3. $S^n\times\mathbb{R}$ または $H^n\times\mathbb{R}$ への等長的はめ込み

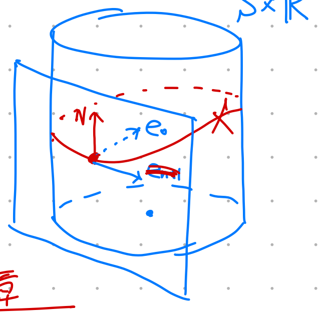
(Lemma 3.6 まで)

Lemma 3.4　3.5
↓
Lemma 3.6
↓
prop 3.7
↓
Theorem 3.4

3.1 整合方程式

compatibility equation

$$\frac{\partial}{\partial t} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

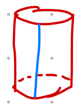


- V：次元 n の単連結リーマン多様体
  - ds^2：V 上の計量（$\langle\cdot,\cdot\rangle$ とも表す）
  - ∇：V 上のリーマン接続（レビチビタ接続）
  - R：V 上のリーマン曲率テンソル
  - S：対称作用素 $S_y: T_yV\longrightarrow T_yV$ の場
  - T：V 上のベクトル場で、$\|T\|\leq 1$
  - ν：V 上の滑らかな関数で、$\nu^2\leq 1$

2章

- $T = \frac{\partial}{\partial t} - \nu N$
- $\nu = \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle = 0$　$N\perp\frac{\partial}{\partial t}$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \underbrace{T}_{\tan} + \underbrace{\nu N}_{nor}$$



→ 2.1節で定めた $S^n\times\mathbb{R}$ と $H^n\times\mathbb{R}$ 内の超曲面の整合方程式により、次の定義を導入する.

Definition 3.1

両立条件（方程式）

組 (ds^2, S, T, ν) が $S^n\times\mathbb{R}$ および $H^n\times\mathbb{R}$ に対する整合方程式 をそれぞれ満たす

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ∘ $\|T\|^2+\nu^2 = 1$

任意の $X, Y, Z\in\mathfrak{X}(V)$ に対して、以下4つを満たす：

(7) ∘ $R_{XY}(Z) = \langle SX, Z\rangle SY - \langle SY, Z\rangle SX$
$\quad + K\big(\langle X,Z\rangle Y - \langle Y,Z\rangle X - \langle Y,T\rangle\langle X,Z\rangle T$
$\quad - \langle X,T\rangle\langle Z,T\rangle Y + \langle X,T\rangle\langle Y,Z\rangle T + \langle Y,T\rangle\langle Z,T\rangle X\big)$

ガウス方程式

(8) ∘ $\nabla_X(SY) - \nabla_Y(SX) - S[X,Y] = K\nu\big(\langle Y,T\rangle X - \langle X,T\rangle Y\big)$

コダッチ方程式

(9) ∘ $\nabla_X T = \nu SX$

(10) ∘ $d\nu(X) = -\langle SX, T\rangle$

（$K=1$ は $S^n\times\mathbb{R}$ に、$K=-1$ は $H^n\times\mathbb{R}$ に対応する）

Remark 3.2

式 $\underbrace{\nabla_X T = \nu SX}_{(9)}$ は、$\langle T,T\rangle + \nu^2 = 1$ を X に関して微分することで、$\nu = 0$ の場合を除き、$\underbrace{d\nu(X) = -\langle SX, T\rangle}_{(10)}$ を含むことが分かる.

∵ $\langle T,T\rangle + \nu^2 = 1$ を X で微分する.

$$\langle\nabla_X T, T\rangle + \langle T, \nabla_X T\rangle + \nabla_X(\nu^2) = 0$$
$$\Longleftrightarrow \cancel{2}\langle\nabla_X T, T\rangle + \cancel{2}\nu\, d\nu(X) = 0$$
$$\Longleftrightarrow \langle\nu SX, T\rangle + \nu\, d\nu(X) = 0$$
$$\Longleftrightarrow d\nu(X) = -\langle SX, T\rangle$$

∵ $\nu\neq 0$ より

3.2 $S^n\times\mathbb{R}$ および $\mathbb{H}^n\times\mathbb{R}$ への 余次元1 の 等長はめ込み

このセクションで、定理3.3 を示す

Theorem (再掲)

仮定

V を n次元の 単連結 なリーマン多様体とし、ds^2 を V の 計量として、さらに
∇ を Vのリーマン接続 (レビチビタ接続) とする。 S を 対称作用素 $S_y : T_yV \to T_yV$ の 場 (field) として、
T を V上のベクトル場とし、ν を $\|T\|^2+\nu^2=1$ を満たすような V上の滑らかな 関数とする.

$M^n=S^n$ または $M^n=\mathbb{H}^n$ とする. 組 (ds^2, S, T, ν) が $M^n\times\mathbb{R}$ に対する ガウス方程式と
コダッチ方程式 を満たし、さらに 以下2つの 方程式 を満たしていると 仮定する:

$$\nabla_X T = \nu SX \qquad d\nu(X) = -\langle SX, T\rangle$$

このとき、$f : V \longrightarrow M^n\times\mathbb{R}$ という 等長的 はめ込み が 存在し、f に関する 法ベクトル N と
対応する 形作用素 が 次 を満たす:

$$df\circ S\circ df^{-1} \qquad \frac{\partial}{\partial t} = df(T) + \nu N$$

加えて、この はめ込み は $M^n\times\mathbb{R}$ の 大域的 な M^n と $\mathbb{R}$ の向きを保つ 等長変換 を除いて
一意 で ある。

- この定理を示すために、V上の 局所正規直交フレーム $(e_1,\cdots,e_n)$ を 考え、2.2節 のように
形式 ω^i、ω^{n+1}、ω^i_j、ω^i_{n+1}、ω^{n+1}_{n+1} を設定する。

$$\omega^i(e_k)=\delta^i_k,\ \omega^i_j(e_k):=\langle\nabla_{e_k}(e_j), e_i\rangle,\ \omega^{n+1}_j(e_k):=\langle Se_k, e_j\rangle$$

$$\omega^j_{n+1}=-\omega^{n+1}_j, \qquad \omega^{n+1}_{n+1}:=0$$

さらに、M^nに応じて $\mathbb{E}^{n+2}$を $\mathbb{E}^{n+2}=\mathbb{R}^{n+2}$ または $\mathbb{E}^{n+2}=\mathbb{L}^{n+2}$ と 設定する。

$(E_0,\cdots,E_{n+1})$ を $\mathbb{E}^{n+2}$の 標準的 (canonical) フレーム ($\mathbb{L}^{n+2}$ の 場合、$\langle E_0, E_0\rangle=-1$) とすると、
$E_{n+1}=\frac{\partial}{\partial t}$ となる。

$$\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\cdots\cdots\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$$

加えて、~~ベクトル場Tを~~ 次のように設定する;

$$T^k:=\langle T, e_k\rangle,\quad T^{n+1}:=\nu,\quad T^0:=0.$$

$$T=\sum_{k=0}^{n} T^k e_k$$

$$=\langle T, e_1\rangle e_1+\cdots+\langle T, e_n\rangle e_n + \nu e_{n+1}$$

$e_{n+1} = N$ (Vと法)

• 先ほど定義したTを用いて、さらに次の設定を行う：

$$\omega_j^0(e_k) := \kappa(T^jT^k - \delta_j^k),\qquad \omega_{n+1}^0(e_k) := \kappa\nu T^k,$$
$$\omega_0^i = -\kappa\,\omega_i^0,\quad \omega_0^{n+1} = -\kappa\,\omega_{n+1}^0,\quad \omega_0^0 = 0$$

V上で1次微分形式 η を、$\eta(X) := \langle T, X\rangle$ と定義する。フレーム $(e_1,\cdots,e_n)$ では、

$\eta = \sum_{k=1}^n T^k\omega^k$ となる。$\left(\because X = \sum_j X^j e_j,\ T = \sum_k T^k e_k\right.$ とすると、$\langle T, X\rangle = \sum_k\sum_j T^k \underbrace{X^j}_{\omega^j(X)}\underbrace{\langle e_k, e_j\rangle}_{\delta_j^k}$

$\left. = \sum_k T^k\omega^k(X)\right)$

最後に、1次微分形式の行列 Ω を、$\Omega := (\omega_\beta^\alpha) \in M_{n+2}(\mathbb{R})$ とする。

• これ以降、定理3.3の仮定が成り立つとする。
初めに、整合方程式から導かれるいくつかの補題（3.4、3.5、3.6）を示す。

Lemma 3.4

$d\eta = 0$ である。（η: V上の1次微分形式）

closed 1-form

Proof

1次微分形式の定義より、ベクトル場 $X, Y \in \mathfrak{X}(V)$ に対して

$$d\eta(X,Y) = X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X,Y])$$

$\eta(X) = \langle T, X\rangle$ 代入。

$$= X\langle T, Y\rangle - Y\langle T, X\rangle - \langle T, [X,Y]\rangle$$
$$= \langle \nabla_X T, Y\rangle + \cancel{\langle T, \nabla_X Y\rangle} - \left(\langle \nabla_Y T, X\rangle + \cancel{\langle T, \nabla_Y X\rangle}\right)$$
$$- \left(\cancel{\langle T, \nabla_X Y\rangle} - \cancel{\langle T, \nabla_Y X\rangle}\right)$$
$$= \langle \nabla_X T, Y\rangle - \langle \nabla_Y T, X\rangle$$

Def 3.1 $\nabla_X T = \nu SX$ 代入。

$$= \langle \nu SX, Y\rangle - \langle \nu SY, X\rangle$$
$$= \nu\left(\underbrace{\langle SX, Y\rangle}_{\langle SY, X\rangle} - \langle SY, X\rangle\right)$$
$$= 0.$$

$\langle SY, X\rangle$ ∵ Sの対称性より

任意の X, Y に対して成り立つため、$d\eta = 0$ である ▨

Lemma 3.5

$$dT^\alpha = \sum_{\gamma=0}^{n+1} T^\gamma \omega_\alpha^\gamma$$ である.

Proof $n=2$ の場合を示す

$\alpha = 0$、$i(=1,2)$、3 の場合で分けて示す.

(i) $\alpha = 0$ の場合　両辺それぞれに e_k を代入して計算すると、

$$(\text{左辺}) = dT^0(e_k) = 0.$$

$$(\text{右辺}) = \underset{0}{T^0}\omega_0^0(e_k) + T^1\omega_0^1(e_k) + T^2\omega_0^2(e_k) + T^3\omega_0^3(e_k)$$

∵ $\omega_0^i = -k\,\omega_i^0$、$\omega_0^{n+1} = -k\,\omega_{n+1}^0$ 代入

$$= -k\left(T^1\omega_1^0(e_k) + T^2\omega_2^0(e_k) + T^3\omega_3^0(e_k)\right)$$

$\omega_j^0(e_k) = k(T^jT^k - \delta_j^k)$、$\omega_{n+1}^0(e_k) = k\nu T^k$ 代入.

$$= -k\left\{T^1 k(T^1T^k - \delta_1^k) + T^2 k(T^2T^k - \delta_2^k) + \nu^2 k T^k\right\} \cdots ①$$

簡単のために※ $k=1$ ($T^k = T^1$、$\delta_1^k = 1$、$\delta_2^k = 0$) とすると、

$$(①\text{の右辺}) = -k^2T^1\left\{(T^1)^2 - 1 + (T^2)^2 + \nu^2\right\}$$

$\|T\|^2 + \nu^2 = 1 \iff (T^1)^2 + (T^2)^2 + \nu^2 = 1$ 代入

$$= -k^2T^1(1-1) = 0.$$

左辺と右辺が一致する. (※ $k=2$ の場合でも同様である)

(ii) $\alpha = i$ ($=1,2$) の場合　両辺それぞれに $X \in \mathfrak{X}(V)$ を代入して計算すると、

$$(\text{左辺}) = dT^i(X)$$
$$= d\langle T, e_i\rangle(X)$$
$$= \langle dT(X), e_i\rangle + \langle T, de_i(X)\rangle$$

$\forall X \in \mathfrak{X}(V)$ に対して、
- $dT(X) = \nabla_X T = \nu SX$ (式(9)より)
- $de_i(X) = \nabla_X e_i$ を代入

$$= \langle \nu SX, e_i\rangle + \langle T, \nabla_X e_i\rangle \cdots ②$$

$$(\text{右辺}) = \sum_{\gamma=0}^{3} T^\gamma \omega_i^\gamma(X)$$
$$= \cancel{\underset{0}{T^0}\omega_i^0} + T^1\omega_i^1 + T^2\omega_i^2 + T^3\omega_i^3$$

$T^k = \langle T, e_k\rangle$、
$\forall X \in \mathfrak{X}(V)$ に対して、
$\omega_j^i(X) = \langle \nabla_X e_j, e_i\rangle$
$\omega_j^{n+1}(X) = \langle SX, e_j\rangle$
を代入.

$$= \langle T, e_1\rangle\langle \nabla_X e_i, e_1\rangle + \langle T, e_2\rangle\langle \nabla_X e_i, e_2\rangle$$
$$+ \nu\langle SX, e_i\rangle$$

②の第2項について、$\nabla_X(e_j) = \sum_{i=1}^{2} \omega_j^i(X) e_i$ （定義）より、

$$\langle T, \nabla_X e_i \rangle = \langle T, \sum_{k=1}^{2} \omega_i^k(X) e_k \rangle$$
$$= \sum_{k=1}^{2} \omega_i^k(X) \langle T, e_k \rangle$$
$$= \sum_{k=1}^{2} T^k \omega_i^k(X)$$
$$= T^1\omega_i^1(X) + T^2\omega_i^2(X) \underset{\text{定義より}}{=} \langle T, e_1 \rangle \langle \nabla_X e_i, e_1 \rangle + \langle T, e_2 \rangle \langle \nabla_X e_i, e_2 \rangle$$

$$\therefore (\text{左辺}) = \langle T, e_1 \rangle \langle \nabla_X e_i, e_1 \rangle + \langle T_2, e_2 \rangle \langle \nabla_X e_i, e_2 \rangle + \langle \nu SX, e_i \rangle$$
$$= (\text{右辺}).$$

左辺と右辺が一致する。

(iii) $\alpha = 3$ の場合　　両辺それぞれに X を代入して計算すると、

$$(\text{左辺}) = dT^3(X)$$
$$= d\nu(X)$$
任意の $X \in \mathfrak{X}(V)$ に対して、$d\nu(X) = -\langle SX, T \rangle$ 代入
$$= -\langle SX, T \rangle \cdots ④$$

$$(\text{右辺}) = \sum_{r=0}^{3} T^r \omega_3^r(X)$$
$$= \cancel{T^0 \omega_3^0} + T^1\omega_3^1(X) + T^2\omega_3^2(X) + \cancel{T^3\omega_3^3}$$
$\omega_{n+1}^j = -\omega_j^{n+1}$ 代入
$$= T^1(-\omega_1^3(X)) + T^2(-\omega_2^3(X))$$
任意の $X \in \mathfrak{X}(V)$ に対して、$\omega_j^{n+1}(X) = \langle SX, e_j \rangle$ 代入。
$$= T^1(-\langle SX, e_1 \rangle) + T^2(-\langle SX, e_2 \rangle)$$
$$= -\langle T, e_1 \rangle \langle SX, e_1 \rangle - \langle T, e_2 \rangle \langle SX, e_2 \rangle.$$

ここで、$T = \langle T, e_1 \rangle e_1 + \langle T_2, e_2 \rangle e_2$ であるため、④に代入すると、

$$(\text{左辺}) = -\langle SX, \langle T, e_1 \rangle e_1 + \langle T, e_2 \rangle e_2 \rangle$$
$$= -\left(\langle SX, \langle T, e_1 \rangle e_1 \rangle + \langle SX, \langle T, e_2 \rangle e_2 \rangle \right)$$
$$= -\langle T, e_1 \rangle \langle SX, e_1 \rangle - \langle T, e_2 \rangle \langle SX, e_2 \rangle$$
$$= (\text{右辺}).$$

以上より、$\alpha = 0, i, 3$ の場合で $dT^\alpha = \sum_{r=0}^{n+1} T^r \omega_\alpha^r$ を示した ∎

Lemma 3.6 (Thm 8.6 と対応)

$d\Omega + \Omega \wedge \Omega = 0$ である。 $(\Omega = (\omega)^{\alpha}_{\beta} \in M_{n+2}(\mathbb{R}))$

Proof $n=2$ の場合を示す

$\Psi := d\Omega + \Omega \wedge \Omega$、 $R^{i}_{klj} = \langle R_{e_k e_l}(e_j), e_i \rangle$ とおく。 7パターンに場合分けして考える。

(i) Ψ^{i}_{j} $(i, j = 1, \cdots, n) = 0$ を示す. Proposition 2.4 より、

$$\Psi^{i}_{j} = d\omega^{i}_{j} + \sum_{\alpha=0}^{3} \omega^{i}_{\alpha} \wedge \omega^{\alpha}_{j}$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{2}\left(R^{i}_{klj}\, \omega^{k} \wedge \omega^{l}\right)}_{\text{Proposition 2.4 (5) より}} + \omega^{i}_{3} \wedge \omega^{3}_{j} + \omega^{i}_{0} \wedge \omega^{0}_{j}.$$

ガウス方程式 (7) を満たしているので、R^{i}_{klj} に代入する.

$$R^{i}_{klj} = \langle R_{e_k e_l}(e_j), e_i \rangle$$

$$R_{e_k e_l}(e_j) = \langle Se_k, e_j \rangle Se_l - \langle Se_l, e_j \rangle Se_k$$
$$+ k\Big(\langle e_k, e_j \rangle e_l - \langle e_l, e_j \rangle e_k - \langle e_l, T \rangle \langle e_k, e_j \rangle T$$
$$- \langle e_k, T \rangle \langle e_j, T \rangle e_l + \langle e_k, T \rangle \langle e_l, T \rangle T + \langle e_l, T \rangle \langle e_j, T \rangle e_k \Big).$$

$$\therefore R^{i}_{klj} = \underline{\langle \langle Se_k, e_j \rangle Se_l - \langle Se_l, e_j \rangle Se_k, e_i \rangle}$$
$$+ k \underline{\Big\langle \langle e_k, e_j \rangle e_l - \langle e_l, e_j \rangle e_k - \langle e_l, T \rangle \langle e_k, e_j \rangle T}$$
$$\underline{- \langle e_k, T \rangle \langle e_j, T \rangle e_l + \langle e_k, T \rangle \langle e_l, e_j \rangle T + \langle e_l, T \rangle \langle e_j, T \rangle e_k, e_i \Big\rangle}$$

—— 部分を線形性を用いて分解すると、

$$\langle \langle Se_k, e_j \rangle Se_l, e_i \rangle - \langle \langle Se_l, e_j \rangle Se_k, e_i \rangle$$
$$= \langle Se_k, e_j \rangle \langle Se_l, e_i \rangle - \langle Se_l, e_j \rangle \langle Se_k, e_i \rangle$$
$$= \omega^{n+1}_{j}(e_k)\, \omega^{n+1}_{i}(e_l) - \omega^{n+1}_{j}(e_l)\, \omega^{n+1}_{i}(e_k)$$
$$= \omega^{n+1}_{j} \wedge \omega^{n+1}_{i} (e_k, e_l). \cdots ①$$

—— 部分を線形性および $\langle e_i, e_j \rangle = \delta^{i}_{j}$ を用いて分解すると、

$$k\Big(\langle e_k, e_j \rangle \langle e_l, e_i \rangle - \langle e_l, e_j \rangle \langle e_k, e_i \rangle - \langle e_l, T \rangle \langle e_k, e_j \rangle \langle T, e_i \rangle$$
$$- \langle e_k, T \rangle \langle e_j, T \rangle \langle e_l, e_i \rangle + \langle e_k, T \rangle \langle e_l, e_j \rangle \langle T, e_i \rangle + \langle e_l, T \rangle \langle e_j, T \rangle \langle e_k, e_i \rangle \Big)$$
$$= k\left(\delta^{k}_{j}\delta^{l}_{i} - \delta^{l}_{j}\delta^{k}_{i} - T^{l}T^{i}\delta^{k}_{j} - T^{k}T^{j}\delta^{l}_{i} + T^{k}T^{i}\delta^{l}_{j} + T^{l}T^{j}\delta^{k}_{i} \right). \cdots ②$$

よって、$R^{i}_{klj} = ① + ②$.

一方で、$\omega^i_0 \wedge \omega^0_j(e_k, e_l) = ②$ であることが計算で分かる。※

※ $\omega^i_0 \wedge \omega^0_j(e_k, e_l) = \omega^i_0(e_k)\omega^0_j(e_l) - \omega^i_0(e_l)\omega^0_j(e_k)$

$$= -k^2(T^iT^k - \delta^k_i)(T^jT^l - \delta^l_j) + k^2(T^iT^l - \delta^l_i)(T^jT^k - \delta^k_j)$$

$$= k^2\Big(\cancel{T^iT^lT^jT^k} - T^iT^l\delta^k_j - T^jT^k\delta^l_i + \delta^l_i\delta^k_j$$

$$- \cancel{T^iT^kT^jT^l} + T^iT^k\delta^l_j + T^jT^l\delta^k_i - \delta^k_i\delta^l_j\Big)$$

$$= ②. \quad \text{ok}$$

以上より $R^i_{klj} = \omega^i_{n+1} \wedge \omega^{n+1}_j(e_k, e_l) + \omega^i_0 \wedge \omega^0_j(e_k, e_l)$ であるため、$\Psi^i_j(e_p, e_q)$ に代入して

$$\Psi^i_j(e_p, e_q) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}\Big\{\big(\underbrace{\omega^i_3 \wedge \omega^3_j(e_k, e_l)}_{=:Ⓐ} + \underbrace{\omega^i_0 \wedge \omega^0_j(e_k, e_l)}_{=:Ⓑ}\big)\underbrace{\omega^k \wedge \omega^l(e_p, e_q)}_{=:Ⓒ}\Big\}$$

$$+ \underbrace{\omega^i_3 \wedge \omega^3_j(e_p, e_q)}_{=:Ⓓ} + \underbrace{\omega^i_0 \wedge \omega^0_j(e_p, e_q)}_{=:Ⓔ}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}(Ⓐ \cdot Ⓒ) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}(Ⓑ \cdot Ⓒ) + Ⓓ + Ⓔ.$$

Ⓐ・Ⓒ および Ⓑ・Ⓒ を計算すると、

$$Ⓐ \cdot Ⓒ = \left(\omega^i_3(e_k)\omega^3_j(e_l) - \omega^i_3(e_l)\omega^3_j(e_k)\right)\left(\delta^k_p\delta^l_q - \delta^k_q\delta^l_p\right)$$

$$Ⓑ \cdot Ⓒ = \left(\omega^i_0(e_k)\omega^0_j(e_l) - \omega^i_0(e_l)\omega^0_j(e_k)\right)\left(\delta^k_p\delta^l_q - \delta^k_q\delta^l_p\right).$$

計算の簡単のために、$p=1,\ q=2$ として $-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}(Ⓐ \cdot Ⓒ)$ および $-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}(Ⓑ \cdot Ⓒ)$ を計算すると、

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}(Ⓐ \cdot Ⓒ) = -\frac{1}{2}\Big\{\left(\omega^i_3(e_1)\omega^3_j(e_1) - \omega^i_3(e_1)\omega^3_j(e_1)\right)(\underbrace{\delta^1_1\delta^1_2}_{0} - \underbrace{\delta^1_2\delta^1_1}_{0})$$

$$+ \left(\omega^i_3(e_1)\omega^3_j(e_2) - \omega^i_3(e_2)\omega^3_j(e_1)\right)(\underbrace{\delta^1_1\delta^2_2}_{1} - \underbrace{\delta^1_2\delta^2_1}_{0})$$

$$+ \left(\omega^i_3(e_2)\omega^3_j(e_1) - \omega^i_3(e_1)\omega^3_j(e_2)\right)(\underbrace{\delta^2_1\delta^1_2}_{0} - \underbrace{\delta^2_2\delta^1_1}_{1})$$

$$+ \left(\omega^i_3(e_2)\omega^3_j(e_2) - \omega^i_3(e_2)\omega^3_j(e_2)\right)(\underbrace{\delta^2_1\delta^2_2}_{0} - \underbrace{\delta^2_2\delta^2_1}_{0})\Big\}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(2\omega^i_3(e_1)\omega^3_j(e_2) - 2\omega^i_3(e_2)\omega^3_j(e_1)\right)$$

$$= -\left(\omega^i_3(e_1)\omega^3_j(e_2) - \omega^i_3(e_2)\omega^3_j(e_1)\right)$$

$$= -\omega^i_3 \wedge \omega^3_j(e_1, e_2)$$

$$= -Ⓓ.$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{\ell=1}^{2}\left(Ⓑ\cdot Ⓒ\right) = -\frac{1}{2}\Big\{\left(\omega_0^i(e_1)\omega_j^0(e_1) - \omega_0^i(e_1)\omega_j^0(e_1)\right)(\underbrace{\delta_1^1\delta_2^1}_{0} - \underbrace{\delta_2^1\delta_1^1}_{0})$$

$$+\left(\omega_0^i(e_1)\omega_j^0(e_2) - \omega_0^i(e_2)\omega_j^0(e_1)\right)(\underbrace{\delta_1^1\delta_2^2}_{1} - \underbrace{\delta_2^1\delta_1^2}_{0})$$

$$+\left(\omega_0^i(e_2)\omega_j^0(e_1) - \omega_0^i(e_1)\omega_j^0(e_2)\right)(\underbrace{\delta_1^2\delta_2^1}_{0} - \underbrace{\delta_2^2\delta_1^1}_{1})$$

$$+\left(\omega_0^i(e_2)\omega_j^0(e_2) - \omega_0^i(e_2)\omega_j^0(e_2)\right)(\underbrace{\delta_1^2\delta_2^2}_{0} - \underbrace{\delta_2^2\delta_1^2}_{0})\Big\}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(2\omega_0^i(e_1)\omega_j^0(e_2) - 2\omega_0^i(e_2)\omega_j^0(e_1)\right)$$

$$= -\left(\omega_0^i(e_1)\omega_j^0(e_2) - \omega_0^i(e_2)\omega_j^0(e_1)\right)$$

$$= -\omega_0^i\wedge\omega_j^0(e_1, e_2)$$

$$= -Ⓔ.$$

以上より、$\Psi_j^i(e_k, e_\ell)$ は

$$\Psi_j^i(e_k, e_\ell) = -Ⓓ - Ⓔ + Ⓓ + Ⓔ$$

$$= 0 \text{ である.}$$

(ii) $\Psi_j^{n+1} = 0$ $(j = 1, \cdots, n)$ を示す

命題2.4 より、Ψ_j^3 は

$$\Psi_j^3 = d\omega_j^3 + \sum_{a=0}^{3}\omega_a^3\wedge\omega_j^a$$

$$= \underbrace{d\omega_j^3 + \sum_{k=1}^{2}\omega_k^3\wedge\omega_j^k} + \omega_0^3\wedge\omega_j^0 + \underbrace{\omega_3^3}_{0}\wedge\omega_j^3$$

命題2.4
(6) より

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{\ell=1}^{2}\left\{\langle\nabla_{e_k}(Se_\ell) - \nabla_{e_\ell}(Se_k) - S([e_k, e_\ell]), e_j\rangle\,\omega^k\wedge\omega^\ell\right\}}$$

$$+\ \omega_0^3\wedge\omega_j^0. \quad \cdots ①$$

コダッチ方程式(8) を満たしているという仮定より、

$$\nabla_X(SY) - \nabla_Y(SX) - S[X, Y] = k\nu\left(\langle Y, T\rangle X - \langle X, T\rangle Y\right)$$

が成り立つ. $X = e_k$、$Y = e_\ell$ として、両辺に e_j との内積を取ると、

$$\langle\nabla_{e_k}(Se_\ell) - \nabla_{e_\ell}(Se_k) - S[e_k, e_\ell],\ e_j\rangle$$

$$= k\nu\langle\langle e_\ell, T\rangle e_k - \langle e_k, T\rangle e_\ell,\ e_j\rangle$$

内積の線形性より

$$= k\nu\left(\langle e_\ell, T\rangle\langle e_k, e_j\rangle - \langle e_k, T\rangle\langle e_\ell, e_j\rangle\right)$$

$T^\ell := \langle T, e_\ell\rangle$ より

$$= k\nu\left(T^\ell\delta_j^k - T^k\delta_j^\ell\right)$$

$$= k\left(T^{\ell}T^{n+1}\delta^k_j - T^kT^{n+1}\delta^\ell_j\right) \cdots ②$$

である。

一方、計算により $\omega^{n+1}_0 \wedge \omega^0_j(e_k, e_\ell) = k\left(T^kT^{n+1}\delta^\ell_j - T^\ell T^{n+1}\delta^k_j\right)$ である。…③ ※

※ $$\omega^{n+1}_0 \wedge \omega^0_j(e_k, e_\ell) = \omega^{n+1}_0(e_k)\omega^0_j(e_\ell) - \omega^{n+1}_0(e_\ell)\omega^0_j(e_k)$$
$$= -k\,\omega^0_{n+1}(e_k)\omega^0_j(e_\ell) + k\,\omega^0_{n+1}(e_\ell)\omega^0_j(e_k)$$
$$= -k\cdot kT^{n+1}T^k\cdot k\left(T^jT^\ell - \delta^j_\ell\right) + k\cdot kT^{n+1}T^\ell\cdot k\left(T^jT^k - \delta^k_j\right)$$
$$= k^3T^{n+1}\left(\cancel{T^\ell T^j T^k} - T^\ell\delta^k_j \cancel{- T^kT^jT^\ell} + T^k\delta^\ell_j\right)$$
$k^2=1$ 代入
$$= k\left(T^kT^{n+1}\delta^\ell_j - T^\ell T^{n+1}\delta^k_j\right)$$ ok

よって、① に ②,③ を代入することで Ψ^3_j を計算すると、

$$\Psi^3_j(e_p, e_q) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{\ell=1}^{2}\left\{k\left(T^\ell T^3\delta^k_j - T^kT^3\delta^\ell_j\right)\underbrace{\omega^k\wedge\omega^\ell(e_p, e_q)}_{\delta^k_p\delta^\ell_q - \delta^k_q\delta^\ell_p}\right\}$$
$$+ k\left(T^pT^3\delta^q_j - T^qT^3\delta^p_j\right)$$

簡単のために $p=1$、$q=2$ とすると、

$$\Psi^3_j(e_p, e_q) = \frac{k}{2}\left\{\left(T^1T^3\delta^1_j - T^1T^3\delta^1_j\right)\left(\underbrace{\delta^1_1\delta^1_2}_{0} - \underbrace{\delta^1_2\delta^1_1}_{0}\right)\right.$$
$$+ \left(T^2T^3\delta^1_j - T^1T^3\delta^2_j\right)\left(\underbrace{\delta^1_1\delta^2_2}_{1} - \underbrace{\delta^1_2\delta^2_1}_{0}\right)$$
$$+ \left(T^1T^3\delta^2_j - T^2T^3\delta^1_j\right)\left(\underbrace{\delta^2_1\delta^1_2}_{0} - \underbrace{\delta^2_2\delta^1_1}_{1}\right)$$
$$\left. + \left(T^2T^3\delta^2_j - T^2T^3\delta^2_j\right)\left(\delta^2_1\delta^2_2 - \delta^2_2\delta^2_1\right)\right\}$$
$$+ k\left(T^1T^3\delta^2_j - T^2T^3\delta^1_j\right)$$
$$= \frac{k}{2}\left(2T^2T^3\delta^1_j - 2T^1T^3\delta^2_j\right) + k\left(T^1T^3\delta^2_j - T^2T^3\delta^1_j\right)$$
$$= 0$$ である。

(iii) $\Psi^0_j = 0$ $(j=1,\cdots,n)$ を示す.

計算より, $\omega^0_j = k\left(T^j\eta - \omega^j\right)$ であることが分かる. ※1

※1 左辺と右辺にそれぞれ e_k を代入する.

(左辺) : $\omega^0_j(e_k) \overset{\text{定義より}}{=} k\left(T^jT^k - \delta^j_k\right)$

(右辺) : $k\left(T^j\eta(e_k) - \omega^j(e_k)\right) = k\left(T^j\langle T, e_k\rangle - \delta^k_j\right)$

$= k\left(T^jT^k - \delta^k_j\right)$

$=$ (左辺)　ok

また、補題3.4より $d\eta = 0$ を用いると, $d\omega^0_j$ は

$$d\omega^0_j = k\left(dT^j\wedge\eta - d\omega^j\right)$$

$$= k\,dT^j\wedge\eta + k\sum_{k=1}^{2}\omega^j_k\wedge\omega^k \quad ※2$$

と計算できる.

※2 $\omega^0_j = k\left(T^j\eta - \omega^j\right)$ であったので,

$$d\omega^0_j = d\left(k\left(T^j\eta - \omega^j\right)\right)$$

$$= k\cdot d\left(T^j\eta - \omega^j\right)$$

$$= k\left(dT^j\wedge\eta + T^j\underset{\substack{\shortparallel\\0}}{d\eta} - d\omega^j\right)$$

$d(f\cdot\omega) = (df)\wedge\omega + fd\omega$ に, $f = T^j$ を代入した.

$$= k\left(dT^j\wedge\eta - d\omega^j\right)$$

命題2.4(3)より $d\omega^j = -\sum_{k=1}^{n}\omega^j_k\wedge\omega^k$ を代入.

$$= k\left(dT^j\wedge\eta + \sum_{k=1}^{n}\omega^j_k\wedge\omega^k\right)$$ である.　ok

以上より, $\Psi^0_j(e_p, e_q)$ を計算すると,

$$\Psi^0_j(e_p,e_q) = d\omega^0_j(e_p,e_q) + \sum_{\alpha=0}^{n+1}\omega^0_\alpha\wedge\omega^\alpha_j(e_p,e_q)$$

$$= \underbrace{d\omega^0_j(e_p,e_q)}_{=:Ⓐ} + \underbrace{\sum_{k=1}^{2}\left(\omega^0_k\wedge\omega^k_j(e_p,e_q)\right)}_{=:Ⓑ} + \underset{\substack{\shortparallel\\0}}{\omega^0_0}\wedge\omega^0_j(e_p,e_q)$$

$$+ \underbrace{\omega^0_3\wedge\omega^3_j(e_p,e_q)}_{=:Ⓒ}.$$

Ⓐ, Ⓑ, Ⓒ 部分をそれぞれ計算する.

$$Ⓐ = k\,dT^j\wedge\eta(e_p,e_q) + k\sum_{k=1}^{2}\omega^j_k\wedge\omega^k(e_p,e_q)$$

$$= k\left(dT^j(e_p)\eta(e_q) - dT^j(e_q)\eta(e_p) + \sum_{k=1}^{2}\omega^j_k\wedge\omega^k(e_p,e_q)\right)$$

$$= k\left(dT^3(e_p)\eta(e_q) - dT^3(e_q)\eta(e_p) + \omega^3_q(e_p) - \omega^3_p(e_q)\right)$$ である.

※3

※3 Σを展開すると、

$$\sum_{k=1}^{2}\omega^3_k\wedge\omega^k(e_p, e_q) = \sum_{k=1}^{2}\left(\omega^3_k(e_p)\underbrace{\omega^k(e_q)}_{=\delta^k_q} - \omega^3_k(e_q)\underbrace{\omega^k(e_p)}_{=\delta^k_p}\right)$$

—— と —— はそれぞれ1つしか残らない.

$$= \omega^3_1(e_p)\delta^1_q - \omega^3_1(e_q)\delta^1_p + \omega^3_2(e_p)\delta^2_q - \omega^3_2(e_q)\delta^2_p$$

$$= \omega^3_q(e_p) - \omega^3_p(e_q)$$ となる. OK

$$Ⓑ = \omega^0_1\wedge\omega^1_3(e_p, e_q) + \omega^0_2\wedge\omega^2_3(e_p, e_q)$$

$$= \omega^0_1(e_p)\omega^1_3(e_q) - \omega^0_1(e_q)\omega^1_3(e_p) + \omega^0_2(e_p)\omega^2_3(e_q) - \omega^0_2(e_q)\omega^2_3(e_p)$$

$$= k(T^1T^p - \delta^1_p)\cdot\omega^1_3(e_q) - k(T^1T^q - \delta^1_q)\omega^1_3(e_p)$$
$$+ k(T^2T^p - \delta^2_p)\cdot\omega^2_3(e_q) - k(T^2T^q - \delta^2_q)\cdot\omega^2_3(e_p)$$

$$= k\left\{T^1T^p\omega^1_3(e_q) - \delta^1_p\omega^1_3(e_q) - T^1T^q\omega^1_3(e_p) + \delta^1_q\omega^1_3(e_p)\right.$$
$$\left.+ T^2T^p\omega^2_3(e_q) - \delta^2_p\omega^2_3(e_q) - T^2T^q\omega^2_3(e_p) + \delta^2_q\omega^2_3(e_p)\right\}$$

〜〜 と 〜〜 は それぞれ1つしか 残らない.

$$= k\left\{T^1T^p\omega^1_3(e_q) - T^1T^q\omega^1_3(e_p) + T^2T^p\omega^2_3(e_q) - T^2T^q\omega^2_3(e_p)\right.$$
$$\left.- \omega^p_3(e_q) + \omega^q_3(e_p)\right\}$$

$$= k\left\{T^p\sum_{k=1}^{2}T^k\omega^k_3(e_q) - T^q\sum_{k=1}^{2}T^k\omega^k_3(e_p) - \omega^p_3(e_q) + \omega^q_3(e_p)\right\}$$ である.

$$Ⓒ = \omega^0_3(e_p)\omega^3_3(e_q) - \omega^0_3(e_q)\omega^3_3(e_p)$$

$\omega^0_3(e_p) = k\nu T^p = kT^3T^p$ 代入

$$= k\left(T^pT^3\omega^3_3(e_q) - T^qT^3\omega^3_3(e_p)\right)$$ である.

以上をまとめると、$\Psi^0_3(e_p, e_q)$ は

$$\Psi^0_3(e_p, e_q) = Ⓐ + Ⓑ + Ⓒ$$

$$= k\left(dT^j(e_p)\eta(e_q) - dT^j(e_q)\eta(e_p) + \omega^j_q(e_p) - \omega^j_p(e_q)\right)$$

$$+ k\left\{T^p\sum_{k=1}^{2}T^k\omega^k_j(e_q) - T^q\sum_{k=1}^{2}T^k\omega^k_j(e_p) - \omega^p_j(e_q) + \omega^q_j(e_p)\right\}$$

$$+ k\left(T^pT^3\omega^3_j(e_q) - T^qT^3\omega^3_j(e_p)\right) \cdots ①$$

となる. 補題3.5 より $dT^n = \sum_{r=0}^{n+1}T^r\omega^r_n$ であるため、①の第一項に代入すると、

$$\Psi^0_j(e_p, e_q) = k\left(\cancel{\sum_{r=0}^{3}T^r\omega^r_j(e_p)\underbrace{\eta(e_q)}_{=T^q}} - \cancel{\sum_{r=0}^{3}T^r\omega^r_j(e_q)\underbrace{\eta(e_p)}_{=T^p}} + \omega^j_q(e_p) - \omega^j_p(e_q)\right)$$

$$+ k\left(\cancel{T^p\sum_{k=1}^{3}T^k\omega^k_j(e_q)} - \cancel{T^q\sum_{k=1}^{3}T^k\omega^k_j(e_p)} - \omega^p_j(e_q) + \omega^q_j(e_p)\right)$$

$\because T^0\omega^0_j = 0$ より,
$T^p\sum_{k=1}^{3}T^k\omega^k_j$
$= T^p\sum_{k=0}^{3}T^k\omega^k_j$

$$= k\left(\omega^j_q(e_p) - \omega^j_p(e_q) - \omega^p_j(e_q) + \omega^q_j(e_p)\right)$$ ※4

$$= k\left(\omega^j_q(e_p) - \omega^j_p(e_q) + \omega^j_p(e_q) - \omega^j_q(e_q)\right)$$

$= 0$ である.

※4 $(e_1, \cdots, e_n)$ は正規直交フレームであるので

$$\langle\nabla_{e_p}e_j, e_q\rangle + \langle e_j, \nabla_{e_p}e_q\rangle = e_p\left(\langle e_j, e_q\rangle\right)$$
$$= 0 \quad \cdots ☆$$

であるため、$\omega^q_j(e_p)$ は

$$\omega^q_j(e_p) = \langle\nabla_{e_p}e_j, e_q\rangle$$ ☆より
$$= -\langle e_j, \nabla_{e_p}e_q\rangle$$
$$= -\langle\nabla_{e_p}e_q, e_j\rangle$$
$$= -\omega^j_q(e_p)$$

である. 同様に、$\omega^p_j(e_q) = -\omega^j_p(e_q)$ である.

(iv) $\Psi^0_{n+1}=0$ を示す

まず、計算より $\omega^0_3 = kT^3\eta$ である事が分かる。同様に、計算により $d\omega^0_3 = k\,dT^3\wedge\eta$ である。
※1 ※2

※1 両辺に e_k を代入して等しくなる事を確認する。

(左辺): $\omega^0_3(e_k) = k\nu T^k = kT^3T^k$.

(右辺): $kT^3\eta(e_k) = kT^3\langle T, e_k\rangle$

$= kT^3T^k$

$=$ (左辺). OK

※2 $d(f\cdot\omega) = (df)\wedge\omega + f\,d\omega$ に $f=T^{n+1}$, $\omega=\eta$ を代入すると、

$$d(kT^3\eta) = k\,d(T^3\eta) = k(dT^3\wedge\eta + T^3\underbrace{d\eta}_{0\ (\because 補題\ 3.4)})$$

$$= k\,dT^3\wedge\eta.\ \text{OK}$$

以上より、$\Psi^0_{n+1}(e_p, e_q)$ を計算すると

$$\Psi^0_{n+1}(e_p,e_q) = d\omega^0_3(e_p,e_q) + \sum_{\alpha=0}^{3}\omega^0_\alpha\wedge\omega^\alpha_3(e_p,e_q)$$

$$= d\omega^0_3(e_p,e_q) + \sum_{k=1}^{2}\omega^0_k\wedge\omega^k_3(e_p,e_q) + \underbrace{\omega^0_0}_{=0}\wedge\omega^0_3(e_p,e_q)$$

$$+ \omega^0_3\wedge\underbrace{\omega^3_3}_{=0}(e_p,e_q)$$

$$= \underbrace{k\,dT^3\wedge\eta(e_p,e_q)}_{=:Ⓐ} + \underbrace{\sum_{k=1}^{2}\left(\omega^0_k(e_p)\omega^k_3(e_q) - \omega^0_k(e_q)\omega^k_3(e_p)\right)}_{=:Ⓑ}.$$

Ⓐ、Ⓑ 部分をそれぞれ計算する。

$$Ⓐ = k\left(dT^3(e_p)\eta(e_q) - dT^3(e_q)\eta(e_p)\right)$$

$$= k\left(T^q dT^3(e_p) - T^p dT^3(e_q)\right).$$

$\eta(e_p) = \langle T, e_p\rangle = T^p$ を代入した。

$$Ⓑ = \omega^0_1(e_p)\omega^1_3(e_q) - \omega^0_1(e_q)\omega^1_3(e_p) + \omega^0_2(e_p)\omega^2_3(e_q) - \omega^0_2(e_q)\omega^2_3(e_p)$$

$$= k(T^1T^p - \delta^1_p)\omega^1_3(e_q) - k(T^1T^q - \delta^1_q)\omega^1_3(e_p)$$

$$+ k(T^2T^p - \delta^2_p)\omega^2_3(e_q) - k(T^2T^q - \delta^2_q)\omega^2_3(e_p)$$

$$
\begin{aligned}
&= k\Big\{T^1T^p\omega_3^1(e_q) - \underline{\delta_p^1\omega_3^1(e_q)} - T^1T^q\omega_3^1(e_p) + \underline{\delta_q^1\omega_3^1(e_p)} \\
&\qquad + T^2T^p\omega_3^2(e_q) - \underline{\delta_p^2\omega_3^2(e_q)} - T^2T^q\omega_3^2(e_p) + \underline{\delta_q^2\omega_3^2(e_p)}\Big\} \\
&= k\Big\{T^1T^p\omega_3^1(e_q) - T^1T^q\omega_3^1(e_p) + T^2T^p\omega_3^2(e_q) - T^2T^q\omega_3^2(e_p) \\
&\qquad - \underline{\omega_3^p(e_q)} + \underline{\omega_3^q(e_p)}\Big\}. \\
&= k\Big\{T^1T^p\omega_3^1(e_q) - T^1T^q\omega_3^1(e_p) + T^2T^p\omega_3^2(e_q) - T^2T^q\omega_3^2(e_p)\Big\}.
\end{aligned}
$$

—— と —— は それぞれ1つしか残らない.

※3

※3

$$
\begin{aligned}
\omega_3^p(e_q) &= -\omega_p^3(e_q) = -\langle Se_q, e_p\rangle \\
\omega_3^q(e_p) &= -\omega_q^3(e_p) = -\langle Se_p, e_q\rangle \\
&= -\langle Se_q, e_p\rangle
\end{aligned}
$$

Sの対称性より

であるため、$-\omega_3^p(e_q) + \omega_3^q(e_p) = 0$ である.

以上をまとめると、$\Psi_{n+1}^0(e_p, e_q)$ は

$$
\begin{aligned}
\Psi_{n+1}^0(e_p, e_q) &= Ⓐ + Ⓑ \\
&= k\left(T^q\,dT^3(e_p) - T^p\,dT^3(e_q)\right) \\
&\quad + k\left(T^1T^p\omega_3^1(e_q) - T^1T^q\omega_3^1(e_p) + T^2T^p\omega_3^2(e_q) - T^2T^q\omega_3^2(e_p)\right) \\
&= k\left(T^q\sum_{r=0}^{3}T^r\omega_3^r(e_p) - T^p\sum_{r=0}^{3}T^r\omega_3^r(e_p)\right) \\
&\quad + k\left(T^1T^p\omega_3^1(e_q) - T^1T^q\omega_3^1(e_p) + T^2T^p\omega_3^2(e_q) - T^2T^q\omega_3^2(e_p)\right) \\
&= k\left(T^q\sum_{k=1}^{2}T^k\omega_3^k(e_p) - T^p\sum_{k=1}^{2}T^k\omega_3^k(e_p)\right) \\
&\quad + k\left(T^1T^p\omega_3^1(e_q) - T^1T^q\omega_3^1(e_p) + T^2T^p\omega_3^2(e_q) - T^2T^q\omega_3^2(e_p)\right) \\
&= k\left(T^q\sum_{k=1}^{2}T^k\omega_3^k(e_p) - T^p\sum_{k=1}^{2}T^k\omega_3^k(e_p)\right) \\
&\quad + k\left(T^p\sum_{k=1}^{2}T^k\omega_3^k(e_q) - T^q\sum_{k=1}^{2}T^k\omega_3^k(e_p)\right) \\
&= 0 \quad \text{である.}
\end{aligned}
$$

∵補題3.5 に $d=3$ を代入すると、$dT^3 = \sum_{r=0}^{3} T^r\omega_3^r$.

∵ $r=0, 3$のときの $T^r\omega_3^r(e_p)$ は、$T^0=0$、$\omega_3^3=0$ より、$T^0\omega_3^0 = T^3\omega_3^3 = 0$ である.

(V) $\Psi^0_0 = 0$ を示す

$$\Psi^0_0(e_p, e_q) = \underbrace{d\omega^0_0}_{=0}(e_p, e_q) + \sum_{\alpha=0}^{3} \omega^0_\alpha \wedge \omega^\alpha_0 (e_p, e_q)$$

$$= \sum_{k=1}^{2} \omega^0_k \wedge \omega^k_0 (e_p, e_q) + \underbrace{\omega^0_0 \wedge \omega^0_0}_{=0}(e_p, e_q) + \omega^0_3 \wedge \omega^3_0 (e_p, e_q)$$

$$= \sum_{k=1}^{2} \left(\omega^0_k(e_p)\omega^k_0(e_q) - \omega^0_k(e_q)\omega^0_k(e_p) \right)$$

$$+ \omega^0_3(e_p)\omega^3_0(e_q) - \omega^0_3(e_q)\omega^3_0(e_p)$$

$$= \sum_{k=1}^{2} \left\{ k(T^kT^p - \delta^k_p)\cdot -k(T^kT^q - \delta^q_k) - k(T^kT^q - \delta^q_k)\cdot -k(T^kT^p - \delta^k_p) \right\}$$

$$+ \cancel{k\nu T^p(-k^2\nu T^q)} - \cancel{k\nu T^q(-k^2\nu T^p)}$$

$$= \sum_{k=1}^{2} \left\{ \cancel{-k^2(T^kT^p - \delta^k_p)(T^kT^q - \delta^k_q)} + \cancel{k^2(T^kT^q - \delta^q_k)(T^kT^p - \delta^k_p)} \right\}$$

$= 0$ である.

(VI) $\Psi^{n+1}_{n+1} = 0$ を示す.

$$\Psi^3_3(e_p, e_q) = \underbrace{d\omega^3_3}_{=0.}(e_p, e_q) + \sum_{\alpha=0}^{3} \omega^3_\alpha \wedge \omega^\alpha_3 (e_p, e_q)$$

$$= \sum_{k=1}^{2} \omega^3_k \wedge \omega^k_3 (e_p, e_q) + \omega^3_0 \wedge \omega^0_3 (e_p, e_q) + \underbrace{\omega^3_3 \wedge \omega^3_3}_{=0}(e_p, e_q)$$

→ Ψ^0_0 の計算で $\omega^0_3 \wedge \omega^3_0 = 0$ であったため、
$\omega^3_0 \wedge \omega^0_3 = -\omega^0_3 \wedge \omega^3_0$
$= 0$ である

$$= \sum_{k=1}^{2} \left(\omega^3_k(e_p)\omega^k_3(e_q) - \omega^3_k(e_q)\omega^k_3(e_p) \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{2} \left(-\langle Se_p, e_k \rangle \langle Se_q, e_k \rangle + \langle Se_q, e_k \rangle \langle Se_p, e_k \rangle \right)$$

$= 0$ である.

(vii) $\Psi^{i}_{n+1} = -\Psi^{n+1}_{i} = 0 \quad (i=1,\cdots,n)$ を示す.

- $\Psi^{i}_{n+1} = -\Psi^{n+1}_{i}$ を示す

$\Psi^{i}_{3}(e_p, e_q)$ と $-\Psi^{3}_{i}(e_p, e_q)$ はそれぞれ、

$$\Psi^{i}_{3}(e_p, e_q) = d\omega^{i}_{3}(e_p, e_q) + \sum_{\alpha=0}^{3} \omega^{i}_{\alpha}\wedge\omega^{\alpha}_{3}(e_p, e_q)$$

$$= d\omega^{i}_{3}(e_p, e_q) + \underbrace{\sum_{k=1}^{2}\omega^{i}_{k}\wedge\omega^{k}_{3}(e_p, e_q)}_{=:A} + \underbrace{\omega^{i}_{0}\wedge\omega^{0}_{3}(e_p, e_q)}_{=:B} + \cancel{\omega^{i}_{3}\wedge\underbrace{\omega^{3}_{3}}_{0}(e_p, e_q)}$$

$$-\Psi^{3}_{i}(e_p, e_q) = -d\omega^{3}_{i}(e_p, e_q) - \sum_{\alpha=0}^{3}\omega^{3}_{\alpha}\wedge\omega^{\alpha}_{i}(e_p, e_q)$$

∵ 定義より、$\omega^{n+1}_{i} = -\omega^{i}_{n+1}$

$$= d\omega^{i}_{3}(e_p, e_q) \underbrace{- \sum_{k=1}^{2}\omega^{3}_{k}\wedge\omega^{k}_{i}(e_p, e_q)}_{=:C} \underbrace{- \omega^{3}_{0}\wedge\omega^{0}_{i}(e_p, e_q)}_{=:D} - \cancel{\underbrace{\omega^{3}_{3}}_{0}\wedge\omega^{3}_{i}(e_p, e_q)}$$

である. A と C をそれぞれ計算すると、

$$C = \sum_{k=1}^{2}\omega^{k}_{i}\wedge\omega^{3}_{k}(e_p, e_q) \qquad (∵\ \omega\wedge\eta = -\eta\wedge\omega \text{ より})$$

$$= \sum_{k=1}^{2}\left(\omega^{k}_{i}(e_p)\,\omega^{3}_{k}(e_q) - \omega^{k}_{i}(e_q)\,\omega^{3}_{k}(e_p)\right)$$

$$A = \sum_{k=1}^{2}\left(\omega^{i}_{k}(e_p)\,\omega^{k}_{3}(e_q) - \omega^{i}_{k}(e_q)\,\omega^{k}_{3}(e_p)\right)$$

∵ 定義より、$\omega^{n+1}_{i} = -\omega^{i}_{n+1}$

$$= \sum_{k=1}^{2}\left(-\omega^{i}_{k}(e_p)\,\omega^{3}_{k}(e_q) + \omega^{i}_{k}(e_q)\,\omega^{3}_{k}(e_p)\right)$$

※1

$$= \sum_{k=1}^{2}\left(\omega^{k}_{i}(e_p)\,\omega^{3}_{k}(e_q) - \omega^{k}_{i}(e_q)\,\omega^{3}_{k}(e_p)\right)$$

$$= C$$

である.

※1　示したいこと：$\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\omega^{i}_{k}(e_p)\,\omega^{3}_{k}(e_q) = -\sum_{k=1}^{2}\omega^{k}_{i}(e_p)\,\omega^{3}_{k}(e_q)$

(iii) Ψ^{0}_{j} の計算過程で、$\omega^{p}_{j}(e_q) = -\omega^{j}_{p}(e_q)$ であることを確認したので $(j, p, q = 1,\cdots,n)$

$$\begin{cases} p \to i \\ j \to k \\ q \to p \end{cases}$$ と読み替えることで、

両辺に $\sum_{k=1}^{2}$ を付けた.

$$\omega^{i}_{k}(e_p) = -\omega^{k}_{i}(e_p) \Longrightarrow \sum_{k=1}^{2}\omega^{i}_{k}(e_p) = \sum_{k=1}^{2}\left(-\omega^{k}_{i}(e_p)\right)$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{2}\left(-\omega^{i}_{k}(e_p)\right) = \sum_{k=1}^{2}\omega^{k}_{i}(e_p)$$

両辺に $\omega^{3}_{k}(e_q)$ を掛けた.

$$\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{2}\left(-\omega^{i}_{k}(e_p)\,\omega^{3}_{k}(e_q)\right) = \sum_{k=1}^{2}\left(\omega^{k}_{i}(e_p)\,\omega^{3}_{k}(e_q)\right)$$ である.

同様に $\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\omega^{i}_{k}(e_q)\,\omega^{3}_{k}(e_p) = \sum_{k=1}^{2}\left(-\omega^{k}_{i}(e_q)\,\omega^{3}_{k}(e_p)\right)$ も成り立つ.

次に Ⓓ をそれぞれ計算すると、

$$
\begin{aligned}
Ⓓ &= -\omega_0^3\wedge\omega_i^0(e_p,e_q)\\
&= \omega_i^0\wedge\omega_0^3(e_p,e_q)\\
&= -\frac{1}{k}\omega_0^i\wedge(-k)\omega_3^0(e_p,e_q)\\
&= -\cancel{\frac{1}{k}}\cdot\cancel{-k}\ \omega_0^i\wedge\omega_3^0(e_p,e_q)\\
&= Ⓑ.
\end{aligned}
$$

以上より、Ⓐ = Ⓒ、Ⓑ = Ⓓ であるため $\Psi_{n+1}^i = -\Psi_i^{n+1}$ である事を示した.

• $\Psi_{n+1}^i = 0$ を示す.

$$
\begin{aligned}
\Psi_3^i(e_p,e_q) &= d\omega_3^i(e_p,e_q)+\sum_{k=1}^{2}\omega_k^i\wedge\omega_3^k(e_p,e_q)+\omega_0^i\wedge\omega_3^0(e_p,e_q)\\
&= -d\omega_i^3(e_p,e_q)-\sum_{k=1}^{2}\omega_3^k\wedge\omega_k^i(e_p,e_q)+\omega_0^i\wedge\omega_3^0(e_p,e_q)\\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^{2}\left(\omega_k^3\wedge\omega_i^k(e_p,e_q)\right)}_{=:Ⓐ}\\
&\quad \underbrace{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}\left(\langle\nabla_{e_k}(Se_l)-\nabla_{e_l}(Se_k)-S([e_k,e_l]),e_i\rangle\,\omega^k\wedge\omega^l(e_p,e_q)\right)}_{=:Ⓑ}\\
&\quad \underbrace{-\sum_{k=1}^{2}\omega_3^k\wedge\omega_k^i(e_p,e_q)}_{=:Ⓒ}+\underbrace{\omega_0^i\wedge\omega_3^0(e_p,e_q)}_{=:Ⓓ}
\end{aligned}
$$

∵ 命題2.4 (6) を代入した

Ⓐ とⒸ をそれぞれ計算すると、

$$
Ⓐ = \sum_{k=1}^{2}\left(\omega_k^3(e_p)\omega_i^k(e_q)-\omega_k^3(e_q)\omega_i^k(e_p)\right)
$$

$$
\begin{aligned}
Ⓒ &= -\sum_{k=1}^{2}\left(\omega_3^k(e_p)\omega_k^i(e_q)-\omega_3^k(e_q)\omega_k^i(e_p)\right)\\
&= -\sum_{k=1}^{2}\left(-\omega_k^3(e_p)\omega_k^i(e_q)+\omega_k^3(e_q)\omega_k^i(e_p)\right)\\
&= -\sum_{k=1}^{2}\left(\omega_k^3(e_p)\omega_i^k(e_q)-\omega_k^3(e_q)\omega_i^k(e_p)\right)\\
&= -Ⓐ \text{ である.}
\end{aligned}
$$

Ⓑ と Ⓓ をそれぞれ計算すると、

$$
\begin{aligned}
Ⓓ &= \omega^{i}_{0}(e_p)\,\omega^{0}_{3}(e_q) - \omega^{i}_{0}(e_q)\,\omega^{0}_{3}(e_p) \\
&= -k\left\{k\left(T^{i}T^{p} - \delta^{i}_{p}\right)\right\}k\nu T^{q} + k\left\{k\left(T^{i}T^{q} - \delta^{i}_{q}\right)\right\}k\nu T^{p} \\
&= -k\left(T^{i}T^{p} - \delta^{i}_{p}\right)\nu T^{q} + k\left(T^{i}T^{q} - \delta^{i}_{q}\right)\nu T^{p}. \\
&= \cancel{T^{p}T^{q}T^{i}(\underbrace{k\nu - k\nu}_{=0})} + k\nu\left(T^{q}\delta^{i}_{p} - T^{p}\delta^{i}_{q}\right) \\
&= k\left(T^{q}T^{3}\delta^{i}_{p} - T^{p}T^{3}\delta^{i}_{q}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Ⓑ &= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}\left(\left\langle \nabla_{e_k}(Se_l) - \nabla_{e_l}(Se_k) - S([e_k, e_l]),\ e_i \right\rangle \omega^{k}\wedge\omega^{l}(e_p, e_q)\right) \\
&= -\frac{1}{2}\Big\{\left(\left\langle \underbrace{\nabla_{e_1}(Se_1) - \nabla_{e_1}(Se_1)}_{=0} - S(\underbrace{[e_1, e_1]}_{=0}),\ e_i \right\rangle \omega^{1}\wedge\omega^{1}(e_p, e_q)\right) \\
&\quad + \left(\left\langle \nabla_{e_1}(Se_2) - \nabla_{e_2}(Se_1) - S([e_1, e_2]),\ e_i \right\rangle \omega^{1}\wedge\omega^{2}(e_p, e_q)\right) \\
&\quad + \left(\left\langle \nabla_{e_2}(Se_1) - \nabla_{e_1}(Se_2) - S([e_2, e_1]),\ e_i \right\rangle \omega^{2}\wedge\omega^{1}(e_p, e_q)\right) \\
&\quad + \left(\left\langle \underbrace{\nabla_{e_2}(Se_2) - \nabla_{e_2}(Se_2)}_{=0} - S(\underbrace{[e_2, e_2]}_{=0}),\ e_i \right\rangle \omega^{2}\wedge\omega^{2}(e_p, e_q)\right)\Big\} \\
&\xrightarrow{※2} \\
&= -\frac{1}{2}\Big\{\left(\left\langle \nabla_{e_1}(Se_2) - \nabla_{e_2}(Se_1) - S([e_1, e_2]),\ e_i \right\rangle \omega^{1}\wedge\omega^{2}(e_p, e_q)\right) \\
&\quad + \left(\left\langle \nabla_{e_1}(Se_2) - \nabla_{e_2}(Se_1) - S([e_1, e_2]),\ e_i \right\rangle \omega^{1}\wedge\omega^{2}(e_p, e_q)\right)\Big\} \\
&= -\left\langle \nabla_{e_1}(Se_2) - \nabla_{e_2}(Se_1) - S([e_1, e_2]),\ e_i \right\rangle \omega^{1}\wedge\omega^{2}(e_p, e_q) \quad \cdots ①
\end{aligned}
$$

※2 $\omega^1\wedge\omega^2 = -\omega^2\wedge\omega^1$ および $[e_1, e_2] = -[e_2, e_1]$ より、

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \nabla_{e_2}(Se_1) - \nabla_{e_1}(Se_2) - S([e_2, e_1]),\ e_i \right\rangle \omega^{2}\wedge\omega^{1}(e_p, e_q) \\
&= -\left\langle \nabla_{e_2}(Se_1) - \nabla_{e_1}(Se_2) + S([e_1, e_2]),\ e_i \right\rangle \omega^{1}\wedge\omega^{2}(e_p, e_q) \\
&= \left\langle \nabla_{e_1}(Se_2) - \nabla_{e_2}(Se_1) - S([e_1, e_2]),\ e_i \right\rangle \omega^{1}\wedge\omega^{2}(e_p, e_q)
\end{aligned}
$$

である。

(ii) $\Psi^{n+1}_j = 0$ の計算において、コダッチ方程式(8)を満たしているという仮定より、

$$\langle \nabla_{e_k}(Se_l) - \nabla_{e_l}(Se_k) - S[e_k, e_l],\ e_j \rangle = K\left(T^l T^{n+1} \delta^k_j - T^k T^{n+1} \delta^l_j\right)$$

であることを確認した。$k=1, l=2$ を代入して j を i に置き換えれば、

$$\langle \nabla_{e_1}(Se_2) - \nabla_{e_2}(Se_1) - S[e_1, e_2],\ e_i \rangle = K\left(T^2 T^3 \delta^1_i - T^1 T^3 \delta^2_i\right) \cdots ②$$

である。① に ② を代入すれば、

$$\text{Ⓑ} = -K\left(T^2T^3\delta^1_i - T^1T^3\delta^2_i\right)\omega^1 \wedge \omega^2(e_p, e_q)$$

$$= -K\left(T^2T^3\delta^1_i - T^1T^3\delta^2_i\right)\left(\delta^1_p\delta^2_q - \delta^1_q\delta^2_p\right)$$

※3

$$= -K\left(\underline{T^2T^3\delta^1_i\delta^1_p\delta^2_q - T^2T^3\delta^1_i\delta^1_q\delta^2_p} \ \underline{- T^1T^3\delta^2_i\delta^1_p\delta^2_q + T^1T^3\delta^2_i\delta^1_q\delta^2_p}\right)$$

$$= -K\left(\underline{T^2T^3\delta^i_p\delta^2_q - T^2T^3\delta^i_q\delta^2_p} \ \underline{- T^1T^3\delta^i_q\delta^1_p + T^1T^3\delta^i_p\delta^1_q}\right)$$

※4

$$= -K\left(T^qT^3\delta^i_p - T^pT^3\delta^i_q\right)$$

$= -$ Ⓓ である。

※3 示したいこと：$T^2T^3\delta^1_i\delta^1_p\delta^2_q - T^2T^3\delta^1_i\delta^1_q\delta^2_p = T^2T^3\delta^i_p\delta^2_q - T^2T^3\delta^i_q\delta^2_p$

$- T^1T^3\delta^2_i\delta^1_p\delta^2_q + T^1T^3\delta^2_i\delta^1_q\delta^2_p = - T^1T^3\delta^i_q\delta^1_p + T^1T^3\delta^i_p\delta^1_q$

- 上式(赤色部分)を示す

  - $(p, q) = (1, 1)$ の場合

    左辺：$0 - 0 = 0$

    右辺：$0 - 0 = 0$ ok

  - $(p, q) = (1, 2)$ の場合

    左辺：$T^2T^3\delta^1_i - 0 = T^2T^3\delta^1_i$

    右辺：$T^2T^3\delta^i_1 - 0 = T^2T^3\delta^1_i$ ok

  - $(p, q) = (2, 1)$ の場合

    左辺：$0 - T^2T^3\delta^1_i = -T^2T^3\delta^1_i$

    右辺：$0 - T^2T^3\delta^i_1 = -T^2T^3\delta^1_i$

    ok

  - $(p, q) = (2, 2)$ の場合

    左辺：$0 - 0 = 0$

    右辺：$T^2T^3\delta^i_2 - T^2T^3\delta^i_2 = 0$ ok

  よって、赤色部分の等式が成り立つ。

- 青色部分の等式も、同様に成り立つことが確認できる。

※4 示したいこと：$T^2T^3\delta^i_p\delta^2_q + T^1T^3\delta^i_p\delta^1_q = T^qT^3\delta^i_p$

$-T^2T^3\delta^i_q\delta^2_p - T^1T^3\delta^i_q\delta^1_p = -T^pT^3\delta^i_q$

- 上式（青色部分）を示す

∘ $(p, q) = (1, 1)$ の場合

左辺：$0 + T^1T^3\delta^i_1$

右辺：$T^1T^3\delta^i_1$ ok

∘ $(p, q) = (1, 2)$ の場合

左辺：$T^2T^3\delta^i_1 + 0$

右辺：$T^2T^3\delta^i_1$ ok

∘ $(p, q) = (2, 1)$ の場合

左辺：$0 + T^1T^3\delta^i_2$

右辺：$T^1T^3\delta^i_2$ ok

∘ $(p, q) = (2, 2)$ の場合

左辺：$T^2T^3\delta^i_2 + 0$

右辺：$T^2T^3\delta^i_2$ ok

よって、青色部分の等式が成り立つ。

- 赤色部分の等式も同様に成り立つことが確認できる。

以上より、$\Psi^i_3(e_p, e_q)$ は

$$
\begin{aligned}
\Psi^i_3(e_p, e_q) &= A + B + C + D \\
&= A - D - A + D \\
&= 0 \text{ である.}
\end{aligned}
$$

$\Psi^i_3(e_p, e_q) = -\Psi^3_i(e_p, e_q)$ より、$\Psi^3_i(e_p, e_q) = 0$ も成り立つ。

∴ (i) から (vii) より、$\Psi = d\Omega + \Omega \wedge \Omega = 0$ を示した。■

$$\begin{cases} \mathcal{F}_u = \mathcal{F}U \\ \mathcal{F}_v = \mathcal{F}V \end{cases}$$

$$U_v - V_u = UV - VU$$