

目次

1	前回の宿題	2
2	論文の誤記をリストアップ	2
2.1	セクション 3	2
2.2	セクション 4	3
2.3	セクション 5	6
2.4	Appendix	8
3	Section 5 を日本語ノートにまとめる	10
3.1	Proposition 5.1	10
3.2	Remark 5.2	11
3.3	Example 5.3	11
3.4	Theorem III	12
3.5	Corollary 5.4	14
3.6	Proposition 5.5	15
3.7	Corollary 5.6	15
3.8	Proposition 5.7	16
3.9	Corollary 5.8	17
3.10	Example 5.9	18
3.11	Proposition 5.10	18
3.12	Theorem IV	19

HNSUY 修正一覧およびセクション 5 日本語まとめ

飯野 郁

2025/06/26

1 前回の宿題

やること

- 論文の誤記をリストアップ
- 論文のセクション 5 の正しい版を日本語でまとめる

2 論文の誤記をリストアップ

2.1 セクション 3

Lemma 3.7 Proof で、次のように書かれている。

(Lemma 3.7 Proof より)

If (u, v) is the local coordinate system as in Lemma 3.5, then $F = 0$, $\lambda = v\sqrt{EG_0}$ and $E(u, 0) = 1$ hold.

赤文字の部分は、 $\lambda = v\sqrt{\frac{EG_0}{2}}$ が正しい？ ($\lambda = EG - F^2$ に $F = 0$ と $G = \frac{v^2 G_0}{2}$ を代入すると分母に 2 が出る)

Lemma 3.10 Proof で、次のように書かれている。

(Lemma 3.10 Proof より)

By (3.6), $x(u)$ can be written in the form

$$(\mathbf{x}_+(u) :=) \mathbf{x}(u) = \cos \theta(u) \mathbf{n}(u) - \sin \theta(u) \mathbf{b}(u), \quad (2.1)$$

where $\theta(u)$ is the function defined by (3.11) and $\kappa(u)$ (resp. $\kappa_s(u)$) is the curvature function of $\mathbf{c}(u)$ (resp. the singular curvature function defined by (3.7)). In fact, since the singular curvature κ_s of ds^2 is less than κ on I , there exists a real analytic angular function $\theta : I \rightarrow \mathbf{R}$ satisfying (3.11) and

$$0 < |\theta(u)| < \frac{\pi}{2} \quad (u \in I).$$

赤文字の部分は、 $0 < |\theta(u)| < \pi$ が正しい？

2.2 セクション 4

Remark 4.4 で、次のように書かれている。

(Remark 4.4 より)

Differentiating $\mathbf{T} \circ \mathbf{c}_0(u) = \mathbf{c}_1(u)$, we have...

赤文字の部分は、 $\mathbf{T} \circ \mathbf{c}_0(-u) = \mathbf{c}_1(u)$ が正しい？

Remark 4.4 で、次のように書かれている。

(Remark 4.4 より)

Using this, one can also obtain the relation $-\sigma\tau_0(-u) = \tau_1(u)$, where τ_i ($i = 1, 2$) is the torsion function of c_i .

赤文字の部分は、 $\sigma\tau_0(-u) = \tau_1(u)$ が正しい？

Remark 4.5 で、次のように書かれている。

(Remark 4.5 より)

Then $f_{\#}(u, t) := f(-u, t)$ is also a generalized cuspidal edge along the same space curve as f but with the reversed orientation. If we set $c_{\#}(u) := c(-u)$, then

$c_{\#}(u) = f_{\#}(u, 0)$ holds. By a similar calculation like as in Remark 4.4, one can easily verify that $(\kappa(-u), -\tau(-u), -\theta(-u), \hat{\mu}(-u, t))$ gives the fundamental data of $f_{\#}(u, t)$.

赤文字の部分は、 $(\kappa(-u), \tau(-u), -\theta(-u), -\hat{\mu}(-u, t))$ が正しい？

Proof of Theorem II で、次のように書かれている。

(Proof of Theorem II より)

Since f is admissible, the singular curvature κ_s is determined only by ds_f^2 .

一方、Lemma3.7 では次のように書かれている。

(Lemma3.7 より)

The singular curvature is intrinsic. In particular, it is defined along the singular curve with respect to a given Kossowski metric. More precisely,

$$\kappa_s(u) = -\frac{E_{vv}(u, 0)}{2} \quad (2.2)$$

holds, where (u, v) is the coordinate system as in Lemma 3.5.

(Lemma3.5 より)

Let ds^2 be a C^ω -differentiable Kossowski metric defined on an open subset $U(\subset \mathbb{R}^2)$. Suppose that $\gamma : J \rightarrow U$ is a real analytic singular curve with respect to ds^2 such that

$$ds^2(\gamma'(t), \gamma'(t)) > 0 \quad (t \in J). \quad (2.3)$$

Then, for each $t_0 \in J$, there exists a C^ω -differentiable local coordinate system $(V; u, v)$ containing $(t_0, 0)$ such that $V \subset U$ and the coefficients E, F, G of the first fundamental form

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

satisfy the following three conditions:

- (1) $\gamma(u) = (u, 0)$, $E(u, 0) = 1$ and $E_v(u, 0) = 0$ hold along the u -axis,
- (2) $F(u, v) = 0$ on V , and
- (3) there exists a C^ω -function G_0 defined on V such that $G(u, v) = \frac{v^2 G_0(u, v)}{2}$ and $G_0(u, 0) = 2$.

『 f が admissible である』という仮定がなくても、 κ_s は第一基本形式のみで表すことができる。赤文字の部分は不要？

Proof of Theorem II で、次のように書かれている。

(Proof of Theorem II より)

Since the orientation of the singular curves of h_\pm is opposite of that of f , the two maps h_\pm are **non-faithful isomers** of f .

そもそも isomer ではない (f と右同値である) 場合がある。赤文字部分は "not isomers" が適切？

Proof of Theorem II で、次のように書かれている。

(Proof of Theorem II より)

Since the first fundamental form is determined independently of a choice of local coordinate system, we have **$J_C(f \circ \phi) = J_C(f) \circ \phi$** , where ϕ is a diffeomorphism on a certain tubular neighborhood of $J \times \{0\}$.

赤文字部分について、

- 論文内に J_C の定義がない？ (J_o の定義はセクション 1 に次のようにある)

Considering the first fundamental form ds_f^2 of f , we can define a map

$$J_o : g_r^*(\mathbf{R}_o^2, \mathbf{R}^3, C) \ni f \mapsto ds_f^2 \in K_I^r(\mathbf{R}_o^2). \quad (2.4)$$

- $J_C(f) \circ \phi$ ではなく、 $\phi * J_C(f)$?

Proposition 4.9 直後の式 (4.11) で、次のように書かれている。

(式 4.11 より)

$$B = \frac{\mu_0(u)}{3}t^3 + \frac{\mu_1(u)}{8}t^4 + \frac{\textcolor{red}{2}(-\mu_0(u)^3 + 2\mu_2(u))}{30}t^5 + t^6 b_6(t, u) \quad (2.5)$$

赤文字部分は不要？ (Lemma A.1 では 2 は付いていない)

2.3 セクション 5

Proposition 5.1 の証明で、次のように書かれている。

(Proposition 5.1 Proof より)

We suppose that \check{f} is congruent to f . **By Remark 4.5**, it is sufficient to consider the case that C does not lie in any plane.

赤文字は Remark 5.2 ?

(Remark 5.2 より)

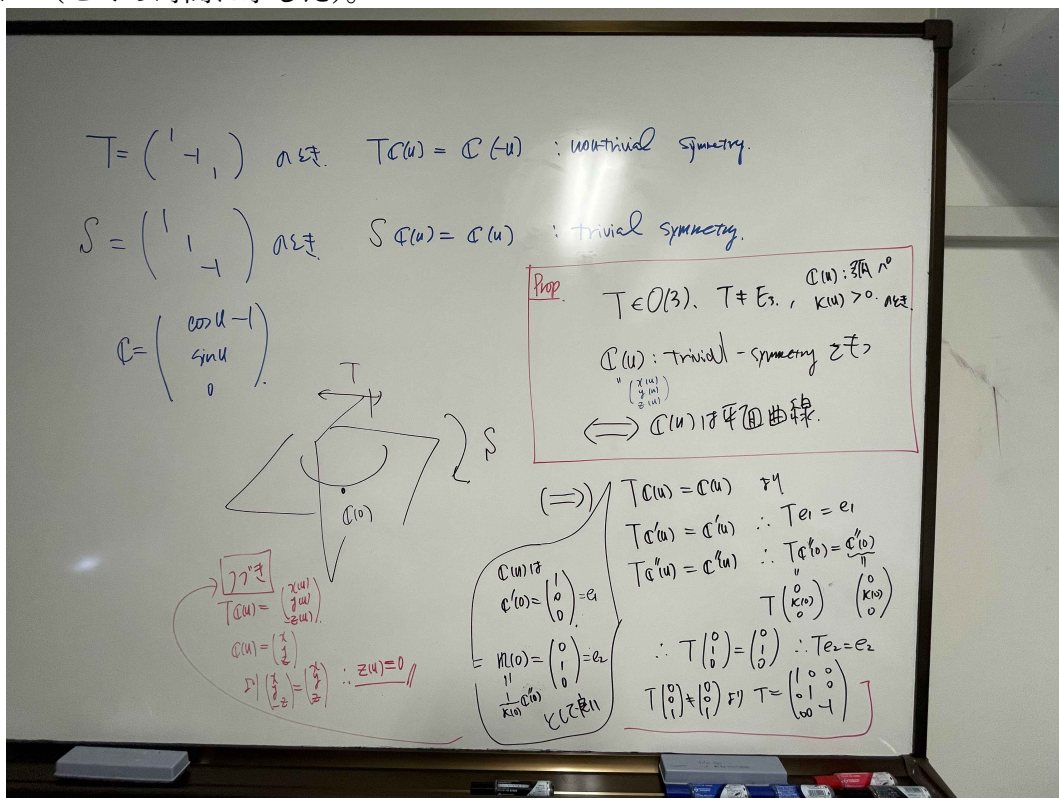
Suppose that C is planar and S is the reflection with respect to the plane containing C . For each $f \in g_{*,3/2}^r(\mathbf{R}_J^2, \mathbf{R}^3, C)$, $S \circ f$ gives a faithful isomer of f . Moreover, if f is real analytic (i.e. $r = \omega$), then we have $\check{f} = S \circ f$ (cf. Definition 3.18).

Proposition 5.1 の証明で、次のように書かれている。

(Proposition 5.1 Proof より)

We consider the case that T fixes each point of C . **Then C must lie in a plane**, a contradiction. So T is a non-trivial symmetry of C , that is, it reverses the orientation of C .

『 $c(u)$ が trivial symmetry を持つ $\Rightarrow c(u)$ は平面曲線である』は論文内では明記されていない (ゼミの時間に示した)。



Proposition 5.1 の証明で、次のように書かれている。

(Proposition 5.1 Proof より)

Conversely, if C has a positive non-trivial symmetry and the first fundamental form ds_f^2 has an effective symmetry ϕ , **then $T \circ f \circ \phi$ is a faithful isomer of f as seen in (a) of Remark 4.4**. Since such an isomer is uniquely determined (cf. Theorem 3.8), we have (5.1).

ϕ が一意であることを証明するには、追加で Proposition 3.15 が必要?

(Proposition 3.15 より)

Let ds^2 be a real analytic Kossowski metric belonging to $K_*^\omega(\mathbf{R}_o^2)$. Suppose that ϕ is a local C^ω -diffeomorphism satisfying $\phi^*ds^2 = ds^2$ and $\phi(o) = o$ which is not the identity map. Then ϕ is an involution which reverses the orientation of the singular curve. Moreover, such a ϕ is uniquely determined.

Corollary 5.8 で、次のように書かれている。

(Corollary 5.8 より)

Let $f \in g_{**,3/2}^\omega(\mathbf{R}_J^2, \mathbf{R}^3, C)$. Suppose that C lies in a plane and admits a nontrivial symmetry T at the origin 0. Then $\check{f} = S \circ f$ holds, **and $T \circ f, S \circ T \circ f$ give the inverse and the inverse dual of f** , where S is a reflection with respect to the plane. As a consequence, $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ belong to a single congruence class.

赤文字部分の対応が逆である？ ($T \circ f$ が f の inverse dual, $S \circ T \circ f$ が f の inverse?)

Corollary 5.8 の証明で、次のように書かれている。

(Corollary 5.8 Proof より)

Obviously, $\check{f} = S \circ f$ holds (cf. Remark 5.2). **On the other hand, $T \circ f$ gives a non-faithful isomer**, and its isometric dual $S \circ T \circ f$ also gives another non-faithful isomer.

そもそも、 $T \circ f$ は isomer ではない可能性がある。(T と $T \circ f$ の像が一致する場合がある)

2.4 Appendix

Proposition A.2 で、次のように書かれている。

(Proposition A.2 より)

It is remarkable that the coefficient μ_1 does not affect the criterion for 5/2-cusps. In this case, $\mu_0 = 0$ holds, and μ_1 and μ_2 are proportional to the “secondary cuspidal curvature” and the “bias” of $\sigma(t)$ at $t = 0$, respectively.

赤文字は μ_1 and μ_2 are proportional to the “bias” and the “secondary cuspidal curvature” が正しい？ (bias と secondary cuspidal curvature が入れ替わってる)

3 Section 5 を日本語ノートにまとめる

本節では、isomer のいくつかの性質を示し、イントロダクションで述べた Theorem III, IV の主張を証明する。

3.1 Proposition 5.1

$f \in g_{**,3/2}^\omega(\mathbf{R}_f^2, \mathbf{R}^3, C)$ とする. このとき, 次の (a) と (b) は同値である.

- (a) \check{f} が f と合同である (定義 0.2 参照)
- (b) 次の (i), (ii) の少なくとも一方が成り立つ
 - (i) 曲線 C が平面内にある
 - (ii) C が正の non-trivial symmetry をもち, かつ f の第一基本形式 ds_f^2 が effective symmetry をもつ (定義 0.4 参照)

(Proof)

(i) \implies の証明

\check{f} と f が合同であると仮定する. Remark 5.2 より, C がいかなる平面にも含まれない場合のみを考えれば十分である. Remark 0.5 より, \mathbb{R}^3 の等長変換 T と, f の特異曲線近傍で定義された微分同相写像 φ が存在して,

$$T \circ f \circ \varphi = \check{f}$$

を満たす.

まず, T が C の各点を固定する場合を考える. この時, ^{*1} C は平面内になければならず, 仮定と矛盾する. したがって, T は C の non-trivial symmetry であり, 定義 1.2 より, C の向きを反転させる.

T が負の symmetry であると仮定すると, Remark 4.4(b) より, $f_0(u, t) = T \circ f_0(-u, t)$ であるため, f の像と $T \circ f$ の像は一致する. しかし, ^{*2} f の像は \check{f} の像とは異なるので, 矛盾する.

^{*1} ※ 1 5/29 に, ゼミで示した.

^{*2} ※ 2 Remark 4.4(b) より, f の像 = $T \circ f$ の像. $T \circ f$ と $T \circ f \circ \varphi$ が右同値であるため, f の像 = $T \circ f \circ \varphi$ の像. 式 (5.1) より, f の像 = \check{f} の像. 一方で, イントロダクションより等長双対 \check{f} は f とカスプ角が反転するため, f と像は一致しない.

ゆえに, T は正の symmetry であり, このとき φ は ds_f^2 の effective symmetry を与える.*³ よって, (2) を満たす.

(ii) \Leftarrow の証明

C が正の non-trivial symmetry を持ち, ds_f^2 が effective symmetry φ を持つと仮定する. $T \circ f \circ \varphi$ は Proposition 3.15 および Remark 4.4(a) により, $\check{f}(u, t) = T \circ f(-u, t) = T \circ f \circ \varphi(u, t)$ であり, f の faithful isomer となる. さらに, Theorem 3.8 より異性体は一意であるため, 式 (5.1) が従う. よって, $T \circ f$ と \check{f} は右同値であるため, 同じ像を持つ. よって合同の定義より, f と \check{f} は合同である.

(i)(ii) より, 合同関係を示した. ■

3.2 Remark 5.2

C が平面内にあるとし, その平面に関する鏡映 (reflection) を S とする.

任意の $f \in g_{**,3/2}^\omega(\mathbf{R}_J^2, \mathbf{R}^3, C)$ に対し, $S \circ f$ は f の faithful isomer になる. さらに, f が実解析的 (つまり, $r = \omega$) なら $\check{f} = S \circ f$ が成り立つ (定義 3.18 参照).

3.3 Example 5.3

$f \in g_{**,3/2}^\omega(\mathbf{R}_J^2, \mathbf{R}^3, C)$ を, 基本データ $(\kappa, \tau, \theta, \hat{\mu})$ ($\tau \neq 0$) をもつ admissible な一般化カスプ辺とする. ここで κ, τ, θ は定数, 拡張半カスプ曲率関数 $\hat{\mu}$ は u に依らないとする. この場合, 実解析性を仮定せずとも, 次のようにして $\text{SO}(3)$ の等長変換 T と ds_f^2 の effective symmetry φ を取り, $T \circ f \circ \varphi$ が f の faithful isomer となることを示せる.

実際, C の曲率は κ , 捩率は τ で共に定数である. $\tau \neq 0$ なので C は \mathbb{R}^3 内の螺旋 (helix) であり, 点 $\mathbf{0} \in C$ での主法線に関する 180° 回転 $T \in \text{SO}(3)$ が存在して

*³ φ が symmetry であることの確認

定理 3.8 より, f と \check{f} の第一基本形式は一致するため, $ds_f^2 = ds_{\check{f}}^2$. 式 (5.1) より $\check{f} = T \circ f \circ \varphi$ であるので, $ds_{\check{f}}^2 = ds_{T \circ f \circ \varphi}^2 = \varphi^* ds_{T \circ f}^2$. φ は内積を保存するため, $\varphi^* ds_{T \circ f}^2 = \varphi^* ds_f^2$ である. よって, $ds_{\check{f}}^2 = \varphi^* ds_f^2$ であるため, φ は symmetry である.

φ が effective であることの確認

式 (5.1) より $\check{f} = T \circ f \circ \varphi$. また, 等長双対 \check{f} は f との faithful isomer であるため, f と \check{f} の曲線を辿る向きは一致する. T が曲線 C の向きを反転させることを考慮すると, φ も曲線 f の向きを反転させる作用が無いといけな. よって, φ は effective である. このとき φ は ds_f^2 の effective symmetry を与える. よって, (2) を満たす.

$T(C) = C$ となる. Proposition 5.10 の前半より, 第一基本形式

$$ds_f^2 = E(t)du^2 + 2F(t)dudt + G(t)dt^2$$

が involution としての effective symmetry φ をもつことを示せば十分である. 実際, そのような φ が存在すれば, $\check{f} := T \circ f \circ \varphi$ が f の isometric dual となる.

この状況では, 関数 A, B (式 (4.6), (4.9) 参照) は

$$A(t) = t^2\alpha(t), \quad B(t) = t^3\beta(t)$$

と書け, α, β は C^r 級である. Proposition 4.9 により,

- $E(t) > 0$ である
- $F(t) = t^4 F_0(t)$ となる C^∞ 関数 $F_0(t)$ が存在し, $G(t) = t^2$ である

が成り立つ.

いま, ω_1 と ω_2 を

$$\omega_1 = \sqrt{E(t)} \left(du + \frac{F(t)}{E(t)} dt \right), \quad \omega_2 = t \sqrt{\frac{E(t) - t^6 F_0(t)^2}{E(t)}} dt$$

と置けば $ds_f^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2$ となる. さらに x と y を

$$x(u, t) := u + \int_0^t \frac{F(v)}{E(v)} dv, \quad y(t) := \int_0^t \sqrt{\frac{E(v) - v^6 F_0(v)^2}{E(v)}} dv$$

とおくと, (x, y) は $(0, 0)$ を中心とする新たな局所座標系となり, t を y の関数 $t = t(y)$ とみなせる. そして,

$$ds_f^2 = E(y)dx^2 + t(y)^2 dy^2,$$

が成り立つ. したがって, 局所微分同相写像 $\varphi: (x, y) \mapsto (-x, y)$ は ds_f^2 の effective symmetry となる.

f の基本データが $(\kappa, \tau, \theta, \mu)$ であることを踏まえ, 後ほど Proposition 6.1 で, \check{f} が $(\kappa, \tau, -\theta, \mu)$ を基本データとするカスプ辺と右同値であることを示す.

3.4 Theorem III

$f \in g_{**}^{\omega, 3/2}(\mathbf{R}_J^2, \mathbf{R}^3, C)$ とする. すなわち f を admissible とする. このとき,

$$f, \quad \check{f}, \quad f^*, \quad \check{f}^*$$

の右同値類の個数が 4 であるための必要十分条件は, 第一基本形式 ds_f^2 が symmetry を持たない (定義 0.4 参照) ことである.

(Proof)

(i) \Rightarrow の対偶を示す ($\neg(\text{symmetry を持つ}) \Rightarrow \neg(\text{右同値類は 4 個})$)

ds_f^2 が symmetry φ を持つと仮定する. すると, Corollary 3.16 より, この symmetry は effective である. したがって,

$$f \circ \varphi, \check{f} \circ \varphi$$

は, それぞれ \check{f}_*, f_* と右同値である. よって, $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ の右同値類は 2 つまで減る. 対偶を示したので, 本来示したかった命題 (右同値類は 4 個 \Rightarrow symmetry を持たない) も示される.

(ii) \Leftarrow の対偶を示す ($\neg(\text{右同値類は 4 個}) \Rightarrow \neg(\text{symmetry を持つ})$)

$\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ のうち, 2 つが右同値であると仮定する, f を $\check{f}, f_*, \check{f}_*$ のいずれかに置き換えて, 右同値な一方を f , もう一方を

$$g \in \{\check{f}, f_*, \check{f}_*\}$$

と仮定してよい. また, 一般性を失うことなく, f は正規系 (定義 4.1) で書かれていると仮定して良い. f と \check{f} は右同値になり得ないので^{*4}, 写像 g は f_* か \check{f}_* と右同値である. 仮定より f と g が右同値であるので, 微分同相写像 φ が存在して,

$$g = f \circ \varphi$$

であり, $\varphi^* ds_f^2 = ds_f^2$ が成り立つ.

φ が恒等写像であれば, $g = f$ が成り立つ. しかし,

$$u \mapsto f(u, 0)$$

$$u \mapsto f_*(u, 0) = \check{f}_*(u, 0)$$

が曲線 C を互いに異なる向きで与えるという事実 (Theorem 2 の証明より) と反する. よって, $\varphi \neq \text{Id}$ である. symmetry の定義 0.4 より, φ は symmetry である. したがって, Proposition 3.15 と Corollary 3.16 ^{*5} によって, φ は ds_f^2 の effective symmetry でなければならない.

^{*4} \check{f} は f の等長双対 $\Rightarrow \check{f}$ は f の faithful isomer $\Rightarrow \check{f}$ は f の isomer $\Rightarrow \check{f}$ は f と右同値ではない

^{*5} φ が ds_f^2 の C^ω -symmetry $\Rightarrow \varphi$ は effective を満たす symmetry

対偶を示したので、本来示したかった命題 (symmetry を持たない \Rightarrow 右同値類は 4 個) も示される.

(i)(ii) より, 同値関係を示した. ■

3.5 Corollary 5.4

$f \in g_{**,3/2}^\omega(\mathbf{R}_f^2, \mathbf{R}^3, C)$ とする. さらに, 次を仮定する.

- (1) C は平面曲線であり, 原点 $\mathbf{0}$ において non-trivial symmetry をもたない
- (2) 第一基本形式 ds_f^2 は effective symmetry をもたない (定義 0.4 参照)

このとき, 次が成り立つ.

- $\check{f} := S \circ f$ が成り立つ. ただし, $S \in O(3)$ は C を含む平面についての鏡映 (reflection) である
- 等長双対, 逆, 逆双対はそれぞれ $S \circ f$, f_* , $S \circ f_*$ で与えられる. さらに, f_* は f と合同ではない

特に, これら 4 つの写像

$$f, \quad S \circ f, \quad f_*, \quad S \circ f_*$$

は 2 つの合同類を構成する.

(Proof)

まず f が実解析であるため, Remark 5.2 より, $\check{f} = S \circ f$ が成り立つ. 次に, 2 つ目の主張を示す. C が平面内にあるので,

$$I_c(f) = S \circ f$$

が成り立つ (I_c の定義は Theorem 1 参照. $f \mapsto \check{f}$). Theorem 2 を適用する^{*6} と, $J_c^{-1}(J_c(f))$ の右同値類は,

$$\{f, \quad S \circ f, \quad f_*, \quad S \circ f_*\}$$

で表される. あとは, f_* が f と合同でないことを示せば十分である. もし f_* が f と合同だとすると, Remark 0.5 より, $T \in O(3)$ と 微分同相写像 φ (f の特異曲線近傍で定義)

^{*6} g の第一基本形式が f の第一基本形式と等しいとき, g は $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ のいずれかと右同値である.

が存在して,

$$T \circ f_* \circ \varphi = f$$

となる. 特に, $\varphi^* ds_f^2 = ds_{\check{f}}^2$ である*7. 仮定 (1) より, T は non-trivial ではないので, f と f_* が曲線 C を辿る向きが逆になるには, φ は effective symmetry でなければいけない. しかし, これは仮定 (2) に矛盾する. よって, f_* と f は合同ではない. ■

3.6 Proposition 5.5

$f \in g_{**}^{\omega, 3/2}(\mathbf{R}_J^2, \mathbf{R}^3, C)$ とする. さらに, 次を仮定する.

- (1) C は平面曲線ではなく, 原点 $\mathbf{0}$ において non-trivial symmetry をもたない
- (2) f の第一基本形式 ds_f^2 は effective symmetry φ をもつ

このとき, $\check{f}(:= I_C(f))$ は f と合同ではなく,

$$\check{f}, \quad \check{f} \circ \varphi, \quad f \circ \varphi$$

がそれぞれ等長双対, 逆, 逆双対を与える.

(Proof)

まず, Proposition 5.1 より, \check{f} は f と合同ではない. $\check{f} \circ \varphi$ (または $f \circ \varphi$) は f と同じ第一基本形式 ds_f^2 を持つ*8 ので, φ が effective であることから, f_* または \check{f}_* と一致する. Remark 4.5 より, $\check{f} \circ \varphi$ (または $f \circ \varphi$) のカスプ角は f のカスプ角と符号が反転 (または同符号) する. したがって,

$$f_* = \check{f} \circ \varphi \quad (\text{または } \check{f}_* = f \circ \varphi)$$

である. ■

3.7 Corollary 5.6

$f \in g_{**}^{\omega, 3/2}(\mathbf{R}_J^2, \mathbf{R}^3, C)$ とする. さらに, 次を仮定する.

- (1) C は平面曲線で, 原点 $\mathbf{0}$ において non-trivial symmetry をもたない

7 $ds_f^2 = ds_{T \circ f_ \circ \varphi}^2 = \varphi^* ds_{T \circ f_*}^2 = \varphi^* ds_{\check{f}_*}^2 = \varphi^* ds_{\check{f}}^2$ である. 最後の等式は, Theorem 2 より, f_* と \check{f} が同じ第一基本形式を持つ事による.

8 $ds_{\check{f} \circ \varphi}^2 = \varphi^ ds_{\check{f}}^2 = \varphi^* ds_f^2 = ds_f^2$. 等長双対 \check{f} が f と同じ第一基本形式であることおよび, φ が symmetry であることの定義を用いた.

(2) f の第一基本形式 ds_f^2 は effective symmetry φ をもつ

このとき, 次が成り立つ.

- $\check{f} = S \circ f$ が成り立つ. ただし $S \in O(3)$ は C を含む平面に関する鏡映 (reflection) である
- $S \circ f, \quad S \circ f \circ \varphi, \quad f \circ \varphi$ はそれぞれ, f の等長双対, 逆, 逆双対を与える

したがって, f のすべての isomer は f と合同になる.

(Proof)

まず, Remark 5.2 より, $\check{f} = S \circ f$ である. $S \circ f \circ \varphi$ (または $f \circ \varphi$) は f と同じ第一基本形式 ds_f^2 を持つので^{*9}, φ が effective であることから, $S \circ f \circ \varphi$ は f_* と, $f \circ \varphi$ は \check{f}_* と一致する. 曲線 $\mathbf{c}_\#(u) := \mathbf{c}(-u)$ に沿った $S \circ f \circ \varphi$ (または $f \circ \varphi$) のカスプ角の符号は, f のカスプ角と符号が異なる (または同符号) ので,

$$f_* = S \circ f \circ \varphi, \quad \check{f}_* = f \circ \varphi$$

である. 最後に, 4 つの写像は互いに f と合同であることは明らか^{*10} である. よって, 命題が示される. ■

3.8 Proposition 5.7

$f \in g_{*,3/2}^\omega(\mathbf{R}_J^2, \mathbf{R}^3, C)$ とする. さらに, 次を仮定する.

- (1) C は平面曲線ではなく, 原点 $\mathbf{0}$ において non-trivial symmetry $T \in O(3)$ をもつ
- (2) f の第一基本形式 ds_f^2 は effective symmetry をもたない

このとき, 次が成り立つ.

- $\check{f} := I_C(f)$ は f と合同ではない

^{*9} $ds_{S \circ f \circ \varphi}^2 = \varphi^* ds_{S \circ f}^2 = \varphi^* ds_f^2 = ds_f^2$. S は内積を保存することおよび φ は symmetry であることを用いた.

^{*10} f と g が合同である $\Leftrightarrow \exists T \in O(3), \exists \psi$: 微分同相写像 s.t. $g = T \circ f \circ \psi$ である.

$S \circ f$ について:

$T \in O(3)$ に $T = S$, 微分同相写像 ψ に $\psi = \text{Id}$ を代入すれば, $S \circ f = T \circ f \circ \psi$ が成り立つ.

$f \circ \varphi$ について:

$T \in O(3)$ に $T = \text{Id}$, 微分同相写像 ψ に $\psi = \varphi$ を代入すれば, $f \circ \varphi = T \circ f \circ \psi$ が成り立つ.

$S \circ f \circ \varphi$ について:

$T \in O(3)$ に $T = S$, 微分同相写像 ψ に $\psi = \varphi$ を代入すれば, $S \circ f \circ \varphi = T \circ f \circ \psi$ が成り立つ.

- $T \circ \check{f}$ は f の逆, $T \circ f$ は \check{f} の逆双対を与える

特に,

$$f, \quad \check{f}, \quad T \circ \check{f}, \quad T \circ f$$

は 2 つの合同類をなす.

(Proof)

Proposition 5.1 より, \check{f} は f と合同ではない. よって主張はすぐに従う (Proof of Theorem 2 より).

3.9 Corollary 5.8

$f \in g_{**,3/2}^\omega(\mathbf{R}_J^2, \mathbf{R}^3, C)$ とする. 曲線 C が平面内にあり, 原点 $\mathbf{0}$ において non-trivial symmetry T をもつと仮定する. このとき,

$$\check{f} = S \circ f.$$

が成り立つ. ただし $S \in O(3)$ は平面に関する鏡映 (reflection) である. さらに, $T \circ f$ は f の逆双対, $S \circ T \circ f$ は \check{f} の逆を与える.

結果として,

$$f, \quad \check{f}, \quad f_*, \quad \check{f}_*$$

の 4 つはすべて同一の合同類に属する.

(Proof)

f が実解析であるため, Remark 5.2 より $\check{f} = S \circ f$ である. 一方, $T \circ f$ は non-faithful isomer であり^{*11}, その等長双対 $S \circ T \circ f$ も別の non-faithful isomer である^{*12}. 仮定より C が平面内にあるので, Proposition 5.1 より f と \check{f} は合同^{*13} である. 以上より, $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ はすべて同一の合同類に属する. ■

^{*11} non-faithful isomer であるという表記は正しくなく, そもそも $T \circ f$ は isomer でない可能性がある.

^{*12} S は曲線 C 上の各点に関して不動であるため, 曲線をたどる向きは不変. また, S は回転行列であるため, $S \in SO(3)$. さらに Remark 4.4(a) より, $S \circ T \circ f$ は $T \circ f$ の等長双対 ($= \check{f}_*$) である.

^{*13} (1) f と $f_*(= T \circ f)$ が合同であることの確認

$T \circ f = R \circ f \circ \varphi$ を満たすような $R \in O(3)$, 微分同相写像 φ が存在すればよい.

等長変換 R に T を代入, diffeo φ に Id を代入すれば, $T \circ f = T \circ f \circ \text{Id}$ である.

(2) f と $\check{f}_*(= S \circ T \circ f)$ が合同であることの確認

同様に, 等長変換 R に $S \circ T$ を代入, diffeo φ に Id を代入すれば, $S \circ T \circ f = S \circ T \circ f \circ \text{Id}$ である.

3.10 Example 5.9

次のように写像 f を定める.

$$f(u, v) := (\varphi(u, v) \cos u - 1, \varphi(u, v) \sin u, v^3 u + 2v^3 - v^2).$$

ただし, $\varphi(u, v)$ は

$$\varphi(u, v) = -v^3 u - 2v^3 - v^2 + 1$$

とする. このとき, f は

$$\mathbf{c}(u) := f(u, 0) = (\cos u - 1, \sin u, 0)$$

上にカスプ辺特異点をもつ.

また, 行列

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を用いると, $S \circ f$ は f の faithful isomer であり, $T \circ f$ および $TS \circ f$ は non-faithful isomer となる.

なお, f は Fukui のデータ (θ, A, B) の

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \quad A(u, v) = \sqrt{2} v^2, \quad B(u, v) = \sqrt{2} v^3 (u + 2)$$

に対応している.

3.11 Proposition 5.10

$f \in g_{**,3/2}^\omega(\mathbf{R}_J^2, \mathbf{R}^3, C)$ とする. さらに, 次を仮定する.

- (1) C は平面曲線ではなく, 原点 $\mathbf{0}$ において non-trivial symmetry $T \in \mathrm{O}(3)$ をもつ
- (2) f の第一基本形式 ds_f^2 は effective symmetry φ をもつ

このとき, f の任意の isomer は

$$\check{f}, \quad \check{f} \circ \varphi, \quad f \circ \varphi$$

のいずれかと右同値である. さらに, 次が成り立つ.

- T が正 (すなわち $T \in \mathrm{SO}(3)$) のとき, $\check{f} = T \circ f \circ \varphi$ が成立する

- T が負 (すなわち $T \notin SO(3)$) のとき, \check{f} は f と合同でない

(Proof)

$g := T \circ f \circ \varphi$ とおく.

まず T が正 ($T \in SO(3)$) の場合, Proposition 5.1 より f と \check{f} は合同である. さらに Remark 4.4 より, g は f の faithful isomer である^{*14}.

一方, T が負 ($T \notin SO(3)$) の場合, Proposition 5.1 より, f と \check{f} は合同であることの同値条件を満たさないで, \check{f} は f と合同ではない. ■

3.12 Theorem IV

$f \in g_{**,3/2}^\omega(\mathbf{R}_J^2, \mathbf{R}^3, C)$ とする. また, $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ の像が属する合同類の個数を N_f とすると, 次が成り立つ.

- (1) 曲線 C が symmetry を持たず, かつ第一基本形式 ds_f^2 も symmetry を持たない
 $\Leftrightarrow N_f = 4$
- (2) 上記 (1) の条件を満たさない場合は, $N_f \leq 2$.
- (3) $N_f = 1 \Leftrightarrow$ 下記 (a)(b)(c) のいずれかを満たす
 - (a) 曲線 C が平面内にあり, かつ non-trivial symmetry をもつとき
 - (b) 曲線 C が平面内にあり, 第一基本形式 ds_f^2 が symmetry をもつとき
 - (c) 曲線 C が正の symmetry ($T \in SO(3)$) をもち, かつ第一基本形式 ds_f^2 も symmetry をもつとき

(Proof)

(i) 曲線 C が symmetry を持たず (つまり, $T = \text{Id}$ のみ), ds_f^2 も symmetry を持たないと仮定する。

集合 $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ のうち 2 つが合同であるとき, f をその isomer と入れ替えても議論は変わらないので, f が次のいずれか

$$g \in \{\check{f}, f_*, \check{f}_*\}$$

^{*14} Remark 4.4(a) より, $f_1(u, t) = T \circ f_0(-u, t) = T \circ f_0 \circ \varphi(u, t) = g(u, t)$ である. $\varphi(u, t) = (-u, t)$ とした. $f_1 = g, f_0 = f$ とおけば, g は f の faithful isomer である. この時の g は f の等長双対でもあるので, $\check{f} = g = T \circ f \circ \varphi$ が成り立つ. よって, f と \check{f} と $f \circ \varphi$ と $\check{f} \circ \varphi$ が右同値である.

と合同であると仮定して良い. Proposition 5.1 より, f と \check{f} が合同になることは無いため, $g = f_*$ または \check{f}_* としてよい.

今, g が f と合同であると仮定する (つまり, f と $T \circ g$ の像が一致と仮定). すると Remark 0.5 より, C の non-trivial symmetry $T \in O(3)$ と局所微分同相写像 φ が存在して

$$T \circ g \circ \varphi = f$$

を満たす. しかし仮定では,

- C は symmetry を持たない (つまり $T = \text{Id}$)
- ds_f^2 は symmetry を持たない (つまり φ は曲線の向きを反転させない)

であったため, $\varphi = \text{Id}$ となり, T は non-trivial symmetry ではない. よって, 等式 ($T \circ g \circ \varphi = f$) より f と g の曲線を辿る向きは一致する. しかし, 実際には

$$u \mapsto f(u, 0)$$

$$u \mapsto f_*(u, 0) = \check{f}_*(u, 0)$$

は互いに異なる向きで C をたどるので, 等式 ($T \circ g \circ \varphi = f$) と矛盾する. つまり, f と $g (= f_* \text{ または } \check{f}_*)$ が合同であると仮定が誤りである.

$\therefore f$ は \check{f}, g と合同でないため, (1) の \Rightarrow が示された.

(ii) $N_f = 4$ と仮定する.

まず, C が trivial symmetry を持つ場合を考える. Proposition 5.1 より, C が trivial symmetry S を持つと, f と \check{f} が合同になる. すると, $N_f \leq 2$ となり, 矛盾する. よって, C が trivial symmetry を持つ場合は存在しない.

次に, C または ds_f^2 が symmetry を持つと仮定する. 曲線 C に symmetry T がある場合, 下の表より, Proposition 5.7($N_f = 2$), Proposition 5.8($N_f = 1$), Proposition 5.4($N_f = 2$) が当該パターンである. ds_f^2 に symmetry φ がある場合, 下の表より, Proposition 5.5($N_f = 2$), Proposition 5.6($N_f = 2$), Proposition 5.10($N_f = 1, 2$) が当該パターンである.

しかし今は $N_f = 4$ という仮定の下での議論であるため矛盾. よって, C にも ds_f^2 にも symmetry は存在しない.

(iii) C と ds_f^2 の少なくともどちらか一方は symmetry を持つ $\Rightarrow N_f = 1$ または 2 について

Corollary 5.4($N_f = 2$), 5.6($N_f = 1$), 5.8($N_f = 1$) と Proposition 5.5($N_f = 2$), 5.7($N_f = 2$), 5.10($N_f = 1, 2$) を「 ds_f^2 の任意の symmetry は effective である (Corollary 3.16 より)」と併せて用いることで得られる.

(iv) $N_f = 1$ となる場合を考える

まず, C が平面内にあるとする (つまり, C が trivial symmetry を持つ場合). もし C が non-trivial symmetry を持たず, ds_f^2 にも symmetry が無ければ, Corollary 5.4 より $N_f = 2$ が成立してしまう (矛盾). したがって, C あるいは ds_f^2 のどちらかには symmetry が存在する.

C が symmetry を持つ場合, Corollary 5.8 より, $N_f = 1$ である ((3)(a) に該当).

一方で C が non-trivial symmetry を持たず, ds_f^2 が symmetry φ を持つ場合, Corollary 3.16 より φ は effective となり, Corollary 5.6 より $N_f = 1$ である ((3)(b) に該当).

したがって, 残るは C がいかなる平面にも含まれていない場合である. この時, $N_f = 1$ (つまり, Proposition 5.10 で T が正の場合) は \check{f} が f と合同であることを意味する. しかし Proposition 5.1 より, C が平面曲線でない場合は (c) (C が 正の symmetry をもち, かつ ds_f^2 も symmetry を持つとき) の場合に限られる.

以上より, 定理を示した. ■

表 1 Proposition と symmetry の対応

Proposition	non-trivial symmetry T を	effective symmetry φ を	N_f の値	C は 平面曲線?
5.4	持たない (trivial or Id)	持たない	2	平面曲線
5.5	持たない (trivial or Id)	持つ	2	平面曲線ではない
5.6	持たない (trivial or Id)	持つ	1	平面曲線
5.7	持つ	持たない	2	平面曲線ではない
5.8	持つ	(ds_f^2 の言及なし)	1	平面曲線
5.10	持つ	持つ	T が正 $\rightarrow 1$ T が負 $\rightarrow 2$	平面曲線ではない