2

1

2

今日の内容　多様体の定義・例（球面，射影空間）

多様体 ← 外の空間を払拭した曲面の一般化

復習　$X=(X,\mathcal{O})$：位相空間

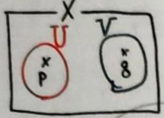
X が ハウスドルフ空間

$\Leftrightarrow$ $\forall p,q\in X$，$p\neq q$ に対し

$\exists U,V\subseteq X$：開集合

st. $p\in U$，$q\in V$，$U\cap V=\phi$

開集合で分離可能



分離公理

命題　X：ハウスドルフ空間

$A\subseteq X$：部分空間 $\Rightarrow$ A：ハウスドルフ

Xからの相対位相

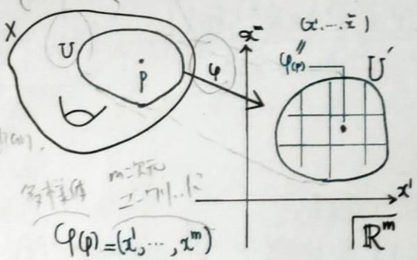
座標近傍

X：位相空間　$U\subseteq X$：開集合

もし $\exists U'\subseteq\mathbb{R}^m$，$\exists\varphi:U\to U'$：同相写像

のとき，組 (U,φ) を m次元座標近傍 という　Coordinate neighborhood

φ を 局所座標系 という　local coordinate system



$\varphi(p)=(x^1,\dots,x^m)$

pの局所座標

locally Euclidean

多様体　m次元ユークリッド

Def　位相空間 M が m次元位相多様体

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases}(1)\ M\text{はハウスドルフ空間}\\(2)\ \forall p\in M,\ \exists(U,\varphi)\text{：座標近傍 st. } p\in U\end{cases}$

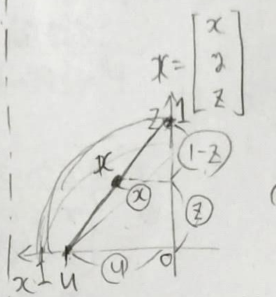
m次元ユークリッド射影

位相多様体＝好きな所に局所座標系が描ける空間

全ての点は何かの座標系で囲まれる

$x=a$で連続

$\Leftrightarrow \lim_{x\to a}f(x)=f(a)$



$x=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$

$u:1=x:1-z$

$\therefore u=\dfrac{x}{1-z}$

X,Y：位相空間

$f:X\to Y$（写像）

fが「連続写像」

$\Leftrightarrow$ $\forall V$：Yの開集合に対し，

$f^{-1}(V)$ は Xの開集合

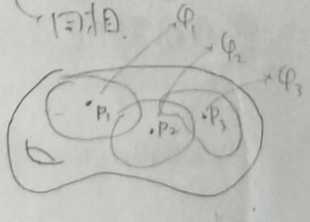
$f:X\to Y$：同相写像

$\Leftrightarrow$ fが連続，全単射 かつ

f^{-1}（逆写像）も連続

※同相写像は位相空間が同じもの を定める

同相



$x^2+y^2+z^2=1$

$\varphi\ \psi$！立体射影

ユークリッド空間はハウスドルフ

$\Downarrow$

S^2（ユークリッドの部分集合）もハウスドルフ

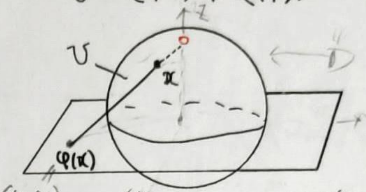
Ex1　S^2は2次元位相多様体

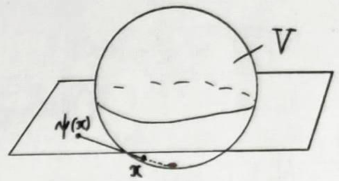
S^2は相対位相で $\mathbb{R}^3$の部分（位相）空間　：（$\mathbb{R}^3$：ハウスドルフより）S^2もハウスドルフ …(1) //

$U:=(\Sigma_1=)\ S^2\setminus\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

$V:=(\Sigma_2=)\ S^2\setminus\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$

U,V：1点を抜いた空間 → 開集合





$\varphi:U\to\mathbb{R}^2$（同相写像）

$\boxed{\varphi(x):=\dfrac{1}{1-z}(x,y)}$ $(z\neq1)$

$\psi:V\to\mathbb{R}^2$

$\boxed{\psi(x):=\dfrac{1}{1+z}(x,y)}$ $(z\neq-1)$

$x=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in S^2(\subseteq\mathbb{R}^3)$

φが全単射かどうか → 「逆写像」の存在を示せばよい

$P_1,P_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ を次で定める：

$\boxed{P_1(u,v):=\dfrac{1}{1+u^2+v^2}\begin{pmatrix}2u\\2v\\u^2+v^2-1\end{pmatrix}}=\varphi^{-1}$　（平面の点）　$((u,v)\in\mathbb{R}^2)$

$\boxed{P_2(\xi,\eta):=\dfrac{1}{1+\xi^2+\eta^2}\begin{pmatrix}2\xi\\2\eta\\1-\xi^2-\eta^2\end{pmatrix}}$　ψ^{-1}　$((\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2)$

$\boxed{\varphi^{-1}=P_1}$ である

$\because$ $\varphi\circ P_1=id_{\mathbb{R}^2}$ —(i)　$P_1\circ\varphi=id_U$ —(ii) を確かめればOK

$\forall(u,v)\in\mathbb{R}^2$に対し

$(\varphi\circ P_1)(u,v)$

$=\dfrac{1}{1-\frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2}}\left(\dfrac{2u}{1+u^2+v^2},\dfrac{2v}{1+u^2+v^2}\right)$

$=\dfrac{1+u^2+v^2}{1+u^2+v^2-(u^2+v^2-1)}\left(\dfrac{2u}{1+u^2+v^2},\dfrac{2v}{1+u^2+v^2}\right)$

$=\dfrac{1}{2}(2u,2v)$

$=(u,v)$ //

$\forall x=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in U\subseteq S^2$ に対して

$(P_1\circ\varphi)(x)=\dfrac{1}{1+\left(\frac{x}{1-z}\right)^2+\left(\frac{y}{1-z}\right)^2}\begin{pmatrix}2\frac{x}{1-z}\\2\frac{y}{1-z}\\\left(\frac{x}{1-z}\right)^2+\left(\frac{y}{1-z}\right)^2-1\end{pmatrix}$

$=\dfrac{(1-z)^2}{\underbrace{x^2+y^2}_{1-z^2}+z^2-2z+1}\begin{pmatrix}2\frac{x}{1-z}\\2\frac{y}{1-z}\\\frac{x^2+y^2-z^2+2z-1}{(1-z)^2}\end{pmatrix}$

$=\dfrac{1-z}{2}\begin{pmatrix}2\frac{x}{1-z}\\2\frac{y}{1-z}\\2\frac{z}{1-z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ //

$\therefore$ φは全単射，連続，$\varphi^{-1}=P_1$も連続 $\Rightarrow$ $\varphi:U\to\mathbb{R}^2$ は同相写像

同様に $\boxed{\psi^{-1}=P_2}$ も成り立つ

$\psi:V\to\mathbb{R}^2$ も同相写像

また $S^2=U\cup V$ より (2)もOK //

$U\cup V$

$\in U\cap V$ $(z\neq\pm1)$

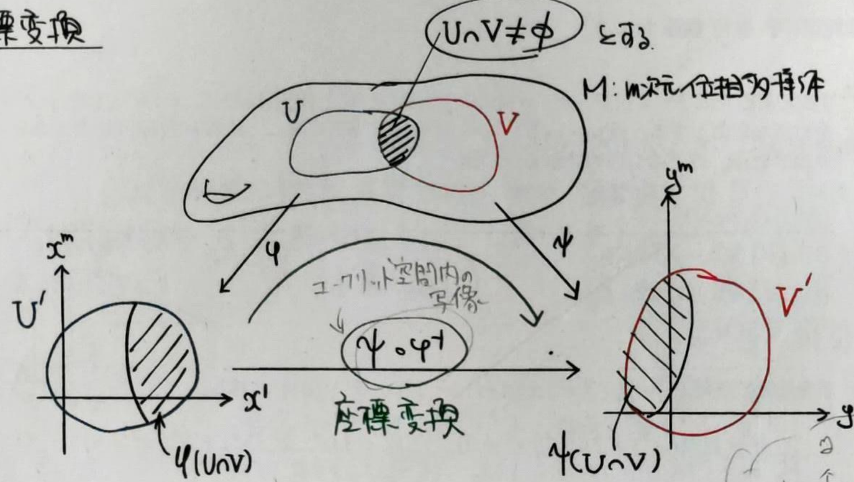
$x\in U$ $(z=-1)$　$x\in V$ $(z=+1)$

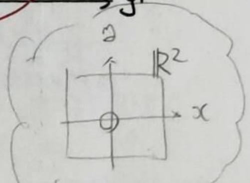
$\therefore$ S^2（単位球面）は位相多様体

コークリッドへ

… φ でも ψ でも射影できる

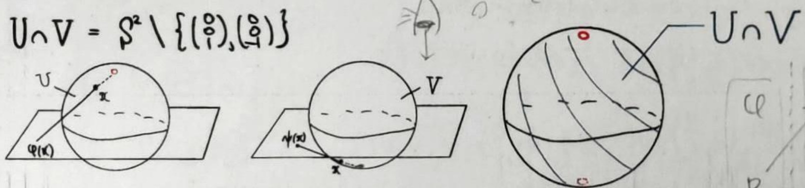
座標変換

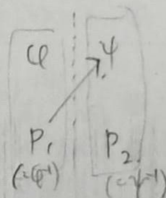




Def 同相写像 $\psi\circ\varphi^{-1}: \varphi(U\cap V) \to \psi(U\cap V)$ を (U,φ) から (V,ψ) への座標変換という

Ex2 $U\cap V = S^2 \setminus \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$





$\varphi(U\cap V) = \psi(U\cap V) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$\psi\circ\varphi^{-1}: \varphi(U\cap V) \longrightarrow \psi(U\cap V)$

$(u,v) \longmapsto (\xi,\eta)$

$P_1(u,v)$ の Σ 成分

$(\psi\circ\varphi^{-1})(u,v) = (\psi\circ P_1)(u,v)$

$$= \frac{1}{1+\frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2}}\left(\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}\right)$$

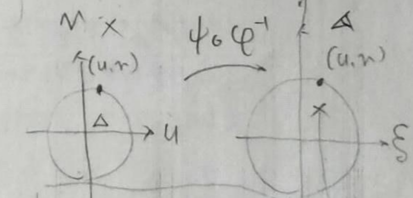
$$= \frac{u^2+v^2+1}{u^2+v^2+1+(u^2+v^2-1)}\left(\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2(u^2+v^2)}(2u, 2v)$$

$$= \frac{1}{u^2+v^2}(u,v) = \Bigl(\underbrace{\frac{u}{u^2+v^2}}_{\xi}, \underbrace{\frac{v}{u^2+v^2}}_{\eta}\Bigr) \quad (\xi(u,v), \eta(u,v))$$

グザイ

式の形は $\psi(x)$



単位円の内側と外側を入れかえる

$\left(\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2}\right)$

Ex) $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2, e^{x_1+x_2})$ は C^∞ 級写像　多項式、指数、対数

復習 $D \subseteq \mathbb{R}^m$: 領域, $f: D \longrightarrow \mathbb{R}^n$: 写像とする

(f は D 上の n 個の関数 $y^1 = y^1(x^1,\dots,x^m), \dots, y^n = y^n(x^1,\dots,x^m)$ を用いて $f = (y^1,\dots,y^n)$ と表される)

もし、$y^1,\dots,y^n$ がすべて $(x^1,\dots,x^m)$ に関する C^∞ 級関数のとき f を C^∞ 級写像という

$\varphi(U\cap V)$ の点は座標 $(x^1\cdots x^m)$ により表わされる
$\psi(U\cap V)$ 〃 〃 $(y^1\cdots y^m)$ 〃

$\boxed{\psi\circ\varphi^{-1}}: \varphi(U\cap V) \longrightarrow \psi(U\cap V) \subseteq \mathbb{R}^m \quad (\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m)$

$\mathbb{R}^m \supseteq \quad (x^1,\dots,x^m) \longmapsto (y^1,\dots,y^m) = (y^1(x^1,\dots,x^m), \dots, y^m(x^1,\dots,x^m))$

これは $\mathbb{R}^m$ の領域 $\varphi(U\cap V)$ から $\mathbb{R}^m$ に値をもつ写像なので (復習の意味で) C^∞ 級を定義可

可微分, C^∞ 級, なめらかな

Def 位相空間 M が m 次元 C^∞ 級(微分可能)多様体

$\Longleftrightarrow$ (1) M はハウスドルフ空間

位相多様体になってる

(2) M は m 次元座標近傍により被覆される
i.e. $\exists\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$: m 次元座標近傍の族 s.t. $M = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$

(3) $\forall \alpha,\beta\in A$ s.t. $U_\alpha\cap U_\beta \neq \phi$ に対し、
座標変換 $\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$ は C^∞ 級写像

(復習の意味で)

ことば: $\mathcal{S} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$: 座標近傍系, アトラス

座標近傍は複数ある。 添字集合

Ex $\mathbb{R}^m$ は m 次元 C^∞ 級多様体

$\because$ $U = \mathbb{R}^m$, $\varphi = id: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

(U,φ): 座標近傍. 座標変換 $id\circ id^{-1} = id$: C^∞ 級 //

Ex S^2 は 2次元 C^∞ 級多様体

Ex1 より (1), (2) はOK.

Ex2 より $(\psi\circ\varphi^{-1})(u,v) = \left(\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2}\right)$: C^∞ 級

同様に $(\varphi\circ\psi^{-1})(\xi,\eta) = \left(\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}, \frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}\right)$: 〃

). (3) もOK.

座標変換

複素多様体 にもなってる

リーマン球面

$S^2 = \{ \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid (x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2 = 1 \}$

$N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in S^2$

平面を「複素数平面」とみる

$U := S^2 \setminus \{N\}$

$V := S^2 \setminus \{S\}$

$\varphi : U \to \mathbb{R}^2$; $\varphi \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} := \frac{1}{1-x^3}(x^1, x^2)$

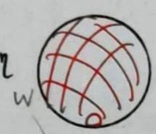
$\mathbb{R}^2 \longleftrightarrow \mathbb{C}$: 同一視

$(u,v) \quad u+iv = z$

$\varphi^{-1}(u,v) = \frac{1}{1+u^2+v^2} \begin{pmatrix} 2u \\ 2v \\ u^2+v^2-1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \varphi : U \to \mathbb{C} & ; \ \varphi \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} := \frac{x^1+ix^2}{1-x^3} \\ \varphi^{-1} : \mathbb{C} \to U & ; \ \varphi^{-1}(z) = \frac{1}{1+|z|^2} \begin{pmatrix} 2\mathrm{Re}\, z \\ 2\mathrm{Im}\, z \\ |z|^2-1 \end{pmatrix} \quad z = u+iv \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi : V \to \mathbb{C} & ; \ \psi \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \frac{x^1+ix^2}{1+x^3} \\ \psi^{-1} : \mathbb{C} \to V & ; \ \psi^{-1}(w) = \frac{1}{1+|w|^2} \begin{pmatrix} 2\mathrm{Re}\, w \\ 2\mathrm{Im}\, w \\ 1-|w|^2 \end{pmatrix} \quad w = \xi + i\eta \end{cases}$$



$\psi \circ \varphi^{-1}(z) \left(= \frac{(u,v)}{u^2+v^2} \right) = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{\bar{z}}$: $\mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$

$\therefore w = \frac{1}{\bar{z}}$ $\quad (\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\})$

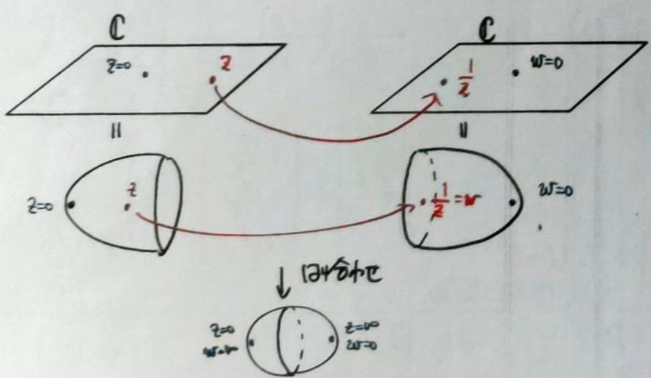
$\overline{\psi} : V \to \mathbb{C}$; $\overline{\psi} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \frac{x^1 - ix^2}{1+x^3}$ とおくと

$\overline{\psi} \circ \varphi^{-1}(z) = \frac{1}{z}$: $\mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$

$z \longmapsto w = \frac{1}{z}$

$\therefore \{(U,\varphi), (V,\overline{\psi})\}$ は S^2 の座標近傍系で

座標変換 $\overline{\psi} \circ \varphi^{-1} : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ は複素正則関数 → 1次元複素多様体



2枚の $\mathbb{C}$ を貼り合わせて S^2 が得られる

$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ $\quad$ z=0 が無限遠点に対応

リーマン球面 という

〜〜→

(ハウスドルフ かは非自明)

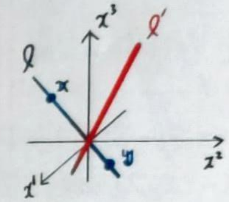
m次元 射影空間

$P^m := \{ \mathbb{R}^{m+1}$ の原点を通る直線 $\}$

P^m が m次元 C^∞ 級多様体となること

ここでは簡単のため $m=2$ の場合を考える ← 一般の m に対しても同様

$P^2 = \{ \mathbb{R}^3$ の原点を通る直線 $\}$



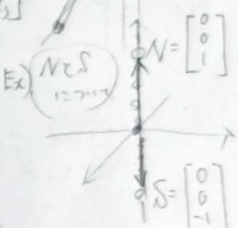
P^2 はどういう集合か

平行の関係 $\quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

- $\begin{cases} x, y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \text{ に対し} \\ x \sim y \iff {}^\exists \lambda \in \mathbb{R}^\times \text{ s.t. } y = \lambda x \quad (\mathbb{R}^\times := \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ とおく}) \end{cases}$

  と定めると、$\sim$ は $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ の同値関係を与える
- $[x]$: x の同値類 $\quad [x] = \ell \quad$ $[N] = \{ x \mid x \sim N \}$ は、
- $P^2 := (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) / \sim \ = \{ [x] \mid x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \}$ $\quad$ N を通る直線 (と原点)

Ex) N と S について



N〜S

$(N = (-1) \cdot S)$ $\quad \lambda$

- $x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対し

  $[x] = (x^1 : x^2 : x^3)$ と表すことにする (斉次座標)

  $x \sim y \iff (x^1 : x^2 : x^3) = (y^1 : y^2 : y^3)$

  $\iff {}^\exists \lambda \in \mathbb{R}^\times$ s.t. $(y^1 : y^2 : y^3) = (\lambda x^1 : \lambda x^2 : \lambda x^3)$ (同じ比)

  よって、$\lambda \in \mathbb{R}^\times$ に対して $(x^1 : x^2 : x^3) = (\lambda x^1 : \lambda x^2 : \lambda x^3)$

  $P^2 = \{ (\lambda x^1 : \lambda x^2 : \lambda x^3) \mid \lambda \in \mathbb{R}^\times, (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \}$

  ↑ 3個の実数 x^1, x^2, x^3 の連比の全体

  → 3次元内の原点を通る直線

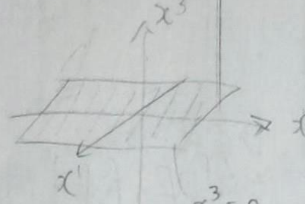
P^2 の位相の定め方

- $\pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow P^2$ $\quad$ 自然な射影

  $(x^1, x^2, x^3) \longmapsto (x^1 : x^2 : x^3)$ により商位相で P^2 は位相空間

  つまり $U \subseteq P^2$: 開集合 $\iff \pi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$: 開集合
- 位相空間 P^2 はハウスドルフ

  (NOT 自明)



P^2の座標近傍系

- $\begin{cases} U := \{(x^1:x^2:x^3) \in P^2 \mid x^1 \neq 0\} \\ V := \{(x^1:x^2:x^3) \in P^2 \mid x^2 \neq 0\} \\ W := \{(x^1:x^2:x^3) \in P^2 \mid x^3 \neq 0\} \end{cases}$ とおくと，U, V, W はP^2の開集合．
- $\{U, V, W\}$ はP^2の開被覆，つまり $P^2 = U \cup V \cup W$
- $\varphi: U \to \mathbb{R}^2$，$\psi: V \to \mathbb{R}^2$，$\omega: W \to \mathbb{R}^2$ を

$$\begin{cases} \varphi(x^1:x^2:x^3) = \left(\frac{x_2}{x^1}, \frac{x_3}{x^1}\right) \\ \psi(x^1:x^2:x^3) = \left(\frac{x_1}{x^2}, \frac{x_3}{x^2}\right) \\ \omega(x^1:x^2:x^3) = \left(\frac{x_1}{x^3}, \frac{x_2}{x^3}\right) \end{cases}$$

と定めると，同相写像 (well-defined)

$$\left(\because \begin{cases} \varphi^{-1}(u,v) = (1:u:v) \\ \psi^{-1}(\xi,\eta) = (\xi:1:\eta) \\ \omega^{-1}(s,t) = (s:t:1) \end{cases} \text{ は } \varphi, \psi, \omega \text{ それぞれの連続な逆写像} \,/\!/ \right)$$

$\psi^{-1}(\xi,\eta) = (\xi:1:\eta)$，$\omega^{-1}(s,t) = (s:t:1)$

$\pi^{-1}(W) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \middle| \, x^3 \neq 0 \right\}$

座標変換

$U \cap V = \{(x^1:x^2:x^3) \mid x^1 \neq 0, x^2 \neq 0\} \neq \phi$

$$\begin{pmatrix} \varphi(U \cap V) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u \neq 0\} \\ \psi(U \cap V) = \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 \mid \xi \neq 0\} \end{pmatrix}$$

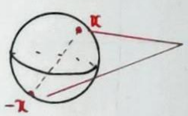
$\psi \circ \varphi^{-1}(u,v) = \psi((1:u:v)) = \left(\frac{1}{u} : \frac{v}{u}\right)$

$\therefore \psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap W) : C^\infty$級 /

Rem $P^2 = \{\mathbb{R}^3$の原点を通る直線$\}$ 各 $l \in P^2$ に対して，

$l \cap S^2 = \{x, -x\}$ 原点を通して真逆

$\therefore l \longleftrightarrow \{\pm x\}$ 1対1対応

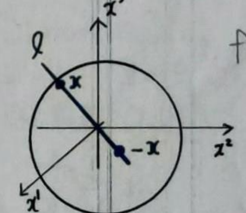


2点を同一視

$x \sim y \Leftrightarrow y = x \lor y = -x$

真逆の点（対蹠点）を同一視する

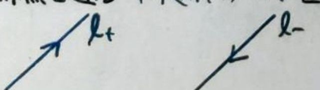
$\Rightarrow P^2 = S^2/\sim$



$f(\lambda x^1 : \lambda x^2)$

$f(x^1 : x^2)$

Rem $\{\mathbb{R}^3$の原点を通る 向き付けられた直線$\} = S^2$ (単位球面)



先進数理科学 幾何 課題 No. 2

$\boxed{\text{問 1}}$ 2 次元射影空間 $P^2 = \{(x^1 : x^2 : x^3) \mid (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\}$ に対し，$\pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to P^2$ を自然な射影とする．点 $p = (\sqrt{3} : -\sqrt{6} : 1/\sqrt{2}) \in P^2$ に対し，逆像 $\pi^{-1}(\{p\})$ に含まれる点はどれか．以下の (A)–(C) から一つ選べ．

(A) $(\sqrt{6}, 2\sqrt{3}, 1)$

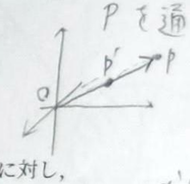
(B) $(\sqrt{3}/\sqrt{2}, -\sqrt{3}, 1/2)$

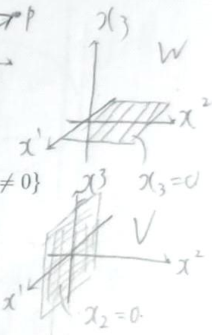
(C) $(\sqrt{3}, \sqrt{6}, -1/\sqrt{2})$

$\times \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, -\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$

Pを通る直線





$\boxed{\text{問 2}}$ 2 次元射影空間 $P^2 = \{(x^1 : x^2 : x^3) \mid (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\}$ に対し，

$$V = \{(x^1 : x^2 : x^3) \in P^2 \mid x^2 \neq 0\}, \qquad W = \{(x^1 : x^2 : x^3) \in P^2 \mid x^3 \neq 0\}$$

は P^2 の開集合である．$\psi : V \to \mathbb{R}^2$, $\omega : W \to \mathbb{R}^2$ を

$$\overset{V}{\psi}(x^1 : x^2 : x^3) = \left(\frac{x^1}{x^2}, \frac{x^3}{x^2}\right), \qquad \overset{W}{\omega}(x^1 : x^2 : x^3) = \left(\frac{x^1}{x^3}, \frac{x^2}{x^3}\right)$$

と定める．各 $(\xi, \eta) \in \psi(V \cap W)$ に対して，$\omega \circ \psi^{-1}(\xi, \eta)$ はどのように表されるか．以下の (A)–(C) から正しいものを一つ答えよ．

(A) $\left(\frac{1}{\eta}, \frac{\xi}{\eta}\right)$

(B) $\left(\frac{1}{\xi}, \frac{\eta}{\xi}\right)$

(C) $\left(\frac{\xi}{\eta}, \frac{1}{\eta}\right)$

$x_2 \neq 0$ かつ $x_3 \neq 0$

$$\begin{cases} \xi := \frac{x^1}{x^2} \\ \eta := \frac{x^3}{x^2} \end{cases}$$

$\psi(x^1\, x^2\, x^3) = \left(\frac{x^1}{x^2}, \frac{x^3}{x^2}\right)$

$\psi^{-1}(\xi, \eta) = (\xi x^2, x^2, \eta x^2)$

$= (\xi, 1, \eta)$　$x^1 = \xi \cdot x^2$

$x^3 = \eta \cdot x^2$

$\therefore \omega(\xi : 1 : \eta) = \left(\frac{\xi}{\eta}, \frac{1}{\eta}\right)$

$\boxed{\text{問 3}}$ 3 次元射影空間 $P^3 = \{(x^1 : x^2 : x^3 : x^4) \mid (x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}\}$ に対して，以下の (A)–(C) の中から P^3 上で定義される関数 $f : P^3 \to \mathbb{R}$ を一つ答えよ．

(A) $f(x^1 : x^2 : x^3 : x^4) = \dfrac{x^1\, x^2\, x^3\, x^4}{(x^1)^4 + (x^2)^4 + (x^3)^4 + (x^4)^4}$

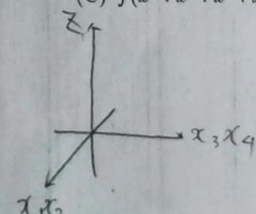
いずれかの $x_{\text{成分}} = 0$ だとアウト．

(B) $f(x^1 : x^2 : x^3 : x^4) = \log\left(\dfrac{3x^1\, x^2}{(x^1)^2 + 2(x^2)^2 + (x^4)^2}\right)$

$x_1 \cdot x_2 > 0$.

(C) $f(x^1 : x^2 : x^3 : x^4) = x^3\, x^4 \sin(x^1\, x^2)$

$\underbrace{(x_1)^2}_{\geq 0} + \underbrace{2(x_2)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(x_0)^2}_{\geq 0} \neq 0$



$Z - X$ symy.