

修士学位論文

ここにタイトルを入力
(m -type edge の等長的な合同類)

指導教員: 本田淳史 准教授

飯野 郁

横浜国立大学大学院理工学府
数物・電子情報系理工学専攻
数学教育分野

24NC101

2026 年 1 月 16 日

目 次

1. 序論	1
2. 準備	2
2.1. 補題の準備	2
3. n 次 Kossowski 計量の等長実現定理	6
4. 主定理 A	7
5. 主定理 B	12
参 考 文 献	16

+ m-type
edge

1. 序論

- 研究の着想 (Hattori, HNSUY の続き: m -type edge の等長実現問題)
- 楕円の平行曲線に $(3,4)$ -カスプ辺が表れる.
(曲面)

2. 準備

[曲線の準備

- 特異点
- (3,4)-カusp 辺
- m-type edge
- 右同値
- 右左同値
- 合同
- isometric
- same image
- symmetry, (orientation-preserving / orientation-reversing)symmetry
- (effective / non-effective)symmetry, 向きを保つ, 向きを反転する
- ~~面積~~ 符号つき面積密度関数 $\lambda(u, v)$
- 向きを同調した単位法ベクトル場
- adapted coordinate system
- 特異曲率 (m : 偶数奇数両方), 極限法曲率
- $\kappa_s(u) = \kappa(u) \sin \theta, \kappa_v(u) = \kappa(u) \cos \theta$ の証明 (特に、 m が偶数の場合)
- isometric dual
- inverse
- inverse dual
- 補題たち
- 主定理 B の補題 (HNSUY Prop 5.1 の (3,4)-CE 版)
- 主定理 B の補題の補題 (20250725.pdf の Prop 2.1)

m-折目特異点

[曲線の準備

- HNSUY 0章, 1章 の用語
- orientation-reversing symmetry (preserving)
- m-type edge の定義

- Hattori 論文で登場した用語
- 特異曲率, 極限法曲率の定義
- (m の偶奇に関わらず)

$$K_s = K \cos \theta$$

$$K_v = K \sin \theta \quad \text{の証明}$$

補題

定理 A, B

のセクションに入る?

「m-type edge」の
別セクションを
作ってよい?
(m-type edge の
特異曲率)

2.1. 補題の準備

← 主定理のセクションに入る。

以降, $\mathcal{G}_{m,*}^\omega$ は実解析的な m-type edge の集合とする。

補題 1. m を奇数, $f \in \mathcal{G}_{m,**}^\omega$ として, $T \in O(3)$ を orientation-reversing symmetry とする。
このとき, $T \circ f$ は

$$T \circ f = \begin{cases} f_* & (\det T = 1) \\ \check{f}_* & (\det T = -1) \end{cases}$$

である。

証明. ★ TODO: ここを埋める★

□

補題 2. $S \in O(3)$ を orientation-preserving symmetry とする。このとき, $\det S = -1$ である。

証明. ★ TODO: ここを埋める★

□

補題 3. C が平面 Π 内にあるとして, Π に関する鏡映を S とする. このとき, 任意の $f \in \mathcal{G}_{m,*}^\omega(\mathbf{R}_f^2, \mathbf{R}^3, C)$ に対して

$$\check{f} = S \circ f$$

が成り立つ.

証明. 平面曲線 $\mathbf{c}(u)$ 内の従法線ベクトル $\mathbf{b}(u)$ は u に依存しない定ベクトル \mathbf{b}_0 として表せ, 平面 Π 内の法ベクトルである. 主法線ベクトルを $\mathbf{n}(u)$ とするとき,

$$S \circ \mathbf{n}(u) = \mathbf{n}(u), \quad S \circ \mathbf{b}_0 = -\mathbf{b}_0$$

が成り立つ. $g := S \circ f$ とおくと, g と f は同じ第一基本形式をもち, さらに $v = 0$ 上では,

$$g(u, 0) = S \circ f(u, 0) = S\mathbf{c}(u) = \mathbf{c}(u)$$

より, $g = f$ または $g = \check{f}$ である. 今, f (resp. g) のカスプ方向を \mathbf{x}_f (resp. \mathbf{x}_g), 角度関数を θ_f (resp. θ_g) とするとき,

$$\mathbf{x}_f = (\cos \theta_f) \mathbf{n} - (\sin \theta_f) \mathbf{b}_0$$

$$\mathbf{x}_g = (\cos \theta_g) \mathbf{n} - (\sin \theta_g) \mathbf{b}_0$$

が成り立つ. m の偶奇に応じて f と g の関係式を求める.

m が偶数の場合を考える. $g = S \circ f$ であるため \mathbf{x}_g は,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_g &= S \circ \mathbf{x}_f \\ &= (\cos \theta_f) S \circ \mathbf{n} - (\sin \theta_f) S \circ \mathbf{b}_0 \\ &= (\cos \theta_f) \mathbf{n} + (\sin \theta_f) \mathbf{b}_0 \\ &= (\cos(-\theta_f)) \mathbf{n} - (\sin(-\theta_f)) \mathbf{b}_0 \end{aligned}$$

である. よって, $\theta_g = -\theta_f$ であるため, $g = \check{f}$ が成り立つ.

m が奇数の場合を考える. f の向きに同調する単位法ベクトル場を ν_f とおく. このとき, $\nu_g := (\det S) S \nu_f$ は g の向きに同調する単位法ベクトル場である. 実際, g の符号付き密度関数 $\det(g_u, g_v, \nu_g)$ を考えると,

$$\begin{aligned} \det(g_u, g_v, \nu_g) &= (\det S) \det((Sf)_u, (Sf)_v, S\nu_f) \\ &= (\det S) \det(Sf_u, Sf_v, S\nu_f) \\ &= \underbrace{(\det S)(\det S)}_1 \det(f_u, f_v, \nu_f) \\ &= \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

となる. したがって, $\hat{\nu}_g(u) := \nu_g(u, 0)$ は

$$\hat{\nu}_g(u) = (\det S) S \nu_f(u, 0) = (\det S) S \hat{\nu}_f(u)$$

をみたす. 今, $Sc(u) = \mathbf{c}(u)$ より $Sc'(u) = \mathbf{c}'(u)$ なので, \mathbf{x}_g は

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_g(u) &= \hat{\nu}_g(u) \times \mathbf{c}'(u) \\ &= (\det S)S\hat{\nu}_f(u) \times S\mathbf{c}'(u) \\ &= \underbrace{(\det S)(\det S)}_1 S(\hat{\nu}_f(u) \times \mathbf{c}'(u)) \\ &= S\mathbf{x}_f(u)\end{aligned}$$

となる. したがって \mathbf{x}_g は,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_g &= S \circ \mathbf{x}_f \\ &= (\cos \theta_f)S \circ \mathbf{n} - (\sin \theta_f)S \circ \mathbf{b}_0 \\ &= (\cos \theta_f)\mathbf{n} + (\sin \theta_f)\mathbf{b}_0 \\ &= (\cos(-\theta_f))\mathbf{n} - (\sin(-\theta_f))\mathbf{b}_0\end{aligned}$$

である. よって, $\theta_g = -\theta_f$ であるため, $g = \check{f}$ が成り立つ. 以上より, m の偶奇に関わらず $\check{f} = S \circ f$ が成り立つ. \square

補題 4. m を奇数, $f \in \mathcal{G}_{m,**}^\omega$, $T \in O(3)$ を *orientation-reversing symmetry*, $S \in O(3)$ を *orientation-preserving symmetry* とする. このとき, $S \circ T \circ f$ は

$$S \circ T \circ f = \begin{cases} \check{f}_* & (\det T = 1) \\ f_* & (\det T = -1) \end{cases}$$

である.

証明. ★ TODO: ここを埋める ★ \square

補題 5. m を奇数, $f \in \mathcal{G}_{m,**}^\omega$, $S \in O(3)$ を *orientation-preserving symmetry*, φ を *effective symmetry*, J を φ のヤコビ行列とする. このとき, $S \circ f \circ \varphi$ は

$$S \circ f \circ \varphi = \begin{cases} \check{f}_* & (\text{sgn}(\det J) = 1) \\ f_* & (\text{sgn}(\det J) = -1) \end{cases}$$

である.

証明. ★ TODO: ここを埋める ★ \square

補題 6. φ を *non-effective symmetry*, J を φ のヤコビ行列, $\varepsilon := \text{sgn}(\det J)$ とする. このとき, $\varepsilon = -1$ である.

証明. ★ TODO: ここを埋める ★ \square

補題 7. m を奇数, $f \in \mathcal{G}_{m,**}^\omega$, $T \in O(3)$ を *orientation-reversing symmetry*, φ を *non-effective symmetry*, J を φ のヤコビ行列とする. このとき, $T \circ f \circ \varphi$ は

$$T \circ f \circ \varphi = \begin{cases} \check{f}_* & (\det T = 1) \\ f_* & (\det T = -1) \end{cases}$$

である.

証明. ★ TODO : ここを埋める★

□

補題 8. φ_1 と φ_2 を 微分同相写像, J_1 を φ_1 のヤコビ行列 J_2 を φ_2 のヤコビ行列とする. さらに, $\varphi_{12} := \varphi_1 \circ \varphi_2$ として, J_{12} を φ_{12} のヤコビ行列とする. このとき,

$$\operatorname{sgn}(\det J_{12}) = \operatorname{sgn}(\det J_1) \operatorname{sgn}(\det J_2)$$

である.

証明. ★ TODO : ここを埋める★

□

補題 9. m を奇数, $f \in \mathcal{G}_{m,**}^\omega$, φ_1 を *non-effective symmetry*, φ_2 を *effective symmetry*, J_2 を φ_2 のヤコビ行列とする. このとき, $f \circ \varphi_1 \circ \varphi_2$ は

$$f \circ \varphi_1 \circ \varphi_2 = \begin{cases} \check{f}_* & (\operatorname{sgn}(\det J_2) = 1) \\ f_* & (\operatorname{sgn}(\det J_2) = -1) \end{cases}$$

である.

証明. ★ TODO : ここを埋める★

□



3. n 次 Kossowski 計量の等長実現定理

- HNSUY 2章
- Hattori 主定理 (m-type edge の 変形定理 ⁶⁸)

(定理Ⅱ)

4. 主定理 A

補題 10. $f \in \mathcal{G}_{m,**}^\omega$, φ を non-effective symmetry とする (m : 奇数). このとき, $f \circ \varphi$ は

$$f \circ \varphi = \check{f}$$

である.

証明. ★ TODO: ここを埋める ★ m が偶数の場合を考える.

← 折り目特異点,

次に, m が奇数の場合を考える. φ を non-effective symmetry として, $g := f \circ \varphi$ とする. g と f の第一基本形式は一致し, さらに f と g の特異曲線 $\{v = 0\}$ 上では

$$f(u, 0) = \mathbf{c}(u)$$

$$f \circ \varphi(u, 0) = f(u, 0) = \mathbf{c}(u)$$

であるため, $f \circ \varphi = f$ または \check{f} が成り立つ. ν_g (resp. ν_f) を g (resp. f) の単位法ベクトル場とする. 向きを同調した g の単位法ベクトル場を求める. J を $\varphi(u, v)$ のヤコビ行列, $\varepsilon := \text{sgn}(\det J)$, $\nu_g = \varepsilon \nu_f \circ \varphi$, $\lambda := \det(f_u, f_v, \nu_f) \geq 0$ とすると,

$$\begin{aligned} \det(g_u, g_v, \nu_g)(u, v) &= \det((f \circ \varphi(u, v))_u, (f \circ \varphi(u, v))_v, \varepsilon \nu_f \circ \varphi(u, v)) \\ &= \varepsilon(\det J)(\lambda \circ \varphi)(u, v) \\ &= \underbrace{|\det J|}_{>0} \underbrace{(\lambda \circ \varphi)(u, v)}_{\geq 0} \geq 0. \end{aligned}$$

よって, $\nu_g = \varepsilon \nu_f \circ \varphi$ は向きを同調した g の単位法ベクトル場である. 次に, g (resp. f) のカスプ方向を \mathbf{x}_g (resp. \mathbf{x}_f) とすると,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_g(u) &:= \hat{\nu}_g(u) \times \mathbf{c}'(u) \\ &= \varepsilon \nu_f \varphi(u, 0) \times \mathbf{c}'(u) \\ &= \varepsilon \nu_f(u, 0) \times \mathbf{c}'(u) \\ &= \varepsilon \mathbf{x}_f(u) \quad \dots (**) \end{aligned}$$

となる. g のカスプ角 θ_g を用いると $\mathbf{x}_g(u) = \cos \theta_g(u) \mathbf{n}(u) - \sin \theta_g(u) \mathbf{b}(u)$ と表せることに注意して, 式 (**) に $\mathbf{x}_f(u)$ を代入すると,

$$\mathbf{x}_g(u) = \varepsilon(\cos \theta_f(u) \mathbf{n}(u) - \sin \theta_f(u) \mathbf{b}(u))$$

と表せる. φ は non-effective symmetry であるため, 補題 6 より $\varepsilon = -1$ の場合のみを考えればよい. $\varepsilon = -1$ の場合, $\mathbf{x}_g(u)$ は

$$\mathbf{x}_g(u) = \cos(\pi + \theta_f(u)) \mathbf{n}(u) - \sin(\pi + \theta_f(u)) \mathbf{b}(u)$$

であるため, $\theta_g(u) = \pi + \theta_f(u)$ が成り立つ. $\theta_g(u) = \theta_f(u)$ または $-\theta_f(u)$ のいずれかであるため, これを満たすのは $\theta_g(u) = -\theta_f(u)$ である. よって,

$$f \circ \varphi = \check{f}$$

が成り立つ. □

補題 11. $f \in \mathcal{G}_{m,**}^\omega$, φ を *effective symmetry*, J を φ のヤコビ行列とする. このとき, $f \circ \varphi$ は

$$f \circ \varphi = \begin{cases} f_* & (\text{sgn}(\det J) = 1) \\ \check{f}_* & (\text{sgn}(\det J) = -1) \end{cases} \quad \leftarrow m \text{ が奇数の場合}$$

である.

証明. $g := f \circ \varphi$ とする. g の第一基本形式は ds_f^2 と等しく, 特異曲線 $\{v = 0\}$ 上を考えると,

$$g(u, 0) = f \circ \varphi(u, 0) = f(-u, 0) = \mathbf{c}(-u)$$

であるため, $g = f_*$ または \check{f}_* である. \dots (1)

次に, g の単位法ベクトル場を考える. ν_g (resp. ν_f) を g (resp. f) の単位法ベクトル場とする. 向きを同調した g の単位法ベクトル場を求める. $\varepsilon := \text{sgn}(\det D\varphi)$, $\nu_g = \varepsilon \nu_f \circ \varphi$, $\lambda := \det(f_u, f_v, \nu_f) \geq 0$ とすると,

$$\begin{aligned} \det(g_u, g_v, \nu_g)(u, v) &= \det((f \circ \varphi(u, v))_u, (f \circ \varphi(u, v))_v, \nu_g(u, v)) \\ &= \det((f \circ \varphi(u, v))_u, (f \circ \varphi(u, v))_v, \varepsilon \nu_f \circ \varphi(u, v)) \\ &= \varepsilon(\det J)(\lambda \circ \varphi)(u, v) \quad (\because \text{合成関数の微分より}) \\ &= \underbrace{|\det J|}_{>0} \underbrace{(\lambda \circ \varphi)(u, v)}_{\geq 0} \geq 0. \end{aligned}$$

よって, $\nu_g = \varepsilon \nu_f \circ \varphi$ は向きを同調した g の単位法ベクトル場である. 次に, g (resp. f) のカスプ方向を \mathbf{x}_g (resp. \mathbf{x}_f) とすると,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_g(u) &:= \hat{\nu}_g(u) \times \mathbf{c}'_*(u) \quad (\mathbf{c}_*(u) := \mathbf{c}(-u)) \\ &= \varepsilon \nu_f \circ \varphi(u, 0) \times (-\mathbf{e}(-u)) \\ &= \varepsilon \hat{\nu}_f(-u) \times (-\mathbf{e}(-u)) \quad (\hat{\nu}_f(u) := \nu_f(u, 0)) \\ &= -\varepsilon \mathbf{x}_f(-u) \quad \dots (2) \end{aligned}$$

となる. g のカスプ角 θ_g を用いると $\mathbf{x}_g(u) = \cos \theta_g(u) \mathbf{n}(-u) + \sin \theta_g(u) \mathbf{b}(-u)$ と表せることに注意して, 式 (2) に $\mathbf{x}_f(-u)$ を代入すると,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_g(u) &= -\varepsilon(\cos \theta_f(-u) \mathbf{n}(-u) - \sin \theta_f(-u) \mathbf{b}(-u)) \\ \therefore \mathbf{x}_g(0) &= -\varepsilon(\cos \theta_f(0) \mathbf{n}(0) - \sin \theta_f(0) \mathbf{b}(0)) \end{aligned}$$

と表せる.

$\varepsilon = 1$ の場合, $\mathbf{x}_g(0) = \cos(\pi - \theta_f(0)) \mathbf{n}(0) + \sin(\pi - \theta_f(0)) \mathbf{b}(0)$ であるため, $\theta_g(0) = \pi - \theta_f(0)$ であり, これを満たすのは

$$\theta_g(0) = \theta_f(0) \quad \dots (3)$$

である (特に, $\theta_f(0) = \frac{\pi}{2}$).

$\varepsilon = -1$ の場合, $\mathbf{x}_g(0) = \cos(-\theta_f(0))\mathbf{n}(0) + \sin(-\theta_f(0))\mathbf{b}(0)$ であるため,

$$\theta_g(0) = -\theta_f(0) \quad \dots (4)$$

である. 以上の (1)(3)(4) より, $f \circ \varphi$ は

$$f \circ \varphi = \begin{cases} f_* & (\varepsilon = 1) \\ \check{f}_* & (\varepsilon = -1) \end{cases}$$

である. □

注意 12. m が偶数の場合, 補題 11 の $f \circ \varphi$ は

$$f \circ \varphi = \check{f}_*$$

となり, $\text{sgn}(\det J)$ の値に依存しない. ★ TODO: 直前の補題とまとめる ★

定理 13 ((3,4)-カスプ辺の右同値類の個数). n_f を $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ の右同値類の数 (つまり, 像の数) とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) m が偶数の場合

(a) $n_f = 2, 4$ である.

(b) $n_f = 4 \iff ds_f^2$ は *effective symmetry* を持たない.

(2) m が奇数の場合

(a) $n_f = 1, 2, 4$ である.

(b) $n_f = 4 \iff ds_f^2$ は *symmetry* を持たない.

(c) $n_f = 1 \iff ds_f^2$ は *effective symmetry* と *non-effective symmetry* の両方を持つ.

証明. まず, m が偶数の場合の主張を示す. $n_f = 4 \implies ds_f^2$ が *effective symmetry* を持たないことの対偶を示す. ds_f^2 が *effective symmetry* φ を持つと仮定する. 補題 11 と注意 12 より, $f \circ \varphi = \check{f}_*$ かつ $\check{f} \circ \varphi = f_*$ である. よって, $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ の右同値類の数は 2 以下である. 特に, $n_f < 4$ であることが分かる. $\dots (*)$

逆に, $n_f \neq 4 \implies ds_f^2$ は *effective symmetry* をもつことを示す. $n_f \neq 4$ とすると, $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ のうち, いずれか 2 つが右同値である. 右同値な一方を f , もう一方を

$$g \in \{\check{f}, f_*, \check{f}_*\}$$

と仮定してよい. 補題 10 および補題 11 より, f と \check{f} は右同値にはなり得ないので $g = f_*$ または $g = \check{f}_*$ である. 仮定より f と g が右同値であるので, ある微分同相写像 φ が存在して, $f \circ \varphi = f_*$ または $f \circ \varphi = \check{f}_*$ である. よって, 補題 11 と注意 12 より, いずれの場合でも f は *effective symmetry* をもつ. $\dots (**)$

次に, $n_f = 2, 4$ を示す. まず, f と \check{f} は右同値になり得ないため, $n_f \geq 2$ である. さらに $(*)$, $(**)$ より

$$\begin{aligned} n_f \neq 4 &\implies ds_f^2 \text{ は effective symmetry を持つ} \\ &\implies n_f \leq 2 \end{aligned}$$

であるため, 主張が従う.

次に, m が奇数の場合の主張を示す. まず, $n_f = 4 \implies ds_f^2$ は symmetry を持たない を示すために対偶を示すことを考える. つまり, ds_f^2 がある symmetry φ を持つと仮定する.

- (i) φ が effective symmetry の場合, $f \circ \varphi$ および $\check{f} \circ \varphi$ の第一基本形式は ds_f^2 と一致し, 特異曲線 $\{v = 0\}$ 上では,

$$\begin{aligned} f \circ \varphi(u, 0) &= f(-u, 0) = \mathbf{c}(-u) \\ \check{f} \circ \varphi(u, 0) &= \check{f}(-u, 0) = \mathbf{c}(-u) \end{aligned}$$

であるため, $f \circ \varphi$ および $\check{f} \circ \varphi$ はそれぞれ f_* , \check{f}_* のいずれかと一致する.

(I) $f \circ \varphi = f_*$ なら, f と f_* は右同値である. (同様に, \check{f} は \check{f}_* と右同値である)

(II) $f \circ \varphi = \check{f}_*$ なら, f と \check{f}_* は右同値である. (同様に, \check{f} は f_* と右同値である)

以上より, $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ の右同値類の個数は 2 である.

- (ii) φ が non-effective symmetry の場合, φ が effective symmetry である場合と同様の議論で, $f \circ \varphi$ および $\check{f} \circ \varphi$ の第一基本形式は ds_f^2 と一致し, 特異曲線 $\{v = 0\}$ 上では,

$$\begin{aligned} f \circ \varphi(u, 0) &= f(u, 0) = \mathbf{c}(u) \\ f_* \circ \varphi(u, 0) &= f_*(u, 0) = \mathbf{c}(-u) \end{aligned}$$

であるため, $f \circ \varphi$ は \check{f} と一致し, $f_* \circ \varphi$ は \check{f}_* と一致する. よって, f は \check{f} と右同値であり, f_* は \check{f}_* と右同値である. よって, $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ の右同値類の個数は 2 である.

以上の (i)(ii) より, $n_f = 4 \implies ds_f^2$ は symmetry を持たない を示した.

逆に, ds_f^2 は symmetry を持たない $\implies n_f = 4$ を示す. $n_f < 4$ であると仮定する. f と $g \in \{\check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ が右同値であるとして, 一般性を失わない.

- (i) $g = f_*$ または \check{f}_* の場合, f と右同値であるので, ある微分同相写像 φ が存在して, $g = f \circ \varphi$ を満たす. それぞれの第一基本形式 ds^2 を $ds_g^2, ds_{f \circ \varphi}^2$ とすると,

$$\begin{aligned} ds_g^2 &= ds_f^2 \\ ds_{f \circ \varphi}^2 &= \varphi^* ds_f^2 \end{aligned}$$

であるため, $ds_f^2 = \varphi^* ds_f^2$ である. よって, φ は Id か symmetry である.

もし φ が Id なら $f = g$ となるため,

$$f = f_* \quad \text{または} \quad f = \check{f}_*$$

が成り立つ. しかし, これでは曲線の像 $C = c(J)$ の向きが f と f_* で同じとなり, 矛盾する. よって, $\varphi \neq \text{Id}$ であり, φ は ds_f^2 の symmetry である.

(ii) $g = \check{f}$ の場合, f と右同値であるので, ある微分同相写像 φ が存在して, $\check{f} = f \circ \varphi$ を満たす. (a) の場合と同様の議論で, $ds_f^2 = \varphi^* ds_{\check{f}}^2$ である. もし $\varphi = \text{Id}$ なら, $f = \check{f}$ である.

一方, f のカスプ角 θ_f および単位法ベクトル ν_f は f から決まるので,

$$f = \check{f} \implies \theta_f = \theta_{\check{f}}$$

となるが, \check{f} の性質より $\theta_{\check{f}} = -\theta_f$ であるため, $\theta = 0$ となる. しかし, カスプ角の定義域は $0 < |\theta| < \pi$ であったため, この事実と矛盾する. よって, $\varphi \neq \text{Id}$ であり, φ は ds_f^2 の symmetry である.

以上の (a)(b) より, ds_f^2 は symmetry を持たない $\implies n_f = 4$ を示した.

次に, $n_f = 1 \implies ds_f^2$ は effective symmetry と non-effective symmetry の両方を持つを示す. $n_f = 1$ であると仮定すると, f は $\check{f}, f_*, \check{f}_*$ の 3 つと右同値であるため, 右同値の定義よりある微分同相写像 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ が存在して,

$$\check{f} = f \circ \varphi_1, \quad f_* = f \circ \varphi_2, \quad \check{f}_* = f \circ \varphi_3$$

が成り立つ. 補題 10 より φ_1 は non-effective symmetry であり, 補題 11 より φ_2 と φ_3 は effective symmetry である. 以上より, ds_f^2 は effective symmetry と non-effective symmetry の両方を持つ.

逆に, ds_f^2 は effective symmetry と non-effective symmetry の両方を持つ $\implies n_f = 1$ を示す. 仮定より effective symmetry φ と non-effective symmetry ψ が存在するため,

$$\varphi \text{ が存在} \implies f \circ \varphi = f_* \text{ または } \check{f}_* \implies f \text{ と } f_* \text{ または } \check{f}_* \text{ が右同値である}$$

$$\psi \text{ が存在} \implies f \circ \psi = \check{f} \implies f \text{ と } \check{f} \text{ が右同値である}$$

が成り立つ. f と f_* が右同値, つまり $f \circ \varphi = f_*$ の場合を考える. $\check{f} \circ \varphi$ は第一基本形式が $ds_{\check{f}}^2$ と等しく, 特異曲線 $\{v = 0\}$ 上では,

$$\check{f} \circ \varphi(u, 0) = \check{f}(-u, 0) = \mathbf{c}(-u)$$

であるため, $\check{f} \circ \varphi = f_*$ または \check{f}_* である. すでに $f \circ \varphi = f_*$ であったため, $\check{f} \circ \varphi = \check{f}_*$ である. 実際, もし $\check{f} \circ \varphi = f_*$ だと, $f \circ \varphi = \check{f} \circ \varphi$ つまり $f = \check{f}$ となり矛盾する.

f と \check{f}_* が右同値の場合, 同様の議論で $\check{f} \circ \varphi = f_*$ である. 以上より, いずれの場合でも f が $\check{f}, f_*, \check{f}_*$ と右同値になるため, ds_f^2 は effective symmetry と non-effective の両方を持つ $\implies n_f = 1$ が成り立つ.

最後に, $n_f = 1, 2, 4$ を示す. (b) の後半の証明から, $n_f < 4 \implies ds_f^2$ は symmetry をもつ. さらに, (b) の前半の証明から, ds_f^2 が symmetry をもつ $\implies n_f \leq 2$ であるため, $n_f = 1, 2, 4$ のいずれかである. \square

注意 14. 定理 13 の m が奇数の場合において, $n_f = 2$ は ds_f^2 が effective symmetry か non-effective symmetry のいずれか一方のみを持つことと同値である.

⊕ (m : 偶, 奇 ごと)

・ $n_f = 1, 2, 4$ に対応する $f(u, v)$ の具体例

「準備」に入れる。

5. 主定理 B

補題 15 (orientation-preserving symmetry と平面曲線の関係). 曲線 C が *orientation-preserving symmetry* T をもつ $\iff C$ は平面曲線であり, T は平面に関する折り返しである.

証明. \Leftarrow は HNSUY 定義 1.2 で述べられているため, \Rightarrow を示せばよい. $\mathbf{c}(u)$ を弧長パラメータ表示, $\kappa(u)$ を空間曲線としての曲率として, $\kappa(u) > 0$ とする. 標準基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ をそれぞれ,

$$\mathbf{e}_1 := (1, 0, 0)^T, \quad \mathbf{e}_2 := (0, 1, 0)^T, \quad \mathbf{e}_3 := (0, 0, 1)^T$$

とおく. 回転と平行移動により, $\mathbf{c}'(u)$ と主法線ベクトル $\mathbf{n}(u)$ は一般性を失わずに

$$\begin{aligned} \mathbf{c}'(0) &= (1, 0, 0)^T = \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{n}(0) &= \frac{\mathbf{c}''(0)}{\kappa(0)} = (0, 1, 0)^T = \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

と仮定してよい. $T\mathbf{c}(u) = \mathbf{c}(u)$ の両辺を u で微分すると,

$$T\mathbf{c}'(u) = \mathbf{c}'(u)$$

である. $u = 0$ を代入すると, $T\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1$ が成り立つ. さらにもう一度両辺を u で微分すると,

$$T\mathbf{c}''(u) = \mathbf{c}''(u)$$

であるので, $u = 0$ を代入すると $T\mathbf{c}''(0) = \mathbf{c}''(0)$ となり, つまり $T\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2$ が成り立つ.

仮定より $\det T = \pm 1$ かつ T は恒等写像ではないので, T は具体的に

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

のみである. $\mathbf{c}(u) = (x(u), y(u), z(u))^T$ とすると, $T\mathbf{c}(u)$ は

$$T\mathbf{c}(u) = (x(u), y(u), -z(u))^T$$

である. さらに仮定より $T\mathbf{c}(u) = \mathbf{c}(u)$ であったので,

$$(x(u), y(u), -z(u))^T = (x(u), y(u), z(u))^T$$

が任意の u で成立する. したがって $z(u) = 0$ であるため, $\mathbf{c}(u)$ は平面曲線である. □

命題 16 ($T \circ f \circ \varphi$ との合同関係). f の特異曲線 C が *orientation-reversing symmetry* T をもち, ds_f^2 が *effective symmetry* φ をもつとする. このとき, m の偶奇に応じて次が成り立つ.

(1) m が偶数の場合

(a) T が正 ($\det T = 1$) ならば, $T \circ f \circ \varphi = \check{f}$. つまり, f と \check{f} は合同である.

(b) T が負 ($\det T = -1$) ならば, $T \circ f \circ \varphi = f$.

(2) m が奇数の場合

- (a) φ のヤコビアンが正であり, かつ T が正ならば, $T \circ f \circ \varphi = f$ である. さらに, 特異曲率 κ_s と特異点 p について $\kappa_s(p) = 0$ が成り立つ.
- (b) φ のヤコビアンが正であり, かつ T が負ならば, $T \circ f \circ \varphi = \check{f}$ である. さらに, $\kappa_s(p) = 0$ が成り立つ.
- (c) φ のヤコビアンが負であり, かつ T が正ならば, $T \circ f \circ \varphi = \check{f}$ である.
- (d) φ のヤコビアンが負であり, かつ T が負ならば, $T \circ f \circ \varphi = f$ である.

証明. TODO: ここを書く

□

命題 17 (等長双対と合同であるための必要十分条件). f と \check{f} が合同であるための必要十分条件は, 次のように与えられる.

- (1) m が偶数の場合, 次の (a)(b) のいずれかを満たしている.
 - (a) C が平面曲線である
 - (b) C が正の *orientation-reversing symmetry* をもち, かつ ds_f^2 が *effective symmetry* をもつ.
- (2) m が奇数の場合, 次の (a)(b)(c)(d) のいずれかを満たしている.
 - (a) C が平面曲線である
 - (b) ds_f^2 が *non-effective symmetry* をもつ
 - (c) C が正の *orientation-reversing symmetry* をもち, さらに ds_f^2 が向きを反転させる (ヤコビアンが負) *effective symmetry* をもつ
 - (d) C が負の *orientation-reversing symmetry* をもち, さらに ds_f^2 が向きを保つ (ヤコビアンが正) *effective symmetry* をもつ

証明. m が偶数の場合を考える. C が平面内にあるときは補題 3 より f と \check{f} は合同であるため, (a) は直ちに成り立つ. そのため, C が平面曲線でない場合かつ f と \check{f} が合同である \implies (b) が成り立つを示す. f と \check{f} が合同であると仮定すると, ある \mathbb{R}^3 の等長変換 T と微分同相写像 φ が存在して,

$$\check{f} = T \circ f \circ \varphi$$

を満たす. 両辺の第一基本形式を考えると,

$$(\text{左辺}) : ds_{\check{f}}^2 = ds_f^2$$

$$(\text{右辺}) : ds_{T \circ f \circ \varphi}^2 = \varphi^* ds_{T \circ f}^2 = \varphi^* ds_f^2$$

であるため, $\varphi^* ds_f^2 = ds_{\check{f}}^2$ が成り立つ. この式より φ は恒等写像か *symmetry* であるため, $\varphi(u, 0) = (u, 0)$ または $\varphi(u, 0) = (-u, 0)$ が成り立つ. T が単位行列の場合, f と \check{f} が右同値となり矛盾する. よって, T は単位行列ではなく C の *orientation-preserving symmetry* または *orientation-reversing symmetry* である.

もし T が *orientation-preserving symmetry* であるならば, 補題 15 より C は平面曲線となり矛盾する. したがって, T は *orientation-reversing symmetry* である. このとき, $\varphi(u, 0) = (-u, 0)$ である. すなわち, φ は ds_f^2 の *effective symmetry* である. 命題 16 より, T は正であるため (b) を満たしている.

逆に (b) を仮定すると, 命題 16 より f と \check{f} は合同である. 以上より, m が偶数の場合の必要十分条件を示した.

次に, m が奇数の場合を考える. まず, f と \check{f} が合同である \implies (a)(b)(c)(d) のいずれかが成り立つ を示す. f と \check{f} が合同であると仮定する. つまり, ある $T \in O(3)$ と 微分同相写像 φ が存在して,

$$T \circ f \circ \varphi = \check{f} \quad \cdots (*)$$

と表せる.

(あ) $T = \text{Id}$ の場合

与式 (*) は $f \circ \varphi = \check{f}$ と表せる. 補題 10 より φ が non-effective symmetry であるため, (b) に該当する.

(い) T が orientation-preserving symmetry の場合

補題 15 より, f の特異曲線 C は平面曲線である. これは (a) に該当する.

(う) T が orientation-reversing symmetry の場合

命題 16 より,

- T が正であり, effective symmetry φ のヤコビアンが負である
- T が負であり, effective symmetry φ のヤコビアンが正である

のいずれかに該当する. これは (c) または (d) に該当する.

以上より, f と \check{f} が合同である \implies (a)(b)(c)(d) のいずれかが成り立つ を示した.

逆に, (a)(b)(c)(d) のいずれかが成り立つ $\implies f$ と \check{f} が合同である を示す.

- (a) が成立すると仮定する. 補題 15 より, 平面に関する折返し $S \in O(3)$ を用いて

$$\check{f} = S \circ f$$

が成り立つ. よって f と \check{f} は合同である.

- (b) が成立すると仮定する. m が奇数であるため, 補題 10 より f と \check{f} は合同である.
- (c) が成立すると仮定する. これは命題 16 の (2)(c) に該当するため, 正の orientation-reversing symmetry T と ヤコビアンが負である effective symmetry φ を用いて

$$T \circ f \circ \varphi = \check{f}$$

が成り立つ. よって f と \check{f} は合同である.

- (d) が成立すると仮定する. これは命題 16 の (2)(b) に該当するため, 負の orientation-reversing symmetry T と ヤコビアンが正である effective symmetry φ を用いて

$$T \circ f \circ \varphi = \check{f}$$

が成り立つ. よって f と \check{f} は合同である.

以上より, (a)(b)(c)(d) のいずれかが成り立つ $\implies f$ と \check{f} が合同である を示した. \square

補題 18 (f_* と \check{f}_* の合同関係). 命題 17 が成り立っている, つまり f と \check{f} が互いに合同である場合, f_* と \check{f}_* も互いに合同である.

証明. 命題 17 において, f を f_* に取り換えても, m が偶数の場合の (a)(b) および m が奇数の場合の (a)(b)(c)(d) は不変であることから従う. \square

定理 19 ((3,4)-カスプ辺の合同類の個数). N_f を $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ の合同類の数と定義する. このとき, $N_f \neq 3$ を満たす. さらに, m の偶奇に応じて次が成り立つ.

(1) m が偶数の場合,

(I) $N_f = 4 \iff C$ は *symmetry* をもたず, かつ ds_f^2 は *effective symmetry* をもたない.

(II) $N_f = 1 \iff$ 次のいずれかが成り立つ.

(a1) C が平面内で, *orientation-reversing symmetry* をもつ.

(a2) C が平面曲線 かつ ds_f^2 が *effective symmetry* をもつ.

(a3) C が正の *orientation-reversing symmetry* をもち, かつ ds_f^2 が *effective symmetry* をもつ.

(2) m が奇数の場合,

(I) $N_f = 4 \iff ds_f^2$ と C はいずれも *symmetry* を持たない.

(II) $N_f = 1 \iff$ 次のいずれかが成り立つ.

(a1) C は平面曲線 かつ C に *orientation-reversing symmetry* が存在する.

(a2) C は平面曲線 かつ ds_f^2 に *effective symmetry* が存在する.

(b1) ds_f^2 に *non-effective symmetry* が存在して, かつ C に *orientation-reversing symmetry* が存在する.

(b2) ds_f^2 に *non-effective symmetry* が存在して, かつ ds_f^2 に *effective symmetry* が存在する

(c) C に正の *orientation-reversing symmetry* が存在して, かつ ds_f^2 に向きを反転させる *effective symmetry* が存在する.

(d) C に負の *orientation-reversing symmetry* が存在して, かつ ds_f^2 に向きを保つ *effective symmetry* が存在する.

証明. TODO: ここを書く \square

④ 主定理 B の (a1)(a2)(b1)(b2)(c)(d) のいずれかが成立している場合の $(f, \check{f}, f_*, \check{f}_*)$

の具体的な形

④ $N_f = 1, 2, 4$ の場合の $f(u, v)$ の具体例

参考文献 [HNSUY], [Hattori], [H. Gorton] [S. Bodner]

- [1] J.W. Bruce and T.J. Gaffney, *Simple singularities of mappings $\mathbb{C}, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$* , J. Lond. Math. Soc., II. Ser. **26** (1982), 465–474.
- [2] T. Fukuma, 有限次退化特異点に対するガウス・ボンネの定理, 修士論文, 横浜国立大学, 2024.
- [3] Y. Hattori, A. Honda and T. Morimoto, *Bour’s theorem for helicoidal surfaces with singularities*, preprint (arXiv : 2310.16418).
- [4] A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Duality on generalized cuspidal edges preserving singular set images and first fundamental forms*, J. Singul. **22** (2020), 59–91.
- [5] A. Honda, K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada, *Isometric deformations of wave fronts at non-degenerate singular points*, Hiroshima Math. J. **50** (2020), 269–312.
- [6] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic 3-space*, Pacific J. Math. **221** (2005), 303–351.
- [7] M. Kossovski, *The Boy-Gauss-Bonnet theorems for C^∞ -singular surfaces with limiting tangent bundle*. Ann. Global Anal. Geom. **21** (2002), No. 1, 19–29.
- [8] L. F. Martins and K. Saji, *Geometric invariants of cuspidal edges*, Canad. J. Math. **68** (2016), no. 2, 445–462.
- [9] L. F. Martins and K. Saji, *Geometry of cuspidal edges with boundary*, Topol. Appl. **234** (2018) 209–219.
- [10] L.F. Martins, K. Saji, S.P. dos Santos and K. Teramoto, *Boundedness of geometric invariants near a singularity which is a suspension of a singular curve*, Revista de Lla UMA Vol. **67**, (2024), No. 2, 475–502.
- [11] L. F. Martins, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Behavior of Gaussian curvature and mean curvature near non-degenerate singular points on wave fronts*, Geometry and Topology of Manifold, Springer Proc. in Math. & Stat. **154**, 2016, Springer, 247–282.
- [12] Y. Matsushita, *Classifications of cusps appearing on plane curves*, preprint (arXiv:2402.12166).
- [13] K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada, *Isometric deformations of cuspidal edges*, Tohoku Math. J. (2) **68** (2016), 73–90.
- [14] I.R. Porteous, *Geometric differentiation for the intelligence of curves and surfaces*, Second edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [15] K. Saji, *Normal form of the swallowtail and its applications* Int. J. Math. 29, No. 7, Article ID 1850046, 17 p.
- [16] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. Math. (2) **169** (2009), No. 2, 491–529.
- [17] S. Shiba and M. Umehara, *The behavior of curvature functions at cusps and inflection points*, Differential Geom. Appl. **30** (2012), 285–299.
- [18] M. Umehara, K. Saji and K. Yamada, *Differential geometry of curves and surfaces with singularities*. Translated from the Japanese by Wayne Rossman. Series in Algebraic and Differential Geometry 1. Singapore: World Scientific. xvi, 370 p. (2022).