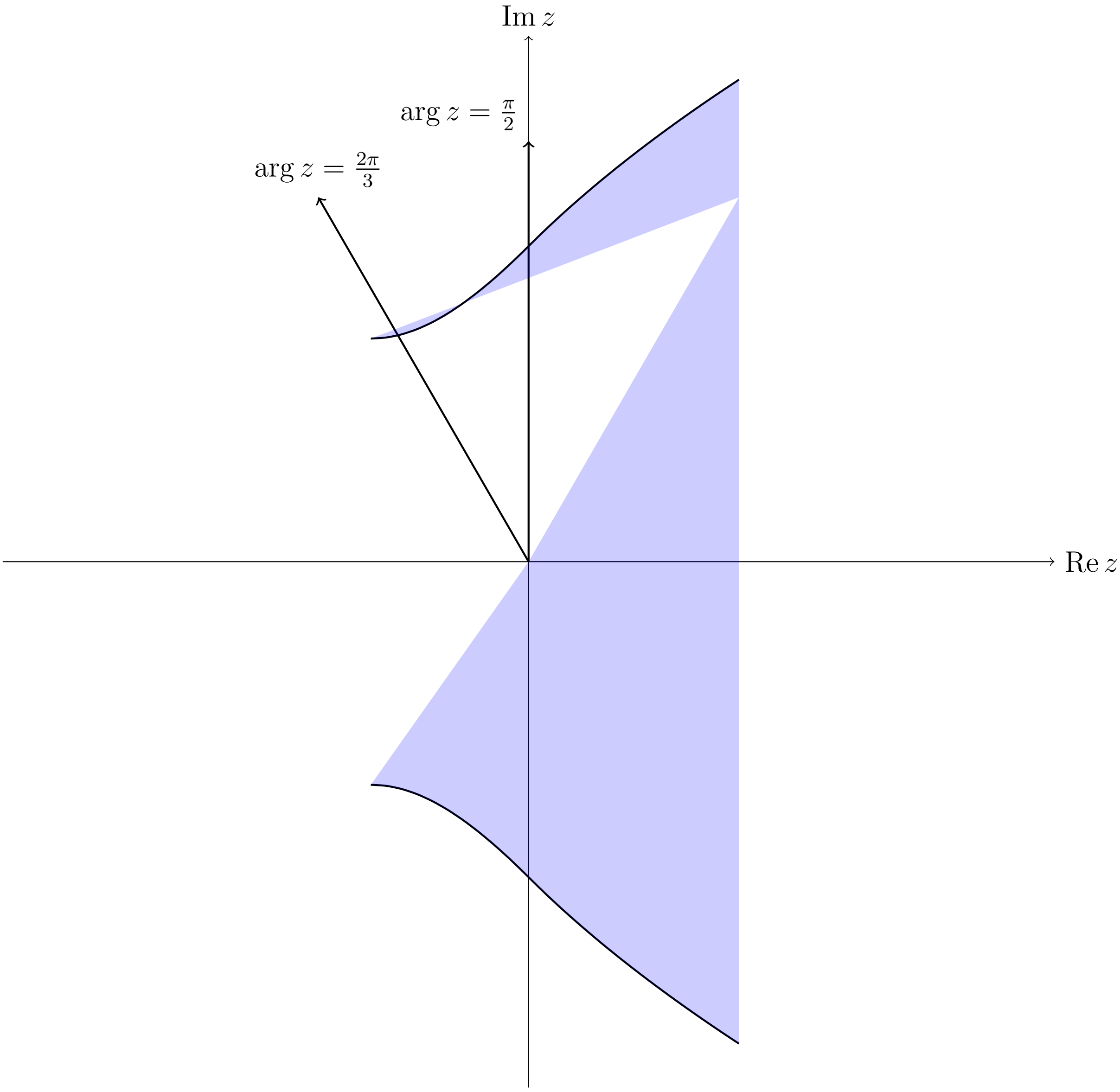
ТФКП. Типовой расчет. Васильев Никита Алексеевич. 21.1

Вариант 7

Задание 1



Задание 2

Рассмотрим выражение:

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}.$$

1. Показательная форма

Представим число $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ в показательной форме. Сначала заметим, что:

$$1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}.$$

Тогда:

$$\frac{1-i}{\sqrt{2}} = e^{-i\pi/4}.$$

2. Подставим в исходное выражение

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i} = \left(e^{-i\pi/4}\right)^{1+i}.$$

3. По свойству степеней комплексных чисел

$$\left(e^{-i\pi/4}\right)^{1+i} = e^{(1+i)(-i\pi/4)}.$$

$$(1+i)(-i\pi/4) = -i\pi/4 - \pi/4 = -\pi/4(1+i).$$

4. Подставим обратно

$$e^{(1+i)(-i\pi/4)} = e^{-\pi/4} \cdot e^{-i\pi/4}.$$

Ответ:

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i} = e^{-\pi/4} \cdot e^{-i\pi/4}.$$

Задание 3

Дана мнимая часть аналитической функции:

$$v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Необходимо найти аналитическую функцию $f(z)$, где $z = x + iy$.

Пусть $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, где $u(x,y)$ — действительная часть, а $v(x,y)$ — мнимая часть. Аналитическая функция удовлетворяет условиям Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

1. Вычисление производных мнимой части

$$v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Вычислим частные производные:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

2. Использование условий Коши-Римана

Согласно уравнениям Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

3. Интегрирование для нахождения $u(x, y)$

Интегрируем $\frac{\partial u}{\partial x}$ по x:

$$u(x, y) = \int -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dx = \frac{x}{x^2 + y^2} + C_1(y),$$

где $C_1(y)$ — произвольная функция от y.

Интегрируем $\frac{\partial u}{\partial y}$ по y:

$$u(x, y) = \int -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\, dy = \frac{x}{x^2 + y^2} + C_2(x),$$

где $C_2(x)$ — произвольная функция от x.

Обе интеграции согласуются, следовательно:

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

4. Аналитическая функция $f(z)$

Теперь аналитическая функция:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Представим её через комплексные переменные $z = x + iy$ и $\overline{z} = x - iy$ (комплексно сопряжённое):

$$f(z) = \frac{\overline{z}}{|z|^2}, \quad \text{где } |z|^2 = x^2 + y^2.$$

Ответ

Аналитическая функция:

$$f(z) = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Задание 4

Решение

Дан интеграл:

$$\int_C (z - 1)\, dz,$$

где C — ломаная $ABCD$ с вершинами:

$$A(-2; 0),\ B(-1; 1),\ C(1; 1),\ D(2; 0).$$

1. Разбиение на участки

Ломаная C состоит из четырёх участков: AB, BC, CD.

2. Разбиение на участки

Параметризация отрезка AB:

$$z(t) = -2 + t(-1 - (-2) + i(1 - 0)) = -2 + t(1 + i), \quad t \in [0, 1].$$

Тогда:

$$z(t) = -2 + t(1 + i), \quad dz = (1 + i)\, dt.$$

Подставляем в интеграл:

$$\int_{AB} (z - 1)\, dz = \int_0^1 ((-2 + t(1 + i)) - 1)\, (1 + i)\, dt.$$

Упростим:

$$z - 1 = -3 + t(1 + i),$$

поэтому:

$$\int_{AB} (z - 1)\, dz = \int_0^1 (-3 + t(1 + i))(1 + i)\, dt.$$

Раскрываем скобки:

$$(-3 + t(1 + i))(1 + i) = -3(1 + i) + t(1 + i)^2.$$

Заметим, что $(1 + i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$, поэтому:

$$= -3(1 + i) + t(2i) = -3 - 3i + 2ti.$$

Интеграл:

$$\int_{AB} (z - 1)\, dz = \int_0^1 (-3 - 3i + 2ti)\, dt = \int_0^1 -3\, dt + \int_0^1 -3i\, dt + \int_0^1 2ti\, dt.$$

Вычислим по частям:

$$\int_0^1 -3\, dt = -3t\Big|_0^1 = -3,$$

$$\int_0^1 -3i\, dt = -3it\Big|_0^1 = -3i,$$

$$\int_0^1 2ti\, dt = 2i \int_0^1 t\, dt = 2i \cdot \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = i.$$

Итак:

$$\int_{AB} (z - 1)\, dz = -3 - 3i + i = -3 - 2i.$$

Параметризация отрезка BC:

$$z(t) = -1 + t(1 - (-1) + i(1 - 1)) = -1 + t(2), \quad t \in [0, 1].$$

Тогда:

$$z(t) = -1 + 2t, \quad dz = 2\, dt.$$

Интеграл:

$$\int_{BC} (z-1)\,dz = \int_0^1 ((-1+2t)-1)\cdot 2\,dt = \int_0^1 (-2+2t)\cdot 2\,dt.$$

Упростим:

$$\int_{BC} (z-1)\,dz = \int_0^1 (-4+4t)\,dt = \int_0^1 -4\,dt + \int_0^1 4t\,dt.$$

Вычисляем:

$$\int_0^1 -4\,dt = -4t\Big|_0^1 = -4,$$

$$\int_0^1 4t\,dt = 4\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = 2.$$

Итак:

$$\int_{BC} (z-1)\,dz = -4+2 = -2.$$

Параметризация отрезка CD:

$$z(t) = 1 + t(2-1+i(0-1)) = 1 + t(1-i), \quad t\in[0,1].$$

Тогда:

$$z(t) = 1+t(1-i), \quad dz = (1-i)\,dt.$$

Интеграл:

$$\int_{CD} (z-1)\,dz = \int_0^1 ((1+t(1-i))-1)\,(1-i)\,dt.$$

Упростим:

$$z-1 = t(1-i),$$

поэтому:

$$\int_{CD} (z-1)\,dz = \int_0^1 t(1-i)^2\,dt.$$

Так как $(1-i)^2 = 1-2i-1 = -2i$, то:

$$\int_{CD} (z-1)\,dz = \int_0^1 t(-2i)\,dt = -2i\int_0^1 t\,dt.$$

Вычисляем:

$$\int_0^1 t\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Итак:

$$\int_{CD} (z-1)\,dz = -2i\cdot\frac{1}{2} = -i.$$

3. Суммируем результаты

Суммарный интеграл:

$$\int_C (z-1)\,dz = \int_{AB} (z-1)\,dz + \int_{BC} (z-1)\,dz + \int_{CD} (z-1)\,dz.$$

Подставляем:

$$\int_C (z-1)\,dz = (-3-2i) + (-2) + (-i) = -5-3i.$$

Ответ:

$$\int_C (z-1)\,dz = -5-3i.$$

Задание 5

Дана функция:

$$f(z) = \sinh z = \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right),$$

и точка $z_0 = 1$. Необходимо разложить функцию $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности z_0 и указать область сходимости ряда.

1. Формула ряда Тейлора

Ряд Тейлора для аналитической функции $f(z)$ имеет вид:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n,$$

где $f^{(n)}(z_0)$ — n-я производная функции, вычисленная в точке z_0.

2. Производные функции

Функция $f(z) = \sinh z$ имеет следующие производные:

$$f'(z) = \cosh z, \quad f''(z) = \sinh z, \quad f^{(3)}(z) = \cosh z, \quad f^{(4)}(z) = \sinh z, \ldots$$

Таким образом, производные чередуются между $\sinh z$ и $\cosh z$.

3. Значения в точке $z_0 = 1$

В точке $z_0 = 1$ значения производных:

$$f(1) = \sinh(1), \quad f'(1) = \cosh(1), \quad f''(1) = \sinh(1), \quad f^{(3)}(1) = \cosh(1), \ldots$$

Чётные производные равны $\sinh(1)$, а нечётные — $\cosh(1)$.

4. Разложение в ряд Тейлора

Подставим значения производных в формулу:

$$f(z) = \sinh(1) + \cosh(1)(z-1) + \frac{\sinh(1)}{2!}(z-1)^2 + \frac{\cosh(1)}{3!}(z-1)^3 + \cdots$$

Обобщённо:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^n,$$

где

$$f^{(n)}(1) = \begin{cases} \sinh(1), & n \text{ чётное}, \\ \cosh(1), & n \text{ нечётное}. \end{cases}$$

5. Область сходимости

Так как функция $f(z) = \sinh z$ аналитична на всей комплексной плоскости, то ряд Тейлора сходится к функции $f(z)$ на всей комплексной плоскости.

Ответ

Ряд Тейлора функции $f(z)$ в окрестности точки $z_0 = 1$:

$$f(z) = \sinh(1) + \cosh(1)(z-1) + \frac{\sinh(1)}{2!}(z-1)^2 + \frac{\cosh(1)}{3!}(z-1)^3 + \cdots$$

Область сходимости: вся комплексная плоскость $\mathbb{C}$.

Задание 6

Дана функция:

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}, \quad 2 < |z| < \infty.$$

1. Факторизация знаменателя

Знаменатель $z^2 - 3z + 2$ можно разложить на множители:

$$z^2 - 3z + 2 = (z-1)(z-2).$$

Таким образом, функция $f(z)$ принимает вид:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}.$$

2. Разложение на простые дроби

Разложим $f(z)$ на простые дроби:

$$f(z) = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2}.$$

Чтобы найти A и B, решаем уравнение:

$$1 = A(z-2) + B(z-1).$$

Подставляя $z = 2$, находим:

$$1 = A(2-2) + B(2-1) \implies B = 1.$$

Подставляя $z = 1$, находим:

$$1 = A(1-2) + B(1-1) \implies A = -1.$$

Следовательно:

$$f(z) = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2}.$$

3. Разложение для области $2 < |z| < \infty$

Для области $|z| > 2$, выражения удобно переписать в форме:

$$\frac{-1}{z-1} = -\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}, \quad \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)}.$$

Используем формулу разложения:

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n, \quad |w| < 1.$$

Тогда:

$$\frac{-1}{z-1} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}.$$

Аналогично:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}.$$

4. Итоговое разложение

Суммируем полученные ряды:

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}.$$

Сгруппируем члены:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n - 1}{z^{n+1}}.$$

Ответ

Ряд Лорана функции $f(z)$ в области $2 < |z| < \infty$ имеет вид:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n - 1}{z^{n+1}}.$$

Задание 7

Дан интеграл:

$$\int_L \frac{z^3}{z^4 - 1}\,dz, \quad L = \{z : |z| = \frac{3}{2}\}.$$

1. Особенности функции

Функция имеет вид:

$$f(z) = \frac{z^3}{z^4 - 1}.$$

Знаменатель $z^4 - 1$ раскладывается на множители:

$$z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1) = (z-1)(z+1)(z-i)(z+i).$$

Таким образом, функция $f(z)$ имеет простые полюса в точках:

$$z = 1,\ z = -1,\ z = i,\ z = -i.$$

Контур L описывает окружность $|z| = \frac{3}{2}$, которая содержит все эти четыре полюса.

2. Формула вычетов

Согласно теореме о вычетах:

$$\int_L f(z)\,dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res}(f, z_k),$$

где сумма берётся по всем полюсам z_k, находящимся внутри контура L.

3. Вычисление вычетов

Полюс $z = 1$:

$$\operatorname{Res}(f, 1) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z^3}{(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)} = \frac{1^3}{(1+1)(1-i)(1+i)}.$$

Упростим:

$$\operatorname{Res}(f, 1) = \frac{1}{2\cdot(1^2+1^2)} = \frac{1}{4}.$$

Полюс $z = -1$:

$$\operatorname{Res}(f, -1) = \lim_{z\to -1}(z+1)\frac{z^3}{(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)} = \frac{(-1)^3}{((-1)-1)((-1)-i)((-1)+i)}.$$

Упростим:

$$\operatorname{Res}(f, -1) = \frac{-1}{(-2)(-1-i)(-1+i)} = \frac{-1}{-2\cdot 2} = -\frac{1}{4}.$$

Полюс $z = i$:

$$\operatorname{Res}(f, i) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{z^3}{(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)} = \frac{i^3}{(i-1)(i+1)(i-i)(i+i)}.$$

Упростим:

$$\operatorname{Res}(f, i) = \frac{-i}{(i^2-1^2)(2i)} = \frac{-i}{-2i} = -\frac{i}{4}.$$

Полюс $z = -i$:

$$\operatorname{Res}(f, -i) = \lim_{z\to -i}(z+i)\frac{z^3}{(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)} = \frac{(-i)^3}{((-i)-1)((-i)+1)((-i)-i)((-i)+i)}.$$

Упростим:

$$\operatorname{Res}(f, -i) = \frac{-i}{(-i^2-1^2)(-2i)} = \frac{-i}{-2i} = \frac{i}{4}.$$

4. Сумма вычетов

Суммируем все вычеты:

$$\sum \operatorname{Res}(f, z_k) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{i}{4} + \frac{i}{4} = 0.$$

Ответ

По теореме о вычетах:

$$\int_L \frac{z^3}{z^4-1}\,dz = 2\pi i \cdot 0 = 0.$$

Задание 8

Дан интеграл:

$$I = \int_0^\infty \frac{x\sin(ax)}{x^2+11}\,dx, \quad a < 0.$$

1. Представление синуса через экспоненту

Представим $\sin(ax)$ через комплексную экспоненту:

$$\sin(ax) = \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{2i}.$$

Подставим это в интеграл:

$$I = \int_0^\infty \frac{x}{x^2+11} \cdot \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{2i}\,dx.$$

Разделим на два интеграла:

$$I = \frac{1}{2i}\int_0^\infty \frac{xe^{iax}}{x^2+11}\,dx - \frac{1}{2i}\int_0^\infty \frac{xe^{-iax}}{x^2+11}\,dx.$$

2. Расширение функции в комплексной плоскости

Рассмотрим функцию:

$$f(z) = \frac{ze^{iaz}}{z^2+11}.$$

Она имеет полюсы в точках:

$$z = \pm i\sqrt{11}.$$

Контур L замыкается в верхней полуплоскости, чтобы обеспечить сходимость экспоненты e^{iaz} при $a < 0$.

3. Вычет в точке $z = i\sqrt{11}$

Функция $f(z)$ имеет простой полюс в $z = i\sqrt{11}$. Вычет вычисляется по формуле:

$$\mathrm{Res}(f, i\sqrt{11}) = \lim_{z\to i\sqrt{11}} (z - i\sqrt{11})\frac{ze^{iaz}}{z^2+11}.$$

Так как $z^2 + 11 = (z - i\sqrt{11})(z + i\sqrt{11})$, то:

$$\mathrm{Res}(f, i\sqrt{11}) = \frac{i\sqrt{11}e^{ia(i\sqrt{11})}}{2i\sqrt{11}}.$$

Упростим:

$$\mathrm{Res}(f, i\sqrt{11}) = \frac{e^{-a\sqrt{11}}}{2}.$$

4. Теорема о вычетах

Согласно теореме о вычетах:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{ze^{iaz}}{z^2+11}\,dz = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}(f, i\sqrt{11}).$$

Подставляем вычет:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{ze^{iaz}}{z^2+11}\,dz = 2\pi i \cdot \frac{e^{-a\sqrt{11}}}{2} = \pi i e^{-a\sqrt{11}}.$$

5. Реальная часть интеграла

Учитывая, что нас интересует вещественная часть интеграла (так как в исходной задаче присутствует $\sin(ax)$), получаем:

$$I = \mathrm{Im}\left(\pi i e^{-a\sqrt{11}}\right).$$

Поскольку $\mathrm{Im}(ie^{-a\sqrt{11}}) = e^{-a\sqrt{11}}$, то:

$$I = \pi e^{-a\sqrt{11}}.$$

Ответ

$$\int_0^\infty \frac{x\sin(ax)}{x^2+11}\,dx = \pi e^{-a\sqrt{11}}, \quad a < 0.$$