

• Fukui の公式の導出

$$\lambda(u, t) = \int_0^t \hat{\mu}(u, v) dv$$

$$\sigma'(t) = t(\cos\lambda, \sin\lambda) = t\theta$$

$$\theta' = \hat{\mu}n$$

$$f_u = \theta + (A - \dots)$$

$$\sigma''(t) = \theta + t\theta' = \theta + t\hat{\mu}n$$

$$\theta' = \begin{pmatrix} -\sin\lambda \\ \cos\lambda \end{pmatrix}$$

$$f_t = (A_t, B_t) \quad (\quad) \quad (\quad)$$

$$\det(\sigma', \sigma'')$$

$$= \hat{\mu} \begin{pmatrix} -\sin\lambda \\ \cos\lambda \end{pmatrix}$$

$$f_{tt} = (A_{tt}, B_{tt}) \quad (\quad) \quad (\quad)$$

$$= \det(t\theta, \theta + t\hat{\mu}n)$$

$$= \hat{\mu} n$$

$$= t^2 \hat{\mu}$$

$$\frac{\det(\sigma', \sigma'')}{\|\sigma'(t)\|^2} = \frac{t^2 \hat{\mu}}{t^2 \|\theta\|^2} = \hat{\mu}$$

$$(A, B) = \int_0^t v(\cos\lambda(u, v), \sin\lambda(u, v)) dv$$

$$(A_t, B_t) = t(\cos\lambda(u, t), \sin\lambda(u, t))$$

$$(A_{tt}, B_{tt}) = (\cos\lambda, \sin\lambda) + t\hat{\mu}(-\sin\lambda, \cos\lambda)$$

$$\text{Q. } f_{u(u,0)} \xrightarrow{\text{det}} \frac{f_u f_t f_{tt}}{\|f_t\|^2} \xrightarrow{\text{?}} \hat{\mu}(u, t)$$

$$\begin{cases} A_t = t \cos\lambda(u, t) \\ B_t = t \sin\lambda(u, t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{tt} = \cos\lambda(u, t) - t(\lambda) \sin\lambda(u, t) \\ \quad = \cos\lambda - t\hat{\mu} \sin\lambda \\ B_{tt} = \sin\lambda(u, t) + t(\lambda) \cos\lambda(u, t) \\ \quad = \sin\lambda + t\hat{\mu} \cos\lambda \end{cases}$$

$\mathbb{V}_2, \mathbb{V}_3$ は直交する (基底: $C, \mathbb{V}_2, \mathbb{V}_3$)

$$\begin{aligned} f(u, t) &= C(u) + (A(u, t), B(u, t)) \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ b \end{pmatrix} \\ &= C(u) + A(u, t)\mathbb{V}_2 + B(u, t)\mathbb{V}_3 \\ f_t &= A_t\mathbb{V}_2 + B_t\mathbb{V}_3 = t \cos\lambda \mathbb{V}_2 + t \sin\lambda \mathbb{V}_3 \end{aligned}$$

$$\|f_t\|^2 = A_t^2 \mathbb{V}_2^2 + B_t^2 \mathbb{V}_3^2 = t^2 \cos^2\lambda(u, t) + t^2 \sin^2\lambda = t^2$$

$$\begin{aligned} f_{tt} &= A_{tt}\mathbb{V}_2 + B_{tt}\mathbb{V}_3 \\ &= (\cos\lambda - t\hat{\mu} \sin\lambda)\mathbb{V}_2 + (\sin\lambda + t\hat{\mu} \cos\lambda)\mathbb{V}_3 \end{aligned}$$

$$f_u = C'(u) + A_u\mathbb{V}_2 + A\mathbb{V}_2' + B_u\mathbb{V}_3 + B\mathbb{V}_3' \quad \xrightarrow{\text{Lemma 4.8 5!)}} \begin{cases} \mathbb{V}_2' = -K \cos\theta C' + (\tau - \theta') \mathbb{V}_3 \\ \mathbb{V}_3' = -K \sin\theta C' - (\tau - \theta') \mathbb{V}_2 \end{cases}$$

$$= (1 - AK \cos\theta - BK \sin\theta) C'(u)$$

$$+ (A_u - B(\tau - \theta')) \mathbb{V}_2$$

$$+ (B_u + A(\tau - \theta')) \mathbb{V}_3$$

$$\det(f_u, f_t, f_{tt}) = \begin{vmatrix} 1 - \overset{\circ}{AK\cos\theta} - \overset{\circ}{BK\sin\theta} & 0 & 0 \\ \overset{\circ}{Au} - \overset{\circ}{B(\tau-\theta')} & t\cos\lambda & \cos\lambda - t\hat{\mu}\sin\lambda \\ \overset{\circ}{Bu} + \overset{\circ}{A(\tau-\theta')} & t\sin\lambda & \sin\lambda + t\hat{\mu}\cos\lambda \end{vmatrix}$$

余因子展開

$$= \left\{ 1 - K(A\cos\theta + B\sin\theta) \right\} \begin{vmatrix} t\cos\lambda & \cos\lambda - t\hat{\mu}\sin\lambda \\ t\sin\lambda & \sin\lambda + t\hat{\mu}\cos\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \left\{ 1 - K(A\cos\theta + B\sin\theta) \right\}$$

$$(t\sin\lambda\cos\lambda + t^2\hat{\mu}\cos^2\lambda - t\sin\lambda\cos\lambda + t^2\hat{\mu}\sin^2\lambda)$$

$$= t^2\hat{\mu} \left\{ 1 - K(A\cos\theta + B\sin\theta) \right\}$$

$$\frac{\det(f_u, f_t, f_{tt})}{\|f_t\|^2} = \hat{\mu} \left\{ 1 - K(A\cos\theta + B\sin\theta) \right\} = \hat{\mu}(u, t)$$

?

(R_θ =

(基底: C, n, b)

$$f(u, t) = \mathbb{C}(u) + (A(u, t), B(u, t)) \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} n\cos\theta - b\sin\theta \\ n\sin\theta + b\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$f_u = \mathbb{C}'(u) + (Au, Bu) R_\theta \begin{pmatrix} n \\ b \end{pmatrix} + (A, B)(R_\theta)_u \begin{pmatrix} n \\ b \end{pmatrix} + (A, B) R_\theta \begin{pmatrix} n_u \\ b_u \end{pmatrix}$$

$$= \mathbb{C}'(u) + Au(n\cos\theta - b\sin\theta) + Bu(n\sin\theta + b\cos\theta) \\ + A(-n\sin\theta - b\cos\theta) + B(n\cos\theta - b\sin\theta) \\ + A(n_u\cos\theta - b_u\sin\theta) + B(n_u\sin\theta + b_u\cos\theta)$$

$$= \mathbb{C}'(u) + (Au\cos\theta - A\sin\theta + Bu\sin\theta + B\cos\theta)n$$

$$+ (-A\sin\theta - A\cos\theta + Bu\cos\theta - B\sin\theta)b$$

$$+ (A\cos\theta + B\sin\theta)n_u + (-A\sin\theta + B\cos\theta)b_u$$

フレスセル公式
 $n' = -K\theta + \tau b$
 を代入。

フレスセル公式
 $b' = -\tau n$
 を代入。

2

$$\begin{aligned}
 &= \left\{ 1 - K(A \cos \theta + B \sin \theta) \right\} \mathbf{c}(u) \\
 &+ \left\{ A_u \cos \theta - \underline{A \sin \theta} + B_u \sin \theta + \underline{B \cos \theta} - T(\underline{-A \sin \theta} + \underline{B \cos \theta}) \right\} \mathbf{n} \\
 &+ \left\{ -A_u \sin \theta - \underline{A \cos \theta} + B_u \cos \theta - \underline{B \sin \theta} + T(\underline{A \cos \theta} + \underline{B \sin \theta}) \right\} \mathbf{b} \\
 &\quad \text{|| } A \cos \theta (-1 + T) + B \sin \theta (-1 + T)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_t &= A_t (n \cos \theta - b \sin \theta) + B_t (n \sin \theta + b \cos \theta) \\
 &= t \cos \lambda (n \cos \theta - b \sin \theta) + t \sin \lambda (n \sin \theta + b \cos \theta) \\
 &= (t \cos \lambda \cos \theta + t \sin \lambda \sin \theta) n + (-t \cos \lambda \sin \theta + t \sin \lambda \cos \theta) b
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \|f_t\|^2 &= (t \cos \lambda \cos \theta + t \sin \lambda \sin \theta)^2 + (-t \cos \lambda \sin \theta + t \sin \lambda \cos \theta)^2 \\
 &= t^2 \cos^2 \lambda \cos^2 \theta + t^2 \sin^2 \lambda \sin^2 \theta + 2t^2 \cos \lambda \sin \lambda \cos \theta \sin \theta \\
 &+ t^2 \cos^2 \lambda \sin^2 \theta + t^2 \sin^2 \lambda \cos^2 \theta - 2t^2 \cos \lambda \sin \lambda \cos \theta \sin \theta \\
 &= t^2 \{ \cos^2 \lambda (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \sin^2 \lambda (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \} = \underline{\underline{t^2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{tt} &= A_{tt} (n \cos \theta - b \sin \theta) + B_{tt} (n \sin \theta + b \cos \theta) \\
 &= (\cos \lambda - t \hat{\mu} \sin \lambda) (n \cos \theta - b \sin \theta) + (\sin \lambda + t \hat{\mu} \cos \lambda) (n \sin \theta + b \cos \theta) \\
 &= (\cos \lambda \cos \theta - t \hat{\mu} \sin \lambda \cos \theta + \sin \lambda \sin \theta + t \hat{\mu} \cos \lambda \sin \theta) n \\
 &+ (-\cos \lambda \sin \theta + t \hat{\mu} \sin \lambda \sin \theta + \sin \lambda \cos \theta + t \hat{\mu} \cos \lambda \cos \theta) b
 \end{aligned}$$

$$\det(f_u, f_t, f_{tt}) = \begin{vmatrix} 1 - K(A \cos \theta + B \sin \theta) \\ A_u \cos \theta + B_u \sin \theta + A \sin \theta (-1 + T) + B \cos \theta (-1 + T) \\ -A_u \sin \theta + B_u \cos \theta + A \cos \theta (-1 + T) + B \sin \theta (-1 + T) \end{vmatrix}$$

計算機で
計算

$$\begin{matrix} 0 \\ t \cos \lambda \cos \theta + t \sin \lambda \sin \theta \\ -t \cos \lambda \sin \theta + t \sin \lambda \cos \theta \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 \\ \cos \lambda \cos \theta - t \hat{\mu} \sin \lambda \cos \theta + \sin \lambda \sin \theta + t \hat{\mu} \cos \lambda \sin \theta \\ -\cos \lambda \sin \theta + t \hat{\mu} \sin \lambda \sin \theta + \sin \lambda \cos \theta + t \hat{\mu} \cos \lambda \cos \theta \end{matrix}$$

$$= \hat{\mu} t^2 \{ 1 - K(A \cos \theta + B \sin \theta) \}$$

$$\frac{\det(f_u, f_\epsilon, f_{\epsilon\epsilon})}{\|f_\epsilon\|^2} = \hat{\mu}\{1 - K(A\cos\theta + B\sin\theta)\} = \hat{\mu}(u, t) \quad (K > 0)$$

$$A\cos\theta + B\sin\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\theta + \arcsin \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \theta + \arcsin \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right) = n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

Theorem II を証明する。

Theorem II (再掲)

第二対合 (second involution) が

$$I_c^*: \mathcal{G}_{**}^\omega(R_j^2, R^3, C) \ni f \mapsto f_* \in \mathcal{G}_{**}^\omega(R_j^2, R^3, C)$$

として $\mathcal{G}_{**}^\omega(R_j^2, R^3, C)$ 上に定義され、次の4つの性質を満たす。
non-faithful isomer

(1) f_* は f と同一の第一基本形式を持ち、かつ f の忠実な異性体である。

(2) $I_c^* \circ I_c = I_c \circ I_c^*$ である (I_c は Theorem I の第一対合)。

(3) f と f_* を原点 0 での写像芽とすると、 I_c^* は写像

$$I_c^*: \mathcal{G}_*^\omega(R_0^2, R^3, C) \ni f \mapsto f_* \in \mathcal{G}_*^\omega(R_0^2, R^3, C) \quad (1.4)$$

を誘導し、 $J_0 \circ I_c^* = J_0$ および $I_c^* \circ I_0 = I_0 \circ I_c^*$ を満たす。
第一基本量が不变

(4) もし γ が $\mathcal{G}_*^\omega(R_0^2, R^3, C)$ (または $\mathcal{G}_{**}^\omega(R_j^2, R^3, C)$) に属し、 γ の第一基本形式が f の第一基本形式と等長であるならば、 γ は f, f, f_*, f_* のいずれかと右同値である。

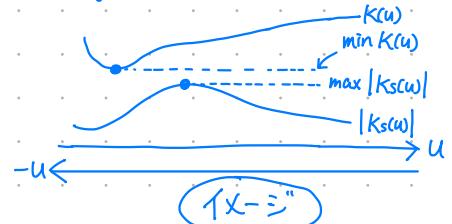
$$\begin{array}{ccc} J_0: \mathcal{G}_*^r(R_0^2, R^3, C) & \longrightarrow & K_{a,*}^r(R_0^2) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ f & \longmapsto & ds_f^2 \end{array}$$

Proof

任意に $f \in \mathcal{G}_{**}^\omega(R_j^2, R^3, C)$ を固定し、その第一基本形式を ds_f^2 と記す。

f が許容的 (admissible) であるので、特異曲率 $K_s(u)$ は 式(0.9) を満たし、したがって 式(0.7) も満たす。
式(0.9)が成り立つこと

$$\max_{u \in J} |K_s(u)| < \min_{u \in J} K(u) \quad |K_s(u)| < K(u)$$



定理 3.8 より、 ds_f^2 と同じ第一基本形式を持つ 2 つのカスプ辺

$$g_+, g_- \quad (ds_f^2 = ds_{g_+}^2 = ds_{g_-}^2)$$

が存在し、「 $g_+ = f$ 」かつ「写像 $u \mapsto g_-(u, 0)$ は $u \mapsto f(u, 0)$ と同じ向きを与える」を満たすとする。
便宜的

f が許容的であるため、特異曲率 K_s は ds_f^2 のみで決定される。ゆえに g_\pm も $\mathcal{G}_{**}^\omega(R_j^2, R^3, C)$ に属する。

$$\hookrightarrow 0 < |K_s(u)| < K(u)$$

$$\hookrightarrow K_s(u) = \frac{-E_{vv}(u, 0)}{2}$$

(Lemma 3.7)

f と同様に

（仮定に
admissible (は入っていない。)

定理 I の証明より、

$\hat{f} := g_-$

f の 等長双対 (isometric dual) を 与える。

Proof of Theorem I. Let ds_f^2 be the first fundamental form of f . Then ds_f^2 is a Kossowski metric of type I, by Proposition 3.1. Since f belongs to $\mathcal{G}_*^\omega(\mathbb{R}_J^2, \mathbb{R}^3, C)$ (cf. (0.5)), the singular curvature κ_s of ds_f^2 is less than κ on J . By Theorem 3.8, there exist two generalized cuspidal edges $g_+, g_- \in \mathcal{G}_*^\omega(\mathbb{R}_J^2, \mathbb{R}^3, C)$ whose first fundamental forms coincide with ds_f^2 . Since ds_f^2 is the first fundamental form of f , the last assertion of Theorem 3.8 yields that either $f = g_+$ or $f = g_-$ holds. Without loss of generality, we may set $f = g_+$, then $\hat{f} := g_-$ is the desired isometric dual of f . The remaining assertions for $f \in \mathcal{G}_*^\omega(\mathbb{R}_o^2, \mathbb{R}^3, C)$ follow from Lemma 0.1. \square

一方で、パラメータを $u \mapsto -u$ と取り替えて曲線 C の向きを反転させることを考える。
 f が許容的であることが

$$0 < |K_s(u)| < \min_{u \in J} K(u) \leq K(-u)$$

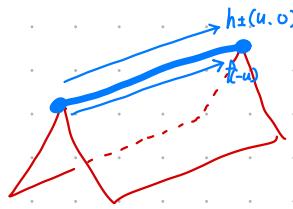
が成り立つ。再び定理 3.8 を適用すると、 f と第一基本形式が等しい相異なる 2 つの一般化カスプ辺
($\hookrightarrow ds_f^2$ の $u \mapsto -u$ 版)

$$h_+, h_- \in \mathcal{G}_{**}^\omega(\mathbb{R}_J^2, \mathbb{R}^3, C)$$

が存在し、写像 $u \mapsto h_\pm(u, 0)$ は $u \mapsto f(-u, 0)$ と同じ向きを持つ。

式(3.11)より、カスプ角 $\theta_*(u)$ (それぞれ h_+ では $\theta_*(u)$ 、 h_- では $-\theta_*(u)$)、かつ $\theta_*(u) \theta(u) > 0$ は。

$$\begin{cases} h_0 \\ X(u) := \cos \theta(u) n(u) + \sin \theta(u) b(u) \\ \cos \theta(u) := \frac{K_s(u)}{K(u)} \end{cases}$$



正負が一致

曲線 C の パラメータだけ、
 $u \mapsto -u$ にしている。

符号

$$\cos \theta_*(u) = \frac{K_s(u)}{K(-u)} \quad \begin{array}{l} \text{第一基本形式のみで決まるため、パラメータの向きを変えても同じ値} \\ \text{等長的だが、} \end{array}$$

曲線の向きを反転した曲率 ($u \mapsto -u$ で向き反転)

を満たす。 h_\pm の特異曲線の向きは f と逆であるため、二つの写像 h_\pm は f の non faithful isomer である。ここで、

$$f_* := h_+ \text{ (逆) } \quad \hat{f}_* := h_- \text{ (逆対)}$$

とおく。Remark 4.5 によれば、写像

$$f_\#(u, v) := f(-u, v)$$

$\theta_\#(u)$

$\theta_\#(u)$

$\rightarrow \theta_*(u) \theta(u) > 0$

のカスプ角は $-\theta(-u)$ であり、 $\theta_\#(u)$ は $f_\#(u, v)$ のカスプ角と 符号が反転する
したがって、 f の像 $\neq f_*$ の像 であり、 f_* は f の異性体である。

* $f_\#$ の像 $\neq f_*$ の像 (角度がちがうので、像もちがう)

\uparrow
 $\theta_\#(u)$ と $\theta(u)$ の符号が一致

\uparrow
 $\theta_*(u)$ と $-\theta(-u)$ の符号は逆

一方、 f は $f_\#$ のパラメータを反転しただけなので、 $f_\#$ の像 = f の像 である。

\downarrow

(Remark 4.5)

f の像 $\neq f_*$ の像 である。(同じ像を持たない \Leftrightarrow 右同値ではない)

\downarrow

f と $f_*(=h_+)$ の第一基本形式が一致する と合わせると、 f_* は f の異性体である。

*:

f_* の構成から、性質 (1)(2)(3) は 自明であるので、(4)のみを示す。

$f \mapsto f^*$

※ (1) 同じ第一基本形式かつ non-faithful isomer である。

- $f^* (= h_+)$ は定理3.8で同じ第一基本形式を持つよう選ばれる。 $(ds_f^2 = ds_{h+}^2)$
- h_\pm のつくり方から、 f^* は f の non-faithful isomer である。

(2) $\underline{I_c^*} \circ \underline{I_c} = \underline{I_c} \circ \underline{I_c^*}$ (I_c は定理Iの first involution)

$$f \mapsto f^* \quad f \mapsto \cancel{f}$$

- I_c … カスプ角 θ だけを

$$\theta \mapsto -\theta$$

I_c^* … パラメータの u 軸を反転

I_c … カスプ角が $-\theta$ に反転

に取り替える。つまり、基本データ $(K(u), T(u), \theta(u), \hat{\mu}(u, t))$ を

$$(K(u), T(u), \theta(u), \hat{\mu}(u, t)) \mapsto (K(u), T(u), -\theta(u), \hat{\mu}(u, t))$$

に取り替える。

- I_c^* … パラメータ u を $u \mapsto -u$ で反転することで、基本データ $(K(u), T(u), \theta(u), \hat{\mu}(u, t))$ を $(K(u), T(u), \theta(u), \hat{\mu}(u, t)) \mapsto (K(-u), T(-u), -\theta(-u), -\hat{\mu}(-u, t))$ に取り替える。

Fukui^*
Fukui データ
(f^* のものは限らない)



• $I_c^* \circ I_c$ の場合

$$(K(u), T(u), \theta(u), \hat{\mu}(u, t)) \xrightarrow{I_c} (K(u), T(u), -\theta(u), \hat{\mu}(u, t))$$

$$\xrightarrow{I_c^*} (K(-u), T(-u), \theta(-u), -\hat{\mu}(-u, t))$$

• $I_c \circ I_c^*$ の場合

$$(K(u), T(u), \theta(u), \hat{\mu}(u, t)) \xrightarrow{I_c^*} (K(-u), T(-u), -\theta(-u), -\hat{\mu}(-u, t))$$

$$\xrightarrow{I_c} (K(-u), T(-u), \theta(-u), -\hat{\mu}(-u, t))$$

(3) 写像 f でも可換性が保たれる

I_c も I_c^* も、パラメータの符号反転のみ



原点付近の近傍でも定義できる

~~$I_c \circ f$~~
 ~~$f \sim f \circ I_c$~~
 ~~$f \sim f \circ I_c^* \circ I_c^* \circ f$~~

• 原点付近で像が不变なので

$$J_0 = J_0 \circ I_0^*$$

第一基本形式が ds_F^2 に等長な一般化カスプとして $\varphi^*(ds_K^2) = ds_F^2$

$$K \in \mathcal{G}_{**}^\omega(R_I^2, R^3, C) \quad (K \in \mathcal{G}_*^\omega(R_0^2, R^3, C) \text{ は Lemma 0.1 で得られた})$$

を取る。第一基本形式は座標の選択によらないので、 $J \times \{0\}$ 近傍上の微分同相写像 φ に対して、 $J_C(f \circ \varphi) = \cancel{J_C(f)} \circ \varphi$ が成り立つ。 $(\leftarrow \text{第一基本形式の一一致})$

よって、一般性を失わずに $ds_F^2 = ds_K^2$ として良い。※

$\leftarrow J_C$ の定義
がない

※ $\tilde{K} := K \circ \varphi$ とすると、 \tilde{K} は右同値なので同じ K と見なして構わない。

$$ds_{\tilde{K}}^2 = (\varphi^* ds_K^2) = ds_F^2 \text{ と書ける。}$$

\nearrow
 K と \tilde{K} は
右同値

(3.9) の初期値問題 (初期条件 : (3.10)) の解の一意性より、 K は

$$\{g_+, g_-, h_+, h_-\}$$

のいずれかと一致する。※

※ 初期値は

$$g(u, 0) = c(u) \quad s(u, 0) = c'(u) \quad \zeta(u, 0) = x(u).$$

ただし、 $x(u)$ は

$$x(u) = \cos \theta(u) n(u) \pm \sin \theta(u) b(u) \quad \text{または}$$

$$\cos \theta^*(u) n(u) \pm \sin \theta^*(u) b(u),$$

の 4通り。

$$\circ g_+ \cdots \cos \theta n + \sin \theta b \quad (\theta, +)$$

$$\circ g_- \cdots \cos(-\theta)n + \sin(-\theta)b = \cos \theta n - \sin \theta b \quad (\theta, -)$$

$$\circ h_+ \cdots \cos \theta^* n + \sin \theta^* b \quad (\theta^*, +)$$

$$\circ h_- \cdots \cos(-\theta^*)n + \sin(-\theta^*)b = \cos \theta^* n - \sin \theta^* b \quad (\theta^*, -)$$

• Cauchy-Kovalevski の定理より、初期値を決めれば解が一意に決まる

$\rightarrow K$ は g_+, g_-, h_+, h_- のいずれか。

Definition 4.6

前節(定理Ⅱの証明)で構成した

\underline{f}_* , $\underline{\dot{f}}_*$

を、それぞれ $f \in \mathcal{G}_{**}^{\omega}(R^2, R^3, C)$ の 逆像(inverse)、逆双対(inverse dual)と呼ぶ。

・次に、拡張された半カスプ的曲率関数 $\hat{\mu}$ を用いて、与えられた一般化カスプ辺の芽が

- カスプ辺
- カスプ状交差帽子
- $5/2$ -カスプ辺

のいずれに当たるかを判定する基準を示す。

$$(B_{\text{rw}}(u, 0) \neq 0 \iff \text{カスプ辺である})$$

Proposition 4.7

$f \in \mathcal{G}^r(R^2, R^3, C)$ を基本データ $(k, \tau, \theta, \hat{\mu})$ に対応する一般化カスプ辺とする。
この時、

- 次回まで
- (i) $\hat{\mu}(u, 0) \neq 0$ ならば、 f は u 軸上で カスプ辺を与える。
 - (ii) $\hat{\mu}(0, 0) = 0$ かつ $\hat{\mu}_u(0, 0) \neq 0$ ならば、 f は点 0 で カスプ状交差帽子を与える。
 - (iii) $\hat{\mu}(u, 0) = 0$ かつ $\hat{\mu}_{uu}(u, 0) \neq 0$ ならば、 f は u 軸上で $5/2$ -カスプ辺を与える。

である。(i)(ii)は[3. Proposition 1.6]で既に証明されている。

Proof(概略)

f を正規形で書けると仮定する。

(Def 4.1)

$$f(u, v) := C(u) + (A(u, v), B(u, v)) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln(u) \\ b(u) \end{pmatrix}$$

◦ u が曲線 C の弧長パラメータ

◦ $v \mapsto (A(u, v), B(u, v)) \in \mathbb{R}^2$ が $v=0$ で一般化カスプとなり、

さらに v が正規化された半弧長パラメータを与える。

Proposition A.2

V を $\underline{W} = 0$ における一般化カスプ $\sigma(w)$ の正規化半弧長パラメータとする。この時、

- | |
|--|
| (1) $W = 0$ は σ の <u>カスプ</u> である
$\iff \mu_0 \neq 0$ である |
| (2) $W = 0$ は σ の <u>$5/2$-カスプ</u> である
$\iff \mu_0 = 0$ かつ $\mu_2 \neq 0$ である |

(i) は Appendix の proposition A.2 の (1) から従う。※

(ii) は [2] に与えられたカスプ状交差帽子判定と [3. Proposition 4.4] の (2) を用いればより簡単に示せる。

(iii) は Appendix A.2 の (2) からの結果である。※

③

※ $\hat{\mu}(u, v)$ は Lemma A.1 より $\hat{\mu}(u, v) = M_0 + M_1 v + M_2 v^2 + O(v^3)$.

$$\therefore \hat{\mu}(u, 0) = M_0(u)$$

また、2階微分 $\hat{\mu}_{vv}(u, v)$ は $\hat{\mu}_{vv}(u, v) = 2M_2 + O(v^2)$

$$\therefore \frac{1}{2} \hat{\mu}_{vv}(u, 0) = M_2(u)$$

$M_0 \neq 0 \iff \hat{\mu}(u, 0) \neq 0$, $\hat{\mu}_{vv}(u, 0) \neq 0 \iff M_2 \neq 0$ と対応している。
 $(=)$ $(=)$



[3. Proposition 1.6]

Proposition 1.6. Let $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ be a map as in the first paragraph in this section. We have that

- the singularity of f is cuspidal edge if $b_3(0) \neq 0$, and
- the singularity of f is cuspidal cross-cap if $b_3(0) = 0, b'_3(0) \neq 0$,

where b_3 is the invariant defined in (1.5)

Proof. See Appendix B.1.

$$b_k = \det(t, f_2, f_k)$$

□

Appendix B. Criteria of singularity types

B.1. Criteria of singularity types of singular surfaces. Assume that $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0), (u, v) \mapsto f(u, v)$, has rank one singularity at 0 and a unit normal vector is extended to ν on the singular locus. Set $\lambda = \det(f_u, f_v, \nu)$, $\psi = \det(t, \eta\nu, \nu)$, where t is a unit tangent vector, and η is a vector field whose restriction is null to the singular locus. We have that $(f, \nu) : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, (0, \nu(0)))$ is an embedding, if and only if $\psi(0) \neq 0$.

Lemma B.1. The singularity of f is

- cuspidal edge, if $\psi(0) \neq 0, \eta\lambda(0) \neq 0$;
- swallowtail, if $\psi(0) \neq 0, \eta\lambda(0) = 0, \eta^2\lambda(0) \neq 0$;
- cuspidal cross-cap, if $\psi(0) = 0, \eta\lambda(0) \neq 0, \psi'(0) \neq 0$.

Proof. See [6, §1–2] and [2, §1].

□

Proof of Proposition 1.6. In the notation in §1, $\eta = \partial_t$. Setting $f_t = t\nu$, $\lambda = |f_s f_t \nu| = |f_s t\nu \nu| = t \times (\text{unit})$,

$$\psi(s, 0) = \det(t, \eta\nu, \nu)(s, 0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -b_3/2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{b_3}{2}.$$

So the criteria above shows the proposition.

□

f の第一基本形式と第二基本形式を fundamental data 基本データから計算するには、
特異曲線のフレネ型公式が便利である。

Lemma 4.8 (Izumiya - Saji - Takeuchi [7] and Fukui [3])

式(4.3)より、次が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} V_2(u) \\ V_3(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta(u) & -\sin\theta(u) \\ \sin\theta(u) & \cos\theta(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n(u) \\ b(u) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e' \\ V_2' \\ V_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & K \cos\theta & K \sin\theta \\ -K \cos\theta & 0 & T - \theta' \\ -K \sin\theta & -(T - \theta') & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \quad \cdots (4.7)$$

この式は次のように書き直せる (4.3) 参照)。 式(4.2)? $K_s(u) = K(u) \cos\theta(u)$
 $K_t(u) = K(u) \sin\theta(u)$

$$\begin{pmatrix} e' \\ V_2' \\ V_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & K_s & K_t \\ -K_s & 0 & K_t \\ -K_t & -K_t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

これは Izumiya - Saji - Takeuchi [7, Proposition 3.1] で与えられているもので、また
 K_t は [11] で定義された カスプ方向捩率 (cusp directional torsion) であり。

$$K_t := T - \theta'$$

で表される ([3, Page 7] 参照)。

Proof 示したいこと: $\begin{pmatrix} e' \\ V_2' \\ V_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & K \cos\theta & K \sin\theta \\ -K \cos\theta & 0 & T - \theta' \\ -K \sin\theta & -(T - \theta') & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$

Fukui [3, Lemma 1.3] を参照する。

$$\begin{pmatrix} V_2(u) \\ V_3(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta(u) & -\sin\theta(u) \\ \sin\theta(u) & \cos\theta(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n(u) \\ b(u) \end{pmatrix} \text{ であるので、両辺を微分すると}$$

$$\begin{pmatrix} V_2' \\ V_3' \end{pmatrix} = \theta' \begin{pmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n' \\ b' \end{pmatrix}$$

$\downarrow - \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$

フレネセレの
公式より $\{e, n, b\}$; ONB

$$\begin{pmatrix} e' \\ n' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ n \\ b \end{pmatrix}$$

$$= -\theta' \underbrace{\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}}_{\text{Red}} \begin{pmatrix} n \\ b \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{Blue}} \begin{pmatrix} -K & 0 & \tau \\ 0 & -T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ n \\ b \end{pmatrix}$$

\downarrow
 $V_2 = n \cos\theta - b \sin\theta$
 $V_3 = n \sin\theta + b \cos\theta$
 $\Leftrightarrow b = -\sin\theta V_2 + \cos\theta V_3$
 $n = \cos\theta V_2 + \sin\theta V_3$ を代入する。

$$= -\theta' \underbrace{\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}}_{\text{Purple}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{Purple}} \begin{pmatrix} V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

$$+ \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{Orange}} \begin{pmatrix} -K & 0 & \tau \\ 0 & -T & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{Orange}} \begin{pmatrix} e \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

$$= -\theta' \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Purple}} \begin{pmatrix} V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -K \cos\theta & 0 & \tau \\ -K \sin\theta & -T & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Orange}} \begin{pmatrix} e \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

$$= -K \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} e + (\tau - \theta') \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}.$$

e でまとめる V_2, V_3 でまとめる。

よって、 $\begin{cases} V_2' = -K \cos\theta e + (\tau - \theta') V_3 \\ V_3' = -K \sin\theta e - (\tau - \theta') V_2 \end{cases}$ である。 --- *

次に、 $e' = s e + t V_2 + u V_3$ を満たす $s, t, u \in \mathbb{R}$ を求める。

$$\begin{aligned} \langle e', e \rangle &= s \quad \langle e, e \rangle + \langle e, e' \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle e, e \rangle' = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle e', V_2 \rangle &= t \\ &\stackrel{?}{=} \langle e, V_2 \rangle' - \langle e, V_2' \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 0 - \langle e, -K \cos\theta e + (\tau - \theta') V_3 \rangle \\ &= K \cos\theta. \end{aligned}$$

$$\langle \mathbf{e}', \mathbf{v}_3 \rangle = u$$

$$\hookrightarrow = \langle \mathbf{e}, \mathbf{v}_3 \rangle - \langle \mathbf{e}, \mathbf{v}'_3 \rangle$$

$$= 0 - \langle \mathbf{e}, -k \sin \theta \mathbf{e} - (\tau - \theta') \mathbf{v}_2 \rangle$$

$$= k \sin \theta.$$

よって、 $\mathbf{e}' = K \cos \theta \mathbf{v}_2 + K \sin \theta \mathbf{v}_3$ である。… $\star\star$

\star 、 $\star\star$ を行列でまとめれば、

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}' \\ \mathbf{v}'_2 \\ \mathbf{v}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & K \cos \theta & K \sin \theta \\ -K \cos \theta & 0 & \tau - \theta' \\ -K \sin \theta & -(\tau - \theta') & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \end{pmatrix}$$

である \blacksquare

$$\mathbf{v}_2 = n \cos \theta - b \sin \theta \rightarrow \sin \theta \mathbf{v}_2 = n \sin \theta \cos \theta - b \sin^2 \theta$$

$$\mathbf{v}_3 = n \sin \theta + b \cos \theta \quad \underline{\rightarrow \cos \theta \mathbf{v}_3 = n \sin \theta \cos \theta + b \cos^2 \theta}$$

$$\sin \theta \mathbf{v}_2 - \cos \theta \mathbf{v}_3 = -b$$

$$\Leftrightarrow b = -\sin \theta \mathbf{v}_2 + \cos \theta \mathbf{v}_3.$$

$$n = \cos \theta \mathbf{v}_2 + \sin \theta \mathbf{v}_3$$

Lemma 4.8 を用いると、計算で次の Proposition 4.9 を示せる。

Proposition 4.9

正規形(4.5)に対し、その第一基本形式 $ds_F^2 = E du^2 + 2F du dr + G dr^2$ の係数は、

$$f(u, t) := C(u) + (A(u, t), B(u, t)) \begin{pmatrix} \cos\theta(u) & -\sin\theta(u) \\ \sin\theta(u) & \cos\theta(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h(u) \\ b(u) \end{pmatrix}$$

$$E = \{1 - (A \cos\theta + B \sin\theta)K\}^2 + \{Au + (\theta' - \tau)B\}^2 + \{Bu - (\theta' - \tau)A\}^2.$$

$$F = A_t \{Au + (\theta' - \tau)B\} + B_t \{Bu - (\theta' - \tau)A\},$$

$$G = t^2$$

で与えられる。K, T, θ は u の関数、A, B は (u, t) の関数である。

Proof

$$(v = \frac{f_u \times f_t}{\|f_u \times f_t\|})$$

$E = f_u \cdot f_u$, $F = f_u \cdot f_t$, $G = f_t \cdot f_t$ より、 f_u と f_t をそれぞれ計算する。

$f = C(u) + A(u, t)V_2(u) + B(u, t)V_3(u)$ であるので、

$$f_u = C'(u) + \underline{AuV_2} + \underline{A(V_2)_u} + \underline{BuV_3} + \underline{B(V_3)_u} \quad \text{式(4.7) より}$$

$$= \underline{\epsilon}(u) + \underline{AuV_2} + \underline{A(-K\cos\theta \epsilon + (\tau - \theta')V_3)}$$

$$+ \underline{BuV_3} + \underline{B(-K\sin\theta \epsilon - (\tau - \theta')V_2)}$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon' \\ V_2' \\ V_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & K\cos\theta & K\sin\theta \\ -K\cos\theta & 0 & \tau - \theta' \\ -K\sin\theta & -(\tau - \theta') & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \quad \text{式(4.7)}$$

$$= \{1 - K(A \cos\theta + B \sin\theta)\}\epsilon(u) + \{Au + (\theta' - \tau)B\}V_2(u) + \{Bu - (\theta' - \tau)A\}V_3(u)$$

$$f_t = V_2 A_t(u, t) + V_3 B_t(u, t).$$

以上より、E, F, G はそれぞれ

$$E = f_u \cdot f_u \quad \rightarrow \epsilon, V_2, V_3 \text{ は単位ベクトルより}, \|\epsilon\|^2 = \|V_2\|^2 = \|V_3\|^2 = 1.$$

$$= \{1 - K(A \cos\theta + B \sin\theta)\}^2 + \{Au + (\theta' - \tau)B\}^2 + \{Bu - (\theta' - \tau)A\}^2$$

$$F = f_u \cdot f_t$$

$$= A_t \{Au + (\theta' - \tau)B\} + B_t \{Bu - (\theta' - \tau)A\}$$

$$G = f_t \cdot f_t \quad \text{式(4.6) より}$$

$$= A_t^2 + B_t^2 = (t \cos\lambda(u, t))^2 + (t \sin\lambda(u, t))^2 = t^2 \text{ である} \blacksquare$$

$$(4.6) \lambda(u, t) := \int_0^t \hat{\mu}(u, r) dr \quad A = \int_0^t V \cos \lambda(u, r) dr$$

• ここで、

$$\hat{\mu}(u, t) = M_0(u) + M_1(u) + M_2(u) t^2 + \underbrace{M_3(u, t)}_{\text{t}} t^3$$

とおくと、Lemma A.1 から次が従う。※

$$A = \frac{t^2}{2} - \frac{M_0(u)^2}{8} t^4 - \frac{M_0(u)M_1(u)}{10} t^5 + t^6 a_6(t, u) \quad \dots (4.10)$$

$$B = \frac{M_0(u)}{3} t^3 + \frac{M_1(u)}{8} t^4 + \frac{2(-M_0(u)^3 + 2M_2(u))}{30} t^5 + t^6 b_6(t, u) \quad \dots (4.11)$$

ここで、 $a_6(t, u)$ と $b_6(t, u)$ は C^r 級関数である。

※ (4.6) より、A, B はそれぞれ

$$A(u, t) = \int_0^t V \cos \lambda(u, r) dr$$

$$B(u, t) = \int_0^t V \sin \lambda(u, r) dr$$

である。一方、Lemma A.1 の $\sigma(v)$ は

$$\sigma(v) = \int_0^v u(\cos \theta(u), \sin \theta(u)) du$$

"2" は いらない

Lemma A.1

V を $W=0$ における一般化カスプ $\sigma(W)$ の正規化半弧長パラメータとする。この時、向きを保つ R^2 の等長変換 T が存在して、

$$T \circ \sigma(r) = \left(\frac{r^2}{2} - \frac{M_0^2 r^4}{8} - \frac{M_0 M_1 r^5}{10}, \frac{M_0 r^3}{3} + \frac{M_1 r^4}{8} + \frac{(-M_0^3 + 2M_2)r^5}{30} \right) + O(r^6)$$

となる。ただし、

$$\hat{\mu}(r) = \sum_{n=0}^2 M_n r^n + O(r^3) \quad (= M_0 + M_1 r + M_2 r^2 + O(r^3))$$

である。 $O(r^6)$ は r^6 より高次項を表す。

$$\sigma(t) = \int_0^t V(\cos \theta(u), \sin \theta(u)) du$$

であるため、 σ のパラメータを V から t へ置換し、積分変数を u から V へ置換すれば、

$$(A(u, t), B(u, t)) = \sigma(t)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{t^2}{2} - \frac{M_0^2 t^4}{8} - \frac{M_0 M_1 t^5}{10} + t^6 a_6(t, u), \right. \\ &\quad \left. \frac{M_0 t^3}{3} + \frac{M_1 t^4}{8} + \frac{(-M_0^3 + 2M_2)t^5}{30} + t^6 b_6(t, u) \right) \\ &\quad \text{高次項 } O(t^6) \end{aligned}$$

と書ける。

Corollary 4.10

第一基本形式 ds^2_F の ガウス曲率 K は.

$$K(u, t) = \frac{K_0(u)}{t} + K_1(u) + K_2(u)t + K_3(u, t)t^2$$

を満たす. 各係数は

$$K_0(u) := M_0(u) K_v(u)$$

$$K_1(u) := -K_s(u) M_0^2(u) - K_t^2(u) + K_v(u) M_1(u)$$

$$K_2(u) := -\frac{K_v(u) M_0^3(u)}{2} + \frac{K_s(u) K_v(u) M_0(u)}{2} - \frac{3 K_s(u) M_0(u) M_1(u)}{2} + K_v(u) M_2(u)$$

$$-2 M_0'(u) K_t(u) + \frac{M_0(u)}{2} K_t'(u)$$

であり. かつ $K_3(u, t)$ は C^r 級関数である. K_s, K_v, K_t は 式(4.4) および(4.8) である.

また, $M_0 = \frac{K_c}{2}$ ($K_c(u) := \frac{u(u, 0)}{2}$) である.

$$\rightarrow K_t = T - \theta'$$

$$\rightarrow K_s(u) = K(u) \cos \theta(u)$$

$$K_v(u) = K(u) \sin \theta(u)$$

- Fukui [3, Theorem 1.8] で、第一項 K_0 と 第二項 K_1 はすでに求められている。

したがって、上の Corollary で重要なのは K_2 である。

Proof

ds^2_F の 断面曲率を直接計算して導くか、[3] のように \mathbf{f} の 第二基本形式を求めて得られる。
(いずれあっても、式(4.10)(4.11) が重複)

断面曲率は ガウスの驚異の定理を用いると、

$$\begin{aligned} K &= \frac{E(E_t G_t - 2F_u G_t + G_u^2)}{4(EG - F^2)^2} \\ &+ \frac{F(E_u G_t - E_t G_u - 2E_t F_t - 2F_u G_u + 4F_u F_t)}{4(EG - F^2)^2} \\ &+ \frac{G(E_u G_u - 2E_u F_t + E_v^2)}{4(EG - F^2)^2} \\ &- \frac{E_{tt} - 2F_{ut} + G_{uu}}{2(EG - F^2)^2} \end{aligned}$$

と表せるので、 E, F, G を計算する。

$$f_u \text{ と } f_t \text{ はそれぞれ, } (f(u,t) = C(u) + (A(u,t), B(u,t)) \begin{pmatrix} \cos\theta(u) & -\sin\theta(u) \\ \sin\theta(u) & \cos\theta(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n(u) \\ b(u) \end{pmatrix})$$

$$\begin{aligned} f_u &= C'(u) + \underline{A u V_2} + \underline{A(V_2)_u} + \underline{B u V_3} + \underline{B(V_3)_u} \\ &= \underline{\epsilon(u)} + A u V_2 + A(-K_s(u)\underline{\epsilon(u)} + K_t(u)V_3(u)) \\ &\quad + B u V_3 + B(-K_r(u)\underline{\epsilon(u)} - K_t(u)V_2(u)) \\ &= (1 - K_s A - K_r B)\underline{\epsilon} + (A u - K_t B)V_2 + (B u + K_t A)V_3 \end{aligned}$$

$$f_t = V_2 A_t(u,t) + V_3 B_t(u,t).$$

である. E, F, G はそれぞれ.

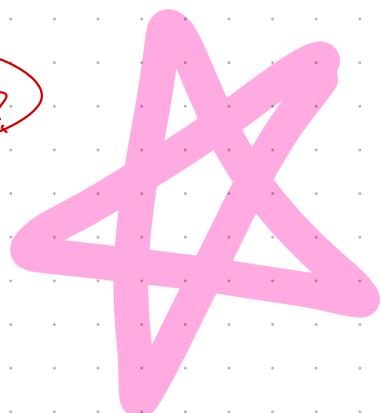
$$E = (1 - K_s(u)A(u,t) - K_r(u)B(u,t))^2 + (A u(u,t) - K_t(u)B(u,t))^2 + (B u(u,t) + K_t(u)A(u,t))^2$$

$$F = A_t(u,t)(A u(u,t) - K_t(u)B(u,t)) + B_t(u,t)(B u(u,t) + K_t(u)A(u,t))$$

$$G = A_t^2(u,t) + B_t^2(u,t) = t^2$$

となるので、ガウスの驚異の定理に代入する。

計算量膨大?



4.11 ~ 4.15 は
使わない

5 節