

GEOODESICS in SUBMANIFOLDS (部分多様体における測地線)

- 分解 $\bar{D}_v(w) = D_v(w) + \mathbb{II}(v, w)$ は、曲線上のベクトル場に適用される。 P102

(Lemma 21
まで)

8. Proposition

Y を $M \subset \bar{M}$ における曲線 α 上のベクトル場とする。
 Y は常に M と接しているとする。

$$\dot{Y} = Y' + \underbrace{\mathbb{II}(d', Y)}_{\substack{M \text{ と接している} \\ M \text{ と垂直である}}}$$

ここで、 $\dot{Y} = \frac{dY}{ds}$ 、 $Y' = \frac{DY}{ds}$ である。

Proof

α は M 内の座標近傍に含まれると仮定して、ベクトル場 Y を

$$Y = \sum_{i=1}^{\dim M} Y^i \partial_i$$

と書くことにする。 \bar{M} の幾何的性質に関して。

$$\dot{Y} = \sum_{i=1}^{\dim M} \underbrace{\frac{dY^i}{ds}}_{\substack{\text{微分}}} \partial_i + \sum_{i=1}^{\dim M} Y^i (\partial_i | \alpha) \quad \dots \textcircled{1} \quad (\text{積の微分公式})$$

であるが、 $(\partial_i | \alpha)'$ は

$$(\partial_i | \alpha)' = \bar{D}_{\alpha'}(\partial_i) = D_{\alpha'}(\partial_i) + \mathbb{II}(\alpha', \partial_i) \quad \dots \textcircled{2}$$

接成分と法成分
に分解した。

である。①に②を代入すると。

$$\dot{Y} = \sum_{i=1}^{\dim M} \frac{dY^i}{ds} \partial_i + \sum_{i=1}^{\dim M} Y^i (D_{\alpha'}(\partial_i) + \mathbb{II}(\alpha', \partial_i))$$

$$= \sum_{i=1}^{\dim M} \frac{dY^i}{ds} \partial_i + \sum_{i=1}^{\dim M} Y^i D_{\alpha'}(\partial_i) + \sum_{i=1}^{\dim M} Y^i \mathbb{II}(\alpha', \partial_i)$$

$$= \frac{DY}{ds} + \mathbb{II}(\alpha', Y)$$

\Downarrow
 Y'

$\because \mathbb{II}(\alpha', Y) = \mathbb{II}(\alpha', \sum_{i=1}^n Y^i \partial_i) \quad \text{双線形性}$
 $= \sum_{i=1}^n Y^i \mathbb{II}(\alpha', \partial_i)$

である。よって、 $\ddot{Y} = Y' + \mathbb{I}(d', Y)$ である事を示した。■

9. Corollary

d が $M \subset \bar{M}$ の曲線であるとき、

$$\ddot{d} = d'' + \mathbb{I}(d', d')$$

である。

(\ddot{d} は \bar{M} における d の加速度、 d'' は M における d の加速度)

Proof

共変微分 $\bar{D}_{d'}(d')$ を接成分と法成分に分解すると、

$$\bar{D}_{d'}(d') = D_{d'}(d') + \mathbb{I}(d', d') \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。加速度 \ddot{d} および d'' は、

$$\ddot{d} = \bar{D}_{d'}(d')$$

$$d'' = D_{d'}(d')$$

であるため、①に代入して $\ddot{d} = d'' + \mathbb{I}(d', d')$ である。■

shape tensor

。形テンソル \mathbb{I} が形状をどのように表現するかを見るために、

$P \in M$ を固定し、任意の $v \in T_p(M)$ に対して初速度 v を持つ M の測地線 r を考える。

straight

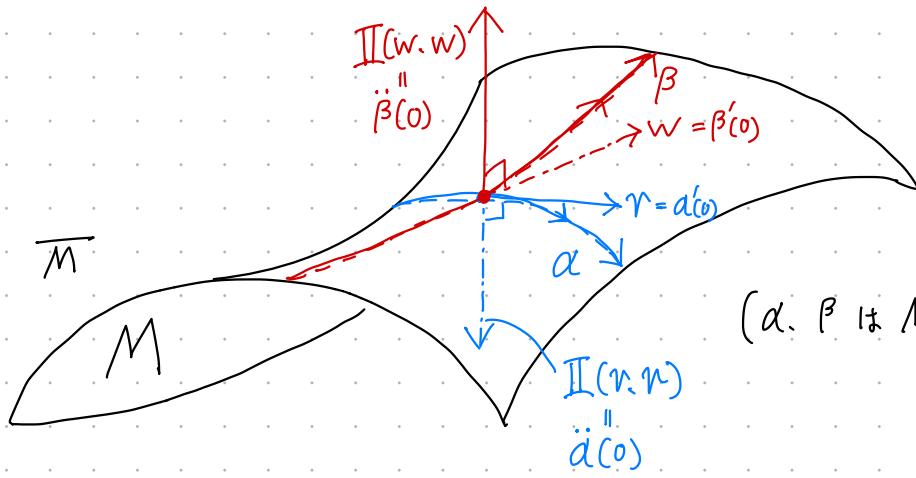
M 内では r は直線的であるが、 \bar{M} における曲がり具合は (\bar{M} の中の) M の曲率によって強制される。

系 9 より、 $\ddot{r}(0) = \mathbb{I}(v, v)$ であるので、全ての v に対して、 \mathbb{I} は点 P における M の形状を表現する。

∴ 系 9 より、

$$\ddot{r}(s) = r''(s) + \mathbb{I}(r'(s), r'(s))$$

測地線は $r''(s) = 0$ であるため、 $\ddot{r}(s) = \mathbb{I}(r'(s), r'(s))$ である。
 $s = 0$ を代入すると、 $\ddot{r}(0) = \mathbb{I}(r'(0), r'(0)) = \mathbb{I}(v, v)$ である。



(α, β は M の測地線)

もし M がユークリッド空間であれば、測地線 γ は二次の近似として、

$$s\dot{\gamma}(s) + \frac{1}{2}s^2\ddot{\gamma}(s) \quad \leftarrow \text{Taylor 展開のようないくつかの近似ができます}$$

を持つ。一般な場合でも、 $\{r + \frac{1}{2}\text{II}(n, n) \mid r \in T_p(M)\}$ という \overline{M} 内の $T_p(M)$ における超曲面は P 近傍における M の（最も）二次近似である。

一次の項（速度）と
二次の項（加速度）も含めて
扱えられる。

10. Corollary

$M \subset \overline{M}$ における曲線 α が M の測地線である

normal

$\Leftrightarrow \overline{M}$ における曲線 α の加速度 $\ddot{\alpha}$ が、どの点においても M と ~~法線方向~~ である。

$\hookrightarrow M$ での加速度 $\alpha'' = 0$ の曲線
(ベクトル場 α' が平行)

法

Proof

(I) \Rightarrow を示す

仮定より α が M の測地線であるため、 $\alpha'' = 0$ である。

系より、 $\ddot{\alpha} = \alpha'' + \text{II}(\alpha', \alpha')$ であるため、

$$\ddot{\alpha} = \alpha'' + \text{II}(\alpha', \alpha') = \text{II}(\alpha', \alpha') = \text{nor}(\overline{D}_{\alpha'}(\alpha')).$$

\overline{M} における α の
加速度

であるため、法線方向の成分のみである。よって、 \Rightarrow を示した。

(ii) \Leftarrow を示す

仮定より M における加速度 $\ddot{\alpha}$ が法線方向の成分のみであるため、 $\ddot{\alpha}$ を分解した式

$$\ddot{\alpha} = \ddot{\alpha}'' + II(\dot{\alpha}, \dot{\alpha})$$

の接成分 $\ddot{\alpha}''$ はゼロである。

よって、 α は測地線の定義を満たすため \Leftarrow を示した。

(i)(ii) 同値関係を示した \blacksquare

11. Corollary

球面 $S^n(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ の非定数な測地線は、 $S^n(r)$ の大円の一定速度のパラメータ表示のみである。 great circle
parametrization

Proof

球面 $S = S^n(r)$ の大円を考える。大円は \mathbb{R}^{n+1} の原点を通る平面 Π によって S から切り取られた円: $\Pi \cap S$ のことである。

もし曲線 α が $\Pi \cap S$ の一定速度のパラメータ表示であれば、(α は大円)

$$\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} \quad \text{および} \quad \ddot{\alpha} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$



は互いに直交し、平面 Π と接する。

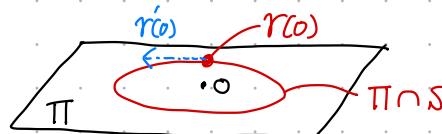
α 上の位置ベクトル場 P_α を考えると、 P_α もまた Π に接しており、 P_α は $\dot{\alpha} (\neq 0)$ と直交している。 \hookrightarrow 原点から伸びる方向のベクトル場

collinear

したがって、 $\dot{\alpha}$ と P_α は各点において同一直線上にあり、 $\dot{\alpha}$ が S に対して法線方向であることを意味するため、 α は球面における測地線である。 $(\because \text{系10より})$

全ての非定数な測地線 γ も (*) のように得られることを示すために、平面 Π を

- 原点と $r(0)$ を通り、
- $r'(0)$ と接するように



えらぶ。すると、 $\Pi \cap S$ 上の一定速度を持つパラメータ表示 α と比較すると、

- $\alpha'(0) = \gamma'(0)$ 初速度ベクトルが一致ないように入る
- $\alpha(0) = \gamma(0)$ スタート地点が一致するように選ぶ

となる。同じ初期条件を持つ。

測地線の一意性によって $\gamma = \alpha$ であるため、大円における測地線は一定速度のパラメータ表示のみである。

※ 11. Corollary より分かること

$S^n(r)$ の全ての測地線は周期的であり、その周期は $2\pi r$ である。

→ 球面の指數写像がどのようなものかを見ることができ。 $|n|=1$

$S = S^n(r)$ 上の点 P を固定する。接空間 $T_p(S)$ 上の各単位ベクトル $V \in T_p(S)$ に対して、指數写像 \exp_p は、 V に接する大円に沿って、 V を通る放射状の直線に巻きつける。具体的には、 $\exp(n) = \gamma_n(1)$

$$\exp_p(tV) = r \left\{ \cos\left(\frac{t}{r}\right)P + \sin\left(\frac{t}{r}\right)V \right\}$$

↓ 指數写像
↓ 接空間方向

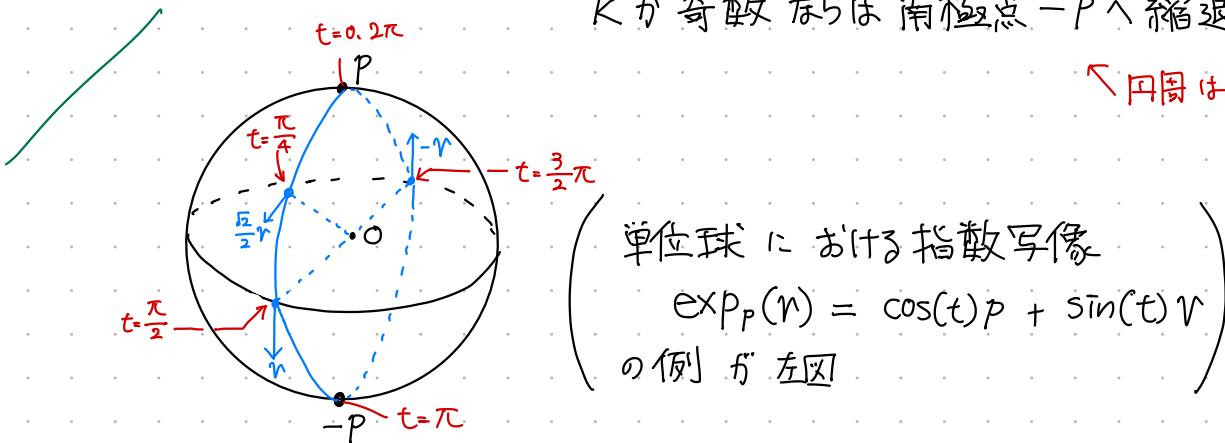
→ 点 P の位置が時刻 t によって回転している

である。したがって、 $T_p(S)$ における定数 t の $(n-1)$ 次元球面は、 S 内の「緯度方向」の $(n-1)$ 次元球面に写される。
[latitudinal]

例外的に、 $t = k\pi$ の球面は、 k が偶数ならば北極点 P へ。

k が奇数ならば南極点 $-P$ へ縮退する。

△ 円周は $2\pi r$



なお、 \exp_p は球 ($0 \leq t < \pi r$) から $S - \{-P\}$ への diffeo であるため、
 $S - \{-P\}$ は P の正規近傍である。

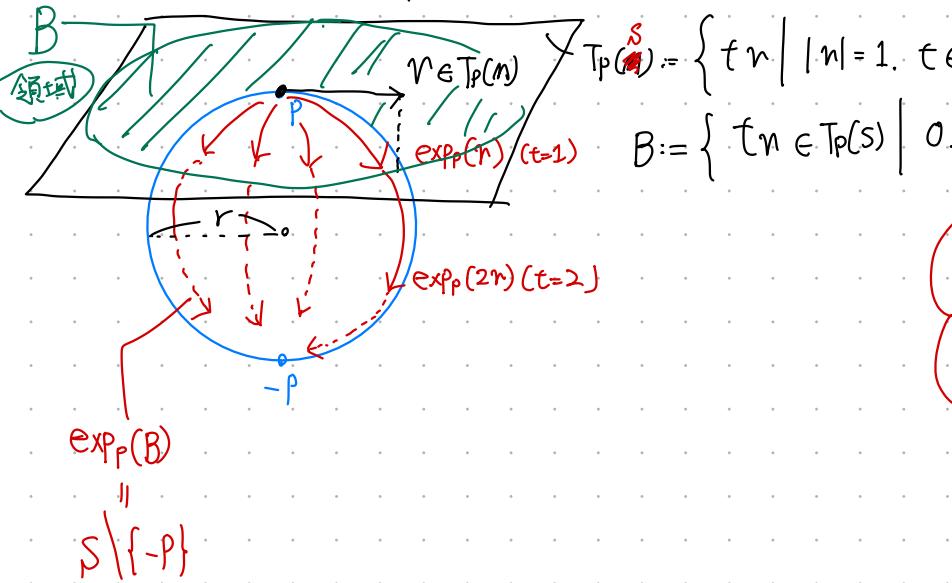
geodesic ball

ruled surface (線叢面)

(1-マンヘ-15代)

※ Ball って?

$$|n|=1$$

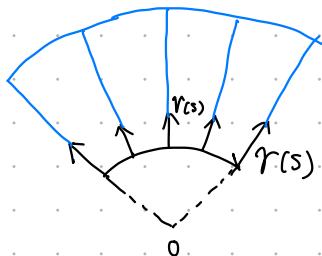


$$T_p(S) = \{ t n \mid |n|=1, t \in \mathbb{R} \}$$

$$B := \{ t n \in T_p(S) \mid 0 \leq t < \pi r \}$$

$t = \pi r$ を入ると,
 $f: B \rightarrow S$
 f differentiable でない。

※※ ruled surface (線織面) in \mathbb{R}^3



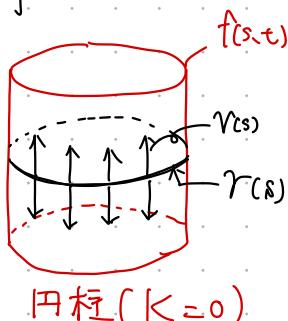
$$\begin{aligned} f(s, t) &= r(s) + t \cdot r'(s) \\ &= \exp_{r(s)}(t r(s)) \end{aligned}$$

初期値 向かう方向

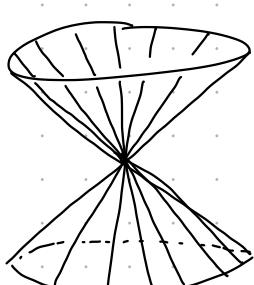
Example

$$r(s) = \begin{bmatrix} \cos s \\ \sin s \\ 0 \end{bmatrix}, \quad r'(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{a} \in \mathbb{R},$$

$$f(s, t) = \begin{bmatrix} \cos(s) \\ \sin(s) \\ t \end{bmatrix}$$



* 一般に、ガウス曲率 K は
 $K \leq 0$



TOTALLY GEODESIC SUBMANIFOLDS (完全測地的 P104)

部分多様体

→ 可能な限り単純な形を持つ部分多様体

12. Definition

totally geodesic

\bar{M} の擬リーマン部分多様体 M が 完全測地的 である

\Leftrightarrow 形状テンソル \mathbb{II} が消失する ($\mathbb{II} = 0$).

したがって、完全測地的部分多様体 M は、外在的に平坦である。
つまり、 \bar{M} 内の観測者からは曲がり具合が見えない。

6. Corollary のガウスの式 ($K(u, v) = K'(u, v) + \frac{\langle \mathbb{II}(u, u), \mathbb{II}(v, v) \rangle - \langle \mathbb{II}(u, v), \mathbb{II}(u, v) \rangle}{\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle^2}$)
により、 M は \bar{M} と同じ内在的な曲率を持つ。

($\because \mathbb{II}(u, u) = 0, \mathbb{II}(v, v) = 0 \Rightarrow K = K'$)
 $\mathbb{II}(u, v) = 0$

13. Proposition

$M \subset \bar{M}$ に対して、次の(1)から(4)は全て同値である。

(1) M は、 \bar{M} において完全測地的 ($\mathbb{II} = 0$) である。

(2) M の全ての測地線は、 \bar{M} の測地線である。(\Rightarrow)

(3) $V \in T_p(\bar{M})$ が M と接しているとき、 \bar{M} の測地線 γ_v は、
始点が M に存在する。

(4) d が M 内の曲線であり、 $V \in T_{d(0)}(M)$ であるとき、 d に沿った
 V の平行移動は、 M に対しても \bar{M} に対しても同じである。

これらの微分方程式を考え。(

Proof

(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1) \Rightarrow (4) \Rightarrow (2) を示す。

• (2) \Rightarrow (3) を示す

曲線 $d: I \rightarrow M$ が M の測地線 (初速度 V) であるとき、仮定より d は \bar{M} 内の
測地線であるので、測地線の一意性から

$$d = \gamma_r | I \quad (\gamma_r \text{ は 初速度 } V \text{ の } \bar{M} \text{ における測地線})$$

M, Mの測地線

Vの測地線

である。よって、 \bar{M} の測地線の始点は常に M に存在する。

• (3) \Rightarrow (1) を示す

$$\ddot{\gamma} = 0 \quad \ddot{r} = 0 \quad (\because \gamma \text{ は 测地線})$$

M と接する全ての $V \in T_p(\bar{M})$ に対して、9. Corollary ($\ddot{d} = d'' + II(d', d')$) を γ_r へ適用すると、 $II(r, r) = 0$ となる。 II は双線形かつ対称 であるため、

→ 補題4より

$$\begin{aligned} II(V+w, V+w) &= II(V+w, V) + II(V+w, w) \\ &= II(V, V) + II(w, V) + II(V, w) + II(w, w) \\ &= II(V, V) + 2II(V, w) + II(w, w). \quad (V, w \in T_p(\bar{M})) \end{aligned}$$

である。この等式に $II(V, V) = 0$, $II(w, w) = 0$ および $II(V+w, V+w) = 0$ を代入すると、 $II(V, w) = 0$ が得られる。

よって、 \bar{M} において完全測地的 ($II = 0$) であることを示した。

• (1) \Rightarrow (4) を示す

V を曲線 d 上の $V(0) = V$ を満たすような M の平行ベクトル場とする。

命題8より、 d に沿った V の \bar{M} における微分 \dot{V} は

$$\dot{V} = V' + II(d', V)$$

法成分

である。「 M が全測地的」という仮定より、 $II = 0$ であるため、法線方向の成分が無視される。

つまり、 M 上のベクトル場の平行移動は \bar{M} 上でも変わらず、ベクトル場 V の平行移動は M と \bar{M} で一致する。

• (4) \Rightarrow (2) を示す

V を M の測地線とする。仮定(4)より、 V' は「 M 上の平行移動」であると同時に「 \bar{M} 上の平行移動」である。つまり、

$D_{\gamma'}(r') = 0$ かつ $\overline{D}_{\gamma'}(r') = 0 \dots \textcircled{1}$ (a,b ∈ I)
 である (\because parallel 平行の定義より P66) $P = P_a^b(\alpha) : T_p(M) \rightarrow T_a(M)$. $\text{Z}(b)$

一方、 \overline{M} において曲線 γ が測地線であるための条件も 加速度がゼロ、すなわち

$$\ddot{\gamma} = \overline{D}_{\gamma'}(r') = 0 \dots \textcircled{2}$$

であるため、①, ②より、 γ は \overline{M} においても測地線である

以上より、(1) ~ (4) が 同値であることを示した

P105

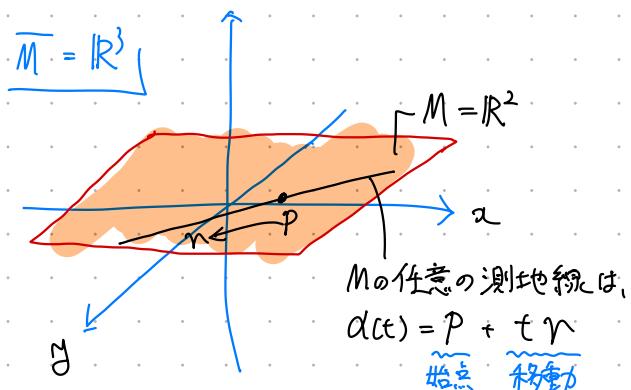
- もし W が \mathbb{R}^n の（非退化な） k -次元部分空間であれば、「任意の平行移動 $x + W$ 」は（非退化な） \mathbb{R}^n の k -平面とよばれる ($0 \leq k \leq n$).

「非退化な k -平面」は、「 \mathbb{R}^n の全測地的な擬リーマン部分多様体」であることが容易に分かる

〔 \therefore 定義より、 k -平面は 擬ユークリッド空間 \mathbb{R}^n の部分空間であるため、 \mathbb{R}^n 内の測地線は 直線を描く. よって、 $\text{nor}(\overline{D}_r(w)) = \mathbb{I}(r, w) = 0 \quad (r, w \in T_p(\mathbb{R}^n))$ である。これは 全測地的の定義を満たす。〕

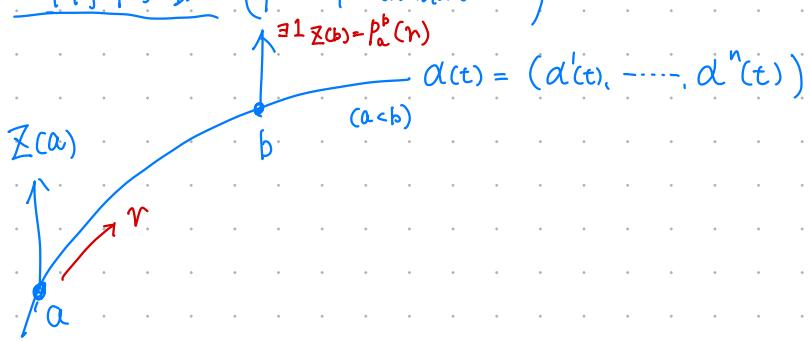
* 擬ユークリッド空間で形テンソル $\mathbb{I} = 0$ の確認

$\mathbb{R}^3, Z = 0$: 2-plane



$\therefore d(t)$ は \overline{M} でも測地線
 ↓
 proposition 13 (2) \Rightarrow (1) により、 M は \overline{M} の全測地的
 sub-mfd.

• 平行移動 (parallel translation)



Z: 平行である $\iff \frac{DZ}{de} = 0$ を満たす

$$\iff \boxed{\frac{dz^k}{de} + \sum P_{2j}^k \frac{da^i}{de} Z^j = 0} \quad \dots \textcircled{M}$$

($k=1, 2, \dots, n$)

(4); $\textcircled{M} \Rightarrow \textcircled{N}$

∴

$$\boxed{\frac{dz^k}{de} + \sum \bar{P}_{2j}^k \frac{da^i}{de} Z^j = 0} \quad \dots \textcircled{N}$$

($k=1, 2, \dots, n$)

14. Lemma

→ 極大な測地線の定義域が全実数直線上であるような擬リーマン多様体
(P18)

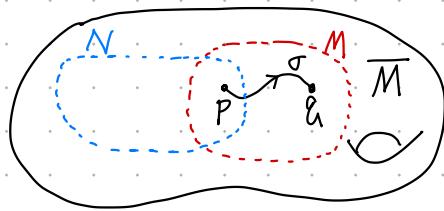
→ 任意の2点が、壊れた測地線（区別的滑らかな測地線）で結ばれる（PP）

M と N を \bar{M} の完備、連結、完全測地的な擬リーマン部分多様体とする。

$P \in M \cap N$ において、 $T_P(M) = T_P(N)$ であるならば、 $M = N$ である。

Proof

M が連結で N が完備であると仮定すれば、 $M \subset N$ であることを示せばよい。 Γ を点 P から点 Q への M 内の測地線とする。



このとき、 Γ は \bar{M} の測地線でもあり、接空間の仮定から、

$\Gamma^{(0)}$ は N と接している。

$$\hookrightarrow P \in M \cap N, T_P(M) = T_P(N)$$

したがって、 Γ は N に含まれている限り N の測地線である。しかし、仮定より「 N は完備」であるため、測地線 Γ は完全に N に含まれる。

上記の(*)部分の議論は点 P から出発する任意の方向へ出発する測地線についても同様にできる。つまり、 P から出発する全ての測地線は N に含まれる。

さらに、「 M が連結」という仮定を用いると、 M 内の全ての点は測地線の延長によって到達できるので、 M 全体が N に含まれる。

よって、 $M \subset N$ である … ①

同様の議論を「 M が完備」で「 N が連結」であるとすれば、 $M \subset N$ である … ②

①、②より $M = N$ である \blacksquare

* 補題14 から分かること

球面 $S^n(r)$ の完備で連結な k 次元完全測地的リーマン部分多様体は、大円 k -球面 (great k -spheres) である。

原点を通る $(k+1)$ 次元平面 W と $S^n(r)$ の共通部分である
部分多様体 $W \cap S^n(r)$ のこと

15. Definition

$M \subset \overline{M}$ の点が ^{umbilic} 脈点(せいたん)である

$\Leftrightarrow \forall v, w \in T_p(M)$ に対して、以下を満たす法線ベクトル $z \in T_p(M)^{\perp}$ が存在する。

$$II(v, w) = \langle v, w \rangle z$$

(このとき、 z は P における「 M の法曲率ベクトル」と呼ばれる)

リーマン多様体の場合、全ての単位ベクトルに対して $II(u, u) = z$ となる。 ($u \in T_p(M)$)

$\rightarrow M$ は umbilic な点で全ての方向に同じように曲がっている。

しかし、不定な計量に対しては $II(u, u) = \langle u, u \rangle z$ が示すように、

M は 空間的 方向では z に向かって曲がり、 ($\langle u, u \rangle > 0$ または $u=0$)

時間的 方向では z から離れるように曲がる ($\langle u, u \rangle < 0$)

(脈的)

M の擬リーマン部分多様体 M が 「~~完全 umbilic である~~

$\Leftrightarrow M$ 内の全ての点が umbilic である

このとき、 M 上の滑らかな法ベクトル z が存在し、 z を 「 M の法曲率ベクトル場」と呼び、任意の $v, w \in X(M)$ に対して、

$$II(v, w) = \langle v, w \rangle z$$

が成り立つ。

\rightarrow 「完全測地的 な部分多様体」は 「 $z=0$ であるような 完全 umbilic な

$$\Downarrow II = 0$$

$$\Updownarrow II = 0$$

部分多様体」でもある。

SEMI-RIEMANNIAN HYPERSURFACES

擬リーマン超曲面

- M の部分多様体 P が 超曲面 である
 $\Leftrightarrow P$ の余次元 ($\dim M - \dim P$) の値が 1 である。
- 擬リーマン超曲面 M は \overline{M} の余次元 1 の 擬リーマン部分多様体 に他ならない。
 → 任意の 1 次元の 法空間 $T_p(M)$ の 共通の インデックス である M の
co-index は、0 か 1 でなければいけない。
 $\text{index}(T_p(M)^\perp)$

16. Definition

\overline{M} の 擬リーマン超曲面 M の 符号 ε は 次のように定義される。

sign

spacelike

◦ $\varepsilon = 1$ (co-index = 0, つまり 全ての 法ベクトル $Z \neq 0$ に対して $\langle Z, Z \rangle > 0$ のとき)

◦ $\varepsilon = -1$ (co-index = 1, つまり 全ての 法ベクトル $Z \neq 0$ に対して $\langle Z, Z \rangle < 0$ のとき)

timelike

※ 符号 $\varepsilon = 1$ の場合, $\text{index}(M) = \text{index}(\overline{M})$

$\varepsilon = -1$ の場合, $\text{index}(M) = \text{index}(\overline{M}) - 1$

• 1)-マン多様体の場合、全ての超曲面の符号 $\varepsilon = 1$

• 不定値の場合、符号 ε は ± 1 のいずれもある。

↳ 正定値でも負定値でもない。

17. Proposition

C を $f \in \mathcal{F}(\overline{M})$ の 値とする。このとき、

$\lceil M = f^{-1}(C)$ は \overline{M} の 擬リーマン超曲面 である

$\Leftrightarrow \lceil \langle \text{grad}(f), \text{grad}(f) \rangle$ の 値が M 上で 正または負 (ゼロでない) である。

※ この場合、 M の 符号は $\langle \text{grad}(f), \text{grad}(f) \rangle$ の 符号 であり、

$$U := \frac{\text{grad}(f)}{\|\text{grad}(f)\|}$$

は、 M 上の 単位法ベクトル場 である。

Proof

grad の定義 (P85) より、 $\text{grad}(f)$ は 微分 df と 計量的に 等価である。すなわち
 $\langle \text{grad}(f), X \rangle = df(X) = Xf \quad (\forall X \in \mathfrak{X}(M))$
 である。... (*)

(i) \Rightarrow を示す。

仮定より、 $M = f^{-1}(c)$ が \overline{M} の接戻リ-マン超曲面である。このとき、定義 16 より M にはゼロでない法ベクトル Z が存在する。 $Z = \text{grad}(f)$ とおく（※より、 $\text{grad}(f)$ は法ベクトル場）さらに定義 16 より、法ベクトル $Z = \text{grad}(f)$ に対して

$$\langle \text{grad}(f), \text{grad}(f) \rangle > 0 \quad \text{または} \quad \langle \text{grad}(f), \text{grad}(f) \rangle < 0$$

が成立する。よって \Rightarrow を示した。

(ii) \Leftarrow を示す。

仮定より、 $\langle \text{grad}(f), \text{grad}(f) \rangle$ は M 上で常に正または負の値をとる場合を考える。
 $\text{grad}(f)$ は M に対して法ベクトルであり、 f が M 上で一定値 ($= C$) であるため、
任意の $v \in T_p(M)$ に対して $\langle \text{grad}(f), v \rangle$ は以下のようになる。

$$\langle \text{grad}(f), v \rangle = df(v) = v(f) = v(f|_M) = 0$$

gradの定義
(*)より
 $\therefore M$ 上における f は M 上で定数 C なので、
 f の勾配を見ている 方向微分の値は0。

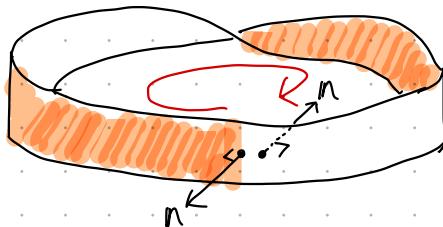
仮定および「 $\text{grad}(f)$ は M の法ベクトルであること」から、 M 上にはゼロベクトルでない法ベクトルの存在が保証される。よって定義(6)より、 M は \overline{M} の捩点リーマン超曲面である。

$$\forall Z \in T_p(M)^{\perp}, \langle Z, Z \rangle \neq 0$$

よって、 \Leftarrow を示す。

(i) (ii) より、同値関係を示す

- 例えば \mathbb{R}^{n+1} において、 $f := \sum_{i=1}^n (u^i)^2$ とすると、 $f^{-1}(r^2)$ は標準球面 $S^n(r)$ である。
standard
- 全ての擬リーマン超曲面 $M \subset \bar{M}$ が命題 17 から得られるわけではない。
 $\because M$ 全体で滑らかな単位法ベクトルが存在しない場合があるため
 $\rightarrow \mathbb{R}^3$ 内の X 軸の第がその代表例



(法ベクトルを一周させると、ベクトルの向きが反転している、意でなくなる)

- 超曲面の場合、形テンソル II は次の定義のように单纯なテンソルにできる。

18. Definition

U を擬リーマン超曲面 $M \subset \bar{M}$ 上の単位法ベクトル場とする。
以下を満たす M 上の (1.1) テンソル場 S を考える：

$$\langle S(V), W \rangle = \langle II(V, W), U \rangle \quad (\forall V, W \in \mathcal{X}(M))$$

このとき、 S は U によって導かれた **形状作用素** という。

- S は各点 $P \in M$ において、線形作用素 $S : T_p(M) \rightarrow T_p(M)$ を決定する。

19. Lemma

S が単位法ベクトル場 U から導かれる形状作用素であれば、

$$(i) \quad S(v) = -\overline{D}_v(U) \quad (v \in T_p(M))$$

self-adjoint

である。各点において $T_p(M)$ 上の線形作用素 S は自己随伴である。

$$(ii) \quad \downarrow \quad \langle S(v), w \rangle = \langle v, S(w) \rangle$$

Proof

(i) $S(v) = -\bar{D}_v(U)$ を示す

U は単位法ベクトル場であるから $\langle U, U \rangle = 1$ である。…①

$\langle \bar{D}_v(U), U \rangle$ を Lビ・チビタ接続の性質に従って式変形する。

$$\langle \bar{D}_v(U), U \rangle = V \langle U, U \rangle - \underbrace{\langle U, \bar{D}_v(U) \rangle}_{\langle \bar{D}_v(U), U \rangle}$$

$$\Leftrightarrow 2 \langle \bar{D}_v(U), U \rangle = \underbrace{V \langle U, U \rangle}_{\langle \bar{D}_v(U), U \rangle}$$

$$\Rightarrow \langle \bar{D}_v(U), U \rangle = 0 \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{Vに沿った定数} \langle U, U \rangle \text{ の 方向微分} \\ V \langle U, U \rangle = 0 \end{array}$$

である。したがって、 $\bar{D}_v(U)$ は任意の $V \in \mathcal{X}(M)$ に対して M と接している。

$W \in \mathcal{X}(M)$ とすると、 $\langle S(V), W \rangle$ は

$$\begin{aligned} \langle S(V), W \rangle &= \langle \bar{D}_v(W), U \rangle = \langle \text{nor}(\bar{D}_v(W)), U \rangle \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{D}_v(w) = \text{nor}(\bar{D}_v(W)) \\ + \text{nor}(\bar{D}_v(W)) \end{array} \\ &= \langle \bar{D}_v(W), U \rangle \quad \leftarrow \ast \\ &= -\langle \bar{D}_v(U), W \rangle \quad \leftarrow \ast \end{aligned}$$

* $V \langle W, U \rangle = \langle \bar{D}_v(W), U \rangle + \langle W, \bar{D}_v(U) \rangle$

および W は M と接して U は M の法ベクトルであるため、

$$0 = \langle \bar{D}_v(W), U \rangle + \langle W, \bar{D}_v(U) \rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle \bar{D}_v(W), U \rangle = -\langle W, \bar{D}_v(U) \rangle = -\langle \bar{D}_v(U), W \rangle.$$

であるため、 $S(V) = -\bar{D}_v(U)$ が成立する。

(ii) S が自己隨伴 ($\langle S(V), W \rangle = \langle V, S(W) \rangle$) を示す。

\bar{D} の対称性より $\langle S(V), W \rangle$ を変形する

$$\begin{aligned} \langle S(V), W \rangle &= \langle \bar{D}_v(W), U \rangle \quad \leftarrow \text{IIの対称性} \\ &= \langle \bar{D}_v(W), V \rangle \\ &= \langle S(W), V \rangle = \langle V, S(W) \rangle \end{aligned}$$

である。よって、自己隨伴を示した。 内積の対称性

(i)(ii) より、補題内の主張 2つを示した

- ・形状作用素 S は全ての接方向での \bar{M} における U の変化率を測定し、
 $U_p^\perp = T_p(M)$ であるため、 S は P が M 内を移動するときの $T_p(M)$ の \bar{M} での
^{turning} record 回転 (?) を記録する。

「曲がり具合」のニュアンス

- ・ S と計量的に等しい対称な $(0,2)$ テンソル B は、 $M \subset \bar{M}$ の第二基本形式 ^{second fundamental form} と呼ばれる。（第一基本形式は M の計量テンソル）
- ・単位法ベクトル U が局所的にのみ定義されているとしても、 U を $-U$ に置き換えると、 S も符号が変わる。

超曲面の場合、ガウス方程式は系20 のようになる。

20. Corollary

S を擬リーマン超曲面 $M \subset \bar{M}$ の形状作用素とする。
 v, w が M 上の非退化接平面を張るとき、断面曲率 K, \bar{K} について、

$$K(n, w) = \bar{K}(n, w) + \varepsilon \frac{\langle S n, v \rangle \langle S w, w \rangle - \langle S n, w \rangle^2}{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。

Proof

定義(8より) 形状作用素 S に関する $\langle S(v), w \rangle = \langle \mathbb{I}(v, w), U \rangle$ であるため、
①内の $\langle S n, v \rangle, \langle S w, w \rangle$ および $\langle S n, w \rangle$ はそれぞれ、

$$\begin{cases} \langle S n, v \rangle = \langle \mathbb{I}(n, v), U \rangle \\ \langle S w, w \rangle = \langle \mathbb{I}(w, w), U \rangle \quad \dots \textcircled{2} \\ \langle S n, w \rangle = \langle \mathbb{I}(n, w), U \rangle \end{cases}$$

である。また、 $\mathbb{I}(n, w) = \varepsilon \langle S n, w \rangle U, \langle U, U \rangle = \varepsilon$ および 補題5 により。

$$\because \langle S(v), w \rangle = \langle \mathbb{I}(v, w), U \rangle \Leftrightarrow \langle S(v), w \rangle U = \mathbb{I}(v, w) \langle U, U \rangle \Leftrightarrow \varepsilon \langle S(v), w \rangle U = \mathbb{I}(v, w) \quad \text{②}$$

$$\begin{aligned} \langle R_{vw}(x), Y \rangle &= \langle \bar{R}_{vw}(x), Y \rangle \\ &\quad + \langle \mathbb{I}(v, x), \mathbb{I}(w, Y) \rangle \\ &\quad - \langle \mathbb{I}(v, Y), \mathbb{I}(w, x) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle R_{vw}(x), Y \rangle &= \langle \bar{R}_{vw}(x), Y \rangle + \langle \mathbb{I}(v, x), \mathbb{I}(w, Y) \rangle - \langle \mathbb{I}(v, Y), \mathbb{I}(w, x) \rangle \\ &= \langle \bar{R}_{vw}(x), Y \rangle + \langle \varepsilon \langle S v, x \rangle U, \varepsilon \langle S w, Y \rangle U \rangle \\ &\quad - \langle \varepsilon \langle S v, Y \rangle U, \varepsilon \langle S w, x \rangle U \rangle \quad \text{③} \end{aligned}$$

である。さらに、 $X \rightarrow V, Y \rightarrow W$ に置き換えると、③は

$$\langle R_{vw}(V), W \rangle = \langle \bar{R}_{vw}(V), W \rangle + \langle \varepsilon \langle S v, V \rangle U, \varepsilon \langle S w, W \rangle U \rangle$$

$$\begin{aligned}
& - \langle \varepsilon \langle SV, W \rangle U, \varepsilon \langle SW, V \rangle U \rangle \\
& = \langle \bar{R}_{VW}(V), W \rangle + \varepsilon \langle SV, V \rangle \langle SW, W \rangle \\
& \quad - \varepsilon \underbrace{\langle SV, W \rangle \langle SW, V \rangle}_{\langle SW, V \rangle = \langle W, SV \rangle} \\
& = \langle \bar{R}_{VW}(V), W \rangle + \varepsilon \langle SV, V \rangle \langle SW, W \rangle \\
& \quad - \varepsilon \langle SV, W \rangle^2 \quad \cdots \textcircled{4}
\end{aligned}$$

となる。④を断面曲率の公式に代入すると、 $K(r, w)$ は

$$K(r, w) = \bar{K}(r, w) + \varepsilon \frac{\langle Sr, r \rangle \langle Sw, w \rangle - \langle Sr, w \rangle^2}{\langle r, r \rangle \langle w, w \rangle - \langle r, w \rangle^2}$$

であるため、①の形と一致することを示した■

21. Lemma

法曲率 関数.

擬リーマン超曲面 $M \subset \bar{M}$ が完全 umbilic である
 $\iff M$ の形状作用素 S はスカラーである。

スカラー作用素

(+ 定数関数)

$$\alpha: M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$S(n) = \frac{\alpha(p)}{\dim T_p(M)}$$

Proof

(i) \Rightarrow を示す

M が完全 umbilic であり、法曲率ベクトル場を Z とする。
 S を単位法ベクトル場 U から得られる形状作用素とすると、

$$\langle SV, W \rangle = \langle \bar{I}(V, W), U \rangle = \langle V, W \rangle \langle Z, U \rangle = \langle \langle U, Z \rangle V, W \rangle$$

形状作用素 S
 の定義

umbilic
 の定義 (定義 15)

が、全ての接ベクトル V, W に対して成立する。したがって、

$$SV = \langle U, Z \rangle V$$

が、全ての V に対して成り立つため、 $S = \langle U, Z \rangle$ は内積(スカラー)である。

(ii) \Leftarrow を示す

U の任意の選択に対して、得られる S がスカラーであると仮定する。すなわち、
 $SV = k_U V$ を満たすような関数 k_U が全ての V に対して存在する。このとき、

$$\bar{I}(V, W) = \varepsilon \langle SV, W \rangle U = \varepsilon \underbrace{k_U \langle V, W \rangle}_{} U \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。 $k_{-U} = -k_U$ であるため、ベクトル場 $Z := \varepsilon k_U U$ は大域的に well-defined であり、①は

$$\begin{aligned} II(V, W) &= \langle V, W \rangle Z \\ &\text{となり、完全 umbilic の定義を満たしている。} \end{aligned}$$

$\hookrightarrow Z = \varepsilon k_U U = \varepsilon \cdot -k_U (-U)$
 $= \varepsilon k_{-U} (-U)$ となり。 U を $-U$ に換えても
 Z の符号は変わらない

(i)(ii) より、同値関係を示した \blacksquare

* 補題21の証明で登場した K は $M \subset \bar{M}$ の「法曲率関数」と呼ばれる。

HYPERQUADRICS

~~(超二次曲面)~~

二次超曲面

Plus

$\rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ の球面に対して用いたのと同様の方法を、
 \mathbb{R}^{n+1}_{ν} の擬リーマン超曲面の族に適用できる。

- $\varrho \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^{n+1}_{\nu})$ を、関数 $\varrho(n) := \langle n, n \rangle$ とする。自然な座標に関して、

$$\varrho = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (u^i)^2 = - \sum_{i=1}^{\nu} (u^i)^2 + \sum_{j=\nu+1}^{n+1} (u^j)^2 \quad (\text{擬球})$$

である。

position vector field

もし P が \mathbb{R}^n_{ν} 上の位置ベクトル場であれば、 $\varrho = \langle P, P \rangle$ である。したがって、

$\text{grad}(\varrho) = 2P$ である。なぜならば、全ての V に対して

$$\begin{aligned} \langle \text{grad}(\varrho), V \rangle &= V \varrho = V \langle P, P \rangle && \because \text{ビ・ナビ接続の性質} \\ &\stackrel{\text{gradの定義}}{=} 2 \langle D_V(P), P \rangle && \text{ } \\ &= 2 \langle V, P \rangle && \begin{array}{l} \because P \text{は位置ベクトル場}, \\ D_V(P) = V \end{array} \\ &= \langle 2P, V \rangle \end{aligned}$$

となるからである。したがって $\langle \text{grad}(\varrho), \text{grad}(\varrho) \rangle = 4\varrho$ である。

$$\boxed{\begin{aligned} &\because \text{grad}(\varrho) = 2P \\ &\langle \text{grad}(\varrho), \text{grad}(\varrho) \rangle = \langle 2P, 2P \rangle \\ &= 2 \cdot 2 \langle P, P \rangle \\ &= 4\varrho \end{aligned}}$$

- 命題 17 より、 $r > 0$ かつ $\varepsilon = \pm 1$ のとき、

$$Q = \varrho^{-1}(\varepsilon r^2)$$

は、 \mathbb{R}^{n+1}_{ν} の擬リーマン超曲面であり、単位法ベクトル $U = \frac{P}{r}$ と符号 ε を持つ。

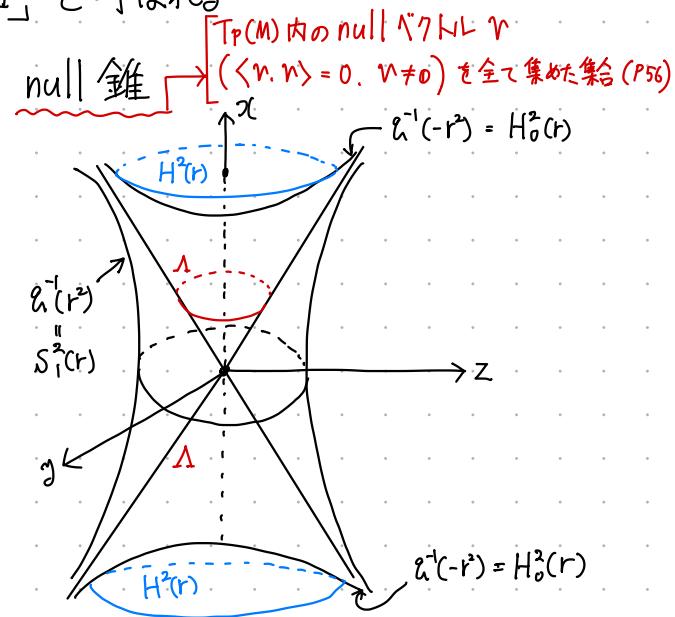
\rightarrow これらの超曲面は、「 \mathbb{R}^{n+1}_{ν} の(中心)超二次曲面」と呼ばれる

2つの族 $\varepsilon = +1$ および -1 は「 $\varrho^{-1}(0)$ 、すなわち null 錐」

$$\Lambda := \varrho^{-1}(0) - \{0\}$$

と原点 0 を除く \mathbb{R}^{n+1}_{ν} の全域を満たす。

(右図は \mathbb{R}^3_1 における超二次曲面)



P114 コダク方程式

↳ 二次関数の
分類に用いる。