前回

$$\text{断面曲率}\quad K(\pi) = \frac{\langle R_{vw} v, w\rangle}{\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2}$$

- リーマン曲率テンソル R と 同じ情報量 をもつ.
- 定曲率リーマン多様体 $\Longleftrightarrow R_{xy}z = C(\langle z,x\rangle y - \langle z,y\rangle x)$
- 2次元の場合. K : M 上の関数 : ガウス曲率

今回 リッチ曲率, スカラー曲率

復習 (線形変換のトレース)

V : m 次元ベクトル空間 $\quad T: V \longrightarrow V$ 線形変換

$\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$: V の基底 とする.

このとき $Tv_1 = T_1^1 v_1 + T_1^2 v_2 + \cdots + T_1^m v_m$

と表せる. $Tv_2, \cdots, Tv_m$ も同様に

$$\begin{cases} Tv_1 = T_1^1 v_1 + T_1^2 v_2 + \cdots + T_1^m v_m = \sum_{i=1}^m T_1^i v_i \\ Tv_2 = T_2^1 v_1 + T_2^2 v_2 + \cdots + T_2^m v_m \\ \quad\vdots \\ Tv_m = T_m^1 v_1 + T_m^2 v_2 + \cdots + T_m^m v_m \end{cases}$$

このとき

$$\begin{aligned} &T(v_1, v_2, \cdots, v_m) \\ &= (Tv_1, Tv_2, \cdots, Tv_m) \\ &= (T_1^1 v_1 + T_1^2 v_2 + \cdots + T_1^m v_m, \cdots, T_m^1 v_1 + T_m^2 v_2 + \cdots + T_m^m v_m) \\ &= (v_1, v_2, \cdots, v_m) \begin{pmatrix} T_1^1 & T_2^1 & \cdots & T_m^1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ T_1^m & T_2^m & \cdots & T_m^m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

T の $\{v_1, \cdots, v_m\}$ に関する表現行列

Def $\quad \mathrm{tr}\, T := T_1^1 + T_2^2 + \cdots + T_m^m$ を T のトレースという

★ トレースは 基底のとり方に依らない. (5ページ参照)

★ V が内積 $\langle\, ,\rangle$ を持っていて

$\{v_1, \cdots, v_m\}$: V の正規直交基底 (orthonormal basis, ONB) のとき

$T_1^1 = \langle Tv_1, v_1\rangle, \cdots, T_m^m = \langle Tv_m, v_m\rangle$ なので

$$\Rightarrow \mathrm{tr}\, T = \langle Tv_1, v_1\rangle + \cdots + \langle Tv_m, v_m\rangle = \sum_{k=1}^m \langle Tv_k, v_k\rangle$$

Def

(M, g) : リーマン多様体, R : リーマン曲率テンソル.

$v, w \in T_pM$ とするとき.

線形変換 $T_pM \ni \xi \longmapsto R_{v,\xi}(w) \in T_pM$

のトレースを リッチ曲率 という

$$\mathrm{Ric}(v, w) := \mathrm{tr}\,(\xi \longmapsto R_{v\xi}(w))$$

★ $\{e_1, \cdots, e_m\}$: T_pM の ONB とすると.

$$\mathrm{Ric}(v, w) = \sum_{k=1}^m \langle R_{ve_k}(w), e_k\rangle$$

これと. R の性質 $\langle R_{xy} v, w\rangle = \langle R_{vw} x, y\rangle$ により 次が成立:

Lem $\forall v, w \in T_pM$ に対して

$$\mathrm{Ric}(v, w) = \mathrm{Ric}(w, v).$$

つまり $\mathrm{Ric} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ は 対称 $(0,2)$-テンソル

(計量テンソル g と同じ型)

(proof) $\mathrm{Ric}(w, v) = \sum \langle R_{we_k}(v), e_k\rangle$

$= \sum \langle R_{ve_k}(w), e_k\rangle$

$= \mathrm{Ric}(v, w)$ ☑

局所座標での表示 $(U; x^1, \cdots, x^m)$

Prop $\mathrm{Ric} = \sum_{j,k=1}^m R_{j,k}\, dx^j dx^k$ とおくと $R_{ij} = \sum_{l=1}^m R_{ijl}^l$

ただし $R_{\partial_k \partial_l}(\partial_j) = \sum_i R_{jkl}^i \partial_i$

(proof) $R_{jk} = \mathrm{Ric}(\partial_j, \partial_k)$

$= \mathrm{tr}\,(\xi \longmapsto R_{\partial_j,\xi}\, \partial_k)$

$= \mathrm{tr}\,(\xi \longmapsto R_{\partial_k,\xi}\, \partial_j)$

$T(\xi) := R_{\partial_k \xi}\, \partial_j$ とおくと. $\quad R_{jk} = \mathrm{tr}\, T$

$T(\partial_l) = R_{\partial_k \partial_l}\, \partial_j$

$= \sum_i R_{jkl}^i \partial_i = R_{jkl}^1 \partial_1 + \cdots + R_{jkl}^m \partial_m$

つまり
$$\begin{cases} T(\partial_1) = R_{jk1}^1 \partial_1 + \cdots + R_{jk1}^m \partial_m \\ \quad\vdots \\ T(\partial_m) = R_{jkm}^1 \partial_1 + \cdots + R_{jkm}^m \partial_m \end{cases}$$

より $R_{jk} = \mathrm{tr}\, T = R_{jk1}^1 + \cdots + R_{jkm}^m = \sum_{l=1}^m R_{jkl}^l$ ▨

Einstein
アインシュタイン多様体 ← "定曲率"のクラス

Ric, g: どちらも対称(0,2)-テンソルなので比較できる.

Def リーマン多様体 (M, g) が アインシュタイン
$\Leftrightarrow$ ある定数 $c \in \mathbb{R}$ が存在して $Ric = c \cdot g$

Prop (M, g): 定曲率リーマン多様体 $\Rightarrow$ (M, g): アインシュタイン

証明のための準備

① $\{e_1, \cdots, e_m\}$: T_pM の ONB. つまり
$\langle e_1, e_1\rangle = \cdots = \langle e_m, e_m\rangle = 1$, $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ $({}^\forall i \neq j)$

② ${}^\forall v, w \in T_pM$ は
$v = v^1 e_1 + \cdots + v^m e_m$, $w = w^1 e_1 + \cdots + w^m e_m$ $(v^k, w^k \in \mathbb{R})$
と表わせる
$\Rightarrow \langle v, w\rangle = \langle v^1 e_1 + \cdots + v^m e_m, w^1 e_1 + \cdots + w^m e_m\rangle$

$$= v^1 w^1 + v^2 w^2 + \cdots + v^m w^m = \sum_{k=1}^m v^k w^k$$

③ $\langle v, e_k\rangle = \langle v^1 e_1 + \cdots + v^m e_m, e_k\rangle = v^k \langle e_k, e_k\rangle = v^k$
$\therefore v^k = \langle v, e_k\rangle$,
同様に. $w^k = \langle w, e_k\rangle$.

(Prop の proof) (M, g): 定曲率より ${}^\exists c \in \mathbb{R}$ st.
$R_{xy} z = c(\langle z, x\rangle y - \langle z, y\rangle x)$ $({}^\forall x, y, z \in T_pM)$
$\{e_1, \cdots, e_m\}$: T_pM の ONB とすると,
${}^\forall v, w \in T_pM$ に対して, $Ric(v, w) = \sum_{k=1}^m \langle R_{v e_k} w, e_k\rangle$
ここで $R_{v e_k} w = c(\langle w, v\rangle e_k - \langle w, e_k\rangle v)$

$$\langle R_{v e_k} w, e_k\rangle = c(\langle w, v\rangle \underbrace{\langle e_k, e_k\rangle}_{1} - \underbrace{\langle w, e_k\rangle}_{w^k} \underbrace{\langle v, e_k\rangle}_{v^k})$$
$$= c(\langle v, w\rangle - v^k w^k)$$
$$\therefore Ric(v, w) = c\Big(\sum_{k=1}^m \langle v, w\rangle - \underbrace{\sum_{k=1}^m v^k w^k}_{\langle v, w\rangle}\Big)$$
$$= c(m\langle v, w\rangle - \langle v, w\rangle)$$
$$= c(m-1)\langle v, w\rangle = c(m-1) g(v, w) \quad \boxed{/\!/}$$

スカラー曲率

復習 $(V, \langle,\rangle)$: 内積 $\langle,\rangle$ を持つベクトル空間.
$\{e_1, \cdots, e_m\}$: 正規直交基底 (ONB)
$T: V \times V \to \mathbb{R}$: 対称双線形形式
このとき $\mathrm{tr}\, T := \sum_{k=1}^m T(e_k, e_k)$ を T の トレース という

☆ トレースは ONB の取り方によらない (6ページ参照)
☆ $\{v_1, \cdots, v_m\}$: V の (ONB とは限らない) 基底
$$\Longrightarrow \boxed{\mathrm{tr}\, T = \sum_{i,j=1}^m g^{ij}\, T(v_i, v_j)}$$
ただし, $(g^{ij})_{i,j=1,\cdots,m}$ は
$(\langle v_i, v_j\rangle)_{i,j=1\cdots m}$ の逆行列

Def (M, g): リーマン多様体
このとき. $S := \mathrm{tr}\, Ric$ とおき, スカラー曲率と呼ぶ.

スカラー曲率 S は M 上の関数 $S: M \to \mathbb{R}$

Prop 座標近傍 $(U; x^1, \cdots, x^m)$ において
$$S = \sum_{i,j,k=1}^m g^{ij} R^k_{ijk}$$
ただし $R_{\partial_k \partial_l}(\partial_j) = \sum_i R^i_{jkl}\, \partial_i$

とくに $S \in C^\infty(M)$ (なめらか)

Prop (M, g): アインシュタイン多様体
$\Rightarrow$ スカラー曲率 S は定数 on M

まとめ

多	R: リーマン曲率テンソル	(1,3)-テンソル	←同じ情報量→ K: 断面曲率
情報量	Ric: リッチ曲率	(0,2)-テンソル	
少	S: スカラー曲率	((0,0)-テンソル) 関数 on M.	

5

線形変換のトレース

V: ベクトル空間, $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$: Vの基底, T: Vの線形変換 とする

$$T(v_1, v_2, \cdots, v_m) = (v_1, v_2, \cdots, v_m) \boxed{\begin{pmatrix} T_1^1 & T_2^1 & \cdots & T_m^1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ T_1^m & T_2^m & \cdots & T_m^m \end{pmatrix}}$$

Tの$\{v_1, \cdots, v_m\}$に関する表現行列

(Aとおく)

$$T(v_1, \cdots, v_m) = (v_1, \cdots, v_m) A \text{ ——— ①}$$

⇝ Tのトレースを $\mathrm{tr}A$ で定めた

$\{w_1, \cdots, w_m\}$: 別の基底

$$T(w_1 \cdots w_m) = (w_1, \cdots, w_m) B \text{ ——— ②}$$

↑ Tの$\{w_1, \cdots, w_m\}$に関する表現行列

このとき $\boxed{\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}B}$ が成り立つ

(従って Tのトレースは基底$\{v_1 \cdots v_m\}$のとり方によらない)

∵ $\{v_i\}_{i=1\cdots m}$, $\{w_j\}_{j=1\cdots m}$: 基底なので

$\exists \{c_{ij}\}_{i,j=1\cdots m}$ s.t. $w_j = c_{1j} v_1 + \cdots + c_{mj} v_m \quad (j = 1, \cdots, m)$

$$(w_1, \cdots, w_m) = (c_{11} v_1 + \cdots + c_{m1} v_m, \cdots, c_{1m} v_1 + \cdots + c_{mm} v_m)$$

$$= (v_1, \cdots, v_m) \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & & c_{1m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m1} & & c_{mm} \end{pmatrix}}_{} \text{ ——— ③}$$

↑ 基底の変換行列 P とおく

$P = (c_{ij})_{i,j=1\cdots m}$

①, ②, ③ より

$$T(w_1 \cdots w_m) = T(v_1 \cdots v_m) P = (v_1 \cdots v_m) AP$$

$$\|$$

$$(w_1 \cdots w_m) B = (v_1 \cdots v_m) PB \qquad \therefore PB = AP$$

$$B = P^{-1}AP$$

$$\therefore \mathrm{tr}B = \mathrm{tr}(P^{-1}AP)$$
$$= \mathrm{tr}(APP^{-1})$$
$$= \mathrm{tr}A \quad /\!/$$

$\boxed{\begin{aligned} &\mathrm{tr}(XY) \\ &= \mathrm{tr}(YX) \end{aligned}}$

6

対称双線形形式のトレース

$(V, \langle, \rangle)$: 内積$\langle, \rangle$を持つベクトル空間. $\{e_1, \cdots, e_m\}$: ONB

$\{e'_1, \cdots, e'_m\}$: 別のONB

$(e'_1, \cdots, e'_m) = (e_1, \cdots, e_m) P$ ← 基底の変換行列

${}^tPP = E_m$ (E_m: 単位行列)

Lem 正規直交基底(ONB)の間の基底の変換行列は直交行列

(proof) $\begin{cases} e'_i = c_{1i} e_1 + \cdots + c_{mi} e_m \\ e'_j = c_{1j} e_1 + \cdots + c_{mj} e_m \end{cases}$

$$\delta_{ij} = \langle e'_i, e'_j \rangle = \langle c_{1i} e_1 + \cdots + c_{mi} e_m, c_{1j} e_1 + \cdots + c_{mj} e_m \rangle$$
$$= c_{1i} c_{1j} + \cdots + c_{mi} c_{mj}$$
$$= \sum_{k=1}^m c_{ki} c_{kj}$$

$\boxed{\text{行列 } X = (x_{ij}), Y = (y_{ij}) \text{ の積 } XY = (z_{ij}) \text{ のとき } z_{ij} = \sum_{k=1}^m x_{ik} y_{kj}}$

∴ ${}^tPP = E_m$ より P: 直交行列 //

$a_{ij} = T(e_i, e_j)$ とし, $A = (a_{ij})_{i,j=1\cdots m}$ とおく

⇝ 対称双線形形式Tのトレースを $\mathrm{tr}A$ と定めた

$b_{ij} = T(e'_i, e'_j)$ とし, $B = (b_{ij})_{i,j=1\cdots m}$ とおく

このとき $\boxed{\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}B}$ が成り立つ

(従って Tのトレースは ONB$\{e_1 \cdots e_m\}$のとり方によらない)

∵ $b_{ij} = T(e'_i, e'_j)$

$$= T(c_{1i} e_1 + \cdots + c_{mi} e_m, c_{1j} e_1 + \cdots + c_{mj} e_m)$$

$$= \sum_{k,l=1}^m c_{ki} c_{lj} \underbrace{T(e_k, e_l)}_{a_{kl}}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^m c_{ki} \underbrace{\left(\sum_{l=1}^m a_{kl} c_{lj}\right)}_{AP\text{の}(k,l)\text{成分}}}_{{}^tPAP\text{の}(i,j)\text{成分}} \qquad \therefore B = {}^tPAP$$

Lem より $P^{-1} = {}^tP$ なので $B = P^{-1}AP$

$$\therefore \mathrm{tr}B = \mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(APP^{-1}) = \mathrm{tr}A \quad /\!/$$

火2 (11) メモ

- トレース

$$\begin{pmatrix} T_1{}^1 & T_2{}^1 & \cdots & T_m{}^1 \\ \vdots & & & \vdots \\ T_1{}^m & T_2{}^m & \cdots & T_m{}^m \end{pmatrix} =: T'$$

$\left(\begin{array}{l} \mathrm{tr}\, T := T_1{}^1 + T_2{}^2 + \cdots T_m{}^m \\ T_1{}' = \langle T v_1, v_1 \rangle, \cdots, T_m{}^m = \langle T v_m, v_m \rangle \end{array} \right)$

$\cancel{T_1{}^1 \underbrace{\langle v_1, v_1 \rangle}_{1} + T_1{}^2 \langle v_1, v_2 \rangle + \cdots + T_1{}^m \langle v_1, v_m \rangle} =$

- リッチ曲率　$Ric : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ は 対称 (0,2) テンソル

$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$: V の正規直交基底

$T : V \to V$

$\Longrightarrow \mathrm{tr}(T) = \sum_{i=1}^{n} \langle T v_i, v_i \rangle$

- リッチ曲率 と 計量テンソル g は 同じ型

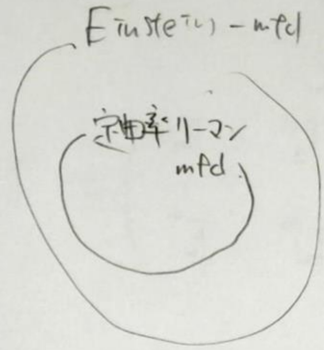
$Ric(v, w) = Ric(w, v)$

$(v, w \in T_p(M))$.

- リッチ曲率 $Ric = \sum_{\substack{j=1 \\ k=1}}^{m} dx^j dx^k$

$$R_{ij} = \sum_{l=1}^{m} R^{l}_{ijl} \quad \left(R_{\partial k \partial l}(\partial_j) = \sum_{i} R^{i}_{jkl} \partial_i \right)$$

◎ Einstein 多様体



リーマン多様体 (M, g) が Einstein である

$\iff$ 定数 $c \in \mathbb{R}$ が存在して、$Ric = c \cdot g$

・ $v := v^1 e_1 + v^2 e_2 + \cdots + v^m e_m = \sum_{j=1}^{m} v^j e_j$

・ $\langle v, e_i \rangle = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{v^j}_{変数} \underbrace{\langle e_j, e_i \rangle}_{変数} = \delta_{ij}$

$= v^i$

Prop 準備 ②

② $\langle v, w \rangle = \sum_{k=1}^{m} v^k w^k$ ← ユークリッド空間の標準内積

Prop

※ $\in \mathbb{R}$、$(c \neq C)$

$$Ric(v, w) = C\left(\sum_{k=1}^{m} \langle v, w \rangle - \sum_{k=1}^{m} v^k w^k\right)$$

$$= C\left(m\langle v, w \rangle - \langle v, w \rangle\right)$$

$$= C(m-1)\langle v, w \rangle$$

$$= C(m-1)\, g(v, w)$$

（∵ ある定数 $c \in \mathbb{R}$ とは、$c = C \cdot (m-1)$）

注）
（一般に）逆の矢印 $\Longleftarrow$ は成立しない。

⑪ スカラー曲率 $\left(\mathrm{tr}\, T = \sum_{k=1}^{m} (e_k, e_k) \right)$

$\{v_1, \cdots, v_m\}$ が V の基底とする (ONB でなくても良い)

$$\Rightarrow \quad \mathrm{tr}\, T = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{m} g^{ij} T(v_i, v_j)$$

$(g^{ij})_{i,j=1,\cdots,m}$: $(\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j=1,\cdots,m}$ の逆行列

スカラー曲率 $S := \mathrm{tr}(Ric) \in \mathbb{R}$
$(S : M \to \mathbb{R})$

・$V = T_p(M^m)$ 、$\langle , \rangle = g_p$

$\{e_1, \cdots, e_m\}$: $(T_p(M)$、$\langle , \rangle$ の$)$ ONB

$T = Ric : T_p(M) \times T_p(M) \to \mathbb{R}$: 対称双線形形式

Prop.

スカラー曲率 $S = \sum_{\substack{j=1 \\ i=1 \\ k=1}}^{m} g^{ij} R_{ijk}^{\ \ \ k}$

(ただし $R_{\partial_k \partial_l}(\partial_j) = \sum_i R_{jkl}^{\ \ i} \partial_i$)

Proof

$Ric = \sum R_{jk}\, dx^j dx^k$

$R_{jk} = \sum_{\alpha=1}^{m} R_{jk\alpha}^{\ \ \ \alpha}$

$$\mathrm{tr}(Ric) = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{m} g^{ij} Ric\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right)$$

$$= \sum_{i,j,\alpha=1}^{m} g^{ij} R_{ij\alpha}^{\ \ \ \alpha} \quad \text{ok} \qquad R_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{m} R_{ij\alpha}^{\ \ \ \alpha}$$

2m次元

4次元リーマンmfd の ガウスボンネ

$$\frac{1}{32\pi^2} \int_M (|R|^2 - 4|Ric|^2 + S^2)\, dA = \chi(M)$$