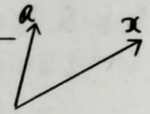
1

同型

2

今回　ベクトル空間上の内積・リーマン計量

内積とは … 分度器付きものさし



Example　$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$: 列ベクトル空間

$x \cdot a = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = ax + by + cz$　(ふつうの)内積 … 角度をはかる

$x \cdot x = x^2 + y^2 + z^2$

$\therefore |x| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x \cdot x}$ … 長さもはかれる

Def　Q : m次元ベクトル空間とする

- $T : Q \times Q \longrightarrow \mathbb{R}$ が Q上の双線形形式

$\longleftrightarrow$ 各 $a \in Q$ を固定する毎に定まる写像

$T_a^1 : Q \to \mathbb{R}$, $T_a^2 : Q \to \mathbb{R}$

$\begin{cases} T_a^1(v) := T(v, a) & ({}^\forall v \in Q) \\ T_a^2(v) := T(a, v) & ({}^\forall v \in Q) \end{cases}$

が線形関数

「T_a が線形」 $(T_a : Q \to \mathbb{R})$

$\Longleftrightarrow$ ${}^\forall a, b \in \mathbb{R}$, ${}^\forall v, w \in Q$ に~~おいて~~ 対して

$T_a^1(av + bw) = a \cdot T_a^1(v) + b\, T_a^2(w)$

$\Longleftrightarrow$ ${}^\forall a, b$, ${}^\forall v, w$ に対して,

$T(av + bw, a) = aT(v, a) + bT(w, b)$

- さらに,

$T(v, w) = T(w, v)$ $({}^\forall v, w \in Q)$

をみたすとき T は対称という

- 対称双線形形式 $T : Q \times Q \longrightarrow \mathbb{R}$ が正定値 (positive definite)

$\Longleftrightarrow$ ${}^\forall v \in Q$ に対して $T(v, v) \geq 0$ であり,

$T(v, v) = 0$ は $v = 0$ のときに限る.

Ex　$Q = \mathbb{R}^3$

$T : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$T(a, x) := a \cdot x \; (= a_1x + a_2x_2 + a_3x_3)$

$\begin{cases} T(a, x + y) = a \cdot (x + y) \\ \qquad = T(a, x) + T(a, y) \\ T(a, \lambda x) = a \cdot (\lambda x) \\ \qquad = \lambda \cdot T(a, x) \end{cases}$

Def　$\boxed{\text{正定値 対称双線形形式 } T : Q \times Q \longrightarrow \mathbb{R} \text{ を } Q\text{上の内積という}}$

└ 必ず正定値

Ex　$Q = \mathbb{R}^3$ に対し, $T(v, w) := v \cdot w = v^1w^1 + v^2w^2 + v^3w^3$

とおくと $T : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ は対称双線形形式で正定値

$T(v, w) = T(w, v)$　　$T(x, x) = x^2 + y^2 + z^2$

$T(v, v) = v \cdot v$

$= |v|^2 \geq 0$.　$(|v| = 0 \Longleftrightarrow v = 0)$

基底を用いた表現

$\{e_1, \cdots, e_m\}$: Q の基底とする

$T_{ij} := T(e_i, e_j)$: 成分という $(i, j = 1, \cdots, m)$

$\hat{T} := \underbrace{\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1m} \\ T_{21} & T_{22} & & \\ \vdots & & & \\ T_{m1} & & \cdots & T_{mm} \end{pmatrix}}_{m} \Big\} m$: m次対称行列　$\Longleftarrow$ 表現行列

ティーハット

${}^\forall v, w \in Q$ は ${}^\exists v^1, \cdots, v^m, w^1, \cdots, w^m \in \mathbb{R}$ を用いて

$\begin{cases} v = v^1e_1 + \cdots + v^me_m \\ w = w^1e_1 + \cdots + w^me_m \end{cases}$

と表される. このとき

$$\boxed{\begin{aligned} T(v, w) &= (v^1, \cdots, v^m)\, \hat{T} \begin{pmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^m \end{pmatrix} \\ &= {}^t\hat{v}\, \hat{T}\, \hat{w} \end{aligned}}$$

対称双線形形式は

このように表される

$\left(\text{ただし } \hat{v} := \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^m \end{pmatrix}, \; \hat{w} := \begin{pmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^m \end{pmatrix} \right)$

Ex　$m = 2$ のとき,

$\{e_1, e_2\}$: 基底

$T_{ij} = T(e_i, e_j)$,　$\begin{cases} v = v^1e_1 + v^2e_2 \\ w = w^1e_1 + w^2e_2 \end{cases}$

$T(v, w) = T(v^1e_1 + v^2e_2, w^1e_1 + w^2e_2)$

$= v^1 \cdot T(e_1, w^1e_1 + w^2e_2) + v^2(e_2, w^1e_1 + w^2e_2)$

$= v^1w^1 \cdot \underbrace{T(e_1, e_1)}_{T_{11}} + v^1 \cdot w^2 \underbrace{(e_1, e_2)}_{T_{12}}$

$+ v^2w^1 \cdot \underbrace{T(e_2, e_1)}_{T_{21}} + v^2w^2 \cdot \underbrace{T(e_2, e_2)}_{T_{22}}$

Fact (線形代数の本を参照)

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{対称双線形形式 } T : Q \times Q \longrightarrow \mathbb{R} \text{ が正定値} \\ &\Longleftrightarrow \hat{T} \text{ の固有値はすべて正} \\ &\overset{(n=2\text{のとき})}{\Longleftrightarrow} \det \hat{T} > 0, \; \operatorname{trace} \hat{T} > 0 \end{aligned}}$$

$(\Rightarrow T$ が内積$)$

Remark

$T : Q \times Q \longrightarrow \mathbb{R}$ が対称のとき,

$T_a^1 : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ が線形

$\Longleftrightarrow$ $T_a^2 : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ が線形

Ex　$Q = \mathbb{R}^n$

$T(v, v) = (\lambda_1)^2 \cdot v_1^2 + \cdots + (\lambda_n)^2 v_n^2 \geq 0$.

$T(v, v) = 0 \Longleftrightarrow v_1^2 = v_2^2 = \cdots = v_n^2 = 0$　$\therefore v = 0$ $(\because \lambda > 0)$

3

Ex (1) $Q=\mathbb{R}^m$, $\lambda_i>0$ $(i=1\cdots m)$ とする

$$T(v,w)=(v^1,\cdots,v^m)\begin{pmatrix}(\lambda_1)^2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & (\lambda_2)^2 & & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & (\lambda_m)^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w^1\\ w^2\\ \vdots\\ w^m\end{pmatrix}\quad \left(\text{ただし}\ v=\begin{pmatrix}v^1\\ \vdots\\ v^m\end{pmatrix},\ w=\begin{pmatrix}w^1\\ \vdots\\ w^m\end{pmatrix}\right)$$

$$=(\lambda_1)^2v^1w^1+(\lambda_2)^2v^2w^2+\cdots+(\lambda_m)^2v^mw^m$$

は正定値である.

とくに $\lambda_1=\cdots=\lambda_m=1$ のとき

$$T(v,w)=v^1w^1+v^2w^2+\cdots+v^mw^m=v\cdot w$$

(標準内積)

(2) $Q=\mathbb{R}^2$ とする, $a,b\in\mathbb{R}$.

$$T\left(\begin{pmatrix}v^1\\ v^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}w^1\\ w^2\end{pmatrix}\right)=v^1w^1+b(v^1w^2+v^2w^1)+a^2v^2w^2$$

$$=(v^1\ v^2)\underbrace{\begin{pmatrix}1 & b\\ b & a^2\end{pmatrix}}_{\hat{T}}\begin{pmatrix}w^1\\ w^2\end{pmatrix}$$

$\mathrm{trace}\,\hat{T}>0$ は常に成立.

$$\begin{cases}\mathrm{trace}\,\hat{T}=1+a^2\\ \det\hat{T}=a^2-b^2\end{cases}\ \text{より}\ T:\text{内積}\iff a^2>b^2\ //$$

Def 基底 $\{e_1,\cdots,e_m\}$: 正規直交基底 (ONB, Orthonormal basis) $\iff \hat{T}_{ij}=\delta_{ij}$ $(\forall i,j=1\cdots m)$

Rem どんな内積空間 (Q,T) に対しても ONBは存在 (グラムシュミットの直交化)

$$\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}$$

Ex 標準内積

$T(x,y):=x\cdot y$

$e_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$ $e_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ は

$$\begin{cases}T_{11}=T(e_1,e_1)=1\\ T_{12}=T(e_1,e_2)=0\\ T_{22}=T(e_2,e_2)=1.\end{cases}\quad \therefore\ \hat{T}=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}}_{\text{単位行列}}$$

Ex 内積が無い例

$T:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$

$$T\left(\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\end{pmatrix}\right):=-v^1w^1+v^2w^2\ \text{とする.}\ =(v^1,v^2)\underbrace{\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{=\hat{T}}\begin{pmatrix}w^1\\ w^2\end{pmatrix}$$

4

$\det(\hat{T})=-1\le 0$ より, Tは内積ではない.

リーマン計量 M: C^∞-mfd

● g: M上のリーマン計量

$\iff$
(1) $\forall p\in M$ において $g_p: T_pM\times T_pM\longrightarrow\mathbb{R}$: 内積
(2) $\forall V,W\in\mathfrak{X}(M)$ (ベクトル場) に対して M上の関数 $g(V,W)$ を $g(V,W)(p):=g_p(V_p,W_p)$ $(\forall p\in M)$ とおくとき $g(V,W)\in C^\infty(M)$ ← なめらかさ

$V_p, W_p\in T_p(M)$

内積 $\mathbb{R}$

$g_p: T_p(M)\times T_p(M)\longrightarrow\mathbb{R}$: 内積

● ペア (M,g) をリーマン多様体という

局所座標 $(U; x^1,\cdots,x^m)$

$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p,\cdots,\left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p\right\}$: T_pM の基底

$$(g_p)_{ij}:=g_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p,\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p\right)$$

$$G(p):=\begin{pmatrix}(g_p)_{11} & (g_p)_{12} & \cdots & (g_p)_{1m}\\ \vdots & & & \vdots\\ (g_p)_{m1} & \cdots & & (g_p)_{mm}\end{pmatrix}$$

U上の関数 $g_{ij}: U\to\mathbb{R}$ を $(g_{ij})(p):=(g_p)_{ij}$ と定める $(i,j=1,\cdots,m)$

gのなめらかさ $\Longrightarrow$ $g_{ij}\in C^\infty(U)$

リーマン(2)の条件 ($\Longleftarrow$ も成り立つ)

Ex

$V=\frac{\partial}{\partial x^i}$, $W=\frac{\partial}{\partial x^j}\in\mathfrak{X}(U)$

(2)より, $g(V,W)\in C^\infty(U)$

$g(V,W)(p)=g_p(V_p,W_p)$
$=g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p,\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\right)$
$=(g_p)_{ij}$

逆に, $(U; x^1,\cdots,x^m)$ 上で

- $g_{ij}\in C^\infty(U)$ $(i,j=1,\cdots,m)$
  $g_{ij}=g_{ji}$ $(\forall i,j)$
  に対して

$$G:=\begin{pmatrix}g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1m}\\ \vdots & & & \vdots\\ g_{m1} & \cdots & & g_{mm}\end{pmatrix}\ :\ \text{行列値関数}$$

$g_{12}=g_{21}$

- 各 $p\in U$ に対して $G(p)$: 正定値 のとき U上 リーマン計量を定める

接ベクトルのみ
代入できるもの。

Def τ が M 上の (0,2)-テンソル場 とは
各点 $p \in M$ において 双線形写像 $\tau_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ を与えるもの。

- (0,2)-テンソル場 は 2階の共変テンソル場 とも呼ばれる
- とくに $\tau_p(v,w) = \tau_p(w,v)$ $(\forall p \in M, \forall v,w \in T_pM)$ のとき τ は 対称 (0,2)-テンソル場 という。

なめらかさ
$$\begin{cases} \tau : (0,2)\text{-テンソル場 on } M \\ V, W : \text{ベクトル場 on } M \end{cases}$$
に対して

M 上の関数 $\tau(V,W) : M \longrightarrow \mathbb{R}$ を
$\tau(V,W)(p) := \tau_p(V_p, W_p)$ $(\forall p \in M)$ とおく

$$\boxed{\textbf{Def}\ M\text{上の}\ (0,2)\text{-テンソル場}\ \tau\ \text{が なめらか} \overset{\text{def}}{\iff} \forall V, W \in \mathfrak{X}(M)\ \text{に対して}\ \tau(V,W) \in C^\infty(M)}$$

$\mathcal{T}^{0,2}(M) := \{\tau : M$ 上の なめらかな (0,2)-テンソル場$\}$
↑ $\mathfrak{X}(M)$, $\Omega^1(M)$ と同様に $C^\infty(M)$-加群

テンソル積

$\theta, \omega \in \Omega^1(M)$: なめらかな 1次微分形式

$\forall p \in M$ において
$\theta_p : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$: 線型関数

Def $\theta \otimes \omega$ を $(\theta \otimes \omega)_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$
$(\theta \otimes \omega)_p(v,w) := \theta_p(v)\,\omega_p(w)$ $(\forall v, w \in T_pM)$
と定める. $\theta \otimes \omega$ を θ と ω の テンソル積 という

接ベクトルを2つ入れたら
関数が出てくる。

Example $M = \mathbb{R}^2$. $(x^1, x^2) = (x, y)$: 標準座標

$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_y = \frac{\partial}{\partial y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$, $dx, dy \in \Omega^1(M)$
$\partial_x = V$, $\partial_y = W$, $dx = \theta$, $dy = \omega$

$$\begin{cases} (\theta \otimes \omega)(V,W) = \theta(V) \cdot \omega(W) = \underbrace{dx(\partial_x)}_{=1} \cdot \underbrace{dy(\partial_y)}_{=1} = 1 \\ (\omega \otimes \theta)(V,W) = \omega(V) \cdot \theta(W) = \underbrace{dy(\partial_x)}_{=0} \cdot \underbrace{dx(\partial_y)}_{=0} = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ $\theta \otimes \omega \neq \omega \otimes \theta$: テンソル積は可換でない

$$\boxed{\begin{matrix} dx(\partial_x) = 1, & dx(\partial_y) = 0 \\ dy(\partial_x) = 0, & dy(\partial_y) = 1 \end{matrix}}$$

$dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j$

Ex $V = f(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$, $W = \frac{\partial}{\partial x}$ とする,
$(dx(V) = f(x,y))$

$(dx \otimes dy)(V,W) = dx(V) \cdot dy(W)$
$= f(x,y) \cdot 0 = 0$

なめらかな (0,2)-テンソル場

$$\boxed{\textbf{Lem}\ \forall \theta, \omega \in \Omega^1(M) \Rightarrow \theta \otimes \omega \in \mathcal{T}^{0,2}(M)}$$

(proof) 各 $p \in M$ において $(\theta \otimes \omega)_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ は 双線形形式

$\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\forall v_1, v_2 \in T_pM$ に対して

$(\theta \otimes \omega)_p(a_1 v_1 + a_2 v_2, w) = \theta_p(a_1 v_1 + a_2 v_2)\,\omega_p(w) = \{a_1 \theta_p(v_1) + a_2 \theta_p(v_2)\}\,\omega_p(w)$
$= a_1 \theta_p(v_1)\,\omega_p(w) + a_2 \theta_p(v_2)\,\omega_p(w) = a_1 (\theta \otimes \omega)_p(v_1, w) + a_2 (\theta \otimes \omega)_p(v_2, w)$

同様に $\forall b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, $\forall w_1, w_2 \in T_pM$ に対して
$(\theta \otimes \omega)_p(v, b_1 w_1 + b_2 w_2) = b_1 (\theta \otimes \omega)_p(v, w_1) + b_2 (\theta \otimes \omega)_p(v, w_2)$

$\theta \otimes \omega$ はなめらか $\forall V, W \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$(\theta \otimes \omega)(V,W)(p) = (\theta \otimes \omega)_p(V_p, W_p) = \theta_p(V_p) \cdot \omega_p(W_p) = (\theta V)(p) \cdot (\omega W)(p)$

θとωが
滑らかな関数

$\therefore$ 関数として $(\theta \otimes \omega)(V,W) = (\theta V) \cdot (\omega W)$
$\theta V, \omega W \in C^\infty(M)$ より $(\theta \otimes \omega)(V,W) \in C^\infty(M)$ ▨

$\theta \odot \omega$

対称積 $\boxed{\theta \odot \omega := \frac{1}{2}(\theta \otimes \omega + \omega \otimes \theta) \quad (\theta, \omega \in \Omega^1(M))}$ 平均をとる

$$\boxed{\textbf{Prop}\ \theta \odot \omega \in \mathcal{T}^{0,2}(M) : \text{対称}\ (0,2)\text{-テンソル場}}$$

$(\theta \odot \omega)_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$: 対称 双線形形式

(proof) Lem より $\theta \odot \omega$ はなめらかな (0,2)-テンソル場

対称性 $(\theta \odot \omega)(V,W) = (\theta \odot \omega)(W,V)$ を示せば良い

$2 \cdot (\text{左辺}) = (\theta \otimes \omega)(V,W) + (\omega \otimes \theta)(V,W) = \theta(V) \cdot \omega(W) + \omega(V) \cdot \theta(W)$
$= \theta(W) \cdot \omega(V) + \omega(W) \cdot \theta(V) = (\theta \otimes \omega)(W,V) + (\omega \otimes \theta)(W,V) = 2 \cdot (\text{右辺})$ ▨

WとVが入れ替わった

記法
$$\begin{cases} \theta \odot \omega = \theta\omega \\ \theta \odot \theta\ (= \theta \otimes \theta) = \theta\theta = \theta^2 \end{cases}$$
と書く

$2dxdy = (dx \otimes dy + dy \otimes dx)$

Example $(M = \mathbb{R}^2)$

$dx^2(\partial_x, \partial_x) = dx(\partial_x)\,dx(\partial_x) = 1$

$2dxdy(\partial_x, \partial_y) = (dx \otimes dy + dy \otimes dx)(\partial_x, \partial_y) = \underset{1}{dx(\partial_x)}\,\underset{1}{dy(\partial_y)} + \underset{0}{dy(\partial_x)}\,\underset{0}{dx(\partial_y)} = 1$

$2dxdy(\partial_x, \partial_x) = (dx \otimes dy + dy \otimes dx)(\partial_x, \partial_x) = \underset{1}{dx(\partial_x)}\,\underset{0}{dy(\partial_x)} + \underset{0}{dy(\partial_x)}\,\underset{1}{dx(\partial_x)} = 0$

$(dx^2 + dy^2)(\partial_x, \partial_x) = dx^2(\partial_x, \partial_x) + dy^2(\partial_x, \partial_x) = 1$

リーマン計量の局所座標表示

(M, g)：リーマン多様体

$(U, \varphi) = (U; x^1, \cdots, x^m)$：座標近傍

$g_{ij} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ ：U上の関数を

$$g_{ij}(p) := g_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p\right) \quad (p \in U)$$

とおく.

$g_{ij} = g_{ji}$ $(g_{12} = g_{21})$

Ex $m=2$

$$\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\, dx^i dx^j = g_{11} \cdot (dx^1)^2 + 2g_{12} \cdot dx^1 \cdot dx^2 + g_{22} \cdot (dx^2)^2$$

Prop U上で $g = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}\, dx^i \cdot dx^j$

(proof) ${}^\forall V, W \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $g(V, W) = \left(\sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}\, dx^i \cdot dx^j\right)(V, W)$ を示せば良い

$V = \sum_{i=1}^{m} V^i \partial_i, \quad W = \sum_{j=1}^{m} W^j \partial_j$

と 関数 $V^i, W^j \in C^\infty(U)$ を用いて表わせる.

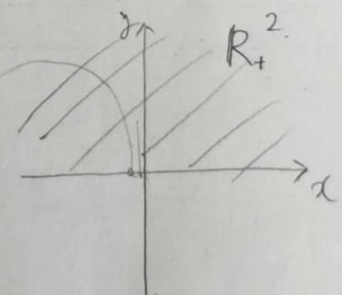
$$(\text{左辺}) = g\left(\sum_{i=1}^{m} V^i \partial_i, \sum_{j=1}^{m} W^j \partial_j\right) = \sum_{i,j=1}^{m} V^i W^j g(\partial_i, \partial_j) = \sum_{i,j=1}^{m} V^i W^j g_{ij}$$

$$(\text{右辺}) = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}\, (dx^i \cdot dx^j)(V, W)$$

$$\begin{aligned}
(dx^i \cdot dx^j)(V, W) &= \tfrac{1}{2}\left\{(dx^i \otimes dx^j)(V, W) + (dx^j \otimes dx^i)(V, W)\right\} \\
&= \tfrac{1}{2}\left\{dx^i(V) \cdot dx^j(W) + dx^j(V) \cdot dx^i(W)\right\} \\
&= \tfrac{1}{2}\left\{dx^i\left(\textstyle\sum_{k=1}^{m} V^k \partial_k\right) \cdot dx^j\left(\textstyle\sum_{l=1}^{m} W^l \partial_l\right) + dx^j\left(\textstyle\sum_{k=1}^{m} V^k \partial_k\right) \cdot dx^i\left(\textstyle\sum_{l=1}^{m} W^l \partial_l\right)\right\} \\
&= \tfrac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{m}\left\{V^k W^l \underbrace{dx^i(\partial_k)}_{\delta^i_k} \cdot \underbrace{dx^j(\partial_l)}_{\delta^j_l} + V^k W^l \underbrace{dx^j(\partial_k)}_{\delta^j_k} \cdot \underbrace{dx^i(\partial_l)}_{\delta^i_l}\right\} \\
&= \tfrac{1}{2}\left(V^i W^j + V^j W^i\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}\, \tfrac{1}{2}\left(V^i W^j + V^j W^i\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} V^i W^j + \sum_{i,j=1}^{m} \underset{\parallel\, g_{ji}}{g_{ij}} V^j W^i\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} V^i W^j + \underbrace{\sum_{i,j=1}^{m} g_{ji} V^j W^i}_{\sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} V^i W^j}\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} V^i W^j \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Ex $m=2$.



逆に $g_{ij} \in C^\infty(U)$ $(i, j = 1, \cdots, m)$ で

$$G := \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \cdots & g_{mm} \end{pmatrix}$$ ：行列値函数,

とおくとき、各点 $p \in M$ において

$$\begin{cases} {}^tG(p) = G(p) & \text{：対称行列} \\ G(p) & \text{：正定値行列（固有値すべて正）} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ $g := \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}\, dx^i \cdot dx^j$ は U上のリーマン計量

Example (1) $M = \mathbb{R}^m$

$G = E_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$：単位行列 $g_{ij} = \delta_{ij}$

$g_E = \sum_{i=1}^{m} (dx^i)^2$ ：ユークリッド計量

$E^m = (\mathbb{R}^m, g_E)$ ：(m次元) ユークリッド空間

断面曲率が常に 0

(2) $M = \mathbb{R}^m_+ := \{(x^1, \cdots, x^m) \in \mathbb{R}^m \mid x^m > 0\}$

$$G = \frac{1}{(x^m)^2} E_m = \begin{pmatrix} 1/(x^m)^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1/(x^m)^2 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} \cdot dx^i dx^j \qquad g_{ij} = \frac{1}{(x^m)^2}$$

$g_H := \sum_{i=1}^{m} \frac{(dx^i)^2}{(x^m)^2} = \frac{1}{(x^m)^2}\left((dx^1)^2 + \cdots + (dx^m)^2\right)$ ：双曲計量

$H^m := (\mathbb{R}^m_+, g_H)$ ：(m次元) 双曲空間

断面曲率が常に (−1)

$$g_H = \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{y^2}$$

$H^2 = (\mathbb{R}_+^2, g_H)$ ← 双曲平面