Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования Национальный исследовательский университет ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Вычислительная математика

Лабораторная работа №5

Вариант № 1

Выполнил: студент группы Р3208,
Васильев Н. А.

Преподаватель: Машина Е.А.

Санкт-Петербург 2025

Текст задания

Интерполяция функции

Цель работы

Решить задачу интерполяции, найти значения функции при заданных значениях аргумента, отличных от узловых точек.

Описание метода, расчётные формулы

$$t = \frac{(x - x_n)}{h}$$

$$N(6) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)}{5!}\Delta^5 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)(t-5)}{6!}\Delta^6 y_0$$

$$P_6(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(t+1)t(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \frac{(t+1)t(t-1)(t-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \frac{(t+2)(t+1)t(t-1)(t-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2} + \frac{(t+2)(t+1)t(t-1)(t-2)(t-3)}{6!}\Delta^6 y_{-3}$$

Вычислительная реализация задачи:

x	y	X_1	X_2
0,25	1,2557	0,251	0,402
0,30	2,1764		
0,35	3,1218		
0,40	4,0482		
0,45	5,9875		
0,50	6,9195		
0,55	7,8359		

Таблица конечных разностей для заданной таблицы:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$
0,25	1,2557	0,9207	0,0247	-0,0437	1,0756	-4,1277	10,1917
0,30	2,1764	0,9454	-0,0190	1,0319	-3,0521	6,0640	
0,35	3,1218	0,9264	1,0129	-2,0202	3,0119		
0,40	4,0482	1,9393	-1,0073	0,9917			
0,45	5,9875	0,9320	-0,0156				
0,50	6,9195	0,9164					
0,55	7,8359						

Вычислим значение функции для X_1, используя первую интерполяционную формулу Ньютона, так как 0,251 ближе к началу интервала:

$$t = \frac{(x - x_n)}{h} = \frac{(0{,}251 - 0{,}250)}{0{,}05} = 0{,}02$$

$$N(6) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)}{5!}\Delta^5 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)(t-5)}{6!}\Delta^6 y_0$$

$$y(0{,}251) = 1{,}2557 + 0{,}02 \times 0{,}9207 + \frac{0{,}02(0{,}02-1)}{2} \times 0{,}0247 + \frac{0{,}02(0{,}02-1)(0{,}02-2)}{6} \times (-0{,}0437) + \frac{0{,}02(0{,}02-1)(0{,}02-2)(0{,}02-3)}{24} \times 1{,}0756 + \frac{0{,}02(0{,}02-1)(0{,}02-2)(0{,}02-3)(0{,}02-4)}{120} \times (-4{,}1277) + \frac{0{,}02(0{,}02-1)(0{,}02-2)(0{,}02-3)(0{,}02-4)(0{,}02-5)}{720} \times 10{,}1917$$

$$y(0{,}251) \approx 1{,}22013$$

Вычислим значение функции для X_2, используя первую интерполяционную формулу Гаусса, так как 0,402 находится в правой части интервала (0,402 > 0,40):

$$t = \frac{(x - x_n)}{h} = \frac{(0{,}402 - 0{,}400)}{0{,}05} = 0{,}04$$

$$P_6(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(t+1)t(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \frac{(t+1)t(t-1)(t-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \frac{(t+2)(t+1)t(t-1)(t-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2} + \frac{(t+2)(t+1)t(t-1)(t-2)(t-3)}{6!}\Delta^6 y_{-3}$$

$$y(0{,}402) = 4{,}0482 + 0{,}04 \times 1{,}9393 + \frac{0{,}04(0{,}04-1)}{2} \times 1{,}0129 + \frac{(0{,}04+1) \times 0{,}04 \times (0{,}04-1)}{6} \times (-2{,}0202) + \frac{(0{,}04+1) \times 0{,}04 \times (0{,}04-1)(0{,}04-2)}{24} \times (-3{,}0521) + \frac{(0{,}04+2)(0{,}04+1) \times 0{,}04 \times (0{,}04-1)(0{,}04-2)}{120} \times 6{,}0640 + \frac{(0{,}04+2)(0{,}04+1) \times 0{,}04 \times (0{,}04-1)(0{,}04-2)(0{,}04-3)}{720} \times 10{,}1917$$

$$y(0{,}402) \approx 4{,}1112$$

Листинг программы

```python
def compute_differences(x, y):
    n = len(x)
    table = [[x[i], y[i]] + [None] * (n - 1) for i in range(n)]

    for order in range(1, n):
        for i in range(n - order):
            if order == 1:
                table[i][order + 1] = round(table[i + 1][order] - table[i][order], 4)
            else:
                table[i][order + 1] = round(table[i + 1][order] - table[i][order], 4)

    return table


def lagrange_interpolation(x_values, y_values, x):
    n = len(x_values)
    result = 0.0

    for i in range(n):
        term = y_values[i]
        for j in range(n):
            if j != i:
                term *= (x - x_values[j]) / (x_values[i] - x_values[j])
        result += term

    return result


def newton_divided_differences(x_values, y_values, x):
    n = len(x_values)
    coefficients = y_values.copy()

    for j in range(1, n):
        for i in range(n - 1, j - 1, -1):
            coefficients[i] = (coefficients[i] - coefficients[i - 1]) / (x_values[i] - x_values[i - j])

    return evaluate_newton_divided(x_values, coefficients, x)


def evaluate_newton_divided(x_values, coefficients, x):
    n = len(coefficients)
    result = coefficients[-1]

    for i in range(n - 2, -1, -1):
        result = result * (x - x_values[i]) + coefficients[i]

    return result


def newton_forward_difference(x_values, y_values, x):
    n = len(x_values)
    h = x_values[1] - x_values[0]
```

```
    diff_table = [y_values.copy()]
    for i in range(1, n):
        diff_table.append([])
        for j in range(n - i):
            diff_table[i].append(diff_table[i - 1][j + 1] - diff_table[i - 1][j])

    t = (x - x_values[0]) / h

    result = diff_table[0][0]
    product = 1.0
    for i in range(1, n):
        product *= (t - (i - 1)) / i
        result += product * diff_table[i][0]

    return result


def newton_backward_difference(x_values, y_values, x):
    n = len(x_values)
    h = x_values[1] - x_values[0]

    diff_table = [y_values.copy()]
    for i in range(1, n):
        diff_table.append([])
        for j in range(n - i):
            diff_table[i].append(diff_table[i - 1][j + 1] - diff_table[i - 1][j])

    t = (x - x_values[-1]) / h

    result = diff_table[0][-1]
    product = 1.0

    for i in range(1, n):
        product *= (t + (i - 1)) / i
        if n - i - 1 >= 0 and i < len(diff_table) and n - i - 1 < len(diff_table[i]):
            result += product * diff_table[i][n - i - 1]
        else:
            break

    return result
```

Примеры и результаты работы программы

Пример 1: Функция ln(x) на интервале [1; 4], разбиение на 10 точек, точка интерполяции 2:

Вы ввели узлы интерполяции:

x = 1.0, y = 0.0

x = 1.3333333333333333, y = 0.28768207245178085

x = 1.6666666666666665, y = 0.5108256237659906

x = 2.0, y = 0.6931471805599453

x = 2.333333333333333, y = 0.8472978603872034

x = 2.666666666666667, y = 0.9808292530117263

x = 3.0, y = 1.0986122886681098

x = 3.3333333333333335, y = 1.2039728043259361

x = 3.6666666666666665, y = 1.2992829841302609

x = 4.0, y = 1.3862943611198906

Таблица разностей:

x	y	Δ^1y	Δ^2y	Δ^3y	Δ^4y	Δ^5y	Δ^6y	Δ^7y	Δ^8y	Δ^9y
1.000	0.000	0.288	-0.065	0.024	-0.011	0.006	-0.003	0.001	0.002	-0.004
1.333	0.288	0.223	-0.041	0.013	-0.005	0.003	-0.002	0.002	-0.002	
1.667	0.511	0.182	-0.028	0.007	-0.002	0.001	0.000	-0.000		
2.000	0.693	0.154	-0.021	0.005	-0.002	0.001	-0.000			
2.333	0.847	0.134	-0.016	0.003	-0.001	0.001				
2.667	0.981	0.118	-0.012	0.002	-0.001					
3.000	1.099	0.105	-0.010	0.002						
3.333	1.204	0.095	-0.008							
3.667	1.299	0.087								
4.000	1.386									

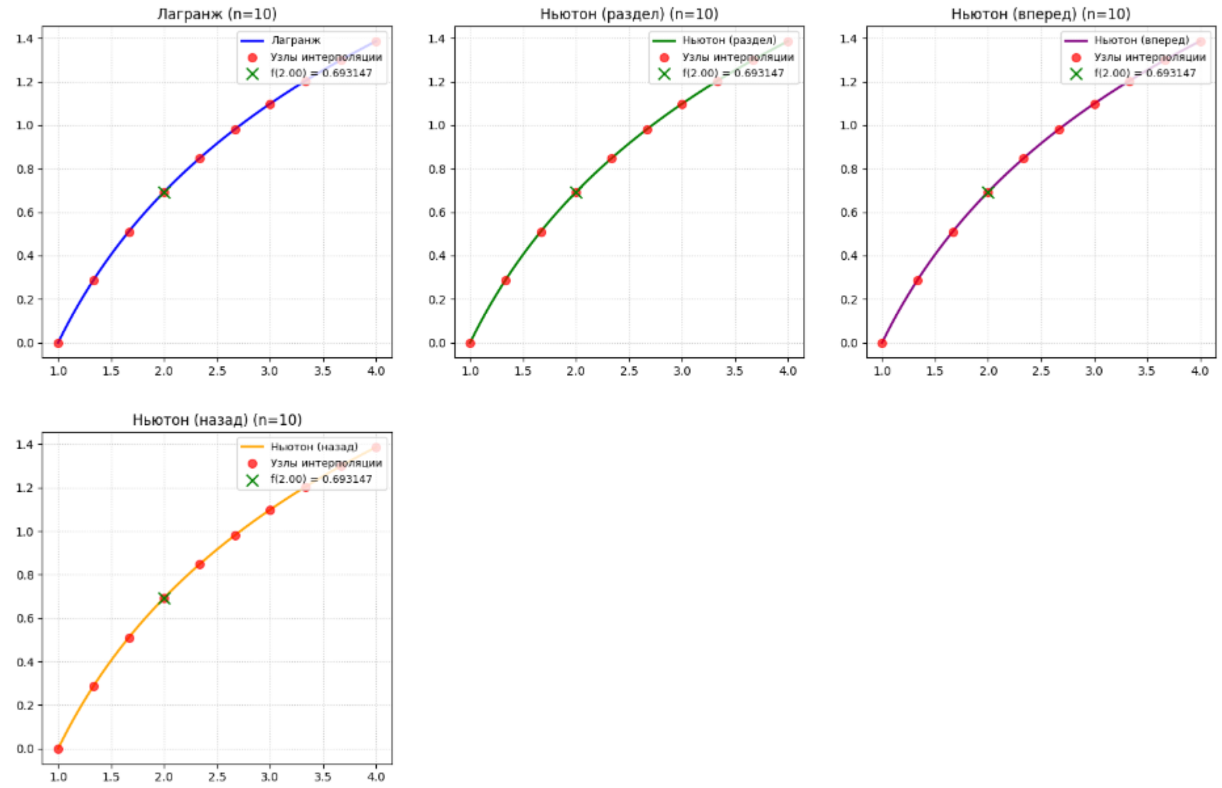
Результат интерполяции:

Многочлен Лагранжа: 0.6931471805599453

Многочлен Ньютона с разделенными разностями: 0.6931471805599453

Многочлен Ньютона с прямыми разностями (первая формула): 0.6931471805599455

Многочлен Ньютона с прямыми разностями (вторая формула): 0.6931471805599451



Пример 2: Точка интерполяции 0.25, точки:
0.1 1.0

0.2 1.44

0.3 2.25

0.4 3.24

0.5 4.41

Вы ввели узлы интерполяции:

x = 0.1, y = 1.0

x = 0.2, y = 1.44

x = 0.3, y = 2.25

x = 0.4, y = 3.24

x = 0.5, y = 4.41

Таблица разностей:

----

x	y	Δ^1y	Δ^2y	Δ^3y	Δ^4y
0.100	1.000	0.440	0.370	-0.190	0.190
0.200	1.440	0.810	0.180	0.000	
0.300	2.250	0.990	0.180		
0.400	3.240	1.170			
0.500	4.410				

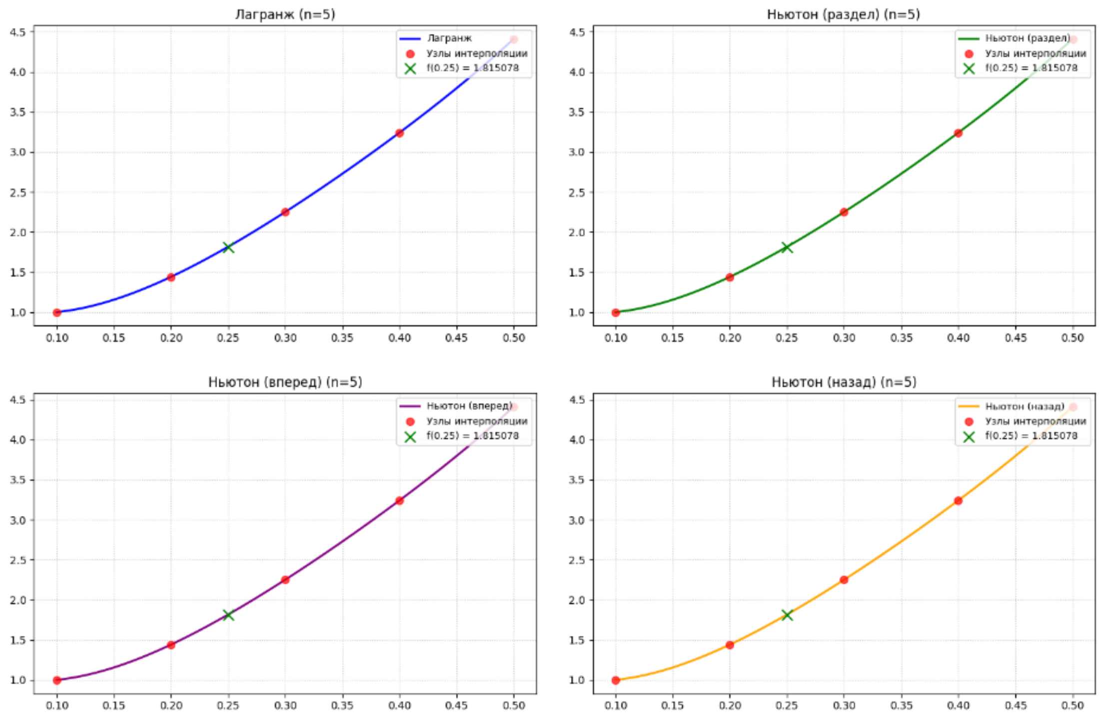
Результат интерполяции:

Многочлен Лагранжа: 1.815078125

Многочлен Ньютона с разделенными разностями: 1.815078125

Многочлен Ньютона с прямыми разностями (первая формула): 1.8150781249999997

Многочлен Ньютона с прямыми разностями (вторая формула): 1.815078125



Вывод

В ходе лабораторной работы были изучены и реализованы различные методы интерполирования функций: метод Лагранжа, метод Ньютона (в трёх формах) и метод прямого хода схемы Гаусса. Каждый из этих методов позволил построить интерполяционный полином по заданному набору точек и оценить значение функции в промежуточных узлах.