K：断面曲率一定

Ric = cg：アインシュタイン ⇐

⇒ スカラー曲率一定

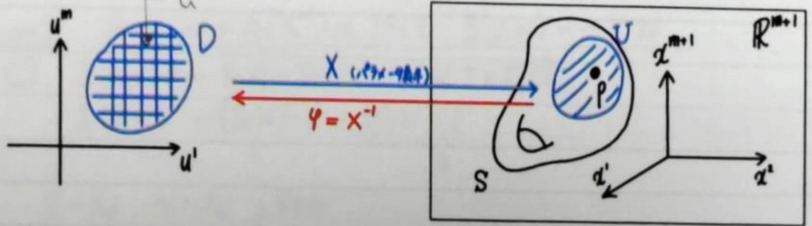
1

Def $\mathbb{R}^{m+1}$ の部分集合 S が 超曲面 (hypersurface)

$\Longleftrightarrow$ ${}^\forall p \in S$ に対して $\begin{cases} {}^\exists U \subset S : p\text{の}(S\text{における})\text{開近傍} \\ {}^\exists D \subset \mathbb{R}^m : \text{開集合} \\ {}^\exists X : D \longrightarrow \mathbb{R}^{m+1} : C^\infty\text{級写像} \end{cases}$

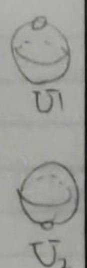
s.t. (i) $X : D \longrightarrow U$: 同相写像

(ii) ${}^\forall g \in D$ に対して $\{X_{u^1}(g), X_{u^2}(g), \cdots, X_{u^m}(g)\}$: Xの偏ビ分 は1次独立



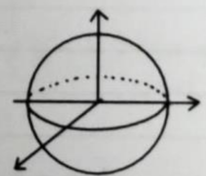
例1 $\mathbb{S}^m := \{(x^1, x^2, \cdots, x^{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 + \cdots + (x^{m+1})^2 = 1\}$

m次元球面 は 超曲面



北極除 $X_1(u^1, \cdots, u^m) = \dfrac{1}{1+(u^1)^2+\cdots+(u^m)^2} \begin{pmatrix} 2u^1 \\ \vdots \\ 2u^m \\ -1+(u^1)^2+\cdots+(u^m)^2 \end{pmatrix}$

南極除 $X_2(u^1, \cdots, u^m) = \dfrac{1}{1+(u^1)^2+\cdots+(u^m)^2} \begin{pmatrix} 2u^1 \\ \vdots \\ 2u^m \\ 1-(u^1)^2-\cdots-(u^m)^2 \end{pmatrix}$



$X_i : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ $(i = 1, 2)$ は $\mathbb{S}^m$ のパラメータ表示

球面：断面曲率一定

Ex) $X_{1u^1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2u^1 \end{bmatrix}$ $X_{1u^2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ \vdots \\ 0 \\ 2u^2 \end{bmatrix}$ …

第1〜m 成分が 1次独立っぽそう というのは 分かる。

$T_p(S) = \mathrm{Span}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial u^m}\right)_p\right\}$ $\frac{\partial}{\partial u^i} \longleftrightarrow X_{u^i}$

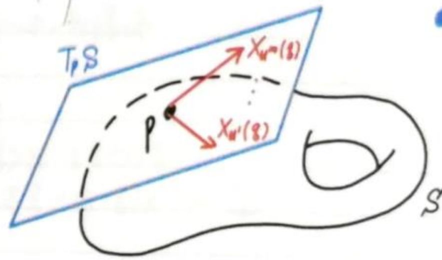
2

$p \in S$ を任意に1つ固定

$X(g) = p$ となる点 $g \in D$

$T_pS = \mathrm{Span}\{X_{u^1}(g), \cdots, X_{u^m}(g)\}$

Sの接空間



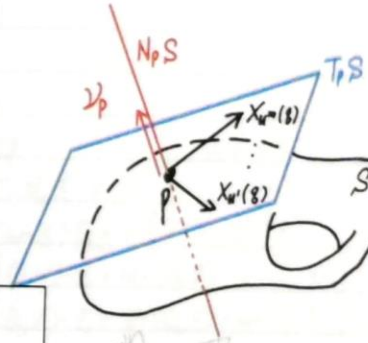
法ベク空間 $N_pS := \{n \in \mathbb{R}^{m+1} \mid n \cdot v = 0, {}^\forall v \in T_pS\}$

$= T_pS^\perp$: Sのpにおける法空間

$= \mathbb{R}\,\nu_p$ ← 1次元ベクトル空間

($\nu_p \cdot \nu_p = 1$: 単位法ベクトル)

ν_p のスカラー倍で、全部表せる。



${}^\forall x \in \mathbb{R}^n$ に対し ${}^\exists! v \in T_pS$, ${}^\exists! n \in N_pS$

s.t. $x = v + n$

$= [x]^T + [x]^N$ $\begin{cases} v = [x]^T \\ n = [x]^N \end{cases}$ と定める

(直交直和分解)

$D_V W = [D_V W]^T + [D_V W]^N$ ($V, W \in \mathfrak{X}(S)$: Sのベクトル場)

接成分 $[D_V W]^T = \nabla_V W$: Sの Levi-Civita 接続 (#9)

法成分 $[D_V W]^N = \mathrm{I\!I}(V, W)\,\nu$

スカラー(関数)

ベクトル場×2 関数

$\mathrm{I\!I} : \mathfrak{X}(S) \times \mathfrak{X}(S) \longrightarrow C^\infty(S)$

対称 (0,2)-テンソル場 である

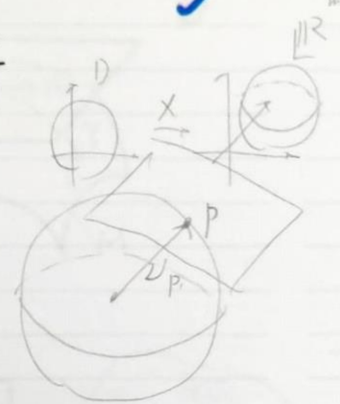
第2基本形式 という

$\boxed{D_V W = \nabla_V W + \mathrm{I\!I}(V, W)\,\nu}$ ($V, W \in \mathfrak{X}(S)$) —— ⊛

外の空間 接成分 法成分

$\mathbb{S}^m = \{ x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x\cdot x = 1 \}$, $p \in \mathbb{S}^m$ ：任意に1つ固定

$X : D \longrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ ：$\mathbb{S}^m$のパラメータ表示、 $X(\xi) = p$ $(\xi \in D)$



Lem1 $\nu_p = p$ は $p \in \mathbb{S}^m$ における $\mathbb{S}^m$の単位法ベクトル

∵ $X\cdot X = 1$ の両辺微分 $2X_{u^i}\cdot X = 0$

$X_{u^i}\cdot X = 0$

$\therefore \underbrace{X_{u^i}(\xi)}_{\text{接空間の基底}} \cdot \underbrace{X(\xi)}_{p} = 0$ $({}^\forall i = 1, \cdots, m)$

$\therefore p \in N_pS$ //

Lem2 各 $V, W \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^m)$ に対して $\mathrm{II}(V,W) = -V\cdot W$

∵ $\mathrm{II}(V,W)\,p = D_VW - \nabla_VW$ ：両辺pと内積

$\mathrm{II}(V,W) = (D_VW)\cdot p - \underbrace{(\nabla_VW)\cdot p}_{0}$ $p \in (T_p(S))^\perp$

$V = X_{u^i}$, $W = X_{u^j}$ とすると

$\mathrm{II}(X_{u^i}, X_{u^j}) = (\underbrace{D_{X_{u^i}}X_{u^j}}_{X_{u^iu^j}})\cdot X$

$= X_{u^iu^j}\cdot X$

$= -X_{u^i}\cdot X_{u^j}$

$$\boxed{\begin{aligned} &X\cdot X = 1 \quad \tfrac{\partial}{\partial u^i}\\ &2X\cdot X_{u^i} = 0 \quad \tfrac{\partial}{\partial u^j}\\ &X_{u^iu^j}\cdot X + X_{u^i}\cdot X_{u^j} = 0 \end{aligned}}$$

$\{X_{u^1}, \cdots, X_{u^m}\}$: $T_p\mathbb{S}^m$の基底より $\mathrm{II}(V,W) = -V\cdot W$ //   (第1基本形式のマイナス1倍)

Lem3 ☆ $x \in \mathbb{R}^{m+1}$, $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{m+1})$ に対して $D_V x = V$ 位置ベク 接ベク

∵ $D_V x = D_V\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^{m+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_Vx^1 \\ \vdots \\ D_Vx^{m+1}\end{pmatrix}$ より $\boxed{\begin{gathered} D_Vx^i = V^i \\ (i = 1, \cdots, m+1)\end{gathered}}$ を示せば良い

(ただし $V = \sum_{i=1}^{m+1} V^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$)

$f : \mathbb{R}^{m+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x^1, \cdots, x^{m+1}) = x^i$ と定める

$c(t) = x + tV$ と定めると $c(0) = x$, $c'(0) = V$ なので

$D_Vx^i = Vx^i = Vf = (f\circ c)'(0) = V^i$ //

$\boxed{(f\circ c)(t) = x^i + tV^i}$

直感的に、

$\boxed{\begin{gathered}\text{定曲率 } c \Longleftrightarrow \\ R_{xy}z = c(\langle x,z\rangle y - \langle y,z\rangle x)\end{gathered}}$

Thm $\mathbb{S}^m$は定曲率1を持つリーマン多様体

(proof) ${}^\forall V, W, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^m)$ に対して

$R_{V,W}Z = -\langle W,Z\rangle V + \langle V,Z\rangle W$ を示せば良い

☆ と Lem1,2 より $D_VZ = \nabla_VZ - (V\cdot Z)p$ —— ⊗

$R_{VW}Z = \nabla_{[V,W]}Z - (\nabla_V\nabla_WZ - \nabla_W\nabla_VZ)$

$$\begin{cases} \nabla_{[V,W]}Z = D_{[V,W]}Z + ([V,W]\cdot Z)p \\ \nabla_V\nabla_WZ = D_V(\nabla_WZ) + (V\cdot\nabla_WZ)p \\ \qquad = D_V\{D_WZ + (W\cdot Z)p\} + (V\cdot D_WZ)p \\ \qquad = D_VD_WZ + V(W\cdot Z)p + (W\cdot Z)D_Vp + \{V\cdot(D_WZ)\}p \\ \qquad = D_VD_WZ + (W\cdot Z)V + \{(D_VW)\cdot Z + W\cdot(D_VZ) + V\cdot(D_WZ)\}p \\ \nabla_W\nabla_VZ = D_WD_VZ + (V\cdot Z)W + \{(D_WV)\cdot Z + V\cdot(D_WZ) + W\cdot(D_VZ)\}p \end{cases}$$

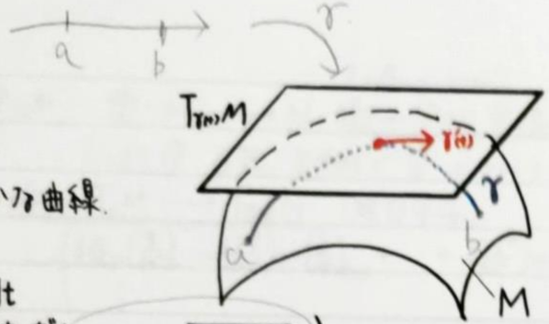
$D_Vp = V$ (∵ Lem3)

$\therefore R_{VW}Z = \underbrace{D_{[V,W]}Z - D_VD_WZ + D_WD_VZ}_{0\ (\because\ E^{m+1}\text{は平坦})} - (W\cdot Z)V + (V\cdot Z)W$

$+\left\{\underbrace{([V,W]\cdot Z) - (D_VW)\cdot Z + (D_WV)\cdot Z}_{=\ ([V,W] - D_VW + D_WV)\cdot Z\ =\ 0\ (\because\ D\text{は torsion-free})} \begin{aligned} &- \cancel{W\cdot(D_VZ)} - \cancel{V\cdot(D_WZ)} \\ &+ \cancel{V\cdot(D_WZ)} + \cancel{W\cdot(D_VZ)}\end{aligned}\right\}p$

$= -(W\cdot Z)V + (V\cdot Z)W$ ▨

c=1の場合の $R_{VW}Z$



曲線の弧長, リーマン距離

(M,g): リーマン多様体

$\gamma : [a,b] \longrightarrow M$: なめらかな曲線

このとき

$$\mathcal{L}(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$$

(ただし $|\gamma'(t)| := \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle}$
速度ベクトルの大きさ, 速さ)

を曲線 γ の弧長という

Thm M: 連結とする

連結 iff 弧状連結

$p, q \in M$ に対し

$C(p,q) := \{ p$ と q を結ぶなめらかな曲線 on $M \}$

とおく このとき $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ を　下限

$$\boxed{d(p,q) := \inf_{\gamma \in C(p,q)} \mathcal{L}(\gamma)}$$

(M,g) の リーマン距離 という

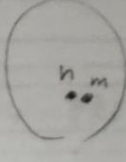
とおくと、d は M上の距離関数である

Prop Mの位相 $\mathcal{O}$ と
距離空間 (M,d) の位相 $\mathcal{O}_d$ は一致する.
つまり $U \subseteq M$ に対して,
U は M の開集合 ⇔ U は (M,d) の開集合

Def リーマン多様体 (M,g) が 完備 (complete) であるとは,
(M,d) が 距離空間として完備であるときをいう.

任意のCauchy列が収束する.

$\{p_n\}_{n=1,2,\cdots}$: Cauchy列
$\Leftrightarrow \lim_{n,m\to\infty} d(p_n, p_m) = 0$



$d(p_n, p_n)$

Hopf-Rinow の定理

リーマン多様体 (M,g) が完備
$\Longleftrightarrow$ (M,g) の 有界閉集合 が コンパクト

$\mathbb{E}^m$

Cor コンパクトな リーマン多様体は 完備である

球面 S^n は完備 (∵コンパクトなので)

空間形

Def 完備な定曲率リーマン多様体を空間形という

space form

断面曲率一定

Lem (M,g): 定曲率 k
c>0 とする $\tilde{g} := \frac{1}{c} g$
$\Longrightarrow (M, \tilde{g})$: 定曲率 ck

(proof) $G = (g_{ij})_{i,j}$　$G^{-1} = (g^{\alpha\beta})_{\alpha\beta}$

$\tilde{G} = (\tilde{g}_{ij})_{i,j}$　$\tilde{G}^{-1} = (\tilde{g}^{\alpha\beta})_{\alpha\beta}$

$\tilde{G} = \frac{1}{c} G$　$\tilde{G}^{-1} = c\, G^{-1}$

$\therefore \tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k \quad \therefore \tilde{R}_{ijk}^l = R_{ijk}^l$

$$\tilde{K} = \frac{\tilde{g}(\tilde{R}_{vw} v, w)}{\tilde{g}(v,v)\tilde{g}(w,w) - \tilde{g}(v,w)^2} = \frac{\frac{1}{c}}{\frac{1}{c^2}} \frac{g(R_{vw} v, w)}{g(v,v) g(w,w) - g(v,w)^2} = cK$$

Ex ・$\mathbb{E}^m$ (断面曲率 0)

以下, c: 正の定数 とする

$g_H = \frac{1}{(x^m)^2}\left((dx^1)^2 + \cdots + (dx^m)^2\right)$

・m次元双曲空間 $H^m = (\mathbb{R}^m_+, g_H)$: 断面曲率 −1
　⇝ $H^m(c) := (\mathbb{R}^m_+, \frac{1}{c} g_H)$: 〃 −c
・m次元球面 $S^m = (S^m, g_S)$: 〃 +1
　⇝ $S^m(c) := (S^m, \frac{1}{c} g_S)$: 〃 +c

● M, N : m次元 C^∞級 多様体， $\Phi : M \longrightarrow N$: 微分同相写像 (diffeomorphism) とする

(つまり Φ : C^∞級，全単射で $\Phi^{-1} : N \to M$ も C^∞級)

● $p \in M$ において Φの微分 $d\Phi_p : T_pM \longrightarrow T_{\Phi(p)}N$ (線形写像)

$$\left(\begin{array}{l} d\Phi_p\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p := \left(\frac{\partial y^1}{\partial x^1}\right)(p)\left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)_{\Phi(p)} + \cdots + \left(\frac{\partial y^m}{\partial x^1}\right)(p)\left(\frac{\partial}{\partial y^m}\right)_{\Phi(p)} \\ \quad \vdots \end{array} \right)$$

● h : Nのリーマン計量 とするとき

$$\boxed{\Phi^* h(v, w) := h_{\Phi(p)}(d\Phi_p(v), d\Phi_p(w)) \quad ({}^\forall v, w \in T_pM)}$$

$\Phi : M \longrightarrow (N, h)$

により Mのリーマン計量 $\Phi^* h$ が定まる

誘導計量，引き戻し という

Ex $M = \mathbb{R}^2_{(u,v)}$, $N = \mathbb{E}^2_{(x,y)}$ $\mathbb{E}^2 = (\mathbb{R}^2, g_E)$

$\Phi(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$

$$\begin{cases} \Phi_u = 2u\,\partial_x + 2v\,\partial_y \\ \Phi_v = -2v\,\partial_x + 2u\,\partial_y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Phi^* g_E(\partial_u, \partial_u) &= g_E(\Phi_u, \Phi_u) \\ &= g_E(2u\,\partial_x + 2v\,\partial_y,\ 2u\,\partial_x + 2v\,\partial_y) \\ &= 4u^2 \underbrace{g_E(\partial_x, \partial_x)}_{=1} + 8uv \underbrace{g_E(\partial_x, \partial_y)}_{=0} + 4v^2 \underbrace{g_E(\partial_y, \partial_y)}_{=1} = 4(u^2 + v^2) \end{aligned}$$

同様に

$\Phi^* g_E(\partial_u, \partial_v) = 0$， $\Phi^* g_E(\partial_v, \partial_v) = 4(u^2 + v^2)$

$\therefore \Phi^* g_E = \Sigma\, \Phi^* g_E(\partial_i, \partial_j)\, dx^i dx^j = 4(u^2 + v^2)(du^2 + dv^2)$ …引き戻しの計量 (リーマン計量)

Def (M, g), (N, h) : リーマン多様体． $\Phi : M \to N$: 微分同相写像 とする

- C^∞級写像 $\Phi : M \longrightarrow N$ が 等長写像 isometry

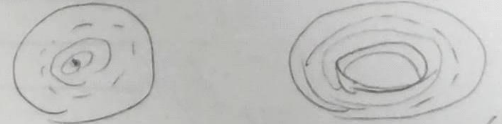
  $\Longleftrightarrow$ Φは微分同相写像 であって $\boxed{\Phi^* h = g}$
- (M, g) と (N, h) が 等長的 isometric $\Leftrightarrow {}^\exists \Phi : M \to N$: 等長写像

Thm (定曲率リーマン多様体の分類)

単連結な空間形は $\mathbb{E}^m$, $\mathbb{S}^m(c)$, $\mathbb{H}^m(c)$ のいずれかに等長的

└ 任意のループは 1点にホモトピック

M : 単連結 $\Longleftrightarrow$ 任意のLoop は 1点に ホモトピック



1点にならない例

(NOT 単連結)

アインシュタイン多様体や 定スカラー曲率多様体 は 豊富に存在