Lemma（隆起関数）

多様体 M 上の点 p において開近傍 U が与えられているとき、
p において以下の条件 (A1) 〜 (A3) を満たす関数 $f \in \mathcal{F}(M)$ が
存在する.

(A1) $0 \leq f \leq 1$

(A2) p の近傍において、$f=1$ が存在.

(A3) $\mathrm{Supp}(f) \subset U$　$\left(\overline{\{p \in M \mid f(p) \neq 0\}} \right)$

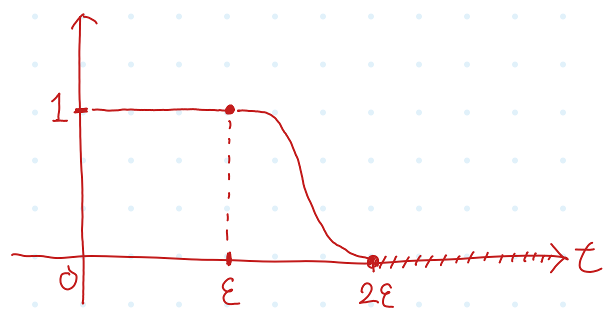
（このような f を隆起関数 (bump function) と呼ぶ）

Proof　関数の合成をくり返して、f を具体的に考えていく.

${}^{\exists}\varepsilon > 0$ に対して、$\mathbb{R}^1$ 上に新たな平滑関数 h を以下のように定義する.

$$h(t) = \begin{cases} 1 & (t \leq \varepsilon) \\ 0 & (2\varepsilon \leq t) \\ 0 \leq h(t) \leq 1 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

（$h(t)$ は滑らか）



M の近傍 $V \subset U$ に対して、以下の条件を満たすように
座標系 $\xi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を導入する.

- $\xi(p) = 0$
- $\xi(V) = \{ q \in \mathbb{R}^n \mid |q|^2 < 3\varepsilon \}$　（写像先が半径 $\sqrt{3\varepsilon}$ の球内になる）

距離関数 $N : \xi(V) \to \mathbb{R}^1$ を、

$$N := \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 \quad \text{on } V.$$

で定義する。 (ξの各成分の平方和)

このとき、各成分の平方和が3ε未満であったため、各成分x^iは最大でも$\sqrt{3\varepsilon}$の範囲に収まる。 --- ①

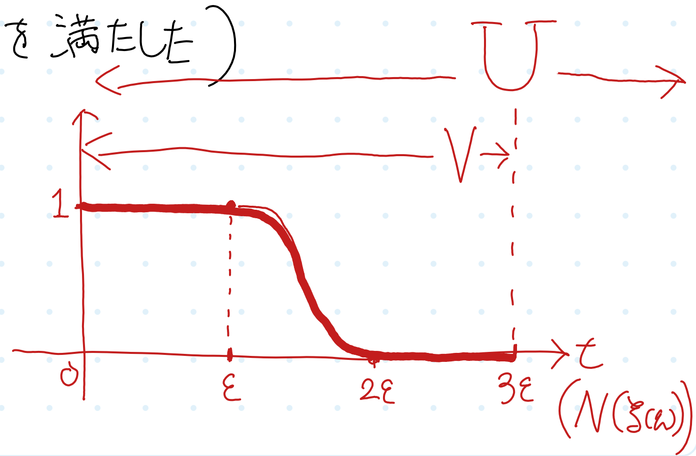
次に、関数$f : M \to \mathbb{R}^1$を、

$$f := h \circ N \quad \text{on } V$$

で定義する。 ($^\forall q \subset V$に対して、$f(q) = h(N(\xi(q)))$.)

①より$N(\xi(q))$の範囲は $0 < N(\xi(q)) < 3\varepsilon$ であるため、fは以下の性質を持つ。

- $f(q)$の定義域が $h(2\varepsilon) < q < h(\varepsilon)$ である
  $\Longrightarrow$ $f(q)$の値域は $0 \leq f(q) \leq 1$ ((A1)を満たした).
- 距離$N(\xi(q)) < \varepsilon$ の範囲にある
  $\Longrightarrow$ fは点pの近傍で$f=1$ ((A2)を満たした).
- 距離$N(\xi(q)) < 2\varepsilon$ の範囲で $f \neq 0$ である
  $\Longrightarrow$ $\mathrm{supp}(f) \subset U$ ((A3)を満たした)



よって、$f = h \circ N$ on V は、
条件(A1)~(A3)を満たしている。■

Remark

平滑関数 $h(t)$ の作り方について、松島「多様体入門」P64 では以下のように作成.

$$f(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}} & (t>0) \\ 0 & (t \leq 0) \end{cases}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ に対し $\lim_{t \to +0} g^{n}(t) = 0$?

により関数 f を定義すると、f は C^∞ 級.

$$h(t) := \frac{f(t)}{f(t) + f(1-t)}$$

により関数 h を定義すると、$h(t)$ も C^∞ 級となり、

- $t=0$ のとき、 $h(t) = 0$
- $0<t<1$ のとき、 $0 < h(t) < 1$
- $1 \leq t$ のとき、 $h(t) = 1$

となる.

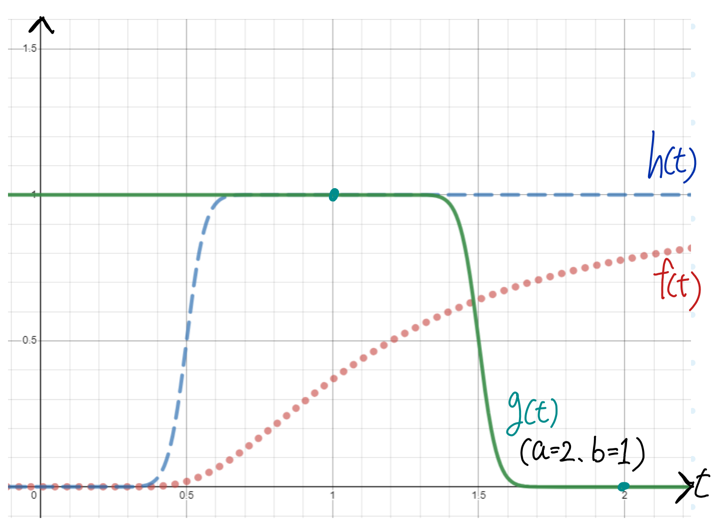
$$g(t) := h\left(\frac{t+a}{a-b}\right) \cdot h\left(\frac{-t+a}{a-b}\right) \quad (b<a)$$

により関数 g を定義すると、

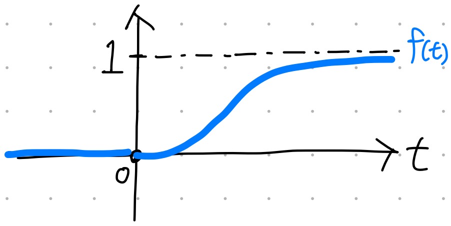
- $0 \leq g(t) \leq 1$
- $|t| \geq a$ のときは $g(t) = 0$
- $|t| \leq b$ のときは $g(t) = 1$

となり、$g(t)$ が求める平滑関数である.

C^∞



関数 $f(t) = \begin{cases} e^{-t^{-2}} & (t>0) \\ 0 & (t \leq 0) \end{cases}$



$^\forall k \in \mathbb{Z}^+$ について、k次導関数 $\lim_{t\to 0} f^{(k)}(t) = 0$ であることを示す。

方針

(i) k次導関数 $f^{k}(t)$ が $(k=1,2,3\cdots)$

$$f^{(k)}(t) = P_k\left(\frac{1}{t}\right)\cdot e^{-t^{-2}}$$

で表されることを確認。($P_k\left(\frac{1}{t}\right)$ … k次導関数における $\frac{1}{t}$ の多項式)

(ii) $\lim_{t\to 0} P\left(\frac{1}{t}\right)\cdot e^{-t^{-2}} = 0$ を確認する。

(iii) $k=0$ のとき、$f^{(k)}(t)$ が微分可能で、$\lim_{t\to 0} f^{(k+1)}(t) = 0$ を確認。

(iv) $k \geq 1$ に対して $f^{(k-1)}(t)$ が 〃 、$\lim_{t\to 0} f^{(k)}(t) = 0$ を確認。

(i) k次導関数 $f^{(k)}(t)$ が

$$f^{(k)}(t) = P_k\left(\frac{1}{t}\right)\cdot e^{-t^{-2}}$$

で書けることを示す。($k=0$ のときは明らか)

(I) $k=1$ のとき

$$f'(t) = \underbrace{2t^{-3}}_{P_1\left(\frac{1}{t}\right)}\cdot e^{-t^{-2}}$$

$$= P_1\left(\frac{1}{t}\right)\cdot e^{-t^{-2}}$$ より、成立する。

(II) $(k-1)$次導関数まで成立する $\left(f^{(k-1)}(t) = P_{k-1}\left(\frac{1}{t}\right)\cdot e^{-t^{-2}}\right)$ と仮定して、k次導関数を考える。

$$f^{(k)}(t) = \frac{d}{dt}\left(f^{(k-1)}(t)\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(P_{k-1}\left(\frac{1}{t}\right)\cdot e^{-t^{-2}}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(P_{k-1}\left(\frac{1}{t}\right)\right)\cdot e^{-t^{-2}} + 2t^{-3}\cdot P_{k-1}\left(\frac{1}{t}\right)\cdot e^{-t^{-2}}$$

$$= -t^{-2}\cdot P_{k-1}'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot e^{-t^{-2}} + 2t^{-3}\cdot P_{k-1}\left(\frac{1}{t}\right)\cdot e^{-t^{-2}}$$

$$= t^{-2}\left(-P_{k-1}'\left(\frac{1}{t}\right) + 2t^{-1}\cdot P_{k-1}\left(\frac{1}{t}\right)\right)\cdot e^{-t^{-2}}$$

$\to P_k\left(\frac{1}{t}\right) = -t^{-2}P_{k-1}'\left(\frac{1}{t}\right) + 2t^{-3}\cdot P_{k-1}\left(\frac{1}{t}\right)$ とおけば、

$f^{(k)}(t) = P_k\left(\frac{1}{t}\right)\cdot e^{-t^{-2}}$ と表される.

(I), (II) より $f^{(k)}(t) = P_k\left(\frac{1}{t}\right)\cdot e^{-t^{-2}}$ と表されることを確認した.

※ 検算して確認.

- 実際に微分する.

- $f'(t) = 2t^{-3}\cdot e^{-t^{-2}}$
- $f''(t) = -6t^{-4}\cdot e^{-t^{-2}} + 4t^{-6}\cdot e^{-t^{-2}}$
- $f'''(t) = 24t^{-5}e^{-t^{-2}} - 36t^{-7}e^{-t^{-2}} + 8t^{-9}e^{-t^{-2}}$

- $P_k\left(\frac{1}{t}\right)$ の関係式

$$P_k\left(\frac{1}{t}\right) = -t^{-2}P_{k-1}'\left(\frac{1}{t}\right) + 2t^{-3}P_{k-1}\left(\frac{1}{t}\right)$$

に実際に代入して確認.

- $P_0\left(\frac{1}{t}\right) = 1$.
- $P_1\left(\frac{1}{t}\right) = -t^{-2}\cdot P_0'\left(\frac{1}{t}\right) + 2t^{-3}\cdot P_0\left(\frac{1}{t}\right)$
  $= 2t^{-3}$ ok
- $P_2\left(\frac{1}{t}\right) = -t^{-2}\cdot P_1'\left(\frac{1}{t}\right) + 2t^{-3}\cdot P_1\left(\frac{1}{t}\right)$
  $= -t^{-2}\cdot 6t^{-2} + 4t^{-6}$
  $= -6t^{-4} + 4t^{-6}$ ok
- $P_3\left(\frac{1}{t}\right) = -t^{-2}\cdot P_2'\left(\frac{1}{t}\right) + 2t^{-3}\cdot P_2\left(\frac{1}{t}\right)$
  $= -t^{-2}\cdot\left(-24\left(\frac{1}{t}\right)^3 + 24\left(\frac{1}{t}\right)^5\right) + 2t^{-3}\cdot\left(-6t^{-4} + 4t^{-6}\right)$
  $= 24t^{-5} - 24t^{-7} - 12t^{-7} + 8t^{-9}$
  $= 24t^{-5} - 36t^{-7} + 8t^{-9}$ ok

(ii) $\lim_{t\to+0} P\left(\frac{1}{t}\right)\cdot e^{-t^{-2}} = 0$ を示す.

多項式 $P\left(\frac{1}{t}\right)$ の最高次数が n であるとする.

$$\lim_{t\to+0}\left(\frac{1}{t}\right)^n\cdot e^{-t^{-2}} = \lim_{t\to+0}\frac{\left(\frac{1}{t}\right)^n}{e^{t^{-2}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{x^2}} \qquad \left(\frac{1}{t} =: x \text{ とおいた}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{2^n\cdot x^n\cdot e^{x^2}} \qquad (\text{ロピタルの定理を } n \text{ 回用いた})$$

$$= 0.$$

$P\left(\frac{1}{t}\right)$ は $\frac{1}{t^n}$ の形の分数式の一次結合であるので, $\lim_{t\to0}P\left(\frac{1}{t}\right)\cdot e^{-t^{-2}}$ も極限値は 0 である.

$\therefore \lim_{t\to+0}P\left(\frac{1}{t}\right)\cdot e^{-t^{-2}} = 0$ であることを確認した.

(iii) $k=0$ のとき, $f^{(k)}(t)$ は微分可能で, $f^{(k+1)}(0)=0$ であることを示す.

$$f^{(1)}(t) = \lim_{t\to0}\frac{f(t)-f(0)}{t-0} \qquad f(0)=0$$

$$= \lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}$$

$$= \lim_{t\to0}\left(\frac{1}{t}\right)\cdot f(t) \qquad \text{(ii) より.}$$

$$= 0.$$

$\therefore$ $k=0$ のとき, $f^{(k+1)}(0)=0$ であることを示した.

(iv) $\lim_{t\to0}f^{(k)}(t) = 0$ であると仮定して, $\lim_{t\to0}f^{(k+1)}(t) = 0$ となることを示す.

$$f^{(k+1)}(0) = \lim_{t\to0}\frac{f^{(k)}(t)-f^{(k)}(0)}{t-0} \qquad \text{仮定より, } f^{(k)}(0)=0.$$

$$= \lim_{t\to0}\frac{f^{(k)}(t)}{t}$$

$$= \lim_{t\to0}\underbrace{\left(\frac{1}{t}\right)\cdot P_k\left(\frac{1}{t}\right)}_{\left(\frac{1}{t}\right)\text{に関する多項式}}\cdot e^{-t^{-2}} = 0.$$

$\therefore$ $\forall k\in\mathbb{Z}^+$ に対して $f^{(k+1)}(0)=0$ を示した.

よって, 関数 $f(t)$ は C^∞ 級である.

TANGENT VECTORS

P6

ユークリッド空間$\mathbb{R}^n$で定義されている微積分を、多様体へ一般化したい

$\longrightarrow$ 方向微分に関する以下の定義から考えていく。

Def (接ベクトル)

$p \in M$、点pにおけるMの接ベクトル

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ 以下の条件を満たす実数値関数 $v : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$

(A1) 線形性：$a, b \in \mathbb{R}$、$f, g \in \mathcal{F}(M)$、

$$v(af + bg) = a \cdot v(f) + b \cdot v(g)$$

(A2) ライプニッツ則：$f, g \in \mathcal{F}(M)$、

$$v(f \cdot g) = v(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot v(g)$$

Def (接ベクトル空間)

$\forall p \in M$、接ベクトル空間 $T_p(M)$

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ 点pにおけるMの接ベクトルを全て集めた集合。

Fact.

接ベクトル空間に和とスカラー倍の定義

①和の定義　　　：$(v + w)(f) := v(f) + w(f)$

②スカラー倍の定義：$(av)(f) \quad := a \cdot v(f)$　　$\left({}^{\forall} a \in \mathbb{R},\ {}^{\forall} f \in \mathcal{F}(M) \right)$

をすることで、$T_p(M)$はベクトル空間となる。

Proof $T_p(M)$に和とスカラー倍を定義することで、ベクトル空間の公理を満たすことを確認する。

和とスカラー倍の定義より、以下の公理を満たす.

$u, v, w \in T_p(M)$、$f \in \mathcal{F}(M)$ とする.

和に関する法則

(V1) 結合則 : $((u+v)+w)(f) \overset{①}{=} (u+v)(f) + w(f)$
$= u(f) + v(f) + w(f)$
$= (u+(v+w))(f)$.

(V2) 交換則 : $(v+w)(f) = v(f) + w(f)$
$= w(f) + v(f)$
$= (w+v)(f)$.

(V3) 零元の存在 : f に 0 を対応させる方向微分 $0 : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$ を考えると、

$$(v+0)(f) = v(f) + 0(f) = v(f).$$

となり、0 は零元である.

(V4) 逆元の存在 : v に対し、$-v$ を考えると、

$$(-v)(f) = -1 \cdot v(f) = -v(f)$$

となり、$-v$ は v の逆元である.

スカラー倍に関する法則

(V5) ベクトルに関する分配法則 : $a, b \in \mathbb{R}$ に対し、

$$((a+b)v)(f) \overset{②}{=} (a+b)v(f) = av(f) + bv(f) = (av+bv)(f).$$

(V6) スカラーに関する分配法則：$a \in \mathbb{R}$ に対し、

②

$$\begin{aligned}(a(v+w))(f) &= a\cdot(v+w)(f)\\ &= a(v(f)+w(f))\\ &= av(f)+aw(f)\\ &= (av+aw)(f).\end{aligned}$$

(V7) スカラー倍の結合則：$a.b \in \mathbb{R}$ に対し、

②

$$\begin{aligned}(ab\cdot v)(f) &= ab\cdot v(f)\\ &= a\cdot bv(f)\\ &= (a\cdot bv)(f).\end{aligned}$$

(V8) スカラー倍の単位元の存在：$1 \in \mathbb{R}$ に対し、

$$\begin{aligned}(1\cdot v)(f) &= 1\cdot v(f)\\ &= v(f).\end{aligned}$$

以上より、和とスカラー倍の定義より $T_p(M)$ がベクトル空間であることを確認した ▨

次に、多様体における偏微分を定義していく。

→ 多様体上で微分するのではなく、一度 f をユークリッド空間に戻して偏微分をする。

natural coordinate

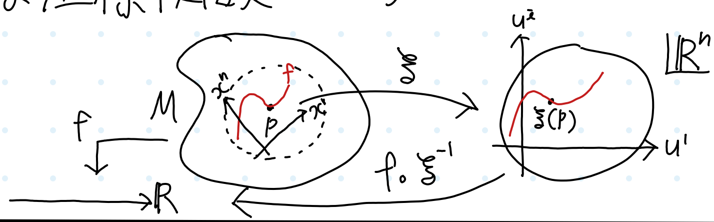
Def (自然な座標関数)

$\xi = (x^1, x^2, \cdots, x^n)$ を多様体 M 上の点 p で定義される座標系とする。

$f \in \mathcal{F}(M)$ のとき、偏微分を以下で定義する。

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \underbrace{\frac{\partial (f \circ \xi^{-1})}{\partial u^i}}_{\mathbb{R}^n\text{の座標}}(\xi(p)) \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

ここで、$u^1, u^2, \cdots, u^n$ を $\mathbb{R}^n$ の自然な座標関数と呼ぶ。



Fact. P7

$\forall f \in \mathcal{F}(M)$ に対して、関数(微分作用素)

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$$
$$f \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

は、点 p における M の接ベクトルとなる。($\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ を $\partial_i|_p$ とも表記する)

Proof 接ベクトルの定義に従って、線形性とライプニッツ則を確認する。

(i) 線形性を確認する

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)(af + bg) = a \cdot \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) + b \cdot \frac{\partial g}{\partial x^i}(p) \quad \therefore \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \text{ は線形性を持つ.}$$

(ii) ライプニッツ則を確認する

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p \cdot (fg) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \cdot g(p) + f(p) \cdot \frac{\partial g}{\partial x^i}(p) \quad \therefore \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \text{ はライプニッツ則を持つ.}$$

(i)、(ii) より、$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ は接ベクトルの定義を満たす。■

Lemma（接ベクトルの性質）

$v \in T_p(M)$ とする。v は以下の性質を満たす。

(A1) $f, g \in \mathcal{F}(M)$ が p の近傍で等しいとき、$v(f) = v(g)$.

(A2) $h \in \mathcal{F}(M)$ が p の近傍で定数のとき、$v(h) = 0$.

Proof

(A1)「点 p の近傍で $f = g$」$\Longrightarrow$「$v(f) = v(g)$」は、$f - g =: h$ として

「点 p の近傍で $h = 0$」$\Longrightarrow$「$v(h) = 0$」と同値である。…①

$\because$ 線形性より、$v(f) - v(g)$
$= v(f - g)$
$= v(h)$.

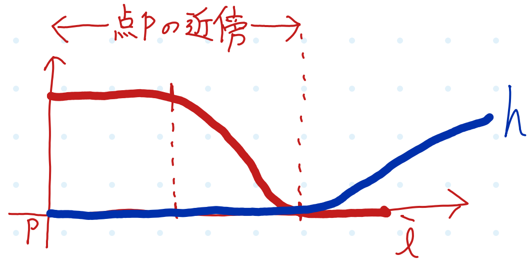
$0 : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$ を v に代入すると、

$$v(0) = v(0 + 0) = v(0) + v(0) = 2v(0)$$

よって、$v(0) = 0$ である …②

一方、ε を「開集合 U を台に持つ点 p における隆起関数」として定義すると、全ての M 上で

$$h \cdot \varepsilon = 0 \quad \cdots ③$$



である。①、②、③より、

$$0 = v(h \cdot \varepsilon) = v(h)\underbrace{\varepsilon(p)}_{=1} + \underbrace{h(p)}_{=0}v(\varepsilon) = v(h).$$

よって、「点Pの近傍で$h=0$」$\Rightarrow$「$v(h)=0$」を示したので、
「点Pの近傍で$f=g$」$\Rightarrow$「$v(f)=v(g)$」である ■

(A2) hがM上の点Pの近傍で、定数$C\in\mathbb{R}$であるとする。

$1\in\mathcal{F}(M)$を定数1を返す関数とすると、

$$v(\underset{\in \mathcal{F}(M)}{1}) = v(\underset{\in \mathcal{F}(M)}{1\cdot 1}) = v(1)\cdot 1 + 1\cdot v(1) = 2v(1)$$

であるため、$v(1)=0$となる。… ①　$v(h)$も同様に、

$$v(h) = v(\underset{\in\mathbb{R}}{C}\cdot\underset{\in\mathcal{F}(M)}{1}) = C\cdot v(1) = 0 \quad \because ①$$ ■

先ほどのLemmaから分かること

→ 接ベクトルは局所的な対象である。
（点Pを定める必要がある）

局所的な対象であることを別の方法で確認する。

Lemma（線形同型）

$U\subset M$：開集合（開部分多様体）

$^\forall U$、$^\exists T_p(U)$ at $p\in U$.

接ベクトル$v\in T_p(U)$について、$\tilde{v}$を、

$$\tilde{v}(f) := v(f|_U) \quad {}^\forall f\in\mathcal{F}(M)$$

と定義すると、$\tilde{v}\in T_p(M)$であり、$v\longmapsto\tilde{v}$は線形同型（linear isomorphic）となる。

Def（線形同型）

V, W：ベクトル空間

$f: V \to W$ が 線形同型 である

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (A1) f が 線形写像 → $f(c_1 x + c_2 y) = c_1 \cdot f(x) + c_2 f(y)$

(A2) f が 全単射

(A3) f^{-1} が 線形写像

Proof $v \to \tilde{v}$ が 線形同型 の定義を満たすことを確認

---

v は線形写像（∵ 接空間の線形性）であることから、$\tilde{v}$ は、

$$\tilde{v}(af+bg) = v((af+bg)|_U) = v(a(f|_U) + b(g|_U))$$
$$= a v(f|_U) + b v(g|_U)$$
$$= a \tilde{v}(f) + b v(g)$$

したがって、$\tilde{v}$ は 線形写像 である.（(A1) を示した）

$v \to \tilde{v}$ が単射であることを確認する.（$\tilde{v}_1 = \tilde{v}_2 \Rightarrow v_1 = v_2$）

${}^\forall f \in \mathcal{F}(M)$、${}^\forall v_1, v_2 \in T_p(M)$ に対して、

$$\tilde{v}_1(f) = \tilde{v}_2(f) \Longleftrightarrow v_1(f|_U) = v_2(f|_U).$$

が全ての f に対して成立する. 特に f の定義域を U へ制限した $f|_U \in \mathcal{F}(U)$ として考えると、$\tilde{v}_1 = \tilde{v}_2 \Rightarrow v_1 = v_2$ である.

$v \to \tilde{v}$ が全射であることを確認する

（${}^\forall \tilde{v} \in T_p(M)$ に対して、対応する $v \in T_p(U)$ が存在することを確認する）

${}^{\forall}\tilde{v} \in T_p(M)$ に対して、関数 $f \in \mathcal{F}(M)$ によって、$\tilde{v}(f) = v(f|_U)$
である $v \in T_p(U)$ をとることができる。
よって、$v \to \tilde{v}$ は全射である。

以上より、$v \longrightarrow \tilde{v}$ は全単射である。((A2) を示した)

(A3) について、一般に f が線形写像かつ全単射であるならば、f^{-1} は線形写像となる。

$\because$ $f^{-1}(k_1 u + k_2 v) = k_1 f^{-1}(u) + k_2 \cdot f^{-1}(v)$ を示せばよいので、

$$k_1 u + k_2 v = f \circ f^{-1}(k_1 u_1 + k_2 v) \quad \cdots ①$$ であり、かつ

$$\begin{aligned} k_1 u + k_2 v &= f \circ f^{-1}(k_1 u) + f \circ f^{-1}(k_2 v) \quad (\because f \circ f^{-1} \text{は恒等写像}) \\ &= k_1 f \circ f^{-1}(u) + k_2 f \circ f^{-1}(v) \\ &= f\left(k_1 f^{-1}(u) + k_2 f^{-1}(v)\right) \quad \cdots ② \quad (f \text{が線形写像より}) \end{aligned}$$

であるため、① と ② を f^{-1} で写すと、

$$f^{-1}(k_1 u + k_2 v) = k_1 f^{-1}(u) + k_2 f^{-1}(v)$$

となり、f が線形写像かつ全単射 $\Longrightarrow$ 逆写像 f^{-1} は線形写像である。

以上より、$v \longrightarrow \tilde{v}$ は線形同型である ▨

※以降、この自明な同型を無視して、$T_p(U) = T_p(M)$ と記載

basis theorem

Theorem（基底定理）

$\xi = (x^1, x^2, \cdots, x^n)$ を M の点 p における座標系とする。このとき、座標ベクトル $\partial_1|_p, \partial_2|_p, \cdots \partial_n|_p$ は接空間 $T_p(M)$ の基底を構成する。

そして、$\forall v \in T_p(M)$

$$v = \sum_{i=1}^{n} v(x^i) \cdot \partial_i|_p$$

である。

Proof

$\forall p \in M$ に対して、$\xi(p) = 0$ となるように座標系を選ぶ（このように設定しても一般性を失わない）。

（必要に応じて）開集合 U を小さくとれば、

$$\forall \varepsilon, \ \exists \xi(U) = \{ a \in \mathbb{R}^n \mid |a| < \varepsilon \}$$

となるようにする。

$\xi(U)$ 上の滑らかな関数 $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^1$ に対して、$g_i(a)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ を以下で定義する。

$$g_i(x) := \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial u^i}(tx)\,dt \quad \forall x \in \xi(U).$$

~~$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$~~

と定義すると、微積分学の基本定理より、

$$g = g(0) + \sum_{i=1}^n g_i \cdot u^i \quad \text{on } \xi(U).$$

∵ ユークリッド空間上において、微積分学の基本定理より、

$$g(x) - g(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(g(xt)\right) dt \quad \cdots ①$$

連鎖律を用いて $\frac{d}{dt}(g(xt))$ を $u^1, u^2, \cdots u^n$ の微分へ変換していくと、

$$\frac{d}{dt}\left(g(tx)\right) = \frac{\partial g(tx)}{\partial(\cancel{tx^1})_{u^1}} \cdot \frac{d(t\cancel{x^1}^{\,u^1})}{dt} + \frac{\partial g(tx)}{\partial(\cancel{tx^2})_{u^2}} \cdot \frac{d(t\cancel{x^2}^{\,u^2})}{dt} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\partial g}{\partial(\cancel{tx^n})_{u^n}} \cdot \frac{d(t\cancel{x^n}^{\,u^n})}{dt}$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(tx)}{\partial(\cancel{tx^i})^{u^n}} \cdot \frac{d(t\cancel{x^i})}{dt} \; u^i$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(tx)}{\partial(\cancel{tx^i})} \cdot \cancel{x^i} \; u^i$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(tx)}{\partial u^i} \cdot \cancel{x^i}^{\,u^i}. \quad \text{~~$(tx^i = u^i$ とおいた$)$~~} \cdots ②$$

①、② より、

$$g(x) - g(0) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(tx)}{\partial(tx^i)} \cdot \cancel{x^i}^{\,u^i}\,dt$$

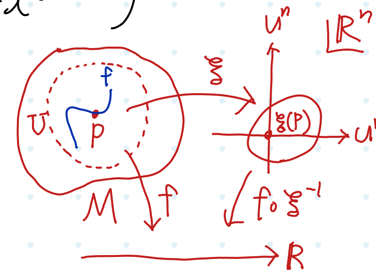
$$= \sum_{i=1}^n \cancel{x^i}^{\,u^i} \cdot \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial(tx^i)}(tx)\,dt = \sum_{i=1}^n \cancel{x^i}^{\,u^i} \cdot \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial u^i}(tx)\,dt$$

$$= \sum_{i=1}^n \cancel{x^i}^{\,u^i} \cdot g_i(x)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n x^i \cdot \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial(u^i)}(tx)\,dt = \sum_{i=1}^n u^i \cdot g_i(x) \text{ と言えれば成り立つ} \right)$$

$^\forall f \in \mathcal{F}(M)$, $g =: f \circ \xi^{-1} : \xi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ とおくと、

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^{n} f_i x^i \quad \text{on } U. \qquad \left(f_i(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \right)$$



☺ $^\exists p \in M$ s.t. $\xi(p) = 0$. （∵ P6、l13 より）

関数 f を点 p まわりでテイラー展開をすると、

$$f \simeq f(p) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial u^i}(\xi(p)) \cdot (u^i - p^i)$$

（$\mathbb{R}^n$ 上でテイラー展開）

$$= f(p) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (f \circ \xi^{-1})}{\partial u^i}(\xi(p)) \cdot (u^i - \underbrace{p^i}_{=0})$$

自然な座標関数の定義

$$= f(p) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \cdot (x^i - \underbrace{p^i}_{=0})$$

$$= f(p) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \cdot x^i$$

接ベクトル v に f に関する等式を適用すると、

$$v(f) = v\Big(\underbrace{f(p)}_{\in \mathbb{R}} + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f_i}_{\in \mathcal{F}(M)} x^i \Big)$$

x^i：局所座標系の i 番目の成分を返す関数 $\in \mathcal{F}(M)$

$$= 0 + \sum_{i=1}^{n} v(f_i) \underbrace{x^i(p)}_{=0} + \sum_{i=1}^{n} f_i(p) v(x^i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \cdot v(x^i) = \left(\sum_{i=1}^{n} v(x^i) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \right)(f)$$

である。この等式は任意の $f \in \mathcal{F}(M)$ で成り立つため、

$$v = \sum_{i=1}^{n} v(x^i) \cdot \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$$ と表示できる。

(ii) 座標ベクトル $\partial_i|_p$ が線形独立

実数 $v(x^1), v(x^2), \cdots v(x^n)$ が、

$$\sum_{i=1}^{n} v(x^i) \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p = 0 \Longrightarrow v(x^1) = v(x^2) = \cdots = v(x^n) = 0$$

であることを示せばよい。

$\sum_{i=1}^{n} v(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = 0$ に代入する関数 f の形は任意であるため、$f = x^1$ を代入すると、

$$v(x^1)\frac{\partial x^1}{\partial x^1}(p) + v(x^2)\cdot\frac{\partial x^1}{\partial x^2}(p) + \cdots\cdots + v(x^n)\frac{\partial x^1}{\partial x^n}(p) = 0$$

よって $v(x^1) = 0$ である。$f = x^2, x^3, \cdots, x^n$ と代入していくと、

$v(x^1) = v(x^2) = \cdots = v(x^n) = 0$ となる。

∴ 座標ベクトル $\partial_i|_p$ は線形独立である。■

因子の補題

一般に、$f(x)$ が $f(0)=0$ のとき、

$\exists \tilde{f}(x)$ s.t. $f(x) = x \cdot \tilde{f}(x)$

例え

$$f(x) = \sin x$$

$$= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots$$

$$= x\underbrace{\left(1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \cdots\right)}_{\tilde{f}(x)}$$

（因子の補題を応用して、）

$h(x)$ に対し、$f(x) =: h(x) - h(0)$

$f(0) = 0$ のとき、

$$h(x) - h(0) = x\tilde{f}(x)$$

$g: \mathbb{R}^n$ の $\mathbb{0} = (\overbrace{0, 0, \cdots, 0}^{n個})$ の近傍 U で定義された C^∞ 級関数

$\Longrightarrow$ $\exists g_1(u^1, u^2, \cdots u^n), \cdots\ \exists g_n(u^1, u^2, \cdots, u^n)$

: $\mathbb{0}$ の近くで定義された C^∞ 級関数

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{s.t.} \\ &g(u^1, u^2, \cdots, u^n) - g(\overbrace{0, 0, \cdots, 0}^{n個}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \underline{g_i(u^1, u^2, \cdots, u^n)} \cdot u^i \end{aligned}}$$

① において、

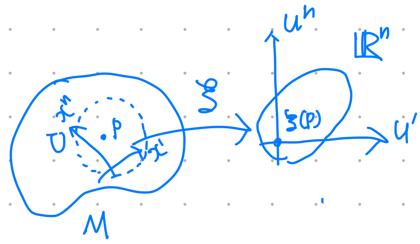
$g_i(0,0,\cdots,0) = \dfrac{\partial g}{\partial u^i}(0,0,\cdots,0)$ である。

書籍内では、
$g_i(u) = \int_0^1 \dfrac{\partial g}{\partial u}(tu)\,dt$

$\dfrac{\partial g}{\partial u^i}(u^1,u^2,\cdots,u^n) = \sum_{j=1}^{n}\left(\dfrac{\partial g_j}{\partial u^i}u^j + g_j(u^1,\cdots,u^n)\underbrace{\dfrac{\partial u^j}{\partial u^i}}_{\delta^j_i}\right)$

$\dfrac{\partial g}{\partial u^i}(0,0,\cdots,0) = 0 + g_i(0,0,\cdots,0)\cdot 1$

$= g_i(0,0,\cdots,0)$



$^\forall f \in \mathcal{F}(M)$ に対し、U 上で

$g := f\circ\xi^{-1} : \xi(U) \to \mathbb{R}$

$\xi(U) \subset \mathbb{R}^n$

$g(u^1,u^2,\cdots,u^n)$

$(x^i = u^i\circ\xi)$

$\Longrightarrow$ $^\exists f_i$: U 上の関数 s.t. $f = f(p) + \sum_{i=1}^{n} f_i\cdot x^i$ on U

→ 基底定理の $f = \sim$ の部分。

Proof

$g = f\circ\xi^{-1}$ に、Lemma を適用する。

$\left(g(u^1,u^2,\cdots,u^n) = g(0,0,\cdots,0) + \sum_{i=1}^{n} g_i(u^1,u^2,\cdots,u^n)\cdot u^i\right.$

$f = g\circ\xi$

$= g(x^1,x^2,\cdots,x^n)$

$= g(\xi(p)) + \sum_{i=1}^{n}\boxed{g_i(x^1,x^2,\cdots,x^n)}\cdot x^i$

$f_i = g_i\circ\xi$
U 上 C^∞ 級

$= f(p) + \sum f_i\cdot x^i$ ▨

$\xi(x^1,x^2,\cdots,x^n)$
$\shortparallel$
$(u^1,u^2,\cdots,u^n)$

DIFFERENTIAL MAPS（写像の微分） p9

- 多様体 M の接空間 $T_p(M)$ での近似

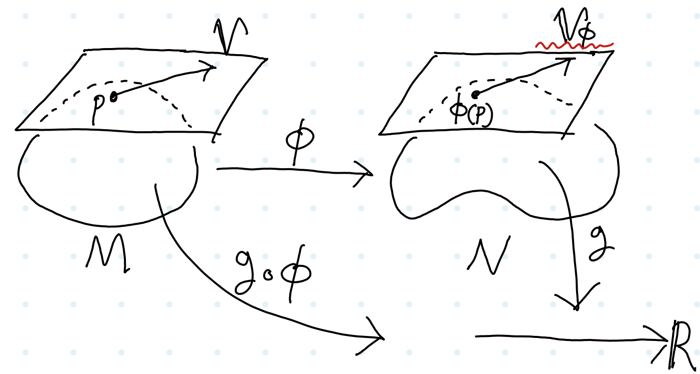
前のセクション（接ベクトル）では、$\forall p \in M$ において、接空間 $T_p(M)$ で M を近似する方法を説明した。
（接空間：ある点における、多様体の局所的な線形化を表すベクトル空間）

- 写像 $\phi: M \to N$ による近似

滑らかな写像 $\phi: M \to N$ が与えられたとき、$\forall p \in M$ において ϕ を接空間の線形変換として捉える。

写像 $V_\phi: \mathcal{F}(N) \to \mathbb{R}$ を新たに定義する。V_ϕ がライプニッツ則を満たしていることを確認する。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(N) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ g & \longmapsto & V(g \circ \phi) \end{array}$$



Proof

$$\begin{aligned} V_\phi(fg) &= V(fg \circ \phi) \\ &= V((f \circ \phi)(g \circ \phi)) \\ &= V(f \circ \phi) \cdot g(\phi(p)) + f(\phi(p)) \cdot V(g \circ \phi) \\ &= V_\phi(f) \cdot g(\phi(p)) + f(\phi(p)) \cdot V_\phi(g) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

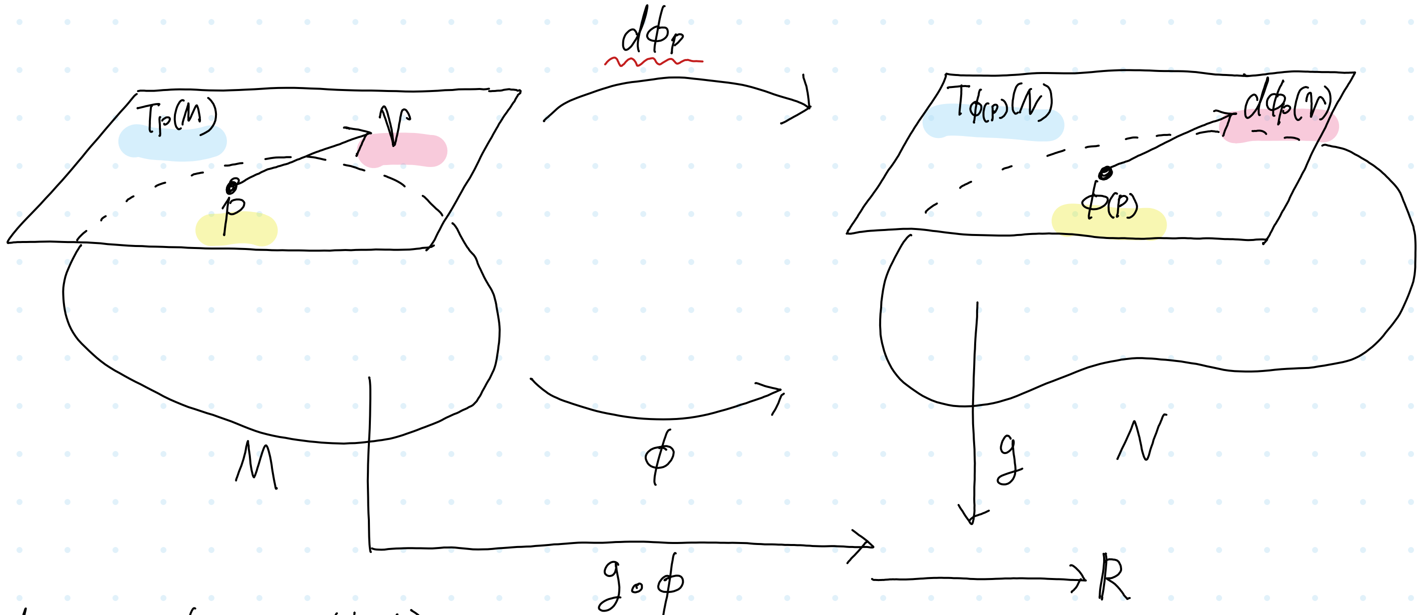
∵ 接ベクトルのライプニッツ則

Def（写像の微分）

写像 $\phi: M \to N$ を滑らかとする。$\forall p \in M$ に対して、関数

$$d\phi_p : T_p(M) \longrightarrow T_{\phi(p)}(N)$$

は、接ベクトル $v \in T_p(M)$ を $v_\phi \in T_{\phi(p)}(N)$ へ写す写像であり、 p9
点 p における写像 ϕ の微分と呼ばれる。



$d\phi_p$ と ϕ は、等式

$$(d\phi_p(v))(g) = v(\underbrace{g \circ \phi}_{M \to \mathbb{R}}) \qquad {}^\forall v \in T_p(M),\ g \in \mathcal{F}(N)$$

が成り立つ。

ゆえに、写像 ϕ の微分 $d\phi_p$ は線形である。

接空間間の変換が線形

Proof 和とスカラー倍が定義されていることを確認

接ベクトルで定義されている和とスカラー倍

$$(v+w)(f) = v(f) + w(f)$$

$$(av)(f) = a \cdot v(f)$$

が、$d\phi_p$ でも成立しているかを確かめる。

(i) 和が定義されていることを確認

$$d\phi_p(v+w)(g) = (v+w)(g\circ\phi) \quad (\because \mathrm{Def} より)$$
$$= v(g\circ\phi) + w(g\circ\phi) \quad (\because 接ベクトルの和の定義)$$
$$= d\phi_p(v(g)) + d\phi_p(w(g)).$$

(ii) スカラー倍が定義されていることを確認.

$$d\phi_p(av)(g) = (av)(g\circ\phi)$$
$$= a\cdot v(g\circ\phi)$$
$$= a\cdot d\phi_p(v)(g).$$

以上より、写像の微分は線形である ■

Lemma

写像 $\phi : M^m \to N^n$ を滑らかとする．ξ が M の点 p における座標系として，η を N の点 $\phi(p)$ における座標系とする．そのとき，

$$d\phi_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial (y^l \circ \phi)}{\partial x^j}(p) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial y^l}\right|_{\phi p} \quad (j = 1, 2, \cdots, m) \cdots ①$$

が成り立つ．

Proof

① の左辺を $W \in T_{\phi(p)}(N)$ とおく．このとき，基底定理により，W は

$$W = \sum_{l=1}^{n} W(y^l) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial y^l}\right|_{\phi p}$$

と書ける．

Theorem (基底定理)

$\xi = (x^1, x^2, \cdots, x^n)$ を M の点 p における座標系とする．このとき，座標ベクトル $\partial_1|_p, \partial_2|_p, \cdots \partial_n|_p$ は接空間 $T_p(M)$ の基底を構成する．

そして，$\forall v \in T_p(M)$ に対して $v = \sum_{l=1}^{n} v(x^l) \cdot \partial_l|_p$ である．

そして写像の微分 $d\phi_p$ の定義より，$W(y^l)$ は

$$W(y^l) = d\phi_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right)(y^l) = \frac{\partial}{\partial x^j} \cdot (y^l \circ \phi) \quad (\because \text{写像の微分の定義})$$

Lemma の左辺に y^l 代入

$$= \frac{\partial (y^l \circ \phi)}{\partial x^j}(p)$$

よって，$W = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial (y^l \circ \phi)}{\partial x^j}(p) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{\phi p} \quad (j = 1, 2, \cdots, m)$ であり，

Lemma の等式 ① が成立する．■

以上の補題より、座標基底に関する$d\phi_p$の行列は、

$$\left(\frac{\partial(y^i\circ\phi)}{\partial x^j}(p)\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}}$$

と表現され、ξとηに対する点pにおけるヤコビ行列と~~呼~~ばれる.

Proof

基底$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\right\}$、$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{\phi_p}\right\}$に関する$(d\phi_p)$の表現行列を確認する.

$$d\phi_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p\right) = \left(d\phi_p\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, d\phi_p\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_p, \cdots, d\phi_p\left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p\right)$$

∵補題

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(y^i\circ\phi)}{\partial x^1}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{\phi_p}, \cdots\cdots, \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(y^i\circ\phi)}{\partial x^m}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{\phi_p}\right)$$

$$= \left(\left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)_{\phi_p}, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial y^n}\right)_{\phi_p}\right)\cdot \begin{array}{cc} n & \begin{pmatrix} \frac{\partial(y^1\circ\phi)}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial(y^1\circ\phi)}{\partial x^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial(y^n\circ\phi)}{\partial x^1}(p) & & \frac{\partial(y^n\circ\phi)}{\partial x^m} \end{pmatrix} \\ & m \end{array}$$

以上より、基底$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\right\}$、$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{\phi_p}\right\}$に関する$(d\phi_p)$の表現行列が

$$\left(\frac{\partial(y^i\circ\phi)}{\partial x^j}(p)\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}}$$

であることを確認した ■

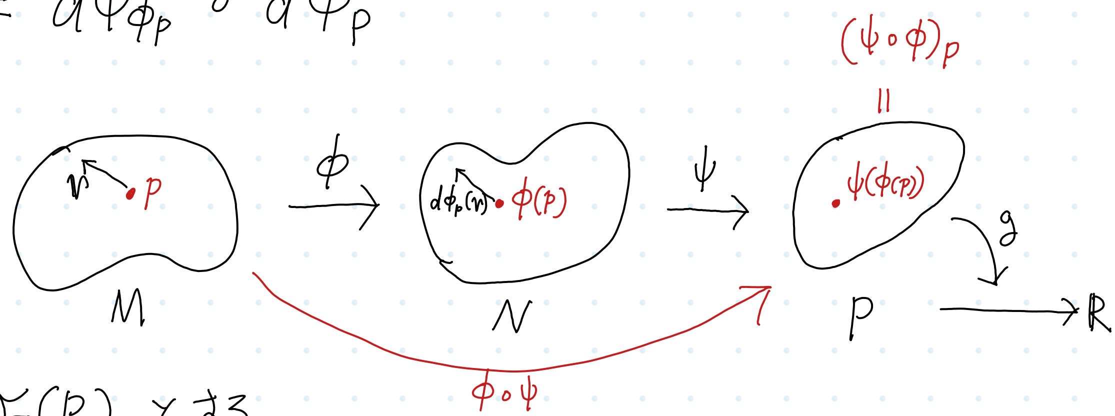
合成写像のヤコビ行列に対する連鎖律の公式が、写像の微分より導かれる.(補題)

Lemma（写像の微分の合成）

$\phi : M \to N$ と $\psi : N \to P$ をそれぞれ滑らかな写像とする.
$^\forall p \in M$ に対して、以下の等式

$$d(\psi \circ \phi)_p = d\psi_{\phi_p} \circ d\phi_p$$

が成り立つ.



Proof

$v \in T_p(M)$、$g \in \mathcal{F}(P)$ とする.

$$d(\psi\circ\phi)(v)(g) = v(g\circ\psi\circ\phi) = d\phi(v)(g\circ\psi)$$
$$= \big(d\psi(d\phi(v))\big)(g).$$
$$= (d\psi\circ d\phi)(v)(g).$$

☺ 写像の微分の定義

この等式は任意の $v \in T_p(M)$、$g \in \mathcal{F}(P)$ で成り立つため、
$d(\psi\circ\phi)_p = d\psi_{\phi(p)} \circ d\phi_p$ である ■

※ 以降、$d\phi_p$ から添字 p を省略して記述.

Theorem（逆関数定理）

$\phi : M \to N$ を滑らかな写像.
$p \in M$ における写像の微分 $d\phi_p$ が線形同型である
$\iff$ $^\exists p$ の近傍 $V \subset M$ s.t. $\phi|_V : V \to \phi(V)$ が diffeo.

(証明には、pの近傍の中における座標表示に古典的定理(classical theorem)を適用)

$U \subset \mathbb{R}^n$: open set

$f : U \to \mathbb{R}^n$: C^∞-map

$$f(x^1, \ldots, x^n) = (y^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, y^n(x^1, \ldots, x^n))$$

$$Jf(x^1, \ldots, x^n) := \begin{bmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{bmatrix} (x^1, \ldots, x^n)$$

※ 多様体上のテイラー展開について参考：

川平「第4章 多様体の基礎のキソ」 https://www1.econ.hit-u.ac.jp/kawahira/

$U \subset \mathbb{R}^n$: open set

$f : U \to \mathbb{R}$: C^∞-map

$f(x^1, x^2, \cdots, x^n) = (y^1(x^1, \cdots, x^n), y^2(x^1, \cdots, x^n), \cdots, y^n(x^1, \cdots, x^n))$

(x から y への座標変換)

$$Jf(x^1, x^2, \cdots, x^n) := \begin{bmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y^1}{\partial x^n} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{bmatrix} (x^1, x^2, \cdots, x^n)$$ (Jacobi 行列)

Theorem (逆写像定理)

$p \in U$ において、$Jf(p)$ が可逆 (つまり、$\det(Jf(p)) \neq 0$)

$\Longleftrightarrow$ df_p が線形同型

$\Longrightarrow$ $\exists\, \tilde{U} \subset U$: $p \in \tilde{U}$ である $\mathbb{R}^n$ の開集合.

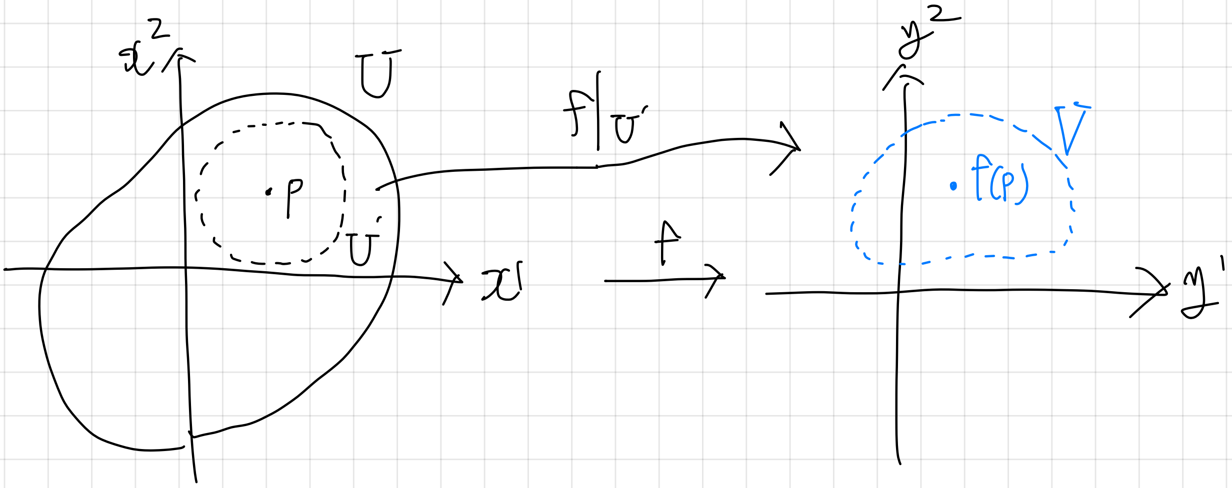
$\exists\, V$: $f(p) \in V$ である $\mathbb{R}^n$ の開集合.

s.t. $f : \tilde{U} \to V$: diffeo

→ (f : 全単射, C^∞

f^{-1} : $V \to \tilde{U}$: C^∞)

(つまり、f は点 p において局所微分同相)



16. Theorem

$$\begin{cases} M, N : C^\infty\text{-mfd} \\ f : M \to N : C^\infty\text{-map} \\ p \in M \end{cases}$$

とする.

linear isomorphism
(線形同型)

$df_p : T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$; 全単射 ← $\dim M = \dim N$

$$\Longrightarrow \begin{cases} {}^\exists U : p \text{ を含む } M \text{ の開集合} \\ {}^\exists V : f(p) \text{ を含む } N \text{ の開集合} \end{cases}$$

s.t. $f : U \to V$ が diffeo である.

$f = f|_V$

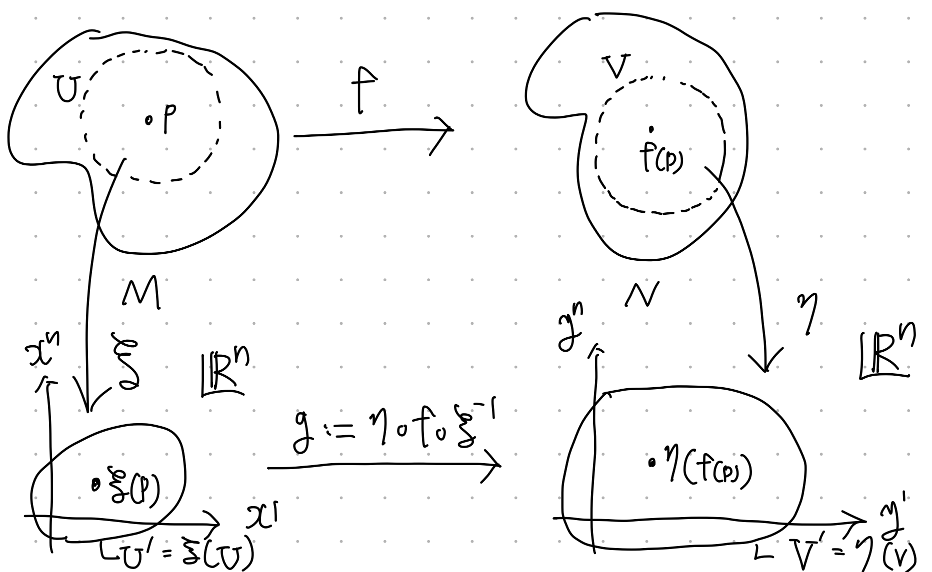
Proof

$(U, \xi) = (U ; x^1, x^2, \cdots, x^n)$: $p \in M$ の座標近傍

$(V, \eta) = (V ; y^1, y^2, \cdots, y^n)$: $f(p) \in N$ の座標近傍

$$g := \eta \circ f \circ \xi^{-1}$$ (f の局所座標表示)

とおくと, $g : U' \to V'$: C^∞-map である.



$g(x^1, x^2, \cdots, x^n)$

$= (g^1(x^1, \cdots, x^n), \cdots g^n(x^1, \cdots, x^n))$

ここで、

$$(df_p)\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^2}\Big|_p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p\right) = \left(\frac{\partial}{\partial y^1}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial y^2}\Big|_p, \cdots, \frac{\partial}{\partial y^n}\Big|_p\right)$$

$$\cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{bmatrix}(p)}_{= Jg(p)}$$

前提条件

df_p：全単射より $(Jg)(p)$ は可逆

$\therefore$ 逆関数定理より、$^\exists \tilde{U}', \tilde{V}'$ s.t. $g : \tilde{U}' \to \tilde{V}'$; diffeo.

$\tilde{U} := \xi^{-1}(\tilde{U}')$, $\tilde{V} := \eta^{-1}(\tilde{V}')$ とすると、

$f = \eta^{-1} \circ g \circ \xi$:

$$\begin{tikzcd} \tilde{U} \arrow[d, "\xi"', "\text{diffeo}"] & \tilde{V} \\ \tilde{U}' \arrow[r, "g", "\text{diffeo}"'] & \tilde{V}' \arrow[u, "\eta^{-1}"', "\text{diffeo}"] \end{tikzcd}$$

f は diffeo の合成関数なので、
f は diffeo.