$$\frac{\partial}{\partial t} = \left[\frac{\partial}{\partial t}\right]^{tan} + \left[\frac{\partial}{\partial t}\right]^{hor}$$

$$= T(s) + \nu(s)\, n(s)$$

$$= \alpha(s)\, e(s) + \boxed{\nu(s)}\, n(s).$$

$$= \sin\theta\, e + \boxed{\cos\theta}\, n$$

$$\hat{\Omega} = \left(\hat{\omega}^i_j(s)\right)$$

$$\omega^i_j = \hat{\omega}^i_j(s)\, ds$$

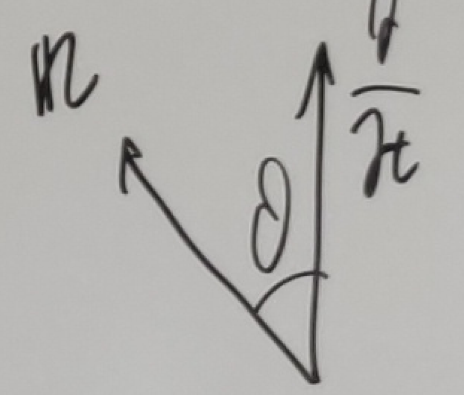
$$\Omega\left(\tfrac{d}{ds}\right) = K.$$

$$\left(\hat{\Omega} = K\right)$$

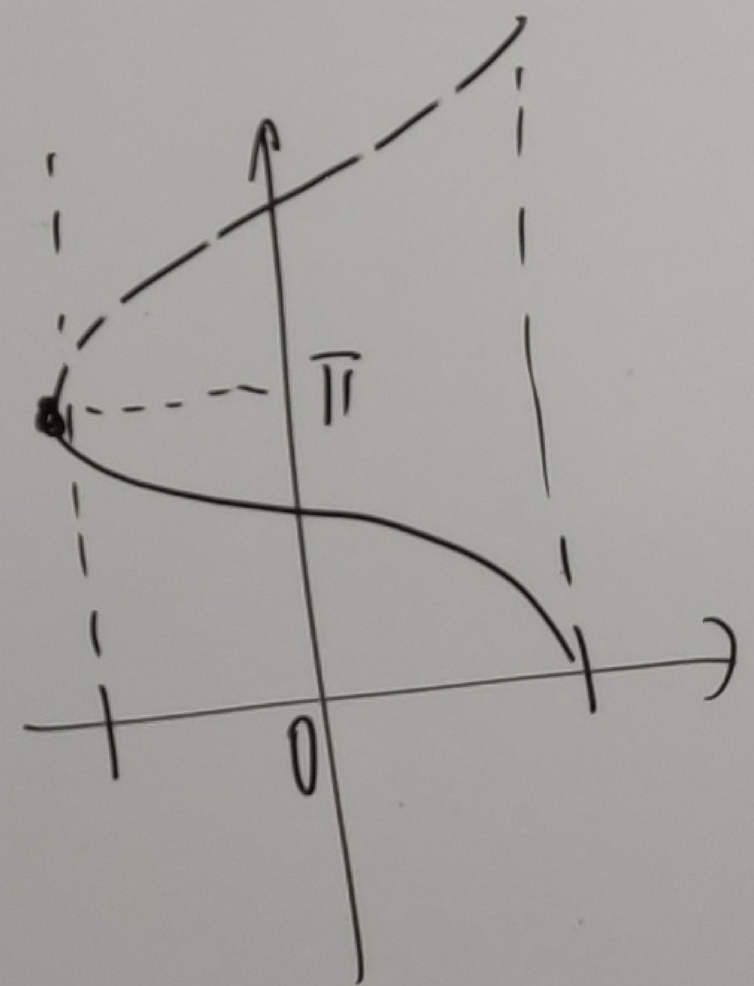
$\theta : I \to \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$: C^∞-map のこと

θ とは

n と $\frac{\partial}{\partial t}$ のなす角.



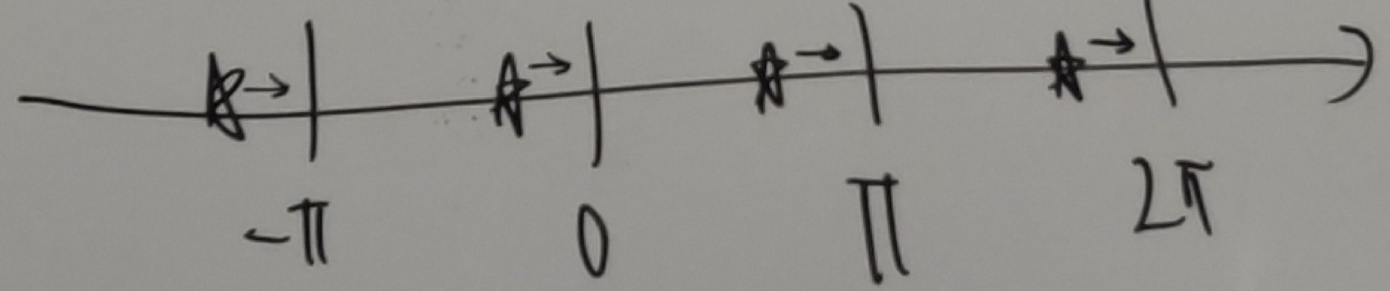
$$\theta = \arccos\left(\underbrace{\left\langle \frac{\partial}{\partial t}, n\right\rangle}_{-1\le \quad \le 1}\right) \in [0, \pi]$$

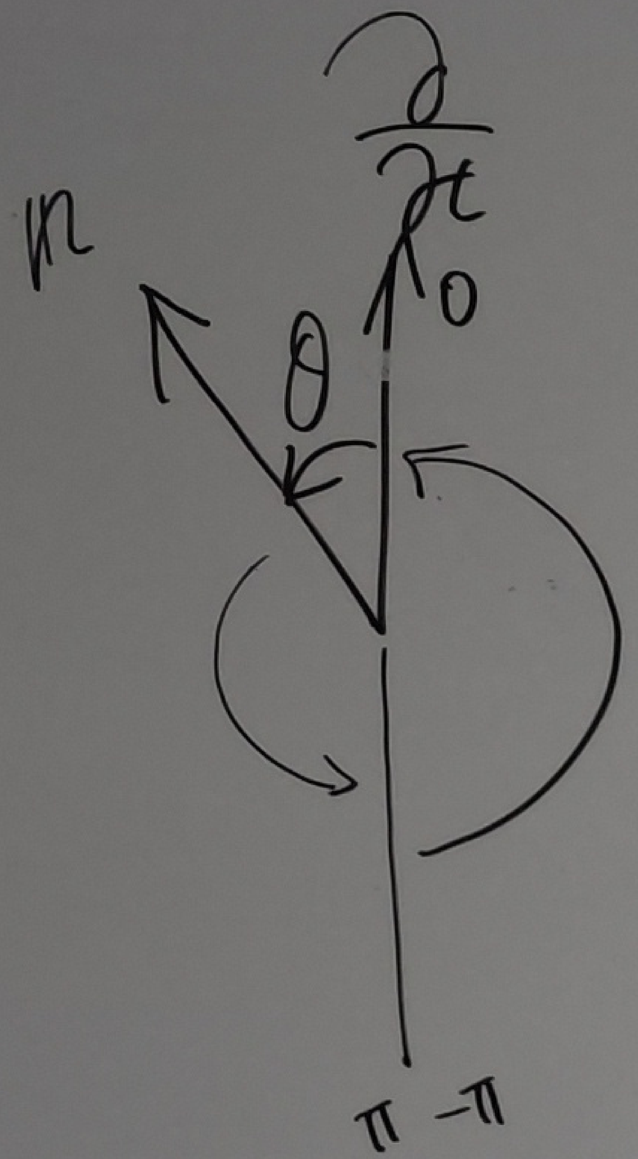


$$\theta : I \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$$

$a, b \in \mathbb{R}$ が

$a \sim b \iff \exists m \in \mathbb{Z}$ s.t $a - b = m\pi$





$$\theta(s) \in (-\pi, \pi]$$
$$(0, 2\pi]$$

$$\theta(s) : I \longrightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

$$\phi(s) = \int \cos\theta \, ds$$

$$\boxed{\gamma(s) = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ \int \sin\theta \, ds \end{pmatrix}}$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma' = \begin{pmatrix} -\phi' \sin\phi \\ \phi' \cos\phi \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\theta \sin\phi \\ \cos\theta \cos\phi \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

示すこと $\frac{\partial}{\partial t} = \alpha e + \nu n$ $\begin{pmatrix} \alpha = \sin\bar{\theta} \\ \nu = \cos\bar{\theta} \end{pmatrix}$ とするとき $\bar{\theta} = \theta$ を示す

$$n = \Gamma \times e$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos\theta \sin\phi \\ \cos\theta \cos\phi \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin\phi \sin\theta \\ -\cos\phi \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\nu(s) = \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, n \right\rangle$$
$$= \cos\theta$$
$$\therefore \cos\bar{\theta} = \cos\theta$$

$$\alpha(s) = \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, e \right\rangle$$
$$= \sin\theta$$
$$\therefore \sin\bar{\theta} = \sin\theta$$

$$\therefore \bar{\theta} = \theta \ //$$

(3.16)

(3.17)

して

(3.18)

先に 初期値が
一致することの 議論が

(3.17) とする.

$$\begin{cases} A := \bar{F}(s_0)\, F(s_0)^{-1} \quad (\in SO(3)) \\ \tilde{F}(s) := A\, F(s) \quad (\tilde{F} : I \to SO(3)) \end{cases}$$ とおく.

- $\tilde{F}' = AF' = AFK = \tilde{F} K$
- $\tilde{F}(s_0) = A\, F(s_0) = \bar{F}(s_0)\, F(s_0)^{-1} F(s_0)$
  $= \bar{F}(s_0)$

$\therefore$ 解の一意性より $\tilde{F}(s) \left(= \bar{F}(s) \right) = AF(s).$

(3.17) とする.

$$\begin{cases} A := \bar{F}(s_0)\, F(s_0)^{-1} \quad (\in SO(3)), \\ \tilde{F}(s) := A\, F(s) \quad (\tilde{F} : I \to SO(3)) \end{cases}$$ とおく.

✓ $\tilde{F}' = AF' = AFK = \tilde{F} K$

✓ $\tilde{F}(s_0) = A\,F(s_0) = \bar{F}(s_0)\, \underbrace{F(s_0)^{-1} F(s_0)}$
$= \bar{F}(s_0)$

$\therefore$ 解の一意性より $\tilde{F}(s) \left(= \bar{F}(s) \right) = AF(s)$.

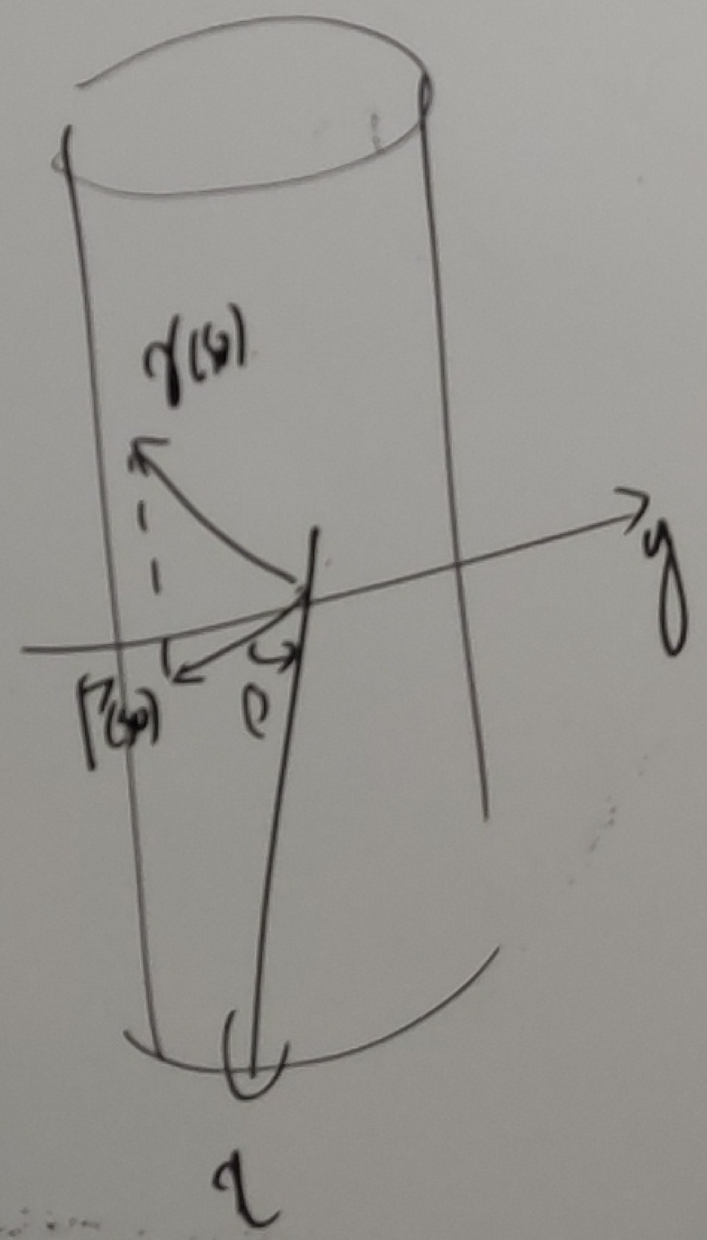
Lem3 $A(s) = \bar{F}(s)\, F(s)^{-1}$
$= \bar{F}(s)\, F(s)^{T}$ と表される.

$A' = \bar{F}' F^T + \bar{F} \left(F^T \right)'$
$= \bar{F}' F^T + \bar{F} (F')^T$
$= \cdots F^T + \bar{F} K^T F^T = 0$

Lem $\begin{cases} \gamma : I \longrightarrow S^1 \times \mathbb{R} : (1),(2) をみたす. \\ s_0 \in I : 固定. \end{cases}$

このとき $\exists \beta$ s.t. $B\,F(s_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_0 & -\sin\theta_0 \\ 0 & \sin\theta_0 & \cos\theta_0 \end{pmatrix}$

$\left(ただし \begin{cases} B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \theta_0 = \theta(s_0) \end{cases} \right)$



$\mathbb{R}^2, S^2, H^2$

$\boxed{\kappa}$ が曲線を一意的に定める. (up to isometry)

$S^1 \times \mathbb{R}, H^1 \times \mathbb{R}$

$\boxed{\theta}\left(= \int \kappa\, ds \right)$ が曲線を一意的に定める (up to isometry)

(3.17) とする.

$$\begin{cases} A := \overline{F}(s_0)\, F(s_0)^{-1} \quad (\in SO(3)). \\ \widetilde{F}(s) := A\, F(s) \quad (\widetilde{F} : I \to SO(3)) \end{cases}$$ とおく.

✓ $\widetilde{F}' = AF' = AFK = \widetilde{F} K$

✓ $\widetilde{F}(s_0) = A F(s_0) = \overline{F}(s_0) \underbrace{F(s_0)^{-1} F(s_0)}$

$= \overline{F}(s_0)$

∴ 解の一意性より $\widetilde{F}(s) \left(= \overline{F}(s) \right) = AF(s)$.

Lem3 $A(s) = \overline{F}(s) F(s)^{-1}$

$= \overline{F}(s) F(s)^{T}$ と表される.

$A' = \overline{F}' F^T + \overline{F} (F^T)'$

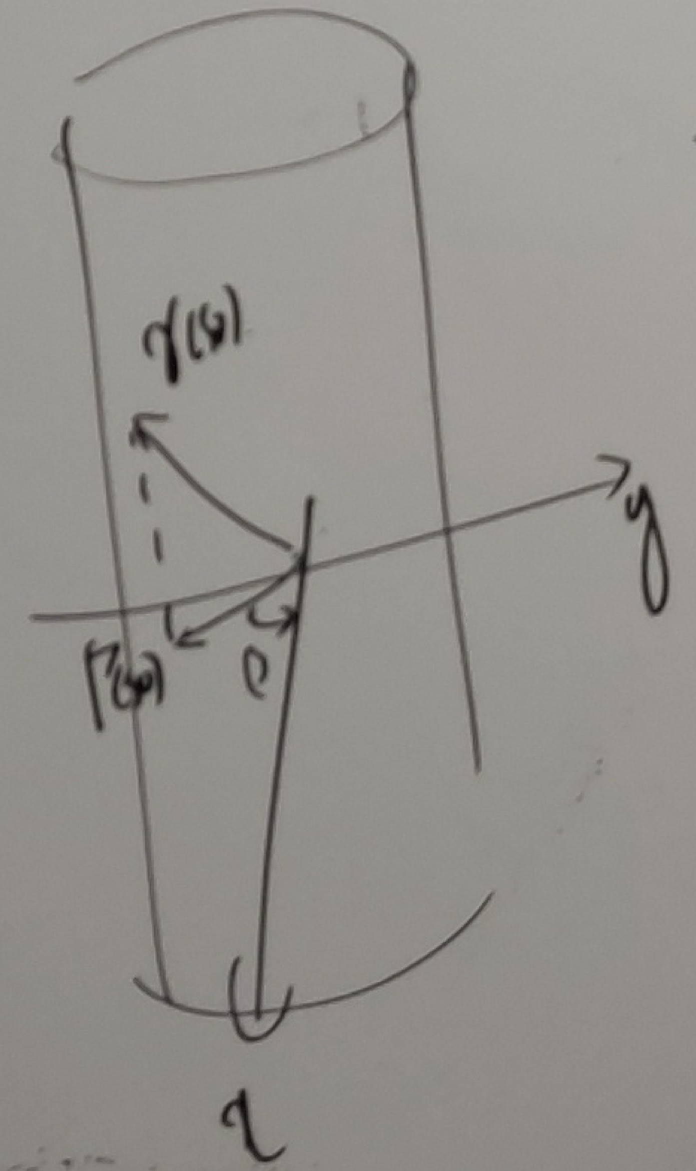
$= \overline{F}' F^T + \overline{F} (F')^T = 0$

$= \overline{F} K F^T + \overline{F} K^T F^T$

Lem $\begin{cases} \gamma : I \longrightarrow S^1 \times \mathbb{R} : (1),(2)をみたす. \\ s_0 \in I : 固定. \end{cases}$

このとき $\exists \beta$ s.t. $B F(s_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_0 & -\sin\theta_0 \\ 0 & \sin\theta_0 & \cos\theta_0 \end{pmatrix}$

$\left(ただし \begin{cases} B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \\ \theta_0 = \theta(s_0) \end{cases} \right).$



$\mathbb{R}^2, S^2, H^2$

$\boxed{K}$ が曲線を一意的に定める. (up to isometry)

$S^1 \times \mathbb{R}, H^1 \times \mathbb{R}$

$\boxed{\theta}$ $(= \int K ds)$ が曲線を一意的に定める (up to isometry)

^{2}の場合，κで曲線を定めた．

一意的に定められない．

くは．$(\kappa(s), \theta_0)$で決まる)

トライン，時間調整)

$\cos\phi$．$\sin\phi$．$\int\sin\theta\, ds$)

$\left(\phi=\int\cos\theta\, ds\right)$．

～～～．

$\times\mathbb{R}$も同様の定理を得た．

或的性質

頂点定理．

Fenchel．

は$\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}$では不成立．

$\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}$における曲線論の基本定理

1. 問題・背景

・Daniel論文を読んだ．

・$\mathbb{S}^n\times\mathbb{R}$，$\mathbb{H}^n\times\mathbb{R}$の超曲面の基本定理．

・Gauss，Codazzi方程式

$$+\ (\circledast_1)\ +\ (\circledast_2)$$

をみたす(M^n, ds^2, S, T, ν)　$(n\geq 2)$

$$\Longrightarrow\ {}^{\exists}f: M^n \longrightarrow \mathbb{S}^n\times\mathbb{R}\ (\text{or } \mathbb{H}^n\times\mathbb{R})$$

等長はめ込み s.t. (i)～(iv)

(i) fの第一基本形式 $= ds^2$

(ii) 〃 形作用素 $= S$

(iii) $\left[\frac{\partial}{\partial t}\right]^{tan} = df(T)$　(iv) $\left[\frac{\partial}{\partial t}\right]^{nor}\cdot n = \nu$

問．$n=1$の場合はどうか？

（つまり，$\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}$．$\mathbb{H}^1\times\mathbb{R}$の曲線論の基本定理）

・$\mathbb{E}^2$．$\mathbb{S}^2$．$\mathbb{H}^2$の曲線論との比較．

2. $\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}$の曲線論．☆

$\gamma: I \longrightarrow \mathbb{S}^1\times\mathbb{R}$：正則曲線．

$$\Longrightarrow\ {}^{\exists}s\ \text{ s.t. } \|\gamma'(s)\| = 1$$

（弧長パラメータ）

$\Gamma(s)$，e，n．

κ，$\frac{\partial}{\partial t} = [\quad]^{tan} + [\quad]^{nor}$

$= T(s) + \nu(s)\, n$

$= \alpha(s)\, e(s) + \nu(s)\, n(s)$．

$(\alpha^2+\nu^2=1)$．

Def．$\begin{cases}\alpha = \sin\theta(s)\\ \nu = \cos\theta(s)\end{cases}$をみたす関数$\theta(s)$を angle function と

命題 $\boxed{\theta'(s)=\kappa(s)}$

∵ ㊉$_1$, ㊉$_2$ より成立 //

☆ $\underbrace{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}}_{}=\{(x,y,t)\in\mathbb{E}^3 \mid x^2+y^2=1\}$

$\mathbb{E}^3$ の部分多様体

(向きを保つ) 等長変換 : $(x,y,t)\longmapsto(x\cos\theta-y\sin\theta,\ x\sin\theta+y\cos\theta,\ t+c)$

$(\theta, c\in\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\t\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\c\end{pmatrix}$$

3. $\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}$ の曲線論の基本定理

$\boxed{\text{主定理}}$ $\theta\longmapsto{}^{\exists}\gamma$

Remark ・$\mathbb{E}^2, \mathbb{S}^2, \mathbb{H}^2$ の場合, κで曲線を定めた.

・$\kappa(s)$ だけでは γを一意的に定められない.

$\theta(s)$ が必要. (もしくは $(\kappa(s), \theta_0)$で決まる)

4. 証明. (アウトライン, 時間調整)

存在 : $\gamma(s)=\left(\cos\phi, \sin\phi, \int\sin\theta\, ds\right)$

$\left(\phi=\int\cos\theta\, ds\right)$

一意性 : ～ ～ ～

5. まとめ. ・$\mathbb{H}^1\times\mathbb{R}$ も同様の定理を得た.

・大域的性質

4頂点定理, Fenchel は $\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}$ では不成立.

$\boxed{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R} \text{における}}$

1. 問題, 背

・Daniel 論

・$\mathbb{S}^n\times\mathbb{R}$, $\mathbb{H}$

・Gauss, Co

+ (

をみたす (

$\Longrightarrow$ $^{\exists}$f

等

(i)

(ii)

(iii)

3/7 YNU-JWU

3/14 17:00〜

この日に 3月・4月の予定かくにん.

学振, D入試 (5月末)
(5月上旬α)

3月に入ったら

HNSUY論文を読む. (どこから読んでもok
読めるところから)