Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования Национальный исследовательский университет ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Вычислительная математика

Лабораторная работа №6

Вариант № 1

Выполнил: студент группы P3208,
Васильев Н. А.

Преподаватель: Машина Е.А.

Санкт-Петербург 2025

Текст задания

Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений.

Цель работы

Решить задачу Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений численными методами.

Описание метода, расчётные формулы

$$Y(x_i + h) = Y(x_i) + Y'(x_i) \cdot h + O(h^2)$$

$$\boldsymbol{y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)}$$

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

$$\cdots\cdots$$

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$$

$$y'(x_i) = \lim_{\Delta x} \frac{\Delta y(x_i)}{\Delta x} = \lim_{x_{i+1} \to x_i} \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{x_{i+1} - x_k} = \lim_{h \to 0} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

$$\boldsymbol{y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),}$$

$$\boldsymbol{k_1 = h \cdot f(x_i, y_i)}$$
$$\boldsymbol{k_2 = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})}$$
$$\boldsymbol{k_3 = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2})}$$
$$\boldsymbol{k_4 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3)}$$

$$\Delta f_i = f_i - f_{i-1}$$
$$\Delta^2 f_i = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}$$
$$\Delta^3 f_i = f_i - 3f_{i-1} + 3f_{i-2} - f_{i-3}$$

$$\boldsymbol{y_{i+1} = y_i + hf_i + \frac{h^2}{2}\Delta f_i + \frac{5h^3}{12}\Delta^2 f_i + \frac{3h^4}{8}\Delta^3 f_i}$$

Листинг программы

```
import math

from examples import ODU


class Calculation:
    def __init__(self, equation, initial, start, finish, h, accuracy):
        self.equation = equation
        self.initial = initial
        self.start = start
        self.finish = finish
        self.h = h
        self.accuracy = accuracy

    def euler(self):
        x = self.start
        y = self.initial
        results = [(0, x, y, self.equation(x, y))]
        n = int((self.finish - self.start) / self.h)

        for i in range(1, n + 1):
            y += self.h * self.equation(x, y)
            x = self.start + i * self.h
            results.append((i, x, y, self.equation(x, y)))

        return results

    def runge_kutt(self):
        n = int((self.finish - self.start) / self.h)
        x = self.start
        y = self.initial
        k1 = self.h * self.equation(x, y)
        k2 = self.h * self.equation(x + self.h / 2, y + k1 / 2)
        k3 = self.h * self.equation(x + self.h / 2, y + k2 / 2)
        k4 = self.h * self.equation(x + self.h, y + k3)
        results = [(0, x, y, k1, k2, k3, k4)]

        for i in range(1, n + 1):
            k1 = self.h * self.equation(x, y)
            k2 = self.h * self.equation(x + self.h / 2, y + k1 / 2)
            k3 = self.h * self.equation(x + self.h / 2, y + k2 / 2)
            k4 = self.h * self.equation(x + self.h, y + k3)

            results.append((i, x + self.h, y + (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) /
6, k1, k2, k3, k4))
            y += (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6
            x += self.h

        return results

    def adams(self):
        n = int((self.finish - self.start) / self.h)
        x_vals = [self.start + i * self.h for i in range(n + 1)]
```

```
        y_vals = [0.0] * (n + 1)

        rk = self.runge_kutt()
        for i in range(4):
            _, xi, yi, *_ = rk[i]
            x_vals[i] = xi
            y_vals[i] = yi

        for i in range(3, n):
            f0 = self.equation(x_vals[i], y_vals[i])
            f1 = self.equation(x_vals[i - 1], y_vals[i - 1])
            f2 = self.equation(x_vals[i - 2], y_vals[i - 2])
            f3 = self.equation(x_vals[i - 3], y_vals[i - 3])

            y_vals[i + 1] = (
                    y_vals[i]
                    + self.h * (55 * f0 - 59 * f1 + 37 * f2 - 9 * f3) / 24
            )

        results = []
        for i in range(n + 1):
            fxy = self.equation(x_vals[i], y_vals[i])
            results.append((i, x_vals[i], y_vals[i], fxy))

        return results

    def exact_solution(self, x):
        if self.equation.__code__.co_code == ODU[0].__code__.co_code:
            return -math.exp(x) / (x * math.exp(x) - (
                    self.start * math.exp(self.start) * self.initial +
math.exp(self.start)) / self.initial)
        elif self.equation.__code__.co_code == ODU[1].__code__.co_code:
            return (math.exp(self.start) * self.initial + (-self.start ** 2 +
2 * self.start - 2) * math.exp(
                self.start)) / (math.exp(x)) + x ** 2 - 2 * x + 2
        elif self.equation.__code__.co_code == ODU[2].__code__.co_code:
            return (2 * math.exp(self.start) * self.initial - math.exp(2 *
self.start)) / (2 * math.exp(x)) + (
                        math.exp(x) / 2)
        else:
            raise NotImplementedError("Точное решение не определено для этого
уравнения.")

    def error_adams_vs_exact(self):
        adams_results = self.adams()
        return max(abs(self.exact_solution(x) - y) for (_, x, y, *_rest) in
adams_results)

    def error_runge_rule_euler(self):
        def method(step):
            calc = Calculation(self.equation, self.initial, self.start,
self.finish, step, self.accuracy)
            return calc.euler()

        coarse = method(self.h)
```

```
        fine = method(self.h / 2)

        errors = [
            abs(y1 - y2)
            for (_, x1, y1, *_), (_, x2, y2, *_) in zip(coarse, fine[::2])
            if abs(x1 - x2) < 1e-8
        ]
        return max(errors) / (2 ** 1 - 1)

    def error_runge_rule_rk4(self):
        def method(step):
            calc = Calculation(self.equation, self.initial, self.start,
self.finish, step, self.accuracy)
            return calc.runge_kutt()

        coarse = method(self.h)
        fine = method(self.h / 2)

        errors = [
            abs(y1 - y2)
            for (_, x1, y1, *_), (_, x2, y2, *_) in zip(coarse, fine[::2])
            if abs(x1 - x2) < 1e-8
        ]
        return max(errors) / (2 ** 4 - 1)
```

Примеры и результаты работы программы

Пример 1: Функция ln(x) на интервале [1; 4], разбиение на 10 точек, точка интерполяции 2:

Начальный $y_0=y(x_0)$: -1

Начальную границу интервала: 1

Конечную границу интервала: 1.5

Шаг: 0.1

Точность: 0.01

Решение методом Эйлера:

| i | x | y | f(x, y) |

| 0 | 1.000000 | -1.000000 | 1.000000 |

| 1 | 1.100000 | -0.900000 | 0.801000 |

| 2 | 1.200000 | -0.819900 | 0.659019 |

| 3 | 1.300000 | -0.753998 | 0.553582 |

| 4 | 1.400000 | -0.698640 | 0.472795 |

| 5 | 1.500000 | -0.651360 | 0.409316 |

Погрешность метода Эйлера (правило Рунге):

0.008266163763751444

Решение методом Рунге-Кутта 4-го порядка:

| i | x | y | k1 | k2 | k3 | k4 |

| 0 | 1.000000 | -1.000000 | 0.100000 | 0.090012 | 0.091463 | 0.082489 |

| 1 | 1.100000 | -0.909093 | 0.100000 | 0.090012 | 0.091463 | 0.082489 |

| 2 | 1.200000 | -0.833337 | 0.082645 | 0.075124 | 0.076154 | 0.069339 |

| 3 | 1.300000 | -0.769234 | 0.069445 | 0.063640 | 0.064395 | 0.059098 |

| 4 | 1.400000 | -0.714289 | 0.059173 | 0.054599 | 0.055166 | 0.050968 |

| 5 | 1.500000 | -0.666670 | 0.051021 | 0.047354 | 0.047790 | 0.044405 |

Погрешность метода Рунге-Кутта (правило Рунге):

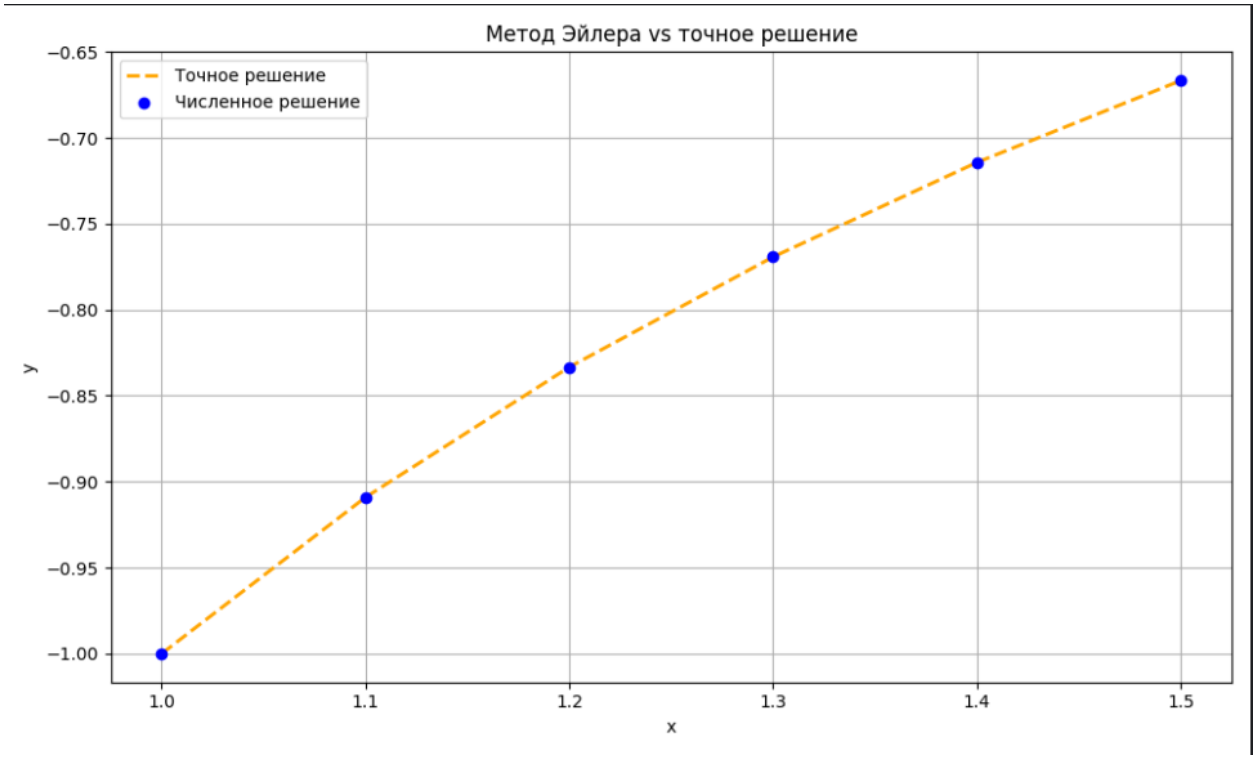
2.339298935079744e-07

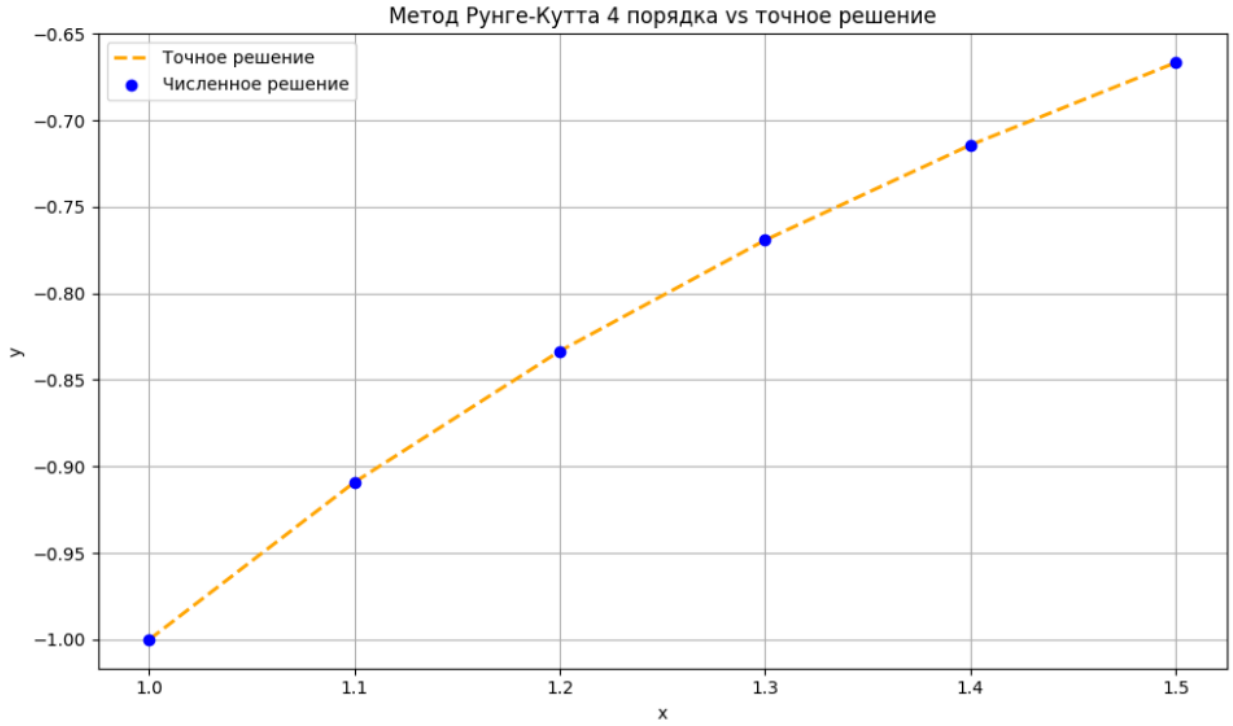
Решение методом Адамса:

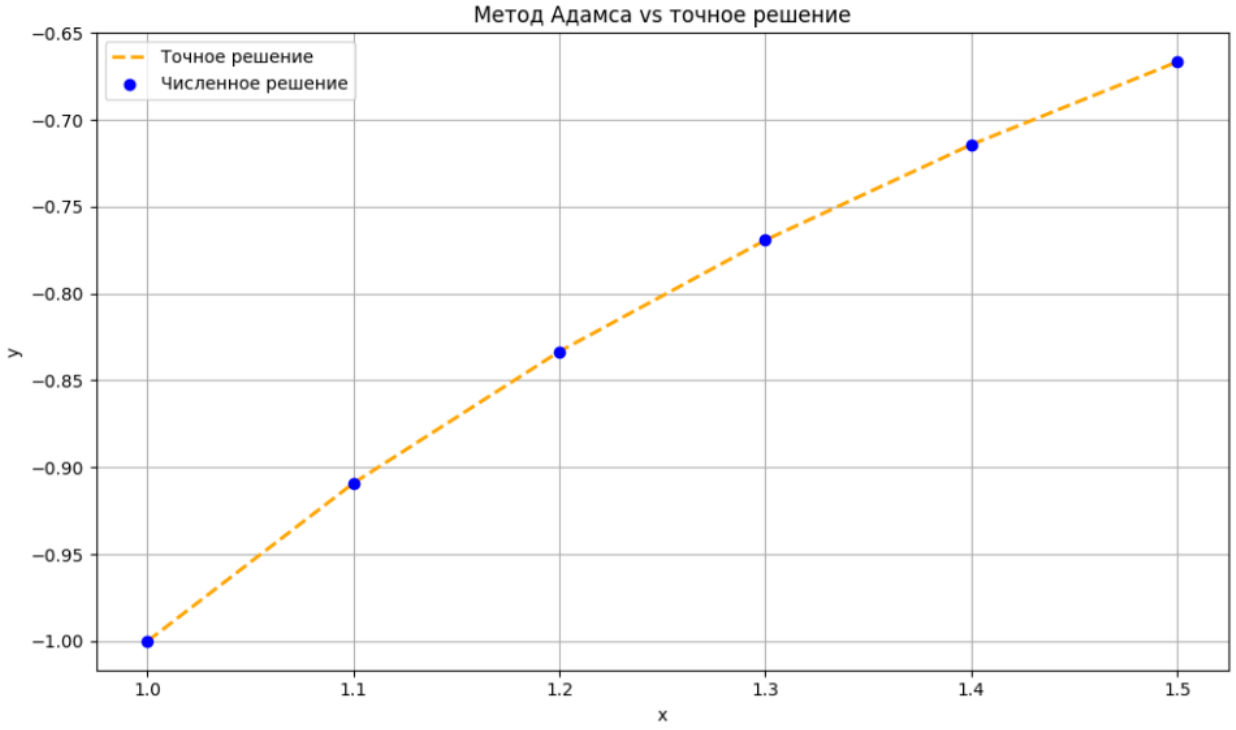
i	x	y (corrector)	f(x,y)
0	1.000000	-1.000000	1.000000
1	1.100000	-0.909093	0.826453
2	1.200000	-0.833337	0.694454
3	1.300000	-0.769234	0.591725
4	1.400000	-0.714439	0.510577
5	1.500000	-0.666828	0.444821

Погрешность метода Адамса (сравнение с точным решением):

0.00016150509790202605







Пример 2: $y' = x^2 - y$
Начальный $y_0=y(x_0)$: 1

Начальную границу интервала: 3

Конечную границу интервала: 6

Шаг: 0.2

Точность: 0.01

Решение методом Эйлера:

i	x	y	f(x, y)
0	3.000000	1.000000	8.000000
1	3.200000	2.600000	7.640000
2	3.400000	4.128000	7.432000
3	3.600000	5.614400	7.345600
4	3.800000	7.083520	7.356480
5	4.000000	8.554816	7.445184
6	4.200000	10.043853	7.596147
7	4.400000	11.563082	7.796918
8	4.600000	13.122466	8.037534
9	4.800000	14.729973	8.310027
10	5.000000	16.391978	8.608022
11	5.200000	18.113582	8.926418
12	5.400000	19.898866	9.261134
13	5.600000	21.751093	9.608907

| 14 | 5.800000 | 23.672874 | 9.967126 |

| 15 | 6.000000 | 25.666299 | 10.333701 |

Погрешность метода Эйлера (правило Рунге):

0.06837509666421937

Решение методом Рунге-Кутта 4-го порядка:

| i | x | y | k1 | k2 | k3 | k4 |

| 0 | 3.000000 | 1.000000 | 1.600000 | 1.562000 | 1.565800 | 1.534840 |

| 1 | 3.200000 | 2.565073 | 1.600000 | 1.562000 | 1.565800 | 1.534840 |

| 2 | 3.400000 | 4.078715 | 1.534985 | 1.511487 | 1.513837 | 1.496218 |

| 3 | 3.600000 | 5.564749 | 1.496257 | 1.484631 | 1.485794 | 1.479098 |

| 4 | 3.800000 | 7.042682 | 1.479050 | 1.477145 | 1.477336 | 1.479583 |

| 5 | 4.000000 | 8.528482 | 1.479464 | 1.485517 | 1.484912 | 1.494481 |

| 6 | 4.200000 | 10.035226 | 1.494304 | 1.506873 | 1.505616 | 1.521180 |

| 7 | 4.400000 | 11.573618 | 1.520955 | 1.538859 | 1.537069 | 1.557541 |

| 8 | 4.600000 | 13.152423 | 1.557276 | 1.579549 | 1.577322 | 1.601812 |

| 9 | 4.800000 | 14.778816 | 1.601515 | 1.627364 | 1.624779 | 1.652560 |

| 10 | 5.000000 | 16.458674 | 1.652237 | 1.681013 | 1.678135 | 1.708610 |

| 11 | 5.200000 | 18.196805 | 1.708265 | 1.739439 | 1.736321 | 1.769001 |

| 12 | 5.400000 | 19.997148 | 1.768639 | 1.801775 | 1.798462 | 1.832947 |

| 13 | 5.600000 | 21.862928 | 1.832570 | 1.867313 | 1.863839 | 1.899803 |

| 14 | 5.800000 | 23.796784 | 1.899414 | 1.935473 | 1.931867 | 1.969041 |

| 15 | 6.000000 | 25.800877 | 1.968643 | 2.005779 | 2.002065 | 2.040230 |

Погрешность метода Рунге-Кутта (правило Рунге):

1.5995649121691712e-06

Решение методом Адамса:

| i | x | y (corrector) | f(x,y) |

| 0 | 3.000000 | 1.000000 | 8.000000 |

| 1 | 3.200000 | 2.565073 | 7.674927 |

| 2 | 3.400000 | 4.078715 | 7.481285 |

| 3 | 3.600000 | 5.564749 | 7.395251 |

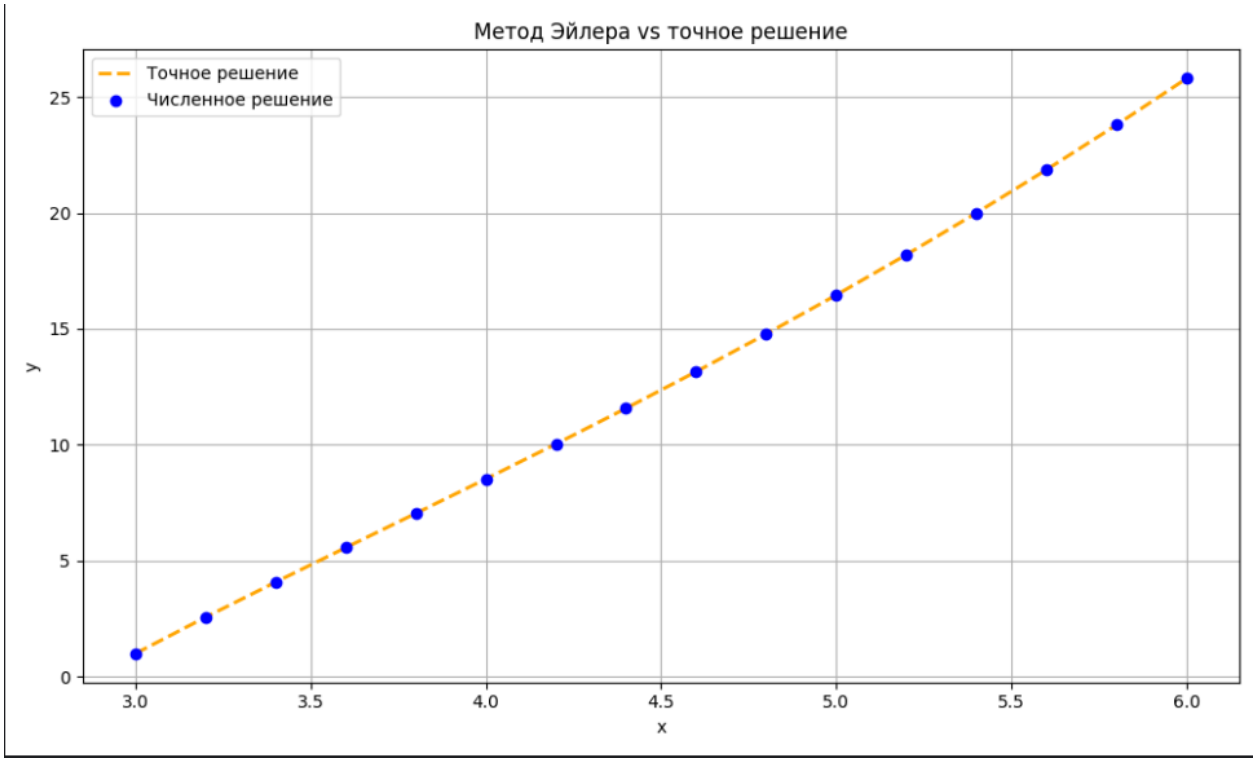
| 4 | 3.800000 | 7.042376 | 7.397624 |

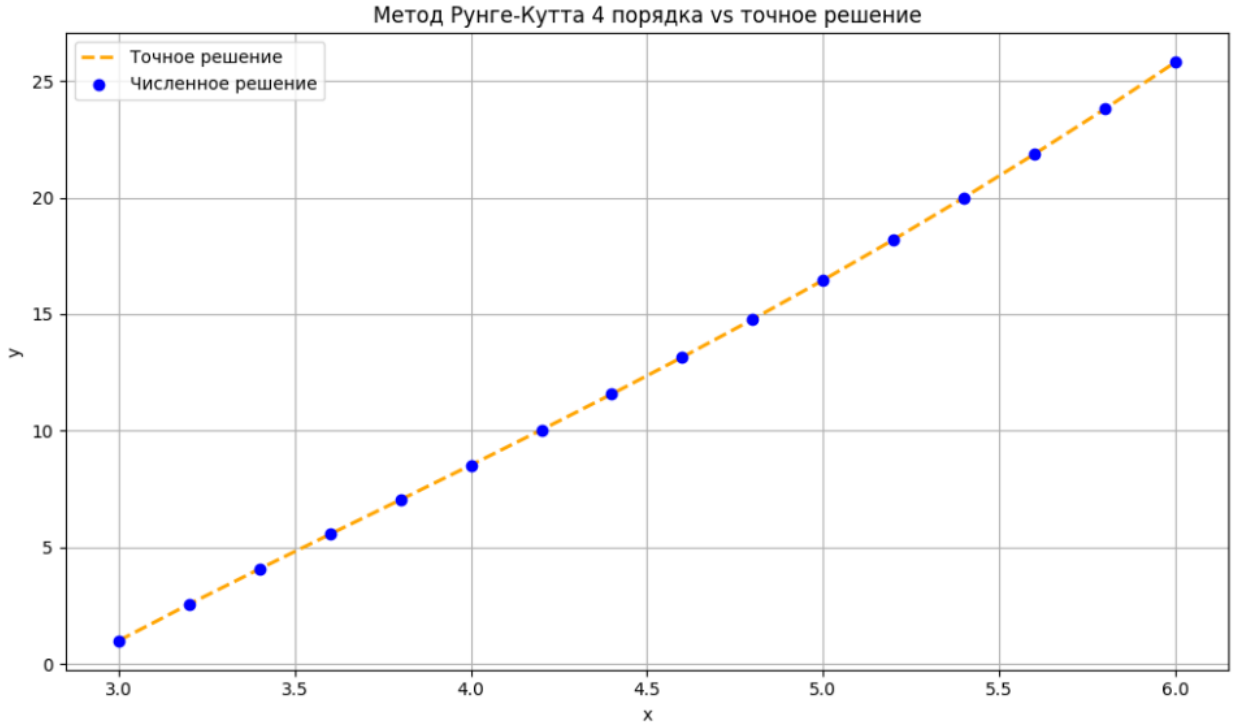
| 5 | 4.000000 | 8.528066 | 7.471934 |

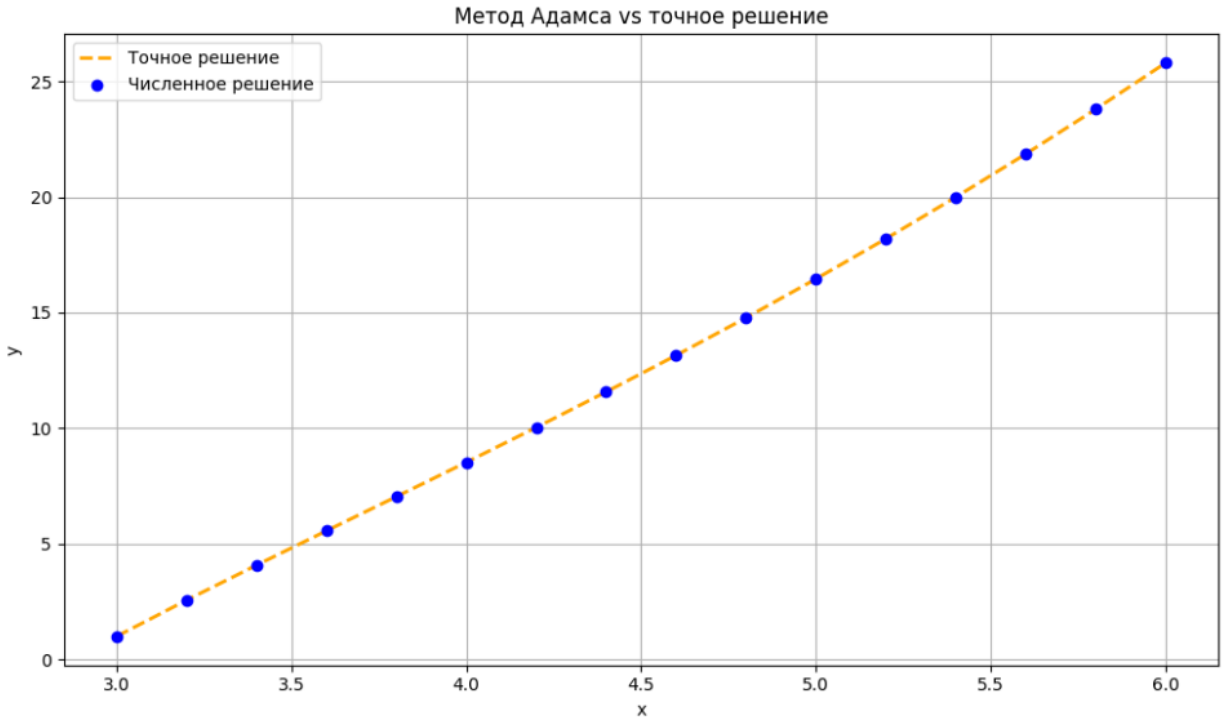
6	4.200000	10.034643	7.605357
7	4.400000	11.573021	7.786979
8	4.600000	13.151777	8.008223
9	4.800000	14.778205	8.261795
10	5.000000	16.458068	8.541932
11	5.200000	18.196249	8.843751
12	5.400000	19.996622	9.163378
13	5.600000	21.862454	9.497546
14	5.800000	23.796347	9.843653
15	6.000000	25.800488	10.199512

Погрешность метода Адамса (сравнение с точным решением):

0.0006366995496520644


Метод Эйлера vs точное решение
Точное решение
Численное решение
y
x
0
5
10
15
20
25
3.0
3.5
4.0
4.5
5.0
5.5
6.0


Метод Рунге-Кутта 4 порядка vs точное решение
Точное решение
Численное решение
y
x
0
5
10
15
20
25
3.0
3.5
4.0
4.5
5.0
5.5
6.0



Вывод

В ходе лабораторной работы были реализованы и сравнены три численных метода решения задачи Коши для ОДУ с заданным начальным условием.