・問題意識
(既存の問題の意義と結果の意義)
→ アピールする書き方

・m-type edge 導入

・HNSUY

1. 序論

1.1. 研究背景・動機 北大のアブストラクト

以前の研究 [3] では，特異点を許容するクラスであるフロンタルの螺旋曲面と回転面の等長変形についての研究を行った．とくに，与えられた螺旋曲面に対し，それに等長的な螺旋曲面の 2 係数族が存在することを示した．さらに [3] では，異性体と呼ばれる等長的な曲面の個数に関して，Honda-Naokawa-Saji-Umehara-Yamada [4] によりすでに示されている一般化されたカスプ辺とは異なる状況が $(3,4)$-カスプ辺では確認された．

そこで，一般のフロンタルの等長変形を行っていくにあたり，$(3,4)$-カスプ辺の等長変形に用いることのできる内在的な不変量を導入する必要があると考え，本研究を行った．

(ds^2, C の)
・symmetry の定ギ

・空間の定ギ
・f, f_+, f_- の定ギ
(+ カスプ角 定ギ?)

1.2. 主結果 具体的な設定 $f \in g^{\omega}_{m,*}$ (**)

Martins-Saji-Santos-Teramoto [10] により，カスプ辺の一般化として m-type edge と呼ばれる特異点を許容するクラスが導入された．m を正の整数とし，Σ を 2 次元部分多様体とする．このとき，C^∞ 級写像 $f:\Sigma\to\boldsymbol{R}^3$ が $p\in\Sigma$ で m**-type edge** であるとは，定義域と値域の局所座標系が存在して，f を p の近傍で

Hattori で存在が保証.

・定理 A. B

$$f(u,v)=(u^m,u^{m+1}a(u,v),v)$$

と表せるような C^∞ 級関数 $a(u,v)$ が存在することをいう．ここで，$a(u,v)=1$ の 3-type edge は $(3,4)$**-カスプ辺**と呼ばれる．さらに，Martins-Saji-Santos-Teramoto [10] は m-type edge に対する不変量である $(m,m+i)$**-カスプ的曲率** $\omega_{m,m+i}$ を導入した．具体的には，m-type edge に対して定義されるベクトル場の組 (ξ,η) を用いて，

$$\omega_{m,m+i}(p):=\frac{\|\xi f\|^{(m+i)/m}\det(\xi f,\eta^m f,\eta^{m+i}f)}{\|\xi f\times\eta^m f\|^{(2m+i)/m}}(p)\quad (i=1,2,\ldots,m-1)$$

により定義される．

さらに本論文では同様のベクトル場の組 (ξ,η) を用いて，**符号付き極限法曲率** $\tilde{\kappa}_\nu$ を

$$\tilde{\kappa}_\nu(p):=\frac{\det(\xi f,\eta^m f,\xi^2 f)}{\|\xi f\times\eta^m f\|\|\xi f\|^2}(p)$$

で定める．以上 2 つの m-type edge の不変量を用いて，$(m,m+i)$**-積曲率**を定義する．

定義． $f:\Sigma\to\boldsymbol{R}^3$ を $p\in\Sigma$ で m-type edge，$i=1,2,\ldots,m-1$ に対して $\omega_{m,m+i}$ を $(m,m+i)$-カスプ的曲率，$\tilde{\kappa}_\nu$ を符号付き極限法曲率とする．このとき，$(m,m+i)$**-積曲率** $\Pi_{m,m+i}$ を

$$\Pi_{m,m+i}(p):=\tilde{\kappa}_\nu(p)\omega_{m,m+i}(p),\quad (i=1,2,\ldots,m-1)$$

で定義する．

この $(m,m+i)$-積曲率に対して以下の主定理が得られた (定理 26, 29)．

主定理． $f:\Sigma\to\boldsymbol{R}^3$ を $p\in\Sigma$ で m-type edge，$i=1,2,\ldots,m-1$ に対して $\Pi_{m,m+i}(p)$ を $(m,m+i)$-積曲率とする．このとき，

(1) $(m,m+1)$-積曲率 $\Pi_{m,m+1}(p)$ は内在的な不変量である．

(2) $j = 2, \ldots, m-1$ に対して，特異点において $\Pi_{m,m+1}(p) = \cdots = \Pi_{m,m+j-1}(p) = 0$ であるならば，$(m, m+j)$-積曲率 $\Pi_{m,m+j}(p)$ は内在的な不変量である．

主定理において $m = 3$ とすると，$(3, 4)$-積曲率 $\Pi_{3,4}$ が内在的な不変量であることから，$(3, 4)$-カスプ辺の内在的な不変量として $(3, 4)$-積曲率が得られた．

・non-eff symmetry は、m:奇数特有．（n_f 族 に $n_f=1$ が起こる原因）

・m が偶数 の場合 に考えて、m次 折り目 特異点 というクラスを特徴づける．

1.3. 意義・証明のアイデアや方法

Martins-Saji-Umehara-Yamada [11] は，2-type edge の 1 つであるカスプ辺に対して，$\omega_{2,3}$ にあたるカスプ的曲率 κ_c とフロンタル f と f の単位法ベクトル場から定義される極限法曲率 κ_ν を用いて積曲率 $\kappa_\pi := \kappa_c \kappa_\nu$ を導入し，内在的な不変量であることを示した．今回の m-type edge の場合では，Martins-Saji-Santos-Teramoto [10] により導入された $(m, m+i)$-カスプ的曲率に加えて，m-type edge から定まるベクトル場を用いて符号付き極限法曲率を導入し，その積で定める $(m, m+i)$-積曲率が m-type edge から定まるベクトル場の取り方に依らない不変量であることを示した．

さらに，m-type edge の場合に得られるある局所座標系 (u, v) を用いて，f のガウス曲率 K に対して $\widetilde{K} = v^{m-1} K$ とすると

$$\widetilde{K}(u, 0) = \frac{(m-1)!}{m} \Pi_{m,m+1}(u)$$

と表すことができ，$\widetilde{K}(u, 0)$ が内在的な不変量であることから $\Pi_{m,m+1}$ が内在的な不変量であることを示した．

さらに，仮定の下で

$$\widetilde{K}_{v^{j-1}}(u, 0) = \frac{(m-1)!}{{}_{m+j-1}C_j} \Pi_{m,m+j}(u)$$

と $\widetilde{K}_{v^{j-1}}$ が内在的な不変量であることが同時に成り立つことから，$\Pi_{m,m+j}$ が内在的な不変量であることを示した．

この内在的な不変量 $(m, m+i)$-積曲率は以下のような応用を持つ：

- m-type edge におけるガウス曲率と平均曲率の有界性の特徴付け (定理 30, 32)．
- m-type edge の凸性についての特徴付け (定理 35)．
- $(3, 4)$-カスプ辺，$(3, 5)$-カスプ辺の内在的な判定条件 (系 41, 45)．
- $(3, 4)$-カスプ辺，$(3, 5)$-カスプ辺の等長変形定理 (定理 67)．

さらに本論文では付録として，以下の 3 つの結果について載せている．

- 内在的な不変量である $(m, m+i)$-積曲率 $\Pi_{m,m+i}$ の第一基本量による表示 (定理 72)．
- m-type edge に対する Fukui 型表現公式 (定理 85)．
- 退化次数 n 第 k 種特異点の normal form (定理 90)．

1.4. 今後の課題

・高次元化．

先行研究 [3] で得られた螺旋曲面に対するカスプ辺と $(3, 4)$-カスプ辺の異性体の個数の違いについて，一般のフロンタルに対してはどのように変化するかを調べていきたい．また，ある実解析的な空間曲線を特異曲線として得られる m-type edge について，異性体の個数を調べていきたい．

1.5. 謝辞

本修士論文の執筆にあたり，学部生時代から引き続き終始丁寧な指導をしてくださった指導教官である本田淳史准教授に大変感謝申し上げます.