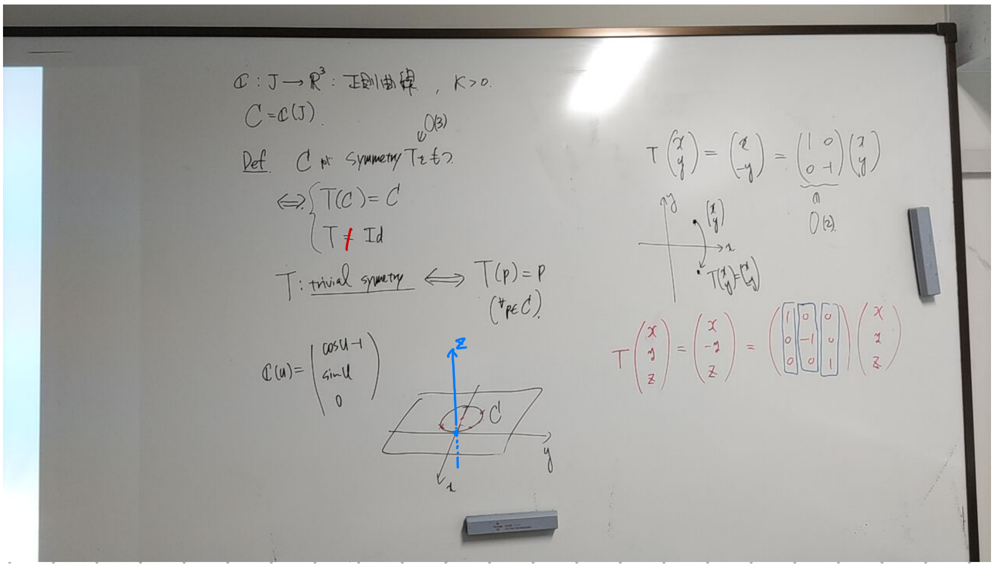
- Ex 6-3
- Appendix A
- T の例
- P5 （カスプ の 判定条件）
- Remark 4.4



Example 6.3

実数 a, b を $a>0$、$b\neq 0$ とする。
この時、

$$\mathbb{C}(u) := \left(a\cos\left(\frac{u}{c}\right) - a,\quad a\sin\left(\frac{u}{c}\right),\quad \frac{bu}{c} \right) \qquad (u\in\mathbb{R})$$

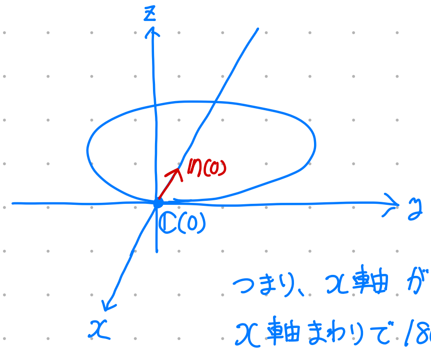
は、$c := \sqrt{a^2+b^2}$ として、定曲率 $\kappa = \frac{a}{c^2}$、定捩率 $\tau = \frac{b}{c^2}$ の らせん (helix) を与える。

らせん上の点 $0 := \mathbb{C}(0)$ において、$\mathbb{C}$ は

$$T(\mathbb{C}(\mathbb{R})) = \mathbb{C}(\mathbb{R}) \quad ☆$$

を満たす。ここで、$T\in SO(3)$ は原点 0 を通り、主法線単位ベクトル $n(0)$ に平行な直線を軸とする $180°$ 回転である。

☆



つまり、x軸が回転軸になる。
x軸まわりで$180°$回転を表す3次元回転行列 T は

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in SO(3) \quad \leftarrow \text{non-trivial symmetry}$$

検算 $\mathbb{C}(u) = \left(a\cos\left(\frac{u}{c}\right) - a,\ a\sin\left(\frac{u}{c}\right),\ \frac{bu}{c} \right)$ に対して、$T(\mathbb{C}(u))$ は

$$T(\mathbb{C}(u)) \underset{\text{第2,第3成分を}-1\text{倍}}{=} \left(a\cos\left(\frac{u}{c}\right) - a,\ -a\sin\left(\frac{u}{c}\right),\ -\frac{bu}{c} \right) = \mathbb{C}(-u).$$

従って、像集合は一致する（パラメータが u から $-u$ へ反転するだけ）ので、
$T(\mathbb{C}(\mathbb{R})) = \mathbb{C}(\mathbb{R})$ である。

$$\left(\begin{array}{l} \mathbb{C}(u) = (\cos u - 1,\ \sin u,\ \underline{0}) \text{ の場合、} \\ \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix},\quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \underline{-1} \end{pmatrix}}_{\text{trivial symmetry}} \end{array} \right)$$

である。⑤の両辺を u で微分すると、

フレネセレ公式より $(b' = -\tau n)$

(左辺): $\frac{d}{du}(b_1(u)) = b_1'(u) = -\tau_1(u)\, n_1(u)$

(右辺): $\frac{d}{du}(-\sigma T b_0(-u)) = -\sigma T \frac{d}{du}(b_0(-u)) = \sigma T b_0'(-u)$

σ、T は u に依存しない。

フレネセレ公式より

$= -\sigma T \tau_0(-u)\, n_0(-u)$

④より

$= -\sigma \tau_0(-u)\, n_1(u)$.

左辺と右辺が等しいので、$\tau_1(u) = \sigma \tau_0(-u)$ が成り立つ。(τ_i … C_i の捩率関数)

本文は $\tau_1(u) = -\sigma \tau_0(-u)$?

$$C_1(u) = T C_0(-u) \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$C_0(u)$ でらせんを考えると、

$$C_1(u) = T C_0(-u) = C_0(u)$$

Appendix A 一般化カスプの表示公式

平面曲線 $\sigma: J \longrightarrow R^2$ が $t=t_0$ で特異点を持つとは、

$$\dot{\sigma}(t_0) = 0 \quad \left(\dot{} = \frac{d}{dt} \right)$$

である事を指す. 特異点 $t=t_0$ が $\ddot{\sigma}(t_0) \neq 0$ のとき、この点を一般化カスプと呼ぶ.
次の2つの事実が知られている.

(i) $t=t_0$ がカスプである
$\iff \ddot{\sigma}(t_0)$ と $\dddot{\sigma}(t_0)$ が線形独立である.

(ii) ([15] 参照) $t=t_0$ が 5/2-カスプである
$\iff \ddot{\sigma}(t_0)$ と $\dddot{\sigma}(t_0)$ が線形従属で、

$$3\det\left(\ddot{\sigma}(t_0), \sigma^{(5)}(t_0)\right)\ddot{\sigma}(t_0) - 10\det\left(\ddot{\sigma}(t_0), \sigma^{(4)}(t_0)\right)\dddot{\sigma}(t_0) \neq 0$$

が成立する.

- 以下では $t_0 = 0$ とする. 弧長パラメータ

$\dot{\sigma}(0)=0$

$$S(t) := \int_0^t |\dot{\sigma}(u)|\, du$$

は $t=0$ で滑らかではないが、

$$\frac{ds}{dt} = |\dot{\sigma}(t)| \overset{t=0}{=} |\dot{\sigma}(0)| = 0 \quad \therefore \frac{ds}{dt} = \begin{cases} 0 & (t=0) \\ |\dot{\sigma}(t)| > 0 & (t \neq 0) \end{cases}$$

$$w := \mathrm{sgn}(t)\sqrt{|S(t)|}$$

を用いると $t=0$ 近傍のパラメータ表示となる ([17] で半弧長パラメータと呼ばれる). Fukui [3] に従い

$$v := \sqrt{2}\,w = \mathrm{sgn}(t)\left(2\left|\int_0^t |\dot{\sigma}(u)|\, du\right|\right)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{sgn}(t)\left(2\int_0^t |\dot{\sigma}(u)|\, du\right)^{\frac{1}{2}}$$

$\begin{cases} f_v(u,0) = 0,\ |f_u(u,0)| = 1,\ |f_{vv}(u,0)| = 1 \\ f_{vv}(u,0) \text{ と } f_u(u,0) \text{ が垂直.} \end{cases}$

を正規化半弧長パラメータと呼ぶ. これは適合座標系 (定義3.4) で $|f_{vv}| = 1$ となる性質と整合的であり、$\frac{v^2}{2}$ が弧長パラメータになることで特徴づけられる. ※

※ $S = \frac{v^2}{2} \iff |f_{vv}| = 1$

(i) $S = \frac{v^2}{2} \implies |f_{vv}| = 1$

(ii) $|f_{vv}| = 1 \implies S = \frac{v^2}{2}$

[17, Theorem 1.1] より、

$$\sigma(\nu) = \int_0^\nu u\left(\cos\underset{\lambda}{\theta(u)},\ \sin\underset{\lambda}{\theta(u)}\right)du, \qquad \underset{\lambda}{\theta(\nu)} := \int_0^\nu \hat{\mu}(u)\,du$$

と書ける.

Lemma A.1

ν を $w=0$ における一般化カスプ $\sigma(w)$ の正規化半弧長パラメータとする.
この時、向きを保つ R^2 の等長変換 T が存在して、

$$T\circ\sigma(\nu) = \left(\frac{\nu^2}{2} - \frac{\mu_0^2\nu^4}{8} - \frac{\mu_0\mu_1\nu^5}{10},\ \frac{\mu_0\nu^3}{3} + \frac{\mu_1\nu^4}{8} + \frac{(-\mu_0^3+2\mu_2)\nu^5}{30}\right) + O(\nu^5)$$

となる. ただし、

$$\hat{\mu}(\nu) = \sum_{j=0}^{2}\mu_j\nu^j + O(\nu^3) \quad \left(= \mu_0 + \mu_1\nu + \mu_2\nu^2 + O(\nu^3)\right)$$

である. $O(\nu^5)$ は ν^5 より高次項を表す.

Proof

$\theta(\nu) := \int_0^\nu \hat{\mu}(u)\,du$ であったので、$\hat{\mu}(u)$ を具体的に代入すると、

$$\theta(\nu) = \mu_0\nu + \frac{\mu_1}{2}\nu^2 + \frac{\mu_2}{3}\nu^3 + O(\nu^4) \quad \cdots ①$$

である. また、$\sin\theta$ と $\cos\theta$ をマクローリン展開すると、　　$\sigma(\nu) = \int_0^\nu u\left(\cos\theta(u),\ \sin\theta(u)\right)du$

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} + O(\nu^5) \quad \cdots ②$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} + O(\nu^4) \quad \cdots ③$$

である. ① より、θ^2、θ^3、θ^4、θ^5 を計算すると、

$$\begin{aligned}\theta^2 &= \left(\mu_0\nu + \frac{\mu_1}{2}\nu^2 + \frac{\mu_2}{3}\nu^3\right)^2 \\ &= \mu_0^2\nu^2 + \cancel{2}\mu_0\cancel{\nu}\cdot\frac{\mu_1}{\cancel{2}}\nu^{3} + \left(\frac{2\mu_0\mu_2}{3} + \frac{\mu_1^2}{4}\right)\nu^4 + O(\nu^4) \quad \cdots ④\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta^3 &= \left(\mu_0\nu + \frac{\mu_1}{2}\nu^2 + \frac{\mu_2}{3}\nu^3\right)^3 \\ &= \mu_0^3\nu^3 + \frac{\mu_0^2\mu_1}{2}\nu^4 + \left(\frac{\mu_0^2\mu_2}{3} + \frac{\mu_0\mu_1^2}{4}\right)\nu^5 + O(\nu^5) \quad \cdots ⑤\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta^4 &= \left(\mu_0\nu + \frac{\mu_1}{2}\nu^2 + \frac{\mu_2}{3}\nu^3\right)^4 \\ &= \mu_0^4\nu^4 + O(\nu^4) \quad \cdots ⑥\end{aligned}$$

$$\theta^5 = \left(\mu_0 v + \frac{\mu_1}{2}v^2 + \frac{\mu_2}{3}v^3\right)^5$$
$$= \mu_0^5 v^5 + O(v^5) \cdots ⑦$$

② に ⑤.⑦ を代入、③ に ④.⑥ を代入して

$$\sin\theta = \left(\mu_0 v + \frac{\mu_1}{2}v^2 + \frac{\mu_2}{3}v^3\right)$$
$$- \frac{1}{6}\left\{\mu_0^3 v^3 + \frac{\mu_0^2\mu_1}{2}v^4 + \left(\frac{\mu_0^2\mu_2}{3} + \frac{\mu_0\mu_1^2}{4}\right)v^5\right\}$$
$$+ \frac{1}{120}\mu_0^2 v^5 + O(v^5)$$

$$= \mu_0 v + \frac{\mu_1}{2}v^2 + \left(\frac{\mu_2}{3} - \frac{\mu_0^3}{6}\right)v^3 - \frac{\mu_0^2\mu_1}{12}v^4$$
$$+ \left\{\frac{\mu_0^2}{120} - \frac{1}{6}\left(\frac{\mu_0^2\mu_2}{3} + \frac{\mu_0\mu_1^2}{4}\right)\right\}v^5 + O(v^5) \quad \cdots ⑧$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}\left\{\mu_0^2 v^2 + \mu_0\mu_1 v^3 + \left(\frac{2\mu_0\mu_2}{3} + \frac{\mu_1^2}{4}\right)v^4\right\}$$
$$+ \frac{1}{24}\mu_0^4 v^4 + O(v^4)$$

$$= 1 - \frac{\mu_0^2}{2}v^2 - \frac{\mu_0\mu_1}{2}v^3 + \left\{\frac{\mu_0^4}{24} - \frac{1}{2}\left(\frac{2\mu_0\mu_2}{3} + \frac{\mu_1^2}{4}\right)\right\}v^4 + O(v^4). \cdots ⑨$$

$\sigma(v) = \left(\int_0^v u\cos\theta(u)\,du,\ \int_0^v u\sin\theta(u)\,du\right)$ なので、$\sigma(v)$ の第一成分、第二成分を計算すると

・第一成分：$u\cos\theta(u) \overset{⑨より}{=} u - \frac{\mu_0^2}{2}u^3 - \frac{\mu_0\mu_1}{2}u^4$
$$+ \left\{\frac{\mu_0^4}{24} - \frac{\mu_0\mu_2}{3} - \frac{\mu_1^2}{8}\right\}u^5$$ より.

$$\int_0^v u\cos\theta(u)\,du = \int_0^v u - \frac{\mu_0^2}{2}u^3 - \frac{\mu_0\mu_1}{2}u^4 + \left\{\frac{\mu_0^4}{24} - \frac{\mu_0\mu_2}{3} - \frac{\mu_1^2}{8}\right\}u^5\,du$$
$$= \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu_0^2}{8}v^4 - \frac{\mu_0\mu_1}{10}v^5 + O(v^5)$$

・第二成分：$u\sin\theta(u) \overset{⑧より}{=} \mu_0 u^2 + \frac{\mu_1}{2}u^3 + \left(\frac{\mu_2}{3} - \frac{\mu_0^3}{6}\right)u^4 - \frac{\mu_0^2\mu_1}{12}u^5 + O(u^5)$ より.

$$\int_0^v u\sin\theta(u)\,du = \frac{\mu_0}{3}v^3 + \frac{\mu_1}{8}v^4 + \frac{2\mu_2 - \mu_0^3}{30}v^5 + O(v^5)$$

$\sigma(v)$ は Lemma の形で表せた.

$\mathbb{R}^2$の向きを保つ等長変換Tを

$$T(\sigma) = \begin{bmatrix} \cos 2\pi & -\sin 2\pi \\ \sin 2\pi & \cos 2\pi \end{bmatrix} \sigma + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(= \mathrm{Id})$$

とすれば、$\cancel{R} \circ \cancel{T(\sigma)}$ $T \circ \sigma(v)$ $= \left(\frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu_0^2}{8} v^4 - \frac{\mu_0 \mu_1}{10} v^5, \right.$

$$\left. \frac{\mu_0}{3} v^3 + \frac{\mu_1}{8} v^4 + \frac{2\mu_2 - \mu_0^3}{30} v^5 \right)$$ となる。▨

平面の向きを保つ等長変換は、

$$T(\sigma) = \underset{\text{回転}}{R} \sigma + \underset{\text{平行移動}}{a} \quad (R \in SO(2),\ a \in \mathbb{R}^2)$$

$T(\sigma)$ の v による微分を考えると、

$$\frac{d}{dv}(T(\sigma)) = \frac{d}{dv}(R\sigma(v)) + \underbrace{\frac{d}{dv}(a)}_{=0}$$

$$= R \frac{d}{dv}(\sigma(v))$$

$$= R \dot{\sigma}(v) \quad (k\text{階微分 } \sigma^{(k)}(v) \text{ に 回転} R \text{を掛けただけ})$$

Lemma A.1 と (i)(ii) (カスプ、5/2-カスプの判定条件) を用いることで、次の命題が示せる.

Proposition A.2

v を $w=0$ における一般化カスプ $\sigma(w)$ の正規化半弧長パラメータとする. この時、

(1) $w=0$ は σ の カスプである

$\Longleftrightarrow \mu_0 \neq 0$ である

(2) $w=0$ は σ の 5/2-カスプである

$\Longleftrightarrow \mu_0 = 0$ かつ $\mu_2 \neq 0$ である

特筆すべきは、係数 μ_1 が 5/2-カスプの判定に影響しない点である.
5/2-カスプの場合は $\mu_0=0$ となり、この時

- μ_2 は 2次カスプ曲率 (secondary cuspidal curvature) に比例
- μ_1 は $t=0$ における曲線 $\sigma(t)$ の バイアス に比例

という幾何学的性質を持つ.
(5/2-カスプに対するこれら2つの不変量の意味については[6. proposition 2.2] 参照)

$\ddot{\sigma}(0)$ と $\dddot{\sigma}(0)$ が 線形独立 / 従属
$\Longleftrightarrow R\ddot{\sigma}(0)$ と $R\dddot{\sigma}(0)$ が 線形独立 / 従属
$\Longleftrightarrow (T\circ\sigma)''(0)$ と $(T\circ\sigma)'''(0)$ が 線形独立 / 従属

(i) $t=t_0$ が カスプである
$\Longleftrightarrow \ddot{\sigma}(t_0)$ と $\dddot{\sigma}(t_0)$ が 線形独立である

(ii) ([15] 参照) $t=t_0$ が 5/2-カスプである
$\Longleftrightarrow \ddot{\sigma}(t_0)$ と $\dddot{\sigma}(t_0)$ が 線形従属で、

$$3\det\left(\ddot{\sigma}(t_0), \sigma^{(5)}(t_0)\right)\dddot{\sigma}(t_0) - 10\det\left(\ddot{\sigma}(t_0), \sigma^{(4)}(t_0)\right)\dddot{\sigma}(t_0) \neq 0$$

が成立する.

Proof

Lemma A.1 より、

$$T\circ\sigma(v) = \left(\frac{v^2}{2} - \frac{\mu_0^2 v^4}{8} - \frac{\mu_0\mu_1 v^5}{10},\ \frac{\mu_0 v^3}{3} + \frac{\mu_1 v^4}{8} + \frac{(-\mu_0^3+2\mu_2)v^5}{30}\right) + O(v^5)$$

であるので、$\dot{\sigma}$ と $\dddot{\sigma}$ を計算すると、

$$\dot{\sigma}(v) = \left(v - \frac{\mu_0^2 v^3}{2} - \frac{\mu_0\mu_1 v^4}{2},\ \mu_0 v^2 + \frac{\mu_1 v^3}{2} + \frac{(-\mu_0^3+2\mu_2)v^4}{6}\right)$$

$$\ddot{\sigma}(v) = \left(1 - \frac{3\mu_0^2 v^2}{2} - 2\mu_0\mu_1 v^3,\ 2\mu_0 v + \frac{3\mu_1 v^2}{2} + \frac{2(-\mu_0^3+2\mu_2)v^3}{3}\right)$$

$$\dddot{\sigma}(v) = \left(-3\mu_0^2 v - 6\mu_0\mu_1 v^2,\ 2\mu_0 + 3\mu_1 v + 2(-\mu_0^3+2\mu_2)v^2\right)$$

である. 今回、$\sigma(w)|_{w=0}$ を考えているので、$\ddot{\sigma}(0)$ と $\dddot{\sigma}(0)$ はそれぞれ

$$\ddot{\sigma}(0) = (1, 0) \quad \cdots (2.1)$$

$$\dddot{\sigma}(0) = (0, 2\mu_0) \quad \cdots (2.2)$$

カスプの判定条件

となる. $\ddot{\sigma}(0)$ と $\dddot{\sigma}(0)$ が線形独立である $\Longleftrightarrow$ $\cancel{2}\mu_0 \neq 0$. … ★

（線形従属である $\Longleftrightarrow$ $\mu_0 = 0$.）

σ の4階微分、5階微分を計算すると、

$$\sigma^{(4)}(v) = \left(-3\mu_0^2 - 12\mu_0\mu_1 v,\ 3\mu_1 + 4(-\mu_0^3 + 2\mu_2)v\right)$$

$$\sigma^{(5)}(v) = \left(-12\mu_0\mu_1,\ 4(-\mu_0^3 + 2\mu_2)\right)$$

$$\therefore \sigma^{(4)}(0) = \left(-3\mu_0^2,\ 3\mu_1\right) \cdots (2.3),\quad \sigma^{(5)}(0) = \left(-12\mu_0\mu_1,\ 4(-\mu_0^3 + 2\mu_2)\right) \cdots (2.4)$$

である. ここから行列式 $\det(\ddot{\sigma}(0), \sigma^{(5)}(0))$ と $\det(\ddot{\sigma}(0), \sigma^{(4)}(0))$ を計算すると、

$$\det(\ddot{\sigma}(0), \sigma^{(5)}(0)) \overset{(2.1)(2.4)より}{=} \begin{vmatrix} 1 & -12\mu_0\mu_1 \\ 0 & 4(-\mu_0^3 + 2\mu_2) \end{vmatrix}$$

$$= 4(-\mu_0^3 + 2\mu_2)$$

$$\det(\ddot{\sigma}(0), \sigma^{(4)}(0)) \overset{(2.1)(2.3)より}{=} \begin{vmatrix} 1 & -3\mu_0^2 \\ 0 & 3\mu_1 \end{vmatrix}$$

$$= 3\mu_1$$

となる. 判定条件の式に代入すると、

$$3\det(\ddot{\sigma}(0), \sigma^{(5)}(0))\ddot{\sigma}(0) - 10\det(\ddot{\sigma}(0), \sigma^{(4)}(0))\dddot{\sigma}(0)$$

$$= 12(-\mu_0^3 + 6\mu_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 30\mu_1\begin{pmatrix} 0 \\ 2\mu_0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -\mu_0^3 + 6\mu_2 \neq 0 \\ \text{または} \\ \mu_1\mu_2 \neq 0 \end{cases} \cdots (2.5)$$

である. $\ddot{\sigma}(0)$ と $\dddot{\sigma}(0)$ が線形従属である $\Longleftrightarrow$ $\mu_0 = 0$ であるため、(2.5) とまとめた同値条件は、

$\ddot{\sigma}(0)$ と $\dddot{\sigma}(0)$ が線形従属かつ $3\det(\ddot{\sigma}(0), \sigma^{(5)}(0))\ddot{\sigma}(0) - 10\det(\ddot{\sigma}(0), \sigma^{(4)}(0))\dddot{\sigma}(0) \neq \mathbf{0}$

$$\Longleftrightarrow \mu_0 = 0 \text{ かつ } \left(\begin{matrix} \mu_2 \neq 0 \\ \text{または} \\ \mu_1\mu_2 \neq 0 \end{matrix}\right).$$

$\begin{pmatrix} \mu_2 \neq 0 \\ \text{または} \\ \mu_1\mu_2 \neq 0 \end{pmatrix}$ 内は、$\mu_2 \neq 0$ であれば必ず真となる（μ_1 の値は影響しない）ため、

5/2-カスプの判定条件

$\ddot{\sigma}(0)$ と $\dddot{\sigma}(0)$ が 線形従属

かつ

$$3\det\left(\ddot{\sigma}(0), \sigma^{(5)}(0)\right)\ddot{\sigma}(0) - 10\det\left(\ddot{\sigma}(0), \sigma^{(4)}(0)\right)\dddot{\sigma}(0) \neq 0$$

$\Longleftrightarrow \mu_0 = 0$ かつ $\mu_2 \neq 0$ である。… ☆☆

☆、☆☆ より、命題(1)(2) をそれぞれ示した ■

4章 一般化カスプ辺の表現公式

※4.5章を m-type edge に一般化できるか？

- 本章では $J=[-l,l]$ $(l>0)$ を設定する.

  $\mathbb{C}: J \to \mathbb{R}^3$ を弧長パラメータによる埋め込み(embedding)として、曲率関数 $\kappa(u)$ が至る所で正とする.

  $\mathbb{e}(u) := \mathbb{C}'(u)$ とする. C を $\mathbb{C}$ の像とする.

  さらに、$\mathbb{n}(u)$ と $\mathbb{b}(u)$ をそれぞれ $\mathbb{C}(u)$ の単位主法線ベクトル、単位従法線(binormal)ベクトル場とする.

- 充分小さい正数 $\varepsilon > 0$ を固定して、写像 $f(u,v)$ を定義する.

$$f(u,v) := \mathbb{C}(u) + (A(u,v),\ B(u,v))\begin{pmatrix}\cos\theta(u) & -\sin\theta(u)\\ \sin\theta(u) & \cos\theta(u)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbb{n}(u)\\ \mathbb{b}(u)\end{pmatrix} \qquad (4.1)$$

ここで $u \in J$ かつ $|v| < \delta$ であり、$A(u,v)$ と $B(u,v)$ は C^r 級関数で、次の条件を満たす:

$$A(u,0) = A_v(u,0) = 0,$$
$$A_{vv}(u,0) \neq 0.$$
$$B(u,0) = B_v(u,0) = B_{vv}(u,0) = 0.$$

$$\begin{pmatrix} A_v = v\,\alpha(u,v) \\ B_v = v^2 \beta(u,v)\end{pmatrix} \qquad A_{vv}(u,0) = \alpha(u,0) \neq 0$$

この時、C に沿う任意の一般化カスプ辺 $g(u,v)$ は このような写像 $f(u,v)$ の1つと右同値であることが容易に確認できる.

$\exists \varphi$ s.t. $g = f\circ\varphi$

$\begin{cases} g(u,0) = \mathbb{C}(u) \\ g \text{ の特異集合}: v=0 \end{cases}$

- ※ さらに、もし $B_{vvv}(u,0) \neq 0$ ならば、f は C に沿うカスプ辺となる. → カスプ辺の判定条件

  関数 $\theta(u)$ は、$\mathbb{C}(u)$ におけるカスプ角(cuspidal angle)と呼ばれる.

※ $B_{vvv}(u,0) \neq 0 \implies f$ は C に沿うカスプ辺 (つまり、$C = \mathbb{C}(J)$ 上の点は全てカスプ辺に対応)

$$f(u,v) = \mathbb{C}(u) + (A(u,v),\ B(u,v))\underbrace{\begin{pmatrix}\cos\theta(u) & -\sin\theta(u)\\ \sin\theta(u) & \cos\theta(u)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbb{n}(u)\\ \mathbb{b}(u)\end{pmatrix}}_{=:\begin{pmatrix}\mathbb{n}_\theta(u)\\ \mathbb{b}_\theta(u)\end{pmatrix}\text{ とおく.}}$$

$$f_u(u,v) = \underset{\mathbb{e}(u)}{\mathbb{C}'(u)} + (A_u \mathbb{n}_\theta(u) + B_u \mathbb{b}_\theta(u)) + (A\,\mathbb{n}_\theta'(u) + B\,\mathbb{b}_\theta'(u))$$

$$f_v(u,v) = A_v \mathbb{n}_\theta(u) + B_v \mathbb{b}_\theta(u) \qquad \therefore f_v(u,0) = \mathbb{0}.$$

$$f_{vv}(u,v) = A_{vv}(u,v)\,\mathbb{n}_\theta(u) + B_{vv}(u,v)\,\mathbb{b}_\theta(u)$$
$$f_{vvv}(u,v) = A_{vvv}(u,v)\,\mathbb{n}_\theta(u) + B_{vvv}(u,v)\,\mathbb{b}_\theta(u)$$

$f_{vvv}(u,0) = A_{vvv}(u,0)\, n_\theta(u) + B_{vvv}(u,0)\, b_\theta(u)$

↳ $n(u)\sin\theta(u) + b(u)\cos\theta(u)$

また、カスプ辺の判定条件は、

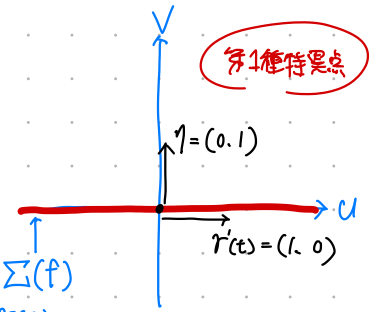
$f : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (フロンタル) が 点 $p = \gamma(0)$ に カスプ辺を持つ

特異曲線

$\Longleftrightarrow$ ・f が p で波面 かつ

・特異方向 $\gamma'(0)$ と 退化ベクトル $\eta(0)$ が 一次独立

第1種特異点



$\Sigma(f)$

$= \gamma(t)$

$= (u(t), v(t))$

$= (t, 0)$

特異点をもつ曲線と曲面の微分幾何学

P14?

- 与えられた平面曲線 $\gamma(t)$ が $t = c$ に カスプを持つための条件は、

  ∘ $\gamma'(c) = 0$ かつ

  ∘ $\det(\gamma''(c), \gamma'''(c)) \neq 0$

Remark 4.4　$(\kappa > 0)$

弧長パラメータ u でパラメータ表示された空間曲線 $\mathbb{C}_0(u)$ を、区間 $J := [-\ell, \ell]$ $(\ell > 0)$ 上に取る。
その曲率関数・捩率関数をそれぞれ $\kappa(u)$、$\tau(u)$ とする。また、$\mathbb{C}_0(0) = \mathbb{0}$ とする。

$C := \mathbb{C}_0(J)$ が non-trivial symmetry T を持つとして、$\mathbb{0}$ が C の中点かつ T によって不動であるので、$T \in O(3)$ とみなせる。

$\sigma := \det(T) \in \{-1, 1\}$ とおく。ここで、

$$T\mathbb{C}_0(u) = \mathbb{C}_0(-u)$$

$$\downarrow \times T$$

$$\underbrace{T^2}_{= Id}\mathbb{C}_0(u) = \underbrace{T\mathbb{C}_0(-u)}_{= \mathbb{C}_1(u)}$$

$$\mathbb{C}_1(u) := T\mathbb{C}_0(-u)$$

と定めると、$\mathbb{C}_1(u)$ は曲率関数 $\kappa(u)$、捩率関数 $\sigma\tau(u)$ を持つ空間曲線となる。

☆ 次で $\kappa_1(u) = \kappa_0(-u)$、　☆ $\tau_1(u) = +\sigma\tau_0(-u)$ と書かれている？

$i = 0, 1$ に対し、

$$\mathbb{e}_i(u) := \mathbb{C}_i'(u), \quad \mathbb{n}_i(u), \quad \mathbb{b}_i(u)$$

をそれぞれ $\mathbb{C}_i(u)$ の単位接ベクトル、単位主法線ベクトル、単位従法線ベクトルとする。
$T \circ \mathbb{C}_0(-u) = \mathbb{C}_1(u)$ の両辺をそれぞれ u で微分すると、

1階微分

$$(\text{左辺}) : \frac{d}{du}\left(T \circ \mathbb{C}_0(-u)\right) = T\frac{d}{du}\left(\mathbb{C}_0(-u)\right) = -T\mathbb{C}_0'(-u) = -T\mathbb{e}_0(-u)$$

$$(\text{右辺}) : \frac{d}{du}\left(\mathbb{C}_1(u)\right) = \mathbb{C}_1'(u) = \mathbb{e}_1(u)$$

両辺が等しいので、$T\mathbb{e}_0(-u) = -\mathbb{e}_1(u)$ である。①

2階微分

$$(\text{左辺}) : \frac{d}{du}\left(T\mathbb{e}_0(-u)\right) = T\frac{d}{du}\left(\mathbb{e}_0(-u)\right) = T\left(-\mathbb{e}_0'(-u)\right) \xrightarrow{\text{フレネセレ公式より}} = -T\kappa_0(-u)\mathbb{n}_0(-u)$$

$$(\text{右辺}) : \frac{d}{du}\left(-\mathbb{e}_1(u)\right) = -\mathbb{e}_1'(u) \underset{\text{フレネセレ公式より}}{=} -\kappa_1(u)\mathbb{n}_1(u)$$

両辺が等しいので、$\kappa_0(-u)T\mathbb{n}_0(-u) = \kappa_1(u)\mathbb{n}_1(u)$ である。②

また、② の両辺のノルムを取ると、「T が直交行列 $\Longleftrightarrow$ T は等長変換」、$\mathbb{n}_0$ と $\mathbb{n}_1$ は単位ベクトルであるので、

$$\|\kappa_0(-u)T\mathbb{n}_0(-u)\| = \|\kappa_1(u)\mathbb{n}_1(u)\| \Longrightarrow |\kappa_0(-u)| = |\kappa_1(u)|.$$

$\|\mathbb{n}_0(-u)\| = 1$
$\|\mathbb{n}_1(u)\| = 1$
$\|T\mathbb{n}_0(-u)\| = \|\mathbb{n}_0(-u)\|$

4章では κ は常に正と仮定しているので、
絶対値が外れて $\kappa_0(-u) = \kappa_1(u)$ である。③

② に $\kappa_0(-u) = \kappa_1(u)$ を代入して、両辺 $\kappa_0(-u)$ で割ると、$T\mathbb{n}_0(-u) = \mathbb{n}_1(u)$ である。④

次に、
$\sigma = \det(T) = \pm 1$ であるから、

①.④より

$$\underline{b_1(u)} = e_1(u) \times n_1(u) = -Te_0(-u) \times Tn_0(-u)$$

$Tx \times Ty = \underbrace{\det(T)}_{=\sigma} T(x \times y)$

$$= -\sigma T\left(e_0(-u) \times n_0(-u)\right)$$

$$\underline{= -\sigma T b_0(-u)} \quad ⑤$$

$b_1(u) = -\sigma T b_0(-u)$

$(b_0 = -\sigma T b_1 \ ?)$

両辺 T 倍 と $T^2 = Id$ で式変形した

である. ⑤ の両辺を u で微分すると、

フルネセレ公式より $(b' = -\tau n)$

$$(\text{左辺}) : \frac{d}{du}(b_1(u)) = b_1'(u) = -\tau_1(u) n_1(u)$$

$$(\text{右辺}) : \frac{d}{du}(-\sigma T b_0(-u)) = -\sigma T \frac{d}{du}(b_0(-u)) = \sigma T b_0'(-u)$$

σ, T は u に依存しない.

フルネセレ公式より

$$= -\sigma T \tau_0(-u) n_0(-u)$$

④より

$$= -\sigma \tau_0(-u) n_1(u).$$

左辺と右辺が等しいので、$\tau_1(u) = \sigma \tau_0(-u)$ が成り立つ. (τ_i … c_i の捩率関数)

(本文は $\tau_1(u) = -\sigma \tau_0(-u)$?)

• $i = 0, 1$ に対して、f_i を

$$f_i := c_i + (A_i, B_i)\begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_i \\ b_i \end{pmatrix}$$

と定義し、さらに A, B, θ について

$$A_0(-u, t) = A_1(u, t), \quad B_0(-u, t) = -\sigma B_1(u, t), \quad \theta_0(-u) = -\sigma\theta_1(u)$$

を仮定する. すると、$T \circ f_0(-u, t)$ は

$$T \circ f_{\#}(u, t) = f_1(u, t)$$

$T \circ f_0(-u, t)$

$$= Tc_0(-u) + (A_0(-u, t), B_0(-u, t))\begin{pmatrix} \cos\theta_0(-u) & -\sin\theta_0(-u) \\ \sin\theta_0(-u) & \cos\theta_0(-u) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Tn_0(-u) \\ Tb_0(-u) \end{pmatrix}$$

$c_1(u)$ の定義より

④.⑤より

$$= c_1(u) + (A_1(u, t), -\sigma B_1(u, t))\begin{pmatrix} \cos(-\cancel{\sigma}\theta_1(u)) & -\sin(-\sigma\theta_1(u)) \\ \sin(-\sigma\theta_1(u)) & \cos(-\cancel{\sigma}\theta_1(u)) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1(u) \\ -\sigma b_1(u) \end{pmatrix}$$

実際に計算すると等しい.

$$= c_1(u) + (A_1(u, t), B_1(u, t))\begin{pmatrix} \cos\theta_1(u) & -\sin\theta_1(u) \\ \sin\theta_1(u) & \cos\theta_1(u) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1(u) \\ b_1(u) \end{pmatrix}$$

$= f_1(u, t).$

が成り立つ. 特に、f_0 と f_1 は同じ第一基本量を持つ.
さらに、

⑥③ 等長双対の性質(iii)

(a) $T \in SO(3)$ の場合、f_1 のカスプ角は f_0 のカスプ角と符号が反対になる.

$T \in SO(3) \Leftrightarrow T$ は回転行列 $\Leftrightarrow \sigma (= \det T) = 1.$

等長双対(isometric dual)の一意性(定理3.8)より、

$\check{f}_0$ が f_0 と一致する

$$\check{f}_0(u, t) = f_1(u, t) = T \circ f_0(-u, t)$$

である. f_1 は f_0 の faithful isomer (すなわち、等長双対) となる.
→(第一基本量が一致する diffeo 存在、曲線 C をたどる向きが一致)

(b) $T \in O(3) \setminus SO(3)$ の場合、f_1 のカスプ角は f_0 のカスプ角と一致する. このとき、

$$f_0(u, t) = f_1(u, t) = T \circ f_0(-u, t)$$

$T \in O(3) \setminus SO(3) \Leftrightarrow T$ は反転を含む $\Leftrightarrow \sigma = -1$

となり、f_0 の像は T によって不変である.

定理 3.8 を使っている

Remark 4.5. Let $f(u,t)$ be a generalized cuspidal edge associated to the data

$$(\kappa(u), \tau(u), \theta(u), \hat{\mu}(u,t)).$$

Then $f_\#(u,t) := f(-u,t)$ is also a generalized cuspidal edge along the same space curve as f but with the reversed orientation. If we set $\mathbf{c}_\#(u) := \mathbf{c}(-u)$, then $\mathbf{c}_\#(u) = f_\#(u,0)$ holds. By a similar calculation like as in Remark 4.4, one can easily verify that $(\kappa(-u), -\tau(-u), -\theta(-u), \hat{\mu}(-u,t))$ gives the fundamental data of $f_\#(u,t)$.

Remark 4.5

… u の符号を反転

$f(u, t)$ をデータ $(\kappa(u), \tau(u), \theta(u), \hat{\mu}(u, t))$ に関する一般化カスプ辺とする. この時、$f_\#(u, t) := f(-u, t)$ も、f と同じ空間曲線に沿った一般化カスプ辺である. ただし、向きは反転する.

また、$C_\#(u) := C(-u)$ とおくと、$f_\#(u, 0) = C_\#(u)$ が成り立つ. Remark 4.4 と類似の計算を行うことで、$f_\#(u, t)$ の基本データは

$$(\kappa(-u), -\tau(-u), -\theta(-u), \hat{\mu}(-u, t))$$

※

である事が分かる.

※ $f_\#(u,t) = f(-u,t)$ であるので、式(4.1) の (u,v) を $(-u,t)$ に置き換えて、

$$f_\#(u,t) = \overset{\mathbb{C}_\#(u)}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{C}(-u)}} + \big(A(-u,t),\ B(-u,t)\big)\begin{pmatrix}\cos\theta(-u) & -\sin\theta(-u) \\ \sin\theta(-u) & \cos\theta(-u)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} n(-u) \\ b(-u)\end{pmatrix}.$$

(i) 曲率 $\kappa_\#$ について

$\underset{\mathbb{C}(-u)}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{C}_\#(u)}}$ に対応する曲率を $\kappa_\#(u)$ とおくと、

$$\kappa_\#(u) \underset{\text{曲率の定義}}{=} \left|\frac{d^2}{du^2}\mathbb{C}(-u)\right| = \left|\mathbb{C}''(-u)\right| = \kappa(-u)$$

である。

(ii) 捩率 $\tau_\#$ について

$\underset{\mathbb{C}(-u)}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{C}_\#(u)}}$ に対応する捩率を $\tau_\#(u)$ とおくと、捩率の定義より

$$\tau_\#(u) = -\frac{d}{du}\underbrace{\big(b(-u)\big)}_{b_\#(u)} \cdot n(-u) \quad (\because f_\# \text{に対応する空間曲線は } \mathbb{C}(-u))$$

である。$\dfrac{d}{du}\big(b(-u)\big) = -b'(-u)$ であるため、上式は

$$\begin{aligned}\tau_\#(u) &= b'(-u)\cdot n(-u) \\ &= -\big(-b'(-u)\cdot n(-u)\big) \\ &= -\tau(-u)\end{aligned}$$

である。

$$\boxed{f_\#(u,t) = \mathbb{C}(-u) + \big(A(-u,t),\ B(-u,t)\big)\begin{pmatrix}\cos\theta(-u) & -\sin\theta(-u) \\ \sin\theta(-u) & \cos\theta(-u)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} n(-u) \\ b(-u)\end{pmatrix}.}$$

(iii) カスプ角 $\theta_\#$ について

$$n_\#(u) = n(-u),\quad b_\#(u) = \underset{\frac{d}{du}(\mathbb{C}(-u))}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{e}_\#(u)}} \times n_\#(u) = \overset{-\mathbb{e}(-u)}{\overset{\shortparallel}{-\mathbb{C}'(-u)}} \times n(-u) = -b(-u) \text{ であるため、}$$

上の $f_\#(u,t)$ の式に代入すると

$$\begin{aligned} f(-u,t) = f_\#(u,t) &= \overset{\mathbb{C}_\#(u)}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{C}(-u)}} + \big(A(-u,t),\ B(-u,t)\big)\begin{pmatrix}\cos\theta(-u) & -\sin\theta(-u) \\ \sin\theta(-u) & \cos\theta(-u)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_\#(u) \\ -b_\#(u)\end{pmatrix} \\ &= \mathbb{C}(-u) + \big(A(-u,t),\ B(-u,t)\big)\begin{pmatrix}\cos\theta(-u) & -\sin\theta(-u) \\ \sin\theta(-u) & \cos\theta(-u)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_\#(u) \\ b_\#(u)\end{pmatrix} \\ &= \underset{\mathbb{C}_\#(u)}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{C}(-u)}} + \underset{A_\#(u,t),\ B_\#(u,t)\ ?}{\big(A(-u,t),\ B(-u,t)\big)}\underset{=:\begin{pmatrix}\cos\theta_\#(u) & -\sin\theta_\#(u) \\ \sin\theta_\#(u) & \cos\theta_\#(u)\end{pmatrix}\ ?}{\begin{pmatrix}\cos\theta(-u) & \sin\theta(-u) \\ \sin\theta(-u) & -\cos\theta(-u)\end{pmatrix}}\begin{pmatrix} n_\#(u) \\ b_\#(u)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\mathbb{C}(u) = \begin{pmatrix} a\left(\cos\frac{u}{c} - 1\right) \\ a\sin\frac{u}{c} \\ b\frac{u}{c} \end{pmatrix}$$

→ 回転行列の形は変えずに、

$\begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$ は $(A(-u,t), B(-u,t))$ に

吸収させる。

計算

$$f_\#(u,t) = C_\#(u) + \left(A(-u,t), \underbrace{-}_{\text{マイナスが付く。}} B(-u,t)\right) \begin{pmatrix} \cos\theta(-u) & \sin\theta(-u) \\ -\sin\theta(-u) & \cos\theta(-u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_\#(u) \\ b_\#(u) \end{pmatrix}$$

(iv) $\hat{\mu}_\#$ について

$f_\#(u,t)$ に対応する $\hat{\mu}$ を $\hat{\mu}_\#(u,t)$ とおく. Proposition 4.3 より,

$$\begin{bmatrix} \cos\theta(u) & -\sin\theta(u) \\ \sin\theta(u) & \cos\theta(u) \end{bmatrix}$$

$$f(u,t) = \mathbb{C}(u) + (A(u,t),\ B(u,t))\, R_{\theta(u)} \begin{pmatrix} n(u) \\ b(u) \end{pmatrix} \quad \cdots (4.5)$$

$$\sigma(t) = (A(u,t),\ B(u,t)) = \int_0^t v(\cos\lambda(u,v),\ \sin\lambda(u,v))\,dv,\quad \lambda(u,t) := \int_0^t \hat{\mu}(u,v)\,dv \quad \cdots (4.6)$$

である. ここで $\lambda_\#(u,t) := -\lambda(-u,t)$ とおくと, 式(4.6) そのままの形で

$$(A(-u,t),\ -B(-u,t)) = \int_0^t v(\cos\lambda_\#(u,v),\ \sin\lambda_\#(u,v))\,dv$$

$$\lambda_\#(u,t) = \int_0^t \hat{\mu}_\#(u,v)\,dv \quad \cdots ☆$$

と書ける. ☆ を両辺 t で微分すると,

$$\hat{\mu}_\#(u,t) = \frac{\partial\lambda_\#(u,t)}{\partial t} = \frac{-\partial\lambda(-u,t)}{\partial t} = -\hat{\mu}(-u,t)$$

$\lambda_\#(u,t) = -\lambda(-u,t)$　　$\lambda(-u,t) = \int_0^t \hat{\mu}(-u,v)\,dv$ より

である.

$\sigma(t)$ は上の定義.

$$\sigma'(t) = t(\cos\lambda,\ \sin\lambda) = t\,\mathbb{e}$$

$$\mathbb{e}' = \mu n$$

$$\left(\because\ \mathbb{e}' = \begin{pmatrix} -\sin\lambda\ \lambda' \\ \cos\lambda\ \lambda' \end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix} -\sin\lambda \\ \cos\lambda \end{pmatrix} = \mu n\right)$$

$$\sigma''(t) = \mathbb{e} + t\,\mathbb{e}' = \mathbb{e} + t\mu n$$

$$\det(\sigma'(t),\ \sigma''(t)) = t^2\mu\,\det(\mathbb{e},\ n) = t^2\mu$$

宿題

- Fukui の公式 かくにん

Theorem Ⅱ を証明する.

Theorem Ⅱ (再掲)

第二対合(second involution)が

$$I_C^* : g^{\omega}_{**}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C) \ni f \longmapsto f_* \in g^{\omega}_{**}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$$

として $g^{\omega}_{**}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$ 上に定義され、次の4つの性質を満たす

(1) f_* は f と同一の第一基本形式を持ち、かつ f の忠実な異性体である.

(2) $I_C^* \circ I_C = I_C \circ I_C^*$ である(I_C は Theorem Ⅰ の第一対合).

(3) f と f_* を原点 o での写像芽とすると、I_C^* は写像

$$I_o^* : g^{\omega}_{*}(\mathbb{R}^2_o, \mathbb{R}^3, C) \ni f \longmapsto f_* \in g^{\omega}_{*}(\mathbb{R}^2_o, \mathbb{R}^3, C) \qquad (1.4)$$

を誘導し、$J_o \circ I_o^* = J_o$ および $I_o^* \circ I_o = I_o \circ I_o^*$ を満たす.

(4) もし g が $g^{\omega}_{*}(\mathbb{R}^2_o, \mathbb{R}^3, C)$ (または $g^{\omega}_{**}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$) に属し、$g$ の第一基本形式が f の第一基本形式と等長であるならば、g は $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ のいずれかと右同値である.

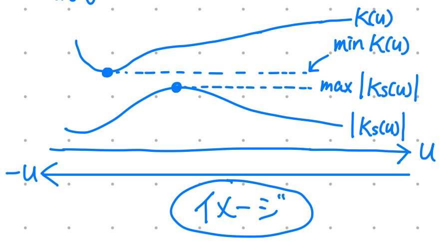
Proof (途中)

任意に $f \in g^{\omega}_{**}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$ を固定し、その第一基本形式を ds_f^2 と記す

f が許容的(admissible)であるので、特異曲率 $K_s(u)$ は式(0.9)を満たし、したがって式(0.7)も満たす

↳ 式(0.9)が成り立つこと

$$\max_{u \in J} |K_s(u)| < \min_{u \in J} K(u) \qquad |K_s(u)| < K(u)$$



定理3.8より、ds_f^2 と同じ第一基本形式を持つ2つのカスプ辺

$$g_+ ,\ g_- \qquad (ds_f^2 = ds_{g_+}^2 = ds_{g_-}^2)$$

が存在し、「$g_+ = f$」(便宜的) かつ「写像 $u \longmapsto g_-(u, 0)$ は $u \longmapsto f(u, 0)$ と同じ向きを与える」(定理3.8(1)).

f が許容的であるため、特異曲率 K_s は ds_f^2 のみで決定される. ゆえに $g_\pm$ も $g^{\omega}_{**}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$ に属する. ?

$$\hookrightarrow K_s(u) = \frac{-E_{vv}(u, 0)}{2} \qquad (\text{Lemma } 3.7)$$

定理Ⅰの証明より、

$$\check{f} := g_-$$

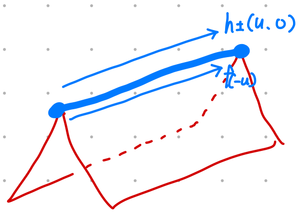
が f の 等長双対 (isometric dual) を与える.

一方で、パラメータを $u \longmapsto -u$ と取り替えて曲線 C の向きを反転させることを考える.
f が許容的であることから

$$0 < |\kappa_s(u)| < \min_{u \in J} \kappa(u) \le \kappa(-u)$$

が成り立つ. 再び定理 3.8 を適用すると、相異なる 2つの一般化カスプ辺

↳ ds^2_f (の $u \to -u$ 版)



$$h_+,\ h_- \in \mathfrak{g}^{\omega}_{**}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$$

が存在し、写像 $u \longmapsto h_\pm(u,0)$ は $u \longmapsto f(-u,0)$ と同じ向きを持つ.
よって、ds^2_f は $h_\pm$ の共通の第一基本形式となる. 式(3.11)より、カスプ角 $\theta_*(u)$

$$\begin{cases} X(u) := \cos\theta(u)\, n(u) \mp \sin\theta(u)\, b(u) \\ \cos\theta(u) := \dfrac{\kappa_s(u)}{\kappa(u)} \end{cases}$$

(それぞれ h_+ では $\theta_*(u)$、h_- では $-\theta_*(u)$、かつ $\theta_*(u)\theta(u) > 0$) は、

第一基本形式のみで決まるため、パラメータの向きを変えても同じ値

$$\cos\theta_*(u) = \frac{\kappa_s(u)}{\kappa(-u)}$$

曲線の向きを反転した曲率 ($u \to -u$ で向き反転)

を満たす. $h_\pm$ の特異曲率の向きは f と逆であるため、二つの写像 $h_\pm$ は f の non faithful isomer である. ここで、

- 第一基本量が一致するdiffeoが存在
- 曲線をたどる向きが一致
- f と等長
- f と右同値でない

$$f_* := h_+ \ (\text{逆像}) \qquad \check{f}_* := h_- \ (\text{逆双対})$$

とおく. Remark 4.5 によれば、写像

$$f_\#(u,v) := f(-u,v)$$

のカスプ角は $-\theta(-u)$ であり、$\theta_*(u)$ は $f_\#(u,v)$ のカスプ角と符号が反転する.