数理科学 や力 火2. (第4回)

- 埋めこまれた曲面
- diffeo と 座標変換
- 曲面と多様体

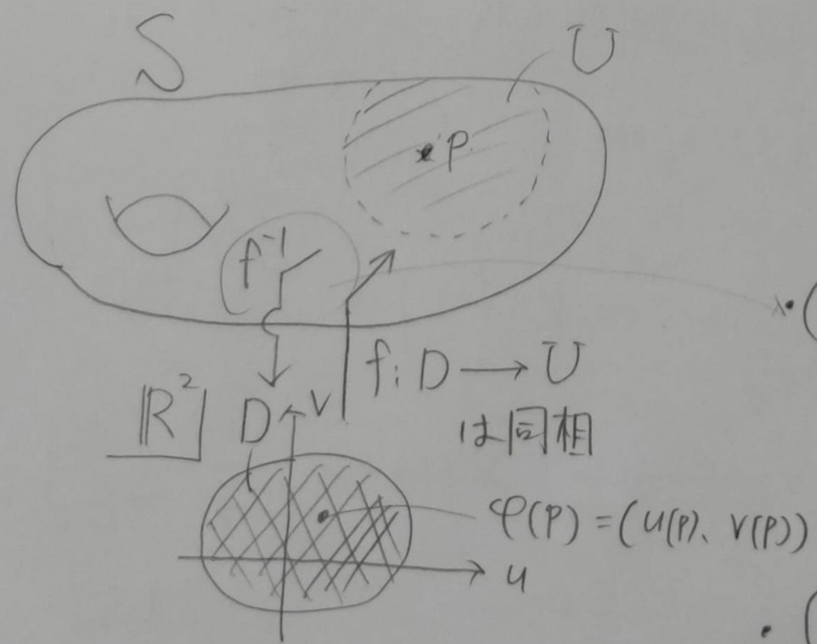
Def 4.1 (曲面)

$S (\subset \mathbb{R}^3)$ が曲面である

$\Longleftrightarrow \forall p \in S$、

- $\exists U$: pの近傍
- $\exists D$: $\mathbb{R}^2$の領域
- $\exists f : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$: パラメタ表示された曲面 $(f_u \times f_v \neq 0)$

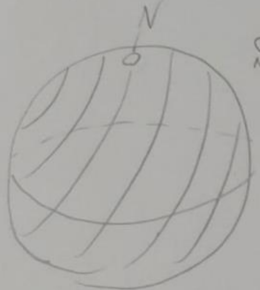
s.t. $f : D \longrightarrow U$ は同相写像.

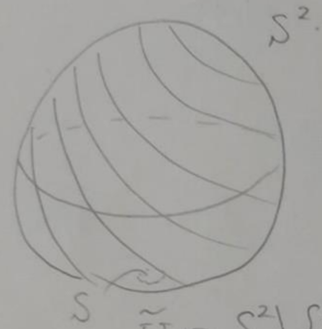


- $(\varphi :=) f^{-1} : U \longrightarrow D$ を、局所座標系という.
- (U, φ) : 座標近傍 という.

Example 4.3

$$S^2=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2=1\right\}$$



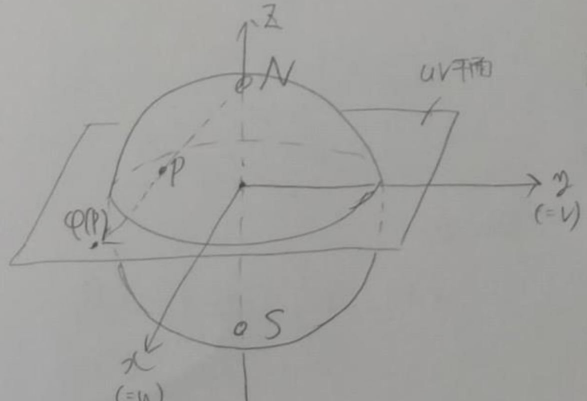


$U:=S^2\setminus\{N\}$ $\quad$ $\tilde{U}:=S^2\setminus\{S\}$.

$$f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3 : \; f(u,v)=\frac{1}{1+u^2+v^2}\begin{pmatrix}2u\\2v\\u^2+v^2-1\end{pmatrix}$$

$$\tilde{f}:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3 : \; \tilde{f}(\xi,\eta)=\frac{1}{1+\xi^2+\eta^2}\begin{pmatrix}2\xi\\2\eta\\1-\xi^2-\eta^2\end{pmatrix}.$$

この時、$\begin{cases} f:\mathbb{R}^2\longrightarrow U : 同相写像 \\ \tilde{f}:\mathbb{R}^2\longrightarrow\tilde{U} : 〃 \end{cases}$ である.



$p=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in S^2\setminus\{N\}$ に対して、

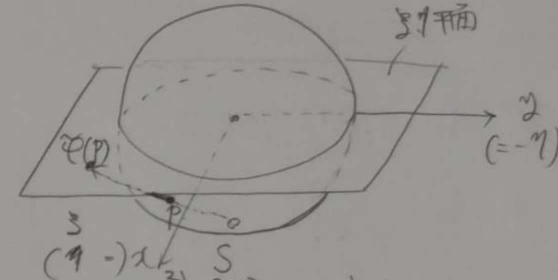
$$\varphi(p)=\frac{1}{1-z}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

と表せる.

$\left(u=\dfrac{x}{1-z},\; v=\dfrac{y}{1-z}\right)$

$\varphi^{-1}(u,v)=f(u,v)$ である.

$\therefore$ S^2 は $\mathbb{R}^3$ の曲面.



$p\in S^2\setminus\{S\}$ に対して.

$$\tilde{\varphi}(p)=\frac{1}{1+z}\begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}$$

また、$\tilde{\varphi}^{-1}(\xi,\eta)=\tilde{f}(\xi,\eta)$ である.

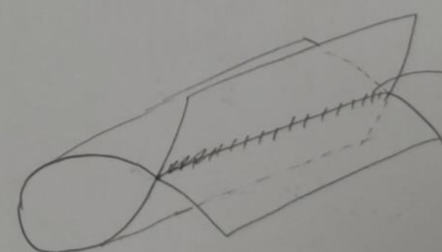
$\varphi: S^2\setminus\{N\}\longrightarrow\mathbb{R}^2$ (北極からの立体射影)

$\tilde{\varphi}: S^2\setminus\{S\}\longrightarrow\mathbb{R}^2$ (南極からの立体射影)

Remark

Def 4.1 の曲面は、「埋め込まれた曲面」とも呼ばれる.

(≒自己交差の無い)



Def 4.4 (diffeo)

$W, \widetilde{W}$: $\mathbb{R}^2$ の領域

$\psi : W \longrightarrow \widetilde{W}$: $\psi(u,v) = (\xi(u,v), \eta(u,v))$

- ξ, η : C^∞ 級関数 $\Longleftrightarrow$ ψ : C^∞ 級写像
- ψ : 全単射, ψ^{-1} : C^∞ $\Longleftrightarrow$ ψ : 微分同相写像

※ $\forall (u,v) \in W$, $\exists R$: (u,v) の近傍

s.t. $\psi : R \to \psi(R)$ は diffeo

$\Longleftrightarrow$ ψ : 局所微分同相写像 という

local diffeo

Remark

微分同相写像 $\Longleftrightarrow$ 局所微分同相写像 + 全単射

Example

$\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

(1) $\psi(u,v) = (2u, \frac{1}{2}v)$ は diffeo $\left(\psi^{-1}(\xi, \eta) = (\frac{1}{2}\xi, 2\eta) \right)$ C^∞

(2) $\psi(u,v) = (u^3, v)$, $\psi^{-1}(\xi, \eta) = (\xi^{\frac{1}{3}}, \eta)$: C^∞ 級でない

原点で微係数 ∞

$\therefore$ ψ は local diffeo でない (diffeo でもない)

ψ は同相写像

Def (ヤコビアン)

$\psi(u,v) = (\xi(u,v), \eta(u,v))$: C^∞

$J = \dfrac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \xi_u & \xi_v \\ \eta_u & \eta_v \end{pmatrix}$: ヤコビ行列

$\det J = |J|$: ヤコビアン

Proposition 4.7

$\psi : W \longrightarrow \widetilde{W}$: local diffeo

$\Longrightarrow$ $\det J \neq 0$ $(\forall (u,v) \in W)$

$\psi(u,v) = (\xi(u,v), \eta(u,v))$

$\psi^{-1}(\xi, \eta) = (u(\xi,\eta), v(\xi,\eta))$

∵ $\exists \psi^{-1}$: C^∞ 級より,

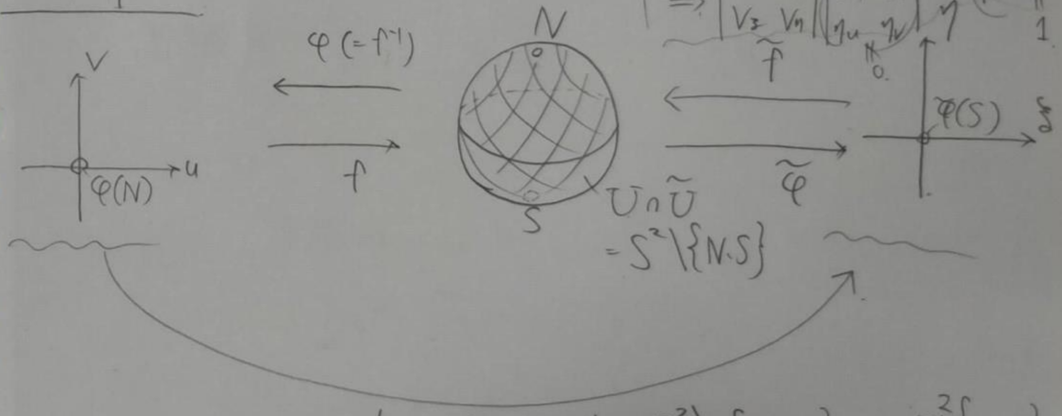
$\boxed{\psi^{-1} \circ \psi(u,v) = (u,v)}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} u(\xi(u,v), \eta(u,v)) = u \\ v(\xi(u,v), \eta(u,v)) = v \end{cases}$

$\partial/\partial u, \partial/\partial v$ 式4本

$\Longrightarrow \underbrace{\begin{vmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{vmatrix}}_{\tilde{f}} \underbrace{\begin{vmatrix} \xi_u & \xi_v \\ \eta_u & \eta_v \end{vmatrix}}_{\neq 0} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{=1}$ より

Example



$\psi := \widetilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$\psi(u,v) = \dfrac{1}{1 + \underbrace{\dfrac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}}_{z}} \left(\underbrace{\dfrac{2u}{u^2+v^2+1}}_{x}, -\underbrace{\dfrac{2v}{u^2+v^2+1}}_{y} \right)$

$$= \left(\frac{u}{u^2+v^2},\ \frac{-v}{u^2+v^2} \right). \longrightarrow C^\infty$$

同様に、$\tilde{\psi} = \varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1} : \tilde{W} \longrightarrow W$ も C^∞ 級であり、

$\psi \circ \tilde{\psi} = \tilde{\psi} \circ \psi = id$ より、ψ：全単射である.

$\therefore \psi : W \longrightarrow \tilde{W}$ は diffeo.

このとき、$|J| = \dfrac{1}{(u^2+v^2)^2} > 0 \quad (\neq 0)$

Remark

$z = u + iv$、$w = \xi + i\eta$ とおく.

$$w = \psi(z) = \frac{u - iv}{u^2+v^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z} \ \text{：正則関数.}$$

Remark

ψ : local diffeo でも、$\det J \neq 0$ は成立.

逆に、次が成立.

Theorem（逆関数定理）

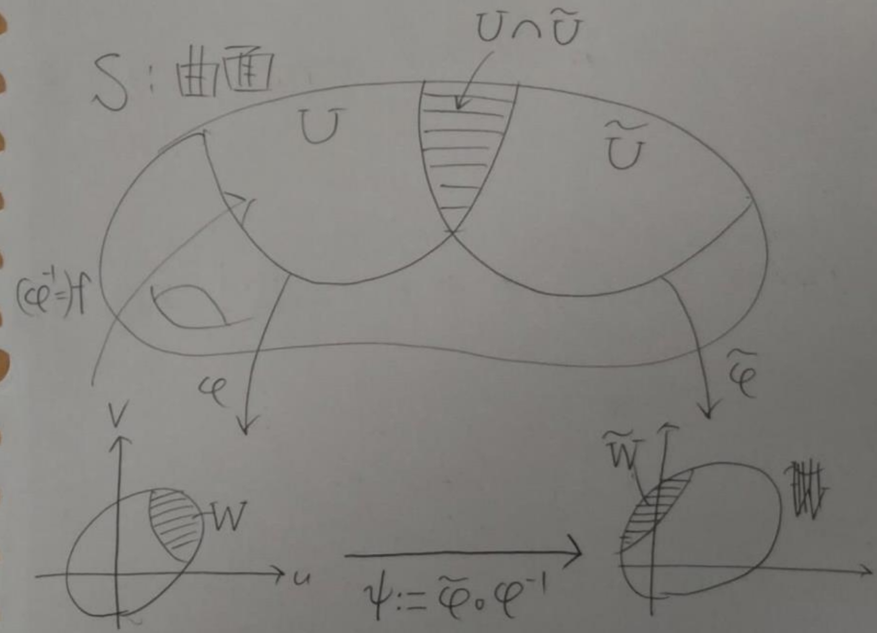
$\psi : W \longrightarrow \tilde{W}$: C^∞ 級

$(u_0, v_0) \in W$ において、$\det J \neq 0$

$\Longrightarrow \exists \tilde{\psi}$: ψ の (u_0, v_0) における C^∞ 級の逆写像.

Corollary

ψ : local diffeo $\Longleftrightarrow \det J \neq 0$



$\boxed{\psi : W \longrightarrow \tilde{W} \text{ は 同相写像}}$

↳ 座標変換 という.

Theorem

座標変換は、微分同相写像である.

Proof ψ が C^∞ 級である事を示せば良い.

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$$ とする.

$$(0 \neq)\ f_u \times f_v = \begin{pmatrix} y_u z_v - y_v z_u \\ z_u x_v - z_v x_u \\ x_u y_v - x_v y_u \end{pmatrix}$$

(i) $y_u z_v - y_v z_u \neq 0$ のとき

(ii) $z_u x_v - z_v x_u \neq 0$ のとき

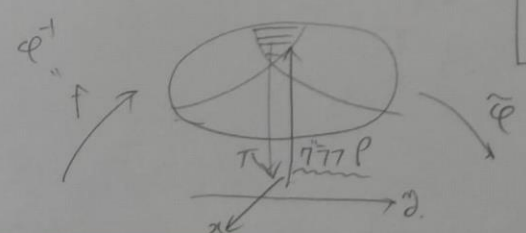
(iii) $x_u y_v - x_v y_u \neq 0$ のとき

((iii) のみ考える)

$\psi(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ のヤコビアン $|J| = x_u y_v - x_v y_u \neq 0$.

$\therefore \exists \psi^{-1}(x,y)$: C^∞ 級 $= (u(x,y), v(x,y))$.

このとき、$f \circ \psi^{-1}(x,y) = \begin{bmatrix} x(u(x,y), v(x,y)) \\ y(u(x,y), v(x,y)) \\ z(u(x,y), v(x,y)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{bmatrix}$



$$\psi = \cancel{\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}} = \underbrace{\tilde{\varphi} \circ \rho \circ \pi \circ f}_{C^\infty}$$

Def 4.14

Σ : 位相空間

Σ は ハウスドルフ かつ 第二可算公理 を 満たすとする.

このとき、Σ が 2次元 C^∞ 級多様体 である

$\Longleftrightarrow$
(1) $\forall p \in \Sigma$, $\exists U$: p の近傍, $\exists \varphi : U \to R^2$ s.t. $\varphi : U \to \varphi(U)$: 同相写像

(2) $\forall (U, \varphi), (\tilde{U}, \tilde{\varphi})$: 座標近傍, $U \cap \tilde{U} \neq \phi$ $\Longrightarrow \psi := \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ は diffeo

Theorem 4.15

R^3 の曲面 (S) は 2次元 C^∞ 級 mfd.

proof

S が ハウスドルフ、第二可算公理 を 満たすことを示す

ハウスドルフ
$\Updownarrow$
$\forall p, q \in S$ $(p \neq q)$
$\exists U, \tilde{U}$ s.t.
$p \in U$, $q \in \tilde{U}$, $U \cap \tilde{U} \neq \phi$

- R^3 は ハウスドルフ (第二可算公理)
- S は 相対位相

$\Longrightarrow$ S : ハウスドルフ (第二可算公理)