目次

HNSUY 修正一覧およびセクション 5 日本語まとめ

飯野 郁

2025/07/31

1　論文の誤記をリストアップ

1.1　セクション 3

Lemma 3.7 Proof で、次のように書かれている。

（Lemma 3.7 Proof より）

If (u, v) is the local coordinate system as in Lemma 3.5, then $F = 0$, $\boldsymbol{\lambda = v\sqrt{EG_0}}$ and $E(u, 0) = 1$ hold.

赤文字の部分は、$\lambda = v\sqrt{\frac{EG_0}{2}}$ が正しい？ ($\lambda = EG - F^2$ に $F = 0$ と $G = \frac{v^2 G_0}{2}$ を代入すると分母に 2 が出る)

Lemma 3.10 Proof で、次のように書かれている。

（Lemma 3.10 Proof より）

By (3.6), $x(u)$ can be written in the form

$$(\mathbf{x}_+(u) :=)\mathbf{x}(u) = \cos\theta(u)\mathbf{n}(u) - \sin\theta(u)\mathbf{b}(u), \tag{1.1}$$

where $\theta(u)$ is the function defined by (3.11) and $\kappa(u)$ (resp. $\kappa_s(u)$) is the curvature function of $\mathbf{c}(u)$ (resp. the singular curvature function defined by (3.7)). In fact, since the singular curvature κ_s of ds^2 is less than κ on I, there exists a real analytic angular function $\theta : I \to \mathbf{R}$ satisfying (3.11) and

$$\boldsymbol{0 < |\theta(u)| < \frac{\pi}{2}} \quad (u \in I).$$

赤文字の部分は、$\boldsymbol{0 < |\theta(u)| < \pi}$ が正しい？

Remark 3.11 で、次のように書かれている。

（Lemma 3.11 直後 より）

In fact, since the singular curvature κ_s of ds^2 is less than κ on I, there exists a real analytic angular function $\theta\colon I \to \mathbb{R}$ satisfying (3.11) and $0 < |\theta(u)| < \frac{\pi}{2}$ $(u \in I)$.

赤文字の部分は、"absolute value of singular curvature" が正しい？

1.2 セクション 4

Remark 4.4 で、次のように書かれている。

（Remark 4.4 より）

Differentiating $\boldsymbol{T \circ c_0(u) = c_1(u)}$, we have...

赤文字の部分は、$\boldsymbol{T \circ c_0(-u) = c_1(u)}$ が正しい？

Remark 4.4 で、次のように書かれている。

（Remark 4.4 より）

Using this, one can also obtain the relation $\boldsymbol{-\sigma\tau_0(-u) = \tau_1(u)}$, where τ_i $(i = 1, 2)$ is the torsion function of c_i.

赤文字の部分は、$\boldsymbol{\sigma\tau_0(-u) = \tau_1(u)}$ が正しい？

Remark 4.4 で、次のように書かれている。

（Remark 4.4 より）

we obtain the relation $f_1(u,t) = T \circ f_0(-u,t)$. In particular, f_1 has the same first fundamental form as f_0.

赤文字の部分は、$\boldsymbol{f_1}$ と $\boldsymbol{f_2}$ は isometry が正しい？

Remark 4.5 で、次のように書かれている。

（Remark 4.5 より）

Then $f_\#(u,t) := f(-u,t)$ is also a generalized cuspidal edge along the same space curve as f but with the reversed orientation. If we set $c_\#(u) := c(-u)$, then $c_\#(u) = f_\#(u,0)$ holds. By a similar calculation like as in Remark 4.4, one can easily verify that $\boldsymbol{(\kappa(-u), -\tau(-u), -\theta(-u), \hat{\mu}(-u,t))}$ gives the fundamental data of $f_\#(u,t)$.

赤文字の部分は、$\boldsymbol{(\kappa(-u), \tau(-u), -\theta(-u), -\hat{\mu}(-u,t))}$ が正しい？

Proof of Theorem II で、次のように書かれている。

（Proof of Theorem II より）

Since f is admissible, the singular curvature κ_s is determined only by ds_f^2.

一方、Lemma3.7 では次のように書かれている。

（Lemma3.7 より）

The singular curvature is intrinsic. In particular, it is defined along the singular curve with respect to a given Kossowski metric. More precisely,

$$\kappa_s(u) = -\frac{E_{vv}(u,0)}{2} \tag{1.2}$$

holds, where (u,v) is the coordinate system as in Lemma 3.5.

(Lemma3.5 より)

Let ds^2 be a C^ω-differentiable Kossowski metric defined on an open subset $U(\subset \mathbb{R}^2)$. Suppose that $\gamma : J \to U$ is a real analytic singular curve with respect to ds^2 such that

$$ds^2(\gamma'(t), \gamma'(t)) > 0 \quad (t \in J). \tag{1.3}$$

Then, for each $t_0 \in J$, there exists a C^ω-differentiable local coordinate system $(V; u, v)$ containing $(t_0, 0)$ such that $V \subset U$ and the coefficients E, F, G of the first fundamental form

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

satisfy the following three conditions:

(1) $\gamma(u) = (u, 0)$, $E(u, 0) = 1$ and $E_v(u, 0) = 0$ hold along the u-axis,
(2) $F(u, v) = 0$ on V, and
(3) there exists a C^ω-function G_0 defined on V such that $G(u, v) = \frac{v^2 G_0(u,v)}{2}$ and $G_0(u, 0) = 2$.

『f が admissible である』という仮定がなくても、κ_s は第一基本形式のみで表すことができている。赤文字の部分は不要？

Proof of Theorem II で、次のように書かれている。

(Proof of Theorem II より)

Since the orientation of the singular curves of $h_\pm$ is opposite of that of f, the two maps $h_\pm$ are **non-faithful isomers** of f.

そもそも isomer ではない（f と右同値である）場合がある。赤文字部分は "not isomers" が適切？

Proof of Theorem II で、次のように書かれている。

(Proof of Theorem II より)

Since the first fundamental form is determined independently of a choice of local coordinate system, we have $\boldsymbol{J_C(f \circ \phi) = J_C(f) \circ \phi}$, where ϕ is a diffeomorphism on a certain tubular neighborhood of $J \times \{0\}$.

赤文字部分について、

- 論文内に J_C の定義がない？（J_o の定義はセクション 1 に次のようにある）

Considering the first fundamental form ds_f^2 of f, we can define a map

$$J_o : g_r^*(\mathbf{R}_o^2, \mathbf{R}^3, C) \ni f \mapsto ds_f^2 \in K_I^r(\mathbf{R}_o^2). \tag{1.4}$$

- $J_C(f) \circ \phi$ ではなく、$\phi * J_C(f)$？

Proposition4.9 直後の式 (4.11) で、次のように書かれている。

（式 4.11 より）

$$B = \frac{\mu_0(u)}{3}t^3 + \frac{\mu_1(u)}{8}t^4 + \frac{2(-\mu_0(u)^3 + 2\mu_2(u))}{30}t^5 + t^6 b_6(t, u) \tag{1.5}$$

赤文字部分は不要？ (Lemma A.1 では 2 は付いていない)

1.3 セクション 5

Proposition 5.1 の証明で、次のように書かれている。

（Proposition 5.1 Proof より）

We suppose that $\check{f}$ is congruent to f. **By Remark 4.5**, it is sufficient to consider the case that C does not lie in any plane.

赤文字は Remark 5.2？

（Remark 5.2 より）

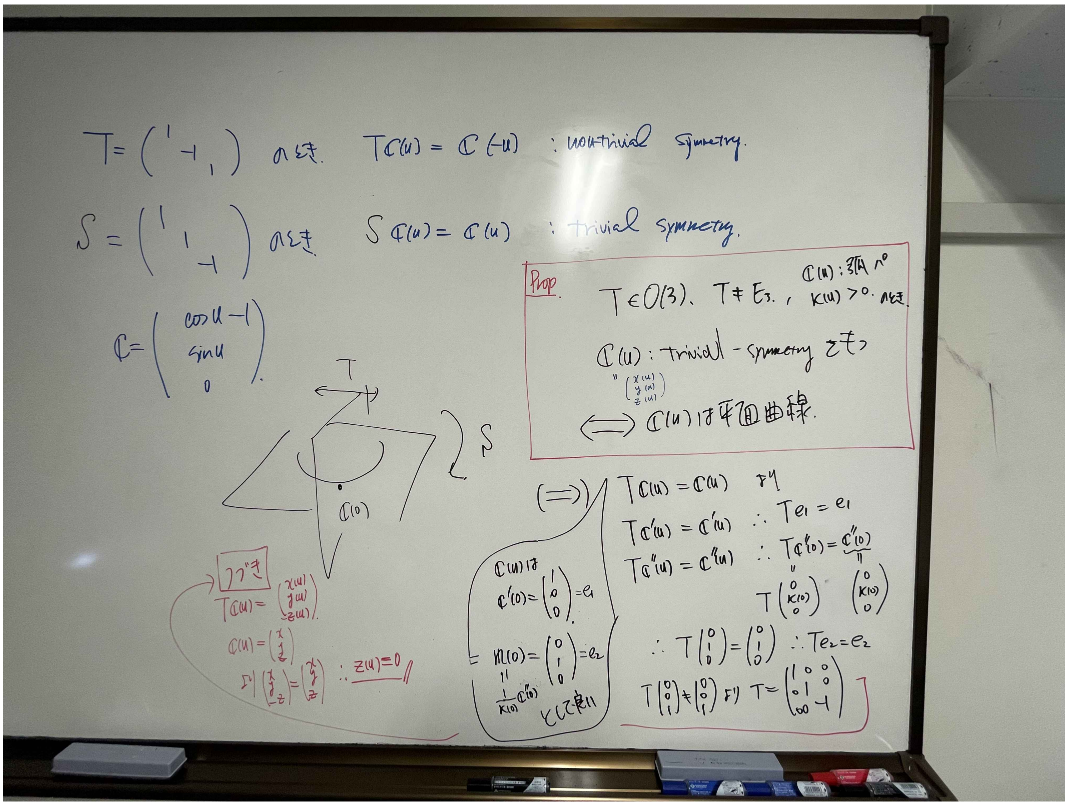
Suppose that C is planar and S is the reflection with respect to the plane containing C. For each $f \in g_{*,3/2}^r(\mathbf{R}_J^2, \mathbf{R}^3, C)$, $S \circ f$ gives a faithful isomer of f. Moreover, if f is real analytic (i.e. $r = \omega$), then we have $\check{f} = S \circ f$ (cf. Definition 3.18).

Proposition 5.1 の証明で、次のように書かれている。

（Proposition 5.1 Proof より）

We consider the case that T fixes each point of C. **Then C must lie in a plane**, a contradiction. So T is a non-trivial symmetry of C, that is, it reverses the orientation of C.

『$c(u)$ が trivial symmetry を持つ ⇒ $c(u)$ は平面曲線である』は論文内では明記されていない（ゼミの時間に示した）。



Proposition 5.1 の証明で、次のように書かれている。

（Proposition 5.1 Proof より）

Conversely, if C has a positive non-trivial symmetry and the first fundamental form ds_f^2 has an effective symmetry ϕ, **then $T \circ f \circ \phi$ is a faithful isomer of f as seen in (a) of Remark 4.4**. Since such an isomer is uniquely determined (cf. Theorem 3.8), we have (5.1).

ϕ が一意であることを証明するには、追加で Propositoin 3.15 が必要？

（Proposition 3.15 より）

Let ds^2 be a real analytic Kossowski metric belonging to $K_*^\omega(\mathbf{R}_o^2)$. Suppose that ϕ is a local C^ω-diffeomorphism satisfying $\phi^* ds^2 = ds^2$ and $\phi(o) = o$ which is not the identity map. Then ϕ is an involution which reverses the orientation of the singular curve. Moreover, such a ϕ is uniquely determined.

Corollary 5.8 で、次のように書かれている。

（Corollary 5.8 より）

Let $f \in g^\omega_{**,3/2}(\mathbf{R}^2_J, \mathbf{R}^3, C)$. Suppose that C lies in a plane and admits a nontrivial symmetry T at the origin 0. Then $\check{f} = S \circ f$ holds, **and $T \circ f, S \circ T \circ f$ give the inverse and the inverse dual of f**, where S is a reflection with respect to the plane. As a consequence, $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ belong to a single congruence class.

赤文字部分の対応が逆である？（$T \circ f$ が f の inverse dual, $S \circ T \circ f$ が f の inverse？）

Corollary 5.8 の証明で、次のように書かれている。

（Corollary 5.8 Proof より）

Obviously, $\check{f} = S \circ f$ holds (cf. Remark 5.2). **On the other hand, $T \circ f$ gives a non-faithful isomer**, and its isometric dual $S \circ T \circ f$ also gives another non-faithful isomer.

そもそも、$T \circ f$ は isomer ではない可能性がある。（T と $T \circ f$ の像が一致する場合がある）

1.4 Appendix

Proposition A.2 で、次のように書かれている。

(Proposition A.2 より)

It is remarkable that the coefficient μ_1 does not affect the criterion for 5/2-cusps. In this case, $\mu_0 = 0$ holds, and μ_1 **and** μ_2 **are proportional to the "secondary cuspidal curvature" and the "bias"** of $\sigma(t)$ at $t = 0$, respectively.

赤文字は μ_1 **and** μ_2 **are proportional to the "bias" and the "secondary cuspidal curvature"** が正しい？(bias と secondary cuspidal curvature が入れ替わってる)

2　Section 5 を日本語ノートにまとめる

本節では、isomer のいくつかの性質を示し、イントロダクションで述べた Theorem III, IV の主張を証明する。

2.1　Proposition 5.1

$f \in g^{\omega}_{**,3/2}(\mathbf{R}^2_J, \mathbf{R}^3, C)$ とする．このとき, 次の (a) と (b) は同値である．

(a) $\check{f}$ が f と合同である (定義 0.2 参照)

(b) 次の (i), (ii) の少なくとも一方が成り立つ

  (i) 曲線 C が平面内にある

  (ii) C が正の non-trivial symmetry をもち, かつ f の第一基本形式 ds^2_f が effective symmetry をもつ (定義 0.4 参照)

(Proof)

($\Longrightarrow$ の証明)

$\check{f}$ と f が合同であると仮定する．Remark 5.2 より, C がいかなる平面にも含まれない場合のみを考えれば十分である．Remark 0.5 より, $\mathbb{R}^3$ の等長変換 T と, f の特異曲線近傍で定義された微分同相写像 φ が存在して,

$$T \circ f \circ \varphi = \check{f}$$

を満たす．

まず, T が C の各点を固定する場合を考える．この時, [*1] C は平面内になければならず, 仮定と矛盾する．したがって, T は C の non-trivial symmetry であり, 定義 1.2 より, C の向きを反転させる．

T が負の symmetry であると仮定すると, Remark 4.4(b) より, $f_0(u,t) = T \circ f_0(-u,t)$ であるため, f の像と $T \circ f$ の像は一致する．しかし, [*2] f の像は $\check{f}$ の像とは異なるので, 矛盾する．

[*1] ※ 1 5/29 に, ゼミで示した．

[*2] ※ 2 Remark 4.4(b) より, f の像 $= T \circ f$ の像．$T \circ f$ と $T \circ f \circ \varphi$ が右同値であるため, f の像 $= T \circ f \circ \varphi$ の像．式 (5.1) より, f の像 $= \check{f}$ の像．一方で, イントロダクションより等長双対 $\check{f}$ は f とカスプ角が反転するため, f と像は一致しない．

ゆえに, T は正の symmetry であり, このとき φ は ds^2_f の effective symmetry を与える.*3 よって, (2) を満たす.

($\Longleftarrow$ の証明)
C が正の non-trivial symmetry を持ち, ds^2_f が effective symmetry φ を持つと仮定する. $T \circ f \circ \varphi$ は Proposition 3.15 および Remark 4.4(a) により, $\check{f}(u,t) = T \circ f(-u,t) = T \circ f \circ \varphi(u,t)$ であり, f の faithful isomer となる. さらに, Theorem 3.8 より異性体は一意であるため, 式 (5.1) が従う. よって, $T \circ f$ と $\check{f}$ は右同値であるため, 同じ像を持つ. よって合同の定義より, f と $\check{f}$ は合同である.

(i)(ii) より, 合同関係を示した. ■

2.2 Remark 5.2

C が平面内にあるとし, その平面に関する鏡映 (reflection) を S とする.

任意の $f \in g^{\omega}_{**,3/2}(\mathbf{R}^2_J, \mathbf{R}^3, C)$ に対し, $S \circ f$ は f の faithful isomer になる. さらに, f が実解析的 (つまり, $r = \omega$) なら $\check{f} = S \circ f$ が成り立つ (定義 3.18 参照).

2.3 Example 5.3

$f \in g^{\omega}_{**,3/2}(\mathbf{R}^2_J, \mathbf{R}^3, C)$ を, 基本データ $(\kappa, \tau, \theta, \hat{\mu})$ $(\tau \neq 0)$ をもつ admissible な一般化カスプ辺とする. ここで κ, τ, θ は定数, 拡張半カスプ曲率関数 $\hat{\mu}$ は u に依らないとする. この場合, 実解析性を仮定せずとも, 次のようにして SO(3) の等長変換 T と ds^2_f の effective symmetry φ を取り, $T \circ f \circ \varphi$ が f の faithful isomer となることを示せる.

実際, C の曲率は κ, 捩率は τ で共に定数である. $\tau \neq 0$ なので C は $\mathbb{R}^3$ 内の螺旋 (helix) であり, 点 $\mathbf{0} \in C$ での主法線に関する 180° 回転 $T \in \mathrm{SO}(3)$ が存在して

---

*3 φ が symmetry であることの確認
定理 3.8 より, f と $\check{f}$ の第一基本形式は一致するため, $ds^2_f = ds^2_{\check{f}}$. 式 (5.1) より $\check{f} = T \circ f \circ \varphi$ であるので, $ds^2_{\check{f}} = ds^2_{T \circ f \circ \varphi} = \varphi^* ds^2_{T \circ f}$. φ は内積を保存するため, $\varphi^* ds^2_{T \circ f} = \varphi^* ds^2_f$ である. よって, $ds^2_f = \varphi^* ds^2_f$ であるため, φ は symmetry である.

φ が effective であることの確認
式 (5.1) より $\check{f} = T \circ f \circ \varphi$. また, 等長双対 $\check{f}$ は f との faithful isomer であるため, f と $\check{f}$ の曲線を辿る向きは一致する. T が曲線 C の向きを反転させることを考慮すると, φ も曲線 f の向きを反転させる作用が無いといけない. よって, φ は effective である. このとき φ は ds^2_f の effective symmetry を与える. よって, (2) を満たす.

$T(C) = C$ となる. Proposition 5.10 の前半より, 第一基本形式

$$ds_f^2 = E(t)du^2 + 2F(t)dudt + G(t)dt^2$$

が involution としての effective symmetry φ をもつことを示せば十分である. 実際, そのような φ が存在すれば, $\check{f} := T \circ f \circ \varphi$ が f の isometric dual となる.

この状況では, 関数 A, B (式 (4.6), (4.9) 参照) は

$$A(t) = t^2\alpha(t), \quad B(t) = t^3\beta(t)$$

と書け, α, β は C^r 級である. Proposition 4.9 により,

- $E(t) > 0$ である
- $F(t) = t^4F_0(t)$ となる C^∞ 関数 $F_0(t)$ が存在し, $G(t) = t^2$ である

が成り立つ.

いま, ω_1 と ω_2 を

$$\omega_1 = \sqrt{E(t)}\left(du + \frac{F(t)}{E(t)}dt\right), \quad \omega_2 = t\sqrt{\frac{E(t) - t^6F_0(t)^2}{E(t)}}\,dt$$

と置けば $ds_f^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2$ となる. さらに x と y を

$$x(u,t) := u + \int_0^t \frac{F(v)}{E(v)}\,dv, \qquad y(t) := \int_0^t \sqrt{\frac{E(v) - v^6F_0(v)^2}{E(v)}}\,dv$$

とおくと, (x, y) は $(0, 0)$ を中心とする新たな局所座標系となり, t を y の関数 $t = t(y)$ とみなせる. そして,

$$ds_f^2 = E(y)dx^2 + t(y)^2dy^2,$$

が成り立つ. したがって, 局所微分同相写像 φ: $(x, y) \mapsto (-x, y)$ は ds_f^2 の effective symmetry となる.

f の基本データが $(\kappa, \tau, \theta, \mu)$ であることを踏まえ, 後ほど Proposition 6.1 で, $\check{f}$ が $(\kappa, \tau, -\theta, \mu)$ を基本データとするカスプ辺と右同値であることを示す.

2.4 Theorem III

$f \in g^{\omega}_{**,3/2}(\mathbf{R}^2_J, \mathbf{R}^3, C)$ とする. すなわち f を admissible とする. このとき,

$$f, \quad \check{f}, \quad f^*, \quad \check{f}^*$$

の右同値類の個数が 4 であるための必要十分条件は, 第一基本形式 ds_f^2 が symmetry を持たない (定義 0.4 参照) ことである.

(Proof)

$\Rightarrow$ の対偶を示す ($\neg$(symmetry を持たない) $\Rightarrow$ $\neg$(右同値類は 4 個))

ds_f^2 が symmetry φ を持つと仮定する. すると, Corollary 3.16 より, この symmetry は effective である. したがって,

$$f \circ \varphi, \check{f} \circ \varphi$$

は, それぞれ $\check{f}_*, f_*$ と右同値である. よって, $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ の右同値類は 2 つまで減る. 対偶を示したので, 本来示したかった命題 (右同値類は 4 個 $\Rightarrow$ symmetry を持たない) も示される.

$\Leftarrow$ の対偶を示す ($\neg$(右同値類は 4 個) $\Rightarrow$ $\neg$(symmetry を持たない))

$\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ のうち, 2 つが右同値であると仮定する, f を $\check{f}, f_*, \check{f}_*$ のいずれかに置き換えて, 右同値な一方を f, もう一方を

$$g \in \{\check{f}, f_*, \check{f}_*\}$$

と仮定してよい. また, 一般性を失うことなく, f は正規系 (定義 4.1) で書かれていると仮定して良い. f と $\check{f}$ は右同値になり得ないので[*4], 写像 g は f_* か $\check{f}_*$ と右同値である. 仮定より f と g が右同値であるので, 微分同相写像 φ が存在して,

$$g = f \circ \varphi$$

であり, $\varphi^* ds_f^2 = ds_f^2$ が成り立つ.

φ が恒等写像であれば, $g = f$ が成り立つ. しかし,

$$u \mapsto f(u, 0)$$
$$u \mapsto f_*(u, 0) = \check{f}_*(u, 0)$$

が曲線 C を互いに異なる向きで与えるという事実 (Theorem 2 の証明より) と反する. よって, $\varphi \neq \mathrm{Id}$ である. symmetry の定義 0.4 より, φ は symmetry である. したがって, Proposition 3.15 と Corolarry 3.16 [*5] によって, φ は ds_f^2 の effective symmetry でなければいけない.

[*4] $\check{f}$ は f の等長双対 $\Rightarrow$ $\check{f}$ は f の faithful isomer $\Rightarrow$ $\check{f}$ は f の isomer $\Rightarrow$ $\check{f}$ は f と右同値ではない

[*5] φ が ds_f^2 の C^ω-symmetry $\Rightarrow$ φ は effective を満たす symmetey

対偶を示したので, 本来示したかった命題 (symmetry を持たない $\Rightarrow$ 右同値類は 4 個) も示される.

(i)(ii) より, 同値関係を示した. ■

2.5 Corollary 5.4

$f \in g^{\omega}_{**,3/2}(\mathbf{R}^2_J, \mathbf{R}^3, C)$ とする. さらに, 次を仮定する.

(1) C は平面曲線であり, 原点 $\mathbf{0}$ において non-trivial symmetry をもたない
(2) 第一基本形式 ds^2_f は effective symmetry をもたない (定義 0.4 参照)

このとき, 次が成り立つ.

- $\check{f} := S \circ f$ が成り立つ. ただし, $S \in \mathrm{O}(3)$ は C を含む平面についての鏡映 (reflection) である
- 等長双対, 逆, 逆双対はそれぞれ $S \circ f, \quad f_*, \quad S \circ f_*$ で与えられる. さらに, f_* は f と合同ではない

特に, これら 4 つの写像

$$f, \quad S \circ f, \quad f_*, \quad S \circ f_*$$

は 2 つの合同類を構成する.

(Proof)
まず f が実解析であるため, Remark 5.2 より, $\check{f} = S \circ f$ が成り立つ. 次に, 2 つ目の主張を示す. C が平面内にあるので,

$$I_c(f) = S \circ f$$

が成り立つ (I_c の定義は Theorem 1 参照. $f \mapsto \check{f}$). Theorem 2 を適用する[*6] と, $J_c^{-1}(J_c(f))$ の右同値類は,

$$\{f, \quad S \circ f, \quad f_*, \quad S \circ f_*\}$$

で表される. あとは, f_* が f と合同でないことを示せば十分である. もし f_* が f と合同だとすると, Remark 0.5 より, $T \in O(3)$ と 微分同相写像 φ (f の特異曲線近傍で定義)

[*6] g の第一基本形式が f の第一基本形式と等しいとき, g は $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ のいずれかと右同値である.

が存在して,

$$T \circ f_* \circ \varphi = f$$

となる．特に, $\varphi^* ds_f^2 = ds_f^2$ である[*7]．仮定 (1) より, T は non-trivial ではないので, f と f_* が曲線 C を辿る向きが逆になるには, φ は effective symmetry でなければいけない．しかし, これは仮定 (2) に矛盾する．よって, f_* と f は合同ではない．■

2.6 Proposition 5.5

$f \in g^{\omega}_{**,3/2}(\mathbf{R}^2_J, \mathbf{R}^3, C)$ とする．さらに, 次を仮定する．

(1) C は平面曲線ではなく, 原点 $\mathbf{0}$ において non-trivial symmetry をもたない

(2) f の第一基本形式 ds_f^2 は effective symmetry φ をもつ

このとき, $\check{f}(:= I_C(f))$ は f と合同ではなく,

$$\check{f}, \quad \check{f} \circ \varphi, \quad f \circ \varphi$$

がそれぞれ等長双対, 逆, 逆双対を与える．

(Proof)

まず, Proposition 5.1 より, $\check{f}$ は f と合同ではない．$\check{f} \circ \varphi$ (または $f \circ \varphi$) は f と同じ第一基本形式 ds_f^2 を持つ[*8] ので, φ が effective であることから, f_* または $\check{f}_*$ と一致する．Remark 4.5 より, $\check{f} \circ \varphi$ (または $f \circ \varphi$) のカスプ角は f のカスプ角と符号が反転 (または同符号) する．したがって,

$$f_* = \check{f} \circ \varphi \quad (\text{または } \check{f}_* = f \circ \varphi)$$

である．■

2.7 Corollary 5.6

$f \in g^{\omega}_{**,3/2}(\mathbf{R}^2_J, \mathbf{R}^3, C)$ とする．さらに, 次を仮定する．

(1) C は平面曲線で, 原点 $\mathbf{0}$ において non-trivial symmetry をもたない

[*7] $ds_f^2 = ds^2_{T \circ f_* \circ \varphi} = \varphi^* ds^2_{T \circ f_*} = \varphi^* ds^2_{f_*} = \varphi^* ds_f^2$ である．最後の等式は, Theorem 2 より, f_* と f が同じ第一基本形式を持つ事による．

[*8] $ds^2_{\check{f} \circ \varphi} = \varphi^* ds^2_{\check{f}} = \varphi^* ds_f^2 = ds_f^2$．等長双対 $\check{f}$ が f と同じ第一基本形式であることおよび, φ が symmetry であることの定義を用いた．

(2) f の第一基本形式 ds_f^2 は effective symmetry φ をもつ

このとき, 次が成り立つ.

- $\check{f} = S \circ f$ が成り立つ. ただし $S \in \mathrm{O}(3)$ は C を含む平面に関する鏡映 (reflection) である
- $S \circ f, \quad S \circ f \circ \varphi, \quad f \circ \varphi$ はそれぞれ, f の等長双対, 逆, 逆双対を与える

したがって, f のすべての isomer は f と合同になる.

(Proof)
まず, Remark 5.2 より, $\check{f} = S \circ f$ である. $S \circ f \circ \varphi$ (または $f \circ \varphi$) は f と同じ第一基本形式 ds_f^2 を持つので[*9] , φ が effective であることから, $S \circ f \circ \varphi$ は f_* と, $f \circ \varphi$ は $\check{f}_*$ と一致する. 曲線 $\mathbf{c}_\sharp(u) := \mathbf{c}(-u)$ に沿った $S \circ f \circ \varphi$ (または $f \circ \varphi$) のカスプ角の符号は, f のカスプ角と符号が異なる (または同符号) ので,

$$f_* = S \circ f \circ \varphi, \quad \check{f}_* = f \circ \varphi$$

である. 最後に, 4 つの写像は互いに f と合同であることは明らか[*10] である. よって, 命題が示される. ■

2.8 Proposition 5.7

$f \in g^\omega_{**,3/2}(\mathbf{R}^2_J, \mathbf{R}^3, C)$ とする. さらに, 次を仮定する.

(1) C は平面曲線ではなく, 原点 $\mathbf{0}$ において non-trivial symmetry $T \in \mathrm{O}(3)$ をもつ
(2) f の第一基本形式 ds_f^2 は effective symmetry をもたない

このとき, 次が成り立つ.

- $\check{f} := I_C(f)$ は f と合同ではない

[*9] $ds^2_{S\circ f\circ\varphi} = \varphi^* ds^2_{S\circ f} = \varphi^* ds_f^2 = ds_f^2$. S は内積を保存することおよび φ は symmetry であることを用いた.

[*10] f と g が合同である $\Leftrightarrow \exists T \in O(3), \exists\psi$: 微分同相写像 s.t. $g = T \circ f \circ \psi$ である.
$S \circ f$ について :
$T \in O(3)$ に $T = S$, 微分同相写像 ψ に $\psi = \mathrm{Id}$ を代入すれば, $S \circ f = T \circ f \circ \psi$ が成り立つ.
$f \circ \varphi$ について :
$T \in O(3)$ に $T = \mathrm{Id}$, 微分同相写像 ψ に $\psi = \varphi$ を代入すれば, $f \circ \varphi = T \circ f \circ \psi$ が成り立つ.
$S \circ f \circ \varphi$ について :
$T \in O(3)$ に $T = S$, 微分同相写像 ψ に $\psi = \varphi$ を代入すれば, $S \circ f \circ \varphi = T \circ f \circ \psi$ が成り立つ.

- $T \circ \check{f}$ は f の逆, $T \circ f$ は f の逆双対を与える

特に,

$$f, \quad \check{f}, \quad T \circ \check{f}, \quad T \circ f$$

は 2 つの合同類をなす.

(Proof)
Proposition 5.1 より, $\check{f}$ は f と合同ではない. よって主張はすぐに従う (Proof of Theorem 2 より).

2.9 Corollary 5.8

$f \in g^{\omega}_{**,3/2}(\mathbf{R}^2_J, \mathbf{R}^3, C)$ とする. 曲線 C が平面内にあり, 原点 $\mathbf{0}$ において non-trivial symmetry T をもつと仮定する. このとき,

$$\check{f} = S \circ f.$$

が成り立つ. ただし $S \in \mathrm{O}(3)$ は平面に関する鏡映 (reflection) である. さらに, $T \circ f$ は f の逆双対, $S \circ T \circ f$ は f の逆を与える.

結果として,

$$f, \quad \check{f}, \quad f_*, \quad \check{f}_*$$

の 4 つはすべて同一の合同類に属する.

(Proof)
f が実解析であるため, Remark 5.2 より $\check{f} = S \circ f$ である. 一方, $T \circ f$ は non-faithful isomer であり[*11] , その等長双対 $S \circ T \circ f$ も別の non-faithful isomer である[*12]. 仮定より C が平面内にあるので, Proposition 5.1 より f と $\check{f}$ は合同[*13] である. 以上より, $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ はすべて同一の合同類に属する. ■

[*11] non-faithful isomer であるという表記は正しくなく, そもそも $T \circ f$ は isomer でない可能性がある.

[*12] S は曲線 C 上の各点に関して不動であるため, 曲線をたどる向きは不変. また, S は回転行列であるため, $S \in SO(3)$. さらに Remark 4.4(a) より, $S \circ T \circ f$ は $T \circ f$ の等長双対 $(= \check{f}_*)$ である.

[*13] (1) f と $f_*(= T \circ f)$ が合同であることの確認
$T \circ f = R \circ f \circ \varphi$ を満たすような $R \in O(3)$, 微分同相写像 φ が存在すればよい.
等長変換 R に T を代入, diffeo φ に Id を代入すれば, $T \circ f = T \circ f \circ \mathrm{Id}$ である.
(2) f と $\check{f}_*(= S \circ T \circ f)$ が合同であることの確認
同様に, 等長変換 R に $S \circ T$ を代入, diffeo φ に Id を代入すれば, $S \circ T \circ f = S \circ T \circ f \circ \mathrm{Id}$ である.

2.10 Example 5.9

次のように写像 f を定める.

$$f(u,v) := \bigl(\varphi(u,v)\cos u - 1, \varphi(u,v)\sin u, v^3u + 2v^3 - v^2\bigr).$$

ただし, $\varphi(u,v)$ は

$$\varphi(u,v) = -v^3u - 2v^3 - v^2 + 1$$

とする. このとき, f は

$$\mathbf{c}(u) := f(u,0) = (\cos u - 1, \sin u, 0)$$

上にカスプ辺特異点をもつ.

また, 行列

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad T := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を用いると、$S \circ f$ は f の faithful isomer であり、$T \circ f$ および $TS \circ f$ は non-faithful isomer となる.

なお, f は Fukui のデータ (θ, A, B) の

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \quad A(u,v) = \sqrt{2}\, v^2, \quad B(u,v) = \sqrt{2}\, v^3(u+2)$$

に対応している.

2.11 Proposition 5.10

$f \in g^{\omega}_{**,3/2}(\mathbf{R}^2_J, \mathbf{R}^3, C)$ とする. さらに, 次を仮定する.

(1) C は平面曲線ではなく, 原点 $\mathbf{0}$ において non-trivial symmetry $T \in \mathrm{O}(3)$ をもつ

(2) f の第一基本形式 ds^2_f は effective symmetry φ をもつ

このとき, f の任意の isomer は

$$\check{f}, \quad \check{f} \circ \varphi, \quad f \circ \varphi$$

のいずれかと右同値である. さらに, 次が成り立つ.

- T が正（すなわち $T \in \mathrm{SO}(3)$）のとき, $\check{f} = T \circ f \circ \varphi$ が成立する

- T が負（すなわち $T \notin \mathrm{SO}(3)$）のとき, $\check{f}$ は f と合同でない

(Proof)
$g := T \circ f \circ \varphi$ とおく.

まず T が正 $(T \in SO(3))$ の場合, Proposition 5.1 より f と $\check{f}$ は合同である. さらに Remark 4.4 より, g は f の faithful isomer である[*14].

一方, T が負 $(T \notin SO(3))$ の場合, Proposition 5.1 より, f と $\check{f}$ は合同であることの同値条件を満たさないので, $\check{f}$ は f と合同ではない. ■

2.12 Theorem IV

$f \in g^{\omega}_{**,3/2}(\mathbf{R}^2_J, \mathbf{R}^3, C)$ とする. また, $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ の像が属する合同類の個数を N_f とすると, 次が成り立つ.

(1) 曲線 C が symmetry を持たず, かつ第一基本形式 ds^2_f も symmetry を持たない $\Leftrightarrow N_f = 4$
(2) 上記 (1) の条件を満たさない場合は, $N_f \leq 2$.
(3) $N_f = 1 \Leftrightarrow$ 下記 (a)(b)(c) のいずれかを満たす
  (a) 曲線 C が平面内にあり, かつ non-trivial symmetry をもつとき
  (b) 曲線 C が平面内にあり, 第一基本形式 ds^2_f が symmetry をもつとき
  (c) 曲線 C が正の symmetry（$T \in \mathrm{SO}(3)$）をもち, かつ第一基本形式 ds^2_f も symmetry をもつとき

(Proof)
(i) 曲線 C が symmetry を持たず (つまり, $T = \mathrm{Id}$ のみ), ds^2_f も symmetry を持たないと仮定する。

集合 $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ のうち 2 つが合同であるとき, f をその isomer と入れ替えても議論は変わらないので, f が次のいずれか

$$g \in \{\check{f}, f_*, \check{f}_*\}$$

[*14] Remark 4.4(a) より, $f_1(u,t) = T \circ f_0(-u,t) = T \circ f_0 \circ \varphi(u,t) = g(u,t)$ である. $\varphi(u,t) = (-u,t)$ とした. $f_1 = g, f_0 = f$ とおけば, g は f の faithful isomer である. この時の g は f の等長双対でもあるので, $\check{f} = g = T \circ f \circ \varphi$ が成り立つ. よって, f と $\check{f}$ と $f \circ \varphi$ と $\check{f} \circ \varphi$ が右同値である.

と合同であると仮定して良い. Proposition 5.1 より, f と $\check{f}$ が合同になることは無いため, $g = f_*$ または $\check{f}_*$ としてよい.

今, g が f と合同であると仮定する (つまり, f と $T \circ g$ の像が一致と仮定). すると Remark 0.5 より, C の non-trivial symmetry $T \in O(3)$ と局所微分同相写像 φ が存在して

$$T \circ g \circ \varphi = f$$

を満たす. しかし仮定では,

- C は symmetry を持たない (つまり $T = \mathrm{Id}$)
- ds_f^2 は symmetry を持たない (つまり φ は曲線の向きを反転させない)

であったため, $\varphi = \mathrm{Id}$ となり, T は non-trivial symmetry ではない. よって, 等式 $(T \circ g \circ \varphi = f)$ より f と g の曲線を辿る向きは一致する. しかし, 実際には

$$u \mapsto f(u,0)$$
$$u \mapsto f_*(u,0) = \check{f}_*(u,0)$$

は互いに異なる向きで C をたどるので, 等式 $(T \circ g \circ \varphi = f)$ と矛盾する. つまり, f と $g(= f_*$ または $\check{f}_*)$ が合同であると仮定が誤りである.

$\therefore f$ は $\check{f}, g$ と合同でないため, (1) の $\Rightarrow$ が示された.

(ii) $N_f = 4$ と仮定する.

まず, C が trivial symmetry を持つ場合を考える. Proposition 5.1 より, C が trivial symmetry S を持つと, f と $\check{f}$ が合同になる. すると, $N_f \leq 2$ となり, 矛盾する. よって, C が trivial symmetry を持つ場合は存在しない.

次に, C または ds_f^2 が symmetry を持つと仮定する. 曲線 C に symmetry T がある場合, 下の表より, Proposition 5.7($N_f = 2$), Proposition 5.8($N_f = 1$), Proposition 5.4($N_f = 2$) が当該パターンである. ds_f^2 に symmetry φ がある場合, 下の表より, Proposition 5.5($N_f = 2$), Proposition 5.6($N_f = 2$), Proposition 5.10($N_f = 1, 2$) が当該パターンである.

しかし今は $N_f = 4$ という仮定の下での議論であるため矛盾. よって, C にも ds_f^2 にも symmetry は存在しない.

(iii) C と ds_f^2 の少なくともどちらか一方は symmetry を持つ $\Rightarrow N_f = 1$ または 2 について

Corollary 5.4($N_f = 2$), 5.6($N_f = 1$), 5.8($N_f = 1$) と Proposition 5.5($N_f = 2$), 5.7($N_f = 2$), 5.10($N_f = 1, 2$) を「ds_f^2 の任意の symmetry は effective である (Corollary 3.16 より)」と併せて用いることで得られる.

(iv) $N_f = 1$ となる場合を考える

まず, C が平面内にあるとする (つまり, C が trivial symmetry を持つ場合). もし C が non-trivial symmetry を持たず, ds_f^2 にも symmetry が無ければ, Corollary 5.4 より $N_f = 2$ が成立してしまう (矛盾). したがって, C あるいは ds_f^2 のどちらかには symmetry が存在する.

C が symmetry を持つ場合, Corollary 5.8 より, $N_f = 1$ である ((3)(a) に該当).

一方で C が non-trivial symmetry を持たず, ds_f^2 が symmetry φ を持つ場合, Corollary 3.16 より φ は effective となり, Corollary 5.6 より $N_f = 1$ である ((3)(b) に該当).

したがって, 残るは C がいかなる平面にも含まれていない場合である. この時, $N_f = 1$(つまり, Proposition 5.10 で T が正の場合) は $\check{f}$ が f と合同であることを意味する. しかし Proposition 5.1 より, C が平面曲線でない場合は (c)(C が 正の symmetry をもち, かつ ds_f^2 も symmetry を持つとき) の場合に限られる.

以上より, 定理を示した. ■

表 1　Proposition と symmetry の対応

Proposition	non-trivial symmetry T を	effective symmetry φ を	N_f の値	C は平面曲線？
5.4	持たない (trivial or Id)	持たない	2	平面曲線
5.5	持たない (trivial or Id)	持つ	2	平面曲線ではない
5.6	持たない (trivial or Id)	持つ	1	平面曲線
5.7	持つ	持たない	2	平面曲線ではない
5.8	持つ	(ds_f^2 の言及なし)	1	平面曲線
5.10	持つ	持つ	T が正 $\to 1$ T が負 $\to 2$	平面曲線ではない

3　定理 3 の (3,4)-CE 版をまとめる

(3,4)-CE における右同値類の数 (つまり, 像の数)について

$\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ の右同値類の数を n とする．このとき,

(1) $n = 4 \Leftrightarrow ds_f^2$ が symmetry を持たない

(2) $n \neq 4 \Rightarrow n = 1$ または 2

(3) $n = 1 \Leftrightarrow ds_f^2$ が effective symmetry と non-effective symmetry の両方を持つ

(Proof)

((1) の $\Rightarrow$ を示す) 『$f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ の右同値類 (つまり, 像の数) が 4 である $\Rightarrow$ 第一基本形式 ds_f^2 を"持たない"』 の対偶を示す．つまり, ds_f^2 が, symmetry φ を持つと仮定する.

(a) φ が effective symmetry の場合

$f \circ \varphi, \check{f} \circ \varphi$ は $f_*, \check{f}_*$ のいずれかと一致する (図より分かる).

- $f \circ \varphi = f_*$ なら, f と f_* は右同値である．(同様に, $\check{f}$ は $\check{f}_*$ と右同値である)
- $f \circ \varphi = \check{f}_*$ なら, f と $\check{f}_*$ は右同値である．(同様に, $\check{f}$ は f_* と右同値である)

$\therefore \{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ の右同値類の個数は 2 である.

(b) φ が non-effective symmetry の場合

$f \circ \varphi$ は $\check{f}$ と右同値である (f と向きが一致するのは $\check{f}$ のみ).

$f_* \circ \varphi$ は $\check{f}_*$ と右同値である (f_* と向きが一致するのは $\check{f}_*$ のみ).

$\therefore \{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ の右同値類の個数は 2 である.

(a)(b) より, φ は orientation-perserving/reversing に関わらず 『$f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ の右同値類 (つまり, 像の数) が 4 である $\Rightarrow$ 第一基本形式 ds_f^2 は symmetry を"持たない"』を示した.

((1) の $\Leftarrow$ を示す)$f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ の右同値類 (つまり, 像の数) が 4"ではない"と仮定する.(つまり, いずれか 2 つが右同値であると仮定する)

f が $g \in \{\check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ と右同値であるとして, 一般性を失わない.

(i) $g = f_*$ または $\check{f}_*$ の場合

f と右同値であるので, $\exists \varphi$: diffeo s.t. $g = f \circ \varphi$. それぞれの第一基本形式 ds^2 を $ds_g^2, ds_{f\circ\varphi}^2$ とすると, $ds_g^2 = \varphi^* ds_f^2$. 定理 2(1) より f_* は f と同じ第一基本形式を

持ち, 論文 63 ページより $\check{f}$ は f と同じ第一基本形式を持つため, $ds_g^2 = ds_f^2$ である．したがって, $ds_f^2 = \varphi^* ds_f^2$ である.

もし $\varphi = \mathrm{Id}$ なら, $g = f$ が成り立ち, $f = f_*$ または $\check{f}_*$ が成り立つ．しかし, これでは曲線の像 $C = c(J)$ の向きが f と f_* で同じとなり, 矛盾.
$\therefore \varphi \neq \mathrm{Id}$ であり, Def 0.4 より φ は ds_f^2 の symmetry である.

(ii) $g = \check{f}$ の場合
f と右同値であるので, $\exists \varphi$: diffeo s.t. $\check{f} = f \circ \varphi$. (1) と同様に, $ds_f^2 = \varphi^* ds_f^2$ である．もし $\varphi = \mathrm{Id}$ なら, $f = \check{f}$ である.

一方, Hattori 論文定理 67 より, カスプ角 θ は f から決まる (ν も f から決まる) ので, $f = \check{f} \Rightarrow \theta = \check{\theta}$ となるが, $\check{f}$ の性質より $\theta = -\check{\theta}$ であるため, $\theta = 0$ となる．しかしカスプ角の定義域は $0 < |\theta| < \pi$ であったため, この事実と矛盾する.
$\therefore \varphi \neq \mathrm{Id}$ であり, Def 0.4 より φ は ds_f^2 の symmetry である.

(i)(ii) より,『第一基本形式 ds_f^2 が symmetry を”持たない” $\Rightarrow f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ の右同値類 (つまり, 像の数) が 4 である』を示した.

以上より、(1) の同値関係を示した.

((3) を示す) $n = 1 \Leftrightarrow$『f は $\check{f}, f_*, \check{f}_*$ の 3 つ全てと右同値』であるので, (1) の必要条件を示したときに『f の右同値類の個数 < 4』を仮定した場合の
(i) $g = f_*$ または $g = \check{f}_*$ の場合と
(ii) $g = \check{f}$
の両方を満たしている状況である.

(i) が成り立つ $\Leftrightarrow$ f と $f_*, \check{f}_*$ が右同値である $\Leftrightarrow$ $\exists \varphi$: diffeo s.t. f_*(または $\check{f}_*$) $= f \circ \varphi$ ($\varphi \neq \mathrm{Id}$).
f と f_* (または $\check{f}_*$) は向きが逆であるため, diffeo φ は曲線の向きを反転させる.
$\therefore$ Def 0.4 より, φ は effective である.

(ii) が成り立つ $\Leftrightarrow f$ と $\check{f}$ は右同値である $\Leftrightarrow \exists \psi$: diffeo s.t. $\check{f} = f \circ \psi$ ($\psi \neq \mathrm{Id}$).
f と $\check{f}$ は向きが同じであるため, diffeo ψ は曲線の向きを保つ.
$\therefore$ Def 0.4 より, ψ は non-effective symmetry である.

以上をまとめると,

$$
\begin{aligned}
n=1 \quad &\Leftrightarrow \quad f \text{ は } \check{f}, f_*, \check{f}_* \text{ の 3 つ全てと右同値} \\
&\Leftrightarrow \quad \text{(3,4)-CE における定理 3(仮定：右同値の数が 4 未満) の (1)(2) がどちらも成り立つ} \\
&\Leftrightarrow \quad ds_f^2 \text{ は effective symmetry } \varphi \text{ と non-effective symmetry } \psi \text{ の両方を持つ}
\end{aligned}
$$

$\therefore$(3) が成り立つ.

((2) を示す) (1) の必要十分条件の否定を考えると,『$n \neq 4 \Leftrightarrow ds_f^2$ が symmetry φ を持つ』である. ds_f^2 が symmetry φ を持つという条件は,

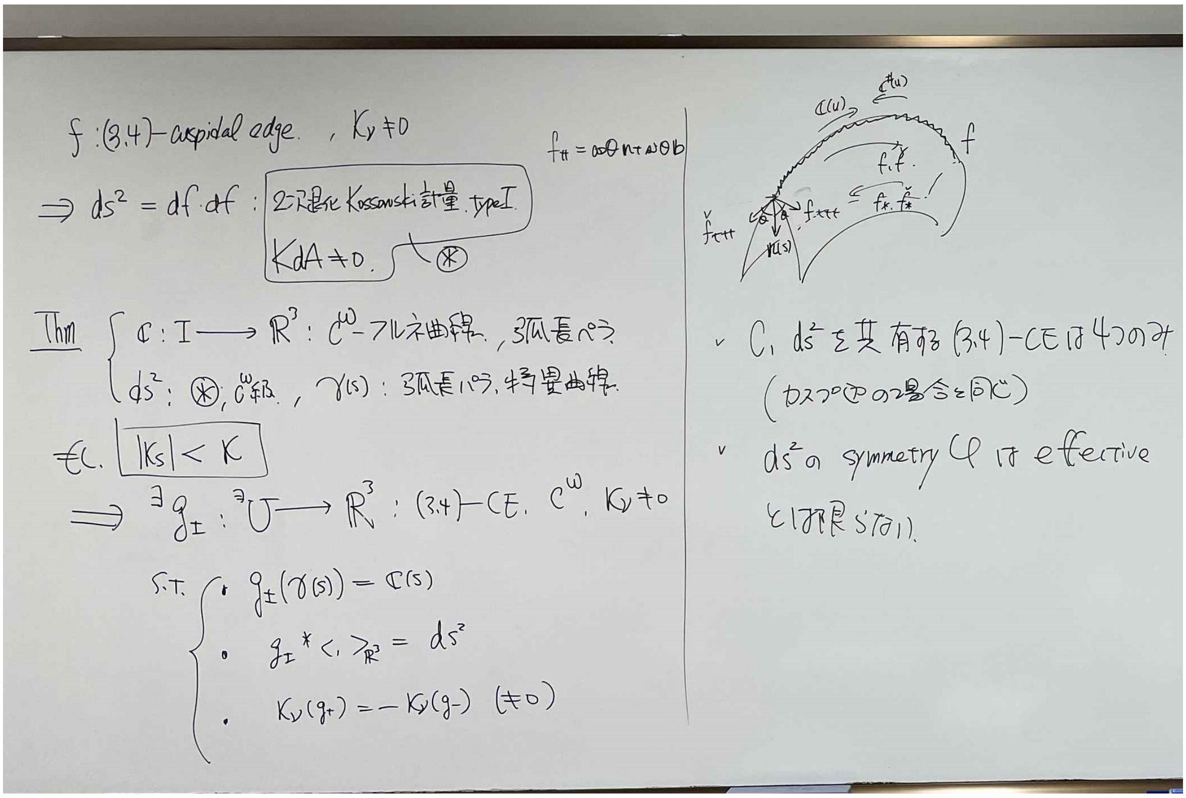
(あ) ds_f^2 が effective symmetry か non-effective symmetry のいずれか一方を持つ
(い) ds_f^2 が effective symmetry と non-effective symmetry の両方を持つ

のどちらかを満たすことと同値である. (1) の (a) および (b) より, (あ) $\Leftrightarrow n=2$ である. また, (3) より (い) $\Leftrightarrow n=1$ である.

$\therefore$『$n \neq 4 \Leftrightarrow n=1$ または 2』である.

以上より, 同値条件が成立する. ■

(Theorem 3 は (3,4)-CE でも成立する. しかも orientation-preserving, orientation-reserving に関係ない)


f : (3,4)-cuspidal edge. , $K_\nu \neq 0$
$f_{tt} = \cos\theta\, n + \sin\theta\, b$
$\Rightarrow ds^2 = df \cdot df$: 2次退化Kossowski計量. type I. KdA ≠ 0. ⊛
Thm: 𝕔 : $I \longrightarrow \mathbb{R}^3$: C^ω-フルネ曲線. , 弧長パラ.
ds^2 : ⊛, C^ω級. , $\gamma(s)$: 弧長パラ, 特異曲線.
とし. $|\kappa_s| < \kappa$
$\Rightarrow \exists g_\pm : {}^\exists U \longrightarrow \mathbb{R}^3$: (3,4)-CE. C^ω. $K_\nu \neq 0$
s.t. $g_\pm(\gamma(s)) = 𝕔(s)$
$g_\pm{}^* \langle\, ,\, \rangle_{\mathbb{R}^3} = ds^2$
$K_\nu(g_+) = -K_\nu(g_-)$ ($\neq 0$)
𝕔(u)
𝕔̌(u)
f
f, f̌.
$f_*, \check{f}_*$
$\check{f}_{ttt}$
f_{ttt}
n(s)
C, ds^2 を共有する(3,4)-CEは4つのみ.
(カスプ辺の場合と同じ)
ds^2 の symmetry φ は effective とは限らない.

4　平面曲線の同値条件まとめる

『$T \in O(3)$ が orientation-preserving symmetry(trivial) である (つまり, $\forall P \in C$ に対して, $T(P) = P$) $\Leftrightarrow$ C は平面曲線であり, T は平面に関する折り返し』

まず, $\Leftarrow$ は自明である (論文 66 ページの Def 1.2 に記載).

そのため, $\Rightarrow$ を示す.
$\mathbf{c}(u)$ を弧長パラメータ表示, $\kappa(u) > 0$ とする (つまり, $\mathbf{c}(u)$ は直線ではない).
回転と平行移動により, $\mathbf{c}(0)$ と $\mathbf{n}(0)$ は

$$\mathbf{c}'(0) = [1, 0, 0]^T = \mathbf{e}_1,$$
$$\mathbf{n}(0) = \frac{\mathbf{c}''(0)}{\kappa(0)} = [0, 1, 0]^T = \mathbf{e}_2 \quad (\text{つまり}, \mathbf{c}''(0) = [0, \kappa(0), 0]^T)$$

として良い.

まず仮定より, $T\mathbf{c}(u) = \mathbf{c}(u)$ であった. 両辺を u で微分すると

$$T\mathbf{c}'(u) = \mathbf{c}'(u)$$

である. $u = 0$ を代入すると, $T\mathbf{c}'(0) = \mathbf{c}'(0)$, つまり $T\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1$ が成り立つ. さらに $T\mathbf{c}'(u) = \mathbf{c}'(u)$ をもう一度 u で微分すると,

$$T\mathbf{c}''(u) = \mathbf{c}''(u)$$

であるので, $u = 0$ を代入すると, $T\mathbf{c}''(0) = \mathbf{c}''(0)$. つまり $T\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2$ が成り立つ.
仮定より T は orientation-preserving symmetry(trivial) である, つまり恒等写像ではないので, $T \in O(3)$ (つまり, $\det T = \pm 1$) かつ

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix}, \quad T \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を満たす T は,

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

のみである. $\mathbf{c}(u) = [x(u), y(u), z(u)]^T$ とすると, T より

$$T\mathbf{c}(u) = [x(u), y(u), -z(u)]^T$$

である. さらに仮定より $T\mathbf{c}(u) = \mathbf{c}(u)$ であったので,

$$[x(u), y(u), -z(u)]^T = [x(u), y(u), z(u)]^T$$

が $\forall u$ で成立する. つまり $z(u) = 0$ が成立する.

$\therefore \mathbf{c}(u) = [x(u), y(u), 0]^T$ となり, これは平面曲線である. ■

5 次のやること

Proposition 5.1 (3,4)-CE 版 が成立するとして、5.4. 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, 5.10 の (3,4)-CE 版を作る.

2 次に示すこと

$c(u)$ を閉区間 $J := [-l, l]$ 上で定義された弧長パラメータ表示された $\mathbb{R}^3$ の正則曲線で，J 上で $\kappa > 0$ とする．

命題 2.1. (3,4)-カスプ辺 $f \in \mathcal{G}^{\omega}_{*,4/3}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$ に対し，C が *orientation-reversing symmetry* T をもち，第一基本形式 ds^2_f が *effective symmetry* φ をもつとする．このとき，次が成り立つ．

(1) T が正であり，φ が *orientation-reversing* (φ が向きを逆にする) ならば，$T \circ f \circ \varphi = \check{f}$.

(2) T が正であり，φ が *orientation-preserving* (φ が向きを保つ) ならば，$T \circ f \circ \varphi = f$.

(3) T が負であり，φ が *orientation-reversing* (φ が向きを逆にする) ならば，$T \circ f \circ \varphi = f$.

(4) T が負であり，φ が *orientation-preserving* (φ が向きを保つ) ならば，$T \circ f \circ \varphi = \check{f}$.

3

$\boxed{\text{Prop 5-1}}$ (3,4)-CE ver.

次の (a) と (b) は同値である.

(a) f と $\check{f}$ が合同である

(b) 次の (i), (ii), (iii), (iv) のいずれかを満たす

(i) f の特異曲線の像 C が平面曲線である.

(ii) ds^2_f が non-effective symmetry を持つ.

(iii) $\begin{cases} C: \text{orientation-reversing symmetry を持ち、} \\ ds^2_f: \text{effective symmetry を持つ.} \end{cases}$

さらにこの時、φ: orientation-preserving $\Rightarrow T \in SO(3)$.

(iv) $\begin{cases} C: \text{orientation-preserving symmetry を持ち、} \\ ds^2_f: \text{effective symmetry を持つ.} \end{cases}$ $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$

さらにこの時、φ: orientation-reversing $\Rightarrow T \in O(3) \setminus SO(3)$.