前回の復習

$C^\infty(M)$-多重線形写像

$$A : \mathfrak{X}^*(M)^s \times \mathfrak{X}(M)^t \longrightarrow C^\infty(M)$$

をM上の (s,t)-型テンソル場という

$$A : \mathfrak{X}(M)^t \longrightarrow \mathfrak{X}(M)^s$$

とみなされる

（$(s,t)=(1,3)$ の場合を考えていく．）

前回示した命題

$A : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ を $(1,3)$-テンソル場とする．
各点 $p \in M$ に対して（$\mathbb{R}$-）多重線形写像

$$A_p : T_pM\times T_pM\times T_pM \longrightarrow T_pM$$

が誘導される

$(U; x^1, \dots, x^m)$

$R_{\partial_k\partial_l}(\partial_j)$

$= \bigcirc\partial_1 + \cdots + \bigcirc\partial_m$

と表せる．

$A_p : T_pM\times T_pM\times T_pM \longrightarrow T_pM$ の定義

各 $v, w, x \in T_pM$ に対し ベクトル場 $V, W, X \in \mathfrak{X}(M)$ を

$$\boxed{V_p = v,\ W_p = w,\ X_p = x} \circledast$$

をみたすものとするとき，

$$A_p(v, w, x) := A(V, W, X)(p)$$

と定める　　$T_p(M)$

$A_p(v, w, x)$ は $\circledast$ をみたすベクトル場 V, W, X の選び方に依らない

すなわち ベクトル場 $\overline{V}, \overline{W}, \overline{X} \in \mathfrak{X}(M)$ が

$$\boxed{\overline{V}_p = v,\ \overline{W}_p = w,\ \overline{X}_p = x}$$

をみたすとき，

$$A(\overline{V}, \overline{W}, \overline{X})(p) = A(V, W, X)(p)$$

が成り立つ

$\nabla_{\bigcirc}\square$　微分されるベクトル場　微分するベクトル場

リーマン曲率テンソル

Def　(M, g)：リーマン多様体．
　∇：レビチビタ接続（2階微分）
このとき，$R : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ を

$$R_{XY}Z = \nabla_{[X,Y]}Z - (\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z) \quad ({}^\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M))$$

と定め，(M,g) のリーマン曲率テンソルと呼ぶ

$= \nabla_{[X,Y]}Z - [\nabla_X, \nabla_Y]Z$

局所座標表示　$(U; x^1, \dots, x^m)$

Prop　$R_{\partial_k\partial_l}(\partial_j) = R^1_{jkl}\partial_1 + R^2_{jkl}\partial_2 + \cdots + R^m_{jkl}\partial_m$　$\displaystyle\sum_{i=1}^m R^i_{jkl}\partial_i$
と R^i_{jkl} を定めるとき

（例）次元（計量テンソルの行数）

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial}{\partial x^l}\Gamma^i_{kj} - \frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^i_{lj} + \sum_{\alpha=1}^m\left(\Gamma^i_{l\alpha}\Gamma^\alpha_{kj} - \Gamma^i_{k\alpha}\Gamma^\alpha_{lj}\right)$$

（proof）$[\partial_k, \partial_l] = 0$ なので　l．

$R_{XY}Z := \nabla_{[X,Y]}Z - (\nabla\nabla Z - \nabla\nabla Z)$

$$R_{\partial_k\partial_l}(\partial_j) = \nabla_{\partial_l}\underbrace{\nabla_{\partial_k}\partial_j}_{=\sum_{i=1}^m\Gamma^i_{kj}\partial_i} - \nabla_{\partial_k}\underbrace{\nabla_{\partial_l}\partial_j}_{=\sum_{i=1}^m\Gamma^i_{lj}\partial_i}$$

$X\ Y\ Z$

レビチビタ（D3）を使う．

$$= \sum_{i=1}^m\left\{\nabla_{\partial_l}(\Gamma^i_{kj}\partial_i) - \nabla_{\partial_k}(\Gamma^i_{lj}\partial_i)\right\}$$

$$(\partial_l\Gamma^i_{kj})\partial_i + \Gamma^i_{kj}\underbrace{(\nabla_{\partial_l}\partial_i)}_{=\sum_{\alpha=1}^m\Gamma^\alpha_{li}\partial_\alpha} \qquad (\partial_k\Gamma^i_{lj})\partial_i + \Gamma^i_{lj}\underbrace{(\nabla_{\partial_k}\partial_i)}_{=\sum_{\alpha=1}^m\Gamma^\alpha_{ki}\partial_\alpha}$$

$$= \sum_{i=1}^m\underbrace{\left\{\partial_l\Gamma^i_{kj} - \partial_k\Gamma^i_{lj} + \sum_{\alpha=1}^m\left(\Gamma^i_{l\alpha}\Gamma^\alpha_{kj} - \Gamma^i_{k\alpha}\Gamma^\alpha_{lj}\right)\right\}}_{=R^i_{jkl}}\partial_i \quad ▨$$

Example　$\mathbb{E}^m = (\mathbb{R}^m, g_E)$，$g_E = (dx^1)^2 + \cdots + (dx^m)^2$
$\Gamma^k_{ij} = 0$　$({}^\forall i,j,k = 1,\dots,m)$ だった

$$g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^k}g_{ij} = 0$$

Propより ${}^\forall i,j,k,l$ に対して $R^i_{jkl} = 0$

$\therefore$ $\mathbb{E}^m$ のリーマン曲率テンソル R は $\boxed{R=0}$　（flat 平坦という）

$$\Gamma = \frac{1}{2}\sum g^{ka}\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial x}\right) = 0.$$

☆ 大事な性質　曲率テンソルはテンソル場

Prop $X, Y, Z, \bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z} \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$ に対して

もし $\begin{cases} X_p = \bar{X}_p & (\in T_pM) \\ Y_p = \bar{Y}_p & (\;〃\;) \\ Z_p = \bar{Z}_p & (\;〃\;) \end{cases} \Longrightarrow \boxed{(R_{XY}Z)_p = (R_{\bar{X}\bar{Y}}\bar{Z})_p}$

⇝ 各 $x, y, z \in T_pM$ に対し、

$\boxed{R_{xy}z := (R_{XY}Z)_p}$ は well-defined

ただし、$X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ は $X_p = x$, $Y_p = y$, $Z_p = z$ をみたすなめらかなベクトル場

つまり、$\bar{X}_p = x$, $\bar{Y}_p = y$, $\bar{Z}_p = z$ をみたす $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z} \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$R_{xy}z := (R_{\bar{X}\bar{Y}}\bar{Z})_p$ としても同じベクトル

これを示すには、R:テンソル場を示せば十分:

→ 関数倍が示せればよい

Lem $\forall f \in C^\infty(M)$ に対して

$$\begin{cases} R_{fX,Y}Z = fR_{XY}Z & \text{①} \\ R_{X,fY}Z = fR_{XY}Z & \text{②} \\ R_{XY}(fZ) = fR_{XY}Z & \text{③} \end{cases}$$

▨ $[Y,X] = -[X,Y]$ より

$\boxed{R_{YX}Z = -R_{XY}Z}$ (後で使う)

$R_{YX}Z$

まず $[X, fY] = (Xf)Y + f[X,Y]$ が成立

∵ $\forall h \in C^\infty(M)$ に対して

$$\begin{aligned}
[X, fY](h) &= X(f(Yh)) - fY(Xh) \\
&= (Xf)(Yh) + f(XYh) - f(YXh) \\
&= ((Xf)Y + f[X,Y])(h) \quad ▨
\end{aligned}$$

また $[fX, Y] = -(Yf)X + f[X,Y]$ も成立

∵
$$\begin{aligned}
[fX, Y] &= -[Y, fX] \\
&= -((Yf)X + f[Y,X]) \\
&= -(Yf)X + f[X,Y] \quad ▨
\end{aligned}$$

fX

① $R_{fX,Y}Z = \underbrace{\nabla_{[fX,Y]}Z}_{=\nabla_{-(Yf)X+f[X,Y]}Z} - \nabla_{fX}\nabla_Y Z + \underbrace{\nabla_Y\nabla_{fX}Z}_{=\nabla_Y(f\nabla_X Z)}$ (D1)

$= \cancel{-(Yf)\nabla_X Z} + f\nabla_{[X,Y]}Z - f\nabla_X\nabla_Y Z + \cancel{(Yf)\nabla_X Z} + f\nabla_Y\nabla_X Z$

$= fR_{XY}Z$ //

fY.

② $R_{YX}Z = -R_{XY}Z$ より

$R_{X,fY}Z = -R_{fY,X}Z = -fR_{YX}Z = fR_{XY}Z$ //

fZ

③
$$\left.\begin{aligned}
R_{XY}(fZ) &= \nabla_{[X,Y]}(fZ) - \nabla_X\nabla_Y(fZ) + \nabla_Y\nabla_X(fZ) \\
&= [X,Y](f)Z + f\nabla_{[X,Y]}Z \\
&\quad - \boxed{\nabla_X((Yf)Z + f\nabla_Y Z)} + \boxed{\nabla_X((Xf)Z + f\nabla_X Z)}
\end{aligned}\right) = \circledast$$

$\boxed{}$ $= X(Yf)Z + (Yf)\nabla_X Z + (Xf)\nabla_Y Z + f\nabla_X\nabla_Y Z$

$\boxed{}$ $= Y(Xf)Z + (Xf)\nabla_Y Z + (Yf)\nabla_X Z + f\nabla_Y\nabla_X Z$

$-\boxed{} + \boxed{} = -\underbrace{\boxed{\{X(Yf) - Y(Xf)\}Z}}_{=[X,Y](f)Z} + f(-\nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_Y\nabla_X Z)$

$\therefore \circledast = f(\nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_Y\nabla_X Z)$

$= fR_{XY}Z$ //

ベクトル

(M)の元)

各 $x, y, z \in T_pM$ に対し、

$\boxed{R_{xy}z = (R_{XY}Z)_p}$

はwell-defined

ただし. $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ は
$X_p = x,\ Y_p = y,\ Z_p = z$
をみたすなめらかなベクトル場

Def 各 $x, y \in T_pM$:固定する毎に定まる線形写像

$$
\begin{aligned}
R_{xy} : T_pM &\longrightarrow T_pM \\
z &\longmapsto R_{xy}z
\end{aligned}
$$

を曲率作用素という.

$\cancel{R(x,y)}$

$R_{xy}(Z) = R_{xy}Z$

リーマン曲率テンソル.

Prop (曲率作用素の性質)

(1) $R_{xy} = -R_{yx}$ $\quad(\forall x, y \in T_pM)$

(2) $\langle R_{xy}v, w\rangle = -\langle R_{xy}w, v\rangle$ $\quad(\forall x, y, v, w \in T_pM)$ v, wを入れ替え.

(3) $R_{xy}z + R_{yz}x + R_{zx}y = 0$ $\quad(\forall x, y, z \in T_pM)$ 第1ビアンキ恒等式

(4) $\langle R_{xy}v, w\rangle = \langle R_{vw}x, y\rangle$ $\quad(\forall x, y, v, w \in T_pM)$ ペアでの対称性.

proof $R_{xy}z$ は $X_p = x,\ Y_p = y,\ Z_p = z$ ☆

となるベクトル場 $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ を用いて

$R_{xy}z := (R_{XY}Z)_p$

と定めた.

Pの座標近傍 $(U; x^1, \cdots, x^n)$ において

$$
\begin{cases}
x = a^1\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p + \cdots + a^n\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p & (a^1, \cdots, a^n \in \mathbb{R}) \\
y = b^1\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p + \cdots + b^n\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p & (b^1, \cdots, b^n \in \mathbb{R}) \\
z = c^1\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p + \cdots + c^n\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p & (c^1, \cdots, c^n \in \mathbb{R})
\end{cases}
$$

pを外しただけ.

と表わされていたとすると

$$
\begin{cases}
X = a^1\frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + a^n\frac{\partial}{\partial x^n} \\
Y = b^1\frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + b^n\frac{\partial}{\partial x^n} \\
Z = c^1\frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + c^n\frac{\partial}{\partial x^n}
\end{cases}
$$

と なめらかなベクトル場 X.Y.Z を定めると ☆ をみたす

とくに $[X, Y] = 0$ なので, 特に $R_{XY}Z = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z$ として良い

(1) は OK. $\quad(R_{YX}Z = -R_{XY}Z$ より)

(2) $\langle R_{xy}v, v\rangle = 0$ を示す.

$R_{XY}Z = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z$

補題

$$
\begin{aligned}
\langle R_{XY}V, V\rangle &= \langle \nabla_Y\nabla_X V, V\rangle - \langle \nabla_X\nabla_Y V, V\rangle \\
&\overset{(D5)}{=} Y\langle \nabla_X V, V\rangle - \cancel{\langle \nabla_X V, \nabla_Y V\rangle} - \left(X\langle \nabla_Y V, V\rangle - \cancel{\langle \nabla_Y V, \nabla_X V\rangle}\right) \\
&= Y\langle \nabla_X V, V\rangle - X\langle \nabla_Y V, V\rangle \\
&\overset{(D5)}{=} Y\left(\tfrac{1}{2}X\langle V, V\rangle\right) - X\left(\tfrac{1}{2}Y\langle V, V\rangle\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\{\underbrace{Y(X\langle V, V\rangle) - X(Y\langle V, V\rangle)}_{=[Y,X](\langle V,V\rangle)}\} = 0
\end{aligned}
$$

(D5)

$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ 0 &= \langle R_{xy}(v + w), v + w\rangle \\
&= \underbrace{\langle R_{xy}v, v\rangle}_{=0} + \langle R_{xy}v, w\rangle + \langle R_{xy}w, v\rangle + \underbrace{\langle R_{xy}w, w\rangle}_{=0}
\end{aligned}
$$

$\therefore\ \langle R_{xy}v, w\rangle + \langle R_{xy}w, v\rangle = 0$ □

(3) $\mathbb{R}$-線形写像 $F : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ に対して

$C^\infty(M)$-線形でないものも含む

$\mathfrak{S}F(X, Y, Z) := F(X, Y, Z) + F(Y, Z, X) + F(Z, X, Y)$

とおく

$\mathfrak{S}F(X, Y, Z) = \mathfrak{S}F(Y, Z, X) = \mathfrak{S}F(Z, X, Y)$ が成立

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{S}R_{XY}Z &= \mathfrak{S}\nabla_Y\nabla_X Z - \mathfrak{S}\nabla_X\nabla_Y Z \\
&= \mathfrak{S}\boxed{\nabla_X}\nabla_Z Y - \mathfrak{S}\boxed{\nabla_X}\nabla_Y Z \\
&= \mathfrak{S}\boxed{\nabla_X}(\nabla_Z Y - \nabla_Y Z) \\
&\overset{(D4)}{=} \mathfrak{S}\nabla_X[Z, Y] \\
&= 0 \quad //
\end{aligned}
$$

D5より ブラケット $= 0$ として良い.

V, X, Y に W を内積させる.

(4) (3)より $\cancel{\langle R_{YV}X, W\rangle} + \cancel{\langle R_{VX}Y, W\rangle} + \langle R_{XY}V, W\rangle = 0$

同様に $\langle R_{VX}W, Y\rangle + \cancel{\langle R_{XW}V, Y\rangle} + \langle R_{WV}X, Y\rangle = 0$

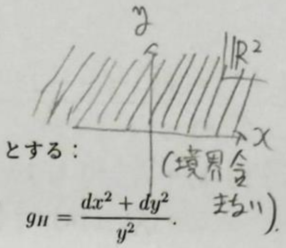
$\cancel{\langle R_{XW}Y, V\rangle} + \langle R_{WY}X, V\rangle + \langle R_{YX}W, V\rangle = 0$

$+)\ \langle R_{WY}V, X\rangle + \cancel{\langle R_{YV}W, X\rangle} + \langle R_{VW}Y, X\rangle = 0$

$2\langle R_{XY}V, W\rangle + 2\langle R_{WV}X, Y\rangle = 0$ □

$\therefore\ \langle R_{XY}V, W\rangle + \langle R_{WV}X, Y\rangle = 0.$

先進数理科学 幾何 課題 No. 10



$\boxed{問1}$ $\mathbb{H}^2$ を2次元双曲空間（双曲平面）$\mathbb{H}^2=(\mathbb{R}^2_+, g_H)$ とする：

$$\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ y>0\},\qquad g_H=\frac{dx^2+dy^2}{y^2}.$$

$(x,y)=(x^1,x^2)$ とし，リーマン曲率テンソル R の成分関数を $\{R^i_{jkl}\}_{i,j,k,l=1,2}$ とするとき，R^1_{221} を求めよ．以下の (1)-(4) から正しいものを一つ選べ．

$R^1_{221} = -\frac{1}{y^2}$ (1) $\frac{1}{y^2}$ (2) $-\frac{1}{y^2}$ (3) $-\frac{2}{y^2}$ (4) 0

$(m=2)$

$\boxed{問2}$ $\mathbb{H}^2$ を2次元双曲空間（双曲平面）$\mathbb{H}^2=(\mathbb{R}^2_+, g_H)$ とする：

$$\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ y>0\},\qquad g_H=\frac{dx^2+dy^2}{y^2}.$$

$(x,y)=(x^1,x^2)$ とし，リーマン曲率テンソル R の成分関数を $\{R^i_{jkl}\}_{i,j,k,l=1,2}$ とするとき，R^1_{222} を求めよ．以下の (1)-(4) から正しいものを一つ選べ．

(1) $\frac{1}{y^2}$ (2) $-\frac{1}{y^2}$ (3) $-\frac{2}{y^2}$ (4) 0

$\boxed{問3}$ (M,g) をリーマン多様体，∇ をレビチビタ接続とする．$(U;x^1,x^2,\dots,x^m)$ を任意に選んだ座標近傍とする．以下の (1), (2) から正しいものを一つ選べ．

(1) 任意の $i,j=1,\dots,m$ に対して $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i}$ が成り立つ．

(2) 任意の $i,j=1,\dots,m$ に対して $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i}$ が成り立つとは限らない．

$\boxed{問4}$ (M,g) を平坦でないリーマン多様体，R をリーマン曲率テンソルとする．$(U;x^1,x^2,\dots,x^m)$ を任意に選んだ座標近傍とする．以下の (1), (2) から正しいものを一つ選べ．

(1) 任意の $i,j,k=1,\dots,m$ に対して $R_{\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^k}=R_{\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^k}$ が成り立つ．

(2) 任意の $i,j,k=1,\dots,m$ に対して $R_{\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^k}=R_{\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^k}$ が成り立つとは限らない．

曲率作用素：$R_{XY} = -R_{YX}$.

$g_H = \frac{1}{y^2}\begin{bmatrix}1&\\&1\end{bmatrix}$

$g_H^{-1} = y^2\begin{bmatrix}1&\\&1\end{bmatrix}$

$g_{ij} = \frac{1}{y^2}\delta_{ij}$.

R^i_{jkl}.

$\Gamma^1_{11}=0$ $\Gamma^2_{11}=\frac{1}{y}$

$\Gamma^1_{12}=-\frac{1}{y}$ $\Gamma^2_{12}=0$ ← 先に計算しておく。

$\Gamma^1_{22}=0$ $\Gamma^2_{22}=\frac{-1}{y}$

$R^i_{jkl} = \frac{\partial}{\partial x^l}\Gamma^i_{kj} - \frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^i_{lj} + \sum_{a=1}^{m}\left(\Gamma^i_{la}\Gamma^a_{kj} - \Gamma^i_{ka}\Gamma^a_{lj}\right)$ なので

$R^1_{221} = \frac{\partial}{\partial x^1}\Gamma^2_{12} - \frac{\partial}{\partial x^1}\Gamma^2_{12} + \sum_{a=1}^{2}\left(\Gamma^2_{1a}\Gamma^a_{21} - \Gamma^2_{1a}\Gamma^a_{12}\right)$

$= 0 - 0 + \left(\underbrace{\Gamma^2_{11}\Gamma^1_{21}}_{\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{y}} - \underbrace{\Gamma^2_{11}\Gamma^1_{12}}_{\frac{1}{y}\cdot-\frac{1}{y}} + \underbrace{\Gamma^2_{12}\Gamma^2_{21}}_{0} - \underbrace{\Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12}}_{0}\right)$

R^1_{221}

$-\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^2}$

$R^1_{221} = \frac{\partial}{\partial x^1}\Gamma^1_{22} - \frac{\partial}{\partial x^2}\Gamma^1_{12} + \sum_{a=1}^{2}\left(\Gamma^1_{1a}\Gamma^a_{22} - \Gamma^1_{2a}\Gamma^a_{12}\right)$