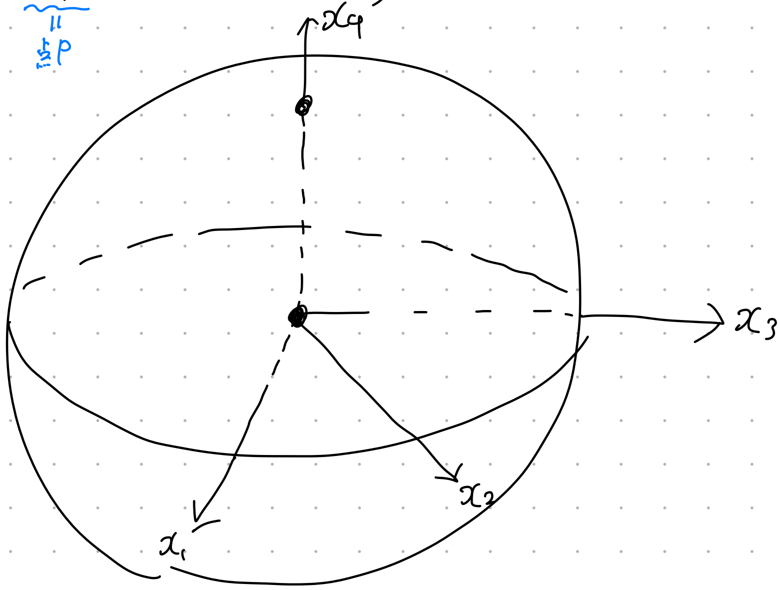
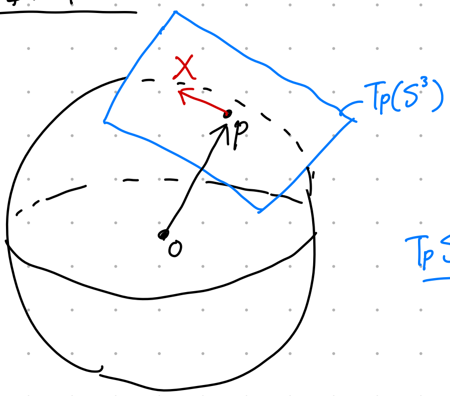
#8

- S^3 の ベクトル場
  曲面
- 外的曲率
  平均曲率
  ガウス 〃

- $S^3 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}}_{\text{点}p} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \|p\|^2 = 1 \right\}$



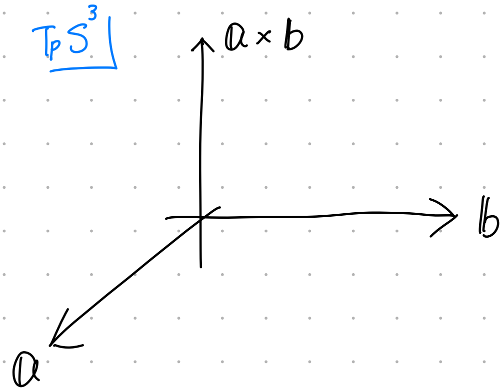
接空間



$T_pS^3 = \{ X \in \mathbb{R}^4 \mid p \cdot X = 0 \}$

→ 3次元ベクトル空間

T_pS^3



$a, b \in T_pS^3$ に対して ベクトル積 $a \times_p b$ を定義する.

• $\mathbb{a} \times_p \mathbb{b}$ 3×3 行列式

$$
= \begin{bmatrix}
-\begin{vmatrix} p_2 & a_2 & b_2 \\ p_3 & a_3 & b_3 \\ p_4 & a_4 & b_4 \end{vmatrix} \\[2mm]
+\begin{vmatrix} p_1 & a_1 & b_1 \\ p_3 & a_3 & b_3 \\ p_4 & a_4 & b_4 \end{vmatrix} \\[2mm]
-\begin{vmatrix} p_1 & a_1 & b_1 \\ p_2 & a_2 & b_2 \\ p_4 & a_4 & b_4 \end{vmatrix} \\[2mm]
+\begin{vmatrix} p_1 & a_1 & b_1 \\ p_2 & a_2 & b_2 \\ p_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}
\end{bmatrix}
\begin{array}{l} = X_1 \\[10mm] = X_2 \\[10mm] = X_3 \\[10mm] = X_4 \end{array}
$$

ここで、$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}$. $\mathbb{a}$、$\mathbb{b}$ も同様.

Remark

$\mathbb{R}^{n+1}$ において、$x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ に対して、

$$x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n \in \mathbb{R}^{n+1}$$

を定義できる（一般化ベクトル積）

$$\underbrace{\mathbb{a} \times_p \mathbb{b}}_{\mathbb{S}^3 \text{ のベクトル積}} = \underbrace{p \times \mathbb{a} \times \mathbb{b}}_{\mathbb{R}^4 \text{ の一般化ベク積}}$$

Proposition

$p \in \mathbb{S}^3$、$\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c} \in T_p(\mathbb{S}^3)$ に対して、

(1) $(\mathbb{a} \times_p \mathbb{b}) \cdot \mathbb{c} = \det(p, \mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c})$; スカラー三重積公式

(2) $\|\mathbb{a} \times_p \mathbb{b}\| = \sqrt{\|\mathbb{a}\|^2 \|\mathbb{b}\|^2 - (\mathbb{a} \cdot \mathbb{b})^2}$

(1)

$$
(\text{右辺}) = \begin{vmatrix} p_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ p_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ p_3 & a_3 & b_3 & c_3 \\ p_4 & a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}
= (-1)^{1+4} c_1 \left| X_1 \right| + (-1)^{2+4} c_2 \left| X_2 \right| + (-1)^{3+4} c_3 \left| X_3 \right| + (-1)^{4+4} c_4 \left| X_4 \right|
$$

余因子展開

$$= \mathbb{c} \cdot (\mathbb{a} \times_p \mathbb{b}) \quad //$$

Remark

$p, a, b \in \mathbb{R}^4$ に対して

$$\det(p, a, b, *) : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\text{線形関数})$$

が定まる.

$\therefore \det(p, a, b, *) \in (\mathbb{R}^4)^*$ とみなされる.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \xrightarrow[\text{同型}]{\sim} & (\mathbb{R}^4)^* \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ v & \longmapsto & v^* \\ & & (v^*(x) := v \cdot x) \end{array}$$

$$\psi(a \times_p b) = \det(p, a, b, *) \text{ である.}$$

(2) について.

Proposition A.0.2 (付録)

$x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ に対して

$$\| x_1 \times \cdots \times x_n \|^2 = \begin{vmatrix} x_1 \cdot x_1 & \cdots & x_1 \cdot x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n \cdot x_1 & \cdots & x_n \cdot x_n \end{vmatrix}$$

を使うと,

$$\| a \times_p b \|^2 = \| p \times a \times b \|^2 = \begin{vmatrix} \overset{=1}{p \cdot p} & \overset{=0}{p \cdot a} & \overset{=0}{p \cdot b} \\ \underset{=0}{a \cdot p} & a \cdot a & a \cdot b \\ \underset{=0}{b \cdot p} & b \cdot a & b \cdot b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cdot a & b \cdot a \\ a \cdot b & b \cdot b \end{vmatrix}$$

S^3の曲面

Σ：向き付け可能な2次元多様体.

Def

$D \subset \mathbb{R}^2$：領域、f_1, f_2, f_3, f_4：D上のC^∞級関数とするとき、

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^4$$
$$(u, v) \longmapsto \begin{bmatrix} f_1(u,v) \\ f_2(u,v) \\ f_3(u,v) \\ f_4(u,v) \end{bmatrix}$$

により定まる写像 f を、C^∞級写像.

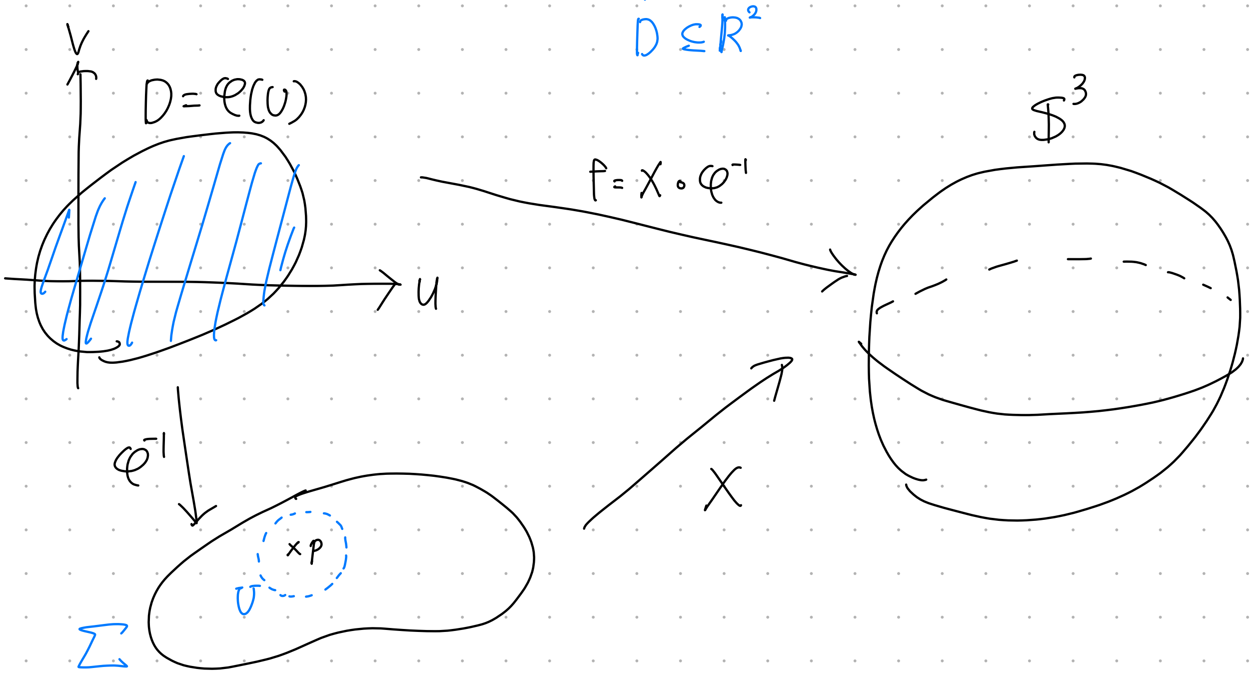
Def

写像 $X : \Sigma \longrightarrow S^3$ に対し

(1) X が $p \in \Sigma$ で C^∞級

$\Longleftrightarrow \exists (U, \varphi)$: p の座標近傍 s.t.

$$f := X \circ \varphi^{-1} : \underset{\substack{\parallel \\ D \subseteq \mathbb{R}^2}}{\underline{\varphi(U)}} \longrightarrow S^3 \subset \mathbb{R}^4$$ がC^∞級写像く



(2) $X : \Sigma \longrightarrow S^3$ が C^∞級写像

$\Longleftrightarrow X$ が Σ の各点で C^∞級

Remark 1.5.2 参照

Remark

(1) の定義は、座標(U, φ) の取り方に依らない。

Def

$X : \Sigma \longrightarrow S^3$ を C^∞級写像とする。

(1) X が はめ込み である

$\Longleftrightarrow f = X \circ \varphi^{-1}$ が「f_u, f_v : 1次独立」をみたす。

(座標のとり方に依らない)

第一基本形式

$dX := f_u du + f_v dv$ とする

(座標のとり方に依らない)

$\mathrm{I} := dX \cdot dX$ を 第一基本形式 という

$$\begin{cases} E = f_u \cdot f_u \\ F = f_u \cdot f_v \\ G = f_v \cdot f_v \end{cases}$$: 第一基本量 ☆

$$\hat{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$: 第一基本行列 ☆

☆ は座標に依存する

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= dX \cdot dX \\ &= (f_u \cdot f_u) du^2 + 2 (f_u \cdot f_v) du dv + (f_v \cdot f_v) dv^2 \\ &= E \, du^2 + 2 F \, du dv + G \, dv^2 \end{aligned}$$

単位法ベクトル場

$$\left((U,\varphi) = (U; u, v) \text{ において } f = X \circ \varphi^{-1} \right)$$

$\nu : \Sigma \longrightarrow S^3$ を

$$\nu := \frac{f_u \times_f f_v}{\| f_u \times_f f_v \|}$$

と定めると、ν は座標によらない

$$\| f_u \times_f f_v \|^2 \overset{\text{ベクトル積の性質(2)}}{=} \| f_u \|^2 \| f_v \|^2 - (f_u \cdot f_v)^2$$

$$= E G - F^2 > 0$$

第二基本形式

$d\nu := \nu_u du + \nu_v dv$ とおく.

(座標 の とり方 に 依らない)

Def

$\mathrm{II} = -d\nu \cdot dX$ を 第二基本形式 という.

$$\begin{cases} L = -\nu_u \cdot f_u \\ M = -\nu_u \cdot f_v \ (= -\nu_v \cdot f_u) \\ N = -\nu_v \cdot f_v \end{cases}$$

を第二基本量* 　$\hat{\mathrm{II}} = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}$: 第二基本行列*

$*$ は座標に依存する.

※ $L = f_{uu} \cdot \nu$

$M = f_{uv} \cdot \nu$

$N = f_{vv} \cdot \nu$ とも 表せる.

Def

$A := \hat{\mathrm{I}}^{-1} \hat{\mathrm{II}}$

$$= \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}$$

: (U, φ) における ワインガルテン行列 という.

座標 の 取り方 に 依存する.

Proposition 2.2.8

A の固有値 λ_1, λ_2 は座標の取り方に依らない

※ $\lambda_1, \lambda_2 : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ を、$X : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ の主曲率という

Lemma 2.2.9

$$\left. \begin{array}{l} p \in \Sigma, \quad (U, \varphi) = (U; u, v) \\ \qquad\quad (\tilde{U}, \tilde{\varphi}) = (\tilde{U}; \xi, \eta) \end{array} \right\} p \text{ の座標近傍とするとき}$$

$\psi = \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ (パラメタ変換) を $\psi(u, v) = \big(\xi(u, v), \eta(u, v)\big)$ と表すとき、

$$\begin{cases} \hat{\mathrm{I}} = J^T \hat{\tilde{\mathrm{I}}} J \\ \hat{\mathrm{II}} = J^T \hat{\tilde{\mathrm{II}}} J \end{cases} \text{ が成立} \quad \left(J = \begin{bmatrix} \xi_u & \xi_v \\ \eta_u & \eta_v \end{bmatrix} \right)$$

Proof

$d\xi = \xi_u du + \xi_v dv$, $d\eta = \eta_u du + \eta_v dv$

$$\mathrm{I} = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2 = \tilde{E}\, d\xi^2 + 2\tilde{F}\, d\xi\, d\eta + \tilde{G}\, d\eta^2$$

プリント P66 参照

Proposition 2.2.8 の Proof

$$A = \hat{\mathrm{I}}^{-1} \hat{\mathrm{II}} = (J^T \hat{\tilde{\mathrm{I}}} J)^{-1} (J^T \hat{\tilde{\mathrm{II}}} J)$$

$$= J^{-1} \hat{\tilde{\mathrm{I}}} (J^T)^{-1} J^T \hat{\tilde{\mathrm{II}}} J = J^{-1} \tilde{A} J$$

$\tilde{A}$ と共役なので固有値同じ。//

Def

曲面 $X:\Sigma \to S^3$ に対して

$$\begin{cases} K_e = \lambda_1\lambda_2 & \text{: 外的曲率} \\ H = \dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2} & \text{: 平均曲率} \end{cases}$$

という。→ 座標の取り方に依らない。

$$K_e = \frac{LN-M^2}{EG-F^2}$$

$$H = \frac{EN+GL-2FM}{2(EG-F^2)}$$

Def

$X:\Sigma \to S^3$: 曲面 に対して

$I = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ とおくとき、

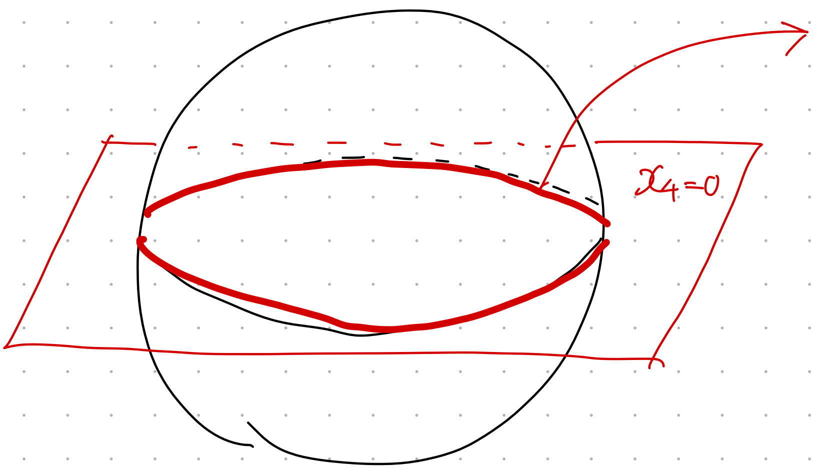
$$K_I = \frac{E(\quad\quad)}{4(EG-F^2)^2} + \underline{\quad\quad} + \underline{\quad\quad} - \underline{\quad\quad}$$

(式 2.2.3)

K_I : ガウス曲率 という。(座標によらない)

※ $\mathbb{R}^3$ の場合、$\overset{\text{外的}}{K_e} = \overset{\text{ガウス}}{K_I}$ だった

Example 大球面



$$\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} \in S^3 \;\middle|\; x_1^2+x_2^2+x_3^2=1 \right\}$$

$$X : S^2 \longrightarrow S^3 \quad \text{と定める.}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(つまり, X は はめ込み)

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{1-x_3}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$; 北極からの立体射影

$$\varphi^{-1}(u, v) = \frac{1}{1+u^2+v^2}\begin{bmatrix} 2u \\ 2v \\ u^2+v^2-1 \end{bmatrix}$$

$$f = X \circ \varphi^{-1} = \frac{1}{1+u^2+v^2}\begin{bmatrix} 2u \\ 2v \\ u^2+v^2-1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

f_u と f_v を計算すると,

$$\begin{cases} E = f_u \cdot f_u = \dfrac{4}{(1+u^2+v^2)^2} \\ F = 0 \\ G = E. \end{cases}$$

等温座標

$$f_u \times_f f_v = E\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \nu = \frac{f_u \times_f f_v}{\sqrt{EG-F^2}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\nu_u = 0, \ \nu_v = 0$ より, $L = M = N = 0$. $\therefore K_e = 0$, $H = 0$ → S^3 の極小曲面

一方, $K_I = -\dfrac{\Delta(\ln E)}{2E}$ は, $K_I = 1$.

$K_I \neq K_e$ である.

(実は, $K_I = K_e + 1$)