火2 数理科学特論 13 ①

- $\mathbb{H}^3$ エルミートモデル

- Bryant の表現公式

$\mathbb{H}^3$ の CMC-1 曲面

$\updownarrow$ Lawson 対応

$\mathbb{R}^3$ の極小曲面 $(H=0)$

$$\mathbb{L}^4 = \left\{ \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \langle x, y \rangle = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \right\}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + i x_2 \\ x_1 - i x_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Herm}(2)$$

$$\mathrm{Herm}(2) = \left\{ X \in M_2(\mathbb{C}) \;\middle|\; X = X^* \right\} \quad \text{(エルミート行列)}$$

$$(X^* := \overline{{}^t X})$$

$$\mathbb{H}^3 = \left\{ x \in \mathbb{L}^4 \;\middle|\; \langle x, x \rangle = -1,\ x_0 > 0 \right\}$$

$\langle \cdot , \cdot \rangle$ は Herm(2) でどう表せるか？

Lemma 3.4.1

$X, Y \in \mathrm{Herm}(2)$ に対して

$$\langle X, Y\rangle = -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(X\tilde{Y})$$

が成り立つ ($\tilde{Y}$ … Yの余因子行列)

$Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して $\tilde{Y} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ とする.

$$\left(\det Y \neq 0 \Longrightarrow Y^{-1} = \frac{1}{\det Y}\tilde{Y}\right)$$

$$Y\tilde{Y} = \tilde{Y}Y = (\det Y)\, e_0 \quad \left(e_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

Remark

$$\mathrm{Herm}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + i x_2 \\ x_1 - i x_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_0, \cdots, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathbb{R}\underbrace{e_0}_{\substack{\| \\ \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \cancel{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}}} \oplus \mathbb{R}\underbrace{e_1}_{\substack{\| \\ \cancel{\begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}} \oplus \mathbb{R}\underbrace{e_2}_{\substack{\| \\ \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}}} \oplus \mathbb{R}\underbrace{e_3}_{\substack{\| \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}}$$

Lemma 3.4.1 の証明

$$\overbrace{\begin{pmatrix} y_0 + y_3 & y_1 + i y_3 \\ y_1 - i y_3 & y_0 - y_3 \end{pmatrix}}$$

$$X\tilde{Y} = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + i x_2 \\ x_1 - i x_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 - y_3 & -(y_1 + i y_2) \\ -(y_1 - i y_2) & y_0 + y_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x_0 + x_3)(y_0 - y_3) - (x_1 + i x_2)(y_1 - i y_2) & * \\ * & -(x_1 - i x_2)(y_1 + i y_2) + (x_0 - x_3)(y_0 + y_3) \end{pmatrix}$$

これの tr は.

$$\mathrm{tr}\, X\tilde{Y} = 2x_0y_0 - 2x_3y_3 - 2x_1y_1 - 2x_2y_2$$
$$= -2\langle X, Y\rangle \,//$$

補題 3.4.1 (続き)

$$\langle X, X\rangle = -\det X.$$

Proof

$$\langle X, X\rangle = -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(X\tilde{X}) \qquad e_0 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$$
$$= -\frac{1}{2}(\det X)\,\underbrace{\mathrm{tr}(e_0)}_{\substack{\| \\ 2}}$$
$$= -\det X \,//$$

再掲

$$\mathbb{H}^3 = \left\{ x \in \mathbb{L}^4 \,\middle|\, \langle x, x\rangle = -1, \quad x_0 > 0 \right\}$$

$\downarrow$ 同一視. $\qquad \downarrow \qquad \downarrow$

$$= \left\{ X \in \mathrm{Herm}(2) \,\middle|\, \det X = 1, \quad \mathrm{tr}\, X > 0 \right\}$$

＊ $\mathbb{H}^3$ の向きを保つ合同変換

$$(\mathbb{L}^4 \supseteq)\ \mathbb{H}^3 \longrightarrow \mathbb{H}^3\ (\subseteq \mathbb{L}^4)$$
$$p \longmapsto Ap$$
$$(A \in SO^+(1,3))$$

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \quad (\forall A \in SO^+(1,3),\ \forall x, y \in \mathbb{L}^4)$$

Q. Herm(2) で対応するもの？ （← 補題 3.4.2）

A. $a \in SL(2,\mathbb{C})$ に対して、

$$\varphi_a(X) := aXa^* \quad (X \in \mathrm{Herm}(2))$$

とおくと、
- $\langle \varphi_a(X), \varphi_a(Y) \rangle = \langle X, Y \rangle$ …… ㊀
- $\varphi_a(\mathbb{H}^3) = \mathbb{H}^3$
- φ_a は $\mathbb{H}^3$ の向きを保つ

$\therefore\ \varphi_a : \mathbb{H}^3 \longrightarrow \mathbb{H}^3$ は $\mathbb{H}^3$ の「向きを保つ等長変換」とみなすことができる

$$SL(2,\mathbb{C}) = \{ a \in \underbrace{M_2(\mathbb{C})}_{\text{複素リー群}} \mid \det a = 1 \}$$

($\dim_{\mathbb{C}} = 3$)

㊀ の証明

$\mathrm{tr}(PQ) = \mathrm{tr}(QP)$　$(\widetilde{YZ} = \tilde{Z}\tilde{Y})$

$(\det(a^*) = \overline{\det a})$

$$\langle \varphi_a(X), \varphi_a(Y) \rangle = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\varphi_a(X)\, \widetilde{\varphi_a(Y)})$$
$$= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(aXa^*\, \widetilde{aYa^*})$$
$$= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(aX\underbrace{a^*\widetilde{a^*}}_{=(\det a^*)e_0 \,=\, 1}\tilde{Y}\tilde{a})$$
$$= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(aX\tilde{Y}\tilde{a})$$
$$= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\underbrace{\tilde{a}a}_{=e_0}X\tilde{Y})$$
$$= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(X\tilde{Y}) = \langle X, Y \rangle$$

Remark

$SL(2,\mathbb{C}) \curvearrowright \mathbb{H}^3$

$\forall a \in SL(2,\mathbb{C}),\ \exists T_a \in SO^+(1,3)$

$$\begin{array}{ccc} \varphi_a(X) & \longmapsto & T_a x \\ \cap & & \cap \\ \Psi : \mathrm{Herm}(2) & \longrightarrow & \mathbb{L}^4 \end{array}$$

この対応 $SL(2,\mathbb{C}) \ni a \longmapsto T_a \in SO^+(1,3)$

2 : 1 （T_a 1コから、a が2コ決まる）

SL(2, ℂ) は単連結なので、

$$T : SL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow SO^{+}(1,3)$$

は"普遍被覆"を与える。

☆ ベクトル積 (in エルミートモデル)

補題3.4.3

$p \in \mathbb{H}^3$ $(\subseteq \mathrm{Herm}(2))$、$X, Y \in T_p(\mathbb{H}^3)$ $(\subseteq \mathrm{Herm}(2))$

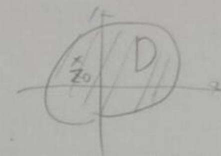
に対して、

$$\underbrace{X \times_p Y}_{\mathbb{H}^3\text{のベクトル積}} = \frac{i}{2}\left(\cancel{XpY}\, Xp^{-1}Y - Yp^{-1}X \right)$$

が成立する。

Bryant の表現公式 (定理3.4.4)

$D \subset \mathbb{C}$: 単連結領域



$z_0 \in D$: 固定 (基点)

$h : D \longrightarrow \mathbb{C}$: 正則関数

$g : D \longrightarrow \mathbb{C}$: 有理型関数
→ 特異点は極のみ

$$Z := \{ z \in D \mid h(z) = 0 \} = \{ z \in D \mid z \text{ は } g \text{ の極} \}$$

であり、 $a \in Z$ が h の $2k$ 位の零点 $\Longleftrightarrow$ a が g の k 位の極 (☆) とする。

このとき、$F : D \to SL(2,\mathbb{C})$ を

$$\begin{cases} F' = F \begin{bmatrix} g & -g^2 \\ 1 & -g \end{bmatrix} h & \text{☆より正則} \\ F(z_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \end{cases} \quad (\text{ODE})$$

をみたすものとする。(一意的に存在)

Remark

- $h(a) = 0$ より、$\exists H(z)$: 正則 s.t.
  $h(z) = (z-a)^j H(z)$ $(H(a) \neq 0)$
  j を h の $z = a$ における零点の位数という
- $\lim_{z \to a} (z-a)^j g(z) = \exists \alpha \neq 0$
  j を g の $z = a$ における極の位数という
  $g(z) = \dfrac{\alpha}{(z-a)^j} + \dfrac{0}{(z-a)^{j-1}} + \cdots$

このとき、$f(z) := F(z) F(z)^{*}$ $(z \in D)$

とおくと、$f : D \longrightarrow \mathbb{H}^3$ $(\subseteq \mathrm{Herm}(2))$ は ~~CMC~~ CMC-1 曲面を定める。

さらに、第一/二 基本形式 I, II について、

$$\begin{cases} \mathrm{I} = (1+|g|^2)|h|^2 dz d\bar{z} \\ \mathrm{II} = Q + \overline{Q} + \mathrm{I} \\ (Q = -hg' dz^2) \end{cases}$$

$\mathbb{R}^3$ の Weierstrass 表現公式と同じ I、Q がでる。

が成り立つ

逆に、与えられた CMC-1 曲面で ホロスフィア でないものは、この形で(局所的に)表される。

Remark

$\mathbb{R}^3$ の $H=0$ 曲面、$\tilde{f}: D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ に対して、

一方、$\tilde{f}$ は weierstrass 表現公式をもつ

$\exists! f: D \longrightarrow \mathbb{H}^3$: CMC-1 曲面 s.t.

f、$\tilde{f}$ は I と Q を共有する

$\mathbb{H}^3$ の合同変換を除いて一意

証明の方針

- $f = FF^*$ の I、II、Q を求める。
- 逆は、Lawson 対応、Weierstrass 表現から従う。

Example (ホロスフィア)

$$F(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{bmatrix} : \mathbb{C} \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$$

$$F' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -z & 1 \end{bmatrix}$$ であるので、

$$F^{-1}F' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & -g^2 \\ 1 & -g \end{pmatrix} h \quad \begin{array}{l} g=0 \\ h=1 \end{array}$$

$\therefore F$ は $g=0$、$h=1$ としたときの 微分方程式の解

$$f = FF^* = \begin{pmatrix} 1 & \bar{z} \\ z & 1+|z|^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Psi} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u^2+v^2+2 \\ 2u \\ -2v \\ -u^2-v^2 \end{pmatrix}$$

ホロスフィア

$$\left(\Psi : \mathrm{Herm}(2) \ni \begin{bmatrix} x_0+x_3 & x_1+ix_2 \\ x_1-ix_2 & x_0-x_3 \end{bmatrix} \longmapsto (x_0, x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{L}^4 \right)$$

Bryantの表現公式の証明：Iを計算

$$I = \langle df, df \rangle \qquad (df = f_z dz + f_{\bar z} d\bar z)$$

$$= \langle f_z dz + f_{\bar z} d\bar z,\ f_z dz + f_{\bar z} d\bar z \rangle$$

$$= \underbrace{\langle f_z, f_z \rangle}_{=0} dz^2 + 2\underbrace{\langle f_z, f_{\bar z} \rangle}_{=(1+|g|^2)^2|h|^2} dz d\bar z + \underbrace{\langle f_{\bar z}, f_{\bar z} \rangle}_{=0} d\bar z^2$$

を示したい。

$$F' = F\alpha \quad \left(\alpha := \begin{pmatrix} g & -g^2 \\ 1 & -g \end{pmatrix} h\right)$$

$$f = FF^*$$

$$f_z = F_z F^* + F\underbrace{(F^*)_z}_{=0}$$

$$= F_z F^*$$

$$\boxed{F : D \longrightarrow SL(2, \mathbb{C}) \text{ : 正則(holomorphic)} \Longrightarrow F_{\bar z} = 0}$$

$$F^* = {}^t\overline{F} \qquad {}^t(\overline{F})_z = {}^t\overline{(F_{\bar z})} = 0$$

$\therefore\ f_z = F\alpha F^*$. 同様に $f_{\bar z} = F\alpha^* F^*$ である。

⑥

☺ $f = f^*$ $\quad (f : D \to \mathbb{H}^3 \subseteq \mathrm{Herm}(2))$

$$f_{\bar z} = f^*_{\bar z} = (f_z)^*$$

$$= (F\alpha F^*)^*$$

$$= F\alpha^* F^*$$

$\langle f_z, f_z \rangle = \langle f_{\bar z}, f_{\bar z} \rangle = 0$,

$\langle f_z, f_{\bar z} \rangle = \frac{1}{2}(1+|g|^2)^2|h|^2$ の証明

$$\cdot\ \langle f_z, f_z \rangle = \langle F\alpha F^*, F\alpha F^* \rangle$$

$F \in SL(2, \mathbb{C})$

$$= \langle \varphi_F(\alpha), \varphi_F(\alpha) \rangle$$

$$= \langle \alpha, \alpha \rangle$$

$$= -\det(\alpha) = 0$$

（$\langle f_{\bar z}, f_{\bar z} \rangle$ についても同様の計算で分かる）

$$\cdot\ \langle f_z, f_{\bar z} \rangle = \langle F\alpha F^*, F\alpha^* F^* \rangle$$

$$= \langle \alpha, \alpha^* \rangle \quad (= \langle \alpha^*, \alpha \rangle)$$

$$= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\alpha^* \tilde{\alpha})$$

$\alpha^* = \begin{bmatrix} \bar g & 1 \\ -\bar g^2 & -\bar g \end{bmatrix} \bar h$, $\tilde{\alpha} = \begin{bmatrix} -g & g^2 \\ -1 & g \end{bmatrix} h$ なので、

$$\alpha^* \tilde{\alpha} = |h|^2 \begin{pmatrix} \bar{g} & 1 \\ -\bar{g}^2 & -\bar{g} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -g & g^2 \\ -1 & g \end{pmatrix}$$

$$= |h|^2 \begin{pmatrix} -g\bar{g}-1 & * \\ * & -(g\bar{g})^2 - g\bar{g} \end{pmatrix}$$

なので、$\mathrm{tr}(\alpha^* \tilde{\alpha})$ は

$$\mathrm{tr}(\alpha^* \tilde{\alpha}) = -|h|^2 \left(1 + 2\overset{|g|^2}{g\bar{g}} + (g\bar{g})^2\right)$$

$$= -|h|^2 \left(1 + |g|^2\right)^2$$

$\therefore \langle f_z, f_z \rangle = \frac{1}{2}|h|^2 \left(1+|g|^2\right)^2$ が成立つ