Kiểm định giả thuyết thống kê

Hoàng Văn Hà
University of Science, VNU - HCM
hvha@hcmus.edu.vn

1 Bài toán kiểm định giả thuyết thống kê

2 Kiểm định giả thuyết - Trường hợp một mẫu
- Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng
- Kiểm định giả thuyết cho tỷ lệ

3 Kiểm định giả thuyết - TH hai mẫu độc lập
- So sánh hai kỳ vọng
- So sánh hai tỷ lệ

4 So sánh hai mẫu không độc lập

- Định nghĩa
- Giả thuyết không và đối thuyết
- Cách đặt giả thuyết
- Miền bác bỏ - Tiêu chuẩn kiểm định
- Sai lầm loại I và loại II
- *p* - giá trị

Định nghĩa 1

Giả thuyết thống kê là những phát biểu về các tham số, quy luật phân phối, hoặc tính độc lập của các đại lượng ngẫu nhiên. Việc tìm ra kết luận để bác bỏ hay chấp nhận một giả thuyết gọi là kiểm định giả thuyết thống kê.

Định nghĩa 1

Giả thuyết thống kê là những phát biểu về các tham số, quy luật phân phối, hoặc tính độc lập của các đại lượng ngẫu nhiên. Việc tìm ra kết luận để bác bỏ hay chấp nhận một giả thuyết gọi là kiểm định giả thuyết thống kê.

Ví dụ 1

Giám đốc một nhà máy sản xuất bo mạch chủ máy vi tính tuyên bố rằng tuổi thọ trung bình của một bo mạch chủ do nhà máy sản xuất ra là 5 *năm, đây là một giả thuyết về kỳ vọng của biến ngẫu nhiên* $X =$ *tuổi thọ của một bo mạch chủ. Để đưa ra kết luận là chấp nhận hay bác bỏ giả thuyết trên, ta cần dựa vào mẫu điều tra và quy tắc kiểm định thống kê.*

Định nghĩa 2

Trong bài toán kiểm định giả thuyết, giả thuyết cần được kiểm định gọi là Giả thuyết không (null hypothesis), ký hiệu là H_0. Mệnh đề đối lập với H_0 gọi là đối thuyết (alternative hypothesis), ký hiệu là H_1.

Tổng quát, một bài toán kiểm định giả thuyết cho tham số θ sẽ có một trong 3 dạng dưới đây (θ_0 là giá trị kiểm định đã biết):

Hai phía:

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \neq \theta_0 \end{cases} .$$

Một phía bên trái:

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \ \ (\text{hoặc } \theta \geq \theta_0) \\ H_1 : \theta < \theta_0 \end{cases} .$$

Một phía bên phải:

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \ \ (\text{hoặc } \theta \leq \theta_0) \\ H_1 : \theta > \theta_0 \end{cases} .$$

1. Giả thuyết được đặt ra với ý đồ bác bỏ nó, nghĩa là giả thuyết đặt ra ngược lại với điều ta muốn chứng minh, muốn thuyết phục.

1. Giả thuyết được đặt ra với ý đồ bác bỏ nó, nghĩa là giả thuyết đặt ra ngược lại với điều ta muốn chứng minh, muốn thuyết phục.
2. Giả thuyết H_0 đặt ra thường mang ý nghĩa: *"không khác nhau"* hoặc *"khác nhau không có ý nghĩa"* hoặc *"bằng nhau"*.

1. Giả thuyết được đặt ra với ý đồ bác bỏ nó, nghĩa là giả thuyết đặt ra ngược lại với điều ta muốn chứng minh, muốn thuyết phục.
2. Giả thuyết H_0 đặt ra thường mang ý nghĩa: *"không khác nhau"* hoặc *"khác nhau không có ý nghĩa"* hoặc *"bằng nhau"*.
3. Khi đặt giả thuyết, ta thường so sánh cái chưa biết với cái đã biết. *"Cái chưa biết"* là điều mà ta cần kiểm định, kiểm tra, làm rõ. *"Cái đã biết"* là những thông tin trong quá khứ, các định mức kinh tế, kỹ thuật.

1. Giả thuyết được đặt ra với ý đồ bác bỏ nó, nghĩa là giả thuyết đặt ra ngược lại với điều ta muốn chứng minh, muốn thuyết phục.
2. Giả thuyết H_0 đặt ra thường mang ý nghĩa: *"không khác nhau"* hoặc *"khác nhau không có ý nghĩa"* hoặc *"bằng nhau"*.
3. Khi đặt giả thuyết, ta thường so sánh cái chưa biết với cái đã biết. *"Cái chưa biết"* là điều mà ta cần kiểm định, kiểm tra, làm rõ. *"Cái đã biết"* là những thông tin trong quá khứ, các định mức kinh tế, kỹ thuật.
4. Giả thuyết được đặt ra sao cho khi chấp nhận hay bác bỏ nó sẽ có tác dụng trả lời bài toán thực tế đặt ra.

1. Giả thuyết được đặt ra với ý đồ bác bỏ nó, nghĩa là giả thuyết đặt ra ngược lại với điều ta muốn chứng minh, muốn thuyết phục.
2. Giả thuyết H_0 đặt ra thường mang ý nghĩa: *"không khác nhau"* hoặc *"khác nhau không có ý nghĩa"* hoặc *"bằng nhau"*.
3. Khi đặt giả thuyết, ta thường so sánh cái chưa biết với cái đã biết. *"Cái chưa biết"* là điều mà ta cần kiểm định, kiểm tra, làm rõ. *"Cái đã biết"* là những thông tin trong quá khứ, các định mức kinh tế, kỹ thuật.
4. Giả thuyết được đặt ra sao cho khi chấp nhận hay bác bỏ nó sẽ có tác dụng trả lời bài toán thực tế đặt ra.
5. Giả thuyết được đặt ra sao cho nếu nó đúng thì ta sẽ xác định được quy luật phân phối xác suất của đại lượng ngẫu nhiên được chọn làm thống kê kiểm định (test statistics).

Định nghĩa 3

Xét bài toán kiểm định giả thuyết có giả thuyết H_0 và đối thuyết H_1. Giả sử rằng H_0 đúng, từ mẫu ngẫu nhiên $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ chọn hàm $T = T(X_1, \ldots, X_n; \theta_0)$ sao cho với số $\alpha > 0$ bé tùy ý ta có thể tìm được tập hợp W_α thỏa điều kiện

$$\mathbb{P}(T \in W_\alpha) = \alpha \tag{1}$$

Tập hợp W_α gọi là Miền bác bỏ (Rejection Region - RR) của giả thuyết H_0 và phần bù W_α^c gọi là Miền chấp nhận (Acceptance Region - AR) giả thuyết H_0. Đại lượng ngẫu nhiên $T = T(X_1, \ldots, X_n; \theta_0)$ gọi là thống kê kiểm định (Test statistic) giả thuyết H_0. Giá trị α gọi là mức ý nghĩa (Significant level) của bài toán kiểm định.

Trong một số tài liệu, thống kê kiểm định còn được gọi là tiêu chuẩn kiểm định.

Thực hiện quan trắc dựa trên mẫu ngẫu nhiên $(X_1, \ldots, X_n)$ ta thu được mẫu thực nghiệm $(x_1, \ldots, x_n)$. Từ mẫu thực nghiệm này, ta tính được giá trị của T là $t = T(x_1, \ldots, x_n; \theta_0)$.

- Nếu $t \in W_\alpha$ thì ta bác bỏ giả thuyết H_0.
- Nếu $t \in W_\alpha^c$ thì ta kết luận chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0.

Trong bài toán kiểm định giả thuyết thống kê, ta có thể mắc phải các sai lầm sau

a. Sai lầm loại I: là sai lầm mắc phải khi ta bác bỏ H_0 trong khi thực tế giả thuyết H_0 đúng. Sai lầm loại I ký hiệu là α, chính là mức ý nghĩa của kiểm định.

$$\alpha = \mathbb{P}\left(T \in W_\alpha | H_0\right). \tag{2}$$

Trong bài toán kiểm định giả thuyết thống kê, ta có thể mắc phải các sai lầm sau

a. Sai lầm loại I: là sai lầm mắc phải khi ta bác bỏ H_0 trong khi thực tế giả thuyết H_0 đúng. Sai lầm loại I ký hiệu là α, chính là mức ý nghĩa của kiểm định.

$$\alpha = \mathbb{P}\left(T \in W_\alpha | H_0\right). \tag{2}$$

b. Sai lầm loại II: là sai lầm mắc phải khi ta chấp nhận giả thuyết H_0 trong khi thực tế H_0 sai. Sai lầm loại II ký hiệu là β.

$$\beta = \mathbb{P}\left(T \in W_\alpha^c | H_1\right). \tag{3}$$

Quyết định \ Thực tế	H_0 đúng	H_0 sai
Không bác bỏ H_0	Không có sai lầm $(1-\alpha)$	Sai lầm loại II β
Bác bỏ H_0	Sai lầm loại I α	Không có sai lầm $(1-\beta)$

- Kiểm định giả thuyết cho kỳ vọng
  - Trường hợp biết phương sai,
  - Trường hợp không biết phương sai, mẫu nhỏ,
  - Trường hợp không biết phương sai, mẫu lớn,
- Kiểm định giả thuyết cho tỷ lệ

- **Các giả định:**
  - Mẫu ngẫu nhiên $X_1, \ldots, X_n$ được chọn từ tổng thể có phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ với kỳ vọng μ chưa biết.
  - Phương sai σ^2 đã biết.
  - Cho trước giá trị μ_0, cần so sánh kỳ vọng μ với μ_0.
- **Bài toán kiểm định có 3 trường hợp:**

$$(a) \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases} \qquad (c) \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

với mức ý nghĩa α cho trước.

Các bước kiểm định

1. Phát biểu giả thuyết H_0 và đối thuyết H_1.
2. Xác định mức ý nghĩa α.
3. Lấy mẫu ngẫu nhiên cỡ n: $X_1, \ldots, X_n$ và tính thống kê kiểm định

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}. \tag{4}$$

   Khi H_0 đúng, $Z_0 \sim \mathcal{N}(0,1)$.
4. Xác định miền bác bỏ W_α: bảng 1.

Giả thuyết	Miền bác bỏ
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$W_\alpha = \left\{ z_0 : \lvert z_0 \rvert > z_{\alpha/2} \right\}$
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$W_\alpha = \left\{ z_0 : z_0 < -z_\alpha \right\}$
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$W_\alpha = \left\{ z_0 : z_0 > z_\alpha \right\}$

Bảng 1: Miền bác bỏ với đối thuyết tương ứng

5. Kết luận: Bác bỏ H_0/ Chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0.

Định nghĩa 4

Tương ứng với một giá trị thống kê kiểm định được tính toán trên một mẫu các giá trị quan trắc xác định, p - giá trị là mức ý nghĩa nhỏ nhất dùng để bác bỏ giả thuyết H_0.

Định nghĩa 4

Tương ứng với một giá trị thống kê kiểm định được tính toán trên một mẫu các giá trị quan trắc xác định, p - giá trị là mức ý nghĩa nhỏ nhất dùng để bác bỏ giả thuyết H_0.

Quy tắc

Bác bỏ giả thuyết H_0 nếu p-giá trị $\leq \alpha$.

Ví dụ 2 (Kiểm định 2 phía)

Một dây chuyền sản xuất kem đánh răng được thiết kế để đóng hộp những ống kem có trọng lượng trung bình là 170g. Một mẫu gồm 30 ống kem được chọn ngẫu nhiên để kiểm tra định kỳ. Bộ phận điều khiển dây chuyền phải đảm bảo để trọng lượng trung bình mỗi ống kem là 170g, nếu nhiều hơn hoặc ít hơn, dây chuyền phải được điều chỉnh lại. Giả sử trung bình mẫu của 30 ống kem là 174g và độ lệch tiêu chuẩn của tổng thể $\sigma = 5.6g$.
Thực hiện kiểm định giả thuyết với mức ý nghĩa 3% để xác định xem dây chuyền sản xuất có vận hành tốt hay không?

Gọi X là trọng lượng của một ống kem đánh răng, giả sử $X \sim \mathcal{N}(\mu, 5.6^2)$. Các bước kiểm định như sau:

1. Phát biểu giả thuyết:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 170 \\ H_1 : \mu \neq 170 \end{cases}.$$

Gọi X là trọng lượng của một ống kem đánh răng, giả sử $X \sim \mathcal{N}(\mu, 5.6^2)$. Các bước kiểm định như sau:

1. Phát biểu giả thuyết:
$$\begin{cases} H_0 : \mu = 170 \\ H_1 : \mu \neq 170 \end{cases}.$$
2. Xác định mức ý nghĩa: $\alpha = 0.03$.

Gọi X là trọng lượng của một ống kem đánh răng, giả sử $X \sim \mathcal{N}(\mu, 5.6^2)$. Các bước kiểm định như sau:

1. Phát biểu giả thuyết:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 170 \\ H_1 : \mu \neq 170 \end{cases}.$$

2. Xác định mức ý nghĩa: $\alpha = 0.03$.
3. Tính giá trị thống kê kiểm định

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{174 - 170}{5.6/\sqrt{30}} = 3.91.$$

Gọi X là trọng lượng của một ống kem đánh răng, giả sử $X \sim \mathcal{N}(\mu, 5.6^2)$. Các bước kiểm định như sau:

1. Phát biểu giả thuyết:
$$\begin{cases} H_0 : \mu = 170 \\ H_1 : \mu \neq 170 \end{cases}.$$
2. Xác định mức ý nghĩa: $\alpha = 0.03$.
3. Tính giá trị thống kê kiểm định
$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{174 - 170}{5.6/\sqrt{30}} = 3.91.$$
4. Xác định miền bác bỏ: Bác bỏ H_0 khi $|z_0| > z_{\alpha/2}$.

$\alpha = 3\%$ nên $z_{\alpha/2} = z_{0.015} = 2.17$. Vậy bác bỏ H_0 nếu

$$z_0 < -2.17 \text{ hoặc } z_0 > 2.17.$$

$\alpha = 3\%$ nên $z_{\alpha/2} = z_{0.015} = 2.17$. Vậy bác bỏ H_0 nếu

$$z_0 < -2.17 \text{ hoặc } z_0 > 2.17.$$

5. Kết luận: do $z_0 = 3.912 > 2.17$ nên bác bỏ H_0. Ta kết luận với 97% độ tin cậy rằng trọng lượng trung bình mỗi ống kem không bằng 170.

$\alpha = 3\%$ nên $z_{\alpha/2} = z_{0.015} = 2.17$. Vậy bác bỏ H_0 nếu

$$z_0 < -2.17 \text{ hoặc } z_0 > 2.17.$$

5. Kết luận: do $z_0 = 3.912 > 2.17$ nên bác bỏ H_0. Ta kết luận với 97% độ tin cậy rằng trọng lượng trung bình mỗi ống kem không bằng 170.

$\alpha = 3\%$ nên $z_{\alpha/2} = z_{0.015} = 2.17$. Vậy bác bỏ H_0 nếu

$$z_0 < -2.17 \;\text{ hoặc }\; z_0 > 2.17.$$

5. Kết luận: do $z_0 = 3.912 > 2.17$ nên bác bỏ H_0. Ta kết luận với 97% độ tin cậy rằng trọng lượng trung bình mỗi ống kem không bằng 170.

- **Sử dụng p - giá trị:**

4a. Tính p-giá trị, bài toán kiểm định hai phía

$$p = 2[1 - \Phi(|z_0|)] = 2[1 - \Phi(3.91)] = 2[1 - 0.9999] = 0.0001$$

5a. Kết luận: với $\alpha = 0.03$, ta có $p = 0.0001 < 0.03$ nên bác bỏ H_0. Ta kết luận với 97% độ tin cậy rằng trọng lượng trung bình mỗi ống kem không bằng 170.

Ví dụ 3 (Kiểm định một phía)

Một bệnh viện tại trung tâm thành phố cung cấp dịch vụ cấp cứu tại nhà. Với khoảng 20 xe cấp cứu, mục tiêu của trung tâm là cung cấp dịch vụ cấp cứu trong khoảng thời gian trung bình là 12 phút sau khi nhận được điện thoại yêu cầu. Một mẫu ngẫu nhiên gồm thời gian đáp ứng khi có yêu cầu của 40 ca cấp cứu được chọn. Trung bình mẫu là 13.25 phút. Biết rằng độ lệch tiêu chuẩn của tổng thể là $\sigma = 3.2$ *phút. Với mức ý nghĩa* 5%, *hãy kiểm định xem thời gian phục vụ của xe cấp cứu có đúng như quảng cáo hay không?*

Ví dụ 3 (Kiểm định một phía)

Một bệnh viện tại trung tâm thành phố cung cấp dịch vụ cấp cứu tại nhà. Với khoảng 20 xe cấp cứu, mục tiêu của trung tâm là cung cấp dịch vụ cấp cứu trong khoảng thời gian trung bình là 12 phút sau khi nhận được điện thoại yêu cầu. Một mẫu ngẫu nhiên gồm thời gian đáp ứng khi có yêu cầu của 40 ca cấp cứu được chọn. Trung bình mẫu là 13.25 phút. Biết rằng độ lệch tiêu chuẩn của tổng thể là $\sigma = 3.2$ *phút. Với mức ý nghĩa 5%, hãy kiểm định xem thời gian phục vụ của xe cấp cứu có đúng như quảng cáo hay không?*

Các bước kiểm định:

1. Phát biểu giả thuyết
   $H_0 : \mu = 12$: thời gian đáp ứng của dịch vụ cấp cứu đạt yêu cầu, không cần phải thay đổi.

   $H_1 : \mu > 12$: thời gian đáp ứng của dịch vụ không đạt yêu cầu, cần thay đổi.

2. Xác định mức ý nghĩa: $\alpha = 0.05$.

2. Xác định mức ý nghĩa: $\alpha = 0.05$.
3. Tính giá trị thống kê kiểm định

$$z_0 = \frac{\bar{x} - 12}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{13.25 - 12}{3.2/\sqrt{40}} = 2.47.$$

2. Xác định mức ý nghĩa: $\alpha = 0.05$.
3. Tính giá trị thống kê kiểm định

$$z_0 = \frac{\bar{x} - 12}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{13.25 - 12}{3.2/\sqrt{40}} = 2.47.$$

4. Xác định miền bác bỏ: bác bỏ H_0 nếu $z_0 > z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$.

2. Xác định mức ý nghĩa: $\alpha = 0.05$.
3. Tính giá trị thống kê kiểm định

$$z_0 = \frac{\bar{x} - 12}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{13.25 - 12}{3.2/\sqrt{40}} = 2.47.$$

4. Xác định miền bác bỏ: bác bỏ H_0 nếu $z_0 > z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$.
5. Kết luận: $z_0 = 2.47 > 1.645$ nên bác bỏ H_0. Ta kết luận rằng với 95% độ tin cậy, bệnh viện không đáp ứng được mục tiêu thời gian phục vụ khách hàng từ 12 phút trở xuống.

- **Sử dụng *p* - giá trị:**

4a. Tính p-giá trị, bài toán kiểm định một phía - bên phải

$$p = 1 - \Phi(z_0) = 1 - \Phi(2.47) = 1 - 0.9932 = 0.0068.$$

5a. Kết luận: với $\alpha = 0.05$, ta có $p = 0.0068 < 0.05$ nên bác bỏ H_0. Ta kết luận với 95% độ tin cậy rằng bệnh viện không đáp ứng được mục tiêu thời gian phục vụ khách hàng từ 12 phút trở xuống.

- **Các giả định:**
  - Mẫu ngẫu nhiên $X_1, \ldots, X_n$ được chọn từ tổng thể có phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ với kỳ vọng μ và phương sai σ^2 không biết.
  - Sử dụng ước lượng không chệch S thay cho σ.
  - Cỡ mẫu nhỏ: $n \leq 30$.
- **Bài toán kiểm định có 3 trường hợp:**

$$(a) \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases} \qquad (c) \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

với mức ý nghĩa α cho trước.

Các bước kiểm định

1. Phát biểu giả thuyết không và đối thuyết.
2. Xác định mức ý nghĩa α.
3. Lấy mẫu ngẫu nhiên cỡ n: $X_1, \ldots, X_n$ và tính thống kê kiểm định

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}. \tag{5}$$

   Khi H_0 đúng, T_0 có phân phối Student với $n-1$ bậc tự do.
4. Xác định miền bác bỏ W_α: bảng 2.

Giả thuyết	**Miền bác bỏ**
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$W_\alpha = \left\{ t_0 : \lvert t_0 \rvert > t^{n-1}_{\alpha/2} \right\}$
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$W_\alpha = \left\{ t_0 : t_0 < -t^{n-1}_{\alpha} \right\}$
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$W_\alpha = \left\{ t_0 : t_0 > t^{n-1}_{\alpha} \right\}$

Bảng 2: Miền bác bỏ với đối thuyết tương ứng (trường hợp mẫu nhỏ)

5. Kết luận: Bác bỏ H_0/ Chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0.

- **Các giả định:**
  - Mẫu ngẫu nhiên $X_1, \ldots, X_n$ được chọn từ tổng thể có kỳ vọng μ và phương sai σ^2 không biết.
  - Sử dụng ước lượng không chệch S^2 thay cho σ^2.
  - Cỡ mẫu lớn: $n > 30$.
- Khi cỡ mẫu lớn biến ngẫu nhiên

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \tag{6}$$

sẽ hội tụ theo phân phối về $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Khi đó miền bác bỏ W_α hoặc p-giá trị sẽ được tính tương tự như trường hợp biết phương sai, chỉ thay thế $\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ bằng Z_0 ở phương trình (6).

Ví dụ 4

Một công ty sản xuất pin tuyên bố rằng tuổi thọ trung bình của một loại pin do công ty sản xuất ra tối thiểu bằng 240 giờ. Khảo sát một mẫu gồm 18 cục pin cho kết quả

237	242	244	262	225	218
242	258	243	234	236	228
232	230	254	220	232	240

Giả sử rằng tuổi thọ loại pin này tuân theo phân phối chuẩn.

a) *Vẽ đồ thị thân và lá cho tập dữ liệu trên. Nhận xét.*

b) *Với mức ý nghĩa 5%, ta có thể bác bỏ tuyên bố của công ty sản xuất pin hay không?*

Ví dụ 5

Tốc độ giới hạn trên một đoạn đường là 80 km/h. Trạm cảnh sát giao thông phụ trách đoạn đường tìm kiếm một vị trí phù hợp để đặt một camera bắn tốc độ, với mục đích kiểm soát tốc độ của các phương tiện trên đoạn đường này. Tại một địa điểm F, một mẫu gồm tốc độ của 64 phương tiện được bắn tốc độ ngẫu nhiên có trung bình là 81.5 km/h và độ lệch tiêu chuẩn 6.5 km/h. Với $\alpha = 5\%$*, hãy kiểm định xem địa điểm F có phù hợp để đặt một camera bắn tốc độ hay không?*

- Các bước kiểm định:

1. Phát biểu giả thuyết:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 80 \\ H_1 : \mu > 80 \end{cases}.$$

- Các bước kiểm định:

1. Phát biểu giả thuyết:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 80 \\ H_1 : \mu > 80 \end{cases}.$$

2. Xác định mức ý nghĩa: $\alpha = 0.05$.

- Các bước kiểm định:

1. Phát biểu giả thuyết:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 80 \\ H_1 : \mu > 80 \end{cases}.$$

2. Xác định mức ý nghĩa: $\alpha = 0.05$.
3. Tính giá trị thống kê kiểm định khi σ^2 không biết và cỡ mẫu $n = 64$ (lớn)

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{81.5 - 80}{6.5/\sqrt{64}} = 1.85.$$

- Các bước kiểm định:

1. Phát biểu giả thuyết:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 80 \\ H_1 : \mu > 80 \end{cases}.$$

2. Xác định mức ý nghĩa: $\alpha = 0.05$.
3. Tính giá trị thống kê kiểm định khi σ^2 không biết và cỡ mẫu $n = 64$ (lớn)

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{81.5 - 80}{6.5/\sqrt{64}} = 1.85.$$

4. Xác định miền bác bỏ: Bác bỏ H_0 khi $z_0 > z_\alpha = z_{0.05} = 1.65$.

5. Kết luận: $z_0 = 1.85 > 1.65$ nên bác bỏ H_0, ta kết luận với 95% độ tin cậy rằng tốc độ trung bình tại địa điểm F lớn hơn 80 km/h. Địa điểm F là địa điểm tốt để đặt radar kiểm soát tốc độ.

- **Sử dụng *p*-giá trị:**

4a. Tính p-giá trị:
Với $z_0 = 2.286$, $p = 1 - \Phi(z_0) = 1 - \Phi(1.85) = 1 - 0.9678 = 0.0322$.

5a. Kết luận: $p = 0.0322 < 0.05$ nên bác bỏ H_0, ta kết luận với 95% độ tin cậy rằng tốc độ trung bình tại địa điểm F lớn hơn 80 km/h. Địa điểm F là địa điểm tốt để đặt radar kiểm soát tốc độ.

- **Bài toán:**

Cho tổng thể X, trong đó tỷ lệ phần tử mang đặc tính A nào đó là trong tổng thể là p (p chưa biết). Từ mẫu ngẫu nhiên $(X_1, X_2, ..., X_n)$ hãy kiểm định

$$(a)\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p \neq p_0 \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p < p_0 \end{cases} \qquad (c)\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p > p_0 \end{cases}$$

với mức ý nghĩa α.

- Giả định:
  - Cỡ mẫu n lớn, để phân phối chuẩn xấp xỉ phân phối nhị thức tốt cần có $np_0 \geq 5$ và $n(1 - p_0) \geq 5$.

• Quan sát sự xuất hiện của biến cố "phần tử mang đặc tính A" trong n phép thử độc lập. Gọi Y là số lần xuất hiện biến cố trên thì $Y \sim B(n, p)$. Và

$$\hat{P} = \frac{Y}{n}$$

là một ước lượng không chệch cho p.

• Nếu H_0 đúng, thống kê

$$Z_0 = \frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

có phân phối chuẩn tắc $\mathcal{N}(0,1)$. Chọn Z_0 làm tiêu chuẩn kiểm định.

Các bước kiểm định

1. Phát biểu giả thuyết và đối thuyết.
2. Xác định mức ý nghĩa α.
3. Tính giá trị thống kê kiểm định

$$Z_0 = \frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1 - p_0)}{n}}}.$$

4. Xác định miền bác bỏ: bảng 1.

Giả thuyết	Miền bác bỏ
$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p \neq p_0$	$W_\alpha = \left\{ z_0 : \lvert z_0 \rvert > z_{\alpha/2} \right\}$
$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p < p_0$	$W_\alpha = \left\{ z_0 : z_0 < -z_\alpha \right\}$
$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p > p_0$	$W_\alpha = \left\{ z_0 : z_0 > z_\alpha \right\}$

Bảng 1: Miền bác bỏ cho bài toán kiểm định tỷ lệ

5. Kết luận: Bác bỏ H_0/ Chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0.

Ví dụ 6

Trong kỳ nghỉ lễ đầu năm mới, Cục An toàn giao thông đã thống kê được rằng có 500 người chết và 25000 người bị thương do các vụ tại nạn giao thông trên toàn quốc. Theo thông cáo của Cục ATGT thì khoảng 50% *số vụ tai nạn có liên quan đến rượu bia. Khảo sát ngẫu nhiên 120 vụ tai nạn thấy có 67 vụ do ảnh hưởng của rượu bia. Sử dụng số liệu trên để kiểm định lời khẳng định của Cục An toàn giao thông với mức ý nghĩa* $\alpha = 5\%$.

Ví dụ 6

Trong kỳ nghỉ lễ đầu năm mới, Cục An toàn giao thông đã thống kê được rằng có 500 người chết và 25000 người bị thương do các vụ tại nạn giao thông trên toàn quốc. Theo thông cáo của Cục ATGT thì khoảng 50% *số vụ tai nạn có liên quan đến rượu bia. Khảo sát ngẫu nhiên 120 vụ tai nạn thấy có 67 vụ do ảnh hưởng của rượu bia. Sử dụng số liệu trên để kiểm định lời khẳng định của Cục An toàn giao thông với mức ý nghĩa* $\alpha = 5\%$.

Các bước kiểm định:

1. Phát biểu giả thuyết:

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.5 \\ H_1 : p \neq 0.5 \end{cases}.$$

2. Xác định mức ý nghĩa: $\alpha = 0.05$.

3. Tính giá trị thống kê kiểm định.

$$z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{(67/120) - 0.5}{0.045644} = 1.28.$$

3. Tính giá trị thống kê kiểm định.

$$z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{(67/120) - 0.5}{0.045644} = 1.28.$$

4. Xác định miền bác bỏ: bác bỏ H_0 khi $|z_0| > z_{0.025} = 1.96$ hoặc tính p-giá trị

$$p = [(1 - \Phi(z_0)] = 2[1 - \Phi(1.28)] = 2(1 - 0.8977) = 0.2006.$$

3. Tính giá trị thống kê kiểm định.

$$z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{(67/120) - 0.5}{0.045644} = 1.28.$$

4. Xác định miền bác bỏ: bác bỏ H_0 khi $|z_0| > z_{0.025} = 1.96$ hoặc tính p-giá trị

$$p = [(1 - \Phi(z_0)] = 2[1 - \Phi(1.28)] = 2(1 - 0.8977) = 0.2006.$$

5. Kết luận: do $z_0 = 1.28 < 1.96$ (hoặc $p = 0.2006 > 0.05$) nên kết luận chưa đủ cơ sở để bác bỏ giả thuyết H_0.

Ví dụ 7

Trong điều trị một loại bệnh truyền nhiễm, một loại thuốc được biết có hiệu quả điều trị thành công 72% *số ca nhiễm bệnh. Một loại thuốc mới được phát triển và thử nghiệm cho thấy có hiệu quả điều trị thành công* 42 *ca trong số* 50 *ca nhiễm bệnh. Ta có bằng chứng đủ mạnh để kết luận rằng loại thuốc mới hiệu quả hơn loại thuốc cũ hay không?*

- Các giả định:
  - $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là mẫu ngẫu nhiên được chọn từ tổng thể 1 có phân phối chuẩn với kỳ vọng μ_1 và phương sai σ_1^2.
  - $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ là mẫu ngẫu nhiên được chọn từ tổng thể 2 có phân phối chuẩn với kỳ vọng μ_2 và phương sai σ_2^2.
  - Tổng thể 1 và 2 (đại diện bởi X và Y) độc lập với nhau.
  - Các phương sai σ_1^2 và σ_2^2 đã biết.
- Bài toán kiểm định giả thuyết trên hai mẫu độc lập gồm các dạng sau:

$$(a) \begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 < \mu_2 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 > \mu_2 \end{cases}$$

với mức ý nghĩa α cho trước.

Các bước kiểm định

1. Phát biểu giả thuyết H_0 và đối thuyết H_1.
2. Xác định mức ý nghĩa α.
3. Tính thống kiểm định

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}}. \tag{7}$$

Nếu H_0 đúng, thống kê $Z_0 \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

4. Xác định miền bác bỏ: miền bác bỏ và p-giá trị tương ứng

Đối thuyết	**Miền bác bỏ**	**p - giá trị**
$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$	$\lvert z_0 \rvert > z_{\alpha/2}$	$p = 2[1 - \Phi(\lvert z_0 \rvert)]$
$H_1 : \mu_1 < \mu_2$	$z_0 < -z_\alpha$	$p = \Phi(z_0)$
$H_1 : \mu_1 > \mu_2$	$z_0 > z_\alpha$	$p = 1 - \Phi(z_0)$

5. Kết luận: Nếu bác bỏ H_0, ta kết luận H_1 đúng với $(1-\alpha)100\%$ độ tin cậy. Ngược lại ta kết luận chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0 với α cho trước.

Ví dụ 8

Một công ty sản xuất sơn nghiên cứu về 1 loại phụ gia làm giảm thời gian khô của sơn. Thực hiện thí nghiệm trên 2 mẫu: mẫu thứ nhất gồm 10 mẫu vật được sơn bằng loại sơn bình thường; mẫu thứ hai gồm 10 mẫu vật được sơn với sơn có chất phụ gia mới. Trong những nghiên cứu trước, biết rằng độ lệch tiêu chuẩn của thời gian khô sau khi quét sơn là 8 phút và không thay đổi khi thêm phụ gia vào. Trung bình của mẫu 1 và 2 lần lượt là $\bar{x} = 121$ phút và $\bar{y} = 112$ phút. Với mức ý nghĩa 5%, hãy cho kết luận về loại sơn với chất phụ gia mới.

1. Phát biểu giả thuyết và đối thuyết

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 & \text{chất phụ gia mới không có hiệu quả} \\ H_1 : \mu_1 > \mu_2 & \text{chất phụ gia mới có hiệu quả} \end{cases}$$

2. Mức ý nghĩa: $\alpha = 0.05$.

3. Tính giá trị thống kê kiểm định, với $\bar{x} = 121$, $\bar{y} = 112$ và $\sigma_1 = \sigma_2 = 8$ ta có

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n} + \dfrac{\sigma_2^2}{m}}} = \frac{121 - 112}{\sqrt{\dfrac{8^2}{10} + \dfrac{8^2}{10}}} = 2.52.$$

4. Xác định miền bác bỏ: bác bỏ H_0 khi $z_0 > z_{1-\alpha} = z_{0.95} = 1.65$.
5. Kết luận: Ta có $z_0 = 2.52 > 1.65$ nên bác bỏ H_0. Ta kết luận rằng với 95% độ tin cậy, chất phụ gia có hiệu quả làm giảm thời gian khô sau khi sơn.

- Các giả định:
  - $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là mẫu ngẫu nhiên được chọn từ tổng thể 1 có kỳ vọng μ_1 và phương sai σ_1^2 không biết.
  - $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ là mẫu ngẫu nhiên được chọn từ tổng thể 2 có kỳ vọng μ_2 và phương sai σ_2^2 không biết.
  - Tổng thể 1 và 2 (đại diện bởi X và Y) độc lập với nhau.
  - Cỡ mẫu lớn: $n > 30$ và $m > 30$.

- Đối với trường hợp mẫu lớn, khi phương sai tổng thể σ_1^2 và σ_2^2 không biết, ta thay thế bằng các phương sai mẫu S_1^2 và S_2^2 mà không tạo ra nhiều khác biệt.
- Khi cả $n > 30$ và $m > 30$, dưới giả thuyết H_0, đại lượng

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}}} \tag{8}$$

  sẽ xấp xỉ phân phối chuẩn tắc $\mathcal{N}(0, 1)$.
- Miền bác bỏ (hoặc p - giá trị) trong trường hợp này được tính tương tự như trường hợp biết phương sai (thay thế σ_1 và σ_2 bởi S_1 và S_2).

Ví dụ 9

Khảo sát về chiều cao của sinh viên hai khoa Toán và CNTT: chọn ngẫu nhiên 50 *sinh viên khoa Toán, tính được chiều cao trung bình là* 163 *(cm) và độ lệch tiêu chuẩn* 5 *(cm). Đo chiều cao* 50 *khoa CNTT, có trung bình mẫu là* 166 *(cm) và độ lệch tiêu chuẩn* 8 *(cm). Với mức ý nghĩa* $\alpha = 1\%$, *hãy cho kết luận về chiều cao của sinh viên hai khoa.*

- Các giả định:
  - $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là mẫu ngẫu nhiên được chọn từ tổng thể 1 có phân phối chuẩn với kỳ vọng μ_1 và phương sai σ_1^2 không biết.
  - $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ là mẫu ngẫu nhiên được chọn từ tổng thể 2 có phân phối chuẩn với kỳ vọng μ_2 và phương sai σ_2^2 không biết.
  - Tổng thể 1 và 2 (đại diện bởi X và Y) độc lập với nhau.
  - Cỡ mẫu nhỏ: $n \leq 30$ hoặc $m \leq 30$.
- Ta xét hai trường hợp:
  1. Trường hợp phương sai bằng nhau $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$,
  2. Trường hợp phương sai khác nhau $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.
- Ta sử dụng quy tắc sau để xác định trường hợp phương sai có bằng nhau hay không:

Rule-of-Thumb

Phương sai σ_1^2 và σ_2^2 của hai tổng thể được xem như bằng nhau nếu tỷ số

$$0.5 \leq \frac{s_{\max}}{s_{\min}} \leq 2.$$

- Trường hợp $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, ta sử dụng một ước lượng chung cho cả σ_1^2 và σ_2^2 là S_p^2 gọi là phương sai mẫu chung (pooled sample variance)

$$S_p^2 = \frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}. \tag{9}$$

- Thống kê

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}} \tag{10}$$

có phân phối Student với $n + m - 2$ bậc tự do.

- Đặt $df = n + m - 2$, miền bác bỏ và p - giá trị trong trường hợp này có dạng

Đối thuyết	**Miền bác bỏ**	**p - giá trị**
$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$	$\lvert t_0 \rvert > t^{df}_{\alpha/2}$	$p = 2\mathbb{P}(T_{df} \geq \lvert t_0 \rvert)$
$H_1 : \mu_1 < \mu_2$	$t_0 < -t^{df}_{\alpha}$	$p = \mathbb{P}(T_{df} \leq t_0)$
$H_1 : \mu_1 > \mu_2$	$t_0 > t^{df}_{\alpha}$	$p = \mathbb{P}(T_{df} \geq t_0)$

- Kết luận: Bác bỏ H_0/Chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0.

- Khi $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, sử dụng thống kê

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n} + \dfrac{S_2^2}{m}}}. \tag{11}$$

- Khi đó T_0 có phân phối Student với bậc tự do df được xác định như sau

$$df = \frac{\left[(s_1^2/n) + (s_2^2/m)\right]^2}{\dfrac{(s_1^2/n)^2}{n-1} + \dfrac{(s_2^2/m)^2}{m-1}}. \tag{12}$$

- Miền bác bỏ trong trường hợp này giống như trường hợp phương sai bằng nhau, chỉ thay bậc tự do df cho bởi phương trình (12).

Ví dụ 10

Tại một thành phố, ở khu vực A, người ta chọn ngẫu nhiên 17 *sinh viên và cho làm 1 bài kiểm tra để đo chỉ số IQs, thu được trung bình mẫu là* 106 *và độ lệch tiêu chuẩn bằng 10. Tại khu vực B, chỉ số IQs trung bình của một mẫu gồm 14 sinh viên bằng* 109 *với độ lệch tiêu chuẩn là* 7*. Giả sử phương sai bằng nhau. Có sự khác biệt về chỉ số IQs của sinh viên ở hai khu vực A và B hay không?* $\alpha = 0.02$.

Ví dụ 11

Hàm lượng thạch tín (Asen) (Đv: ppb) trong nước càng cao càng có hại cho sức khỏe. Người ta kiểm tra hàm lượng thạch tín ở hai khu vực là trung tâm thành phố B và khu vực gần sân bay của thành phố này. Tại mỗi khu vực, người ta đo ngẫu nhiên hàm lượng thạch tín trong nước ứng với 10 địa điểm khác nhau. Số liệu cho bởi bảng thống kê bên dưới

Trung tâm TP	3	7	25	10	15	6	12	25	15	7
Khu vực gần sân bay	48	44	40	38	33	21	20	12	1	18

Có ý kiến cho rằng hàm lượng thạch tín ở khu vực gần sân bay cao hơn khu vực trung tâm thành phố có được chấp nhận hay không? Mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$.

Ví dụ 11

Hàm lượng thạch tín (Asen) (Đv: ppb) trong nước càng cao càng có hại cho sức khỏe. Người ta kiểm tra hàm lượng thạch tín ở hai khu vực là trung tâm thành phố B và khu vực gần sân bay của thành phố này. Tại mỗi khu vực, người ta đo ngẫu nhiên hàm lượng thạch tín trong nước ứng với 10 địa điểm khác nhau. Số liệu cho bởi bảng thống kê bên dưới

Trung tâm TP	*3*	*7*	*25*	*10*	*15*	*6*	*12*	*25*	*15*	*7*
Khu vực gần sân bay	*48*	*44*	*40*	*38*	*33*	*21*	*20*	*12*	*1*	*18*

Có ý kiến cho rằng hàm lượng thạch tín ở khu vực gần sân bay cao hơn khu vực trung tâm thành phố có được chấp nhận hay không? Mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$.

(Từ bảng thống kê, ta tính được $\bar{x} = 12.5$, $s_X = 7.634$, $\bar{y} = 27.5$, $s_Y = 15.350$)

• Khảo sát những phần tử thỏa một tính chất A nào đó trên hai tổng thể độc lập với tỷ lệ tương ứng là p_1 và p_2. Từ hai tổng thể chọn ra hai mẫu với cỡ lần lượt là n và m. Gọi X và Y là số phần tử thỏa tính chất A trong mẫu 1 và mẫu 2. Khi đó, ta có $X \sim B(n, p_1)$ và $Y \sim B(m, p_2)$.

• Bài toán: so sánh tỷ lệ p_1 và p_2.

• Bài toán kiểm định giả thuyết gồm các trường hợp sau:

$$(a) \begin{cases} H_0 : p_1 = p_2 \\ H_1 : p_1 \neq p_2 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} H_0 : p_1 = p_2 \\ H_1 : p_1 < p_2 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} H_0 : p_1 = p_2 \\ H_1 : p_1 > p_2 \end{cases}$$

• Các giả định

- Hai mẫu độc lập,
- Cỡ mẫu lớn và $np_1 > 5$, $n(1 - p_1) > 5$ và $mp_2 > 5$, $m(1 - p_2) > 5$.

Các bước kiểm định

1. Phát biểu giả thuyết H_0 và đối thuyết H_1.
2. Xác định mức ý nghĩa α.
3. Tính thống kê kiểm định

$$Z_0 = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}} \tag{13}$$

với

$$\hat{P}_1 = \frac{X}{n},\ \hat{P}_2 = \frac{Y}{m},\ \hat{P} = \frac{X+Y}{n+m}.$$

Nếu H_0 đúng, $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

3. Xác định miền bác bỏ

Đối thuyết	**Miền bác bỏ**	**p - giá trị**
$H_1 : p_1 \neq p_2$	$\lvert z_0 \rvert > z_{\alpha/2}$	$p = 2[1 - \Phi(\lvert z_0 \rvert)]$
$H_1 : p_1 < p_2$	$z_0 < -z_\alpha$	$p = \Phi(z_0)$
$H_1 : p_1 > p_2$	$z_0 > z_\alpha$	$p = 1 - \Phi(z_0)$

4. Kết luận: Nếu bác bỏ H_0, ta kết luận H_1 đúng với $(1-\alpha)100\%$ độ tin cậy. Ngược lại ta kết luận chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0 với α cho trước.

Ví dụ 12

Một công ty sản xuất thuốc cần kiểm tra một loại thuốc có tác dụng là giảm việc xuất hiện cơn đau ngực ở các bệnh nhân. Công ty thực hiện thí nghiệm trên 400 *người, chia làm hai nhóm: nhóm 1 gồm* 200 *được uống thuốc và nhóm 2 gồm* 200 *người được uống giả dược. Theo dõi thấy ở nhóm 1 có 8 người lên cơn đau ngực và nhóm 2 có 25 người lên cơn đau ngực. Với* $\alpha = 0.05$*, hay cho kết luận về hiệu quả của thuốc mới sản xuất.*

- Khi hai mẫu không độc lập thì mỗi giá trị quan trắc được trong một mẫu có mối liên hệ tương ứng với một giá trị quan trắc ở mẫu thứ hai. Như vậy, ta có thể ghép cặp từng giá trị trong hai mẫu với nhau.
- Việc ghép cặp là kết quả của việc
  - quan trắc giá trị trước và sau khi thực hiện 1 thí nghiệm. Chẳng hạn như đo trọng lượng trước và sau khi thực hiện một chế độ ăn kiêng.
  - so sánh cùng 1 đặc tính.
  - thí nghiệm trên cùng 1 địa điểm.
  - thí nghiệm với cùng thời gian.

- Xét (X_{1i}, X_{2i}), với $i = 1, 2, \ldots, n$, là tập gồm n cặp giá trị quan trắc với giả sử rằng kỳ vọng và phương sai của tổng thể đại diện bởi X_1 là μ_1 và σ_1^2 và kỳ vọng và phương sai của tổng thể đại diện bởi X_2 là μ_2 và σ_2^2. X_{1i} và X_{2j} $(i \neq j)$ độc lập.
- Định nghĩa độ sai khác giữa mỗi cặp trong tập hợp các giá trị quan trắc là

$$D_i = X_{1i} - X_{2i},\ i = 1, \ldots, n. \tag{14}$$

- Các $D_i, i = 1, \ldots, n$ được giả sử có phân phối chuẩn.
- Goi $\mu_D = E(D_i)$, bởi vì $D_1, \ldots, D_n$ là những biến ngẫu nhiên độc lập và có cùng phân phối, nếu $d_1, \ldots, d_n$ là những giá trị của $D_1, \ldots, D_n$, ta định nghĩa

- Goi $\mu_D = E(D_i)$, bởi vì $D_1, \ldots, D_n$ là những biến ngẫu nhiên độc lập và có cùng phân phối, nếu $d_1, \ldots, d_n$ là những giá trị của $D_1, \ldots, D_n$, ta định nghĩa

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d_i, \tag{15}$$

$$s_d^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (d_i - \bar{d})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \frac{n}{n-1} (\bar{d})^2. \tag{16}$$

- Ta cần kiểm định các giả thuyết và đối thuyết sau

$$(a) \begin{cases} H_0 : \mu_D = D_0 \\ H_1 : \mu_D \neq D_0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} H_0 : \mu_D = D_0 \\ H_1 : \mu_D < D_0 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} H_0 : \mu_D = D_0 \\ H_1 : \mu_D > D_0 \end{cases}$$

Trong trường hợp mặc định, ta chọn $D_0 = 0$.

Các bước kiểm định

1. Phát biểu giả thuyết H_0 và đối thuyết H_1
2. Xác định mức ý nghĩa α
3. Tính thống kê kiểm định
$$T_0 = \frac{\bar{D} - D_0}{S_D/\sqrt{n}} \tag{17}$$
thống kê T_0 có phân phối Student với $n-1$ bậc tự do.
4. Xác định miền bác bỏ

5. Miền bác bỏ và p - giá trị trong trường hợp này có dạng

Đối thuyết	**Miền bác bỏ**	p **- giá trị**
$H_1 : \mu_D \neq D_0$	$\lvert t_0 \rvert > t_{\alpha/2}^{n-1}$	$p = 2\mathbb{P}(T_{n-1} \geq \lvert t_0 \rvert)$
$H_1 : \mu_D < D_0$	$t_0 < -t_{\alpha}^{n-1}$	$p = \mathbb{P}(T_{n-1} \leq t_0)$
$H_1 : \mu_D > D_0$	$t_0 > t_{\alpha}^{n-1}$	$p = \mathbb{P}(T_{n-1} \geq t_0)$

6. Kết luận: Nếu bác bỏ H_0, ta kết luận H_1 đúng với $(1-\alpha) * 100\%$ độ tin cậy. Ngược lại kết luận chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0.

• Trường hợp cỡ mẫu $n > 30$, bài toán kiểm định hai mẫu phụ thuộc thực hiện tương tự như trường hợp một mẫu dựa trên mẫu ngẫu nhiên $(D_1, \ldots, D_n)$.

Ví dụ 13

Một bác sĩ dinh dưỡng nghiên cứu một chế độ ăn kiêng và tập thể dục mới để làm giảm lượng đường trong máu của các bệnh nhân bị bệnh tiểu đường. 10 *bệnh nhân bị bệnh tiểu đường được chọn để thử nghiệm chương trình này, bảng kết quả bên dưới cho biết lượng đường trong máu trước và sau khi các bệnh nhân tham gia chương trình*

Trước	*268*	*225*	*252*	*192*	*307*	*228*	*246*	*298*	*231*	*185*
Sau	*106*	*186*	*223*	*110*	*203*	*101*	*211*	*176*	*194*	*203*

Số liệu được cung cấp có đủ bằng chứng để kết luận rằng chế độ ăn kiêng và tập thể dục có tác dụng làm giảm lượng đường trong máu không? $\alpha = 0.05$.