SYMETRIC BILINEAR FORMS

(P47の前に、定義を確認)

P46

17. Def (対称双線形形式)

$b(v, w) = b(w, v)$、$b(0, 0) = 0$

ベクトル空間 V 上の対称線形形式 b は、

(1) $v \neq 0 \Rightarrow b(v, v) > 0$ $(<)$ のとき b は正定値である。(負)

(2) $\forall v \in V$ で $b(v, v) \geq 0$ $(\leq)$ のとき、b は半正定値である。(負)

(3) $\forall w \in V$ で $b(v, w) = 0 \Rightarrow v = 0$ のとき、b は非退化である。

b が定値(半定値)であるとは、(1) または (2) いずれかの条件を満たすことを意味する。

もし b が定値であれば、それは明らかに半定値かつ非退化である。

$\forall x \in V_2 \setminus \{0\}$ $x = (0, t)$ $t \neq 0$ ~~$x \neq 0$~~

$g(x, x) = 0^2 - t^2$

$= -t^2 < 0$

$\therefore g|_{V_2}$ は 負定値。特に非退化。

V_2 も非退化部分空間

Proof

(以下、正定値の場合を考える)

(i) b が正定値 $\Rightarrow$ b は半正定値

仮定より、「$v \neq 0 \Rightarrow b(v, v) > 0$」、「$v = 0 \Rightarrow b(v, v) = 0$」であるため、$v$ の値に関わらず $b(v, v) \geq 0$ である。これは半正定値の定義を満たしている。

(ii) b が正定値 $\Rightarrow$ b は非退化 $\because$ 線形性

仮定より、「$v \neq 0 \Rightarrow b(v, v) > 0$」、「$v = 0 \Rightarrow b(v, v) = 0$」であるため、$b(v, v) = 0$ であるのは $v = 0$ のときに限られる。これは非退化の定義を満たしている。

(i)、(ii) より、もし b が定値であれば、それは半定値かつ非退化である。■

※ b が V の対称双線形形式である場合、V の部分空間 W に対する制限 $b|(W \times W)$ ($b|W$ とも表記) も対称かつ双線形である。

$x = (t, t)$ $\quad (x \in V_3 \setminus \{0\})$ $\quad t \neq 0$

$$g(x, x) = t^2 - t^2$$
$$= 0$$

$g|_{V_3}$ は半正定値，非退化ではない

V_3 は退化部分空間

18. Def(インデックス)

V上の対称双線形形式bのインデックス$\overset{\text{ニュー}}{\nu}$とは、$b|W$が<u>負定値</u>となる部分空間$W \subset V$の次元であるような最大の整数のことである.

したがって、$0 \leq \nu \leq \dim V$であり、$\nu = 0$はbが半正定値の場合に限り成立する.

- $q : V \longrightarrow \mathbb{R}$と定義される関数$q(v) = b(v, v)$は、$b$に対応する二次形式と呼ばれる. $q(v)$はbよりも扱いやすく、情報が失われない.

(∵ bは以下の極化恒等式(polarization identity)によって再構成できる.

$$b(v, w) = \frac{1}{2}\left[q(v+w) - q(v) - q(w)\right].$$
)

- $e_1, \cdots, e_n$がVの基底であるとき、$n \times n$行列$\underline{(b_{ij}) = b(e_i, e_j)}$は$e_1, \cdots, e_n$に関する$b$の行列と呼ばれる.

bが対称であるため、この行列も対称行列の性質を持つ. また、この行列は明らかにbを(一意に)決定する.

$$\because\ b\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} v_i e_i}_{v},\ \underbrace{\sum_{j=1}^{n} w_j e_j}_{w}\Big) \underset{b\text{の双線形性}}{=} \sum_{i,j=1}^{n} v_i w_j\, b(e_i, e_j)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} v_i w_j\, b_{ij}$$

任意のベクトル$v, w \in V$に対する$b(v, w)$は、行列b_{ij}とv_i, w_jによって一意に定まる. ■

19. Lemma

対称双線形形式が非退化であることと、その基底に関する行列が可逆であることは同値である。

Proof

(i) $\Rightarrow$ を示す (仮定：b が非退化)

対称双線形形式 b が非退化と仮定する ($^{\forall}w \in V$、$b(v, w) = 0 \Rightarrow v = 0$).

(b_{ij}) が対称行列であることから、$v \in V$ に対して $b(v, e_i)$ は、

$$
\begin{aligned}
b(v, e_i) &= b\left(\sum_{j=1}^{n} v_j e_j, e_i\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} v_j b(e_j, e_i) \\
&= \sum_{j=1}^{n} v_j b_{ji}. \quad \cdots ①
\end{aligned}
$$

$b(v, e_i) = 0$ が全ての $i (= 1, \cdots, n)$ に対して成り立つならば、①より

$$\sum_{j=1}^{n} v_j b_{ji} = 0$$

であり、これを行列形式で表すと、$(b_{ij})v = 0$ である.

非退化性の仮定より、$v = 0$ しか解が無いため、(b_{ij}) は可逆行列である.

(ii) $\Leftarrow$ を示す (仮定：行列 (b_{ij}) が可逆)

V の基底を $e_1, \cdots, e_n$ とする. 任意の $v \in V$ を線形結合で表すと、

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i.$$

仮定より (b_{ij}) が可逆であるので、$(b_{ij})v = 0$ が成立するのは $v = 0$ に限る.

v と $w \in V$ を用いて $b(v, w)$ を表すと、

$$b(v, w) = b\left(\sum_{i=1}^{n} v_i e_i, \sum_{j=1}^{n} w_j e_j\right)$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} v_i w_j b(e_i, e_j)$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} v_i w_j b_{ij}$$

である. もし $b(v, w) = 0$ であるならば、$v = 0$ しか解が無いことが仮定より分かる.
したがって、b は非退化である.

(i)(ii) より、同値関係を示した. ■

SCALAR PRODUCTS

20. Def (スカラー積)

ベクトル空間 V 上のスカラー積 g とは、V 上の 非退化 (nondegenerate) な対称双線形形式である。

内積とは正定値のスカラー積であり、$\mathbb{R}^n$ 上の

$$v \cdot w = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot w_i \qquad \text{(ドット積)}$$

が典型例として挙げられる。内積の性質はスカラー積にも引き継がれるが、g が 不定 (indefinite) の場合は新しい現象が生じる。

(以下の例では、$\mathbb{R}^2$ 上のドット積の符号を1つ変えたパターン)

21. Example

$$B \quad \cancel{b_{ij}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

P48

基底によらない定義

ν: 負の固有値の個数

$\mathrm{Ind}(g) = \#\{ i \in \{1, \dots, n\} \mid \lambda_i < 0 \}$

$g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を以下で定義する。

$$g(v, w) := v_1 w_1 - v_2 w_2$$

この場合、g は 対称 で 双線形 となる。

$$\because \; g(w, v) = w_1 v_1 - w_2 v_2 = v_1 w_1 - v_2 w_2 = g(v, w). \quad \text{(対称性)}$$

$$\begin{aligned} g(au + bv, w) &= (au_1 + bv_1) w_1 - (au_2 + bv_2) w_2 \\ &= a(u_1 w_1 - u_2 w_2) + b(v_1 w_1 - v_2 w_2) \\ &= a\, g(u, w) + b\, g(v, w) \end{aligned}$$

(双線形性)

さらに、$W=[1,0]$ or $[0,1]$ とすると g が非退化であることが示される

∵ $W=[1,0]$ の場合

$g(v,W) = v_1\cdot 1 - v_2\cdot 0 = v_1$

$\therefore g(v,W)=0 \Rightarrow v_1=0$

$W=[0,1]$ の場合、

$g(v,W) = v_1\cdot 0 - v_2\cdot 1 = -v_2$

$\therefore g(v,W)=0 \Rightarrow v_2=0$

$\therefore {}^\forall w\in V$ に対して、$g(v,w)=0 \Rightarrow v=(0,0)$

非退化

よって、このときの g はスカラー積である。

関連する二次形式 (quardratic form) は $q(v) = v_1^2 - v_2^2$ であり、g は不定 (indefinite) である。

- これからは、V をスカラー積空間（つまり、スカラー積 g を備えた有限次元の実ベクトル空間）とする。

- ベクトル $v\in V$ が $q(v)=0$ かつ $v\neq 0$ のとき、v を「null ベクトル」と呼ぶ。

（null ベクトルが存在するのは、g が不定の場合に限る。）

Proof

（不定値 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 定値ではない）

g: 非退化

(i) g は不定値 $\Rightarrow$ null ベクトルが存在する を示す （正と負の固有値がある）

仮定より g が不定値であるため、g の二次形式 $q(v)$ は正の値も負の値も取り得る。

null ベクトル（$q(v)=0$ かつ $v\neq 0$）の例として、$v=(1,1)$ を考えると、

$q(v) = g(v,v) = 1^2 - 1^2 = 0.$

よって、$v=(1,1)$ は null ベクトルである。

証明の欠へ。

(ii) g は不定値ではない $\Rightarrow$ null ベクトルが存在しないことを示す

仮定より、g は正定値または負定値である。

→ $q(v)=g(v,v)$ が、任意の $v\neq 0$ に対して $q(v)<0$

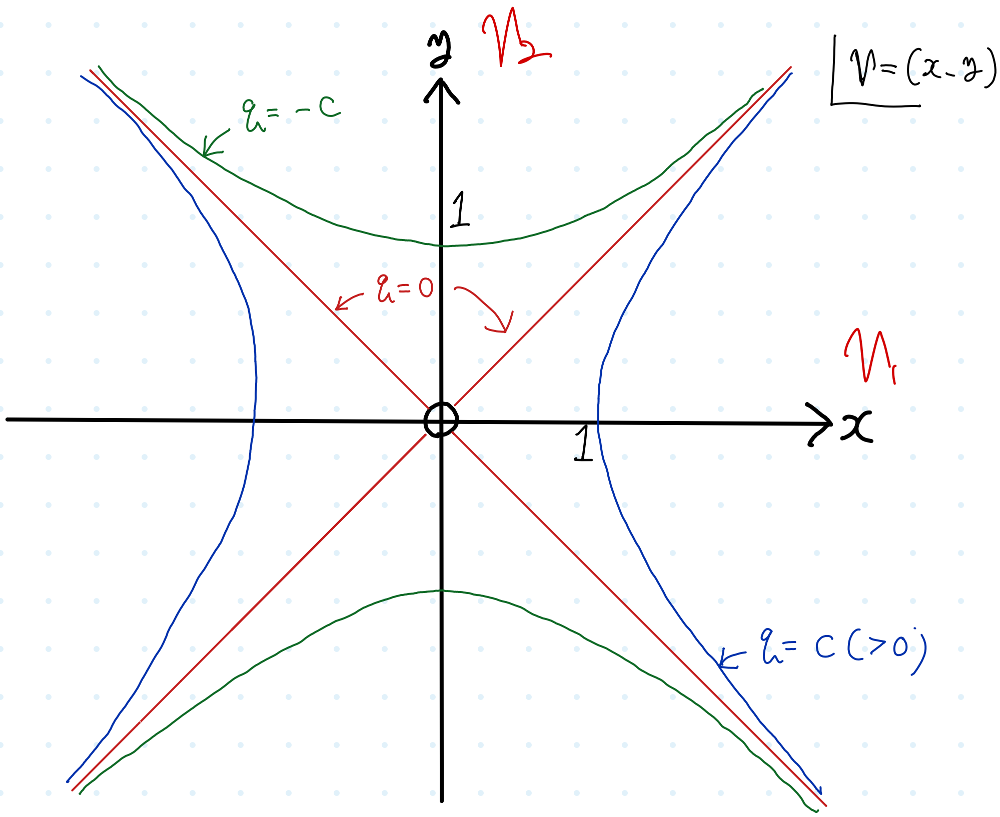
→ $q(v)=g(v,v)$ が、任意の $v\neq 0$ に対して $q(v)>0$

すなわち、$q(v)=0$ を満たす v は、$v\neq 0$ の条件下 では 存在しない.

よって、g が不定値でない場合、null ベクトルは存在しない.

(i)(ii) より、g が不定値の場合に限ることを示した ■

上の例 $(q(v) = v_1^2 - v_2^2)$ では、null ベクトルは原点を除いた傾き45度の2本の直線上に分布 (原点を除く).



• ベクトル $v, w \in V$ が $\underset{\sim\sim\sim}{g(v,w)=0}$ を満たすとき、v と w は「直交している」(orthogonal) といい、

$$v \perp w$$

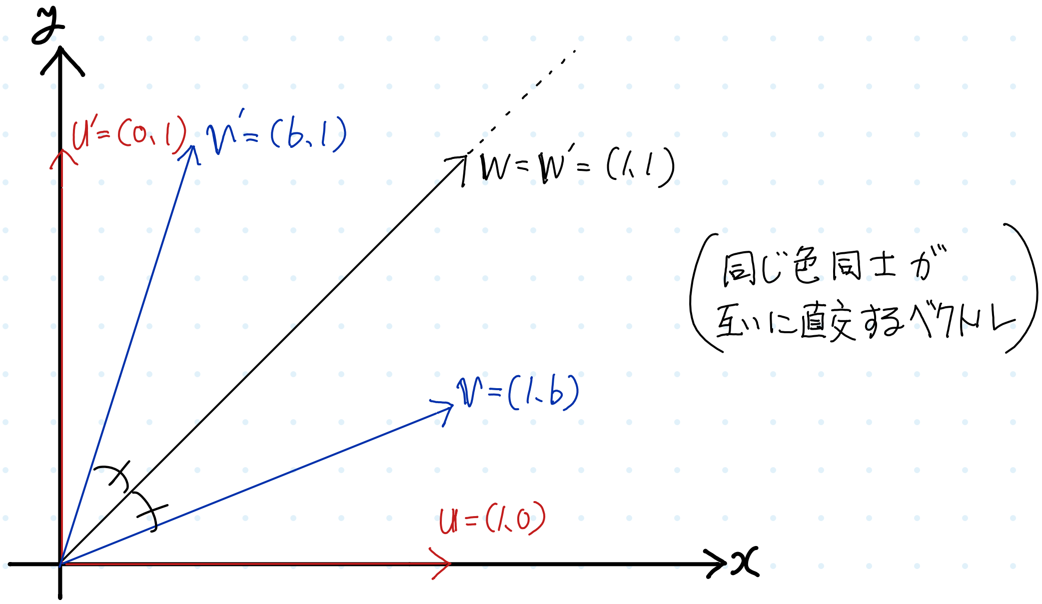
と表記。

• V の部分集合 A と B が直交する

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall v \in A$、$\forall w \in B$ に対して $v \perp w$ が成り立つ。

この場合、$A \perp B$ と表記。

• スカラー積 g が不定 (indefinite) の場合、直交するベクトルを互いに直角 (right angle) であるように描け (picture) なくなる。Example 21 では、3組の直交するベクトル $z \perp z'$ があることが分かり、nullベクトルが自分自身と直交する非ゼロベクトルであることを示している。



W が V の部分空間であるとき、$W^\perp$ を

$$W^\perp := \{ v \in V \mid v \perp W \}$$

とする。$W^{\perp}$ も V の部分空間であり、「W perp」と呼ぶ。
↳ W の直交部分空間

W と $W^{\perp}$ の和は一般的に V 全体を覆わないため、$W^{\perp}$ を
complement
「W の直交補空間」とすることはできない。

$W^{\perp}$ には以下の2つの性質がある。

P49

22. Lemma

W がスカラー積空間 V の部分空間であるとき、

(A1) $\dim W + \dim W = \dim V \ (= n)$

(A2) $(W^{\perp})^{\perp} = W.$

Proof

W に適合したベクトル空間 V の基底として $\{e_1, \dots, e_n\}$ を選ぶ。~~このとき~~ つまり、
最初の k 個の基底 $(e_1, \dots, e_k)$ が W の基底である。 $(\dim W = k)$

このとき、$v \in W^{\perp}$ であるのは、全ての $i = 1, \dots, k$ について、$g(v, e_i) = 0$ が成り立つ必要がある。座標表示すると、

$$\sum_{j=1}^{n} g_{ij} v_j = 0 \quad \cdots ☆ \quad (i = 1, \dots, k)$$

である。(g_{ij} : スカラー積 g による基底の成分)

g スカラー積

v

$v :=$

$= \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$

☆は「未知数が n 個の線形方程式」が k 個あることを表す。ここで Lemma 19 より、係数行列の行は線形独立であるため、$\mathrm{rank} = k$ となる。よって、(線形代数により) 解空間の次元は $n-k$ であるため、$\dim W^{\perp} = n-k$.

$$g\left(\sum_{j=1}^{n} v_j e_j, e_l\right) = \sum_{j=1}^{n} v_j \underbrace{g(e_j, e_l)}_{\substack{g_{jl} \\ \shortparallel \\ g_{lj}}}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} v_j g_{lj} \qquad = 0$$

(具体的に、解空間は $v = \sum_{i=k+1}^{n} v_i e_i$ の形で表現される。このことから $W^{\perp}$ の基底が $e_{k+1}, \cdots, e_n$ であることが分かる)

以上より、
$$\dim W + \dim W^{\perp} = k + (n-k) = n. \quad \blacksquare$$

(2)を示す。

$v \in (W^{\perp})^{\perp}$ とする。このときの v は $W^{\perp}$ の全てのベクトルと直交する ($v \perp W^{\perp}$) ため、
$$W \subseteq (W^{\perp})^{\perp}$$
が成り立つ。(1)より、これらの次元が等しい ($\dim W = \dim (W^{\perp})^{\perp}$) ため、部分空間の包含関係と次元が等しい。

よって、$W = (W^{\perp})^{\perp}$ $\blacksquare$

以上より、(1)、(2) を示した。

- V の部分空間 W が非退化である
$\Longleftrightarrow$ $g|W$ が非退化である。

V が内積空間であるとき、任意の部分空間 $W \subseteq V$ も ($g|W$ の下で) 内積空間であるため、非退化である。

g が不定の場合、退化した部分空間が常に存在する。

P49

23. Lemma

Vの部分空間Wが非退化である事と、Vが「Wと$W^\perp$の直和」である事は同値である。

Proof

(I) 部分空間Wが非退化 $\Longrightarrow$ VはWと$W^\perp$の直和 を示す

ベクトル空間の次元に関する恒等式より、

$$\dim(W+W^\perp)+\dim(W\cap W^\perp)=\dim W+\dim W^\perp \cdots ①$$

である。補題22より $\dim W+\dim W^\perp=n$ であったため、①へ代入すると

$$\dim(W+W^\perp)+\dim(W\cap W^\perp)=n. \cdots ②$$

今、仮定よりWは非退化であるため、$W\cap W^\perp=\{0\}$である。つまり、

$\dim(W\cap W^\perp)=0$ であるため、②に代入すると

$$\underbrace{\dim(W+W^\perp)}_{\dim W+\dim W^\perp}=n.$$

よって、この等式が成立するのはVがWと$W^\perp$の直和である場合に限る。

(II) VはWと$W^\perp$の直和 $\Longrightarrow$ 部分空間Wが非退化。を示す

仮定より、$V=W\oplus W^\perp \Longleftrightarrow n=\dim V=\cancel{\dim W+\dim W^\perp}$ $\dim(W+W^\perp)$ である。

一方、$W\cap W^\perp=\{w\in W \mid w\perp W\}$ であるため、この共通部分が0 $(W\cap W^\perp=0)$ ならばWは非退化である。

+写真

以上より、Wが非退化であることと$V=W\oplus W^\perp$が同値であることを示した ∎

示したいこと

$W \cap W^{\perp} = \{0\}$

$v \in W \cap W^{\perp}$ を任意に取る.

「$v \in W$」かつ「$v \in W^{\perp}$」と書ける.

$W^{\perp} := \{ v \in V \mid v \perp W \}$

$v \in W^{\perp}$ より,

$g(v, w) = 0$ $(w \in W)$ が存在する

今, $g|_W$ は非退化な仮定なので, $v = 0$ である

$\therefore v = 0$

$w \in W$ かつ $w \in W^{\perp}$

非退化　　非退化

$^{\forall} w' \in W$ に対して,

$g(w, w') = 0 \Rightarrow w = 0$

$w \neq 0$ で

$g(w, w') = 0$ が成立すれば良い.

$^{\forall} w'' \in W^{\perp}$ に対して

$g(w, w'') = 0 \Rightarrow w = 0$

※ Lemma 23 ~~について~~ より、

$(W^\perp)^\perp = W$ であることから、W が非退化であるのは $W^\perp$ が非退化である事と同値

$$\left(\begin{array}{l} \cdot\ W \text{ が非退化} \iff V \text{ が } W \text{ と } W^\perp \text{ の直和} \\ \cdot\ W^\perp \text{ が非退化} \iff V \text{ が } W^\perp \text{ と } \underbrace{(W^\perp)^\perp}_{= W} \text{ の直和} \end{array}\right)$$

- $g(v) = g(v, v)$ が負になる可能性があるため、ベクトルのノルム $|v|$ は $|g(v,v)|^{\frac{1}{2}}$ と定義される. 単位ベクトル u はノルムが 1 のベクトル $(g(u,u) = \pm 1)$ である.

  互いに直交する単位ベクトルの集合は正規直交 (orthonormal) と呼ばれ、$n = \dim V$ のとき V の任意の n 個の正規直交ベクトルの集合は必ず V の基底となる.

P50

24. Lemma

スカラー積空間 V $(\neq 0)$ は、正規直交基底を持つ.

Proof

スカラー積 g が非退化であるため、

$$\exists v \in V \quad \text{s.t.} \quad g(v, v) \neq 0$$

が成立する. また、$\dfrac{v}{|v|}$ は単位ベクトルである. (e_1 とおく)

- 帰納法を用いる

帰納法で任意の $k\,(< n)$ 個の正規直交集合 $e_1, \cdots, e_k$ が存在すると仮定する.
この正規直交基底が張る部分空間を W とする.
(この仮定の下で、e_{k+1} を正規直交基底に追加できることを示す)

補題~~19~~23より、Wがk次元の非退化部分空間ならば$W^{\perp}$も非退化部分空間である。よって、非退化なスカラー積空間$W^{\perp}$には、必ず非ゼロベクトルが存在する。

$v \in W^{\perp}$を単位ベクトルに修正$\left(e_{k+1} := \frac{v}{|v|}\right)$することで、$k+1$個目の正規直交基底が得られる。

以上より、初めに1つの正規直交ベクトルを選び、帰納法で逐次的に正規直交基底を追加できることを示した ∎

V の 正規直交基底 $e_1, \cdots, e_n$ に関する g の行列 は diagonal 対角行列 であり、

$$g(e_i, e_j) = \delta_{ij} \varepsilon_j . \qquad \left(\varepsilon_j := g(e_j, e_j) = \pm 1 \right)$$

適宜、正規直交基底 の ベクトル を order 順序付けて、負の符号 が シグネチャ $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ より 先に 来るようにする。

P50

25. Lemma

$e_1, \cdots, e_n$ を V の 正規直交基底 として、$\varepsilon_i = g(e_i, e_i)$ を 満たす とする。
このとき、各 $v \in V$ は 次のように 一意に表される。

$$v = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \, g(v, e_i) \, e_i .$$

Proof

v から 和 を 引いた値 が 各 e_i に 直交 することを 確認すればよい。
(g の 非退化性 により、0 となる)

任意の ベクトル $v \in V$ を 基底ベクトル $e_1, \cdots, e_n$ の 線形結合 を用いて表すと、

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \quad \cdots ①$$

と表される ($a_i \in \mathbb{R}$)。 双線形形式 $g(\cdot, e_i)$ を ① の 両辺 に 適用させると、

$$\begin{aligned} g(v, e_i) &= g\left(\sum_{j=1}^{n} a_j e_j , e_i \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j \, g(e_j, e_i) . \quad \cdots ② \end{aligned}$$

$g(\cdot,\cdot)$ の 線形性

ここで、$e_1, \cdots, e_n$ は 正規直交基底 であるため、$g(e_j, e_i)$ の 値は、

$$g(e_j, e_i) = \begin{cases} \varepsilon_i (=\pm 1) & (i=j \text{ の場合}) \\ 0 & (i \neq j \text{ の場合}) \end{cases}$$

である。②へ代入すると、$g(v, e_i) = \alpha_i \varepsilon_i$ であるため、$\alpha_i = \dfrac{g(v, e_i)}{\varepsilon_i}$.

さらに、$\varepsilon_i = \pm 1$ より、$\varepsilon_i = \dfrac{1}{\varepsilon_i}$ であるため、$\alpha_i = \varepsilon_i \cdot g(v, e_i)$ である。

①に $\alpha_i = \varepsilon_i g(v, e_i)$ を代入すると、

$$v = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(v, e_i) e_i .$$

以上より、任意のベクトル $v \in V$ が正規直交基底 $e_1, \cdots, e_n$ を用いて一意に表現できることを示した。■

orthogonal projection

V の非退化部分空間 W への直交射影 π は、$W^\perp$ を 0 にして、W の各ベクトルを固定する線形変換である。W の正規直交基底 $e_1, \cdots, e_k$ は常に V の基底に拡張できる。すなわち、

$$\pi(v) = \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j g(v, e_j) e_j$$

と書ける。スカラー積 g のインデックス ν を「V のインデックス」と呼び、$\nu = \mathrm{ind}\, V$ と表記するのが慣例である。

P51

26. Lemma

「V の任意の正規直交基底 $e_1, \cdots, e_n$ に対して、シグネチャ $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ の中の「負の符号の個数」は V のインデックス ν である。

Proof $\nu \geq m$ かつ $\nu \leq m$ を示す

まず、正規直交基底 $e_1, \cdots, e_n$ の最初の m 個が負の符号を持つとする。
$(i = 1, \cdots, m$ に対して、$\varepsilon_i = g(e_i, e_i) = -1)$

この仮定の下では、g は $e_1, \cdots, e_m$ によって張られる V の部分空間 S 上では負定値になる。
(負定値：$\forall u\,(\neq 0) \in V$、$g(u, u) < 0$)

したがって、インデックス ν は少なくとも m 以上 $(\nu \geq m)$ である。

$\nu \leq m$ を示すために、W を「g が負定値である任意の部分空間」とし、
写像 $\pi : W \longrightarrow S$ を

$$\pi(w) := -\sum_{i \leq m} g(w, e_i) e_i$$

で定義する。π について、次の2点を確認する。

(i) π は線形写像である。
(ii) π は1対1である。(i.e. 単射)

(i) π の線形性について

$w_1, w_2 \in W$、$a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$\pi(aw_1 + bw_2) = -\sum_{i \leq m} g(aw_1 + bw_2, e_i) e_i$$

∵ g の双線形性

$$= -\left\{ a \sum_{i \leq m} g(w_1, e_i) e_i + b \sum_{i \leq m} g(w_2, e_i) e_i \right\}$$

$$= a\pi(w_1) + b\pi(w_2)$$

であるため、π は線形写像である。

(ii) π の単射性について

(π が線形であるため、$\pi(w) = 0 \Rightarrow w = 0$ を示せばよい)

$\pi(w) = 0$ とすると、正規直交展開 (expansion) より w は

$$w = \sum_{j>m} g(w, e_j) e_j$$

$w \neq 0 \Rightarrow b(w, w) < 0$.

である. $w \in W$ より、

$$g(w, w) = g\Big(\sum_{j>m} g(w, e_j) e_j,\ \sum_{k>m} g(w, e_k) e_k\Big)$$

スカラー積 g の双線形性.

$$= \sum_{j>m} g(w, e_j)\, g\Big(e_j,\ \sum_{k>m} g(w, e_k) e_k\Big)$$

$$= \sum_{j>m} g(w, e_j) \sum_{k>m} g(w, e_k)\, g(e_j, e_k)$$

$$= \sum_{j>m} \sum_{k>m} g(w, e_j)\, g(w, e_k)\, \underbrace{g(e_j, e_k)}_{\begin{cases} \pm 1 & (j = k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases}}$$

$$= -\sum_{j>m} \underbrace{g(w, e_j)^2}_{\geq 0} \quad (j=k \text{ の場合のみ残る})$$

$$\leq 0.$$

したがって、全ての $j > m$ に対して $g(w, e_j) = 0$ である必要がある.

よって、$w = 0$ である.

(i)、(ii) より、部分空間 W の次元が π による像 S の次元と等しいことが分かる.

$$\dim(W) = \dim(\pi(W)) \leq \dim(S) = m$$

$$(\because \pi(W) \subseteq S)$$

よって、負の符号の数は m 以下 ($\nu \leq m$) であることが分かる.

以上より、$\nu \geq m$ から $\nu \leq m$ を示したので、$\nu = m$ である ∎

上の補題26 より、V の非退化部分空間 W に対して、

$$\mathrm{ind}\, V = \mathrm{ind}\, W + \mathrm{ind}\, W^{\perp}$$

である。補題25 の証明は、V に対して $V = W + W^{\perp}$ の直和に適合した

$\hookrightarrow v = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(v, e_i) e_i$ 正規直交基底の存在を示している。

$v \in V$

- V と $\overline{V}$ がそれぞれ、スカラー積 g と $\overline{g}$ を持つとする。線形変換 $T: V \to \overline{V}$ がスカラー積を保つには以下を満たす必要がある。

$$g(v, w) = \overline{g}(Tv, Tw), \quad {}^{\forall} v, w \in V$$

この場合、T は1対1（単射）である。
（$\because$ もし $Tv = 0$ とすると、$g(v, w) = \underset{\overline{g}(Tv, Tw)}{\underset{\shortparallel}{0}}$ が任意の w で成立するため、$v = 0$）

- T がスカラー積を保つための条件は、対応する二次形式が保たれる事と同値である。すなわち、

$$q(v) = \overline{q}(Tv), \quad {}^{\forall} v \in V$$

（　　　　）

- スカラー積を保つ線形同型（isomorphism）$T: V \to W$ は「線形等長変換（isometry）」と呼ばれる。
線形変換 $T: V \to W$ が線形等長変換であるための必要十分条件は、

$$\dim V = \dim W \text{ かつ } T \text{ がスカラー積（またはそれに等しい二次形式）を持つ}$$

である。

P52

27. Lemma

スカラー積空間 V と W が同じ次元とインデックスを持つことは、V と W の間に線形等長変換が存在することと同値である。

$\hookrightarrow \langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle$

Proof

(次元、インデックス。)

(i) $\Rightarrow$ を示す(仮定:同じ次元とインデックスを持つ)

不変量が同じであると仮定する。V に対しては $e_1, \cdots, e_n$ という正規直交基底を選び、W に対して $e_1', \cdots, e_n'$ という正規直交基底を選ぶ。補題26より、

$\hookrightarrow$ e_i と e_i' の符号が一致

$$\langle e_i, e_i \rangle = \langle e_i', e_i' \rangle \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

と仮定できる。そして、$T : V \longrightarrow W$ を次のような線形変換と定義する。

$$Te_i = e_i' . \cdots ①$$

① および $\langle e_i, e_j \rangle = \langle e_i', e_j' \rangle = \delta_{ij}$ より、

$$\langle Te_i, Te_j \rangle = \langle e_i', e_j' \rangle .$$

したがって、$T : V \longrightarrow W$ は線形等長変換(スカラー積を保つ)である。

(ii) $\Leftarrow$ を示す(仮定 $T : V \longrightarrow W$ が線形等長変換)

V の正規直交基底を $e_1, \cdots, e_n$ とする。T が線形等長変換である事から、Te_i は W のベクトルであり、

0, 1

$$\langle Te_i, Te_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \qquad \varepsilon_i \delta_{ij}$$

が成立する。そのため、$Te_1, \cdots, Te_n$ を W の正規直交基底として良い。よって $\dim V = \dim W$ である $\cdots ①$

補題26より、スカラー積空間 V の任意の正規直交基底の「負の符号の個数」は一致するため、$\mathrm{ind}\, V = \mathrm{ind}\, W$ である …②

①、② より V、W が同じ次元とインデックスを持つことを示した.

(i) (ii) より、同値関係を示した. ∎

$g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$: 対称双線形形式

$\{e_1, \cdots, e_n\}$: V の基底.

$$B = (b_{ij}) \quad (b_{ij} := g(e_i, e_j))$$

とすると. B : 対称行列 ($\Longrightarrow$ B は実固有値 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ をもつ. 対角化可能.)

(1) B : 正定値 (負) $\iff$ $\lambda_1, \cdots, \lambda_n > 0$ $(<)$

(2) B : 半正定値 (負) $\iff$ $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \geq 0$ $(\leq)$

(3) B : 非退化 $\iff$ $\det B \neq 0$

$\iff$ $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \neq 0$.

(4) $\mathrm{ind}(g) = \#\{i \in \{1, \cdots, n\} \mid \lambda_i < 0\}$

$\{e_1, \cdots, e_n\}$: V の基底

$B = (b_{ij}) \quad (b_{ij} := g(e_i, e_j))$

とすると、B : 対称行列 ($\Longrightarrow$ B は実固有値 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ をもち、対角化可能.)

(1) B : 正定値 (負) $\Longleftrightarrow$ $\lambda_1, \cdots, \lambda_n > 0$ $(<)$

(2) B : 半正定値 (負) $\Longleftrightarrow$ $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \geq 0$ $(\leq)$

(3) B : 非退化 $\Longleftrightarrow$ $\det B \neq 0$

$\Longleftrightarrow$ $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \neq 0$.

(4) $\mathrm{ind}(g) = \#\{i \in \{1, \cdots, n\} \mid \lambda_i < 0\}$

$\underline{n=2}$.

定値 $\Longleftrightarrow$ $\lambda_1 \lambda_2 > 0$

不定値 $\Longleftrightarrow$ $\lambda_1 \lambda_2 \leq 0$

v_i : λ_i に対する固有ベクトル

非退化かつ不定値 $\Longleftrightarrow$ $\lambda_1 \lambda_2 < 0$

$q(v) := g(v, v) : V \longrightarrow \mathbb{R}$: 連続.

$q : V \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ も連続.

$q(v_1) < 0,\ q(v_2) > 0 \Rightarrow \exists v \in V \setminus \{0\}$ s.t. $q(v) = 0$

$(\mathbb{R}^3, g)$ $\quad x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$g(x, y) = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2.$

$V_1 = \{ (0, s, t) \mid s, t \in \mathbb{R} \}$

$V_2 = \{ (s, t, 0) \mid s, t \in \mathbb{R} \}$

$V_3 = \{ (s, s, t) \mid s, t \in \mathbb{R} \}$

---

(1) V_1, V_2 : 非退化部分空間
(2) V_3 : 退化 〃

を示せ.

実は $\left\{ \begin{array}{l} \cdot\ g|_{V_1} : \text{正定値} \\ \cdot\ g|_{V_2} : \text{非退化不定値} \end{array} \right.$

となる.

示したいこと

$\neg \left(\begin{array}{l} v \in V_3 \text{ に対して} \\ g(v, w) = 0 \quad (\forall w \in V_3) \\ \Longrightarrow v = 0 \end{array} \right)$

つまり $\exists v \in V_3 \setminus \{0\}$ s.t.

$g(v, w) = 0 \quad (\forall w \in V_3)$

$v = (1, 1)$ とすると, $\forall w \in V_3$ に対して,

$w = (w_1, w_1)$ $(w_1 \in \mathbb{R})$ と表せて,

$g(v, w) = g((1, 1), (w_1, w_1))$

$= w_1 - w_1$

$= 0.$

$\therefore$ $g|_{V_3}$ は非退化でない.

$\therefore$ V_3 は退化部分空間.

$V = W \oplus W^{\perp}$ より

$$\boxed{\begin{array}{l} W \cap W^{\perp} = \{0\} \\ \Longrightarrow g|_{W} : 非退化 \end{array}}$$

$\because$ $v \in W$ に対して

$$\boxed{g(v, w) = 0 \quad ({}^{\forall} w \in W)} \quad — ※$$

とする．

※ より $v \in W^{\perp}$

$\therefore v \in W \cap W^{\perp} = \{0\}$.

よって $v = 0$.

$\therefore g|_{W}$ が非退化 //