Theorem II (再掲)

$f \in \mathcal{g}^{\omega}_{**,3/2}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$ とする(すなわち、f は admissible)。このとき、

$\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$

の右同値類の個数が 4 であるのは、第一基本形式 ds^2_f が symmetry を持たないことと同値である。

$(\Longleftrightarrow)$

Proof

(i) $\Rightarrow$ の対偶を示す ($\overline{\text{symmetry 持たない}} \Rightarrow \overline{\text{右同値類は4個}}$)

ds^2_f が symmetry φ を持つと仮定する。すると、この symmetry は effective である。

↳ Corollary 3.16 より、
φ が ds^2_f の C^ω-symmetry $\Longrightarrow$ φ は effective

したがって、

$$f \circ \varphi \quad , \quad \check{f} \circ \varphi$$

はそれぞれ $\check{f}_*$、f_* と右同値である。よって、$\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ の右同値類は 2つまで減る。

対偶を示したので、本来示したかった命題も示される。
(右同値類は4個 $\Longrightarrow$ symmetry を持たない)

effective
φ は パラメータ u を反転させる。
$(u \mapsto -u)$
Remark 4.5 より、$f \circ \varphi$ は
曲線の向きと カスプ角の符号を
反転させる。
$\therefore f \circ \varphi = \check{f}_*$、$\check{f} \circ \varphi = f_*$ である。

(ii) $\Leftarrow$ の対偶を示す ($\overline{\text{右同値類は4個}} \Rightarrow \overline{\text{symmetry 持たない}}$)

$\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ の内、2つが右同値であると仮定する。f を $\check{f}, f_*, \check{f}_*$ ~~のいずれかに置き換えて、~~

右同値な一方を f、もう一方を

$$g \in \{\check{f}, \check{f}_*, f_*\}$$

と仮定して良い。また、一般性を失うことなく、f は正規形で書かれていると仮定して良い。

$\check{f}$ は f と右同値にはなり得ないので、写像 g は f_* か $\check{f}_*$ と右同値である。すなわち、微分同相写像 φ が存在して、
※1　　$g \in \{f_*, \check{f}_*\}$

※ $\check{f}$ … f の等長双対
$\Rightarrow$ $\check{f}$ は f の faithful isomer
$\Rightarrow$ $\check{f}$ は f の isomer $\Rightarrow$ $\check{f}$ は f と右同値ではない。

$$g = f \circ \varphi$$ ※2 (右同値) → 仮定で、f と g が右同値とした。

であり、$\varphi^* ds^2_f = ds^2_f$ ※3 が成り立つ。

↳ ・$\check{f}$ の定義
・f_* の定義 (定理2 (1))

?

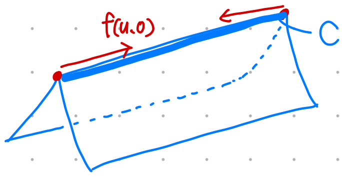
f と g が同じ像を持つ
⇕
f と g が右同値 ($g = f \circ \varphi$)　→ f と g は異性体ではない
⇓ ⇑̸
g は f と等長　($\varphi^* ds^2_f = ds^2_g$)

ds_f^2

$ds_g^2 \stackrel{?}{=} ds_f^2$

$$\boxed{\begin{aligned} ds_g^2 &= ds^2_{f\circ\varphi} \\ &= \varphi^* ds_f^2 \end{aligned}}$$

g と f が 等長 $\Longleftrightarrow$ $\varphi^* ds_f^2 = ds_g^2$



φ が恒等写像であれば $g = f$ が成り立つ. しかし,

$u \longmapsto f(u,0)$

$u \longmapsto f_*(u,0) = \check{f}_*(u,0)$ $\leftarrow g = f\circ \mathrm{Id}$

→ Theorem II の 証明より

が 曲線C を互いに異なる(distinct)向きで与えるという事実 と矛盾する. よって. $\varphi \neq \mathrm{Id}$.

よって, Def 0.4 より, φ は symmetry.

↳ $\varphi^* ds_f^2 = ds_f^2$ かつ $\varphi \neq \mathrm{Id}$

したがって, Corollary 3.16 より φ は ds_f^2 の effective symmetry でなければならない.

↳ φ が ds_f^2 の C^ω-symmetry $\Longrightarrow$ φ は effective (を満たす symmetry)

$\boxed{+ \text{ Proposition 3.15 ?}}$

対偶を示したので, 本来示したかった命題も示される.

(symmetry を持たない $\Longrightarrow$ 右同値類は4個)

(i)(ii) より, 同値関係を示した ▨

Corollary 5.4

$f \in \mathcal{g}^{\omega}_{**,3/2}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$ として、次を仮定する。 ←実解析的

T は trivial か 恒等写像.

(1) C は平面曲線であり、点0 で non-trivial symmetry を持たない

(2) ds^2_f は effective symmetry を持たない.

このとき、

- $\check{f} = S \circ f$ が成り立つ.
  ただし、$S \in O(3)$ は C を含む平面に関する鏡映 (reflection).
- 等長双対、逆、逆双対 はそれぞれ

$$S \circ f \ (= \check{f}),\quad f_*,\quad S \circ f_*$$

  で与えられる. さらに、f と f_* は合同ではない.

が成り立つ. 特に、4つの写像 $\{f, S\circ f, f_*, S \circ f_*\}$ は 2つの合同類を成す.

Proof

f が実解析的なら $\check{f} = S \circ f$

Remark 5.2 より、f が実解析的であるため $\check{f} = S \circ f$ が成り立つ.

次に2つ目の主張を示す. C が平面内にあるので、

$$I_C(f) = S \circ f \qquad (I_C : f \longmapsto \check{f} \quad \text{Theorem I})$$

が成り立つ. 定理II を適用すると、$J_C^{-1}(J_C(f))$ の右同値類 は

$J_C : \mathcal{g}^r_*(\mathbb{R}^2_C, \mathbb{R}^3, C) \longrightarrow K^r_I(\mathbb{R}^2_C)$

$f \longmapsto ds^2_f$

(4) g の第一基本形式が f と等しいとき、g は $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ のいずれかと右同値である.

f と同じ第一基本形を持ち、同じ曲線 C にのる一般化カスプ辺全ての集合.

$$\{f, S\circ f, f_*, S\circ f_*\}$$

で表される. あとは、f_* が f と合同でない事を示せば十分である. もし f_* が f と合同だとすると、

$\exists T \in O(3)$ s.t. $T \circ f_*$ と f の像が一致.

Remark 0.5 により $T \in O(3)$ と微分同相写像 φ (f の特異曲線近傍で定義) が存在して、

f と g が同じ像を持つ $\Longleftrightarrow$ f と g は右同値

$$T \circ f_* \circ \varphi = f$$

となる. 特に、$\varphi^* ds^2_f = ds^2_f$ である.

$T \in O(3)$ は内積を保つ　　f_* は f ~~の isomer~~ と同じ第一基本形式を持つ (Theorem II の ~~証明~~ 主張)

$$\because\ ds^2_f = ds^2_{T\circ f_* \circ \varphi} = \varphi^* ds^2_{T\circ f_*} = \varphi^* ds^2_{f_*} = \varphi^* ds^2_f$$

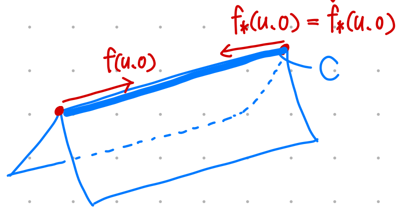
仮定(1)より、T は non-trivial ではないので、φ は effective symmetry でなければいけない.

→ $T \in O(3)$、
$\forall P \in C$、$T(C) = C$ かつ $T(P) \neq P$

⇒ 曲線の向きを反転

→ f の特異曲線の向きを反転

(∵ f と f_* は 曲線をたどる向きが逆)



しかし、これは仮定(2)に矛盾する. よって、f_* と f は合同でない. ▨

Proposition 5.5

$f \in g^{\omega}_{**,3/2}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$ とし、次を仮定する.

(1) C は平面曲線ではなく、点0 に non-trivial symmetry を持たない

(2) ds^2_f は effective symmetry φ をもつ

この時、$\check{f} := I_C(f)$ は f と合同ではなく

$\check{f}$、$\check{f}\circ\varphi$、$f\circ\varphi$

がそれぞれ等長双対、逆、逆双対を与える.

f_*　$\check{f}_*$

Proof

f と $\check{f}$ が合同 ⟺ {・C が平面内にある × または
・C が正の non-trivial symmetry × をもち、ds^2_f が effective symmetry ○ をもつ.

まず、Proposition 5.1 より、$\check{f}$ は f と合同ではない.
$\check{f}\circ\varphi$ (または $f\circ\varphi$) は f と同じ第一基本形式 ds^2_f を持つので、φ が effective である事から、f_* または $\check{f}_*$ と一致する. ※2 ※1

等長双対 $\check{f}$ は第一基本形式が f と等しい

φ が symmetry であるため、定義より成立.

※1 $ds^2_{\check{f}\circ\varphi} = \varphi^* ds^2_{\check{f}} = \varphi^* ds^2_f = ds^2_f$.

$\varphi^* ds^2_f = ds^2_{f\circ\varphi}$

※2	特異曲線C をたどる向き が正	〃 負
カスプ角 θ が正	f	f_*
カスプ角 θ が負	$\check{f}$	$\check{f}_*$

φ は effective であるため、特異曲線をたどる向きが反転する.

さらに、カスプ角の符号も反転させる.（Remark 4.5 より）

よって、$\check{f} \circ \varphi = f_*$ 、 $f \circ \varphi = \check{f}_*$.

Remark 4.5 より、$\check{f} \circ \varphi$（または $f \circ \varphi$）の カスプ角は f の カスプ角と符号が反転（または同符号）する。したがって、

$$f_* = \check{f} \circ \varphi \quad (\text{または } \check{f}_* = f \circ \varphi)$$

である. $\blacksquare$

Corollary 5.6

$f \in \mathfrak{g}^{(\omega)}_{**,3/2}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$ として、次を仮定する。（実解析的）

(1) C は平面曲線で、原点 0 において non-trivial symmetry を持たない。

(2) 第一基本形式 ds^2_f が effective symmetry φ を持つ。

このとき、次が成り立つ。

- $\check{f} = S \circ f$ が成り立つ。

  $S \in O(3)$ は C を含む平面に関する鏡映（reflection）である。

  $\Rightarrow S$ は等長変換

- $S \circ f$、$S \circ f \circ \varphi$、$f \circ \varphi$ は それぞれ f の 等長双対、逆、逆双対 を与える。

したがって、全ての異性体 は f と合同である。

Proof

Remark 5.2 より、$\check{f} = S \circ f$ である。

$S \circ f \circ \varphi$（または $f \circ \varphi$）は f と同じ第一基本形式 ds^2_f を持つので、φ が effective であることから ※1
$S \circ f \circ \varphi$ は f_* と、$f \circ \varphi$ は $\check{f}_*$ と一致する。※2

※1 $ds^2_{S\circ f\circ\varphi} = \varphi^* ds^2_{S\circ f} \overset{S\text{は内積を保存}}{=} \varphi^* ds^2_f \overset{\varphi\text{ は symmetry}}{=} ds^2_f$

$ds^2_{S\circ f\circ\varphi} = ds^2_{f\circ\varphi}$

※2	特異曲線 C をたどる向きが正	〃 負
カスプ角 θ が正	f	f_*
カスプ角 θ が負	$\check{f}$	$\check{f}_*$

Proposition 5.5 と同様に、$f\circ\varphi$ は f の「特異曲線の向き」と「カスプ角の符号」を反転させるため、
$S\circ f\circ\varphi = f_*$、 $f\circ\varphi = \check{f}_*$ である。

曲線 $C_\#(u) := C(-u)$ に沿った $S\circ f\circ\varphi$（または $f\circ\varphi$）カスプ角の符号は、f の カスプ角 と
符号が異なる（または同符号）なので、

$$f_* = S\circ f\circ\varphi \ , \qquad \check{f}_* = f\circ\varphi$$

である。最後に、4つの写像は互いに $\boxed{f\text{と}}$ 合同であることは明らかである。※3 よって、命題が示される。▨

※3 3つの写像がfと合同であることを確認する. (fとgが合同 $\Longleftrightarrow$ $\exists T\in O(3)$, $\exists\psi$: diffeo s.t. $g = T\circ f\circ\psi$)

(i) $S\circ f$ について

$T\in O(3)$ に $T=S$, 微分同相写像ψに$\psi=\mathrm{Id}$ を代入すれば

$$S\circ f = T\circ f\circ\psi$$

が成り立つ.

(ii) $f\circ\varphi$ について

$T\in O(3)$ に $T=\mathrm{Id}$, 微分同相写像ψに$\psi=\varphi$ を代入すれば

$$f\circ\varphi = T\circ f\circ\psi$$

が成り立つ.

(iii) $S\circ f\circ\varphi$ について

$T\in O(3)$ に $T=S$, 微分同相写像ψに$\psi=\varphi$ を代入すれば

$$S\circ f\circ\varphi = T\circ f\circ\psi$$

が成り立つ.

次に, C が non-trivial symmetry を持つ場合を考える.

Proposition 5.7

$f\in\mathcal{g}^{\omega}_{**,3/2}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$ として, 次を仮定する.

(1) C は平面曲線ではなく, 点O において non-trivial symmetry $T\in O(3)$ を持つ.

(2) ds_f^2 は effective symmetry を持たない.

- 像を保つ
- 曲線の向き反転
- 等長変換

このとき, 次が成り立つ.

- $\check{f} := I_C(f)$ は f と合同ではない.
- $T\circ\check{f}$, $T\circ f$ はそれぞれ, 逆, 逆双対 を与える.

特に, f, $\check{f}$, $T\circ\check{f}$, $T\circ f$ は 2つの合同類をなす.

Proof

fと$\check{f}$が合同 $\Longleftrightarrow$
- C が平面内にある ✕ または
- C が正の non-trivial symmetry をもち, ds_f^2 が effective symmetry をもつ. ○ ✕

Proposition 5.1 より, $\check{f}$ は f と合同ではない. よって主張は直ぐに従う. ※ ▨

※ $T\circ\check{f}$ が f の逆 $(=f_*)$、$T\circ f$ が f の逆双対 $(=\check{f}_*)$ であることの確認

- $\check{f}$ は曲線をたどる向きが「fと同じ」、カスプ角の符号が「fと反対」.
- $\check{f}_*$ は曲線をたどる向きが「fと逆」、カスプ角の符号が「fと反対」.
- T は「曲線 C の向きを反転させる」こと、C は「平面曲線ではない」ことから、

T は鏡映ではない $\longrightarrow$ 法ベクトル $n(0)$ を軸とした $180°$ 回転のみ

$\longrightarrow$ $T\in SO(3)$ （Tは回転行列）

$\longrightarrow$ ~~Remark 4.4 (a) より、~~ $T\circ f_0(-u,t)$ は f_0 の カスプ角の符号を反転.

(i) Remark 4.4 (a) に $f_0=\check{f}$ を代入する

$T\circ\check{f}(-u,t) = \check{f}$ の faithful isomer

定理3.8より、faithful isomer は一意で、$\check{f}$の等長双対は f.

$= f(u,t)$

? $\cancel{=}$ $f_*(-u,t)$

「effective symmetry を持たない」と矛盾している

$$f_*\circ\underbrace{\varphi(u,t)}_{u\mapsto -u} = f(u,t)$$

(ii) Remark 4.4 (a) に $f_0=f$ を代入する

$T\circ f(-u,t) = f$ の faithful isomer

$= \check{f}(u,t)$

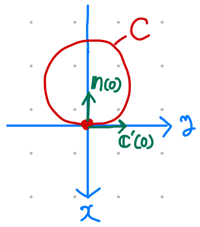
$= \check{f}_*(-u,t)$

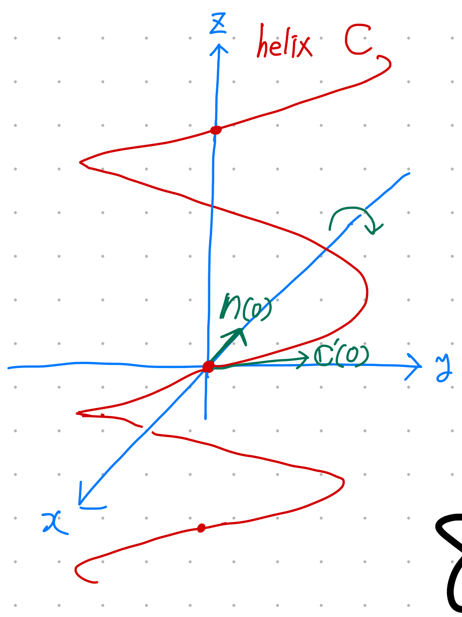
$\therefore$ 命題の二つ目の主張を示した.

	特異曲線Cをたどる向きが正	〃 負
カスプ角 θ が正	f	f_*
カスプ角 θ が負	$\check{f}$	$\check{f}_*$

- f と $T\circ f$、$\check{f}$ と $T\circ\check{f}$ がそれぞれ合同である.

(f と g が合同 $\Longleftrightarrow$ $\exists S\in O(3)$, $\exists\psi$: diffeo s.t. $g=S\circ f\circ\psi$)





such that $u \mapsto h_\pm(u,0)$ have the same orientation as that of $u \mapsto f(-u,0)$. Then ds_f^2 gives the common first fundamental form of the generalized cuspidal edges $h_\pm$. By (3.11), we may assume that the cuspidal angle $\theta_*(u)$ (resp. $-\theta_*(u)$) ($\theta_*(u)\theta(u) > 0$) of h_+ (resp. h_-) satisfies

$$\cos\theta_*(u) = \frac{\kappa_s(u)}{\kappa(-u)}.$$

Since the orientation of the singular curves of $h_\pm$ is opposite of that of f, the two maps $h_\pm$ are non-faithful isomers of f. We set

$$f_* := h_+ \text{ (the inverse), and } \check{f}_* := h_- \text{ (the inverse dual).}$$

By the above Remark 4.5, the cuspidal angle of $f_\#(u,v) := f(-u,v)$ is $-\theta(-u)$, the cuspidal angle $\theta_*(u)$ takes opposite sign of that of $f_\#(u,v)$. So the image of f does not coincide with that of f_*. Hence f_* is an isomer of f.

By our construction of f_*, (1), (2) and (3) are obvious. So we prove (4). We suppose that the first fundamental form of a generalized cuspidal edge $k \in \mathcal{G}^\omega_{**}(\boldsymbol{R}^2_I, \boldsymbol{R}^3, C)$ is isometric to ds_f^2. (The case that $k \in \mathcal{G}^\omega_*(\boldsymbol{R}^2_o, \boldsymbol{R}^3, C)$ is obtained by Lemma 0.1.) Since the first fundamental form is determined independently of a choice of local coordinate system, we have $\mathcal{J}_C(f \circ \varphi) = \mathcal{J}_C(f) \circ \varphi$, where φ is a diffeomorphism on a certain tubular neighborhood of $J \times \{0\}$. So we may assume that $ds_k^2 = ds_f^2$ without loss of generality. Then k must coincide with one of $\{g_+, g_-, h_+, h_-\}$, because of the uniqueness of the solution of (3.9) with initial condition (3.10). $\square$

Corollary 5.8

$f \in \mathcal{g}^{\omega}_{**,3/2}(\mathbb{R}^2_+, \mathbb{R}^3, C)$ とする. また、C が平面内にあり、原点 0 において non-trivial symmetry T を持つとする. このとき、

O(3) ∈

↳・像を保つ
・曲線の向き反転
・等長変換
(T は trivial symmetry ではないので、鏡映ではない)

$$\check{f} = S \circ f$$

が成り立つ. また、

$T \circ f$ = f の逆双対

$$T \circ f,\ S \circ T \circ f$$

$T \circ S \circ f$ = f の逆

O(3)、trivial symmetry ∈ ($\forall P \in C$, $S(C) = C$, $S \neq Id$)

が f の逆、逆双対を与える. S は平面に関する鏡映 (reflection) である.

結果として、f, $\check{f}$, f_*, $\check{f}_*$ は全て同一の合同類に属する.

Proof

↗ f が実解析的なら $\check{f} = S \circ f$

Remark 5.2 より、$\check{f} = S \circ f$ である.

そもそも、$T \circ f$ は isomer ではない可能性がある

一方、$T \circ f$ は non-faithful isomer であり、その等長双対 $S \circ T \circ f$ も(別の) non-faithful isomer である.

↳ ~~T は曲線をたどる向きを反転させるため~~ $(= f_*)$

↳・S は C 上の各点に関して不動であるため 曲線をたどる向きは不変.

・S は回転行列であるため、$S \in SO(3)$.
Remark 4.4 (a) より、$S \circ T \circ f$ は $T \circ f$ の等長双対である. $(= \hat{f}_*)$

C が平面内にあるので、Proposition 5.1 より f と $\check{f}$ は合同である. ※

※ (i) f と $\underbrace{f_*}_{= T \circ f}$ が合同であることの確認

(2つの一般化カスプ辺 f, g が合同である $\iff \exists R \in O(3), \exists \varphi$: diffeo s.t. $f = R \circ g \circ \varphi$)

等長変換 R に T を代入、diffeo φ に Id を代入すれば、$T \circ f = T \circ f \circ \cancel{Id}$ である.

(ii) f と $\underbrace{\check{f}_*}_{= S \circ T \circ f}$ が合同であることの確認

等長変換 R に $S \circ T$ を代入、diffeo φ に Id を代入すれば、$S \circ T \circ f = S \circ T \circ f \circ \cancel{Id}$ である.

以上より、f, $\check{f}$, f_*, $\check{f}_*$ は全て同一の合同類に属する. ▨

	特異曲線 C をたどる向きが正	〃 負
カスプ角 θ が正	f	f_*
カスプ角 θ が負	$\check{f}$	$\check{f}_*$

Example 5.9

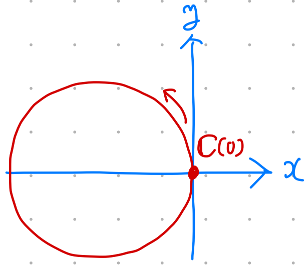
$f(u,v)$ と $\varphi(u,v)$ をそれぞれ、

$$f(u,v) := \left(\varphi(u,v)\cos u - 1,\ \varphi(u,v)\sin u,\ v^3u + 2v^3 - v^2\right)$$

$$\varphi(u,v) := -v^3u - 2v^3 - v^2 + 1$$

とする。すると、f は

$$\mathbb{C}(u) := f(u,0) = (\cos u - 1,\ \sin u,\ 0)$$



cuspidal edge singularities

上でカスプ辺特異点をもつ。

また、鏡映 S と回転 T をそれぞれ

$$S = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\text{第3成分を}-1\text{倍}},\qquad T = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{第2成分を}-1\text{倍}}$$

とおくと、

- $S \circ f$ は f の faithful isomer. ※1
- $T \circ f$ と $TS \circ f$ は non-faithful isomer. ※2

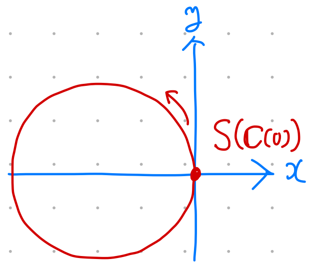
である。なお、f は Fukui のデータ (θ, A, B) の

$$\theta = \frac{\pi}{4},\qquad A(u,v) = \sqrt{2}\,v^2,\qquad B(u,v) = \sqrt{2}\,v^3(u+2)$$

に対応している。※3

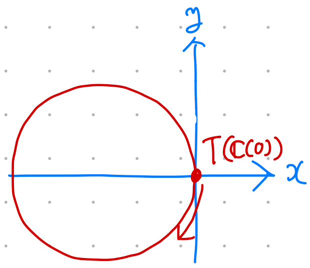
※1 f の特異曲線と $S \circ f$ の特異曲線の向きが同じことを確認

$$S(\mathbb{C}(u)) = (\cos u - 1,\ \sin u,\ 0)$$
$$= \mathbb{C}(u) \quad \text{ok}$$



※2 f の特異曲線と向きが異なる(反転する)ことを確認

- $T(\mathbb{C}(u)) = (\cos u - 1,\ -\sin u,\ 0)$
  $= \mathbb{C}(-u)$. ok
- $T \circ S(\mathbb{C}(u)) = T(\mathbb{C}(u))$
  $= \mathbb{C}(-u)$. ok



※3 $f(u,v)$ に A, B, θ を代入すると、

$$f(u,v) = \mathbb{C}(u) + \underline{\left(\sqrt{2}\,v^2,\ \sqrt{2}\,v^3(u+2)\right)\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} n \\ b \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\mathbb{C}(u)} + \underline{\underline{v^2\left(1+v(u+2),\ -1+v(u+2)\right)}\begin{pmatrix} n \\ b \end{pmatrix}} \cdots ①$$

$\mathbb{C}(u) = (\cos u - 1,\ \sin u,\ 0)$

$e(u) = \mathbb{C}'(u)$

$\quad = (-\sin u,\ \cos u,\ 0)$

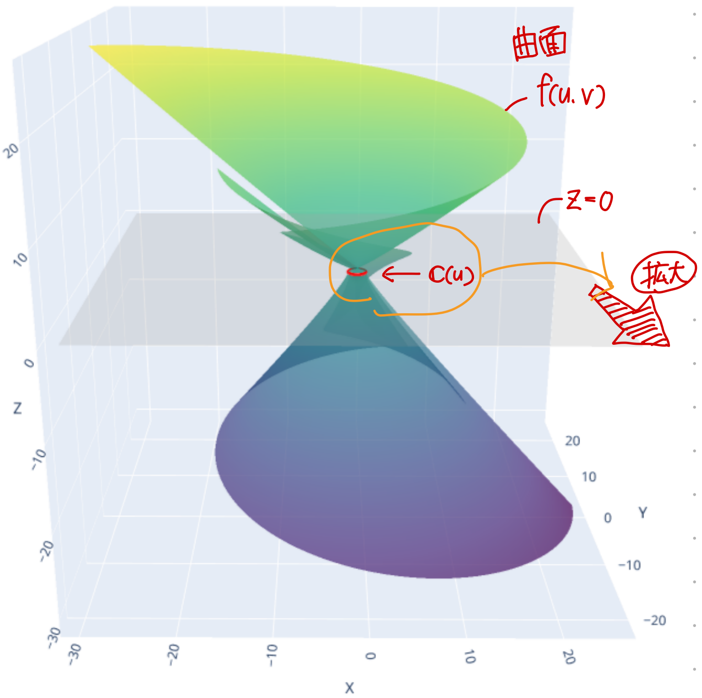
平面曲線であることから、主法線ベクトル $n(u)$ と 従法線ベクトル $b(u)$ を、

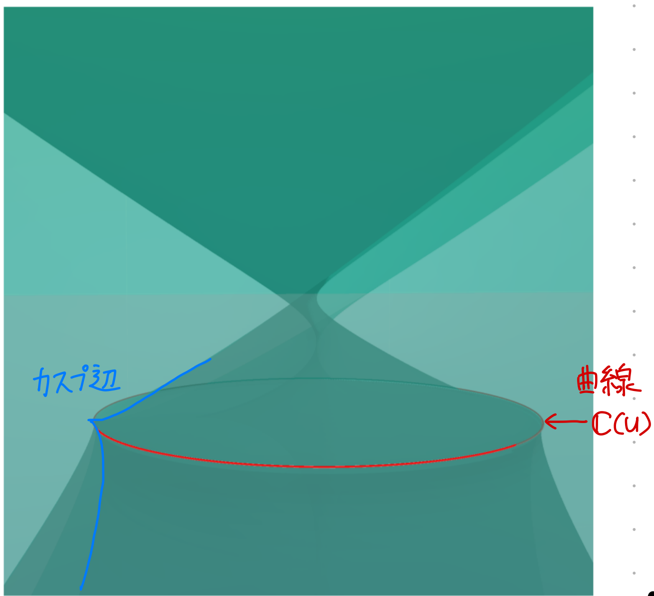
$n(u) = (-\cos u,\ -\sin u,\ 0)$、$b(u) = (0,\ 0,\ 1)$ とする。よって①は

$$f(u,v) = \underline{(\cos u - 1,\ \sin u,\ 0)} + \underline{v^2\left(-(v\{u+2\}+1)\cos u,\ -(v\{u+2\}-1)\sin u,\ vu+2v-1\right)}$$

$$= \Big(\underbrace{(1-v^2-v^3u-2v^3)}_{\varphi(u,v)}\cos u - 1,\ \underbrace{(1-v^2-v^3u-2v^3)}_{\varphi(u,v)}\sin u,\ v^3u+2v^3-v^2\Big)$$

となるので、一致する。





次に、曲線 C と 第一基本形式 ds_f^2 が それぞれ symmetry、effective symmetry を持つ 場合を考える.

Proposition 5.10

→ Remark 4.4 (a) と対応.

$f \in \mathcal{g}^{\omega}_{**,3/2}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$ とし、次を仮定する.

(1) C は 平面曲線 ではなく、原点 0 において non-trivial symmetry $T \in O(3)$ を持つ.

(2) ds_f^2 は effective symmetry φ を持つ

- 像を保つ
- 曲線 の 向き反転
- 等長変換

(T は trivial symmetry では ないので、鏡映 ではない)

このとき、f の任意 の 異性体 は

$\check{f}$、$\check{f} \circ \varphi$、$f \circ \varphi$

のいずれかと 右同値である. さらに、

- T が 正 (つまり $T \in SO(3)$) なら、$\check{f} = T \circ f \circ \varphi$ である.
- T が 負 (つまり $T \notin SO(3)$) なら、$\check{f}$ は f と 合同 ではない.

Proof

途中

$g := T \circ f \circ \varphi$ とおく.

T が 正 ($T \in SO(3)$) の 場合、Remark 4.4 より g は f の faithful isomer である.

T が 負 ($T \notin SO(3)$) の 場合、Proposition 5.1 より $\check{f}$ は f と 合同ではない.
従って、g も f と 合同 にはならない.

×

○

f と $\check{f}$ が合同 $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \cdot\ \text{C が平面内 にある　または} \\ \cdot\ \text{C が正の non-trivial symmetry をもち、} ds_f^2 \text{ が effective symmetry をもつ.} \end{cases}$

不明

かつ