前回の続き(命題3.1後)

Corollary 3.13 まで

- ds_f^2 を、C^r級微分可能な一般化カスプ辺(cuspital edge) $f \in \mathcal{G}^r(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$ の誘導計量とする。
  さらに、ds_f^2 が正定値であるような点で定義されるガウス曲率 $\hat{K} := \lambda K$ を定義する。(式(1.1)参照)

→ (introduction でも述べたように) この $\hat{K}$ は U 上で C^r級関数に拡張することが出来、また $\check{K} := vK$ も C^r級関数として考えることが出来る。

Corollary 3.2

次の2つの主張が成り立つ。

(1) $\hat{K}(u,0) \neq 0 \iff \check{K}(u,0) \neq 0$ である。

(2) $\hat{K}(u,0) = 0$ が成り立つとき、

$$\hat{K}_u(u,0) \neq 0 \iff \check{K}_u(u,0) \neq 0$$

である。

Proof

$$\begin{cases} \lambda = v\lambda_0 \\ \lambda_0 = \left| \left(\mathbb{C}'(u) + \frac{v^2}{2}\hat{\xi}_u \right) \times \left(\hat{\xi} + \frac{v}{2}\hat{\xi}_v \right) \right| \end{cases}$$

式(3.3)より $\lambda = v\lambda_0$ であり、$\lambda_0(u,0) \neq 0$ である。ここで $\check{K} = vK$ とおくと、

$$\hat{K} = \lambda K = v\lambda_0 K = \lambda_0 \check{K}$$

である。よって、$\underline{\hat{K}(u,0) = \underbrace{\lambda_0(u,0)}_{= |\mathbb{C}'(u) \times \hat{\xi}(u,0)| \neq 0}\check{K}(u,0)}$ ☆ であるので主張(1)は自明である。

次に、$\hat{K} = \lambda_0 \check{K}$ を u で微分すると、

$$\hat{K}_u = (\lambda_0)_u \check{K} + \lambda_0 \check{K}_u$$

となる。$\hat{K}(u,0) = 0$ ならば $\check{K}(u,0) = 0$ であるため、$\hat{K}_u(u,0) = \underbrace{\lambda_0(u,0)}_{= |\mathbb{C}'(u) \times \hat{\xi}(u,0)| \neq 0}\check{K}(u,0)$ となり、主張(2)が従う。∎

∵ 式☆より

Remark 3.3

一般化カスプ辺 f に対して、

$$\nu(u,v) := \frac{(2\mathbb{c}'(u) + v^2 \hat{\xi}_u(u,v)) \times (2\hat{\xi}(u,v) + v\hat{\xi}_v(u,v))}{|(2\mathbb{c}'(u) + v^2 \hat{\xi}_u(u,v)) \times (2\hat{\xi}(u,v) + v\hat{\xi}_v(u,v))|}$$

は U 上の C^r 級単位法ベクトル場を与えるので、f は フロンタル写像 (frontal map) である。

↳ f がフロンタルである
$\Longleftrightarrow$ $\exists \nu$ (fに沿う単位ベクトル場) s.t.
$\langle df(X_p), \nu(p) \rangle = 0 \quad (\forall p \in U, \forall X_p \in T_p(U))$

Definition 3.4 ([12, Definition 3.7] 参照)

$f \in \mathcal{G}^r(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, C)$ のパラメータ表示 (u,v) が 適合座標系 (adapted coordinate system) である

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 次の2条件が成立する

(1) $f_v(u,0) = 0$ かつ $|f_u(u,0)| = |f_{vv}(u,0)| = 1$

(2) $f_{vv}(u,0)$ が $f_u(u,0)$ と 垂直 (perpendicular) である。

適合座標系の存在を示すために、曲線 $\mathbb{C}(u)$ が実解析的である仮定の下で次の補題を準備する。

Lemma 3.5 ([5, proposition 6] 参照)

ds^2 を開集合 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された C^ω 級微分可能 Kossowski 計量とする。
ds^2 に関して実解析的な特異曲線 $\gamma : J \to U$ が存在して

$$ds^2(\gamma'(t), \gamma'(t)) > 0 \quad (t \in J) \qquad (3.4)$$

が成立すると仮定する。
この時、各 $t_0 \in J$ に対して、$(t_0, 0)$ を含む C^ω 級微分可能な局所座標系 $(V; u, v)$ が存在して、$V \subset U$ かつ 第一基本形式

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

の係数 E, F, G が 次の3条件を満たす。

(1) $\gamma(u) = (u, 0)$、$E(u,0) = 1$ および $E_v(u,0) = 0$ が u 軸に沿って成立する。

(2) $F(u,v)=0$ が $V\ (\subset U)$ 上で成立する.

(3) V 上に C^{ω} 級（実解析的な）関数 G_0 が存在して、

- $G(u,v) = \dfrac{v^2 G_0(u,v)}{2}$
- $G_0(u,0) = 2$

が成立する.

Proof

[5, proposition 6] を点 $(t_0, 0)$ に適用することで、条件を満たす局所座標系が得られる. ▨

Corollary 3.6

各特異点 P および C に沿った各一般化カスプ辺 $f \in \mathcal{G}^{\omega}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$ に対して、任意の P の局所座標近傍 $(V; u, v)$ が存在して、f の V への制限 $f|_V$ は適合座標系によってパラメータ表示される.

適合座標系: $\begin{cases} \cdot\ f_v(u,0)=0,\ |f_u(u,0)| = |f_{vv}(u,0)| = 1 \\ \cdot\ f_{vv}(u,0) \text{ と } f_u(u,0) \text{ が垂直} \end{cases}$

Proof

f の第一基本形式 ds^2_P に対して補題3.5を適用する. すなわち、点 P の近傍でパラメータ変換

$$(x,y) \longmapsto (u(x,y),\ v(x,y))$$

$f(u,v) = C(u) + \frac{v^2}{2}\xi(u,v)$

を施すことで、新たなパラメータ (u,v) を用いて式(3.1)の形で定義される $f(u,v)$ が得られ、f の第一基本形式 ds^2_P に関して補題3.5の(1),(2),(3)を満たす座標系が得られる.

この新たな座標系 (u,v) が望むもの（$f|_V$ が適合座標系でパラメータ表示されること）であることは、次のように示される.

まず、u 軸が ds^2_P の特異集合であるため、

$v=0$

$$f_v(u,0) = 0 \qquad \cdots \text{Def 3.4 条件(1)}$$

である. 一方で、次の2式が成り立つ.

3.5 (1) より

$$f_u(u,0)\cdot f_u(u,0) = E(u,0) = 1 \qquad \cdots \text{Def 3.4 条件(1)}$$

3.5 (2) より

$$f_{vv}(u,0)\cdot f_u(u,0) = \left.\frac{\partial F(u,v)}{\partial v}\right|_{v=0} = 0 \qquad (3.5) \qquad \cdots \text{Def 3.4 条件(2)}$$

$\frac{\partial}{\partial v}(f_u\cdot f_v) = f_{uv}\cdot f_v + f_u\cdot f_{vv}$

最後に、次が成立する.

$$f_{vv}(u,0)\cdot f_{vv}(u,0) = \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 G(u,v)}{\partial v^2}\right|_{v=0} \overset{※}{=} \frac{G_0(u,0)}{2} = 1. \quad \cdots \text{Def 3.4 条件 (1)}$$

$G = f_v\cdot f_v$, $G_v = 2 f_v\cdot f_{vv}$

$G_{vv} = 2(f_{vv}\cdot f_{vv} + f_v\cdot f_{vvv})$

(※ 3.5(3)より、$G(u,v) = \frac{v^2}{2}G_0(u,v) \Rightarrow G_{vv}|_{v=0} = \Big(G_0 + vG_{0\_v} + vG_0\cdot G_{0\_v} + vG_0\cdot G_{0\_v} + \frac{v^2}{2}G_{0\_vv}\Big)\Big|_{v=0} = G_0$)

これにより、適合座標系の条件が満たされる. ■

- ここからは、$f(u,v)$ は定義3.4の適合座標系によってパラメータ表示されていると仮定する. すると、u は辺(edge) $C(u) := f(u,0)$ の弧長(arc-length)パラメータとなる.

→ このセクションでは、$C(u)$ の曲率関数 $\kappa(u)$ が(各 u で)正であると仮定する.

これにより、捩率関数 $\tau(u)$ が well-defined となる.

- 単位接ベクトル $e(u) := C'(u)$ (記号 $' = \frac{d}{du}$ とする)と、$C''(u) = \kappa(u)n(u)$ を満たすような単位主法線ベクトル $n(u)$ を取り、$b(u)$ を

$n(u)$ の定義

$$b(u) := e(u)\times n(u)$$

と定める($b(u)$ は $C(u)$ の ~~副~~ 従法線(bi normal)となる).

- $f_{vv}(u,0)$ は $e(u)$ と垂直であるため、

$$f_{vv}(u,0) = \cos\theta(u)n(u) - \sin\theta(u)b(u) \qquad (3.6)$$

と書ける. これをカスプ方向(cuspidal direction)と呼び、イントロダクションでの定義通り、次の4つ

  - $n(u)$ と $b(u)$ により張られる、$C(u)$ を通る平面 $\Pi(C(u))$ を法平面(normal plane)と呼ぶ

  - $\Pi(C(u))$ による f の像の切断面は平面曲線(plane curve)となる. この平面曲線を、$C(u)$ における断面カスプ(sectional cusp)と呼ぶ.

  - ベクトル $f_{vv}(u,0)$ は $C(u)$ における断面カスプの接線方向を指し示す. そのため、$\theta(u)$ をカスプ角度関数(cuspidal angle function)と呼ぶ.

・ $\theta(u)$ を用いることで、(0.4)で与えられているような（fの辺に沿う）特異曲率 κ_s と極限法曲率 κ_ν が表せる.

$$\kappa_s(u) := \kappa(u)\cos\theta(u), \quad \kappa_\nu(u) := \kappa(u)\sin\theta(u) \qquad (u \in J)$$

が成り立つ.

Lemma 3.7 （[16] 参照）

特異曲率 κ_s は 内在的 である. 具体的に、与えられた Kossowski 計量 に関して 特異曲線上で定義される. より正確には、

$$\kappa_s(u) = \frac{-E_{vv}(u,0)}{2} \qquad (3.7)$$

$E = g_u \cdot g_u$
$E_v = 2\, g_{uv} \cdot g_u$
$E_{vv} = \cdots$

が成立する. ここで、(u,v) は 補題3.5 の 座標系 である.

(1) $\gamma(u) = (u,0)$、$E(u,0) = 1$、$E_v(u,0) = 0$. （γ：特異曲線）
(2) $F(u,v) = 0$ が V ($\subset U \subset \mathbb{R}^2$) 上で 成立.
(3) V上に 実解析的 な 関数 G_0 が 存在して、
- $G(u,v) = \dfrac{v^2 G_0(u,v)}{2}$
- $G_0(u,0) = 2$

が成立.

$$\lambda_v = \underbrace{\sqrt{EG_0}}_{\sqrt{2}} + v\,\frac{(EG_0)_v}{2\sqrt{EG_0}}$$

Proof

[16, Proposition 1.8] に示されるように、κ_s は

$\lambda_v > 0$ の仮定.

$$\kappa_s = \frac{-F_v E_u + 2EF_{uv} - EE_{vv}}{2E^{\frac{3}{2}}\lambda_v} \qquad (3.8)$$

と表せる. ここで、(u,v) は u軸が 特異集合 であり、∂_v が null方向 を 指すような 局所座標系 である.
補題3.5 の 座標系 では

- $F = 0$ （つまり、$F_v = 0$、$F_{uv} = 0$）
- $\lambda = v\sqrt{EG_0}$
- $E(u,0) = 1$

が 成り立つ. 式(3.8) へ 実際 に 代入すると、

$$\lambda^2 = EG - F^2 = \frac{v^2 EG_0}{2}$$

$\boxed{G = \dfrac{v^2 G_0}{2},\ F = 0}$ 代入.

$$\lambda = \pm\, v\sqrt{\frac{EG_0}{2}} \quad ?$$

$\lambda_v > 0$ が（暗に）仮定している

$$K_s = \left. \frac{-E(u,v)E_{vv}(u,v)}{2E^{\frac{3}{2}}(u,v)\left\{\sqrt{EG_0} + v\dfrac{(EG_0)_v}{2\sqrt{EG_0}}\right\}} \right|_{v=0}$$

$$= \left. \frac{-E(u,v)E_{vv}(u,v)}{2E^{2}(u,v)\sqrt{G_0(u,v)} + vE(u,v)\dfrac{(EG_0)_v}{\sqrt{G_0(u,v)}}} \right|_{v=0}$$

$$= \frac{-E_{vv}(u,0)}{2\sqrt{2}}$$

?

となる。 ▨

曲線$\mathbb{C}$が実解析的であることを仮定した下で、次の定理を証明する。

Theorem 3.8

$ds^2(\gamma'(t), \gamma'(t)) > 0$

uv平面$\mathbb{R}^2$の開集合Uを$J\times\{0\}$を含む部分集合とする。ds^2を、式(3.4)を満たす実解析的なKossowski計量とする。

曲線$\mathbb{C}$の曲率関数κが至る所で正であり、かつds^2の特異曲線

$$J \ni u \longmapsto (u,0) \in U$$

に沿う特異曲率$\kappa_s(u)$の絶対値$|\kappa_s(u)|$が、各$u\in J$で$\kappa(u)$より小さい(less)とする。

この時、$J\times\{0\}$を含む開部分集合$V\ (\subset U)$上で、次の5条件を満たす実解析的な一般化カスプ辺g_+、g_-が存在する：

(1) 写像$u\mapsto g_+(u,0)$と$u\mapsto g_-(u,0)$は共にCをパラメータ表示し、これは$\mathbb{C}: J\to\mathbb{R}^3$と同じ向きを誘導する。

(2) ds^2はg_+とg_-の共通の第一基本形式である。

(3) g_-はg_+の忠実な(faithful)異性体(isomer)である。

(4) $\kappa_\nu^\pm : J\to\mathbb{R}$を$g_\pm$の極限法曲率とすると、$J$上で

$$\kappa_\nu^- = -\kappa_\nu^+$$

が成立する。

(5) ds^2が$(u,0)$において非放物的(non-parabolic)であれば、g_+とg_-は$(u,0)$でカスプ辺となる。

→ 特異点において、ガウス曲率$\hat{K}=\lambda K$が消えない。

さらに、ds^2を第一基本形式として持つ一般化カスプ辺$h: U\to\mathbb{R}^3$を考える。$u\mapsto h(u,0)$が$\mathbb{C}: J\to\mathbb{R}^3$と同じ向きを与えて$C$をパラメータ表示するならば、$h$は$g_+$または$g_-$と一致する。

以下、本論文では[14]の証明を修正する形でこの証明を行う。

Remark 3.9

各 $t_0 \in J$ に対して、$(t_0, 0)$ の連結な局所座標近傍 $(V(t_0); u, v)$ が補題3.5の条件(1)、(2)、(3)を満たすように取ることが出来る。J がコンパクトであるため、有限個の点

(1) $\gamma(u) = (u, 0)$、$E(u, 0) = 1$、$E_v(u, 0) = 0$.　(γ: 特異曲線)
(2) $F(u, v) = 0$ が $V (\subset U \subset \mathbb{R}^2)$ 上で成立.
(3) V 上に実解析的な関数 G_0 が存在して、

- $G(u, v) = \dfrac{v^2 G_0(u, v)}{2}$
- $G_0(u, 0) = 2$

が成立.

$$t_1, \cdots, t_k \in J$$

が存在して、$\{V(t_j)\}_{j=1}^{k}$ が特異曲線 $J \times \{0\}$ を被覆する.（定理3.8内の）U を各 $V(t_j)$ $(j = 1, \cdots, k)$ に置換して定理3.8を証明すれば充分 (sufficient) である.

（実際、定理3.8の主張には各 $V(t_j)$ 上の $g_\pm$ の一意性が含まれるので、$V(t_j)$ で得られた $g_\pm$ は $V(t_j) \cup V(t_{j+1})$ に一意的に拡張できる）

- 定理3.8の記述は、$J \times \{0\}$ を含む局所座標系の選択に依存しない写像 $g_\pm$ の性質である.

  Remark 3.9で説明したように、補題3.5の条件(1)、(2)、(3)を満たす局所座標系 $(U; u, v)$ の存在を一般性を失わずに仮定できる. すると、U は u 軸上の有界閉区間 I を含み、$I \times \{0\}$ が ds^2 の特異集合を与える.

- 次に、実解析的な一般化カスプ辺 $g(u, v)$ が存在して、

$$g(u, 0) = c(u), \quad g_v(u, 0) = 0$$

$$g_u \cdot g_u = E, \quad g_u \cdot g_v = 0, \quad g_v \cdot g_v = G$$

が U 内の $I \times \{0\}$ の近傍で定義されることを、Cauchy - Kowalevski の定理を用いて証明する.
（$c(u)$ は弧長パラメータ表示されている）

補題3.5より $G = \dfrac{v^2 G_0}{2}$ であるため、次の補題3.10が成立する.

Lemma 3.10

・$ds^2(\gamma'(t), \gamma'(t)) > 0$ となる Kossowski 計量
・$|\kappa_s(u)| < \kappa(u)$

定理3.8の仮定の下で実解析的カスプ辺 $g\ (= g_\pm)$ が存在するならば、g は以下の偏微分方程式系

$$(3.9)\quad \begin{cases} g_v = v\zeta \\ \xi_v\ (= g_{uv}) = v\zeta_u \\ \zeta_v = \frac{1}{4}\left((\zeta, g_u, \xi_u)^T\right)^{-1}\left((G_0)_v,\ -v(G_0)_u,\ 2r - v(G_0)_{uu} + 4v\zeta_u\cdot\zeta_u\right)^T \end{cases}$$

の未知 $\mathbb{R}^3$ 値関数 g, ξ, ζ の解であり、初期条件 (initial data) として

$$(3.10)\quad g(u,0) = c(u),\quad \xi(u,0) = c'(u)\ (= g_u(u,0)),\quad \zeta(u,0) = X(u)$$

が I 上で与えられる. A^T は 3×3 行列 A の転置を表し、$X(u)$ は

$$(3.11)\quad X(u) := \cos\theta(u)\, n(u) \mp \sin\theta(u)\, b(u),\quad \cos\theta(u) := \frac{\kappa_s(u)}{\kappa(u)}$$

とする.

Remark 3.11

$g_v = v\zeta$ および $\xi_v = v\zeta_u$ であるため、$\xi_v = v\zeta_u = g_{uv}$ を得る.
したがって、初期条件 $\xi(u,0) = g_u(u,0)$ から

$$\xi(u,v) = g_u(u,v)$$

となる.

補題3.10 の Proof

ds^2 が実解析的であるため、E, G も実解析的な関数である. $g_v(u,0) = 0$ である事から、$g_v(u,v)$ は

$$g_v(u,v) = v\zeta(u,v)$$

と書け、$\zeta(u,v)$ は $\mathbb{R}^2$ 内の $I\times\{0\}$ の近傍で定義された実解析的関数である.
この時、内積 $\zeta_v\cdot\zeta$ は

$$\zeta_r \cdot \zeta = \frac{(\zeta\cdot\zeta)_r}{2} \overset{※}{=} \frac{(G_0)_r}{4} \qquad (3.12)$$

※ $G = \dfrac{r^2 G_0}{2}$ および $G = g_r \cdot g_r$ より、$g_r \cdot g_r = \dfrac{r^2 G_0}{2}$.
さらに、$g_r = r\zeta$ より $(\zeta\cdot\zeta) = \dfrac{G_0}{2}$.

である。一方、

$$r g_u \cdot \zeta = g_u \cdot g_r \overset{F=0\ (\text{補題 }3.5)}{=} 0 \qquad (3.13)$$

であるため、$g_u \cdot \zeta = 0$ となる。これを r で微分すると、

$$\begin{aligned} 0 = r(g_u \cdot \zeta)_r &= r\zeta_r \cdot g_u + r\zeta \cdot g_{ur} \\ &= r\zeta_r \cdot g_u + g_r \cdot g_{ur} \\ &= r\zeta_r \cdot g_u + \frac{G_u}{2}. \end{aligned}$$

$G = g_r \cdot g_r$ より $G_u = 2 g_{ur} \cdot g_r$.

$G = \dfrac{r^2 G_0}{2}$ であるため、最終的に $\left(G_u = \dfrac{r^2 (G_0)_u}{2}.\quad 上式より\ \zeta_r \cdot g_u = -\dfrac{G_u}{2r}. \right)$

$$\zeta_r \cdot g_u = -\frac{r}{4}(G_0)_u \qquad (3.14)$$

が得られる。次に、$\zeta_r \cdot g_{uu}$ に関する情報を得る。内積 $r\zeta \cdot g_{uu}$ を計算すると、

$$\begin{aligned} r\zeta \cdot g_{uu} = g_r \cdot g_{uu} &= \underbrace{(g_r \cdot g_u)}_{=0}{}_u - g_{ur} \cdot g_u \\ &= -g_{ur} \cdot g_u \\ &= -\frac{E_r}{2} \end{aligned}$$

である。すなわち、

$$\zeta \cdot g_{uu} = -\frac{E_r}{2r} \qquad (3.15)$$

が成り立つ。一方、$\zeta \cdot g_{uu} + r\zeta_r \cdot g_{uu}$ を計算すると、

$g_r = r\zeta$ より、
$g_{rr} = \zeta + r\zeta_r$.

$$\begin{aligned} \zeta \cdot g_{uu} + r\zeta_r \cdot g_{uu} &= g_{rr} \cdot g_{uu} \\ &= (g_{rr} \cdot g_u)_u - g_{rru} \cdot g_u \\ &= \{ (\underbrace{g_r \cdot g_u}_{=0})_r - (g_r \cdot g_{ur}) \}_u - (g_{ur} \cdot g_u)_r \\ &\quad + g_{ur} \cdot g_{ur} \\ &= \left(-\frac{G_u}{2}\right)_u - \left(\frac{E_r}{2}\right)_r + g_{ur} \cdot g_{ur} \end{aligned}$$

となる。式(3.15)を用いて上式を $\zeta_r \cdot g_{uu}$ について整理すると、

$$\boxed{\zeta \cdot g_{uu} = -\frac{E_r}{2r}}$$

$$\varsigma_r \cdot g_{uu} = \frac{1}{r}\left\{ \underline{\frac{E_r}{2r}} + \underline{\left(-\frac{G_u}{2}\right)_u} - \underline{\left(\frac{E_r}{2}\right)_r} + \underline{g_{ur}\cdot g_{ur}} \right\}$$

$$= \underline{\frac{E_r - rE_{rr}}{2r^2}} - \underline{r\frac{(G_0)_{uu}}{4}} + \underline{r\varsigma_u \cdot \varsigma_u} \qquad (3.16)$$

である．さらに、$E_r(u,0)=0$ である事から、関数 $\frac{E_r}{r}$ は実解析的であり、関数 $r(u,r)$ を

$$r(u,r) := \frac{E_r - rE_{rr}}{r^2} \qquad (3.17)$$

と定義すると、$r(u,r)$ も実解析的である．

(3.13)、(3.14)、(3.16) より、(3.9) の第3式が成立することが示される．

$\left(M(u,r) := (\varsigma, g_u, \xi_u) \right.$ が正則であると仮定する．$\left. \xi := g_u \text{ とする} \right)$

(3.13) $\quad r g_u \cdot \varsigma = g_u \cdot g_r = 0$

(3.14) $\quad \underline{\varsigma_r} \cdot g_u = -\frac{r}{4}(G_0)_u$

(3.16) $\quad \underline{\varsigma_r} \cdot g_{uu} = \underline{\frac{E_r - rE_{rr}}{2r^2}} - \underline{r\frac{(G_0)_{uu}}{4}} + \underline{r\varsigma_u \cdot \varsigma_u}$

$$\Downarrow \text{☆}$$

(3.9)

$$\varsigma_r = \frac{1}{4}\left((\varsigma, g_u, \xi_u)^T\right)^{-1}\left((G_0)_r, -r(G_0)_u, 2r - r(G_0)_{uu} + 4r\varsigma_u\cdot\varsigma_u\right)^T$$

また、写像 g は初期条件 (3.10) を満たす必要がある．ここで $X(u)$ は、

$$X(u) = \varsigma(u,0) = \lim_{r\to 0}\frac{g_r(u,r)}{r} = g_{rr}(u,0)$$

となり、式(3.6) により さらに $\quad \left(\overset{g}{\cancel{f}}_{rr}(u,0) = \cos\theta(u)\, n(u) - \sin\theta(u)\, b(u) \right)$

$$\left(X_+(u) :=\right) X(u) = \cos\theta(u)\, n(u) - \sin\theta(u)\, b(u) \qquad (3.18)$$

と書ける．$\underline{\theta(u) \text{ は式(3.11)で定義される関数である．}}$ ds^2 の特異曲率 $K_s(u)$ は I 上で $K(u)$ より $\boxed{\text{の絶対値}}$

$\hookrightarrow \cos\theta(u) := \frac{K_s(u)}{K(u)}$

$(K_s(u)$: 特異曲率$)$

小さいため、実解析的な角度関数 $\theta: I \longrightarrow \mathbb{R}$ が存在して、式(3.11) および

$$0 < |\theta(u)| < \frac{\pi}{2} \quad (u \in I) \qquad \left(0 < |\theta(u)| < \pi \right)$$

を満たす (θ は $\pm$ の任意性が残る). 特に、もう一方の可能性として

$$(X_{-}(u) :=)\ X(u) = \cos\theta(u)\,n(u) + \sin\theta(u)\,b(u) \qquad (3.19)$$

と定めることも出来る. ■

再び定理3.8の証明にもどる。まず、

$$(M(u,0)=)\ (\varsigma(u,0),\ g_u(u,0),\ g_{uu}(u,0)) = (\cos\theta(u)\,n(u) - \sin\theta(u)\,b(u),\ e(u),\ \kappa(u)n(u))$$

が成り立つ。

また、ds^2 の特異曲率 κ_s は区間 I 上で

$$\underbrace{|\kappa_s(u)|}_{=\kappa(u)\cos\theta(u)} < \underbrace{\kappa}_{=\sqrt{\kappa_s(u)^2+\kappa_\nu(u)^2}}$$

$\theta \neq 0, \pi$

を満たすため、$\sin\theta(u)$ は I 上でゼロにならない。したがって、各 $u \in I$ に対して行列 $M(u,0)$

$$\begin{cases} \kappa^2 - \kappa_s^2 > 0 \quad (\kappa > 0) \\ \Longleftrightarrow \quad \kappa_\nu^2 > 0 \\ \Longleftrightarrow \quad \kappa_\nu \neq 0 \\ \Longleftrightarrow \quad \underbrace{\kappa}_{>0} \sin\theta \neq 0 \end{cases}$$

$\sin\frac{\pi}{2} = 1$

は正則となる。偏微分方程式系(3.9)に初期条件(3.10)を与えた系に対して、Cauchy-Kowalevski の定理([9]参照)を適用することにより、$\mathbb{R}^2$ 内の $I \times \{0\}$ の近傍で定義される一意的かつ実解析的な式(3.9)の解 (g, ξ, ς) が得られる。

→ これにより、初期条件 $X_\pm(u)$ に対応する実解析的な一般化カスプ辺 $g_\pm(u,v)$ の存在が得られる。

さらに、上記の $g_\pm$ の構成から、関数 $\pm\theta$ は $g_\pm(u,v)$ のカスプ角とそれぞれ一致する。

- 定理3.8を証明するには、$g_\pm(u,v)$ の第一基本形式が ds^2 と一致することを確認する必要がある。

→ 証明のために、一般性を失わずに初期条件と一般化カスプ辺を

$$\begin{cases} \text{初期条件} : X(u) := X_+(u) \\ \text{一般化カスプ辺} : g = g_+(u,v) \end{cases}$$

の場合を考える。式(3.9)の第3式 ? は

$$\varsigma_v \cdot \varsigma = \frac{(G_0)_v}{4}$$

であるので、次の式

$\because$ $G = \dfrac{v^2 G_0}{2}$ である。ここで G は

$$G = g_v \cdot g_v = v\varsigma \cdot v\varsigma$$

であるため、$\cancel{v^2}\varsigma\cdot\varsigma = \dfrac{\cancel{v^2}G_0}{2}$ ---(※)

(※)の両辺を v で微分すると、

$$2\varsigma_v \cdot \varsigma = \frac{(G_0)_v}{2}$$

$$\left(\underline{\zeta\cdot\zeta-\frac{G_0}{2}}\right)_v=0 \quad \nearrow \text{ より. } \zeta\cdot\zeta-\frac{G_0}{2}=0 \text{ である.}$$

が成り立つ. 上式の ＿＿ 部分 について、$v=0$ を代入すると、 $(X(u)=\zeta(u,0))$

$$\zeta(u,0)\cdot\zeta(u,0)-\frac{G_0(u,0)}{2}=X(u)\cdot X(u)-1$$
$$=0.$$

であるため、Cauchy−Kovolevski の定理 より

$$\zeta\cdot\zeta=\frac{G_0}{2} \qquad (3.20)$$

となる. ゆえに、式(3.9) の 第1式 から、$(g_v=v\zeta)$

$$g_v\cdot g_v=\frac{v^2G_0}{2}=G \qquad (3.21)$$

が成り立つ. 一方で、式(3.9) を用いると

$$(\xi-g_u)_v=\underline{\xi_v}-g_{uv}=\underline{v\zeta_u}-(g_v)_u \quad \left((3.9)\text{第2式より、}\xi_v\,(=g_{uv})=v\zeta_u\right)$$
$$=v\zeta_u-(v\zeta)_u$$
$$=0.$$

となる. 初期条件 $\xi(u,0)=g_u(u,0)$ から $g_u=\xi$ が従い、次の 2式 が成り立つ:

$$\underline{g_{uv}}=\xi_v=\underline{v\zeta_u}$$
$$\underline{g_{uv}}\cdot\zeta=\underline{v\zeta_u}\cdot\zeta=v\frac{(\zeta\cdot\zeta)_u}{2}=\frac{v(G_0)_u}{4} \quad ☆$$

これにより、内積 $(g_u\cdot\zeta)_v$ を計算すると、

$$(g_u\cdot\zeta)_v=\underline{g_{uv}\cdot\zeta}+\underline{g_u\cdot\zeta_v}$$
$$=\underbrace{\frac{v(G_0)_u}{4}}_{\text{式☆より}}-\underbrace{\frac{v(G_0)_u}{4}}_{\text{式(3.14)より}}$$
$$=0.$$

が成り立つ. $g_u(u,0)\cdot\zeta(u,0)=0$ であるため、$g_u\cdot\zeta=0$ が従い、つまり

$$g_u\cdot\underbrace{g_v}_{=v\zeta}=v\,g_u\cdot\zeta=0 \qquad (3.22)$$

が成り立つ.

Lemma 3.12

式(3.9)の条件の一つである

$$\zeta_v \cdot \xi_u \ (= \zeta_v \cdot g_{uu}) = \frac{2r - v(G_0)_{uu} + 4v\zeta_u \cdot \zeta_u}{4}$$

と仮定する。 $X(u) = \cos\theta(u)\,n(u) - \sin\theta(u)\,b(u)$

この時、初期条件(3.18)は次の恒等式が成り立つ。

$$\frac{E_v}{2} + v\zeta \cdot \xi_u = 0 \qquad (3.23)$$

Proof $\zeta \cdot \zeta = \frac{G_0}{2}$

(3.20)を用いることで、$(\zeta \cdot \xi_u)_v$ を計算すると

$$\begin{aligned}
(\zeta \cdot \xi_u)_v &= \zeta_v \cdot \xi_u + \zeta \cdot \xi_{uv} \\
&= \zeta_v \cdot \xi_u + \zeta \cdot g_{uuv} \qquad g_v = v\zeta \text{ より} \\
&= \zeta_v \cdot \xi_u + \zeta \cdot (v\zeta_{uu}) \\
&= \frac{1}{4}\left(2r - v(G_0)_{uu} + 4v\zeta_u \cdot \zeta_u\right) + \zeta \cdot (v\zeta_{uu}) \\
&= \frac{r}{2} - \frac{v}{\cancel{2}\,4}\underbrace{(G_0)_{uu}}_{2\zeta\cdot\zeta} + v(\zeta_u \cdot \zeta_u + \zeta \cdot \zeta_{uu}) \\
&= \frac{r}{2} - \frac{v}{2}(\zeta \cdot \zeta)_{uu} + \frac{v}{2}(\zeta \cdot \zeta)_{uu} \\
&= \frac{r}{2}
\end{aligned}$$

Lemma の仮定より.

$r(u,v) := \frac{E_v - vE_{vv}}{v^2}$

である。また、式(3.17)より

$$\left(\zeta \cdot \xi_u + \frac{E_v}{2v}\right)_v = \frac{r}{2} - \frac{r}{2} = 0.$$

示したい式

$$\boxed{\frac{E_v}{2} + v\zeta \cdot \xi_u = 0 \qquad (3.23)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{E_v}{2v} + \zeta \cdot \xi_u = 0$$

が成り立つ。一方で、内積 $\zeta(u,0) \cdot \xi_u(u,0)$ を計算すると

$$\begin{aligned}
\zeta(u,0) \cdot \xi_u(u,0) &= X(u) \cdot g_{uu}(u,0) \\
&= (\cos\theta(u)\,n(u) - \sin\theta(u)\,b(u)) \cdot C''(u)
\end{aligned}$$

$n(u)$ の定義より

$$= (\cos\theta(u)\, n(u) - \sin\theta(u)\, b(u)) \cdot \underline{(\kappa(u)\, n(u))}$$

$$= \kappa(u) \cos\theta(u)$$

$$= \cancel{\kappa(u)} \frac{\kappa_s(u)}{\cancel{\kappa(u)}}$$

$$= \frac{-E_{rr}(u, 0)}{2}$$

$$= \lim_{r \to 0} \frac{-E_r(u, r)}{2r}$$

$$\lim_{v \to 0} \frac{E_v}{2v} = \frac{E_{vv}}{2}$$

である. 以上より, 式(3.23) が得られる ▨

改めて定理3.8の証明に戻る. 式(3.23)を用いて内積 $\frac{1}{2}(g_u\cdot g_u)_v$ を計算すると

$$\frac{1}{2}(g_u\cdot g_u)_v = g_{uv}\cdot g_u$$
$$= \underbrace{(g_v\cdot g_u)_u}_{\text{式(3.22)より } g_u\cdot g_v=0.} - g_v\cdot g_{uu}$$
$$= -g_v\cdot g_{uu}$$
$$= \frac{E_v}{2}$$

$\xi = g_u$ および. 式(3.23)より.

となる. この式と初期条件 $g_u(u,0)\cdot g_u(u,0) = \mathbb{C}'(u)\cdot\mathbb{C}'(u) = 1$ により,

$$g_u\cdot g_u = E \qquad (3.24)$$

が成り立つ. 式(3.24)(3.22)(3.21)から, ds^2 と $g=g_+$ の第一基本形式が一致することが結論付けられる. これにより, $g=g_+$ の存在と一意性が示される.

→ θ を $-\theta$ に置換することで, $g=g_-$ の存在と一意性も同様に示される.

- g_+ と g_- の カスプ角が異なるため, g_- の像と g_+ の像は一致しない.
  $u\longmapsto g_-(u,0)$ の向きが $u\longmapsto g_+(u,0)$ の向きと一致するため, 写像 g_- は g_+ の
  忠実な異性体 (faithful isomer) である.

・フロンタル
・$(f,\nu): U\to \mathbb{R}^3\times S^2$ がはめ込み

- ds^2 が $(u,0)$ で非放物的であれば, [5, proposition 4(0)] より, g_+ と g_- は wave fronts (波面) となる.
  また, ds^2 が type I であるため, [5, proposition 4(i)] によるカスプ辺の判定法より, g_+ と g_- は共にカスプ辺となる.

- Cauchy - Kowalevski の定理の結果による偏微分方程式系(3.9) の一意性から, 定理3.8の最後の主張が成り立ち, 定理3.8の証明が完了する.

定理3.8の証明より, 以下の Corollary が成立する

Corollary 3.13

g_+ のカスプ角が θ であるとき、g_- のカスプ角は $-\theta$ である。
特に $\sin\theta \neq 0$ であるため、g_- は g_+ の忠実(faithful)な異性体(isomer)である

次に、以下を示す

Lemma 3.14

U を $J\times\{0\}$ を含む uv 平面 $\mathbb{R}^2$ の開部分集合として、ds^2 を補題3.5の(1)(2)(3)を満たす U 上に定義された実解析的な type I の Kossowski 計量とする。
さらに、ds^2 の特異集合が全て非放物点から成るとする。

もし開集合 $V_i\ (\subset U)\ (i=1,2)$ が $J\times\{0\}$ を含み、さらに微分同相写像 $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ が存在して

$$\varphi^* ds^2 = ds^2 \quad \text{かつ} \quad \varphi(u,0) = (u,0)$$

が $u\in J$ 上で成立するならば $V_1 = V_2$ であり、φ は恒等写像である。

Proof (途中)

$C(u)$ を定理3.8の仮定を満たす空間曲線として、g_+ を定理3.8により ds^2 を実現するカスプ辺の一つとする。
$g_+\circ\varphi$ と g_+ は共通の第一基本形式 ds^2 を持つため、定理3.8の最後の主張から
$g_+\circ\varphi$ は g_+ と g_- のいずれかと一致する。