

前回の続き(命題3.7まで示した)

Theorem(再掲)

定理3.3

V をn次元の单連結なりーマン多様体とし、 ds^2 を V の計量として、さらに

∇ を V のリーマン接続(ビタビタ接続)とする。 S を対称作用素 $S_g: T_g V \rightarrow T_g V$ の場として、 T を V 上のベクトル場とし、 ν を $\|T\|^2 + \nu^2 = 1$ を満たすような V 上の滑らかな関数とする。

仮定

$M^n = S^n$ または $M^n = H^n$ とする。組 (ds^2, S, T, ν) が $M^n \times R$ に対するガウス方程式とコダッチ方程式を満たし、さらに以下2つの方程式を満たしていると仮定する:

$$\nabla_X T = \nu S X \quad d\nu(X) = -\langle SX, T \rangle$$

このとき、 $f: V \rightarrow M^n \times R$ という等長的のはめ込みが存在し、 f に関する法ベクトル N と対応する形作用素が次を満たす:

$$df \circ S \circ df^{-1} - \frac{\partial}{\partial t} = df(T) + \nu N$$

加えて、このはめ込みは $M^n \times R$ の大域的な M^n と R の向きを保つ等長変換を除いて一意である。

3.3 の proof

$\mathcal{Y}_0 \in V, A \in Z(\mathcal{Y}), t_0 \in \mathbb{R}$ とする。

V 上で \mathcal{Y}_0 の近傍における局所正規直交フレーム (e_1, \dots, e_n) を考える。

proposition 3.7 より、以下を満たす一意な写像 $A: U_1 \rightarrow SO^+(\mathbb{E}^{n+2})$ が存在する。

- $A^{-1}dA = \Omega$
- $\forall \mathcal{Y} \in U_1, A(\mathcal{Y}) \in Z(\mathcal{Y}) \left(= \text{行列 } Z \in SO^+(\mathbb{E}^{n+2}) \text{ の内、最終行の係数が } T^B(\mathcal{Y}) \text{ であるようなものの集合} \right)$
- $A(\mathcal{Y}_0) = A_0$

(ただし、 U_1 は \mathcal{Y}_0 の近傍であり、単連結とする)

- $f^0 := A_0^0, f^i := A_0^i (i=1, \dots, n)$ として、 f^{n+1} を $U_1 (\subset V)$ 上の一意な関数として

- $df^{n+1} = \eta$ (1次微分形式)
- $f^{n+1}(\mathcal{Y}_0) = t_0 \in \mathbb{R}$

を満たすとする。 ($f^{n+1} \in \mathbb{R}$)

これにより、写像 $f: U_1 \rightarrow \mathbb{E}^{n+2}$ を次のように定義する。 $A_0^{n+1} = T^0 = 0$ であるため、

(i) $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ の場合

$$(f^0)^2 + \sum_{i=1}^n (f^i)^2 = \sum_{\alpha=0}^{n+1} (A_0^\alpha)^2 = 1. \quad (f^0, f^1, \dots, f^n \text{ の値は常に } \mathbb{S}^n \text{ 上にある})$$

(ii) $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ の場合

$$\begin{aligned} -(f^0)^2 + \sum_{i=1}^n (f^i)^2 &= -(A_0^0)^2 + \sum_{i=1}^n (A_0^i)^2 + (A_0^{n+1})^2 \\ &= -1. \quad (f^0, f^1, \dots, f^n \text{ の値は常に } \mathbb{H}^n \text{ 上にある}) \end{aligned}$$

どちらのケースも $(f^0, f^1, \dots, f^n) \in M^n$ であり、 f の値は $M^n \times \mathbb{R}$ に含まれる。

f が埋め込みであることを確認する。

- $A^{-1}dA = \Omega \iff dA = A\Omega$ であるため、 $d < n+1$ に対して次が成り立つ。

$$df^{\alpha}(e_k) = d(A_0^{\alpha}(e_k)) \quad \Rightarrow dA = A\Omega \text{ 代入}$$

$$A_0^{\alpha} = \sum_{j=1}^n A_j^{\alpha} \omega_j^0(e_k) + A_{n+1}^{\alpha} \omega_{n+1}^0(e_k) \quad (\because \omega_0^0 = 0 \text{ および } \sum \text{の添字範囲を } 1 \text{ から } n+1 \text{ に} \text{ して良い})$$

$$= \sum_{j=1}^n A_j^{\alpha} (\delta_j^k - T^j T^k) - A_{n+1}^{\alpha} T^{n+1} T^k$$

$$= \sum_{j=1}^n A_j^{\alpha} \delta_j^k - T^k \sum_{j=1}^n A_j^{\alpha} T^j - A_{n+1}^{\alpha} T^{n+1} T^k$$

$$\begin{aligned} \quad \quad \quad T^j &= A_j^{n+1} \\ T^{n+1} &= A_{n+1}^{n+1} \quad \text{代入} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= A_K^\alpha - T^k \sum_{j=1}^n A_j^\alpha A_{j+1}^{n+1} - T^k A_{n+1}^{n+1} A_{n+1}^\alpha \\
 &= A_K^\alpha - T^k \sum_{\beta=0}^{n+1} A_\beta^\alpha A_{\beta+1}^{n+1} \\
 &= A_K^\alpha
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow A$ は直交行列 である \Leftrightarrow 各列が互いに直交している
 $\Leftrightarrow \sum_{\beta=0}^{n+1} A_\beta^\alpha A_{\beta+1}^{n+1} = 0$ ($\alpha \neq n+1$)

$$df^{n+1}(e_k) = f(e_k) = T^k = A_K^{n+1}$$

f の定義

これにより、 $df(e_k)$ は行列 A の k 番目の列によって与えられていることが分かる。

$$\left[\begin{array}{cccc} A_0^0 & \cdots & A_k^0 & \cdots & A_{n+1}^0 \\ A_0^1 & \cdots & A_k^1 & \cdots & A_{n+1}^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_0^{n+1} & \cdots & A_k^{n+1} & \cdots & A_{n+1}^{n+1} \end{array} \right] \quad df(e_k)$$

$$df = \left[\begin{array}{cccc} df^0(e_0) & df^0(e_1) & \cdots & df^0(e_n) \\ df^1(e_0) & df^1(e_1) & \cdots & df^1(e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ df^{n+1}(e_0) & df^{n+1}(e_1) & \cdots & df^{n+1}(e_n) \end{array} \right]_{n+2 \times n}$$

$$n=2$$

$$\begin{bmatrix} A_0^0 & A_1^0 & A_2^0 & A_3^0 \\ A_0^1 & A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_0^2 & A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_0^3 & A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{bmatrix}$$

$$\alpha=0 \text{ のとき:}$$

$$\sum_{\beta=0}^{n+1} A_\beta^0 A_\beta^3 = A_0^0 A_0^3 + A_1^0 A_1^3 + A_2^0 A_2^3 + A_3^0 A_3^3 = 0$$

- 行列 A が可逆であるため、 df はランク n を持ち、 f ははめ込みである。

$$\det A \neq 0 \quad (\because A \in SO^+(\mathbb{E}^{n+2}) \text{ 且み}, \det A = 1)$$

$\Leftrightarrow df$ が単射

$\Leftrightarrow df$ が n 本の線形独立な列ベクトル

また、 $A \in SO^+(\mathbb{E}^{n+2})$ であるため、すなわち、 f は等長変換である。

$$\langle df(e_p), df(e_q) \rangle = S_{pq}^p \text{ である。}$$

$$= \langle A_p, A_q \rangle$$

$$= S_{pq}^p \quad (\because \text{行列 } A \text{ は直交行列} \Leftrightarrow \text{各列ベクトルは ONB})$$

- 行列 $A(\gamma)$ の列は \mathbb{E}^{n+2} の正規直交基底を構成する。

1 から n 列目は $T_{f(\gamma)} f(V)$ 上の正規直交基底を構成し、

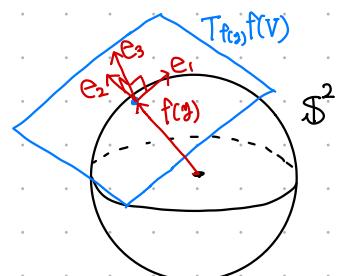
0. 列目は $M^n \times \{0\}$ 上への $f(\gamma)$ の射影を構成し、

\hookrightarrow 高さ 0 の部分空間における単位法ベクトル $\bar{N}(f(\gamma))$

$n+1$ 列目は点 $f(\gamma)$ における $M^n \times \mathbb{R}$ 内の $f(V)$ と法な単位法ベクトル $N(f(\gamma))$ である。

$$A(\gamma) = \left[\begin{array}{ccccc} | & A(\gamma)_0^0 & A(\gamma)_0^1 & \cdots & A(\gamma)_0^{n+1} \\ | & A(\gamma)_1^0 & A(\gamma)_1^1 & \cdots & A(\gamma)_1^{n+1} \\ | & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ | & A(\gamma)_n^0 & A(\gamma)_n^1 & \cdots & A(\gamma)_n^{n+1} \\ | & A(\gamma)_{n+1}^0 & A(\gamma)_{n+1}^1 & \cdots & A(\gamma)_{n+1}^{n+1} \end{array} \right]$$

$\bar{N}(f(\gamma)) \quad T_{f(\gamma)} f(V) \text{ を張る} \quad N(f(\gamma))$



• $X_j := df(e_j) (= [A_j^0, A_j^1, \dots, A_j^{n+1}])$ とする。内積 $\langle dX_j(X_k), N \rangle$ は

$$\langle dX_j(X_k), N \rangle = \sum_{\alpha=0}^{n+1} dA_j^\alpha(e_k) A_{n+1}^\alpha \quad \text{dA = AΩ 代入}$$



$$= \sum_{\alpha=0}^{n+1} \left\{ \sum_{r=0}^{n+1} A_r^\alpha \omega_j^r(e_k) \right\} A_{n+1}^\alpha \quad \begin{array}{l} \cdot A \text{ は直交行列} \Leftrightarrow A_r \times A_{n+1} \text{ は ONB} \\ \cdot A \text{ は直交行列} \Leftrightarrow A_{n+1} \text{ が単位ベクトル} \\ \Leftrightarrow \sum_{\alpha=0}^{n+1} A_{n+1}^\alpha A_{n+1}^\alpha = 1. \end{array}$$

$$= \omega_j^{n+1}(e_k)$$

$$= \langle S(e_k), e_j \rangle.$$

$$E_j = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

※

$$df(e_j) = \sum_{\alpha=0}^{n+1} A_j^\alpha E_\alpha \quad \text{よし}, \quad dX_j(X_k) \text{ は}$$

X_j

$$dX_j(X_k) = d \left(\sum_{\alpha=0}^{n+1} A_j^\alpha E_\alpha \right) \left(\sum_{\beta=0}^{n+1} A_k^\beta E_\beta \right)$$

$$\begin{bmatrix} A_0^0 & A_1^0 & A_2^0 & A_3^0 \\ A_0^1 & A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_0^2 & A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_0^3 & A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{bmatrix}$$

$df(e_0)$

N

$$= \sum_{\alpha=0}^{n+1} \sum_{\beta=0}^{n+1} d(A_j^\alpha) E_\alpha (A_k^\beta E_\beta)$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{n+1} \sum_{\beta=0}^{n+1} (dA_j^\alpha) E_\alpha (A_k^\beta E_\beta) + \sum_{\alpha=0}^{n+1} \sum_{\beta=0}^{n+1} A_j^\alpha d(E_\alpha) (A_k^\beta E_\beta)$$

$$N = \sum_{\alpha=0}^{n+1} A_{n+1}^\alpha E_\alpha.$$

$$dN = \sum_{(\alpha_k)} A_{n+1}^\alpha G_k$$

であるので、内積 $\langle dX_j(X_k), N \rangle$ は

$$\langle dX_j(X_k), N \rangle = \left\langle \sum_{\alpha=0}^{n+1} \sum_{\beta=0}^{n+1} (dA_j^\alpha) E_\alpha (A_k^\beta E_\beta) + \sum_{\alpha=0}^{n+1} \sum_{\beta=0}^{n+1} A_j^\alpha d(E_\alpha) (A_k^\beta E_\beta), \sum_{\alpha=0}^{n+1} A_{n+1}^\alpha E_\alpha \right\rangle$$

E_α E_β

E_α E_β

E_α

$$\langle e_\beta, e_\alpha \rangle = \delta_\beta^\alpha$$

$$\langle E_\beta, E_\alpha \rangle = \delta_\beta^\alpha$$

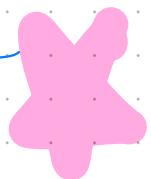
$$= \left\langle \sum_{\alpha=0}^{n+1} \sum_{\beta=0}^{n+1} (dA_j^\alpha) E_\alpha (A_k^\beta E_\beta), \sum_{r=0}^{n+1} A_{n+1}^r E_r \right\rangle$$

$$+ \left\langle \sum_{\alpha=0}^{n+1} \sum_{\beta=0}^{n+1} A_j^\alpha d(E_\alpha) (A_k^\beta E_\beta), \sum_{r=0}^{n+1} A_{n+1}^r E_r \right\rangle$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{n+1} \sum_{\beta=0}^{n+1} (dA_j^\alpha) E_\alpha A_k^\beta A_{n+1}^\beta$$

$$+ \left\langle \sum_{\alpha=0}^{n+1} \sum_{\beta=0}^{n+1} A_j^\alpha d(E_\alpha) (A_k^\beta E_\beta), \sum_{r=0}^{n+1} A_{n+1}^r E_r \right\rangle$$

N



$$\langle dX_j(X_k), N \rangle$$

$$= X_k \langle X_j, N \rangle - \langle X_j, dN(X_k) \rangle$$

X_k は式変形しない。

これは、 $M^n \times \mathbb{R}$ における $f(V)$ の形作用素が $\underline{df \circ S \circ df^{-1}}$ であることを意味している。… ①

∴

元の 接空間 $T_{f(V)} f(V)$ にある ベクトル X_k を、 V の 接空間 $T_V(V)$ に写す



$T_V(V)$ 上で 形作用素 S を適用させる



df を適用して、再び $T_{f(V)} f(V)$ にもどす

$$X_k \mapsto df^{-1}(X_k) \mapsto S(df^{-1}(X_k)) \mapsto df(S(df^{-1}(X_k)))$$

- 最後に、正規直交 フレーム (N, X_1, \dots, X_n, N) における垂直ベクトル $\frac{\partial}{\partial t} = E_{n+1}$ の係数は、行列 A の最終行によって与えられる。

任意の $j \in U_2$ に対して $A(j) \in Z(j)$ であるため。

$$\frac{\partial}{\partial t} = \sum_{j=1}^n T^j X_j + T^{n+1} N = df(T) + \lambda N \quad \dots \quad ②$$

接成分 法成分

$(M^n \times \mathbb{R} \text{ 上の})$

$(df: V \text{ 上の接ベクトル場 } T \text{ を } M^n \times \mathbb{R} \text{ 上の接空間に写す})$

$$X_j = df(e_j)$$

- 次に、局所的なはめ込みが $M^n \times \mathbb{R}$ の グローバルな 等長変換を除いて 一意であることを示す。
 $\tilde{f}: U_3 \rightarrow M^n \times \mathbb{R}$ を定理の結論を満たす別のはめ込みとする (U_3 : j_0 を含む U_1 の单連結な近傍)。

フレーム (\tilde{X}_β) を次のように定義する：

- $\tilde{X}_j = d\tilde{f}(e_j)$
- \tilde{X}_{n+1} は $M^n \times \mathbb{R}$ における $\tilde{f}(V)$ の法ベクトル
- \tilde{X}_0 は \mathbb{E}^{n+2} 内で $M^n \times \mathbb{R}$ と法なベクトル

また、 \tilde{A} を フレーム (E_α) 内の (\tilde{X}_β) の座標の行列とする。

$M^n \times \mathbb{R}$ の direct な 等長変換を除いて、次のように仮定できる：

- $f(j_0) = \tilde{f}(j_0)$.
- フレーム $(X_\beta(j_0))$ と $(\tilde{X}_\beta(j_0))$ が一致する。つまり $A(j_0) = \tilde{A}(j_0)$ 初期条件の一致

また、 T^α が X と \tilde{X} で同じ値であるため、この等長変換 \tilde{f} は $\frac{\partial}{\partial t}$ を確定させる。

∴ $\tilde{f}(j) \tilde{f}(j)$ (同じ点 $j \in V$ に対応する、異なるはめ込みによる点)

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial}{\partial t}, X_j \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^n T^k X_k + T^{n+1} N, X_j \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=1}^n T^k X_k, X_j \right\rangle + \langle T^{n+1} N, X_j \rangle \end{aligned}$$

$$= \langle T^j X_j, X_j \rangle + \langle T^{n+1} N, X_j \rangle$$

$$= T^j$$

$$\text{同様に, } \langle \frac{\partial}{\partial t}, N \rangle = T^{n+1}$$

$$f(y_0) = \tilde{f}(y)$$

$$\text{よって, } T^j = \langle \frac{\partial}{\partial t}, X_j \rangle = \langle \frac{\partial}{\partial t}, df(e_j) \rangle = \langle \frac{\partial}{\partial t}, d\tilde{f}(e_j) \rangle = \tilde{T}^j$$

$$T^{n+1} = \langle \frac{\partial}{\partial t}, N \rangle = \langle \frac{\partial}{\partial t}, X_{n+1} \rangle = \langle \frac{\partial}{\partial t}, \tilde{X}_{n+1} \rangle = \tilde{T}^{n+1} \quad \therefore T^a = \tilde{T}^a \quad (a=1,2,\dots,n+1)$$

$$X_B = \tilde{X}_B$$

行列 A と \tilde{A} はそれぞれ、 $A^{-1}dA = \Omega$ および $\tilde{A}^{-1}d\tilde{A} = \Omega$ を満たす。(2.3節参照)

さらに、 $A(y), \tilde{A}(y) \in Z(y)$ であり、 $A(y_0) = \tilde{A}(y_0)$ であるため、命題3.7における方程式の解の一意性から、 $A(y) = \tilde{A}(y)$ が成立つ。

これらの行列の 0番目の列を考えると、次の関係が得られる：

$$\circ f^i = \tilde{f}^i$$

$$\circ f^0 = \tilde{f}^0. \quad (f^{n+1} \text{を除く } 0 \text{番目の列が一致する})$$

最後に、 $df^{n+1} = \gamma = d\tilde{f}^{n+1}$ であり、 $f^{n+1}(y_0) = \tilde{f}^{n+1}(y_0)$ である。したがって、微分方程式の解の一意性より、 $f^{n+1} = \tilde{f}^{n+1}$ である。

以上より、 U_3 上で $f = \tilde{f}$ が示される。(局所的なはめ込み f が一意である)

- 最後に、局所的なはめ込み f が V 全体に対して一意的に拡張できることを示す。

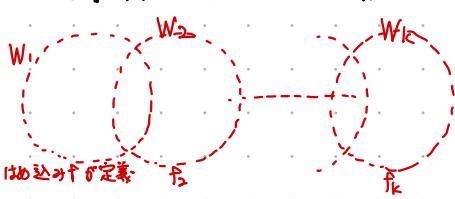
$y_1 \in V$ とする。このとき、ある曲線 $\Gamma : [0, 1] \rightarrow V$ が存在して、

$$\Gamma(0) = y_0 \quad \text{かつ} \quad \Gamma(1) = y_1$$

を満たす。曲線 Γ の各点には近傍が存在し、そこでは定理の性質を満たす等長はめ込みが存在する。

この近傍の族から、曲線 Γ を覆う有限個の近傍族 (W_1, \dots, W_p) を取り出すことができる。

$W_1 = U_1$ とする。すると、先程の一意性の議論により、はめ込み f を各 W_k に対して一意的に拡張できる。特に、 $f(y_1)$ が定義される。



- 最初の近傍 W_1 でははめ込みがすでに定義されている

↓

- W_1 と重なる次の近傍 W_2 では、一意性により f を拡張できる。

↓

- 同様に W_2, W_3, \dots, W_p と f の定義域を拡張できる

さらに、 V が单連結であるという仮定より、 $f(y_1)$ の値は y_0 と y_1 を結ぶ Γ の選び方に依存しない。任意の閉じた曲線を一点にできる

Proposition 3.8

組 (ds^2, S, T, ν) が両立条件を満たし、かつはめ込み $f: \sum \rightarrow M^n \times \mathbb{R}$ に
対応するならば、以下の 3 組もまた両立条件を満たしている

- $(ds^2, -S, T, -\nu) \cdots ①$
- $(ds^2, -S, -T, \nu) \cdots ②$
- $(ds^2, S, -T, \nu) \cdots ③$

また、これらは $M^n \times \mathbb{R}$ の等長変換 σ を用いたはめ込み $\sigma \circ f$ に対応する。
 σ は以下の性質を持つものとする。

- ① に対応する σ の場合、 M^n の向きを反転させて、
 R の向きは保つ。
- ② に対応する σ の場合、 M^n の向きは保ち、
 R の向きを反転させる。
- ③ に対応する σ の場合、 M^n と R どちらも向きを反転させる。

Proof

① の場合を考える。この時の組を $(ds^2, \hat{S}, \hat{T}, \hat{\nu})$ とする。

$\hat{f} := \sigma \circ f$ とする。このとき、 $M^n \times \mathbb{R}$ と法なベクトルは $\sigma \circ N$ である。

また、仮定より σ は $M^n \times \mathbb{R}$ の向きを反転させるため、「 $M^n \times \mathbb{R}$ 内の $\hat{f}(V)$ 」と法なベクトルは、
 $\hat{N} = -\sigma \circ N$ である。これにより、 $\hat{S} = -S$ である。
※1

また、定理 3.3 より $\frac{\partial}{\partial t} = df(T) + \nu N$ であり、さらに σ は R の向きを変えないため、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \sigma \circ df(T) + \nu \sigma \circ N \\ &= d\hat{f}(T) - \nu \hat{N}. \end{aligned}$$

$\frac{\partial}{\partial t}$ の符号

したがって、 $\hat{T} = T$ $\hat{\nu} = -\nu$ であることが分かる。

② の場合、 $M^n \times \mathbb{R}$ の向きを反転させるため $\hat{S} = -S$ である。

R の向きが反転するので、微分方向としては $-\frac{\partial}{\partial t}$ が対応する。

よって、 $\hat{T}, \hat{\nu}$ は ① の結果を反転させた $\hat{T} = -T$, $\hat{\nu} = \nu$ となる。

③の場合、 $M^n \times \mathbb{R}$ の両方の向きを反転させるため、結果として $M^n \times \mathbb{R}$ の向きは変わらない。よって、 $\hat{N} = \sigma \circ N$ 、 $\hat{S} = S$ である。

R の向きが反転するので、微分方向としては $-\frac{\partial}{\partial t}$ が対応する。よって、

$$\begin{aligned}-\frac{\partial}{\partial t} &= \sigma \circ df(T) + \nu \sigma \circ N \\ &= d\hat{f}(T) + \nu \hat{N}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} = d\hat{f}(-T) - \nu \hat{N}.$$

よって、 $\hat{T} = -T$ 、 $\hat{\nu} = -\nu$ である。

以上より、命題3.8 を示した ■

*1 形作用素 $S(r) = -\nabla_r(N)$ であるので、 \hat{S} は

$$\begin{aligned}\hat{S}(r) &= -\nabla_r(\hat{N}) \quad \text{→ } \hat{N} \text{ の定義} \\ &= -\nabla_r(-\sigma \circ N) \quad \text{→ 実数に関する線形性} \\ &= \nabla_r(\sigma \circ N) \cdots ①\end{aligned}$$

ここで、 $\nabla_r(\sigma \circ N) = \sigma(\nabla_r N)$ である。… ②

*2 で示す

$S(r) = -\nabla_r(N) \Leftrightarrow \nabla_r(N) = -S(r) \cdots ③$ であるため、①に代入して

$$\begin{aligned}\hat{S}(r) &= \nabla_r(\sigma \circ N) \quad \text{→ ②より} \\ &= \sigma(\nabla_r N) \quad \text{→ ③より} \\ &= \sigma(-S(r)) \\ &= -\sigma(S(r)).\end{aligned}$$

$S(r)$ と $\hat{S}(r)$ の出力先の空間が同じとみなせるので、 $\hat{S}(r) = -S(r)$ である。

$T_{\sigma(r)}^*(M^n \times \mathbb{R})$

2 $\tilde{\nabla}_r(\sigma(x)) := \sigma(\nabla_r x)$ とした時に、 $(\sigma(x) = \sigma_(x), \quad (\underline{\sigma}_*(X))(\sigma(p)) := (\sigma(X))_p(p))$

$\tilde{\nabla}$ がレビチタ接続の性質を満たしていれば、レビチタ接続の一意性より

〔・計量と両立
・ねじれ〇〕

$$\tilde{\nabla}_r(\sigma(x)) = \nabla_r(\sigma(x))$$

となる。

(i) $\tilde{\nabla}$ が計量と両立の性質を満たすか確認。

$$(示したいこと): X(\langle \sigma(Y), \sigma(Z) \rangle) = \langle \tilde{\nabla}_X(\sigma(Y)), \sigma(Z) \rangle + \langle \sigma(Y), \tilde{\nabla}_X(\sigma(Z)) \rangle$$

$$(左辺): X(\langle \sigma(Y), \sigma(Z) \rangle) = X(\langle Y, Z \rangle) \cdots ④$$

$\because \sigma$ は等長変換なので内積が不变

$$(右辺): \langle \tilde{\nabla}_X(\sigma(Y)), \sigma(Z) \rangle + \langle \sigma(Y), \tilde{\nabla}_X(\sigma(Z)) \rangle \quad \text{④の定義}$$

$$= \langle \sigma(\nabla_X Y), \sigma(Z) \rangle + \langle \sigma(Y), \sigma(\nabla_X Z) \rangle$$

$\because \sigma$ は等長変換なので内積が不变

$$= \langle \nabla_X(Y), Z \rangle + \langle Y, \nabla_X(Z) \rangle \cdots ⑤$$

④, ⑤について、 ∇ はレビチタ接続であるので、 $④ = ⑤$ が成り立つ。 $\therefore \tilde{\nabla}$ は計量を両立する

(ii) ねじれ〇を満たすか確認。

$$(示したいこと): \tilde{\nabla}_X(\sigma(Y)) - \tilde{\nabla}_Y(\sigma(X)) = [\sigma(X), \sigma(Y)]$$

定義より $\tilde{\nabla}_X(\sigma(Y)) = \sigma(\nabla_X Y)$ だったので、

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X(\sigma(Y)) - \tilde{\nabla}_Y(\sigma(X)) &= \sigma(\nabla_X Y) - \sigma(\nabla_Y X) \\ &= \sigma(\nabla_X Y - \nabla_Y X) \cdots ⑥ \end{aligned}$$

ここで、 ∇ はレビチタ接続であるので $\nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) = [X, Y]$ であるので、⑥へ代入して

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X(\sigma(Y)) - \tilde{\nabla}_Y(\sigma(X)) &= \sigma([X, Y]) \quad \text{④の定義} \\ &= [\sigma(X), \sigma(Y)] \end{aligned}$$

よって、 $\tilde{\nabla}$ はレビチタ接続であり、レビチタ接続の一意性より $\nabla = \tilde{\nabla}$ である。

$\therefore \sigma(\nabla_X Y) = \nabla_X(\sigma(Y))$ が成り立つ。

*2月末までに、追跡を言うこと