次に、曲線 C と第一基本形式 ds_f^2 がそれぞれ symmetry、effective symmetry を持つ場合を考える。

Proposition 5.10

→ Remark 4.4 (a) と対応

$f \in \mathcal{g}^{\omega}_{**,3/2}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$ とし、次を仮定する。

(1) C は平面曲線ではなく、原点 0 において non-trivial symmetry $T \in O(3)$ を持つ。

↳ ・像を保つ
・曲線の向き反転
・等長変換
(T は trivial symmetry ではないので、鏡映ではない)

(2) ds_f^2 は effective symmetry φ を持つ

↳ 特異曲線の向きを反転させる。

このとき、f の任意の異性体は

$\check{f}$、$\check{f}\circ\varphi$、$f\circ\varphi$

のいずれかと右同値である。さらに、

- T が正(つまり $T \in SO(3)$)なら、$\check{f} = T\circ f\circ\varphi$ である。(つまり、f と $\check{f}$ は合同)
- T が負(つまり $T \notin SO(3)$)なら、$\check{f}$ は f と合同ではない。

Proof

$g := T\circ f\circ\varphi$ とおく。

Proposition 5.1 より、f と $\check{f}$ が合同

T が正($T\in SO(3)$)の場合、Remark 4.4 より g は f の faithful isomer である。※

※ Remark 4.4 (a) より、$f_1(u,t) = T\circ f_0(-u,t) = T\circ f_0\circ\varphi(u,t) = g(u,t)$

$\varphi(u,t) = (-u,t)$

→ $f_1 = g$、$f_0 = f$ と置けば、g は f の faithful isomer である。

この時の g は f の等長双対でもあるので、$\check{f} = g = T\circ f\circ\varphi$ が成り立つ。

→ f と $\check{f}$ と $f\circ\varphi$ と $\check{f}\circ\varphi$ が右同値

T が負($T\notin SO(3)$)の場合、Proposition 5.1 より $\check{f}$ は f と合同ではない。■

(f と $f\circ\varphi$ が右同値
$\check{f}$ と $\check{f}\circ\varphi$ が右同値)

(Prop 5.1

f と $\check{f}$ が合同 $\Longleftrightarrow$ {・C が平面内にある または
・C が正の non-trivial symmetry をもち、かつ ds_f^2 が effective symmetry をもつ。)

× ○ ○ or ×

Theorem IV (再掲)

Theorem IV. *Let* $f \in \mathcal{G}^{\omega}_{**,3/2}(\boldsymbol{R}^2_J, \boldsymbol{R}^3, C)$. *Then the number* N_f *of the congruence classes of the images of* $f, \check{f}, f_*$ *and* $\check{f}_*$ *satisfies the following properties:*

(1) ~~*If*~~ *C has no* ~~*non-trivial*~~ *symmetries, and also* ds^2_f *has no symmetries,* ~~*then*~~ $\Longleftrightarrow$ $N_f = 4$,
(2) *if not the case in* (1), *it holds that* $N_f \leq 2$,
(3) $N_f = 1$ *if and only if* $\Longleftrightarrow$
  (a) *C lies in a plane and has a non-trivial symmetry,*
  (b) *C lies in a plane and* ds^2_f *has a symmetry, or*
  (c) *C has a positive symmetry and* ds^2_f *also has a symmetry.*

$f \in \mathcal{G}^{\omega}_{**,3/2}(\boldsymbol{R}^2_J, \boldsymbol{R}^3, C)$ とする。 $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ の像が属する合同類の数を N_f とすると、次が成り立つ。

(1) C が symmetry を持たず、ds^2_f も symmetry を持たない $\Longleftrightarrow$ $N_f = 4$.

(2) 条件(1)を満たさない場合、$N_f \leq 2$. ($N_f = 1, 2$)

(3) $N_f = 1$ $\Longleftrightarrow$ 次のいずれか

(a) 曲線 C が平面内にあり、かつ non-trivial symmetry を持つとき

(b) 曲線 C が平面内にあり、かつ ds^2_f が symmetry を持つとき

(c) 曲線 C が 正の symmetry を持ち、かつ ds^2_f も symmetry を持つとき

$T \in SO(3)$

Theorem IV の Proof

$T = Id$ のみ

($\Rightarrow$)

まず、曲線 C が (non-trivial) symmetry を持たず、ds^2_f も symmetry を持たないと仮定する。

集合 $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ のうち 2つが合同であるとき、f をその異性体と入れ替えても議論は変わらないので、f が次のいずれか

$$g \in \{\check{f}, f_*, \check{f}_*\}$$

∵仮定より

と合同であると仮定して良い。 Proposition 5.1 より、f と $\check{f}$ が合同になることは無いため、
$g = f_*$ または $\check{f}_*$ としてよい。

f と $T \circ g$ の像が一致

f と g の像が一致 $\Longleftrightarrow$ f と g は右同値

今、g が f と合同であると仮定する。すると Remark 0.5 より、C の non-trivial symmetry $T \in O(3)$ と局所微分同相写像 φ が存在して、

$$T \circ g \circ \varphi = f \quad \cdots ①$$

を満たす. しかし仮定では

- C は (non-trivial) symmetry を持たない $\Longrightarrow$ $T = \mathrm{Id}$
- ds^2_f は symmetry を持たない $\Longrightarrow$ φ は曲線の向きを反転させない

であったため、$\varphi = \mathrm{Id}$ となり、T は non-trivial symmetry ではない. よって、① より
f と g の曲線をたどる向きは一致する. しかし、実際には

$$u \longmapsto f(u,0) \quad と \quad u \longmapsto \overset{逆}{f_*}(u,0) = \overset{逆双対}{\check{f}_*}(u,0)$$

は互いに異なる(=逆向きの)向きで C をたどるので、① と矛盾する. つまり、f と g (= f_* または $\check{f}_*$) が合同であるという仮定が誤り.

(trivial symmetry の場合)
Prop 5.1 より、
C が trivial symmetry S を持つと、
f と $\check{f}$ が合同になる.
→ $N_f \leq 2$ となり、矛盾する.

∴ f は $\check{f}$、$\underset{f_*,\ \check{f}_*}{g}$ と合同ではないため、$\overset{(\Rightarrow)}{(1)}$ が示された.

※ について
$N_f = 4$ と仮定する. また、「曲線 C または ds^2_f が symmetry を持つ」と仮定する (背理法).

- 曲線 C に non-trivial symmetry T がある場合 … Proposition 5.7 ($N_f = 2$)、5.8 ($N_f = 1$)、5.4 ($N_f = 2$)
- ds^2_f に symmetry φ がある場合 … Proposition 5.5 ($N_f = 2$)、5.6 ($N_f = 1$) + 5.10 ($N_f = 1, 2$)

しかし今は $N_f = 4$ であるため、矛盾. よって C にも ds^2_f にも symmetry は存在しない.

C と ds^2_f の少なくともどちらか一方は symmetry を持つ $\Longrightarrow$ $N_f = 1$ または 2

(2) は Corollary $\overset{(N_f=2)}{5.4}$、$\overset{(N_f=1)}{5.6}$、$\overset{(N_f=1)}{5.8}$ と Proposition 5.5、5.7、5.10 を、
「ds^2_f の任意の symmetry は effective である」と併せて用いることで得られる.
↳ Corollary 3.16

Corollary 3.16. *Let ds^2_f be a real analytic Kossowski metric as the first fundamental form of $f \in \mathcal{G}^\omega_{*,3/2}(\boldsymbol{R}^2_J, \boldsymbol{R}^3, C)$. Suppose that φ is a C^ω-symmetry of ds^2_f, then it is effective and is an involution reversing the orientation of the singular curve.*

Proposition	non-trivial symmetry T を	effective symmetry φ を	N_f の値
5.4	持たない (trivial か Id)	持たない	2
5.5	持たない (trivial か Id)	持つ	2
5.6	持たない (trivial か Id)	持つ	1
5.7	持つ	持たない	2
5.8	持つ	(ds^2_f の言及なし?)	1
5.10	持つ	持つ	(T が正 → 1, T が負 → 2)

(3) $N_f = 1 \iff$ 次のいずれか
(a) 曲線Cが平面内にあり、かつ non-trivial symmetry を持つとき
(b) 曲線Cが平面内にあり、かつ ds_f^2 が symmetry を持つとき
(c) 曲線Cが正の symmetry を持ち、かつ ds_f^2 も symmetry を持つとき
↳ $T \in SO(3)$

最後に、$N_f = 1$ となる場合を考える.

まず、Cが平面内にあるとする. → trivial symmetry を持つ場合.

- もし C が non-trivial symmetry を持たず、ds_f^2 にも symmetry が無ければ、Corollary 5.4 より $N_f = 2$ が成立してしまう(矛盾).

- したがって、C あるいは ds_f^2 のどちらかには symmetry が存在する.
  ↳「C が non-trivial symmetry を持つ」か「ds_f^2 が symmetry を持つ」の少なくとも一方を満たす?

C が symmetry を持つ場合、Corollary 5.8 より $N_f = 1$ である((3)(a) に該当).
↳ C が non-trivial symmetry を持つ場合?

一方で C が non-trivial symmetry を持たず、ds_f^2 が symmetry φ を持つ場合、Corollary 3.16 より φ は effective となり、Corollary 5.6 より $N_f = 1$ である.((3)(b) に該当)

(※実際、T_0 を C を含む平面に関する鏡映、T_1 を C の non-trivial symmetry とすると、T_1 が正なら (b) が直ちに成立する.
↳ $T_1 \in SO(3)$
※

※ non-trivial symmetry は C の向きを反転させる
→ $\varphi(u,t) := (-u,t)$ を取ると、$T_1 \circ f \circ \varphi(u,t) = f(u,t)$
$\therefore \varphi^* ds_f^2 = ds_f^2$ となる?
(Tが正は?)

T_1 が負の場合でも $T_0 \circ T_1$ が positive symmetry となるので (b) が成立する.
↳ $T_1 \in O(3) \setminus SO(3)$
上の※と同じ議論で、φ の存在を示せる.)

Proposition 5.10 で T が正の場合

したがって、残るは C がいかなる平面に含まれていない場合である. この時、$N_f = 1$ は $\check{f}$ が f と合同であることを意味する. しかし、Proposition 5.1 より、C が平面曲線でない場合は (C) の場合に限られる. ∎

$\check{f}$ が f と合同である $\iff$ (1) C が平面内にある または
等長双対
↳ $T \in O(3)$ に対して、$T \circ f$ と $\check{f}$ が同じ像を持つ.

$\tau \equiv 0$
(1) C が平面内にある または
non-trivial symmetry
(2) C が正の非自明な対称性を持ち、
f の第一基本形式 ds_f^2 が effective な対称性を持つ.
↳ Id でない φ が $\varphi^* ds_f^2 = ds_f^2$ を満たし、f の特異曲線の向きを反転させる.

Proposition	non-trivial symmetry T を	effective symmetry φ を	N_f の値	Cは平面曲線?
5.4	持たない (trivial か Id)	持たない	2	平面曲線
5.5	持たない (trivial か Id)	持つ	2	平面曲線ではない
5.6	持たない (trivial か Id)	持つ	1	平面曲線
5.7	持つ	持たない	2	平面曲線ではない
5.8	持つ	(ds_f^2 の言及なし?)	1	平面曲線
5.10	持つ	持つ	(Tが正 → 1 Tが負 → 2)	平面曲線ではない

4

Proof of Theorem IV. We suppose that C has no non-trivial symmetries, and also ds_f^2 has no symmetries. If two of $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ are mutually congruent, replacing f by one of its isomers, we may assume that f is congruent to g, where g is one of $\{\check{f}, f_*, \check{f}_*\}$. By Proposition 5.1, we may assume that $g = f_*$ or $g = \check{f}_*$. Suppose that g is congruent to f. Then (cf. Remark 0.5) there exist a non-trivial symmetry $T \in \mathrm{O}(3)$ of C and a local diffeomorphism φ such that

$$T \circ g \circ \varphi = f.$$

Since C has no non-trivial symmetries, and ds_f^2 has also no symmetries, φ is the identity map and T is not a non-trivial symmetry. However, this contradicts the fact that $u \mapsto f(u, 0)$ and $u \mapsto f_*(u, 0) = \check{f}_*(u, 0)$ give mutually distinct orientations to C. So we obtained (1).

The assertion (2) follows from Corollaries 5.4, 5.6, 5.8 and Propositions 5.5, 5.7, and 5.10, by using the fact that any symmetries of ds_f^2 are effective (cf. Corollary 3.16).

Finally, suppose that $N_f = 1$. We first consider the case that C lies in a plane. If C has no non-trivial symmetries and ds_f^2 has also no symmetries, then $N_f = 2$ holds by Corollary 5.4. So either C or ds_f^2 has a symmetry. If C has a symmetry, then $N_f = 1$ by Corollary 5.8 (this corresponds to the case (a)). On the other hand, if C has no non-trivial symmetries and ds_f^2 also has a symmetry φ, then φ is effective (cf. Corollary 3.16). So, Corollary 5.6 yields that $N_f = 1$. (This corresponds to the case (b). In fact, we denote by T_0 the reflection with respect to the plane containing C. We let T_1 be a non-trivial symmetry of C. If T_1 is positive, then (b) holds obviously. On the other hand, if T_1 is negative, then $T_0 \circ T_1$ is a positive symmetry and (b) holds.)

So we may assume that C does not lie in any planes. The assumption $N_f = 1$ implies $\check{f}$ must congruent to f. By Proposition 5.1, this holds only when (c) happens, since C does not lie in any planes. □

C が non-trivial symmetry を持つ場合?

「C が non-trivial symmetry を持つ」か「ds_f^2 が symmetry を持つ」の少なくとも一方を満たす?

(「C が symmetry を持つ」だと、trivial symmetry も OK になってしまう?)

Section 5 の日本語化づくり 続きする.