$S^n \times \mathbb{R}$ と $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ への等長的はめ込み

(BENOÎT DANIEL)

アブストラクト

- $S^n \times \mathbb{R}$、$\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ に 等長的 に はめ込まれるための n次元リーマン多様体 に 対する 必要十分条件 を与えた。 (3章部分)
  (第一基本形式、第二基本形式、接空間上の 法ベクトル場 (vertical vector field) の射影 で与えられる)
- $S^n \times \mathbb{R}$、$\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ における、与えられた 極小曲面 の 等長的 な 極小変形 (deformation) の 1パラメータ族 の 存在を 形作用素 の 回転 によって導き出す (4章部分)

1. イントロダクション

記号を 以下 の ように設定する：

$\overline{V}$：向き付け可能な $n+1$ 次元リーマン多様体

V：$\overline{V}$の n次元部分多様体

$\overline{\nabla}$：$\overline{V}$ のリーマン接続 (レビチビタ接続)

∇：V の 〃

$\overline{R}$：$\overline{V}$ のリーマン曲率テンソル

R：V の 〃

$\longrightarrow R_{XY}(Z) = \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_X(\nabla_Y Z) + \nabla_{[X,Y]}Z$

S：V における 単位法ベクトル N (unit normal N) に対応する 形作用素

$\longrightarrow SX = -\overline{\nabla}_X N$

これらの記号を用いて、ガウス方程式 および コダッチ方程式 は 以下 のように表せる：

ガウス方程式：$R_{XY}(Z) - \overline{R}_{XY}(Z) = \langle SX, Z\rangle SY - \langle SY, Z\rangle SX$

コダッチ方程式：$\nabla_X(SY) - \nabla_Y(SX) - S[X,Y] = \overline{R}_{XY}(N)$

$\overline{V}$ が 空間形式 (space form) の 場合 (球面 S^{n+1}、ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}$、双曲空間 $\mathbb{H}^{n+1}$)、ガウス方程式 と コダッチ方程式 は 次のようになる：

ガウス方程式：$\langle R_{XY}(Z), W\rangle - k\left(\langle X, Z\rangle\langle W, Y\rangle - \langle Y, Z\rangle\langle W, X\rangle\right)$

$$= \langle SX, Z\rangle\langle SW, Y\rangle - \langle SX, W\rangle\langle SY, Z\rangle$$

コダッチ方程式：$\nabla_X(SY) - \nabla_Y(SX) - S[X, Y] = 0$

（k は $\overline{V}$ の断面曲率を表す．$k = 1, 0, -1$ は それぞれ S^{n+1}，$\mathbb{R}^{n+1}$，$\mathbb{H}^{n+1}$ に対応する）

- 一般の多様体 $\overline{V}$ の場合、ガウス方程式 および コダッチ方程式 は $\overline{V}$ のリーマン曲率テンソル が 関与するため、V 上で 内在的 に 定義されない．

  しかし、$\overline{V} = S^n \times \mathbb{R}$ または $\overline{V} = \mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ の 場合、以下の 2つ が 分かっていれば
  ガウス方程式 と コダッチ方程式 は (well-defined) になる ： 「方程式を立てることが出来る」の意味．

  (1) V の 接空間 への 全射 (onto) であるような ~~法~~ (vertical) ×? ベクトル $\frac{\partial}{\partial t}$ の 射影 T

  (2) $\frac{\partial}{\partial t}$ の 法成分 ν、 すなわち $\nu = \langle N, \frac{\partial}{\partial t}\rangle$　　vertical：鉛直

→ このときの ガウス方程式 と コダッチ方程式 は 以下 のようになる：

ガウス方程式：
$$\begin{aligned} R_{XY}(Z) = {} & \langle SX, Z\rangle SY - \langle SY, Z\rangle SX \\ & + k\big(\langle X, Z\rangle Y - \langle Y, Z\rangle X - \langle Y, T\rangle\langle X, Z\rangle T \\ & \quad - \langle X, T\rangle\langle Z, T\rangle Y + \langle X, T\rangle\langle Y, Z\rangle T + \langle Y, T\rangle\langle Z, T\rangle X\big) \end{aligned}$$

コダッチ方程式：$\nabla_X(SY) - \nabla_Y(SX) - S[X, Y] = k\nu\left(\langle Y, T\rangle X - \langle X, T\rangle Y\right)$

（$k = 1$ は $S^n \times \mathbb{R}$ と対応し、$k = -1$ は $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ と対応している）

- ガウス方程式 は 以下 のように 書き換えることが 出来る：

  （V の 計量 における）任意 の 平面 $P \subset TV$ の 断面曲率 $K(P)$ は 次 を 満たす

  $$K(P) = \det(S_P) + k\left(1 - \|T_P\|^2\right)$$

  （S_P：P 上の S の 制限、T_P：T を P 上に 直交射影）

- 本論文の 第一の 目的 は、対称作用素 S を 持つ リーマン多様体 が、$S^n \times \mathbb{R}$ または $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ に 等長的に はめ込まれることの 必要十分条件 を 与える 次の 定理 を 証明することである．（次ページ）

Theorem (3.3節で再掲)

V を n 次元の単連結なリーマン多様体とし、ds^2 を V の計量として、さらに ∇ を V のリーマン接続(レビチビタ接続)とする。S を対称作用素 $S_y : T_yV \to T_yV$ の field 場として、T を V 上のベクトル場とし、ν を $\|T\|^2 + \nu^2 = 1$ を満たすような V 上の滑らかな関数とする.

$M^n = S^n$ または $M^n = \mathbb{H}^n$ とする. 組 (ds^2, S, T, ν) が $M^n \times \mathbb{R}$ に対するガウス方程式とコダッチ方程式を満たし、さらに以下2つの方程式を満たしていると仮定する:

$$\nabla_X T = \nu SX \qquad d\nu(X) = -\langle SX, T\rangle \qquad (*)$$

このとき、$f : V \longrightarrow M^n \times \mathbb{R}$ という等長的はめ込みが存在し、f に関する normal 法ベクトル N と対応する形作用素が次を満たす:

$$df \circ S \circ df^{-1} \qquad \frac{\partial}{\partial t} = df(T) + \nu N$$

加えて、このはめ込みは $M^n \times \mathbb{R}$ の大域的な M^n と $\mathbb{R}$ の向きを保つ等長変換を除いて一意である.

($(*)$ の追加条件2つは、法ベクトル場 $\frac{\partial}{\partial t}$ が平行である事実より)

- 本論文では定理3.3を用いて $S^2 \times \mathbb{R}$ または $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ における極小曲面の等長的な極小変形の1パラメータ族の存在を証明する.(この族は $\mathbb{R}^3$ における極小曲面の associated family 関連する族である)

これが以下の定理である.

Theorem (4.2節で再掲)

Σ を単連結なリーマン曲面とし、$x : \Sigma \longrightarrow M^2 \times \mathbb{R}$ を conformal 共形極小はめ込みとする.
N を $x(\Sigma)$ で誘導された法ベクトル場とする. S を $x(\Sigma)$ の形作用素によって誘導される Σ 上の symmetric 対称作用素とする. また、T を Σ 上のベクトル場で、$dx(T)$ が $\frac{\partial}{\partial t}$ から $T(x(\Sigma))$ への射影とする. さらに、$\nu := \langle N, \frac{\partial}{\partial t}\rangle$ とする.

$z_0 \in \Sigma$ とすると、共形極小はめ込み $x_\theta : \Sigma \to M^2 \times \mathbb{R}$ の一意な族 $(x_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}}$ が存在し、以下を満たす:

(1) $x_\theta(z_0) = x(z_0)$ かつ $(dx_\theta)_{z_0} = (dx)_{z_0}$

(2) x と x_θ によって誘導される Σ 上の計量は同じである

(3) $x_\theta(\Sigma)$ の形作用素によって誘導される Σ 上の対称作用素は $e^{\theta J} S$ である.

(4) $\frac{\partial}{\partial t} = dx_\theta(e^{\theta J} T) + \nu N_\theta$、ここで N_θ は x_θ に対して法な法ベクトル場である.

さらに $x_0 = x$ であり、族 (x_θ) は θ に関して連続である.

conjugate

- 特に $\theta = \frac{\pi}{2}$ を取ると、共役曲面 を定義する。
  $M^2 \times \mathbb{R}$ および $\mathbb{R}^3$ における 共役曲面 の幾何的性質 は類似している。

最後に、いくつかの共役曲面 の 例 を示す：

unduloid

- $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ において、ヘリコイド と アンダロイド が 共役 であること を示す
- $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ において、ヘリコイド が カテノイド や Hauswirth 族 に属する 定曲率 の 水平曲線 によって 葉状 となる 極小曲面 と 共役 であること を示す

folitated

2. 準備

※ 表記ルールについて

- ラテン文字 (i, j, k など) は 1 から n までの整数を動くとする
  $\longrightarrow$ $n=2$ の場合、$i, j, k = 1, 2$
- ギリシャ文字 (α, β, γ など) は 0 から $n+1$ までの整数を動くとする
  $\longrightarrow$ $n=2$ の場合、$\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, 3$
- リーマン多様体 V 上のベクトル場の集合を $\mathfrak{X}(V)$ と表す.
- $\frac{\partial}{\partial t}$ を $M^n \times \mathbb{R}$ における $\mathbb{R}$ の向きを与える単位ベクトルと記し、
  これを~~法~~ベクトル (vertical vector) と呼ぶ.

2.1 $M^n \times \mathbb{R}$ における整合方程式

$M^n = S^n$ または $\mathbb{H}^n$ とする. 前者 ($M^n = S^n$) の場合は $k=1$、後者の場合は $k=-1$ とする.
$\bar{R}$ を $M^n \times \mathbb{R}$ のリーマン曲率テンソルとする.
V を $M^n \times \mathbb{R}$ 内の向き付け可能な超曲面として、N を V に対する単位法ベクトル場とする.

Proposition 2.1

計算合わない？

任意の $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(V)$ に対して次が成立する

- $$\begin{aligned}\langle \bar{R}_{XY}(Z), W \rangle = k \big(&\langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle \\ &- \langle Y, T \rangle \langle W, T \rangle \langle X, Z \rangle - \langle X, T \rangle \langle Z, T \rangle \langle Y, W \rangle \\ &+ \langle X, T \rangle \langle W, T \rangle \langle Y, Z \rangle + \langle Y, T \rangle \langle Z, T \rangle \langle X, W \rangle \big)\end{aligned}$$
- $$\langle \bar{R}_{XY}(N), Z \rangle = k\nu \big(\langle X, Z \rangle \langle Y, T \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, T \rangle \big)$$

ここで、ν と T (V 上の $\frac{\partial}{\partial t}$ の射影) はそれぞれ、

$$\nu = \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle, \quad T = \frac{\partial}{\partial t} - \nu N$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = T + \nu N.$$

である.

Proof

任意の $M^n \times \mathbb{R}$ 上のベクトル場は $X(m, t) = (X^t_{M^n}(m), X^m_{\mathbb{R}}(t))$ と書ける. ここで、各 $t \in \mathbb{R}$ に対して $X^t_{M^n}$ は M^n 上のベクトル場であり、$m \in M^n$ に対して $X^m_{\mathbb{R}}$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル場である.
このとき、$X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M^n \times \mathbb{R})$ に対して次が成り立つ:

$X_{M^n}, X_{\mathbb{R}}$

$$\langle \bar{R}_{XY}(Z), W\rangle = \langle \bar{R}_{M^n\, X_{M^n} Y_{M^n}}(Z_{M^n}), W_{M^n}\rangle$$

(項16コ)　なぜ?

$$= k\left(\langle X_{M^n}, Z_{M^n}\rangle\langle Y_{M^n}, W_{M^n}\rangle - \langle Y_{M^n}, Z_{M^n}\rangle\langle X_{M^n}, W_{M^n}\rangle\right) \cdots ①$$

ここで、$X_{M^n} = X - \langle X, T\rangle \frac{\partial}{\partial t}$ である。…②

①に②を代入する：

$X \in \mathfrak{X}(M^n \times \mathbb{R})$

$$\langle X_{M^n}, Z_{M^n}\rangle = \left\langle X - \langle X,T\rangle\tfrac{\partial}{\partial t},\ Z - \langle Z,T\rangle\tfrac{\partial}{\partial t}\right\rangle$$

$$= \langle X, Z\rangle \cancel{+}{-} \langle X,T\rangle\langle Z,T\rangle \quad \left(\because \langle X, \tfrac{\partial}{\partial t}\rangle \cancel{=0},\ \langle Z, \tfrac{\partial}{\partial t}\rangle \cancel{=0},\ \langle \tfrac{\partial}{\partial t}, \tfrac{\partial}{\partial t}\rangle = 1\right)$$

$$\langle Y_{M^n}, W_{M^n}\rangle = \langle Y, W\rangle \cancel{+}{-} \langle Y,T\rangle\langle W,T\rangle$$

$$\langle Y_{M^n}, Z_{M^n}\rangle = \langle Y, Z\rangle \cancel{+}{-} \langle Y,T\rangle\langle Z,T\rangle$$

$$\langle X_{M^n}, W_{M^n}\rangle = \langle X, W\rangle \cancel{+}{-} \langle X,T\rangle\langle W,T\rangle$$

であるので、①は

$$\langle X_{M^n}, Z_{M^n}\rangle = \langle X, Z\rangle - \langle Z,T\rangle\langle X, \tfrac{\partial}{\partial t}\rangle - \langle X,T\rangle\langle Z, \tfrac{\partial}{\partial t}\rangle + \langle X,T\rangle\langle Z,T\rangle\underbrace{\langle \tfrac{\partial}{\partial t}, \tfrac{\partial}{\partial t}\rangle}_{=1}$$

$$\langle \bar{R}_{XY}(Z), W\rangle = k\Big\{\big(\langle X,Z\rangle \cancel{+}{-} \langle X,T\rangle\langle Z,T\rangle\big)\big(\langle Y,W\rangle \cancel{+}{-} \langle Y,T\rangle\langle W,T\rangle\big)$$
$$- \big(\langle Y,Z\rangle \cancel{+}{-} \langle Y,T\rangle\langle Z,T\rangle\big)\big(\langle X,W\rangle \cancel{+}{-} \langle X,T\rangle\langle W,T\rangle\big)\Big\}$$

$$= k\Big\{\langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle \cancel{+}{-} \langle X,Z\rangle\langle Y,T\rangle\langle W,T\rangle \cancel{+}{-} \langle X,T\rangle\langle Z,T\rangle\langle Y,W\rangle$$
$$\cancel{+ \langle X,T\rangle\langle Z,T\rangle\langle Y,T\rangle\langle W,T\rangle}$$
$$- \langle Y,Z\rangle\langle X,W\rangle \cancel{-}{+} \langle Y,Z\rangle\langle X,T\rangle\langle W,T\rangle \cancel{-}{+} \langle Y,T\rangle\langle Z,T\rangle\langle X,W\rangle$$
$$\cancel{- \langle Y,T\rangle\langle Z,T\rangle\langle X,T\rangle\langle W,T\rangle}\Big\}$$

$$= k\Big\{\langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle - \langle Y,Z\rangle\langle X,W\rangle$$
$$- \cancel{+}\langle X,Z\rangle\langle Y,T\rangle\langle W,T\rangle \cancel{+}{-}\langle X,T\rangle\langle Z,T\rangle\langle Y,W\rangle$$
$$+ \cancel{-}\langle Y,Z\rangle\langle X,T\rangle\langle W,T\rangle \cancel{-}{+}\langle Y,T\rangle\langle Z,T\rangle\langle X,W\rangle\Big\}$$

符号が逆?

$\langle \bar{R}_{XY}(N), Z\rangle$ について、①と同様に

$$\langle \bar{R}_{XY}(N), W\rangle = \langle \bar{R}_{M^n\, X_{M^n} Y_{M^n}}(N_{M^n}), Z_{M^n}\rangle$$
$$= k\left(\langle X_{M^n}, N_{M^n}\rangle\langle Y_{M^n}, Z_{M^n}\rangle - \langle Y_{M^n}, N_{M^n}\rangle\langle X_{M^n}, Z_{M^n}\rangle\right) \cdots ③$$

各項の内積部分を計算すると、$N_{M^n} = N - \nu \frac{\partial}{\partial t}$ より

$$\langle X_{M^n}, Z_{M^n}\rangle = \langle X, Z\rangle - \langle Z, T\rangle\langle X, \tfrac{\partial}{\partial t}\rangle - \langle X, T\rangle\langle Z, \tfrac{\partial}{\partial t}\rangle + \langle X, T\rangle\langle Z, T\rangle\underbrace{\langle \tfrac{\partial}{\partial t}, \tfrac{\partial}{\partial t}\rangle}_{=1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = T + \nu N.$$

$$= \langle X, Z\rangle - \underbrace{\langle Z, T\rangle\langle X, T+\nu N\rangle}_{=\langle X, T\rangle + \langle X, \nu N\rangle} - \langle X, T\rangle\underbrace{\langle Z, T+\nu N\rangle}_{=\langle Z, T\rangle} + \langle X, T\rangle\langle Z, T\rangle$$

$$\langle X, T\rangle + \nu\underbrace{\langle X, N\rangle}_{=0}$$

$$= \langle X, Z\rangle - \langle Z, T\rangle\langle X, T\rangle \cancel{- \langle X, T\rangle\langle Z, T\rangle} \cancel{+ \langle X, T\rangle\langle Z, T\rangle}$$

$$\langle X_{M^n}, N_{M^n}\rangle = \left\langle X - \langle X, T\rangle\frac{\partial}{\partial t},\ N - \nu\frac{\partial}{\partial t}\right\rangle$$

$$= \langle X, N\rangle - \langle X, T\rangle\underbrace{\left\langle\frac{\partial}{\partial t}, N\right\rangle}_{=\nu} - \nu\underbrace{\left\langle X, \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle}_{=\cancel{0}\ =\langle X, T\rangle} + \nu\langle X, T\rangle\underbrace{\left\langle\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle}_{=1}$$

$$= \underbrace{\langle X, N\rangle}_{\neq 0.} - \nu\langle X, T\rangle$$

$$\langle Y_{M^n}, N_{M^n}\rangle = \underbrace{\langle Y, N\rangle}_{\neq 0.} - \nu\langle Y, T\rangle$$

$$\langle Y_{M^n}, Z_{M^n}\rangle = \langle Y, Z\rangle \cancel{+} - \langle Y, T\rangle\langle Z, T\rangle$$

$$\langle X_{M^n}, Z_{M^n}\rangle = \langle X, Z\rangle \cancel{+} - \langle X, T\rangle\langle Z, T\rangle$$ である.

③にこれらの結果を代入して整理すると、

$$\langle R_{XY}(N), W\rangle = k\big(\langle X,N\rangle\langle Y,Z\rangle + \langle X,N\rangle\langle Y,T\rangle\langle Z,T\rangle - \langle Y,N\rangle\langle X,Z\rangle - \langle Y,N\rangle\langle X,T\rangle\langle Z,T\rangle\big)$$

$T = \frac{\partial}{\partial t} - \nu N$ 代入

$\langle X, T\rangle = -\nu\langle X, N\rangle$

$$= k\big(\langle X,N\rangle\langle Y,Z\rangle + \cancel{\nu^2\langle X,N\rangle\langle Y,N\rangle\langle Z,N\rangle} - \langle Y,N\rangle\langle X,Z\rangle - \cancel{\nu^2\langle Y,N\rangle\langle X,N\rangle\langle Z,N\rangle}\big)$$

$$= k\big(\langle X,N\rangle\langle Y,Z\rangle - \langle Y,N\rangle\langle X,Z\rangle\big)$$

$N = \frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial}{\partial t} - T\right)$ 代入

$$= k\left(-\frac{1}{\nu}\langle X,T\rangle\langle Y,Z\rangle + \frac{1}{\nu}\langle Y,T\rangle\langle X,Z\rangle\right)$$

$$= \frac{k}{\nu}\big(\langle X,Z\rangle\langle Y,T\rangle - \langle X,T\rangle\langle Y,Z\rangle\big)$$

係数が合わない？（$k\nu$ になりたい）

$$k\big(\langle X_{M^n}, \overset{N}{\cancel{Z}}_{M^n}\rangle\langle Y_{M^n}, \overset{Z}{\cancel{W}}_{M^n}\rangle - \langle Y_{M^n}, \overset{N}{\cancel{Z}}_{M^n}\rangle\langle X_{M^n}, \overset{Z}{\cancel{W}}_{M^n}\rangle\big)$$

$$\langle R_{XY}(N), Z\rangle = k\Big\{\big(\cancel{\langle X,N\rangle} - \nu\langle X,T\rangle\big)\big(\langle Y,Z\rangle - \langle Y,T\rangle\langle Z,T\rangle\big) - \big(\cancel{\langle Y,N\rangle} - \nu\langle Y,T\rangle\big)\big(\langle X,Z\rangle - \langle X,T\rangle\langle Z,T\rangle\big)\Big\}$$

$$= k\nu\Big\{-\langle X,T\rangle\big(\langle Y,Z\rangle - \langle Y,T\rangle\langle Z,T\rangle\big) + \langle Y,T\rangle\big(\langle X,Z\rangle - \langle X,T\rangle\langle Z,T\rangle\big)\Big\}$$

$$= k\nu\Big\{\langle Y,T\rangle\langle X,Z\rangle - \langle X,T\rangle\langle Y,Z\rangle\Big\}$$

ベクトル場 $\frac{\partial}{\partial t}$ が平行である事実を用いると、次の命題2.2が成り立つ.

Proposition 2.2 $X \in \mathfrak{X}(M^n \times \mathbb{R})$

$X \in \mathfrak{X}(V)$ に対して、

$$\nabla_X T = \nu SX, \quad d\nu(X) = -\langle SX, T\rangle$$

である. (S: 形作用素)

Proof

$\bar{\nabla}_X\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = 0$ に $T = \frac{\partial}{\partial t} - \nu N$ を代入すると、

積の ~~合成関数~~ の微分

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_X(T + \nu N) &= \bar{\nabla}_X T + \bar{\nabla}_X(\nu N) \\
&= \nabla_X T + \langle SX, T\rangle N + \underbrace{(d\nu(X))N}_{=(\nabla_X \nu)N} + \nu \bar{\nabla}_X N \\
&= \qquad \shortparallel \qquad + \qquad \shortparallel \qquad + \nu\Big(\underbrace{\nabla_X N}_{=-SX} + \underbrace{\langle SX, N\rangle}_{=0} N\Big) \quad (\in T_p(V),\ \in T_p^{\perp}(V)) \\
&= \nabla_X T + \langle SX, T\rangle N + (d\nu(X))N - \nu SX \quad \cdots ①
\end{aligned}$$

接成分と法成分は一次独立であるため、①の接成分と法成分を考えると、

(tan:) ~~tan~~ $(\nabla_X T - \nu SX) = 0$ $\cdots$ ②

(nor:) ~~nor~~ $(\langle SX, T\rangle N + (d\nu(X))N) = 0$ $\cdots$ ③

である. ②. ③より、

$$\nabla_X T = \nu SX, \quad \langle SX, T\rangle \cancel{N} = -(d\nu(X))\cancel{N}$$

が成り立つ ▨

Remark 2.3

正規直交する組 (X, Y) について、次が成り立つ:

$$\langle \bar{R}_{XY}(X), Y\rangle = \kappa\left(1 - \langle Y, T\rangle^2 - \langle X, T\rangle^2\right)$$

(文献[AR03]の3.2節参照)

$$\bullet\ \langle \bar{R}_{XY}(\underset{X}{Z}), \underset{Y}{W}\rangle = k\Big(\langle X, \overset{X}{\cancel{Z}}\rangle\langle Y, \overset{Y}{\cancel{W}}\rangle - \langle Y, \overset{X}{\cancel{Z}}\rangle\langle X, \overset{Y}{W}\rangle$$

$$- \langle Y, T\rangle\langle \overset{Y}{\cancel{W}}, T\rangle\langle X, \overset{X}{\cancel{Z}}\rangle - \langle X, T\rangle\langle \overset{X}{\cancel{Z}}, T\rangle\langle Y, \overset{Y}{\cancel{W}}\rangle$$

$$+ \langle X, T\rangle\langle \underset{Y}{\cancel{W}}, T\rangle\langle Y, \underset{X}{\cancel{Z}}\rangle + \langle Y, T\rangle\langle Z, T\rangle\langle X, \underset{Y}{\cancel{W}}\rangle\Big)$$

$$= k\Big(1 - 0$$

$$- \langle Y, T\rangle\langle Y, T\rangle - \langle X, T\rangle\langle X, T\rangle$$

$$+ 0 + 0 \Big)$$

$$= k\left(1 - \langle Y, T\rangle^2 - \langle X, T\rangle^2\right)$$

2.2 動標構 (Moving frames)

V: n次元のリーマン多様体
∇: Vのレビチビタ接続
R: Vのリーマン曲率テンソル
S: 対称作用素 $S_g: T_g(V) \longrightarrow T_g(V)$ の場　　とする。

$(e_1, \cdots, e_n)$ を V上の局所正規直交フレームとして、
$(\omega^1, \cdots, \omega^n)$ を $(e_1, \cdots, e_n)$ の双対基底とする。　すなわち、

$$\omega^i(e_k) = \delta^i_k \qquad \omega^{n+1} = 0$$

とする。また、$\omega^{n+1} = 0$ とする。さらに、V上で形式 ω^i_j, ω^{n+1}_j, ω^{n+1}_{n+1} を次のように定義する：

$$\omega^i_j(e_k) := \langle \nabla_{e_k}(e_j), e_i \rangle \quad , \quad \omega^{n+1}_j(e_k) := \langle Se_k, e_j \rangle$$

$$\omega^j_{n+1} = -\omega^{n+1}_j , \quad \omega^{n+1}_{n+1} := 0$$

したがって、次が成り立つ：

$$\nabla_{e_k}(e_j) = \sum_{i=1}^n \omega^i_j(e_k) e_i , \quad Se_k = \sum_{j=1}^n \omega^{n+1}_j(e_k) e_j$$

最後に、$R^i_{klj} := \langle R_{e_k e_l}(e_j), e_i \rangle$ とする。

Proposition 2.4

以下の4つの公式が成り立つ：

(3) $d\omega^i + \sum_{p=1}^n \omega^i_p \wedge \omega^p = 0.$

(4) $\sum_{p=1}^n \omega^{n+1}_p \wedge \omega^p = 0.$

(5) $d\omega^i_j + \sum_{p=1}^n \omega^i_p \wedge \omega^p_j = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left(R^i_{klj} \omega^k \wedge \omega^l \right)$

(6) $d\omega^{n+1}_j + \sum_{p=1}^n \omega^{n+1}_p \wedge \omega^p_j$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left\langle \nabla_{e_k}(Se_l) - \nabla_{e_l}(Se_k) - S[e_k, e_l] , e_j \right\rangle \omega^k \wedge \omega^l$$

Proof　$n=2$の場合を示す

- (3) を示す

$$\sum_{k=1}^{2} \omega^{l}_{k} \wedge \omega^{k} (e_p, e_q) = \sum_{k=1}^{2} \omega^{l}_{k}(e_p)\,\omega^{k}(e_q) - \omega^{l}_{k}(e_q)\,\omega^{k}(e_p) \quad (\because \wedge \text{ の定義})$$

$$= \sum_{k=1}^{2}\Big\{\omega^{l}_{k}(e_p)\underbrace{\omega^{k}(e_q)}_{\delta^{k}_{q}\ (q\text{は}1,2\text{のいずれか})}\Big\} - \sum_{k=1}^{2}\Big\{\omega^{l}_{k}(e_q)\underbrace{\omega^{k}(e_p)}_{\delta^{k}_{p}\ (p\text{は}1,2\text{のいずれか})}\Big\}$$

$$= \omega^{l}_{q}(e_p) - \omega^{l}_{p}(e_q) \cdots ①$$

$$d\omega^{l}(e_p, e_q) = \underbrace{e_p(\overbrace{\omega^{l}(e_q)}^{\delta^{l}_{q}})}_{e_p\text{による微分} = 0} - \underbrace{e_q(\overbrace{\omega^{l}(e_p)}^{\delta^{l}_{p}})}_{e_q\text{による微分} = 0} - \omega^{l}([e_p, e_q])$$

$$= -\omega^{l}([e_p, e_q])$$

$$= -\omega^{l}\left(\nabla_{e_p}(e_q) - \nabla_{e_q}(e_p)\right)$$

$$= -\omega^{l}\left(\sum_{k=1}^{2}\omega^{k}_{q}(e_p)e_k - \sum_{k=1}^{2}\omega^{k}_{p}(e_q)e_k\right)$$

$$= -\sum_{k=1}^{2}\omega^{k}_{q}(e_p)\underbrace{\omega^{l}(e_k)}_{\delta^{l}_{k}} + \sum_{k=1}^{2}\omega^{k}_{p}(e_q)\underbrace{\omega^{l}(e_k)}_{\delta^{l}_{k}}$$

$$= -\omega^{l}_{q}(e_p) + \omega^{l}_{p}(e_q) \cdots ②$$

①, ②より, $d\omega^{l} + \sum_{p=1}^{n}\omega^{l}_{p} \wedge \omega^{p} = 0$ である ok

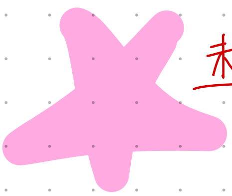
• (4) を示す

$$\sum_{k=1}^{2} \omega^{3}_{k} \wedge \omega^{k} (e_p, e_q) = \sum_{k=1}^{2}\Big(\omega^{3}_{k}(e_p)\underbrace{\omega^{k}(e_q)}_{\delta^{k}_{q}}\Big) - \sum_{k=1}^{2}\Big(\omega^{3}_{k}(e_q)\underbrace{\omega^{k}(e_p)}_{\delta^{k}_{p}}\Big)$$

$$= \omega^{3}_{q}(e_p) - \omega^{3}_{p}(e_q)$$

$$= \underbrace{\langle Se_p, e_q\rangle}_{\langle Se_q, e_p\rangle} - \langle Se_q, e_p\rangle$$

$$= 0.$$ ok



- (5)
- (6)

未着手

2.3 $S^n\times R$ および $H^n\times R$ の超曲面のいくつかの事実

$M^n\times R$ 内の向き付け可能な超曲面 V について考える。
($M^n = S^n$ または H^n とする)

- L^p を p 次元ローレンツ空間とする。つまり、以下の2次形式を備えた R^p を考える：

$$-(dx^0)^2+(dx^1)^2+\cdots+(dx^{p-1})^2$$

S^n について次のような包含関係を使用する：

$$S^n=\left\{(x^0,\cdots,x^n)\in R^{n+1} \;\middle|\; (x^0)^2+\sum_{i=1}^n (x^i)^2 = 1\right\}$$

したがって、$S^n\times R \subset R^{n+1}\times R = R^{n+2}$ である。

H^n についても次の包含関係を使用する：

$$H^n = \left\{(x^0,\cdots,x^n)\in L^{n+1} \;\middle|\; -(x^0)^2+\sum_{i=1}^n (x^i)^2 = -1,\ x^0>0\right\}$$

したがって、$H^n\times R\subset L^{n+1}\times R = L^{n+2}$ である。

- 曲率 k と接続を次のように定義する：
  - $S^n\times R$ の場合、$k=1$ および $E^{n+2}:=R^{n+2}$ とする。
  - $H^n\times R$ の場合、$k=-1$ および $E^{n+2}:=L^{n+2}$ とする。
  - ∇ : V 上の接続
  - $\overline{\nabla}$: $M^n\times R$ 上の接続
  - $\overline{\overline{\nabla}}$: E^{n+2} 上の接続

点 $x\in M^n\times R$ において、E^{n+2} 内の $M^n\times R$ の単位法ベクトル場 $\overline{N}(x)$ を

$$\overline{N}(x) := (x^0,\cdots,x^n,0)$$

と表~~し~~せる。点 $x\in V$ における $M^n\times R$ 内の V の法ベクトル場を $N(x)$ とする。

- $M^n\times R$ の形作用素を $\overline{S}$ として、次のように定義する：

$$\overline{S}X := -k\,d\overline{N}(\cancel{x}) = k\left(-X+\left\langle X,\frac{\partial}{\partial t}\right\rangle\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

$$d\overline{N}(X) = \overline{\overline{\nabla}}_X(\overline{N})$$

(示したい：$d\overline{N}(x) = \underbrace{X-\left\langle X,\frac{\partial}{\partial t}\right\rangle\frac{\partial}{\partial t}}_{= X_{M^n}}$)

$$\cancel{= \overline{\nabla}_X(\overline{N}) + \langle \overline{S}X, \overline{N}\rangle \overline{N}}$$ 写真

接続を次のように選択する：

$$\overline{\overline{\nabla}}_X Y = \overline{\nabla}_X Y + \langle \overline{S}X, Y\rangle \overline{N}$$

つまり、$\langle \overline{S}X,Y\rangle = k\left\langle \overline{\overline{\nabla}}_X Y, \overline{N}\right\rangle$ である。

$S^n \times \mathbb{R}$ の場合、$\langle \overline{N}, \overline{N} \rangle = 1$ が成り立ち、$H^n \times \mathbb{R}$ の場合 $\langle \overline{N}, \overline{N} \rangle = -1$ が成り立つ。

- $(e_1, \cdots, e_n)$ を V 上の局所正規直交フレームとして、
  $e_{n+1} = N$、$e_0 = \overline{N}$ と定義する。また、2.2 節と同様に
  ω^i_j、ω^{n+1}_j、ω^i_{n+1}、ω^{n+1}_{n+1} を定義する。さらに、次のように ω^0_r を設定する：

$$\omega^0_r(e_k) := \langle \overline{S} e_k, e_r \rangle = -k \langle e_k, e_r \rangle + k \left\langle e_k, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \left\langle e_r, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle$$
$$\omega^r_0 := -k\, \omega^0_r$$

$$\overline{\overline{\nabla}}_{e_k} e_\beta = a^0 e_0 + \cdots + a^{n+1} e_{n+1}$$

両辺に e_0 を内積

$$\langle \overline{\overline{\nabla}}_{e_k} e_\beta, e_0 \rangle = a_0 \langle \overline{N}, \overline{N} \rangle = a_0 k.$$

これらの定義を用いると、$\overline{\overline{\nabla}}_{e_k} e_\beta$ は

$$\overline{\overline{\nabla}}_{e_k} e_\beta = \sum_{\alpha=0}^{n+1} \omega^\alpha_\beta(e_k)\, e_\alpha$$

と表される。

$(\nabla_{e_k}(e_j)$ の定義より$)$

$$\overset{\shortparallel}{\sum_{i=1}^{n}} \omega^i_j(e_k)\, e_i$$

- $(E_0, \cdots, E_{n+1})$ を $\mathbb{E}^{n+2}$ の $\overset{\text{canonical}}{\text{標準的}}$ なフレームとし、$\langle E_0, E_0 \rangle = k$、$E_{n+1} = \frac{\partial}{\partial t}$ とする。

  $A \in M_{n+2}(\mathbb{R})$ を、フレーム (E_α) における e_β の座標を列ベクトルとする行列とする。
  つまり：

$$e_\beta = \sum_{\alpha=0}^{n+1} A^\alpha_\beta E_\alpha$$

である。よって、$\overline{\overline{\nabla}}_{e_k}(e_\beta)$ は

$$\overline{\overline{\nabla}}_{e_k}(e_\beta) = \sum_{\alpha=0}^{n+1} dA^\alpha_\beta(e_k) E_\alpha \quad \cdots (*)$$

であり、一方で次のようにも表される

$$\overline{\overline{\nabla}}_{e_k}(e_\beta) = \sum_{\alpha, r=0}^{n+1} \omega^r_\beta(e_k) A^\alpha_r E_\alpha \quad \cdots (**)$$

したがって、$A^{-1} dA = \Omega = \omega^\alpha_\beta \in M_{n+2}(\mathbb{R})$ が得られる。

$(*)$

$$\overline{\overline{\nabla}}_{e_k}(e_\beta) = \overline{\overline{\nabla}}_{e_k}\left(\sum_{\alpha=0}^{3} A^\alpha_\beta E_\alpha\right)$$
$$= \sum_{\alpha=0}^{3} \Big(e_k(A^\alpha_\beta) E_\alpha + A^\alpha_\beta \underbrace{\overline{\overline{\nabla}}_{e_k} E_\alpha}_{\overset{\shortparallel}{0?}}\Big)$$
$$= \sum_{\alpha=0}^{3} dA^\alpha_\beta(e_k) E_\alpha$$

$(**)$

$$\overline{\overline{\nabla}}_{e_k}(e_\beta) =$$

- 対角行列 $G = (k, 1, \cdots, 1) \in M_{n+2}(\mathbb{R})$ を設定すると、次が成り立つ：

$$A \in SO^+(\mathbb{E}^{n+2}), \quad \Omega \in \mathfrak{so}(\mathbb{E}^{n+2})$$

ここで、$SO^+(\mathbb{E}^{n+2}) := \{ Z \in M_{n+2}(\mathbb{R}) \mid {}^tZGZ, \ \det Z = 1 \}$ を満たす I_{n+2} における連結成分。
また、$\mathfrak{so}(\mathbb{E}^{n+2}) := \{ H \in M_{n+2}(\mathbb{R}) \mid {}^tHG + GH = 0 \}$

$S^n \times \mathbb{R}$ の場合、$SO^+(\mathbb{E}^{n+2}) = SO(\mathbb{R}^{n+2})$ である。

$$\langle \bar{\bar{\nabla}}_{e_k} e_\beta , e_0 \rangle = a_0 \langle \bar{N}, \bar{N} \rangle = a_0 K.$$

$$\bar{\bar{\nabla}}_X Y = \bar{\nabla}_X Y + \langle \bar{S}X, Y \rangle \bar{N}$$

$$= \langle \bar{\nabla}_{e_k} e_\beta + \langle \bar{S}e_k, e_\beta \rangle \bar{N}, \underset{\overset{\shortparallel}{\bar{N}}}{e_0} \rangle$$

$$= \langle \underbrace{\bar{\nabla}_{e_k} e_\beta}_{M^n \times R \text{に接している.}}, \underset{\bar{N}}{\cancel{e_0}} \rangle + \langle \bar{S}e_k, e_\beta \rangle \underbrace{\langle \bar{N}, \bar{N} \rangle}_{K}$$

$$= 0 + K \langle \bar{S}e_k, e_\beta \rangle \quad (= a_0 K)$$

$$\omega^0_r(e_k) := \langle \bar{S}e_k, e_r \rangle$$

$$\therefore a_0 = \omega^0_\beta(e_k)$$

$$a_{\bar{\ell}} = \langle \bar{\nabla}_{e_k} e_\beta, e_{\bar{\ell}} \rangle$$

$$a_{n+1} = \langle \bar{\nabla}_{e_k} e_\beta, N \rangle$$

1, …, n の場合

$$\langle \bar{\bar{\nabla}}_{e_k} e_\beta , e_{\bar{\ell}} \rangle = a_{\bar{\ell}} \underbrace{\langle e_{\bar{\ell}}, e_{\bar{\ell}} \rangle}_{1} = a_{\bar{\ell}}$$

$$= \langle \bar{\nabla}_{e_k} e_\beta + \langle \bar{S}e_k, e_\beta \rangle \bar{N}, e_{\bar{\ell}} \rangle$$

$$= \langle \bar{\nabla}_{e_k} e_\beta, e_{\bar{\ell}} \rangle + \langle \bar{S}e_k, e_\beta \rangle \underbrace{\langle \bar{N}, e_{\bar{\ell}} \rangle}_{0}$$

$$= \langle \bar{\nabla}_{e_k} e_\beta, e_{\bar{\ell}} \rangle$$

$$\langle S e_k, e_j \rangle = \omega^{n+1}_j(e_k)$$

n+1 の場合

$$\langle \bar{\bar{\nabla}}_{e_k} e_\beta , \underset{\overset{\shortparallel}{N}}{e_{n+1}} \rangle = a_{n+1} \langle e_{n+1}, e_{n+1} \rangle = a_{n+1} \underbrace{\langle N, N \rangle}_{1} = a_{n+1}$$

$$= \langle \bar{\nabla}_{e_k} e_\beta + \langle \bar{S}e_k, e_\beta \rangle \bar{N}, e_{n+1} \rangle$$

$$= \langle \bar{\nabla}_{e_k} e_\beta, \underset{N}{e_{n+1}} \rangle + \langle \bar{S}e_k, e_\beta \rangle \overset{0}{\langle \bar{N}, e_{n+1} \rangle}$$

$$= \langle \bar{\nabla}_{e_k} e_\beta, N \rangle \quad (= a_{n+1})$$

3. $S^n\times\mathbb{R}$ または $H^n\times\mathbb{R}$ への等長的はめ込み

Lemma 3.4　3.5
$\downarrow$
Lemma 3.6
$\downarrow$
prop 3.7
$\downarrow$
Theorem 3.4

3.1 整合方程式
compatibility equation

- V：次元 n の単連結リーマン多様体
  - ds^2：V 上の計量（$\langle\cdot,\cdot\rangle$ とも表す）
  - ∇：V 上のリーマン接続（レビチビタ接続）
  - R：V 上のリーマン曲率テンソル
  - S：対称作用素 $S_y : T_yV \longrightarrow T_yV$ の場
  - T：V 上のベクトル場で、$\|T\| \leqq 1$
  - ν：V 上の滑らかな関数で、$\nu^2 \leqq 1$

$\longrightarrow$ 2.1節で定めた $S^n\times\mathbb{R}$ と $H^n\times\mathbb{R}$ 内の超曲面の整合方程式により、次の定義を導入する。

Definition 3.1

組 (ds^2, S, T, ν) が $S^n\times\mathbb{R}$ および $H^n\times\mathbb{R}$ に対する整合方程式をそれぞれ満たす

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ ∘ $\|T\|^2 + \nu^2 = 1$

任意の $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(V)$ に対して、以下4つを満たす：

(7) ∘ $$R_{XY}(Z) = \langle SX, Z\rangle SY - \langle SY, Z\rangle SX + \kappa\big(\langle X, Z\rangle Y - \langle Y, Z\rangle X - \langle Y, T\rangle\langle X, Z\rangle T - \langle X, T\rangle\langle Z, T\rangle Y + \langle X, T\rangle\langle Y, Z\rangle T + \langle Y, T\rangle\langle Z, T\rangle X\big)$$

(8) ∘ $$\nabla_X(SY) - \nabla_Y(SX) - S[X, Y] = \kappa\nu\big(\langle Y, T\rangle X - \langle X, T\rangle Y\big)$$

(9) ∘ $$\nabla_X T = \nu SX$$

(10) ∘ $$d\nu(X) = -\langle SX, T\rangle$$

（$\kappa = 1$ は $S^n\times\mathbb{R}$ に、$\kappa = -1$ は $H^n\times\mathbb{R}$ に対応する）

Remark 3.2

式 $\nabla_X T = \nu SX$ は、$\langle T, T\rangle + \nu^2 = 1$ を X に関して微分することで、$\nu = 0$ の場合を除き、$d\nu(X) = -\langle SX, T\rangle$ を含むことが分かる。

∵ $\langle T, T\rangle + \nu^2 = 1$ を微分する。

$$\langle \nabla_X T, T\rangle + \langle T, \nabla_X T\rangle + \nabla_X(\nu^2) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \cancel{2}\langle \nabla_X T, T\rangle + \cancel{2}\nu\, d\nu(X) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \langle \nu SX, T\rangle + \nu\, d\nu(X) = 0$$

∵ $\nu \neq 0$ より

$$\Longleftrightarrow d\nu(X) = -\langle SX, T\rangle$$

3.2 $S^n \times \mathbb{R}$ および $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ への 余次元1の等長はめ込み

このセクションで、定理3.3 を示す

Theorem (再掲)

仮定

V を n次元の単連結なリーマン多様体とし、ds^2 を V の計量として、さらに ∇ を V のリーマン接続(レビチビタ接続)とする。S を対称作用素 $S_y : T_yV \to T_yV$ の 場 (field) として、T を V 上のベクトル場とし、ν を $\|T\|^2 + \nu^2 = 1$ を満たすような V 上の滑らかな関数とする。

$M^n = S^n$ または $M^n = \mathbb{H}^n$ とする. 組 (ds^2, S, T, ν) が $M^n \times \mathbb{R}$ に対するガウス方程式とコダッチ方程式を満たし、さらに以下2つの方程式を満たしていると仮定する:

$$\nabla_X T = \nu SX \qquad d\nu(X) = -\langle SX, T \rangle$$

このとき、$f : V \longrightarrow M^n \times \mathbb{R}$ という等長的はめ込みが存在し、f に関する法ベクトル N と対応する形作用素が次を満たす:

$$df \circ S \circ df^{-1} \qquad \frac{\partial}{\partial t} = df(T) + \nu N$$

加えて、このはめ込みは $M^n \times \mathbb{R}$ の大域的な M^n と $\mathbb{R}$ の向きを保つ等長変換を除いて一意である。

- この定理を示すために、V 上の局所正規直交フレーム $(e_1, \cdots, e_n)$ を考え、2.2節のように形式 ω^i、ω^{n+1}、ω^i_j、ω^i_{n+1}、ω^{n+1}_{n+1} を設定する。

$$\omega^i(e_k) = \delta^i_k,\ \omega^i_j(e_k) := \langle \nabla_{e_k}(e_j), e_i \rangle,\ \omega^{n+1}_j(e_k) := \langle Se_k, e_j \rangle$$

$$\omega^j_{n+1} = -\omega^{n+1}_j, \qquad \omega^{n+1}_{n+1} := 0$$

さらに、M^n に応じて $\mathbb{E}^{n+2}$ を $\mathbb{E}^{n+2} = \mathbb{R}^{n+2}$ または $\mathbb{E}^{n+2} = \mathbb{L}^{n+2}$ と設定する。

$(E_0, \cdots, E_{n+1})$ を $\mathbb{E}^{n+2}$ の 標準的 (canonical) フレーム ($\mathbb{L}^{n+2}$ の場合、$\langle E_0, E_0 \rangle = -1$) とすると、$E_{n+1} = \frac{\partial}{\partial t}$ となる。

加えて、ベクトル場 T を次のように設定する:

$$T^k := \langle T, e_k \rangle,\quad T^{n+1} := \nu,\quad T^0 := 0.$$

- 先ほど定義したTを用いて、さらに次の設定を行う：

$$\omega^0_j(e_k) := k(T^jT^k - \delta^k_j)、\qquad \omega^0_{n+1}(e_k) := k\nu T^k、$$
$$\omega^i_0 = -k\,\omega^0_i、\quad \omega^{n+1}_0 = -k\,\omega^0_{n+1}、\quad \omega^0_0 = 0$$

V上で1次微分形式ηを、$\eta(X) := \langle T, X\rangle$と定義する。フレーム$(e_1, \cdots, e_n)$では、$\eta = \sum_{k=1}^{n} T^k \omega^k$となる。

最後に、1次微分形式の行列Ωを、$\Omega := (\omega^\alpha_\beta) \in M_{n+2}(\mathbb{R})$とする。

- これ以降、定理3.3の仮定が成り立つとする。
初めに、整合方程式から導かれるいくつかの補題(3.4、3.5、3.6)を示す。

Lemma 3.4

$d\eta = 0$である。(η：V上の1次微分形式)

Proof

1次微分形式の定義より、ベクトル場$X、Y \in \mathfrak{X}(V)$に対して

$$\begin{aligned}
d\eta(X,Y) &= X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X,Y]) \qquad \eta(X) = \langle T, X\rangle \text{ 代入.}\\
&= X\langle T,Y\rangle - Y\langle T,X\rangle - \langle T,[X,Y]\rangle\\
&= \langle \nabla_X T, Y\rangle + \cancel{\langle T, \nabla_X Y\rangle} - \left(\langle \nabla_Y T, X\rangle + \cancel{\langle T, \nabla_Y X\rangle}\right)\\
&\quad - \left(\cancel{\langle T, \nabla_X Y\rangle} - \cancel{\langle T, \nabla_Y X\rangle}\right)\\
&= \langle \nabla_X T, Y\rangle - \langle \nabla_Y T, X\rangle \qquad \text{Def 3.1 } \nabla_X T = \nu SX \text{ 代入.}\\
&= \langle \nu SX, Y\rangle - \langle \nu SY, X\rangle\\
&= \nu\left(\underbrace{\langle SX,Y\rangle}_{\langle SY,X\rangle \text{ (自己随伴性)}} - \langle SY,X\rangle\right)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

任意のX、Yに対して成り立つため、$d\eta = 0$である ■

Lemma 3.5

$dT^\alpha = \sum_{r=0}^{n+1} T^r \omega_\alpha^r$ である.

Proof $n=2$ の場合を示す

$\alpha = 0$、$i(=1,2)$、3 の場合で分けて示す.

(i) $\alpha = 0$ の場合

$$(\text{左辺}) = dT^0 = 0.$$

$$(\text{右辺}) = \underset{0}{T^0}\omega_0^0 + T^1\omega_0^1 + T^2\omega_0^2 + T^3\omega_0^3$$

$\because \omega_0^i = -k\,\omega_i^0$、 $\omega_0^{n+1} = -k\,\omega_{n+1}^0$、

$$= -k\left(T^1\omega_1^0 + T^2\omega_2^0 + T^3\omega_3^0\right)$$

ω に任意の基底 e_k を適用させる

$$= -k\left\{T^1 \underline{k}(T^1T^k - \delta_1^k) + T^2\underline{k}(T^2T^k - \delta_2^k) + \nu^2 \underline{k}\, T^k\right\} \cdots ①$$

簡単のために※$k=1$ ($T^k = T^1$、$\delta_1^k = 1$、$\delta_2^k = 0$) とすると、

$$(①の右辺) = -k^2T^1\left\{(T^1)^2 - 1 + (T^2)^2 + \nu^2\right\}$$

$\|T\|^2 + \nu^2 = 1 \iff (T^1)^2 + (T^2)^2 + \nu^2 = 1$ 代入

$$= -k^2T^1(1-1) = 0.$$

※($k=2$の場合でも同様である)

左辺と右辺が一致する.

(ii) $\alpha = i$ $(=1,2)$ の場合

$$(\text{左辺}) = dT^i = d\langle T, e_i\rangle = \langle dT, e_i\rangle + \langle T, de_i\rangle$$

$\forall X \in \mathfrak{X}(V)$ に対して、$dT(X) = \nabla_X T = \nu SX$ 代入

$$= \underline{\langle \nu SX, e_i\rangle} + \langle T, de_i\rangle \cdots ②$$

$de_i(X) = \nabla_X e_i$

$$(\text{右辺}) = \sum_{r=0}^{3} T^r\omega_i^r = \underset{0}{T^0}\omega_i^0 + T^1\omega_i^1 + T^2\omega_i^2 + T^3\omega_i^3$$

$T^k = \langle T, e_k\rangle$、$\forall X \in \mathfrak{X}(V)$ に対して、$\omega_j^i(X) = \langle \nabla_X e_j, e_i\rangle$ 代入.

$$= \langle T, e_1\rangle\langle \nabla_X e_i, e_1\rangle + \langle T, e_2\rangle\langle \nabla_X e_i, e_2\rangle + \nu\underline{\langle SX, e_i\rangle} \cdots ③$$

②の右辺第2項について、$\nabla_X(e_j) = \sum_{i=1}^{2} \omega_j^i(X) e_i$ より、

$$\langle T, \nabla_X e_i \rangle = \left\langle T, \sum_{k=1}^{2} \omega_i^k(X) e_k \right\rangle$$
$$= \sum_{k=1}^{2} \omega_i^k(X) \langle T, e_k \rangle$$
$$= \sum_{k=1}^{2} T^k \omega_i^k(X) = T^1\omega_i^1(X) + T^2\omega_i^2(X).$$

$$\therefore (②の右辺) = \langle T, e_1\rangle\langle \nabla_X e_i, e_1\rangle + \langle T_2, e_2\rangle\langle \nabla_X e_i, e_2\rangle + \langle \nu SX, e_i\rangle$$
$$= (②の左辺).$$

左辺と右辺が一致する。

(iii) $\alpha = 3$ の場合

$$(左辺) = dT^3$$
$$= d\nu \quad ⤵ 任意のX\in\mathfrak{X}(V)に対して、d\nu(X) = -\langle SX, T\rangle 代入$$
$$= -\langle SX, T\rangle \cdots ④$$

$$(右辺) = \sum_{r=0}^{3} T^r \omega_3^r$$
$$= \underbrace{T^0}_{0}\omega_3^0 + T^1\omega_3^1 + T^2\omega_3^2 + T^3\underbrace{\omega_3^3}_{0} \quad ⤵ \omega_{n+1}^j = -\omega_j^{n+1} 代入$$
$$= T^1(-\omega_1^3) + T^2(-\omega_2^3) \quad ⤵ 任意のX\in\mathfrak{X}(V)に対して、\omega_j^{n+1}(X) = \langle SX, e_j\rangle 代入.$$
$$= T^1(-\langle SX, e_1\rangle) + T^2(-\langle SX, e_2\rangle)$$
$$= -\langle T, e_1\rangle\langle SX, e_1\rangle - \langle T, e_2\rangle\langle SX, e_2\rangle$$

$T = \langle T, e_1\rangle e_1 + \langle T_2, e_2\rangle e_2$ であるため、④に代入すると、

$$(左辺) = -\langle SX, \langle T, e_1\rangle e_1 + \langle T, e_2\rangle e_2\rangle$$
$$= -\left(\langle SX, \langle T, e_1\rangle e_1\rangle + \langle SX, \langle T, e_2\rangle e_2\rangle\right)$$
$$= -\langle T, e_1\rangle\langle SX, e_1\rangle - \langle T, e_2\rangle\langle SX, e_2\rangle$$
$$= (右辺).$$

以上より、$\alpha = 0, i, 3$ の場合で $dT^\alpha = \sum_{r=0}^{n+1} T^r \omega_\alpha^r$ を示した ▨

Lemma 3.6

未着手

$d\Omega + \Omega\wedge\Omega = 0$ である。 $\left(\Omega = (\omega)^\alpha_\beta \in M_{n+2}(\mathbb{R})\right)$

Proof $n=2$ の場合を示す

$\Psi := d\Omega + \Omega\wedge\Omega$、 $R^i_{klj} = \langle R_{e_k e_l}(e_j), e_i\rangle$ とおく。 Proposition 2.4 より、

$$\Psi^i_j = -\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{2}\left(R^i_{klj}\,\omega^k\wedge\omega^l + \omega^i_3\wedge\omega^3_j + \omega^i_0\wedge\omega^0_j\right).$$

ガウス方程式(7)が満たされるため、R^i_{klj} について以下が成り立つ：

$$R^i_{klj} = \overline{R}^i_{klj} + \omega^{n+1}_j\wedge\omega^{n+1}_i(e_k, e_l)$$

ただし、$\overline{R}^i_{klj} = k\left(\delta^k_j\delta^l_i - \delta^l_j\delta^k_i - T^lT^i\delta^k_j - T^kT^j\delta^l_i + T^kT^i\delta^l_j + T^lT^j\delta^k_i\right)$ である。

一方、計算により $\omega^i_0\wedge\omega^0_j(e_k, e_l) = \overline{R}^i_{klj}$ が分かる。 よって、
$R^i_{klj} = \omega^i_{n+1}\wedge\omega^{n+1}_j(e_k, e_l) + \omega^i_0\wedge\omega^0_j(e_k, e_l)$ であるため、$\Psi^i_j = 0$ である。

Ψ^{n+1}_j について考える。Proposition 2.4 より、

$$\Psi^3_j = \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{2}\langle\nabla_{e_k}S(e_l) - \nabla_{e_l}S(e_k) - S[e_k, e_l], e_j\rangle\,\omega^k\wedge\omega^l + \omega^3_0\wedge\omega^0_j.$$

コダッチ方程式(8)が満たされるため、次の等式が得られる：

$$\langle\nabla_{e_k}S(e_l) - \nabla_{e_l}S(e_k) - S[e_k, e_l], e_j\rangle = k\left(T^lT^3\delta^k_j - T^kT^3\delta^l_j\right)$$

一方、計算により $\omega^3_0\wedge\omega^0_j(e_k, e_l) = k\left(T^kT^3\delta^l_j - T^lT^3\delta^k_j\right)$ である事から、
$\Psi^3_j = 0$ である。

$\omega^0_j(e_k) := k\left(T^jT^k - \delta^k_j\right)$ および $T^k = \langle T, e_k\rangle$、$\delta^k_j = \omega^k(e_j)$ より、
$\omega^0_j = k\left(T^j\eta - \omega^j\right)$ である。さらに Lemma 3.4 より $d\eta = 0$ であるため、以下が得られる：

$$d\omega^0_j = k\left(dT^j\wedge\eta - d\omega^j\right) = k\,dT^j\wedge\eta + k\sum_{k=1}^{2}\omega^j_k\wedge\omega^k \quad (\text{prop 2.4 より})$$

よって、直接計算により、$\Psi^0_j(e_p, e_q)$ は次のように得られる：

$$\begin{aligned}
\Psi^0_j(e_p, e_q) &= d\omega^0_j(e_p, e_q) + \sum_{k=1}^{2}\omega^0_k\wedge\omega^k_j(e_p, e_q) + \omega^0_3\wedge\omega^3_j(e_p, e_q)\\
&= k\left(dT^j(e_p)\eta(e_q) - dT^j(e_q)\eta(e_p) - \omega^j_p(e_q)\right)\\
&\quad + k\left(T^p\sum_{k=1}^{2}T^k\omega^k_j(e_q) - T^q\sum_{k=1}^{2}T^k\omega^k_j(e_p) - \omega^p_j(e_q) + \omega^q_j(e_p)\right)\\
&\quad + k\left(T^pT^3\omega^3_j(e_q) - T^qT^3\omega^3_j(e_p)\right).
\end{aligned}$$

1次微分形式 η の定義と Lemma 3.5 ($\alpha=j$ の場合) を用いることで、$\hat{\Psi}^{n+2}_{j}=0$ が分かる。

$\omega^0_3=kT^3\eta$、$d\omega^0_3=k\,dT^3\wedge\eta$ が、Lemma 3.4 より分かる。計算により $\Psi^0_{n+1}(e_p,e_q)$ は、

$$
\begin{aligned}
\Psi^0_3(e_p,e_q) &= d\omega^0_3(e_p,e_q)+\sum_{k=1}^{2}\omega^0_k\wedge\omega^k_3(e_p,e_q)\\
&= k\left(T^q dT^3(e_p)-T^p dT^3(e_q)\right)\\
&\quad + \underline{k\left(T^p\sum_{k=1}^{2}T^k\omega^k_3(e_q)-T^q\sum_{k=1}^{2}T^k\omega^k_3(e_p)\right)}\\
&\quad + \underline{k\left(-\omega^p_3(e_q)+\omega^q_3(e_p)\right)}.
\end{aligned}
$$

$\left(dT^3=\sum_{r=0}^{3}T^r\omega^r_3\right)$

最後の2項(—— 部分)は S が対称であるためキャンセルされる。$\alpha=3$ として Lemma 3.5 を用いることで、$\Psi^0_3=0$ が分かる。

$\Psi^0_0=0$ および $\Psi^3_3=0$ は自明である。

$\Psi^i_3=-\Psi^3_i=0$ を示せば良い ▨

• $y \in V$ に対して、行列 $Z \in SO^+(\mathbb{E}^{n+2})$ の集合 $Z(y)$ を、

Z の最終行の成分が $T^\beta(y)$ であるようなもの

と定義する。これは次元 $\frac{n(n+1)}{2}$ の多様体である。

(写像 $F : SO^+(\mathbb{E}^{n+2}) \longrightarrow S(\mathbb{E}^{n+2})$ において、$S(\mathbb{E}^{n+2}) = \left\{ x \in \mathbb{E}^{n+2} \,\middle|\, \langle E, E \rangle = 1 \right\}$ は

$$\begin{array}{ccc} SO^+(\mathbb{E}^{n+2}) & \longrightarrow & S(\mathbb{E}^{n+2}) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ Z & \longmapsto & \underbrace{(Z^{n+1}_{\beta})_{\beta}}_{Z\text{の最終行}} \end{array}$$

沈め込みであるため)