目次

(3,4)-カスプ辺における HNSUY 定理 3,4 の証明ノート

飯野 郁

2025/10/14

1 定理 3

1.1 主張

$\boldsymbol{n_f}$ を $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ の右同値類の数 (つまり, 像の数) とする．このとき, 次が成り立つ．

(1) $n_f = 4 \iff ds_f^2$ は symmetry を持たない．

(2) $n_f = 1 \iff ds_f^2$ は effecitive symmetry と non-effective symmetry の両方を持つ．

[*1]

1.2 証明

($n_f = 4 \implies ds_f^2$ は symmetry を持たない を示す)

対偶を示す．つまり, ds_f^2 がある symmetry φ を持つと仮定する．

(a) φ が effective symmetry の場合

$f \circ \varphi$ および $\check{f} \circ \varphi$ の第一基本形式は ds_f^2 と一致し, 特異曲線 $\{v = 0\}$ 上では,

$$
\begin{aligned}
f \circ \varphi(u, 0) &= f(-u, 0) = \mathbf{c}(-u) \\
\check{f} \circ \varphi(u, 0) &= \check{f}(-u, 0) = \mathbf{c}(-u)
\end{aligned}
$$

[*1] $n_f = 2 \iff ds_f^2$ は effecitive symmetry か non-effective symmetry のいずれか一方のみを持つ．

であるため, $f\circ\varphi$ および$\check{f}\circ\varphi$ はそれぞれ $f_*, \check{f}_*$ のいずれかと一致する.

- $f\circ\varphi = f_*$ なら, f と f_* は右同値である. (同様に, $\check{f}$ は $\check{f}_*$ と右同値である)
- $f\circ\varphi = \check{f}_*$ なら, f と $\check{f}_*$ は右同値である. (同様に, $\check{f}$ は f_* と右同値である)

$\therefore \{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ の右同値類の個数は 2 である.

(b) φ が non-effective symmetry の場合

φ が effective symmetry である場合と同様の議論で, $f\circ\varphi$ および $\check{f}\circ\varphi$ の第一基本形式は ds_f^2 と一致し, 特異曲線 $\{v=0\}$ 上では,

$$f\circ\varphi(u,0) = f(u,0) = \mathbf{c}(u)$$
$$f_*\circ\varphi(u,0) = f_*(u,0) = \mathbf{c}(-u)$$

であるため, $f\circ\varphi$ は $\check{f}$ と一致し, $f_*\circ\varphi$ は $\check{f}_*$ と一致する. よって, f は $\check{f}$ と右同値であり, f_* は $\check{f}_*$ と右同値である.

$\therefore \{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ の右同値類の個数は 2 である.

$\therefore$ (a)(b) より, $n_f = 4 \implies ds_f^2$ は symmetry を持たない を示した.

(ds_f^2 は symmetry を持たない $\implies n_f = 4$ を示す)

対偶を示す. つまり, $n_f < 4$ であると仮定する. f と $g \in \{\check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ が右同値であるとして, 一般性を失わない.

(a) $g = f_*$ または $\check{f}_*$ の場合

f と右同値であるので, $\exists\varphi$: 微分同相写像 s.t. $g = f\circ\varphi$. それぞれの第一基本形式 ds^2 を $ds_g^2, ds_{f\circ\varphi}^2$ とすると,

$$ds_g^2 = ds_f^2$$
$$ds_{f\circ\varphi}^2 = \varphi^* ds_f^2$$

であるため, $ds_f^2 = \varphi^* ds_f^2$ であり, φ は Id か symmetry である.

もし φ が Id なら, $f = g$ となるため, $f = f_*$ または $\check{f}_*$ が成り立つ. しかし, これでは曲線の像 $C = c(J)$ の向きが f と f_* で同じとなり, 矛盾.

$\therefore \varphi \neq \mathrm{Id}$ であり, φ は ds_f^2 の symmetry である.

(b) $g = \check{f}$ の場合

f と右同値であるので, $\exists\varphi$: 微分同相写像 s.t. $\check{f} = f\circ\varphi$. (a) と同様に, $ds_f^2 =$

$\varphi^* ds_f^2$ である．もし $\varphi = \mathrm{Id}$ なら，$f = \check{f}$ である．

一方，f のカスプ角 θ_f および単位法ベクトル ν_f は f から決まるので，$f = \check{f} \implies \theta_f = \theta_{\check{f}}$ となるが，$\check{f}$ の性質より $\theta_{\check{f}} = -\theta_f$ であるため，$\theta = 0$ となる．しかしカスプ角の定義域は $0 < |\theta| < \pi$ であったため，この事実と矛盾する．
$\therefore \varphi \neq \mathrm{Id}$ であり，φ は ds_f^2 の symmetry である．

$\therefore$ (a)(b) より，ds_f^2 は symmetry を持たない $\implies n_f = 4$ を示した．

($n_f = 1 \implies ds_f^2$ は effective symmetry と non-effective symmetry の両方を持つ を示す)
$n_f = 1 \iff f$ は $\check{f}, f_*, \check{f}_*$ の 3 つすべてと右同値であるため，"ds_f^2 は symmetry を持たない $\implies n_f = 4$" の証明内の $g \in \{\check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ について

$$g = f_* \text{ または } g = \check{f}_* \quad \text{の場合と}$$
$$g = \check{f}$$

の両方を満たしている場合である．
一つ目の等式について，$g = f_*$ または $g = \check{f}_* \iff f$ と $f_*, \check{f}_*$ が右同値である $\iff \exists \varphi$: 微分同相写像 s.t. $f \circ \varphi = f_*$ または $\check{f}_*$ $(\varphi \neq \mathrm{Id})$．$f$ と f_* または $\check{f}_*$ は特異曲線をたどる向きが逆であるため，φ は曲線をたどる向きを反転させる．よって，φ は effective symmetry である．
二つ目の等式について，$g = \check{f} \iff f$ と $\check{f}$ が右同値である $\iff \exists \psi$: 微分同相写像 s.t. $f \circ \psi = \check{f}$ $(\psi \neq \mathrm{Id})$．f と $\check{f}$ は特異曲線をたどる向きが同じであるため，ψ は曲線の向きを保つ．よって，ψ は non-effective symmetry である．
$\therefore n_f = 1 \implies ds_f^2$ は effective symmetry と non-effective symmetry の両方を持つ を示した．

(ds_f^2 は effecitive symmetry と non-effective symmetry の両方を持つ $\implies n_f = 1$ を示す)
仮定より effective symmetry φ と non-effective symmetry ψ が存在するため，

$$\varphi \text{ が存在 } \implies f \circ \varphi = f_* \text{ または } \check{f}_* \implies f \text{ と } f_* \text{ または } \check{f}_* \text{ が右同値である}$$
$$\psi \text{が存在 } \implies f \circ \psi = \check{f} \implies f \text{ と } \check{f} \text{ が右同値である}$$

が成り立つ．
f と f_* が右同値の場合を考える．$\check{f} \circ \varphi$ の第一基本形式は ds_f^2 と等しく，特異曲線

$\{v=0\}$ 上では,

$$\check{f}\circ\varphi(u,0)=\check{f}(-u,0)=\mathbf{c}(-u)$$

であるため, $\check{f}\circ\varphi=f_*$ または $\check{f}_*$ である. すでに $f\circ\varphi=f_*$ であるため, $\check{f}\circ\varphi=\check{f}_*$ である.
($\because$ $\check{f}\circ\varphi=f_*$ だと, $f\circ\varphi=\check{f}\circ\varphi$ つまり $f=\check{f}$ となり矛盾.)

f と $\check{f}_*$ が右同値の場合, 同様の議論で $\check{f}\circ\varphi=f_*$ である.

以上より, いずれの場合でも f が $\check{f}, f_*, \check{f}_*$ と右同値になる.
$\therefore$ ds^2_f は effective symmetry と non-effective の両方を持つ $\implies$ $n_f=1$ である.

以上より, 定理 3 の (1)(2) を示した. ■

2 定理 4 および 命題 5.1

2.1 命題 5.1

2.1.1 主張

f と $\check{f}$ が合同である $\Longleftrightarrow$ 次のいずれかが成り立つ.

- (a) C が平面曲線である
- (b) ds_f^2 が non-effective symmetry をもつ
- (c) 特異曲線 C が正の orientation-reversing symmetry をもち,
  ds_f^2が向きを反転させる (つまり, ヤコビアンが負) effective symmetry をもつ
- (d) 特異曲線 C が負の orientation-reversing symmetry をもち,
  ds_f^2が向きを保つ (つまり, ヤコビアンが正) effective symmetry をもつ

2.1.2 証明

(f と $\check{f}$ が合同である $\Longrightarrow$ (a)(b)(c)(d) のいずれかが成り立つ を示す)

f と $\check{f}$ が合同であると仮定する. つまり $\exists T \in O(3)$, $\exists \varphi$: 微分同相写像 s.t.

$$T \circ f \circ \varphi = \check{f} \quad \cdots (*)$$

と表せる.

(あ) $T = \mathrm{Id}$ の場合
与式 $(*)$ は $f \circ \varphi = \check{f}$ と表せる. これは φ が non-effective symmetry であるため, (b) に該当する.

(い) T が orientation-preserving symmetry の場合
平面曲線に関する同値条件より, f の特異曲線 C は平面曲線である. これは (a) に該当する.

(う) T が orientation-reversing symmetry の場合
Prop 2.1 (20250725.pdf) より,

- T が正であり, effective symmetry φ のヤコビアンが負である
- T が負であり, effective symmetry φ のヤコビアンが正である

のいずれかに該当する. これは (c) または (d) に該当する.

$\therefore$ f と $\check{f}$ が合同である $\Longrightarrow$ (a)(b)(c)(d) のいずれかが成り立つ を示した.

((a)(b)(c)(d) のいずれかが成り立つ $\Longrightarrow$ f と $\check{f}$ が合同である を示す)

- (a) が成立すると仮定する.
  Remark 5.2 (20250807.pdf) より, 平面に関する折返し $S \in O(3)$ を用いて
  $$\check{f} = S \circ f$$
  が成り立つ. よって f と $\check{f}$ は合同である.
- (b) が成立すると仮定する.
  φ を non-effective symmetry として, $g := f \circ \varphi$ とする. g と f の第一基本形式は一致し, さらに f と g の特異曲線 $\{v = 0\}$ 上では
  $$\begin{aligned} f(u,0) &= \mathbf{c}(u) \\ f \circ \varphi(u,0) &= f(u,0) = \mathbf{c}(u) \end{aligned}$$
  であるため, $f \circ \varphi = f$ または $\check{f}$ が成り立つ. ν_g (resp. ν_f) を g (resp. f) の単位法ベクトル場とする. 向きを同調した g の単位法ベクトル場を求める. J を $\varphi(u,v)$ のヤコビ行列, $\varepsilon := \mathrm{sgn}(\det J)$, $\nu_g = \varepsilon \nu_f \circ \varphi$, $\lambda := \det(f_u, f_v, \nu_f) \geq 0$ とすると,
  $$\begin{aligned} \det(g_u, g_v, \nu_g)(u,v) &= \det((f \circ \varphi(u,v))_u, (f \circ \varphi(u,v))_v, \varepsilon \nu_f \circ \varphi(u,v)) \\ &= \varepsilon (\det J)(\lambda \circ \varphi)(u,v) \\ &= \underbrace{|\det J|}_{>0} \underbrace{(\lambda \circ \varphi)(u,v)}_{\geq 0} \geq 0. \end{aligned}$$
  よって、$\nu_g = \varepsilon \nu_f \circ \varphi$ は向きを同調した g の単位法ベクトル場である. 次に, g (resp. f) のカスプ方向を $\mathbf{x}_g$ (resp. $\mathbf{x}_f$) とすると,
  $$\begin{aligned} \mathbf{x}_g(u) &:= \hat{\nu}_g(u) \times \mathbf{c}'(u) \\ &= \varepsilon \nu_f \varphi(u,0) \times \mathbf{c}'(u) \\ &= \varepsilon \nu_f(u,0) \times \mathbf{c}'(u) \\ &= \varepsilon \mathbf{x}_f(u) \quad \cdots (**) \end{aligned}$$
  となる. g のカスプ角 θ_g を用いると $\mathbf{x}_g(u) = \cos\theta_g(u)\mathbf{n}(u) - \sin\theta_g(u)\mathbf{b}(u)$ と表せることに注意して, 式 (**) に $\mathbf{x}_f(u)$ を代入すると,
  $$\mathbf{x}_g(u) = \varepsilon(\cos\theta_f(u)\mathbf{n}(u) - \sin\theta_f(u)\mathbf{b}(u))$$

と表せる. φ は　non-effective symmetry であるため, $\varepsilon=-1$ の場合のみを考えればよい[*2].

$\varepsilon=-1$ の場合, $\mathbf{x}_g(u)=\cos(\pi+\theta_f(u))\mathbf{n}(u)-\sin(\pi+\theta_f(u))\mathbf{b}(u)$ であるため, $\theta_g(u)=\pi+\theta_f(u)$ が成り立つ. これを満たすのは $\theta_g(u)=-\theta_f(u)$ であるため,

$$f\circ\varphi=\check{f}$$

が成り立つ. よって, f と $\check{f}$ は合同である.

- (c) が成立すると仮定する.
  これは Prop 2.1 (1) に該当するため, 正の orientation-reversing symmetry T とヤコビアンが負である effective symmetry φ を用いて

  $$T\circ f\circ\varphi=\check{f}$$

  が成り立つ. よって f と $\check{f}$ は合同である.
- (d) が成立すると仮定する.
  これは Prop 2.1 (4) に該当するため, 負の orientation-reversing symmetry T とヤコビアンが正である effective symmetry φ を用いて

  $$T\circ f\circ\varphi=\check{f}$$

  が成り立つ. よって f と $\check{f}$ は合同である.

$\therefore$ (a)(b)(c)(d) のいずれかが成り立つ $\Longrightarrow$ f と $\check{f}$ が合同である を示した.

以上より, 命題 5.1 の同値条件を示した. ■

2.2　定理 4

2.2.1　主張

$\boldsymbol{N_f}$ を $f,\check{f},f_*,\check{f}_*$ の合同類の数とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) $N_f=4 \iff ds_f^2$ と C はいずれも symmetry を持たない.
(2) $N_f\neq 3$.
(3) $N_f=1 \iff$ 次のいずれかが成り立つ.
　(a1) C は平面曲線 かつ C に orientation-reversing symmetry が存在する.

[*2] $\varepsilon=1$ を満たすような non-effective symmetry は存在しない. HNSUY の Lemma 3.14 参照.

(a2) C は平面曲線 かつ ds_f^2 に effective symmetry が存在する.

(b1) ds_f^2 に non-effective symmetry が存在して, かつ C に orientation-reversing symmetry が存在する.

(b2) ds_f^2 に non-effective symmetry が存在して, かつ ds_f^2 に effective symmetry が存在する

(c) C に正の orientation-reversing symmetry が存在して, かつ ds_f^2 に向きを反転させる effective symmetry が存在する.

(d) C に負の orientation-reversing symmetry が存在して, かつ ds_f^2 に向きを保つ effective symmetry が存在する.

*3

2.2.2 証明

($N_f = 4 \implies ds_f^2$ と C はいずれも symmetry を持たない を示す)

対偶を示す. つまり, symmetry が 1 個でも存在してしまうと, $N_f < 4$ となってしまうことを示せばよい.

- ds_f^2 に symmetry φ が存在する場合

  定理 3 ((3,4)-カスプ辺バージョン) より, 右同値類の数は $n_f \leq 2$. また, f と $\check{f}$ が右同値であるとして一般性を失わない. 右同値の定義より, $\exists\varphi$:diffeo s.t. $f \circ \varphi = \check{f}$. これは f と $\check{f}$ が合同であるので, $N_f < 4$ である.

- C に orientation-preserving symmetry T が存在する場合

  平面曲線に関する補題より, 次の同値条件

  C が平面曲線である $\iff$
  $\exists T \in O(3)\ s.t.\ T$ は C の orientation-preserving symmetry である

  が成り立つ. C が平面曲線であるため, Prop 5.1 より f と $\check{f}$ は合同である. よって, $N_f < 4$ である.

- C に orientation-reversing symmetry T が存在する場合

  $T \circ f$ を考える. $T \circ f$ の第一基本形式は ds_f^2 と一致し, さらに $T \circ f(u, 0) = \mathbf{c}(-u)$

*3 C が平面曲線 $\iff$ C に orientation-preserving symmetry が存在する.

であることから，

$$T \circ f = f_* \text{ または } \check{f}_*$$

となる．よって，f は f_* か $\check{f}_*$ のいずれかと合同となるため，$N_f < 4$ となる．

$\therefore N_f = 4 \implies ds_f^2$ と C はいずれも symmetry を持たない

(ds_f^2 と C はいずれも symmetry を持たない $\implies N_f = 4$ を示す)

$\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ のいずれか 2 つが合同であると仮定する．f と $g \in \{\check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ が合同であるとして一般性を失わない．また，Prop 5.1 の (a)(b)(c)(d) いずれも満たさないため，f と $\check{f}$ は合同ではない．すなわち $g \neq \check{f}$ である ($\star$).

f と g が合同であるため，$\exists T \in O(3), \exists \varphi :$ diffeo s.t.

$$g = T \circ f \circ \varphi \quad \cdots (*)$$

と書ける．$(*)$ の左辺と右辺それぞれの第一基本形式について、

$$\text{(左辺) } ds_g^2 = ds_f^2.$$
$$\text{(右辺) } ds_{T \circ f \circ \varphi}^2 = \varphi^* ds_f^2.$$

であるため，$ds_f^2 = \varphi^* ds_f^2$ である．仮定より φ は symmetry ではないので，$\varphi = \mathrm{Id}$ となる．よって，式 $(*)$ は $g = T \circ f$ と書ける。特異曲線 $\{v = 0\}$ 上を考えると

$$\text{(左辺) } g(u, 0) = \mathbf{c}(-u).$$
$$\text{(右辺) } T \circ f(u, 0) = T\mathbf{c}(u).$$

($\because \star$ より，g は f_* または $\check{f}_*$) よって，$\mathbf{c}(-u) = T\mathbf{c}(u)$．これは T が orientation-reversing symmetry でなければいけないため，C が symmetry を持たないことに矛盾する．

$\therefore ds_f^2, C$ が symmetry を持たない $\implies N_f = 4.$

($N_f = 1 \implies$ (3) の 6 条件のいずれかを満たす を示す)

仮定より $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ が合同であり，特に f と $\check{f}$ が合同であるため，Prop 5.1 より (a)(b)(c)(d) のいずれかを満たしている．

- Prop 5.1(a) を満たしている場合

  まず, f と f_* も合同であるため, $\exists T \in O(3)$, φ: 微分同相写像 s.t.

$$T \circ f \circ \varphi = f_* \quad \cdots (**)$$

  である. $(**)$ の両辺それぞれの第一基本形式は,

$$\begin{aligned}&(\text{左辺})\ ds^2_{T\circ f\circ\varphi} = \varphi^* ds^2_f \\ &(\text{右辺})\ ds^2_{f_*} = ds^2_f.\end{aligned}$$

  であるため, $\varphi^* ds^2_f = ds^2_f$. よって, φ は 恒等写像か symmetry のいずれかである. つまり, $\varphi(u,0) = (\pm u, 0)$.

  - T が orientation-reversing symmetry の場合, 定理 4 の (a1) に該当する.
  - T が orientation-reversing symmetry ではない場合, $v = 0$ を式 $(**)$ に代入すると,

$$\begin{aligned}T \circ f \circ \varphi(u,0) &= \begin{cases} T \circ f(u,0) & (\varphi \text{ が non-effective または 恒等写像}) \\ T \circ f(-u,0) & (\varphi \text{ が effective}) \end{cases} \\ &= \begin{cases} T\mathbf{c}(u) \\ T\mathbf{c}(-u) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \mathbf{c}(u) \\ \mathbf{c}(-u) \end{cases}.\end{aligned}$$

    となる. f_* は特異曲線をたどる向きが f と逆であるため, $f_*(u,0) = \mathbf{c}(-u)$ である. よって, φ は effective でなければならず, これは 定理 4 の (a2) に該当する.

- Prop 5.1(b) を満たしている場合

  (Prop 5.1(a) の場合と同様) f と f_* も合同であるため, $\exists T \in O(3)$, φ: 微分同相写像 s.t.

$$T \circ f \circ \varphi = f_* \quad \cdots (**)$$

  である. $(**)$ の両辺それぞれの第一基本形式は,

$$\begin{aligned}&(\text{左辺})\ ds^2_{T\circ f\circ\varphi} = \varphi^* ds^2_f \\ &(\text{右辺})\ ds^2_{f_*} = ds^2_f.\end{aligned}$$

  であるため, $\varphi^* ds^2_f = ds^2_f$. よって, φ は 恒等写像か symmetry のいずれかである. つまり, $\varphi(u,0) = (\pm u, 0)$.

– T が orientation-reversing symmetry の場合, 定理 4 の (b1) に該当する.
– T が orientation-reversing symmetry ではない場合, $v=0$ を式 $(**)$ に代入すると,

$$T \circ f \circ \varphi(u,0) = \begin{cases} T \circ f(u,0) & (\varphi \text{ が non-effective または 恒等写像}) \\ T \circ f(-u,0) & (\varphi \text{ が effective}) \end{cases}$$
$$= \begin{cases} T\mathbf{c}(u) \\ T\mathbf{c}(-u) \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \mathbf{c}(u) \\ \mathbf{c}(-u) \end{cases} .$$

となる. f_* は特異曲線をたどる向きが f と逆であるため, $f_*(u,0) = \mathbf{c}(-u)$ である. よって, φ は effective でなければならず, これは 定理 4 の (b2) に該当する.

- Prop 5.1(c) を満たしている場合
定理 4(c) も同じ条件であるため, 満たされている.
- Prop 5.1(d) を満たしている場合
定理 4(d) も同じ条件であるため, 満たされている.

$\therefore N_f = 1 \implies$ (3) の 6 条件のいずれかを満たす.

((3) の 6 条件のいずれかを満たす $\implies$ $N_f = 1$ を示す)

- (a1) が成り立っていると仮定する. つまり, $\exists S \in O(3)$: orientation-preserving symmetry, $\exists T \in O(3)$: orientation-reversing symmetry. Prop 5.1(a) より, f と $\check{f}$ は合同である ($\check{f} = S \circ f$). S, T はともに $O(3)$ であるため, $S \circ T \circ f$ と $T \circ f$ は共に第一基本形式が ds_f^2 と等しい. また, それぞれの特異曲線 $\{v=0\}$ 上を考えると

$$S \circ T \circ f(u,0) = S\mathbf{c}(-u) = \mathbf{c}(-u).$$
$$T \circ f(u,0) = \mathbf{c}(-u).$$

であるため, $S \circ T \circ f = f_*$ または $\check{f}_*$, $T \circ f = \check{f}_*$ または f_* となる. よって,

$N_f = 1$.[*4]

- (a2) が成り立っていると仮定する．つまり, $\exists S \in O(3)$: orientation-preserving symmetry, $\exists\varphi$: effective symmetry. Prop 5.1(a) より, f と $\check{f}$ は合同である ($\check{f} = S \circ f$). $S \in O(3)$ および φ は symmetry であることより, $S \circ f \circ \varphi$ と $f \circ \varphi$ は共に第一基本形式が ds_f^2 と等しい. また, それぞれの特異曲線 $\{v = 0\}$ 上を考えると

$$S \circ f \circ \varphi(u, 0) = S \circ f(-u, 0) = S\mathbf{c}(-u) = \mathbf{c}(-u).$$
$$f \circ \varphi(u, 0) = f(-u, 0) = \mathbf{c}(-u).$$

であるため, $f \circ \varphi = f_*$ または $\check{f}_*$, $S \circ f \circ \varphi = \check{f}_*$ または f_* となる．よって, $N_f = 1$.

- (b1) が成り立っていると仮定する．つまり, $\exists\varphi$: non-effective symmetry, $\exists T \in O(3)$: orientation-reversing symmetry. Prop 5.1(b) より, f と $\check{f}$ は合同である ($\check{f} = f \circ \varphi$). $T \in O(3)$ および φ は symmetry であることより, $T \circ f \circ \varphi$ と $T \circ f$ は共に第一基本形式が ds_f^2 と等しい. また, それぞれの特異曲線 $\{v = 0\}$ 上を考えると

$$T \circ f \circ \varphi(u, 0) = T \circ f(u, 0) = T\mathbf{c}(u) = \mathbf{c}(-u).$$
$$T \circ f(u, 0) = T\mathbf{c}(u) = \mathbf{c}(-u).$$

であるため, $T \circ f = f_*$ または $\check{f}_*$, $T \circ f \circ \varphi = \check{f}_*$ または f_* となる．よって, $N_f = 1$.

- (b2) が成り立っていると仮定する．つまり, $\exists\varphi_1$: non-effective symmetry, $\exists\varphi_2$: effective symmetry. Prop 5.1(b) より, f と $\check{f}$ は合同である ($\check{f} = f \circ \varphi$). φ_1 と φ_2 はいずれも symmetry であることより, $f \circ \varphi_2$ と $f \circ \varphi_1 \circ \varphi_2$ は共に第一基本形式が ds_f^2 と等しい. また, それぞれの特異曲線 $\{v = 0\}$ 上を考えると

$$f \circ \varphi_2(u, 0) = f(-u, 0) = \mathbf{c}(-u).$$
$$f \circ \varphi_1 \circ \varphi_2(u, 0) = f \circ \varphi_1(-u, 0) = f(-u, 0) = \mathbf{c}(-u).$$

であるため, $f \circ \varphi_1 = f_*$ または $\check{f}_*$, $f \circ \varphi_1 \circ \varphi_2 = \check{f}_*$ または f_* となる．よって, $N_f = 1$.

[*4] $T \circ f$ が f_* または $\check{f}_*$ になり, $S \circ T \circ f$ が $\check{f}_*$ または f_* になる条件は別セクションで調べる ((a2)(b1)(b2)(c)(d) の場合についても同様).

- (c) が成り立っていると仮定する．つまり, $\exists T$: 正の orientation-reversing symmetry, $\exists\varphi$: ヤコビアンが負の effective symmetry. Prop 5.1(c) より, f と $\check{f}$ は合同である ($\check{f}=T\circ f\circ\varphi$). $T\in O(3)$ および φ は symmetry であることより, $T\circ f$ と $f\circ\varphi$ は共に第一基本形式が ds_f^2 と等しい．また, それぞれの特異曲線 $\{v=0\}$ 上を考えると

$$T\circ f(u,0)=T\mathbf{c}(u)=\mathbf{c}(-u).$$
$$f\circ\varphi(u,0)=f(-u,0)=\mathbf{c}(-u).$$

であるため, $T\circ f=f_*$ または $\check{f}_*$, $f\circ\varphi=\check{f}_*$ または f_* となる．よって, $N_f=1$.

- (d) が成り立っていると仮定する．つまり, $\exists T$: 負の orientation-reversing symmetry, $\exists\varphi$: ヤコビアンが正の effective symmetry. Prop 5.1(d) より, f と $\check{f}$ は合同である ($\check{f}=T\circ f\circ\varphi$). $T\in O(3)$ および φ は symmetry であることより, $T\circ f$ と $f\circ\varphi$ は共に第一基本形式が ds_f^2 と等しい．また, それぞれの特異曲線 $\{v=0\}$ 上を考えると

$$T\circ f(u,0)=T\mathbf{c}(u)=\mathbf{c}(-u).$$
$$f\circ\varphi(u,0)=f(-u,0)=\mathbf{c}(-u).$$

であるため, $T\circ f=f_*$ または $\check{f}_*$, $f\circ\varphi=\check{f}_*$ または f_* となる．よって, $N_f=1$.

$\therefore$ (3) の 6 条件のいずれかを満たす $\Longrightarrow N_f=1.$

($N_f\neq 3$ を示す)

symmetry が 1 個でも存在してしまうと, $N_f<3$ となってしまうことを示せばよい．

- ds_f^2 に symmetry φ が存在する場合
  - φ が non-effective

    Prop 5.1 (b) より, f と $\check{f}$ が合同である．$\check{f}=f\circ\varphi$ を示したときの同様の議論で,

    $$\check{f}_*=f_*\circ\varphi$$

    となる．よって f と $\check{f}$, f_* と $\check{f}_*$ がそれぞれ合同であるため, $N_f=2$. 特に, $N_f<3$ が成り立つ．

– φ が effective

$f \circ \varphi$ に関する等式

$$f \circ \varphi = \begin{cases} f_* & (\varphi \text{ のヤコビアンが正}) \\ \check{f}_* & (\varphi \text{ のヤコビアンが負}) \end{cases}$$

を示すとき ((a2) が成立 $\implies N_f = 1$ の証明部分) の同様の議論で, $\check{f} \circ \varphi$ は

$$\check{f} \circ \varphi = \begin{cases} \check{f}_* & (\varphi \text{ のヤコビアンが正}) \\ f_* & (\varphi \text{ のヤコビアンが負}) \end{cases}$$

となる. よって, $N_f < 3$ である.

- C に symmetry T が存在する場合
  – T が orientation-preserving symmetry

  Prop 5.1(a) より, f と $\check{f}$ が合同である. $\check{f} = T \circ f$ を示したときの同様の議論で,

$$\check{f}_* = T \circ f_*$$

  となる. よって f と $\check{f}$, f_* と $\check{f}_*$ がそれぞれ合同であるため, $N_f = 2$. 特に, $N_f < 3$ が成り立つ.

  – T が orientation-reversing symmetry

  $T \circ f$ に関する等式

$$T \circ f = \begin{cases} f_* & (\det T = 1) \\ \check{f}_* & (\det T = -1) \end{cases}$$

  を示すとき ((a1) が成立 $\implies N_f = 1$ の証明部分) の同様の議論で, $T \circ \check{f}$ は

$$T \circ \check{f} = \begin{cases} \check{f}_* & (\det T = 1) \\ f_* & (\det T = -1) \end{cases}$$

  となる. よって, $N_f < 3$ である.

$\therefore N_f \neq 3$ が成り立つ.

以上より, 定理 4 の (1)(2)(3) を示した. ■

2.2.3 定理 4 内 (a1)(a2)(b1)(b2)(c)(d) が成立している場合の $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ の具体的な形

- (a1) が成立している場合
  - $T \circ f$ が f_* または $\check{f}_*$ になる条件を調べる.

    $g := T \circ f$ として, ν_g (resp. ν_f) を g (resp. f) の単位法ベクトル場とする. 向きを同調した g の単位法ベクトル場を求める. $\sigma_T := \det T$, $\nu_g = \sigma_T T \nu_f$, $\lambda := \det(f_u, f_v, \nu_f) \geq 0$ とすると,

$$\begin{aligned}
\det(g_u, g_v, \nu_g)(u,v) &= \det((T \circ f(u,v))_u, (T \circ f(u,v))_v, \nu_g(u,v)) \\
&= \det(T \circ (f(u,v))_u, T \circ (f(u,v))_v, \nu_g(u,v)) \\
&= \underbrace{\sigma_T (\det T)}_{1} \det(f_u, f_v, \nu_f)(u,v) \\
&= \lambda(u,v) \geq 0.
\end{aligned}$$

    よって, $\nu_g = \sigma_T T \nu_f$ は向きを同調した g の単位法ベクトル場である. 次に, g (resp. f) のカスプ方向を $\mathbf{x}_g$ (resp. $\mathbf{x}_f$) とすると,

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_g(u) &:= \hat{\nu}_g(u) \times \mathbf{c}'_*(u) \quad (\mathbf{c}_*(u) := \mathbf{c}(-u)) \\
&= \sigma_T T \nu_f(u,0) \times (T\mathbf{c}'(u)) \\
&= \underbrace{\sigma_T (\det T)}_{1} T(\hat{\nu}_f(u) \times \mathbf{c}'(u)) \quad (\hat{\nu}_f(u) := \nu_f(u,0)) \\
&= T\mathbf{x}_f(u) \quad \cdots (a1.1)
\end{aligned}$$

    となる. g のカスプ角 θ_g を用いると $\mathbf{x}_g(u) = \cos\theta_g(u)\mathbf{n}(-u) + \sin\theta_g(u)\mathbf{b}(-u)$ と表せることに注意して, 式 (a1.1) に $\mathbf{x}_f(-u)$ を代入すると,

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_g(u) &= \cos\theta_f(u) T\mathbf{n}(u) - \sin\theta_f(u) T\mathbf{b}(u) \\
\therefore \mathbf{x}_g(0) &= \cos\theta_f(0)\mathbf{n}(0) + \sigma_T \sin\theta_f(0)\mathbf{b}(0) \\
&= \cos(\sigma_T\theta_f(0))\mathbf{n}(0) + \sin(\sigma_T\theta_f(0))\mathbf{b}(0)
\end{aligned}$$

    と表せる ($\because T\mathbf{n}(0) = \mathbf{n}(0), T\mathbf{b}(0) = -\sigma\mathbf{b}(0)$). $\theta_g(0) = \sigma_T\theta_f(0)$ より,

$$\begin{cases} \sigma_T = 1 \text{ ならば}, & (g =)T \circ f = f_* \\ \sigma_T = -1 \text{ ならば}, & T \circ f = \check{f}_* \quad \cdots (a1.2) \end{cases}$$

    である.
  - $S \circ T \circ f$ が f_* または $\check{f}_*$ になる条件を調べる.

    $g := S \circ T \circ f$ として, ν_g (resp. ν_f) を g (resp. f) の単位法ベクトル

場とする．向きを同調した g の単位法ベクトル場を求める．$\sigma_T := \det T$, $\sigma_S = \det S = -1$ ($\because$ orientatoin-preserving symmetry は負のみ), $\nu_g = \sigma_S\sigma_T ST\nu_f$, $\lambda := \det(f_u, f_v, \nu_f) \geq 0$ とすると，

$$\begin{aligned}
\det(g_u, g_v, \nu_g)(u,v) &= \det((S\circ T\circ f(u,v))_u, (S\circ T\circ f(u,v))_v, \nu_g(u,v)) \\
&= \det(S\circ T\circ f_u, S\circ T\circ f_v, \sigma_S\sigma_T ST\nu_f)(u,v) \\
&= \underbrace{\sigma_S\sigma_T(\det S)(\det T)}_{1}\det(f_u, f_v, \nu_f)(u,v) \\
&= \lambda(u,v) \geq 0.
\end{aligned}$$

よって，$\nu_g = \sigma_S\sigma_T ST\nu_f$ は向きを同調した g の単位法ベクトル場である．次に，g (resp. f) のカスプ方向を $\mathbf{x}_g$ (resp. $\mathbf{x}_f$) とすると，

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_g(u) &:= \hat{\nu}_g(u)\times\mathbf{c}'_*(u) \quad (\mathbf{c}_*(u) := \mathbf{c}(-u)) \\
&= \sigma_S\sigma_T ST\nu_f(u,0)\times(ST\mathbf{c}'(u)) \\
&= \underbrace{\sigma_S\sigma_T(\det S)(\det T)}_{1}ST(\hat{\nu}_f(u)\times\mathbf{c}'(u)) \quad (\hat{\nu}_f(u) := \nu_f(u,0)) \\
&= ST\mathbf{x}_f(u) \quad \cdots\text{(a1.3)}
\end{aligned}$$

となる． g のカスプ角 θ_g を用いると $\mathbf{x}_g(u) = \cos\theta_g(u)\mathbf{n}(-u) + \sin\theta_g(u)\mathbf{b}(-u)$ と表せることに注意して，式 (a1.3) に $\mathbf{x}_f(-u)$ を代入すると，

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_g(u) &= \cos\theta_f(u)ST\mathbf{n}(u) - \sin\theta_f(u)ST\mathbf{b}(u) \\
\therefore \mathbf{x}_g(0) &= \cos\theta_f(0)\mathbf{n}(0) + \sigma_S\sigma_T\sin\theta_f(0)\mathbf{b}(0) \\
&= \cos(\sigma_S\sigma_T\theta_f(0))\mathbf{n}(0) + \sin(\sigma_S\sigma_T\theta_f(0))\mathbf{b}(0) \\
&= \cos(-\sigma_T\theta_f(0))\mathbf{n}(0) + \sin(-\sigma_T\theta_f(0))\mathbf{b}(0)
\end{aligned}$$

と表せる[*5]．$\theta_g(0) = -\sigma_T\theta_f(0)$ と表せることから，

$$\begin{cases}
\sigma_T = 1 \text{ ならば}, & (g =)S\circ T\circ f = \check{f}_* \\
\sigma_T = -1 \text{ ならば}, & S\circ T\circ f = f_* \quad \cdots\text{(a1.4)}
\end{cases}$$

である．

[*5] S が orientation-preserving symmetry の場合，$S\mathbf{e}(0) = \mathbf{e}(0)$, $S\mathbf{n}(0) = \mathbf{n}(0)$, $S\mathbf{b}(0) = \sigma_S\mathbf{b}(0)$, T が orientation-reversing symmetry の場合，$T\mathbf{e}(0) = -\mathbf{e}(0)$, $T\mathbf{n}(0) = \mathbf{n}(0)$, $T\mathbf{b}(0) = -\sigma_T\mathbf{b}(0)$ である．

以上の式 (a1.2)(a1.4) より, $T\circ f$ と $S\circ T\circ f$ はそれぞれ

$$\begin{cases} \sigma_T = 1 \text{ ならば}, & T\circ f = f_* \text{ および } S\circ T\circ f = \check{f}_* \\ \sigma_T = -1 \text{ ならば}, & T\circ f = \check{f}_* \text{ および } S\circ T\circ f = f_* \end{cases}$$

が成り立つ.

- (a2) が成立している場合
  - <u>$f\circ\varphi$ が f_* または $\check{f}_*$ になる条件を調べる.</u>

    $g := f\circ\varphi$ として, ν_g (resp. ν_f) を g (resp. f) の単位法ベクトル場とする. 向きを同調した g の単位法ベクトル場を求める. $\varepsilon := \operatorname{sgn}(\det D\varphi)$, $\nu_g = \varepsilon\nu_f\circ\varphi$, $\lambda := \det(f_u, f_v, \nu_f) \geq 0$ とすると,

$$\begin{aligned} \det(g_u, g_v, \nu_g)(u,v) &= \det((f\circ\varphi(u,v))_u, (f\circ\varphi(u,v))_v, \nu_g(u,v)) \\ &= \det((f\circ\varphi(u,v))_u, (f\circ\varphi(u,v))_v, \varepsilon\nu_f\circ\varphi(u,v)) \\ &= \varepsilon(\det J)(\lambda\circ\varphi)(u,v) \quad (\because \text{合成関数の微分より}) \\ &= \underbrace{|\det J|}_{>0}\underbrace{(\lambda\circ\varphi)(u,v)}_{\geq 0} \geq 0. \end{aligned}$$

    よって、$\nu_g = \varepsilon\nu_f\circ\varphi$ は向きを同調した g の単位法ベクトル場である. 次に, g (resp. f) のカスプ方向を $\mathbf{x}_g$ (resp. $\mathbf{x}_f$) とすると,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_g(u) &:= \hat{\nu}_g(u)\times\mathbf{c}'_*(u) \quad (\mathbf{c}_*(u) := \mathbf{c}(-u)) \\ &= \varepsilon\nu_f\circ\varphi(u,0)\times(-\mathbf{e}(-u)) \\ &= \varepsilon\hat{\nu}_f(-u)\times(-\mathbf{e}(-u)) \quad (\hat{\nu}_f(u) := \nu_f(u,0)) \\ &= -\varepsilon\mathbf{x}_f(-u) \quad \cdots (a2.1) \end{aligned}$$

    となる. g のカスプ角 θ_g を用いると $\mathbf{x}_g(u) = \cos\theta_g(u)\mathbf{n}(-u) + \sin\theta_g(u)\mathbf{b}(-u)$ と表せることに注意して, 式 (a2.1) に $\mathbf{x}_f(-u)$ を代入すると,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_g(u) &= -\varepsilon(\cos\theta_f(-u)\mathbf{n}(-u) - \sin\theta_f(-u)\mathbf{b}(-u)) \\ \therefore \mathbf{x}_g(0) &= -\varepsilon(\cos\theta_f(0)\mathbf{n}(0) - \sin\theta_f(0)\mathbf{b}(0)) \end{aligned}$$

    と表せる.

    $\varepsilon = 1$ の場合, $\mathbf{x}_g(0) = \cos(\pi - \theta_f(0))\mathbf{n}(0) + \sin(\pi - \theta_f(0))\mathbf{b}(0)$ であるため, $\theta_g(0) = \pi - \theta_f(0)$ であり, これを満たすのは

$$\theta_g(0) = \theta_f(0) \quad \cdots (a2.2)$$

である　(特に, $\theta_f(0) = \frac{\pi}{2}$).

$\varepsilon = -1$ の場合, $\mathbf{x}_g(0) = \cos(-\theta_f(0))\mathbf{n}(0) + \sin(-\theta_f(0))\mathbf{b}(0)$ であるため,

$$\theta_g(0) = -\theta_f(0) \quad \cdots (a2.3)$$

である.

- <u>$S \circ f \circ \varphi$ が f_* または $\check{f}_*$ になる条件を調べる.</u>

  $g := S \circ f \circ \varphi$ として, 向きを同調した g の単位法ベクトル場 ν_g を求める. $\sigma := \det S$, $\nu_g = \varepsilon\sigma\nu_f \circ \varphi$ とすると,

$$\begin{aligned}\det(g_u, g_v, \nu_g)(u,v) &= \det((S \circ f \circ \varphi(u,v))_u, (S \circ f \circ \varphi(u,v))_v, \nu_g(u,v)) \\ &= \det((S \circ f \circ \varphi(u,v))_u, (S \circ f \circ \varphi(u,v))_v, \varepsilon\sigma\nu_f \circ \varphi(u,v)) \\ &= \underbrace{(\det S)\sigma}_{1} \det((f \circ \varphi(u,v))_u, (f \circ \varphi(u,v))_v, \varepsilon\nu_f \circ \varphi(u,v)) \\ &= \underbrace{|\det J|}_{>0} \underbrace{(\lambda \circ \varphi)(u,v)}_{\geq 0} \geq 0.\end{aligned}$$

  よって、$\nu_g = \varepsilon\sigma\nu_f \circ \varphi$ は向きを同調した g の単位法ベクトル場である. 次に, g (resp. f) のカスプ方向を $\mathbf{x}_g$ (resp. $\mathbf{x}_f$) とすると,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_g(u) &:= \hat{\nu}_g(u) \times \mathbf{c}'_*(u) \quad (\mathbf{c}_*(u) := \mathbf{c}(-u)) \\ &= \varepsilon\sigma S\nu_f \circ \varphi(u,0) \times (-S\mathbf{c}'(-u)) \\ &= -\varepsilon \underbrace{\sigma(\det S)}_{1} S(\hat{\nu}_f(-u) \times \mathbf{c}'(-u)) \\ &= -\varepsilon S\mathbf{x}_f(-u) \quad \cdots (a2.4)\end{aligned}$$

  となる. g のカスプ角 θ_g を用いると $\mathbf{x}_g(u) = \cos\theta_g(u)\mathbf{n}(-u) + \sin\theta_g(u)\mathbf{b}(-u)$ と表せることに注意して, 式 (a2.4) に $\mathbf{x}_f(-u)$ を代入すると,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_g(u) &= -\varepsilon(\cos\theta_f(-u)S\mathbf{n}(-u) - \sin\theta_f(-u)S\mathbf{b}(-u)) \\ \therefore \mathbf{x}_g(0) &= -\varepsilon(\cos\theta_f(0)\mathbf{n}(0) + \sin\theta_f(0)\mathbf{b}(0))\end{aligned}$$

  と表せる (S が負の oriemtation-preserving symmetry の場合, $S\mathbf{n}(0) = \mathbf{n}(0)$, $S\mathbf{b}(0) = -\mathbf{b}(0)$) [*6].

[*6] S が orientation-preserving symmetry の場合, $S\mathbf{e}(0) = \mathbf{e}(0)$, $S\mathbf{n}(0) = \mathbf{n}(0)$, $S\mathbf{b}(0) = \sigma_S\mathbf{b}(0)$, T が orientation-reversing symmetry の場合, $T\mathbf{e}(0) = -\mathbf{e}(0)$, $T\mathbf{n}(0) = \mathbf{n}(0)$, $T\mathbf{b}(0) = -\sigma_T\mathbf{b}(0)$ である.

$\varepsilon = 1$ の場合, $\mathbf{x}_g(0) = \cos(\pi + \theta_f(0))\mathbf{n}(0) + \sin(\pi + \theta_f(0))\mathbf{b}(0)$ であるため $\theta_g(0) = \pi + \theta_f(0)$ であり, これを満たすのは

$$\theta_g(0) = -\theta_f(0) \quad \cdots (a2.5)$$

である.

$\varepsilon = -1$ の場合, $\mathbf{x}_g(0) = \cos(\theta_f(0))\mathbf{n}(0) + \sin(\theta_f(0))\mathbf{b}(0)$ であり,

$$\theta_g(0) = \theta_f(0) \quad \cdots (a2.6)$$

である.

以上の式 (a2.2)(a2.3)(a2.5)(a2.6) より, $f \circ \varphi$ と $S \circ f \circ \varphi$ はそれぞれ,

$$\begin{cases} \varepsilon = 1 \text{ のとき,} & f \circ \varphi = f_* \text{および } S \circ f \circ \varphi = \check{f}_* \\ \varepsilon = -1 \text{ のとき,} & f \circ \varphi = \check{f}_* \text{および } S \circ f \circ \varphi = f_* \end{cases}$$

が成り立つ.

- (b1) が成立している場合
  - <u>$T \circ f$ が f_* または $\check{f}_*$ になる条件を調べる.</u>

    $g := T \circ f$ として, ν_g (resp. ν_f) を g (resp. f) の単位法ベクトル場とする. 向きを同調した g の単位法ベクトル場を求める. $\nu_g = \sigma T \nu_f$, $\lambda := \det(f_u, f_v, \nu_f) \geq 0$ とすると,

$$\begin{aligned} \det(g_u, g_v, \nu_g)(u,v) &= \det((T \circ f(u,v))_u, (T \circ f(u,v))_v, \sigma T \nu_f(u,v)) \\ &= \det(T \circ f_u, T \circ f_v, \sigma T \nu_f)(u,v) \\ &= \underbrace{\sigma(\det T)}_{1} \det(f_u, f_v, \nu_f)(u,v) \\ &= \lambda(u,v) \geq 0. \end{aligned}$$

よって、$\nu_g = \sigma T \nu_f$ は向きを同調した g の単位法ベクトル場である. 次に, g (resp. f) のカスプ方向を $\mathbf{x}_g$ (resp. $\mathbf{x}_f$) とすると,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_g(u) &:= \hat{\nu}_g(u) \times \mathbf{c}'_*(u) \quad (\mathbf{c}_*(u) := \mathbf{c}(-u)) \\ &= \sigma T \nu_f(u,0) \times (T\mathbf{c}'(u)) \\ &= \underbrace{\sigma(\det T)}_{1} T(\hat{\nu}_f(u) \times \mathbf{c}'(u)) \quad (\hat{\nu}_f(u) := \nu_f(u,0)) \\ &= T\mathbf{x}_f(u) \quad \cdots (b1.1) \end{aligned}$$

となる． g のカスプ角 θ_g を用いると $\mathbf{x}_g(u) = \cos\theta_g(u)\mathbf{n}(-u) + \sin\theta_g(u)\mathbf{b}(-u)$ と表せることに注意して，式 (b1.1) に $\mathbf{x}_f(u)$ を代入すると，

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_g(u) &= \cos\theta_f(u)T\mathbf{n}(u) - \sin\theta_f(u)T\mathbf{b}(u) \\ \therefore \mathbf{x}_g(0) &= \cos\theta_f(0)T\mathbf{n}(0) - \sin\theta_f(0)T\mathbf{b}(0) \\ &= \cos\theta_f(0)\mathbf{n}(0) + \sigma\sin\theta_f(0)\mathbf{b}(0) \\ &= \cos(\sigma\theta_f(0))\mathbf{n}(0) + \sin(\sigma\theta_f(0))\mathbf{b}(0). \end{aligned}$$

と表せる．$\theta_g(0) = \sigma\theta_f(0)$ であることから，

$$\begin{cases} \sigma = 1 \text{ のとき}, & T \circ f = f_* \\ \sigma = -1 \text{ のとき}, & T \circ f = \check{f}_* \quad \cdots (b1.2) \end{cases}$$

である．

– <u>$T \circ f \circ \varphi$ が f_* または $\check{f}_*$ になる条件を調べる.</u>

$g := T \circ f \circ \varphi$ として，ν_g (resp. ν_f) を g (resp. f) の単位法ベクトル場とする．向きを同調した g の単位法ベクトル場を求める．J を $\varphi(u, v)$ のヤコビ行列，$\varepsilon := \mathrm{sgn}(\det J)$, $\nu_g = \varepsilon\sigma T\nu_f \circ \varphi$, $\lambda := \det(f_u, f_v, \nu_f) \geq 0$ とすると，

$$\begin{aligned} \det(g_u, g_v, \nu_g)(u, v) &= \det((T \circ f \circ \varphi(u, v))_u, (T \circ f \circ \varphi(u, v))_v, \varepsilon\sigma T\nu_f \circ \varphi(u, v)) \\ &= \varepsilon \underbrace{(\det T)\sigma}_{1} \det((f \circ \varphi(u, v))_u, (f \circ \varphi(u, v))_v, \nu_f \circ \varphi(u, v)) \\ &= \varepsilon(\det J)(\lambda \circ \varphi)(u, v) \\ &= \underbrace{|\det J|}_{>0} \underbrace{(\lambda \circ \varphi)(u, v)}_{\geq 0} \geq 0. \end{aligned}$$

よって、$\nu_g = \varepsilon\sigma T\nu_f \circ \varphi$ は向きを同調した g の単位法ベクトル場である．次に，g (resp. f) のカスプ方向を $\mathbf{x}_g$ (resp. $\mathbf{x}_f$) とすると，

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_g(u) &:= \hat{\nu}_g(u) \times \mathbf{c}_*'(u) \quad (\mathbf{c}_*(u) := \mathbf{c}(-u)) \\ &= \varepsilon\sigma T\nu_f \circ \varphi(u, 0) \times (T\mathbf{c}'(u)) \\ &= \varepsilon \underbrace{\sigma(\det T)}_{1} T(\hat{\nu}_f(u) \times \mathbf{c}'(u)) \quad (\hat{\nu}_f(u) := \nu_f(u, 0)) \\ &= \varepsilon T\mathbf{x}_f(u) \quad \cdots (b1.3) \end{aligned}$$

となる． g のカスプ角 θ_g を用いると $\mathbf{x}_g(u) = \cos\theta_g(u)\mathbf{n}(-u) +$

$\sin\theta_g(u)\mathbf{b}(-u)$ と表せることに注意して, 式 (b1.3) に $\mathbf{x}_f(u)$ を代入すると,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_g(u) &= \varepsilon(\cos\theta_f(u)T\mathbf{n}(u) - \sin\theta_f(u)T\mathbf{b}(u))\\ \therefore \mathbf{x}_g(0) &= \varepsilon(\cos\theta_f(0)T\mathbf{n}(0) - \sin\theta_f(0)T\mathbf{b}(0))\\ &= \varepsilon(\cos\theta_f(0)\mathbf{n}(0) + \sigma\sin\theta_f(0)\mathbf{b}(0)).\end{aligned}$$

と表せる. $\varepsilon = 1$ の non-effective symmetry は存在しないため, $\varepsilon = -1$ の場合のみを考えればよい.

$\varepsilon = -1$ の場合, $\mathbf{x}_g(0) = \cos(\pi + \sigma\theta_f(0))\mathbf{n}(0) + \sin(\pi + \sigma\theta_f(0))\mathbf{b}(0)$ であるため,

$$\theta_g(0) = \pi + \sigma\theta_f(0)$$

であり, σ の値によって

$$\begin{cases}\sigma = 1 \text{ ならば}, & T\circ f\circ\varphi = \check{f}_*\\ \sigma = -1 \text{ ならば}, & T\circ f\circ\varphi = f_* \quad \cdots (b1.4)\end{cases}$$

である.

以上の式 (b1.2)(b1.4) より, $T\circ f$ と $T\circ f\circ\varphi$ はそれぞれ

$$\begin{cases}\sigma = 1 \text{ ならば}, & T\circ f = f_*,\ T\circ f\circ\varphi = \check{f}_*\\ \sigma = -1 \text{ ならば}, & T\circ f = \check{f}_*,\ T\circ f\circ\varphi = f_*\end{cases}$$

が成り立つ.

- (b2) が成立している場合
  - $f\circ\varphi_2$ が f_* または $\check{f}_*$ になる条件を調べる.

    $g := f\circ\varphi_2$ として, ν_g (resp. ν_f) を g (resp. f) の単位法ベクトル場とする. 向きを同調した g の単位法ベクトル場を求める. J_2 を $\varphi_2(u,v)$ のヤコビ行列, $\varepsilon_2 := \mathrm{sgn}(\det J_2)$ $\nu_g = \varepsilon_2\nu_f\circ\varphi_2$, $\lambda := \det(f_u, f_v, \nu_f) \geq 0$ とすると,

$$\begin{aligned}\det(g_u, g_v, \nu_g)(u,v) &= \det((f\circ\varphi_2(u,v))_u, (f\circ\varphi_2(u,v))_v, \varepsilon_2\nu_f\circ\varphi_2(u,v))\\ &= \varepsilon_2(\det J_2)(\lambda\circ\varphi)(u,v)\\ &= \underbrace{|\det J_2|}_{>0}\underbrace{(\lambda\circ\varphi)(u,v)}_{\geq 0} \geq 0.\end{aligned}$$

    よって、$\nu_g = \varepsilon_2\nu_f\circ\varphi_2$ は向きを同調した g の単位法ベクトル場である. 次

に, g (resp. f) のカスプ方向を $\mathbf{x}_g$ (resp. $\mathbf{x}_f$) とすると,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_g(u) &:= \hat{\nu}_g(u) \times \mathbf{c}_*'(u) \quad (\mathbf{c}_*(u) := \mathbf{c}(-u)) \\ &= \varepsilon_2 \nu_f \circ \varphi_2(u,0) \times (-\mathbf{c}'(-u)) \\ &= \varepsilon_2 \hat{\nu}_f(-u) \times (-\mathbf{c}'(-u)) \quad (\hat{\nu}_f(u) := \nu_f(u,0)) \\ &= -\varepsilon_2 \mathbf{x}_f(-u) \quad \cdots (b2.1)\end{aligned}$$

となる. g のカスプ角 θ_g を用いると $\mathbf{x}_g(u) = \cos\theta_g(u)\mathbf{n}(-u) + \sin\theta_g(u)\mathbf{b}(-u)$ と表せることに注意して, 式 (b2.1) に $\mathbf{x}_f(-u)$ を代入すると,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_g(u) &= -\varepsilon_2(\cos\theta_f(-u)\mathbf{n}(-u) - \sin\theta_f(-u)\mathbf{b}(-u)) \\ \therefore \mathbf{x}_g(0) &= -\varepsilon_2(\cos\theta_f(0)\mathbf{n}(0) - \sin\theta_f(0)\mathbf{b}(0))\end{aligned}$$

と表せる.

$\varepsilon_2 = 1$ の場合, $\mathbf{x}_g(0) = \cos(\pi - \theta_f(0))\mathbf{n}(0) + \sin(\pi - \theta_f(0))\mathbf{b}(0)$ であるため, $\theta_g(0) = \pi - \theta_f(0)$ である. これを満たすのは $\theta_g(0) = \theta_f(0)$ であり, $f \circ \varphi_2$ は

$$f \circ \varphi_2 = f_* \quad \cdots (b2.2)$$

と表される.

$\varepsilon_2 = -1$ の場合, $\mathbf{x}_g(0) = \cos(-\theta_f(0))\mathbf{n}(0) + \sin(-\theta_f(0))\mathbf{b}(0)$ であるため $\theta_g(0) = -\theta_f(0)$ であり, $f \circ \varphi_2$ は

$$f \circ \varphi_2 = \check{f}_* \quad \cdots (b2.3)$$

と表される.

– $f \circ \varphi_1 \circ \varphi_2$ が f_* または $\check{f}_*$ になる条件を調べる.
  $g := f \circ \varphi_1 \circ \varphi_2$ として, ν_g (resp. ν_f) を g (resp. f) の単位法ベクトル場とする. 向きを同調した g の単位法ベクトル場を求める. J_{12} を $\varphi_1 \circ \varphi_2(u,v)$ のヤコビ行列, $\varepsilon_{12} := \operatorname{sgn}(\det J_{12})$, $\nu_g = \varepsilon_{12}\nu_f \circ \varphi_1 \circ \varphi_2$, $\lambda := \det(f_u, f_v, \nu_f) \geq 0$ とすると,

$$\begin{aligned}&\det(g_u, g_v, \nu_g)(u,v) \\ &= \det((f \circ \varphi_1 \circ \varphi_2(u,v))_u, (f \circ \varphi_1 \circ \varphi_2(u,v))_v, \varepsilon_{12}\nu_f \circ \varphi_1 \circ \varphi_2(u,v)) \\ &= \varepsilon_{12}(\det J_{12})(\lambda \circ \varphi_1 \circ \varphi_2)(u,v) \\ &= \underbrace{|\det J_{12}|}_{>0}\underbrace{(\lambda \circ \varphi_1 \circ \varphi_2)(u,v)}_{\geq 0} \geq 0.\end{aligned}$$

よって、$\nu_g = \varepsilon_{12}\nu_f \circ \varphi_1 \circ \varphi_2$ は向きを同調した g の単位法ベクトル場である.
次に, g (resp. f) のカスプ方向を $\mathbf{x}_g$ (resp. $\mathbf{x}_f$) とすると,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_g(u) &:= \hat{\nu}_g(u) \times \mathbf{c}_*'(u) \quad (\mathbf{c}_*(u) := \mathbf{c}(-u)) \\
&= \varepsilon_{12}\nu_f \circ \varphi_1 \circ \varphi_2(u,0) \times (-\mathbf{c}'(-u)) \\
&= \varepsilon_{12}\hat{\nu}_f(-u) \times (-\mathbf{c}'(-u)) \quad (\hat{\nu}_f(u) := \nu_f(u,0)) \\
&= -\varepsilon_{12}\mathbf{x}_f(-u) \quad \cdots (b2.4)
\end{aligned}
$$

となる. g のカスプ角 θ_g を用いると $\mathbf{x}_g(u) = \cos\theta_g(u)\mathbf{n}(-u) + \sin\theta_g(u)\mathbf{b}(-u)$ と表せることに注意して, 式 (b2.4) に $\mathbf{x}_f(-u)$ を代入すると,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_g(u) &= -\varepsilon_{12}(\cos\theta_f(-u)\mathbf{n}(-u) - \sin\theta_f(-u)\mathbf{b}(-u)) \\
\therefore \mathbf{x}_g(0) &= -\varepsilon_{12}(\cos\theta_f(0)\mathbf{n}(0) - \sin\theta_f(0)\mathbf{b}(0))
\end{aligned}
$$

と表せる. $\varepsilon_{12} = \varepsilon_1\varepsilon_2$ であることおよび non-effective symmetry φ_1 について $\varepsilon_1(= \mathrm{sgn}(\det J_1)) = 1$ は矛盾することから, 次のように場合分けする.
$\varepsilon_{12} = 1$, つまり $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = -1$ の場合, $\theta_g(0) = \pi - \theta_f(0)$ であり, これを満たすのは

$$
\theta_g(0) = \theta_f(0) \quad \cdots (b2.5)
$$

である.
$\varepsilon_{12} = -1$, つまり $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = 1$ の場合,

$$
\theta_g(0) = -\theta_f(0) \quad \cdots (b2.6)
$$

である.
以上の式 (b2.2)(b2.3)(b2.5)(b2.6) より, $f \circ \varphi_2$ および $f \circ \varphi_1 \circ \varphi_2$ はそれぞれ

$$
\begin{cases}
\varepsilon_2 = 1 \text{ ならば}, & f \circ \varphi_2 = f_*,\ f \circ \varphi_1 \circ \varphi_2 = \check{f}_* \\
\varepsilon_2 = -1 \text{ ならば}, & f \circ \varphi_2 = \check{f}_*,\ f \circ \varphi_1 \circ \varphi_2 = f_*
\end{cases}
$$

が成り立つ.

- (c) が成立している場合
  - $f \circ \varphi$ が f_* または $\check{f}_*$ になる条件を調べる.
    (a2) が成り立つ $\Longrightarrow$ $N_f = 1$ の証明より, $\epsilon(:= \mathrm{sgn}(\det D\varphi)) = -1 \Longrightarrow f \circ \varphi = \check{f}_*$ である.

- $T \circ f$ が f_* または $\check{f}_*$ になる条件を調べる.
  (a1) が成り立つ $\Longrightarrow$ $N_f = 1$ の証明より, $\sigma(:= \det T) = 1 \Longrightarrow T \circ f = f_*$ である.

- (d) が成立している場合
  - $f \circ \varphi$ が f_* または $\check{f}_*$ になる条件を調べる.
    (a2) が成り立つ $\Longrightarrow$ $N_f = 1$ の証明より, $\epsilon(:= \mathrm{sgn}(\det D\varphi)) = 1 \Longrightarrow f \circ \varphi = f_*$ である.
  - $T \circ f$ が f_* または $\check{f}_*$ になる条件を調べる.
    (a1) が成り立つ $\Longrightarrow$ $N_f = 1$ の証明より, $\sigma(:= \det T) = -1 \Longrightarrow T \circ f = \check{f}_*$ である.