\frac{J_\Delta}{mga}} - \sqrt{\frac{l}{g}} \right)$$



## 7.8. Solutions des exercices et problèmes

L'incertitude relative est :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta T}{T} &= \frac{2\pi \left( \sqrt{\frac{J_{\Delta}}{mga}} - \sqrt{\frac{l}{g}} \right)}{2\pi \sqrt{\frac{J_{\Delta}}{mga}}} \\ &= 1 - \frac{\sqrt{\frac{a}{g}}}{\sqrt{\frac{J_{\Delta}}{mga}}} \\ &= 1 - \sqrt{\frac{amga}{gJ_{\Delta}}}\end{aligned}$$

Simplifions en remarquant que :

$$\begin{aligned}J_{\Delta} &= \frac{2}{5}mr^2 + ma^2 \\ \frac{\Delta T}{T} &= 1 - \sqrt{\frac{5a^2}{2r^2 + 5a^2}}\end{aligned}$$

Relation entre  $r$  et  $a$  pour que  $\frac{\Delta T}{T}$  soit inférieure à  $4 \times 10^{-5}$ .

$$\begin{aligned}\frac{\Delta T}{T} &< 4 \times 10^{-5} \\ \Rightarrow 1 - \sqrt{\frac{5a^2}{2r^2 + 5a^2}} &< 4 \times 10^{-5} \\ \Rightarrow (1 - 4 \times 10^{-5})^2 &< \frac{5a^2}{2r^2 + 5a^2} \\ (1 - 4 \times 10^{-5})^2 (2r^2 + 5a^2)^2 &< 5a^2 \\ \Leftrightarrow 2r^2 (1 - 4 \times 10^{-5})^2 &< 5a^2 [1 - (1 - 4 \times 10^{-5})^2]\end{aligned}$$

Pour

$$\begin{aligned}2(1 - 4 \times 10^{-5})^2 &= 1,9998 \approx 2 \\ 5[1 - (1 - 4 \times 10^{-5})^2] &= 3,9999 \times 10^{-4} \approx 4 \times 10^{-4}\end{aligned}$$

nous avons :

$$\begin{aligned}2r^2 &< 4 \times 10^{-4} a^2 \\ \Rightarrow a^2 &> 5000r^2 \\ \Rightarrow a &> 70,7r\end{aligned}$$

### Solution 13. (p. 142)

**13.1.** Établissons l'équation différentielle du mouvement du centre de gravité du pendule ainsi constitué.

Déterminons d'abord la position du centre de gravité  $G$  de ce pendule par rapport à  $A$ . La relation barycentrique s'écrit :

$$\vec{OG} = \frac{2m_1 \vec{OC} + m \vec{OB}}{2m_1 + m}$$

Projetons cette relation vectorielle sur  $xx'$  en prenant  $O$  confondu à  $A$ .

$$AG = \frac{2m_1 AC + m_1 AB}{3m_1} = \frac{2AC + AB}{3}$$

$$\text{avec } AB = l \text{ et } AC = \frac{AB}{2} = \frac{l}{2}.$$

$$AG = \frac{2 \cdot \frac{l}{2} + l}{3} = \frac{2}{3}l$$

Equation différentielle du mouvement.

■ Système étudié : la tige munie des masses  $m_1$  et  $m_2$ .

■ Bilan des forces agissant sur le système dans un référentiel terrestre supposé galiléen : le poids  $\vec{P} = (m_1 + m_2)\vec{g}$  appliqué en  $G$  et la réaction  $\vec{R}$  de l'axe, appliquée en  $C$ .

Appliquons la R.F.D. de rotation au système,

$$\begin{aligned}\sum M_{\Delta} &= J_{\Delta} \frac{d^2 \theta}{dt^2} \\ \Rightarrow M_{\Delta}(\vec{P}) + M_{\Delta}(\vec{R}) &= J_{\Delta} \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad (S7.1)\end{aligned}$$

$M_{\Delta}(\vec{R}) = 0$  car  $\vec{R}$  rencontre l'axe  $(\Delta)$ .  $M_{\Delta}(\vec{P}) = P \cdot AG \sin \theta$  car la distance entre  $G$  et l'axe  $(\Delta)$  est  $AG \sin \theta$ ,  $M_{\Delta}(\vec{P})$  est un moment de rappel puisqu'il tend toujours à ramener le pendule à sa position d'équilibre stable. L'équation (S7.1) devient :

$$\begin{aligned}-P \cdot AG \sin \theta &= J_{\Delta} \frac{d^2 \theta}{dt^2} \\ \Rightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{P \cdot AG \sin \theta}{J_{\Delta}} &= 0\end{aligned}$$

Pour de petites oscillations,  $\sin \theta \approx \theta$  en rad. Donc

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{P \cdot AG}{J_{\Delta}} \theta = 0$$

Avec

$$\begin{aligned}P &= 3m_1 g \\ J_{\Delta} &= 2m_1 \frac{l^2}{4} + m_1 l^2 \\ &= \frac{3}{2} m_1 l^2 \\ AG &= \frac{2}{3} l\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{3m_1 g 2l}{\frac{3}{2} m_1 l^2} \theta &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{4g}{3l} \theta &= 0 \quad (S7.2)\end{aligned}$$

C'est l'équation différentielle du mouvement de ce pendule.

Calcul de la période  $T_0$ .

L'équation (S7.2) est de la forme :

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0$$

avec

$$\begin{aligned}\omega_0^2 &= \frac{4g}{3l} \\ \Rightarrow \omega_0 &= \sqrt{\frac{4g}{3l}}\end{aligned}$$

La période  $T_0$  est donc :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{3l}{4g}}$$

$$= \pi \sqrt{\frac{3l}{g}} = 3,14 \sqrt{\frac{3 \cdot 0,55}{9,8}} = 1,29 \text{ s}$$

### 13.2. Nouvelle équation différentielle du mouvement pendulaire.

Le système étudié est le même. Au bilan des forces de la question 14.1. il faut ajouter, une force  $\vec{F}$  appliquée en B. Appliquons la R.F.D. de rotation au nouveau système.

$$\sum M_{\Delta} = J_{\Delta} \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\Rightarrow M_{\Delta}(\vec{P}) + M_{\Delta}(\vec{R}) + M_{\Delta}(\vec{F}) = J_{\Delta} \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (\text{S7.3})$$

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = F \cdot AB \sin \theta = F \cdot l \sin \theta$$

L'équation (S7.3) devient :

$$-P \cdot AG \sin \theta - F \cdot AB \sin \theta = J_{\Delta} \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{(P \cdot AG + F \cdot AB) \sin \theta}{J_{\Delta}} = 0$$

Pour de petites oscillations,  $\sin \theta \approx \theta$  en rad. Donc

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{P \cdot AG + F \cdot AB}{J_{\Delta}} \theta = 0$$

Avec  $P = 3m_1g$ ;  $J_{\Delta} = 2m_1 \frac{l^2}{4} + m_1 l^2 = \frac{3}{2} m_1 l^2$  et  $AG = \frac{2}{3} l$ .

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3m_1g \frac{2}{3} l + Fl}{\frac{3}{2} m_1 l^2} \theta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{6m_1g + 3F}{2m_1l} \theta = 0 \quad (\text{S7.4})$$

Calcul de la nouvelle période.

$$\omega_o'^2 = \frac{6m_1g + 3F}{2m_1l}$$

$$\Rightarrow \omega_o' = \sqrt{\frac{6m_1g + 3F}{2m_1l}}$$

$$T_o' = \frac{2\pi}{\omega_o'} = 2\pi \sqrt{\frac{2m_1l}{6m_1g + 3F}} = 0,91 \text{ s}$$

### Solution 14. (p. 142)

14.1. Expression de la période  $T_1$  quand le pendule oscille autour de  $(\Delta_1)$

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_1}{mg a_1}}$$

14.2. Montrons que  $a_1 a_2 = \frac{J_G}{m}$ .

Quand le même pendule oscille autour de  $(\Delta_2)$  on a :

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_2}{mg a_2}}$$

La période étant la même pour les axes  $(\Delta_1)$  et  $(\Delta_2)$ , on a :

$$T_1 = T_2$$

$$\Rightarrow 2\pi \sqrt{\frac{J_1}{mg a_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{J_2}{mg a_2}}$$

$$\Rightarrow \frac{J_1}{a_2} = \frac{J_2}{a_1}$$

$$\Rightarrow \frac{J_1}{J_2} = \frac{a_1}{a_2} \quad (\text{S7.1})$$

D'après le théorème de Huygens,

$$J_1 = J_G + m a_1^2$$

$$J_2 = J_G + m a_2^2$$

(S7.1) devient

$$\frac{J_G + m a_1^2}{J_G + m a_2^2} = \frac{a_1}{a_2}$$

$$\Rightarrow J_G a_2 + m a_1^2 a_2 = J_G a_1 + m a_2^2 a_1$$

$$\Rightarrow J_G (a_2 - a_1) = m a_1 a_2 (a_2 - a_1)$$

$$\Rightarrow \frac{J_G}{m} = a_1 a_2$$

14.3. Montrons que la longueur  $l$  du pendule simple synchrone est  $l = a_1 + a_2$ .

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{J_G + m a_1^2}{mg a_1}}$$

$$\Rightarrow l = \frac{J_G + m a_1^2}{m a_1}$$

$$J_G = m a_1 a_2$$

$$\Rightarrow l = \frac{m a_1 a_2 + m a_1^2}{m a_1} = a_1 + a_2$$

### Solution 15. (p. 142)

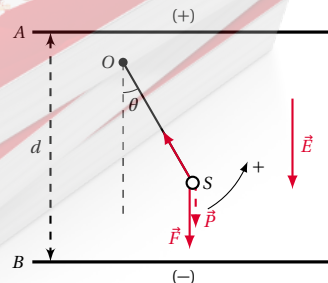
15.1. Calcul de la période de ce pendule simple.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2 \cdot 3,14 \sqrt{\frac{0,1}{10}} = 0,628 \text{ s}$$

15.2. Détermination de la nouvelle période.

■ Système étudié : la sphère  $S$  écarté d'un angle  $\theta$  par rapport à sa position d'équilibre.

■ Bilan des forces agissant sur le système dans un référentiel terrestre donc galiléen : le poids  $\vec{P}$  appliqué en  $S$ ; la force électrique  $\vec{F}$  appliquée en  $S$  ( $q$  étant chargé (+),  $\vec{F}$  et  $\vec{E}$  ont le même sens); la tension  $\vec{T}$  du fil.



## 7.8. Solutions des exercices et problèmes

Appliquons la R.F.D. de rotation au système.

$$\sum M_{\Delta} = J_{\Delta} \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$$\Rightarrow M_{\Delta}(\vec{P}) + M_{\Delta}(\vec{T}) + M_{\Delta}(\vec{F}) = J_{\Delta} \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad (S7.1)$$

$M_{\Delta}(\vec{T}) = 0$  car  $\vec{T}$  rencontre l'axe ( $\Delta$ ).

$$M_{\Delta}(\vec{P}) = Pl \sin \theta$$

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = Fl \sin \theta$$

En choisissant le sens trigonométrique comme le sens positif de rotation, (S7.1) devient :

$$-Pl \sin \theta - Fl \sin \theta + 0 = J_{\Delta} \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{(P+F)l}{J \sin} \theta = 0$$

Pour les petites oscillations  $\sin \theta \approx \theta$ ; par ailleurs  $J_{\Delta} = ml^2$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{(P+F)l}{ml^2} \theta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{(P+F)}{ml} \theta = 0$$

Nous obtenons ainsi l'équation différentielle du mouvement pendulaire. Elle est de la forme :

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \omega_O^2 \theta$$

avec

$$\omega_O^2 = \frac{P+F}{ml}$$

$$\Rightarrow \omega_O = \sqrt{\frac{P+F}{ml}}$$

$$T_O = \frac{2\pi}{\omega_O} = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{P+F}}$$

$$= 2 \cdot 3,14 \sqrt{\frac{2 \times 10^{-3} \cdot 10^{-1}}{2 \times 10^{-3} \cdot 10 + 2 \times 10^{-3}}} = 0,6 \text{ s}$$

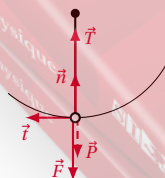
$$\text{A.N. } F = \frac{2 \times 10^{-7} \cdot 2000}{0,1} = 0,002 \text{ N}; P = 0,02 \text{ N};$$

$$ml = 2 \times 10^{-4}.$$

### 15.3. Tension du fil au passage à la verticale.

■ Système étudié : la sphère S.

■ Bilan des forces agissant sur le système dans un référentiel terrestre donc galiléen : le poids  $\vec{P}$  appliqué en S; la force électrique  $\vec{F}$  appliquée en S et la tension  $\vec{T}$  du fil.



D'après la R.F.D. de translation.

$$\vec{T} + \vec{P} + \vec{F} = m\vec{a} \quad (S7.2)$$

$\vec{a}$  est l'accélération centripète du mouvement circulaire

de rayon  $l$  et a pour expression  $a = \frac{V^2}{l}$  où  $V$  est la vitesse de la sphère au passage à la verticale.

Calculons  $V$ . Appliquons le théorème de l'énergie cinétique au système entre l'instant de départ et le passage par la verticale,

$$\frac{1}{2} m V^2 - 0 = (mg + F)l$$

$$\Rightarrow V^2 = \frac{2l}{m} (mg + F) = 2,2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$$

$$\Rightarrow v = 1,48 \text{ m s}^{-1}$$

Projetons (S7.2) dans la base de Frenet ( $\vec{t}, \vec{n}$ ). Suivant  $\vec{n}$  :

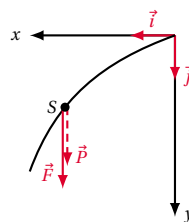
$$T - F - P = ma_t = \frac{mV^2}{l}$$

$$\Rightarrow T = \frac{mV^2}{l} + F + P = 0,066 \text{ N}$$

### 15.4. Trajectoire du mouvement de S après la rupture.

■ Système étudié : la sphère S.

■ Bilan des forces agissant sur la sphère S après la rupture dans le référentiel terrestre donc galiléen : le poids  $\vec{P}$  et la force électrique  $\vec{F}$



D'après la R.F.D. de translation.

$$\vec{P} + \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{P} + \vec{F}}{m} \quad (S7.3)$$

Les coordonnées de  $\vec{a}$  à chaque instant dans le repère ( $O, \vec{i}, \vec{j}$ ) sont :

$$\vec{a} = \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = \frac{p+F}{m} \end{cases}$$

En intégrant successivement  $\vec{a}$ , en tenant compte de ce que à  $t=0$ ,  $x_0=0$ ,  $y_0=0$  et  $V_{0x}=V=1,48 \text{ m s}^{-1}$ ,  $V_{0y}=0$ .

$$\vec{V} = \begin{cases} V_x = V \\ V_y = \frac{p+F}{m} t \end{cases}$$

et

$$\vec{OG} = \begin{cases} x = Vt \\ y = \frac{1}{2} \frac{p+F}{m} t^2 \end{cases}$$

L'équation de la trajectoire s'obtient en éliminant  $t$  entre les expressions  $x$  et  $y$ .

$$y = \frac{1}{2} \frac{p+F}{m} \frac{x^2}{V^2} = 2,5x^2$$

Nature de la trajectoire : elle est parabolique.

Durée du mouvement.

La sphère touche  $B$  quand  $y = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$  :

$$\frac{1}{2m}(P+F)t^2 = 0,05$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{0,05 \cdot 2m}{P+F}} = 0,095 \text{ s}$$

### Solution 16. (p. 142)

**16.1.** Moment d'inertie du système par rapport à  $(\Delta)$ .

$$J_{\Delta} = J_O (\text{disque}) + J_{\Delta} (\text{bille } B)$$

avec

$$J_O (\text{disque}) = \frac{1}{2} M' r^2 = \frac{1}{2} 2M \frac{l^2}{9}$$

et  $J_{\Delta} (\text{bille}) = M l^2$  d'où

$$J_{\Delta} = \frac{10}{9} M l^2 = 0,04 \text{ kg m}^2$$

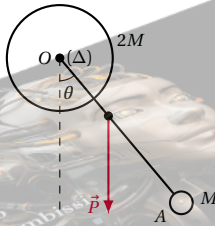
**16.2.** Montrons que le mouvement de petites oscillations de ce pendule est sinusoïdal.

Détermination du centre d'inertie  $G$  de ce pendule. La relation barycentrique s'écrit :

$$O\vec{G} = \frac{2M O' \vec{O} + M O' \vec{A}}{2M + M}$$

Projetons cette relation vectoriel sur  $xx'$  en prenant  $O$  confondu à  $A$ .

$$OG = \frac{2M \cdot OO + M \cdot OA}{3M} = \frac{M \cdot OA}{3M} = \frac{OA}{3} = \frac{l}{3}$$



Equation différentielle du mouvement.

- Système étudié : le pendule
- Bilan des forces agissant sur le système dans un référentiel terrestre supposé galiléen : le poids  $\vec{P} = (m_1 + m_2)\vec{g}$  appliqué en  $G$  et la réaction  $\vec{R}$  de l'axe, appliquée en  $O$ .

Appliquons au mouvement de ce système, la R.F.D. de rotation.

$$\sum M_{\Delta} = J_{\Delta} \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$$\Rightarrow M_{\Delta}(\vec{P}) + M_{\Delta}(\vec{R}) = J_{\Delta} \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad (\text{S7.1})$$

$M_{\Delta}(\vec{R}) = 0$  car  $\vec{R}$  rencontre l'axe  $(\Delta)$ .

$M_{\Delta}(\vec{P}) = -P \cdot OG \sin \theta$  car la distance entre  $G$  et l'axe  $(\Delta)$  est  $OG \sin \theta$ .  $M_{\Delta}(\vec{P})$  est un moment de rappel puisqu'il tend toujours à ramener le pendule à sa position d'équilibre stable.

L'équation (S7.1) devient :

$$-P \cdot OG \sin \theta = J_{\Delta} \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{P \cdot OG \sin \theta}{J_{\Delta}} = 0$$

Pour de petites oscillations,  $\sin \theta \approx \theta$  en rad. Donc

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{P \cdot OG}{J_{\Delta}} \theta = 0$$

$$\text{Avec } P = 3Mg ; J_{\Delta} = \frac{10Ml^2}{9} \text{ et } OG = \frac{l}{3}$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{\frac{3Mgl}{3}}{\frac{10Ml^2}{9}} \theta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{9g}{10l} \theta = 0 \quad (\text{S7.2})$$

C'est l'équation différentielle du mouvement de ce pendule. Elle admet une solution  $\theta(t)$  de la forme :

$$\theta = \theta_m \sin(\omega_0 t + \phi)$$

qui est l'équation d'un mouvement sinusoïdal de rotation de pulsation propre :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{P \cdot OG}{J_{\Delta}}} = 3,87 \text{ rad s}^{-1}$$

Valeur de la vitesse angulaire du système au passage à la position d'équilibre.

$$\theta = \theta_m \sin(\omega_0 t + \phi)$$

avec  $\theta_m = \theta_0$ . La vitesse angulaire de ce pendule est donc :

$$\frac{d\theta}{dt} = \theta_m \omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$$

avec  $\theta_m = \theta_0$ . Au passage à la position d'équilibre,

$$\theta = 0$$

$$\Rightarrow \theta_0 \sin(\omega_0 t + \phi) = 0$$

$$\Rightarrow (\omega_0 t + \phi) = 0$$

d'où :

$$\theta_0 \omega_0 \cos 0 = \omega_0 \theta_0 = 0,1 \cdot 3,87 = 0,387 \text{ rad s}^{-1}$$

Vitesse angulaire du système au passage à la position d'équilibre pour un angle de  $\frac{\pi}{2}$ .

D'après le théorème de l'énergie cinétique,

$$\frac{1}{2} J_{\Delta} \theta'^2 - 0 = 3Mg OG \left(1 - \cos \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \theta' = \sqrt{\frac{6M \cdot OG}{J_{\Delta}}} = \sqrt{\frac{9g}{5l}}$$

$$\theta' = 5,47 \text{ rad s}^{-1}$$

Déduction de la vitesse linéaire de la bille  $A$ .

$$V_A = l \theta' = 5,47 \cdot 0,6 = 3,30 \text{ m s}^{-1}$$

## Les oscillateurs électriques

8.1	<b>Introduction</b>	158
8.1.1	Les oscillations électriques libres dans le circuit $LC$	158
8.1.2	Equation différentielle régissant les oscillations électriques non amorties	158
8.1.3	Lois horaires et diagrammes	160
8.2	<b>Energie électromagnétique d'un circuit</b>	160
8.2.1	Energie magnétique d'une bobine	160
8.2.2	Energie électrique d'un condensateur	160
8.2.3	Conservation de l'énergie électromagnétique	161
8.3	<b>Entretien des oscillations électriques</b>	161
8.3.1	Amortissement des oscillations	161
8.3.2	Equation différentielle pour un oscillateur électrique amorti	161
8.3.3	Tensions aux bornes d'un dipôle $RLC$	162
8.3.4	Caractéristiques du dipôle $RLC$	162
8.3.5	Etude de la résonance d'intensité	164
8.3.6	Puissance électrique en régime sinusoïdal	165
8.4	<b>Analogie mécano – électrique</b>	167
8.5	<b>Enoncés des exercices et problèmes</b>	168
8.6	<b>Solutions des exercices et problèmes</b>	172





## 8.1 Introduction

Un oscillateur électrique est un circuit dans lequel les électrons se déplacent en repassant périodiquement par une position moyenne d'équilibre. En générale, un oscillateur électrique est constitué par un dipôle comprenant :

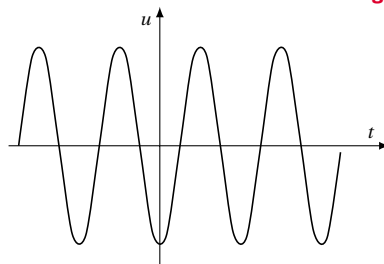
- un conducteur ohmique de résistance  $R$
- une bobine d'inductance  $L$
- un condensateur de capacité  $C$ .

appelé dipôle  $RLC$ .

On peut alors réaliser des oscillations libres ou des oscillations forcées.

**Conclusion:** La décharge d'un condensateur dans une inductance pure produit des oscillations sinusoïdales non amorties.

Figure 8.2



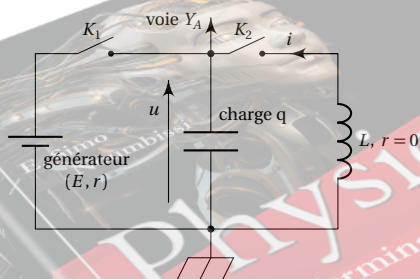
Oscillations sinusoïdales non amorties aux bornes du condensateur

### 8.1.1 Les oscillations électriques libres dans le circuit $LC$

#### Expérience

Réalisons le montage de la figure ci-dessous en supposant que la bobine est dépourvue de résistance; ce cas ne peut être que théorique puisqu'une bobine, enroulement de fil, possède nécessairement une résistance non nulle.

Figure 8.1



On charge le condensateur en fermant  $K_1$  puis on ouvre  $K_1$  et on ferme  $K_2$  pour décharger le condensateur dans l'inductance. L'oscilloscope montre que la tension  $u$  aux bornes du condensateur varie comme une **fonction sinusoïdale** du temps (voir figure ci-dessous); on observe maintenant des oscillations non amorties, appelées aussi oscillations libres. Cela justifie le nom de circuit oscillant donné au dipôle  $L, C$ .

### 8.1.2 Equation différentielle régissant les oscillations électriques non amorties

#### Conventions

Le sens de la flèche associée aux tensions est lié à l'orientation du dipôle comme l'indique la figure ci-dessous :

Figure 8.3

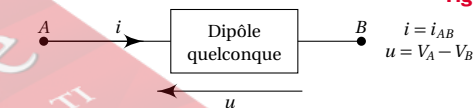
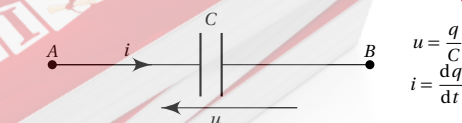


Figure 8.4



Figure 8.5

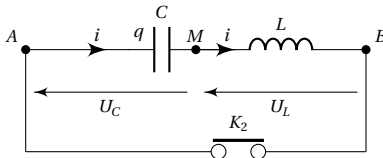


#### Mise en équation

Le condensateur est initialement chargé. Lorsqu'on appuie sur l'interrupteur  $K_2$ , le condensateur se décharge de façon oscillante dans la bobine.

## 8.1. Introduction

Figure 8.6



Au cours de cette décharge, la tension :

$$U_{AB} = U_L + U_C = 0 \quad (8.1)$$

En effet, l'interrupteur court-circuite les bornes A et B.

Sachant que :

$$UC = \frac{q}{C} \quad \text{et} \quad UL = L \frac{di}{dt}$$

l'expression (8.1) devient :

$$L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad (8.2)$$

or

$$i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dq}{dt} \right) = \frac{d^2 q}{dt^2};$$

en remplaçant dans l'expression (8.2), on obtient :

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0 \quad (8.3)$$

(8.3) est l'équation différentielle régissant les oscillations électriques dans le circuit.

## Résolution de l'équation

### Recherche de la solution

L'équation précédente est formellement équivalente à celle qui a été obtenue pour un oscillateur harmonique non amorti :

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + k \cdot x = 0$$

et qui admet pour solution :

$$x(t) = X_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi)$$

Par analogie, cela suggère d'essayer pour la variable  $q$ , une solution sinusoïdale du type :

$$q(t) = Q_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi)$$

Si cette solution convient :

$$\frac{dq}{dt} = -\omega_0 \cdot Q_m \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi)$$

et

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = -\omega_0^2 \cdot Q_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi)$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = -\omega_0^2 \cdot q$$

En remplaçant dans l'équation différentielle :

$$L \cdot \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{C} \cdot q = 0$$

il vient :

$$L \cdot \omega_0^2 \cdot q(t) + \frac{1}{C} \cdot q = 0$$

Cette équation est satisfaite à tout instant lorsque :

$$L \cdot \omega_0^2 = \frac{1}{C}$$

La solution sinusoïdale envisagée convient donc, à condition que la constante  $\omega_0$ , soit liée aux caractéristiques des dipôles par la relation :

$$L \cdot C \cdot \omega_0^2 = 1$$

### Oscillations harmoniques

La constante  $\omega_0$ , est appelée **pulsation propre** (ou naturelle) du circuit oscillant. Elle s'exprime en radian par seconde ( $\text{rad s}^{-1}$ ).

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

- $\omega_0$  en radian par seconde ( $\text{rad s}^{-1}$ );
- $L$  en henry (H);
- $C$  en farad (F).

Dans l'expression :

$$q(t) = Q_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi),$$

les constantes  $Q_m$  et  $\varphi$  dépendent des conditions initiales choisies par l'expérimentateur (charge initiale du condensateur et date d'origine).  $Q_m$  est la **charge maximale** du condensateur et  $\varphi$  la phase à la date  $t = 0$ .

### Période et fréquences propres

La période propre des oscillations est égale à la période de la fonction sinusoïdale précédente, soit,

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{L \cdot C}$$

La période s'exprime en seconde (s). L'inverse de la période propre est la fréquence propre :

$$N_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi \sqrt{L \cdot C}}$$

### 8.1.3 Lois horaires et diagrammes

En électricité, la variable utilisée est souvent  $i(t)$ . L'intensité s'obtient par dérivation de l'expression :

$$q(t) = Q_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

soit :

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -\omega_0 \cdot Q_m \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi)$$

Pour éviter le signe (-),  $i(t)$  s'écrit :

$$i(t) = \omega_0 \cdot Q_m \cdot \cos\left(\omega_0 \cdot t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$i(t) = I_m \cdot \cos\left(\omega_0 \cdot t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

avec  $I_m = \omega_0 \cdot Q_m$ , l'intensité maximale du courant.

L'intensité du courant est en quadrature **avance** sur la charge du condensateur.

Ceci peut être représenté par des diagrammes  $q(t)$  et  $i(t)$  (figure ci-dessous).

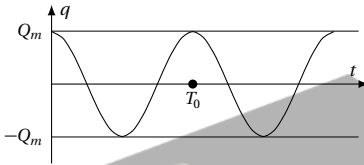


Figure 8.7

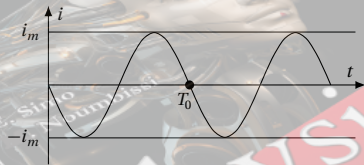


Figure 8.8

L'intensité est nulle lorsque la charge est extrémale, elle est extrémale quand la charge est nulle.

## 8.2 Energie électromagnétique d'un circuit

### 8.2.1 Energie magnétique d'une bobine

L'expression de l'énergie magnétique emmagasinée dans une bobine d'auto-inductance  $L$ , parcourue par un courant d'intensité  $i$  est donnée par :

$$E_{\text{mgn}} = \frac{1}{2} L \cdot i^2$$

Selon le paragraphe précédent, l'intensité  $i$  est telle que :

$$i = -\omega_0 \cdot Q_m \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi)$$

En remplaçant dans l'expression de l'énergie magnétique, il vient :

$$E_{\text{mgn}} = \frac{1}{2} L \cdot \omega_0^2 \cdot Q_m^2 \cdot \sin^2(\omega_0 \cdot t + \varphi)$$

D'après la relation :

$$L \cdot \omega_0^2 \cdot C = 1,$$

soit

$$L \cdot \omega_0^2 = \frac{1}{C}$$

on en déduit :

$$E_{\text{mgn}} = \frac{1}{2} \frac{Q_m^2}{C} \cdot \sin^2(\omega_0 \cdot t + \varphi)$$

En tenant compte de la relation :

$$2\sin^2\alpha = (1 - \cos 2\alpha)$$

Cette expression devient :

$$E_{\text{mgn}} = \frac{1}{4} \frac{Q_m^2}{C} \cdot (1 - \cos(2\omega_0 \cdot t + 2\varphi))$$

L'énergie magnétique se présente comme une fonction sinusoïdale du temps, de pulsation  $2\omega_0^2$ , de fréquence  $2N_0$  et de période  $\frac{T_0}{2}$ .

### 8.2.2 Energie électrique d'un condensateur

Les condensateurs ont été étudiés en classe de première. L'énergie électrique emmagasinée dans un condensateur de capacité  $C$ , lorsque sa charge est  $q$ , est donnée par :

$$E_{\text{élec}} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}.$$

En tenant compte de l'expression de la charge  $q(t) = C \cdot u(t)$ , l'énergie du condensateur s'exprime aussi par les relations suivantes :

$$E_{\text{élec}} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} C \cdot u^2 = \frac{1}{2} q \cdot u$$

Or, selon nos conventions, la charge  $q$  s'écrit :

$$q = Q_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi)$$

En remplaçant dans l'expression de l'énergie électrique, il vient :

$$E_{\text{élec}} = \frac{1}{2} \frac{Q_m^2}{C} \cdot \cos^2(\omega_0 \cdot t + \varphi)$$

### 8.3. Entretien des oscillations électriques

En tenant compte de la relation :

$$2\cos^2\alpha = (1 + \cos 2\alpha)$$

Cette expression s'écrit :

$$E_{\text{élec}} = \frac{1}{4} \frac{Q_m^2}{C} \cdot (1 + \cos(2\omega_0 \cdot t + 2\varphi))$$

L'énergie électrique se présente comme une fonction sinusoïdale du temps, de pulsation  $2\omega_0$ , de fréquence  $2N_0$  et de période  $\frac{T_0}{2}$ .

### 8.2.3 Conservation de l'énergie électromagnétique

L'énergie électromagnétique d'un circuit oscillant est la somme de l'énergie magnétique de la bobine et de l'énergie électrique du condensateur :

$$E = \frac{1}{2} L \cdot i^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

Soit :

$$E_{\text{élec}} = \frac{1}{2} \frac{Q_m^2}{C} \cdot [\sin^2(\omega_0 \cdot t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 \cdot t + \varphi)]$$

Les termes entre crochets sont indépendants du temps, car :

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Par suite :

$$E = \frac{1}{2} \frac{Q_m^2}{C}$$

L'énergie électromagnétique du circuit oscillant reste donc constante. En d'autres termes, **elle se conserve**.

Cette énergie constante  $E$ , est égale à l'énergie électrique maximale emmagasinée dans le condensateur,  $\frac{1}{2} \frac{Q_m^2}{C}$ , quand l'énergie magnétique est nulle. C'est aussi l'énergie magnétique maximale emmagasinée par la bobine, quand l'énergie électrique est nulle, car :

$$I_m = \omega_0 \cdot Q_m \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{L \cdot C}$$

d'où :

$$E_{\text{élec}} = \frac{1}{2} \frac{Q_m^2}{C} = \frac{1}{2C} \cdot \left( \frac{I_m}{\omega_0} \right)^2 = \frac{1}{2} L \cdot I_m^2$$

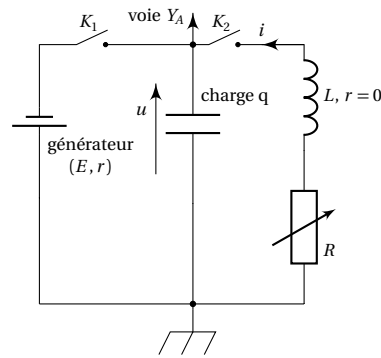
Lors des oscillations, il y a transformation mutuelle des énergies électrique et magnétique.

## 8.3 Entretien des oscillations électriques

### 8.3.1 Amortissement des oscillations

Reprenons le montage du paragraphe 8.1.1 y insérant un dipôle ohmique de résistance réglable  $R$ . La courbe obtenue à l'oscilloscope montre que l'amplitude des oscillations électriques diminue au cours du temps. On dit que les oscillations électriques sont **amorties**.

Figure 8.9



On distingue deux cas :

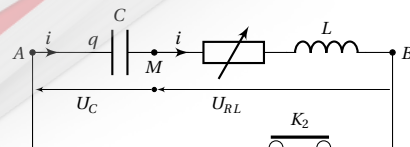
- **1er cas** :  $R$  est faible. La décharge du condensateur est oscillante, mais amortie. On dit qu'elle est **pseudo-périodique**. La pseudo-période  $T$  est supérieure à la période propre.
- **2ème cas** :  $R$  est élevée. Les oscillations disparaissent. On dit que la décharge est **apériodique**.

**Conclusion :** La résistance électrique du circuit est la cause de phénomènes dissipatifs qui font diminuer l'énergie électromagnétique du circuit. Cette perte d'énergie se traduit par l'apparition de la chaleur (effet joule) et un amortissement des oscillations.

### 8.3.2 Equation différentielle pour un oscillateur électrique amorti

Reprenons l'expérience du paragraphe 8.1.2 en y insérant un conducteur ohmique de résistance  $R$ .

Figure 8.10





Quand l'interrupteur  $K_2$  est fermé,

$$U_{AB} = U_C + U_{RL} = 0$$

avec  $U_C = \frac{q}{C}$ ,

$$U_{RL} = Ri + L \frac{di}{dt}$$

donc

$$\frac{q}{C} + Ri + L \frac{di}{dt} = 0$$

En choisissant comme variable  $q(t)$ , il vient, avec

$$i = \frac{dq}{dt} \text{ et } \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$$

$$\frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt} + L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} = 0$$

soit

$$L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} \cdot q = 0 \quad (8.4)$$

(8.4) est l'équation différentielle des oscillations électriques amorties.

### 8.3.3 Tensions aux bornes d'un dipôle RLC

Considérons un dipôle formé d'un conducteur ohmique de résistance  $r'$ , d'une bobine d'inductance  $L$  et de résistance  $r$  et d'un condensateur de capacité  $C$ , monté en série.

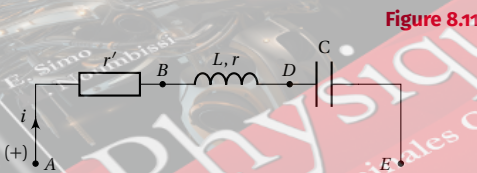


Figure 8.11

Déterminons la tension aux bornes de ce dipôle. D'après la loi d'additivité des tensions,

$$U_{AE} = U_{AB} + U_{BD} + U_{DE}$$

avec :

$$U_{AB} = r' \cdot i \quad (\text{aux bornes du conducteur})$$

$$U_{BD} = r \cdot i + L \frac{di}{dt} \quad (\text{aux bornes de la bobine})$$

$$U_{DE} = \frac{q}{C} \quad (\text{aux bornes du condensateur})$$

Donc :

$$U_{AE} = (r' + r)i + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \text{ avec } i = \frac{dq}{dt} \quad (8.5)$$

Choisissons l'origine des dates de sorte que  $i = I_m \cos \omega t$ .

Dans ces conditions,  $\frac{di}{dt} = -I_m \omega \sin \omega t$  ;

sachant que  $-\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{di}{dt} = -I_m \omega \sin \omega t = I_m \omega \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Quelle est la fonction  $q(t)$  dont la dérivée par rapport au temps est  $I_m \cos \omega t$  ?

$$q(t) = \frac{I_m}{\omega} \sin \omega t$$

sachant que

$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$q(t) = \frac{I_m}{\omega} \sin \omega t = \frac{I_m}{\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

En posant  $R = r' + r$  (résistance totale du circuit), (8.5) s'écrit alors :

$$U_{AE} = RI_m \cos \omega t + L \omega I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{I_m}{C \omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (8.6)$$

(8.6) est l'expression de la tension aux bornes du dipôle RLC en série.

### 8.3.4 Caractéristiques du dipôle RLC

Considérons un dipôle RLC montés en série. Ce dipôle est alimenté par une tension sinusoïdale :

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (8.7)$$

où  $\varphi$  désigne l'avance ou le retard de phase de  $u$  par rapport à  $i$ .

D'après le paragraphe ci-dessus, on rapproche les expressions (8.6) et (8.7). Ainsi,

$$U_m \cos(\omega t + \varphi) = RI_m \cos \omega t + L \omega I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{I_m}{C \omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Nous devons déterminer une relation entre  $U$  et  $I$  et la valeur de  $\varphi$  grâce à cette équation. Pour cela, nous devons faire la somme de trois fonctions sinusoïdales de même pulsation (deuxième membre de l'équation ci-dessus).

Cette somme (non évidente par voie trigonométrique) est rendue facile par la méthode de Fresnel.

Ainsi,  $\vec{OM}$  représente

$$u_R = R \cdot I_m \cdot \cos(\omega t)$$

$\vec{MN}$  représente

$$u_L = L \cdot \omega \cdot I_m \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$



### 8.3. Entretien des oscillations électriques

$\vec{N}P$  représente

$$u_C = \frac{I_m}{C \cdot \omega} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Nous pouvons alors faire la construction de Fresnel pour l'équation (8.2).

$$\vec{OP} = \vec{OM} + \vec{MN} + \vec{NP}$$

Donc le vecteur  $\vec{OP}$  représente la grandeur

$$U_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Ainsi que la somme des trois fonctions sinusoïdales.

$\vec{OP}$  a donc pour norme  $U_m$  et l'angle  $(\vec{OX}, \vec{OP}) = \varphi$ .

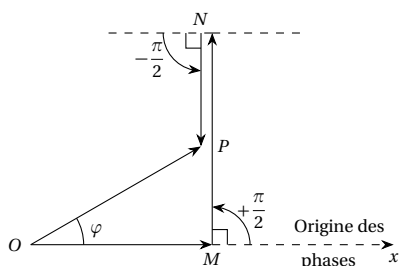


Figure 8.12

Il apparaît sur la figure 8.12 ci-dessus un triangle rectangle  $OMP$  d'hypoténuse  $OP = U_m$ , de cotés :

$$OM = R \cdot I_m$$

$$MP = (MN - NP) = L \cdot \omega \cdot I_m - \frac{I_m}{C \cdot \omega}$$

Le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$U_m^2 = (R \cdot I_m)^2 + \left[ \left( L \cdot \omega - \frac{1}{C \cdot \omega} \right) I_m \right]^2$$

Sachant que :  $U_m = U\sqrt{2}$  et  $I_m = I\sqrt{2}$ , on a :

$$U^2 = I^2 \left[ R^2 + \left( L \cdot \omega - \frac{1}{C \cdot \omega} \right)^2 \right]$$

d'où l'impédance  $Z$  et la phase  $\varphi$ .

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + \left( L \cdot \omega - \frac{1}{C \cdot \omega} \right)^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{L \cdot \omega - \frac{1}{C \cdot \omega}}{R} \quad \text{et} \quad \cos \varphi = \frac{R}{Z}$$

$R$  en ohms ( $\Omega$ );  $L$  en henry (H);  $\omega$  en  $\text{rads}^{-1}$ ;  $C$  en farads (farad);  $Z$  en ohms ( $\Omega$ ).

#### Remarque.

1. L'inverse  $y = \frac{1}{Z}$  est appelé **admittance** du di-

pôle. L'admittance s'exprime en siemens (S).

2. La différence  $\left( L \cdot \omega - \frac{1}{C \cdot \omega} \right)$  est appelée **réactance du circuit**.

$(L \cdot \omega)$  étant la réactance de l'induction,  $\left( \frac{1}{C \cdot \omega} \right)$  étant la réactance de capacité. Une réactance se mesure en **ohms**.

3. Lorsque  $L \cdot \omega > \frac{1}{C \cdot \omega}$  (l'effet d'inductance l'emporte sur l'effet de capacité),  $\tan \varphi > 0 \Rightarrow \varphi > 0$ ,  $u$  est en avance sur  $i$ . Le diagramme de Fresnel est celui de la figure 8.13

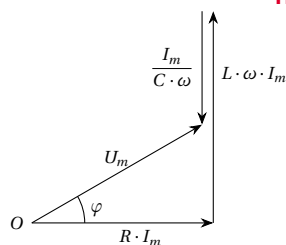


Figure 8.13

4. Lorsque  $L \cdot \omega < \frac{1}{C \cdot \omega}$  (l'effet de capacité l'emporte sur l'effet d'inductance),  $\tan \varphi < 0 \Rightarrow \varphi < 0$ ,  $u$  est en retard par rapport à  $i$ . Le diagramme de Fresnel est celui de la figure 8.14.

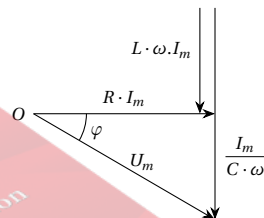


Figure 8.14

5. Si  $L \cdot \omega = \frac{1}{C \cdot \omega}$  (l'effet de capacité et l'effet d'inductance se compensent),  $\omega = 0$ .  $u$  et  $i$  sont en phase. C'est la résonance d'intensité, objet du paragraphe 8.3.3. Le diagramme de Fresnel est celui de la figure 8.15.

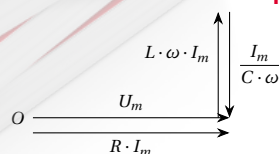


Figure 8.15

6. Dans le cas d'un dipôle constitué d'un condensa-

teur de capacité  $C$ ,  $Z = \frac{1}{C \cdot \omega}$ .

Si  $\omega \rightarrow 0$ ,  $Z \rightarrow \infty$  et  $I \rightarrow 0$ .

*Retenons : lorsqu'un circuit est alimenté par un générateur de tension continue, un courant ne peut s'établir dans une branche qui comporte un condensateur.*

7. Si  $i = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t)$  et  $u = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$  où  $\varphi$  désigne l'avance ou le retard (selon que  $\varphi$  est positif ou négatif) de phase de  $u$  par rapport à  $i$ . Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{di}{dt} &= I_m \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ &= I_m \cdot \omega \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^t i \, dt &= \frac{I_m}{\omega} \cdot \cos(\omega t) \\ &= \frac{I_m}{\omega} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\text{en effet } \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Rightarrow -\cos x = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left[-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]$$

L'équation différentielle peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned}U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi) &= R \cdot I_m \cdot \sin(\omega t) \\ &+ L \cdot \omega I_m \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\ &+ \frac{1}{C \cdot \omega} \cdot I_m \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (8.8)\end{aligned}$$

Notons que  $u = U_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$  et  $u = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$  sont deux expressions équivalentes qui correspondent seulement à des origines des temps ( $t = 0$ ) différentes (ces origines étant rarement précisées)

Pour  $U = \text{constante}$ ,  $I$  est maximale lorsque  $Z$  est minimale. Or

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L \cdot \omega - \frac{1}{C \cdot \omega}\right)^2}$$

$R$  étant constant,  $Z$  est minimale lorsque :

$$\begin{aligned}L \cdot \omega - \frac{1}{C \cdot \omega} &= 0 \Rightarrow L \cdot C \cdot \omega^2 = 1 \\ \Rightarrow \omega &= \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}\end{aligned}$$

or

$$\frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = \omega_0$$

C'est la pulsation propre du circuit.

Donc à la résonance, la pulsation  $\omega$  est égale à la pulsation propre  $\omega_0$  du circuit.

### Impédance du circuit à la résonance

A la résonance,  $L \cdot \omega - \frac{1}{C \cdot \omega} = 0$  donc  $Z = R$ .

A la résonance, l'impédance du circuit est minimal et égale à la résistance du circuit.

### Phase $\varphi$ à la résonance

$$\tan \varphi = \frac{L \cdot \omega - \frac{1}{C \cdot \omega}}{R}$$

or à la résonance,

$$L \cdot \omega - \frac{1}{C \cdot \omega} = 0 \Rightarrow \tan \varphi = 0 \text{ et } \varphi = 0$$

Donc à la résonance, l'intensité  $i$  est en phase avec la tension appliquée  $u$ .

### Courbe à la résonance

#### Dispositif expérimental

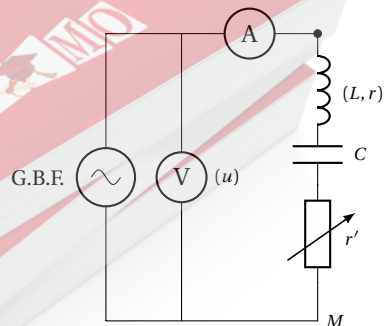


Figure 8.16

C'est celui de figure 8.16.  $r'$  est la résistance variable d'un conducteur ohmique. La résistance totale du cir-

## 8.3.5 Etude de la résonance d'intensité

### Définition.

Etant donné un circuit  $(R, L, C)$  série alimenté par une tension sinusoïdale, l'intensité du courant dans le circuit varie en fonction de la pulsation  $\omega$  de la tension. A la résonance d'intensité, l'intensité efficace du courant dans le circuit est maximale.

### Conséquences

#### Pulsation à la résonance

$$I = \frac{U}{Z}$$

### 8.3. Entretien des oscillations électriques

cuit est  $R = r + r'$ .

La courbe de résonance traduit les variations de l'intensité efficace  $I$  dans le circuit en fonction de la pulsation  $\omega$  lorsque la valeur efficace  $U$  de la tension d'alimentation reste constante. On obtient une courbe ayant l'allure de la figure 8.17.

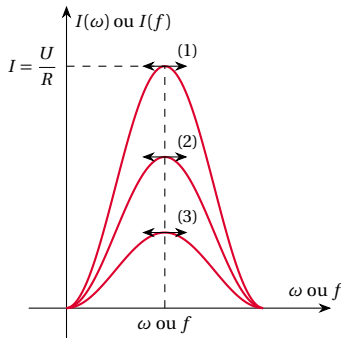


Figure 8.17

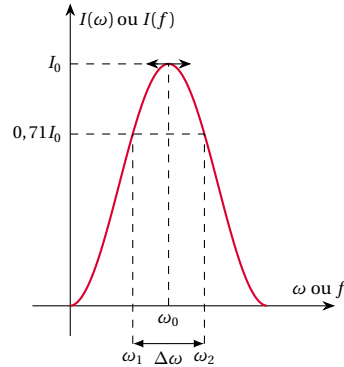


Figure 8.18

Ainsi, la bande passante d'un circuit  $(R, L, C)$  série est l'ensemble des pulsations pour les quelles

$$I(\omega) \geq \frac{I_0}{\sqrt{2}} = 0,71 \cdot I_0$$

Les pulsations limites  $\omega_1$  et  $\omega_2$  de cette bande sont telles que :

$$I(\omega_1) = I(\omega_2) = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = 0,71 \cdot I_0$$

La grandeur  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$  est la **largeur de la bande passante** du circuit  $(R, L, C)$  série.

$$\text{On montre que } \Delta\omega = \frac{R}{L}$$

#### Effet de $R$ sur la courbe de résonance

Traçons sur un même graphique, les courbes de résonance (à tension efficace appliquée  $U$  déterminée) pour trois valeurs de  $R$  :

- $R$  faible (quelques ohms) courbe (1);
- $R$  moyen (quelques dizaines de ohms) courbes (2);
- $R$  grand (une ou quelques centaines de ohms) courbe (3).

Nous constatons que :

- quelle que soit la valeur de  $R$ , la pulsation de résonance est égale à la pulsation propre du circuit.
- Pour une faible valeur de  $R$ , la courbe de résonance est "pointue". On dit que la résonance est aiguë (courbe 1).
- Pour les grandes valeurs de  $R$ , la courbe de résonance est floue (courbe 3).

#### Bande passante

On admet qu'un oscillateur a une bonne réponse si  $I \geq \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ ,  $I_0$  étant l'intensité efficace à la résonance.

#### Remarque.

- Lorsque la résistance  $R$  est petite, la résonance est aiguë; la largeur de la bande passante est petite. Un tel circuit est dit sélectif (car il ne "répond" qu'aux alentours de la pulsation de résonance  $\omega_0$ ).
- Pour une résistance  $R$  élevée, la résonance est floue; la largeur de la bande est grande. Un tel circuit est peu sélectif.

#### Facteur de qualité

Le facteur de qualité est défini par :

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{L \cdot \omega_0}{R}$$

Un circuit est d'autant plus sélectif que son facteur de qualité  $Q$  est plus grand.

#### Surtension à la résonance

Si la résistance du dipôle est faible, l'intensité efficace est élevée, notamment à la résonance où les tensions efficaces aux bornes du condensateur et de la bobine sont alors nettement supérieures à la tension appliquée aux bornes du dipôle : c'est la **surtension à la résonance** qui peut entraîner les électrocutions ou le claquage des condensateurs.

### 8.3.6 Puissance électrique en régime sinusoïdal

#### Puissance instantanée

$$p = u \cdot i$$

avec

$$i = I_m \cdot \cos(\omega t) = I \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega t)$$

et

$$u = U_m \cdot \cos(\omega t + \varphi) = U \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$\varphi$  étant la phase de  $u$  par rapport à  $i$ .

$$p = 2 \cdot U \cdot I \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

En utilisant la relation trigonométrique

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$p = U \cdot I \cdot \cos(2\omega \cdot t + \varphi) + U \cdot I \cdot \cos(\varphi)$$

$p$  est une fonction périodique de pulsation :

$$\omega' = 2 \cdot \omega$$

de période

$$T' = \frac{T}{2}$$

#### Puissance moyenne

Elle a pour expression :

$$P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi)$$

- Le facteur  $U \cdot I$  est la puissance apparente. Elle rappelle la puissance reçue par le dipôle en courant continu.
- Le terme  $\cos \varphi$  qui dépend du dipôle considéré par ses caractéristiques  $R, L, C$  est le facteur de Puissance du dipôle.

On mesure la puissance moyenne à l'aide d'un **wattmètre**.

#### Forme de l'énergie échangée dans un dipôle ( $R, L, C$ ) en régime sinusoïdal

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

$$\text{avec } U = Z \cdot I \text{ et } \cos \varphi = \frac{R}{Z}$$

$$\Rightarrow P = Z \cdot I \cdot I \cdot \frac{R}{Z} = R \cdot I^2$$

$$\Rightarrow P = R \cdot I^2$$

Donc la puissance moyenne reçue par un circuit ( $R, L, C$ ) apparaît sous forme thermique dans la résistance.

Les inductances pures ( $R = 0$ ) et les condensateurs ne consomment aucune énergie.

Pour ces deux éléments,

$$\varphi = +\frac{\pi}{2} \quad \varphi = -\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow U \cdot I \cdot \cos \varphi = 0$$

**Conclusion:** Comment résoudre un problème portant sur un circuit ( $R, L, C$ ) série.

1. Appliquer la relation  $U = Z \cdot I$  soit pour le circuit entier, soit pour un dipôle appartenant à ce circuit. Par exemple aux bornes du condensateur, la valeur efficace de la tension est  $U_C$  telle que :  $U_C = Z_C \cdot I$  où  $Z_C$  est l'impédance du condensateur.
2. Il faut bien retenir les formules :

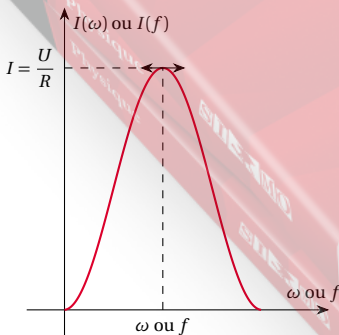
$$Z = \sqrt{R^2 + \left( L \cdot \omega - \frac{1}{C \cdot \omega} \right)^2}$$

et

$$\tan \varphi = \frac{L \cdot \omega - \frac{1}{C \cdot \omega}}{R}$$

- Si le dipôle considéré ne comporte pas de résistance, on fait disparaître le terme  $R (R = 0)$
- s'il est non inductif, on élimine le terme en  $L (L = 0)$
- s'il ne comporte pas de condensateur, on élimine le terme en  $C \left( \frac{1}{C \cdot \omega} = 0 \right)$ .

Figure 8.19



## 8.4. Analogie mécano – électrique

## Exemples.

- Circuit  $(R, L)$  :

$$Z = \sqrt{R^2 + L^2 \cdot \omega^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{L \cdot \omega}{R}$$

- Circuit  $(R, C)$  :

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2 \cdot \omega^2}}$$

$$\tan \varphi = \frac{1}{R \cdot C \cdot \omega}$$

- Inductance pure  $L$  :

$$Z = L \cdot \omega$$

$$\tan \varphi = +\infty$$

car  $R = 0$  et  $\varphi = +\frac{\pi}{2}$

- Capacité pure  $C$  :

$$Z = \frac{1}{C \cdot \omega}$$

$$\tan \varphi = \infty$$

car  $R = 0$  et  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

- Retenez que :

- les tensions efficaces ne s'additionnent pas ;
- les impédances en série ne s'additionnent pas.

- Dans les calculs, on sera assez souvent amené à utiliser les termes  $L \cdot \omega$  et  $\frac{1}{C \cdot \omega}$ , dans les expressions de  $Z$  et de  $\tan \varphi$ . Il convient donc de les calculer et de conserver leurs valeurs numériques (qui s'expriment en ohms).

- Cette énergie se conserve au cours du temps :

$$E = \frac{1}{2} k X_M^2 = E_0$$

$E_0$  est l'énergie fournie initialement par l'opérateur.

- Il y a échange d'énergie entre la forme potentielle et la forme cinétique, cet échange perpétuant les oscillations.

### Cas d'un oscillateur électrique non amorti (circuit $L, C$ )

- Il possède, à chaque instant, l'énergie

$$E = \frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

- Cette énergie se conserve au cours du temps (elle reste égale à l'énergie  $E_0$  fournie par l'opérateur).
- Il y a échange entre l'énergie emmagasinée dans la bobine et celle emmagasinée dans le condensateur, cet échange perpétuant les oscillations.

**Conclusion :** Au cours des oscillations (mécaniques ou électriques) libres non amorties, il y a un échange périodique entre formes d'énergie : quand l'une augmente, l'autre diminue, et inversement. Nous pouvons alors dresser un tableau des grandeurs mécaniques et électriques équivalentes :

Grandeurs mécaniques	Grandeurs électriques
Elongation ( $x$ ou $\theta$ )	Charge $q$
Vitesse : $v = \frac{dx}{dt}$	Intensité : $i = \frac{dq}{dt}$
Energie potentielle : $E_p = \frac{1}{2} k x^2$	Energie emmagasinée dans le condensateur : $W_C = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$
Energie cinétique : $E_C = \frac{1}{2} m v^2$	Energie emmagasinée dans la bobine : $W_L = \frac{1}{2} L i^2$
Inertie $m$ (ou $J_\Delta$ )	Auto-inductance $L$
Raideur $k$ (ou $C$ )	$\frac{1}{C}$ ( $C$ : capacité du condensateur)
Force $T$ (ou moment)	Tension électrique $u$
Coefficient de frottement	Résistance $R$

## 8.4 Analogie mécano – électrique

La similitude des diagrammes énergétiques des deux types d'oscillateurs permet de comprendre le phénomène d'oscillation libre.

### Cas d'oscillateur mécanique non-amortie

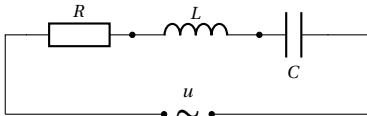
- Il possède, à chaque instant, une énergie
- $$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2.$$



## 8.5 Enoncés des exercices et problèmes

### Exercice 1.

Un circuit est constitué d'une résistance  $R = 200\ \Omega$ , d'une bobine inductive (inductance  $L = 0,1\ \text{H}$ ; résistance négligeable) et d'un condensateur de capacité  $C = 1\ \mu\text{F}$  placés en série. Il est alimenté par un générateur  $BF$  qui délivre à ses bornes une tension alternative sinusoïdale  $u$  de fréquence  $250\ \text{Hz}$  et de valeur efficace  $U = 5\ \text{V}$ .



**1.1.** Calculer l'intensité dans le circuit.

**1.2.** Si l'on se donne la tension instantanée  $u$  sous la forme :  $u = U_m \cos(\omega t)$ , quelle est la loi de variation de l'intensité instantanée  $i$  en fonction du temps :  $i(t)$ ?

**1.3.** Calculer les tensions  $U_R$  (aux bornes de la résistance);  $U_B$  (aux bornes de la bobine);  $U_C$  (aux bornes du condensateur). Comparer la somme  $U_R + U_B + U_C$  à la tension efficace appliquée  $U$  et conclure.

**1.4.** Quelles sont les valeurs des impédances :

- $Z$  du circuit ( $R, L, C$ ) série;
- $Z_R$  de la résistance;
- $Z_B$  de la bobine;
- $Z_C$  du condensateur.

Comparer la somme  $Z_R + Z_B + Z_C$  à  $Z$  et conclure.

### Exercice 2.

On établit une tension alternative  $u = 30\sqrt{2}\sin(2\pi f t)$ , de fréquence variable, entre les extrémités d'une portion de circuit comprenant : un conducteur ohmique de résistance  $R = 60\ \Omega$ ; une bobine d'inductance  $L = 0,1\ \text{H}$  et de résistance négligeable; un condensateur de capacité  $C = 0,25\ \mu\text{F}$ . L'intensité instantanée du courant qui circule dans cette portion de circuit est de la forme :

$$i = I\sqrt{2}\sin(2\pi f t + \phi)$$

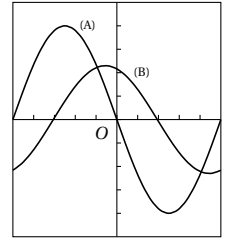
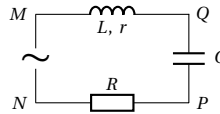
**2.1.** Donner en fonction de  $R, L, C, f$ , les expressions de l'impédance de la portion de circuit et du déphasage  $\phi$  du courant sur la tension. Déterminer la valeur  $f_0$  de la fréquence telle que l'intensité  $i$  soit en phase avec la tension  $u$ . Calculer pour cette valeur  $f_0$  l'intensité efficace  $I_0$  correspondante.

**2.2.** Montrer qu'il existe deux valeurs  $f_1$  et  $f_2$  de la fréquence pour lesquelles le déphasage  $\phi$  du courant sur la tension a la même valeur absolue. Etablir la relation  $f_1 f_2 = f_0^2$ ,  $f_0$  étant la valeur calculée dans la question précédente. Interpréter par la construction de Fresnel.

### Exercice 3.

Un circuit comprend en série : un conducteur ohmique de résistance  $R = 10\ \Omega$ , un condensateur de capacité  $C = 8\ \mu\text{F}$ , une bobine d'inductance  $L$  et de résistance  $r$  à déterminer (voir schéma). On maintient entre  $M$  et  $N$  une tension alternative sinusoïdale  $u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t)$ . On visualise sur un oscilloscope cathodique bicourbe les tensions  $u_{MN} = u(t)$  (entrée A) et  $u_{PN}$  (entrée B). On obtient sur l'écran les courbes de la figure ci-dessous avec :

- balayage  $0,5\ \text{ms}$  par division
- gain de l'entrée A  $2\ \text{V}$  par division
- gain de l'entrée B  $1\ \text{V}$  par division



**3.1.** Indiquer clairement sur le schéma les branchements à effectuer pour visualiser  $u_{MN}$  et  $u_{PN}$ .

**3.2.** Calculer la période et la fréquence du courant. Calculer la tension maximale  $u_{MN}(\text{max})$  et la tension efficace  $U$ . En déduire l'expression de  $u(t)$ .

**3.3.** Calculer la tension maximale  $U_{PN}(\text{max})$ . En déduire l'intensité maximale  $I_m$  et l'intensité efficace  $I$  du courant qui traverse le circuit. Calculer l'impédance du circuit.

**3.4.** L'intensité instantanée  $i(t)$  est-elle en avance ou en retard sur la tension  $u(t)$ ?

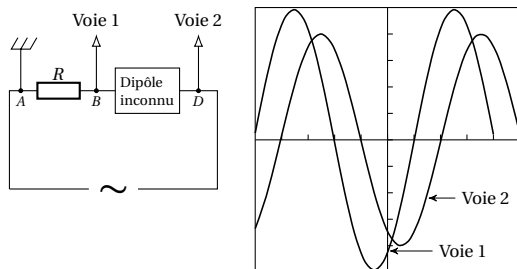
Calculer son déphasage et donner son expression en valeurs numériques.

**3.5.** Calculer la résistance et l'inductance de la bobine.

### Exercice 4.

Un conducteur ohmique de résistance  $R = 55\ \Omega$  et un dipôle inconnu (qui peut être une bobine pure d'inductance  $L$ , ou un condensateur de capacité  $C$ ) sont montés en séries entre A et D. Aux bornes de l'ensemble, on applique une différence de potentiel alternative sinusoïdale de valeur efficace  $U$ , de fréquence  $f$   $u_{DA} = U_m \cos(2\pi f t)$  On observe sur l'écran d'un oscilloscope bicourbe, les courbes représentant.  $u_{BA} = f(t)$  sur la voie 1;  $u_{DA} = g(t)$  sur la voie 2. La sensibilité est de :  $2\ \text{V cm}^{-1}$  sur la voie 1 et  $5\ \text{V cm}^{-1}$  sur la voie 2. L'échelle du temps est de  $0,2\ \text{ms cm}^{-1}$ .

## 8.5. Énoncés des exercices et problèmes



**4.1. 4.1.1.** Déterminer la fréquence du courant dans ce circuit.

**4.1.2.** Quelle est la tension efficace aux bornes du générateur?

**4.2. 4.2.1.** Quelle est la tension efficace aux bornes du résistor?

**4.2.2.** En déduire l'intensité efficace du courant dans le circuit. Donner l'expression de sa valeur instantanée  $i(t)$ .

**4.3.** En déduire la nature du dipôle inconnu et calculer son coefficient caractéristique.

(BAC D Côte-D'Ivoire Juin 1983)

Figure 1

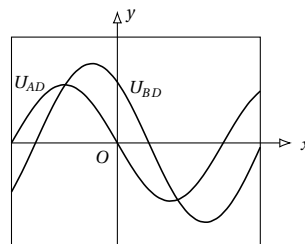
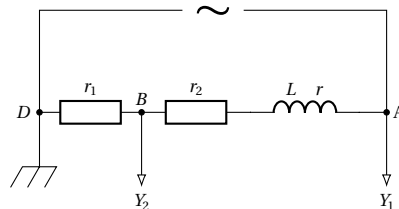
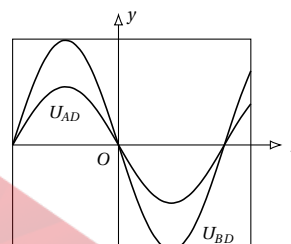
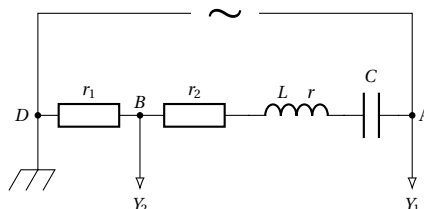


Figure 2



## Exercice 5.

On alimente successivement par une même tension alternative sinusoïdale  $u_{AD}$  les dipôles 1 et 2 représentés respectivement sur les figures 1 et 2. Le dipôle 1 comprend en série : deux résistances  $r_1 = 10\Omega$  et  $R_2 = 32\Omega$  et une bobine d'inductance  $L$  et de résistance  $r$ . Le dipôle 2 comprend en série : les deux résistances précédentes, la bobine précédente et un condensateur de capacité  $C$ . On suit sur le même oscilloscope bicourbe les variations des tensions  $u_{AD}$  (voie  $Y_1$ ) et  $u_{BD}$  (voie  $Y_2$ ) en fonction du temps. Les caractéristiques de l'oscilloscope sont les suivantes :

- $5 \times 10^{-3} \text{ s cm}^{-1}$  pour la base de temps qui commande le balayage horizontal  $Ox$  ;
- voie  $Y_1$  :  $10 \text{ V cm}^{-1}$  pour la déviation verticale  $Oy$  ;
- voie  $Y_2$  :  $1 \text{ V cm}^{-1}$  pour la déviation verticale  $Oy$ .

On observe successivement sur l'écran de l'oscilloscope les courbes représentées sur les figures 1 et 2.

**5.1.** Donner l'expression en fonction du temps de la tension  $u_{AD}$ , en précisant les valeurs numériques de la tension maximale  $U_m$  de la pulsation  $\omega$  et de la phase à l'origine  $\theta$  rapportée aux axes  $Ox$  et  $Oy$  des figures 1 et 2.

**5.2.** Étudier les déphasages entre l'intensité  $i_{AD}$  et la tension  $u_{AD}$  pour les dipôles 1 et 2. A quel cas particulier correspond le dipôle 2?

**5.3.** Déduire des résultats expérimentaux la résistance  $r$  de la bobine.

**5.4.** Calculer les valeurs numériques de  $L$ , inductance de la bobine et de  $C$ , capacité du condensateur.

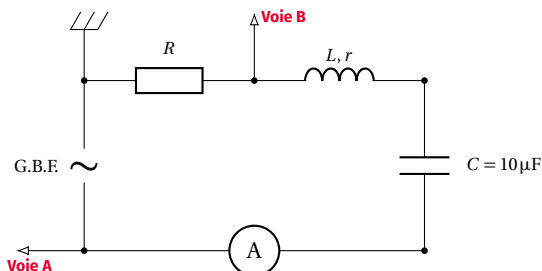
## Exercice 6.

On réalise le circuit ci-dessous : le générateur basse fréquence fournit une tension sinusoïdale. On fait varier la fréquence  $f$  du générateur  $BF$  et on relève l'intensité efficace du courant. On obtient les valeurs suivantes :

f (Hz)	100	120	140	160	180	200
I (mA)	11,5	19	24	28	30	28,5

f (Hz)	220	240	260	280	300	
I (mA)	25,5	22,5	20	18	1	



**6.1.** Tracer la courbe donnant  $I$  en fonction de  $f$ . Echelle : 1 cm pour 50 Hz et 1 cm pour 2 mA. Prendre pour origine des axes ordonnée 10 mA et en abscisse 0 Hz.

**6.2.** Déterminer graphiquement la fréquence  $f_0$  et l'intensité efficace  $I_0$  du courant correspondant à la résonance.

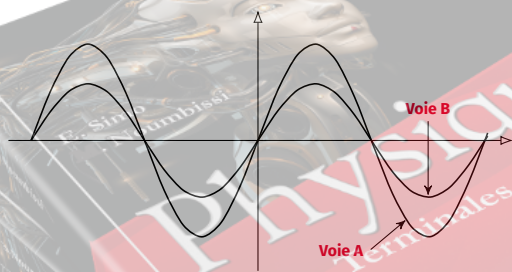
**6.3.** Calculer l'inductance de la bobine.

**6.4.** On relie un oscilloscope à deux voies au circuit et on règle la fréquence du générateur à la valeur  $f_0$  correspondant à la résonance. On observe les courbes suivantes sur l'écran :

**6.4.1.** A quelle durée correspond une division du balayé de l'oscilloscope ?

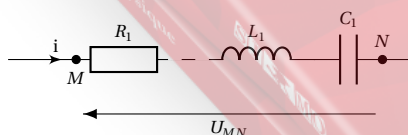
**6.4.2.** Sachant que pour les entrées A et B la sensibilité verticale est de 1 V par division, calculer  $R$ .

**6.4.3.** Donner la valeur de la résistance  $r$  de la bobine.



### Exercice 7.

Toute réponse sera exprimée sous forme littérale et numérique. On pourra prendre  $\pi^2 = 10$ .



**7.1.** On considère entre deux bornes  $M$  et  $N$  une portion de circuit  $R_1 L_1 C_1$ , où sont montés en série : une résistance pure  $R_1 = 300 \Omega$ , une inductance non ré-

sistive  $L_1 = 0,318 \text{ H}$  et un condensateur de capacité  $C_1 = 6,28 \mu\text{F}$ . On maintient entre  $M$  et  $N$  une différence de potentiel sinusoïdale de valeur efficace  $U = 220 \text{ V}$  et de fréquence 50 Hz.

**7.1.1.** Calculer la réactance  $X_1 = L_1 \omega - \frac{1}{C_1 \omega}$ , l'impédance  $Z_1$  et l'intensité efficace  $I$ , du courant traversant cette portion de circuit.

**7.1.2.** Construire le diagramme de Fresnel représentant les valeurs instantanées des tensions aux bornes de chaque appareil. En déduire le déphasage  $\phi_1$  existant entre l'intensité  $i_1$  et la tension  $u$  aux bornes du circuit. Lequel des 2 effets, inductif ou capacitif, est prépondérant ?

**7.2.** On remplace entre  $M$  et  $N$ , le circuit précédent par un circuit analogue  $R_2 L_2 C_2$  dans lequel  $R_2 = 50 \Omega$ ,  $L_2 = 0,314 \text{ H}$ ,  $C_2 = 63,7 \mu\text{F}$ . La différence de potentiel est inchangée.

**7.2.1.** Calculer la réactance  $X_2$  et l'impédance  $Z_2$  du circuit à 50 Hz.

**7.2.2.** Pour quelle valeur de la fréquence l'intensité efficace est-elle maximale ? Calculer alors l'intensité correspondante.

**7.2.3.** On appelle coefficient de surtension  $Q_2$  du circuit le rapport entre la tension efficace  $U_c$  aux bornes du condensateur et la tension efficace  $U$  à la résonance. Exprimer  $Q_2$  en fonction de  $R_2$ ,  $C_2$ ,  $\omega_o$  d'une part et en fonction de  $R_2$ ,  $L_2$  et  $\omega_o$  d'autre part,  $\omega_o$  désignant la pulsation à la résonance. Calculer  $Q_2$ .

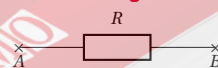
**7.3.** On associe maintenant en série les deux circuits précédents  $R_1 L_1 C_1$  et  $R_2 L_2 C_2$  entre  $M$  et  $N$ , dont la différence de potentiel est inchangée.

**7.3.1.** Montrer que ce circuit est équivalent à un circuit  $RLC$  dont on calculera les valeurs. En déduire les valeurs de la réactance, de l'impédance  $Z$  et de l'intensité efficace  $I$  à 50 Hz. Calculer le déphasage  $\phi$  existant entre l'intensité et la tension. Laquelle de ces grandeurs est en avance de phase sur l'autre ?

**7.3.2.** En faisant varier la fréquence, montrer que l'on peut trouver une autre fréquence  $f'$  pour laquelle le déphasage  $\phi$  aura la même valeur absolue. Montrer que  $f f' = f_o^2$ ,  $f_o$  étant la fréquence de résonance  $f = 50 \text{ Hz}$ . Calculer  $f'$ .

### Exercice 8.

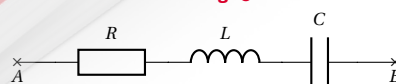
Montage 1



Montage 2



Montage 3



A l'aide d'une résistance  $R$ , d'une bobine de résistance

## 8.5. Énoncés des exercices et problèmes

négligeable, d'inductance  $L$  et d'un condensateur de capacité  $C$ , on peut réaliser l'un des montages suivants.

- On établit une d.d.p. continue entre  $A$  et  $B$ ; on observe alors le passage d'un courant permanent.
- On établit entre  $A$  et  $B$  une d.d.p. sinusoïdale :  $u = 14,14 \sin(100\pi t)$  ( $u$  en volt).

On observe les résultats suivants : intensité efficace du courant 2 A; puissance moyenne consommée : 12 W.

**8.1.** Quel est, parmi les trois montages proposés, celui qui a été réalisé? On justifiera la réponse.

**8.2.** Calculer les caractéristiques des appareils constituant ce montage.

**8.3.** Donner l'expression de l'intensité instantanée du courant alternatif.

On donne :  $\frac{1}{\pi} = 0,318$ ;  $\cos(0,3\pi) = 0,6$ .

## Exercice 9.

Entre deux points  $A$  et  $B$ , on établit une tension sinusoïdale  $u = U_m \sin(\omega t)$  de fréquence 50 Hz.

**9.1.** Un appareil purement thermique, de résistance  $R = 100 \Omega$ , branché entre  $A$  et  $B$  est traversé par un courant d'intensité efficace 1,2 A. En déduire la valeur numérique de  $U_m$ , ainsi que l'expression numérique de  $u(t)$ .

**9.2.** Une bobine de résistance négligeable, placée seule entre  $A$  et  $B$ , laisse passer également un courant de 1,2 A.

**9.2.1.** Déterminer l'inductance de la bobine.

**9.2.2.** Donner l'expression  $i(t)$  de l'intensité du courant dans la bobine.

**9.3.** On monte en série entre  $A$  et  $B$  l'appareil thermique (voir 9.1.), la bobine (voir 9.2.) et un condensateur de capacité  $C = 10 \mu\text{F}$ . Calculer :

**9.3.1.** L'intensité efficace du courant dans le circuit.

**9.3.2.** La d.d.p. aux bornes de chaque appareil.

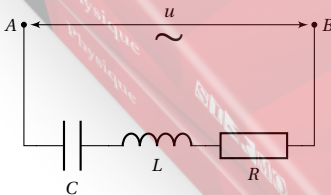
**9.3.3.** Construire le diagramme vectoriel des tensions.

**9.3.4.** Calculer la puissance consommée par le circuit.

**9.3.5.** Déterminer la capacité du condensateur qu'il aurait fallu utiliser pour obtenir une intensité maximale. Quelle est dans ce cas, la valeur en fonction du temps de l'intensité instantanée  $i(t)$ ?

## Exercice 10.

Un circuit électrique comprend : une résistance  $R$ , une bobine d'inductance  $L$  et un condensateur de capacité  $C$  montés en série; aux bornes de l'ensemble on maintient une d.d.p. sinusoïdale  $u$  de valeur efficace  $U$  constante et de fréquence  $f$  variable. On désigne par  $I$  la valeur efficace du courant et par  $Z$  l'impédance du circuit.



**10.1.** On se propose d'étudier les variations de la puissance moyenne  $P$  absorbée par le circuit en fonction de la fréquence (ou de la pulsation  $\omega = 2\pi f$ ). Données

numériques  $U = 3,0\text{V}$ ;  $R = 5,0 \Omega$ ;  $L = 0,25 \times 10^{-3}\text{H}$ ;  $C = 1,0 \times 10^{-9}\text{F}$ . On prendra  $\frac{1}{\pi} = 0,318$ .

**10.1.1.** Calculer le facteur de puissance  $\cos \phi$  du circuit en utilisant la construction de Fresnel. Exprimer  $\cos \phi$  en fonction de  $Z$  et de  $R$ . En déduire l'expression de  $P$  à partir de  $U$ ,  $R$  et  $Z$  d'une part,  $R$  et  $I$  d'autre part. ( $\phi$  désigne la différence de phase entre l'intensité et la tension.)

**10.1.2.** On dit que le circuit est en résonance lorsque la puissance  $P$  est maximale. Calculer numériquement

**10.1.2.1.**  $f_0$ ,  $Z_0$ ,  $I_0$ ,  $P_0$  valeurs de  $f$ ,  $Z$ ,  $I$ ,  $P$  à la résonance;

**10.1.2.2.** le coefficient de surtension.  $Q = \frac{U_L}{RI_0} = \frac{L\omega_0}{R}$  ( $U_L$  = tension efficace aux bornes de la bobine à la résonance)

**10.1.2.3.** Mettre sous la forme  $P = \frac{P_0}{1 + \frac{X^2}{R^2}}$ , en posant

$Z^2 = R^2 + X^2$ ,  $X$  représente la partie réactive de l'impédance.

**10.1.3.** Montrer qu'il existe deux valeurs  $f_1$  et  $f_2$  de  $f$ , pour lesquelles  $P$  prend la valeur  $P_1 = P_2 = \frac{P_0}{2}$ . Calculer les valeurs de  $Z$ ,  $I$  et  $\cos \phi$  correspondant à  $P_1$  et  $P_2$ .

**10.1.4.** On appelle affaiblissement en décibels (dB) l'expression  $a = 10 \log \frac{P}{P_0}$  (logarithme décimale). Exprimer  $a$  en fonction de  $I$  et  $I_0$ . Calculer numériquement  $a_1$  et  $a_2$  pour  $f = f_1$  et  $f = f_2$ .

**10.2.** On étudie  $P$  au voisinage de la résonance et l'on pose  $\omega = \omega_0 + \Delta\omega = \omega_0(1 + \epsilon)$ , avec  $\epsilon = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ , variation relative de fréquence; on supposera  $\epsilon \ll 1$ .

**10.2.1.** Exprimer  $\frac{X}{R}$  et  $P$  en fonction de  $\epsilon$  et  $Q$ . [On rappelle la formule d'approximation  $(1 + \epsilon)^n \approx 1 + n\epsilon$  si  $\epsilon \ll 1$ ].

**10.2.2.** En supposant l'expression précédente encore valable pour  $P_1$  et  $P_2$ , en déduire les valeurs approchées de  $f_1$  et  $f_2$ . Calculer la bande passante  $B = f_2 - f_1$  et la bande passante relative  $\frac{B}{f_0}$  du circuit.



## 8.6 Solutions des exercices et problèmes

### Solution 1. (p. 168)

**1.1.** Calcul de l'intensité efficace  $I$  du courant dans le circuit.

Aux bornes du circuit ( $R, L, C$ ) série,  $U = ZI$  avec

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}.$$

A.N.

$$R = 200\Omega$$

$$f = 250\text{Hz}$$

$$\Rightarrow \omega = 2\pi f = 500\pi \text{ rad s}^{-1}$$

$$L\omega = 0,1500\pi \approx 157,1\Omega$$

$$\frac{1}{C\omega} = \frac{1}{10^{-6} \cdot 500\pi} = 636,6\Omega$$

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 157,1 - 636,6 = -479,5\Omega$$

$$Z = \sqrt{200^2 + (-479,5)^2} = 519,5\Omega$$

Nous en déduisons :

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{5}{519,5} = 9,6 \times 10^{-3} \text{ A} = 9,6 \text{ mA}.$$

**1.2.** Expression de  $i(t)$ .

Soit  $\phi$  l'avance de phase de  $u(t)$  par rapport à  $i(t)$ .

Calculons  $\phi$  :

$$\tan \phi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} = \frac{-479,5}{200} \approx -2,40$$

$$\Rightarrow \phi = -67,36^\circ = -1,18 \text{ rad}$$

soit  $\psi(u) = \omega t$  la phase de  $u$  à la date  $t$  et  $\psi(i)$  la phase de  $i$  à la date  $t$ .

$$\psi(u) - \psi(i) = \phi$$

$$\Rightarrow \psi(i) = \psi(u) - \phi$$

avec

$$\phi = -1,18 \text{ rad}$$

$$\Rightarrow \psi(i) = \omega t - (-1,18) = \omega t + 1,18$$

Nous avons alors :

$$i = I_m \cos(\omega t + 1,18)$$

avec  $I_m = I\sqrt{2} = 1,36 \times 10^{-2} \text{ A}$ .

$$i = 1,36 \times 10^{-2} \cos(\omega t + 1,18)$$

(en A). N.B.  $u$  qui est en avance sur  $i$  d'un angle  $\phi$  négatif est en fait en retard !

**1.3.** Calculons les tensions aux bornes des trois dipôles du circuit.

Appliquons la relation  $U = ZI$  aux bornes de chaque dipôle :

■ Aux bornes de la résistance  $R$ .

$$U_R = Z_R I \text{ avec } Z_R = R = 200\Omega \Rightarrow$$

$$U_R = 200 \cdot 9,6 \times 10^{-3} = 1,92 \text{ V}.$$

■ Aux bornes de la bobine.

$$U_B = Z_B I \text{ avec } Z_B = L\omega \approx 157,1\Omega \Rightarrow$$

$$U_B = 157,1 \cdot 9,6 \times 10^{-3} \approx 1,51 \text{ V}.$$

■ Aux bornes du condensateur.

$$U_C = Z_C I \text{ avec } Z_C = \frac{1}{C\omega} \approx 636,6\Omega \Rightarrow$$

$$U_C = 636,6 \cdot 9,6 \times 10^{-3} \approx 6,11 \text{ V}.$$

■ Comparons la somme  $U_R + U_B + U_C$  à  $U$

$$U_R + U_B + U_C = 1,92 + 1,51 + 6,11 = 9,54 \text{ V}$$

Or  $U = 5 \text{ V}$  donc  $U \neq U_R + U_B + U_C \Rightarrow$  Les tensions efficaces ne s'additionnent pas.

**1.4.** Récapitulons les valeurs des impédances.

$Z = 519,5\Omega$  aux bornes du circuit ;  $Z_R = 200\Omega$  aux bornes de la résistance ;  $Z_B = 157,1\Omega$  aux bornes de la bobine ;  $Z_C = 636,6\Omega$  aux bornes du condensateur.

$$Z_R + Z_B + Z_C = 200 + 157,1 + 636,6$$

$$= 993,7\Omega \neq Z = 519,6\Omega$$

Nous constatons aussi que les impédances en série ne s'additionnent pas.

### Solution 2. (p. 168)

**2.1.** Expression de l'impédance  $Z$  du circuit et du déphasage  $\phi$  en fonction de  $R, L, C$  et  $f$ .

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

$$\text{avec } \omega = 2\pi f \Rightarrow Z = \sqrt{R^2 + \left(2\pi Lf - \frac{1}{2\pi Cf}\right)^2}$$

$$\tan \phi = \frac{2\pi Lf - \frac{1}{2\pi Cf}}{R}$$

Valeur de  $f_0$  pour laquelle  $i$  et  $u$  sont en phase. Dans ce cas,  $\phi = 0 \Rightarrow \tan \phi = 0$  donc :

$$\frac{2\pi Lf_0 - \frac{1}{2\pi Cf_0}}{R} = 0$$

$$\Rightarrow 2\pi Lf_0 - \frac{1}{2\pi Cf_0} = 0$$

on en déduit :

$$f_0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi^2 LC}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

A.N.  $L = 0,1 \text{ H}$  ;  $C = 0,25 \times 10^{-6} \text{ F}$  ;  $f_0 = 1,006 \times 10^3 \text{ Hz}$ .

Intensité efficace  $I_0$  correspondant à  $f_0$ .

Pour  $f = f_0$ ,  $2\pi Lf_0 - \frac{1}{2\pi Cf_0} = 0$  et  $Z = Z_0 = R$ , la relation  $U = ZI$  s'écrit alors :

$$U = Z_0 I_0$$

$$\Rightarrow I_0 = \frac{U}{Z_0} = \frac{U}{R} = \frac{30}{60} = 0,5 \text{ A}$$

**2.2.** Montrons qu'il existe deux valeurs  $f_1$  et  $f_2$  de la fréquence pour lesquelles  $\phi$  a la même valeur absolue.



## 8.6. Solutions des exercices et problèmes

Soit  $\lambda$  la valeur absolue de  $\tan \phi$ . Si  $\tan \phi > 0$ ,

$$\frac{2\pi L f - \frac{1}{2\pi C f}}{R} = \lambda$$

$$\Rightarrow 2\pi L f - \frac{1}{2\pi C f} = \lambda R$$

Après développement, nous avons :

$$4\pi^2 LC f^2 - 2\pi \lambda R C f - 1 = 0 \quad (\text{S8.1})$$

Si  $\tan \phi < 0$ ,

$$\frac{2\pi L f - \frac{1}{2\pi C f}}{R} = -\lambda$$

$$\Rightarrow 2\pi L f - \frac{1}{2\pi C f} = -\lambda R$$

Après développement, nous avons :

$$4\pi^2 LC f^2 + 2\pi \lambda R C f - 1 = 0 \quad (\text{S8.2})$$

(S8.1) et (S8.2) sont deux équations du second degré en  $f$ . Soient  $f_1$  et  $f_2$  les solutions positives des deux équations (S8.1) et (S8.2).  $f_1$  et  $f_2$  sont donc les valeurs de la fréquence pour lesquelles  $\phi$  a la même valeur absolue.

Relation entre  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_0$ .

Soient

$$\tan \phi_1 = \frac{2\pi L f_1 - \frac{1}{2\pi C f_1}}{R}$$

$$\tan \phi_2 = \frac{2\pi L f_2 - \frac{1}{2\pi C f_2}}{R}$$

$\phi_1$  et  $\phi_2$  ayant la même valeur absolue, soit

$$\phi_1 = -\phi_2$$

$$\Rightarrow \tan \phi_1 = -\tan \phi_2$$

$$\frac{2\pi L f_1 - \frac{1}{2\pi C f_1}}{R} = -\frac{2\pi L f_2 - \frac{1}{2\pi C f_2}}{R}$$

$$\Rightarrow 2\pi L f_1 - \frac{1}{2\pi C f_1} = \frac{1}{2\pi C f_2} - 2\pi L f_2$$

$$\Rightarrow 2\pi L(f_1 + f_2) = \frac{1}{2\pi C} \left( \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_1} \right)$$

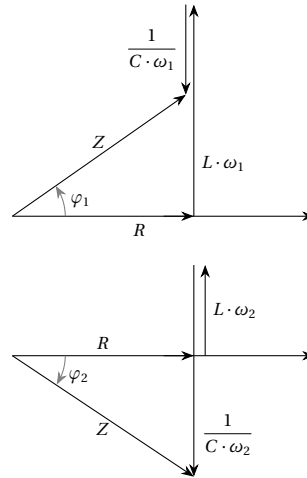
$$= \frac{1}{2\pi C} \left( \frac{f_1 + f_2}{f_1 f_2} \right)$$

$$\Rightarrow 4\pi^2 LC f_1 f_2 (f_1 + f_2) = (f_1 + f_2)$$

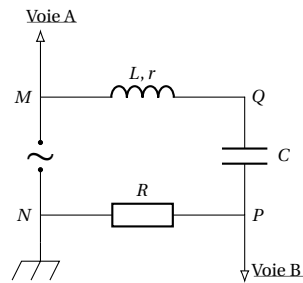
$$(f_1 + f_2) \neq 0$$

$$\Rightarrow 4\pi^2 LC f_1 f_2 = 1$$

$$\text{D'où } f_1 f_2 = \frac{1}{4\pi^2 LC} \text{ or } f_0^2 = \frac{1}{4\pi^2 LC} \text{ (question 2.1)} \Rightarrow f_1 f_2 = f_0^2$$



## Solution 3. (p. 168)

3.1. Branchement pour visualiser  $u_{MN}$  et  $u_{PN}$ .

$N$  étant le point commun des deux tensions est relié à la masse de l'oscilloscope, le point  $P$  est relié à l'entrée  $B$  de l'oscilloscope (car  $u_{PN}$  est visualisée à l'entrée  $B$ ). Pour la même raison, le point  $M$  est relié à l'entrée  $A$  de l'oscilloscope.

3.2. Période  $T$  et fréquence  $f$  du courant.

Chaque période de la voie  $A$  ou de la voie  $B$  correspond à 10 divisions. En tenant compte du balayage,  $T = 10 \text{ ms} \cdot 0,5 \text{ ms} = 5 \text{ ms} = 5 \times 10^{-3} \text{ s}$ . On en déduit la fréquence  $f = \frac{1}{T} \Leftrightarrow f = \frac{1}{5 \times 10^{-3}} = 200 \text{ Hz}$ .

Calculons la tension maximale  $U_{MN}(\text{max})$

La voie  $A$  donne les variations de la tension  $u_{MN}$ . La valeur maximale correspond à 4 divisions. Compte tenu du gain à l'entrée  $A$ ,  $U_{MN}(\text{max}) = 4 \text{ V} \cdot 2 \text{ V} = 8 \text{ V}$ . Nous en déduisons la tension efficace  $U$  :

$$U = \frac{U_{MN}(\text{max})}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 5,65 \text{ V}$$

Expression de  $u(t)$  :  $u(t) = U\sqrt{2}\cos\omega t$  avec  $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 200 \Rightarrow u(t) = 8\cos(400\pi t)$  en (volt).

3.3. Tension maximale  $U_{PN}(\text{max})$ .

Sur la voie  $B$  apparaît la tension  $u_{PN}(t)$ . Sa valeur maximale correspond à 2 divisions et en tenant compte du gain de l'entrée  $B$  :  $U_{PN}(\text{max}) = 2 \cdot 1 \text{ V} = 2 \text{ V}$ .

Intensité maximale  $I_m$ .

$u_{PN}$  mesure la tension aux bornes du conducteur oh-

mique. D'après la loi d'Ohm,

$$U_{PN}(\max) = RI_m$$

$$\Rightarrow I_m = \frac{U_{PN}(\max)}{R} = \frac{2}{10} = 0,2 \text{ A}$$

Intensité efficace  $I$ .

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{0,2}{\sqrt{2}}$$

$$= 0,141 \text{ A} = 141 \text{ mA}$$

Impédance  $Z$  du circuit.

$$Z = \frac{U_{MN}(\max)}{I_m} = \frac{U}{I}$$

$$= \frac{5,65}{0,141} = 40 \Omega$$

### 3.4. Retard ou avance de $i(t)$ sur $u(t)$ .

La grandeur étudiée sur la voie  $A(u_{MN})$  est en avance sur celle qui est visualisée sur la voie  $B(u_{PN})$  car la première s'annule avant la deuxième. Or  $u_{PN} = Ri$ ;  $i$  est en phase avec  $u_{PN}$  et nous déduisons que  $i(t)$  est en retard sur  $u(t)$ .

Calcul du déphasage  $\phi$ .

Le décalage entre les deux courbes (mesuré sur l'axe horizontal) mesure 2 divisions; ce qui correspond à un décalage horaire  $\theta = 2 \cdot 0,5 \text{ ms} = 1 \text{ ms} = 10^{-3} \text{ s}$ . Nous en déduisons le déphasage :

$$\phi = 2\pi \frac{\theta}{T} = 2\pi \frac{10^{-3}}{5 \times 10^{-3}} = 1,256 \text{ rad}$$

Expression de  $i(t)$ .

$i(t)$  étant en retard sur  $u(t)$ , s'écrit :

$$i(t) = I_m \cos(\omega t - \phi)$$

$$= 0,2 \cos(400\pi t - 1,256)$$

Calculons la résistance  $r$  de la bobine.

Pour le circuit ( $R, L, r, C$ ),

$$\cos \phi = \frac{R'}{Z}$$

où  $R' = R + r$  (résistance totale du circuit).

$$R' = Z \cos \phi = 40 \cos(1,256 \text{ rad})$$

$$\Rightarrow R' = 12,4 \Omega$$

$$R' = R + r$$

$$\Rightarrow r = R' - R = 12,4 - 10 = 2,4 \Omega$$

Inductance  $L$  de la bobine.

$$Z^2 = R'^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = Z^2 - R'^2$$

$$\Rightarrow L\omega - \frac{1}{C\omega} = \sqrt{Z^2 - R'^2}$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{C\omega^2} + \frac{1}{\omega} \sqrt{Z^2 - R'^2}$$

$$\text{A.N. } C = 8 \times 10^{-6} \text{ F}; \omega = 400\pi; Z = 40 \Omega; R' = 12,4 \Omega;$$

$$L = 0,11 \text{ H.}$$

## Solution 4. (p. 168)

### 4.1.

#### 4.1.1. Fréquence du courant.

Sur l'oscillogramme, chaque période correspond à  $L = 6 \text{ cm}$ .

En tenant compte de la base du temps,

$$T = 6 \text{ ms} \cdot 0,2 \text{ ms} = 1,2 \text{ ms} = 1,2 \times 10^{-3} \text{ s} \Rightarrow$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1,2 \times 10^{-3}} = 833,3 \text{ Hz.}$$

#### 4.1.2. Tension efficace aux bornes du générateur.

La tension aux bornes du générateur est  $u_{DA}$  visualisée sur la voie 2. La valeur maximale de  $u_{DA}$  correspond à 4 cm. En tenant compte de la sensibilité sur la voie 2,  $u_{DA}(\max) = 4 \text{ V} \cdot 5 \text{ V} = 20 \text{ V}$ . Nous en déduisons la tension efficace.  $U_{DA} = \frac{u_{DA}(\max)}{\sqrt{2}} = 14,1 \text{ V}$ .

### 4.2.

#### 4.2.1. Tension efficace aux bornes du conducteur ohmique.

La tension  $u_{BA}$  aux bornes du conducteur ohmique est visualisée sur la voie 1.  $u_{BA}(\max) = 5 \cdot 2 \text{ V} = 10 \text{ V}$ . Nous en déduisons la tension efficace  $U_{BA} = \frac{u_{BA}(\max)}{\sqrt{2}} = 7,1 \text{ V}$ .

#### 4.2.2. Intensité efficace du courant dans le circuit.

$$I = \frac{U_{BA}}{R} = \frac{7,1}{55} = 0,129 \text{ A} = 129 \text{ mA.}$$

Expression de  $i(t)$ .

Soit  $\phi$  le déphasage de  $u$  par rapport à  $i$ . Sur l'oscillogramme, la courbe permettant de visualiser  $u$  (voie 2) est en retard sur la courbe correspondant à  $i$  (voie 1 car  $u_{BA} = Ri$ ). L'origine des phases étant portée par  $Ri$ ,  $\phi$  est négatif. Le décalage horizontal entre les deux courbes mesure 1 cm. Ceci correspond à un décalage horaire  $\theta = 1 \cdot 0,2 \times 10^{-3} = 2 \times 10^{-4} \text{ s}$ . Nous en déduisons le déphasage.

$$|\phi| = 2\pi \frac{\theta}{T} = 2\pi \frac{2 \times 10^{-4}}{1,2 \times 10^{-3}} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

D'où l'expression de  $i(t)$  :

$$i(t) = I\sqrt{2} \cos(2\pi f t - \frac{\pi}{3}) = 0,182 \cos(5,24 \times 10^3 t - \frac{\pi}{3})$$

### 4.3. Nature et caractéristique du dipôle inconnu.

$\phi$  étant négatif,  $\tan \phi$  est aussi négatif. Or,

$$\tan \phi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

Donc,

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} < 0 \quad (\text{S8.1})$$

D'après l'énoncé, le dipôle inconnu est soit une inductance pure, soit un condensateur. Pour que (S8.1) soit vérifiée, le dipôle inconnu doit nécessairement être un condensateur. Déterminons sa capacité  $C$

$$\tan \phi = -\frac{1}{RC\omega} = -\frac{1}{2\pi RCf}$$

$$\Rightarrow C = -\frac{1}{2\pi Rf \tan \phi}$$

$$\text{A.N. } R = 55 \Omega; f = 833,3 \text{ Hz}, \phi = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow \tan \phi = -1,732;$$

$$C = 2 \times 10^{-6} \text{ F} = 2 \mu\text{F.}$$

## 8.6. Solutions des exercices et problèmes

## Solution 5. (p. 169)

**5.1.** Expressions de la tension  $u_{AD}$  pour les dipôles 1 et 2.

Pour les deux dipôles,  $u_{AD}(t)$  est la même. Posons

$$U_{AD}(t) = U_m \cos(\omega t + \theta)$$

Déterminons les constantes  $U_m$ ,  $\omega$  et  $\theta$ .

■  $U_m$  correspond à 1 cm de l'oscillogramme (1), soit  $U_m = 1 \text{ cm} \cdot 10 \text{ V cm}^{-1} = 10 \text{ V}$ .

■ Une période de l'oscillogramme (1) correspond à 4 cm. En tenant compte de la base de temps, on a :

$$T = 5 \times 10^{-3} \text{ s cm}^{-1} \cdot 4 \text{ cm} = 20 \times 10^{-3} \text{ s}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{20 \times 10^{-3}} = 100\pi = 314 \text{ rad s}^{-1}$$

A  $t = 0$ , nous lisons sur l'oscillogramme (1)

$$u_{AD} = 0 \quad (\text{S8.1})$$

D'après l'expression :

$$u_{AD} = U_m \cos(\omega t + \theta)$$

à  $t = 0$

$$u_{AD} = U_m \cos \theta \quad (\text{S8.2})$$

En identifiant (S8.1) et (S8.2) on a :

$$U_m \cos \theta = 0$$

$$\Rightarrow \cos \theta = 0$$

$$\Rightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{2}$$

$u_{AD}$  étant rapportée aux axes  $Ox$  et  $Oy$ , nous constatons à l'oscillogramme qu'à  $t = \frac{T}{4}$ ,  $u_{AD} = -U_m$ . Dans l'expression

$$u_{AD} = U_m \cos(\omega t + \theta)$$

avec  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . Si  $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ,

$$u_{AD} = U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = U_m \cos(0) = U_m$$

incompatible avec l'oscillogramme.

Si  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,

$$u_{AD} = U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = U_m \cos(\pi) = -U_m$$

compatible avec l'oscillogramme.

Donc

$$u_{AD} = 10 \cos(314t + \frac{\pi}{2}) = -10 \sin(314t)$$

**5.2.** Déphasage  $\phi$  entre l'intensité  $i_{AD}$  et la tension  $u_{AD}$  pour les dipôles 1 et 2.

$u_{BD}$  (tension aux bornes du conducteur ohmique) et  $i$  sont en phase. Donc le déphasage entre  $i_{AD}$  et  $u_{AD}$  est mesuré par le "décalage" entre les deux courbes  $u_{BD}$  et

$u_{AD}$ . Notamment,  $\phi = 2\pi \frac{\theta}{T}$

■ Sur la figure 1,

$$\theta = 0,5 \cdot 5 \times 10^{-3} = 2,5 \times 10^{-3} \text{ s}$$

$$T = 20 \times 10^{-3} \text{ s}$$

$$\phi_1 = 2\pi \frac{\theta}{T} = 2\pi \frac{2,5 \times 10^{-3}}{20 \times 10^{-3}}$$

$$= \frac{\pi}{4} = 0,785 \text{ rad}$$

■ Sur la figure 2,  $\theta = 0 \Rightarrow \phi_2 = 0$ .  $i_{AD}$  et  $u_{AD}$  sont en phase. Il y a *résonance d'intensité*.

**5.3.** Valeur de la résistance  $r$ .

Plaçons-nous à la résonance (figure 2).

$$I_m(\omega_0) = \frac{(U_{BD})_m}{r_1} = \frac{1 \cdot 2}{10} = 0,2 \text{ A}$$

Or  $(U_{AD})_m = Z I_m(\omega_0)$  avec  $Z = r_1 + r_2 + r$  car à la résonance, l'impédance est égale à la résistance totale du dipôle. Donc :

$$(U_{AD})_m = (r + r_2 + r_1) I_m(\omega_0)$$

$$\Rightarrow r = \frac{(U_{AD})_m}{I_m(\omega_0)} - (r_1 + r_2)$$

$$\Rightarrow r = \frac{10 \cdot 1}{0,2} - (10 + 32) = 8 \Omega$$

**5.4.** Valeurs numériques de  $L$  et de  $C$ .

■ Valeur de  $L$  :

Sur la figure 1,  $\tan \phi_1 = \frac{L\omega}{R}$  où  $R = r_1 + r_2 + r = 50 \Omega$ .

$$\Rightarrow L = \frac{R \tan \phi_1}{\omega}$$

$$\phi_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$R = 50 \Omega$$

$$\omega = 314 \text{ rad s}^{-1}$$

$$\Rightarrow L = 0,159 \text{ H} \approx 0,16 \text{ H}$$

■ Valeur de  $C$ .

À résonance d'intensité,

$$L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = 0$$

$$\Rightarrow LC\omega_0^2 = 1$$

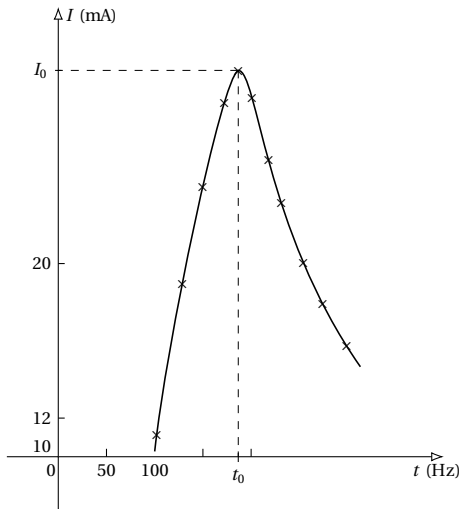
$$\Rightarrow C = \frac{1}{L\omega_0^2}$$

Avec  $L = 0,16 \text{ H}$ ,  $\omega_0 = \omega = 314 \text{ rad s}^{-1}$  car la tension est la même à la figure 1 et à la figure 2. Donc :

$$C = \frac{1}{0,16 \cdot 314^2} = 6,34 \times 10^{-5} \text{ F} = 63,4 \mu\text{F}$$

## Solution 6. (p. 169)

**6.1.** Courbe de  $I$  en fonction de  $f$ . (Voir Figure)



**6.2.** Valeurs  $f_0$  de la fréquence et  $I_0$  de l'intensité efficace du courant à la résonance.

À la résonance, l'intensité efficace du courant dans le circuit est maximale. Nous constatons sur la courbe ci-dessus que cette valeur maximale  $I_0$  de l'intensité efficace est :  $I_0 = 30 \text{ mA}$ . La valeur  $f_0$  de la fréquence correspondante est  $f_0 = 180 \text{ Hz}$ .

**6.3.** Calcul de l'inductance  $L$  de la bobine.

À la résonance,

$$L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = 0$$

$$\Rightarrow LC\omega_0^2 = 1$$

avec

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

$$\Rightarrow 4\pi^2 f_0^2 LC = 1$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C}$$

A.N.  $f_0 = 180 \text{ Hz}$ ;  $C = 10 \mu\text{F}$ ,  $L = 0,078 \text{ H}$ .

**6.4.**  
**6.4.1.** Durée correspondant à une division du balayage de l'oscillographe.

L'oscillogramme montre que  $u$  et  $i$  sont en phase. On est à la résonance d'intensité où

$$f = f_0 = 180 \text{ Hz}$$

$$\Rightarrow T_0 = \frac{1}{f_0} = 5,5 \text{ ms}$$

Or sur l'oscillogramme, 2 périodes occupent 11 divisions, nous déduisons que :

$$11 \text{ divisions} \Rightarrow 2 \text{ ms} \cdot 5,5 \text{ ms} = 11 \text{ ms}$$

$$1 \text{ division} \Rightarrow \frac{11}{11} = 1 \text{ ms}$$

**6.4.2.** Calcul de  $R$ .

Aux bornes de  $R$ , la tension maximale.

$$(U_B)_m = RI_m$$

$$\Rightarrow R = \frac{(U_B)_m}{I_m}$$

Sur l'oscillogramme,  $(U_B)_m = 1 \text{ V} \cdot 1,5 \text{ V} = 1,5 \text{ V}$ . Etant à la résonance,  $I_m = I_m(f_0) = \sqrt{2}I(f_0) = \sqrt{2}30 = 42,4 \text{ mA}$ , et

$$R = \frac{1,5}{42,4 \times 10^{-3}} = 35,4 \Omega.$$

**6.4.3.** Valeur de  $r$ .

À la résonance, la tension maximale aux bornes du dipôle ( $R$ ;  $L$ ;  $r$ ;  $C$ ) est :  $(U_A)_m = ZI_m$  avec  $Z = R + r$  (l'impédance du circuit à la résonance est égale à la résistance totale du circuit).

$$I_m = I_m(f_0) = \sqrt{2}I(f_0) = 42,4 \text{ mA}$$

$$(U_A)_m = 1 \text{ V} \cdot 2,5 \text{ V} = 2,5 \text{ V}$$

$$\Rightarrow R + r = \frac{(U_A)_m}{I_m}$$

$$\Rightarrow r = \frac{(U_A)_m}{I_m} - R$$

A.N.  $(U_A)_m = 2,5 \text{ V}$ ,  $I_m = 42,4 \times 10^{-3} \text{ A}$ ,  $R = 35,4 \Omega$ ,  $r = 23,6 \Omega$ .

### Solution 7. (p. 170)

**7.1.**

**7.1.1.** Calculons.

■ La réactance.

$$X_1 = L_1\omega - \frac{1}{C_1\omega}$$

avec

$$\omega = 2\pi f$$

$$X_1 = 2\pi L_1 f - \frac{1}{2\pi C_1 f}$$

A.N.  $L_1 = 0,318 \text{ H}$ ;  $f = 50 \text{ Hz}$ ;  $C_1 = 6,28 \times 10^{-6} \text{ F}$ ;  
 $X_1 = -406,96 \approx -407 \Omega$ .

■ L'impédance.

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + \left(L_1\omega - \frac{1}{C_1\omega}\right)^2} = \sqrt{R_1^2 + X_1^2}$$

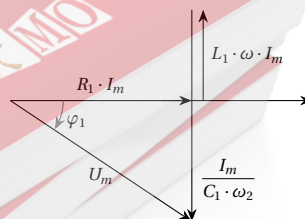
A.N.  $R_1 = 300 \Omega$ ;  $X_1 = -407 \Omega \Rightarrow Z_1 = 505,6 \Omega$ .

■ L'intensité efficace.

$$U = Z_1 I$$

$$\Rightarrow I = \frac{U}{Z_1} = \frac{220}{505,6} = 0,435 \text{ A}$$

**7.1.2.** Construction du diagramme de Fresnel du circuit ( $R_1$ ,  $L_1$ ,  $C_1$ ).



$$U_m \cos(\omega t + \phi) = R_1 I_m \cos(\omega t) + L_1 \omega I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

## 8.6. Solutions des exercices et problèmes

$$+ \frac{I_m}{C_1 \omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Soient :

- $\vec{U}$  le vecteur de Fresnel représentant  $U_m \cos(\omega t + \phi)$ ;
- $\vec{U}_R$  le vecteur de Fresnel représentant  $R_1 I_m \cos(\omega t)$ ;
- $\vec{U}_L$  le vecteur de Fresnel représentant  $L_1 \omega I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ ;
- $\vec{U}_C$  le vecteur de Fresnel représentant  $\frac{I_m}{C_1 \omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ .

Ces vecteurs ont pour norme :

- $\vec{U} : U_m$ ;
- $\vec{U}_R : R_1 I_m$ ;
- $\vec{U}_L : L_1 \omega I_m$ ;
- $\vec{U}_C : \frac{I_m}{C_1 \omega}$ .

$$L_1 \omega - \frac{1}{C_1 \omega} < 0$$

$$\Rightarrow L_1 \omega < \frac{1}{C_1 \omega}$$

D'où la construction de Fresnel.

Le déphasage  $\phi_1$  entre l'intensité  $i_1$  et la tension  $u$  est donnée par :

$$\tan \phi_1 = \frac{\left(L_1 \omega - \frac{1}{C_1 \omega}\right) I_m}{R_1 I_m} = \frac{-407}{300} = -1,356$$

$$\Rightarrow \phi_1 = -0,935 \text{ rad} = -53,6^\circ$$

$$\frac{1}{C_1 \omega} > L_1 \omega$$

$\Rightarrow$  l'effet capacitif est prépondérant par rapport à l'effet inductif.

## 7.2.

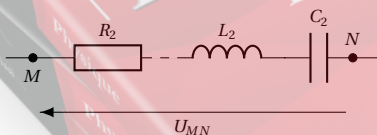
7.2.1. Calculons la réactance  $X_2$  et l'impédance  $Z_2$ .

$$X_2 = L_2 \omega - \frac{1}{C_2 \omega} = 2\pi L_2 f - \frac{1}{2\pi C_2 f}$$

A.N.  $L_2 = 0,314 \text{ H}$ ;  $C_2 = 63,7 \times 10^{-6} \text{ F}$ ;  $f = 50 \text{ Hz}$ ,  
 $X_2 = 48,68 \Omega$ . L'impédance :

$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + \left(L_2 \omega - \frac{1}{C_2 \omega}\right)^2} = \sqrt{R_2^2 + X_2^2}$$

A.N.  $R_2 = 50 \Omega$ ;  $X_2 = 48,68 \Omega$ ;  $Z_2 = 69,8 \Omega$ .



7.2.2. Valeur  $f_0$  de la fréquence pour laquelle l'intensité est maximale.

L'intensité du courant dans le circuit est maximale à la résonance. A la résonance on a :

$$L_2 \omega_0 - \frac{1}{C_2 \omega_0} = 0$$

$$\Rightarrow L_2 C_2 \omega_0^2 = 1$$

Avec

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

$$\Rightarrow L_2 C_2 4\pi^2 f_0^2 = 1$$

$$\Rightarrow f_0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi^2 L_2 C_2}}$$

A.N.  $\pi^2 = 10$ ;  $L_2 = 0,314 \text{ H}$ ;  $C_2 = 63,7 \times 10^{-6} \text{ F}$ ;  
 $f_0 = 35,35 \text{ Hz}$ . L'intensité  $I_0$  correspondante est alors :  
 De la relation  $U = ZI$ , nous tirons

$$I = \frac{U}{Z_2}$$

Or à la résonance,  $Z_2 = R_2$  et

$$I_0 = \frac{U}{R_2} = \frac{220}{50} = 4,4 \text{ A}$$

7.2.3. Exprimons  $Q_2$ .

■ En fonction de  $R_2$ ,  $C_2$  et  $\omega_0$  (pulsation à la résonance)

$$Q_2 = \frac{U_C(\omega_0)}{U(\omega_0)}$$

(par définition). Avec

$$U_C = \frac{I}{C_2 \omega_0}$$

$$U(\omega_0) = Z_2 I = R_2 I$$

Donc

$$Q_2 = \frac{I}{C_2 \omega_0} \frac{1}{R_2 I}$$

$$= \frac{1}{R_2 C_2 \omega_0}$$

■ En fonction de  $R_2$ ,  $L_2$ , et  $\omega_0$ . A la résonance,

$$L_2 C_2 \omega_0^2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C_2} = L_2 \omega_0^2$$

$$Q_2 = \frac{1}{R_2 \omega_0} \frac{1}{C_2}$$

$$= \frac{L_2 \omega_0^2}{R_2 \omega_0}$$

$$= \frac{L_2 \omega_0}{R_2}$$

Calcul de  $Q_2$  :

$$Q_2 = \frac{1}{R_2 C_2 \omega_0}$$

Déterminons  $\omega_0$ .  
 A la résonance,

$$L_2 C_2 \omega_0^2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\omega_0} = \sqrt{L_2 C_2}$$

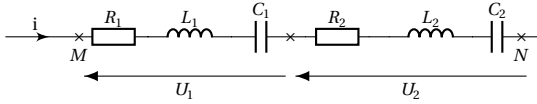
$$Q_2 = \frac{1}{R_2 C_2} \frac{1}{\omega_0}$$

$$= \frac{\sqrt{L_2 C_2}}{R_2 C_2}$$

$$= \sqrt{\frac{L_2}{R_2^2 C_2}}$$



A.N.  $L_2 = 0,314 \text{ H}$ ;  $C_2 = 63,7 \times 10^{-6} \text{ F}$ ;  $R_2 = 50 \Omega$ ;  $Q_2 = 1,4$ .



**7.3.** Association en série des deux dipôles ( $R_1, L_1, C_1$ ) et ( $R_2, L_2, C_2$ ).

**7.3.1.** Montrons que l'association est équivalente à un dipôle unique ( $R, L, C$ ).

Appliquons la loi d'additivité des tensions (instantanées) à l'association :  $u_{MN} = u_1 + u_2$  avec :

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 I_m \cos(\omega t) + L_1 \omega I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad + \frac{I_m}{C_1 \omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\ u_2 &= R_2 I_m \cos(\omega t) + L_2 \omega I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad + \frac{I_m}{C_2 \omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\ u_{MN} &= (R_1 + R_2) I_m \cos(\omega t) \\ &\quad + (L_1 + L_2) \omega I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) \frac{I_m}{\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} R &= R_1 + R_2 \\ L &= L_1 + L_2 \\ \frac{1}{C} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{MN} &= R I_m \cos(\omega t) \\ &\quad + L \omega I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad + \frac{1}{C} \frac{I_m}{\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{S8.1}) \end{aligned}$$

Donc l'association en série des dipôles ( $R_1, L_1, C_1$ ) et ( $R_2, L_2, C_2$ ) se comporte comme un dipôle unique de caractéristique :

$$\begin{aligned} R &= R_1 + R_2 = 300 + 50 = 350 \Omega \\ L &= L_1 + L_2 = 0,318 + 0,314 = 0,632 \text{ H} \\ C &= \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{6,28 \cdot 63,7}{6,28 + 63,7} = 5,72 \mu\text{F} \end{aligned}$$

Déterminons alors :

■ La réactance  $X$  du dipôle ( $RLC$ ) :

$$X = L\omega - \frac{1}{C\omega} = 2\pi Lf - \frac{1}{2\pi Cf}$$

A.N.  $L = 0,632 \text{ H}$ ;  $f = 50 \text{ Hz}$ ;  $C = 5,72 \times 10^{-6} \text{ F}$ ;  $X = -358,32 \Omega$ .

■ L'impédance  $Z$ . D'après 7.1.1.,

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{350^2 + (-358,32)^2} = 501 \Omega$$

■ L'intensité efficace  $I$  :

$$U = ZI \Rightarrow I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{501} = 0,439 \text{ A}$$

Soit  $\phi$  le déphasage entre  $i$  et  $u$ .

$$\begin{aligned} \tan \phi &= \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} = \frac{X}{R} \\ &= \frac{-358,32}{350} = -1,007 \\ \Rightarrow \phi &= -0,7887 \text{ rad} = -45,2^\circ \end{aligned}$$

$\phi < 0 \Rightarrow i$  est en avance par rapport à  $u$ .

**7.3.2.** Montrons qu'il existe une autre fréquence  $f'$  pour laquelle le déphasage  $\phi$  aura la même valeur absolue. Voir exercice 2, question 2.2. Montrons que  $f'f = f_0^2$ . Voir exercice 2, question 2.2.

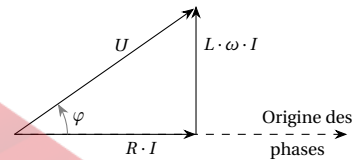
Calcul de  $f'$

$$f' = \frac{f_0^2}{f}$$

avec

$$\begin{aligned} 4\pi^2 f_0^2 LC &= 1 \\ \Rightarrow f_0^2 &= \frac{1}{4\pi^2 LC} \\ f' &= \frac{1}{4\pi^2 LC f} = \frac{1}{4\pi^2 \cdot 0,632 \cdot 5,72 \times 10^{-6} \cdot 50} \\ &= 138,31 \text{ Hz} \end{aligned}$$

### Solution 8. (p. 170)



**8.1.** Montage réalisé :

■ Un courant continu ne traverse pas un condensateur. Or en appliquant une d.d.p. continue entre  $A$  et  $B$ , on observe le passage d'un courant permanent  $\Rightarrow$  entre  $A$  et  $B$ , il n'y a pas de condensateur. Le montage (3) est donc exclu. Il s'agit soit du montage (1), soit du montage (2). Pour  $u_{AB} = 14,14 \sin 100\pi t$ , la puissance est :

$$P = UI \cos \phi$$

où

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{14,14}{\sqrt{2}} = 10 \text{ V}$$

$$I = 2 \text{ A}$$

$\phi$  = déphasage entre  $u$  et  $i$  :

$$\cos \phi = \frac{P}{UI} = \frac{12}{10 \cdot 2} = 0,6 = \cos(0,3\pi)$$

$$\Rightarrow \phi = 0,3\pi = \frac{3\pi}{10} \text{ rad} = 54^\circ$$

■ Au bornes du conducteur ohmique,  $u$  et  $i$  sont en phase ( $\phi = 0$ ) or  $\phi = 0,3\pi \text{ rad} \neq 0$ . Donc le montage (1) est aussi exclu. Il ne reste plus que le montage (2),

## 8.6. Solutions des exercices et problèmes

dont la construction de Fresnel confirme la valeur de  $\phi = 0,3\pi$  rad.

### 8.2. Caractéristiques des différents éléments du dipôle AB.

D'après le diagramme de Fresnel,

$$\begin{aligned}\sin \phi &= \frac{L\omega I}{U} \\ \Rightarrow L &= \frac{U \sin \phi}{\omega I}\end{aligned}$$

A.N.  $U = 10\text{V}$ ;  $\sin \phi = \sin 0,3\pi = 0,809$ ;  $\omega = 100\pi$ ;  $I = 2\text{A}$ ;  $L = 0,0129\text{H}$ . Selon le même diagramme,

$$\begin{aligned}\cos \phi &= \frac{RI}{U} \\ \Rightarrow R &= \frac{U \cos \phi}{I} = \frac{10 \cdot 0,6}{2} = 3\Omega\end{aligned}$$

Ou encore

$$\begin{aligned}\tan \phi &= \frac{L\omega}{R} \\ \Rightarrow R &= \frac{L\omega}{\tan \phi} = \frac{0,0129 \cdot 100\pi}{\tan(0,3\pi)} = 2,94 \approx 3\Omega\end{aligned}$$

### 8.3. Expression de $i(t)$ .

$\phi > 0 \Rightarrow u$  est en avance sur  $i$ . Si  $\phi(u)$  est la phase de  $u$  à la date  $t$ , et  $\phi(i)$  la phase de  $i$  à la même date,

$$\phi(u) - \phi(i) = \varphi$$

avec

$$\phi(u) = \omega t$$

car

$$u = U_m \sin \omega t$$

donc

$$\phi(i) = \phi(u) - \varphi = \omega t - \varphi$$

Finalement, l'expression de  $i(t)$  est :

$$i(t) = I_m \sin(\omega t - \varphi)$$

avec

$$\begin{aligned}I_m &= I\sqrt{2} \\ \Rightarrow i(t) &= 2,83 \sin(100\pi t - 0,3\pi)\end{aligned}$$

## Solution 9. (p. 171)

### 9.1. Valeur $U_m$ et expression de $u(t)$ .

Entre A et B, le circuit est constitué de la seule résistance R. Donc  $Z = R$

$$U_m = Z I_m$$

avec

$$\begin{aligned}I_m &= I\sqrt{2} \\ \Rightarrow U_m &= RI\sqrt{2}\end{aligned}$$

A.N.  $R = 100\Omega$ ,  $I = 1,2\text{A} \Rightarrow U_m = 169,7\text{V}$

Expression de  $u(t)$ .

$u(t) = U_m \sin(\omega t) = U_m \sin(2\pi f t)$  avec  $U_m = 169,7\text{V}$  et  $f = 50\text{Hz} \Rightarrow u(t) = 169,7 \sin(100\pi t)$ .

### 9.2.

#### 9.2.1. Inductance de la bobine.

Entre A et B, le circuit est constitué de la seule bobine purement inductive. Ainsi,  $Z = Z_L = L\omega = 2\pi Lf$ . Or  $U_m = Z I_m$  avec  $I_m = I\sqrt{2}$ .

$$\begin{aligned}U_m &= 2\pi Lf I\sqrt{2} \\ \Rightarrow L &= \frac{U_m}{2\pi f I\sqrt{2}}\end{aligned}$$

A.N.  $U_m = 169,7$ ;  $f = 50\text{Hz}$ ,  $I = 1,2\text{A}$ ;  $L = 0,318\text{H}$ .

Expression de  $i(t)$ .

Le circuit étant constitué d'une inductance pure,  $\phi = \pi/2$  où  $\phi$  est la phase de la tension par rapport à l'intensité. Donc  $\phi(u) - \phi(i) = \phi$  avec  $\phi(u) = \omega t =$  phase de  $u(t)$  à la date  $t$  et  $\phi(i) =$  phase de  $i(t)$  à la date  $t$ .

$$\phi = \pi/2$$

$$\phi(i) = \phi(u) - \phi = \omega t - \frac{\pi}{2}$$

$$i(t) = I_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow i(t) &= I\sqrt{2} \sin\left(2\pi f t - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 1,7 \sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

### 9.3. Etudions le circuit R, L, C.

#### 9.3.1. Calcul de l'intensité efficace du courant dans le circuit.

$U = ZI$  avec  $Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$ . Calculons

les grandeurs  $L\omega$  et  $\frac{1}{C\omega}$  :

$$L\omega = 2\pi Lf = 2 \cdot 3,14 \cdot 0,318 \cdot 50 = 99,9\Omega$$

$$\frac{1}{C\omega} = \frac{1}{2\pi C f} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \times 10^{-5} \cdot 50} = 318,31\Omega$$

$$Z = \sqrt{100^2 + (99,9 - 318,31)^2} = 240,2\Omega$$

$$U = ZI \Rightarrow I = \frac{U}{Z}$$

$$\text{Avec } U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{169,7}{\sqrt{2}} = 120\text{V.}$$

A.N.  $I = 0,5\text{A}$ .

#### 9.3.2. Calculons la d.d.p. aux bornes de chaque appareil.

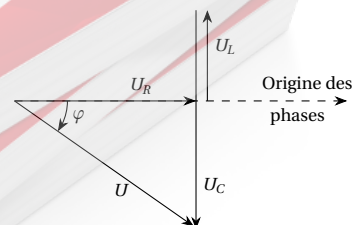
$$U_R = RI = 100 \cdot 0,5 = 50\text{V}$$

$$U_L = L\omega I = 2\pi f LI = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 0,318 \cdot 0,5 = 50\text{V}$$

$$U_C = \frac{I}{C\omega} = \frac{I}{2\pi f C} = \frac{0,5}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 10^{-5}} = 159,1\text{V}$$

#### 9.3.3. Construction du diagramme de Fresnel.

$\frac{1}{C\omega} > L\omega \Rightarrow \phi$  négatif.  $U_R \approx U_L$  d'où les vecteurs correspondant à ces tensions.



**9.3.4.** Calculons la puissance consommée dans le circuit.

$$P = UI \cos \phi$$

avec

$$\cos \phi = \frac{U_R}{U}$$

$$\Rightarrow P = UI \frac{U_R}{U} = IU_R = 0,5 \cdot 50 = 25 \text{ W}$$

**9.3.5.** Capacité  $C'$  du conducteur qui aurait permis d'avoir  $I$  maximale.

$I$  est maximale à la résonance :

$$LC' \omega^2 = 1$$

$$\Rightarrow C' = \frac{1}{L \omega^2} = \frac{1}{4 \pi^2 L f}$$

A.N.  $L = 0,318$ ;  $f = 50 \text{ Hz}$ ;  $C' = 3,19 \times 10^{-5} \text{ F}$ . Expression de  $i(t)$  dans ce cas :

$$I_{m'} = \frac{U_m}{Z_0}$$

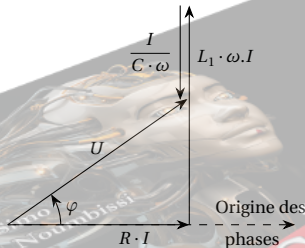
avec  $Z_0 = R$  impédance du circuit à la résonance.

$$I_{m'} = \frac{U_m}{R} = \frac{169,7}{100} = 1,7 \text{ A. A la résonance, } i \text{ et } u \text{ sont en phase donc}$$

$$i(t) = 1,7 \sin 100 \pi t$$

### Solution 10. (p. 171)

**10.1.** Etude des variations de la puissance  $P$  en fonction de la pulsation  $\omega$ .



**10.1.1.** Calcul de  $\cos \phi$  à partir de la construction de Fresnel.

$$\cos \phi = \frac{RI}{U}$$

Exprimons  $\cos \phi$  en fonction de  $Z$  et de  $R$ . Sachant que

$$U = ZI$$

$$\cos \phi = \frac{RI}{ZI} = \frac{R}{Z}$$

avec

$$Z = \sqrt{R^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}$$

Exprimons  $P = f(U, R, Z)$ .

$$P = UI \cos \phi$$

avec

$$U = ZI$$

$$\Rightarrow I = \frac{U}{Z}$$

$$\cos \phi = \frac{R}{Z}$$

$$\Rightarrow P = \frac{UU}{Z} = \frac{RU^2}{Z^2}$$

Exprimons  $P = f(R, I)$ .

$$P = UI \cos \phi$$

avec

$$U = ZI$$

$$\cos \phi = \frac{R}{Z}$$

$$\Rightarrow P = \frac{ZI \cdot IR}{Z} = RI^2$$

$$\Rightarrow P = RI^2$$

**10.1.2.** Calculons à la résonance.

**10.1.2.1.** La fréquence  $f_0$ . A la résonance, la puissance

$P = \frac{RU^2}{Z^2}$  est maximale. Pour  $R$  et  $U$  constants,  $P$  est

maximale lorsque  $Z = \sqrt{R^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}$  est mini-

male.  $Z$  est minimale pour  $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$ . Donc à la résonance,

$$L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = 0$$

$$\Rightarrow LC\omega_0^2 = 1$$

avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ . Sachant que  $\omega_0 = 2\pi f_0$ , nous déduisons

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

A.N.  $L = 0,25 \times 10^{-3} \text{ H}$ ;  $C = 1,0 \times 10^{-9} \text{ F}$ .  
 $1/\pi = 0,318 \cdot f_0 = 318000 \text{ Hz} = 318 \text{ kHz}$ .

**10.1.2.2.** L'impédance  $Z_0$ . A la résonance,

$$L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = 0$$

$$\Rightarrow Z_0 = R = 5,0 \Omega$$

**10.1.2.3.** L'intensité efficace  $I_0$  du courant.

$$I_0 = \frac{U}{Z_0} = \frac{U}{R} = \frac{3}{5} = 0,6 \text{ A}$$

**10.1.2.4.** La puissance moyenne  $P_0$ .

$$P_0 = UI_0 = 3 \cdot 0,6 = 1,8 \text{ W}$$

$$P_0 = RI_0^2 = 5 \cdot 0,6^2 = 1,8 \text{ W}$$

**10.1.3.** Le coefficient de surtension  $Q$ .

$$Q = \frac{U_L}{R} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{2\pi L f_0}{R}$$

A.N.  $L = 0,25 \times 10^{-3} \text{ H}$ ;  $f_0 = 318000 \text{ Hz}$ ;  $R = 5 \Omega$ ;  
 $Q = 99,9$ .

## 8.6. Solutions des exercices et problèmes

**10.1.4.** Mettons la puissance  $P$  sous la forme.

$$P = \frac{P_0}{1 + \frac{X^2}{R^2}}$$

avec

$$X = L\omega - \frac{1}{C\omega}$$

$$P = RI^2$$

$$P_0 = RI_0^2$$

on a :

$$\frac{P}{P_0} = \frac{RI^2}{RI_0^2} = \frac{I^2}{I_0^2}$$

$$I = \frac{U}{Z}$$

$$\Rightarrow I^2 = \frac{U^2}{Z^2}$$

avec

$$Z^2 = R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = R^2 + X^2$$

$$\Rightarrow I^2 = \frac{U^2}{R^2 + X^2}$$

$$I_0 = \frac{U}{Z_0} = \frac{U}{R}$$

$$\Rightarrow I_0^2 = \frac{U^2}{R^2}$$

Donc :

$$\frac{P}{P_0} = \frac{I^2}{I_0^2} = \frac{U^2}{R^2 + X^2} \frac{R^2}{U^2} = \frac{R^2}{R^2 + X^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{P}{P_0} = \frac{R^2}{R^2 \left(1 + \frac{X^2}{R^2}\right)}$$

$$\Rightarrow P = \frac{P_0}{1 + \frac{X^2}{R^2}}$$

**10.2.** Montrons qu'il existe deux valeurs  $f_1$  et  $f_2$  de la fréquence pour lesquelles  $P_1 = P_2 = 0,5P_0$ .

$$P = \frac{P_0}{1 + \frac{X^2}{R^2}}$$

si  $P = \frac{P_0}{2}$ , nous pouvons écrire :

$$\frac{P_0}{1 + \frac{X^2}{R^2}} = \frac{P_0}{2}$$

$$\Rightarrow 2 = 1 + \frac{X^2}{R^2}$$

$$\Rightarrow X^2 = R^2$$

D'où nous tirons  $X = \pm R$  avec

$$X = L\omega - \frac{1}{C\omega} = 2\pi Lf - \frac{1}{2\pi Cf}$$

Nous avons :

$$2\pi Lf - \frac{1}{2\pi Cf} = \pm R$$

Les valeurs  $f_1$  et  $f_2$  sont les solutions positives des équations du second degré suivantes :

$$2\pi Lf_1 - \frac{1}{2\pi Cf_1} = -R$$

$$2\pi Lf_2 - \frac{1}{2\pi Cf_2} = +R$$

soient :

$$4\pi^2 LC f_1^2 + 2\pi RC f_2 - 1 = 0$$

$$4\pi^2 LC f_2^2 - 2\pi RC f_2 - 1 = 0$$

Calculons les valeurs de  $Z$ ,  $I$  et  $\cos \phi$  correspondant à  $P_1$  et  $P_2$ .

$$P = \frac{RU^2}{Z^2}$$

$$\Rightarrow Z^2 = \frac{RU^2}{P}$$

$$\Rightarrow Z = U \sqrt{\frac{R}{P}}$$

$$\Rightarrow Z_1 = U \sqrt{\frac{R}{P_1}}$$

avec

$$P_1 = 0,5P_0$$

$$\Rightarrow Z_1 = U \sqrt{\frac{R}{0,5P_0}}$$

A.N.  $U = 3V$ ;  $R = 5\Omega$ ;  $P_0 = 1,8W$ ,  $Z_1 = 7,07\Omega$ ;

$$Z_2 = U \sqrt{\frac{R}{P_2}} = Z_1 = 7,07\Omega \text{ car } P_2 = P_1.$$

Valeurs de  $I_1$  et  $I_2$ .

$$P = RI^2$$

$$\Rightarrow P_1 = RI_1^2 = \frac{P_0}{2}$$

$$P_0 = RI_0^2$$

$$\Rightarrow RI_1^2 = \frac{RI_0^2}{2}$$

$$\Rightarrow I_1^2 = \frac{I_0^2}{2}$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = 0,424A \quad P_1 = P_2$$

$$\Rightarrow I_2 = I_1 = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = 0,424A$$

Valeurs de  $\cos \phi_1$  et  $\cos \phi_2$ .

$$P = UI \cos \phi$$

$$\Rightarrow \cos \phi = \frac{P}{UI}$$

Donc  $\cos \phi_1 = \frac{P_1}{UI_1}$  avec

$$P_1 = \frac{P_0}{2}$$

$$I_1 = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \cos \phi_1 = \frac{P_0 \sqrt{2}}{2UI_0}$$

A.N.  $P_0 = 1,8 \text{ W}$ ;  $U = 3 \text{ V}$ ;  $I_0 = 0,6 \text{ A}$ ;  $\cos \phi_1 = 0,707$ .

$$P_1 = P_2$$

$$I_1 = I_2$$

$$\Rightarrow \cos \phi_2 = \frac{P_2}{UI_2} = \frac{P_1}{UI_1} = \cos \phi_1$$

$$\Rightarrow \cos \phi_2 = 0,707$$

**10.3.** Exprimons  $a$  en fonction de  $I$  et de  $I_0$ .

$$P = RI^2$$

$$P_0 = RI_0^2$$

$$\Rightarrow a = 10 \log \frac{P}{P_0} = 10 \log \frac{RI^2}{RI_0^2}$$

$$= 10 \log \left( \frac{I}{I_0} \right)^2 = 20 \log \frac{I}{I_0}$$

Ainsi,

$$a_1 = 20 \log \frac{I_1}{I_0}$$

$$I_1 = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{I_1}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a_1 = 20 \log \frac{1}{\sqrt{2}} = -3 \text{ dB}$$

$$I_2 = I_1 = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow a_2 = a_1 = -3 \text{ dB}$$

**10.4.** Etude au voisinage de la résonance.

**10.4.1.** Exprimons.

$\frac{X}{R}$  et  $P$  en fonction de  $\epsilon = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$  et de  $Q$ . Rappelons

$$Q = \frac{L\omega_0}{R}$$

$$X = L\omega - \frac{1}{C\omega}$$

$$\frac{X}{R} = \frac{1}{R}X = \frac{1}{R} \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$$

avec  $\omega = \omega_0(1 + \epsilon)$

$$\frac{X}{R} = \frac{L\omega_0}{R}(1 + \epsilon) - \frac{1}{RC\omega_0(1 + \epsilon)}$$

$$LC\omega_0^2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C} = L\omega_0^2$$

$$\frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R\omega_0}$$

$$= \frac{L\omega_0^2}{R\omega_0} = \frac{L\omega_0}{R} = Q$$

Donc :

$$\frac{X}{R} = Q(1 + \epsilon) - Q(1 + \epsilon)^{-1}$$

pour  $\epsilon \ll 1$ ,  $(1 + \epsilon)^{-1} \approx 1 - \epsilon$ .

$$\frac{X}{R} = Q(1 + \epsilon) - Q(1 - \epsilon) = 2\epsilon Q$$

$$P = \frac{P_0}{1 + \frac{X^2}{R^2}}$$

$$\frac{X}{R} = 2\epsilon Q$$

$$\Rightarrow P = \frac{P_0}{1 + 4\epsilon^2 Q^2}$$

**10.4.2.**

**10.4.2.1.** Valeur approchées de  $f_1$  et  $f_2$ .

L'expression ci-dessus étant, valable pour  $P_1$  et  $P_2$ , on peut écrire :

$$P_1 = P_2 = \frac{P_0}{1 + 4\epsilon^2 Q^2}$$

Par ailleurs,  $P_1 = P_2 = \frac{P_0}{2}$ . Donc

$$\frac{P_0}{2} = \frac{P_0}{1 + 4\epsilon^2 Q^2}$$

$$\Rightarrow 1 + 4\epsilon^2 Q^2 = 2$$

$$\Rightarrow 4\epsilon^2 Q^2 = 1$$

$$\Rightarrow \epsilon^2 = \frac{1}{4Q^2}$$

$$\Rightarrow \epsilon = \pm \frac{1}{2Q}$$

Soit

$$\epsilon_1 = \frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_0} = \frac{f_1 - f_0}{f_0} = -\frac{1}{2Q}$$

$$\Rightarrow f_1 = -\frac{1}{2Q}f_0 + f_0 = f_0 \left( 1 - \frac{1}{2Q} \right)$$

$$\theta_m = \theta_0$$

A.N.  $f_0 = 318\,000 \text{ Hz}$ ;  $Q = 99,9$ ;  $f_1 = 316\,408,4 \text{ Hz}$ .

$$\epsilon_2 = \frac{\omega_2 - \omega_0}{\omega_0} = \frac{f_2 - f_0}{f_0} = +\frac{1}{2Q}$$

$$\Rightarrow f_2 = f_0 \left( 1 + \frac{1}{2Q} \right)$$

A.N.  $f_0 = 318\,000 \text{ Hz}$ ;  $Q = 99,9$ ;  $f_2 = 319\,591,6 \text{ Hz}$ .

**10.4.2.2.** Valeur de la bande passante  $B = f_2 - f_1$ .

$$B = f_2 - f_1 = 319\,591,6 - 316\,408,4 = 3183,2 \text{ Hz}$$

**10.4.2.3.** Valeur relative de la bande passante.

$$\frac{B}{f_0} = \frac{3183,2}{318\,000} = 0,01 = 1\%$$



## Les ondes mécaniques

9.1	<b>Les signaux</b>	184
9.1.1	Signal transversal	184
9.1.2	Signal longitudinal	185
9.1.3	Signal de torsion	185
9.2	<b>Propagation d'un signal</b>	185
9.3	<b>Propriétés de la célérité</b>	185
9.4	<b>Mise en évidence du phénomène de propagation d'une onde mécanique</b>	185
9.4.1	Le long d'une corde	185
9.4.2	A la surface d'un liquide	186
9.5	<b>Superposition des ondes progressives de faible amplitude</b>	186
9.5.1	Les interférences	187
9.5.2	Expérience d'interférences mécaniques à la surface de l'eau	187
9.6	<b>Les ondes stationnaires</b>	188
9.6.1	Expérience de Melde	188
9.6.2	Relation entre la longueur $l$ et la tension $F$ de la corde vibrante	190
9.7	<b>Enoncés des exercices et problèmes</b>	190
9.8	<b>Solutions des exercices et problèmes</b>	194



## 9.1 Les signaux

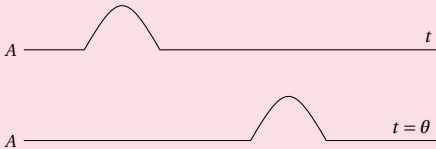
### Définition.

Un ébranlement est une déformation de courte durée. On parle aussi de signal.

### Exemple.

- Un ébranlement produit à l'extrémité  $A$  d'une corde élastique moyennement tendue, perturbe les autres points de la corde l'un après l'autre. On dit que l'ébranlement se *propage*.
  - Le point  $A$  où l'ébranlement est produit est la *source du signal*.
  - La corde élastique est le *milieu propageur* du signal.

Figure 9.1



- Nécessité d'un milieu propageur élastique.**  
Réalisons l'expérience ci-dessus avec un fil de plomb. La déformation ne se propage pas le long du fil.
- Divers types de signaux.**
  - Signaux mécaniques.**  
Un signal est dit mécanique lorsque sa propagation ne modifie que des propriétés mécaniques (position, vitesse) du milieu propageur.
  - Signaux acoustiques.**  
Ce sont des signaux perceptibles par l'oreille.

### Exemple.

- Le son est un signal acoustique périodique.
  - Le bruit est un signal acoustique non périodique.
- Tout signal acoustique a besoin d'un milieu matériel pour se propager : c'est un signal mécanique.

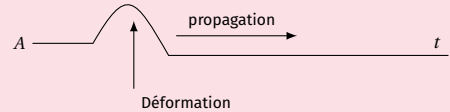
### 9.1.1 Signal transversal

Un signal est transversal lorsque la déformation est perpendiculaire à la direction de propagation.

### Exemple.

- Un signal se propageant le long d'une corde.

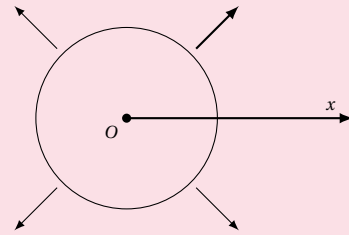
Figure 9.2



- Un signal se propageant à la surface libre d'un liquide.

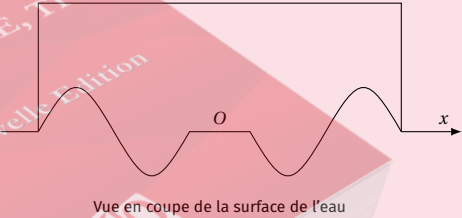
Figure 9.3

Vue de dessus de la surface de l'eau



En un point  $O$  de la surface libre de l'eau, faisons tomber une goutte d'eau. Il apparaît en ce point une ride circulaire dont le rayon augmente continuellement.

Figure 9.4



## 9.2. Propagation d'un signal

### 9.1.2 Signal longitudinal

Dans ce cas, la déformation est parallèle à la direction de propagation.

#### Exemple.

Une compression ou une dilatation qui se propage le long d'un ressort à spires non jointives.

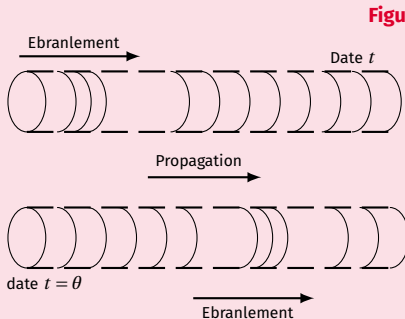


Figure 9.5

### 9.1.3 Signal de torsion

C'est par exemple le signal observé le long d'une échelle de perroquet ou endoscope (c'est un dispositif constitué par un ruban élastique tendu entre deux points et supportant des tiges métalliques sur lesquelles peuvent glisser sur des charges identiques).

#### Signaux électromagnétiques

Le signal lumineux est un cas de signal électromagnétique.

## 9.2 Propagation d'un signal

Un signal émis à la source, met une durée  $\theta$  pour affecter un point situé à la distance  $d$  de la source. Par définition, le quotient de la distance  $d$  par la durée  $\theta$  est appelé *célérité* de propagation du signal. On note

$$c = \frac{d}{\theta} \quad (9.1)$$

$d$  en (m) ;  $\theta$  en seconde (s),  $c$  en  $\text{ms}^{-1}$ .

## 9.3 Propriétés de la célérité

1. Bien que  $c$  ressemble à une vitesse en mécanique, la célérité ne caractérise pas un transport de matière, mais une propagation de l'ébranlement.
2. Pour une corde tendue "sans raideur" c'est-à-dire parfaitement déformable lorsqu'elle n'est pas tendue, la célérité est fonction de la tension  $F$  et de la masse linéique  $\mu$  de la corde. On montre que :

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$F$  en N ;  $\mu$  en  $\text{kg m}^{-1}$  ;  $c$  en  $\text{ms}^{-1}$ .

#### Exercice

Calculer la célérité d'un signal le long d'une corde de 5 m, de masse 40 g et tendue par une force d'intensité 100 N. Calculer la durée mise par le signal pour parcourir la corde.

#### Solution

Calculons la masse linéique de la corde  $\mu$  :

$$\mu = \frac{m}{l} = \frac{40 \times 10^{-3}}{5} = 8 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-1}$$

calculons alors : la célérité  $c$  :

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$$c = \sqrt{\frac{100}{8 \times 10^{-3}}} = 111,8 \text{ ms}^{-1}$$

Durée de parcours de la corde :

$$l = c\theta$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{l}{c}$$

$$\theta = \frac{5}{111,8} = 44,7 \times 10^{-3} \text{ s}$$

## 9.4 Mise en évidence du phénomène de propagation d'une onde mécanique

### 9.4.1 Le long d'une corde

Soit une fine et longue corde  $OA$ . Son extrémité  $A$  repose sur un tampon d'ouate (qui empêche la réflexion

des ondes). L'autre extrémité  $O$  est fixée à la lame d'un vibreur.

Lorsque le vibreur est en action, le point  $O$  de la corde est animé d'un mouvement vibratoire sinusoïdal de période  $T$ .

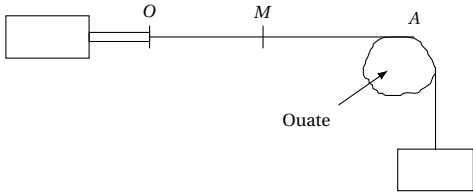


Figure 9.6

Chaque point  $M$  de la corde reproduit le mouvement du point  $O$  avec un décalage horaire

$$\theta = \frac{OM}{c}$$

Observons la corde à l'aide d'un stroboscope. Soit  $f$  la fréquence du vibreur et  $f_e$  la fréquence des éclairs.

- Pour  $f = f_e$ , la corde paraît immobile et a l'aspect d'une succession de sinusoïdes. Chaque sinusoïde est une onde. Une série d'ondes est un *train d'ondes*.
- Si nous diminuons légèrement la fréquence du stroboscope, nous observons au ralenti les ondes avancer sans se déformer : on les appelle pour cette raison *ondes progressives*.

La propagation des ondes progressives le long d'une corde comporte une double périodicité :

1. *Périodicité dans le temps*. Chaque point de la corde a le même mouvement, de période  $T$ , que la source.
2. *Périodicité dans l'espace*. Certains points de la corde ont à chaque instant, le même état vibratoire ; on dit qu'ils sont en phase.

La distance qui sépare deux points consécutifs en phase est appelée *longueur d'onde*, notée  $\lambda$ . La longueur d'onde est égale à la distance parcourue par la vibration pendant une période  $T$ .

$$\lambda = cT$$

Elongation  $y_P$  d'un point  $P$  d'abscisse  $x = OP$ .

Soit  $y_0 = Y_m \cos \omega t$  l'élongation de la source  $O$  au cours du temps.

$P$  reproduit le mouvement de  $O$  avec un retard  $\theta = \frac{x}{c}$  (ou encore, à la date  $t$ ,  $P$  a le mouvement qu'avait  $O$  à la date  $t - \frac{x}{c}$ ).

$$\begin{aligned} y_P(t) &= y_0 \left( t - \frac{x}{c} \right) \\ \Leftrightarrow y_P(t) &= Y_m \cos \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) \\ \omega &= \frac{2\pi}{T} \end{aligned}$$

$$cT = \lambda$$

$$y_P = Y_m \cos \left( \frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda} \right)$$

Quelle est la distance  $d$  qui sépare deux points de la corde ayant à chaque instant le même état vibratoire ? Ces deux points sont en concordance de phase et le décalage horaire  $\theta$  entre eux est  $\theta = KT$ . Or

$$\begin{aligned} d &= c\theta = cKT = KcT \\ \Rightarrow d &= K\lambda \end{aligned}$$

#### Loi 1

Deux points situés à un nombre entier de longueur d'onde l'un de l'autre, ont à chaque instant, la même élongation ; ils vibrent en phase. On démontre de la même manière que :

$$d = K\lambda$$

#### Loi 2

Deux points situés à un nombre impair de demi-longueurs d'onde d'un de l'autre ont à chaque instant, des élongations opposées.

$$d = (2K + 1) \frac{\lambda}{2}$$

$k \in \mathbb{N}$ . Ces points vibrent en opposition de phase.

#### Loi 3

Deux points situés à une distance :

$$d = (4k + 1) \frac{\lambda}{4}$$

avec  $k \in \mathbb{N}$  vibrent en quadrature de phase.

### 9.4.2 A la surface d'un liquide

Une pointe fixée à la lame d'un vibreur effleure en  $O$  la surface d'un liquide contenu dans une cuve. Observons la surface du liquide en éclairage stroboscopique de façon à immobiliser le phénomène : nous observons alors des rides circulaires centrées en  $O$  et équidistantes de  $\lambda$  les unes des autres. Ce type d'ondes est appelé *ondes circulaires*. En réduisant légèrement la fréquence  $f_e$ , on observe des rides circulaires qui prennent naissance au point  $O$  et se dilatent progressivement à la surface de l'eau.

## 9.5 Superposition des ondes progressives de faible amplitude

### 9.5.1 Les interférences

La déformation périodique d'un milieu élastique par une source mécanique (vibreur, diapason, membrane de haut-parleur, ...) donne naissance à une onde progressive; cette onde peut être :

- transversale (le long d'une corde tendue, à la surface libre d'un liquide)
- longitudinale (compression et décompression longitudinales d'un gaz, d'un ressort...)

Lorsque deux ondes sollicitent simultanément un point donné d'un milieu élastique, la déformation qui en résulte est la *somme vectorielle* des déformations dues à chacune des ondes : on dit qu'il y a *interférence mécanique*.

### 9.5.2 Expérience d'interférences mécaniques à la surface de l'eau

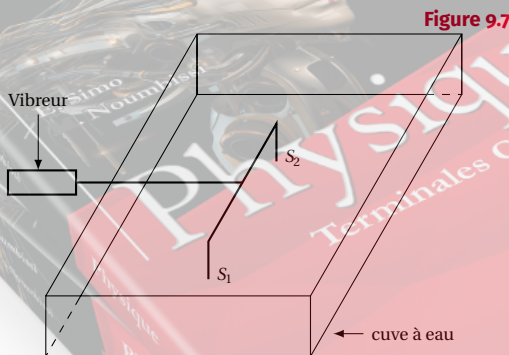


Figure 9.7

Une fourche métallique munie de deux pointes  $S_1$  et  $S_2$  (trempant légèrement dans l'eau) est fixée à l'extrémité d'un vibreur entretenu électriquement. Quand la fourche vibre, les deux pointes frappent périodiquement la surface de l'eau.

L'observation en éclairage continu montre des *rides fines de forme hyperbolique* à la surface de l'eau : ce sont des *franges d'interférences*. La région où apparaissent les franges est appelée *champ d'interférences*.

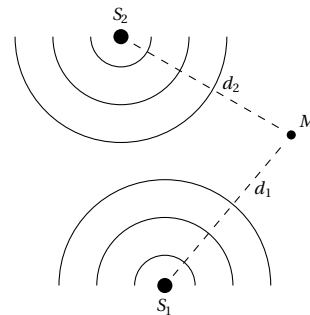


Figure 9.8

En lumière stroboscopique, on voit naître en  $S_1$  et  $S_2$  des ondes progressives circulaires qui se superposent en formant les rides de forme hyperbolique.

On constate de plus que certains points du champ d'interférences exécutent un mouvement de même fréquence que les sources alors que d'autres restent parfaitement immobiles.

#### Remarque.

*Conditions pour obtenir un phénomène d'interférence :*

Pour obtenir une figure d'interférences stable, il faut superposer les ondes issues de deux sources *isochrones* (même période) et *cohérentes* (déphasage constant). Lorsque le déphasage est nul, les deux sources sont dites *synchrone*.

Ainsi, dans le dispositif ci-dessus, le vibreur (source principale) fait des deux pointes  $S_1$  et  $S_2$  (sources secondaires) deux sources synchrones capables de produire les interférences.

#### Interprétation

*Mouvement d'un point M du champ d'interférence.*  
Les équations horaires des mouvements de  $S_1$  et  $S_2$  sont :

$$Y_{S1} = a \cos \left( \frac{2\pi}{T} t + \phi_1 \right)$$

$$Y_{S2} = a \cos \left( \frac{2\pi}{T} t + \phi_2 \right)$$

$\phi_1$  et  $\phi_2$  sont les phases initiales respectives de  $S_1$  et  $S_2$ . Soient  $d_1$  et  $d_2$  les distances respectives d'un point  $M$  du champ d'interférences aux sources  $S_1$  et  $S_2$ .

- Si  $S_1$  vibrait seule, l'équation horaire du mouvement de  $M$  serait

$$\begin{aligned} Y_2 &= a \cos \left[ \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{d_1}{c} \right) + \phi_1 \right] \\ &= a \cos \left( \frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi d_1}{\lambda} + \phi \right) \end{aligned}$$

où  $\lambda = cT$ .



- De même, si  $S_2$  vibrerait seule, l'équation horaire du mouvement de  $M$  serait

$$Y_2 = a \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi d_2}{\lambda} + \phi_2\right)$$

- Lorsque les deux sources vibrent, les deux ondes se superposent au point  $M$  et l'élongation de  $M$  à la date  $t$  est :

$$Y = Y_1 + Y_2$$

$Y$  peut se mettre sous la forme :

$$Y = A \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right)$$

On détermine  $A$  et  $\phi$  par la construction de Fresnel en écrivant

$$Y_1 = a \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi_1\right)$$

$$\text{avec } \phi_1 = -\frac{2\pi d_1}{\lambda} + \phi_1$$

$$Y_2 = a \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi_2\right)$$

$$\text{avec } \phi_2 = -\frac{2\pi d_2}{\lambda} + \phi_2$$

On obtient :

$$Y = 2a \cos \frac{\pi}{\lambda} (d_2 - d_1) \cdot$$

$$\cdot \cos \left[ \frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{\lambda} (d_1 + d_2) + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right]$$

$$\Rightarrow A = 2a \cos \frac{\pi}{\lambda} (d_2 - d_1)$$

$$\phi = -\frac{\pi}{\lambda} (d_2 - d_1) + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}$$

#### Remarque.

Nous aurions pu utiliser la formule :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

Nous remarquons que l'amplitude  $A$  de la vibration résultante dépend de la différence  $\Delta = d_2 - d_1$  appelée *différence de marche* (des deux ondes qui interfèrent) au point  $M$ . L'état vibratoire d'un point  $M$  (lié à l'amplitude  $A$ ) dépend donc de la différence de marche  $d_2 - d_1$ . En effet, l'amplitude  $A$  est maximale lorsque :

$$\cos \frac{\pi}{\lambda} (d_2 - d_1) = \pm 1$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{\lambda} (d_2 - d_1) = k\pi$$

avec  $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow d_2 - d_1 = K\lambda$ .

#### 1ère loi

Lorsque la différence de marche en un point  $M$  est égale à un *multiple entier* de longueur d'onde, ce point

vibre avec une amplitude maximale. On dit qu'il y a *interférence constructive*. L'amplitude  $A$  est minimale lorsque :

$$\cos \frac{\pi}{\lambda} (d_2 - d_1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{\lambda} (d_2 - d_1) = (2k+1) \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow d_2 - d_1 = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$$

$$\Rightarrow A = 0$$

#### 2ème loi

Les points pour lesquels la différence de marche est un *multiple impair de la demi-longueur d'onde*, sont immobiles. On dit qu'il y a *interférence destructive*.

#### Remarque.

1. On peut attribuer à chaque frange un numéro appelé *ordre d'interférence* et défini par

$$\frac{d_2 - d_1}{\lambda}$$

- Les franges à amplitude maximale ont pour ordre  $\dots -2, -1, 0, +1, +2, \dots$

- Les franges à amplitude nulle ont pour ordre  $\dots -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}, \dots$

2. Le nombre de franges est limité; en effet  $|d_2 - d_1| < S_1 S_2$ . Pour les franges à amplitude maximale par exemple,

$$|d_2 - d_1| = |k|\lambda < S_1 S_2 \Rightarrow |k| < \frac{S_2 S_1}{\lambda}$$

3. On appelle points *équiphases*, les points pour lesquels la phase  $\phi$  est la même (à  $2k\pi$  près). Ces points sont tels que  $d_2 + d_1 = \text{constante} + 2k\lambda$ .

## 9.6 Les ondes stationnaires

Le phénomène d'ondes stationnaires résulte de l'interférence de deux ondes sinusoïdales progressives de même période et de même amplitude se propageant en sens contraire.

### 9.6.1 Expérience de Melde

Mise en évidence d'onde stationnaires transversales le long d'une corde.

## 9.6. Les ondes stationnaires

## Dispositif expérimental

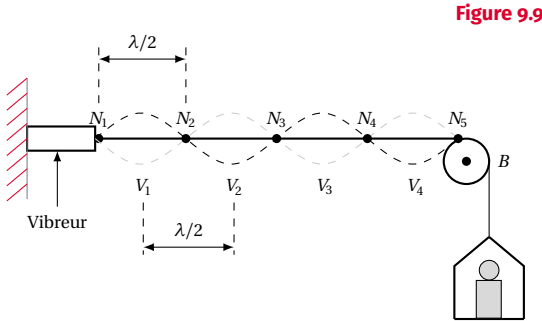


Figure 9.9

Un fil souple, attaché à un vibreur, passe par la gorge d'une poulie et est tendu par un plateau contenant des masses marquées. Ce dispositif présente l'avantage de pouvoir modifier à volonté :

- la longueur utile  $AB$  de la corde en déplaçant la poulie;
- la tension du fil en ajoutant ou en diminuant les masses marquées du plateau.

## Observations

Pour un réglage convenable de la tension et de la longueur du fil  $AB$ ,

1. en éclairage continu, la corde vibre très rapidement en présentant l'aspect de *fuseaux*. Les points de la corde où le renflement des fuseaux est le plus marqué vibrent avec une amplitude maximale. Ces points sont appelés *ventres*.

## Exemple.

 $V_1, V_2, V_3$ 

Les points tels que  $N_1, N_2, N_3, \dots$  extrémités des fuseaux, sont appelés *noeuds*. Ils sont constamment immobiles. On constate de plus que les ventres et les noeuds sont équidistants.

2. en éclairage stroboscopique, réglé de façon à observer le mouvement ralenti de la corde, on constate que la corde présente l'aspect d'une sinusoïde qui se déforme *sur place* d'où le nom d'*ondes stationnaires* (contrairement à l'onde progressive constituée par une sinusoïde qui avance).

## Interprétation

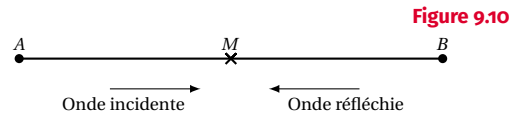


Figure 9.10

Une onde *incidente* est émise par la source  $A$  et se propage vers le point  $B$  où elle se réfléchit et rebrousse chemin. Il y a donc naissance d'une onde *réfléchie* qui se propage en sens contraire.

Lorsque les deux ondes se rencontrent, ils se superposent et donnent naissance au phénomène d'ondes stationnaires.

Lorsque l'extrémité (lieu de la réflexion) est fixe, onde réfléchie et onde incidente sont en opposition de phase.

Ainsi si

$$Y_{iB} = a \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

est l'élongation de l'onde incidente au point  $B$ ,

$$Y_{iM}(t) = Y_{iB}\left(t + \frac{x}{c}\right) = a \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

avec :  $\lambda = cT$  et  $x = \overline{BM}$ .

De même

$$Y_{rB} = -a \cos\frac{2\pi t}{T} = a \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \pi\right)$$

est l'élongation de l'onde réfléchie au point  $B$  :

$$Y_{rM}(t) = Y_{rB}\left(t - \frac{x}{c}\right) = a \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda} + \pi\right)$$

De suite de la superposition des deux ondes au point  $M$ , l'élongation résultante est :

$$Y_M = Y_{iM} + Y_{rM} = 2a \sin\frac{2\pi x}{\lambda} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{2}\right)$$

Pour obtenir ce résultat à partir de  $Y_{iM}(t)$  et de  $Y_{rM}(t)$ , on utilise soit la construction de Fresnel, soit la formule :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

## Remarque.

Dans l'équation  $Y_M(t)$  ci-dessus, l'amplitude  $A$  du point  $M$  est :

$$A = 2a \sin \frac{2\pi x}{\lambda}$$

$A$  est fonction de l'abscisse  $x$  du point  $M$ .

Ainsi :

- Les points d'amplitude nulle (noeuds) ont pour abscisse  $x$  telle que :

$$\sin \frac{2\pi x}{\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi x}{\lambda} = K\pi (K \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow x = k \frac{\lambda}{2}$$

Cette relation détermine les positions des noeuds.

$$K = 0 \quad \Rightarrow x_0 = 0$$

$$K = 1 \quad \Rightarrow x_1 = \frac{\lambda}{2}$$

$$K = n \quad \Rightarrow x_n = n \frac{\lambda}{2}$$

Calculons la distance  $d$  séparant deux noeuds consécutifs :

$$d = x_{n+1} - x_n = (n+1) \frac{\lambda}{2} - n \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}$$

- Les points d'amplitude maximale (ventres) ont pour abscisse  $x$  telle que

$$\sin \frac{2\pi x}{\lambda} = \pm 1 \Rightarrow \frac{2\pi x}{\lambda} = (2K+1) \frac{\pi}{2}$$

Ainsi les positions des ventres sont données par la relation :

$$x = (2K+1) \frac{\lambda}{4}$$

Calculons la distance  $d'$  séparant deux ventres consécutifs :

$$d' = x_{K+1} - x_K = \left[ 2(K+1) + 1 \right] \frac{\lambda}{4} - (2K+1) \frac{\lambda}{4}$$

$$\Rightarrow d' = \frac{\lambda}{2} = d$$

Nous retenons donc que : les noeuds (ou les ventres) sont équidistants d'une demi-longueur d'onde.

## 9.6.2 Relation entre la longueur $l$ et la tension $F$ de la corde vibrante

A la résonance de la vibration, (lorsque la fréquence propre de la corde est égale à celle du vibreur), la longueur utile de la corde est égale à un nombre entier de demi-longueurs d'ondes, soit la longueur d'un nombre entier  $n$  de fuseaux stables. Ainsi :  $l = n \frac{\lambda}{2}$ . Par ailleurs,  $\lambda = c T$  avec

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$$T = \frac{1}{f}$$

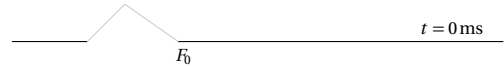
$$\Rightarrow l = \frac{n}{2f} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

C'est la formule des cordes vibrantes.

## 9.7 Énoncés des exercices et problèmes

### Exercice 1.

Un ébranlement se propage le long d'une corde à la célérité de  $20 \text{ m s}^{-1}$ . Le schéma ci-dessous (fig.1) représente la corde à l'instant  $t = 0$ .



Représenter la corde aux instants  $t_1 = 1,5 \times 10^{-3} \text{ s}$ ;  $t_2 = 2 \times 10^{-3} \text{ s}$ ;  $t_3 = 2,5 \times 10^{-3} \text{ s}$ .

### Exercice 2.

Une corde élastique est fixée à l'extrémité d'un vibreur de fréquence  $50 \text{ Hz}$ .

**2.1.** Calculer la longueur d'onde sachant que les vibrations se propagent à la célérité de  $10 \text{ m s}^{-1}$ .

**2.2.** Comparer les mouvements des deux points de la corde situés à  $40 \text{ cm}$  l'un de l'autre.

**2.3.** Comparer les mouvements des deux points de la corde situés à  $30 \text{ cm}$  l'un de l'autre.

### Exercice 3.

Une lame vibrante est animée d'un mouvement sinusoïdal de fréquence  $f = 50 \text{ Hz}$ . Elle est munie d'une pointe qui frappe verticalement la surface d'une nappe d'eau en un point  $S$ ; on suppose qu'il n'y a ni amortissement ni réflexion des ondes. A la date zéro ( $t = 0$ ) la source  $S$  commence son mouvement vers le haut (sens positif).



La figure représente en vraie grandeur la coupe de la surface de l'eau par un plan vertical passant par  $S$  à l'instant de date  $t_1$ .

**3.1.** Déterminer graphiquement la longueur d'onde  $\lambda$  et l'amplitude  $a$ . En déduire la célérité  $c$  des ondes.

**3.2.** Déterminer la date  $t_1$ .

**3.3.** Écrire l'équation horaire du mouvement  $S$ .

**3.4.** On considère un point  $M$  de la surface situé à la distance  $d = 8,5 \text{ cm}$  de la source  $S$ . Écrire l'équation horaire du mouvement de  $M$ . Comparer ce mouvement à celui de  $S$ .

**3.5.** On éclaire la surface de l'eau avec un stroboscope. La fréquence des éclairs est  $25 \text{ Hz}$ . Quel est l'aspect de la surface de l'eau? On diminue très légèrement la fréquence des éclairs. Qu'observe-t-on à la surface de l'eau? (Justifier votre réponse).

**Exercice 4.**

Un vibreur entretenu électriquement est animé d'un mouvement sinusoïdal de fréquence  $f = 50 \text{ Hz}$ . Dans tout le problème, on supposera l'amortissement des ondes négligeables lors de la propagation. A la lame du vibreur est fixée l'extrémité  $O$  d'une corde élastique tendue horizontalement. L'autre extrémité de cette corde comporte un dispositif qui empêche la réflexion des ondes. Le vibreur impose au point  $O$  un mouvement sinusoïdal vertical d'amplitude  $a = 5 \times 10^{-3} \text{ m}$ .

**4.1.** Définir la longueur d'onde de la vibration et calculer sa valeur, sachant que la célérité des ondes le long de la corde est  $c = 10 \text{ m s}^{-1}$ .

**4.2.** En prenant comme origine des temps l'instant où la lame du vibreur passe par sa position d'équilibre dans le sens des elongations positives.

**4.2.1.** Ecrire l'équation du mouvement du point  $O$ .

**4.2.2.** Ecrire l'équation du mouvement d'un point  $A$  de la corde situé à  $5 \text{ cm}$  de  $O$  et celle du mouvement d'un point  $B$  situé à  $15 \text{ cm}$  de  $O$ . Quelle est la différence de phase entre les mouvements des points  $A$  et  $B$ ? Que peut-on dire de ces mouvements?

**4.3.** Représenter l'aspect de la corde à l'instant  $t = 0,04 \text{ s}$ . Quelles sont les abscisses des points de la corde qui vibrent en phase avec le point  $O$ ? Quelles sont les abscisses des points de la corde qui vibrent en opposition de phase avec le point  $O$ ?

**4.4.** A l'instant  $t = 0,04 \text{ s}$ , où se situent les points qui ont :

**4.4.1.** une vitesse positive?

**4.4.2.** une vitesse négative?

**Exercice 5.**

Un vibreur muni d'une pointe fine, animé d'un mouvement sinusoïdal de fréquence  $N$  et d'amplitude  $a = 5 \text{ mm}$ , frappe verticalement en un point  $O$  la surface d'une nappe d'eau de grandes dimensions et y produit des perturbations sinusoïdales de même fréquence et de même amplitude que la pointe et en phase avec elle. On admettra qu'il n'y a ni réflexion, ni amortissement.

**5.1.** On réalise un éclairage stroboscopique de la pointe et de la surface de l'eau. On fait croître régulièrement la fréquence des éclairs. On constate que la plus grande fréquence pour laquelle la pointe paraît immobile et unique dans une position quelconque est  $f_e = 25 \text{ Hz}$ .

**5.1.1.** Expliquer le phénomène. Calculer la fréquence  $f$ , puis la période  $T$  des ondes à la surface de l'eau.

**5.1.2.** Décrire l'aspect de la surface de l'eau pour  $f_e = 25 \text{ Hz}$ . Qu'observe-t-on si  $f_e = 50 \text{ Hz}$ ?

**5.1.3.** On règle le stroboscope à  $f_e = 25 \text{ Hz}$  et on mesure le long d'un axe passant par  $O$ , la distance séparant six crêtes consécutives; on trouve  $d = 12 \text{ cm}$ . Déterminer la longueur d'onde  $\lambda$  et la vitesse de propagation  $c$  des ondes à la surface de l'eau.

**5.2.** Etablir l'équation horaire du mouvement de  $O$  en prenant comme origine des temps un des instants où la pointe passe par sa position d'équilibre en se déplaçant dans le sens positif ascendant. Etablir en prenant la même origine des temps l'équation du mouvement d'un point  $M$  situé à la distance  $OM = 6,6 \text{ cm}$ . Comparer les

mouvements de  $M$  et de  $O$ .

**5.3.** Représenter l'état de la surface de l'eau le long d'un axe  $Ox$  à la date  $t_1 = 0,16 \text{ s}$ . On placera le point  $M$  sur le schéma et on utilisera l'échelle suivante :  $2 \text{ cm}$  pour  $5 \text{ mm}$  réels en ordonnées,  $2 \text{ cm}$  pour  $1 \text{ cm}$  réel en abscisses.

**Exercice 6.**

Un vibreur est muni d'une pointe fine dont l'extrémité, animée d'un mouvement vertical sinusoïdal, de fréquence  $N = 25 \text{ Hz}$  et d'amplitude  $2,5 \text{ mm}$ , frappe, en un point  $O$ , la surface d'un liquide au repos. On négligera l'amortissement du mouvement au cours de la propagation et on supposera qu'il n'y a pas de réflexion des ondes sur les parois du récipient. On provoque l'immobilisation apparente du phénomène par éclairage stroboscopique.

**6.1.** Quelle relation doit exister entre  $f_e$ , fréquence des éclairs et  $f$ , fréquence du vibreur? Quelle est la valeur maximale de  $f_e$ ?

**6.2.** Décrire l'aspect de la surface du liquide.

**6.3.** La distance séparant 6 crêtes consécutives est  $d = 10 \text{ cm}$ .

**6.3.1.** Définir la longueur d'onde d'un mouvement vibratoire.

**6.3.2.** Calculer la longueur d'onde et la célérité des ondes à la surface du liquide.

**6.3.3.** Ecrire l'équation du mouvement du point  $O$ ,  $y_0 = f(t)$ , en supposant qu'à l'instant  $t = 0$   $y_0 = 0$ , le mouvement allant dans le sens positif des elongations.

**6.4.** Ecrire l'équation du mouvement d'un point  $M$  situé à  $3 \text{ cm}$  de  $O$  et celle du mouvement d'un point  $N$  situé à  $5,5 \text{ cm}$  de  $O$ . Que peut-on dire du mouvement de  $M$  par rapport à celui de  $N$ ?

**6.5.** Le vibreur est maintenant muni d'une fourche. Les extrémités des pointes de la fourche, animées d'un mouvement vertical sinusoïdal de fréquence  $f = 25 \text{ Hz}$ , frappent en deux points  $O_1$  et  $O_2$  la surface d'un liquide au repos. La distance  $O_1 O_2$  vaut  $d' = 72 \text{ mm}$ . Les ondes se propagent à la surface du liquide avec la célérité  $c = 50 \text{ cm s}^{-1}$ .

**6.5.1.** Décrire l'aspect de la surface du liquide.

**6.5.2.** Retrouver la condition pour qu'un point de la surface du liquide soit :

- sur une ligne de vibration maximale;
- sur une ligne de vibration nulle.

En déduire l'état vibratoire d'un point  $P$  situé à  $17 \text{ cm}$  de  $O_1$  et à  $10 \text{ cm}$  de  $O_2$  et d'un point  $Q$  situé à  $9 \text{ cm}$  de  $O_1$  et à  $5 \text{ cm}$  de  $O_2$ .

**6.5.3.** Déterminer le nombre et la position des points de vibration maximale sur le segment  $O_1 O_2$ . Leur position sera comptée à partir de  $O_1$ . En déduire le nombre de points de vibration nulle sur le segment  $O_1 O_2$ .

**Exercice 7.**

Une lame vibrante est munie d'un stylet dont la pointe animée d'un mouvement sinusoïdal de fréquence  $100 \text{ Hz}$  et d'amplitude  $a = 10^{-3} \text{ m}$ , frappe verticalement en un point  $S$  la surface d'une eau initialement au repos, en y produisant des perturbations sinusoïdales de



même fréquence et de même amplitude que la pointe et en phase avec elle. La vitesse de propagation des ondes à la surface de l'eau est  $0,40 \text{ m s}^{-1}$  et l'on admettra que l'amplitude des ondes se conserve au cours de la propagation.

**7.1.** Écrire l'équation horaire du mouvement d'un point  $M$  de la surface situé à la distance  $d$  de la source. On prendra comme origine des temps, l'instant où la pointe en contact avec la surface immobile de l'eau se met à vibrer en se déplaçant dans le sens descendant.

**7.1.1.** Calculer l'élongation et la vitesse de  $M$  et préciser le sens de son mouvement pour  $d = 4 \times 10^{-2} \text{ m}$  et  $t = 0,125 \text{ s}$ .

**7.1.2.** calculer la distance parcourue par l'onde à l'instant  $t = 0,125 \text{ s}$ .

**7.1.3.** Représenter l'aspect de la surface de l'eau à cet instant (faire une coupe dans un plan vertical contenant la source). Echelle des distances : 2 ; échelle des élongations : 10. 2 La même lame vibrante est munie d'une fourche dont les deux pointes frappent la surface en deux points  $S_1$  et  $S_2$  simultanément.

**7.2. 7.2.1.** Écrire l'équation horaire du mouvement d'un point  $M$  de la surface situé à la distance  $d_1$  de  $S_1$  et  $d_2$  de  $S_2$ . On choisira donc l'origine des temps comme précédemment. Déterminer l'état vibratoire d'un point  $M$  tel que  $d_1 = 5 \times 10^{-2} \text{ m}$  et  $d_2 = 3 \times 10^{-2} \text{ m}$ .

**7.2.2.** Déterminer le lieu des points où l'amplitude est maximale. Déterminer le nombre et les positions de ces points sur le segment  $S_1 S_2$  (Distance des sources  $D = S_1 S_2 = 1,1 \times 10^{-2} \text{ m}$ .)

**7.3.** La fourche est maintenant remplacée par deux pointes indépendantes vibrant toujours perpendiculairement à la surface de l'eau avec la même fréquence et la même amplitude mais elles présentent un écart de phase d'un quart de période,  $S_2$  étant en retard sur  $S_1$ .

**7.3.1.** Écrire l'équation horaire du mouvement d'un point  $M$  situé sur la surface de l'eau et déterminer le nombre de points d'amplitude maximale sur  $S_1 S_2$ . ( $S_1 S_2 = D = 1,1 \times 10^{-2} \text{ m}$ ).

**7.3.2.** Les deux pointes vibrent de nouveau en phase, mais leurs amplitudes sont inégales :  $a_1 = 0,9 \times 10^{-3} \text{ m}$  et  $a_2 = 1,2 \times 10^{-3} \text{ m}$  les autres données restant inchangées. Exprimer l'amplitude de la vibration résultante en un point  $M$  de la surface de l'eau et son déphasage par rapport au mouvement des sources. Appliquer numériquement au point  $M$  tel que  $d_1 = 5 \times 10^{-2} \text{ m}$  et  $d_2 = 3 \times 10^{-2} \text{ m}$ .

N.B. : Il est conseillé d'utiliser la construction de Fresnel. Les questions **7.1.**, **7.2.** et **7.3.** sont indépendantes.

### Exercice 8.

Dans tout le problème on négligera l'amortissement et la réflexion des vibrations.

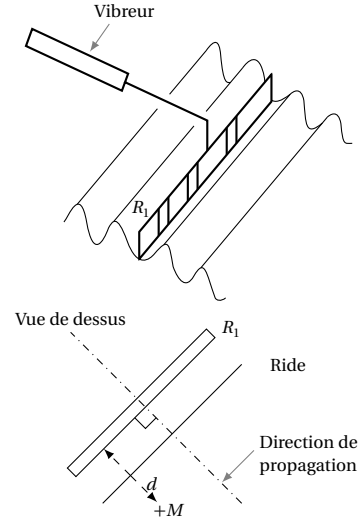
#### Partie A

Une règle  $R_1$ , dont le plan est perpendiculaire à la surface libre d'un liquide, est disposée de telle sorte qu'elle effleure la surface du liquide sur toute sa longueur  $l$ . La règle est fixée à un vibreur qui lui communique un mou-

vement sinusoïdal vertical, d'équation

$$z = a \sin(2\pi f t)$$

avec  $a = 2 \text{ mm}$  et  $f = 100 \text{ Hz}$ . On voit alors apparaître, de part et d'autre de  $R_1$ , des rides, parallèles à la règle, de longueur  $l$ , qui s'éloignent de  $R_1$ , avec une célérité constante  $c = 80 \text{ cm s}^{-1}$ . On obtient donc une onde rectiligne.



**8.1.** Déterminer l'équation horaire  $z_M(t) = f(t, d)$  du mouvement d'un point  $M$  de la surface du liquide situé à la distance  $d$  de  $R_1$ .

**8.2.** A quelle distance de  $R_1$  se trouve le front de la perturbation aux instants  $t_1 = 2 \times 10^{-2} \text{ s}$  et  $t_2 = 2,25 \times 10^{-2} \text{ s}$ .

**8.3.** Tracer les courbes représentant l'aspect de la surface du liquide, dans un plan vertical orthogonal à aux instants  $t_1$  et  $t_2$ .

**8.4.** On éclaire la surface du liquide à l'aide d'un stroboscope; la fréquence des éclairs  $f_e$  peut varier entre 30 et 400 Hz.

**8.4.1.** Décrire ce que l'on observe lorsque  $f_e = 50 \text{ Hz}$ . Justifier. Quelle est la distance qui sépare deux rides consécutives?

**8.4.2.** Mêmes questions lorsque  $f_e = 200 \text{ Hz}$ .

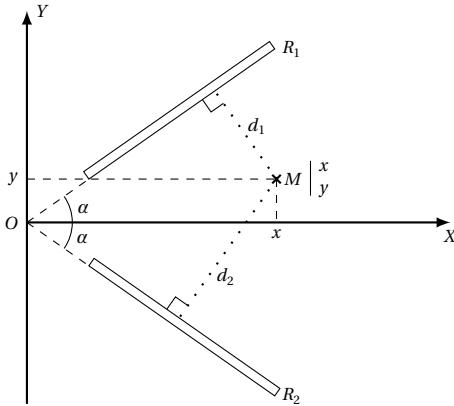
**8.4.3.** On choisit  $f_e = 105 \text{ Hz}$ . Décrire le mouvement apparent observé. Justifier.

#### Partie B

On dispose d'une seconde règle  $R_2$ , identique à  $R_1$ . Les deux règles sont animées du même mouvement sinusoïdal vertical, d'amplitude  $a = 2 \text{ mm}$ , de fréquence  $f = 100 \text{ Hz}$  et vibrent en phase.  $R_1$  et  $R_2$  effleurent la surface du liquide et sont placées comme l'indique la Figure.



## 9.7. Enoncés des exercices et problèmes



La célérité des ondes vaut toujours  $c = 80 \text{ cm s}^{-1}$ .

**8.1.** Reproduire la figure 2 et indiquer les limites du champ d'interférences.

**8.2.** Soit un point  $M(x, y)$  appartenant au champ d'interférences.

**8.2.1.** Donner l'équation horaire  $z_{1M}(t, x, y)$  du mouvement de  $M$  dû à l'onde provenant de  $R_1$ .

**8.2.2.** Donner l'équation horaire  $z_{2M}(t, x, y)$  du mouvement de  $M$  dû à l'onde provenant de  $R_2$ .

**8.2.3.** Montrer que l'élongation résultante au point  $M$  peut se mettre sous la forme :

$$z_M(t, x, y) = 2a \sin \left[ 2\pi f \left( t - \frac{x \tan \alpha}{c \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \right) \right] \cdot \cos \left( \frac{2\pi f y}{c \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \right)$$

Rappel : la distance  $d$  d'un point  $P(x_p, y_p)$  à une droite  $D$  d'équation  $kx + qy = 0$  ( $k, q \in \mathbb{R}^2$ ) peut s'écrire :

$$d = \frac{Kx_p + qy_p}{\sqrt{K^2 + q^2}}$$

**8.3.** Donner l'équation des franges d'amplitude maximale et celle des franges d'amplitude nulle. Quelle est la forme de ces franges ?

**8.4.** Dans le cas où  $\alpha = 45^\circ$ , faire un schéma des franges d'interférences et préciser la distance qui sépare deux franges consécutives de même nature.

### Exercice 9.

Soit une lame vibrante, soumise à des vibrations sinusoïdales, verticales, d'amplitude  $a = 2 \text{ mm}$ , de fréquence  $f = 100 \text{ Hz}$ . À l'une des extrémités  $O$  de la lame on attache une corde élastique, horizontale, passant sur la gorge d'une poulie. Un dispositif amortisseur empêche la réflexion des ondes en  $A$ , point de contact de la corde avec la poulie. La corde étant tendue par une masse  $m = 100 \text{ g}$ , la vitesse de propagation des ondes vaut dans ce cas  $20 \text{ m s}^{-1}$ , et on rappelle qu'elle est donnée par la relation :

$$V = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$F$  désignant la tension de la corde et  $\mu$  sa masse linéaire.

**9.1.** Etablir l'équation du point  $O$  de la source, sachant qu'à l'instant  $t = 0$ , il passe par l'origine avec une vitesse positive vers le haut.

**9.1.1.** Etablir l'équation horaire d'un point  $M$  situé à la distance  $x$  de la source  $O$ .

**9.1.2.** A.N. : Calculer la masse linéaire de la corde et comparer le mouvement de  $M$  avec celui de  $O$  pour  $x = OM = 25 \text{ cm}$ . (On prendre  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ ).

**9.1.3.** Représenter l'aspect de la corde aux instants  $t_1 = 0,05 \text{ s}$  et  $t_2 = 0,055 \text{ s}$  en supposant que les vibrations débutent à l'instant  $t = 0$ .

**9.2.** On supprime maintenant le système amortisseur de telle sorte que les ondes se réfléchissent au point  $A$  qui reste fixe.

**9.2.1.** Pour la valeur  $m_0 = 100 \text{ g}$  de la masse suspendue à la corde, on a  $OA = l_0 = 1 \text{ m}$ ; décrire le phénomène observé et déterminer le nombre  $n_0$  de fuseaux visibles si la fréquence  $f = 100 \text{ Hz}$ ,  $O$  étant considéré comme un noeud  $d$  de vibration.

**9.2.2.** On fait varier la longueur  $l$  de la partie vibrante de la corde en déplaçant la poulie, la masse  $m_0$  restant constante. Etablir la relation existant entre le nombre  $n_1$  de fuseaux, la longueur  $l_1 = OA_1$  de la corde,  $l_0$  et  $n_0$ . A.N. :  $n_1 = 8$ , calculer  $l_1$ .

**9.2.3.** On maintient la longueur  $l = l_0 = 1 \text{ m}$  constante et on suspend à l'extrémité de la corde des masses différentes. Etablir la relation existant entre le nombre  $n_2$  de fuseaux, la masse  $m_2$ ,  $m_0$  et  $n_0$ . A.N. :  $n_2 = 5$ , calculer  $m_2$ .

**9.3.** En maintenant le dispositif du 4.2.3., on désire observer le système à l'aide d'un stroboscope dont la fréquence  $f'$  des éclairs varient entre  $25 \text{ Hz}$  et  $500 \text{ Hz}$ .

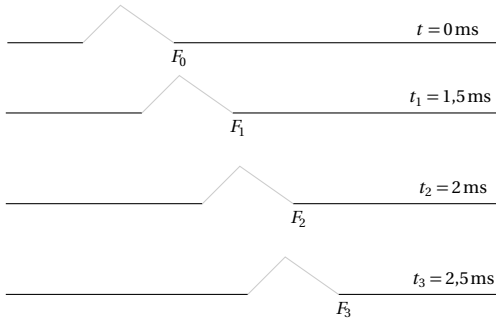
**9.3.1.** Pour quelles valeurs de la fréquence  $f'$  observe-t-on une seule corde immobile ?

**9.3.2.** Qu'observe-t-on si  $f' = 200 \text{ Hz}$ . Représenter alors le phénomène dans le cas où les ventres sont à leur élongation maximale.

## 9.8 Solutions des exercices et problèmes

### Solution 1. (p. 190)

Lors de la propagation de l'ébranlement, chaque point de la corde reproduit le mouvement de la source avec un retard  $\theta = \frac{x}{c} \Rightarrow x = c\theta$ .



Soit  $F_0$  la position du front du signal à la date  $t_0 = 0$  s. A la date  $t$ , le front du signal se trouve en  $F$  tel que :

$$F_0 F = x = c(t - t_0) = ct$$

$$\text{à } t = t_1 = 1,5 \times 10^{-3} \text{ s}$$

$$\Rightarrow x_1 = 20 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3}$$

$$= 0,03 \text{ m} = 3 \text{ cm}$$

$$\text{à } t = t_2 = 2 \times 10^{-3} \text{ s}$$

$$\Rightarrow x_2 = 20 \cdot 2 \cdot 10^{-3}$$

$$= 0,04 \text{ m} = 4 \text{ cm}$$

$$\text{à } t = t_3 = 2,5 \times 10^{-3} \text{ s}$$

$$\Rightarrow x_3 = 20 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3}$$

$$= 0,05 \text{ m} = 5 \text{ cm}$$

### Solution 2. (p. 190)

Soit  $f = 50 \text{ Hz}$  la fréquence du vibreur.

**2.1.** Calcul de la longueur d'onde  $\lambda$  :

$$\lambda = cT = \frac{c}{f} = \frac{10}{50} = 0,2 \text{ m} = 20 \text{ cm}$$

**2.2.** Comparaison des états vibratoires de deux points distants de  $d_1 = 40 \text{ cm}$ .

Faisons le rapport  $\frac{d_1}{\lambda}$  :

$$\frac{d_1}{\lambda} = \frac{40}{20} = 2$$

$$(2 \in \mathbb{N}) \Rightarrow d_1 = 2\lambda$$

$d_1$  étant égal à un nombre entier de  $\lambda$ , les deux points distants de  $d_1$  vibrent en phase.

**2.3.** Comparaison des états vibratoires de deux points distants de  $d_2 = 30 \text{ cm}$ .

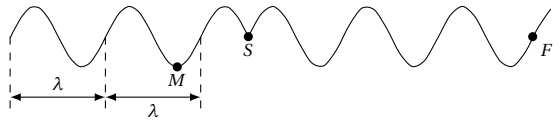
Faisons le rapport  $\frac{d_2}{\lambda}$  :

$$\frac{d_2}{\lambda} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow d_2 = 3\frac{\lambda}{2}$$

où 3 est un nombre impair. Donc les deux points distants de  $d_2$  (égal à un nombre impair de demi-longueur d'onde) vibrent en opposition de phase.

### Solution 3. (p. 190)



**3.1.** Déterminons :

■ La longueur d'onde  $\lambda$ .

La courbe ci-dessus représente la sinusoïde des espaces de la surface de l'eau. La période de cette sinusoïde est la longueur d'onde  $\lambda$ . Sur le graphique

$$\lambda = 2 \text{ cm} = 2 \times 10^{-2} \text{ m}$$

■ L'amplitude  $a$ .

$$a = M_0 M = 3 \text{ mm} = 3 \times 10^{-3} \text{ m}$$

■ célérité  $c$ .

$$\lambda = cT$$

$$\Rightarrow c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

$$c = 2 \times 10^{-2} \cdot 50 = 1 \text{ m s}^{-1}$$

**3.2.** Date  $t_1$  à laquelle correspond le schéma.

Considérons la distance  $SF$ . Cette distance  $SF$  est la distance parcourue par le front de l'onde à la date  $t_1$ . Graphiquement,

$$SF = 5 \text{ cm} = 5 \times 10^{-2} \text{ m}$$

Or

$$SF = c t_1$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{SF}{c}$$

$$= \frac{5 \times 10^{-2}}{1} = 5 \times 10^{-2} \text{ s}$$

Remarque. On peut aussi constater que  $SF$  correspond à  $2,5\lambda$  :

$$\Rightarrow t_1 = 2,5T = \frac{2,5 \cdot 1}{f}$$

$$= \frac{2,5}{50} = 5 \times 10^{-2} \text{ s}$$

**3.3.** Equation horaire du mouvement de  $S$ .

Soit :

$$y_S = a \cos(\omega t + \phi)$$

## 9.8. Solutions des exercices et problèmes

avec

$$a = 3 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\omega = 2\pi f = 100\pi$$

Déterminons  $\phi$ .À  $t = 0$ ,  $S$  commence son mouvement vers le haut donc :

$$y_{S,0} = 0$$

$$v(t=0) > 0$$

à  $t = 0$ 

$$y_{S,0} = a \cos \phi = 0$$

$$\Rightarrow \cos \phi = 0$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ou } \phi = -\frac{\pi}{2}$$

$$v = \frac{dy_S}{dt} = -a\omega \sin(\omega t + \phi)$$

à  $t = 0$ ,  $v_0 = -a\omega \sin \phi$ .

$$\text{Pour } \phi = \frac{\pi}{2} \quad v_0 = -a\omega \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -a\omega < 0$$

$$\text{Pour } \phi = -\frac{\pi}{2} \quad v_0 = -a\omega \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = +a\omega > 0$$

Puisque à  $t = 0$ ,  $v > 0$  (d'après les hypothèses) nous retenons que  $\phi = -\frac{\pi}{2}$  et

$$y_S(\text{en m}) = 3 \times 10^{-3} \cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 3 \times 10^{-3} \sin 100\pi t$$

**3.4. Etat vibratoire du point M.**Le point  $M$  reproduit le mouvement de  $S$  avec un retard

$$\theta = \frac{SM}{c} = \frac{d}{c}$$

Donc :

$$y_M(t) = y_S\left(t - \frac{d}{c}\right) = a \sin \omega \left(t - \frac{d}{c}\right)$$

$$= a \sin \left(\omega t - \frac{\omega d}{c}\right)$$

$$y_M(t) = 3 \times 10^{-3} \sin \left(100\pi t - 100\pi \frac{8,5 \times 10^{-2}}{1}\right)$$

$$= 3 \times 10^{-3} \sin(100\pi t - 8,5\pi)$$

Comparons le mouvement de  $M$  à celui de  $S$ . Comparons la distance  $d$  à  $\lambda$ .

$$\frac{d}{\lambda} = \frac{8,5 \times 10^{-2}}{2 \times 10^{-2}} = \frac{8,5}{2}$$

$$\Rightarrow d = 8,5 \frac{\lambda}{2} = \frac{17}{2} \frac{\lambda}{2} = 17 \frac{\lambda}{4}$$

 $S$  et  $M$  étant situés à un nombre entier de quart longueur d'onde l'un de l'autre, ils vibrent en *quadrature de phase*.**Remarque.** Nous pouvons aussi analyser le déphasage  $\phi$  entre  $y_S$  et  $y_M$  :

$$\phi = 8,5\pi = 17 \frac{\pi}{2}$$

Le décalage horaire  $\theta$  est :

$$\theta = T \frac{\phi}{2\pi} = T \cdot 17 \frac{\pi}{2} \frac{1}{2\pi} = \frac{17 \cdot T}{4}$$

Le décalage horaire étant égal à un nombre entier de quart de période,  $S$  et  $M$  vibrent en *quadrature de phase*.**3.5. Stroboscopie de la surface de l'eau.**■ Aspect de la surface de l'eau pour  $f_e = 25 \text{ Hz}$ .

$$T_e = \frac{1}{f_e} = \frac{1}{25} = 0,04 \text{ s}$$

et  $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = 0,02 \text{ s}$ .  $T_e = 2T \Rightarrow$  entre deux éclairs,l'onde s'est propagée exactement de  $2\lambda$ . On observe à la surface de l'eau des rides circulaires qui paraissent immobiles.■ Observation pour  $f_e$  légèrement inférieure à  $25 \text{ Hz}$ . Dans ce cas  $T_{e'} > T_e \Rightarrow T_{e'} > 2T \Rightarrow$  entre deux éclairs, l'onde s'est propagée d'une distance  $d'$  légèrement supérieure à  $2\lambda$ . L'observateur à l'impression qu'entre deux éclairs, l'onde s'est propagée de  $(d' - 2\lambda)$ . On observe donc à la surface de l'eau des rides circulaires qui semblent se propager lentement dans le sens réel.**Solution 4. (p. 191)****4.1. Définition et calcul de la valeur de la longueur d'onde  $\lambda$ .**La longueur d'onde est égale à l'espace parcouru par le mouvement vibratoire pendant une période  $T$  de la source. Sa valeur est :

$$\lambda = cT = \frac{c}{f} = \frac{10}{50} = 0,2 \text{ m} = 20 \text{ cm}$$

**4.2.****4.2.1. Equation du mouvement du point  $O$ .**

Cette équation est de la forme :

$$y_O = a \cos(\omega t + \phi)$$

avec  $a = 5 \times 10^{-3} \text{ m}$ ;  $\omega = 2\pi f = 100\pi$ .Déterminons  $\phi$  à partir de la position et de la vitesse à  $t = 0$  :À  $t = 0$ ,

$$y_0 = a \cos \phi = 0$$

$$\Rightarrow \cos \phi = 0$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ou } \phi = -\frac{\pi}{2}$$

$$v = \frac{dy_S}{dt} = -a\omega \sin(\omega t + \phi)$$

à  $t = 0$ ,  $v_0 = -a\omega \sin \phi$ .

$$\text{Pour } \phi = \frac{\pi}{2} \quad v_0 = -a\omega \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -a\omega < 0$$

$$\text{Pour } \phi = -\frac{\pi}{2} \quad v_0 = -a\omega \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = a\omega > 0$$

Or à  $t = 0$ ,  $O$  passe par sa position d'équilibre ( $\Rightarrow y_0 = 0$ ) dans le sens des elongations positives ( $\Rightarrow v_0 > 0$ ). La va-

leur de  $\phi$  à retenir est donc  $\phi = -\frac{\pi}{2}$  et

$$\begin{aligned} y_O(\text{en m}) &= 5 \times 10^{-3} \cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 5 \times 10^{-3} \sin 100\pi t \end{aligned}$$

#### 4.2.2. Equation du mouvement de A.

Soit  $d = OA = 5 \text{ cm} = 5 \times 10^{-2} \text{ m}$ . Le point A reproduit le mouvement de O avec un retard  $\theta = \frac{OA}{c} = \frac{d}{c}$ . Donc :

$$\begin{aligned} y_A(t) &= y_O\left(t - \frac{d}{c}\right) = a \sin \omega \left(t - \frac{d}{c}\right) \\ &= a \sin \left(\omega t - \frac{\omega d}{c}\right) \\ y_A(t) &= 5 \times 10^{-3} \sin \left(100\pi t - 100\pi \frac{5 \times 10^{-2}}{10}\right) \\ &= 5 \times 10^{-3} \sin \left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

#### Equation du mouvement de B.

Soit  $d = OB = 15 \text{ cm} = 15 \times 10^{-2} \text{ m}$ . Le point B reproduit le mouvement de O avec un retard  $\theta = \frac{OB}{c} = \frac{d'}{c}$ . Donc :

$$\begin{aligned} y_B(t) &= y_O\left(t - \frac{d'}{c}\right) = a \sin \omega \left(t - \frac{d'}{c}\right) \\ &= a \sin \left(\omega t - \frac{\omega d'}{c}\right) \\ y_B(t) &= 5 \times 10^{-3} \sin \left(100\pi t - 100\pi \frac{15 \times 10^{-2}}{10}\right) \\ &= 5 \times 10^{-3} \sin \left(100\pi t - \frac{3\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Différence de phase entre les mouvements des points A et B.

Soient :

$$\begin{aligned} \psi_A &= 100\pi t - \frac{\pi}{2} \\ \psi_B &= 100\pi t - \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

les phases respectives des points A et B.

$$\begin{aligned} \phi &= \psi_A - \psi_B \\ \phi &= \left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right) - \left(100\pi t - \frac{3\pi}{2}\right) = \pi \end{aligned}$$

Donc les points A et B vibrent en opposition de phase.

#### 4.3. Aspect de corde à la date $t = 0,04 \text{ s}$ .

Soit un point M d'abscisse  $x$ . A la date  $t = 0,04 \text{ s}$ , l'élongation du point M est :

$$\begin{aligned} y_M &= a \sin 100\pi \left(t - \frac{x}{c}\right) \\ &= 5 \times 10^{-3} \sin 100\pi \left(0,04 - \frac{x}{10}\right) \\ y_M &= 5 \times 10^{-3} \sin(4\pi - 10\pi x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow y(x)$  est une fonction sinusoïdale. La corde présente l'aspect d'une sinusoïde.

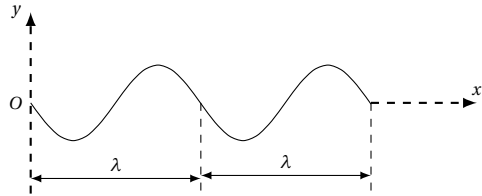
Déterminons la longueur  $l$  de la corde affectée par l'onde.

$$l = ct = 10 \cdot 0,04 = 0,4 \text{ m}$$

Comparons  $l$  à  $\lambda$  :

$$\begin{aligned} \frac{l}{\lambda} &= \frac{0,4}{0,2} = 2 \\ \Rightarrow l &= 2\lambda \end{aligned}$$

D'où l'aspect de la corde :



■ Abscisse des points de la corde qui vibrent en phase avec O.

Si  $x$  est l'abscisse d'un point M vibrant en phase avec O,  $x = k\lambda$  où  $k \in \mathbb{N}^*$  avec  $\lambda = 0,2 \text{ m}$ ;  $x = 0, 2k(\text{m})$ .

■ Abscisse des points de la corde qui vibrent en opposition de phase avec O.

Si  $x$  est l'abscisse d'un point M vibrant en opposition de phase avec O,  $x = (2k' + 1)\frac{\lambda}{2}$  où  $k' \in \mathbb{N}$  avec  $\lambda = 0,2 \text{ m}$ ;  $x = 0,1 + 0,2k'(\text{m})$

4.4. Vitesse des points de la corde à la date  $t = 0,04 \text{ s}$ . L'élongation d'un point d'abscisse  $x$  étant :

$$y = a \sin(100\pi t - 10\pi x)$$

sa vitesse est :

$$\begin{aligned} v &= \frac{dy}{dt} = 100\pi a \cos(100\pi t - 10\pi x) \\ &= 0,5\pi \cos(100\pi t - 10\pi x) \\ v &= 0,5\pi \cos(100\pi \cdot 0,04 - 10\pi x) \\ &= 0,5 \cos(10\pi x) \end{aligned}$$

■ Position des points ayant une vitesse positive.

$v > 0$  si  $\cos(10\pi x) > 0$  or

$$\begin{aligned} \cos(10\pi x) &> 0 \\ \Rightarrow -\frac{\pi}{2} &< 10\pi x < +\frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow -0,05 &< x < 0,05 \end{aligned}$$

$x$  étant positif, nous retenons que tous les points d'abscisse  $x < 0,05 \text{ m}$  ont une vitesse positive à  $t = 0,04 \text{ s}$ .

■ Position des points ayant une vitesse négative.

$v < 0$  si  $\cos(10\pi x) < 0$  or

$$\begin{aligned} \cos(10\pi x) &< 0 \\ \Rightarrow \frac{\pi}{2} &< 10\pi x < +\frac{3\pi}{2} \\ \Rightarrow 0,05 &< x < 0,15 \end{aligned}$$

Tous les points d'abscisse  $0,05 \text{ m} < x < 0,15 \text{ m}$  ont une vitesse négative à  $t = 0,04 \text{ s}$ .

### Solution 5. (p. 191)

5.1. Etude stroboscopique de la pointe et de la surface de l'eau.

5.1.1. Explication de l'immobilité apparente de la



## 9.8. Solutions des exercices et problèmes

pointe.

Entre deux éclairs consécutifs du stroboscope, la pointe effectue exactement un nombre entier d'oscillations et elle est surprise dans le même sens. L'observateur a l'impression que la pointe est immobile.

Fréquence  $f$  et période  $T$  des oscillations.

$T_e = kT$  (en raison de ce qui précède) où  $k \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{f_e} = \frac{kT}{f}$$

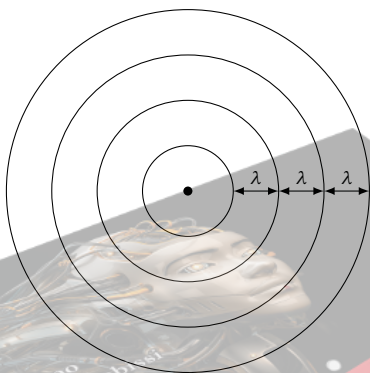
$$\Rightarrow f_e = \frac{f}{k}$$

$f_e$  est maximale pour  $k = 1$ . Donc  $f_e(\max) = f = 25 \text{ Hz}$ . Nous déduisons :

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{25} = 0,04 \text{ s}$$

### 5.1.2. Aspect de la surface de l'eau pour $f_e = 25 \text{ Hz}$ .

Les vibrations de la pointe produisent à la surface de l'eau des rides circulaires centrées en  $O$  (point où la pointe effleure la surface de l'eau). Ces rides ayant la même fréquence ( $f = 25 \text{ Hz}$ ) que la pointe, pour  $f_e = 25 \text{ Hz}$ , ces rides centrées en  $O$  et équidistantes les unes des autres, paraissent immobiles. La distance qui sépare deux rides consécutives est égale à la longueur d'onde  $\lambda$ . (voir Figure)



Aspect de la surface de l'eau pour  $f_e = 50 \text{ Hz}$ .

Dans ce cas

$$T_e = \frac{1}{f_e} = \frac{1}{50}$$

$$= 0,02 \text{ s} = \frac{T}{2}$$

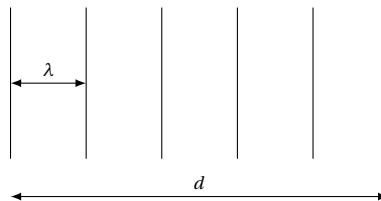
Entre deux éclairs consécutifs, une ride ne progresse que de  $\frac{\lambda}{2}$ . L'observateur perçoit deux fois plus de rides circulaires et immobiles.

### 5.1.3. Calcul de $\lambda$ et de $c$ .

Soit  $d = 12 \text{ cm}$ , la distance qui sépare six crêtes consécutives. Pour  $f_e = 25 \text{ Hz} = f$ , la distance qui sépare deux crêtes consécutives est égale à  $\lambda$ . Donc :

$$d = 5\lambda$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{d}{5} = 2,4 \text{ cm}$$



Calcul de  $c$ .

$$\lambda = cT$$

$$\Rightarrow c = \frac{\lambda}{T}$$

$$= 2,4 \times 10^{-2} \cdot 25 = 0,6 \text{ m s}^{-1}$$

### 5.2. ■ Equation horaire du mouvement du point $O$ . (voir exercice 3 question 3.3.)

$$y_O = a \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = a \sin \omega t$$

avec  $a = 5 \times 10^{-3} \text{ m}$ ;  $\omega = 2\pi f = 50\pi$ ,  
 $y_O = 5 \times 10^{-3} \sin 50\pi t$  (en m).

### ■ Equation horaire du mouvement de $M$ .

Soit  $d = OM = 7,8 \text{ cm} = 7,8 \times 10^{-2} \text{ m}$ . Le point  $M$  reproduit le mouvement de  $O$  avec un retard  $\theta = \frac{OM}{c} = \frac{d}{c}$ . Donc :

$$y_M(t) = y_O\left(t - \frac{d}{c}\right) = a \sin \omega \left(t - \frac{d}{c}\right)$$

$$= a \sin \left(\omega t - \frac{\omega d}{c}\right)$$

$$y_M(t) = 5 \times 10^{-3} \sin \left(50\pi t - 50\pi \frac{7,8 \times 10^{-2}}{0,6}\right)$$

$$= 5 \times 10^{-3} \sin (50\pi t - 6,5\pi)$$

$$y_M(t) = 5 \times 10^{-3} \sin \left(50\pi t - 13 \frac{\pi}{2}\right)$$

### ■ Comparaison des mouvements de $O$ et de $M$ . Soient :

$$\psi_O = 50\pi t$$

$$\psi_M = 50\pi t - 13 \frac{\pi}{2}$$

les phases respectives des points  $O$  et  $M$ .

$$\phi = \psi_O - \psi_M$$

$$= (50\pi t) - \left(50\pi t - 13 \frac{\pi}{2}\right) = 13 \frac{\pi}{2}$$

$\phi$  est de la forme :

$$\phi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

avec  $k = 3$ . Donc  $M$  et  $O$  vibrent en *quadrature de phase*.

### 5.3. Représentation de l'état de la surface de l'eau le long d'un axe $Ox$ à la date $t = 0,16 \text{ s}$ .

Soit  $y(x)$  l'élongation d'un point  $M$  de l'axe  $Ox$ , d'abscisse  $x$ .

$$y(x) = a \sin \omega \left(t - \frac{x}{c}\right)$$

(voir exercice 4 ; 4.3.)

La distance  $l$  à laquelle se trouve le front de l'onde est :

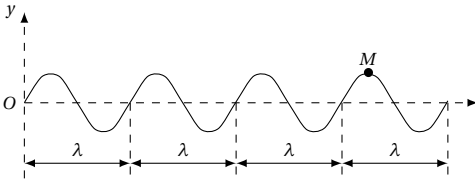


$$l = ct = 0,6 \cdot 0,16 = 0,096 \text{ m} = 9,6 \text{ cm.}$$

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{9,6}{2,4} = 4$$

$$\Rightarrow l = 4\lambda$$

d'où l'aspect de la corde :



Plaçons le point M sur le schéma.

$$\frac{OM}{\lambda} = \frac{7,8}{2,4} = 3,25 = 3 + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow OM = \left(3 + \frac{1}{4}\right)\lambda$$

### Solution 6. (p. 191)

#### 6.1. Relation entre $f_e$ et $f$ à l'immobilité apparente.

Pour obtenir l'immobilité apparente, il faut qu'entre deux éclairs (durée  $T_e$ ), la pointe effectue  $k$  oscillations (de durée  $kT$ ).

$$T_e = kT$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f_e} = \frac{k}{f}$$

$$\Rightarrow f_e = \frac{f}{k}$$

Valeur maximale de  $f_e$ .

$f_e$  est maximale lorsque  $k$  est minimale soit  $k = 1$  donc  $f_e(\text{max}) = f = 25 \text{ Hz}$ .

#### 6.2. Aspect de la surface du liquide.

Pour  $f_e = \frac{f}{k}$ , nous observons à la surface du liquide des rides circulaires équidistantes les unes des autres et qui paraissent immobiles.

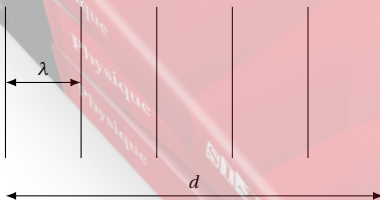
#### 6.3.

##### ■ Définition de la longueur d'onde.

La longueur d'onde  $\lambda$  est la distance parcourue par l'onde progressive pendant une durée égale à la période  $T$  de la source.

Calcul de la longueur d'onde  $\lambda$ .

Soit  $d$  la distance séparant 6 crêtes consécutives.



$$d = 5\lambda$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{d}{5} = \frac{10}{5} = 2 \text{ cm}$$

Calcul de la célérité  $c$ .

$$\lambda = cT = \frac{c}{f}$$

$$\Rightarrow c = \lambda f$$

$$c = 2 \times 10^{-2} \cdot 25 = 0,5 \text{ m s}^{-1}$$

#### ■ Equation du mouvement du point O.

Cette équation est de la forme :

$$y_O = a \cos(2\pi f t + \phi)$$

où  $a = 2,5 \text{ mm} = 2,5 \times 10^{-3} \text{ m}$  car le mouvement de O a la même amplitude que le mouvement de la pointe. Déterminons  $\phi$  à partir de la position et de la vitesse de O à la date  $t = 0$ .

$$y_O = a \cos(2\pi f t + \phi)$$

$$v = \frac{dy_O}{dt} = -a2\pi f \sin(2\pi f t + \phi)$$

à  $t = 0$ ,

$$y_O(0) = a \cos \phi = 0$$

$$\Rightarrow \phi = +\frac{\pi}{2}$$

ou  $\phi = -\frac{\pi}{2}$ . Le choix de la valeur de  $\phi$  se déduit de la vitesse à  $t = 0$ . Pour  $t = 0$ ,  $v_0 = -2\pi a f \sin \phi$ ; or à  $t = 0$ , la vitesse est positive. Donc :

$$-2\pi a f \sin \phi > 0$$

$$\Rightarrow \sin \phi < 0$$

$$\Rightarrow \phi = -\frac{\pi}{2}$$

Donc

$$y_O = 2,5 \times 10^{-3} \cos\left(50\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

(en m).

#### 6.4. Equation du mouvement des points M et N.

Un point P d'abscisse  $x = OP$  du milieu propagateur reproduit le mouvement de O avec un décalage horaire  $\theta = \frac{x}{c}$ . En d'autres termes, à la date  $t$ , P reproduit le mouvement qu'avait le point O à la date  $t - \theta = t - \frac{x}{c}$ .

On écrit :

$$y_P(t) = y_O\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

Ainsi,

$$y_M(t) = y_O\left(t - \frac{x_M}{c}\right)$$

$$= a \cos\left(2\pi f t - \frac{2\pi f x_M}{c} - \frac{\pi}{2}\right)$$

A.N.  $x_M = 3 \times 10^{-3} \text{ m}$

$$y_M = 2,5 \times 10^{-3} \cos\left(50\pi t - \frac{50\pi \cdot 3 \times 10^{-2}}{0,5} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 2,5 \times 10^{-3} \cos\left(50\pi t - \frac{7\pi}{2}\right)$$

De même :

$$y_N(t) = 2,5 \times 10^{-3} \cos(50\pi t - 6\pi)$$

## 9.8. Solutions des exercices et problèmes

$$= 2,5 \times 10^{-3} \cos(50\pi t)$$

Comparaison des mouvements de  $M$  et  $N$ .

Calculons la différence de phase  $\Delta\phi$  entre les mouvements de  $M$  et de  $N$ .

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \psi_M - \psi_N \\ &= \left(50\pi t - \frac{7\pi}{2}\right) - (50\pi t - 6\pi) \\ &= 5\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi\end{aligned}$$

Donc  $M$  et  $N$  sont en quadrature de phase.

**6.5.** La pointe est remplacée par une fourche.

**6.5.1.** Aspect de la surface du liquide.

À la surface du liquide, on voit naître en  $O_1$  et  $O_2$  des ondes progressives circulaires qui se superposent en formant des rides de forme hyperbolique.

**6.5.2.** Condition pour qu'un point de la surface du liquide soit.

**6.5.2.1.** Sur une ligne vibration maximale.

L'élongation  $y$  de la vibration résultante à un point  $M$  à l'instant  $t$  est donnée par la relation : (Voir cours)

$$y = 2a \cos \frac{\pi}{\lambda}(d_2 - d_1) \cos \left[ \frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{\lambda}(d_1 + d_2) \right]$$

Pour  $\phi_1 = \phi_2 = 0$  où

$$A = 2a \cos \frac{\pi}{\lambda}(d_2 - d_1)$$

est l'amplitude. Rappelons que  $d_2 = O_2M$  et  $d_1 = O_1M$ . Une ligne de vibration maximale correspond à une amplitude maximale de la vibration résultante. Soit :

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{\lambda}(d_2 - d_1) &= \pm 1 \\ \Rightarrow \frac{\pi}{\lambda}|d_2 - d_1| &= k\pi \\ \Rightarrow |d_2 - d_1| &= k\lambda\end{aligned}$$

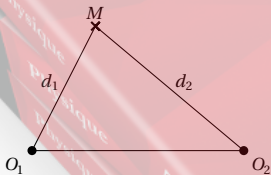
$k \in \mathbb{N}$ .

**6.5.2.2.** Sur une ligne de vibration nulle.

Il faut que :

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{\lambda}(d_2 - d_1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\pi}{\lambda}|d_2 - d_1| &= (2k+1)\frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow |d_2 - d_1| &= (2k+1)\frac{\lambda}{2}\end{aligned}$$

$k \in \mathbb{N}$ .



Etat vibratoire du point  $P$ .

Soit  $d_1 = PO_1 = 17 \times 10^{-2}$  m et  $d_2 = PO_2 = 10 \times 10^{-2}$  m.

Comparons  $|d_2 - d_1|$  à  $\lambda$  :

$$\frac{|d_2 - d_1|}{\lambda} = \frac{7 \times 10^{-2}}{2 \times 10^{-2}} = \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow |d_2 - d_1| = 7 \frac{\lambda}{2}$$

La différence de marche est égale à un multiple impair de demi-longueur d'onde. Donc  $P$  est situé sur une ligne d'amplitude nulle.

Etat vibratoire du point  $Q$ .

Soit  $d_{1'} = QO_1 = 9 \times 10^{-2}$  m et  $d_{2'} = QO_2 = 5 \times 10^{-2}$  m.

Comparons  $|d_2 - d_1|$  à  $\lambda$  :

$$\frac{|d_{2'} - d_{1'}|}{\lambda} = \frac{4 \times 10^{-2}}{2 \times 10^{-2}} = 2$$

$$\Rightarrow |d_{2'} - d_{1'}| = 2\lambda$$

La différence de marche est égale à un multiple entier de longueur d'onde. Donc  $Q$  vibre avec une amplitude maximale.

**6.5.3.** Nombre de points de vibration maximale, situés sur  $O_1O_2$ .

Ce nombre est déterminé par la condition :

$$\begin{aligned}|d_2 - d_1| &< O_1O_2d' \\ \text{où } -d' &< d_2 - d_1 < d'\end{aligned}$$

Pour les points de vibration maximale,

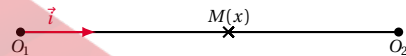
$$\begin{aligned}d_2 - d_1 &= k\lambda \\ \Rightarrow -d' &< k\lambda < d' \\ \Rightarrow \frac{-d'}{\lambda} &< k < \frac{d'}{\lambda}\end{aligned}$$

A.N.  $d' = 7,2$  cm,  $\lambda = 2$  cm  $\Rightarrow -3,6 < k < 3,6$ . Puisque  $k \in \mathbb{Z}$ , il peut prendre les valeurs suivantes :

$$\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$$

A chaque valeur de  $k$  correspond une ligne de vibration maximale. Or toutes les hyperboles de foyer  $O_1$  et  $O_2$ , coupent le segment  $O_1O_2$ . Donc sur  $O_1O_2$ , on dénombre 7 points de vibration maximale.

Déterminons leur position à partir de  $O_1$ .



Soit un point  $M$  d'abscisse  $x$  dans le repère  $((O_1, \vec{i}))$ , et appartenant à une ligne de vibration maximale. Nous avons la double égalité :

$$\begin{cases} d_2 + d_1 = d' \end{cases} \quad (\text{S9.1})$$

$$\begin{cases} d_2 - d_1 = k\lambda \end{cases} \quad (\text{S9.2})$$

Faisons (S9.1) – (S9.2) et posons  $x = O_1M = d_1$ . On obtient :

$$x = \frac{d' - k\lambda}{2}$$

A.N.  $d' = 7,2$  cm,  $\lambda = 2$  cm ;  $x = 3,6 - k$  (cm). Pour les différentes valeurs de  $k$ , nous avons :

k	-3	-2	-1	0	1	2	3
x (en cm)	6,6	5,6	4,6	3,6	2,6	1,6	0,6

Nombre de points de vibration nulle.

Comme ci-dessus.

$$-d' < d_2 - d_1 < d'$$

avec

$$\begin{aligned}d_2 - d_1 &= (2k+1)\frac{\lambda}{2} \\ \Rightarrow -d' &< (2k+1)\frac{\lambda}{2} < d' \\ \Rightarrow -\frac{2d' + \lambda}{2\lambda} &< k < \frac{2d' - \lambda}{2\lambda}\end{aligned}$$

A.N.  $-4, 1 < k < 3, 1$  Le nombre entier  $k$  peut prendre les valeurs suivantes :

$$\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

On dénombre donc sur  $O_1 O_2$  8 points immobiles

### Solution 7. (p. 191)

#### 7.1.

**7.1.1.** Equation horaire du mouvement du point  $M$ .  
Soit  $y_S$  l'élongation du point  $S$ .

$$y_S(t) = a \cos(\omega t + \phi)$$

avec  $\omega = 2\pi f$  et  $a = 10^{-3}$  m. Déterminons  $\phi$  à partir de la position et de la vitesse à la date  $t = 0$ .

$$\begin{aligned}y_S &= a \cos(2\pi f t + \phi) \\ v_S &= \frac{dy_S}{dt} = -2\pi a f \sin(2\pi f t + \phi)\end{aligned}$$

à  $t = 0$ ,

$$\begin{aligned}y_S(0) &= a \cos \phi = 0 \\ \Rightarrow \phi &= +\frac{\pi}{2} \\ \text{ou } \phi &= -\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Le choix de la valeur de  $\phi$  se déduit de la vitesse à  $t = 0$  à  $t = 0$ ,  $v_{S0} = 2\pi a f \sin \phi$ . A  $t = 0$ , le mouvement de  $S$  est descendant  $\Rightarrow v_{S0} < 0$ . Donc

$$\begin{aligned}-2\pi a f \sin \phi &< 0 \\ \Rightarrow \sin \phi &> 0\end{aligned}$$

Des deux valeurs de  $\phi$  ci-dessus, nous choisissons :

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow y_S &= a \cos\left(2\pi f t + \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

A la date  $t$ ,  $M$  reproduit le mouvement qu'avait le point  $S$  à la date  $t - \frac{d}{c}$ .

$$\begin{aligned}y_M(t) &= y_S\left(t - \frac{d}{c}\right) \\ &= a \cos\left(2\pi f t - 2\pi \frac{fd}{c} + \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

**7.1.2.** Elongation et vitesse du point  $M$  pour  $d = 4 \times 10^{-2}$  m et  $t = 0,125$  s.

$$\begin{aligned}y_M &= 10^{-3} \cos\left(2\pi 100 \cdot 0,125 - 2\pi 100 \frac{4 \times 10^{-2}}{0,4} + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 0,63 \text{ m s}^{-1}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow y_M = 0$$

Vitesse du point  $M$ .

$$v_M = \frac{dy_M}{dt} = -2\pi a f \sin\left(2\pi f t - 2\pi \frac{fd}{c} + \frac{\pi}{2}\right)$$

Pour  $d = 4 \times 10^{-2}$  m et  $t = 0,125$  s

$$\begin{aligned}v_M &= -2\pi 10^{-3} \cdot 100 \cdot \\ &\cdot \sin\left(2\pi 100 \cdot 0,125 - 2\pi 100 \frac{4 \times 10^{-2}}{0,4} + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 0,63 \text{ m s}^{-1} \\ v_M &> 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow$  le mouvement de  $M$  est ascendant.

**7.1.3.** Distance  $l$  parcourue par l'onde à la date  $t = 0,125$  s.

$$l = ct = 0,4 \cdot 0,125 = 0,05 \text{ m} = 5 \text{ cm}$$

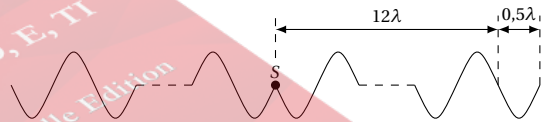
**7.1.4.** Aspect de la surface de l'eau à la date  $t = 0,125$  s. L'élongation d'un point  $M$  de la surface de l'eau est fonction du temps et de la distance  $d = SM$

$$\begin{aligned}y_M &= f(t, d) = a \cos\left(2\pi f t - 2\pi \frac{fd}{c} + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= a \cos\left(2\pi f t - 2\pi \frac{d}{\lambda} + \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

à  $t = 0,125$  s,  $y_M$  devient une fonction de  $d$  seulement. Ainsi, à  $t = 0,125$  s,

$$y_M(d) = a \cos\left(-2\pi \frac{d}{\lambda} + 25,5\pi\right)$$

Donc  $y(d)$  est une fonction sinusoïdale. Une coupe dans un plan vertical passant par  $S$ , montre que la surface de l'eau présente de part et d'autre de  $S$ , l'aspect d'une sinusoïde de période  $\lambda$ . Cette sinusoïde affecte une distance  $l = ct = 5$  cm de la surface de l'eau, correspondant à  $\frac{l}{\lambda} = \frac{5 \times 10^{-2}}{4 \times 10^{-3}} = 12,5$  longueur d'onde.



A  $d = 0$ ,  $y = 0$ ; à  $d = \frac{\lambda}{4}$ ,  $y = -a$ . Pour des raisons de mise en page, nous représentons les premières et les dernières sinusoïdes.

**7.2.** Interférence à la surface de l'eau.

**7.2.1.** Equation horaire du mouvement d'un point  $M$  situé à  $d_1$  de  $S_1$  et à  $d_2$  de  $S_2$ .

$S_1$  et  $S_2$  constituent deux sources secondaires des ondes. Leurs équations horaires sont :

$$\begin{aligned}y_{S1} &= a \cos(2\pi f t + \phi_1) \\ y_{S2} &= a \cos(2\pi f t + \phi_2)\end{aligned}$$

où  $\phi_1 = \phi_2 = \frac{\pi}{2}$  (car les conditions initiales sont les mêmes qu'au 2.1.1). Soit  $d_1 = S_1 M$  et  $d_2 = S_2 M$ . Déterminons les élongations  $y_1$  et  $y_2$  des vibrations issues de  $S_1$  et

## 9.8. Solutions des exercices et problèmes

$S_2$  au point  $M$ . A l'instant  $t$ , l'onde issue de  $S_1$ , reproduit en  $M$  le mouvement qu'avait  $S_1$  à l'instant  $\left(t - \frac{d_1}{c}\right)$  où  $c$  est la célérité de propagation de l'onde. On peut donc écrire que :

$$y_1 = y_{S1}\left(t - \frac{d_1}{c}\right) = a \cos\left[2\pi f\left(t - \frac{d_1}{c}\right) + \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Rightarrow y_1 = a \cos\left(2\pi f t - 2\pi f \frac{d_1}{c} + \frac{\pi}{2}\right)$$

De la même manière on montre que :

$$y_2 = y_{S2}\left(t - \frac{d_2}{c}\right) = a \cos\left(2\pi f t - 2\pi f \frac{d_2}{c} + \frac{\pi}{2}\right)$$

Lorsque les deux ondes se superposent au point  $M$ , l'élongation  $y$  de la vibration résultante est :  $y = y_1 + y_2$ .  $y$  peut se mettre sous la forme :  $y = A \cos(2\pi f t + \phi)$ . Déterminons les valeurs de l'amplitude  $A$  et de la phase  $\phi$ . Pour cela, utilisons la construction de Fresnel.  $y_1$  et  $y_2$  peuvent s'écrire :

$$y_1 = a \cos(2\pi f t + \phi_1)$$

$$\text{avec } \phi_1 = -2\pi f \frac{d_1}{c} + \frac{\pi}{2}$$

$$y_2 = a \cos(2\pi f t + \phi_2)$$

$$\text{avec } \phi_2 = -2\pi f \frac{d_2}{c} + \frac{\pi}{2}$$

$\vec{OA}_1$  et  $\vec{OA}_2$  sont les vecteurs de Fresnel associés respectivement à  $y_1$  et  $y_2$  (voir figure ci-dessous).

$$\phi = \phi_1 + \alpha$$

$$\text{avec } \alpha = \frac{\phi_2 - \phi_1}{2}$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}$$

$$= -\pi \frac{f}{c} (d_1 + d_2) + \frac{\pi}{2}$$

Déterminons l'amplitude  $A$  de  $y$ .

Le triangle  $OHA_1$  étant rectangle en  $H$ ,

$$\cos \alpha = \frac{OH}{OA_1}$$

$$\text{avec } OA_1 = a$$

$$OH = \frac{A}{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{A}{2a}$$

$$\Rightarrow A = 2a \cos \alpha$$

Avec

$$\alpha = \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} = -\pi \frac{f}{c} (d_2 - d_1)$$

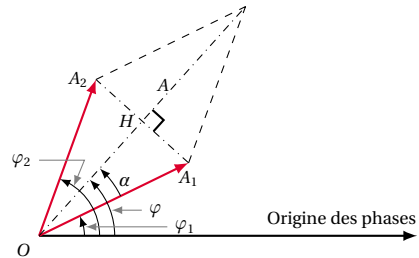
$$\Rightarrow A = 2a \cos \frac{\pi f}{c} (d_2 - d_1)$$

D'où l'équation horaire du mouvement de  $M$ .

$$y = 2a \cos \frac{\pi f}{c} (d_2 - d_1) \cdot$$

$$\cdot \cos \left[ 2\pi f t - \frac{\pi f}{c} (d_2 + d_1) + \frac{\pi}{2} \right]$$

Etat vibratoire d'un point  $M$  tel que  $d_1 = 5 \times 10^{-2}$  m et  $d_2 = 3 \times 10^{-2}$  m.



Cette état dépend de la différence de marche  $d_2 - d_1$ . Comparons  $|d_2 - d_1|$  à  $\lambda$ .

$$\frac{|d_2 - d_1|}{\lambda} = \frac{|3 \times 10^{-2} - 5 \times 10^{-2}|}{4 \times 10^{-3}} = 5$$

$$\Rightarrow |d_2 - d_1| = 5\lambda$$

La différence de marche est égale à un multiple entier de longueur d'onde. Ce point  $M$  vibre avec une amplitude maximale.

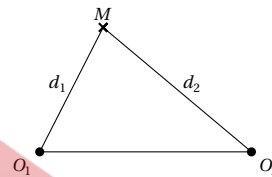
## 7.2.2.

## 7.2.2.1. Lieu des points d'amplitude maximale.

Ces points sont tels que la différence de marche

$$|d_2 - d_1| = k\lambda$$

avec  $k \in \mathbb{N}$ .

7.2.2.2. Nombre et position de ces points sur la droite  $S_1 S_2$ .

$$|d_2 - d_1| < S_1 S_2$$

avec  $|d_2 - d_1| = k\lambda$  et  $S_1 S_2 = D$ . Donc,

$$-D < k\lambda < D$$

$$\Rightarrow -\frac{D}{\lambda} < k < \frac{D}{\lambda}$$

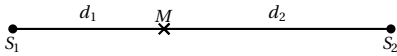
A.N.  $D = 1,1 \times 10^{-2}$  m et  $\lambda = 4 \times 10^{-3}$  m;  $-2,75 < k < 2,75$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .  $k$  peut prendre les valeurs suivantes :

$$\{-2; -1; 0; 1; 2\}$$

A chaque valeur de  $k$ , correspond une ligne de vibration maximale. Or toutes les hyperboles de foyer  $S_1$  et  $S_2$  coupent le segment  $S_1 S_2$ . On dénombre donc sur  $S_1 S_2$  5 points de vibration maximale.

Déterminons la position de ces points à partir de  $S_1$ .





La position de ces points est donnée par la double égalité

$$d \begin{cases} 2 + d_1 = D & (S9.1) \\ d_2 - d_1 = k\lambda & (S9.2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow d_1 = \frac{D - k\lambda}{2}$$

A.N. Pour  $D = 1,1 \times 10^{-2} \text{ m}$ ;  $\lambda = 4 \times 10^{-3} \text{ m}$ ;  
 $d_1 = 5,5 \times 10^{-3} - 2 \times 10^{-3} k$  en m.

K	-2	-1	0	1	2
$d_1$ (en mm)	9,5	7,5	5,5	3,5	1,5

**7.2.3. Interférences avec deux sources secondaires  $S_1$  et  $S_2$  indépendantes.**

**7.2.3.1.** Lorsque  $S_2$  est en retard d'un quart de période par rapport à  $S_1$ .

Avec  $a_1 = a_2 = a$ ,  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ . Dans ce cas,  $\phi_1 - \phi_2 = \frac{\pi}{2}$

**7.2.3.2.** L'équation horaire du mouvement du point M s'écrit :

$$y = 2a \cos \frac{\pi f}{c} (d_2 - d_1) \cdot \cos \left[ 2\pi f t - \frac{\pi f}{c} (d_1 + d_2) + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right]$$

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{\pi}{2}$$

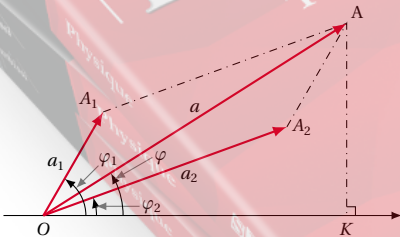
$$\Rightarrow \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} = \frac{\phi_1 + \phi_1 - \frac{\pi}{2}}{2} = \phi_1 - \frac{\pi}{4}$$

Si on choisit l'origine des dates telle que  $\phi_1 = \frac{\pi}{2}$  comme ci-dessus, on a :

$$\begin{cases} \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} = \frac{\pi}{4} \\ y = 2a \cos \frac{\pi f}{c} (d_2 - d_1) \cdot \cos \left[ 2\pi f t - \frac{\pi f}{c} (d_1 + d_2) + \frac{\pi}{4} \right] \end{cases}$$

L'amplitude de la vibration résultante est la même qu'en 2.2. Donc la position et le nombre des points de vibration maximale sur  $S_1 S_2$  n'a pas varié. Leur nombre est de 5

**7.2.3.3.** Cas où  $\phi_1 = \phi_2$ , mais  $a_1 \neq a_2$ .



Amplitude de la vibration résultante au point M. Dans ce cas, les mouvements qui se superposent en M ont pour équations horaires :

$$y_1 = a_1 \cos \left( 2\pi f t - \frac{2\pi f d_1}{c} + \phi_1 \right)$$

$$y_2 = a_2 \cos \left( 2\pi f t - \frac{2\pi f d_2}{c} + \phi_2 \right)$$

Posons

$$\phi_1 = -\frac{2\pi f d_1}{c} + \phi_1$$

$$\phi_2 = -\frac{2\pi f d_2}{c} + \phi_2$$

Dans le parallélogramme  $OA_1AA_2$ , on démontre à l'aide du produit scalaire que :

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)$$

avec  $\phi_1 - \phi_2 = \frac{2\pi f}{c} (d_2 - d_1)$  car  $\phi_1 = \phi_2$

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos \left( \frac{2\pi f}{c} (d_2 - d_1) \right)}$$

A.N.  $a_1 = 0,9 \times 10^{-3} \text{ m}$ ;  $a_2 = 1,2 \times 10^{-3} \text{ m}$ ;  $f = 100 \text{ Hz}$ ;  
 $c = 0,40 \text{ ms}^{-1}$ ;  $d_1 = 5 \times 10^{-2} \text{ m}$ ;  $d_2 = 3 \times 10^{-3} \text{ m}$ ;  
 $a = 2,1 \times 10^{-3} \text{ m}$ . Calculons le déphasage  $\phi$ . Dans le triangle  $OAK$ , on a :

$$\tan \phi = \frac{KA}{OK}$$

avec  $KA = a_2 \sin \phi_2 + a_1 \sin \phi_1$  et  $OK = a_2 \cos \phi_2 + a_1 \cos \phi_1$

$$\tan = \frac{a_2 \sin \phi_2 + a_1 \sin \phi_1}{a_2 \cos \phi_2 + a_1 \cos \phi_1}$$

La valeur numérique de  $\phi$  dépend de la valeur numérique de  $\phi_1$  et  $\phi_2$ .

### Solution 8. (p. 192)

Soit une onde rectiligne émise par une règle dont le mouvement sinusoïdal a pour équation :

$$z_R = a \sin 2\pi f t$$

avec  $a = 2 \times 10^{-3} \text{ m}$ ;  $f = 100 \text{ Hz}$ ;  
 $c = 80 \text{ cms}^{-1} = 0,8 \text{ ms}^{-1}$ .

### Partie A

**8.1.** Équation horaire  $z_M(t) = f(t, d)$  du mouvement d'un point M.

À la date  $t$  M reproduit le mouvement qu'avait le règle (source) à la date  $t - \frac{d}{c}$ . On écrit :

$$z_M(t) = z_R \left( t - \frac{d}{c} \right) = a \sin 2\pi f \left( t - \frac{d}{c} \right)$$

$$\Rightarrow z_M = 2 \times 10^{-3} \sin(200\pi t - 250\pi d)$$

**8.2.** Distance  $d$  à la laquelle se trouve le front de l'onde à la date  $t$ .

$$d = ct$$

$$\text{à } t_1 \quad d_1 = ct_1 = 0,8 \cdot 2 \times 10^{-2} = 1,6 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$\text{à } t_2 \quad d_2 = ct_2 = 0,8 \cdot 2,25 \times 10^{-2} = 1,8 \times 10^{-2} \text{ m}$$

**8.3.** Aspect de la surface du liquide aux instants  $t_1$  et  $t_2$ .  
 $z_M = f(t, d)$  est une fonction du temps et de la distance



## 9.8. Solutions des exercices et problèmes

d.

$$z_M = a \sin \left( 2\pi f t - \frac{2\pi f d}{c} \right)$$

$$= a \sin \left( 2\pi f t - \frac{2\pi d}{c T} \right)$$

$$c T = \lambda$$

$$z_M = a \sin \left( 2\pi f t - 2\pi \frac{d}{\lambda} \right)$$

Pour  $t = t_1 = 2 \times 10^{-2} \text{ s}$ 

$$z_M = a \sin \left( 4\pi - 2\pi \frac{d}{\lambda} \right) = -a \sin 2\pi \frac{d}{\lambda} = f(d)$$

Donc l'élongation du mouvement d'un point est une fonction sinusoïdale de la distance  $d$ . La surface du liquide présente de part et d'autre de la règle l'aspect d'une sinusoïde de période

$$\lambda = c T = \frac{c}{f} = \frac{0,8}{100} = 8 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Cette sinusoïde affecte une distance  $d_1$  (où l'onde a progressé) de la surface du liquide.

$$\frac{d_1}{\lambda} = \frac{1,6 \times 10^{-2}}{8 \times 10^{-3}} = 2$$

la sinusoïde des espaces de période spatiale est telle que le front d'onde se trouve à  $2\lambda$ .

Pour  $d = 0$ ,  $z_M = 0$  et pour  $d = \frac{\lambda}{4}$ ,  $z_M = -a$ . Pour  $t = t_2 = 2,25 \times 10^{-2} \text{ s}$

$$z_M = a \sin \left( 4,5\lambda - 2\pi \frac{d}{\lambda} \right)$$

la sinusoïde des espaces affecte une distance  $d_2$  de la surface du liquide :

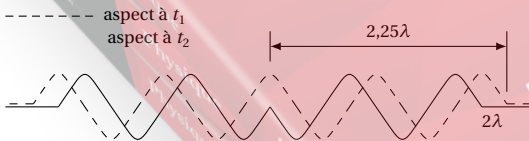
$$d_2 = c t_2 = 1,8 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$\frac{d_2}{\lambda} = \frac{1,8 \times 10^{-2}}{8 \times 10^{-3}} = 2,25 \text{ m}$$

$$\Rightarrow d_2 = 2\lambda + \frac{\lambda}{4}$$

Déterminons quelques élongations à  $t_2$ .

Pour  $d = 0$ ,  $z(t_2) = a \sin(4,5\pi) = +a$  et pour  $d = \frac{\lambda}{4}$ ,  $z(t_2) = a \sin \left( 4,5\pi - \frac{\pi}{2} \right) = 0$ . Nous pouvons représenter l'aspect de la surface du liquide à  $t_1$  et à  $t_2$ .



## 8.4. Stroboscopie.

8.4.1. Ce qu'on observe lorsque  $f_e = 50 \text{ Hz}$ .

Dans ce cas,  $T_e = \frac{1}{f_e} = \frac{1}{50} = 0,02 \text{ s} = 2T$ .

Entre deux éclairs (durée  $T_e$ ), chaque onde progresse d'une distance  $d = c T_e = 2c T = 2\lambda$ .

Chaque ride occupe exactement la position d'une autre ride, d'où l'impression d'immobilité de la surface. La distance séparant les rides consécutives est  $\lambda$ . En effet, la surface du liquide présente le même aspect à chaque éclair.

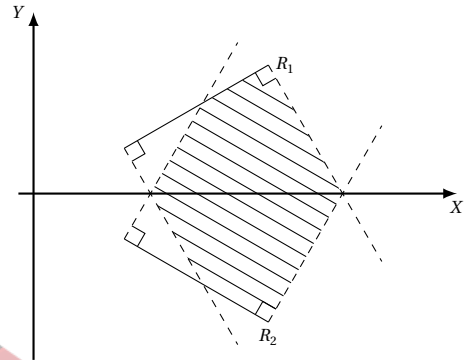
8.4.2. Lorsque  $f_e = 200 \text{ Hz}$ ,  $T_e = \frac{T}{2}$ . Entre deux éclairs, chaque ride parcourt une distance  $\frac{\lambda}{2}$ . Les éclairs étant très rapprochés, on a l'impression de voir beaucoup plus de rides parallèles à  $R_1$ , distantes de  $\frac{\lambda}{2}$ .

8.4.3. Pour  $f_e = 105 \text{ Hz}$ , légèrement supérieure à  $f$ .

Il en résulte que  $T_e$  est légèrement inférieure à  $T$ . Entre deux éclairs, la ride a progressé de  $l$  légèrement inférieure à  $\lambda$ . On a donc l'impression que cette ride a reculé de  $\lambda - l$ . Il en résulte un mouvement apparent ralenti en sens inverse, à la vitesse  $v_a = \frac{\lambda - l}{T_e}$ .

## Partie B

## Interférence



8.1. Limites du champs d'interférences. Le champ d'interférence est l'intersection des surfaces balayées par les deux ondes planes entretenues. (zone hachurée; voir figure ci-contre)

8.1.1. Equation horaire  $z_{1M}(t, x, y)$  du mouvement de  $M(x, y)$  dû à l'onde issue de  $R_1$ .

$$z_{1M} = a \sin 2\pi f \left( t - \frac{d_1}{c} \right)$$

où  $d_1$  est la distance qui sépare le point  $M(x, y)$  de la droite matérialisée par la règle  $R_1$ . La droite  $R_1$  a pour équation :  $y = x \tan \alpha$  soit  $x \tan \alpha - y = 0$ . A partir de la relation :

$$d = \frac{|K x_p + q y_p|}{\sqrt{K^2 + q^2}}$$

nous avons (en rapprochant  $x_p = x$ ;  $y_p = y$ ;  $K = \tan \alpha$ ,  $q = -1$ )

$$d_1 = \frac{x \tan \alpha - y}{\sqrt{\tan^2 \alpha + 1}}$$

$$z_{1M} = (t, x, y) = a \sin \left( 2\pi f t - \frac{2\pi f (x \tan \alpha - y)}{c \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \right)$$

8.1.2. Equation horaire  $z_{2M}(t, x, y)$  du mouvement de  $M$  dû l'onde provenant de  $R_2$ .

L'équation de la droite support de  $R_2$  étant  $y + x \tan \alpha = 0$ , une démarche semblable à la question 2.2 conduit à :

$$z_{2M} = (t, x, y) = a \sin \left( 2\pi f t - \frac{2\pi f (x \tan \alpha + y)}{c \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \right)$$

**8.1.3.** Elongation  $z_M(t, x, y)$  du mouvement résultant au point  $M$ .

$$z_M = (t, x, y) = z_{1M}(t, x, y) + z_{2M}(t, x, y)$$

Posons :

$$\phi_1 = -\frac{2\pi f (x \tan \alpha - y)}{c \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$$

$$\phi_2 = -\frac{2\pi f (x \tan \alpha + y)}{c \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$$

$$Z_M(t, x, y) = a \sin(2\pi f t + \phi_1) + a \sin(2\pi f t + \phi_2)$$

En utilisant la construction de Fresnel ou la somme trigonométrique,

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

on obtient :

$$Z_M = 2a \cos \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} \sin \left( 2\pi f t + \frac{\phi_2 + \phi_1}{2} \right)$$

Avec

$$\frac{\phi_2 - \phi_1}{2} = -\frac{2\pi f y}{c \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$$

$$\frac{\phi_2 + \phi_1}{2} = -\frac{2\pi f x \tan \alpha}{c \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$$

$$Z_M = 2a \cos \frac{2\pi f y}{c \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \cdot \sin 2\pi f \left( t - \frac{x \tan \alpha}{c \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \right)$$

**8.2.** Equation des franges d'amplitude maximale et equation des franges d'amplitude nulle.

Dans l'équation  $Z_M(t, x, y)$ ,  $2a \cos \frac{2\pi f y}{c \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$  est l'amplitude du mouvement.

■ Les franges d'amplitude maximale sont obtenues pour :

$$\begin{aligned} \cos \frac{2\pi f y}{c \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} &= \pm 1 \\ \Rightarrow \frac{2\pi f y}{c \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} &= K \\ \Rightarrow y &= 4 \times 10^{-3} k \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} \end{aligned}$$

■ Les franges immobiles s'obtiennent pour :

$$\begin{aligned} \frac{2\pi f y}{c \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} &= (2k+1) \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow y &= 2 \times 10^{-3} (2k+1) \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} \end{aligned}$$

Forme de ces franges.

$y = \text{constante} \Rightarrow$  ces franges sont parallèles à l'axe  $Ox$ .

**8.3.** Pour  $\alpha = 45^\circ$ .

■ Les frange d'amplitude maximale ont pour équation :

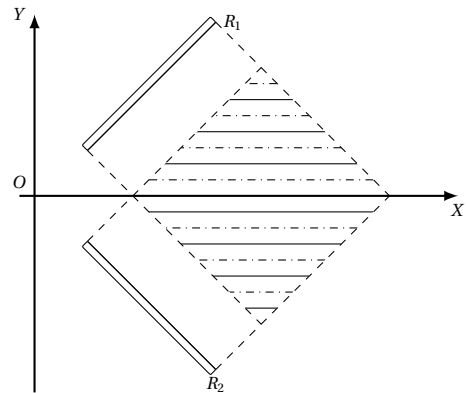
$$y_m = 4 \times 10^{-3} k \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = 4\sqrt{2} 10^{-3} k$$

■ Les franges d'amplitude nulle ont pour équation :

$$y_n = 2\sqrt{2} 10^{-3} (2k+1)$$

■ La distance qui sépare deux franges maximales consécutives est :

$$\begin{aligned} i &= y_m(k+1) - y_m(k) \\ &= 4\sqrt{2} 10^{-3} (k+1) - 4\sqrt{2} 10^{-3} k \\ &= 4 \times 10^{-3} \sqrt{2} \text{ m} \end{aligned}$$



### Solution 9. (p. 193)

$$\begin{aligned} a &= 2 \times 10^{-3} \text{ m} ; m = 100 \text{ g} = 0,1 \text{ kg} ; c = 20 \text{ ms}^{-1} ; \\ f &= 100 \text{ Hz} \Rightarrow T = \frac{1}{f} = 10^{-2} \text{ s}. \end{aligned}$$

**9.1.**

**9.1.1.** Equation du point  $O$ .

L'équation du mouvement de  $O$  est de la forme  $y_o = a \cos(2\pi f t + \phi)$ . Déterminons  $\phi$  à partir des conditions initiales : à  $t = 0$  le point  $O$  passe par l'origine.

$$\Rightarrow y_o(t=0) = a \cos \phi = 0$$

$$\phi = +\frac{\pi}{2} \text{ ou } \phi = -\frac{\pi}{2} \quad (\text{S9.1})$$

De plus, à  $t = 0$ , la vitesse de  $O$  est positive.

$$v = \frac{dy}{dt} = -2\pi f a \sin(2\pi f t + \phi)$$

à  $t = 0$   $v_o = -2\pi f a \sin \phi > 0 \Rightarrow \sin \phi < 0$ . En tenant compte de (S9.1),  $\phi = -\frac{\pi}{2}$  donc :

$$y_o = 2 \times 10^{-3} \cos \left( 200\pi t - \frac{\pi}{2} \right)$$

**9.1.2.** Equation horaire du point  $M$ .

À la date  $t$ , le point  $M$  reproduit le mouvement qu'avait  $O$  à l'instant  $t - \frac{x}{c}$ . On écrit :

$$y_M(t) = y_o \left( t - \frac{x}{c} \right)$$

soit :

$$y_M = a \cos \left[ 2f \left( t - \frac{x}{c} \right) - \frac{\pi}{2} \right]$$

## 9.8. Solutions des exercices et problèmes

$$= 2 \times 10^{-3} \cos\left(200\pi t - 10\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$$

**9.1.3.** Calcul de la masse linéaire  $\mu$  de la corde.

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$$c^2 \mu = F$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{F}{c^2}$$

Avec

$$F = P = mg$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{mg}{c^2}$$

$$\mu = \frac{0,1 \cdot 10}{20^2} = 2,5 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-1}$$

Comparons le mouvement de  $M$  à celui de  $O$ .

Comparons la distance  $OM = x$  à  $\lambda = cT$ .

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{x}{cT} = \frac{25 \times 10^{-2}}{20 \times 10^{-2}} = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow x = 5 \frac{\lambda}{4} = (2 \cdot 2 + 1) \frac{\lambda}{4}$$

$x$  est de la forme  $(2k+1) \frac{\lambda}{4}$ . Donc  $M$  et  $O$  sont en quadrature de phase.

*Autre méthode.*

Pour  $x = 25 \times 10^{-2}$ ,

$$y_M(t) = 2 \times 10^{-3} \cos\left(200\pi t - 2,5\pi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 2 \times 10^{-3} \cos(200\pi t - 3\pi)$$

Soit  $(\psi_M(t) = 200\pi t - 3\pi)$  la phase du mouvement de  $M$  à la date  $t$  et  $(\psi_O(t) = 200\pi t - \frac{\pi}{2})$  la phase du mouvement de  $O$  à la date  $t$ . Le déphasage entre les mouvements de  $M$  et  $O$  est :

$$\Delta\psi = \psi_O(t) - \psi_M$$

$$= \left(200\pi t - \frac{\pi}{2}\right) - (200\pi t - 3\pi) = \frac{5\pi}{2}$$

Donc  $M$  et  $O$  sont en quadrature de phase.

**9.1.4.** Aspect de la corde à la date  $t_1 = 0,05$  s.

L'élongation d'un point  $M$  est fonction de son abscisse  $x$  et du temps  $t$ .

$$y_M = a \cos\left(2\pi f t - 2\pi f \frac{x}{c} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= a \cos\left(2\pi f t - 2\pi \frac{x}{\lambda} - \frac{\pi}{2}\right)$$

Pour  $t = t_1 = 0,05$  s,  $f = 100$  Hz

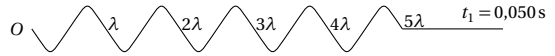
$$y_M = a \cos\left(9,5\pi - 2\pi \frac{x}{\lambda}\right)$$

$y_M$  est une fonction sinusoïdale de l'abscisse. La corde se présente sous forme d'une sinusoïde. Cette sinusoïde affecte une longueur  $l_1$  de la corde telle que.

$$l_1 = c t_1 = 20 \cdot 0,05 = 1 \text{ m}$$

$$\frac{l_1}{\lambda} = \frac{1}{20 \times 10^{-2}} = 5$$

$$\Rightarrow l_1 = 5\lambda$$



Déterminons l'élongation de quelques points de la corde :

$$\text{Pour } x = 0 \quad y = a \cos(9,5\pi) = 0$$

$$\text{Pour } x = \frac{\lambda}{4} \quad y = a \cos\left(9,5\pi - 2\pi \frac{\lambda}{4} \frac{1}{\lambda}\right)$$

$$= a \cos(9\pi) = -a$$

Le même raisonnement conduit à l'aspect suivant de la corde à la date  $t_2 = 0,055$  s.

*Remarques*

$$y_M(t) = a \cos\left(10,5\pi - 2\pi \frac{x}{\lambda}\right)$$

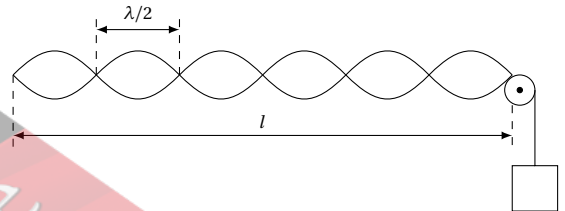
Pour  $x = 0$ ,  $y_M = 0$  et  $x = \frac{\lambda}{4}$ ,  $y_M = +a$ . L'onde affecte une longueur de corde  $l_2 = c t_2$  avec  $l_2 = 1,1$  m et  $\frac{l_2}{\lambda} = 5,5 \Rightarrow l_2 = 5,5\lambda$ .



**9.2.** Ondes stationnaires.

**9.2.1.** Description du phénomène observé.

La corde vibre très rapidement en présentant l'aspect de fuseaux.



Nombre  $n_0$  de fuseaux lorsque  $l = l_0 = 1$  m.

Les deux extrémités de la corde étant fixe, la condition d'obtention des ondes stationnaires est :

$$l_0 = n_0 \frac{\lambda}{2}$$

où  $n_0 \in \mathbb{N}$  et

$$\lambda = cT = \frac{c}{f}$$

$$\Rightarrow l_0 = n_0 \frac{c}{2f}$$

$$\Rightarrow n_0 = \frac{2l_0 f}{c} \quad (\text{S9.2})$$

A.N.  $l_0 = 1$  m;  $f = 100$  Hz;  $c = 20 \text{ cm s}^{-1}$ ;  $n_0 = 10$  fuseaux.

**9.2.2.** Relation entre  $n_1$ ,  $l_1$ ,  $n_0$  et  $l_0$ .

En admettant que nous avons toujours un système d'ondes stationnaires, pour  $f$  et  $c$  constantes,

$$n_1 = \frac{2l_1 f}{c} \quad (\text{S9.3})$$

Faisons (S9.2)/(S9.3)

$$\Rightarrow \frac{n_o}{1} = \frac{2l_o}{2l_1}$$

$$\Rightarrow l_1 = l_o \frac{n_1}{n_o}$$

A.N.  $n_1 = 8$ ;  $l_o = 1$  m,  $n_o = 10$ ,  $l_1 = 0,8$  m.

**9.2.3.** Pour  $l_2 = l_o = 1$  m, déterminons la relation entre  $n_2$ ,  $m_2$  et  $n_o$ .

En système d'ondes stationnaires,

$$n = \frac{2lf}{c}$$

avec

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{mg}{\mu}}$$

$$\Rightarrow n^2 = \frac{4l^2 f^2}{c^2} = \frac{4l^2 f^2 \mu}{mg}$$

Pour  $l$ ,  $f$ , et  $\mu$  constants,

$$\begin{cases} n_o^2 = \frac{4l^2 f^2 \mu}{m_o g} & (S9.4) \\ n_2^2 = \frac{4l^2 f^2 \mu}{m_2 g} & (S9.5) \end{cases}$$

Faisons (S9.4)/(S9.5)

$$\Rightarrow \frac{n_o^2}{n_2^2} = \frac{m_2}{m_o}$$

$$\Rightarrow m_2 = m_o \frac{n_o^2}{n_2^2}$$

A.N.  $n_2 = 5$ ;  $m_o = 0,1$  kg;  $n_o = 10$ ;  $m_2 = 0,4$  kg = 400 g.

**9.3.** Etude stroboscopique.

**9.3.1.** Valeurs de la fréquence  $f'$  des éclaire pour lesquelles nous observons une seule corde immobile.

Pour obtenir une seule corde apparemment immobile, il faut qu'entre deux éclairs (durée  $T'$ ) la corde effectue un nombre entier  $k$  d'oscillations de durée  $kT$ . Donc :

$$T' = kT$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f'} = k \frac{1}{f}$$

$$\Rightarrow f' = \frac{f}{k}$$

$$\text{or } 25 \leq f' < 500$$

$$\Rightarrow 25 \leq \frac{f}{k} < 500$$

$$\Leftrightarrow \frac{f}{500} \leq k \leq \frac{f}{25}$$

$$\Rightarrow \frac{100}{500} \leq k \leq \frac{100}{25}$$

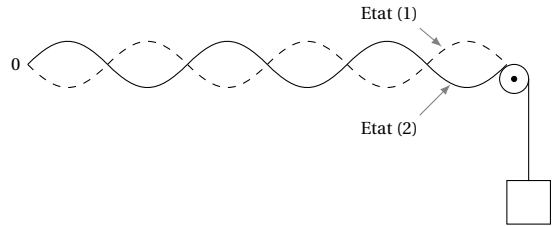
$k \in \mathbb{N}$   $k = 1, 2, 3, 4$ . Les valeurs possibles de la fréquence  $f'$  sont :

$k$	1	2	3	4
$f'$ (en Hz)	100	50	33,3	25

**9.3.2.** Observation pour  $f' = 200$  Hz.

$$T' = \frac{1}{f'} = \frac{1}{200} = 0,005 \text{ s} = \frac{T}{2}$$

Donc entre deux éclairs, la corde effectue une demi-oscillation. Elle sera surprise deux fois au cours d'une oscillation. En nous intéressant au mouvement d'un point d'amplitude maximale (ventre), on le verra tantôt à l'état (1), tantôt à l'état (2). On verra 2 cordes apparemment immobiles, "en opposition de phase".



## La lumière

10.1	<b>Introduction</b>	208
10.2	<b>Les interférences lumineuses</b>	208
10.2.1	L'expérience de fentes de young	208
10.2.2	Expression de la différence de marche	209
10.2.3	Expression de l'interfrange	209
10.2.4	Définition et calcul de l'interfrange	210
10.2.5	Les interférences en lumière blanche	210
10.3	<b>L'effet photoélectrique</b>	211
10.3.1	Mise en évidence expérimentale de l'effet photoélectrique	211
10.3.2	Etude quantitative	212
10.3.3	Etude des caractéristiques	212
10.4	<b>Courbe de Millikan</b>	213
10.4.1	Interprétation	214
10.5	<b>Enoncés des exercices et problèmes</b>	215
10.6	<b>Solutions des exercices et problèmes</b>	218





## 10.1 Introduction

Pour expliquer toutes les propriétés de la lumière, les physiciens ont dû admettre que la lumière a un double aspect :

- **aspect ondulatoire** : la lumière se comporte comme une onde, et possède les mêmes propriétés qu'une onde ;
- **aspect corpusculaire** : la lumière est constituée de particules d'énergie appelées *photons*.

Dans ce chapitre, nous allons étudier deux phénomènes mettant en évidence les deux aspects de la lumière : les interférences lumineuses et l'effet photoélectrique.

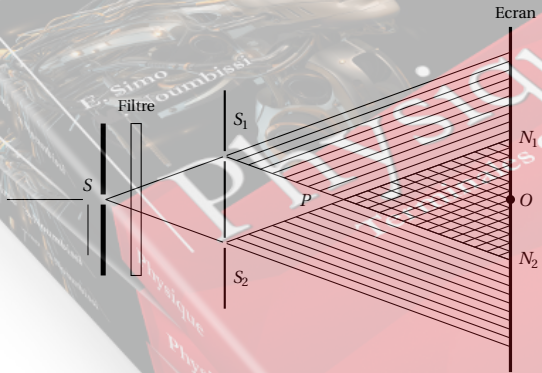
## 10.2 Les interférences lumineuses

### 10.2.1 L'expérience de fentes de young

#### Le dispositif expérimental

Une source lumineuse éclaire un trou  $S$  suffisamment fin pratiqué dans une feuille opaque. Le trou  $S$  reçoit la lumière et la diffracte.

Figure 10.1



Un verre coloré (filtre) est placé devant le trou  $S$ .  $S$ , muni du filtre constitue une source de lumière monochromatique. Soit  $\lambda$  la longueur d'onde de cette lumière monochromatique.

- La lumière monochromatique issue du filtre éclaire deux autres trous très fins  $S_1$  et  $S_2$ , assez rapprochés.
- La lumière monochromatique est à nouveau diffractée par  $S_1$  et  $S_2$ .  $S_1$  et  $S_2$  se comportent comme des sources secondaires. Les faisceaux diffractés issus de  $S_1$  et  $S_2$  possèdent une partie commune

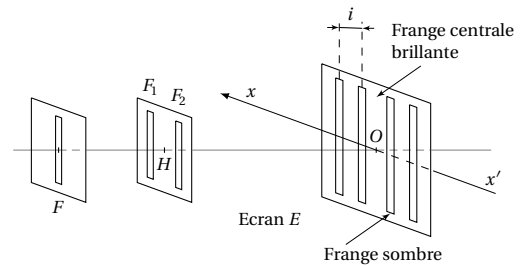
$PN_1N_2$ . Cette partie commune est le *champ d'interférences*.

- Coupons cette partie commune par un écran  $E$  parallèle à  $S_1S_2$ .

#### Observations

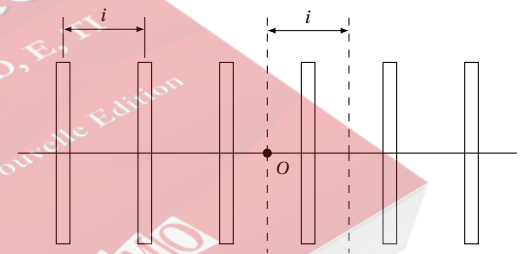
A l'écran, dans la partie commune aux deux faisceaux, on observe des raies lumineuses, séparées les unes des autres par des raies sombres, très fins, pratiquement rectilignes, parallèles, équidistantes et de même direction  $S_1S_2$  : ces raies sont les franges d'interférences. Ces franges sont équidistantes les unes des autres d'une longueur  $i$  appelée *interfrange*.

Figure 10.2



Le système de franges obtenu est symétrique par rapport à la frange brillante centrale. De plus, si on déplace l'écran, on constate, à condition évidemment de rester dans le champ d'interférences, que les franges existent quelle que soit la position de l'écran : on dit que les franges observées sont délocalisées.

Figure 10.3



**Conclusion :** L'apparition des raies alternativement sombres et brillantes, montre que la lumière qui s'ajoute à la lumière peut donner :

- soit la lumière, ce qui donne une raie brillante ;
- soit l'obscurité, ce qui donne une raie sombre.

On peut donc rapprocher cette expérience de celle réalisée à l'aide de deux sources synchrones à la surface d'un liquide.

Cette similitude des observations confirme bien la nature ondulatoire de la lumière.

## Interprétation

Considérons un point  $M$  de l'écran situé dans le champ d'interférences. Pour une frange donnée, l'état vibratoire est le même pour tous les points situés sur une même verticale; il suffit donc de repérer le point  $M$  par son abscisse  $\overline{OM}$  sur l'axe orienté  $x'$ .

Soient :  $a$  la distance entre les deux fentes  $F_1$  et  $F_2$ ;  $D$  la distance séparant le plan des fentes de l'écran  $D = OH$ .

L'expérience montre que le système de franges ne peut s'observer qu'au voisinage de la droite  $HO$ , à une distance assez importante des fentes.

Donc  $a$  (de l'ordre du millimètre) et  $\overline{OM} = x$  (de l'ordre de centimètre) sont très petits par rapport à  $D$  (de l'ordre du mètre)

En faisant (10.1) – (10.2) on obtient :

$$d_2^2 - d_1^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = 2ax$$

Soit

$$(d_2 + d_1)(d_2 - d_1) = 2ax$$

D'après les expressions (10.1) et (10.2), et en tenant compte que les grandeurs  $a$  et  $x$  sont très petites devant  $D$ , on peut écrire que :

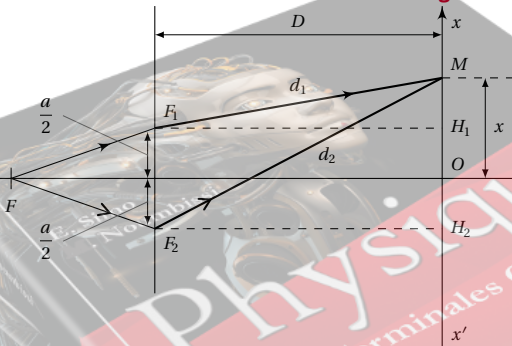
$$d_1 + d_2 \approx 2D$$

Dans ces conditions,  $\delta = d_2 - d_1 = \frac{ax}{D}$ .

### 10.2.2 Expression de la différence de marche

Étudions le chemin suivi par deux rayons distincts issus de la fente source  $F$  et interférant au point  $M$ . (Voir Figure 10.4)

Figure 10.4



Ces deux rayons ne parcourent pas le même chemin géométrique. Or l'état vibratoire au point  $M$  dépend non seulement de l'abscisse du point  $M$ , mais aussi de la différence de marche notée  $\delta$  (en optique).

Calculons  $\delta$  :

$$\begin{aligned}\delta &= (FF_2 + F_2M) - (FF_1 + F_1M) \\ &= d_2 - d_1\end{aligned}$$

(car  $FF_2 = FF_1$ ). Utilisons les triangles rectangles  $F_1H_1M$  et  $F_2H_2M$  :

$$d_1^2 = D^2 + H_1M^2 = D^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \quad (10.1)$$

$$d_2^2 = D^2 + H_2M^2 = D^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 \quad (10.2)$$

### 10.2.3 Expression de l'interfrange

On appelle ordre d'interférence la quantité notée  $p$  telle que :

$$p = \frac{\delta}{\lambda}$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde de la lumière monochromatique utilisée. Notons que :

■ Si  $p = k$  (avec  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$ ), il s'agit d'une frange brillante. En effet,  $p = k$  s'écrit aussi :

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\lambda} &= k \\ \Rightarrow \delta &= K\lambda\end{aligned}$$

soit  $d_2 - d_1 = K\lambda$ .

■ Si  $p = k' + \frac{1}{2}$  (avec  $k' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$ ), il s'agit d'une frange sombre. Dans ce cas on écrit :

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\lambda} &= k' + \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \delta &= d_2 - d_1 = \left(2k' + 1\right) \frac{\lambda}{2}\end{aligned}$$

Si on attribue l'ordre d'interférence  $p = 0$  à la frange brillante centrale :

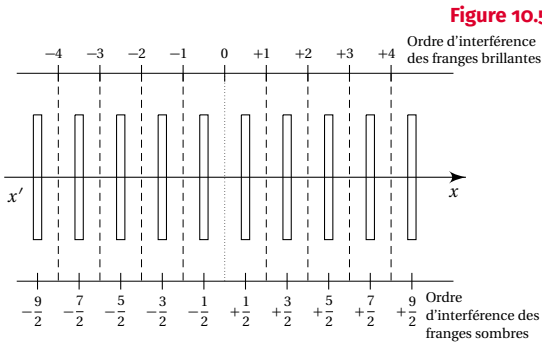
■ les franges brillantes ont les ordres :

$$\{-n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, n\}$$

■ les franges sombres ont les ordres :

$$-\left(n + \frac{1}{2}\right), \dots, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, +\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

### 10.2.4 Définition et calcul de l'interfrange



L'interfrange est la distance séparant les milieux de deux franges consécutives de même nature. Considérons une frange brillante d'ordre  $p$ ; la frange brillante consécutive à l'ordre  $p' = p + 1$ . On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} p &= \frac{\delta}{\lambda} = k \\ \Rightarrow \frac{ax}{\lambda D} &= k \\ \Rightarrow x &= k \frac{\lambda D}{a} \\ p' &= \frac{\delta}{\lambda} = k + 1 \\ \Rightarrow \frac{ax'}{\lambda D} &= k + 1 \\ \Rightarrow x' &= (k + 1) \frac{\lambda D}{a} \end{aligned}$$

D'où la valeur de l'interfrange  $i$  :  $i = x' - x = \frac{\lambda D}{a}$ .

Un calcul identique effectué avec les franges sombres conduit évidemment au même résultat. La valeur de l'interfrange est donc :

$$i = \frac{\lambda D}{a}$$

tième franges sombres situées de part et d'autre de la frange centrale.

#### Solution

- Calculons la longueur d'onde  $\lambda$  de la lumière. Soit  $p = 10$ , l'ordre de la dixième frange :

$$\begin{aligned} p &= \frac{\delta}{\lambda} \\ \Rightarrow \frac{ax}{\lambda D} &= p \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{ax}{pD} \end{aligned}$$

A.N.  $a = 1 \times 10^{-3}$  m;  $x = 7 \times 10^{-3}$  m;  $D = 1$  m,  $p = 10$  :

$$\lambda = \frac{10^{-3} \cdot 7 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 1} = 7 \times 10^{-7} \text{ m.}$$

- Valeur de l'interfrange  $i$ .

$$\begin{aligned} i &= \frac{\lambda D}{a} \\ &= \frac{7 \times 10^{-7} \cdot 1}{10^{-3}} = 7 \times 10^{-4} \text{ m} = 0,7 \text{ mm} \end{aligned}$$

- Distance séparant les 6e et 8e franges sombres situées de part et d'autre de la frange centrale.

■ Ordre de la 6e frange sombre :

$$p_{(6)'} = \frac{\delta_{(6)'}}{\lambda} = \frac{ax_{(6)'}}{\lambda D} = 5 + \frac{1}{2} \quad (10.3)$$

■ Ordre de 8e frange sombre située de l'autre côté de frange centrale :

$$p_{(-8)'} = \frac{\delta_{(-8)'}}{\lambda} = \frac{ax_{(-8)'}}{\lambda D} = -\left(7 + \frac{1}{2}\right) \quad (10.4)$$

Faisons (10.3) - (10.4) :

$$\begin{aligned} \frac{a}{\lambda D} (x_{(6)'} - x_{(-8)'}) &= \left(5 - \frac{1}{2}\right) + \left(7 + \frac{1}{2}\right) \\ \Rightarrow x_{(6)'} - x_{(-8)'} &= 13 \frac{\lambda D}{a} = 13i = 9,1 \text{ mm} \end{aligned}$$

### 10.2.5 Les interférences en lumière blanche

La lumière blanche est formée d'une infinité de lumières indécomposables dites monochromatiques (du grec mono = un, et khroma = couleur). Chacune de ces lumières monochromatiques est caractérisée par sa couleur et sa longueur d'onde.

Que se passe-t-il si on éclaire le dispositif des fentes de Young avec de la lumière blanche?

Chacune des lumières monochromatiques formant la lumière blanche donne son propre système de

#### Exercice

Soit un système de fente de Young dans lequel  $a = 1$  mm,  $D = 1$  m. On constate que la dixième frange brillante (compté à partir de la frange brillante centrale se trouve à 7,0 mm du milieu de cette frange centrale. En déduire :

- la longueur d'onde de la lumière incidente;
- la valeur de l'interfrange;
- la distance séparant les milieux des sixième et huitième franges brillantes.

### 10.3. L'effet photoélectrique

franges. Il y a donc superposition de tous les systèmes de franges. En particulier, on observe une frange centrale brillante blanche, résultant de la superposition des franges centrales brillantes de toutes les lumières monochromatiques. De part et d'autre, on voit des franges colorées de plus en plus décalées, jusqu'à ce que l'œil ne soit plus capable de distinguer les franges sombres du reste : on dit qu'il y a brouillage des franges.

## 10.3 L'effet photoélectrique

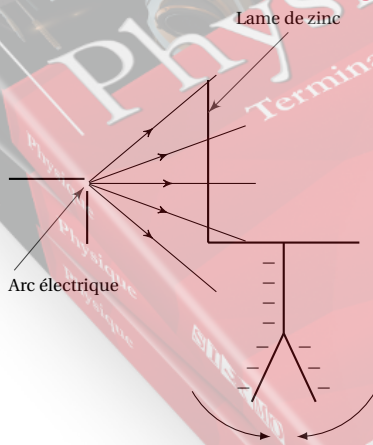
Découvert par Hertz<sup>1</sup> en 1887, l'effet photoélectrique est la propriété qu'ont certains métaux d'émettre des électrons sous l'effet de radiations lumineuses.

### 10.3.1 Mise en évidence expérimentale de l'effet photoélectrique

Fixons sur un électroscope une lame de zinc bien nettoyée. Electrison l'ensemble et éclairons cette lame de zinc avec un arc électrique (notons que l'arc électrique est une source de lumière riche en ultraviolet)

**Fig. 10.6** Lorsque l'électroscope est chargé négativement, on constate que sous l'effet de l'éclairage, les deux feuilles de l'électroscope retombent rapidement : la lame de zinc sous l'action des radiations données par l'arc, émet des électrons qui s'éloignent car l'électroscope-lame perd des électrons : l'électroscope se décharge.

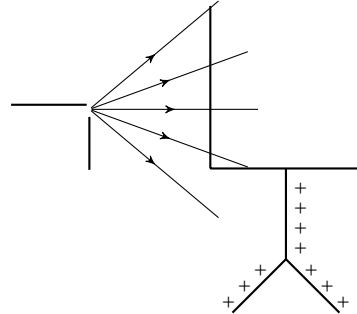
Figure 10.6



**Fig. 10.7** Lorsque l'électroscope est chargé positivement, on constate que les feuilles de l'électroscope

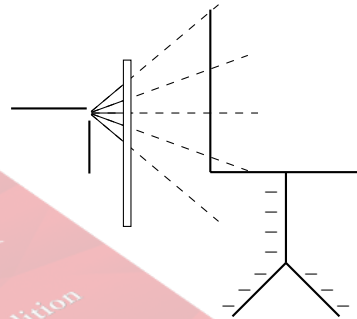
restent écartées d'un angle constant. La lame de zinc, éclairée comme dans l'expérience (Fig. 10.6), émet encore des électrons, mais ceux-ci sont recaptés par l'électroscope chargé positivement : la charge de l'ensemble ne change pas.

Figure 10.7



**Fig. 10.8** Lorsque l'électroscope est chargé négativement, mais qu'on interpose sur le trajet des rayons lumineux une plaque de verre qui arrête l'ultraviolet, on constate que les feuilles de l'électroscope restent écartées d'un angle constant. Donc, pour qu'il y ait émission d'électrons par un métal, il faut choisir un rayonnement convenable.

Figure 10.8



**Conclusion:** Les radiations ultraviolettes sont capables d'extraire des électrons d'une plaque de zinc. Ce phénomène, appelé effet photoélectrique, peut être observé avec d'autres métaux soumis à d'autres rayonnements. D'une manière générale, on appelle effet photoélectrique l'extraction d'électrons d'un métal par un rayonnement électromagnétique.

1. Heinrich Hertz (1857–1894), physicien allemand.



### 10.3.2 Etude quantitative

#### Le dispositif expérimental

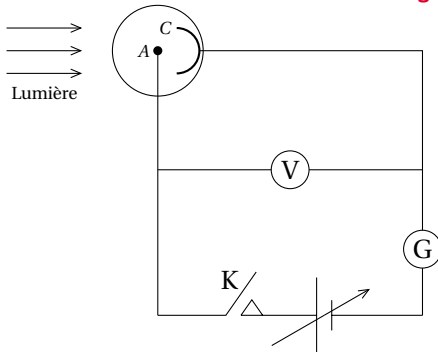


Figure 10.9

Le dispositif expérimental comprend :

- Une *cellule photoémissive* : c'est une ampoule de verre transparent à l'ultraviolet, scellée, dans laquelle on a fait un vide poussé. Elle contient une cathode C constituée du métal pur à étudier (par exemple le zinc), et une anode A métallique (généralement en platine). La cathode est éclairée par une lumière monochromatique dont on peut faire varier la fréquence et la puissance lumineuse.
- Un générateur à tension variable, permettant d'établir une différence de potentiel  $U = V_A - V_C$  entre l'anode A et la cathode C.
- Un ampèremètre G extrêmement sensible qui permet de lire l'intensité du courant traversant le circuit.
- Un interrupteur K.

L'interrupteur étant fermé, l'ampèremètre ne dévie que si des électrons peuvent quitter la cathode et traverser le vide existant entre la cathode et l'anode. Cela suppose évidemment que des électrons soient extraits de la cathode. La déviation de l'ampèremètre est d'ailleurs fonction du nombre d'électrons atteignant l'anode.

#### Fait observés

Eclairons la cathode avec des radiations de différentes fréquences. On constate que l'émission photoélectrique ne se produit que si la fréquence  $\nu$  de la radiation éclairant le métal est supérieure à une fréquence seuil  $\nu_0$  caractéristique du métal.

Donc l'émission photoélectrique ne se produit que si :  $\nu \geq \nu_0$  ou, ce qui est équivalent,  $\lambda \leq \lambda_0$ .

Le tableau ci-dessous nous donne les valeurs des fréquences et des longueurs d'ondes seuil de quelques métaux :

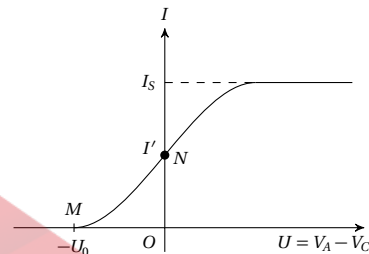
Métal	Fréquence seuil $\nu_0$ (Hz)	Longueur d'onde seuil $\lambda_0$ en ( $\mu\text{m}$ )
Platine	$15 \times 10^{14}$	0,20
Argent	$11,54 \times 10^{14}$	0,27
Cuivre Plomb	$10,3 \times 10^{14}$	0,29
Aluminium		
Zinc	$8,1 \times 10^{14}$	0,37
Magnésium		
Calcium	$6,67 \times 10^{14}$	0,45
Potassium	$5,45 \times 10^{14}$	0,55
Césium	$4,54 \times 10^{14}$	0,66

*L'émission photoélectrique est instantanée.*

La déviation de l'ampèremètre est immédiate dès que la cellule photoémissive est convenablement éclairée. Elle cesse au moment où on arrête l'illumination.

Supposons la cellule éclairée par une radiation provoquant l'émission photoélectrique. Faisons varier la tension  $U$ . L'intensité  $I$  du courant augmente avec la tension  $U$  (voir courbe on Figure 10.10).

Figure 10.10



Lorsque la tension atteint une certaine valeur, tous les électrons extraits par la lumière monochromatique atteignent l'anode. L'intensité du courant n'augmente plus. Elle prend une valeur maximale. Elle prend une valeur maximale  $I_s$  appelée *intensité de saturation*.

Si on fait varier la puissance lumineuse reçue par la cellule, on constate que l'effet photoélectrique ne dépend pas de cette puissance.

Pendant, dès que l'émission photoélectrique se produit, l'intensité de saturation dépend de la puissance lumineuse reçue.

### 10.3.3 Etude des caractéristiques

#### Formes des caractéristiques

D'après les observations précédentes, seule la fréquence du rayonnement lumineux incident intervient



## 10.4. Courbe de Millikan

dans le déclenchement de l'émission photoélectrique (loi du seuil).

En faisant varier la tension  $U = V_A - V_C$  entre l'anode et la cathode, nous avons vu qu'il est possible de tracer la courbe  $I = f(U)$  appelée caractéristique tension-courant de la cellule (voir courbe ci-dessus)

Interprétons les différentes parties de la caractéristique.

- Pour  $U = 0, I = I' \neq 0$ . Donc un courant circule dans le circuit : des électrons sont émis par la cathode et ils arrivent sur l'anode.
- Pour  $U > 0$ , les électrons émis par la cathode sont attirés par l'anode grâce au champ électrique  $\vec{E}$  existant entre A et C. Ce champ exerce sur les électrons une force  $\vec{F}$  orientée de C vers A.

Au fur et à mesure que  $U$  croît, le nombre des électrons arrivant en A augmente, jusqu'à ce que la totalité des électrons émis par C arrivent sur l'anode : on atteint ainsi le palier correspondant au courant de saturation  $I_S$ .

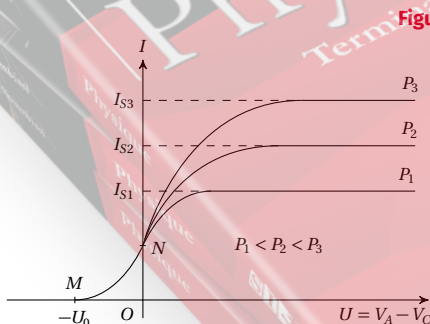
Inversons les pôles du générateur de telle sorte que  $V_A - V_C = U < 0$ .

Dans ces conditions, le champ électrique  $\vec{E}$  est orienté de sorte que la force  $\vec{F}$  repousse les électrons vers la cathode ; le courant d'intensité  $I$  diminue, jusqu'à ce que tous les électrons émis à la cathode soit repoussés par l'anode  $U = -U_0 ; I = 0$ .

### Influence de la puissance lumineuse

On peut tracer les caractéristiques d'une même cellule en fonction de la puissance lumineuse reçue. On constate :

- qu'elles possèdent une partie commune ;
- que le palier correspondant au courant de saturation est directement proportionnel à la puissance lumineuse  $P$  reçus par la cathode.



### Potentiel d'arrêt de la cellule

Revenons au point particulier M de la caractéristique de la cellule.

En ce point,  $U = V_A - V_C$  est négatif et on peut écrire  $U = V_A - V_C = -U_0$  (Au point M).

Cette valeur négative se traduit par le fait que tous les électrons issus de la cathode C sont repoussés par l'anode A et par conséquent, aucun courant ne peut circuler dans le circuit.  $U_0$  est le *potentiel d'arrêt* de la cellule.

### Propriétés du potentiel d'arrêt

On peut admettre que pour  $U = -U_0$ , les électrons arrivent en A avec une vitesse nulle ; ces électrons qui arrivent en A malgré la force électrique qui les freine sont ceux qui sortent de C avec une énergie cinétique maximale  $E_{c \max}$ .

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre C et A pour un électron :

$$\Delta E_c = E_c(A) - E_c(C) = W_{C \rightarrow A}(\vec{F})$$

$$\text{or } W_{C \rightarrow A}(\vec{F}) = q(V_C - V_A) = -e(U_0)$$

$$\text{et } E_c(C) = E_{c \max}$$

Donc

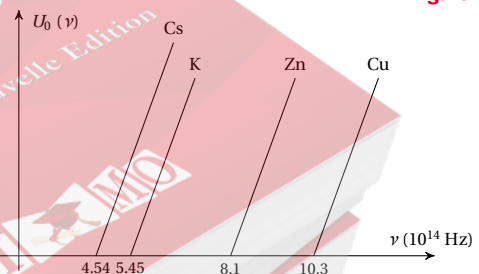
$$0 - E_{c \Rightarrow \max} = -e U_0$$

$$\Rightarrow E_{c \max} = e U_0$$

La mesure de  $U_0$  permet de connaître l'énergie cinétique maximale des électrons émis par l'effet photoélectrique.

## 10.4 Courbe de Millikan

Figure 10.12



Millikan<sup>2</sup> eut l'idée d'étudier la variation du potentiel d'arrêt  $U_0$  de la cellule en fonction de la fréquence  $\nu$  de la lumière incidente, ceci pour des cellules de nature différente, c'est-à-dire dont la cathode était constituée de métaux différents (zinc, potassium, cuivre, césium, ...). On constate que :

- pour chaque cellule, le potentiel d'arrêt est une

2. Robert Andrews Millikan (1868–1953), physicien américain.

fonction affine croissante de la fréquence  $\nu$ ;

- les droites du graphe sont parallèles.

Chaque courbe de Millikan a pour équation :

$$U_0 = a \nu + b$$

où  $a$  est la pente de la courbe et  $b$  l'ordonnée à l'origine.

Or  $U_0 = 0$  correspond à  $E_{c(\max)} = 0$ , c'est-à-dire juste au seuil de fréquence  $\nu_0$ . On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} 0 &= a \nu_0 + b \\ \Rightarrow b &= -a \nu_0 \end{aligned}$$

Donc

$$E_{c \max} = e U_0 = a \nu - a \nu_0 = a(\nu - \nu_0)$$

Si le photon incident possède l'énergie  $E = h \nu$ , l'effet photoélectrique n'a lieu que si  $h \nu > E_0$ .

L'électron émis aura alors une énergie cinétique maximale.

$$E_{c \max} = h \nu - E_0 = h(\nu - \nu_0)$$

En comparant cette relation à celle obtenue au paragraphe 10.3.3, on a :

$$\begin{aligned} E_{c \max} &= e U_0 = h(\nu - \nu_0) \\ \Rightarrow U_0 &= \frac{h}{e} \nu - \frac{h}{e} \nu_0 \end{aligned}$$

Donc la grandeur  $a$  des courbes de Millikan représente de rapport  $\frac{h}{e}$ .

## 10.4.1 Interprétation

### Hypothèse de photons (Einstein 1905)

Pour expliquer les résultats de l'étude du phénomène de l'effet photoélectrique, Einstein<sup>3</sup> admet qu'un rayonnement de lumière monochromatique de fréquence  $\nu$  peut être considéré comme un flux de particules élémentaires appelées photons. Chacun de ces photons de masse nulle et animé de la célérité de la lumière  $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$  est donc une particule relativiste. (On dit qu'une particule est relativiste lorsque sa vitesse  $v > 0,14c = 42\,000 \text{ km s}^{-1}$ ).

Chacun de ces photons transporte une énergie  $E$  qui doit être suffisante pour extraire un électron d'un métal.

Planck<sup>4</sup> exprima la valeur de cette énergie donnant la valeur de cette énergie donnant ainsi naissance à la *théorie des quanta d'énergie* (ou théorie des quantités d'énergie discrètes).

$$E = h \nu$$

où  $h$  est la constante de Planck ( $h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J s}$ ).

Sous cet aspect, la lumière a donc une *structure discontinue*.

### Le phénomène du seuil

Soit  $E_0$ , l'énergie minimale à apporter à l'électron pour qu'il puisse quitter le métal.  $E_0$  est l'énergie seuil du métal.

Dans le cas où ce sont les photons qui sont susceptibles de fournir cette énergie minimale, on pose :

$$E_0 = h \nu_0$$

où  $\nu_0$  est la fréquence seuil du métal.

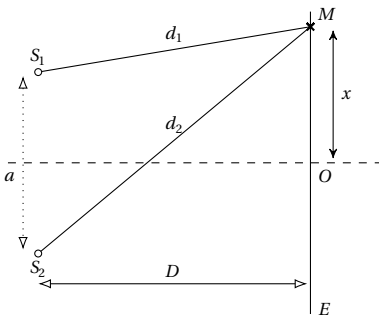
3. Albert Einstein (1879–1955), physicien allemand.

4. Max Planck (1858–1947), physicien allemand.

## 10.5 Enoncés des exercices et problèmes

### Les interférences lumineuses

#### Exercice 1.



**1.1.** Deux sources lumineuses ponctuelles  $S_1$  et  $S_2$  émettent des vibrations de la forme  $y_1 = y_2 = a \sin(\omega t)$ . Soit un point  $M$  situé aux distances  $d_1$  de  $S_1$  et  $d_2$  de  $S_2$ . Etablir à l'aide de la construction de Fresnel l'équation horaire  $y_M(t)$  de la vibration résultant de l'interférence des vibrations issues de  $S_1$  et  $S_2$ .

**1.2.**  $S_1$  et  $S_2$  constituent les sources secondaires monochromatiques d'un dispositif interférentiel de Young. L'écran  $E$  est orthogonal à la médiatrice de  $S_1 S_2$ ; leur point d'intersection est  $O$ . Les grandeurs  $a$ ,  $x$ ,  $D$ , sont mesurées dans le plan de la figure.

**1.2.1.** Qu'observe-t-on sur l'écran?

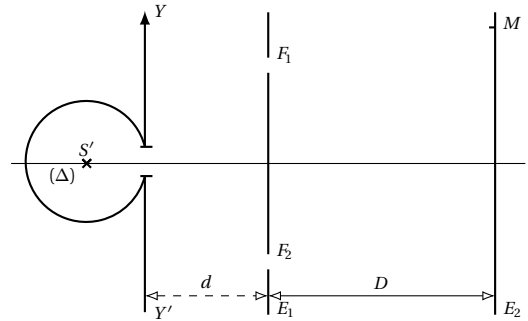
**1.2.2.** Etablir l'expression de la différence de marche en un point  $M$  voisin de  $O$ , des vibrations issues de  $S_1$  et  $S_2$ , en fonction de  $a$ ,  $x$ ,  $D$ . AN :  $a = 1,00 \text{ mm}$ ;  $x = 10,0 \text{ cm}$ ;  $D = 2,000 \text{ m}$ .

**1.2.3.** Calculer l'interfrange pour la longueur d'onde dans le visible  $\lambda$ . AN :  $\lambda = 650 \text{ nm}$ .

**1.2.4.** On place devant la source  $S_1$  une lame à faces parallèles d'épaisseur  $e$ , d'indice  $n$ . Démontrer dans quel sens et de combien se déplace la frange centrale? AN :  $e = 100 \mu\text{m}$ ;  $n = 1,51$ .

#### Exercice 2.

Un cylindre est percé d'une fente à l'axe  $(\Delta)$  (fente source). On place dans ce cylindre une source de lumière monochromatique  $S'$  de longueur d'onde  $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$ . Comme l'indique la figure suivante, l'écran  $E_1$  est percé de deux fentes fines  $F_1$  et  $F_2$  parallèles à  $(\Delta)$  et distante de  $a = 1 \text{ mm}$ . Le deuxième écran  $E_2$  est situé à  $D = 3 \text{ m}$  de  $E_1$  qui se trouve lui-même à  $d = 60 \text{ cm}$  de la fente source.



**2.1.** Expliquer pourquoi on observe un phénomène d'interférences lumineuses sur  $E_2$ .

**2.2.** Quel est l'aspect de l'écran  $E_2$ ? Calculer la valeur  $i$  de l'interfrange.

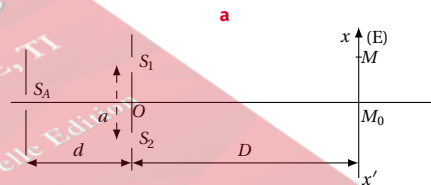
**2.3.** On fait tourner le cylindre d'un angle  $\alpha$  très petit; tout se passe comme si la fente source avait subi un déplacement suivant l'axe  $y'y$ .

**2.3.1.** Déterminer la différence de chemin optique en  $M$ .

**2.3.2.** Donner la relation entre  $\alpha$  et le déplacement de la frange centrale. AN : Calculer ce déplacement si  $\alpha = 2^\circ$ .

#### Exercice 3.

**3.1.** On réalise une expérience d'interférence lumineuse à l'aide de deux fentes étroites  $S_1$  et  $S_2$  parallèles distantes de  $a$ , éclairées par une fente  $S_A$  qui leur est parallèle et qui émet une lumière monochromatique de longueur d'onde  $\lambda_A$ . L'écran d'observation  $E$  est disposé parallèlement au plan des fentes  $S_1$  et  $S_2$  et perpendiculaire à la droite  $S_A O$ ; on appelle  $x'x$  la trace de  $E$  sur le plan de figure. Le point  $O$  milieu de  $S_1 S_2$  est à la distance  $D$  de l'écran  $E$  et à la distance  $d$  de  $S_A$ . On suppose  $d \gg a$  et  $D \gg a$ . (Fig. a)



$S_1$  et  $S_2$  se comportent comme deux sources synchrones et cohérentes, de même amplitude, dont les lumières peuvent interférer. Dans tout le problème la différence de marche entre les deux ondes lumineuses issues de la source  $S$  et qui interfèrent en  $M$  est  $(S_A S_2 + S_2 S_M) - (S_A S_1 + S_1 S_M)$ . Pour les applications numériques, on prendra  $\lambda_A = 0,6 \mu\text{m}$  (radiation jaune),  $a = 1 \text{ mm}$ ,  $D = 2 \text{ m}$ .

**3.1.1.** Expliquer pourquoi on observe des franges d'interférences sur l'écran  $E$  et quelle est la forme de ces franges. Quelle serait la forme des franges observées si l'on plaçait l'écran  $E$  perpendiculaire à  $S_1$  et  $S_2$ ?

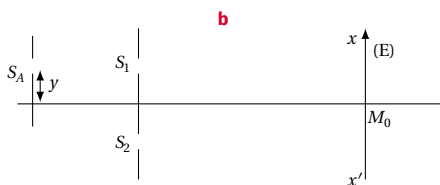
**3.1.2.** Calculer, pour les deux vibrations issues de  $S_1$  et  $S_2$ , la différence de marche en un point  $M$  de l'écran  $E$  situé à la distance  $x$  de  $M_0$ . Indiquer, sur l'écran, la position de la frange brillante d'ordre zéro. Calculer l'inter-

frange et la distance de la frange centrale à la cinquième frange sombre.

**3.1.3.** Exprimer l'éclairement  $\xi$  au point  $M$  de l'écran, point situé à la distance  $x$  de  $M_0$ ,  $d_1$  de  $S_1$  et  $d_2$  de  $S_2$ , en supposant que les deux vibrations issues de  $S_1$  et  $S_2$  ont la même amplitude  $b$ . Comment évolue cet éclairement lorsque la distance  $x$  augmente? Tracer la courbe  $\xi = f(x)$  et indiquer la position et la valeur des premiers extremums. On rappelle que l'éclairement  $\xi$  en un point est proportionnel au carré de l'amplitude résultante.

**3.1.4.** On déplace la fente-source  $S_A$  sur la droite  $S_A O$  en rapprochant les deux fentes  $S_1$  et  $S_2$ , et en conservant à toutes les fentes les mêmes directions que précédemment. Le phénomène observé sur l'écran est-il modifié? pourquoi?

**3.1.5.** On déplace la source  $S_A$  parallèlement à  $S_1 S_2$  vers le haut conformément à la figure. **b.**



Sa nouvelle position  $S_{A'}$  est à la distance  $y$  de  $S_A$ . Calculer la nouvelle différence de marche en  $M$ , et le déplacement de la frange centrale en précisant le sens. L'interfrange du système est-il modifié?

**3.1.6.** On remet la source  $S_A$  dans sa position initiale et l'on incline l'écran  $E$  d'un angle  $\beta = 30^\circ$  autour d'un axe passant par  $M_0$  et parallèle aux fentes-sources, conformément à la figure. **c.**



Qu'observe-t-on sur l'écran? Le système de franges est-il modifié? Pourquoi?

**3.1.7.** On remplace la source monochromatique  $S_A$  par une source  $S_B$  de longueur d'onde  $\lambda_B$  et l'on éloigne l'écran  $E$  de 1 m. L'interfrange devient 2,1 mm. En déduire la longueur d'onde  $\lambda_B$  et le domaine de couleur auquel appartient  $\lambda_B$ .

**3.2.** On remplace la source monochromatique  $S_A$  par une source possédant les deux longueurs d'onde  $\lambda_A$  et  $\lambda_B$  précédemment citées.

**3.2.1.** Expliquer à l'aide d'une figure très claire le phénomène observé sur l'écran (ramené à la distance  $D = 2$  m), et la distribution des maximums le long de  $x'x$ .

**3.2.2.** En supposant que les deux franges brillantes de couleurs différentes soient discernables si leur distance est supérieure à 0,25 mm, pourra-t-on discerner les premières franges brillantes des deux systèmes après la frange centrale? De quelle couleur sera la lumière sur l'écran aux points situés aux distances suivantes de la frange centrale : 3,5 mm ; 4,2 mm ; 8,4 mm ; 9,0 mm?

### Exercice 4.

**4.1.** Une source monochromatique  $S$  éclaire deux fentes fines  $S_1$  et  $S_2$ , parallèles, distantes l'une de l'autre de 3 mm et distantes de  $S$  de 50 cm. La source est sur la perpendiculaire au plan de  $S_1 S_2$  et est équidistante de  $S_1$  et  $S_2$ . On observe des interférences sur un écran  $E$  placé à  $D = 3$  m du plan de  $S_1 S_2$ . Entre la 6<sup>e</sup> frange brillante située avant la frange centrale, et la 6<sup>e</sup> frange brillante située après la frange centrale, la distance  $l$  égale 7,2 mm. Quelle est la longueur d'onde de la radiation émise par  $S$ ?

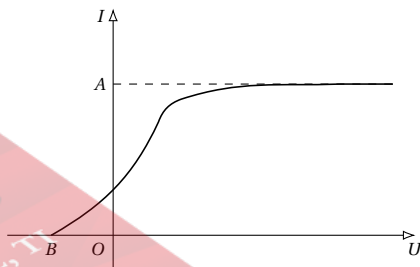
**4.2.** Quelle est l'incertitude absolue sur la longueur d'onde, sachant que l'on a mesuré  $l$  et  $S_1 S_2$  à 0,1 mm près et  $D$  à 1 cm près?

**4.3.** On déplace  $S$  de 2,5 mm, parallèlement à  $S_1 S_2$ . De combien et dans quel sens se déplace la frange centrale?

**4.4.** On ramène la frange centrale à sa position primitive  $O$  en plaçant devant l'une des deux fentes une lame à faces parallèles, d'indice  $n = 1,5$ . Où doit-on la mettre? quelle épaisseur e convient-il de lui donner?

## Effet photoélectrique

### Exercice 5.



**5.1.** Que représente le schéma ci-contre?

**5.2.** Que représentent les points A et B?

**5.3.** Schématiser le dispositif expérimental qui a permis le tracé de cette courbe.

### Exercice 6.

Compléter le tableau suivant.  $\nu_s$  et  $\lambda_s$  représentent respectivement la fréquence et la longueur d'onde seuil photoélectrique.  $E$  est l'énergie d'extraction d'un électron.

	$E_s$ (J)	$\lambda_s$ (m)	$\nu_s$ (Hz)
ligne 1	$3,2 \times 10^{-19}$		
ligne 2		$0,71 \times 10^{-6}$	
ligne 3			$4,20 \times 10^{18}$
ligne 4	$4,8 \times 10^{-19}$		



## 10.5. Énoncés des exercices et problèmes

## Exercice 7.

L'énergie d'extraction d'un électron du métal de la cathode d'une cellule photoélectrique à vide est  $W_0 = 1,90 \text{ eV}$ .

**7.1.** Calculer la longueur d'onde  $\lambda_0$  correspondant au seuil photoélectrique

**7.2.** La cathode est éclairée simultanément par trois radiations de longueurs d'onde :  $\lambda_1 = 0,70 \mu\text{m}$ ;  $\lambda_2 = 0,6 \mu\text{m}$ ;  $\lambda_3 = 0,50 \mu\text{m}$ . Quelles sont celles qui provoquent l'émission photoélectrique? pourquoi?

**7.3.** La cellule est éclairée uniquement par la radiation de longueur d'onde  $\lambda_3$ .

**7.3.1.** Quelle est la vitesse maximale d'émission d'un électron?

**7.3.2.** Quelle est la vitesse d'arrivée sur l'anode d'un électron émis avec la vitesse de  $4,5 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$ , la tension entre l'anode et la cathode étant  $U_{AC} = 5,0 \text{ V}$ ?

**7.3.3.** A partir de quelle valeur de  $U_{AC}$  l'intensité du courant photoélectrique est-elle nulle? Comment s'appelle cette valeur?

## Exercice 8.

Un rayonnement ultraviolet de longueur d'onde dans le vide  $\lambda = 350 \text{ nm}$  frappe une plaque de potassium. La longueur d'onde du seuil photo électronique du potassium est  $\lambda_0 = 540 \text{ nm}$ .

**8.1.** Peut-on observer l'effet photo électronique?

**8.2.** Quel est le travail d'extraction  $W_0$  du métal potassium?

**8.3.** Pourquoi les électrons extraits ne sortent-ils pas tous à la même vitesse? Quelle est leur énergie cinétique maximale de sortie  $E_c(\text{max})$ ? Quelle est la vitesse de sortie maximale correspondante? Données : constante de Planck  $h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J s}$ ; masse d'un électron  $m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ .

## Exercice 9.

On éclaire une plaque de magnésium C à l'aide d'une source S émettant un rayonnement électromagnétique de fréquence  $\nu = 9 \times 10^{14} \text{ Hz}$ .

**9.1.** Le travail d'extraction (ou de sortie) du magnésium est  $W_0 = 2,9 \text{ eV}$ . Quelle est la fréquence du seuil photo électronique  $\nu_0$ ? Observe-t-on, avec S, l'effet photo électronique?  $h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J s}$ .

**9.2.** Quelle est l'énergie cinétique maximale de sortie des électrons de C?

**9.3.** La plaque C reçoit de S la puissance  $P_1 = 3 \times 10^{-6} \text{ W}$ .

**9.3.1.** Quel est le nombre  $n'_1$  de photons reçus par seconde par C?

**9.3.2.** On constate que C émet  $n_1 = 3 \times 10^{10}$  électrons par seconde. Quel est rendement quantique  $\frac{n_1}{n'_1}$ ?

**9.4.** La plaque C est maintenant placée plus loin de S, elle ne reçoit plus que la puissance  $P_2 = \frac{P_1}{2}$ . L'énergie cinétique maximale de sortie change-t-elle? Le nombre d'électrons émis par seconde par C change-t-il?

## Exercice 10.

Une source F émet simultanément deux lumières monochromatiques de longueur d'onde  $\lambda = 0,500 \mu\text{m}$  et  $\lambda' = 0,580 \mu\text{m}$  et éclaire une cellule photoélectrique dont la cathode est recouverte de potassium. L'énergie d'extraction d'un électron de ce métal est  $W_0 = 2,25 \text{ eV}$

**10.1.** Montrer qu'une seule de ces radiations produit l'effet photoélectrique. Laquelle?

**10.2.** Quelle est la vitesse maximale des électrons émise par la cathode

**10.3.** Déterminer la différence de potentiel que l'on devrait appliquer entre l'anode et la cathode pour annuler le courant photoélectrique.

**10.4.** L'intensité du courant de saturation dans le circuit est  $I = 5 \times 10^{-8} \text{ A}$ , lorsque la puissance rayonnante reçue par la cathode est  $P_\lambda = 9,9 \times 10^{-6} \text{ W}$ . Déterminer le rendement quantique de la cellule, c'est-à-dire le rapport du nombre d'électrons émis par la cathode au nombre de photons reçu par la cathode pendant le même temps.

## Exercice 11.

Une cellule photoélectrique à cathode de césium est éclairée successivement par des faisceaux lumineux monochromatiques de même puissance P mais de fréquences  $\nu$  différentes. On relève, pour chacune des radiations, la valeur absolue d'arrêt  $U_0$  de la cellule. On obtient les résultats suivants :

$P = 50 \mu\text{W}$	$\nu$ ( $10^{14} \text{ Hz}$ )	5,13	6,00	6,89
	$U_0$ (en V)	0,20	0,56	0,93
	$\nu$ ( $10^{14} \text{ Hz}$ )	7,07	7,50	8,27
	$U_0$ (en V)	1,00	1,18	1,50

**11.1.** Représenter graphiquement les variations du potentiel d'arrêt  $U_0$  en fonction de  $\nu$ . On prendra pour échelles : 5 cm pour  $4 \times 10^{14} \text{ Hz}$  et 10 cm pour 2 V. Quelle courbe obtient-on?

**11.1.1.** Quelle relation théorique existe entre  $U_0$  et  $\nu$ ? En déduire des résultats expérimentaux la valeur de la constante de Planck.

**11.1.2.** Quelle est, en eV, la valeur de l'énergie d'extraction d'un électron?

**11.2.** On recommence l'expérience précédente en utilisant successivement des faisceaux lumineux monochromatiques de même fréquence  $\nu$  mais de puissance  $P' = 2P$ . Les résultats précédents sont-ils modifiés? Pourquoi?

**11.3.** Une cellule à cathode de potassium de fréquence seuil  $\nu'_0 = 5,6 \times 10^{14} \text{ Hz}$  est maintenant éclairée dans les conditions de la première question. Représenter sur le graphe précédent les variations du potentiel d'arrêt de cette nouvelle cellule, en fonction de  $\nu$ . Expliquer.

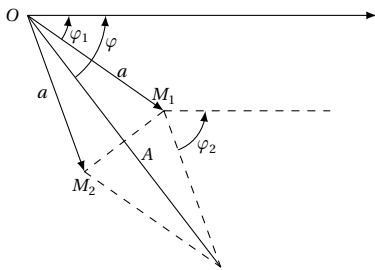


## 10.6 Solutions des exercices et problèmes

### Les interférences lumineuses

#### Solution 1. (p. 215)

**1.1.** Démontrons à l'aide de la construction de Fresnel l'expression de l'état vibratoire d'un point situé aux distances  $d_1$  de  $S_1$  et  $d_2$  de  $S_2$ .



Les ondes lumineuses issues de  $S_1$  et  $S_2$  ont pour expression commune :

$$y_1 = y_2 = a \sin \omega t = a \sin \left( \frac{2\pi t}{T} \right)$$

L'onde lumineuse issue de  $S_1$  arrive au point  $M$  avec un retard

$$\theta = \frac{d_1}{c}$$

( $c$  = célérité de la lumière). D'où :

$$\begin{aligned} y_{1M} &= a \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{d_1}{c} \right) \\ &= a \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{d_1}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

avec  $\lambda = cT$ . De même l'onde lumineuse issue de  $S_2$  arrive au point  $M$  avec un retard  $\theta' = \frac{d_2}{c}$  ( $c$  = célérité de la lumière). D'où :

$$\begin{aligned} y_{2M} &= a \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{d_2}{c} \right) \\ &= a \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{d_2}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

Puisque les deux sources vibrent ensemble, l'expression de la vibration résultante au point  $M$  est :

$$\begin{aligned} y_M = y_{1M} + y_{2M} &= a \sin \left( \frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi d_1}{\lambda} \right) \\ &\quad + a \sin \left( \frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi d_2}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

Posons  $\phi_1 = -\frac{2\pi d_1}{\lambda}$  et  $\phi_2 = -\frac{2\pi d_2}{\lambda}$ .  $y_M$  peut se mettre

sous la forme :

$$y_M = A \sin \left( \frac{2\pi t}{T} + \phi \right)$$

où  $A$  est l'amplitude et  $\phi$  la phase à déterminer par la construction de Fresnel. Du schéma ci-dessus on a :

$$\begin{aligned} \frac{A}{2} &= \cos \alpha \\ \Rightarrow A &= 2a \cos \alpha \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} = \frac{1}{2} \left( -\frac{2\pi d_2}{\lambda} + 2\pi \frac{d_1}{\lambda} \right) \\ &= -\frac{\pi}{\lambda} (d_2 - d_1) \end{aligned}$$

D'où :

$$A = 2a \cos \frac{\pi}{\lambda} (d_2 - d_1)$$

De même, on a :

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_1 + \alpha = \phi_1 + \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} = \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \\ &= \frac{-\frac{2\pi d_1}{\lambda} - \frac{2\pi d_2}{\lambda}}{2} = -\frac{\pi}{\lambda} (d_2 + d_1) \end{aligned}$$

D'où l'expression de la vibration résultante au point  $M$ .

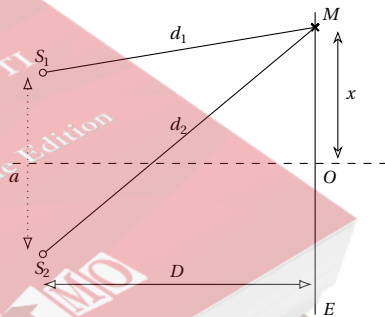
$$y_M = 2a \cos \frac{\pi}{\lambda} (d_2 - d_1) \sin \left( \frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{\lambda} (d_2 + d_1) \right)$$

#### 1.2.

##### 1.2.1. Phénomène observé sur l'écran.

On obtient, sur l'écran  $E$ , un système de franges rectilignes, parallèles, normales au plan de la figure, alternativement brillantes et sombres.

##### 1.2.2. Etablissement de la différence de marche en un point $M$ .



Dans le triangle rectangle  $S_1AM$  on a :

$$d_1^2 = \left( x - \frac{a}{2} \right)^2 + D^2 \quad (\text{S10.1})$$

Dans le triangle rectangle  $S_2AM$  on a :

$$d_2^2 = \left( x + \frac{a}{2} \right)^2 + D^2 \quad (\text{S10.2})$$

Faisons (S10.1) - (S10.2)

$$d_2^2 - d_1^2 = \left( x + \frac{a}{2} \right)^2 + D^2 - \left( x - \frac{a}{2} \right)^2 - D^2$$

## 10.6. Solutions des exercices et problèmes

$$d_2^2 - d_1^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2$$

$$(d_2 - d_1)(d_2 + d_1) = \left(x + \frac{a}{2} + x - \frac{a}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{a}{2} - x + \frac{a}{2}\right) = 2xa$$

Comme  $a$  et  $x$  sont petits par rapport à  $D$ , on peut confondre  $d_2 + d_1$  à  $2D$  donc :

$$d_2 - d_1 = \frac{2ax}{2D} = \frac{ax}{D}$$

A.N.  $a = 1 \text{ mm}$ ;  $x = 10 \text{ cm}$ ;  $D = 2 \text{ m}$ ;  
 $d_2 - d_1 = 1 \cdot \frac{100}{2000} = 0,05 \text{ mm}$ .

**1.2.3.** Calcul de l'interfrange pour la longueur d'onde  $\lambda$ . On appelle interfrange  $i$ , la distance qui sépare deux franges voisines de même nature. Dans le cas d'une frange brillante on a :

$$d_2 - d_1 = K\lambda = \frac{ax}{D}$$

L'abscisse  $x_K$  de la frange brillante d'ordre  $K$  est donnée par la relation :  $x_K = \frac{K\lambda D}{a}$  et celui de frange brillante d'ordre  $(K+1)$  est :

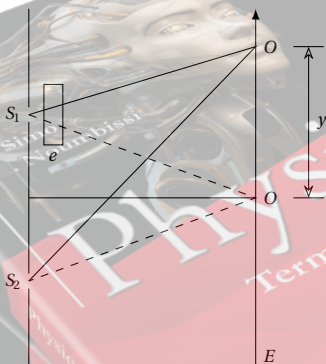
$$x_{K+1} = (K+1) \frac{\lambda D}{a} = \frac{K\lambda D}{a} + \frac{\lambda D}{a}$$

D'après la définition de l'interfrange, on a :

$$i = x_{K+1} - x_K = \frac{K\lambda D}{a} + \frac{\lambda D}{a} - \frac{K\lambda D}{a} = \frac{\lambda D}{a}$$

A.N.  $\lambda = 0,65 \times 10^{-6} \text{ m}$ ;  $D = 2 \text{ m}$ ;  $a = 10^{-3} \text{ m}$ ;  
 $i = 0,65 \times 10^{-6} \cdot \frac{2}{10^{-3}} = 1300 \times 10^{-6} = 1,3 \text{ mm}$ .

**1.2.4.** Démontrons dans quel sens et de combien se déplace la frange centrale.



La lumière se propage moins vite dans le verre que dans l'air. Proposons-nous de réévaluer la différence de marche au point  $M$ . Le chemin optique  $S'_1M$  se compose maintenant d'un parcours effectué dans le verre et d'un parcours  $(S_1M - e)$  effectué dans l'air. Ce chemin est donc :

$$S'_1M = ne + S_1M - e = S_1M + e(n-1)$$

la différence de marche au point  $M$ , d'abscisse  $x$  est maintenant :

$$\Delta = S_2M - S'_1M + e(n-1)$$

avec  $S_2M - S_1M = d_2 - d_1$

$$\Delta = d_2 - d_1 + e(n-1)$$

$$\text{avec } d_2 - d_1 = \frac{ax}{D}$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{ax}{D} - e(n-1)$$

L'abscisse  $x_{K'}$  de la frange brillante d'ordre  $K$  est maintenant :

$$x_{K'} = \frac{KD\lambda}{a} + \frac{eD(n-1)}{a}$$

Nous voyons que l'abscisse de la frange brillante d'ordre  $K$ , qui était de  $x_K = \frac{KD\lambda}{a}$  à la question 2.3 a varié de :

$$x_{K'} - x_K = \frac{eD(n-1)}{a}$$

La frange centrale étant une frange brillante, elle se déplace de :

$$u = \frac{eD(n-1)}{a}$$

A.N.  $e = 100 \times 10^{-6} \text{ m}$ ;  $n = 1,51$ ;  $D = 2 \text{ m}$ ;  $a = 10^{-3} \text{ m}$ ;  
 $u = \frac{100 \times 10^{-6} \cdot 2 \cdot (1,51 - 1)}{10^{-3}} = 0,102 \text{ m} = 10,3 \text{ cm}$ . On constate que  $u > 0$ .

On conclut que toutes les franges y compris la frange centrale se sont déportées du côté de la fente  $S_1$  couverte par la lame.

## Solution 2. (p. 215)

**2.1.** Expliquons ce que l'on observe à l'écran  $E_2$ .

Les deux trous  $F_1$  et  $F_2$ , éclairés par la source ponctuelle  $S$  située sur la médiatrice de  $F_1F_2$  jouent le rôle de deux sources ponctuelles monochromatiques synchrones. Les deux faisceaux lumineux issus de  $F_1$  et  $F_2$  interfèrent en leur partie commune. L'écran  $E_2$  placé dans cette partie commune, permet d'observer des franges d'interférences perpendiculaires au plan de la figure.

**2.2.**

**2.2.1.** Aspect de l'écran  $E_2$ . Sur l'écran  $E_2$ , on observe dans la partie commune des raies équidistantes alternativement brillantes et obscures appelées franges d'interférences.

**2.2.2.** Calcul de la valeur de l'interfrange  $i$ .

$i$  est donné par la relation :

$$i = \frac{\lambda D}{a} = \frac{0,5 \times 10^{-6} \cdot 3}{10^{-3}} = 1,5 \times 10^{-3} \text{ m}$$

**2.3.**

**2.3.1.** Détermination de la différence de chemin optique en  $M$ .

Chemin optique  $S''F_1M = d_3 + d_1$  et chemin optique  $S''F_2M = d_4 + d_2$ . Différence de Chemin optique en  $M$ .

$$\Delta = S''F_2M - S''F_1M = (d_4 + d_2) - (d_3 + d_1)$$

$$= (d_4 - d_3) + (d_2 - d_1)$$

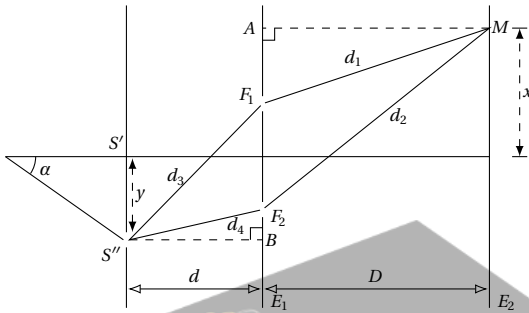
Soit à déterminer  $d_3 - d_4$ .

Considérons les triangles rectangles  $S''BF_2$  et  $S''BF_1$  ; le

théorème de Pythagore donne :

$$\begin{aligned}
 d_4^2 &= d^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 \\
 d_3^2 &= d^2 + \left(y + \frac{a}{2}\right)^2 \\
 d_4^2 - d_3^2 &= d^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 - d^2 - \left(y + \frac{a}{2}\right)^2 \\
 &= \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 - \left(y + \frac{a}{2}\right)^2 \\
 (d_4 - d_3)(d_4 + d_3) &= \left[\left(y - \frac{a}{2}\right) - \left(y + \frac{a}{2}\right)\right] \cdot \left[\left(y - \frac{a}{2}\right) + \left(y + \frac{a}{2}\right)\right] \\
 (d_4 - d_3)(d_4 + d_3) &= -2ay \\
 \text{avec } d_4 + d_3 &\approx 2d \\
 \Rightarrow d_4 - d_3 &= -\frac{2ay}{2d} = -\frac{ay}{d}
 \end{aligned}$$

Déterminons  $d_1 - d_2$ .



Une démarche analogue à la précédente donne dans les triangles rectangles  $MAF_1$  et  $MAF_2$  ;

$$d_2 - d_1 = \frac{ax}{D}.$$

D'où l'expression de la différence de chemin optique en M.

$$\Delta = (d_4 - d_3) + (d_2 - d_1) = -\frac{ay}{d} + \frac{ax}{D}$$

**2.3.2.** Relation entre  $\alpha$  et le déplacement de la frange centrale  $x$ .

La frange centrale correspond à  $\Delta = 0$

$$-\frac{ay}{d} + \frac{ax}{D} = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{yD}{d}$$

$$\text{avec } y = R\alpha$$

$$\Rightarrow x = \frac{RaD}{d}$$

$$\text{A.N. } \alpha = 2^\circ \Leftrightarrow \alpha = \frac{2^\circ \times 2\pi}{360^\circ} = \frac{\pi}{90};$$

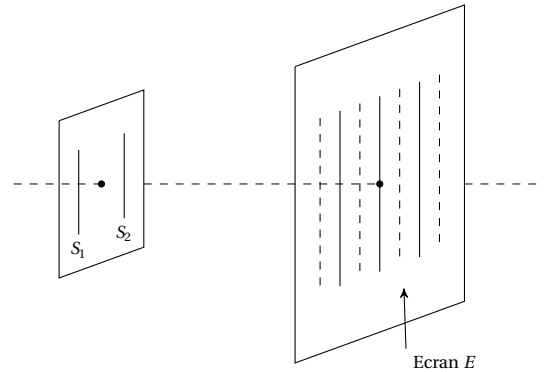
$$R = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}; D = 3 \text{ m}; d = 0,6 \text{ m};$$

$$x = \frac{0,1 \cdot \left(\frac{3,14}{90}\right) \cdot 3}{0,6} = 0,0174 \text{ m} = 1,74 \text{ cm}.$$

### Solution 3. (p. 215)

**3.1.**

**3.1.1.** Pourquoi on observe les franges d'interférences?



$S_1$  et  $S_2$  (deux sources lumineuses synchrones et cohérentes) donnent deux faisceaux de lumière qui interfèrent en leur partie commune. Un écran  $E$  placé dans cette partie commune permet d'observer ces franges d'interférences.

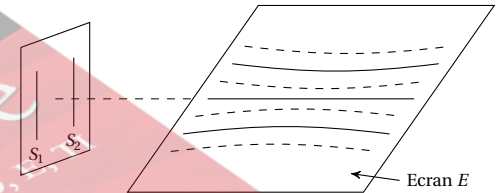
Forme de ces franges en fonction des positions relatives de l'écran et du plan des fentes  $S_1$  et  $S_2$  :

**3.1.1.1.** Écran  $E$  parallèle au plan des fentes.

Les franges d'interférences sont alternativement sombres et brillantes, pratiquement rectilignes, parallèles et équidistantes.

**3.1.1.2.** L'écran  $E$  est perpendiculaire à  $S_1$  et  $S_2$ .

Dans ce cas les franges d'interférences sont alternativement sombres et brillantes d'allure hyperbolique.



**3.1.2.**

**3.1.2.1.** Différence de marche en un point  $M$  de l'écran pour  $M_0M = x$ .

Pour l'onde issue de  $S_A$ , la différence de marche au point  $M$  est :

$$\begin{aligned}
 \delta &= (S_A S_2 + S_2 M) - (S_A S_1 + S_1 M) \\
 &= S_A S_2 + S_2 M - S_A S_1 + S_2 M
 \end{aligned}$$

Or  $S_A S_2 = S_A S_1$ . En posant  $S_1 M = d_1$  et  $S_2 M = d_2 \Rightarrow \delta = d_2 - d_1$ . Exprimons  $d_2 - d_1$  en fonction des caractéristiques du dispositif :

■ Dans le triangle rectangle  $S_1 H_1 M$  on a :

$$d_1^2 = D^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2$$

■ Dans le triangle rectangle  $S_2 A M$  on a :

$$d_2^2 = D^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2$$

## 10.6. Solutions des exercices et problèmes

$$d_2^2 - d_1^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + D^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - D^2 = 2ax$$

$$\Rightarrow (d_2 + d_1)(d_2 - d_1) = 2ax$$

Pour  $d \gg a$  et  $D \gg a$ ,  $d_1 + d_2 \approx 2D$  d'où :

$$2D(d_2 - d_1) = 2ax$$

$$\Rightarrow \delta = d_2 - d_1 = \frac{ax}{D}$$

### 3.1.2.2. Position de la frange brillante d'ordre zéro.

On obtient une frange brillante lorsque :

$$\delta = k\lambda$$

avec  $k \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \frac{ax}{D} = k\lambda$$

$$\Rightarrow x_k = k \frac{\lambda D}{a}$$

$k$  est l'ordre d'interférence. Pour  $k = 0$ ,  $x_0 = 0$ . Donc la frange brillante d'ordre zéro est centrée en  $M_0$ .

### 3.1.2.3. Calculons l'interfrange $i$ .

$i$  est la distance séparant les milieux de deux franges consécutives de même nature. Soit une frange brillante d'ordre  $p = k$ .

$$p = \frac{\delta}{\lambda} = k$$

$$\Rightarrow \frac{ax}{\lambda D} = k$$

$$\Rightarrow x = k \frac{\lambda D}{a}$$

La frange brillante consécutive à l'ordre  $p' = p + 1$  telle que :

$$p' = \frac{\delta'}{\lambda} = k + 1$$

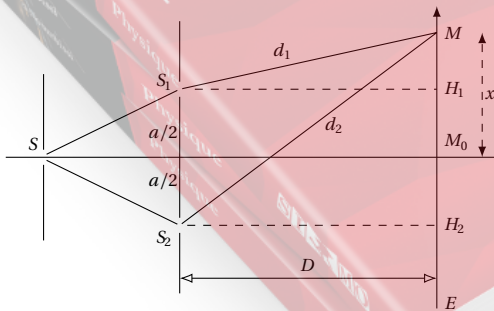
$$\Rightarrow \frac{ax'}{\lambda D} = k + 1$$

$$\Rightarrow x' = (k + 1) \frac{\lambda D}{a}$$

$$i = x' - x = (k + 1) \frac{\lambda D}{a} - k \frac{\lambda D}{a}$$

$$= \frac{\lambda D}{a} = \frac{0,6 \times 10^{-6} \cdot 2}{10^{-3}} = 1,2 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Calculons la distance qui sépare le milieu de la frange centrale du milieu de la 5ème frange sombre.



$$\Delta = \frac{9i}{2} = 9 \frac{1,2 \times 10^{-3}}{2} = 5,4 \times 10^{-3} \text{ m} = 5,4 \text{ mm}$$

### 3.1.3. Eclairement $\xi$ au point $M$ tel que $x = M_0M$ .

Ecrivons les expressions des vibrations lumineuses issues des  $S_1$  et  $S_2$

$$S_1(t) = S_2(t) = b \cos \omega t$$

Au point  $M$ , ces vibrations ont pour expression :

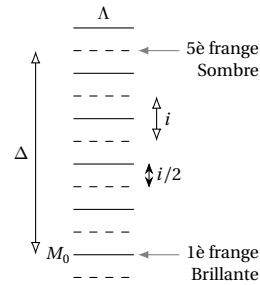
$$S_{1M} = b \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{d_1}{c} \right)$$

$$S_{1M} = b \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{d_1}{\lambda} \right)$$

avec  $\lambda = cT$

$$S_{2M} = b \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{d_2}{c} \right)$$

$$\Leftrightarrow S_{2M} = b \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{d_2}{\lambda} \right)$$



D'où l'expression de la vibration résultante au point  $M$ .

$$S_M = S_{1M} + S_{2M}$$

$$= b \left[ \cos \left( \omega t - \frac{2\pi d_1}{\lambda} \right) + \cos \left( \omega t - \frac{2\pi d_2}{\lambda} \right) \right]$$

En utilisant la somme des cosinus suivante :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$S_M = 2b \cos \frac{\pi(d_2 - d_1)}{\lambda}$$

$$\cdot \cos \left[ \omega t - \frac{\pi}{\lambda}(d_2 + d_1) \right]$$

$$\text{avec } d_2 - d_1 = \frac{ax}{D}$$

$$S_M = 2b \cos \frac{\pi ax}{\lambda D} \cos \left[ \omega t - \frac{\pi}{\lambda}(d_2 + d_1) \right]$$

L'amplitude de la vibration résultante est donc :

$$A = 2b \cos \left( \frac{\pi ax}{\lambda D} \right)$$

L'éclairement (ou l'intensité lumineuse) en un point est proportionnel au carré de l'amplitude de la vibration en ce point.

$$\Rightarrow \xi = KA^2 = K4b^2 \cos^2 \left( \frac{\pi ax}{\lambda D} \right)$$

En tenant compte de ce que

$$i = \frac{\lambda D}{a}$$

$$\xi = 4Kb^2 \cos^2\left(\frac{\pi x}{i}\right)$$

Linéarisons cette équation en utilisant

$$\cos^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos 2u)$$

$$\Rightarrow \xi = 4Kb^2 \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{i}\right) \right]$$

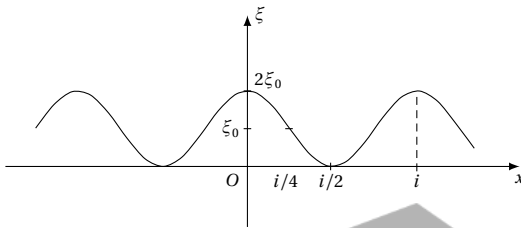
Posons

$$\xi_0 = 2Kb^2$$

$$\Rightarrow \xi(M) = \xi_0 \left[ 1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{i}\right) \right]$$

$$\Rightarrow \xi(M) = f(x)$$

Evolution de  $\xi$  lorsque  $x$  augmente. Lorsque  $x$  augmente, l'éclairement est une sinusoïde de période spatiale  $i$ . Courbe  $\xi = f(x)$  (voir ci-contre).



Position et valeur des premiers extremums.

Les extremums sont obtenus pour  $\cos\left(\frac{2\pi x}{i}\right) = \pm 1$ . Le maximum correspond à :

$$\cos \frac{2\pi x}{i} = +1$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi x}{i} = 2k\pi$$

$$\Rightarrow x_k = ki$$

Le premier maximum est obtenu pour

$$k=0$$

$$\Rightarrow x_0 = 0$$

$$\xi = 2\xi_0$$

Le minimum correspond à

$$\cos \frac{2\pi x'}{i} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi x'}{i} = (2k+1)\pi$$

$$\Rightarrow x_{k'} = (2k+1)\frac{i}{2}$$

Le premier minimum est obtenu pour

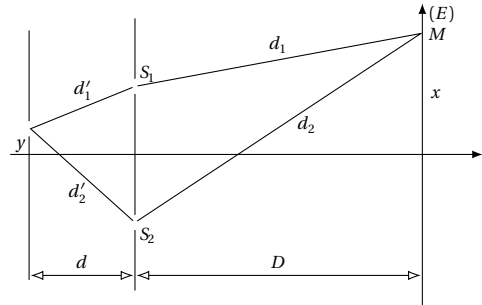
$$k=0$$

$$\Rightarrow x'_0 = \frac{i}{2}$$

$$\xi = 0$$

**3.1.4.** Si on déplace la source  $S$  sur la droite  $SO$ , les fentes sources secondaires  $S_1$  et  $S_2$  demeurent synchrones et cohérentes. On observe sur l'écran un phénomène d'interférences. Si de plus on rapproche les deux fentes sources  $S_1$  et  $S_2$ , on diminue  $a$ . Sachant que  $i = \frac{\lambda D}{a}$  lorsque  $a$  diminue,  $i$  augmente. Donc en rapprochant les deux fentes  $S_1$  et  $S_2$ , les franges d'interférences sont plus larges.

**3.1.5.** On déplace la source  $S_A$  de  $S_A S'_A = y$  parallèlement à  $S_1 S_2$ .



**3.1.5.1.** Calculons la nouvelle différence de marche  $\delta'$  :

$$\delta' = (d'_2 + d_2) - (d'_1 + d_1)$$

$$\delta' = (d'_2 - d'_1) + (d_2 - d_1)$$

Nous avons montré (3.1.2.) que :

$$d_2 - d_1 = \frac{ax}{D}$$

On démontre de même que :

$$d'_2 - d'_1 = \frac{ay}{d}$$

Donc

$$\delta' = \frac{ay}{d} + \frac{ax}{D}$$

**3.1.5.2.** Déplacement de la frange centrale.

La frange centrale se définit par :

$$\delta' = 0$$

$$\Rightarrow \frac{ay}{d} + \frac{ax}{D} = 0$$

$$\Rightarrow x = -y \frac{D}{d}$$

Donc la frange centrale se déplace de  $y \frac{D}{d}$  en sens inverse du déplacement de la source  $S$ .

**3.1.5.3.** Calcul de l'interfrange  $i'$ .

Pour une frange brillante d'ordre  $k$ ,

$$\delta' = k\lambda$$

$$\Rightarrow \frac{ay}{d} + \frac{ax}{D} = k\lambda$$

$$\Rightarrow x_k = k \frac{\lambda D}{a} - y \frac{D}{d}$$

Pour une frange brillante d'ordre  $k+1$ ,

$$\delta' = (k+1)\lambda$$



## 10.6. Solutions des exercices et problèmes

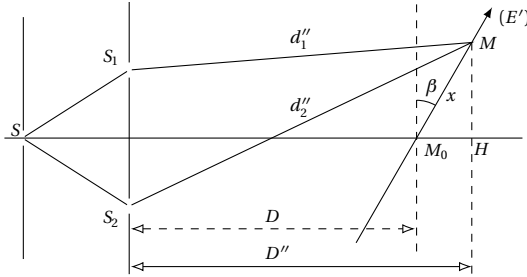
$$\Rightarrow x_{k+1} = (k+1) \frac{\lambda D}{a} - y \frac{D}{d}$$

L'interfrange  $i'$  est :

$$i' = x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda D}{a} = i$$

Donc l'interfrange n'a pas été modifié.

**3.1.6.** On incline l'écran d'un angle  $\beta = 30^\circ$ .



**3.1.6.1.** Ce qu'on observe sur l'écran.

L'écran étant toujours situé dans le champ d'interférences nous observons un système de franges d'interférences alternativement brillantes et sombres.

**3.1.6.2.** Calculons la nouvelle interfrange  $i''$ .

La différence de marche  $\delta''$  devient :

$$\delta'' = d_2'' - d_1''$$

Pour calculer  $\delta''$  admettons qu'au point M, tout se passe (du point de vue différence de marche) comme si on avait déplacé l'écran E d'une distance  $M_0H$  tout en le laissant parallèle à sa direction initiale. On démontre (voir 3.1.2.) que :

$$\delta'' = \frac{aMH}{D''}$$

avec  $MH = x \cos \beta$  et  $D'' = D + x \sin \beta$ . Or  $D$  est de l'ordre du mètre, et  $x$  de l'ordre du centimètre;  $-1 < \sin \beta < 1$ , on peut négliger la grandeur  $x \sin \beta$  devant  $D$ . Donc :

$$D'' \approx D$$

$$\Rightarrow \delta'' = \frac{a x \cos \beta}{D}$$

Remarquons que la différence de marche  $\delta''$  dépend de  $\beta$ . Pour une frange brillante d'ordre  $k$ ,

$$\delta'' = k\lambda$$

$$\Rightarrow \frac{a x \cos \beta}{D} = k\lambda$$

$$\Rightarrow x_k = k \frac{\lambda D}{a \cos \beta}$$

Pour une frange brillante d'ordre  $k+1$ ,

$$\delta'' = (k+1)\lambda$$

$$\Rightarrow \frac{a x \cos \beta}{D} = (k+1)\lambda$$

$$\Rightarrow x_{k+1} = (k+1) \frac{\lambda D}{a \cos \beta}$$

L'interfrange  $i''$  est :

$$i'' = x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda D}{a \cos \beta} = \frac{i}{\cos \beta}$$

L'interfrange dépend aussi de  $\beta$ . Comme  $-1 \leq \cos \beta \leq 1$ ,  
 $\Rightarrow \frac{i}{\cos \beta} \geq i \Rightarrow i'' \geq i$ .

On observe donc un élargissement des franges d'interférences. A.N.  $i = 1,2 \times 10^{-3} \text{ m}$ ,  $\beta = 30^\circ$ ,  $i'' = 1,385 \times 10^{-3} \text{ m}$ .

**3.1.7.** On remplace la source  $S_A$  par une source  $S_B$  de longueur d'onde  $\lambda_B$ .  $D_2 = 3 \text{ m}$ ;  $i_2 = 2,1 \text{ mm}$ ;  $a = 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$ .

Calculons  $\lambda'$ .

$$i_2 = \frac{\lambda' D_2}{a}$$

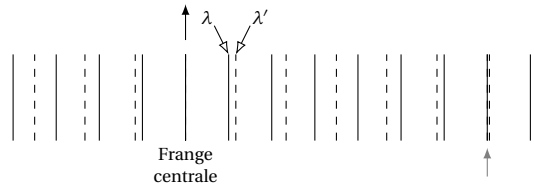
$$\Rightarrow \lambda' = \frac{i_2 a}{D_2} = \frac{2,1 \times 10^{-3} \cdot 10^{-3}}{3}$$

$$= 0,7 \times 10^{-6} \text{ m} = 0,7 \mu\text{m}$$

La lumière émise par  $S_B$  appartient au domaine du rouge.

**3.2.** Soit une source émettant deux radiations de longueur d'onde  $\lambda_A$  et  $\lambda_B$  ci-dessus.

**3.2.1.** Expliquons sur un schéma le phénomène observé sur l'écran ramené à  $D = 2 \text{ m}$ .



Chaque radiation donne son propre système de franges.  $i = 1,2 \times 10^{-3} \text{ m}$  pour  $\lambda = 0,6 \mu\text{m}$ , calculons  $i'$  pour  $\lambda_B = 0,7 \mu\text{m}$   $i' = \frac{\lambda' D}{a} = \frac{0,7 \times 10^{-6} \cdot 2}{10^{-3}} = 1,4 \times 10^{-3} \text{ m}$ .

Représentons sur l'axe  $xx'$  les positions des franges brillantes des deux radiations. Echelle de  $i : 10 \text{ mm}$  pour  $10^{-3} \text{ m}$  de  $i$ .

**3.2.2.** Les premiers franges brillantes des deux systèmes sont-elles discernables?

Pour la radiation  $\lambda$ , les franges brillantes ont pour abscisse :  $x_k = ki$ . Pour la radiation  $\lambda'$   $x_{k'} = ki'$ . Les premières franges brillantes correspondent à  $k=1$  et la distance qui les sépare est (pour  $k=1$ ) :

$$x'_{k=1} - x_{k=1} = i' - i = 1,4 - 1,2 = 0,2 \text{ mm} < 0,25 \text{ mm}$$

Donc les deux premières franges brillantes des deux systèmes ne sont pas discernables.

Couleur de la lumière sur l'écran aux points d'abscisses  $x$  mesurée à partir de la frange centrale.

Un point M d'abscisse  $x$  appartient à :

- une frange brillante si  $x = ki$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ ;
- une frange sombre si  $x = \left(k + \frac{1}{2}\right)i$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

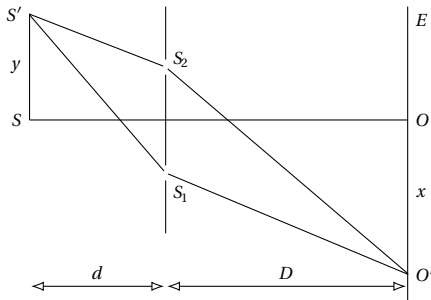
Pour  $x = 3,5 \text{ mm}$ ,  $\frac{x}{i} = \frac{3,5}{1,2} = 2,91 \approx 3 \Rightarrow$  ce point appartient à une frange brillante pour  $\lambda$ .

Pour  $x = 3,5 \text{ mm}$ ,  $\frac{x}{i'} = \frac{3,5}{1,4} = 2,5 \Rightarrow x = \left(2 + \frac{1}{2}\right)i' \Rightarrow$  ce point est sombre pour la radiation  $\lambda'$ . Donc au point d'abscisse  $x = 3,5 \text{ mm}$  la lumière est jaune. La même démarche montre que le point d'abscisse  $x = 4,2 \text{ mm}$  est sombre pour  $\lambda$  et brillant pour  $\lambda'$ . Donc la lumière est rouge en ce point.

- Le point d'abscisse  $x = 8,4 \text{ mm}$  est : brillant pour la radiation  $\lambda$  et Brillant pour  $\lambda'$ . En ce point se superposent la couleur jaune et rouge.
- Le point d'abscisse  $x = 9 \text{ mm}$  est sombre pour la radiation  $\lambda$  et sombre pour la radiation  $\lambda'$ . Ce point est sombre.

#### Solution 4. (p. 216)

##### 4.1. Calcul de $\lambda$ .



Entre les deux franges brillantes repérées on compte douze interfranges,  $i$ , par suite :

$$l = 12i$$

Soit a la distance  $S_1 S_2$ ,  $\lambda$  la longueur d'onde :

$$i = \lambda \frac{D}{a} \\ \Rightarrow \lambda = \frac{ia}{D}$$

avec  $i = \frac{l}{12}$  et  $\lambda = \frac{la}{12D} = \frac{7,2 \cdot 3}{12 \cdot 3000} = 0,6 \times 10^{-3} \text{ mm} = 0,6 \mu\text{m}.$

##### 4.2. Incertitude absolue sur la longueur d'onde.

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta D}{D} \\ = \frac{0,1}{3} + \frac{0,1}{7,2} + \frac{1}{300} = 0,05 \\ \Rightarrow \Delta \lambda = 0,6 \cdot 0,05 = 0,03 \mu\text{m}$$

par suite  $\lambda = 0,60 \pm 0,03 \mu\text{m}$

**4.3.** On déplace  $S$  de  $2,5 \text{ mm}$ , parallèlement à  $S_1 S_2$ . De combien et dans quel sens se déplace la frange centrale ? Initialement,  $S$  et la frange centrale  $O$ , sont dans le plan médiateur de  $S_1 S_2$ , lorsque la source vient en  $S'$ , la frange centrale se déplace en  $O'$ . La lumière se propage de  $S'$  à l'écran partout à la même vitesse, les deux trajets pour aller de  $S'$  à  $O'$  doivent donc avoir même longueur :

$$S'S_2 + S_2 O' = S'S_1 + S_1 O'$$

Sur la figure ci-contre,  $S'S_1 > S'S_2$  donc  $S_1 O' < S_2 O'$  :  $O'$  est au-dessous de  $O$ . La frange centrale et la source se

déplacent en sens inverse.  $x$  étant le déplacement de la frange centrale et  $y$  le déplacement de  $S$ , on démontre que la différence de marche  $\delta$  est :

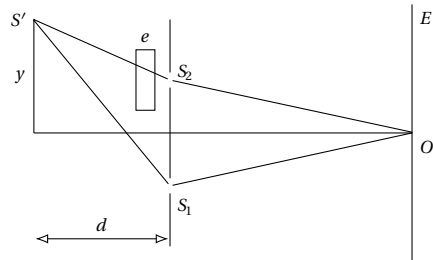
$$\delta = \frac{ay}{d} + \frac{ax}{D}$$

Déplacement de la frange centrale.

La frange centrale se définit par :

$$\delta = 0 \\ \Rightarrow \frac{ay}{d} + \frac{ax}{D} = 0 \\ \Rightarrow x = -y \frac{D}{d} = -\left(-0,25 \frac{300}{50}\right) = 1,5 \text{ cm}$$

**4.4.** Déterminons la position et l'épaisseur de la lame à faces parallèles utilisée pour ramener la frange centrale à sa position primitive  $O$ .



La lumière se propage moins vite dans le verre que dans l'air ; la distance  $S'S_2 O$  est plus courte que  $S'S_1 O$  sur la figure. Pour que les temps de parcours soient les mêmes, il faut donc placer la lame devant  $S_2$ . Exprimons que les temps de parcours  $t_1$  et  $t_2$  pour passer de  $S'$  à  $O$  sont égaux :

- Trajet  $S'S_2 O$  : supposons que la lumière traverse pratiquement normalement la lame, dans ce cas le trajet dans la lame est  $e$ . Soit  $c$  la vitesse dans l'air,  $V$  la vitesse dans le verre, nous savons que :  $V = \frac{c}{n}$ . Par suite :

$$t_2 = \frac{S'S_2 - e}{c} + \frac{e}{V} + \frac{S_2 O}{c} \quad (\text{S10.1})$$

- Trajet  $S'S_1 O$  :

$$t_1 = \frac{S'S_1}{c} + \frac{S_1 O}{c} \quad (\text{S10.2})$$

Par suite  $t_1 = t_2$  conduit, après multiplication par  $c$  :

$$S'S_2 - e + e \frac{c}{V} + S_2 O = S'S_1 + S_1 O$$

comme  $S_2 O = S_1 O$

$$e \left( \frac{c}{V} - 1 \right) = S'S_1 - S'S_2$$

$$\Rightarrow (n-1)e = \frac{ay}{d}$$

$$\Rightarrow e = \frac{ay}{(n-1)d}$$

$$e = \frac{3 \cdot 2,5}{0,5 \cdot 500} = 3 \times 10^{-2} \text{ mm}$$

## Effet photoélectrique

### Solution 5. (p. 216)

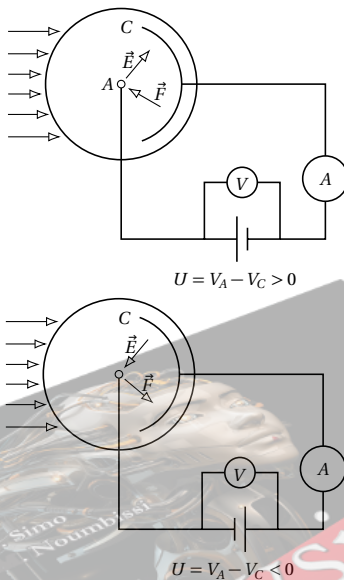
**5.1.** Ce schéma représente la courbe  $I = f(U)$ , appelée caractéristique tension-courant de la cellule photoémissive.

**5.2.**

- Le point A correspond à l'intensité maximale du courant photoélectrique appelé *intensité de saturation*.
- Le point B correspond à la tension négative qui crée la force électrique  $\vec{F}$  qui s'oppose au mouvement des électrons.

A cette tension en B,  $I = 0 \Rightarrow$  seuls les électrons partant de la cathode avec l'énergie cinétique maximales arrivent à l'anode avec une vitesse nulle. Cette tension en B est le *potentiel d'arrêt*.

**5.3.** Schéma du dispositif expérimental qui a permis de tracer cette courbe.



### Solution 6. (p. 216)

Pour compléter ce tableau, écrivons les relations qui lient  $E_s$ ,  $\lambda_s$  et  $\nu_s$

$$E_s = h \nu_s \quad (\text{S10.1})$$

$$\nu_s = \frac{c}{\lambda_s} \quad (\text{S10.2})$$

$$E_s = \frac{hc}{\lambda_s} \quad (\text{S10.3})$$

avec  $h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$  et  $c = 3 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

	$E_s \text{ (J)}$	$\lambda_s \text{ (m)}$	$\nu_s \text{ (Hz)}$
ligne 1	$3,2 \times 10^{-19}$	$6,20 \times 10^{-7}$	$4,80 \times 10^{14}$
ligne 2	$2,8 \times 10^{-19}$	$0,71 \times 10^{-6}$	$4,20 \times 10^{14}$
ligne 3	$2,8 \times 10^{-15}$	$7,14 \times 10^{-11}$	$4,20 \times 10^{18}$
ligne 4	$4,8 \times 10^{-19}$	$4,13 \times 10^{-7}$	$7,25 \times 10^{14}$

### Solution 7. (p. 217)

**7.1.** Calcul de la longueur d'onde  $\lambda_0$  correspondant au seuil photoélectrique.

$$W_0 = \frac{hc}{\lambda_0}$$

$$\Rightarrow \lambda_0 = \frac{hc}{W_0}$$

A.N.  $h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ ;  $c = 3 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ;  
 $W_0 = 1,90 \text{ eV} = 1,90 \cdot 1,6 \times 10^{-19} = 3,04 \times 10^{-19} \text{ J}$ ;  
 $\lambda_0 = 0,65 \times 10^{-6} \text{ m} = 0,65 \mu\text{m}$ .

**7.2.** Déterminons les radiations qui provoquent l'émission photoélectrique.

Un photon d'énergie  $E = \frac{hc}{\lambda}$  ne peut extraire un électron d'un métal que s'il apporte une énergie supérieure ou égale au travail d'extraction  $E_0 = \frac{hc}{\lambda_0}$ . Ce qui se traduit par :

$$\frac{hc}{\lambda} \geq \frac{hc}{\lambda_0}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda} \geq \frac{1}{\lambda_0}$$

$$\Rightarrow \lambda_0 \geq \lambda$$

$$\Rightarrow \lambda \leq \lambda_0$$

Donc, pour qu'une radiation provoque l'émission photoélectrique, il faut que sa longueur d'onde  $\lambda$  soit inférieure ou égal à la longueur d'onde  $\lambda_0$  caractéristique de la cellule photo-émissive. En comparant  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  à  $\lambda_0$ , on voit que les radiations qui provoquent l'émission photoélectrique sont :

$$\lambda_2 = 0,60 \times 10^{-6} < \lambda_0 \quad (= 0,65 \times 10^{-6} \text{ m})$$

$$\lambda_3 = 0,50 \times 10^{-6} < \lambda_0 \quad (= 0,65 \times 10^{-6} \text{ m})$$

**7.3.**

**7.3.1.** Calculons la vitesse maximale d'émission d'un électron pour  $\lambda_3 = 0,50 \times 10^{-6} \text{ m}$ .

Quand on éclaire la cellule par la radiation de longueur d'onde  $\lambda_3$ , l'énergie qu'elle cède à l'électron est :

$$E_3 = \frac{hc}{\lambda_3}$$

Une partie de cette énergie égale à  $W_0$  sert à extraire l'électron du métal, l'autre partie ( $\frac{hc}{\lambda_3} - W_0$ ) est communiquée à l'électron sous forme d'énergie cinétique. En négligeant les pertes d'énergie, l'électron garde cette énergie cinétique jusqu'à sa sortie du métal ; il est alors éjecté

avec l'énergie cinétique maximale.

$$E_c(\text{max}) = \left( \frac{hc}{\lambda_3} - W_0 \right)$$

$$\text{avec } E_c(\text{max}) = \frac{1}{2} m V_{\text{max}}^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m V_{\text{max}}^2 = \frac{hc}{\lambda_3} - W_0$$

$$\Rightarrow V_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2}{m} \left( \frac{hc}{\lambda_3} - W_0 \right)}$$

$$\text{A.N. : } m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}; E_3 = \frac{hc}{\lambda_3} = 3,97 \times 10^{-19} \text{ J};$$

$$W_0 = 3,04 \times 10^{-19} \text{ J}; V_{\text{max}} = 4,52 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}.$$

### 7.3.2. Calcul de la vitesse d'arrivée sur l'anode.

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique à l'électron, entre la cathode et l'anode. En négligeant le poids de l'électron devant la force électrique, on a :

$$E_{cA} - E_{cC} = W(\vec{F}) = (-e)(V_C - V_A)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{1}{2} m v_C^2 = (-e)(U_{CA}) = e U_{AC}$$

$$\Rightarrow v_A = \sqrt{\frac{2e U_{AC}}{m} + v_C^2}$$

$$= 1,4 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$$

### 7.3.3. Valeur de $U_{AC}$ pour laquelle l'intensité du courant électrique est nulle.

L'intensité du courant photoélectrique est nulle si aucun électron n'arrive à l'anode A. Dans un cas limite, l'électron arrive en A avec une vitesse nulle. Dans ce cas l'application du théorème de l'énergie cinétique entre A et C donne :

$$E_{cA} - E_{cC} = W(\vec{F})$$

$$\text{avec } E_{cA} = 0$$

$$\Rightarrow -E_{cC} = W(\vec{F})$$

$$\Rightarrow -E_{cC} = -e(V_C - V_A) = -e U_{AC}$$

$$E_{cC} = E_c(\text{max}) = \frac{1}{2} m v_C^2 = -e U_{AC}$$

$$\Rightarrow U_{AC} = -\frac{1}{2} m v_C^2 \frac{1}{e}$$

A.N.  $U_{AC} = -0,57 \text{ V}$ . Cette valeur limite est le potentiel d'arrêt.

### Solution 8. (p. 217)

#### 8.1. Peut-on observer l'effet photoélectronique ?

La longueur d'onde  $\lambda = 350 \text{ nm}$  du rayonnement est inférieure à la longueur d'onde  $\lambda_0 = 540 \text{ nm}$  du seuil photoélectronique du potassium : on peut donc observer l'effet photoélectronique.

#### 8.2. Calcul du travail d'extraction $W_0$ .

$\lambda_0$  étant la longueur d'onde du seuil photoélectronique. Le travail d'extraction  $W_0$  est :

$$W_0 = \frac{hc}{\lambda_0}$$

$$= \frac{6,62 \times 10^{-34} \cdot 3 \times 10^8}{540 \times 10^{-9}} = 3,68 \times 10^{-19} \text{ J} \approx 2,3 \text{ eV}$$

### 8.3.

#### 8.3.1. Pourquoi les électrons extraits ne sortent-ils pas tous à la même vitesse ?

Lors d'une interaction entre un photon et un électron libre, le photon cède toute son énergie  $E$ . Une partie  $W_0$ , de cette énergie sert à extraire l'électron, l'autre partie est cédée à l'électron qui acquiert ainsi initialement l'énergie cinétique  $E - W_0$ . Mais avant de sortir du métal l'électron, lors du choc sur les autres particules du métal, perd une partie plus ou moins importante de cette énergie cinétique. Finalement à la sortie du métal son énergie cinétique de sortie est :

$$E_c \leq E - W_0$$

Les électrons ne sortent donc pas tous à la même vitesse du fait du caractère aléatoire des chocs.

#### 8.3.2. Quelle est leur énergie cinétique maximale de sortie $E_c(\text{max})$ ?

En négligeant les pertes d'énergie de l'électron lors des chocs, l'énergie cinétique de sortie a la valeur maximale  $E_c(\text{max}) = E - W_0$  soit :

$$E_c(\text{max}) = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{W_0} = hc \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right)$$

$$\approx 2 \times 10^{-19} \text{ J}$$

#### 8.3.3. Quelle est la vitesse de sortie maximale correspondante ?

L'électron qui sort avec l'énergie cinétique maximale  $E_c(\text{max})$  n'est pas relativiste, c'est-à-dire que les lois de la mécanique newtonienne lui sont applicables. En particulier son énergie cinétique a pour expression :

$$E_c(\text{max}) = \frac{1}{2} m V_m^2$$

$$\Rightarrow V_m = \sqrt{\frac{2E_c(\text{max})}{m}} = 6,63 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$$

### Solution 9. (p. 217)

#### 9.1. Fréquence du seuil photoélectronique $\nu_0$ .

La fréquence seuil  $\nu_0$  est donnée par :

$$h \nu_0 = W_0$$

$$\Rightarrow \nu_0 = \frac{W_0}{h} = \frac{2,9 \cdot 1,6 \times 10^{-19}}{6,62 \times 10^{-34}} = 7 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

Observe-t-on avec S, l'effet photoélectronique ? La fréquence du rayonnement émis par S est  $\nu = 9 \times 10^{14} \text{ Hz}$ . La fréquence seuil étant  $\nu_0 = 7 \times 10^{14} \text{ Hz}$ . On constate que :  $\nu > \nu_0 \Rightarrow$  on observe l'effet photoélectronique.

#### 9.2. Énergie cinétique maximale se sortie des électrons de C.

$$E_c(\text{max}) = h \nu - h \nu_0 = h(\nu - \nu_0)$$

$$E_c(\text{max}) = 6,62 \times 10^{-34} (9 \times 10^{14} - 7 \times 10^{14})$$

$$= 1,32 \times 10^{-19} \text{ J}$$

### 9.3.

#### 9.3.1. Nombre $n'_1$ de photons reçus par seconde par C.

Chaque photon transporte l'énergie  $E = h \nu$ . Soit  $n$  le nombre de photons arrivant sur C pendant la durée  $t$ .



## 10.6. Solutions des exercices et problèmes

L'énergie reçue par  $C$  pendant cette durée est :

$$W = nh\nu$$

$$\Rightarrow P = \frac{W}{t} = \frac{nh\nu}{t}$$

## 9.3.2. Rendement quantique de la cellule

$R = \frac{n_1}{n_1'} = \frac{3 \times 10^{10}}{5 \times 10^{12}} = 0,006 = 0,6\%$ . Cela signifie que 6 photons sur 1000 arrachent un électron au métal. On dit qu'il y a 6 chocs efficaces sur 1000; 6 photons utiles sur 1000.

## 9.4.

- L'énergie cinétique maximale de sortie des électrons, pour un métal donné, ne dépend que de l'énergie de chaque photon, donc ne dépend que de la fréquence du rayonnement électromagnétique. Dans cette expérience  $\nu$  ne change pas,  $E_c(\text{max})$  ne change pas.
- Lorsque la puissance est divisée par deux, on divise par deux le nombre de photons arrivant sur  $C$  chaque seconde. Si on admet que le rendement quantique reste le même, il y aura extraction de deux fois moins d'électrons par seconde.

## Solution 10. (p. 217)

**10.1.** Pour que l'effet photoélectrique ait lieu; il faut que chaque photon incident de fréquence  $\nu$  possède une énergie  $h\nu$  plus élevée que l'énergie seuil  $E_0 = h\nu_0$ .

$$h\nu > h\nu_0$$

$$\Rightarrow \nu > \nu_0$$

$$\Rightarrow \frac{c}{\lambda} > \frac{c}{\lambda_0}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda} > \frac{1}{\lambda_0}$$

$$\Rightarrow \lambda_0 > \lambda$$

Déterminons  $\lambda_0$  :

$$W_0 = h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0}$$

$$\Rightarrow \lambda_0 = \frac{hc}{W_0}$$

A.N.  $h = 6,6 \times 10^{-34} \text{ J s}$ ;  $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ ;  $W_0 = 2,25 \text{ eV}$ ;  
 $1 \text{ J} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ eV}$ ;

$$\lambda_0 = \frac{6,62 \times 10^{-34} \cdot 3 \times 10^8}{2,25 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}$$

$$= 0,551 \times 10^{-6} \text{ m} = 0,551 \mu\text{m}$$

On constate que  $\lambda_0 > \lambda (= 0,500 \mu\text{m})$  et  $\lambda_0 < \lambda' (= 0,580 \mu\text{m})$ . Nous concluons que la radiation qui produit l'effet photoélectrique est la radiation de longueur d'onde  $\lambda = 0,500 \mu\text{m}$ .

**10.2.** Calcul de la vitesse maximale émis par la cathode. L'énergie cinétique maximale est :

$$E_c(\text{max}) = h\nu - W_0$$

avec  $E_c(\text{max}) = \frac{1}{2} m V_m^2$

$$\text{et } \nu = \frac{c}{\lambda}$$

$$\frac{1}{2} m V_m^2 = \frac{hc}{\lambda} - W_0$$

$$\Rightarrow V_m = \sqrt{\frac{2hc}{\lambda m} - \frac{2W_0}{m}}$$

**10.3.** A.N.  $h = 6,6 \times 10^{-34} \text{ J s}$ ;  $C = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ ;  
 $\lambda = 0,5 \times 10^{-6} \text{ m}$ ;  $W_0 = 2,25 \text{ eV}$ ;  $m = 9 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ;  
 $1 \text{ J} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ eV}$

$$V_m = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,6 \times 10^{-34} \cdot 3 \times 10^8}{0,5 \times 10^{-6} \cdot 9 \times 10^{-31}} - \frac{2 \cdot 2,25 \cdot 1,6 \times 10^{-19}}{9 \times 10^{-31}}}$$

$$= 287518,11 \text{ m s}^{-1}$$

**10.4.** Détermination de la d.d.p. nécessaire pour annuler le courant photoélectrique.

Cette d.d.p. est appelée potentiel d'arrêt. Quand on règle le dispositif au potentiel d'arrêt, seuls les électrons qui partent de la cathode  $C$  avec l'énergie cinétique maximale arrive à l'anode  $A$  avec une vitesse nulle. Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit alors :

$$E_c(A) - E_c(C) = -eU$$

avec  $E_c(A) = 0$

$$\text{et } E_c(C) = E_c(\text{max}) = \frac{hc}{\lambda} - W_0$$

$$\frac{hc}{\lambda} - W_0 = eU$$

$$\Rightarrow U_0 = \frac{hc}{e\lambda} - \frac{W_0}{e}$$

$$\text{A.N. } U_0 = \frac{6,6 \times 10^{-34} \cdot 3 \times 10^8}{1,6 \times 10^{-19} \cdot 0,5 \times 10^{-6}} - \frac{2,25 \cdot 1,6 \times 10^{-19}}{1,6 \cdot 10^{-19}}$$

$$= 0,225 \text{ V}$$

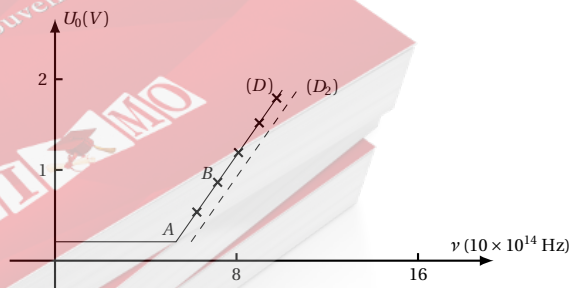
**10.5.** Détermination du rendement de la cellule.

Le rendement quantique de la cellule est donnée par la relation.  $\rho = \frac{n}{N}$  où  $n$  = nombre d'électrons par unité de temps et  $N$  le nombre de photon incidents par unité de temps.  $n$  et  $N$  sont donnés par les relations suivante :

$$P_\lambda = Nh\nu$$

$$\text{et } I = ne$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{Ih\nu}{P_\lambda e} = \frac{I}{P_\lambda e} \frac{hc}{\lambda}$$



A.N.  $I = 5 \times 10^{-8} \text{ A}$ ;  $P_\lambda = 9,9 \times 10^{-6} \text{ W}$ ;  $h = 6,6 \times 10^{-34} \text{ J s}$ ;  
 $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ ;  $\lambda = 0,5 \times 10^{-6} \text{ m}$ ;  $\rho = 1,25\%$ . Sur 100 photons incidents, il y a seulement un qui soit efficace.



**Solution 11. (p. 217)**

**11.1.** Représentation des variations du potentiel d'arrêt  $U_0 = f(\nu)$ .

*Nature de la courbe.*

A quelques erreurs près les points de coordonnées  $(\nu, U_0)$  sont situés sur une droite. Par suite, le potentiel d'arrêt  $U_0$  est une fonction affine de  $\nu$  de la forme :

$$U_0 = a\nu + b$$

**11.1.1.** Relation théorique existant entre  $U_0$  et  $\nu$ . Considérons deux points appartenant à la droite  $D$ , par exemple les points  $A(5,13 \times 10^{14}, 0,20)$  et  $B(7,07 \times 10^{14}, 1)$ . Ecrivons que leurs coordonnées vérifient la fonction affine.

$$U_0 = a\nu + b$$

$$0 \begin{cases} 2 = a5,13 \times 10^{14} + b & (\text{S10.1}) \\ 1 = a7,07 \times 10^{14} + b & (\text{S10.2}) \end{cases}$$

De (S10.1) et (S10.2) on déduit :

$$a = 4,12 \times 10^{-15} \text{ et } b = -1,91$$

$$U_0 = 4,12 \times 10^{-15} \nu - 1,91 \quad (\text{S10.3})$$

*Déduction de la valeur de  $h$ .*

On démontre que si  $\nu_0$  est la fréquence seuil de la cellule photoélectrique,

$$U_0 = \frac{h\nu}{e} - \frac{h\nu_0}{e} \quad (\text{S10.4})$$

En identifiant (S10.3) et (S10.4), on a :

$$\begin{aligned} \frac{h\nu}{e} &= 4,12 \times 10^{-15} \nu \\ \Rightarrow h &= 4,12 \times 10^{-15} \cdot 1,6 \times 10^{-19} \\ &\approx 6,6 \times 10^{-34} \text{ USI} \end{aligned}$$

**11.1.2.** Valeur de l'énergie d'extraction d'un électron.

$$W_0 = h\nu_0$$

$$\text{où } \nu_0 = \frac{1,91e}{h}$$

$$\Rightarrow W_0 = \frac{h \cdot 1,91e}{h} = 1,91 \text{ eV}$$

**11.2.** Les résultats précédents ne sont pas modifiés. L'émission photoélectrique ne dépend pas de la puissance lumineuse.

**11.3.** Graphe des variations du potentiel d'arrêt pour  $U'_0 = 5,6 \times 10^{14} \text{ Hz}$ . (voir figure). Nous avons :

$$U_0 = a\nu + b$$

$$U_0 = \frac{h\nu}{e} - \frac{h\nu_0}{e}$$

$$\Rightarrow a = \frac{h}{e}$$

$$b = -\frac{h\nu_0}{e} = -a\nu_0$$

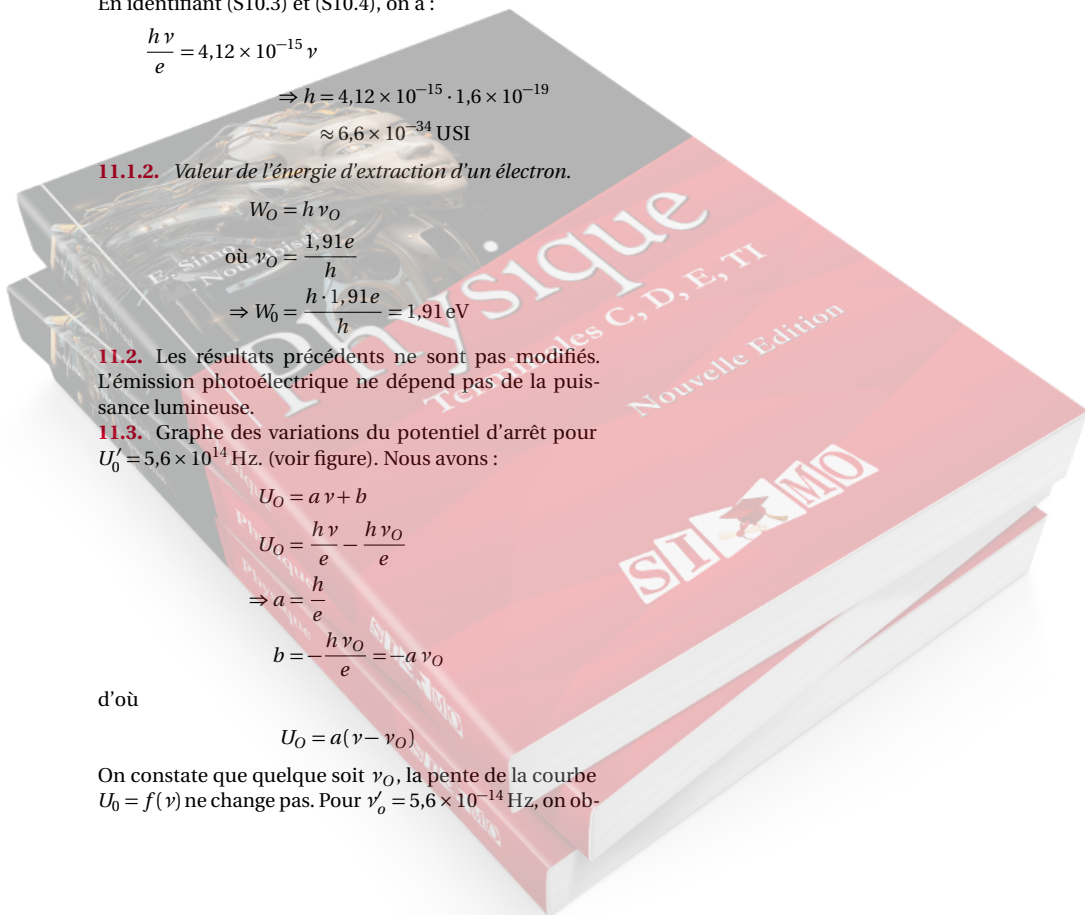
d'où

$$U_0 = a(\nu - \nu_0)$$

On constate que quelque soit  $\nu_0$ , la pente de la courbe  $U_0 = f(\nu)$  ne change pas. Pour  $\nu'_0 = 5,6 \times 10^{14} \text{ Hz}$ , on ob-

tient une droite parallèle à celle précédemment obtenue d'équation :

$$U_0 = \frac{h}{e}(\nu - \nu_0) = 4,12 \times 10^{-15} \nu - 2,3$$



## La radioactivité

11.1	<b>Introduction</b>	230
11.2	<b>Composition des émissions radioactives</b>	230
11.3	<b>Origine des rayonnements et equation-bilan des transformations radioactives</b>	230
11.3.1	Origine des rayonnements	230
11.3.2	Equation-bilan des transformations radioactives	230
11.3.3	La radioactivité $\alpha$	230
11.3.4	La radioactivité $\beta^-$	230
11.3.5	La radioactivité $\beta^+$	231
11.3.6	La radioactivité $\gamma$	231
11.4	<b>Propriétés générales des désintégrations</b>	231
11.4.1	La loi de décroissance radioactive	231
11.4.2	Période radioactive $T$	231
11.5	<b>D'autres réactions nucléaires</b>	231
11.5.1	La fission	232
11.5.2	La fusion	232
11.6	<b>Enoncés des exercices et problèmes</b>	232
11.7	<b>Solutions des exercices et problèmes</b>	234



## 11.1 Introduction

Nous avons étudié depuis la classe de seconde les réactions chimiques qui s'expliquent par les liaisons s'effectuant au niveau des électrons périphériques d'un atome et n'affectant pas du tout les noyaux des atomes. Dans ce chapitre, nous allons étudier les réactions qui font intervenir les noyaux des atomes : on les appelle *réactions nucléaires*. Lorsque ces réactions nucléaires sont spontanées, on parle de *radioactivité*.

## 11.2 Composition des émissions radioactives

Au cours des réactions nucléaires, il y a toujours émission d'un rayonnement (déterminée par les déviations par des champs magnétique et électrique) qui définit le type de radioactivité. Des expériences assez précises ont montré qu'il existe quatre types de radioactivité :

1. **la radioactivité  $\alpha$**  : dans ce cas, les rayonnements sont constitués des noyaux d'hélium  ${}^4_2\text{He}^{2+}$  encore appelés particules  $\alpha$  ;
2. **la radioactivité  $\beta^-$**  : les rayonnements  $\beta^-$  sont des électrons que nous noterons  ${}^0_{-1}\text{e}$  ou  $\text{e}^-$  ;
3. **la radioactivité  $\beta^+$**  : les rayonnements sont des antiparticules de l'électron appelés positons ou positrons. On les note  ${}^0_{+1}\text{e}$  ou  $\text{e}^+$  ;
4. **la radioactivité  $\gamma$**  : ici les rayonnements sont des ondes électromagnétiques de très courte longueur d'onde.

## 11.3 Origine des rayonnements et equation-bilan des transformations radioactives

### 11.3.1 Origine des rayonnements

Rappelons que la radioactivité est due à la désintégration spontanée d'un noyau instable.

Par ailleurs, on constate qu'un radionucléide conserve la même radioactivité quelque soit le composé dans lequel il se trouve. Donc la radioactivité ne concerne pas les électrons périphériques qui assurent les liaisons entre atomes.

En plus, lors d'une émission radioactive, un élément se transforme en un élément différent (souvent plus stable) ; on dit qu'il subit une transmutation.

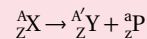
### 11.3.2 Equation-bilan des transformations radioactives

Les réactions nucléaires obéissent aux quatre lois de conservation :

- des charges électriques ;
- du nombre de nucléons ;
- de l'énergie ;
- de la quantité de mouvement.

#### Exemple.

Dans le cas d'une radioactivité  $\alpha$ ,  $\beta^-$ , ou  $\beta^+$  dans lesquelles une particule chargée est produite, l'équation-bilan de la transformation s'écrit sous la forme :



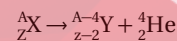
( ${}^A_Z\text{X}$  est le noyau père et  ${}^{A'}_{Z'}\text{Y}$  est le noyau fils) P symbolise la particule produite :  ${}^4_2\text{He}$ ,  ${}^0_{-1}\text{e}$  ou  ${}^0_{+1}\text{e}$  ;

- la conservation du nombre de nucléons s'écrit :  $A = A' + a$  ;
- la conservation du nombre de charge électrique s'écrit :  $Z = Z' + z$ .

Sur cet exemple, écrivons les équations-bilan des transformations radioactives.

### 11.3.3 La radioactivité $\alpha$

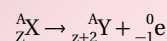
Au cours de cette désintégration, il y a production d'un noyau d'hélium  ${}^4_2\text{He}$ . L'équation-bilan s'écrit grâce aux lois de conservation.



Dans la classification périodique, l'élément fils "Y" est donc placé deux cases avant l'élément père X.

### 11.3.4 La radioactivité $\beta^-$

Les noyaux radioactifs  $\beta^-$  émettent des électrons. L'équation-bilan s'écrit grâce aux lois de conservation.

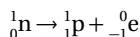


Dans la classification périodique, le noyau fils Y est placé dans la case suivante de celle du noyau père X.

### 11.4. Propriétés générales des désintégrations

#### Remarque.

Comment expliquer qu'un noyau puisse émettre un électron alors qu'il n'en possède pas? On doit admettre qu'un neutron  ${}_0^1\text{n}$  se transforme en un proton  ${}_1^1\text{p}$  et un électron  ${}_{-1}^0\text{e}$  selon l'équation :

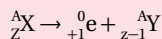


Et le noyau fils comporte bien un proton de plus que le noyau père. Cette radioactivité s'observe dans le cas des noyaux qui possèdent "trop de neutrons".

**NB:** Dans une radioactivité  $\beta^-$ , l'électron émis ne provient pas du cortège électronique de l'atome radioactif mais de son noyau.

### 11.3.5 La radioactivité $\beta^+$

La radioactivité  $\beta^+$  ne concerne que certains éléments artificiels. Elle est caractéristique de noyaux trop riche en protons. Le rayonnement émis est constitué de positons ( ${}_{+1}^0\text{e}$ ). L'équation-bilan s'écrit :



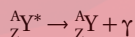
Dans la classification périodique, le noyau fils Y est dans la case précédant celle du noyau père.

### 11.3.6 La radioactivité $\gamma$

Le rayonnement  $\gamma$  est formé de photons énergétiques. Ce rayonnement est émis lors de la désexcitation (retour à l'état fondamental) d'un noyau préalablement excité.

La radioactivité  $\gamma$  accompagne généralement les radioactivité  $\alpha$  et  $\beta$ , car elle résulte de la désexcitation progressive du noyau fils.

Si nous notons  $Y^*$  le noyau excité, l'équation-bilan de la radioactivité  $\gamma$  s'écrit :



## 11.4 Propriétés générales des désintégrations

Soit un échantillon de substance radioactive contenant  $N$  noyaux identiques non désintégrés à l'instant  $t$ . la radioactivité étant un phénomène imprévisible, on dit qu'un noyau "ne vieillit pas" car sa probabilité de

"mourir" ne dépend pas de son âge (contrairement au cas des êtres vivants).

### 11.4.1 La loi de décroissance radioactive

Le nombre  $N$  de noyaux désintégrés décroît exponentiellement avec le temps. Si  $N_0$  est le nombre de noyaux non désintégrés à un instant pris comme instant initial  $t = 0$ , on écrit :

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (11.1)$$

où  $\lambda$  est une *constante radioactive*, caractéristique du radio nucléide. (11.1) est la loi de décroissance radioactive.

### 11.4.2 Période radioactive $T$

La période radioactive ou demi vie d'un radio nucléide est la durée  $T$ , nécessaire pour que la moitié des noyaux initialement présents dans l'échantillon, se désintègre.

#### Relation entre $T$ et $\lambda$

$$(11.1) \Rightarrow \frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t}$$

En prenant le logarithme népérien membre à membre, on a :

$$\ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t$$

A l'instant  $T$ ,  $N = \frac{N_0}{2}$  (par définition de  $T$ )

$$\ln \left( \frac{\frac{N_0}{2}}{N_0} \right) = -\lambda T$$

$$\text{or } \frac{\frac{N_0}{2}}{N_0} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \ln \frac{1}{2} = -\lambda T$$

soit  $-\ln 2 = -\lambda T \Rightarrow$

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}$$

## 11.5 D'autres réactions nucléaires

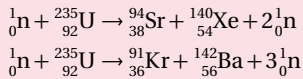
En dehors de la radioactivité (réaction nucléaire spontanée) il existe des réactions nucléaires provoquées : La fission et la fusion.

D'une manière générale, il y a réaction nucléaire provoquée lorsque le choc d'un noyau projectile sur un noyau cible engendre de nouveaux noyaux.

### 11.5.1 La fission

Il y a fission nucléaire lorsque le choc d'un neutron avec un noyau lourd brise ce dernier en noyau plus légers.

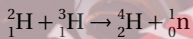
Exemple.



### 11.5.2 La fusion

Il y a fusion lorsque deux noyaux légers s'unissent et constituent un noyau plus lourd.

Exemple.



Les réactions de fusion sont fortement exoénergétiques; c'est la fusion d'hydrogène en hélium qui est à l'origine de l'énergie solaire.

**NB:** Remarquons que l'équation-bilan de la fission et de la fusion respecte les lois de conservation :

- de la charge;
- du nombre de nucléons.

## 11.6 Énoncés des exercices et problèmes

### Exercice 1.

Le nucléide polonium  ${}^{210}_{84}\text{Po}$  se désintègre spontanément en donnant le nucléide plomb  ${}^{206}_{82}\text{Pb}$  et en émettant des particules  $\alpha$ .

**1.1.** Donner la composition du noyau d'un atome de cet isotope de polonium et écrire l'équation de la désintégration en précisant les valeurs de A et de Z.

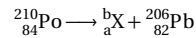
**1.2.** Calculer en J et en MeV l'énergie maximale libérée par la désintégration d'un noyau de polonium 210.

On donne  $M_{\text{Po}} = 210,0482 \text{ u}$ ;  $M_{\text{Pb}} = 206,0385 \text{ u}$ ;  $1 \text{ u} = 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg} = 931,5 \text{ MeV}$ .  $m_{\alpha} = 4,00150 \text{ u}$ .

### Exercice 2.

**2.1.** Qu'appelle-t-on radioactivité naturelle d'un élément?

**2.2.** La désintégration radioactive du polonium 210 peut s'écrire sous la forme :



Trouver a, b et X. De quelle radioactivité s'agit-il?

**2.3.** **2.3.1.** Calculer en MeV l'énergie libérée lors de la désintégration d'un noyau de polonium 210.

**2.3.2.** En supposant qu'il n'y a pas d'émission  $\gamma$  secondaire, calculer en MeV l'énergie cinétique ainsi que la vitesse de la particule  ${}^{\text{b}}_{\text{a}}\text{X}$  émise. (On rappelle qu'il y a conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie totale des particules).

**2.4.** Sachant que la demi-vie (ou période) du polonium 210 est de 138 jours, calculer le temps au bout duquel le quart d'une masse initiale  $m_0$  de polonium 210 se sera désintégrée (on rappelle que si  $m_0$  est la masse initiale d'un échantillon radioactif, la masse restante dans l'échantillon au bout d'un temps  $t$  est de la forme

$$m(t) = m_0 e^{-\lambda t}$$

avec  $\lambda = \frac{0,69}{T}$ ,  $\lambda$  représentant la constante de désintégration de l'échantillon et  $T$  sa demi-vie).

Données :  $1 \text{ u} = 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ;  $c = 3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$ ;  $1 \text{ MeV} = 1,6 \times 10^{-13} \text{ J}$ ;  $M_{\text{Po}} = 209,936 \text{ u}$ ;  $M_{\text{He}} = 4,0015 \text{ u}$ ;  $M_{\text{Pb}} = 205,9296 \text{ u}$ ;  $\ln(0,75) = -0,29$ .

### Exercice 3.

Le polonium est  ${}^{210}_{84}\text{Po}$  un noyau instable qui donne par désintégration  $\alpha$  un noyau stable de plomb Pb, avec émission de rayonnement  $\gamma$ .

**3.1.** Quelle est la signification des nombres placés à gauche du symbole Po? En déduire la composition de ce noyau.

**3.2.** On rappelle que l'énergie de cohésion par nucléon



## 11.6. Énoncés des exercices et problèmes

d'un noyau est donnée par l'expression  $W = \frac{(\Delta m)C^2}{A}$  où  $\Delta m$  représente le défaut de masse du noyau,  $A$  le nombre de masse et  $C$  la célérité de la lumière dans le vide. Calculer en J et en MeV l'énergie de cohésion par nucléon pour le noyau de polonium.

**3.3.** Écrire l'équation de désintégration du noyau de polonium. Quelle est, exprimée en MeV, l'énergie libérée au cours de cette désintégration ? Sous quelles formes se répartit cette énergie ?

**3.4.** Les particules  $\alpha$  émises servent à bombarder des noyaux d'aluminium  $^{27}_{13}\text{Al}$  qui se transforme alors en un isotope radioactif  $^{30}_{15}\text{P}$  du phosphore avec émission d'une particule. Le noyau de phosphore se transforme à son tour en un noyau stable de silicium  $^{30}_{14}\text{Si}$ . Écrire les équations de ces transformations successives. Quelles sont les caractéristiques de la particule émise dans la dernière transformation ?

Données :  $M_{\text{Po}} = 210,0482 \text{ u}$ ;  $M_{\text{Pb}} = 206,0385 \text{ u}$ ;  $M_{\alpha} = 4,0039 \text{ u}$ ;  $M_n = 1,0087 \text{ u}$ ;  $M_p = 1,0073 \text{ u}$ ;  $1 \text{ u} = 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ;  $c = 3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$ ;  $1 \text{ MeV} = 1,6 \times 10^{-13} \text{ J}$ .

## Exercice 4.

On a fait des prélèvements d'échantillons de terrains ensevelis lors d'anciens séismes en Californie. On a pu mesurer, pour chacun d'eux, l'activité radioactive due au carbone 14, radioactif  $\beta^-$ , de période 5700 ans.

**4.1.** Écrire l'équation de désintégration du carbone 14. Calculer sa constante radioactive. On appelle activité  $A$  d'un échantillon le nombre de désintégrations de cet échantillon par unité de temps :

$$A = -\frac{dN}{dt}$$

Quelle est la loi de variation de  $A$  au cours du temps ?

**4.2.** Principe de la datation au carbone 14. La proportion des atomes de carbone 14 dans la biosphère est constante au cours des derniers millénaires : un atome de carbone 14 pour  $10^6$  de carbone 12. À sa mort, l'organisme cesse de consommer des composés carbonés ; la concentration en carbone 14 radioactif commence à décroître. Il suffit donc, en principe, de mesurer l'activité d'un échantillon pour connaître la date de la mort des organismes vivants qu'il contenait ; ainsi en est-il pour les végétaux détruit lors d'une secousse sismique. En Californie, les mesures de ces activités pour divers échantillons on été, en 1979 : 0,233 ; 0,215 ; 0,223 ; 0,251 (unité SI), tandis que l'activité du terrain non enseveli, qui reste constante, est 0,255.

**4.2.1.** Quel est l'âge approximatif des échantillons étudiés ici ? À quelle date se sont produits les séismes que ces échantillons permettent de dater ?

**4.2.2.** Quelle est, dans l'échantillon le plus ancien, la proportion de carbone 14 par rapport aux atomes de l'isotope de carbone 12 ?

## Exercice 5.

Extrait de la classification des éléments :

Thallium	(Tl)	$^{81}_{81}\text{Tl}$
Plomb	(Pb)	$^{82}_{82}\text{Pb}$
Bismuth	(Bi)	$^{83}_{83}\text{Bi}$
Polonium	(Po)	$^{84}_{84}\text{Po}$
Astate	(At)	$^{85}_{85}\text{At}$

**5.1.** Le bismuth  $^{210}_{83}\text{Bi}$  est radioactif  $\alpha$  ; le noyau fils obtenu est quant à lui émetteur du rayonnement  $\beta^-$  ; écrire les équations de désintégrations correspondantes ;

**5.2.** Le polonium  $^{210}_{84}\text{Po}$  est également radioactif  $\alpha$  de demi-vie (période)  $T$  égale à 138 jours ; on dispose à ce jour d'un échantillon de polonium 210 de masse initiale  $m_0 = 1,024 \text{ g}$  (masse de polonium à l'origine des temps) ; au bout du temps  $t$ , la masse présente dans l'échantillon est de la forme  $m(t)$  :

**5.2.1.** Donner l'allure générale de la courbes  $t \rightarrow m(t)$ .

**5.2.2.** Définir ce qu'est la demi-vie de l'élément.

**5.2.3.** Soit  $T' = nT$  le temps écoulé depuis l'instant pris comme origine des temps et  $m(T')$  la masse présente dans l'échantillon à cet instant  $T'$  ( $n$  : nombre entier naturel). Exprimer  $m(T')$  en fonction de  $m_0$  et de  $n$ .

**5.2.4.** En déduire le temps au bout duquel il ne restera dans l'échantillon que 1 mg de polonium 210.

## 11.7 Solutions des exercices et problèmes

### Solution 1. (p. 232)

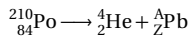
#### 1.1. Composition du noyau du polonium.

La représentation symbolique d'un noyau est  ${}^A_ZX$  avec  $Z$  = nombre de protons et  $A$  = nombre de nucléons.

$$A = Z + N$$

$N$  étant le nombre de neutrons. Il en résulte que le noyau de polonium  ${}^{210}_{84}\text{Po}$  est composé de 84 protons ( $Z = 84$ ) et de  $N = A - Z = 210 - 84 = 126$  neutrons.

Equation de désintégration du noyau de polonium.



Le nombre de masse  $A$  et le nombre de charge  $Z$  du noyau fils s'obtiennent en appliquant les lois de conservation suivantes :

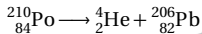
- conservation du nombre de charge :

$$84 = 2 + Z \longrightarrow Z = 84 - 2 = 82$$

- conservation du nombre de masse :

$$210 = 4 + A \longrightarrow A = 210 - 4 = 206$$

d'où l'équation :



#### 1.2. Calcul de l'énergie maximale libérée par la réaction de désintégration du noyau de polonium 210.

D'après la relation d'Einstein, cette énergie est donnée par :

$$E = \Delta m c^2$$

ou  $\Delta m$  est la variation de masse.

$$\Delta m = \text{somme des masses finales} \\ - \text{somme des masses initiales}$$

$$\Delta m = m_\alpha + m_{\text{Pb}} - m_{\text{Po}} \\ \Rightarrow \Delta m = 4,00150 \text{ u} + 206,0385 \text{ u} - 210,0482 \text{ u} \\ = -0,0082 \text{ u}$$

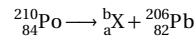
Le signe  $(-)$  signifie que cette réaction est exoénergétique. En remarquant que  $1 \text{ u} = 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg} = 931,5 \text{ MeV}/c^2$ , on a :

$$E = 0,0082 \cdot 1,66 \times 10^{-27} \cdot (3 \times 10^8)^2 \\ = 1,225 \times 10^{-12} \text{ J} = 7,638 \text{ MeV}$$

### Solution 2. (p. 232)

**2.1.** La radioactivité naturelle d'un élément est une transformation spontanée au cours de laquelle le noyau atomique de cet élément se détruit et donne naissance à des noyaux de structure différente de celle de l'élément de départ.

#### 2.2. Désintégration radioactive du polonium 210.

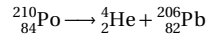


D'après la loi de conservation du nombre de masse et celle de la conservation de charge, on peut écrire :

$$210 = a + 206 \longrightarrow a = 4$$

$$84 = b + 82 \longrightarrow b = 2$$

Le noyau  $X$  est donc l'hélium  $\text{He}$ . donc :



C'est une radioactivité de type  $\alpha$ .

#### 2.3.

##### 2.3.1. Calcul de l'énergie libérée lors de la désintégration du noyau du polonium 210.

Cette énergie  $E$  est donnée par la relation d'Einstein.

$$E = \Delta m c^2$$

avec  $\Delta m = \Sigma m_f - \Sigma m_i$  ( $\Sigma m_i$  étant la somme des masses des noyaux de départ et  $\Sigma m_f$  étant des masses des noyaux fils

$$\Delta m = 1,66 \times 10^{-27} [(205,9296 + 4,0015 - 209,936)] \\ = 8,13 \times 10^{-30} \text{ kg}$$

d'où  $E = 8,13 \times 10^{-30} \cdot (3 \times 10^8)^2 = 7,3 \times 10^{-13} \text{ J}$  ou  $4,57 \text{ MeV}$ .

##### 2.3.2. Calcul de l'énergie cinétique $E_c$ $\alpha$ de la particule émise.

Avant l'émission de la particule  $\alpha$ , le noyau émetteur  $\text{Po}$  est pratiquement immobile. Sa quantité de mouvement est :

$$\vec{P}(\text{Po}) = \vec{0}$$

Après l'émission de la particule  $\alpha$ , le système est composé de deux particules  $\text{Pb}$  et  $\text{He}$ . Elles ont pour quantité de mouvement :

$$\vec{P} = M_{\text{Pb}} \vec{V}_{\text{Pb}} + M_{\text{He}} \vec{V}_{\text{He}}$$

La loi de la conservation de la quantité de mouvement permet d'écrire :

$$M_{\text{Pb}} V_{\text{Pb}} = M_{\text{He}} V_{\text{He}} \quad (\text{S11.1})$$

De même l'énergie cinétique avant l'émission est :  $E_{ci} = M_{\text{Po}} c^2$

Après l'émission :  $E_{cf} = (M_{\text{Pb}} c^2 + E_{c\text{Pb}}) + M_{\text{He}} c^2 + E_{c\text{He}}$   
D'après la loi de la conservation de la quantité d'énergie on a :  $E_{ci} = E_{cf}$  d'où :

$$M_{\text{Po}} c^2 = M_{\text{Pb}} c^2 + E_{c\text{Pb}} + M_{\text{He}} c^2 + E_{c\text{He}}$$

Donc

$$E_{c\text{Pb}} + E_{c\text{He}} = [M_{\text{Po}} - (M_{\text{Pb}} + M_{\text{He}})] c^2 \\ \Rightarrow E_{c\text{Pb}} + E_{c\text{He}} = \Delta m c^2 \quad (\text{S11.2})$$

Les particules n'étant pas relativistes, on peut écrire :

$$E_{c\text{Pb}} = \frac{1}{2} M_{\text{Pb}} V_{\text{Pb}}^2 \quad (\text{S11.3})$$

$$E_{c\text{He}} = \frac{1}{2} M_{\text{He}} V_{\text{He}}^2 \quad (\text{S11.4})$$

## 11.7. Solutions des exercices et problèmes

Le rapport des expressions (S11.4) et (S11.3) donne :

$$\frac{E_{cHe}}{E_{cPb}} = \frac{M_{He} V_{He}^2}{M_{Pb} V_{Pb}^2} \quad (S11.5)$$

De l'expression (S11.1) on tire :

$$\begin{aligned} M_{Pb} V_{Pb} &= M_{He} V_{He} \\ \Rightarrow V_{Pb} &= \frac{M_{He} V_{He}}{M_{Pb}} \end{aligned}$$

L'expression (S11.5) devient alors :

$$\begin{aligned} \frac{E_{cHe}}{E_{cPb}} &= \frac{M_{He} V_{He}^2}{M_{Pb} \frac{M_{He}^2 V_{He}^2}{M_{Pb}^2}} \\ &= \frac{M_{Pb}}{M_{He}} \\ d'où E_{cPb} &= \frac{E_{cHe} \cdot M_{He}}{M_{Pb}} \quad (S11.6) \end{aligned}$$

En portant cette valeur dans l'équation (S11.2), on a :

$$\begin{aligned} \frac{E_{cHe} M_{He}}{M_{Pb}} + E_{cHe} &= \Delta m c^2 \\ \Rightarrow E_{cHe} \left(1 + \frac{M_{He}}{M_{Pb}}\right) &= \Delta m c^2 \end{aligned}$$

Donc

$$E_{cHe} = \frac{\Delta m c^2}{\frac{M_{He}}{M_{Pb}} + 1}$$

En faisant l'application numérique on trouve :

$$E_c = E_{cHe} = 4,49 \text{ MeV}$$

L'énergie libérée par cette désintégration est inégalement partagée entre le noyau fils (Pb) et la particule  $\alpha$ . Cette dernière emporte presque toute l'énergie cinétique.

La vitesse de la particule  $\alpha$  est donnée comme suit :

$$\begin{aligned} E_{cHe} &= \frac{1}{2} M_{He} V_{He}^2 \\ \Rightarrow V_{He} &= \sqrt{\frac{2 E_{cHe}}{M_{He}}} \\ \text{A.N. } V_{He} &= \sqrt{\frac{2 \cdot 4,49 \cdot 1,6 \times 10^{-13}}{4,0015 \cdot 1,66 \times 10^{-27}}} \\ &= 2,16 \times 10^7 \text{ ms}^{-1} \end{aligned}$$

#### 2.4. Calcul du temps mis pour une désintégration égale au quart de la masse initiale.

La masse restante sera :

$$m = m_0 - \frac{m_0}{4} = \frac{3}{4} m_0$$

Cette masse  $m$  est liée à  $\lambda$ ,  $t$  et  $m_0$  par la relation :

$$\begin{aligned} m &= m_0 e^{-\lambda t} \\ \text{or } m &= \frac{3}{4} m_0 \\ \Rightarrow \frac{3}{4} m_0 &= m_0 e^{-\lambda t} \\ \Rightarrow e^{-\lambda t} &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \ln(e^{-\lambda t}) &= \ln\left(\frac{3}{4}\right) \\ \Rightarrow -\lambda t &= \ln(0,75) \\ t &= \frac{-\ln 0,75}{\lambda} \end{aligned}$$

$$\text{A.N. : } t = \frac{|-0,29|}{\frac{0,69}{138}} = 58 \text{ jours}$$

#### Solution 3. (p. 232)

**3.1.** Le nombre 210 est le nombre de nucléons du noyau du polonium. On l'appelle aussi nombre de masse. Le nombre 84 désigne le nombre de protons du noyau. C'est le numéro atomique de l'élément. Composition du noyau de polonium : si  $A = 210$  est le nombre de nucléons,  $Z = 84$  le nombre de protons et  $N$  le nombre de neutrons,

$$A = Z + N$$

$$\Rightarrow N = A - Z = 210 - 84 = 126 \text{ neutrons}$$

**3.2.** Calcul de l'énergie de cohésion par nucléon pour le noyau de Po.

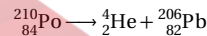
$$W = \frac{\Delta m c^2}{A(\text{Po})}$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta m &= \Sigma m - M_{Po} \\ W &= \frac{84 \cdot M_P + 126 M_n - M_{Po}}{A(\text{Po})} \\ W &= \frac{84 \cdot 1,0073 + 126 \cdot 1,0087 - 210,0482}{210} \\ &= 0,118 \times 10^{-11} \text{ J} \end{aligned}$$

soit  $W = 7,4 \text{ MeV}$ .

**3.3.** Equation de la désintégration du noyau de polonium.



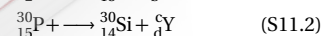
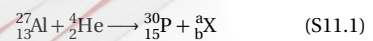
Calcul de l'énergie libérée au cours de cette réaction. Soit  $W_1$  cette énergie ; elle est donnée par la relation

$$W_1 = \Delta m c^2 = (M_{He} + M_{Pb} - M_{Po}) c^2$$

A.N.  $W_1 = 5,42 \text{ MeV}$ .

Cette énergie se répartit en énergie cinétique de la particule  $\alpha$  qui est prépondérante, et en énergie d'excitation du plomb.

**3.4.** Equations des transformations nucléaires. Soient  $X$  la particule émise par la première réaction et  $Y$  celle émise lors de la seconde transformation. Nous pouvons écrire :



Au cours de la transformation (S11.1) :

$$27 + 4 = 30 + a$$

$$(\text{loi de la conservation de la masse}) \Rightarrow a = 1$$

$$13 + 2 = 15 + b$$

(loi de la conservation de la charge)  $\Rightarrow b = 0$

La particule  $X$  est un neutron. Au cours de la transformation (S11.2) :

$$30 = 30 + c$$

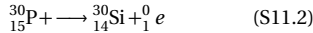
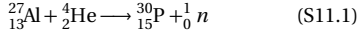
(loi de la conservation de la masse)  $\Rightarrow c = 0$

$$15 = 14 + d$$

(loi de la conservation de la charge)  $\Rightarrow d = 1$

La particule  $Y$  est un positon.

D'où les équations :

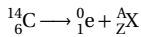


Dans la dernière transformation, la particule émise a pour caractéristiques :

- masse nulle;
- charge  $+e$  : c'est un positon.

### Solution 4. (p. 233)

**4.1.** Equation de désintégration du carbone 14. D'après l'énoncé, il s'agit d'une désintégration du type  $\beta^-$  qui se traduit par l'émission des électrons.



$A$  et  $Z$  sont déterminés en utilisant les lois de conservation de masse et de charge.

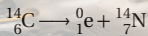
$$14 = 0 + A$$

$$\Rightarrow A = 14$$

$$\text{et } 6 = -1 + Z$$

$$\Rightarrow Z = 6 + 1 = 7$$

Le noyau fils  $X$  est l'azote 14.



Calcul de la constante radioactive.

La constante radioactive  $\lambda$  est liée à la période  $T$  par la relation :

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{\ln 2}{5700} = 1,216 \times 10^{-4} \text{ an}^{-1}$$

Loi de variation de l'activité  $A$  au cours du temps.

La loi de décroissance radioactive s'écrit :

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

avec  $N_0$  = nombre de noyaux radioactifs dans un échantillon à la date  $t = 0$  et  $N$  le nombre de noyaux radioactifs dans cet échantillon à la date  $t$ . L'activité de l'échantillon se définit par :

$$A = -\frac{dN}{dt} = -\frac{d(N_0 e^{-\lambda t})}{dt}$$

$$\Rightarrow A = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$$

**4.2.** Principe de la datation au carbone 14.

**4.2.1.** Détermination de l'âge des échantillons étudiés et des dates des séismes.

L'origine des dates est la date du séisme, c'est-à-dire la date de la mort des organismes vivants contenus dans l'échantillon étudié. Désignons par  $A_0$  l'activité

de cet échantillon à la date origine. Cette activité est  $A_0 = N_0 e^{\lambda_0} = \lambda N_0$ . Soient  $t$  = âges des échantillons et  $A$  l'activité de l'échantillon à la date des mesures (1979).

$$A = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$$

On a déduit :

$$\frac{A_0}{A} = \frac{\lambda N_0}{\lambda N_0 e^{-\lambda t}}$$

$$= \frac{1}{e^{-\lambda t}}$$

$$= e^{\lambda t}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{A_0}{A}\right) = \ln(e^{\lambda t})$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{A_0}{A}\right)$$

Dates des séismes : Les mesures s'effectuant en 1979, la date du séisme est :  $1979 - t$ .

A.N.  $A_0 = 0,255$ ;  $A = \{0,233; 0,215; 0,223; 0,251\}$ .

$A$	0,233	0,215	0,223	0,251
$t$ (âge)	742	1403	1102	130
date	1237	576	877	1849

**4.2.2.** Proportion des atomes de carbone 14 dans l'échantillon le plus ancien par rapport aux atomes de carbone 12.

L'échantillon le plus ancien est l'échantillon N° 2 dont l'âge est le plus élevé.

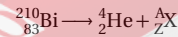
$$\begin{cases} N = N_0 e^{-\lambda t} & \Rightarrow \frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t} \\ A = A_0 e^{-\lambda t} & \Rightarrow \frac{A}{A_0} = e^{-\lambda t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{N}{N_0} = \frac{A}{A_0} = \frac{0,215}{0,255} = 0,843$$

Au bout 1403 années, l'échantillon le plus ancien ne contient plus 84,3% de carbone de la proportion initiale de carbone 14, soit 1 atome de carbone 14 pour 100/84,310<sup>6</sup> atomes de carbone 12.

### Solution 5. (p. 233)

**5.1.** Equation de désintégration du bismuth.



D'après les lois de conservation du nombre de masse et charge, on a :

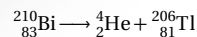
$$210 = 4 + A$$

(conservation de la masse)  $\Rightarrow A = 210 - 4 = 206$

$$83 = 2 + Z$$

(conservation de la charge)  $\Rightarrow Z = 83 - 2 = 81$

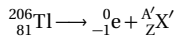
D'après l'extrait du tableau périodique des éléments, le noyau-fils  $X$  est le thallium. D'où l'équation-bilan :





## 11.7. Solutions des exercices et problèmes

Equation de désintégration du thallium.



D'après les lois de conservation du nombre de masse et charge, on a :

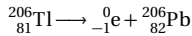
$$206 = 0 + A'$$

$$(\text{conservation du nombre de masse}) \Rightarrow A' = 206$$

$$81 = -1 + Z'$$

$$(\text{conservation de la charge}) \Rightarrow Z' = 81 + 1 = 82$$

D'après l'extrait du tableau périodique des éléments, le noyau-fils X est le plomb. D'où l'équation-bilan :



## 5.2.

**5.2.1.** Allure générale de la courbe  $t \rightarrow m(t)$ . Déterminons d'abord l'expression de  $m(t)$ .

La loi de décroissance radioactive s'écrit :

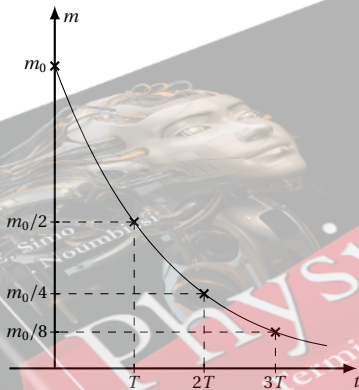
$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (\text{S11.1})$$

avec  $N_0$  = nombre de noyaux radioactif dans un échantillon à la date  $t = 0$  et  $N$  le nombre de noyaux radioactifs dans cet échantillon à la date  $t$ .  $\lambda$  est la constante radioactive.

Puisque la masse  $m$  de la substance radioactive est proportionnelle au nombre des noyaux qu'elle contient, la loi de décroissance radioactive peut aussi s'écrire :

$$m(t) = m_0 e^{-\lambda t}$$

D'où l'allure générale.



**5.2.2.** La demi-vie ou période radioactive d'un élément est la durée  $T$  nécessaire pour que la moitié des noyaux initialement présents dans l'élément subisse la désintégration.

**5.2.3.** Expression de  $m(T')$  avec  $T' = nT$ .

$$m(t) = m_0 e^{-\lambda t}$$

$$\text{avec } \lambda = \frac{\ln 2}{T}$$

$$t = nT$$

$$\Rightarrow m(nT) = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{T} \cdot nT}$$

$$\Rightarrow m(nT) = \frac{1}{2^n} m_0$$

**5.2.4.** Temps au bout duquel il ne restera plus que 1 mg.

$$m(t) = 1$$

$$\Rightarrow 1 = 1024 e^{-\lambda t}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1024} = e^{-\lambda t}$$

$$\Rightarrow t = -\frac{1}{\lambda} \ln \frac{1}{1024}$$

$$t = 1380 \text{ jours}$$





## Sujets d'examen–Baccalauréat Physique–Séries C, E

12.1	<b>Enoncé des sujets d'examen</b>	240
12.1.1	Enoncé – Baccalauréat 2012	240
12.1.2	Enoncé – Baccalauréat 2013	242
12.1.3	Enoncé – Baccalauréat 2014	244
12.1.4	Enoncé – Baccalauréat 2015	245
12.1.5	Enoncé – Baccalauréat 2016	247
12.1.6	Enoncé – Baccalauréat 2017	249
12.2	<b>Solution des sujets d'examen</b>	250
12.2.1	Solution – Baccalauréat 2012	250
12.2.2	Solution – Baccalauréat 2013	253
12.2.3	Solution – Baccalauréat 2014	256
12.2.4	Solution – Baccalauréat 2015	259
12.2.5	Solution – Baccalauréat 2016	261
12.2.6	Solution – Baccalauréat 2017	264



## 12.1 Enoncé des sujets d'examen

### 12.1.1 Enoncé – Baccalauréat 2012

Examen:	Baccalauréat	Séries:	C, E
Session:	2012	Durée:	4 heures
Épreuve:	Physique	Coef.:	4

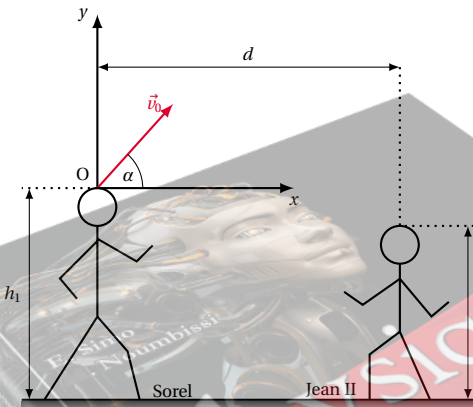
#### Exercice 1.

##### Mouvements dans les champs de force et leurs applications

Partie A : Mouvements dans le champ de pesanteur

Prendre  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$  et négliger la résistance de l'air. Deux joueurs de football Sorel et Jean II, de tailles respectives  $h_1 = 1,80 \text{ m}$  et  $h_2 = 1,60 \text{ m}$ , s'entraînent au jeu de tête avec un ballon que l'on supposera ponctuel.

Après un coup de tête, le ballon part de Sorel vers Jean II avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0$ , faisant un angle  $\alpha = 45^\circ$  avec l'horizontale. On prendra  $v_0 = 10 \text{ m s}^{-1}$ . La figure ci-dessous présente la situation.



**1.1.** En prenant pour origine des espaces, le sommet de la tête de Sorel et pour instant initial l'instant de départ du ballon, établir l'équation cartésienne de la trajectoire du centre d'inertie  $G$  du ballon.

**1.2.** L'équation de la trajectoire de  $G$  peut se mettre sous la forme  $10y + x^2 - 10x = 0$ .

À quelle distance  $d$  de Sorel, doit se placer Jean II pour que le ballon retombe exactement sur sa tête

Partie B : Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme

Une particule de masse  $m = 6,64 \times 10^{-27} \text{ kg}$  et de charge  $q = +3,2 \times 10^{-19} \text{ C}$  entre avec une vitesse  $\vec{v}$  de valeur  $v = 1,5 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$  dans une région de largeur  $\ell = 18 \text{ cm}$  où règne un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$  d'intensité  $B = 3 \times 10^{-3} \text{ T}$  orthogonal à la vitesse de la particule.

**1.1.** En négligeant son poids, déterminer la nature du mouvement de la particule dans la zone où règne le champ magnétique.

**1.2.** Établir l'expression du rayon de courbure  $R$  de sa trajectoire, puis calculer sa valeur.

**1.3.** Calculer la valeur de l'angle de déviation  $\alpha$  de la trajectoire de la particule sous l'influence du champ magnétique.

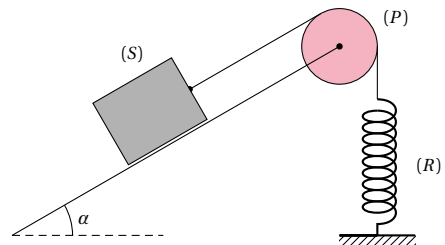
#### Exercice 2.

##### Systèmes oscillants

Partie 1 : Oscillateur mécanique

Dans la gorge d'une poulie ( $P$ ) de rayon  $r = 10 \text{ cm}$  et dont on veut déterminer le moment d'inertie  $J_\Delta$ , on fait passer une ficelle inextensible de masse négligeable. À l'une des extrémités de cette ficelle, on accroche un solide ( $S$ ) de masse  $m = 100 \text{ g}$  et reposant sur un plan incliné d'angle  $\alpha = 30^\circ$  sur l'horizontale. L'autre extrémité de la ficelle est reliée à un ressort ( $R$ ) de raideur  $k = 10 \text{ N m}^{-1}$  et de masse négligeable.

On prendra  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ .



La deuxième extrémité du ressort est fixée au sol. Les frottements sur le plan incliné et sur l'axe de la poulie seront négligés. On admettra que la ficelle ne glisse pas dans la gorge de la poulie et que le centre d'inertie  $G$  de ( $S$ ) se déplace sur la ligne de plus grande pente du plan. Le schéma de la machine est donné en figure ci-dessus.

##### 2.1.

**2.1.1.** Écrire une relation entre  $m$ ,  $g$ ,  $\alpha$  et l'allongement  $x_0$  du ressort lorsque le système est en équilibre.

**2.1.2.** Calculer la valeur numérique de  $x_0$ .

**2.2.** On provoque un déplacement supplémentaire  $a = 2 \text{ cm}$  de ( $S$ ) vers le bas de la pente puis on l'abandonne sans vitesse initiale. Il prend alors un mouvement d'équation horaire :

$$x(t) = 2 \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m + \frac{J_\Delta}{r^2}}} \cdot t \right)$$

où  $x$  est l'écart du centre d'inertie de ( $S$ ) à la position d'équilibre à un instant  $t$  quelconque ( $x$  en cm).

**2.2.1.** Donner l'expression de la période propre  $T_0$  des oscillations du solide ( $S$ ) en fonction de  $m$ ,  $r$ ,  $k$  et  $J_\Delta$ .

**2.2.2.** Exprimer le moment d'inertie  $J_\Delta$  en fonction de la période propre  $T_0$ . En mesurant la durée de 10 oscillations, on trouve 20 secondes. Calculer numériquement  $J_\Delta$ . Prendre  $\pi^2 = 10$ .

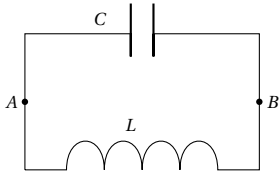
**2.2.3.** Donner l'équation horaire du mouvement de rotation de la poulie.

Partie 2 : Oscillateur électrique

Un circuit  $LC$  est constitué d'une bobine d'inductance  $L$  et de résistance négligeable branchée aux bornes d'un

## 12.1. Enoncé des sujets d'examen

condensateur de capacité  $C$  et de charge initiale  $q_0$ . Le schéma du circuit est donné en figure ci-dessous.



- 2.1.** Donner l'expression de la tension  $U_{AB}$  aux bornes de chacun des deux dipôles.
- 2.2.** En déduire l'équation différentielle vérifiée par la charge  $q(t)$  du condensateur.  
N.B : On rappelle que l'intensité du courant est la dérivée première, de la charge par rapport au temps.
- 2.3.** Pour  $L = 2,29 \times 10^{-4}$  H, calculer la capacité  $C$  du condensateur qu'il faut pour que la charge  $q$  oscille avec une fréquence  $f = 105$  MHz. On rappelle que  $1 \text{ MHz} = 10 \times 10^6 \text{ Hz}$ .

## Exercice 3.

## Phénomènes corpusculaires et ondulatoires

## Partie 1 : Phénomènes ondulatoires

L'extrémité  $O$  d'une ficelle de longueur convenable est attachée à un vibreur de période  $T = 10^{-2}$  s. Les amortissements et la réflexion des ondes sont négligeables. La longueur d'onde  $\lambda$  de l'onde vaut 5 cm.

- 3.1.** Calculer la célérité  $v$  de la propagation de l'onde.
- 3.2.** On éclaire la ficelle à l'aide d'un stroboscope de fréquence  $f_e$  réglable.
- 3.2.1.** Déterminer la plus grande fréquence  $f_0$  pour laquelle on voit une ficelle immobile.
- 3.2.2.** La fréquence des éclairs du stroboscope prend la valeur  $f_1 = 99 \text{ Hz}$ . Qu'observe-t-on ?
- 3.3.** L'équation horaire d'un point  $M$  de la ficelle situé à 30 cm de la source  $O$  est  $x(t) = 5 \cos(200\pi t)$  en mm. En déduire l'équation horaire de la source  $O$ .

## Partie 2 : Effet photoélectrique

On éclaire la cathode d'une cellule photoélectrique à l'aide d'une lumière monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$  convenable. La variation de l'intensité  $I$  du courant photoélectrique en fonction de la tension entre l'anode et la cathode est consignée dans le tableau ci-dessous :

$U$ (V)	-0,8	-0,4	0	0,22	0,6
$I$ ( $\mu\text{A}$ )	0	1	1,65	2	3

$U$ (V)	1,1	2	3	4	5
$I$ ( $\mu\text{A}$ )	4	5	5,2	5,3	5,3

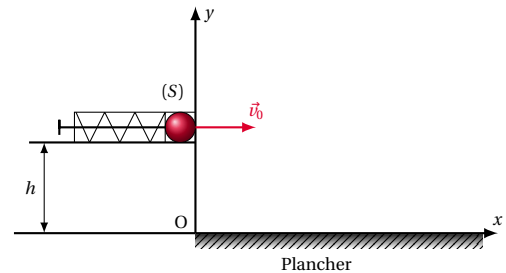
- 3.1.** Tracer la courbe  $I = f(U)$   
Échelle : Abscisse : 2 cm pour 1 V ;  
Ordonnée : 2 cm pour 1  $\mu\text{A}$ .
- 3.2.**
- 3.2.1.** Définir et déterminer le potentiel d'arrêt  $U_0$ .
- 3.2.2.** Donner la valeur de l'intensité  $I_s$  du courant de saturation.
- 3.3.** Calculer la vitesse maximale des électrons à la sortie de la cathode.

On donne : charge élémentaire :  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$  ; masse de l'électron :  $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ .

## Exercice 4.

## Exploitation des résultats d'une expérience

Une catapulte est constituée d'un piston enfilé dans un ressort de compression. L'ensemble peut coulisser à l'intérieur d'un tube cylindrique. Ce dispositif permet de lancer à partir d'une hauteur  $h$ , une bille (S) qu'on supposera ponctuelle, avec une même vitesse  $\vec{v}_0$  horizontale et de module constant  $v_0 = 5 \text{ ms}^{-1}$ . Pour chaque valeur de  $h$ , on mesure l'abscisse  $x_m$  du point d'impact de la bille sur un plancher horizontal (voir la figure ci-dessous).



On a obtenu le tableau de mesures suivant :

$h$ (cm)	20	40	60	80	100	120	140
$x_m$ (m)	1,00	1,43	1,73	2,00	2,26	2,43	2,60
$x_m^2$ ( $\text{m}^2$ )	1,0	2,0	3,0	4,0	5,1	5,9	6,8

- 4.1.** Tracer la courbe  $x_m^2 = f(h)$ .  
Échelle : Abscisse : 1 cm  $\leftrightarrow$  10 cm ; ordonnée : 1 cm  $\leftrightarrow$  1  $\text{m}^2$ .  
Quelle est la forme de la courbe obtenue ?

**4.2.**

**4.2.1.** Établir, lorsque la bille est lancée à partir d'une hauteur quelconque  $h$ , l'équation cartésienne de sa trajectoire, dans le repère indiqué sur le schéma. On prendra pour instant initial, la date de départ de la bille. On négligera la résistance de l'air.

**4.2.2.** En déduire la relation suivante :

$$x_m^2 = \frac{2v_0^2}{g} h.$$

- 4.3.** À partir de la courbe ci-dessus, déterminer une valeur expérimentale de l'accélération de la pesanteur  $g$  à l'endroit où s'effectue la manipulation.

## 12 12.1.2 Enoncé – Baccalauréat 2013

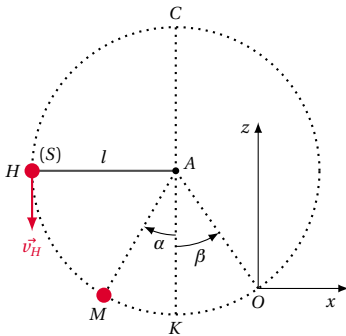
Examen:	Baccalauréat	Séries:	C, E
Session:	2013	Durée:	4 heures
Épreuve:	Physique	Coef.:	4

### Exercice 5.

#### Mouvements dans les champs de forces et leurs applications

##### Partie 1 : Mouvement dans le champ de pesanteur.

On négligera les frottements et on prendra l'intensité  $g$  du champ de pesanteur égale à  $10 \text{ m s}^{-2}$ .



Un pendule est constitué par un solide ponctuel (S) de masse  $m = 100 \text{ g}$ , suspendu à un point fixe A par un fil inextensible, de masse négligeable et de longueur  $\ell = 60 \text{ cm}$ . On écarte le pendule de la verticale d'un angle  $\theta_0 = 90^\circ$ , puis on impose au solide un mouvement circulaire autour de A dans un plan vertical, en lui communiquant, au point H, une vitesse initiale verticale et de sens descendant (figure ci-dessus). Une position quelconque M de (S) est repérée au cours de son mouvement par l'angle  $\alpha = (\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AM})$ .

**5.1.** Étude de la tension du fil de suspension du solide.

**5.1.1.** Faire le bilan des forces qui s'exerce sur le solide (S) lorsque celui-ci est en M.

**5.1.2.** En appliquant la deuxième loi de Newton au solide (S), montrer que l'intensité de la tension du fil au passage par le point M a pour expression :

$$T_M = m \left( g \cos \alpha + \frac{v_M^2}{\ell} \right).$$

**5.1.3.** En déduire la valeur minimale de la vitesse  $v_C$  du solide au point culminant C de la trajectoire, pour que le fil reste tendu en ce point (c'est-à-dire  $T_C \leq 0$ ).

**5.2.** On ramène le pendule en H et on le lance comme précédemment. Le solide (S) est libéré de son attache à un instant pris comme origine des dates, lorsqu'il passe en montant par le point O tel que  $\beta = (\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AO})$ , avec la vitesse  $\vec{v}_0$ .

**5.2.1.** Établir les équations horaires littérales du mouvement de (S) après sa libération, dans le repère (O; x, z) du plan vertical de la figure ci-dessus.

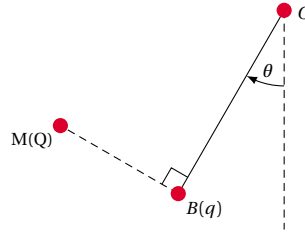
**5.2.2.** En déduire sous sa forme littérale, l'équation de

la trajectoire de (S).

##### Partie 2 : Pendule électrostatique.

Un pendule électrostatique est constitué d'une boule métallisée B qu'on considérera comme un point matériel de masse  $m = 20 \text{ g}$  et de charge  $q = +4,0 \mu\text{C}$ , fixée à l'extrémité d'un fil isolant de longueur  $\ell$  et de masse négligeable.

Ce pendule est suspendu en un point O. En présence d'une charge électrique ponctuelle Q placée en M, le fil s'écarte de la verticale d'un angle  $\theta = 20^\circ$  (voir figure ci-dessous). À l'équilibre, la droite passant par les points M et B est perpendiculaire à la direction du fil.



**5.1.** Représenter les forces qui s'exercent sur la boule B.

**5.2.** Déterminer :

**5.2.1.** les intensités, de la force électrique  $\vec{F}$  qui s'exerce sur la boule B et de la tension  $\vec{T}$  du fil (on fera les projections suivant la direction de  $\vec{F}$  d'une part, et suivant la direction de  $\vec{T}$  d'autre part).

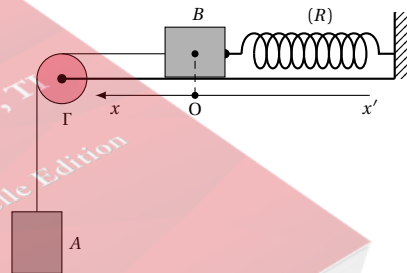
**5.2.2.** la valeur algébrique de la charge Q, si F vaut  $6,84 \times 10^{-2} \text{ N}$ .

Données :  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ ;  $k = 9 \times 10^9 \text{ N m}^{-1}$ ;  $MB = 50 \text{ cm}$ .

### Exercice 6.

#### Les systèmes oscillants

##### Partie 1 : Oscillateur mécanique.



On considère le système schématisé sur la figure ci-dessus. Le ressort (R) est à spires non jointives et sa masse est négligeable. Sa raideur est  $k = 80 \text{ N m}^{-1}$  et sa longueur à vide  $\ell_0 = 15 \text{ cm}$ . Les solides A et B de masses respectives  $m_A = 500 \text{ g}$  et  $m_B = 300 \text{ g}$  sont reliés entre eux par un fil inextensible de masse négligeable passant par la gorge d'une poulie  $\Gamma$  de masse négligeable, mobile sans frottement autour de son axe. Le solide B se déplace sans frottements sur le plan horizontal.

**6.1.** Le système est considéré à l'équilibre.

**6.1.1.** Montrer qu'on peut écrire  $m_A g - k \Delta \ell_0 = 0$ ; où  $g$  est l'intensité de pesanteur et  $\Delta \ell_0$  l'allongement du ressort.

**6.1.2.** Calculer la valeur numérique de  $\Delta \ell_0$ .



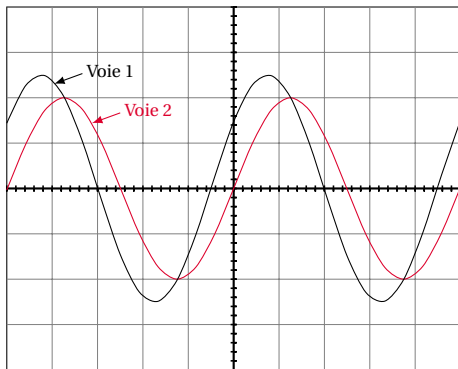
## 12.1. Enoncé des sujets d'examen

**6.2.** À partir de la position d'équilibre, on déplace verticalement le solide  $A$  de 5,0 cm vers le bas, puis on l'abandonne sans vitesse initiale. La position de  $B$  est repérée par l'abscisse  $x$  de son centre d'inertie  $G_B$ , sur l'axe  $x'x$  dont l'origine  $O$  coïncide avec la position de  $G_B$  à l'équilibre.

**6.2.1.** Montrer que le solide  $B$  effectue un mouvement rectiligne sinusoïdal de période propre  $T_0$  dont on donnera l'expression en fonction de  $m_A$ ,  $m_B$  et  $k$ .

*Partie 2 : Oscillateur électrique*

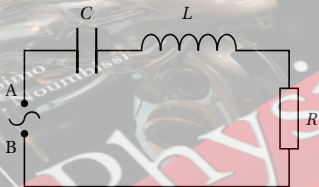
Une tension sinusoïdale est appliquée aux bornes  $A$  et  $B$  d'une portion de circuit comprenant montés en série, un résistor de résistance  $R = 100\Omega$ , un condensateur de capacité  $C$  et une bobine pure d'inductance  $L = 7,2 \times 10^{-2}$  H.



Écran de l'oscilloscope  
Gain vertical sur les deux voies 2 V/div  
Base des temps 0,5 ms/div

(a)

On visualise respectivement sur les voies 1 et 2 d'un oscilloscope, les variations de la tension  $u(t)$  délivrée par le générateur et de la tension  $u_g(t)$  aux bornes du résistor. L'aspect de l'écran est représenté sur la figure ci-dessous.



Circuit sur lequel doit être connecté l'oscilloscope pour obtenir à l'écran les traces

(b)

**6.1.** Indiquer sur le schéma du circuit de la figure (a) ci-dessus comment l'oscilloscope doit être connecté au circuit pour obtenir l'aspect de la figure (b) ci-dessus.

**6.2.** Déterminer la fréquence  $f$  des deux tensions.

**6.3.** Le décalage temporel entre  $u(t)$  et  $u_g(t)$  est  $\Delta t = 0,256$  ms.

En déduire le déphasage  $\varphi$  entre les deux tensions et préciser laquelle des deux est en avance sur l'autre.

**6.4.** Calculer l'impédance du circuit, puis en déduire la valeur de la capacité  $C$  du condensateur.

On prendra  $f = 400$  Hz.

## Exercice 7.

## Phénomènes ondulatoires et corpusculaires

*Partie 1 : Phénomènes ondulatoires*

**7.1.** Qu'appelle-t-on longueur d'onde d'une onde?

**7.2.** À l'aide du dispositif des fentes d'Young, on obtient en lumière monochromatique, une figure d'interférences lumineuses sur un écran placé parallèlement au plan des fentes  $F_1$  et  $F_2$  et à la distance  $D = 2$  m de ce plan. La distance séparant les fentes secondaires est  $a = 1,8$  mm. La longueur d'onde de la radiation éclairante est  $\lambda = 540$  nm. Quelles sont :

**7.2.1.** la nature de la frange d'ordre  $p' = -4,5$ ?

**7.2.2.** la distance entre le milieu de cette frange et le milieu de la frange centrale?

*Partie 2 : Phénomènes corpusculaires*

**7.1.** Le travail d'extraction d'un électron du métal dont est revêtue la cathode d'une cellule photo-émissive est  $W_0 = 1,77$  eV. On éclaire cette cathode avec une radiation lumineuse de longueur d'onde  $\lambda = 475$  nm.

**7.1.1.** Calculer en eV, l'énergie  $E$  d'un photon de la radiation éclairante.

**7.1.2.** Pourquoi peut-on affirmer que cette radiation déclenchera l'effet photoélectrique?

**7.1.3.** Décrire, en s'appuyant sur un schéma, une procédure expérimentale permettant la mesure de l'énergie cinétique maximale des électrons à leur sortie de la cathode.

Données : Constante de Planck :  $h = 6,62 \times 10^{-34}$  J s ;  $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19}$  J.

Célérité de la lumière dans le vide :  $c = 3 \times 10^8$  m s $^{-1}$ .

**7.2.** Le thorium  $^{227}_{90}\text{Th}$  est radioactif  $\alpha$ . Sa période (ou demi-vie) est  $T = 18$  jours.

**7.2.1.** Écrire l'équation de la désintégration d'un noyau de thorium, sachant que le noyau fils est le radium Ra.

**7.2.2.** Calculer la masse  $\Delta m$  de thorium disparue au bout de 54 jours dans un échantillon de thorium 227 de masse initiale  $m_0 = 0,5$  g.

## Exercice 8.

## Étude d'un pendule et mesure de l'intensité de la pesanteur d'un lieu

Lors d'une séance de travaux pratiques, les élèves étudient l'influence de la longueur et de la masse d'un pendule simple sur la période propre  $T_0$  de ses oscillations de faibles amplitudes.

**8.1.** Étude de l'influence de la masse  $m$  du pendule.

**8.1.1.** Pour réaliser cette étude, on dispose déjà d'une potence et de trois objets de mêmes dimensions et de masses  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  différentes. Compléter cette liste de matériel.

**8.1.2.** Proposer un protocole expérimental.

**8.2.** Étude de l'influence de la longueur  $\ell$  du pendule. Pour une même valeur de l'amplitude  $\theta_m$  des oscillations ( $\theta_m < 12^\circ$ ), on fait varier la longueur  $\ell$  de l'un des trois pendules ci-dessus et on mesure pour chaque valeur de  $\ell$ , la durée  $\Delta t$  de 10 oscillations. On a ensuite  $T_0 = \Delta t/10$ . Les résultats sont placés dans le tableau ci-dessous :

$\ell$ (m)	1,20	1,00	0,80	0,60	0,40
$T_0$ (s)	2,20	2,01	1,78	1,55	1,27
$T_0^2$ (s <sup>2</sup> )	4,84	4,04	3,17	2,40	1,61

**8.2.1.** Pour obtenir  $T_0$ , pourquoi les élèves mesurent-ils la durée de 10 oscillations au lieu d'en mesurer la durée d'une seule?

**8.2.2.** Tracer sur la courbe  $T_0^2 = f(\ell)$ .

Échelles : Abscisse, 1 cm pour 0,1 m ; Ordonnée, 1 cm pour 0,5 s<sup>2</sup>.

**8.2.3.** En déduire la valeur expérimentale de l'intensité  $g$  du champ de pesanteur. On rappelle l'expression théorique de la période propre des oscillations de faibles amplitudes d'un pendule simple :  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ .

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

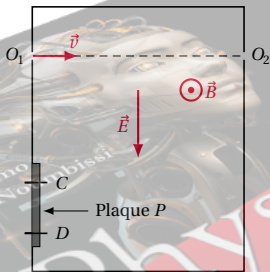
### 12.1.3 Enoncé – Baccalauréat 2014

Examen:	Baccalauréat	Séries:	C, E
Session:	2014	Durée:	4 heures
Épreuve:	Physique	Coef.:	4

#### Exercice 9.

##### Mouvements dans les champs de forces et leurs applications

Partie 1 : Action des champs électrique et magnétique sur un faisceau d'électrons



Des particules de masse  $m = 6,65 \times 10^{-27}$  kg pénètrent dans une région où règnent un champ magnétique  $\vec{B}$  et un champ électrique  $\vec{E}$ , uniformes et orthogonaux entre eux et à la vitesse  $\vec{v}$  des particules à l'entrée  $O_1$  de la région comme l'indique la figure ci-dessus. On constate que certaines des particules ont une trajectoire rectiligne horizontale et sont recueillies en  $O_2$  appartenant à la droite  $(O_1, \vec{v})$ . Ces particules sont dites sélectionnées. On négligera leur poids devant les autres forces. On donne :  $q = 3,20 \times 10^{-19}$  C ;  $B = 9 \times 10^{-3}$  T ;  $E = 5 \times 10^3$  V m<sup>-1</sup>.

**9.1.** Donner en justifiant la réponse, le sens du vecteur champ magnétique  $\vec{B}$ .

**9.2.** Montrer que la valeur  $v_0$  de la vitesse des particules sélectionnées ne dépend ni de la masse des particules, ni de leur charge électrique. Puis calculer sa valeur numérique.

**9.3.** On supprime le champ électrique. Les particules viennent alors heurter une plaque  $P$  placée verticale-

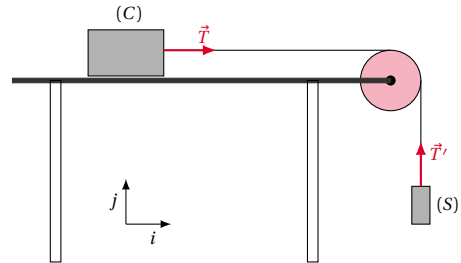
ment dans la région (voir la figure). La mesure de l'écart entre les points d'impact extrêmes des particules sur la plaque donne  $CD = 30,00$  mm.

**9.3.1.** Donner la nature du mouvement des particules dans la région puis donner l'expression de la grandeur caractéristique de leur trajectoire.

**9.3.2.** Calculer les valeurs  $v_{max}$  et  $v_{min}$  respectivement de la vitesse maximale et de la vitesse minimale des particules en admettant que la valeur  $v_0$  de la vitesse des particules sélectionnées est leur moyenne

$$\left( v_0 = \frac{v_{min} + v_{max}}{2} \right).$$

Partie 2 : Chariot entraîné par un solide



On considère un chariot (C) de masse  $m$ , mobile sans frottement sur une table lisse et relié par un fil inextensible de masse négligeable à un solide (S) de masse  $M$  qui pend dans le vide. Le fil passe par la gorge d'une poulie de masse négligeable et sans frottement. On nomme respectivement  $\vec{T}$  et  $\vec{T}'$  les forces que le fil exerce sur le chariot et sur le solide (Voir figure ci-dessus).

**9.1.** On commence par retenir le chariot, tout le dispositif étant donc immobile. Exprimer  $\vec{T}$  et  $\vec{T}'$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  précisée sur la figure.

**9.2.** On lâche le chariot. En faisant un bilan des forces, indiquer sans calcul comment la force  $\vec{T}$  est modifiée.

**9.3.** À un instant  $t$ , la vitesse du centre d'inertie du chariot est  $\vec{v}_G = v_G \vec{i}$  et son accélération est  $\vec{a}_G = a_G \vec{i}$ . Donner à cet instant les expressions vectorielles la vitesse et de l'accélération du solide (S)?

**9.4.** Écrire la 2<sup>ème</sup> loi de Newton pour le chariot d'une part et pour le solide (S) d'autre part.

**9.5.** En déduire l'expression de la valeur de l'accélération du chariot et celle de la tension du fil.

#### Exercice 10.

##### Oscillations forcées dans un dipôle électrique

Un générateur maintient entre les bornes A et B d'un circuit électrique une tension alternative sinusoïdale de fréquence variable et de valeur efficace constante  $U_{AB} = 60$  V. Ce circuit comporte en série un résistor de résistance  $R$  et un dipôle  $D$  dont on ne connaît pas les grandeurs caractéristiques. Pour une pulsation du courant  $\omega = 500$  rad s<sup>-1</sup>, on mesure les valeurs efficaces des grandeurs physiques suivantes : Valeur efficace de l'intensité du courant dans le circuit :  $I = 0,4$  A ; valeur efficace de la tension aux bornes du résistor :  $U_R = 36$  V ; valeur efficace de la tension aux bornes du dipôle  $D$  :  $U_D = 48$  V.

On donne l'indication suivante : le dipôle  $D$  peut être un résistor, un condensateur, une bobine ou une asso-

## 12.1. Enoncé des sujets d'examen

ciation en série d'une bobine et d'un condensateur.

**10.1.** Montrer que le dipôle  $D$  n'est pas un résistor et calculer son impédance.

**10.2.** Le circuit consomme une puissance électrique  $P = 15 \text{ W}$ . Montrer que le dipôle  $D$  comporte une résistance non nulle; calculer cette résistance  $R_D$  puis le facteur de puissance du dipôle  $D$ .

**10.3.** On augmente progressivement la fréquence du courant, on constate que la tension efficace aux bornes du dipôle  $D$  diminue. Pour une fréquence pour laquelle la pulsation est  $\omega_1 = 1000 \text{ rad s}^{-1}$ , on mesure les tensions aux bornes du dipôle  $D$  et du résistor, on obtient :  $U'_D = 24 \text{ V}$  et  $U'_R = 36 \text{ V}$ .

**10.3.1.** Montrer, sans calcul, que  $D$  est une association en série d'une bobine et d'un condensateur.

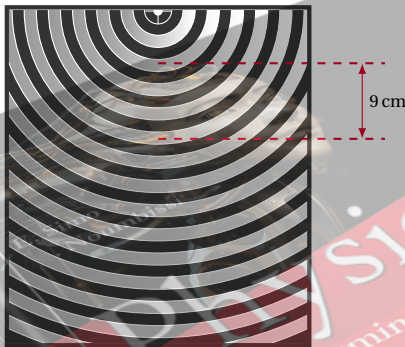
**10.3.2.** Établir à partir des valeurs des tensions efficaces que la pulsation  $\omega_1$  correspond à la fréquence de résonance du circuit.

**10.3.3.** Calculer les valeurs de l'inductance  $L$  de la bobine et de la capacité  $C$  du condensateur.

## Exercice 11.

## Étude d'ondes avec une cuve à ondes

La lame d'un vibreur est solidaire à une pointe qui effectue un mouvement vertical de même fréquence que la lame. Lorsque le vibreur est mis en marche à la fréquence  $f = 20 \text{ Hz}$ , la pointe frappe la surface libre de l'eau d'une cuve à ondes au centre  $O$  de la cuve. Une membrane placée sur la paroi de la cuve empêche la réflexion des ondes mécaniques ainsi produites.



**11.1.** Nommer le type d'onde (transversal ou longitudinal) qui se propage à la surface de l'eau et proposer une expérience simple permettant de mettre ce type d'ondes en évidence.

**11.2.** On utilise un éclairage stroboscopique qui immobilise apparemment les ondes. L'image de la surface de l'eau est recueillie sur papier blanc placé en dessous de la cuve, représentée par la figure ci-dessus; elle est 1,5 fois plus grande que la réalité. Déterminer la longueur d'onde et en déduire la célérité des ondes sachant que les bandes claires représentent les crêtes.

**11.3.** La fréquence des éclairs est fixée à  $21 \text{ Hz}$ . Décrire ce que l'on observe à la surface de l'eau et calculer la célérité apparente des ondes.

**11.4.** La lame du vibreur est maintenant solidaire d'une fourche munie de deux pointes  $O_1$  et  $O_2$  distantes de  $5 \text{ cm}$ , qui effleurent la surface de l'eau. La lame vibre à la

fréquence de  $20 \text{ Hz}$ .

**11.4.1.** Décrire le phénomène observé à la surface de l'eau en éclairage normal.

**11.4.2.** Donner la position et le nombre des points du segment  $[O_1, O_2]$  qui vibrent avec une amplitude maximale.

## Exercice 12.

## Exploitation des résultats d'une expérience

Le radon 222 est un gaz radioactif émetteur  $\alpha$ . On désire déterminer le volume  $V_0$  d'un échantillon ainsi que la demi-vie du radon 222. Pour cela, on emprisonne ce gaz dans une ampoule dans les conditions où le volume molaire vaut  $25 \text{ L mol}^{-1}$ ; puis on mesure l'activité  $A$  de l'échantillon à différentes dates  $t$ . Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau suivant :

$t$ (jour)	0	10	20
$A$ (Bq)	$A_0$	$1,65 \times 10^{11}$	$2,73 \times 10^{10}$

$t$ (jour)	30	40	50
$A$ (Bq)	$4,51 \times 10^9$	$7,46 \times 10^8$	$1,23 \times 10^8$

$t$ (jour)	60	70
$A$ (Bq)	$2,03 \times 10^7$	$3,37 \times 10^6$

**12.1.** Citer deux applications de la radioactivité.

**12.2.** Définir l'activité  $A$  d'une substance radioactive et établir que  $A = \lambda N$ , où  $\lambda$  est la constante radioactive et  $N$  le nombre de noyaux présents à la date  $t$  dans l'échantillon.

**12.3.** Tracer sur papier millimétré le graphe  $\ln A = f(t)$ , où  $\ln$  désigne le logarithme népérien.

Échelles :  $1 \text{ cm}$  pour 5 jours en abscisses et  $2 \text{ cm}$  pour 5 unités sur l'axe des ordonnées.

**12.4.** Déterminer à partir du graphe, la constante radioactive du radon 222 et l'activité initiale  $A_0$ .

**12.5.** En déduire le volume  $V_0$  de l'échantillon et la demi-vie du radon 222.

On donne le nombre d'Avogadro  $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

## 12.1.4 Enoncé – Baccalauréat 2015

Examen:	Baccalauréat	Séries:	C, E
Session:	2015	Durée:	4 heures
Épreuve:	Physique	Coef.:	4

## Exercice 13.

## Mouvements dans les champs de forces

**13.1.** Mouvement d'un satellite de la Terre

Un satellite, placé dans une orbite circulaire de rayon  $r$  dans un plan équatorial de la Terre, se déplace d'Ouest en Est. On admet qu'à cette altitude, le satellite n'est soumis



qu'à la seule action de la gravitation terrestre.

**13.1.1.** Montrer que le mouvement du satellite est uniforme.

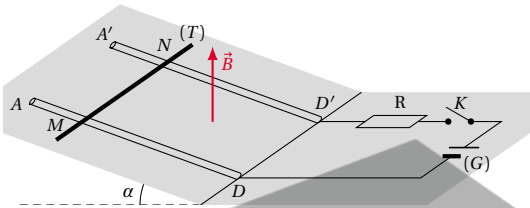
**13.1.2.** La période de révolution de ce satellite a pour expression :  $T = \frac{2\pi}{R} \sqrt{\frac{r^3}{G_0}}$  où  $R$  est le rayon de la Terre et  $G_0$  l'intensité du champ de gravitation à sa surface. En déduire l'expression de la masse  $M_T$  de la Terre en fonction de  $r$  et de  $T$ . Application numérique :  $r = 20\,000$  km ;  $T = 7,82$  heures.

**13.1.3.** Quand dit-on qu'un satellite de la Terre est géostationnaire ? Comparer la valeur précédente de  $r$  à celle du rayon  $r_s$  de l'orbite d'un satellite géostationnaire. 1 jour sidéral = 86 140 s.

Données : Constante de gravitation :  $\varepsilon = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ .

**13.2.** Mouvement d'une tige

Deux rails conducteurs et parallèles  $AD$  et  $A'D'$  distants de  $\ell = 12$  cm, sont disposés selon des lignes de plus grande pente d'un plan, incliné d'un angle  $\alpha = 8^\circ$  par rapport à l'horizontale. Les deux rails sont reliés à un générateur de courant continu ( $G$ ), en série avec un interrupteur et un résistor de résistance  $R$  ajustable (figure ci-dessous).



La tige ( $T$ ) conductrice, non ferromagnétique et perpendiculaire aux rails, peut glisser sur ceux-ci parallèlement à elle-même sans frottement.

Le dispositif est placé dans une zone de l'espace où règne un champ magnétique uniforme et vertical  $\vec{B}$ , de sens ascendant, et d'intensité  $B = 0,1$  T.

**13.2.1.** L'interrupteur  $K$  étant ouvert, la tige ( $T$ ) est abandonnée sur les rails sans vitesse initiale à la position  $MN$ . Déterminer la valeur numérique de l'accélération  $a_G$  du mouvement du centre d'inertie  $G$  de la tige. On prendra  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ .

**13.2.2.** La tige étant ramenée à la position  $MN$ , on ferme l'interrupteur  $K$ . L'intensité du courant dans le circuit est alors  $I = 2$  A. La masse de la tige ( $T$ ) est  $m = 60,8$  g.

**13.2.2.1.** Faire à l'aide d'un schéma, le bilan des forces qui s'exercent sur la tige ( $T$ ).

**13.2.2.2.** Déterminer la nouvelle valeur de l'accélération  $a'_G$  du mouvement de la tige.

**13.2.2.3.** Calculer la valeur de  $I$  pour que la tige reste en équilibre sur les rails.

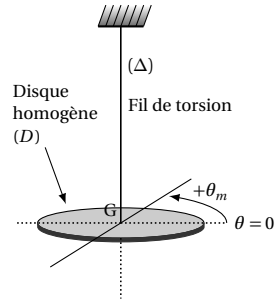
On négligera l'effet d'induction dû au déplacement de la tige.

## Exercice 14.

### Les systèmes oscillants

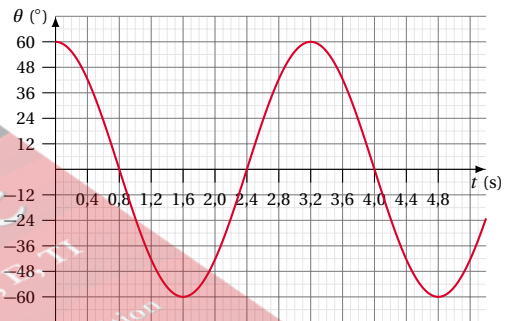
**14.1.** Oscillations d'un disque homogène

Un disque homogène ( $D$ ) de masse  $M = 1,0$  kg et de rayon  $R = 10$  cm est suspendu en son centre de gravité  $G$ , à un fil de torsion de constante  $C$  (figure ci-dessous).



On rappelle l'expression du moment d'inertie d'un disque par rapport à un axe ( $\Delta$ ) perpendiculaire à son plan et passant par son centre de gravité :  $J_\Delta = \frac{1}{2} MR^2$ .

On fait tourner le disque d'un angle  $\theta_m$  dans le plan horizontal, provoquant une torsion du fil du même angle, puis on l'abandonne sans vitesse initiale. Le disque effectue alors un mouvement oscillatoire de rotation autour de l'axe ( $\Delta$ ) matérialisé par le fil. Un dispositif approprié a permis de représenter les variations de l'angle de torsion  $\theta$  en fonction du temps (figure ci-dessous).



**14.1.1.** Faire le bilan des forces extérieures qui s'appliquent sur le disque à une date quelconque de son mouvement.

**14.1.2.** En appliquant la relation fondamentale de la dynamique du solide en rotation au disque, déterminer l'équation différentielle du mouvement de ce dernier.

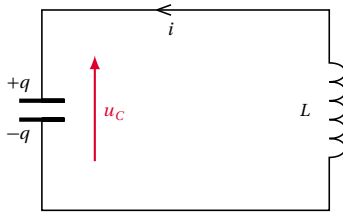
**14.1.3.** Montrer que la période propre des oscillations a pour expression :  $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{MR^2}{2C}}$

**14.1.4.** Déterminer à partir du graphe ci-dessus, la valeur numérique de  $T_0$ , puis en déduire la constante de torsion  $C$  du fil.

**14.2.** Circuit LC

Un condensateur de capacité  $C$  chargé sous une tension continue  $U = 6$  V, est connecté à la date  $t = 0$  aux bornes d'une bobine idéale d'inductance  $L = 0,42$  H (schéma ci-dessous).

## 12.1. Énoncé des sujets d'examen



**14.2.1.** Établir l'équation différentielle à laquelle obéit la tension instantanée  $U_C$  aux bornes du condensateur.

**14.2.2.** Une solution de cette équation est :  $U_C = U_m \cos(628t)$ .

Déterminer les valeurs de  $U_m$ , de la capacité  $C$  du condensateur et de la charge initiale  $Q_0$  portée par ce dernier.

## Exercice 15.

## Phénomènes corpusculaire et ondulatoire

**15.1.** Ondes à la surface de l'eau d'une cuve  
La pointe ( $P$ ) d'un vibreur monté au-dessus d'une cuve à eau, affleure en un point  $S$  la surface de l'eau de la cuve. Le vibreur mis en marche, la pointe ( $P$ ) produit en  $S$  des perturbations verticales et sinusoïdales d'amplitude  $a = 2\text{ mm}$  et de fréquence  $N = 100\text{ Hz}$ . La célérité de la propagation des ondes à la surface de l'eau est  $v = 0,40\text{ m s}^{-1}$ . On négligera l'amortissement et la réflexion des ondes au cours de la propagation.

**15.1.1.** Définir : onde mécanique.

**15.1.2.** Écrire l'équation du mouvement vibratoire du point  $S$  (on prendra comme origine des temps, l'instant où l'élongation de  $S$  est maximale).

**15.1.3.** Soit  $M$  un point de la surface de l'eau situé à  $4\text{ cm}$  de la source  $S$ . Comparer le mouvement vibratoire du point  $M$  à celui de  $S$ .

**15.2.** Nature corpusculaire de la lumière

On désire tracer la courbe  $U_0 = f(\nu)$ , de la variation de la tension d'arrêt  $U_0$  d'une cellule photo-émissive en fonction de la fréquence  $\nu$  de la radiation éclairante.

**15.2.1.** Écrire la relation liant  $U_0$  à la fréquence  $\nu$  de la radiation incidente.

**15.2.2.** On a obtenu le tableau de mesures suivant :

$\nu$ ( $\times 10^{14}\text{ Hz}$ )	15	10	7,5	6	5
$U_0$ (V)	4,300	2,230	1,200	0,580	0,166

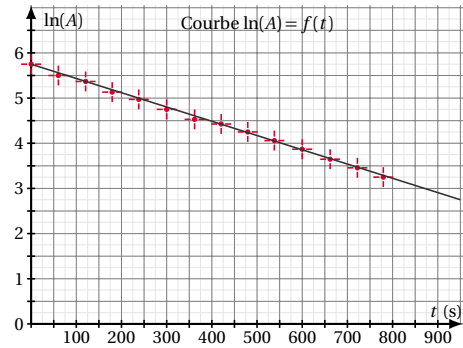
**15.2.2.1.** Tracer sur papier millimétré, la courbe  $U_0 = f(\nu)$ . Échelles. En abscisse :  $1\text{ cm}$  pour  $10 \times 10^{14}\text{ Hz}$ . En ordonnée :  $1\text{ cm}$  pour  $0,5\text{ V}$ .

**15.2.2.2.** En déduire la longueur d'onde seuil  $\lambda_0$  du césium, puis la valeur de la charge électrique élémentaire  $e$ . On donne :  $h = 6,626 \times 10^{-34}\text{ Js}$ ;  $c = 3 \times 10^8\text{ m s}^{-1}$ .

## Exercice 16.

## Exploitation des résultats d'une expérience

Au cours d'une expérience sur le Vanadium  $^{52}_{23}\text{V}$  qui est un émetteur radioactif  $\beta^-$ , on utilise un écran absorbeur et un détecteur. Un dispositif approprié a permis de suivre l'évolution de l'activité de ce nucléide au cours du temps. Le tableau de mesures obtenu a permis de tracer la courbe  $\ln(A) = f(t)$  (figure ci-dessous).



**16.1.** Écrire l'équation de la désintégration du vanadium 52.

**16.2.** A partir de la loi de décroissance, montrer que  $\ln(A) = -\lambda t + \ln(A_0)$  où  $\lambda$  est la constante radioactive et  $A_0$ , l'activité initiale.

Rappels :  $A = -\frac{dN}{dt}$ ;  $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ .

**16.3.** Déterminer à partir de la courbe  $\ln(A) = f(t)$  de la figure ci-dessus :

**16.3.1.** La valeur numérique de la constante radioactive  $\lambda$  du vanadium 52, puis calculer sa période radioactive  $T$ .

**16.3.2.** Le nombre  $N_0$  de noyaux du vanadium 52 que contenait la source à la date  $t = 0\text{ s}$ .

Extrait du tableau périodique :

3 IIIA	4 IVB	5 VB	6 VIB	7 VIIB
45,0	47,9	50,9	52,0	54,9
$^{45}_{21}\text{Sc}$ Scandium	$^{48}_{22}\text{Ti}$ Titane	$^{51}_{23}\text{V}$ Vanadium	$^{52}_{24}\text{Cr}$ Chrome	$^{55}_{25}\text{Mn}$ Manganèse

## 12.1.5 Énoncé – Baccalauréat 2016

Examen:	Baccalauréat	Séries:	C, E
Session:	2016	Durée:	4 heures
Épreuve:	Physique	Coef.:	4

## Exercice 17.

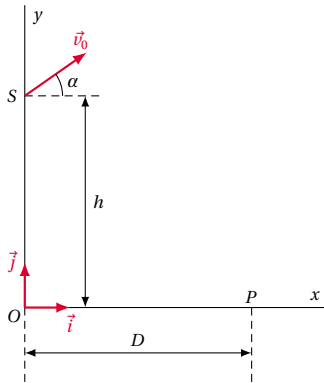
## Mouvements dans les champs de forces et leurs applications

## Partie 1 : Le lancer du poids

Lors d'un lancer de "poids", le centre d'inertie  $G$  de la boule part d'un point  $S$  situé à une hauteur  $h = 2,62\text{ m}$  au-dessus du sol supposé plan et horizontal. On prend pour origine des dates, la date où la boule quitte la main du lanceur. On note  $\vec{v}_0$  la vitesse initiale de la boule qu'on considère appartenant au plan vertical contenant les points  $O$  et  $P$  de l'axe horizontal  $Ox$ . Le vecteur vitesse  $\vec{v}_0$  fait un angle  $\alpha = 45^\circ$  avec l'horizontale.

L'axe  $Oy$  est vertical ascendant et passe par le centre d'inertie de la masse à l'instant où elle quitte la main du lanceur.





On étudie le mouvement de  $G$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  du référentiel terrestre et on néglige l'action de l'air. On prend l'intensité de la pesanteur  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ .

**17.1.** En appliquant à la masse le théorème du centre d'inertie, montrer que l'accélération de son centre d'inertie  $G$  est égale à l'accélération de la pesanteur.

**17.2.** Établir dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , les équations horaires du mouvement de  $G$ , puis en déduire l'équation cartésienne de sa trajectoire.

**17.3.** Pour  $v_0 = 13,7 \text{ m s}^{-1}$ , calculer la longueur mesurée sur l'axe  $Ox$  du lancé réussi par l'athlète.

**Partie 2 : Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique**

Une particule de masse  $m$ , de charge électrique  $q$  et animée d'une vitesse  $\vec{v}$  à la date  $t_1$  où elle pénètre dans un champ magnétique  $\vec{B}$  de telle sorte que  $\vec{v} \perp \vec{B}$ .

**17.1.** Montrer que la vitesse  $\vec{v}$  de la particule est telle que sa valeur  $v$  reste constante quelque soit  $\vec{B}$ .

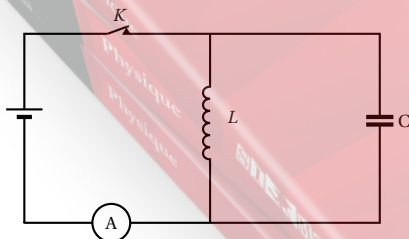
**17.2.** Donner la caractéristique de la trajectoire de la particule dans le champ qui rend compte des variations de la valeur du champ magnétique. Comment varie cette caractéristique lorsque la valeur du champ augmente ?

## Exercice 18.

### Systèmes oscillants

**Partie 1 : Oscillations dans un dipôle LC**

On considère le circuit ci-contre composé d'un générateur de courant continu, d'un interrupteur  $K$ , d'une bobine dont l'inductance  $L$  vaut  $42,20 \times 10^{-3} \text{ H}$  et dont on néglige la valeur de la résistance et d'un condensateur de capacité  $C = 14,83 \mu\text{F}$  en dérivation avec la bobine (voir schéma ci-dessous).



L'interrupteur étant fermé, l'ampèremètre indique  $I = 225 \text{ mA}$ . À un instant qu'on choisit comme origine des dates, on ouvre l'interrupteur  $K$ .

**18.1.** Déterminer à la date  $t = 0$ , la tension aux bornes

de la bobine. En déduire la valeur de celle aux bornes du condensateur.

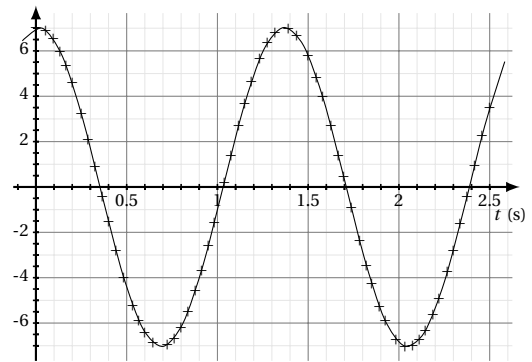
**18.2.** Écrire l'équation différentielle traduisant l'évolution subséquente de la tension aux bornes du condensateur ( $t > 0$ ).

**18.3.** Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle précédente puis, en prenant en compte les conditions initiales, écrire la loi horaire de l'évolution de la tension aux bornes du condensateur.

**Partie 2 : Oscillateur mécanique**

L'enregistrement de l'élongation d'un oscillateur non amorti constitué d'un ressort de raideur  $k$  lié à un solide de masse  $m$  est donné en figure ci-dessous.

$x$  (cm)



**18.1.** À l'aide de l'enregistrement, déterminer :

**18.1.1.** la période propre  $T_0$  de cet oscillateur,

**18.1.2.** l'amplitude de ses oscillations,

**18.1.3.** la vitesse de la masse à la date  $t = 0$ .

**18.2.** Déterminer la constante de raideur  $k$  sachant que  $m = 205,9 \text{ g}$

**18.3.** Calculer l'énergie mécanique  $E_0$  du système à la date  $t = 0$ .

**18.4.** Que vaut la vitesse de la masse  $m$  lorsqu'elle passe pour la première fois en  $x = 0$  ?

## Exercice 19.

### Phénomènes corpusculaire et ondulatoires

**Partie 1 : La radioactivité**

**19.1.** Citer une application de la radioactivité. Expliquer brièvement son principe.

**19.2.** Le bismuth  $^{212}_{83}\text{Bi}$  subit une désintégration du type  $\beta^-$  pour donner du polonium de symbole atomique  $\text{Po}$ .

**19.2.1.** Écrire l'équation traduisant la transmutation du bismuth 212 en polonium.

**19.2.2.** La constante radioactive du bismuth 212 est  $\lambda = 1,906 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ; calculer sa période radioactive.

**19.3.** Un échantillon contient à une date  $t$  une masse  $m = 1 \text{ mg}$  de bismuth 212. Déterminer l'activité de cet échantillon à cette date.

Données :

Masse molaire atomique du bismuth 212 :

$M(^{212}_{83}\text{Bi}) = 0,212 \text{ kg mol}^{-1}$ .

Constante d'Avogadro :

$N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

**Partie 2 : Interférences lumineuses**

## 12.1. Enoncé des sujets d'examen

On réalise une expérience d'interférences lumineuses avec un dispositif des fentes d'Young dans lequel une lumière monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 643 \text{ nm}$ , issue d'une fente  $F$  tombe sur un diaphragme plan percé de deux fentes fines  $F_1$  et  $F_2$  parallèles et distantes de  $a = 0,15 \text{ mm}$ . La distance entre le plan contenant le diaphragme et l'écran d'observation est  $D = 140 \text{ cm}$ .  $F$  est sur la médiatrice du segment  $[F_1, F_2]$ .

**19.1.** Faire un schéma du dispositif expérimental et donner une description succincte de l'aspect de l'écran.

**19.2.** Déterminer l'interfrange  $i$ .

**19.3.** Un point  $M$  du champ d'interférence est situé à une distance  $x = 1,8 \text{ cm}$  de la projection orthogonale sur l'écran du milieu des deux sources  $F_1$  et  $F_2$ .

**19.3.1.** Déterminer la différence de marche des rayons lumineux issus de  $F_1$  et de  $F_2$  en  $M$ .

**19.3.2.** Le point  $M$  appartient-il à une frange brillante ou sombre?

On rappelle :  $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$ .

$$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}; 1 \text{ THz} = 10^{12} \text{ Hz}.$$

## 12.1.6 Enoncé – Baccalauréat 2017

Examen:	Baccalauréat	Séries:	C, E
Session:	2017	Durée:	4 heures
Épreuve:	Physique	Coef.:	4

L'énoncé de ce sujet peut être gratuitement téléchargé sur :

[www.simo.education](http://www.simo.education)

## Exercice 20.

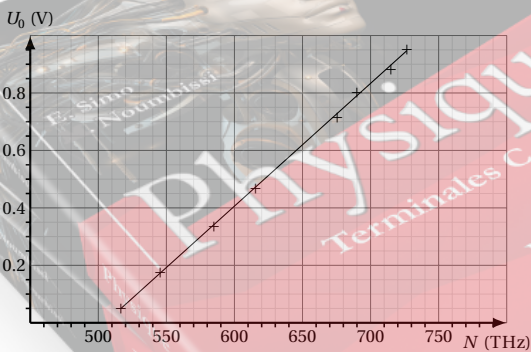
## Exploitation des résultats d'une expérience

On éclaire la cathode d'une cellule photoélectrique par un faisceau lumineux monochromatique de fréquence  $N$  et on mesure le potentiel d'arrêt  $U_0(N)$  de la cellule pour cette radiation.

**20.1.** Définir : potentiel d'arrêt.

**20.2.** Faire un schéma du montage utilisé sachant qu'il comprend en plus de la cellule photoélectrique, un générateur de tension réglable, un voltmètre, un milliampermètre, un interrupteur et des fils de connexion.

**20.3.** On répète l'opération en utilisant diverses radiations et on obtient des résultats qui permettent de tracer le graphe  $U_0(N)$  de la figure ci-dessous.



Graphe de  $U_0 = f(N)$

**20.3.1.** Écrire la relation entre le potentiel d'arrêt  $U_0$ , le travail d'extraction  $W_0$  d'un électron du métal de la cathode et l'énergie des photons incidents  $W$ .

**20.3.2.** Déterminer graphiquement :

**20.3.2.1.** La constante de Planck.

**20.3.2.2.** La fréquence seuil du métal de la cathode.

On laissera apparents sur la figure ci-dessous tous les tracés ayant servis à la résolution.

On rappelle la valeur de la charge élémentaire est

## 12.2 Solution des sujets d'examen

### 12.2.1 Solution – Baccalauréat 2012

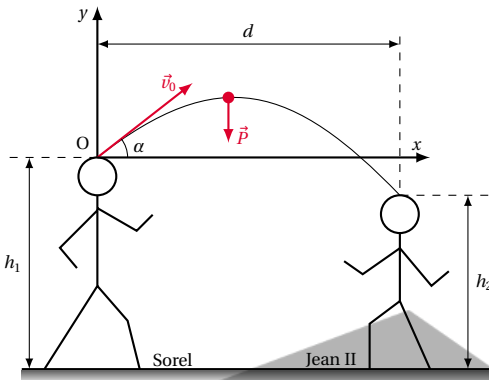
#### Solution 1. (p. 240)

##### Mouvements dans les champs des forces et leurs applications

##### Partie 1 : Mouvements dans les champs de pesanteur

##### 1.1. Équation Cartésienne.

Le bilan des forces extérieures appliquées au ballon étant :



En appliquant le théorème du centre d'inertie au ballon, dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, on a :

$$\sum \vec{F}_{ex} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Suivant } 0x : \vec{0} = m\vec{a}_x \\ \text{Suivant } 0y : \vec{P} = m\vec{a}_y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = ma_x \\ -mg = ma_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{v} \begin{cases} v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_y = -gt + v_{0y} = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{OG} \begin{cases} x = (v_0 \cos \alpha)t & (12.1) \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t & (12.2) \end{cases}$$

$$(12.1) \Rightarrow t = \frac{v}{v_0 \cos \alpha} \quad (12.3)$$

(12.3) dans (12.2)

$$y = -\frac{1}{2} \frac{g}{(v_0 \cos \alpha)^2} x^2 + x \tan \alpha$$

$$y = -\frac{1}{10} x^2 + x$$

##### 1.2. Distance $d$ de Sorel où doit se placer Jean II :

$$\text{on a : } 10y + x^2 - 10x = 0$$

$$\text{pour } y = -(h_1 - h_2) = -0,2 \text{ m} \Leftrightarrow x^2 - 10x - 2 = 0$$

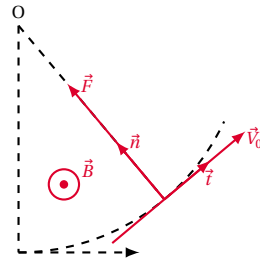
$$\Delta = 108 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{10 + \sqrt{108}}{2} \\ x_2 = \frac{10 - \sqrt{108}}{2} \end{cases}$$

d'où  $d = x_1 = 10,196 \text{ m}$  car  $x_2 < 0$

##### Partie 2 : Mouvement d'une particule charge dans un champ magnétique uniforme

##### 1.1. Nature du mouvement

Le bilan des forces extérieures appliquées à la particule étant :



En appliquant le théorème du centre d'inertie à la particule, dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, on a :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_{ex} = m\vec{a} &\Leftrightarrow \vec{F} = m\vec{a} \\ \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} &= \frac{q\vec{v} \wedge \vec{B}}{m} \end{aligned}$$

Donc  $\vec{a}$  a la même direction que  $\vec{F}$  ; c'est-à-dire perpendiculaire à  $\vec{v}$  et  $\vec{B}$  : Donc mouvement circulaire.

Et  $\vec{F} \perp \vec{v} \Rightarrow$  d'après le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_C = W(\vec{F})$$

$$\text{et } W(\vec{F}) = 0 \Leftrightarrow \Delta E_C = 0;$$

Donc  $v = v_0 = \text{cte}$  : Donc le mouvement est uniforme.

D'où la nature du mouvement : mouvement circulaire uniforme.

##### 1.2. Expression du rayon de courbure $R$

$$\text{on a } F = |q|vB = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv}{|q|B}$$

$$\text{A.N. : } R = 1,037 \text{ m} \approx 1 \text{ m}$$

##### 1.3. Angle de déviation $\alpha$

$$\alpha \text{ étant petit, on a } \sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha = \frac{\ell}{R} \text{ d'où } \alpha = \frac{\ell}{R}$$

$$\text{A.N. : } \alpha = 0,173 \text{ rad}$$

#### Solution 2. (p. 240)

##### Systèmes oscillants

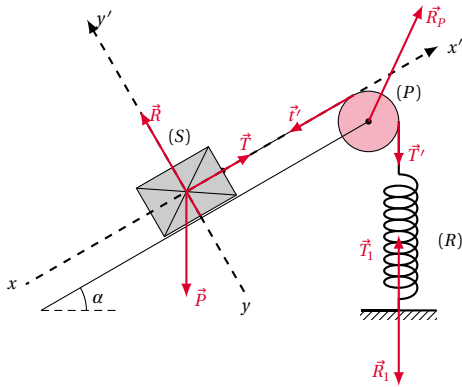
##### Partie 1 : Oscillateur mécanique

##### 2.1.

##### 2.1.1. Relation entre $m$ , $g$ , $\alpha$ et $x_0$ :

Le bilan des forces appliquées au système étant

## 12.2. Solution des sujets d'examen



Le solide (S) étant en équilibre :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = \vec{0}$$

En projetant cette relation sur l'axe  $x'x$  :

$$\begin{aligned} T - mg \sin \alpha &= 0 \\ T &= mg \sin \alpha \end{aligned} \quad (12.1)$$

La poulie (P) étant en équilibre :

$$T' = t' = k x_0 \quad (12.2)$$

Le fil étant inextensible, on a :

$$T = t' \quad (12.3)$$

(12.1), (12.2) et (12.3)

$$\Rightarrow mg \sin \alpha = k x_0 \Leftrightarrow mg \sin \alpha = 10 x_0$$

**2.1.2.** Valeur numérique de  $x_0$

$$x_0 = \frac{mg \sin \alpha}{k}$$

A.N. :  $x_0 = 0,05 \text{ m}$

**2.2.**

**2.2.1.** Expression de la période  $T_0$  des oscillations de solide (S).

Par identification, de l'équation horaire, on a :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{J_\Delta}{r^2}}}$$

d'où

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m + \frac{J_\Delta}{r^2}}{k}}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m + \frac{J_\Delta}{r^2}}{k}}$$

**2.2.2.** Expression de  $J_\Delta$  en fonction de  $T_0$

$$\begin{aligned} T_0 &= 2\pi \sqrt{\frac{m + \frac{J_\Delta}{r^2}}{k}} \Rightarrow J_\Delta = r^2 \left[ m + k \left( \frac{T_0}{2\pi} \right)^2 \right] \\ J_\Delta &= \left( \frac{5}{2} T_0^2 - 1 \right) 10^{-3} \end{aligned}$$

A.N. :

$$T_0 = \frac{20}{10} = 2 \text{ s et donc } J_\Delta = 9 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

**2.2.3.** Équation horaire du mouvement de la poulie

On a :

$$\begin{aligned} x &= r\theta \Rightarrow \theta = \frac{x}{r} \\ &= \frac{2}{r} \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m + J_\Delta/r^2}} t \right), \end{aligned}$$

$r$  en cm,  $\theta$  en rad.

$$\theta = 0,2 \cos(\pi t) \text{ en rad}$$

Partie 2 : Oscillateur électrique

**2.1.** Expression de la tension  $U_{AB}$  aux bornes de chaque dipôles :

**2.1.1.** Aux bornes du condensateur :

$$U_{AB} = \frac{q}{C}$$

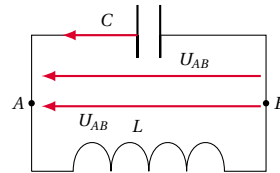
**2.1.2.** Aux bornes de la bobine :

$$U_{AB} = e - r i$$

$$\text{or : } r = 0 \text{ et } e = -L \frac{di}{dt}$$

$$\text{d'où } U_{AB} = -L \frac{di}{dt} = -L \frac{d^2 q}{dt^2} \text{ car } i = \frac{dq}{dt}$$

**2.2.** Équation différentielle :



d'après la loi des mailles, on a :

$$\begin{aligned} U_{AB} - U_{AB} &= 0 \Leftrightarrow \frac{q}{C} + L \frac{d^2 q}{dt^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0 \end{aligned}$$

**2.3.** Calcul de la capacité du condensateur

$$\omega = 2\pi f = \left( \frac{1}{LC} \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow C = \frac{1}{4\pi^2 f^2 L}$$

A.N. :  $C = 10^{-14} \text{ F}$

### Solution 3. (p. 241)

#### Phénomènes corpusculaires et ondulatoires

Partie 1 : Phénomènes ondulatoires

**3.1.** Calcul de la célérité de la propagation de l'onde :

$$\text{on a : } \lambda = v T \Leftrightarrow v = \frac{\lambda}{T}$$

A.N. :  $v = 5 \text{ ms}^{-1}$

**3.2.**

**3.2.1.** Détermination de la plus grande fréquence  $f_0$  pour laquelle on voit une ficelle.

On a :

$$f = k f_e, k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f_e = \frac{f}{k}, k \in \mathbb{N}^*$$

la plus grande fréquence est obtenue pour  $k = 1 \Rightarrow f_e = f = \frac{1}{T} = 10$

**3.2.2.** Pour  $f_1 = 99 \text{ Hz}$  on observe une corde qui a la forme d'une sinusoïde se déplacer lentement dans le sens réel du mouvement (mouvement apparent ralenti direct).

**3.3.** Équation horaire de la source  $O$

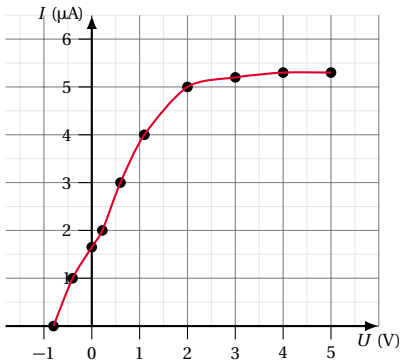
Par rapport au point  $M$ , la source  $O$  a une avance sur le temps, d'où :

$$x_0 = x_M \left( t + \frac{d}{v} \right) = 5 \cos 200\pi \left( t + \frac{d}{v} \right)$$

$$x_0 = 5 \cos(200\pi t + 12\pi) = 5 \cos(200\pi t) \text{ en mm}$$

Partie 2 : Effet photoélectrique

**3.1.** Courbe  $I = f(t)$ .



**3.2.**

**3.2.1.** Définition :

Le potentiel d'arrêt est l'opposé de la tension aux bornes du générateur, pour laquelle le courant photoélectrique est nul.

Valeur du potentiel d'arrêt :  $U_0 = 0,8 \text{ V}$

**3.2.2.** Valeur de l'intensité  $I_0$  du courant de saturation.

A.N. :  $I_S = 5,3 \mu\text{A}$

**3.3.** Vitesse maximale des électrons.

$$F_{C_{max}} = eU_0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_{max}^2 = eU_0$$

$$\Rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{2eU_0}{m_e}}$$

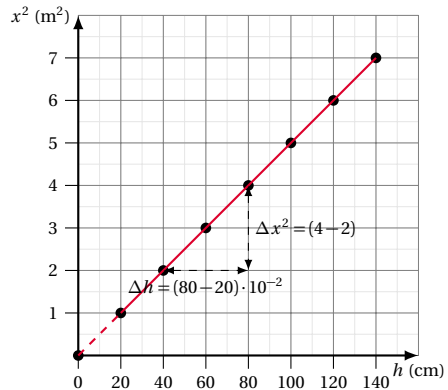
A.N. :

$$v_{max} = 530\,394,8353 \text{ ms}^{-1} \approx 5,3 \times 10^5 \text{ ms}^{-1}$$

### Solution 4. (p. 241)

Exploitation des résultats d'une expérience

**4.1.** Courbe  $x_m^2 = f(h)$ .

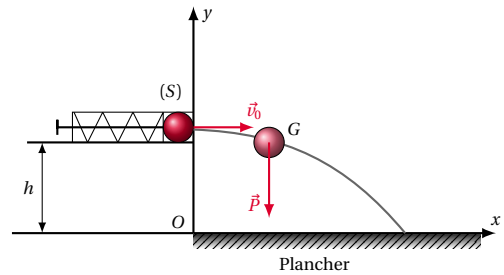


Forme de la courbe : La courbe obtenue a la forme d'une droite

**4.2.**

**4.2.1.** Équation cartésienne :

Le bilan des forces extérieures appliquées à la bille étant :



En appliquant le théorème du centre d'inertie à la bille dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, on a :

$$\sum \vec{F}_{ex} = m\vec{a}$$

en projetant cette relation sur les axes  $0x$ ,  $0y$  on a :

$$\text{Suivant } 0x : \vec{0} = m\vec{a}_x$$

$$\text{Suivant } 0y : \vec{P} = m\vec{a}_y$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = ma_x \\ -mg = ma_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{v} \begin{cases} v_x = v_{0x} = v_0 \\ v_y = -gt + v_{0y} \text{ or } : v_{0y} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \vec{v} \begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = -gt \end{cases}$$

$$0\vec{G} \begin{cases} x = v_0 t \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + h \end{cases} \quad (12.1) \quad (12.2)$$

$$(12.1) \Rightarrow t = \frac{x}{v_0} \quad (12.3)$$

$$(12.3) \text{ dans } (12.2) \Rightarrow y = -\frac{g}{2v_0^2} x^2 + h$$



## 12.2. Solution des sujets d'examen

## 4.2.2. Déduisons la relation :

$$x_m^2 = \frac{2v_0^2}{g} h$$

Sur le plancher,  $y = 0$  et  $x = x_m$

$$\text{On a donc } 0 = -\frac{g}{2v_0^2} x_m^2 + h \text{ d'où } x_m^2 = \frac{2v_0^2}{g} h$$

4.3. Valeur expérimentale de  $g$ 

La coefficient directeur de la droite  $x_m^2 = f(h)$  est égal à  $\frac{2v_0^2}{g}$ .  
Soit :

$$\tan \alpha = \frac{\Delta x_m^2}{\Delta h} = \frac{2v_0^2}{g} \Rightarrow g = \frac{2v_0^2}{\Delta x_m^2} \Delta h$$

$$\text{A.N. : } g = 2 \times 5^2 \left( \frac{40 \times 10^{-2}}{2} \right) = 10 \text{ m s}^{-2}$$

a :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{T} + \vec{P} = m\vec{a}$$

En projetant cette relation dans la base de Frenet  $(\vec{t}, \vec{n})$

On a :

$$\begin{cases} \vec{t} : \vec{P}_t = m\vec{a}_t \\ \vec{n} : \vec{P}_n + \vec{T}_M = m\vec{a}_n \end{cases} \quad (12.1)$$

$$(12.2)$$

$$(12.2) \Rightarrow T_M - P_n = ma_n \text{ or :}$$

$$\begin{cases} P_n = P \cos \alpha = mg \cos \alpha \\ a_n = \frac{v_M^2}{\ell} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow T_M - mg \cos \alpha = m \frac{v_M^2}{\ell}$$

$$\Rightarrow T_M = m \left( g \cos \alpha + \frac{v_M^2}{\ell} \right)$$

## 5.1.3. Valeur minimale de la vitesse au point C.

Le fil restant tendu,

$$T_C \geq 0 \Leftrightarrow m \left( g \cos \alpha + \frac{v_C^2}{\ell} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow g \cos \alpha + \frac{v_C^2}{\ell} \geq 0$$

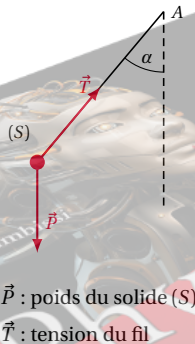
$$\Leftrightarrow v_C \geq \sqrt{-g\ell \cos \alpha}$$

or au point C,  $\alpha = \pi$  rad d'où  $v_{Cmin} = \sqrt{g\ell}$

$$\text{A.N. : } v_{Cmin} = 2,45 \text{ m s}^{-1}$$

## 5.2. Mouvement de chute libre parabolique.

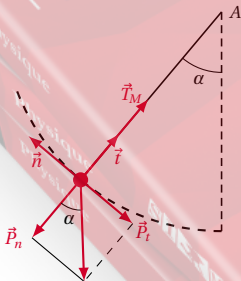
## 5.2.1. Équation horaires littérales du mouvement de (S) :



$\vec{P}$  : poids du solide (S)

$\vec{T}$  : tension du fil

## 5.1.2. Expression de la tension du fil.



En appliquant le théorème du centre d'inertie au solide (S) dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, on

d'où

or

En appliquant le théorème du centre d'inertie au solide (S), dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, on a :  $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$ , en projetant cette relation sur les axes  $0x, 0z$  on a :

$$\text{Suivant } 0x : \vec{0} = m\vec{a}_x$$

$$\text{Suivant } 0z : \vec{P} = m\vec{a}_z$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = ma_x \\ -P = ma_z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = ma_x \\ -mg = a_z \end{cases}$$

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{cases} \Rightarrow \vec{v} \begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_z = -gt + v_{0z} \end{cases}$$

$$\vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos \beta \\ v_{0z} = v_0 \sin \beta \end{cases} \Rightarrow \vec{v} \begin{cases} v_x = v_0 \cos \beta \\ v_z = -gt + v_0 \sin \beta \end{cases}$$

d'où

$$0\vec{M} \begin{cases} x = (v_0 \cos \beta)t \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \beta)t \end{cases}$$

Soit

$$x = (v_0 \cos \beta)t \quad (12.3)$$

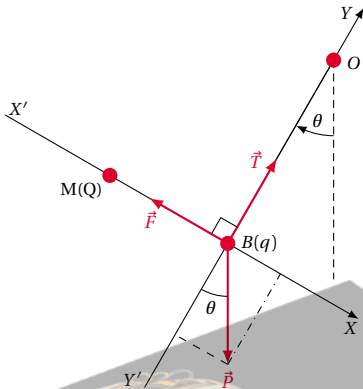
$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \beta)t \quad (12.4)$$

**5.2.2. Équation de la trajectoire :**

$$(12.3) \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos \beta} \quad (12.5)$$

(12.5) dans (12.4) donne

$$\Rightarrow z = -\frac{g}{(v_0 \cos \beta)^2}x^2 + x \tan \beta$$

**Partie 2 : Pendule électrostatique****5.2.1. Représentation des forces s'exerçant sur la boule B.****5.2.2. Détermination :**Intensités des forces  $\vec{F}$  et  $\vec{T}$ 

La boule (B) étant en équilibre, on a :

$$\sum \vec{F}_{ex} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{T} + \vec{F} = \vec{0}$$

En projetant sur les axes  $x'x$  et  $(y'y)$  on a :

$$\text{Suivant } x'x : \vec{F} + \vec{P}_x = \vec{0}$$

$$\text{Suivant } y'y : \vec{T} + \vec{P}_y = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P_x - F = 0 \\ T - P_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F = P_x = P \sin \theta \\ T = P_y = P \cos \theta \end{cases}$$

$$F = mg \sin \theta \quad T = mg \cos \theta$$

**5.2.3. Valeur algébrique de la charge Q**

D'après la loi de Coulomb, on a :

$$F = k \frac{|q||Q|}{MB^2} \Rightarrow |Q| = \frac{FMB^2}{k|q|}$$

puis qu'il y a attraction,  $q$  et  $Q$  sont de signes contraires  
or  $q > 0 \Rightarrow Q < 0$ , d'où

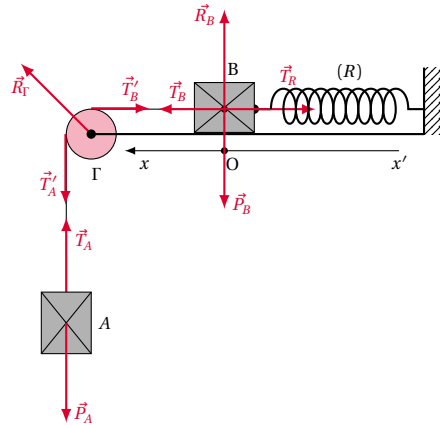
$$Q = -\frac{FMB^2}{kq}$$

$$\text{A.N. : } |Q| = 4,75 \times 10^{-7} \text{ C}$$

**Solution 6. (p. 242)****Les systèmes oscillants****Partie 1 : Oscillateur mécanique****6.1. Le système étant en équilibre :****6.1.1. Montrons que :**

$$m_A g - k \Delta \ell_0 = 0$$

Le bilan des forces appliquées au solide (B) étant :



Le solide (B) étant en équilibre, on a :

$$\vec{P}_B + \vec{R}_B + \vec{T}_B + \vec{T}'_B = \vec{0}$$

Suivant  $(x'x)$  :  $T_B - T'_B = 0$ 

$$\Leftrightarrow T_B = T'_B = k \Delta \ell_0 \quad (12.1)$$

La poulie ( $\Gamma$ ) étant en équilibre, on a :

La poulie étant de masse négligeable,

$$T'_A = T'_B \quad (12.2)$$

Le solide (A) étant en équilibre on a :

$$\vec{P}_A + \vec{T}_A = \vec{0} \Leftrightarrow P_A - T_A = 0 \quad (12.3)$$

$$\Rightarrow T_A = P_A = m_A g$$

Le fil étant inextensible et de masse négligeable :

$$\begin{aligned} T_B &= T'_B \\ T_A &= T'_A \end{aligned} \quad (12.4)$$

(12.4) et (12.2)

$$\Rightarrow T_A = T_B \quad (12.5)$$

(12.5) et (12.3)

$$\Rightarrow T_B = m_A g \quad (12.6)$$

(12.6) dans (12.1)

$$m_A g = k \Delta \ell_0 \Leftrightarrow m_A g - k \Delta \ell_0 = 0$$

**6.1.2. Valeur numérique de  $\Delta \ell_0$** 

$$\Delta \ell_0 = \frac{m_A g}{k}$$

$$\Delta \ell_0 = 6,12 \times 10^{-2} \text{ m} = 6,12 \text{ cm}$$

**6.2. Montrons que le solide B effectue un mouvement rectiligne sinusoïdal :**

En appliquant le théorème du centre d'inertie au solide (B) dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen,

## 12.2. Solution des sujets d'examen

on a :

$$\sum \vec{F}_{ex} = m_B \vec{a} \Leftrightarrow \vec{P}_B + \vec{R}_B + \vec{T}_B + \vec{T}_R = m_B \vec{a}$$

or :  $\vec{P}_B + \vec{R}_B = \vec{0}$ , car pas de mouvement suivant la verticale.

$$\vec{T}_B + \vec{T}_R = m_B \vec{a} \Leftrightarrow T_B - T_R = m_B a$$

or :

$$\begin{aligned} T_R &= k(\Delta \ell_0 + x) \\ \Rightarrow T_B - k(\Delta \ell_0 + x) &= m_B a \end{aligned} \quad (12.7)$$

La poulie étant de masse négligeable :

$$T'_A = T'_B \quad (12.8)$$

En appliquant le théorème du centre d'inertie au solide (A) dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, on a :

$$\begin{aligned} \vec{P}_A + \vec{T}_A &= m_A \vec{a} \\ \Leftrightarrow P_A - T_A &= m_A a \\ \Rightarrow T_A &= P_A - m_A a \\ \Rightarrow T_A &= m_A(g - a) \end{aligned} \quad (12.9)$$

Le fil étant inextensible et de masse négligeable

$$\begin{cases} T_A = T'_A \\ T_B = T'_B \end{cases} \quad (12.10)$$

(12.10) et (12.8)

$$\Rightarrow T_A = T_B \quad (12.11)$$

(12.11) et (12.9)

$$\Rightarrow T_B = m_A(g - a) \quad (12.12)$$

m (12.12) dans (12.7)

$$\begin{aligned} m_A(g - a) - k(\Delta \ell_0 + x) &= m_B a \\ \Leftrightarrow m_A g - m_A a - k\Delta \ell_0 - kx &= m_B a \end{aligned}$$

or  $m_A g = k\Delta \ell_0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (m_A + m_B)a + kx &= 0 \\ \Leftrightarrow a + \frac{k}{m_A + m_B}x &= 0 \end{aligned}$$

or :  $a = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x}$  d'où l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m_A + m_B}x = 0 \quad (12.13)$$

cette équation est de la forme :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (12.14)$$

Donc le mouvement du solide (B) est rectiligne sinusoïdal.

Expression de la période propre  $T_0$

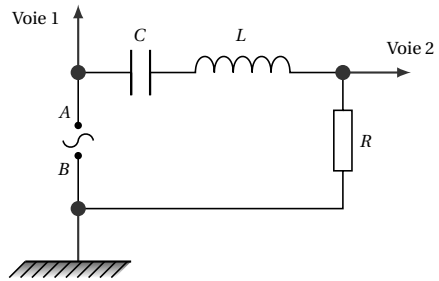
Par identification les relations (12.13) et (12.14) donnent :

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{k}{m_A + m_B} \text{ or } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \\ \text{d'où } T_0 &= 2\pi \sqrt{\frac{m_A + m_B}{k}} \end{aligned}$$

Partie 2 : Oscillateur électrique

6.1. Indication sur le schéma de comment l'oscilloscope

doit être connectée :



6.2. Fréquence  $f$  des deux tensions

$$f = \frac{1}{T}$$

or le schéma ci-dessus nous permet de déterminer la valeur de la tension, qui correspond à 5 divisions. Soit  $T = 5 \times 0,5 = 2,5 \text{ ms}$  d'où  $f = 400 \text{ Hz}$

6.3. Déphasage  $\varphi$  entre les deux tensions.

$$\varphi = \omega \Delta t$$

or :

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow \varphi = 2\pi f \Delta t$$

A.N. :  $\varphi = 0,643 \text{ rad}$

La tension principale  $U(t)$  est en avance de phase sur la tension aux bornes du résistor.

6.4. Impédance  $Z$  du circuit

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} \text{ d'où } Z = \frac{R}{\cos \varphi}$$

A.N. :  $Z = 125 \Omega$

Capacité  $C$  du condensateur

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \Leftrightarrow C = \frac{1}{L\omega^2 - R\omega \tan \varphi} \\ \text{d'où } C &= \frac{1}{4\pi^2 f^2 L - 2\pi f R \tan \varphi} \end{aligned}$$

A.N. :  $C = 3,76 \times 10^{-6} \text{ F} = 3,76 \mu\text{F}$

### Solution 7. (p. 243)

#### Phénomènes ondulatoires et corpusculaires

##### Partie 1 : Phénomènes ondulatoires

7.1. On appelle longueur d'onde d'une onde, la distance parcourue par l'onde au cours période.

7.2.

7.2.1. Nature de la frange d'ordre  $P' = -4,5$

La frange d'ordre  $P' = -4,5$  est une frange sombre

7.2.2. Distance entre le milieu de cette frange et le milieu de la frange centrale

$$d = |P' \lambda|$$

or :

$$i = \lambda \frac{D}{a} \Rightarrow d = |P'| \frac{\lambda D}{a}$$

A.N. :  $d = 2,7 \times 10^{-3} \text{ m} = 2,7 \text{ mm}$

#### Partie 2 : Phénomènes corpusculaires

7.1. Effet photoélectrique

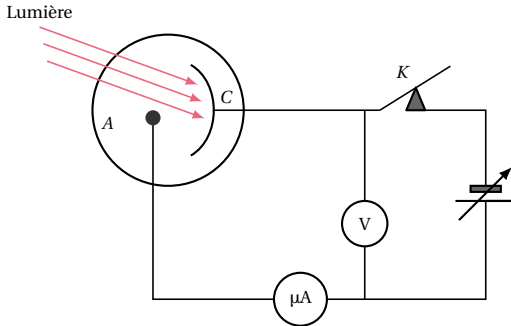
**7.1.1. Calcul de l'énergie d'un photon**

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

A.N. :  $E = 4,18 \times 10^{-19} \text{ J} = 2,61 \text{ eV}$

**7.1.2.** On peut affirmer que cette radiation déclenchera l'effet photoélectrique parce que  $E > W_0$ .

**7.1.3. Description d'une procédure expérimentale permettant la mesure de l'énergie cinétique maximale. Schéma**

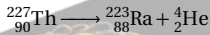


*Procédure :*

Jouer sur le curseur du générateur à tension variable jusqu'à la lecture de la valeur zéro sur le microampèremètre. La valeur absolue de la lecture du voltmètre donne la valeur du potentiel d'arrêt  $U_0$ . L'énergie cinétique maximale s'obtient à l'aide de la formule  $E_C = eU_0$ .

**7.2. Radioactivité**

**7.2.1. Équation de la désintégration d'un noyau de Thorium**



**7.2.2. Calcul de la masse  $\Delta m$  de thorium disparue :**

$\Delta m = m_0 - m_r$  ou  $m_r$  est la masse restante. Or :  $m_r = m_0 e^{-\lambda t} = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{T} t}$  d'où

$$\Delta m = m_0 \left( 1 - e^{-\frac{\ln 2}{T} t} \right)$$

A.N. :  $\Delta m = 0,437 \text{ g} \simeq 0,44 \text{ g}$

**Solution 8. (p. 243)**

**Étude d'un pendule et mesure de l'intensité de la pesanteur d'un lieu**

**8.1. Étude de l'influence de la masse du pendule.**

**8.1.1.** Matériel à compléter : chronomètre, rapporteur, fil, règle graduée.

**8.1.2. Protocole expérimental**

Pour chacune des masses  $m_1, m_2, m_3$  on constitue un pendule. On mesure à l'aide du chronomètre les durées respectives  $t_1, t_2$  et  $t_3$  d'un nombre  $n$  d'oscillations données.

Comparer les périodes  $T_1, T_2, T_3$  obtenues à l'aide des relations  $T_1 = \frac{t_1}{n}, T_2 = \frac{t_2}{n}, T_3 = \frac{t_3}{n}$ .

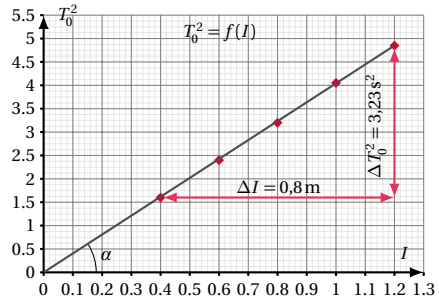
N.B. : on doit veiller à ce que l'amplitude de des oscillations, ainsi que la longueur du fil soient les mêmes.

**8.2. Étude de l'influence de la longueur du pendule**

**8.2.1.** Les élèves mesurent la durée de 10 oscillations

au lieu de mesurer la durée d'une seule, pour réduire au maximum l'erreur sur la mesure du temps.

**8.2.2. Courbe  $T_0^2 = f(\ell)$ .**



**8.2.3. Valeur expérimentale de l'intensité  $g$  du champ de pesanteur**

On a :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \Leftrightarrow T_0^2 = \frac{4\pi^2}{g} \ell$$

Donc la courbe  $T_0^2 = f(\ell)$  est une droite de coefficient directeur  $\frac{4\pi^2}{g}$ . Graphiquement, on a le coefficient directeur :

$$a = \tan \alpha = \frac{\Delta T_0^2}{\Delta \ell}$$

A.N. :  $a \simeq 4$

$$a = \frac{4\pi^2}{g} \Rightarrow g = \frac{4\pi^2}{a} = \pi^2 = 9,86 \text{ m s}^{-2}$$

A.N. :  $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$

$$9,7 \text{ m s}^{-2} \leq g \leq 9,8 \text{ m s}^{-2}$$

**12.2.3 Solution – Baccalauréat 2014****Solution 9. (p. 244)**

**Mouvements dans les champs des forces et leurs applications**

**Partie 1 : Action des champs électrique et magnétique sur un faisceau de particules chargées**

**9.1. Sens du vecteur champ magnétique  $\vec{B}$**

Pour qu'une particule ait une trajectoire rectiligne, il faut que la somme des forces perpendiculaires à cette trajectoire soit nulle. Soit :

$$\vec{F}_m + \vec{F}_{el} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}_m = -\vec{F}_{el}$$

d'où  $\vec{B}$  est perpendiculaire au plan et entrant  $\otimes \vec{B}$

**9.2. Montrons que la vitesse  $v_0$  ne dépend ni de la masse ni de la charge de particules :**

$$\text{on a : } \vec{F}_m = -\vec{F}_{el} \Leftrightarrow F_m = F_{el}$$

$$\Leftrightarrow |q|v_0B = |q|E \Rightarrow v_0 = \frac{E}{B}$$

A.N. :  $v_0 = 5,56 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$



## 12.2. Solution des sujets d'examen

## 9.3.

## 9.3.1. Nature du mouvement de particules dans la région

Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique est circulaire uniforme. Expression du rayon de la trajectoire :

$$R = \frac{mv}{|q|B}$$

9.3.2. Calcul de  $v_{max}$  et  $v_{min}$  :

$$\text{on a } -CD = O_1 D - O_1 C$$

$$\Leftrightarrow CD = 2R_{max} - 2R_{min}$$

$$\Leftrightarrow R_{max} - R_{min} = \frac{CD}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{mv_{max}}{|q|B} - \frac{mv_{min}}{|q|B} = \frac{CD}{2}$$

$$\Leftrightarrow v_{max} - v_{min} = \frac{CD|q|B}{2m}$$

De plus,  $v_{max} + v_{min} = 2v_0$  d'où

$$\begin{cases} v_{max} - v_{min} = \frac{CD|q|B}{2m} \\ v_{max} + v_{min} = 2v_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{max} = v_0 + \frac{CD|q|B}{4m} \\ v_{min} = v_0 - \frac{CD|q|B}{4m} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } v_{max} = 5,59 \times 10^5 \text{ m s}^{-1};$$

$$v_{min} = 5,52 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$$

## Partie 2 : Chariot entraîné par un solide

9.1. Expression de  $\vec{T}$  et  $\vec{T}'$ 

Le système étant immobile, le solide (S) est en équilibre on peut donc écrire :

$$\vec{P}_S + \vec{T}' = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{T}' = -\vec{P}_S$$

$$\Leftrightarrow \vec{T}' = Mg \vec{j}$$

La poulie étant de masse négligeable, on a :

$$T = T' \text{ d'où } \vec{T} = Mg \vec{j}$$

## 9.2. Modification de T

Lorsqu'on lâche le chariot, celui-ci est entraîné par le solide (S). L'intensité de la tension  $\vec{T}'$  du fil est inférieure à celle du poids du solide (S) et par conséquent diminue. La poulie étant de masse négligeable, l'intensité de la tension  $\vec{T}$  varie dans le même que  $\vec{T}'$ , donc la tension  $\vec{T}$  garde la même direction, le même sens, mais son intensité diminue.

9.3. Expression vectorielle de la vitesse  $\vec{v}_{G_S}$  et de l'accélération  $\vec{a}_{G_S}$ 

$$\vec{v}_{G_S} = -v_{G_S} \vec{j} = -v_G \vec{j}$$

$$\vec{a}_{G_S} = -a_{G_S} \vec{j} = -a_G \vec{j}$$

## 9.4. Deuxième loi de Newton pour le chariot et pour le solide (S) :

En appliquant le théorème du centre d'inertie au chariot

dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on a :

$$\sum \vec{F}_{ex} = m \vec{a}_G \Leftrightarrow \vec{P}_C + \vec{R} + \vec{T} = m \vec{a}_G \quad (12.1)$$

En appliquant le théorème du centre d'inertie au solide (S) dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on a :

$$\sum \vec{F}_{ex} = M \vec{a}_G \Leftrightarrow \vec{T}' + \vec{P}_S = M \vec{a}_G \quad (12.2)$$

## 9.5. Expression de l'accélération du mouvement et de la tension du fil.

La relation (12.1) s'écrit :

$$\vec{P}_C + \vec{R} + \vec{T} = m \vec{a}_G$$

$$\text{or } \vec{P}_C + \vec{R} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{T} = m \vec{a}_G \Leftrightarrow T = m a_G \quad (12.3)$$

La relation (12.2) s'écrit :

$$\vec{T}' + \vec{P}_S = M \vec{a}_G$$

$$\Leftrightarrow T' \vec{j} - P_S \vec{j} = -M a_G \vec{j}$$

$$\Leftrightarrow T' - P_S = -M a_G$$

$$\Leftrightarrow T' = Mg - M a_G$$

$$\text{Or } T = T' \Leftrightarrow m a_G = Mg - M a_G$$

$$\Leftrightarrow a_G = \frac{M}{m+M} g \quad (12.4)$$

$$(12.4) \text{ dans } (12.3) \quad T = \frac{mM}{m+M} g$$

## Solution 10. (p. 244)

## Oscillation forcées dans un dipôle électrique

## 10.1. Montrons que le dipôle (D) n'est pas un résistor

Si (D) est un résistor, on aura  $U_{AB} = U_R + U_D$  or  $U_R + U_D = 36 + 48 = 84 \text{ V}$  et  $U_{AB} = 60 \text{ V}$  d'où :

$$U_R + U_D > U_{AB}$$

Donc (D) n'est pas un résistor.

Calcul de l'impédance du dipôle (D) :

$$U_D = Z_D I \Leftrightarrow Z_D = \frac{U_D}{I}$$

$$\text{A.N. : } Z_D = 120 \Omega$$

## 10.2. Montrons que le dipôle (D) comporte une résistance non nulle

Si le dipôle (D) a une résistance nulle, la puissance consommée sera celle du résistor. Or  $P_R = U_R I$

A.N. :  $P_R = 14,4 \text{ W}$  et  $P = 15 \text{ W}$  d'où  $P_2 < P$  ; Donc le dipôle (D) a une résistance non nulle.

Calculons la résistance  $R_D$

$$P_D = R_D I^2 \Leftrightarrow R_D = \frac{P_D}{I^2}$$

$$\text{or } P_D = P - P_R \Rightarrow R_D = \frac{P - P_R}{I^2}$$

$$\text{A.N. : } R_D = 3,75 \Omega$$

Calcul du facteur puissance :

$$\cos \varphi_D = \frac{R_D}{Z_D}$$

$$\text{A.N. : } \cos \varphi_D = 0,0313$$

## 10.3.

## 10.3.1. Montrons que (D) est une association en série

d'une bobine et d'un condensateur :

Le dipôle ( $D$ ) a une résistance non nulle, donc n'est pas un condensateur seul. De plus, la tension à ses bornes diminue lorsqu'on augmente la fréquence, donc ( $D$ ) n'est pas une bobine seule; par conséquent, le dipôle ( $D$ ) est une association en série d'une bobine et d'un condensateur.

**10.3.2.** Établissons que  $\omega_1$  correspond à la fréquence de résonance :

$U_{AB} = 60\text{ V}$  et  $U'_R + U'_D = 36 + 24 = 60\text{ V}$ ; Donc  $U_{AB} = U'_D + U'_R$  alors l'effet inductif compense l'effet capacitif : on est donc à la résonance.

**10.3.3.** Calcul des valeurs de  $L$  et  $C$

$$\text{on a } Z_D^2 = R_D^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2$$

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = \pm \sqrt{Z_D^2 - R_D^2}$$

or le circuit est capacitif car à la résonance  $\omega_1 = 1000\text{ rad}$  et  $\omega = 550\text{ rad s}^{-1}$ , donc il y a diminution de la pulsation. Soit

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = -\sqrt{Z_D^2 - R_D^2}$$

$$\Leftrightarrow LC\omega^2 + \sqrt{Z_D^2 - R_D^2} - 1 = 0 \quad (12.1)$$

De plus, à la résonance

$$LC\omega_1^2 = 1 \Rightarrow L = \frac{1}{C\omega^2} \quad (12.2)$$

(12.2) dans (12.1)

$$\Rightarrow C = \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega\omega_1^2 \sqrt{Z_D^2 - R_D^2}}$$

A.N. :  $C = 1,25 \times 10^{-5}\text{ F}$ ;  $L = 0,08\text{ H}$

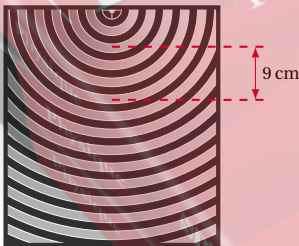
### Solution 11. (p. 245)

**Étude d'ondes avec une cuve à ondes**

**11.1.** Type d'onde et expérience de mise en évidence.

- C'est une onde transversale.
- Expérience : un petit morceau de liège placé à la surface de l'eau contenue dans la cuve oscille perpendiculairement à la direction de propagation de l'onde.

**11.2.** Détermination de la longueur d'onde et de la célérité des ondes.



Longueur d'onde : La lecture du schéma nous permet d'écrire :  $\frac{d}{E} = 3\lambda$ ; avec :  $d = 9\text{ cm}$ ;  $E = 1,5$  : échelle;

$$\lambda : \text{longueur d'onde} \Rightarrow \lambda = \frac{d}{3E}$$

A.N. :  $\lambda = 2\text{ cm}$

Célérité :

$$\lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow c = \lambda f$$

A.N.  $c = 0,4\text{ ms}^{-1}$

**11.3.** Observation et calcul de la célérité apparente.

Observation : on observe à la surface de l'eau, des rides circulaires qui se déplacent lentement en sens inverse (vers le vibreur).

Célérité apparente

$c_a = \lambda f_a$  avec :

$$f_a = hf_e - f = f_e - f \quad (\text{car } k = 1)$$

A.N. :  $f_a = 1\text{ Hz}$ ;  $c_a = 0,02\text{ ms}^{-1}$

**11.4.**

**11.4.1.** Observation en éclairage normal.

On observe des franges d'interférence centrées en  $O_1$  et  $O_2$

**11.4.2.** Nombre et position des points de vibration maximale.

Ces points ont pour différence de marche :  $\delta = k\lambda$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  or :

$$|\delta| < O_1 O_2 \Leftrightarrow |k\lambda| < O_1 O_2$$

$$\Leftrightarrow |k| < \frac{O_1 O_2}{\lambda}$$

$$\Leftrightarrow |k| < 2,5$$

$$\Leftrightarrow -2,5 < k < 2,5,$$

soit  $k = -2; -1; 0; 1; 2$  on a donc 5 points de vibration maximal

Position de ces points. Soit à déterminer la position de ces points par rapport à  $O_1$ . On pose  $d_1 = x$

Or  $d_2 + d_1 = O_1 O_2 \Rightarrow d_2 + x = O_1 O_2$

Et les points d'amplitude maximale sont tels que :

$$d_2 - d_1 = k\lambda, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow d_2 - x = k\lambda, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{d'où } \begin{cases} d_2 + x = O_1 O_2 & (12.1) \\ d_2 - x = k\lambda & (12.2) \end{cases}$$

$$(12.1) - (12.2) \Rightarrow 2x = O_1 O_2 - k\lambda$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} (O_1 O_2 - k\lambda), \quad k \in \mathbb{Z}$$

pour les valeurs de  $k$  obtenues précédemment on a :

$k$	-2	-1	0	1	2
$x$ (cm)	4,5	3,5	2,5	1,5	0,5

### Solution 12. (p. 245)

**Exploitation des résultats d'une expérience**

**12.1.** Deux applications de la radioactivité

La radiothérapie, la datation au carbone 14...

**12.2.** Définition :

L'activité  $A$  d'une substance radioactive est le nombre moyen de désintégrations que cette substance peut produire par unité de temps.

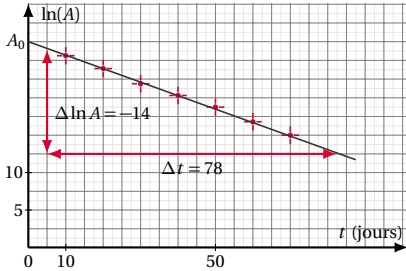
## 12.2. Solution des sujets d'examen

Établie que  $A = \lambda N$  :

$$\text{on a : } A = -\frac{dN}{dt}$$

$$\text{or } N = N_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow A = \lambda N_0 e^{-\lambda t} \Leftrightarrow A = \lambda N \text{ d'où } A = \lambda N$$

**12.3.** Graphe  $\ln A = f(t)$



**12.4.** Détermination de la constante radioactive et de l'activité initiale  $A_0$

Détermination de la constante radioactive.

On a  $A = A_0 e^{-\lambda t} \Leftrightarrow \ln A = -\lambda t + \ln A_0$  donc  $\ln A = f(t)$  est une droite de pente  $-\lambda$  d'où

$$-\lambda = \frac{\Delta \ln A}{\Delta t} \Rightarrow \lambda = -\frac{\Delta \ln A}{\Delta t}$$

D'où  $\lambda = 0,18 \text{ jour}^{-1}$ .

Détermination de  $A_0$

A partir du graphe ci-dessus, on lit

$$\ln A_0 = 27,5 \Leftrightarrow A_0 = 8,78 \times 10^{11} \text{ Bq}$$

$$27,3 \leq \ln A_0 \leq 27,8$$

$$\Leftrightarrow 7,16 \times 10^{11} A_0 \leq 1,18 \times 10^{12} \text{ Bq}$$

**12.5.** Volume  $V_0$  de l'échantillon et demi-vie  $T$

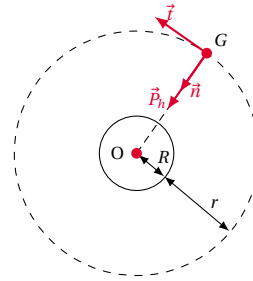
$$V_0 = n V_m \text{ or } n = \frac{N_0}{\mathcal{N}} \Rightarrow V_0 = \frac{N_0 V_m}{\mathcal{N}}$$

$$\text{Par ailleurs, } A_0 = \lambda N_0 \Rightarrow N_0 = \frac{A_0}{\lambda} \text{ d'où } V_0 = \frac{A_0 V_m}{\lambda \mathcal{N}}.$$

$$\text{A.N. : } V_0 = 1,748 \times 10^{-5} \text{ L} \simeq 1,75 \times 10^{-5} \text{ L}$$

$$\text{Demi-vie } T = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

$$\text{A.N. : } T = 3,85 \text{ jours.}$$



En appliquant le théorème du centre d'inertie au satellite dans le référentiel géocentrique supposé galiléen, on a :

$$\sum \vec{F}_{ex} = m \vec{a}_G$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \text{Suivant } \vec{n} : \vec{P}_h = m \vec{a}_n \\ \text{Suivant } \vec{t} : \vec{0} = m \vec{a}_t \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} P_h = m a_n \\ 0 = m a_t \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a_n = \frac{P_h}{m} = g_h \\ a_t = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{d'où } \left| \begin{array}{l} a_n = g_h = \text{cte} \neq 0 \\ a_t = 0 \end{array} \right. \Rightarrow v = \text{cte} \neq 0$$

Donc le mouvement du satellite est uniforme.

**13.1.2.** Expression de  $M_t$  en fonction de  $r$  et  $T$  :

On a :

$$T = \frac{2\pi}{R} \sqrt{\frac{r^3}{G_0}} \Rightarrow \left( \frac{RT}{2\pi} \right)^2 = \frac{r^3}{G_0}$$

or

$$G_0 = \varepsilon \frac{M_T}{R^2} \Rightarrow M_T = \frac{4\pi^2 r^3}{\varepsilon T^2}$$

$$\text{A.N. : } M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$$

**13.1.3.** Un satellite est dit géostationnaire lorsqu'il est fixe par rapport à tout point de la surface de la terre.

Comparons  $r$  et  $r_S$ .

On a :

$$\begin{aligned} T &= 7,82 \text{ heures} = 28152 \text{ s} \\ T_S &= 1 \text{ jour sidéral} = 86140 \text{ s} \end{aligned} \Rightarrow T_S > T$$

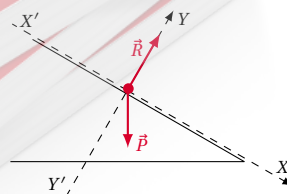
or :

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{R} \sqrt{\frac{r^3}{G_0}} \\ T_S &= \frac{2\pi}{R} \sqrt{\frac{r_S^3}{G_0}} \end{aligned} \text{ d'où } T_S > T \Rightarrow r_S > r$$

**13.2.** Mouvement d'une tige.

**13.2.1.** Détermination de  $a_G$ .

Le bilan des forces extérieures appliquées à la tige étant :



En appliquant le T.C.I à la tige dans le référentiel du la-

## 12.2.4 Solution – Baccalauréat 2015

## Solution 13. (p. 245)

## Mouvements dans les champs de forces

**13.1.** Mouvement d'un satellite de la terre.

**13.1.1.** Montrons que le mouvement du satellite est uniforme :

Le bilan des forces extérieures appliquées au satellite étant :

boratoire supposé galiléen, on a :

$$\sum \vec{F}_{ex} = m\vec{a}_G \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}_G$$

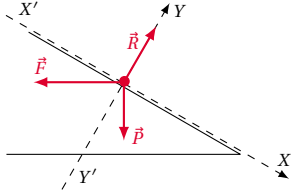
d'où suivant  $x'x$  :

$$P_x = ma_G \Leftrightarrow mg \sin \alpha = ma_G \Rightarrow a_G = g \sin \alpha$$

A.N. :  $a_G = 1,39 \text{ ms}^{-1}$

### 13.2.2.

**13.2.2.1.** Bilan des forces qui s'exercent sur la tige :



#### 13.2.2.2. Détermination de $a'_G$ :

En appliquant le T.C.I à la tige dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, on a :

$$\sum \vec{F}_{ex} = m\vec{a}_G \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{F} + \vec{R} = m\vec{a}_G$$

d'où suivant  $x'x$  :

$$\begin{aligned} \vec{F}_x + \vec{P}_x &= m\vec{a}'_G \Leftrightarrow -F_x + P_x = ma'_G \\ \Leftrightarrow -F \cos \alpha + mg \sin \alpha &= ma'_G \\ \Rightarrow a'_G &= \frac{mg \sin \alpha - BI \ell \cos \alpha}{m} \end{aligned}$$

A.N. :  $a'_G = 1 \text{ ms}^{-1}$

#### 13.2.2.3. Calcul de $I$ :

À l'équilibre  $a'_G = 0 \Leftrightarrow mg \sin \alpha = BI \ell \cos \alpha \Rightarrow I = \frac{mg}{B\ell} \tan \alpha$ .

A.N. :  $I = 7,12 \text{ A}$

or :

$$\begin{cases} \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}) = 0 \\ \mathcal{M} = -c\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow -c\theta = J_\Delta \ddot{\theta} \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{c}{J_\Delta} \theta = 0$$

or :  $J_\Delta = \frac{1}{2} MR^2$  d'où  $\ddot{\theta} + \frac{2c}{MR^2} \theta = 0$

**14.1.3.** Montrons que  $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{MR^2}{2c}}$

L'équation différentielle étant de la forme

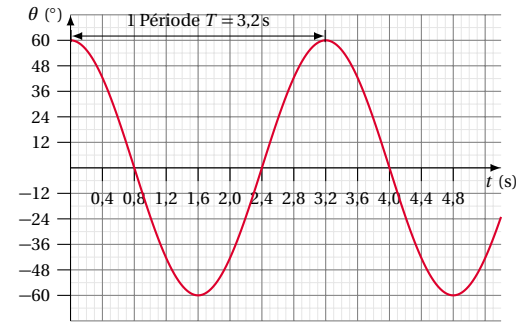
$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$$

par identification, on a :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\ell c}{MR^2}} \text{ or}$$

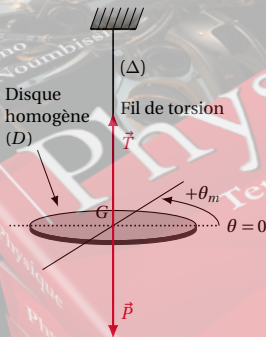
$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{MR^2}{2c}}$$

**14.1.4.** Graphiquement on lit :  $T_0 = 3,2 \text{ s}$



## Solution 14. (p. 246)

### Les systèmes oscillants



#### 14.1. Oscillations d'un des que homogène

##### 14.1.1. Bilan des forces extérieures :

- le point  $\vec{P}$  du disque ;
- la tension  $\vec{T}$  du fil ;
- le couple de torsion.

##### 14.1.2. Équation différentielle du mouvement :

D'après le R.F.D., on a :

$$\begin{aligned} \sum \mathcal{M}_G(\vec{F}_{ex}) &= J_\Delta \ddot{\theta} \\ \Leftrightarrow \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}) + \mathcal{M} &= J_\Delta \ddot{\theta} \end{aligned}$$

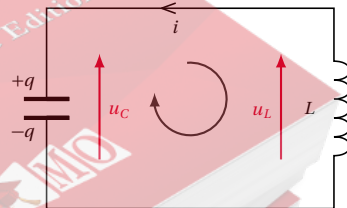
Déduisons la constante de torsion  $c$  :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{MR^2}{2c}} \Rightarrow c = 2M \left( \frac{\pi R}{T} \right)^2$$

A.N. :  $c = 1,81 \times 10^{-2} \text{ N m rad}^{-1}$

#### 14.2. Circuit LC

##### 14.2.1. Équation différentielle



D'après la loi des mailles :

$$U_C - U_L = 0 \Leftrightarrow U_C + C \frac{di}{dt} = 0$$

$$\Leftrightarrow L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0 \Leftrightarrow \ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0$$

or :

$$q = CU_C \Rightarrow \ddot{q} = C \ddot{U}_C$$

$$\text{d'où } \ddot{U}_C + \frac{1}{LC} U_C = 0$$



## 12.2. Solution des sujets d'examen

14.2.2. Calcul de  $U_m$ ,  $C$  et  $Q_0$ .

$$U_m = U = 6 \text{ V};$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \Rightarrow C = \frac{1}{L\omega^2}$$

$$\text{A.N. : } C = 6,037 \times 10^{-6} \text{ F} = 6,037 \mu\text{F}$$

$$Q_0 = CU_m = CU$$

$$\text{A.N. : } Q_0 = 3,6 \times 10^{-5} \text{ C}$$

## Solution 15. (p. 247)

## Phénomènes corpusculaire et ondulatoire

## 15.1. Ondes à la surface de l'eau d'une cuve.

## 15.1.1. Définition

Onde mécanique : c'est une onde qui se propage dans un milieu matériel élastique.

## 15.1.2. Équation du mouvement :

$$y = a \sin(\omega t + \varphi) = a \sin(2\pi N t + \varphi)$$

à  $t = 0$ ,

$$y = a \Leftrightarrow a \sin \varphi = a \Leftrightarrow \sin \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

d'où

$$y = 2 \sin\left(200\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cos(200\pi t) \text{ en mm}$$

15.1.3. Comparons le mouvement de  $M$  et  $S$ 

posons  $d = d_M - d_S = 4 \text{ cm}$

$$\frac{d_M - d_S}{\lambda} = \frac{d}{\lambda} = \frac{d}{vT}$$

$$= \frac{dN}{v} = \frac{4 \times 10^{-2} \times 100}{0,4} = 10$$

d'où  $d_M - d_S = 10\lambda$ .

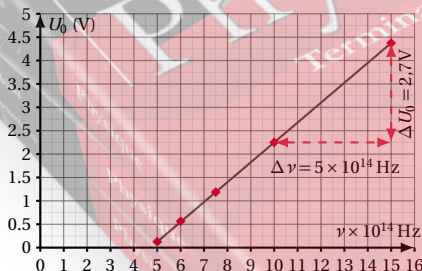
Les points  $M$  et  $S$  vibrent en phase.

## 15.2. Aspect corpusculaire de la lumière

15.2.1. Relation entre  $U_0$  et  $v$  :

$$eU_0 = h\nu - h\nu_0 \Rightarrow U_0 = \frac{h}{e}(\nu - \nu_0)$$

## 15.2.2.

15.2.2.1. Courbe  $U_0 = f(\nu)$  :15.2.2.2. Dédution de  $\lambda_0$  :

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0}$$

$$\text{A.N. : } \lambda_0 = 6,38 \times 10^{-7} \text{ m}$$

$$(6,38 \times 10^{-7} \text{ m} \leq \lambda_0 \leq 6,81 \times 10^{-7} \text{ m})$$

Charge élémentaire.

Le coefficient directeur de la droite obtenue est :

$$\tan \alpha = \frac{h}{e} = \frac{\Delta U_0}{\Delta \nu} \Rightarrow e = h \frac{\Delta \nu}{\Delta U}$$

A.N. :

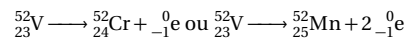
$$e = 6,626 \times 10^{-34} \left( \frac{4,3 - 2,23}{(15 - 10) \times 10^{-14}} \right)$$

$$= 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

## Solution 16. (p. 247)

## Exploitation des résultats d'une expérience

## 16.1. Équations de désintégrations du Vanadium

16.2. Montrons que  $\ln(A) = -\lambda t + \ln(A_0)$ 

On a  $N = N_0 e^{-\lambda t}$ ,

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$$

$$\ln A = \ln(\lambda N_0) + \ln(e^{-\lambda t})$$

$$\text{or } A_0 = \lambda N_0 \Rightarrow \ln A = -\lambda t + \ln(A)$$

## 16.3.

16.3.1. Calcul de  $\lambda$  et  $T$ 

$$\lambda = -\frac{\Delta \ln(A)}{\Delta t}$$

$$\text{A.N. : } \lambda = \frac{6 - 4,5}{475} = 3,15 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

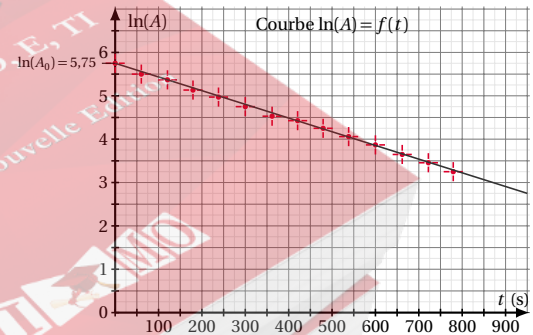
$$(2,9 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1} \leq \lambda \leq 3,2 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1})$$

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

$$\text{A.N. : } T = 220,04 \text{ s} \approx 220 \text{ s} \quad (217 \text{ s} \leq T \leq 239 \text{ s})$$

16.3.2. Calcul de  $N_0$ 

Suivant la courbe :



$\ln A_0 = 5,75$  posons :

$$k = 5,75 \Rightarrow \ln A_0 = k$$

$$A_0 = e^k \Leftrightarrow \lambda N_0 = e^k$$

$$\Rightarrow N_0 = \frac{e^k}{\lambda}$$

$$\text{A.N. : } N_0 = 99\,743,06 \text{ noyaux} \approx 99\,743 \text{ noyaux}$$

$$(9,818 \times 10^{14} \text{ noyaux} \leq N_0 \leq 1,083 \times 10^{15} \text{ noyaux})$$

## 12.2.5 Solution – Baccalauréat 2016

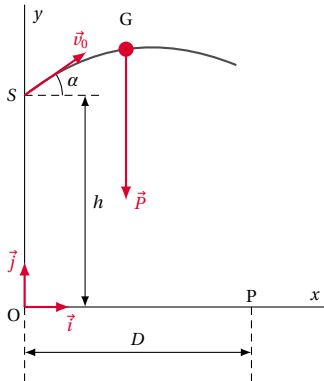
## Solution 17. (p. 247)

## Mouvements dans les champs des forces et leurs applications

Partie 1 : Le lancer du poids

17.1. Montrons que  $\vec{a}_G = \vec{g}$  :

Le bilan des forces appliquées à la boule étant :



En appliquant le théorème du centre d'inertie à la boule dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, on a :

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}_{ex} &= m\vec{a}_G \Leftrightarrow \vec{P} = m\vec{a}_G \\ &\Leftrightarrow m\vec{g} = m\vec{a}_G \\ &\Leftrightarrow \vec{a}_G = \vec{g}\end{aligned}$$

17.2. Équations horaires du mouvement de G dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  :

On a :

$$\vec{a}_G \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Rightarrow \vec{v} \begin{cases} v_x - v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_y = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{OG} \begin{cases} x = (v_0 \cos \alpha)t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t \end{cases}$$

$$x = (v_0 \cos \alpha)t \quad (12.1)$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t \quad (12.2)$$

Équation de la trajectoire :

$$(12.1) \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \quad (12.3)$$

(12.3) dans (12.2)

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \frac{g}{(v_0 \cos \alpha)^2} x^2 + x \tan \alpha + h$$

17.3. Calcul de  $OP = D$  : on a

$$\begin{aligned}y_P = 0 &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \frac{g}{(v_0 \cos \alpha)^2} D^2 + D \tan \alpha + h = 0 \\ &\Leftrightarrow -5,33 \times 10^{-2} D^2 + D + 2,62 = 0\end{aligned}$$

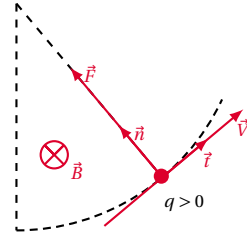
$$\Delta = 1,558 \Rightarrow D = 21,09 \text{ m} \simeq 21,1 \text{ m}$$

Partie 2 : Mouvement d'une particule chargée dans un

champ magnétique.

17.1. Montrons que  $\vec{v} = c\vec{e}$  quelque soit  $\vec{B}$  :

Le bilan des forces appliquées à la particule étant :

En appliquant le théorème du centre d'inertie à la particule dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen et dans la base de Frenet  $(\vec{i}, \vec{n})$ , on a :

$$\sum \vec{F}_{ex} = m\vec{a}_G$$

en projetant dans la base de Frenet on a :

$$\begin{cases} \text{Suivant } \vec{i} : \vec{0} = m\vec{a}_t \\ \text{Suivant } \vec{n} : \vec{F} = m\vec{a}_c \end{cases} \quad (12.4)$$

$$(12.5)$$

$$\begin{aligned}(12.4) &\Rightarrow 0 = ma_t \Rightarrow a_t = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \\ &\Rightarrow v = \text{cte} \Leftrightarrow \vec{v} = c\vec{e}\end{aligned}$$

17.2. Caractéristique de la trajectoire de la particule qui rend compte des variations de la valeur du champ magnétique :

Cette caractéristique est le rayon de la trajectoire.

Variation du rayon avec la valeur du champ magnétique :

Lorsque le champ magnétique augmente, le rayon de la trajectoire diminue.

## Solution 18. (p. 248)

## Systèmes oscillants

Partie 1 : Oscillations dans un dipôle LC

18.1. Déterminons à  $t = 0$ ,  $U_B$  et  $U_C$  :

$$U_B = L \frac{di}{dt}$$

or :

$$I = \text{cte} \Rightarrow \frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow U_B = 0$$

Montage en dérivation  $\Rightarrow U_C = U_B = 0$ 18.2. Équation différentielle traduisant l'évolution de  $U_C$  :L'interrupteur  $k$  étant ouvert :

$$U_B + U_C = 0$$

$$\text{et } U_B = L \frac{di}{dt} \Leftrightarrow L \frac{di}{dt} + U_C = 0$$

or :

$$i = C \frac{dU_C}{dt} \Rightarrow LC \frac{d^2 U_C}{dt^2} + U_C = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 U_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} U_C = 0$$

18.3. Forme générale des solutions de l'équation diffé-

## 12.2. Solution des sujets d'examen

rentielle

$$U_C = U_{Cm} \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

$$\text{avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Loi horaire de l'évolution de  $U_C$  :

$$\text{à } t=0, \begin{cases} U_C = 0 \\ i = C \frac{dU_C}{dt} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \varphi = 0 \\ -C U_{Cm} \omega_0 \sin \varphi > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \varphi = 0 \\ \sin \varphi < 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

et

$$i = C \frac{dU_C}{dt}$$

$$= -C U_{Cm} \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$= -I_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\Rightarrow I_m = C U_{Cm} \omega_0$$

$$\Rightarrow U_{Cm} = \frac{I_m}{C \omega_0}$$

or :  $I_m = I = 225 \text{ mA}$ 

$$\text{d'où } U_{Cm} = \frac{I}{C \omega_0} = I \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\text{soit } U_C = I \sqrt{\frac{L}{C}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t + \varphi\right)$$

$$U_C = 12 \cos\left(1264 t - \frac{\pi}{2}\right) = 12 \sin(1264 t) \text{ en volt.}$$

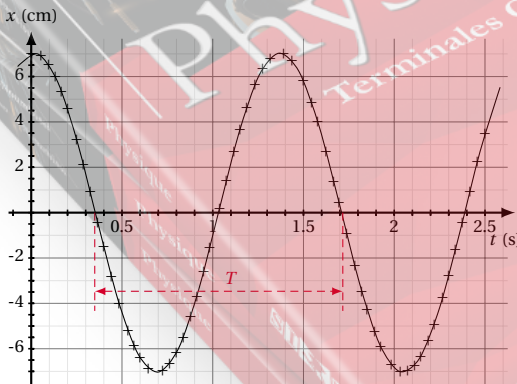
Partie 2 : Oscillateurs mécaniques

## 18.1.

## 18.1.1. Détermination de la période :

A l'aide de l'enregistrement (voir courbe ci-dessous) on trouve :

$$T_0 \approx 1,37 \text{ s} \Rightarrow 1,35 \text{ s} \leq T_0 \leq 1,40 \text{ s}$$



## 18.1.2. Détermination l'amplitude des oscillations :

A l'aide l'enregistrement on trouve :

$$x_m = 7 \text{ cm}$$

18.1.3. Vitesse de la masse à  $t = 0$ .L'enregistrement montre que à  $t = 0$ , le pendule passe par la position d'élongation maximale; Donc  $v_0 = 0 \text{ m s}^{-1}$ 18.2. Constante de raideur  $k$  :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow k = \frac{4\pi^2 m}{T_0^2}$$

$$\text{A.N. : } k = 4,368 \text{ N m}^{-1} \approx 4,4 \text{ N m}^{-1}$$

18.3. Calcul de l'énergie mécanique à  $t = 0$ .

$$E_0 = \frac{1}{2} k x_m^2$$

$$\text{A.N. : } E_0 = 1,078 \times 10^{-2} \text{ J} \approx 1,1 \times 10^{-2} \text{ J}$$

18.4. Calcul de la vitesse pour  $x = 0$ 

On pose :

$$x = x_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\dot{x} = x_m \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$= v_{\max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

pour  $x = 0$ ,  $\dot{x}$  est maximale soit  $\dot{x}_{\max} = v_{\max} = x_m \omega_0$  lorsque la masse  $m$  passe pour la première fois,

$$v = -v_{\max} = -\dot{x}_{\max} = -x_m \omega_0$$

$$= -x_m \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\text{A.N. : } v = -0,323 \text{ m s}^{-1}$$

## Solution 19. (p. 248)

## Phénomènes corpusculaires et ondulatoires

## Partie 1 : La radioactivité

## 19.1. Application de l'effet photoélectrique

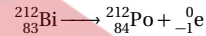
Le traçage radioactif.

Explication du principe :

Il consiste à marquer un élément puis à suivre sa trace dans l'échantillon à étudier.

## 19.2.

## 19.2.1. Équation de désintégration



## 19.2.2. Calcul de la période radioactive :

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

$$\text{A.N. : } T = 3636,7 \text{ s}$$

## 19.3. Calcul de l'activité de l'échantillon :

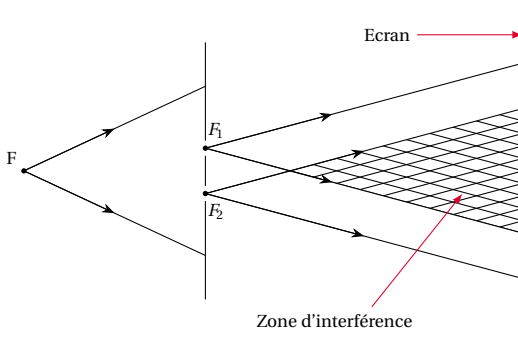
$$A = \lambda N$$

$$\text{or } N = \frac{m}{M} \mathcal{N}_A \text{ d'où } A = \lambda \frac{m}{M} \mathcal{N}_A$$

$$\text{A.N. : } A = 5,41 \times 10^{14} \text{ Bq}$$

## Partie 2 : Interférence lumineuse

## 19.1. Schéma du dispositif expérimental :



Aspect de l'écran : on observe à l'écran et dans la zone d'interférence, des bandes alternativement brillantes et sombres.

**19.2.** Calcul de l'interfrange :

$$i = \lambda \frac{D}{a}$$

A.N. :  $i = 6 \times 10^{-3} \text{ m} = 6 \text{ mm}$

**19.3.**

**19.3.1.** Calcul de la différence de marche :

$$\delta = \frac{ax}{D}$$

A.N. :  $\delta = 1,928 \times 10^{-6} \text{ m} = 1,928 \text{ nm}$

**19.3.2.** Frange brillante ou sombre :

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{1,928 \times 10^{-6}}{643 \times 10^{-9}} = 2,999 \approx 3 \Leftrightarrow \delta = 3\lambda$$

$\delta = k\lambda$  avec  $k = 3$ , donc le point  $M$  appartient à la frange brillante.

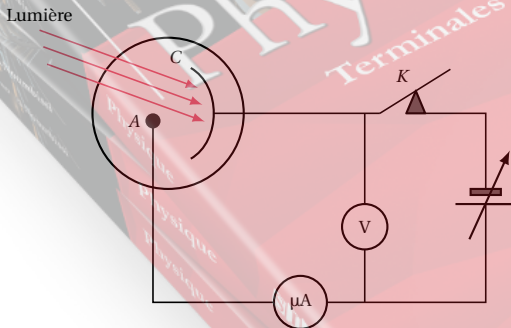
### Solution 20. (p. 249)

#### Exploitation des résultats d'une expérience

**20.1.** Définition :

Potentiel d'arrêt : c'est l'opposé de la tension pour laquelle les électrons libérés à la cathode n'atteignent pas l'anode.

**20.2.** Schéma du montage :



**20.3.**

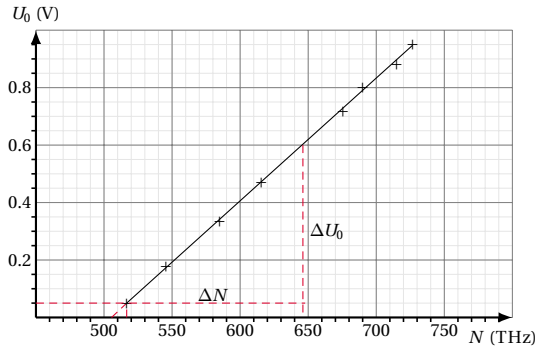
**20.3.1.** Relation entre  $U_0$ ,  $W_0$  et  $W$  :

$$W = W_0 + E_{C_{max}}$$

or :

$$E_{C_{max}} = e U_0 \Rightarrow W = W_0 + e U_0$$

**20.3.2.**



Graphes de  $U_0 = f(N)$

**20.3.2.1.** Détermination de la constante de Planck :

$$\text{on a } W = W_0 + e U_0 \Leftrightarrow hN = hN_0 + e U_0$$

$$\Rightarrow U_0 = \frac{h}{e}(N - N_0)$$

d'où  $\frac{h}{e}$  est le coefficient directeur de la droite représentant  $U_0 = f(N)$  (voir figure ci-dessous)

$$\text{Soit } \frac{h}{e} = \frac{\Delta U_0}{\Delta N} \Rightarrow h = e \frac{\Delta U_0}{\Delta N}$$

A.N. :

$$\Delta N = 644 - 518 = 126 \text{ THz} = 126 \times 10^{12} \text{ Hz}$$

$$\Delta U_0 = 0,6 - 0,05 = 0,55 \text{ V}$$

$$h = 6,98 \times 10^{-34} \text{ J s}$$

$$6,7 \times 10^{-34} \text{ J s} \leq h \leq 7,2 \times 10^{-34} \text{ J s}$$

**20.3.2.2.** Détermination de la fréquence seuil du métal :

La droite  $U_0 = f(N)$  coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse  $N_0$  d'où  $N_0 = 505 \text{ THz}$

$$504 \text{ THz} \leq N_0 \leq 506 \text{ THz}$$

### 12.2.6 Solution – Baccalauréat 2017

La solution de ce sujet peut être gratuitement téléchargée sur :

[www.simo.education](http://www.simo.education)



## Sujets d'examen – Baccalauréat Physique – Séries D, TI

13.1	<b>Enoncé des sujets d'examen</b>	266
13.1.1	Enoncé – Baccalauréat 2012	266
13.1.2	Enoncé – Baccalauréat 2013	267
13.1.3	Enoncé – Baccalauréat 2014	269
13.1.4	Enoncé – Baccalauréat 2015	270
13.1.5	Enoncé – Baccalauréat 2016	271
13.1.6	Enoncé – Baccalauréat 2017	272
13.2	<b>Solution des sujets d'examen</b>	273
13.2.1	Solution – Baccalauréat 2012	273
13.2.2	Solution – Baccalauréat 2013	275
13.2.3	Solution – Baccalauréat 2014	278
13.2.4	Solution – Baccalauréat 2015	281
13.2.5	Solution – Baccalauréat 2016	284
13.2.6	Solution – Baccalauréat 2017	286



## 13.1 Enoncé des sujets d'examen

### 13.1.1 Enoncé – Baccalauréat 2012

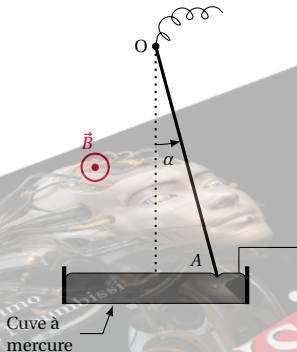
Examen:	Baccalauréat	Séries:	D, TI
Session:	2012	Durée:	3 heures
Épreuve:	Physique	Coef.:	2

#### Exercice 1.

##### Mouvements dans les champs et leurs applications

**1.1.1.** Tige parcourue par un courant dans un champ magnétique

Une tige de cuivre ( $t$ ) de longueur  $L$ , est mobile autour d'un axe horizontal ( $A$ ) passant par son extrémité supérieure  $O$ . L'autre extrémité  $A$  de la tige plonge légèrement dans une cuve à mercure. L'ensemble baigne dans un champ magnétique  $\vec{B}$ , orthogonal au plan de la figure et de sens sortant (voir figure ci-dessous). On fait passer dans la tige un courant continu d'intensité  $I$ . Celle-ci s'écarte de la verticale d'un angle  $\alpha = 7^\circ$ .



**1.1.1.1.** Quel nom donne-t-on à la force qui a provoqué le déplacement de la tige ( $t$ )? Calculer l'intensité de cette force.

**1.1.1.2.** Représenter sur la figure, les forces qui s'appliquent sur la tige ( $t$ ), ainsi que le sens du courant qui la traverse.

**1.1.1.3.** Écrire la condition d'équilibre de la tige, puis en déduire la masse  $m$  de celle-ci. On donne :  $L = 85 \text{ cm}$ ;  $B = 0,02 \text{ T}$ ;  $I = 2,2 \text{ A}$ ;  $g = 10 \text{ N kg}^{-1}$ .

**1.2.** Champ de gravitation de la Terre

On considère que la Terre présente une répartition de masse à symétrie sphérique.

**1.2.1.** Faire un schéma où on représentera la Terre et le vecteur champ de gravitation  $\vec{G}$  qu'elle crée en un point  $M$  de son voisinage situé à une distance  $r$  de son centre  $O$ .

**1.2.2.** Montrer que l'intensité  $G$  de  $\vec{G}$  en fonction de sa valeur  $G_0$  au niveau du sol a pour expression :  $G = G_0 \frac{R_T^2}{r^2}$  où  $R_T$  est le rayon de la Terre.

**1.2.3.** Dans un repère géocentrique, un satellite de la Terre décrit à vitesse constante une orbite circulaire de rayon  $r$ .

**1.2.3.1.** Qu'est ce qu'un repère géocentrique?

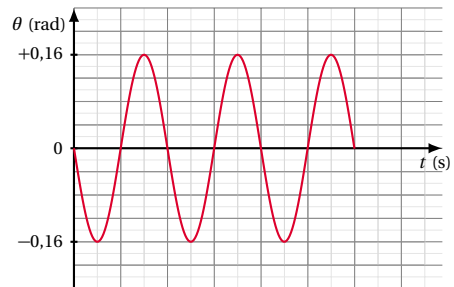
**1.2.3.2.** En appliquant au satellite la deuxième loi de Newton sur le mouvement, établir l'expression de sa vitesse  $v$ , en fonction de  $G_0$ ,  $r$ , et  $R_T$ .

**1.2.3.3.** En déduire l'expression de la période de révolution  $T$  du satellite, puis calculer sa valeur numérique. On donne :  $G_0 = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ ;  $R_T = 6400 \text{ km}$ ;  $r = 7 \times 10^3 \text{ km}$ .

#### Exercice 2.

##### Les systèmes oscillants

L'enregistrement des variations de l'élongation  $\theta$  en fonction du temps d'un pendule simple, est représenté sur la figure ci-dessous. Échelle : 1 div  $\leftrightarrow$  0,5 s sur l'axe des temps. La masse du pendule est  $m = 100 \text{ g}$  et sa longueur  $\ell$ .



**2.1.** Cet oscillateur est-il harmonique? Justifier la réponse.

**2.2.** Déterminer à l'aide du graphique ci-dessus la période propre  $T_0$  du pendule, puis calculer sa longueur  $\ell$ . On prendra  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ .

**2.3.** Déterminer l'équation horaire  $\theta(t)$  du mouvement du pendule.

**2.4.** Calculer la valeur numérique de la vitesse angulaire maximale  $\dot{\theta}_{\max}$  du pendule.

**2.5.** Calculer l'énergie potentielle maximale  $E_{P_{\max}}$  du pendule, puis en déduire son énergie mécanique. On prendra l'énergie potentielle de pesanteur nulle lorsque le pendule est à la verticale. On fera l'approximation

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}.$$

#### Exercice 3.

##### Phénomènes vibratoire et corpusculaire

**3.1.** Interférences à la surface libre de l'eau d'une cuve à ondes

Les deux pointes d'une fourche fixée à l'extrémité d'une lame vibrante, frappent simultanément en  $O_1$  et  $O_2$  la surface de l'eau contenue dans une cuve à ondes.

La lame vibre à la fréquence  $f = 50 \text{ Hz}$ .

**3.1.1.** Quelles conditions doivent remplir deux sources vibratoires  $S_1$  et  $S_2$ , pour qu'on observe le phénomène d'interférences dans le milieu de propagation?  $O_1$  et  $O_2$  remplissent-elles ces conditions?

**3.1.2.** La célérité des ondes dans l'eau ci-dessus est  $c = 30 \text{ cm s}^{-1}$ . Calculer la longueur d'onde  $\lambda$ .

## 13.1. Enoncé des sujets d'examen

**3.1.3.** Donner l'état vibratoire des points suivants du champ d'interférences :

$$M \begin{cases} d_1 = 15 \text{ cm} \\ d_2 = 3 \text{ cm} \end{cases} \quad N \begin{cases} d_1 = 8,4 \text{ cm} \\ d_2 = 27 \text{ cm} \end{cases} \quad P \begin{cases} d_1 = 16,5 \text{ cm} \\ d_2 = 15 \text{ cm} \end{cases}$$

**3.2.** Radioactivité

Le fluor 18 est émetteur  $\beta^-$ .

**3.2.1.** Écrire l'équation de désintégration d'un noyau de fluor 18.

On donne les symboles des éléments et leurs numéros atomiques : Oxygène (O ; 8) ; Fluor (F ; 9) ; Néon (Ne ; 10) ; Sodium (Na ; 11).

**3.2.2.** Un échantillon de fluor 18 contient initialement  $N_0 = 9,5 \times 10^{10}$  noyaux radioactifs.

Combien de noyaux radioactifs reste-t-il dans l'échantillon après 1 h 5 min ?

**3.2.3.** Quelle est à cette date, l'activité de l'échantillon ? On donne la demi-vie du fluor 18 :  $T = 109,4 \text{ s}$ .

cun des domaines suivants de la caractéristique : domaine ① :  $U_{AC} \leq 1 \text{ V}$  ; domaine ② :  $U_{AC} \geq 4 \text{ V}$

**4.2.3.** Quelle est l'intensité du courant au point B de la courbe ? Quelle explication peut-on en donner ?

**4.2.4.** Calculer en électron-volts (eV), l'énergie cinétique maximale des électrons émis par la cathode.

**4.2.5.** Calculer (en eV), le travail d'extraction  $W_0$  d'un électron de la cathode.

Données :  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$  ;

Constante de Planck :  $h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J s}$ .

## 13.1.2 Enoncé – Baccalauréat 2013

Examen:	Baccalauréat	Séries:	D, TI
Session:	2013	Durée:	3 heures
Épreuve:	Physique	Coef.:	2

## Exercice 4.

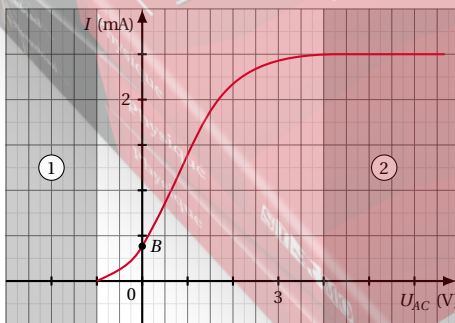
## Expérience de physique

On se propose d'étudier l'influence de la tension  $U_{AC}$  entre l'anode A et la cathode C d'une cellule photoélectrique, sur l'intensité du courant photoélectrique qu'elle produit. Pour réaliser l'expérience, on dispose : d'une cellule photoélectrique, d'un générateur de tension réglable, d'un voltmètre, d'un milliampèremètre, d'un interrupteur K, des fils de connexion et d'une source de lumière monochromatique S, de fréquence  $\nu = 7 \times 10^{14} \text{ Hz}$ .

**4.1.** Compléter sur la figure ci-dessous, le schéma de montage.



**4.2.** Pour une puissance P de la source lumineuse S, on a obtenu la courbe ci-dessous :



**4.2.1.** Lire sur ce graphe, les valeurs du potentiel d'arrêt et de l'intensité du courant de saturation de la cellule.

**4.2.2.** Donner une interprétation électronique de cha-

## Exercice 5.

## Mouvements dans les champs de forces

## 5.1. Champ de pesanteur

Une bille supposée ponctuelle de masse  $m = 50 \text{ g}$  est suspendue en un point O par un fil inextensible de masse négligeable et de longueur  $L = 50 \text{ cm}$ . Le fil étant tendu, on écarte la bille de la verticale d'un angle  $\theta_0 = 60^\circ$  puis on l'abandonne avec une vitesse initiale de module  $v_0 = 10 \text{ ms}^{-1}$ . Prendre  $g = 9,8 \text{ ms}^{-2}$ .

**5.1.1.** A un instant quelconque, le fil fait un angle  $\theta$  avec la verticale. La vitesse du pendule prend alors une valeur  $v$ . En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, établir l'expression de la vitesse  $v$  en fonction de  $v_0$ ,  $L$ ,  $\theta$ ,  $\theta_0$  et  $g$  puis calculer sa valeur pour  $\theta = 15^\circ$ .

## 5.1.2.

**5.1.2.1.** Faire un schéma sur lequel on présentera les forces s'exerçant sur la bille lors du mouvement.

**5.1.2.2.** En travaillant dans le repère de Frenet, exprimer l'intensité  $T$  de la tension du fil en fonction de  $v$ ,  $L$ ,  $\theta$ ,  $\theta_0$ ,  $m$  et  $g$  puis calculer sa valeur pour  $\theta = 15^\circ$ .

## 5.2. Champ électrostatique

Un électron de masse  $m = 9 \times 10^{-31} \text{ kg}$  et de charge  $q = -1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$  et un positron de même masse et de charge opposée, pénètrent avec la même vitesse initiale horizontale de module  $v_0 = 10^7 \text{ ms}^{-1}$  dans un champ électrostatique uniforme  $\vec{E}$  établi entre les armatures horizontales d'un condensateur-plan. Les vecteurs vitesse initiale et champ électrostatique sont orthogonaux. Dans un repère orthonormé dont l'origine est située à l'entrée du condensateur, l'équation cartésienne de la trajectoire de l'électron dans le champ est de la forme :

$$y = \frac{-eE}{2m v_0^2} x^2$$

**5.2.1.** Faire un schéma montrant le condensateur, la vitesse initiale et les axes du repère choisi.

**5.2.2.** Donner sans calcul, l'équation cartésienne de la trajectoire du positron.

**5.2.3.** On admet que les particules vont sortir du champ. Dans un même schéma, donner l'allure des deux trajectoires et placer les deux points de sortie  $S_1$  et  $S_2$  à l'autre

extrémité du condensateur.

**5.2.4.** Calculer la distance  $d = S_1 S_2$ .

On donne : ddp entre les armatures du condensateur :  $U = 10^2 \text{ V}$ ;

longueur des armatures :  $L = 10 \text{ cm}$ ;

vitesse initiale des particules :  $v_0 = 10^7 \text{ ms}^{-1}$ ;

distance entre les armatures :  $d = 4 \text{ cm}$ .

### Exercice 6.

#### Système mécanique oscillant

Un pendule simple, écarté de sa position d'équilibre d'un angle  $\theta_m = 9^\circ$  puis abandonné à lui-même sans vitesse, se met à osciller. Prendre  $g = 9,8 \text{ ms}^{-2}$ .

**6.1.** En appliquant la 2<sup>ème</sup> loi de Newton, établir l'équation différentielle du mouvement du pendule.

**6.2.** La fréquence propre du mouvement est  $f_0 = 0,66 \text{ Hz}$ , calculer la longueur  $L$  de ce pendule.

**6.3.** Déterminer l'équation horaire  $\theta = g(t)$  du mouvement en tenant compte des conditions initiales.

**6.4.** Tracer la courbe  $\theta = g(t)$  sur un intervalle de temps de longueur égale 2 périodes. On y présentera toutes les valeurs numériques utilisées.

### Exercice 7.

#### Radioactivité et propagation des ondes

##### 7.1. Radioactivité

**7.1.1.** La famille radioactive de l'uranium débute à l'uranium  $^{238}_{92}\text{U}$  et se termine au plomb stable  $^{206}_{82}\text{Pb}$ . On note  $x$  et  $y$  les nombres respectifs des désintégrations  $\alpha$  et  $\beta^-$  qui se produisent au cours de ces transformations.

**7.1.1.1.** Écrire l'équation générale de la réaction globale.

**7.1.1.2.** En appliquant les lois de conservation, calculer  $x$  et  $y$ .

**7.1.2.** Le nucléide césium  $^{139}_{55}\text{Cs}$  est un émetteur  $\beta^-$  de demi-vie  $T = 7 \text{ min}$ . L'activité d'un échantillon de césium à un instant donné est  $A = 2 \times 10^6 \text{ Bq}$ . Déterminer le temps  $t$  qu'il faudra pour qu'elle soit divisée par 1500.

##### 7.2. Propagation des ondes mécaniques

Les deux pointes d'une fourche fixée à un vibreur, créent en effleurant la surface d'une eau contenue dans une cuve à ondes, des ondes circulaires. Les pointes vibrent en phase à la même fréquence  $f = 28 \text{ Hz}$ .

La longueur d'onde des perturbations produites est  $\lambda = 11 \text{ mm}$ .

**7.2.1.** Calculer la célérité  $v$  des ondes.

**7.2.2.** La surface libre de l'eau est éclairée à l'aide d'un stroboscope dont la fréquence des éclairs est  $f_e = 28 \text{ Hz}$ . Dessiner l'aspect de la surface libre de l'eau comprise entre les deux extrémités de la fourche.

**7.2.3.** On augmente la fréquence du vibreur et on admet que la célérité des ondes se conserve. Donner la conséquence de cette action sur le système de lignes d'interférences.

### Exercice 8.

#### Exploitation d'une fiche de T.P.

Une fiche de T.P., exécutée au laboratoire de physique par un élève présente ci-dessous le travail effectué que vous exploiterez.

Fiche de T.P.

**8.1.** Classe : TD

**8.2.** Titre du TP : La machine d'Atwood

**8.3.** Objectifs : Exploiter le mouvement de ce dispositif pour déterminer expérimentalement l'accélération de la pesanteur du lieu de l'expérience.

**8.4.** Matériel :

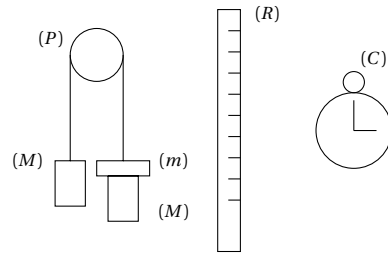
■ Un ensemble de deux masses  $M = 0,5 \text{ kg}$  et  $M' = M + m$  où  $m = 0,01 \text{ kg}$  est la masse de la surcharge.

■ Un fil inextensible de masse négligeable, passant dans la gorge d'une poulie aussi de masse négligeable et supportant à chaque extrémité l'une des masses ci-dessus.

■ Un chronomètre (C),

■ Une règle graduée (R).

**8.5.** Schématisation :



**8.6.** Protocole expérimental :

En abandonnant le système à lui-même, les masses  $M$  et  $M'$  se mettent en mouvement. A des instants choisis, on lit sur la règle la distance  $x$  parcourue par l'une des masses. On obtient ainsi le tableau de mesures ci-dessous.

**8.7.** Tableau de mesures

$t$ (s)	0	2	4	6	6,5
$x$ (m)	0	0,19	0,77	1,73	2,03

**8.8.** Exploitation :

**8.8.1.** Tracer la courbe  $x = f(t^2)$  sur le document à remettre avec la copie.

Échelles : Abscisse : 1 cm pour  $4 \text{ s}^2$  ; Ordonnée : 1 cm pour 0,1 m

**8.8.2.** Donner la forme de la courbe puis écrire une relation simple liant  $x$  et  $t^2$ .

**8.8.3.** Justifier que l'accélération de la masse  $M$  est égale à celle de  $M'$ .

**8.8.4.** En étudiant le mouvement de la machine, montrer que l'accélération  $a$  commune de  $M$  et de  $M'$  est de la forme :

$$a = \frac{m}{2M + m} g.$$

En déduire la loi horaire du mouvement de (M).

**8.8.5.** A partir de la courbe, déterminer la valeur  $a_{exp}$  de l'accélération expérimentale du dispositif.



## 13.1. Enoncé des sujets d'examen

**8.8.6.** En déduire la valeur expérimentale  $g_{exp}$  de l'accélération de la pesanteur du lieu de l'expérience.

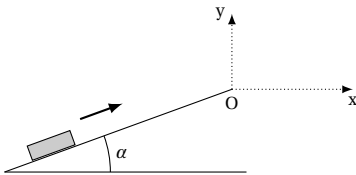
## 13.1.3 Enoncé – Baccalauréat 2014

Examen:	Baccalauréat	Séries:	D, TI
Session:	2014	Durée:	2 heures
Épreuve:	Physique	Coef.:	2

## Exercice 9.

**Mouvements dans les champ de forces et leurs applications****9.1.** Mouvement dans le champ de pesanteur

Au bas d'un plan incliné d'angle  $\alpha = 20^\circ$  sur l'horizontale, on lance sur la ligne de plus grande pente une caissette de masse  $m = 200\text{ g}$ . Elle démarre avec une vitesse parallèle au plan et de module  $v = 20\text{ ms}^{-1}$ . Les frottements sont négligeables. Prendre  $g = 10\text{ ms}^{-2}$ . La figure ci-contre traduit la situation :



**9.1.1.** Calculer sa vitesse  $v_s$  acquise au sommet du plan de longueur  $\ell = 10\text{ m}$ .

**9.1.2.** En supposant la caissette ponctuelle, établir l'équation cartésienne de la trajectoire décrite après le sommet du plan. On utilisera le repère proposée sur le schéma. On prendra pour origine des dates l'instant où la caissette quitte le sommet du plan incliné.

**9.1.3.** Calculer la distance  $d$  séparant le sommet du plan et le point de chute de la caissette sur l'axe  $Ox$ .

**9.2.** Mouvement d'une particule chargée dans les champ électrique et magnétique

Une particule de masse  $m$  et de charge  $q$  entre dans une région où règnent simultanément un champ électrique uniforme de vecteur  $\vec{E}$  et un champ magnétique aussi uniforme de vecteur  $\vec{B}$ . Ces deux vecteurs champs orthogonaux le sont aussi par rapport au vecteur vitesse  $\vec{v}$  constant de la particule.

**9.2.1.** Écrire l'expression vectorielle de la force qui sollicite la particule.

**9.2.2.** Écrire la formule vectorielle du théorème du centre d'inertie appliquée à la particule.

**9.2.3.** Donner la condition nécessaire pour que le mouvement de la particule soit uniforme.

**9.2.4.** En déduire l'expression du module  $v$  de la vitesse en fonction de  $E$  et de  $B$ . Application numérique :  $E = 10^5\text{ N m}^{-1}$  ;  $B = 0,1\text{ T}$ .

## Exercice 10.

**Système oscillant**

Un pendule simple est constitué d'une masse ponctuelle  $m = 100\text{ g}$  accrochée à l'extrémité d'un fil inextensible

de masse négligeable et de longueur  $\ell = 1\text{ m}$ . On l'écarte de la verticale d'un angle  $\theta_0$  puis on l'abandonne sans vitesse initiale. On prendra l'horizontale de la position la plus basse de la masse comme niveau de référence de l'énergie potentielle de pesanteur. A un instant quelconque, le pendule en mouvement fait un angle  $\theta$  avec la verticale du lieu.

**10.1.** Déterminer l'expression de l'énergie potentielle  $E_p$  de pesanteur du système Terre-pendule en fonction de  $m, g, \ell$  et  $\theta$ .

**10.2.** Si  $\theta$  est petit, on peut écrire :

$$\sin \theta = \theta (\text{rad}) \text{ et } 1 - \cos \theta = 2 \left( \sin \frac{\theta}{2} \right)^2$$

Donner la nouvelle expression de l'énergie potentielle  $E_p$  de pesanteur en fonction de  $m, g, \ell$  et de  $\theta$ .

**10.3.** On admet que le système est conservatif.

**10.3.1.** Définir un système conservatif.

**10.3.2.** Pour des oscillations d'amplitude  $\theta_m = 10^\circ$ , calculer l'énergie cinétique  $E_c$  du pendule au passage par la position  $\theta = \frac{\theta_m}{2}$ .

Prendre  $g = 10\text{ N kg}^{-1}$ .

## Exercice 11.

**Phénomènes vibratoire et corpusculaire****11.1.** Interférences mécaniques

Deux points  $O$  et  $O'$  de la surface de l'eau contenue dans une cuve, émettent des ondes mécaniques synchrones de fréquence  $f = 20\text{ Hz}$  et de même amplitude  $A = 1\text{ cm}$ . La célérité de propagation des ondes dans le milieu est  $v = 10\text{ cm s}^{-1}$ .

**11.1.1.** Par la méthode de Fresnel, déterminer l'équation horaire d'un point  $M$  du milieu tel que :

$$\begin{cases} OM = 5,5\text{ mm} \\ O'M = 8\text{ mm} \end{cases}$$

Préciser l'état vibratoire de ce point.

**11.1.2.** Faire un schéma clair montrant l'aspect final de la surface de l'eau.

**11.2.** Effet photoélectrique

On éclaire une cellule photoélectrique avec une lumière monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 0,6\mu\text{m}$ . Le métal de la cathode possède une énergie d'extraction  $E = 3 \times 10^{-19}\text{ J}$ .

**11.2.1.** Justifier l'apparition de l'effet photoélectrique.

**11.2.2.** Calculer l'énergie cinétique maximale  $E_c$  des électrons émis.

On donne :

Constante de Planck  $h = 6,62 \times 10^{-34}\text{ J s}$ .

## Exercice 12.

**Expérience**

Fiche de travaux pratiques

Niveau : TD + TTI

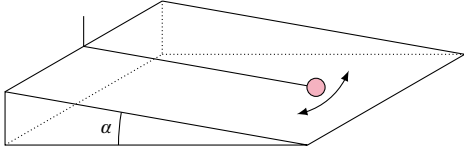
**12.1.** Domaine : Mécanique

**12.2.** Titre du TP : Le pendule simple incliné

**12.3.** Objectif : Détermination de l'accélération de la pesanteur du lieu de l'expérience.

**12.4. Matériel expérimental :**

- Chronomètre
- Rapporteur
- Plan incliné d'angle  $\alpha = 20^\circ$ .
- Un clou pour la suspension du pendule
- Un fil inextensible de masse négligeable et de longueur variable.
- Une masse marquée que l'on supposera ponctuelle.

**12.5. Schématisation :****12.6. Protocole expérimental :**

A l'aide du rapporteur, on mesure l'angle d'écartement du pendule de la verticale apparente puis on l'abandonne pour  $\theta = 9^\circ$ . Avec le chronomètre, on mesure la durée de 10 oscillations du pendule pour une longueur déterminée  $\ell$  du fil. On obtient le tableau de mesures suivant :

$\ell$	(m)	0,7	0,8	0,9	1	1,2	1,3
10	(T)	28,7	30,7	32,6	34,3	37,6	39,2

**12.7. Exploration :**

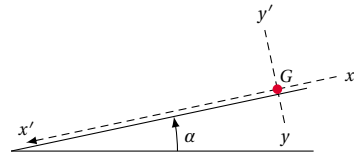
**12.7.1.** Pour un pendule simple vertical, la période propre des petites oscillations est de la forme :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

En déduire celle  $T'$  du pendule incliné ci-dessus en fonction de  $\ell$ ,  $g$  et  $\alpha$ .

**12.7.2.** Tracer la courbe  $T^2 = f(\ell)$ . Échelle de représentation : Abscisses : 1 cm pour 0,1 m ; Ordonnées : 1 cm pour 1 s<sup>2</sup>.

**12.7.3.** À partir de la courbe ci-dessus, déterminer la valeur expérimentale de l'accélération expérimentale  $g_{exp}$  de la pesanteur du lieu de l'expérience.



Le schéma ci-contre traduit l'événement. Les frottements seront négligeables.

Dans le repère proposé dans le schéma :

**13.1.1.** Déterminer l'expression algébrique  $a_G$  de l'accélération du centre d'inertie  $G$  de la bille.

**13.1.2.** Établir les équations horaires du mouvement de la bille dans le repère ci-dessus.

**13.1.3.** Au cours de la  $n$ -ième seconde du mouvement, la bille parcourt une distance  $d$ . Établir l'expression de  $d$  en fonction de  $n$ ,  $g$  et  $\alpha$ .

**13.1.4.** Calculer la valeur de  $\alpha$  pour  $n = 4$  et  $d = 12,25$  m. Prendre  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ .

**13.2.** Mouvement d'une particule dans un champ électrique uniforme

L'équation cartésienne de la trajectoire d'une particule de charge  $q$  négative, entrée à la vitesse initiale  $\vec{v}_0$  dans le champ électrique régnant entre les armatures horizontales d'un condensateur-plan est de la forme :

$$y = \frac{1}{2} \frac{|q|E}{m} \frac{x^2}{v_0^2 (\cos \alpha)^2} + x \tan \alpha$$

**13.2.1.** Faire un schéma annoté traduisant la situation qui a permis d'obtenir une telle équation. On précisera notamment l'orientation :

- des axes du repère d'étude ;
- du vecteur-vitesse initiale  $\vec{v}_0$  ;
- du vecteur champ électrique  $\vec{E}$  ;
- de la concavité de la trajectoire que l'on reproduira entre les armatures.

**13.2.2.** On donne  $E = 10^6 \text{ N C}^{-1}$  ;

$\alpha = 20^\circ$ ,  $v_0 = 10^6 \text{ m s}^{-1}$ . Longueur des armatures du condensateur  $\ell = 15 \text{ cm}$  ;

$m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$  et  $q = -1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ .

En admettant que la particule sorte du champ électrique, calculer sa vitesse  $v_s$  à la sortie.

**13.1.4 Enoncé – Baccalauréat 2015**

Examen:	Baccalauréat	Séries:	D, TI
Session:	2015	Durée:	2 heures
Épreuve:	Physique	Coef.:	2

**Exercice 13.****Mouvements dans les champs de forces et leurs applications**

**13.1.** Mouvement dans le champ de pesanteur

Sur la ligne d'un plan incliné d'angle  $\alpha$  inconnu, on dépose au sommet du plan une bille ponctuelle de masse  $m = 100 \text{ g}$ . Abandonnée à elle-même, elle se met en translation.

**Exercice 14.****Système oscillant : Le pendule simple**

**14.1.** Schématiser puis décrire un pendule simple.

**14.2.** Pour des oscillations de faible amplitude, on admet que la trajectoire de la masse d'un pendule simple est un segment de droite décrit avec la loi horaire :

$$x(t) = 22 \cos \pi \left( \frac{4}{5} t - \frac{1}{3} \right) (\text{cm}).$$

**14.2.1.** Calculer sa période propre  $T$  puis en déduire sa longueur  $\ell$ . Prendre  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ .

**14.2.2.** Déterminer l'expression de l'élongation angulaire  $\theta(t)$  du pendule ci-dessus puis en déduire son élongation maximale  $\theta_m$ .

## 13.1. Énoncé des sujets d'examen

## Exercice 15.

## Les phénomènes vibratoires et corpusculaires

## 15.1. Phénomène vibratoire

À la surface d'une eau contenue dans une cuve à ondes, on laisse tomber des gouttes d'eau à raison de 15 gouttes par seconde. La réflexion des ondes sur les bords de la cuve est négligeable.

15.1.1. Schématiser l'aspect pris par la surface de l'eau.

15.1.2. Le point  $O$  de chute des gouttes est considéré comme la source de l'onde mécanique qui se propage. À l'instant initial  $t = 0$ , le mouvement de l'origine est descendant.

15.1.2.1. Déterminer la nature de l'onde et sa fréquence  $f$ .

15.1.2.2. Écrire l'équation horaire du mouvement de la source  $O$  puis celui d'un point  $M$  situé à la distance  $d = 5 \text{ cm}$  de cette source.

On donne : célérité de l'onde  $v = 15 \text{ cm s}^{-1}$ ; amplitude  $a = 1 \text{ cm}$

## 15.2. La radioactivité

À un instant  $t$  quelconque, on dispose d'une masse  $m = 0,5 \text{ g}$  d'un radio élément de demi-vie  $T = 2$  jours.

15.2.1. Calculer sa constante radioactive  $\lambda$ .

15.2.2. Déterminer la masse  $m'$  de cet élément que l'on possédait 15 jours plus tôt.

## Exercice 16.

## Expérience

Lors d'une séance de travaux pratiques, on remet à chaque élève d'une classe de TD une fiche de TP se présentant ainsi qu'il suit :

## Fiche de TP

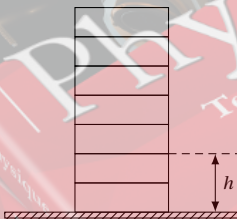
16.1. Titre du TP : Le champ de pesanteur

16.2. Objectif : La mesure de l'accélération  $g$  de la pesanteur dans la salle de TP.

16.3. 2-Matériel expérimental :

- chronomètre électronique,
- Une masse marquée de 100 g.

16.4. Schématisation :



## 16.5. Protocole expérimental :

Un observateur se place successivement à la fenêtre de chaque étage d'un bâtiment. Il tend horizontalement sa main tenant la masse marquée  $m$ . Il la laisse tomber en chute sans vitesse initiale.

À l'aide du chronomètre, on mesure les durées des différents essais de chute.

## 16.6. Tableau de mesures :

La mesure des durées de chute correspondant aux altitudes de la masse par rapport au sol a permis d'obtenir les valeurs suivantes :

$h$ (m)	20	16	12	8	4
$t$ (s)	2,02	1,8	1,56	1,3	0,9

## 16.7. Exploitation :

16.7.1. Établir l'équation horaire de la masse marquée à chaque lâcher. On négligera la résistance de l'air.

16.7.2. Tracer la courbe  $t^2 = f(h)$ .

Échelle :

■ Axe des abscisses : 1 cm pour 1 m ;

■ Axe des ordonnées : 1 cm pour  $10 \text{ s}^2$

16.7.3. Donner la nature de cette courbe.

16.7.4. Déterminer la valeur expérimentale de l'accélération  $g_{\text{exp}}$  de la pesanteur du lieu de l'expérience.

## 13.1.5 Énoncé – Baccalauréat 2016

Examen:	Baccalauréat	Séries:	D, TI
Session:	2016	Durée:	3 heures
Épreuve:	Physique	Coef.:	2

## Exercice 17.

## Mouvements dans les champs

## Partie 1 : Champs de gravitation terrestre

On supposera que toute la masse de la Terre est concentrée en son centre  $O$  et on notera son rayon  $R_T$ .

17.1. Représenter la Terre ainsi que le vecteur champ de gravitation  $\vec{g}_z$  qu'elle crée en un point  $M$  située à une altitude  $z$ .

17.2. Donner les expressions littérales de  $g_z$  et  $g_0$  qui représentent respectivement les modules des vecteurs champs de gravitation à l'altitude  $z$  et à la surface de la Terre respectivement, puis établir la relation qui lie ses deux grandeurs.

17.3. Montrer que pour des faibles altitudes  $z \ll R_T$ , on

peut écrire :  $g_z = g_0 \left(1 - \frac{2z}{R_T}\right)$

On rappelle que si  $\varepsilon \ll 1$  alors on peut écrire :  $(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$ .

## Partie 2 : Goutte d'huile électrisée en équilibre dans un champ électrique uniforme

Une gouttelette d'huile de masse  $m$  de charge  $q = -2 \times 10^{-6} \text{ C}$  est maintenue en équilibre entre les plaques  $A(+)$  et  $B(-)$  parallèles et horizontales d'un condensateur plan.

17.1. Faire un schéma de la situation et représenter toutes les forces appliquées à la goutte.

17.2. Établir l'expression donnant la masse de la goutte puis faire une application numérique en prenant.

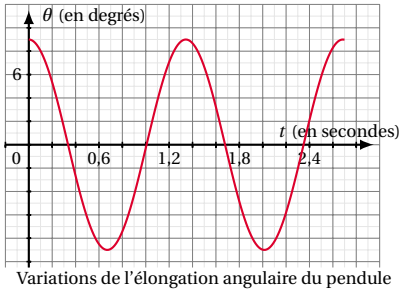
Distance entre les plaques :  $d = 20 \text{ cm}$  ;

Différence de potentiel entre les plaques :  $U = 5000 \text{ V}$  ;

Intensité de la pesanteur :  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ .

## Exercice 18.

## Systèmes oscillants



Lors d'une séance de travaux pratiques sur le pendule simple, un groupe d'élèves, a représenté les variations de l'élongation angulaire en fonction du temps sur la figure ci-dessus.

**18.1.** L'oscillateur étudié est-il amorti? Justifier la réponse.

**18.2.** A l'aide du graphe :

**18.2.1.** Déterminer la période (ou la pseudo-période)  $T_0$  du pendule puis en déduire sa longueur. On admettra que la pseudo-période d'un pendule simple amorti a la même expression que la période propre d'un pendule simple non amorti de même longueur.

On prendra  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ .

**18.2.2.** Écrire l'équation horaire du mouvement du pendule en prenant en compte les conditions initiales.

**18.3.** Exprimer la vitesse angulaire du pendule, puis calculer sa valeur maximale  $\dot{\theta}_{\max}$ .

**18.4.** En appliquant la 2<sup>ème</sup> loi de Newton sur le mouvement, établir l'équation différentielle du mouvement du pendule pour les faibles amplitudes.

## Exercice 19.

## Phénomènes ondulatoires et corpusculaires

*Partie 1 : Propagation à la surface libre de l'eau d'une cuve à ondes*

La pointe d'une lame vibrante de fréquence  $N = 24 \text{ Hz}$ , trempe légèrement en un point  $O$  dans l'eau au repos d'une cuve à ondes de grandes dimensions. La célérité des ondes dans les conditions de l'expérimentation est  $v = 30 \text{ cm s}^{-1}$ . On admet que les ondes se propagent sans atténuation à la surface de l'eau de la cuve.

**19.1.** Définir la longueur d'onde puis calculer la valeur numérique de celle des ondes qui se propagent à la surface libre de l'eau de la cuve à ondes.

**19.2.** Comparer le mouvement de  $O$  à celui d'un point  $M$  situé à la distance  $d = 7,5 \text{ cm}$  de  $O$ .

**19.3.** Calculer la distance-entre la 2<sup>ème</sup> ride et la 7<sup>ème</sup>.

*Partie 2 : Effet photoélectrique*

**19.1.** Définir l'effet photoélectrique.

**19.2.** On éclaire la surface de la cathode d'une cellule photoélectrique dont le métal a une longueur d'onde seuil  $\lambda_0 = 650 \text{ nm}$ , par une lumière monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ .

**19.2.1.** Que se passe-t-il si :

**19.2.1.1.**  $\lambda_0 < \lambda$ ?

**19.2.1.2.**  $\lambda_0 > \lambda$ ?

**19.2.2.** Dans le cas où  $\lambda = 500 \text{ nm}$ . Calculer la vitesse maximale de sortie de la cathode des électrons émis. On donne : Constante de Planck :  $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J s}$ ; Célérité de la lumière :  $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ ; Masse d'un électron :  $m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ .

## Exercice 20.

## Exploitation des résultats d'une expérience de physique

Sur un rail à coussin d'air disposé horizontalement, un chariot de masse  $M = 785 \text{ g}$  est entraîné par l'intermédiaire d'une ficelle et d'une poulie par une petite masse  $m$ , suspendue verticalement et dont on ne connaît pas la valeur.

$t$	0	$\tau$	$2\tau$	$3\tau$	$4\tau$
Points ( $G_i$ )	$G_0$	$G_1$	$G_2$	$G_3$	$G_4$
$x(t)$ (cm)	0	6,1	12,5	19,0	25,8
$v(t)$ ( $\text{m s}^{-1}$ )					

$t$	$5\tau$	$6\tau$	$7\tau$	$8\tau$	$9\tau$
Points ( $G_i$ )	$G_5$	$G_6$	$G_7$	$G_8$	$G_9$
$x(t)$ (cm)	32,8	40,0	47,5	55,2	63,1
$v(t)$ ( $\text{m s}^{-1}$ )					

Le tableau ci dessus rassemble les résultats obtenus pour des positions du centre d'inertie du chariot au cours d'intervalles de temps successifs égaux de valeur  $\tau = 20 \text{ ms}$ .

**20.1.** Compléter ce tableau en calculant la valeur de la vitesse du centre d'inertie du chariot.

On rappelle que pour le point  $G_i$  la vitesse a pour valeur :

$$v_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\tau}.$$

**20.2.** Construire le graphe de  $v_i = f(t)$ .

On prendra pour échelle : 1 cm pour 20 ms; 1 cm pour  $0,5 \text{ m s}^{-1}$ .

**20.3.** À l'aide du graphe obtenu, déterminer la valeur de la vitesse initiale  $v_0$  ainsi que celle de l'accélération  $a$  du mouvement du centre d'inertie du mobile.

**20.4.** En appliquant le théorème du centre d'inertie au chariot et à la masse d'entraînement, déterminer la valeur de la masse d'entraînement du chariot. On admettra que la ficelle et la poulie du système d'entraînement ont des masses négligeables devant les autres masses du dispositif.

On donne  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ .

## 13.1.6 Énoncé – Baccalauréat 2017

Examen:	Baccalauréat	Séries:	D, TI
Session:	2017	Durée:	3 heures
Épreuve:	Physique	Coef.:	2

L'énoncé de ce sujet peut être gratuitement téléchargé sur :



## 13.2 Solution des sujets d'examen

### 13.2.1 Solution – Baccalauréat 2012

#### Solution 1. (p. 266)

##### Mouvements dans les champs et leurs applications

**1.1.1.** Tige parcourue par un courant dans un champ magnétique.

**1.1.1.1.** Nom de la force qui provoque le déplacement de la tige :

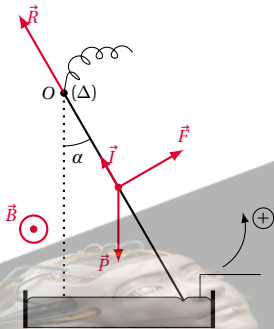
Force électromagnétique ou force de Laplace.

Calcul de l'intensité de cette force :

$$F = BIL$$

A.N. :  $F = 3,74 \times 10^{-2} \text{ N}$

**1.1.2.** Représentation des forces et sens du courant :



**1.1.3.** Condition d'équilibre de la tige :

$$\sum \mathcal{M}(\vec{F}_{ex}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = 0$$

ou

$$\sum \mathcal{M}(\vec{F}_{ex}) = 0 \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = \vec{0}$$

Déduction de la masse de la tige :

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = 0$$

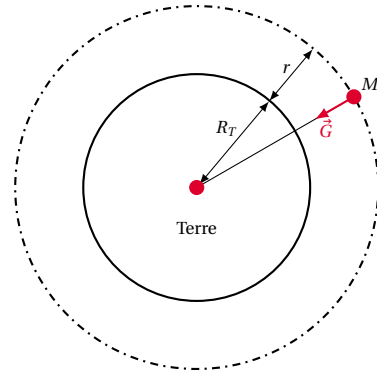
$$\Leftrightarrow -P \frac{\ell}{2} \sin \alpha + F \frac{\ell}{2} = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{F}{g \sin \alpha}$$

A.N. :  $m = 0,0307 \text{ kg} = 30,7 \text{ g}$

**1.2.** Champ de gravitation terrestre.

**1.2.1.** Schéma :



**1.2.2.** Montrons que  $G = G_0 \left( \frac{R_T}{r} \right)^2$

$$\text{on a : } \begin{cases} G_0 = \varepsilon \frac{M_T}{R_T^2} & (13.1) \\ G = \varepsilon \frac{M_T}{r^2} & (13.2) \end{cases}$$

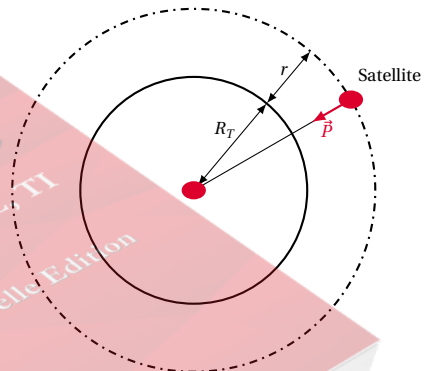
$$\frac{(13.2)}{(13.1)} \Rightarrow \frac{G}{G_0} = \left( \frac{R_T}{r} \right)^2 \Rightarrow G = G_0 \left( \frac{R_T}{r} \right)^2$$

**1.2.3.**

**1.2.3.1.** Un repère géocentrique est un repère dont l'origine est au centre de la terre et les axes dirigés vers trois étoiles très éloignées.

**1.2.3.2.** Expression de la vitesse en fonction de  $G_0$ ,  $r$  et  $R_T$ .

Le bilan des forces extérieures appliquées au satellite étant :



D'après la deuxième loi de Newton :

$$\sum \vec{F}_{ex} = m \vec{a}_G \Leftrightarrow \vec{P} = m \vec{a}_G$$

$$\Leftrightarrow m \vec{g} = m \vec{a}_G$$

$$\Leftrightarrow \vec{a}_G = \vec{g} \Leftrightarrow a_G = g$$

or  $a_G = a_n = \frac{v^2}{r}$  car le mouvement du satellite est circulaire uniforme d'où

$$\frac{v^2}{r} = g \text{ et } G = G_0 \left( \frac{R_T}{r} \right)^2$$

soit

$$\frac{v^2}{r} = G_0 \left( \frac{R_T}{r} \right)^2 \Rightarrow v = R_T \sqrt{\frac{G_0}{r}}$$

Expression de la période de révolution du satellite.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{v} r \Rightarrow T = \frac{2\pi}{R_T} \sqrt{\frac{r^3}{G_0}}$$

A.N. :  $T = 5805,1 \text{ s}$ **Solution 2. (p. 266)****Les systèmes oscillants****2.1.** Oui, cet oscillateur est harmonique.Justification : La représentation graphique de l'élongation  $\theta(t)$  est celle d'une fonction sinusoïdale.**2.2.** Détermination graphique de la période propre  $T_0$  :

$$T_0 = 2 \text{ s}$$

Calcul de la longueur  $\ell$  du pendule :

$$\text{on a : } T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \Rightarrow \ell = \frac{T_0^2 g}{4\pi^2}$$

A.N. :  $\ell = 0,99 \text{ m} \simeq 1 \text{ m}$ **2.3.** Équation horaire  $\theta(t)$  du mouvement du pendule :

$$\text{on pose : } \theta = \theta_{\max} \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi\right)$$

$$\text{à } t = 0 \quad \begin{cases} \theta = 0 \\ \dot{\theta} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \varphi = 0 \\ \sin \varphi > 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

d'où

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta_{\max} \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 0,16 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ rad} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \theta(t) &= -\theta_{\max} \sin \pi t = -0,16 \sin \pi t \\ &= 0,16 \sin(\pi t + \pi) \text{ en rad} \end{aligned}$$

**2.4.** Calcul de la vitesse angulaire maximale.

On a

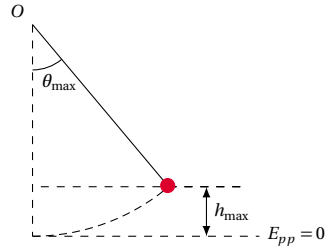
$$\dot{\theta}(t) = \frac{d\theta}{dt} = 0,16\pi \cos(\pi t + \pi) \quad (13.1)$$

et

$$\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_{\max} \cos(\pi t + \pi) \quad (13.2)$$

par identification, les relations (13.1) et (13.2) donnent

$$\dot{\theta}_{\max} = 0,16\pi \text{ rad s}^{-1} = 0,5 \text{ rad s}^{-1}$$

**2.5.** Énergie potentielle maximale

$$E_{p_{\max}} = mgh_{\max} = mg\ell(1 - \cos \theta_{\max})$$

$$\text{or : } \cos \theta_{\max} \simeq 1 - \frac{\theta_{\max}^2}{2}$$

$$\text{d'où } E_{p_{\max}} = \frac{1}{2} mg\ell \theta_{\max}^2$$

A.N. :  $E_{p_{\max}} = 0,0126 \text{ J}$ 

Énergie mécanique :

Le système étant conservatif,

$$E_m = E_C + E_P = E_{p_{\max}} = 0,0126 \text{ J}$$

**Solution 3. (p. 266)****Phénomènes vibratoire et corpusculaire****3.1.** Interférences à la surface libre de l'eau d'une cuve**3.1.1.** Conditions à remplir par les sources vibratoires pour qu'on observe le phénomène d'interférence :Les sources  $S_1$  et  $S_2$  doivent être synchrones et cohérentes.Oui !  $O_1$  et  $O_2$  remplissent ces conditions.**3.1.2.** Calcul de la longueur d'onde :

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

A.N. :  $\lambda = 6 \text{ mm}$ **3.1.3.** État vibratoire des points :

$$\begin{aligned} M \begin{cases} d_1 = 15 \text{ cm} \\ d_2 = 3 \text{ cm} \end{cases} \quad \frac{d_1 - d_2}{\lambda} = \frac{120}{6} = 20 \\ \Rightarrow d_1 - d_2 = 20\lambda \end{aligned}$$

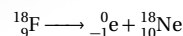
Le point  $M$  vibre avec une amplitude maximale.

$$\begin{aligned} N \begin{cases} d_1 = 8,4 \text{ cm} \\ d_2 = 27 \text{ cm} \end{cases} \quad \Rightarrow d_2 - d_1 = 18,6 \text{ cm} \\ = 186 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\frac{d_2 - d_1}{\lambda} = \frac{186}{6} = 31 \Rightarrow d_2 - d_1 = 31\lambda$$

Le point  $N$  vibre avec une amplitude maximale.

$$\begin{aligned} P \begin{cases} d_1 = 16,5 \text{ cm} \\ d_2 = 15 \text{ cm} \end{cases} \quad \frac{d_1 - d_2}{\lambda} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} \\ \Rightarrow d_1 - d_2 = \frac{5}{2} \lambda \end{aligned}$$

Le point  $P$  est immobile.**3.2.** Radioactivité**3.2.1.** Équation désintégration :

## 13.2. Solution des sujets d'examen

## 3.2.2. Nombre de noyaux restants :

$$N = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{T} t}$$

A,N. :  $N = 1,76$  noyaux.

## 3.2.3. Activité de l'échantillon

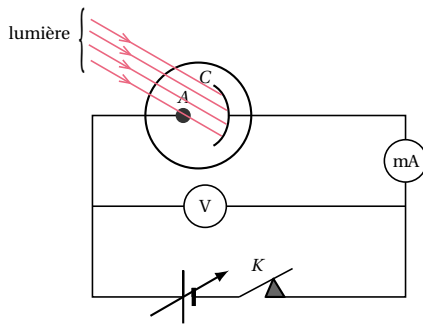
$$A = \lambda N = \frac{\ln 2}{T} N$$

A,N. :  $A = 0,0112$  Bq

## Solution 4. (p. 267)

## Expérience de physique

## 4.1. Schéma de montage complété :



## 4.2.

## 4.2.1. Valeurs du potentiel d'arrêt et de l'intensité du courant de saturation de la cellule :

■ potentiel d'arrêt :  $U_0 = 1$  V■ courant de saturation :  $I_s = 2,5$  mA

## 4.2.2. Interprétation électronique de la caractéristique :

Domaine	Interprétation
0 V	Les électrons ne sont pas émis.
0 V à 1 V	Les électrons sont émis mais ne parviennent pas à l'anode.
1 V à 2,5 V	Les électrons sont émis et parviennent à l'anode.

## 4.2.3.

## 4.2.4.

## 4.2.5.

## 13.2.2 Solution – Baccalauréat 2013

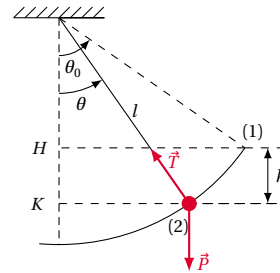
## Solution 5. (p. 267)

## Mouvements dans les champs de forces

## 5.1. Champ de pesanteur

5.1.1. Expression de la vitesse  $v$  du pendule.

Le bilan des forces extérieures appliquées à la bille étant :



En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à la bille, on a :

$$\Delta E_C = \sum W(\vec{F})$$

$$\Leftrightarrow E_{C2} - E_{C1} = W(\vec{P}) + W(\vec{T})$$

or :  $W(\vec{T}) = 0$ , car  $\vec{T}$  est perpendiculaire à la trajectoire :

$$\Rightarrow E_{C2} - E_{C1} = W(\vec{P})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = m g h$$

$$\text{et } h = \ell(\cos \theta - \cos \theta_0)$$

$$\text{d'où } v = \sqrt{v_0^2 + 2g\ell(\cos \theta - \cos \theta_0)}$$

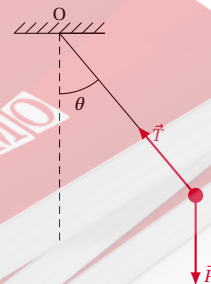
5.1.1.1. Calcul de la valeur de  $v$  pour  $\theta = 15^\circ$ 

$$v = \sqrt{10^2 + 2 \times 9,8 \times 0,5(\cos 15^\circ - \cos 60^\circ)}$$

$$= 10,22 \text{ ms}^{-1}$$

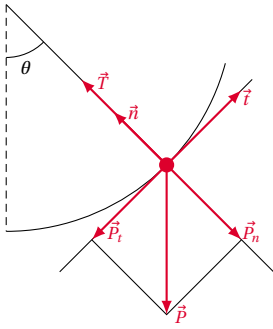
$$v = 10,22 \text{ ms}^{-1}$$

## 5.1.1.2. Schéma représentant les forces l'exerçant sur la bille.



## 5.1.1.3. Expression de l'intensité de la tension du fil.

Le bilan des forces appliquées à la bille étant :



D'après le théorème du centre d'inertie appliqué à la bille dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, on a :

$$\sum \vec{E}_{ext} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

En projetant cette relation dans le repère de Frenet, on a :

- Suivant la normale  $\vec{n}$  :  $\vec{T} + \vec{P}_n = m\vec{a}_n$ .
- Suivant la tangentielle  $\vec{t}$  :  $\vec{P}_t = m\vec{a}_t$

$$\begin{aligned} \vec{T} + \vec{P}_n &= m\vec{a}_n \Leftrightarrow T - P_n = ma_n \\ &\Leftrightarrow T = P_n + ma_n \end{aligned}$$

$$\text{or : } \begin{cases} P_n = P \cos \theta \\ a_n = \frac{v^2}{\ell} \end{cases} \Rightarrow T = mg \cos \theta + \frac{mv^2}{\ell}$$

or nous avons exprimé :

$$v^2 = v_0^2 + 2g\ell(\cos \theta - \cos \theta_0)$$

d'où

$$T = m \frac{v_0^2}{\ell} + mg(3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0)$$

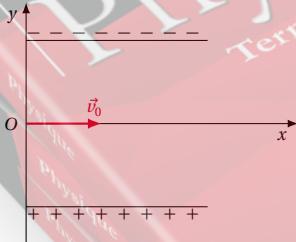
Valeur de  $T$  pour  $\theta = 15^\circ$

$$\begin{aligned} T &= 50 \times 10^{-3} \times \frac{10^2}{0,5} + 50 \times 10^{-3} \\ &\quad \times 9,8(3 \cos 15^\circ - 2 \cos 60^\circ) = 10,9299 \text{ N} \end{aligned}$$

$$T = 10,929 \text{ N} \approx 10,93 \text{ N}$$

### 5.1.2. Champ électrostatique.

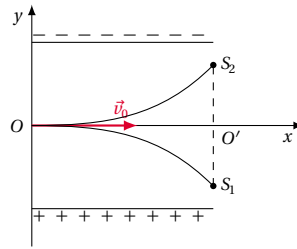
#### 5.1.2.1. Schéma :



#### 5.1.2.2. Équation cartésienne de la trajectoire du positron :

$$y = \frac{eE}{2mv_0^2} x^2$$

#### 5.1.2.3. Allure des deux trajectoires et points de sortie $S_1$ et $S_2$ :



#### 5.1.2.4. Calcul de la distance $S_1 S_2$

$$d = S_1 S_2 = S_1 O' + O' S_2$$

$$= -\left(-\frac{eE}{2mv_0^2} L^2\right) + \frac{eE}{2mv_0^2} L^2 = \frac{eE}{2mv_0^2} L^2$$

$$d = S_1 S_2 = \frac{eE}{2mv_0^2} L^2 \text{ si } D \text{ est la distance entre les arma-}$$

$$\text{tures } u = ED \Rightarrow E = \frac{u}{D}$$

d'où

$$d = S_1 S_2 = \frac{eu}{mv_0^2 D} L^2$$

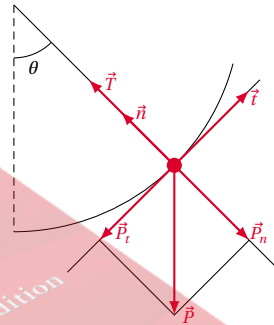
$$\text{A.N. : } d = 0,0444 \text{ m} = 4,44 \text{ cm}$$

### Solution 6. (p. 268)

#### Système mécanique oscillant

##### 6.1. Équation différentielle du mouvement du pendule.

Le bilan des forces appliquées au pendule à une position quelconque étant :



En appliquant la 2<sup>ème</sup> loi de Newton au pendule, dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, on a :

$$\sum \vec{E}_{ex} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

En projetant sur les axes  $\vec{n}$  et  $\vec{t}$  de la base de Frenet, on a :

$$\begin{cases} \text{Suivant } \vec{t} : \vec{P}_t = m\vec{a}_t & (13.1) \\ \text{Suivant } \vec{n} : \vec{T} + \vec{P}_n = m\vec{a}_n & (13.2) \end{cases}$$

$$(13.1) \Rightarrow -P_t = ma_t \Leftrightarrow -P \sin \theta = ma_t$$

$$\Leftrightarrow a_t + g \sin \theta = 0$$

or :

$$a_t = \ell \ddot{\theta} \Rightarrow \ell \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$$



## 13.2. Solution des sujets d'examen

Les oscillations étant de faible amplitude :

$$\sin \theta \simeq \theta \text{ rad}$$

d'où l'équation différentielle :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0$$

### 6.2. Calcul de la longueur $\ell$ du pendule.

L'équation différentielle étant de la forme :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

par identification, on a :

$$\omega_0^2 = \frac{g}{\ell} \Leftrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} = 2\pi f_0 \Leftrightarrow \frac{g}{\ell} = (2\pi f_0)^2 \\ \Rightarrow \ell = \frac{g}{(2\pi f_0)^2}$$

A.N. :  $L = 0,57 \text{ m}$

### 6.3. Équation horaire du mouvement.

Soit  $\theta = \theta_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$  l'équation horaire du mouvement.

$$\text{à } t = 0 \quad \begin{cases} \theta = \theta_m \\ \dot{\theta} = 0 \end{cases} \quad \dot{\theta} = \theta_m \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Donc à

$$t = 0 \quad \begin{cases} \theta_m \sin \varphi = \theta_m \\ \theta_m \omega_0 \cos \varphi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \varphi = 1 \\ \cos \varphi = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ et } \begin{cases} \theta_m = 9^\circ = \frac{\pi}{20} \text{ rad} \\ \omega_0 = 2\pi f_0 = 4,1 \text{ rad s}^{-1} \end{cases}$$

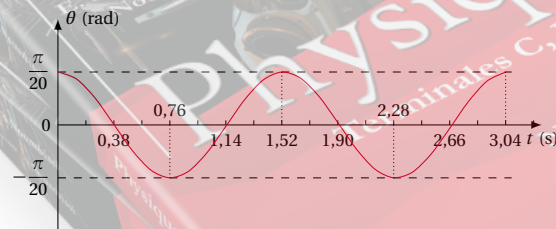
d'où

$$\theta = \frac{\pi}{20} \sin\left(4,15t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{20} \cos(4,15t) \text{ en rad}$$

### 6.4. Courbe $\theta = g(t)$ .

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{1}{0,66} = 1,515 \text{ s} \simeq 1,52 \text{ s}$$

$$\text{à } t = 0, \theta = \theta_m = \frac{\pi}{20}$$



du nombre de masse,

$$\begin{cases} 92 = 82 + 2x - y \\ 238 = 206 + 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 10 \\ 4x = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 6 \end{cases}$$

### 7.1.2. Détermination du temps $t$

Soit  $A = 2 \times 10^6 \text{ Bq}$ , l'activité à l'instant initial,  $A'$ , l'activité à la date  $t$ .

$$A' = Ae^{-\lambda t} \Leftrightarrow e^{-\lambda t} = \frac{A'}{A}$$

$$\Leftrightarrow -\lambda t = \ln\left(\frac{A'}{A}\right) \Leftrightarrow \lambda t = \ln\left(\frac{A}{A'}\right)$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{A}{A'}\right) \Leftrightarrow t = \frac{T}{\ln 2} \ln\left(\frac{A}{A'}\right)$$

$$\text{et } A' = \frac{A}{1500} \Rightarrow \frac{A}{A'} = 1500$$

$$\text{d'où } t = \frac{T}{\ln 2} \ln(1500)$$

A.N. :  $t = 73,85 \text{ min} = 4431,31 \text{ s}$

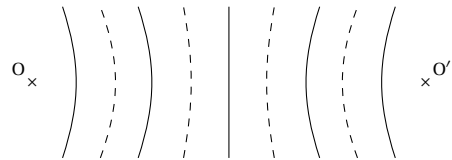
### 7.2. Propagation des ondes mécaniques

#### 7.2.1. Calcul de la célérité.

$$\lambda = vT = \frac{v}{f} \Rightarrow v = \lambda \cdot f$$

A.N. :  $v = 0,30 \text{ m s}^{-1}$

#### 7.2.2. Aspect de la surface libre de l'eau.



#### 7.2.3. Conséquence de l'augmentation de la fréquence du vibreur sur le système de lignes d'interférences :

On a  $\lambda = \frac{v}{f}$  si  $f$  augmente et  $v$  reste constant, alors  $\lambda$  diminue. Ainsi les lignes d'interférences se resserrent.

### Solution 8. (p. 268)

#### Exploitation d'une fiche de T.P.

#### 8.1. Trace de la courbe $x = f(t^2)$ .

Tableau des valeurs :

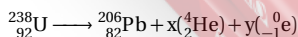
$t^2$	(s <sup>2</sup> )	0	4	16	36	42,25
$x$	(cm)	0	0,19	0,77	1,73	2,03

### Solution 7. (p. 268)

#### Radioactivité et propagation des ondes

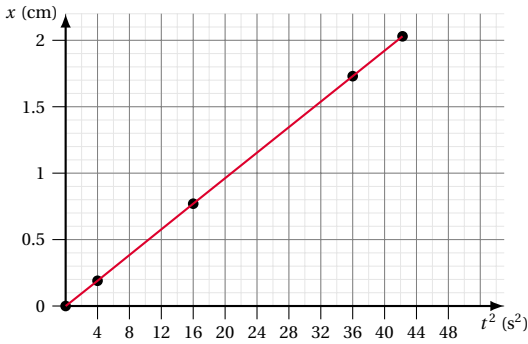
#### 7.1. Radioactivité

#### 7.1.1. 7.1.1.1. Équation générale de la réaction globale :



#### 7.1.1.2. Calcul de $x$ et de $y$

D'après les lois de conservation du nombre de charge et

**8.2. Forme de la courbe.**

La courbe est une droite passant par l'origine.

Relation simple liant  $x$  et  $t^2$ .

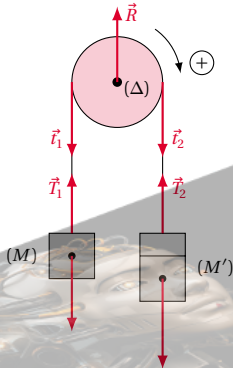
$x = k t^2$  où  $k$  est une constante positive.

**8.3. Justifier que  $a_M = a_{M'}$ .**

On a  $a_M = r\ddot{\theta}$  et  $a_{M'} = r\ddot{\theta}$ . Donc  $M$  et  $M'$  ont la même accélération.

**8.4. Expression de l'accélération  $a$ .**

Le bilan des forces extérieures appliquées au système poulie, masses  $M$  et  $M'$  étant :



En appliquant le théorème du centre d'inertie, respectivement à la masse ( $M$ ) et la masse ( $M'$ ) puis R.E.D., à la poulie, dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, on a :

**■ Masse ( $M$ ) :**

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}_{ext} &= M\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P}_1 + \vec{T}_1 = m\vec{a} \\ \Leftrightarrow -P_1 + T_1 &= Ma \\ \Rightarrow T_1 &= Mg + Ma\end{aligned}\quad (13.1)$$

**■ Masse ( $M'$ ) :**

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}_{ext} &= (M+m)\vec{a} \\ \Leftrightarrow \vec{P}_2 + \vec{T}_2 &= (M+m)\vec{a} \\ \Leftrightarrow P_2 - T_2 &= (M+m)a \\ \Rightarrow T_2 &= (M+m)g - (M+m)a\end{aligned}\quad (13.2)$$

**■ poulie**

$$\begin{aligned}\sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{ext}) &= J_\Delta \ddot{\theta} \\ \Leftrightarrow \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}_1) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}_2) &= J_\Delta \ddot{\theta}\end{aligned}$$

or :  $J_\Delta = 0$  car poulie de masse négligeable ;  $\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = 0$

car sa droite d'action rencontre l'axe ( $\Delta$ )

$$\begin{aligned}\Rightarrow \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}_1) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}_2) &= 0 \Leftrightarrow -t_1 r + t_2 r = 0 \\ \Leftrightarrow t_1 &= t_2\end{aligned}\quad (13.3)$$

Le fil étant inextensible et de masse négligeable,

$$\begin{cases} T_1 = t_1 \\ T_2 = t_2 \end{cases}\quad (13.4)$$

$$(13.4) \text{ et } (13.3) \Rightarrow T_1 = T_2\quad (13.5)$$

$$(13.1) \text{ et } (13.2) \text{ dans } (13.5) \Rightarrow Mg + Ma = (M+m)g - (M+m)a \text{ d'où}$$

$$a = \frac{m}{2M+m}g$$

Loi horaire du mouvement de ( $M$ ).

$$x(t) = \frac{1}{2} a t^2 \text{ soit } x(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{2M+m} g t^2$$

à partir de la courbe ; on a :

$$\tan \alpha = \frac{\Delta x}{\Delta t^2} = \frac{1,73 - 0,19}{36 - 4}$$

$$\tan \alpha = 4,81 \times 10^{-2} \text{ ms}^{-2} \text{ or :}$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{2} a_{exp} \Rightarrow a_{exp} = 2 \tan \alpha$$

$$a_{exp} = 9,62 \times 10^{-2} \text{ ms}^{-2}$$

$$9,46 \times 10^{-2} \text{ ms}^{-2} \leq a_{exp} \leq 9,65 \times 10^{-2} \text{ ms}^{-2}$$

**8.5. Déduction de  $g_{exp}$** 

on a :

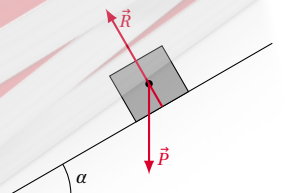
$$\begin{aligned}a_{exp} &= \frac{m}{2M+m} g_{exp} \\ \Rightarrow g_{exp} &= \left( \frac{2M+m}{m} \right) a_{exp}\end{aligned}$$

$$\text{A.N. : } g_{exp} = 9,71 \text{ ms}^{-2}$$

$$9,55 \text{ ms}^{-2} \leq g_{exp} \leq 9,75 \text{ ms}^{-2}$$

**13.2.3 Solution – Baccalauréat 2014****Solution 9. (p. 269)****Mouvements dans les champ de forces et leurs applications****9.1. Mouvement dans le champ de pesanteur.****9.2.****9.2.1. Calcul de la vitesse  $v_s$  acquise au sommet du plan :**

Le bilan des forces extérieures appliquées à la caissette étant :



## 13.2. Solution des sujets d'examen

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, on a :

$$\begin{aligned}\Delta E_C &= \sum W(\vec{F}_{ext}) \\ \Leftrightarrow E_{Cs} - E_C &= W(\vec{P}) + W(\vec{R}) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_s^2 - \frac{1}{2} m v^2 &= -mgl \sin \alpha\end{aligned}$$

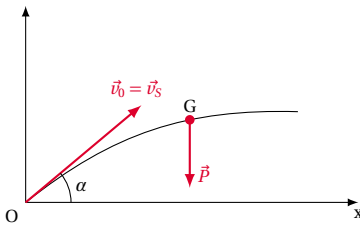
car :

$$W(\vec{R}) = \vec{0} \Rightarrow v_s = \sqrt{v^2 - 2gl \sin \alpha}$$

A.N. :  $v_s = 18,21 \text{ m s}^{-1}$

## 9.2.2. Équation cartésienne de la trajectoire :

Le bilan des forces extérieures appliquées à la caissette étant :



En appliquant le théorème du centre d'inertie à la caissette dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, on a :

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}_{ex} &= m \vec{a}_G \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Suivant } Ox : \vec{0} = m \vec{a}_x \\ \text{Suivant } Oy : \vec{P} = m \vec{a}_y \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = m a_x \\ -P = m a_y \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = m a_x \\ -mg = m a_y \end{cases} \\ \Leftrightarrow \vec{a}_G &= \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \\ \Rightarrow \vec{v} &= \begin{cases} v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_y = -gt + v_{0y} \\ \quad = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases} \\ \Rightarrow \vec{OG} &\begin{cases} x = (v_0 \cos \alpha)t & (13.1) \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t & (13.2) \end{cases} \\ (13.1) \Rightarrow t &= \frac{x}{v_0 \cos \alpha} & (13.3)\end{aligned}$$

(13.3) dans (13.2)

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{g}{(v_0 \cos \alpha)^2} x^2 + x \tan \alpha$$

$$y = -0,017x^2 + 0,364x$$

## 9.2.3. Calcul de distance d

Au point de chute sur l'axe  $x$ ,  $y = 0$

$$\begin{aligned}x \left( -\frac{1}{2} \frac{g}{(v_0 \cos \alpha)^2} x + \tan \alpha \right) &= 0 \\ \Rightarrow -\frac{1}{2} \frac{g}{(v_0 \cos \alpha)^2} d + \tan \alpha &= 0 \\ \Rightarrow d = 2 \frac{v_0^2}{g} \cos \alpha \sin \alpha &= \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha\end{aligned}$$

A.N. :  $d = 21,31 \text{ m}$

## 9.3. Mouvement d'une particule chargée dans les champs électriques et magnétiques

## 9.3.1. Expression vectorielle de la force qui sollicite la particule :

Soient :  $\vec{F}$  cette force;  $\vec{F}_E = q\vec{E}$  la force électrique;  $\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$  la force magnétique de Lorentz.

$$\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_m = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

## 9.3.2. Formule vectorielle du T.C.I appliquée à la particule :

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}_{ex} = m \vec{a} &\Rightarrow \vec{F} = m \vec{a} \\ \Leftrightarrow q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B} &= m \vec{a}\end{aligned}$$

## 9.3.3. Condition nécessaire pour que le mouvement soit uniforme :

$$\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}_E = -\vec{F}_m \Leftrightarrow q\vec{E} = -q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

9.3.4. Expression du module  $v$  de la vitesse : on a

$$\begin{aligned}\vec{F}_E = -\vec{F}_m &\Leftrightarrow F_E = F_m \Leftrightarrow |q|E = |q|vB \\ \Rightarrow v &= \frac{E}{B}\end{aligned}$$

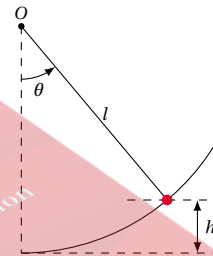
A.N. :  $v = 10^7 \text{ m s}^{-1}$

## Solution 10. (p. 269)

## Système oscillant

## 10.1. Expression de l'énergie potentielle :

$$\begin{aligned}E_P &= mgh \text{ or } h = \ell(1 - \cos \theta) \\ \Rightarrow E_P &= mg\ell(1 - \cos \theta)\end{aligned}$$

10.2. Nouvelle expression de  $E_P$ 

On a  $1 - \cos \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \Rightarrow E_P = 2mg\ell \sin \frac{\theta}{2}$  et

$$\sin \theta = \theta (\text{rad}) \Rightarrow E_P = \frac{1}{2} mg\ell \theta^2$$

## 10.3. 10.3.1. Définition :

Un système conservatif est un système dont l'énergie mécanique se conserve ou reste constante.

## 10.3.2. Calcul de l'énergie cinétique :

Le système étant conservatif, on a :  $E_{m1} = E_{m2}$  or

$$E_m = E_P + E_C$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_{m1} = E_{P1} + E_{C1} \\ \quad = E_{P1} = mg\ell(1 - \cos \theta_m) \text{ car } E_{C1} = 0 \\ E_{m2} = E_{P2} + E_{C2} = mg\ell(1 - \cos \theta) + E_{C2} \end{cases}$$

d'où

$$E_{m_1} = E_{m_2}$$

$$\Leftrightarrow mgl(1 - \cos \theta_m) = mgl(1 - \cos \theta) + E_{C_2}$$

$$\Rightarrow E_{C_2} = E_C = mgl(\cos \theta - \cos \theta_m)$$

or  $\theta_m = 10^\circ$  et  $\theta = \frac{\theta_m}{2} = 5^\circ$  sont des angles petit

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} \\ \cos \theta_m = 1 - \frac{\theta_m^2}{2} \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} E_C &= mgl(\theta_m^2 - \theta^2) \\ &= \frac{3}{8} mgl\theta_m^2, \theta \text{ et } \theta_m \text{ en rad} \end{aligned}$$

$$\text{A.N. : } E_C = 0,0114 \text{ J}$$

### Solution 11. (p. 269)

#### Phénomènes vibratoire et corpusculaire

##### 11.1. Interférences mécaniques

##### 11.1.1. Équation horaire du point M :

Par la méthode de Fresnel.

Soient  $y_O$  et  $y_{O'}$  les équations des sources O et O' on a

$$\begin{cases} y_O = y_m \cos(2\pi f t + \varphi) = \cos(40\pi t + \varphi) \\ y_{O'} = y_m \cos(2\pi f t + \varphi) = \cos(40\pi t + \varphi) \end{cases}$$

pour simplifier l'expression, on peut prendre  $\varphi = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_O = \cos(40\pi t) \\ y_{O'} = \cos(40\pi t) \end{cases}$$

Au point M :

$$\begin{cases} y_M = \cos 40\pi \left( t - \frac{OM}{v} \right) = \cos \left( 40\pi t - \frac{11}{5}\pi \right) \\ y'_M = \cos 40\pi \left( t - \frac{O'M}{v} \right) = \cos \left( 40\pi t - \frac{16}{5}\pi \right) \end{cases}$$

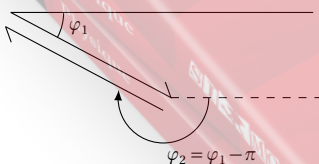
d'où la construction de Fresnel : on pose

$$\begin{cases} \varphi_1 = -\frac{11}{5}\pi = -396^\circ \\ \varphi_2 = -\frac{16}{5}\pi = -576^\circ \end{cases}$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -576 + 396 = -180^\circ$$

$$= -\pi \text{ rad}$$

$$\Leftrightarrow \varphi_2 = \varphi_1 - \pi$$

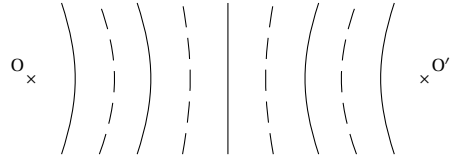


$$\text{d'où } y = y_M + y'_M = y_M - y_M = 0$$

État vibratoire de M : Le point M est un point d'amplitude nulle (ou un point immobile) car la construction de

Fresnel montre que l'amplitude  $A = 0$ .

**11.1.2. Schéma montrant l'aspect final de la surface de l'eau :**



#### 11.2. Effet photoélectrique :

**11.2.1. Justification de l'apparition de l'effet photoélectrique :**

soit  $E'$  l'énergie d'un photon de la lumière éclairant la cellule.

$$E' = h \frac{c}{\lambda}$$

$$\text{A.N. : } E' = 3,31 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$3,31 \times 10^{-19} \text{ J} > 3 \times 10^{-19} \text{ J} \Leftrightarrow E' > E$$

$$\text{ou alors : } \lambda_0 = \frac{hc}{E}$$

$$\text{A.N. : } \lambda_0 = 6,62 \times 10^{-7} \mu = 0,662 \mu$$

$$0,6 \mu < 0,662 \mu \Leftrightarrow \lambda < \lambda_0$$

Ou encore :

$$\nu_0 = \frac{E}{h}$$

$$\text{A.N. : } \nu_0 = 4,53 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda}$$

$$\text{A.N. : } \nu = 5 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

$$5 \times 10^{14} \text{ Hz} > 4,53 \times 10^{14} \text{ Hz} \Leftrightarrow \nu > \nu_0$$

**11.2.2. Calcul de l'énergie cinétique maximale des électrons.**

$$E_C = E' - E$$

$$\text{A.N. : } E_C = 3,1 \times 10^{-20} \text{ J}$$

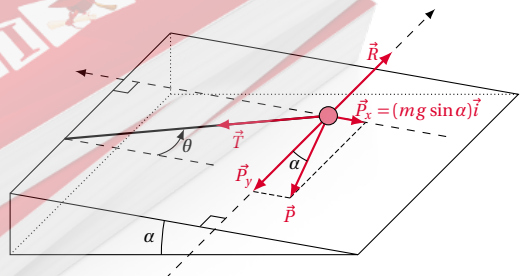
### Solution 12. (p. 269)

#### Expérience

##### 12.1. Expression de la période $T'$ du pendule incliné

Le bilan des forces extérieures appliquées au pendule étant :

N.B : Bien qu'on ait tout simplement demandé de déduire l'expression de  $T'$ , nous allons l'établir afin que l'apprenant puisse mieux comprendre.





## 13.2. Solution des sujets d'examen

En appliquant R.F.D. d'un solide en rotation au pendule, on a :

$$\begin{aligned}\sum \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_{ex}) &= J_{\Delta} \ddot{\theta} \\ \Leftrightarrow \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{T}) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}) &= J_{\Delta} \ddot{\theta} \\ \Leftrightarrow \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{T}) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}_x) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}_y) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}) &= J_{\Delta} \ddot{\theta}\end{aligned}$$

or :  $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}_x) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}) = 0$ ; car pas de mouvement suivant  $y'$  et  $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{T}) = 0$ ; car sa droite d'action rencontre l'axe ( $\Delta$ )

$$\begin{aligned}\Rightarrow \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) &= J_{\Delta} \ddot{\theta} \Leftrightarrow -(mg \sin \alpha) \ell \sin \theta = J_{\Delta} \ddot{\theta} \\ \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{\ell mg \sin \alpha}{J_{\Delta}} \sin \theta &= 0\end{aligned}$$

or :

$$J_{\Delta} = m \ell^2 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g \sin \alpha}{\ell} \sin \theta = 0$$

par  $\theta$  petit :

$$\sin \theta \simeq \theta (\text{rad}) \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g \sin \alpha}{\ell} \theta = 0;$$

Équation différentielle de la forme :

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$$

d'où

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g \sin \alpha}{\ell}} \Rightarrow T' = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g \sin \alpha}}$$

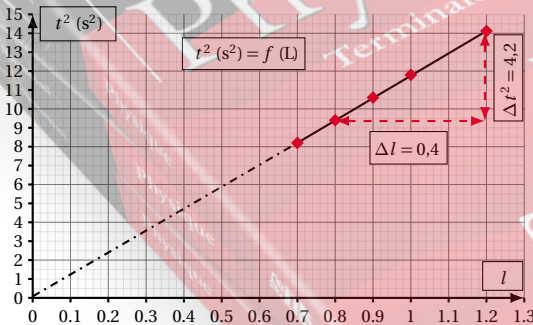
Soit donc  $T' = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g \sin \alpha}}$

N.B : on pouvait déduire l'expression de  $T'$  en passant tout simplement  $T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g'}}$  où  $g'$  est l'intensité de la composante de  $\vec{g}$  parallèle au plan incliné. Soit  $g' = g_x = g \sin \alpha$  d'où  $T' = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g \sin \alpha}}$ .

12.2. Courbe  $T^2 = f(\ell)$ .

Tableau des valeurs

$\ell$ (m)	0,7	0,8	0,9	1	1,2	1,3
$T^2$ (s <sup>2</sup> )	8,2	9,4	10,6	11,8	14,1	15,4

12.3. Valeur de  $g_{exp}$  :

on a

$$\begin{aligned}T' &= 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g \sin \alpha}} \\ \Leftrightarrow T'^2 &= \frac{4\pi^2}{g \sin \alpha} \ell = k \ell \text{ avec } k = \frac{4\pi^2}{g \sin \alpha} = \text{cte}\end{aligned}$$

A partir de la courbe  $T^2 = f(\ell)$  on a :

$$\begin{aligned}k = \tan \alpha &= \frac{(\Delta T)^2}{\Delta \ell} \Leftrightarrow \frac{4\pi^2}{g_{exp} \sin \alpha} = \frac{(\Delta T)^2}{\Delta \ell} \\ \Rightarrow g_{exp} &= \frac{4\pi^2}{\sin \alpha} \cdot \frac{\Delta \ell}{(\Delta T)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{A.N. : } g_{exp} &= \frac{4\pi^2}{\sin 20^\circ} \cdot \frac{(1,2 - 0,8)}{(14,1 - 9,4)} = 9,81 \text{ ms}^{-2}; \\ g_{exp} &= 9,81 \text{ m/s}^2\end{aligned}$$

$$9,7 \text{ ms}^{-2} \leq g_{exp} \leq 9,9 \text{ ms}^{-2}$$

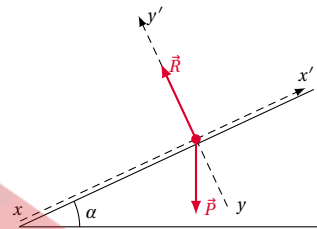
## 13.2.4 Solution – Baccalauréat 2015

## Solution 13. (p. 270)

## Mouvements dans les champs de forces et leurs applications

13.1. Détermination de l'expression de  $a_G$ .

Le bilan des forces extérieures appliquées à la bille étant :



En appliquant le T.C.I à la bille ponctuelle dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, on a :

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}_{ex} &= m \vec{a}_G \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m \vec{a}_G \\ \Rightarrow \begin{cases} \text{Suivant } x'x : P_x = m a_G \\ \text{Suivant } y'y : -P_y + R = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} mg \sin \alpha = m a_G \\ -mg \cos \alpha + R = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Soit  $a_G = g \sin \alpha$

## 13.2. Équations horaires du mouvement de la bille.

Les coordonnées du vecteur accélération dans le repère ci-dessus étant :

$$\vec{a}_G \begin{cases} a_x = g \sin \alpha \\ a_y = 0 \end{cases}$$

on a  $\vec{a}_G = \frac{d\vec{v}_G}{dt}$  d'où les coordonnées du vecteur vitesse :

$$\vec{v}_G \begin{cases} v_x = (g \sin \alpha) t \\ v_y = 0 \end{cases}$$

Et  $\vec{v}_G = \frac{d\vec{OG}}{dt}$  d'où les coordonnées du vecteur position, correspondantes aux équations horaires

$$\vec{OG} \begin{cases} x = \frac{1}{2}(g \sin \alpha) t^2 \\ y = 0 \end{cases}$$

**13.3.** Expression de  $d$  en fonction de  $n$ ,  $g$  et  $\alpha$ .

Cette expression est obtenue en prenant  $x = d$  et  $t = n$  soit

$$d = \frac{1}{2}(g \sin \alpha) n^2$$

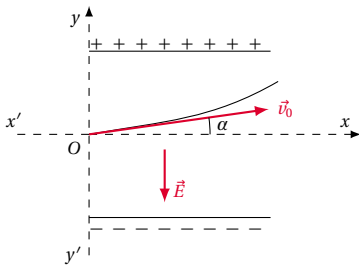
**13.4.** Calcul de  $x$

$$d = \frac{1}{2}(g \sin \alpha) n^2 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2d}{gn^2}$$

A.N. :  $\sin \alpha = 0,153$  d'où  $\alpha = 8,8^\circ = 0,15 \text{ rad}$

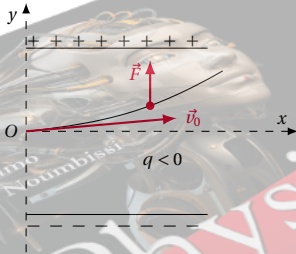
**13.5.** Mouvements d'une particule dans un champ électrique uniforme

**13.5.1.** Schéma traduisant la situation.



**13.5.2.** Calcul de la vitesse de sortie :

Le bilan des forces extérieures appliquées à la particule étant :



En appliquant le T.C.I à la particule dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, on a :

$$\sum \vec{F}_{ex} = m\vec{a}_G \Leftrightarrow F = ma_G$$

par projection dans le repère de la figure :

$$\begin{cases} \text{Suivant } Ox : 0 = ma_{Gx} \\ \text{Suivant } Oy : F = ma_{Gy} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{Gx} = 0 \\ a_{Gy} = \frac{|q|E}{m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_y = \frac{|q|E}{m} t + v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = (v_0 \cos \alpha) t \\ y = \frac{1}{2} \frac{|q|E}{m} t^2 + (v_0 \sin \alpha) t \end{cases}$$

A la sortie

$$x = \ell \Leftrightarrow \ell = (v_0 \cos \alpha) t_s \Rightarrow t_s = \frac{\ell}{v_0 \cos \alpha}$$

d'où

$$\vec{v}_s \begin{cases} v_{sx} = v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_{sy} = \frac{|q|E}{m} t_s + v_0 \sin \alpha \\ = \frac{|q|E}{m} \cdot \frac{\ell}{v_0 \cos \alpha} + v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

d'où

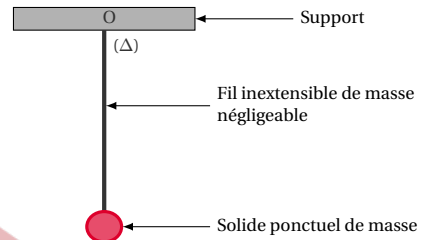
$$v_s = \sqrt{v_{sx}^2 + v_{sy}^2} = \left[ (v_0 \cos \alpha)^2 + \left( \frac{|q|E}{m} \cdot \frac{\ell}{v_0 \cos \alpha} + v_0 \sin \alpha \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

A.N. :  $v_s = 2,81 \times 10^{10} \text{ m s}^{-1}$

### Solution 14. (p. 270)

**Système oscillant**

**14.1.** Schéma d'un pendule simple :



**Description**

Le pendule simple est constitué d'un solide ponctuel, fixé à un support par l'intermédiaire d'un fil inextensible et de masse négligeable, pouvant osciller dans un plan vertical autour d'un axe fixe ( $\Delta$ ) horizontal.

**14.2.**

**14.2.1.** Calcul de la période :

L'équation horaire étant de la forme :

$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

par identification, on a :

$$\omega = \frac{4\pi}{5} \text{ rad s}^{-1} \text{ et } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

A.N. :  $T = 2,5 \text{ s}$

Déduction de la longueur du pendule :

$$\text{on a } T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \Rightarrow \ell = \frac{g T^2}{4\pi^2}$$

A.N. :  $\ell = 1,58 \text{ m}$

**14.2.2.** Expression de l'élongation angulaire :

Les oscillations étant de faible amplitude,  $\sin \theta \simeq \theta = \frac{k}{\ell}$

$$\Rightarrow \theta = \frac{0,22}{\ell} \cos \pi \left( \frac{4}{5} t - \frac{1}{3} \right)$$

## 13.2. Solution des sujets d'examen

$$= 0,14 \cos \pi \left( \frac{4}{5} t - \frac{1}{3} \right) \text{ en rad}$$

$$\theta = 0,14 \cos \pi \left( \frac{4}{5} t - \frac{1}{3} \right) \text{ en rad}$$

Déduction de l'élongation maximale :  
L'élongation ondulatoire étant de la forme :

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \varphi)$$

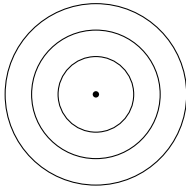
par identification on a :  $\theta_m = 0,14 \text{ rad}$

## Solution 15. (p. 271)

## Phénomènes vibratoires et corpusculaires

## 15.1. Phénomènes vibratoires.

## 15.1.1. Schéma de l'aspect de la surface de l'eau.



## 15.1.2.

## 15.1.2.1. Nature de l'onde :

Onde progressive transversale.

Fréquence de l'onde :  $f = 15 \text{ Hz}$

## 15.1.2.2. Équation horaire du mouvement de la source O :

On admet que le sens positif est ascendant.

L'équation horaire étant de la forme :

$$y_0 = a \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\text{à } t = 0 \quad \begin{cases} y_0 = 0 \\ \dot{y}_0 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \varphi = 0 \\ -\sin \varphi < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \varphi = 0 \\ \sin \varphi > 0 \end{cases} \text{ d'où } \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\omega = 2\pi f = 30\pi \text{ rad s}^{-1}; a = 1 \text{ cm}$$

Soit

$$\begin{aligned} y &= 10^{-2} \cos \left( 30\pi t + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 10^{-2} \sin(30\pi t + \pi) \text{ en m.} \end{aligned}$$

Équation horaire du mouvement d'un point M.

$$\begin{aligned} y_M &= y_0 \left( t - \frac{d}{v} \right) \\ &= 10^{-2} \cos \left[ 30\pi \left( t - \frac{d}{v} \right) + \frac{\pi}{2} \right] \\ &= 10^{-2} \cos \left( 30\pi t - \frac{19\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

$$y_M = 10^{-2} \cos \left( 30\pi t - \frac{19\pi}{2} \right) \text{ en m}$$

## 15.2. La radioactivité.

## 15.2.1. Calcul de la constante radioactive :

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}$$

$$\text{A.N. : } \lambda = 0,34657(\text{jour}^{-1}) = 4,01 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

15.2.2. Masse  $m$  de l'élément que l'on possédait 15 jours plus tôt.

On a :

$$m = m' e^{-\lambda t} \Rightarrow m' = \frac{m}{e^{-\lambda t}} = m e^{\lambda t}$$

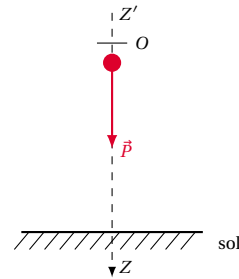
$$\text{A.N. : } m' = 90,5 \text{ g}$$

## Solution 16. (p. 271)

## Expérience

## 16.1. Équation horaire du mouvement : Établir.

Le bilan des forces extérieures appliquées à la masse marquée étant :



En appliquant le T.C.I à la masse marquée, dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, on a :

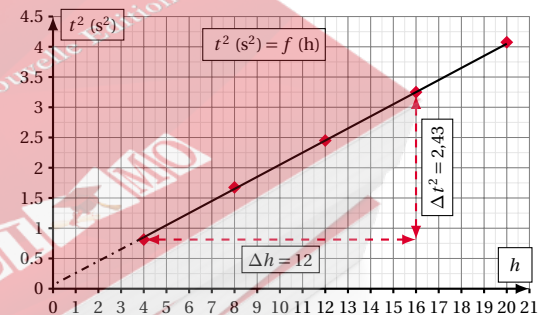
$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_{ex} &= m \vec{a}_G \Leftrightarrow \vec{P} = m \vec{a}_G \Leftrightarrow P = m a_G \\ &\Leftrightarrow mg = m a_G \Rightarrow a_G = g \end{aligned}$$

$$\text{d'où } v = g t \Rightarrow z = h = \frac{1}{2} g t^2$$

16.2. Tracé de la courbe  $t^2 = f(h)$ 

Tableau des valeurs.

$h$ (m)	20	16	12	8	4
$t$ (s)	2,02	1,8	1,56	1,3	0,9
$t^2$ (s <sup>2</sup> )	4,08	3,24	2,43	1,69	0,81



## 16.3. Nature de la courbe.

C'est une droite qui passe par l'origine

## 16.4. Valeur expérimentale de l'accélération de la pesanteur

on a :

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{2}{g} h$$

d'où le coefficient directeur de la droite obtenue sera égal à  $\frac{2}{g_{exp}}$ .

$$\text{Soit } k = \frac{\Delta t^2}{\Delta h} = \frac{2}{g_{exp}} \Rightarrow g_{exp} = 2 \frac{\Delta h}{\Delta t^2}$$

$$\text{A.N. : } g = 2 \left( \frac{16-4}{3,24-0,81} \right) = 9,88 \text{ m s}^{-2}$$

$$g_{exp} = 9,88 \text{ m s}^{-2}$$

$$(9,7 \text{ m s}^{-2} \leq g_{exp} \leq 9,9 \text{ m s}^{-2})$$

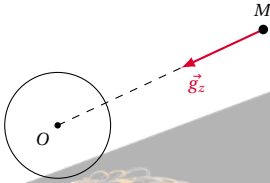
### 13.2.5 Solution – Baccalauréat 2016

#### Solution 17. (p. 271)

##### Mouvements dans les champs

Partie 1 : Champ de gravitation terrestre

**17.1.** Représentation de la terre et du champ de gravitation  $\vec{g}_z$  :



**17.2.** Expression littérales de  $g_0$  et  $g_z$ .

$$g_0 = \frac{G M_T}{R_T^2}, \quad g_z = G \frac{M_T}{(R_T + z)^2}$$

Relation entre  $g_0$  et  $g_z$  :

$$\frac{g_z}{g_0} = \left( \frac{R_T}{R_T + z} \right)^2 \Rightarrow g_z = g_0 \left( \frac{R_T}{R_T + z} \right)^2$$

**17.3.** Montrons que pour

$$z \ll R_T, \quad g_z = g_0 \left( 1 - \frac{2z}{R_T} \right).$$

$$\begin{aligned} g_z &= g_0 \left( \frac{R_T}{R_T + z} \right)^2 = g_0 \left( \frac{R_T}{R_T} \right)^{-2} \\ &= g_0 \left( 1 + \frac{z}{R_T} \right)^{-2} \end{aligned}$$

or :

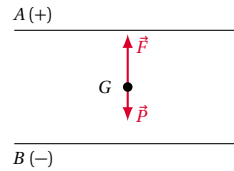
$$z \ll R_T \Rightarrow \frac{z}{R_T} \ll 1 \Rightarrow \left( 1 + \frac{z}{R_T} \right)^{-2} = 1 - \frac{2z}{R_T}$$

$$\text{d'où } g_z = g_0 \left( 1 - \frac{2z}{R_T} \right)$$

Partie 2 : Goutte d'huile électrisée en équilibre dans un champ électrique

**17.1.** Schéma de la situation et représentation des forces

appliquées :



**17.2.** Calcul de la masse de la goutte :

La goutte étant en équilibre, on a :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_{ex} &= \vec{0} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow P = F \\ \Leftrightarrow mg &= |q|E \Rightarrow m = \frac{|q|E}{g} \end{aligned}$$

or :

$$E = \frac{U}{d} \text{ d'où } m = \frac{|q|U}{g \cdot d}$$

$$\text{A.N. : } m = 5 \times 10^{-3} \text{ kg}$$

#### Solution 18. (p. 272)

##### Système oscillants

**18.1.** L'oscillateur étudié n'est pas amorti

Justification :

La courbe  $\theta = f(t)$  est une sinusoïde d'amplitude constante.

**18.2.**

**18.2.1.** Période du pendule :

A partir de la figure à l'exercice 18, on peut écrire la règle de trois ci-dessous :

$$\begin{aligned} 3 \rightarrow 0,6 \text{ s} \\ 6,7 \rightarrow T_0? \end{aligned} \Rightarrow T_0 = \frac{6,7 \times 0,6}{3} = 1,34 \text{ s}$$

d'où :  $1,33 \text{ s} \leq T_0 \leq 1,35 \text{ s}$

Déduction de la longueur du pendule

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \Rightarrow \ell = \frac{g}{4\pi^2} T_0^2$$

$$\ell = g \left( \frac{T_0}{2\pi} \right)^2$$

$$\text{A.N. : } \ell = 0,45 \text{ m}$$

$$0,44 \text{ m} \leq \ell \leq 0,46 \text{ m}$$

**18.2.2.** Équation horaire du mouvement du pendule.

L'équation horaire est de la forme :

$$\theta = \theta_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\text{à } t=0 \begin{cases} \theta = \theta_m \\ \dot{\theta} = 0 \end{cases} \text{ or } \dot{\theta} = -\theta_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\Rightarrow \text{à } t=0 \begin{cases} \theta_m \cos \varphi = \theta_m \\ -\theta_m \omega_0 \sin \varphi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \varphi = 1 \\ \sin \varphi = 0 \end{cases}$$

$$\text{d'où } \varphi = 0 \text{ et } \theta_m = 9^\circ = \frac{\pi}{20} \text{ rad;}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1,34} = 4,69 \text{ rad s}^{-1}$$

$$\theta = \frac{\pi}{20} \cos(4,69 t) \text{ en rad.}$$



## 13.2. Solution des sujets d'examen

18.3. Expression de la vitesse angulaire :

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\pi}{20} 4,69 \sin(4,69t) \\ &= -0,736 \sin(4,69t) \\ \dot{\theta} &= -0,736 \sin(4,69t) \quad (13.1)\end{aligned}$$

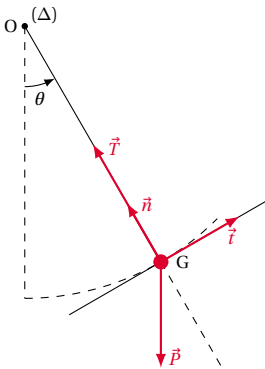
Vitesse angulaire maximale :

$$\dot{\theta} = -\dot{\theta}_{\max} \sin(\omega_0 t)$$

d'où par identification avec la relation (13.1) on a :  $\dot{\theta}_{\max} = 0,736 \text{ rad s}^{-1}$ 

18.4. Équation différentielle du mouvement du pendule :

Le bilan des forces extérieures appliquées au pendule étant :



D'après la deuxième loi de Newton sur le mouvement appliquée au pendule, dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen,

$$\sum \vec{F}_{ex} = m\vec{a}_G \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

En projetant cette relation dans la base de Frenet  $(\vec{n}, \vec{t})$  on a :

$$\begin{cases} \text{Suivant } \vec{n} : \vec{T} + \vec{P}_n = m\vec{a}_n & (13.2) \\ \text{Suivant } \vec{t} : \vec{P}_t = m\vec{a}_t & (13.3) \end{cases}$$

$$(13.3) \Rightarrow -P_t = ma_t \Leftrightarrow -mg \sin \theta = ma_t$$

$$\Leftrightarrow a_t + g \sin \theta = 0$$

or :

$$a_t = \ell \ddot{\theta} \Rightarrow \ell \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$$

Pour les oscillations de faible amplitude  $\theta$  petit

$$\Rightarrow \sin \theta \simeq \theta \text{ (on rad)}$$

$$\text{d'où l'équation : } \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0$$

## Solution 19. (p. 272)

## Phénomènes ondulatoires et corpusculaires

Partie 1. Propagation à la surface libre de l'eau

19.1. Définition

La longueur d'onde est la distance parcourue par l'onde au cours d'une période.

Calcul de la valeur numérique :

$$\lambda = \frac{v}{N}$$

$$\text{A.N. : } \lambda = 1,25 \times 10^{-2} \text{ m}$$

19.2. Comparaison du mouvement des points O et M :

$$\frac{d}{\lambda} = \frac{7,5}{1,25} = 6$$

$$\text{d'où } d = 6\lambda = k\lambda \text{ avec } k = 6 \in \mathbb{Z}$$

donc les points O et M sont en phase.

19.3. Calcul de la distance entre la 2<sup>ème</sup> et la 7<sup>ème</sup> ride :

$$d = (7-2)\lambda = 5\lambda$$

$$d = 5\lambda$$

$$\text{A.N. : } d = 6,25 \times 10^{-2} \text{ m}$$

Partie 2. Effet photoélectrique

19.1. Définition :

L'effet photoélectrique est l'extraction des électrons d'un métal par un rayonnement électromagnétique convenable.

19.2.

19.2.1.

19.2.1.1. Si  $\lambda_0 < \lambda$ ; il n'y a pas effet photoélectrique.19.2.1.2. Si  $\lambda_0 > \lambda$ ; il y a effet photoélectrique.

19.2.2. Calcul de la vitesse maximale.

$$W = W_0 + E_{C_{\max}}$$

$$\Leftrightarrow E_{C_{\max}} = W - W_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = hc \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right)$$

$$v_{\max} = \left[ \frac{2hc}{m} \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{A.N. : } v_{\max} = 4,49 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$$

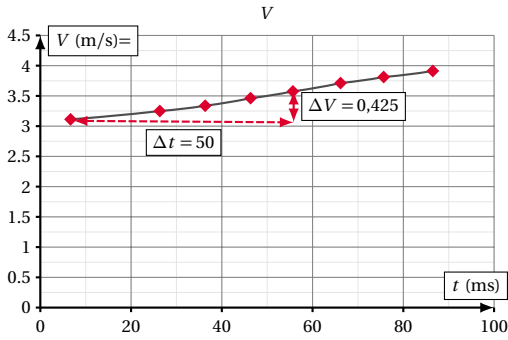
## Solution 20. (p. 272)

## Exploitation des résultats expérimentaux

20.1. Tableau complété :

$t$	0	6	26	36	46
Points ( $G_i$ )	$G_0$	$G_1$	$G_2$	$G_3$	$G_4$
$x(t)$ (cm)	0	6,1	12,5	19,0	25,8
$v(t)$ ( $\text{m s}^{-1}$ )		3,125	3,225	3,325	3,450
$t$	56	66	76	86	96
Points ( $G_i$ )	$G_5$	$G_6$	$G_7$	$G_8$	$G_9$
$x(t)$ (cm)	32,8	40,0	47,5	55,2	63,1
$v(t)$ ( $\text{m s}^{-1}$ )	3,550	3,675	3,800	3,900	

20.2. Graphe  $v = f(t)$  :



**20.3.** Vitesse initiale  $v_0$  :

C'est la valeur de la vitesse à  $t = 0$ .

Sur le graphe nous lisons  $v_0 = 3 \text{ m s}^{-1}$

Valeur de l'accélération :

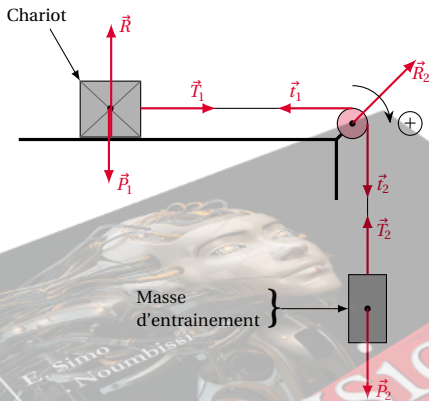
L'accélération est le coefficient directeur de la droite obtenue en représentant  $v = f(t)$  d'où

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{3,55 - 3,125}{4 \times 10^{-3}} = 5,3 \text{ m s}^{-2}$$

$$a = 5,3 \text{ m s}^{-2}; 4,8 \text{ m s}^{-2} \leq a \leq 5,7 \text{ m s}^{-2}$$

**20.4.** Valeur de la masse d'entraînement du chariot.

Le bilan des forces appliquées au système étant :



En appliquant le théorème du centre d'inertie aux systèmes, dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen :

**20.4.1.** Système : le chariot :

$$\sum \vec{F}_{ex} = M \vec{a} \Leftrightarrow \vec{P}_1 + \vec{R}_1 + \vec{T}_1 = M \vec{a}$$

or :

$$\begin{aligned} \vec{P}_1 + \vec{R}_1 &= \vec{0} \Rightarrow \vec{T}_1 + M \vec{a} \\ &\Leftrightarrow T_1 = M a \end{aligned} \quad (13.1)$$

**20.4.2.** Système : La poulie

$$\sum \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_{ex}) = I_{\Delta} \ddot{\theta}$$

or : poulie de masse négligeable  $\Rightarrow I_{\Delta} = 0$  d'où

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{r}_1) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{r}_2) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}) = 0$$

et

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{r}_1) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{r}_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t_2 - t_1)r = 0 \Rightarrow t_1 = t_2 \quad (13.2)$$

**20.4.3.** Système : masse d'entraînement

$$\sum \vec{F}_{ex} = m \vec{a} \Leftrightarrow \vec{P}_2 + \vec{T}_2 = m \vec{a} \quad (13.3)$$

$$\Leftrightarrow P_2 - T_2 = m a \Rightarrow T_2 = m g - m a$$

La ficelle étant de masse négligeable :

$$\begin{cases} T_1 = t_1 \\ T_2 = t_2 \end{cases} \quad (13.4)$$

$$\text{Soit : (13.4) et (13.2)} \Rightarrow T_1 = T_2 \quad (13.5)$$

(13.1) et (13.3) dans (13.5)

$$\Rightarrow M a = m g - m a \Rightarrow m = \frac{M a}{g - a}$$

$$\text{A.N. : } m = 885,2 \text{ g}; 724 \text{ g} \leq m \leq 1041 \text{ g}$$

### 13.2.6 Solution – Baccalauréat 2017

La solution de ce sujet peut être gratuitement téléchargée sur :

[www.simo.education](http://www.simo.education)

