

HYPERQUADRICS (二次超曲面)

P108

→ \mathbb{R}^{n+1} の球面に対して用いたのと同様の方法を.

\mathbb{R}^{n+1} の擬リーマン超曲面の族に適用できる.

- $\varrho \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{n+1})$ を、関数 $\varrho(n) := \langle n, n \rangle$ とする. 自然な座標に関して.

$$\varrho = \sum_{i=1}^n \varrho_i(u^i)^2 = - \sum_{i=1}^l (u^i)^2 + \sum_{j=l+1}^{n+1} (u^j)^2 \quad (\text{擬球})$$

である.

position vector field

もし P が \mathbb{R}^n 上の位置ベクトル場であれば、 $\varrho = \langle P, P \rangle$ である. したがって、

$\text{grad}(\varrho) = 2P$ である. なぜならば、全ての V に対して

$$\begin{aligned} \langle \text{grad}(\varrho), V \rangle &= V\varrho = V\langle P, P \rangle \quad \text{∴ リ・ビタ接続の性質} \\ &\stackrel{\text{gradの定義}}{=} 2 \langle D_V(P), P \rangle \quad \text{∴ } P \text{ は位置ベクトル場} \\ &= 2 \langle V, P \rangle \quad D_V(P) = V \\ &= \langle 2P, V \rangle \end{aligned}$$

となるからである. したがって $\langle \text{grad}(\varrho), \text{grad}(\varrho) \rangle = 4\varrho$ である.

$$\begin{aligned} \rightarrow & \left[\begin{array}{l} \text{∴ } \text{grad}(\varrho) = 2P \\ \langle \text{grad}(\varrho), \text{grad}(\varrho) \rangle = \langle 2P, 2P \rangle \\ = 2 \cdot 2 \langle P, P \rangle \\ = 4\varrho \end{array} \right] \end{aligned}$$

- 命題17より、 $r > 0$ かつ $\varepsilon = \pm 1$ のとき、

$$Q = \varrho^{-1}(\varepsilon r^2)$$

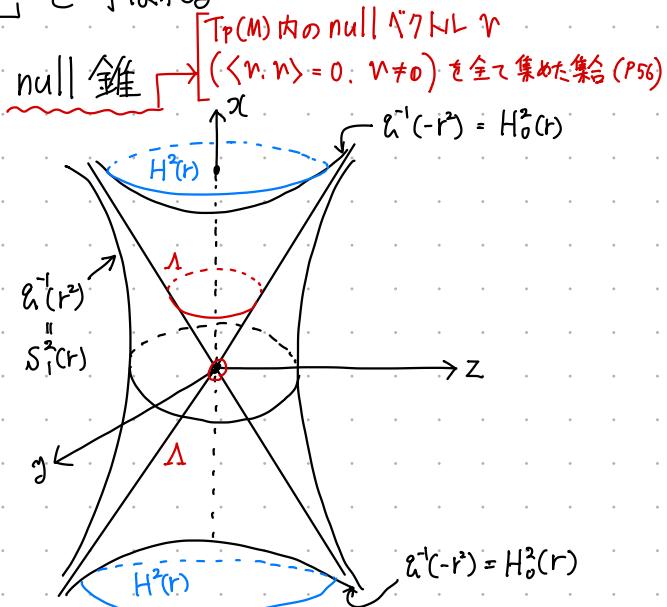
は、 \mathbb{R}^{n+1} の擬リーマン超曲面であり、単位法ベクトル $U = \frac{P}{r}$ と符号 ε を持つ。

→ これらの超曲面は、「 \mathbb{R}^{n+1} の(中心)二次超曲面」と呼ばれる
2つの族 $\varepsilon = +1$ および -1 は「 $\varrho^{-1}(0)$ 」、すなわち null 錐

$$\Lambda := \varrho^{-1}(0) - \{0\}$$

と原点 0 を除く \mathbb{R}^{n+1} の全域を満たす。

(右図は \mathbb{R}^3 における超二次曲面)



※ 命題22について.

$\Lambda \subset \mathbb{R}_{\geq}^{n+1}$ と位置ベクトル場 P は 接している. なぜ?

null錐

①

null錐の定義より Λ は

$$\Lambda = \left\{ P \in \mathbb{R}_{\geq}^{n+1} \setminus \{0\} \mid \langle P, P \rangle = 0 \right\}. \quad \leftarrow n\text{次元.} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$T_p(\Lambda) = \left\{ d'(0) \mid d: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Lambda, d(0) = p \right\} - \textcircled{2}$$

①と、 $\forall t \in I$ に対して $d(t) \in \Lambda$ であることより、

$$\langle d(t), d(t) \rangle = 0. \quad \begin{matrix} \text{両辺を} \\ \text{微分して.} \end{matrix}$$

$$2\langle d(0), d'(0) \rangle = 0. \quad \dots \textcircled{3}$$

よし、③より $\langle P, d'(0) \rangle = 0$ である。

$$T_p(\Lambda^n) = \left\{ X \in \mathbb{R}_{\geq}^{n+1} \mid \langle P, X \rangle = 0 \right\}$$

両辺の次元 = n より、

$$T_p(\Lambda) = \left\{ X \in \mathbb{R}_{\geq}^{n+1} \mid \langle P, X \rangle = 0 \right\}$$

つまり、 $P \notin T_p(\Lambda)$ である。

② d は \mathbb{R}_{\geq}^{n+1} 上の測地線であるので、

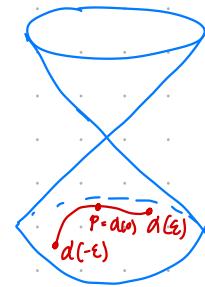
$$\begin{aligned} d(t) &= P + tP \\ &= (1+t)P \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$d(0) = P$$

$$\langle d(t), d(t) \rangle = (1+t)^2 \langle P, P \rangle = 0$$

$\because \textcircled{1}$ $\therefore P \in \Lambda$

$$d'(0) = P \in T_p(\Lambda) \quad \cdot \Lambda \text{の定義より.}$$



22. Proposition

証明

\mathbb{R}_{+}^{n+1} の null錐 Λ は、スカラー積のもとで不变で、 $(\mathbb{R}^{\nu}-0) \times S^{n-\nu}$ と微分同相な超曲面である。

また、 \mathbb{R}_{+}^{n+1} の位置ベクトル場 P は、 Λ と接している、かつ法線でもあるため、 Λ は擬リーマン多様体ではない。
(示すこと：下線を引いた部分)



Proof

(P106)

位置ベクトル場 P が原点のみで 0 になる事から、命題 17 の証明と同様に、

- Λ が超曲面で、
- P が Λ に対して法線

→ $M = f^{-1}(C)$ に対して、 $\text{grad}(f)$ が法線である性質を用いている。

である事が分かる。また、 $v \in \Lambda$ においてベクトル $P_v = v$ は null測地線 $t \mapsto tv$ と接しているため、 P は Λ と接している。



測地線上の接ベクトル tv が nullベクトル ($\langle v, v \rangle = 0$) となる。

- また、スカラー積の主張に関して、

$$\langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow \langle t v, t v \rangle = t^2 \langle v, v \rangle = 0.$$

よって、スカラー倍の下で性質が不变である。

- Λ が $(\mathbb{R}^{\nu}-0) \times S^{n-\nu}$ と微分同相であることを示す。

$S^{n-\nu}$ を $\mathbb{R}^{n-\nu+1}$ 内の単位球面として、写像 $\phi : (\mathbb{R}^{\nu}-0) \times S^{n-\nu} \rightarrow \mathbb{R}_{+}^{n+1}$ を次のように定義する。

$$\phi(x, p) := (x_1, \dots, x_{\nu}, |x|p_1, \dots, |x|p_{n-\nu+1})$$

$$x = (x_1, \dots, x_{\nu}) \neq 0, \quad p = (p_1, \dots, p_{n-\nu+1})$$

このとき、内積 $\langle \phi(x, p), \phi(x, p) \rangle$ は

$$\begin{aligned} \langle \phi(x, p), \phi(x, p) \rangle &= - \sum_{i=1}^{\nu} (x_i)^2 + |x|^2 (p_1^2 + \dots + p_{n-\nu+1}^2) \\ &= - |x|^2 + |x|^2 \quad \text{1} (\because p \in S^{n-\nu}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。よって、中の像は null錐 Λ の中にある。 $(\phi : (\mathbb{R}^{\nu}-0) \times S^{n-\nu} \rightarrow \mathbb{R}_{+}^{n+1} \in \Lambda)$

$V \in \Lambda$ のとき、写像 $\psi: \Lambda \rightarrow (\mathbb{R}^{n-\nu} - 0) \times S^{n-\nu}$ を以下で定義する。

$$\begin{aligned}\psi(V) &:= (x, p) \quad \text{ただし, } x = (V_1, \dots, V_\nu), \\ p &= (V_{\nu+1}, \dots, V_{n+\nu}) / h(V) \\ h(V) &:= \left(\sum_{j=\nu+1}^{n+\nu} (V_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

このとき、 ϕ と ψ は互いに逆写像であり、互いに滑らかであるため、微分同相である。※

※ ϕ と ψ が互いに逆写像であることの確認

(i) $\psi(\phi(x, p)) = (x, p)$ であることを確認。

$\phi(x, p) = (x_1, \dots, x_\nu, |x|p_1, \dots, |x|p_{n-\nu+1})$ であるため、

$\psi(\phi(x, p)) = (x_1, \dots, x_\nu, \frac{|x|p_1}{h(V)}, \dots, \frac{|x|p_{n-\nu+1}}{h(V)})$ である。…①

$$\begin{aligned}h(V) &= \sqrt{\sum_{j=\nu+1}^{n+\nu} (V_j)^2} \\ &= \sqrt{(V_{\nu+1})^2 + (V_{\nu+2})^2 + \dots + (V_{n+\nu})^2} \text{ であり, } V = (x, p) \text{ であるので,}\end{aligned}$$

$$V_{\nu+1} = |x|p_1, \dots, V_{n+\nu} = |x|p_{n-\nu+1}$$

を $h(V)$ へ代入すると、

$$\begin{aligned}h(V) &= \sqrt{|x|^2 p_1^2 + \dots + |x|^2 p_{n-\nu+1}^2} \\ &= |x| \sqrt{p_1^2 + \dots + p_{n-\nu+1}^2} \\ &\stackrel{!}{=} 1 \quad (\because p \in S^{n-\nu}) \\ &= |x| \quad \dots \text{②}\end{aligned}$$

である。①、②より、

$$\psi(\phi(x, p)) = (x_1, \dots, x_\nu, p_1, \dots, p_{n-\nu+1}), \quad \text{OK}$$

(ii) $\phi(\psi(V)) = V$ であることを確認。

$$\psi(V) = (V_1, \dots, V_\nu, \frac{V_{\nu+1}}{h(V)}, \dots, \frac{V_{n+\nu}}{h(V)}) \text{ であるので、}$$

$$\phi(\psi(V)) = (V_1, \dots, V_\nu, \sqrt{\sum_{i=1}^{\nu+1} (V_i)^2} \frac{V_{\nu+1}}{h(V)}, \dots, \sqrt{\sum_{i=1}^{\nu+1} (V_i)^2} \frac{V_{n+\nu}}{h(V)}), \quad \dots \text{③}$$

$V \in \Lambda \subset \mathbb{R}^{n+\nu}$ であるため、 $\langle V, V \rangle = 0$ かつ index = ν である。よって、

$$-(V_1^2 + \dots + V_L^2) + (V_{L+1}^2 + \dots + V_{n+1}^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (V_1^2 + \dots + V_L^2) = (V_{L+1}^2 + \dots + V_{n+1}^2)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\sum_{k=1}^L (V_k)^2} = \sqrt{\sum_{j=L+1}^{n+1} (V_j)^2} \dots ④$$

である。③と④、 $h(n) = \sqrt{\sum_{j=L+1}^{n+1} (V_j)^2}$ より。

$$\begin{aligned}\phi(\psi(n)) &= (V_1, \dots, V_L, h(n) \frac{V_{L+1}}{h(n)}, \dots, h(n) \frac{V_{n+1}}{h(n)}) \\ &= (V_1, \dots, V_{n+1}). \quad \text{OK}\end{aligned}$$

P110

23. Definition

$n \geq 2$ および $0 \leq L \leq n$ とする。このとき、

(1) \mathbb{R}_{\leq}^{n+1} における半径 $r (> 0)$ の 擬球面 とは、以下の 超二次曲面 である：

$$S_L^n(r) = \mathcal{E}^{-1}(r^2) = \left\{ P \in \mathbb{R}_{\leq}^{n+1} \mid \langle P, P \rangle = r^2 \right\}$$

(2) $\mathbb{R}_{\leq+1}^{n+1}$ における半径 $r (> 0)$ の 擬双曲空間 とは、以下の 超二次曲面 である：

$$H_L^n(r) = \mathcal{E}^{-1}(-r^2) = \left\{ P \in \mathbb{R}_{\leq+1}^{n+1} \mid \langle P, P \rangle = -r^2 \right\}$$

- 擬球面は符号 +1 であるため、 \mathbb{R}_{\leq}^n におけるインデックスは L である。
- 一方、擬双曲空間は符号 -1 であるため、 \mathbb{R}_{\leq}^n におけるインデックスは $L-1$ である。

- $L=0$ の場合、 $S_0^n(r)$ はユーリッド空間 $\mathbb{R}_0^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$ における標準的な球面 $S^n(r)$ と同一視できる。

二次超

- 超二次曲面の研究は、任意の超二次曲面が適切な単位擬球面 $S_L^n(1)$ と相似であるという事実で単純化されている。
homothetic

standard

- 任意の $r (> 0)$ に対して、 r によるスケール倍はスケール因子が r の相似変換 $\mathbb{R}_{\leq}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}_{\leq}^{n+1}$ である。

同様に、制限 $S_\nu^n \rightarrow S_\nu^n(r)$ も相似変換である。

P110

* 相似変換の定義 (3章 定義63)

擬り-マン多様体 M 上の写像 ψ が係数 C の相似変換である

- \Leftrightarrow • $\psi: M \rightarrow N$ が diffeo である
• $C (\neq 0)$ に対して、

$$\psi^*(g_N) = C g_M$$

である。

→ このため、補題 24 のようにして $S_\nu^n(r)$ は 擬双曲空間 と相似である。

24. Lemma

写像 $\sigma: \mathbb{R}_{\nu}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}_{n-\nu+1}^{n+1}$ を以下のように定義する。

$$\sigma(p_1, \dots, p_{n+1}) := (p_{\nu+1}, \dots, p_{n+1}, p_1, \dots, p_\nu)$$

anti-isometry

σ は 反等長変換 である。各 $S_\nu^n(r)$ を $H_{n-\nu}^n(r)$ へ反等長的に写す。

→ $C = -1$ の相似変換のこと (P92)

また、逆も成り立つ ($H_{n-\nu}^n(r)$ を $S_\nu^n(r)$ へ反等長的に写す)

Proof

σ は 同型写像 (線形かつ全単射) かつ、内積に関して

$$\begin{aligned} * \quad \langle \sigma(p), \sigma(q) \rangle &= - \sum_{j=\nu+1}^{n+1} (p_j)^2 + \sum_{k=1}^{\nu} (p_k)^2 \\ &= - \langle p, q \rangle \end{aligned} \quad \therefore \quad \langle p, q \rangle = - \sum_{k=1}^{\nu} (p_k)^2 + \sum_{j=\nu+1}^{n+1} (p_j)^2$$

である。

* σ が 同型写像 (線形かつ全単射) であることを確認する。

(i) 線形性を確認。

$$(\text{示したいこと}; \sigma(c_1 p + c_2 q) = c_1 \sigma(p) + c_2 \sigma(q))$$

$p = (p_1, p_2, \dots, p_{n+1})$, $q = (q_1, q_2, \dots, q_{n+1})$ として、

$$\begin{aligned} \sigma(c_1 p + c_2 q) &= (c_1 p_{\nu+1} + c_2 q_{\nu+1}, \dots, c_1 p_{n+1} + c_2 q_{n+1}, c_1 p_1 + c_2 q_1 \\ &\quad \dots, c_1 p_\nu + c_2 q_\nu) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (C_1 P_{\nu+1}, \dots, C_1 P_{n+1}, C_1 P_1, \dots, C_1 P_\nu) \\
&+ (C_2 Q_{\nu+1}, \dots, C_2 Q_{n+1}, C_2 Q_1, \dots, C_2 Q_\nu) \\
&= C_1 (\bar{P}_{\nu+1}, \dots, \bar{P}_{n+1}, \bar{P}_1, \dots, \bar{P}_\nu) + C_2 (\bar{Q}_{\nu+1}, \dots, \bar{Q}_{n+1}, \bar{Q}_1, \dots, \bar{Q}_\nu) \\
&= C_1 \mathcal{O}(P) + C_2 \mathcal{O}(Q) \quad \text{OK}
\end{aligned}$$

である。

(ii) 単射性を確認

(示したいこと: $\mathcal{O}(P) = \mathcal{O}(Q) \Rightarrow P = Q$)

$$\begin{array}{c}
\underbrace{\mathcal{O}(P_1, \dots, P_{n+1})} = \underbrace{\mathcal{O}(Q_1, \dots, Q_{n+1})} \text{ が成り立つと仮定する.} \\
\Downarrow \qquad \qquad \qquad \parallel \\
(P_{\nu+1}, \dots, P_{n+1}, P_1, \dots, P_\nu) \quad (Q_{\nu+1}, \dots, Q_{n+1}, Q_1, \dots, Q_\nu)
\end{array}$$

成分ごとに比較すると、成分が全て一致するので、

$$P_{\nu+1} = Q_{\nu+1}, \dots, P_{n+1} = Q_{n+1}, P_1 = Q_1, \dots, P_\nu = Q_\nu$$

である。よって、単射である。OK

(iii) 全射性の確認

(示したいこと: $\forall Q, \exists P$ s.t. $\mathcal{O}(P) = Q$)

任意の $Q = (Q_{\nu+1}, \dots, Q_{n+1}, Q_1, \dots, Q_\nu)$ を取る。 \mathcal{O} は成分を入れ替える操作であるので、

$$P = (Q_1, \dots, Q_\nu, Q_{\nu+1}, \dots, Q_{n+1})$$

とすれば、任意の Q に対応する P が存在する。

よって、全射である。OK

さらに、この式 ($\langle \mathcal{O}(P), \mathcal{O}(P) \rangle = -\langle P, P \rangle$) は \mathcal{O} が $S_\nu^n(r)$ を $H_{n-\nu}^n(r)$ に写し、逆も成り立つことを示している。… ①

\rightarrow $\left[\because S_\nu^n(r)$ は $\langle P, P \rangle = r^2$ を満たす点 P の集合、
 $H_{n-\nu}^n(r)$ は $\langle P, P \rangle = -r^2$ を満たす点 P の集合であることに注意して。

(i) $P \in S_{\nu}^n(r) = \{P \in \mathbb{R}_{\nu}^{n+1} \mid \langle P, P \rangle = r^2\}$ のとき、

$$\langle \sigma(P), \sigma(P) \rangle = - \underbrace{\langle P, P \rangle}_{\therefore S_{\nu}^n(r) \text{ の定義より}} = -r^2$$

よって、 $\sigma(P) \in \mathbb{R}_{n-\nu+1}^{n+1}$ は 擬双曲空間の要素が満たすべき性質（内積が $-r^2$ ）を満たしているため、 σ は $S_{\nu}^n(r)$ を $H_{n-\nu}^n(r)$ へ写す。

(ii) $P \in H_{\nu}^n(r) = \{P \in \mathbb{R}_{\nu+1}^{n+1} \mid \langle P, P \rangle = -r^2\}$ のとき

$$\langle \sigma(P), \sigma(P) \rangle = - \underbrace{\langle P, P \rangle}_{\therefore H_{\nu}^n(r) \text{ の定義より}} = -(-r^2) = r^2$$

よって、 $\sigma(P) \in \mathbb{R}_{n-\nu+1}^{n+1}$ は 擬球面の要素が満たすべき性質（内積が r^2 ）を満たしているため、 σ は $H_{\nu}^n(r)$ を $S_{\nu}^n(r)$ へ写す。

したがって、写像 $\sigma|_{S_{\nu}^n(r)}$ は diffeo である … ②

・全単射性 σ は 線形同型写像（線形かつ全単射）
・滑らかさ であるので、滑らかである。

①, ② より、 σ が 反等長変換であることを示した。□

- これらは相似変換は、単位擬球面の場合に 双曲二次曲面の内在的な幾何学的性質を簡約化してくれる。

25. Lemma

P111

- 擬球面 $S_{\nu}^n(r)$ は $\mathbb{R}^{\nu} \times S^{n-\nu}$ と 微分同相である。
- 擬双曲空間 $H_{\nu}^n(r)$ は $S^{\nu} \times \mathbb{R}^{n-\nu}$ と 微分同相である。

Proof

単位擬球面 $S_{\nu}^n(1)$ についてのみ考えれば充分である。

 \therefore 任意の半径 $r (> 0)$ を持つ擬球面 $S_{\nu}^n(r)$ は、相似変換によって 単位擬球面 $S_{\nu}^n(1)$ へ写すことができる。

また、 $S_{\nu}^n(1)$ と 擬双曲空間 $H_{\nu}^n(1)$ は 反等長変換によって互いに写し合う性質を持つ。

よって、 $S_{\nu}^n(1)$ のみを考えれば、任意の r の値および対応する擬双曲空間へ性質を保存したまま変換することができます。

$x \in \mathbb{R}^n$, $p \in S^{n-1}$ のとき、写像 ϕ を以下で定義する。

$$\phi(x, p) := \left(x, \underbrace{\sqrt{1+|x|^2} p}_{\text{1}} \right) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n+1-n} \approx \mathbb{R}^{n+1} \quad \dots \text{①}$$

また、内積 $\langle \phi(x, p), \phi(x, p) \rangle$ を考えると、

$$\begin{aligned} \langle \phi(x, p), \phi(x, p) \rangle &= -|x|^2 + (1+|x|^2)p^2 \\ &= 1 \end{aligned} \quad (\because p \in S^{n-1})$$

であるため、写像 ϕ は $\mathbb{R}^n \times S^{n-1}$ を 単位擬球 S^n へ写す。 ... ②

(\because 定義 23 より、 $S^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle p, p \rangle = 1\}$)

このとき、 ϕ は逆写像

$$(x, q) \mapsto \left(x, \frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}} q \right)$$

を持っているため、微分同相である。 ... ③

①, ②, ③ より S^n と $\mathbb{R}^n \times S^{n-1}$ は、 ϕ (diffeo) を持つ微分同相である ■

• \mathbb{R}^0 は単一点である一方、 S^0 は定義より 2 点から成る。

$$(x_0)^2 = 1 \iff x_0 = \pm 1 \quad \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ -1 \quad 0 \quad 1 \end{array} \rightarrow \mathbb{R}^1$$

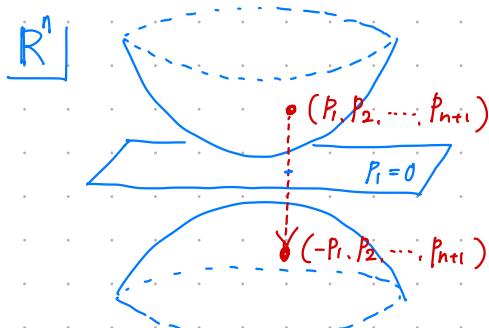
• 球面以外では、二次超曲面の中でも 1 マン多様体であるものは、

ミニコフスキー空間 \mathbb{R}_+^{n+1} 内の超曲面 $H^n(r)$ のみである。

→ $H^n(r)$ は 2 つの連結成分から成り、それらが \mathbb{R}^n と 微分同相である。

$$(p_1, p_2, \dots, p_{n+1}) \mapsto (-p_1, p_2, \dots, p_{n+1})$$

によって、2 つの連結成分が対応している。



双曲空間・補足

$$H_0^2(1) = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_1^3 \mid \underbrace{\langle x, x \rangle}_{\downarrow} = -1 \right\}$$

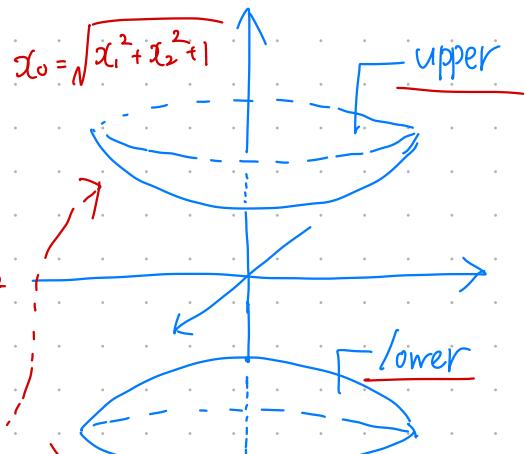
$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = -1 + x_0^2$$

+1

$$\therefore x_0 = \pm \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}$$

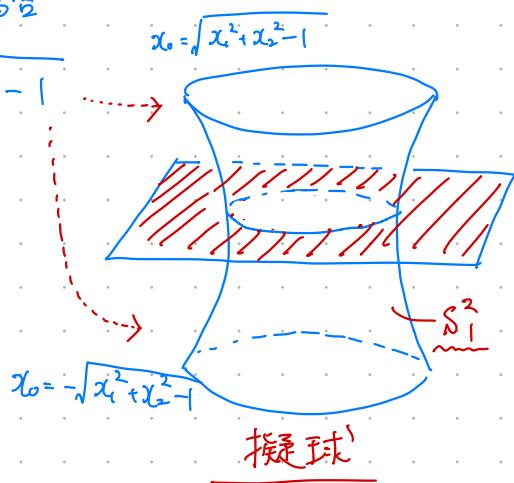
* $\langle x, x \rangle = 1$ の場合

$$x_0 = \pm \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 1}$$



$$x_0 = -\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 1}$$

擬双曲空間



26. Definition

- 双曲 n 次元空間 $H^n_0(r)$ ($\in \mathbb{R}^{n+1}_+$) の成分のうち、 $(r, 0, 0, \dots, 0)$ を通るものを「上側の埋め込み」(upper imbedding) と呼ぶ。
- $H^n_0(r)$ の成分のうち、 $(-r, 0, \dots, 0)$ を通るものを「下側の埋め込み」(lower imbedding) と呼ぶ。

球面と同様に、全ての二次超曲面 umbilic は全脣的である。

27. Lemma

符号 ε を持つ超二次曲面

$$Q := \varrho^{-1}(\varepsilon r^2) \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

位置ベクトル場

は全脣的であり、外向き単位法ベクトル $\frac{P}{r}$ が尊かれる形作用素 S は、
 $S = -\frac{I}{r}$ (I: 恒等写像?)

を持つ。

Proof

$V \in \mathcal{X}(Q)$ ならば、 $S(V)$ は

$$\begin{aligned} S(V) &= -\overline{D}_V(U) = -\overline{D}_V\left(\frac{P}{r}\right) \\ &\stackrel{\substack{\text{補題19} \\ \text{より}}}{=} -\frac{1}{r} \overline{D}_V(P) \\ &= -\frac{1}{r} V \end{aligned}$$

$\therefore \overline{D}_x P = \sum X_i u^i (\partial_i) = X.$
 $(P/01 \text{より})$

と表示出来る。

よって、任意の接ベクトル V に対して、形作用素 S が「スカラー倍 $-\frac{1}{r}$ 」をかけた形で作用している。

$\therefore S = -\frac{I}{r}$ は、全脣的の定義を満たす。□

- 補題27より、 $Q = \varepsilon^{-1}(\varepsilon r^2)$ の法曲率ベクトル場 Z は、

$$Z = -\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)U$$

outward

である。 U は外向き（原点から離れる方向）なので、 Z は

- 擬球面上では inward 内向き
- 擬双曲空間上では 外向き

である。

(球面 $S^n(r)$ は全ての点で内側に曲がり。)

双曲空間 $H^n(r)$ は外側に曲がる。)

$\rightarrow II(u, u) = \langle u, u \rangle_Z$ においてベクトルが不定値の場合、

擬球面は $\begin{cases} \text{空間的方向に内向きに曲がり,} \\ \text{時間的方向に外向きに曲がる。} \end{cases}$ space-like time-like indefinite \hookrightarrow 正値でも負値でもない二次形式

擬双曲空間は曲がりのパターンが逆転する。

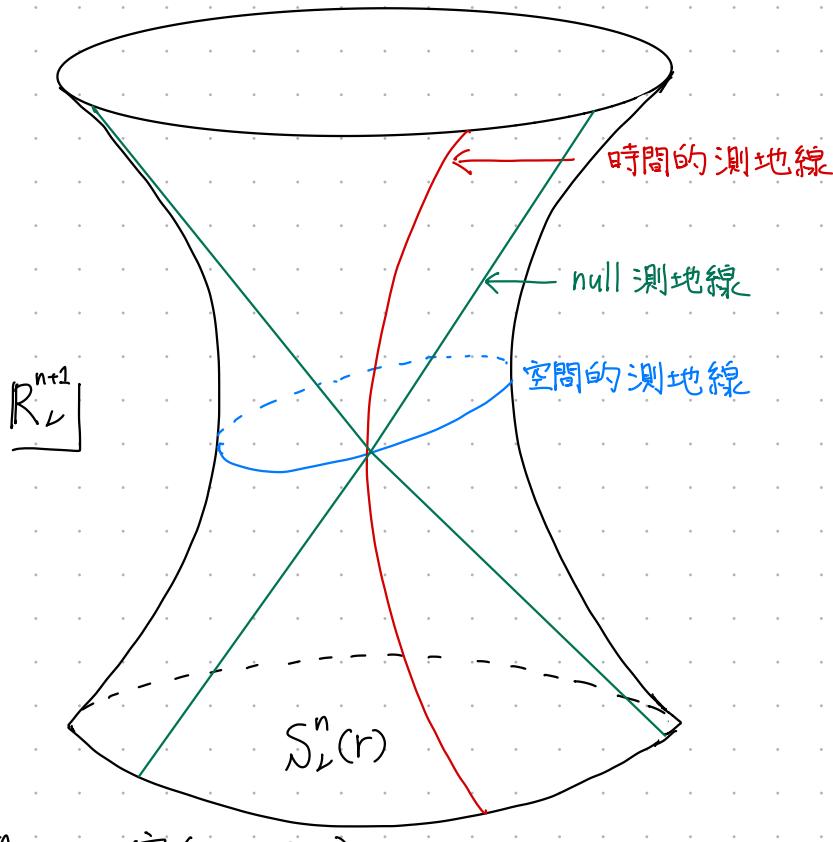
$\begin{cases} \text{空間的方向に外向きに曲がり,} \\ \text{時間的方向に内向きに曲がる。} \end{cases}$

28. Proposition

γ を 指標球 $S_\nu^n(r) \subset \mathbb{R}_{\nu}^{n+1}$ の 定数でない 測地線 とする.

branch

- (1) γ が 時間的 である場合、 γ は \mathbb{R}_{ν}^{n+1} 内の 双曲線 の 片方部分 の パラメータ化 である.
- (2) γ が null である場合、 γ は 直線 (\mathbb{R}_{ν}^{n+1} の 測地線) である.
- (3) γ が 空間的 である場合、 γ は \mathbb{R}_{ν}^{n+1} 内の 楕円 の 周期的な パラメータ化 である.



(特に、 $S_\nu^n(r)$ は 完備 である)

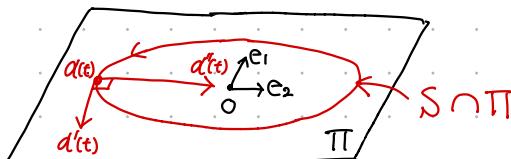
Proof

$P \in S = S_\nu^n$ として、 \mathbb{R}_{ν}^{n+1} 内の 平面 Π を、「原点 o と P を通る 平面」 とする。

g が \mathbb{R}_{ν}^{n+1} の スカラー積 であるならば、 P が 空間的 であるので、 g を Π に 制限したとき、以下 3 つの 可能性 がある。 $\langle P, P \rangle = r^2 > 0$

(i) $g|_{\Pi}$ が 正定値 である 場合 (命題内の (3))

$S \cap \Pi$ は、 $\Pi \approx \mathbb{R}^2$ 内の 円 である。 e_1 と e_2 が Π の 正規直交基底 であるとき、



Π 内の任意の点 $ae_1 + be_2$ が、 $S = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle v, v \rangle = r^2\}$ に属するのは、

$$a^2 + b^2 = r^2 \quad \therefore \langle ae_1 + be_2, ae_1 + be_2 \rangle = a^2 \langle e_1, e_1 \rangle + b^2 \langle e_2, e_2 \rangle + 2ab \langle e_1, e_2 \rangle = a^2 \cdot 1 + b^2 \cdot 1 + 2ab \cdot 0 = a^2 + b^2$$

の時に限る。したがって、曲線 $\alpha(t) := (r \cos t)e_1 + (r \sin t)e_2$ は、 $\Pi \cap S$ の一定速度を持つパラメータ化である。

→ $|\dot{\alpha}(t)|$ を考えたいので、

$$\dot{\alpha}(t) = (-r \sin t)e_1 + (r \cos t)e_2,$$

$$|\dot{\alpha}(t)| = \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t}$$

$$= |r| = r (\because r > 0)$$

内積 $\langle \dot{\alpha}, \dot{\alpha} \rangle = r^2 > 0$ であるので $\dot{\alpha}$ は空間的である。命題内の(3)に該当する。

→ P69 \therefore 速度ベクトル $\dot{\alpha}(s)$ が $\begin{cases} \text{spacelike} \\ \text{timelike} \\ \text{null} \end{cases} \Rightarrow$ 曲線 $\alpha(s)$ が $\begin{cases} \text{spacelike} \\ \text{timelike} \\ \text{null} \end{cases}$

$$\ddot{\alpha} = (-r \cos t)e_1 + (-r \sin t)e_2 = -\dot{\alpha}(t) = -P_{\dot{\alpha}(t)}(P; \text{位置ベクトル})$$

であるため、 $\dot{\alpha}$ は S と法(normal)である。よって系10より、 α は測地線である。

(ii) $g|_{\Pi}$ が非退化である場合 (命題内の(1))

インデックスが1である非退化を考える。 Π の正規直交基底を e_0, e_1 として、

$$P = re_1$$

を満たすとする。つまり、 e_0 は時間的である。

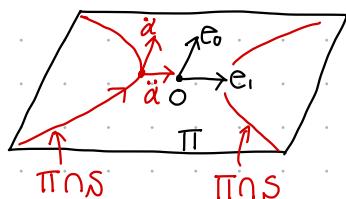
Π 上の任意の点 $ae_0 + be_1$ が $S = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle v, v \rangle = r^2\}$ に含まれるのは、

$$-a^2 + b^2 = r^2 \quad \therefore \langle ae_0 + be_1, ae_0 + be_1 \rangle = a^2 \langle e_0, e_0 \rangle + b^2 \langle e_1, e_1 \rangle = -a^2 + b^2$$

(∴ 時間成分は負)

の時に限る。

したがって、 $\Pi \cap S$ は $\Pi \cong \mathbb{R}^2$ 内の双曲線の両方部分 (two branches) が成り立つ。



点 P を通る双曲線の片側部分 (branch) は、一定速度を持つパラメータ化

$$\alpha(t) := (r \sinh t)e_0 + (r \cosh t)e_1$$

を持つ。

→ \therefore 内積 $\langle \dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t) \rangle (= |\dot{\alpha}(t)|^2)$ を考える。

$$\langle \dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t) \rangle = r^2 \cosh^2 t \langle e_0, e_0 \rangle + r^2 \sinh^2 t \langle e_1, e_1 \rangle$$

$$\begin{aligned}
 \text{また、内積 } \langle \dot{\alpha}, \dot{\alpha} \rangle &= -r^2 \cosh^2 t + r^2 \sinh^2 t \\
 &= -r^2 (\cosh^2 t - \sinh^2 t) \\
 &= -r^2 < 0
 \end{aligned}
 \quad \begin{aligned}
 &= -r^2 \cosh^2 t + r^2 \sinh^2 t \\
 &= -r^2 (\cosh^2 t - \sinh^2 t) \\
 &= -r^2
 \end{aligned}$$

であるため、 α は時間的ベクトルであり、命題内の(1)に該当する。

加速度ベクトル $\ddot{\alpha}(t)$ について、

$$\begin{aligned}
 \ddot{\alpha}(t) &= (r \sinh t) e_0 + (r \cosh t) e_1 \\
 &= P_{\dot{\alpha}(t)} \quad (P: \text{位置ベクトル})
 \end{aligned}$$

である。よって $\dot{\alpha}$ は S と法であるため、 α は測地線である。

(iii) $g|_{\Pi}$ が ^{degenerate} 退化である場合 (命題内(2))

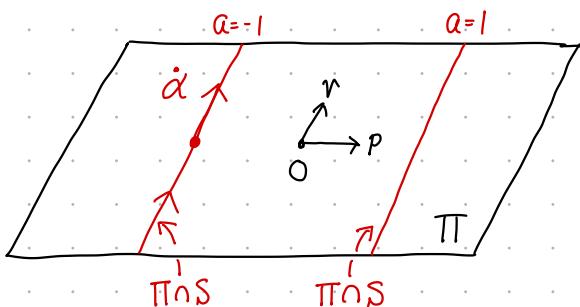
次元が 1 の零空間を考える。 $v(\neq 0)$ が null space 内にある場合、 v は null ベクトルとなる。 P と v が Π の基底となる。

$$\begin{aligned}
 \rightarrow &\because \text{P53} \\
 &\text{null space の定義より } N \text{ が null space} \\
 &\Leftrightarrow N = \{v \mid \langle v, w \rangle = 0, \forall w\} \\
 &v \text{ は null space の要素であるため、任意の } w \text{ に対して } P \text{ を選択すれば、} \\
 &\langle v, P \rangle = 0. \quad \therefore v \text{ と } P \text{ が直交する。}
 \end{aligned}$$

Π 上の任意の点 $ap + bv$ が $S = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle v, v \rangle = r^2\}$ に含まれるのは、

$$\begin{aligned}
 a^2 = 1 \quad (\Leftrightarrow a = \pm 1) \quad \therefore \langle ap + bv, ap + bv \rangle &= a^2 \langle p, p \rangle + b^2 \langle v, v \rangle = r^2 \quad (\because \text{null}) \\
 &\quad + 2ab \langle p, v \rangle \\
 &= a^2 r^2
 \end{aligned}$$

の時に限る。したがって、 $\Pi \cap S$ は 2 つの平行な直線から構成される。



よって、 P を通る直線 $d(t)$ は、

$$d(t) := P + t\mathbf{v}$$

と表される。 \dot{d} の内積 $\langle \dot{d}, \dot{d} \rangle$ は

$$\langle \dot{d}, \dot{d} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$$

↑
 $\because \mathbf{v}$ は null ベクトル

であるため、 d は null (光的) であり、命題内の (2) に該当する。

d は直線であることが S を含む \mathbb{R}^{n+1} の測地線であるので、 d は S の測地線である。

以上より、命題内の (1)～(3) を示した。■

※ 擬双曲空間の測地線に関する導出である。

anti-isometry

補題24における写像 σ は反等長変換であるため、直前の命題28は

$$\begin{aligned} \sigma: \mathbb{R}_{+}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{R}_{n+1-1}^{n+1} を \\ \sigma(p_1, \dots, p_{n+1}) &:= (p_{n+1}, \dots, p_{n+1}, p_1, \dots, p_n) \\ \text{と定義すると、} \sigma &\text{は } S_{\nu}^n(r) \text{ を } H_{n-\nu}^n(r) \text{ へ写す反等長変換である。} \\ (H_{n-\nu}^n(r)) &\quad (S_{\nu}^n(r)) \end{aligned}$$

擬双曲空間 $H_{\nu}^n(r)$ に対しても適用できる。

(ただし、「空間的」と「時間的」の言葉を入れ替えて読むこと)

→したがって、双曲空間 $H_{\nu}^n(r)$ 内の全ての測地線 γ は \mathbb{R}_{+}^{n+1} 内で「空間的」であるため、
 γ は一対一に対応する。
one-to-one

補題27を系20に代入することで、超二次曲面が定曲率であることが示される。

$$\begin{aligned} K(n, w) &= \bar{K}(n, w) \\ &+ \varepsilon \frac{\langle S_{\nu}, n \rangle \langle S_w, w \rangle - \langle S_{\nu}, w \rangle^2}{\langle n, n \rangle \langle w, w \rangle - \langle n, w \rangle^2} \end{aligned}$$

constant curvature
29. Proposition

形作用素 S について、

$$S(V) = -\frac{V}{r}$$

である。 $(Q := \alpha^{-1}(\varepsilon r^2), V \in \mathcal{X}(Q))$

29. Proposition

P113

$n \geq 2, 0 \leq \nu \leq n$ とする。

(1) 擬球面 $S_{\nu}^n(r)$ は正の定曲率 $K = \frac{1}{r^2}$ を持つ完備な
擬リーマン多様体である。

(2) 擬双曲空間 $H_{\nu}^n(r)$ は負の定曲率 $K = -\frac{1}{r^2}$ を持つ完備な
擬リーマン多様体である。

Proof

$Sv = -\frac{v}{r}, Sw = -\frac{w}{r}$ を系20へ代入する。

$$\begin{aligned} K(v, w) &= \overline{K}(v, w) + \varepsilon \frac{\langle \frac{v}{r}, v \rangle \langle \frac{w}{r}, w \rangle - \langle \frac{v}{r}, w \rangle^2}{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2} \\ &\stackrel{\#}{=} 0 \quad (\because \text{擬ユーリッド空間の曲率}=0) \\ &= \varepsilon \left(-\frac{1}{r^2} \right)^2 \frac{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2}{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2} \\ &= \varepsilon \frac{1}{r^2}. \end{aligned}$$

定義23 より、 $\varepsilon = 1$ の時が擬球。

$\varepsilon = -1$ の時が擬双曲空間に該当する。

以上より、(1)(2) それぞれの場合を示した。

- リーマン多様体の場合、双曲空間 $H^n(r)$ は球面と非常に対称的である。

- 球面 … コンパクトで、周期的な測地線と正の曲率を持つ。

- 双曲空間 … 非コンパクト (\mathbb{R}^n と diffeo) で、一対一に対応する測地線と負の曲率を持つ。

位相空間 X がコンパクトである
 \Leftrightarrow 任意の開被覆 U に属する有限個の開集合
 U_1, U_2, \dots, U_n
 が存在して、
 $X = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n$
 が成立する。

30. Proposition

接球 $S^n(r)$ 上に、点 P および点 ϱ 上の (接) フレームを。

$$e_1, \dots, e_n \quad (P \text{におけるフレーム})$$

$$f_1, \dots, f_n \quad (\varrho \text{におけるフレーム})$$

とする。このとき、一意な等長変換 $\phi: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ が存在する。

→ 計量を保存する diffeo.

この等長変換中は、球面 $S^n(r)$ を自分自身に写し、

$$\phi(P) = \varrho$$

$$d\phi(e_i) = f_i$$

が成立立つ。

$$\text{O(3)} = \left\{ A \in M_3(\mathbb{R}) \mid {}^t A A = I_3 \right\}$$

直交群

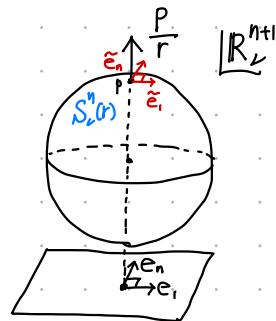
Proof

点 $P \in S^n(r)$ における位置ベクトル P_p は S に対して法方向であるため、
 (P_p) 各フレーム e_i と直交している。したがって、 e_i に対応する \mathbb{R}^{n+1} の要素を
 \tilde{e}_i と書くと、 \mathbb{R}^{n+1} の正規直交基底は

$$\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_n, \frac{P}{r}$$

長さ 1 の位置ベクトル

と書ける。同様の議論が、フレーム f_i についても行える。



2章の補題27 の証明から、以下 2つを満たす一意な線形等長変換 $\phi: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ が存在する。

(P52)

スカラー積空間 V と W が同じ次元、インデックスを持つ
 $\Leftrightarrow V$ が W への線形等長変換 ϕ が存在する。

$$\cdot \phi(e_i) = f_i \quad (\text{任意の } i \text{ に対して})$$

$$\cdot \phi\left(\frac{P}{r}\right) = \frac{\varrho}{r} \quad (r=1 \text{ を代入すれば、} \phi(P) = \varrho \text{ である}) \quad \cdots \textcircled{1}$$

さらに 3章の補題7より、 ϕ は \mathbb{R}^{n+1} の等長変換である。…②

(P59)

$\phi: V \rightarrow W$ がスカラー積空間の線形等長変換であるならば、
 ϕ は等長変換である。

多様体間の写像として

擬球 $S_\nu^n(r)$ の定義より、 $\phi(S_\nu^n(r)) = S_\nu^n(r)$ が成り立つ。

- ϕ は等長変換である。 $(\phi \text{ は diffeo})$
- $S_\nu^n(r)$ は擬球のため、原点からの距離は常に r 。
- $\Rightarrow S_\nu^n(r)$ が ϕ で別の点に写っても、 $\phi(S_\nu^n(r)) = S_\nu^n(r)$

$S_\nu^n(r)$ は擬リーマン部分多様体であるため、 ϕ は等長変換 $S_\nu^n(r) \rightarrow S_\nu^n(r)$ に制限される。さらに ϕ は \mathbb{R}^{n+1}_+ 上で線形であるため（標準同型写像により）、
 ϕ 自身の微分 $d\phi$ のみ異なる。)

P114 6行目



したがって、任意の e_i に対して、

$$d\phi(e_i) = f_i \quad \cdots \quad ③$$

が成り立つ。

• ϕ が一意であることを示すために、写像 ψ を、 ϕ と同じ性質を持つ \mathbb{R}^{n+1}_+ の等長変換とする。明らかに、 $d\phi$ と $d\psi$ は $T_p(S)$ 上で一致する。

$$\downarrow d\phi(e_i) = f_i = d\psi(e_i)$$

$$(\phi, \psi: \mathbb{R}^{n+1}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}_+)$$

ϕ と ψ は対等長変換であるため、補題 7 から $d\phi$ と $d\psi$ が法曲率ベクトルを保つことが分かる。
 したがって、法曲率ベクトルは $T_p(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ 上で一致する。

したがって、3章の命題 62 より、

$$\phi = \psi \text{ である. } \cdots \quad ④$$

① から ④ より、命題を

示した。

$M \subset \bar{M} \rightarrow N \subset \bar{N}$ への対等長変換 ϕ は
 形テンソルを保存する。つまり
 $d\phi(\Pi(r, w)) = \Pi(d\phi(r), d\phi(w))$
 である。

$\phi, \psi: M \rightarrow N$ を、連結な擬リーマン多様体 M 上の
 局所等長変換とする。 ϕ, ψ について、

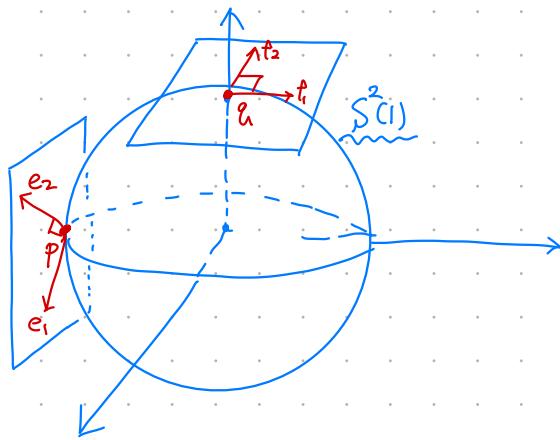
$$d\phi_p = d\psi_p$$

を満たす $p \in M$ が存在するとき（つまり、 $\phi(p) = \psi(p)$ ）、

$$\phi = \psi$$

である。

30. Prop 补足



$\{e_1, e_2, p\}$: \mathbb{R}^3 の ONB とする。
 $\{f_1, f_2, g\}$:

基底を基底へ写すような変換中は、

単位円上で

$$\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

は Isometry である。

$$\phi(p) = q$$

$$\phi(e_i) = f_i \quad (i=1,2)$$

のとき、 $\phi(x)$ は、

$$\phi(x) = Ax \quad (x \in \mathbb{R}^3, A \in O(3))$$

$$O(3) = \left\{ A \in M_3(\mathbb{R}) \mid {}^t AA = E_3 \right\}$$

$$(\phi(p), \phi(e_1), \phi(e_2))$$

直交群（直交行列全体の
なす集合）

$$= (Ap, Ae_1, Ae_2) = A(p, e_1, e_2)$$

$$= (q, f_1, f_2)$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} q & f_1 & f_2 \\ O(3) & O(3) & O(3) \end{pmatrix} (p, e_1, e_2)^{-1} \in O(3)$$

$$d\phi_p(r) = Ar$$

$\therefore d(t), d(0) = p, d'(0) = r$ となる曲線 α を考える。

$$d\phi_p(r) = (\phi \circ \alpha)'(0) \quad \therefore \phi(d(t)) = A d(t)$$

定義. $= Ar$ $\quad \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \phi(d(t)) = A d'(0) = Ar$

※ $\{e_1, e_2, e_3\}$; \mathbb{R}^3 の ONB である.

$\iff A = (e_1, e_2, e_3) \in O(3)$ である.

$$\begin{aligned}\therefore {}^t A A &= \begin{bmatrix} {}^t e_1 \\ {}^t e_2 \\ {}^t e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^t e_1 e_1 & {}^t e_1 e_2 & {}^t e_1 e_3 \\ {}^t e_2 e_1 & {}^t e_2 e_2 & {}^t e_2 e_3 \\ {}^t e_3 e_1 & {}^t e_3 e_2 & {}^t e_3 e_3 \end{bmatrix} \\ &\quad ({}^t x y = x \cdot y) \\ &= \begin{bmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle & \langle e_1, e_3 \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle & \langle e_2, e_3 \rangle \\ \langle e_3, e_1 \rangle & \langle e_3, e_2 \rangle & \langle e_3, e_3 \rangle \end{bmatrix} \cdots *\end{aligned}$$

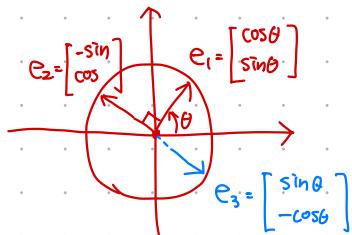
* について、内積 $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ を代入すると、

$$* = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \\ = E^3 \text{ である。}$$

$$O(2) = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) \mid {}^t A A = E_2 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \right\}$$

$e_1 \quad e_2 \qquad \qquad e_1 \quad e_3$



THE CODAZZI EQUATION (コダツチ方程式) P14

$M \subset \bar{M}$ に対して「 M の幾何学的性質」が「 M と接するベクトルの幾何学的性質」と見なされるのであれば、 M の法方向をベクトルと類似の幾何的性質が存在する。

31. Definition (normal connection)

$M \subset \bar{M}$ の法接続 (normal connection) とは、以下で与えられる写像 $D_v^\perp : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)^\perp \rightarrow \mathcal{X}(M)^\perp$ である。

$$D_v^\perp(Z) := \text{nor}(\bar{D}_v(Z)) \quad V \in \mathcal{X}(M), Z \in \mathcal{X}(M)^\perp$$

$D_v^\perp(Z)$ は Z の V に関する 法共変微分 (normal covariant derivative) と呼ばれる。

evidently. 明らかに、 $D_v^\perp(Z)$ は 点 P が V に沿って動くときの 法成分 \bar{D}_P の (厳密な) 变化率を表しているため、

$D_v^\perp(Z)$ に関して以下の 3つが成り立つ：

- (i) $D_v^\perp(Z)$ は V に関して $\mathcal{F}(M)$ -線形、
 Z に関して \mathbb{R} -線形である。
- (ii) $D_v^\perp(fZ) = f D_v^\perp(Z) + V(f) Z \quad (f \in \mathcal{F}(M))$
- (iii) $V \langle Y, Z \rangle = \langle D_v^\perp(Y), Z \rangle + \langle Y, D_v^\perp(Z) \rangle \quad (Y, Z \in \mathcal{X}(M)^\perp)$

Proof 系2 (接続 D の性質) を用いる。

$$(i) V \text{ に関して (示すこと: } D_{fV+gW}^\perp(Z) = f D_v^\perp(Z) + g D_w^\perp(Z))$$

$$\begin{aligned} D_v^\perp(Z) \text{ の定義より, } D_{fV+gW}^\perp(Z) &= \text{nor}(\bar{D}_{fV+gW}(Z)) \xrightarrow{\text{接続の性質 (系2)}} \\ &= \text{nor}(f\bar{D}_v(Z) + g\bar{D}_w(Z)) \xrightarrow{\text{nor の } \mathcal{F}(M)\text{-線形性}} \\ &= f \text{nor}(\bar{D}_v(Z)) + g \text{nor}(\bar{D}_w(Z)) \\ &= f D_v^\perp(Z) + g D_w^\perp(Z) \text{ である。} \end{aligned}$$

$$Z \text{ に関して (示すこと: } D_v^\perp(aZ+bY) = a D_v^\perp(Z) + b D_v^\perp(Y))$$

$$\begin{aligned} \text{上と同様に, } D_v^\perp(aZ+bY) &= \text{nor}(\bar{D}_v(aZ+bY)) \xrightarrow{\text{接続の性質 (系2)}} \\ &= \text{nor}(a\bar{D}_v(Z) + b\bar{D}_v(Y)) \xrightarrow{\text{nor の } \mathbb{R}\text{-線形性 (P98)}} \\ &= a \text{nor}(\bar{D}_v(Z)) + b \text{nor}(\bar{D}_v(Y)) \\ &= a D_v^\perp(Z) + b D_v^\perp(Y) \text{ である。} \end{aligned}$$

(ii) ライピニツ則を示す。

$$\begin{aligned} D_v^\perp(fz) &= \text{nor}(\bar{D}_v(fz)) \quad \text{↓} \\ &= \text{nor}(V(f)z + f\bar{D}_v(z)) \\ &= \text{nor}(V(f)z) + \text{nor}(f\bar{D}_v(z)) \quad \text{↓} \\ &= V(f)z + f\text{nor}(\bar{D}_v(z)) \\ &= V(f)z + fD_v^\perp(z) \end{aligned}$$

∴ 接続のライピニツ則

$\therefore z \in \mathcal{X}(M)^\perp$ より

ベクトル場 Z に沿った方向微分は法成分しか値を持たない。

$\therefore \text{nor}$ の $\tilde{\mathcal{X}}(M)$ -線形性

(iii) 内積に関する等式を示す

まず、接続 \bar{D} について。

$$V\langle Y, Z \rangle = \langle \bar{D}_v(Y), Z \rangle + \langle Y, \bar{D}_v(Z) \rangle \quad \cdots ①$$

である。今、 Y と Z は法ベクトル場であるため、 $\langle \cdot, Z \rangle$ と $\langle Y, \cdot \rangle$ に関しては法成分のベクトルのみを考えれば良い。よって。

$$\begin{aligned} \langle \bar{D}_v(Y), Z \rangle &= \langle \text{nor}(\bar{D}_v(Y)), Z \rangle \\ &= \langle D_v^\perp(Y), Z \rangle \quad \cdots ② \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle Y, \bar{D}_v(Z) \rangle &= \langle Y, \text{nor}(\bar{D}_v(Z)) \rangle \\ &= \langle Y, D_v^\perp(Z) \rangle \quad \cdots ③ \end{aligned}$$

であるので、①に②と③を代入すれば、等式が成り立つことが分かる
以上より、3つの性質が成り立つことを確認した。

G+5h. 11°-7 予約

