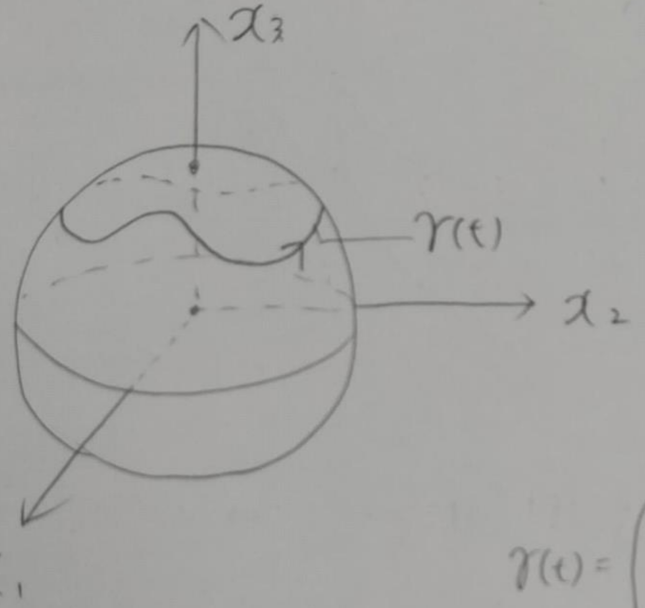
火2 数理科学 キ何 ⑦

S^2 の曲線

$$S^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \right\}$$



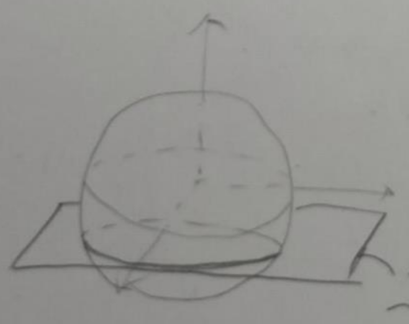
$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ x_1, x_2, x_3 が I 上 C^∞ 級 func.

Def $\boxed{\text{開区間} \neq \phi}$

$\gamma : I \longrightarrow S^2$: C^∞ 級写像 が 正則曲線である

$\Longleftrightarrow$ $\gamma'(t) \neq 0$ である

Example (大円、小円)



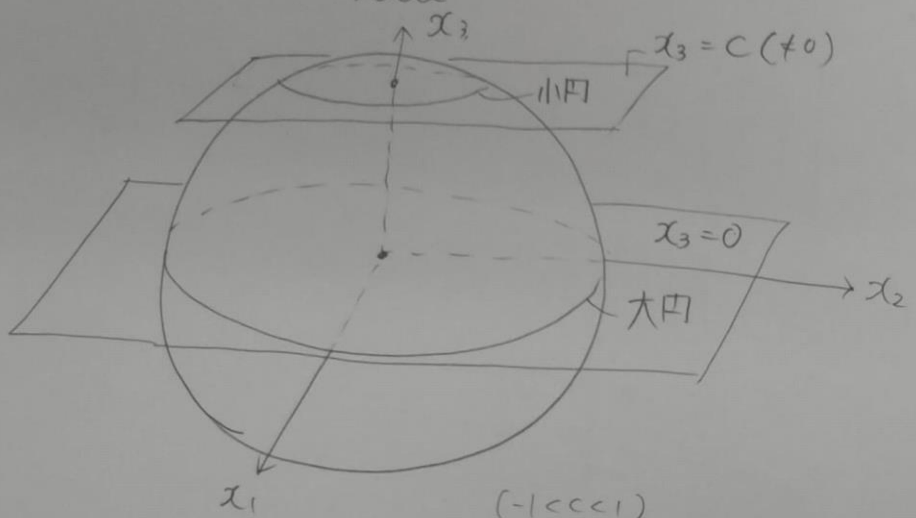
$-1 < c < 1$ とする

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} \sqrt{1-c^2}\ \cos t \\ \sqrt{1-c^2}\ \sin t \\ c \end{bmatrix}$$

は、$x_3 = c$ と S^2 の共通部分のパラメタ表示

- $C \neq 0$ のとき、小円 (small circle)
- $C = 0$ のとき、大円 (great)

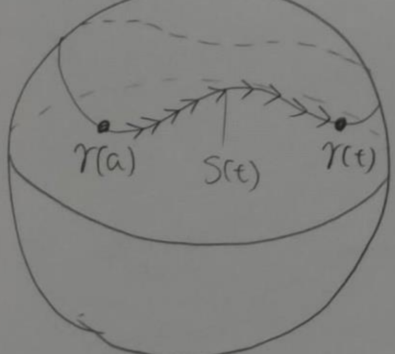
} 合わせて 円 という。



大円/小円 は、$\|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{1 - C^2} > 0$

∴ $\gamma(t)$ は 正則曲線

② 弧長パラメータ



$a \in I$ を固定

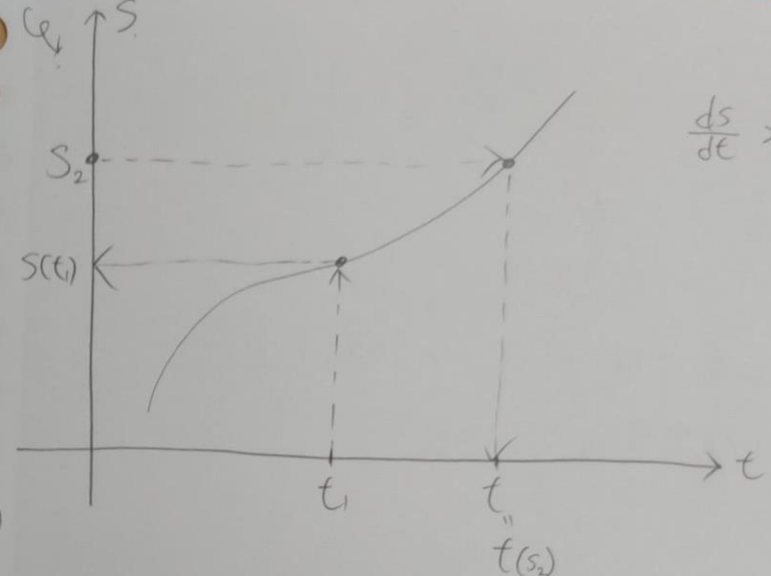
$$s(t) = \int_a^t \|\dot{\gamma}(u)\|\, du \qquad \left(\dot{\gamma}(u) = \frac{d\gamma}{du}\right)$$

弧長関数 $(s(t) : t \longrightarrow s)$

↓ t 微分

$$\frac{ds}{dt} = \dot{s}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\| > 0$$

特に、$\frac{ds}{dt} \neq 0$ なので、∃逆関数 $\begin{array}{ccc} s & \longmapsto & t \\ \cap & & \cap \\ \tilde{I} & \longrightarrow & I \end{array}$



$$\tilde{\gamma}(s) := \gamma(t(s))$$

$\tilde{\gamma} : I \longrightarrow S^2$ を 弧長パラメータ表示 という。

Proposition

弧長パラメータ表示 $\tilde{\gamma}(s)$ の 速さ $= 1$

$$\left(\left\| \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \right\| = 1 \right)$$

(証明)

$$\frac{d}{ds}\tilde{\gamma}(s) = \frac{dt}{ds} \cdot \frac{d}{dt}\gamma(t(s))$$

$$= \frac{1}{ds/dt} \cdot \frac{d\gamma}{dt}$$

$$= \frac{1}{\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\|} \cdot \frac{d\gamma}{dt} \quad \longleftarrow \text{大きさ } 1 \text{ である} \quad ■$$

$s(t) = \int_a^t \left\|\frac{d\gamma}{du}\right\| du$

逆に、…

命題 ☆

$\gamma(u)$：速さ1のパラメータ表示

$\Longrightarrow$ $u \longmapsto \pm u + a$ とすることで、

弧長パラメタ表示にできる。

証明

s：弧長パラメタとする

$\tilde{\gamma}(s)$、$s = s(u)$：パラメタ変換

$$1 = \left\| \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \right\| = \left\| \frac{du}{ds} \frac{d}{du} \gamma(u) \right\|$$

$$= \left| \frac{du}{ds} \right| \cdot \underbrace{\left\| \frac{d\gamma}{du} \right\|}_{=1}$$

$\therefore \left| \frac{du}{ds} \right| = 1$ なので、

$$\frac{du}{ds} = \pm 1$$

a を積分定数とみれば、

$$u = \pm s + a$$

である。

以降

速さ1のパラメタを

「弧長パラメタ」という。

Example

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} \sqrt{1-c^2} \cos t \\ \sqrt{1-c^2} \sin t \\ c \end{bmatrix}$$

$$s(t) = \int_0^t \underbrace{\| \dot{\gamma}(u) \|}_{=\sqrt{1-c^2}} du = t\sqrt{1-c^2}$$

普通のパラメタ　弧長パラメタ

$$\therefore t = \frac{s}{\sqrt{1-c^2}}$$

$$\therefore \tilde{\gamma}(s) = \gamma\left(\frac{s}{\sqrt{1-c^2}} \right) = \begin{bmatrix} \sqrt{1-c^2} \cos \frac{s}{\sqrt{1-c^2}} \\ \sqrt{1-c^2} \sin \frac{s}{\sqrt{1-c^2}} \\ c \end{bmatrix}$$

→ 円の弧長パラメタ表示

$$\left(\frac{d\tilde{\gamma}}{ds} = \begin{bmatrix} -\sin \frac{s}{\sqrt{\ }} \\ \cos \frac{s}{\sqrt{\ }} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \therefore \left\| \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \right\| = 1 \right)$$

→ $\tilde{\gamma}'(s)$ と表す。

（単位接ベクトル $\mathbb{e}(s)$ とも書く）

③ 曲率

$\gamma : I \longrightarrow S^2$

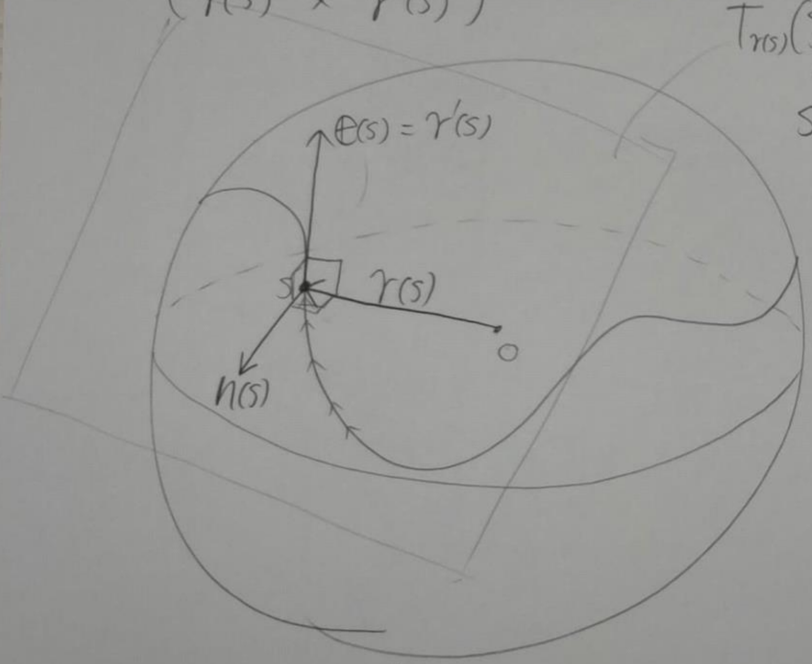
$\gamma(s)$：弧長パラメタ表示された曲線（$\Rightarrow$ つまり、正則曲線）

$e(s) = \gamma'(s)$；単位接ベクトル

$n(s) := \gamma(s) \times e(s)$；単位法ベクトル

$(= \gamma(s) \times \gamma'(s))$

$T_{\gamma(s)}(S^2) = \mathrm{span}(e(s), n(s))$



$\gamma \cdot \gamma = 1$ より $\xrightarrow{\frac{d}{ds}}$ $2\gamma \cdot \gamma' = 0$ $\therefore \gamma \cdot \underset{e}{\underset{\shortparallel}{\gamma'}} = 0$

$\therefore \gamma(s) \perp e(s)$

$n(s)$ は外積で定義したので、$n \perp \gamma$、$n \perp e$

$n \cdot \gamma = (\gamma \times \gamma') \cdot \gamma = \det(\gamma, \gamma', \gamma) = 0$

$n \cdot e = (\gamma \times \gamma') \cdot \gamma' = \det(\gamma, \gamma', \gamma') = 0$

④

つまり、γ、e、n は全て大きさ 1

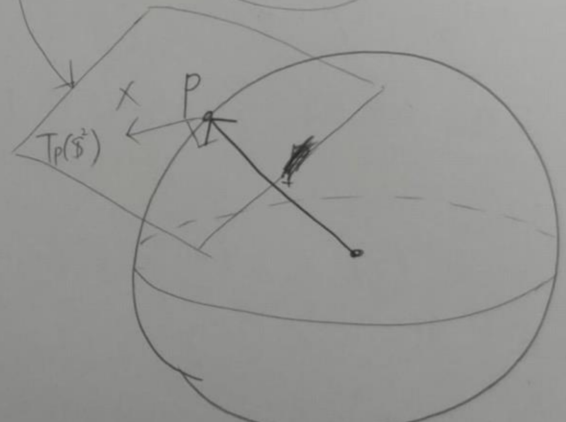
$\therefore \{\gamma(s), e(s), n(s)\}$ は、各 s ごとに $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底

$F(s) := \underbrace{(\gamma(s), e(s), n(s))}_{3 \times 3 \text{ 行列}}$、$F(s) \in SO(3)$ をフレネ枠という

Remark

$P \in S^2$ における S^2 の接空間

$T_P(S^2) = \{ X \in \mathbb{R}^3 \mid X \cdot P = 0 \}$



Def（曲率関数）

$\kappa(s) := e'(s) \cdot n(s)$ を、$\gamma(s)$ の曲率関数という

$\hookrightarrow$ $e(s)$ の変化率を $n(s)$ 方向に評価したもの

"$\gamma(s)$ の曲がり具合" = "$F(s)$ の変化率"

$\rightsquigarrow F'(s) = (\underbrace{\gamma'(s)}_{e(s)}, e'(s), n'(s))$ を調べる.

命題

$$\begin{cases} e' = \underbrace{-\gamma} + \kappa n \\ n' = -\kappa e \end{cases}$$

↳ S^2曲線 特有の 項

である

証明 $e' = -\gamma + \kappa n$ の 証明

$\{\gamma, e, n\}$ は ONB より,

$\underbrace{\gamma'' = a\gamma + be + cn}$ と表せる. $(a, b, c \in \mathbb{R})$

(*)

(*) $\cdot \gamma(s)$; $\gamma \cdot \gamma'' = a \underbrace{\gamma \cdot \gamma}_{1} + b \underbrace{\gamma \cdot e}_{0} + c \underbrace{\gamma \cdot n}_{0}$

$\therefore a = \gamma \cdot \gamma''$

ここで, $\gamma \cdot \gamma = 1 \xrightarrow{d/ds} \gamma \cdot \gamma' = 0$

$\xrightarrow{d/ds} \underbrace{\gamma' \cdot \gamma'}_{1} + \gamma \cdot \gamma'' = 0$

$\therefore \underbrace{a = -1}$

同様に, (*) $\cdot e$ と (*) $\cdot n$ を考えると,

⑤

$$\begin{cases} b = \gamma'' \cdot \gamma' = \frac{1}{2}(\gamma' \cdot \gamma')' = \underbrace{0} \\ c = \gamma'' \cdot n = e' \cdot n = \underbrace{\kappa} \end{cases}$$

$\therefore \gamma'' = a\gamma + be + cn$

$= -\gamma + \kappa n$ である ▨

Corollary

$\kappa = \det(\gamma, \gamma', \gamma'')$ である.

∵ $\kappa = \underbrace{n}_{\gamma \times \gamma'} \cdot \underbrace{e'}_{\gamma''} = \det(\gamma, \gamma', \gamma'')$ ▨

Example (円)

$$\gamma(s) = \begin{bmatrix} \sqrt{1-c^2} \cos \frac{s}{\sqrt{1-c^2}} \\ \sqrt{1-c^2} \sin \frac{s}{\sqrt{1-c^2}} \\ c \end{bmatrix}$$: 円の弧長パラメタ表示

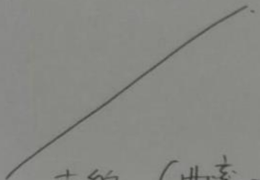
$$\gamma'(s) = \begin{bmatrix} -\sin \frac{s}{\sqrt{\ }} \\ \cos \frac{s}{\sqrt{\ }} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma''(s) = \frac{-1}{\sqrt{\ }} \begin{bmatrix} \cos \frac{s}{\sqrt{\ }} \\ \sin \frac{s}{\sqrt{\ }} \\ 0 \end{bmatrix}$$

余因子展開

$$\therefore \kappa(s) = \left| \gamma(s), \gamma'(s), \gamma''(s) \right| = \left(\frac{-1}{\sqrt{1-c^2}} \right) c \begin{vmatrix} -\sin & \cos \\ \cos & \sin \end{vmatrix} = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}$$

Remark

$\mathbb{R}^2$ の曲線



直線（曲率 $=0$）

$\frac{1}{a}$

円（曲率一定，$\neq 0$）

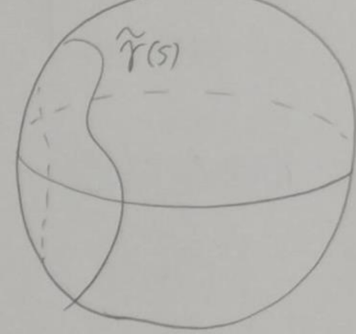
④ Frenet の公式

$$
\begin{aligned}
F' &= (\gamma', e', n') \\
&= (e, -\gamma + \kappa n, -\kappa e) \\
&= \underbrace{(\gamma, e, n)}_{F} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -\kappa \\ 0 & \kappa & 0 \end{bmatrix}}_{K}
\end{aligned}
$$

$\therefore F' = FK$

（Frenet の公式という）

⑤ 曲線論の基本定理



$A \in SO(3)$

（回転行列）

$\tilde{\gamma}(s) = A\gamma(s)$

Def

γ と $\tilde{\gamma}$ が向きを保つ S^2 の合同変換でうつり合う

$\Longleftrightarrow \exists A \in SO(3)$ s.t.

$\tilde{\gamma} = A\gamma$.

S^2 の曲線に対する曲線論の基本定理

$\begin{cases} I : \text{開区間} \neq \phi \\ \kappa : I \text{ 上 } C^\infty \text{ 級関数} \end{cases}$ とするとき，

$\exists 1\, \gamma : I \longrightarrow S^2$ （S^2 の向きを保つ合同変換を除いて一意的）

s.t. $\begin{cases} (1)\ \gamma \text{ は弧長パラメタ表示} \\ (2)\ \gamma \text{ の曲率が } \kappa(s) \text{ である.} \end{cases}$

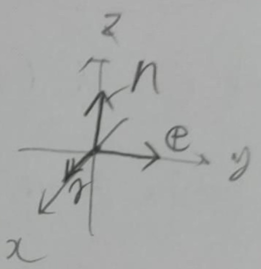
Proof

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -k \\ 0 & k & 0 \end{bmatrix}$$ とおくと、$\underbrace{{}^tK = -K}$.

→ F は $SO(3)$ の値と分かる.

$F(s)$ を、初期値問題

$$\begin{cases} F'(s) = F(s)K(s) \\ F(s_0) = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$



の解とする.

$F(s) = (\gamma(s), e(s), n(s))$ とおくとき、

$\underbrace{\gamma' = e}_{(1)}$、$\underbrace{e' = -\gamma + kn}_{(2)}$、$n' = ke$ をみたす.

特に、$\gamma(s)$ は求める曲線である.

(一意性)

γ、$\tilde{\gamma}$: (1)(2) をみたす曲線とする.

$F, \tilde{F}$: γ、$\tilde{\gamma}$ の フレネ~~輳~~枠 とすると、

$$F' = FK,\quad \tilde{F}' = \tilde{F}\underbrace{K}_{K = \tilde{K}}$$

$\Longrightarrow$ $\exists A \in SO(3)$ s.t. $\tilde{F}(s) = AF(s)$.

∵

$$\frac{d}{ds}(\tilde{F}F^{-1}) = \frac{d}{ds}(\tilde{F}\,{}^tF)$$

$$= \tilde{F}'\,{}^tF + \tilde{F}\,{}^tF'$$

$$= \tilde{F}K\,{}^tF + \tilde{F}\,{}^t(FK)$$

$$= \tilde{F}K\,{}^tF + \tilde{F}\underbrace{{}^tK}_{-K}{}^tF$$

$$= 0 \quad //$$