10/25(金) ($H^3 \times \mathbb{R}$)

(Harvey、Lawson)

・スピン幾何
・カリブレーション
・グラスマン幾何

$Gr_r(TM) = \bigcup_{x \in M} Gr_r(T_xM)$,
グラスマン束、

グラスマン束内の部分集合を考える.
グラスマン多様体,

○ 複素ではよくある. (Ex: ケーラー多様体)
(M, g, J)
$$\Sigma = \bigcup_{x \in M} \{ W \in Gr_{2s}(T_xM) \mid JW = W \}$$

(M, g, J) が Hermite なら 複素部分 mfd.

$$\Sigma = \bigcup_{x \in M} \{ W \in Gr_r(T_xM) \mid JW \perp W \}$$

・等質リーマン空間 (M, g)
$I_0(M, g)$ は $Gr_r(TM)$ に等長的に作用.

$\mathfrak{O}$-submfd である $\iff$ $\forall x \in S$, $T_xS \in \mathfrak{O}$
r次元部分多様体 $S \subset M$ が
ただの部分集合

$\mathfrak{O}$-submfd の総体 … $\mathfrak{O}$-geometry
(= 軌道型グラスマン幾何)
J. Berndt, J.H. Eschenburg, 内藤, 塚田 (2005)

・2、3次元等質リーマン空間

S^3

E^3

H^3 ……SO(3)-isotropic.

$S^2 \times \mathbb{R}$、$H^2 \times \mathbb{R}$ - SO(2)-isotropic.

3次元リーマン多様体 (M^3, g) において、$\dim I(M, g) \leq 6$.

$\dim = 6 \iff M$ は定曲率.

(M, g) が等質 $\Rightarrow d = 3, 4, 6$

3次元の単連結かつ連結な標準簡約空間の分類をした.
$(d = 6, 4)$

2.2 Tricerri - Vanhecke (1983).

等質空間 $M = G/H$ が簡約 (reductive) である

$\iff \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$、$[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$

をみたす線型部分空間 $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ が存在する

$T_o M = \mathfrak{m}$ と同一視.

標準簡約空間である $\iff$ 全ての測地線が等質.

$\exp_o(tX)$
接触構造

(記号 α ?)

Reebベクトル場
接触形式

2.3 Bianchi–Cartan–Vranceanu model,

$$D_{\kappa,\tau} := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2 < -\frac{4}{\kappa} \right\}$$

$(\kappa \leq 0,\ \tau \in \mathbb{R})$,

$$g_{\kappa,\tau} := \frac{dx^2+dy^2}{\left(1+\frac{\kappa}{4}(x^2+y^2)\right)^2} + \eta \otimes \eta$$

$$\eta := \frac{\tau(x\,dy - y\,dx)}{1+\frac{\kappa}{4}(x^2+y^2)} + dz$$

3.1 $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

一般次元のグラスマン幾何を展開

→ $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ の軌道型曲面の分類,

(1) 二次超曲面. $\{(x_0, x_1, x_2, t) \mid -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = -1\}$,

(2) ハーフスペース Half sp. $\{(x, y, t) \mid y > 0\}$

曲面. (3) solid cylinder model $\{(u, v, t) \mid u^2+v^2 < 1\}$

3.2

- ガウス
- ワインガルテン $\nabla_X \nu = -AX$, $X \in \mathfrak{X}(S)$, A: shape operator
- angle function θ ($\cos\theta = \langle \nu, E_3 \rangle$)

$$E_3 = \frac{\partial}{\partial t} = T + \cos\theta\, \nu$$

T: E_3 の接する方向, $\langle T, T \rangle = \sin^2\theta$.

・ガウス方程式　$K = \det A - \cos\theta$

・コダッチ方程式

$$(\nabla^S_X A)Y - (\nabla^S_Y A)X = -\cos\theta\left(\langle Y, T\rangle X - \langle X, T\rangle Y\right)$$

$(ds^2, A, T, h = \cos\theta)$

・定角曲面　$(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$

→ 一定のガウス曲率 $K = -\cos^2\theta$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

・$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ は リー群と同一視できる。

・vertical cylinder　$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sin\theta \tanh(\cos\theta u) \end{bmatrix}$

$$\Sigma_\gamma = \{(x(s), y(s), t) \mid s \in I, t \in \mathbb{R}\}$$

$$ds^2 = du^2 + \cosh^2(\cos\theta_0 u)\, dv^2$$

・Product of horizontal horocycle and geodesic.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sin\theta \end{bmatrix} \qquad ds^2 = du^2 + e^{-2\cos\theta u} dv^2$$

$$K = -\cos^2\theta.$$

・①曲面の分類

・leaf $\mathbb{H}^2 \times \{t_0\}$
・定曲率曲線
・水平境円 (holocycle)
・S_θ - orbit

①曲面である ⟹ 定角曲面である。

$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ の等質曲面は ← のどれか.

・定曲面は 次3つのどれかに合同.

(1) leaf $H^2 \times \{t_0\}$

(2) 定角回転面 $\xi_K = (x^2 - y^2 + 1)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y}$.

(3) exp.(cosθ ——)

包含関係 は strict.

{Extrinsically homogeneous surface}

⊂ {O-surface in solvable リー群 モデル}

⊂ {O-surface in リーマン対称空間 モデル}

Abresch-Rosenberg 微分に関するもんだい