

1/10(金) 線素空間形の部分多相体の法線<sup>族</sup>叢

(+ 実空間形の等径超曲面)

~~線素~~

Def (線素<sup>族</sup>) Congruence

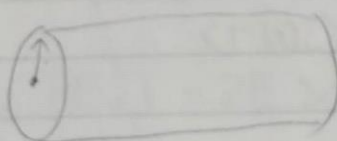
↑  
(line)

線素  $\iff R^3$  内の直線の 2パラメータ族

その例として、 $R^3$  内の曲面上の各点における法線の族  
→ 線素族

法線叢  $\longleftrightarrow$  平行曲面族

$R^3$  の平行曲面の例



等径超曲面

$\tilde{M}^{n+1}(c)$ : 曲率 =  $c$  (const) の実 SP 形

$M^n$ :  $\tilde{M}^{n+1}(c)$  の 向き付けられた超曲面 について

以下の 3条件 同値 (一般の リーマン多様体  $M \iff$  ②  $\iff$  ③)

(a)  $M_t$  ( $-\epsilon < t < \epsilon$ ):  $M$  の 平行超曲面の族は  
全ての  $t$  について 平均曲率 = 一定

(b)  $M$  の 全ての 主曲率 = 一定

(c)  $\exists F: \tilde{M} \rightarrow R$ : 等径  $\forall t \in R, M = F^{-1}(t)$

2

## 可積分函数

 $F: M \rightarrow \mathbb{R}$  が 等径 (isoparametric) $\Leftrightarrow |\text{grad } F|$  と  $\Delta F$  は  $\forall c \in \mathbb{R}$  について  $F^{-1}(c)$  上一定

• 平行超曲面

 $M$  の平行超曲面  $\Leftrightarrow \phi_r(M) := \{ \exp_x(rN_x) \mid x \in M \}$ 

• Coxeter 群 (七角計何)

Weyl 群 (七角トポロジー)

対称 SP

717+1 表現 (非均質超曲面)

Cartan-Moser 多項式  
ünzner

$$|\text{grad } F|^2 = g^2 r^{2g-2}, \quad \Delta F = C r^{g-2}$$

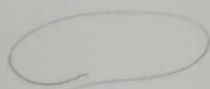
$$(r = |x|, \quad C = g^2 \underbrace{(m_2 - m_1)}_{\text{重複度}} / 2)$$

•  $S^{n+1}$  内の 等径超曲面  $M^n$  について. $g = 1, 2, 3, 4$  $g = 1$  大柱

2. 球面の

直積

focal set, tube



④  $S^{n+1}$  の測地線 (大円)

$\gamma(R)$

$$t \mapsto \gamma(t) = (\cos t)p + (\sin t)v.$$

$$(p \in S^{n+1}, v \in T_p(S^{n+1}) \iff \gamma \perp p, \|v\| = 1 \text{ により})$$

・向き付けられた測地線の sp は  $\tilde{G}_2(R^{n+2})$ : 有向実 2-plane

グラスマン多様体と同一視でき、さらに  $CP^n$  内の

$$z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_{n+2}^2 = 1$$

と表われる、複素 2 次超曲面  $Q^n$  と同一視できる。

Theorem (Palmer, 97)

$M^n: S^{n+1}$  の有向超曲面

$\Rightarrow \gamma(M): Q^n$  の Lagrange submfd.

$M^n: S^{n+1}$  の超曲面として主曲率一定  $\pm 1$  なら austere

$\Rightarrow \gamma(M): Q^n$  の極小 Lagrange submfd



## Hopf 超曲面

$M^{2n-1}$ :  $n-1$ -mfld  $(\tilde{M}^n, J)$  の有向実超曲面

$N$ :  $M \subset \tilde{M}$  の単位法ベクトル場

$\xi := -JN$ :  $M$  の構造 vec 場

Hopf 超曲面

$M$ :  $\tilde{M}$  の Hopf 超曲面 である

$$\Leftrightarrow A\xi = \mu\xi \quad (\mu: \text{Hopf 主曲率})$$

$\hookrightarrow M \subset \tilde{M}$  の形状作用素

$$(A(X) := -D_X(N), X \in TM)$$

• Hopf 主曲率  $\mu$  ... constant ( $\tilde{M} = \mathbb{CP}^n$ )

$$\tilde{M} = \mathbb{CH}^n$$

• Hopf 超曲面の平行超曲面

$M^{2n-1}$ : 複素平面形  $\tilde{M}$  の Hopf 超曲面

$\Rightarrow M$  の各平行超曲面  $M_t$  も Hopf 超曲面

Theorem (Cecil - Ryan 82)

(1)  $\Sigma$ :  $\mathbb{CP}^n$  の複素部分 mfd

$\Rightarrow M = \phi_r(\Sigma)$ :  $\Sigma$  上半径  $r > 0$  の tube 上にある  
実超曲面は Hopf

(2)  $M: \mathbb{C}P^n(4)$  の Hopf 超曲面で  $m = 2^{\cot} 2r$

$\Rightarrow$

Theorem (Borisenko)

$M: \mathbb{C}P^n$  のコンパクトな Hopf 超曲面

$\Rightarrow M$  は  $\mathbb{C}P^n$  のある algebraic variety の tube

$\mathbb{C}P^n$  の等質実超曲面

$M: \mathbb{C}P^n$  の Hopf 超曲面で主曲率一定

$\Leftrightarrow M$  は

• focal 複素 submfd

(a)  $g=2, 3$  , 全測地的

(b)  $g=3$

(c)  $g=5$

(d)  $g=5$

(e)  $g=5$

- $\mathbb{CP}^n$  において、主曲率が一定でない  
実超曲面が存在する。

$\mathbb{CP}^n$ ,  $n \geq 3$  の主曲率一定な実超曲面の分類: 未解決

- $\mathbb{CP}^n$  の実超曲面の法線叢

$$\chi: M^{2n-1} \rightarrow \mathbb{CP}^n: \text{はめ込み}$$

$N: M \subset \mathbb{CP}^n$  の単位法ベクトル場

$$\leadsto \gamma: M^{2n-1} \rightarrow G_2(\mathbb{C}^{n+2}) \text{ (法線叢)}$$

$$\gamma(p) = \text{span}_\mathbb{C} \{ \chi(p), N(p) \}$$

~~実超曲面の法線~~

- 四元数 Kähler 多様体.

$$\forall p \in \tilde{M}, \exists U, p \text{ の近傍}, \exists Q \text{ の局所 } \pi\text{-\Delta 場 } \{I_1, I_2, I_3\}$$

(2)

概 Hermitic 部分 mtd

$$(1) \text{ Kähler である } \Leftrightarrow (M, J, I): \text{ Kähler mtd}$$

$$(2) \text{ 全複素 sub mtd } \Leftrightarrow \forall \hat{I}_1$$

四元数 Kähler mtd  $\tilde{M}$  の概 Hermitic + sub mtd について、全複素  $\Leftrightarrow$  Kähler



2

# Theorem 1 (K, K, DGA)

$M^{2n-1}$ :  $\mathbb{CP}^n$  の実超曲面

$\gamma: M \rightarrow G_2(\mathbb{C}^{n+1})$ : 束線束

(1)  $M$ : 非Hopf  $\Rightarrow \gamma$ : はめ込み

(2)  $M$ : Hopf  $\Rightarrow \gamma(M)$ :  $G_2(\mathbb{C}^{n+1})$  の半分裂元の 全要素 subset である

$(M, \gamma(M), \gamma)$  は  $\eta$ - $\bar{\eta}$ -mod  $\gamma(M)$  上の  
主  $S^1$ -束

さらに、 $\gamma(M)$  は  $M$  の 複素 ver 場  $\gamma$  の  
積分曲線で、 $\mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{CP}^n$  内の  $\square$  である

$\mathbb{CP}^n$  の

$G_2(\mathbb{C}^{n+1})$  の

$\eta$ - $\bar{\eta}$ -mod の twistor sp.

$Z = \{I \in \mathbb{Q} \mid I^2 = -1\}$ :  $M$  上の  $S^2$  束で  $\tilde{M}$  の twistor 空間  
という。

(1)  $\tilde{M}$ : 1,4 曲率  $\neq 0 \Rightarrow Z$  は複素接触構造

$S^2$  束

## 逆構成

$\varphi: \Sigma^{n+1} \rightarrow G_2(\mathbb{C}^{n+1})$  : 全複素はめ込みについて,

$$\forall p \in \Sigma \rightsquigarrow \tilde{I}_p \in \mathcal{Q}_{\varphi(p)}$$

As:

ラゲランジアンはめ込み

$$\Leftrightarrow \varphi: M^n \rightarrow \mathbb{C}P^n$$

## Theorem 3

$\varphi: M^n \rightarrow \mathbb{C}P^n$ , ラゲランジアンはめ込み

$\gamma_c: M^n \rightarrow G_2(\mathbb{C}^{n+1})$  : NC for  $\varphi$  and  $N \geq c$ .

$$(d\gamma_c)_p(\mathcal{J}N) = 0.$$

ruled  $\Leftrightarrow M$  is foliated by geodesics in  $\mathbb{C}P^n$

## Remark 6

$$\mathcal{Q}^{n+1} = \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+1}) \quad ; \quad \text{con}$$



# Theorem 7

$\gamma_R: \Sigma^{n-1} \rightarrow \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+1})$  : 波線叢

$\iota: \tilde{G}_2 \rightarrow G_2$  : 包含写像,

$\Rightarrow$

$\iota \circ \gamma_R: \Sigma^{n-1} \rightarrow G_2(\mathbb{C}^{n+1})$  へ

$\psi: \Sigma^{n-1} \rightarrow S^n$  が austere である

$\Leftrightarrow$  主曲率 が  $-1$  の計算で不変.

$M^2 \subset S^3$  : minimal surface in 3-sphere

$M^n \subset S^{n+1}$  : minimal isoparametric 超曲面

with same multiplicity of 主曲率

$M^4 \subset S^5$  : inverse image of some Levi-flat real

超曲面  $\Sigma^3$  in  $\mathbb{C}P^2$  under Hopf 写像

Stenzel metric  
Veronese surface

$$g = 4, M_1 = 1$$

$$\frac{1 + \sin 2h}{\cos 2h}$$

$$\frac{-1 + \sin 2h}{\cos 2h}$$

