2024/05/15

Def (微分同相写像)

写像 $\phi: M \longrightarrow N$ が 微分同相写像 であるとは、
ϕ が滑らかな写像で、かつ逆写像 ϕ^{-1} も滑らかな写像
である。

> **Def** ((多様体上の)滑らかな写像)
> 写像 $\phi: M \to N$ が 滑らか である
> $\Longleftrightarrow$ M の座標系 ξ と N の座標系 η に対して、座標表示
> $\eta \circ \phi \circ \xi^{-1}$ がユークリッド空間上で滑らかである.

Lemma

多様体の恒等写像、微分同相写像の合成、微分同相写像の逆写像は、全て微分同相写像となる。

Proof

定義に沿って、それぞれ確認していく

(i) 恒等写像 $id_M: M \longrightarrow M$ について

id_M の逆写像 $(id_M)^{-1}$ は $(id_M)^{-1} = id_M$ より、id_M が滑らかであることのみ示せばよい。

M 上の任意の座標系として ξ, ξ^{-1} を考える。

グザイ

$^\forall p \in M$、(U, ξ)：$p \in U$ である M の局所座標系.
id_M によって写される点 $id_M(p) = p$ より、(U, ξ)：$id_M(p) \in U$ である.

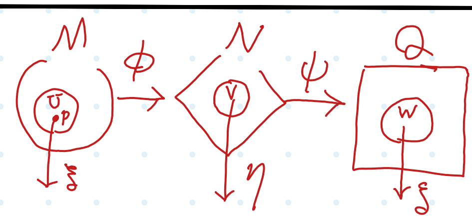
$\xi \circ id_M \circ \xi^{-1} : \xi(U) \to \mathbb{R}^m$ を考えると、

$$\xi \circ id_M \circ \xi^{-1} = id_{(\xi(U))}(x^1, x^2, \cdots, x^m)$$
$$= (x^1, x^2, \cdots, x^m)$$

よって、$\xi \circ id_M \circ \xi^{-1}$ はユークリッド空間上の写像として滑らかであるため、id_M は（多様体上で）滑らかである.

$\therefore id_M$ は微分同相写像である ■

(II) 微分同相写像同士の合成写像について



M^m, N^n, Q^q をそれぞれ多様体とする。
$\phi : M \to N$ と $\psi : N \to Q$ がそれぞれ微分同相写像ならば、
合成写像 $(\psi \circ \phi) : M \to Q$ は微分同相写像であることを示せばよい。

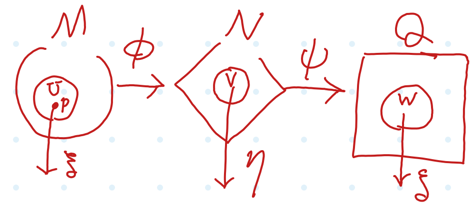
$^\forall p \in M$ に対し、(U, ξ)：$p \in U$ である M の局所座標系、
(W, ζ)：$(\psi \circ \phi)_{(p)} \in W$ である Q の局所座標系

とするとき、以下の2つの条件

(I) $\psi\circ\phi$ が（多様体上で）滑らかである

(II) $(\psi\circ\phi)^{-1}$ が（多様体上で）滑らかである

を満たすことを確認する。



条件(I)について

$\forall p\in M$ に対し、(V,η)（エータ）: $\phi(p)\in V$ である N の局所座標系とする。前提より ϕ と ψ は微分同相写像であるため、

・ϕ が（多様体上で）滑らか $\Longleftrightarrow$ $\eta\circ\phi\circ\xi^{-1}$ が滑らか

・ψ が（多様体上で）滑らか $\Longleftrightarrow$ ζ（ゼータ）$\circ\psi\circ\eta^{-1}$ が滑らか **5**

である。ここで、$\zeta\circ(\psi\circ\phi)\circ\xi^{-1}=(\zeta\circ\psi\circ\eta^{-1})\circ(\eta\circ\phi\circ\xi^{-1})$（ゼータ、ゼータ、グザイ）

であり、$(\zeta\circ\psi\circ\eta^{-1})$ と $(\eta\circ\phi\circ\xi^{-1})$ はそれぞれユークリッド空間上で滑らか（C^∞級）であるため、それらの合成写像も滑らかである。

以上より、条件(I)を示した。

条件(II)について

逆写像の性質より、$\psi\circ\phi$ の逆写像 $(\psi\circ\phi)^{-1}$ は、

$$(\psi\circ\phi)^{-1}=\phi^{-1}\circ\psi^{-1}$$

であるため、$\zeta\circ\phi^{-1}\circ\psi^{-1}\circ\xi$ がユークリッド空間上で **6**

P

Prop

$\phi : M \to N$ (diffeo) $\rightsquigarrow$ $\phi^{-1} : C^\infty$

$\psi : N \to Q$ (diffeo) $\rightsquigarrow$ $\psi^{-1} : C^\infty$

$\Longrightarrow \psi \circ \phi : M \to Q$: diffeo

※

Lemma

$\phi : M \to N : C^\infty$

$\psi : N \to Q : C^\infty$

$\Longrightarrow \psi \circ \phi : M \to Q : C^\infty$ (P6. comment (3))

To prove : (I) $\psi \circ \phi : C^\infty$

(II) $(\psi \circ \phi)^{-1} : C^\infty$

(I) は、Lemma よりしたがう。

(II) は、$(\psi \circ \phi)^{-1} = \phi^{-1} \circ \psi^{-1}$ であり、ϕ^{-1} と ψ^{-1} は C^∞ であるため、

仮定

$\phi^{-1} \circ \psi^{-1}$ ~~も~~ は C^∞ である。

滑らかであることを示せばよい。(I) と同様に

$$\xi\circ\phi^{-1}\circ\psi^{-1}\circ\xi=(\xi\circ\phi^{-1}\circ\eta^{-1})\circ(\eta\circ\psi^{-1}\circ\xi)$$

である。前提より ϕ と ψ は diffeo であるため、ϕ^{-1} と ψ^{-1} は(多様体上で)滑らかである。よって $\xi\circ\phi^{-1}\circ\eta^{-1}$ と $\eta\circ\psi^{-1}\circ\xi$ はそれぞれユークリッド空間上で滑らかである。

滑らかな写像同士の合成写像は滑らかであるため、$\xi\circ\underbrace{\phi^{-1}\circ\psi^{-1}}_{=(\psi\circ\phi)^{-1}}\circ\xi$ は滑らかであることより、条件(II)を示した。

条件(I)、(II)を満たすため、

ψ と ϕ が diffeo である $\Longrightarrow$ $\psi\circ\phi$ は diffeo であることを示した。■

(III) diffeo の逆写像について

$\phi: M\to N$ が diffeo のとき、逆写像 $\phi^{-1}: N\longrightarrow M$ も diffeo であることを確認する。

ϕ^{-1} が diffeo であることを示すために、以下の2つの条件

(I) ϕ^{-1} が(多様体上で)滑らか

(II) ϕ^{-1} の逆写像 $(\phi^{-1})^{-1}: M\to N$ が(多様体上で)滑らか

であることを示せばよい。

条件(I)について

前提より ϕ は diffeo であるため、定義より ϕ と ϕ^{-1} は(多様体上で)滑らかである。

よって、条件(I)を示した。

条件(II)について、

$(\phi^{-1})^{-1} = \phi$ であることと、前提より ϕ は diffeo であることより、$(\phi^{-1})^{-1}$ は(多様体上で)滑らかである。

よって、条件(II)を示した。

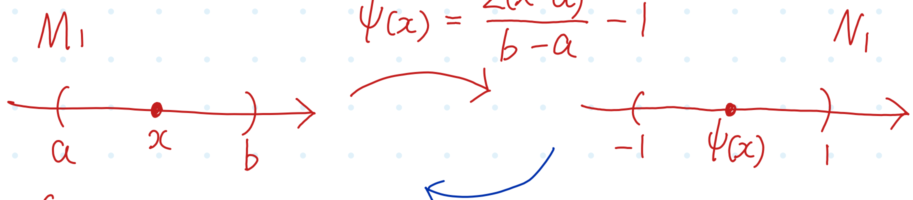
以上より、ϕ が diffeo $\Longrightarrow$ ϕ^{-1} は diffeo であることを示した ■

Ex (diffeo の例)

(1) 開区間 $M_1 = (a, b)$、開区間 $N_1 = (-1, 1)$ について

M_1 は適当な写像 $\psi : M_1 \longrightarrow N_1$ を選ぶことで、N_1 と同相になる。

$$\psi(x) = \frac{2(x-a)}{b-a} - 1$$



$(a < x < b)$

$$\psi^{-1}(x) = \frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}$$

$\psi(x)$ と $\psi^{-1}(x)$ は滑らか

mfd の同値関係

memo

上述の (1) ~ (3) で示したことは何を意味するか?

- 恒等写像
- 合成写像
- 逆写像

$\mathcal{M} := \{ M \mid C^\infty\text{-mfd} \}$ とする.

$M, M' \in \mathcal{M}$ に対し,

$$M \sim M' \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists \phi : M \longrightarrow M' : \text{diffeo}.$$

Prop

$\sim$ は, $\mathcal{M}$ 上の同値関係を表す.

Proof

(1) $M \sim M$

(2) $M \sim M' \Longrightarrow M' \sim M$

(3) $M \sim N,\ N \sim Q \Longrightarrow M \sim Q$

を示せばよい.

(1) は 恒等写像 を表している.

(2) $\phi : M \to N : \text{diffeo} \Longrightarrow \phi^{-1} : N \to M : \text{diffeo}$ 逆写像

(3) $\phi : M \to N,\ \psi : N \to Q \Longrightarrow \psi \circ \phi : M \to Q : \text{diffeo}$ 合成写像

Def

M, N : C^∞-mfd.

M と N が微分同相 (diffeomorphic)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $^\exists \phi : M \longrightarrow N$: 微分同相写像 (diffeomorphism)

diffeo という関係は 同値関係を表す.

同値関係

全単射 ・・・ 集合, X

$\downarrow$

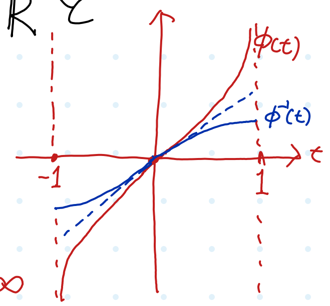
同相 ・・・ 位相空間 $(X, \mathcal{O})$

$\downarrow$

微分同相 ・・・ C^∞-mfd $(X, \mathcal{O}, \mathcal{A})$

(2) 同様に、N_1 は適当な写像 $\phi : N_1 \to \mathbb{R}^1$ を選ぶことで $\mathbb{R}^1$ と同相になる。

$$\phi(t) = \frac{t}{1-t^2}$$



N_1

$-1 \quad t \quad 1$

$(-1 < t < 1)$

$\phi(t)$ は滑らか

$\phi(-1) = -\infty \qquad \phi(0) = 0 \qquad \phi(1) = +\infty$

$$\phi^{-1}(t) = \begin{cases} \dfrac{-1+\sqrt{4t^2+1}}{2t} & (t \neq 0) \\ 0 & (t = 0) \end{cases} \longrightarrow \frac{2t}{\sqrt{4t^2+1}+1}$$

P6

Prop ☆

Σ : 集合、M : 多様体

$^\forall$全単射 (one-to-one, Σ onto M) $\phi : \Sigma \to M$　$^\exists$完備なアトラス on Σ、$^\exists$位相 (topology) on Σ

s.t. ϕ が diffeo.　5/22 (水)

Proof

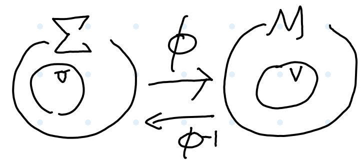
方針

- ϕ が局所座標系であれば「Σ に完備なアトラスがある」と言える
- Σ が位相空間であることを確認する

☆(i) ϕ が局所座標系であることの確認

ϕ が局所座標系 $\Longleftrightarrow$ $\phi : \Sigma \to M$ が同相写像

→ 連続、全単射
逆写像も連続



- ○ ϕ が連続 $\Longleftrightarrow$ $^\forall V \subset M$、$^\exists \phi^{-1}(V)$ s.t. $\phi^{-1}(V) \subset \Sigma$
- ϕ が全単射 : 前提より満たす
- ○ ϕ^{-1} が連続 $\Longleftrightarrow$ $^\forall U \subset \Sigma$、$^\exists \phi(U)$ s.t. $\phi(U) \subset M$

$\phi(t) = \dfrac{t}{1-t^2}$ の逆写像について、上のスライドでは

$$\phi^{-1}(t) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4t^2+1}-1}{2t} & (t \neq 0) \\ 0 & (t = 0) \end{cases}$$

と書いていたが、有理化の逆のことを施して、

$\boxed{t=0 \text{ で } C^\infty \text{ か分からない}}$

$$\phi^{-1}(t) = \frac{\sqrt{4t^2+1}-1}{2t} = \frac{\sqrt{4t^2+1}-1}{2t} \times \frac{\sqrt{4t^2+1}+1}{\sqrt{4t^2+1}+1}$$

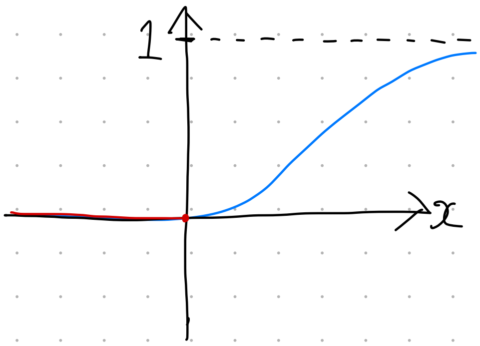
$$= \frac{4t^2}{2t\left(\sqrt{4t^2+1}+1\right)}$$

$$= \frac{2t}{\sqrt{4t^2+1}+1}$$

- 全ての t で定ぎされてる
- $\phi(0) = 0$

$\boxed{\text{類題}}$

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$



$\forall n \in \mathbb{N},\ \lim_{x \to +0} f^{(n)}(x) = 0$

(ii) Σ が位相空間であることの確認

Σ が位相空間である $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{O}$: Σ の部分集合系として、

(A1) $\Sigma \in \mathcal{O}$ かつ $\phi \in \mathcal{O}$

(A2) $n \in \mathbb{N}$、$O_1, O_2, \cdots, O_n \in \mathcal{O}$

$\Longrightarrow O_1 \cap O_2 \cdots \cap O_n \in \mathcal{O}$

(A3) $^\forall \Lambda$、$^\forall \lambda \in \Lambda$ から $\mathcal{O}$ の元 $O_\lambda \in \mathcal{O}$ への対応を与えたとき、$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$

Σ の部分集合系 $\mathcal{O}$ を、

$$\mathcal{O} = \{\phi, \Sigma\}$$

とすれば、条件 (A1) から (A3) を満たすため、Σ は位相空間である。

P6 l5

Ex (滑らかでない同相写像の例)

「写像 ϕ が微分同相写像 $\Longrightarrow$ ϕ が同相写像」は成り立つが、その逆は成り立たない。

Def (微分同相写像)

写像 $\phi : X \longrightarrow Y$ が微分同相写像である

$\Longleftrightarrow$ (A1) ϕ が全単射で滑らか (C^∞級)

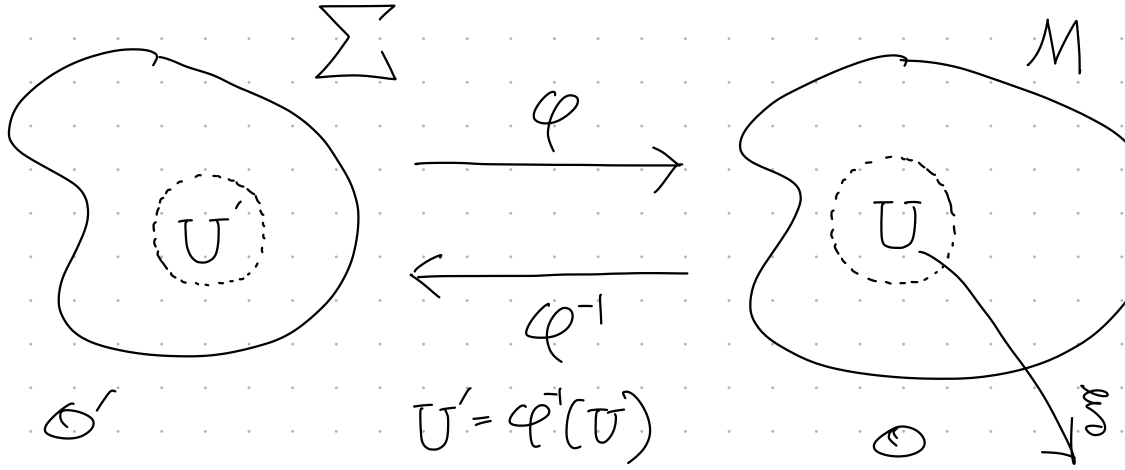
(A2) 逆写像 ϕ^{-1} も滑らか

Def (同相写像)

写像 $\phi : X \longrightarrow Y$ が同相写像である

$\Longleftrightarrow$ (B1) ϕ が全単射で連続

(B2) 逆写像 ϕ^{-1} も連続



Prop

$^\exists \mathcal{O}'$: Σ の位相

$^\exists \mathcal{A}'$: $(\Sigma, \mathcal{O}')$ のアトラス　s.t. $(\Sigma, \mathcal{O}', \mathcal{A}')$ は C^∞-mfd で

$\phi : \Sigma \longrightarrow M$: diffeo

Proof

M の条件を設定する。 $\mathcal{O}$; M の位相　とする。

$\mathcal{A}$; M のアトラス

$$\Longrightarrow \mathcal{O}' = \{ \varphi^{-1}(U) \mid U \subset M : \text{開集合} \}$$

$$\mathcal{A}' = \{ (\varphi^{-1}(U), \xi \circ \varphi) \mid (U, \xi) \in \mathcal{A} \}$$

とおく。

☆ $\mathcal{O}'$ は Σ の位相であることを示す。

(1) $\phi = \varphi^{-1}(\phi) \in \mathcal{O}'$

$\Sigma = \varphi^{-1}(M) \in \mathcal{O}'$

(2) $U', V' \in \mathcal{O}'$ とすると、$U' \cap V' \in \mathcal{O}'$ を示せばよい。

→ $\varphi^{-1}(\sim\sim)$ の形で表したい。

$\mathcal{O}$の定義より、$^{\exists}U \in \mathcal{O}$、$^{\exists}V \in \mathcal{O}$ s.t. $\begin{cases} U' = \varphi^{-1}(U) \\ V' = \varphi^{-1}(V) \end{cases}$

$$U' \cap V' = \varphi^{-1}(U) \cap \varphi^{-1}(V)$$
$$= \underbrace{\varphi^{-1}(\underbrace{U \cap V}_{\in \mathcal{O}})}_{} \in \mathcal{O}'$$

(3) $\{U_\lambda'\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{O}'$ とすると、

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda' = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \varphi^{-1}(\underbrace{U_\lambda}_{\in \mathcal{O}})$$

ドモルガン則を用いた

$$= \varphi^{-1}\Big(\underbrace{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda}_{\in \mathcal{O}}\Big) \in \mathcal{O}'$$

☆☆ $\mathcal{A}'$がアトラスであることを示す

$$\mathcal{A}' = \left\{ (U_\lambda', \xi_\lambda') \;\middle|\; U_\lambda' = \varphi^{-1}(U_\lambda)\ \xi_\lambda' = \xi_\lambda \circ \varphi,\ (U_\lambda, \xi_\lambda) \in \mathcal{A} \right\}$$

示すべきことは以下の3つ

数式から数式へ翻訳

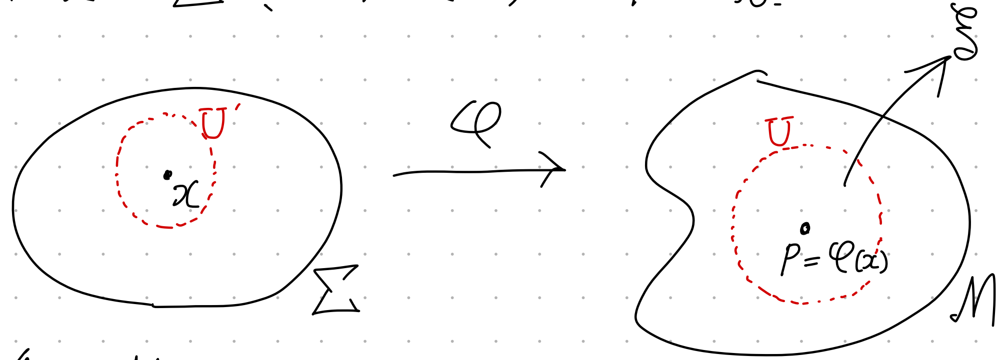
(1) $\Sigma = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda' \iff {}^{\forall}x \in \Sigma,\ {}^{\exists}(U', \xi') \in \mathcal{A}'$ s.t. $x \in U'$

(2) $^{\forall}\lambda, \mu \in \Lambda$、$(U_\lambda', \xi_\lambda'), (U_\mu', \xi_\mu') \in \mathcal{A}'$ に対して、
$\xi_\mu' \circ (\xi_\lambda')^{-1} ; \xi_\lambda'(U_\lambda' \cap U_\mu') \longrightarrow \xi_\mu'(U_\lambda' \cap U_\mu')$; C^∞級

((3) Σ がハウスドルフ空間.)

を示す.

(1) : $^{\forall}x \in \Sigma$, 点 $P = \varphi(x) \in M$ とする.

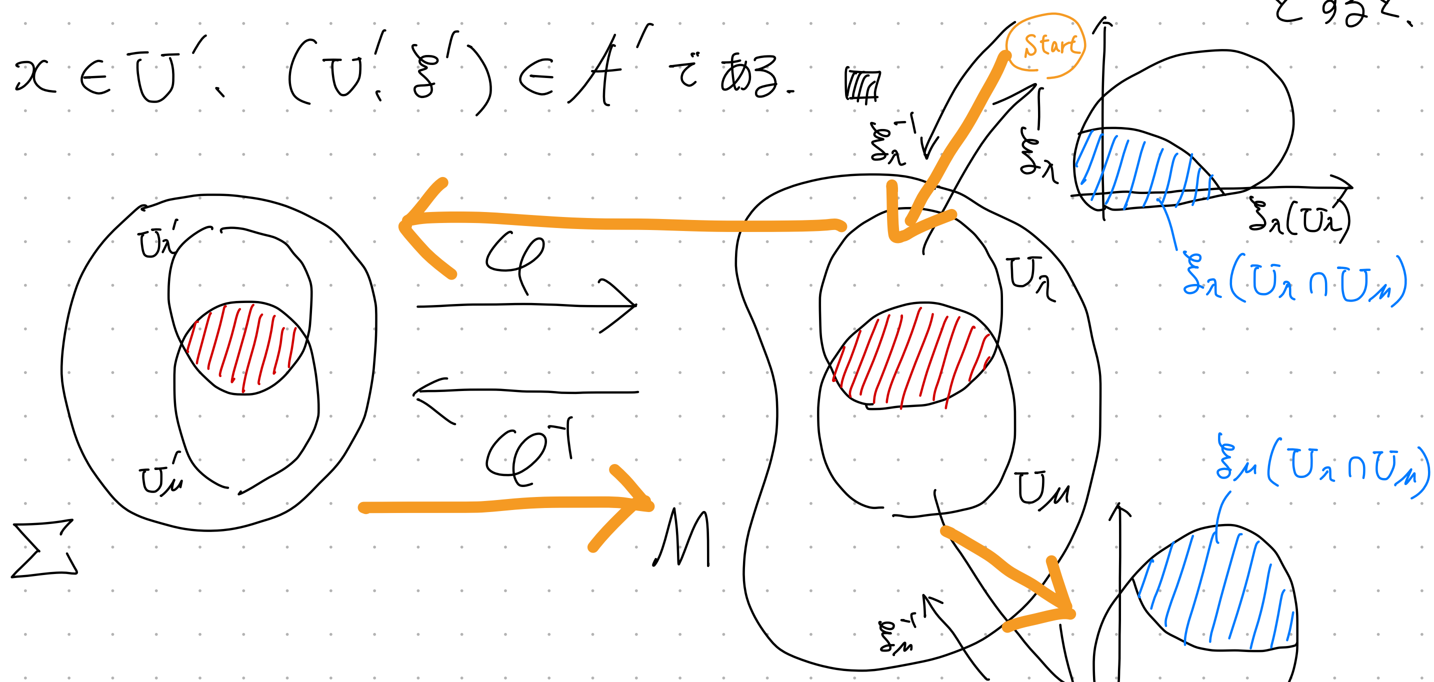


A は M のアトラスより,

$^{\exists}(U, \xi) \in A$ s.t. $P \in U$. このとき, $U' = \varphi^{-1}(U)$, $\xi' := \xi \circ \varphi$ とすると,

$x \in U'$, $(U', \xi') \in A'$ である. ▨

(2)



$$\begin{aligned}
\xi'_\lambda(U'_\lambda \cap U'_\mu) &= \xi_\lambda \circ \varphi\left(\varphi^{-1}(U_\lambda) \cap \varphi^{-1}(U_\mu)\right) \\
&= \xi_\lambda \circ \varphi\left(\varphi^{-1}(U_\lambda \cap U_\mu)\right) \\
&= \xi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu).
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \xi'_\mu := \xi_\mu \circ \varphi \\ \xi'_\lambda := \xi_\lambda \circ \varphi \end{pmatrix}$$

同様に, $\xi'_\mu(U'_\lambda \cap U'_\mu) = \xi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$

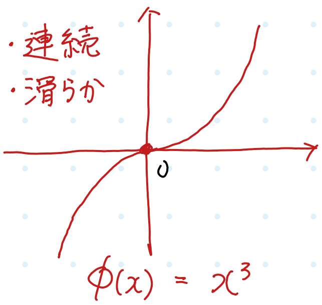
$$\begin{aligned}
\xi'_\mu \circ (\xi'_\lambda)^{-1} &= (\xi_\mu \circ \varphi) \circ (\xi_\lambda \circ \varphi)^{-1} \\
&= \xi_\mu \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \xi_\lambda^{-1} \\
&= \xi_\mu \circ \xi_\lambda^{-1} : \xi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \to \xi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)
\end{aligned}$$

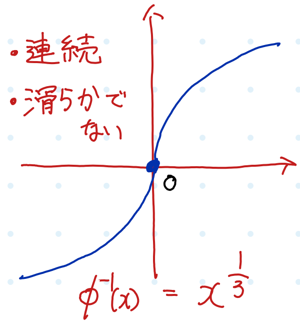
↳ 座標変換 : C^∞ ▨

たとえば、$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が

$$\phi(x) = x^3$$

の場合を考える。ϕ と逆写像 ϕ^{-1} が滑らか(C^∞級)であるかを確認する。





$\phi^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$ は $x = 0$ のときに微分係数の値が定まらない $(+\infty)$ ため、$\phi^{-1}(x)$ は滑らかではない。

Prop

M: 多様体、$U, V \subset M$: 開集合

任意の座標系 $\xi : U \to \xi(U) \subset \mathbb{R}^n$ は diffeo である。

($\Longleftrightarrow$ $^\forall$diffeo $\phi : V \to \phi(V) \subset \mathbb{R}^n$ は M の座標で~~ある~~あり、)

→ M のアトラスに含まれる ~~良いが~~ (V, ϕ) が

Def (座標系)

位相空間 S 内の座標系 ξ とは、S の開集合 U から $\mathbb{R}^n$ の開集合 $\xi(U)$ への同相写像 $\xi : \underset{\substack{\cap \\ S}}{U} \longrightarrow \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^n}}{\xi(U)}$ のこと。

Proof $\boxed{\xi \text{ と } \xi^{-1}}$ がそれぞれ滑らかであることを示す。

(i) 「$\xi : U \to \xi(U) \subset \mathbb{R}^n$ が座標系」$\Longrightarrow$「ξ は diffeo」

M 上の任意の座標系として $\eta : W \to \eta(W) \subset \mathbb{R}^n$ を考える。

(W は $U \cap W \neq \phi$ となる開集合)

滑らかな写像の定義より、「座標系 ξ が滑らかであること」と、
「$Id \circ \xi \circ \eta^{-1}$ がユークリッド空間上で滑らかであること」は同値.

($Id : \xi(U) \to \xi(U)$: 恒等写像)

Def ((多様体上の)滑らかな写像)
写像 $\phi : M \to N$ が滑らかである
$\Longleftrightarrow$ M の座標系 ξ と N の座標系 η に対して、座標表示
$\eta \circ \phi \circ \xi^{-1}$ がユークリッド空間上で滑らかである.

恒等写像は diffeo のため滑らかであり、$\xi \circ \eta^{-1} : \eta(U \cap W) \to \xi(U \cap W)$ は
座標変換となるため、C^∞ 級 (滑らか) である。
滑らかな写像同士の合成写像は滑らかであることより、

$Id \circ \xi \circ \eta^{-1}$ はユークリッド空間上で滑らかである。

よって、滑らかな写像の定義より ξ は滑らかである。

合成写像 $\eta \circ \xi^{-1} \circ (id)^{-1}$ も同様の議論でユークリッド空間上で
滑らかであるため、ξ^{-1} は滑らかである。

以上より、ξ と ξ^{-1} が滑らかであるため、ξ は diffeo である. ■

(ii)「$\phi : V \longrightarrow$ ~~$V(\phi)$~~ $\phi(V)$ が diffeo」$\Longrightarrow$「ϕ は M の座標系」

diffeo の性質より、「$\phi : V \to \phi(V) \in \mathbb{R}^n$ が diffeo」$\Longrightarrow$「ϕ は同相写像」.

一方、座標系の定義より、「ϕ が M 内の座標系」$\Longleftrightarrow$「M の開集合から $\mathbb{R}^n$ への同相写像」.

よって、$\phi : V \longrightarrow \phi(V) \in \mathbb{R}^n$ が diffeo $\Longrightarrow$ ϕ は M の座標系

である. ▨ （座標変換が滑らかを示す） ← ϕ が diffeo なら成立つ.

~~Fact~~ (Because.)

Prop より diffeo.

P6. ℓ11

多様体 M 上の任意の座標系 ξ について、微分同相写像 ϕ および逆写像 ϕ^{-1} との合成写像 $\xi \circ \phi^{-1}$、$\phi \circ \xi^{-1}$ はいずれも滑らかである.

→ ϕ が diffeo の条件より成立つ.

また、M は完備なアトラスを持ち、ϕ は完備なアトラスの中に含まれる.

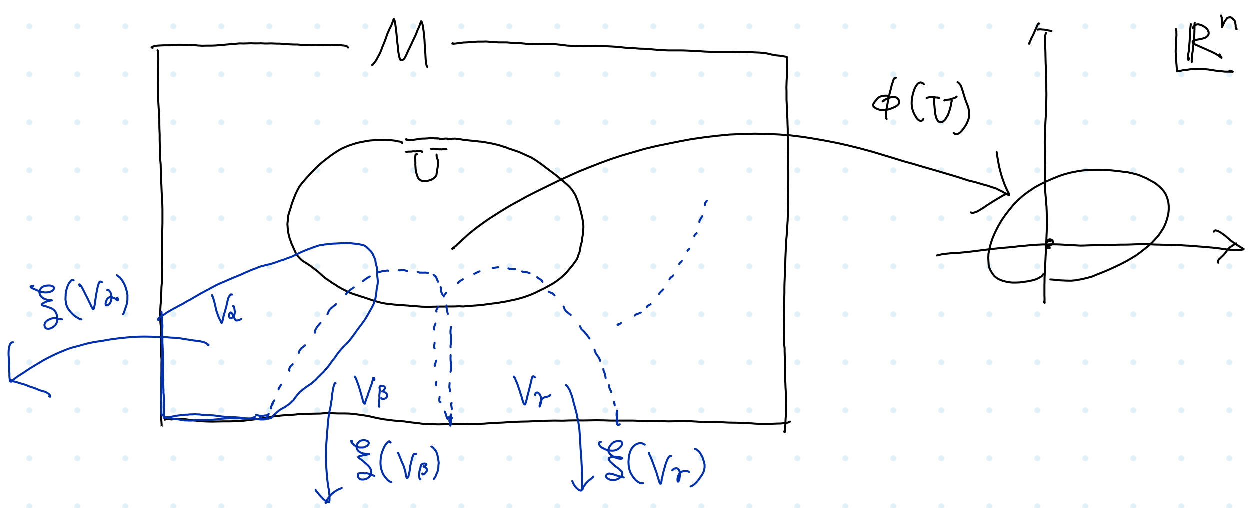
定義域：$U \subset M$

Def (完備なアトラス)

位相空間 S 上のアトラス A が完備である

$\Longleftrightarrow$ (A1) A が S 内の座標系を全て含む.

(A2) A 内の全ての座標系と滑らかに重なる座標系を含む.



φ が diffeo であることを示す　　　φ、φ^{-1} が ちゅめらか

$(V, \varphi) \in \mathcal{A}$ を示す

$\Longleftrightarrow$ ${}^\forall(U, \xi) \in \mathcal{A}$ に対して、$\underset{①}{\varphi \circ \xi^{-1}} : C^\infty$、$\underset{②}{\xi \circ \varphi^{-1}} : C^\infty$ を示す

まず、$\varphi : V \to \varphi(V)$: diffeo

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\varphi : C^\infty$、$\varphi^{-1} : C^\infty$ であった。

(i) $\varphi : V \to \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{\varphi(V)}} : C^\infty$ $\Longleftrightarrow$ ${}^\forall(U, \xi) \in \mathcal{A}$ に対して、

$\varphi \circ \xi^{-1} = \underbrace{Id \circ \varphi \circ \xi^{-1} : C^\infty}$

C^∞ を上で示した

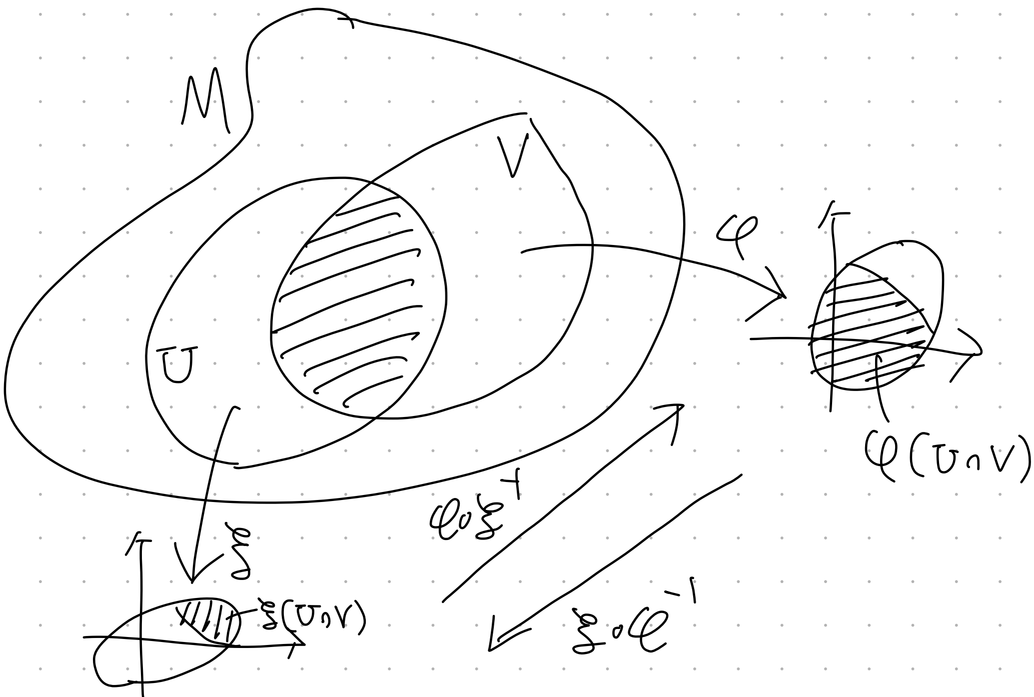
∴ ① が成立

(ii) $\varphi^{-1} : \varphi(V) \to V : C^\infty$ $\Longleftrightarrow$ ${}^\forall(U, \xi) \in \mathcal{A}$ に対して

$\xi \circ \varphi^{-1} = \underbrace{\xi \circ \varphi^{-1} \circ Id : C^\infty}$

C^∞ を上で示した、

∴ ② が成立 ▨



Fact

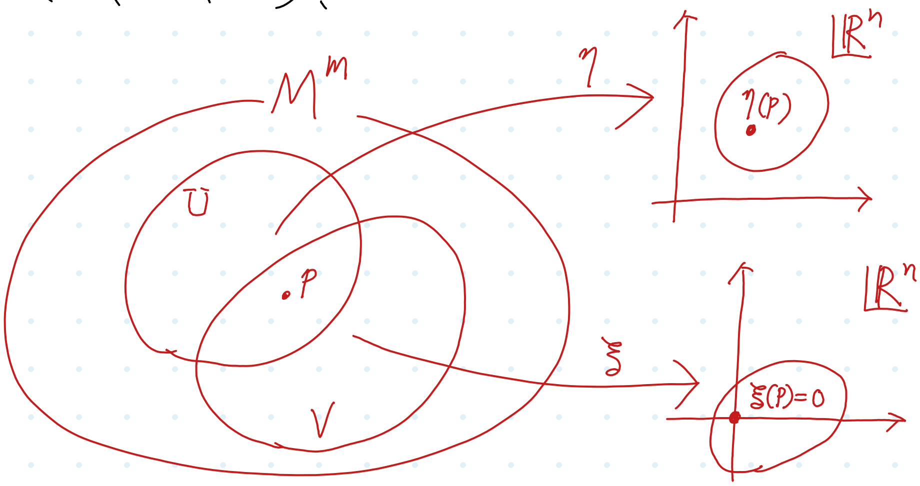
P6, ℓ15

$\forall p \in M$, $\exists \xi : M \to \xi(M)$ s.t. $\xi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$.

Proof

Mの次元をmとする。$p = (x^1, x^2, \cdots, x^m)$、$\xi(p) = (y^1, y^2, \cdots, y^n)$ と表示すると、n個の等式

$$y^1(x^1, x^2, \cdots, x^m) = 0$$
$$y^2(x^1, x^2, \cdots, x^m) = 0$$
$$\vdots$$
$$y^n(x^1, x^2, \cdots, x^m) = 0$$



を満たすことを示せばよい。

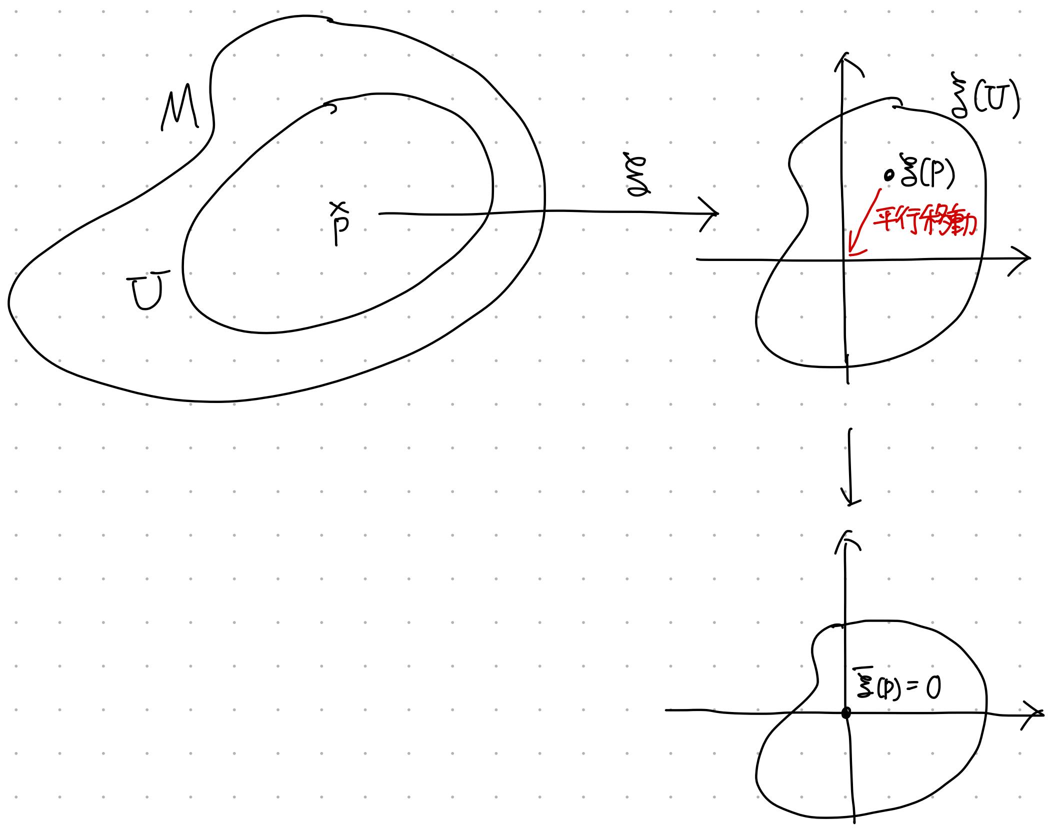
次回：P6. δ. Lemma ～

5/22(水)

ペース早

(～P15)

$^\forall p \in M,\ ^\exists(U, \xi) \in \mathcal{A}$ s.t. $p \in U,\ \xi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$



Proof $^\exists(U, \xi) \in \mathcal{A}$ s.t. $p \in U$

このとき、$\bar{\xi} := \xi - \xi(p)$ とおく。

$\bar{\xi} : U \to \bar{\xi}(U)$: homeo

$^\forall(V, \varphi) \in \mathcal{A}$

$\bar{\xi} \circ \varphi^{-1},\ \varphi \circ \bar{\xi}^{-1} : C^\infty$

より、$(U, \bar{\xi}) \in \mathcal{A}$

$\bar{\xi}(p) = \xi(p) - \xi(p) = 0$ //