

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники



Основы дискретной математики

Курсовая работа. Часть №1

Синтез комбинационных схем

Вариант №99

Выполнил: студент группы Р3108
Васильев Никита

Проверил: Поляков Владимир
Иванович, доцент факультета ПИиКТ,
кандидат технических наук

Санкт-Петербург 2023

№	Условия, при которых f=1	Условия, при которых f=d
99	$0 < x_1x_2x_4 - x_3x_5 \leq 2$	$ x_1x_2x_4 - x_3x_5 = 4$

Таблица истинности

№	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₁ x ₂ x ₄	(x ₁ x ₂ x ₄) ₁₀	x ₃ x ₅	(x ₃ x ₅) ₁₀	-	F
1	0	0	0	0	0	000	0	00	0	0	0
2	0	0	0	0	1	000	0	01	1	1	1
3	0	0	0	1	0	001	1	00	0	1	1
4	0	0	0	1	1	001	1	01	1	0	0
5	0	0	1	0	0	000	0	10	2	2	1
6	0	0	1	0	1	000	0	11	3	3	0
7	0	0	1	1	0	001	1	10	2	1	1
8	0	0	1	1	1	001	1	11	3	2	1
9	0	1	0	0	0	010	2	00	0	2	1
10	0	1	0	0	1	010	2	01	1	1	1
11	0	1	0	1	0	011	3	00	0	3	0
12	0	1	0	1	1	011	3	01	1	2	1
13	0	1	1	0	0	010	2	10	2	0	0
14	0	1	1	0	1	010	2	11	3	1	1
15	0	1	1	1	0	011	3	10	2	1	1
16	0	1	1	1	1	011	3	11	3	0	0
17	1	0	0	0	0	100	4	00	0	4	D
18	1	0	0	0	1	100	4	01	1	3	0
19	1	0	0	1	0	101	5	00	0	5	0
20	1	0	0	1	1	101	5	01	1	4	D
21	1	0	1	0	0	100	4	10	2	2	1
22	1	0	1	0	1	100	4	11	3	1	1
23	1	0	1	1	0	101	5	10	2	3	0
24	1	0	1	1	1	101	5	11	3	2	1
25	1	1	0	0	0	110	6	00	0	6	0
26	1	1	0	0	1	110	6	01	1	5	0
27	1	1	0	1	0	111	7	00	0	7	0
28	1	1	0	1	1	111	7	01	1	6	0

14	10101	v	14	1X100	13-16					14	1X100
15	10111	v	15	101X1	14-15					15	101X1
16	11100	v	16	1X111	15-17					16	1X111
17	11111	v									

Составление импликантной таблицы

Простые импликанты (максимальные кубы)	0-кубы												
	00001	00010	00100	00110	00111	01000	01001	01011	01101	01110	10100	10101	10111
0X001	*						*						
00X10		*		*									
001X0			*	*									
X0100			*								*		
0011X				*	*								
0X110				*						*			
X0111					*								*
0100X						*	*						
010X1							*	*					
01X01							*		*				
10X00											*		
10X11													*
1010X											*	*	
1X100											*		
101X1												*	*
1X111													*

Определение существенных импликант

Импликанты 1, 2, 6, 8, 9, 10 – существенные, так как они покрывают вершины 1, 2, 6, 8, 9 и 10 соответственно, не покрытые другими импликантами. Вычеркнем из таблицы строки, соответствующие этим импликантам, а также столбцы, соответствующие вершинам,

покрываемым существенными импликантами. Это вершины 1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16 и 17. В результате получаем упрощенную импликантную таблицу.

Простые импликанты (максимальные кубы)		0-кубы				
		00100	00111	10100	10101	10111
		a	b	c	d	e
001X0	A	*				
X0100	B	*		*		
0011X	C		*			
X0111	D		*			*
10X00	E			*		
10X11	F					*
1010X	G			*	*	
1X100	H			*		
101X1	I				*	*
1X111	J					*

Множество существенных импликант (максимальных кубов) образует ядро покрытия как его обязательную часть:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} 0100X \\ 00X10 \\ 0X110 \\ 0X001 \\ 01X01 \\ 010X1 \end{array} \right\}$$

Определение минимального покрытия

Выпишем булево выражение Y , определяющее условие покрытия всех 0-кубов (существенных вершин), не покрываемых существенными импликантами.

$$Y = (A \vee B)(C \vee D)(B \vee E \vee G \vee H)(G \vee I)(D \vee F \vee I \vee J)$$

Применим закон поглощения к дизъюнктивным термам, в результате чего в выражении остаются только двухбуквенные термы.

$$Y = (A \vee B)(C \vee D)(G \vee I)$$

Выполняя операции попарного логического умножения применительно к термам, содержащим одинаковые буквы, с последующим применением закона поглощения, приведем исходную конъюнктивную форму Y к дизъюнктивной.

$$Y = (ACEI) \vee (ACFG) \vee (ACGI) \vee (ACGJ) \vee (ACHI) \vee (ADEI) \vee (ADG) \vee (ADHI) \vee (BCFG) \\ \vee (BCGJ) \vee (BCI) \vee (BDG) \vee (BDI)$$

$$\begin{array}{ccccc} C_{min_1} = \begin{Bmatrix} T \\ A \\ C \\ E \\ I \end{Bmatrix} & C_{min_2} = \begin{Bmatrix} T \\ A \\ C \\ F \\ G \end{Bmatrix} & C_{min_3} = \begin{Bmatrix} T \\ A \\ C \\ G \\ I \end{Bmatrix} & C_{min_4} = \begin{Bmatrix} T \\ A \\ C \\ G \\ J \end{Bmatrix} & C_{min_5} = \begin{Bmatrix} T \\ A \\ C \\ H \\ I \end{Bmatrix} \\ S_a = 40 & S_a = 40 & S_a = 40 & S_a = 40 & S_a = 40 \\ S_b = 50 & S_b = 50 & S_b = 50 & S_b = 50 & S_b = 50 \\ \\ C_{min_6} = \begin{Bmatrix} T \\ A \\ C \\ E \\ H \end{Bmatrix} & C_{min_7} = \begin{Bmatrix} T \\ A \\ D \\ G \end{Bmatrix} & C_{min_8} = \begin{Bmatrix} T \\ A \\ D \\ H \\ I \end{Bmatrix} & C_{min_9} = \begin{Bmatrix} T \\ B \\ C \\ F \\ G \end{Bmatrix} & \\ S_a = 40 & S_a = 36 & S_a = 40 & S_a = 40 & \\ S_b = 50 & S_b = 45 & S_b = 50 & S_b = 50 & \\ \\ C_{min_{10}} = \begin{Bmatrix} T \\ B \\ C \\ G \\ J \end{Bmatrix} & C_{min_{11}} = \begin{Bmatrix} T \\ B \\ C \\ I \end{Bmatrix} & C_{min_{12}} = \begin{Bmatrix} T \\ B \\ D \\ G \end{Bmatrix} & C_{min_{13}} = \begin{Bmatrix} T \\ B \\ D \\ I \end{Bmatrix} & \\ S_a = 40 & S_a = 36 & S_a = 36 & S_a = 36 & \\ S_b = 50 & S_b = 45 & S_b = 45 & S_b = 45 & \end{array}$$

Минимальными являются покрытия 7, 11, 12 и 13

$$C_{min}(f) = \begin{Bmatrix} 0100X \\ 00X10 \\ 0X110 \\ 0X001 \\ 01X01 \\ 010X1 \\ X0100 \\ X0111 \\ 1010X \end{Bmatrix}$$

$$S_a = 36$$

$$S_b = 45$$

$$\text{МДНФ: } \overline{x_1}x_2\overline{x_3}\overline{x_4} \vee \overline{x_1}\overline{x_2}x_4\overline{x_5} \vee \overline{x_1}x_3x_4\overline{x_5} \vee \overline{x_1}\overline{x_3}\overline{x_4}x_5 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_5 \vee \overline{x_1}\overline{x_2}\overline{x_4}x_5 \vee \overline{x_2}x_3\overline{x_4}\overline{x_5} \vee \\ \overline{x_2}x_3x_4x_5 \vee x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4}$$

Минимизация на картах Карно

Определение МДНФ

	X ₄ X ₅			
	00	01	11	10
X ₂ X ₃	00	0	1	0
	01	1	0	1
	11	0	1	0
	10	1	1	0

x₁ = 0

	X ₄ X ₅			
	00	01	11	10
X ₂ X ₃	00	d	0	d
	01	1	1	1
	11	d	0	d
	10	0	0	0

x₁ = 1

$$C_{min}(f) = \left\{ \begin{array}{l} 0100X \\ 00X10 \\ 0X110 \\ 0X001 \\ 01X01 \\ 010X1 \\ X0100 \\ X0111 \\ 1010X \end{array} \right\}$$

$$S_a = 36$$

$$S_b = 45$$

$$\text{МДНФ: } \overline{x_1}x_2\overline{x_3}\overline{x_4} \vee \overline{x_1}\overline{x_2}x_4\overline{x_5} \vee \overline{x_1}x_3x_4\overline{x_5} \vee \overline{x_1}\overline{x_3}\overline{x_4}x_5 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_5 \vee \overline{x_1}\overline{x_2}\overline{x_4}x_5 \vee \overline{x_2}x_3\overline{x_4}\overline{x_5} \vee \overline{x_2}x_3x_4x_5 \vee x_1\overline{x_2}\overline{x_3}\overline{x_4}$$

Определение МКНФ

	X ₄ X ₅			
	00	01	11	10
X ₂ X ₃	00	0	1	0
	01	1	0	1
	11	0	1	0
	10	1	1	0

x₁ = 0

	X ₄ X ₅			
	00	01	11	10
X ₂ X ₃	00	d	0	d
	01	1	1	1
	11	d	0	d
	10	0	0	0

x₁ = 1

$$C_{min}(f) = \left\{ \begin{array}{l} 1X0XX \\ 11XXX \\ 1XX10 \\ X1010 \\ X1100 \\ X1111 \\ X0000 \\ X0011 \\ 00101 \end{array} \right\}$$

$$S_A = 32$$

$$S_B = 41$$

$$\text{МКНФ: } (\overline{x_1} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2})(\overline{x_1} \vee \overline{x_4} \vee x_5)(\overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5)(\overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5)(\overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})(x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5)(x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5)$$

Преобразование минимальных форм булевой функции

Факторное преобразование для МДНФ

$$\begin{aligned} f &= \overline{x_1}x_2\overline{x_3}\overline{x_4} \vee \overline{x_1}\overline{x_2}x_4\overline{x_5} \vee \overline{x_1}x_3x_4\overline{x_5} \vee \overline{x_1}\overline{x_3}\overline{x_4}x_5 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_5 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_4}x_5 \quad S_q = 45 \\ &\quad \vee \overline{x_2}x_3\overline{x_4}\overline{x_5} \vee \overline{x_2}x_3x_4x_5 \vee x_1\overline{x_2}\overline{x_3}\overline{x_4} = \\ &= (\overline{x_1} \vee x_2)(\overline{x_1}\overline{x_3}\overline{x_4} \vee \overline{x_2}x_4\overline{x_5}) \vee (\overline{x_1} \vee x_2)(x_3x_4\overline{x_5} \vee \overline{x_1}\overline{x_3}x_5) \vee (\overline{x_1} \vee x_2)(\overline{x_3}\overline{x_4}x_5 \\ &\quad \vee \overline{x_1}x_4x_5) \vee \overline{x_2}x_3\overline{x_4}\overline{x_5} \vee \overline{x_2}x_3x_4x_5 \vee x_1\overline{x_2}\overline{x_3}\overline{x_4} = \\ &= \varphi(\overline{x_1}\overline{x_3}\overline{x_4} \vee \overline{x_2}x_4\overline{x_5}) \vee \varphi(x_3x_4\overline{x_5} \vee \overline{x_1}\overline{x_3}x_5) \vee \varphi(\overline{x_3}\overline{x_4}x_5 \vee \overline{x_1}x_4x_5) \vee \overline{x_2}x_3\overline{x_4}\overline{x_5} \quad S_q = 37 \\ &\quad \vee \overline{x_2}x_3x_4x_5 \vee \overline{\varphi}x_3\overline{x_4} \end{aligned}$$

Решим задачу декомпозиции применительно к полученной форме. Для этого введем вспомогательную функцию.

$$\varphi = \varphi(x_1, x_2) = \overline{x_1} \vee x_2$$

Инверсия этой функции имеет вид

$$\overline{\varphi} = x_1\overline{x_2}$$

Факторное преобразование для МКДФ

$$\begin{aligned} f &= (\overline{x_1} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2})(\overline{x_1} \vee \overline{x_4} \vee x_5)(\overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5)(\overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5)(\overline{x_2} \\ &\quad \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})(x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5)(x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \\ &\quad \vee \overline{x_4} \vee x_5) = \end{aligned} \quad S_q = 41$$

$$\begin{aligned}
&= (\overline{x_1} \vee x_3) \cdot (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \cdot (\overline{x_1} \vee \overline{x_4} \vee x_5) \cdot ((\overline{x_2} \vee x_5)x_3 \vee \overline{x_4}) \cdot ((\overline{x_2} \vee x_5)\overline{x_3} \vee x_4) \\
&\quad \cdot (\overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \cdot (x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) \cdot (x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \\
&\quad \cdot ((\overline{x_2} \vee x_5)\overline{x_1} \vee x_3) = \\
&= (\overline{x_1} \vee x_3) \cdot (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \cdot (\overline{x_1} \vee \overline{x_4} \vee x_5) \cdot (\varphi \cdot x_3 \vee \overline{x_4}) \cdot (\varphi \cdot \overline{x_3} \vee x_4) \cdot (\overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \cdot (x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) \cdot (x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \cdot (\varphi \cdot \overline{x_1} \vee x_3) \quad S_q = 39
\end{aligned}$$

Решим задачу декомпозиции применительно к полученной форме. Для этого введем вспомогательную функцию.

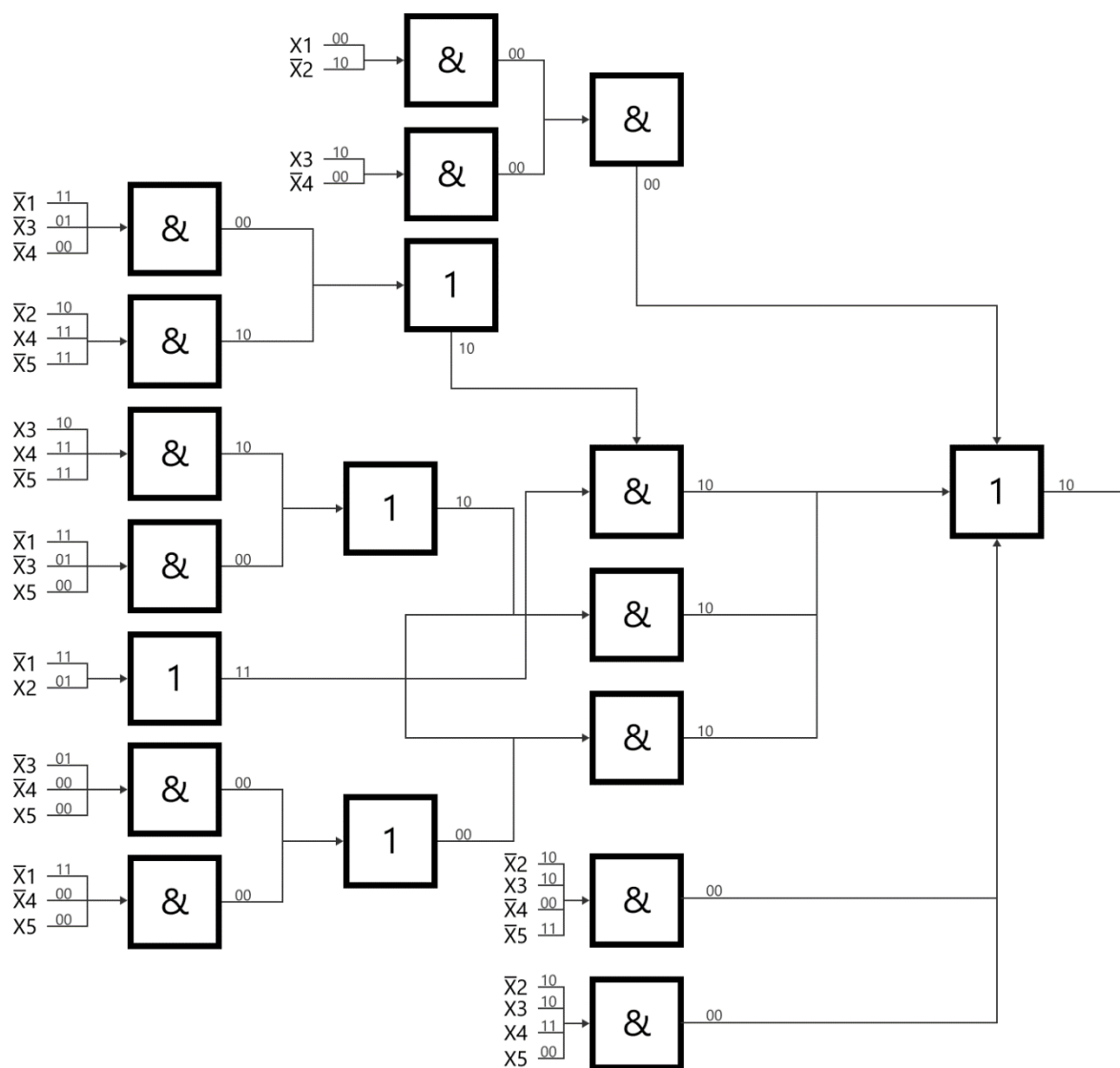
$$\varphi = \varphi(x_2, x_3) = \overline{x_2} \vee x_5$$

Инверсия этой функции имеет вид

$$\overline{\varphi} = x_2 \overline{x_5}$$

Синтез схем

Синтез комбинационных схем в булевом базисе

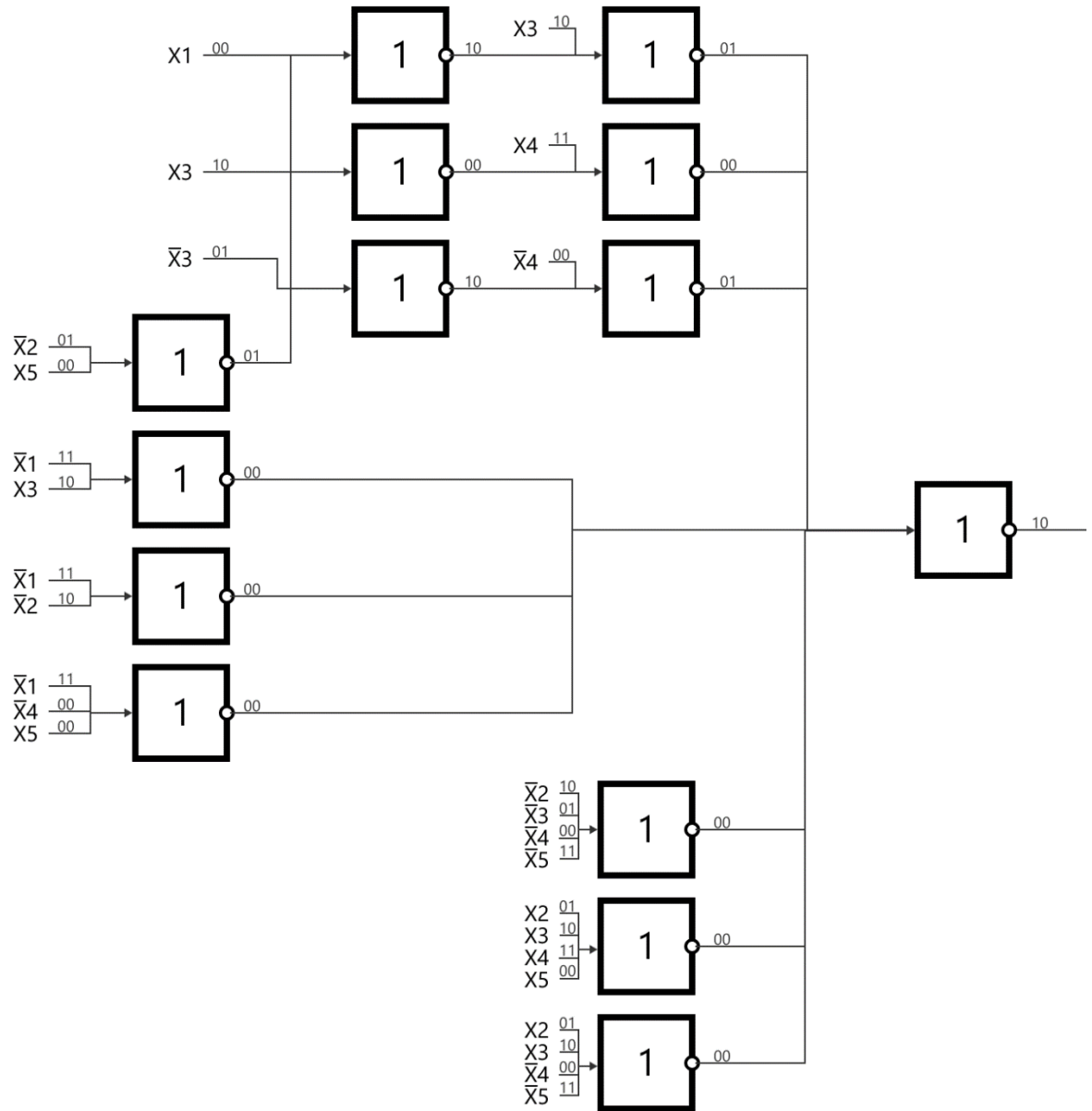


$$S_q = 37$$

$$T = 4\tau$$

Синтез комбинационных схем в универсальном базисе ИЛИ-НЕ

$$f = (\overline{x_1} \downarrow x_3) \downarrow (\overline{x_1} \downarrow \overline{x_2}) \downarrow (\overline{x_1} \downarrow \overline{x_4} \downarrow x_5) \downarrow ((\overline{\varphi} \downarrow \overline{x_3}) \downarrow \overline{x_4}) \downarrow ((\overline{\varphi} \downarrow x_3) \downarrow x_4) \downarrow (\overline{x_2} \downarrow \overline{x_3} \downarrow \overline{x_4} \downarrow \overline{x_5}) \downarrow (x_2 \downarrow x_3 \downarrow x_4 \downarrow x_5) \downarrow (x_2 \downarrow x_3 \downarrow \overline{x_4} \downarrow \overline{x_5}) \downarrow ((\overline{\varphi} \downarrow x_1) \downarrow x_3)$$

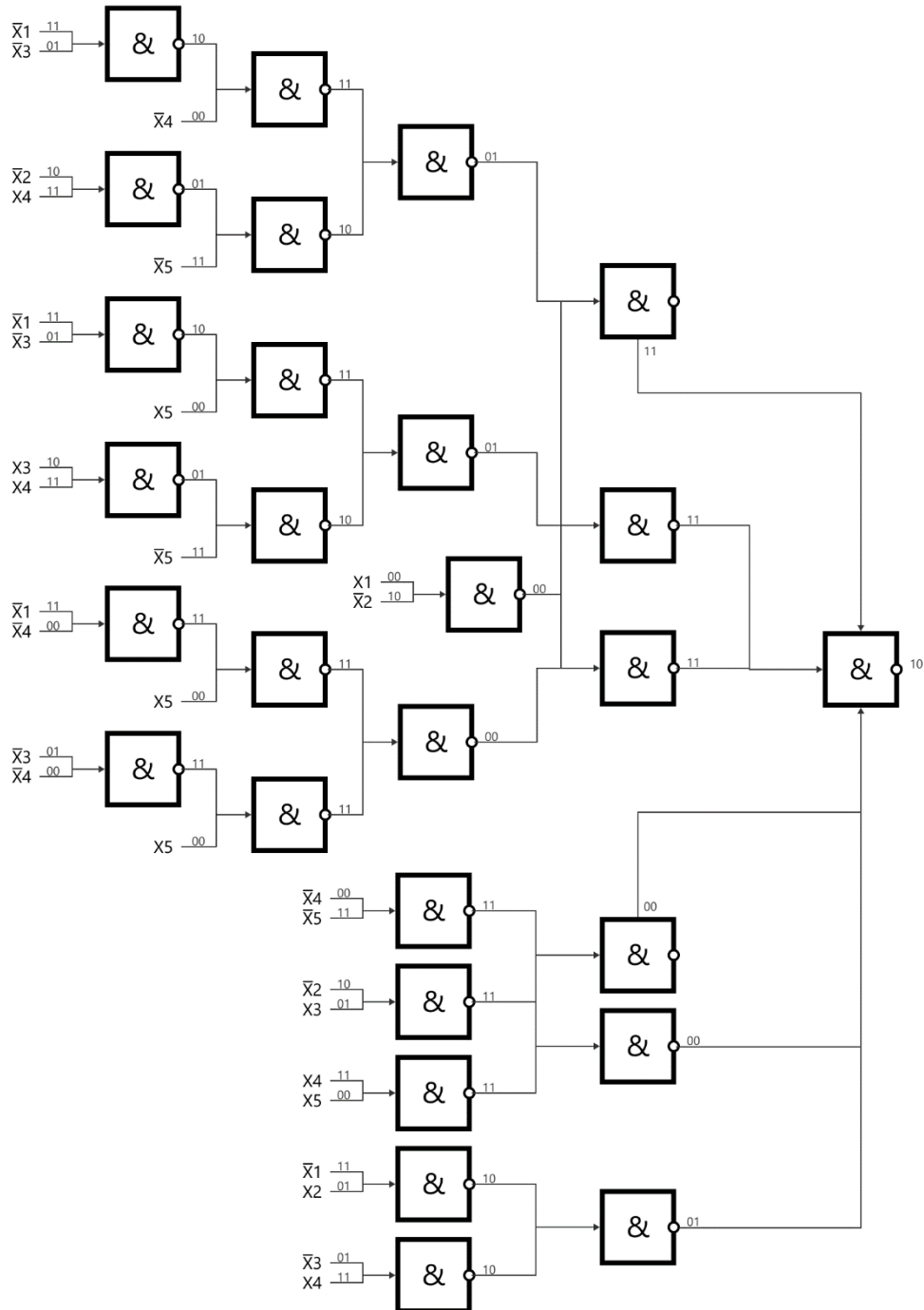


$$S_q = 40$$

$$T = 4\tau$$

Синтез комбинационных схем в универсальном базисе И-НЕ, 2 входа

$$f = \left((x_1 | \bar{x}_2) \left| \left((\bar{x}_1 | \bar{x}_3 | \bar{x}_4) | (\bar{x}_2 | x_4 | \bar{x}_5) \right) \right| \left((x_1 | \bar{x}_2) \left| \left((x_3 | x_4 | \bar{x}_5) | (\bar{x}_1 | \bar{x}_3 | x_5) \right) \right| \right| \right. \\ \left. \left| \left((x_1 | \bar{x}_2) \left| \left((\bar{x}_3 | \bar{x}_4 | x_5) | (\bar{x}_1 | \bar{x}_4 | x_5) \right) \right) \right| (\bar{x}_2 | x_3 | \bar{x}_4 | \bar{x}_5) | (\bar{x}_2 | x_3 | x_4 | x_5) | (x_1 | \bar{x}_2 | x_3 | \bar{x}_4) \right. \right.$$



$$S_q = 56$$

$$T = 5\tau$$

Анализ схем

Анализ произведен на наборах:

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 0]) = 1$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0]) = 0$$