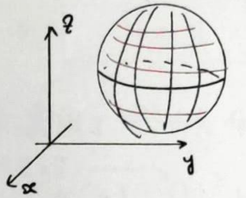
曲面がある → $\begin{cases} 第1 \\ 〃\ 2 \end{cases}$ 基本形式　　(アールスリー) $\mathbb{R}^3$

曲面 : surface

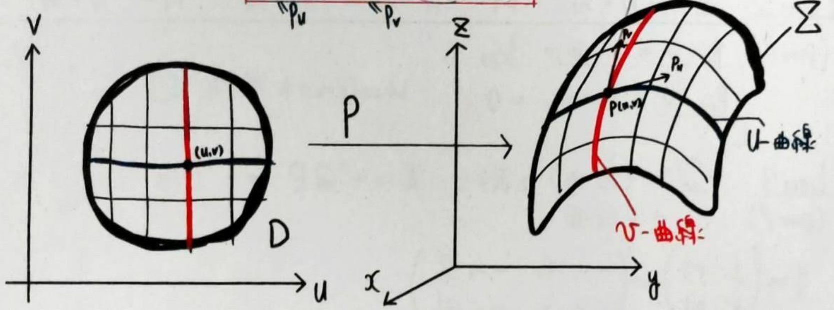
- 曲面(片)とは、$\mathbb{R}^3$ の適当な部分集合 Σ
- $^\exists p : D \xrightarrow[C^\infty]{1:1} \mathbb{R}^3$　　$p(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$D \subset \mathbb{R}^2$ (領域)
連結開集合



s.t. $\begin{cases} p(D) = \Sigma \\ ^\forall(u,v) \in D \text{ において、} \boxed{\dfrac{\partial p}{\partial u} \text{ と } \dfrac{\partial p}{\partial v} \text{ は1次独立}} \end{cases}$

$\dfrac{\partial p}{\partial u} = p_u$, $\dfrac{\partial p}{\partial v} = p_v$



§ 第一基本形式

- $E := p_u \cdot p_u$, $F := p_u \cdot p_v$, $G := p_v \cdot p_v$
を**第一基本量**という。(D上の関数)
- $\mathrm{I} := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$: 第一基本行列
(各成分が D上の関数)
- $g := E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ を**第一基本形式**という
← リーマン計量!

Lem　$\mathrm{I} = {}^t(p_u\ p_v)(p_u\ p_v)$ で表される。

∵
$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} {}^t p_u\, p_u & {}^t p_u\, p_v \\ {}^t p_v\, p_u & {}^t p_v\, p_v \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix} (p_u\ p_v)$$
$$= {}^t(p_u\ p_v)(p_u\ p_v) \quad ▨$$
(= 2×2 行列)

> $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$
>
> $v \cdot w = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$
> 内積
> $= (v_1\ v_2\ v_3) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$
> $= {}^t v\, w$
> 行列の積

$p(\mathbb{R}^2) = \Sigma$ (xy 平面)

$p(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$

$p_u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$　$p_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

1次独立 → p は曲面片

$EG - F^2$

$[p_u\ p_v] = \begin{bmatrix} \circ & \triangle \\ \circ & \triangle \\ \circ & \triangle \end{bmatrix}$

${}^t[p_u\ p_v] = \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \triangle & \triangle & \triangle \end{bmatrix}$

Def　T : (n次) 対称行列 に対し

T が <u>正定値</u> $\iff$ $^\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, ${}^t x T x > 0$ (スカラー)

($\overset{同値}{\iff}$ T の固有値がすべて正)

Prop　第一基本行列 I は 正定値

(proof) $^\forall x \in \mathbb{R}^2$, $x \neq 0$ を $x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ と表す

$${}^t x \mathrm{I} x = {}^t\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} {}^t(p_u\ p_v)(p_u\ p_v)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$
$$= {}^t\left\{(p_u\ p_v)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right\}(p_u\ p_v)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$
$$= {}^t(a p_u + b p_v)(a p_u + b p_v) = |a p_u + b p_v|^2$$

${}^t v\, v = v \cdot v = |v|^2$

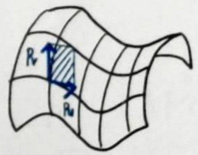
ここで、$|a p_u + b p_v|^2 > 0$ である

∵ もしそうでないとすると
$a p_u + b p_v = 0$
$(a, b) \neq (0, 0)$ なので
$\{p_u, p_v\}$: 一次独立に矛盾

ノルムは正なので
← 正定値の定義より

$\therefore\ {}^t x \mathrm{I} x > 0$ for $^\forall x \neq 0$ ▨

面積



微小平行四辺形の面積
$\sqrt{|p_u|^2 |p_v|^2 - (p_u \cdot p_v)^2} = \sqrt{EG - F^2}$

$A := \int_D \sqrt{EG - F^2}\, du\,dv$　曲面の面積

$\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$: dA **面積要素**という

・座標不変性　・$K = (E, F, G$ のみの式$)$

・$\frac{1}{2\pi}\int_M K\,dA = \chi(M)$

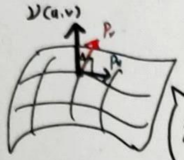
§ ガウス曲率

$p_u \times p_v\ (\neq 0)$: p_u と p_v に直交する

$$\nu(u,v) := \frac{p_u(u,v)\times p_v(u,v)}{|p_u(u,v)\times p_v(u,v)|}$$

とおくと $p_u \perp \nu$, $p_v \perp \nu$, $|\nu| = 1$ をみたす

ν を曲面の単位法ベクトル場 という (= ガウス写像)



法方向は1方向に定まる!

$e = \frac{p_u\times p_v}{|p_u\times p_v|}$

第二基本形式 ✲ $L := p_{uu}\cdot\nu$, $M = p_{uv}\cdot\nu$, $N = p_{vv}\cdot\nu$

を第二基本量 という (D上の関数)

$\mathrm{II} := \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$: 第二基本行列 (各成分がD上の関数)

$h := L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$: 第二基本形式

✲ L〜N は、

$L = -p_u\cdot\nu_u$

$M = -p_u\cdot\nu_v = -p_v\cdot\nu_u$

$N = -p_v\cdot\nu_v$

M:空間 (u,v) パラメタをもつ

$g = E\,du^2 + F\,du\,dv + G\,dv^2$ (計量)

ペア(M,g) を リーマン多様体

$A := \mathrm{I}^{-1}\mathrm{II}$: ワインガルテン行列 (Weingarten) という (2×2 行列)

Def $\boxed{K := \det A : \text{ガウス曲率} \qquad H := \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,A : \text{平均曲率}}$

$k_1 k_2$　$k_1 + k_2$

$$\boxed{K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}}$$ と表わせる

$$A = \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N\end{pmatrix} = \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} GL-FM & GM-FN \\ EM-FL & EN-FM\end{pmatrix}$$

$$K = \det(\mathrm{I}^{-1}\mathrm{II}) = (\det \mathrm{I})^{-1}(\det\mathrm{II}) = \frac{LN-M^2}{EG-F^2}$$

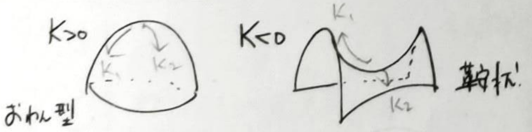
$$H = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,A = \frac{1}{2}\left(\frac{GL-FM}{EG-F^2} + \frac{EN-FM}{EG-F^2}\right) = \frac{EN-2FM+GL}{2(EG-F^2)} \quad ■$$

p_u, p_v が一次独立であり

↓

$EG - F^2 = 0$ になるところ (特異点)

ガウス曲率の幾何学的性質



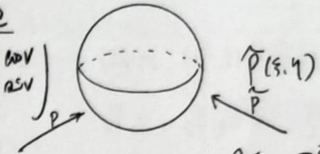
立体射影

Ex) $\tilde p(\xi,\eta) = \frac{1}{1+\xi^2+\eta^2}\begin{bmatrix} 2\xi \\ 2\eta \\ \xi^2+\eta^2-1\end{bmatrix}$

ガウス曲率Kの大事な性質① 座標不変性

座標変換

$p(u,v) = \begin{pmatrix}\cos u\cos v \\ \cos u \sin v \\ \sin u\end{pmatrix}$



パラメータ表示は一般に沢山ある

$\boxed{\text{パラメータ表示に依存しないもの} = \text{幾何学的性質}}$

$D = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\times(-\pi,\pi) \xleftrightarrow{\text{2つの間の変換}} \tilde D = \mathbb{R}^2$

$(u,v) \xleftrightarrow{\text{パラメータ変換}} (\xi,\eta)$

Def $D, \tilde D \subseteq \mathbb{R}^2$: 領域

$\varphi : \tilde D \longrightarrow D$, $(\xi,\eta) \longmapsto (u(\xi,\eta), v(\xi,\eta))$ が微分同相写像 (diffeomorphism)

$\Longleftrightarrow$
(1) φ は C^∞ 級
(2) φ : 1 to 1, onto $(\rightsquigarrow \exists\varphi^{-1})$ 全単射
(3) φ^{-1} も C^∞ 級

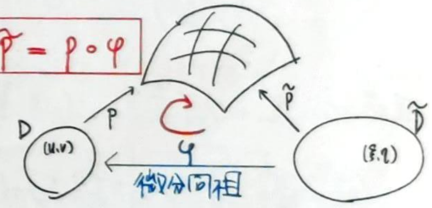
・パラメータ変換 ・座標変換 ともいう

{ 曲面片 $p = p(u,v)$
　座標変換 $(u,v) = (u(\xi,\eta), v(\xi,\eta))$

に対して パラメータ (ξ,η) での曲面の表示 $\tilde p(\xi,\eta)$ は

$$\tilde p(\xi,\eta) = p(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta))$$

$\boxed{\tilde p = p\circ\varphi}$



$\tilde E = \tilde p_\xi\cdot\tilde p_\xi$, $\tilde F = \tilde p_\xi\cdot\tilde p_\eta$, $\tilde G = \tilde p_\eta\cdot\tilde p_\eta$

$\tilde\nu(\xi,\eta) = \frac{\tilde p_\xi\times\tilde p_\eta}{|\tilde p_\xi\times\tilde p_\eta|}$

$\tilde L = \tilde p_{\xi\xi}\cdot\tilde\nu$, $\tilde M = \tilde p_{\xi\eta}\cdot\tilde\nu$, $\tilde N = \tilde p_{\eta\eta}\cdot\tilde\nu$

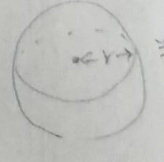
$\tilde K = \frac{\tilde L\tilde N - \tilde M^2}{\tilde E\tilde G - \tilde F^2}$, $\tilde H = \frac{\tilde E\tilde N - 2\tilde F\tilde M + \tilde G\tilde L}{2(\tilde E\tilde G - \tilde F^2)}$

等と定める

パラメータ (ξ,η) の関数とみるときはチルダをつける

Prop $\boxed{K = \tilde K}$ ← どの座標で計算しても同じ値

座標不変性



半径rの球のガウス曲率 $K = \frac{1}{r^2}$

$E = p_u^2$

$F = p_u \cdot p_v$

$G = p_v^2$

ガウス曲率Kの大事な性質② ガウスの驚異の定理

K は E, F, G のみの式で表すことができる

明示的な式

$$\boxed{K = \frac{E(E_v G_v - 2F_u G_v + (G_u)^2)}{4(EG-F^2)^2} + \frac{F(E_u G_v - E_v G_u - 2E_v F_v - 2F_u G_u + 4F_u F_v)}{4(EG-F^2)^2} + \frac{G(E_u G_u - 2E_u F_v + (E_v)^2)}{4(EG-F^2)^2} - \frac{E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu}}{2(EG-F^2)}}$$

ガウス曲率Kの大事な性質③ ガウス・ボンネの定理

Def $\mathbb{R}^3$ の部分集合 $M \subseteq \mathbb{R}^3$ が曲面

$\Leftrightarrow \exists \{\Sigma_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$: 曲面片の族 s.t. $M = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \Sigma_\lambda$

Ex $S^2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2=1 \right\}$: 単位球面

$\Sigma_1 := S^2 \setminus \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ $\quad \Sigma_2 := S^2 \setminus \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

$\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\quad \varphi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$\varphi_1(u,v) := \frac{1}{1+u^2+v^2}\begin{pmatrix} 2u \\ 2v \\ u^2+v^2-1 \end{pmatrix}$ $\quad \varphi_2(\xi,\eta) := \frac{1}{1+\xi^2+\eta^2}\begin{pmatrix} 2\xi \\ 2\eta \\ 1-\xi^2-\eta^2 \end{pmatrix}$

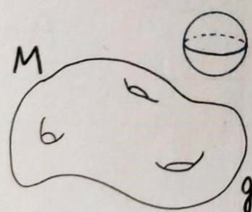
$S^2 = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ ∴ 曲面

ガウス・ボンネの定理

M: 向き付け可能な $\mathbb{R}^3$ の閉曲面

$$\Longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_M K\,dA = \chi(M)$$

オイラー標数
(位相不変量)



M

$S^2 \cdots g = 0$

$g = 3$

g: 種数(穴の数)とすると

$\chi(M) = 2 - 2g$

穴があれば成立

$V - e_{dge} + F_{ace} = 2$

Vertex

Prop $\boxed{K = \tilde{K}}$ ← どの座標で計算しても同じ値

いくつか補題を用意する

Lem1 $P := (p_u \; p_v)$ とおくと $\mathrm{I} = {}^tPP$

3×2行列

Lem2 $L = -p_u \cdot \nu_u \quad M = -p_u \cdot \nu_v = -p_v \cdot \nu_u \quad N = -p_v \cdot \nu_v$

(proof) $p_u \cdot \nu = 0$ 両辺 $\partial/\partial u$

$\underbrace{p_{uu}\cdot\nu}_{L} + p_u \cdot \nu_u = 0$ $\quad$ MとNについても同様 ▨

Lem3 $Q := (\nu_u \; \nu_v)$ とおくと $\mathrm{II} = -{}^tQP = -{}^tPQ$

(proof) Lem1と同様

$$\mathrm{II} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nu_u\cdot p_u & -\nu_v \cdot p_u \\ -\nu_u \cdot p_v & -\nu_v \cdot p_v \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} {}^t\nu_u p_u & {}^t\nu_v p_u \\ {}^t\nu_u p_v & {}^t\nu_v p_v \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} {}^t\nu_u \\ {}^t\nu_v \end{pmatrix}(p_u \; p_v) = -{}^t(\nu_u \; \nu_v)(p_u \; p_v)$$

$$= -{}^tQP$$ ▨

$J = \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(\xi,\eta)} = \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}$: Jacobi行列

$\Longrightarrow \det J = \left|\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(\xi,\eta)}\right| = \begin{vmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{vmatrix} = u_\xi v_\eta - u_\eta v_\xi \neq 0$

Jacobian

Def $\begin{cases} \det J > 0 \text{ のとき } \varphi \text{ を向きを保つ座標変換} \\ \det J < 0 \text{ のとき } \varphi \text{ を向きを逆にする座標変換} \end{cases}$ という

B

Prop $\boxed{K = \tilde{K}}$

(Prop の proof) $\tilde{p}(\xi,\eta) = p(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta))$ の両辺を微分

$$\begin{cases} \tilde{p}_\xi = \dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial \xi} = \dfrac{\partial p}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial \xi} + \dfrac{\partial p}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial \xi} = u_\xi p_u + v_\xi p_v \\ \tilde{p}_\eta = \dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial \eta} = \dfrac{\partial p}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial \eta} + \dfrac{\partial p}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial \eta} = u_\eta p_u + v_\eta p_v \end{cases} \quad \left(\begin{matrix}\text{Chain}\\ \text{rule}\end{matrix}\right)$$

よって

$$\tilde{P} = (\tilde{p}_\xi \ \tilde{p}_\eta) = (u_\xi p_u + v_\xi p_v \, , \, u_\eta p_u + v_\eta p_v)$$

$$= \underbrace{(p_u \ p_v)}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}}_{J} = PJ$$

Lem 1 より $\tilde{\mathrm{I}} = \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} = {}^t\tilde{P}\tilde{P} = {}^t(PJ)PJ = {}^tJ \overbrace{{}^tPP}^{\mathrm{I}} J = {}^tJ\,\mathrm{I}\,J$

同様に $\tilde{\hat{\mathrm{I\!I}}} = {}^tJ\,\hat{\mathrm{I\!I}}\,J$ （φ：向きを保つとき）

$\therefore \ \tilde{A} = \tilde{\hat{\mathrm{I}}}^{-1}\tilde{\hat{\mathrm{I\!I}}} = ({}^tJ\,\hat{\mathrm{I}}\,J)^{-1}({}^tJ\,\hat{\mathrm{I\!I}}\,J) = J^{-1}AJ$

$\therefore \ \det\tilde{A} = \det(J^{-1}AJ) = \det A$ より $\tilde{K} = K$ ▨

Remark $\hat{\mathrm{I}}$ は座標不変ではないが $(\tilde{\hat{\mathrm{I}}} = {}^tJ\,\hat{\mathrm{I}}\,J)$

第一基本形式

$\boxed{g := E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} = (du \ dv)\,\hat{\mathrm{I}}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$ ← リーマン計量

は座標不変