

H	1.0079 [He]2s	Li	6.9412 [He]2s	Be	9.0122 [He]2s
Na	22.990 [Ne]2s	Mg	24.305 [Ne]2s	Ca	40.078 [Ar]2s
K	39.098 [Ar]2s	Rb	85.466 [Kr]2s	Sr	87.620 [Xe]2s
Cs	132.9156 [Xe]2s			Ba	137.33 [Xe]2s

5 10,811

B A C

15 30,974
P
PHOSPHORE

5	10.811	6	12.011	7	14.007	8	15.999	9	18.998
[He] 2s ² p ²	[He] 2s ² p ⁴	[He] 2s ² p ³	[He] 2s ² p ¹	[He] 2s ² p ⁵	[He] 2s ² p ⁴	[He] 2s ² p ²	[He] 2s ² p ⁶	[He] 2s ² p ¹	[He] 2s ² p ⁵
B BORIUM	C CARBONIUM	N NITROGENIUM	O OXIGENIUM	F FLUORIUM	Ne NEONIUM	Ar ARGONIUM	Cl CHLORIUM	Ar ARGONIUM	Kr KRYPTONIUM
13 26.982 [He] 2s ² p ³	14 28.086 [He] 2s ² p ³	15 30.974 [He] 2s ² p ³	16 32.065 [He] 2s ² p ⁵	17 35.453 [He] 2s ² p ⁵	18 39.94 [He] 2s ² p ⁶				
Al ALUMINIUM	Si SILICONIUM	P PHOSPHORIUM	S SULFURE	Cl CHLORIUM					
31 69.723 [Ar] 3d ¹	32 72.647 [Ar] 3d ²	33 74.922 [Ar] 3d ³	34 78.956 [Ar] 3d ¹⁰	35 79.904 [Ar] 3d ¹⁰ 4s ¹	36 83.83 [Ar] 3d ¹⁰ 4s ²				
Ga GALLIUM	Ge GERMANIUM	As ARSENICUM	Se SELENIUM	Br BROMIUM					
49 114.82 [Ar] 3d ¹⁰ 4s ²	50 118.71 [Ar] 3d ¹⁰ 4s ² 4p ¹	51 121 [Ar] 3d ¹⁰ 4s ² 4p ³	52 127.60 [Ar] 3d ¹⁰ 4s ² 4p ⁵	53 136.50 [Ar] 3d ¹⁰ 4s ² 4p ⁶	54 131 [Ar] 3d ¹⁰ 4s ² 4p ⁷				
Tl TINUM	Sn STANNIUM	Bi BISMUTHIUM	Po POLONIUM	At ASTATINE					

Le meilleur coach pour s'entraîner, réussir et aller plus loin !

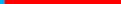
PHYSIQUE - CHIMIE

Cours et Exercices

Terminales C, D & E

Séquence 1.

- Rappels mathématiques & incertitudes ;
 - Cinématique du point ;
 - Dynamique de translation & rotation ;
 - Energies ;
 - Oscillateurs mécaniques ;
 - Lois physiques ;
 - Spectre de l'atome d'hydrogène ;
 - Noyau atomique & Réactions nucléaires ;
 - Cinétique & Equilibres chimiques ;
 - Réactions d'estérification.

Par :  Yann Norfé BEMBA D.

Ing. Le – Sage KIF.

Professeurs certifiés des lycées.

AVANT – PROPOS

Ce document, destiné aux élèves de Terminales scientifiques est spécialement conçu pour les préparer au Baccalauréat en Sciences – Physiques. Il présente un condensé plus ou moins détaillé de tout le programme de Terminale en vigueur. Rédigé d'une manière simple, il évite tout formalisme ou abstraction inutile et suit au plus près les commentaires officiels. Conformément à la nouvelle évaluation du Baccalauréat, il permet à l'élève de bien assimiler les notions présentées dans chaque chapitre, car on y trouve des définitions simples et claires appuyées par des exemples, des énoncés des lois et théorèmes ainsi que des démonstrations détaillées dont les démarches sont expliquées.

L'introduction des **couleurs dans les figures et le texte** les rend plus claires et plus suggestives, afin de souligner l'importance des termes et expressions pour faciliter la compréhension et l'assimilation. Certains chapitres sont appuyés par des « **applications résolues** » incorporées à la leçon ou à la fin de celle – ci pour permettre une compréhension progressive du cours et une mise en œuvre des notions introduites.

Compte tenu du jumelage des deux matières dans ce même document, rendant ainsi le programme très long, nous avons jugé nécessaire de le subdiviser en plusieurs séquences comprenant chacune à la fois quelques chapitres de physique et de chimie, afin de couvrir l'ensemble du programme. Chaque chapitre est clos par une fiche d'évaluation « **travaux dirigés** » comprenant une série de questionnaires de nature variable (Définitions des termes, questions à réponses constructives, questions à alternative vrai ou faux, appariement, texte à trous...) dans la rubrique « **l'essentiel du cours** » ainsi qu'une diversité d'exercices dans la rubrique « **Résolution d'un problème** », dont l'**ordre de difficulté va de la couleur verte à la couleur rouge en passant par l'orange**, le tout conçu pour préparer l'élève à aborder l'épreuve de Sciences – physiques au baccalauréat.

Nous espérons présenter ainsi un ouvrage clair et utile, propre à motiver les élèves de classes à vocation essentiellement scientifique ou technique.

Nous serions reconnaissants à nos collègues utilisateurs de nous faire part de leurs remarques et nous les en remercions d'avance.



Table des matières

DOMAINE D'ETUDE I : MECANIQUE

OG₁ : UTILISER LES OUTILS MATHEMATIQUES DANS L'ETUDE DES PHENOMENES PHYSIQUES	10
1. LES OUTILS MATHEMATIQUES.....	10
I. Calcul vectoriel.	10
I.1. Définition d'un vecteur	10
I.2. Opérations élémentaires sur les vecteurs.....	10
a) Addition de deux vecteurs.....	10
b) Multiplication d'un vecteur par un scalaire	11
c) Produit scalaire de deux vecteurs.....	11
d) Produit vectoriel de deux vecteurs.....	12
I.3. Projection d'un vecteur par rapport aux axes d'un repère.....	12
I.4. Egalité des angles.....	13
II. Calculs des dérivées et primitives.....	13
II.1. Calcul des dérivées.	13
II.2. Calcul des primitives.....	14
III. Trigonométrie.	14
III.1. Relation dans un triangle rectangle.....	14
III.2. Relation dans un triangle quelconque.....	15
III.3. Cercle trigonométrique.....	15
III.4. Angles remarquables.	15
III.5. Formules de transformation.....	16
TRAVAUX DIRIGES I	17
2. LES INCERTITUDES DES GRANDEURS PHYSIQUES	20
I. Les incertitudes.	20
I.1. Les phénomènes physiques.	20
I.2. Les grandeurs physiques ; la mesure des grandeurs.....	20
I.3. Valeur approchée et valeur exacte d'une grandeur physique.	20
I.4. Erreur et incertitude absolues.	21
I.4.1. Erreur absolue.	21
I.4.2. Incertitude absolue.....	21
I.5. Erreur et incertitude relatives	21
I.5.1. Erreur relative.	21
I.5.2. Incertitude relative.....	22
I.6. Détermination des incertitudes des grandeurs physiques.....	22
I.7. Présentation du résultat.	23
II. Formules d'approximation.....	23
III. Unités du système international (U.S.I).....	23
Exercices d'application.....	24
TRAVAUX DIRIGES II.....	26



Table des matières.

OG₂ : CONNAÎTRE LES PRINCIPAUX MOUVEMENTS ETUDES EN CINÉMATIQUE	29
3. CINÉMATIQUE DU POINT	29
I. Généralités.....	29
I.1. Définition de la cinématique	29
I.2. Définitions des notions fondamentales	29
I.2.1. Référentiel.....	29
I.2.2. Repère	29
I.2.3. Vecteur position.....	29
I.2.4. Trajectoire	29
I.2.5. Abscisse curviligne	29
I.2.6. Équation horaire.....	29
I.2.7. Équation de la trajectoire	30
I.2.8. Vecteur vitesse	30
I.2.9. Vecteur accélération.....	31
II. Etude cinématique de quelques mouvements	33
II.1. Mouvement rectiligne	33
II.1.1. Mouvement rectiligne uniforme (MRU).	34
II.1.2. Mouvement rectiligne uniformément varié (MRUV).....	34
II.2. Mouvement circulaire	35
II.2.1. Mouvement circulaire uniforme (MCU).	36
II.2.2. Mouvement circulaire uniformément varié (MCUV).....	37
II.3. Mouvement sinusoïdal	37
II.3.1. Mouvement rectiligne sinusoïdal (MRS).....	37
II.3.1.1 Définition	37
II.3.1.2. Périodicité du mouvement	38
II.3.1.3. Vitesse linéaire	38
II.3.1.4. Accélération linéaire.....	38
II.3.1.5. Équation différentielle	38
II.3.2. Mouvement sinusoïdal de rotation (MSR).....	38
II.3.2.1 Définition	38
II.3.2.2. Vitesse angulaire.....	39
II.3.1.4. Accélération angulaire	39
II.3.1.5. Équation différentielle	39
Exercices d'application.....	39
TRAVAUX DIRIGÉS III	43
OG₃ : ANALYSER LES SYSTEMES MÉCANIQUES EN MOUVEMENT.	51
4. DYNAMIQUE DE TRANSLATION.....	51
I. Eléments de la dynamique.....	51
I.1. Définition de la dynamique	51
I.2. Définitions des notions.....	51
a) Point matériel	51
b) Système matériel	51
c) Milieu intérieur, milieu extérieur d'un système	51
d) Force intérieure, force extérieure appliquée à un système	51



Table des matières.

e) Système isolé, système pseudo – isolé.....	52
f) Masse d'un système.....	52
g) Centre d'inertie d'un système	52
h) Position du centre d'inertie G dans un système	52
i) Vecteur quantité de mouvement	54
II. Principes de la dynamique ou lois de Newton	56
II.1. Principe de l'inertie ou 1 ^{ère} loi de Newton	56
II.2. Principe fondamental de la dynamique (PFD) ou 2 ^{ème} loi de Newton	56
II.3. Principe d'interaction ou principe des actions mutuelles (PAM) ou 3 ^{ème} loi de Newton.....	57
III. Application des principes de la dynamique aux mouvements de translation.	57
A. Etude des systèmes mécaniques en mouvement de translation rectiligne.	57
A.1. Glissement d'un solide sur un plan incliné.....	58
A.2. Glissement d'un solide sur un plan horizontal avec force motrice \vec{F} et force de frottement \vec{f}	60
A.3. Mouvement de chute libre.....	62
A.4. Mouvement d'une machine d'ATWOOD	64
A.5. Mouvement d'un pendule dans un véhicule.....	66
B. Etude des systèmes mécaniques en mouvement de translation curviligne.	67
B.1. Mouvement d'un projectile dans un champ de pesanteur.....	67
B.2. Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique \vec{E}	70
B.3. Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique d'induction \vec{B}	74
B.4. Mouvement d'un satellite autour de la terre	77
B.5. Mouvement d'un pendule conique.	80
B.6. Mouvement d'un cycliste abordant un virage.	82
TRAVAUX DIRIGÉS IV	84
5. DYNAMIQUE DE ROTATION	97
I. Notion de moment cinétique.	97
I.1. Cas d'un point matériel.	97
I.2. Cas d'un système matériel.....	97
II. Notion de moment d'inertie	97
II.1. Rappels sur le moment d'une force.....	97
II.2. Moment d'inertie.	99
II.2.1. Cas d'un point matériel.....	99
II.2.2. Cas d'un système matériel.....	99
II.3. Théorème de l'accélération angulaire (T.A.A).	99
II.4. Quelques moments d'inertie des solides par rapport à un axe de symétrie.....	100
II.5. Théorème d'Huygens	100
Exercice d'application.	101
6. LES ENERGIES : Energies Cinétique, Potentielle et Mécanique	103
I. Rappels et compléments.....	103
I.1. Travail d'une force.	103
I.1.1. Travail d'une force dans un déplacement rectiligne.	103
I.1.2. Travail du poids.	104
I.1.3. Travail d'une force appliquée à un solide en mouvement de rotation.	104
I.2. Puissance d'une force.....	105
I.2.1. Cas d'un solide en mouvement de translation.	105



Table des matières.

I.2.2. Cas d'un solide en mouvement de rotation.....	105
II. L'énergie cinétique :	105
II.1. Cas d'un point matériel.....	105
II.2. Cas d'un système matériel.....	105
II.3. Théorème de l'énergie cinétique.....	106
III. L'énergie potentielle.....	106
III.1. Définition.....	106
III.2. Energie potentielle de quelques systèmes.....	106
III.3. Théorème de l'énergie potentielle.	107
IV. Energie mécanique.	107
IV.1. Expression de l'énergie mécanique.....	107
IV.2. Energie mécanique de quelques systèmes.....	107
IV.3. Théorème de l'énergie mécanique (T.E.M).	109
IV.4. Conservation de l'énergie mécanique.	109
V. Etude d'un choc élastique.....	109
Exercice d'application.	110
TRAVAUX DIRIGES V	112

7. LES OSCILLATEURS MECANIQUES.....**119**

Définitions.	119
A. Oscillateurs mécaniques harmoniques.....	119
I. Mouvement rectiligne sinusoïdal (MRS).	119
I.1. Etude cinématique.	119
I.1.1. Définition	119
I.1.2. Périodicité du mouvement.....	120
I.1.3. Vitesse linéaire.....	120
I.1.4. Accélération linéaire.	120
I.1.5. Equation différentielle.	120
I.2. Etude dynamique et énergétique.	120
I.2.1. Etude du pendule élastique.....	120
I.2.1.1. Pendule élastique horizontal.	121
I.2.1.2. Pendule élastique vertical.	122
II. Mouvement sinusoïdal de rotation (M.S.R).....	123
II.1. Etude cinématique.....	123
II.1.1. Définition	123
II.1.2. Vitesse angulaire.....	124
II.1.3 Accélération angulaire.....	124
II.1.4. Equation différentielle.	124
II.2. Etude dynamique et énergétique.	124
II.2.1. Etude d'un pendule de torsion.	124
B. Oscillateurs mécaniques non harmoniques.....	126
I. Etude d'un pendule pesant.	126
I.1. Définition	126
I.2. Etude dynamique et énergétique.	126
II. Etude du pendule simple.....	128
II.1. Définition	128
II.2. Equation différentielle.	128



Table des matières.

II.3. Expression de la période	128
II.4. Pendule simple synchrone d'un pendule pesant	128
Exercice d'application	129
TRAVAUX DIRIGÉS VI	131

DOMAINE D'ETUDE I : STRUCTURE DE LA MATIERE

OG₁ : UTILISER LES LOIS PHYSIQUES DANS LA DETERMINATION DES MASSES MOLAIRES	139
---	------------

1. LOIS PHYSIQUES RELATIVES AUX GAZ ET AUX SOLUTIONS DILUÉES 139

I. Rappels et compléments	139
I.1. La mole	139
I.2. Masse molaire	139
I.3. Volume molaire (V_m)	140
II. Lois physiques	141
II.1. Définition	141
II.2. Lois physiques relatives aux gaz	141
II.2.1. Loi des gaz parfaits	141
II.2.2. Équation du changement d'état	141
II.2.3. Détermination de la masse molaire moléculaire d'un composé	141
II.2.4. Densité d'un gaz par rapport à l'air	141
III. Lois physiques relatives aux solutions diluées : lois de Raoult	142
III.1. Définitions	142
III.2. Concentration massique d'une solution non électrolyisable	142
III.3. Lois de Raoult	142
III.3.1. 1 ^{ère} loi de Raoult : cryométrie	142
III.3.2. 2 ^{ème} loi de Raoult : ébulliométrie	143
IV. Détermination de la formule moléculaire d'un composé	144
IV.1. Combustion dans l'oxygène de l'air	144
IV.2. Combustion dans l'oxyde de cuivre II	144
V. Méthodes de séparation des isotopes	145
V.1. Définition	145
V.2. Electrolyses successives	145
V.3. Diffusion gazeuse	145
V.4. Ultracentrifugation	145
V.5. Spectroscopie de masse	145
Exercices d'application	146
TRAVAUX DIRIGÉS I	149

OG₂ : CONNAITRE LE SPECTRE DE L'ATOME D'HYDROGÈNE	154
---	------------

2. LE SPECTRE DE L'ATOME D'HYDROGÈNE 154

I. Les modèles atomiques	154
I.1. Modèle de Rutherford	154
I.2. Modèle de Bohr	154
I.3. Modèle actuel de l'atome	155



Table des matières.

II. Notion de niveau d'énergie	155
III. Transitions électroniques.....	155
III.1. L'absorption.	155
III.2. L'émission.	156
IV. Séries de raies.....	156
Exercice d'application	157
TRAVAUX DIRIGES II.....	159
 OG₃ : CONNAITRE LES PROPRIETES DES REACTIONS NUCLEAIRES	166
 3. LE NOYAU ATOMIQUE.....	166
1. Composition du noyau atomique.....	166
2. Nombre de charge, nombre de masse, représentation d'un nucléide.....	166
3. Isotopie.	166
4. Défaut de masse.....	167
5. Energie de liaison du noyau.....	167
6. Stabilité du noyau.	168
Exercice d'application	168
 4. LES REACTIONS NUCLEAIRES.....	170
I. Réactions nucléaires spontanées : Radioactivité	170
I.2. Propriétés des réactions nucléaires.....	170
I.3. Equations des réactions nucléaires	170
I.4. Loi de décroissance radioactive et période radioactive.....	172
I.4.1. Loi de décroissance radioactive	172
I.4.2. Période radioactive.....	172
I.4.3. Activité radioactive.....	173
II. Réactions nucléaires provoquées.....	173
II.1. Les transmutations.	173
II.2. Les fissions nucléaires.	173
II.2.1. Définition.....	173
II.2.2. Nucléides fissiles et nucléides fertiles.....	174
II.3. La fusion nucléaire.....	174
II.4. Energie libérée au cours d'une réaction nucléaire provoquée.	175
III. Applications et conséquences liées aux propriétés radioactives des éléments.	175
III.1. Applications des radionucléides.	175
III.1.1. La datation au carbone 14.	175
III.1.2. La radiothérapie.....	176
III.1.3. Les traceurs radioactifs.....	176
III.1.4. La production de l'énergie électrique.....	176
III.2. Conséquences liées aux propriétés radioactives des éléments.....	176
III.2.1. Absorption des particules et du rayonnement	176
III.2.2. Les effets physiologiques des rayonnements.	176
III.2.3. Les effets biologiques des rayonnements.....	177
IV. Familles radioactives.....	177
Exercice d'application	177
TRAVAUX DIRIGES III	179



DOMAINE D'ETUDE II : REACTION CHIMIQUE

OG₁ : REALISER L'ETUDE CINETIQUE D'UNE REACTION.....188

5. LA CINETIQUE CHIMIQUE.....188

Introduction	188
I. Définition	188
II. Vitesse et ordre d'une réaction chimique.....188	
II.1. Vitesse d'une réaction chimique	188
II.1.1. Vitesse moyenne.....189	
II.1.2. Vitesse instantanée.....189	
II.1.3. Vitesse globale de la réaction	189
II.2. Ordre d'une réaction	190
III. Temps de demi – réaction.....190	
III.1. Définition.....190	
III.2. Expression du temps de demi – réaction	190
III.2.1. Réaction d'ordre 0.....190	
III.2.2. Réaction d'ordre 1.....190	
III.2.3. Réaction d'ordre 2.....191	
IV. Détermination de l'ordre global d'une réaction	191
V. Facteurs cinétiques influençant une transformation chimique.....191	
V.1. Influence de la concentration initiale des réactifs.....191	
V.2. Influence de la température	191
V.3. Influence des catalyseurs	191
Exercice d'application	192

OG₂ : CARACTERISER LES EQUILIBRES CHIMIQUES194

6. LES EQUILIBRES CHIMIQUES194

Introduction	194
I. Notion d'équilibre chimique	194
II. Transformation limitée, transformation totale	194
II.1. Transformation limitée.....194	
II.2. Transformation totale.....195	
II.3. Loi d'action de masse	195
II.3.1. Constante d'équilibre d'une réaction chimique	195
II.3.2. Pression partielle, pression totale	195
II.3.3. Relation entre K_C et K_P196	
III. Loi générale du déplacement d'équilibre : loi de Chatelier.....196	
III.1. Influence de la concentration.....196	
III.2. Effet de la température	196
III.3. Influence de la pression	196
Exercice d'application	197
TRAVAUX DIRIGÉS IV	199

OG₃ : CARACTERISER LES REACTIONS D'ESTERIFICATION, DE SAPONIFICATION ET LES PRODUITS OBTENUS.....206



7. LES REACTIONS D'ESTERIFICATION	206
I. Rappels sur les composés organiques.	206
I.1. Les monoalcools saturés.....	206
I.1.1. Formule brute et nomenclature.	206
I.1.2. Les trois classes d'alcools.	207
I.1.3. Caractères distinctifs des trois classes d'alcools.	207
I.2. Les composés carbonylés.	208
I.2.1. Les aldéhydes.....	208
I.2.2. Les cétones.....	208
I.3. Les composés carboxylés.	209
I.3.1. Les acides carboxyliques.	209
I.3.2. Les esters.....	209
II. Réactions d'estérification et d'hydrolyse.....	210
II.1. Réactions d'estérification.....	210
II.1.1. Définition.....	210
II.1.2. Equation générale	210
II.1.3. Caractéristiques de la réaction.	210
II.2. Réaction d'hydrolyse	210
II.2.1. Définition.....	210
II.2.2. Equation générale.	210
II.2.3. Caractéristiques de la réaction.	211
II.3. Composition du mélange à l'équilibre.	211
II.3.1. Etude expérimentale (Cas de l'estérification).	211
II.3.2. Dosage de l'acide restant.	211
II.3.3. Courbes d'évolution des réactions d'estérification et d'hydrolyse.....	211
II.4. Rendement des réactions d'estérification et d'hydrolyse.....	212
II.4.1. Rendement d'estérification.....	212
II.4.2. Rendement d'hydrolyse.....	212
III. Réaction de saponification.....	213
III.1. Définition.....	213
III.2. Equation – bilan génératice de la saponification.	213
III.3. Caractéristiques de la réaction.....	213
III.4. Obtention du glycérol.	213
Exercice d'application.	213
TRAVAUX DIRIGES V	215



DOMAINE D'ETUDE I : MECANIQUE

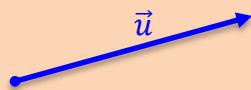
OG_I : UTILISER LES OUTILS MATHEMATIQUES DANS L'ETUDE DES PHENOMENES PHYSIQUES.

1

LES OUTILS MATHEMATIQUES

I. Calcul vectoriel.

I.1. Définition d'un vecteur : *On appelle vecteur, tout segment de droite orienté.*



Il est caractérisé par :

- ✓ *Un point d'application : c'est l'origine du vecteur ;*
- ✓ *Une direction : c'est la droite d'action ;*
- ✓ *Un sens : c'est l'orientation ;*
- ✓ *Une intensité : c'est la norme ou module du vecteur.*

I.2. Opérations élémentaires sur les vecteurs.

a) Addition de deux vecteurs.

a₁. Vecteurs colinéaires de même sens.

Soient deux vecteurs colinéaires et de même sens \vec{u} et \vec{v} , représentés par la figure 1 ci – dessous :

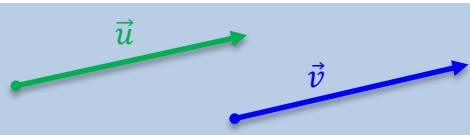


Figure 1.

Le vecteur \vec{F} obtenu par la somme vectorielle $\vec{F} = \vec{u} + \vec{v}$ est tel que (figure 2) :

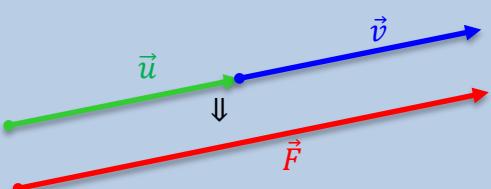


Figure 2.

Le vecteur résultant \vec{F} a :

- ✓ *La même direction que \vec{u} et \vec{v} ;*
- ✓ *Le même sens que \vec{u} et \vec{v} ;*
- ✓ *Une intensité telle que :*

$$F = u + v$$

a₂. Vecteurs colinéaires de sens contraires.

Soient deux vecteurs colinéaires et de sens contraires \vec{u} et \vec{v} , représentés par la figure 3 ci – dessous :



Figure 3.

Le vecteur \vec{F} obtenu par la somme vectorielle $\vec{F} = \vec{u} + \vec{v}$ est tel que (figure 4) :

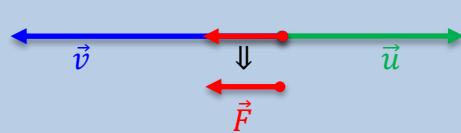


Figure 4.

Le vecteur résultant \vec{F} a :

- ✓ *La même direction que \vec{u} et \vec{v} ;*
- ✓ *Le même sens que le vecteur ayant la plus grande intensité : donc \vec{v} ;*
- ✓ *Une intensité telle que :*

$$F = |u - v|$$



a₃. Vecteurs de directions quelconques.

Soient deux vecteurs de directions quelconques \vec{u} et \vec{v} , tels que représentés par la figure 5 ci – dessous :

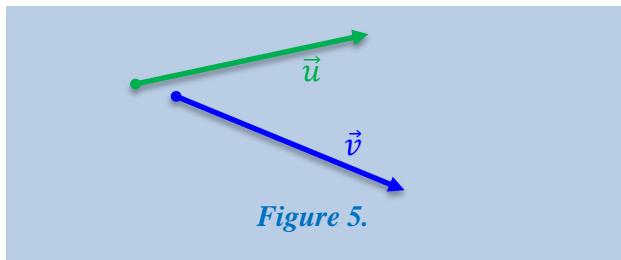


Figure 5.

Le vecteur \vec{F} obtenu par la somme vectorielle $\vec{F} = \vec{u} + \vec{v}$ est tel que (figure 6) en utilisant la règle du parallélogramme :

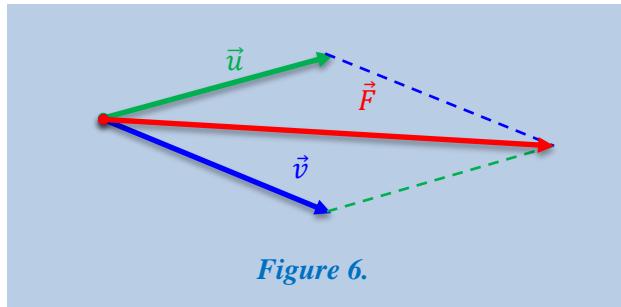


Figure 6.

Le vecteur résultant \vec{F} a :

- ✓ Une direction indépendante de celle des vecteurs \vec{u} et \vec{v} ;
- ✓ Un sens moyen par rapport à ceux des vecteurs \vec{u} et \vec{v} ;
- ✓ Une intensité telle que :

$$F = \sqrt{u^2 + v^2 + 2u.v \cos(\vec{u}, \vec{v})}$$

b) Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Soit un vecteur $\vec{F} = k \cdot \vec{u}; k \in \mathbb{R}^*$

Le vecteur \vec{F} a :

- ✓ La même direction que \vec{u} ;
- ✓ Un sens qui dépend du signe de k :
 - ♣ Si $k < 0$, \vec{F} et \vec{u} sont de sens contraires ;
 - ♣ Si $k > 0$, \vec{F} et \vec{u} sont de même sens ;
- ✓ Une intensité qui vaut :

$$F = |k| \cdot u$$

c) Produit scalaire de deux vecteurs.

Soient deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

Le produit scalaire des vecteurs \vec{u} et \vec{v} noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est *scalaire* k (un nombre réel $k \in \mathbb{R}$) obtenu par le calcul ci – dessous :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = k = u \cdot v \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Remarque : Dans la base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} s'écrivent :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

x , y , z et x' , y' , z' sont les composantes ou coordonnées cartésiennes respectives de \vec{u} et \vec{v} .

Exemple :

On donne les vecteurs \vec{u} et \vec{v} définis par :

$$\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k} \text{ et } \vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$

Le produit scalaire entre ces deux vecteurs donne :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2(3) + 3(-1) - 3(2) = 6 - 3 - 6$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$$

Note :

- ✓ Le produit scalaire d'un vecteur par lui – même vaut le carré de son intensité ($\vec{u} \cdot \vec{u} = u^2$).
- ✓ Le produit scalaire de deux vecteurs colinéaires vaut le produit de leurs intensités ; son signe dépend de leurs sens ($\vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \pm u \cdot v$) ;
 - ✓ si \vec{u} et \vec{v} sont de même sens : $\vec{u} \cdot \vec{v} = + u \cdot v$;
 - ✓ si \vec{u} et \vec{v} sont de sens contraires : $\vec{u} \cdot \vec{v} = - u \cdot v$.
- ✓ Le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est nul : Si $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;
- ✓ $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$; $\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$; $\vec{k} \cdot \vec{k} = 1$;
- ✓ $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$; $\vec{i} \cdot \vec{k} = 0$; $\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$.



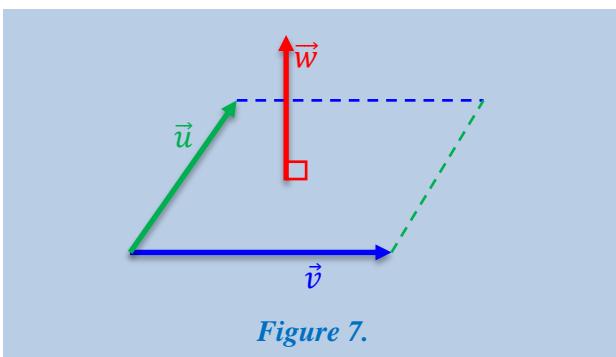
d) Produit vectoriel de deux vecteurs.

Soient deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

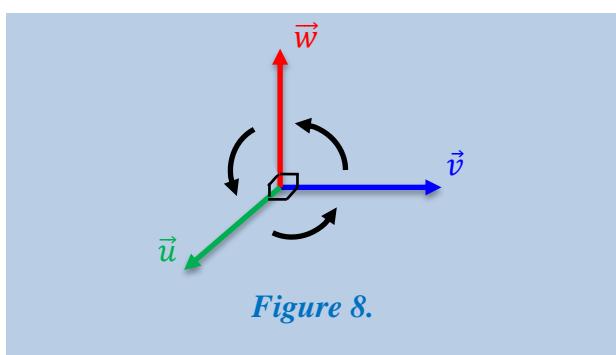
Le produit vectoriel de \vec{u} et \vec{v} noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ donne un vecteur dont la direction est perpendiculaire au plan formé par les deux vecteurs.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$$

telque représenté par la figure 7 ci – dessous :



- ✓ Le *sens* de \vec{w} est tel qu'il forme un trièdre direct avec les deux vecteurs ; c'est – à – dire le sens de rotation des trois vecteurs est le sens trigonométrique (sens contraire des aiguilles d'une montre) comme indiqué sur la figure 8 ci – dessous.



- ✓ Son *intensité* est telle que :

$$w = u \cdot v |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$$

Exemple :

- $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$; $k = i \cdot j \cdot |\sin(\vec{i}, \vec{j})|$
- $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$; $F = |q|v \cdot B \cdot |\sin(q\vec{v}, \vec{B})|$

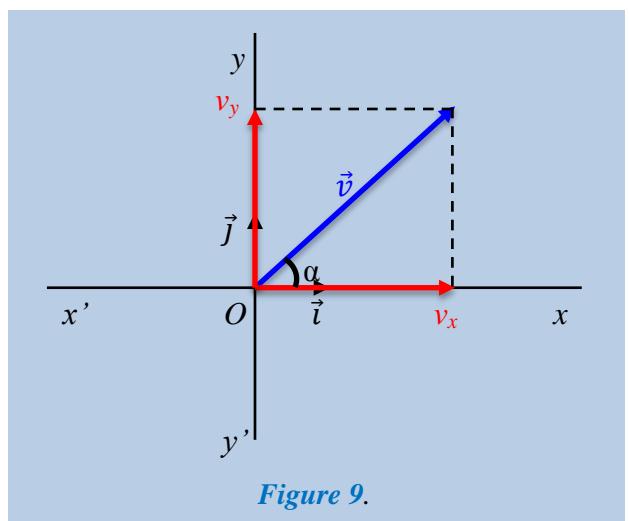
Note :

- ✓ Le produit vectoriel d'un vecteur par lui – même est nul ($\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$).

- ✓ Le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est nul :
Si $\vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- ✓ Le produit vectoriel de deux vecteurs orthogonaux donne un vecteur orthogonal aux deux vecteurs :
Si $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \{\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{u}$, $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{v}\}$.
- ✓ Si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$ alors $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{w}$
- ✓ $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$; $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$; $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$
- ✓ $\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$; $\vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}$; $\vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$
- ✓ $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{0}$; $\vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{0}$; $\vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$.

I.3. Projection d'un vecteur par rapport aux axes d'un repère.

Considérons un vecteur \vec{v} dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) comme l'indique la figure 9 ci – dessous :



- ✓ La projection de \vec{v} sur l'axe (Ox) permet d'obtenir sa composante v_x :
 $\cos \alpha = \frac{v_x}{v} \Rightarrow v_x = v \cos \alpha$
- ✓ La projection de \vec{v} sur l'axe (Oy) permet d'obtenir sa composante v_y :
 $\sin \alpha = \frac{v_y}{v} \Rightarrow v_y = v \sin \alpha$

Ainsi : $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$

Le vecteur \vec{v} peut donc s'écrire en fonction de l'angle qu'il fait avec l'axe (Ox) et de son module : D'où :

$$\vec{v} = (v \cos \alpha) \vec{i} + (v \sin \alpha) \vec{j}$$



I.4. Egalité des angles.

- ✓ Considérons le schéma de la figure 10 ci-dessous :

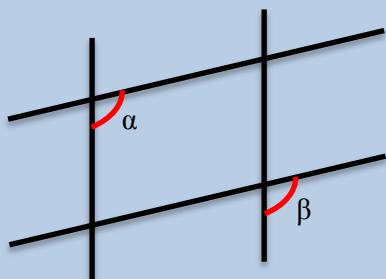


Figure 10.

Théorème 1 : Deux angles à côtés parallèles deux à deux sont égaux.

$$\alpha = \beta$$

- ✓ Considérons le schéma de la figure 11 ci-dessous :

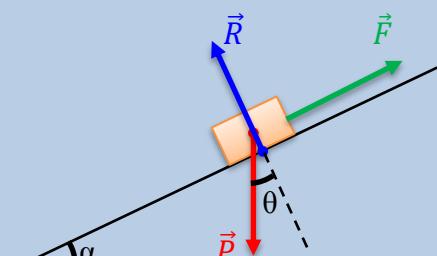


Figure 11.

Théorème 2 : Deux angles à côtés perpendiculaires deux à deux sont égaux.

$$\alpha = \theta$$

Remarque : La connaissance de ces deux théorèmes est capitale, étant donné que dans la résolution de certains problèmes de physique, nous serons amenés à déterminer des angles inconnus en fonction de ceux connus, en utilisant des schémas comportant des droites parallèles ou perpendiculaires.

II. Calculs des dérivées et primitives.

II.1. Calcul des dérivées.

a. Définition : Soit f une fonction de la variable t , on appelle dérivée de la fonction $f(t)$, la fonction $f'(t)$ obtenue en dérivant $f(t)$, soit :

$$f'(t) = \frac{df(t)}{dt}$$

b. Quelques dérivées des fonctions usuelles.

En physique, on se servira d'une liste réduite de fonctions usuelles, dont voici les plus utilisées.

Fonction f	Dérivée f'
$k ; k \in \mathbb{R}$	0
$at ; a \neq 0$	a
t^2	$2t$
$t^n ; n > 1$	nt^{n-1}
$U^n ; n > 1$	$nU'U^{n-1}$
$\cos t$	$-\sin t$
$\sin t$	$\cos t$
$U \cdot V$	$U' \cdot V + U \cdot V'$
$\frac{U}{V}$	$\frac{U'V - U \cdot V'}{V^2}$
$k\cos(at + b)$	$-ak\sin(at + b)$
$k\sin(at + b)$	$ak\cos(at + b)$
$k\cos[U(t)]$	$-kU'\sin[U(t)]$
$k\sin[U(t)]$	$kU'\cos[U(t)]$

Exemples :

- $f(t) = t^4 + 3t^2 - 1 \Rightarrow f'(t) = 4t^3 + 6t$
- $g(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$
 $\Rightarrow g'(t) = -\pi\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right).$

Note : La dérivée $f'(t)$ se note aussi $\frac{df(t)}{dt}$.

Exemples :

- $f(t) = a\sin(\omega t + \varphi)$
 $\Rightarrow f'(t) = \frac{df(t)}{dt} = a\omega\cos(\omega t + \varphi)$
- $g(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$
 $\Rightarrow g'(t) = \frac{dg(t)}{dt} = at + v_0$



Remarque :Si $y = f(x)$ et $x = g(t)$ La dérivée de y par rapport à t vaut :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Exemple : $y = x^2 + 2x - 1$ Avec $x = t^2 - 2$

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 2 = 2(t^2 - 2) + 2 \quad \text{et} \quad \frac{dx}{dt} = 2t$$

Ainsi on a :

$$\frac{dy}{dt} = [2(t^2 - 2) + 2] \times 2t = 4t^3 - 4t$$

D'où :

$$\frac{dy}{dt} = 4t^3 - 4t$$

Exemples :

$$\bullet \quad f(t) = 3t^2 - t + 6$$

$$\Rightarrow F(t) = t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 6t + \text{cte}$$

$$\bullet \quad f(t) = 2\cos(3t - 6)$$

$$\Rightarrow F(t) = \frac{2}{3}\sin(3t - 6) + \text{cte}$$

$$\bullet \quad f(t) = a\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow F(t) = -\frac{a}{\omega}\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) + \text{cte}$$

II.2. Calcul des primitives.

a. Définition : Soit f une fonction de la variable t , on appelle primitive de la fonction $f(t)$, la fonction $F(t)$ obtenue en intégrant $f(t)$.

On note :

$$F(t) = \int f(t)dt$$

b. Quelques primitives des fonctions usuelles.

Comme dans le cas des fonctions dérivées, on se servira d'une liste réduite de fonctions usuelles, dont voici les plus utilisées.

Fonction f	Primitive F
0	$k ; k \in \mathbb{R}$
$a ; a \neq 0$	$at + \text{cte}$
t	$\frac{1}{2}t^2 + \text{cte}$
$t^n ; n > 1$	$\frac{t^{n+1}}{n+1} + \text{cte}$
$U'U^n ; n > 1$	$\frac{U^{n+1}}{n+1} + \text{cte}$
$\cos t$	$\sin t + \text{cte}$
$\sin t$	$-\cos t + \text{cte}$
$k\cos(at + b)$	$\frac{k}{a}\sin(at + b) + \text{cte}$
$k\sin(at + b)$	$-\frac{k}{a}\cos(at + b) + \text{cte}$
$\frac{U'}{U} ; U \neq 0$	$\ln U + \text{cte}$

Note : La détermination de la constante (cte) nécessite la connaissance des conditions précises des images de la fonction dérivée ; ainsi par la résolution d'un système d'équations, on détermine la constante exacte de la fonction dérivée qui vérifie ces conditions.

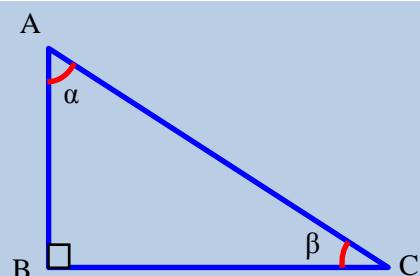
III. Trigonométrie.**III.1. Relation dans un triangle rectangle.**Considérons le triangle ABC rectangle en B , ayant pour angles aux sommets α en A et β en C comme l'indique la figure 12.

Figure 12.

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}} = \frac{BC}{AC} \\ \cos\alpha &= \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}} = \frac{AB}{AC} \\ \tan\alpha &= \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{BC}{AB} \\ \sin\beta &= \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}} = \frac{AB}{AC} \\ \cos\beta &= \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}} = \frac{BC}{AC} \\ \tan\beta &= \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{AB}{BC} \end{aligned}$$



$$\text{Si } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \cos\beta \\ \sin\beta = \cos\alpha \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \tan\alpha = \frac{CB}{AB} \\ \cotan\beta = \frac{CB}{AB} \end{array} \right\} \Rightarrow \tan\alpha = \cotan\beta$$

- $AC^2 = AB^2 + BC^2$: C'est le **Théorème de PYTHAGORE**.
- $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$: C'est la **relation fondamentale de la trigonométrie**.

III.2. Relation dans un triangle quelconque.

Considérons le triangle quelconque ABC , d'angles aux sommets α , β et θ (figure 13).

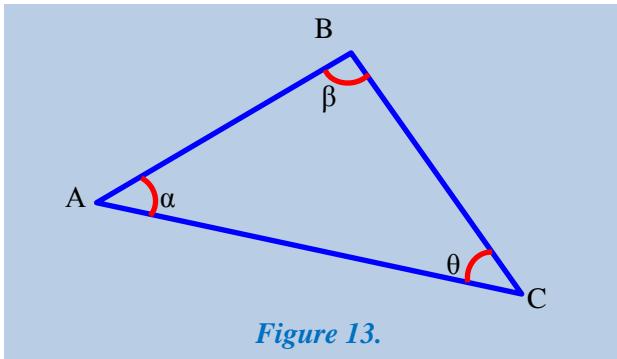


Figure 13.

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos\theta \\ AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\beta \\ BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\alpha \end{aligned}$$

C'est le **théorème d'Al-Kashi ou théorème de Pythagore généralisé**.

III.3. Cercle trigonométrique.

Tracons le **cercle trigonométrique**, de centre O , de rayon égal à l'unité ($R = 1$), et deux axes de coordonnées rectangulaires Ox et Oy (voir figure 14 ci-dessous).

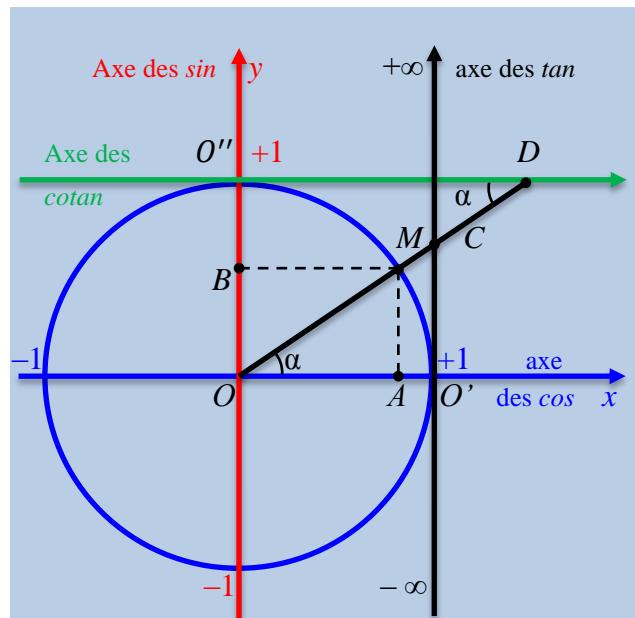


Figure 14.

$OM = R = 1$: rayon du cercle trigonométrique.

$$\cos\alpha = \frac{OA}{OM} = OA$$

$$\sin\alpha = \frac{AM}{OM} = AM$$

$$\tan\alpha = \frac{AM}{OA} = \frac{O'C}{OO'} = \frac{O'C}{OM} = O'C$$

$$\cotan\alpha = \frac{OA}{AM} = \frac{OO'}{O'C} = \frac{O''D}{O''O} = \frac{O''D}{OM} = O''D$$

$$\cotan\alpha = \frac{OA}{AM} = \frac{OO'}{O'C} = \frac{O''D}{O''O} = \frac{O''D}{OM} = O''D$$

III.4. Angles remarquables.

Il est utile de retenir quelques valeurs des rapports trigonométriques (sinus et cosinus) pour certains angles (0° ; 30° ; 45° ; 60° ; 90°). On en déduira immédiatement les valeurs des tangentes et cotangentes.

Angle		$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cotan\alpha$
Degrés	Radians				
0°	0	0	1	0	$+\infty$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$+\infty$	0



III.5. Formules de transformation.

Ce sont des formules obtenues à partir des formules trigonométriques de base, et ayant une grande utilité dans la résolution de certains problèmes de physique ; en voici quelques unes :

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin 2a = 2 \cos a \cdot \sin a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\frac{1}{\cos^2 a} = 1 + \tan^2 a$$

$$\sin p + \sin q = 2 \cos \frac{p - q}{2} \sin \frac{p + q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p + q}{2} \sin \frac{p - q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p + q}{2} \sin \frac{p - q}{2}$$

$$\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \alpha$$

$$\sin \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = -\cos \alpha$$

$$\cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin \alpha$$

$$\cos \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = \sin \alpha$$

$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$$

$$\sin(\alpha - \pi) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$$

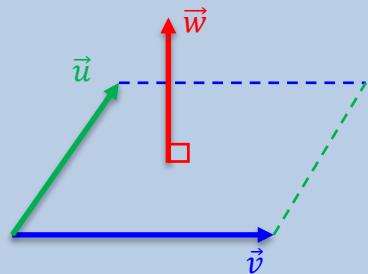
$$\cos(\alpha - \pi) = -\cos \alpha$$



TRAVAUX DIRIGÉS I

Conseils pratiques :

1. Techniques de réalisation des schémas.
2. Coordonnées cartésiennes.
3. Projection des vecteurs. Etude des systèmes en équilibre.
4. Formules trigonométriques. Formules de transformation.



RESOLUTION DES PROBLÈMES

EXERCICE 1 : Après avoir rappelé les formules usuelles sur les dérivées, détermine les dérivées des fonctions suivantes :

$$f(t) = t^{-5} + 2t - 100 ;$$

$$g(t) = -2 \cos(-5t^4 + 6t + t^7) ;$$

$i(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$ où a , ω et φ sont des constantes ;

$$j(t) = \frac{2t}{1-t^2} .$$

EXERCICE 2 : Calcule les dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(t) = 5t^3 - 6t^2 + 10t + 4$

b) $f(t) = -\frac{1}{2}t^4 - 6t^3 - 5t^2$

c) $f(t) = \frac{6t^2 - 5}{3t + 1}$

d) $f(t) = 5 \sin 8t - 9 \cos 4t$

e) $f(t) = t^2 \cos 4t$

f) $f(t) = 3 \cos \left(2 \text{const} t - \frac{\pi}{4} \right)$

g) $f(t) = \sqrt{6t^2 - 2t}$

h) $f(t) = 4t^2(3t - 1)^3$

i) $f(t) = \frac{t^4}{4} + t^3 + \frac{6}{t} + 5$

j) $f(t) = 5 \sin t \cdot \cos t$

EXERCICE 3 : Après avoir rappelé les formules usuelles sur les primitives, détermine les primitives des fonctions suivantes :

$$f(t) = t^{\frac{2}{3}} + 3t - 1 ; g(t) = \frac{2t}{t^2 - 25} ;$$

$$i(t) = 3t^2 \sin(t^3 - 9) ; j(t) = 4t^3 + 3t ;$$

$$h(t) = a \cos(at + b) \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des constantes ;}$$

EXERCICE 4 : Soit la fonction f définie par :

$$f(t) = 2 \cos \left(3t - \frac{\pi}{4} \right)$$

- Détermine sa période ;
- Détermine les fonctions dérivées f' et f'' de f .

EXERCICE 5 : Intègre les fonctions suivantes :

a) $f(t) = \frac{t^2}{3} + 3t - 4$

b) $g(t) = \sin 3t + \cos(2t - 1)$

c) $h(t) = 2 \sin t \cdot \cos t$

EXERCICE 6 : Quelle est la norme d'un vecteur \vec{F} dont les modules des composantes F_x et F_y valent respectivement $8N$ et $6N$? Quel angle ce vecteur fait-il avec l'axe des abscisses.

EXERCICE 7 : Deux enfants veulent desceller un anneau fixé à un mur.

Ils accrochent chacun une corde à cet anneau. L'un d'eux tire horizontalement et perpendiculairement au mur, l'autre obliquement vers le haut en formant un angle de 60° avec l'horizontale.

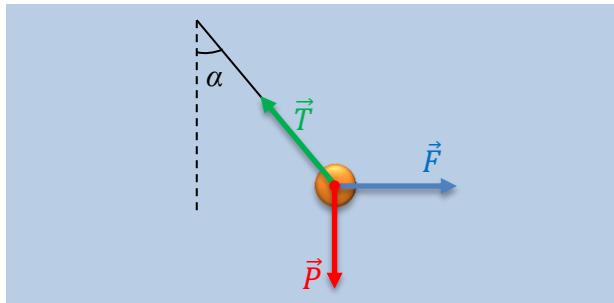


Sachant que $F_2 = 2F_1$, après avoir tracé la résultante de ces deux forces, donne l'expression de son intensité en fonction de F_1 et α . Calcule – la pour $F_1 = 10N$.

- EXERCICE 8 :** Dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère les vecteurs ci – après : $\vec{u} = x\vec{i} + 2\vec{j}$ et $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j}$.
- 1°) Calcule le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
 - 2°) Que vaut le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$.
 - 3°) Soit un vecteur $\vec{w} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$. Détermine x pour que les vecteurs \vec{u} et \vec{w} soient colinéaires.

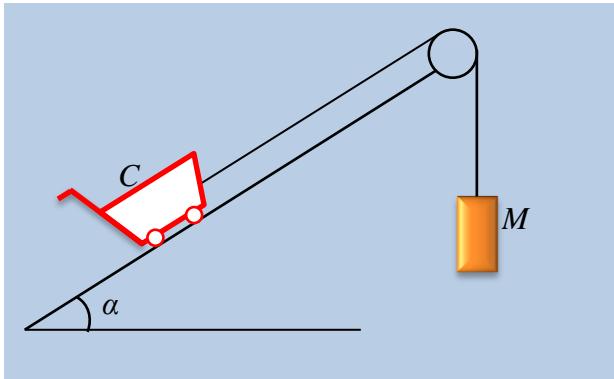
EXERCICE 9 : Un skieur de masse $60Kg$ descend une piste inclinée de $\alpha = 20^\circ$ sur une ligne horizontale. La force de frottements \vec{f} est telle que le skieur possède une vitesse constante. Calcule dans la base orthonormée, les coordonnées et les normes des trois vecteurs forces : \vec{P} (poids), \vec{R}_n (action normale de la piste sur le skieur) et \vec{f} . On donne : $g = 9,8N/Kg$.

EXERCICE 10 :



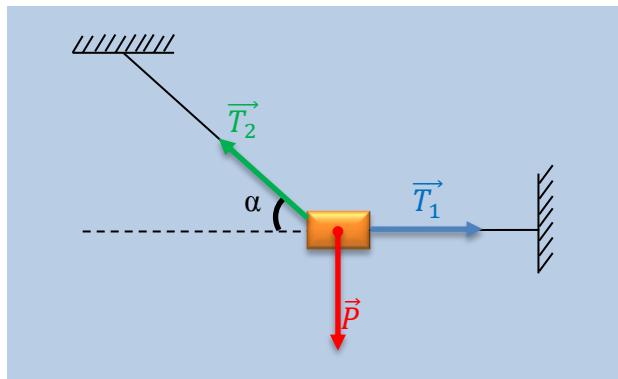
Une boule métallique de masse (m) en équilibre dans un champ électrostatique (uniforme) est soumise aux forces représentées dans le schéma ci – dessus. Exprime en fonction de m , g et α , les expressions de la force électrostatique et la tension du fil.

EXERCICE 11 :



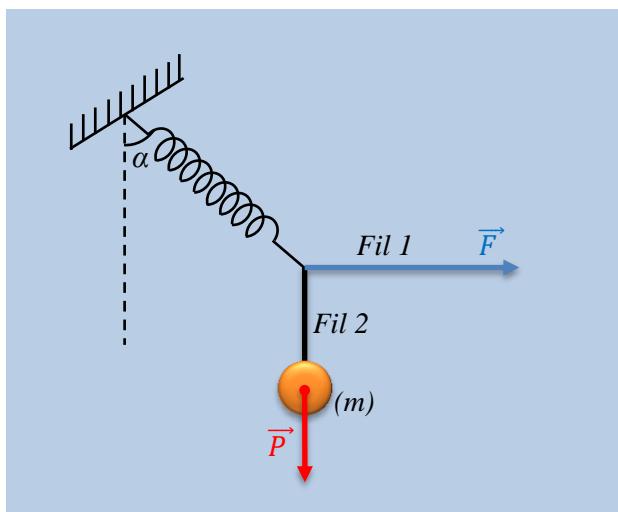
Le chariot C de masse $m = 5Kg$ se trouve sur un plan incliné faisant un angle $\alpha = 35^\circ$ par rapport à l'horizontal. Une masse M servant de contrepoids permet de maintenir le chariot en équilibre. Calcule M (on suppose négligeable les frottements ainsi que la masse du fil, de la poulie et du plateau). Quelle est la tension du fil ?

EXERCICE 12 : Un corps de masse m est suspendu par l'intermédiaire de deux fils, l'un horizontal et l'autre oblique faisant un angle $\alpha = 45^\circ$ avec l'horizontal.



- 1°) Sachant que la tension du fil horizontal est $T_1 = 50N$, détermine la tension T_2 de l'autre fil pour que le corps soit en équilibre.
- 2°) Calcule la masse m du corps suspendu. On donne $g = 10N/Kg$.

EXERCICE 13 :

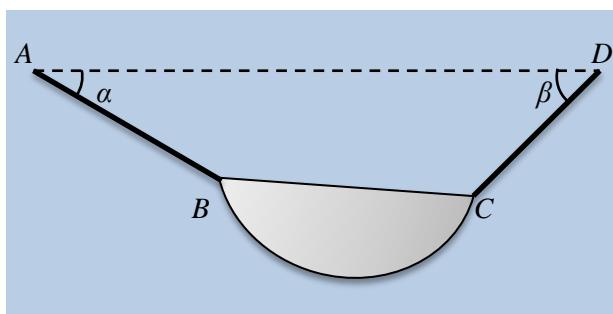


Le système ci – dessus représente un corps de masse m en équilibre ; \vec{F} est la force horizontale exercée par un opérateur. Etablis les relations permettant de déterminer L , longueur du ressort et F en fonction des données : m ; g ; α ; K ; L_0 ; longueur à vide du ressort.

EXERCICE 14 : Une personne monte une caisse de masse 50Kg sur un plan incliné d'angle $\alpha = 30^\circ$, à l'aide d'un câble faisant un angle β par rapport à la ligne de plus grande pente du plan incliné. Sous l'action des forces de frottements, la réaction s'incline de la normale au plan, de telle sorte qu'elle soit orthogonale à la force de traction.

- 1°) Montre par calcul que le produit scalaire entre la réaction et la force de traction est nul.
- 2°) Calcule le produit vectoriel $\vec{F} \wedge \vec{R}$.
- 3°) Sachant que $F = 520\text{N}$ et $f = 10\text{N}$, calcule la valeur de l'angle β , pour une vitesse constante.

EXERCICE 15 :



La figure ci – contre représente un élève reposant dans un hamac. A et D sont à la même hauteur et le poids de l'élève vaut $P = 800\text{N}$.

Le poids du hamac est négligé. $\alpha = 30^\circ$ et $\beta = 50^\circ$. Le système (élève + hamac), soumis à trois forces est en équilibre.

Détermine la valeur T_1 de la tension de la corde AB ainsi que la valeur T_2 de la tension de la corde CD .



DOMAINE D'ETUDE I : MECANIQUE

OG_I : UTILISER LES OUTILS MATHEMATIQUES DANS L'ETUDE DES PHENOMENES PHYSIQUES.

2

LES INCERTITUDES DES GRANDEURS PHYSIQUES

I. Les incertitudes.

I.1. Les phénomènes physiques.

L'échauffement ou le refroidissement de l'eau, sa transformation en vapeur d'eau par évaporation ou ébullition, ou en glace par congélation, l'échauffement d'un conducteur par effet Joule, la dispersion de la lumière blanche par un prisme sont autant des *phénomènes physiques*.

On appelle ainsi des transformations ou des modifications qui n'affectent pas la *nature* des corps mis en jeu.

Un phénomène physique est généralement une *transformation temporaire* dont l'effet peut être annulé par celui de la transformation inverse ; par exemple, en se vaporisant ou se solidifiant, l'eau reste de l'eau et peut revenir à l'état initial par liquéfaction ou fusion.

I.2. Les grandeurs physiques ; la mesure des grandeurs.

Imaginons qu'on veuille étudier les phénomènes qui accompagnent le passage du courant électrique dans un fil conducteur : on est amené à mesurer la *longueur* du fil et sa *section*, la *durée* et l'*intensité* du courant, la *masse* en eau d'un calorimètre et la variation de sa *température*...

Une *longueur*, une *section*, une *intensité* de courant, une *masse*, un *accroissement de température*..., sont autant de grandeurs physiques ; on voit par ces exemples que le terme *grandeur* a un sens très général :

On appelle grandeur physique, tout ce qui peut prendre une valeur déterminée dans les conditions bien définies.

Exemple : Intensité, pression, volume, vitesse, masse, énergie, surface...

Mesurer une grandeur physique, revient à la comparer à une grandeur de la même espèce prise comme unité.

D'une manière générale :

Une grandeur est mesurable si l'on sait définir : le rapport ou bien l'égalité et la somme de deux grandeurs de la même espèce.

I.3. Valeur approchée et valeur exacte d'une grandeur physique.

Soit à mesurer une certaine grandeur A, une longueur par exemple.

Si l'on recommence plusieurs fois la mesure, avec le même soin, les nombres trouvés sont en général légèrement différents : on n'a aucune raison d'affirmer que l'un plutôt que l'autre de ces nombres exprime la *valeur exacte* de A.

C'est dire que *le nombre a, résultat de la mesure d'une grandeur A, n'est qu'une valeur approchée de A.*

- ✓ La *valeur approchée* d'une grandeur physique A est le résultat de sa mesure dans certaines conditions. Elle est notée *a*.
- ✓ La *valeur exacte* est la valeur réelle de cette grandeur physique prise dans certaines conditions. Elle est notée *a_e*.



Remarques :

R₁ : a est une *valeur concrète*.

R₂ : Lorsqu'on obtient plusieurs valeurs à la suite de la mesure d'une grandeur physique, on prend la moyenne de ces valeurs comme valeur approchée.

Soient a_i , les valeurs obtenues au cours de *n mesures*, la valeur approchée est telle que :

$$a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

I.4. Erreur et incertitude absolues.**I.4.1. Erreur absolue.**

L'expérience prouve que dans les mêmes conditions et pour la même grandeur physique, on obtient plusieurs valeurs approchées. Ce qui nous permet de comprendre que nous commettons des erreurs.

L'erreur absolue est l'erreur commise lors de la mesure de la grandeur physique A.

Elle vaut la différence :

$$\delta a = a - a_e$$

Note : L'erreur absolue est un *nombre concret* ; de plus bien qu'elle soit qualifiée d' « *absolues* » cette erreur est un nombre *algébrique* puisqu'elle peut être positive ou négative.

L'erreur absolue est généralement la « résultante » de plusieurs erreurs de causes diverses :

➤ Les erreurs systématiques.

Ce sont celles qu'en entraîne l'emploi de *méthodes ou instruments imparfaits*.

Par exemple, si les divisions de la règle sont toutes un peu trop courtes, les nombres trouvés seront tous un peu trop grands.

Dans toutes les mesures précises les erreurs systématiques sont autant que possible éliminées par un contrôle soigneux des appareils de mesure et, souvent aussi, par l'emploi successif de méthodes différentes.

➤ Les erreurs accidentelles.

Ces erreurs sont imputables à l'*imperfection des sens de l'opérateur* ; contrairement aux précédentes, elles sont commises tantôt « en plus », tantôt « en moins » de sorte que, dans une suite de mesure de la même grandeur, les nombres obtenus sont tantôt approchés *par excès*, tantôt approchés *par défaut*.

On diminue les erreurs accidentelles, d'une part, en choisissant des méthodes de mesure bien étudiées et des instruments perfectionnés qui minimisent l'importance des imperfections sensorielles, d'autre part, en s'exerçant à la pratique des mesures ; mais jamais l'expérimentateur le mieux outillés et le plus habile ne peut être sûr d'atteindre la valeur exacte de la grandeur qu'il mesure : aussi doit – on considérer que *le résultat de toute mesure comporte une erreur*.

Remarque : La valeur exacte a_e n'est jamais rigoureusement connue pour une grandeur physique. Ainsi l'erreur absolue ne sera point connue.

I.4.2. Incertitude absolue.

L'erreur absolue δa n'étant pas connue, on doit se contenter d'en rechercher une *limite supérieure* Δa .

L'incertitude absolue est la limite supérieure de l'erreur absolue. On la note Δa telle que :

$$|\delta a| \leq \Delta a$$

Cela veut dire que *l'incertitude absolue est une valeur maximale que l'erreur absolue n'atteint probablement pas*, mais qu'elle pourrait atteindre dans le cas le plus défavorable, sans toutefois la dépasser.

Remarque : Comme la valeur approchée a d'une grandeur, l'incertitude absolue Δa est un nombre essentiellement positif ($\Delta a \geq 0$) et concret ; il doit toujours *être suivi du symbole* ou *du nom de l'unité de mesure*.

I.5. Erreur et incertitude relatives**I.5.1. Erreur relative.**

On se rend mieux compte de l'approximation d'une grandeur en comparant l'erreur à la grandeur mesurée :



On appelle erreur relative, le rapport entre l'erreur absolue et la valeur exacte.

Elle est notée :

$$\frac{\delta a}{a_e} = \frac{a - a_e}{a_e}$$

Remarque : La valeur exacte a_e n'étant pas rigoureusement connue, alors $\frac{\delta a}{a_e}$ ne le sera pas non plus.

I.5.2. Incertitude relative.

δa et a_e n'étant pas connues, on doit, là encore se contenter d'une limite supérieure, appelée incertitude relative, que l'on calcule en remplaçant l'erreur absolue δa par l'incertitude absolue Δa et en prenant pour a_e la valeur approchée a .

On appelle incertitude relative, le rapport entre l'incertitude absolue et la valeur approchée.

Elle est notée $\frac{\Delta a}{a}$.

Note : l'incertitude relative est la *limite supérieure* de l'erreur relative.

$$\left| \frac{\delta a}{a_e} \right| \leq \frac{\Delta a}{a}$$

Remarques :

R₁ : L'erreur et l'incertitude relatives sont des *grandes abstraites*.

R₂ : L'incertitude relative est une grandeur positive qui s'exprime en pourcentage : c'est *la précision de la mesure*.

R₃ : Une mesure est d'autant plus précise que l'incertitude du résultat est plus petite, comparée à ce résultat : c'est pourquoi *l'on se sert de l'incertitude relative* $\frac{\Delta a}{a}$ pour caractériser la précision d'une mesure.

Exemple : Dans le cas de la mesure d'une longueur, dont la valeur approchée a donné $l = 210\text{mm}$, avec une incertitude absolue $\Delta l = 0,5\text{mm}$, on a comme incertitude relative :

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{0,5}{210} = 2,4 \cdot 10^{-3}$$

Soit :

$$\frac{\Delta a}{a} = 2,4\% \text{ (2,4 pour mille)}$$

On dira que la mesure a été effectuée à *2,4 millièmes près*, ou encore que sa précision est de *2,4%*.

I.6. Détermination des incertitudes des grandeurs physiques.

Soit une grandeur physique g .

a. Si g est une somme algébrique de grandeurs :

Soit $g = a + b - c + \dots$

➤ L'erreur absolue est :

$$\delta g = \delta a + \delta b - \delta c + \dots$$

➤ L'incertitude absolue est :

$$\Delta g = \Delta a + \Delta b + \Delta c + \dots$$

b. Si g est un produit ou un quotient de grandeurs :

Soit $g = a \cdot b$ ou $g = \frac{c}{d}$

➤ Les erreurs relatives sont :

$$\frac{\delta g}{g_e} = \frac{\delta a}{a_e} + \frac{\delta b}{b_e} \quad \text{ou} \quad \frac{\delta g}{g_e} = \frac{\delta c}{c_e} - \frac{\delta d}{d_e}$$

➤ Les incertitudes relatives sont :

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$$

$$\text{ou} \quad \frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta c}{c} + \frac{\Delta d}{d}$$

Note : Lors de la détermination des incertitudes, les coefficients ne sont pas pris en compte.

Exemple : On donne :

$$X = \frac{2A \cdot B}{3C}$$

➤ L'erreur relative est :

$$\frac{\delta X}{X_e} = \frac{\delta A}{A_e} + \frac{\delta B}{B_e} - \frac{\delta C}{C_e}$$

➤ L'incertitude relative est :

$$\frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B} + \frac{\Delta C}{C}$$



c. Si g est une fonction puissance :

Soit $g = a^n$

➤ L'erreur relative est :

$$\frac{\delta g}{g_e} = n \frac{\delta a}{a_e}$$

➤ L'incertitude relative est :

$$\frac{\Delta g}{g} = |n| \frac{\Delta a}{a}$$

Ou plus généralement :

Si $g = a^n \cdot b^m \cdot c^p \dots$

$$\frac{\Delta g}{g} = |n| \frac{\Delta a}{a} + |m| \frac{\Delta b}{b} + |p| \frac{\Delta c}{c} + \dots$$

Exemple : La masse volumique d'un cube d'arête a est :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{a^3} = m \cdot a^{-3}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + 3 \frac{\Delta a}{a}$$

I.7. Présentation du résultat.

Soit a la valeur mesurée ou calculée de la grandeur physique g dont l'incertitude absolue est Δa , on présente le résultat de la manière suivante :

$$g = a \pm \Delta a$$

Soit : $a - \Delta a \leq g \leq a + \Delta a$

Remarque : Lorsque l'incertitude absolue d'une grandeur physique de valeur connue, n'est pas donnée, on prend :

R₁ : L'unité comme incertitude absolue pour une valeur entière.

Exemple :

- $d = 20\text{cm} \Rightarrow \Delta d = 1\text{cm}$.
- $U = 220\text{V} \Rightarrow \Delta U = 1\text{V}$.

R₂ : La valeur unitaire décimale lorsque la valeur de la grandeur physique est décimale.

Exemple :

- $t = 4,008\text{s} \Rightarrow \Delta t = 0,001\text{s}$.
- $I = 0,052\text{A} \Rightarrow \Delta I = 0,001\text{A}$.

II. Formules d'approximation.

Soit $a \leq 7^\circ$ et ε un nombre petit tel que $\varepsilon \leq 10^{-2}$, il en est de même pour ε' .

- ♣ $\sin a \simeq \tan a \simeq a$
- ♣ $\cos a \simeq 1 - \frac{a^2}{2}$
- ♣ $(1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon') \simeq 1 + \varepsilon + \varepsilon'$
- ♣ $(1 + \varepsilon)^n \simeq 1 + n\varepsilon$
- ♣ $\frac{1}{1 + \varepsilon} = (1 + \varepsilon)^{-1} \simeq 1 - \varepsilon$
- ♣ $\sqrt[n]{1 + \varepsilon} = (1 + \varepsilon)^{1/n} \simeq 1 + \frac{\varepsilon}{n}$
- ♣ $\frac{1}{\sqrt[n]{1 + \varepsilon}} = (1 + \varepsilon)^{-1/n} \simeq 1 - \frac{\varepsilon}{n}$
- ♣ $\sqrt[n]{(1 + \varepsilon)^p} = (1 + \varepsilon)^{p/n} \simeq 1 + \frac{p}{n}\varepsilon$

III. Unités du système international (U.S.I.).

Parmi les unités du système international, on distingue :

- **Les unités de base :** Ce sont les unités principales des différentes grandeurs physiques.

Exemples :

- ✓ Le mètre (m) pour la distance ;
- ✓ Le Kilogramme (Kg) pour la masse ;
- ✓ La seconde (s) pour le temps ;
- ✓ L'ampère (A) pour l'intensité du courant ;
- ✓ Le Kelvin (K) pour la température.

- **Les unités secondaires :** Elles sont souvent déduites des unités principales (de base).

Exemples :

- ✓ Le mètre carré (m^2) pour la surface ;
- ✓ Le mètre cube (m^3) pour le volume ;
- ✓ Le mètre par seconde (m/s) pour la vitesse ;
- ✓ Le mètre par seconde au carré (m/s^2) pour l'accélération ;
- ✓ Le Joule (J) pour le travail et l'énergie ;
- ✓ Le Watt (W) pour la puissance ;
- ✓ Le Newton (N) pour la force.

- **Les autres unités :** Elles s'adoptent par rapport à l'ordre de grandeur des grandeurs physiques considérées.

Exemples :

- ✓ L'unité de masse atomique ($1u = 1,66 \cdot 10^{-27}\text{Kg}$) pour la masse ;



- ✓ L'Angström ($1\text{A}^\circ = 10^{-10}\text{m}$) pour la distance ;
- ✓ Le micromètre ($1\mu = 10^{-6}\text{m}$) pour la distance
- ✓ L'électronvolt ($1\text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{J}$) Pour L'énergie ;
- ✓ Le degré celcius (${}^\circ\text{C}$) pour la température ;
- ✓ Le degré sexagésimal (${}^\circ$) pour les angles ;
- ✓ La minute ($1\text{mn} = 60\text{s}$), l'heure ($1\text{h} = 3600\text{s}$), le mois et l'année pour le temps.
- ✓ La tonne ($1\text{t} = 1000\text{Kg}$) pour la masse.

Remarque : Lorsque la valeur d'une grandeur physique est trop grande ou trop petite pour être exprimer en fonction de l'unité principale, on l'exprime en fonction d'un *multiple* ou d'un *sous – multiple* afin que cette valeur ait un sens significatif, pour permettre une comparaison facile sur une échelle macroscopique ou microscopique.

Pour cela on utilise des *préfixes* que l'on fait précéder au nom de l'unité principale pour avoir un multiple ou un sous – multiple de l'unité considérée.

Le tableau ci – dessous donne la correspondance des multiples et sous – multiples des grandeurs physiques.

Multiples	Sous – multiples
Déca (da) = 10^1	Déci (d) = 10^{-1}
Hecto (h) = 10^2	Centi (c) = 10^{-2}
Kilo (K) = 10^3	Milli (m) = 10^{-3}
Méga (M) = 10^6	Micro (μ) = 10^{-6}
Giga (G) = 10^9	Nano (n) = 10^{-9}
Téra (T) = 10^{12}	Pico (p) = 10^{-12}

Exemples

- ✓ Le millimètre : $1\text{mm} = 10^{-3}\text{m}$;
- ✓ Le kilogramme : $1\text{Kg} = 10^3\text{g}$;
- ✓ Le microampère : $1\mu\text{A} = 10^{-6}\text{A}$;
- ✓ Le giga – électronvolt : $1\text{GeV} = 10^9\text{eV}$;
- ✓ Le mégawatt : $1\text{MW} = 10^6\text{W}$;
- ✓ Le décineutron : $1\text{dN} = 10^{-1}\text{N}$;
- ✓ L'hectogramme : $1\text{hg} = 10^2\text{g}$;
- ✓ Le nanomètre : $1\text{nm} = 10^{-9}\text{m}$.

Exercices d'application.

Exercice 1 : Donne les valeurs approchées des opérations suivantes :

$$a) \frac{1,0004}{0,9989}; b) \sqrt{100,09}; c) \cos 0,07 \text{ (rad)}$$

Exercice 2 : Un mobile est soumis dans son mouvement à la loi horaire suivante :

$$x = 2t^2 + 4$$

1°) Quel vaut la position occupée par ce mobile à la date 4s.

2°) Détermine la précision de cette opération effectuée à la première question, sachant que le temps est mesuré au $\frac{1}{100}$ ème près.

3°) A quelle date ce mobile occupe – t – il la position 8m ?

Déduis – en un encadrement de la valeur obtenue si la distance est connue à $\frac{2}{10}$ ème de mètre près.

Corrigé 1.

Valeurs approchées des opérations.

$$a) \frac{1,0004}{0,9989} = \frac{1 + 0,0004}{1 - 0,0011} = (1 + 0,0004)(1 - 0,0011)^{-1} \simeq (1 + 0,0004)(1 + 0,0011) \simeq 1 + 0,0004 + 0,0011 \simeq 1 + 0,0015$$

$$\frac{1,0004}{0,9989} \simeq 1,0015$$

$$b) \sqrt{100,09} = \sqrt{1,0009 \cdot 10^2} = (1,0009)^{1/2} \cdot 10 = 10 \cdot (1 + 0,0009)^{\frac{1}{2}} \simeq 10 \left(1 + \frac{0,0009}{2}\right) \simeq 10(1 + 0,00045) \simeq 10(1,00045)$$

$$\sqrt{100,09} \simeq 10,0045$$

$$c) \cos 0,07 \simeq 1 - \frac{(0,07)^2}{2} \simeq 1 - 0,00245 \simeq 0,99755$$



$$\cos 0,07 \approx 0,9975$$

$$\Delta t = 0,017s$$

D'où l'encadrement de t sera :

$$1,41 - 0,017 \leq t \leq 1,41 + 0,017$$

Soit :

$$1,393 \leq t \leq 1,427$$

Corrigé 2.

$$x = 2t^2 + 4 ; \frac{\Delta t}{t} = \frac{1}{100} ; \Delta x = \frac{2}{10} m$$

1*) Position occupée par le mobile à la date 4s.

Sachant que : $x = 2t^2 + 4$

A la date $t = 4s$, on a : $x = 2(4)^2 + 4 = 36$

$$x = 36m$$

2*) Précision de cette opération.

$$x = 2t^2 + 4 \Rightarrow \frac{\Delta x}{x} = 2 \frac{\Delta t}{t}$$

D'où: $\frac{\Delta x}{x} = 2 \frac{\Delta t}{t}$

$$A.N : \frac{\Delta x}{x} = 2 \times \frac{1}{100} = 0,02 = 2\%$$

$$\frac{\Delta x}{x} = 2\%$$

3*) Date à laquelle le mobile occupe la position 8m.

$$x = 2t^2 + 4 \Rightarrow t = \left(\frac{x-4}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$A.N: t = \sqrt{\frac{x-4}{2}} = \sqrt{\frac{8-4}{2}} = \sqrt{2} = 1,41$$

$$t = 1,41s$$

Déduisons un encadrement de la valeur de t .

✓ Déterminons d'abord l'incertitude absolue sur le temps t .

$$t = \left(\frac{x-4}{2} \right)^{1/2} \Rightarrow \frac{\Delta t}{t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta x}{x}$$

D'où :

$$\Delta t = \frac{1}{2} \cdot t \cdot \frac{\Delta x}{x}$$

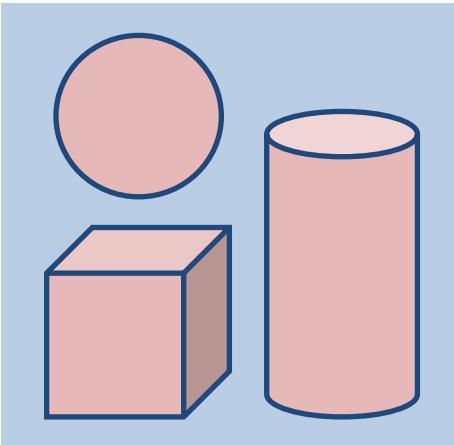
$$A.N : \Delta t = \frac{1}{2} \times 1,41 \times \frac{0,2}{8}$$



TRAVAUX DIRIGÉS II

Conseils pratiques :

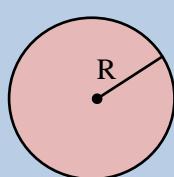
1. Grandeurs physiques : unités.
2. Erreurs et incertitudes des grandeurs physiques.
3. Présentation du résultat d'une grandeur physique.
4. Formules d'approximation.
5. Unité du système international (USI).



RESOLUTION DES PROBLÈMES

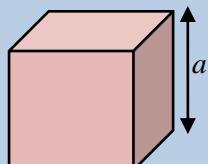
EXERCICE 1 :

1°) Calcule la surface de la figure suivante :

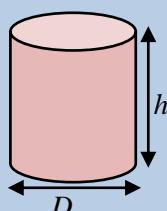


Disque de rayon $R = 0,25m$

2°) Calcule la surface et le volume de chacune des figures suivantes :



Cube d'arête $a = 0,5m$



Cylindre de diamètre $D = 10cm$ et de hauteur $h = 40cm$



Parallélépipède rectangle de longueur $L = 30cm$ de largeur $\ell = 5cm$ et de hauteur $h = 12cm$.

EXERCICE 2 : a, b, c subissent des variations Δa , Δb , Δc . Déduis – en les variations absolue ou relative de X et Y tel que :

$$\text{a)} X = 5(2a + 3,1b + 6) \quad \text{b)} Y = 200\sqrt{\frac{a}{c}}b^2$$

EXERCICE 3 : La longueur et la largeur d'un rectangle sont $L = 50cm$ et $\ell = 25cm$ mesurées à 1mm près.

- 1°) Comment se présente les résultats ?
- 2°) Calcule l'incertitude relative sur la longueur et la largeur de ce rectangle.
- 3°) Calcule avec quelle précision est connue le périmètre et l'aire de ce rectangle.
- 4°) Quelle est l'incertitude absolue sur la mesure de cette aire.

EXERCICE 4

Calcule $L = \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{w}$ avec $w = 3,14rad/s$;

$$Z = (16 \pm 1,5)\Omega ; R = (12,6 \pm 0,9)\Omega$$

Détermine la précision sur la détermination de L (s'exprime en Henry : H).

EXERCICE 5 : L'expression de l'équation horaire de la chute libre est donnée par la relation $h = \frac{1}{2}gt^2$ (m). Une balle tombe en chute libre d'une hauteur de 30m mesurés à 10cm près. La durée de la chute vaut $t = (2,42 \pm 0,05)s$. Détermine :

- 1°) La valeur approchée de g .
- 2°) L'incertitude absolue de cette mesure.



3°) La précision de la mesure.

4°) L'encadrement de la valeur.

EXERCICE 6 : On démontre que dans un mouvement uniformément varié, les espaces parcourus pendant les intervalles de temps successifs de même valeur θ forment une progression arithmétique de raison $r = a\theta^2$. Sachant que $r = (3,84 \pm 0,01)mm$ et $\theta = (1/16 \pm 0,0001)s$

1°) Donne la valeur de l'accélération de ce mouvement.

2°) Quelle est la précision sur la mesure de a (accélération) ?

3°) Encadre le résultat sur la mesure de a .

EXERCICE 7 : On dispose des données suivantes pour une sphère $m = (35,0 \pm 0,60)g$; rayon $r = 4cm$ à $1/10$ ème près.

- Avec quelle précision connaît-on la masse volumique ?
- Présente le résultat.

EXERCICE 8 : Pour mesurer l'épaisseur d'un cylindre creux, on mesure les diamètres intérieur d_1 et extérieur d_2 et on trouve :

$d_1 = (19,5 \pm 0,1)mm$; $d_2 = (26,7 \pm 0,1)mm$. Donne le résultat de la mesure et sa précision.

EXERCICE 9 : La résistance d'un conducteur métallique est donnée par l'expression :

$R = \rho \frac{l}{S}$. On cherche à trouver la résistivité ρ

d'un conducteur cylindrique et des mesures ci-dessous ont été effectuées :

- ✓ la mesure de sa résistance : on donne 49Ω à $0,05\Omega$ près.
- ✓ celle de son diamètre vaut $1cm$ à 5 millièmes près.
- ✓ et celle de sa longueur on donne : $(49,9 \leq l \leq 50,1cm)$. Quel est le résultat de la mesure ? Quelle est sa précision ?

EXERCICE 10 : La mesure des dimensions (hauteur et diamètre) d'un cylindre homogène en acier a donné : $H = D = 4,000 \pm 0,005cm$; celle de sa masse a conduit au résultat :

$m = 392,05 \pm 0,05g$.

Calcule son volume et la masse volumique de l'acier dont il est fait.

EXERCICE 11 : Soit la formule universelle de Newton suivante :

$$F = G \frac{m_A m_B}{d^2}$$

Supposons que l'on connaisse toutes les incertitudes des grandeurs du second membre de cette formule, donne l'expression de l'incertitude relative sur la force, puis déduis – en son incertitude absolue.

EXERCICE 12 : 1°) Un cylindre de dimensions : Rayon $R = 2,10m$ et d'épaisseur $e = 1,25cm$ ont été mesurés à $0,1mm$ près.

- Calcule en cm^3 le volume du cylindre.
- Calcule l'incertitude absolue du résultat.
- Présente l'écriture correcte.

2°) On a mesuré le poids volumique de ce cylindre.

On a trouvé $w = (26,46 \pm 0,02)N/cm^3$.

- Calcule la valeur de l'accélération g du lieu expérimental.
- Calcule l'incertitude absolue du résultat.
- Présente l'écriture correcte. On donne : $\Delta m = 0,01Kg$; masse du cylindre $m = 46,71Kg$.

EXERCICE 13 : 1°) Effectue les calculs suivants en utilisant les formules d'approximation :

a) $(1,007)^2$; $(0,986)^2$; $\sqrt{1,0004}$; $\sqrt{0,992}$;

b) $\sqrt{100,8}$; $\frac{1}{1,0003}$; $\frac{1}{0,995}$; $\frac{1}{(1,002)^2}$

c) $\frac{1}{\sqrt{1,0032}}$; $\frac{1}{\sqrt{0,992}}$; $1,0081 \times 1,004$

d) $1,0061 \times 0,987$; $\sqrt[3]{997,9}$; $0,99 \times 0,98$

e) $\sqrt[4]{9991,6}$; $\frac{1,0041}{1,0015}$; $\frac{0,996}{0,983}$; $\frac{1,003}{0,996}$; $\frac{1,007}{1,005}$

2°) Calcule $\cos 0,05$ (radian) avec une incertitude relative inférieure au dix-millième.

EXERCICE 14 : Une valeur a est estimée à :

$$a = \frac{1}{(1 - 10^{-2})^6}$$

1°) Utilise une transformation pour montrer que $a = 1,06$.

2°) Avec quelle précision connaît-on a ?

EXERCICE 15 : 1°) Un fil de cuivre a une longueur de $(102,5 \pm 0,2)mm$; son diamètre est



de $(1,10 \pm 0,05)mm$; sa résistance et de $(0,0173 \pm 0,0001)\Omega$.

- Quelle est la résistivité du cuivre ?
- Calcule son incertitude relative et déduis – en la présentation de l'écriture.

2°) On a mesuré le courant ayant traversé ce cylindre. On a trouvé $I = (20,5 \pm 0,05)A$.

- Calcule la valeur de la tension et son incertitude relative.
- Présente l'écriture correcte. On donne : $\Delta U = 0,01V$

EXERCICE 16 : Une sphère de masse m suspendu à un fil métallique fin est assimilable à un pendule simple de longueur $\ell = 99,6cm$ déterminée à $2mm$ près.

1°) La durée de 100 oscillations est 3min20s. L'expression de la période (durée d'une oscillation)

$$\text{est : } T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}};$$

Détermine la valeur approchée de g .

2°) La mise en marche ou l'arrêt du chronomètre par l'observateur crée une incertitude de 0,1s.

Quelle est la précision sur la mesure de g , exprime le résultat de ce calcul.

EXERCICE 17

L'intensité de la pesanteur g est donnée par la relation : $g = g_o \frac{R^2}{(R+Z)^2}$ où R est le rayon de la Terre supposée sphérique et Z l'altitude au – dessus de la Terre.

1°) Montre que si Z est faible devant R , g est pratiquement une fonction du 1^{er} degré de Z .

2°) Quel erreur relative commet – on en prenant $g = g_o$ à 3200m d'altitude. $R = 6400Km$.

3°) Détermine l'altitude h à laquelle g subit une diminution de $\frac{1}{1000}$ par rapport à l'intensité de pesanteur g_o au sol ($h = 0$).

EXERCICE 18 : Un pendule pesant assimilable à un pendule simple est constitué par une masse de 50g suspendu à un fil métallique fin. Sa période en un lieu où $g = 9,81N/Kg$ quand sa température est de $0^\circ C$ est de $T_0 = 2s$.

Calcule, dans le cadre des oscillations de faible amplitude :

1°) La longueur du pendule ainsi que l'incertitude absolue sur la période T_0 .

2°) Le coefficient de dilatation linéaire du fil, sachant qu'une élévation de température de 0 à $25^\circ C$ fait varier la période de $3 \cdot 10^{-4}s$.

3°) Quelle devrait être la variation d'altitude pour que à $25^\circ C$, le pendule ait la même période qu'au sol à $0^\circ C$? on montrera que si on passe, sur une verticale, de l'altitude zéro à l'altitude z ($z > 0$ et $z \ll R$, $R = \text{rayon de la terre}$) la valeur de l'accélération de la pesanteur subit une valeur relative :

$$\frac{g_z - g_0}{g_0} \approx - \frac{2z}{R} \quad \text{Avec } g_z \text{ et } g_0 \text{ intensité de la}$$

pesanteur à l'intensité à l'altitude z et l'altitude zéro.

On donne pour les oscillations de faible amplitude :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g_0}}$$



DOMAINE D'ETUDE I : MECANIQUE

OG₂ : CONNAÎTRE LES PRINCIPAUX MOUVEMENTS ETUDES EN CINEMATIQUE.

3

**CINEMATIQUE
DU POINT****I. Généralités.****I.1. Définition de la cinématique.**

La cinématique est l'étude en fonction du temps des mouvements des corps indépendamment de leurs causes.

I.2. Définitions des notions fondamentales**I.2.1. Référentiel.**

C'est tout objet à partir duquel on étudie le mouvement d'un corps.

On distingue :

- Le *référentiel terrestre* ou de laboratoire : utilisé pour l'étude des mouvements des corps sur la terre et à son voisinage.
- Le *référentiel géocentrique* : utilisé pour l'étude des mouvements des corps autour de la terre.
- Le *référentiel de Copernic* : utilisé pour l'étude des mouvements des planètes autour du soleil.

I.2.2. Repère.

C'est un référentiel mathématique composé d'une origine, et d'un ou de plusieurs axes orientés.

Exemple : le repère (O, \vec{i} , \vec{j} , \vec{k}).

I.2.3. Vecteur position.

C'est tout vecteur \overrightarrow{OM} qui permet de déterminer à chaque instant la position du mobile M dans un repère d'origine O.

Exemple : Dans le repère (O, \vec{i} , \vec{j} , \vec{k}) \overrightarrow{OM} s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

N.B : x , y et z sont les coordonnées cartésiennes ou composantes du mobile M.

I.2.4. Trajectoire.

C'est l'ensemble des positions successives occupées par le mobile M au cours de son mouvement.

I.2.5. Abscisse curviligne.

C'est la mesure de l'arc décrit par le mobile M au cours de son mouvement sur une courbe orientée.

On note : $s = \widehat{M_0M}$

Considérons le mouvement d'un mobile M dans le repère (O, \vec{i} , \vec{j} , \vec{k}). A l'instant initial le mobile M se trouve en M_0 comme l'indique la figure 1 ci-dessous :

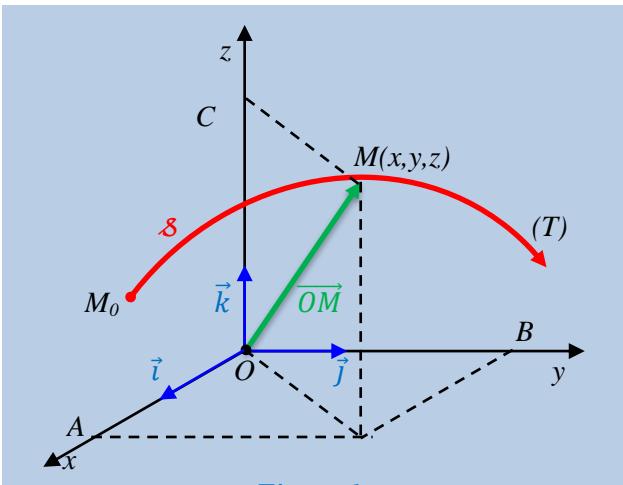


Figure 1.

$OA = x$; $OB = y$; $OC = z$; (T) : Trajectoire ;
 \overrightarrow{OM} : Vecteur position ;
 $\widehat{M_0M} = s$: abscisse curviligne.

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

I.2.6. Equation horaire.

C'est toute équation qui dépend du temps.



Note : Les composantes x , y , z de M et l'abscisse curviligne s sont des équations horaires.
 $x = f(t)$; $y = g(t)$; $z = h(t)$ et $s = i(t)$.

$$\vec{v}_m = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \overrightarrow{OM}}{\Delta t}$$

I.2.7. Equation de la trajectoire.

C'est toute équation indépendante du temps liant entre elles les composantes d'un mobile M .

Exemple : Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les coordonnées d'un mobile M sont à chaque instant :

$$\begin{cases} x = 2t + 1 & (1) \\ y = 4t^2 + 2 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 0 & (3) \end{cases}$$

Donnons l'équation de la trajectoire de M .

Réponse :

$$(1) : x = 2t + 1 \Rightarrow t = \frac{x - 1}{2}$$

$$\text{dans (2)} : y = 4\left(\frac{x - 1}{2}\right)^2 + 2$$

D'où :

$$y = x^2 - 2x + 3$$

I.2.8. Vecteur vitesse.

C'est la variation du vecteur position par unité de temps. On distingue :

► Le vecteur vitesse moyenne.

C'est l'accroissement moyen du vecteur position entre deux instants.

Considérons le mouvement d'un mobile M dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soient M_1 la position de M à l'instant t_1 et M_2 celle à l'instant t_2 (voir figure 2 ci-dessous) :

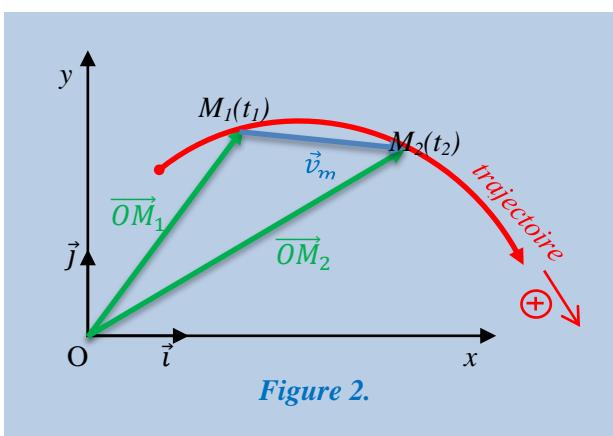


Figure 2.

N.B : Le module de \vec{v}_m s'exprime en mètre par seconde (m/s) ou ($m.s^{-1}$). On peut aussi utiliser le kilomètre par heure.

$$1Km/h = \frac{1}{3,6} m/s.$$

► Le vecteur vitesse instantanée.

C'est le vecteur vitesse du mobile à chaque instant.

Il est toujours tangent à la trajectoire du mobile.

Considérons la figure 3 ci-dessous :

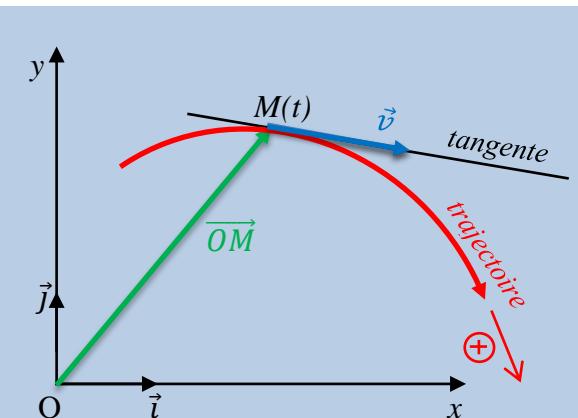


Figure 3.

En reprenant la définition de la vitesse instantanée, \vec{v} est la limite de $\frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{t_2 - t_1}$ quand t_2 tend vers t_1 , c'est-à-dire Δt tend vers zéro.

$$\vec{v} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \overrightarrow{OM}}{\Delta t} \right) = \frac{d \overrightarrow{OM}}{dt}$$

Autrement dit, le vecteur vitesse instantanée $\vec{v}(t)$, à la date t d'un mobile M , de vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ dans le repère \mathcal{R} , est égal à la dérivée, par rapport au temps, du vecteur \overrightarrow{OM} .

Le vecteur vitesse caractérise les variations du vecteur position au cours du temps.



Remarque :

L'expression de la vitesse instantanée dépend des caractéristiques de la base dans laquelle on travaille, c'est ainsi que l'on peut établir les expressions de \vec{v} dans la base cartésienne et dans la base curviligne ou base de **Frenet**.

1. Dans la base cartésienne.

La base cartésienne *est constituée de trois vecteurs unitaires orthogonaux deux à deux : \vec{i} , \vec{j} et \vec{k}* . Le vecteur position \overrightarrow{OM} , dans la base cartésienne associée au repère $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Alors : $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Ou encore :

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

Cette égalité est l'expression mathématique de la dérivée du vecteur position \overrightarrow{OM} par rapport à la variable temps.

Le vecteur vitesse \vec{v} a pour composantes :

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \\ v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} \\ v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \end{cases}$$

Le vecteur vitesse \vec{v} , à l'instant t , d'un point matériel M , est tangent en M à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement. Son module est donné par la relation :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

soit : $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$ (m/s)

2. Dans la base curviligne ou base de Frenet.

La base de Frenet *est constituée de deux vecteurs unitaires orthogonaux $\vec{\tau}$ et $\vec{\eta}$* . Le vecteur $\vec{\tau}$ est le vecteur unitaire tangent en M à la trajectoire et dont l'orientation est fixée par celle de la trajectoire, $\vec{\eta}$

est le vecteur unitaire orthogonal à $\vec{\tau}$ et orienté vers l'intérieur de la trajectoire (voir figure 4).

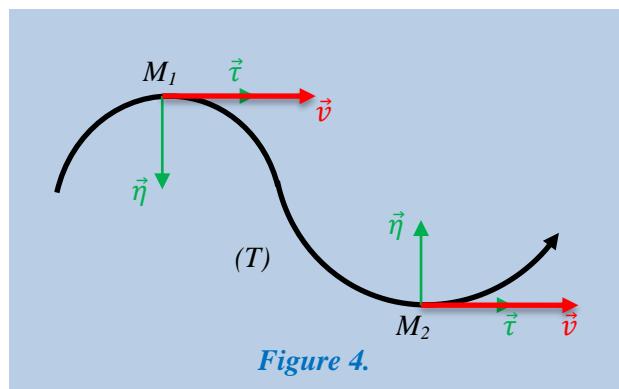


Figure 4.

$$\vec{v} \begin{cases} v_\tau = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \\ v_\eta = 0 \end{cases}$$

Sachant que : $\vec{v} = v_\tau \vec{\tau} + v_\eta \vec{\eta}$

Et comme $v_\eta = 0$, alors

$$\vec{v} = v_\tau \vec{\tau} = \frac{ds}{dt} \vec{\tau} \quad \text{et} \quad v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

Remarque :

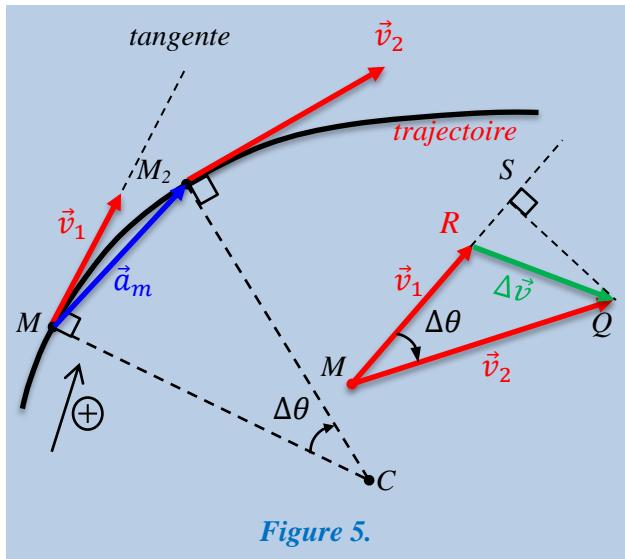
Les coordonnées du vecteur vitesse \vec{v} d'un point mobile M à la date t sont les dérivées, par rapport au temps, des coordonnées du vecteur position \overrightarrow{OM} au même instant.

I.2.9. Vecteur accélération.

En général, la vitesse d'un point mobile varie en valeur, et / ou en direction au cours du temps, on introduit donc une nouvelle grandeur : l'**accélération**.

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à la date t_1 , le vecteur vitesse du point M est \vec{v}_1 , à la date t_2 , il est \vec{v}_2 (voir figure 5).





\overrightarrow{RS} : Composante tangentielle de $\Delta\vec{v}$;

\overrightarrow{SQ} : Composante normale de $\Delta\vec{v}$;

On définit le vecteur accélération \vec{a} d'un mobile comme étant la variation du vecteur vitesse du mobile par unité de temps. On distingue :

➤ Le vecteur accélération moyenne.

C'est l'accroissement moyen du vecteur vitesse entre deux instants.

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Note : Le module de \vec{a}_m s'exprime en mètre par seconde au carré (m/s^2) ou ($m.s^{-2}$).

➤ Le vecteur accélération instantanée.

C'est le vecteur accélération du mobile à chaque instant.

Le vecteur accélération instantanée, \vec{a} est la limite de $\frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$ quand t_2 tend vers t_1 , c'est à dire Δt tend vers zéro.

$$\vec{a} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \vec{a}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \right) = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Le vecteur accélération instantanée $\vec{a}(t)$, à la date t d'un mobile M , de vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ dans le repère \mathcal{R} , est égal à la dérivée, par rapport au temps, du vecteur \vec{v} .

Remarque :

1. Dans la base cartésienne

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

$$\text{Alors : } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k})$$

$$\vec{a} = \frac{d\dot{x}}{dt}\vec{i} + \frac{d\dot{y}}{dt}\vec{j} + \frac{d\dot{z}}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

Le vecteur accélération \vec{a} a pour composantes cartésiennes :

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = \frac{d\dot{x}}{dt} = \ddot{x} \\ a_y = \frac{d\dot{y}}{dt} = \ddot{y} \\ a_z = \frac{d\dot{z}}{dt} = \ddot{z} \end{cases}$$

Son module est tel que :

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \quad (m/s^2)$$

Note :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right) = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}$$

Le vecteur accélération instantanée $\vec{a}(t)$, à la date t d'un mobile M , de vecteur position $\vec{OM}(t)$ dans le repère \mathcal{R} , est égal à la dérivée seconde, par rapport au temps, du vecteur \vec{OM} .



2. Dans la base de Frenet.

Considérons le mouvement d'un mobile M décrivant une trajectoire curviligne. Localement autour de M , la trajectoire peut être assimilée à un arc de cercle dont le centre C est appelé centre de courbure et dont le rayon $CM = R$ est le rayon de courbure en M de la trajectoire curviligne (voir figure 6 ci-dessous) :

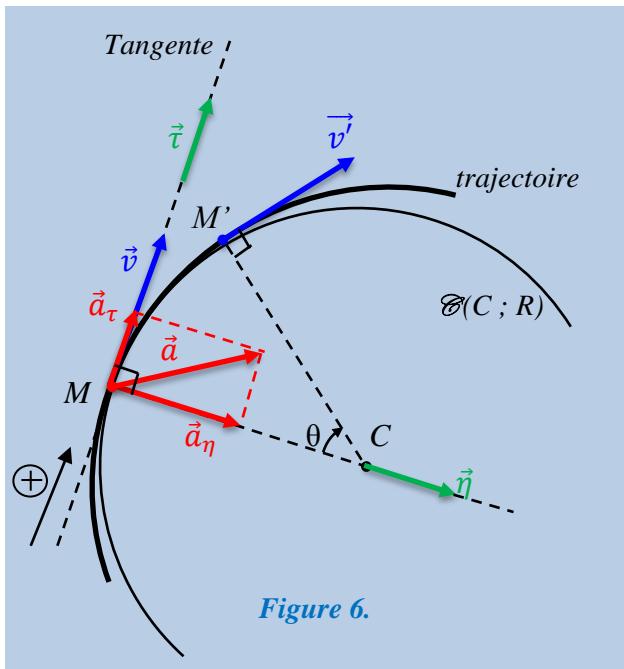


Figure 6.

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{\tau} \quad \text{et} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \vec{\tau} \right) = \frac{d^2 s}{dt^2} \vec{\tau} + \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2 s}{dt^2} \vec{\tau} + v \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

L'accélération a donc dans la base de Frenet deux composantes : $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_\eta$

La première est colinéaire à $\vec{\tau}$; elle est appelée *composante tangentielle* de l'accélération et notée \vec{a}_τ . La seconde, orthogonale à $\vec{\tau}$ est appelée *composante normale* de l'accélération et est notée \vec{a}_η . On démontre en mathématique que :

$$\vec{a}_\eta = v \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{v^2}{R} \vec{\eta}$$

D'où :

$$\vec{a} = \frac{d^2 s}{dt^2} \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \vec{\eta}$$

Il est important de noter que, puisque $\frac{v^2}{R}$ est positif, le vecteur accélération est toujours dirigé vers l'intérieur de la trajectoire.

Ainsi :

$$\begin{cases} a_\tau = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s} = R \ddot{\theta} \\ a_\eta = \frac{v^2}{R} \end{cases}$$

Avec :

$s = R\theta$: abscisse curviligne;

v : vitesse du mobile (m/s) ;

R : rayon de courbure ; $\theta = (\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CM'})$.

Le module de \vec{a} est tel que :

$$a = \sqrt{\ddot{s}^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2} \quad (\text{m/s}^2)$$

II. Etude cinématique de quelques mouvements.

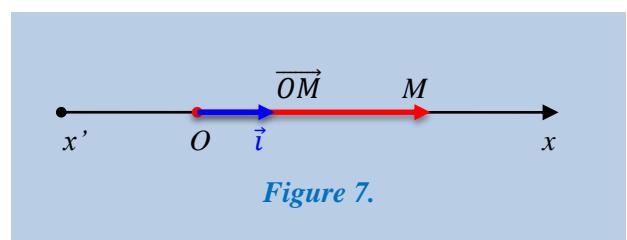
II.1. Mouvement rectiligne.

Soit un mobile M ponctuel. Ce mobile est animé d'un mouvement rectiligne lorsque *sa trajectoire est une droite*.

Exemples :

- ✓ Le mouvement d'une voiture sur une route rectiligne.
- ✓ Le mouvement d'une cabine d'ascenseur.
- ✓ Le mouvement d'un corps en chute libre.

La position de M est déterminée à chaque instant par son vecteur position \overrightarrow{OM} dans un repère à *une dimension* (voir figure 7).



L'axe x' Ox du repère est porté par la trajectoire.

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{i}$$

Le vecteur vitesse du point M est :

$$\vec{v} = v_x \vec{i} = \frac{dx}{dt} \vec{i} = \dot{x} \vec{i}$$

Son vecteur accélération est défini par :

$$\vec{a} = a_x \vec{i} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} = \ddot{x} \vec{i}$$



Remarques :

- Les *vecteurs position, vitesse et accélération* d'un point en mouvement rectiligne *sont portés par la trajectoire*. Ils n'ont chacun qu'une composante.
- L'équation de la trajectoire de M est celle de l'axe des abscisses, c'est – à – dire $y = 0$ et $z = 0$.

Les équations caractéristiques d'un MRUV sont les suivantes :

$$\begin{aligned} a_x &= \text{cte} \neq 0 \\ v_x &= a_x t + v_{0x} \\ x &= \frac{1}{2} a_x t^2 + v_{0x} t + x_0 \\ v_x^2 - v_{0x}^2 &= 2 a_x (x - x_0) \end{aligned}$$

II.1.1. Mouvement rectiligne uniforme (MRU).

Un mobile M est animé d'un MRU lorsque

- ✓ Son vecteur accélération est nul ($\vec{a} = \vec{0}$) ;
- ✓ Son vecteur vitesse est constant ($\vec{v} = \overrightarrow{\text{cte}}$) ;
- ✓ Son équation horaire est de la forme :

$$x = v_x t + x_0.$$

Avec :

x : position du mobile à chaque instant (m) ;

v_x : vitesse constante du mobile (m/s) ;

x_0 : position du mobile à l'instant initial ; c'est la valeur de x à $t = 0$, on l'appelle encore *élongation initiale ou abscisse initiale*.

Les équations caractéristiques d'un MRU sont les suivantes :

$$\begin{aligned} a_x &= 0 \\ v_x &= \text{cte} \\ x &= v_x t + x_0 \end{aligned}$$

II.1.2. Mouvement rectiligne uniformément varié (MRUV).

Un mobile M est animé d'un MRUV lorsque :

- ✓ Son vecteur accélération est constant au cours du mouvement (en sens et en direction) : $\vec{a} = \overrightarrow{\text{cte}}$;
- ✓ Son vecteur vitesse est une fonction linéaire du temps, dont la composante est de la forme :

$$v_x = a_x t + v_{0x} \quad (1)$$
- ✓ Son équation horaire est de la forme :

$$x = \frac{1}{2} a_x t^2 + v_{0x} t + x_0 \quad (2)$$

Avec v_{0x} : vitesse initiale du mobile (à $t = 0$).

De (1) et (2), on établit l'expression de la *relation espace – vitesse (REV) ou relation indépendante du temps (RIT)* :

$$v_x^2 - v_{0x}^2 = 2 a_x (x - x_0)$$

Remarques :

R₁ : Quand $\vec{a} \cdot \vec{v} > 0$, alors \vec{a} et \vec{v} sont de même sens, la vitesse \vec{v} augmente au cours du temps, le mouvement est dit *accéléré*.

R₂ : Quand $\vec{a} \cdot \vec{v} < 0$, alors \vec{a} et \vec{v} sont de sens opposés, la vitesse \vec{v} diminue au cours du temps, le mouvement est dit *décéléré ou retardé*.

R₃ : De la relation (1) $v_x = a_x t + v_{0x}$
 $\Rightarrow v_x - v_{0x} = a_x t$, soit

$$v_x - v_{0x} = a_x (t - t_0) \text{ ou } \Delta v_x = a_x \Delta t$$

C'est *la relation vitesse – temps (RVT)*.

• Espaces parcourus par un mobile animé d'un MRUV.

Considérons un mobile M animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié. A $t = 0$: $x_0 = 0$; $v_0 = 0$ et étudions les espaces (distances) parcourus pendant des intervalles de temps successifs et égaux (figure 8).

- Soit $x = \frac{1}{2} a_x t^2$ à la date t ;
- Soit $x_1 = \frac{1}{2} a_x t_1^2 = \frac{1}{2} a_x (t + \theta)^2$ à la date $t_1 = t + \theta$:

$$x_1 = \frac{1}{2} a_x t^2 + a_x \theta t + \frac{1}{2} a_x \theta^2$$
- Soit $x_2 = \frac{1}{2} a_x t_2^2 = \frac{1}{2} a_x (t_1 + \theta)^2$
 $= \frac{1}{2} a_x (t + 2\theta)^2$ à la date $t_2 = t_1 + \theta = t + 2\theta$:

$$x_2 = \frac{1}{2} a_x t^2 + 2a_x \theta t + 2a_x \theta^2$$
- Soit $x_3 = \frac{1}{2} a_x t_3^2 = \frac{1}{2} a_x (t_2 + \theta)^2$
 $= \frac{1}{2} a_x (t + 3\theta)^2$ à la date $t_3 = t_2 + \theta = t + 3\theta$:



$$x_3 = \frac{1}{2}a_x t^2 + 3a_x \theta t + \frac{9}{2}a_x \theta^2$$

Les espaces parcourus pendant les intervalles de temps θ sont :

$$e_1 = x_1 - x = \frac{1}{2}a_x t^2 + a_x \theta t + \frac{1}{2}a_x \theta^2 - \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$e_1 = a_x \theta t + \frac{1}{2}a_x \theta^2$$

$$e_2 = x_2 - x_1 = \frac{1}{2}a_x t^2 + 2a_x \theta t + 2a_x \theta^2 - \frac{1}{2}a_x t^2 - a_x \theta t - \frac{1}{2}a_x \theta^2$$

$$e_2 = a_x \theta t + \frac{3}{2}a_x \theta^2$$

$$e_3 = x_3 - x_2 = \frac{1}{2}a_x t^2 + 3a_x \theta t + \frac{9}{2}a_x \theta^2 - \frac{1}{2}a_x t^2 - 2a_x \theta t - 2a_x \theta^2$$

$$e_3 = a_x \theta t + \frac{5}{2}a_x \theta^2$$

$$e_2 - e_1 = a_x \theta t + \frac{3}{2}a_x \theta^2 - a_x \theta t - \frac{1}{2}a_x \theta^2$$

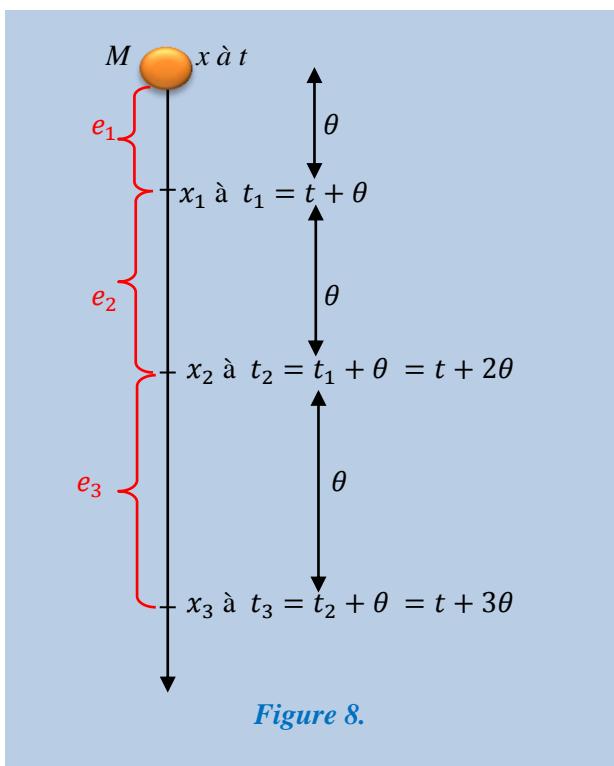
$$e_2 - e_1 = a_x \theta^2$$

$$e_3 - e_2 = a_x \theta t + \frac{5}{2}a_x \theta^2 - a_x \theta t - \frac{3}{2}a_x \theta^2$$

$$e_3 - e_2 = a_x \theta^2$$

On constate que :

$$e_3 - e_2 = e_2 - e_1 = a_x \theta^2$$



Conclusion : Les espaces parcourus par un mobile animé d'un MRUV pendant des intervalles de temps successifs égaux θ augmentent progressivement de la valeur $a\theta^2$. On dit qu'ils forment une progression arithmétique de raison $a\theta^2$.

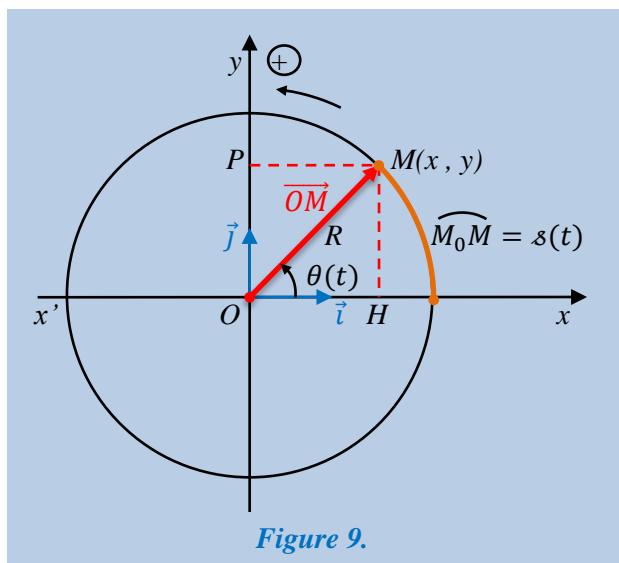
II.2. Mouvement circulaire.

Soit un mobile M ponctuel (voir figure 9). Ce mobile est animé d'un mouvement circulaire lorsque *sa trajectoire est un cercle*.

Exemples :

- ✓ Le mouvement d'une hélice d'hélicoptère.
- ✓ Le mouvement d'un tourne-disque.

Le repérage du point M peut se faire de plusieurs façons :



- ✓ Par son *abscisse curviligne* $s(t)$ qui est la valeur algébrique de l'arc M_0M à l'instant t . Le point M_0 est une position origine choisie sur la trajectoire préalablement orientée. Il correspond à la position du mobile à l'instant $t = 0$;
- ✓ Par son *abscisse angulaire ou angle polaire* $\theta(t)$ qui est la valeur de l'angle $(\overrightarrow{OM}_0, \overrightarrow{OM})$ à chaque instant.
- ✓ Par ses *coordonnées cartésiennes* dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) dont l'origine est le centre du cercle de rayon $OM = R$. Le vecteur position \overrightarrow{OM} s'écrit alors :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j};$$



Avec :

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{OH}{OM} = \frac{x}{R} \Rightarrow x = R\cos\theta \\ \sin\theta = \frac{OP}{OM} = \frac{y}{R} \Rightarrow y = R\sin\theta \end{cases}$$

Alors :

$$\overrightarrow{OM} = (R\cos\theta)\vec{i} + (R\sin\theta)\vec{j}$$

Remarque :

L'équation de la trajectoire de M se détermine de la manière suivante :

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = (R\cos\theta)^2 & (1) \\ y^2 = (R\sin\theta)^2 & (2) \end{cases}$$

En faisant la somme des relations (1) et (2) membre à membre on obtient :

$$x^2 + y^2 = R^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

D'où :

$$x^2 + y^2 = R^2$$

C'est l'équation du cercle C de centre $O(0 ; 0)$ et de rayon $R = OM$.

La relation liant l'abscisse curviligne s et l'angle polaire θ est :

$$s = R\theta \quad (\theta \text{ en radians})$$

La vitesse linéaire v du mobile est donnée par la relation :

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(R\theta)}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = R\dot{\theta}$$

Car le rayon R est constant.

D'où :

$$v = R\dot{\theta}$$

$\dot{\theta}$ est appelée vitesse angulaire du mobile M et s'exprime en radian par seconde (rad.s^{-1}).

Exprimons les composantes normale et tangentielle de l'accélération des grandeurs angulaires.

➤ Accélération tangentielle

$$a_t = \frac{dv}{dt} \quad \text{or} \quad v = R\dot{\theta},$$

$$a_t = \frac{d(R\dot{\theta})}{dt} = R \frac{d\dot{\theta}}{dt}$$

Donc :

$$a_t = R\ddot{\theta}$$

$\ddot{\theta}$ est l'accélération angulaire du mobile M et s'exprime en radian par seconde au carré (rad.s^{-2}).

➤ Accélération normale

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(R\dot{\theta})^2}{R}$$

Donc :

$$a_n = R\dot{\theta}^2$$

Dans la base de Frenet (\vec{t}, \vec{n}) :
 $\vec{a} = a_t \vec{t} + a_n \vec{n}$, alors :

$$\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{t} + R\dot{\theta}^2\vec{n}$$

II.2.1. Mouvement circulaire uniforme (MCU).

Un mobile M est animé d'un MCU lorsque :

- ✓ Son accélération angulaire est nulle ($\ddot{\theta} = 0$) ;
- ✓ Sa vitesse angulaire est constante ($\dot{\theta} = \text{cte}$) ;
- ✓ Son équation horaire est une fonction linéaire de la forme :

$$\theta = \dot{\theta}t + \theta_0$$

Avec :

θ : abscisse angulaire du mobile à chaque instant (rad) ;

$\dot{\theta}$: vitesse angulaire du mobile (rad/s) ;

θ_0 : abscisse angulaire du mobile à l'instant initial, c'est la valeur de θ à $t = 0$, on l'appelle encore élongation initiale ou abscisse angulaire initiale.

Les équations caractéristiques d'un MCU sont :

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= 0 \\ \dot{\theta} &= \text{cte} \\ \theta &= \dot{\theta}t + \theta_0 \end{aligned}$$

Remarque :

L'accélération angulaire (et par conséquent la composante tangentielle du vecteur accélération) d'un mouvement circulaire est nulle. Le vecteur accélération d'un tel mouvement, réduit à sa composante normale est toujours dirigé vers le centre du cercle de trajectoire. On dit qu'il est centripète.



II.2.2. Mouvement circulaire uniformément varié (MCUV).

Un mobile M est animé d'un MCV lorsqu' :

- ✓ Son accélération angulaire est *constante* ($\ddot{\theta} = \text{cte}$) ;
- ✓ Sa vitesse angulaire est une *fonction linéaire* du temps de la forme :

$$\dot{\theta} = \ddot{\theta}t + \dot{\theta}_0 \quad (1)$$

- ✓ Son équation horaire est de la forme :

$$\theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 + \dot{\theta}_0 t + \theta_0 \quad (2)$$

Avec $\dot{\theta}_0$: vitesse angulaire initiale du mobile.

De (1) et (2), on établit l'expression :

$$\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2 = 2\ddot{\theta}(\theta - \theta_0)$$

C'est *la relation espace – vitesse (REV) ou relation indépendante du temps (RIT)* :

Les équations caractéristiques d'un MCV sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= \text{cte} \neq 0 \\ \dot{\theta} &= \ddot{\theta}t + \dot{\theta}_0 \\ \theta &= \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 + \dot{\theta}_0 t + \theta_0 \\ \dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2 &= 2\ddot{\theta}(\theta - \theta_0)\end{aligned}$$

Remarques :

R₁ : Quand $\ddot{\theta} \cdot \dot{\theta} > 0$, $\dot{\theta}$ augmente, le mouvement est dit *accéléré*.

R₂ : Quand $\ddot{\theta} \cdot \dot{\theta} < 0$, $\dot{\theta}$ diminue, le mouvement est dit *décéléré* ou *retardé*.

R₃ : L'angle balayé par le mobile M au cours de son mouvement est : $\theta = 2\pi n$

Avec n : *nombre de tours*.

R₄ : Sa vitesse de angulaire est telle que :

$$\dot{\theta} = 2\pi N$$

Avec N : *Vitesse de rotation (tr/s)*.

R₅ : De la relation (1) $\dot{\theta} = \ddot{\theta}t + \dot{\theta}_0$

$$\Rightarrow \dot{\theta} - \dot{\theta}_0 = \ddot{\theta}t, \text{ soit}$$

$$\dot{\theta} - \dot{\theta}_0 = \ddot{\theta}(t - t_0) \text{ ou } \Delta\dot{\theta} = \ddot{\theta}\Delta t$$

C'est *la relation vitesse – temps (RVT)*.

II.3. Mouvement sinusoïdal.

Définition : On appelle mouvement sinusoïdal, un mouvement dont l'équation horaire obéit à une fonction sinusoïdale du temps.

Exemples :

- ✓ Le mouvement d'un corps suspendu à un ressort, tiré vers le bas puis lâché.
- ✓ Le mouvement du balancier d'une horloge.

On distingue deux types de mouvements sinusoïdaux : le *mouvement rectiligne sinusoïdal (MRS)* et le *mouvement sinusoïdal de rotation (MSR)*.

II.3.1. Mouvement rectiligne sinusoïdal (MRS).

II.3.1.1 Définition : On dit qu'un mobile M est en mouvement rectiligne sinusoïdal lorsque son équation horaire est de la forme :

$$x = x_m \sin(\omega t + \varphi)$$

ou

$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

x : *élongation de M (m)*

x_m : *amplitude du mouvement ou élongation maximale (m)*

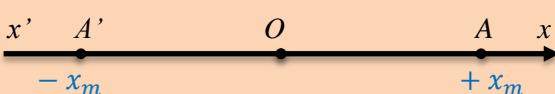
$(\omega t + \varphi)$: *phase du mouvement à l'instant t*.

ω : *pulsation du mouvement (rad/s)*

φ : *phase initiale (rad)*

Remarque :

- ✓ x_m , ω et φ sont des constantes déterminées à partir des conditions initiales du mouvement.
- ✓ Le mobile se déplace entre deux positions extrêmes $-x_m$ et $+x_m$ telque :



Au cours d'un tel mouvement, le mobile parcourt le segment $A'A$ de longueur $2x_m$ alternativement dans un sens et dans l'autre : On dit qu'il *oscille de part et d'autre de l'origine O*.



$$A'A = L = 2x_m$$

Représentation graphique du sinusoïde.

$$x = x_m \sin(\omega t + \varphi)$$

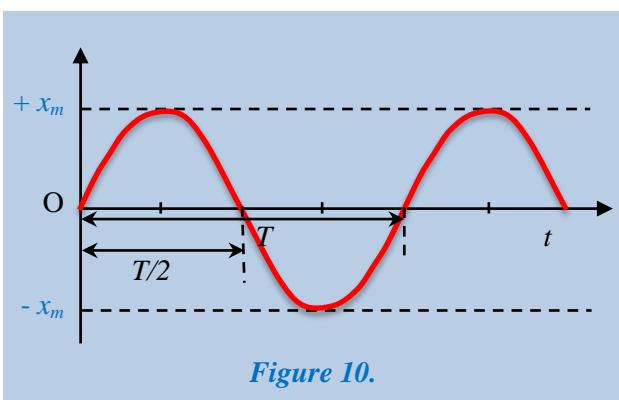
Conditions initiales : à $t = 0$; $x = 0$

$$\Rightarrow 0 = x_m \sin \varphi \Rightarrow \varphi = 0$$

Ainsi :

$$x = x_m \sin \omega t$$

La figure 10 ci – dessous donne l'allure de la sinusoïde en fonction du temps d'un mouvement rectiligne sinusoïdal.



II.3.1.2. Périodicité du mouvement.

A partir d'un instant t quelconque, le mouvement se reproduit identique à lui – même chaque fois que le temps augmente d'une période T .

Un tel mouvement est *dit périodique*, de période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Avec : $\omega = 2\pi N = 2\pi f$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

II.3.1.3. Vitesse linéaire.

$$x = x_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$v = \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = \omega x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x} = \omega x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

II.3.1.4. Accélération linéaire.

$$\ddot{x} = \omega x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$a = \ddot{x}(t) = \frac{d\dot{x}}{dt} = -\omega^2 x_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow a = -\omega^2 x_m \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$$

D'où :

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

II.3.1.5. Equation différentielle.

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Soit :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Ceci est une équation différentielle du second ordre sans second membre, caractéristique d'un mouvement rectiligne sinusoïdal admettant des solutions de la forme :

$$x = x_m \sin(\omega t + \varphi)$$

ou

$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

II.3.2. Mouvement sinusoïdal de rotation (MSR).

II.3.2.1 Définition : On dit qu'un mobile M est en mouvement sinusoïdal de rotation lorsque son équation horaire est de la forme :

$$\theta = \theta_m \sin(\omega t + \varphi)$$

ou

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \varphi)$$

θ : élongation de M (rad)

θ_m : amplitud de du mouvement ou élongation maximale (rad)

$(\omega t + \varphi)$: phase du mouvement à l'instant t .

ω : pulsation du mouvement (rad/s)

φ : phase initiale (rad)

On obtient de façon analogue les mêmes expressions pour un mouvement sinusoïdal de rotation que pour un mouvement rectiligne sinusoïdal.



II.3.2.2. Vitesse angulaire.

$$\theta = \theta_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{\theta}(t) = \frac{d\theta}{dt} = \omega \theta_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{\theta} = \omega \theta_m \cos(\omega t + \varphi)$$

II.3.1.4. Accélération angulaire.

$$\dot{\theta} = \omega \theta_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = -\omega^2 \theta_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \dot{\theta}_m \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 \theta$$

D'où :

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \theta$$

II.3.1.5. Equation différentielle.

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \theta$$

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0 \text{ soit : } \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \theta = 0$$

Ceci est une équation différentielle du second ordre sans second membre, caractéristique d'un mouvement sinusoïdal de rotation admettant des solutions de la forme :

$$\theta = \theta_m \sin(\omega t + \varphi)$$

ou

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \varphi)$$

❖ Notion d'origines.

Les paramètres initiaux $x_0, v_0, \theta_0, \dot{\theta}_0$ et φ d'un mouvement (rectiligne, circulaire sinusoïdal) sont déterminés en utilisant les origines d'étude : l'origine des espaces qui fait référence à un repère et l'origine des dates fait référence à la notion de temps.

➤ L'origine des espaces est un lieu choisi comme origine du repère associé à l'étude du mouvement. Comme l'indique son nom, en ce lieu, le point correspondant a pour coordonnées nulles. Les positions occupées par le mobile en mouvement sont comptés par rapport à ce point. Si l'on se réfère au repère cartésien, sur l'axe horizontal ; les abscisses sont comptées négatives à gauche de l'origine et positives à droite de celle-ci.

Tandis que sur l'axe vertical ; les ordonnées sont comptées négatives en – dessous de l'origine et positives au – dessus de celle – ci.

➤ L'origine des dates est un instant choisi comme temps de référence. La durée du mouvement d'un mobile sera comptée à partir de ce moment où le top est donné. Pour cela quel que soit l'heure à laquelle où l'on commence à étudier le mouvement, le chronomètre est mis à zéro.

Illustration.

Lors d'une course vitesse, les athlètes sont tous alignés, un pied posé sur la ligne de départ, pour parcourir une distance donnée ; cette ligne est l'origine des espaces, car la distance de la course sera comptée à partir de cette ligne.

Au départ, lorsque le top est donné, tous les athlètes s'élancent dans la course, pour parcourir la distance requise et franchir la ligne d'arrivée tout en souhaitant être le premier ; cet instant où le top est donné est l'origine des dates, car la performance (temps) de chaque athlète est mesurée à partir de cet instant.

Exercices d'application.

Exercice 1 : Deux villages A et B sont situés le long d'une route rectiligne, à 100Km l'un de l'autre. Une personne du village A voulant envoyer un colis au village B arrive au lieu d'embarquement après le départ de l'autobus qui assure la liaison entre les deux villages.

L'autobus a un mouvement tel qu'il atteint la vitesse constante de 108 Km.h^{-1} après un parcours de 300m. Ensuite son mouvement se poursuit à la vitesse constante de 108 Km.h^{-1} .

1°) En prenant pour origine des espaces, la position de l'autobus au moment du démarrage et l'instant du démarrage comme origine des dates :

- Calcule l'accélération du mouvement durant cette phase ;
- Écris l'équation horaire du mouvement de l'autobus dans la première phase ;
- A quelle date la première phase du mouvement prend – t – elle fin ?
- Trouve l'équation horaire de la deuxième phase, les conditions initiales n'étant pas modifiées.



2°) Une personne de bonne volonté se propose de rattraper l'autobus à l'aide d'une moto pour donner le colis. 2min plus tard, la moto démarre du village A avec une accélération de 4m.s^{-2} .

- Écris l'équation horaire du mouvement de la moto en conservant les mêmes conditions initiales ;
- Détermine la date et le lieu où la moto rattrapera l'autobus (on assimilera la moto et l'autobus à des points).

Exercice 2 : On fait tourner un disque initialement au repos jusqu'à atteindre une vitesse de 8rad.s^{-1} .

1°) L'accélération angulaire au cours de cette phase étant de $2,5\text{rad.s}^{-2}$, calcule l'angle balayé par un rayon du disque au cours du mouvement.

2°) Écris l'équation horaire du mouvement du disque (on prendra $\theta = 0$ à $t = 0$).

3°) Tournant à la vitesse de 8rad.s^{-1} , le disque est freiné. Il s'arrête alors au bout de 2s.

- Calcule la valeur de cette nouvelle accélération.
- Quelle est la valeur de l'angle balayé par un rayon du disque depuis le début du freinage jusqu'à l'arrêt complet.
- Déduis le nombre de tours effectués par le disque au cours de cette deuxième phase.

Corrigé 1.

$$AB = 100\text{Km} ; v_1 = 108\text{Km/h} ; d = 300\text{m}$$

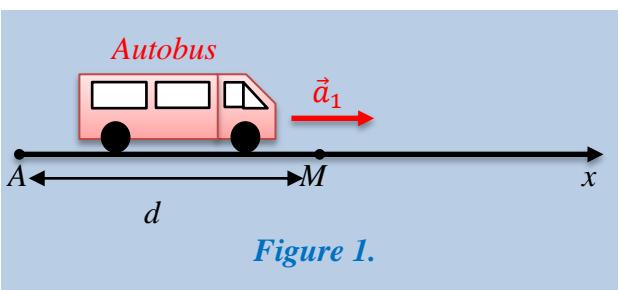


Figure 1.

1°) a) Accélération du mouvement durant cette phase.

Origine des dates : instant du démarrage de l'autobus ;

Origine des espaces : position de l'autobus au moment du démarrage.

Ainsi cette position est prise comme origine du repère d'étude (un seul axe, horizontal) dont l'abscisse est nulle.

Parti sans vitesse initiale, l'autobus atteint une vitesse de 108Km/h sur un parcours de 300m , son

mouvement est donc rectiligne uniformément varié (M.R.U.V).

D'après la R.E.V on a :

$$v_1^2 - v_{01}^2 = 2a_1(x_1 - x_{01})$$

Conditions initiales :

$$A t = 0 : x_{01} = 0 ; v_{01} = 0 \text{ (au démarrage)}$$

$$\Rightarrow v_1^2 = 2a_1(x_1) ; \text{ avec } x_1 = d$$

D'où :

$$a_1 = \frac{v_1^2}{2d}$$

$$A.N : a_1 = \frac{(30)^2}{2 \times 300} = 1,5 \Rightarrow a_1 = 1,5\text{m/s}^2$$

b) Equation horaire du mouvement de l'autobus dans la première phase.

$a_1 = 1,5\text{m.s}^{-2} = \text{cte} \neq 0$, l'autobus est animé d'un M.R.U.V d'équation :

$$x_1 = \frac{1}{2}a_1 t^2 + v_{01} t + x_{01}$$

Conditions initiales :

$$A t = 0 : v_{01} = 0 ; x_{01} = 0$$

$$\text{Alors : } x_1 = \frac{1}{2}a_1 t^2$$

D'où :

$$x_1 = 0,75t^2 \text{ (m)}$$

c) Date à laquelle prend fin la première phase du mouvement.

1^{ère} méthode.

$$x_1 = \frac{1}{2}a_1 t^2$$

A la fin de la première phase : $x_1 = d$, alors :

$$d = \frac{1}{2}a_1 t^2$$

D'où :

$$t = \sqrt{\frac{2d}{a_1}}$$

$$A.N: t = \sqrt{\frac{2 \times 300}{1,5}} = 20$$

$$t = 20\text{s}$$

2^{ème} méthode.

D'après la R.V.T on a : $v_1 - v_{01} = a_1 t$

$$\text{Avec } v_{01} = 0 \Rightarrow v_1 = a_1 t$$



D'où :

$$t = \frac{v_1}{a_1}$$

$$A.N: t = \frac{30}{1,5} = 20 \Rightarrow t = 20s$$

d) Équation horaire de la deuxième phase.

$v_1 = 30m.s^{-1} = cte$, l'autobus est animé d'un M.R.U d'équation :

$$x'_1 = v'_{0_1}t + x'_{0_1}$$

Conditions initiales :

A $t = 0$; $x'_{0_1} = d$; $v'_{0_1} = v_1$

Alors : $x'_1 = v_1 t + d$

D'où :

$$x'_1 = 30t + 300 \text{ (m)}$$

2°) $\theta = 2\text{min}$; $a_2 = 4m/s^2$.

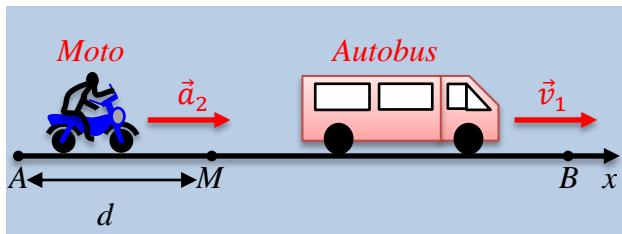


Figure 2.

a) Équation horaire du mouvement de la moto.

$a_2 = 4m.s^{-2} = cte \neq 0$, la moto est animée d'un M.R.U.V d'équation :

$$x_2 = \frac{1}{2}a_2 t'^2 + v_{0_2} t' + x_{0_2}$$

Conditions initiales :

A $t = 0$: $x_{0_2} = 0$; $v_{0_2} = 0$ (au démarrage)

$$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}a_2 t'^2; \text{ Or } t = t' + \theta \Rightarrow t' = t - \theta$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}a_2 t'^2 = \frac{1}{2}a_2(t - \theta)^2$$

$$x_2 = 2(t - 120)^2 = 2(t^2 - 240t + 14400)$$

D'où :

$$x_2 = 2t^2 - 480t + 28800 \text{ (m)}$$

b) Date et lieu où la moto rattrapera l'autobus.

Le rattrapage de l'autobus par la moto a lieu dans phase uniforme de l'autobus.

Lorsque la moto rattrapera l'autobus, son abscisse sera égale à celle de l'autobus.

Ainsi : $x'_1 = x_2$

$$\Rightarrow 30t + 300 = 2t^2 - 480t + 28800$$

$$\text{Alors : } 2t^2 - 510t + 28500 = 0$$

Le calcul du discriminant réduit donne :

$$\Delta' = (-255)^2 - 2 \times 28500 = 8025 > 0$$

Les racines de cette équation sont :

$$\begin{cases} t_1 = \frac{-(-255) - \sqrt{8025}}{2} = 82,70 \\ t_2 = \frac{-(-255) + \sqrt{8025}}{2} = 172,29 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 = 82,70s < \theta = 120s \\ t_2 = 172,29s > \theta = 120s \end{cases}$$

On choisit le temps le plus élevé $t_2 = 172,29s$, qui correspond à une durée supérieure au retard de la moto ($\theta = 120s$).

Donc le rattrapage a lieu à :

$$t = 172,29s$$

Le lieu de rattrapage est : $x'_1 = x_2 = x$

$$\Rightarrow x = 30(172,29) + 300 = 5468,7.$$

$$x = 5468,7m$$

Corrigé 2.

$$\dot{\theta}_1 = 8rad.s^{-1}; \ddot{\theta}_1 = 2,5rad.s^{-2}$$

1°) Calcul de l'angle balayé par un rayon du disque au cours du mouvement.

$\ddot{\theta}_1 = cte \neq 0$, alors le mouvement est circulaire uniformément varié (M.C.U.V).

D'après la relation espace – vitesse (R.E.V), on a :

$$\dot{\theta}_1^2 - \dot{\theta}_{0_1}^2 = 2\ddot{\theta}_1(\theta_1 - \theta_{0_1})$$

Origine des dates : l'instant du lancement du disque.

Origine des espaces : la position du disque avant le lancement.

Conditions initiales :

A $t = 0$: $\theta_{0_1} = 0$; $\dot{\theta}_{0_1} = 0$.

Ainsi : $\dot{\theta}_1^2 = 2\ddot{\theta}_1(\theta_1)$

D'où :

$$\theta_1 = \frac{\dot{\theta}_1^2}{2\ddot{\theta}_1}$$

$$A.N : \theta_1 = \frac{(8)^2}{2 \times 2,5} = 12,8$$

$$\theta_1 = 12,8rad$$



2°) Equation horaire du mouvement du disque.

Le mouvement étant circulaire uniformément varié (M.C.U.V), l'équation est de la forme :

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\dot{\theta}_1 t^2 + \dot{\theta}_{0_1} t + \theta_{0_1}$$

Avec : $\theta_{0_1} = 0$; $\dot{\theta}_{0_1} = 0$.

$$\Rightarrow \theta_1 = \frac{1}{2}\ddot{\theta}_1 t^2$$

$$\Rightarrow \theta_1 = \frac{1}{2}(2,5)t^2$$

D'où :

$$\theta_1 = 1,25t^2$$

3°) $t = 2s$.

a) *Calcul de la valeur de cette nouvelle accélération.*

En freinant le disque, sa vitesse diminue progressivement puis s'annule.

Le mouvement est toujours uniformément varié (précisément décéléré).

D'après la relation vitesse – temps (RVT) :

$$\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_2(t - t_0)$$

t_0 étant nul $\Rightarrow \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_2 t$

A l'arrêt du disque : $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_f = 0$

$$\Rightarrow -\dot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_2 t$$

D'où :

$$\ddot{\theta}_2 = -\frac{\dot{\theta}_1}{t}$$

$$A.N : \ddot{\theta}_2 = -\frac{8}{2} = -4$$

$$\ddot{\theta}_2 = -4 \text{ rad.s}^{-2}$$

b) *Valeur de l'angle balayé par un rayon du disque depuis le début du freinage jusqu'à l'arrêt complet.*

$\ddot{\theta}_2 = \text{cte} \neq 0$, M.C.U.V.

D'après la R.E.V, on a :

$$\dot{\theta}_2^2 - \dot{\theta}_{0_2}^2 = 2\ddot{\theta}_2(\theta_2 - \theta_{0_2})$$

Origine des dates : l'instant du début du freinage du disque.

Origine des espaces : la position du disque juste avant le freinage.

Conditions initiales :

à $t = 0$, $\theta_{0_2} = 0$; $\dot{\theta}_{0_2} = \dot{\theta}_1$.

Ainsi : $\dot{\theta}_2^2 - \dot{\theta}_1^2 = 2\ddot{\theta}_2(\theta_2)$

A l'arrêt du disque : $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_f = 0$

$$\Rightarrow -\dot{\theta}_1^2 = 2\ddot{\theta}_2 \cdot \theta_2$$

D'où :

$$\theta_2 = -\frac{\dot{\theta}_1^2}{2\ddot{\theta}_2}$$

$$A.N: \theta_2 = -\frac{(8)^2}{2 \times (-4)} = 8$$

$$\theta_2 = 8 \text{ rad}$$

c) *Déduction du nombre de tours effectués par le disque au cours de cette deuxième phase.*

Par définition : $\theta_2 = 2\pi n_2$

$$\Rightarrow n_2 = \frac{\theta_2}{2\pi}$$

$$A.N: n_2 = \frac{8}{2 \times 3,14} = 1,27$$

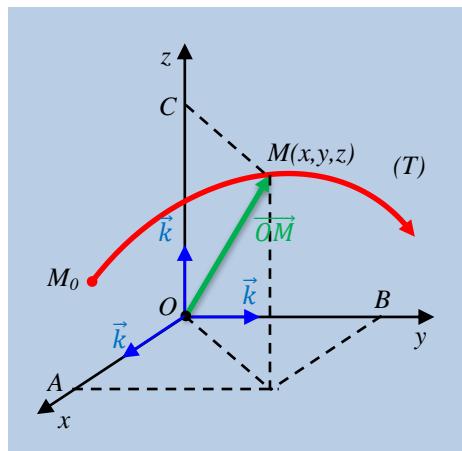
$$n_2 = 1,27 \text{ tour}$$



TRAVAUX DIRIGES III

Conseils pratiques :

1. Caractéristiques du mouvement.
2. Base cartésienne et base de Frenet : repères et trajectoire.
3. Nature du mouvement : uniforme et uniformément varié ; équations caractéristiques.
4. Notion d'origines.



L'ESSENTIEL DU COURS

I – Définitions des notions.

Définis les termes suivants : Référentiel ; Vecteur position ; Trajectoire ; Abscisse curviligne ; Vecteur vitesse.

II – Questions à alternative vrai ou faux.

Réponds par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

- 1°) Un référentiel est un objet lié à la Terre.
- 2°) Un référentiel est défini par un repère d'espace et un repère de temps.
- 3°) Un objet est en mouvement si sa position varie au cours du temps.
- 4°) Le mouvement d'un objet doit être décrit par rapport à un autre objet.
- 5°) Une personne se déplaçant en voiture est forcément en mouvement.
- 6°) Une personne assise par terre est obligatoirement immobile.

III – Vérification des connaissances.

On envisage le mouvement d'un point mobile décrivant une trajectoire curviligne ou non. Réponds par vrai ou faux.

- 1°) Le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire au point considéré.
- 2°) Dans un mouvement curviligne, le vecteur accélération peut être tangent à la trajectoire au point considéré.
- 3°) Une accélération tangentielle nulle implique un mouvement uniforme.
- 4°) Si $\ddot{a} \cdot \vec{v} < 0$, le mouvement est retardé.
- 5°) Une accélération tangentielle constante implique un mouvement uniformément accéléré ou retardé.
- 6°) Le vecteur accélération normal est dirigé vers l'intérieur d'une trajectoire curviligne.
- 7°) Si, à un instant t, la vitesse \vec{v} est nulle, alors l'accélération \ddot{a} est aussi nulle.

IV – Questions de cours

Assise à l'arrière de la voiture conduite par son père, Heidi fait signe à Arthur qui est resté immobile sur le trottoir.

- 1°) Le siège d'Heidi est – il en mouvement dans les référentiels suivants ?
 - a) La voiture ; b) Arthur.
- 2°) Réponds à la même question pour Arthur.
- 3°) Lequel de ces référentiels est un référentiel terrestre ? Justifie.

V – Appariement.

Relie un élément – question de la colonne A à un élément – réponse de la colonne B dans le tableau ci-dessous : Exemple $a_8 = b_{10}$



Colonne A		Colonne B	
a ₁	Relation indépendante du temps d'un mouvement rectiligne uniformément varié.	b ₁	$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$
a ₂	Abscisse curviligne	b ₂	$\ddot{x} + \omega^2x = 0$
a ₃	Equation horaire d'un mouvement rectiligne uniformément varié ;	b ₃	$\ddot{\theta} = cte \neq 0$
a ₄	Vitesse angulaire	b ₄	$x = x_m \cos(\omega t + \varphi)$
a ₅	Elongation d'un mouvement rectiligne sinusoïdal.	b ₅	$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$
a ₆	Mouvement circulaire uniformément varié.	b ₆	$\dot{\theta} = \ddot{\theta}t + \dot{\theta}_0$
a ₇	Equation différentielle.	b ₇	$s = R\theta$

RESOLUTION DES PROBLEMES

EXERCICE 1 : Sur l'axe $x'x$ d'origine O , l'équation horaire de l'abscisse x d'un point mobile M est : $x(t) = 2t^3 - 6t$.

- Donne l'expression de la composante du vecteur vitesse de M à l'instant t .
- Donne la composante du vecteur accélération au même instant.
- Détermine les intervalles de temps pendant lesquels le mouvement est accéléré ou retardé.

EXERCICE 2 : Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, la position d'un point M est définie à chaque instant par

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t - 2 \text{ (en mètres).} \\ z = 0 \end{cases}$$

- Représente ce point aux dates $0s$, $1s$, $2s$, et $3s$.
- Déduis – en l'équation de la trajectoire suivie par ce point et donne la nature du mouvement.

EXERCICE 3 : La position du point M est donnée à chaque instant, le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x = 2t \\ y = t^2 + 1 \text{ (en mètres).} \\ z = 0 \end{cases}$$

- Représente les positions respectives de ce point aux instants $0s$, $1s$ et $2s$.
- Calcule les composantes du vecteur vitesse à ces dates et représente – les aux mêmes instants.

EXERCICE 4 : La position d'un point matériel se déplaçant dans un plan muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) est définie à chaque instant par les équations paramétriques suivantes:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -t^2 + 2t \end{cases} \text{ avec } t \geq 0s.$$

Le point matériel est mis en mouvement à la date $t = 0s$.

1°) Donne l'équation cartésienne de la trajectoire.

- 2°) Détermine le vecteur vitesse du point matériel :
- Lorsque ce point passe par le sommet de la trajectoire ;
 - Lorsque ce point rencontre le plan $y = 0$.

EXERCICE 5 : Les équations paramétriques d'un mobile M à l'instant t sont données par :

$$\begin{cases} x = 2\cos\pi t + 1 \\ y = 2\sin\pi t - 2 \end{cases} \text{ (en m)}$$

- Montre que la trajectoire de ce point est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
- Calcule à un instant t quelconque :
 - Le module du vecteur vitesse ;
 - Le module du vecteur accélération.

EXERCICE 6 : Les équations paramétriques d'un point mobile M sont :

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = \frac{1}{2}t^2 + 4 \text{ (en cm)} \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

- Le mouvement du mobile est – il plan ? Pourquoi ?
- Détermine :
 - Le module vecteur vitesse du mobile à l'instant $t = 0$; $t = 2s$.
 - Le module du vecteur accélération du mobile à un instant t quelconque. Conclus.
- Quelle est l'équation de la trajectoire ? Donne sa nature.

EXERCICE 7 :

A – Les coordonnées cartésiennes d'un point M dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) sont :

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x = 2t - 2 \\ y = t + 1 \end{cases} \quad x \text{ et } y \text{ en mètre ; } t \text{ en seconde.}$$



1°) Donne l'expression du vecteur \overrightarrow{OM} dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) en fonction du paramètre t (écris \overrightarrow{OM} sous la forme $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$).

2°) Calcule \overrightarrow{OM}_0 pour $t = 0$; donne les coordonnées du point M_0 .

3°) Trouve une relation entre x et y (relation indépendante du temps). Représente y en fonction de x dans le repère. Donne la nature de la trajectoire.

4°) a) Calcule \overrightarrow{OM}_1 pour $t = 5$ secondes ;

b) Calcule la norme du vecteur $\overrightarrow{M_0M_1}$.

B – Même exercice pour $\overrightarrow{OM} \begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2t + 3 \end{cases}$ et

$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x = 2t \\ y = 4t^2 + 3 \end{cases}$

EXERCICE 8: Les équations horaires des coordonnées du point mobile M sont données par :

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x(t) = A \cos \omega t \\ y(t) = A \sin \omega t \end{cases} \quad A \text{ et } \omega \text{ sont des constantes positives.}$$

1°) Donne les expressions du vecteur vitesse \vec{V} et du vecteur accélération \vec{a} du mobile.

2°) Exprime le vecteur accélération \vec{a} en fonction du vecteur position \overrightarrow{OM} . Montre que \vec{a} est colinéaire à \overrightarrow{OM} .

3°) Quelle est l'équation de la trajectoire de M dans le repère cartésien ? Donne sa nature.

4°) Donne également l'équation horaire de l'abscisse curviligne du point M en prenant comme origine M_0 , position du mobile à l'instant $t = 0$.

EXERCICE 9: Soit deux axes rectangulaires Ox et Oy . Un point mobile M se déplace dans le plan xOy . Ses projections sur les axes Ox et Oy sont définies par :

$$\begin{cases} x(t) = 1 + \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

Montre que le mouvement de M est circulaire uniforme.

EXERCICE 10: A l'instant $t = 0$, un mobile M se trouve en un point de coordonnées x_0 et y_0 (en cm). Sa vitesse est donnée par :

$$\vec{v} \begin{cases} v_x(t) = v_0 \\ v_y(t) = 2t \end{cases} \quad (\text{en cm.s}^{-1}).$$

1°) Donne les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$.

2°) Déduis – en l'équation de la trajectoire $y = f(t)$, ainsi que le module v de la vitesse de M . A.N : $x_0 = 1\text{cm}$; $y_0 = 0$; $v_0 = 1\text{cm.s}^{-1}$.

EXERCICE 11: Le mouvement d'un mobile M est étudié dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . A l'instant initial $t = 0$, le mobile est lancé avec une vitesse $\overrightarrow{v_0} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ à partir d'un point mobile M_0 tel que $\overrightarrow{OM}_0 = -\vec{i} + 2\vec{j}$ et d'accélération constante $\vec{a} = -10\vec{j}$.

1°) Par intégration successives, établis les équations horaires $x = f(t)$ et $y = g(t)$ du mouvement.

2°) Déduis – en l'équation de la trajectoire et donne sa nature.

3°) Détermine à $t = 1\text{s}$:

- a) Le vecteur vitesse ;
- b) Son module.

4°) Donne la vecteur vitesse du mobile lorsque le mobile passe par le point $x = 0$.

EXERCICE 12: Les équations horaires du mouvement d'un mobile se déplaçant dans un plan muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) sont :

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x(t) = t^2 - 2 \\ y(t) = 2t^2 - 2 \end{cases} \quad (x \text{ et } y \text{ en m avec } t \geq 0\text{s}).$$

Le mobile est mis en mouvement à la date $t_0 = 0$.

1°) Détermine l'équation cartésienne $y = f(x)$ de la trajectoire. Déduis – en la nature de la trajectoire.

2°) Détermine les coordonnées du mobile au début du mouvement et 5s après le début du mouvement.

3°) Détermine l'expression de la distance parcourue par le mobile entre l'instant initial et un instant quelconque. Calcule la distance 10s après le début du mouvement.

4°) A quel instant le mobile passe – t – il par le point d'abscisse nul ? Quelle est alors son ordonnée ?

EXERCICE 13: Sur la route Total – Nganga Lingolo supposée rectiligne, roulent à vitesse constante deux véhicules en sens contraires. On assimile Total et Nganga Lingolo à des points A et B respectivement, distants de 18Km.

Le véhicule (1) passe en A avec une vitesse de 36Km/h se dirigeant vers B . Le véhicule (2) passe en B au même moment que le véhicule (1) franchissant A avec une vitesse de 72Km/h.

1°) a) Ecris les équations horaires des véhicules (1) et (2), en précisant les origines des espaces et des temps.

b) A quel instant se fera le croisement ?

2°) Réponds aux mêmes questions si le véhicule (2) franchit B deux minutes après le passage du véhicule (1) en A .



EXERCICE 14 : Trois villes A_1, A_2, A_3 sont situées le long d'une route rectiligne. $A_1A_2 = 5\text{Km}$; $A_1A_3 = 10\text{Km}$.

1°) A l'instant $t = 0$, un mobile M_1 passe par la ville A_1 et se dirige vers A_2 avec une vitesse constante $V_1 = 90\text{Km.h}^{-1}$.

- Ecris l'équation horaire de M_1 ;
- A quelle date t_1 le mobile passe-t-il par la ville A_2 ?

2°) A l'instant $t = 0$, un mobile M_2 passe par la ville A_2 . Il se déplace dans le même sens que M_1 à la vitesse constante de $61,2\text{Km.h}^{-1}$.

- Ecris l'équation horaire du mouvement de M_2 ;
- A quelle date t_2 et en quel lieu M_1 et M_2 se croisent-ils ?

3°) Un mobile M_3 passe par la ville A_2 à l'instant $t_3 = 120\text{s}$. Son mouvement est rectiligne et uniforme de vitesse $V_3 = 63,2\text{Km.h}^{-1}$.

- Donne l'équation horaire du mouvement de M_3 ;
- A quel instant t_4 et en quel lieu M_1 rejoint-il M_3 ?
- A quelle date M_3 passe-t-il par la ville A_3 ? L'origine des espaces sera prise au niveau de la ville A_1 et l'origine des temps l'instant de passage de M_1 par la ville A_1 .

EXERCICE 15 : On considère une montre comportant trois aiguilles : l'aiguille des heures, celle des minutes et celle des secondes (trotteuse).

1°) Détermine la vitesse angulaire de chacune de ces aiguilles.

2°) La trotteuse a une longueur de 13mm .

- Quelles sont les caractéristiques du vecteur vitesse de son extrémité ?
- Quelles sont les caractéristiques du vecteur accélération de son extrémité ?

EXERCICE 16 : Deux mobiles M_1 et M_2 décrivent dans le même sens, la même circonférence de rayon 100m avec des vitesses angulaires constantes de valeurs respectives 10rad.s^{-1} et 11rad.s^{-1} . A la date $t = 0$, ils passent par l'origine des espaces.

1°) Ecris les équations horaires des mouvements des deux mobiles.

2°) A quelle date se croisent-ils de nouveau pour la première fois ?

Quelle est alors la distance parcourue par le plus rapide ?

EXERCICE 17 : Un volant de 2m de rayon tourne à une vitesse de 120 tours par minute.

1°) Calcule la vitesse angulaire, la vitesse linéaire et l'accélération d'un point A situé à la périphérie du volant.

2°) A la suite d'un freinage, le volant entame un mouvement uniformément varié pour s'arrêter après 30s .

- Calcule l'accélération angulaire du mouvement du volant durant cette phase ;
- Etablis l'équation horaire du mouvement angulaire pendant le freinage ;
- Combien de tours fera le volant pendant ces 30s ?
- Calcule la vitesse angulaire et l'accélération normale du point A 15s après le début du freinage.

EXERCICE 18 : Deux mobiles quittent la gare G_1 pour se diriger vers la gare G_2 . Le premier M_1 part de la gare G_1 avec une vitesse constante $v_1 = 15\text{Km/h}$; 20min plus tard le second M_2 , quitte la gare G_1 avec une vitesse constante $v_2 = 40\text{Km/h}$.

1°) A quelle date (en min) le mobile M_2 va-t-il rattraper le mobile M_1 ?

2°) A quelle distance de G_1 (en Km) s'effectue ce rattrapage ?

EXERCICE 19 : On considère une hélice mobile autour de son axe de révolution. Partant du repos, elle atteint en 10 secondes, d'un mouvement uniformément varié, une vitesse de 90 tours par minute.

1°) Calcule :

- L'accélération angulaire de cette phase ;
- Le nombre de tours effectués.

2°) On freine ensuite l'hélice en réduisant sa vitesse de 90 à 60 tours par minute ; sachant que le freinage est uniformément varié et qu'il dure 5 secondes, on demande :

- L'accélération angulaire de ce mouvement ;
- Le nombre de tours effectués au cours de ce ralentissement.

EXERCICE 20 : Un volant peut tourner dans un plan vertical autour d'un axe passant par son centre O . Initialement au repos, on le lance de sorte qu'il atteigne une vitesse de rotation égale à 90tr.min^{-1} en 120 secondes.

1°) Calcule :

- L'accélération angulaire du mouvement du volant ;
- Le nombre de tours effectués par le volant pendant cette phase de lancement ;



2°) Tournant à la vitesse de $90\text{tr}.\text{min}^{-1}$, le volant est freiné. On constate qu'au bout de 25 tours de rotation, la vitesse du volant devient égale à $30\text{tr}.\text{min}^{-1}$.

- Calcule la décélération du mouvement du volant au cours de cette phase ;
- Déduis la durée de ce freinage.

EXERCICE 21 : Un mobile en mouvement circulaire uniforme sur un cercle de rayon $R = 1,5\text{m}$ met 2 secondes pour effectuer un tour complet.

- Précise les valeurs de la période et de la fréquence du mouvement.
- Calcule la vitesse angulaire et la vitesse linéaire du mobile.
- Quelle est la valeur de l'accélération du mouvement ?
- Sachant qu'à l'instant initial ($t = 0$), l'abscisse angulaire est $\theta_0 = 0,44\text{rad}$; détermine l'abscisse angulaire et l'abscisse curviligne du mobile à l'instant $t = 4\text{s}$.

EXERCICE 22 : La loi horaire du mouvement d'un point M_1 suivant la verticale ascendante (O, \vec{j}) est : $y_1(t) = -5t^2 + 20t$ (m) avec l'instant t en seconde.

A l'origine des dates ($t = 0$), le mobile M_1 est en au point $O(0 ; 0)$ du sol horizontal.

- Détermine la vitesse du mobile M_1 à l'instant initial (origine des dates).

2°) A quelle date t_1 , le mobile M_1 s'arrête – t – il au cours de son mouvement ? Déduis la hauteur maximale atteinte par le mobile M_1 .

3°) Une (1) seconde après le départ du mobile M_1 , un autre mobile M_2 part du même point $O(0 ; 0)$ avec une vitesse de 20m/s et une accélération $a_y = -10\text{m/s}^2$.

Pour les conditions initiales : origine des dates : l'instant de départ de M_1 ($t = 0$) ; origine des espaces : le point $O(0 ; 0)$ du sol horizontal.

Détermine :

- L'équation horaire du mobile M_2 ;
- Le(s) instant(s) de rencontre de deux mobiles M_1 et M_2 .

EXERCICE 23 : Une voiture roule avec une vitesse constante de $108 \pm 0,1\text{Km/h}$ sur une route horizontale portant la mention : « vitesse limite : 60Km/h ». Lors de son passage devant une station (A) ; le chauffeur freine et la voiture s'arrête en parcourant une distance de $150,00 \pm 0,85\text{m}$ pendant le freinage.

On prendra pour :

- ✓ origine des dates : l'instant de passage en (A) ;
- ✓ origine des espaces : la station (A) ($x_A = 0$).

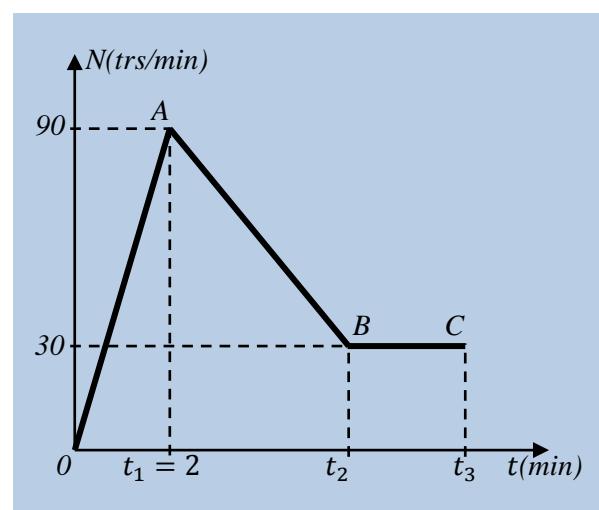
Détermine :

- L'équation horaire du mouvement de la voiture pendant le freinage en fonction de l'accélération a , de l'instant t et de la vitesse initiale v_0 .
- La valeur de l'accélération a et la précision $(\frac{\Delta a}{a})$ sur l'accélération.
- La durée du freinage.

EXERCICE 24 : L'hélice d'un ventilateur de 50cm de rayon, tourne à raison de 300trs/min . A la suite d'une coupure de courant, l'hélice entame un mouvement uniformément varié pour s'arrêter après 1min .

- Etablis l'équation horaire du mouvement angulaire.
- Combien de tours fera l'hélice avant de s'arrêter ?
- Trouve à l'instant $t = 30\text{s}$, la vitesse linéaire et l'accélération d'un point situé à l'extrémité de l'hélice.

EXERCICE 25 : On veut étudier le mouvement d'un volant en rotation dans un plan vertical autour d'un axe de révolution passant par son centre O . Le résultat nous donne le graphe $N = f(t)$ ci-dessous ; N sa vitesse de rotation à un instant quelconque.



1°) Donne la nature du mouvement de la première phase et calcule son accélération angulaire.

2°) Calcule le nombre de tours effectués par le volant pendant cette phase.



3°) Lorsqu'il atteint la vitesse de 90tr/min , le volant est freiné. On constate qu'au bout de 25trs de rotation, la vitesse du volant devient égale à 30trs/min .

- Calcule l'accélération angulaire de cette phase ;
- Calcule la durée de ce freinage et déduis – en t_2 .

4°) Deduisez – en t_3 pour 45 tours effectués dans la première phase.

EXERCICE 26 : On considère une hélice mobile autour de son axe de révolution. Partant du repos, elle atteint en 8 secondes, d'un mouvement uniformément varié, une vitesse de $60\text{ tours par minute}$.

1°) Calcule :

- L'accélération angulaire de cette phase ;
- Le nombre de tours effectués.

2°) Tournant à cette vitesse, on freine ensuite l'hélice jusqu'à l'arrêt. Sachant que le freinage est uniformément varié et qu'il dure 5 secondes, on demande :

- L'accélération angulaire de ce mouvement ;
- Le nombre de tours effectués au cours de ce ralentissement.

EXERCICE 27 : Dans un parc d'attraction, deux élèves de la classe de terminale scientifique (Elvic et Prestige) veulent mettre à profit leurs connaissances sur les mouvements cinématiques. Ils participent pour cela à un jeu de voitures qui se déplacent en sens inverses sur deux voies parallèles supposées rectilignes.

Elvic dit à Prestige : si les deux voitures animées de la vitesse de 18Km/h passent par les points A et B distants de 3m avec un intervalle de temps correspondant à 1s , ils se croiseront vers B .

Prestige répond : cela n'est vrai à cette vitesse que si l'intervalle de temps qui les sépare est inférieur à $0,6\text{s}$. Qui des deux a raison ?

Pour répondre à la question, on envisage les deux possibilités suivantes :

1°) On suppose d'abord que la voiture (1) animée d'une vitesse constante de 18Km/h passe par la position A que l'on considère comme origine des espaces à une date $t = 0$ et se dirige vers le point B situé à 3m de A . Une seconde plus tard, la voiture (2) animée de la même vitesse de 18Km/h passe par le point B et se dirige vers A .

- Ecris les équations horaires des deux voitures ;
- Détermine :
 - La date supposée de croisement des deux voitures ;
 - Le lieu supposé de leur croisement.

2°) On suppose maintenant que la voiture (2) se déplaçant vers A à la même vitesse de 18Km/h passe par le point B $0,5\text{s}$ plus tard. Les conditions initiales étant les mêmes que précédemment.

- Ecris l'équation horaire du véhicule (2) ;
- Trouve la date de croisement des deux voitures ;
- Déduis le lieu de leur croisement ;
- Qui de Elvic ou de Prestige a raison ? Justifie.

EXERCICE 28 : On considère un mobile en mouvement rectiligne qui parcourt une certaine distance en trois phases :

1^{ère} phase : le mobile démarre en gardant une accélération constante de $0,8\text{m/s}^2$ jusqu'à atteindre la vitesse de 8m/s .

2^{ème} phase : le mobile parcourt une distance de 24m à la vitesse constante de 8m/s .

3^{ème} phase : le mobile freine enfin jusqu'à l'arrêt en parcourant une distance de 8m d'un mouvement uniformément varié.

1°) Calcule la distance parcourue au cours de la première phase et déduis – en la distance totale parcourue par le mobile.

2°) Calcule la durée de chaque phase et déduis – en la durée totale du mouvement.

EXERCICE 29 : L'accélération du mouvement d'un mobile est donnée en fonction de son abscisse x : $a = -9x$ (a en m.s^{-2} et x en m).

1°) Quelle caractéristique du mouvement peux – tu calculer ?

2°) L'accélération maximale du mobile est $4,5\text{m.s}^{-2}$, d'autre part à $t = 0$, le mobile se déplace dans le sens positif. En tenant compte de ces conditions, trouve l'équation horaire du mouvement.

3°) Calcule V pour $x = 0,25\text{m}$.

EXERCICE 30 : L'étude du mouvement d'une hélice tournant autour de son axe de révolution a donné les indications suivantes :

- A l'instant $t = 1\text{s}$, l'hélice ayant tourné de 22rad a acquis une vitesse angulaire de 23rad/s .
- A l'instant $t = 3\text{s}$, l'hélice ayant tourné de 74rad a acquis une vitesse angulaire de 29rad/s .

Sachant que le mouvement est circulaire uniformément varié, on demande :

1°) L'équation horaire de l'abscisse angulaire.

2°) Le nombre de tours effectués une minute après l'instant initial $t = 0$ et la fréquence atteinte par l'hélice.

EXERCICE 31 : Un volant de 2m de rayon tourne à la vitesse de 120trs/min .



1°) Calcule la vitesse angulaire, la vitesse linéaire et l'accélération d'un point A situé à la périphérie du volant.

2°) A la suite d'un freinage, le volant entame un mouvement uniformément retardé puis s'arrête après 30s.

- Etablis l'équation horaire du mouvement angulaire du volant pendant le freinage ;
- Combien de tours effectue le volant pendant ces 30s ?
- Calcule la vitesse linéaire, l'accélération angulaire et l'accélération normale du point A, 15s après le début du freinage.

EXERCICE 32 : Un mobile est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal, il parcourt un segment de 8cm, la fréquence du mouvement est égale à 10Hz et à $t = 0$, le mobile est à son maximum d'elongation. Écris l'équation du mouvement. Calcule l'accélération au temps $t = 0$.

EXERCICE 33 : Le mouvement d'une roue immobile au départ est accéléré de telle sorte que sa vitesse croît jusqu'à 120trs/min en une minute. Après avoir tourné un certain temps à cette vitesse, la roue est freinée régulièrement et il faut 5min pour l'arrêter. Le nombre de tour étant de 1560. Calcule la durée totale de rotation.

EXERCICE 34 : Sur le quai d'une gare, une voyageuse, en retard court pour essayer de prendre son train à une vitesse constante d'intensité $v = 8\text{m.s}^{-1}$.

Le train démarre alors qu'elle est encore à 100m du dernier wagon. L'accélération constante du train a une intensité $a = 0,5\text{m.s}^{-2}$.

1°) La voyageuse rejoindra-t-elle son train ? Si non, à quelle distance minimale s'en trouvera-t-elle ?

2°) Reprends la question 1°) dans le cas où le démarrage du train a lieu lorsque le dernier wagon est à 40m de la voyageuse.

3°) Quelle devrait être, à l'instant du démarrage, la distance minimale entre le train et la voyageuse pour que celle-ci atteigne effectivement le dernier wagon ?

EXERCICE 35 : Deux cyclistes A et B s'exercent à une course poursuite sur une piste rectiligne. Le premier A est animé d'un mouvement uniforme de vitesse $4,4 \text{ m/s}$; lorsqu'il se trouve à 10m de B, ce dernier démarre avec une accélération de 2m/s^2 pendant 2s, puis il maintient sa vitesse constante jusqu'à la fin de la course.

En prenant pour origine des abscisses, la position de A au départ de B et pour origine des temps, l'instant de démarrage de B :

1°) Montre que le rattrapage n'a pas lieu dans la phase accélérée de B.

2°) Détermine la date et le lieu de rattrapage.

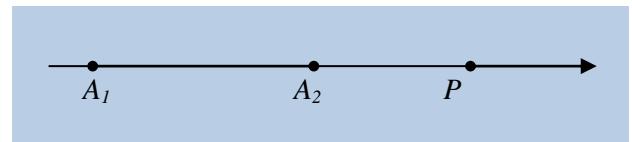
3°) Calcule les distances parcourues par chaque cycliste.

EXERCICE 36 : Deux véhicules M_1 et M_2 partent en même temps de deux points respectifs A_1 et A_2 distants de $d = 2\text{m}$. Leurs mouvements ont lieu dans le même sens sur une droite A_1A_2 . Leurs accélérations constantes sont respectivement \vec{a}_1 et \vec{a}_2 .

1°) Les véhicules partent avec des vitesses initiales nulles et des accélérations telles que $a_1 = 5\text{m.s}^{-2}$ et $a_2 = 3\text{m.s}^{-2}$. Détermine :

- L'instant de croisement ;
- Le lieu de croisement.

2°) Quelles devraient être leurs vitesses initiales et leurs accélérations pour que partant du repos à l'instant $t = 0$, ils se rencontrent à l'instant $t = 2\text{s}$ au point P situé à 1m de A_2 avec une vitesse nulle.



EXERCICE 37 : Deux mobiles se suivent à 28m l'un de l'autre à la vitesse constante de 96Km/h . A une date choisie comme origine des temps, les mobiles freinent simultanément. La décélération du premier est de $7,7\text{m/s}^2$. Le deuxième manquant d'adhérence freine avec une accélération de $4,2\text{m/s}^2$. En prenant l'origine du repère, la position du mobile (1) au début du freinage :

- Établis les équations horaires des mouvements des deux mobiles ;
- Détermine la date de rattrapage du mobile (1) par le mobile (2) ;
- Avec quelle vitesse le mobile (2) arrive-t-il au niveau du mobile (1) ?
- Quelle aurait dû être la décélération minimale du deuxième mobile pour que le rattrapage soit impossible ?

EXERCICE 38 : Un cerceau initialement au repos est animé d'un mouvement circulaire d'accélération angulaire constante de 1rad.s^{-2} . Un point de la périphérie de ce cerceau décrit un cercle. En 5s, il parcourt la même distance qu'un mobile animé d'un



mouvement rectiligne uniforme de vitesse 18Km.h^{-1} .

- 1°) Quel est le rayon de ce cercle ?
- 2°) Calcule les vitesses angulaire et linéaire à la date $t = 5\text{s}$.
- 3°) Détermine le nombre de tours effectués.
- 4°) Donne la valeur du vecteur accélération.

EXERCICE 39 : Une automobile démarre lorsque le feu passe au vert avec une accélération de $2,5\text{m.s}^{-2}$ pendant 7s , ensuite l'automobile roule à la vitesse constante. A ce même moment où le feu passe au vert, un camion roule à la vitesse constante de 45Km.h^{-1} derrière l'automobile à 20m du feu.

- 1°) A quel instant le camion rejoint – il l'automobile ?
- 2°) A cet instant de rencontre, l'automobile aborde un tronçon d'arc de cercle AB de rayon $OB = 10\text{m}$ et d'angle $\widehat{BOA} = 30^\circ$, d'un mouvement d'accélération angulaire égale à $0,2\text{rad.s}^{-2}$.
 - a) Donne l'expression de la vitesse angulaire de l'automobile au point A .
 - b) Écris l'équation horaire $\theta = f(t)$ sachant qu'à $t = 0$, l'automobile est au point A .

EXERCICE 40 : Un mobile ponctuel M se déplace sur un axe x' Ox d'origine O. La loi horaire de son mouvement est :

$$x = 2 \cdot 10^{-2} \cos \left(40\pi t - \frac{\pi}{6} \right) \text{(} x \text{ en m)}$$

- 1°) De quel mouvement s'agit – il ?
- 2°) Précise l'amplitude, la pulsation, la période, la fréquence et la phase initiale du mouvement.
- 3°) Quelle est la longueur du segment décrit par M ?
- 4°) Quelle est la vitesse de M à la date t ? Déduis – en :
 - a) La vitesse maximale de M ;
 - b) La vitesse de M à la date $t = 1\text{s}$.
- 5°) Détermine la date du premier passage du mobile M à la position $x = 10^{-2}\text{m}$.
- 6°) Détermine la phase à l'instant $t = 2\text{s}$ du mouvement de M .
- 7°) Détermine l'équation différentielle du mouvement de M . Déduis – en son accélération lorsqu'il passe par le point d'abscisse $x = 10^{-2}\text{m}$.

EXERCICE 41 : Sur une route rectiligne, une voiture roule à la vitesse de 90Km.h^{-1} . Soudain, un enfant traverse la route alors que le conducteur se trouve à la distance $d = 30\text{m}$ de ce dernier. Il freine immédiatement et sa vitesse devient égale à 45Km.h^{-1} sur un parcours de 20m .

1°) Calcule la valeur de la décélération supposée constante.

- 2°) Calcule la durée de tout le freinage.
- 3°) Montre que l'accident n'aura pas lieu.
- 4°) On désire maintenant que l'accident se produise au moment où la voiture aura une vitesse de 3Km.h^{-1} . Quelle devrait être la valeur de la vitesse initiale en début de freinage si l'on admet que la décélération conserve la même valeur qu'à la question précédente. Le freinage débute toujours au moment où la voiture se trouve à 30m de l'enfant.

EXERCICE 42 : Un élève en retard pour son cours de physique court prendre son autobus à une vitesse constante de 6m.s^{-1} ; alors qu'il est à 30m de l'autobus, celui – ci démarre. Il est animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié d'accélération $a = 0,8\text{m.s}^{-2}$.

- a) L'élève rattrapera – t – il son autobus ? Si non, à quelle distance minimale de l'autobus se trouvera – t – il ?
- b) Reprends la question dans le cas où l'élève se trouve à 20m de l'autobus au moment du démarrage. Si oui, quelle est la durée de la poursuite ?

EXERCICE 43 : Une roue initialement au repos, lancée en rotation effectue au total 300 tours. Son mouvement est d'abord uniformément accéléré d'accélération 2trs/s^2 , puis uniformément décéléré de décélération 1tr/s^2 .

- 1°) Calcule la durée du mouvement.
- 2°) Détermine le nombre de tours de chaque phase.



DOMAINE D'ETUDE I : MECANIQUE

OG₃ : ANALYSER LES SYSTEMES MECANIQUES EN MOUVEMENT.**4****DYNAMIQUE
DE TRANSLATION****I. Eléments de la dynamique.****I.1. Définition de la dynamique.**

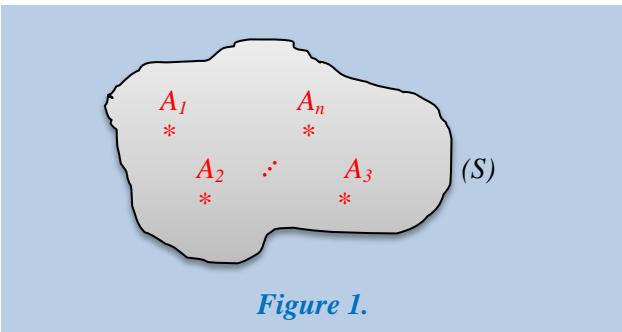
La dynamique est une partie de la physique qui étudie les relations entre les mouvements des corps et leurs causes.

I.2. Définitions des notions.**a) Point matériel.**

*On appelle **point matériel**, toute portion de la matière assimilable à un point.*

b) Système matériel.

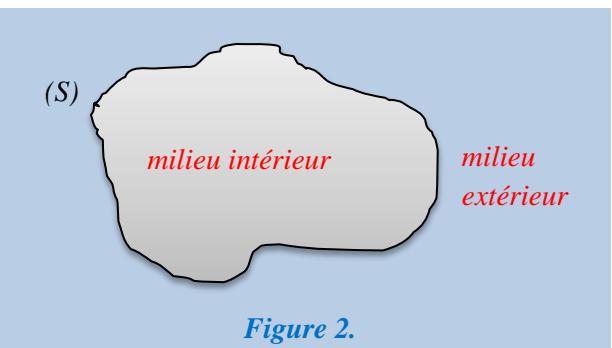
*On appelle **système matériel**, un ensemble de points matériels (figure 1).*

**Figure 1.**

A₁, A₂, A₃, ..., A_n sont des points matériels.

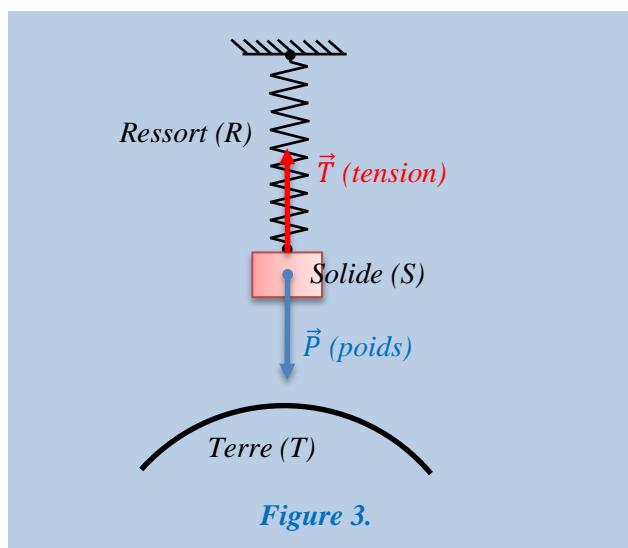
c) Milieu intérieur, milieu extérieur d'un système.

- ✓ *On appelle **milieu intérieur** d'un système, tout l'espace qui contient les points matériels de ce système.*
- ✓ *On appelle **milieu extérieur** d'un système, tout l'espace qui ne contient pas les points matériels de ce système (figure 2).*

**Figure 2.****d) Force intérieure, force extérieure appliquée à un système.**

- ✓ *On appelle **force intérieure**, toute interaction du système matériel avec une partie de celui-ci.*
- ✓ *On appelle **force extérieure**, toute interaction du système matériel avec le milieu extérieur.*

Exemple : Considérons un solide accroché à un ressort (figure 3).

**Figure 3.**

Considérons comme :

♣ **Système 1 : Le ressort (R)**

\vec{P} : force extérieure ;

\vec{T} : force intérieure.

♣ **Système 2 : Le solide (S)**

\vec{P} : force extérieure ;

\vec{T} : force extérieure.

♣ **Système 3 : Solide + ressort**

\vec{P} : force extérieure ;

\vec{T} : force intérieure.

♣ **Système 4 : Solide + ressort + terre**

\vec{P} : force intérieure ;

\vec{T} : force intérieure.

♣ **Système 5 : La terre (T)**

\vec{P} : force interieure ;

\vec{T} : force extérieure.

e) Système isolé, système pseudo – isolé.

Un système est isolé lorsqu'il n'est soumis à aucune action extérieure. Un tel système n'existe pas dans la pratique car, quelque soit le système objet – Terre choisi, il est difficile de négliger l'attraction des autres planètes.

Il existe dans ce cas un seul système isolé : l'univers.

A défaut d'un système isolé, on peut obtenir un système pseudo – isolé à l'aide d'une table soufflante. Un système est pseudo – isolé lorsque la somme des forces extérieures est nulle. Un palet mobile sur une table soufflante est un système pseudo – isolé. En effet le poids du palet est équilibré par la réaction de la table.

f) Masse d'un système.

La masse est la quantité de matière que contient un corps.

Elle mesure la somme des masses des points matériels qu'il contient.

Soient A_1, A_2, \dots, A_n les points matériels de masses respectives m_1, m_2, \dots, m_n constituant un système, la masse du système sera :

$$m = \sum_{i=1}^n m_i = m_1 + m_2 + \dots + m_n$$

g) Centre d'inertie d'un système.

C'est le centre de masse G, encore appelé barycentre des points matériels du système.

C'est en ce point que se concentre la masse du système.

G étant le barycentre des points A_i affectés des masses m_i , alors G vérifie la relation vectorielle :

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{GA}_i = \vec{0}$$

Soit :

$$m_1 \vec{GA}_1 + m_2 \vec{GA}_2 + \dots + m_n \vec{GA}_n = \vec{0}$$

h) Position du centre d'inertie G dans un système.

Pour déterminer la position de G, centre d'inertie des points A_i , on :

➤ Choisit un point de référence, par exemple O.

➤ Applique la relation vectorielle :

$$\vec{OG} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{OA}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

$$\vec{OG} = \frac{m_1 \vec{OA}_1 + m_2 \vec{OA}_2 + \dots + m_n \vec{OA}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

♣ Projette cette expression sur un axe correctement choisi.

Activité 1 : On considère une boule de pétanque de centre O, de masse $M = 2Kg$ et de rayon $R = 10cm$ sur la quelle on fixe aux extrémités d'un diamètre, deux sphères de masses respectives $m_1 = 500g$ et $m_2 = 1Kg$ et de rayons respectifs $r_1 = 4cm$ et $r_2 = 6cm$.

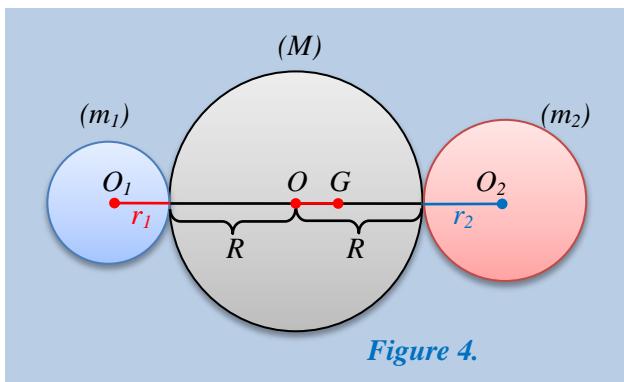
Détermine la position du centre d'inertie G de ce système (figure 4).

Corrigé 1 :

$$M = 2Kg ; R = 10cm ; m_1 = 500g ; m_2 = 1Kg$$

$$r_1 = 4cm ; r_2 = 6cm.$$



**Position du centre d'inertie G.**

Soit G le centre d'inertie de ce système :

- ♣ Choisissons le point O comme point de référence ;
- ♣ Appliquons la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^3 m_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^3 m_i}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1 \overrightarrow{O} \overrightarrow{O_1} + M \overrightarrow{O} \overrightarrow{O} + m_2 \overrightarrow{O} \overrightarrow{O_2}}{m_1 + M + m_2}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1 \overrightarrow{O} \overrightarrow{O_1} + m_2 \overrightarrow{O} \overrightarrow{O_2}}{m_1 + M + m_2} \quad \text{car } \overrightarrow{O} \overrightarrow{O} = \vec{0}$$

- Projection de \overrightarrow{OG} suivant (OO_2)

$$\overrightarrow{OG} = \frac{-m_1 \overrightarrow{O} \overrightarrow{O_1} + m_2 \overrightarrow{O} \overrightarrow{O_2}}{m_1 + M + m_2}$$

Avec $M = 4m_1$; $m_2 = 2m_1$; $R = r_1 + r_2$

$$\overrightarrow{O} \overrightarrow{O_1} = R + r_1 = 2r_1 + r_2$$

$$\overrightarrow{O} \overrightarrow{O_2} = R + r_2 = r_1 + 2r_2$$

On trouve :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{3}{7} r_2$$

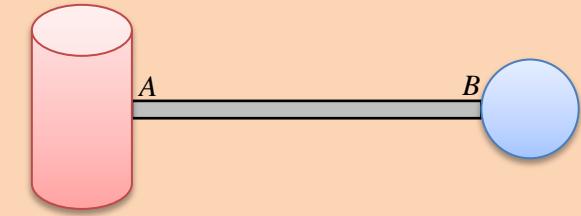
$$A.N : \overrightarrow{OG} = \frac{3 \times 6}{7} = 2,57$$

$$\overrightarrow{OG} = 2,57 \text{ cm}$$

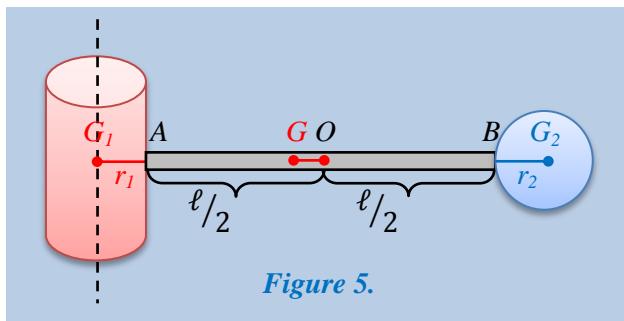
Conclusion : G est situé à 2,57cm à droite de O .

Activité 2 : On dispose d'une tige homogène de centre O , de masse $m = 250\text{g}$ et de longueur $\ell = AB = 80\text{cm}$. On fixe à l'une de ses extrémités un cylindre homogène de masse $m_1 = 2\text{Kg}$ et de rayon $r_1 = 6\text{cm}$, et à l'autre extrémité, une sphère homogène de masse $m_2 = 2\text{Kg}$ et de rayon $r_2 = 4\text{cm}$ comme l'indique la figure ci-dessous.

Détermine la position du centre d'inertie G (figure 5).

**Corrigé 2 :**

$m = 250\text{g}$; $\ell = AB = 80\text{cm}$; $m_1 = m_2 = 2\text{Kg}$;
 $r_1 = 6\text{cm}$; $r_2 = 4\text{cm}$.

**Position du centre d'inertie G.**

Soit G , le centre d'inertie de ce système ;

- ♣ Choisissons le point O comme point de référence ;
- ♣ Appliquons la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^3 m_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^3 m_i}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1 \overrightarrow{OG}_1 + m \overrightarrow{OG} + m_2 \overrightarrow{OG}_2}{m_1 + m + m_2}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1 \overrightarrow{OG}_1 + m_2 \overrightarrow{OG}_2}{m_1 + m + m_2}, \text{ avec } \overrightarrow{OG} = \vec{0}$$

- Projection de \overrightarrow{OG} suivant (OB)

$$\overrightarrow{OG} = \frac{-m_1 \overrightarrow{OG}_1 + m_2 \overrightarrow{OG}_2}{m_1 + m + m_2}$$

avec $\begin{cases} m_1 = m_2 = 8m \\ \overrightarrow{OG}_1 = \frac{\ell}{2} + r_1 \\ \overrightarrow{OG}_2 = \frac{\ell}{2} + r_2 \end{cases}$

On trouve :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{8(r_2 - r_1)}{17}$$



$$A.N : \overline{OG} = \frac{8 \times (4 - 6)}{17} = -0,94$$

$$\overline{OG} = -0,94\text{cm}$$

Conclusion : G est situé à $0,94\text{cm}$ à gauche de O .

i) Vecteur quantité de mouvement.

Le vecteur quantité de mouvement est une grandeur qui caractérise le produit de la masse d'un point matériel par son vecteur vitesse à l'instant t .
On le note :

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

soit

$$p = mv$$

Le module de \vec{p} s'exprime en Kg.m/s .

Remarques :

R₁: Le vecteur quantité de mouvement d'un système matériel vaut la somme des vecteurs quantités de mouvement de ses points matériels.

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n$$

R₂: Le vecteur quantité de mouvement d'un système se conserve au cours des chocs.

$$\sum_{i=1}^n \vec{p}_{i_{av}} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_{i_{ap}}$$

Activité 3: Un solide (S_1) de masse $m_1 = 100\text{g}$, roulant sur un plan horizontal à la vitesse $v_1 = 20\text{m/s}$ vient heurter un solide (S_2) de masse $m_2 = 50\text{g}$, initialement au repos. Sachant que les deux solides restent accrochés après le choc, détermine la vitesse de l'ensemble formé par les deux solides.

Corrigé 3 :

$$m_1 = 100\text{g} ; m_2 = 50\text{g} ; v_1 = 20\text{m/s}.$$

Vitesse de l'ensemble après le choc.

✓ Avant le choc :



Figure 6.a.

$$\vec{p}_{av} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

$$\vec{p}_{av} = m_1 \vec{v}_1 \text{ (car } \vec{v}_2 = \vec{0})$$

✓ Après le choc :

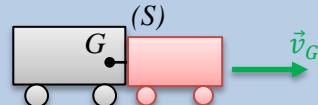


Figure 6.b.

$$\vec{p}_{ap} = \vec{p}_G = (m_1 + m_2) \vec{v}_G$$

D'après la conservation du vecteur quantité de mouvement, on a :

$$\vec{p}_{av} = \vec{p}_{ap}$$

$$\Rightarrow m_1 \vec{v}_1 = (m_1 + m_2) \vec{v}_G$$

$$\text{Soit } m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_G$$

D'où :

$$v_G = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

$$A.N: v_G = \frac{100}{100 + 50} \times 20 = 13,33$$

$$v_G = 13,33\text{m/s}$$

Activité 4: Deux billes B_1 et B_2 de masses respectives $m_1 = 30\text{g}$ et $m_2 = 80\text{g}$, se suivent l'une derrière l'autre. La bille B_1 vient heurter à la vitesse constante $v_1 = 8\text{m/s}$, la bille B_2 roulant à la vitesse $v_2 = 6\text{m/s}$. Sachant qu'après le choc parfaitement élastique, la bille B_2 roule à la vitesse $v'_2 = 8\text{m/s}$.

Quels sont la vitesse et le sens de déplacement de la bille B_1 ?



Corrigé 4 :

$m_1 = 30g$; $m_2 = 80g$; $v_1 = 8m/s$; $v_2 = 6m/s$
 $v'_2 = 8m/s$.

Vitesse et sens de déplacement de la bille B_1 .

✓ Avant le choc



Figure 7.a.

$$\vec{p}_{av} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

✓ Après le choc

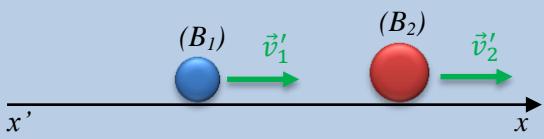


Figure 7.b.

$$\vec{p}_{ap} = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2$$

D'après la conservation du vecteur quantité de mouvement, on a :

$$\vec{p}_{av} = \vec{p}_{ap}$$

$$\Rightarrow m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2$$

Projection suivant ($x'x$) :

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

$$\Rightarrow m_1 v'_1 = m_1 v_1 + m_2 (v_2 - v'_2)$$

D'où :

$$v'_1 = v_1 + \frac{m_2}{m_1} (v_2 - v'_2)$$

$$A.N : v'_1 = 8 + \frac{80}{30} (6 - 8) = 2,66$$

$$v'_1 = 2,66 m.s^{-1}$$

Conclusion : $v'_1 > 0$, la bille B_1 se déplace dans le même sens que la bille B_2 après le choc.

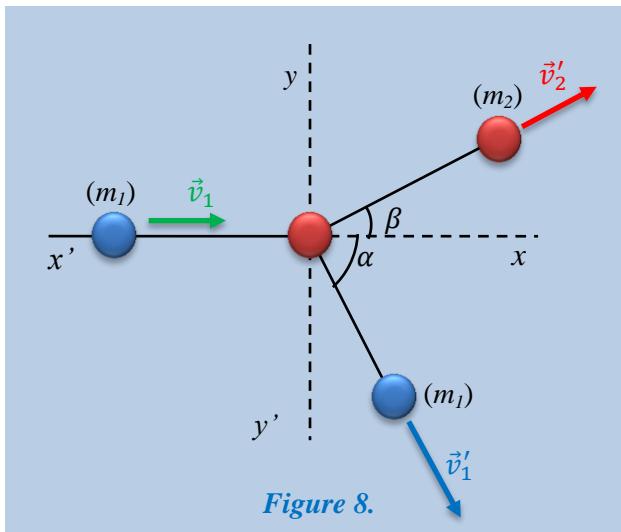
Activité 5 : Moussa et Tamko jouent aux billes dans une cours horizontale que l'on supposera parfaitement lisse. La bille de Moussa lancée à la vitesse de $v_1 = 10cm.s^{-1}$ rencontre la bille de Tamko immobile.

Après le choc, la bille de Moussa rebondit dans une direction qui fait un angle de 60° avec \vec{v}_1 . La bille de Tamko, quant à elle se met en mouvement avec une vitesse \vec{v}'_2 , qui fait avec la direction initiale de \vec{v}_1 , un angle de 30° .

Calcule les vitesses \vec{v}'_1 et \vec{v}'_2 des deux billes après le choc, sachant qu'elles ont la même masse.

Corrigé 5 :

$$v_1 = 10cm.s^{-1}; \alpha = 60^\circ; \beta = 30^\circ; m_1 = m_2 = m$$

Vitesses \vec{v}'_1 et \vec{v}'_2 des deux billes.

✓ Avant le choc.

$$\vec{p}_{av} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

$$\vec{p}_{av} = m_1 \vec{v}_1 \text{ (car } \vec{v}_2 = \vec{0})$$

✓ Après le choc.

$$\vec{p}_{ap} = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2$$

D'après la conservation du vecteur quantité de mouvement, on a :

$$\vec{p}_{av} = \vec{p}_{ap}$$

$$\Rightarrow m_1 \vec{v}_1 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2$$

Projection suivant ($x'x$):

$$m_1 v_1 = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x}$$

$$\Rightarrow m_1 v_1 = m_1 v'_1 \cos\alpha + m_2 v'_2 \cos\beta$$



Projection suivant ($y'y$).

$$0 = -m_1 v'_{1y} + m_2 v'_{2y}$$

$$\Rightarrow -m_1 v'_1 \sin\alpha + m_2 v'_2 \sin\beta = 0$$

Avec $m_1 = m_2 = m$

$$\Rightarrow \begin{cases} mv'_1 \cos\alpha + mv'_2 \cos\beta = mv_1 \\ -mv'_1 \sin\alpha + mv'_2 \sin\beta = 0 \end{cases}$$

Après simplification des masses :

$$\Rightarrow \begin{cases} v'_1 \cos\alpha + v'_2 \cos\beta = v_1 & (1) \\ -v'_1 \sin\alpha + v'_2 \sin\beta = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) : v'_2 = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} v'_1 \quad (3)$$

En remplaçant la relation (3) dans (1), on a :

$$v'_1 \cos\alpha + \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} v'_1 \cdot \cos\beta = v_1$$

$$\Rightarrow v'_1 \left(\frac{\cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha \cos\beta}{\sin\beta} \right) = v_1$$

$$\Rightarrow v'_1 \left[\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\beta} \right] = v_1$$

D'où :

$$v'_1 = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} v_1$$

$$\text{Dans (2)} : v'_2 = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} v_1$$

D'où :

$$v'_2 = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)} v_1$$

A.N :

$$v'_1 = \frac{\sin 30^\circ}{\sin(60^\circ + 30^\circ)} \times 10 = 5,00$$

$$v'_2 = \frac{\sin 60^\circ}{\sin(60^\circ + 30^\circ)} \times 10 = 8,66$$

$$v'_1 = 5,00 \text{ cm.s}^{-1}$$

$$v'_2 = 8,66 \text{ cm.s}^{-1}$$

II. Principes de la dynamique ou lois de Newton.

II.1. Principe de l'inertie ou 1^{ère} loi de Newton.

➤ Enoncé.

Il existe des référentiels dits galiléens dans lesquels un point particulier d'un solide isolé ou pseudo-isolé appelé centre d'inertie (G) :

- ♣ *Soit conserve son état de repos :*
- ♣ *Soit est animé d'un mouvement rectiligne uniforme.*

De ce fait :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

II.2. Principe fondamental de la dynamique (PFD) ou 2^{ème} loi de Newton.

➤ Enoncé.

Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle \vec{F} des forces appliquées à un point matériel est égale à la dérivée par rapport au temps de son vecteur quantité de mouvement.

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

Où le terme de masse doit être considéré comme une mesure quantitative de l'inertie.

♣ Théorème du centre d'inertie (T.C.I.).

C'est une *conséquence de la deuxième loi de Newton* permettant de passer du point matériel au solide.

De la relation $\vec{F} = m\vec{a}$, valable pour le point matériel, il est possible de passer au solide en écrivant :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$$

➤ Enoncé.

Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces appliquées à un solide est égale au produit de sa masse et du vecteur accélération de son centre d'inertie.

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$$



II.3. Principe d'interaction ou principe des actions mutuelles (PAM) ou 3^{ème} loi de Newton.

C'est le principe de l'*égalité de l'action et de la réaction*.

➤ Enoncé.

Lorsqu'un corps 1 exerce sur un corps 2 une action mécanique représentée par une force $\vec{F}_{1/2}$ localisée en B, le corps 2 exerce sur le corps 1 une action mécanique représentée par la force $\vec{F}_{2/1}$ localisée en A.

Ces deux forces sont opposées et ont même support (la droite AB) et sont telles que :

$$\vec{F}_{1/2} = - \vec{F}_{2/1}$$

Soit :

$$F_{1/2} = F_{2/1}$$

Exemples :

1. Cas des forces extérieures.

Considérons *un solide posé sur une table horizontale* (figure 11).

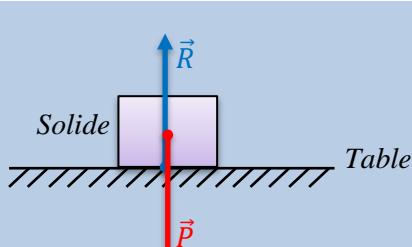


Figure 9.

\vec{P} : Poids (action du solide sur la table)

\vec{R} : Réaction (action de la table sur le solide)

$$\vec{P} = -\vec{R} \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$$

C'est la condition d'équilibre ;

Soit :

$$P = R$$

2. Cas des forces intérieures.

Considérons *deux wagons reliés par une barre d'attache* (figure 12).

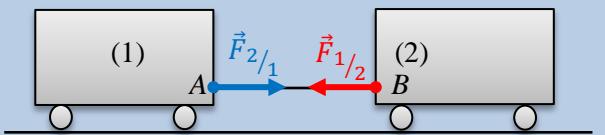


Figure 10.

$$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1} \Rightarrow \vec{F}_{1/2} + \vec{F}_{2/1} = \vec{0}$$

Soit :

$$F_{1/2} = F_{2/1}$$

III. Application des principes de la dynamique aux mouvements de translation.

➤ Plan de résolution d'un problème de dynamique de translation.

Pour résoudre un problème de dynamique de translation on :

- Réalise un schéma grand et claire comportant toutes les forces extérieures appliquées au système d'étude ;
- Choisit un référentiel d'étude ;
- Définit clairement le système d'étude ;
- Fait le bilan ou l'inventaire de toutes les forces extérieures appliquées au système ;
- Applique l'expression vectorielle du T.C.I des corps en mouvement de translation ;
- Projette l'expression vectorielle du T.C.I par rapport à un axe (axe du mouvement) ou par rapport à un axe correctement choisi ;
- Applique selon les cas, les autres principes ou relations nécessaires pour l'étude.

A. Etude des systèmes mécaniques en mouvement de translation rectiligne.

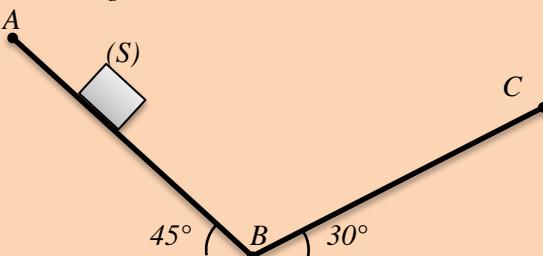
Définitions :

- Un solide est animé d'un mouvement de translation lorsque le segment de droite qui joint deux points quelconques du solide en mouvement garde la même direction.
- Un mouvement de translation est dit rectiligne lorsque la trajectoire décrite par le solide en mouvement est une droite.



A.1. Glissement d'un solide sur un plan incliné.**a) Glissement sans frottements.**

Activité 6 : Partant de A sans vitesse initiale (voir figure), un chariot dévale un plan incliné à 45° sur l'horizontale. On néglige les frottements. $g = 10N/Kg$.



- 1°) Sachant que $AB = 2m$, calcule sa vitesse en B.
- 2°) Au passage en B, grâce à un raccordement convenable, le mobile aborde, sans perdre de vitesse, un deuxième plan BC d'inclinaison 30° . Sachant qu'en C il rebrousse chemin, calcule la distance BC parcourue par le chariot.
- 3°) Quelle est la durée du trajet BC ?

Corrigé 6 :

$$\alpha = 45^\circ ; \beta = 30^\circ ; g = 10N/Kg ; AB = 2m.$$

1°) Vitesse du chariot en B.

- Nature du mouvement.
- ✓ Schéma.

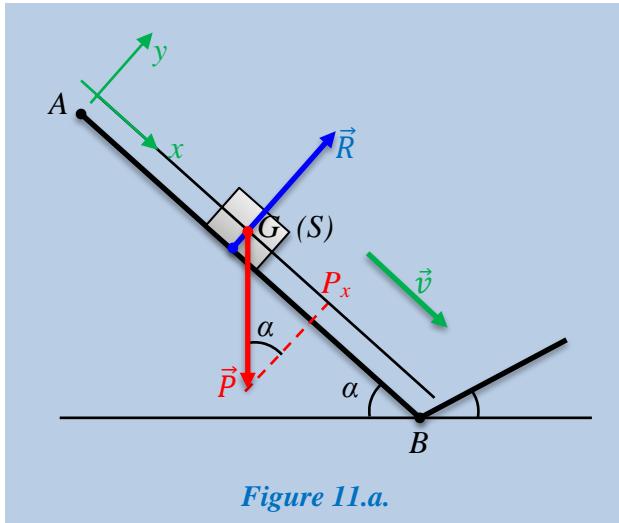


Figure 11.a.

- ✓ Référentiel d'étude : Terrestre supposé galiléen (R.T.S.G) ;
- ✓ Système d'étude : Chariot de masse (m) en translation rectiligne ;
- ✓ Bilan des forces extérieures appliquées au système (B.F.E.A) : \vec{P} ; \vec{R} .

✓ Théorème du centre d'inertie (T.C.I) :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_{1G}$$

$$\Rightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}_{1G}$$

✓ Projection du T.C.I suivant (Ax) :

$$P_x + 0 = ma_{1G} \Rightarrow P_x = ma_{1G}$$

$$or \sin\alpha = \frac{P_x}{P} \Rightarrow P_x = Ps\sin\alpha$$

$$\Rightarrow mg\sin\alpha = ma_{1G}$$

D'où :

$$a_{1G} = gs\sin\alpha$$

$$A.N : a_{1G} = 10 \times \sin 45^\circ = 7,07$$

$$a_{1G} = 7,07 m/s^2$$

Conclusion : $a_{1G} = 7,07 m/s^2 = cte \neq 0$, alors le chariot est animé d'un M.R.U.V.

D'après la relation espace – vitesse (R.E.V), on a :

$$v_B^2 - v_A^2 = 2a_{1G}(x_B - x_A)$$

➤ Origine des espaces : le point A.

➤ Origine des dates : Instant du départ du chariot en A.

$$A t = 0 : v_A = 0 ; x_A = 0$$

$$\text{En bas du plan incliné} : x_B = AB, \text{ alors} :$$

$$v_B^2 = 2a_{1G}AB$$

D'où :

$$v_B = \sqrt{2a_{1G}AB}$$

$$A.N : v_B = \sqrt{2 \times 7,07 \times 2} = 5,31$$

$$v_B = 5,31 m.s^{-1}$$

2°) Distance BC parcourue par le chariot.

- Nature du mouvement.

- ✓ Schéma

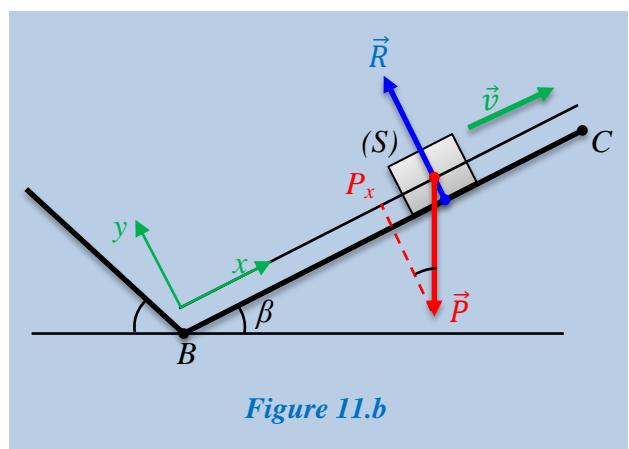


Figure 11.b



- ✓ **Système d'étude :** Chariot de masse (m) en translation rectiligne ;
- ✓ **Bilan des forces extérieures appliquées au système (B.F.E.A) :** \vec{P} ; \vec{R} .
- ✓ **Théorème du centre d'inertie (T.C.I) :**

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_{2G}$$

$$\Rightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}_{2G}$$

- ✓ **Projection du T.C.I suivant (Bx) :**

$$-P_x + 0 = ma_{2G} \Rightarrow -P_x = ma_{2G}$$

or $\sin\beta = \frac{P_x}{P} \Rightarrow P_x = Psin\beta$

$$\Rightarrow -mgsin\beta = ma_{2G}$$

D'où :

$$a_{2G} = -gsin\beta$$

$$A.N : a_{1G} = 10 \times \sin 30^\circ = -5$$

$$a_{1G} = -5 \text{ m/s}^2$$

Conclusion : $a_{1G} = \text{cte} = -5 \text{ m/s}^2 \neq 0$, alors le chariot est animé d'un M.R.U.V.

D'après la relation espace – vitesse (R.E.V), on a :

$$v_C^2 - v_B^2 = 2a_{2G}(x_C - x_B)$$

Au point C : $v_C = 0$; $x_C - x_B = BC$; alors on a :

$$v_B^2 = 2a_{2G}BC$$

D'où :

$$BC = -\frac{v_B^2}{2a_{2G}}$$

$$A.N : BC = -\frac{(5,31)^2}{2 \times (-5)} = 2,81$$

$$BC = 2,81 \text{ m}$$

3*) Durée du trajet BC.

D'après la relation vitesse – temps (R.V.T), on a :

$$v_C - v_B = a_{2G}t$$

Avec $v_C = 0 \Rightarrow -v_B = a_{2G}t$

D'où :

$$t = -\frac{v_B}{a_{2G}}$$

$$A.N : t = -\frac{5,31}{(-5)} = 1,06$$

$$t = 1,06 \text{ s}$$

b) Glissement avec forces de frottement.

Activité 7 : On se propose de décharger des sacs de ciment de la carrosserie d'un véhicule situé à 2 m du sol. Pour cela, on utilise une planche de 3 m de long que l'on fixe entre la carrosserie et le sol en formant un plan incliné.

On abandonne chaque sac de ciment au sommet de la planche qui oppose au mouvement de chaque sac des forces de frottement dont la résultante vaut 5 N .
1°) Quelle est la nature du mouvement pris par chaque sac ?

2°) Quelle est la vitesse de chaque sac de ciment en bas de la planche ainsi que la durée du mouvement.

3°) Donne les caractéristiques de la réaction qu'oppose la planche sur chaque sac.

On donne : $m = 50 \text{ Kg}$; $g = 9,8 \text{ N/Kg}$.

Corrigé 7 :

$h = 2 \text{ m}$; $\ell = 3 \text{ m}$; $f = 5 \text{ N}$; $m = 50 \text{ Kg}$;

$g = 9,8 \text{ N/Kg}$.

1*) Nature du mouvement pris par chaque sac.

Trouvons l'accélération a_G .

✓ Schéma.

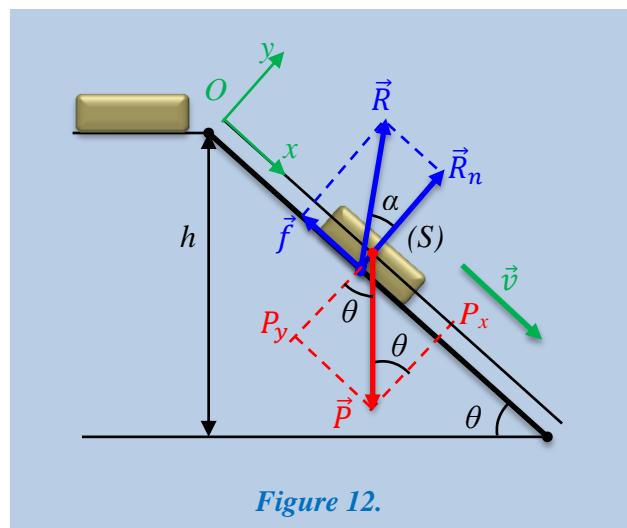


Figure 12.

- ✓ **R.T.S.G** ;
- ✓ **Système d'étude :** Sac de ciment de masse (m) en translation rectiligne ;
- ✓ **B.F.E.A :** \vec{P} ; \vec{R} .
- ✓ **T.C.I :** $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$
 $\Rightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}_G$
- ✓ **Projection du T.C.I suivant (Ox) :**
 $P_x - f = ma_G$
or $\sin\theta = \frac{P_x}{P} \Rightarrow P_x = Psin\theta$



avec $\sin\theta = \frac{h}{\ell} \Rightarrow P_x = P \frac{h}{\ell}$
 $\Rightarrow mg \frac{h}{\ell} - f = ma_G$

D'où :

$$a_G = g \frac{h}{\ell} - \frac{f}{m}$$

A.N : $a_G = 9,8 \times \frac{2}{3} - \frac{5}{50} = 6,43$

$$a_G = 6,43 \text{ m/s}^2$$

Conclusion : $a_G = 6,43 \text{ m/s}^2 = \text{cte} \neq 0$, alors chaque sac de ciment est animé d'un M.R.U.V.

2*) Vitesse de chaque sac de ciment.

Le mouvement étant R.U.V ; on a d'après la R.E.V :

$$v^2 - v_0^2 = 2a_G(x - x_0)$$

- ⊕ Origine des espaces : le sommet de la planche ;
- ⊕ Origine des dates : Instant où le sac de ciment est lâché.

A $t = 0$: $v_0 = 0$; $x_0 = 0$

En bas de la planche : $x = \ell$, alors :

$$v^2 = 2a_G \cdot \ell$$

D'où :

$$v = \sqrt{2a_G \cdot \ell}$$

A.N : $v = \sqrt{2 \times 6,43 \times 3} = 6,21$

$$v = 6,21 \text{ m.s}^{-1}$$

➤ Durée du mouvement.

D'après la R.V.T, on a :

$$v - v_0 = a_G \cdot t$$

Avec $v_0 = 0 \Rightarrow v = a_G t$

D'où :

$$t = \frac{v}{a_G}$$

A.N : $t = \frac{6,21}{(6,43)} = 0,96$

$$t = 0,96 \text{ s}$$

3*) Caractéristiques de la réaction \vec{R} .

➤ Module de \vec{R} .

$$\vec{R} = \vec{f} + \vec{R}_n \Rightarrow R = \sqrt{f^2 + R_n^2}$$

⊕ **Projection du T.C.I suivant (Oy) :**

$$-P_y + R_n = 0 \Rightarrow R_n = P_y$$

or $\cos\theta = \frac{P_y}{P} \Rightarrow P_y = P \cos\theta$

$$\Rightarrow R_n = mg \cos\theta$$

ainsi $R = \sqrt{f^2 + R_n^2} = \sqrt{f^2 + (mg \cos\theta)^2}$

de plus : $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \frac{h^2}{\ell^2}$

D'où :

$$R = \sqrt{f^2 + (mg)^2 \left(1 - \frac{h^2}{\ell^2}\right)}$$

A.N : $R = \sqrt{(5)^2 + (50 \times 9,8)^2 \left(1 - \frac{2^2}{3^2}\right)}$

$$R = 365,25 \text{ N}$$

➤ Direction de \vec{R} .

Trouvons α .

D'après le schéma :

$$\sin\alpha = \frac{f}{R} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{f}{R}\right)$$

A.N : $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{5}{365,25}\right) = 0,78$

$$\alpha = 0,78^\circ$$

Conclusion : \vec{R} a une direction qui fait un angle de $0,78^\circ$ avec la normale de la planche.

D'où les caractéristiques de la réaction \vec{R} sont :

- ✓ **Point d'application :** point de contact entre le sac de ciment et le plan ;
- ✓ **Sens :** du bas vers le haut ;
- ✓ **Module :** $R = 365,25 \text{ N}$;
- ✓ **Direction :** $\alpha = 0,78^\circ$.

A.2. Glissement d'un solide sur un plan horizontal avec force motrice \vec{F} et force de frottement \vec{f} .

Activité 8 : Une voiture de masse $m = 1 \text{ tonne}$ roule sur une route rectiligne horizontale qui oppose des frottements dont la résultante vaut $f = 200 \text{ N}$.



Partie d'un point A à la vitesse de 60Km/h, le conducteur veut atteindre la vitesse de 100Km/h en un point B situé à 200m de A.

1°) Calcule la valeur de la force de traction développée par le moteur de la voiture. En combien de temps parcourt - elle cette distance ?

2°) En B, un obstacle vu de loin, oblige le conducteur de s'arrêter, roues bloquées sur une distance de 90m, sous l'action d'une force de freinage constante \vec{f}_f .

- a) Calcule la valeur de la force de freinage ;
- b) Quelle est la durée du freinage ?

Corrigé 8 :

$$m = It ; f = 200N ; v_A = 60\text{Km/h} ; \\ v_B = 100\text{Km/h} ; AB = 200\text{m}.$$

1°) Valeur de la force de traction développée par le moteur de la voiture.

- Nature du mouvement.
- ✓ Schéma

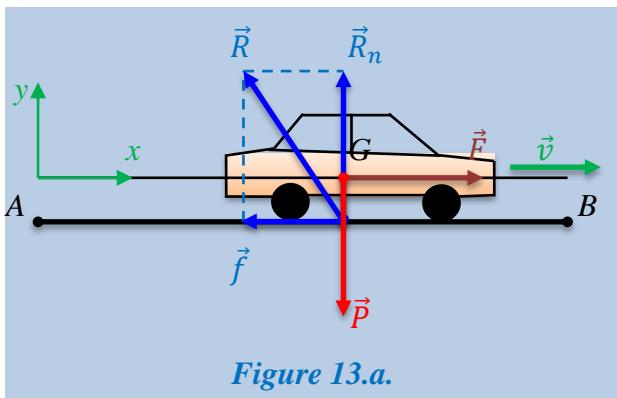


Figure 13.a.

- ✓ R.T.S.G ;
- ✓ Système d'étude : Voiture de masse (m) en translation rectiligne ;
- ✓ B.F.E.A : $\vec{P} ; \vec{R} ; \vec{F}$.
- ✓ T.C.I : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_{1G}$
 $\Rightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{a}_{1G}$
- ✓ Projection du T.C.I suivant (Ax) :
 $-f + F = ma_{1G}$

$$\Rightarrow F = ma_{1G} + f$$

• Trouvons a_{1G}

Le mouvement étant R.U.V ; on a d'après la R.E.V :

$$v_B^2 - v_A^2 = 2a_{1G}(x_B - x_A)$$

$$\Rightarrow a_{1G} = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2AB}$$

$$A.N : a_{1G} = \frac{(27,77)^2 - (16,66)^2}{2 \times 200} = 1,23$$

$$a_{1G} = 1,23\text{m/s}^2$$

Ainsi : $F = 1000 \times 1,23 + 200 = 1430$

$$F = 1430\text{N}$$

➤ Durée du parcourt.

M.R.U.V d'équation :

$$x = \frac{1}{2}a_{1G}t^2 + v_0t + x_0$$

$$v = \frac{dx}{dt} = a_{1G}t + v_0$$

Au point B : $v_B = a_{1G}t + v_0$; avec $v_0 = v_A$
D'où :

$$t = \frac{v_B - v_A}{a_{1G}}$$

$$A.N : t = \frac{27,77 - 16,66}{1,23} = 9,03$$

$$t = 9,03\text{s}$$

2°) $d = 90\text{m}$.

a) Calculons la valeur de la force de freinage.

- Nature du mouvement

- ✓ Schéma

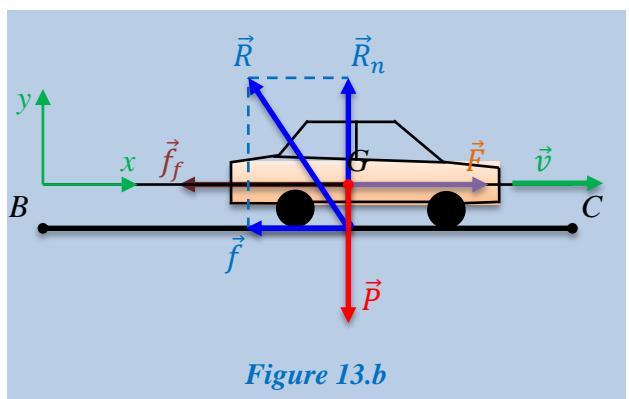


Figure 13.b

- ✓ B.F.E.A : $\vec{P} ; \vec{R} ; \vec{F} ; \vec{f}_f$

- ✓ T.C.I : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_{2G}$

$$\Rightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{f}_f = m\vec{a}_{2G}$$

- ✓ Projection du T.C.I suivant (Ax) :

$$0 - f + F - f_f = ma_{2G}$$



$$\Rightarrow f_f = F - f - ma_{2G}$$

- Trouvons a_{2G}**

Le mouvement étant R.U.V ; on a d'après la R.E.V :

$$v_f^2 - v_B^2 = 2a_{2G} \cdot d$$

$$\text{A l'arrêt } v_f = 0 \Rightarrow -v_B^2 = 2a_{2G} \cdot d$$

$$\Rightarrow a_{2G} = -\frac{v_B^2}{2d}$$

$$A.N : a_{2G} = -\frac{(27,77)^2}{2 \times 90} = -4,28$$

$$a_{2G} = -4,28 \text{ m/s}^2$$

Ainsi :

$$f_f = 1430 - 200 + 1000 \times 4,28 = 5510$$

$$f_f = 5510 \text{ N}$$

- Durée du parcourt.**

M.R.U.V d'équation :

$$x = \frac{1}{2}a_{2G}t^2 + v_0 t + x_0$$

$$v_f = \frac{dx}{dt} = a_{2G}t + v_B$$

$$\text{A l'arrêt : } v_f = 0 \Rightarrow a_{2G}t + v_B = 0$$

D'où :

$$t = -\frac{v_B}{a_{2G}}$$

$$A.N : t = -\frac{27,77}{(-4,28)} = 6,48$$

$$t = 6,48 \text{ s}$$

A.3. Mouvement de chute libre.

Définition : On appelle chute libre, le mouvement d'un corps qui n'est soumis qu'à la seule action de son poids.

a) Chute libre sans vitesse initiale.

C'est le mouvement des corps qui tombent suivant une verticale sous l'effet de la seule force à laquelle ils sont soumis : **le poids**.

Activité 9 : Sous un temps orageux, une noix de coco de 500g s'arrache du haut d'un cocotier, à 30m du sol sous l'effet du vent. En supposant que la résistance de l'air est négligeable, détermine la date à laquelle cette noix frappe le sol et avec quelle vitesse celle-ci arrive-t-elle au sol ?

Corrigé 9 :

$$m = 500 \text{ g} ; h = 30 \text{ m}.$$

- Trouvons la date à laquelle cette noix frappe le sol.**

➤ **Nature du mouvement.**

✓ **Schéma**

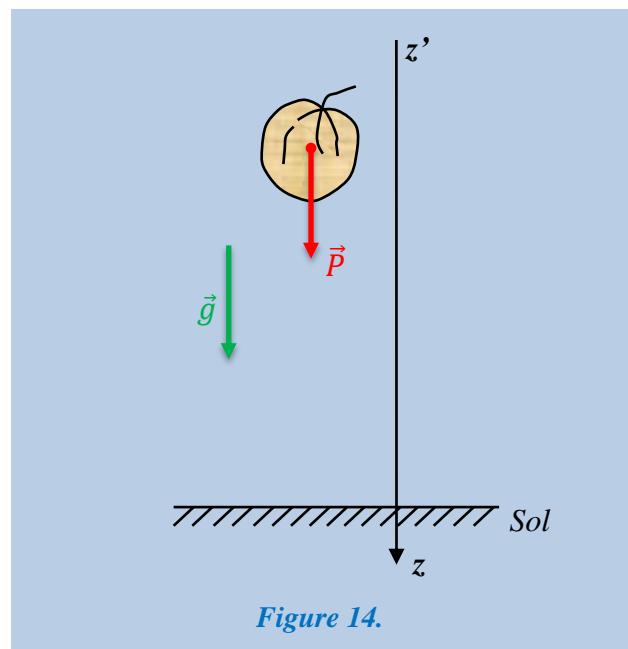


Figure 14.

✓ **R.T.S.G** ;

✓ **Système d'étude** : Noix de coco de masse (m) en translation rectiligne ;

✓ **B.F.E.A** : \vec{P}

✓ **T.C.I** : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$

$$\Rightarrow \vec{P} = m\vec{a}_G$$

✓ **Projection du T.C.I suivant (z'z)** :

$$P = ma_G \Rightarrow a_G = g$$

Conclusion : $a_G = g = \text{cte} \neq 0$, alors la noix de coco est animé d'un M.R.U.V d'équation :

$$z = \frac{1}{2}a_G t^2 + v_{0z} t + z_0$$

➤ **Origine des espaces** : position de la noix avant de s'arracher ;

➤ **Origine des dates** : instant où la noix s'arrache.



à $t = 0$: $z_0 = 0$; $v_{0z} = 0$.

$$\Rightarrow z = \frac{1}{2} a_G t^2$$

$$Au sol : z = h \Rightarrow h = \frac{1}{2} g t^2$$

D'où :

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$A.N : t = \sqrt{\frac{2 \times 30}{10}} = 2,45$$

$$t = 2,45s$$

- Vitesse de la noix à l'arrivée au sol.

$$z = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow v = \frac{dz}{dt} = g t$$

D'où :

$$v = g t$$

A.N :

$$v = 10 \times 2,45 = 24,5$$

$$v = 24,5 m.s^{-1}$$

b) Chute libre avec vitesse initiale ascendante.

Activité 10 : On lance un corps vers le haut, avec une vitesse initiale de $20m/s$, d'un point situé à une altitude de $200m$. On négligera la résistance de l'air et on prendra $g = 9,8m/s^2$.

1°) A quelle hauteur compté à partir du point de lancement monte – il ?

2°) Au bout de combien de temps repasse – il – à sa position initiale ?

3°) Avec quelle vitesse repasse – t – il à sa position initiale ?

4°) Au bout de combien de temps atteint – il le sol ?

5°) Avec quelle vitesse atteint – il le sol ?

Corrigé 10 :

$$v_0 = 20m/s ; h_0 = 200m ; g = 9,8m/s^2.$$

1°) Hauteur à laquelle monte le corps.

➤ Nature du mouvement.

✓ Schéma

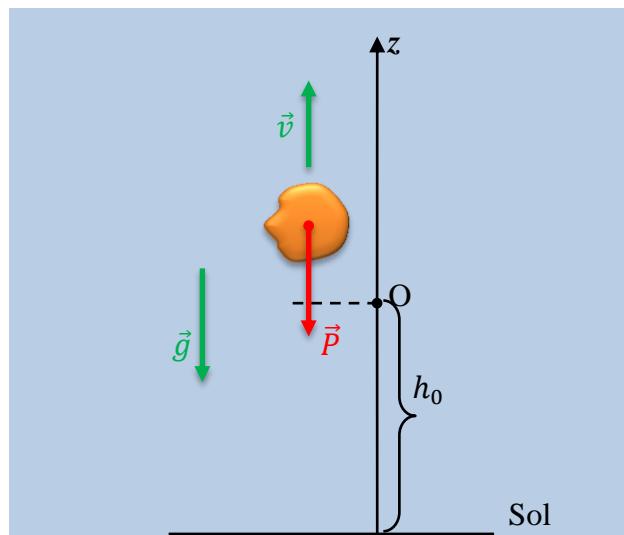


Figure 15.

✓ R.T.S.G ;

✓ Système d'étude : Corps de masse (m) en translation rectiligne ;

✓ B.F.E.A : \vec{P}

✓ T.C.I : $\sum \vec{F}_{ext} = m \vec{a}_G$

$\Rightarrow \vec{P} = m \vec{a}_G$

✓ Projection du T.C.I suivant (Oz) :

$$- P = m a_G \Rightarrow a_G = - g$$

Conclusion : $a_G = - g = cte \neq 0$, alors le corps est animé d'un M.R.U.V :

D'après la R.E.V, on a :

$$v_z^2 - v_{0z}^2 = 2a_G(z - z_0)$$

⊕ Origine des espaces : le point O de lancement ;

⊕ Origine des dates : Instant de lancement du corps.

à $t = 0$: $z_0 = 0$; $v_{0z} = v_0$.

$$\Rightarrow v_z^2 - v_0^2 = 2a_G(z)$$

A l'altitude maximale : $v_z = 0$ et $z = h_{max}$

$$\Rightarrow - v_0^2 = - 2gh_{max}$$

D'où :

$$h_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$$

$$A.N : h_{max} = \frac{(20)^2}{2 \times 9,8} = 20,4$$

$$h_{max} = 20,4m$$



2°) Temps au bout duquel le corps repasse par la position initiale.

M.R.U.V d'équation :

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2}a_G t^2 + v_{0z}t + z_0 \\ \text{à } t = 0: z_0 &= 0; v_{0z} = v_0. \\ \Rightarrow z &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t \end{aligned}$$

Au passage par la position initiale $z = 0$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t &= 0 \\ \Rightarrow t\left(-\frac{1}{2}gt + v_0\right) &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \text{ (au moment du lancement)} \\ -\frac{1}{2}gt + v_0 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

D'où :

$$t = \frac{2v_0}{g}$$

$$A.N: t = \frac{2 \times 20}{9,8} = 4,08 \quad t = 4,08s$$

3°) Vitesse avec laquelle le corps repasse à la position initiale.

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t \Rightarrow v = \frac{dz}{dt} = -gt + v_0$$

D'où :

$$v = -gt + v_0$$

$$A.N: v = -9,8 \times 4,08 + 20 = -19,98$$

$$v = -20m/s$$

4°) Temps d'arrivée du corps au sol.

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t$$

A l'arrivée au sol : $z = -h_0$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0 = 0$$

Le calcul du discriminant donne :

$$\Delta = v_0^2 + 2gh_0 > 0$$

Les racines de l'équation sont :

$$\begin{cases} t_1 = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}{g} > 0 \\ t_2 = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}{g} < 0 \end{cases}$$

Le temps n'étant jamais négatif, donc la valeur t_S du temps au sol correspond est :

$$t_S = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}{g}$$

$$A.N: t_S = \frac{20 + \sqrt{20^2 + 2 \times 9,8 \times 200}}{9,8} = 8,75$$

$$t_S = 8,75s$$

5°) Vitesse du corps à l'arrivée au sol.

$$v = -gt + v_0$$

Au sol, on a :

$$v_S = -gt_S + v_0$$

$$A.N: v = -9,8 \times 8,75 + 20 = -65,75$$

$$v = -65,75m.s^{-1}$$

A.4. Mouvement d'une machine d'ATWOOD.

Activité 11: On considère une poulie simple de masse négligeable. Par l'intermédiaire d'un fil inextensible et de masse négligeable sont reliées deux masses m_1 et m_2 . Les frottements sont négligeables, on abandonne le système.

1°) Calcule les accélérations a_1 et a_2 auxquelles sont soumises les deux masses.

2°) Calcule la durée du mouvement du système après un parcours de $0,5m$. Déduis – en la vitesse de l'ensemble à cet instant.

3°) Calcule la tension du fil qui relie les deux masses.

On donne : $m_1 = 0,5Kg$; $m_2 = 1Kg$; $g = 10m.s^{-2}$.

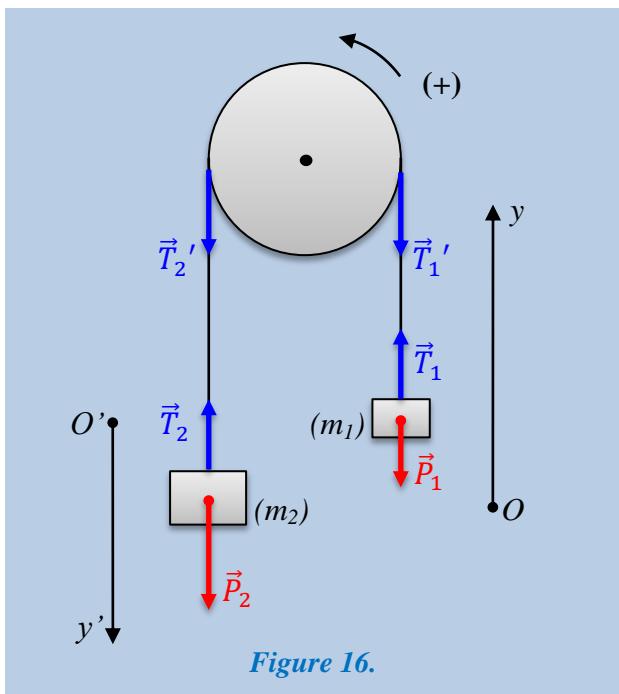
Corrigé 11 :

$m_1 = 0,5Kg$; $m_2 = 1Kg$; $g = 10m.s^{-2}$.
 $d = 0,5m$.

1°) Calcul des accélérations a_1 et a_2 des deux masses.

✓ Schéma





- ✓ **R.T.S.G :**
- ✓ **Système d'étude I :** Solide de masse (m_1) en translation rectiligne ;
- ✓ **B.F.E.A :** \vec{P}_1 ; \vec{T}_1
- ✓ **T.C.I :** $\sum \vec{F}_{ext} = m_1 \vec{a}_{1G}$
 $\Rightarrow \vec{P}_1 + \vec{T}_1 = m_1 \vec{a}_{1G}$
- ✓ **Projection du T.C.I suivant (Oy) :**
 $-P_1 + T_1 = m_1 a_{1G}$
 $\Rightarrow T_1 = m_1 g + m_1 a_{1G} \quad (1)$

- ✓ **Système d'étude II :** Solide de masse (m_2) en translation rectiligne ;
- ✓ **B.F.E.A :** \vec{P}_2 ; \vec{T}_2
- ✓ **T.C.I :** $\sum \vec{F}_{ext} = m_2 \vec{a}_{2G}$
 $\Rightarrow \vec{P}_2 + \vec{T}_2 = m_2 \vec{a}_{2G}$
- ✓ **Projection du T.C.I suivant ($O'y'$) :**
 $P_2 - T_2 = m_2 a_{2G}$
 $\Rightarrow T_2 = m_2 g - m_2 a_{2G} \quad (2)$

Le fil étant inextensible, d'après le P.A.M (3^{ème} loi de Newton), le long de la corde toutes les tensions ont la même intensité ; ainsi on a :

$$T_1 = T'_1 = T'_2 = T_2 \Rightarrow T_1 = T_2$$

Le fil ayant une masse négligeable, tous les points de la corde auront la même vitesse, par conséquent la même accélération, alors :

$$a_{1G} = a_{2G} = a_G$$

Ainsi : $m_1 g + m_1 a_{1G} = m_2 g - m_2 a_{2G}$
D'où :

$$a_{1G} = a_{2G} = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g$$

$$A.N : a_{1G} = a_{2G} = \frac{1 - 0,5}{0,5 + 1} \times 10 = 3,33$$

$$a_{1G} = a_{2G} = 3,33 \text{ m/s}^2$$

2*) Calcul de la durée du mouvement.

$a_G = cte \neq 0 \Rightarrow M.R.U.V$ d'équation :

$$y = \frac{1}{2} a_G t^2 + v_{0y} t + y_0$$

■ Origine des espaces : Position de l'ensemble avant l'abandon ;

■ Origine des dates : Instant où le système est abandonné.

à $t = 0$: $y_0 = 0$; $v_{0y} = 0$.

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} a_G t^2$$

A l'instant t : $y = d$, alors :

$$d = \frac{1}{2} a_G t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2d}{a_G}}$$

$$A.N: t = \sqrt{\frac{2 \times 0,5}{3,33}} = 0,54$$

$$t = 0,54 \text{ s}$$

■ Vitesse de l'ensemble à cet instant :

$$y = \frac{1}{2} a_G t^2 \Rightarrow v = \frac{dy}{dt} = a_G t$$

D'où :

$$v = a_G t$$

$$A.N: v = 3,33 \times 0,54 = 1,82$$

$$v = 1,82 \text{ m/s}$$

3*) Calcul de la tension du fil.

$$T_1 = T_2 = T \Rightarrow T = m_1(g + a_G)$$

$$A.N: T = 0,5 \times (10 + 3,33) = 6,66$$

$$T = 6,66 \text{ N}$$



A.5. Mouvement d'un pendule dans un véhicule.

Activité 12 :

1°) Un fil à plomb de masse $m = 100g$ est suspendu dans une automobile qui démarre sur une route droite et horizontale et acquiert une vitesse de $72Km/h$ après avoir parcouru $100m$. L'accélération de l'automobile étant supposée constante, on demande l'inclinaison et la tension du fil.

2°) Après un parcours de $100m$, le chauffeur freine en voulant atteindre une vitesse de $20Km/h$ après un parcours de $20m$. Dans quel sens s'incline le fil ? Déduis – en sa tension.

Corrigé 12 :

$$M = 100g ; v_1 = 72Km/h ; d = 100m.$$

1°) Calcul de l'inclinaison du fil à plomb.

✓ Schéma

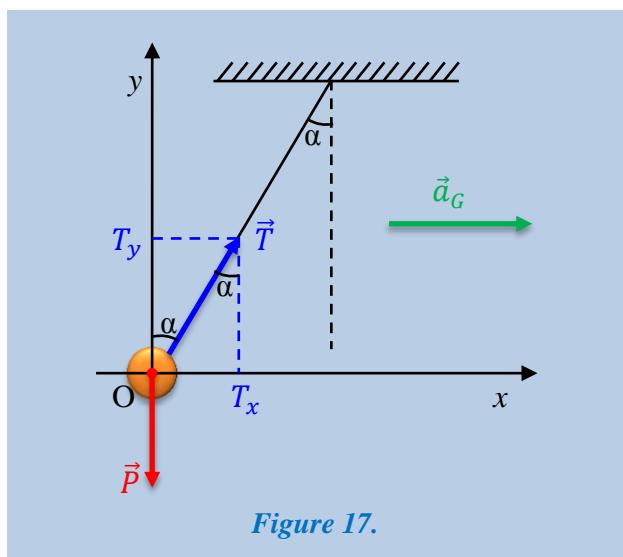


Figure 17.

- ✓ R.T.S.G ;
- ✓ Système d'étude : Fil à plomb de masse (m) en translation rectiligne ;
- ✓ B.F.E.A : \vec{P} ; \vec{T} ;
- ✓ T.C.I : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_{1G}$
 $\Rightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}_G$
- ✓ Projection du T.C.I suivant (Ox) :

$$T_x = ma_G ; \sin\alpha = \frac{T_x}{T}$$

$$\Rightarrow Tsina = ma_G \quad (1)$$

- ✓ Projection du T.C.I suivant (Oy) :

$$-P + T_y = 0 ; \cos\alpha = \frac{T_y}{T}$$

$$\Rightarrow T\cos\alpha = mg \quad (2)$$

En faisant le rapport des relation (1) et (2) :

$$\begin{aligned} (1) &= \frac{T\sin\alpha}{T\cos\alpha} = \frac{ma_G}{mg} \\ (2) &\Rightarrow \tan\alpha = \frac{a_G}{g} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{a_G}{g}\right) \end{aligned}$$

Trouvons a_G

D'après la R.E.V, on a :

$$\begin{aligned} v_1^2 - v_0^2 &= 2a_G(x_1 - x_0) \\ \text{avec } v_0 &= 0 \text{ et } x_1 - x_0 = d \\ \Rightarrow a_G &= \frac{v_1^2}{2d} \end{aligned}$$

D'où :

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{v_1^2}{2gd}\right)$$

$$A.N : \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{20^2}{2 \times 10 \times 100}\right) = 11,3$$

$$\alpha = 11,3^\circ$$

Conclusion : $\alpha > 0$, l'inclinaison se fait dans le sens contraire du mouvement du véhicule.

Calcul de la tension.

$$(1) T\cos\alpha = mg \Rightarrow$$

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha}$$

$$A.N : T = \frac{0,1 \times 10}{\cos(11,3^\circ)} = 1,02$$

$$T = 1,02N$$

$$2^\circ) v_2 = 20Km/h ; d_1 = 20m$$

Sens d'inclinaison du fil à plomb.

D'après ce qui précède, on a :

$$\tan\alpha_1 = \frac{a'_G}{g} \Rightarrow \alpha_1 = \tan^{-1}\left(\frac{a'_G}{g}\right)$$

D'après la R.E.V, on a :

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a'_G d_1 \Rightarrow a'_G = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2d_1}$$

D'où :

$$\alpha_1 = \tan^{-1}\left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2gd_1}\right)$$

$$A.N : \alpha_1 = \tan^{-1}\left(\frac{(5,55)^2 - (20)^2}{2 \times 10 \times 20}\right) = -42,67$$



$$\alpha_1 = -42,67^\circ$$

Conclusion : $\alpha_1 < 0$, l'inclinaison a lieu dans le sens du mouvement du véhicule.

✚ **Calcul de la tension.**

$$(1) \quad T \cos \alpha_1 = mg \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos \alpha_1}$$

$$A.N : T = \frac{0,1 \times 10}{\cos(-42,67^\circ)} = 1,36$$

$$T = 1,36N$$

B. Etude des systèmes mécaniques en mouvement de translation curviligne.

Définition : Un mouvement de translation est dit curviligne lorsque la trajectoire décrite par le solide en mouvement est une courbe.

B.1. Mouvement d'un projectile dans un champ de pesanteur.

Activité 13 : Une bille est lancée à partir du sol avec une vitesse de $8,0 m.s^{-1}$. La direction du vecteur vitesse fait un angle $\alpha = 30^\circ$ avec l'horizontale.

- 1°) Après avoir donné les équations horaires, montre que la trajectoire de la bille est parabolique.
- 2°) Sans utiliser la dérivation, cherche l'altitude maximale atteinte par la bille.

3°) A quelle distance du point de lancement retombe-t-elle ?

4°) Cette distance étant appelée portée de la bille, pour quelle valeur de α cette portée de la bille est-elle maximale ? Calcule-la.

5°) Détermine les caractéristiques de la vitesse à la portée.

On donne $g = 10 m.s^{-2}$.

Corrigé 13 :

$$v_0 = 8,40 m.s^{-1}; \alpha = 30^\circ; g = 10 m.s^{-2}.$$

1°) Montrons que la trajectoire de la bille est parabolique.

✓ Schéma

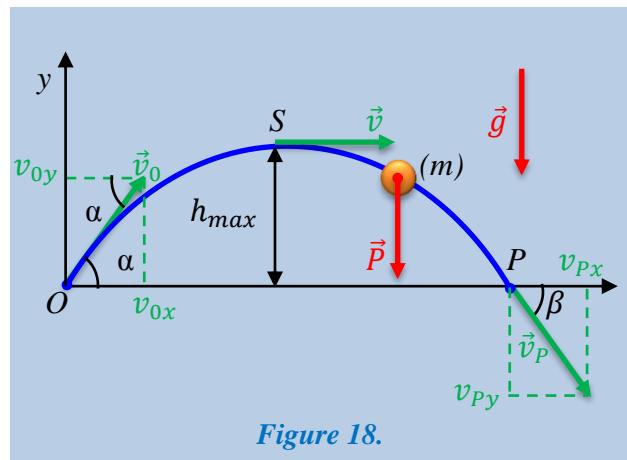


Figure 18.

- ✓ **R.T.S.G ;**
- ✓ **Système d'étude :** Bille de masse (m) en translation curviligne ;
- ✓ **B.F.E.A :** \vec{P}
- ✓ **T.C.I :** $\sum \vec{F}_{ext} = m \vec{a}_G \Rightarrow \vec{P} = m \vec{a}_G$
- ✓ **Projection du T.C.I suivant (Ox) :** $0 = ma_{Gx}; m \neq 0 \Rightarrow a_{Gx} = 0$
Alors M.R.U d'équation : $x = v_{0x}t + x_0$

✚ Origine des espaces : le point O ;

✚ Origine des dates : Instant de lancement de la bille.

à $t = 0$: $x_0 = 0; v_{0x} = v_0 \cos \alpha$.

$$\Rightarrow x = (v_0 \cos \alpha)t \quad (1)$$

✓ **Projection du T.C.I suivant (Oy) :**

$$- P = ma_{Gy} \Rightarrow a_{Gy} = -g = cte \neq 0$$

Alors M.R.U.V. d'équation :

$$y = \frac{1}{2}a_{Gy}t^2 + v_{0y}t + y_0$$

à $t = 0$: $y_0 = 0; v_{0y} = v_0 \sin \alpha$.

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t \quad (2)$$

$$\text{dans (1)} \quad t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \quad (3)$$

En remplaçant la relation (3) dans (2), on obtient l'équation :

$$y = -\frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 + (v_0 \sin \alpha) \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)$$

D'où :

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$$



Conclusion : L'équation de la trajectoire est de la forme : $y = ax^2 + bx + c$, avec $c = 0$, caractéristique d'une parabole. Donc la trajectoire de la bille est parabolique.

2*) Altitude maximale atteinte par la bille.

Cette altitude est appelée flèche de la trajectoire.

Définition : La flèche d'un projectile est la hauteur maximale atteinte par le projectile.

Plusieurs méthodes existent pour établir l'expression de la flèche parmi lesquelles :

1^{ère} Méthode.

$$\left\{ \begin{array}{l} x = (v_0 \cos \alpha) t \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + (v_0 \sin \alpha) t \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha \\ v_y = \frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin \alpha \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha \\ v_y = \frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin \alpha \end{array} \right. \quad (2)$$

Au sommet de la trajectoire, c'est – à – dire au point S : $v_y = 0$ et $y = h_{max}$

$$v_y = 0 \Rightarrow -gt + v_0 \sin \alpha = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \quad (4)$$

La relation (4) dans (2) donne :

$$y = h_{max} = -\frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 + \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{g}$$

$$\Rightarrow h_{max} = -\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g}$$

D'où :

$$h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

2^{ème} Méthode :

D'après la R.E.V suivant l'axe (Oy), on a :

$$v_y^2 - v_{0y}^2 = 2a_{Gy}(y - y_0)$$

Avec $v_y = 0$; à l'altitude maximale et

$$y - y_0 = h_{max}$$

$$\Rightarrow -v_{0y}^2 = 2a_{Gy}h_{max}$$

$$\Rightarrow -(v_0 \sin \alpha)^2 = -2gh_{max}$$

D'où :

$$h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

$$A.N : h_{max} = \frac{(8,40)^2 \times \sin^2(30^\circ)}{2 \times 10} = 0,88$$

$$h_{max} = 0,88m$$

3*) Distance du point de lancement où retombe la bille : portée de la bille.

Définition : La portée d'un projectile est la distance qui sépare son point d'impact du point de lancement.

D'après l'équation de la trajectoire :

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$$

Au point d'impact sur le sol, c'est – à – dire au point P, on a : $y(x_P) = 0$.

$$\Rightarrow -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x_P^2 + x_P \tan \alpha = 0$$

$$\Rightarrow x_P \left(-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x_P + \tan \alpha \right) = 0$$

$$\Rightarrow x_P = 0 \text{ (au point de lancement)}$$

$$\Rightarrow x_P = \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha \cdot \tan \alpha}{g}$$

D'où :

$$x_P = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Avec : $2\cos \alpha \cdot \sin \alpha = \sin 2\alpha$

$$A.N : x_P = \frac{(8,40)^2 \sin(2 \times 30^\circ)}{10} = 6,11$$

$$x_P = 6,11m$$

4^o) Valeur de α pour laquelle la portée est maximale.

Cette portée est maximale pour $\sin 2\alpha = 1$.

$$\Rightarrow 2\alpha = 90^\circ$$

D'où :

$$\alpha = 45^\circ$$

Et

$$x_{Pmax} = \frac{v_0^2}{g}$$

$$A.N : x_{Pmax} = \frac{(8,40)^2}{10} = 7,05$$



$$x_{Pmax} = 7,05m$$

5*) Caractéristiques de la vitesse à la portée.

- Module de \vec{v}_P

A la portée : $\vec{v}_P = v_{Px}\vec{i} + v_{Py}\vec{j}$

Alors $v_P = \sqrt{v_{Px}^2 + v_{Py}^2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{Px} = v_0 \cos \alpha \\ v_{Py} = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

A la portée $y = 0$.

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \end{cases}$$

$\Rightarrow t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$ est la durée de la chute.

Ainsi : $v_{Py} = -g \left(\frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \right) + v_0 \sin \alpha$

$$\Rightarrow v_{Py} = -2v_0 \sin \alpha + v_0 \sin \alpha$$

$$\Rightarrow v_{Py} = -v_0 \sin \alpha$$

Alors : $v_P = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + v_0^2 \sin^2 \alpha}$

$$\Rightarrow v_{Py} = \sqrt{v_0^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)} = \pm v_0$$

D'où :

$$v_P = -v_0$$

v_P est négative pour la simple raison que le vecteur vitesse \vec{v}_P est dirigé vers le bas.

- Angle de \vec{v}_P avec l'horizontale

$$\tan \beta = \frac{v_{Py}}{v_{Px}} = -\frac{v_0 \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha} = -\tan \alpha$$

$$\Rightarrow \tan \beta = -\tan \alpha$$

D'où :

$$\beta = -\alpha$$

Conclusion : v_P a une direction qui fait un angle $\beta = 30^\circ$ par rapport à l'axe (Ox) vers le bas.

D'où les caractéristiques du vecteur vitesse au point P sont :

- Point d'application : Le point P ;
- Sens : Du haut vers le bas ;
- Module : $v_P = v_0 = 8,40m/s$;
- Direction : $\beta = 30^\circ$.

Remarques :

R₁ : Angles de tirs possibles :

Pour atteindre une cible C(x_C ; y_C) à l'aide d'un projectile, on utilise l'équation de la trajectoire du mouvement :

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$$

Au point C, on a :

$$y_C = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x_C^2 + x_C \tan \alpha$$

$$\text{avec } \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$$

$$\Rightarrow y_C = -\frac{gx_C^2}{2v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha) + x_C \tan \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{gx_C^2}{2v_0^2} \tan^2 \alpha - x_C \tan \alpha + y_C + \frac{gx_C^2}{2v_0^2} = 0$$

Ensuite on résout cette équation du second degré en $\tan \alpha$. On obtient deux valeurs positives de α qui représentent les angles de tirs possibles (figure 19).

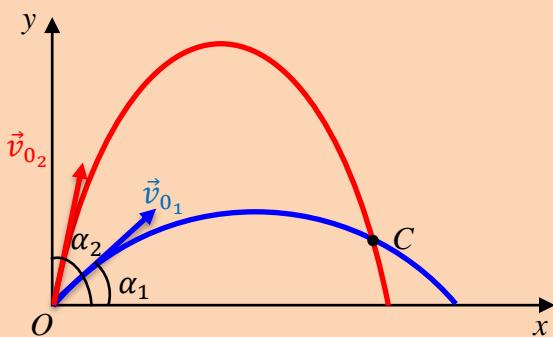
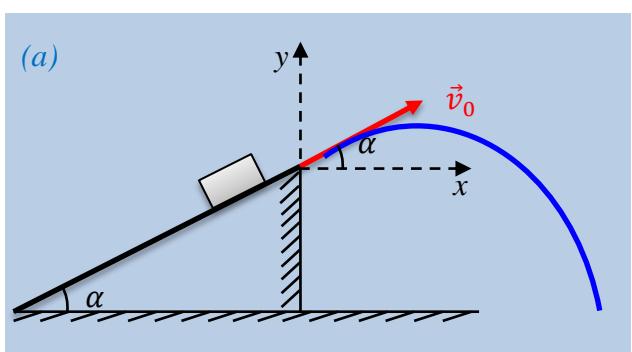
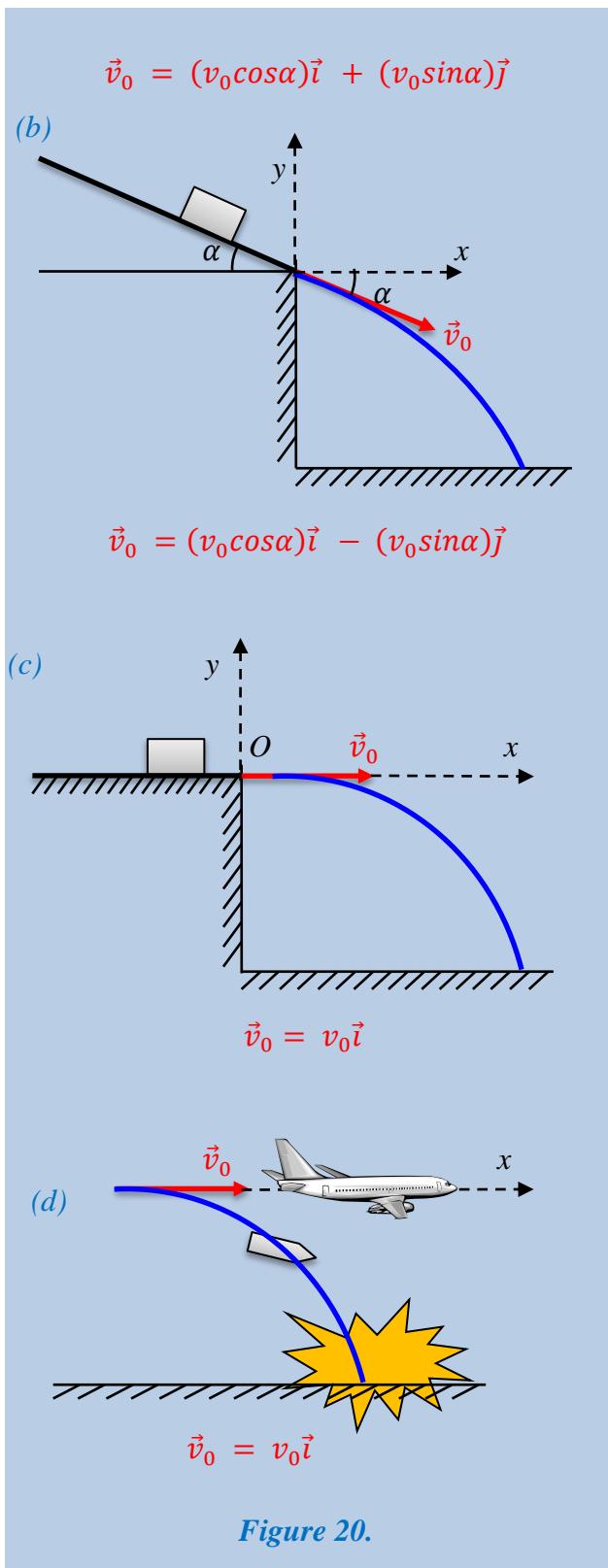


Figure 19.

- Pour $0 < \alpha_1 < 45^\circ$ (trajectoire en bleu) ; le tir est dit tendu.
- Pour $45^\circ < \alpha_2 < 90^\circ$ (trajectoire en rouge) ; le tir est dit en cloche.

R₂ : Suivant la direction du vecteur vitesse initiale, on peut distinguer parmi tant d'autres, les cas des projectiles suivants (figures 20):





B.2. Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique \vec{E} .

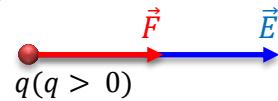
Définition: On appelle champ électrostatique \vec{E} , toute région de l'espace où une charge électrique se trouve soumise à une force électrostatique \vec{F} telle que :

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

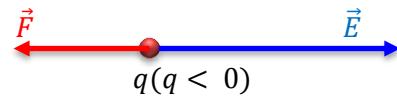
Soit :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad \text{et} \quad F = |q| \cdot E$$

- Si $q > 0$, \vec{F} et \vec{E} sont de *même sens*.

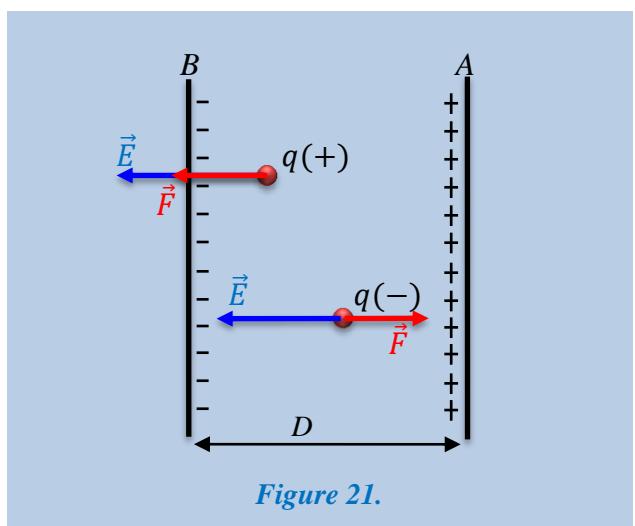


- Si $q < 0$, \vec{F} et \vec{E} sont de *sens contraires*.



❖ Le champ électrostatique est constant en direction, sens et valeur entre deux plaques. Il est dit *uniforme* dans cette région.

Le dispositif permettant d'obtenir un champ uniforme est appelé *condensateur plan* : les deux plaques en sont les *armatures* (figure 21).



❖ Le vecteur champ électrostatique est toujours orienté dans le sens des potentiels décroissants (de la plaque positive vers la plaque négative).

- ❖ Le travail effectué par la force électrostatique \vec{F} , lorsque la charge q se déplace de l'armature A vers l'armature B, est égal au produit de la charge par la d.d.p (différence de potentiels) entre les armatures A et B.

$$W_{AB}(\vec{F}) = q(V_A - V_B)$$

- ❖ Si $V_A - V_B = U_{AB}$ désigne la tension entre les plaques, d la distance qui les sépare, l'intensité du champ électrique (ou électrostatique) uniforme en tout point entre les plaques vaut :

$$E = \frac{U_{AB}}{d} \quad (\text{V/m})$$

- ❖ L'énergie potentielle électrostatique d'une charge est égale au produit de sa charge par la valeur du potentiel V au point où elle se trouve.

En un point M du champ :

$$\mathcal{E}_{PM} = qV_M$$

Activité 14 : Un faisceau de particules identiques, de masse m , de charge $q = -e$, pénètre à la vitesse initiale \vec{v}_0 dans un champ électrostatique \vec{E} uniforme créé par deux plaques horizontales reliées à un générateur électrostatique. On s'arrange en outre, pour que les vecteurs \vec{E} et \vec{v}_0 soient perpendiculaires.

- 1°) Détermine l'équation de la trajectoire.
 - 2°) Soient d , la distance entre les plaques et ℓ , la longueur de chaque plaque. Calcule la vitesse de la particule à la sortie des plaques après avoir donné les coordonnées du point de sortie S.
 - 3°) Calcule la déviation α du faisceau à la sortie des plaques.
 - 4°) Calcule l'ordonnée du point d'impact I, du faisceau sur un écran (E) situé à une distance D du point d'entrée O.
 - 5°) Quelle condition doit satisfaire la vitesse v_0 pour que le faisceau d'électrons sorte du champ électrique ?
- Données :** $v_0 = 25.000 \text{ Km/s}$; $U = 100 \text{ V}$;
 $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ Kg}$; $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $D = 0,4 \text{ m}$;
 $\ell = 0,1 \text{ m}$; $d = 2,5 \text{ cm}$.

Corrigé 14 :

1°) Détermination de l'équation de la trajectoire.

✓ Schéma

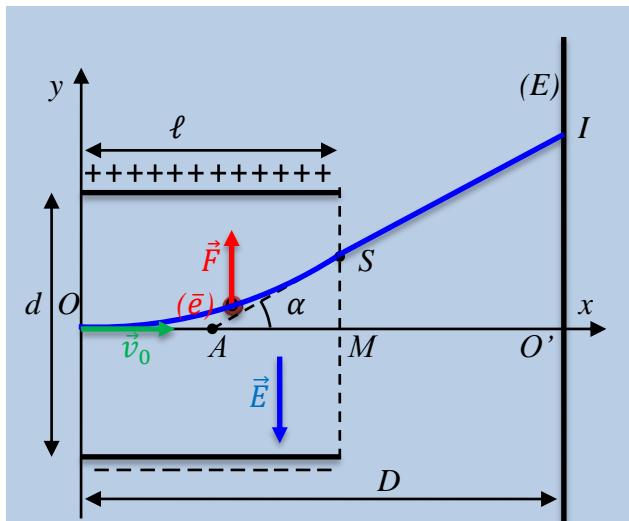


Figure 22.

✓ R.T.S.G ;

✓ Système d'étude : Particule de masse (m) en translation curviligne ;

✓ B.F.E.A : \vec{F}

On néglige le poids \vec{P} de l'électron devant la force \vec{F} , ($P \ll F$).

✓ T.C.I : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$

$$\Rightarrow \vec{F} = m\vec{a}_G \Rightarrow q\vec{E} = m\vec{a}_G$$

✓ Projection du T.C.I suivant (Ox) :

$$0 = ma_{Gx}; m \neq 0 \Rightarrow a_{Gx} = 0$$

Alors M.R.U d'équation : $x = v_{0x}t + x_0$

➡ Origine des espaces : le point O ;

➡ Origine des dates : L'instant où l'électron pénètre dans le champ.

$$\text{à } t = 0 : x_0 = 0; v_{0x} = v_0.$$

$$\Rightarrow x = v_0 t \quad (1)$$

✓ Projection du T.C.I suivant (Oy) :

$$-qE = ma_{Gy} \Rightarrow a_{Gy} = -\frac{qE}{m} = cte \neq 0$$

Alors M.R.U.V. d'équation :

$$y = \frac{1}{2}a_{Gy}t^2 + v_{0y}t + y_0$$

$$\text{à } t = 0 : y_0 = 0; v_{0y} = 0.$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}a_{Gy}t^2 = -\frac{1}{2}\frac{qE}{m}t^2$$

$$\text{Avec } q = -e \Rightarrow y = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}t^2 \quad (2)$$



Dans (1) $t = \frac{x}{v_0}$ (3)

En remplaçant la relation (3) dans (2), on obtient l'équation :

$$y = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \left(\frac{x}{v_0} \right)^2 = \frac{eE}{2mv_0^2} x^2$$

avec $E = \frac{U}{d}$

D'où :

$$y = \frac{eU}{2mdv_0^2} x^2$$

Conclusion : L'équation de la trajectoire est de la forme : $y = ax^2 + bx + c$, avec $b = 0$ et $c = 0$, caractéristique d'une parabole. Donc la trajectoire de l'électron est parabolique.

2*) Coordonnées du point de sortie S.

La particule sort du champ électrostatique S($x_s ; y_s$) tel que :

$$\begin{cases} x_s = \ell \\ y_s = \frac{eU}{2mdv_0^2} x_s^2 = \frac{eU}{2mdv_0^2} \ell^2 \end{cases}$$

D'où :

$$S\left(\ell ; \frac{eU}{2mdv_0^2} \ell^2\right)$$

A.N : $\begin{cases} x_s = 0,1 \\ y_s = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \times 100 \times (0,1)^2}{2 \times 9,1 \cdot 10^{-31} \times 2,5 \cdot 10^{-2} \times (25 \cdot 10^6)^2} \end{cases}$

$$S(0,1 ; 5,6210^{-3}) \text{ (m)}$$

► Vitesse de l'électron au point de sortie S.

$$\vec{v}_s = v_{sx} \vec{i} + v_{sy} \vec{j} \Rightarrow v_s = \sqrt{v_{sx}^2 + v_{sy}^2}$$

Or $\begin{cases} x = v_0 t \Rightarrow v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \\ y = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} t^2 \Rightarrow v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{eU}{md} t \end{cases}$

Au point de sortie S :

$$x_s = v_0 t = \ell \Rightarrow t = \frac{\ell}{v_0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{sx} = v_0 \\ v_{sy} = \frac{eU\ell}{mdv_0} \end{cases}$$

D'où :

$$v_s = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{eU\ell}{mdv_0} \right)^2}$$

A.N :

$$v_s = \sqrt{(25 \cdot 10^6)^2 + \left(\frac{1,6 \cdot 10^{-19} \times 100 \times 0,1}{9,1 \cdot 10^{-31} \times 2,5 \cdot 10^{-2} \times 25 \cdot 10^6} \right)^2}$$

$$v_s = 2,51 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

3*) Calcul de la déviation α du faisceau à la sortie des plaques.

Considérons le triangle AMS, on a :

$$\tan \alpha = \frac{MS}{AM}$$

Avec $\begin{cases} MS = y_s = \frac{eU\ell^2}{2mdv_0^2} \\ AM = \ell/2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{y_s}{\ell/2} = \frac{2eU\ell^2}{2mdv_0^2 \ell}$$

D'où :

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{eU\ell}{mdv_0^2} \right)$$

A.N :

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{1,6 \cdot 10^{-19} \times 100 \times 0,1}{9,1 \cdot 10^{-31} \times 2,5 \cdot 10^{-2} \times (25 \cdot 10^6)^2} \right)$$

$$\alpha = 6,42^\circ$$

4*) Calcul de l'ordonnée du point d'impact I sur l'écran.

Considérons le triangle IAO', on a :

$$\tan \alpha = \frac{O'I}{AO'} \Rightarrow O'I = AO' \tan \alpha$$

avec $\begin{cases} AO' = D - \frac{\ell}{2} \\ \tan \alpha = \frac{eU\ell}{mdv_0^2} \end{cases}$

D'où :

$$O'I = y_I = \frac{eU\ell}{mdv_0^2} \left(D - \frac{\ell}{2} \right)$$

A.N :

$$y_I = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \times 100 \times 0,1}{9,1 \cdot 10^{-31} \times 2,5 \cdot 10^{-2} \times (25 \cdot 10^6)^2} \left(0,4 - \frac{0,1}{2} \right)$$

$$y_I = 3,93 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 3,93 \text{ cm}$$

5*) Condition que doit satisfaire v_0 pour que l'électron sorte du condensateur.



Pour que l'électron sorte du condensateur (du champ), il faut que :

$$\begin{cases} x_S = \ell \\ y_S < \frac{d}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{eU\ell^2}{2mdv_0^2} < \frac{d}{2} \Rightarrow \frac{eU\ell^2}{md^2v_0^2} < 1$$

$$\Rightarrow v_0^2 > \frac{eU\ell^2}{md^2}$$

D'où :

$$v_0 > \frac{\ell}{d} \sqrt{\frac{eU}{m}}$$

$$A.N : v_0 > \frac{0,1}{2,5 \cdot 10^{-2}} \sqrt{\frac{1,6 \cdot 10^{-19} \times 100}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 1,67 \cdot 10^7 m/s$$

$$v_0 > 1,67 \cdot 10^7 m/s$$

Note :

➤ Si $v_0 < \frac{\ell}{d} \sqrt{\frac{eU}{m}}$ et $y_S = \frac{d}{2}$

L'électron frappe l'une des armatures (ne sort pas du champ).

➤ Si $v_0 = \frac{\ell}{d} \sqrt{\frac{eU}{m}}$

L'électron ne sortira pas du condensateur, car il n'aura pas assez d'énergie.

Remarques :

R₁ : Les particules de *charge négative* ($q < 0$) sont : les *anions* (ions négatifs) et les *électrons*; celles de *charge positive* ($q > 0$) sont : les *cations* (ions positifs) et les *protons*.

R₂ : A l'extérieur du champ électrostatique, *le mouvement d'une particule est rectiligne et uniforme*.

R₃ : La trajectoire décrite par la particule chargée dans un champ électrique dépend de la *direction du vecteur vitesse* par rapport à celle des plaques chargées, mais aussi du *signe de la charge électrique*. Sa concavité se trouve du même côté que la force électrique.

C'est ainsi que l'on peut distinguer suivant les cas, les trajectoires suivantes (figure 23).

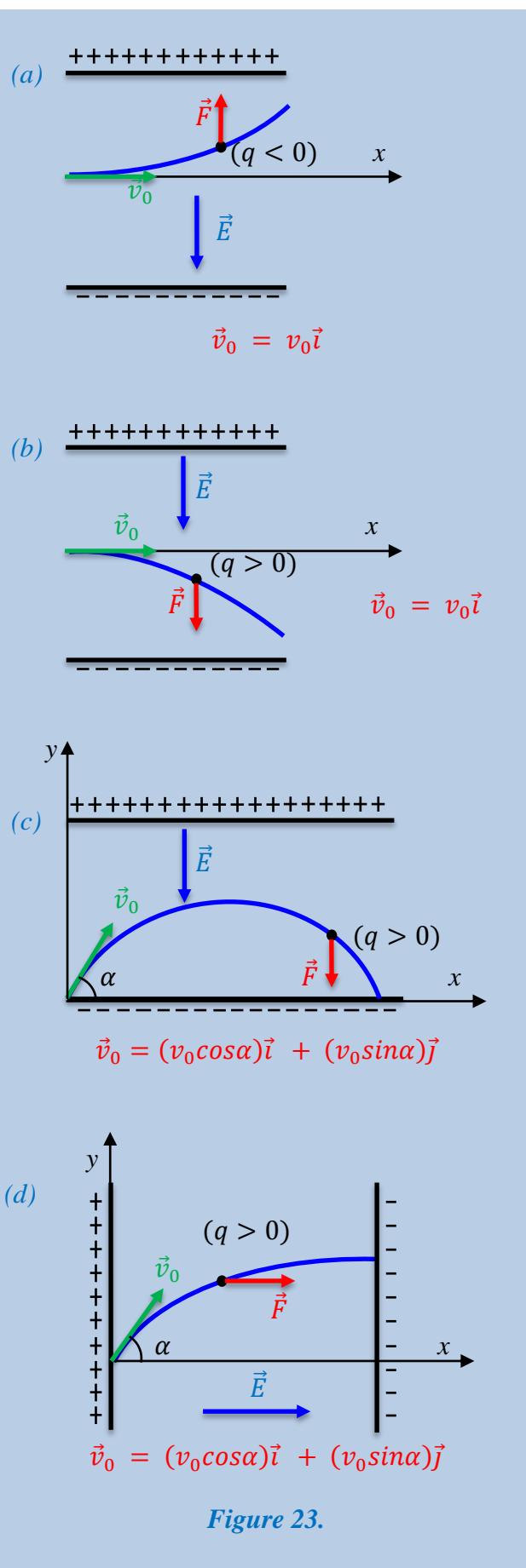


Figure 23.



B.3. Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique d'induction \vec{B} .

Définition : On appelle *champ magnétique d'induction* \vec{B} , toute région de l'espace où une particule de charge q , animée d'une vitesse \vec{v} , subit une force magnétique appelée *force de Lorentz*, telle que :

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

- La *direction* de la force est *perpendiculaire au plan formé par les vecteurs \vec{v} et \vec{B}* .
- Son *sens* est tel que le *trièdre formé par les vecteurs $q\vec{v}$, \vec{B} et \vec{F} dans cet ordre soit direct*; le sens du vecteur $q\vec{v}$ dépend évidemment du *signe de la charge q* .
- Son *intensité* est donnée par la relation :

$$F = |q|v.B.|sin\alpha|$$

Avec :

α : l'angle inférieur à π formé par $q\vec{v}$ et \vec{B} .
 F en (N) ; v en (m/s) ; q en (C) ; B en tesla (T).

❖ Pour l'étude dynamique considérons le cas où :

$$\vec{v} \perp \vec{B} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ (rad)}$$

❖ Les *sens de la courbure de la trajectoire* d'une particule de charge q dans un champ magnétique uniforme *orthogonal à \vec{v}_0* sont donnés par la figure 24 ci-dessous :

Remarquons d'abord que la trajectoire est contenue dans le plan formé par les vecteurs $q\vec{v}$ et \vec{F} . Le vecteur \vec{B} est donc perpendiculaire à ce plan. Pour cela, il sera représenté par une flèche qui ne sera visible que soit par son origine, soit par son extrémité.



: \vec{B} est « entrant »

: \vec{B} est « sortant ».

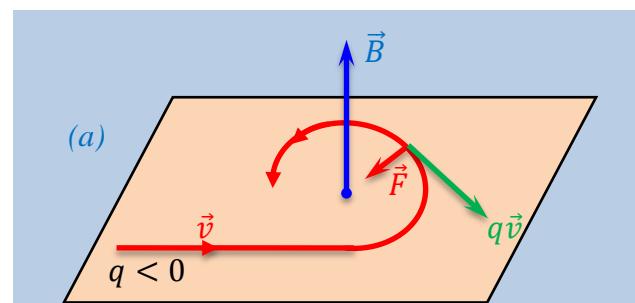


Fig.a : Une particule de charge négative « s'enroule » autour de \vec{B} dans le sens trigonométrique.

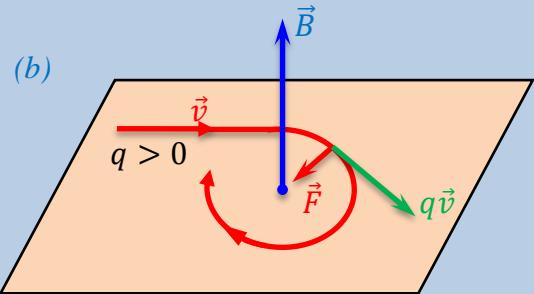


Fig.b : Une particule de charge positive « s'enroule » autour de \vec{B} dans le sens inverse du sens trigonométrique.

Figure 24.

Pour trouver le sens de rotation, remarquons que la *force (ou l'accélération) est nécessairement centripète*; les particules de charge négative tournent autour de \vec{B} dans le sens trigonométrique (sens inverse des aiguilles d'une montre) (figure 24.a), tandis que les particules de charge positive en sens contraire (figure 24.b).

Activité 15 : Un faisceau homocinétique d'électrons pénètre en O à la vitesse \vec{v}_0 dans un domaine de largeur ℓ où règne un champ magnétique uniforme de vecteur induction \vec{B} orthogonal à \vec{v}_0 .

1°) a) On désire obtenir une déviation des particules vers le haut par le champ magnétique \vec{B} . Précise sur la figure le sens du vecteur \vec{B} .

b) Montre que dans le champ magnétique le mouvement des particules est circulaire et uniforme dans un plan que l'on précisera.

2°) A sa sortie du champ, le faisceau d'électrons semble provenir d'un point I proche du centre de l'espace champ magnétique. Un écran est placé à la distance $D = 10\text{cm}$ du point I perpendiculairement à \vec{v}_0 .



- a) Exprime la déviation angulaire α (ou angle α de déflexion) du faisceau électronique en fonction de q , m , ℓ , B , et v_0 .
- b) Détermine l'expression de la déviation linéaire Y du faisceau d'électrons sur l'écran.
- c) Que valent le champ magnétique B et le rayon R de la trajectoire si on observe sur l'écran une distance de déflexion $Y = 4\text{cm}$.

On donne : $v_0 = 100\text{Km.s}^{-1}$; $\ell = 2\text{cm}$;
 $q = -e = -1,6 \cdot 10^{-19}\text{C}$; $m = 9,1 \cdot 10^{-31}\text{Kg}$.

Corrigé 15 :

$$v_0 = 100\text{Km.s}^{-1}; \ell = 2\text{cm}; D = 10\text{cm}$$

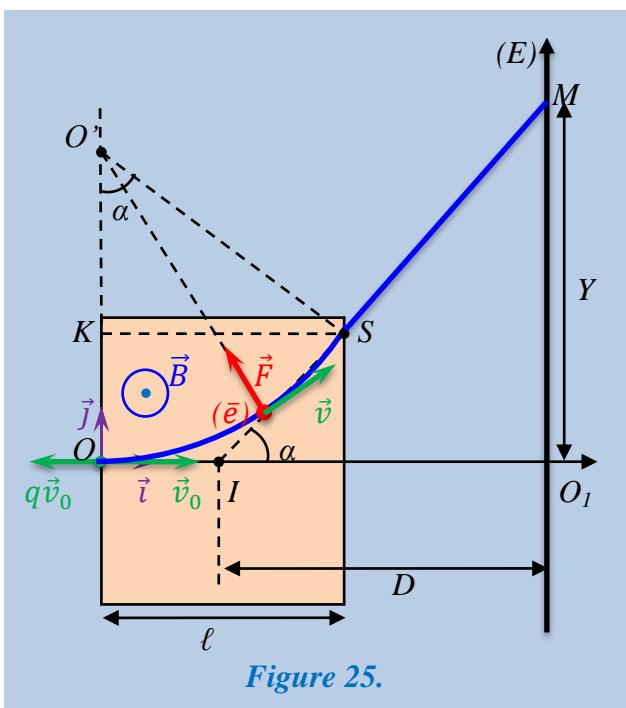
$$q = -e = -1,6 \cdot 10^{-19}\text{C}; m = 9,1 \cdot 10^{-31}\text{Kg}$$

1°) a) Précisons sur la figure le sens du vecteur \vec{B} .

En utilisons la règle des trois doigts de la main droite (le pouce pour \vec{F} ; l'index pour $q\vec{v}$ et le majeur pour \vec{B} de sorte que les trois doigts forment un trièdre direct), on constate que le champ magnétique \vec{B} est dirigé vers l'avant : le champ \vec{B} est « sortant » et représenté par 

b) Montrons que le mouvement est circulaire uniforme dans un plan donné.

✓ Schéma



- ✓ **R.T.S.G** ;
- ✓ **Système d'étude** : Particule de masse (m) en translation curviligne ;

✓ **B.F.E.A** :

- La force magnétique de Lorentz \vec{F} ;
- Le poids \vec{P} .

On néglige le poids \vec{P} de l'électron devant la force \vec{F} , ($P \ll F$).

✓ **T.C.I** :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_{ext} &= m\vec{a} \\ \Rightarrow \vec{F} &= m\vec{a} \Rightarrow q\vec{v} \wedge \vec{B} = m\vec{a} \\ \Rightarrow \vec{a} &= \frac{q\vec{v} \wedge \vec{B}}{m} \end{aligned}$$

❖ Montrons que le mouvement est uniforme :

$$\vec{a} = \frac{q\vec{v} \wedge \vec{B}}{m} \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{v}$$

\vec{v} étant toujours tangent à la trajectoire, alors \vec{a} est normal à la trajectoire.

$$\text{ainsi } a_t = \frac{dv}{dt} = 0, \quad \text{soit } v = v_0 = \text{cte}$$

Le mouvement est donc uniforme.

❖ Montrons que le mouvement est circulaire.

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{q\vec{v} \wedge \vec{B}}{m} \\ \vec{a} \perp \vec{v} \Rightarrow a_t &= 0 \text{ et } a = a_n \\ \Rightarrow a_n &= \frac{|q|v.B.\sin(q\vec{v}, \vec{B})}{m} \\ \text{avec } \sin(q\vec{v}, \vec{B}) &= 1, \quad \text{car } \vec{v} \perp \vec{B} \\ \Rightarrow a_n &= \frac{|q|v.B}{m} = \frac{v^2}{R} \end{aligned}$$

Soit :

$$R = \frac{mv}{|q|B} = \frac{mv_0}{|q|B}$$

m , v_0 , q et B sont des constantes, donc R est une constante.

Le rayon R étant constant, le mouvement est donc circulaire.

❖ Précisons le plan du mouvement.

Soit ($z'z$) l'axe associé au vecteur \vec{B} :

$$\vec{a} = \frac{q\vec{v} \wedge \vec{B}}{m} \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{B}$$

Alors $a_z = 0$.

D'après l'énoncé $\vec{v} \perp \vec{B}$, donc $v_z = 0$.

$a_z = 0$ et $v_z = 0$, il n'y a donc pas de mouvement suivant l'axe ($z'z$) : par conséquent *le mouvement se fait dans un plan perpendiculaire à \vec{B} , autrement dit dans le plan contenant les vecteurs \vec{a} et \vec{v}* .



Conclusion : Dans le champ magnétique, le mouvement de la particule est circulaire et uniforme dans le plan contenant les vecteurs \vec{a} et \vec{v} .

Note : Dans un champ magnétique uniforme d'induction \vec{B} orthogonal à sa vitesse initiale \vec{v}_0 , une particule chargée est animée d'un mouvement circulaire uniforme dans un plan orthogonal à \vec{B} . Le rayon de la trajectoire est :

$$R = \frac{mv_0}{|q|B}$$

2°) a) Déviation angulaire α .

Considérons le triangle $O'KS$, on a :

$$\sin\alpha = \frac{KS}{O'S} = \frac{\ell}{R} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\ell|q|.B}{mv_0}$$

D'où :

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{\ell|q|.B}{mv_0}\right)$$

b) Déviation linéaire sur l'écran (E).

En considérant le triangle IO_1M , on a :

$$\tan\alpha = \frac{O_1M}{IO_1} = \frac{Y}{D} \Rightarrow Y = D\tan\alpha$$

α étant petit, alors $\tan\alpha \approx \sin\alpha$

D'où :

$$Y = \frac{D \cdot \ell|q|.B}{mv_0}$$

c) Valeurs de B et R .

$$\tan\alpha = \frac{Y}{D} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{Y}{D}\right)$$

$$A.N: \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{0,04}{0,1}\right) = 21,8 \Rightarrow \alpha = 21,8^\circ$$

$$\text{Ainsi : } \sin\alpha = \frac{\ell|q|.B}{mv_0}$$

D'où :

$$B = \frac{mv_0 \sin\alpha}{\ell|q|}$$

$$A.N: B = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \times 10^5 \times \sin(21,8^\circ)}{0,02 \times 1,6 \cdot 10^{-19}}$$

$$B = 1,05 \cdot 10^{-5} T$$

D'après ce qui précède, on a :

$$R = \frac{mv_0}{|q|B}$$

$$A.N: R = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \times 10^5}{1,6 \cdot 10^{-19} \times 1,05 \cdot 10^{-5}} = 5,14 \cdot 10^{-2}$$

$$R = 5,14 \cdot 10^{-2} m = 5,14 cm$$

Remarques :

R₁ : On peut aussi déterminer d'autres paramètres du mouvement de la particule dans le champ magnétique. Ce sont :

❖ La Quantité de mouvement de la particule dans le champ.

$$\vec{p} = mv\vec{v}, \text{ soit } p = mv$$

$$\text{Avec } v = v_0 \text{ et } R = \frac{mv_0}{|q|B} \Rightarrow v_0 = \frac{|q|B \cdot R}{m}$$

$$\text{Ainsi : } p = m \cdot \frac{|q|B \cdot R}{m} = |q|B \cdot R$$

D'où :

$$p = |q|B \cdot R \quad (\text{Kg.m.s}^{-1})$$

❖ La Vitesse angulaire de la partie.

$$v_0 = R\omega \Rightarrow \omega = \frac{v_0}{R} \Rightarrow \omega = v_0 \cdot \frac{|q|B}{mv_0}$$

D'où :

$$\omega = \frac{|q|B}{m} \quad (\text{rad.s}^{-1})$$

❖ La Période de rotation et la fréquence du mouvement de la partie.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \frac{m}{|q|.B} \quad (\text{s})$$

$$N = \frac{1}{T} = \frac{|q|.B}{2\pi.m} \quad (\text{Hz})$$

R₂ : A l'extérieur du champ magnétique, le mouvement de la particule est rectiligne et uniforme.

R₃ : Suivant la nature de la charge électrique, on peut aussi avoir des trajectoires représentées sur la figure 26 ci-dessous :



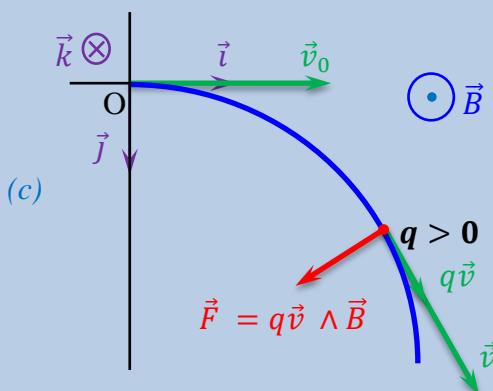
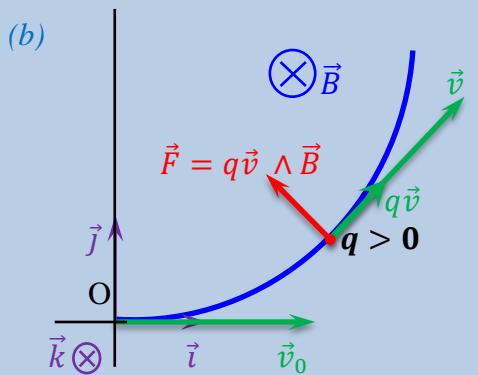
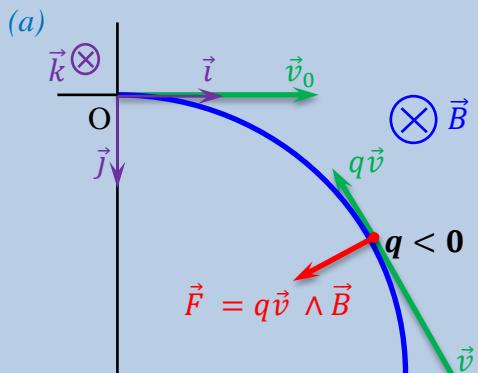


Figure 26.

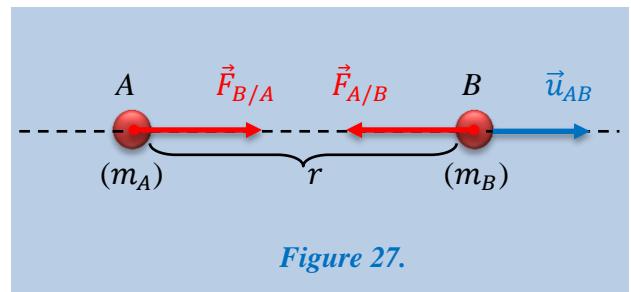


Figure 27.

❖ Enoncé :

Deux corps ponctuels A et B, de masse m_A et m_B , exercent l'un sur l'autre des forces d'attraction directement opposées, dirigées suivant la droite (AB), d'intensités proportionnelles à leurs masses et inversement proportionnelles au carré de leur distance :

$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A} = -G \frac{m_A \cdot m_B}{r^2} \vec{u}_{AB}$$

$$\text{Avec } r = \|\overrightarrow{AB}\| \text{ et } \vec{u}_{AB} = \frac{1}{r} \overrightarrow{AB}$$

La constante G est appelée *constante de la gravitation universelle*. Dans le système international :

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{Kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

Ces forces d'attraction obéissent au principe d'interaction. Aussi parle-t-on d'*interaction gravitationnelle*.

De cette loi d'interaction entre solides ponctuels découle la *loi d'interaction entre les astres*.

Ces forces ont la même droite d'action (AB) et ont une *intensité commune* :

$$F_{B/A} = F_{A/B} = F = G \frac{m_A \cdot m_B}{r^2}$$

Avec m_A et m_B en (Kg); r en (m); F et F' en (N); G en $\text{m}^3 \cdot \text{Kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$.

b) Champ de gravitation terrestre.

❖ Enoncé :

Un corps de masse m , placé en un point où le vecteur champ de gravitation est \vec{G} subit la force gravitationnelle \vec{F} telle que :

$$\vec{F} = m \vec{G}$$

B.4. Mouvement d'un satellite autour de la terre.

a) Loi d'interaction gravitationnelle : Loi de Newton.

Considérons deux corps ponctuels de masses respectives m_A et m_B , situés à une distance r l'une de l'autre (figure 27).



- ✚ L'intensité du champ de gravitation créé au point considéré par un objet de masse M à l'altitude h (figure 28) est donnée par :

$$\mathcal{G} = \frac{F}{m} = G \frac{M}{r^2}$$

Avec \mathcal{G} en $N.Kg^{-1}$.

- ✚ Le champ de gravitation créé par la terre en un point de sa surface ($h = 0$) vaut :

$$\mathcal{G}_0 = G \frac{M}{R^2}$$

Avec R : rayon de la terre ; M : masse de la terre.

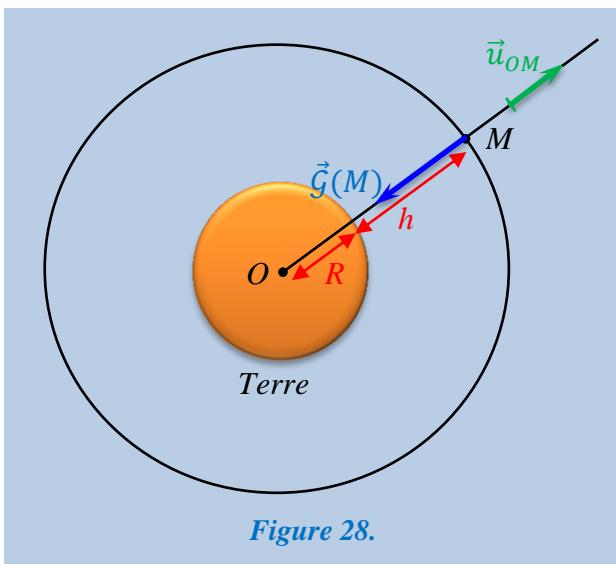


Figure 28.

A l'altitude h au dessus de la terre :

$$\mathcal{G} = G \frac{M}{r^2} = G \frac{M}{(R + h)^2}$$

c) Champ de gravitation terrestre et champ de pesanteur.

Dans les classes antérieures, le poids \vec{P} d'un corps de masse m a été défini comme la force exercée à distance par la Terre sur ce corps, et le champ de pesanteur \vec{g} , par la relation :

$$\vec{P} = m\vec{g}.$$

Le poids et la force d'attraction gravitationnelle ne sont – ils pas une seule force ? En fait, les deux champs \vec{G} et \vec{g} ne sont pas, en toute rigueur, confondus (cela est dû à la rotation de la terre par rapport au référentiel géocentrique) ; néanmoins, ils diffèrent très peu :

- ✓ Leurs directions font un angle de quelques minutes maximum ;
- ✓ L'écart relatif de leur intensité est inférieur à 3.10^{-4} .

La différence est minime. Aussi assimilerons – nous dorénavant, en négligeant les effets de rotation terrestre, le poids à la force d'attraction gravitationnelle et le champ de pesanteur au champ gravitationnel :

$$\vec{P} \simeq \vec{F} \text{ et } \vec{g} \simeq \vec{G}$$

Ainsi on a alors :

- Au sol ($h = 0$) :

$$g_0 = G \frac{M}{R^2}$$

- A l'altitude h :

$$g = G \frac{M}{(R + h)^2} = \frac{g_0 R^2}{(R + h)^2}$$

D'où :

$$g = g_0 \frac{R^2}{(R + h)^2}$$

C'est l'expression de l'intensité du champ de pesanteur g à l'altitude h , en fonction de g_0 , intensité de la pesanteur au sol.

Activité 16: Un satellite artificiel de masse $M = 60Kg$ décrit autour de la terre une orbite à l'altitude h sous la seule action de son poids. A cette altitude l'intensité du champ de pesanteur est :

$$g = g_0 \frac{R^2}{(R + h)^2}$$

Avec g_0 , l'intensité du champ de pesanteur au sol et R , le rayon de la terre supposée homogène et sphérique. On prendra $g_0 = 9,8m/s^2$ et $R = 6400Km$.

1°) a) Quelle est la nature du mouvement du centre d'inertie du satellite ?

b) Etablis l'expression de la durée T d'une révolution autour de la terre.

c) Quelles sont les expressions de la vitesse angulaire ω et de la vitesse linéaire v du satellite sur sa trajectoire ?

2°) Sachant que le satellite est géostationnaire (sa trajectoire est circulaire dans le plan équatorial de la terre et il a la même vitesse de rotation que la terre), calcule :

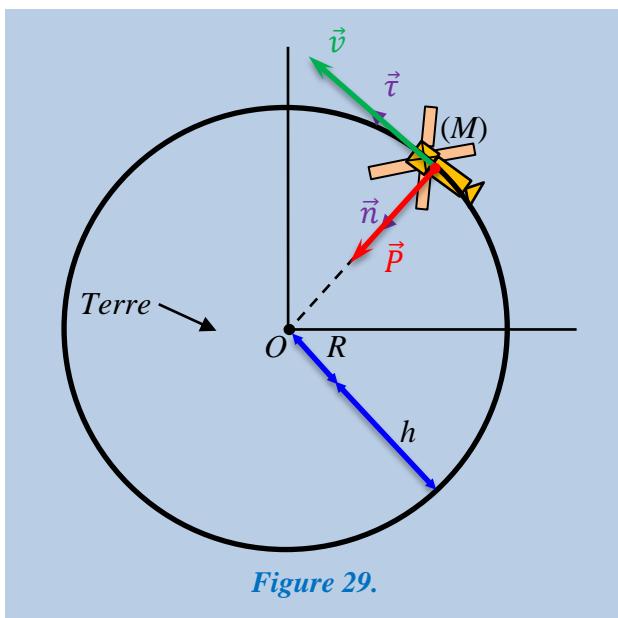
a) Son altitude h ;

b) Son énergie cinétique.



Corrigé 16 : $M = 60\text{Kg}$; $g_0 = 9,8\text{m/s}^2$; $R = 6400\text{Km}$.**1*) a) Nature du mouvement du centre d'inertie du satellite.**

✓ Schéma



- ✓ Référentiel d'étude : géocentrique.
- ✓ Système d'étude : Satellite de masse (M) en translation curviligne ;
- ✓ B.F.E.A : \vec{P} .
- ✓ T.C.I : $\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_G$
⇒ $\vec{P} = M\vec{a}_G$
- ✓ Projection suivant l'axe tangentiel :
 $0 = Ma_{G\tau} \Rightarrow M \frac{dv}{dt} = 0$
 $M \neq 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0$, alors $v = cte$

✓ Projection suivant l'axe normal :
 $P = Ma_{Gn} \Rightarrow a_n = g = g_0 \frac{R^2}{(R + h)^2}$
 $\Rightarrow a_n = cte$

Conclusion :

$$\begin{cases} a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0, \text{ alors } v = cte \\ a_n = g = g_0 \frac{R^2}{(R + h)^2} = cte \end{cases}$$

*Le satellite est animé d'un mouvement circulaire uniforme (MCU).***b) Expression de la période T de révolution :**Par définition : $T = \frac{2\pi}{\omega}$

or $v = (R + h)\omega \Rightarrow \omega = \frac{v}{R + h}$

Ainsi $T = \frac{2\pi(R + h)}{v}$

De plus $a_n = g \Rightarrow \frac{v^2}{R + h} = g_0 \frac{R^2}{(R + h)^2}$

⇒ $v = \sqrt{\frac{g_0 R^2}{R + h}}$

D'où :

$$T = \frac{2\pi}{R} \sqrt{\frac{(R + h)^3}{g_0}}$$

c) Expressions de ω et v .

$$a_n = \frac{v^2}{R + h} = g_0 \frac{R^2}{(R + h)^2}$$

D'où :

$$v = R \sqrt{\frac{g_0}{R + h}}$$

$$\omega = \frac{v}{R + h} = \frac{R}{R + h} \sqrt{\frac{g_0}{R + h}}$$

D'où :

$$\omega = R \sqrt{\frac{g_0}{(R + h)^3}}$$

2*) a) Calcul de h .

$$T = \frac{2\pi}{R} \sqrt{\frac{(R + h)^3}{g_0}}$$

$$\Rightarrow T^2 = \left(\frac{2\pi}{R}\right)^2 \cdot \frac{(R + h)^3}{g_0}$$

$$\Rightarrow (R + h)^3 = \frac{g_0 \cdot T^2 \cdot R^2}{4\pi^2}$$

D'où :

$$h = \sqrt[3]{\frac{g_0 \cdot T^2 \cdot R^2}{4\pi^2}} - R$$

A.N : avec $T = 24h$.

$$h = \sqrt[3]{\frac{9,8 \times (8,64 \cdot 10^4)^2 \times (64 \cdot 10^5)^2}{4 \times (3,14)^2}} - 64 \cdot 10^5$$

$$h = 3,595 \cdot 10^7 \text{m} \simeq 36.000 \text{Km}$$



c) *Energie cinétique.*

Par définition :

$$E_C = \frac{1}{2} M v^2$$

D'où :

$$E_C = \frac{M R^2 g_0}{2(R + h)}$$

$$A.N: E_C = \frac{60 \times (64.10^5)^2 \times 9,8}{2(64.10^5 + 3,595.10^7)}$$

$$E_C = 2,84.10^8 J$$

Remarques:

R₁ : Un *satellite géostationnaire* est un satellite qui tourne sur une orbite circulaire dans le même sens que la terre, avec la même vitesse angulaire qu'elle, autour du même axe puisque sa trajectoire est dans le plan équatorial.

Sa *période de révolution* vaut celle de la terre ($T \approx 24h$).

R₂ : L'orbite est la trajectoire circulaire suivie par le satellite autour de la terre ; elle dépend de la hauteur :

$$s = 2\pi(R + h)$$

B.5. Mouvement d'un pendule conique.

- Description :**

Le pendule conique est composé :

- ✓ *D'un point matériel de masse m ;*
- ✓ *D'un fil inextensible auquel se fixe le point matériel à son extrémité inférieure, tandis que son extrémité supérieure est attachée à une tige verticale en rotation autour d'elle-même.*

Lorsque la rotation de la tige entraînant le fil et le point matériel atteint une valeur ω_0 , le fil s'écarte de la tige d'un angle θ et le point matériel décrit une trajectoire circulaire : *l'ensemble forme un cône d'angle au sommet 2θ et dont la base est délimitée par la trajectoire circulaire du point matériel.*

On obtient ainsi un pendule conique (figure 30).

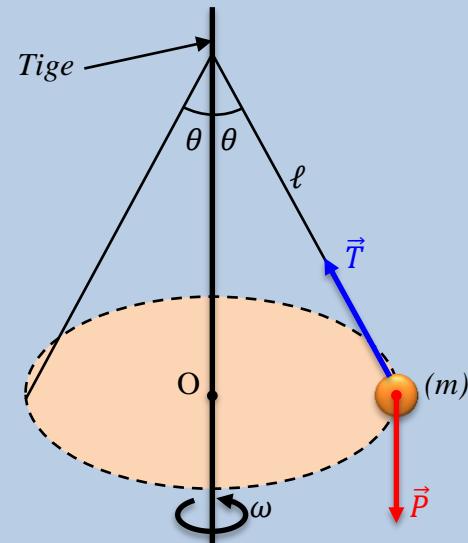


Figure 30.

Activité 17 : On considère une bille ponctuelle de masse m suspendue à un fil de longueur ℓ et de masse négligeable. Le pendule est mis en rotation uniforme autour d'un axe vertical passant par un point d'attache du fil.

1°) On appelle α l'angle dont le fil est incliné par rapport à la verticale quand le pendule est en rotation uniforme.

Exprime α en fonction de la longueur du fil, de la vitesse angulaire ω , et de l'accélération de la pesanteur g .

2°) Montre que la situation précédente est atteinte si ω est supérieure à une valeur ω_0 que l'on déterminera.

3°) Calcule la tension du fil.

Données : $m = 5g$; $\ell = 20\text{cm}$; $g = 9,8\text{m.s}^{-2}$; $\omega = 8\text{rad.s}^{-1}$.

Corrigé 17 :

$m = 5g$; $\ell = 20\text{cm}$; $g = 9,8\text{m.s}^{-2}$; $\omega = 8\text{rad.s}^{-1}$.

1°) Expression de α en fonction de ℓ , ω et g .
 ✓ Schéma

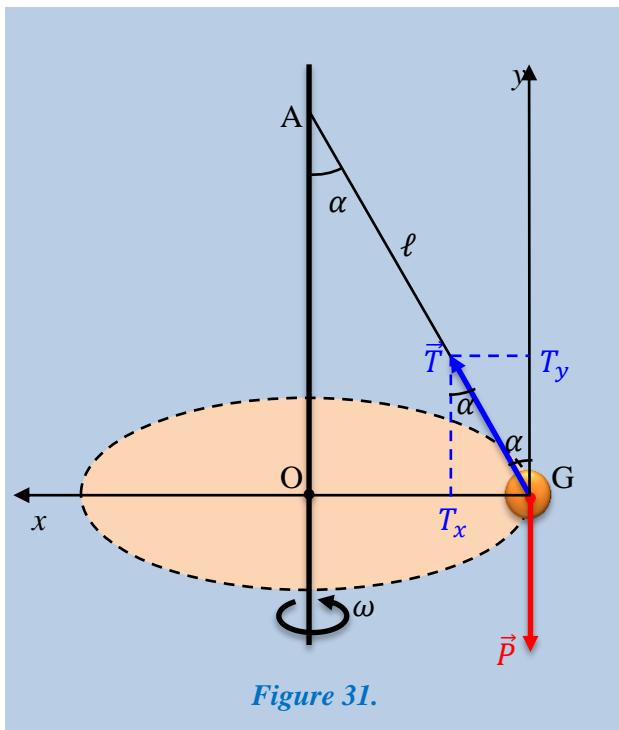


Figure 31.

- ✓ **R.T.S.G :**
- ✓ **Système d'étude :** Point matériel de masse (m) en translation curviligne ;
- ✓ **B.F.E.A :** $\vec{P}; \vec{T}$;
- ✓ **T.C.I :** $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_{1G}$
 $\Rightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}_G$
- ✓ **Projection du T.C.I suivant (Gx) :**
 $0 + T_x = ma_{Gn} ; \sin\alpha = \frac{T_x}{T}$
 $\Rightarrow T \sin\alpha = ma_{Gn} \quad (1)$
- ✓ **Projection du T.C.I suivant (Oy) :**
 $-P + T_y = 0 ; \cos\alpha = \frac{T_y}{T}$
 $\Rightarrow T \cos\alpha = mg \quad (2)$

En faisant le rapport des relations (1) et (2) :

$$\begin{aligned} (1) &= \frac{T \sin\alpha}{T \cos\alpha} = \frac{ma_G}{mg} \\ (2) &\Rightarrow \sin\alpha = \frac{a_n}{g} \cos\alpha \end{aligned}$$

Or dans le triangle OAG, on a :

$$\sin\alpha = \frac{R}{\ell}$$

Alors :

$$\frac{R}{\ell} = \frac{v^2}{Rg} \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{R^2 g}{\ell v^2} = \frac{R^2 g}{\ell R^2 \omega^2}$$

D'où :

$$\cos\alpha = \frac{g}{\ell \omega^2}$$

2°) Montrons que le fil s'écarte de la tige pour $\omega \geq \omega_0$

$$\cos\alpha = \frac{g}{\ell \omega^2}$$

or $\cos\alpha \leq 1 \Rightarrow \frac{g}{\ell \omega^2} \leq 1 \Rightarrow \omega^2 \geq \frac{g}{\ell}$

D'où :

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Si on pose

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}, \text{ alors } \omega \geq \omega_0$$

Conclusion : Pour que le fil s'écarte de la tige, il faut que la vitesse de rotation de cette tige soit supérieure à la valeur limite :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

$$A.N : \omega_0 = \sqrt{\frac{9,8}{0,2}} = 7$$

$$\omega \geq \omega_0 = 7 \text{ rad.s}^{-1}$$

3°) Tension du fil.

De la relation (2) : $T \cos\alpha = mg$

$$\Rightarrow T = \frac{mg}{\cos\alpha} = mg \cdot \frac{\ell \omega^2}{g} = m \ell \omega^2$$

D'où :

$$T = m \ell \omega^2$$

$$A.N : T = 0,05 \times 0,2 \times 8^2 = 0,64$$

$$T = 0,64 \text{ N}$$

Remarque :

Dans le cas où le fil est remplacé par un ressort de constante de raideur K :

$$T = K \Delta\ell = K(\ell - \ell_0)$$

Avec :

K : Constante de raideur du ressort (N/m) ;

ℓ : Longueur du ressort en mouvement ;

ℓ₀ : Longueur à vide du ressort ;

Δℓ : Allongement du ressort.



B.6. Mouvement d'un cycliste abordant un virage.

Activité 18 : Un cycliste aborde en roue libre un virage circulaire de rayon $r = 100m$ à la vitesse $v = 36Km/h$. La piste est telle qu'il n'y a aucun frottement.

1°) Montre que si la piste a un profil horizontal, le mouvement s'effectue à la vitesse constante et que, en conséquence le cycliste ne peut pas prendre le virage.

2°) Dans un deuxième temps, envisage le cas où la piste est relevée et calcule l'angle α dont il faut relever la piste pour que le cycliste puisse prendre le virage.

Corrigé 18 :

$$r = 100m ; v = 36Km/h.$$

1°) Montrons que si la piste a un profil horizontal et que la vitesse est constante, le cycliste ne peut pas prendre le virage.

✓ Schéma

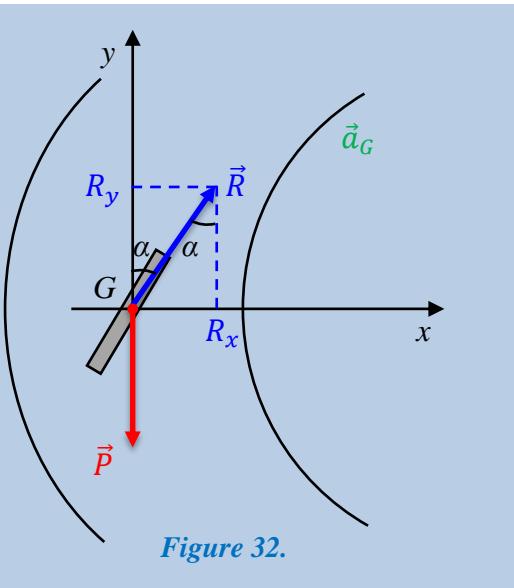


Figure 32.

- ✓ R.T.S.G ;
- ✓ Système d'étude : Cycliste de masse (m) en translation curviligne ;
- ✓ B.F.E.A : \vec{P} ; \vec{R} ;
- ✓ T.C.I : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$
 $\Rightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}_G$
- ✓ Projection du T.C.I suivant (Gx) :
 $0 + R_x = ma_{Gn} ; \sin\alpha = \frac{R_x}{R}$
 $\Rightarrow R\sin\alpha = ma_{Gn}$ (1)

✓ Projection du T.C.I suivant (Gy) :

$$-P + R_y = 0 ; \cos\alpha = \frac{R_y}{R}$$

$$\Rightarrow R\cos\alpha = mg \quad (2)$$

En faisant le rapport des relations (1) et (2) :

$$\frac{(1)}{(2)} = \frac{R\sin\alpha}{R\cos\alpha} = \frac{ma_{Gn}}{mg}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{a_n}{g}, \quad \text{avec } a_n = \frac{v^2}{r}$$

d'où :

$$\tan\alpha = \frac{v^2}{rg}$$

Conclusion : $v = cte \neq 0 ; r \neq 0 ; g \neq 0$

Alors $\tan\alpha = cte \neq 0$ donc $\alpha \neq 0$.

Si le cycliste ne s'incline pas d'un angle α , il derrape, donc il ne pas prendre le virage.

Par conséquent pour qu'un cycliste puisse prendre un virage sur une piste plane horizontale, il doit s'incliner d'un angle α , par rapport à la verticale, vers l'intérieur du virage.

2°) Valeur de l'angle α dont il faut relever la piste pour que le cycliste puisse prendre le virage.

Pour que le cycliste puisse prendre le virage à une vitesse constante, sur une piste relevée d'un angle α par rapport à l'horizontal, il doit se placer perpendiculairement à la piste.

✓ Schéma

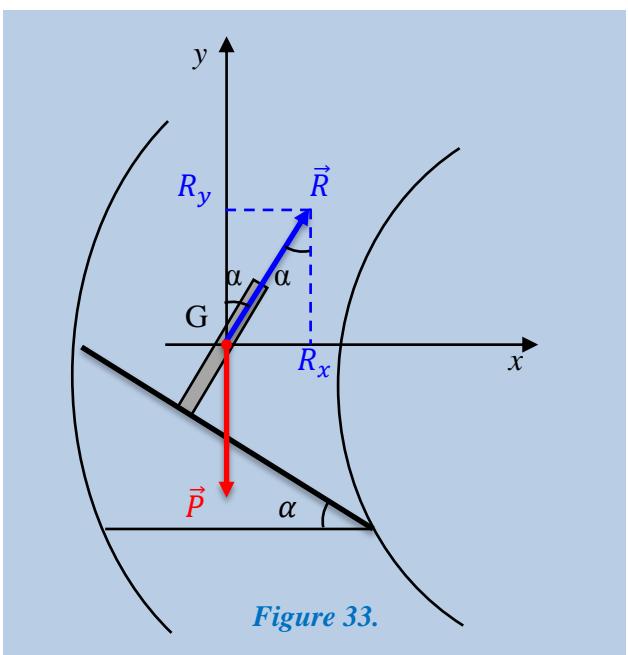


Figure 33.



- ✓ **R.T.S.G :**
- ✓ **Système d'étude :** Cycliste de masse (m) en translation curviligne ;
- ✓ **B.F.E.A :** \vec{P} ; \vec{R} ;
- ✓ **T.C.I :** $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$
 $\Rightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}_G$

- ✓ **Projection du T.C.I suivant (Gx) :**

$$0 + R_x = ma_{Gn}; \sin\alpha = \frac{R_x}{R}$$

$$\Rightarrow R\sin\alpha = ma_{Gn} \quad (1)$$

- ✓ **Projection du T.C.I suivant (Gy) :**

$$-P + R_y = 0; \cos\alpha = \frac{R_y}{R}$$

$$\Rightarrow R\cos\alpha = mg \quad (2)$$

En faisant le rapport des relations (1) et (2) :

$$\begin{aligned} (1) &= \frac{R\sin\alpha}{R\cos\alpha} = \frac{ma_{Gn}}{mg} \\ (2) &= \tan\alpha = \frac{a_n}{g} \\ \Rightarrow \tan\alpha &= \frac{v^2}{rg} \end{aligned}$$

avec $a_n = \frac{v^2}{r} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{v^2}{rg}$

D'où :

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{v^2}{rg}\right)$$

$$A.N : \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{10^2}{100 \times 10}\right) = 5,71$$

$$\alpha = 5,71^\circ$$

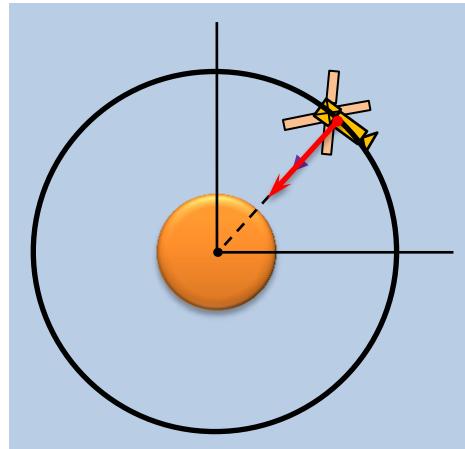
Conclusion : Pour que le cycliste puisse prendre le virage à la vitesse constante de 36Km/h, il faut que la piste soit relevée d'un angle $\alpha = 5,71^\circ$ par rapport à l'horizontal.



TRAVAUX DIRIGES IV

Conseils pratiques :

1. Techniques de réalisation des schémas.
2. Projection des forces dans un repère.
3. Principes de la dynamique ou lois de Newton.
4. Etude dynamique d'un système en mouvement.
5. Caractéristiques d'un mouvement (trajectoire, vitesse, accélération...)



L'ESSENTIEL DU COURS

I – Définitions notions.

Définis les termes suivants : Point matériel, Système matériel, Force intérieure, Force extérieure, Masse d'un système, Centre d'inertie d'un système, Vecteur quantité de mouvement, Flèche et portée.

II – Questions à réponses courtes.

Réponds aux questions suivantes :

- 1°) Enonce les trois lois de Newton relatives à la dynamique.
- 2°) Quand dit – on qu'un mobile est animé d'un mouvement de :
 - a) Translation ;
 - b) Translation rectiligne ;
 - c) Translation curviligne.

Donne un exemple dans chaque cas.

- 3°) Enonce le théorème du centre d'inertie puis donne son expression mathématique.

- 4°) Ecris l'expression mathématique de la loi de gravitation universelle entre deux corps de masses respectives m_A et m_B et distants de d .

III – Texte à Trou.

Ecris les phrases suivantes en complétant les mots manquants :

- 1°) Une force⁽¹⁾.... est une force exercée par une partie du système sur une autre⁽²⁾.... de ce dernier ; alors qu'une force extérieure est exercée par une partie du système avec le⁽³⁾.... extérieur.
- 2°) Dans un référentiel galiléen, le centre d'inertie d'un système isolé est soit au⁽⁴⁾.... soit en mouvement rectiligne⁽⁵⁾.... C'est le principe de....⁽⁶⁾.... ou⁽⁷⁾.... de Newton.
- 3°) A l'intérieur d'un condensateur dont les plaques sont appelées....⁽⁸⁾.... règne un champ⁽⁹⁾.... uniforme dirigé dans le sens des potentiels⁽¹⁰⁾.... Lorsqu'une particule de charge q animé d'une vitesse \vec{v} pénètre dans cet espace où règne un champ électrostatique uniforme \vec{E} , il est soumis à la force de....⁽¹¹⁾.... ou force⁽¹²⁾.... $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$; tandis qu'elle est soumise à la force magnétique....⁽¹³⁾.... , encore appelée force de⁽¹⁴⁾.... , lorsqu'elle pénètre dans un champ magnétique d'....⁽¹⁵⁾.... \vec{B} .

IV – Appariement.

Relie un élément – question de la colonne A à un élément – réponse de la colonne B dans le tableau ci-dessous : Exemple $a_{11} = b_{13}$.

Colonne A		Colonne B	
a_1	Lois de la gravitation universelle	b_1	$\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}_G$
a_2	Force de coulomb	b_2	Pendule conique



a ₃	Intensité du champ de pesanteur	b ₃	$s = 2\pi(R + h)$
a ₄	Force de Lorentz	b ₄	Corps de masse m en chute libre
a ₅	Théorème du centre d'inertie	b ₅	$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$
a ₆	Satellite géostationnaire	b ₆	Particule chargé dans un champ électrique
a ₇	Mouvement circulaire uniforme	b ₇	$F = F' = K \frac{m_A \cdot m_B}{r^2}$
a ₈	Mouvement curviligne	b ₈	Particule chargée dans un champ magnétique
a ₉	Mouvement rectiligne uniformément varié	b ₉	$h = 36000\text{Km}$
a ₁₀	Accélération normale	b ₁₀	$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$
a ₁₁	Orbite d'un satellite	b ₁₁	$g = g_0 \cdot \frac{R^2}{(R + h)^2}$

V – Questions à alternative vrai ou faux.**Réponds par vrai ou faux aux affirmations suivantes :**

- 1°) Au cours d'un mouvement de chute libre, l'accélération du solide prend la valeur $\vec{a} = -\vec{g}$.
- 2°) Le vecteur quantité de mouvement \vec{p} se conserve au cours des chocs.
- 3°) Le vecteur vitesse d'un corps en mouvement est toujours tangent à la trajectoire.
- 4°) Le théorème du centre d'inertie (TCI) ne s'applique qu'aux systèmes en mouvement de translation rectiligne.
- 5°) La trajectoire décrite par une particule chargée dans un champ magnétique est curviligne.
- 6°) Lorsque l'accélération d'un mobile est normale à sa trajectoire, celui est animé d'un mouvement circulaire.
- 7°) La trajectoire d'un satellite est nécessairement dans le plan équatorial.
- 8°) Pour qu'un cycliste abordant un virage à vitesse constante, sur une chaussé relevée d'un angle α , réussisse son virage, il doit se placer perpendiculairement à la chaussée.
- 9°) Un pendule placé dans un véhicule s'incline dans le sens contraire de celui du vecteur accélération du véhicule.
- 10°) Un satellite géostationnaire tourne à la même vitesse de rotation de la terre ; pour cela il paraît immobile pour un observateur terrestre.

VI – Réarrangement**Ordonne le texte suivant qui est écrit en désordre.**

suspendu à / est composé d'un point / Un pendule conique / l'extrémité inférieure / d'elle – même / d'un fil inextensible / matériel de masse m / en rotation autour / attaché à une tige verticale.

RESOLUTION DES PROBLEMES

EXERCICE 1 : Sur un plan incliné de 30° par rapport à l'horizontale, on tire à l'aide d'un câble, une caisse de masse 5Kg. Partie sans vitesse initiale, celle – ci atteint la vitesse de 2m/s lorsqu'elle s'élève de 1m.

- 1°) Quelle est la durée de cette élévation ?
 2°) Quelle doit – être la force de traction pour qu'il en soit ainsi ?

On admettra que les forces de frottement sont négligeables. On prendra $g = 10\text{m/s}^2$.

EXERCICE 2 : Un wagon de 20 tonnes est lâché sans vitesse initiale sur une voie dont la pente est de 2%.

- 1°) En négligeant les frottements et la résistance de l'air, écris l'équation du mouvement du wagon le long de la voie. Calcule en Km/h la vitesse acquise à 500m du point de départ.
 2°) Le wagon ayant ainsi parcouru 500m, les freins sont serrés ; leur action équivaut à une force opposée au vecteur vitesse et égale au 1/10 du poids du wagon. Quel est, à partir de cet instant, le chemin parcouru par le wagon jusqu'à l'arrêt complet ?



3°) En prenant pour origine des dates l'instant du lâché, détermine la date de l'arrêt.
On prendra $g = 10m.s^{-2}$.

EXERCICE 3 : Dans un parc d'attraction, un élève de la classe de terminale scientifique veut vérifier l'état de la surface de contact de la piste d'un toboggan incliné de 20° par rapport à l'horizontale. Il part avec l'hypothèse que s'il existe des forces de frottement sur la piste, la durée d'un parcours de longueur $3m$ sera supérieure à $1,8s$. Pour le vérifier, il lâche du sommet O de cette piste un solide de masse $m = 200g$ qui glisse sur une distance $OB = L = 3m$. On prendra $g = 10m.s^{-2}$.

- Il suppose les frottements négligeables.
- En appliquant le théorème du centre d'inertie, donne l'expression de l'accélération du mouvement de ce solide et fais l'application numérique.
- Donne les équations horaires du mouvement en supposant qu'à l'instant initial, la position du mobile est nulle.
- Détermine la durée de la descente et la vitesse atteinte en B .
- En réalité, la durée du parcours est $t = 2s$. Il conclut qu'il existe des forces de frottement sur la piste. Détermine alors l'accélération réelle du mouvement.
- Déduis – en l'intensité des forces de frottement sur la piste.

EXERCICE 4 : Une voiture de masse $m = 800Kg$, monte un plan incliné de pente 8% . A la date $t = 0$, le centre d'inertie G de la voiture est en A qui sera pris comme origine des abscisses et sa vitesse vaut $V_A = 72Km/h$. A la date t_1 , G est en B et sa vitesse vaut $V_B = 90Km/h$. Au cours de la montée, le mouvement de la voiture est assimilable à celui d'un solide en translation rectiligne et les frottements équivalent à une force \vec{f} parallèle à x' et d'intensité constante $f = 400N$.

La force motrice \vec{F} parallèle à x' a une intensité constante de $F = 1800N$.

1°) Etablis l'expression de l'accélération de la voiture en fonction de F , f , m , g et l'angle θ du plan incliné.

2°) Calcule la durée t_1 du trajet AB ainsi que la distance parcourue.

3°) Lorsque G passe en B la force motrice est supprimée, la vitesse de la voiture s'annule en un point C et la force de frottement a les mêmes caractéristiques.

Etablis l'expression de la distance $BC = L$ en fonction de V_B , f , m et θ , puis calcule L . Prendre $g = 10m.s^{-2}$.

EXERCICE 5 : 1°) Un camion dont la masse totale a pour valeur $M = 7$ tonnes démarre sur une route rectiligne et horizontale. Il atteint une vitesse de $60Km/h$ en 4 minutes et continue ensuite sa route à vitesse constante. Les forces de frottements sont opposés à la vitesse et d'intensité $f = 500N$. Calcule l'intensité de la force de traction développée par le moteur.

- Quand le mouvement est rectiligne uniforme ;
- Au cours du démarrage, en mouvement rectiligne uniformément accéléré.

2°) Pour arrêter le camion, le chauffeur débraie le moteur supprimant ainsi la force de traction et en même temps il serre les freins. Le mouvement toujours rectiligne devient alors uniformément retardé. Le véhicule a la vitesse de $60Km/h$ et s'arrête sur un parcours de $200m$. Calcule la force de freinage et le temps mis pour s'arrêter.

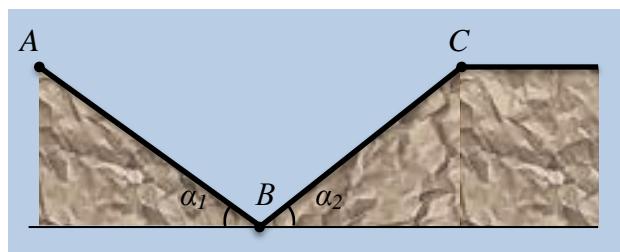
EXERCICE 6 : Un cycliste de masse $m = 80Kg$, partant du repos descend sans pédaler une côte AB de longueur $30m$ et il atteint B avec une vitesse de $36Km/h$.

1°) Quelle est approximativement la pente de la route exprimer en %.

2°) Arrivé en B , le cycliste remonte, en pédalant cette fois – ci une côte BC longue de $100m$ et de pente 2% , il exerce une force de $25N$. Avec quelle vitesse aborde – t – il le palier horizontal qui succède en C un tronçon en remontant, sachant que le plan oppose des frottements dont la résultante a pour norme $f = IN$?

3°) Quelle est la durée du trajet ABC ?

On donne : $g = 10m.s^{-2}$.



EXERCICE 7 : Un skieur de masse $m = 80Kg$ descend une côte de pente égale à 6% . Il commence la descente avec une vitesse égale à $15m.s^{-1}$. La vitesse devient égale à $18m.s^{-1}$ après un parcourt de $100m$.



1°) Montre que le skieur est soumis à une action de freinage. Détermine les caractéristiques (point d'application, direction, module) du vecteur réaction \vec{R} de la piste sur le skieur.

2°) Calcule la variation de la quantité de mouvement du skieur après un parcourt de 100m ; vérifie qu'elle est égale à l'impulsion I reçue. On donne : $g = 10m.s^{-2}$.

EXERCICE 8 : Une automobile de masse $M = 1000Kg$ tire une caravane de masse $M' = 2000Kg$ sur une route rectiligne horizontale. Les forces de frottement et la résistance de l'air sont équivalentes à deux forces \vec{f} et \vec{f}' , exercées respectivement sur l'automobile et sur la caravane, de même direction que celle du mouvement, de sens contraire et d'intensité $f = f' = 200N$.

1°) Le convoi passe devant le point A à la vitesse de $72Km.h^{-1}$ et le conducteur veut atteindre la vitesse de $108Km.h^{-1}$ en un point B situé à 125m de A. Détermine :

- La force motrice développée par le moteur de l'automobile.
- La tension de la barre d'attache entre l'automobile et la caravane (la masse de la barre est négligeable).

2°) La barre d'attache entre l'automobile et la caravane se casse.

- Quel est le mouvement ultérieur de la caravane ?
- Calcule l'intensité de la réaction du sol sur la caravane.

3°) Quelle distance a-t-il parcouru pendant cette période ?

EXERCICE 9 : Un joueur de tennis lance une balle de masse m à la verticale pour effectuer un service. On prendra $g = 10m.s^{-2}$. A $t = 0$, il lance la balle, animée d'une vitesse $v_0 = 6,9m.s^{-1}$ à la hauteur $z_0 = 1,6m$.

1°) – Détermine l'expression de la côte z en fonction du temps.

2°) – Le joueur frappe la balle à l'instant t_1 lorsqu'elle se trouve à une hauteur $z_1 = 2,5m$. Que vaut t_1 si la balle est alors :

- en phase ascendante ?
- en phase descendante ?

3°) – Détermine la hauteur maximale atteinte en fonction de v_0 , z_0 et g si le joueur ne frappe pas la balle dans la phase ascendante.

4°) – Quelle devrait être la valeur de v_0 pour que la balle atteigne exactement la hauteur z_1 avant de retomber ?

EXERCICE 10 : Une bille B_1 est lancée vers le haut à partir d'un point A, avec une vitesse initiale $v_0 = 15m.s^{-1}$.

1°) Ecris l'équation horaire du mouvement de B_1 en prenant comme origine des abscisses le point A et l'origine des temps l'instant du lancement.

2°) Quelle est l'altitude maximale atteinte par la bille ? Quelle est la durée de l'ascension ?

3°) Une seconde après le départ de B_1 , on lance une bille B_2 dans les mêmes conditions.

- A quelle altitude et à quel instant B_1 et B_2 se rencontrent elles ?
- Quelles sont les vitesses de B_1 et B_2 juste avant la rencontre ?

EXERCICE 11 : Un enfant lance du haut d'une falaise un caillou vers le haut avec une vitesse initiale $V_0 = 10m.s^{-1}$ et avec un retard θ , il laisse tomber un deuxième caillou vers le bas. La falaise ayant une hauteur de 20m :

1°) Quel doit être le retard θ pour que les deux billes arrivent ensemble au sol ?

2°) Calcule la vitesse des cailloux à l'arrivée au sol.

3°) – Où se trouvait le premier caillou lorsque le deuxième a été lâché, quel est le signe de sa vitesse à ce moment-là ? (On prendra le sens positif vers le haut).

EXERCICE 12 : Deux oranges O_1 et O_2 tombent en chute libre sans vitesse initiale. L'orange O_1 tombe d'une hauteur h_1 ; une seconde plus tard, l'orange O_2 tombe à son tour d'une hauteur h_2 ($h_1 - h_2 = 10m$). Les deux oranges O_1 et O_2 arrivent en même temps au sol.

Si t_1 et t_2 sont les durées de chute de O_1 et O_2 ,

1°) Ecris les équations horaires des mouvements de O_1 et O_2 en précisant les origines choisies.

2°) Calcule t_1 et déduis-en h_1 , h_2 et t_2 .

3°) Calcule les modules des vecteurs vitesses \vec{v}_1 de O_1 et \vec{v}_2 de O_2 à l'arrivée au sol.

EXERCICE 13 : Deux billes (A) et (B) assimilables à deux points matériels, sont lancées du même point suivant la verticale ascendante, l'une après l'autre. La vitesse initiale de la bille (A) est $V_A = 20m.s^{-1}$, celle de (B) est $V_B = 29m.s^{-1}$.

1°) – Quelle est l'altitude maximale atteinte par la bille (A) ? Quelle est la durée de son mouvement ascendant ?

2°) – On veut que la bille (B) touche la bille (A) à l'instant où celle-ci atteint l'altitude maximale. Calcule l'intervalle de temps qui doit s'écouler entre les instants de départ des deux billes.



Détermine la vitesse de la bille (B) à l'instant du contact. On donne $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.

EXERCICE 14 : Un observateur situé au bord d'une terrasse à la hauteur de 10 m au-dessus du sol, lance une pierre vers le haut. Quand celle-ci descend, il s'écoule $0,5 \text{ s}$ entre son passage à côté de l'observateur et son arrivée au sol.

- 1°) Avec quelle vitesse la pierre est-elle passée à côté de l'observateur ?
 - 2°) Jusqu'à quelle hauteur est-elle montée ?
 - 3°) Ecris l'équation horaire du mouvement.
 - 4°) Calcule l'intervalle de temps qui s'écoule entre le lancer de la pierre et son arrivée au sol.
- On prendra $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.

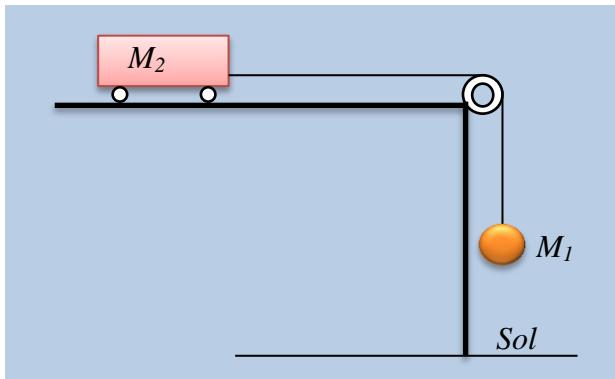
EXERCICE 15 : Une machine d'ATWOOD est constituée par deux masses $M = M' = 200 \text{ g}$, reliées par un fil passant sur une poulie de masse négligeable. On pose sur M une surcharge $m = 100 \text{ g}$ et l'on abandonne le système à lui-même.

- 1°) – Quelle est l'accélération prise par le système ?
- 2°) – Quelle vitesse possède le système lorsque les masses ont parcouru une distance de $0,245 \text{ m}$ et combien de temps a duré ce parcourt.
- 3°) – Au bout du temps calculé précédemment la surcharge m est enlevée à l'aide d'un curseur. Quelle est alors la nature du mouvement des deux masses ?

Ce mouvement durant $0,25 \text{ s}$, quelle est la nouvelle distance parcourue ?

- 4°) – A ce moment le fil reliant les deux masses se rompt. Quel est le mouvement ultérieur de la masse M' ? Quelle est la distance parcourue par M' avant de redescendre ?

EXERCICE 16 : Une sphère de masse $M_1 = 2 \text{ Kg}$ est suspendue par un fil inextensible de masse négligeable qui, passant sur une poulie de masse également négligeable, tire un chariot de masse $M_2 = 3 \text{ Kg}$.



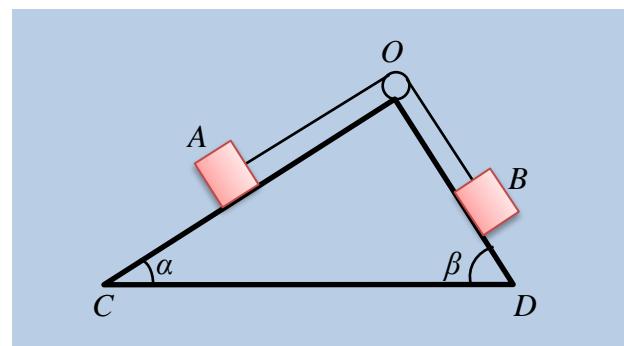
1°) Le chariot se déplace sur des rails horizontaux. On abandonne le système sans vitesse initiale, le fil étant bien tendu. Le mouvement étant supposé sans frottements, calcule :

- a) L'accélération du mouvement ;
- b) La tension du fil.

2°) Quand on abandonne le système à lui-même, la sphère se trouve à 10 m au-dessus du sol. En réalité, les frottements sont équivalents à une force de $2N$ opposée au mouvement. Calcule :

- a) Le temps mis par la sphère pour toucher le sol ;
- b) La vitesse de cette sphère quand elle heurte le sol.

EXERCICE 17 : Deux plans inclinés, parfaitement polis OC et OD , supportant respectivement deux corps A et B , attachés aux extrémités d'un fil inextensible de masse négligeable passant par la gorge d'une poulie d'axe horizontal passant par O . Les corps A et B , de masses M_A et M_B ont la forme de parallélépipède rectangle. Les brins du fil sont parallèles aux lignes de plus grande pente des plans inclinés et leur prolongement passe par le centre de gravité de chacun des corps. La poulie est parfaitement mobile autour de son axe. Le plan incliné OC , supportant M_A fait un angle $\alpha = 30^\circ$ avec le plan horizontal ; le plan OD supportant M_B fait un angle $\beta = 45^\circ$ avec le plan horizontal.



1°) Quelle devrait être la valeur de M_B pour que le système soit en équilibre si $M_A = 2 \text{ Kg}$?

2°) La masse $M_B = 1,8 \text{ Kg}$. Le système se met en mouvement de glissement, à compter d'un instant pris pour origine. Dis pourquoi le système se met-il en mouvement. En utilisant le principe fondamental de la dynamique et en négligeant la masse de la poulie, calcule :

- a) L'accélération du mouvement ;
- b) La vitesse acquise et l'espace parcouru au bout de 2 s par M_B .
- c) La tension du fil.

EXERCICE 18 : 1°) Un fil suspendu en O au plafond d'un wagon, supporte en A une boule ponctuelle de masse $m = 500g$. Le wagon au repos sur une voie horizontale, démarre selon un mouvement uniformément accéléré et acquiert la vitesse de $36Km.h^{-1}$ en $5,0s$. Détermine l'angle α formé par le fil OA et la verticale de O .

2°) Le wagon descend une rampe incliné de l'angle $\beta = 30^\circ$ sur le plan horizontal. Le mouvement est uniformément accéléré, d'accélération $0,2m.s^{-2}$. Quelle est l'inclinaison α' du fil OA par rapport à la verticale ? Quelle est le module de la tension du fil.

EXERCICE 19 : Lors d'un match de football, un joueur frappe le ballon posé sur le sol. Celui-ci part avec une vitesse initiale $v_0 = 20m.s^{-1}$ faisant un angle $\alpha = 20^\circ$ avec le sol horizontal. L'accélération de la pesanteur est $g = 10m.s^{-2}$. On néglige l'action de l'air. L'origine O des dates coïncide avec le lancer du ballon et le mouvement du centre d'inertie du ballon est étudié dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- Etablis en fonction de g , v_0 et α , l'équation de la trajectoire du ballon. Fais l'application numérique.
- Un joueur de l'équipe adverse tente d'intercepter le ballon qui arrive au sol. A quelle distance doit-il se trouver pour réussir.

EXERCICE 20 : Au cours d'un championnat, un athlète remporte l'épreuve du lancer de poids avec un jet de $x_l = 19,43m$. Le « poids » a une masse de $7,35Kg$. La trajectoire part de A à une hauteur $h = 1,80m$ au-dessus du sol. Le vecteur vitesse \vec{V}_0 fait un angle α avec l'horizontale. On assimile le solide à un point matériel.

1°) Etablis l'équation cartésienne de la trajectoire en fonction de h , $\tan\alpha$ et g .

Application numérique : $g = 9,8m.s^{-2}$; $\alpha = 45^\circ$.

2°) Détermine la norme de la vitesse initiale en fonction de h , α , g et x_l . Calcule V_0 .

3°) Calcule la hauteur maximale et les coordonnées du vecteur vitesse au sommet de la trajectoire du projectile.

4°) Détermine la norme et la direction du vecteur vitesse du projectile au point $C(x_l ; 0)$

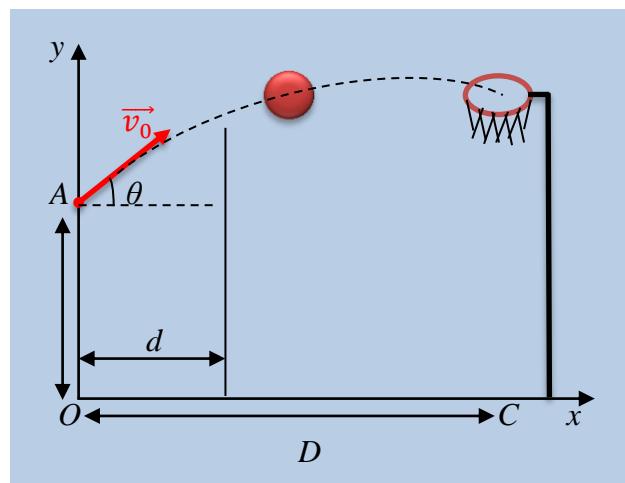
On rappelle que $V^2 = V_x^2 + V_y^2$ et

$$\tan\beta = \frac{V_y}{V_x} \text{ avec } \beta = (\vec{i}, \vec{V}).$$

EXERCICE 21 : A/- D'un point A situé à $2m$ du sol, un basketteur, sans adversaire lance le ballon au panier avec une vitesse \vec{v}_0 contenu dans le plan

(Oxy) dont la direction du vecteur \vec{v}_0 fait un angle $\theta = 45^\circ$ avec l'horizontale.

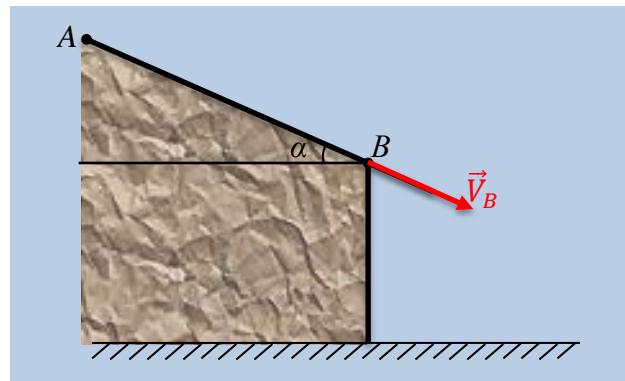
Etablis l'équation de la trajectoire suivie par le ballon dans le système d'axe indiqué en fonction de v_0 .



B/- Les verticales A du ballon et C du panier sont distants de $7,10m$ et le centre est à $3,05m$ de l'horizontale.

- Quelle doit être la valeur de v_0 pour que le panier soit réussi ?
- Quelle est la durée du trajet effectué par le ballon du point A au point C (centre du panier) ?
- Voulant arrêter le ballon un adversaire situé à $0,90m$ du tireur, verticalement, en levant les mains tendues atteint la hauteur de $2,80m$ par rapport au sol. Le panier sera-t-il réussi si les valeurs de v_0 et de θ restent les mêmes que dans le cas précédent ?

EXERCICE 22 : 1°) Un solide S , que l'on assimilera à un point matériel de masse $M = 200g$, peut glisser en suivant la ligne de plus grande pente d'un plan incliné qui forme un angle de 30° avec le plan horizontal.



Le solide S est lâché sans vitesse initiale du point A . Il parcourt la distance $AB = \ell = 2,5\text{m}$ sur le plan incliné.

- a) Détermine la nature du mouvement pris par S et calcule la durée du trajet AB .

- b) Calcule le module V_B de la vitesse \vec{V}_B de S en B . Quelles sont les composantes horizontale et verticale V_{Bx} et V_{By} .

2°) Arrivé en B , le solide S animé de la vitesse V_B tombe sur un plan horizontal situé en bas à une distance h de B . La chute dure $0,5\text{s}$.

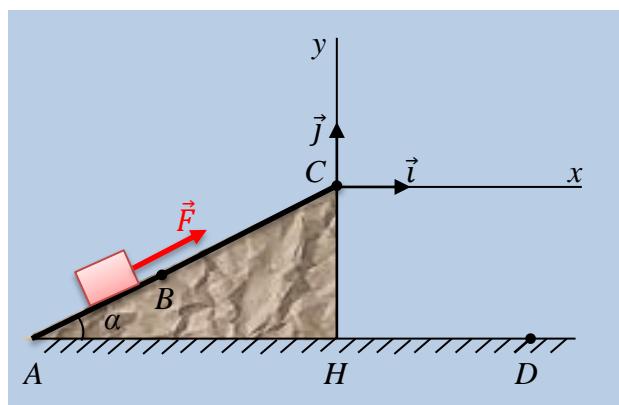
- a) Calcule la distance horizontale d comprise entre la verticale passant par B et le point d'impact sur le plan horizontal, puis la hauteur h .
- b) Calcule l'énergie cinétique du solide S à son arrivée sur le plan horizontal.

EXERCICE 23 : Un corps assimilable à un point matériel de masse $m = 200\text{g}$ se déplace sans frottements sur une piste ABC rectiligne, inclinée de 30° par rapport au plan horizontal (voir figure).

1°) Le corps est lancé à partir de A sans vitesse initiale avec une force de traction \vec{F} constante ne s'exerçant que sur la partie AB de longueur $\ell = 0,4\text{m}$.

- a) Exprime la vitesse V_B d'arrivée en B en fonction de g , m , F , ℓ et α ;
- b) Calcule l'intensité de la force de traction \vec{F} pour que le corps parvienne en C avec une vitesse \vec{V}_C de module $3,16\text{m/s}$.

On donne : $BC = \ell' = 0,6\text{m}$; $g = 10\text{m/s}^2$.

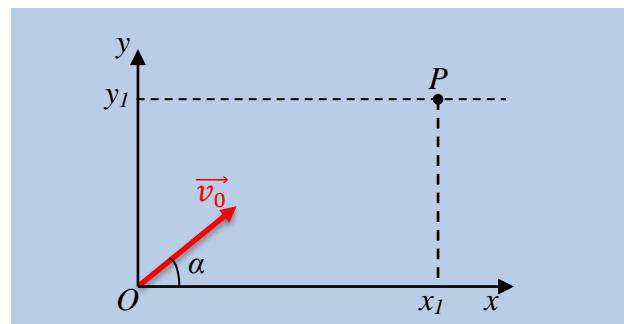


2°) A partir du point C , se produit une brusque rupture de pente et le corps ponctuel n'est plus soumis qu'à l'action de la pesanteur g .

- a) Donne les équations horaires $x = f(t)$ et $y = g(t)$ du point matériel dans le repère (C, \vec{i}, \vec{j}) et déduis – en la trajectoire de son mouvement ultérieur.

- b) Détermine les coordonnées du point d'impact D au sol.

EXERCICE 24 : Dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , on désire atteindre le point $P(x_1, y_1)$.



1°) – Etablis l'équation permettant de calculer la tangente de l'angle. Etudie les conditions d'existence des solutions, écris $y_1 = f(x_1)$ et Déduis – en l'ensemble des points susceptibles d'être atteint par le projectile.

2°) – **A.N :** $v_0 = 70\text{m.s}^{-1}$; $g = 9,8\text{m.s}^{-2}$.

Trace la courbe qui délimite l'ensemble des points P .

3°) – On considère le point P_1 de coordonnées $x_1 = 200\text{m}$ et $y_1 = 50\text{m}$.

- a) Calcule les deux angles de tirs α et β , permettant d'atteindre P_1 et donne dans chaque cas la portée du projectile. Sur le graphique précédent, trace les trajectoires.
- b) Calcule le rapport $\frac{t_\alpha}{t_\beta}$, rapport des durées des parcours de O à P_1 ($\alpha > \beta$).

EXERCICE 25 : Un point matériel est lancé dans le champ de pesanteur. Son vecteur vitesse initial a pour norme V_0 . L'angle de tir est α . En un point M de sa trajectoire, à l'instant t , son vecteur vitesse \vec{V} fait l'angle θ avec le plan horizontal passant par M .

1°) Démontre que l'altitude du point M peut s'écrire :

$$y = \frac{V_0^2}{2g} \left[1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \theta} \right]$$

2°) Calcule l'altitude maximale atteinte par le projectile.

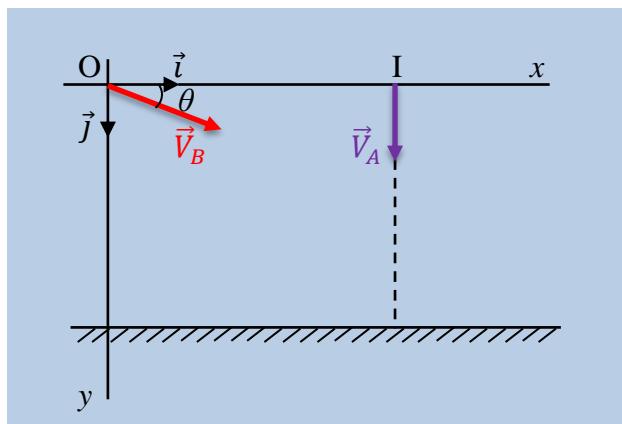
On donne : $V_0 = 20\text{m/s}$; $\alpha = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$, $g = 9,8\text{m/s}^2$.

EXERCICE 26 : Un avion, en vol horizontal à l'altitude de 2500m , lâche une bombe en passant à la verticale d'un point P situé sur le sol horizontal. L'avion vole à une vitesse de 720Km/h , qu'il conserve après avoir lâché la bombe.



- 1°) Quelle est la trajectoire de la bombe ? Justifie.
 2°) Au bout de combien de temps la bombe touche – t – elle le sol ?
 3°) A quelle distance de P tombe – t – elle ?
 4°) La vitesse de l'avion est toujours de 720Km/h , mais la bombe est lâchée en vol piqué, l'axe de l'avion faisant un angle de 10° avec la verticale. De quelle hauteur doit être lâché la bombe pour qu'elle tombe dans un rayon inférieur à 100m ? On prendra comme origine des axes du repère le point P se trouvant au sol.

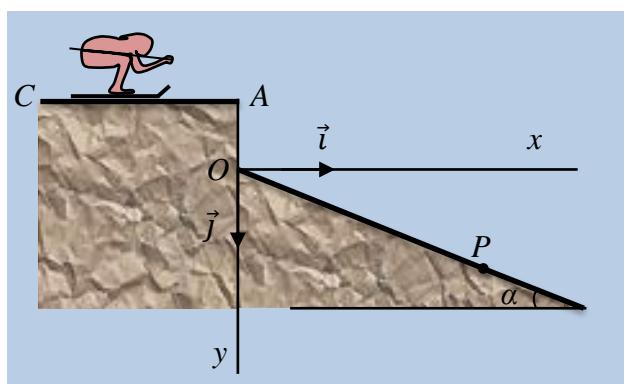
EXERCICE 27 : 1°) Une bille (A) assimilable à un point matériel est lancée du point I à l'instant $t = 0$, avec une vitesse verticale orientée vers le bas de norme $V_A = 7\text{m/s}$. En appliquant le théorème du centre d'inertie :



- a) Montre que l'accélération est égale à g ;
 b) Etablis l'équation horaire du mouvement de la bille (A).
 2°) Au même instant $t = 0$, on lance d'un point O, une deuxième bille (B) assimilable à un point matériel avec une vitesse \vec{V}_B faisant un angle θ égal à 30° avec l'horizontal (voir figure ci – contre).
 a) Etablis les équations horaires du mouvement suivant les axes Ox et Oy ;
 b) Calcule la norme V_B de la vitesse initiale de la bille (B) pour que la rencontre des deux billes se produise ;
 c) Détermine l'instant et l'endroit de la rencontre.

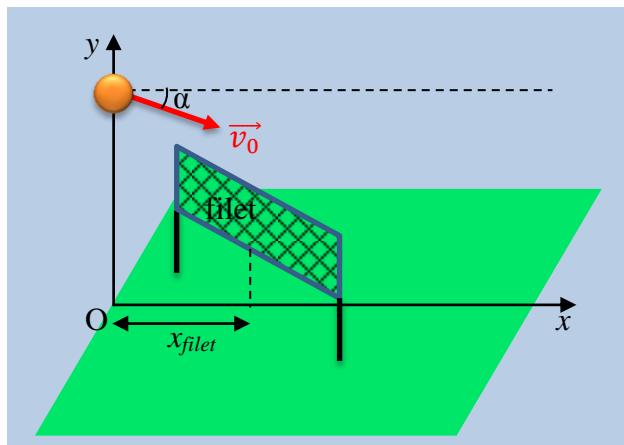
On donne : $g = 10\text{m/s}^2$; $OI = 3\text{m}$.

EXERCICE 28 : Un skieur de masse $m = 80\text{Kg}$ est en mouvement rectiligne et uniforme sur un plan horizontal \overline{CA} avec une vitesse $V_0 = 54\text{Km/h}$. Il arrive en A sur une brusque rupture de pente (voir figure) ; il décolle à la vitesse \vec{V}_0 horizontale et tombe sur une piste inclinée OF située en contre – bas.



- Données :** $h = \overline{OA} = 2\text{m}$; $\tan\alpha = 0,8$; $g = 10\text{m/s}^2$.
 1°) Dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , détermine l'équation de la trajectoire du skieur assimilé à un point matériel.
 2°) Détermine les coordonnées du point P où le skieur entre en contact avec la piste de réception. Quelle est la longueur du saut (\overline{OP})
 3°) Quelle est la norme de la vitesse \vec{V}_P du skieur lorsqu'il touche le sol ?

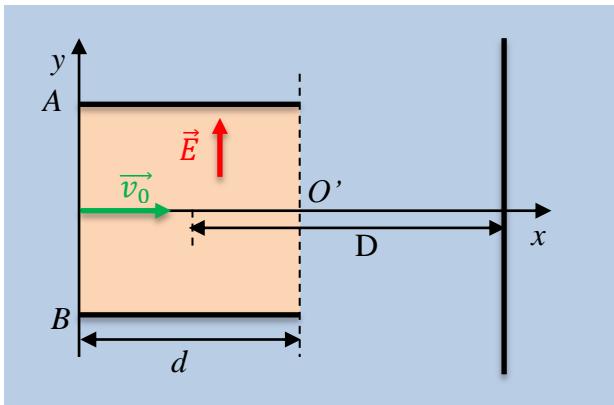
EXERCICE 29 : Le mouvement à étudier s'effectue dans un terrain de volley – ball. Un joueur smatch un ballon de masse m considéré comme un point matériel à une hauteur $h_0 = 2,50$ mesurée à partir du sol. Il communique au ballon une vitesse initial $v_0 = 2\text{m/s}$ faisant un angle α avec l'horizontale (voir schéma). Le filet se trouve à l'abscisse $x_{filet} = 50\text{cm}$. le sommet du filet est à l'altitude $h_1 = 2,00\text{m}$ du sol.



- 1°) – Dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) établis l'équation de la trajectoire du ballon. Fais l'application pseudo – numérique. Quelle est la nature de cette trajectoire ?
 2°) – Le ballon passe – t – il au – dessus du filet ? Justifie la réponse.
 3°) – A quelle abscisse, le ballon touche – t – il le sol ?
 4°) – Déduis – en la distance qui se trouve après le filet.

Données : $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$; $\alpha = 10^\circ$.

EXERCICE 30 : Un électron animé d'une vitesse \vec{v}_0 horizontale, pénètre en O dans un champ électrostatique uniforme créé entre les plaques A et B d'un condensateur. Le vecteur champ électrique \vec{E} est vertical dirigé vers le haut (voir schéma).



1°) – En appliquant la R.F.D :

- Exprime le vecteur accélération \vec{a} en fonction du vecteur champ électrostatique \vec{E} .
- Etablis les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ puis l'équation de la trajectoire.

2°) – Quelles sont les coordonnées du point S , point de sortie de l'électron du champ électrostatique ?
3°) – Calcule l'ordonnée du point d'impact de l'électron sur un écran vertical, situé à la distance D du milieu OO' .

Données : $E = 2.10^3 \text{ V.m}^{-1}$; $L = OO' = 10 \text{ cm}$;
 $v_0 = 10^7 \text{ m.s}^{-1}$; $D = 25 \text{ cm}$; $m_e = 9,1.10^{-31} \text{ Kg}$.

EXERCICE 31 : Une particule α (He^{2+}) ayant une vitesse de 2000 m.s^{-1} pénètre en un point O dans une région où existe un champ électrostatique uniforme \vec{E} d'intensité 1000 V.m^{-1} . Son vecteur vitesse initiale a la même direction que \vec{E} mais de sens contraire. On néglige P devant F .

1°) – Etablis l'équation de son mouvement en prenant pour origine des temps l'instant où la particule passe en O .

2°) – A quelle distance maximale la particule s'éloigne-t-elle de O ?

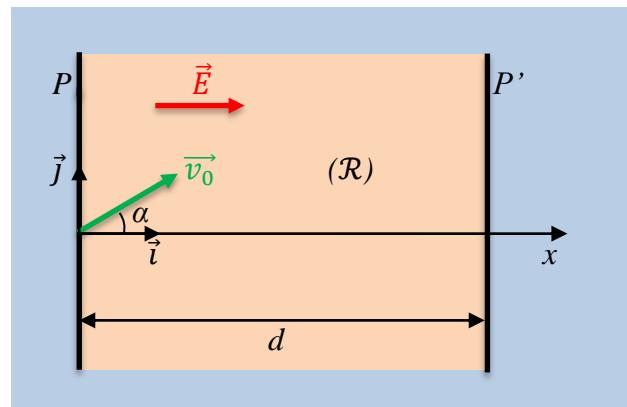
3°) – A quelle date et avec quelle vitesse la particule repasse-t-elle au point O ?

On donne : $e = 1,6.10^{-19}$; $m_\alpha = 6,67.10^{-27} \text{ Kg}$.

EXERCICE 32 : Dans la région d'espace \mathcal{R} comprise entre deux plans P et P' distants de d , il existe un champ électrique \vec{E} créé par des électrodes constituées de fins grillages métalliques disposés

suivant P et P' : $\vec{E} = \vec{0}$ à l'extérieur de \mathcal{R} (voir figure).

Une particule ponctuelle de masse m et de charge électrique positive, arrive en O à $t = 0$ et pénètre dans \mathcal{R} . La vitesse à $t = 0$ se trouve dans le plan (O, \vec{i}, \vec{j}) elle a pour valeur v_0 et fait un angle α avec l'horizontale.



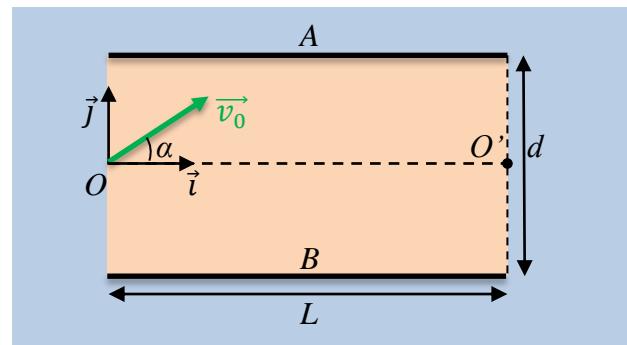
1°) Représente la force \vec{F} (électrique) s'exerçant sur la particule en O .

2°) Etablis l'équation de la trajectoire de la particule en négligeant le poids devant \vec{F} . Quelle est sa nature ?

3°) Détermine la composante v_x de la vitesse en fonction de x .

4°) Détermine V_F vitesse de la particule et l'angle β qu'elle fait avec l'horizontale au moment où elle arrive dans le plan P' . Montre que le rapport $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ est égal à une constante k qui sera exprimée en fonction de E , d , q , m , v_0 .

EXERCICE 33 : Un condensateur plan est constitué de deux plaques parallèles métalliques rectangulaires horizontales A et B de longueur L et séparées par une distance d .



On a choisi un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) dans un plan vertical. Le point O est équidistant des deux plaques. Un faisceau homocinétique de proton pénètre en O en



formant l'angle α avec \vec{i} , dans le champ électrostatique supposé uniforme \vec{E} du condensateur.

1°) – a) Indique en le justifiant le signe de $V_A - V_B = U$ tel que le faisceau de protons puisse passer par le point O' .

b) Donne l'équation de la trajectoire des protons dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) en fonction de U , α et d . Quelle est la nature du mouvement des protons ?

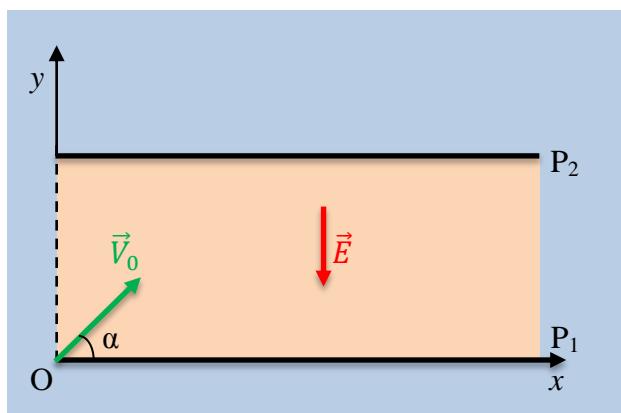
c) Calcule la valeur numérique de U qui permet de réaliser la sortie des protons en O' .

On donne : $\alpha = 30^\circ$, $L = 20\text{cm}$; $d = 7\text{cm}$; $v_0 = 10^6\text{m.s}^{-1}$; $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}\text{Kg}$; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{C}$.

2°) – Dans ce cas où la tension U a la valeur précédemment calculée, détermine à quelle distance minimale du plateau supérieur passe le faisceau de protons.

EXERCICE 34 : 1°) Un champ électrique \vec{E} est réalisé entre deux plaques horizontales P_1 et P_2 de longueur infinie. Les deux plaques, distantes de d , sont soumises à une différence de potentiel U . Une particule alpha de masse m , arrive à l'instant $t = 0$ en un point O de P_1 avec une vitesse qui fait avec la plaque un angle α (voir figure).

- Indique la polarité des plaques ;
- Etabli l'équation de la trajectoire de la particule alpha.



2°) Détermine l'écart maximal entre la particule et la plaque P_1 .

3°) Détermine la position du point I où retombe la particule sur la plaque P_1 .

4°) Donne les caractéristiques du vecteur vitesse au point I .

Données : $d = 10\text{cm}$; $U = 10000\text{V}$; $\alpha = 45^\circ$; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{C}$; $v_0 = 10^6\text{m/s}$; Alpha = He^{2+} ; $m = 6,68 \cdot 10^{-28}\text{Kg}$.

EXERCICE 35 : Un condensateur plan est constitué de deux plaques parallèles métalliques rectangulaires horizontales A et B de longueur L et séparées par une distance d . On raisonnera dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) ; Le point O est équidistant des deux plaques. Un faisceau de protons émis en C avec une vitesse nulle est accéléré entre les points C et D situés dans le plan (O, \vec{i}, \vec{j}) . Ils pénètrent en O , en formant l'angle α avec \vec{i} dans le champ électrique \vec{E} supposé uniforme du condensateur (voir figure).

1°) – a) Indique en le justifiant le signe de $(V_D - V_C)$;

b) Calcule en fonction de $U_0 = |V_D - V_C|$, la vitesse de sortie des protons au point D .

Données : $U_0 = 1000\text{V}$; $m_p = 1,6 \cdot 10^{-27}\text{Kg}$; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{C}$.

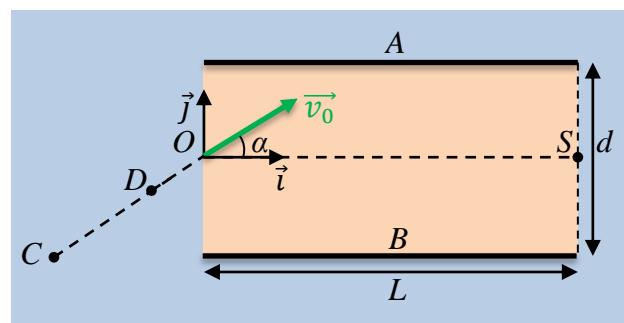
2°) – Le faisceau pénètre en O dans le champ électrique uniforme avec la vitesse v_0 calculée précédemment et ressort au point S du condensateur.

a) Indique en le justifiant le signe de $V_A - V_B$.

b) Montre que l'équation de la trajectoire des protons dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) en fonction de U_0 , $U = V_A - V_B$, α et d s'écrit :

$$y = -\frac{U}{4U_0 d \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$$

On négligera \vec{P} .



3°) a) Détermine l'expression de U pour que le faisceau sorte effectivement en S .

b) Calcule la valeur de U .

c) Détermine à quelle distance minimale du plateau A passe le faisceau de protons.

Données : $\alpha = 30^\circ$; $L = 20\text{cm}$; $d = 7\text{cm}$.

EXERCICE 36 : Un noyau d'hélium animé d'une vitesse \vec{v}_0 , horizontale, pénètre en O dans une région de l'espace de longueur horizontale L , où règne un champ magnétique uniforme dont le vecteur induction \vec{B} est perpendiculaire à \vec{v}_0 .

1°) Montre que la trajectoire de l'hélium dans le champ magnétique est circulaire. Calcule la valeur du rayon de la trajectoire.



2°) Calcule la valeur de l'angle de déviation de la trajectoire sous l'action du champ magnétique.

3°) Quel est le mouvement de la particule à la sortie du champ magnétique ?

4°) On reçoit le noyau d'hélium sur un écran fluorescent qui se trouve à une distance D de la sortie du champ. Calcule l'ordonnée y_E du point d'impact sur l'écran.

Données : $v_0 = 10^6 \text{ m.s}^{-1}$; $B = 10^{-2} \text{ T}$; $L = 10 \text{ cm}$; $D = 20 \text{ cm}$; $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $m_\alpha = 6,67 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$.

EXERCICE 37 : Un faisceau protonique horizontal homocinétique, de vitesse $V_0 = 16000 \text{ Km/s}$ traverse un champ magnétique d'intensité $B = 10^{-3} \text{ T}$, vertical.

1°) Calcule le rayon de la trajectoire décrite par le proton. (Masse du proton : $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$ et charge $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$).

2°) Le champ magnétique est uniforme à l'intérieur d'un cercle horizontal de centre I et de diamètre $D = 1,6 \text{ cm}$. La vitesse \vec{V}_0 est dirigée vers I . Un écran est placé à la distance L de I , perpendiculairement à \vec{V}_0 . Lorsque l'induction B est nulle le spot est en H sur l'écran.

Quelle déviation subit – il lorsque l'induction prend la valeur de 10^{-3} T ?

Prendre $L = 10 \text{ cm}$.

EXERCICE 38 : Dans un tube cathodique, des électrons sont émis sans vitesse initiale par une cathode C , puis accélérés par l'anode A ; ils pénètrent en O avec une vitesse horizontale \vec{v}_0 dans un champ magnétique \vec{B} orthogonal au plan de la figure. Le champ \vec{B} n'existe que sur une zone de longueur L .

1°) – Calcule la tension accélératrice $U_{AC} = U$ entre l'anode et la cathode.

Données : $v_0 = 10^7 \text{ m.s}^{-1}$; $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ Kg}$; $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

2°) – Etudie la nature du mouvement d'un électron dans le champ magnétique et calcule la grandeur caractéristique de la trajectoire sachant que $B = 10^{-3} \text{ T}$.

3°) – Un écran E placé à une distance $D = 50 \text{ cm}$ de O reçoit le faisceau d'électrons provoqué par le champ magnétique. Détermine la déviation électromagnétique du faisceau d'électrons sachant que $L = 1 \text{ cm}$ est très inférieure à D .

4°) – Dans l'espace de longueur $L = 1 \text{ cm}$, on fait agir simultanément le champ magnétique précédent et un champ électrique \vec{E} afin de ne plus observer la déviation sur l'écran (mouvement rectiligne). Calcule l'intensité du champ électrique ; représente

sur un schéma les vecteurs \vec{E} , \vec{B} et les forces appliquées à l'électron.

EXERCICE 39 : La loi de l'attraction universelle appliquée à deux corps A et B de masses respectives m_A et m_B , dont les centres sont distants de r , en rotation autour de la terre s'écrit :

$$F = K \frac{m_A \cdot m_B}{r^2}$$

1°) Exprime l'accélération de la pesanteur au sol en fonction de K , R et M avec R et M respectivement le rayon et la masse de la terre, en supposant celle-ci concentrée en son centre. Déduis – en M sachant que $R = 6400 \text{ Km}$; $K = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ USI}$ et $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$.

2°) Exprime en fonction de g_0 , R et z , l'intensité de la pesanteur à une altitude z . Montre que si z est petit devant R , g est une fonction linéaire de z . Dans ce cas calcule l'erreur que l'on commet en prenant $g = g_0$ à 3200 m d'altitude.

3°) Calcule la vitesse d'un satellite artificiel évoluant à 36000 Km d'altitude. Quelle est à cette altitude la durée d'une révolution ?

Quelle réflexion vous inspire ce résultat quand l'orbite est située dans le plan équatorial ?

EXERCICE 40 : 1°) A partir de la loi de l'attraction universelle, établis l'expression de l'intensité du champ de gravitation terrestre \vec{g} en fonction de G , M , R et h . Quelle est l'expression de l'intensité du vecteur champ de gravitation terrestre \vec{g}_0 au sol ?

Déduis – en que :

$$g = g_0 \left(\frac{R}{R + h} \right)^2$$

2°) La navette spatiale Columbia a été placée sur une orbite circulaire à l'altitude $h = 250 \text{ Km}$.

Etablis dans un repère géocentrique les expressions de la vitesse V de ce satellite et sa période de révolution T en fonction de g_0 , R et h .

$AN : R = 6370 \text{ Km}$; $g_0 = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

EXERCICE 41 : La terre tourne sur elle – même autour de la ligne des pôles NS, avec une période de révolution T voisine de 24 heures.

1°) Calcule la vitesse angulaire de rotation de la terre.

2°) Quelle est la vitesse d'un point de la surface terrestre situé à la latitude λ ? (la latitude λ du point M est l'angle que fait le rayon de la terre passant par le point M sur l'équateur). Le rayon de la terre $R = 6400 \text{ Km}$ et $\theta = 45^\circ$.

3°) Montre qu'à l'altitude z au – dessus de la terre l'intensité du champ de pesanteur est égale à :



$$g_z = g_0 \frac{R^2}{(R + z)^2}$$

4°) A l'aide d'une fusée de masse $m = 10$ tonnes, on satellise autour de la terre, un satellite de masse m' , assimilable à un point matériel, sur une orbite circulaire, à l'altitude : $z = 36000\text{Km}$. Détermine :

- a) L'accélération de la fusée.
- b) L'intensité de la pesanteur à l'altitude z .

EXERCICE 42 : 1°) Dans un repère R, on considère deux astres ou satellites : A (de masse M) et B (de masse m). A, dont la masse est très grande devant celle de B, B tourne autour de A avec un mouvement uniforme et son centre décrit un cercle de rayon R .

- a) Etablis la relation qui lie la vitesse V du centre de B, le rayon R de l'orbite, la masse M de A et la constante de gravitation universelle K .
- b) On connaît la période révolution T de B autour de A ; exprime V en fonction de T , déduis – en la troisième loi de Kepler :

$$\frac{R^3}{T^2} = C.M$$

et donne l'expression littérale de C en fonction de K .

2°) **Application** : Un satellite artificiel tourne autour de la terre en 134min , selon une orbite circulaire dont le rayon est $R_s = 8,713 \cdot 10^3\text{Km}$. Sachant que la terre décrit autour du soleil en $365,25$ jours une orbite qu'on pourra considérer comme circulaire de rayon $R_T = 1,496 \cdot 10^8\text{Km}$, calcule le rapport de la masse de la terre à celle du soleil.

EXERCICE 43: 1°) On considère un point matériel A, de masse $m = 100\text{g}$ suspendu à un point fixe O par l'intermédiaire d'un fil fin, inextensible et de masse négligeable, de longueur $\ell = 1\text{m}$. Cet ensemble est mis en rotation uniforme autour d'un axe vertical (Δ), passant par O. A décrit alors un cercle dans le plan horizontal et la direction du fil fait un angle $\alpha = 30^\circ$ avec l'axe (Δ).

Quelle est la vitesse angulaire de rotation de l'ensemble ?

2°) Le fil de suspension est remplacé par un ressort à spires non jointives, de longueur à vide $\ell_0 = 20\text{cm}$, de coefficient de raideur $K = 49\text{N.m}^{-1}$. La vitesse de rotation de l'ensemble est alors de 8rad.s^{-1} , le point A décrivant toujours un cercle dans le plan horizontal, l'axe du ressort étant incliné sur la verticale (Δ), d'un angle $\alpha = 30^\circ$. Calcule la longueur ℓ_1 du ressort lors de ce mouvement.

On donne $g = 9,8\text{m.s}^{-2}$.

EXERCICE 44 : Un ressort de masse négligeable et à spires non jointives, a pour longueur à vide $L_0 = 20\text{cm}$, sa constante de raideur $K = 20\text{N.m}^{-1}$. Il porte un solide A de masse $m = 100\text{g}$. Il est fixé en O à une tige verticale.

On considère le mouvement de rotation uniforme du système autour de la verticale (Δ). On appelle θ l'angle que font la tige verticale et le ressort.

1°) – Donne l'expression de l'angle θ en fonction de L , g et $\dot{\theta}$.

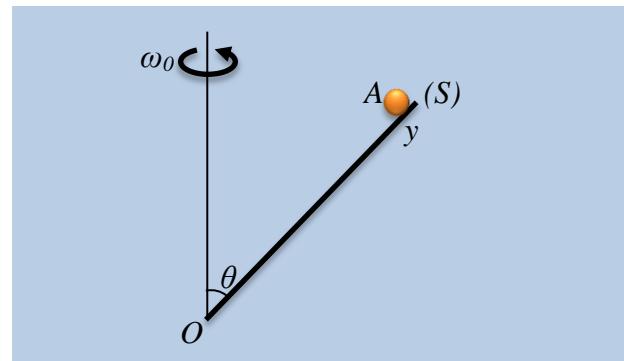
2°) – Montre que la vitesse de rotation doit être supérieure à une valeur limite pour que le solide A s'écarte de la tige verticale. Détermine cette valeur limite.

3°) – Donne l'expression de l'allongement $X = L - L_0$ du ressort en fonction de $\dot{\theta}$, m , L_0 et K .

A.N : $\dot{\theta} = 9\text{rad.s}^{-1}$.

4°) – La limite d'élasticité du ressort est atteinte lorsque celui – ci double sa longueur à vide. Quelle vitesse de rotation ne doit – on pas dépasser si l'on ne veut pas détériorer le ressort.

EXERCICE 45 : Une tige Oy est soudée en O à un axe vertical (Δ) et fait avec cet axe un angle θ (voir figure). Un petit anneau (S), solide ponctuel de masse m , coulisse sans frottements sur Oy.



L'axe (Δ) entraîne Oy dans un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire ω_0 . On constate que l'anneau (S) se fixe en un point A, $OA = a$.

- a) Détermine a en fonction de ω_0 , θ et g . Exprime la valeur de la force de réaction \vec{R} exercée par la tige Oy sur l'anneau (S).

A.N: $\theta = 60^\circ$; $\omega_0 = 6\text{rad.s}^{-1}$; $m = 10\text{g}$; $g = 9,8\text{m.s}^{-2}$.

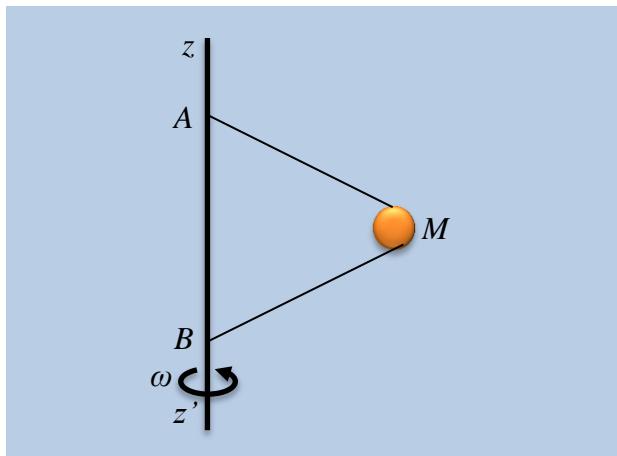
- b) On double la vitesse de rotation. Quelle devrait être la valeur de l'angle pour que (S) demeure au même emplacement sur la tige Oy.

EXERCICE 46 : Une barre vertical z'z tourne sur elle – même à la vitesse angulaire constante ω . On



prendra $g = 10m.s^{-2}$. Soient deux points A et B de $z'z$ tels que $AB = 2,4m$ (voir figure). Une masse ponctuelle M est reliée à ces deux points par deux fils souples inextensibles de longueur $AM = BM = \ell = 1,5m$. On donne : $m = 0,5Kg$ et $\omega = 6rad.s^{-1}$.

- 1°) Quelles sont les tensions de AM et BM lorsque la vitesse de régime est atteinte ?
- 2°) Pour quelle valeur de ω la tension du fil BM est-elle nulle ? Quelle est alors la valeur de la tension du fil AM ?



négligera la résistance de l'air et on prendra $g = 9,8m.s^{-2}$.

1°) L'enfant se place sur la planche au sommet d'un plan incliné de longueur $25m$ et de pente 40% .

- a) En négligeant les résistances passives, quelle est la vitesse de l'enfant au bas de la pente ?
- b) En réalité sa vitesse en bas de la pente n'est que de $13m.s^{-1}$. Calcule l'accélération supposée constante du mouvement. Détermine l'intensité de la force de frottement supposée constante et parallèle à la direction du mouvement, qui s'exerce sur le système.

2°) En bas du plan incliné, l'enfant désire prendre un virage circulaire à la vitesse de $13m.s^{-1}$. Les résistances passives sont négligeables.

- a) Montre qu'il doit s'incliner pour pouvoir tourner.
- b) Sachant qu'il s'incline de 20° par rapport à la verticale, quel est le rayon du virage ?

EXERCICE 47 : Sur une route horizontale, un pilote prend un virage de rayon $R = 70m$ à la vitesse de $72Km.h^{-1}$.

- 1°) Quelle est l'angle d'inclinaison par rapport à la verticale du pilote et de sa machine pour éviter tout dérapage.
- 2°) Le virage étant un quart de cercle, calcule la durée du parcours circulaire.
- 2°) Le virage étant un quart de cercle, calcule la durée du parcours circulaire.

EXERCICE 48 : Un cycliste aborde en roue libre un virage horizontal circulaire de rayon $r = 100m$ à la vitesse $V = 36Km.h^{-1}$. La piste est telle qu'il n'y a aucun frottement. Montre que si la piste a un profil horizontal, le mouvement s'effectue à la vitesse constante et que, en conséquence, le cycliste ne peut pas prendre le virage. Dans un $2^{\text{ème}}$ temps, envisage le cas où la piste est relevée et calcule l'angle α dont il faut relever la piste pour que le cycliste puisse prendre le virage.

EXERCICE 49 : Une planche à roulettes de masse $2,5Kg$ est munie de 4 roues. Un enfant de masse $40Kg$ utilise cette planche. Dans tout l'exercice on



DOMAINE D'ETUDE I : MECANIQUE

OG₃ : ANALYSER LES SYSTEMES MECANIQUES EN MOUVEMENT.

5

DYNAMIQUE DE ROTATION

I. Notion de moment cinétique.

I.1. Cas d'un point matériel.

Définition : On appelle moment cinétique d'un point M par rapport à un axe (Δ), le moment du vecteur quantité de mouvement \vec{p} par rapport à cet axe.

Considérons un point matériel M de masse (m), décrivant une trajectoire circulaire de centre O et de rayon R , à la vitesse linéaire \vec{v} (figure 1).

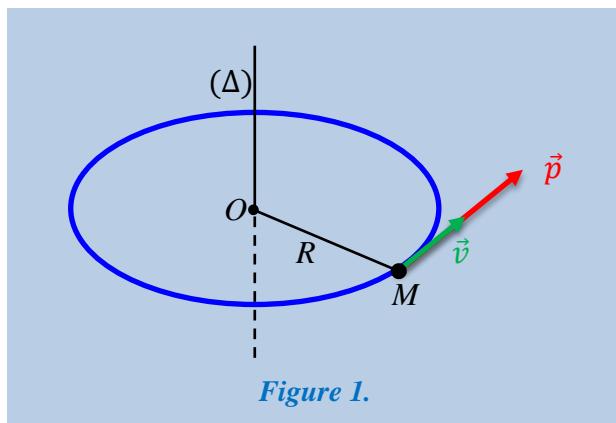


Figure 1.

Le moment cinétique du point matériel M par rapport à l'axe (Δ) vaut :

$$\sigma = \vec{p} \cdot R = m\vec{v} \cdot R ; \text{ avec } v = R\omega$$

D'où :

$$\sigma = mR^2\omega$$

σ s'exprime en $\text{Kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{rad/s}$.

I.2. Cas d'un système matériel.

Pour un système matériel, le moment cinétique vaut :

$$\sigma = \sum_{i=1}^n \sigma_i = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 \omega$$

D'où :

$$\sigma = \omega \sum_{i=1}^n m_i R_i^2$$

II. Notion de moment d'inertie.

II.1. Rappels sur le moment d'une force.

Définition : Le moment d'une force \vec{F} par rapport à un axe (Δ) est le produit de l'intensité de la composante orthogonale de la force par la distance entre la droite d'action de la force et l'axe.

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = F_\perp \cdot d \quad (\text{N.m})$$

C'est une grandeur algébrique qui s'exprime en **Newton – mètre** et dont le signe dépend du sens positif arbitrairement choisi.

Le moment d'une force par rapport à un axe caractérise l'effet de rotation de cette force.

Exemples :

- Mouvement de rotation d'une porte autour de ses charnières (figure 2).

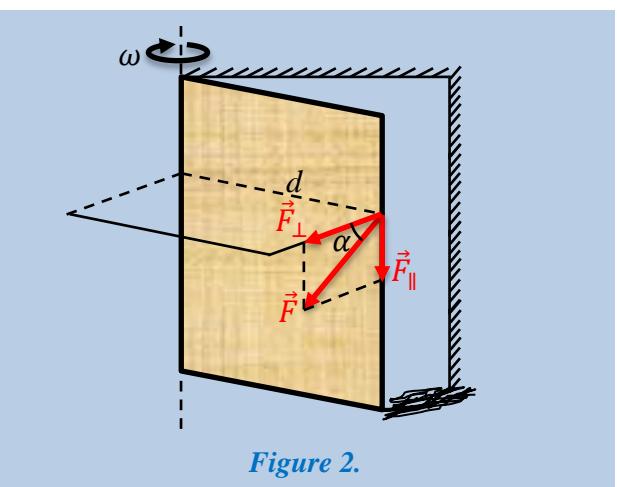


Figure 2.



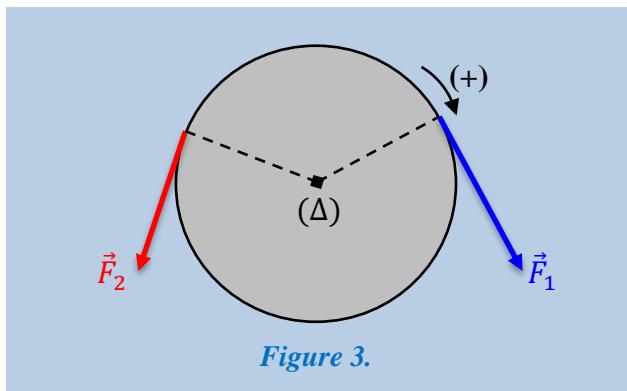
$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = F_\perp \cdot d \quad \text{avec} \quad F_\perp = F \cdot \cos\alpha$$

D'où :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = F \cdot d \cdot \cos\alpha$$

Note : L'ouverture ou la fermeture d'une porte nécessite l'application d'une force perpendiculaire à celle-ci.

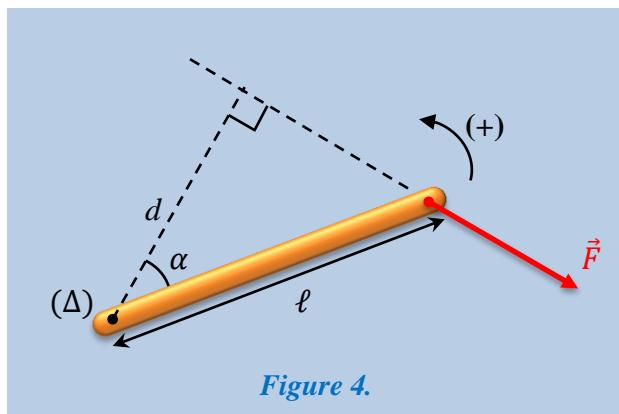
- Mouvement de rotation d'un disque dans le plan vertical (figure 3).



$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_1) = F_1 \cdot R$$

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_2) = -F_2 \cdot R$$

- Rotation d'une tige dans le plan vertical (figure 4).

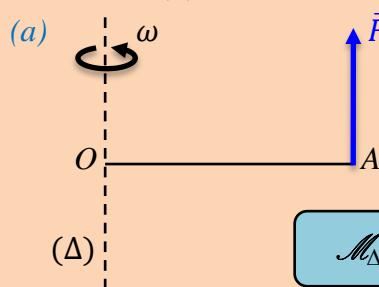


$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = -F \cdot d ; \text{ avec } d = \ell \cdot \cos\alpha$$

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = -F \cdot \ell \cdot \cos\alpha$$

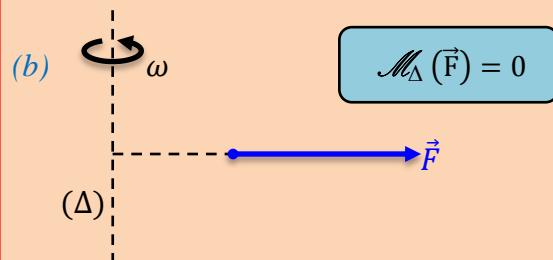
Remarques : On peut distinguer plusieurs cas particuliers suivant la direction de \vec{F} (figure 5).

R₁ : Si $\vec{F} \parallel (\Delta)$



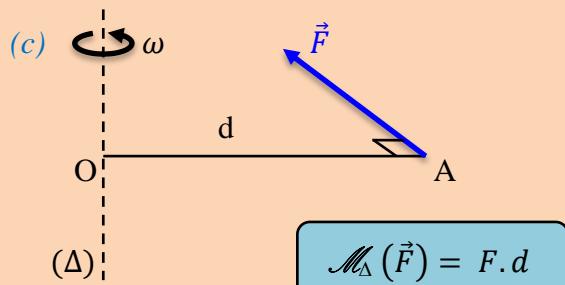
Le moment d'une force \vec{F} parallèle à l'axe de rotation (Δ) est nul.

R₂ : Si $\vec{F} \perp (\Delta)$



Le moment d'une force \vec{F} Perpendiculaire à l'axe de rotation (Δ) est nul.

R₃ : Si $\vec{F} \perp (d)$



Dans ce cas, le moment de \vec{F} est maximal.

Le moment d'une force \vec{F} perpendiculaire au bras de Levier est maximal.

Figure 5.

Définition : On appelle bras de Levier, la distance orthogonale qui sépare la direction de la force et l'axe de rotation.



II.2. Moment d'inertie.

II.2.1. Cas d'un point matériel.

Considérons un point matériel de masse m décrivant une trajectoire circulaire de rayon R . (figure 6).

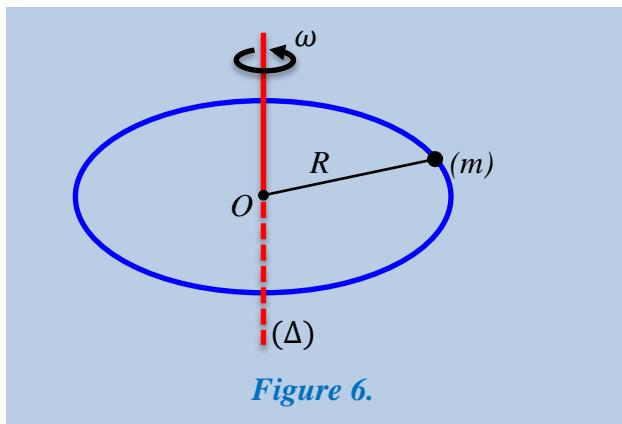


Figure 6.

Le moment d'inertie du point matériel est donné par la relation ci – dessous :

$$J_{\Delta} = mR^2 \quad (\text{Kg.m}^2)$$

II.2.2. Cas d'un système matériel.

Considérons un système matériel (S) en rotation autour de l'axe (Δ) (figure 7).

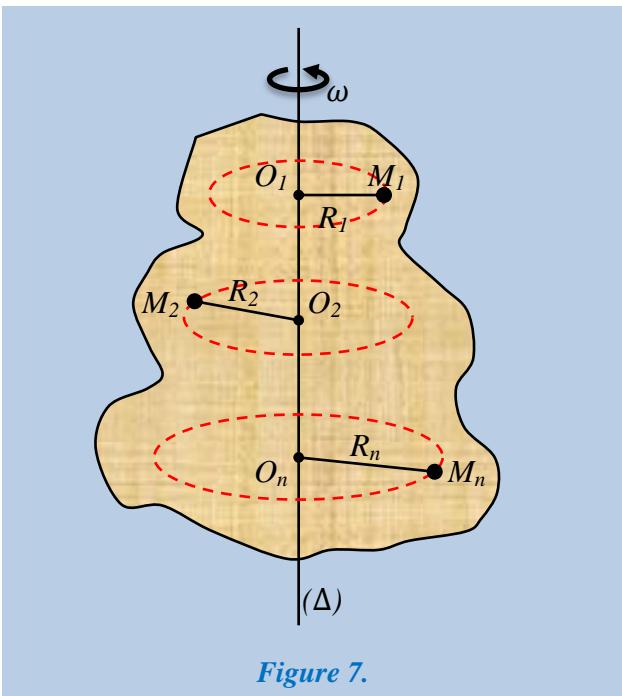


Figure 7.

Le moment d'inertie du système vaut:

$$J_{\Delta} = \sum_{i=1}^n J_{i\Delta} = J_{1\Delta} + J_{2\Delta} + \dots + J_{n\Delta}$$

$$J_{\Delta} = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2$$

II.3. Théorème de l'accélération angulaire (T.A.A.).

❖ Enoncé :

Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique est égale à la somme des moments des forces extérieures appliquées au système.

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} &= \sum \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}(mR^2\omega) &= \sum \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}(J_{\Delta}\omega) &= \sum \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) \\ \Rightarrow J_{\Delta} \frac{d\dot{\theta}}{dt} &= \sum \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) \\ \Rightarrow J_{\Delta} \ddot{\theta} &= \sum \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) \end{aligned}$$

D'où:

$$\sum \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = J_{\Delta} \ddot{\theta}$$

Exemple : Disque en rotation dans le plan vertical (figure 8).

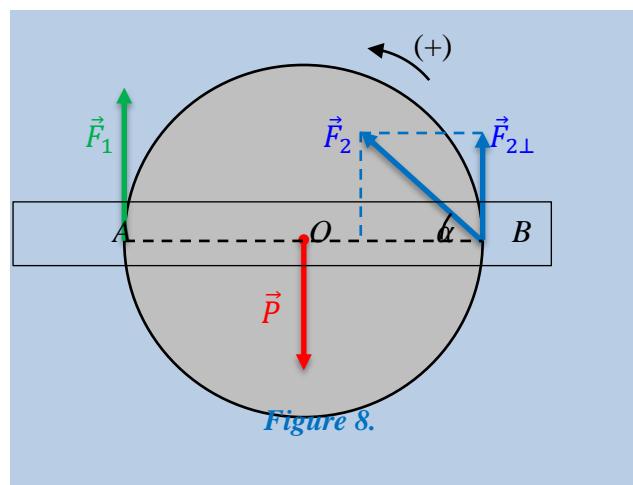


Figure 8.

Bilan des forces : \vec{P} ; \vec{F}_1 ; \vec{F}_2

D'après le T.A.A on a :

$$\begin{aligned} \sum \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) &= J_{\Delta} \ddot{\theta} \\ \Rightarrow \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_1) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_2) &= J_{\Delta} \ddot{\theta} \\ \Rightarrow 0 - F_1 \cdot OA + F_2 \cdot OB \cdot \sin \alpha &= J_{\Delta} \ddot{\theta} \end{aligned}$$



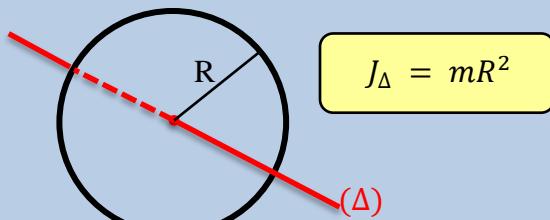
D'où :

$$- F_1 \cdot R + F_2 \cdot R \cdot \sin\alpha = J_{\Delta} \ddot{\theta}$$

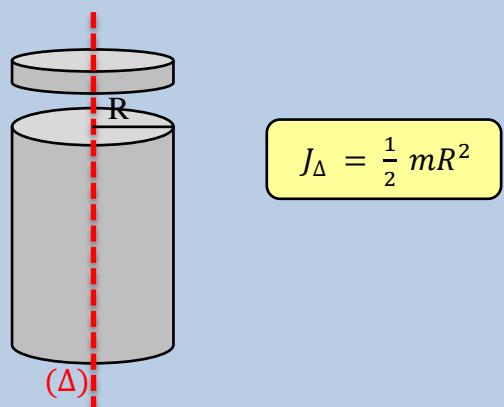
II.4. Quelques moments d'inertie des solides par rapport à un axe de symétrie.

Certains solides à répartition symétrique ont un moment d'inertie dépendant de leurs caractéristiques. La figure 9 ci-dessous donne les moments d'inertie de quelques solides.

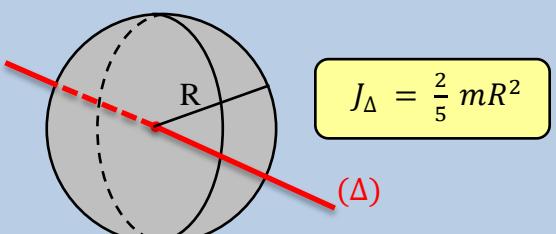
- a) Jante, Volant, Cerceau : ce sont des circonférences pesantes.



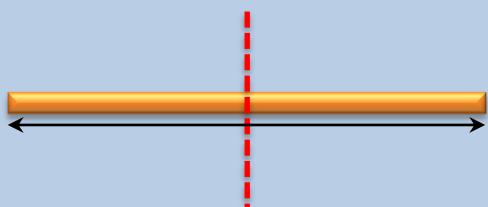
- b) Disque et cylindre pleins homogènes.



- c) Sphère homogène.



- d) Tige homogène de longueur ℓ .



ℓ
(Δ)

$$J_{\Delta} = \frac{1}{12} m\ell^2$$

Figure 9.

II.5. Théorème d'Huygens.

Si l'axe de rotation ne passe pas par le centre de gravité du système (figure 10) :

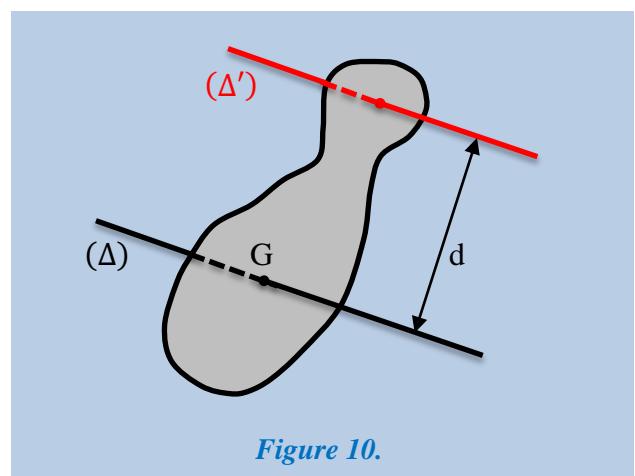


Figure 10.

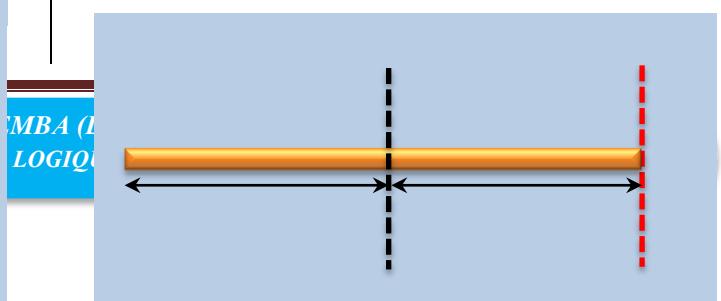
$$J_{\Delta'} = J_{\Delta} + md^2$$

❖ Enoncé :

Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe quelconque (Δ') est égal à son moment d'inertie par rapport à l'axe (Δ), parallèle à (Δ') et passant par le centre de gravité, augmenté du produit de la masse du solide par le carré de la distance des deux axes.

Exemples :

- a) Tige ou barreau homogène (figure 11)



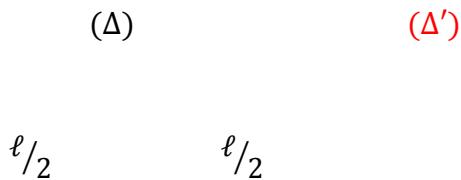


Figure 11.

$$J_{\Delta'} = J_{\Delta} + m \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}m\ell^2 + \frac{1}{4}m\ell^2$$

D'où :

$$J_{\Delta'} = \frac{1}{3}m\ell^2$$

b) Disque homogène.

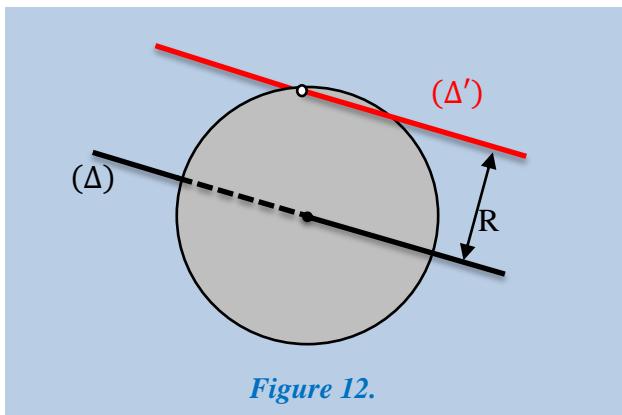


Figure 12.

$$J_{\Delta'} = J_{\Delta} + m(R)^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2$$

D'où :

$$J_{\Delta'} = \frac{3}{2}mR^2$$

Exercice d'application.

A l'extrémité d'un couple moteur $Mm = 0,1N.m$, on fait tourner autour d'un axe (Δ) horizontal, un disque plein et homogène de rayon $r = 50cm$, initialement au repos, jusqu'à atteindre au bout de $2s$ une vitesse angulaire $\dot{\theta} = 10rad/s$.

1°) Exprime l'accélération angulaire du disque en fonction de Mm et du moment d'inertie J du disque par rapport à l'axe (Δ).

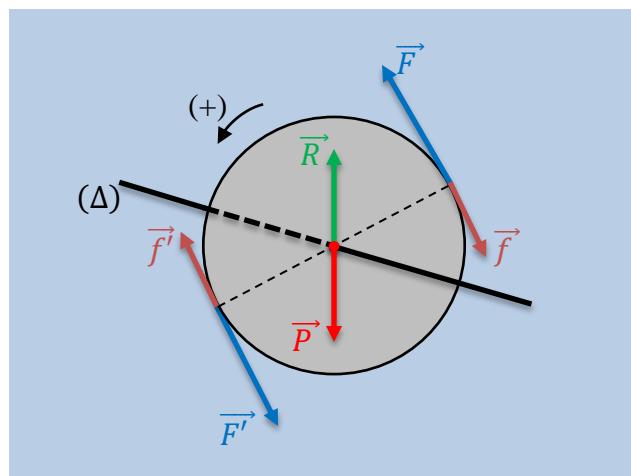
2°) Calcule J .

3°) Détermine le nombre de tours effectués par le disque pendant ces 2 secondes.

4°) Au bout de $2s$ de rotation, on supprime l'action du couple moteur et la roue s'arrête au bout de 10 tours. Calcule le moment du couple résistant supposé constant.

Corrigé.

$$Mm = 0,1N.m ; r = 50cm ; t = 2s ; \dot{\theta} = 10rad/s.$$



1°) Expression de l'accélération angulaire du disque en fonction de Mm et de J .

Système d'étude : disque de masse en rotation autour de l'axe (Δ).

Bilan des forces : \vec{P} ; \vec{R} ; couple moteur (\vec{F}, \vec{F}')

$$T.A.A : \sum \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = J_{\Delta}\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}, \vec{F}') = J_{\Delta}\ddot{\theta}$$

$$\text{Avec } \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) = 0 ; \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}) = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}, \vec{F}') = J_{\Delta}\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow Mm = J\ddot{\theta}$$

D'où :

$$\ddot{\theta} = \frac{Mm}{J}$$

2°) Calcul de J .

$\ddot{\theta} = cte \neq 0$, le mouvement est circulaire uniformément varié.

D'après la relation vitesse – temps (RVT) :

$$\dot{\theta} - \dot{\theta}_0 = \ddot{\theta}(t - t_0)$$

t_0 étant nul $\Rightarrow \dot{\theta} - \dot{\theta}_0 = \ddot{\theta}t$

Origine des dates : l'instant du début du mouvement du disque.



Origine des espaces : position du disque juste avant début du mouvement.

$$\text{A } t = 0 : \dot{\theta}_0 = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = \ddot{\theta} t$$

D'où :

$$\ddot{\theta} = \frac{\dot{\theta}}{t}$$

$$\text{A. N} : \ddot{\theta} = \frac{10}{2} = 5 \Rightarrow \ddot{\theta} = 5 \text{ rad.s}^{-2}$$

Ainsi :

$$\ddot{\theta} = \frac{Mm}{J} \Rightarrow J = \frac{Mm}{\ddot{\theta}}$$

$$\text{A. N} : J = \frac{0,1}{5} = 0,02 \Rightarrow J = 0,02 \text{ Kg.m}^2$$

3*) Détermination du nombre de tours.

1^{ère} méthode.

$\ddot{\theta} = \text{cte} \neq 0 \Rightarrow \text{M.C.U.V}$ d'équation :

$$\theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 + \dot{\theta}_0 t + \theta_0$$

Avec : $\theta_0 = 0 ; \dot{\theta}_0 = 0$.

$$\Rightarrow \theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 ; \text{ or } \theta = 2\pi n$$

$$\text{Ainsi : } 2\pi n = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2$$

D'où :

$$n = \frac{\ddot{\theta}t^2}{4\pi}$$

$$\text{A. N} : n = \frac{5 \times 2^2}{4 \times 3,14} = 1,59 \Rightarrow n = 1,59 \text{ tr}$$

2^{ème} méthode.

$\ddot{\theta} = \text{cte} \neq 0 \Rightarrow \text{M.C.U.V}$

D'après la REV, on a :

$$\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2 = 2\ddot{\theta}(\theta - \theta_0)$$

$$\text{Avec : } \theta_0 = 0 ; \dot{\theta}_0 = 0. \Rightarrow \dot{\theta}^2 = 2\ddot{\theta}.\theta$$

$$\text{or } \theta = 2\pi n \Rightarrow \dot{\theta}^2 = 4\pi n \cdot \ddot{\theta}.$$

D'où :

$$n = \frac{\dot{\theta}^2}{4\pi\ddot{\theta}}$$

$$\text{A. N} : n = \frac{10^2}{4 \times 3,14 \times 5} = 1,59$$

$$n = 1,59 \text{ tr}$$

4*) $n_1 = 10$ tours

Calcul du moment du couple résistant supposé constant.

Système d'étude : disque de masse en rotation autour de l'axe (Δ).

Bilan des forces : $\vec{P} ; \vec{R} ; \text{couple résistant } (\vec{f}, \vec{f}')$

$$\text{T.A.A} : \sum \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = J_{\Delta}\ddot{\theta}_1$$

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{f}, \vec{f}') = J_{\Delta}\ddot{\theta}_1$$

$$\text{Avec } \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) = 0 ; \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}) = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{f}, \vec{f}') = J_{\Delta}\ddot{\theta}_1$$

$$\Rightarrow Mr = J\ddot{\theta}_1$$

Trouvons $\ddot{\theta}_1$

$\dot{\theta}_1 = \text{cte} \neq 0 \Rightarrow \text{M.C.U.V}$

D'après la REV, on a :

$$\dot{\theta}_1^2 - \dot{\theta}_{0_1}^2 = 2\ddot{\theta}_1(\theta_1 - \theta_{0_1})$$

Origine des dates : l'instant où l'on supprime le moment moteur.

Origine des espaces : la position du disque juste avant qu'on ne supprime le moment moteur.

$$\text{A } t = 0 : \dot{\theta}_{0_1} = \dot{\theta} ; \theta_{0_1} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}_1^2 - \dot{\theta}^2 = 2\ddot{\theta}_1\theta_1$$

$$\text{A l'arrêt } \dot{\theta}_1 = 0 \Rightarrow -\dot{\theta}^2 = 2\ddot{\theta}_1\theta_1$$

$$\text{avec } \theta_1 = 2\pi n_1 \Rightarrow \ddot{\theta}_1 = -\frac{\dot{\theta}^2}{4\pi n_1}$$

D'où :

$$Mr = -J \frac{\dot{\theta}^2}{4\pi n_1}$$

$$\text{A. N} : Mr = \frac{-0,02 \times 10^2}{4 \times 3,14 \times 10} = -0,016$$

$$Mr = -0,016 \text{ N.m}$$



DOMAINE D'ETUDE I : MECANIQUE

OG₃ : ANALYSER LES SYSTEMES MECANIQUES EN MOUVEMENT.

6 || LES ENERGIES

Energies Cinétique, Potentielle et Mécanique

I. Rappels et compléments.**I.1. Travail d'une force.****I.1.1. Travail d'une force dans un déplacement rectiligne.**

Considérons une force \vec{F} en déplacement rectiligne entre deux points A et A' (figure 1).

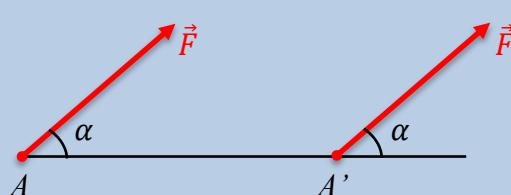


Figure 1.

Le travail de la force \vec{F} au cours du déplacement rectiligne AA' est égal au produit scalaire des vecteurs \vec{F} et $\overrightarrow{AA'}$.

$$W_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AA'} = F \cdot AA' \cdot \cos(\vec{F}, \overrightarrow{AA'})$$

D'où :

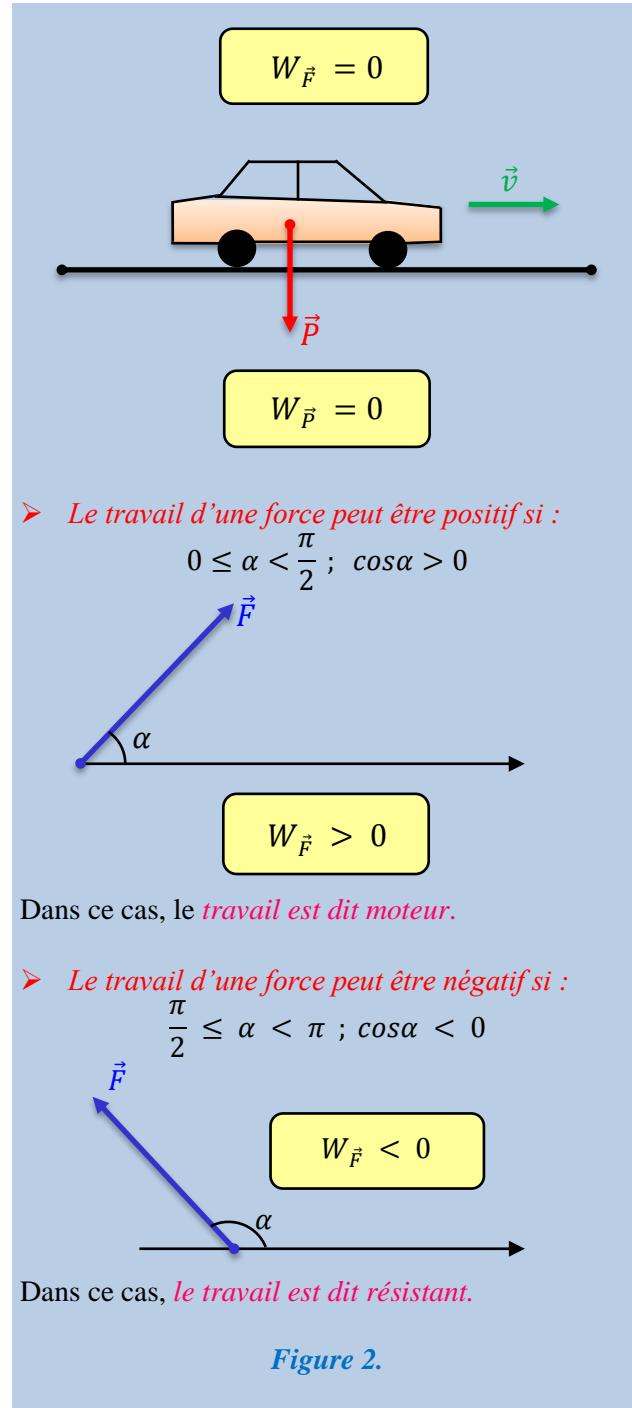
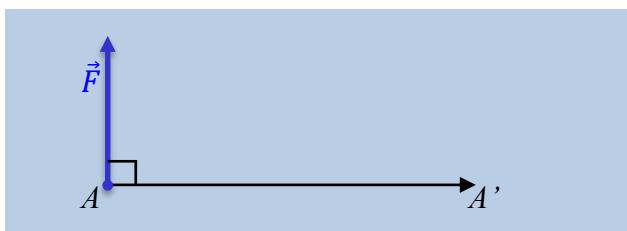
$$W_{\vec{F}} = F \cdot AA' \cdot \cos\alpha$$

Le travail s'exprime en joules (J)

Conséquences :

- ✓ *Le travail d'une force non nulle peut être nul, si la direction de la force est perpendiculaire au déplacement* (figure 2).

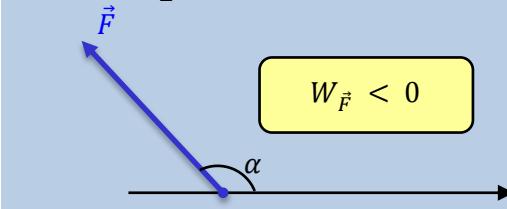
$$(\vec{F}, \overrightarrow{AA'}) = \frac{\pi}{2}; \cos\alpha = 0 \Rightarrow W_{\vec{F}} = 0$$



Dans ce cas, le *travail est dit moteur*.

➤ *Le travail d'une force peut être négatif si :*

$$\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \pi; \cos\alpha < 0$$



Dans ce cas, *le travail est dit résistant*.

Figure 2.



I.1.2. Travail du poids.

Considérons un corps de masse (m) décrivant une trajectoire (t) quelconque entre deux points A et A' d'altitudes différentes (figure 3).

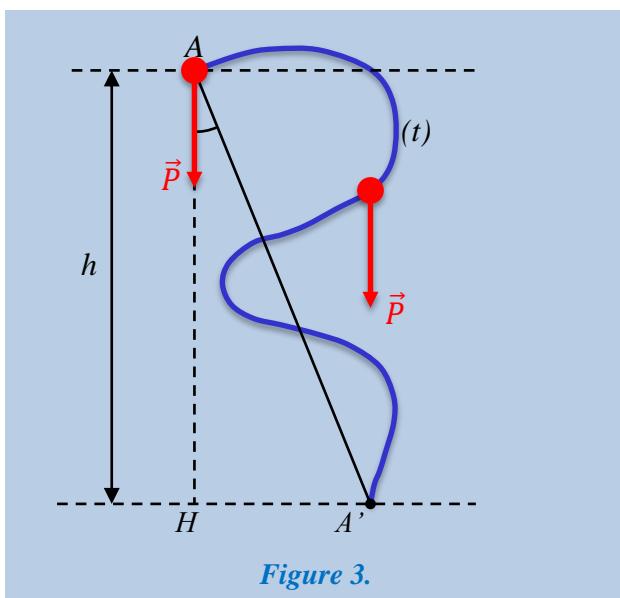


Figure 3.

Le travail du poids du corps entre les points A et A' est tel que :

$$W_{\vec{P}} = \vec{P} \cdot \overrightarrow{AA'} = P \cdot AA' \cdot \cos(\vec{P}, \overrightarrow{AA'})$$

$$W_{\vec{P}} = P \cdot AH = P \cdot h$$

D'où :

$$W_{\vec{P}} = P \cdot h$$

Le travail du poids ne dépend pas du chemin suivi, mais de la différence d'altitude entre les points A et A' .

Si l'altitude du point A' est supérieure à celle du point A , le travail du poids est résistant.

$$W_{\vec{P}} = -P \cdot h$$

N.B : *Le travail du poids ne dépend pas du chemin suivi, mais seulement de la différence de niveau entre la position initiale et la position finale.*

Au cours d'une montée le travail du poids est **résistant**, tandis qu'au cours d'une descente le travail du poids est **moteur**.

Il est évident que : $W_{\vec{P}} = P \cdot h = m \cdot g \cdot h$

- ✓ Pour un déplacement *horizontal* $h = 0$.
- ✓ Pour un déplacement *vertical* $h = x$ ou $h = z$.
- ✓ Pour un déplacement *oblique* $h = xsina$; avec α l'angle de l'inclinaison.

I.1.3. Travail d'une force appliquée à un solide en mouvement de rotation.

Considérons un disque en rotation par rapport à un axe (Δ) et une force tangentielle appliquée au disque en mouvement \vec{F} (figure 4).

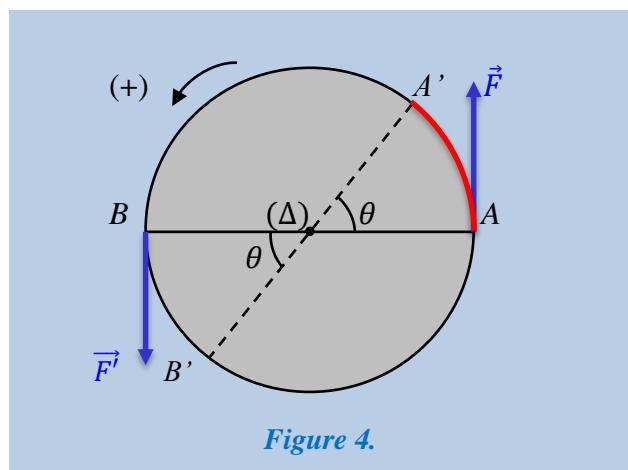


Figure 4.

Le travail de la force \vec{F} entre les points A et A' est tel que :

$$W_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot \widehat{AA'} = F \cdot R\theta$$

$$\text{Avec } \widehat{AA'} = R\theta \quad \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = F \cdot R$$

d'où:

$$W_{\vec{F}} = \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) \cdot \theta$$

Travail d'un couple de force.

Définition : On appelle couple de force, un ensemble de deux forces parallèles, opposées et de même intensité, localisées de part et d'autre de l'axe de rotation, à égale distance de l'axe.

Dans la figure 4 ci-dessus, les forces \vec{F} et \vec{F}' forment un couple de forces noté (\vec{F}, \vec{F}') ; ainsi le travail de ce couple de force dans un déplacement d'angle θ on a :

$$W_{(\vec{F}, \vec{F}')} = F \cdot R\theta + F' \cdot R\theta$$

$$\text{Avec } \vec{F} = \vec{F}', \text{ alors : } W_{(\vec{F}, \vec{F}')} = 2F \cdot R\theta$$

Soit :

$$W_{(\vec{F}, \vec{F}')} = \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}, \vec{F}') \cdot \theta$$



Remarques :

R₁ : Si le couple de force (\vec{F}, \vec{F}') provoque la rotation du système, *on dit que le couple est moteur et son moment est un moment moteur*.

R₂ : Si le couple de force (\vec{F}, \vec{F}') s'oppose au mouvement de rotation du système ou contribue au freinage de celui – ci, on dit que *le couple est résistant et son moment est un moment résistant*.

I.2. Puissance d'une force.

Définition : La puissance d'une force est le travail effectué par cette force par unité de temps. On la note :

$$\mathcal{P} = \frac{W_{\vec{F}}}{t} \quad (W)$$

I.2.1. Cas d'un solide en mouvement de translation.

Dans un mouvement de translation rectiligne :

$$W_{\vec{F}} = F \cdot d \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \mathcal{P} = \frac{F \cdot d \cos \alpha}{t} = F \cdot v \cos \alpha$$

D'où :

$$\mathcal{P} = F \cdot v \cos \alpha$$

I.2.2. Cas d'un solide en mouvement de rotation.

Dans un mouvement de translation rectiligne :

$$W_{\vec{F}} = \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) \cdot \theta$$

$$\Rightarrow \mathcal{P} = \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) \cdot \frac{\theta}{t} = \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) \cdot \dot{\theta}$$

D'où :

$$\mathcal{P} = \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) \cdot \dot{\theta}$$

II. L'énergie cinétique :**II.1. Cas d'un point matériel.**

Définition : On appelle énergie cinétique d'un point matériel à un instant donné, le demi – produit de sa masse par le carré du module de sa vitesse à cet instant.

On la note :

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 \quad (J)$$

II.2. Cas d'un système matériel.

Pour un système matériel en mouvement de translation :

$$E_C = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}m_i v^2 = \frac{1}{2}v^2 \sum_{i=1}^n m_i$$

$$\text{en posant } \sum_{i=1}^n m_i = M$$

D'où :

$$E_C = \frac{1}{2}Mv^2$$

➤ Si le solide est animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe (Δ) .

$$E_C = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}m_i v^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}m_i(R_i \omega)^2$$

$$E_C = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{i=1}^n m_i R_i^2$$

$$\text{comme } \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 = J_{\Delta}$$

D'où :

$$E_C = \frac{1}{2}J_{\Delta}\dot{\theta}^2$$

➤ Si le solide est animé d'un mouvement complexe, c'est – à – dire une translation et une rotation simultanément :

$$E_C = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}J_{\Delta}\dot{\theta}^2$$

Exemple : Evaluons l'énergie cinétique d'une bille homogène de masse M , qui roule sans glisser sur un plan quelconque (figure 5).



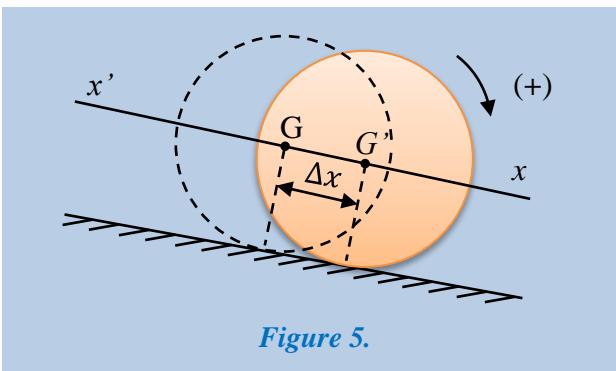


Figure 5.

$$E_C = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}J_{\Delta}\dot{\theta}^2$$

avec $J_{\Delta} = \frac{2}{5}MR^2$; $\dot{\theta} = \frac{v}{R}$

$$\Rightarrow E_C = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}MR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2$$

$$E_C = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{5}Mv^2$$

D'où :

$$E_C = \frac{7}{10}Mv^2$$

II.3. Théorème de l'énergie cinétique.

❖ Enoncé :

La variation de l'énergie cinétique d'un système matériel entre deux instants donnés est égale à la somme algébrique des travaux effectués entre ces instants par toutes les forces (intérieures et extérieures) qui s'exercent sur les diverses parties du système.

$$\Delta E_C = \sum W_{\vec{F}_{ext}} + \sum W_{\vec{F}_{int}}$$

➤ Pour un système indéformable :

$$\sum W_{\vec{F}_{int}} = 0 \Rightarrow \Delta E_C = \sum W_{\vec{F}_{ext}}$$

Soit :

$$\Delta E_C = E_{C_f} - E_{C_i} = \sum W_{\vec{F}_{ext}}$$

Note : Un système matériel est :

- *Déformable si les distances entre les points matériels qui le composent sont variables* ; c'est le cas d'un ressort, d'un fil de torsion, d'une balle élastique, ... , ou encore du

système solaire comprenant le soleil, les planètes et leurs satellites.

- **Indéformable**, si au contraire ses éléments matériels demeurent dans des positions relatives *invariables*. Ce que nous appelons un solide, tel qu'une masse marquée, une pierre, un projectile avant son éclatement, ... est un système matériel pratiquement indéformable.

III. L'énergie potentielle.

III.1. Définition.

L'énergie potentielle est liée à la position ou à la déformation d'un système mécanique.

C'est aussi l'énergie en réserve que possède un système et qu'il peut utiliser pour accomplir un travail.

III.2. Energie potentielle de quelques systèmes.

a) Energie potentielle de pesanteur

Considérons un corps de masse *m* qui tombe en décrivant une trajectoire quelconque entre une position (1) d'altitude z_1 et une position (2) d'altitude z_2 (figure 6).

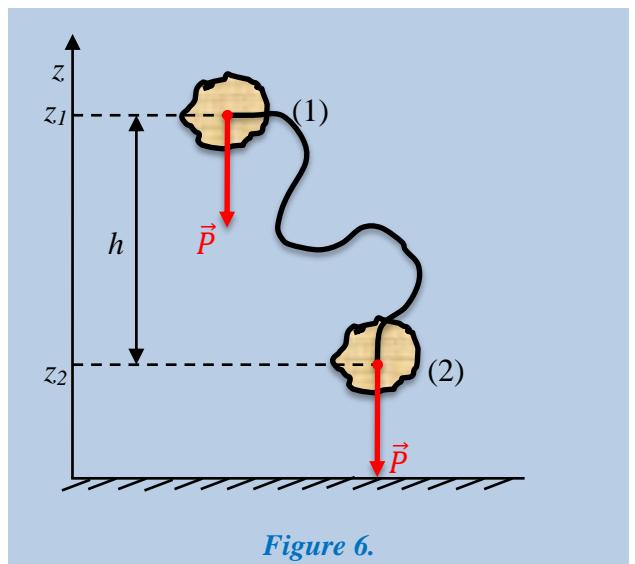


Figure 6.

$$E_{P_P} = mgh$$



b) Energie potentielle élastique.

Considérons un corps de masse m suspendu à un ressort de *constante de raideur* K , tiré vers le bas puis lâché. Sa position en mouvement est donnée par l'abscisse x (figure 7).

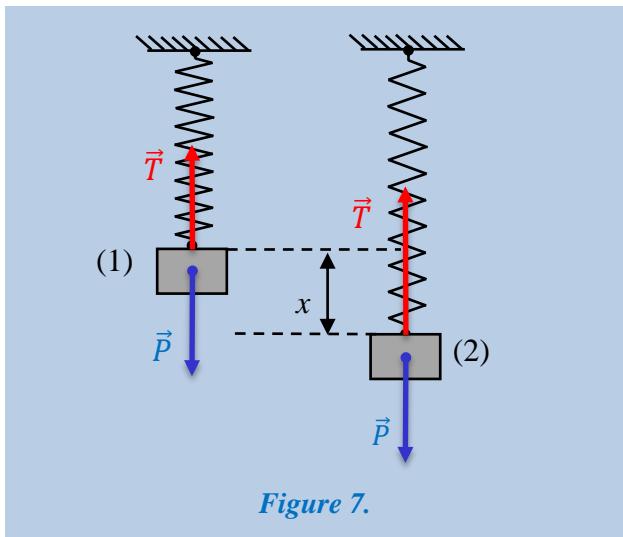


Figure 7.

$$E_{Pe} = \frac{1}{2} Kx^2$$

c) Energie potentielle de torsion.

Considérons une tige homogène de masse m suspendu à un fil de torsion de *constante de torsion* C , écarté d'un angle θ puis lâché. Sa position en mouvement est donnée par l'*abscisse angulaire* θ (figure 8).

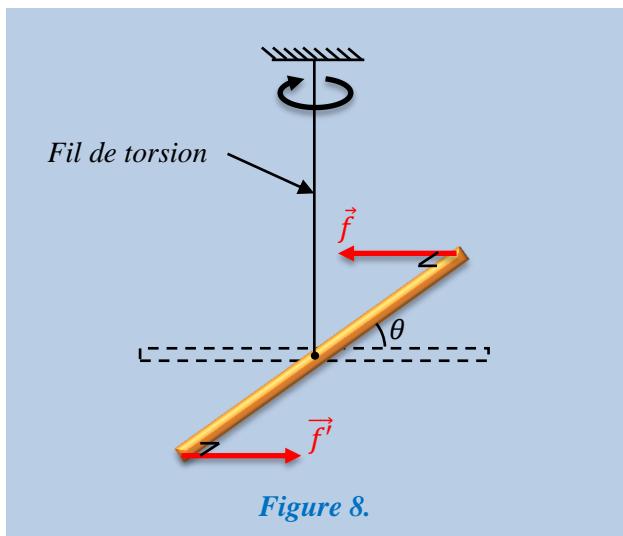


Figure 8.

$$E_{Pt} = \frac{1}{2} C\theta^2$$

III.3. Théorème de l'énergie potentielle.**Enoncé :**

Entre l'état final et l'état initial, la variation de l'énergie potentielle d'un système isolé est l'opposé de la somme des travaux des forces conservatives appliquées au système.

$$\Delta E_P = - \sum W_{\vec{F}_{cons}}$$

Soit :

$$E_{P_f} - E_{P_i} = - \sum W_{\vec{F}_{cons}}$$

IV. Energie mécanique.**IV.1. Expression de l'énergie mécanique.**

L'énergie mécanique d'un système dans un état donné est égale à la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle dans cet état.

$$E_M = E_C + E_P$$

IV.2. Energie mécanique de quelques systèmes.**a) Energie mécanique d'un corps qui tombe en chute libre.**

Considérons un corps de masse m qui tombe en chute libre, d'une *hauteur* h , animé d'une *vitesse* v (figure 9).

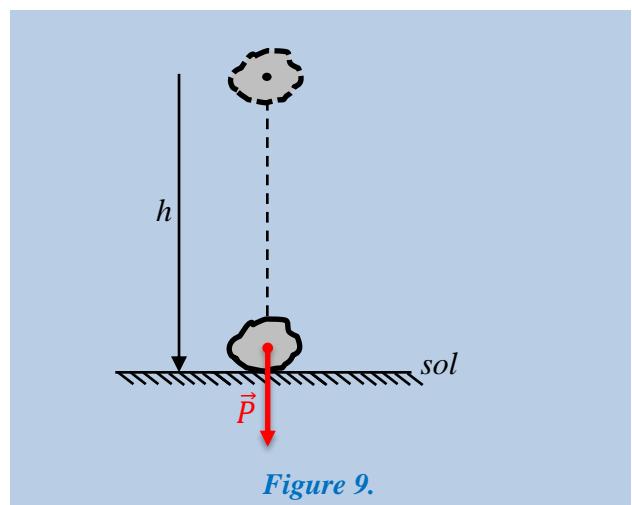


Figure 9.

$$E_M = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$



b) Energie mécanique d'un pendule élastique horizontal.

Considérons un corps de masse m accroché à un ressort de *constante de raideur* K , l'ensemble est posé sur un plan horizontal. On écarte le corps de sa position d'équilibre puis on le lâche. Animé de la vitesse $v = \dot{x}$, sa position est donnée par l'*abscisse* x (figure 10).

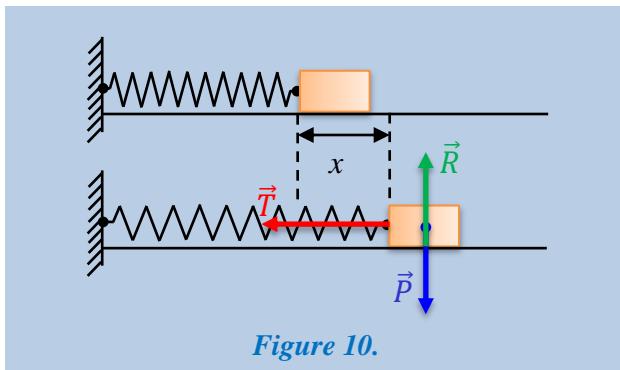


Figure 10.

$$E_M = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Kx^2$$

c) Energie mécanique d'un pendule élastique vertical.

Considérons un corps de masse m suspendu à un ressort de *constante de raideur* K , tiré vers le bas puis lâché. Animé de la vitesse $v = \dot{x}$, sa position est donnée par l'*abscisse* x (figure 11).

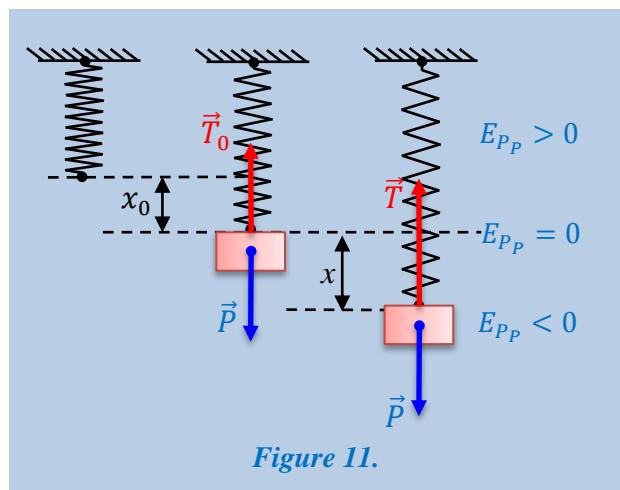


Figure 11.

$$E_M = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}K(x_0 + x)^2 - mgx$$

d) Energie mécanique d'un pendule de torsion.

Considérons une tige homogène de masse m suspendu à un fil de torsion de *constante de torsion* C , écarté d'un angle θ puis lâché. Animé de la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$, sa position est donnée par l'*abscisse angulaire* θ (figure 12).

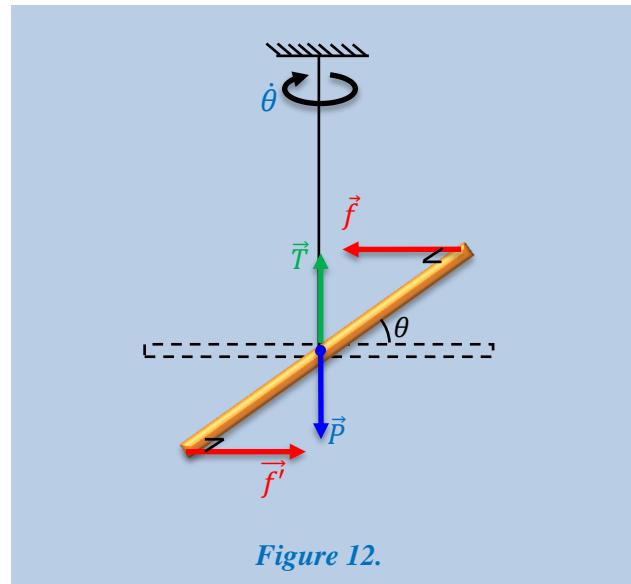


Figure 12.

$$E_M = \frac{1}{2}J_{\Delta}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\theta^2$$

e) Energie mécanique d'un pendule pesant.

Considérons un solide de masse m suspendu à un axe de rotation, écarté d'un angle θ puis lâché. Animé de la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$, sa position est donnée par l'*abscisse angulaire* θ (figure 12).

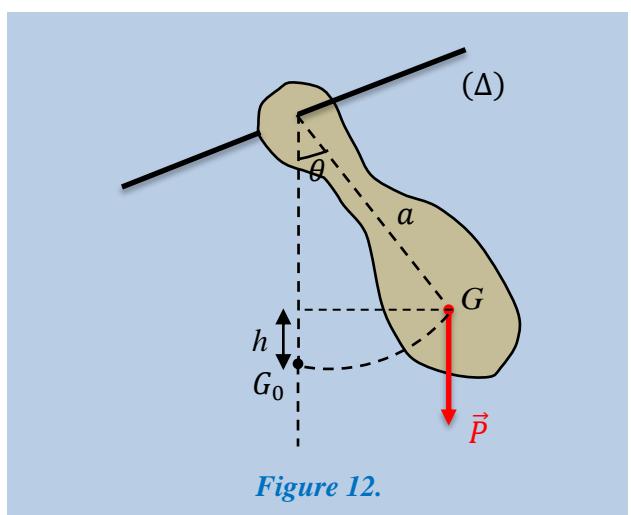


Figure 12.



$$E_M = \frac{1}{2}J_{\Delta}\dot{\theta}^2 + mga(1 - \cos\theta)$$

IV.3. Théorème de l'énergie mécanique (T.E.M.).

❖ **Enoncé :**

Entre l'état final et l'état initial, la variation de l'énergie mécanique d'un système non conservatif, vaut la somme des travaux des forces extérieures et des forces intérieures non conservatives.

$$\Delta E_M = \sum W_{\vec{F}_{ext}} + \sum W_{\vec{F}_{int(nc)}}$$

Soit :

$$E_{M_f} - E_{M_i} = \sum W_{\vec{F}_{ext}} + \sum W_{\vec{F}_{int(nc)}}$$

Remarques :

R₁ : Si la somme des travaux des forces extérieures est nulle le T.E.M s'écrit :

$$\Delta E_M = E_{M_f} - E_{M_i} = \sum W_{\vec{F}_{int(nc)}}$$

R₂ : Si le système est conservatif, le T.E.M s'écrit :

$$\Delta E_M = E_{M_f} - E_{M_i} = \sum W_{\vec{F}_{ext}}$$

R₃ : On appelle force conservative, une force dont le travail ne dépend pas du chemin suivi.

IV.4. Conservation de l'énergie mécanique.

Lorsque seules les forces conservatives travaillent, le système devient conservatif, donc isolé. Son énergie mécanique devient constante.

Ainsi : $\sum W_{\vec{F}_{ext}} = 0$

Soit : $\Delta E_M = \Delta E_C + \Delta E_P = 0$

$$\Rightarrow E_{C_f} - E_{C_i} + E_{P_f} - E_{P_i} = 0$$

$$\Rightarrow E_{C_f} + E_{P_f} - (E_{C_i} + E_{P_i}) = 0$$

$$\Rightarrow E_{M_f} = E_{M_i} = cte$$

D'où :

$$E_M = cte \Rightarrow \frac{dE_M}{dt} = 0$$

V. Etude d'un choc élastique.

Définition : On appelle choc élastique, une interaction entre deux mobiles au cours de laquelle la quantité de mouvement et l'énergie cinétique se conservent.

Après le choc, les deux mobiles se séparent.

Considérons un choc élastique entre deux solides (billes) de masses respectives m_1 et m_2 , tel que le solide de masse m_1 animé d'une vitesse \vec{v}_1 vienne heurter le solide de masse m_2 , au repos (figure 13).

➤ *Avant le choc*



Figure 13.

$$\begin{cases} \vec{p}_{av} = \vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1 \\ E_{Cav} = E_{C_1} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \end{cases}$$

➤ *Après le choc*

Les deux solides se séparent et se déplacent respectivement à des vitesses \vec{v}'_1 et \vec{v}'_2 (figure 14)

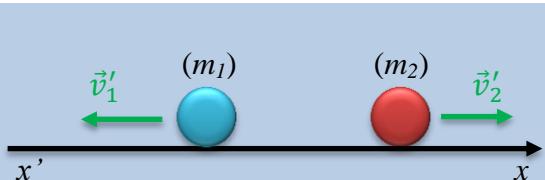


Figure 14.

$$\begin{cases} \vec{p}_{ap} = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 \\ E_{Cap} = E'_{C_1} + E'_{C_2} = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 \end{cases}$$

D'après la conservation du vecteur quantité de mouvement et de l'énergie cinétique, on a :

$$\begin{cases} \vec{p}_{ap} = \vec{p}_{av} \\ E_{Cap} = E_{Cav} \\ \Rightarrow \begin{cases} m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 = m_1 \vec{v}_1 \\ \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 = \frac{1}{2} m v_1^2 \end{cases} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 = m_1 \vec{v}_1 \\ m_1 v'^2_1 + m_2 v'^2_2 = m_1 v^2_1 \end{cases}$$

Après projection on trouve :

$$\begin{cases} m_1 v'_1 + m_2 v'_2 = m_1 v_1 \\ m_1 v'^2_1 + m_2 v'^2_2 = m_1 v^2_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1(v_1 - v'_1) = m_2 v'_2 & (1) \\ m_1(v^2_1 - v'^2_1) = m_2 v'^2_2 & (2) \end{cases}$$

En faisant le rapport des relations (2) et (1), on trouve : $v_1 + v'_1 = v'_2$ (3).

En remplaçant la relation (3) dans (1), on trouve finalement :

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

Conclusion :

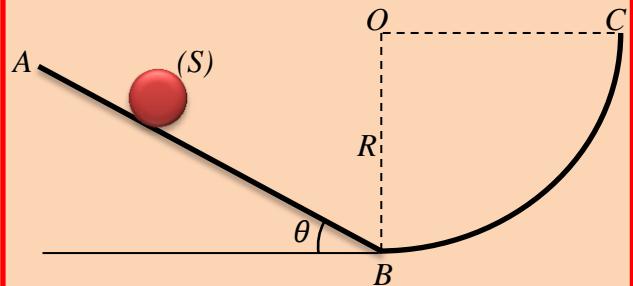
- Si $m_1 < m_2$, alors $v'_1 < 0$, le solide de masse m_1 rebrousse chemin après le choc.
Les deux solides se déplacent en sens inverses.
- Si $m_1 > m_2$, alors $v'_1 > 0$, le solide de masse m_1 se déplace dans le même sens que celui de masse m_2 .

Exercice d'application.

1°) Une sphère homogène de masse $m = 500g$ et de rayon $r = 10cm$ part sans vitesse initiale du sommet A du plan incliné de pente 14%. Il roule sans glisser jusqu'au pied B de la pente.

- En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, établis l'expression de l'accélération.
 - Quelle est l'énergie cinétique de la sphère au pied B de la pente ? $AB = 200cm$; $g = 10m.s^{-2}$.
- 2°) La sphère aborde le tronçon circulaire BC . On considère qu'elle ne perd pas d'énergie en B .
- La sphère atteindra-t-elle le lieu C ? justifie ta réponse.
 - A quelle altitude s'arrêtera-t-elle avant de rebrousser chemin ?

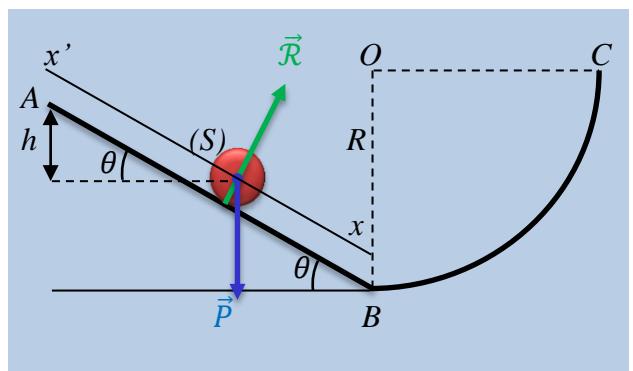
On donne : $H_C = R = 40cm$.



Corrigé.

$m = 500g$; $r = 10cm$; $\sin\alpha = 14\%$;
 $AB = 200cm$; $g = 10m.s^{-2}$; $H_C = R = 40cm$.

Schéma.



1°) a) Expression de l'accélération.

Système d'étude : Sphère de masse (m) en translation et rotation.

Bilan des forces extérieures : \vec{P} ; \vec{R}

D'après le théorème de l'énergie cinétique (T.E.C), on a :

$$\begin{aligned} \Delta E_C &= \sum W_{\vec{F}_{ext}} \\ \Rightarrow E_{C_f} - E_{C_i} &= \sum W_{\vec{F}_{ext}} \\ \Rightarrow E_{C_f} - E_{C_i} &= W_{\vec{P}} + W_{\vec{R}} \\ \text{La sphère étant partie sans vitesse initiale :} \\ v_i = 0 \Rightarrow E_{C_i} &= 0 \text{ et } W_{\vec{R}} = 0 \\ \text{ainsi } E_{C_f} &= W_{\vec{P}} \\ \Rightarrow E_{C_t} + E_{C_r} &= W_{\vec{P}} \\ \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 &= P.h \\ \text{avec } h &= xsin\theta ; J = \frac{2}{5}mr^2 \text{ et } \dot{\theta} = \frac{v}{r} \\ \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mr^2 \left(\frac{v}{r}\right)^2 &= mgxsin\theta \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{5}mv^2 = mgx\sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{7}{10}mv^2 = mgx\sin\theta$$

Dérivons membre à membre :

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{7}{10}v^2\right) = \frac{d}{dt}(gx\sin\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{7}{10} \cdot \frac{d}{dt}(\dot{x}^2) = g\sin\theta \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{10}(2\ddot{x}\dot{x}) = g\sin\theta(\dot{x})$$

Avec $\ddot{x} = a$ et $\dot{x} = v$

$$\text{Alors : } \frac{7}{5}av = gv\sin\theta$$

D'où :

$$a = \frac{5}{7}g\sin\theta$$

$$\text{A.N : } a = \frac{5}{7} \times 10 \times \frac{14}{100} = 1$$

$$a = 1m/s^2$$

b) Energie cinétique de la sphère au pied B de la pente.

D'après ce qui précède, on a : $E_{C_f} = W_{\vec{P}}$

Au pied B de la pente : $E_{C_B} = W_{\vec{P}}$

$$\Rightarrow E_{C_B} = P.h$$

$$\Rightarrow E_{C_B} = mgx\sin\theta$$

Au pied B de la pente $x = AB$

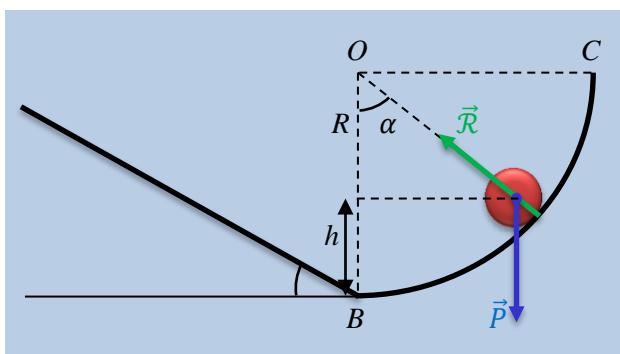
D'où :

$$E_{C_B} = mgAB \cdot \sin\theta$$

$$\text{A.N : } E_{C_B} = 0,5 \times 10 \times 2 \times \frac{14}{100} = 1,4$$

$$E_{C_B} = 1,4J$$

2*) a) Vérifions si la sphère atteindra le lieu C.



La sphère atteindra le lieu C si $\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} \\ v_C \geq 0 \end{cases}$

D'après le T.E.C, on a :

$$\Delta E_C = \sum W_{\vec{F}_{ext}}$$

$$\Rightarrow E_{C_C} - E_{C_B} = W_{\vec{P}} + W_{\vec{R}} ; \text{ avec } W_{\vec{R}} = 0$$

$$\Rightarrow E_{C_C} - E_{C_B} = W_{\vec{P}}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{10}mv_C^2 - E_{C_B} = -mgh$$

Au point C, $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow h = H_C = R$

$$\Rightarrow \frac{7}{10}mv_C^2 - E_{C_B} = -mgR$$

D'où :

$$v_C^2 = \frac{10}{7} \left(\frac{E_{C_B}}{m} - gR \right)$$

$$\text{A.N : } v_C^2 = \frac{10}{7} \left(\frac{1,4}{0,5} - 10 \times 0,4 \right) = -1,71$$

$v_C^2 = -1,71 < 0$, impossible v_C n'existe pas, donc la sphère n'atteindra pas le point C.

b) Altitude à laquelle s'arrêtera la sphère avant de rebrousser chemin ?

D'après ce qui précède : $E_{C_f} - E_{C_i} = W_{\vec{P}}$

$$E_{C_f} - E_{C_B} = -mgh'$$

$$\text{A l'arrêt } v_f = 0 \Rightarrow E_{C_f} = 0$$

$$\text{Alors : } -E_{C_B} = -mgh'$$

D'où :

$$h' = \frac{E_{C_B}}{mg}$$

$$\text{A.N : } h' = \frac{1,4}{0,5 \times 10} = 0,28$$

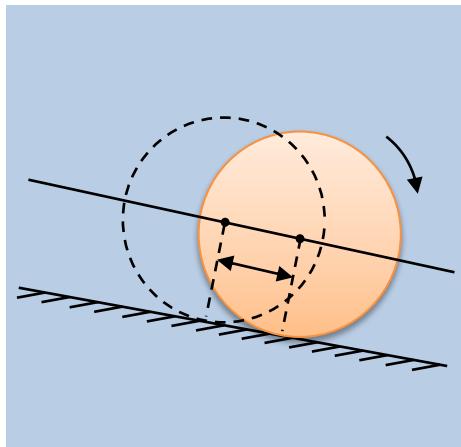
$$h' = 0,28m$$



TRAVAUX DIRIGÉS V

Conseils pratiques :

1. Techniques de réalisation des schémas.
2. Projection des forces dans un repère.
3. Théorème de l'accélération angulaire (T.A.A)
4. Energies des systèmes mécaniques.
5. Théorèmes des énergies : T.E.C ; T.E.P et T.E.M.
6. Conservation de l'énergie mécanique.



L'ESSENTIEL DU COURS

I – Définitions des notions.

Définis les termes suivants : Moment cinétique d'un point matériel, Moment d'une force, Moment d'inertie d'un système, Energie cinétique et énergie potentielle d'un point matériel.

II – Questions à réponses courtes.

Réponds aux questions suivantes.

- 1°) Enonce :
 - a) Le théorème de l'accélération angulaire ;
 - b) Le théorème de l'énergie cinétique ;
 - c) Le théorème d'Huygens.
- 2°) Le travail du poids d'un corps dépend – il du chemin suivi ?
- 3°) Quand dit – on qu'un travail est moteur ? résistant ?
- 4°) Donne l'expression de l'énergie mécanique des systèmes suivants :
 - a) Sphère de masse m , de rayon R , roulant sur un plan incliné d'angle α par rapport à l'horizontale.
 - b) Solide de masse m accroché à l'extrémité inférieure d'un ressort vertical suspendu à un support fixe, tiré vers le bas puis lâché sans vitesse initiale.
 - c) Pendule pesant de masse m , de centre d'inertie G , écarté d'un angle θ faible par rapport à la verticale puis lâché sans vitesse initiale.

III – Texte à Trou.

Ecris les phrases suivantes en complétant les mots manquants :

Lorsque seules les forces ...⁽¹⁾... travaillent, le système devient ...⁽²⁾..., donc isolé. Entre l'état final et l'état initial, la variation de l'énergie ...⁽³⁾... d'un système non conservatif, vaut la somme des ...⁽⁴⁾... des forces extérieures et forces intérieures non ...⁽⁵⁾.... C'est le théorème de l'énergie mécanique. Le travail du ...⁽⁶⁾... ne dépend pas du chemin suivi, mais de la différence d'...⁽⁷⁾... entre deux ...⁽⁸⁾... A et A'.

IV – Appariement.

Relie un élément – question de la colonne A à un élément – réponse de la colonne B dans le tableau ci-dessous : Exemple $a_9 = b_{10}$

Colonne A		Colonne B	
a_1	Conservation de l'énergie mécanique	b_1	$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = F_\perp \cdot d$
a_2	Théorème de l'accélération angulaire	b_2	$E_C = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_\Delta \dot{\theta}^2$



a ₃	Energie cinétique d'une sphère roulant sur un plan horizontal.	b ₃	$\frac{dE_M}{dt} = 0$
a ₄	Moment d'une force	b ₄	$\Delta E_C = \sum W_{\vec{F}_{ext}}$
a ₅	Moment d'inertie d'une barre homogène	b ₅	$E_M = \frac{1}{2}J_\Delta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\theta^2$
a ₆	Energie mécanique d'un pendule de torsion	b ₆	$\Sigma \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{ext}) = J_\Delta \ddot{\theta}$
a ₇	Théorème de l'énergie cinétique	b ₇	$J_\Delta = \frac{1}{12}m\ell^2$

V – Questions à alternative vrai ou faux.

Réponds par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

- 1°) Le moment d'inertie d'un système est une grandeur algébrique.
- 2°) Le moment d'une force est nul lorsque :
 - a) La force est perpendiculaire au bras de Levier.
 - b) La force est parallèle à l'axe de rotation.
 - c) La direction de la force rencontre l'axe de rotation.
- 3°) Le moment d'un couple de force résistant est négatif.
- 4°) Le théorème d'Huygens s'applique dans la détermination du moment d'inertie d'un système lorsque l'axe de rotation passe par le centre d'inertie du système.
- 5°) Le travail du poids est résistant lorsque le système se déplace sur un plan horizontal.
- 6°) L'énergie cinétique est l'énergie liée à la position ou à la déformation d'un corps.
- 7°) Le travail du poids ne dépend pas du chemin suivi, mais seulement de la différence de niveau entre la position initiale et la position finale.
- 8°) Le moment d'inertie d'une tige homogène par rapport à un axe passant par l'une de ses extrémités vaut : $J_\Delta = \frac{1}{3}m\ell^2$.
- 9°) L'énergie potentielle d'un solide en chute parabolique s'annule au sommet de sa trajectoire, lorsque le niveau de référence est pris au sol.
- 10°) L'énergie mécanique d'un système isolé se conserve.

RESOLUTION DES PROBLEMES

EXERCICE 1 : Un disque D , mince et homogène a pour centre O , pour rayon $R = 20cm$ et pour masse M . Il peut osciller sans frottements dans un plan vertical, autour d'un axe horizontal (Δ) perpendiculaire à son plan et passant par le milieu O_1 d'un de ses rayons. En un point A symétrique de O_1 par rapport à O , centre de masse du disque, on place une surcharge ponctuelle S de masse $m = \frac{M}{2}$.

Etablis l'expression du moment d'inertie de l'ensemble.

EXERCICE 2 : Une sphère homogène de rayon $R = 5,0cm$ et de masse $M = 0,2Kg$ peut tourner sans frottements autour de son axe de révolution horizontal (Δ). La sphère est traversée suivant un diamètre passant par son centre de symétrie O , par une tige (T) considérée sans masse, portant à son extrémité A une masse ponctuelle $m = \frac{M}{2} = 0,1 Kg$.

La longueur totale est $AB = 2L = 90cm$ et $OA = OB = L$.

1°) Montre que la position du centre d'inertie G du système est $OG = \frac{1}{3}L$ puis fais l'application numérique.

2°) Montre que le moment d'inertie du système par rapport à (Δ) est :

$$J_{S/\Delta} = M \left(\frac{2R^2}{5} + \frac{L^2}{2} \right)$$

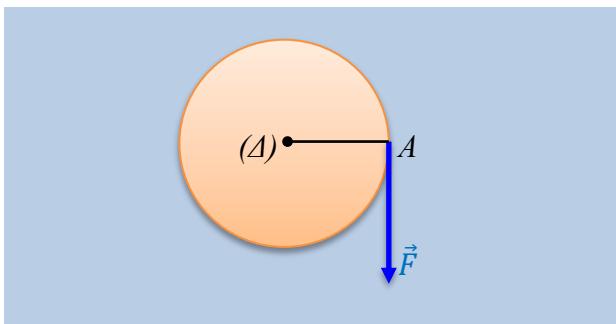
EXERCICE 3 : Le schéma ci – dessous représente un disque homogène de moment d'inertie J_A et de rayon r , mobile autour de son axe de révolution.

1°) Partant du repos, sous l'effet de la force tangentielle \vec{F} , le disque atteint une vitesse angulaire ω en un temps Δt_f .

a) Détermine le moment \mathcal{M}_f des forces de frottement.

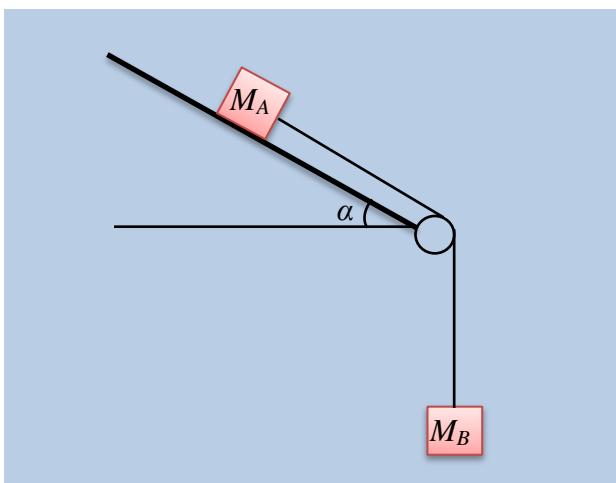


- b) Quel est le nombre de tours effectués par le disque ?
- 2°) Lorsque le disque atteint la vitesse ω , la force \vec{F} cesse d'agir.
- Calcule la décélération du mouvement ultérieur du disque.
 - Déduis – en la durée Δt_2 de cette phase décélérée.



On donne : $J_\Delta = 10^{-2} \text{Kg.m}^2$; $r = 10\text{cm}$; $F = 10\text{N}$; $\omega = 200\pi \text{rad.s}^{-1}$; $\Delta t_1 = 10\text{s}$.

EXERCICE 4 : On considère le système représenté par la figure ci – dessous :



$M_A = M_B = M$. Les résistances de l'air parallèles au plan incliné ont une intensité $f = 2N$. La poulie est de masse négligeable, le système étant abandonné à lui – même sans vitesse initiale.

1°) En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, détermine l'accélération du mouvement.

2°) Calcule la tension du fil.

Données : $M = 2\text{Kg}$; $\alpha = 30^\circ$.

EXERCICE 5 : Un disque plan D , vertical et homogène, de masse $m = 1\text{Kg}$ et de rayon $R = 10\text{cm}$, d'épaisseur constante, peut tourner autour d'un axe horizontal, perpendiculaire à son plan et passant par son centre O . Les frottements

sont équivalents à un couple résistant constant de moment \mathcal{M}_r .

Le disque D , parti du repos, acquiert en un temps $t = 10\text{s}$ une vitesse $N = 300\text{tr/min}$ sous l'action d'un couple moteur constant de moment $\mathcal{M}_m = 1,82 \cdot 10^{-2} \text{N.m}$.

1°) Détermine l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ du mouvement.

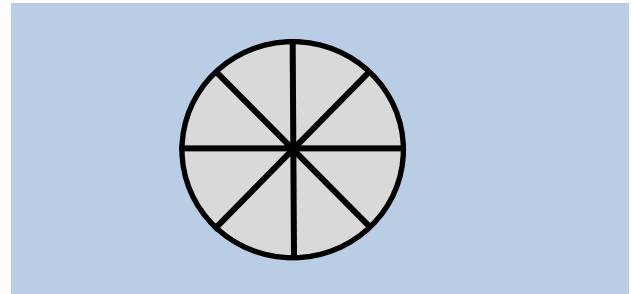
2°) Déduis – en :

- Le moment \mathcal{M}_r du couple résistant.
- Le nombre de tours effectués par le disque.
- Le travail fourni par le couple moteur dans l'intervalle du temps considéré.

EXERCICE 6 : Une roue est constituée d'une jante de masse M , de rayon R et de quatre tiges homogènes de masse chacune m et de longueur L . Les tiges régulièrement espacées se coupent au centre de la jante (le croisement des tiges ne modifie pas l'homogénéité de celles – ci).

1°) Calcule le moment d'inertie de la roue par rapport à un axe (Δ) passant par son centre.

A.N : $M = 0,10\text{Kg}$; $R = 30,0\text{cm}$; $m = 0,5\text{Kg}$.



2°) La roue est dans le plan horizontal. On applique au volant, un couple moteur, supposé constant pendant $\Delta t = 0,2\text{s}$. La roue atteint la vitesse de 20tr/s . On supprime l'action du couple moteur, la roue s'arrête au bout de 100 tours. Calcule :

- Le moment du couple moteur supposé constant.
- La norme de l'accélération linéaire d'un point de la périphérie de la roue à la fin de la première phase.
- Le moment du couple résistant supposé constant.

EXERCICE 7 : Un volant en fonte de $2,02\text{m}$ de diamètre extérieur est entraîné par un moteur qui en régime normal, lui donne une vitesse constante de 300tr/min autour d'un axe horizontal. Toute la matière est considérée comme répartie sur une jante



homogène de 10cm de largeur (ℓ), de 2cm d'épaisseur (e) et de rayon moyen $\rho = 1\text{m}$.

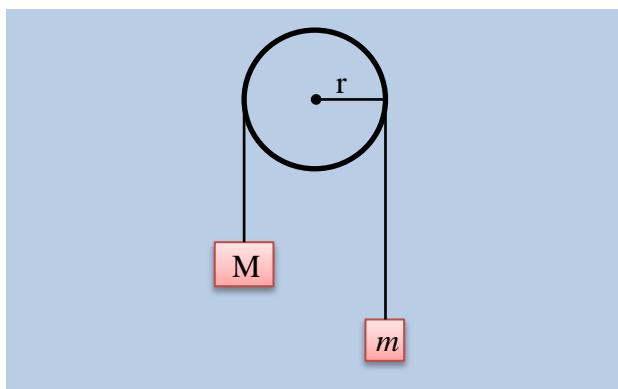
1°) Quelle est la vitesse angulaire du volant et son moment d'inertie par rapport à l'axe ?

2°) Le volant est freiné par un couple constant et s'arrête après avoir tourné 50 fois. On demande de calculer le travail effectué par le frein ainsi que le couple de freinage. On donne la masse volumique de la fonte $\mu = 7,7\text{g/cm}^3$.

EXERCICE 8 : Une automobile (avec son conducteur) a une masse de 1000Kg . Pour simplifier, on admettra dans tout le problème que la somme de toutes les forces de frottement est constante, parallèle au déplacement et égale à 150N .
1°) Calcule la puissance que doit développer le moteur de cette automobile pour maintenir une vitesse de 72Km/h sur une route horizontale.

2°) A cette vitesse de 72Km/h cette voiture aborde une courbe horizontale de 200m de rayon. De quel angle doit être relevée la route pour qu'il n'y ait aucune force tendant à faire déraper le véhicule ?
3°) L'automobile monte une pente de 2% . Calcule la nouvelle puissance pour maintenir la vitesse de 72Km/h .

EXERCICE 9 : Sur la gorge d'une poulie de masse 100g de rayon $r = 6\text{cm}$ mobile sans frottements autour d'un axe horizontal, passe un fil de masse négligeable. Ce fil porte une masse $M = 300\text{g}$ et une masse $m = 100\text{g}$, on suppose que la masse de la poulie est repartie à la périphérie d'une jante.



La masse M se trouve à 3m du sol, la masse m est au niveau du sol sans toutefois y reposer. On abandonne le système à $t = 0$, $g = 9,8\text{m/s}^2$.

- 1°) Quelle est l'équation horaire de M ?
2°) Calcule la tension de chaque brin de fil pendant le mouvement.
3°) Calcule la vitesse de M quand elle arrive au sol.
4°) Quelle est alors la vitesse angulaire de la poulie ?

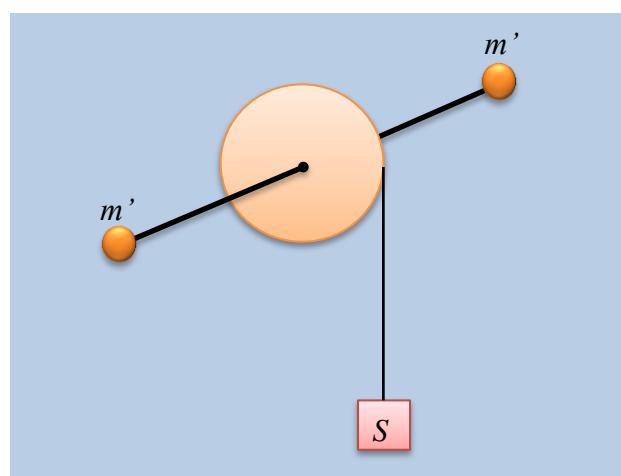
Quelle force \vec{f} appliquer tangentiellement à la poulie pour qu'elle s'arrête au bout de 6 tours ; le fil supportant m étant coupé quand M arrive au sol ?

EXERCICE 10 : Deux corps A et B de même masse $m = 200\text{g}$ d'une machine d'ATWOOD s'équilibrivent exactement. On lance A vers le bas avec une vitesse de 2m/s , il parcourt une distance $h = 50\text{cm}$ au cours de laquelle sa vitesse diminue régulièrement et s'annule.

- En utilisant le théorème de l'énergie mécanique :
1°) Calcule l'intensité des forces de frottement assimilables à un couple tangentiel constant sachant que la masse de la poulie uniformément répartie sur la jante est $M = 100\text{g}$.
2°) Quelle serait la valeur d'une surcharge qui placée en A permettrait au dispositif lancé à la vitesse de 2m/s comme précédemment, de conserver cette vitesse ?

EXERCICE 11 : Un cylindre homogène de rayon $R = 5\text{cm}$ de masse $m_1 = 1\text{Kg}$, peut tourner autour de son axe de révolution horizontal ; il soutient un solide de masse $m_2 = 10\text{Kg}$ par l'intermédiaire d'une corde enroulé sur le cylindre.

Le cylindre est traversé suivant un diamètre, par la tige T portant deux masses égales de valeurs $m' = 0,5\text{Kg}$, pratiquement confondues avec leurs centres de masses situés à $\ell = 50\text{cm}$ de l'axe. Le système est abandonné à lui – même sans vitesse initiale.



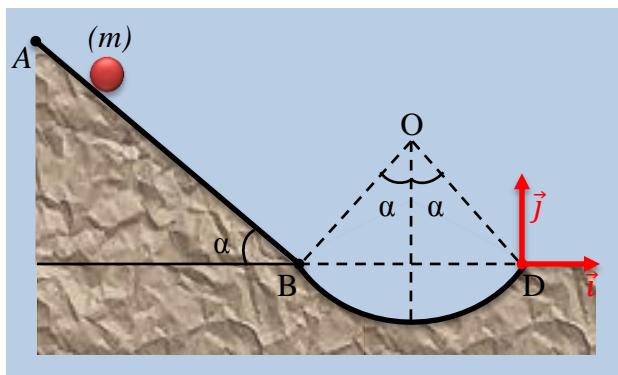
1°) En négligeant les masses de la corde et de la tige T ainsi que les résistances passives, calcule l'accélération du mouvement de S et la tension de la corde pendant ce mouvement.

- 2°) La corde quitte le cylindre quand S est descendu de $h = 5\text{m}$. Calcule la vitesse angulaire du cylindre



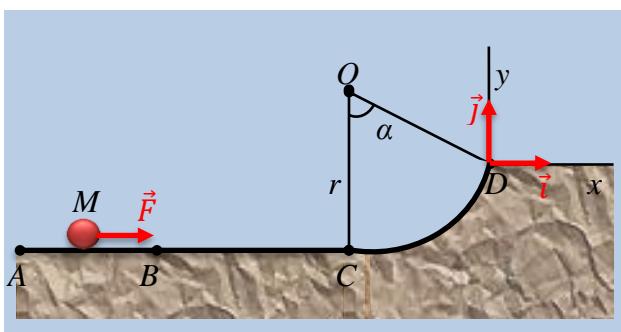
à cet instant (en rad.s^{-1} et en tr.s^{-1}) et le nombre de tours effectués par le cylindre depuis le départ. On donne : $g = 10\text{m.s}^{-2}$.

EXERCICE 12 : Une piste est constituée par un plan AB , de longueur $L = 0,8\text{m}$, incliné d'un angle $\alpha = 60^\circ$ sur l'horizontale se raccordant tangentielle à une surface cylindrique BCD de rayon $r = OB = 0,5\text{m}$. L'extrémité D de la piste est au même niveau que B . Un solide supposé ponctuel de masse $m = 50\text{g}$ est posé, sans vitesse initiale, au point A et glisse sans frottement le long de la piste.



- 1°) Calcule la vitesse du solide lors de son passage en D .
- 2°) Détermine en appliquant le T.C.I, la force exercée par la piste sur le solide en D .
- 3°) Etablis dans le repère (D, \vec{i}, \vec{j}) , l'équation de la trajectoire du solide au – delà de D .
- 4°) Quelle est l'ordonnée du point S , sommet de la trajectoire.

EXERCICE 13 : La piste de lancement d'un projectile M comprend une partie rectiligne ABC et une portion circulaire CD , centrée en O , de rayon $r = 1\text{m}$, d'angle au centre $\alpha = 60^\circ$ et telle que OC soit perpendiculaire à AC . Le projectile M assimilable à un point matériel de masse $m = 0,5\text{Kg}$, est lancé suivant AB de longueur 1m avec une force \vec{F} , horizontale et ne s'exerçant que sur AB (voir figure).



1°) a) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, détermine l'intensité minimale à donner à \vec{F} pour que le projectile quitte la piste en D .

b) L'intensité de la force est 150N . Donne la valeur numérique de la vitesse V_D avec laquelle le projectile quitte la piste en D .

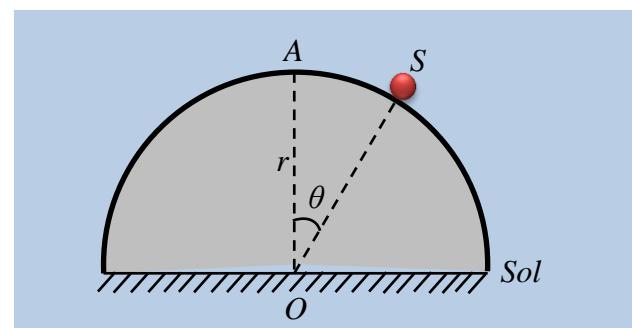
2°) a) Donne l'équation de la trajectoire du solide au – delà de D dans le repère orthonormé d'origine D .

b) Quelle est la hauteur maximale atteinte au – delà de l'horizontal ABC ?

c) Quelle est l'intensité de la force exercée par le projectile sur la piste au moment de la quitté en D avec la vitesse \vec{V}_D précédente ?

Données : $g = 10\text{m/s}^2$.

EXERCICE 14 : Un petit solide S de masse m , glisse sans frottements sur un demi – cylindre de rayon r , de centre O . Il est lâché du sommet A sans vitesse initiale et sa position est déterminée par l'angle $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OS})$.



- 1°) Exprime la vitesse de S en fonction de r , g et θ .
- 2°) Donne une expression de l'intensité de la réaction R , exercée par le cylindre sur le solide en fonction de m , g et θ .

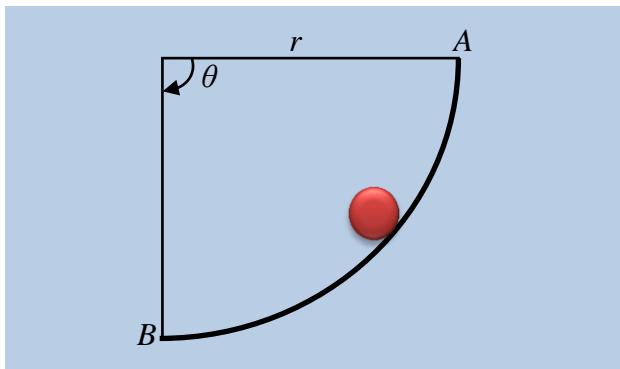
3°) Le solide ne reste pas en contact avec le cylindre jusqu'au sol.

- a) Détermine l'angle θ_0 pour lequel S décolle du cylindre.
- b) Quel est le mouvement ultérieur de S ?
- c) Quelles sont les caractéristiques du vecteur vitesse \vec{v}_0 au point de décollage (module et direction).

On donne : $g = 10\text{m/s}^2$; $r = 1\text{m}$.

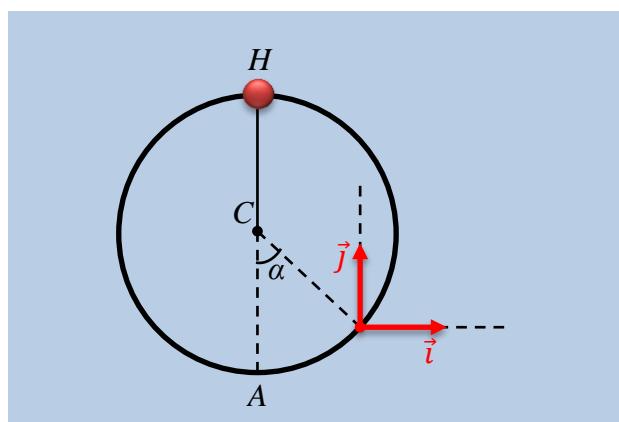
EXERCICE 15 : Un solide de masse $m = 1\text{Kg}$ roule le long d'une piste ayant la forme d'un arc de cercle de rayon $r = 40\text{cm}$ et d'angle $\theta = 90^\circ$ (voir figure). On considère que les frottements qui s'exercent lors de son déplacement sont tangents à sa trajectoire et opposés au mouvement, d'intensité $f = 2\text{N}$.





- 1°) En utilisant le T.E.C, calcule la vitesse acquise par le solide en B lorsqu'on l'abandonne en A sans vitesse initiale.
- 2°) Donne l'expression littérale de la réaction exercée par la piste sur le solide en fonction de m , g , f et θ ; calcule – la.
- 3°) Le solide quitte la piste en B et tombe en chute libre. Etudie la nature de son mouvement de chute (équations horaires et forme de sa trajectoire).
- 4°) On sait que la piste est placée à $1m$ au – dessus de B . Avec quelle vitesse le solide arrive – t – il au sol ? (utilise la méthode énergétique). Prendre $g = 10m.s^{-2}$.

EXERCICE 16 : Une bille de masse $m = 50g$, supposée ponctuelle, est utilisée comme projectile d'une fronde. Elle est accrochée à l'extrémité d'un fil inextensible, de masse négligeable, de longueur $\ell = 0,40m$. On fait tourner l'ensemble dans un plan vertical. La bille effectue un mouvement circulaire de centre C . Elle passe au point H le plus élevé de sa trajectoire avec une vitesse $V_H = 15,0m/s$. On négligera les frottements de l'air.



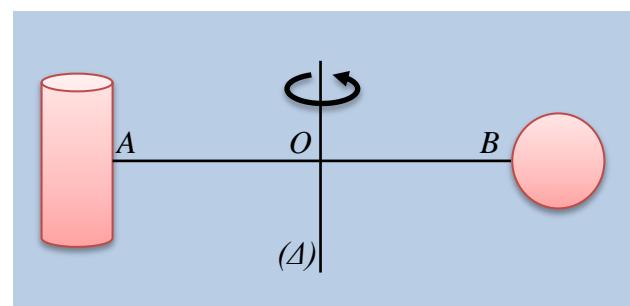
- 1°) Détermine la tension T du fil quand la bille passe au point H .
- 2°) La bille est lâchée en A tel que le rayon CA fasse avec la verticale du centre C un angle $\alpha = 30^\circ$.

En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, calcule la vitesse de la bille en A .

3°) Etablis dans le repère (A , \vec{i} , \vec{j}), l'équation cartésienne de la trajectoire de la bille après qu'elle soit lâchée. Quelle altitude maximale la bille atteint – elle si le centre C est à $1,40m$ au – dessus du sol ?

4°) Quelle est la durée du vol de la bille ?
Prendre $g = 10m.s^{-2}$.

EXERCICE 17 : On dispose d'une tige homogène de masse négligeable et de longueur $\ell = AB = 80cm$. On fixe à l'une de ses extrémités un cylindre de masse $m_1 = 2Kg$ et de rayon $r_1 = 4cm$ et à l'autre extrémité, une sphère homogène de masse $m_2 = 2Kg$ et de rayon $r_2 = 5cm$ comme l'indique la figure ci – dessous.



1°) Détermine la position du centre d'inertie de ce système.

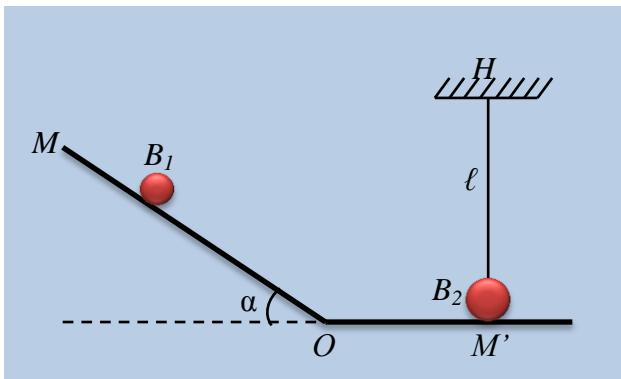
2°) On fait tourner la tige autour d'un axe passant par le centre de la tige. Calcule le moment d'inertie du système par rapport à l'axe.

3°) Initialement au repos, la tige est mise en rotation sous l'action d'un couple moteur de moment constant.

Sa vitesse devient égale à $33tr/min$ après 5 tours. Détermine la nature du mouvement du système. Calcule la valeur du moment moteur.

4°) Les frottements étant considérés négligeables, quelle sera la nature du mouvement quand on supprimera l'action du couple moteur. Calcule la vitesse tangentielle du point de la périphérie extérieure de la sphère placé le long de la tige dans ce cas.

EXERCICE 18 : Une bille B_1 , sphérique, de masse m_1 et de rayon R , de centre d'inertie G roule sans glisser le long de la ligne de plus grande pente d'un plan incliné, sous la seule action de son poids ; tous les frottements sont négligeables. La bille est abandonnée sans vitesse initiale en un point M du plan incliné d'un angle $\alpha = 10^\circ$ par rapport à l'horizontale (voir figure).



1°) Exprime, en fonction de m_1 , g , \overline{MO} et α , l'énergie potentielle de la bille B_1 au point le plus haut de la pente.

2°) Exprime, en fonction de sa masse m_1 et de la vitesse V_G de son centre d'inertie, l'énergie cinétique de la bille B_1 au point le plus bas de la pente.

3°) En utilisant le principe de la conservation de l'énergie mécanique d'un système, exprime, en fonction de \overline{MO} , g et α , la vitesse de la bille B_1 au passage par le point O.

A.N : $\overline{MO} = 15\text{cm}$; $\alpha = 10^\circ$; $g = 9,8\text{m/s}^2$.

4°) La bille B_1 continue de rouler d'un mouvement uniforme sur le plan horizontal $\overline{OM'}$ sans frottements. Au point M' , B_1 heurte une autre bille B_2 , supposée ponctuelle et située au bout d'un fil inextensible de masse négligeable, de longueur ℓ , accroché en un point H fixe. La bille B_2 a une masse $m_2 = \frac{3}{2}m_1$.

a) Exprime, en fonction de V_G , la vitesse de chacune des billes immédiatement après le choc, sachant que B_2 est initialement immobile. Fais l'application numérique.

b) Déduis de la question précédente, le sens du mouvement de chacune des billes juste après le choc.

c) Calcule l'altitude à laquelle remonte la bille B_1 sur le plan incliné MO et l'amplitude angulaire θ_m du pendule simple constitué par la bille B_2 et le fil auquel elle est fixée. On pourra utiliser le théorème de l'énergie cinétique. On donne $\ell = 1\text{m}$.

Dans tout l'exercice, le choc est considéré comme parfaitement élastique.

EXERCICE 19 : Un solide ponctuel (S) de masse $m = 100\text{g}$ est lancé d'un point A d'une glissière ABC avec une vitesse de 20m/s . Sur la portion AB qui est horizontale, les frottements sont équivalents à une force d'intensité $f = 75\text{N}$. Sur la portion

circulaire BC , les frottements sont négligeables. On donne $g = 10\text{m/s}^2$ et $AB = 20\text{cm}$.

1°) Détermine la valeur V_B du solide (S) au point B .

2°) Etablis l'expression de la vitesse V_M du solide au point M en fonction de V_B , g , r et θ .

3°) Etablis l'expression de la réaction R de la glissière sur le solide (S) au point M en fonction de V_B , g , r et θ .

4°) Déduis – en la valeur numérique de la réaction au point C .

EXERCICE 20 : Un point matériel M de masse m part sans vitesse initiale d'un point I situé à l'altitude h au dessus du plan horizontal (H). Il glisse le long d'une piste $ABOC$ se raccordant tangentiellement en O à (H). Sur la piste ABO le glissement s'effectue sans frottements.

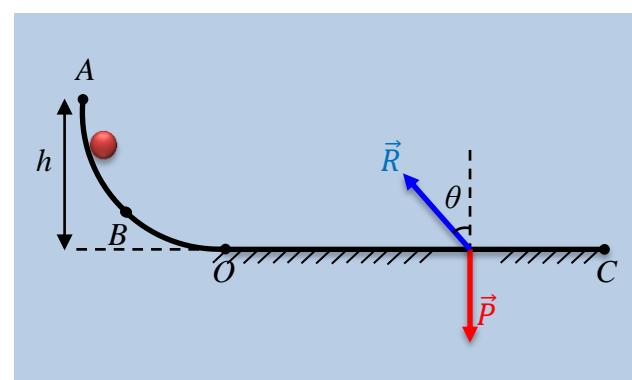
Sur le plan horizontal (H), l'existence des frottements fait que l'action \vec{R} exercée par (H) sur M est incliné de $\theta = 10^\circ$ sur la verticale.

1°) Calcule la vitesse de M lors de son passage au point O .

On donne : $m = 0,10\text{kg}$; $h = 1,2\text{m}$; $g = 9,8\text{m.s}^{-2}$.

2°) Après le passage de M au point O , par application de la RFD :

- Calcule R .
- Calcule l'accélération du mouvement de M ;
- Donne l'équation horaire du mouvement de M ;
- Calcule à quel instant et à quelle distance de O , M s'arrête.



DOMAINE D'ETUDE : MECANIQUE

OG₃ : ANALYSER LES SYSTEMES MECANIQUES EN MOUVEMENT.

7

**LES OSCILLATEURS
MECANIQUES****Définitions.**

- Un *oscillateur mécanique* est un système en mouvement de part et d'autre de sa position d'équilibre stable.

Dans ce cas, on dit que le système effectue un *mouvement oscillatoire*.

- Un *mouvement oscillatoire* est un mouvement périodique de va et vient autour d'une position d'équilibre qui se répète identique à lui – même à des intervalles de temps successifs égaux.
- La *période T* est la durée d'une oscillation complète ; c'est – à – dire l'intervalle de temps constant qui sépare deux passages au même point dans le même sens.
Elle se mesure en seconde (s).
- La *fréquence* correspond au nombre de périodes par seconde.

$$f = \frac{1}{T}$$

Elle se mesure en hertz (Hz).

- Les *oscillations sont libres* si, une fois écarté de sa position d'équilibre, le système susceptible d'osciller, est abandonné à lui – même.
- Si l'oscillateur n'est sousis à aucune *force dissipative* (frottements, résistance de l'air...), l'énergie mécanique totale est conservée.

On distingue deux types d'oscillateurs mécaniques :

- *Les oscillateurs mécaniques harmoniques* ;
- *Les oscillateurs mécaniques non harmoniques*.

A. Oscillateurs mécaniques harmoniques.

Définition : Un *oscillateur mécanique harmonique* est un oscillateur dont l'élongation du mouvement obéit à une fonction sinusoïdale du temps.

Suivant la nature de la trajectoire décrite par l'oscillateur, on distingue :

✓ *Les oscillations de translation.*

Exemple : Mouvement d'une masse accrochée à un ressort.

✓ *Les oscillations de rotation.*

Exemple : Mouvement d'un pendule de torsion ou celui du balancier d'une horloge.

I. Mouvement rectiligne sinusoïdal (MRS).**I.1. Etude cinématique.**

I.1.1. Définition : On dit qu'un point M est en mouvement rectiligne sinusoïdal lorsque son équation horaire est de la forme :

$$x = x_m \sin(\omega t + \varphi)$$

x : élongation de M (m)

x_m : amplitudde du mouvement ou élongation maximale (m)

($\omega t + \varphi$) : phase du mouvement à l'instant t.

ω : pulsation du mouvement (rad/s)

φ : phase initiale (rad)

Remarque :

✓ x_m , ω et φ sont des constantes déterminées à partir des conditions initiales du mouvement.



- ✓ Le mobile se déplace entre deux positions extrêmes $-x_m$ et $+x_m$ telque :
 $-x_m \leq x \leq +x_m$

Représentation graphique du sinusoïde.

$$x = x_m \sin(\omega t + \varphi)$$

Conditions initiales : à $t = 0$; $x = 0$

$$\Rightarrow 0 = x_m \sin \varphi \Rightarrow \varphi = 0$$

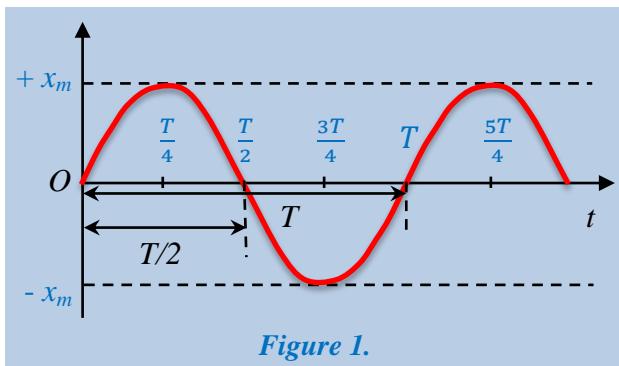
Ainsi :

$$x = x_m \sin \omega t$$

La représentation graphique de l'élongation x du mobile M aux différents instants t tels que consignés dans le tableau ci – dessous, en considérant des *intervalles de temps successifs et réguliers variant de $\frac{T}{4}$* donne la courbe sinusoïdale (*sinusoïde*) décrite par M.

t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T	$\frac{5T}{4}$	$\frac{3T}{2}$
x	0	$+x_m$	0	$-x_m$	0	$+x_m$	0

On obtient alors la courbe de la figure 1 ci – dessous :



I.1.2. Périodicité du mouvement.

A partir d'un instant t quelconque, le mouvement se reproduit identique à lui – même chaque fois que le temps augmente d'une *période*.

Un tel mouvement est dit *périodique*, de période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Avec : $\omega = 2\pi N = 2\pi f$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

I.1.3. Vitesse linéaire.

L'élongation de M étant de la forme :

$$x = x_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$v = \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = \omega x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x} = \omega x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

I.1.4. Accélération linéaire.

La vitesse de M obtenue en dérivant l'élongation de M est telle que :

$$\dot{x} = \omega x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$a = \ddot{x}(t) = \frac{d\dot{x}}{dt} = -\omega^2 x_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow a = -\omega^2 x_m \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$$

D'où :

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

I.1.5. Équation différentielle.

Une équation différentielle est une équation qui établit une relation entre une fonction et ses dérivées. Dans notre cas d'étude, en considérant l'expression établis de l'accélération du mobile, on a :

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Soit :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Ceci est une équation différentielle du second ordre sans second membre, caractéristique d'un mouvement rectiligne sinusoïdal admettant des solutions de la forme :

$$x = x_m \sin(\omega t + \varphi)$$

ou

$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

I.2. Etude dynamique et énergétique.

I.2.1. Etude du pendule élastique.

Un pendule élastique est constitué d'un *solide de masse m* accroché à l'exremité d'un *ressort à spire non jointives*, de *constante de raideur K* tandis que l'autre extrémité du ressort est fixe.



I.2.1.1. Pendule élastique horizontal.

Schéma : Le système est posé sur un plan horizontal immobile comme l'indique la figure 2 ci-dessous. On écarte le pendule de sa position d'équilibre en le tirant d'une distance x_m , puis on le lâche sans vitesse initiale à $t = 0$. Le *système oscille* entre les points A et A'.

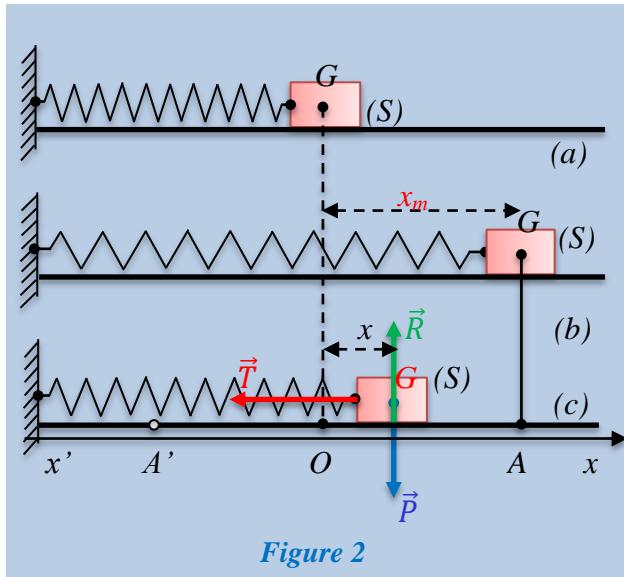


Figure 2

Conclusion : Ceci est une équation différentielle du second ordre sans second membre, caractéristique d'un mouvement rectiligne sinusoïdal dont les solutions sont de la forme :

$$x = x_m \sin(\omega t + \varphi)$$

avec $\omega^2 = \frac{K}{m}$ et $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

➤ La période T est telle que :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

➤ La fréquence sera :

$$N = f = \frac{1}{T} \Rightarrow N = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Note : La détermination des autres paramètres du mouvement du mobile (amplitude x_m et phase initiale φ) nécessite la connaissance des conditions initiales du mouvement.

a) Etude dynamique:

- ✓ **R.T.S.G :**
- ✓ **Système d'étude :** Solide de masse (m) en translation rectiligne ;
- ✓ **B.F.E.A :** \vec{P} ; \vec{R} ; \vec{T} .
- ✓ **T.C.I :** $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$
 $\Rightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}_G$
- ✓ **Projection du T.C.I suivant (x) :**

$$-T = ma_{Gx}$$

Avec $T = Kx$ et $a_{Gx} = \ddot{x}$

$$\Rightarrow -Kx = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + Kx = 0$$

D'où :

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$$

En posant $\omega^2 = \frac{K}{m}$, on obtient :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

b) Etude énergétique.

- ✓ **R.T.S.G :**
 - ✓ **Système d'étude :** Solide + ressort + terre.
- Le système devient isolé, donc conservatif : l'énergie mécanique se conserve.**

$$E_M = cte \Rightarrow \frac{dE_M}{dt} = 0$$

• Expression de l'énergie mécanique E_M

$$E_M = E_{C_t} + E_{P_e}$$

$$\Rightarrow E_M = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Kx^2 = cte$$

$$\frac{dE_M}{dt} = m\ddot{x}\dot{x} + K\dot{x}x = 0$$

$$\Rightarrow \dot{x}(m\ddot{x} + Kx) = 0$$

$$\dot{x} \neq 0 \Rightarrow m\ddot{x} + Kx = 0$$

D'où :

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$$

En posant $\omega^2 = \frac{K}{m}$, on obtient :



$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Conclusion : Ceci est une équation différentielle du second ordre sans second membre, caractéristique d'un mouvement rectiligne sinusoïdal dont les solutions sont de la forme :

$$x = x_m \sin(\omega t + \varphi)$$

➤ La période T est telle que :

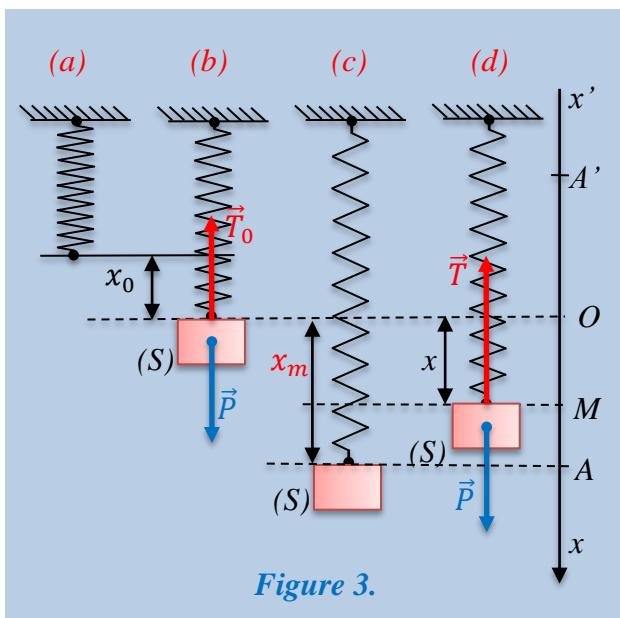
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

➤ La fréquence sera :

$$N = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}}$$

I.2.1.2. Pendule élastique vertical.

Schéma : L'extrémité supérieure du ressort est fixée à un support immobile comme l'indique la figure 3 ci-dessous. On écarte le pendule de sa position d'équilibre en le tirant d'une distance x_m vers le bas, puis on le lâche sans vitesse initiale à $t = 0$. Le *système oscille* entre les points A et A' .



a) Etude dynamique:

- ✓ **R.T.S.G :**
- ✓ **Système d'étude :** Solide de masse (m) en translation rectiligne ;
- ✓ **B.F.E.A :** \vec{P} ; \vec{T} .

✓ **T.C.I :** $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$
 $\Rightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}_G$

✓ **Projection du T.C.I suivant (x') :**

$$\Rightarrow P - T = ma_{Gx}$$

Avec $T = K\Delta\ell = K(x_0 + x)$ et $a_{Gx} = \ddot{x}$

$$\Rightarrow mg - K(x_0 + x) = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow mg - Kx_0 - Kx = m\ddot{x}$$

A l'équilibre (fig. b), on a :

$$\vec{P} + \vec{T}_0 = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} = -\vec{T}_0$$

soit $P = T_0$, alors $mg = Kx_0$

$$\Rightarrow mg - Kx_0 = 0$$

Ainsi, on obtient : $-Kx = m\ddot{x}$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + Kx = 0$$

d'où :

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$$

En posant $\omega^2 = \frac{K}{m}$, on obtient :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Conclusion : Ceci est une équation différentielle du second ordre sans second membre, caractéristique d'un mouvement rectiligne sinusoïdal dont les solutions sont de la forme :

$$x = x_m \sin(\omega t + \varphi)$$

➤ La période T est telle que :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

➤ La fréquence sera :

$$N = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}}$$



b) Etude énergétique.

✓ **R.T.S.G :**

✓ **Système d'étude :** Solide + ressort + terre.
Le système devient isolé, donc conservatif : l'énergie mécanique se conserve.

$$E_M = \text{cte} \Rightarrow \frac{dE_M}{dt} = 0$$

- **Expression de l'énergie mécanique E_M**

$$E_M = E_{C_t} + E_{P_e} + E_{P_P}$$

$$E_M = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}K(x_0 + x)^2 - mgx = \text{cte}$$

$$\frac{dE_M}{dt} = m\ddot{x}\dot{x} + K\dot{x}(x_0 + x) - mg\dot{x} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{x}(m\ddot{x} + Kx_0 + Kx - mg) = 0$$

$$\dot{x} \neq 0 \Rightarrow m\ddot{x} + Kx_0 + Kx - mg = 0$$

A l'équilibre : $Kx_0 - mg = 0$

Ainsi :

$$m\ddot{x} + Kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$$

En posant $\omega^2 = \frac{K}{m}$, on obtient :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Conclusion : Ceci est une équation différentielle du second ordre sans second membre, caractéristique d'un mouvement rectiligne sinusoïdal dont les solutions sont de la forme :

$$x = x_m \sin(\omega t + \varphi)$$

- **La période T est telle que :**

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

- **La fréquence sera :**

$$N = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}}$$

II. Mouvement sinusoïdal de rotation (M.S.R)

II.1. Etude cinématique.

II.1.1. Définition : On dit qu'un point M est animé d'un mouvement sinusoïdal de rotation lorsque son équation horaire est de la forme :

$$\theta = \theta_m \sin(\omega t + \varphi)$$

θ : élongation angulaire de M (rad) ;

θ_m : amplitude du mouvement ou élongation angulaire maximale (rad) ;

$(\omega t + \varphi)$: phase du mouvement à l'instant t ;

ω : pulsation du mouvement (rad/s) ;

φ : phase initiale (rad) ;

Remarque :

- ✓ θ_m , ω et φ sont des constantes déterminées à partir des conditions initiales du mouvement.
- ✓ Le mobile se déplace entre deux positions extrêmes $-\theta_m$ et $+\theta_m$ tel que : $-\theta_m \leq \theta \leq +\theta_m$.
- ✓ Si à $t = 0$; $\theta = 0$, alors : $\theta = \theta_m \sin \omega t$
- ✓ Le mouvement est périodique de période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Représentation graphique du sinusoïde.

$$\theta = \theta_m \sin(\omega t + \varphi)$$

Conditions initiales : à $t = 0$; $\theta = 0$

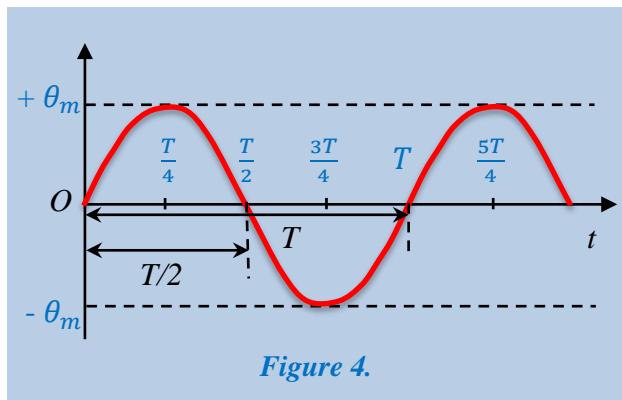
$$\Rightarrow 0 = \theta_m \sin \varphi \Rightarrow \varphi = 0$$

Ainsi : $\theta = \theta_m \sin \omega t$

t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T	$\frac{5T}{4}$	$\frac{3T}{2}$
θ	0	$+\theta_m$	0	$-\theta_m$	0	$+\theta_m$	0

On obtient alors la courbe de la figure 4 ci-dessous :





II.1.2. Vitesse angulaire.

L'élargissement de M étant de la forme :

$$\theta = \theta_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{\theta}(t) = \frac{d\theta}{dt} = \omega \theta_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{\theta} = \omega \theta_m \cos(\omega t + \varphi)$$

II.1.3 Accélération angulaire.

$$\ddot{\theta} = \omega \theta_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = -\omega^2 \theta_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = -\omega^2 \theta_m \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 \theta$$

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \theta$$

II.1.4. Équation différentielle.

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$$

Soit :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \theta = 0$$

Ceci est une équation différentielle du second ordre sans second membre, caractéristique d'un mouvement sinusoïdal de rotation admettant des solutions de la forme :

$$\theta = \theta_m \sin(\omega t + \varphi)$$

ou

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \varphi)$$

II.2. Etude dynamique et énergétique.

II.2.1. Etude d'un pendule de torsion.

Le pendule de torsion est un système constitué d'une tige (t) suspendue par son centre d'inertie G à un fil de torsion de constante C .

Ce fil de torsion dont l'extrémité est fixe, est vertical et matérialise l'axe de rotation (Δ) autour duquel peut tourner la tige, qui reste dans un plan horizontal.

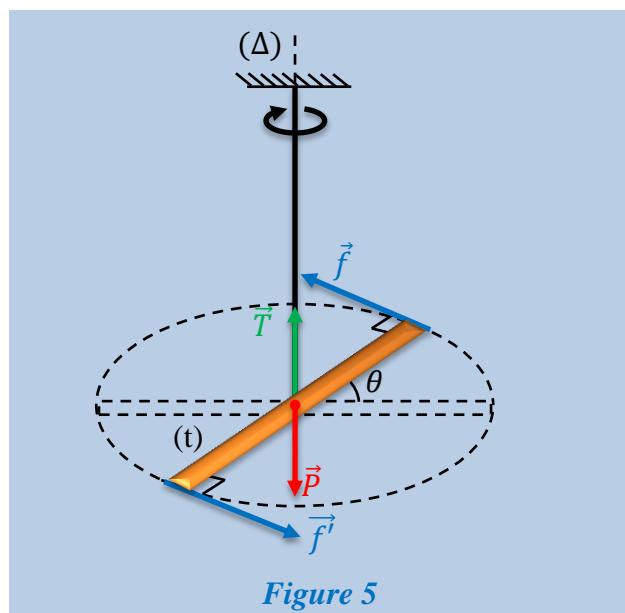
Le système est en équilibre quand le fil n'est pas torqué.

On rappelle que lorsque la tige tourne d'un angle θ , le moment du couple de torsion $\mathcal{M}_\Delta(\vec{f}, \vec{f}')$ est proportionnel à θ :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{f}, \vec{f}') = -C\theta$$

Schéma : Le fil de torsion est fixé à son extrémité supérieure à un point (figure 5).

Ecartons le pendule de sa position d'équilibre d'un angle θ_m et lâchons-le. Il effectue alors des oscillations de rotation autour de l'axe (Δ).



a) Etude dynamique.

✓ **R.T.S.G.**

✓ **Système :** Tige de masse m en rotation.

✓ **B.F.E :** \vec{P} , \vec{T} , Couple résistant (\vec{f}, \vec{f}') .

✓ **T.A.A :** $\sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = J_\Delta \ddot{\theta}$

$$\Rightarrow \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{f}, \vec{f}') = J_\Delta \ddot{\theta}$$



Or $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = 0$ et $\mathcal{M}_\Delta(\vec{T}) = 0$.

$$\Rightarrow \mathcal{M}_\Delta(\vec{f}, \vec{f}') = J_\Delta \ddot{\theta}$$

Ainsi : $-C\theta = J_\Delta \ddot{\theta}$

$$\Rightarrow J_\Delta \ddot{\theta} + C\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta} \theta = 0$$

En posant $\omega^2 = \frac{C}{J_\Delta}$, on obtient :

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$$

ou

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \theta = 0$$

Conclusion : Ceci est une équation différentielle du second ordre sans second membre, caractéristique d'un mouvement sinusoïdal de rotation admettant des solutions de la forme :

$$\theta = \theta_m \sin(\omega t + \varphi)$$

avec $\omega^2 = \frac{C}{J_\Delta}$ et $\omega = \sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}$

➤ La période T est telle que :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}$$

➤ La fréquence sera :

$$N = f = \frac{1}{T} \Rightarrow N = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}$$

b) Etude énergétique.

✓ **R.T.S.G ;**

✓ **Système d'étude :** Tige (t) + fil de torsion + terre.

Le système devient isolé, donc conservatif : l'énergie mécanique se conserve.

$$E_M = cte \Rightarrow \frac{dE_M}{dt} = 0$$

• **Expression de l'énergie mécanique E_M**

$$E_M = E_{Cr} + E_{Pt}$$

$$\Rightarrow E_M = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} C \theta^2 = cte$$

$$\frac{dE_M}{dt} = J_\Delta \ddot{\theta} \dot{\theta} + C \dot{\theta} \theta = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}(J_\Delta \ddot{\theta} + C\theta) = 0$$

$$\dot{\theta} \neq 0 \Rightarrow J_\Delta \ddot{\theta} + C\theta = 0$$

D'où :

$$\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta} \theta = 0$$

En posant $\omega^2 = \frac{C}{J_\Delta}$, on obtient :

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$$

ou

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \theta = 0$$

Conclusion : Ceci est une équation différentielle du second ordre sans second membre, caractéristique d'un mouvement sinusoïdal de rotation admettant des solutions de la forme :

$$\theta = \theta_m \sin(\omega t + \varphi)$$

avec $\omega^2 = \frac{C}{J_\Delta}$ et $\omega = \sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}$

➤ La période T est telle que :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}$$

➤ La fréquence sera :

$$N = f = \frac{1}{T} \Rightarrow N = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}$$

Remarque : Tout comme dans le cas des oscillations de translation, la détermination des autres paramètres du mouvement du mobile (amplitude θ_m et phase initiale φ) nécessite la connaissance des conditions initiales du mouvement.



B. Oscillateurs mécaniques non harmoniques.

Définitions : Un oscillateur mécanique non harmonique est un oscillateur dont l'élargissement du mouvement n'obéit pas à une fonction sinusoïdale du temps de la forme :

$$\theta = \theta_m \sin(\omega t + \varphi)$$

I. Etude d'un pendule pesant.

I.1. Définition : On appelle pendule pesant tout corps solide mobile autour d'un axe ne passant pas par son centre de gravité.

Exemple :

- ✓ Une balançoire ;
- ✓ Le balancier d'une horloge.

La *position d'équilibre stable* est celle pour laquelle le *centre d'inertie G se trouve sur la verticale de l'axe (Δ)*, au-dessus de cet axe (voir figure 6).

On pose $OG = a$, distance de l'axe de rotation (Δ) au centre d'inertie G.

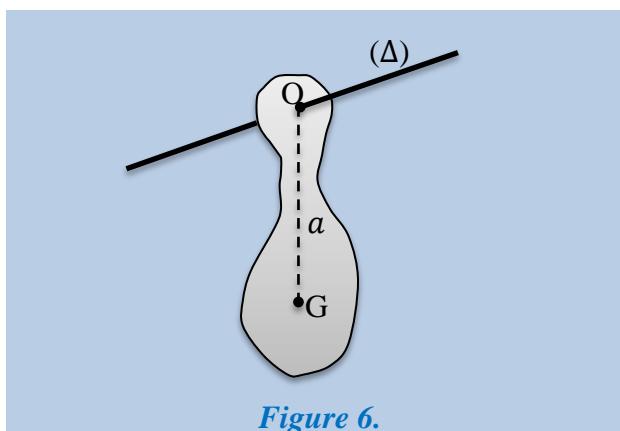


Figure 6.

I.2. Etude dynamique et énergétique.

Ecartons le pendule de sa position d'équilibre d'un angle θ_m et lâchons-le. Il effectue alors des oscillations de rotation autour de l'axe (Δ) (figure 7).

Schéma :

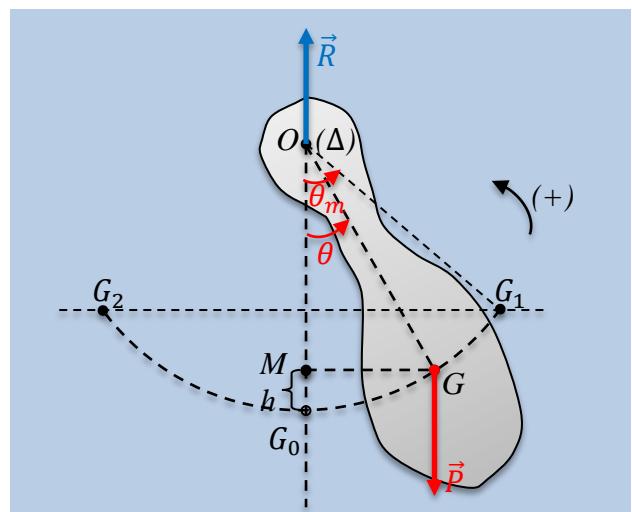


Figure 7.

a) Etude dynamique.

- ✓ **R.T.S.G.**
- ✓ **Système :** solide de masse m en rotation.
- ✓ **B.F.E :** \vec{P} ; \vec{R} .
- ✓ **T.A.A :** $\sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = J_\Delta \ddot{\theta}$
 $\Rightarrow \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = J_\Delta \ddot{\theta}$

Avec $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -P.d$ et $\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = 0$.

Ainsi : $-Pd = J_\Delta \ddot{\theta}$

Or $\sin\theta = \frac{d}{OG} \Rightarrow d = OG \sin\theta$.

$$\Rightarrow -POG \sin\theta = J_\Delta \ddot{\theta}$$

$$-mg \sin\theta = J_\Delta \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow J_\Delta \ddot{\theta} + mg \sin\theta = 0$$

D'où :

$$\ddot{\theta} + \frac{mg a}{J_\Delta} \sin\theta = 0$$

En posant $\omega^2 = \frac{mg a}{J_\Delta}$, on obtient :

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0$$

ou

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \sin\theta = 0$$

Conclusion : Ceci est une équation différentielle non linéaire du second ordre sans second membre, n'admettant pas des solutions de la forme :



$$\theta = \theta_m \sin(\omega t + \varphi)$$

Alors l'oscillateur est non harmonique.

- Cas des oscillations de faibles amplitudes.**

Pour que le pendule oscille sinusoïdalement il faut que le moment de rappel soit proportionnel à θ .

Si θ_m est petit ($\theta < 8^\circ$), θ est également petit. On peut confondre $\sin\theta$ et θ exprimé en radians.

L'équation différentielle devient, dans ce cas :

$$\ddot{\theta} + \frac{mga}{J_\Delta} \theta = 0$$

ou

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \theta = 0$$

Conclusion : Ceci est une équation différentielle du second ordre sans second membre, caractéristique d'un mouvement sinusoïdal de rotation admettant des solutions de la forme :

$$\theta = \theta_m \sin(\omega t + \varphi)$$

Avec

$$\omega = \sqrt{\frac{mga}{J_\Delta}}$$

➤ La période T est telle que :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{J_\Delta}{mga}}$$

➤ La fréquence sera :

$$N = f = \frac{1}{T} \Rightarrow N = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mga}{J_\Delta}}$$

Conclusion : Dans le cas particulier d'oscillations de faible amplitude, le pendule pesant est un oscillateur harmonique de rotation.

b) Etude énergétique.

✓ **R.T.S.G** ;

✓ **Système d'étude** : Pendule pesant + terre.

Le système étant isolé, donc conservatif : l'énergie mécanique se conserve.

$$E_M = cte \Rightarrow \frac{dE_M}{dt} = 0$$

- Expression de l'énergie mécanique E_M**

$$E_M = E_{Cr} + E_{P_P}$$

$$\Rightarrow E_M = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 + mgh$$

$$\text{Or } \cos\theta = \frac{OG_0 + MG_0}{OG} = \frac{a - h}{a}$$

$$\Rightarrow h = a(1 - \cos\theta)$$

$$\text{Alors : } E_M = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 + mga(1 - \cos\theta) = cte$$

$$\frac{dE_M}{dt} = J_\Delta \ddot{\theta} + mga(\dot{\theta} \sin\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}(J_\Delta \ddot{\theta} + mga \sin\theta) = 0$$

$$\dot{\theta} \neq 0 \Rightarrow J_\Delta \ddot{\theta} + mga \sin\theta = 0$$

D'où :

$$\ddot{\theta} + \frac{mga}{J_\Delta} \sin\theta = 0$$

En posant $\omega^2 = \frac{mga}{J_\Delta}$, on obtient :

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0$$

- Cas des oscillations de faible amplitude.**

$$E_M = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 + mga(1 - \cos\theta)$$

$$\text{Pour } \theta \text{ faible : } 1 - \cos\theta \simeq \frac{\theta^2}{2}$$

$$\text{Ainsi : } E_M = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} mga\theta^2$$

$$\frac{dE_M}{dt} = J_\Delta \ddot{\theta} + mga\dot{\theta}\theta = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}(J_\Delta \ddot{\theta} + mga\theta) = 0$$

$$\dot{\theta} \neq 0 \Rightarrow J_\Delta \ddot{\theta} + mga\theta = 0$$

D'où :

$$\ddot{\theta} + \frac{mga}{J_\Delta} \theta = 0$$

ou

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$$

Conclusion : Ceci est une équation différentielle du second ordre sans second membre, caractéristique d'un mouvement sinusoïdal de rotation admettant des solutions de la forme :

$$\theta = \theta_m \sin(\omega t + \varphi)$$

➤ La période T est telle que :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{J_\Delta}{mga}}$$



➤ La fréquence sera :

$$N = f = \frac{1}{T} \Rightarrow N = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mga}{J_\Delta}}$$

Remarque : Si l'angle θ devient supérieur à 8° , la période T augmente légèrement avec l'amplitude par la relation :

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\theta_m^2}{16} \right)$$

avec : $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_\Delta}{mga}}$

II. Etude du pendule simple.

II.1. Définition : On appelle pendule simple, un point matériel de masse m , accroché à un fil inextensible de masse négligeable et de longueur ℓ en rotation autour de sa position d'équilibre.

Le point matériel est écarté de sa position d'équilibre stable (fil vertical) d'un angle θ_m puis lâché sans vitesse initiale. Le point matériel initialement situé en A décrit une trajectoire circulaire entre les points A et A' en passant par sa position d'équilibre. On dit que le système effectue des oscillations autour de sa position d'équilibre (figure 8).

Schéma :

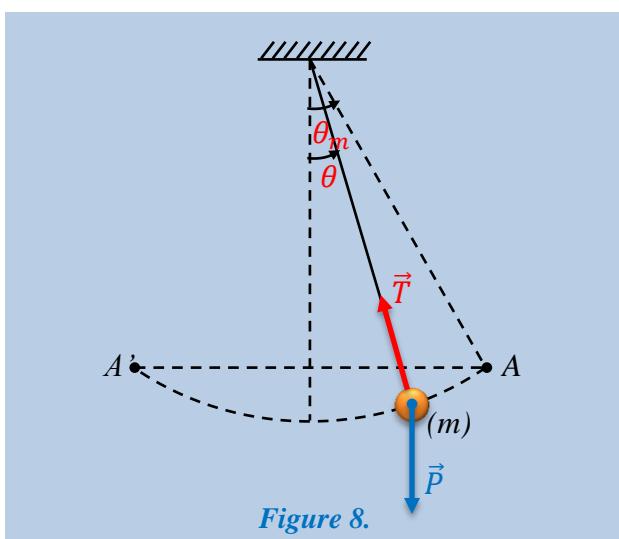


Figure 8.

Les résultats obtenus pour le pendule pesant sont valables pour le pendule simple.

II.2. Equation différentielle.

Elle peut se déduire de celle du pendule pesant, précédemment établie.

Pour le pendule pesant :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mga}{J_\Delta} \sin\theta = 0$$

Dans le cas d'un pendule pesant harmonique :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mga}{J_\Delta} \theta = 0$$

Pour le pendule simple :

$$a = \ell \text{ et } J_\Delta = m\ell^2$$

L'équation différentielle du pendule simple est alors :

$$\ddot{\theta} + \frac{m\ell}{m\ell^2} \theta = 0$$

D'où :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0$$

Soit :

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$$

Conclusion : Ceci est une équation différentielle du second ordre sans second membre, caractéristique d'un mouvement sinusoïdal de rotation admettant des solutions de la forme :

$$\theta = \theta_m \sin(\omega t + \varphi)$$

II.3. Expression de la période.

La période du pendule simple est définie par :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} ; \text{ avec } \omega^2 = \frac{g}{\ell} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

D'où :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

II.4. Pendule simple synchrone d'un pendule pesant.

Définition : On appelle pendule simple synchrone d'un pendule pesant, un pendule simple de même période que le pendule pesant.



- Longueur du pendule simple synchrone du pendule composé.

➤ Pour un pendule pesant :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_\Delta}{mga}} \quad (1)$$

➤ Pour un pendule simple :

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (2)$$

On a $T = T'$ alors $(1) = (2)$

$$\Rightarrow 2\pi \sqrt{\frac{J_\Delta}{mga}} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \Rightarrow \frac{J_\Delta}{mga} = \frac{\ell}{g}$$

D'où :

$$\ell = \frac{J_\Delta}{ma}$$

Remarques :

R₁ : La période d'un pendule simple est indépendante de la masse du point matériel, mais dépend de la longueur ℓ du pendule.

R₂ : Un pendule bat la seconde lorsque sa période des oscillations propres vaut $T_0 = 2s$.

R₃ : La longueur du pendule simple peut varier avec la température suivant la relation :

$$\ell = (1 + \lambda t)\ell_0$$

avec :

ℓ_0 : longueur du pendule à la température initiale t_0 ;

ℓ : longueur du pendule correspondant à la température t quelconque ;

λ : Coefficient de dilatation linéaire ;

t : température considérée.

Exercice d'application.

Soit un ressort R de masse négligeable et de longueur à vide $\ell_0 = 30cm$ disposé verticalement, est accroché à un support par son extrémité supérieure. Si on fixe à l'autre extrémité une masse $M = 500g$, R s'allonge de 5cm. On retire la masse M et on la remplace par une masse ponctuelle $m = 100g$. A partir de la position d'équilibre, on tire m vers le bas, verticalement de 3cm puis on l'abandonne sans vitesse. Détermine :

1°) a) En utilisant la méthode énergétique, la nature et l'équation horaire du mouvement. On prendra pour origine des dates l'instant du lâché.

b) La vitesse de m au passage par la position d'équilibre.

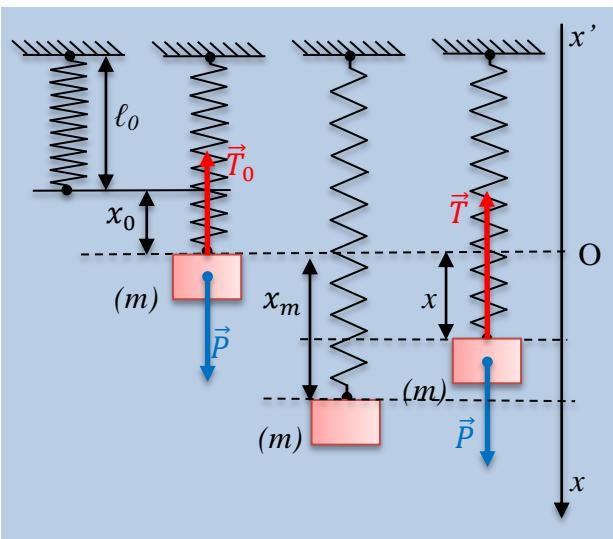
c) La date de premier passage à l'abscisse 1,5cm en allant dans le sens positif.

2°) On recommence l'expérience en lâchant m (dans les mêmes conditions) avec une vitesse verticale $V_0 = 0,3m/s$, détermine l'équation du mouvement de m . On prendra $g = 10m/s^2$.

Corrigé.

$\ell_0 = 30cm$; $M = 500g$; $\Delta\ell = 5cm$; $m = 100g$; $x_m = 3cm$; $g = 10m/s^2$.

1°) a) Nature et l'équation horaire du mouvement.



✓ R.T.S.G ;

✓ Système d'étude : Solide + ressort + terre. Le système devient isolé, donc conservatif : l'énergie mécanique se conserve.

$$E_M = cte \Rightarrow \frac{dE_M}{dt} = 0$$

• Expression de l'énergie mécanique E_M

$$E_M = E_{C_t} + E_{P_e} + E_{P_P}$$

$$E_M = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}K(x_0 + x)^2 - mgx = cte$$

$$\frac{dE_M}{dt} = m\ddot{x}\dot{x} + K\dot{x}(x_0 + x) - mg\dot{x} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{x}(m\ddot{x} + Kx_0 + Kx - mg) = 0$$

$$\dot{x} \neq 0 \Rightarrow m\ddot{x} + Kx_0 + Kx - mg = 0$$

A l'équilibre : $Kx_0 - mg = 0$

Ainsi : $m\ddot{x} + Kx = 0$



d'où :

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$$

Conclusion : Ceci est une équation différentielle du second ordre sans second membre, caractéristique d'un mouvement rectiligne sinusoïdal dont les solutions sont de la forme :

$$x = x_m \sin(\omega t + \varphi)$$

➤ Equation horaire du mouvement.

$$\begin{cases} x = x_m \sin(\omega t + \varphi) \\ \dot{x} = \omega x_m \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

A l'instant $t = 0$: $x = x_m$; $\dot{x} = 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_m \sin \varphi = x_m \\ \omega x_m \cos \varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin \varphi = 1 \\ \cos \varphi = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Trouvons ω .

$$\omega^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Avec le solide de masse M , on a à l'équilibre :

$$\vec{P} + \vec{T}_0 = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} = -\vec{T}_0$$

$$\text{soit } P = T_0, \text{ alors } Mg = K\Delta\ell \Rightarrow K = \frac{Mg}{\Delta\ell}$$

d'où :

$$\omega = \sqrt{\frac{Mg}{m \cdot \Delta\ell}}$$

$$A.N: \omega = \sqrt{\frac{0,5 \times 10}{0,1 \times 0,05}} = 31,62 \Rightarrow \omega = 31,62 \text{ rad/s}$$

D'où l'équation horaire du mouvement est :

$$x = 0,03 \sin\left(31,62t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (m)}$$

$$\text{Ou } x = 0,03 \cos(31,62t) \text{ (m)}$$

b) La vitesse de m au passage par la position d'équilibre.

$$\dot{x} = \omega x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Au passage par la position d'équilibre $x = 0$.

$$\Rightarrow x_m \sin(\omega t + \varphi) = 0$$

$$x_m \neq 0 \Rightarrow \sin(\omega t + \varphi) = 0 \Rightarrow \omega t + \varphi = 0$$

Ainsi : $V = \dot{x} = \omega x_m \cos(0)$

D'où : $V = \omega x_m$

$$A.N: V = 31,62 \times 0,03 = 0,94$$

$$V = 0,94 \text{ m/s}$$

c) La date de premier passage à l'abscisse 1,5cm en allant dans le sens positif.

$$x = x_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\text{à l'instant } t \ x = \frac{x_m}{2} \Rightarrow \frac{x_m}{2} = x_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow \sin(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \omega t + \varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{6} - \varphi + 2k\pi$$

$$\omega t = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \omega t = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

Au premier passage à la position d'équilibre : $k = 0$.

$$\Rightarrow t = \left| -\frac{\pi}{3\omega} \right| \Rightarrow t = \frac{\pi}{3\omega}$$

$$A.N: t = \frac{3,14}{3 \times 31,62} = 0,033$$

$$t = 0,033 \text{ s}$$

$$2^\circ) V_0 = 0,3 \text{ m/s},$$

Détermination de l'équation horaire du mouvement de m .

$$\begin{cases} x = x_m \sin(\omega t + \varphi) \\ \dot{x} = \omega x_m \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

A l'instant $t = 0$: $x = x_m$; $\dot{x} = V_0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_m \sin \varphi = x_m \\ \omega x_m \cos \varphi = V_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin \varphi = 1 \\ \cos \varphi = \frac{V_0}{\omega x_m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan \varphi = \frac{\omega x_m}{V_0}$$

$$\text{d'où : } \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega x_m}{V_0}\right)$$

$$A.N: \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{31,62 \times 0,03}{0,3}\right) = 1,26$$

$$\varphi = 1,26 \text{ rad}$$

D'où la nouvelle équation du mouvement est :

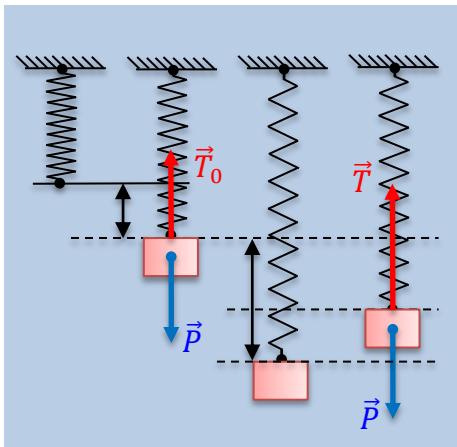
$$x = 0,03 \sin(31,62t + 1,26) \text{ (m)}$$



TRAVAUX DIRIGÉS VI

Conseils pratiques :

1. Techniques de réalisation des schémas.
2. Principes de la dynamique ou lois de Newton.
3. Energie mécanique d'un pendule.
4. Etude dynamique et énergétique d'un oscillateur.
5. Equation horaire du mouvement d'un oscillateur.
6. Période des oscillations d'un oscillateur.



L'ESSENTIEL DU COURS

I – Définitions des notions.

Définis les termes suivants : Oscillateur mécanique ; Oscillateur mécanique harmonique ; Oscillateur mécanique non harmonique ; Mouvement périodique ; Mouvement sinusoïdal ; Pendule pesant ; Pendule simple.

II – Questions à réponses construites.

Réponds aux questions suivantes :

- 1°) Quand dit – on qu'un pendule bat la seconde ?
- 2°) Quelle différence fais – tu entre un pendule simple et un pendule conique ?
- 3°) Qu'appelle – t – on pendule simple synchrone d'un pendule pesant ?
- 4°) On considère le mouvement d'un pendule élastique dont l'équation horaire est de la forme : $x = x_m \sin(\omega t + \varphi)$. Donne l'expression de sa vitesse au premier passage par la position d'équilibre.
- 5°) Quelle est l'équation horaire du mouvement d'un pendule de torsion abandonné sans vitesse initiale à $t = 0$, sachant que son élongation est maximale et négative. On donne : $\omega = \pi \text{ rad.s}^{-1}$ et $\theta_m = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$.
- 6°) LE SAGE dit à propos du pendule simple : « Si un pendule a une longueur 16 fois supérieure à celle d'un autre pendule, celui – ci effectuera 4 oscillations pendant que celui – là en accomplira une seule ». LE SAGE a – t – il raison ? Justifie ta réponse par une démonstration.

III – Questions à choix multiples.

Choisis la bonne réponse. Exemple 8 = b.

- 1°) La pulsation du pendule élastique horizontal non amorti est
 - a) $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$;
 - b) $\omega_o = \sqrt{\frac{m}{k}}$;
 - c) $\omega_o = \sqrt{\frac{l}{g}}$.
- 2°) L'équation différentielle du pendule élastique verticale non amorti est :
 - a) $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_o^2 x = 0$
 - b) $\ddot{x} + \omega_o^2 \dot{x} = 0$
 - c) $\ddot{x} + \frac{4\pi^2}{T_o^2} x = 0$
 - d) $\ddot{x} + \frac{2\pi}{T_o} x = 0$.
- 3°) La période du pendule de torsion non amorti est :
 - a) $T_o = \sqrt{\frac{J_\Delta}{c}}$;
 - b) $T_o = 2\pi \sqrt{\frac{J_\Delta}{c}}$;
 - c) $T_o = 2\pi \sqrt{\frac{c}{J_\Delta}}$;
 - d) $T_o = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$.
- 4°) La période du pendule pesant est indépendant de :
 - a) La masse ;
 - b) Du rayon ;
 - c) Intensité de pesanteur.
- 5°) Quand on double l'amplitude d'un pendule élastique :
 - a) La constante de raideur est double ;
 - b) La période est doublée ;
 - c) L'énergie mécanique est modifiée ;
 - d) La masse reste constante.



6°) L'équation différentielle du pendule pesant dans le cas générale est :

a) $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_o^2 x = 0$; b) $\ddot{\theta} + \omega_o^2 \dot{\theta} = 0$; c) $\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_\Delta} x = 0$; d) $\ddot{\theta} + \frac{J_\Delta}{mgd} \theta = 0$.

e) $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{J_\Delta} \sin\theta = 0$; f) $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{J_\Delta} \sin\theta = 0$; g) $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{J_\Delta}{mgd} \sin\theta = 0$.

7°) La longueur du pendule simple synchrone du pendule pesant est :

a) $\ell = \frac{T_o^2 g}{4\pi^2}$; b) $\ell = \frac{T_o^2 mgd}{J_\Delta}$; c) $\ell = \frac{J_\Delta}{md}$.

IV – Questions à alternative vrai ou faux.

Réponds par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

1°) Un mouvement sinusoïdal de rotation obéit à la loi horaire suivante : $x = x_m \sin(\omega t + \varphi)$.

2°) L'équation différentielle d'un mouvement rectiligne sinusoïdal est de la forme : $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$.

3°) Un mouvement sinusoïdal est dit périodique lorsque sa période vaut une seconde.

4°) La période d'un pendule simple ne dépend pas de sa masse.

5°) L'énergie mécanique d'un pendule élastique se conserve.

6°) L'amplitude d'un mouvement oscillatoire est $x_m \cos\varphi$.

7°) Le pendule pesant est toujours un oscillateur non harmonique.

8°) Un oscillateur mécanique est dit harmonique lorsque son équation différentielle est de la forme :

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0$$

9°) Le mouvement du pendule de torsion est dû au couple de rappel dont le moment est proportionnel à l'angle de rotation θ .

10°) La vitesse d'un pendule simple est nulle au passage par la position d'équilibre.

V – Appariement.

Relie un élément – question de la colonne A à un élément – réponse de la colonne B dans le tableau ci-dessous : Exemple : $a_{11} = b_{16}$.

Colonne A		Colonne B	
a ₁	Période d'un pendule élastique	b ₁	$E_m = \frac{1}{2} C \theta_m^2$
a ₂	Pendule battant la seconde	b ₂	$\theta = \theta_m \sin(\omega t + \varphi)$
a ₃	Oscillateur mécanique non harmonique	b ₃	$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$
a ₄	Système conservatif	b ₄	$\ddot{\theta} + \frac{mgOG}{J_\Delta} \sin\theta = 0$
a ₅	Couple de rappel d'un pendule de torsion	b ₅	Même période que le pendule pesant
a ₆	Équation horaire d'un mouvement sinusoïdal de rotation de faible amplitude	b ₆	$T_0 = 2\pi \sqrt{\ell/g}$
a ₇	Période d'un pendule simple	b ₇	$T_0 = 2s$
a ₈	Pendule simple synchrone	b ₈	$\mathcal{M}_\Delta(\vec{f}, \vec{f}') = -C\theta$
a ₉	Energie mécanique d'un pendule de torsion	b ₉	$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0$
a ₁₀	Équation différentielle d'un pendule pesant	b ₁₀	$\frac{dE_M}{dt} = 0$



RESOLUTION DES PROBLEMES

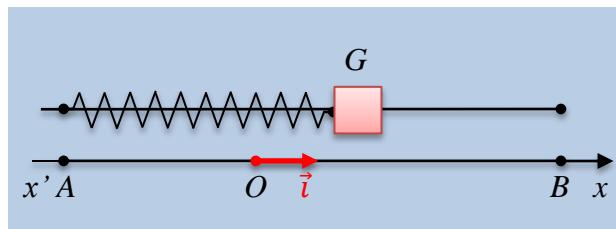
EXERCICE 1 : Soit la loi horaire :

$$x = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ cm} ;$$

celle d'un oscillateur.

- 1°) Détermine les constantes x_m , ω , φ et T .
- 2°) Montre que cet oscillateur est harmonique.
- 3°) Détermine les expressions de la vitesse et de l'accélération.
- 4°) Représente la trajectoire du mouvement, la position, les vecteurs vitesse et l'accélération à l'instant $t = 0$.
- 5°) Représente les trois fonctions x , \dot{x} et \ddot{x} sur le même graphe pour une période.

EXERCICE 2 : Un ressort à spires non jointives, de masse négligeable, de raideur K , est enfilé sur une tige horizontale AB . Une de ses extrémités étant fixée en A , un corps de masse m , de centre d'inertie G , est attaché à l'autre extrémité. Le ressort et le corps de masse m peuvent coulisser sans frottements le long de la tige AB . Au repos, le centre d'inertie G est en O . On associe à la tige horizontale un repère (O, \vec{i}) .



Le corps de masse m est écarté de sa position d'équilibre dans le sens positif d'une distance $OG = x_m = 5\text{cm}$, puis lâché sans vitesse initiale à la date $t = 0$.

- 1°) Etablis la nature du mouvement.
- 2°) Calcule sa période et détermine son équation horaire $x = f(t)$.
On donne : $K = 45\text{N.m}^{-1}$; $m = 0,20\text{Kg}$.
- 3°) Calcule l'énergie mécanique du système masse – ressort.
Déduis – en la vitesse de G au passage par la position d'équilibre.

EXERCICE 3 : Lors d'un cours de pratique de physique, il est demandé aux élèves de terminale de déterminer la constante de raideur d'un ressort à partir de la période des oscillations du système constitué avec un ressort et un solide de masse $m = 500\text{g}$.

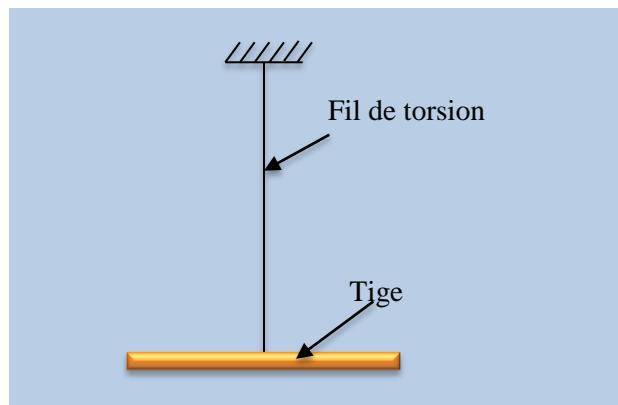
- 1°) Le système solide – ressort est vertical.

Trouve une relation entre la masse m du solide, la constante de raideur K , l'intensité de la pesanteur g et l'allongement Δl_0 à l'équilibre.

- 2°) Pour obtenir les oscillations, un des élèves écarte le solide de sa position d'équilibre, puis on l'abandonne sans vitesse initiale.

- a) Etablis l'équation différentielle du mouvement du centre d'inertie du solide.
- b) Déduis – en l'expression de la période T des oscillations en fonction de m et K .
- 3°) Les élèves mesurent la durée de 10 oscillations et trouvent 8,00 secondes.
- a) Quelle est la période des oscillations ?
- b) Déduis – en la constante de raideur K du ressort. On donne $g = 9,81\text{U.S.I}$

EXERCICE 4 : Un pendule de torsion est constitué au moyen d'une tige de longueur $L = 60\text{cm}$ et de masse $m = 100\text{g}$, fixée à l'une des extrémités d'un fil de torsion dont l'autre extrémité est fixée à un support fixe. Le centre de gravité de la tige est sur l'axe du fil. Cette tige oscille dans un plan horizontal comme l'indique la figure.



- 1°) On écarte la tige de sa position d'équilibre d'un angle $\theta_0 = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$, puis on l'abandonne sans vitesse initiale. Etablis l'équation du mouvement oscillatoire autour de sa position d'équilibre et déduis – en C sachant que le pendule bat la seconde ;

- 2°) Ecris l'équation du mouvement en prenant pour $t = 0$, l'instant où la tige est à $\theta_0 = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$.
Déduis – en sa vitesse au passage par sa position d'équilibre.

EXERCICE 5 : Un ressort parfaitement élastique, de masse négligeable est fixé par une extrémité et soutient, à l'autre extrémité un objet de masse



$M = 5\text{Kg}$. On écarte cet objet de sa position d'équilibre de 5cm vers le bas, selon la verticale, puis on l'abandonne sans vitesse initiale.

1°) Montre en utilisant le théorème d'énergie mécanique totale, que le centre d'inertie de l'objet effectue un mouvement sinusoïdal.

2°) La durée de 10 oscillations est $8,4\text{s}$. Calcule la constante de raideur du ressort. Quel est son allongement sous l'action d'une force de 49N ?

3°) Ecris l'équation horaire de ce mouvement. A quels instants l'objet passe – t – il pour la première et la deuxième fois par la position d'équilibre, et avec quelles vitesses ?

EXERCICE 6 : I/ Un ressort vertical de raideur K , de masse négligeable, de longueur à vide $\ell_0 = 30\text{cm}$ est fixé à son extrémité supérieure. On accroche à son extrémité inférieure un solide S de masse $m = 200\text{g}$ supposé ponctuel. La longueur du ressort est alors $\ell_1 = 36,2\text{cm}$. Le système est en équilibre.

1°) Calcule K .

2°) On déplace S verticalement vers le bas de 4cm puis on le lâche avec une vitesse initiale de 20m/s .

a) Montre que le solide S a un mouvement rectiligne sinusoïdal et détermine la période propre T_0 de l'oscillateur.

b) Etablis l'équation horaire du mouvement.

II/ S toujours accroché au même ressort est maintenant posé sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 30^\circ$ par rapport à l'horizontal, l'autre extrémité du ressort est fixée en un point O du sommet de la pente. S peut glisser le long de la pente sans frottements.

1°) Calcule l'allongement du ressort dans cette nouvelle position à l'équilibre.

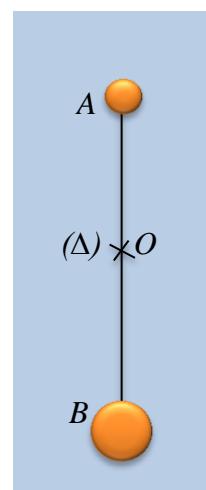
2°) On tire S vers le bas de sorte que la longueur du ressort soit $\ell_2 = 38,1\text{cm}$ et on le lâche sans vitesse initiale à cet instant pris égal à 0. Détermine la période et l'équation horaire du mouvement du système.

EXERCICE 7 : Un barreau parallélépipédique homogène peut osciller horizontalement par la torsion d'un fil OA de 1m de longueur, fixé en A et dont l'axe passe par le centre O de l'une des grandes faces du barreau. La durée de 10 oscillations est $96,3\text{s}$. On surcharge le barreau à l'aide de deux petites masses m et m' de 10g , de dimensions négligeables, placées symétriquement par rapport au fil à 8cm de celui – ci ; la durée de 10 oscillations devient $101,4\text{s}$. Calcule :

1°) Le moment d'inertie J_0 du barreau par rapport à l'axe AO et la constante de torsion C du fil ;

2°) La vitesse angulaire du barreau quand il passe à sa position d'équilibre au cours d'oscillations d'amplitude 1rad .

EXERCICE 8 : Un pendule est constitué d'une tige de masse négligeable, de longueur $AB = L$, pouvant osciller sans frottements autour d'un axe horizontal (Δ) passant par le milieu O de AB . A l'extrémité inférieure B , on place un point matériel de masse m_B et à l'extrémité supérieure A un point matériel de masse m_A telle que $m_B = 3m_A$.



1°) Détermine :

- L'expression du moment d'inertie du système par rapport à l'axe (Δ) en fonction de m_A et L .
- La position G du centre d'inertie du système en fonction de L .

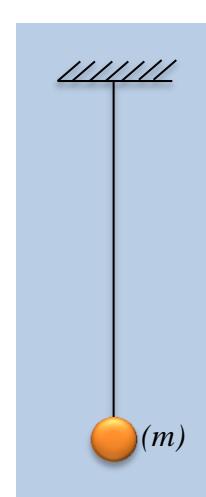
2°) Le pendule est écarté d'un petit angle θ_0 à partir de sa position d'équilibre stable.

- En appliquant la méthode énergétique, établis l'équation différentielle du mouvement ;

b) Déduis – en son équation horaire pour $\theta_0 = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$.

c) Calcule la période des oscillations.
On prendra : $L = 20\text{cm}$ et $g = 10\text{m.s}^{-2}$.

EXERCICE 9 : Un système mécanique est constitué d'un fil métallique sans masse et de longueur $\ell = 1\text{m}$ et auquel est suspendue une boule en fer de masse $m = 50\text{g}$ considérée comme ponctuelle. On prendra $g = 10\text{m/s}^2$.



1°) Ce système peut osciller dans un plan vertical, calcule alors la période T_0 des oscillations du système. On donne $\pi^2 = 10$.

2°) On écarte le système de sa position d'équilibre, d'un angle de 30° , puis on le lâche sans vitesse initiale. Un mouvement pendulaire prend naissance.

- Par une étude dynamique puis énergétique, établis la loi horaire du mouvement en prenant pour origine des dates, l'instant où le pendule est lâché.

- b) Etablis l'expression de la vitesse V de la boule dans une position quelconque au cours du mouvement. Déduis – en sa vitesse V_m au passage par la position d'équilibre.
- c) Donne une expression de la tension T du fil dans une position quelconque de la boule au cours du mouvement. Déduis – en la tension T_m du fil au passage par la verticale.
- d) Montre que l'énergie mécanique totale du système fil – masse – terre est constante. Calcule sa valeur.

EXERCICE 10 : Un pendule de torsion de moment d'inertie J est suspendu à un fil dont la constante de torsion est C .

1°) La période des oscillations est 5 secondes. Si l'on ajoute deux masses ponctuelles de $50g$ de part et d'autre de l'axe à $10cm$ de celui – ci la période devient $5,25s$.

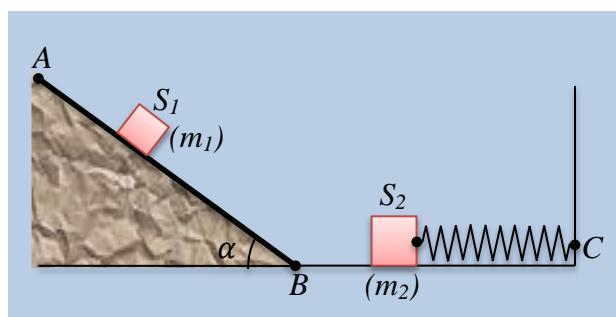
- Calcule le moment d'inertie J du pendule ;
- Calcule la constante de torsion C ;

2°) Le pendule sans masses additionnelles est écarté de sa position d'équilibre de $\frac{\pi}{3}$ rad dans le plan horizontal et lancé de cette position d'équilibre avec une vitesse angulaire de 2rad/s à l'origine des dates. Quelle est l'énergie totale du pendule ?

3°) Déduis – en l'amplitude du mouvement. Quelle est l'équation horaire du mouvement de la barre ?

4°) Calcule la vitesse angulaire au passage par la position l'équilibre.

EXERCICE 11 : Un solide S_1 de masse $m_1 = 50g$ est lâché sans vitesse initiale d'un point A et glisse sur le plan incliné de pente 50% . Après un parcours $AB = \ell = 1m$, il aborde un plan horizontal sur lequel il continu à glisser avant de heurter un solide S_2 de masse $m_2 = 200g$, immobile avant le choc.



1°) Calcule la norme de la vitesse \vec{V}_1 de S_1 juste avant le choc.

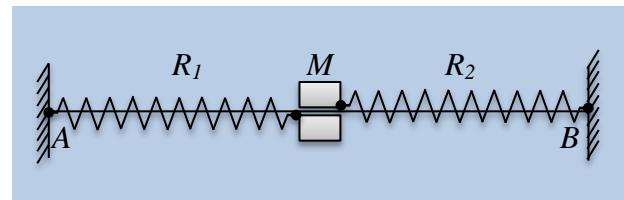
2°) Au moment du choc S_1 et S_2 s'accroche pour former un système de centre de masse G . Calcule la norme de la vitesse \vec{V}_G de G juste après le choc.

3°) S_2 est relié à un ressort de masse négligeable à spires non jointives de constante de raideur $K = 50N/m$ et dont l'autre extrémité C est fixé avant le choc. Après le choc, l'ensemble et le ressort sont en mouvement. Calcule l'abscisse x_m de G lorsque V_G s'annule pour la première fois.

EXERCICE 12 : On dispose de deux ressorts R_1 et R_2 identiques de longueurs à vide $\ell_0 = 20cm$. Quand un ressort est vertical sous l'effet d'une masse de $100g$, sa longueur est de $29,8cm$. On prendra $g = 9,8m.s^{-2}$.

On réalise le montage comme l'indique la figure. La masse $M = 200g$, glisse sans frottements sur la tige $AB = 60cm$.

1°) Détermine la position d'équilibre de M dans le montage.



2°) On écarte M de sa position d'équilibre et on le lâche sans vitesse initiale. Etudie, par la méthode dynamique la nature du mouvement de M .

3°) Calcule la période T_0 des oscillations de M .

EXERCICE 13 : On réalise un pendule de torsion en suspendant un disque de cuivre par un fil de suspension dont la direction passe par son centre d'inertie G . Le disque est un solide (S) homogène de moment d'inertie $J = 10^{-3}Kg.m^2$ par rapport à l'axe qui lui est perpendiculaire en G . Le fil de suspension vertical ayant pour constante de torsion C ; la période des oscillations libres est $T_0 = 0,5s$.

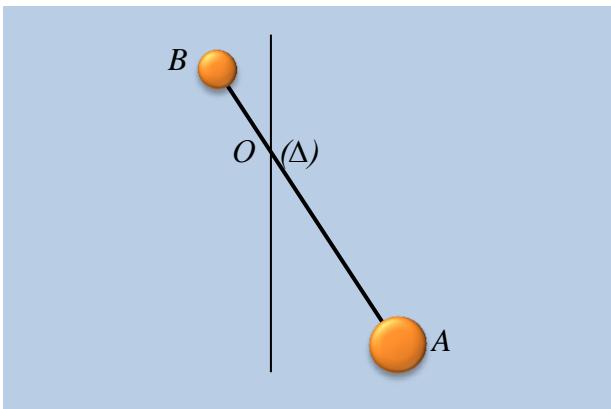
1°) Etablis l'équation du mouvement du disque autour de sa position d'équilibre, et déduis – en C .

2°) Le disque est initialement écarté de sa position d'équilibre d'un angle $\theta_0 = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$, puis lancé vers sa position d'équilibre à l'instant $t = 0$ avec une vitesse angulaire initiale $\dot{\theta}_0$. Le disque passe pour la première fois par sa position d'équilibre à l'instant $t = 6,25 \cdot 10^{-2}s$. Ecris l'équation horaire du mouvement. Déduis – en $\dot{\theta}_0$.

EXERCICE 14 : Deux petites billes assimilables à des points matériels, l'une en A et l'autre en B , de masses $M_A = 5m$ et $M_B = 3m$, sont placées aux extrémités A et B d'une tige rigide (T) de masse

négligeable. Cette tige est mobile en O autour d'un axe perpendiculaire à (Δ).

On pose $OA = \frac{2}{3}L$ et $OB = \frac{1}{3}L$. On donne $L = 0,24m$.



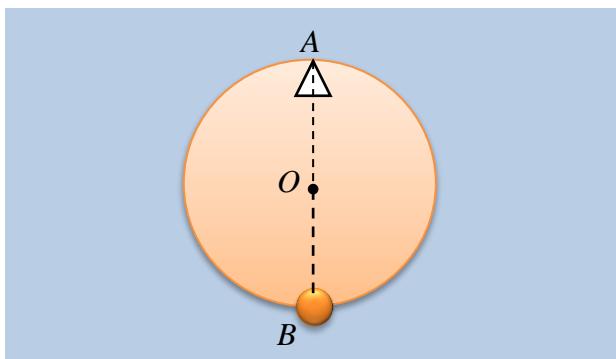
1°) Donne pour le pendule pesant ainsi constitué l'expression de son moment d'inertie et de son centre d'inertie OG .

2°) On écarte ce pendule d'un petit angle par rapport à sa position d'équilibre stable et on l'abandonne sans vitesse initiale. On suppose le système conservatif.

- Détermine l'équation différentielle qui régit le mouvement du pendule pesant. Quelle est la nature du mouvement ?
- Calcule la période des oscillations du pendule ainsi que la longueur du pendule simple synchrone du pendule composé.

EXERCICE 15 : Dans tout le problème, prendre $g = 10m.s^{-2}$.

Un disque homogène de masse $M = 0,250Kg$ et de rayon $R = 0,25m$ peut tourner sans frottement autour d'un axe (Δ) passant par un point A de sa circonference. Cet axe perpendiculaire en A au plan du disque, est horizontal. En un point B , symétrique de A par rapport au milieu O du disque, on fixe une masse m ponctuelle et telle que $m = \frac{M}{2}$ (voir figure).



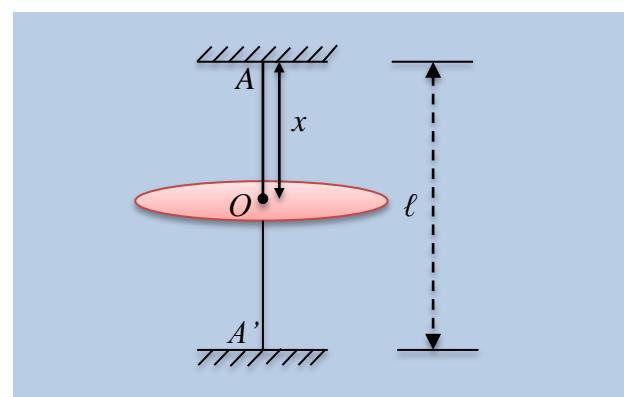
1°) Donne l'expression du moment d'inertie du système ainsi constitué par rapport à (Δ) en fonction de M et de R .

2°) Exprime la position du centre d'inertie G du système en fonction de R .

3°) Le système étant au repos dans sa position d'équilibre stable, on l'écarte d'un petit angle $\alpha_0 = 0,2rad$ de cette position puis on le lâche sans vitesse initiale à la date $t = 0$.

- Etablis la nature du mouvement du système puis calcule sa période ;
- Ecris l'équation horaire traduisant ce mouvement ;
- Exprime en fonction de R , la longueur du pendule simple synchrone de ce pendule composé.

EXERCICE 16 : Un disque plat homogène, d'épaisseur négligeable, de rayon $R = 15cm$ est suspendu par son centre d'inertie O à un fil de torsion, de constante de torsion C . C est inversement proportionnelle à la longueur ℓ du fil. L'autre extrémité du fil est fixée en un point A . On écarte le disque de sa position d'équilibre d'un angle de $\frac{\pi}{3} rad$, le fil étant maintenu vertical, et on l'abandonne sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$. On constate alors que 20 oscillations de période T_0 ont une durée $t = 40,0s$.



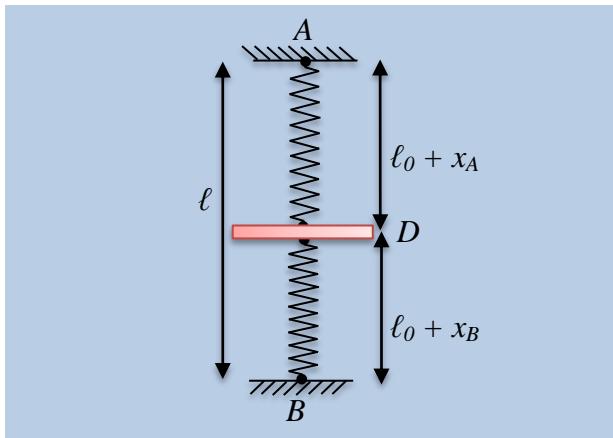
1°) Détermine la nature du mouvement du disque et écris l'équation horaire de ce mouvement dans un repère fixe.

2°) Calcule la constante de torsion C du fil sachant que le moment d'inertie du disque est $J_\Delta = 2,25 \cdot 10^{-3} Kg.m^2$.

3°) Le disque est maintenu à présent à la distance $AO = x$ sur le fil dont les extrémités A et A' sont fixées (voir figure). Détermine en fonction de T_0 , ℓ et x la période des oscillations du disque.

Pour quelle valeur de x est-elle maximale ? Quelle est alors la valeur de cette période ?

EXERCICE 14: Deux ressorts identiques, de longueur à vide ℓ_0 et de raideur K sont tendus entre deux points A et B distants de ℓ . Un disque D de masse m et d'épaisseur négligeable, est fixée entre ces ressorts (voir figure). On donne : $\ell = 45\text{cm}$; $\ell_0 = 15\text{cm}$; $K = 20\text{N/m}$; $g = 10\text{m/s}^2$; $m = 0,1\text{Kg}$.



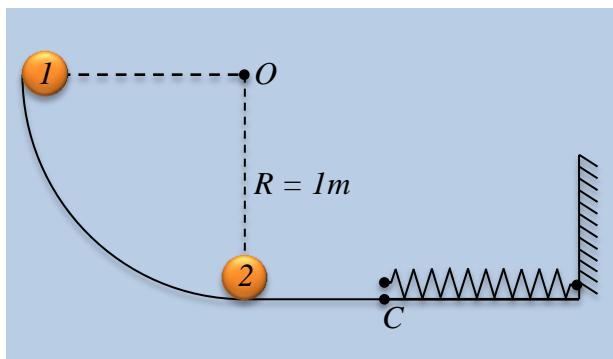
1°) Détermine la position d'équilibre stable du disque D .

2°) Le disque D est écarté de sa position d'équilibre verticalement vers le bas de $x_m = 3\text{cm}$.

- Par une étude dynamique, donne l'équation différentielle du mouvement (on choisira l'axe x' comme sur la figure, son origine coïncidant avec la position d'équilibre).
- Déduis – en la période et l'équation horaire du mouvement du disque D .
- Retrouve l'équation horaire par une étude énergétique.

EXERCICE 15 : On considère le dispositif dans lequel tous les frottements sont négligeables. A l'instant initial la bille B_2 de masse $m_2 = 2m_1$ est immobile en B et on lâche en A , sans vitesse initiale la bille B_1 de masse m_1 telle que $m_1 = 100\text{g}$.

1°) En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, détermine la vitesse de la bille B_1 juste avant le choc parfaitement élastique.



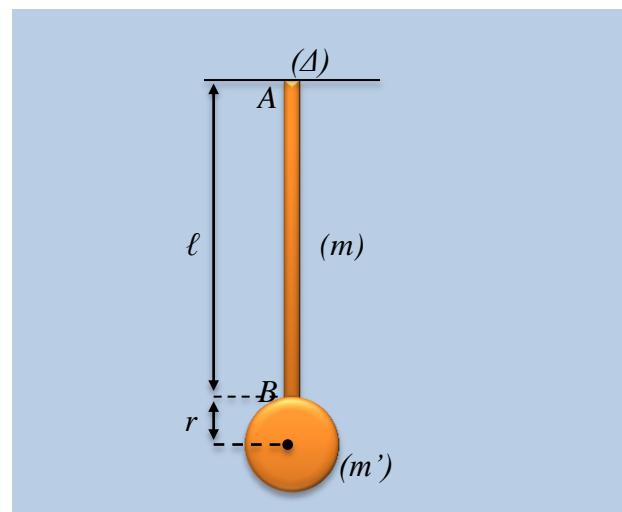
2°) Détermine les vitesses V_1 et V_2 respectives des billes B_1 et B_2 juste après le choc. Déduis – en la hauteur maximale h_m à laquelle remonte la bille B_1 après le choc.

3°) Après le choc, la bille B_2 va percuter un ressort fixe à spires non jointives de constante de raideur K et de masse négligeable auquel il reste accroché.

- Détermine le raccourcissement maximal x_m du ressort.
- Détermine la nature du mouvement du système terre – ressort – bille B_2 . Déduis – en la période du mouvement pour la bille B_2 .
- En prenant pour origine des temps l'instant où la bille B_2 percute le ressort et pour origine des espaces le point C , donne l'expression de son équation horaire.

On donne $K = 500\text{N/m}$, $g = 10\text{m/s}^2$.

EXERCICE 17 : Un pendule est constitué d'une tige homogène AB de longueur ℓ et de masse m . A son extrémité B inférieure, on soude une sphère homogène de rayon r et de masse m' .



L'ensemble constitue un système mobile autour d'un axe (Δ) horizontal passant par A . On l'écarte de sa position d'équilibre d'un angle petit $\alpha_0 = 0,1\text{rad}$. On le lance avec une vitesse initiale de $0,5\text{rad/s}$ à l'instant $t = 0$.

1°) Détermine la position du centre d'inertie de ce pendule et son moment d'inertie par rapport à l'axe (Δ).

2°) Montre par la méthode énergétique, qu'il effectue des oscillations sinusoïdales. Déduis – en l'équation du mouvement de ce pendule.

3°) Calcule la période T des oscillations du pendule.

4°) Calcule la longueur L du pendule simple synchronique de ce pendule composé.

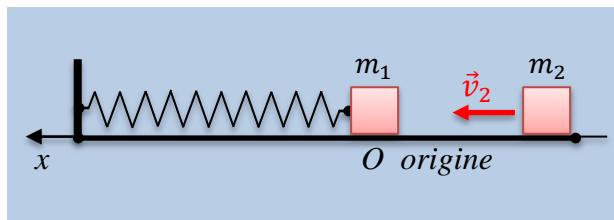
5°) Calcule l'énergie mécanique du pendule pesant.
 Données : $\ell_0 = 1m$; $m = 100g$, $m' = 500g$;
 $r = 10cm$; $g = 10m.s^{-2}$.

EXERCICE 18 : Un ressort de constante de raideur $K = 100N/m$, d'axe horizontal, est lié à un corps (A) de masse $m_1 = 360g$ qui peut glisser sans frottement sur un plan horizontal. L'autre extrémité du ressort est fixée. Un deuxième corps (B) de masse $m_2 = m_1/2$, animé d'une vitesse \vec{v}_2 parallèle à l'axe du ressort, heurte le corps (A) au repos.

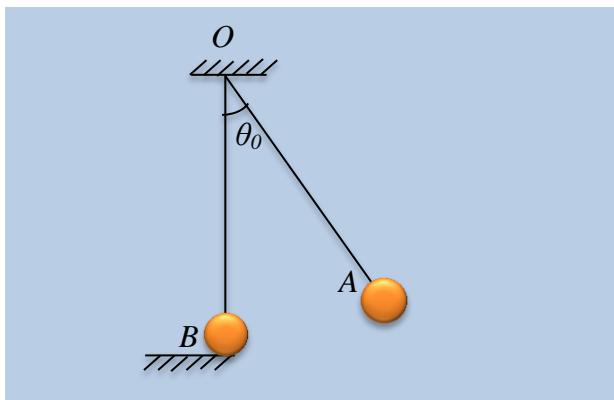
1°) Calcule la vitesse du corps (A) juste après le choc supposé élastique, sachant que $v_2 = 0,8m/s$.

2°) Après le choc, détermine :

- L'équation différentielle du mouvement du solide (A); Déduis – en la nature du mouvement ;
- L'équation horaire de ce mouvement. On prendra pour instant initial, l'instant du choc.



EXERCICE 19 : Un pendule simple est constitué par un point matériel A de masse $m_A = 50g$ suspendu à un point fixe O par l'intermédiaire d'un fil de longueur $\ell = 50cm$. A partir de sa position d'équilibre, on écarte le pendule d'un angle $\theta_0 = 60^\circ$ et on l'abandonne sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$.



1°) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, détermine la vitesse linéaire du point matériel :

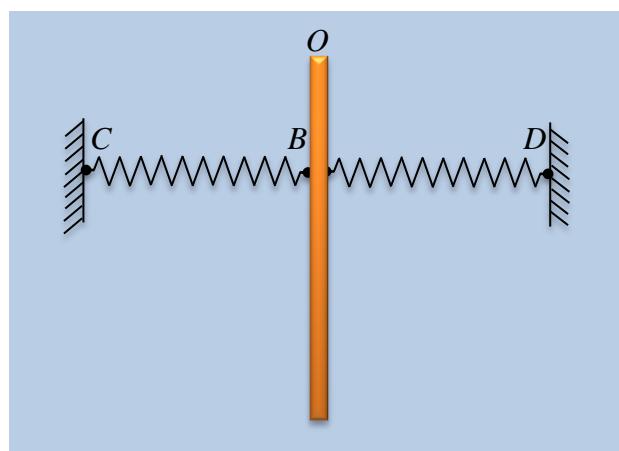
- A son passage à la position $\theta = 30^\circ$;
- A son passage par la verticale et représente ce vecteur vitesse.

2°) Calcule la tension du fil à la position verticale.

3°) Lorsque le point matériel A arrive à la verticale, il rencontre un solide ponctuel B de masse $m_B = 100g$, immobile placé sur une table. Détermine les vitesses de A et B après le choc supposé parfaitement élastique.

Prendre $g = 10m.s^{-2}$.

EXERCICE 20 : Une tige de masse $m = 0,500Kg$ peut osciller dans le champ de pesanteur autour d'un axe horizontal O. Elle est fixée par le point B à deux ressorts identiques de même longueur, tendus entre les points fixes C et D.



Les deux ressorts sont horizontaux dans le plan vertical des oscillations de la tige (plan de la figure). Leur raideur commune est $K = 10N.m^{-1}$. On pose $OB = b = 20cm$; $OG = d$: distance de l'axe au centre de gravité de la tige; J : moment d'inertie de la tige.

1°) Donne l'expression de la période en fonction de b , d , J , m et K .

2°) Si on supprime les deux ressorts, la période devient deux fois plus grande, égale à 1,20s. Calcule d et J ; on donne $g = 9,8m.s^{-2}$.

DOMAINE D'ETUDE I : STRUCTURE DE LA MATIERE

OG₁ : UTILISER LES LOIS PHYSIQUES DANS LA DETERMINATION DES MASSES MOLAIRES.

1

LOIS PHYSIQUES RELATIVES AUX GAZ ET AUX SOLUTIONS DILUEES

I. Rappels et compléments

I.1. La mole.

Tous les objets autour de nous sont constitués d'un très grand nombre d'atomes. Par exemple, 1 gramme de cuivre d'un ustensile chirurgical contient environ 10^{22} atomes de cuivre.

Afin de ne pas manipuler de trop grands nombres, les atomes sont comptés par paquets. Comme les œufs sont comptabilisés par douzaines ou les timbres par carnet, les atomes sont comptabilisés en **moles**.

1 mole est un « paquet » contenant $6,02 \cdot 10^{23}$ entités élémentaires (atomes, molécules, ions).

On peut alors dire qu'**un gramme de cuivre contient environ 0,016 mole**.

- **La mole (symbole : mol) est le nombre d'entités élémentaires N_A contenues dans 12,0 grammes de carbone 12.**

N_A est la constante d'AVOGADRO. Sa valeur approchée est $6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

- La quantité de matière **n** (exprimée en mol) est le quotient du nombre d'entités **N** par la constante d'AVOGADRO N_A .

$$n = \frac{N}{N_A} \quad (\text{mol})$$

I.2. Masse molaire

Définition : On appelle **masse molaire**, la masse d'une mole d'un corps pur.

Elle s'exprime en g/mol ou $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

❖ Les masses molaires de tous les éléments chimiques connus sont consignées dans le tableau périodique des éléments. La masse molaire atomique, exprimée en gramme (g) est du même ordre de grandeur que le nombre de masse de l'atome.

Exemple :

$$\begin{aligned} M(C) &= 12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} ; & M(O) &= 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \\ M(H) &= 1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} ; & M(Cu) &= 63,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

❖ La masse molaire atomique attribuée à un élément chimique tient compte des proportions des différents isotopes qu'il renferme à l'état naturel.

Exemple du chlore :

à l'état naturel le chlore existe sous deux formes isotopiques :

^{35}Cl d'abondance relative 75,7% et de masse molaire $M_1 = 35,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$;

^{37}Cl d'abondance relative 24,3% et de masse molaire $M_2 = 37,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$;

La masse molaire de l'élément chlore $M(Cl)$ à l'état naturel est égale à :

$$M(Cl) = 35,0 \times \frac{75,7}{100} + 37,0 \times \frac{24,3}{100} = 35,5$$

$$M(Cl) = 35,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

❖ Pour une molécule, un solide ionique ou un ion, on obtient la masse molaire en faisant la somme des masses molaires atomiques de tous les atomes qui le ou la constituent.

Exemple :1) **Masse molaire moléculaire de l'eau (H_2O)**

$$M(H_2O) = 2M(H) + M(O) = 2 \times 1 + 16$$

$$M(H_2O) = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$



Conclusion : une mole de molécules d'eau a une masse de 18g, ou 18g d'eau représentent la masse d'une quantité de 1 mole de molécules.

2) Masse molaire moléculaire du sulfate de cuivre ($CuSO_4$)

$$M(CuSO_4) = M(Cu) + M(S) + 4 \times M(O)$$

$$M(CuSO_4) = 63,5 + 32,1 + 4 \times 16$$

$$M(CuSO_4) = 159,6\text{g.mol}^{-1}$$

Conclusion : une mole de sulfate de cuivre a une masse de 159,6g, ou 159,6g de sulfate de cuivre représentent la masse d'une quantité de 1 mole de solide ionique.

➤ Relation entre le nombre de mole, la masse molaire et la masse d'un corps solide.

La masse molaire M est liée à la masse m de l'échantillon et à la quantité de matière n qu'il contient par la relation :

$$n = \frac{m}{M} \quad (\text{mol})$$

Conséquence :

$$m = n \cdot M$$

m : masse du corps (g)

M : masse molaire moléculaire (g.mol^{-1})

n : nombre de mole (quantité de matière)

I.3. Volume molaire (V_m)

Définition : Le volume molaire d'une substance est le volume occupé par une mole de cette substance.

Il peut être déterminé pour toute substance dans toutes les phases (gaz ; liquide ; solide)

Le volume molaire s'exprime en L.mol^{-1} . Ce volume dépend de la température et de la pression.

Par exemple :

- A 0°C sous 1,013bar : $V_m = 22,4\text{L.mol}^{-1}$
(Conditions normales de température et de pression CNTP) ;
- A 20°C sous 1,00bar : $V_m = 24,4\text{L.mol}^{-1}$

❖ **Loi d'AVOGADRO – AMPERE :** dans les mêmes conditions de température et de pression, tous les gaz ont le même volume molaire V_m .

Dans d'autres conditions, le volume molaire pourra être calculé à partir de la loi des gaz parfaits.

Remarque :

Les CNTP sont des conditions pratiques, en partie arbitraires, d'expérimentation et de mesure en physique et en chimie. Elles permettent des comparaisons commodes entre résultats expérimentaux. Elles veulent dire :

$$\begin{aligned} n_0 &= 1\text{mol} \\ T_0 &= 273\text{K} \\ P_0 &= 760\text{mmHg} \\ V_0 &= V_m = 22,4\text{L} \end{aligned}$$

Remarque :

Pour la pression d'un gaz, il existe une correspondance entre les différentes unités :

$$1\text{atm} = 760\text{mmHg} = 101.325\text{Pa} = 1\text{bar.}$$

Avec :

$\text{atm} = \text{atmosphère} ;$

$\text{mmHg} = \text{millimètre de mercure} ;$

$\text{Pa} = \text{Pascal.}$

➤ Relation entre le nombre de mole et le volume d'un corps gazeux.

Le volume molaire V_m d'un gaz, dans des conditions de température et de pression données, est lié au volume V de l'échantillon et à la quantité de matière n qu'il contient par la relation :

$$n = \frac{V}{V_m} \quad (\text{mol})$$

Conséquence :

$$V = n \cdot V_m$$

V : Volume du corps gazeux (L).

Remarque :

Pour un même corps changeant d'état :

$$n = \frac{m}{M} = \frac{V}{V_m} \Rightarrow M = \frac{m \cdot V_m}{V}$$



II. Lois physiques.

II.1. Définition : On appelle *lois physiques*, toute opération réalisée sur un *corps* et qui conduit à la détermination de sa masse molaire moléculaire.

Les *lois physiques* permettent de déterminer la masse molaire moléculaire du composé à analyser.

II.2. Lois physiques relatives aux gaz.

II.2.1. Loi des gaz parfaits.

C'est la loi d'Avogadro – Ampère.

Dans les mêmes conditions de température et de pression, des volumes égaux des gaz différents contiennent le même nombre de molécules.

On note :

$$PV = nRT$$

Avec :

- ♣ P : Pression du gaz en Pascal (Pa) ;
- ♣ V : Volume du gaz en m^3 ;
- ♣ R : Constante des gaz parfaits ;
- ♣ T = $t^\circ C + 273$: Température du gaz en Kelvin (K) ;
- ♣ n : Quantité de matière en mole.

Remarques :

R₁ : Si la pression P est en Pa ; le volume V en m^3 ; la température T en Kelvin (K), alors :

$$R = 8,314 J.K^{-1}mol^{-1}$$

R₂ : Si la pression P est en atmosphère (atm) ; le volume V en litre (L) ; la température T en Kelvin (K), alors :

$$R = 0,082 J.K^{-1}mol^{-1}$$

II.2.2. Equation du changement d'état.

♣ Dans les conditions expérimentales, on a :

$$PV = nRT \quad (1)$$

♣ Dans les conditions normales de température et de pression (CNTP), on a :

$$P_0V_0 = nRT_0 \quad (2)$$

Le rapport $\frac{(1)}{(2)}$ membre à membre donne :

$$\frac{PV}{P_0V_0} = \frac{nRT}{nRT_0}$$

D'où :

$$\frac{P_0V_0}{T_0} = \frac{PV}{T}$$

C'est l'équation du changement d'état, avec :

- ♣ $P_0 = 760 \text{ mm de Hg} = 101,325 \text{ Pa}$: Pression normale ;
- ♣ V_0 : Volume normal du gaz ;
- ♣ $T_0 = 273 \text{ K}$: Température du gaz dans les C.N.T.P.

II.2.3. Détermination de la masse molaire moléculaire d'un composé.

D'après la loi des gaz parfaits :

$$PV = nRT$$

$$\text{Avec } n = \frac{m_S}{M_S} \Rightarrow PV = \frac{m_S}{M_S} RT$$

D'où :

$$M_S = \frac{m_S RT}{PV}$$

$$\text{De plus : } \rho_S = \frac{m_S}{V} \Rightarrow m_S = \rho_S \cdot V$$

D'où :

$$M_S = \frac{\rho_S RT}{P}$$

$$\text{De même : } n = \frac{V_0}{V_m} = \frac{m_S}{M_S} \Rightarrow M_S = m_S \cdot \frac{V_m}{V_0}$$

$$\text{Or } \frac{P_0V_0}{T_0} = \frac{PV}{T} \Rightarrow V_0 = \frac{PVT_0}{P_0T}$$

D'où :

$$M_S = \frac{m_S V_m P_0 T}{PVT_0}$$

Avec $V_m = 22,4 \text{ L}$: Volume molaire d'un gaz.

II.2.4. Densité d'un gaz par rapport à l'air.

Définition : La densité d'un gaz est le rapport entre la masse du gaz et la masse d'un égal volume d'air.

On note :

$$d = \frac{m}{m'}$$

Avec m : masse du gaz ;
 m' : masse d'air.

Conséquence :

$$\begin{cases} \rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V \\ \rho' = \frac{m'}{V} \Rightarrow m' = \rho' \cdot V \end{cases}$$



Ainsi : $d = \frac{\rho \cdot V}{\rho' \cdot V} = \frac{\rho}{\rho'} \Rightarrow d = \frac{\rho}{\rho'}$

Pour $V = V_m = 22,4 \text{ L}$; $\rho' = 1,3 \text{ g/L}$ et $n = 1 \text{ mol}$.

Alors : $n = \frac{m}{M} = 1 \Rightarrow m = M$

$$\Rightarrow d = \frac{m}{m'} = \frac{M}{m'} = \frac{M}{\rho' V_m}$$

$$\Rightarrow d = \frac{M}{22,4 \times 1,3} \approx \frac{M}{29}$$

D'où :

$$d = \frac{M}{29}$$

Remarques :

R₁ : Lorsque le gaz à étudier est mélangé à de la vapeur d'eau dont la pression est notée f , la pression totale du mélange vaut :

$$H = P + f \Rightarrow P = H - f$$

Avec :

H : Pression totale du mélange ou pression atmosphérique ;

P : Pression du gaz à étudier ;

f : Pression de la vapeur d'eau saturante.

R₂ : Dans l'expérience de V. Meyer, lorsque le mélange provoque un déplacement d'eau d'une hauteur h dans l'éprouvette :

$$H = P + f + \frac{h}{\rho_{Hg}} \Rightarrow P = H - f - \frac{h}{13,6}$$

Avec ρ_{Hg} : masse volumique du mercure.

III. Lois physiques relatives aux solutions diluées : lois de Raoult.

III.1. Définitions :

- On appelle **soluté**, tout corps qui est dissout dans un liquide ;
- On appelle **solvant**, le liquide qui dissoud le soluté ;
- On appelle **solution**, le mélange de soluté et de solvant ;
- On appelle **cryométrie**, la science des mesures relatives à la congélation ;

- On appelle **ébulliométrie**, la science des mesures relatives à la vaporisation.
- Une **solution diluée non électrolyisable** est une solution dont la décomposition en ces éléments constitutifs ne se fait pas lors du passage du courant électrique.

III.2. Concentration massique d'une solution non électrolyisable.

Définition : C'est le rapport entre la masse du soluté et la masse du solvant. On note :

$$C = \frac{m}{m'}$$

m : masse du soluté ;

m' : masse du solvant.

III.3. Lois de Raoult.

III.3.1. 1^{ère} loi de Raoult : cryométrie.

a) Expérience :

➤ On refroidit progressivement un liquide pur utilisé comme solvant. Lorsque les *premiers cristaux de ce liquide apparaissent*, on note cette température θ_0 , qui reste constante pendant toute la congélation.

➤ Lorsqu'on refroidit une solution non électrolyisable dont le solvant est le liquide précédent, on constate que *les premiers cristaux de ce liquide apparaissent à une température $\theta < \theta_0$* . La température de la solution continue à baisser pendant toute la congélation du liquide (du solvant). θ est donc appelé *température de congélation commençante de la solution*.

➤ Les courbes de refroidissement du solvant pur et du solvant mélangé au soluté sont obtenues par la relation $\theta = f(t)$ (avec t : temps de congélation) et se présente de la manière suivante (figure 1) :



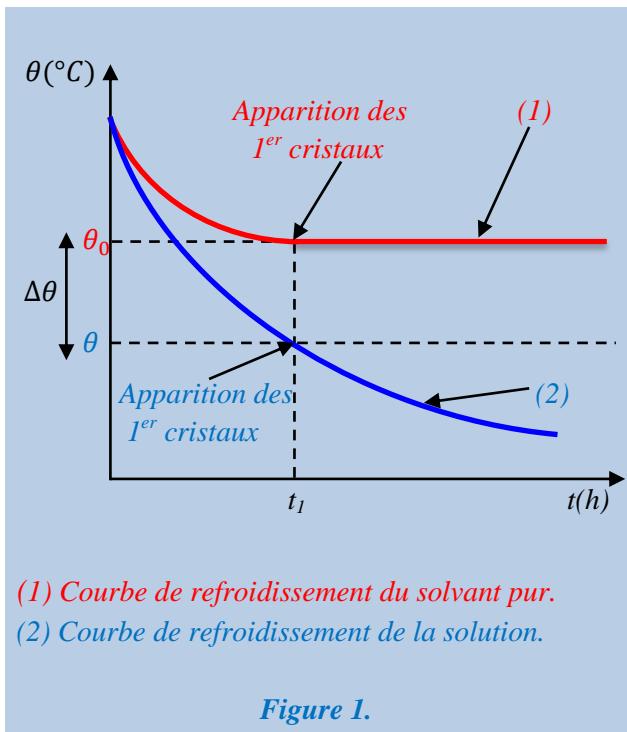


Figure 1.

b) Abaissement cryométrique.

C'est la différence ou variation de température d'apparition des premiers cristaux lors du refroidissement d'un solvant pur et d'une solution.

Pour une solution diluée non électrolyisable dans laquelle le refroidissement ne fait apparaître que les cristaux du solvant pur l'abaissement cryométrique de la solution est :

- Proportionnelle à la concentration massique de la solution ;
- Inversement proportionnelle à la masse molaire moléculaire du soluté dissout dans la solution.

$$\Delta\theta = \theta_0 - \theta = K \frac{C}{M} = K \frac{m}{m'M}$$

$\Delta\theta$: abaissement cryométrique de la solution ($^{\circ}\text{C}$) avec $\Delta\theta > 0$;

θ_0 : température de congélation du solvant pur ($^{\circ}\text{C}$) ;

θ : température de congélation commençante de la solution ($^{\circ}\text{C}$) ;

K : Constante cryométrique du solvant ;

$C = \frac{m}{m'}$: concentration massique de la solution ;

M : Masse molaire moléculaire du soluté.

Note : Le tableau ci-dessous donne quelques constantes des solvants :

Solvant	Température de congélation θ_0	Constante cryométrique K
Eau	0°C	1850
Benzène	5,5°C	5700
Phénol	41°C	7200
Acide éthanoïque	16,6°C	3900

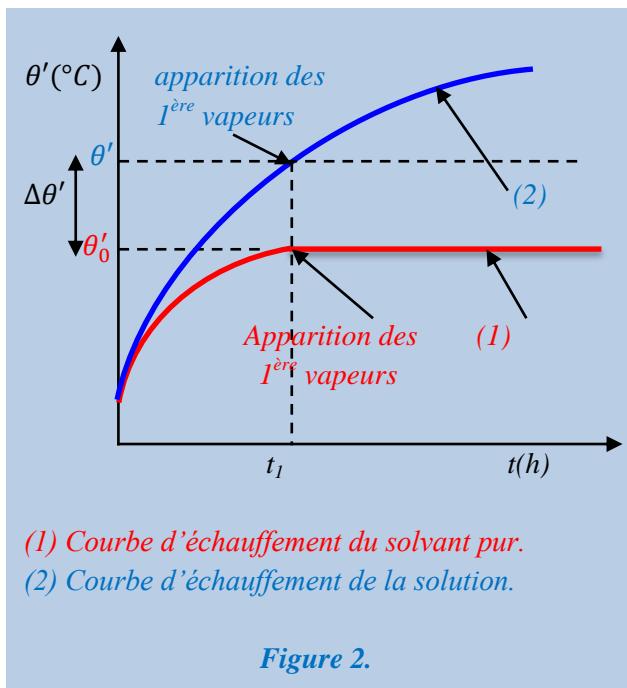
Remarque : Connaissant $\Delta\theta$, K, m et m' on en déduit la masse molaire moléculaire du soluté dilué, soit :

$$M = \frac{Km}{m'\Delta\theta} = \frac{Km}{m'(\theta_0 - \theta)}$$

III.3.2. 2^{ème} loi de Raoult : ébulliométrie.**a) Expérience :**

- Lorsqu'on chauffe *un solvant pur, les premières vapeurs apparaissent à la température θ'_0* , qui reste *constante* pendant toute l'ébullition.
- Lorsqu'on mélange à ce solvant pur un soluté tel que le mélange constitue *une solution diluée non électrolyisable, les premières vapeurs du solvant lors de l'échauffement de la solution, apparaissent à une température $\theta' > \theta'_0$ appelée température d'ébullition commençante de la solution.* La température de la solution continue à s'élever pendant toute l'évaporation.
- Les courbes d'échauffement du solvant pur et du solvant mélangé au soluté sont obtenues par la relation $\theta' = f(t)$ (avec t : temps d'ébullition) et se présente de la manière suivante (figure 2) :





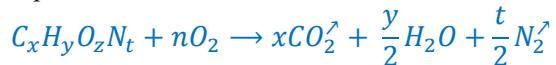
Remarque : Connaissant $\Delta\theta'$, K' , m et m' on en déduit la masse molaire moléculaire du soluté dilué, soit :

$$M = \frac{K'm}{m'\Delta\theta'} = \frac{K'm}{m'(\theta' - \theta'_0)}$$

IV. Détermination de la formule moléculaire d'un composé.

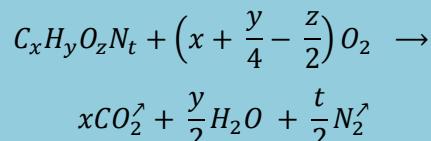
IV.1. Combustion dans l'oxygène de l'air.

Soit un composé quaternaire du type $C_xH_yO_zN_t$, on a l'équation :



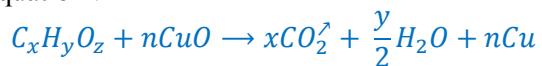
$$\text{Avec : } z + 2n = 2x + \frac{y}{2} \Rightarrow n = x + \frac{y}{4} - \frac{z}{2}$$

D'où l'équation (1) :



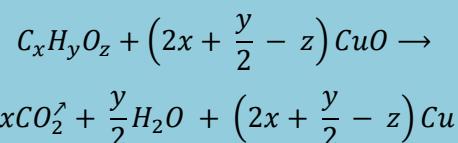
IV.2. Combustion dans l'oxyde de cuivre II.

Soit un composé ternaire du type $C_xH_yO_z$, on a l'équation :



$$\text{Avec : } z + n = 2x + \frac{y}{2} \Rightarrow n = 2x + \frac{y}{2} - z$$

D'où l'équation (2) :



D'après l'équation (1) on a par proportion :

$$\frac{1}{n_S} = \frac{x}{n_{CO_2}} = \frac{y}{2n_{H_2O}} = \frac{t}{2n_{N_2}}$$

$$\text{Et } M_S = 12x + y + 16z + 14t$$

♣ Composition centésimale :

Soit le composé $C_xH_yO_zN_t$.

$$M_S = 12x + y + 16z + 14t$$

Pour une solution diluée non électrolyssable dans laquelle l'échauffement ne fait apparaître que les vapeurs du solvant pur l'élevation ébulliométrique de la solution est :

- Proportionnelle à la concentration massique de la solution ;
- Inversement proportionnelle à la masse molaire moléculaire du soluté dissout dans la solution.

$$\Delta\theta' = \theta' - \theta'_0 = K' \frac{C}{M} = K' \frac{m}{m'M}$$

$\Delta\theta'$: élévation ébulliométrique de la solution ($^{\circ}C$) avec $\Delta\theta' > 0$;

θ'_0 : température d'ébullition du solvant pur ($^{\circ}C$) ;
 θ' : température d'ébullition commençante de la solution ($^{\circ}C$) ;

K' : Constante ébulliométrique du solvant ;

$C = \frac{m}{m'}$: concentration massique de la solution ;

M : Masse molaire moléculaire du soluté.



$$100\% = \%C + \%H + \%O + \%N$$

$$\Rightarrow \frac{M_S}{100\%} = \frac{12x}{\%C} = \frac{y}{\%H} = \frac{16z}{\%O} = \frac{14t}{\%N}$$

♣ Composition massique.

Soit le composé $C_xH_yO_zN_t$.

$$M_S = 12x + y + 16z + 14t$$

$$m_S = m_C + m_H + m_O + m_N$$

$$\Rightarrow \frac{m_S}{M_S} = \frac{m_C}{12x} = \frac{m_H}{y} = \frac{m_O}{16z} = \frac{m_N}{14t}$$

Avec

$$m_C = \frac{3}{11}m_{CO_2}$$

et

$$m_H = \frac{1}{9}m_{H_2O}$$

Remarque :

- Le dioxyde de carbone (CO_2) augmente les tubes à potasse (KOH) ou à soude (NaOH).
- L'eau (H_2O) augmente les tubes à ponce sulfurique (H_2SO_4).
- L'oxygène augmente les tubes à phosphore.

V. Méthodes de séparation des isotopes.

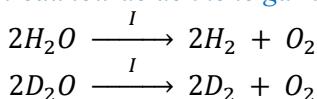
V.1. Définition : On appelle isotopes des atomes qui possèdent le même nombre de protons mais de nombre de masse différent.

V.2. Electrolyses successives.

Exemple : Séparation du deutérium 2H

Cette méthode utilise le courant électrique pour la séparation des isotopes. Par exemple H_2O et D_2O (eau lourde) sont séparées par électrolyse fractionnée.

L'hydrogène naturel a trois isotopes : 1H ; 2H (2D); 3H . L'eau naturel est un mélange des molécules suivantes H_2O ; D_2O . En soumettant une grande quantité d'eau naturelle à des électrolyses successives, on obtient un résidu liquide contenant environ 99% d'eau lourde D_2O . La réduction chimique de l'eau lourde donne le gaz deuterium.



V.3. Diffusion gazeuse.

Exemple : Séparation de l'uranium 235.

Méthode inventée par les savants Anglais en 1941, elle repose sur le fait que deux substances gazeuses de poids différents diffusent à une vitesse différente à travers une barrière poreuse.

Elle est généralement utilisée pour séparer les isotopes d'uranium dont le plus « intéressant » est le 235 ; on doit donc enrichir le mélange naturel en cet isotope (2 à 3% pour les centrales nucléaires), et même l'isoler, pour les bombes atomiques

L'uranium naturel a deux isotopes : ^{235}U et ^{238}U . Les minerais d'uranium sont transformés en hexafluorure d'uranium (UF_6) qui est gazeux.

Le procédé consiste à faire passer l'hexafluorure d'uranium à l'état gazeux à travers une barrière poreuse (membrane percée de trous minuscules). Les molécules d'hexafluorure d'uranium 235 ($^{235}UF_6$) plus légères que celles d'hexafluorure d'uranium 238 ($^{238}UF_6$) traversent un peu plus rapidement la barrière à une vitesse inversement proportionnelle à la racine carrée de sa masse molaire : $v = \frac{1}{\sqrt{M}}$.

L'opération répétée 1400 fois permet produire un uranium assez enrichi en uranium 235.

V.4. Ultracentrifugation.

Exemple : Séparation de l'uranium 235.

Dans cette méthode, on soumet les molécules à séparer à une rotation ultrarapide : les plus « lourdes » sont projetés vers l'extérieur, les plus « légères » restent près de l'axe de rotation : Ce n'est rien d'autre que le principe de l'**écrémuse** (machine servant à enlever la crème du lait par centrifugation).

Ce principe utilise une centrifugeuse ou ultracentrifugeuse qui, tournant à grande vitesse, près de 20.000 trs/min, projette plus vite à sa périphérie l'hexafluorure d'uranium 238 ($^{238}UF_6$) que l'hexafluorure d'uranium 235 ($^{235}UF_6$) qu'elle contient. La très légère différence de masse entre les deux molécules permet d'augmenter petit à petit la concentration de l'uranium 235.

V.5. Spectroscopie de masse.

Exemple : Séparation des isotopes du lithium.

Cette méthode utilise un appareil appelé **spectrographe de Dempster ou de masse** inventé par le Physicien Anglais **John Joseph THOMSON** qui permet de « trier » des ions de masses différentes et, donc, de séparer les isotopes d'un



élément grâce au champ électromagnétique de telle sorte que ces ions décrivent des demi-cercles de rayon $R = \frac{mv_0}{|q|B}$ comme trajectoire.

Le spectrographe comporte 3 parties où règne un vide poussé :

- **Une chambre d'ionisation** où l'on produit avec une vitesse nulle, des ions de masses différentes mais de même charge.
- **Une chambre d'accélération** où, entre les fentes F et F' les ions sont accélérés par un champ électrostatique.
- **Une chambre de déviation** où les ions décrivent une trajectoire de rayon R qui dépend de la masse de la particule. Deux ions de masses différentes m_1 et m_2 viennent alors se rassembler dans les collecteurs C₁ et C₂ où ils sont recueillis séparément à l'état d'atome en fait.

Le lithium naturel a deux isotopes : ${}^6\text{Li}$ et ${}^7\text{Li}$. On introduit les atomes de lithium dans une chambre d'ionisation où ils se transforment en ions. Après accélération dans la chambre d'accélération, les ions sont émis à la vitesse \vec{v}_0 . Le lithium 6 (${}^6\text{Li}$), plus léger que le lithium 7 (${}^7\text{Li}$) décrit une trajectoire de rayon R₁, plus petit que celle de rayon R₂ décrite par le lithium 7. Ainsi le lithium 6 est reçu dans le collecteur C₁ et le lithium 7 dans le collecteur C₂ (figure 3).

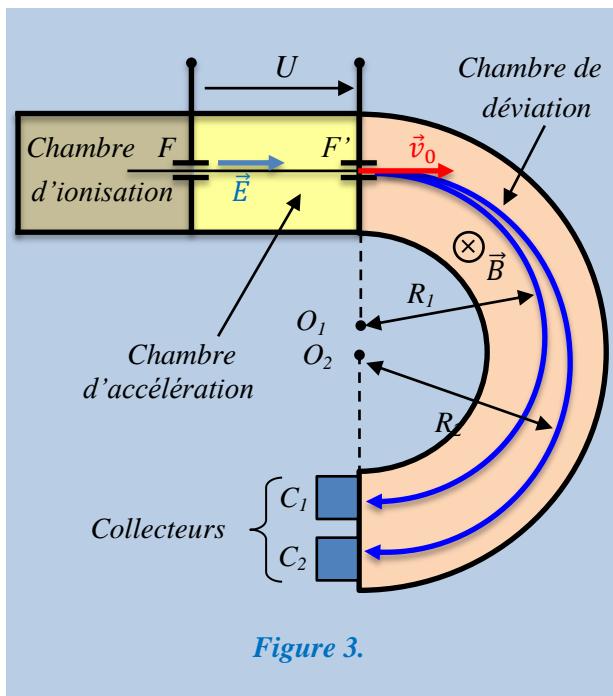


Figure 3.

Exercices d'application :

Exercice 1 : L'analyse d'un composé organique ne contenant que carbone, hydrogène et oxygène donne les résultats suivants :

1,491g de substance fournit par combustion complète : 3,540g de CO₂ et 1,810g de H₂O.

La vaporisation de cette substance produit à 100°C et sous la pression de 75cm de mercure, une vapeur d'eau de masse 2,560g et de volume 1072cm³.

1°) Calcule la masse molaire moléculaire du composé.

2°) Déduis – en sa formule moléculaire.

Exercice 2 : L'analyse élémentaire de 0,372g d'une substance organique ne contenant que du carbone, hydrogène et oxygène fournit 0,223g d'eau et 0,546g de gaz carbonique.

D'autre part, la dissolution de 5,0g de cette substance dans 100g d'eau entraîne un abaissement du point de congélation égal à 0,513°C. On sait que, pour une solution renfermant, dans 200g d'eau 1/10 de mole d'un corps non électrolyssable, l'abaissement du point de congélation est égal à 0,925°C.

1°) Détermine la masse molaire moléculaire approchée de cette substance.

2°) Déduis – en la formule moléculaire de la substance.

Corrigé 1 :

$$\begin{aligned} m_S &= 1,491 \text{ g} ; m_{\text{CO}_2} = 3,540 \text{ g} ; m_{\text{H}_2\text{O}} = 1,810 \text{ g} \\ t &= 100^\circ\text{C} ; P = 75 \text{ cm de Hg} ; m'_S = 2,560 \text{ g} ; \\ V_S &= 1072 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

1°) Calcul de la masse molaire moléculaire du composé.

Pour calculer cette masse molaire moléculaire, on peut utiliser deux méthodes :

1^{ère} Méthode

D'après la loi des gaz parfaits, on a :

$$PV_S = nRT$$

$$\text{Avec } n = \frac{m'_S}{M_S} \Rightarrow PV_S = \frac{m'_S}{M_S} RT$$

D'où :

$$M_S = \frac{m'_S RT}{PV_S}$$

$$\begin{aligned} \text{A.N. : } m'_S &= 2,560 \text{ g} ; R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}\text{mol}^{-1} \\ T &= 100 + 273 = 373 \text{ K} ; \end{aligned}$$



$$P = 9,9992 \cdot 10^4 \text{ Pa} ; \\ V_S = 1072 \text{ cm}^3 = 1,072 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 ;$$

Avec :

$$P = 75 \text{ cm de Hg} = \frac{75 \text{ cm de Hg} \times 101.325 \text{ Pa}}{76 \text{ cm de Hg}}$$

$$P = 9,9992 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

$$M_S = \frac{2,560 \times 8,314 \times 373}{9,9992 \cdot 10^4 \times 1,072 \cdot 10^{-3}} = 74,06$$

$$M_S = 74,06 \text{ g/mol}$$

2^{ème} Méthode

D'après la quantité de matière, on a :

$$n = \frac{V_0}{V_m} = \frac{m'_S}{M_S} \Rightarrow M_S = m'_S \cdot \frac{V_m}{V_0}$$

$$\text{Or } \frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{P V_S}{T} \Rightarrow V_0 = \frac{P V_S T_0}{P_0 T}$$

D'où :

$$M_S = \frac{m'_S V_m P_0 T}{P V_S T_0}$$

$$A.N : m'_S = 2,560 \text{ g} ; V_m = 22,400 \text{ cm}^3$$

$$P_0 = 76 \text{ cm de Hg} ; T = 373 \text{ K} ;$$

$$P = 75 \text{ cm de Hg} ; V_S = 1,072 \text{ cm}^3$$

$$T_0 = 273 \text{ K}$$

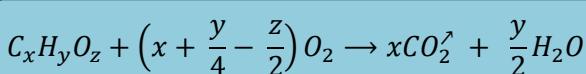
$$M_S = \frac{2,560 \times 22,400 \times 76 \times 373}{75 \times 1,072 \times 273} = 74,06$$

$$M_S = 74,06 \text{ g/mol}$$

2*) Déduction de sa formule moléculaire.

Le composé étant constitué de carbone, d'hydrogène et d'oxygène, sa formule moléculaire est de la forme : $C_x H_y O_z$

Equation de la combustion dans l'oxygène de l'air.



D'après l'équation, on a par proportion :

$$\frac{1}{n_S} = \frac{x}{n_{CO_2}} = \frac{y}{2n_{H_2O}}$$

$$\frac{1}{n_S} = \frac{x}{n_{CO_2}} \Rightarrow x = \frac{n_{CO_2} \cdot M_S}{n_S} = \frac{m_{CO_2} \cdot M_S}{M_{CO_2} \cdot m_S}$$

$$x = \frac{m_{CO_2} \cdot M_S}{M_{CO_2} \cdot m_S}$$

$$A.N : x = \frac{3,540 \times 74,06}{44 \times 1,491} = 3,99 \approx 4 \Rightarrow x = 4$$

$$\frac{1}{n_S} = \frac{y}{2n_{H_2O}} \Rightarrow y = \frac{2n_{H_2O}}{n_S} = \frac{2m_{H_2O} \cdot M_S}{M_{H_2O} \cdot m_S}$$

$$y = \frac{2m_{H_2O} \cdot M_S}{M_{H_2O} \cdot m_S}$$

$$A.N : y = \frac{2 \times 1,81 \times 74,06}{18 \times 1,491} = 9,98 \approx 10 \\ \Rightarrow y = 10$$

De plus : $M_S = 12x + y + 16z + 14t$

Ainsi :

$$z = \frac{1}{16} (M_S - 12x - y)$$

$$A.N : z = \frac{1}{16} (74,06 - 12 \times 4 - 10) = 1 \Rightarrow z = 1$$

D'où la formule moléculaire du composé est :

$$C_4 H_{10} O$$

Corrigé 2 :

$$m_S = 0,372 \text{ g} ; m_{CO_2} = 0,546 \text{ g} ; m_{H_2O} = 0,223 \text{ g}$$

$$m_1 = 0,372 \text{ g} ; m'_1 = 100 \text{ g} ; \Delta\theta_1 = 0,513^\circ C.$$

$$m'_2 = 200 \text{ g} ; n_2 = \frac{1}{10} \text{ mol} ; \Delta\theta_2 = 0,925^\circ C.$$

1*) Calcul de la masse molaire moléculaire du composé.

D'après la 1^{ère} loi de RAOULT, on a :

➤ Pour la solution (1)

$$\Delta\theta_1 = K_1 \frac{C_1}{M_1} = K_1 \frac{m_1}{M_1 \cdot m'_1} \quad (1)$$

➤ Pour la solution (2)

$$\Delta\theta_2 = K_2 \frac{C_2}{M_2} = K_2 \frac{n_2}{m'_2} \quad (2)$$

En faisant le rapport de ces deux expressions membre à membre, on obtient :

$$\frac{\Delta\theta_1}{\Delta\theta_2} = K_1 \frac{m_1}{M_1 \cdot m'_1} \cdot \frac{m'_2}{K_2 \cdot n_2}$$



Le solvant étant le même on a : $K_1 = K_2$, ainsi :

$$\frac{\Delta\theta_1}{\Delta\theta_2} = \frac{m_1}{M_1 \cdot m'_1} \cdot \frac{m'_2}{n_2} \Rightarrow M_1 = \frac{\Delta\theta_2 \cdot m_1 \cdot m'_2}{\Delta\theta_1 \cdot m'_1 \cdot n_2}$$

Avec $m'_2 = 2m'_1 \Rightarrow M_1 = \frac{\Delta\theta_2 \cdot m_1 \cdot 2m'_1}{\Delta\theta_1 \cdot m'_1 \cdot n_2}$

D'où :

$$M_1 = \frac{2\Delta\theta_2 \cdot m_1}{\Delta\theta_1 \cdot n_2}$$

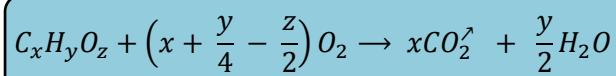
$$A.N : M_1 = \frac{2 \times 0,925 \times 5 \times 10}{0,513 \times 1} = 180,31$$

$$M_1 = 180,31 \text{ g/mol}$$

2*) Déduction de sa formule moléculaire.

Le composé étant constitué de carbone, d'hydrogène et d'oxygène, sa formule moléculaire est de la forme : $C_xH_yO_z$

Equation de la combustion dans l'oxygène de l'air.



D'après l'équation, on a par proportion :

$$\frac{1}{n_S} = \frac{x}{n_{CO_2}} = \frac{y}{2n_{H_2O}}$$

$$\frac{1}{n_S} = \frac{x}{n_{CO_2}} \Rightarrow x = \frac{n_{CO_2}}{n_S} = \frac{m_{CO_2} \cdot M_S}{M_{CO_2} \cdot m_S}$$

$$x = \frac{m_{CO_2} \cdot M_S}{M_{CO_2} \cdot m_S}$$

$$A.N : x = \frac{0,546 \times 180,31}{44 \times 0,372} = 6,01 \simeq 6 \Rightarrow x = 6$$

$$\frac{1}{n_S} = \frac{y}{2n_{H_2O}} \Rightarrow y = \frac{2n_{H_2O}}{n_S} = \frac{2m_{H_2O} \cdot M_S}{M_{H_2O} \cdot m_S}$$

$$y = \frac{2m_{H_2O} \cdot M_S}{M_{H_2O} \cdot m_S}$$

$$A.N : y = \frac{2 \times 0,223 \times 180,31}{18 \times 0,372} = 12,01 \simeq 12$$

$$\Rightarrow y = 12$$

De plus : $M_S = 12x + y + 16z + 14t$

Ainsi :

$$z = \frac{1}{16}(M_S - 12x - y)$$

$$A.N : z = \frac{1}{16}(180,31 - 12 \times 6 - 12) = 6,01 \simeq 6$$

$$\Rightarrow z = 6$$

D'où la formule moléculaire du composé est :

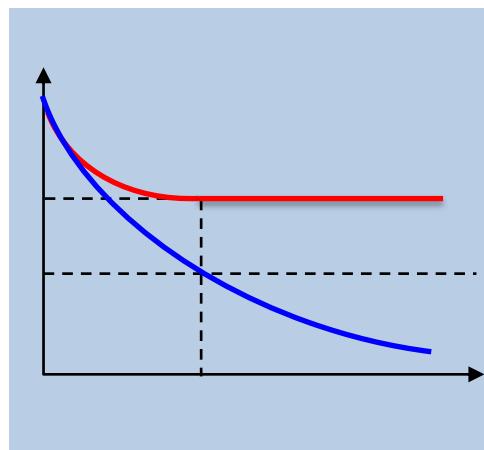
$$C_6H_{12}O_6$$



TRAVAUX DIRIGÉS I

Conseils pratiques :

1. Lois d'Avogadro – Ampère.
2. Lois des gaz parfaits ; Equation du changement d'état.
3. Densité d'un corps gazeux par rapport à l'air.
4. Lois de Raoult : cryométrie et ébulliométrie.
5. Combustion complète d'un composé organique dans le dioxygène de l'air et dans le dioxyde de cuivre.
6. Composition centésimale ; composition massique.



L'ESSENTIEL DU COURS

I – Définitions des notions.

Définis les termes et expressions suivants : Lois physiques ; Densité d'un gaz ; Soluté ; Solvant ; Solution ; Cryométrie ; Ebulliométrie.

II – Questions à réponses courtes.

Réponds aux questions suivantes :

- 1°) Qu'appelle-t-on solution diluée non électrolyisable ?
- 2°) Quelle différence fais-tu entre une température de congélation et une température de congélation commençante ?
- 3°) Enonce la loi des Gaz parfaits ou loi d'AVOGADRO – AMPERE.
- 4°) Qu'appelle-t-on concentration massique d'une solution ?

III – Appariement.

Relie un élément – question de la colonne A à un élément – réponse de la colonne B dans le tableau ci-dessous : Exemple $a_9 = b_{10}$

Colonne A		Colonne B	
a_1	Lois d'AVOGADRO – AMPERE	b_1	$d = \frac{\rho}{\rho_{air}}$
a_2	Lois DE RAOULT	b_2	Température d'ébullition commençante.
a_3	Méthode de MEYER	b_3	Pourcentage
a_4	Densité d'un gaz	b_4	Liquide volatil
a_5	Composition massique d'un composé organique	b_5	$\Delta\theta = K \frac{m}{m'.M}$
a_6	Ebulliométrie	b_6	Gaz parfaits
a_7	Abaissement cryométrique	b_7	Solutions diluées non électrolysalles.

III – Questions à alternative vrai ou faux.

Réponds par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

- 1°) Dans l'équation des gaz parfaits, lorsque la pression est en pascal, le volume en m^3 et la température en Kelvin, la valeur de la constante des gaz parfaits est $R = 0,082 J.K^{-1}.mol^{-1}$.
- 2°) La correspondance entre les différentes unités de la pression est : $1 atm = 76 cm de Hg = 1,01325.10^5 Pa$.
- 3°) Dans toute expérience de cryométrie, le solvant est toujours l'eau.
- 4°) La température d'ébullition de l'eau est égale à $0^\circ C$.



5°) La 2^e loi de Raoult s'écrit $\Delta\theta = K \frac{m}{m/M}$.

6°) Le benzène et l'eau se congèle à la même température de 5,5°C, dans les C.N.T.P.

7°) L'élévation ébulliométrique est proportionnelle à la masse molaire et inversement proportionnelle à la masse du soluté.

8°) L'abaissement cryométrique est toujours positif.

9°) Lors de la combustion complète d'un composé organique, il se dégage toujours du gaz carbonique (CO₂).

10°) Dans certaines expériences d'ébulliométrie, la température d'ébullition commençante d'une solution peut être inférieure à la température d'ébullition du solvant utilisé.

RESOLUTION DES PROBLEMES

EXERCICE 1 : On vaporise 1,28g d'un composé à 100°C sous la pression de 750mm de mercure et on trouve que le volume est 536,4cm³.

1°) Calcule la masse molaire moléculaire du composé.

2°) Détermine sa formule chimique sachant qu'il contient en masse 64,9% de carbone, 13,5% d'hydrogène et 21,6% d'oxygène.

EXERCICE 2 : L'analyse d'une substance contenant du carbone, de l'hydrogène, de l'azote et d'oxygène a donné les pourcentages : 40,68% de carbone, 8,17% d'hydrogène et 23,76% d'azote.

Une valeur approchée de la masse molaire a été déterminée par ébulliométrie dans l'alcool éthylique.

La température d'ébullition commençante à la pression normale, d'une solution contenant 2,00g de substance pour 100g d'alcool absolu a été trouvée égale à 78,81°C.

Détermine :

1°) La masse molaire approchée de la substance.

2°) Sa formule brute.

3°) Sa formule semi - développée la plus simple et son nom.

On donne : $\theta_0 = 78,40^\circ\text{C}$; $K' = 1200$ pour l'alcool éthylique.

EXERCICE 3 : 1°) La vaporisation d'une masse de 1,6g d'un composé organique par la méthode de Meyer a donné 0,530L de vapeur mesuré à 27°C et sous la pression de 763,15 mm Hg. Calcule la masse molaire moléculaire approchée de ce composé organique.

2°) D'autre part, la combustion complète de 0,75g de ce composé organique de formule générale C_xH_yO_z a fourni 0,91g d'eau et 896 mL de dioxyde de carbone, volume mesuré dans les conditions normales.

a) Ecris l'équation bilan de la combustion ;

b) Détermine la formule massique des éléments du composé.

EXERCICE 4 : 1°) On place 1g d'une substance A dans un ballon de capacité 1L, préalablement vidé d'air et hermétiquement fermé après introduction de la substance. A la température de 80°C, on constate que cette substance est entièrement vaporisée et que la pression régnant dans le ballon est 29,7cm de mercure. Quel est la masse molaire de A ?

2°) On fait dissoudre 0,05mol de cette substance dans 200g de benzène. A quelle température va-t-on constater l'apparition des premiers cristaux au cours de refroidissement de la solution obtenue ? On donne : point de fusion - solidification du benzène pur : $\theta_0 = 5,5^\circ\text{C}$.

Constante cryométrique du benzène pur $K = 5700$.

EXERCICE 5 : Un composé organique est formé de carbone, d'hydrogène et d'oxygène. On réalise la combustion de 3,00g de ce composé, il se forme 2,19g d'eau et un volume de 3,05L de dioxyde de carbone mesuré à la température de 25°C sous la pression de 740mm de mercure.

D'autre part la dissolution de 6,40g de ce composé dans 100g d'eau commence à se congeler à -1,60°C.

1°) Ecris l'équation de la réaction de combustion.

2°) Calcule la masse molaire moléculaire approchée du composé.

3°) Etablis sa formule brute.

On donne : $K_{\text{eau}} = 1850$.

EXERCICE 6 : L'analyse d'une substance organique a donné les pourcentages suivants : 20% de carbone ; 6,6% d'hydrogène ; 26,4% d'oxygène et 47% d'azote.

La cryométrie de la substance donne un abaissement de 0,885°C lorsqu'elle est effectuée sur 2,75g de substance dans 100g d'eau.



- 1°) Détermine la masse molaire approchée de la substance.
- 2°) Quelle est sa formule moléculaire.
- 3°) Exprime le résultatat de la masse molaire. On donne : $K = 1850$.

EXERCICE 7 : Lorsqu'on dissout 5,030g d'un corps C dans 100g d'un alcool, la température d'ébullition sous la pression normale est 79,17°C. Si dans la même quantité d'alcool, on dissout 5g de benzène, le point d'ébullition est de 79,27°C.

- 1°) Trouve le point d'ébullition de l'alcool pur.
- 2°) Déduis la constante ébulliométrique de cet alcool. On donne : formule de l'alcool : $C_2H_2O_4$.

EXERCICE 8 : La solution de 0,3g d'un corps A dans 100g d'un liquide B n'est pas électrolysable, sa température de solidification commençante est de 16,55°C. Celle d'une solution contenant 0,6g de A dans 100g de B est de 16,40°C.

- 1°) Déduis – en la température de solidification commençante d'une solution contenant 0,9g de A dans 100g de B.
- 2°) Calcule la température de solidification de B pur.

EXERCICE 9 : Le point de congélation du benzène pur est 5,5°C. Une solution de 2g de sulfure de carbone (CS_2) dans 100g de benzène commence à se congeler à 4°C.

- 1°) Calcule la valeur de la constante cryométrique du benzène.
- 2°) On dissout 2g de phénol (C_6H_5OH) dans 100g de benzène. Calcule :
 - a) Le point de congélation commençante de cette solution.
 - b) Le point d'ébullition commençante de cette solution sachant que 1/100 de mole d'un corps pur quelconque dissoute dans 100g de benzène, élève la température d'ébullition de 0,23°C.

Le point d'ébullition du benzène pur est 80°C.

EXERCICE 10 : L'analyse élémentaire d'une substance organique a donné les résultats suivants :

- Masse de la substance utilisée : 0,270g.
 - Masse d'eau obtenue : 0,330g.
 - Masse de dioxyde de carbone recueilli : 0,600g.
- Des déterminations cryométriques ont donné les résultats suivants : une solution de 3,72g de la substance A dans 100g d'eau commence à se congeler à - 1,14°C. D'autre part, une solution de 1,48g d'acétone (C_3H_6O) dans 100g d'eau commence à se congeler à - 0,472°C.

- 1°) Détermine la masse molaire moléculaire approchée de A. En déduire sa formule moléculaire.
- 2°) Donne la formule semi – développée et le nom de A.

- 3°) On refroidi d'avantage la solution du composé A jusqu'à une température de - 2,50°C. Quelle est la masse de glace formée ?

On donne les masses molaire atomiques en g/mol : C : 12 ; H : 1 ; O : 16.

EXERCICE 11 : 1°) On réalise une expérience sur la cryométrie pour déterminer la masse molaire moléculaire d'un corps A. Pour une solution de 2g du corps A dans 100g d'un solvant, on constate un abaissement cryométrique de 0,62°C, alors que pour une solution de 1g d'éthanol (C_2H_6O) dans 100g de même solvant, l'abaissement est de 0,40°C. Détermine la masse molaire moléculaire du corps A.

2°) La combustion dans l'air de 3g du composé A avait donné 3,60g d'eau et 3,70L de CO_2 mesuré à 20°C sous une pression de 740mm de mercure.

- a) Calcule le pourcentage en masse des éléments carbone et hydrogène dans le composé A ;
- b) Montre que le corps A est constitué d'un troisième élément dont on précisera l'identité ;
- c) Calcule le pourcentage en masse de cet élément.

EXERCICE 12 : En dissolvant 5g d'un composé organique B dans 100g d'eau, on constate que la température de congélation commençante s'abaisse de 0,513°C, tandis que pour une solution renfermant, dans 100g d'eau $\frac{1}{100}$ de mole d'un corps non électrolysable, l'abaissement du point de congélation vaut 18,5°C. D'autre part l'analyse de 0,372g du composé B formé de C, H et O a donné par combustion 0,223g d'eau et 0,306L de dioxyde de carbone pris à 20°C, sous la pression de 74cm de mercure.

- 1°) Ecris l'équation de la combustion et déduis – en la formule brute de B.

- 2°) Donne la composition centésimale du composé B.

EXERCICE 13 : La combustion de 0,304g d'une substance A de formule $C_xH_yO_z$ a donné 0,178g d' H_2O et 0,696g de CO_2 .

La solution de 5g de A dans 100g d'éther présente une élévation ébulliométrique de 0,75°C.

- 1°) Calcule la masse molaire approchée de A.
- 2°) Etablis sa formule moléculaire.



3°) On chauffe d'avantage la solution A. L'élévation ébulliométrique devient alors $0,80^{\circ}\text{C}$. Quelle est la masse de la vapeur dégagée ?
On donne : $K' = 2100$.

EXERCICE 14 : Une substance organique est formée de carbone, d'hydrogène et d'oxygène. Soumise à l'oxydation vive, $0,5000\text{g}$ de substance ont fourni $0,4888\text{g}$ de dioxyde de carbone et $0,1000\text{g}$ d'eau.

Lorsqu'on dissout $5,0\text{g}$ de ce corps dans 100g d'éthanol, la température d'ébullition est de $78,91^{\circ}\text{C}$, alors que l'alcool pur bout à $78,30^{\circ}\text{C}$. Si dans 100g d'alcool, on dissout $5,0\text{g}$ de benzène, le point d'ébullition est de $79,00^{\circ}\text{C}$. Quelle est la formule moléculaire du corps ?

EXERCICE 15 : On donne les températures de solidification et les constantes cryométriques des solvants purs :

Solvant	Température de solidification θ_0 ($^{\circ}\text{C}$)	Constantes Cryométriques
Eau	0	1850
Benzène	5,5	5700
Acide éthanoïque	16,5	3900

L'abaissement cryométrique d'une solution de 5g d'un composé A dans 100g d'un liquide B est $0,513^{\circ}\text{C}$. Celui d'une solution de $0,1\text{mole}$ de méthylamine ($\text{CH}_3 - \text{NH}_2$) dans 200g du liquide B est de $0,925^{\circ}\text{C}$.

- 1°) Calcule la constante cryométrique du liquide B. Identifie ce liquide B.
- 2°) Calcule la masse molaire moléculaire approchée du composé A.
- 3°) Détermine la formule moléculaire du composé A sachant que la combustion complète de $0,372\text{g}$ de A a donné $0,223\text{g}$ d'eau et $0,546\text{g}$ de dioxyde de carbone.
- 4°) Calcule la masse molaire moléculaire exacte de A et déduis – en sa précision.

EXERCICE 16 : On prépare une solution S_1 en dissolvant $2,5\text{g}$ d'un alcool A dans 50g d'un liquide L_1 de constante cryométrique K_1 puis une solution S_2 en dissolvant 4g du même alcool A dans 50g d'un liquide L_2 de constante cryométrique K_2 . On refroidit chaque solution et l'on constate que les abaissements cryométriques sont identiques.

1°) Calcule le rapport des constantes cryométriques $\frac{K_1}{K_2}$.

2°) Déduis – en la valeur de K_1 si $K_2 = 325$.

3°) Sachant que l'abaissement cryométrique constaté est égal à $0,81^{\circ}\text{C}$, calcule la masse molaire approchée de A.

4°) Déduis – en la formule moléculaire de A sachant que la formule chimique de l'alcool A est de la forme : $C_n\text{H}_{2n+1}\text{OH}$.

EXERCICE 17 : L'analyse d'une substance organique tertiaire non azoté est faite sur $0,290\text{g}$ de composé. La combustion complète de cette masse dans un tube à combustion contenant de l'oxyde de cuivre a donné une augmentation des tubes à ponce sulfurique de $0,270\text{g}$ et $0,660\text{g}$ de gaz absorbable par la potasse.

On désire déterminer la masse molaire par la méthode de Meyer en opérant sur $0,15\text{g}$ de substance. On recueille $62,4\text{cm}^3$ d'air mesuré sur la cuve à eau à 17°C et sous la pression atmosphérique de 750mm de Hg. La pression de la vapeur saturante du liquide est 13mm de Hg.

1°) Détermine la densité de la substance par rapport à l'air.

2°) Quelle est sa masse molaire approchée.

3°) Etablis la formule moléculaire de la substance puis en déduire l'incertitude relative commise sur la masse molaire. On donne : $\rho_{air} = 1,29 \cdot 10^{-3} \text{g/cm}^3$.

EXERCICE 18 : On fait tomber dans l'appareil de Meyer une ampoule de verre contenant $0,481\text{g}$ d'un liquide dont le point de congélation est inférieur à celui de l'eau. L'ampoule se brise et l'on recueille sous l'éprouvette, primitivement pleine d'eau, l'air qui se dégage.

- a) On demande de déduire de cette expérience la densité de vapeur et la masse molaire du liquide introduit d'après les données numériques suivantes : volume d'air recueilli : 100cm^3 , température de l'éprouvette 20°C ; hauteur d'eau h restant dans l'éprouvette : 20cm ; pression atmosphérique : $74,97\text{cm}$ de mercure; pression maximale de la vapeur d'eau à 20°C : $1,8\text{cm}$ de mercure.
- b) Etablis la formule du liquide employé pour lequel l'analyse en masses a donné la composition centésimale suivante : $C = 10,1\%$; $H = 0,8\%$; $C\ell = 89,1\%$.

On donne masse volumique du mercure : $13,6\text{g/cm}^3$.



EXERCICE 19 : 1°) L'analyse élémentaire de 4,4g d'une substance organique A a fourni 11g de gaz carbonique et 5,4g d'eau. D'autre part la dissolution de 2g de A, dans un liquide L, abaisse le point de congélation de $0,42^{\circ}\text{C}$ et élève le point d'ébullition de $0,12^{\circ}\text{C}$. Sachant que la constante cryométrique de L est égale à sa constante ébulliométrique plus 1330. Détermine la formule brute de A.

2°) La vaporisation d'une masse m de A dans l'appareil de Meyer provoque le déplacement de $96m\text{L}$ d'air à 27°C sous la pression atmosphérique de $74,3\text{cm}$ de Hg. Calcule m si la pression des vapeurs saturantes de l'eau à 27°C est 2cm .

EXERCICE 20 : La combustion complète dans l'oxyde de cuivre II d'un composé organique $C_xH_yO_z$ a fourni 0,45g d'eau, 0,88g de gaz carbonique et un dépôt de cuivre. D'autre part l'évaporation de 1,85g de ce composé donne $632m\text{L}$ de vapeur mesuré à 27°C et sous la pression de 740mm Hg

1°) Ecris l'équation de la combustion complète.

2°) Détermine :

- La masse molaire moléculaire du composé ;
- La plus simple relation entre x et y ;
- La formule brute du composé sachant que son atomicité est égale à 15.

EXERCICE 21 : On dissout 2,3g d'un composé organique A de formule C_xH_yO dans 100g de solvant B. On obtient une solution dont l'abaissement cryométrique vaut $0,71^{\circ}\text{C}$. D'autre part, la dissolution de $5,2073 \cdot 10^{22}$ molécules d'un composé C dans 100g de même solvant B provoque un abaissement cryométrique de $1,60^{\circ}\text{C}$.

1°) Trouve la masse molaire approchée de A.

2°) Trouve la formule moléculaire de A sachant qu'il renferme 60% en masse de carbone. Déduis – en la masse molaire exacte de A.

3°) Quelle est la plus petite erreur commise dans la mesure de cette masse molaire ?

4°) L'oxydation ménagée de A conduit à un composé D qui rougit le papier imbibé de Liqueur de Fehling et donne un test positif avec la DNPH. Ecris les FSD de A et D.

EXERCICE 22 : Dans la détermination de la densité par rapport à l'air d'une substance organique par la **méthode de MEYER**, on a recueilli un volume d'air de 43cm^3 sur une cuve à eau à la température de 17°C et sous une pression de la vapeur saturante d'eau à 17°C de valeur

$14,5\text{mm}$ de mercure. Sachant que la masse m du corps étudié était $0,2\text{g}$ et $H = 774,5\text{mm}$ de mercure.

1°) Détermine la densité de ce corps et déduis – en sa masse molaire approchée.

2°) Ce corps est du **bromure d'éthyle** de formule brute C_2H_5Br .

- Calcule la précision de cette masse molaire approchée.
- Donne un encadrement et une écriture correcte de cette masse approchée.

On donne : C : 12 ; Br : 80 ; H : 1 (en g/mol)

EXERCICE 23 : La formule d'un alcool A est de type : $C_nH_{2n+2}O$.

La température d'ébullition commençante d'une solution S_1 contenant 1g de A dans 200g d'un liquide B est de $80,20^{\circ}\text{C}$. Lorsqu'on ajoute 50g du liquide B dans S_1 , la température d'ébullition commençante de la solution S_2 obtenue est $80,16^{\circ}\text{C}$.

1°) Calcule le rapport $\frac{K'}{M}$ de la constante ébulliométrique du liquide B sur la masse molaire moléculaire de A.

2°) Calcule la masse moléculaire de A sachant qu'il contient 26,66% en masse d'oxygène.

Déduis – en la valeur de l'entier naturel n et donne les différents isomères de A.

3°) Calcule la constante ébulliométrique et la température d'ébullition commençante du liquide B pur.

EXERCICE 24 : Une solution aqueuse préparée avec $1,0\text{g}$ d'un composé organique azoté dans 100g d'eau se solidifie à $-0,31^{\circ}\text{C}$.

1°) Détermine la masse molaire moléculaire approchée du composé à 1/100 près.

2°) On fait réagir $0,30\text{g}$ de ce composé avec de l'hypobromite de sodium, on obtient $0,22\text{g}$ de dioxyde de carbone ; $0,18\text{g}$ d'eau, 120mL de diazote recueilli dans les CNTP et une certaine quantité de bromure de sodium.

- Ecris l'équation de la réaction avec la forme indéterminée $C_xH_yO_zN_t$;
- Détermine la formule moléculaire exacte du composé ;
- Déduis – en la masse molaire moléculaire exacte du composé et la précision sur cette valeur. On donne : $V_m = 24\text{L}$.



DOMAINE D'ETUDE I : STRUCTURE DE LA MATIERE

OG₂ : CONNAITRE LE SPECTRE DE L'ATOME D'HYDROGÈNE

2

LE SPECTRE DE
L'ATOME D'HYDROGÈNE**I. Les modèles atomiques.****I.1. Modèle de Rutherford.**

En 1911, Ernest Rutherford, physicien anglais, réalisa l'expérience qui porte son nom, en envoyant les particules α (noyau d'hélium) sur une mince feuille d'or. Il constata que la plupart des particules traversèrent la feuille et une seule sur 10^5 était déviée.

Il déduisit que l'atome avait une structure lacunaire. C'est ainsi qu'il proposa un **modèle planétaire** de l'atome : « *un atome est formé d'un noyau central (chargé positivement), autour duquel gravitent un ou plusieurs électrons selon les trajectoires circulaires* » (voir figure 1).

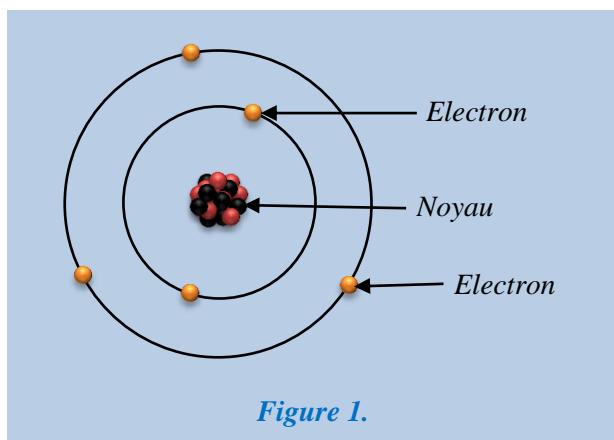


Figure 1.

Mais ce modèle présentait des insuffisances ; *il ne permettait pas d'expliquer l'émission du rayonnement électromagnétique observé en restituant l'énergie absorbée par un atome, après avoir reçu de l'énergie du milieu extérieur.*

I.2. Modèle de Bohr.

De son côté Niels Bohr, physicien danois, grâce à la théorie de Planck sur la quantification de l'énergie atomique postula que :

- L'électron gravite autour du noyau suivant un mouvement circulaire uniforme (M.C.U) ;
- L'atome n'émet pas de l'énergie aussi longtemps que son électron reste sur une orbite ;
- Au cours d'une transition électronique l'atome peut absorber ou émettre un quanta ou photon, d'énergie :

$$\Delta E = h\nu \text{ avec } \nu = \frac{C}{\lambda} \Rightarrow \Delta E = h \frac{C}{\lambda}$$

Avec :

 $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$: Constante de Planck ; $C = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$: Célérité ou vitesse de la lumière dans le vide ; ν : Fréquence du photon (Hz) : λ : Longueur d'onde du photon (m).

- Chaque niveau d'énergie a un moment angulaire quantifié :

$$p = mvr = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar$$

Avec :

 n : Nombre quantique principal ; v : vitesse de l'électron ; r : rayon de l'orbite ; $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ Kg}$: masse de l'électron.

Le modèle de Bohr bien qu'étant amélioré, présentait aussi des insuffisances. *Bohr fut incapable d'interpréter les propriétés des autres atomes, car n'ayant travailler que sur l'atome d'hydrogène, dont l'orbite de l'électron est particulièrement circulaire.*

C'est pour cette raison que l'atome d'hydrogène est encore appelé « *atome de Bohr* ».

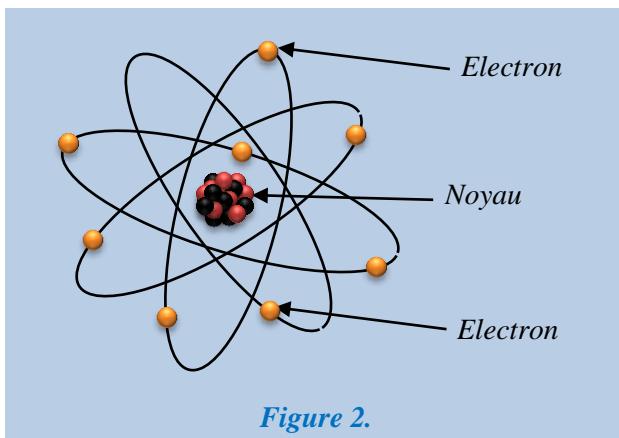


I.3. Modèle actuel de l'atome.

A cause des insuffisances que présentent les modèles ci – dessus cités, le modèle actuel de l'atome se présente de la manière suivante :

« *l'atome est formé d'un noyau central autour duquel gravitent des électrons dans une zone appelée nuage électronique en décrivant des trajectoires elliptiques* » (voir figure 2).

On parle de la *probabilité* de rencontrer l'électron en un point se trouvant au voisinage du noyau.



II. Notion de niveau d'énergie.

L'énergie que possède un atome est *quantifiée*, c'est – à – dire qu'elle ne peut prendre que certaines valeurs discontinues et bien déterminées.

Les valeurs de l'énergie que peut avoir l'atome sont appelés *niveaux ou états d'énergie*.

Le plus bas niveau d'énergie est appelé *niveau ou état fondamental*. Les autres niveaux sont appelés *niveaux ou états excités*. Celui correspondant à une énergie nulle est dit *état ionisé ou niveau d'ionisation*.

Les énergies des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sont données par la relation :

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2} \text{ (eV)}$$

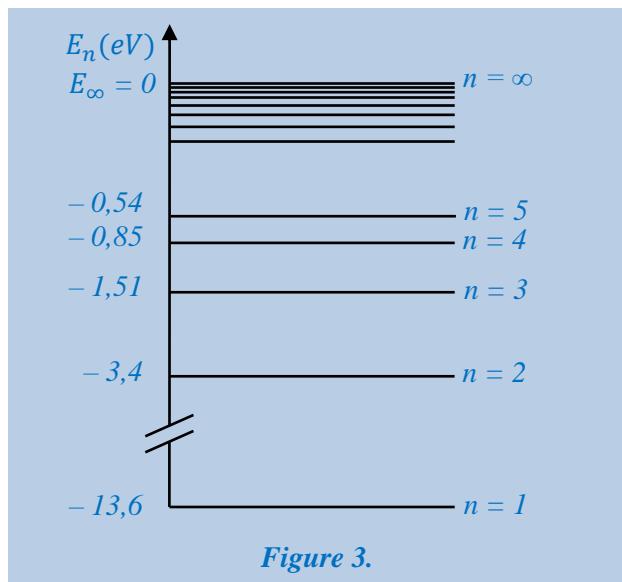
Avec $n \geq 1$ et $E_0 = 13,6 \text{ eV}$.
 $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

♣ Diagramme énergétique de l'atome d'hydrogène.

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2} = -\frac{13,6}{n^2}$$

- Pour $n = 1 \Rightarrow E_1 = -13,6 \text{ eV}$: C'est l'état fondamental ;
- Pour $n = 2 \Rightarrow E_2 = -3,4 \text{ eV}$: C'est le premier état excité ;
- Pour $n = 3 \Rightarrow E_3 = -1,51 \text{ eV}$: C'est le 2^e état excité ;
- Pour $n = 4 \Rightarrow E_4 = -0,85 \text{ eV}$: C'est le 3^e état excité ;
- Pour $n = 5 \Rightarrow E_5 = -0,54 \text{ eV}$: :
- Pour $n = \infty \Rightarrow E_{\infty} = 0$: C'est l'état ionisé.

Ainsi on obtient le diagramme donnée par la figure 3 ci – dessous :



III. Transitions électroniques.

On appelle *transition électronique*, le passage de l'atome d'un niveau d'énergie à un autre.

On distingue : *l'absorption et l'émission*.

III.1. L'absorption.

Définition : C'est le passage de l'atome d'un niveau d'énergie inférieur vers un niveau d'énergie supérieur, après avoir absorbé un photon (figure 4).



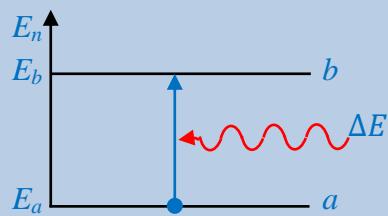


Figure 4.

L'énergie absorbée est telle que :

$$\Delta E = E_b - E_a = h \frac{c}{\lambda}$$

Ainsi en tenant compte de l'énergie du niveau n :

$E_n = -\frac{E_0}{n^2}$; pour les niveaux a et b , on obtient par la suite :

$$h \frac{c}{\lambda} = -\frac{E_0}{b^2} + \frac{E_0}{a^2} \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{E_0}{hC} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right)$$

En posant: $\frac{E_0}{hC} = R_H = 1,096776 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$

D'où :

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right)$$

R_H : Constante de Rydberg.

Note : L'inverse de la longueur d'onde $\frac{1}{\lambda}$ désigne le nombre d'onde.

III.2. L'émission.

Définition : C'est le passage de l'atome d'un niveau d'énergie supérieur vers un niveau d'énergie inférieur, en émettant un photon (figure 5).

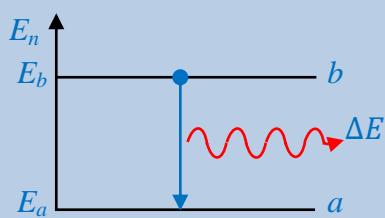


Figure 5.

L'énergie émise est telle que :

$$\Delta E = |E_a - E_b| = h \frac{c}{\lambda}$$

$$\Delta E = |-(E_b - E_a)| = h \frac{c}{\lambda}$$

$$\Delta E = E_b - E_a = h \frac{c}{\lambda}$$

IV. Séries de raies.

Le retour d'un atome excité vers l'état fondamental peut se faire directement ou par bond, ce qui nous donne une série de raies.

Définition : On appelle série de raies, l'ensemble des radiations correspondant aux transitions qui aboutissent au même niveau d'énergie.

A chaque série spectroscopique mise en évidence expérimentalement correspond un même niveau d'énergie final.

C'est ainsi que la série de **LYMAN** concerne toutes les désexcitations qui aboutissent à l'état fondamental ($n = 1$), la série de **BALMER**, au premier niveau excité ($n = 2$), la série de **PASCHEN** à $n = 3$, celle de **BRACKETT** à $n = 4$ et celle de **PFUND** à $n = 5$ (voir figure 6).

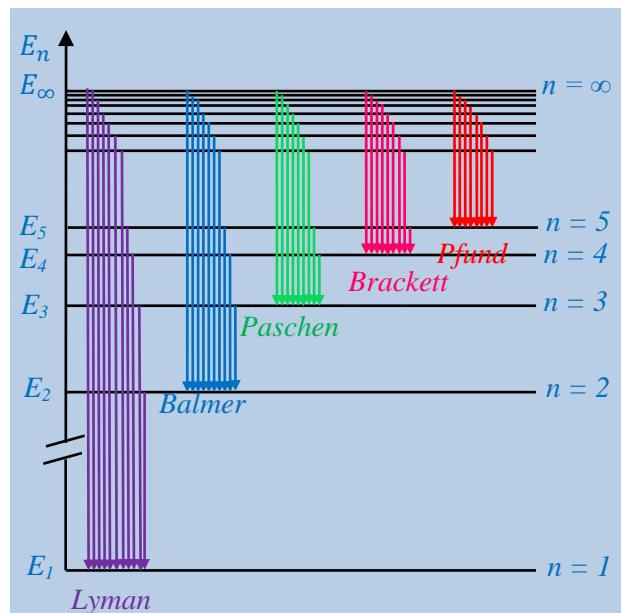


Figure 6.



➤ **Série de LYMAN ($n > 1 \rightarrow p = 1$)**

$$\Delta E = E_n - E_1 = -\frac{E_0}{n^2} + E_0 = h \frac{C}{\lambda_{n,1}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda_{n,1}} = R_H \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

➤ **Série de BALMER ($n > 2 \rightarrow p = 2$)**

$$\Delta E = E_n - E_2 = -\frac{E_0}{n^2} + \frac{E_0}{2^2} = h \frac{C}{\lambda_{n,2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda_{n,2}} = R_H \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right)$$

➤ **Série de PASCHEN ($n > 3 \rightarrow p = 3$)**

$$\Delta E = E_n - E_3 = -\frac{E_0}{n^2} + \frac{E_0}{3^2} = h \frac{C}{\lambda_{n,3}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda_{n,3}} = R_H \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{n^2} \right)$$

➤ **Série de BRACKETT ($n > 4 \rightarrow p = 4$)**

$$\Delta E = E_n - E_4 = -\frac{E_0}{n^2} + \frac{E_0}{4^2} = h \frac{C}{\lambda_{n,4}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda_{n,4}} = R_H \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{n^2} \right)$$

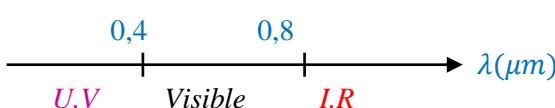
➤ **Série de PFUND ($n > 5 \rightarrow p = 5$)**

$$\Delta E = E_n - E_5 = -\frac{E_0}{n^2} + \frac{E_0}{5^2} = h \frac{C}{\lambda_{n,5}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda_{n,5}} = R_H \left(\frac{1}{25} - \frac{1}{n^2} \right)$$

➤ **Domaine spectral.**

Suivant les valeurs des longueurs d'onde des raies, on distingue le domaine spectral suivant :



U.V : Ultraviolet ; I.R : Infrarouge ; 1μm = 10⁻⁶m.

Note :

- La série de LYMAN appartient au domaine spectral **U.V** ;
- La série de Balmer appartient au domaine spectral **Visible** ;

➤ Les séries de **PASCHEN**, **BRACKETT** et **PFUND** appartiennent au domaine spectral **I.R.**

Exercice d'application

1°) L'énergie des différents niveaux de l'atome d'hydrogène sont donnés en electron volt (eV) par l'expression :

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2}, n \geq 1$$

a) Détermine en eV, l'énergie d'un photon permettant le passage de l'atome d'hydrogène de son état fondamental à son troisième état excité.

b) Quelle est la longueur d'onde de la radiation émise lors du passage de l'atome d'hydrogène de son état excité à son deuxième état excité ? Déduis – en la série de raies et à quel domaine spectrale appartient cette radiation.

2°) Détermine et calcule l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène

3°) On considère la série de LYMAN.

a) Qu'appelle – t – on série de raies ?

b) Calcule la plus courte longueur d'onde de cette série.

c) L'analyse spectroscopique permet de déceler la radiation de fréquence $N = 3,08 \cdot 10^{15} Hz$; à quelle transition correspond cette radiation ?

On donne : $h = 6,62 \cdot 10^{-34} J.s$; $C = 3 \cdot 10^8 m/s$; $leV = 1,610^{-19} J$.

Corrigé.

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2}; n \geq 1$$

1°) a) **Energie d'un photon permettant le passage d'un atome de son état fondamental à son 3^e état excité.**

L'énergie absorbée est telle que :

$$\Delta E_{(1,4)} = E_4 - E_1 = -\frac{13,6}{4^2} + \frac{13,6}{1^2}$$

$$\Delta E_{(1,4)} = 12,75 eV$$

b) **Longueur d'onde de la radiation émise lors du passage de l'atome d'hydrogène de son état excité à son deuxième état excité.**



L'énergie du photon émis lors de cette transition est telle que :

$$\Delta E_{(4,3)} = E_4 - E_3 = h \frac{C}{\lambda_{(4,3)}}$$

$$\Rightarrow \lambda_{(4,3)} = \frac{hC}{E_4 - E_3}$$

$$A.N : \lambda_{(4,3)} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8}{\left(-\frac{13,6}{4^2} + \frac{13,6}{3^2}\right) \times 1,6 \cdot 10^{-19}}$$

$$\lambda_{(4,3)} = 1,88 \cdot 10^{-6} m$$

Cette longueur d'onde appartient à la *série de PASCHEN*, car l'atome retourne à l'état $n = 3$.

➤ Domaine spectral.

$$\lambda_{(4,3)} = 1,88 \cdot 10^{-6} m = 1,88 \mu m > 0,8 \mu m$$

Cette longueur d'onde appartient au domaine spectral **Infra – rouge (I.R.)**.

2°) Energie d'ionisation de l'atome d'hydrogène.

$$E_i = E_\infty - E_1$$

$$A.N : E_i = 0 + \frac{13,6}{1^2} = 13,6$$

$$E_i = 13,6 eV$$

3°) On considère la série de LYMAN.

a) On appelle *série de raies*, l'ensemble des radiations correspondant aux transitions qui aboutissent au même niveau d'énergie.

b) Calcul de la plus courte longueur d'onde de cette série.

La plus courte longueur d'onde correspond à la plus grande valeur de l'énergie ; celle de la transition du niveau $n = \infty$ au niveau $n = 1$.

En effet cette énergie est telle que :

$$\Delta E_{max} = E_\infty - E_1 = h \frac{C}{\lambda_{min}}$$

D'où :

$$\lambda_{min} = \frac{hC}{E_\infty - E_1}$$

$$A.N : \lambda_{min} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8}{(0 + 13,6) \times 1,6 \cdot 10^{-19}} = 9,12 \cdot 10^{-8}$$

$$\lambda_{min} = 9,12 \cdot 10^{-8} m$$

$$c) N = 3,08 \cdot 10^{15} Hz$$

Transition à laquelle correspond cette radiation.

Soit n le niveau initial de cette transition, on a :

$$\Delta E = E_n - E_1 = hN$$

$$\Rightarrow -\frac{13,6}{n^2} + 13,6 = hN$$

$$\Rightarrow \frac{13,6}{n^2} = 13,6 - hN$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2} = \frac{13,6 - hN}{13,6}$$

D'où :

$$n = \sqrt{\frac{13,6}{13,6 - hN}}$$

A.N :

$$n = \sqrt{\frac{13,6 \times 1,6 \cdot 10^{-19}}{13,6 \times 1,6 \cdot 10^{-19} - 6,62 \cdot 10^{-34} \times 3,08 \cdot 10^{15}}}$$

$$n = 3,98 \approx 4$$

D'où :

$$n = 4$$

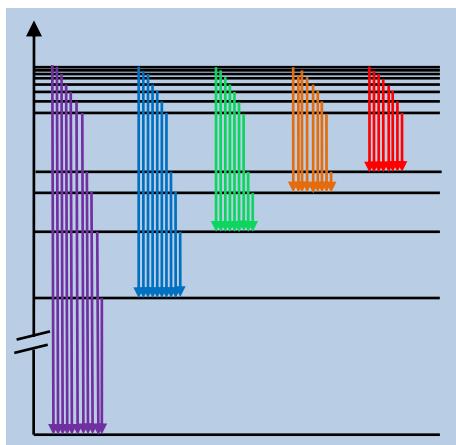
Cette transition correspond à la transition du niveau $n = 4$ au niveau $n = 1$.



TRAVAUX DIRIGÉS II

Conseils pratiques :

1. Modèle atomique de Bohr : Postulats de Bohr.
2. Energie atomique.
3. Transitions électroniques : absorption et émission.
4. Spectre de l'atome d'hydrogène : séries de raies.
5. Domaine spectral



L'ESSENTIEL DU COURS

I – Définitions des notions.

Définis les termes et expressions suivants : Absorption ; Emission ; Transition électronique ; Etat fondamental ; Etat ionisé ; Energie d'ionisation ; Série de raies.

II – Questions à réponses courtes.

Réponds aux questions suivantes :

- 1°) Pourquoi dit – on que l'énergie de l'atome d'hydrogène est quantifiée ?
- 2°) Enonce les postulats de BOHR.
- 3°) A quoi correspondent les états d'énergie $n = 1$; $n = 2$; $n = \infty$?
- 4°) Au cours d'une transition électronique du niveau $n \rightarrow p$ ($n > p$). Quelle est la transition qui émet le photon de longueur d'onde minimale et celle qui émet le photon de longueur d'onde maximale ?
- 5°) Quels sont les niveaux de retour d'un atome dans les séries de BALMER et de BRACKETT ?
- 6°) Choisis parmi les longueurs d'onde suivantes celles qui appartiennent au domaine ultra – violet (U.V) : 653,3nm ; 410,2nm ; 387,9nm ; 103nm.
- 7°) Donne l'expression de la longueur d'onde de la radiation émise lors d'une désexcitation de l'atome du niveau n vers le niveau p en fonction de E_n ; E_p ; h et C.

III – Questions à alternative vrai ou faux.

Réponds par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

- 1°) L'énergie d'ionisation est l'énergie qu'il faut fournir à un atome pour le faire passer de l'état fondamental au premier état excité.
- 2°) La longueur d'onde de la radiation émise lors de la transition de n vers p est l'inverse de celle de la transition de p vers n .
- 3°) A une énergie maximale correspond une longueur d'onde minimale.
- 4°) L'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène vaut – 13,6eV.
- 5°) La longueur d'onde d'une onde lumineuse est proportionnelle à sa fréquence.
- 6°) La série de Balmer appartient au domaine spectral des radiations infrarouges.
- 7°) La constante de RYDBERG est donnée par l'expression : $R_H = \frac{E_0}{hc}$.
- 8°) Selon la théorie de Bohr sur le modèle atomique, les électrons gravitent autour du noyau en décrivant des trajectoires elliptiques.
- 9°) Le spectre d'émission de l'atome d'hydrogène est continu.
- 10°) Le niveau d'énergie 0eV correspond à l'atome d'hydrogène dans son état non excité (état fondamental).



IV – Appariement.

Relie un élément – question de la colonne A à un élément – réponse de la colonne B dans le tableau ci-dessous ; *Exemple : a₈ = b₁₀.*

Colonne A		Colonne B	
a ₁	Energie des différents niveaux de l'atome d'hydrogène	b ₁	Absorption
a ₂	Energie d'ionisation de l'atome d'hydrogène	b ₂	Méga électronvolt
a ₃	Série de BALMER	b ₃	$E_n = -\frac{E_0}{n^2}$; $E_0 = 13,6eV$
a ₄	Nombre d'onde	b ₄	Longueur d'onde minimale
a ₅	Energie atomique maximale	b ₅	Retour des atomes excités vers le niveau d'énergie n = 2.
a ₆	Unité d'énergie	b ₆	E = 13,6eV
a ₇	Transition électronique	b ₇	$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right)$

RESOLUTION DES PROBLEMES

EXERCICE 1 : On donne l'énergie des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène :

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2} \text{ avec } E_0 = 13,6eV \text{ et } n \text{ est un nombre}$$

entier qui désigne le niveau d'énergie ($n = 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; \dots$).

- 1°) Calcule les énergies des 6 premiers niveaux.
- 2°) Montre à partir de cette formule que l'énergie de l'atome d'hydrogène ne peut pas prendre n'importe quelle valeur.
- 3°) Comment qualifie-t-on l'énergie à cause du fait qu'elle ne peut pas prendre n'importe quelle valeur ?

4°) A quoi correspond :

- a) Le niveau de plus basse énergie ;
- b) Un niveau d'énergie élevé ?

5°) Calcule l'énergie qu'il faut apporter à l'atome d'hydrogène à l'état fondamental pour l'ioniser. Comment appelle-t-on cette énergie ?

6°) On envoie tour à tour sur un atome d'hydrogène à l'état fondamental :

- a) Un rayonnement de longueur d'onde 122nm ;
- b) Un rayonnement de longueur d'onde 420nm.

Calcule dans chacun des cas l'énergie du rayonnement et dis si le rayonnement sera absorbé.

EXERCICE 2 : L'atome d'hydrogène peut s'exciter à différents niveaux d'énergie dont la relation est :

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2} \text{ avec } E_0 = 13,6eV.$$

Indique si les affirmations suivantes sont exactes ou fausses en justifiant votre réponse éventuellement par calcul.

- 1°) La valeur de l'énergie de l'atome d'hydrogène au niveau $n = 3$ est de $-2,42 \cdot 10^{-19}J$.
- 2°) Le spectre d'émission de l'atome d'hydrogène est continu.
- 3°) L'atome d'hydrogène peut avoir une énergie égale à $-2,8eV$.
- 4°) Le niveau d'énergie 0eV correspond à l'atome d'hydrogène dans son état non excité (état fondamental).

EXERCICE 3

$$\text{On donne : } E_n = -\frac{E_0}{n^2} \text{ avec } E_0 = 13,6eV$$

1°) Détermine en eV, l'énergie d'un photon permettant le passage de l'atome d'hydrogène de son état fondamental à son troisième état excité.

2°) Quelle est la longueur d'onde de la radiation émise lors du passage de l'atome d'hydrogène de son troisième état excité à son deuxième état excité ?

3°) Déduis – en la série de raies et à quel domaine spectral appartient cette radiation.



EXERCICE 4 : 1°) Un photon a pour longueur d'onde dans le vide $\lambda = 656,30\text{nm}$. Calcule sa fréquence, son énergie en joule puis en electronvolt.
 2°) Un photon a une énergie de $2,55\text{eV}$. Calcule son énergie en joules puis sa fréquence. En déduis sa longueur d'onde dans le vide en nanomètre.
 3°) Un photon a une fréquence de $6,91 \cdot 10^{14}\text{Hz}$. Calcule sa longueur d'onde en nanomètre, son énergie en electronvolt.
 4°) De façon générale, montre que la longueur d'onde λ du rayonnement émis et l'énergie du photon correspondant est donnée par la relation :

$$\lambda = \frac{1241}{E}, \text{ lorsque } \lambda \text{ est en nanomètre et } E \text{ en electron volt.}$$

EXERCICE 5 : Les niveaux d'énergies de l'atome d'hydrogène sont définis par la relation :

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2} \text{ avec } n \text{ entier naturel } \geq 1$$

- 1°) Qu'est-ce qu'une absorption et une émission d'un photon ?
 2°) Pour un photon de fréquence $\nu_{p,n}$ absorbé par un atome lors de la transition de p à n ($n > p$). Donner l'expression de $\nu_{p,n}$ en fonction E_n , E_p et de h.
 3°) On considère les niveaux d'énergie partant de p = 2 à n = 4.
 a) Etablis en fonction de E_0 et de h l'expression de la fréquence $\nu_{4,2}$ émise lors de la désexcitation.
 b) Sachant que la longueur d'onde de la radiation émise lors de la transition est $E_4 \rightarrow E_2$ est $\lambda_{4,2} = 4,87 \cdot 10^{-7}\text{m}$, calcule la valeur de E_0 en joule et en electronvolt.

EXERCICE 6 : Les niveaux d'énergie quantifiée de l'atome d'hydrogène sont données par la relation :

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2} \text{ (eV ; } n \geq 1)$$

- 1°) Quelle est l'énergie d'ionisation d'un atome d'hydrogène ?
 2°) Quelle est l'énergie qu'il faut fournir à l'atome d'hydrogène pour l'excité au niveau $n = 2$?
 3°) L'atome d'hydrogène préalablement excité au niveau 2 revient à l'état fondamental avec émission d'un photon. Quelle est sa longueur d'onde ?
 4°) Etablis la relation littérale donnant la fréquence des ondes lumineuses émises lorsque les atomes d'hydrogènes préalablement excités passent d'un état d'énergie $n > 2$ à l'état d'énergie $p = 2$.

Calcule la plus grande longueur d'onde de cette série.

EXERCICE 7 : Les niveaux d'énergies de l'atome d'hydrogène sont donnés par la relation :

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2} \text{ (en eV) et } n \geq 1$$

- 1°) Quelle est l'énergie du niveau fondamental de l'atome d'hydrogène ?
 2°) Donne son énergie d'ionisation et la longueur d'onde de la radiation correspondant à cette énergie.
 3°) Place sur un diagramme : le niveau d'ionisation (niveau de référence), le niveau fondamental et les trois premiers niveaux excités.
 4°) Calcule l'énergie de transition électronique dans l'atome d'hydrogène lors du passage de l'électron du niveau fondamental au premier niveau excité.

EXERCICE 8 : Les énergies des différents niveaux (en eV) de l'atome d'hydrogène sont données par la formule :

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2}; n \geq 1$$

- 1°) Calcule les énergies correspondant à $n = 1$; $n = 2$; $n = 3$; $n = \infty$ et représente le diagramme des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène.
 2°) Quelle énergie minimale doit-on fournir à un atome d'hydrogène pour qu'il passe de l'état fondamental à un état excité ? Transcris-la sur le diagramme.
 3°) Cette énergie est apportée à l'atome par une radiation lumineuse monochromatique. Calcule sa longueur d'onde. A quel domaine du spectre appartient cette radiation ?
 4°) Calcule la longueur d'onde de la radiation susceptible d'ioniser l'atome d'hydrogène ?
 On donne : $C = 3 \cdot 10^8 \text{m.s}^{-1}$; $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{J.s}$.

EXERCICE 9 : Les niveaux énergétiques de l'atome d'hydrogène sont donnés par la formule :

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2} \text{ (n } \geq 1)$$

- 1°) Calcule en nm :
 a) La longueur d'onde minimale de la série de BALMER ;
 b) La longueur d'onde maximale de la série de BALMER ;
 c) L'écart $\Delta\lambda$ entre ces deux longueurs d'onde.
 2°) On décèle, toujours dans la série de Balmer, une radiation de longueur d'onde $\lambda = 410\text{nm}$. A quelle transition correspond-elle ?
 3°) On considère un atome d'hydrogène dans son état fondamental. On envoie sur celui-ci des



photons d'énergie $W_1 = 10,2\text{eV}$; $W_2 = 12,75\text{eV}$ et $W_3 = 13,6\text{eV}$.

On constate que tous ces photons sont absorbés. Donne les transitions correspondant à chaque photon.

EXERCICE 10 : Les niveaux d'énergies quantifiées de l'atome d'hydrogène sont donnés par la relation :

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2} \text{ (en eV) et } n \geq 1$$

1°) Quelle est l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène ?

2°) Quelle énergie faut-il fournir à un atome d'hydrogène pour le faire passer de l'état fondamental au premier état excité ?

3°) L'atome précédemment excité revient à l'état fondamental en émettant un photon de lumière. Calcule la longueur d'onde cette radiation.

4°) On fournit à un atome d'hydrogène à l'état fondamental une énergie $W = 10,8\text{eV}$.

Qu'observe-t-on si cette énergie est transférée par un électron ? Par un photon ?

5°) Etablis la relation littérale donnant les longueurs d'onde des radiations lumineuses émises dans la série de PASCHEN, lorsque les atomes d'hydrogène excités au-delà de $n = 3$ retournent à l'état $n = 3$.

On donne : $h = 6,62 \cdot 10^{-34}\text{J.s}$; $C = 3 \cdot 10^8 \text{m.s}^{-1}$; $1\text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{J}$.

EXERCICE 11 : On détermine les énergies des niveaux de l'atome d'hydrogène par la relation :

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2} \text{ (en eV) et } n : \text{entier naturel non nul.}$$

1°) Calcule les énergies des niveaux $n = 1 ; 2 ; 3 ; 4$ et ∞ .

2°) Trace le diagramme des niveaux d'énergie.

3°) Un électron d'énergie cinétique E_C vient heurter un atome d'hydrogène à l'état fondamental ; ce dernier s'excite au niveau $n = 3$.

a) Quelle relation vérifie E_C pour qu'il y ait cette transition d'excitation ?

b) Transcris cette transition dans le diagramme.

c) Calcule la vitesse minimale que devrait posséder l'électron au moment du choc.

4°) L'atome précédemment excité perd une certaine quantité d'énergie. L'électron tombe au niveau $n = 2$ tout en émettant un photon de lumière. Calcule la longueur d'onde de ce photon.

EXERCICE 12 : L'énergie des différents niveaux de l'atome d'hydrogène est donnée en electronvolt (eV) par l'expression :

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2} \text{ (en eV) et } n \geq 1$$

1°) Calcule les valeurs des quatre premiers niveaux d'énergie.

2°) a) Calcule la longueur d'onde maximale λ_{max} de la radiation que peut absorber l'atome pris dans son état fondamental.

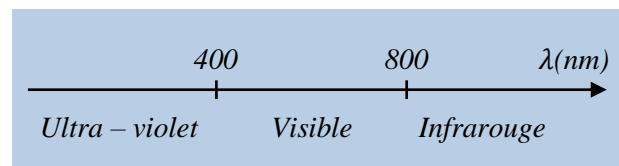
b) A quel domaine spectral cette radiation appartient-elle ?

3°) Calcule la valeur minimale de la longueur d'onde d'un photon capable d'ioniser l'atome dans son état fondamental. Déduis la valeur de la longueur d'onde de la radiation correspondante.

4°) Un électron d'énergie cinétique $E_C = 11\text{eV}$ peut-il interagir avec l'atome pris dans son état fondamental ? Si oui, dans quel état se trouvera l'atome ? Calcule la valeur de l'énergie cinétique de l'électron après l'interaction avec l'atome.

On donne : $h = 6,62 \cdot 10^{-34}\text{J.s}$; $C = 3 \cdot 10^8 \text{m.s}^{-1}$; $1\text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{J}$; $1\text{nm} = 10^{-9}\text{m}$.

Domaine spectral :



EXERCICE 13 : Les niveaux d'énergies quantifiées de l'atome d'hydrogène sont donnés par la relation :

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2} \text{ (en eV) et } n \geq 1$$

1°) Exprime E_n en joule.

2°) a) Calcule les énergies des trois premiers niveaux excités.

b) Un atome d'hydrogène effectue une transition mettant en jeu deux de ces niveaux d'énergie.

- Quelle est la transition qui émet le photon de longueur d'onde minimale ?
- Calcule cette longueur d'onde ;
- A quelle série appartient cette longueur d'onde ?

3°) Au cours de la transition de $E_m \rightarrow E_p$, l'atome émet une radiation de fréquence $\nu_{m,p}$. Pour la transition de $E_p \rightarrow E_n$, l'atome émet la radiation de fréquence $\nu_{p,n}$.

a) Compare m et p ; p et n . Justifie.

b) Etablis la relation entre les fréquences $\nu_{m,p}$; $\nu_{p,n}$ et la fréquence $\nu_{m,n}$ de la transition $E_p \rightarrow E_n$.



c) Vérifie ce résultat dans le cas où $m = 4$; $p = 3$; $n = 2$.

4°) L'atome d'hydrogène dans son état fondamental, reçoit des photons d'énergies respectives : $20,4 \cdot 10^{-19} J$; $16,8 \cdot 10^{-19} J$. Lequel des photons est absorbé ?

EXERCICE 14 : L'énergie du niveau n de l'atome d'hydrogène est donnée par :

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2} \text{ (eV)} ; n \geq 1$$

1°) Fais le diagramme classique des cinq premiers niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène.

2°) Les atomes d'hydrogène sont capables d'effectuer les transitions suivantes :

Transition 1 : du niveau $n = 4$ au niveau $n = a$. Le photon émis a pour fréquence $N_1 = 1,59 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$.

Transition 2 : du niveau $n = 3$ au niveau $n = b$. Le photon émis a pour fréquence $N_2 = 2,92 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$.

Détermine :

- a) Le niveau final a de la transition 1.
- b) Le niveau final b de la transition 2.
- c) A quelle série appartient chacune des radiations émises ?

3°) Un atome d'hydrogène effectue la transition du niveau $n = 3$ au niveau $n = 2$.

- a) S'agit-il d'une émission ou d'une absorption de photon ?
- b) Calcule la fréquence correspondante du photon.

On donne : $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$; $C = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$; $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$; $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$.

EXERCICE 15 : La transition de l'électron de l'atome d'hydrogène du niveau $n = 3$ vers le niveau $p = 2$ correspond à une radiation dont la longueur d'onde est $\lambda_{(3,2)} = 6,57 \cdot 10^{-7} \text{ m}$.

1°) Calcule la fréquence $N_{(3,2)}$ et le nombre d'onde

$$\sigma_{(3,2)} = \frac{1}{\lambda_{(3,2)}} \text{ de cette radiation.}$$

2°) Déduis-en la valeur numérique de la constante de Rydberg R_H .

3°) Soit la transition entre deux niveaux d'hydrogène correspondant à $\Delta E = 2,86 \text{ eV}$.

- a) Calcule la longueur d'onde correspondante
- b) De quelle transition s'agit-il sachant que le niveau inférieur est $p = 2$.

EXERCICE 16 : Les états d'énergie quantifiés de l'atome d'hydrogène sont définis par la relation :

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2} \text{ avec } E_0 = 13,6 \text{ eV et } n = 1 ; 2 ; 3 ; \dots$$

1°) Donne la valeur de E_0 en joules.

2°) Un électron heurte à la vitesse v un atome d'hydrogène dans son état fondamental. On admet que toute l'énergie cinétique de l'électron projectile est transférée à l'énergie interne de l'atome et le fait passer de son état fondamental E_1 à l'état excité E_n ($n > 1$).

- a) Montre que le nombre n et la vitesse v de l'électron sont liés par la relation :

$$n^2 = \frac{2E_0}{2E_0 - mv^2}.$$

b) Déduis-en la vitesse minimale de l'électron capable d'ioniser un atome d'hydrogène.

c) L'atome d'hydrogène préalablement excité revient à son état fondamental avec émission d'une onde lumineuse de fréquence $\nu = 3,082 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$.

Détermine le niveau d'excitation n où se trouvait cet atome.

Données : $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$; $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ Kg}$; $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

EXERCICE 17 : On donne :

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2}$$

Où n est un nombre entier non nul et E_0 une constante.

Des atomes d'hydrogène, préalablement excités, se désexcitent.

1°) Un premier atome se désexcite du niveau d'énergie E_2 au niveau d'énergie E_1 . Il émet la radiation de longueur d'onde $\lambda_{(2,1)}$.

a) Exprime, en fonction de E_0 , l'énergie E_1 et l'énergie E_2 .

b) Etablis la relation qui lie ces deux énergies avec la fréquence $\nu_{(2,1)}$ correspondante.

2°) Calcule la valeur de la constante E_0 , en joule et en électron-volts.

3°) Un deuxième atome d'hydrogène effectue la transition du niveau E_3 au niveau E_1 . Il émet une radiation de longueur d'onde $\lambda_{(3,1)}$. Un troisième atome d'hydrogène effectue une transition du niveau E_3 au niveau E_2 , il émet une radiation de longueur d'onde $\lambda_{(3,2)}$.

- a) Calcule les valeurs de la longueur d'onde $\lambda_{(3,1)}$ et la fréquence $\nu_{(3,1)}$ correspondante.

- b) Vérifie que : $\nu_{(3,1)} = \nu_{(3,2)} + \nu_{(2,1)}$.



EXERCICE 18 : Les niveaux d'énergies de l'atome d'hydrogène sont donnés par la relation :

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2} \text{ (eV)}$$

1°) Calcule les énergies correspondant à $n = 1$; $n = 2$; $n = 3$; $n = 4$ et $n = \infty$ et place – les dans le diagramme des niveaux d'énergie.

2°) Montre que la longueur d'onde des radiations émises par un atome d'hydrogène obéit à la relation empirique :

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n > p)$$

$$\text{où } R_H = 1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}.$$

3°) Le spectre d'émission de l'atome d'hydrogène comporte les radiations de longueur d'onde $\lambda_1 = 102,6 \text{ nm}$; $\lambda_2 = 121,6 \text{ nm}$; $\lambda_3 = 486,1 \text{ nm}$; $\lambda_4 = 656,3 \text{ nm}$.

- a) Quelles sont parmi ces radiations, celles qui appartiennent à la série de LYMAN, et celles qui appartiennent à la série de BALMER ?
- b) A quelles transitions correspondent les radiations λ_2 et λ_4 ?

EXERCICE 19 : Dans l'atome d'hydrogène, l'énergie du niveau n est donnée par :

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2} \text{ (eV)} ; n \geq 1$$

1°) Calcule les énergies des niveaux correspondant à $n = 1, 2, 3, 4, 5$ et l'infini.

2°) Le spectre de l'atome d'hydrogène contient des radiations de fréquence : $N_a = 6,16 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ et $N_b = 6,91 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$.

Sachant que, pour ces deux radiations, le niveau final de la transition est $n = 2$.

- a) Détermine les numéros a et b des niveaux initiaux.
- b) A quelle série de raies ces radiations appartiennent elles ?
- c) Déduis – en la plus courte longueur d'onde de cette série de raie.

EXERCICE 20 : La transition de l'électron de l'atome d'hydrogène du niveau $n = 3$ vers le niveau $p = 2$ correspond à une radiation dont la longueur d'onde est $\lambda = 656,3 \text{ nm}$.

1°) Calcule la fréquence et le nombre d'onde de cette radiation.

2°) Déduis – en la valeur numérique de la constante de Rydberg.

3°) Une transition possible entre deux niveaux de l'atome H correspond à une énergie $E = 2,856 \text{ eV}$.

Calcule la longueur d'onde et le nombre d'onde correspondant de la radiation émise ; à quel domaine appartient cette radiation ?

4°) La série de LYMAN comporte les transitions vers le niveau $p = 1$.

La série de BALMER comporte les transitions vers le niveau $p = 2$.

Précise les niveaux p et n correspondant à la radiation étudiée.

EXERCICE 21 : Les différents niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sont donnés par la relation :

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2} = -\frac{2,176 \cdot 10^{-18}}{n^2}$$

$$\text{avec } \begin{cases} E_0 \text{ en joule} ; \\ h \cdot C = 1,985 \cdot 10^{-11} \text{ J} \cdot \text{nm} \end{cases}$$

1°) Calcule, en nm, les longueurs d'ondes des radiations émises lors des transitions du niveau d'énergie E_3 au niveau d'énergie $E_1 (\lambda_3)$. Du niveau d'énergie E_2 au niveau $E_1 (\lambda_2)$. Du niveau d'énergie E_3 au niveau $E_2 (\lambda)$.

2°) Une ampoule contient de l'hydrogène porté à la température de $2800K$. Les atomes sont dans leur état fondamental ; une lumière constituée des trois radiations λ_3 ; λ_2 et λ traverse ce gaz.

Quelles sont les radiations absorbées ? Justifie.

2°) Sur l'ampoule précédente, on envoie une radiation monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 76 \text{ nm}$.

- a) Calcule en eV, l'énergie des photons.
- b) Montre que l'atome peut être ionisé.
- c) Calcule l'énergie cinétique acquise par l'électron.

EXERCICE 22 : Les niveaux énergétiques de l'atome d'hydrogène sont donnés par la formule

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2} \quad n \geq 1$$

1°) Calcule $E_1, E_2, E_3, E_4, E_\infty$.

2°) a) Pour exciter l'atome d'hydrogène au niveau $n = 4$, on lui communique une énergie par choc avec un électron. Calcule l'énergie minimale que l'atome d'hydrogène devrait recevoir pour son excitation ;

b) Déduis – en la longueur d'onde $\lambda_{1,4}$ de cette transition.

c) Quelle est la vitesse de l'électron, sachant que $\Delta E = \frac{1}{2}mv^2$.

3°) a) Etablis la relation littérale donnant la fréquence des photons émis par l'atome



d'hydrogène excité, passant d'un état d'énergie $n > 4$ à $n = 4$.

- b) Nomme cette série de raies ;
- c) Pour quelle valeur de n obtient – on la plus petite fréquence ?

EXERCICE 23 : L'énergie des niveaux de l'atome d'hydrogène est donnée par la relation :

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2} \text{ eV} \quad n \geq 1$$

1°) Représente les cinq premiers niveaux sur un diagramme (échelle : $1\text{cm} \rightarrow 1\text{eV}$).

2°) a) Quelle est l'énergie minimale de l'atome d'hydrogène ?

b) A quoi correspond – elle ?

c) A quoi correspond l'énergie $E = 0\text{eV}$?

3°) L'analyse du spectre démission de l'atome d'hydrogène montre la présence des radiations de longueur d'onde $H_\alpha = 656,28\text{nm}$; $H_\beta = 486,13\text{nm}$; $H_\gamma = 434,05\text{nm}$.

Ces radiations sont émises lorsque cet atome passe d'un état excité $p > 2$ à l'état $n = 2$.

4°) a) Donne les valeurs correspondantes de p .

b) Montre que les longueurs d'ondes des radiations correspondant à la série de raies étudiées tendent, lorsque p tend vers la valeur infini, vers une limite λ_0 que l'on calculera.

c) Dans quel domaine des ondes électromagnétiques se situent les raies de cette série ?

5°) BALMER en 1885, écrivait la loi de détermination des raies de la série de BALMER

sous la forme : $\lambda = \lambda_0 \frac{p^2}{p^2 - 4}$

- a) Retrouve cette loi ;
- b) Détermine la valeur de λ_0 dans cette formule de BALMER ;
- c) Montre que cette formule de BALMER permet de retrouver le résultat de la question 4-b).

EXERCICE 24 : On attribue aux niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène les valeurs quantifiées suivants la relation :

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2} (\text{eV}) \text{ avec } n \geq 1$$

1°) Qu'appelle – t – on série de raies ?

2°) Calcule pour chaque série de raies de l'atome d'hydrogène la plus grande et la plus petite longueur d'onde émise. Précise la nature de la lumière émise. On se limitera aux trois premières raies.

3°) Pour chacune de ces raies, le nombre d'onde reste inférieur à un nombre d'onde limite donné par les valeurs suivantes :

- ✓ LYMAN : $10,96776 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$.
- ✓ BALMER : $2,74194 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$.
- ✓ PASCHEN : $1,21864 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$.

- a) A quelle variation d'énergie correspondrait, pour l'atome, l'émission des raies limites si ces raies pouvaient être absorbées ?
- b) Calcule en eV, les énergies des niveaux correspondant aux trois raies limites données.

EXERCICE 25 :

Dans le but de vérifier la relation $E_n = \frac{E_1}{n^2}$,

l'énergie relative au niveau n quelconque par rapport au niveau 1, on excite l'atome d'hydrogène. Les séries de LYMAN et de BALMER du spectre d'hydrogène sont au cours des transitions quantiques de l'atome respectivement vers le niveau (1) et le niveau (2).

1°) Que représente pour l'atome d'hydrogène les niveaux (1) et (2) ?

2°) Calcule l'énergie du niveau d'ionisation puis déduis – en l'énergie d'ionisation en joules puis en électron – volt. On donne $E_1 = -13,599\text{eV}$.

3°) Les longueurs d'onde associées aux différentes raies des séries sont : $\lambda_{(2,1)} = 0,1216\mu\text{m}$; $\lambda_{(3,2)} = 0,6465\mu\text{m}$; $\lambda_{(4,2)} = 0,4863\mu\text{m}$.

a) Déduis des résultats ci – dessus, les énergies correspondant aux trois premiers niveaux excités de l'atome d'hydrogène en joule et en eV.

b) Vérifie que : $E_n = \frac{E_1}{n^2}$.

c) Trace le diagramme des niveaux d'énergie des quatre (4) premiers niveaux puis représente les raies de la série de LYMAN.

On donne : $h = 6,6 \cdot 10^{-34}\text{J.s}$; $C = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$.



DOMAINE D'ETUDE I : STRUCTURE DE LA MATIERE

OG₃ : CONNAITRE LES PROPRIETES DES REACTIONS NUCLEAIRES**3****LE NOYAU ATOMIQUE**

Les *réactions chimiques* s'expliquent par les *liaisons entre atomes*, ces liaisons s'effectuant au niveau des *électrons périphériques et n'affectent pas du tout les noyaux* des atomes mis en jeu.

A l'opposé, les *réactions nucléaires* sont des réactions faisant intervenir les *noyaux* des atomes. Nous savons qu'un atome est formé d'un noyau autour duquel gravitent des électrons. C'est le physicien anglais Ernest Rutherford qui mit en évidence le noyau, chargé positivement, *possédant pratiquement toute la masse de l'atome et occupant une très petite place*.

1. Composition du noyau atomique.

Le noyau d'un atome est formé de particules appelées *nucléons* qui sont de deux sortes : les *protons* et les *neutrons*.

- Le proton est une particule de masse $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ Kg} = 938 \text{ MeV/C}^2$, et de charge $q_p = +e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.
- Le neutron, comme l'indique son nom, *ne porte pas de charge électrique* ($q_n = 0$). Sa masse est sensiblement la même que celle du proton : $m_n = 939 \text{ MeV/C}^2$.

2. Nombre de charge, nombre de masse, représentation d'un nucléide.

- *Le nombre de charge Z d'un atome est le nombre de protons contenus dans son noyau.* Il est égal au numéro atomique puisque dans un atome le nombre de protons est égal au nombre d'électrons.
- *Le nombre de masse A d'un atome est le nombre des nucléons contenus dans un noyau.*

Le nombre de neutron d'un atome est donc :

$$N = A - Z$$

➤ *Un nucléide est l'ensemble des atomes dont les noyaux ont le même nombre de protons et le même nombre de neutrons, c'est – à – dire même valeur de A et même valeur de Z.*

On représente un nucléide par le symbole : ${}^A_Z X$

Avec *A* : *nombre de masse* ;

Z : *nombre de charge* ;

X : *élément chimique*.

Exemple : ${}_1^1 H$; ${}_{\text{6}}^{12} C$; ${}_{\text{8}}^{16} O$; ${}_{\text{92}}^{238} U$; ${}_{\text{82}}^{206} Pb$

3. Isotropie.

En général, un élément chimique est un mélange de plusieurs nucléides. Ces nucléides sont des isotopes de l'élément considéré.

Définition : *On appelle isotopes d'un élément, les nucléides ayant le même nombre de charge Z mais des nombres de masse A différents.*

Exemple :

- Pour l'hydrogène on a : ${}_1^1 H$; ${}_1^2 H$ (${}_1^2 D$) ; ${}_1^3 H$.
- Pour le carbone on a : ${}_{\text{6}}^{12} C$; ${}_{\text{6}}^{14} C$.
- Pour l'azote on a : ${}_{\text{7}}^{14} N$; ${}_{\text{7}}^{15} N$.

Remarque : La masse atomique moyenne de l'élément chimique est :

$$M_{at} = \frac{\sum A_i f_i}{\sum f_i} = \frac{A_1 f_1 + A_2 f_2 + \dots + A_n f_n}{100}$$

Avec :



A_i : nombres de masse des nucléides isotopes ;
 f_i : abondance naturelle ou pourcentage en masse des nucléides.

Exemple : Le chlore est un mélange de deux variétés isotopiques : ^{35}Cl ($f_1 = 75\%$) et ^{37}Cl ($f_2 = 25\%$).

Sa masse moyenne atomique est :

$$M_{at} = \frac{\sum A_i f_i}{\sum f_i} = \frac{A_1 f_1 + A_2 f_2}{100}$$

$$M_{at} = \frac{35 \times 75 + 37 \times 25}{100} = 35,5$$

$$M_{at} = 35,5 \text{ g/mol}$$

$$1u = \frac{12 \cdot 10^{-3}}{12N_A} \text{ Kg}$$

Soit $1u = 1,66055 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$

Ou encore : $1g = 6,022 \cdot 10^{23} u$.

$$1u = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ Kg} = 931,5 \text{ MeV/C}^2$$

Les valeurs des masses du proton, du neutron et de l'électron sont alors les suivantes :

Particules	Masse en u	Masse en Kg	Masse en MeV/C^2
Proton	1,00727647	$1,67265 \cdot 10^{-27}$	938,280
Neutron	1,008665	$1,67496 \cdot 10^{-27}$	939,573
Electron	0,0005486	$9,10953 \cdot 10^{-27}$	0,511003

Conséquences.

Suivant le nombre de masse et le nombre de charge des nucléides, on distingue aussi :

❖ Les isotones.

On appelle isotones, des nucléides différents ayant un même nombre de neutrons mais le nombre de charge différent ($N = N'$; $Z \neq Z'$).

Exemple : $^{16}_8\text{O}$; $^{15}_7\text{N}$

❖ Les isobares.

On appelle isobares, les nucléides différents ayant le même nombre de masse ($A = A'$).

Exemple : $^{14}_6\text{C}$; $^{14}_7\text{N}$

4. Défaut de masse.

La masse d'un noyau est toujours inférieure à la somme des masses de ses nucléons. La différence entre les deux est le défaut de masse Δm .

$$m_X < Zm_p + (A - Z)m_n$$

Ainsi le défaut de masse est tel que :

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_X$$

Avec m_p : masse du proton ;

m_n : masse du neutron ;

m_X : masse du noyau.

Remarque : En physique nucléaire est utilisé une autre unité de masse : l'unité de masse atomique dont le symbole est u .

L'unité de masse atomique est par définition égale au douzième ($1/12$) de masse d'un atome de carbone 12.

5. Energie de liaison du noyau.

D'après la relation d'Einstein $\Delta E = \Delta m \cdot C^2$, à toute perte de masse Δm correspond une libération d'énergie ΔE , celle libérée par la formation du noyau, à partir de ses nucléons. C'est l'énergie de liaison ou de cohésion du noyau, c'est donc aussi celle qu'il faudrait lui fournir pour séparer ses différents nucléons les uns des autres.

Définition : L'énergie de liaison d'un noyau au repos est l'énergie qu'il faut lui fournir pour séparer les nucléons qui le constituent, ceux-ci se trouvant au repos à l'état final.

L'énergie de liaison d'un noyau est égale à la somme des énergies de masse des nucléons qui le constituent diminuée de son énergie de masse.

Ainsi pour le nucléide A_ZX : $\Delta E = \Delta m \cdot C^2$, soit :

$$\Delta E = E_\ell = [zm_p + (A - z)m_n - m_X] \cdot C^2 > 0$$

Cette énergie, positive, correspond aussi à l'énergie libérée lors de la formation d'un noyau au repos à partir des nucléons initialement au repos et séparés. Une énergie de liaison est généralement exprimée en MeV ($1\text{MeV} = 1,6 \cdot 10^{13} \text{ J}$) et son calcul est facilité si on exprime les masses en $\text{MeV} \cdot \text{C}^2$.

Plus un noyau est lourd, plus son énergie de liaison est grande. Mais cela n'implique pas qu'il soit stable. Ainsi l'énergie de liaison de l'uranium 238 est 1802MeV et celle du fer 56, 492MeV, alors que le fer 56 est plus stable que l'uranium 238.



6. Stabilité du noyau.

Pour comparer les différents noyaux entre eux, et juger de la stabilité d'un nucléide on définit l'*énergie de liaison par nucléon* (ou *énergie de cohésion par nucleon*) $\frac{\Delta E}{A}$.

$$E = \frac{E_\ell}{A} = [zm_p + (A - z)m_n - m_X] \cdot \frac{C^2}{A}$$

Ainsi : pour $^{238}_{92}U$, $E_\ell/A = 7,57 \text{ MeV/nucléon}$.
pour $^{56}_{26}Fe$, $E_\ell/A = 8,79 \text{ MeV/nucléon}$.

Plus cette énergie est grande, plus le noyau est stable.

Note : $E = \frac{E_\ell}{A} \leq 8,79 \text{ MeV/nucléon}$.

Un nucléide est d'autant plus stable que son énergie de liaison par nucléon est grande.

L'étude de l'énergie de cohésion par nucléon des nucléides des différents éléments montre qu'*elle est plus faible pour les noyaux légers et lourds que pour les noyaux de nombres de masse moyens*, ce qui explique la grande libération d'énergie dans les réactions de fission et de fusion.

Soit un noyau $^{A}_{Z}X$. D'après ci qui précède, on a :

$$m_{^{A_Z}X} < Zm_p + (A - Z)m_n \text{ et}$$

$$\Delta E = [m_{^{A_Z}X} - Zm_p - (A - Z)m_n] \cdot C^2 < 0$$

Traçons la courbe $\frac{|\Delta E|}{A} = f(A)$ (figure 1).

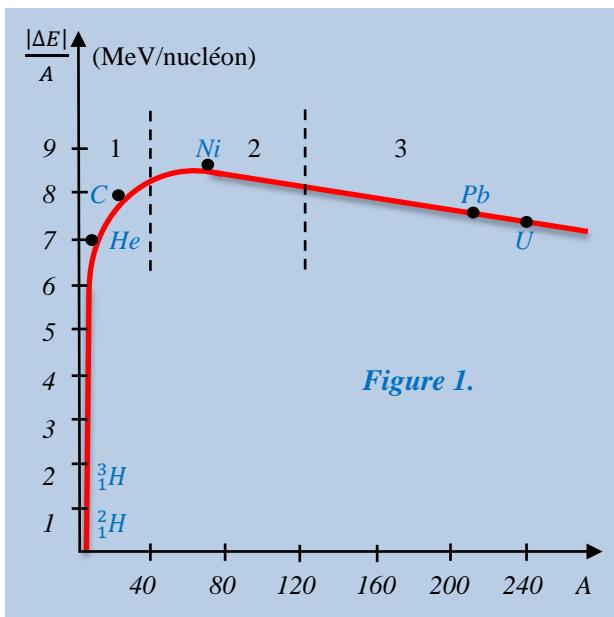


Figure 1.

L'examen de cette courbe montre que :

- Les noyaux les plus stables sont situés aux environs du sommet de la courbe, c'est – à – dire pour l'*énergie de liaison par nucléon maximale*, égale en moyenne à $8,7 \text{ MeV}$ (région ②).
- Dans la région ①, on trouve les *noyaux légers* qui peuvent subir le *phénomène de fusion* : deux nucléides de faibles nombres de masse fusionnent pour donner un seul nucléide de nombre de masse plus élevé. Cette réaction libère une très grande quantité d'énergie nucléaire. Elle trouve son application dans la bombe « H » (bombe à hydrogène) ; dans la nature, elle est à l'origine de l'énergie phénoménale dégagée par les étoiles (entre autre le soleil).
- Dans la région ③ se trouve les *noyaux lourds* qui subissent le *phénomène de fission*. Bombardés par des neutrons, ces noyaux sont capables de se scinder en noyaux plus légers. C'est par exemple le cas de l'uranium 235 qui éclate en deux noyaux différents. Ces réactions de fission libèrent également une très grande quantité d'énergie ; elles sont utilisées dans les réacteurs nucléaires (centrales nucléaires, bateaux et sous – marins ...) et la *bombe atomique* (bombe A).

Exercice d'application

Un noyau de lithium Li a pour masse $m = 7,0160 u$.
1°) Exprime et calcule la perte de masse d'un noyau de lithium au cours de sa formation en unité de masse atomique.

2°) Définis l'énergie de liaison d'un noyau.
Quelle est son expression ?

3°) Calcule en MeV l'énergie libérée lors de la formation d'un noyau de lithium à partir de ses nucléons au repos.

4°) Calcule l'énergie de liaison moyenne par nucléon pour un noyau de lithium.



Corrigé

$m_X = 7,0160u$. (${}^7_3\text{Li}$)

1°) Expression de la perte de masse d'un noyau de lithium au cours de sa formation.

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_X$$

A.N :

$$\Delta m = 3 \times 1,007276 + (7 - 3) \times 1,008665 - 7,0160$$

$$\Delta m = 0,0405u$$

2°) L'énergie de liaison d'un noyau au repos est l'énergie qu'il faut lui fournir pour séparer les nucléons qui le constituent, ceux-ci se trouvant au repos à l'état final.

$$\Delta E = E_\ell = [zm_p + (A - z)m_n - m_X] \cdot C^2$$

3°) Calcul de l'énergie libérée lors de la formation d'un noyau de lithium en MeV.

$$\Delta E = \Delta m \cdot C^2$$

$$A.N: \Delta E = E_\ell = (0,0405) \times 931,5 \text{MeV} \cdot C^{-2} \cdot C^2$$

$$E_\ell = 37,73 \text{MeV}$$

4°) Calcul de l'énergie de liaison moyenne par nucléon pour un noyau de lithium.

$$E = \frac{E_\ell}{A}$$

$$A.N: E = \frac{E_\ell}{A} = \frac{37,73}{7}$$

$$E = 5,39 \text{MeV/nucléon}$$



DOMAINE D'ETUDE I : STRUCTURE DE LA MATIERE

OG₃ : CONNAITRE LES PROPRIETES DES REACTIONS NUCLEAIRES

4

LES REACTIONS NUCLEAIRES

Les *réactions nucléaires* sont des réactions qui concernent les noyaux des atomes.

Il existe deux catégories de noyaux atomiques :

- Ceux qui ne subissent aucune transformation au cours du temps ; ce sont des *noyaux stables* ;
- Ceux qui émettent un rayonnement à un moment donné de leur existence ; ce sont des *noyaux instables* ou *noyaux radioactifs*.

On distingue deux types de réactions nucléaires :

- ✓ *Les réactions nucléaires spontanées ou radioactivité et ;*
- ✓ *Les réactions nucléaires provoquées.*

I. Réactions nucléaires spontanées : Radioactivité.

I.1. Définition : La radioactivité est la transformation spontanée d'un noyau atomique en un noyau différent, au cours de laquelle il émet un rayonnement.

Suivant la nature de la particule émise, on distingue :

- ♣ La *radioactivité α* : avec émission d'un *noyau d'hélium* ${}_2^4He$ (particule α) avec des vitesses de l'ordre de 20.000 Km.s⁻¹.
- ♣ La *radioactivité β⁻* : avec émission d'un *électron* ${}_{-1}^0e$ à des vitesses très grandes, de l'ordre de 280.000 Km.s⁻¹.
- ♣ La *radioactivité β⁺* : avec émission d'un *positon* ou *positron* ${}_{+1}^0e$ avec la même vitesse que l'électron.

Ces radioactivités s'accompagnent toujours d'un *rayonnement d'un photon* ${}_{0}^0Y$, lors de la désexcitation des noyaux obtenus à l'état excité.

A côté de ces radioactivités, on distingue aussi les captures de particules telles que :

- La *capture électronique* : avec capture d'un *électron* ${}_{-1}^0e$;
- La *capture protonique* : avec capture d'un *proton* ${}_{1}^1p$;
- La *capture neutronique* : avec capture d'un *neutron* ${}_{0}^1n$.

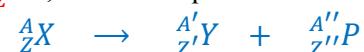
I.2. Propriétés des réactions nucléaires.

Toutes les réactions nucléaires vérifient les lois de conservation suivantes :

- ⊕ Conservation du nombre de masse A ;
- ⊕ Conservation du nombre de charge Z ;
- ⊕ Conservation du vecteur quantité de mouvement \vec{p} ;
- ⊕ Conservation de l'énergie cinétique E_C .

I.3. Equations des réactions nucléaires.

Soit ${}_Z^AX$, le noyau radioactif appelé noyau père, il se désintègre en un noyau fils ${}_Z^{A'}Y$ en émettant une particule ${}_Z^{A''}P$, suivant l'équation :

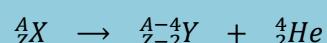


D'après la conservation du nombre de masse et du nombre de charge on a :

$$\begin{cases} A = A' + A'' \\ Z = Z' + Z'' \end{cases}$$

a) Radioactivité α.

Dans une radioactivité α il y a émission d'un noyau d'hélium (${}_2^4He$) encore appelé *particule alpha*.



Exemple :





⊕ Bilan énergétique.

D'après la loi de conservation de l'énergie, l'énergie de masse perdue :

$$\Delta m \cdot C^2 = (m_X - m_Y - m_\alpha) \cdot C^2$$

est égale à l'énergie E libérée.

Ainsi :

$$E = (m_X - m_Y - m_\alpha)C^2$$

Cette énergie doit se retrouver sous forme d'**énergie cinétique** acquise par la particule et le noyau fils.

$$E = E_{C_Y} + E_{C_\alpha}$$

On peut alors écrire :

$$E_{C_Y} + E_{C_\alpha} = (m_X - m_Y - m_\alpha) \cdot C^2$$

⊕ Conservation du vecteur quantité de mouvement.

➤ Avant la désintégration, on a :

$$\vec{p}_{av} = \vec{p}_X = m_X \vec{v}_X = \vec{0}$$

Car le noyau père X est immobile : $\vec{v}_X = \vec{0}$.

➤ Après la désintégration, on a :

$$\vec{p}_{ap} = \vec{p}_Y + \vec{p}_\alpha = m_Y \vec{v}_Y + m_\alpha \vec{v}_\alpha$$

D'après la conservation du vecteur quantité de mouvement, on a :

$$\begin{aligned} \vec{p}_{av} = \vec{p}_{ap} &\Rightarrow m_Y \vec{v}_Y + m_\alpha \vec{v}_\alpha = \vec{0} \\ &\Rightarrow m_Y \vec{v}_Y = -m_\alpha \vec{v}_\alpha \end{aligned}$$

Soit : $m_Y v_Y = m_\alpha v_\alpha \quad (1)$

D'où :

$$v_Y = \frac{m_\alpha v_\alpha}{m_Y}$$

C'est la **vitesse de recul** du noyau fils Y.

Comparons les énergies cinétiques E_{C_α} de la particule α et E_{C_Y} du noyau fils Y formé (**énergie cinétique de recul**) :

$$E_{C_Y} = \frac{1}{2} m_Y v_Y^2 \text{ et } E_{C_\alpha} = \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2$$

$$\frac{E_{C_Y}}{E_{C_\alpha}} = \frac{m_Y v_Y^2}{m_\alpha v_\alpha^2} = \frac{m_Y}{m_\alpha}$$

En tenant compte de la relation (1), ainsi :

$$\frac{E_{C_Y}}{E_{C_\alpha}} = \frac{m_\alpha}{m_Y}$$

L'énergie cinétique se partage en raison inverse des masses. La radioactivité α affectant les noyaux lourds :

$$m_Y \gg m_\alpha \text{ et } E_{C_Y} \ll E_{C_\alpha}$$

L'énergie cinétique de la particule α est nettement supérieure à celle du noyau fils Y.

Dans la pratique, on négligera E_{C_Y} devant E_{C_α} .

b) Radioactivité β^- .

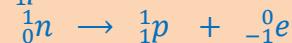
Dans la radioactivité β^- il y a émission d'un électron ${}_{-1}^0e$.



Exemple :



Note : Le noyau père n'étant pas constitué des électrons, il faut admettre que *celui qui est émis provient de la transformation d'un neutron noté ${}_{0}^1n$ en un proton ${}_{1}^1p$ et un électron*.



Dans la classification périodique, le **noyau fils Y** est **situé une case après celle du noyau père X**.

c) Radioactivité β^+ .

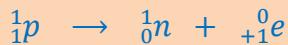
Dans la radioactivité β^+ il y a émission d'un positon ${}_{+1}^0e$.



Exemple :



Note : Tout comme les électrons, les positons émis ne se trouvent pas dans le noyau. Pour interpréter le phénomène, *il faut admettre qu'un proton du noyau se transforme en un neutron et un positon.*



Dans la classification périodique, le noyau fils Y est situé une case avant celle du noyau père X.

Remarque : Le neutrino ν et l'antineutrino $\bar{\nu}$ sont des particules neutres, de masse extrêmement faible (pratiquement nulle) se déplaçant à la vitesse de la lumière. Leur énergie est celle qui manque au bilan de la désintégration nucléaire qui leur donne naissance.

d) Rayonnement γ .

Ce sont des radiations électromagnétiques de très courtes longueurs d'onde λ , émises lors du passage d'un noyau d'atome d'un état excité à un état fondamental.



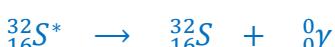
Les radioactivités α , β^- et β^+ s'accompagne toujours de l'émission d'un rayonnement γ car les *noyaux fils obtenus après désintégration se trouvent à l'état excité.*

Exemples :

- Pour une radioactivité α



- Pour une radioactivité β^-



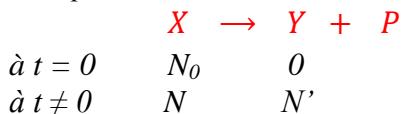
I.4. Loi de décroissance radioactive et période radioactive.

I.4.1. Loi de décroissance radioactive.

Soit un échantillon de noyaux radioactifs, contenant initialement N_0 noyaux.

Après le début de la désintégration, le nombre de noyaux N non désintégrés contenus dans l'échantillon, décroît exponentiellement avec le temps.

Soit l'équation :



La variation élémentaire dN du nombre de noyaux d'un nucléide pendant une durée dt est :

$$dN = -\lambda N dt \Rightarrow \frac{dN}{N} = -\lambda dt$$

En intégrant membre à membre cette expression, on a :

$$\int \frac{dN}{N} = -\lambda \int dt \Rightarrow \ln N = -\lambda t + cte$$

$$\text{à } t = 0 \Rightarrow \ln N_0 = cte$$

$$\text{Ainsi : } \ln N = -\lambda t + \ln N_0$$

$$\Rightarrow \ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t \Rightarrow \frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t}$$

D'où :

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

C'est la *loi de la décroissance radioactive*, où λ est la *constante radioactive du nucléide*.

$$\text{Sachant que : } N = \frac{m\mathcal{N}}{A}$$

$$\text{On trouve aussi : } m = m_0 e^{-\lambda t}$$

Avec m_0 : masse initiale de l'échantillon ;
 m : masse de l'échantillon à l'instant t .

I.4.2. Période radioactive.

Définition : La période radioactive ou « demi-vie » d'un radionucléide est la durée T nécessaire pour que la moitié des noyaux initialement présents dans l'échantillon se désintègrent.

Sachant que : $N = N_0 e^{-\lambda t}$

$$\text{à } t = T, N = \frac{N_0}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T} \Rightarrow e^{-\lambda T} = \frac{1}{2} \Rightarrow -\lambda T = -\ln 2$$

D'où :

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad (s)$$



Remarque : A cet instant où $t = T$;

$$\Rightarrow m = m_0 e^{-\lambda T} = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{T} \cdot T} = m_0 \frac{1}{e^{\ln 2}}$$

D'où :

$$m = \frac{m_0}{2}$$

A un instant t donné, on a :

$$m = \frac{m_0}{2^{t/T}}$$

Le nombre de noyaux N' désintégrés à l'instant t est tel que :

$$\begin{aligned} N_0 &= N + N' \Rightarrow N' = N_0 - N \\ &\Rightarrow N' = N_0 - N_0 e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

D'où :

$$N' = N_0(1 - e^{-\lambda t})$$

Par analogie, on trouve la masse :

$$m' = m_0(1 - e^{-\lambda t})$$

I.4.3. Activité radioactive.

Définition : On appelle activité radioactive d'un échantillon de radionucléides, le nombre de désintégration par unité de temps.

$$\mathcal{A} = -\frac{dN}{dt} = \frac{\lambda N dt}{dt} = \lambda N$$

Car $dN = -\lambda N dt$

D'où :

$$\mathcal{A} = \lambda N$$

Remarque :

Sachant que : $\mathcal{A} = \lambda N$ avec $N = N_0 e^{-\lambda t}$

$$\Rightarrow \mathcal{A} = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$$

En posant $\mathcal{A}_0 = \lambda N_0$ (activité à l'instant $t = 0$), d'où :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 e^{-\lambda t}$$

\mathcal{A} s'exprime en *Becquerel* (Bq) correspondant à 1 désintégration/seconde ou en *Curie* (Ci), avec :

$$1 \text{ Ci} = 3,70 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$$

II. Réactions nucléaires provoquées.

Les radioactivités α , β^- et β^+ sont des réactions nucléaires spontanées, c'est – à – dire se produisant sans aucune action extérieure.

Les physiciens ont découvert qu'il était possible de provoquer des réactions nucléaires en bombardant des noyaux (appelés pour cela noyaux – cibles) à l'aide des particules. Selon la nature des noyaux – cibles et des particules, ainsi que l'énergie de ces dernières, on obtient différents types de réactions.

II.1. Les transmutations.

Lorsqu'une particule entre en collision avec un noyau, il peut apparaître un noyau nouveau : c'est la *transmutation*.

Exemple : Bombardement de Al par une particule α .



C'est la première *transmutation provoquée*, réalisée par Frédéric et Irène Joliot – Curie.

Ce fut la découverte de la *radioactivité artificielle*.

Le phosphore 30 obtenu au cours de la réaction est radioactif β^+ .

Le plus souvent, les particules utilisées pour provoquer des transmutations sont des *neutrons*.

La plupart des radionucléides utilisés dans le *traitement des cancers* ou comme *traceurs radioactifs* sont obtenus par transmutation provoquée.

II.2. Les fissions nucléaires.

II.2.1. Définition : Une fission nucléaire est la rupture d'un noyau sous l'action d'un neutron de faible énergie cinétique (de l'ordre de 0,1 eV).

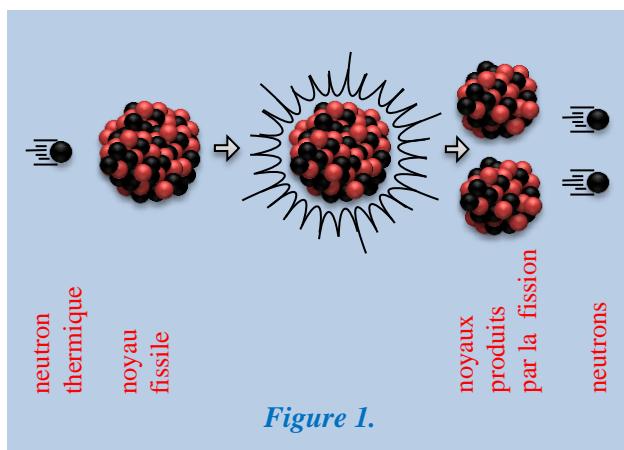
Elle se rencontre chez les *nucléides lourds*, dits *fissiles*, car les noyaux peuvent éclater sous l'action des neutrons.

Exemple : La fission de l'uranium 235.



On peut schématiser la réaction de fission par la figure 1 ci – dessous :





Les noyaux formés sont généralement radioactifs β^- . Les réactions de fission sont très exoénergétiques car elles libèrent de grandes quantités d'énergie.

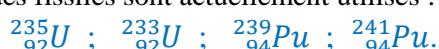
Les neutrons émis au cours de la fission peuvent, à leur tour provoquer la fission d'autres noyaux. On obtient alors une réaction en chaîne.

Si la réaction en chaîne n'est pas contrôlée, une énergie énorme est libérée en quelques microsecondes ; il y a explosion brutale. C'est ce qui se passe dans la bombe A, appelée communément bombe atomique.

On peut contrôler la réaction en ralentissant les neutrons émis, par l'eau, le graphite... de sorte qu'un nombre déterminé de neutrons sert à produire une nouvelle fission. Les réactions en chaîne contrôlées ont lieu dans les réacteurs nucléaires.

II.2.2. Nucléides fissiles et nucléides fertiles.

Un nucléide est dit fissile si un neutron thermique peut provoquer la fission du noyau. Quatre nucléides fissiles sont actuellement utilisés :



Parmi eux, l'uranium 235 ($^{235}_{92}U$) est le seul nucléide naturel. L'élément uranium naturel en contient 0,71% ; le reste 99,29%, est de l'uranium 238 (en négligeant l'uranium 234).

Les nucléides fissiles artificiels s'obtiennent par bombardement neutronique à partir de nucléides naturels relativement abondants dans la nature, par exemple l'uranium 238 ou le thorium 232. De tels nucléides naturels qui peuvent engendrer des nucléides fissiles sous l'action de neutrons sont dits fertiles.

II.3. La fusion nucléaire.

Définition : Une fusion nucléaire est la réaction au cours de laquelle deux nucléides légers fusionnent pour donner un nucléide plus lourd.

Exemple :

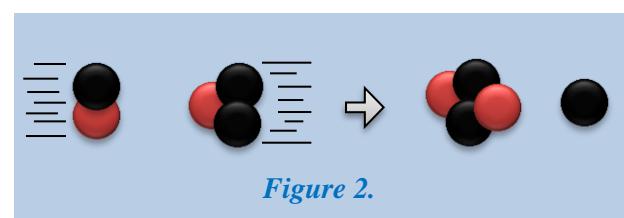
- ✓ La fusion du deutérium avec le tritium.



- ✓ La fusion de deux deutériums.



On peut schématiser la réaction de fusion par la figure 2 ci-dessous :



C'est une schématisation simple de la fusion :

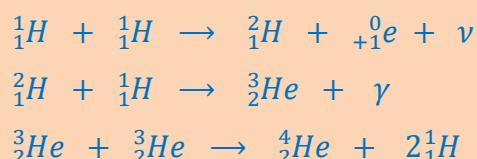


La réaction de fusion est difficile à réaliser car elle implique le rapprochement de deux noyaux, donc de particules positives. Il faut donc à ces noyaux une très grande énergie (de l'ordre de 200KeV), d'où la nécessité d'une température de l'ordre de 10^8 K. C'est pourquoi les réactions de fusion sont appelées réactions thermonucléaires.

A cette température la matière est sous forme de plasma, gaz ionisé formé de noyaux et d'électrons.

Les réactions de fusion libèrent des énergies considérables. Ainsi l'énergie libérée par le soleil et, d'une façon générale par les étoiles, provient des réactions de fusions nucléaires.

Comme exemple de réactions produites dans le soleil, nous pouvons citer :



Ce processus s'appelle le cycle du soleil ou cycle proton-proton.



Dans les *bombes H* (bombes à hydrogène) il y a fusion entre le *deutérium* et le *tritium*.



Pour porter le mélange à haute température, on utilise une petite bombe A.

II.4. Energie libérée au cours d'une réaction nucléaire provoquée.

Les réactions de fission et de fusion sont très exoénergétiques, les énergies moyennes de liaisons par nucléon des noyaux formés étant supérieures à celles des noyaux qui ont subi la fission ou la fusion.

Au cours d'une réaction nucléaire provoquée, l'énergie libérée est telle que :

$$\Delta E = \Delta E_1 - \Delta E_2$$

Avec :

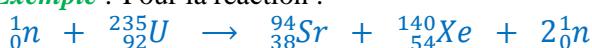
ΔE_1 : énergie de liaison des noyaux avant la réaction.

ΔE_2 : énergie de liaison des noyaux après la réaction.

Soit :

$$\Delta E = \sum E_{\ell_i}(av) - \sum E_{\ell_i}(ap)$$

Exemple : Pour la réaction :



$$\Delta E = E_{\ell}(U) - E_{\ell}(Sr) - E_{\ell}(Xe)$$

Sachant que :

$E = \frac{E_{\ell}}{A}$: énergie de liaison par nucléon ;
 $\Rightarrow E_{\ell} = E \cdot A$

D'où : $\Delta E = \sum E_i A_i(av) - \sum E_i A_i(ap)$

Application :

Après plusieurs émissions β^- des noyaux formés, l'un des modes de fission de l'uranium 235 donne finalement :



L'énergie de liaison par nucléon est de 7,7MeV pour ${}_{92}^{235}U$, de 8,45MeV pour ${}_{58}^{140}Ce$ et de 8,7MeV pour ${}_{41}^{93}Nb$.

Détermine approximativement l'énergie libérée au cours de cette réaction.

Réponse : L'énergie libérée au cours de cette fission est :

$$\Delta E = \sum E_i A_i(av) - \sum E_i A_i(ap)$$

$$\Delta E = E_1 A_1 - E_2 A_2 - E_3 A_3$$

$$\text{A.N} : \Delta E = 7,7 \times 235 - 8,45 \times 140 - 8,7 \times 93$$

$$\Delta E = -182,6 \text{ MeV}$$

La réaction est exothermique et produit 2 neutrons supplémentaires.

Notons que l'énergie libérée vaut *environ 0.8MeV par unité de masse atomique, soit $8 \cdot 10^{13} \text{ J.Kg}^{-1}$, 2 millions de fois plus que l'essence brûlant dans le dioxygène de l'air.*

III. Applications et conséquences liées aux propriétés radioactives des éléments.

III.1. Applications des radionucléides.

Parmi les nombreuses utilisations des radionucléides, citons :

- ✓ La datation au carbone 14 ;
- ✓ La radiothérapie ;
- ✓ Les traceurs radioactifs ;
- ✓ La production de l'énergie électrique.

III.1.1. La datation au carbone 14.

Le carbone 14 est radioactif β^- . Il est produit de façon permanente dans l'atmosphère. Dans le dioxyde de carbone, les atomes de carbone 14 et de carbone 12 sont dans *un rapport constant*. Les êtres vivants, animaux et végétaux, absorbent les deux isotopes qui restent dans les mêmes proportions tant que les organismes sont vivants. *Après la mort, la quantité de carbone 14 diminue à cause de sa radioactivité*. En déterminant les quantités de carbone 14 et de carbone 12 contenues dans un échantillon de vestiges d'organismes vivant, il est possible de trouver l'âge de la mort de l'être vivant d'où provient l'échantillon, la période du carbone 14 étant connue.

On a ainsi pu déterminer l'âge de tombes égyptiennes en analysant un échantillon de bois du cercueil. Il en est de même de manuscrits faits en papyrus.



III.1.2. La radiothérapie.

Le rayonnement γ émis par un corps radioactif, essentiellement celui du *cobalt 60*, permet de détruire les cellules localisées dans la *tumeur cancéreuse*, c'est ainsi que le rayonnement γ est utilisé dans le *traitement des cancers*.

III.1.3. Les traceurs radioactifs.

En remplaçant partiellement un isotope stable d'un élément par un isotope radioactif, on ne change pas les propriétés chimiques et on peut suivre la trace de ce dernier grâce au rayonnement émis.

Les applications sont nombreuses :

- ✓ *en chimie* : étude du *mécanisme réactionnel* et de la *cinétique* de certaines réactions ;
- ✓ *en médecine* : étude du *fonctionnement de certains organes* comme la *glande thyroïde* ;
- ✓ *en biologie* : étude des *mécanismes de biosynthèse*.

III.1.4. La production de l'énergie électrique.

Les réactions de fission sont très *exoénergétiques*, les énergies moyennes de liaison par nucléon des noyaux formés étant supérieures à celle du noyau qui subit la fission. Un atome d'*uranium 235 libère environ 200MeV*.

Il est possible d'utiliser l'uranium 235 comme source importante d'énergie. Encore faut – il qu'une grande quantité d'uranium subisse la fission. Celle – ci est produite par une réaction en chaîne.

Dans les centrales nucléaires, on utilise l'uranium enrichi en uranium 235 comme combustible. Grâce à certaines conditions permettant d'auto – entretenir la réaction en chaîne dans un réacteur nucléaire, on obtient des *réactions contrôlées*, qui produisent une importante *énergie calorifique*, qui est transformée, grâce à des dispositifs adéquats, en *énergie électrique*, destinée à la consommation. Outre l'uranium 235, on peut aussi utiliser l'*uranium naturel sous forme d'oxyde de ^{239}Pu , l'uranium enrichi et thorium, uranium et plutonium*.

Les trois quarts environ de l'électricité fabriquée actuellement en France sont d'origine nucléaire.

III.2. Conséquences liées aux propriétés radioactives des éléments.

III.2.1. Absorption des particules et du rayonnement.

Ejectés du noyau qui se désintègre, les particules et les photons, dont l'énergie est de l'ordre du MeV, peuvent traverser la matière inerte ou vivante. Ces

projectiles entrent en collision avec les atomes ou les molécules qui constituent la matière traversée.

Au cours des chocs, la *perte d'énergie cinétique provoque des ionisations ou même des réactions nucléaires*.

On peut définir un *parcours moyen* d'un ensemble de particules dans une substance donnée comme la distance moyenne parcourue par ces particules avant d'être arrêtées. Ce parcours moyen dépend de la nature des particules, de leur énergie cinétique initiale et de la substance traversée.

1. *Les particules α* sont facilement arrêtées. On admet qu'une feuille de papier suffit à les arrêter.

2. Légères, *les particules β* peuvent subir de nombreuses collisions successives avant d'être arrêtées ; elles *sont plus pénétrantes* que les particules α , mais *moins ionisantes*. Leur parcours moyen est inversement proportionnel à la masse volumique de la substance traversée. Une feuille d'aluminium de 5mm d'épaisseur permet d'arrêter les particules β , dont l'énergie cinétique est inférieure à 2MeV.

3. *Les rayons γ* sont *très pénétrants*. Plutôt qu'un parcours moyen, on détermine, pour un matériau donné, l'*épaisseur de demi – absorption*, c'est – à – dire l'épaisseur qui absorbe, en moyenne, la moitié des photons incidents.

4. *Les neutrons* sont *très pénétrants*. Ils interagissent plus ou moins avec les noyaux selon la substance traversée, provoquant d'autres réactions nucléaires et par conséquent des ionisations en chaîne. Ils sont plus facilement arrêtés par des chocs avec des noyaux légers (noyaux d'hydrogène, par exemple) que par des chocs avec des noyaux lourds.

III.2.2. Les effets physiologiques des rayonnements.

L'homme a, de tout temps, été soumis à des rayonnements naturels (rayons cosmiques, radioactivité du sol...) sans danger pour sa santé.

L'utilisation actuelle de substances radioactives (médecine, centrales nucléaires, bombes...) modifie les données du problème. En effet, *l'irradiation des tissus humains peut entraîner la mort*.

Il convient donc de définir dans quelles conditions des précautions doivent être prises.

On appelle dose absorbée, l'énergie cédée au tissu par le rayonnement par unité de masse. Elle s'exprime en gray (1J.Kg^{-1}) ou en rad ($0,01\text{J.Kg}^{-1}$).

Les effets des différents rayonnements ne sont pas identiques, à énergie égale. On définit donc l'*équivalent – dose* qui est égal à la dose multipliée



par un facteur de qualité qui dépend du rayonnement reçu. L'équivalent – dose s'exprime en *rem*.

Les effets des radiations sont cumulatifs. Un homme qui reçoit moins de 100 *rems*, ne présentera aucun trouble. Celui qui en reçoit plus de 900 mourra à plus ou moins longue échéance.

Une personne habitant au voisinage d'une centrale nucléaire reçoit environ *3mrem/an*. S'il vit jusqu'à 80 ans, il aura reçu $240\text{mrem} = 0,24\text{rem}$, à peu près la même dose que celui qui porte constamment une montre à cadran lumineux, ce qui est infime.

III.2.3. Les effets biologiques des rayonnements.

En traversant la matière vivante, *les particules α et β et les rayonnements γ provoquent des ionisations, ou des excitations, d'atomes, susceptibles d'entraîner des réactions chimiques anormales*.

Quelques heures ou même quelques années après une exposition au rayonnement, des réactions secondaires peuvent apparaître ; des *macromolécules fondamentales* au niveau cellulaire (*ARN, ADN*) sont touchées. Des *altérations morphologiques* sont observées, notamment des *effets génétiques* ; des cellules sont détruites ou leur processus de division altéré, provoquant ainsi dans certains cas la *stérilité*.

Lors de retombées radioactives, les nucléides sont absorbés par les plantes et se retrouvent ainsi dans la chaîne alimentaire. Les aliments ingérés véhiculent des radionucléides émetteurs α , β ou γ , qui peuvent alors atteindre n'importe quelle cellule de l'organisme. C'est la raison du grand émoi suscité par la catastrophe de Tchernobyl du 25 avril 1986, où des quantités importantes d'isotopes radioactifs (iode, cobalt, césium, ...) furent émises puis véhiculées par les vents sur une grande partie de l'Europe occidentale.

IV. Familles radioactives.

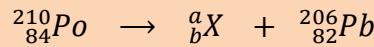
La radioactivité entraîne la transformation d'un nucléide en un autre nucléide. Si ce dernier est lui-même radioactif, il se transforme à son tour, et ainsi de suite, jusqu'à ce que le nucléide obtenu ne soit plus radioactif mais stable. L'ensemble des nucléides issus d'un même noyau père a reçu le nom de *famille radioactive*, la filiation radioactive étant le processus de transformation. Les éléments radioactifs naturels ont été classé en quatre familles : *famille du neptunium, famille de*

l'uranium – radium, famille de l'actinium, famille du thorium.

Exercice d'application

1°) Qu'appelle-t-on radioactivité naturelle d'un élément ?

2°) La désintégration radioactive du polonium 210 peut s'écrire sous la forme :



Trouve a , b et X . De quel type de radioactivité s'agit-il ?

3°) a) Calcule en MeV l'énergie libérée lors de la désintégration d'un noyau de polonium 210.

b) Calcule l'énergie cinétique en MeV ainsi que la vitesse de la particule X émise.

4°) Sachant que la demi-vie du polonium 210 est de 138 jours, calcule le temps au bout duquel le quart d'une masse initiale m_0 de polonium 210 se sera désintégrée.

5°) Si à $t = 0$, $m_0 = 0,1\text{mg}$ de polonium 210, détermine l'activité de cet échantillon aux instants $t = 0$ et $t = T$.

On donne : $M(\text{Po}) = 209,9360\text{u}$;

$M(\text{Pb}) = 205,9296\text{u}$; $M(\text{He}) = 4,00150\text{u}$.

Corrigé.

1°) On appelle radioactivité, la transformation spontanée d'un noyau atomique en un noyau différent, au cours de laquelle il émet un rayonnement.

2°) On donne : $^{210}_{84}\text{Po} \rightarrow {}_b^aX + {}_{82}^{206}\text{Pb}$
Trouvons a , b et X .

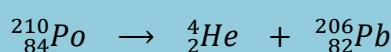
D'après la *conservation du nombre de masse A et du nombre de charge Z*, on a :

$$\begin{cases} 210 = a + 206 \\ 84 = b + 82 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 210 - 206 = 4 \\ b = 84 - 82 = 2 \end{cases}$$

D'où :

$$a = 4 ; b = 2 \text{ et } X = \text{He}$$

L'équation devient alors :



Il s'agit de la *radioactivité α* puisqu'il y a émission d'un *noyau d'hélium ${}_2^4\text{He}$* .

3°) a) Calcul de l'énergie libérée en MeV lors de la désintégration d'un noyau de polonium 210.

L'énergie libérée est telle que :



$$E = (m_X - m_Y - m_\alpha)C^2$$

$$E = (209,9360 - 205,9296 - 4,00150) \times 931,5$$

$$E = 4,56 \text{ MeV}$$

b) Calcul de l'énergie cinétique en MeV ainsi que la vitesse de la particule X émise.

L'énergie libérée se retrouve sous forme d'**énergie cinétique** acquise par la particule et le noyau fils.

En effet :

$$E = E_{C_Y} + E_{C_\alpha} \Rightarrow E = \frac{1}{2}m_Yv_Y^2 + E_{C_\alpha}$$

Trouvons la vitesse v_Y du noyau fils en utilisant la **conservation du vecteur quantité de mouvement**.

➤ Avant la désintégration, on a :

$$\vec{p}_{av} = \vec{p}_X = m_X \vec{v}_X = \vec{0} \quad \text{car } \vec{v}_X = \vec{0}$$

➤ Après la désintégration, on a :

$$\vec{p}_{ap} = \vec{p}_Y + \vec{p}_\alpha = m_Y \vec{v}_Y + m_\alpha \vec{v}_\alpha$$

D'après la **conservation du vecteur quantité de mouvement**, on a :

$$\vec{p}_{av} = \vec{p}_{ap} \Rightarrow m_Y \vec{v}_Y + m_\alpha \vec{v}_\alpha = \vec{0}$$

$$\Rightarrow m_Y \vec{v}_Y = -m_\alpha \vec{v}_\alpha$$

$$\text{Soit : } m_Y v_Y = m_\alpha v_\alpha \Rightarrow v_Y = \frac{m_\alpha v_\alpha}{m_Y}$$

$$\text{Ainsi : } E = \frac{1}{2}m_Y \left(\frac{m_\alpha v_\alpha}{m_Y} \right)^2 + E_{C_\alpha}$$

$$E = \frac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2 \cdot \frac{m_\alpha}{m_Y} + E_{C_\alpha} = E_{C_\alpha} \cdot \frac{m_\alpha}{m_Y} + E_{C_\alpha}$$

$$E = E_{C_\alpha} \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_Y} \right) \Rightarrow E_{C_\alpha} = \frac{E}{1 + \frac{m_\alpha}{m_Y}}$$

$$A.N : E_{C_\alpha} = \frac{4,56}{1 + \frac{4,00150}{205,9296}} = 4,47$$

$$E_{C_\alpha} = 4,47 \text{ MeV}$$

La vitesse de la particule X émise est telle que :

$$E_{C_\alpha} = \frac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2 \Rightarrow v_\alpha = \sqrt{\frac{2E_{C_\alpha}}{m_\alpha}}$$

$$A.N : v_\alpha = \sqrt{\frac{2 \times 4,47 \times 1,6 \cdot 10^{-13}}{4,0015 \times 1,66 \cdot 10^{-27}}} = 1,46 \cdot 10^7$$

$$v_\alpha = 1,46 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

$$4^\circ) T = 138j,$$

Calcul du temps au bout duquel le quart d'une masse initiale m_0 de polonium 210 se sera désintégrée.

Par définition : $m = m_0 e^{-\lambda t}$

$$\text{A l'instant } t \quad m' = \frac{1}{4}m_0$$

$$\text{Or } m_0 = m + m' \Rightarrow m = m_0 - m' \\ \Rightarrow m = m_0 - \frac{1}{4}m_0 \Rightarrow m = \frac{3}{4}m_0$$

$$\text{Ainsi : } \frac{3}{4}m_0 = m_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow e^{-\lambda t} = \frac{3}{4} \Rightarrow -\lambda t = \ln \frac{3}{4}$$

$$D'où : \quad t = \frac{T}{\ln 2} \ln \frac{4}{3} \quad \text{avec } \lambda = \frac{\ln 2}{T}$$

$$A.N : t = \frac{138}{\ln 2} \ln \frac{4}{3} \Rightarrow t = 57,27j$$

$$5^\circ) \text{ à } t = 0, m_0 = 0,1 \text{ mg}$$

Activité de cet échantillon aux instants $t = 0$ et $t = T$.

Par définition : $\mathcal{A} = \lambda N$

✓ A l'instant $t = 0$ on a : $\mathcal{A}_0 = \lambda N_0$

$$\text{or } \frac{N_0}{m_0} = \frac{\mathcal{N}_A}{M} \Rightarrow N_0 = \frac{\mathcal{N}_A \cdot m_0}{M}$$

$$\text{Ainsi : } \mathcal{A}_0 = \frac{\lambda \cdot \mathcal{N}_A \cdot m_0}{M} \quad \text{avec } \lambda = \frac{\ln 2}{T}$$

D'où :

$$\mathcal{A}_0 = \frac{\ln 2 \cdot \mathcal{N}_A \cdot m_0}{T \cdot M}$$

$$A.N : \mathcal{A}_0 = \frac{\ln 2 \times 6,02 \cdot 10^{23} \times 10^{-4}}{138 \times 24 \times 3600 \times 210} = 1,67 \cdot 10^{10}$$

$$\mathcal{A}_0 = 1,67 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$$

✓ à l'instant $t = T$:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 e^{-\lambda t} = \mathcal{A}_0 e^{-\frac{\ln 2}{T} \times T} = \frac{\mathcal{A}_0}{e^{\ln 2}} = \frac{\mathcal{A}_0}{2}$$

D'où :

$$\mathcal{A} = \frac{\mathcal{A}_0}{2}$$

$$A.N : \mathcal{A} = \frac{1,67 \cdot 10^{10}}{2} = 8,33 \cdot 10^9$$

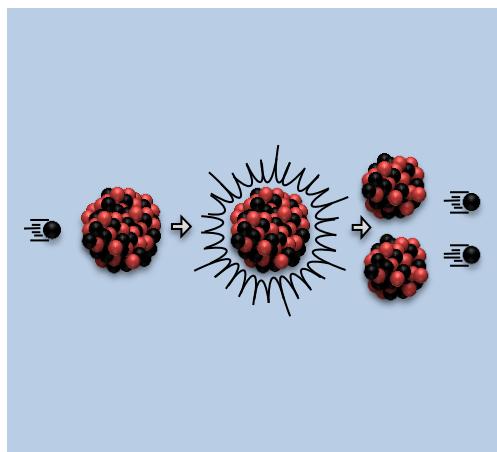
$$\mathcal{A} = 8,33 \cdot 10^9 \text{ Bq}$$



TRAVAUX DIRIGÉS III

Conseils pratiques :

1. Composition d'un noyau atomique.
2. Energie de liaison par nucléon d'un nucléide.
3. Réactions nucléaires spontanées et provoquées.
4. Energie libérée au cours d'une réaction nucléaire.
5. Loi de décroissance radioactive.
6. Activité d'un radionucléide.



L'ESSENTIEL DU COURS

I – Définitions des notions.

Définis les termes et expressions suivants : Nucléons, Nucléide, Isotopes d'un élément, Energie de liaison, Energie de liaison par nucléon, Radioactivité, Période radioactive, Transmutation, Fission et Fusion nucléaire.

II – Questions à réponses courtes.

Réponds aux questions suivantes :

- 1°) Pourquoi les nucléides ^{235}U et ^{239}Pu sont – ils dits fissiles ?
- 2°) Les réactions nucléaires dans les étoiles sont – elles dues à des réactions de fusion ou de fission ?
- 3°) Pourquoi les radioactivités α , β^- et β^+ s'accompagnent généralement d'une émission d'un rayonnement γ ?
- 4°) Sous quelle forme se présente l'énergie libérée lors d'une désintégration radioactive d'un nucléide ?
- 5°) Ecris l'équation de la première réaction nucléaire provoquée réalisée par Irène et Frédéric – Joliot Curie.
- 6°) Explique l'origine de l'électron expulsé lors de la radioactivité β^- , étant donné que le noyau initial ne contient pas d'électrons.

III – Questions à alternative vrai ou faux.

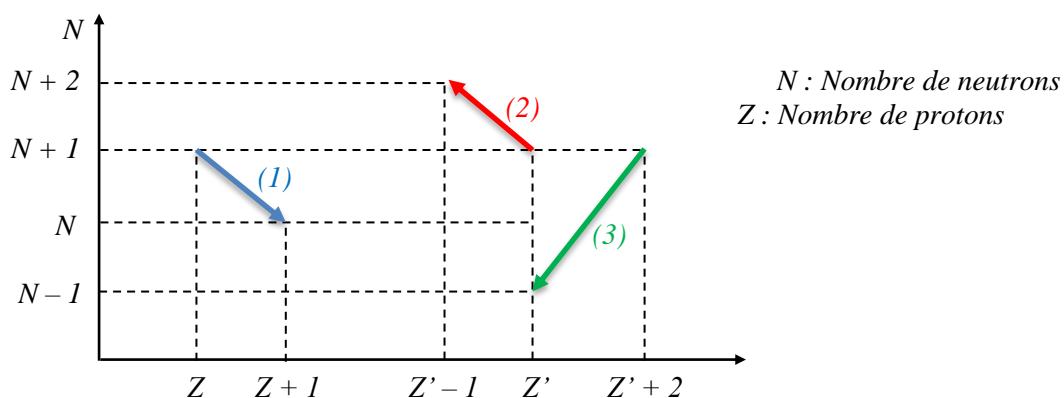
Réponds par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

- 1°) Plus un noyau est stable, plus l'énergie de liaison par nucléon est élevée.
- 2°) L'énergie de liaison par nucléon est la plus grande pour les noyaux les plus légers.
- 3°) L'énergie moyenne de liaison par nucléon des noyaux les plus stables est de l'ordre de 8MeV.
- 4°) Les nucléides $^{135}_{53}X$ et $^{135}_{55}X'$ sont des isotopes.
- 5°) Dans une réaction nucléaire, seul le nombre de charges se conserve.
- 6°) Dans une désintégration β^- , le nombre de charges du noyau fils augmente d'une unité.
- 7°) La radioactivité α consiste en une émission d'un ion hélium.
- 8°) L'émission de photon γ ne s'observe que dans la radioactivité α .
- 9°) La radioactivité β^+ s'observe généralement avec des nucléides artificiels.
- 10°) La radioactivité β^- est due à l'émission d'un électron par les couches profondes d'un atome.
- 11°) L'activité d'une substance radioactive augmente au cours du temps.
- 12°) La radioactivité α se produit avec les noyaux lourds.

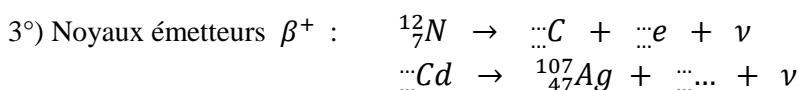
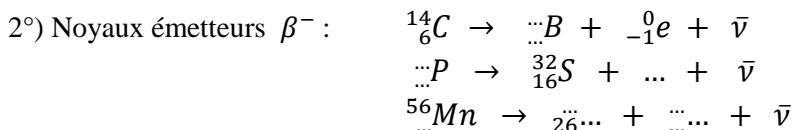
IV – Identification des réactions nucléaires.

Indique sur le diagramme les trois types de radioactivité α , β^+ et β^- .



**V – Equations des réactions nucléaires.**

Complète les réactions suivantes :

**VI – Réarrangement.****Ordonne le texte suivant qui est écrit en désordre.**

est une réaction / de nombre de masse élevé / au cours de laquelle / un nucléide / fusionnent pour donner / au faible nombre de masse / Une fusion nucléaire / deux nucléides.

VII – Texte à trous.**Ecris le texte suivant en complétant les mots manquants :**

Les réactions nucléaires concernent les ...⁽¹⁾ ...des atomes. Ces noyaux peuvent être classés en deux catégories : les noyaux stables et les noyaux ...⁽²⁾ Seuls les nucléides dits instables, c'est – à – dire ceux possédant une ...⁽³⁾ ... énergie de liaison par ...⁽⁴⁾ ... sont capables de se ...⁽⁵⁾ ... spontanément pour se transformer en d'autres noyaux avec émission des particules : c'est la ...⁽⁶⁾ On distingue la radioactivité α , β^- et β^+ , celles – ci s'accompagnent généralement d'un ...⁽⁷⁾ ... γ , car les nucléides fils obtenus se trouvent souvent à l'état ...⁽⁸⁾ Bombardés par des particules de faible énergie, les ...⁽⁹⁾ ... par exemple, les noyaux lourds subissent la réaction de ...⁽¹⁰⁾ ... pour donner des nucléides plus légers. C'est le cas des noyaux ${}_{92}^{235}U$ et ${}_{94}^{241}Pu$ par exemple, qui sont dits ...⁽¹¹⁾ Au cours des réactions nucléaires, le nombre de noyaux contenus dans un échantillon de radionucléides ...⁽¹²⁾ ... exponentiellement avec le temps. Au bout d'une ...⁽¹³⁾ ..., il ne reste plus que la moitié du nombre initial de noyaux. Le nombre de ...⁽¹⁴⁾ ... par seconde d'un échantillon de radionucléides s'exprime en ...⁽¹⁵⁾ ... ou en Curies : c'est l'...⁽¹⁶⁾ ... radioactive.

RESOLUTION DES PROBLEMES

N.B : Dans tous les exercices, on prendra :

$$\text{Massee du proton : } m_p = 1,007276u = 938,28 \text{ MeV/C}^2$$

$$\text{Massee du neutron : } m_n = 1,008665u = 939,57 \text{ MeV/C}^2$$



Masse de l'électron : $m_e = 0,000549u = 0,51\text{MeV}/C^2$
 $1u = 1,66 \cdot 10^{-27}\text{Kg} = 931,5\text{MeV}/C^2$; $1\text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{J}$ et $N = 6,02 \cdot 10^{23}\text{mol}^{-1}$

EXERCICE 1 : Complète le tableau ci – après :

Nucléide	$^{35}_{17}Cl$				$^{241}_{94}Pu$				$^{94}_{38}Sr$
Elément		<i>La</i>		<i>Si</i>				<i>P</i>	
Nombre de nucléons		148	14	28			4		222
Nombre de protons		57				92	2	15	86
Nombre de neutrons			8			143		15	

EXERCICE 2 : On rappelle qu'un noyau d'hélium contient deux protons et deux neutrons.

Calcule le défaut de masse du noyau d'hélium et son énergie de cohésion en MeV.

EXERCICE 3 : La masse de l'atome $^{16}_8O$ vaut $15,995u$.

1°) Calcule la masse du noyau correspondant et conclus.

2°) Calcule l'énergie de liaison par nucléon du noyau $^{16}_8O$.

EXERCICE 4 : Un noyau de lithium Li a pour masse $m = 7,0160u$.

1°) Exprime et calcule la perte de masse d'un noyau de lithium au cours de sa formation en unité de masse atomique.

2°) Définis l'énergie de liaison d'un noyau. Quelle est son expression ?

3°) Calcule en MeV l'énergie libérée lors de la formation d'un noyau de lithium à partir de ses nucléons au repos.

4°) Calcule l'énergie de liaison moyenne par nucléon pour un noyau de lithium.

EXERCICE 5 : L'énergie de liaison par nucléon du noyau O est égale à $7,981\text{MeV}$.

1°) Calcule l'énergie de liaison du noyau O.

2°) a) Exprime l'énergie de liaison en fonction de la perte de masse d'un noyau.

b) Déduis – en la masse du noyau O en unité de masse atomique.

EXERCICE 6 : 1°) Calcule le défaut de masse du nucléide $^{235}_{92}U$. Déduis – en l'énergie de liaison de ce nucléide.

2°) Quelle serait l'énergie libérée par la fission de 2mg d'uranium ?

On donne : masse de l'uranium 235 : $m_U = 234,9942u$.

EXERCICE 7 : 1°) Quelle est l'énergie de liaison par nucléon d'un noyau du nucléide $^{20}_{10}Ne$? La masse de ce noyau est égale à $19,9867u$.

2°) Calcule, en MeV, l'énergie de liaison par nucléon d'un noyau d'uranium 235. La masse de ce noyau est $234,9942u$.

3°) L'énergie de liaison du nucléide $^{56}_{26}Fe$ est $E_{\ell_1} = 492,24\text{MeV}$; celle du nucléide $^{142}_{58}Ce$ est $E_{\ell_2} = 1199,9\text{MeV}$. Détermine le nucléide le plus stable des deux.

EXERCICE 8 : On considère les noyaux ci – après : $^{226}_{88}Ra$; $^{7}_{3}Li$; $^{14}_{7}N$.

1°) Donne la composition de chaque noyau.

2°) Définis puis calcule l'énergie de liaison de chaque noyau. Peut – on à partir des énergies de liaison dire quel est le noyau le plus stable ?

3°) Calcule pour chaque noyau l'énergie de liaison par nucléon. Classe ces nucléides par ordre de stabilité décroissant.

On donne : $m(^{226}Ra) = 225,97712u$;
 $m(^7Li) = 7,0158u$; $m(^{14}N) = 14,0031u$.

EXERCICE 9 : On donne les masses des atomes correspondant aux nucléides suivants :

$M(^{16}_8O) = 15,9994u$; $M(^{15}_8O) = 15,0030u$;
 $M(^{14}_7N) = 14,003u$.

1°) Calcule, en MeV, les énergies de liaison par nucléon des trois nucléides. On tiendra compte de la masse des électrons.

2°) Quelle énergie faut – il pour extraire un proton de $^{16}_8O$?

3°) Quelle énergie faut – il pour extraire un neutron de $^{16}_8O$?



EXERCICE 10 : On considère les deux variétés suivantes de l'élément uranium : $^{235}_{92}U$ et $^{238}_{92}U$.

1°) a) Indique la composition des deux variétés d'uranium.

b) Que peut – on dire des propriétés chimiques de ces deux variétés d'uranium et pourquoi ?

2°) Rappelle la définition de l'énergie de liaison d'un noyau atomique.

3°) Calcule pour chaque variété d'uranium l'énergie de liaison et l'énergie de liaison par nucléon. Quel est des deux isotopes le plus stable ?

4°) L'uranium naturel est un mélange contenant 99,29% de l'uranium 238 et 0,71% d'uranium 235. Calcule en unité de masse atomique la masse d'un atome de l'élément uranium.

On donne :

masse de l'uranium 235 : $m_1 = 234,9942u$;

masse de l'uranium 238 : $m_2 = 238u$.

EXERCICE 11 : 1°) Le cuivre naturel est un mélange de deux isotopes contenant 34 et 36 neutron respectivement. Le premier isotope constitue 69% du mélange. Trouve la masse atomique du cuivre naturel. On donne $Z = 29$.

2°) L'oxygène naturel présente 3 variétés isotopiques de nombres de masse A , A' et A'' , dont les pourcentages respectifs sont 99,76%, 0,04% et 0,20%. A , A' et A'' sont des nombres en progression arithmétique de raison 1.

a) Détermine les nombres de masses A , A' et A'' ;
b) Donne les structures des nucléides représentatifs des isotopes.

On donne : $Z = 8$ et $M_{at} = 16,0044g/mol$.

EXERCICE 12 : Le polonium $^{210}_{84}Po$, noyau instable, subit une désintégration α en donnant un noyau de plomb (Pb) dans son état fondamental.

1°) Calcule en joule, l'énergie de liaison du noyau de polonium.

2°) Ecris l'équation de la réaction de désintégration en précisant les nombres de masse et de charge du noyau fils Pb.

3°) Calcule en MeV, l'énergie libérée lors de la désintégration d'un noyau de polonium en utilisant les données suivantes :

$m_{Po} = 209,9369u$; $m_{Pb} = 205,9296u$;

$m_{He} = 4,0015u$

4°) La période du nucléide $^{210}_{84}Po$ est $T = 138$ jours.

a) Défini la demi – vie ou période d'un nucléide ;
b) Un échantillon de polonium 210 a une masse initiale $m_0 = 20g$. Calcule le nombre de noyaux de polonium 210 correspondant ;

- c) Montre que la masse de polonium à la date t peut s'écrire $m = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{T} t}$;
d) Calcule la masse de polonium disparu au bout de 414 jours.

EXERCICE 13 : Lors de la catastrophe de Tchernobyl, du césium 134 et du césium 137 ont été libérée dans l'atmosphère.

1°) Le césium 137 est radioactif β^- . Ecris les lois de conservation intervenant dans cette réaction et l'équation bilan de désintégration, en précisant les produits formés.

2°) La période du césium 134 est $T = 2ans$. Déduis – en la constante radioactive λ . Au bout de combien de temps 99% du césium 134 libéré auront disparu ?

Même question pour le césium 137, dont la période est 30ans.

EXERCICE 14 : L'américium est un émetteur α . Le noyau fils correspondant est le neptunium (Np).

1°) Ecris en le justifiant, l'équation bilan de la désintégration d'un noyau $^{241}_{95}Am$.

2°) a) Calcule, en MeV puis en joule, l'énergie libérée au cours de cette réaction ;

On donne : $m_\alpha = 4,00260u$; $m_{Am} = 241,05682u$; $m_{Np} = 237,04817u$.

b) Dis sous quelle forme se retrouve cette énergie si le noyau fils est obtenu à l'état fondamental.

c) La désintégration s'accompagne d'un rayonnement γ .

➤ Explique ce phénomène ;

➤ La somme des énergies cinétiques Ec_α de la particule α et Ec_{Np} du noyau fils est 5MeV. Calcule l'énergie du rayonnement γ .

EXERCICE 15 : Le noyau du radium $^{226}_{88}Ra$ se transforme en noyau de radon après une désintégration α .

1°) Ecris l'équation bilan de la réaction de désintégration.

2°) Calcule en MeV puis en joule, l'énergie libérée par cette désintégration.

On donne : $m_{Ra} = 226,0960u$; $m_{Rn} = 222,0869u$; $m_\alpha = 4,0039u$.

3°) a) Exprime en utilisant la loi de conservation de la quantité de mouvement, le rapport entre l'énergie cinétique de la particule α et celle du noyau de radon, en fonction de la masse m_α de la particule α et de la masse m_{Rn} du noyau de radon.

b) Calcule l'énergie cinétique de la particule α .

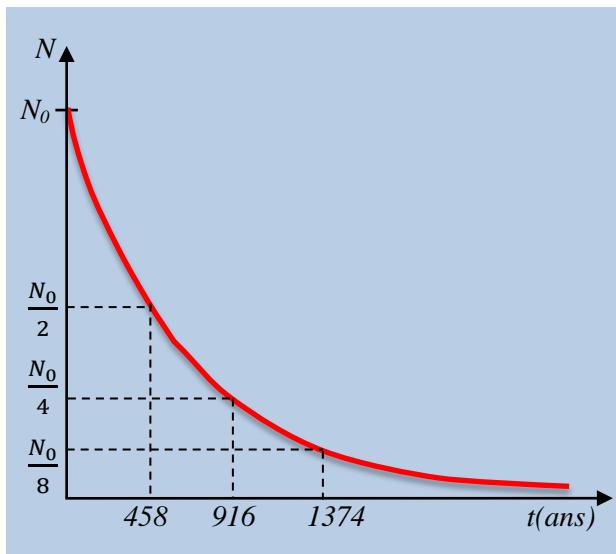


EXERCICE 16: La constante radioactive du $^{210}_{84}Po$ est $\lambda = 5,8 \cdot 10^{-8} \text{s}^{-1}$.

1°) Calcule en secondes et en jours, la période radioactive T.

2°) On considère un échantillon contenant initialement N_0 noyaux de $^{210}_{84}Po$. Calcule combien il en reste en moyenne aux instants $T/2$, T , $2T$ et $3T$. Donne l'allure de la courbe de décroissance.

EXERCICE 17: 1°) L'Américium $^{243}_{95}Am$ est un émetteur α . La courbe de décroissance exponentielle du nombre de noyaux non désintégrés d'un échantillon est la suivante :



- a) Ecris l'équation de cette désintégration.
 - b) Rappelle la définition de la demi-vie et calcule – là.
 - c) Déduis – en la constante radioactive.
 - d) Au bout de combien de temps les $8/9$ de noyaux de l'échantillon initial sont – ils désintégrés ?
- 2°) Les particules α obtenues sont utilisées pour bombarder le beryllium $^{9}_4Be$. Il se forme un nucléide X avec libération d'un neutron. Ecris l'équation de désintégration et identifie le nucléide X.

EXERCICE 18: Le mendélévium ($^{256}_{101}Md$) se désintègre en capturant un électron avec émission d'un neutrino $^0\nu$.

1°) Ecris l'équation de la réaction de désintégration du mendélévium.

On donne : Einsteinium : $^{99}_{99}Es$; Fermium : $^{100}_{100}Fm$; Nobelium : $^{102}_{102}No$.

2°) Le noyau ainsi obtenu est spontanément fissile. Il peut se désintégrer en xénon $^{138}_{54}Xe$ et palladium

$^{114}_{46}Pd$ avec émission de neutrons. Ecris la réaction nucléaire correspondante.

3°) Le mendélévium a une période radioactive de $20j$. Le nombre de noyaux initiaux de Md étant N_0 , au bout de combien de jours le nombre de noyaux désintégrés est – il $\frac{3}{4}N_0$?

EXERCICE 19: On appelle activité \mathcal{A} d'une substance radioactive le nombre de désintégration par seconde : $\mathcal{A} = -\frac{dN}{dt}$.

1°) Donne l'expression de \mathcal{A} en fonction de t , de la constante radioactive λ et du nombre de noyau N_0 à l'instant $t = 0$.

2°) La constante radioactive du bismuth 210 est $\lambda = 5,77 \cdot 10^{-4} \text{s}^{-1}$. Calcule la période radioactive T.

Un échantillon contient, à l'instant $t = 0$, $1mg$ de bismuth 210. Détermine l'activité de cet échantillon aux instants $t = 0$ et $t = T$.

EXERCICE 20: Par radioactivité α , le radium $^{226}_{88}Ra$ se transforme en radon Rn .

1°) Ecris l'équation bilan de cette désintégration.

2°) On donne : $m_{Ra} = 226,0960u$; $m_{Rn} = 222,0869u$; $m_\alpha = 4,0039u$.

Calcule en MeV et en joule, l'énergie libérée par cette désintégration.

3°) Montre que la particule α remporte la quasi-totalité de cette énergie. Calcule la vitesse d'émission de la particule α .

4°) En réalité cette énergie libérée est repartie entièrement entre la particule α et le photon γ de longueur d'onde $\lambda = 10^{-12}m$. Calcule la vitesse réelle d'émission de la particule α .

On donne : $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{J.s}$; $1u = 931,5 \text{MeV}/C^2$; $1u = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{Kg}$.

EXERCICE 21: 1°) A haute altitude l'azote $^{14}_7N$ se transforme en carbone $^{14}_6C$ sous l'action d'un bombardement de neutrons. Ecris l'équation de cette réaction.

2°) Le $^{14}_6C$ est radioactif β^- . Ecris l'équation de sa désintégration.

3°) La période du carbone $^{14}_6C$ est 5590 ans . Un échantillon de bois préhistorique donne 180 désintégrations par seconde. Un échantillon de même masse d'un bois contemporain donne 1350 désintégrations par seconde. Quel est l'âge du bois préhistorique ?

EXERCICE 22: Un noyau de radium $^{226}_{88}Ra$ se désintègre spontanément en émettant une particule α .



1°) Ecris l'équation de désintégration, en précisant les lois de conservation utilisées. Identifie le nouveau nucléide X formé.

2°) a) La constante radioactive du radium $^{226}_{88}Ra$ vaut $\lambda = 1,36 \cdot 10^{-11} s^{-1}$. Calcule en secondes et en années la période radioactive ou demi-vie T du radium $^{226}_{88}Ra$.

b) On considère un échantillon radioactif contenant $1mg$ de radium 226. Recopie et complète le tableau suivant :

t	0	T	$2T$	$3T$	$4T$	$5T$
$m(^{226}_{88}Ra)$						

3°) Le radium 226 par une série de désintégration α et β^- conduit au plomb $^{206}_{82}Pb$.

Quels sont les nombres de désintégrations du type α et du type β^- qui permettent de passer du noyau $^{226}_{88}Ra$ au noyau $^{206}_{82}Pb$.

EXERCICE 23 : Le polonium $^{210}_{84}Po$ est un noyau instable qui donne par désintégration α un noyau stable de plomb Pb , avec émission de rayonnement γ .

1°) Quelle est la signification des nombres placés à gauche du symbole Po ? Déduis-en la composition de ce noyau.

2°) On rappelle que l'énergie de cohésion par nucléon d'un noyau est donnée par l'expression : $E = \frac{(\Delta m) \cdot c^2}{A}$. Calcule en joule et en MeV l'énergie de cohésion par nucléon pour le noyau de polonium.

3°) Ecris l'équation de désintégration du noyau de polonium. Quelle est, exprimée en MeV, l'énergie libérée au cours de cette désintégration? Sous quelle forme se répartit cette énergie?

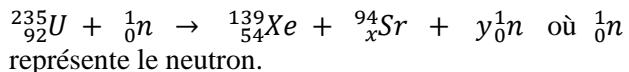
4°) Les particules α émises servent à bombarder des noyaux d'aluminium $^{27}_{13}Al$ qui se transforment alors en un isotope radioactif du phosphore $^{30}_{15}P$ avec émission d'une particule. Le noyau $^{30}_{15}P$ se transforme à son tour en un noyau stable de silicium $^{30}_{14}Si$.

Ecris les équations de ces transformations successives. Quelles sont les caractéristiques de la particule émise dans la dernière transformation.

On donne : $m_{Po} = 210,0482u$; $m_{Pb} = 206,0385u$.

EXERCICE 24 : L'uranium 238 se transforme en radium 226 après avoir subi successivement x désintégrations α et y désintégrations β^- . Détermine x et y .

EXERCICE 25 : Sous l'impact d'un neutron lent, un noyau d'uranium 235 peut subir la fission suivante :



Détermine x et y en précisant les lois utilisées.

EXERCICE 26 : 1°) Le potassium $^{40}_{19}K$ est radioactif et se désintègre en donnant de l'argon $^{40}_{18}Ar$. Ecris l'équation de cette réaction nucléaire. De quel type de désintégration s'agit-il?

2°) a) Exprime, en fonction du temps, les nombres N_K d'atomes de potassium 40 et N_{Ar} d'argon 40 présents à une date t dans un échantillon ne contenant initialement que du potassium (nombre d'atomes N_0).

b) Représente sur un même graphique les fonctions $N_K = f(t)$ et $N_{Ar} = g(t)$.

3°) Certaines roches volcaniques comme l'obsidienne contiennent du potassium dont une partie est du potassium 40. Au moment de sa formation, cette roche ne contient pas d'argon. Un géologue analyse un échantillon d'obsidienne et constate que les atomes d'argon 40 y sont deux fois moins nombreux que les atomes de potassium 40. Quel est l'âge de la roche, si la période radioactive du potassium 40 est 10^9 ans.

EXERCICE 27 : Pour mesurer le volume sanguin d'un individu, on lui injecte dans son sang $10cm^3$ d'une solution contenant initialement du sodium 24 à une concentration molaire de $10^{-3} mol/L$. Le sodium 24 utilisé est radioactif β^- et est obtenu en bombardant le sodium 23 par les neutrons. Sa demi-vie est $T = 15$ heures.

1°) Ecris l'équation de la réaction de formation et de désintégration du sodium 24.

2°) Soit n_0 le nombre de mole de sodium 24 à l'injection à $t = 0$ et $n(t)$ le nombre de mole restant à la date t .

a) Calcule le nombre n_0 de mole de sodium 24 introduite dans le sang à l'injection;

b) Exprime $n(t)$ en fonction de n_0 , T et t ;

c) Calcule le nombre de mole de sodium 24 présents dans le sang au bout de $5h$;

d) Au bout de $5h$, on prélève $10cm^3$ de sang de l'individu et on constate qu'il contient $1,57 \cdot 10^{-8} mol$ de sodium 24. Calcule le volume de ce sang pendant ce temps.

EXERCICE 28 : En 1934, Frédéric et Irène Joliot-Curie bombardèrent des noyaux d'aluminium $^{27}_{13}Al$ par des noyaux d'hélium 4_2He .



Ils obtiennent des noyaux de phosphore $^{30}_{15}P$ et une particule X.

1°) Détermine la nature de la particule X, en précisant les lois appliquées. Ecris l'équation de cette réaction nucléaire.

2°) Le phosphore obtenu est radioactif ; il se désintègre en donnant des particules β^+ et du silicium.

a) Ecris, en la justifiant l'équation de désintégration du phosphore.

b) A l'aide d'un compteur de particules, on mesure le nombre moyen de désintégration par seconde ; ce nombre est proportionnel au nombre de noyaux $^{30}_{15}P$ non encore désintégrés. Détermine la constante radioactive et la demi-vie du noyau de phosphore, sachant que le compteur affiche au bout de 500 s un nombre moyen de désintégration par seconde dix fois plus grand qu'au début.

EXERCICE 29 : L'américium 241 est émetteur α . Le noyau fils correspondant est un noyau de neptunium (Np). Le noyau père est au repos dans le référentiel terrestre.

1°) Cas où le noyau de neptunium est obtenu à l'état fondamental.

a) Ecris (en la justifiant) l'équation de désintégration d'un noyau $^{241}_{95}Am$.

b) Calcule en (MeV.C⁻²) le défaut de masse de la réaction nucléaire. Sous quelle forme apparaît l'énergie correspondante ?

Données : masse d'un noyau d'américium 241 :

$$m_1 = 241,0046u$$

Masse d'un noyau de neptunium : $m_2 = 236,9970u$.

Masse d'un noyau d'hélium 4 : $m_3 = 4,0025u$.

c) Parmi les particules produites, laquelle a la plus grande énergie cinétique ? Evalue sa vitesse (on justifiera la réponse).

2°) Cas où le noyau de neptunium est obtenu dans un état excité. On observe alors l'émission d'un rayonnement γ .

a) Justifie l'existence de ce rayonnement.

b) L'énergie cinétique des particules α émises est : $E_{C_{min}} = 5,1 \text{ MeV}$. Déduis – en l'énergie maximale que pourrait avoir un photon γ .

EXERCICE 30 : 1°) Le thorium $^{232}_{90}Th$, bombardé par des neutrons peut capter l'un d'entre eux, pour former un isotope qui se trouve dans un état excité. Cet isotope revient ensuite à son état fondamental. Ecris l'équation bilan de la réaction nucléaire et précise les lois de conservation utilisées.

2°) L'atome de thorium formé est radioactif et donne naissance après deux émissions nucléaires de même type à l'isotope $^{233}_{92}U$. Détermine le type d'émission en le justifiant.

3°) L'uranium 233 est radioactif α .

a) Ecris l'équation de la désintégration.

b) Quelle est en MeV l'énergie totale libérée par cette réaction ?

c) En négligeant les énergies cinétiques du noyau $^{233}_{92}U$ et du noyau formé, calcule l'énergie cinétique maximale de la particule émise.

d) L'analyse du rayonnement révèle l'existence d'un photon γ . D'autre part, la vitesse de la particule α émise peut avoir pour énergie cinétique, outre la valeur maximale trouvée précédemment, les valeurs suivantes : $E_{C_{\alpha_1}} = 4,85 \text{ MeV}$; $E_{C_{\alpha_2}} = 4,89 \text{ MeV}$. Interprète l'origine de cette émission γ . Donne le nombre de raies observé et leurs fréquences.

On donne : $h = 6,64 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$; $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$;

$$1u = 931,5 \text{ MeV.C}^2$$

$$^{233}U : m_U = 233,0395u ; ^{232}Th : m_{Th} = 232,0382u ;$$

$$^{229}Th : m_{Th} = 229,0316u ; ^4He : m_{He} = 4,0026u ; \\ ^{233}Pa.$$

EXERCICE 31 : Le plutonium $^{241}_{94}Pu$ est un nucléide fissile formé dans les réacteurs nucléaires.

1°) En supposant que la réaction de fission du plutonium 241 engendre deux noyaux X et Y de masse atomique 95 et 145, calcule la valeur approchée E de l'énergie libérée par 1,00Kg de combustible.

2°) Le plutonium 241 est radioactif β^- et sa période radioactive est 13,2 ans, il engendre ainsi l'américium (Am) lui-même radioactif α (période 460 ans) qui se désintègre en un noyau de neptunium (Np).

a) Ecris les équations des deux réactions de désintégrations successives.

b) On évalue à 30Kg la masse de plutonium 241 non « fissonné » dans la charge de combustible irradié extrait d'un réacteur nucléaire. Calcule l'activité de cet échantillon due au plutonium. Que devient cette activité un an après ?

Données : masse du noyau $^{241}_{94}Pu$: 241u ;

$$1u = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ Kg.}$$

Energies de liaison par nucléon : $E_1(^{241}Pu) = 7,70 \text{ MeV/nucléon}$; $E_2(^{95}X) = 8,80 \text{ MeV/nucléon}$; $E_3(^{145}Y) = 8,41 \text{ MeV/nucléon}$.



EXERCICE 32 : La désintégration du polonium $^{210}_{84}Po$ engendre la formation des particules α et du plomb.

- 1°) Ecris l'équation de cette réaction nucléaire.
 2°) a) Quelle est, en joules et en électronvolts, l'énergie libérée par la désintégration d'un noyau de polonium 210 ?

On donne : masse du noyau de polonium : $m_1 = 210,0482u$; masse du noyau de plomb : $m_2 = 206,03853u$.

- b) En admettant que cette énergie est entièrement acquise par la particule α sous forme d'énergie cinétique, calcule, en appliquant les lois de la mécanique classique, la vitesse d'émission de cette particule.
 c) En réalité, l'énergie libérée par cette désintégration est repartie entièrement entre la particule α et un photon de longueur d'onde $\lambda = 10^{-12}m$. Calcule la valeur réelle de la vitesse d'émission de la particule α .

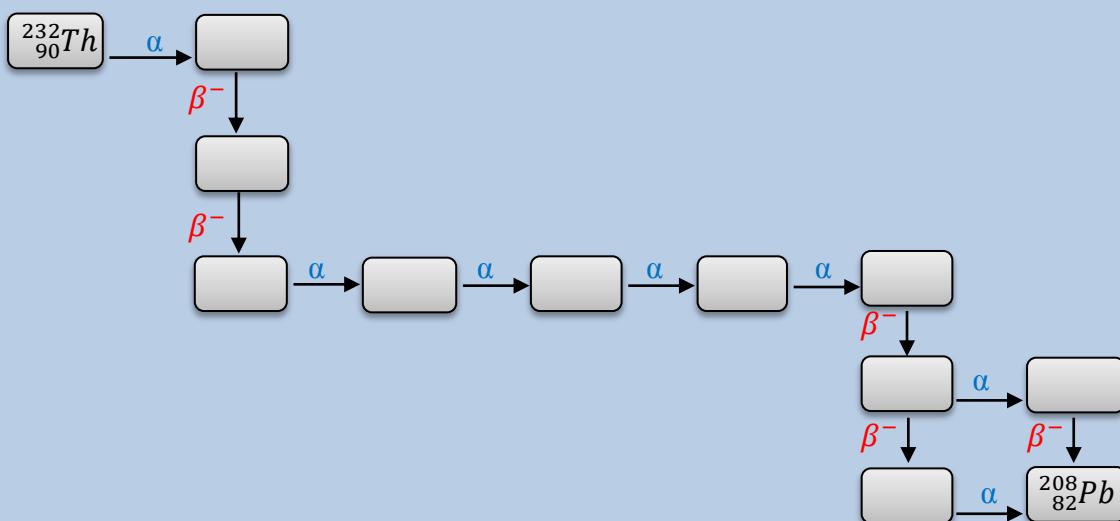
3°) La période radioactive ou demi-vie du polonium 210 est égale à 140 jours. A la date $t = 0$, on dispose d'une masse $m_0 = 2g$ de polonium 210.

- a) Calcule la masse restante au bout de 420 jours et au bout d'une année (365,25 jours).
 b) Calcule le temps correspondant à la disparition des 2/3 de la masse initiale du polonium.
 c) Quelle est à la date $t = 280$ jours, la masse d'hélium obtenue ? Quel est son volume dans les conditions normales ?

On donne :

masse molaire du polonium $M(Po) = 210g.mol^{-1}$;
 masse molaire de l'hélium : $M(He) = 4g.mol^{-1}$;
 volume molaire : $V_m = 22,4L.mol^{-1}$.

EXERCICE 33 : La famille radioactive du thorium 232 aboutit à l'isotope de plomb 208. L'organigramme de cette famille est représenté ci-dessous. En t'a aidant de la classification périodique, inscris le nucléide correspondant à chaque case vide.



EXERCICE 34 : On considère la famille radioactive dont le nucléide père est l'uranium $^{238}_{92}U$ et le nucléide final stable, le plomb $^{208}_{82}Pb$.

- 1°) Le radium $^{226}_{88}Ra$ est un nucléide de cette famille qui, à la suite de désintégrations de type α et β^- , conduit au plomb $^{206}_{82}Pb$.

- a) Donne l'équation générale de la radioactivité α . En utilisant des éléments de cette famille notés dans le tableau ci-après, écris l'équation d'une désintégration de ce type.

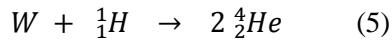
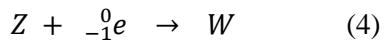
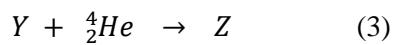
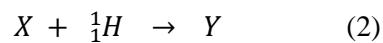
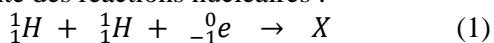
$^{226}_{88}Ra$	$^{222}_{86}Rn$	$^{210}_{84}Po$	$^{206}_{82}Pb$
-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

- b) Donne l'équation générale de la radioactivité β^- .
 c) Quels sont les nombres de désintégration de type α et de type β^- permettent de passer du noyau $^{226}_{88}Ra$ au noyau $^{206}_{82}Pb$?
 2°) On considère une masse m_0 de radon à une date choisie comme origine des temps. La période du radon est de 3,825 jours.
 a) Détermine la masse de radon restant au bout de 1, 2, ..., n périodes. Déduis-en la masse de radon désintégrée au bout de n périodes.



- b) Calcule les durées nécessaires pour désintégrer les $4/9$ et les $9/10$ de la masse m_0 de radon.

EXERCICE 35 : On considère la succession suivante des réactions nucléaires :



1°) Equilibre les cinq réactions nucléaires précédentes. Donne les nucléides X , Y , Z et W sous la forme ${}_Z^AX$.

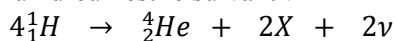
2°) a) Par quelle réaction globale peut – on remplacer l'ensemble des réactions (1), (2), (3), (4) et (5) ?

b) Nomme et définis ce type de réaction.

On donne :

${}_1^1H$							${}_2^4He$
${}_3^3Li$	${}_4^4Be$	${}_5^5B$	${}_6^6C$	${}_7^7N$	${}_8^8O$	${}_9^9F$	${}_10^{10}Ne$

EXERCICE 36 : Le constituant principal des étoiles jeunes, et notamment du soleil, est l'hydrogène. Lorsque le cœur de ces étoiles atteint une température de 10^7K , les protons fusionnent. Cette fusion s'effectue selon divers processus. Le bilan de l'un d'eux est le suivant :



1°) La particule X est – elle un électron ou un positon ? Comment s'appelle la particule ν ?

2°) Calcule l'énergie libérée par la formation d'un noyau d'hélium ${}_2^4He$ selon ce processus (en J), puis l'énergie libérée par une mole d'hélium formée.

3°) On suppose que toute l'énergie de fusion produite par les réactions est rayonnée par le soleil. La puissance rayonnée, supposée constante, est de $3,9.10^{26}W$.

- a) Calcule la perte de masse subie par le soleil en une seconde.
- b) La masse du soleil est de l'ordre de $2.10^{30}Kg$. On évalue son âge à 4,6 milliards d'années. Quelle masse a – t – il perdue depuis qu'il rayonne ? Quelle fraction de sa masse actuelle cela représente – t – il ?



DOMAINE D'ETUDE II : REACTION CHIMIQUE

OG₁ : REALISER L'ETUDE CINETIQUE D'UNE REACTION

5

LA CINETIQUE CHIMIQUE

Introduction.

Un *système chimique* est l'ensemble des espèces chimiques que l'on étudie au cours d'une transformation chimique. *La transformation chimique* est l'évolution du système chimique observée au niveau macroscopique. Elle est modélisée par une *réaction chimique*, qui rend compte des interactions ayant lieu entre les entités chimiques au niveau microscopique.

La réaction chimique est associée à la transformation. L'*équation chimique* symbolise la réaction chimique.

I. Définition.

La cinétique chimique est un domaine de la chimie qui étudie le déroulement des réactions chimiques en fonction du temps, ainsi que les facteurs qui influencent la vitesse d'évolution des réactions ; il s'agit de la concentration des réactifs, de la température, de la pression et des catalyseurs.

Rappels.

- **Réactif** : c'est une espèce chimique qui disparaît au cours de la transformation chimique.
- **Produit** : c'est une espèce chimique qui apparaît au cours d'une transformation chimique.

Exemple : Combustion du carbone dans le dioxygène.

➤ **Réactifs** : carbone (C) et dioxygène (O₂);

➤ **Produit** : dioxyde de carbone CO₂.

➤ L'*équation chimique* de la réaction est :



II. Vitesse et ordre d'une réaction chimique.

II.1. Vitesse d'une réaction chimique.

Considérons la réaction chimique du type :



La vitesse d'une réaction est définie à partir de la vitesse de disparition des réactifs A et B ou d'apparition des produits C et D, au cours du temps.

Considérons un système chimique constitué initialement des réactifs A et B. Il est évident qu'au cours de la transformation chimique les corps A et B disparaîtront progressivement tandis qu'apparaîtront les produits C et D.

Supposons que *les concentrations du réactif A et du produit D* évoluent comme l'indique les courbes de la figure 1 ci-dessous :

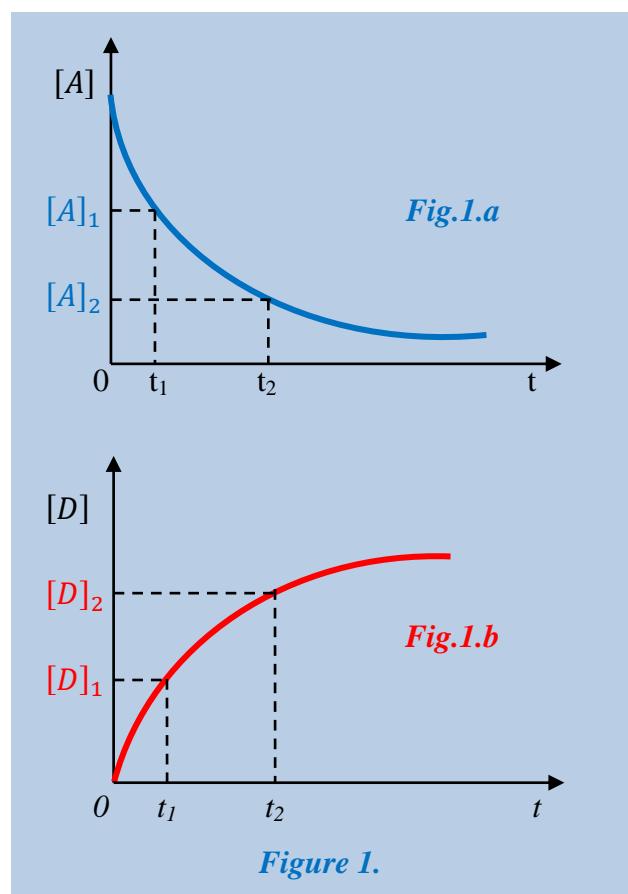


Figure 1.



II.1.1. Vitesse moyenne.

Définition : La vitesse moyenne d'un corps est la variation de la concentration de ce corps entre deux instants.

- La vitesse moyenne de disparition du réactif A entre les instants t_1 et t_2 (Fig.1.a) est :

$$v_m(A) = - \frac{[A]_2 - [A]_1}{t_2 - t_1} = - \frac{\Delta[A]}{\Delta t}$$

Avec $[A]_2 < [A]_1$.

$[A]_1$: concentration du réactif A à l'instant t_1 ;
 $[A]_2$: concentration du réactif A à l'instant t_2 ;

- La vitesse moyenne d'apparition du produit D entre les instants t_1 et t_2 (Fig.2.b) est :

$$v_m(D) = \frac{[D]_2 - [D]_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta[D]}{\Delta t}$$

Avec $[D]_2 > [D]_1$.

$[D]_1$: concentration du produit D à l'instant t_1 ;
 $[D]_2$: concentration du produit D à l'instant t_2 ;

Remarque : La vitesse moyenne d'un corps est toujours positive et s'exprime en mol.L.s⁻¹.

II.1.2. Vitesse instantanée.

Définition : La vitesse instantanée d'un corps, est la vitesse d'évolution de ce corps à un instant donné.

- La vitesse instantanée de disparition du réactif A est :

$$v_i(A) = - \frac{d[A]}{dt}$$

- La vitesse instantanée de formation ou d'apparition du produit D est :

$$v_i(D) = \frac{d[D]}{dt}$$

Remarque : La vitesse instantanée de disparition d'un réactif ou de formation d'un produit mesure le coefficient directeur de la tangente à la courbe d'évolution du réactif ou du produit à un instant donné (figure 2).

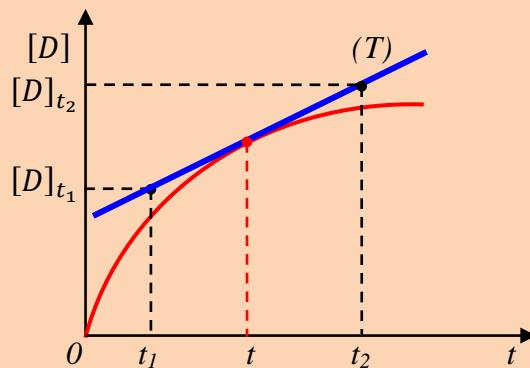


Figure 2.

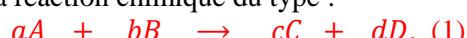
Pour déterminer la vitesse instantanée de formation de D, par exemple, à un instant t :

- ✓ On trace la tangente (T) à la courbe à cet instant ;
- ✓ On choisit deux points quelconques de la tangente de part et d'autre du point d'intersection de la courbe avec la tangente ;
- ✓ On projette ces points sur l'axe des temps pour trouver les valeurs de t_1 et t_2 , et sur l'axe de la concentration pour trouver les concentrations correspondant à ces dates t_1 et t_2 ;
- ✓ On calcule la vitesse avec l'expression :

$$v_i(D) = \frac{[D]_{t_2} - [D]_{t_1}}{t_2 - t_1}$$

II.1.3. Vitesse globale de la réaction.

Soit la réaction chimique du type :



La vitesse globale de la réaction s'exprime en fonction des vitesses instantanées :

$$v = - \frac{1}{a} \frac{d[A]}{dt} = - \frac{1}{b} \frac{d[B]}{dt} = \frac{1}{c} \frac{d[C]}{dt} = \frac{1}{d} \frac{d[D]}{dt}$$

Ainsi on a :

$$v = \frac{1}{a} v_i(A) = \frac{1}{b} v_i(B) = \frac{1}{c} v_i(C) = \frac{1}{d} v_i(D)$$



II.2. Ordre d'une réaction.

Dans certains domaines de la température, la vitesse de la réaction (1) peut s'exprimer en fonction des concentrations des réactifs A et B suivant la relation :

$$v = K[A]^\alpha \cdot [B]^\beta$$

C'est *la loi de la vitesse* dans laquelle :

K est la constante de vitesse, α et β sont les ordres partiels des réactifs A et B respectivement.

La somme :

$$n = \alpha + \beta$$

est *l'ordre global* de la réaction.

Remarque : Les valeurs de K , α et β sont déterminées expérimentalement.

III. Temps de demi – réaction.

III.1. Définition.

On appelle temps de demi – réaction, le temps au bout duquel la moitié de l'un des réactifs disparaît.

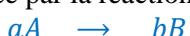
A cet instant :

$$[A] = \frac{[A]_0}{2}$$

III.2. Expression du temps de demi – réaction.

III.2.1. Réaction d'ordre 0.

Elle est représentée par la réaction du type :



La vitesse de cette réaction peut s'écrire :

$$v = K[A]^0 = K \quad (1)$$

$$v = -\frac{1}{a} \cdot \frac{d[A]}{dt} \quad (2)$$

En égalant les deux expressions, on obtient :

$$-\frac{1}{a} \cdot \frac{d[A]}{dt} = K \Rightarrow -d[A] = aKdt$$

$$\Rightarrow \int d[A] = -aK \int dt$$

$$\Rightarrow [A] = -aKt + cte$$

$$\text{à } t = 0 \Rightarrow [A]_0 = cte$$

D'où :

$$[A] = -aKt + [A]_0$$

► Temps de demi – réaction.

$$\text{à } t = \frac{t_{\frac{1}{2}}}{2} \text{ on a : } [A] = \frac{[A]_0}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{[A]_0}{2} = -aKt_{\frac{1}{2}} + [A]_0$$

D'où :

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{[A]_0}{2aK} = \frac{C_0}{2aK} \quad (s)$$

III.2.2. Réaction d'ordre 1.

Elle est représentée par la réaction du type :



La vitesse de cette réaction peut s'écrire :

$$v = K[A]^\alpha \text{ avec } \alpha = 1.$$

$$v = K[A]^1 = K[A] \quad (1)$$

$$v = -\frac{1}{a} \cdot \frac{d[A]}{dt} \quad (2)$$

En égalant les deux expressions, on obtient :

$$-\frac{1}{a} \cdot \frac{d[A]}{dt} = K[A] \Rightarrow \frac{d[A]}{[A]} = -aKdt$$

$$\Rightarrow \int \frac{d[A]}{[A]} = -aK \int dt$$

$$\Rightarrow \ln[A] = -aKt + cte$$

$$\text{à } t = 0 \Rightarrow \ln[A]_0 = cte$$

$$\Rightarrow \ln \frac{[A]}{[A]_0} = -aKt$$

D'où :

$$[A] = [A]_0 e^{-aKt}$$

► Temps de demi – réaction.

$$\text{à } t = \frac{t_{\frac{1}{2}}}{2} \text{ on a : } [A] = \frac{[A]_0}{2}$$

$$\frac{[A]_0}{2} = [A]_0 e^{-aKt_{\frac{1}{2}}}$$

D'où :

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{aK} \quad (s)$$

Remarque : les expressions obtenues pour une réaction d'ordre 1 sont comparables à celle d'une réaction nucléaire spontanée :

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \text{ et } T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Donc on peut dire que *la radioactivité est une réaction d'ordre 1.*



III.2.3. Réaction d'ordre 2.

Elle est représentée par la réaction du type :



Cas où $[A] = [B]$

La vitesse de cette réaction peut s'écrire :

$$v = K[A]^\alpha[B]^\beta \text{ avec } \alpha = \beta = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v = K[A]^1[A]^1 = K[A]^2 \\ v = -\frac{1}{a} \cdot \frac{d[A]}{dt} \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v = K[A]^1[A]^1 = K[A]^2 \\ v = -\frac{1}{a} \cdot \frac{d[A]}{dt} \end{array} \right. \quad (2)$$

En égalant les deux expressions, on obtient :

$$-\frac{1}{a} \cdot \frac{d[A]}{dt} = K[A]^2 \Rightarrow \frac{d[A]}{[A]^2} = -aKdt$$

$$\Rightarrow \int \frac{d[A]}{[A]^2} = -aK \int dt$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{[A]} = -aKt + cte$$

$$\text{à } t = 0 \Rightarrow -\frac{1}{[A]_0} = cte$$

D'où :

$$\frac{1}{[A]} = aKt + \frac{1}{[A]_0}$$

Soit :

$$\frac{1}{C} = aKt + \frac{1}{C_0}$$

➤ Temps de demi-réaction.

$$\text{à } t = \frac{t_{\frac{1}{2}}}{2} \text{ on a : } [A] = \frac{[A]_0}{2}$$

$$\frac{2}{[A]_0} = aKt_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{[A]_0} \Rightarrow t_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{aK} \left(\frac{2}{[A]_0} - \frac{1}{[A]_0} \right)$$

D'où :

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{aK[A]_0} = \frac{1}{aKC_0} \quad (s)$$

IV. Détermination de l'ordre global d'une réaction.

Pour déterminer l'ordre globale d'une réaction à partir des données expérimentales, on trace la courbe :

- $[A] = f(t)$, pour une réaction d'ordre 0 ;
- $\ln[A] = f(t)$, pour une réaction d'ordre 1 ;
- $\frac{1}{[A]} = f(t)$, pour réaction d'ordre 2 .

Si *on obtient une droite*, l'ordre supposé est alors l'ordre de la réaction considérée.

Exemple : Pour la réaction d'ordre 2, on obtient la courbe $\frac{1}{[A]} = f(t)$ représentée par la figure 3 ci-dessous :

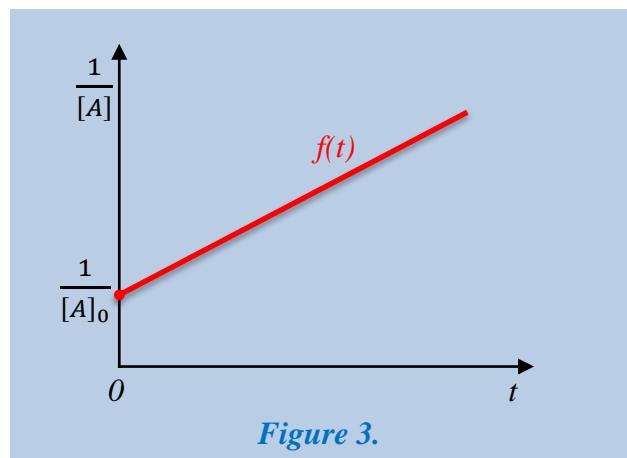


Figure 3.

V. Facteurs cinétiques influençant une transformation chimique.

Les facteurs cinétiques sont les paramètres qui ont une influence sur la durée d'une transformation chimique, et donc sur la vitesse de la réaction. Ce sont : *la concentration initiale, la température et les catalyseurs*.

V.1. Influence de la concentration initiale des réactifs.

Plus la concentration initiale des réactifs est grande, plus la durée de la transformation est courte, ce qui explique que la vitesse de la réaction est grande.

V.2. Influence de la température.

La vitesse de la réaction augmente avec la température. Plus la température est élevée, plus la vitesse de la réaction est grande.

V.3. Influence des catalyseurs.

L'utilisation des catalyseurs augmente la vitesse d'évolution d'une réaction chimique.

Un catalyseur est une substance qui accélère une réaction chimique sans la modifier.



Exercices d'application.

Exercice 1 :

A) Au cours de la réaction $A + 2B \rightarrow C$, la concentration du composé C augmente de 5.10^{-3} mol/L en $1\text{min}20\text{s}$.

1°) Calcule la vitesse moyenne d'apparition ou de formation de C.

2°) Calcule la vitesse moyenne de disparition du corps A et déduis – en la vitesse moyenne de disparition de B.

B) On considère la réaction de saponification de l'éthanoate d'éthyle :



On a mesuré la concentration des ions OH^- restant au temps t , en partant à $t = 0$ d'un mélange équimolaire des réactifs $0,01 \text{ mol/L}$. Les valeurs obtenues sont consignés dans le tableau ci-dessous :

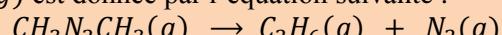
$t(\text{min})$	0	2	6	10	20	40
$[\text{OH}^-] \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$	10	8,2	6,0	4,6	2,9	2,1

1°) Calcule la concentration en éthanol pour chaque valeur de t .

2°) Détermine la vitesse moyenne de disparition des ions OH^- entre 6 et 10min .

Exercice 2 :

La transformation de l'azométhane $\text{CH}_3\text{N}_2\text{CH}_3(g)$ en éthane $\text{C}_2\text{H}_6(g)$ et en diazote $\text{N}_2(g)$ est donnée par l'équation suivante :



La concentration de l'azométhane à un instant $t = 20\text{min}$ est $1,1.10^{-2} \text{ mol/L}$. Celle de l'éthane est 10^{-3} mol/L . Après deux heures elle est de 6.10^{-3} mol/L .

1°) Quelle est la concentration initiale de l'azométhane ?

2°) Calcule sa vitesse moyenne de disparition entre $t = 0$ et $t = 2\text{h}$.

3°) a) Montre que la transformation de l'azométhane obéit à une réaction d'ordre zéro.

b) Déduis – en la constante de vitesse de cette réaction.

4°) Calcule la fraction de l'azométhane qui subsistera après $1h30\text{min}$.

Corrigé 1.

A) $[C] = 5.10^{-3} \text{ mol/L}$; $t = 1\text{min}20\text{s} = 80\text{s}$.

1°) Vitesse moyenne d'apparition ou de formation de C.

Par définition la vitesse moyenne de C est :

$$v_m(C) = \frac{[C] - [C]_0}{t - t_0}, \text{ or } [C]_0 = 0, t_0 = 0$$

D'où :

$$v_m(C) = \frac{[C]}{t}$$

$$\text{A.N : } v_m(C) = \frac{5.10^{-3}}{80} = 6,25.10^{-5}$$

$$v_m(C) = 6,25.10^{-5} \text{ mol/L.s}$$

2°) a) Vitesse moyenne de disparition de A.

Par définition la vitesse moyenne de A est :

$$v_m(A) = - \frac{[A] - [A]_0}{t - t_0}$$

$$\text{Or } [A]_0 = [A] + x \Rightarrow [A] = [A]_0 - x \text{ et } t_0 = 0$$

$$\Rightarrow v_m(A) = - \frac{[A]_0 - x - [A]_0}{t - t_0} = \frac{x}{t}$$

$$\text{Avec } x = [C], \text{ soit : } v_m(A) = \frac{[C]}{t}$$

$$\text{A.N : } v_m(A) = \frac{5.10^{-3}}{80} = 6,25.10^{-5}$$

$$v_m(A) = 6,25.10^{-5} \text{ mol/L.s}$$

b) Vitesse moyenne de disparition de B.

Par définition la vitesse moyenne de B est :

$$v_m(B) = - \frac{[B] - [B]_0}{t - t_0}$$

$$\text{Or } [B]_0 = [B] + 2x \Rightarrow [B] = [B]_0 - 2x \text{ et } t_0 = 0$$

$$\Rightarrow v_m(B) = - \frac{[B]_0 - 2x - [B]_0}{t - t_0} = \frac{2x}{t}$$

$$v_m(B) = 2 \frac{[C]}{t} = 2v_m(A)$$

$$\text{A.N : } v_m(A) = 2 \times 6,25.10^{-5}$$

$$v_m(A) = 1,25.10^{-4} \text{ mol/L.s}$$

B) 1°) Concentration en éthanol.

Par définition : $[\text{OH}^-]_0 = [\text{OH}^-] + x$

$$\Rightarrow x = [\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}] = [\text{OH}^-]_0 - [\text{OH}^-]$$

$$\text{A.N : } [\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}] = 0,01 - [\text{OH}^-]$$



De cette relation, on calcule pour chaque valeur du temps correspondant la valeur de la concentration de méthanol. Ainsi on obtient les valeurs reportées dans le tableau ci-dessous :

$t(min)$	0	2	6	10	20	40
$[OH^-] \times 10^{-3} mol.L^{-1}$	10	8,2	6,0	4,6	2,9	2,1
$[C_2H_5OH] \times 10^{-3} mol.L^{-1}$	0	1,8	4	5,4	7,1	7,9

2*) Vitesse moyenne de disparition des ions OH^- .

Elle est définie par :

$$v_m(OH^-) = - \frac{[OH^-]_2 - [OH^-]_1}{t_2 - t_1}$$

$$A.N : v_m(OH^-) = - \frac{4,6 \cdot 10^{-3} - 6 \cdot 10^{-3}}{(10 - 6) \times 60}$$

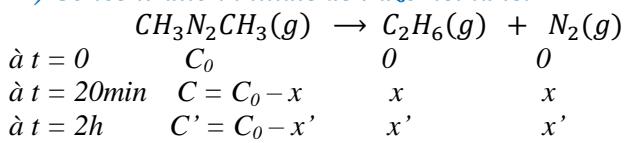
$$v_m(OH^-) = 5,83 \cdot 10^{-5} mol/L.s$$

Corrigé 2.

$$[CH_3N_2CH_3] = C / \begin{cases} C = 1,1 \cdot 10^{-2} mol/L \\ C' \text{ à } t = 2h \end{cases}$$

$$[C_2H_6] = x / \begin{cases} x = 10^{-3} mol/L \text{ à } t = 20min \\ x' = 6 \cdot 10^{-3} mol/L \text{ à } t = 2h \end{cases}$$

1*) Concentration initiale de l'azométhane.



La concentration initiale de l'azométhane est :

$$C = C_0 - x \Rightarrow C_0 = [CH_3N_2CH_3]_0 = C + x$$

$$A.N : C_0 = 1,1 \cdot 10^{-2} + 10^{-3} = 1,2 \cdot 10^{-2}$$

$$C_0 = [CH_3N_2CH_3]_0 = 1,2 \cdot 10^{-2} mol/L$$

2*) a) Vitesse moyenne de disparition.

Par définition la vitesse moyenne est :

$$v_m(CH_3N_2CH_3) = - \frac{C - C_0}{t_{2h} - t_0} = - \frac{C_0 - x' - C_0}{t_{2h} - t_0}$$

$$v_m(CH_3N_2CH_3) = \frac{x'}{t_{2h}}$$

$$A.N : v_m(CH_3N_2CH_3) = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{2 \times 3600} = 8,33 \cdot 10^{-7}$$

$$v_m(CH_3N_2CH_3) = 8,33 \cdot 10^{-7} mol \cdot L^{-1} \cdot s^{-1}$$

3*) a) Montrons que la transformation de l'azométhane obéit à une réaction d'ordre zéro.

L'équation de vitesse intégrée d'une réaction d'ordre zéro est de la forme :

$$[A] = -aKt + [A]_0, \text{ soit } C = -Kt + C_0 ; a = 1$$

Cette réaction est d'ordre zéro si :

$$K = \frac{1}{t}(C_0 - C) = \text{cte pour toutes les valeurs de } t$$

✓ Pour $t_1 = 20\text{min}$.

$$K_1 = \frac{1}{t_1}(C_0 - C) = \frac{1}{20}(1,2 \cdot 10^{-2} - 1,1 \cdot 10^{-2})$$

$$K_1 = 5 \cdot 10^{-5} mol \cdot L^{-1} \cdot min^{-1}$$

✓ Pour $t_2 = 2h = 120\text{min}$.

$$K_2 = \frac{1}{t_2}(C_0 - C') = \frac{1}{120}(1,2 \cdot 10^{-2} - 1,1 \cdot 10^{-2})$$

$$\text{Or } C' = C_0 - x' = 1,2 \cdot 10^{-2} - 6 \cdot 10^{-3}$$

$$\Rightarrow C' = 6 \cdot 10^{-3} mol \cdot L^{-1}$$

$$\text{Ainsi : } K_2 = \frac{1}{120}(1,2 \cdot 10^{-2} - 6 \cdot 10^{-3})$$

$$K_2 = 5 \cdot 10^{-5} mol \cdot L^{-1} \cdot min^{-1}$$

On constate que $K_1 = K_2 = \text{cte}$. Donc cette transformation obéit à une réaction d'ordre zéro.

b) Déduisons la constante de vitesse de cette réaction.

Elle se calcule par la relation :

$$K = \frac{K_1 + K_2}{2}$$

$$K = 5 \cdot 10^{-5} mol \cdot L^{-1} \cdot min^{-1}$$

4*) Calcul la fraction de l'azométhane qui subsistera après 1h30min.

Elle est de la forme :

$$f = \frac{C}{C_0} = \frac{C_0 - Kt}{C_0}$$

$$A.N : f = \frac{1,2 \cdot 10^{-2} - 5 \cdot 10^{-5} \times 90}{1,2 \cdot 10^{-2}} = 0,625$$

$$f = 0,625$$



DOMAINE D'ETUDE II : REACTION CHIMIQUE

OG₂ : CARACTERISER LES EQUILIBRES CHIMIQUES

6

LES EQUILIBRES CHIMIQUES

Introduction.

Un *système chimique* est l'ensemble des espèces chimiques que l'on étudie au cours d'une transformation chimique.

L'état d'un système chimique dépend de plusieurs paramètres :

- *La température* ;
- *La pression* ;
- *L'état physique des espèces chimiques* : solide (S), liquide (L), gazeux (G) ;
- *La quantité de matière des espèces chimiques présentes*.

Une transformation chimique correspond à l'apparition d'une ou de plusieurs espèces chimiques au cours de l'évolution du système. *Il y a alors passage d'un état initial à un état final.*

I. Notion d'équilibre chimique.

Considérons la réaction chimique suivante :



La plupart des réactions chimiques évoluent dans certaines conditions de température et de pression vers un *état final où coexistent les réactifs et les produits* de la réaction.

Exemple : La synthèse de l'ammoniac (NH_3).



Le mélange initial étant composé de N_2 et de H_2 , alors le mélange final contient le N_2 , H_2 et NH_3 .

Cet état final où l'on trouve les réactifs N_2 et H_2 et le produit NH_3 est appelé *état d'équilibre chimique*.

II. Transformation limitée, transformation totale.

Il existe deux types de transformations chimiques : *les transformations dites totales et les transformations limitées* conduisant à un état d'équilibre.

II.1. Transformation limitée.

Une transformation limitée conduit à un état d'équilibre, où les concentrations des produits et des réactifs n'évoluent plus. C'est un état dynamique, *qui ne se traduit pas par l'absence de réaction mais par la coexistence de deux réactions inverses se produisant à la même vitesse au niveau microscopique*.

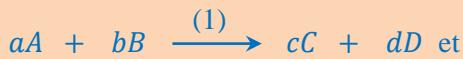
Au niveau macroscopique, aucune transformation n'est observée. *Tout système chimique évolue spontanément vers l'état d'équilibre.*

Considérons la réaction chimique suivante :



Le système chimique (A + B) conduit à un état d'équilibre si :

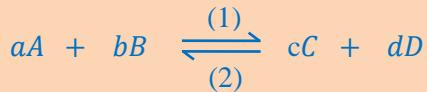
- Les réactions :



sont *inverses l'une de l'autre*.

- Les réactions (1) et (2) *peuvent se produire d'une manière simultanée*.

L'ensemble de ces deux réactions (1) et (2) constituent une réaction réversible que l'on représente par une double flèche.



Une transformation chimique est dite limitée ou équilibrée, lorsque les produits obtenus peuvent réagir pour redonner les réactifs de départ. La transformation est alors reversible.

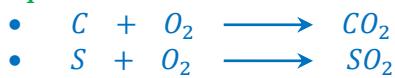
Exemples :



II.2. Transformation totale.

Une transformation chimique est dite totale lorsque l'un des réactifs au moins disparaît à la fin de la réaction. La réaction n'est pas reversible.

Exemples :

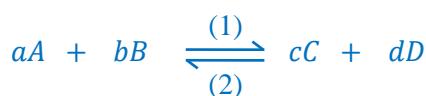


II.3. Loi d'action de masse.

II.3.1. Constante d'équilibre d'une réaction chimique.

Dans une transformation réversible en état d'équilibre chimique, on définit un rapport constant entre les concentrations des produits et les concentrations des réactifs.

Soit la transformation chimique réversible dont la réaction est :



➤ La vitesse de la réaction (1) est :

$$v_1 = K_1[A]^a[B]^b \quad (1)$$

➤ La vitesse de la réaction (2) est :

$$v_2 = K_2[C]^c[D]^d \quad (2)$$

➤ A l'équilibre les deux réactions inverses se produisant à la même vitesse, alors : $v_1 = v_2$

$$\Rightarrow K_1[A]^a[B]^b = K_2[C]^c[D]^d$$

$$\Rightarrow \frac{K_1}{K_2} = \frac{[C]^c[D]^d}{[A]^a[B]^b}$$

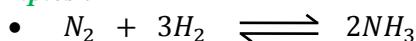
En posant : $\frac{K_1}{K_2} = K_C$

C'est la *constante d'équilibre de la réaction, relative à la concentration*.

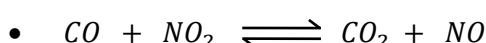
D'où :

$$K_C = \frac{[C]^c[D]^d}{[A]^a[B]^b}$$

Exemples :



$$K_C = \frac{[NH_3]^2}{[N_2]. [H_2]^3}$$

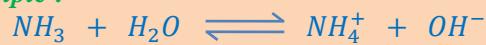


$$K_C = \frac{[CO_2]. [NO]}{[CO]. [NO_2]}$$

Remarque :

R₁ : Si l'eau (H_2O) est un solvant (ou réactif) dans une transformation chimique, on ne prend pas en compte sa concentration.

Exemple :



$$K_C = \frac{[NH_4^+]. [OH^-]}{[NH_3]}$$

Note : l'eau est solvant lorsqu'elle est un réactif.

R₂ : Si l'un des composés est solide, on ne prend pas en compte sa concentration.

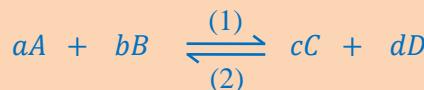
Exemple :



$$K_C = \frac{[CO]^2}{[CO_2]}$$

R₃ : On peut aussi exprimer la constante d'équilibre d'une transformation chimique mettant en jeu des composés gazeux, en fonction des pressions partielles des réactifs et des produits.

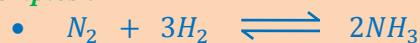
Ainsi on a pour la réaction :



$$K_P = \frac{(P_C)^c. (P_D)^d}{(P_A)^a. (P_B)^b}$$

Où K_P est la *constante d'équilibre de la réaction, relative à la pression*.

Exemples :



$$K_C = \frac{[NH_3]^2}{[N_2]. [H_2]^3}$$



$$K_C = \frac{[CO_2]. [NO]}{[CO]. [NO_2]}$$

II.3.2. Pression partielle, pression totale.

D'après la loi des gaz parfaits, on a :

$$PV = nRT$$

Soit P_t : la pression totale du mélange ;

$n_t = n_A + n_B + n_C + n_D$: la quantité totale du mélange.

✓ Pour le mélange, on a :

$$P_t V = n_t RT \quad (1)$$



✓ Pour chaque composé du mélange, on :

$$P_i V = n_i RT \quad (2)$$

En faisant le rapport entre les relations (1) et (2), on obtient l'expression des pressions partielles de chaque gaz.

$$\frac{(1)}{(2)} : \frac{P_t V}{P_i V} = \frac{n_t RT}{n_i RT}$$

$$P_i = \frac{n_i}{n_t} P_t = \frac{n_i}{(n_A + n_B + n_C + n_D)} P_t$$

P_i : pression partielle de chaque gaz dans le mélange.

II.3.3. Relation entre K_C et K_P .

D'après la loi des gaz parfaits, on peut écrire pour chaque réactif et chaque produit :

$$\begin{cases} P_A V = n_A RT \Rightarrow [A] = \frac{P_A}{RT} \\ P_B V = n_B RT \Rightarrow [B] = \frac{P_B}{RT} \\ P_C V = n_C RT \Rightarrow [C] = \frac{P_C}{RT} \\ P_D V = n_D RT \Rightarrow [D] = \frac{P_D}{RT} \end{cases}$$

D'après ce qui précède :

$$K_C = \frac{[C]^c [D]^d}{[A]^a [B]^b} = \frac{\left(\frac{P_C}{RT}\right)^c \left(\frac{P_D}{RT}\right)^d}{\left(\frac{P_A}{RT}\right)^a \left(\frac{P_B}{RT}\right)^b}$$

$$K_C = \frac{(P_C)^c \cdot (P_D)^d}{(P_A)^a \cdot (P_B)^b} \cdot \frac{(RT)^{a+b}}{(RT)^{c+d}}$$

$$K_C = \frac{(P_C)^c \cdot (P_D)^d}{(P_A)^a \cdot (P_B)^b} \cdot (RT)^{a+b-(c+d)}$$

$$K_C = K_P \cdot (RT)^{a+b-(c+d)}$$

$$\Rightarrow K_P = K_C \cdot (RT)^{c+d-(a+b)}$$

En posant : $\Delta n = c + d - (a + b)$

D'où :

$$K_P = K_C \cdot (RT)^{\Delta n}$$

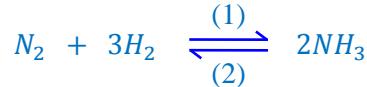
III. Loi générale du déplacement d'équilibre : loi de Chatelier.

Enoncé : Lorsqu'un système chimique est à l'état d'équilibre, la modification de l'un des facteurs de la réaction favorise la réaction qui tend à s'opposer à cette modification.

III.1. Influence de la concentration.

Lorsqu'on introduit dans le mélange à l'équilibre, une certaine quantité d'un réactif ou d'un produit, de la transformation, on favorise la réaction qui fait consommer le dit réactif ou le dit produit.

Exemple : Pour la transformation :



- Si on augmente $[N_2]$, en ajoutant dans le mélange une certaine quantité de N_2 , l'équilibre se déplace dans le sens de la disparition de N_2 : le sens (1).
- Si on augmente $[NH_3]$, en ajoutant dans le mélange une certaine quantité de NH_3 , l'équilibre se déplace dans le sens de la disparition de NH_3 : le sens (2).
- Si on diminue $[NH_3]$, en enlevant dans le mélange une certaine quantité de NH_3 , l'équilibre se déplace dans le sens d'apparition de NH_3 : le sens (1).

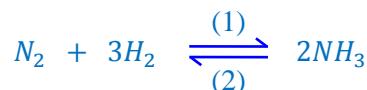
III.2. Effet de la température.

L'augmentation de la température favorise la réaction endothermique, c'est – à – dire celle qui absorbe de la chaleur, par contre la diminution de la température favorise la réaction exothermique, c'est – à – dire celle qui dégage de la chaleur.

III.3. Influence de la pression.

Lorsqu'un système chimique à l'équilibre contient des corps gazeux, l'augmentation de la pression favorise la réaction qui contribue à la diminution du nombre de molécule gazeuses et la diminution de la pression favorise l'augmentation du nombre de molécule gazeuse.

Exemple : Pour la transformation :



(1) : Diminution du nombre de molécules.

(2) : Augmentation du nombre de molécules.

- Si on augmente la pression, l'équilibre se déplace dans le sens (1).
- Si on diminue la pression, l'équilibre se déplace dans le sens (2).



Coefficient de dissociation.

Définition : Le coefficient ou degré de dissociation (ou d'ionisation) est le rapport entre la concentration de l'espèce dissociée et la concentration initiale.

$$\alpha = \frac{[\text{espèce dissociée}]}{[\text{espèce initiale}]}$$

Exemple : Pour la transformation chimique :



$$\alpha = \frac{[\text{NH}_4^+]}{[\text{NH}_3]_0}$$

Exercice d'application.

Exercice 1 : Les concentrations à l'équilibre pour le système réactionnel : $2\text{NO} + \text{O}_2 \rightleftharpoons 2\text{NO}_2$ sont égales à $[\text{NO}] = 0,03\text{mol/L}$, $[\text{O}_2] = 0,06\text{mol/L}$ et $[\text{NO}_2] = 0,04\text{mol/L}$.

1°) Trouve la constante d'équilibre et les concentrations initiales des réactifs NO et O_2 .

2°) On rappelle que la cinétique de cette réaction est suivie à partir de la variation de la concentration du monoxyde d'azote NO .

a) Exprime la vitesse de disparition du monoxyde d'azote NO en fonction de la variation de sa concentration C dans le temps.

b) Sachant que la loi d'action de masse indique que $V_{(\text{NO})} = k \cdot C^2$. Détermine la constante de vitesse k de cette réaction si le temps de demi-réaction est égal à 30 minutes.

Exercice 2 : A $200K$, la constante d'équilibre de la réaction d'équation suivante :

$\text{H}_2 + \text{CO}_2 \rightleftharpoons \text{H}_2\text{O} + \text{CO}$ vaut 4,4. Détermine la composition du système final à l'équilibre si on place simultanément 1mol d'hydrogène, 1mol de gaz carbonique et 1mol d'eau dans un ballon de 4 litres,

Corrigé 1 :

$[\text{NO}] = 0,03\text{mol/L}$, $[\text{O}_2] = 0,06\text{mol/L}$ et $[\text{NO}_2] = 0,04\text{mol/L}$.

1°) Constante d'équilibre et concentrations initiales

✓ Constante d'équilibre.

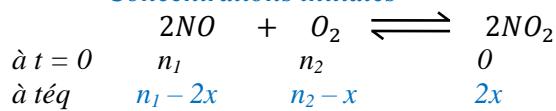
Elle est donnée par la formule :

$$K = \frac{[\text{NO}_2]^2}{[\text{O}_2][\text{NO}]^2}$$

$$\text{A.N : } K = \frac{(0,04)^2}{(0,06)(0,03)^2} = 29,63$$

$$K = 29,63$$

✓ Concentrations initiales



Dans le même volume à l'équilibre on a les relations suivantes :

$$[\text{NO}] = \frac{n_1 - 2x}{V} = \frac{n_1}{V} - 2 \frac{x}{V} \quad (1)$$

$$[\text{O}_2] = \frac{n_2 - x}{V} = \frac{n_2}{V} - \frac{x}{V} \quad (2)$$

$$[\text{NO}_2] = \frac{2x}{V} \Rightarrow \frac{x}{V} = \frac{[\text{NO}_2]}{2} \quad (3)$$

$$(3) \text{ dans (1) donne : } [\text{NO}] = \frac{n_1}{V} - 2 \frac{[\text{NO}_2]}{2}$$

$$[\text{NO}] = \frac{n_1}{V} - [\text{NO}_2] \Rightarrow C_1 = [\text{NO}] + [\text{NO}_2]$$

$$\text{A.N : } C_1 = 0,03 + 0,04 = 0,07$$

$$C_1 = 0,07\text{mol/L}$$

$$(3) \text{ dans (2) donne : } [\text{O}_2] = \frac{n_2}{V} - \frac{[\text{NO}_2]}{2}$$

$$\Rightarrow C_2 = [\text{O}_2] + \frac{[\text{NO}_2]}{2} = 0,06 + \frac{0,04}{2} = 0,08$$

$$C_2 = 0,08\text{mol/L}$$

2°) a) Vitesse de disparition de NO.

Elle est de la forme :

$$V_{(\text{NO})} = -\frac{1}{2} \frac{d[\text{NO}]}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{dC}{dt}$$



b) $V_{(NO)} = k \cdot C^2$; $t_{\frac{1}{2}} = 30\text{min}$.

Détermination de la constante de vitesse k de cette réaction.

D'après la loi d'action de masse on a :

$$V_{(NO)} = k \cdot C^2 \quad (1)$$

$$\text{D'autre part : } V_{(NO)} = -\frac{1}{2} \frac{dC}{dt} \quad (2)$$

En égalant les deux expressions on aura :

$$\begin{aligned} k \cdot C^2 &= -\frac{1}{2} \frac{dC}{dt} \Rightarrow kdt = -\frac{1}{2} \frac{dC}{C^2} \\ \Rightarrow k \int dt &= \frac{1}{2} \int -\frac{dC}{C^2} \Rightarrow kt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{C} + cte \\ \text{à } t = 0 : \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{C_0} + cte &\Rightarrow cte = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{C_0} \\ \text{ainsi : } kt &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{C} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{C_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{C_0} \right) \end{aligned}$$

$$k = \frac{1}{2t} \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{C_0} \right)$$

$$\text{Pour } t = t_{\frac{1}{2}} \Rightarrow C = \frac{C_0}{2}$$

$$\text{Alors : } k = \frac{1}{2t_{\frac{1}{2}}C_0} ; \text{ or } C_0 = [NO]_0 = C_1$$

D'où :

$$k = \frac{1}{2t_{\frac{1}{2}}C_1}$$

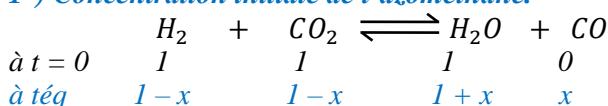
$$A.N : k = \frac{1}{2 \times 30 \times 0,07} = 2,38 \cdot 10^{-1}$$

$$k = 2,38 \cdot 10^{-1} \text{ L/mol.min}$$

Corrigé 2 :

$$\begin{aligned} n_{H_2} &= 1\text{ mol} ; n_{CO_2} = 1\text{ mol} ; n_{H_2O} = 1\text{ mol} \\ V &= 4\text{ L.} \end{aligned}$$

1*) Concentration initiale de l'azométhane.



A l'équilibre la constante de vitesse est :

$$K = \frac{[H_2O][CO]}{[H_2][CO_2]} = \frac{x(1+x)}{(1-x)(1-x)} = 4,4$$

$$\Rightarrow x^2 + x = 4,4(x^2 - 2x + 1)$$

$$\Rightarrow 3,4x^2 - 9,8x + 4,4 = 0$$

Soit le discriminant :

$$\Delta = (9,8)^2 - 4(3,4)(4,4) = 36,2 > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{9,8 - \sqrt{36,2}}{2 \times 3,4} = 0,55\text{ mol} \\ x_2 = \frac{9,8 + \sqrt{36,2}}{2 \times 3,4} = 2,32\text{ mol} \end{cases}$$

$x_2 = 2,32\text{ mol}$ est à rejeter car étant supérieur à la quantité initiale. On retient donc $x = 0,55\text{ mol}$.

D'où à l'équilibre on aura :

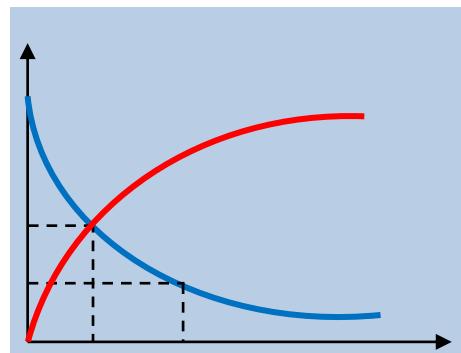
$$\begin{cases} n_{H_2} = 1 - x = 1 - 0,55 = 0,45\text{ mol} \\ n_{CO_2} = 1 - x = 1 - 0,55 = 0,45\text{ mol} \\ n_{CO} = x = 0,55\text{ mol} \\ n_{H_2O} = 1 + x = 1 + 0,55 = 1,55\text{ mol} \end{cases}$$



TRAVAUX DIRIGÉS IV

Conseils pratiques :

1. Vitesse et ordre d'une réaction chimique.
2. Temps de demi – réaction.
3. Facteurs cinétiques influençant une transformation chimique.
4. Notion d'équilibre chimique.
5. Transformation limitée, transformation totale.
6. Loi d'action de masse : constante d'équilibre d'une réaction chimique.
7. Loi générale du déplacement d'équilibre : loi de Chatelier.



L'ESSENTIEL DU COURS

I – Définitions des notions.

Définis les termes et expressions suivants : Cinétique chimique ; vitesse d'une réaction ; transformation équilibrée ; transformation totale ; coefficient de dissociation ; Temps de demi – réaction.

II – Questions à réponses construites.

Réponds aux questions suivantes :

- 1°) Cite les différents facteurs qui peuvent influencer la vitesse d'une réaction chimique.
- 2°) Quel est le rôle d'un catalyseur dans une réaction chimique ?
- 3°) Dresse un tableau récapitulatif liant le temps de demi réaction, la loi horaire et l'ordre d'une réaction.
- 4°) Enonce la loi de Chatelier.
- 5°) On considère la réaction chimique suivante : $N_2(g) + 3H_2(g) \rightleftharpoons 2NH_3(g)$.
 - a) Comment peux – tu modifier l'équilibre de cette réaction dans le sens (1)
 - b) Que se passerait – il si on augmente la pression totale du mélange ?
- 6°) Après avoir défini le temps de demi – réaction, établis le temps de demi – réaction d'ordre n.

III – Questions à alternative vrai ou faux.

Réponds par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

- 1°) La vitesse d'une réaction chimique dépend de la concentration initiale.
- 2°) La réaction $C(s) + O_2(g) \rightarrow CO_2(g)$ est une réaction équilibrée.
- 3°) Plus la concentration initiale d'un réactif est élevée, plus la vitesse de la réaction est importante, la réaction est rapide.
- 4°) Lorsqu'on élève la température d'une réaction, sa vitesse diminue.
- 5°) La réaction de désintégration radioactive est une réaction d'ordre 2.
- 6°) L'ordre d'une réaction est la somme des coefficients stœchiométriques des réactifs.
- 7°) La diminution de la pression modifie l'équilibre d'une réaction dans le sens de diminution du nombre de molécules gazeuses.
- 8°) L'augmentation de la pression modifie l'équilibre d'une réaction dans le sens de diminution du nombre de molécules gazeuses.
- 9°) Un catalyseur intervient dans une réaction chimique en augmentant son rendement.
- 10°) Une réaction chimique endothermique est une réaction qui dégage de la chaleur.

IV – Appariement.

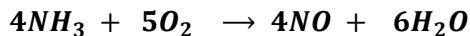
Relie un élément – question de la colonne A à un élément – réponse de la colonne B dans le tableau ci-dessous : *Exemple : a₉ = b₁₀*.



Colonne A		Colonne B	
a ₁	Réaction d'ordre 0	b ₁	$t_{1/2} = \frac{1}{KC_0}$
a ₂	Réaction d'ordre 1	b ₂	$K = \frac{[C]^c [D]^d}{[A]^a [B]^b}$
a ₃	Equation de vitesse intégrée	b ₃	$\frac{[Espèce dissociée]}{[Espèce initiale]}$
a ₄	Réaction d'ordre 2	b ₄	$v = K[A]^\alpha [B]^\beta$
a ₅	Constante d'équilibre	b ₅	$[A] = \frac{[A]_0}{2}$
a ₆	Temps de demi – réaction	b ₆	$t_{1/2} = \frac{C_0}{2K}$
a ₇	Coefficient de dissociation	b ₇	$[A] = [A]_0 e^{-Kt}$

RESOLUTION DES PROBLEMES

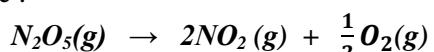
EXERCICE 1 : L'ammoniac peut s'oxyder selon la réaction suivante :



A l'instant t, l'ammoniac disparaît à la vitesse de $0,2 \text{ mol.L}^{-1}.\text{s}^{-1}$. Calcule :

- 1°) La vitesse de disparition de dioxygène.
- 2°) La vitesse de formation de l'eau.
- 3°) La vitesse de la réaction à cet instant.

EXERCICE 2 : On considère l'équation chimique suivante :



Calculer $[\text{NO}_2]$ et $[\text{O}_2]$ après 50 minutes, sachant qu'à cet instant $[\text{N}_2\text{O}_5] = 0,28\text{mol/L}$. On donne $[\text{N}_2\text{O}_5]_0 = 1,24\text{mol/L}$.

EXERCICE 3 : Soit l'équilibre chimique $\text{CO}_2(\text{g}) + \text{C(s)} \rightleftharpoons 2\text{CO(g)}$.

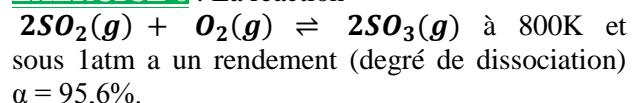
- a) Applique la loi d'action de masse pour exprimer K.
- b) Le volume restant constant, dans quel sens se déplace l'équilibre :
 - Si on introduit du CO.
 - Si on introduit du carbone
 - Si on enlève du CO_2 .

EXERCICE 4 : On administre par voie intraveineuse de la digitaline à un malade. L'élimination de ce médicament se fait suivant la loi du 1^{er} ordre. La demi – vie de ce dernier est de 7 jours. Calcule le temps nécessaire pour éliminer 80% de ce médicament.

EXERCICE 5 : On considère la réaction d'ordre 0 par rapport à A telle que $\text{A} \rightarrow \text{B}$ avec une

constante de vitesse $K = 0,00175\text{mol.l}^{-1}\text{s}^{-1}$. Sachant que la concentration initiale de A est $C_0 = 0,015\text{mol/L}$, calcule le temps nécessaire pour que 80% de A disparaîsse.

EXERCICE 6 : La réaction



- 1°) Ecris l'expression de la constante d'équilibre K.
- 2°) Calcule la concentration de SO_2 à l'équilibre sachant que la concentration initiale de SO_2 est 10^{-2}mol/L .

3°) Comment évolue l'équilibre si :

- On élève la température ?
- On élève la pression ?
- On diminue la température ?
- On ajoute le SO_3 ?

EXERCICE 7 : La réaction $\text{A} \rightarrow \text{B} + 2\text{C}$ est une réaction d'ordre 1 tel que $[A]_0 = 0,5\text{mol/L}$ et que le temps de demi – réaction est de 42s.

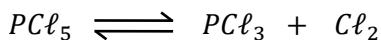
- 1°) Donne l'équation de vitesse intégrée de cette réaction.
 - 2°) Calcule la constante de vitesse K de la réaction.
 - 3°) Calcule la concentration du réactif après 3 minutes.
 - 4°) Quelle est la vitesse moyenne de disparition du réactif A entre 0 et 3 minutes ?
- Déduis – en la vitesse moyenne de formation du corps C.

EXERCICE 8 : On chauffe à 250°C une quantité de PCl_5 dans un récipient de 12L. A l'équilibre, on



trouve : 0,21mole de PCl_5 , 0,32mole de PCl_3 et 0,32mole de Cl_2 .

1°) Calcule la valeur de la constante d'équilibre K_C à 250°C de la réaction :



2°) Déduis – en K_p .

3°) Comment évolue l'équilibre si :

On élève la température ?

On élève la pression ?

On enlève une certaine quantité de Cl_2 ?

On ajoute le PCl_3 ?

EXERCICE 9 : La décomposition du peroxyde d'hydrogène, de formule H_2O_2 , conduit à la formation du dioxygène et de l'eau. La réaction a lieu à température constante et en présence d'un catalyseur. On suppose que le volume de la solution reste constant pendant la durée de la réaction. On considère une solution S de peroxyde d'hydrogène, de volume $V = 500mL$ et de concentration initiale $0,08mol.L^{-1}$. On mesure le volume de dioxygène formé toutes les 5min et on obtient le tableau suivant :

$t(min)$	0	5	10	15	20
$V(O_2)(mL)$	0	72	138	192	228
$V(H_2O_2)$					

$t(min)$	25	30	35	40
$V(O_2)(mL)$	252	270	288	300
$V(H_2O_2)$				

1°) Ecris l'équation – bilan de la réaction de décomposition du peroxyde d'hydrogène.

2°) a) Donne une relation liant la concentration du peroxyde d'hydrogène à l'instant t et le volume de dioxygène formé au même instant.

b) Complète la dernière ligne du tableau donné ci – dessus. Le volume molaire des gaz dans les conditions de l'expérience est $V_m = 24L.mol^{-1}$.

3°) Calcule la vitesse moyenne de disparition du peroxyde d'hydrogène entre les instants : $t = 15min$ et $t = 25min$.

4°) a) Définis le temps de demi réaction.

b) Etablis la relation liant la constante de vitesse K et le temps de demi – réaction T , sachant que la réaction est du premier ordre. Calcule K pour $T = 22min$.

EXERCICE 10 : A 100°C, une mole de pentan – 1ol est mélangée avec une mole d'acide A.

1°) Ecris l'équation – bilan, nomme – la, ainsi que le produit obtenu E.

2°) Trace la courbe de formation de E selon les valeurs consignées dans le tableau ci – dessous.

3°) Calcule la vitesse de formation de E à $t = 20 min$.

4°) Trace le graphe traduisant les variations de l'acide A en fonction du temps.

5°) Calcule la vitesse de disparition de A à $t = 30 min$.

$t(min)$	0	5	10	15	20
$n_E(mol)$	0	0,26	0,40	0,48	0,54

25	30	35	40	45	50
0,58	0,62	0,64	0,66	0,67	0,67

EXERCICE 11 : Une réaction de la forme :

$A + B \rightarrow C + D$ est du second ordre. Pour des concentrations initiales de $0,1mol/L$ de A et B, on remarque que 20% des produits initiaux ont disparu au bout de 30 minutes.

1°) Quelle est la valeur de la constante de vitesse de cette réaction ?

2°) Quel est le temps de demi – réaction ?

3°) Quel est ce même temps de demi – réaction si les concentrations initiales étaient de $0,01mol/L$.

EXERCICE 12 : Pour quelle molarité d'une solution d'acide acétique obtiendrait – on un coefficient de dissociation $\alpha = 0,02\%$, la valeur de la constante d'équilibre à 25°C étant $K_C = 1,8 \cdot 10^{-5}$.

EXERCICE 13 : La période radioactive ou demi – vie du polonium 210 est $T = 140j$

1°) Ecris la loi cinétique de la réaction nucléaire du polonium ^{210}Po sachant qu'elle est d'ordre 1.

2°) Détermine la constante de vitesse de la réaction de désintégration.

3°) Combien de temps faut – il pour que 70% de masse du polonium soit désintégrés.

EXERCICE 14 : La décomposition de N_2O_5 en solution dans le tétrachlorure de carbone est une réaction du premier ordre. On fait les mesures suivantes :

$t(s)$	0	4450
$[N_2O_5] (mol/L)$	$3 \cdot 10^{-2}$	$2,7 \cdot 10^{-2}$

1°) Calcule la constante de vitesse K.

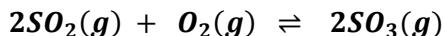
2°) Calcule le temps de demi – réaction $t_{1/2}$

3°) Calcule la constante de vitesse si l'on doublait la concentration initiale.



4°) Quel serait le temps de demi – réaction si l'on doublait la concentration initiale ?

EXERCICE 15 : La réaction de synthèse du trioxyde de soufre conduit à l'équilibre représenté par :



La réaction est exothermique dans le sens (1).

1°) Quels sont les différents facteurs susceptibles de modifier cet équilibre et dans quel sens agissent – ils ?

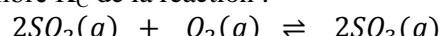
2°) Ecris la constante d'équilibre de ce système en fonction des pressions partielles des constituants.

EXERCICE 16 : 1°) On a mis 192g de *HI* dans un ballon de 1,5L. La réaction : $2HI \rightarrow H_2 + I_2$ est de premier ordre. La vitesse de cette réaction est égale à $0,05\text{mol/L}\cdot\text{min}$. Détermine la constante de vitesse de cette réaction ; sa concentration au bout de 10min et le temps de demi – réaction.

2°) La réaction $A \rightarrow B + C$ est du premier ordre. Le temps de demi – réaction est égal à 18min. Détermine la concentration du corps B au bout de 30min si la concentration initiale du corps A est égale à 1mol/L.

N.B : Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

EXERCICE 17 : Calcule à 900K la constante d'équilibre K_C de la réaction :



Sachant qu'à l'équilibre on a : $P_{SO_2} = 0,28\text{atm}$, $P_{O_2} = 0,14\text{atm}$ et $P_{SO_3} = 0,58\text{atm}$ (pressions partielles).

EXERCICE 18 : Dans un ballon de 5L, on réalise à la température ambiante de 17°C le mélange de trois gaz suivants : 28g de diazote ; 4g de dioxygène ; 5,5g de dioxyde de carbone. Calcule la pression totale du mélange dans le ballon, puis la pression partielle de chaque gaz.

On donne : $R = 0,082 \text{ atm.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

EXERCICE 19 : Deux moles d'un réactif gazeux A dans un ballon de 1,5L se décomposent selon l'équation bilan :



A l'équilibre, 20% de A reste à se décomposer.

1°) Calcule la constante d'équilibre de cette réaction.

2°) Cette réaction étant du premier ordre :

a) Exprime la concentration de A à l'instant t en fonction de sa concentration initiale et du temps.

- b) Au bout d'une heure, 40% du réactif A s'est décomposé, calcule la constante de vitesse de cette réaction.
 - c) Au bout de combien de temps, la moitié du réactif A s'est décomposé ?
- Déduis – en la concentration du réactif restant au bout de dix heures.

EXERCICE 20 : On a étudié la vitesse de la réaction de décomposition de l'azométhane $CH_3N_2CH_3(g)$ à la température de 300°C suivant la réaction :



On a obtenu les résultats suivants:

Expérience n°	1	2	3
$[CH_3N_2CH_3]_0$ (mol.L^{-1})	0,6004	0,913	1,701
$V_0(\text{mol.L}^{-1}.\text{s}^{-1})$	$2,42 \cdot 10^{-4}$	$3,64 \cdot 10^{-4}$	$6,80 \cdot 10^{-4}$

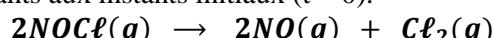
1°) Détermine l'ordre de la réaction ainsi que la constante de vitesse.

2°) Ecris l'équation de vitesse intégrée de cette réaction.

3°) En considérant l'expérience n°2, calcule le temps de demi – réaction.

4°) Calcule le temps qu'il faut pour que le réactif soit consommé à 75%.

EXERCICE 21 : La cinétique de la réaction ci – dessous a été étudiée et on a obtenu les résultats suivants aux instants initiaux ($t = 0$).



Experiences	$[NOCl]_0(\text{mol.L}^{-1})$	Vitesse initiale ($\text{mol.L}^{-1}.\text{s}^{-1}$)
1	0,25	$1,75 \cdot 10^{-6}$
2	0,42	$4,96 \cdot 10^{-6}$
3	0,65	$1,18 \cdot 10^{-6}$

1°) Détermine l'ordre de cette réaction et la constante de vitesse K correspondante.

2°) Pour l'expérience n°2 :

a) Ecris l'équation de vitesse.

b) Définis et calcule le temps de demi – réaction T .

c) Au bout de combien de temps t les quatre cinquième de $NOCl$ sont – ils décomposés.

EXERCICE 22 : Pour la réaction décrite suivante :



on a réalisé trois expériences :

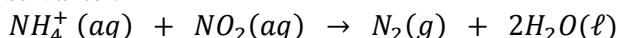


Expériences	$[SO_2Cl_2]$ (mol/L)	$V_0 \text{ mol.L}^{-1}\text{s}^{-1}$
1	0,74	$1,63 \cdot 10^{-5}$
2	1,25	$2,75 \cdot 10^{-5}$
3	1,86	$4,09 \cdot 10^{-5}$

1°) Détermine l'ordre de la réaction.

2°) Détermine la valeur de la constante de vitesse K.

EXERCICE 23 : Soit la réaction chimique suivante :



On a réalisé trois expériences et les résultats suivants ont été obtenus :

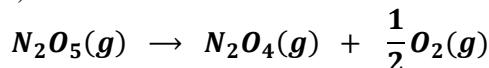
Expérience	$[NH_4^+]_0$ (mol/L)	$[NO_2]_0$ (mol/L)	V_0 (mol/L.s)
1	0,100	0,005	$1,35 \cdot 10^{-7}$
2	0,100	0,010	$2,70 \cdot 10^{-7}$
3	0,200	0,010	$5,40 \cdot 10^{-7}$

1°) Calcule les ordres partiels de cette réaction.

2°) Déduis – en l'ordre global et calcule la constante de vitesse K de cette réaction.

3°) Ecris la loi de vitesse pour cette réaction.

EXERCICE 24 : A $25^\circ C$, la décomposition du pentaoxyde d'azote de concentration initiale $C_0 = 0,1\text{mol/L}$ fournit les résultats suivants :

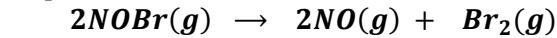


t (min)	0	20	30	40	50	60
$[O_2] 10^{-3}$ (mol/L)	0	9,2	13,8	18,4	23	27,8

1°) Montre qu'il s'agit d'une réaction d'ordre zéro.

2°) Calcule la constante de vitesse.

EXERCICE 25 : La réaction de décomposition de $NOBr$, à une température déterminée, selon l'équation :



fournit les résultats suivants :

t(s)	0	6,2	10,8
$[NOBr] \text{ mol.L}^{-1}$	0,0250	0,0198	0,0162

t(s)	14,7	20,0	24,5
$[NOBr] \text{ mol.L}^{-1}$	0,0144	0,0125	0,0112

1°) En se servant de ces résultats, détermine le temps de demi – réaction.

2°) Sachant que la réaction est d'ordre deux :

- a) Calcule la constante de vitesse de la réaction ;
- b) Ecris la loi de vitesse de cette réaction ;
- c) Détermine le temps nécessaire à la disparition de 80% du réactif puis calcule la vitesse de disparition du réactif à cette date.

EXERCICE 26 : La réaction d'isomérisation suivante : $CH_3NC(g) \rightarrow CH_3CN(g)$; obéit à une cinétique du premier ordre. A $t = 200^\circ C$, la concentration de CH_3NC restant, atteint 85% de sa valeur initiale après 247s.

1°) Détermine la constante de vitesse de cette réaction à cette température.

2°) A quel instant la concentration en CH_3NC aura – t – elle atteint 75% de sa valeur initiale ?

3°) Détermine le temps de demi – réaction.

EXERCICE 27 : La réaction $2A + B \rightarrow 3C$ est du deuxième ordre. La concentration initiale du corps A est égale à 3mol/L . Dans 2heures, $1,5\text{mol/L}$ du corps C sont formés. Trouve la constante de vitesse de cette réaction et le temps de demi – réaction.

EXERCICE 28 : La réaction de décomposition de l'iode d'hydrogène en dihydrogène et diiode est une réaction de 1^{er} ordre. La mesure du temps de demi – réaction a donné : $t_{1/2} = 10 \text{ minutes}$.

A la température de $600K$, dans un ballon de un litre, on introduit $1,5\text{mol}$ de l'iode d'hydrogène qu'on chauffe.

1°) Calcule la constante de vitesse de cette réaction.

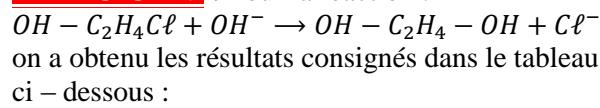
2°) Ecris l'équation de la réaction.

3°) Détermine la composition du milieu réactionnel à l'instant $t = 25\text{min}$.

4°) Déduis – en la vitesse de la réaction et la vitesse de disparition de HI à cette date.

5°) Calculer à $t = 25\text{min}$, la pression totale dans le ballon.

EXERCICE 29 : Pour la réaction :



Expérience	n°1	n°2	n°3
Vitesse en $\text{mol.L}^{-1}\text{s}^{-1}$	$2,27 \cdot 10^{-5}$	$5,67 \cdot 10^{-7}$	$5,68 \cdot 10^{-5}$
$[OH - C_2H_4Cl]_0$ (mol/L)	0,2	0,01	0,5
$[OH^-]_0$ (mol/L)	0,1	0,05	0,1



- 1°) Quels sont les ordres partiels par rapport à OH^- – $\text{C}_2\text{H}_4\text{Cl}$ et OH^- ?
- 2°) Déduis – en l'ordre global de cette réaction.
- 3°) Calcule la constante de vitesse.
- 4°) Pour l'expérience n°3, calcule pour les ions OH^- , le temps au bout duquel la moitié de ce réactif aura disparu.
- 5°) Pour cette même expérience, calcule le temps au bout duquel 70% du même réactif aura disparu.

EXERCICE 30 : On veut étudier la cinétique de la transformation chimique du Cl_2 avec les ions OH^- selon l'équation :



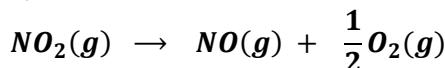
On a réalisé 5 expériences dont les mesures réalisées sont dans le tableau ci – après :

Expériences	1	2	3	4	5
$[\text{Cl}_2]_0$ (mol/L)	0,10	0,20	0,30	0,10	0,10
$[\text{OH}^-]_0$ (mol/L)	0,10	0,10	0,10	0,20	0,30
$V_0(\text{mol.L.s}^{-1})$	12	24	35	48	108

$[\text{Cl}_2]_0$, $[\text{OH}^-]_0$, V_0 sont respectivement les concentrations initiales et vitesse initiales de la réaction à l'instant $t = 0$. Calcule :

- 1°) Les ordres partiels par rapport aux réactifs et l'ordre global de la réaction.
- 2°) La constante de vitesse.
- 3°) La vitesse de la réaction lorsque la moitié du réactif Cl_2 a disparu dans la 5^{ème} expérience.

EXERCICE 31 : Le tableau suivant indique l'évolution de $[\text{NO}_2]$ en fonction du temps pour la réaction :



$t(\text{min})$	0	4,2	7,9
$[\text{NO}_2](\text{mol/L})$	0,0831	0,0666	0,0567

$t(\text{min})$	11,4	15
$[\text{NO}_2](\text{mol/L})$	0,0497	0,0441

- 1°) Montre que cette réaction est d'ordre 2 en mettant en graphique $\frac{1}{[\text{NO}_2]}$ en fonction du temps et détermine la valeur de la constante de vitesse.
- 2°) Détermine le temps de demi – vie de cette réaction.

- 3°) Calcule le temps nécessaire pour que la réaction soit complète à 90%.

EXERCICE 32 : On considère l'étude cinétique de la réaction $\text{NH}_4^+ + \text{NO}_2^- \rightarrow \text{N}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$.

Les deux réactifs ont la même concentration initiale notée C_0 . Le tableau suivant donne le temps de demi – réaction relatif à chaque concentration initiale.

$C_0(10^{-1}\text{mol.L}^{-1})$	1	2,5	5
$t(\text{min})$	625	250	125

- 1°) En calculant la constante de vitesse relative à chaque concentration, vérifie que la réaction est d'ordre 2.

2°) Partant d'une concentration initiale $C_0 = 5 \cdot 10^{-1}\text{mol.L}^{-1}$, calcule :

- La concentration de chaque réactif au bout d'un temps $t = 100\text{min}$.
- Le temps au bout duquel 80% des réactifs seront consommés. Quelle est la vitesse de la réaction à cet instant ?

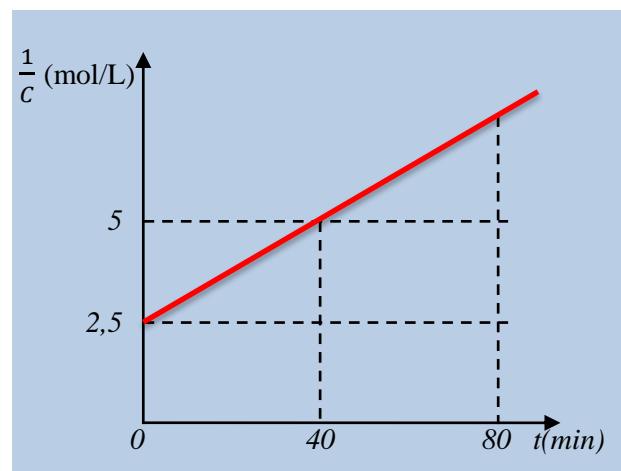
EXERCICE 33 : La courbe cinétique de la fonction $\frac{1}{C} = f(t)$ est une droite affine représentée par la figure ci – dessous où C représente la concentration du réactif à un instant t . En tenant compte de cette droite :

- 1°) Déduis – en la concentration initiale C_0 du réactif.

2°) Calcule la constante de vitesse K.

3°) Que représente le temps $t = 40\text{min}$?

4°) Quel est la concentration à l'instant $t = 60\text{min}$?



EXERCICE 34 : On étudie la saponification du formiate d'éthyle par la soude à 25°C. Les



concentrations initiales de la soude et de l'ester sont égales à 10^{-2} mol/L , les quantités en mol/L d'éthanol en fonction du temps t sont rapportées dans le tableau suivant :

$t(s)$	0	180	240	300	360
$[C_2H_5OH] \cdot 10^{-3}$ (mol/L)	0	2,6	3,17	3,66	4,11

- 1°) Ecris l'équation de la réaction.
- 2°) Complète le tableau en calculant à chaque instant la concentration du formiate d'éthyle.
- 3°) Montre que cette réaction est d'ordre 2 par rapport au formiate d'éthyle. Déduis – en le temps de demi – réaction.

EXERCICE 35 : Le temps de demi – réaction d'une réaction d'ordre n est donné par la relation :

$$t_{1/2} = \frac{A}{C_0^{n-1}}$$

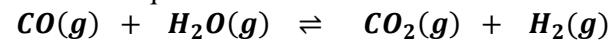
Où A est une constante et C_0 la concentration initiale du réactif.

1°) Au cours d'une réaction chimique d'équation $A \rightarrow B + C$, si la concentration initiale de A est de $6 \cdot 10^{-3} \text{ mol/L}$, le temps de demi – réaction est de $12,6 \text{ min}$. Si cette concentration initiale est de $2,1 \cdot 10^{-2} \text{ mol/L}$, le temps de demi – réaction est de $3,6 \text{ min}$. Détermine l'ordre de cette réaction.

Déduis – en la valeur de A et celle de la constante de vitesse K.

- 2°) On considère la concentration initiale $C_0 = 6 \cdot 10^{-3} \text{ mol/L}$.
 - a) Calcule la vitesse initiale de cette réaction.
 - b) Au bout de combien de temps 60% de A disparaissent ?

EXERCICE 36 : On étudie la réaction équilibrée endothermique suivante :



1°) Dans quel sens se déplace l'équilibre quand :

- a) On élève la température ;
- b) On augmente la pression.

2°) Exprime la constante d'équilibre K_P à une température T .

A $1000K$ ($727^\circ C$), $K_P = 0,9$, calcule la valeur des pressions partielles des divers constituants à l'équilibre sachant que la pression totale du mélange gazeux est de 1 atm et qu'initialement, il y avait une mole de CO et 2 moles de H_2O .



DOMAINE D'ETUDE II : REACTION CHIMIQUE

OG₂ : CARACTERISER LES REACTIONS D'ESTERIFICATION, DE SAPONIFICATION ET LES PRODUITS OBTENUS

7

LES REACTIONS D'ESTERIFICATION

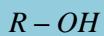
I. Rappels sur les composés organiques.

I.1. Les monoalcools saturés.

I.1.1. Formule brute et nomenclature.

a) Formule brute.

La formule brute d'un monoalcool non cyclique s'écrit :



Où *R* est un groupement alkyle C_nH_{2n+1} ;

n : nombre d'atome de carbone.

OH : désigne la fonction alcool.

Exemples :

- ✓ $n = 1$: $CH_3 - OH$
- ✓ $n = 2$: $C_2H_5 - OH$
- ✓ $n = 5$: $C_5H_{11} - OH$

b) Nomenclature.

Pour déterminer le nom d'un alcool $R - OH$, on utilise le nom de l'alcane $R - H$ correspondant et on substitue le « *e* » terminal par le suffixe « *ol* ». D'où le nom général des alcools est « *alcanol* ».

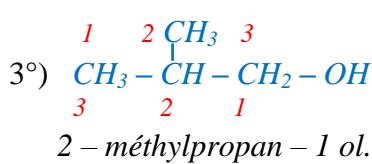
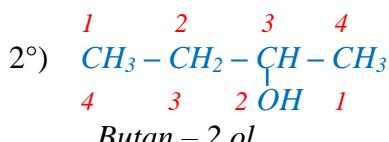
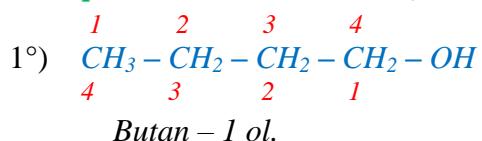
Ainsi on obtient pour :

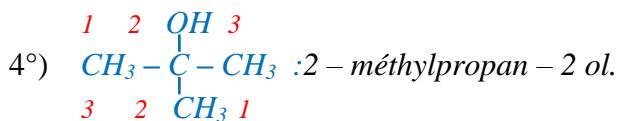
- ✓ $n = 1$: $CH_3 - OH$: Méthane*e* → Méthan*ol*
- ✓ $n = 2$: $C_2H_5 - OH$: Ethane*e* → Ethan*ol*
- ✓ $n = 3$: $C_3H_7 - OH$: Propane*e* → Propan*ol*
- ✓ $n = 4$: $C_4H_9 - OH$: Butane*e* → Butan*ol*
- ✓ $n = 5$: $C_5H_{11} - OH$: Pentane*e* → Pentan*ol*

Remarque : A partir de $n = 3$ atomes de carbone (C), on peut avoir des *isomères* (on appelle *isomères*, des composés ayant la même formule brute mais des formules développée et semi-développée différentes) par rapport à la chaîne carbonée ou la position du groupement fonctionnel OH. Ainsi, il serait hasardeux de nommer un composé organique à partir de sa formule brute.

- Le nom d'un composé organique, en général s'obtient à partir de sa formule semi-développée.
- Pour nommer un alcool ayant plus de deux atomes de carbone :
 - *on choisit la chaîne carbonée principale (la plus longue) ;*
 - *on détermine le nom de l'alcane correspondant au nombre d'atome de carbone ;*
 - *on indique le numéro du carbone fonctionnel et / ou le ou les numéros des carbones portant des ramifications.*
 - *on nomme les ramifications en les faisant précéder des numéros des carbones qui les portent. Ceux-ci précèdent le nom de l'alcool de la chaîne principale.*
- Le sens de nomenclature est celui dont la somme des numéros des carbones concernés est le plus petit possible, le carbone fonctionnel (carbone lié à la fonction alcool) ayant le plus petit numéro.

Exemple : Pour $n = 4$: $C_4H_9 - OH$





I.1.2. Les trois classes d'alcools.

Suivant la position du carbone fonctionnel dans un monoalcool, on distingue *trois classes ou familles d'alcools* de propriétés chimiques distinctes.

a) Les alcools primaires.

Pour les alcools primaires, le *carbone fonctionnel est lié à au plus un atome de carbone, ou la fonction alcool est en bout de chaîne*.

Leur formule générale est : $R - CH_2 - OH$

R : *groupement alkyle*.

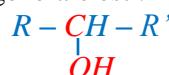
Exemples :

- ✓ $CH_3 - OH$: méthanol.
- ✓ $CH_3 - CH_2 - OH$: éthanol.
- ✓ $C_2H_5 - CH_2 - OH$: propan-1 ol.
- ✓ $CH_3 - \overset{CH_3}{CH} - CH_2 - OH$
2-méthylpropan-1 ol.

b) Les alcools secondaires.

Pour les alcools secondaires, le *carbone fonctionnel est lié à deux atomes de carbone*.

Leur formule générale est :



Où R et R' sont des groupements alkyles.

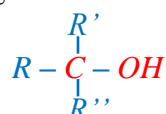
Exemples :

- ✓ $CH_3 - \overset{CH}{\underset{OH}{|}} - CH_3$: propan-2 ol.
- ✓ $CH_3 - CH_2 - \overset{CH}{\underset{OH}{|}} - CH_3$: butan-2 ol.
- ✓ $CH_3 - \overset{CH}{\underset{OH}{|}} - \overset{CH}{\underset{CH_3}{|}} - CH_3$
3-méthylbutan-2 ol.

c) Les alcools tertiaires.

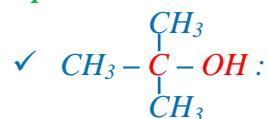
Pour les alcools tertiaires, le *carbone fonctionnel est lié à trois atomes de carbone*.

Leur formule générale est :

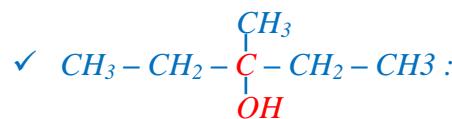


Où R , R' et R'' sont des groupements alkyles.

Exemples :



2-méthylpropan-2 ol.



3-méthylpentan-3 ol.

I.1.3. Caractères distinctifs des trois classes d'alcools.

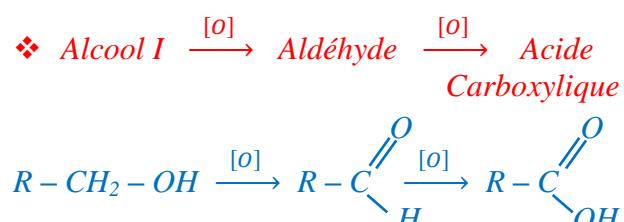
Il existe plusieurs caractères distinctifs des trois classes d'alcools.

a) Oxydation ménagée.

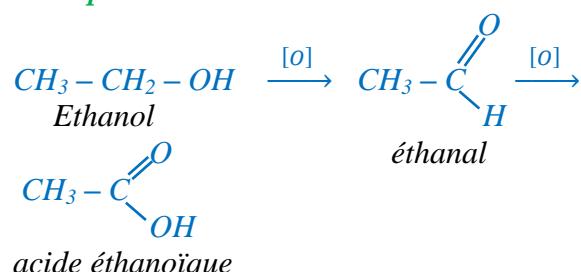
L'oxydation d'un alcool en solution aqueuse par des oxydants puissants, comme les ions permanganates MnO_4^- ou dichromate $Cr_2O_7^{2-}$ produit :

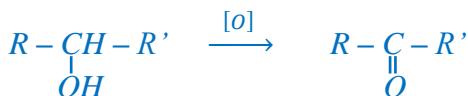
- ✓ Pour un alcool primaire, un aldéhyde puis un acide carboxylique.
- ✓ Pour un alcool secondaire, une cétone.
- ✓ Pour un alcool tertiaire, rien, car l'alcool tertiaire n'est pas oxydable par cette voie.

La différence existante entre les produits obtenus pour les trois classes d'alcool permet leur différenciation.

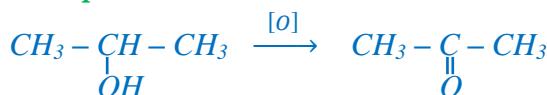


Exemple :

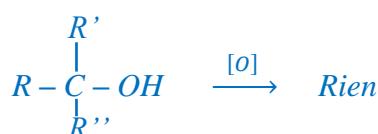




Exemple :



Propan - 2 ol propanone



b) Réactions d'estérification.

Par action d'un acide carboxylique sur un alcool, on obtient pour un *mélange équimolaire* (même quantité de matière initiale) à l'équilibre :

- ✓ 67% d'ester avec un alcool primaire ;
- ✓ 60% d'ester avec un alcool secondaire ;
- ✓ 5 à 10% d'ester avec un alcool tertiaire.

Remarque : Les composés obtenus par oxydation ménagée des alcools s'identifient par les tests à partir de :

- La *D.N.P.H* (Dinitrophényl – 2,4 hydrazine) qui donne un *test positif avec les aldéhydes et les cétones* ;
- La *liqueur de Féhling* qui donne un *test positif avec les aldéhydes mais négatif avec les cétones* ;
- Le *réactif de Tollens ou N.A.A* (Nitrate d'argent ammoniacal) qui donne un *test positif avec les aldéhydes mais négatif avec les cétones* ;
- Le *réactif de Schiff* qui donne un *test positif avec les aldéhydes mais négatif avec les cétones*.

Tableau récapitulatif

	Produits d'oxydation ménagée	
Tests	Aldéhyde	Cétone
<i>D.N.P.H</i>	+	+
<i>Liqueur de Féhling</i>	+	-
<i>N.A.A</i>	+	-
<i>Réactif de Schiff</i>	+	-

I.2. Les composés carbonylés.

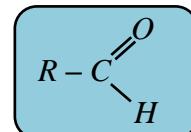
Parmi les composés carbonylés, on distingue :

- ✓ *Les aldéhydes* ;
- ✓ *Les cétones*.

I.2.1. Les aldéhydes.

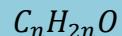
a) Formule générale.

Les aldéhydes ont pour formule générale :



Où *R* est un radical alkyle.

Leur formule brute est :

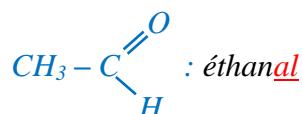


b) Nomenclature.

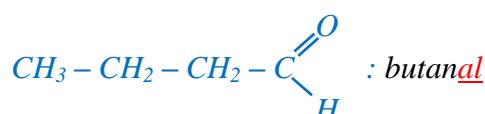
Comme les alcools, les aldéhydes aussi tirent leurs noms de ceux des alcanes correspondant au nombre d'atomes de carbone, en remplaçant le « *e* » terminal par « *al* ». D'où leur nom général « *alcanal* ».

Exemple :

- ✓ Pour $n = 2$: C_2H_4O



- ✓ Pour $n = 4$: C_4H_8O



N.B : Le groupement carbonyl est : $- C = O$

Remarque : La fonction aldéhyde ($- C = O$) se trouve toujours en bout de chaîne.

I.2.2. Les cétones.

a) Formule générale.

Les cétones ont pour formule générale :

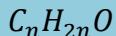


Où *R* et *R'* des radicaux alkyles.



$R \neq H$ et $R' \neq H$

Leur formule brute est :

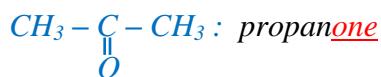


b) Nomenclature.

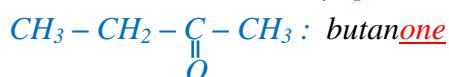
Comme les alcools, les cétones aussi tirent leurs noms de ceux des alcanes correspondant au nombre d'atomes de carbone, en remplaçant le « *e* » terminal par « *one* ». D'où leur nom général « *alcanone* ».

Exemple :

✓ Pour $n = 3$: C_3H_6O

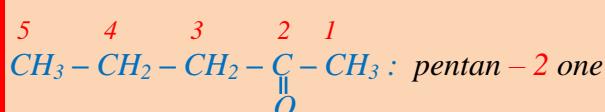
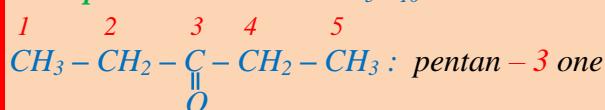


✓ Pour $n = 4$: C_4H_8O



Remarque : A partir de cinq (5) atomes de carbone, on distingue des isomères. Pour cela, il est indispensable de préciser le numéro du carbone fonctionnel.

Exemple : Pour $n = 5$: $C_5H_{10}O$



I.3. Les composés carboxylés.

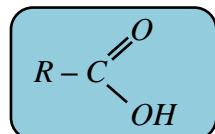
Parmi les composés carboxylés, on distingue:

- ✓ *Les acides carboxyliques* ;
- ✓ *Les esters*.

I.3.1. Les acides carboxyliques.

a) Formule générale.

Les acides carboxyliques ont pour formule générale :



Où R est un radical alkyle.

Leur formule brute est :



b) Nomenclature.

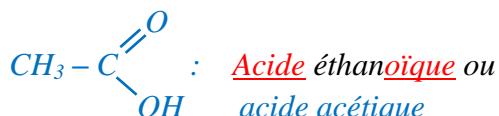
En substituant le « *e* » terminal des alcanes par « *oïque* » et en le faisant précédé par le préfixe « *acide* », on obtient le nom général des acides : « *acide alcanoïque* ».

Exemple :

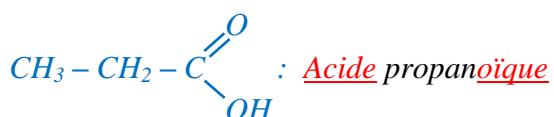
✓ Pour $n = 1$: CH_2O_2



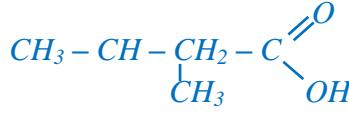
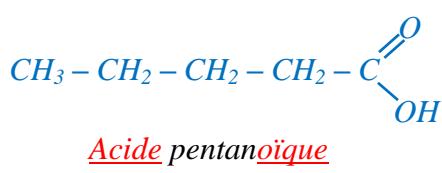
✓ Pour $n = 2$: $C_2H_4O_2$



✓ Pour $n = 3$: $C_3H_6O_2$



✓ Pour $n = 5$: $C_5H_{10}O_2$



Remarque :

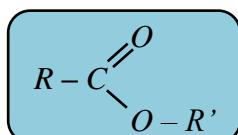
✓ La fonction acide est $-C = O$

✓ La fonction acide se trouve toujours en bout de chaîne.

I.3.2. Les esters.

a) Formule générale.

La formule générale des esters est :

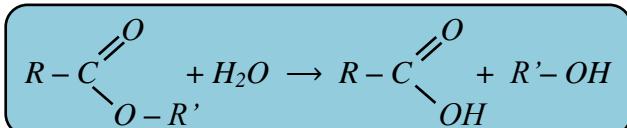


Où R' est un radical alkyle.

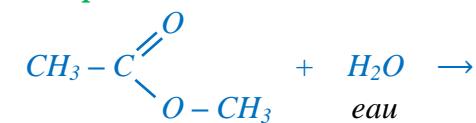
Avec $R' \neq H$ et $n \geq 2$

$R = H$ ou $R \neq H$

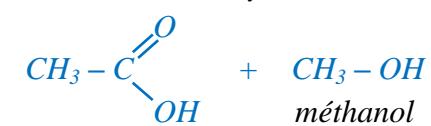




Exemple :



Ethanoate de méthyl



Acide éthanoïque

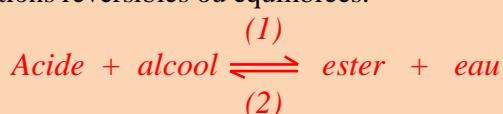
- A une date donnée t_1 , on sort un tube de l'étuve, puis *on le plonge dans l'eau glacée* pour arrêter la réaction ;
- Ensuite on *dose l'acide restant* par une solution de *soude* ($NaOH$) de concentration connue. Il faut verser un certain volume de base pour atteindre l'*équivalence* ;
- On répète l'opération avec d'autres tubes à essai. On détermine à chaque date la *quantité d'acide restant* ;
- Lorsque l'*état d'équilibre* est atteint, cette quantité ne varie plus, elle reste constante et égale $n_{ac} = 0,33$ mole ;
- On en déduit ainsi la quantité d'ester formée : $n_{est} = 0,67$ mole.

II.2.3. Caractéristiques de la réaction.

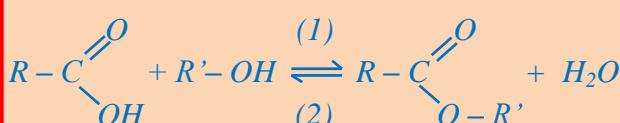
Comme la réaction d'estérification, la réaction d'hydrolyse est :

- *Lente* ;
- *Athermique* ;
- *Limitée* ;
- *Réversible*.

N.B. : L'estéification et l'hydrolyse sont deux réactions réversibles ou équilibrées.



Soit :



(1) : *Esterification* ;

(2) : *Hydrolyse*.

II.3. Composition du mélange à l'équilibre.

II.3.1. Etude expérimentale (Cas de l'estéification).

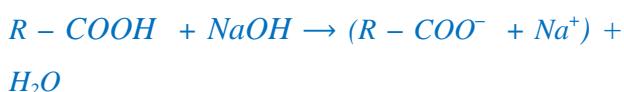
Considérons la *réaction entre une mole d'acide éthanoïque et une mole d'éthanol* ($n_0 = 1$) à laquelle on ajoute *une goutte d'acide sulfurique* qui permet d'accélérer la réaction.

- Réalisons ce mélange dans plusieurs tubes à essai bien sceller que l'on place dans une *étuve* ;

II.3.2. Dosage de l'acide restant.

➤ Equation de la réaction.

L'équation de dosage de l'acide restant dans le mélange est de la forme :



A l'équivalence :

$$\frac{1}{n_{ac}} = \frac{1}{n_b} \Rightarrow n_{ac} = n_b = C_b V_b$$

D'où:

$$n_{ac} = n_{al} = C_b V_b$$

La quantité d'acide restant est égale à celle d'alcool restant.

D'après la conservation de la matière, on a :

$$n_0 = n_{ac} + n_{est} \Rightarrow n_{est} = n_0 - n_{ac}$$

D'où :

$$n_{est} = n_{eau} = n_0 - C_b V_b$$

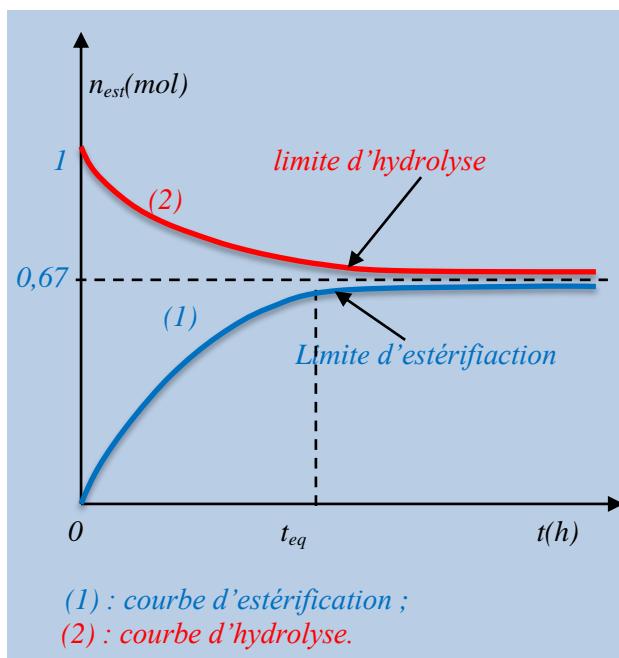
La quantité d'ester formée est égale à la quantité d'eau formée.

II.3.3. Courbes d'évolution des réactions d'estéification et d'hydrolyse.

Elles sont obtenues à partir de la quantité d'ester formée (estéification) ou disparue (hydrolyse) à chaque instant suivant la relation :

$$n_{est} = f(t)$$





II.4. Rendement des réactions d'estérification et d'hydrolyse.

II.4.1. Rendement d'estérification.

C'est le rapport entre la quantité d'ester formé à chaque instant et la quantité initiale d'acide ou d'alcool dans un mélange équimolaire (même quantité initiale d'acide et d'alcool).

On note :

$$r = \frac{n_{est}}{n_0} \times 100$$

Remarque : Le rendement de la réaction d'estérification dépend de la classe d'alcool ; à l'équilibre, on obtient :

- ✓ $r = 67\%$ pour un alcool *primaire* ;
- ✓ $r = 60\%$ pour un alcool *secondaire* ;
- ✓ $5\% \leq r \leq 10\%$ pour un alcool *tertiaire*.

N.B. : Lorsque le mélange est non équimolaire (quantités initiales différentes en acide et alcool), le rendement vaut le rapport entre la quantité d'ester et la quantité initiale du réactif en défaut.

$$r = \frac{n_{est}}{n_{0(def)}} \times 100$$

Avec $n_{0(def)}$: quantité initiale du réactif en défaut c'est – à – dire réactif ayant la plus petite quantité de matière.

Dans ce cas, on obtient des rendements supérieurs aux rendements des mélanges équimolaires ; on a alors :

- ✓ $r > 67\%$ pour un alcool *primaire* ;
- ✓ $r > 60\%$ pour un alcool *secondaire* ;
- ✓ $r > 10\%$ pour un alcool *tertiaire*.

II.4.2. Rendement d'hydrolyse.

C'est le rapport entre la quantité d'acide formé à chaque instant et la quantité initiale d'ester ou d'eau. On note :

$$r = \frac{n_{ac}}{n_0} \times 100$$

Remarques :

R₁ : Pour un mélange équimolaire, on obtient :

- ✓ $r = 33\%$ pour un ester donnant un alcool *primaire* ;
- ✓ $r = 40\%$ pour un ester donnant un alcool *secondaire* ;
- ✓ $90\% \leq r \leq 95\%$ pour un ester donnant un alcool *tertiaire*.

R₂ : Lorsque le mélange est non équimolaire n_0 correspond à la quantité initiale du réactif en défaut.

$$r = \frac{n_{ac}}{n_{0(def)}} \times 100$$

Ainsi on obtient des rendements tels que :

- ✓ $r > 33\%$ pour un ester donnant un alcool *primaire* ;
- ✓ $r > 40\%$ pour un ester donnant un alcool *secondaire* ;
- ✓ $r > 95\%$ pour un ester donnant un alcool *tertiaire*.

R₃ : Pour une classe d'alcool donnée, on a :

$$\ell_E + \ell_H = 100\%$$

ℓ_E : limite d'estérification ;

ℓ_H : limite d'hydrolyse.

N.B. : la limite d'une réaction est le rendement de la réaction à l'équilibre.



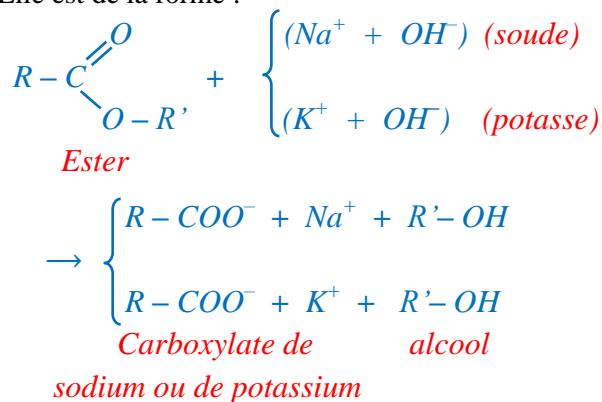
III. Réaction de saponification.

III.1. Définition : La réaction de saponification est une réaction entre un ester et une base forte et conduisant à l'obtention d'un alcool et d'un sel appelé savon.

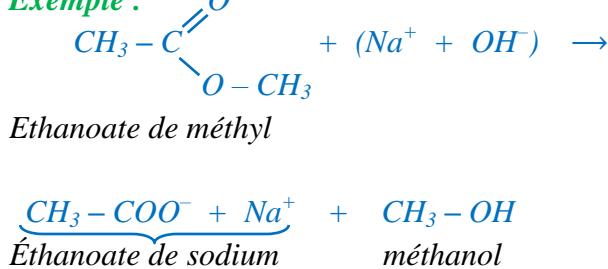
N.B : Pour réaliser la saponification, on utilise la *soude* ou *la potasse* comme base.

III.2. Equation – bilan général de la saponification.

Elle est de la forme :



Exemple :



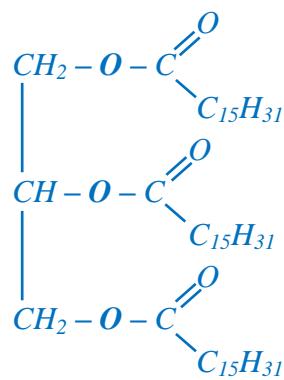
III.3. Caractéristiques de la réaction.

La réaction de saponification est une réaction :

- Rapide ;
- Totale : car il y a consommation totale d'au moins un réactif.

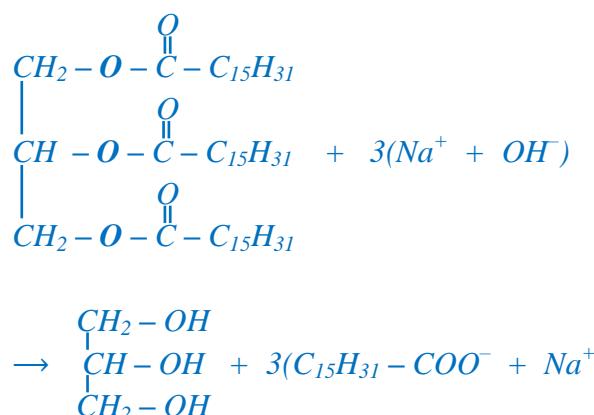
III.4. Obtention du glycérol.

Le glycérol ou propanetriol est fabriqué par saponification des huiles ou graisses. Parmi ces dernières, la *palmitine* a pour formule :

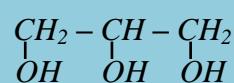


• Equation de la saponification.

L'équation de la saponification de la palmitine en présence de la soude est telle que :



On obtient le glycérol de formule :



Et un savon :



Exercice d'application.

On se propose de préparer l'acétate d'amyle de nom systématique éthanoate de pentyl – 1, ester à odeur de bonbon anglais. On laisse réagir dans une étuve, un mélange comprenant 18g d'acide éthanoïque et 26,4g de pentan – 1 ol.

- 1°) Ecris l'équation de la réaction d'estérification.
- 2°) Au bout de 30 heures, la composition du mélange n'évolue plus.



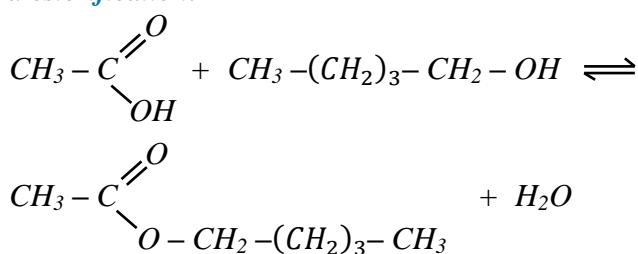
On dose l'acide restant par une solution de soude de molarité $C_b = 3\text{mol/L}$. Il faut 33cm^3 de soude pour atteindre l'équivalence.

- Etablis l'équation – bilan de la réaction acide – base ;
- Détermine la composition du mélange réactionnel à l'équilibre ;
- Calcule le rendement de la réaction d'estérification.

Corrigé.

$$m_{ac} = 18\text{g} ; m_{al} = 26,4\text{g} ;$$

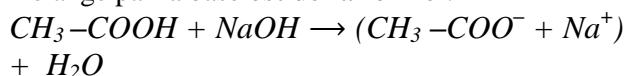
1*) Ecrivons l'équation de la réaction d'estérification.



$$2^*) C_b = 3\text{mol/L} ; V_b = 33\text{cm}^3$$

a) Etablissons l'équation – bilan de la réaction acide – base.

L'équation du dosage de l'acide restant dans le mélange par la base est de la forme :



b) Déterminons la composition du mélange réactionnel à l'équilibre.

➤ Composition du mélange initial.

$$n_{0ac} = \frac{m_{ac}}{M_{ac}} = \frac{18}{60} = 0,3 \Rightarrow n_{0ac} = 0,3\text{mol}$$

$$n_{0al} = \frac{m_{al}}{M_{al}} = \frac{26,4}{88} = 0,3 \Rightarrow n_{0al} = 0,3\text{mol}$$

$n_{0ac} = n_{0al} = n_0 = 0,3\text{mol}$, le mélange initial est équimolaire.

➤ Quantité d'acide et d'alcool restant.

D'après l'équation de la réaction de dosage de l'acide on a à l'équivalence :

$$\frac{1}{n_{ac}} = \frac{1}{n_b} \Rightarrow n_{ac} = n_b = C_b V_b$$

D'où:

$$n_{ac} = n_{al} = C_b V_b$$

$$A.N: n_{ac} = 3 \times 33 \cdot 10^{-3} = 0,099$$

$$\Rightarrow n_{ac} = n_{al} = 0,099\text{mol}$$

➤ Quantité d'ester et d'eau formés.

D'après la conservation de la matière, on a :

$$n_0 = n_{ac} + n_{est} \Rightarrow n_{est} = n_0 - n_{ac}$$

D'où :

$$n_{est} = n_0 - C_b V_b$$

$$A.N: n_{est} = 0,3 - 3 \times 33 \cdot 10^{-3} = 0,201$$

$$\Rightarrow n_{est} = n_{eau} = 0,201\text{mol}$$

D'où la composition du mélange à l'équilibre est :

$$\begin{aligned} n_{ac} &= n_{al} = 0,099\text{mol} \\ n_{est} &= n_{eau} = 0,201\text{mol} \end{aligned}$$

c) Calculons le rendement de la réaction d'estérification.

Le rendement de la réaction est tel que :

$$r = \frac{n_{est}}{n_0} \times 100$$

$$A.N: r = \frac{0,201}{0,3} \times 100 = 67$$

D'où :

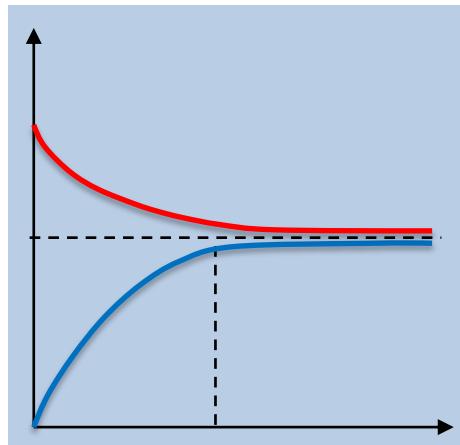
$$r = 67\%$$



TRAVAUX DIRIGÉS V

Conseils pratiques :

1. Formules semi – développées et nomenclature des composés organiques (alcools, acides, ester ...).
2. Réaction d'estérification et d'hydrolyse : composition à l'équilibre.
3. Rendement d'estérification et d'hydrolyse.
4. Réaction de saponification (équation générale et caractéristiques)



L'ESSENTIEL DU COURS

I – Définitions des notions.

Définis les termes et expressions suivants : Réaction d'estérification ; réaction d'hydrolyse ; réaction de saponification.

2°) Après avoir défini les composés suivants, donne un exemple pour chacun d'eux : Composé organique ; Composé carbonylé ; Composé carboxylé ; Isomères.

II – Questions à réponses construites.

Réponds aux questions suivantes :

- 1°) Peut – on nommer un composé organique à partir de sa formule brute ? Pourquoi ?
- 2°) Combien de classes d'alcool distingue t – on ? Cite – les et donne deux exemples pour chaque classe.
- 3°) Comment distinguer les trois classes d'alcool ?
- 4°) Quels composés obtient – on par oxydation ménagée d'un alcool primaire et d'un alcool secondaire ? Cite les différents tests que l'on utilise pour distinguer les composés obtenus par oxydation ménagée des alcools primaire et secondaire. Quels résultats obtient – on ?
- 5°) Cite les caractéristiques d'une réaction d'estérification.
- 6°) Quelle différence fais – tu entre le rendement et la limite d'estérification ?

III – Questions à alternative vrai ou faux.

Réponds par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

- 1°) La formule brute d'un alcool, quelle que soit sa classe, s'écrit : $C_nH_{2n+1}O$.
- 2°) La réaction d'estérification est une réaction totale.
- 3°) Le rendement d'une réaction d'estérification d'un mélange non équimolaire est inférieur à celui d'un mélange équimolaire.
- 4°) La limite d'estérification est le rendement à l'équilibre.
- 5°) Le rendement d'estérification d'un alcool secondaire est deux fois supérieur à celui d'un alcool primaire, pour un mélange équimolaire.
- 6°) La réaction d'hydrolyse est la réaction inverse de celle d'estérification.
- 7°) L'oxydation d'un alcool secondaire produit une cétone, puis un acide carboxylique.
- 8°) La dinitro - 2,4 phénylhydrazine ne réagit qu'avec les cétones.
- 9°) Les aldéhydes réduisent la liqueur de Fehling.
- 10°) La réaction d'estérification est une réaction exothermique.

IV – Appariement.

Relie un élément – question de la colonne A à un élément – réponse de la colonne B dans le tableau ci-dessous : Exemple : $a_{11} = b_{13}$.



Colonne A		Colonne B	
a ₁	Alcool primaire	b ₁	Acide + Alcool
a ₂	Rendement d'estérification d'un alcool secondaire.	b ₂	$R - \overset{\text{O}}{\underset{\parallel}{\text{C}}} - R'$
a ₃	Mélange équimolaire	b ₃	$R - \overset{\text{O}}{\underset{\parallel}{\text{C}}} - OH$
a ₄	Oxydation ménagée d'un alcool secondaire	b ₄	$r = 60\%$
a ₅	Limite d'estérification	b ₅	$r = 67\%$
a ₆	Acide carboxylique	b ₆	$n_{\text{ac}} = n_{\text{al}}$
a ₇	Saponification	b ₇	Alcool secondaire
a ₈	Ethanoate d'éthyl	b ₈	Rendement d'estérification à l'équilibre
a ₉	Test positif avec la DNPH mais négatif avec le réactif de Schiff.	b ₉	$\begin{array}{c} \text{O} \\ \\ \text{CH}_3 - \text{C} - \text{O} - \text{CH}_2 - \text{CH}_3 \end{array}$
a ₁₀	Estérification	b ₁₀	Ester + base

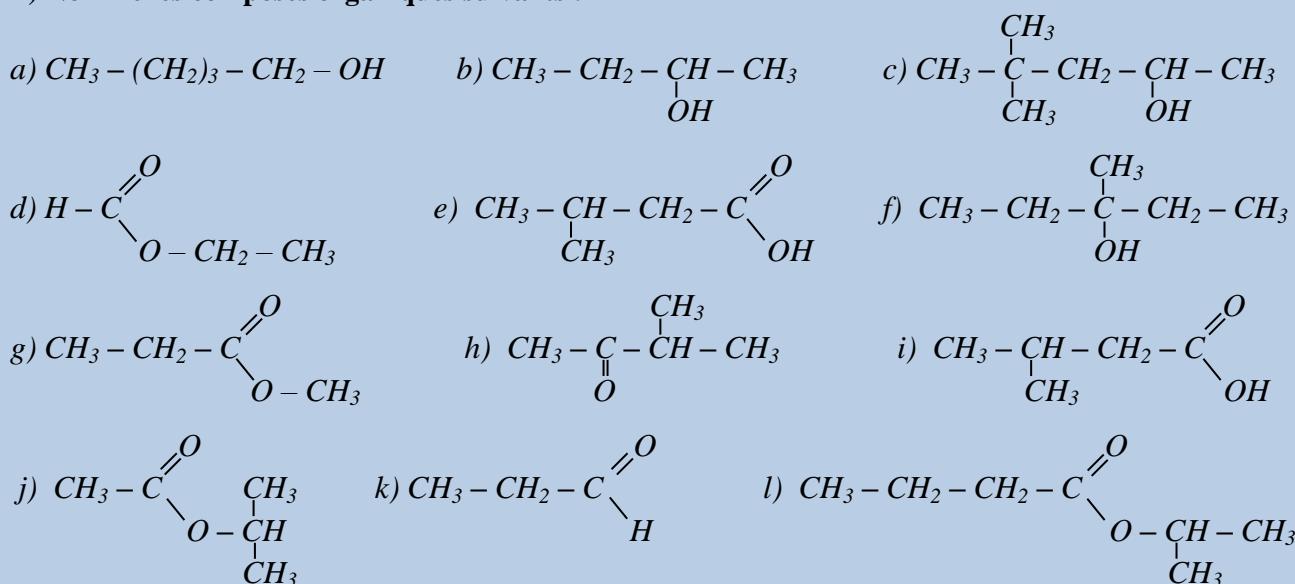
V – Formules semi – développée et nomenclature des isomères.

Ecris toutes les formules semi – développées possibles des composés organiques suivants puis les nommer :

- Alcool : $C_4H_{10}O$; $C_6H_{14}O$; précise leurs classes.
- Acide : $C_4H_8O_2$; $C_5H_{10}O_2$.
- Ester : $C_4H_8O_2$; $C_5H_{10}O_2$.

VI – Nomenclature et formules semi – développées des composés organiques.**1°) Ecris les formules semi – développées des composés dont les noms suivent :**

- | | |
|------------------------------------|----------------------------------|
| a) Butan – 1 ol | f) Ethanoate de méthyléthyl |
| b) 3 – méthylpentan – 2 ol | g) Propanoate d'isobutyl |
| c) 2,3 – diméthylpentan – 3 ol | h) Méthanoate de propyl – 1 |
| d) Acide butanoïque | i) Pentanoate d'éthyl |
| e) Acide 2,3 – diméthylpentanoïque | j) 2,2,3 – triméthylhexan – 3 ol |

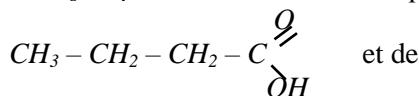
2°) Nomme les composés organiques suivants :

RESOLUTION DES PROBLEMES

EXERCICE 1 : Les esters sont des composés organiques, souvent à l'origine de l'arôme naturel des fruits. A côté de leur production naturelle, ils sont aussi synthétisés pour satisfaire les besoins de l'industrie agroalimentaire, de la parfumerie et d'autres secteurs industriels.

Le butanoate d'éthyle est par exemple, un ester à l'odeur d'ananas, l'éthanoate de propyl rappelle l'odeur de poire...

Cet exercice consiste à synthétiser le butanoate d'éthyl à partir de l'acide butanoïque de formule



l'éthanol ($CH_3 - CH_2 - OH$).

Dans un récipient, on réalise un mélange de 1,76g d'acide butanoïque et 0,92g d'éthanol. On ferme ce récipient et on chauffe à reflux.

1°) Ecris l'équation bilan de la réaction qui se produit.

2°) Montre que ce mélange est équimolaire.

3°) Après un temps suffisant, on arrête le chauffage et on refroidit le mélange. On prélève 2/5 de ce mélange et on dose l'acide présent par une solution de soude de concentration $C_b = 0,15 mol.L^{-1}$. Il faut 17,6mL pour atteindre l'équivalence.

- a) Ecris l'équation de la réaction de dosage ;
- b) Trouve la quantité d'acide restant dans le mélange total à l'équilibre ;
- c) Calcule le rendement de la réaction.

On donne les masses atomiques molaires en $g.mol^{-1}$: C : 12 ; H : 1 ; O : 16.

EXERCICE 2 : Un composé organique A de formule moléculaire $C_nH_{2n}O_n$ contient en masse 43,25% d'oxygène.

1°) Calcule la masse molaire moléculaire de ce composé.

2°) Etablis la formule brute puis la formule semi-développée de A sachant que A est un acide.

3°) On réalise un mélange constitué de 3,7g de A et 2,3g d'éthanol. Ce mélange est scellé puis chauffé.

- a) Ecris l'équation – bilan de la réaction qui a lieu et donne ses caractéristiques essentielles ;
- b) Détermine les quantités initiales des réactifs et précise la nature du mélange ;
- c) Donne la composition (molaire) du mélange à l'équilibre.

EXERCICE 3 : A désigne un acide carboxylique à chaîne saturée.

1°) Si l'on désigne par n le nombre d'atomes de carbone contenus dans le radical R fixé au groupement carboxyle, exprime en fonction de n , la formule générale de cet acide.

2°) B est un alcool de formule brute CH_4O . Précise sa formule développée possible, sa classe et son nom.

3°) a) L'acide A est estérifié par l'alcool B. A partir de la formule de l'acide A (déterminée en 1°), écris l'équation de la réaction.

b) Sachant que la masse molaire de l'ester obtenu est 88g/mol, quels sont la formule et le nom de A ?

EXERCICE 4 : Le transfert d'informations par signaux chimiques entre individus d'espèces différentes ou de même espèce, est courant chez les êtres vivants. Une phéromone est une substance (ou un mélange de substances) qui, après avoir été sécrétée en quantité très faible à l'extérieur par un individu (émetteur) est perçue par un individu de même espèce (récepteur) chez lequel elle provoque une réaction comportementale spécifique, voire une modification physiologique.

1°) On étudie la phéromone d'alarme de l'abeille de formule brute $C_7H_{14}O_2$ appelée éthanoate de 3 – méthylbutyl. Elle peut être synthétisée à partir de l'acide éthanoïque (CH_3COOH) et d'un alcool A.

- a) Ecris l'équation de la réaction associée à la transformation chimique de synthèse de la phéromone à partir de l'acide éthanoïque et de l'alcool A ;
- b) Donne la formule semi – développée et le nom de l'alcool A ;
- c) Comment appelle – t – on cette réaction chimique ? Précise ses caractéristiques essentielles.

2°) La même transformation est réalisée en présence d'acide sulfurique. Les affirmations suivantes qui décrivent le rôle de l'acide sulfurique sont – elles vraies ou fausses ? On ne demande pas de justification.

- ❖ **Affirmation 1 :** L'acide sulfurique est une espèce chimique qui modifie l'état d'équilibre du système.
- ❖ **Affirmation 2 :** L'acide sulfurique permet d'atteindre un rendement plus élevé.
- ❖ **Affirmation 3 :** L'acide sulfurique augmente la vitesse de la réaction sans apparaître dans l'équation de la réaction.



3°) On réalise un mélange de 12g d'acide éthanoïque et de 44g d'alcool A. A l'équilibre on obtient 22,95g de phéromone. Donne la composition du mélange à l'équilibre puis déduis – en le rendement de la réaction d'estérification. On donne en $g \cdot mol^{-1}$ les masses molaires atomiques : C = 12 ; C = 16 ; H = 1.

EXERCICE 5 : On introduit dans un ballon 14,8g de butan – 2 ol avec m grammes d'acide éthanoïque. On chauffe le mélange à reflux pendant 2 heures. Après refroidissement du mélange on le dose par une solution d'hydroxyde de sodium de concentration molaire 5mol/L en présence de la phénolphthaléine. Il faut 16mL de NaOH pour faire virer l'indicateur coloré.

1°) Calcule m pour que le mélange soit équimolaire.
2°) Ecris l'équation de la réaction et nomme l'ester formé.

3°) Donne la composition du mélange à l'équilibre et déduis – en la limite de la réaction.

4°) Calcule la constante d'équilibre de la réaction relative aux concentrations molaires.

EXERCICE 6 : Un ester contient 36,4% en masse d'oxygène.

1°) Trouve les formules semi – développées possibles et les noms correspondants.
2°) Une masse $m = 13,2g$ de cet ester est saponifié par une solution de NaOH. On obtient une masse $m = 9,0g$ d'un alcool A et un corps B.

- Donne la formule de cet alcool.
- Peut – on identifier l'alcool et l'ester ?

3°) On fait subir à cet alcool, une oxydation ménagée ; on obtient un corps C carbonylé qui est sans action sur la liqueur de Fehling. Identifie l'alcool et l'ester.

EXERCICE 7 : On réalise un mélange équimolaire d'acide pentanoïque et du propanol – 2 ; à l'équilibre on recueille 2,16g d'eau.

1°) Ecris l'équation de la réaction et donne le nom de l'ester.
2°) En admettant que le rendement de la réaction soit 60%.

- Détermine la composition du mélange à l'équilibre.
- Quelle était la masse du mélange initial ?

3°) Pour augmenter le rendement de cette réaction, on mélange 51g d'acide pentanoïque avec la même quantité initiale de propanol – 2. L'équilibre est atteint au bout de 8 heures. On prélève alors la moitié du mélange et on dose l'acide restant par une solution de soude à 2 mol/L, il faut verser 92cm³ de

cette solution de soude. Calcule le nouveau rendement.

EXERCICE 8 : En dissolvant 1g d'ester dans 100g d'eau, on constate que la température de congélation commençante s'abaisse de 0,21°C.

- Donne :
 - La masse molaire moléculaire de l'ester.
 - La formule brute de l'ester sachant qu'elle est du type $C_nH_{2n}O_2$.
 - Les formules semi – développées possibles.

2°) On réalise un mélange équimolaire de cet ester avec 0,18g d'eau à 100°C. Quand l'équivalence est atteinte, on dose l'acide formé. Il faut 40cm³ de soude décimolaire pour atteindre l'équivalence.

- Ecris les équations :
 - De l'hydrolyse de l'ester ;
 - Du dosage de l'acide.
- Donne la composition du mélange à l'équilibre.
- Calcule le rendement de l'hydrolyse. Déduis – en la formule semi – développée et le nom de l'ester.

On donne : $K = 1850$.

EXERCICE 9 : On réalise un mélange de 12g d'acide éthanoïque avec 14,8g d'un alcool A saturé non cyclique. Le corps organique B obtenu contient 62% en masse de carbone.

L'oxydation ménagée de A conduit à un corps C qui est sans action sur le réactif de Schiff, alors qu'il réagit avec la DNPH.

- Montre que la formule de B peut s'écrire $C_nH_{2n}O_2$.
- Calcule n .
- Détermine respectivement les formules semi – développées et les noms de A et B.
- a) Vérifie que le mélange initial est équimolaire.
b) Calcule approximativement la masse formée à l'équilibre.

EXERCICE 10 : Un ester a pour formule moléculaire brute : $C_4H_8O_2$.

1°) Ecris les formules semi – développées possibles, précise les noms de l'acide et de l'alcool correspondant.

2°) On fait agir 1,8g d'eau sur cet ester, lorsque l'équilibre chimique est atteint, on constate que 5,28g n'ont pas été hydrolysé.

- Quelle est alors, parmi les formules semi – développées écrites à la question 1°) celle qui correspond à l'ester utilisé ?
- Précise les formules semi – développées des corps présents à l'équilibre.



EXERCICE 11 : 1°) Une solution de 1,4g d'un alcool saturé A dans 100g de benzène n'est pas électrolysable. Sa température de congélation commençante est de 4,42°C. Détermine la masse molaire approchée et la formule moléculaire de l'alcool.

2°) On réalise 2,33g d'un mélange équimolaire de A et d'acide éthanoïque à 100°C. L'équilibre étant atteint, on dose l'acide restant dans la moitié du mélange final par une solution de soude à 0,5mol/L. Il faut verser 16,5mL de soude pour atteindre l'équivalence. Détermine :

- La composition du mélange initial ;
- La composition du mélange final ;
- Le rendement de cette opération. Déduis – en l'alcool utilisé.

On donne : Température de congélation du benzène : 5,5°C ;

Constante cryométrique du benzène : 5700.

EXERCICE 12 : L'oxydation ménagée d'un alcool A donne un monoacide carboxylique B. L'action de l'alcool A sur le monoacide donne un ester dont l'analyse élémentaire de 0,66g donne 1,32g de dioxyde de carbone et 0,54g d'eau. D'autre part, la dissolution de 2g de cet ester dans 100g d'eau abaisse le point de congélation de 0,42°C.

1°) Détermine :

- La formule de l'ester ;
- Les formules semi – développées possibles.

2°) La saponification de l'ester donne l'éthanoate de sodium. Retrouve les formules de A et B.

On donne $K_{\text{eau}} = 1850$ (constante cryométrique de l'eau).

EXERCICE 13 : Un composé organique A, a une densité de vapeur de 1,56. L'abaissement cryométrique d'une solution de 1g de A dans 100g d'eau est 0,45°C. Sachant que l'abaissement cryométrique des substances de 2,5g d'un corps A' dans 100g d'eau est 0,44°C. Détermine la masse molaire moléculaire de A'.

1°) A' est un ester dont l'hydrolyse donne l'acide éthanoïque et un mono alcool à chaîne saturée et ramifiée. Détermine la formule moléculaire de l'ester et celle de l'alcool.

2°) Quelles sont les formules semi – développées possibles de cet alcool. Sachant que cet alcool chauffé avec du permanganate de potassium en présence de l'acide sulfurique ne rougit pas le papier imbibé du réactif de Schiff, aussi en présence de D.N.P.H rien ne se produit.

Donne la formule exacte de cet alcool.

EXERCICE 14 : Un ester $C_nH_{2n}O_2$ contient 36,36% en masse d'oxygène.

1°) Détermine sa formule brute.

2°) Ecris les formules semi – développées possibles de cet ester ainsi que le nom officiel de chaque isomère.

3°) On réalise un mélange équimolaire de cet ester avec 0,18g d'eau à 100°C. Quand l'équilibre est atteint, on dose l'acide formé par 40mL de soude ($NaOH$) de concentration molaire 0,1mol.L⁻¹.

- Trouve le rendement d'hydrolyse ;
- Identifie l'ester parmi les isomères précédents.
- Ecris l'équation – bilan de la réaction d'hydrolyse et nomme les produits formés.

EXERCICE 15 : L'ester E de masse molaire 102g.mol⁻¹ résulte de l'action de l'éthanol sur un acide carboxylique A.

1°) Ecris la formule brute de cet ester.

2°) On hydrolyse 5,1g de propanoate d'éthyle, isomère de E, le mélange étant équimolaire ;

- Ecris l'équation – bilan de la réaction d'hydrolyse ;
- Au bout d'un temps suffisamment long ; on dose l'acide formé par une solution d'hydroxyde de sodium de concentration C = 1mol/L. Il faut verser V = 16,8mL de la solution basique pour obtenir l'équivalence. Calcule la limite de l'hydrolyse et conclus.

3°) On fait réagir 5,1g de l'ester E avec une solution concentrée et chaude d'hydroxyde de sodium, pendant un temps suffisant pour obtenir la quantité maximale de carboxylate de sodium.

- Nomme cette réaction et écris l'équation – bilan ;
- Quelle masse minimale d'hydroxyde de sodium doit – on utiliser ?

On donne : H : 1 ; C : 12 ; O : 16 ; Na : 23 en g.mol⁻¹.

EXERCICE 16 : 1°) On réalise une réaction d'estérification avec 12g d'acide éthanoïque et 12g de propan – 2 ol, en présence de quelques gouttes d'acide sulfurique.

- Ecris l'équation de la réaction ;
- Quel est le rôle de l'acide sulfurique ?
- Détermine la composition du mélange à l'équilibre ;
- Montre que la constante d'équilibre K est égale à 2,25.

2°) On reprend l'expérience en utilisant cette fois – ci 12g d'acide éthanoïque et 36g de propan – 2 ol. On désigne par x la quantité de matière d'ester formé à l'équilibre.



- Exprime toutes les quantités de matières à l'équilibre en fonction de x ;
- Exprime la constante d'équilibre K en fonction de x ;
- Déterminer x en supposant que la valeur de K reste égale à 2,25 ;
- Déduis – en la composition du mélange à l'équilibre.

EXERCICE 17 : Un ester A a pour formule

$\text{R}-\overset{\text{O}}{\underset{\text{C}}{\diagup}}-\text{R}'$, où R et R' sont des radicaux alkyles. La masse molaire de cet ester A est $M = 116 \text{ g/mol}$. Par hydrolyse de cet ester on obtient deux composés B et C.

1°) Ecris l'équation chimique traduisant la réaction d'hydrolyse.

2°) Le composé B obtenu est un acide carboxylique. On en prélève une masse $m = 1,5 \text{ g}$ que l'on dilue dans l'eau pure. La solution obtenue est dosée par une solution de soude à 2 mol/L . L'équivalence a lieu lorsqu'on a versé $V = 12,5 \text{ cm}^3$ de la solution d'hydroxyde de sodium.

- Quelle est la masse molaire du composé B ?
- Donne sa formule semi – développée et son nom.

3°) Le composé C a pour formule brute $\text{C}_4\text{H}_{10}\text{O}$. L'oxydation de C conduit à un composé D qui donne avec la DNPH un précipité jaune mais est sans action sur le réactif de Schiff.

- Quels sont la formule semi – développée et le nom de D ?
- Quel est le composé C ?
- Donne la formule semi – développée et le nom de A.

EXERCICE 18 : L'acétate d'isoamyle

$\text{CH}_3-\overset{\text{O}}{\underset{\text{C}}{\diagup}}-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}-\overset{\text{CH}_3}{\underset{\text{C}}{\diagdown}}$, est présent entre autres dans les bananes et utilisé comme arôme artificiel de ce fruit. Sa masse volumique est égale à $0,87 \text{ g/cm}^3$. On mélange $10,0 \text{ cm}^3$ de cet ester avec $5,0 \text{ cm}^3$ d'eau ; $0,5 \text{ cm}^3$ d'acide sulfurique et on chauffe à reflux jusqu'à ce que l'équilibre chimique soit atteint. On dose les acides présents dans le mélange par une solution aqueuse d'hydroxyde de sodium ou soude ($\text{Na}^+ + \text{OH}^-$) de concentration $C_B = 2,0 \text{ mol/L}$. Le volume de soude nécessaire est $V_B = 22,0 \text{ cm}^3$.

Par ailleurs, on mesure le volume de soude nécessaire pour réagir avec $0,5 \text{ cm}^3$ d'acide sulfurique et on trouve $V_B' = 9,0 \text{ cm}^3$.

1°) Ecris l'équation – bilan de la réaction d'hydrolyse de l'ester.

2°) Ecris l'équation – bilan de la réaction de dosage de l'acide formé par la soude.

3°) a) Calcule la quantité de soude nécessaire au dosage de l'acide sulfurique.

b) Déduis – en la quantité d'acide formé à l'équilibre.

c) Calcule les quantités initiales d'ester et d'eau. Ce mélange est – il équimolaire ?

d) Calcule le rendement de la réaction et donne la composition du mélange à l'équilibre.

Données : masse volumique de l'eau : $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$. Masse molaire atomiques : $\text{C} = 12 \text{ g/mol}$; $\text{H} = 1 \text{ g/mol}$; $\text{O} = 16 \text{ g/mol}$.

EXERCICE 19 : On veut préparer le méthanoate d'éthyle ($\text{HCOOCH}_2\text{CH}_3$) par action d'un acide A sur un alcool B.

1°) a) Donne les formules semi – développées de l'acide A et de l'alcool B.

b) Ecris l'équation bilan de cette réaction :

➤ Comment l'appelle – t – on ?

➤ Quelles sont ses caractéristiques ?

2°) Dans un ballon, on mélange un volume $V_A = 20 \text{ cm}^3$ de A dont la masse volumique est $\rho_A = 1,2 \text{ g/cm}^3$ et un volume $V_B (\text{cm}^3)$ de B dont la masse volumique est $\rho_B = 0,79 \text{ g/cm}^3$.

a) Détermine le volume V_B pour que le mélange soit équimolaire

b) Ce mélange est acidifié par quelques gouttes d'acide sulfurique concentré puis chauffé à reflux. On obtient à l'équilibre 26 g de méthanoate d'éthyle.

c) Calcule le rendement de la réaction.

On donne les masses molaires atomiques en g/mol : $\text{H} = 1$; $\text{C} = 12$; $\text{O} = 16$.

EXERCICE 20 : L'acide benzoïque est un solide blanc. On dissout $24,4 \text{ g}$ de cet acide dans 27 mL d'eau distillée, puis on verse 18 g de propan – 2 ol.

1°) Ecris l'équation de la réaction qui a lieu dans ce mélange. Quelles sont les caractéristiques d'une telle réaction.

2°) Calcule :

a) Les quantités de matière des espèces chimiques dans le mélange avant la réaction ;

b) La composition théorique du mélange à la fin de la réaction.

3°) Quelle masse d'alcool doit – on employer pour estérifier 80% de cet acide ? On donne les constantes d'équilibre des alcools suivants :

➤ Alcool primaire : 4

➤ Alcool secondaire : 2,25.



EXERCICE 21 : 1°) On réalise un mélange équimolaire d'acide pentanoïque et de propanol – 2. A l'équilibre, on recueille 1,08g d'eau.

- Ecris l'équation de la réaction et donne le nom de l'ester formé.
 - Quelle était la masse totale du mélange initial ? quelle est la masse de l'ester formé ?
- 2°) Pour augmenter le rendement, on modifie les proportions initiales. On mélange 51g d'acide pentanoïque et 12g de propanol – 2.
- Au bout de $t = 5h$, on prélève la moitié du mélange, on le refroidit et on dose l'acide restant par une soude de concentration 2mol/L. L'équivalence est obtenue pour $V_B = 92cm^3$. Quelle est la quantité d'ester formé à l'instant $t = 5h$ dans le mélange ?
 - L'équilibre est atteint au bout de 8h. on dose l'acide restant dans l'autre moitié du mélange en utilisant $V_B' = 82,5cm^3$ de soude de même concentration pour obtenir l'équivalence. Calcule le rendement de la réaction.

EXERCICE 22 : On prépare un ester (A) à partir de l'acide butanoïque et d'un alcool (B). L'abaissement cryométrique d'une solution de 3,448g de (A) dans 100g d'eau est de 0,55°C.

1°) Détermine :

- La masse molaire moléculaire approchée de l'ester ;
- Sa formule brute et sa formule semi – développée ;
- Déduis – en la formule semi –développée du monoalcool (B)

2°) On réalise à 200°C, l'hydrolyse de l'ester (A) en partant de 5 moles d'eau et d'une mole d'ester. L'état d'équilibre est atteint au bout de 24h. Le volume du mélange à l'équilibre est de 220cm³. On en prélève un échantillon de 10cm³ que l'on dose avec de la soude de concentration molaire 2mol/L. L'équivalence est atteinte pour 14,4mL de soude versée.

- Ecris l'équation – bilan d'hydrolyse de l'ester (A) ;
- Ecris l'équation – bilan de la réaction du dosage ;
- Déduis – en le rendement de la réaction.

On donne : Constante cryométrique de l'eau : $K_e = 1850$.

EXERCICE 23 : On réalise à 200°C, l'hydrolyse du butanoate d'éthyle en portant un mélange de 5mol d'eau et de 1mol d'ester. L'état d'équilibre du système, atteint au bout de 24h est déterminé par dosage de l'acide formé. Le volume total du

mélange à l'équilibre est 180mL. On en prélève un échantillon de 10mL que l'on refroidit, puis que l'on dose avec une solution B de soude à 2mol.L⁻¹. L'équivalence est atteint pour $V_{BE} = 17,6mL$.

1°) Ecris l'équation – bilan de la réaction d'hydrolyse.

2°) Pourquoi refroidit – on l'échantillon dosé ?

3°) Détermine la quantité d'acide présent à l'équilibre dans un échantillon. Déduis – en la quantité d'ester présent à l'équilibre et le rendement de cette hydrolyse.

4°) Compare celui – ci à celui d'un mélange équimolaire d'eau et d'acétate d'éthyle. Justifie le résultat obtenu dans cette expérience. Dans quel sens l'équilibre a – t – il été déplacé ?

EXERCICE 24 : Deux élèves étudient la réaction d'estérisation dans des tubes placés à la température constante $\theta = 80^\circ\text{C}$. Ils introduisent le même mélange équimolaire de 50mmol d'acide éthanoïque et de 50mmol de propan – 1 ol.

1°) Ecris l'équation – bilan de la réaction

2°) Après une heure de chauffage, un tube est refroidi dans de l'eau glacée. Un dosage montre que la quantité d'acide restant est 16,6mmol. La même opération menée après trois heures montre qu'il reste toujours 16,6mmol d'acide.

a) Pourquoi refroidit – on le mélange avant le dosage ? Comment appelle t – on cette opération ?

b) Peut – on considérer que l'équilibre est atteint au bout d'une heure ? Justifie ;

c) Détermine la composition du mélange à l'équilibre puis détermine la constante d'équilibre K.

d) Deux autres élèves étudient la même réaction à la même température avec un mélange initial de 70mmol d'acide et de 50mmol d'alcool. Détermine le rendement de la réaction lorsque l'équilibre est atteint.

