BUREAU DU CENTRE ACADEMIQUE

Fascicule de Mathématiques

Terminales C-E

NKODIA-LOEMBA

Edition 2024-2025

Exercices types :

- Composition du premier trimestre
- Composition du deuxième Trimestre
- Bac test
- Bac blanc

Avant-propos

Ce fascicule a été conçu pour répondre aux besoins spécifiques des élèves en classe de Terminales C & E.

Nous avons rassemblé une sélection d'exercices rigoureusement choisis, qui couvrent l'ensemble du programme de mathématiques de ces classes.

L'objectif principal de ce fascicule est de vous offrir un outil complet et pratique pour vous entraîner efficacement en vue des examens d'état. Chaque exercice proposé ici a été conçu pour refléter fidèlement les exigences du programme officiel. Vous y trouverez des exercices stimulants issus des sujets proposés par les inspections des différentes zones du Congo-Brazzaville qui vous permettront de consolider vos connaissances, d'approfondir votre compréhension des concepts clés et de développer vos compétences en résolution de problèmes mathématiques.

Nous vous souhaitons à tous une excellente préparation aux examens d'état. Que ce fascicule de mathématiques devienne un précieux allié dans votre réussite académique et un tremplin vers un avenir prometteur.

L'auteur

PARTIE A
Analyse

FONCTIONS NUMERIQUES

Exercice 1

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^3+x^2}}{x} \; si \; x \neq 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f
2. Etudier la continuité de f en $x_0 = 0$
3. Préciser l'ensemble de dérivabilité de f puis calculer sa dérivée
4. Dresser le tableau de variation de f
5. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$
6. Tracer la courbe $(\mathcal{C}')$ de la fonction $g: x \longmapsto |f(x)|$ dans le même repère que $(\mathcal{C})$.

Exercice 2

Soit la fonction $f: x \mapsto 3x + 2sinx$

1) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $3x - 2 \leq f(x) \leq 3x + 2$

b) En déduire, $lim_{x\to-\infty} f(x) \; et \; lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} g(x) = \frac{x}{f(x)}; \; si \; x \neq 0 \\ g(x) = \frac{1}{5} \; ; si \; x = 0 \end{cases}$

a) Montrer que g est continue en 0.

b) Montrer que pour tout $x \in \left[\frac{2}{3}; +\infty\right[$; $\frac{x}{3x+2} \leq g(x) \leq \frac{x}{3x-2}$

c) En déduire $lim_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Exercice 3

1) Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^3+x^2}}{x} \quad si \; x \neq 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f

b) Pour $x \in [-1,0[$, établir l'égalité : $f(x) = -\sqrt{x+1}$

c) Déterminer les $lim_{x\to0^-} f(x)$ et $lim_{x\to0^+} f(x)$.

2) On considère la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = x^2 sin\left(\frac{1}{x}\right) \; si \; x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

a) Démontrer que pour tout réel x non nul : $\left|\frac{g(x)}{x}\right| \leq |x|$

b) En déduire $lim_{x\to0} \frac{g(x)}{x}$.

Exercice 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. D'unité graphique 2 cm. On considère la fonction numérique u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ et on désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

1. Montrer que, pour tout réel x, on a $u(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$
2. Montrer que, pour tout réel x, on a $u(x) > 0$
3. a) Montrer que la dérivée de la fonction u est définie sur $\mathbb{R}$ par $u'(x) = \frac{-u(x)}{\sqrt{x^2+1}}$

   b) Dresser le tableau de variation de la fonction u
4. Montrer que la somme $u(x) + 2x$ tends vers 0 quand x tend vers $-\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.
5. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$
6. a) Montrer que la fonction u admet une réciproque, notée u^{-1}, définie sur un intervalle J à préciser.

   b) Sans expliciter u^{-1}, déterminer $u^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ et $(u^{-1})'\left(\frac{1}{3}\right)$.

   c) Tracer la courbe $(\mathcal{C}')$ de u^{-1} dans le même repère que $(\mathcal{C})$

Exercice 5

I- Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur l'intervalle $[0;3]$, qui coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses 1 et 2.

1. Enoncer le théorème de Rolle
2. En utilisant le théorème de Rolle, montrer qu'il existe au moins un point de la courbe $(\mathcal{C})$ d'abscisse $\alpha \in]1;2[$ en lequel la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
3. Faire une illustration graphique.

II- On considère une fonction f, définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ telle que $f(1) = 0$ et $f'(x) = \frac{1}{x}$

1. Indiquer le sens de variation de f, puis donner le signe de $f(x)$
2. Soit a un réel strictement positif différent de 1.

En utilisant l'inégalité des accroissements finis entre 1 et a, montrer que :

$$\frac{a-1}{a} \leq f(a) \leq a-1$$

Exercice 6

f est une fonction de $[0;1]$ dans $[0;1]$, continue sur $[0;1]$.

On pose pour tout réel x de $[0;1]$, $g(x) = f(x) - x$.

1. a) Montrer que la fonction g est continue sur $[0;1]$.

   b) Montrer que $g(0) \geq 0$ et $g(1) \leq 0$.

   c) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution $\alpha \in [0;1]$.

2. On suppose que f est dérivable sur $[0; 1]$ et $\forall x \in [0; 1]$; $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

On considère la suite (U_n) telle que : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq U_n \leq 1$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$.

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|U_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

d) Quelle est la limite de la suite (U_n) ?

Exercice 7

Soit f une fonction définie sur $I =]1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. a) Calculer les limites de f à droite de 1 et en $+\infty$.

b) Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses puis préciser une asymptote à $(\mathcal{C})$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

2. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle I puis vérifier que $1 < \alpha < 2$.

b) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.

3. Soit g la fonction définie sur $J = [1; +\infty[$ par $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

a) Montrer que $g(\alpha) = \alpha$ et déterminer $g(J)$.

b) Montrer que pour tout $x \in J$, on a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$ puis en déduire que : $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$.

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = g(u_n)$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 \leq u_n \leq 2$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et en déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 8

1) Soit g la fonction définie par : $g(x) = sinx - x - x^3\left(\frac{sina - a}{a^3}\right)$

a) Montrer qu'il existe un réel $c \in]0, a[$ tel que $g'(c) = 0$.

b) On pose $\theta = \frac{c}{a}$. Montrer que : $a - sina = \frac{a^3}{3} \times \frac{1 - cosa\theta}{(a\theta)^2}$

c) En déduire les résultats suivants :

(1) $Pour\ a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad sina < a$

(2) $\lim_{a \to 0^+} \frac{a - sina}{a^3} = \frac{1}{6}$

2) On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} - cotanx\ , \ \ si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\frac{f(x)}{x} = \frac{x}{sinx}\left(\frac{sinx - x}{x^3} + \frac{1 - cosx}{x^2}\right)$

b) Montrer que f est dérivable à droite en 0.

c) Montrer que $f'(x) = \frac{1}{(sinx)^2} - \frac{1}{x^2}$

d) Etudier les variations de f sur $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$

Exercice 9

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \frac{1 - x^2}{x^2 + 1}$

On note C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1) Dresser le tableau de variation de f

2) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}_+$, sur un intervalle J que l'on précisera.

3) Construire dans le même repère les courbes C_f et $C_{f^{-1}}$.

4) Soit la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = f(tanx)\ si\ x \neq \frac{\pi}{2} \\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \end{cases}$

a) Montrer que g est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

b) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $g(x) = cos2x$.

c) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $]-1,1[$.

d) Soit $G(x) = g^{-1}(-x) + g^{-1}(x)$ pour tout $x \in]-1,1[$. Montrer que G est dérivable sur $]-1,1[$ et préciser $G'(x)$.

f) Montrer que $G(x) = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in]-1,1[$. Que conclure pour $C_{g^{-1}}$?

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $]2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 4}}$.

1) a) Montrer que f est dérivable sur $]2; +\infty[$ et que pour tout x élément de $]2; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{-8}{\left(\sqrt{x^2 - 4}\right)^3}$$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Tracer (C_f) dans le repère orthonormé.

2)a) Montrer que f réalise une bijection de $]2; +\infty[$ sur lui-même.

b) Expliciter $fof(x)$ pour $x > 2$. En déduire que la droite $(\Delta): y = x$ est axe de symétrie à la courbe (C_f).

3) Soit g la fonction définie sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ par $g: \begin{cases} \frac{1}{2}f\left(\frac{2}{cosx}\right) + \frac{1}{4} & si\ x \neq \frac{\pi}{2} \\ \frac{5}{4} & si\ x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

a) Montrer que g est continue à gauche de $\frac{\pi}{2}$.

b) Montrer que g est dérivable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ et que $g'(x) = \frac{-cosx}{(sinx)^2}$, pour tout x élément de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$.

4)a) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet dans $\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$ une solution unique α.

b) Montrer que pour tout x élément de $\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$ on a $|g'(x)| \leq \frac{2}{3}$

c) En utilisant le théorème des inégalités d'accroissements finis sur $\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$, montrer que : $|g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{2}{3}|x - \alpha|$. En déduire que $|g(x) - \alpha| \leq \frac{2}{3}|x - \alpha|$

Exercice 11

On considère la fonction f définie sur $[-1,1] - \{0\}$ par : $f(x) = 1 + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

On note par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Partie A

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et interpréter les résultats obtenus.

2) Etudier la dérivabilité de f au point d'abscisse $x = 1$ et interpréter le résultat obtenu.

3) Etudier la dérivabilité de f au point d'abscisse $x = -1$ et interpréter le résultat obtenu.

4) Montrer que $\forall\ x\ \in]-1,1[- \{0\} : f'(x) = \frac{-1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$

5) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

6) Montrer que f réalise une bijection de $]0;1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

7) Exprimer $f^{-1}(x)$ pour tout x élément de J.

8) Représenter dans le même repère les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$.

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = f(cosx)$.

1) Montrer que pour tout x de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, $g(x) = 1 + tanx$.

2) Etudier les variations de g.

3) Montrer que l'équation $g(x) = x$. Admet une unique solution α dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ et vérifier que $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$

4) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J à préciser.

5) Montrer que g^{-1} est dérivable sur J et $\forall\, x \in J$: $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{x^2-2x+2}$

Exercice 12

On considère la fonction f à variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = cos^2 x$.

1) Montrer que f peut être étudiée sur l'intervalle $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

2) a) Calculer la dérivée f' de f. En déduire le sens de variation de f sur I.

b) Dresser le tableau de variation de variation de f sur I.

3) a) Montrer que f admet une bijection réciproque notée f^{-1} sur I.

b) Sans expliciter f^{-1}, calculer $(f^{-1})'\left(\frac{3}{4}\right)$.

c) Prouver que f^{-1} est dérivable sur un intervalle J à préciser et que l'on a :

$$(f^{-1})'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{-x^2+x}}.$$

4) a) Montrer que ; $\forall\, x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$, $-1 \leq f'(x) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) En déduire, en utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis, que :

$$\forall\, x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right] , \left|f(x) - \frac{3}{4}\right| \leq \left|x - \frac{\pi}{6}\right|$$

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = \sqrt{3}x - 2sinx$

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. Unité : 3cm.

1) a) Calculer la dérivée f' de f et étudier le sens de variation de f' sur $[0; \pi]$

b) Etudier les variations de f sur $[0; \pi]$ et construire l'arc de la courbe Γ correspondant.

c) Etudier la parité de f. En déduire comment la courbe représentative $\mathcal{C}_0$ de f sur $[-\pi; \pi]$ se déduire de Γ.

2) Pour tout nombre réel x, exprimer $f(x + 2\pi)$ en fonction de $f(x)$. Comment obtient-on la courbe $\mathcal{C}$ à partir de $\mathcal{C}_0$?

3) a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α et une seule appartenant à l'intervalle $\left]\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right[$.

b) Soit c un réel de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$ et Δ_c la tangente à $\mathcal{C}$ au point A_c d'abscisse c.

- Soit ρ la fonction sur $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$ par $\rho(x) = f(x) - f(c) - f'(c)(x - c)$ Etudier les variations de ρ et déterminer le signe de $\rho(x)$.

- Tracer $\mathcal{C}$ sur l'intervalle de $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$.

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x - sinx$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) Montrer que f est impaire ; puis comparer $f(x+2\pi)$ et $f(x)$.

Donner les conséquences géométriques à la courbe (C).

2)a) En utilisant le théorème de comparaison, déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Dresser le tableau de variations de f

3) Déterminer les points d'inflexion à la courbe (C), puis écrire une équation de la tangente à (C) en chacun de ces points.

4)a) Etudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite d'équation $y = 2x$ sur l'intervalle de $[0; 2\pi]$.

b) Tracer la courbe (C).

5) Montrer que l'équation $f(x) = 4$ admet une solution x_0 et une seule sur $\mathbb{R}$.

6) On note g la fonction telle que : $g(x) = \frac{1}{2}(4 + sinx)$

a) Montrer que x_0 est aussi une solution unique de l'équation $g(x) = x$.

b) Prouver que pour tout réel x : $-\frac{1}{2} \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$

c) En déduire que : $|g(x) - x_0| \leq \frac{1}{2}|x - x_0|$

Exercice 15

On considère la fonction f définie sur $I = \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = tanx$

1. a) Démontrer que f admet une réciproque, notée f^{-1} , définie sur un intervalle J que l'on précisera.

   b) Démontrer que f^{-1} est dérivable sur J et pour tout réel $x \in J$, $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

2. a) Démontrer que pour tous nombres réels a et b tels que :

   $0 \leq a < b < \frac{\pi}{2}$ on a $x \in [a;b]$ alors : $\frac{1}{cos^2 a} \leq f'(x) \leq \frac{1}{cos^2 b}$

   b) En utilisant le théorème de l'inégalité des accroissements finis, déduire que : $\frac{b-a}{cos^2 a} \leq tanb - tana \leq \frac{b-a}{cos^2 b}$

   c) Application : donner un encadrement de $tan0{,}6$

Exercice 16

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{2x-x^2}}{x-1}, si\ x \in]1;2[\\ f(x) = sin\pi x, si\ x \in [2;4] \end{cases}$

On désigne par (C_f), la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 2$.

2) a) Etudier les variations de f, puis dresser son tableau de variation.

   b) Tracer la courbe (C_f).

3) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in \left]\frac{3}{2};2\right[$.

4) a) Montrer que $f^{-1}(x)$ existe pour tout $\in]1;2]$.

   b) Montrer que $f^{-1}(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ pour tout $x \in [0;+\infty[$.

   c) Montrer que pour tout $x \in [1;2]$, $|f^{-1}(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

   d) En déduire que pour tout $x \in [1;2]$, $|f^{-1}(x) - \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}|x - \alpha|$

5) Soit g la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ par : $\begin{cases} g(x) = \frac{1}{f^{-1}(tan2x)}, si\ x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right[\\ g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases}$

   a) Montrer que pour tout $x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, on a : $g(x) = \frac{1}{1+cos2x}$.

   b) Montrer que $g^{-1}(x)$ existe puis dresser le tableau de variation de g^{-1}.

   c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\left]\frac{1}{2};1\right]$ puis pour tout $x \in \left]\frac{1}{2};1\right]$,
   $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{2x-1}}$

SUITES NUMERIQUES

Exercice 1

1. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite géométrique de premier terme $U_0 = 1$ et de raison $\frac{1}{2}$.
   a) Ecrire l'expression de U_n en fonction de n.
   b) Calculer en fonction de n la somme $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$.
2. On pose $V_n = lnU_n$.
   a) Montrer que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Exprimer V_n en fonction de n.
   c) Calculer en fonction de n le produit $P_n = U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$

Exercice 2

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites définies respectivement par $u_0 = 9$;
$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3$ et $v_n = u_n + 6$

1) a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Montrer que pour tout $n \geq 0, v_n > 0$.
   c) Calculer en fonction de $n, S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ puis $S'_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Déterminer les limites de (S_n) et (S'_n).
2) On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $w_n = lnv_n$.
   a) Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Calculer en fonction de n, $S''_n = \sum_{i=0}^{n} w_i$ puis déterminer la limite de (S''_n).
3) Calculer en fonction de n, $P_n = \prod_{k=0}^{n} v_k$

Exercice 3

1) Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{2U_n+3}{U_n+4} \end{cases}$
   a) Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1; 0 < U_n < 1$
   b) Montrer que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
2) On considère la suite $(V_n)_{n\geq 0}$ définie par $V_n = \frac{U_n-1}{U_n+3}$
   a) Montrer que la suite $(V_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
   b) En déduire la limite de la suite $(V_n)_{n\geq 0}$
   c) Calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} V_k$

3) a) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n
   b) En déduire la limite de U_n

Exercice 4

On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = 1$; $U_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$;
$U_{n+2} = 2U_{n+1} + 4U_n$. Où a et b sont deux réels tels que :
$a + b = 2$ et $a \times b = -4$ $(avec\ a < b)$.
1) Calculer U_2. La suite est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier.
2) Soit (V_n) la suite définie par : $V_n = U_{n+1} - a \times U_n$. Montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = b \times V_n$. Exprimer V_n en fonction de n et b.
3) Soit (W_n) la suite définie par : $W_n = U_{n+1} - b \times U_n$. Montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}, W_{n+1} = a \times W_n$. Exprimer W_n en fonction de n et a.
4) Déterminer les réels a et b puis exprimer U_n en fonction de V_n et W_n.
5) En déduire l'expression de U_n en fonction de n.

Exercice 5

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier naturel n par :
$U_{n+1} = \frac{3}{4}U_n + \frac{1}{4}V_n$ et $V_{n+1} = \frac{3}{4}V_n + \frac{1}{4}U_n$ avec $U_0 = 1$ et $V_0 = 3$.
1) On pose $W_n = U_n - V_n$ pour tout entier naturel n. Montrer que (W_n) est une suite géométrique convergente. Comparer U_n et V_n.
2) Etudier le sens de variation de U_n et V_n.
3) Montrer que (U_n) est majorée et que (V_n) est minorée.
4) En déduire que (U_n) et (V_n) convergent vers une même limite l.
5) On pose $D_n = U_n + V_n$ pour tout n.
Montrer que (D_n) est constante puis en déduire l.
6) Soit (S_n) la suite de nombres complexes définie par $S_n = U_n + iV_n$ pour tout entier naturel n. Exprimer $S_{n+1} - S_n$en fonction de W_n. En déduire S_n en fonction de n puis montrer que $(|S_n|)$ converge vers une limite à déterminer.

Exercice 6

On définit la suite des nombres complexes (Z_n) suivante :
$Z_0 = 1$ et $\forall\ n\ \in \mathbb{N}$; $Z_{n+1} = \frac{1}{3}Z_n + \frac{2}{3}i$
Pour tout entier naturel n, on considère le suite numérique (U_n) définie telle que :
$U_n = Z_n - i$.
1) Démontrer que (U_n) est une suite géométrique.
2) Exprimer U_n en fonction du premier terme U_0, la raison q et l'entier naturel n.

3) En déduire que la partie réelle du nombre complexe U_n est $X_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ et la partie imaginaire de U_n est $Y_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$

4) Déterminer les limites des suites (X_n) et (Y_n)

5) En déduire la convergence de la suite (Z_n)

6) On considère le nombre complexe $Z_k = (U_0)^k$, k est un entier naturel.

   a) Déterminer le module et un argument de Z_k

   b) En déduire le module et un argument de Z_4

Exercice 7

Soit θ un nombre réel tel que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 2cos\theta$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer les trois premiers termes de la suite en fonction de θ. (On rappelle que $cos2\alpha = 2cos^2\alpha - 1$).

2) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $u_n = 2cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$.

3) Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{\theta}{2^n}$. Déterminer la limite de (v_n).

4) En déduire que (u_n) est convergente. Quelle est sa limite ?

Exercice 8

1) a) Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique réelle de premier terme $r_0 > 0$ et de raison $\frac{2}{3}$. Exprimer r_n en fonction de r_0 et de n.

b) Soit $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique réelle de premier terme $\theta_0 \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et de raison $\frac{2\pi}{3}$. Exprimer θ_n en fonction de θ_0 et de n.

c) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, on pose $z_n = r_n(cos\theta_n + isin\theta_n)$. Sachant que $z_0,\ z_1$ et z_2 sont reliés par la relation $z_0 z_1 z_2 = 8$, déterminer le modute et un argument de $z_0,\ z_1$ et z_2.

2) Dans le plan complexe $\wp$ muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$; (unité graphique : 4 cm), on appelle M_n le point d'affixe z_n.

a) Placer les points M_0, M_1, M_2 et M_3 dans le plan $\wp$.

b) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, calculer $\left\|\overrightarrow{M_n M_{n+1}}\right\|$ en foncton de n.

c) On pose $d_n = \sum_{i=0}^{n}\left\|\overrightarrow{M_i M_{i+1}}\right\|$. Calculer d_n en fonction de n et déterminer $lim_{n\to+\infty}\, d_n$.

Exercice 9

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On considère la suite des points M_n ; $n \in \mathbb{N}$ définie par $M_0 = O$; $M_n(z_n)$ tel que $z_{n+1} = \frac{1}{3}\left(1 + i\sqrt{3}\right)z_n + \sqrt{3} + 2i$.

1) Déterminer les points M_1 et M_2 puis les placer dans le plan complexe.

2) Montrer que M_{n+1} est l'image de M_n par une similitude plane dont on caractérisera les éléments caractéristiques.
3) On pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$. Montrer que $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $d_0 = \sqrt{7}$.
4) Etudier la monotonie et la convergence de $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$
5) Exprimer d_n en fonction de n.
6) Exprimer $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} M_iM_{i+1}$ en fonction de n puis calculer la limite de $(S_n)_{n\geq 1}$
7) On pose $\theta_n = arg(z_{n+1} - z_n)$. Montrer que $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

Exercice 10

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.
1) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = 2^n u_n$.
   a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on donnera le premier terme et la raison.
   b) En déduire que pour tout n : $u_n = 2^{-n}(3n+1)$.
2) a) Démontrer que pour tout $n \geq 2$, on a : $2^n > \frac{n(n-1)}{2}$.
   b) En déduire que la suite de terme général $\frac{n}{2^n}$ converge vers 0. Donner alors la limite de (u_n).
3) En remarquant que $u_n = 4u_{n+1} - 4u_{n+2}$, exprimer $S_n = \sum_{p=0}^{n} u_p$ en fonction de u_1 et u_{n+2}. En déduire la limite de (S_n).

Exercice 11

(V_n) est une suite définie par :$V_0 = 0{,}5$ et pour tout entier naturel $n, V_{n+1} = \frac{2V_n}{\sqrt{V_n^2+1}}$
1) Démontrer que la fonction f définie pour tout $x \in [0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
2) a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n, 0 \leq V_n \leq V_{n+1} \leq 2$
   b) Justifier que la suite (V_n) est convergente.
3) On admet que pour tout entier naturel $n, 0 \leq 2 - V_n \leq 4\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^n$.
En déduire la limite de la suite (V_n).

FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

Exercice 1

Soit la fonction f définie sur]0,+∞[par : $f(x) = x^2 + x - \frac{1+lnx}{x}$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (o; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

Prendre pour unités graphiques : $4cm$ sur xox' et $2cm$ sur yoy'.

1) On considère la fonction auxiliaire h définie sur]0,+∞[par $h(x) = 2x^3 + x^2 + lnx$.

a) Etudier le sens de variation de h.

b) Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ a une solution unique qu'on appellera α.
Trouver le nombre entier p tel que : $p.10^{-2} \leq \alpha < (p+1).10^{-2}$.

c) En déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.

2) a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Déterminer la limite de f en 0.
Que peut-on en déduire pour la courbe représentative $(\mathcal{C})$?

c) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

d) Soit la fonction g définie sur]0,+∞[par $g(x) = x^2 + x$. On appelle $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le repère (o; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).
Préciser les positions relatives des courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.

e) Tracer $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $I = [0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^2}{2} - x + ln(x+1)$.

On note $\left(\mathcal{C}_f\right)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ du plan. Unité graphique : 2cm.

1. a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Calculer la dérivée f' de f.

c) Dresser le tableau de variation de f sur I.

2. On admet que : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Tracer $\left(\mathcal{C}_f\right)$.

3. Pour tout réel x de I.

a) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que : $ln(x+1) \leq x$

b) En déduire que : $x - \frac{x^2}{2} \leq ln(x+1) \leq x$.

4. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $U_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \times \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \times \ldots \times \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$

a) Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}^*; 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} U_n = \sqrt{e}$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $[-1;1[$ par : $f(x) = ln(1-x) + x$

1. Trouver la dérivée f' de f puis dresser le tableau de variation de f (on précisera les limites aux bornes)

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
   a) $ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{n+1} < 0$
   b) $ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1} < 0$

3. On considère les suites U et V définies pour tout $\mathbb{N}^*$ par :

$$U_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - lnn\,;V_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - ln(n+1)$$

   a) Montrer que la suite U est décroissante et que V est croissante
   b) Montrer que pour tout entier naturel non nul, $V_1 < V_n < U_n < U_1$. En déduire que les suites U et V sont convergentes.
   c) Montrer que $lim_{n \to +\infty}(U_n - V_n) = 0$. En déduire que les suites U et V convergent vers la même limite.

Exercice 4

A/ Soit la fonction g à variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = xlnx$

1. Calculer la dérivée g' de la fonction g.
2. Dresser le tableau de variation de g sur $]0;+\infty[$
3. En déduire le signe de g sur $]0;+\infty[$. On admet que $g(1) = 0$.

B/ Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = |g(x)| \;\; si\ x \neq 0 \end{cases}$

1. Ecrire $f(x)$ sans valeur absolue
2. a) Calculer $f'(x)$
   b) Dresser le tableau de variations de f sur $[0;+\infty[$. (on admettra que $f'_g(1) = -1$; $f'_d(1) = 1$)
3. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Unité : $2cm$.

c/ On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ ln(u_{n+1}) = 1 + ln(u_n);\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
2. Etudier la monotonie de la suite (u_n) et préciser sa limite.
3. Exprimer la somme $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ en fonction de n.

Exercice 5

Soit f la fonction numérique définie sur $]-2;+\infty[$ par : $f(x) = ln(x+2)$

1. Trouver f', la dérivée de f, puis étudier le sens de variation de f

2. a) Montrer que $\forall\, x \in\ [1;2],\ |f'(x)| \leq \frac{1}{3}$

   b) Montrer que $\forall\, x \in\ [1;2],\ f(x) \in [1;2]$

3. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in\,]1;2[$.

4. Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = ln(2 + U_n) \end{cases}$

   a) Montrer par récurrence que $\forall\, n\ \in \mathbb{N},\ U_n \in [1;2]$
   b) Montrer que $\forall\, n\ \in\ \mathbb{N},\ |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3}|U_n - \alpha|$
   c) Montrer que $\forall\, n\ \in\ \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$
   d) On suppose que (U_n) est convergente. Calculer sa limite à $+\infty$.

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{lnx}$

1. Calculer la dérivée f' de f
2. Dresser le tableau de variation de f.

On admet que $lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ et $lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

3. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > e$.
   b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite l.
4. Montrer que pour tout $x \geq e$, $f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{lnx}\right)^2$
5. En déduire que pour tout $x \geq e$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.
6. a) Montrer, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4}|u_n - e|$

   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$

   c) Retrouver ainsi la limite l.

Exercice 7

1- Soit f la fonction définie sur $\left[\frac{3}{2};2\right]$ par : $f(x) = ln\left(4 + \frac{1}{x}\right)$ et h la fonction définie par $h(x) = 4x + 1 - xe^x$. On suppose que $\alpha \in \left[\frac{3}{2};2\right]$ est solution unique de l'équation $h(x) = 0$.

a) Montrer que α est l'unique solution de l'équation $f(x)\ =\ x$.
b) Etudier les variations de f sur $\left[\frac{3}{2};2\right]$
c) Montrer que $f\left(\left[\frac{3}{2};2\right]\right) \in \left[\frac{3}{2};2\right]$ et que pour tout $x \in \left[\frac{3}{2};2\right]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{10}$.
d) En déduire que pour tout $x \in \left[\frac{3}{2};2\right]$, on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{10}|x - \alpha|$

2- Soit $(U_n)n\epsilon\mathbb{N}$, la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{10}|U_n - \alpha|$

c) En déduire que $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2.10^n}$.

d) Montrer que la suite (U_n) converge vers α.

e) Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que $\forall n \geq n_0, |U_n - \alpha| \leq 10^{-6}$.

Exercice 8

Soit la fonction f définie sur $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = -ln(cosx)$.

1. a) Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$. Donner une interprétation géométrique du résultat de cette limite.

b) f étant continue sur I, montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}_+$.

c) Justifier que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et démontrer que, pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$, on a : $(f^{-1})'(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}$.

2. Démontrer qu'il existe un réel unique $\alpha \in \left]\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$. (On pourra utiliser la fonction auxiliaire g telle que $g(x) = f(x) - x$, pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$)

3. On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{\pi}{4} \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) Montrer que par récurrence, pour tout n, $0 < u_n \leq \frac{\pi}{4}$.

b) Etudier la monotonie de (u_n) puis justifier que (u_n) est convergente.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n) en justifiant soigneusement la réponse.

Exercice 9

Soit f_a la fonction de $]0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f_a(x) = log_a(x)$ où a est un nombre réel strictement positif et différent de 1

On désigne par $(\mathcal{C}_a)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1. Calculer $f_a(1)$; $f_a(a)$ et $f_a(a^n)$ où n est un entier relatif.

2. a) Etudier les variations de la fonction f_a puis dresser son tableau de variation pour $0 < a < 1$ et $a > 0$

b) Démontrer que f_a est une bijection.

c) Démontrer que $f_{\frac{1}{a}} = -f_a$ et en déduire la position relative de $(\mathcal{C}_a)$ et $\left(\mathcal{C}_{\frac{1}{a}}\right)$

3. Tracer les courbes $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_{0,5})$.

FONCTION EXPONNENTIELLE

Exercice 1

Partie A

Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie par $g(x) = e^{-x} + 1 + xe^{-x}$

1. Etudier les variations de g.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]-1{,}28; -1[$
3. En déduire le signe de g sur son ensemble de définition.
4. En déduire le tableau de variation de la fonction h définie par :

$$h(x) = ln(e^{-x} + 1 + xe^{-x})$$

Partie B

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x}{e^{-x}+1}$. On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan. Unité graphique 3cm.

1. Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$, α étant le réel défini dans la partie A.
2. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ en utilisant l'encadrement de α établi dans la partie A.
3. a) Etudier les variations de f.
   b) Montrer qu'il existe un réel $\beta \in]0; 1[$ tel que $f'(\beta) = \frac{e}{1+e}$. En donner une interprétation graphique.
   c) Tracer $(\mathcal{C})$.

Exercice 2

I- Soit g la fonction telle que $\forall\, x \in \mathbb{R}^+, g(x) = (1 - x)e^{-x}$

1) Calculer la limite de g en $+\infty$.
2) a) Dresser le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}^+$
   b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^+, g(x) \leq 1$.

II- Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = xln(-x) & si\ \ x < 0 \\ f(x) = x(2 - e^{-x}) & si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

$(\mathcal{C})$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Déterminer l'ensemble de définition E_f de f.
2) Etudier la continuité de f en 0.
3) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter les résultats obtenus.
4) a) Montrer que $\forall x > 0,\ f'(x) = 2 - g(x)$.
   b) En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$
   c) Calculer $f'(x)$ pour $x < 0$ puis étudier le signe de $f'(x)$
   d) Dresser le tableau de variation de f.
5) a) Montrer que la droite $(\mathcal{D})$: $y = 2x$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ vers $+\infty$

b) Montrer que $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique vers $-\infty$.

6) a) Calculer $f(-1)$ puis tracer $(\mathcal{C})$.

b) Construire dans le même repère l'image $(\mathcal{C}')$ de $(\mathcal{C})$ par rapport à l'axe (Ox).

Exercice 3

Soit la fonction f à variable réelle x, définie par : $f(x) = 2e^{-x} - e^{-2x}$

1. Dresser le tableau de variation de f
2. Démontrer qu'il existe un réel α unique avec $\alpha \in]-1; 0[$ tel que $f(\alpha) = 0$
3. Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité 2cm.
4. On pose, pour tout $x \in [0; +\infty[$; $h(x) = f(x) - x$. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $x_0 \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

On admet que $\forall\, x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, on a : $f(x) \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ et $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

5. Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
   a) Démontrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - x_0| \leq \frac{1}{2}|u_n - x_0|$
   b) En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|u_n - x_0| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$
   c) Calculer $\lim_{n\to+\infty}(u_n)$

Remarque : $\frac{2}{\sqrt{e}} \approx 1{,}22$; $\frac{1}{e} \approx 0{,}37$; $\frac{2}{e} \approx 0{,}74$ et $\frac{1}{e^2} \approx 0{,}14$

Exercice 4

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x\ln x}{x+1}$

1. Calculer la dérivée $f'(x)$ de f. En déduire le sens de variations de f sur $[1; +\infty[$
2. a) Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique $\alpha \in [3; 4]$

   b) Démontrer que les équations $f(x) = 1$ et $e^{1+\frac{1}{x}} = x$ sont équivalentes.
3. Soit h la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par : $h(x) = e^{1+\frac{1}{x}}$
   a) Démontrer que pour tout $x \in [3; 4]$, $h(x) \in [3; 4]$
   b) Démontrer que pour tout $x \in [3; 4]$, $|h'(x)| \leq \frac{1}{2}$

   On admet alors que pour $x \in [3; 4]$, $|h(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$
4. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $U_0 = 3$ et la relation de récurrence : $U_{n+1} = h(U_n)$
   a) Démontrer que, pour tout entier positif ou nul n, $3 \leq U_n \leq 4$
   b) Démontrer que, pour tout $n \geq 0$: $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$
   c) On admet que la suite (U_n) est convergente. Calculer sa limite.
   d) Pour quelles valeurs de n, U_n est-elle une valeur approchée de α à 10^{-2} près ?

Exercice 5

1. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1-x\ln x}{x}$. On admet que $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $I = \left[\frac{3}{2};2\right]$. Le but de cet exercice est de donner une valeur approchée de α. Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = e^{\frac{1}{x}}.$$

a) Montrer que α est solution de l'équation $g(x) = x$.
b) Etudier les variations de g sur $]0;+\infty[$.
c) Etudier les branches infinies à la courbe de g.
d) Tracer $(\mathcal{C}_g)$, courbe représentative de g dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

2. On définit la suite numérique (U_n) telle que : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = g(U_n) \end{cases}$

a) Montrer par récurrence que pour tout entier $n, U_n \in I$
b) On suppose que pour tout $x \in I, |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$. En appliquant le théorème de l'inégalité des accroissements finis, montrer que : $\forall\, x \in I, |g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

3. a) Montrer que : $\forall\, n \geq 0,\ |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$
b) En déduire que : $\forall\, n \geq 0,\ |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$
c) Montrer que la suite (U_n) converge vers α

4. a) Déterminer un entier n_0 tel que $\left|U_{n_0} - \alpha\right| \leq 10^{-1}$
b) Déterminer la valeur approchée U_{n_0} de α.

Exercice 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, on considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$ et on désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f
2. a) Vérifier que pour tout réel $x,\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{-2x}}}$
b) Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.
c) Dresser le tableau de variation de f

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = f(x) - x$

a) Dresser le tableau de variation de h
b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $0{,}9 < \alpha < 1$.
c) Etudier le signe de h sur $\mathbb{R}$. En déduire la position relative de la courbe $(\mathcal{C})$ et de la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x$

   d) Tracer $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{D})$

4. On considère la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = \frac{1}{2}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$
   a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leq U_n \leq \alpha$
   b) Etudier la monotonie de la suite (U_n). Déduire que la suite (U_n) est convergente.
   c) Sachant que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leq f'(x) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$, montrer que :
   $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}|U_n - \alpha|$
   d) En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n \left|\frac{1}{2} - \alpha\right|$
   En déduire $lim_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 7

Pour tout n fixé de $\mathbb{N}$, soit f_n la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f_n(x) = \frac{e^{nx}}{e^x - 1}$. On désigne par $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentant f_n dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$; unité 2cm.

1) a) Déterminer l'ensemble de définition E_{f_n} de f_n.
   b) Montrer que f_n est dérivable sur E_{f_n} et on a : $f_n'(x) = \frac{[(n-1)e^x - n]e^{nx}}{(e^x-1)^2}$ pour tout $x \in E_{f_n}$.
   c) Etudier suivants les valeurs de n les extremums de f_n.
2) Dresser le tableau de variation de f_0.
3) Démontrer que le point $\Omega\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie pour $(\mathcal{C}_0)$.
4) Soit g la restriction de f_0 à l'intervalle $I =]-\infty; 0[$. Démontrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} de I vers J à déterminer.
5) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout x de J.
6) Tracer les courbes $(\mathcal{C}_0)$ de f_0 et $(\mathcal{C}_0')$ de g dans le même repère.

Exercice 8

Pour $m \in]-1; 0[$ on définit la fonction f_m par : $f_m(x) = x(m+1)^x$

1. Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f_m(x) = xe^{xln(m+1)}$
2. Etudier les variations de f_m
3. On désigne par $(\mathcal{C}_m)$ la courbe représentative de f_m. Soit I_m, le point de $(\mathcal{C}_m)$ en lequel la tangente est horizontale.
   a) Préciser les coordonnées de I_m
   b) En déduire que I_m décrit la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = \frac{1}{e}x$, lorsque m décrit $]-1; 0[$.
4. Construire les courbes $(\mathcal{C}_2)$ et $\left(\mathcal{C}_{-\frac{1}{2}}\right)$.

STATISTIQUE

Exercice 1

Soit le tableau ci-après.

x	2	2	1	0	1	-1	-1	0	0
y	0	1	-1	3	1	-1	-1	1	1

1. Transformer ce tableau en un tableau statistiques à double entrée à deux variables et donner les lois marginales de x et de y

2. a) En quoi consiste l'ajustement linéaire d'une série statistique à deux variables ?
   b) Déterminer la droite $(\mathcal{D})$ d'ajustement de x en y par la méthode des moindres carrés.

Exercice 2

Un agent publicitaire pour son service a pour base de travail le tableau ci-après :

Frais de Publicité x	7	7,8	9,2	10,5	11	11,5
Chiffre d'affaires y	237	235	248	250	268	259

x et y en dizaines de millions de franc cfa.

1. Déterminer une équation de la droite d'ajustement de y en x, en utilisant la méthode des moindres carrées.

2. En déduire une estimation des frais de publicité d'une entreprise dont le chiffre d'affaires est de 3 milliards de franc cfa.

Exercice 3

Le tableau ci-après présente l'évolution d'un virus dans un pays.

x_i(mois)	2	3	4	5	6
y_i(nombre de malades)	10	18	20	23	30

1-Calculer le nombre moyen des malades.

2-Calculer $cov(X;Y)$

3-Calculer le coefficient de corrélation linéaire

4-Déterminer la droite de régression de y en x

5-Donner une estimation du nombre de mois pour 60 malades.

Exercice 4

1. Une série statistique à deux caractères X et Y étant donnée, expliquer en quoi consiste son ajustement linéaire par la méthode de moindres carrés.

2. On considère la série statistique suivante, où α est un réel non nul donné :

x_i	1,2	1,4	1,6	1,8	2
y_j	13	12	α	16	20

Une équation de la droite de régression de y en x est : $y = 9x + 0{,}6$

a) Déterminer, en fonction de α les coordonnées du point moyen $G(\bar{X};\bar{Y})$.

b) Déterminer α, puis calculer la covariance de (X, Y)

Exercice 5

Le tableau ci-dessous indique, de l'année 2010 à l'année 2015, les frais de publicité et de fabrication de savons d'une moyenne entreprise. X désigne l'année d'exercice et Y le chiffre d'affaires exprimé en millions de francs C.F.A de l'année correspondante.

X	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Y	128	102	138	116	118	142

1. Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage statistique considéré.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite de régression de Y en X.
3. Déterminer le chiffre d'affaire de cette entreprise en 2016.

Exercice 6

Une entreprise veut vérifier l'efficacité de son service de publicité. Elle a relevé chaque mois durant une période de 6 mois les sommes X consacrées à la publicité et le chiffre d'affaire constaté Y. X et Y sont en milliards de francs CFA.

On donne le tableau ci-dessous :

Rang du mois	1	2	3	4	5	6
X	1,2	0,5	1	1	1,5	1,8
Y	19	49	100	125	148	181

Les résultats seront donnés en centimètre près.

1. Donner les lois marginales de X et de Y.
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G.
3. Calculer la covariance $cov(X, Y)$ de X et Y.
4. Déterminer la droite de régression linéaire $(\mathcal{D})$ de y en x.

Exercice 7

On considère deux droites de régression (D) et (D') d'une série statistique à double variable définies par : $(D): y = \frac{1}{25}x + \frac{1}{5}$ et $(D'): x = \frac{1}{50}y + \frac{1}{5}$

1- Déterminer les coordonnées du point moyen $G(\bar{X};\bar{Y})$

2- Calculer le coefficient de corrélation linéaire ρ de cette série statistique.

3- sachant que la variance de X est égale à 0,96.

Calculer la variance de Y.

Exercice 8

Une série statistique est distribuée selon le tableau ci-dessous. Une mauvaise manipulation a effacé une donnée. On se propose de reconstituer la série en déterminant la donnée manquante.

x \ y	-1	1	2
1	3	2	1
-1	α	1	1

1. Déterminer le réel α sachant que la covariance de la série est $Cov(X;Y) = -0{,}04$.

Dans la suite, on donne $\alpha = -2$

3. Déterminer les variances $V(X)$ et $V(Y)$ respectives des caractères X et Y.
3. Ecrire l'équation de la droite de régression de Y par rapport à X.

Exercice 9

Les caractères x et y d'une série statistique double sont distribués suivant le tableau ci-dessous

x \ y	-2	-1	3
-1	2	3	1
a	1	2	1

a étant un entier naturel non nul.

1. Déterminer a pour que le point moyen G ait pour coordonnées $\left(-\frac{1}{5}; -\frac{1}{2}\right)$
2. Dans la suite on prendra $a = 1$.
   a) Calculer la covariance de cette série statistique.
   b) Calculer les variances $V(x)$ et $V(y)$.
   c) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y.
   d) Calculer I_A l'inertie du nuage par rapport au point $A(1; 1)$.

Exercice 10

Le nombre de jouet qu'un enfant peut utiliser est fonction de son âge. Le tableau ci-dessus donne la distribution de deux caractères numériques X et Y représentant respectivement l'âge (en an) et le nombre de jouets d'un enfant. En moyenne, un enfant de 7 ans utilise 21 jouets.

X	2	4	6	8	x_5	12
Y	2	y_2	8	16	32	64

1. a) Déterminer par calcul les valeurs de x_5 et y_2

b) On admet que $x_5 = 10$ et $y_2 = 4$. Calculer la variance de X à 10^{-1} près.

2. On note (Δ) la droite de régression de Y en X de pente égale à 5,7.
   a) Déterminer une équation cartésienne de (Δ).
   b) En déduire l'âge d'un enfant possédant 83 jouets.

Exercice 11

On considère la série statistique double suivante :

y_i \ x_i	$[0;6[$	$[6;12[$	$[12;18[$
$[0;4[$	2	4	3
$[4;8[$	1	2	2
$[8;12[$	3	4	0

Où x_i représente la note des Mathématiques et y_j celle des Sciences physiques.

1- Donner les deux séries marginales.

2- Calculer les coordonnées du point moyen $G(\bar{X};\bar{Y})$.

3- a) Déterminer la droite de régression de y en x.

b) Estimer la note de Sciences physiques si $x = 10$.

Exercice 12

En prévision d'un grand marché, une entreprise décide de soumettre à un groupe d'expert l'évolution de son chiffre d'affaires à l'exportation. Les données sont les suivantes :

Année	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
y_i	100	102	113	125	133	141	147	152

x_i désigne le rang de l'année et y_i l'indice du chiffre d'affaire à l'exportation rapporté à la base 100 en 2023.

1. Représenter graphiquement le nuage de points $M(x_i;y_i)$ dans un plan muni d'un repère orthogonal ; on prendra pour origine le point $M_0(0;100)$, pour unité sur l'axe des abscisses 2cm et 2cm en ordonnées pour 10 points d'indice.
2. Calculer les coordonnées du point moyen $G(\bar{x};\bar{y})$.
3. Calculer la variance de x.
4. a) Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x.
   b) Déterminer la prévision pour l'année 2025.

Exercice 13

Le tableau à double entrée ci-dessous présente les résultats d'une étude faite sur un échantillon des ménages d'une ville.

Les X et Y sont respectivement les revenus et épargnes mensuels de ces ménages : X et Y sont en milliers de francs cfa.

X \ Y	45	75	125
14	4	24	2
25	4	36	0
40	0	12	18

1. Calculer le revenu moyen et l'épargne moyenne.
2. Calculer les variances de X et de Y puis déduire l'inertie minimale.
3. a) Déterminer l'équation de la droite (D) de régression qui permet d'estimer le revenu mensuel à partir de l'épargne mensuelle.

b) En déduire une estimation du revenu mensuel d'un ménage ayant réalisé une épargne mensuelle de 50 000f cfa

4. Calculer le coefficient de corrélation linéaire r, puis interpréter le résultat.

Exercice 14

Une entreprise lance sur le marché, des jeux électriques.

Le tableau suivant donne sa production annuelle x (en centaine de milliers) et son résultat net y (en milliard de francs CFA).

Production x_i	2	4	16	20	38
Résultats y_i	0,03	0,14	1,98	3	11

Un ajustement affine ne semblant pas le mieux approprié, on pose $U_i = lnx_i$ et $V_i = lny_i$ et on donne le tableau suivant :

U_i	0,69	1,39	2,77	3	3,64
V_i	$-3,5$	$-1,97$	0,68	1,10	2,40

1. a) Définir le point moyen G d'un nuage de points d'une série statistique.

   b) Calculer les coordonnées du point moyen $G(\overline{U};\overline{V})$

2. a) Déterminer une équation de la droite de régression de V en U par méthode des moindres carrés.

   b) En déduire une équation de y en fonction de x

   c) Déterminer une prévision du résultat net pour une production de 40 centaines de milliers de jeux.

INTEGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE

Exercice 1

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\frac{1}{2}(lnx)^2$

1. Calculer la dérivée g' de g
2. Calculer la primitive de la fonction f sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{x}lnx$
3. En déduire la primitive de f pour $x=e$ et $F(e)=0$.

Exercice 2

Calculer chacune des intégrales suivantes :

$$I=\int_0^1 (x^3-x+2)dx\ ;\ J=\int_0^{e^2}\frac{dx}{x}\ ;\ K=\int_0^1 3xe^{x^2}dx$$

$$L=\int_0^1 \frac{-x}{\sqrt{3+2x^2}}dx\ ;\ M=\int_1^3 \frac{x-1}{(x^2-2x+2)^2}dx$$

Exercice 3

1. Trouver les réels a, b et c tels que : $\frac{2x^2-x+1}{x+2}=ax+b+\frac{c}{x+2}$ puis calculer

$$I=\int_0^2 \frac{2x^2-x+1}{x+2}dx$$

2. Déterminer les réels a et b tels que : $\frac{x+2}{(x+1)^4}=\frac{a}{(x+1)^3}+\frac{b}{(x+1)^4}$ puis calculer

$$J=\int_1^3 \frac{x+2}{(x+1)^4}dx$$

3. A l'aide de deux intégrations par parties successives, calculer

$$I=\int_1^e x(1-lnx)dx\ \ et\ J=\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2x}cos2xdx$$

4. On donne :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^x cos^2xdx\ \ et\ J=\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^x sin^2xdx$$

   a) Calculer $I+J$ et $I-J$
   b) En déduire les valeurs de I et J.

Exercice 4

Soit la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{-1+lnx}{x}-2(x-e)$ et $(D): y=-2(x-e)$ son asymptote oblique.

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. Unité graphique : 2 cm.

Calculer l'aire de la partie du plan qui délimite la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite (D), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$

Exercice 5

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2e^{-x-1} + x^2 - 3$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. Unité graphique 2cm.

Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 du domaine plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$

Exercice 6

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x + 2e^{-x} + x$.

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. Soit λ un réel strictement positif.

a) Calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ du domaine plan limités par la courbe $\mathcal{C}$ et les droites Δ , D_1 et D_2 d'équation respectives $y = x$; $x = 0$ et $x = \lambda$
b) Calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers l'infini.

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ d'unité graphique : 2 cm

1. A partir d'une intégration par parties, déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$
2. En déduire, en cm^2, l'aire A du domaine délimité par les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$, les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$. Où $(\mathcal{C}')$ est la courbe de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = -f(x)$

Exercice 8

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x - 2)e^{-x}$ et on désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. Unité graphique : 2cm.

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = (ax + b)e^{-x}$

1. Déterminer les nombres réels a et b pour que F soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$
2. Calculer en cm^2, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$

Exercice 9

1. Démontrer que, pour tout réel x : $\frac{e^{2x}}{1+e^x} = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}$
2. Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$
3. Soit la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = ln(1+e^x)$
   a) Calculer la dérivée f' de la fonction f.
   b) En déduire à l'aide d'une intégration par parties, la valeur exacte de $J = \int_0^1 e^x ln(1+e^x)\, dx$

Exercice 10

En utilisant l'intégration par parties, calculer :
1. Les intégrales I_1 et I_2 telles que : $I_1 = \int_1^e xlnxdx$ et $I_2 = \int_1^e x(lnx)^2 dx$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_1^e x(lnx)^n dx$

Démontrer, pour $n \geq 2$ l'égalité $I_n = \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2} I_{n-1}$

3. Calculer I_4

Exercice 11

On pose, pour tout nombre entier naturel n non nul : $I_n = \int_1^e x^2(lnx)^n dx$, où ln désigne la fonction logarithme népérien et $I_0 = \int_1^e x^2 dx$.
1. Calculer I_0
2. En utilisant une intégration par parties, calculer I_1
3. En utilisant une intégration par partie, démontrer que pour tout nombre entier naturel n non nul : $3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3$. En déduire la valeur de I_2

Exercice 12

Pour tout entier naturel n, on définit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} sinxdx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} cosxdx$
1. Calculer I_0 et J_0
2. En intégrant par partie I_n puis J_n, montrer que $\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + I_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases}$
3. En déduire les expressions de I_n et J_n en fonction de n
4. Déterminer la limite de I_n et celle de J_n quand n tends vers $+\infty$.

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ et soit F la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par : $F(x) = \int_1^x f(t)\, dt$.

1- Justifier que f et F sont bien définies sur $[1; +\infty[$.

2- Que représente F pour f ?

3- Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Donner une interprétation graphique du nombre $F(3)$.

4- On se propose dans cette question, de donner un encadrement du nombre $F(3)$.

a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\frac{x}{e^x-1} = x\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$

b) En déduire que $F(3) = 3ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right) - ln\left(1-\frac{1}{e}\right) - \int_1^3 ln(1-e^{-x})\,dx$.

c) Montrer que si $1 \leq x \leq 3$ alors $ln\left(1-\frac{1}{e}\right) \leq ln(1-e^{-x}) \leq ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right)$

d) En déduire un encadrement de $\int_1^3 ln(1-e^{x})\,dx$ puis de $F(3)$.

Exercice 14

Sur $I = [0;+\infty[$, on définit la fonction F par : $F(x) = \int_0^{2x} e^{-\frac{1}{t+1}}dt$

1. a) Prouver que la fonction : $h : x \longmapsto e^{-\frac{1}{x+1}}$ admet sur I une primitive notée G que l'on ne déterminera pas.

   b) En déduire que : $\forall\, x \in I,\ F'(x) = [G(2x)]'$

   c) Montrer que $\forall\, x \in I,\ F'(x) = 2e^{-\frac{1}{2x+1}}$

2. Ecrire l'équation cartésienne de la tangente T à la courbe $(\mathcal{C})$ de la fonction F au point d'abscisse 0.

3. a) Montrer que : $\forall t \geq 0\,, e^{-\frac{1}{t+1}} \geq e^{-1}$

   b) Montrer que $\forall x \in I\,, F(x) \geq 2xe^{-1}$

   c) En déduire le calcul de $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

4. a) Dresser le tableau de variation de F.

   b) On admet que la courbe $(\mathcal{C})$ a une branche parabolique de direction l'axe des abscisses du repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.

Exercice 15

On considère la suite $(I_n)_{\forall n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2}dx$.

On pose $g_n(x) = x^n e^{x^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$,$\forall x \in \mathbb{R}$.

1. a) Démontrer que la fonction G_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $G_1(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction g_1.

   b) En déduire le calcul de I_1.

   c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$, on pose $h_n(x) = x^n$.

   Montrer que $(h_{n+1} \times G_1)'(x) = g_{n+2}(x) + \frac{n+1}{2}g_n(x)$.

   d) En déduire que $\forall n \geq 1$, on a : $I_{n+2} = \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}I_n$

   e) Calculer I_3 et I_5.

2. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ I_n \geq 0$.

b) Montrer que la suite I_n est décroissante.

c) En déduire que la suite I_n est convergente.

Exercice 16

1. On considère la suite (K_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par $K_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$.
   a) Montrer que $K_1 = \frac{1}{2} ln2$.
   b) Vérifier que pour tout entier $n \geq 1$, $K_{n+2} + K_n = \frac{1}{n+1}$.
   c) En déduire la valeur de K_3.
   d) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $0 \leq K_n \leq \frac{1}{n+1}$
   e) Calculer $\lim_{n\to+\infty} K_n$.
2. Soit la suite (P_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par $P_n = \int_0^1 x^n ln(1 + x^2)\, dx$
   a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $P_n = \frac{ln2}{n+1} - \frac{2}{n+1} K_{n+2}$
   b) Calculer $\lim_{n\to+\infty} P_n$ et $\lim_{n\to+\infty} nP_n$
3. Soit la suite (I_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par $I_n = \int_0^1 (1 + x)^n\, dx$.
   a) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $(n + 2)I_{n+1} - (n + 1)I_n = 2^{n+1}$
   b) En déduire I_n.

Exercice 17

Partie A

Soit f la fonction définie par $f(x) = xe^{\frac{-x}{2}}$

Démontrer que $\forall\, x > 0,\ 0 < f(x) < 1$

En déduire que, $\forall\, x > 0,\ 0 < xe^{x/2} < e^x$

Partie B

On considère la fonction F définie par : $F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$, $x \in \mathbb{R}_+^*$

1. Soit h la fonction définie par : $h(x) = F(x) - lnx$
   a) –Montrer que $h(x) = \int_1^x \frac{e^t - 1}{t} dt$
   b) –Etudier le signe de h (on distinguera les cas $x \in]0; 1]$ et $\in [1; +\infty[$).
   c) –En déduire $\lim_{x\to0^+} F(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.
2. a) –Etudier les variations de F
   b) –Démontrer que la courbe $(\mathcal{C})$ de F admet un point d'inflexion A dont on précisera les coordonnées.
   c) –Etudier les branches infinies de $(\mathcal{C})$
   d) –Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Exercice 1

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :
   a) $y'' = x + \frac{1}{x^2}$
   b) $y'' = 2sin^2x$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $(E): 2y'' - 5y' + 3y = 0$
3. Déterminer la solution f telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = -2$

Exercice 2

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'' - 2y' - 3y = 0$, vérifiant $f(0) = 3$ et $f'(0) = 1$
b) $4y'' - 4y' + y = 0$, vérifiant $g(0) = 4$ et $g'(0) = 2$
c) $y'' + \pi^2 y = 0$, $y = h(x)$ est une fonction impaire et $h\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

Exercice 3

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E) : y'' + 2y' + y = 0$
2. Déterminer la solution particulière h de (E) dont la courbe passe par le point $A(0; -2)$ et admet en ce point une tangente (T) d'équation $y = 3x - 2$.

Exercice 4

On donne l'équation différentielle $(E) : y'' + 4y' + 4y = 0$, où y est la fonction inconnue.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle (E)
2. Déterminer la solution particulière h de (E) dont la courbe représentative passe par le point $A(0; 1)$ et admet en ce point, une tangente de pente -1.

Exercice 5

On considère l'équation différentielle $(E) : y' + 3y = -x + 5$

a) Déterminer la solution particulière de (E)
b) Résoudre l'équation différentielle $(E') : y' + 3y = 0$
c) En déduire les solutions de (E)

Exercice 6

On considère l'équation différentielle $(E) : y'' - y = 4xe^x$

1. Déterminer les réels a et b pour que la fonction $g(x) = (ax^2 + bx)e^x$ soit solution de (E)

2. Vérifier qu'une fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) équivaut à $f-g$ est solution de l'équation $(E') : y''-y=0$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$, (E') puis en déduire la solution générale de (E)

Exercice 7

On considère l'équation différentielle $(E) : y'-y=2cosx$

a) Montrer que la fonction g définie par : $g(x)=-cosx+sinx$ est solution de (E).
b) Démontrer que φ est solution de (E) si et seulement si $f=\varphi-g$ est solution de $(E') : y'-y=0$
c) En déduire les solutions de (E)

Exercice 8

On considère une équation différentielle $(E): y''+2y'+y=0$
1. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E)
2. Déterminer la fonction f solution de (E) dont la courbe admet au point $A(1;0)$ une tangente de pente $\frac{1}{e}$
3. Calculer $I=\int_0^1 (x-1)e^{-x}dx$

Exercice 9

Soit à résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation $(E_1) : y''-2y'+5y=e^{-2x}$

a) Déterminer le nombre réel m tel que la fonction g définie par $g(x)=me^{-2x}$ soit solution de (E_1)
b) Démontrer que $f+g$ est solution de (E_1) si et seulement si f est solution de $(E_2) : y''-2y'+5y=0$. Résoudre (E_2)
c) En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_1) vérifiant $h(0)=1$ et $h'(0)=0$

Exercice 10

Soit l'équation différentielle (E) définie par : $y''-ay'+by=0$
Déterminer les réels a et b pour que (E) admette pour solution générale des fonctions de la forme $f(x)=Ae^{2x}+Be^{3x}$ avec $(A,B)\in\mathbb{R}^2$
Après avoir déterminé les réels a et b ; trouver la solution particulière f de l'équation (E) sachant que la courbe de f admet une tangente au point $A(0;1)$ perpendiculaire à la droite d'équation $y=-x$

Exercice 11

1. Intégrer l'équation différentielle : $y''+2y'+5y=0$ (E)

2. Déterminer la solution f de (E) dont la courbe représentative admet au point $I(0;1)$ une tangente parallèle à la droite d'équation $y=-x+2$

3. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=-\frac{1}{5}[f'(x)+2f(x)]$

   a) Montrer que F est une primitive de f $\mathbb{R}$
   b) Expliciter $F(x)$
   c) En déduire l'intégrale $I=\int_0^{\pi} f(t)dt$.

Exercice 12

On considère l'équation différentielle $(E) : y''+4y=3sinx$

1. Déterminer le réel α pour que la fonction g définie par $g(x)=\alpha sinx$ soit une solution de (E)

2. Démontrer qu'une fonction f, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $f-g$ est solution de l'équation $(E') : y''+4y=0$

3. Résoudre l'équation différentielle (E') et en déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E)

4. Trouver la solution de (E) vérifiant les conditions $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ et $f'(\pi)=0$.

Exercice 13

On considère l'équation différentielle (E): $9y''+y=0$.

1. Intègrer l'équation différentielle (E) et détermine une solution particulière $f$qui prend la valeur 1 pour $x=0$ et dont la dérivée est égale à $\frac{1}{3}$ pour $x=0$.

2. Montrer que pour tout réel $x, f(x)=Acos(\omega x+\varphi)$ où $A>0, \omega\ et\ \varphi$ sont des constantes réelles à déterminer.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $cos\frac{x}{3}+sin\frac{x}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 14

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E) : y''+\frac{1}{9}y=0$.

2. Trouver la fonction f solution particulière de (E) : vérifiant $f(0)=-\sqrt{3}$ et $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=1$.

3. Trouver les réels r et ω strictement positif et $\varphi\in]-\pi;\pi[$ tel que : $f(x)=rcos(\omega x+\varphi)$.

4. Trouver la solution g de (E) vérifiant $g(0)=2$ et $g\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$.

5. Résoudre l'équation $f(x)=g(x)$.

Exercice 15

On se propose de résoudre l'équation différentielle $(E) : y'' + 4y = 3cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

1. Résoudre l'équation différentielle $(E') : y'' + 4y = 0$.

2. Déterminer les réels a et b tels que la fonction G définie par :
$G(x) = axcos\left(2x + \frac{\pi}{4} + b\right)$ soit solution de (E), avec $a > 0$ et $b < 0$.

3. H désignant une solution quelconque de (E'), montrer que la fonction f telle que :
$f(x) = G(x) + H(x)$ est une solution de l'équation (E).

4. Déterminer alors parmi les solutions f de (E), celle qui vérifie :
$f(0) = 2023$ et $f'(0) = 1973$.

PROBABILITES

Exercice 1

Une urne contient 1 boule blanche et deux boules noires, toutes les boules sont indiscernables au toucher. On tire successivement avec remise trois boules de l'urne. On considère la variable aléatoire réelle X égale au nombre de boules blanches tirées.

1. Qu'appelle-t-on loi binomiale ?
2. Déterminer l'ensemble de valeurs prises par X
3. Donner la loi de probabilité de X
4. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X
5. Calculer la variance $V(X)$ de X.

Exercice 2

Un sondage effectué dans une région montagneuse à propos de la construction d'un barrage donne les résultats suivants :

65% des personnes interrogées sont contre la construction de ce barrage.

Parmi les personnes qui sont contre cette construction, 70% sont des écologistes ;

Parmi les personnes favorables à la construction, 30% sont des écologistes.

On note C l'évènement « la personne interrogée est contre la construction » et $\bar{C}$ l'événement contraire.

On note E l'évènement « la personne interrogée est écologiste »

1. Construire l'arbre pondéré ou l'arbre de probabilité.
2. Calculer les probabilités : $P(C)$; $P(E/C)$; $P(C/E)$

Exercice 3

Un éleveur a dans son enclos 3 moutons et 5 chèvres. Pour célébrer le retour de sa deuxième épouse du pèlerinage, il décide d'abattre au hasard quatre de ses bêtes. Soit A l'événement « on a tué au moins 2 moutons » et on note par $p(A)$ la probabilité de l'événement A.

1. Calculer la probabilité $p(A)$ de l'événement A.
2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de moutons tués.
   a) Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.
   b) Déterminer la loi de probabilité de X.
   c) Calculer l'espérance mathématique de X notée $E(X)$.
3. Déterminer la fonction de répartition $F(x)$.

Exercice 4

$(E, \mathcal{P}(E), p)$ désigne un espace probabilisé fini et X désigne une variable aléatoire sur E dont la fonction de répartition F est la suivante :

$$\begin{cases} F(x) = 0, si\ x < -1 \\ F(x) = \frac{5}{15}, si -1 \leq x < 0 \\ F(x) = \frac{6}{15}\ , si\ 0 \leq x < 2 \\ F(x) = 1, si\ x \geq 2 \end{cases}$$

1. a) Déterminer les valeurs prises par X

   b) Donner la loi de probabilité de X

   c) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

2. Représenter graphiquement la fonction F.

Exercice 5

Une urne contient deux boules blanches numérotées 1 et 2, et trois boules rouges numérotées 1 ; 2 et 2. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1. On tire simultanément deux boules de l'urne.
   a) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
      A « tirer deux boules de couleurs différentes »
      B « tirer deux boules de même numéro »
   b) Sachant que les deux boules tirées sont de couleurs différentes, calculer la probabilité qu'elles portent le même numéro.
2. Dans cette question, l'épreuve consiste à tirer successivement et sans remise deux boules de l'urne. Soit X la variable aléatoire qui est égal au nombre des boules rouges tirées au cours de cette épreuve.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X
   b) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$

Exercice 6

Une urne contient des boules indiscernables au toucher. 20% des boules portent le numéro 1 et sont rouges. Les autres portent le numéro 2 et parmi elles, 10% sont rouges et les autres sont vertes.

1. On tire une boule au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?
2. On a tiré une boule au hasard. Elle est rouge. Montrer que la probabilité qu'elle porte le numéro 2 est égale à $\frac{2}{7}$
3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise (après chaque tirage, la boule est remise dans l'urne)

a) Exprimer en fonction de n la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages
b) Déterminer l'entier n à partir duquel la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages est supérieure ou égale à 0,99

Exercice 7

Une urne contient une boule rouge, une boule blanche et deux noires. Toutes les boules sont indiscernables au toucher. On extrait successivement deux boules de l'urne selon les modalités suivantes :
-Si la première boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne avant d'effectuer le second tirage,
-Si la première boule tirée est blanche ou noire, on ne la remet pas dans l'urne avant d'effectuer le second tirage.
On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges extraites à l'issue des deux tirages.
1. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.
2. Calculer :
   a) La probabilité d'obtenir 2 boules de même couleur.
   b) La probabilité d'obtenir au moins une boule rouge.
3. Sachant que $(X \geq 1)$, quelle est la probabilité qu'une boule rouge ait été obtenue au premier tirage ?

Exercice 8

Un jeu consiste à choisir un joueur, qui à son tour, tire simultanément deux boules d'un sac contenant 3 boules blanches et 2 boules noires indiscernable au toucher. Le joueur gagne s'il obtient des boules indiscernables au toucher. Le joueur gagne s'il obtient des boules de couleurs différentes. On admet que 20% des joueurs sont des tricheurs et la probabilité qu'un tricheur gagne est de $\frac{4}{5}$. On note :
T : l'événement « le joueur est un tricheur »
G : l'événement « le joueur gagne »
1. Montrer que $P_{\bar{T}}(G) = \frac{3}{5}$.
2. Représenter par un arbre de probabilité les données de l'énoncé.
3. Calculer $P(G \cap T)$ et $P(G \cap \bar{T})$.
4. En déduire $P(G)$
5. Le joueur a gagné. Quelle est la probabilité que celui-ci soit un tricheur ?

Exercice 9

Dans une classe de terminale scientifique de 20 élèves, 8 élèves s'intéressent aux Mathématiques, 10 aux SVT et 3 s'intéressent aux deux disciplines.
On choisit un élève au hasard et on note M et S les événements ci-après :

- M : « l'élève s'intéresse aux Mathématiques »
- S : « l'élève s'intéresse aux SVT »

1. Calculer la probabilité qu'il s'intéresse au moins à l'une des deux disciplines.
2. a) Traduire l'événement : $E = \overline{M} \cup \bar{S}$.
   b) Calculer la probabilité de l'événement E.
3. Recopie puis compléter le tableau à double entrée ci-contre :

	M	$\overline{M}$	Total
S	3		10
$\bar{S}$			
Total	8		20

4. L'élève s'intéresse aux SVT.
Quelle est la probabilité qu'il ne s'intéresse pas aux Mathématiques ?

Exercice 10

Un pays africain est candidat à l'organisation de la CAN 2025.
A cet effet, on veut construire un stade moderne dans une zone forestière. Un sondage à propos de cette construction donne les résultats suivants :

- 60% des personnes interrogées sont contre la construction de ce stade.
- Parmi les personnes qui sont contre la construction de ce stade, 70% sont des écologistes luttant contre le réchauffement climatique.
- Parmi celles qui sont pour la construction de ce stade, 20% sont des écologistes.

  On considère les événements suivants :
  C : « la personne interrogée est contre la construction de ce stade »
  E : « la personne interrogée est écologiste »

1. Calculer les probabilités suivantes : $P(C)$; $P_C(E)$; $P_{\bar{C}}(E)$
(On pourra utiliser un arbre pondéré pour le calcul de certaines probabilités)
2. Soit l'événement A : « la personne interrogée est contre la construction du stade et est écologiste ». Calculer $P(A)$
3. Soit l'événement B : « la personne interrogée est pour la construction et est écologiste ». Calculer $P(B)$.
4. Montrer que $P(E) = 0{,}5$

Exercice 11

Dans un établissement scolaire de 2000 élèves : 40% des élèves sont des filles ; 15% des filles sont internes ; 61% des élèves, parmi lesquels 780 garçons, sont externes ; la moitié des demi-pensionnaires sont des filles.

1) Compléter le tableau ci-dessous :

	Internes	Demi-pensionnaire	Externes	Total
Filles				
Garçons				
Total				2000

2) On choisit au hasard un élève de cet établissement : On note :

F : '' l'élève est une fille'' ;

G : '' l'élève est un garçon'' ; I : '' l'élève est interne'' ; E : '' l'élève est externe''.

a) Déterminer les probabilités : $P(F)$, $P_F(I)$.

b) Calculer $P_I(F)$ et comparer avec $P(F)$, puis conclure.

c) Vérifier que $P(F \cap I) = P(F) \times P(I)$ et que $P(I) = P_F(I)$.

d) Déterminer les probabilités suivantes : $P(G)$ et $P(E)$.

Exercice 12

Un artiste propose le jeu suivant :

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, indiscernable au toucher. Le joueur tire au hasard une boule de l'urne. Si elle est noire, il remet dans l'urne et l'artiste ajoute une boule noire identique. Le joueur recommence de la même façon jusqu'à ce qu'il tire la boule blanche.

Lorsqu'il obtient une boule blanche, le jeu s'arrête et le joueur gagne un lot.

Pour tout entier n non nul, on note les événements suivants :

B_n « le joueur a tiré la boule blanche au n-ième tirage »,

N_n « le joueur a tiré la boule noire au n-ième tirage ».

1. On donne $P(N_1) = \frac{1}{2}$. Déterminer la probabilité $P(B_1)$.

2. Sachant qu'au premier tirage le joueur a tiré une boule noire, montrer que $P_{N_1}(N_2) = \frac{2}{3}$

3. La probabilité que le joueur tire une boule blanche au deuxième tirage est $P_{N_1}(B_2) = \frac{1}{3}$

   a) Montrer que $P(N_1 \cap B_2) = \frac{1}{6}$.

   b) Déterminer la probabilité $P(N_1 \cap N_2)$.

4. a) La probabilité que le joueur tire trois fois de suite une boule noire est $P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = \frac{1}{4}$. Montrer alors que $P_{N_1 \cap N_2}(N_3) = \frac{3}{4}$.

b) Déterminer la probabilité p que le joueur gagne un lot au troisième tirage.

Exercice 13

Kevin possède un lecteur MP4, dans lequel il a stocker 90 morceaux de rumba et 110 morceaux de couper-décaler. Un tiers des 90 morceaux de rumba est composé par des auteurs congolais. Un dixième des 110 morceaux de couper-décaler est composé par des auteurs congolais.

1. Afin d'écouter un morceau de musique, Kevin lance une lecture aléatoire sur son lecteur MP4. On admet que cela revient à choisir un morceau de musique de manière équiprobable. On note :

R l'événement « le morceau de musique écouté est un morceau de rumba » ;
D l'événement « le morceau de musique écouté est un morceau de couper-décaler »
C l'événement « l'auteur du morceau de musique écouté est un congolais »

a) Quelle est la probabilité que le morceau de musique écouté par Kevin soit un morceau de rumba ?
b) Sachant que Kevin a écouté un morceau de rumba, quelle est la probabilité que l'auteur soit congolais ?
c) Calculer la probabilité que le morceau de musique écouté par Kevin soit un morceau de rumba composé par un auteur congolais »
d) Quelle est la probabilité que le morceau de musique écouté par Kevin soit composé par un auteur congolais ? »

2. Afin d'écouter trois morceaux de musique, Kevin lance trois fois une lecture aléatoire sur son lecteur MP4. Calculer la probabilité qu'il ait écouté au moins un morceau de rumba.

Exercice 14

Une compagnie d'assurance automobile fait le bilan des frais d'interventions parmi ses dossiers d'accidents de la circulation.
85% des dossiers entraînent des frais de réparation matérielle.
20% des dossiers entraînent des frais de dommages corporels.
Parmi les dossiers qui entraînent des frais de réparation matérielle, 12% entraînent des frais de dommage corporels.
Soit les événements suivants :
R : « le dossier traité entraîne des frais de réparation matérielle »
D : « le dossier traité entraîne des frais de dommages corporels »
On choisit un dossier au hasard.
Dans tout l'exercice, les résultats seront donnés sous forme décimale, arrondis au millième près.

1. Compléter le tableau suivant :

	R	$\bar{R}$	Total
D			
$\overline{D}$			
Total	85		100

2. Construire un arbre pondéré traduisant cette situation.
3. Calculer la probabilité pour qu'un dossier :
   a) Entraine des frais de réparation matérielle et des frais de dommages corporels.
   b) Entraine seulement des frais de réparation matérielle.
   c) Entraine seulement des frais de dommages corporels.
   d) N'entraine ni frais de réparation matérielle ni frais de dommages corporels.
   e) Entraine des frais de réparation matérielle sachant qu'il entraine des frais de dommages corporels.

Exercice 15

On dispose de deux urnes U et V :

U contient quatre boules portant les numéros : 0 ; 0 ;1 et 3 ;

V contient cinq boules portant les numéros : 8 ; 0 ; 5 ; 4 et 1.

1. On tire au hasard une boule de l'urne U et une boule de l'urne V. On considère les événements suivants :

M : « Les deux boules tirées portent les numéros pairs »

N : « Le produit des numéros portés par les deux boules tirées est égal à 0 »

Calculer les probabilités des événements M et N.

2. Dans cette question, on tire au hasard une boule de l'urne U :

Si la boule tirée porte le numéro 0, alors on tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne V.

Si la boule tirée ne porte pas le numéro 0, alors on tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne V.

On considère les événements suivants :

A : « La boule tirée de l'urne U porte le numéro 0 »

S : « La somme des numéros portés par les boules tirées de l'urne V est paire »

   a) Calculer les probabilités $P(S/A)$ et $P(S \cap A)$
   b) Montrer que $P(S \cap \bar{A}) = \frac{1}{5}$ et en déduire $P(S)$
   c) La somme des numéros portés par les boules tirées de l'urne V est paire. Calculer la probabilité que la boule tirée de l'urne ne porte pas le numéro 0.

Exercice 16

I/ Une mutuelle de 15 hommes et 10 femmes désire mettre en place un bureau de 4 membres : un président, vice-président, secrétaire et un trésorier. Le cumul de mandat n'est pas autorisé et tous les mutualistes ont autant de chance d'être éligible.

1. Déterminer :
   a) Le nombre total de bureaux possibles.
   b) Le nombre de bureaux composés uniquement des hommes.

2. Quelle est la probabilité d'élire au moins une femme parmi les 4 membres du bureau ?

II/ 1. Définir les expressions suivantes : a) épreuve de Bernoulli ;
b) loi binomiale.

2. X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale. Voici le tableau qui résume cette loi.

k	0	1	2	3
$p(X = k)$	$\frac{27}{125}$			$\frac{8}{125}$

a) Retrouver les paramètres n et p de la loi.
b) Recopier et compléter le tableau.

Exercice 17

A/ Un examinateur doit interroger dans un certain ordre, quatre candidats : Aicha, Béni, Cardy et Divin. Il doit donc établir une liste ordonnée de quatre noms.

1. Déterminer le nombre de listes possibles.
2. On suppose que l'examinateur tire une liste ordonnée des quatre noms au hasard, chaque liste possible ayant la même probabilité.

Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :

E : « Béni est interrogé en premier »

F : « Cardy est interrogé en dernier »

B/ Le nombre de clients se présentant en cinq minutes dans une station-service est une variable aléatoire X dont on donne la loi de probabilité :

i	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,1	0,5	0,4

1. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X
2. Dans cette station-service, la probabilité qu'un client achète de l'essence est 0,7 et celle qu'il achète le gas-oil est 0,3. Son choix est indépendant de celui des autres clients. On considère des évènements suivants :

C_1 : « En cinq minutes, un seul client se présente »
C_2 : « En cinq minutes, deux clients se présentent »
E : « En cinq minutes, un seul client achète l'essence »

a) Montrer que $P(E/C_2) = 0{,}42$ et calculer $P(C_2 \cap E)$.
b) Déterminer la probabilité qu'en cinq minutes un seul client achète l'essence.

Exercice 18

Une étude statistique effectuée sur les jeunes d'un pays a donné les résultats suivants :

- 45% sont des filles et 55% sont des garçons.
- Parmi les filles, 90% ont terminé leurs études supérieures.
- Parmi les garçons, 80% ont terminé leurs études supérieures.

On choisit une personne au hasard. On note les événements suivants :
F : « la personne choisie est une fille »
G : « la personne choisie est un garçon »
S : « la personne choisie a terminé ses études supérieures »
1. Construire un arbre de probabilité modélisant ces résultats.
2. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : « la personne choisie est un garçon qui a terminé ses études supérieures »
B : « la personne choisie est une fille qui n'a pas terminé ses études supérieures »
3. Montrer que $P(S) = 0{,}845$.
4. Quelle est la probabilité que la personne choisie est un garçon sachant qu'il a terminé ses études supérieures ?
5. On interroge indépendamment 5 personnes. Quelle est la probabilité :
   a) D'interroger au plus 2 personnes qui ont terminé leurs études supérieures ?
   b) D'interroger au moins une personne qui a terminé ses études supérieures ?

Exercice 19

On dispose de deux dés en apparence identiques dont l'un est parfait et l'autre est truqué. Les faces de chacun sont numérotés de 1 à 6.
Avec le dé truqué, la probabilité d'obtenir la face portant le chiffre 4 lors d'un lancer est égale à $\frac{1}{3}$.
1. a) Qu'est-ce que la loi binomiale ?
   b) On lance le dé parfait trois fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de fois où la face portant le chiffre 4 apparaît. Quelle est la loi de probabilité de X ?
   c) On lance le dé truqué trois fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir

exactement deux fois la face portant le chiffre 4 ?

2. On choisit au hasard l'un des deux dés ; les choix étant équiprobables, et on lance trois fois de suite. On considère les événements suivants :

A : « Obtenir exactement deux fois la face portant le chiffre 4 »

B : « Choisir le dé truqué et obtenir exactement deux fois la face portant le chiffre 4 »

C : « Choisir le dé parfait et obtenir exactement deux fois la face portant le chiffre 4 »

a) Calculer la probabilité de B.

b) Calculer la probabilité de C.

c) En déduire la probabilité de A.

Exercice 20

Une urne contient quatre jetons marqués respectivement 1 ; 2 ; 3 et $m \in \mathbb{R}^*$.

On tire au hasard un jeton dans l'urne. On note P_1 ; P_2 ; P_3 et P_m les probabilités de tirer le jeton marqué 1 ; 2 ; 3 et m.

P_1 ; P_2 ; P_3 et P_m constituent dans cet ordre une suite arithmétique de raison $\frac{1}{8}$

1. Montrer que $P_1 = \frac{1}{16}$, puis calculer P_2 ; P_3 et P_m.

2. On définit la variable aléatoire X qui à chaque tirage d'un jeton associe le double de son numéro.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X en fonction de m.

c) Déterminer la valeur de m pour laquelle l'espérance mathématique de la variable X est égale à 7,125

Exercice 21

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ d'unité graphique $||\vec{\imath}|| = ||\vec{\jmath}|| = 1\ cm$. On place une puce à l'origine O de ce repère qui effectue cinq sauts consécutifs d'un centimètre chacun de l'avant sans recul, soit parallèlement à l'axe (Ox) des abscisses de probabilité $\frac{2}{3}$ soit parallèlement à l'axe (Oy) des ordonnées de probabilité $\frac{1}{3}$.

1. Calculer la probabilité pour que cette puce partant de l'origine du repère se retrouve au point A de coordonnées $(3\ ;\ 2)$ au cinquième saut.

2. On considère la variable aléatoire réelle X égale au nombre de sauts effectués parallèlement à l'axe (Ox) des abscisses pendant cette épreuve.

a) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

COURBES PARAMETREES

Exercice 1

On considère dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, la courbe paramétrée (Γ) dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x(t) = 2cos3t \\ y(t) = 3sin2t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

1. Définir la fonction vectorielle F associée à (Γ)
2. Montrer que F est périodique, de période 2π
3. Comparer $M(t)$ et $M(-t)$. En déduire que l'on peut restreindre le domaine d'étude à l'intervalle $I = [0;\pi]$
4. Etudier les variations de la fonction x sur I.
5. Etudier les variations de la fonction y sur I.
6. Dresser le tableau conjoint des variations de x et y sur I.
7. Tracer (Γ).

Exercice 2

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ d'unité graphique 3 cm, on considère la courbe $(\mathcal{C})$, ensemble de points $M(t)$, dont les coordonnées x et y sont définies par : $\begin{cases} x(t) = sin2t \\ y(t) = cost \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

On admet que la fonction vectorielle F associée à $(\mathcal{C})$ est périodique, de période $T = 2\pi$

1. a) Par quelle isométrie $M(-t)$ se déduit-il de $M(t)$?
   b) Par quelle isométrie $M(\pi - t)$ se déduit-il de $M(t)$?
2. En déduire que l'ensemble d'étude de F peut se réduire à $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$
3. Etudier les variations de x sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$
4. Etudier les variations de y sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
5. En déduire le tableau récapitulatif des variations de x et y sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
6. Tracer $(\mathcal{C})$.

Exercice 3

Le plan est muni à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ (unité graphique 2cm). Soit $(\mathcal{C})$ la courbe définie par le système d'équations paramétriques : $\begin{cases} x(t) = sin^3t \\ y(t) = cos3t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$

1. Montrer que les fonctions x et y ont pour période commune 2π.
2. Comparer les points $M(t)$ et $M(-t)$ ainsi que $M(t)$ et $M(\pi - t)$. En déduire les axes de symétrie de $(\mathcal{C})$.

3. Justifier que l'étude des fonctions x et y peut se faire sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
4. Calculer les dérivées $x'(t)$ et $y'(t)$.
5. Vérifier que : $x'(t) \geq 0$ si $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et $y'(t) \geq 0$ si $t \in \left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$
6. Dresser le tableau de variations conjoint de x et y.
7. Montrer que la tangente au point M_0 de $(\mathcal{C})$ correspondant à $t = 0$ est parallèle à l'axe des ordonnées.
8. Représenter la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère.

Exercice 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique : 2cm. Soit (E) la courbe paramétrée définie par : $\begin{cases} x(t) = -t^3 + 3t \\ y(t) = tln\left(\frac{3+t}{3-t}\right) \end{cases}$, $t \in [-2; 2]$

1. Comparer $M(t)$ et $M(-t)$ pour $t \in [-2; 2]$ et en déduire que l'on peut restreindre le domaine d'étude de (E) à $[0; 2]$
2. Etudier le sens de variation de x puis dresser son tableau de variation sur $[0; 2]$
3. a) Montrer que pour tout $t \in [-2; 2]$, $ln\left(\frac{3+t}{3-t}\right) \geq 0$

   b) Etudier le sens de variation de y puis dresser son tableau de variation sur $[0; 2]$.
4. Dresser le tableau de variation conjoint de x et y sur $[0 ; 2]$
5. Tracer (E) sur $[-2; 2]$; sachant que (E) passe par le point $A\left(0; \sqrt{3}ln\left(2 + \sqrt{3}\right)\right)$

Exercice 5

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Soit $\mathcal{C}$ la courbe plane définie par : $\begin{cases} x(t) = e^t + e^{-t} = f(t) \\ y(t) = e^t - e^{-t} = g(t) \end{cases}$ Où t est un réel.

On note $M(t)$ le point de coordonnées $(x(t); y(t))$

1. Comparer d'une part $x(t)$ et $x(-t)$ et d'autre part $y(t)$ et $y(-t)$.
2. Par quelle transformation peut-on passer de $M(t)$ à $M(-t)$? En déduire que $\mathcal{C}$ admet un axe de symétrie que l'on précisera.
3. Etudier les variations des fonctions f et g sur $[0; +\infty[$
4. Dresser le tableau de variations conjointes des fonctions f et g sur $[0; +\infty[$
5. Pour quelle valeur de t l'ordonnée de $M(t)$ est nulle ? Préciser alors les coordonnées du point correspondant de $\mathcal{C}$
6. Déterminer l'équation cartésienne de la tangente à $\mathcal{C}$ au point de paramètre 0.
7. Tracer $\mathcal{C}$ sur $[0; +\infty[$. En supposant que $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses, achever la construction de $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{R}$.

EXERCICES D'ANALYSE

Exercice 1

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$. On admet que l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in]1;3[$.

1. Montrer que $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$, pour tout $x \in]1;3[$
2. Enoncer le théorème des accroissements finis.
3. Montrer que $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$
4. Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = g(U_n) \end{cases}$; $n \in \mathbb{N}$
   a) Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$; $1 < U_n < 3$
   b) En déduire que $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$
5. Montrer que $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et déduire $lim_{n\to+\infty} U_n$

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0;2]$ par : $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$

(U_n) et (V_n) sont deux suites numériques définies sur $\mathbb{N}$ par :

$U_0 = 1$ et pour tout entier $n, U_{n+1} = f(U_n)$

$V_0 = 2$ et pour tout entier $n, V_{n+1} = f(V_n)$

1. a) Etudier le sens de variation de f sur $[0;2]$
   b) Montrer alors que $\forall\, x \in [0;2],\ f(x) \in [0;2]$
2. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que :

$\forall\, n \in \mathbb{N}, 1 \leq V_n \leq 2\ \ (1)$

$\forall\, n \in \mathbb{N},\ V_{n+1} \leq V_n\ \ (2)$

On admet que :

$\forall\, n \in \mathbb{N}, 1 \leq U_n \leq 2\ \ (3)$

$\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_n \leq U_{n+1}\ \ \ (4)$

3. Les deux suites (U_n) et (V_n) sont telles que, pour tout entier , $V_n - U_n \geq 0$.
   a) Montrer que pour tout entier n : $V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{V_n - U_n}{(V_n+1)(U_n+1)}$
   b) En déduire que pour tout entier n: $V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{4}(V_n - U_n)$
   c) Montrer alors que pour tout entier n, $V_n - U_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$
4. a) On utilisant la question précédente, montrer que : $lim_{n\to+\infty}(V_n - U_n) = 0$
   b) En déduire les limites de ce deux suites (U_n) et (V_n).

Exercice 3

Partie I

On considère l'intégrale $I_n = \int_1^e \frac{(lnx)^n}{x^2} dx\ , n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer, en intégrant par parties, que $I_1 = 1 - \frac{2}{e}$

2. Démontrer en intégrant une seule fois par parties que :

$$\forall\ n\ \geq 2, \qquad I_n = -\frac{1}{e} + nI_{n-1}$$

3. En déduire la valeur de I_2

Partie II

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{8(lnx)^2}{x^2}$. On désigne par $(\mathcal{C})$ sa représentation graphique dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$

1. Démontrer que $\forall\ x \in [0; +\infty[,\ \ g'(x) = \frac{16(1-lnx)lnx}{x^3}$

2. a) Donner le sens de variation de g sur $]0; +\infty[$

   b) Dresser le tableau de variation de g.

   On donne : $\lim_{x\to0^+} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

   c) Construire la courbe $(\mathcal{C})$ de g.

3. Soit la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = -g(x)$.

4. a) Dresser le tableau de variation de h.

   b) Construire la courbe $(\mathcal{C}')$ de h dans le même repère que $(\mathcal{C})$

   c) Calculer en cm^2 l'aire limitée par les courbes $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{C}')$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Exercice 4

Soit la fonction numérique de la variable réelle x, définie sur l'intervalle $]0\ ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 100\left(\frac{lnx}{x}\right)^4$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni de repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. Unité graphique : $2\ cm$

1. a) Calculer la dérivée f' de la fonction f, puis étudier le signe de cette dérivée.

   b) Dresser le tableau de variations de la fonction f

2. Tracer $(\mathcal{C})$, on admettra que les droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$ sont asymptotes à la courbe $(\mathcal{C})$ de la fonction f.

3. On se propose de calculer l'aire A du domaine plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$ de f, et les droites d'équations $x = 1$; $x = e$ et $y = 0$. Pour cela, on se propose de calculer l'intégrale $I_n = \int_1^e \frac{(lnx)^n}{x^4} dx$; $n \in \mathbb{N}$

a) Calculer I_1

b) Par une intégration par parties, montrer que l'on a : $I_n = -\frac{1}{3e^3} + \frac{n}{3}I_{n-1}$

c) En déduire I_2 et I_3

d) Calculer alors l'aire A.

Exercice 5

Soit f la fonction numérique à variable réelle x, définie par : $f(x) = x^2e^{1-x}$. On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ du plan. Unité graphique : 2Cm

1. Déterminer la dérivée f' de la fonction f
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f
3. Etudier les branches infinies à $(\mathcal{C})$
4. Tracer $(\mathcal{C})$
5. Soit l'entier naturel n, et la variable réelle $x \in [0; 1]$. On considère l'intégrale U_n définie telle que : $U_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\, dx$ avec $U_0 = e - 1$

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n > 0$

b) Trouver une relation liant U_{n+1} et U_n (on pourra utiliser une intégration par parties de U_{n+1}) puis calculer U_1 et U_2

c) En déduire l'aire A du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe (Ox) des abscisses et les droites d'équations $x = 0$; $x = 1$

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{ln(x+e)}{x+e}$

1. a) Etudier le sens de variation de la fonction f

b) Soit n un entier naturel et x un nombre réel tels que :
$n \leq x \leq n + 1$. Montrer que $f(n + 1) \leq f(x) \leq f(n)$

2. Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $U_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$

a) Démontrer en utilisant le résultat de la question 1 que, pour tout entier naturel n, $f(n + 1) \leq U_n \leq f(n)$

b) En déduire la limite de la suite U_n

3. a) Calculer la dérivée F' de la fonction F définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$F(x) = [ln(x + e)]^2$$

b) Calculer en fonction de n l'intégrale $I_n = \int_0^n f(x)dx$

4. Soit (S_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

a) Calculer S_n en fonction de n

b) Calculer $lim_{n\to+\infty} S_n$

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1+x)e^{-x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1. a) Etudier les variations de f
   b) Faire l'étude des branches infinies à la courbe (C)
   c) Tracer la courbe (C).
2. Soit $V_n = \int_0^n f(x)dx$ où n est un entier naturel non nul.
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = 2 - (2+n)e^{-n}$
   b) Etudier la convergence de la suite (V_n)
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \int_{k-1}^{k} f(x)dx$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$

4. a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $U_n = (e-1)ke^{-k} + (e-2)e^{-k}$
   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $V_n = (e-1)\sum_{k=1}^{n} ke^{-k} + \frac{e-2}{e-1}(1-e^{-n})$
5. Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} ke^{-k}$. Montrer que $lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{e}{(e-1)^2}$

Exercice 8

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1-e^{-x}}$

1. Montrer que f possède une fonction réciproque g définie sur $[0;1[$
2. Montrer que pour tout $x \in [0;1[$, $g(x) = -ln(1-x^2)$
3. Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in [0{,}7; 0{,}8]$
4. Tracer les courbes (C) et (C') dans le même repère
5. Soit h la fonction définie sur $[0;1[$ par $h(x) = \int_0^{g(x)} f(t)dt$
   a) Montrer que h est dérivable sur $[0;1[$ et que $h'(x) = \frac{2x^2}{1-x^2}$
   b) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $x \in [0;1[$, $\frac{2x^2}{1-x^2} = a + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{1-x}$
   c) En déduire que $h(x) = -2x + ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.
6. On désigne par A l'aire de la région du plan située entre les courbes (C), (C') et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$ $(\alpha > 0)$. Montrer que $A = 2h(\alpha) - \alpha^2$.

Exercice 9

Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction numérique à variable réelle x telle que : $\begin{cases} f_n(x) = x(1 + nlnx) \,;\, x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

(C_n) désigne la courbe représentative de f_n dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Unité graphique : 2 cm.

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f_n en $x = 0$

2. Déterminer les deux points fixes aux courbes $(\mathcal{C}_n)$
3. Etudier en fonction de l'entier n les variations de la fonction f_n puis déduire le tableau de variations de la fonction f_1 correspondant au cas où $n = 1$
4. On admet que la courbe $(\mathcal{C}_1)$ de la fonction f_1 admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées et que $f\left(\frac{1}{e^2}\right) = -\frac{1}{e^2}$; avec $e^2 = 0{,}13$
   a) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_1)$
   b) Soit le réel α tel que : $0 < \alpha < \frac{1}{e}$. Calculer l'intégrale : $I(\alpha) = -\int_{\alpha}^{\frac{1}{e}} f_1(x)dx$
   c) Calculer la limite $I(\alpha)$ lorsque α tend vers 0.
   d) Déduire en Cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C}_1)$, l'axe (Ox) des abscisses et les droites d'équations $x = 0$; $x = \frac{1}{e}$

Exercice 10

Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction numérique à variable réelle définie par : $\begin{cases} f_n(x) = x(lnx)^n \text{ , } si\ x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

1. On admet que f_2 est continue en $x_0 = 0$
Etudier la dérivabilité de f_2 en $x_0 = 0$
2. Calculer la limite de f_2 en $+\infty$
3. a) Calculer la dérivée f_2' de f_2
   b) Dresser le tableau de variation de f_2
4. Tracer la courbe $(\mathcal{C}_2)$ de f_2 dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
5. On définit la suite (U_n) sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = \int_1^e f_n(x)dx$
   a) Démontrer que la suite (U_n) est décroissante.
   b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n \geq 0$
   c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} U_n$
   En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n \leq \frac{e^2}{n+1}$
   d) Déterminer la limite de la suite (U_n).

Exercice 11

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x} ln(1 + e^x)$.
On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.
1. Calculer les limite de f en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Trouver la fonction g telle que : $g(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+e^t}$; $x \in \mathbb{R}$.
3. En utilisant une intégration par parties, montrer :
$F(x) = x + 2ln2 - f(x) - ln(1 + e^x)$.

4. Calculer les limites de F en $-\infty$ et en $+\infty$.
5. Dresser le tableau de variations de F sur $\mathbb{R}$.
6. Montrer que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x - 1 + 2ln2$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$.
7. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère.

Exercice 12

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{ln(1+e^x)}{e^x}$

1. Vérifier que pour tout nombre réel x : $f(x) + f'(x) = \frac{1}{1+e^x}$
2. Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, on désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   a) En utilisant la relation (1), démontrer que :
   $$F(x) = x + 2ln2 - \frac{ln(1+e^x)}{e^x} - ln(1+e^x)$$
   On admet que $\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$
   b) Déterminer le sens de variation de F.
   c) On admet que : $\lim_{x\to-\infty} \frac{ln(1+e^x)}{e^x} = 1$ puis montrer que $\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$
   d) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.
3. Dresser le tableau de variation de F.
4. a) Démontrer que les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $y = 2ln2$ et $y = x - 1 + 2ln2$ sont des asymptotes.
   b) Tracer dans le même repère la courbe $(\mathcal{C})$ ainsi que les droites (D_1) et (D_2).

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^x$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Unité graphique : 2 cm.

1. a) Dresser le tableau de variation de f
   b) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.
   c) Calculer l'aire en cm^2, du domaine du plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$
2. On considère la suite numérique (I_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :
   $$I_n = (-1)^n \int_0^1 x^n e^x dx$$
   a) Montrer que $I_1 = -1$
   b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\frac{1}{n+1} \leq |I_n| \leq \frac{e}{n+1}$. En déduire la limite de la suite (I_n)

c) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n \geq 1$; $I_{n+1} = (-1)^{n+1}.e + (n+1)I_n$

d) En déduire le calcul de l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{(x^3+4x^2-3x-6)e^x}{x+1}dx$. En déduire la valeur de J sous la forme $ae + b$, où a et b sont des entiers relatifs.

Exercice 14

1. Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x - 1 + \frac{1}{2}lnx$.

a) Dresser le tableau de variation de g.

b) Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

2. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x-lnx}{2x\sqrt{x}}$. On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. Unité graphique : 2cm.

a) Montrer que pour tout réel x de $]0;+\infty[$; $f'(x) = \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.

d) A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $J = \int_1^2 f(x)dx$. En déduire en cm^2 l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

3. Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(1+\frac{k}{n}\right)$

a) Montrer que pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n-1$, on a :

$$\frac{1}{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx \leq \frac{1}{n}f\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$$

b) Montrer que $J + \frac{f(1)}{n} \leq U_n \leq J + \frac{f(2)}{n}$

c) En déduire $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 15

On définit la fonction f sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{lnx}{\sqrt{x}}$

1. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, la dérivée f' de f est : $f'(x) = \frac{x(2-lnx)}{2x^2\sqrt{x}}$

2. Préciser les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.

3. Dresser le tableau de variation de f.

4. Pour tout entier n supérieur ou égal à 8, on pose $U_n = f(8) + f(9) + \cdots + f(n)$

a) Démontrer que pour tout entier $k \geq 8$, $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k)$

b) En déduire que : $U_{n+1} - f(8) \leq \int_8^{n+1} f(t)dt \leq U_n$

c) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I_n = \int_8^{n+1} f(t)dt$

d) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

Exercice 16

1. Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = (x+2)e^{-x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$
   a) Etudier les variations de f, puis dresser son tableau de variation
   b) Tracer la courbe (C).
2. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [-1; +\infty[$
   a) Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.
   b) Tracer dans le même repère que (C) la courbe (C') de la fonction g^{-1} réciproque de g
3. Pour tout entier naturel non nul n, on pose $I_n = \int_{-2}^{0} \frac{(x+2)^n e^{-x}}{n!} dx$ et $U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}$
   a) Vérifier que pour tout $x \in [-2; 0]$ on a : $0 \leq \frac{(x+2)^n e^{-x}}{n!} \leq \frac{2^n}{n!} e^2$
   b) Justifier à l'aide d'une intégration par parties que $I_1 = e^2 - 3$
   c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$, puis en déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = e^2 - U_n$$
4. Soit $V_n = \frac{2^n}{n!}$. Montrer que $\forall\, n \geq 2, V_{n+1} \leq \frac{2}{3} V_n$, puis en déduire que :
$\forall\, n \geq 2, V_n \leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$ et préciser la limite de (V_n).
5. En utilisant la question 3 a) justifier que $0 \leq I_n \leq 2e^2 V_n$, puis en déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

PARTIE B
Algèbre

NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $Z_A = 1 - i$; $Z_B = \sqrt{3} + i\sqrt{3}$ et $Z_C = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$

1. a) Donner la forme exponentielle de chacun des nombres complexes : Z_A et $1 + i\sqrt{3}$
   b) Vérifier que $Z_B = (i\sqrt{3})Z_A$.
   c) En déduire que $Z_A + Z_B = Z_C$.
   d) Montrer que le quadrilatère $OACB$ est un rectangle.
   e) Placer les points A, B et C dans le repère.
2. Soit K le centre du rectangle $OACB$ et G le centre de gravité du triangle OAK.
   a) Montrer que $Z_G = \frac{1}{3}(Z_K + Z_A)$.
   b) Montrer que $Z_G = \frac{\sqrt{3}}{6}(\sqrt{3} + i)Z_A$.
   c) Déduire la forme exponentielle de Z_G.

Exercice 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $z_B = \frac{1}{2}z_A^2$.

On note I, le milieu du segment $[AB]$ et z_I l'affixe de I.

1. a) Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes z_A et z_B.
   b) Vérifier que : $z_I = \frac{(1+\sqrt{3})(1+i)}{2}$.
2. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 + 2z - 2(1 + \sqrt{3})(1 + i) = 0$.

On note M et N deux points du plan d'affixes respectives z et $\frac{1}{2}z^2$, où $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $z \neq 2$.

   a) Montrer que z est solution de (E) si et seulement si, I est milieu de $[MN]$.
   b) Justifier que z_A est solution de (E).
3. On note z_C l'autre solution de (E) et on ne demande pas de calculer z_C.

On désigne par C et K les points d'affixes respectives z_C et $z_K = -2$.

   a) Démontrer que le quadrilatère $OAKC$ est un parallélogramme puis construire C
   b) Construire D, le point d'affixe $z_D = \frac{1}{2}z_C^2$.
   c) Démontrer que : $z_A.z_C = 2(\sqrt{6} + \sqrt{2})e^{i\frac{5\pi}{4}}$
   d) Vérifier que : $\frac{z_D}{z_A} = \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)^2$
   e) En déduire que la droite (AD) passe par le point O.

Exercice 3

1. a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation (E): $Z^3 = 1$

   b) Représenter les solutions de (E) sur un cercle trigonométrique.

   c) Vérifier que la somme des racines de l'équation (E) est nulle.

2) Déterminer les solutions de l'équation (E') définie telle que : $Z^3 = -i$

3) On considère l'équation (F) définie par : (F): $(z-1)^3 = -i(2z+1)^3$ avec $z \in \mathbb{C}$

Déduire de ce qui précède les solutions de l'équation (F).

4. Soit le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, unité 1cm, les points A, B et C d'affixes respectives $Z_A = 2-2i$; $Z_B = 4i$; $Z_C = -4i$ et un point M d'affixe Z distinct des points A, B et C.

On considère l'équation (E): $\frac{(2-2i)-Z}{4i-Z} = \frac{-4i-Z}{(2-2i)-Z}$

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, ensemble des nombres complexes, l'équation (E).

b) On désigne par Z_0 la solution de cette équation et par M_0 son image.

   Démontrer que $\frac{M_0A}{M_0B} = \frac{M_0C}{M_0A}$ et $\left(\overrightarrow{M_0B}; \overrightarrow{M_0A}\right) = \left(\overrightarrow{M_0A}; \overrightarrow{M_0C}\right)$

Exercice 4

1. Ecrire sous la forme trigonométrique le nombre complexe $1+i$.

2. On pose : $Z = \rho e^{i\theta}$, avec $\rho \in]0; +\infty[$ et $\theta \in [0; 2\pi[$

   a) Calculer Z^2 et $(1+i)\bar{Z}$ en fonction de ρ et θ. ($\bar{Z}$désignant le conjugué de)

   b) En déduire la valeur r de ρ pour laquelle on a l'égalité : $Z^2 = (1+i)\bar{Z}$ (1)

   c) Déterminer les valeurs θ_0 , θ_1 et θ_2 de θ telles que $Z = re^{i\theta}$ vérifie l'égalité (1).

   On note respectivement Z_0 , Z_1 et Z_2 les nombres complexes de module r d'arguments θ_0 , θ_1 et θ_2.

3. Soit A_1 et A_2 les points d'affixes respectives $Z_1 - Z_0$ et $Z_2 - Z_0$ dans le plan complexe orienté, et O le point d'affixe nulle.

   a) Calculer, sous la forme trigonométrique, le nombre complexe : $\frac{Z_2-Z_0}{Z_1-Z_0}$

   b) En déduire que le triangle OA_1A_2 est équilatéral.

Exercice 5

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Soit A le point d'affixe $2i$.

On considère l'application ponctuelle du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point

M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{z+i}{z-2i}$; avec M différent de A.

1. Montrer que f admet deux points invariants doubles que l'on ne déterminera pas.

2. On pose $z = 2i + re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in]-\pi; \pi]$.

a) Ecrire $z' - 1$ sous la forme exponentielle en fonction de r et θ.

b) On donne $r = 3$. Déterminer la valeur de θ pour laquelle z' est nul.

1. a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}_1$ des points M tels que $|z' - 1| = 3$

b) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}_2$ des points M tels que : $arg(z' - 1) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$

c) Construire les ensembles $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ dans le plan.

Exercice 6

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points E et F d'affixes respectives 1 et i.

On désigne par C_1 et C_2 les cercles de centres respectives E et F et de même rayon 1.

Soit θ un réel de l'intervalle $[0; 2\pi]$, M le point d'affixe $1 + e^{i\theta}$et N le point d'affixe $i(1 + e^{i\theta})$.

1) a) Calculer $z_{\overrightarrow{EM}}$ et $z_{\overrightarrow{FN}}$

b) Montrer que, lorsque θ varie dans $[0; 2\pi[$, M varie sur C_1 et N varie sur C_2.

b) Montrer que les droites (EM)et (FN)sont perpendiculaires.

2) Soit P le point d'affixe z_P telle que $z_P = (1 - i)sin\theta.e^{i\theta}$.

a) Montrer que $\frac{z_{\overrightarrow{EP}}}{z_{\overrightarrow{EM}}} = sin\theta - cos\theta$ et calculer $\frac{z_{\overrightarrow{EP}}}{z_{\overrightarrow{FN}}}$.

b) Montrer que P est le point d'intersection des droites (EM) et (FN).

Exercice 7

Soit $P(z) = z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1$

On se propose de déterminer toutes les racines de P.

1. Calculer $P(1 + i)$
2. Comparer $P(\bar{z})$ et $\overline{P(z)}$
3. Montrer que si z_0 est racine de P alors $\overline{z_0}$ est aussi racine de P
4. Montrer que si z_0 est racine de P alors $\frac{1}{z_0}$ est aussi racine de P.
5. Déterminer alors toutes les racines de P.

Exercice 8

1) a et b sont deux réels. Montrer que $e^{ia} + e^{ib} = 2cos\frac{a-b}{2}e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}$

$e^{ia} - e^{ib} = 2isin\frac{a-b}{2}e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}$

2) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue Z :

(E): $Z^2 + (1 - i\sqrt{3})Z - (1 + \sqrt{3}) = 0$. Résoudre l'équation (E).

3) On pose : $\alpha = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$; $\beta = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$; $Z_1 = \beta - \alpha$ et $Z_2 = \alpha + \beta$

a) Ecrire sous forme exponentielle les complexes : α; β; Z_1 et Z_2

b) Dans le plan muni du repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, unité graphique 2cm. Placer les points M_1 et M_2 d'affixes respectives Z_1 et Z_2.

Exercice 9

z est un nombre complexe de module r dont un argument est θ

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z + 3\bar{z} = \left(2 + i\sqrt{3}\right)|z|$ (On pourra utiliser la forme trigonométrique de z)

2) Représenter les images des solutions de cette équation dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$

3) Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre Ω d'affixe $1+i$ et dont le rayon est $2\sqrt{2}$. Montrer que les solutions de l'équation $[z-(1+i)]^3 = 16(1-i)$ sont les affixes des points de $(\mathcal{C})$.

4) Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on donne les nombres complexes Z et z tels que : $Z = (1+i)\bar{z}$. On note r et θ le module et l'argument de z.

a) Exprimer le module de Z en fonction de r et l'argument de Z en fonction de θ.

b) Trouver l'ensemble des points M d'affixe z tel que le point N d'affixe Z soit situé sur la droite (Δ) d'équation : $2x - y + 4 = 0$.

Exercice 10

Soit $\theta \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$, on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E):\ Z^2 + (2sin2\theta)Z + sin^2 2\theta + 4cos^4\theta = 0$$

1) a) Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$. On notera $Z_1\ et\ Z_2$ les solutions de (E), avec $ImZ_1 > ImZ_2$.

b) Trouver le module et un argument de Z_1 suivant les valeurs de θ.

c) En déduire le module et un argument de Z_2.

2) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, On considère les points A et B d'affixes respectives :

$Z_A = -sin2\theta - 2icos^2\theta,\ Z_B = -sin2\theta + 2icos^2\theta\ ;\ \theta \neq \frac{\pi}{2}$.

a) Pour quelle valeur de θ le triangle OAB est-il rectangle isocèle en O et de sens direct ?

b) Pour quelle valeur de θ le triangle OAB est-il équilatéral de sens direct ? Placer A et B pour la valeur de θ trouvée.

Exercice 11

θ désigne un réel appartenant à l'intervalle $]0,\pi[$. On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, le polynôme P défini par :

$$P(Z) = (sin^2\theta)Z^2 + (sin2\theta)Z + 1 + cos^2\theta$$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z) = 0$. On notera les solutions Z_1 et Z_2 de l'équation en fonction de θ
2. Vérifier que $Z_1^2 + Z_2^2 = -2$
3. a et b sont deux nombres complexes tels que :

$$a = -\frac{1}{sin\theta}(cos\theta + i)\ ; b = -\frac{1}{sin\theta}(cos\theta - i)$$

Vérifier que $P(a) = P(b)$.

Exercice 12

Soit θ un réel de l'intervalle $[0; \pi]$.

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation suivante :

$$Z^2 - 2(4 + 5cos\theta)Z + (4cos\theta + 5)^2 = 0$$

On notera Z_1 la solution dont la partie imaginaire est strictement positive, Z_2 l'autre solution.

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère le point M d'affixe Z_1.

a) Montrer que les coordonnées x et y du point M, vérifient les relations

$$\begin{cases} x = 4 + 5cos\theta \\ y = 3sin\theta \end{cases} \quad avec\ \theta \in [0; \pi[$$

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (E) des points M du plan lorsque θ décrit l'intervalle $[0; \pi[$.

c) Tracer (E).

Exercice 13

θ étant un réel de l'intervalle $[0; 2\pi[$; on pose pour tout nombre complexe Z,
$P_\theta(Z) = Z^2 - (1 + e^{i\theta})Z + (1 + i)(-1 + e^{i\theta})$

1) a) Vérifier que $P_\theta(1 + i) = 0$

b) En déduire les solutions $Z_1\ et\ Z_2$ dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P_\theta(Z) = 0$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A ; B et M d'affixes respectives -1 ; $i\sqrt{3}\ et\ -1 + e^{i\theta}$.

a) Montrer que lorsque θ varie dans $[0; 2\pi[$, M varie sur un cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon r.

b) Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles la droite (BM) est tangente au cercle (C).

Exercice 14

Soit θ un réel de l'intervalle $[0; 2\pi[$.

1. a) Vérifier que : $(e^{i\theta} - i)^2 = -1 + e^{2i\theta} - 2ie^{i\theta}$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2iz + 2ie^{i\theta} - e^{2i\theta} = 0$.

2. On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $e^{i\theta}$ et $\left(2i - e^{i\theta}\right)$ dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

a) Déterminer et construire l'ensemble (Γ_1) décrit par le point M_1 lorsque θ varie dans $[0; 2\pi[$.

b) Calculer l'affixe du milieu I du segment $[M_1M_2]$.

c) En déduire l'ensemble (Γ_2) décrit par le point M_2 lorsque θ décrit l'intervalle $[0; 2\pi[$.

Construire (Γ_2).

3. a) Montrer que $M_1M_2^2 = 8(1 - sin\theta)$.

b) En déduire la valeur de θ pour laquelle la distance M_1M_2 est maximale.

Exercice 15

1. Pour tout réel, on considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation d'inconnue $Z, (E): Z^2 - 2i(cos\theta)e^{i\theta}Z - e^{2i\theta} = 0$

a) Déterminer la solution imaginaire pure Z_0 de (E).

b) En déduire que l'autre solution de (E) est $Z_1 = ie^{2i\theta}$

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, soit Ω le point d'affixe $1 + i$.

Pour tout point M d'affixe Z, on associe le point M' d'affixe Z' tel que : $Z' = \frac{1}{2}(Z + i\bar{Z})$

a) Montrer que les points $M'; O$ et Ω sont alignés.

b) Démontrer que pour tout point M du plan les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{O\Omega}$ sont orthogonaux.

3. On pose $Z = e^{i\theta}$. Soit M_1 le point d'affixe $Z_1 = iZ$, M_2 le point d'affixe $Z_2 = e^{-i\theta}$ et M_3 le point d'affixe Z_3 tel que : $OM_1M_3M_2$ soit un parallélogramme.

a) Exprimer Z_1 et Z_3 en fonction de θ

b) Vérifier que $Z' - Z = \frac{1}{2}iZ_3$. Puis en déduire que $MM' = \frac{1}{2}OM_3$

Exercice 16

1. Définir les racines quatrièmes d'un nombre complexe non nul Z.

2. Soit $Z = 8\left(1 - i\sqrt{3}\right)$.

a) Déterminer les racines quatrièmes de Z sous la forme trigonométrique.

b) Montrer que le complexe $U = \frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right) + i\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\right]$ est une racine quatrième de Z.

c) En utilisant les racines quatrièmes de l'unité, déduire l'écriture algébrique des racines quatrièmes de Z.

3. Dans le plan complexe rapporté au repère orthnormal $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, on considère le point M_0 d'affixe U.

a) Calculer l'affixe du point M_0' image de M_0 par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$

b) Placer les points M_0' et M_0 dans le plan.

Exercice 17

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Démontrer que les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^4 = 2 + 2i\sqrt{2}$ sont les nombres complexes de la forme $z_k = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right)}$; $k \in \{0; 1; 2; 3\}$

2. Soit S la similitude plane directe de centre O, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$. On désigne par M_k' l'image de M_k par la similitude S.

a) Donner une écriture complexe de S

b) On désigne par z_k' l'affixe de M_k'.

Calculer le rapport $\frac{z_k' - z_k}{z_k'}$. En déduire que le triangle OM_kM_k' est rectangle isocèle en M_k'.

c) Donner sous forme exponentielle puis algébrique les affixes des points M_0' , M_1' , M_2' , M_3'. En déduire z_0 , z_1 , z_2 , z_3 sous la forme algébrique.

d) Placer les points M_0' , M_1' , M_2' , M_3' dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, puis placer M_0 , M_1 , M_2 , M_3 dans le repère.

Exercice 18

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) Déterminer les racines carrées du complexe $\Delta = 3 - 4i$.

2) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^2 - 2ie^{i\theta}z - 4(1-i)e^{i2\theta}$, avec $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

a) Résoudre l'équation (E).

b) Déterminer le module et un argument du complexe $z = -2(1-i)e^{i\theta}$

c) En déduire que pour tout $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, les points d'affixes z appartiennent à un cercle que l'on précisera.

3) On considère le point A d'affixe $2e^{i\theta}$.

Soit f la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Déterminer l'affixe de A' , image du point A par f.

Exercice 19

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. On considère pour tout $\theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ l'équation : (E_θ) : $Z^2 - 2ie^{i\theta}Z - 4(1-i)e^{i2\theta} = 0$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ)
2. On considère les points M et M' d'affixes respectives : $2e^{i\theta}$ et $-2(1-i)e^{i\theta}$ et le point N image de M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   a) Déterminer l'affixe Z_N du point N.
   b) Montrer que $OMNM'$ est un parallélogramme.
   c) En déduire une construction du point M' à partir de M.
3. a) Déterminer, en fonction de θ le module et l'argument de M'
   b) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque θ varie dans $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

Exercice 20

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1. On considère la transformation S du plan qui, à tout point M d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \left(1 + i\sqrt{3}\right)z + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

   a) Montrer que le point J d'affixe $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ est invariant par S.
   b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S.
   c) On désigne par $(\mathcal{C})$ le cercle de diamètre $[JA]$ où A est le point d'affixe -1. Caractériser puis tracer le cercle $(\mathcal{C}')$ image de $(\mathcal{C})$ par S.

2. Soit le nombre complexe $a = \frac{z+1}{z-2i}$, pour tout nombre complexe z tel que $z \neq 2i$.
Déterminer puis construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que :
   i. a soit imaginaire pur.
   ii. $arg(a) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$

Exercice 21

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexe l'équation
(E) : $Z^2 - 2iZ - 1 + e^{2i\theta} = 0$
2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, on considère les point M' , M'' , A, B, C, D et E d'affixes respectives $Z' = i + ie^{i\theta}$, $Z'' = i - ie^{i\theta}$, $2i$, i, 1, $-2+4i$ et $4+4i$
   a) Montrer que $\frac{Z''}{Z'} = -itan\left(\frac{\theta}{2}\right)$
   b) Montrer que pour $\theta \in]\pi;2\pi[$, $OM'AM''$ est un rectangle
   c) Déterminer θ pour que $OM'AM''$ soit un carré.

d) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque θ décrit $]\pi; 2\pi[$

3. Soit S la similitude plane directe qui transforme B en D et C en E. Déterminer l'écriture complexe de S, puis en déduire son expression analytique.

Exercice 22

α est un nombre complexe non nul. On définit le polynôme P par :

$$P(\alpha) = \alpha^2 - 2i\alpha - 1$$

1) Factoriser $P(\alpha)$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 - \alpha(\alpha + i)Z + i\alpha^3 = 0$

3) On désigne par ρ et θ le module et un argument de Z_1 et Z_2 définis par : $Z_1 = \alpha i$ et $Z_2 = \alpha^2$.

a) Déterminer en fonction de ρ et θ le module et un argument de Z_1 et Z_2.

b) Quelle condition faut-il donner à α pour que Z_1 soit un réel.

4) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit S_α la transformation ponctuelle qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \alpha iz + \alpha^2$

a) Existe-t-il une valeur de α pour laquelle S_α est l'identité du plan ?

b) Pour quelle valeur de α, S_α est-elle une rotation d'angle de mesure $\frac{5\pi}{6}$?

Exercice 23

A/ 1) On donne $Z = -8(1 + i\sqrt{3})$. Montrer que $Z_1 = \sqrt{3} - i$ est une racine quatrième de Z.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $Z^4 + 8 + 8i\sqrt{3} = 0$

B/ Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe Z, associe le point M' d'affixe Z' tel que : $Z' = (2 + i)\bar{Z} + 1 - i$

1. Quelle est la nature de f ?

2. En déduire les éléments caractéristiques de f (rapport, centre Ω et l'axe)

Exercice 24

1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^4 = -7 + 24i$

a) Calculer $(2 + i)^4$

b) Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation (E') : $u^4 = 1$ avec $u = \frac{z}{2+i}$

c) En se servant des solutions de l'équation (E'), déduire les solutions de l'équation (E).

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 2 + i$, $z_B = -1 + 2i$, $z_C = -2 - i$ et $z_D = 1 - 2i$.

a) Déterminer l'écriture complexe de la similitude plane indirecte f qui transforme A en C et B en D.

b) Déterminer les éléments caractéristiques de f

Exercice 25

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation (E) :

$Z^2 - \left(2 + i\sqrt{3}\right)Z - 2 + i\sqrt{3} = 0$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit f la transformation ponctuelle du plan (P) qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' tel que : $Z' = \left(-\frac{1}{2} + i\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\bar{Z} + \frac{5}{2} + i\sqrt{\frac{3}{2}}$

a) Montrer que f est un anti déplacement

b) Donner la nature exacte de f

c) Caractériser f

3) On désigne par Ω le point d'affixe $z_\Omega = -i\sqrt{3}$ et (E') l'ensemble des points M d'affixe Z du plan tel que (E'): $\left|Z + i\sqrt{3}\right| = 1$.

a) Déterminer et construire (E')

b) On note (φ) l'ensemble des points M d'affixe Z du plan tel que :
(φ): $|Z - 1| = 1$.
Montrer que (φ) est l'image de (E') par f.

Exercice 26

I. On donne dans $\mathbb{C}$ l'expression complexe : $P(z) = z^3 - (4 + i)z^2 + (5 + 3i)z - 2 - 2i$

1. Calculer $P(1 + i)$. En déduire une factorisation de $P(z)$

II. Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Soient A et B les points de (P) d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = 6 + i$.

On désigne par f un antidéplacement tel que : $f(A) = A$ et $f(B) = B$ qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = a\bar{z} + b$ où a et b sont des nombres complexes non nuls.

1. a) Montrer que : $\begin{cases} a + b = 1 \\ a(6 - i) + b = 6 + i \end{cases}$

b) Déterminer alors les complexes a et b.

2. On pose : $a = \frac{1}{13}(12 + 5i)$ et $b = \frac{1}{13}(1 - 5i)$ telle que :

$$z' = \frac{1}{13}(12 + 5i)\bar{z} + \frac{1}{13}(1 - 5i)$$

a) Calculer $a\bar{b} + b$ puis déduire la nature exacte de f.
b) Montrer que l'axe $(\mathcal{D})$ de f est : $x - 5y = 1$.

Exercice 27

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $-1 + i$; $3 + 2i$ et $i\sqrt{2}$

1. On considère la transformation f du plan $(\mathcal{P})$, dans lui-même qui à tout point M d'affixe Z associe le point $M' = f(M)$ d'affixe Z' définie par $Z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\bar{Z} - 1 + i(1 + \sqrt{2})$
   a) Calculer les affixes des points $A' = f(A)$ et $C' = f(C)$
   b) Quelle est la nature et les éléments caractéristiques de f ?
   c) Placer les points A, B et C puis construire $B' = f(B)$
2. a) Donner l'écriture complexe de l'homothétie h de centre A et de rapport $\sqrt{2}$
   b) Montrer que la composée $g = f \circ h$ a pour écriture complexe $Z'' = (1 + i)\bar{Z} - 1 + 3i$
3. a) Soit M_0 le point d'affixe $2 - 4i$. Déterminer l'affixe du point $M''_0 = g(M_0)$ puis vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM''}$ sont orthogonaux
   b) On considère un point M d'affixe $Z = x + iy$. On suppose que x et y sont des entiers. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM''}$ sont orthogonaux si $5x + 3y = -2$ où $M'' = g(M)$.

Exercice 28

1) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes le polynôme P définie par : $P(Z) = Z^3 + (1 - e^{i\theta})Z^2 - e^{2i\theta}Z + e^{3i\theta} - e^{2i\theta}$ $avec$ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.
   a) Calculer $P(cos\theta + isin\theta)$ puis conclure.
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $Z^2 + Z + e^{i\theta} - e^{i2\theta} = 0$
   c) Déterminer le polynôme Q tel que $P(Z) = (Z - e^{i\theta})Q(Z)$.
   d) En déduire les solutions de l'équation $P(Z) = 0$.
2) Soit S la transformation ponctuelle définie analytiquement par :

$$S \begin{cases} x' = xcos\theta + ysin\theta - 1 \\ y' = xsin\theta - ycos\theta + sin\theta \end{cases}$$

   a) Déterminer l'écriture complexe de S.
   b) Justifier que S est un antidéplacement.
   c) Donner la nature exacte de S.

Exercice 29

1) Soit l'équation : (E_θ) : $Z^2 - e^{i\theta}[2 + \sqrt{2}(-1 + i)]Z + 2\sqrt{2}(-1 + i)e^{2i\theta} = 0;$ $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   a) Vérifier que $Z_0 = 2e^{i\theta}$ est une solution de (E_θ).

b) Déduire alors l'autre solution Z_1 de l'équation (E_θ)

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points M, M' et M'' d'affixes respectives :

$Z = 2e^{i\theta}, Z' = \sqrt{2}(-1+i)e^{i\theta}\ et\ Z'' = i + 4e^{i\left(\theta+\frac{3\pi}{4}\right)}$.

a) Montrer que M' est l'image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

b) Montrer que M'' est l'image de M' par une homothétie h que l'on précisera.

c) Déduire l'ensemble (Γ) des points M'' lorsque θ varie dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

3) Soit l'équation (E'_θ): $\left(\sqrt{2}Z - 1\right)^3 = (-2+2i)e^{i\theta}Z^3$

a) Déterminer les racines cubiques du nombre complexe $U = (-2+2i)e^{i\theta}$

b) Soit $\alpha \in]0; 2\pi[$. Montrer que $\frac{\sqrt{2}Z-1}{Z} = \sqrt{2}e^{i\theta} \Leftrightarrow Z = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1 + icotan\frac{\alpha}{2}\right)$

c) Résoudre alors dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation (E'_θ). (Donner les solutions sous forme cartésienne).

Exercice 30

Soit θ un réel non nul.

- $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé direct.
- (C) est un cercle de centre O et de rayon 1
- E est le point de (C) tel que $\left(\widehat{\vec{u}; \overrightarrow{OE}}\right) \equiv \theta[2\pi]$;
- F et G sont les points d'affixes, respectives, -1 et $1+\sqrt{2}$;
- Γ est le demi-cercle de diamètre $[FG]$
- D est le point d'intersection de Γ et l'axe $(O, \vec{u})$

1) Faire une figure.

2) a) Vérifier que $OD^2 = 1 + \sqrt{2}$.

b) Soit A le point d'affixes $z_A = i\sqrt{1+\sqrt{2}}e^{i\theta}$. Vérifier que $z_A = ODe^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$. Construire alors A

3) On considère, dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^2 + \frac{\sqrt{2}}{i\sqrt{1+\sqrt{2}}}e^{i\theta}z + e^{2i\theta} = 0$.

a) Vérifier que z_A est une solution de l'équation (E).

b) On désigne par B le point d'affixe z_B, où z_B est la deuxième solution de (E). Déterminer z_B.

4) a) Montrer que les points O, A et B sont alignés.

b) Placer le point C d'affixe $z_C = ODe^{i\theta}$

c) Montrer que $\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

En déduire que le triangle ABC est isocèle et que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

d) Construire alors le point B.

ARITHMETIQUE

Exercice 1

1. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 4^n par 9.
2. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, l'entier A_n défini tel que $A_n = 22^{9n+2} - 31^{3n-1}$ est divisible par 9.
3. a) Démontrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 3^{4n} = 1[5]$.
   b) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2018^{2017} par 5
4. Démontrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.
5. Dans le système décimal, un nombre entier s'écrit $N = x00y$
   a) Montrer que $10^3 = -1[7]$.
   b) Montrer que N est divisible par 7 si $x = y[7]$
   c) Déterminer tous les nombres N qui sont divisible par 7.

Exercice 2

On considère la suite définie par $V_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ V_{n+1} - 2V_n - 5 = 0$

1. Calculer V_1 ; V_2 ; V_3 et V_4.
2. On considère la suite (U_n) définie par : $U_n = V_n + 5$.
   a) Démontrer que la suite (U_n) est une suite géométrique.
   b) Exprimer U_n puis V_n en fonction de n.
   c) Exprimer $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$ et $S'_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$ en fonction de n.
3. a) Déterminer les restes dans la division Euclidienne de 2^n par 5 suivant les valeurs de n.
   b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ V_n \equiv 2^n[5]$.
   c) En déduire le reste dans la division Euclidienne du terme V_{2024} par 5.
   d) Démontrer que $S_n \equiv S'_n[5]$.
   e) En déduire le reste dans la division Euclidienne de S_{2024} par 5.

Exercice 3

1. La division euclidienne d'un entier naturel non nul a par un entier naturel non nul b, donne un reste r. Quel est l'intervalle des valeurs possibles de r ?
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de $3^n, n \in \mathbb{N}$ par 11
3. Déterminer les entiers naturels n tels que : $3^{2n} + 3^n = 3^2[11]$
4. En déduire le reste de la division euclidienne par 11 du nombre entier naturel $p = 14501^{2015} + 132^{2016}$
5. Soit la suite numérique (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$U_n = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^{n-1}$$

a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a : $2U_n = 3^n - 1$

b) En déduire que U_{2015} est divisible par 11.

Exercice 4

1) On considère la suite (U_n) d'entiers naturels, définie par :

$\begin{cases} U_0 = 14 \\ U_{n+1} = 5U_n - 6 \end{cases}$ pour tout entier naturel n

a) Calculer U_1; U_2; U_3 et U_4. Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de U_n.

b) Montrer que pour tout entier n, $U_{n+2} \equiv U_n[4]$

c) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $2U_n = 5^{n+2} + 3$

d) En déduire que $2U_n \equiv 28[100]$. Peut-on conclure que $U_n \equiv 14[100]$?

2) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $23x - 26y = 1$

a) Trouver une solution particulière $(x_0; y_0)$ de (E)

b) Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{Z}^2$

c) En déduire l'entier naturel a tel que $0 \leq a \leq 25$ et $23a \equiv 1[26]$. Que représente l'entier a pour 23 ?

Exercice 5

Soit a, b, c et d quatre entiers relatifs.

1. Démontrer que si $a = b[7]$ et $c = d[7]$, alors $a.c = b.d[7]$.

2. On admet que pour a et b non nuls, si $a = b[7]$, alors $a^n = b^n[7]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Pour $a = 2$, puis pour $a = 3$, déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a^n = 1[7]$.

3. Soit a un entier naturel non divisible par 7.

a) Montrer que $a^6 = 1[7]$.

b) Soit k l'ordre modulo 7 de a.
Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r = 1[7]$.
En déduire que k divise 6.

c) Compléter le tableau suivant :

a	$a^2[7]$	$a^3[7]$	$a^6[7]$
4	2		1
5		6	1

4. A tout entier naturel n, on associe le nombre $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$.
Sachant que l'ordre modulo 7 de 6 est 2, montrer que $A_{2006} = 6[7]$.

Exercice 6

Les questions 1, 2, 3 et 4 sont indépendantes.

1. $a = 5n^2 + 7$ et $b = n^2 + 2$ avec $n \in \mathbb{N}$
   a) Démontrer que tout diviseur commun à a et b est un diviseur de 3.
   b) Montrer que si le reste de la division euclidienne de n par 3 est 2, alors $PGCD(a; b) = 3$

2. Dans le système de numération de base 12, on note les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, α, β
   a) Ecrire $N = 20112$ dans le système de base 12.
   b) Un nombre M s'écrit $M = \overline{85\beta1}$ dans le système de base 12. Quel est ce nombre entier ?

3. x désigne un nombre entier relatif.
On pose $n = x^2 + x - 2$
Déterminer l'ensemble S des nombres entiers relatifs x tels $n \equiv 0[7]$

4. Trouver tous les couples $(a; b)$ d'entiers naturels tels que :

$$\begin{cases} 8a + b \equiv 51[100] \\ \quad b \equiv 27[100] \end{cases} \text{ avec } 0 \leq a \leq 99 \text{ et } 0 \leq b \leq 99$$

Exercice 7

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, on considère les nombres suivants : $a_n = n^3 - n^2 - 12n$ et $b_n = 2n^2 - 7n - 4$.

1. Montrer, après factorisation que les entiers naturels a_n et b_n sont divisibles par $n - 4$.

2. On pose : $\alpha = 2n + 1$ et $\beta = n + 3$. On note d le $PGCD$ de α et β.
   a) Etablir une relation entre α et β indépendante de n.
   b) Démontrer que d est un diviseur de 5 et donner les valeurs possibles de d.
   c) Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si et seulement si $n - 2$ est un multiple de 5.

3. Montrer que $2n + 1$ et n sont premiers entre eux.

4. a) Déterminer le $PGCD$ de a_n et b_n suivant les valeurs de n et en fonction de n. Vérifier le résultat pour $n = 7$ et $n = 11$
   b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $a_{11}x + b_{11}y = 35$; avec $a_{11} = 1078$ et $b_{11} = 161$.

Exercice 8

On rappelle la propriété suivante : a, b , q et r désignent des nombres entiers relatifs non nuls. Si $a = bq + r$, alors $PGCD(a, b) = PGCD(b, r)$.

1. n désigne un nombre entier naturel non nul.
   a) Vérifier que : $2n^2 + 12n + 13 = (2n + 2)(n + 5) + 3$

b) On pose $d = PGCD(2n^2 + 12n + 13\ ;\ n + 5)$.
Pourquoi a-t-on $d = PGCD(n + 5; 3)$?

c) Justifier que $d = 3$ ou $d = 1$.

d) Pour quels entiers naturels $n \geq 1$, $2n^2 + 12n + 13$ et $n + 5$ sont-ils des nombres entiers premiers entre eux ?

2. b désigne un nombre entier naturel non nul.
x désigne un nombre entier naturel non nul et on considère l'équation
$(E) : 12 \equiv b[18]$

a) Démontrer que (E) a des solutions si et seulement si, 6 divise b.

b) Lorsque 6 divise b, montrer que l'équation (E) a six solutions comprises entre 0 et 17.

c) Résoudre dans $\mathbb{N}$, l'équation $12x \equiv 6[18]$.

Exercice 9

x et y désignent des entiers relatifs.
1. Montrer que l'équation $(E) : 65x - 40y = 1$ n'a pas de solution.
2. Montrer que l'équation $(E') : 17x - 40y = 1$ admet une moins une solution.
3. Déterminer, à l'aide de l'algorithme d'Euclide, un couple d'entiers relatifs solutions de l'équation (E').
4. Résoudre l'équation (E').
5. En déduire qu'il existe un unique entier naturel x_0 inférieur à 40 tel que
$17x_0 \equiv 1[40]$
6. Pour tout entier naturel a, démontrer que, si $a^{17} \equiv b[55]$ et si $a^{40} \equiv 1[55]$ alors $b^{33} \equiv a[55]$.

Exercice 10

1. Soit dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation $(E) : 5x + 3y = 60$

a) Vérifier que $(2; -3)$ est une solution dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $(E'): 5x + 3y = 1$.
En déduire une solution particulière de l'équation (E)

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E)

c) En déduire tous les couples d'entiers naturels non nuls solutions de (E)

2. Le proviseur d'un lycée veut acheter x ordinateurs et y imprimantes pour un montant total de 600.000FCFA. On sait que le prix d'un ordinateur est 50.000FCFA et celui d'une imprimante est 30.000FCFA et qu'il désire acheter plus d'ordinateurs que d'imprimantes.
Déterminer le nombre d'ordinateurs et le nombre d'imprimantes qu'il peut acheter.

Exercice 11

1. Enoncer le théorème de Gauss.
2. Montrer que pour tout entier relatif n, les entiers relatifs $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux.
3. On considère l'équation (E) : $87x + 31y = 2$ où x et y sont des entiers relatifs.
   a) Montrer que 87 et 31 sont premier entres eux.
   b) En déduire un couple d'entiers relatifs $(u; v)$ tel que $87u + 31v = 1$, puis une solution $(x_0; y_0)$ de (E).
   c) Déterminer l'ensemble de solutions de (E)
4. a) Démontrer que 2003 est un nombre premier.
   b) Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que : $123u + 2003v = 1$
   c) En déduire un entier relatif k_0 tel que : $123k_0 = 1[2003]$
   d) Montrer que, pour tout entier relatif x : $123x = 456[2003]$ si et seulement si $x = 456k_0[2003]$
   e) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que : $123x = 456[2003]$

Exercice 12

On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E) suivante : (E) : $2x^2 - 2x + 1 = 0[5]$.

1. a) Vérifier que -1 , 2 et 4 sont solutions de (E).
   b) Montrer que (E) est équivalente à l'équation $2x^2 - 2x - 4 = 0[5]$
   c) En déduire dans $\mathbb{Z}$ les solution de l'équation (E).
2. On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E') : $7x = 4[5]$
   a) Montrer que 7 est inversible modulo 5 puis déterminer son inverse.
   b) Montrer que x est solution de $(E') \Leftrightarrow x = 2[5]$.
   c) En déduire les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (E').

Exercice 13

1. Montrer que $\forall\ a \in \mathbb{N}^*$ a et $2a + 1$ sont premiers entre eux.
2. Soit l'équation (E) : $ax - (2a + 1)y = 1$, d'inconnues $(x; y)$ où $a \in \mathbb{N}^*$.
   a) Vérifier que le couple $(-2; -1)$ est une solution de (E).
   b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation (E)
3. On pose $a = 1$

Résoudre dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, l'équation (E): $x^2 - \dot{3}x = \dot{1}$

4. On note α le chiffre 10 et γ le chiffre 12 dans la bas 13. Déterminer l'ensemble des entiers naturels t tels que $\overline{1\alpha\gamma}^{(t)}$ soit divisible par 13.

Exercice 14

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E): 47x + 53y = 1$

1- Justifier que $(-9; 8)$ est une solution de (E).

2- Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).

3- Déterminer l'ensemble des inverses de 47 modulo 53.

4- En déduire que 44 est le plus petit inverse positif de 47 modulo 53.

5- a) Justifier que $45^{52} \equiv 1[53]$.

b) En déduire le reste de 45^{106} modulo 53.

6. Soit $N = \sum_{k=0}^{105} 45^k = 1 + 45 + 45^2 + 45^5 + \cdots + 45^{105}$

a) Montrer que $44N \equiv 10[53]$

b) En déduire le reste de N modulo 53.

Exercice 15

1. On considère dans $Z \times Z$ l'équation (E) : $3x + 4y = -8$
   a) Vérifier que $(0\,;\,-2)$ est une solution de l'équation (E).
   b) Résoudre dans $Z \times Z$ l'équation (E).

2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère la droite (Δ) dont une équation est $3x + 4y + 8 = 0$ et on désigne par A le point de la droite (Δ) d'abscisse 0.
   a) Montrer que si M est un point de la droite (Δ) à coordonnées entières alors AM est un multiple de 5.
   b) Soit N un point de la droite (Δ) de coordonnées $(x; y)$. Vérifier que $AN = \frac{5}{4}|x|$.
   c) En déduire que si AN est un multiple de 5 alors x et y sont des entiers.

Exercice 16

1. On considère l'équation (E) : $25x - 49y = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.
   a) Déterminer le $PGCD$ de 49 et 25 à l'aide de l'algorithme d'Euclide et en déduire que l'équation (E) admet des solutions entières.
   b) Vérifier que $(10; 5)$ est une solution particulière de (E). Résoudre (E).
   c) Montrer qu'il existe un unique entier p compris entre 2018 et 2024 tel que : $25p = 5[49]$.

2. a) Justifier que si $(x; y)$ est une solution de (E) alors : $5x = 1[7]$ et $y = 0[5]$

   b) Montrer que $5x = 1[7]$ si et seulement si $x = 3[7]$

3. a) Soit n un entier relatif. Quels sont les restes de n^2 dans la division euclidienne par 7 ?

   b) Existe-t-il un couple $(x; y)$ d'entiers tels que $(x^2; y^2)$ soit solution de (E) ?

4. Déterminer le chiffre des unités du nombre 13^{2024} dans la base 10.

Exercice 17

1. Enoncer le théorème de BEZOUT et le théorème de GAUSS.
2. Déterminer le $PGCD$ de 168 et 20.
3. Soit l'équation (E): $168x + 20y = 4$ avec $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$.
   a) L'équation (E) admet-elle des solutions dans $\mathbb{Z}^2$?
   b) Déterminer deux entiers relatifs m et p en utilisant l'algorithme d'EUCLIDE tels que : $42m + 5p = 1$
   c) En déduire deux entiers u et v tels que : $42u + 5v = 2$
   d) Démontrer que le couple d'entiers relatifs $(x; y)$ est une solution de l'équation (E') : $42x + 5y = 2$ si et seulement si $42(x + 4) = 5(34 - y)$.
   e) En déduire les solutions de (E')
4. a) Déterminer le reste de la division euclidienne de 5^p par 13 avec p un entier naturel.
   b) En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, le nombre $F = 31^{4n+1} + 18^{4n+3}$ est divisible par 13.

Exercice 18

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E_1) : $54x - 25y = 3$

1. Montrer que l'équation (E_1) admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$
2. Montrer que l'équation (E_1) est équivalente à (E_2) : $4x \equiv 3[25]$
3. a) Déterminer l'inverse modulo 25 de 4
   b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E_2)
   c) En déduire l'ensemble S_1 des solutions de l'équation (E_1)
4. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système suivant : $\begin{cases} x \equiv -2[54] \\ x \equiv 1[25] \end{cases}$

Exercice 19

I. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $x - 5y = 1$
   a) Montrer que $x \equiv 1[5]$
   b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).

II. 1- Quand dit-on que deux entiers relatifs non nuls a et b sont premiers entre eux ?
2. Enoncer le théorème de Bézout
3. On pose : $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, $A = 9k + 4$ et $B = 2k - 1$
   a) Trouver deux constantes α et β telles que $A = \alpha(2k - 1) + k + 8$ et $B = \beta(k + 8) - 17$
   b) En déduire que :
      Si $k \equiv 9(mod\ 17)$, alors $PGCD(A; B) = 17$
      Si $k \not\equiv 9(mod\ 17)$, alors A et B sont premiers entre eux.

Exercice 20

x et y sont deux entiers non nuls vérifiant $x < y$. S est l'ensemble des couples tels que : $PGCD(x; y) = y - x$.

1. Déterminer $PGCD(363; 484)$.
2. Le couple $(363; 484)$ appartient-il à S ?
3. Soit n un entier naturel non nul, le couple $(n; n+1)$ appartient-il à S ? Justifier la réponse.
4. Montrer que $(x; y)$ appartient à S si, et seulement si, il existe k non nul tel $x = k(y - x)$ et $y = (k+1)(y - x)$.
5. En déduire que pour tout couple $(x; y)$ de S, on a : $PPCM(x; y) = k(k+1)(y - x)$.
6. Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 228.
7. En déduire des couples $(x; y)$ de S tels que $PGCD(x; y) = 228$.

Exercice 21

1. On considère l'ensemble $A_7 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
   a) Pour tout élément a de A_7 écrire dans un tableau l'unique élément y de A_7 tel que $ay \equiv 1[7]$
   b) Pour x nombre entier relatif, démontrer que l'équation $3x \equiv 5[7]$ équivaut à $x \equiv 4[7]$.
   c) Si a élément de A_7, montrer que les seuls nombres entiers relatifs x solutions de l'équation $ax \equiv 0[7]$ sont les multiples de 7.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 - 3x + 4 \equiv 0[7]$
3. a) Déterminer les diviseurs positifs de 45.
   b) Déterminer les couples d'entiers naturels (p, q) tels que $p \times q = 45$
   c) En déduire les solutions dans $\mathbb{N}^2$ du système $\begin{cases} x^2 - y^2 = 405 \\ 3PPCM(x, y) = xy \end{cases}$

Exercice 22

On se propose de déterminer l'ensemble S des entiers relatifs x vérifiant le système :
$\begin{cases} x \equiv 9[17] \\ x \equiv 3[5] \end{cases}$

1. On désigne par $(u; v)$ un couple d'entiers relatifs tel que $17u + 5v = 1$. (E)
   a) Justifier l'existence d'un tel couple $(u; v)$
   b) On pose $x_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$. Démontrer que x_0 appartient à S.
   c) Montrer que le couple $(-2; 7)$ vérifie (E).
   d) Donner un entier x_0 appartient à S
2. a) Soit x un entier relatif appartenant à S. Démontrer que $x - x_0 \equiv 0[85]$
   b) En déduire qu'un entier relatif x appartient à S si, seulement si, il peut s'écrire

sous la forme $x = 43 + 85k$, où k est un entier relatif.

Exercice 23

On se propose de déterminer tous les entiers relatifs N tels que : $(S)\begin{cases} N \equiv 5[13] \\ N \equiv 1[17] \end{cases}$

1. a) Justifier qu'il existe un couple (U, V) d'entiers relatifs tels que $13U + 17V = 1$.
   b) Vérifier que, pour un tel couple, le nombre entier $n_0 = -16 \times 13U + 18 \times 17V$ est solution du système (S)
   c) Vérifier que 239 est une solution du système (S).
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $17x - 13y = 4$
3. a) Soit N entier relatif appartenant à (S).
   Démontrer que : $N - n_0 \equiv 0[221]$
   b) En déduire que les solutions du système (S) sont de la forme : $N = 18 + 221k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 24

A/ On note $\mathbb{Z}[i]$ l'ensemble des entiers de Gauss, c'est-à-dire des nombres complexes $a + ib$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$.
La norme de $z = a + ib$ $(a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z})$ est l'entier $N(z) = a^2 + b^2$.
Dire que w divise z dans $\mathbb{Z}[i]$ signifie qu'il existe un élément v dans $\mathbb{Z}[i]$ tel que $z = vw$

1. Montrer que $4 + 5i$ divise $14 - 3i$ mais ne divise pas $14 + 3i$
2. Vérifier que $N(4 + 5i)$ divise $N(14 - 3i)$ dans $\mathbb{Z}$

B/ 1. a) Enoncer le théorème de Gauss.
   b) p et q sont deux nombres entiers naturels premiers entre eux. Déduire du théorème de Gauss que, si a est un entier relatif tel que $a \equiv 0[p]$ et $a \equiv 0[q]$, alors $a \equiv 0[pq]$

2. n désigne un nombre entier relatif.
On considère le système (S) suivant : $\begin{cases} n \equiv 1[7] \\ n \equiv 5[11] \end{cases}$
   a) Vérifier que 71 est une solution de (S).
   b) On suppose que n est un entier relatif solution de (S). Montrer que $n \equiv 71[77]$
   c) Démontrer que pour tout entier relatif, $n \equiv 71[77]$ équivaut à : $\begin{cases} n \equiv 1[7] \\ n \equiv 5[11] \end{cases}$
   d) Déterminer toutes les solutions de (S) comprises entre 1300 et 1500.

Exercice 25

1. Enoncer le petit théorème de FERMAT
2. Enoncer le théorème de GAUSS

3. Soit p un entier et a un entier non divisible par p. Montrer que $a^{p-1} \equiv 1[p]$
4. On considère dans Z^2 l'équation $(E) : 29x - 13y = 6$
   a) Montrer que l'équation (E) admet des solutions dans Z^2 , puis vérifier que $(2; 4)$ est une solution de (E)
   b) Résoudre dans Z^2 l'équation (E)
5. On considère dans Z l'équation $(E') :\ x^{19} \equiv -2[29]$
   a) Justifier que $2^{28} \equiv 1[29]$ et en déduire que -8 est une solution de (E')
   b) Soit x_0 une solution de (E'). Montrer que x_0 n'est pas un multiple de 29 et en déduire alors que $x_0^{28} \equiv 1[29]$
   c) Montrer que $x_0^{57} \equiv -8[29]$ puis que $x_0 \equiv -8[29]$
   d) En déduire l'ensemble des solutions dans Z de l'équation (E')
   e) Résoudre dans Z l'équation $(x-3)^{19} \equiv -2[29]$
6. Résoudre dans Z le système suivant : $\begin{cases}(x-3)^{19} \equiv -2[29] \\ (x-3)^{13} \equiv -2[13]\end{cases}$

Exercice 26

NB : les questions 1. 2. et 3. sont indépendantes.

1. On considère l'anneau $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}; +; .)$
   a) Citer les éléments de cet anneau.
   b) Etablir les tables d'addition et de multiplication de l'anneau $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}; +; .)$. L'anneau $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}; +; .)$ Est-il intègre ? Justifier votre réponse.
   c) Résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ les équations $\dot{4}x + \dot{5} = \dot{0}$ et $x^2 + \dot{2}x = \dot{0}$
2. On considère l'entier naturel N représenté en base b par $N = \overline{342x}^b$
   a) Déterminer le chiffre x pour que N soit divisible par 5 pour $b = 6$.
   b) On donne $x = 1$; trouver la plus petite valeur de b sachant que N est divisible par 3.
3. On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E) : 13x - 8y = 1$.
   a) Vérifier que le couple $(-3; -5)$ est une solution de (E).
   b) Résoudre alors (E).
   c) On considère le triplet (x, y, z) de $\mathbb{Z}^3$ vérifiant le système :
   $(S) :\ \begin{cases} 5x + y - 2z = 1 \\ 8x - 9y + 2z = 0\end{cases}$

Montrer que si (x, y, z) est solution de (S) alors (x, y) est solution de (E).
Résoudre alors (S) dans $\mathbb{Z}^3$.

PARTIE C
Géométrie

ANGLES ORIENTES

Exercice 1

Dans le plan orienté $(\mathcal{P})$, on considère un triangle ABC direct isocèle en A tel que $AB = AC = 4\ cm$ et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \frac{5\pi}{6}[2\pi]$. Soi I le milieu du segment $[BC]$.

1. Faire la figure
2. Déterminer une mesure de chacun des angles :
   a) $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}) - (\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})$
   b) $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})$; c) $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA})$; d) $(\overrightarrow{CI};\overrightarrow{AI})$ et e) $(\overrightarrow{AI};\overrightarrow{CA})$
3. a) Placer le point D pour que le quadrilatère $ABDC$ soit un parallélogramme.
   b) Donner une mesure des angles : $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CD})$ et $(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA})$
   c) Comparer les angles $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})$ et $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CD})$

Exercice 2

Dans un plan orienté, on considère le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et deux points A et B de $(\mathcal{C})$ tels que : $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Soit M un point de $(\mathcal{C})$ distinct de A et B.

1. Faire la figure.
2. a) Comparer $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MO})$ et $(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AM})$ puis $(\overrightarrow{MO};\overrightarrow{MB})$ et $(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BO})$
   b) Montrer que : $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{MB};\overrightarrow{OB})[2\pi]$
   c) En déduire que : $2(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})[2\pi]$
3. Soit C le point du cercle $(\mathcal{C})$ tel que le triangle ABC soit isocèle en C et direct.
   a) Déterminer la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$
   b) Calculer alors $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})$ et $(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AC})$

Exercice 3

Dans le plan orienté, on considère un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O ; A et B deux points distincts de $(\mathcal{C})$. Soit Δ_1 et Δ_2 deux bissectrices intérieures respectives des angles au centre $\overline{(OM;OA)}$ et $\overline{(OM;OB)}$ où M est un point de $(\mathcal{C})$ distinct de A et B.

1. Démontrer que : $\overline{(\Delta_1 ; \Delta_2)} \equiv \frac{1}{2}\overline{(OA ; OB)}[\pi]$ et $\overline{(MA;MB)} \equiv \overline{(\Delta_1 ; \Delta_2)}[\pi]$
2. En déduire que : $\overline{(MA;MB)} \equiv \frac{1}{2}\overline{(OA ; OB)}[\pi]$
3. Soit T la tangente en A à $(\mathcal{C})$ et Δ_3 la bissectrice intérieure de $\overline{(OA;OB)}$.
   a) Montrer que : $\overline{(T;AB)} \equiv \frac{1}{2}\overline{(OA ; OB)}[\pi]$
   b) En déduire que : $\overline{(MA;MB)} \equiv \overline{(T;AB)}[\pi]$

Exercice 4

Dans le plan orienté, on considère deux cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ sécants en A et B. M est un point de $(\mathcal{C})$ distinct de A et B. La droite (AM) recoupe $(\mathcal{C}')$ en N. Les tangentes respectives aux cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ en M et N se recoupent en T.

1. Faire la figure.
2. Démontrer que : $\overline{(BM\,;BA)} \equiv \overline{(MT\,;MA)}[\pi]$
3. Démontrer que : $\overline{(BA\,;BN)} \equiv \overline{(MA\,;NT)}[\pi]$
4. En déduire que les points M, N, B et T sont cocycliques et tracer le cercle qui les contient.
5. La droite passant par B coupe $(\mathcal{C})$ en R et $(\mathcal{C}')$ en P. Démontrer que les droites (MR) et (NP) sont parallèles.

Exercice 5

Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I

Le plan est orienté.

ABC est un triangle tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$. (on disposera le segment $[AB]$ horizontalement et prendre $AB = 5cm$).

Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que :

a) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

b) $(\overline{AB, AM}) + (\overline{BM, BC}) = -\frac{\pi}{4}[\pi]$

Partie II

On considère dans le plan $(\mathcal{P})$ un triangle équilatéral direct ABC inscrit dans un cercle $(\mathcal{C})$ de centre G.

Le point O milieu du segment $[BC]$ se projette orthogonalement en P sur la droite (AB) et en Q sur la droite (AC).

1. Faire une figure.
2. a) Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PQ})$

   b) Démontrer que les points B, P, Q et C sont cocycliques puis tracer le cercle $(\mathcal{C}')$ qui les contient.

Exercice 6

Le plan $(\mathcal{P})$ est direct. A et B sont deux points de $(\mathcal{P})$ tel que $BC = 6cm$.

1. Déterminer et construire l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M de $(\mathcal{P})$ tel que $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$
2. Soit A le point d'intersection des lieux géométriques de M tel que $\begin{cases} (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) = \frac{\pi}{3}[2\pi] \\ \frac{MB}{MC} = 1 \end{cases}$

a) Donner la nature du triangle ABC
b) On note A' le milieu de $[BC]$, K le projeté orthogonal de A' sur (AB) et H le projeté orthogonal de A' sur (AC). Démontrer que les points $K; A'; H$ et A sont cocycliques. Tracer le cercle $(\mathcal{C}_1)$ qui les contient.

3. Sachant que $(\overline{KB, KH}) = \frac{2\pi}{3}[\pi]$. Montrer que les points B, K, H et C sont cocycliques. Tracer le cercle $(\mathcal{C}_2)$ qui les contient.
4. On désigne par O l'orthocentre du triangle ABC et $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit au triangle ABC. On note $A'; B'$ et C' les pieds des hauteurs respectivement sur les côtés BC, AC et AB. On désigne par O' l'image de O par la symétrie d'axe BC. Montrer que les points A, B, O' et C sont cocycliques.

Exercice 7

Le plan est orienté.
ABC est un triangle tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$.
(On disposera le segment $[AB]$ horizontalement et prendre $AB = 5cm$)
On rapporte le plan au repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.
On désigne par $(\mathcal{C})$ le cercle de centre C et tangent en A à la droite (AB) ; par N un point de la droite (AB) distinct de A, d'abscisse positive ; par $[ED]$ le diamètre du cercle $(\mathcal{C})$, parallèle à la droite (AB) (l'abscisse de D étant positive).
La droite (NE) recoupe le cercle $(\mathcal{C})$ en un point P.
1. Faire la figure.
2. a) Tracer le cercle (Γ) de centre ω passant par P et tangent en N à la droite (AB).
 Le cercle (Γ) recoupe le cercle $(\mathcal{C})$ en un point Q.
 b) Démontrer que les points N, D et Q sont alignés.
 c) Démontrer que les droites (PC) et $(P\omega)$ sont orthogonales.

Exercice 8

Deux droites (BX) et (CY) pivotent respectivement autour des sommets B et C d'un triangle ABC.
On désigne par (BX') le symétrique de (BX) par rapport à (BA) et (CY') le symétrique de (CY) par rapport à (CA).
1. Démontrer la relation $(\widehat{BX, CY}) + (\widehat{BX', CY'}) = 2(\widehat{AB, AC})[\pi]$
2. En déduire l'ensemble des positions du point M', intersection des droites (BX') et (CY') dans chacun des cas suivants :
 a) (BX) et (CY) varient en restant parallèles.
 b) Le point d'intersection M de (BX) et (CY) décrit le cercle circonscrit au triangle ABC privé de B et C.

ISOMETRIES DU PLAN

Exercice 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

On désigne par $S_{(\Delta)}$ la symétrie orthogonale par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$ (première bissectrice) et par $T_{\vec{v}}$ la translation de vecteur $\vec{v} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$. On pose : $f = S_{(\Delta)} \circ T_{\vec{v}}$

1. Montrer que l'expression analytique de l'isométrie f est : $\begin{cases} x' = y - 2 \\ y' = x + 1 \end{cases}$

2. Montrer que f est une symétrie glissée. Caractériser f.

Exercice 2

On considère un carré $ABCD$ centré en O tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB], [BC], [DC]$ et $[AD]$.

1. Soit g l'application définie par : $g = R\left(A;\frac{\pi}{2}\right) \circ S_{(AB)}$. Caractériser l'application g.

2. Le plan P est rapporté au repère orthonormé $(O;\overrightarrow{OK};\overrightarrow{OL})$. Soit f l'application de P dans P définie par f: $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x - 2 \end{cases}$

   a) Montrer que f est une isométrie.
   b) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
   c) Déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.
   d) Caractériser l'application φ définie par $\varphi = f \circ g$

3. On considère l'application h définie par $h = \varphi \circ t_{\overrightarrow{KI}}$

   a) Qu'appelle-t-on symétrie glissée ?
   b) Montrer que h est une symétrie glissée.
   c) Ecrire son expression analytique puis son expression complexe.

Exercice 3

Dans le plan orienté, on considère un triangle direct OAB rectangle isocèle en O. Avec $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On note : $R_A = r\left(A;\frac{\pi}{2}\right)$, $R_B = r\left(B;\frac{\pi}{2}\right)$ les rotations de centres respectifs A et B. S_0 est la symétrie centrale de centre O. On place un point C non situé sur la droite (AB), et on trace les carrés directs $BEDC$ et $ACFG$ tels que $(\overrightarrow{BE};\overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AG}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

1. Faire la figure qui sera complétée au fur et à mesure.

2. a) Déterminer $S_{(AO)} \circ S_{(AB)}$ composée de deux réflexions d'axe (AB) et (OA).

   b) En écrivant R_B sous la forme d'une composé de deux réflexions, démontrer que $R_A \circ R_B = S_0$

3. a) Déterminer l'image de E par $R_A \circ R_B$

   b) En déduire que O est le milieu du segment $[EG]$

   c) On donne $R_F = r\left(F; \frac{\pi}{2}\right)$ et $R_D = r\left(D; \frac{\pi}{2}\right)$. Etudier l'image de C par la transformation $R_F \circ S_O \circ R_D$. Déterminer la nature de la transformation $R_F \circ S_O \circ R_D$

   d) Placer H le symétrique de D par rapport à O. Démontrer que $R_F(H) = D$

   e) Montrer que le triangle FOD est rectangle isocèle en O.

Exercice 4

On considère dans le plan (P) un triangle équilatéral direct ABC inscrit dans un cercle $(\mathcal{C})$ de centre G.

Le point O milieu du segment $[BC]$ se projette orthogonalement en P sur la droite (AB) et en Q sur la droite (AC).

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
2. a) Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PQ})$

   b) Démontrer que les points B, P, Q et C sont cocycliques puis tracer le cercle $(\mathcal{C}')$ qui les contient.
3. a) Démontrer qu'il existe une rotation R qui transforme B en C et P en Q. Donner une mesure θ de l'angle de R.

   b) Construire le centre Ω de la rotation R.
4. Soit f l'application définie par $f = s_{(OA)} \circ t_{\overrightarrow{BE}}$ où E est le point de rencontre du cercle $(\mathcal{C})$ et la droite (BG) autre que B.

   a) Déterminer la droite (Δ) telle que $s_{(AO)} \circ s_{(\Delta)} = t_{\overrightarrow{BC}}$

   b) Montrer que f est une symétrie glissée que l'on caractérisera.

Exercice 5

Dans le plan orienté, on considère le triangle ABC rectangle en A tel que : $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Les points I, J et H sont respectivement milieux des segments $[AB], [BC]$ et $[AJ]$.

1) Faire la figure que l'on complètera au fur et à mesure.
2) Préciser la nature de chacun des triangles ABJ et AJC.
3) Démontrer qu'il existe une rotation R_J de centre J et qui transforme A en C. Préciser une mesure θ de son angle.
4) Démontrer qu'il existe une rotation R_B de centre B et qui transforme A en J. Préciser une mesure θ' de son angle.
5) La bissectrice intérieure de l'angle $(\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{JA})$ rencontre la droite (AC) en K. On considère l'application f définie par : $f = R_J \circ R_B$.

   a) Calculer $f(A)$

b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'application f

6) On considère le point P du segment $[AC]$, défini par $AB = AP$. Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP})$.

   a) Déterminer les coordonnées des points J, K et C dans ce repère.

   b) Déterminer l'expression complexe de la rotation R_J puis vérifier que l'on a : $R_J(A) = C$.

Exercice 6

Le plan étant orienté dans le sens direct. Soit ABC un triangle rectangle direct en A tel que $AC = 2AB$. Soit I le milieu de $[AC]$.

1. a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie A en I et B en C

b) Montrer que f est une rotation dont on précisera l'angle θ. Construire son centre Ω.

2. Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et $g = f \circ R^{-1}$

   a) Déterminer $g(A)$

   b) En déduire que $f = t_{\overrightarrow{AI}} \circ R$

3. Soit $E = R(I)$ et F le point tel que $AEFI$ soit un carré.

   a) Construire les points E et F.

   b) Caractériser $f \circ f$.

   c) Déterminer $f \circ f(A)$. En déduire que Ω est le milieu de $[AF]$.

4. a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement h qui envoie A en F et E en I

   b) Montrer que h est une symétrie glissante dont on déterminera l'axe (Δ) et le vecteur $\vec{u}$.

   On donne K le milieu de $[FI]$

Exercice 7

Le plan étant orienté dans le sens direct. On considère un carré $OABC$ de centre I tel que $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Soit J le milieu de $[BC]$, K le milieu de $[AB]$, L le milieu de $[BJ]$ et H le projeté orthogonal de L sur $[OA]$.

Soit E le point de $[OA]$ distinct de O, de H et de A. La parallèle à droite (OC) passant par E coupe $[BC]$ en M et la parallèle à la droite (OB) passant par E coupe $[AB]$ en N.

1. Faire la figure

2. Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui transforme C en B et M en N

3. a) Montrer que f est une rotation d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$

b) Montrer que $f(B) = A$

c) En déduire que I est le centre de la rotation f

4. a) Montrer que $f \circ S_{(AC)}$ est une symétrie axiale dont on déterminera l'axe

b) En déduire que $S_{(AB)} \circ f \circ S_{(AC)}$ est une translation dont on précisera le vecteur.

5) Soit g l'antidéplacement qui transforme C en B et M en N

a) Montrer que $g(B) = A$. (On pourra utiliser $g \circ S_{(MC)}(M)$)

b) En déduire que g est une symétrie glissée dont on déterminera le vecteur et l'axe

c) Soit P le point tel que $ACBP$ soit un parallélogramme. Montrer que $g(A) = P$

6. Montrer que $f \circ g$ est une symétrie glissée dont on déterminera l'axe et le vecteur.

Exercice 8

Dans un plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle en B et tel que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. On désigne par O, I et J les milieux respectifs des segments $[AC]$, $[OA]$ et $[AB]$. La parallèle à la droite (BC) passant par A coupe la perpendiculaire en C de la droite (BC) en E.

1. Faire une figure, on prendra $[AB]$ horizontal et $AB = 4\ cm$.

2. Montrer que les points A, B, C et E sont cocycliques puis tracer le cercle $(\mathcal{C})$ qui les contient.

3. a) Montrer qu'il existe un unique déplacement R tel que : $R(A) = O$ et $R(B) = C$.

b) Montrer que R est une rotation dont on déterminera l'angle.

c) Construire le centre D de la rotation R.

d) Montrer que le quadrilatère $ABOD$ est un losange.

4. On pose $f = R \circ t_{\overrightarrow{BA}}$ où $t_{\overrightarrow{BA}}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

a) Déterminer $f(B)$.

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

5. Soit g un antidéplacement qui transforme B en A et A en O.

a) Montrer que g est une symétrie glissée.

b) Déterminer les éléments caractéristiques de g.

c) Montrer que D est l'image du point O par g.

d) On pose $g(D) = K$.

Montrer que K et B sont symétriques par rapport à O.

Exercice 9

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $AB < AC$. On note $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit au triangle ABC et O son centre. Soit E le milieu du segment $[BC]$ et P le point du segment $[AC]$ tel que $AB = CP$. La droite (OE) coupe $(\mathcal{C})$ en I et J, tels que J et A soient sur le même arc BC du cercle $(\mathcal{C})$.

1. Faire soigneusement une figure. On prendra $BC = 6$cm et on disposera de préférence le côté $[BC]$ horizontalement.

2. a) Quel est l'ensemble E_1 des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$?

   b) Déterminer, puis construire l'ensemble E_2 des points M du plan tels que $MB = \frac{MC}{2}$.

3. On désigne par K le point d'intersection des ensembles E_1 et E_2.
Démontrer que le triangle KBC est rectangle en B. Placer le point K.

4. a) Justifier qu'il existe une rotation unique R telle que $R(A) = P$ et $R(B) = C$.
   Déterminer son angle.

   b) Démontrer que son centre est un point de $(\mathcal{C})$ que l'on précisera.

   c) Quelle est la nature du triangle JAP ?

5. Déterminer l'image de B par la composée $R \circ S_B$ où S_B est la symétrie de centre B.
Donner la nature et les éléments caractéristiques de cette composée.

6. Soit $f = R' \circ S_{(JB)}$ où R' est la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
Montrer que f est une symétrie orthogonale d'axe (OB).

7. On désigne par g l'antidéplacement défini par : $g(C) = K$ et $g(K) = B$.
Montrer que g est une symétrie glissée et déterminer sa forme réduite.

Exercice 10

Le plan est rapporté dans le sens direct.

$OABC$ est un rectangle de centre I tel que : $OC = 3\ cm$ et $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{6}[2\pi]$; D est le point du segment $[OA]$ tel que : $OD = OC$.

1. Faire la figure que l'on complètera.
2. Construire l'ensemble (Γ) des points M tels que $(\overrightarrow{MO};\overrightarrow{MI}) = \frac{\pi}{6}[2\pi]$
3. Soit f la rotation qui transforme O en I et D en B.
   a) Déterminer une mesure θ de l'angle de f
   b) On note Ω le centre de f. Montrer que Ω est le point d'intersection de (Γ) et la médiatrice du segment $[OI]$.
4. Soit g l'antidéplacement qui transforme O en I et D en B.
   a) Montrer que g est une symétrie glissée.
   b) Soit J le milieu du segment $[OI]$ et K le milieu du segment $[BD]$. Les droites (JK) et (OA) se coupent en un point E. Montrer que $g(E) = J$
   c) En déduire que : $g = S_{(JK)} \circ t_{\overrightarrow{EJ}}$.
5. a) Montrer que : $f^{-1} \circ g = S_{(DA)}$. En déduire que $f(K) = J$

   b) Comparer OE et OJ. En déduire que les droites $(O\Omega)$ et (JK) sont perpendiculaires.
6. Dans la suite, on munit le plan d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OC})$.
   a) Montrer que le point I a pour coordonnées $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$.

b) En déduire les coordonnées du point B.

c) Déterminer l'expression analytique de g.

Exercice 11

Dans le plan orienté on considère un triangle quelconque ABC direct, c'est-à-dire tel que l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ admet une mesure comprise entre 0 et π. On construit les triangles équilatéraux $A'CB$, $B'AC$ et $C'BA$ tous directs. On appelle F, G et H les centres respectifs de ces triangles équilatéraux.

On se propose de prouver que le triangle FGH est équilatéral direct.

1. Placer sur la figure les points et triangles précédents.

2. On note R_1 , R_2 et R_3 les rotations d'angles de mesures $\frac{2\pi}{3}$ et de centres respectifs F, G et H.

a) Déterminer le déplacement $R_1 \circ R_2 \circ R_3$ (On pourra préciser l'image de B)

b) En déduire le centre et l'angle de la rotation $R = R_2 \circ R_3$

c) En déduire aussi que F, G et H sont distincts deux à deux.

3. On note S la symétrie axiale d'axe (GH). Déterminer les droites (D_2) et (D_3) telles que $R_2 = S_{(D_2)} \circ S$ et $R_3 = S \circ S_{(D_3)}$

4. a) Montrer que les droites (D_2) et (D_3) se coupent en un point F'

b) Quelle est la nature du triangle $F'GH$?

c) Montrer que $F = F'$. Conclure.

Exercice 12

A/ Le plan $\mathcal{P}$ est orienté.

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$. $\mathcal{R}$, la rotation de centre B, qui transforme le point C en A, et T la translation qui transforme B en C.

1. a) Déterminer les droites (D_1), (D_2), (D_3) telles que l'on ait :

$T = S_{D_1} \circ S_{D_2}$ et $\mathcal{R} = S_{D_2} \circ S_{D_3}$.

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $T \circ \mathcal{R}$

2. On désigne par O le centre de gravité du triangle ABC.

La bissectrice intérieure de l'angle $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CO})$ coupe les droites (AO) et (D_2) respectivement en O' et E

a) Démontrer que les points B, C, D, E où D désigne le symétrique de B par rapport à O', appartiennent à un même cercle $(\mathcal{C}')$

b) Construire le cercle $(\mathcal{C}')$.

3. On désigne par $(\mathcal{C})$, le cercle circonscrit au triangle ABC.

a) Existe-t-il une isométrie plane qui transforme le cercle $(\mathcal{C})$ en le cercle $(\mathcal{C}')$?

b) Les droites (CO) et (BO') recoupent le cercle $(\mathcal{C})$ respectivement en E_1 et D_1, et la droite (D_1O) coupe le cercle $(\mathcal{C})$ en B_1.
Démontrer que E_1 appartient à (D_2) et que le quadrilatère $B_1CD_1E_1$ est un carré.

B/ Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ où $\vec{\jmath} = \frac{\overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OA}\|}$. Le cercle $(\mathcal{C})$ a pour rayon 2.

Soit f l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M de coordonnées $(x;y)$ associe le point M' de coordonnées $(x';y')$ telles que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - 2 \end{cases}$

1. Déterminer les coordonnées du point B dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

2. Montrer que f est une bijection et déterminer l'ensemble des points invariants par f

3. f étant une rotation.
   a) Montrer que f est la réciproque de la rotation $\mathcal{R}$
   b) Déterminer une équation cartésienne de l'image $(\mathcal{C}_1)$ du cercle $(\mathcal{C})$ par la rotation f et tracer $(\mathcal{C}_1)$

GROUPES DES HOMOTHETIES ET TRANSLATIONS

Exercice 1

ABC est un triangle. Soit h et h' les homothéties de centres respectifs B et C, de rapports $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{2}$. On pose $f = h' \circ h$

1. Démontrer que f est une translation.
2. Déterminer $f(A)$ puis construire l'image obtenue.
3. En déduire une détermination du vecteur de cette translation.
4. Exprimer le vecteur de cette translation en fonction du vecteur $\overrightarrow{BC}$.

Exercice 2

ABC est un triangle. Soit h et h' deux homothéties de centres respectifs B et C et de rapports respectifs 2 et $-\frac{1}{3}$. On pose $g = h' \circ h$

1. Démontrer que g est une homothétie dont on précisera le rapport
2. Déterminer $g(A)$ puis construire l'image obtenue.
3. Déduire la construction du centre Ω de g.
4. Déterminer la position de Ω à partir du point B.

Exercice 3

ABC est un triangle. Soit h l'homothétie de centre B, de rapport $\frac{1}{2}$ et t la translation de vecteur $\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

1. Justifier que $t \circ h$ est une homothétie dont on précisera le rapport.
2. Construire l'image de A par $t \circ h$.
3. En déduire une construction du centre Ω de cette homothétie.
4. Déterminer en fonction du point B, la position du Ω.

Exercice 4

$\mathcal{P}$ est le plan euclidien rapporté au repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ et $\mathcal{D}$ est la droite d'équation $y = 2x - 1$. On considère le point $\Omega(1,1)$ de $\mathcal{P}$. Soit S la réflexion d'axe $\mathcal{D}$ et h l'homothétie de centre Ω qui transforme le point $A\left(\frac{3}{2}; 2\right)$ en $B(2; 3)$.

1. Définir analytiquement les applications S, h et $f = h \circ S$
2. Soit $M(x; y)$ le point d'affixe $z = x + iy$ et $M'(x'; y')$ d'affixe $z' = x' + iy'$ son image par f. Exprimer z' en fonction de z
3. Déduire la nature et les éléments caractéristiques de f

Exercice 5

$ABCD$ est un carré de centre O. I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$.

1. Démontrer qu'il existe une homothétie h qui transforme A en I et L en K.
2. Soit E le symétrique de I par rapport à A. Déterminer les éléments caractéristiques de h.
3. Démontrer que L est le milieu de $[EK]$.
4. On considère les applications f et g telles que : $f = h\left(A\,;\frac{1}{2}\right) \circ t_{\overrightarrow{AB}}$ et $g = t_{\overrightarrow{AB}} \circ h\left(A\,;\frac{1}{2}\right)$
   a) Déterminer $f(A)$ et $f(D)$. Quels sont la nature et les éléments caractéristiques de f ?
   b) Déterminer $g(A)$ et $g(D)$. Quels sont la nature et les éléments caractéristiques de g ?

Exercice 6

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC, de centre O, tel que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$. On appelle (C) le cercle circonscrit au triangle ABC, I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[OI]$. Les droites (OA) et (OC) recoupent le cercle (C) respectivement en D et en E.

1. Placer ces points sur une figure (On prendra $OA = 4\ cm$).
2. On note G l'isobarycentre des points A, B, C, D et E.
   a) Exprimer $\overrightarrow{OG}$ en fonction de $\overrightarrow{OB}$.
   b) Exprimer $\overrightarrow{OG}$ en fonction de $\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{OD}$.
   c) En déduire que les droites (OB) et (DJ) se coupent en G. Placer G.
3. A tout point M du plan, on fait correspondre le point $M' = f(M)$ tel que : $4\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}$.
   a) Montrer que f est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
   b) Quelles sont les images par f des points B et D ?

AFFINITE DU PLAN AFFINE

Exercice 1

Déterminer l'expression analytique de l'affinité du plan f d'axe (Δ) : $2x - y + 1 = 0$ et de direction celle de $\vec{V}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ et de rapport $k = 2$.

Exercice 2

Le plan P est muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Soit f l'application de P dans P qui au point $M(x; y)$ fait correspondre le point $M'(x'; y')$ tel que l'on ait :

$$f: \begin{cases} x' = \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}y - \frac{1}{6} \\ y' = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une transformation de P (application bijective de P dans P)
2. Montrer que l'ensemble des points invariants par f est une droite $\mathcal{D}$
3. Montrer que la direction du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est invariante
4. (MM') coupe $\mathcal{D}$ en H. Montrer que l'on a $\overline{HM'} = \frac{1}{2}\overline{HM}$. En déduire la nature de f et la construction de l'image M' d'un point M.

Exercice 3

On désigne par f l'application du plan définie analytiquement par :

$$f: \begin{cases} x' = \frac{5}{2}x + y + \frac{5}{2} \\ y' = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y - \frac{5}{4} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une bijection.
2. Déterminer l'ensemble des points invariants par f
3. Montrer que $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe $\vec{V}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ à préciser.
4. H est le projeté de M sur $Inv(f)$ suivant la direction de $\vec{V}$. Déterminer les coordonnées de H en fonction des coordonnées de M.
5. Trouver une relation entre $\overrightarrow{HM'}$ et $\overrightarrow{HM}$
6. Déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

Exercice 4

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère l'application f de P qui à tout point $M(x; y)$ associe le point $M'(x'; y')$ telle que :

$$f:\begin{cases} x' = \frac{5}{2}x + y + \frac{5}{2} \\ y' = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y - \frac{5}{4} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une bijection de P dans P.
2. Déterminer l'expression analytique de l'application f^{-1} de f.
3. Déterminer l'ensemble $Inv(f)$ des points invariants par f.
4. Démontrer que $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe $\vec{v}(a;b)$.
5. Soit $H(x_H;y_H)$ le projeté de $M(x;y)$ sur $Inv(f)$ parallèlement à $\vec{v}$.
   a) Déterminer les coordonnées $(x_H;y_H)$ en fonction de celles de M.
   b) Trouver une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{HM'}$.
6. Déduire que f est une affinité dont on déterminera le rapport, la base et la direction.

Exercice 5

Soit $\mathcal{P}$ le plan associé à l'espace vectoriel E de dimension 2. Soit $\mathcal{B} = (\vec{\imath};\vec{\jmath})$ une base de E et $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ le repère de $\mathcal{P}$ d'origine O. Soit f l'application du plan définie analytiquement par :

$$f:\begin{cases} x' = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y - \frac{1}{2} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une bijection
2. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est une droite $(\mathcal{D})$ dont on déterminera l'équation.
3. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est parallèle à un vecteur fixe $\vec{V}$ dont on déterminera les coordonnée dans la base $\mathcal{B}$.
4. Soit I le projeté de M sur $(\mathcal{D})$ parallèlement à $\vec{V}$. Comparer les vecteurs $\overrightarrow{IM'}$ et $\overrightarrow{IM}$.
5. Donner une construction géométrique de M' connaissant M
6. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

SIMILITUDES PLANES

Exercice 1

Dans le plan orienté, on considère le carré $ABCD$ direct de centre O. Les points I, J et L sont les milieux respectifs des côtés $[CD], [DA]$ et $[BC]$.

1. Caractériser la similitude plane directe S_1 de centre B qui associe L à O.
2. Caractériser l'application $S_2 = T_{\overrightarrow{BC}} \circ R\left(O;\frac{\pi}{2}\right) \circ H\left(D;\sqrt{2}\right)$ (on pourra déterminer $S_2(D)$)
3. Préciser l'axe (Δ) et le rapport k_3 de la similitude plane indirecte S_3 de centre D qui associe C à J
4. Caractériser $S = S_3 \circ S_2$

Exercice 2

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Soit I le symétrique de A par rapport au milieu de $[BC]$ et H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

1. Faire la figure que l'on complétera au fur et à mesure.
2. Soit S_1 la similitude plane directe de centre A qui transforme H en B et S_2 la similitude plane directe de centre A qui transforme B en C.
   a) Déterminer les éléments caractéristiques de S_1
   b) Montrer que $S_1(C) = I$ puis en déduire l'image de la droite (BC) par S_1
   c) Déterminer l'image de la droite (BI) par S_2
3. Soit M un point de la droite (BI) et $M' = S_2(M)$, on suppose que M et M' sont distincts de I. Montrer que les points A, M, I et M' sont cocycliques.

Exercice 3

Dans le plan orienté $\mathcal{P}$, $ABCD$ est un carré de centre O et de côté $4\ cm$. I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$. On désigne par E le point d'intersection des droites (DJ) et (AB).

1. Faire la figure.
2. a) Déterminer le rapport k_1 de la similitude plane directe S_1 qui transforme J en B et D en A. Justifier que E est le centre de S_1.
   b) Les triangles JBE et JCD étant isométriques, montrer que E est l'image de B par la similitude plane directe S_2 de rapport $k_2 = \sqrt{5}$ et de centre J.
3. Soit $f = S_1 \circ S_2$ la composée de S_1 et S_2. On désigne par θ_1 et θ_2 les mesures d'angles des similitudes respectives S_1 et S_2.
   a) Montrer que $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

b) Déterminer $f(C)$ et $f(B)$.
c) Construire alors Ω le centre de f.

Exercice 4

Soit ABC un triangle rectangle en B tel que $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$, $AB = 3\ cm$ et $BC = 4\ cm$.

1. Soit f la similitude directe telle que $f(A) = B$ et $f(B) = C$.
   a) Déterminer l'angle θ et le rapport λ de f
   b) Soit H le projeté orthogonal de B sur la droite (AC).
   Montrer que H est le centre de f.
2. Soit $D = f(C)$.
   a) Montrer que D appartient à la droite (BH).
   b) Construire le point D.
3. Soit g la similitude indirecte qui transforme A en B et B en C. On désigne par Ω le centre de g.
   a) Montrer que $f \circ g^{-1} = S_{(BC)}$
   b) Soit $E = g(C)$. Déterminer $S_{(BC)}(E)$. Construire alors le point E.
   c) Préciser la nature de $g \circ g$. Montrer que Ω appartient à la droite (AC) ainsi qu'à la droite (BE).
   d) Construire Ω et l'axe (Δ) de la similitude g.

Exercice 5

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et I le milieu du segment $[AB]$. La bissectrice intérieure de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ coupe $[BC]$ en J. $\mathcal{C}$ est le cercle de centre A et de rayon AC.

1. Faire la figure. On prendra $AB = 4\ cm$ et (AB) horizontale.
2. Soit f la similitude plane directe qui transforme I en O et B en C.
   a) Déterminer le rapport et l'angle de f.
   b) Montrer que A est le centre de f.
3. Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
   a) Montrer que : $R = S_{(AC)} \circ S_{(AJ)}$.
   b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $h = f \circ S_{(AJ)}$.
4. On pose $E = S_B(A)$ et on désigne par g la similitude plane indirecte qui transforme I en D et D en E.
   a) Montrer que 2 est le rapport de g.
   b) Déterminer $g \circ g(I)$.
   c) En déduire le centre et l'axe de g.

Exercice 6

Dans le plan orienté, on considère le triangle ABE rectangle isocèle en B de sens direct. On désigne par I et O les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AE]$. Soit D le point du plan tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $AD = AO$; C est le point du plan tel que $ABCD$ soit un rectangle de sens direct et K le milieu de $[BC]$.

1. Faire la figure. On prendra $[AB]$ horizontalement tel que $AB = 4\ cm$.
2. On note f la similitude plane directe telle que $f(A) = B$ et $f(D) = I$.
   a) Préciser le rapport k de f et une des mesures θ de son angle.
   b) On admet que $f(B) = C$. Déterminer $f(I)$.
3. On veut construire le centre Ω de f. Pour cela, on pose $g = f \circ f$
   a) Montrer que g est une homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{2}$
   b) Déterminer $g(A)$ et $g(D)$
   c) En déduire une construction du centre Ω de f
4. Soit F le point du plan tel que $ABEF$ soit un carré et G le symétrique de F par rapport à E. On pose : $h = t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(AE)}$
   a) Montrer que h est une symétrie glissée du plan.
   b) On admet que : $h(E) = G$ et $h(B) = E$.
   Caractériser l'application h.

Exercice 7

On considère dans le plan orienté $(\mathcal{P})$, un rectangle $ABCD$ tel que :
$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $AB = 2AD$. On désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[DC]$.

1. Faire une figure que l'on complètera.
2. Soit f la similitude directe qui transforme D en C et I en J
   a) Déterminer le rapport k et l'angle θ de f
   b) Montrer que $f(C) = I$
   c) Construire les points $E = f(A)$ et $F = f(B)$
   d) Prouver que F est le milieu du segment $[DI]$
3. Soit Ω le centre de f
   a) Montrer que Ω appartient au cercle de diamètre $[DI]$
   b) En déduire que Ω est le point d'intersection des droites (AC) et (EI)
4. Soit $g = S_I \circ f$ où S_I est la symétrie centrale de centre I
   a) Déterminer la nature puis caractériser g
   b) Soit M un point de $(\mathcal{P})$ distinct de D et soit $N = g(M)$.
   Montrer que le triangle DMN est rectangle et isocèle direct en N

5. Soit S' la similitude plane indirecte qui envoie F en L et E en I avec $L = S_J(I)$. Caractériser S'.

Exercice 8

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral direct ABC de centre O et de côté $4cm$. On désigne par K le milieu du segment $[BC]$, H le symétrique de A par rapport à O et $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O passant par A. Soit I un point du plan tel que $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$.

1. Faire une figure, on prendra $[AB]$ horizontal.
2. Soit S la similitude directe telle que $S(A) = B$ et $S(C) = K$.
   a) Déterminer le rapport k de S et une mesure θ de son angle.
   b) Déterminer les images des droites (OA) et (CH) puis en déduire que H est le centre de S.
3. On désigne par S_1 la similitude directe de centre B qui envoie A en O et par S_2 la similitude directe de centre C qui envoie O en A. On pose $f = S_2 \circ S_1$
   a) On admet que la similitude S_2 admet pour rapport $k_2 = \sqrt{3}$ et une mesure d'angle $\theta_2 = -\frac{\pi}{6}$.
   Déterminer le rapport k_1 et une mesure θ_1 de l'angle de S_1.
   b) Déterminer $f(A)$.
4. On pose $g = S \circ f \circ S_{(AB)}$ où $S_{(AB)}$ est la réflexion d'axe (AB).
   a) Vérifier que $S \circ f(A) = B$ et montrer que $S \circ f$ est une homothétie dont on précisera le rapport.
   b) Déterminer le centre de $S \circ f$.
   c) Caractériser alors g.
5. Soit J le symétrique de O par rapport à (AB) et E le milieu du segment $[JI]$.
   Construire $(\mathcal{C}')$ image de $(\mathcal{C})$ par g.

Exercice 9

Dans un plan orienté (P) on considère le triangle équilatéral ABC direct de centre G. Les points A', B' et C' sont milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.
NB : Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure.

1. On considère l'application f telle que $f = R\left(G; \frac{2\pi}{3}\right) \circ t_{\overrightarrow{AC}} \circ R\left(C; \frac{\pi}{3}\right)$
   a) Calculer $f(C)$
   b) Reconnaitre et caractériser l'application f
2. (D) est la parallèle à (BB') passant par le point A, la parallèle à (CC') passant par B coupe (D) en P tandis que (CC') coupe (D) en I. La droite (PB) rencontre la droite (AA') en K.

a) Donner la nature du triangle APK

b) Montrer qu'il existe une homothétie h qui transforme P en B et A en G. Préciser son rapport et son centre.

c) Montrer que les points A, B, C et K sont situés sur un cercle $(\mathcal{C})$. Tracer ce cercle $(\mathcal{C})$.

d) Caractériser la similitude plane indirecte $\bar{S}$ de centre K et qui transforme P en G.

e) Déterminer l'image du point B par la similitude plane indirecte $\bar{S}$.

3. On considère l'affinité orthogonale g d'axe (AK) et de rapport $\frac{2}{3}$. Soit J le point de concours de la parallèle à (BC) passant par le point G avec la droite (AC). (E) est l'image du cercle $(\mathcal{C})$ par l'affinité g

a) Montrer que le point J appartient à (E)

b) Construire (E)

c) Construire l'image (E') de (E) par la similitude plane indirecte $\bar{S}$

Exercice 10

Dans le plan orienté (P), on considère le carré direct $ABCD$ centré en O. On note par I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AD]$, $[DC]$, $[CB]$ et E le symétrique de I par rapport à B.

1. On désigne par f l'application affine telle que $f(D) = O$, $f(J) = L$, $f(K) = I$ et $f(I) = E$

a) Déterminer la matrice de l'endomorphisme ρ associé à f dans la base$\left(\overrightarrow{DK}; \overrightarrow{DJ}\right)$.

b) En déduire que f est un antidéplacement.

c) Donner la nature exacte et la forme réduite de f

2. On note S la similitude plane directe telle que $S(D) = O$ et $S(C) = I$

a) Déterminer le rapport k et l'angle θ de S.

b) Construire le centre Ω de S

c) Préciser les images respectives des droites (BD) et (BC) par S

d) Déterminer $S(B)$ et $S(A)$

e) Montrer que Ω est le barycentre des points pondérés $(B; 1)$ et $(J; 4)$

3. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On pose $h = R \circ S$

a) Préciser $h(B)$, puis caractériser h

b) Soit Ω' le milieu de $[\Omega B]$, justifier que le triangle $O\Omega\Omega'$ est iso-rectangle

4. Soit $\bar{S}$ la similitude plane indirecte telle que $\bar{S}(D) = O$ et $\bar{S}(C) = I$

a) Vérifier que $\bar{S} = S_{(OI)} \circ S$, puis déterminer $\bar{S}(B)$

b) Donner la forme réduite de $\bar{S}$.

ALGEBRE LINEAIRE

Exercice 1

Dans l'espace vectoriel de base $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$, on considère les droites vectorielles (d) et (Δ) d'équations respectives $x-2y=0$ et $x+y=0$

Déterminer la matrice dans la base $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$, puis l'expression analytique de la symétrie vectorielle f de base (d) et de direction (Δ)

Exercice 2

E et F sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. On considère l'application linéaire f de E vers F.

1. $\overrightarrow{O_E}$ et $\overrightarrow{O_F}$ désignent respectivement les vecteurs nuls de E et F. Montrer que : $f(\overrightarrow{O_E}) = \overrightarrow{O_F}$

2. a) Définir $Kerf$

   b) Montrer que $Kerf$ est un sous espace vectoriel de E.

Exercice 3

1. E et F sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, et f une application linéaire de E dans F. Définir Imf, puis démontrer que Imf est un sous espace vectoriel de F.

2. Soit g l'application de $\mathbb{R}^3$ définie par : $g(x;y;z) = 2x - z$
   a) Montrer que g est une application linéaire.
   b) Déterminer $Kerg$ et Img, puis donner une base $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$

Exercice 4

1. E et F sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, et f une application linéaire de E dans F. Définir Imf, puis démontrer que Imf est un sous espace vectoriel de F.

2. Soit g l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$g(x;y) = (x;x+y;x-y)$$

   a) Montrer que g est une application linéaire.
   b) Déterminer Img, puis donner une base $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$ de Img

Exercice 5

Soit F une partie non vide de l'espace $\mathbb{R}^2$

1. Quand dit-on que :
   a) F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?
   b) Un vecteur de $\mathbb{R}^2$ est une combinaison linéaire des vecteurs de F ?
   c) F est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$?

2. Démontrer que l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de F est un sous espaces vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
3. Soient $G = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = 2x\}$ et $H = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x - 3y = 0\}$ deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$. Démontrer que G et H sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
On donne $\overrightarrow{e_1} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{e_2} = 3\vec{\imath} + \vec{k}$
1. Soit $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. On admet que $\vec{u}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$.
   a) Montrer que la relation liant x, y et z est $x - y + 3z = 0$.
   b) En déduire que la famille $(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_1})$ est liée
   On donne $\overrightarrow{e_3} = 4\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$
2. Soit K un sous ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par :
$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 3z = 0\}$
   a) Démontrer que K est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$
   b) Montrer que K est engendré par $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$.

Exercice 7

Soit E l'espace vectoriel muni de la base canonique $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
f est l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base B est M, avec
$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.
1. Calculer $M \times M$. En déduire la nature de f.
2. Préciser alors l'image de f.
3. Donner l'expression analytique de f dans la base B.

Exercice 8

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 muni de la base canonique $B = (\vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$.
On désigne par φ l'endomorphisme de E défini par :

$$\begin{cases} \varphi(\vec{\imath}) = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 2\vec{k} \\ \varphi(\vec{\jmath}) = -\vec{\jmath} \\ \varphi(\vec{k}) = -4\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 3\vec{k} \end{cases}$$

1. Déterminer la matrice M_φ de φ
2. Calculer $M_\varphi \times M_\varphi$ puis donner la nature de φ
3. Donner l'expression analytique de l'endomorphisme φ

Exercice 9

E et F sont des espaces vectoriel sur $\mathbb{R}$. On désigne par f l'application linéaire de E vers F.

1. a) Qu'appelle-t-on noyau de f ?

   b) Montrer que $Kerf$ est un sous espace vectoriel de E.

2. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f(x, y, z) = (-z, -x + y - z, z)$$

Montrer que f est une projection vectorielle.

Exercice 10

1. E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ; F_1 et F_2 deux sous espaces vectoriels de E.

Démontrer que l'ensemble $S = \{u \in E;\ u = u_1 + u_2\ avec\ u_1 \in F_1\ et\ u_2 \in F_2\}$ est un sous espace vectoriel de E.

2. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni d'une base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne $\overrightarrow{e_1}(1; 1; 1)$ et $\overrightarrow{e_2}(0; 1; 1)$.

On désigne par (p) le plan vectoriel défini par : $(p) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = z\}$

a) Montrer que le système $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}\}$ est une base de (p)

b) Déterminer dans $\mathbb{R}^3$ le sous espace vectoriel (Δ) supplémentaire de (p).

Exercice 11

Dans l'espace vectoriel F des fonctions numériques, on considère le sous-ensemble G de F défini par : $G = \{f \in F; f(x) = (ax + b)e^x\}$

1. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de F.
2. On pose $f_0(x) = e^x$ et $f_1(x) = xe^x$. Montrer que $B = \{f_0; f_1\}$ est une base de G.
3. Soit g la fonction définie de G dans G par $g(f) = f'$.

   a) Montrer que g est un endomorphisme de G.

   b) Donner la matrice M de g dans la base $B = \{f_0; f_1\}$

   c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n,
   $M^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

CONIQUES

PARABOLE

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit (Γ) la courbe d'équation $y^2 - 4y - 2x + 10 = 0$

1. Donner la nature et les éléments caractéristiques de (Γ)
2. Vérifier que le point $M(5; 4)$ appartient à (Γ)
3. Donner l'équation de la tangente à (Γ) au point $M(5; 4)$.
4. Construire (Γ) ainsi que sa tangente.

Exercice 2

Dans le plan orienté, on considère le carré $ABCD$ direct de centre O. Les points I, J et L sont les milieux respectifs des côtés $[CD], [DA]$ et $[BC]$.

On choisit dans le plan le repère $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$ orthonormé

1. Faire une figure.
2. Soit (P) la parabole de foyer $F\left(0; \frac{1}{3}\right)$, de directrice (BC), passant par le point E d'abscisse $x_E = 1$ et qui admet pour tangente en G la médiatrice (Δ) du segment $[FB]$.
   a) Placer les points E et G de la parabole (P) sur la figure, puis construire (P).
   b) Déterminer le pas ou le paramètre de la parabole (P)
   c) Montrer que l'équation cartésienne de (P) dans le repère $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$ est $9x^2 - 24y - 8 = 0$

Exercice 3

Dans le plan orienté, on considère un carré $ABCD$ de sens direct de centre O. I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments $[CD], [AD], [AB]$ et $[BC]$.

1. Faire une figure.
2. Soit $(\mathcal{P})$ la parabole de foyer C, passant par B et admettant comme tangente en B la droite (BO).
   a) Tracer sa directrice $(\mathcal{D})$ (on exploitera le fait que $B \in (\mathcal{P})$)
   b) Construire son sommet S.
   c) Achever la construction de la parabole $(\mathcal{P})$.
3. Le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(L, \overrightarrow{LC}, \overrightarrow{LO}\right)$. Montrer que l'équation cartésienne de $(\mathcal{P})$ est : $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$.

Exercice 4

Dans le plan orienté, on considère un carré de centre O, de sens direct. J, K et I désignent respectivement les milieux des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[AD]$. Soit P le point du segment $[KC]$ distinct de K et C. Les droites (AP) et (DC) se coupent en Q.
La perpendiculaire à (AP) en A coupe respectivement les droites (BC) et (CD) en L et en E.

1. Faire soigneusement la figure. On prendra $BC = 3cm$; $BP = 2cm$ et on placera $[AB]$ horizontalement.

2. On considère la parabole $(\mathcal{P})$ de foyer B, dont la tangente en C est la droite (AC).
   a) Déterminer la directrice de $(\mathcal{P})$.
   b) Construire $(\mathcal{P})$.

6. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$.
   a) Donner les coordonnées des points B et A.
   b) Montrer que l'équation cartésienne de $(\mathcal{P})$ est : $y^2 - 2y + 4x + 1 = 0$

Exercice 5

Soit un carré $OABC$ de centre I tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC}}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Soit J le milieu de $[OI]$, K le projeté orthogonal de J sur (OA) et I' le symétrique de I par rapport à l'axe (OA).

1. Faire la figure

2. On désigne par (Γ) la parabole d'axe focal la droite (OA) admettant pour tangente au point I, la droite (OB).
   a) Construire le foyer F de (Γ). Justifier que K est son sommet.
   b) Que représente la droite (OC) pour (Γ) ?
   c) Montrer que le point I' appartient à (Γ).

Exercice 6

Dans le plan orienté $\mathcal{P}$, $ABCD$ est un carré de centre O et de côté $4\ cm$. I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$. On désigne par E le point d'intersection des droites (DJ) et (AB).

1. Faire la figure.

2. On désigne par K et L les milieux respectifs des segments $[DC]$ et $[DA]$, (Γ) la parabole de sommet S, le milieu du segment $[DO]$, dont (OK) et (OL) sont deux tangentes.
   a) Montrer que (AC) est la directrice de (Γ).
   b) Donner une construction du point P_1 de (Γ) appartenant à (OK).
   c) Construire (Γ).

Exercice 7

Dans le plan orienté, on considère le triangle ABE rectangle isocèle en B de sens direct. On désigne par I et O les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AE]$. Soit D le point du plan tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $AD = AO$; C est le point du plan tel que $ABCD$ soit un rectangle de sens direct et K le milieu de $[BC]$.

Soit F le point du plan tel que $ABEF$ soit un carré et G le symétrique de F par rapport à E.

1. Faire la figure. On prendra $[AB]$ horizontalement tel que $AB = 4\ cm$.
2. Soit p la parabole de foyer B et de directrice (AD).
   a) Montrer que la droite (AO) est une tangente à p en un point à préciser.
   b) Construire le point M_0 de p situé sur la droite (DC).
   c) Achever la construction de la parabole p.

Exercice 8

Soit ABC un triangle tel que $AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On note $I,\ J$ et K les milieux respectifs des segments $[AB], [BC]$ et $[AC]$. On note E le milieu de $[BJ]$.

Soit D le symétrique de A par rapport à J et L le milieu du segment $[BD]$.

1. Faire une figure.
2. On désigne par $(\mathcal{P})$ la parabole de foyer A et de directrice (BD).
   a) Déterminer l'axe focal et le sommet de $(\mathcal{P})$.
   b) Montrer que le point C appartient à $(\mathcal{P})$ et que la droite(BC) est tangent à $(\mathcal{P})$
   c) Construire la parabole $(\mathcal{P})$.
3. On munit le plan d'un repère orthonormal $(I, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ direct tel que $\vec{\imath} = \overrightarrow{IA}$. Déterminer l'équation cartésienne de $(\mathcal{P})$ dans le repère $(I, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Exercice 9

Dans le plan orienté, on considère le carré direct $ABCD$ centré en O. Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés $[AB], [BC], [CD]$ et $[AD]$.

1. Faire une figure.
2. On rappelle que les projetés orthogonaux du foyer d'une parabole sur les tangentes à cette parabole appartiennent à la perpendiculaire à l'axe focal de la parabole en son sommet O. Soit $(\mathcal{P})$ la parabole de sommet J, d'axe focal la droite (JB) dont une tangente est la droite (OB).
   a) Montrer que le point C est le foyer de la parabole $(\mathcal{P})$.
   b) Montrer que la droite (AB) est la directrice de la parabole $(\mathcal{P})$.
   c) Montrer que le point D appartient à la parabole $(\mathcal{P})$.

d) Construire le point N de la parabole $(\mathcal{P})$, situé sur la droite (DC) puis préciser la tangente à la parabole $(\mathcal{P})$ en N.

e) Construire la parabole $(\mathcal{P})$.

Exercice 10

On considère le triangle ABC rectangle en C tel que $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Soit F le milieu du segment $[AB]$, I est le symétrique de C par rapport à la droite (AB), H est le milieu du segment $[CI]$ et K est le projeté orthogonal de F sur la droite (AC).

1. Faire une figure l'on complétera au fur et à mesure.
2. Montrer que les points C, K, F et H sont cocycliques.
3. On rappelle que la normale de la parabole est la perpendiculaire à la tangente de la parabole au point de contact. On considère la parabole $(\mathcal{P})$ de foyer F dont la droite (BC) est normale à $(\mathcal{P})$ en C.

a) Préciser la tangente (T) à $(\mathcal{P})$.

b) Construire la directrice (D) de $(\mathcal{P})$.

c) Montrer que la droite (D) est perpendiculaire à (AB)

d) N est le point d'intersection des droites (D) et (AB).
Placer le sommet S de $(\mathcal{P})$.

e) Montrer que I est le point de $(\mathcal{P})$ puis préciser la tangente (T') à $(\mathcal{P})$ en I

f) Construire la parabole $(\mathcal{P})$.

Exercice 11

On considère le triangle direct ABC rectangle en C tel que $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$. I est le milieu du segment $[AB]$. Soit la parabole $(\mathcal{P})$ de foyer I. La droite (BC) est normale à $(\mathcal{P})$ en C.

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
2. Préciser la tangente (T) à $(\mathcal{P})$ en C.
3. Construire la directrice $(\mathcal{D})$ de la parabole $(\mathcal{P})$.
4. Montrer que $(\mathcal{D})$ est perpendiculaire à (AB).
5. On désigne par N le point d'intersection des droites $(\mathcal{D})$ et (AB) et par K le projeté orthogonal de I sur (T).

a) Préciser la position du sommet S de $(\mathcal{P})$

b) Montrer que (KS) est perpendiculaire à (AB)

c) Déterminer l'ensemble des projetés orthogonaux de I sur les tangentes à $(\mathcal{P})$

d) Construire la parabole $(\mathcal{P})$.

ELLIPSE

Exercice 1

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, on considère l'ensemble (Γ) des points $M(x,y)$ du plan tels que : $x^2 + 4y^2 - 2x - 3 = 0,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de (Γ).
2. Construire la courbe (Γ).

Exercice 2

On considère les points O, F et A tel que $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OF}\right) = 0[2\pi]$. $(\mathcal{E})$ est l'ellipse de centre O dont un foyer est F et un sommet A.

1. Placer les autres sommets de $(\mathcal{E})$.
2. Construire les directrices de $(\mathcal{E})$.
3. Construire l'ellipse $(\mathcal{E})$.

Exercice 3

$ABCD$ est un carré de centre O tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB], [BC], [CD]$ et $[AD]$.

1. Faire une figure.
2. Soit $(\mathcal{E})$ l'ellipse de foyers B et D, passant par A.
   a) Montrer que la longueur du grand axe est $a = AB$.
   b) Construire les sommets de $(\mathcal{E})$.
   c) Construire les points de $(\mathcal{E})$ situés sur les demi-droites $[DI)$ et $[BK)$.
   d) Achever la construction de $(\mathcal{E})$.

Exercice 4

Le plan $(\wp)$ est orienté dans le sens direct. Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$.

1. Faire une figure. On prendra $[AB]$ horizontalement et $AB = 6cm$.
2. Soit $(\mathcal{E})$ l'ensemble des points M du plan tel que $MF + MG = BD$ où F et G sont les milieux respectifs des segments $[OC]$ et $[OA]$.
   a) Donner la nature de $(\mathcal{E})$ puis préciser ses foyers.
   b) Vérifier que les points A et C appartiennent à $(\mathcal{E})$.
   c) Construire le point P de $(\mathcal{E})$ situé sur $[OB]$ puis achever la construction de $(\mathcal{E})$.

Exercice 5

Dans le plan orienté, on considère le triangle direct ABC tel que $AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs de segments $[AC], [AB], [BC]$ et $[JB]$. P est le projeté orthogonal de I sur la droite (BC).

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
2. On considère l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M du plan tels que : $MA + MJ = AB$.
   a) Montrer que $(\mathcal{E})$ est une ellipse d'axe focal la droite (AB).
   b) Montrer que le point L appartient à l'ellipse $(\mathcal{E})$ et préciser ses sommets
   c) Construire $(\mathcal{E})$.

Exercice 6

$ABCD$ est un carré de sens direct et de centre I. Soit P un point de la droite (BC) distinct de C. Les droites (AP) et (CD) se coupent en Q. La perpendiculaire à (AP) passant par A coupe (BC) en R et (CD) en T. On désigne par N et M les milieux respectifs des segments $[PT]$ et $[QR]$.

1. Faire une figure on prendra $AB = 8cm$.
2. Soit $(\mathcal{C})$ la conique de foyer B, de directrice (AD) et d'excentricité $e = \frac{1}{2}$.
   a) Préciser la nature de la conique $(\mathcal{C})$.
   b) Déterminer les sommets de la conique $(\mathcal{C})$.
   c) Construire les points de $(\mathcal{C})$ situés sur les droites (PB) et (BI).
   d) Achever la construction de la conique $(\mathcal{C})$.
3. On rapporte le plan du repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$. Donner l'équation cartésienne de $(\mathcal{C})$.

Exercice 7

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de diamètre $[AB]$ et de centre O. Soit (Δ) la médiatrice de $[OB]$ qui coupe $(\mathcal{C})$ en I et J.

1. Faire une figure, on prendra $AB = 8cm$.
2. Quelle est la nature du quadrilatère $OIBJ$.
3. Soit K le projeté orthogonal de O sur $[AI]$. Démontrer que les points K, O, J sont alignés.
4. Soit $(\mathcal{E})$ l'ellipse de foyers A et O passant par K.
   a) Construire le point de $(\mathcal{E})$ situé sur $[OI]$.
   b) Construire $(\mathcal{E})$.
   c) Construire ses directrices.

Exercice 8

Soit ABC un triangle rectangle en C tel que $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$. La bissectrice intérieure de l'angle $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})$ coupe le segment $[AC]$ en O. On désigne par I le projeté orthogonal de O sur la droite (AB) et par J le milieu de $[OA]$. Les cercles (Γ_1) et (Γ_2) de diamètres respectifs $[AB]$ et $[AO]$ se recoupent en D.

K est un point du plan tel que $\overrightarrow{KD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{KA}$.

1. Faire une figure.
2. Montrer que le triangle OAB est isocèle et que I est milieu de $[AB]$.
3. Soit $(\mathcal{E})$ l'ellipse de foyers A et B passant par O.
   a) Montrer que la longueur du grand axe de $(\mathcal{E})$ est $a = 2OJ$.
   b) Construire les points de $(\mathcal{E})$ situés sur les droites (BC) et (AD).
   c) Achever la construction de $(\mathcal{E})$.

Exercice 9

Dans le plan orienté, on considère le carré direct $ABCD$ de centre O. I, J, K et L désignent les milieux respectifs des segments $[AB], [BC], [CD]$ et $[AD]$. Les droites (OB) et (IJ) se coupent en T.

1. Faire la figure.
2. Définir le cercle principal d'une ellipse.
3. Soit f l'application du plan qui associe à tout point M du plan son image M' tel que $\overrightarrow{HM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HM}$ où H désigne le projeté orthogonal de M sur la droite (IK).
   a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de f.
   b) Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de diamètre (IK). Construire l'image $(\mathcal{E})$ de $(\mathcal{C})$ par f.
   c) Préciser la nature de $(\mathcal{E})$.
   d) Placer le foyer F de $(\mathcal{E})$ situé sur le segment $[OK]$ puis calculer l'excentricité e de $(\mathcal{E})$.

Exercice 10

ABC est un triangle équilatéral direct de centre de gravité G.

K est le projeté orthogonal de G sur la droite (AB), H est le projeté orthogonal de G sur la droite (AC).

1. Faire une figure.
2. Soit $(\mathcal{E})$ l'ellipse de centre A' milieu du segment $[BC]$, de sommet G et de foyer C.
   a) Le point S est le sommet de $(\mathcal{E})$ situé sur la droite (BC). Exprimer $A'S$ en fonction de GC.
   b) Représenter les sommets de $(\mathcal{E})$ puis construire $(\mathcal{E})$.
   c) Construire un point M_0 de $(\mathcal{E})$ situé sur la droite (AC).

d) Calculer l'excentricité e de $(\mathcal{E})$.

3. Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(A'; \overrightarrow{A'C}; \overrightarrow{A'G}\right)$.

a) Déterminer les coordonnées des points C, G, S et A.

b) Donner une équation de $(\mathcal{E})$ dans ce repère.

c) Calculer l'aire de $(\mathcal{E})$ en unité d'aire.

Exercice 11

Le plan est orienté, on considère un segment $[BC]$. A est le point du plan tel que :

$$\begin{cases} AB = AC \\ (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

1. Soit $(\mathcal{E})$ l'ellipse qui passe par le point A et dont les foyers sont B et C.

a) Préciser le centre O de $(\mathcal{E})$

b) Préciser l'axe non focal de $(\mathcal{E})$.

c) Que représente le point A pour l'ellipse $(\mathcal{E})$?

2. On note I le centre de gravité du triangle ABC. Le cercle de centre C et de rayon $r = 2AC$ coupe la demi-droite $(IC]$ en un point K_0.

a) Montrer que le point d'intersection M_0 de la médiatrice du segment $[BK_0]$ avec la demi-droite $(IC]$ est un point de l'ellipse $(\mathcal{E})$.

b) Par un procédé analogue, construire le point M_1 de $(\mathcal{E})$ situé sur la demi-droite $(BI]$.

c) Tracer la directrice (D) de $(\mathcal{E})$ associée au foyer B et la directrice (D') de $(\mathcal{E})$ associée au foyer C.

3. Achever la construction de $(\mathcal{E})$.

4. Calculer l'excentricité de $(\mathcal{E})$.

5. On rapporte le plan au repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}\right)$. Ecrire l'équation cartésienne de $(\mathcal{E})$ dans ce repère puis vérifier le résultat de la question 4.

HYPERBOLE

Exercice 1

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, on considère l'ensemble (Γ) des points $M(x,y)$ du plan tels que : $x^2 - 4y^2 - 2x - 3 = 0$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de (Γ).

2. Construire la courbe (Γ).

Exercice 2

Dans le plan orienté, on considère un triangle isocèle ABC tel que $AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

Soit I le point tel que le triangle CAI soit rectangle isocèle avec $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CI}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

G est le projeté orthogonal de C sur (AB) et J un point du plan tel que $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{IJ}$.

1. Faire une figure. On prendra $AB = 5cm$.

2. Soit $(\mathcal{H})$ l'hyperbole de rectangle fondamental $AGJI$ et d'axe focal (EC) où E est le milieu du segment $[AI]$.
   a) Placer le point E sur la figure.
   b) Préciser les asymptotes de $(\mathcal{H})$.
   c) Le cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[IG]$ coupe la droite (EC) en deux points F et F'. Que représentent F et F' pour l'hyperbole $(\mathcal{H})$?
   d) Préciser les sommets de $(\mathcal{H})$ puis construire l'hyperbole $(\mathcal{H})$.

Exercice 3

Dans le plan orienté $(\wp)$, on considère un segment de droite $[AB]$ de milieu O. Soit (Δ) la médiatrice du segment $[AB]$ et (Γ_1) l'ensemble des points M du plan $(\wp)$ tels que $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Soit C un point de (Γ_1) tel que $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et D le point de $(\wp)$ tel que $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{OC}$.

1. Faire une figure.

2. Démontrer qu'il existe une rotation r qui transforme A en C et B en D. Construire Ω le centre de la rotation r.

3. Démontrer que les points Ω, O, A et C sont situés sur le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O' que l'on tracera.

4. On désigne par (Γ) le cercle de diamètre $[AB]$. Montrer que O' appartient à (Γ).

5. Soit $(\mathcal{H})$ l'hyperbole d'axe focal $(O'C)$ et dont le rectangle fondamental est $\Omega AOB'$
   a) Construire les asymptotes puis les foyers F_1 et F_2 de $(\mathcal{H})$.
   b) Construire l'hyperbole $(\mathcal{H})$.
   c) Calculer son excentricité.

Exercice 4

Dans le plan orienté, on considère un carré $ABCD$ de centre O, de sens direct. On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$. $(\mathcal{C})$ est le cercle de diamètre $[AJ]$, de centre O'. P et Q sont les milieux respectifs des segments $[BJ]$ et $[AL]$.

1. Faire une figure avec $AB = 6cm$.
2. Soit $(\mathcal{H})$ l'hyperbole de rectangle fondamental $ABJL$ et d'axe focal (PQ).
   a) Déterminer les asymptotes de $(\mathcal{H})$.
   b) Placer les foyers F et F' de $(\mathcal{H})$. (On notera F le foyer le plus proche du point P)
   c) Déterminer les sommets de $(\mathcal{H})$.
   d) Construire les directrices $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ de $(\mathcal{H})$.
   e) Construire le point M_0 de $(\mathcal{H})$ situé sur le segment $[FJ]$. (On justifiera la construction du point M_0)
   f) Prouver que l'excentricité de $(\mathcal{H})$ est $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$
   g) Achever la construction de l'hyperbole $(\mathcal{H})$.
3. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ avec $\vec{\imath} = \overrightarrow{OO'}$.
   a) Montrer que l'équation cartésienne de $(\mathcal{H})$ dans ce repère est : $x^2 - \frac{y^2}{4} = -1$
   b) Vérifier l'exactitude du résultat de la question 2.f)

Exercice 5

On considère le triangle équilatéral ABC de sens direct. On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments$[BC], [AB]$ et $[AC]$. Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre A et de rayon AC.

1. Faire la figure que l'on complétera. On prendra $AB = 4cm$ et on disposera (BC) verticalement.
2. Soit $(\mathcal{H})$ l'hyperbole de directrice (BC) dont $(\mathcal{C})$ est le cercle principale.
   a) Préciser le centre et l'axe focal de $(\mathcal{H})$.
   b) Construire les asymptotes de $(\mathcal{H})$.
   c) Placer le foyer F de $(\mathcal{H})$ et son sommet situé sur la demi-droite $[AF)$.
   d) Tracer le rectangle fondamental de l'hyperbole $(\mathcal{H})$.
3. Construire le point M_0 de l'hyperbole $(\mathcal{H})$ situé sur la demi-droite $[FB)$.
4. Soit H le point d'intersection de la directrice (BC) et l'axe focal. P désigne le symétrique de H par rapport à F. Soit $(\mathcal{D})$ la perpendiculaire à l'axe focal en P. Construire les points de $(\mathcal{H})$ situés sur la droite $(\mathcal{D})$.
5. Construire la branche de l'hyperbole $(\mathcal{H})$ située dans le demi-plan délimité par la droite (BC) contenant le point P.

Exercice 6

Dans le plan $(\wp)$, on considère un triangle DBC rectangle en B tel que $(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$. On fera la figure où l'on prendra $BC = 6cm$.

1. On désigne par O le milieu du segment $[DC]$. Montrer que le triangle OBD est équilatéral.

2. A est l'image de B par la symétrie orthogonale d'axe (DC). On désigne par A'; B' et C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.
   a) Montrer que les points B, C, B' et C' sont situés sur un cercle $(\mathcal{C})$ que l'on tracera.
   b) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

3. On considère l'ensemble (Γ) tel que : $(\Gamma) = \{M \in (\wp) / |MB - MC| = A'C\}$
   a) Définir (Γ) en précisant ses foyers et son centre.
   b) Que représente $(\mathcal{C})$ pour l'ensemble (Γ) ?
   c) Placer les sommets S_1 et S_2 de (Γ), puis tracer ses asymptotes.
   d) Soit $(\mathcal{C}_1)$ le cercle de centre B et de rayon BA'. $(\mathcal{C}_1)$ coupe (BD) en K_0 de telle sorte que BK_0C soit un triangle direct. La médiatrice du segment $[K_0C]$ coupe la droite (BK_0) en M_0. Montrer que M_0 est un point de (Γ).
   e) Achever la construction de (Γ).

Exercice 7

Dans le plan orienté $(\wp)$, on considère un carré $ABCD$ de centre O tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On consigne par E, F, G et H les milieux respectifs des segments$[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$. $(\mathcal{C}_1)$ est le cercle circonscrit au triangle ABD et I le symétrique de O par rapport à G.

1. Faire la figure que l'on complètera. On prendra $AB = 4cm$ et on placera (AB) horizontalement.

2. Soit (Γ) l'hyperbole de rectangle fondamental le carré $ABCD$ et d'axe non focal la droite (EG).
   a) Préciser le foyer J de (Γ) situé sur la demi-droite $[OF)$
   b) Préciser la directrice $(\mathcal{D})$ de (Γ) associée au foyer J.
   c) Construire le point K de (Γ) situé sur le segment $[JB]$.
   d) Déterminer la demi-droite asymptote de (Γ) située sur la portion du plan délimitée par les demi-droites $[OF)$ et $[OG)$.
   e) Comment appelle-t-on l'hyperbole (Γ) ?
   f) Construire la branche (Γ_0) de (Γ) située dans la portion du plan délimitée par les demi-droites $[OF)$ et $[OG)$.

ISOMETRIES DE L'ESPACE

Exercice 1

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$. On considère l'application ponctuelle f qui à tout point $M(x, y, z)$ associe le point $M'(x', y', z')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = z + 2 \\ y' = x - 1 \\ z' = y - 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. Déterminer la nature de f est ses éléments caractéristiques.

Exercice 2

Dans l'espace orienté $\mathcal{E}$ rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$, on considère la rotation f définie par :

$$\begin{cases} x' = -z - 2 \\ y' = -x \\ z' = y - 2 \end{cases}$$

1. Déterminer l'axe (Δ) de f.
2. Déterminer l'angle θ de f.

Exercice 3

L'espace $\mathcal{E}$ est orienté et rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$.
On définit l'application f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à tout point $M(x, y, z)$ associe le point $M'(x', y', z')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = -z + 2 \\ y' = -x + 1 \\ z' = y - 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. f admet-elle des points invariants ?
3. Montrer que f est un vissage dont on déterminera les éléments caractéristiques.

Exercice 4

Dans l'espace orienté $\mathcal{E}$ rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$, on considère le vissage f défini par :

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = -z + 4 \\ z' = y \end{cases}$$

1. Déterminer l'axe (Δ) de f.
2. Déterminer son vecteur $\vec{u}$.
3. Déterminer son angle θ.

Exercice 5

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$. On considère l'application ponctuelle f qui à tout point $M(x,y,z)$ associe le point $M'(x',y',z')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = y+3 \\ y' = x-2 \\ z' = -z \end{cases}$$

1. Déterminer l'ensemble des points invariants de f.
2. On admet que f est un vissage, déterminer les éléments caractéristiques de f.

Exercice 6

Dans l'espace euclidien $(\mathcal{E})$ de dimension 3 rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère la transformation f qui à tout point $M(x,y,z)$ de $(\mathcal{E})$ associe le point $M'(x',y',z')$ de $(\mathcal{E})$ défini par : $\begin{cases} x' = -y+1 \\ y' = z-2 \\ z' = -x \end{cases}$

1. Justifier que f est un vissage.
2. Soit t la translation de vecteur $\vec{u} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} - \vec{k}$. On pose $f = t_{\vec{u}} \circ g$.
   a) Montrer que g est une rotation.
   b) Déterminer l'expression analytique de g.
   c) Déterminer l'axe $(\mathcal{D})$ de la rotation g.

Exercice 7

L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère l'application f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui a tout point M de coordonnées (x,y,z) associe le point M' de coordonnées (x',y',z') tel que : $\begin{cases} x' = y+3 \\ y' = x-2 \\ z' = -z \end{cases}$

1) Soit f une isométrie et φ l'endomorphisme associé à f ; calculer le déterminant de φ puis conclure.
2) Déterminer l'ensemble des points invariants par f
3) Caractériser f (on précisera, ses éléments caractéristiques).

Exercice 8

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$. On considère l'application ponctuelle f qui à tout point $M(x,y,z)$ associe le point $M'(x',y',z')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{3}(2x - 2y - z + 12) \\ y' = \dfrac{1}{3}(2x - y - 2z + 24) \\ z' = \dfrac{1}{3}(-x - 2y + 2z + 12) \end{cases}$$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. Déterminer l'ensemble des points invariants de f.
3. a) En déduire la nature de f.
   b) Caractériser f.

Exercice 9

On définit analytiquement une application f par f: $\begin{cases} 3x' = x + 2y - 2z - 1 \\ 3y' = 2x + y + 2z + 4 \\ 3z' = -2x + 2y + z - 10 \end{cases}$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. Reconnaitre puis caractériser f.

EXERCICES DE GEOMETRIE

Exercice 1

On considère dans le plan (P) un triangle équilatéral direct ABC inscrit dans un cercle $(\mathcal{C})$ de centre G.

Le point O milieu du segment $[BC]$ se projette orthogonalement en P sur la droite (AB) et en Q sur la droite (AC).

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
2. a) Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PQ})$
   b) Démontrer que les points B, P, Q et C sont cocycliques puis tracer le cercle $(\mathcal{C}')$ qui les contient.
3. a) Démontrer qu'il existe une rotation R qui transforme B en C et P en Q. Donner une mesure θ de l'angle de R.
   b) Construire le centre Ω de la rotation R.
4. Soit f l'application définie par $f = s_{(OA)} \circ t_{\overrightarrow{BE}}$ où E est le point de rencontre du cercle $(\mathcal{C})$ et la droite (BG) autre que B.
   a) Déterminer la droite (Δ) telle que $s_{(AO)} \circ s_{(\Delta)} = t_{\overrightarrow{BC}}$
   b) Montrer que f est une symétrie glissée que l'on caractérisera.
5. Soit h l'application du plan qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{IM'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IM}$, I étant le projeté orthogonal de M sur la droite (BC).
   a) Reconnaitre puis caractériser h
   b) Placer les images A' , B' et C' des points A, B et C par h.
   c) Construire l'image de la droite (BE) de h

Exercice 2

Dans le plan orienté, on considère les carrés $ABCD$ et $DIEG$ de sens direct, tels que I soit le milieu de $[CD]$. Pour la clarté de la figure, on prendra $AB = 5\ cm$ et le segment $[AB]$ vertical.

1. Faire une figure.
2. Soit S_1 la similitude plane directe de centre D qui transforme A en B.
   a) Préciser son rapport k_1 et une mesure θ_1 de son angle.
   b) Montrer que, pour tout point M distinct de D, d'image M' par S_1, le triangle DMM' est rectangle isocèle en M.
   c) Trouver $S_1(I)$ puis déterminer une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{BE}})$.
3. Soit S_2 la similitude plane indirecte de centrer D transformant A en I. Déterminer son rapport k_2 et son axe $(\mathcal{D})$.

4. Le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ}\right)$; O étant le centre du carré $ABCD$. On considère les points $F\left(0;\sqrt{3}\right)$ et $F'\left(0;-\sqrt{3}\right)$
   a) Déterminer une équation cartésienne de l'ellipse (E) de foyers F et F' d'excentricité $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   b) Donner la définition bifocale de l'ellipse (E)
   c) Représenter (E)
   d) Déterminer l'expression analytique de la similitude plane indirecte S_2 ; puis donner les coordonnées des foyers de l'ellipse (E'), image de (E) par S_2. Quelle est son excentricité ?

Exercice 3

Dans le plan orienté, on considère un carré direct $ABDC$ centré en G.
On désigne par I le milieu du segment $[AB]$ et par J le symétrie de G par rapport à I.
On considère le point E tel que $AE = AB$ et $\left(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle AEB et F le symétrique de O par rapport à la symétrie orthogonale par rapport à (AE).

1. Faire une figure. On prendra $[AB]$ horizontal et $AB = 4cm$.
2. Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et R la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$ et S la symétrie orthogonale d'axe (BD).
   a) Reconnaitre et caractériser l'application $g = T \circ R$.
   b) Montrer que le point F appartient à la droite (AC).
3. On désigne par f l'application telle que : $f = g \circ S_{BD}$
Montrer que f est une symétrie glissée dont on précisera le vecteur $\vec{u}$ et l'axe (Δ).
4. Soit S la similitude plane directe de centre A qui transforme D en C.
Caractériser S puis déterminer $S(B)$
5. Soit (P) la parabole de foyer B et de directrice (CF).
   a) Déterminer son sommet.
   b) Montrer que D appartient à (P) et que son symétrique D' par rapport à (AB) appartient aussi à (P).
6. Montrer que C appartient au cercle de centre D et tangent à (AC).
7. Soit (P') l'image de (P) par la similitude S.
   a) Déterminer les éléments caractéristiques de (P') (foyer, sommet, directrice et paramètre).
   b) Construire la parabole (P) et (P')

Exercice 4

Dans le plan orienté (P), on considère le triangle équilatéral OBA de sens direct et de centre de gravité G. On construit à l'extérieur de ce triangle un autre triangle équilatéral OAC tels que les points A'; C' et B' désignent respectivement les milieux des segments $[OC]$; $[BA]$ et $[OA]$. Les droites (BA') et (OA) se coupent en I.

1. Faire la figure que l'on complètera au fur et à mesure.
2. a) Déterminer le rapport et une mesure d'angle de la similitude plane directe S_1 transformant B en B' et A en A'
   b) Déterminer l'image $S_1(O)$ du point O par la similitude directe S_1
3. Montrer qu'il existe une homothétie h qui transforme O en B' et B en A', on déterminera son centre et son rapport.
4. Soit S_2 la similitude plane indirecte de centre O transformant B en B', déterminer son axe et son rapport.
5. Déterminer la composée $S = S_1 \circ S_2$
6. Soit (H) l'hyperbole de rectangle fondamental $OC'AA'$, de foyers F et F' où F est un point du segment $[AC]$
   a) Construire l'hyperbole (H)
   b) Soit (H_0) , l'arc de l'hyperbole (H) situé à droite du segment $[AA']$. Construire l'image (H_0') de (H_0) par l'application S_2.

Exercice 5

Dans le plan orienté (P). On considère le carré $ABCD$ de centre D tel que $BC = 3cm$. E, F, G et H désignent respectivement les milieux des segments $[AD]$, $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$.

1. Soit h la transformation ponctuelle définie par : $h = S_{(EG)} \circ S_{(BD)}$. Donner la nature de h, puis caractériser h.
2. On définit les transformations ponctuelles suivantes : $f = h \circ t_{\overrightarrow{BC}}$ et $g = S_{(AD)} \circ h$.
   a) Trouver $f(B)$
   b) Caractériser f et g
3. Soit S la similitude plane directe de centre D qui transforme E en C.
   a) Caractériser S.
   b) Placer le point $O' = S(O)$
   c) Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O et de rayon OA. Construire $(\mathcal{C}')$ image de $(\mathcal{C})$ par S.
4. Soit S' la similitude plane directe de centre D, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$. On pose $T = S \circ S'$. Donner la nature et les éléments caractéristiques de T.
5. a) Construire le point P tel que $\overrightarrow{BP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$
   b) Soit $(\mathcal{H})$ l'hyperbole de centre B, de foyer P et dont l'un des sommets est le

point C. Déterminer l'excentricité e de $(\mathcal{H})$

c) Déterminer et construire l'une des directrices (D) de $(\mathcal{H})$ située dans le segment $[BC]$. On notera $(D) \cap (BD) = \{J\}$

d) Construire $(\mathcal{H})$. On tracera le cercle secondaire $(\mathcal{C}_S)$ et le cercle $(\mathcal{C}_P)$ de $(\mathcal{H})$.

Exercice 6

On considère dans le plan orienté P un triangle ABC de sens direct, de côté 4cm. On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments $[AB], [AC]$ et $[BC]$ et par D le symétrie de A par rapport à C. (On prendra $[BC]$ verticalement).

1. Montrer que les points I, B, C et J sont cocycliques, puis tracer le cercle (C) qui les contient.
2. Soit f l'antidéplacement de P tels que : $f(C) = A$ et $f(J) = I$. Montrer que f est une symétrie glissante dont on caractérisera.
3. Soit g la similitude plane directe telle que : $g(B) = D$ et $g(I) = C$.

   a-Déterminer le rapport ρ et l'angle θ de g.

   b-Montrer que $g(A) = A$.
4. Soit Ω le point défini par $\overrightarrow{\Omega A} + 2\overrightarrow{\Omega I} = \vec{0}$.
   a) Justifier que $f \circ g$ est une similitude plane indirecte.
   b) Déterminer $(f \circ g)(I)$ et $(f \circ g)(A)$.
   c) Vérifier que $\overrightarrow{\Omega B} + 2\overrightarrow{\Omega A} = \vec{0}$. En déduire que $(f \circ g)(\Omega) = \Omega$.
   d) Déterminer le rapport de la similitude $f \circ g$.
   e) Montrer que l'axe (Δ) de $f \circ g$ est la perpendiculaire à la droite (AB) en Ω.
5. Soit (H) l'hyperbole de directrice (BC) dont le cercle (C) de centre A et de rayon $[AC]$ est le cercle principal
   a) Préciser le centre et l'axe focal de (H).
   b) Construire les asymptotes, les foyer, les sommets et le rectangle fondamental de (H).
   c) Construire le point M_0 de (H) situé sur la demi-droite $[FB)$.
   d) Construire (H), puis (H') image de (H) par f.

Exercice 7

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et I le milieu du segment $[AB]$. La bissectrice intérieure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$ coupe $[BC]$ en J. $\mathcal{C}$ est le cercle de centre A et de rayon AC.

1. Faire la figure. On prendra $AB = 4\ cm$ et (AB) horizontale.
2. Soit f la similitude plane directe qui transforme I en O et B en C.
   c) Déterminer le rapport et l'angle de f.

d) Montrer que A est le centre de f.

3. Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

c) Montrer que : $R = S_{(AC)} \circ S_{(AJ)}$.

d) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $h = f \circ S_{(AJ)}$.

4. On pose $E = S_B(A)$ et on désigne par g la similitude plane indirecte qui transforme I en D et D en E.

d) Montrer que 2 est le rapport de g.

e) Déterminer $g \circ g(I)$.

f) En déduire le centre et l'axe de g

5. Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole de directrice (BC) dont $\mathcal{C}$ est le cercle principal.

a) Construire les asymptotes de $\mathcal{H}$.

b) Placer le sommet S de $\mathcal{H}$ situé sur la demi-droite $[BE)$

c) Calculer l'excentricité e de $\mathcal{H}$. On précisera le foyer F de $\mathcal{H}$ situé sur la demi-droite $[BE)$.

d) Construire la branche $\mathcal{H}$, de l'hyperbole $\mathcal{H}$ de sommet S.

e) Construire l'image $\mathcal{H}'$, de la branche $\mathcal{H}$, par g^{-1}, où g^{-1} désigne la réciproque de la similitude g.

Exercice 8

Le plan est orienté. PQR est un triangle équilatéral de sens direct. I, J et O sont les milieux respectifs des segments $[QR], [PR], [PQ]$. C désigne le symétrie de Q par rapport à J.

On fera la figure que l'on complétera au fur et à mesure.

<u>Nota bene</u> : Prendre $PQ = 4\ cm$ et placer le segment $[PQ]$ horizontalement.

1. On considère l'application $f = t \circ r$, où t est la translation de vecteur $\overrightarrow{JQ}$ et r la rotation de centre P et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.

a) Placer les points P' et R', images respectives des points P et R par f.

b) Montrer que le triangle JIR est équilatéral.

c) Reconnaitre et caractériser f

d) En déduire la nature du triangle IPP'.

2. Soit S la similitude plane directe de centre Ω, telle que : $S(J) = P$ et $S(R) = I$.

a) Déterminer le rapport k de S.

b) Préciser une mesure θ de l'angle de S.

c) Montrer que $S(I) = P'$.

d) Sans placer Ω, montrer que les points Ω, I, R et P d'une part et Ω, P, J et C d'autre part sont cocycliques.

e) En déduire la construction du point Ω.

3. On désigne par (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que $MP + MQ = 2JQ$.
   a) Donner la nature de (Γ) en précisant ses foyers et son centre.
   b) Construire le point M_0 de (Γ) situé sur $[CP]$
   c) Placer les sommets A, A', B et B' de (Γ) puis tracer (Γ).

Exercice 9

Dans le plan orienté $\wp$, on considère un carré $ABCD$ direct de centre O.

NB : pour la clarté de la figure, on prendra $AB = 4\ cm$ et $[AB]$ verticalement. J, F, G, I désignent respectivement les milieux des segments $[OA]$, $[AB]$, $[OB]$ et $[OD]$.

1. Faire la figure.
2. Soit S la similitude plane directe qui transforme A en O et B en J.
   a) Déterminer son rapport k
   b) Déterminer une mesure θ de son angle.
   c) Montrer que $S(C) = F$ et $S(D) = G$.
   d) On désigne par Ω le centre de la similitude S. Montrer les points (Ω, A, O, D) d'une part et (Ω, A, B, J) d'autre part sont cocycliques.
   e) Expliquer alors comment construire Ω (on ne demande pas de construire Ω)
3. On considère l'ensemble $(\Gamma) = \{M \in P / MB + MD = 2AB\}$
   a) Donner la nature de (Γ) en précisant ses foyers, son centre et son axe non focal.
   b) Montrer que A appartient à (Γ)
   c) Construire les points S_1 et S_2 de (Γ), situé sur la droite (BD)
   d) Sur la demi droite $[BJ)$, on place le point E tel que $BE = 2AB$. La médiatrice du segment $[ED]$ coupe $[BJ)$ en M_0. Montrer que M_0 appartient à (Γ)
   e) Achever la construction de (Γ).
4. Construire (Γ'), image de (Γ) par S
5. Le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$.

Montrer que, dans ce repère, l'équation cartésienne de (Γ) est : $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$

Exercice 10

Dans le plan orienté (P), on considère un triangle isocèle ABC tel que $AB = AC$ et $\left(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On désigne par :

O le milieu du segment $[BC]$; D le symétrique du point A par rapport à C ; E le point tel que C est le milieu de $[OE]$.

La bissectrice intérieure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AO}\right)$ coupe la droite (BC) en O'.

1. Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure. On prendra (BC) horizontalement.

2. Soit f la similitude plane directe qui laisse invariant le point A et qui transforme B en O.
Déterminer le rapport k et une mesure θ de l'angle de f.
3. Soit g la similitude plane indirecte qui fixe A et envoie B en D
   a) Déterminer le rapport K' et l'axe (Δ) de g
   b) Construire le point $A' = g(O)$
4. On désigne par h la transformation plane telle que $h = f \circ g$
   a) Montrer que h est un antidéplacement.
   b) Caractériser h
5. Soit (Γ) l'ellipse de sommets principaux B et C. On admet que A est un point de (Γ)
   a) Déterminer le centre de l'ellipse (Γ)
   b) Que représente le point A pour (Γ) ? Justifier votre réponse.
   c) Construire les foyers F et F' de (Γ). F étant le foyer associé au sommet C.
   d) Construire les directrices (D) et (D') de (Γ)
   e) Construire l'ellipse (Γ)
   f) Construire l'image (Γ') de (Γ) par g
6. On rapporte le plan (P) au repère orthonormé direct $\left(O; \overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OJ}\right)$
Déterminer une équation cartésienne de (Γ) dans ce repère.

Exercice 11

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC tel que $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$. On désigne par R_A; R_B et R_C les rotations de centres respectifs A, B et C, d'angle $\frac{\pi}{3}$ et par D et E les points tels que : $R_B(A) = D$ et $R_C(D) = E$.
1. Démontrer que $R_C \circ R_B \circ R_A$ est la symétrie centrale de centre B. Préciser alors la position du point E.
2. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude plane directe S qui transforme A en B et E en D.
3. Soit Ω le centre de la similitude plane directe S.
   a) Montrer que Ω appartient aux cercles circonscrits aux triangles ABC et DBE.
   b) Construire Ω.
4. a) Démontrer que S transforme la droite (AC) en (CD).
   b) Déterminer l'image par S du cercle circonscrit au triangle ACE.
   En déduire que l'image de C par la similitude S est le point I, milieu du segment $[DE]$.
5. Soit (ξ) l'ellipse de centre B, d'excentricité $e = \frac{1}{2}$ et dont un sommet principal est A.
   a) Tracer la droite (Δ) passant par B et perpendiculaire à (AB)
   b) Que représente la droite (Δ) pour l'ellipse (ξ). Justifier la réponse.

c) Construire le point M de (ξ) situé sur la droite (CD).

d) Achever la construction de l'ellipse (ξ)

6. Soit (ξ') l'image de (ξ) par S. Construire (ξ').

Exercice 12

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC, de centre O, tel que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$. On appelle $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit au triangle ABC, I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[OI]$. Les droites (OA) et (OC) recoupent le cercle $(\mathcal{C})$ respectivement en D et en E.

1. Placer ces points sur une figure (On prendra $OA = 4\ cm$).
2. On note G l'isobarycentre des points A, B, C, D et E.
   d) Exprimer $\overrightarrow{OG}$ en fonction de $\overrightarrow{OB}$
   e) Exprimer $\overrightarrow{OG}$ en fonction de $\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{OD}$
   f) En déduire que les droites (OB) et (DJ) se coupent en G. Placer G.
3. A tout point M du plan, on fait correspondre le point $M' = f(M)$ tel que :
$4\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}$.
   c) Montrer que f est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
   d) Quelles sont les images par f des points B et D ?
4. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, et S l'application définie par : $S = r \circ f$.
   a) Démontrer que S est une similitude plane directe. Préciser son rapport et son angle.
   b) Construire le point H, image de G par S.
   c) Démontrer que le centre Ω de S appartient aux cercles circonscrits respectivement aux triangles OGH et BOD. Construire Ω
5. Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que :
$$MH + MB = AD$$
   a) Vérifier que (E) est une ellipse. Préciser son axe focal.
   b) Construire le point M_0 de (E) situé sur la demi-droite $[BA)$
   c) Placer les sommets de (E)
   d) Construire (E) et ses directrices.

Exercice 13

Dans le plan orienté, on considère un losange $AOC\Omega$ de centre I tel que : $\left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{A\Omega}\right) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$. On désigne par B le symétrie de C par rapport à la droite (AO), K le milieu de $[AB]$. Soit $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit au triangle ABC et $(\mathcal{C}')$ le cercle de centre Ω passant par O.

On prendra $[O\Omega]$ horizontalement tel que O est à gauche et $O\Omega = 3cm$.

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
2. Montrer que le triangle ABC est équilatéral et que O est le milieu de $[\Omega B]$.
3. Soit S la similitude plane directe qui transforme A en I et B en C.
   a) Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S.
   b) Montrer que le point Ω est le centre de S.
   c) Soit J le milieu de $[\Omega C]$. Montrer que J est l'image de O par S.
4. Soit (Δ) la droite perpendiculaire à (OI) en B, (Δ) coupe (ΩC) en H et la droite $(A\Omega)$ coupe (BC) en H'.
   a) Montrer que (BC) est l'image par S de la droite (Δ)
   b) En déduire que $S(H) = H'$
5. On considère la similitude plane indirecte σ telle que : $\sigma(B) = C$ et $\sigma(C) = I$
   a) Déterminer le rapport et le centre de σ
   b) Montrer que l'axe de σ est la médiatrice du segment $[OC]$
   c) Soit M un point du plan. On pose $M_1 = S(M)$ et $M_2 = \sigma(M)$. Montrer que les points M_1 et M_2 sont symétrique par rapport à une droite fixe que l'on précisera. (On pourra calculer $\sigma \circ S^{-1}(C)$ et $\sigma \circ S^{-1}(\Omega)$)
6. On appelle $(\mathcal{H})$ l'hyperbole de foyer B, de cercle fondamental $(\mathcal{C})$, dont le segment $[AC]$ est l'un des côtés de son rectangle fondamental direct $AEFC$.
   a) Préciser l'autre foyer et le centre de $(\mathcal{H})$.
   b) Préciser les sommets principaux de $(\mathcal{H})$.
   c) Construire les points M_0 et M_0' de $(\mathcal{H})$ situés sur les segments $[\Omega A]$ et $[\Omega C]$, sachant que $(\mathcal{C}')$ est le cercle directeur de $(\mathcal{H})$.
   d) Achever la construction de $(\mathcal{H})$.
7. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{O\Omega}, \overrightarrow{OG}\right)$ où $G \in (\mathcal{C})$. On donne les points O, B, Ω, I et C d'affixes respectives :

$Z_0 = 0,\ Z_B = -1,\ Z_\Omega = 1,\ Z_\Omega = \frac{1}{2}$ et $Z_C = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
   a) Déterminer l'équation cartésienne de $(\mathcal{H})$ dans ce repère.
   b) Montrer que la similitude plane indirecte σ a pour écriture complexe :
   $Z' = \left(\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\bar{Z} + \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$

Exercice 14

Dans le plan orienté (P), AIJ est un triangle quelconque. BAJ et CIJ sont des triangles isocèles respectivement en B et en C tels que : $\left(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BJ}\right) = \frac{\pi}{6}[2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{CI}; \overrightarrow{CJ}\right) = \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

On désigne par t la translation de vecteur $\overrightarrow{IA}$ et par R_B et R_C les rotations de même angle $\frac{\pi}{6}$ et centres respectifs B et C.

1. a) Déterminer $R_C(I)$.

b) Montrer que $R_B \circ t(I) = J$.

c) En déduire que $R_B \circ t = R_C$.

2. Soit $K = t(C)$. Montrer que $BC = BK$ et $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BK}) = \frac{\pi}{6}[2\pi]$

3. Soit D le point du plan tel que le triangle DIA soit isocèle en D et $(\overrightarrow{DI};\overrightarrow{DA}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$

   a) Soit O le milieu du segment $[AC]$. Montrer que l'image du triangle DIA par la symétrie centrale de centre O est le triangle BKC.

   b) Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

4. Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $(E;\overrightarrow{EI};\overrightarrow{EP})$ avec E le milieu du segment $[AI]$ et P le point situé sur la médiatrice du segment $[AI]$ tel que $EI = EP$.

On considère l'ellipse (E) d'équation $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ et on désigne par M le point de coordonnées $(cos\theta; 2sin\theta)$ où θ est un réel de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

   a) Déterminer par leurs coordonnées les sommets et les foyers de l'ellipse (E).

   b) Tracer l'ellipse (E) et placer ses foyers.

   c) Vérifier que le point M appartient à l'ellipse (E).

5. Soit (T) la tangente à l'ellipse (E) au point M. Montrer que l'équation de la tangente (T) dans le repère $(E;\overrightarrow{EI};\overrightarrow{EP})$ est $2xcos\theta + ysin\theta - 2 = 0$.

6. On désigne respectivement par L et Q les points d'intersection de la tangente (T) avec l'axe des abscisses et l'axes des ordonnées et on désigne par A l'aire du triangle OLQ.

   a) Montrer que $A = \frac{2}{sin2\theta}$.

   b) En déduire que l'aire A est maximale si et seulement si M est le milieu du segment $[LQ]$.

7. Soit f la similitude plane directe de centre D qui transforme I en E.

   a) Déterminer l'angle et le rapport de f.

   b) Calculer l'aire A' image de l'aire A par f.