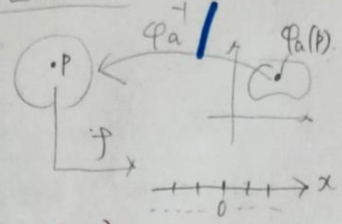
3

$\mathbb{R}^n$、球面、射影空間

(Todo) $\mathbb{R}$上のC^∞函数とは?

1



前回　C^∞級多様体の定義・例
今回　(C^∞級多様体上の) C^∞級関数, 接ベクトル, 接空間

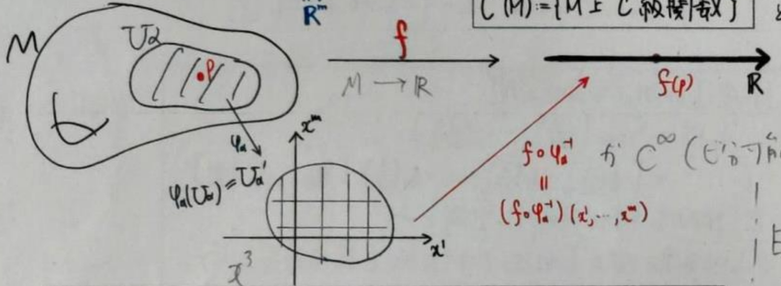
M: m次元 C^∞級多様体 (C^∞-manifold, C^∞-mfd, smooth manifold)
$\mathcal{S}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$: アトラス

$\boxed{M\text{上の関数とは 写像 } f: M\to\mathbb{R}\text{ のこと}}$

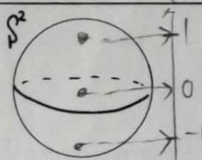
Def 関数 $f: M\to\mathbb{R}$ が C^∞級(なめらか) Smooth
$\Longleftrightarrow$ 各 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathcal{S}$ に対して、
$f\circ\varphi_\alpha^{-1}: U_\alpha' \to \mathbb{R}$ が ($\mathbb{R}^m$上の関数として) C^∞級

$U_\alpha' = \varphi(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^m$

$\boxed{C^\infty(M) := \{M\text{上 } C^\infty\text{級関数}\}}$ と表す。



Ex　S^2



$f: S^2\to\mathbb{R}$;　高さ
$f\begin{pmatrix}x^1\\x^2\\x^3\end{pmatrix}=x^3$ は C^∞級関数

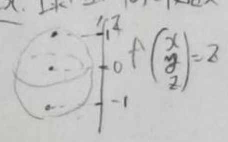
実際. (U,φ)　$\varphi^{-1}(u,v)=\frac{1}{1+u^2+v^2}\begin{pmatrix}2u\\2v\\u^2+v^2-1\end{pmatrix}$ ← 立体射影 より

$(f\circ\varphi^{-1})(u,v)=\frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2}$: $\mathbb{R}^2$上 C^∞級　$\varphi(U)$

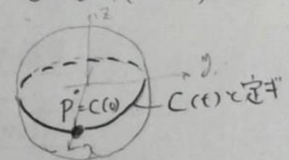
(V,ψ)　$(f\circ\psi^{-1})(\xi,\eta)=\frac{1-\xi^2-\eta^2}{1+\xi^2+\eta^2}$: C^∞級

注　$C^\infty(M) := \{M\text{上の } C^\infty\text{函数}\}$
☆ $U\cap V$上では $f\circ\varphi^{-1}=(f\circ\psi^{-1})\circ(\psi\circ\varphi^{-1})$
座標変換 $\psi\circ\varphi^{-1}$ C^∞級写像 なので
$\therefore$ $f\circ\varphi^{-1}$ が C^∞級 $\Longleftrightarrow$ $f\circ\psi^{-1}$ が C^∞級
多様体の定義より, $\psi\circ\varphi^{-1}$ は C^∞級.

Ex. 球面の高さ関数



Ex 単位球S^2
$U=S^2\setminus\{\text{北極}\}$



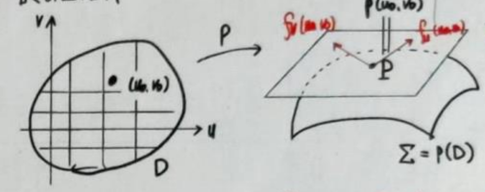
(赤道上を曲線$c(t)$とみて)
$p=c(0)=(1,0,0)$
$c(t)=(\cos t,\sin t,0)\in\mathbb{R}^3$
$\varphi(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{1-x_3}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$
$(\varphi\circ c)(t)=\frac{1}{1-0}\begin{bmatrix}\cos t\\\sin t\end{bmatrix}$
$=[\cos t,\sin t]$
$\therefore$ $\varphi\circ c(t)$ は C^∞級なので, $c(t)$も C^∞級曲線.

f: 高さ函数の方向ビブン?
$f(x_1,x_2,x_3)=x_3$　$f(c(t))=0$　$f'(c(t))=0$　$\therefore$ $V_c(f)=(f\circ c)'(0)=0$

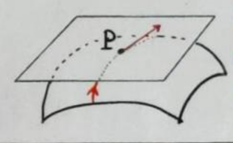
2

Taylor 展開の曲面 ver 的な

復習　$\mathbb{R}^3$の曲面片



$V_p := \mathrm{Span}\{f_u(u_0,v_0), f_v(u_0,v_0)\}$
$=\{a f_u(u_0,v_0)+b f_v(u_0,v_0)\mid a,b\in\mathbb{R}\}$
↑ Pにおける曲面の接ベクトル空間
(曲面の"一次近似")



$c(t)$: $P=c(0)$を通る曲面上の曲線
$c'(0)\in V_p$
実は $V_p=\{c'(0)\mid c(t):(-\varepsilon,\varepsilon)\to\Sigma, c(0)=P\}$
$\varepsilon>0$: 十分小

初期値 $=P$

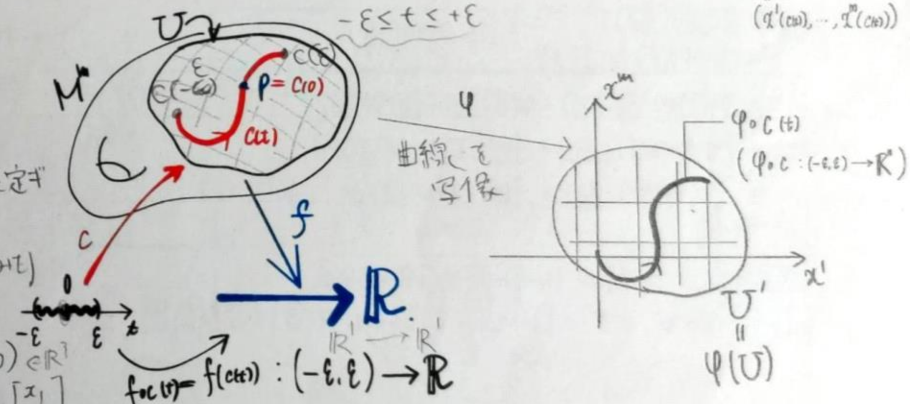
V_pを多様体で考えたい. (ポイント) 関数を使う

曲線に沿う方向微分

M^m: C^∞-mfd, $p\in M^m$
$U\subseteq M^m$: pの開近傍 (つまり $p\in U$をみたす開集合)　pの十分近い所のみで考えるよ
$c: (-\varepsilon,\varepsilon)\xrightarrow{C^\infty} U$, $c(0)=p$: pを通るなめらかな曲線

$c(t)$ がなめらか (C^∞級)
$\Longleftrightarrow$ $\varphi\circ c(t)$ がなめらか!
$= (x^1(c(t)),\dots,x^m(c(t)))$

$-\varepsilon\le t\le+\varepsilon$



$f\circ c(t)=f(c(t)): (-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}$

U上定義された C^∞級関数 $f\in C^\infty(U)$
⇝ $f\circ c: (-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}$ が考えられる.
⇝ $\boxed{(f\circ c)'(0)=\left.\frac{d(f\circ c)}{dt}\right|_{t=0} =: V_c(f)}$ と表し, fのcに沿う ($t=0$での) 方向微分という

$f'(c(t))$に $t=0$代入.

$g: g(x_1, x_2, x_3) = x_2$ を考えてみる。 $g(c(t)) = \sin t$, $g'(c(t)) = \cos t$. $g'(c(t))$ に $t=0$ 代入. $V_c(g) = (g\circ c)'(0) = 1$

曲線に沿う方向微分の性質

(0) ある p の近傍 $W \subseteq U$ において $f, g \in C^\infty(W)$ が一致 $(f=g)$
$\Longrightarrow v_c(f) = v_c(g)$

(1) $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $v_c(af+bg) = a\, v_c(f) + b\, v_c(g)$ ← 微分の線形性

(2) $v_c(fg) = v_c(f)\underbrace{g(p)}_{} + \underbrace{f(p)}_{}v_c(g)$ Leibniz rule 点pでの値

(proof) (0) は明らか

(1) $$v_c(af+bg) = \left.\frac{d((af+bg)\circ c)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\left(a f(c(t)) + b\, g(c(t))\right)'\right|_{t=0} = a(f\circ c)'(0) + b(g\circ c)'(0) = a\, v_c(f) + b\, v_c(g) \quad //$$

☆

(2) $$v_c(fg) = \left.\left(f(c(t))\, g(c(t))\right)'\right|_{t=0} = \left.\{(f\circ c)(t)\,(g\circ c)(t)\}'\right|_{t=0}$$
$$= \underbrace{(f\circ c)'(0)}_{v_c(f)}\underbrace{(g\circ c)(0)}_{g(c(0)) = g(p)} + \underbrace{(f\circ c)(0)}_{f(c(0)) = f(p)}\underbrace{(g\circ c)'(0)}_{v_c(g)}$$
$$= v_c(f)\, g(p) + f(p)\, v_c(g) \quad //$$

☆ 抽

この考えを抽象化して…

Def $p \in M^m$ の近傍で定義された C^∞-関数 f に対し、
実数 $v(f)$ を対応させる操作 (曲線は考えない)

$$\boxed{f \longmapsto v(f)}$$

で、性質 (0), (1), (2) をみたすものを、点pにおける方向微分という

(0) ある p の近傍 $W \subseteq U$ において $f, g \in C^\infty(W)$ が一致 $(f=g)$
$\Longrightarrow v(f) = v(g)$

(1) $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $v(af+bg) = a\, v(f) + b\, v(g)$

(2) $v(fg) = v(f)\, g(p) + f(p)\, v(g)$

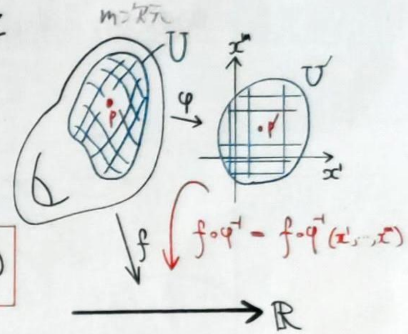
$D_p(M) := \{ v \mid p\text{における方向微分} \}$

Ex $f: S^2 \to \mathbb{R}$,
$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3$ (高さ関数) $p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_p(f) = \left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_{p'} (f\circ\varphi^{-1})(u,v) = \left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_{(u,v)=(0,0)} \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2}$$
$$= \left.\partial\left(\frac{u^2-1}{1+u^2}\right)_u\right|_{u=0} = \left.\frac{4u}{(1+u^2)^2}\right|_{u=0} = 0$$

Ex $v_c \in D_p(M)$

Ex pを含む座標近傍 $(U; x^1, x^2, \dots, x^m)$：ひとつ固定
$f\circ\varphi^{-1}: \underset{\mathbb{R}^m}{\underset{\cap}{U'}} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad (U' = \varphi(U))$
$p' = \varphi(p)$ とおく



(a) 各 $i \in \{1, \dots, m\}$ に対し $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$ を

$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p : f \longmapsto (f\circ\varphi^{-1})_{x^i}(p') = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{p'} (f\circ\varphi^{-1})(x^1, \dots, x^m)}$$

pのまわりで定義された C^∞-関数 何回でも微分できる

という操作とすると $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p \in D_p(M)$ 方向微分の集合

∵ 例えば (2) について (ライプニッツ則)
$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p(fg) = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{p'} \left((f\circ\varphi^{-1})(x^1, \dots, x^m)\cdot(g\circ\varphi^{-1})(x^1, \dots, x^m)\right)$$
$$= \left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{p'} (f\circ\varphi^{-1})(x^1, \dots, x^m)\right\}\underbrace{(g\circ\varphi^{-1})(p')}_{g(\varphi^{-1}(p')) = g(p)} + (f\circ\varphi^{-1})(p')\cdot\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{p'} (g\circ\varphi^{-1})(x^1, \dots, x^m)\right\}$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p(f)\cdot g(p) + f(p)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p(g) \quad //$$

積の微分がライプニッツ則を満たしている

(b) $\varphi = (x^1, \dots, x^m): U \longrightarrow U' \subseteq \mathbb{R}^m$
$j = 1, 2, \dots, m$ に対して x^j は U 上の関数
x^j は U 上 C^∞ 級関数 ← 座標関数 (j)

∵ $\varphi\circ\varphi^{-1} = id_{U'}$ なので、各点 $(x^1, \dots, x^m) \in U'$ に対して
$(\varphi\circ\varphi^{-1})(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^m)$
つまり
$$\begin{cases} (x^1\circ\varphi^{-1})(x^1, \dots, x^m) = x^1 \\ \quad\vdots \\ (x^m\circ\varphi^{-1})(x^1, \dots, x^m) = x^m \end{cases}$$
なので $x^j \in C^\infty(U)$ $(^\forall j = 1, \dots, m)$ ▨

(c) $$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p x^j = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}(x^j\circ\varphi^{-1})(x^1, \dots, x^m)\right|_{(x^1, \dots, x^m) = p'} = \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p') = \boxed{\begin{cases} 1 & (i = j\text{ のとき}) \\ 0 & (i \neq j\text{ のとき}) \end{cases}} = \delta_i^j$$

クロネッカーのデルタ

(a), (b), (c) は性質

Prop 1 $D_p(M)$ は ($\mathbb{R}$上の) ベクトル空間.

(proof) 和とスカラー倍を次のように定める:

$v, w \in D_p(M)$, $k \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\boxed{\begin{cases}(v+w)(f) := v(f)+w(f) & \cdots ☆\\ (kv)(f) := k\,v(f) & \cdots ☆'\end{cases}}$$

$v+w,\ kv \in D_p(M)$, つまり (0),(1),(2) が成り立つことを示せば良い

→ ☆, ☆' がそれぞれ (0),(1),(2) が成立する

$v+w$ について

(0) は明らか.

(1) $a,b\in\mathbb{R}$, f,g に対して

$(v+w)(af+bg)$

$= v(af+bg)+w(af+bg)$

$= a\,v(f)+b\,v(g)+a\,w(f)+b\,w(g)$

$= a\{v(f)+w(f)\}+b\{v(g)+w(g)\}$

$= a\,(v+w)(f)+b\,(v+w)(g)$ //

(2) $(v+w)(fg)$

$= v(fg)+w(fg)$

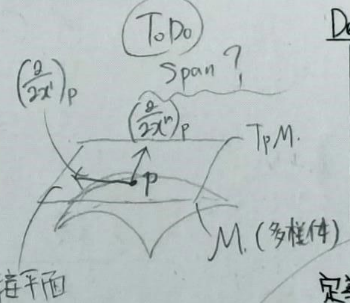
$= v(f)g(p)+f(p)v(g)+w(f)g(p)+f(p)w(g)$

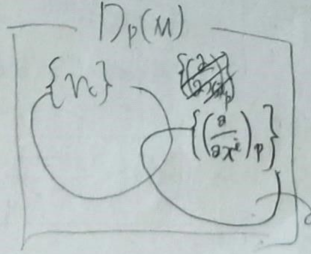
$= \{v(f)+w(f)\}g(p)+f(p)\{v(g)+w(g)\}$

$= (v+w)(f)\,g(p)+f(p)\,(v+w)(g)$ //

kv について 同様に (0),(1),(2) を確かめられる

よって $v+w,\ kv \in D_p(M)$ より $D_p(M)$ はベクトル空間 ▨





T_pM (m次元ベクトル空間)

‖ ← 実は一致する

$D_p(M)$

プリント②参照

Prop 2 $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p \in D_p(M)$ は1次独立

(proof) 実数 $a_1,\dots,a_m\in\mathbb{R}$ に対して

$a_1\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p + a_2\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_p+\cdots+a_m\left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p = 0$ ——⊛

⇒ $a_1=\cdots=a_m=0$ を示せば良い

⊛より. $\forall f$: pの近くで定義された C^∞-関数 に対して

$a_1\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p(f)+\cdots+a_m\left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p(f)=0$ ——⊛

座標関数

$f = x^1 \in C^\infty(U)$ とする

⊛は $a_1\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p(x^1)}_{1}+a_2\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_p(x^1)+\cdots+a_m\left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p(x^1)=0$ となり $a_1=0$

← これを $f=x^2$, $f=x^3$, ⋮, $f=x^m$ で同じことをやる.

$f=x^2,\dots,x^m$ とすれば $a_2=\cdots=a_m=0$ を示せる ▨

Def $D_p(M)$ の m次元部分空間

$T_pM := \mathrm{Span}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p,\dots,\left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p\right)$

$=\left\{a_1\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p+a_2\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_p+\cdots+a_m\left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p \;\middle|\; a_1,\dots,a_m\in\mathbb{R}\right\}$

を, pにおけるMの接ベクトル空間という

T_pM の元 $v\in T_pM$ を $p\in M$ における接ベクトルという.

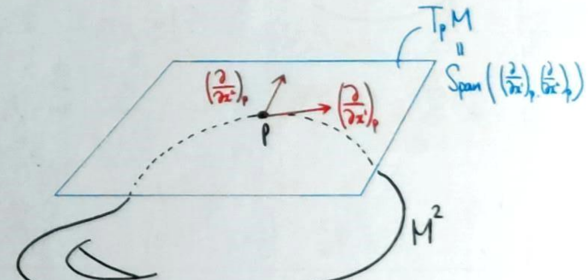
定義から, $T_pM\subseteq D_p(M)$ だが、次が成立

Thm $T_pM = D_p(M)$

$\forall v\in D_p(M)$ に対して

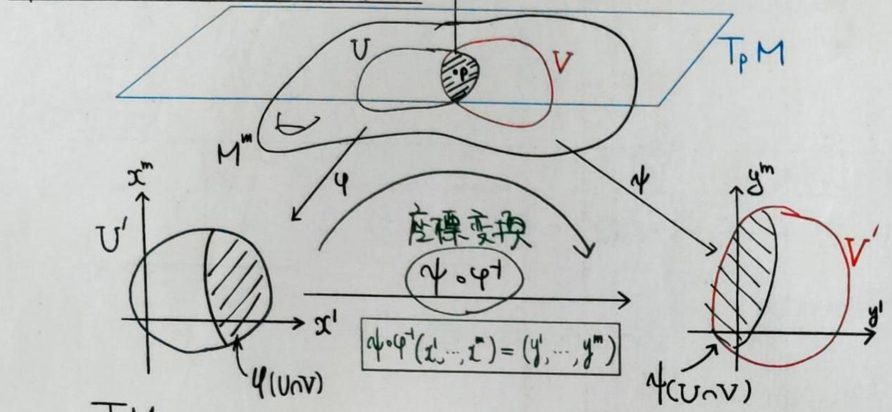
$$\boxed{v = v(x^1)\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p+\cdots+v(x^m)\left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p}$$

と表わされる



T_pMの定義が座標の取り方に依らないこと

$U \cap V \neq \phi$ とする.



$T_pM = \mathrm{Span}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p\right)$? $T_pM = \mathrm{Span}\left(\left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial y^m}\right)_p\right)$

Prop 3 $\boxed{\mathrm{Span}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p\right) = \mathrm{Span}\left(\left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial y^m}\right)_p\right)}$

(proof) $f \in C^\infty(U\cap V)$ に対して

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p(f) = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{p'}(f\circ\varphi^{-1})(x^1,\dots,x^m) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_p(f) = \frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_{p'}(f\circ\psi^{-1})(y^1,\dots,y^m)$$

よって
$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p(f) = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{p'}(f\circ\varphi^{-1})(x^1,\dots,x^m)$$

$\boxed{\psi\circ\varphi^{-1}(x^1,\dots,x^m)=(y^1,\dots,y^m)}$

$y^1(x^1,\dots,x^m)$ ...... $y^m(x^1,\dots,x^m)$

$$= \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{p'}\left(f\circ\psi^{-1}\circ\boxed{\psi\circ\varphi^{-1}}\right)(x^1,\dots,x^m)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{p'}(f\circ\psi^{-1})\left(y^1(x^1,\dots,x^m),\dots,y^m(x^1,\dots,x^m)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y^1}(f\circ\psi^{-1})\cdot\frac{\partial y^1}{\partial x^i}\Big|_{p'} + \cdots + \frac{\partial}{\partial y^m}(f\circ\psi^{-1})\cdot\frac{\partial y^m}{\partial x^i}\Big|_{p'}$$

$$= \frac{\partial y^1}{\partial x^i}\Big|_{p'}\left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)_p(f) + \cdots + \frac{\partial y^m}{\partial x^i}\Big|_{p'}\left(\frac{\partial}{\partial y^m}\right)_p(f)$$ が $^\forall f \in C^\infty(U\cap V)$ に対して成立

$$\therefore \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p = \frac{\partial y^1}{\partial x^i}\Big|_{p'}\left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)_p + \cdots + \frac{\partial y^m}{\partial x^i}\Big|_{p'}\left(\frac{\partial}{\partial y^m}\right)_p$$

スカラー $\frac{\partial y^1}{\partial x^i}(p)$　スカラー $\frac{\partial y^m}{\partial x^i}(p)$

: 各 $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$ は $\left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)_p \cdots \left(\frac{\partial}{\partial y^m}\right)_p$ の線形結合で表せる ◻

次回 5/7(火)

$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$ $(i=1,2,\dots,n)$ は $\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_p$ の線形結合で表される。

7

$U \to \mathbb{R}^2$

$\varphi(x^1, x^2, x^3) = \left(\frac{x^2}{x^1}, \frac{x^3}{x^1}\right)$　$\varphi^{-1}(u,v) = (1, u, v)$ として,

・$f\circ\varphi^{-1} = \frac{u^2}{1+u^2+v^2}$

・射影空間上で well-defied
$(f(x_1 x_2 x_3) = f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ か?$)$

$f(x^1 : x^2 : x^3) = f(\lambda x^1, \lambda x^2, \lambda x^3)$

先進数理科学 幾何 課題 No. 3

・射影空間上の函数か?

・特異点はないか?

問1 $(x^1 : x^2 : x^3)$ を P^2 の同次座標とする. $f : P^2 \to \mathbb{R}$ を

$$f(x^1 : x^2 : x^3) = \frac{(x^2)^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$$

と定める. 次の (1), (2) から正しいものを選べ.

(1) f は C^∞ 級関数である.

(2) f は C^∞ 級関数でない.

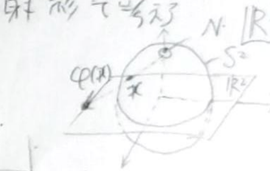
座標近傍(U, φ)を考える.

Ex)
$$h(x^1, x^2, x^3) = \frac{(x^2)^3}{(x^1)^3 + (x^2)^3 + (x^3)^3}$$
↓
$$h\circ\varphi^{-1}(u,v) = \frac{u^3}{1+u^3+v^3}$$

一見よさそうだが, $(u,v) = (-1, 0)$ で $h\circ\varphi^{-1}$ は定義できない!

$\varphi := \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ \sin\theta \end{bmatrix}$　~~高さ函数~~ $f\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = x^3$ として,

立体射影で考える



問2 S^2 を $\mathbb{R}^3$ の単位球面とし, N を北極とする:

$$S^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2 = 1 \right\}, \quad \mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

– S^2 の開集合 U を, $U := S^2 \setminus \{\mathrm{N}\}$ と定める. 立体射影 $\varphi = (u, v) : U \to \mathbb{R}^2$ を以下で定める:

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{1-z}(x, y) \qquad \left(\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in U \right).$$

– S^2 の点 p を $p := \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$ とおく.

– S^2 上の C^∞ 級関数 $f \in C^\infty(S^2)$ を

第2引数のみ得る函数.

$$\varphi(x) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \frac{2}{4}\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2$$

$$\frac{2v}{1+u^2+v^2} ?$$

$$f(\boldsymbol{x}) = y \qquad \left(\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S^2 \right)$$

とおく.

このとき,

$$\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_p (f)$$

$\frac{9}{4}$

の値を答えよ. 次の (1), (2) の中から正しいものを一つ選べ.

(1) 5/16

(2) $-3\sqrt{3}/16$

$$\frac{\frac{5}{4}+u^2}{\frac{13}{4}+u^2}$$

多様体上で方向微分をしたい場合.

→ チャートとなるような φ を1コかませる必要がある.

$$\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_p(f) = \frac{\partial}{\partial u}\Big|_{\varphi(p)}(f\circ\varphi^{-1})(u,v) = \frac{\partial}{\partial u}\Big|_{(u,v)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)} \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\frac{5}{4}+u^2}{\frac{13}{4}+u^2}\right)\Big|_{u=\frac{\sqrt{3}}{2}}$$