Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Лабораторная работа №6

Работа с системой компьютерной вёрстки TEX

Вариант: 83

Выполнил:
Васильев Никита Алексеевич
Группа: P3108

Проверил:
Балакшин П. В,
доцент факультета ПИиКТ,
кандидат технических наук

Санкт-Петербург 2023

имеем
$|xy| = \left|(ma+nc)(\frac{m}{a}-\frac{n}{c})\right| = \left|m^2+mn(\frac{c}{a}-\frac{a}{c})-n^2\right| =$
$= \left|m^2+mn-n^2\right|$

Внутренность «креста» из гипербол $xy = \pm 1$ задается неравенством $|xy| < 1$. Но при целых m и n величина $\left|m^2+mn-n^2\right|$ тоже целая. Единственным целым числом, которое по модулю меньше 1, является ноль.

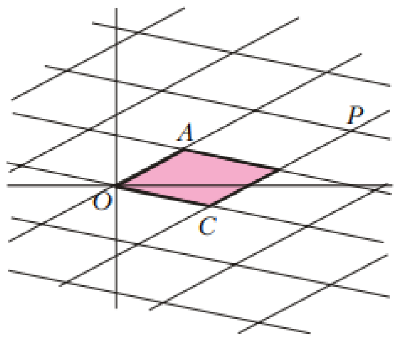

Рис. 4

Значит, для лежащей внутри креста точки решетки имеем откуда $ma + nc = 0$ или $mc\check{\ }na = 0$. Ввиду иррациональности отношения a/c это возможно лишь при $m = n = 0$.

Значит, внутри «креста» из гипербол расположена единственная точка рассматриваемой решетки – начало координат.

Для решетки, порожденной параллелограммом рисунка 3, решение аналогично, поэтому мы выпишем только формулы

$$\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OC} = (ma+nc; \frac{m}{a}+\frac{n}{c})$$

и
$|xy| = \left|(ma+nc)(\frac{m}{a}+\frac{n}{c})\right| = |m^2+mn(\frac{c}{a}+\frac{a}{c})++n^2| =$
$= |xy| = \left|(ma+nc)(\frac{m}{a})+\frac{n}{c}\right| =$
$= \left|m^2+mn(\frac{c}{a}+\frac{a}{c})+n^2\right| = \left|m^2-3mn+n^2\right| =$
$= \left|(m-n)^2-(m-n)n-n^2)\right| = \left|k^2-kn-n^2\right|, k =$
$= m-n$

Итак, внутри «креста гипербол» нет ни одной точки решеток, кроме начала координат. А на самих гиперболах таких точек бесконечно много. Чтобы доказать это, в первом из рассмотренных нами случаев достаточно убедиться, что уравнение

$$m^2+mn-n^2 = \pm 1$$

имеет бесконечно много решений в целых числах m, n, а во втором случае – сделать то же самое для уравнения

$$k^2-kn-n^2 = \pm 1$$

Впрочем, первое из этих двух уравнений сводится ко второму заменой m на –k.

Уравнение: $x^2-xy-y^2 = \pm 1$

Это уравнение не имеет вида $x^2-dy^2 = 1$. Но умножение на 4 приводит его к виду

$$4x^2-4xy-4y^2 = \pm 4,$$

т.е.

$$(2x-y)^2-5y^2 = \pm 4$$

что уже похоже на уравнение Пелля. Впрочем, мы воспользуемся этим преобразованием чуть позже, а здесь решим уравнение в его первоначальном виде.

Немного посчитав, можно составить таблицу:

x	0	1	1	2	3	5	8	13	21
y	1	0	1	1	2	3	5	8	13
x^2-xy-y^2	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1

Всякий, кто знаком с числами Фибоначчи, уже узнал. А остальным скажем, что последовательность Фибоначчи задана своими двумя членами $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 1$ и рекуррентной формулой $\varphi_{n+2} = \varphi_n + \varphi_{n+1}$. Несколько следующих членов этой замечательной последовательности таковы: $\varphi_2 = 0+1 = 1$, $\varphi_3 = 1+1 = 2$, $\varphi_4 = 1+2 = 3$, $\varphi_5 = 2+3 = 5$, $\varphi_6 = 3+5 = 8$, $\varphi_7 = 5+8 = 13$.

Теорема 6. *Если $x^2-xy-y^2 = \pm 1$, то пара чисел $(X;Y) = (x+y;x)$ удовлетворяет равенству $X^2-XY-Y^2 = \mp 1$.*

Доказательство.

$(x+y)^2-(x+y)x-x^2 = x^2+2xy+y^2-x^2--xy-x^2 = -(x^2-xy-y^2) = \mp 1$.

Доказав теорему 6, мы наконец-то решили задачу М1775.

Как и не раз выше, сформулируем и не докажем еще одну теорему.

Теорема 7. *Уравнение $x^2-xy-y^2 = \pm 1$ не имеет решений в целых неотрицательных числах, кроме тех, что получаются из «тривиального» решения* (0;1) при помощи правила $(x;y) \to (x+y;x)$.

Следствие. Все решения уравнения $z^2-5y^2 = \pm 4$ натуральных числах даются формулой $(z;y) = \varphi_{n+1} + \varphi_{n-1}; \varphi_n$.

Доказательство. Каждой паре целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющей равенству $x^2-xy-y^2 = \pm 1$, соответствует пара целых чисел $(z;y) = (2x-y;y)$, удовлетворяющая равенству $z^2-5y^2 = \pm 4$, и наоборот (поскольку числа z и y одной четности). Осталось заметить, что если $x = \varphi_{n+1}$ и $y = \varphi_n$, то

$$z = 2x-y = 2\varphi_{n+1}-\varphi_n = \varphi_{n+1}+\varphi_{n-1}$$

Упражнение 20. Докажите тождества
а) $\varphi_n^2 = \varphi_{n-1}\varphi_{n+1}-(-1)^n$;
б) $\varphi_n^2 = \varphi_{n-2}\varphi_{n+2}+(-1)^n$.

(*Продолжение следует*)

National Anthem of the Republic Zimbabwe

Adopted: 1994

Words by: Solomon Mangwiro Mutswairo (b. 1924)

Music by: Fred Lecture Changundega (b. 1954)