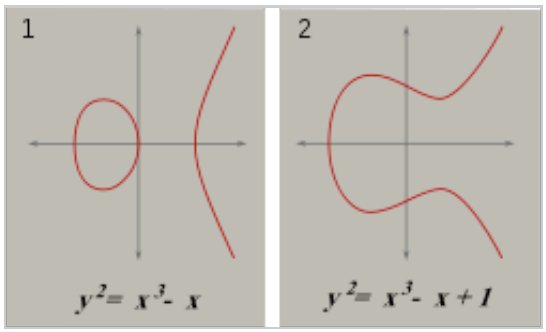
Curva elíptica

De Wikipedia, la enciclopedia libre

En matemáticas, las **curvas elípticas** se definen mediante ecuaciones cúbicas (de tercer grado). Han sido utilizadas para probar el último teorema de Fermat y en factorización de enteros. Se emplean también en criptografía de curvas elípticas. Estas curvas *no* son elipses.

Las curvas elípticas son «regulares», es decir, no tienen «vértices» ni autointersecciones, y se puede definir una operación binaria para el conjunto de sus puntos de una manera geométrica natural, lo que hace de dicho conjunto un grupo abeliano.

Algunas de las curvas elípticas sobre el cuerpo de los números reales vienen dadas por las ecuaciones $y^2 = x^3 - x$ y por $y^2 = x^3 - x + 1$.



Representación gráfica en un sistema de coordenadas cartesianas de curvas elípticas sobre $\mathbb{R}$.

Índice

Generalidades

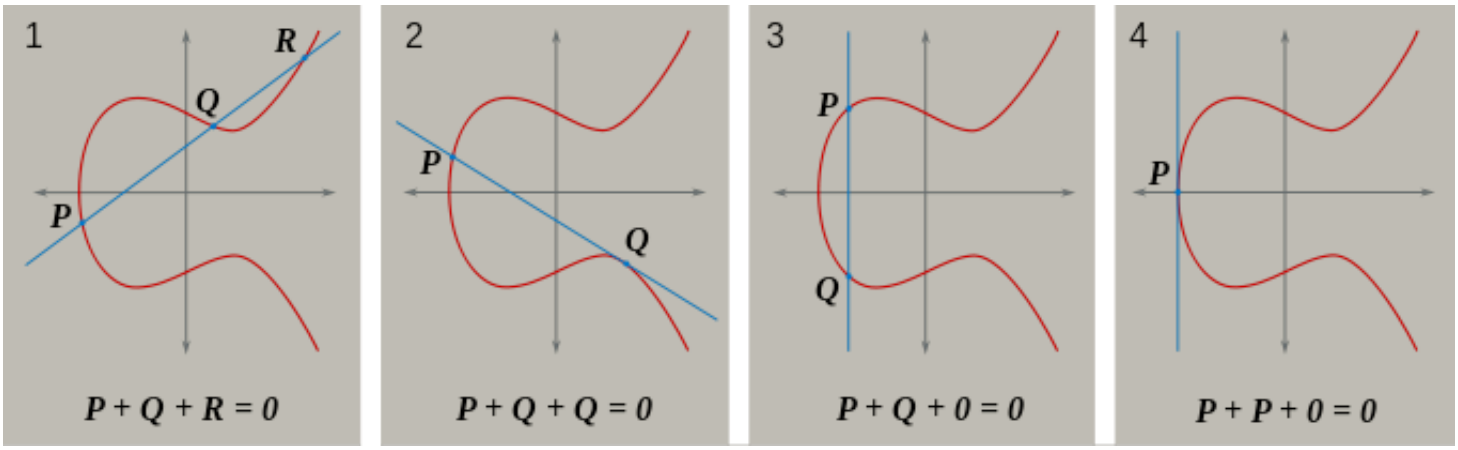
Las curvas elípticas pueden definirse sobre cualquier cuerpo K; la definición formal de una curva elíptica es la de una curva algebraica proyectiva no singular sobre K de género 1.

Si la característica de K no es ni 2 ni 3, entonces toda curva elíptica sobre K puede escribirse en la forma: $y^2 = x^3 - px - q$ donde p y q son elementos de K tales que el polinomio del miembro derecho $x^3 - px - q$ no tenga ninguna raíz doble. Si la característica es 2 o 3 harán falta más términos.

Normalmente se define la curva como el conjunto de todos los puntos (x, y) que satisfacen la ecuación anterior, y tales que x e y sean elementos de la cerradura algebraica de K. Los puntos de la curva cuyas coordenadas pertenezcan ambas a K se llaman **puntos *K*-racionales**.

Si añadimos un punto en el «infinito», obtenemos la versión proyectiva de tal curva. Si tenemos dos puntos de la curva, P y Q entonces podemos describir de forma unívoca un tercer punto que sea la intersección de la curva con la línea que contiene los dos puntos P y Q. Si la línea es tangente a la curva en un punto, entonces ese punto

la contará dos veces; y si la línea es paralela al eje y, definimos el tercer punto como en el infinito. Entonces una de tales condiciones será la que cumpla cualquier par de puntos de una curva elíptica.



Podemos entonces introducir una operación de grupo, «+», sobre la curva con las propiedades siguientes: consideremos el punto en el infinito como el «0», esto es, la identidad del grupo; y si una línea recta interseca la curva en los puntos P, Q y R, entonces requerimos que $P + Q + R = 0$ en el grupo. Se demuestra que esto convierte a la curva en un grupo abeliano, y por tanto en una variedad abeliana. Se puede también demostrar que el conjunto de los puntos *K*-racionales (incluyendo al punto en el infinito) forma un subgrupo de este grupo. Si la curva se denota por E, este subgrupo se denota a menudo como $E(K)$.

El grupo de arriba se puede describir geométrica y algebraicamente. Dada la curva $y^2 = x^3 - px - q$ sobre el cuerpo K (cuya característica asumimos que no es ni 2 ni 3), y los puntos $P = (x_P, y_P)$ (subíndice P) y $Q = (x_Q, y_Q)$ en la curva, asumimos primero que $x_P \neq x_Q$. Sea $s = (y_P - y_Q)/(x_P - x_Q)$; ya que K es un cuerpo, s está bien definido. Entonces podemos definir $R = P + Q = (x_R, y_R)$ mediante

$$x_R = s^2 - x_P - x_Q$$
$$y_R = -y_P + s(x_P - x_R)$$

Si $x_P = x_Q$, entonces hay dos opciones: si $y_P = -y_Q$, entonces la suma se define como 0; así que el inverso de cada punto de la curva se encuentra reflejándolo en el eje x. Si $y_P = y_Q \neq 0$, entonces $R = P + P = 2P = (x_R, y_R)$ vendrá dado por

$$s = (3{x_P}^2 - p)/(2y_P)$$
$$x_R = s^2 - 2x_P$$
$$y_R = -y_P + s(x_P - x_R)$$

Si $y_P = y_Q = 0$, entonces $P + P = 0$.

Teoría asociada

El teorema de Mordell-Weil establece que si el cuerpo subyacente K es el de los racionales (o más en general un cuerpo numérico), entonces el grupo de puntos *K*-racionales será finitamente generado. Mientras que se puede determinar fácilmente el subgrupo de torsión de $E(K)$, no se conoce un algoritmo general para computar su rango. Una fórmula para dicho rango viene dada por la conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer.

La prueba reciente del último teorema de Fermat se lleva a cabo probando un caso especial de la profunda conjetura de Taniyama-Shimura que relaciona las curvas elípticas sobre los racionales con las formas modulares; dicha conjetura ha sido también completamente demostrada.

Si el cuerpo subyacente K es el de los complejos, toda curva elíptica podrá ser parametrizada por cierta función elíptica y su derivada. Específicamente, a cada curva elíptica E se le asocia un reticulado L y una función elíptica de Weierstrass correspondiente $\wp$, tal que la aplicación

$$\varphi : \mathbf{C}/L \to E$$

con

$$\varphi(z) = \mathbf{C}(\wp(z), \wp'(z))$$

sea un isomorfismo de grupos y un isomorfismo de superficies de Riemann. Lo que prueba en particular que topológicamente, E semeja un toro (ya que $\mathbf{C}/L$ es un toro). Si el reticulado L está relacionado con otro reticulado cL mediante la multiplicación por un número complejo distinto de cero c, entonces las curvas correspondientes son isomorfas. Las clases de isomorfismo de curvas elípticas se especifican mediante el j-invariante.

Mientras que el número de puntos racionales de una curva elíptica E sobre un cuerpo finito $\mathbf{F}_p$ es difícil de computar en general, un teorema de Hasse dice que

$$|\#E(\mathbb{F}) - p - 1| < 2\sqrt{p}$$

Este hecho puede entenderse y demostrarse con algo de teoría general; ver función zeta local, cohomología étale.

Para desarrollos ulteriores ver aritmética de variedades abelianas.

Aplicaciones

Las curvas elípticas sobre cuerpos finitos se usan en algunas aplicaciones en criptografía así como en la factorización de enteros. La idea general en esas aplicaciones es que si tenemos un algoritmo que usa ciertos grupos finitos podemos reescribirlo usando los grupos de puntos racionales de curvas elípticas.

Véase también

- Criptografía de curvas elípticas
- Curva elíptica DSA
- Factorización Lenstra de curvas elípticas

Enlaces externos

- Wikimedia Commons alberga contenido multimedia sobre **Curva elíptica**.
- The Mathematical Atlas: 14H52 Elliptic Curves (http://www.math.niu.edu/~rusin/known-math/index/14H52.html)
- Introducción a las curvas elípticas, hiperelípticas y libcurve (http://math.co.ro/colfinal/coloquio-ce-ch.pdf)
- Curva elíptica interactiva sobre R (http://danher6.100webspace.net/ecc/?es#ER_interactivo) y sobre Zp

(http://danher6.100webspace.net/ecc/?es#EFp_interactivo) - Aplicación web que requiere de un navegador que implemente HTML5 (canvas).