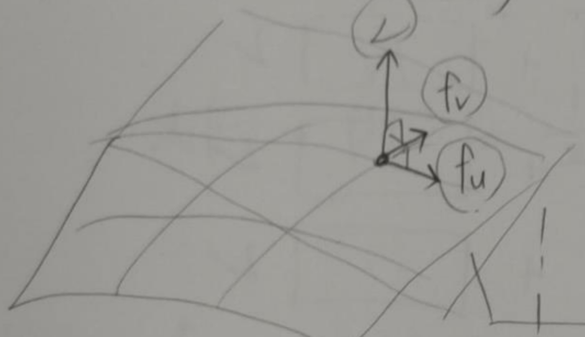
火2 数理科学 キ何 ②

ガウスコダッチ方程式

・ガウス枠

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ を パラメタ表示された曲面

(f_u、f_v : 一次独立)



$V := \mathrm{span}(f_u, f_v)$; 曲面 f の (u, v) における接空間

$\left(= \{ s f_u + t f_v \mid s, t \in \mathbb{R} \} \right)$

(曲面の曲がり具合は "$\mathcal{F}$ の変化率" とみれる)

$\Longleftrightarrow$

$\Longrightarrow \{ f_u, f_v, \nu \}$ は一次独立

(つまり、$\mathbb{R}^3$ の基底)

Def

$\mathcal{F} = \underbrace{(f_u, f_v, \nu)}$ $\quad (\det \mathcal{F} \neq 0)$

→ 3次正則行列

「$\mathcal{F} : D \longrightarrow GL_3\mathbb{R}$」を、ガウス枠 という。

$\mathcal{F}_u = (f_{uu},\ f_{uv},\ \nu_u)$

$\mathcal{F}_v = (f_{uv},\ f_{vv},\ \nu_v)$

$$\begin{cases} f_{uu} = \boxed{\Gamma^1_{11}} f_u + \boxed{\Gamma^2_{11}} f_v + \boxed{L} \nu \\ f_{uv} = \boxed{\Gamma^1_{12}} 〃 + \boxed{\Gamma^2_{12}} 〃 + \boxed{M} \nu \\ f_{vv} = \boxed{\Gamma^1_{22}} 〃 + \boxed{\Gamma^2_{22}} 〃 + \boxed{N} \nu \\ \nu_u = \boxed{} 〃 + \boxed{} 〃 + \boxed{} \nu \\ \nu_v = \boxed{} 〃 + \boxed{} 〃 + \boxed{} \nu \end{cases}$$

<u>Lemma 1</u> (Gauss formula)

Γ^i_{jk} は資料の式 (2.1) ~ (2.6) で定まるものとする

→ すべて、E、F、G (とその微分) で表される

<u>Proof (一部)</u>

$f_{uu} = \boxed{\alpha} f_u + \boxed{\beta} f_v + \boxed{\gamma} \nu$ …… (*)

とおく。

(*) と ν を内積させると

$f_{uu} \cdot \nu = \boxed{\gamma}\ \nu \cdot \nu$ $\quad (\nu \perp \alpha,\ \nu \perp \beta)$

$\therefore \gamma = f_{uu} \cdot \nu = \underline{L}$ と分かる

<u>(*) と f_u の内積を考えると</u>

$f_{uu} \cdot f_u = \boxed{\alpha}\ \underbrace{f_u \cdot f_u}_{E} + \boxed{\beta}\ \underbrace{f_u \cdot f_v}_{F}$

$\therefore \alpha E + \beta F = f_{uu} \cdot f_u$

$\overset{\text{テクニカル}}{=} \frac{1}{2}(f_u \cdot f_u)_u$

$\alpha E + \beta F = \frac{1}{2} E_u$ … ①

<u>(*) と f_v の内積を考えると</u>

$\alpha F + \beta G = f_{uu} \cdot f_v \ \left(= \underbrace{(f_u \cdot f_v)_u}_{F_u} - \underbrace{f_u \cdot f_{uv}}_{\frac{1}{2}E_v} \right)$

$\therefore \alpha F + \beta G = F_u - \frac{1}{2} E_v$ … ②

①、② より

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_u \\ F_u - \frac{1}{2} E_v \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_u \\ F_u - \frac{1}{2} E_v \end{pmatrix}$$

$\alpha = \Gamma^1_{11}$, $\beta = \Gamma^2_{11}$

注意

$F=0$ (つまり $f_u \perp f_v$) である座標系 (u,v)

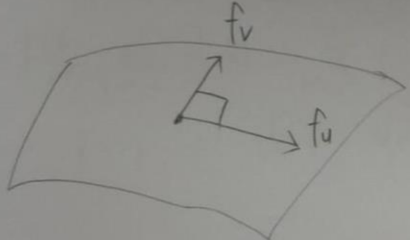
；直交座標系

このとき、Γ^i_{jk} は

$$\Gamma^1_{11} = \frac{E_u}{2E} \qquad \Gamma^2_{11} = -\frac{E_v}{2G}$$

$$\Gamma^1_{12} = \frac{E_v}{2E} \qquad \Gamma^2_{12} = \frac{G_u}{2G}$$

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{G_u}{2E} \qquad \Gamma^2_{22} = \frac{G_v}{2G}$$



← 座標変換を施すことで、

$(u,v) \longmapsto (x,y)$

と直交座標系にできる

Lemma 2 (Weingarten formula)

ν_u と ν_v はそれぞれ、

$$\begin{cases} \nu_u = -A^1_1 f_u - A^2_1 f_v \\ \nu_v = -A^1_2 f_u - A^2_2 f_v \end{cases}$$

と表される。(ただし、$A = \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 \\ A^2_1 & A^2_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$)

Remark

$F=0$ の時は、A は

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & \frac{1}{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{L}{E} & \frac{M}{E} \\ \frac{M}{G} & \frac{N}{G} \end{pmatrix}$$

となる。

まとめると

$$\mathcal{F}_u = (f_{uu},\ f_{uv},\ \nu_u)$$

$$= (\Gamma^1_{11} f_u + \Gamma^2_{11} f_v + L\nu,\quad \Gamma^1_{12} f_u + \Gamma^2_{12} f_v + M\nu,\quad -A^1_1 f_u - A^2_1 f_v + 0\nu)$$

$$= \underbrace{(f_u,\ f_v,\ \nu)}_{\mathcal{F}} \underbrace{\begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} & -A^1_1 \\ \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} & -A^2_1 \\ L & M & 0 \end{pmatrix}}_{\mathcal{U}\ \text{とおく}}$$

$\therefore \mathcal{F}_u = \mathcal{F}\mathcal{U}$

$\mathcal{F}_v$も同様に、$\mathcal{F}_v = \mathcal{F}\mathcal{V}$

（ただし、$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} \Gamma^1_{12} & \Gamma^1_{22} & -A^1_2 \\ \Gamma^2_{12} & \Gamma^2_{22} & -A^2_2 \\ M & N & 0 \end{pmatrix}$）

$$\begin{cases} \mathcal{F}_u = \mathcal{F}\mathcal{U} \\ \mathcal{F}_v = \mathcal{F}\mathcal{V} \end{cases}$$

を、（行列版）Gauss-Weingarten formula という。

ガウスコダッチ方程式

$$(\mathcal{F}_u)_v = (\mathcal{F}\mathcal{U})_v = \overset{\mathcal{F}\mathcal{V}}{\mathcal{F}_v}\mathcal{U} + \mathcal{F}\mathcal{U}_v = \mathcal{F}(\mathcal{V}\mathcal{U} + \mathcal{U}_v)$$

$$\|$$

$$(\mathcal{F}_v)_u = (\mathcal{F}\mathcal{V})_u = \underset{\mathcal{F}\mathcal{U}}{\mathcal{F}_u}\mathcal{V} + \mathcal{F}\mathcal{V}_u = \mathcal{F}(\mathcal{U}\mathcal{V} + \mathcal{V}_u)$$

（3×3 = 9本の方程式）

$\therefore \mathcal{U}_v - \mathcal{V}_u = \mathcal{U}\mathcal{V} - \mathcal{V}\mathcal{U}$ が成り立つ

両立条件、可積分条件という。

→ 次の3式と同値

コダッチ方程式

- $L_v - M_u = L\Gamma^1_{12} + M(\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}) - N\Gamma^2_{11}$ (2.13)
- $M_v - N_u = L\Gamma^1_{22} + M(\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}) - N\Gamma^2_{12}$ (2.14)
- $K = $（E, F, G のみの式） (2.15)

ガウス曲率

ガウス方程式

Corollary

ガウス曲率 $K = \dfrac{LN - M^2}{\cancel{LN - M^2}\ EG - F^2}$ は

E, G, F とその微分のみで表される。（ガウスの驚異の定理）

Remark $F=0$ のとき、K は

$$K = -\frac{1}{eg}\left\{\left(\frac{g_u}{e}\right)_u + \left(\frac{e_v}{g}\right)_v\right\}$$

と書ける。ただし、$e := \sqrt{E}$、$g := \sqrt{G}$.

Remark (u,v) が等温座標系

$\Longleftrightarrow F = 0$、$E = G$

このとき、$K = \dfrac{LN - M^2}{E^2}$、$H = \dfrac{L+N}{2E}$ であり

$$\begin{cases} K = -\dfrac{\Delta(\ln E)}{2E} & \text{: ガウス方程式} \\ L_v - M_u = E_v H & \\ M_v - N_u = -E_u H & \text{コダッチ方程式} \end{cases}$$

$f(u,v)$: 曲面

$\Downarrow$

$\mathrm{I} = E\,du^2 + 2F\,dudv + G\,dv^2$

$\mathrm{II} = L\,du^2 + 2M\,dudv + N\,dv^2$

$\Downarrow$

ガウス・コダッチ方程式（E, F, G, L, M, N の関係式）

逆も成立する

（曲面論の基本定理）

曲面論の基本定理

D : $\mathbb{R}^2$ の単連結領域として

E、F、G、L、M、N : D 上の C^∞ 級関数で

(i) $EG > 0$、$EG - F^2 > 0$

$\left(\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\text{ が正定値}\right)$

(ii) ガウスコダッチ方程式

を満たすとする。このとき、$\exists f : D \to \mathbb{R}^3$; パラメタ表示された曲面 s.t.

- f の第一基本形式 $\mathrm{I} = E\,du^2 + 2F\,dudv + G\,dv^2$
- f の第二基本形式 $\mathrm{II} = L\,du^2 + 2M\,dudv + N\,dv^2$

である。

等温座標系における基本定理 （E、$\cancel{F}$、$\cancel{G}$）

条件(i) $\Longleftrightarrow$ $E > 0$

(ii) $\Longleftrightarrow$ （3本の式）

E、H、Q（ホップ微分）で表す

以降. (u, v) を 等温座標系 とする.

Def

$\mathcal{E} := \dfrac{L - N - 2iM}{4}$ とし,

$z := u + iv \quad (dz = du + i\,dv)$

とする.

$Q := \mathcal{E}\,dz^2$ を Hopf 微分 という.

$$\begin{cases} dz = du + i\,dv \\ d\bar{z} = du - i\,dv \end{cases}$$

$$dz\,d\bar{z} = (du + i\,dv)(du - i\,dv) = du^2 + dv^2$$

$$\therefore \mathrm{I} = E\,du^2 + 2\overset{0}{F}\,du\,dv + \overset{E}{G}\,dv^2 = E(du^2 + dv^2) = E\,dz\,d\bar{z}.$$

$E, \cancel{F}, \cancel{G}, L, M, N \Longleftrightarrow E, H, Q$

Proposition

II も z, E, H, Q で書ける.

$$\mathrm{II} = Q + \bar{Q} + H\mathrm{I} = \mathcal{E}\,dz^2 + HE\,dz\,d\bar{z} + \bar{\mathcal{E}}\,d\bar{z}^2$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z} := \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial u} - i\dfrac{\partial}{\partial v}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} := \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial u} + i\dfrac{\partial}{\partial v}\right) \end{cases}$$ と定める.

$$\Longrightarrow \begin{cases} dz\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\right) = d\bar{z}\left(\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) = 1 \\ dz\left(\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) = d\bar{z}\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\right) = 0 \end{cases}$$

$\varphi = \varphi(u, v) = \varphi(z, \bar{z})$ に対して,

$$\varphi_z = \frac{1}{2}(\varphi_u - i\varphi_v)$$

$$\varphi_{z\bar{z}} = \frac{1}{4}\left\{(\varphi_u - i\varphi_v)_u + i(\varphi_u - i\varphi_v)_v\right\} = \frac{1}{4}(\varphi_{uu} + \varphi_{vv}) = \frac{1}{4}\Delta\varphi$$

Proposition

ガウスコダッチ方程式 $\Longleftrightarrow$ $$\begin{cases} (\ln E)_{z\bar{z}} = -\dfrac{E}{2}H^2 + \dfrac{2}{E}|\mathcal{E}|^2 & (\text{ガウス eq.}) \\ 2\mathcal{E}_{\bar{z}} = EH_z & (\text{コダッチ eq.}) \end{cases}$$

↳

曲面論の基本定理も、

E、H、Q

のみで表すことができる(次回).

Corollary

H: 一定 $\Longleftrightarrow$ Q: 正則関数 (holomorphic function)