

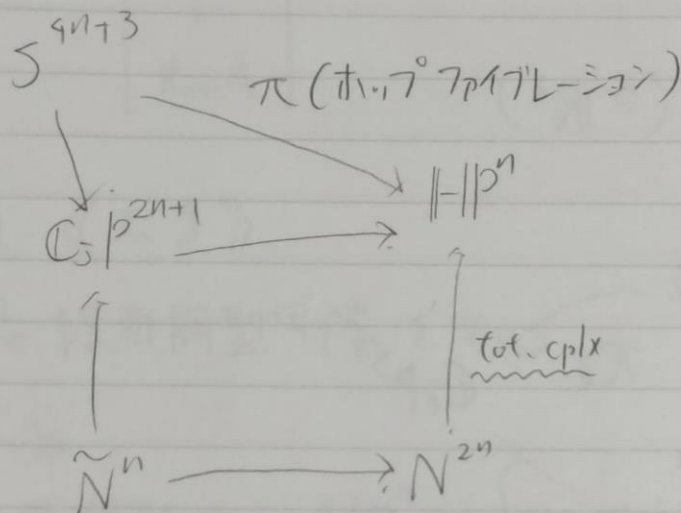
10/20. (金) 幾何セミナー.

(四元数対称空間に付随する R空間 と 全複素部分多様体)

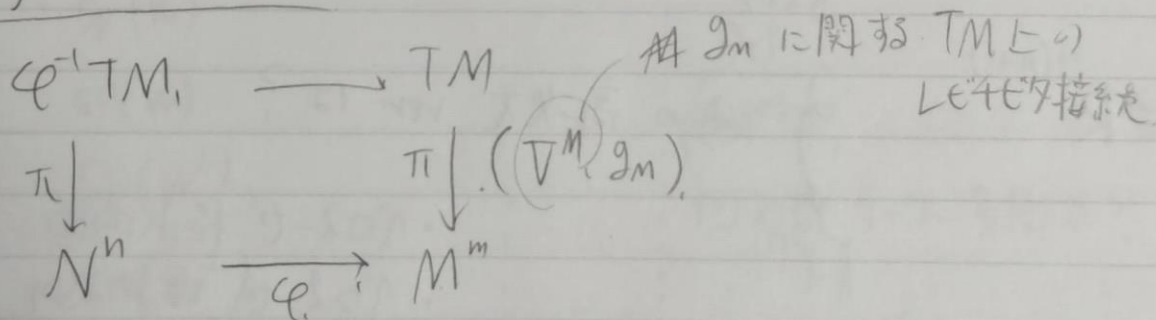
・ 複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ 内の第2基本形式平行な部分 m 次元多様体の分類

(9/11/22 →)

(塚田 によ) 1925



記号のかわりに



$$\nabla_x^\varphi(d\varphi Y) = d\varphi(\nabla_x^N Y) + \underbrace{\alpha^N(X, Y)}_{\varphi: N \rightarrow M \text{ の第2基本形式}}$$

▽

- ・ $\alpha^N \equiv 0 \iff \varphi$ は全測地的
- ・ $H \equiv 0 \iff \varphi$ は極小はめ込み

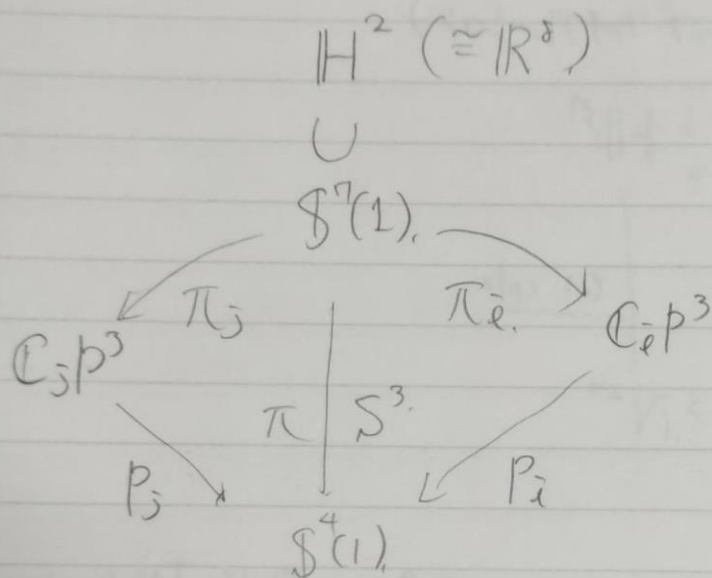
14th

四元数 $\mathbb{H} = \mathbb{R} + \mathbb{R}\bar{i} + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$

• $\bar{i}^2 = \bar{j}^2 = k^2 = -1$

• $\bar{i}j = -j\bar{i} = k$ ($\sim = j, \sim = \bar{i}$ の時も成り立つ)

Hopf ファイブレーション

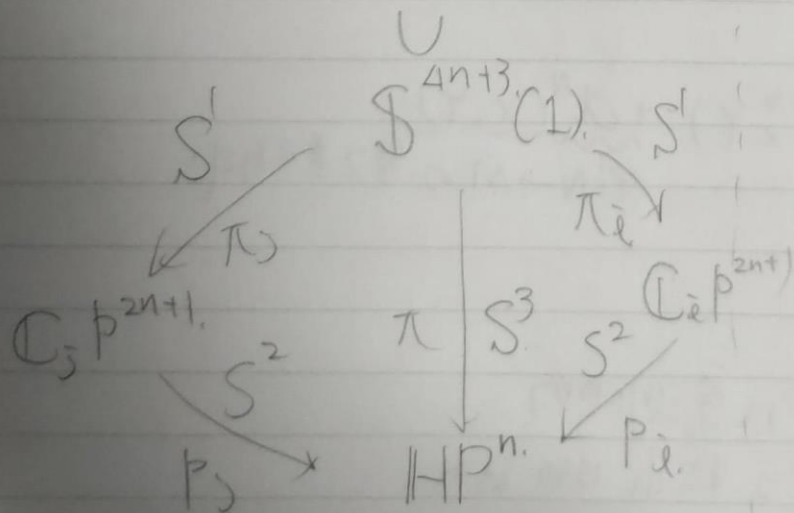


$\mathbb{H}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{4(n+1)}$

この高次元 ver は?

\mathbb{H}^{n+1}

- ヲノエーゼ 極小曲面
- ヲノエーゼ 埋め込み



③

$$\mathbb{H}^{n+1} = \left\{ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{bmatrix} \mid x_{\tilde{i}} \in \mathbb{H} \ (\tilde{i}=1, 2, \dots, n+1) \right\}$$

$$X\lambda := \begin{bmatrix} x_1\lambda \\ \vdots \\ x_{n+1}\lambda \end{bmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{H}$$

• 内積: $\langle\langle x, y \rangle\rangle$

• \mathbb{H}^{n+1} の線形同型写像を考える

Sp

$$\text{四次数射影 Sp: } \mathbb{H}P^n := \left\{ W \subset \mathbb{H}^{n+1} \mid 1 = \dim_{\mathbb{H}} W \wedge W \perp W^{\perp} \right\}$$

• $Sp(W)$

• $Sp(W)$

• $Sp(W^{\perp})$

• $Sp(W^{\perp})$

Def

$(M^{n \times n}, g)$

四元数 ケーラー多様体?

元
• 四元数 ケーラー構造

$\Leftrightarrow P \in M$ に近傍で定義された \mathbb{Q} の局所標場

$\{I, J, k\}$ が存在 s.t

$$I^2 = J^2 = k^2 = -Id$$

$$IJ = -JI = k \quad (\text{---} = I, \text{---} = J)$$

四元数 ケーラー構造 \mathbb{Q} の局所標準基底

Def

あるか はめ込み $\varphi: N \rightarrow (M, g, Q)$ が 全複素 はめ込み

$\Leftrightarrow N$ が 開被覆 $N = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ を持ち,

切断 J^λ が φ^*Q に対して 存在 s.t.

$$\begin{cases} (1) J^\lambda \circ J^\lambda = -Id \\ (2) J^\lambda((d\varphi)_p) \\ (3) \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} \varphi^*Q & \rightarrow & (Q, \nabla^2) \subset \text{END}(TM) \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_\lambda \subset N & \xrightarrow{\varphi} & M. \end{array}$$

$$HP^n \simeq \frac{Sp(H^{n+1})}{Sp(W) \times Sp(W^\perp)}$$

• HP^n の 四元数 \uparrow - \downarrow -構造

$$Q := \bigsqcup_{W \in HP^n} Q_W = \bigsqcup_{W \in HP^n} Sp(W)$$

• Prop

$\varphi: N \rightarrow HP^n$ が 全複素 はめ込み である

$\Leftrightarrow \varphi: N \rightarrow HP^n$ の 水平な 複素正則 1-1 $\tilde{\varphi}: \tilde{N} \rightarrow \Sigma(HP^n)$ が 存在,

2

$$\tilde{N} \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \mathbb{C}_5 P^{2n+1} \cong \mathbb{Z}(\mathbb{H}P^n)$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow P_0 \\ N^{2n} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{H}P^n \end{array}$$

- ・ 複素ルジャンドル部分 mfd
- ・ 極小

・ 四元数対称空間

(by J.A. Wolf)

Ricci曲率 $\neq 0$ の四元数ケーラー多様体で既約対称空間になるものが分類

Def R空間

Adjoint

$$K/K_E = \text{Ad}_{\rho \rho}(K) \cong \mathbb{C}_3$$

これは R空間 (S-表現の軌道)

$$R\text{空間} \xrightarrow{\chi} \text{対称 sp}$$

計量的接続

Def

∇^c on TN が標準接続

$$\Leftrightarrow (1) \nabla^c g = 0$$

$$(2) \nabla^c D^c = 0$$

$$(D^c = \nabla - \nabla^c)$$

$$\hat{N} := \pi^{-1}(N)$$

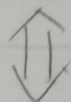
$$= \left\{ (p, x) \in N \times S^{4n+3} \mid p \in N, \pi(x) = p \right\}$$

$\hat{N} \subset S^{4n+3}$ は S-表現のある特異軌道

Q

Theorem (Olmos-Sánchez 1991)

(1) N は $\nabla^c \alpha = 0$ を満たす TN 上の標準接続 ∇^c を持つ



(2) N は 主曲率一定

Theorem (C-H-O)

$\nabla \alpha = 0$ を満たし、
比4接続 $\nabla^{\hat{N}}$ とは異なる。

$d=n$. 接続 $T\hat{N}$ 上に標準接続 $\nabla^c = \nabla^{\hat{N}} - D$
が存在して、

$$\begin{aligned} (\nabla_x^c \alpha^{\hat{N}})(Y, Z) &:= (\nabla_{\mathcal{H}X}^c \alpha^{\hat{N}})(\mathcal{H}Y, \mathcal{H}Z) \\ &= ((\nabla_{\pi_* X}^* \alpha^N)(\pi_* Y, \pi_* Z))^{\sim} \end{aligned}$$

Lemma

$\nabla^c = \nabla^{\hat{N}} - D$ は、 $\perp \times \mathbb{R}$ を満たす

$$\nabla^c g_{\hat{N}} = 0 \quad \text{かつ} \quad \nabla^c D = 0$$

(よって、 ∇^c は $T\hat{N}$ 上の 比4接続 と異なる標準接続)

($\forall X, Y, Z \in T\pi^{-1}N$)

$$G \rightarrow (G, K) = (G_2, SO(4))$$

$$g_2 = 50(4) \oplus 2$$

Def

R. Chiang $\pi_1(D_2) \cong \pi_1(\mathbb{A}^1) \cong \mathbb{Z} \subset L^3 \subset \mathbb{CP}^3$

$$\Leftrightarrow L^3 = \left\{ [Z_0, Z_1, Z_2, Z_3] \in \mathbb{CP}^3 \mid \begin{array}{l} 3|Z_0|^2 + |Z_1|^2 - |Z_2|^2 - 3|Z_3|^2 = 0 \\ Z_0 \bar{Z}_1 + Z_1 \bar{Z}_2 - Z_2 \bar{Z}_3 = 0 \end{array} \right.$$

2. Minimal | Langman

運動量字像

$$X \in \mathcal{P}, \quad \hat{\mu}(X) - \hat{\mu}(0) = -\frac{1}{2} [X, X]^{p'} = 0$$

$X \in \Gamma$ है तो $\sigma_p(X) \subset \Gamma$

$$254x = 0$$

$$x = 0$$