CENTRE D’ENCADREMENT ‘’VAILLANTS HEROS’’

Ce fascicule est conçu pour tous les amoureux des mathématiques élèves tout comme enseignants. Son objectif est de mieux préparer l’élève au Baccalauréat.

Nom :………………………………………………………
Prénom :……………………………………………………
Classe : Terminale D
Ecole :……………………………………………………..

Vol 1.

Fascicule

Mathématiques

TERMINALE D

Conçu par le professeur Giovaldys NGOMENE
Contact **: 06 904 23 01 / 05 607 81 61**
Email **: ngomenegiovaldys@gmail.com**

PREAMBULE

Ce fascicule des Mathématiques est un véritable guide pour tous les amoureux des Mathématiques en classe de Terminale D qui s'en serviront. Il est constitué des exercices d'application type baccalauréat pour chaque chapitre.

L'OBJECTIF

Ce fascicule a pour objectif de bien préparer l'élève de la Terminale D afin qu'il affronte mieux le Baccalauréat.

AVERTISSEMENT

Il est strictement interdit de reproduire ou de photocopier ce fascicule sans le consentement du concepteur sous peine d'une **MALEDICTION ETERNELLE**.

Chapitre I : LES FONCTIONS NUMERIQUES

EXERCICE N°1

On considère la fonction numérique définie par : $\frac{x^3+2x^2}{x^2+1}$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie A :

Soit g la fonction définie sur R par : $g(x) = x^3 + 3x + 4$.

1- On admet que la $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$. Dresse le tableau de variation de g sur R.
2- Calculer $g(-1)$. En déduire le signe de $g(x)$ sur R.

Partie B :

1. Montre que $\forall\ x\ \in R$ $on\ a\ f'(x) = \frac{x[g(x]}{(x^2+1)^2}$
2.
   a) En déduire le sens de variation de f.
   b) Dresse le tableau de variation de f sur R
3. Détermine les réels a, b, c et d tels que : $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2+1}$
4.
   a. Montre que la droite (D) d'équation : $y = x + 2$ est une asymptote à la courbe (C)
   b. Etudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (D)
5. Tracer (C) et (D) dans le plan
6. Soit h la restriction de f sur $[0\ ;\ +\infty[$
   a- Montre que h admet une bijection réciproque notée h^{-1}
   b- Dresse le tableau de variation de h^{-1}
   c- Construis (C') de h^{-1} dans le meme repère que (C) de f.

EXERCICE N°2

Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = 2x + 1 - 3\sin x$

1. Montrer que pour x ∈ R; $2x - 2 \leq f(x) \leq 2x + 4$
2. Calculer la limite f en $-\infty$ et $+\infty$.

EXERCICE N°3

On considère la fonction f à variable réelle définie sur R par :

$$\begin{cases} f(x) = x - 2 + \sqrt{x^2+1} & ; si\ x \geq 0 \\ f(x) = \frac{x^2+x-2}{2-x} & ; si\ x < 0 \end{cases}$$

On note (C) la courbe f dans le plan rapporté au repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, unité graphique 1cm.

1- Etudier la continuité de f en $x_0 = 0$
2- Etudier la dérivabilité de $f\ en\ x_0 = 0$
3- Donner une interprétation géométrique
4-
   a) Montre que la fonction $f'de\ f$ peut s'écrire : $\begin{cases} f'(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} & si\ x \geq 0 \\ f'(x) = \frac{-x(x-4)}{(2-x)^2} & si\ x < 0 \end{cases}$
   b) Donner le sens de variation de f

      NB : On donne : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

   c) Dresser le tableau de variation de f
5-
   a) Montrer que pour tout $x < 0$, la droite $(D): y = -x - 3$ est une asymptote oblique à la courbe (C)
   b) On admet que la droite $(\Delta): 2x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$
   c) Calculer $f(-2)\ et\ f(\frac{3}{4})$
6- Tracer la courbe (C) de f
7- Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$
   a. Montrer que g admet une bijection réciproque notée g^{-1}
   b. Dresser le tableau de variation de g^{-1}
   c. Calculer $(g^{-1})'(0)$
   d. Tracer $(C')de\ g$ dans le meme repère que (C) de f

EXERCICE N°4

Soit la fonction g définie sur R∗ par : $g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Montrer que g est prolongeable par continuité en $x_0 = 0$

EXERCICE N°5

On considère la fonction numérique f définie par : $\begin{cases} f(x) = 1 - sin\pi x & si -5 \leq x \leq 1 \\ f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-2} & si\ x > 1 \end{cases}$

(C) désigne la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, unité graphique : 2cm

1) Détermine l'ensemble de définition de f
2)
   a- Etudier la continuité et la dérivabilité de f au point $x_0 = 1$
   b- En déduire l'ensemble de dérivabilité.
3) Déterminer la période de $\sin \pi x$
4) Pour $x > 1$
   a) Déterminer les réels a et b tel que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$
   b) En déduire que la droite (D): $y = ax + b$ est une asymptote à (C)
   c) Préciser l'autre asymptote à (C)
5) Etudier les variations de f
6) Tracer (C)

EXERCICE N°6

Soit une fonction numérique de variable réelle définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{-x-1} & si\ x \leq -1 \\ f(x) = x\sqrt{1-x} & si -1 < x < 1 \\ f(x) = \sqrt{x^2+2x-3} & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

Partie A

1) Déterminer l'ensemble de définition de f
2) Etudier la continuité de f sur son ensemble de définition
3) Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = -1\ et\ x_0 = 1$. En donnant une interpretation géométrique.
4) Etudier les variations de f
5) Montrer que la courbe (C) de f admet un point d'inflexion
6) Après avoir étudié les branches infinies. Tracer la courbe (C) de f

Partie B :

1- Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $[1, +\infty[$. Montrer que g admet une bijection g^{-1}
2- Dresser le tableau de variation de g^{-1}
3- Tracer (C') de la fonction g^{-1} dans le même repère que (C).

Exercice N°7

Soit f une fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = -x + 4 - \frac{1}{x-1} & si\ x \leq 0 \\ f(x) = \frac{3x-5}{x^2-1} & si\ x > 0 \end{cases}$

On désigne par (C) la courbe de f dans le repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

3. Déterminer l'ensemble de définition de f.
4. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
5. Étudier les branches infinies à la courbe (C) de f.
6. Étudier la continuité de $f\ en\ x_0 = 0$.
7. En déduire l'ensemble de continuité de la fonction f.

EXERCICE N°8

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1}$. Soit (C) la courbe représentative de f dans le plans muni du repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ à gauche ; à droite de -1 et en $+\infty$.
3. Préciser les branches infinies à la courbe (C) de f.
4. Calculer la dérivée f' de la fonction f.
5. Donner le sens de variations de la fonction f.
6. Dresser le tableau de variations de la fonction f

EXERCICE N°9

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}$

On désigne par (C) la courbe de f dans le repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1. Exprimer : $f(x)$ sans barre de valeur absolue
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de : f sur son ensemble de définition.
3. Etudier les variations de f
4. Démontrer que les droites d'équations : $(D): y = x - 3\ et\ (D'): y = -x + 3$ sont asymptotes à la courbe (C).
5. Montrer que $x = 3$ est un axe de symétrie.
6. Tracer la courbe (C) dans un repère.
7. Soit h la fonction définie telle que : $h(x) = -f(x)$
   a) Déduire le tableau de variation de h
   b) Tracer $(C')\ de\ h$ dans le même repère que (C) de f

Chapitre II : NOMBRES COMPLXES

EXERCICE N°1

On considère le polynôme $p(z) = z^3 - (5-i)z^2 + 2(5-3i)z - 8(1-2i)$

1) Démontrer que $-2i$ est une racine de $P(z)$
2) Déterminer deux nombres complexes a et b tels que : $p(z) = (z+2i)(z^2 + az + b)$
3) En déduire la solution dans C, de l'équation $p(z) = 0$
4) On considère les points A, B et C d'affixes respectives $-2i\,; 2+2i\ et\ 3-i.$

   $soit\ U = \dfrac{Z_A - Z_C}{Z_B - Z_C}$
   a) Déterminer le module et un argument de U
   b) En déduire la nature du triangle ABC puis faire la figure.
   c) Déterminer l'affixe du point E, symétrique de A par rapport au milieu I de $[BC]$
5) Soit S la similitude plane directe qui transforme A en B et B en C
   a- Déterminer l'écriture complexe de S
   b- Déterminer l'expression analytique de S
   c- Donner les éléments caractéristiques de S.

EXERCICE N°2 : (BAC 2012)

1) Résoudre dans l'ensemble C des nombres complexes, l'équation

   $(E): z^2 + 8\sqrt{3} - 8i = 0$
   a) En utilisant la forme trigonométrique
   b) En utilisant la forme algébrique ; on pourra admettre que $8 + 4\sqrt{3} = (\sqrt{2} + \sqrt{6})$
2) Placer les images des solutions $z_1\ et\ z_2\ de\ (E)$ sur un cercle trigonométrique
3) Déduire de ce qui précède, la valeur exacte de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\ et\ \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

EXERCICE N°3 (BAC 2015)

On considère l'ensemble C des nombres complexes et on rappelle que $i^2 = -1$

1) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $u = 6 + 6i\sqrt{3}$
2) Soit l'équation (E) définies dans C telle que :

   $(E) : 4Z^3 - 6i\sqrt{3}Z^2 - (9 + 3i\sqrt{3})Z - 4 = 0$
   a. Vérifie que $z_0 = -\frac{1}{2}$ est solution de l'équation (E)

b. Résoudre dans C, l'équation (E)

3) Le plan complexe C est rapporté à un repère orthonormal direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$. On donne les points A, B, C d'affixes respectives $Z_A = -\frac{1}{2}$; $Z_B = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \;\; et \; Z_C = 1 + i\sqrt{3}$
   a- Déterminer l'écriture complexe de la similitude plane directe S qui transforme A en B et B en C.
   b- Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude S.

EXERCICE N°4 (BAC 2016)

Dans le plan complexe C muni d'un repère orthonormal $(0, \vec{u}, \vec{v})$, on considère l'application S définie par : $Z' = (1 + i)Z$

1. Déterminer la nature, le rapport et l'angle de l'application S
2. Soit le point A d'affixe $Z_A = 2i$. Déterminer les affixes des points B et C définis par $S(A) = B \; et \; S(B) = C$
3. Placer les points A, B et C dans un repère du plan
4. Soit le point I milieu du segment $[OC]$. Montrer que le triangle ABI est rectangle et isocèle en B.
5. Ecris une équation de troisième degré dont les affixes $Z_A, Z_B \; et \; Z_C$ définies ci-dessus sont solutions.

EXERCICE N°5 (BAC 2017)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(0, \vec{u}, \vec{v})$, unité 2cm .

On considère le polynôme P définie par : $P(Z) = Z^3 + Z^2 - 2$

1.
   a) Montrer que 1 est la racine de $P(Z)$
   b) Vérifie que $P(Z)$ peut s'écrire sous la forme $P(Z) = (Z - 1)(Z^2 + 2Z + 2)$
   c) Résoudre dans C l'équation $P(Z) = 0$
2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $Z_A = 1$; $Z_B = -1 + i$
   Et $Z_C = -1 - i$
   a) Construire le triangle ABC
   b) Déterminer l'affixe du point D telle que ABCD soit un parallégramme.
3. Soit R la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$
   a) Montrer que l'expression complexe de R est telle que : $Z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
   b) Soit $M \; et \; M'$ les points d'affixes respectives $Z = x + iy \;\; et \; Z = x' + iy'$. Exprimer les coordonnées $x' et \; y'$ du point M' en fonction de x et y de M.

Exercice N°6 **(BAC 2018)**

Le plan complexe C étant rapporté au repère orthonormal direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$Z_A = 1 + 2i$; $Z_B = -1 + 2i$; $Z_C = 1 - i$ et $Z_D = 1$

1.
   a) Déterminer l'affixe $Z_{\overrightarrow{BC}}$ du vecteur $\overrightarrow{BC}$
   b) Déterminer l'expression analytique de la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$
   c) Trouver l'affixe du point A' image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$
2.
   a. Prouver qu'une mesure en radian de l'angle $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) est\ \frac{\pi}{2}$
   b. Ecrire l'expression analytique de la rotation R de centre A et d'angle $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$
   c. Trouver l'affixe du point C' image du point C par la rotation R.
3. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude plane directe S de centre A et qui transforme B en A.

EXERCICE N°7 **(BAC blanc 2019)**

Dans l'ensemble C des nombres complexes, on considère l'équation :

$(E) = Z^3 + (-1 + 2i)Z^2 - (1 + 2i)Z - 3 + 4i = 0$

1- Sachant que $Z_0 = i$ est une solution de l'équation (E), écrire (E) sous la forme $(Z - i)(aZ^2 + bZ + c) = 0$ ou a, b et c sont les nombres complexes à déterminer.
2- Résoudre dans C, l'équation (E)
3- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C les points d'affixes respectives $Z_A = i$; $Z_B = -1 - 2i$ et $Z_C = 2 - 1$
   a) Placer les points A, B et C dans le plan
   b) Montrer que le triangle ABC est isocèle en B
4- Déterminer (t) l'ensemble des points M d'affixe Z tels que : $|Z - i| = \sqrt{10}$ (on pourra poser $Z = x + iy$)
5-
   a- Montrer que $B \in (t)$
   b- Construire (t)
6-
   a) Calculer le produit $Z_A . Z_B$
   b) En déduire que le point C est l'image du point B par la rotation de centre 0, dont on précisera une mesure d'angle.

<u>EXERCICE N°8</u> **(BAC 2020)**

1. Trouver dans l'ensemble C des nombres complexes les nombres Z_1 , Z_2 et Z_3 tels que :
   $$\begin{cases} Z_1 + Z_2 = -3 + i \\ i\bar{Z}_2 = 1 - 2i \\ Z_2 . Z_3 = -1 - 2i \end{cases}$$
2. On considère le polynôme complexe P tel que :
   $P(Z) = Z^3 + (3 - 2i)Z^2 + (1 - 4i)Z - 1 - 2i$
   a) Vérifie que $Z = i$ est une racine de P(Z)
   b) Trouver le nombre complexe Z_0 tel que : $P(Z) = (Z - i)(Z - Z_0)(Z + 2 - i)$
   c) Donner l'ensemble des solutions de l'équation $P(Z) = 0$
3. Dans le plan complexe, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectifs
   $Z_A = -1$; $Z_B = -2 + i$ et $Z_C = i$
   a. Donner l'écriture complexe de la rotation R de centre A et qui transforme B en C
   b. En déduire l'angle de la rotation R.

Chapitre III : FONCTIONS LOGARITHMES ET EXPONENTIELLES

EXERCICE N°1 (BAC 2015)

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $g(x) = x^2 + 3 - 2\ln x$

1. Calculer les limites de g en $x = 0$ à droite et en $+\infty$
2. Calculer la dérivée $g'de\ g$ puis étudier le signe de g'
3. Dresser le tableau de variation de g
4. Etablir le signe de g sur son ensemble de définition.

Partie B

Soit la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2-1}{2x} + \frac{\ln x}{x}$ On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan.

1) Calculer les limites de f en $x = 0$ à droite et en $+\infty$
2) Montrons que la dérivée $f'de\ f$ s'écrit telle que : $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$ puis déduire le signe de f'
3) Dresser le tableau de variation de f
4) Montrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x$ est asymptote à (C) puis étudier la position rélative de (C) et (D) dans le même repère.

EXERCICE N°2

On considère une fonction f définie sur R par $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$

On note par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ l'unité graphique est de 2cm.

Partie A :

Soit la fonction g définie sur R par $g(x) = e^x - x - 1$

1) Etudier les variations de la fonction g sur R. en déduire le signe de $g(x)$.
2) Justifie que pour tout réel x, $(e^x - x)$ est strictement positif.

Partie B :

1.
   a. Calculer les limites de la fonction $f\ en - \infty\ et + \infty$

b. Donner l'interprétation graphique des résultats précédents

2.

a) Calculer la dérivée $f'(x)$ $de\ la\ fonction\ f$

b) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

3.

a- Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

b- Etudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).

c- Tracer la courbe (C), la droite (T) et les asymptotes dans un même repère.

EXERCICE N°3 : **(BAC 2010)**

Partie A :

Soit g la fonction de la variable réelle x définie sur $]-\infty; 0[$ par $g(x) = 2\ln(-x)$.

1) Etudier les variations de g, puis dresser son tableau de variation.
2) Calculer $g(-1)$ et en déduire le signe de $g(x)\ sur\ ]-\infty\ ; 0[$

Partie B :

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -2x + 1 + 2xln|x| & si\ x < 0 \\ f(x) = (x+2)e^{-x} - 1 & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Unité graphique : 1cm.

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2)
   a. Etudier la continuité et la dérivabilité de f au point $x = 0$
   b. Pour $x\ \epsilon\ ]-\infty\ ; 0[$. Exprimer $f'(x)\ en\ fonction\ de\ g(x)$.
3) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation
4) Montrer qu'il existe deux solutions et deux seulement $\sigma\ et\ \beta$ de l'équation $f(x) = 0$ vérifiant les inégalités suivantes : $1 < \alpha < \frac{3}{2}\ \ et - 4 < \beta < -3$ (on ne cherchera pas à calculer $\alpha\ et\ \beta$).
5) Etudier les branches infinies à ©.
6) Tracer la courbe (C)
7) α désigne le réel tel que : $1 < \alpha < \frac{3}{2}$
   a- Calculer l'aire $A(\alpha)$ de l'ensemble des points M des coordonnées $(x\ ; y)$ tels que :
   $\begin{cases} 0 < x < \alpha \\ 0 < y < f(x) \end{cases}$
   b- Calculer la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers 0.

EXERCICE N°4 (BAC 2017)

Partie A :

On considère la fonction g définie sur $]0\,,+\infty[$ $par\ g(x) = -\frac{1}{x} + lnx$

1) Calculer les limites de g en $0^+\ et + \infty$
2)
   a. Calculer la dérivée $g'de\ g\ sur\ ]0,+\infty[$
   b. Dresser le tableau de variation de g
3)
   a- Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha\ \in\ \left]\frac{3}{2};2\right[$
   b- En déduire le signe de $g(x)\ sur\ ]0\ ;\ +\infty[$

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ $par : f(x) = x - (x-1)lnx$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1) Calculer les limites de f en $0^+\ et + \infty$
2)
   a. Montre que la dérivée $f'de\ f\ est\ f'(x) = -g(x)$
   b. Dresser le tableau de variation de f.
   On prendra $\alpha = 1{,}7\ \ et\ f(\alpha) = 1{,}3$
3) On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions $x_0\ et\ x_1\ avec\ x_0\ \in \left]\frac{1}{2}\ ;1\right[$ et $x_1\ \in\ \left]\frac{7}{2}\ ;4\right[$
   a. Etudier la branche infinie à (C)
   b. Tracer la courbe (C)
4) Tracer la courbe (C') de la fonction h définie par $h(x) = -f(x)$ dans le même repère que (C).

EXERCICE N°5 (BAC 2018)

Soit la fonction numérique f à variable réelle x, définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{lnx}{-1+lnx} & si\ x > 0 \\ f(x) = e^{-2x} & si\ x < 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, unité graphique : 2cm.

1- Déterminer l'ensemble de définition de f

2- Vérifier que la fonction f est continue en $x_o = 0$
3- Etudier la dérivabilité de f en $x_o = 0$
4-
   a) Déterminer la fonction dérivée de $f' de\ f$
   b) Dresser le tableau de variation de f.
5-
   a. Préciser les branches infinies à la courbe (C) de f.
   b. Tracer la courbe de (C)

EXERCICE N°6 **(BAC Blanc 2013)**

Soit f la fonction numérique à variable réelle x, définie par :

$$\begin{cases} f(x) = e^{-x} + xe \quad si\ x < 0 \\ f(x) = \cos \pi x \quad si\ x \geq 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, unité graphique : 2cm.

Partie A :

1) Montre que pour $x \geq 0$, f est périodique et que sa période est 2.
2) Montre que la fonction f peut être étudié sur l'intervalle $]-\infty\ ; 2]$
3) Etudier la continuité de $f\ en\ x_o = 0$
4) Etudier la dérivabilité de $f\ en\ x_o = 0$, puis donnez – en les conséquences graphiques.
5) Etudier les variation de $f\ sur\ l'intetvalle\ ]-\infty\ ; 2]$ puis dresser son tableau de variation
6) Etudier les branches infinies à la courbe (C) de f.
7) Tracer la courbe (C) de f.

Partie B :

Soit g une fonction définie sur $]-\infty\ ; 2]\ par\ g(x) = -f(x)$

1. Dresser le tableau de variation de g.
2. Tracer (C') la courbe représentative g dans le même repère que (C) de f.
3. Calculer l'aire A du domaine plan limité par les courbes $(C), (C')$ et les droites d'équations $x = -1\ et\ x = 0$.

EXERCICE N°7 (BAC 2021)

F est fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[\ par\ f(x) = (lnx)^2$

(C) est une courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité graphique :2cm)

Partie A :

1. f' désignant la fonction dérivée de f, montrer que $f'(x) = \frac{2lnx}{x}$
2. Etudier le signe de $f'(x)$
3. Montrer que $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty \quad et \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
4. Dresser le tableau de variation de f
5. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, puis interpréter.
6. Construire (C)

Partie B :

Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[\ par\ g(x) = -f(x)\ et\ (C')$ sa courbe représentative dans le repère $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Comment peut-on déduire $(C')de\ (C)$
2. Sans étudié g, dresser son tableau de variation
3. Construire (C') dans le même repère que (C)

Partie C :

On désigne par H la fonction définie par $H(x) = x(lnx)^2 - 2xlnx + 2x$.

1. Montrer que H est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$
2. Calculer en cm², l'aire de la portion du plan délimitée par les courbes $(C)de\ (C')$ et les droites d'équations respectives $x = 1\ et\ x = e$

EXERCICE N°8

Soit f une fonction définie par : $f(x) = 2\ln(1 + x)$.

On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, unité graphique 2cm.

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
   (b) Calculer les limites de f à droite de -1 et en $+\infty$.
   (c) Préciser les branches infinies à la courbe (C) de f.
2. (a) Calculer la dérivée $f'de\ f$ puis étudier son signe.
   (b) Dresser le tableau de variation de la fonction f
   (c) Tracer la courbe (C).
3. (a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} dont on dressera le tableau de variation.
   (b) Tracer la courbe (C') de f^{-1} dans le même repère que (C).

(c) Calculer $(f^{-1})(4ln2)$.

(d) Expliciter $(f^{-1})(x)$. Puis vérifier le résultat de la question 3.(c).

4. Soit I un intervalle tel que I = [2 ; 3].
   (a) Montrer que pour tout x ∈ I, f(x) ∈ I.
   (b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α ∈ I.
   (c) Montrer que pour tout $x \in I, |f'(x)| \leq \frac{2}{3}$
5. Soit (U_n) une suite numérique telle que : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases} \quad n \in N$
   (a) Montrer que pour tout n ∈ N; $U_n \in I$.
   (b) Montrer que pour tout n ∈ N; $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|U_n - \alpha|$
   (c) En déduire que pour tout n ∈ N : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$
   (d) En déduire que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite
   (e) Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$; $|U_n - \alpha| \leq 10^{-3}$

EXERCICE N°9

Soit f une fonction définie sur R par : $f(x) = -x + 1 - e^x$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. (a) Calculer les limites de f en −∞ et en +∞.
   (b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de −∞.
   (c) Préciser l'autre branche infinie.
2. Calculer la dérivée f' de la fonction f.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Construire la droite (D) et la courbe (C).

EXERCICE N°10

Soit f une fonction définie sur R par : $f(x) = (x - 2)(2e^x - x)$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. (a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en +∞.
   (b) Étudier les branches infinies à la courbe (C).
2. (a) Montrer que pour tout x ∈ R, $f'(x) = 2(x - 1)(e^x - 1)$.
   (b) En déduire le sens de variation de f.
   (c) Dresser le tableau de variation de f.

3. (a) Montrer que pour tout x ∈ R; $e^x - x > 0$.
   (b) En déduire que la courbe (C) coupe l'axe des abscisses en un point unique A que l'on précisera les coordonnées.
4. Tracer la courbe (C).
5. Soit g une fonction définie par : $g(x) = -f(x)$. On désigne par (C') sa courbe.
   (a) Tracer alors la courbe (C).
   (b) En déduire le tableau de variation de g.

Chapitre IV : LES FONCTIONS PUISSANCES

EXERCICE

g est une fonction de la variable réelle x définie par $g(x) = |x|^x \; avec \; x \neq 0$

1) Ecrivez g sans la barre de valeur absolue
2) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$
3) Peut – on prolonger par continuité g en 0 si oui, définir ce prolongement.
4) On donne : $\begin{cases} f(x) = |x|^x \;\; si \; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$
   a) Etudier la dérivabilité de $f \; en \; x_0 = 0$
   b) Etudier les variations de f
   c) Tracer la courbe (C) de f
5) On donne $h(x) = -f(x)$, sans étudier h :
   a) Dresser le tableau de variation de h
   b) Tracer la courbe $(C')de \; h$ dans le même repère que (C) de g.

Chapitre V : STATISTIQUES

EXERCICE N°1 : (BAC 2012)

On considère la série statistique à double variable x et y définie par le tableau ci-après :

x	-2	0	1	a	4
y	-10	-8	b	0	12

1. Déterminer les réels a et b pour que le point moyen G du nuage statistique, ait pour coordonnées $(1;\ -2)$
2. Dans la suite, on prendra $a = 2\ et\ b = -4$.
   a) Représenter graphiquement les points du nuage de cette série statistique.
   b) Déterminer l'équation de la droite de régression de $x\ en\ y$.
   c) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre $x\ et\ y$ puis interpréter le résultat.

EXERCICE N°2 : (BAC 2013)

Les caractères X et Y sont distribués suivant le tableau à double entée ci-après :

X \ Y	-1	0	2
-2	4	0	2
-1	3	5	0
0	2	1	2

1) Dresser la loi marginale de X et celle de Y
2) Trouver les coordonnées du point moyen $G(\bar{X}\ ;\ \bar{Y})$
3) Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en X
4) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique.

EXERCICE N°3 : (BAC 2015)

On considère la série statistique (x_i, y_j, n_{ij}) représentée par le tableau à double entées suivant :

X \ Y	-1	1
-1	2	1
0	3	2
2	1	1

1- Déterminer les deux séries marginales

2- Déterminer les coordonnées $\bar{X}\ et\ \bar{Y}$ du point moyen du nuage statistique.
3- Calculer l'inertie du nuage par rapport au point moyen G
4- Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.

EXERCICE N°4 : **(BAC 2016)**

Soit le tableau statistique à double entrée

X \ Y	0	1	2
-1	1	m	1
1	1	0	2
2	2	3	n

1) Déterminer les lois marginales de X et Y en fonction de n et m.
2) Déterminer m et n, sachant que le point moyen du nuage statistique est $G(1\,;1)$
3) On pose $m = 1\ \ et\ \ n = 1$
   a. Déterminer l'équation de la droite de régression linéaire de y en x, sachant que la covariance de x et y est égale à $-\frac{1}{12}$; la variance de x est $\frac{1}{2}$ et celle de y est $\frac{1}{6}$
   b. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y.

EXERCICE N°5 **(BAC 2018)**

Le tableau ci-dessous représente le couple (x, y) des deux caractères d'une série statistique. X est le nombre de jours et y le poids en mg d'une larve.

x	1	2	3	4	5	6
y	0,2	1,4	1,8	2	2,6	3

1) Calculer les coordonnées $\bar{x}\ et\ \bar{y}$ du point moyen G
2) Déterminer l'équation de la droite de régression linéaire de y en x.
3) Estimer le poids de la larve au $7^{ème}$ jour.

EXERCICE N°6 : **(BAC 2021)**

Une entreprise a mis au point un nouveau produit et cherche à fixer le prix de vente.

Une enquête est réalisée auprès des clients potentiels : les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous.

Y : représente le nombre d'exemplaires du produit.

X : représente le prix de vente du produit en milliers de francs CFA.

X \ Y	1	2	3
0	6	3	1
1	4	11	3
2	1	10	16
3	0	5	13
4	2	1	4

1. Déterminer les séries marginales respectives de X et de Y
2. Déterminer les variances de X et de Y, sachant que le point moyen G est $G(1{,}93\,;2{,}3)$
3. On donne cov(X, Y) = 0,44
   Déterminer, par la méthode des moindres carrés, l'équation de la droite (D) de régression de Y en fonction de X.
4. Calculer le coefficient de corrélation linéaire.

EXERCICE N°7

On considère un tableau linéaire suivant :

X	-1	-2	2	-1	-1	-1	-2	2	-1	2
Y	1	1	-2	-1	1	1	1	1	1	-2

1) Déterminer le tableau statistique à double entrée de cette série
2) Représenter le nuage statistique à cette série statistique dans un repère orthonormé
3) Déterminer les marginales de x et de y
4) Déterminer les droites de régression de y en x et de x en y.

Chapitre VI : ALGEBRE LINEAIRE

EXERCICE N°1 (BAC 2006)

On définit une application f d'un plan vectoriel (P) dans lui-même par :

$$\begin{cases} f(\vec{\imath}) = \frac{1}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath} \\ f(\vec{\jmath}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath} - \frac{1}{2}\vec{\jmath} \end{cases}$$

Ou $B = (\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ est une base orthonormée de (P)

1- Ecrire la matrice M de l'application f dans la base B
2- Montrer que f est un endomorphisme bijectif.
3- Déterminer l'ensemble F défini par : $F = \{\vec{u} \in (P)\ ;\ f(\vec{u}) = \vec{u}\}$
4- Quelle est la nature de f ?

Exercice N°2 (BAC 2011)

L'espace vectoriel R^3 étant rapporté à une base $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère l'application f de R^3 dans R^3 qui à tout vecteur $\vec{U}(x, y, z)$ associe le vecteur $U' = f(U)$ dont les composantes (x', y', z') dans la base $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont définies par : $\begin{cases} x' = -x + ay + 2z \\ y' = x + 2y + z \qquad ; a \in R \\ z' = x + y \end{cases}$

1) Ecrire la matrice de l'application f dans la base $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$
2) Pour quelle valeur de a f est-elle bijective ?
3) Dans la suite, on pose $a = 1$
   a) Déterminer l'ensemble E des vecteurs de R^3 invariants par f
   b) Déterminer le noyau Kerf de f et l'image Imf de f. En déduire une base pour chacun des sous-ensembles.
4) Soit $\vec{u}$ un vecteur de R^3 de composantes $(1, \alpha, \beta)$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ calculer $\alpha\ et\ \beta$ pour que $\vec{u} \in Kerf$.

EXERCICE N°3 (BAC 2015 session de remplacement)

Soit E le plan vectoriel rapporté à sa base canonique $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On donne les vecteurs : $\vec{e_1} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\vec{e_2} = \overrightarrow{2\imath} + \overrightarrow{3\jmath}$, on considère l'endomorphisme f ; de E telle que $f(\vec{e_1}) = \vec{e_1}\ et\ f(\vec{e_2}) = \vec{0}$

1- Vérifier que $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est une base de E

2- Ecrire la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$
3- Soit $\overrightarrow{u'} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$ image de $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ par endomorphisme f ; $f(\vec{u}) = \overrightarrow{u'}$
   a) Montrer que $f(\vec{\imath}) = 3\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}\ \ et\ \ f(\vec{\jmath}) = -2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$
   b) Exprimer les coordonner $x'et\ y'de\ \overrightarrow{u'}$ en fonction de coordonnées x et y de $\vec{u}$.
   c) Calculer $fof(\vec{u})$
   d) En déduire la nature de f.
   e) Déterminer les caractéristiques de f.

__EXERCICE N°4__ **(BAC 2016)**

L'espace vectoriel R² est rapporté à sa base canonique $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit f l'endomorphisme de R² défini dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ par : $f(\vec{\jmath}) = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}\ \ et\ fof(\vec{\jmath}) = \vec{\jmath}$

1. Calculer $f(\vec{\imath})\ \ et\ fof(\vec{\imath})$
2. En déduire la nature de l'application f
3.
   a) Qu'est-ce qu'un automorphisme ?
   b) Prouver que f est un automorphisme involutif
   c) Caractériser l'application f
4. Soit les valeurs $\vec{u} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}\ \ et\ \vec{v} = -3\vec{\imath} + \vec{\jmath}$
   a) Montrer que $B' = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de R²
   b) Ecrire la matrice de f dans la base B'.

__Exercice N°5__ **(BAC 2017)**

Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base du plan vectoriel E, f désigne l'endomorphisme de E tel que :

$$\begin{cases} 5f(\vec{\imath}) = a\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} \\ f(\vec{\jmath}) = \dfrac{4}{5}\vec{\imath} - \dfrac{3}{5}\vec{\jmath} \end{cases}$$

1- Déterminer la matrice de f dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$
2- Déterminer l'expression analytique de f
3- Déterminer le réel a pour que f soit une symétrie vectorielle.
4- On pose : a = 3
   a) Déterminer les éléments caractéristiques de f (base et direction)
   b) Déterminer un vecteur directeur $\overrightarrow{e_1}$ de la base.
   c) Déterminer un vecteur directeur $\overrightarrow{e_2}$ de la direction
   d) Soit $\overrightarrow{e_1} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}\ \ et\ \overrightarrow{e_2} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ deux vecteurs, démontrer que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base de R².
   e) Donner la matrice de f relativement à la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$

EXERCICE N°6 **(BAC 2020)**

Soit $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la base canonique de R². on considère les vecteurs $\vec{u} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\vec{v} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$

1)
   a) Prouver que la famille $B' = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de R^3.
   b) Ecrire les vecteurs $\vec{\imath}\ et\ \vec{\jmath}$ dans la base B'
2) On considère l'endomorphisme f de R² défini par :
   $\begin{cases} f(u) = \vec{u} \\ f(v) = -\vec{v} \end{cases}$
   a- Calculer $f(\vec{\imath})\ et\ f(\vec{\jmath})$ en fonction de $\vec{\imath}\ et\ \vec{\jmath}$
   b- Montrer que $fof(\vec{\imath}) = \vec{\imath}\ \ et\ fof(\vec{\jmath}) = \vec{\jmath}$
   c- En déduire la nature de f.
   d- Donner alors la base E et la direction D de f

Chapitre VII : PROBABILITES

EXERCICE N°1 **(BAC 2008)**

On lance un dé pipé à six faces numérotés de 1 à 6. On désigne par Pi la probabilité de la face non visible telle que $P1 \in \left\{-2;\ -1;\ 0;\ \frac{4}{3}\ ; 2; 3; 4\right\}$. Les réels Pi sont en progression arithmétique.

1) Démontrer que Pi = 0 ; puis déterminer la raison r de cette progression.
2) Déterminer les probabilités P2 ; P3 ; P4 ; P5 et P6.
3) On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque lancer du dé, on associe le numéro de la face non visible :
   a) Déterminer la loi de probabilité de X
   b) Calculer l'Esperance mathématique E(x) et la variance V(x) de x.
   c) Définir la fonction F de répartition de X puis la construire.

EXERCICE N°2 **(BAC 2010)**

Une urne contient deux boules blanches et trois boules noirs toutes indiscernables au toucher ; on tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne et on note leur couleur. On définit sur l'univers Ω de cette expérience aléatoire de la variable aléatoire réelle X par :

X = -1, si les deux boules tirées sont blanches.

X = 0, si l'une des boules tirées est blanche et l'autre est noire

X = 1, si les deux boules tirées sont noires.

1) Déterminer la loi de probabilité de X
2) Calculer l'Esperance mathématique de X
3)
   a- Définir la fonction de répartition F de X
   b- Tracer la courbe représentative de F dans un repère orthogonal ; (on prendra 1cm en abscisse et 5cm en ordonnée pour unités graphique).

Exercice N°3 **(BAC 2017)**

On rappelle que la fonction de répartition d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau :

X	$]-\infty\ ;\ x_1[$	$[x_1\ ;\ x_2[$	$[x_2\ ;\ x_3[$	…	$[x_n\ ;\ +\infty[$
F(x)	0	P_1	$P_1 + P_2$	…	$P_1 + P_2 + \cdots + P_n$

Ou P_i est la probabilité associée à la valeur x_i

Soit la fonction de répartition F d'une variable aléatoire X, définie par le tableau ci-après.

X	$]-\infty\,;\,2[$	$[2\,;\,3[$	$[3\,;\,4[$	$[4\,;5[$	$[5\,;6[$	$[6\,;\,+\infty[$
F(x)	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{1}{3}$	1

1) Donner les valeurs exactes prises par X
2) Etablir la loi de probabilité de X
3) Calculer : l'Esperance mathématique.

EXERCICE N°4 **(BAC 2019)**

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	a	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	b

1) Calculer l'Esperance mathématique de X en fonction de a et b.
2)
   a) Déterminer les réels a et b tels que : $E(x)=\frac{3}{2}$
   b) Calculer la variance de X et l'écart-type.
3) Donner la fonction de répartition de X.

EXERCICE N°5

Un sondage effectué à la ville de Brazzaville à propos de la construction d'un pont reliant Brazzaville et Kinshasa donne les résultats suivants : 60% des personnes interrogées sont contre la construction de ce pont. Parmi les personnes qui sont contre cette construction, 80% sont des écologistes.

Parmi les personnes favorables à la construction, 35% sont des écologistes. On note C l'événement " la personne interrogée est contre la construction " et E l'événement " la personne interrogée est écologiste ".

1. Traduire les pourcentages de l'énoncé en langage des probabilités.
2. Construire l'arbre pondéré illustrant cet événement.
3. Déterminer les probabilités suivantes : P(E ∩C) et P(E ∩$\bar{C}$).
4. Déterminer la probabilité que la personne interrogée est écologiste.

5. Déterminer la probabilité que la personne interrogée est favorable à la construction du pont.
6. Déterminer la probabilité de l'événement " la personne interrogée est favorable à la construction sachant qu'elle n'est pas écologiste ".
7. Déterminer la probabilité de l'événement " la personne interrogée est contre la construction sachant qu'elle est écologiste ".

EXERCICE N°6

Chaque jour, Prince premier ne peut pas utiliser son portable au travail lorsque l'un des deux événements suivants se produit :

. D : " Son portable est déchargé "

. O : " Il a oublié son portable chez lui ".

On suppose que ces deux événements sont indépendants.

Il a observé, d'une part, que la probabilité de D est égale à $\frac{1}{20}$ et, d'autre part, qu'il oublie son portable chez lui un jour sur dix.

1. Répondre par vrai ou faux, si les événements D et O sont indépendants, alors les événements $\overline{D}$ et O sont aussi indépendants.
2. Un jour de travail donné, quelle est la probabilité que prince premier oublie son portable chez lui et qu'il ne soit pas déchargé ?
3. Un jour de travail donné, quelle est la probabilité qu'il ne puisse pas se servir de son portable ?
4. Au cours d'une semaine, il travaille 5 jours. On admet que le fait qu'il oublie son portable chez lui un jour donné est indépendant du fait qu'il l'oubli ou non les autres jours. Quelle est la probabilité de l'événement A : " Il a oublié son portable chez lui au moins une fois dans la semaine "?

Chapitre VIII : INTEGRALES D'UNE FONCTIONS

EXERCICE N°1

Soit f une fonction définie sur $R_+ \ par : f(x) = e^x - \sqrt{x}$

1. Déterminer une primitive de F sur R_+ de f.
2. Déterminer une primitive F de f sur R_+ qui prend la valeur 1 en 0.

EXERCICE N°2

Déterminer la primitive F de $f(x) = x^2 + x + 1$ qui prend la valeur 2 $en\ x_0 = 1$

EXERCICE N°3

Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 (x+3)dx \quad ; \quad B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \, dx \quad ; C = \int_0^2 (3x^2 - 4x + 5)dx$$

EXERCICE N°4

1) Calculer à l'aide d'une intégration par partie :

$$D = \int_0^1 xe^x dx \ \ ; \ E = \int_1^2 x^2 \ln x \, dx \ ; F = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{cos^2 x} dx \ \ ; \ G = \int_0^1 x^2 e^x dx$$

2) On donne : $U_n = \int_{e^{n-1}}^{e^n} \frac{2lnx}{x} dx$
   Calculer U_1 ; U_2 ; U_3

3) Calculer $H = \int_2^4 \frac{1}{t+3} dt$

EXERCICE N°5

On donne : $g(x) = \frac{-2x^2+3x+23}{2x+5}$

1. Montrer que g(x) peut s'écrire sous la forme : $ax + b + \frac{c}{2x+5}$ puis identifie a, b et c
2. Calculer $K = \int_{-1}^4 g(x)dx$

EXERCICE N°6 (BAC 2011)

Partie A :

1) Montrer qu'il existe deux nombres réels a et b tels que :

$$\forall\ t \in R - \{-1\} \ ; \ \frac{1-t}{1+t} = a + \frac{b}{1+t}$$

Calculer $\int_0^x \frac{1-t}{1+t}$

Partie B

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$f(x) = -x + ln[(x+1)^2]$ (ou ln désigne le logarithme népérien)

1) Donner l'ensemble de définition de f.
2) Déterminer les variations de f
3) Dresser le tableau de variation de f
4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]2\,;3[$
5) Calculer $f(x) et\ f'(x)$ pour les valeurs de x suivantes : -2 ; $-\frac{3}{2}$; 0 ; 5
6) Etudier les branches infinies à (C)
7) Tracer la courbe représentative (C) de f dans un plan (P) muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ainsi que les tangentes à cette courbe aux points d'abscisses : -2 ; 0 (unité graphique : 1cm)

Partie C :

Soit h la fonction définie par $h(x) = -f(x) pour\ tout\ x \in]-1\,; +\infty[$

1. Dresser le tableau de variation de h
2. Tracer (C') la courbe de la fonction h dans le même repère que (C).

EXERCICE N°7

Soit f une fonction définie sur $R_+^*\ par\ f(x) = 1 - \ln x$. On désigne par (C) sa courbe représentative rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, unité graphique 1cm.

1. Calculer les limites de f à sa droite de 0 et $+\infty$.
2. Calculer la dérivée $f'de\ f$
3. (a) Dresser le tableau de variation de f.
   (b) Étudier les branches infinies à la courbe (C) de f.
4. Tracer la courbe (C) de f.
5. Calculer l'aire A du domaine plan délité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 1 et x = 2.

EXERCICE N°8

Soit f une fonction définie sur [0 ; +∞[par : $f(x) = xe^{-x+2}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (Unité graphique 2cm).

1. (a) Calculer l'image de 0 par f et la limite de f en +∞.
   (b) Préciser la branche infinie à la courbe (C).
2. (a) Calculer la dérivée $f'de\ f$ puis étudier son signe.
   (b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
   (c) Tracer la courbe (C) de f.

3. Pour tout naturel n on a : $U_n = \int_0^3 x^n e^{-2x} dx$

   (a) Calculer I_0.

   (b) En intégrant par parties, montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$(n+1)I_n - 2I_{n+1} = 3^{n+1}e^{-6}$$

   (c) En déduire les valeurs $I_1\ et\ I_2$.

4. On définit le solide S obtenu par révolution autour de l'axe $(0x)$ de la courbe d'équation $y = f(x)$ pour 0 ≤ x ≤ 3 dans le plan (xOy). On rappelle que le volume V du solide est donné en unités de volume par : $V = \pi \int_0^3 [f(x)]^2 dx$

   (a) Exprimer V en fonction de I_2.

   (b) Déterminer alors une valeur approchée à $1cm^3$ près du volume du solide.

Chapitre IX : EQUATIONS DIFFERENTIELLES

EXERCICE N°1 (BAC 2012)

Partie A :

1. Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 2y + y = 0$
2. Déterminer la solution particulière u, sachant que $u(0) = 1 \; et \; u'(0) = 0$

Partie B

Soit f, la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f : \begin{cases} f(x) = (x+1)e^{-x} & ; si \; x \leq 0 \\ f(x) = 1 - 2x + xlnx & ; si \; x > 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan (unité graphique : 2cm)

3. Préciser l'ensemble de définition de f ;
4. Etudier la continuité et la dérivabilité de $f \; en \; x_0 = 0$
5. Etudier les variations de f, on dressera un tableau de variation de f
6. Pour $x \leq 0$, déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses et écrire une équation cartésienne de la tangente (T) à (C) en ce point.
7. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in \;]6 ; 7[$. On ne demande pas de calculer α.
8.
   a) Etudier les branches infinies à (C)
   b) Tracer la courbe (C) de f et la droite (T)

Partie C

Soit h, la fonction numérique de la variable réelle x, définie par :

$\forall \; x \in R \; ; h(x) = -f(x)$

9.
   a- Dresser le tableau de variation de h
   b- Tracer la courbe (C') représentative de h dans le même repère que (C) de f
   c- Calculer en cm², l'aire A du domaine (D) limité par les courbes (C) ; (C') et les droites d'équations $x = -1 \; ; x = 0$

EXERCICE N°2

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y'' + 2y' - 3y = 0$, vérifiant $f(0) = 3 \; et \; f'(0) = 1$.

2) $4y'' - 4y' + y = 0$, vérifiant $g(0) = 4 \; et \; g'(0) = 2$.

EXERCICE N°3

On considère l'équation différentielle : $(E) = y' + 3y = -x + 5$

1- Déterminer la solution particulière de (E')

2- Résoudre l'équation différentielle (E) : $y' + 3y = 0$

3- En déduire les solutions de (E).

EXERCICE N°4

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - y = 2cosx$.

1. Montrer que la fonction g définie par : $g(x) = -cosx + sinx$ est solution de (E).
2. Démontrer φ est solution de (E) si et seulement si $f = \varphi - g$ est solution de $(E'): y' - y = 0$
3. En déduire toutes les solutions de (E).

EXERCICE N°5

1) On considère l'équation différentielle $y'' - y' - 6y = -6x - 1$ (1)
   a. Déterminer les réels a et b tels que la fonction polynôme g définie par $g(x) = ax + b$ soit solution de (1).
   b. En déduire l'ensembles des solutions de l'équation (1)
   c. Trouver la solution particulière de l'équation (1) vérifiant : $f(1) = 2 \; et \; f'(1) = 4$

2)
   a) Démontrer que f, une fonction dérivable sur R est solution de (1) si et seulement si $f - g$ est solution de l'équation différentielle $y'' - y' - 6y = 0$ (2)
   b) Résoudre l'équation différentielle $y'' - y' - 6y = 0$

Chapitre X : SUITES NUMERIQUES

EXERCICE N°1 : (BAC 2006)

On considère la suite (U_n) ; n entier naturel, telle que :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \ et \ U_1 = 4 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n + U_{n+1}}{2} \quad \forall\, n > 1 \end{cases}$$

Soit la suite $(V_n), n \in N$, définie par $(V_n) = U_{n+1} - U_n$

1. Démontrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme V_0 et la raison q.
2. Exprimer le terme V_n en fonction de n
3. Calculer la somme $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_{n-1}$
4. Etudier la convergence de S_n
5. Exprimer le terme général U_n en fonction de n. puis calculer la limite de U_n quand n tend vers l'infini.

EXERCICE N°2 (BAC 2007)

On considère la suite (V_n) de premier terme $V_0 = 3$, définie par : $\forall\, n \in N$,

$$V_{n+1} = \frac{-1 + 4V_n}{2 + V_n}$$

1.
   a) Démontrer en raisonnant par récurrence que $\forall\, n \in N, V_n \geq 1$
   b) Démontrer que la suite (V_n) est décroissante
   c) Déduire que (V_n) est convergente puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$
2. Soit (U_n) la suite définie par : $\forall\, n \in N,\ U_n = \frac{1+8V_n}{-1+V_n}$,
   a. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$
   b. Démontrer que la suite (U_n) est une suite arithmétique croissante
   c. Exprimer V_n en fonction de n.

EXERCICE N°3 : (BAC 2014)

Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(0, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on considère la fonction g de la variable réelle x, définie par : $g(x) = \frac{e^x}{e^x+1} - x$.

1- Préciser l'ensemble de définition de g.
2- Déterminer $g'(x)$, la fonction dérivée de g puis en déduire son signe.
3- Dresser le tableau de variation de g
4- Démontrer que l'équation $\frac{e^x}{e^x+1} = x$ admet une solution unique $\alpha \in\ ]-\infty\,;\,+\infty[$

5- Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$. Soit (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. Unité graphique 2cm
   a) Montrer que pour tout x élément de R, $h'(x) > 0$
   b) Dresser le tableau de variation de h.
   c) En déduire que pour tout $x \in R, 0 \leq h(x) \leq 1$

6- On définit la suite $(U_n), n \in N, par$ $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = h(U_n) \end{cases}$
   a. Démontrer en utilisant le raisonnement par récurrence que (U_n) est majorée par 1
   b. Démontrer en utilisant le raisonnement par récurrence que (U_n) est croissante
   c. En déduire la convergence de (U_n), puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \alpha$

EXERCICE N°4

On considère deux suites $(U_n)\ et\ (V_n)$ définies pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n + V_n}{2} \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} V_0 = 4 \\ V_{n+1} = \dfrac{U_{n+1} + V_n}{2} \end{cases}$$

1) Calculer U_1 ; V_1 ; $U_2\ et\ V_2$
2) Soit la suite (W_n) définie pour tout entier naturel n par $W_{n+1} = V_n - U_n$
   a- Montrer que la suite (W_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme à déterminer.
   b- Exprimer (W_n) en fonction de n, puis préciser la limite de la suite (W_n) à l'infini
3)
   a. Etudier le sens de variation des suite $(U_n)\ et\ (V_n)$.
   b. Démontrer que les suites $(U_n)\ et\ (V_n)$ sont adjacentes.

EXERCICE N°5 (BAC 2002)

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = e \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n}\ , \quad \forall n \in N \end{cases}$

On pose pour tout n de N, $V_n = \ln U_n$

a- Démontrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
b- En déduire l'expression de (V_n) en fonction de n, puis celle de (U_n) en fonction de n
c- Calculer $P_n = U_0.U_1.U_2.U_3 \dots U_n$ en fonction de n
d- Etudier la limite de P_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE N°6

Soit $(U_n), n \in N^*$ la suite définie par : $U_n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$

1. Calculer U_2 ; $U_3\ et\ U_4$
2. Démontrer par récurrence que $\forall\ n\ \in N^*, U_n = 2^{n+1} - 2$

EXERCICE N°7

Soit $(U_n), n \in N$une suite numérique définie par : $U_n = \frac{2n}{n+1}$

1- Montrer que la suite (U_n) est minorée par 0.
2- Montrer que la suite (U_n) est majorée par 2
3- En déduire que la suite (U_n) est bornée

Chapitre XI : LES COURBES PARAMETREES

EXERCICE N°1

Dans le plan P rapporté au repère orthonormé, on considère la courbe (C) dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x(t) = -1 + 2\cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$ $t \in R$

1. Définir la fonction vectorielle F associée à (C).
2. Montrer que F est périodique de période T = 2π.
3. a) Par quelle transformation ponctuelle le point M(−t) se déduit-il de M(t) ?

   b) En déduire que F peut être étudiée sur l'intervalle [0 ; π].
4. Étudier les variations de x(t) et y(t) et dresser le tableau de variation de F.
5. Tracer la courbe (C).

EXERCICE N°2

Dans le plan P rapporté au repère orthonormé, on considère la courbe (C) dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases}$ $t \in R$

1. Définir la fonction vectorielle F associée à (C).
2. a) Montrer que F est périodique de période T = 2π.

   b) Par quelle isométrie le point M(−t) se déduit-il de M(t) ?

   c) Par quelle isométrie le point M(π −t) se déduit-il de M(t)?

   d) Préciser le domaine d'étude de F.
3. Étudier les variations de F.
4. Construire la courbe (C) représentative de la fonction F.

EXERCICE N°3

Dans le plan rapporté au repère orthonormé, on considère la courbe (C), ensemble des points M(t) dont les coordonnées sont définies par : $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\ln|t| \\ y(x) = t\ln|t| \end{cases}$ $t \in R^*$

1. a) Par quelle isométrie le point M(−t) se déduit-il de M(t) ?

   b) Par quelle isométrie le point $M\left(\frac{1}{t}\right)$ se déduit-il de M(t)?
2. En déduit que l'intervalle R∗ peut être réduit à]0 ; 1].
3. Tracer (C).

Chapitre XII : ARITHMETIQUE

EXERCICE N°1

On donne A = 72

1. Décomposer A en produit de facteurs premiers.
2. Quel est le nombre de diviseurs positifs de A ?
3. Déterminer l'ensemble de diviseurs positifs de A.

EXERCICE N°2

1. Vérifier que 999 est divisible par 27.
2. En déduire que pour tout entier naturel n, $10^{3n} \equiv 1[27]$.
3. On donne $\alpha = 10^{100} + 100^{10}$. Quel est le reste de la division euclidienne de α par 27.
4. Comment faut-il choisir n pour que $\beta_n = 2^n - 1$ soit divisible par 9?

EXERCICE N°3

On donne : $B_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ où n ∈ N.

1. Montrer que B_n est divisible par 7.
2. En déduire le reste de la division euclidienne de B_{2020} par 7.
3. (a) Déterminer suivant les valeurs de n le reste de la division de 5^n par 7.

   (c) En déduire le reste de la division de 5^{2020} et 5^{2021} par 7.

EXERCICE N°4 :

Résoudre dans Z les équations suivantes : $(E) : 5x \equiv 3[7]$

EXERCICE N°5 :

Soit l'équation (E) : $109x - 226y = 1$ où x et y sont des entiers naturels.

1. Déterminer le PGCD(109 ; 226). Que peut-on en déduire pour (E).
2. (a) Vérifier que le couple (141 ; 68) est une solution particulière de (E).

   (b) En déduire la solution générale de l'équation (E).
3. Dans la suite, A est l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à 226.
   Pour tout a ∈ A, f et g sont deux fonctions définies de la manière suivante : f associe le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227 et g le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227.

(a) Vérifier que $g[f(0)] = 0$.

(b) Montrer que 227 est un nombre premier.

(c) En déduire que pour $a \neq 0$, $a^{226} \equiv 1[227]$.

1) En déduire que pour $a \neq 0$, $g[f(\alpha)] = \alpha$.

EXERCICE N°6

On considère dans Z^2 l'équation : $(E) = 148x - 97y = 1$.

1. a) Montrer que $(-19,-29)$ est une solution particulière de (E).

   b) Résoudre dans Z^2, l'équation (E).

3. a) Déterminer l'inverse modulo 148 de l'entier naturel 97.

   b) Prouver que 149 est un nombre premier.

   c) Soit p un entier naturel non nul tel que : $p \leq 148$.
   Montrer, en utilisant le petit théorème de Fermat que : $p^{148} \equiv 1[149]$.

4. Soit $a \in \{2,3, 4,...,148\}$. On pose $S(a) = 1+a+a^2 +...+a^{147}$.

   a) Montrer que a^{148} et $a-1$ sont premier entre eux.

   b) Montrer que 149 divise S(a).

EXERCICE N°7

1- a) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11 ?

   1. Quel est le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5 ?
   2. En déduire que $6^{40} \equiv 1[11]$ et que $6^{40} \equiv 1[5]$.
   3. Démontrer que $6^{40} -1$ est divisible par 55.

2- Soit (S) et (S0) deux systèmes définis par : (S) : $(S)\begin{cases} a \equiv 3[65] \\ a \equiv 4[40] \end{cases}$ et $(S)\begin{cases} b \equiv 3[17] \\ b \equiv 4[40] \end{cases}$

   (a) Montrer que les systèmes (S) et (S') sont équivalents respectivement aux équations $(E) : 65x - 40y = 1 \ et\ (E'): 17x - 40y = 1\ avec\ (x\ ,y) \in Z^2$.

   (b) Montrer que l'équation (E) n'admet pas de solution dans Z^2.

   (c) Montrer que l'équation (E') admet au moyen une solution dans Z^2.

3- Montrer que l'équation (E') est équivalente à l'équation (E'') : $17x \equiv 1[40]$.

   a- Donner l'inverse modulo 40 de 17.

   b- En déduire les solutions de l'équation de (E'').

   c- Déterminer les solutions de l'équation (E').

EXERCICE N°8

On considère l'équation (E) : $24x + 36y = 60$; où $x\ et\ y$ sont des entiers relatifs.

1. Déterminer le PGCD de 24 et 36, puis simplifier l'équation (E).
2. Trouver une solution évidente pour l'équation (E) et résoudre cette équation. On appellera S l'ensemble des couples $(x\,;y)$ solutions de l'équation (E).
3. Énumérer tous les couples de S tels que $-10 \leq x \leq 10$.
4. Donner ceux parmi eux, pour lesquels x et y sont multiples de 5.

EXERCICE N°10

1. Trouver tous les diviseurs positifs de 21.
2. Trouver tous les couples $(a\,;b)$ d'entiers naturels tels que : $a^2 - b^2 = 21$

EXERCICE N°9

Soit n ∈ N∗ un, on considère les nombres a et b définis par : $a = 2n + 3\ et\ b = 5n - 2$.

1. Montrer que tout diviseur de $a\ et\ b$ est diviseur de 19.
2. En utilisant le théorème de Gauss, déterminer les entiers naturels n pour lesquels PGCD$(a; b)$ = 19.

EXERCICE N°10

1) Déterminer les diviseurs positifs de 85.
2) On considère dans N×N le système d'équations (S) suivant : (S) : $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5440 \\ PGCD(x; y) = 8 \end{cases}$

a) Montrer que qu'il existe deux entiers naturels a et b premiers entre eux tels que le système (S) soit équivalent au système (S') : (S) :$\begin{cases} a^2 - b^2 = 85 \\ PGCD(a, b) = 1 \end{cases}$

b) Résoudre le système (S').

c) En déduire les couples (x, y), solution de système (S).