Mathématiques

Série C

Côte d'Ivoire 2021

Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.
Les tables trigonométriques et logarithmiques et les règles à calculs sont autorisées.

Exercice 1 (2 points)
Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de chaque affirmation suivi de **Vrai** si l'affirmation est vraie ou de **Faux** si l'affirmation est fausse.

Affirmation n° 1 Si f est une fonction de R vers R telle que f soit croissante et majorée sur l'intervalle $]2\,;5[$, alors f admet pour limite $+\infty$ à gauche en 5.

Affirmation n° 2 Le coefficient de corrélation linéaire d'une série statistique à deux variables a le même signe que la covariance de cette série statistique.

Affirmation n° 3 Une primitive sur$]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x} \times \mathrm{e}^{\tan x}$ est la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{\tan x}$.

Affirmation n° 4 Toute similitude directe du plan admet un point invariant.

Exercice 2 (2 points)
Pour chacun des quatre énoncés à trou ci-dessous, quatre réponses A, B, C et D sont proposées dont une seule permet d'avoir l'énoncé juste.
Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé à trou suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

Énoncé à trou n° 1. Soit (u_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = \dfrac{-2}{3^n}$.
La suite $(u_n)\ldots$

A : diverge vers - ∞
B : converge vers 0
C : diverge vers $+\infty$
D : converge vers -2.

Énoncé à trou n° 2. On pose $z = -3\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$
L'argument principal de z est ...

A : $-\dfrac{\pi}{6}$
B : $\dfrac{5\pi}{6}$
C : $-\dfrac{5\pi}{6}$
D : $\dfrac{\pi}{6}$

Énoncé à trou n° 3. O est un point du plan. l'homothétie h de centre 0 et de rapport -5 ....

A : n'est pas une similitude directe.
B : est la similitude directe de centre O, de rapport 5 et d'angle nul.
C : est une isométrie.
D : est la similitude directe de centre O, de rapport 5 et d'angle π.

Énoncé à trou n° 4. ABC est un triangle et G l'isobarycentre des points A, B et C. L'ensemble des points

M du plan vérifiant : $||\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|| = AC$ est ...

A : la droite passant par A et perpendiculaire à la droite (AC).

B : le cercle de centre G et de rayon $\frac{2}{3}AC$.

C : l'ensemble vide.

D : le cercle de centre G et de rayon $\frac{1}{3}AC$.

Exercice 3 (3 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points :
A(0 ; 0 ; 2) ; B(0 ; 4 ; 0) et C(2 ; 0 ; 0).

1. **a.** Justifie que les points A, B et C déterminent un plan.
   b. Démontre qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x+y+2z-4=0$.

2. Soit (D) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\2\\-5\end{pmatrix}$.
   a. Détermine une représentation paramétrique de la droite (D).
   b. Justifie que la droite (D) est incluse dans le plan (ABC).
   c. Justifie que la droite (D) est la hauteur du triangle ABC issue du point A.

3. Soit (P) le plan dont une équation cartésienne est : $y=\dfrac{x}{2}$.
   a. Justifie que les plans (P) et (ABC) sont perpendiculaires.
   b. Démontre que : (D)=(ABC) $\cap(P)$.

Exercice 4 (3 points)

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère deux nombres entiers X et Y tels que : X=k^2 - 2k + 2 et Y= k^2 + 2k + 2.
On pose : PGCD(X ; Y) = m.

1. Démontre que tout diviseur de X qui divise k, divise 2.
2. Démontre que tout diviseur commun de X et de Y divise $4k$.

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que k est impair.

3. **a.** Justifie que les nombres entiers X et Y sont aussi impairs.
   b. Déduis-en que m est impair.
4. **a.** Justifie que m divise 2.
   b. Déduis des questions précédentes que : PGCD(X, Y)=1.

Exercice 5 (5 points)

On considère la fonction g définie sur $\mathbf{R}$ par : $g(x)=\ln(e^x+2e^{-x})$.
On note (C) sa courbe représentative dans la plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
L'unité graphique est 2 cm.

1. **a.** Détermine $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
   b. Détermine $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

2. **a.** On suppose que g est dérivable sur $\mathbf{R}$.
Justifie que la fonction g est strictement croissante sur $\left]\frac{\ln 2}{2}\,;\,+\infty\right[$ et strictement décroissante sur $\left]-\infty\,;\,\frac{\ln 2}{2}\right[$.

   b. Vérifie que $g\left(\frac{\ln 2}{2}\right)=\ln(2\sqrt{2})$.
   c. Dresse le tableau de variation de la fonction g sur $\mathbf{R}$.

3. **a.** Démontre que : $\forall x\in\mathbf{R},\ g(x)=x+\ln(1+2e^{-2x})$.
   b. Déduis-en que la droite (D) d'équation $y=x$ est une asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.
   c. Justifie que la courbe (C) est au dessus de la droite (D).

4. On admet que la droite (D') d'équation $y = -x + \ln 2$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ en - ∞.
Trace dans le plan muni du repère (O, I, J) la courbe $(\mathcal{C})$, les droites (D) et (D').

5. Soit J l'intégrale telle que : $J = \int_0^1 (g(x) - x)$ dx.
   a. Donne une interprétation géométrique de J.
   b. En utilisant l'inégalité : $\forall x \in]0\ ;\ +\infty[\ \ln(1+x) \leqslant x$, justifie que $0 < J < 0{,}87$.
   (*On ne te demande pas de déterminer la valeur exacte de* J.)

Exercice 6 (5 points)
Le Directeur d'une société internationale veut acquérir un avion privé afin d'éviter les désagréments que lui causent les vols commerciaux.
Il a le choix entre deux types d'avions : un biréacteur et un quadriréacteur. Au moment de l'achat, le constructeur lui décrit les deux types d'appareils de la façon suivante :
"Le biréacteur possède deux réacteurs R_1 et R_2 de telle sorte que l'état du réacteur R_2 dépend de celui du réacteur R_1. Cet appareil ne peut pas voler à la seule condition que les réacteurs R_1 et R_2 tombent simultanément en panne.En outre, une enquête a révélé que durant les dix premières années qui suivent leur première mise en service, 30 % des réacteurs R_1 tombent en panne et que dans un même avion, lorsque le réacteur R_1 tombe en panne, le réacteur R_2 a 40 % de chance de tomber aussi en panne ".

"Quant au quadriréacteur, il possède quatre réacteurs qui fonctionnent de façon indépendante. Cet appareil peut voler si au moins deux des quatre réacteurs continuent de fonctionner. En outre, 25 % des réacteurs de ce type d'appareil tombent en panne durant les dix premières années qui suivent leur mise en service".

Le Directeur veut acheter parmi les deux types d'avion, celui qui offrira le plus de chance de voler durant les dix prochaines années.
A la recherche de personnes ressources pour guider son choix, il s'adresse à toi.
A l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, réponds à la préoccupation du Directeur.