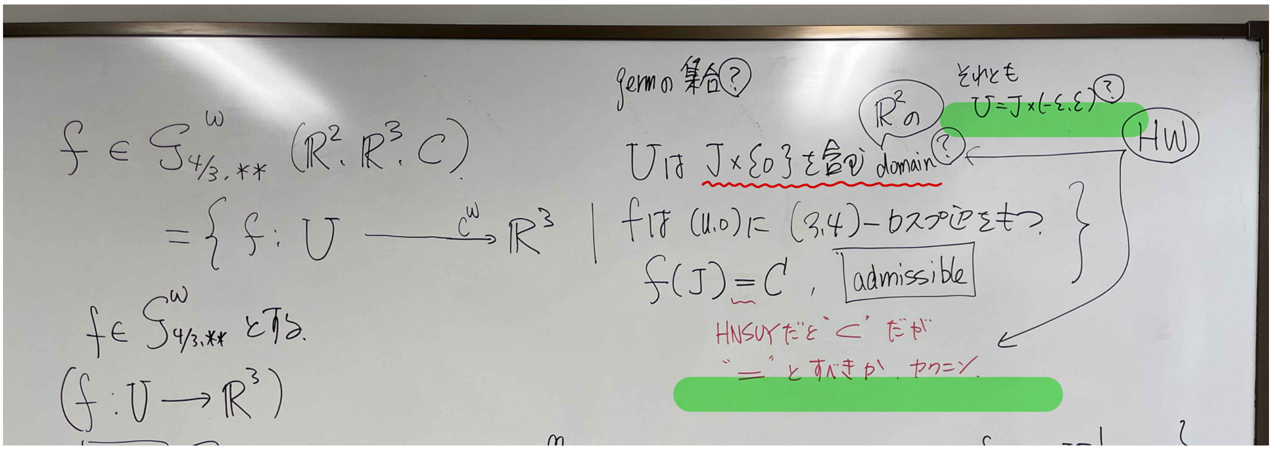
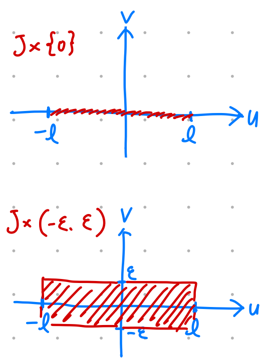
- 定義域の確認
- $v>0$ に対して $\eta(u,v) > 0$ の証明
- 20250807-m-edge-symmetry.pdf の命題2証明
- Prop 5.1 証明
- 楕円の平行曲面の像と平行曲線の回転面の確認



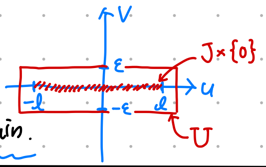


- $J\times\{0\}$内で偏微分 $\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)$ や $\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)$ を定義するには、各点における極限値の定義が必要。

極限をとるには、u方向にもv方向にも開であることが必要。

端の右側微分と左側微分のために。

$\longrightarrow$ Uは$J\times\{0\}$を含むdomain.



①

By the terminology "C^r-differentiable" we mean C^∞-differentiability if $r=\infty$ and real analyticity if $r=\omega$. We denote by $\boldsymbol{R}^3$ the Euclidean 3-space. Let U be a neighborhood of the origin $(0,0)$ in the uv-plane $\boldsymbol{R}^2$, and let $f: U \to \boldsymbol{R}^3$ be a C^r-map. Without loss of generality, we may assume $f(o)=\mathbf{0}$, where

$$o := (0,0), \qquad \mathbf{0} := (0,0,0). \tag{0.1}$$

Let $\mathcal{G}^r_{3/2}(\boldsymbol{R}^2_o, \boldsymbol{R}^3)$ (resp. $\mathcal{G}^r(\boldsymbol{R}^2_o, \boldsymbol{R}^3)$) be the set of germs of C^r-cuspidal edges (resp. generalized C^r-cuspidal edges) $f(u,v)$ satisfying $f(o)=\mathbf{0}$. We fix $l>0$ and consider an embedding (i.e. a simple regular space curve)

$$\mathbf{c}: J \to \boldsymbol{R}^3 \qquad (J := [-l, l])$$

such that $\mathbf{c}(0)=\mathbf{0}$. We do not assume here that $u \mapsto \mathbf{c}(u)$ is the arc-length parametrization (if necessary, we assume this in latter sections). We denote by C the image of $\mathbf{c}$. Here, we ignore the orientation of C and think of it as the singular set image (i.e. the image of the singular set) of f. We let $\mathcal{G}^r_{3/2}(\boldsymbol{R}^2_o, \boldsymbol{R}^3, C)$ (resp. $\mathcal{G}^r(\boldsymbol{R}^2_o, \boldsymbol{R}^3, C)$) be the subset of $\mathcal{G}^r_{3/2}(\boldsymbol{R}^2_o, \boldsymbol{R}^3)$ (resp.

$g^r_{4/3}(\mathbb{R}^2_o, \mathbb{R}^3)$ … 原点 $o=(0,0)$ 近傍における (3.4)-CE の germ の集合

$U \subset \mathbb{R}^2$ … 原点 o を含む近傍

②

set) of f. We let $\mathcal{G}^r_{3/2}(\boldsymbol{R}^2_o, \boldsymbol{R}^3, C)$ (resp. $\mathcal{G}^r(\boldsymbol{R}^2_o, \boldsymbol{R}^3, C)$) be the subset of $\mathcal{G}^r_{3/2}(\boldsymbol{R}^2_o, \boldsymbol{R}^3)$ (resp. $\mathcal{G}^r(\boldsymbol{R}^2_o, \boldsymbol{R}^3)$) such that the singular set image of f is contained in C (we call C the *edge* of f). Similarly, a subset of $\mathcal{G}^r(\boldsymbol{R}^2_o, \boldsymbol{R}^3, C)$ denoted by

$$\mathcal{G}^r_{\mathrm{ccr}}(\boldsymbol{R}^2_o, \boldsymbol{R}^3, C), \qquad (\text{resp. } \mathcal{G}^r_{5/2}(\boldsymbol{R}^2_o, \boldsymbol{R}^3, C)\,)$$

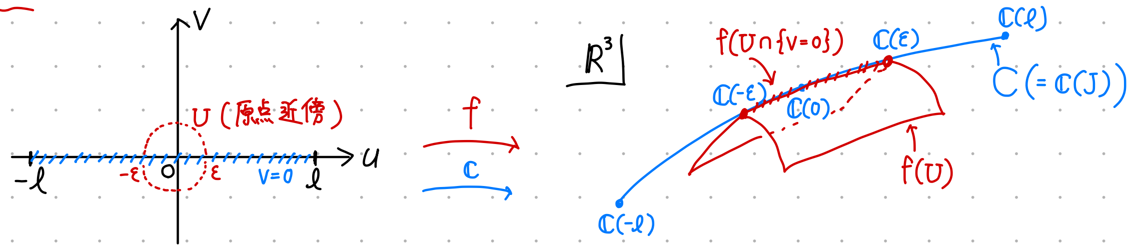
consisting of germs of cuspidal cross caps (resp. 5/2-cuspidal edges) is also defined.

埋めこみ $\mathbb{c}: [-l, l] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$C := \mathrm{Im}\,\mathbb{c}$

$g^r_{4/3}(\mathbb{R}^2_o, \mathbb{R}^3, C)$ … ① かつ $f_{(v=0)}$ の特異点集合の像が C に 含まれる
一致する

$f: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$



① と特異曲線の共通部分の定義域は $U\cap\{v=0\}$ であるため、

$f(U\cap\{v=0\})$ と C の包含関係を考えればよい。

germ は原点近傍で定義されているため、$f(U\cap\{v=0\}) \subset C$ である。

③

Let U be a neighborhood of $J\times\{0\}$ of $\boldsymbol{R}^2$ and $f: U \to \boldsymbol{R}^3$ a C^r-map consisting only of generalized cuspidal edge points along $J\times\{0\}$ such that

$$f(u,0) = \mathbf{c}(u) \qquad (u \in J). \tag{0.3}$$

We denote by $\mathcal{G}^r(\boldsymbol{R}^2_J, \boldsymbol{R}^3, C)$ the set of such f (f is called a *generalized cuspidal edge along* C). Like as the case of map germs at o, the sets

$$\mathcal{G}^r_{3/2}(\boldsymbol{R}^2_J, \boldsymbol{R}^3, C), \quad \mathcal{G}^r_{\mathrm{ccr}}(\boldsymbol{R}^2_J, \boldsymbol{R}^3, C), \quad \mathcal{G}^r_{5/2}(\boldsymbol{R}^2_J, \boldsymbol{R}^3, C)$$

are also canonically defined. For each point P on the edge C, the plane $\Pi(P)$ passing through

U … $J(=[-l, l])^{u} \times \{0\}^{v}$ を含む $\mathbb{R}^2$ 上の近傍

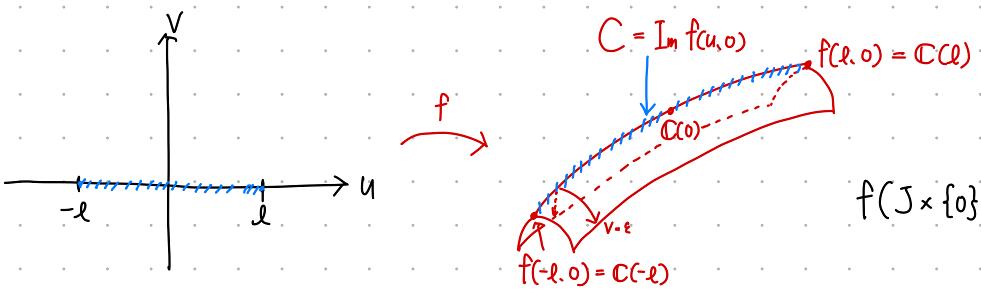
埋めこみ $\mathbb{c}: [-l, l] \longrightarrow \mathbb{R}^3$、$C := \mathrm{Im}\,\mathbb{c}$ に対して、

$$f(u,0) = \mathbb{c}(u) \quad (u \in J).$$

特異点集合の像 $\mathrm{Im}\,\mathbb{c}$ は、$\mathbb{c}(J) = f(J\times\{0\}) = C$

区間の全点

$\mathcal{G}^r_{4/3}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$ … 閉区間 J、$u \in J$ に対して $f(u,0) = C(u)$ となるような (3.4)-CE の germ の集合。



$$f(J \times \{0\}) = \{f(u,0) \mid u \in J\}$$
$$= \{C(u) \mid u \in J\}$$
$$= C.$$

④

We denote by $\mathcal{G}^r_*(\boldsymbol{R}^2_o, \boldsymbol{R}^3, C)$ the set of germs of generic generalized C^r-cuspidal edges in $\mathcal{G}^r(\boldsymbol{R}^2_o, \boldsymbol{R}^3, C)$, and set

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^r_{*,3/2}(\boldsymbol{R}^2_o, \boldsymbol{R}^3, C) &:= \mathcal{G}^r_*(\boldsymbol{R}^2_o, \boldsymbol{R}^3, C) \cap \mathcal{G}^r_{3/2}(\boldsymbol{R}^2_o, \boldsymbol{R}^3, C), \\ \mathcal{G}^r_{*,\mathrm{ccr}}(\boldsymbol{R}^2_o, \boldsymbol{R}^3, C) &:= \mathcal{G}^r_*(\boldsymbol{R}^2_o, \boldsymbol{R}^3, C) \cap \mathcal{G}^r_{\mathrm{ccr}}(\boldsymbol{R}^2_o, \boldsymbol{R}^3, C), \\ \mathcal{G}^r_{*,5/2}(\boldsymbol{R}^2_o, \boldsymbol{R}^3, C) &:= \mathcal{G}^r_*(\boldsymbol{R}^2_o, \boldsymbol{R}^3, C) \cap \mathcal{G}^r_{5/2}(\boldsymbol{R}^2_o, \boldsymbol{R}^3, C). \end{aligned} \tag{0.6}$$

On the other hand, for $f \in \mathcal{G}^r(\boldsymbol{R}^2_J, \boldsymbol{R}^3, C)$, we consider the condition

$$|\kappa_s(u)| < \kappa(u) \qquad (u \in J), \tag{0.7}$$

which implies that all singular points of f along the curve C are generic. We denote by

$$\mathcal{G}^r_*(\boldsymbol{R}^2_J, \boldsymbol{R}^3, C) \tag{0.8}$$

the set of $f \in \mathcal{G}^r(\boldsymbol{R}^2_J, \boldsymbol{R}^3, C)$ satisfying (0.7). Moreover, if

$$\max_{u \in J} |\kappa_s(u)| < \min_{u \in J} \kappa(u) \tag{0.9}$$

holds, then f is said to be *admissible*. We denote by

$$\mathcal{G}^r_{**}(\boldsymbol{R}^2_J, \boldsymbol{R}^3, C) \tag{0.10}$$

the set of admissible $f \in \mathcal{G}^r(\boldsymbol{R}^2_J, \boldsymbol{R}^3, C)$. Then by imitating (0.6),

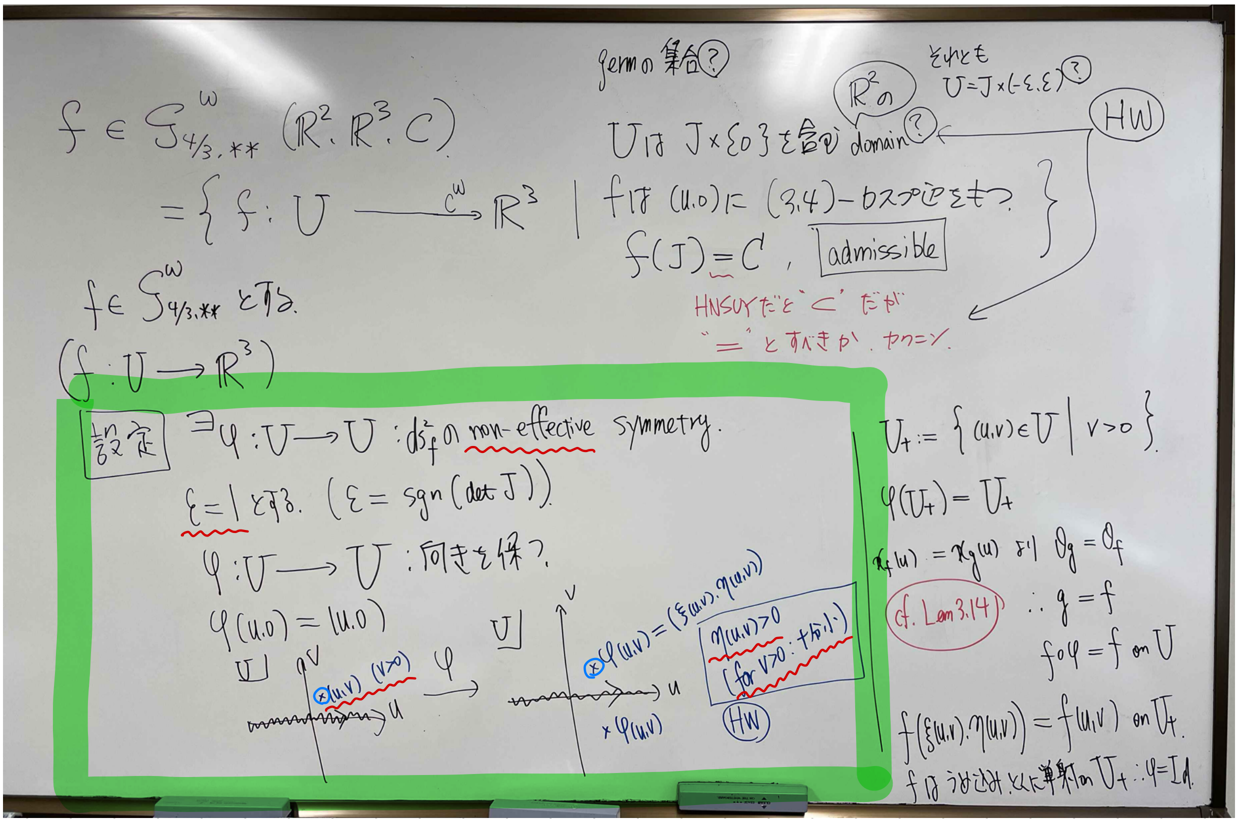
$$\mathcal{G}^r_{*,3/2}(\boldsymbol{R}^2_J, \boldsymbol{R}^3, C), \qquad \mathcal{G}^r_{**,3/2}(\boldsymbol{R}^2_J, \boldsymbol{R}^3, C) \tag{0.11}$$

$\mathcal{G}^r_{**,4/3}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$ … ③ かつ admissible

- admissible … 曲率 κ、特異曲率 κ_s に関する条件 (f と C の包含関係には無関係?)
- 等式 $f(J \times \{0\}) = C$ は 式 (0.3) のみ から 導出されている。

$\longrightarrow$ $f \in \mathcal{G}^r_{**,4/3}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$ は $f(J \times \{0\}) = C$.

($r = \omega$ の 場合でも同じ)



十分小さい $v>0$ に対して、$\eta(u,v)>0$ を示す

Proof

φ は (ds_f^2 の) non-effective symmetry であるため、$\varphi(u,0)=(\xi(u,0),\eta(u,0))=(u,0)$.
つまり、

$$\xi(u,0)=u,\qquad \eta(u,0)=0$$

$$\Big\downarrow\ u\text{で微分}$$

$$\xi_u(u,0)=1,\qquad \eta_u(u,0)=0. \cdots ①$$

φ の ヤコビアン を J と おくと、行列式 $\det J$ は

$$\det J=\begin{vmatrix}\xi_u & \eta_u\\ \xi_v & \eta_v\end{vmatrix}=\xi_u\eta_v-\eta_u\xi_v.$$

$v=0$ を代入すると、$\det J_{(u,0)}=\underbrace{\xi_u(u,0)}_{=1}\eta_v(u,0)-\underbrace{\eta_u(u,0)}_{=0}\xi_v(u,0)\overset{①より}{=}\eta_v(u,0)$.
φ は向きを保つため、$\det J>0$. $v=0$ を代入すれば、

$$\det J_{(u,0)}=\eta_v(u,0)>0. \cdots ②$$

u を固定して $g(v):=\eta(u,v)$ とすると、$g(0)$ および $g'(0)$ は

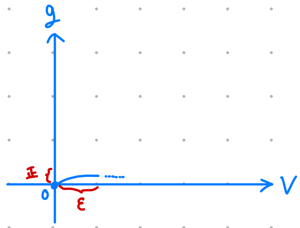
$$g(0)=\eta(u,0)=0.$$

$g'(0) = \eta_v(u, 0) > 0$ (∵ ② より)

であるため、十分小さい正の v では $g(v) > 0$. つまり $\eta(u, v) > 0$ ($v>0$; 十分小さい).

(※ φ は diffeo (つまり、全単射) および $\varphi(u, 0) = (\xi(u, 0), \eta(u, 0)) = (u, 0)$ であるため、

$v \neq 0$ ならば $\eta(u, v) = 0$ は起こり得ない.)



$\mathbf{c}(u)$ を閉区間 $J := [-l, l]$ 上で定義された弧長パラメータ表示された $\mathbb{R}^3$ の正則曲線で，J 上で $\kappa > 0$ とする．

命題 2.1. $(3,4)$-カスプ辺 $f \in \mathcal{G}^{\omega}_{*,4/3}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$ に対し，C が *orientation-reversing symmetry* T をもち，第一基本形式 ds^2_f が *effective symmetry* φ をもつとする．このとき，次が成り立つ．

(1) T が正であり，φ が *orientation-reversing* (φ が向きを逆にする) ならば，$T \circ f \circ \varphi = \check{f}$.

(2) T が正であり，φ が *orientation-preserving* (φ が向きを保つ) ならば，$T \circ f \circ \varphi = f$.

(3) T が負であり，φ が *orientation-reversing* (φ が向きを逆にする) ならば，$T \circ f \circ \varphi = f$.

(4) T が負であり，φ が *orientation-preserving* (φ が向きを保つ) ならば，$T \circ f \circ \varphi = \check{f}$.

Proof

$g := T \circ f \circ \varphi$ とする (T: ori-reversing symmetry, φ: effective). f と g それぞれの特異曲線は，

- $f(u,0) = \mathbb{C}(u)$
- $(g(u,0) =)\ T \circ f \circ \varphi(u,0) = T \circ f(-u,0) = T\mathbb{C}(-u) = \mathbb{C}(u)$.

f と一致.

さらに f と g の第一基本形式は，$ds^2_g = ds^2_{T\circ f\circ\varphi} = \varphi^* ds^2_f = ds^2_f$ となる．よって，$T \circ f \circ \varphi$ は

$$(g =)\ T \circ f \circ \varphi = f \text{ または } \check{f}$$

となる．

$\downarrow$ ν_g と ν_f の関係式を求める．

$\det(g_u, g_v, \nu_g)(u,v) \geq 0$ となるように $\nu_g(u,v)$ を決める．$\det J$ を φ のヤコビアン，$\sigma := \det T$，$\varepsilon := \mathrm{sgn}(\det J)$ とすると，$\nu_g(u,v) = \sigma \varepsilon T \nu_f \circ \varphi(u,v)$ とおけば，

$$
\begin{aligned}
\det(g_u, g_v, \nu_g)(u,v) &= \det\left(T(f\circ\varphi)_u,\ T(f\circ\varphi)_v,\ \sigma\varepsilon T\nu_f\circ\varphi\right)(u,v) \\
&= \underbrace{(\det T)}_{=\sigma}\,\sigma\varepsilon\,\det\left((f\circ\varphi)_u,\ (f\circ\varphi)_v,\ \nu_f\circ\varphi\right)(u,v)
\end{aligned}
$$

合成関数の微分

$$
\begin{aligned}
&= \varepsilon\,(\det J)\,\det(f_u, f_v, \nu_f)(\xi(u,v), \eta(u,v)) \\
&= \underbrace{|\det J|}_{>0}\,\underbrace{(\lambda\circ\varphi)(u,v)}_{\geq 0} \geq 0.
\end{aligned}
$$

∴ $\nu_g(u,v) = \sigma\varepsilon T\nu_f\circ\varphi(u,v)$ は向きを同調した g の単位法ベクトル場.

カスプ方向 $\mathcal{X}_f$ と $\mathcal{X}_g$ の関係式を求める.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{X}_g(u) := \hat{\nu}_g(u)\times \mathbb{C}'(u) &= \nu_g(u,0)\times\mathbb{C}'(u) \\
&= \sigma\varepsilon T\nu_f\circ\varphi(u,0)\times\mathbb{C}'(u) \\
&= \sigma\varepsilon T\nu_f(-u,0)\times(-T\mathbb{C}'(-u)) \\
&= -\sigma\varepsilon\underbrace{(\det T)}_{=\sigma}\,T\left(\hat{\nu}_f(-u)\times\mathbb{C}'(-u)\right) \\
&= -\varepsilon T\,\mathcal{X}_f(-u). \quad \cdots (*)
\end{aligned}
$$

$\mathbb{C}(u) = T\mathbb{C}(-u)$ より、
$\frac{d}{du}(\mathbb{C}(u)) = \frac{d}{du}(T\mathbb{C}(-u))$.

$(*)$ および カスプ方向とカスプ角の関係式より,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{X}_g(u) &= -\varepsilon T\left(\cos\theta_f(-u)\,\mathbb{n}(-u) - \sin\theta_f(-u)\,\mathbb{b}(-u)\right) \\
&= -\varepsilon\left(\cos\theta_f(-u)\,T\mathbb{n}(-u) - \sin\theta_f(-u)\,T\mathbb{b}(-u)\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ \mathcal{X}_g(0) &= -\varepsilon\left(\cos\theta_f(0)\,T\mathbb{n}(0) - \sin\theta_f(0)\,T\mathbb{b}(0)\right) \\
&= -\varepsilon\left(\cos\theta_f(0)\,\mathbb{n}(0) + \sigma\sin\theta_f(0)\,\mathbb{b}(0)\right)
\end{aligned}
$$

20250725.pdf の補題1.2より,
$T\mathbb{n}(0) = \mathbb{n}(0)$　$T\mathbb{b}(0) = -\sigma\mathbb{b}(0)$.

(i) $\varepsilon = -1$（つまり, $\det J < 0$）の場合

$$
\begin{aligned}
\mathcal{X}_g(0) &= \cos\theta_f(0)\,\mathbb{n}(0) + \sigma\sin\theta_f(0)\,\mathbb{b}(0) \\
&= \cos(\underbrace{-\sigma\theta_f(0)}_{=\theta_g(0)})\,\mathbb{n}(0) - \sin(-\sigma\theta_f(0))\,\mathbb{b}(0)
\end{aligned}
$$

$\therefore\ \theta_g(0) = -\sigma\theta_f(0)$

$\to \begin{cases} T \text{ が正なら } T\circ f\circ\varphi = \check{f} \quad \cdots ① \end{cases}$

T が負なら $T \circ f \circ \varphi = f$ … ②

(ii) $\varepsilon = 1$ (つまり $\det J > 0$) の場合

$$x_g(0) = -\cos\theta_f(0) - \sigma\sin\theta_f(0)\, b(0)$$

$$= \cos(\pi - \sigma\theta_f(0))\, n(0) - \sin(\pi - \sigma\theta_f(0))\, b(0)$$

$\therefore\ \theta_g(0) = \pi - \sigma\theta_f(0)$

→ T が正なら、$\theta_g(0) = \theta_f(0)$. $\therefore\ T \circ f \circ \varphi = f$ … ③ ($\sigma = 1$)

T が負なら、$\theta_g(0) = -\theta_f(0)$. $\therefore\ T \circ f \circ \varphi = \check{f}$ … ④ ($\sigma = -1$)

①②③④より、Prop 2.1 の (1)(2)(3)(4) を示した。∎

$\sigma = 1$

$\theta_f(0) = (2n+1)\pi - \theta_f(0)$ $(n \in \mathbb{Z})$

$2\theta_f(0) = (2n+1)\pi$

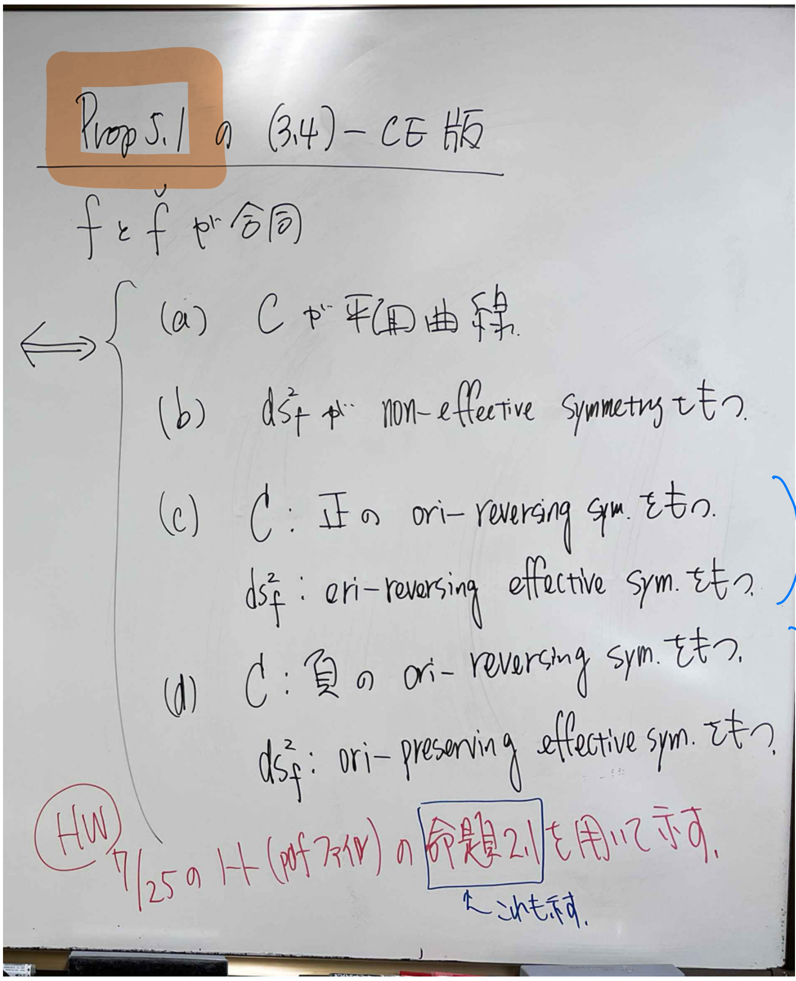
$\theta_f(0) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$

$\sigma = -1$

$\theta_f(0) = -(2n+1)\pi - \theta_f(0)$

$\theta_f(0) = -\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$

どちらの場合でも、$\cos\theta_f(0) = 0$ より、$\kappa_s(p) = 0$ となる。



(c): Prop 2.1 の ① に該当.

(d): Prop 2.1 の ④ に該当.

(⟸ を示す)

(a) が成立すると仮定する.

~~平面曲線に関する補題:~~

~~$T \in O(3)$ が ori-preserving symmetry である~~
~~⟺ C が平面曲線であり、T は平面に関する折返し~~

20250731.pdf

~~より、$\exists T \in O(3)$、ori-preserving symmetry.~~ Remark 5.2 (20250807-symmetry.pdf) より

> **命題 1** (Remark 5.2). C が平面内 Π にあるとし，平面 Π に関する鏡映を S とする．このとき，任意の $f \in \mathcal{G}^{\omega}_{m,*}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$ に対し，
> $$\check{f} = S \circ f$$
> が成り立つ．

$$\check{f} = \cancel{T}\,S \circ f$$

が成り立つ. ∴ f と $\check{f}$ は合同である.

(b) が成立すると仮定する.

$g := f \circ \varphi$ とする (φ : ds_f^2 の non-effective symmetry). f と g それぞれの特異曲線は,

- $f(u, 0) = C(u)$
- $(g(u,0) =)\ f \circ \varphi(u, 0) = f(u, 0) = C(u)$.

f の特異曲線と一致する.

である．さらに、f と g の第一基本形式は一致する $\left(\because\ ds_g^2 = ds_{f\circ\varphi}^2 = \varphi^* ds_f^2 = ds_f^2\right)$ ため、

$$(g=)\ f\circ\varphi = f \quad \text{または} \quad \check{f}$$

が成り立つ．

$\downarrow$ ν_f と ν_g の関係式を求める．

$\det(g_u, g_v, \nu_g)(u,v) \geq 0$ となるように $\nu_g(u,v)$ を決める．$\nu_g(u,v) = \varepsilon\nu_f\circ\varphi(u,v)$ とすると、

$$\begin{aligned}\det(g_u, g_v, \nu_g)(u,v) &= \det\left((f\circ\varphi(u,v))_u,\ (f\circ\varphi(u,v))_v,\ \varepsilon\nu_f\circ\varphi(u,v)\right)\\ &= \varepsilon\,(\det J)\,(\lambda\circ\varphi)(u,v) \qquad (J : \varphi(u,v) = (\xi(u,v), \eta(u,v)) \text{ のヤコビアン})\\ &= \underbrace{|\det J|}_{>0}\ \underbrace{(\lambda\circ\varphi)(u,v)}_{\geq 0} \quad \geq 0.\end{aligned}$$

である．よって、$\nu_g = \varepsilon\nu_f\circ\varphi$ (b.1) は向きを同調した g の単位法ベクトル場である．

カスプ方向 $\mathcal{X}_g(u)$ の定義式に (b.1) を代入すると、

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_g(u) := \hat{\nu}_g(u) \times \mathbb{C}'(u) &= \nu_g(u,0) \times \mathbb{C}'(u)\\ &= \varepsilon\nu_f\circ\varphi(u,0) \times \mathbb{C}'(u)\\ &= \varepsilon\,\nu_f(u,0) \times \mathbb{C}'(u)\\ &= \varepsilon\,\mathcal{X}_f(u). \quad \cdots \text{(b.2)}\end{aligned}$$

となる．カスプ方向とカスプ角の関係式

$$\mathcal{X}(u) = \cos\theta(u)\,n(u) - \sin\theta(u)\,b(u)$$

に (b.2) を代入すると、

$$\mathcal{X}_g(u) = \varepsilon\left(\cos\theta_f(u)\,n(u) - \sin\theta_f(u)\,b(u)\right)$$

となる．

※(i) $\varepsilon\ (= \mathrm{sgn}(\det J)) = 1$ の場合

$\mathcal{X}_g(u) = \mathcal{X}_f(u)$ であるため、$\theta_f(u) = \theta_g(u)$．

$\therefore\ f\circ\varphi = f$．

(ii) $\varepsilon\left(=\mathrm{sgn}(\det J)\right)=-1$ の 場合

$$x_g(u) = -\cos\theta_f(u)\,n(u) + \sin\theta_f(u)\,b(u)$$

$\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$
$\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$

$= \cos(\pi+\theta_f(u))\,n(u) - \sin(\pi+\theta_f(u))\,b(u)$ より、 $\theta_g(u) = \pi + \theta_f(u)$

$\longrightarrow$ $\theta_g(u) = \theta_f(u)$ は 不適であるため、

$\theta_g(u) = -\theta_f(u)$ のみ.

(この時、 $\theta_f(u) = \pm\frac{\pi}{2}$)

(i)(ii) より、 $f\circ\varphi = \check{f}$ であるため f と $\check{f}$ は合同である.

※ $\varepsilon = 1$ が 矛盾 すること の 証明

Lemma 3.14. *Let U be an open subset of the uv-plane $\mathbf{R}^2$ containing $J\times\{0\}$, and let ds^2 be a real analytic Kossowski metric of type I defined on U satisfying (1)–(3) of Lemma 3.5. Suppose that the singular set of ds^2 consists only of non-parabolic points. If there exist open subsets $V_i(\subset U)$ $(i=1,2)$ containing $J\times\{0\}$ and a diffeomorphism $\varphi: V_1\to V_2$ such that $\varphi^*ds^2 = ds^2$ and $\varphi(u,0)=(u,0)$ hold for $u\in J$, then $V_1 = V_2$ and φ is the identity map.*

・type I … 特異曲線 γ について、 $\gamma'(0)$ と null ベクトル $\eta(0)$ が 線形独立 である
$\gamma' = \frac{\partial}{\partial u}$, $\eta = \frac{\partial}{\partial v}$

・non-parabolic … ($\hat{\lambda} = \lambda K$ が、特異点 $q\in U$ (原点0を含む $\mathbf{R}^2$ の開集合) で 0 にならない)
(P64)
2-form $\Omega := K\,d\hat{A}$ が 0 にならない. ($d\hat{A} := \lambda\,du\wedge dv$)

$\Longleftrightarrow$ $\kappa_\nu \neq 0$ ([12] Theorem A)

[12]

Theorem A. *Let $\mathcal{U}$ be a domain in $\mathbf{R}^2$, and $f:\mathcal{U}\to(M^3,g)$ a front which admits only non-degenerate singular points. Then the 2-form $K\,d\hat{A}$ can be smoothly extended to $\mathcal{U}$, where $d\hat{A} = \det_g(f_u,f_v,\nu)\,du\wedge dv$ is the signed area element (cf. Remark 1.2).* Moreover, for each singular point p on $\mathcal{U}$, *the following two conditions are equivalent:*

$\Updownarrow$
(1) *the limiting normal curvature κ_ν at p is equal to zero,*
(2) *the extension of the 2-form $K\,d\hat{A}$ vanishes at p.*

(1) $\Longleftrightarrow$ (2)
($\overline{(1)} \Longleftrightarrow \overline{(2)}$)

If $\kappa_\nu(p)\neq 0$, the Gaussian curvature K is unbounded near p and changes sign between two sides of the singular curve. Furthermore, if (M^3,g) is the Euclidean 3-space, the above two conditions are equivalent to that the Gauss map $\nu:\mathcal{U}\to S^2$ of f has a singularity at p.

※ $\varepsilon=1$ だと矛盾することの証明

$U_+ := \{(u,v)\in U \mid v>0\}$ とする.

$\varphi(U_+) = U_+$ ($\because$ $v>0$ に対して、$\eta(u,v)>0$) である.

今 $\varepsilon=1$ (つまり $\chi_f(u)=\chi_g(u)$) より $\theta_g=\theta_f$.

$f\circ\varphi = f$ on U_+ より、$f(\xi(u,v), \eta(u,v)) = f(u,v)$ on U_+.

f は埋め込み (はめ込み かつ 同相)、特に単射であるため、$\varphi=\mathrm{Id}$ でなければいけない

$\xi(u,v)=u$

$\eta(u,v)=v$

(Lemma 3.14 参照)

$\therefore$ φ は non-effective symmetry になり得ないため、不適.

(c) が成立すると仮定する

これは Prop 2.1 の (1) に該当するため、正の ori-reversing symmetry T と ori-reversing effective symmetry φ を用いて

$$T \circ f \circ \varphi = \check{f}$$

が成り立つ.

$\therefore$ f と $\check{f}$ は合同である.

(d) が成立すると仮定する.

これは Prop 2.1 の (4) に該当するため、先程と同様に

$$T \circ f \circ \varphi = \check{f}$$

が成り立つ.

$\therefore$ f と $\check{f}$ は合同である.

以上より、Prop 5.1 の必要条件 ($\Longleftarrow$) を示した. ☆

($\Rightarrow$ を示す)

f と $\check{f}$ が合同であると仮定する。つまり、$\exists T \in O(3)$、$\exists \varphi$; diffeo s.t.

$$T \circ f \circ \varphi = \check{f} \quad \cdots (*)$$

と表せる。

(i) $\varphi = \mathrm{Id}$ かつ $T = \mathrm{Id}$ の場合

$(*)$ は $f = \check{f}$ となるが、これは成り立たない よってこのケースは起こり得ない。

(20250731.pdf)

$$T \circ f(u, 0) = \check{f}(u, 0)$$

この時点で、C が平面曲線であり、T がその平面に関する折返しと言える。$T\mathbb{C}(u) = \mathbb{C}(u)$

(ii) $\varphi = \mathrm{Id}$ かつ $T \neq \mathrm{Id}$ の場合

$(*)$ は、$T \circ f = \check{f}$ と表せる ~~T が負の ori-preserving symmetry の場合、これは~~

(a) の場合に該当。~~※1~~

~~(f と $T \circ f$ の特異曲線が一致しなくなるため、T が ori-reversing symmetry のケースは有り得ない)~~

(iii) $\varphi \neq \mathrm{Id}$ かつ $T = \mathrm{Id}$ の場合

$(*)$ は、$f \circ \varphi = \check{f}$ と表せる。φ が non-effective symmetry である。~~とすれば、~~ これは

(b) の場合に該当。

($\because$ φ が effective symmetry だとすると、$f \circ \varphi(u, 0) = f(-u, 0) = \mathbb{C}(-u)$ となり、不適)

(iv) $\varphi \neq \mathrm{Id}$ かつ $T \neq \mathrm{Id}$ の場合

$(*)$ より、$T \circ f \circ \varphi = \check{f}$ が成り立つ。

- 「T が正の ori-reversing symmetry」かつ「φ のヤコビアンが負である effective symmetry」

  $\longrightarrow$ (c) の場合に該当。

- 「T が負の ori-reversing symmetry」かつ「φ のヤコビアンが正である effective symmetry」

  $\longrightarrow$ (d) の場合に該当。

- 「T が ori-reversing symmetry」かつ「φ が non-effective symmetry」は有り得ない。
- 「T が ori-preserving symmetry」かつ「φ が effective symmetry」は有り得ない。

($\because$ $f(u, 0)$ と $T \circ f \circ \varphi(u, 0)$ の特異曲線が一致しない)

※2
・「T が ori-preserving symmetry」かつ「φ が non-effective symmetry」の 場合

$\longrightarrow$ (b) の 場合に該当.

(i)(ii)(iii)(iv) より, f と $\check{f}$ が合同ならば prop 5.1 の (a)(b)(c)(d) いずれかを満たしていること を示した. ☆☆

☆、☆☆ より、Prop 5.1 の 同値関係を示した. ■

☆ 日本語ノート まとめる
(ファイルが 散らばってしまって いる)
Theorem 3、4

※1 (ii) のケースについて、T は 正の ore-preserving ではないことを 確認

$g := T \circ f$ として、

$$(g(u,0) =)\ T \circ f(u,0) = T\mathbb{C}(u) = \mathbb{C}(u).$$

よって、$T \circ f = f$ または $\check{f}$.

次に、$\det(g_u, g_v, \nu_g)(u,v) \geq 0$ となる ν_g を 考える. $\nu_g(u,v) = \sigma T \nu_f(u,v)$ として、

$$\begin{aligned}
\det(T f_u, T f_v, \sigma T \nu_f)(u,v) &= (\det T)\sigma \det(f_u, f_v, \nu_f)(u,v) \\
&= \det(f_u, f_v, \nu_f)(u,v) \\
&= \lambda(u,v) \geq 0
\end{aligned}$$

よって、$\nu_g(u,v) = \sigma S \nu_f(u,v)$ は 向きを同調した g の単位法ベクトル場である.

$$\begin{aligned}
x_g(u) = \hat{\nu}_g(u) \times \mathbb{C}'(u) &= \nu_g(u,0) \times \mathbb{C}'(u) \\
&= \sigma T \nu_f(u,0) \times \mathbb{C}'(u) \\
&= \sigma T \nu_f(u,0) \times (T\mathbb{C}'(u)) \\
&= \sigma (\det T)\, T(\nu_f(u,0) \times \mathbb{C}'(u)) \\
&= T x_f(u).
\end{aligned}$$

$x_f(u) = \cos\theta_f(u)\, n(u) - \sin\theta_f(u)\, b(u)$ を代入すると、$x_g(u)$ は
$x_g(u) = \cos\theta_f(u)\, Tn(u) - \sin\theta_f(u)\, Tb(u)$ であるため、$u=0$ を 代入すると

$$\begin{aligned}
x_g(0) &= \cos\theta_f(0)\, Tn(0) - \sin\theta_f(0)\, Tb(0) \\
&= \cos\theta_f(0)\, n(0) - \sigma \sin\theta_f(0)\, b(0).
\end{aligned}$$

T が 正 (つまり $\sigma = 1$) だと、$\theta_g(0) = \theta_f(0)$ となり、矛盾 する.

※2 「T が ori-preserving symmetry」かつ「φ が non-effective symmetry」の場合

$\mathcal{X}_g(u) = \varepsilon T \mathcal{X}_f(u)$ であり、

$\varepsilon \left(= \mathrm{sgn}(\det J)\right) = 1$ のとき、$\theta_g(0) = -\sigma\theta_f(0)$.

$\varepsilon = -1$ のとき、$\theta_g(0) = \pi + \sigma\theta_f(0)$.

となる。よって、$(\varepsilon, \sigma) = (1, -1), (-1, 1)$ の時に f と $T\circ f\circ\varphi$ は合同となる

→ (b) に該当.

ケース(iv) で考えられる組合わせ毎の合同の可否は以下.

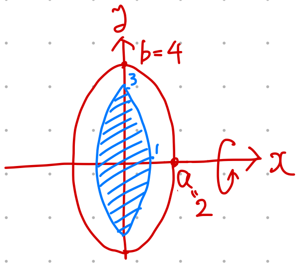
(Tが) ori-rev/pre	det T	Dφ の正負	(φが) eff/non-eff	f と T∘f∘φ は合同?
reverse	1	$D\varphi > 0$	eff	×
reverse	1	$D\varphi > 0$	non-eff	×
reverse	1	$D\varphi < 0$	eff	○ (c) に該当
reverse	1	$D\varphi < 0$	non-eff	×
reverse	−1	$D\varphi > 0$	eff	○ (d) に該当
reverse	−1	$D\varphi > 0$	non-eff	×
reverse	−1	$D\varphi < 0$	eff	×
reverse	−1	$D\varphi < 0$	non-eff	×
preserve	1	$D\varphi > 0$	eff	×
preserve	1	$D\varphi > 0$	non-eff	×
preserve	1	$D\varphi < 0$	eff	×
preserve	1	$D\varphi < 0$	non-eff	○ (b) に該当.
preserve	−1	$D\varphi > 0$	eff	×
preserve	−1	$D\varphi > 0$	non-eff	○ (b) に該当.
preserve	−1	$D\varphi < 0$	eff	×
preserve	−1	$D\varphi < 0$	non-eff	×

(parallel_curve_and_surface . nb)

- $a=2,\ b=c=4$ の場合

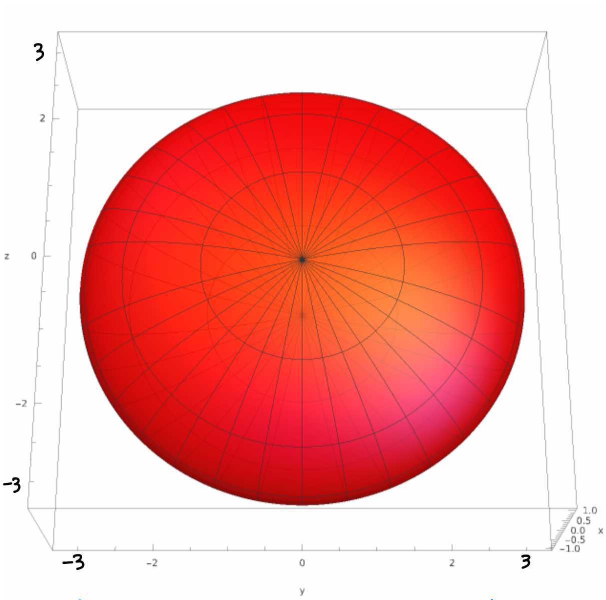
> ＊右図が、(3,4)-切フ辺を持つかどうか？

(像が同じ？)

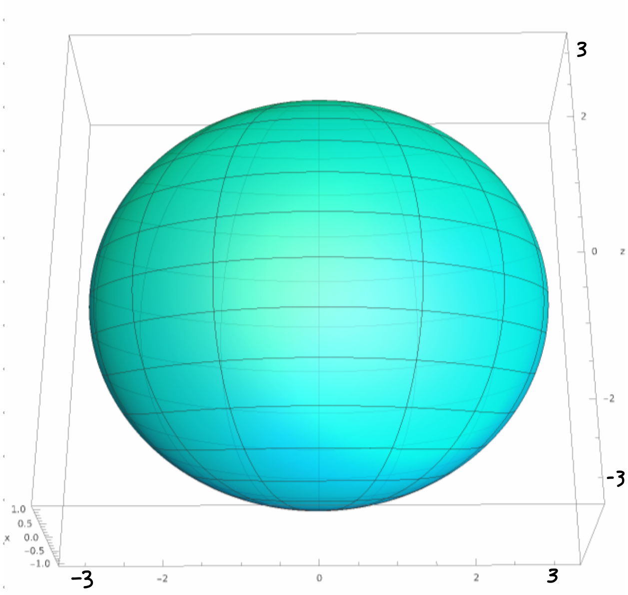


平行曲線($t=1$)を x軸まわりに回転.

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$$ に対応する平行曲面($t=1$)

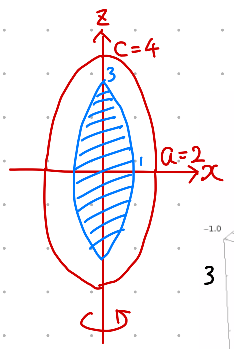


Out[•]= $$\left\{2\,\mathrm{Sin}[\theta]\left(-1+\frac{\overset{=1}{t}}{\sqrt{\mathrm{Cos}[\theta]^2+4\,\mathrm{Sin}[\theta]^2}}\right),\ \mathrm{Cos}[\theta]\,\mathrm{Cos}[\varphi]\left(4-\frac{\overset{=1}{t}}{\sqrt{\mathrm{Cos}[\theta]^2+4\,\mathrm{Sin}[\theta]^2}}\right),\ \mathrm{Cos}[\theta]\left(4-\frac{\overset{=1}{t}}{\sqrt{\mathrm{Cos}[\theta]^2+4\,\mathrm{Sin}[\theta]^2}}\right)\mathrm{Sin}[\varphi]\right\}$$

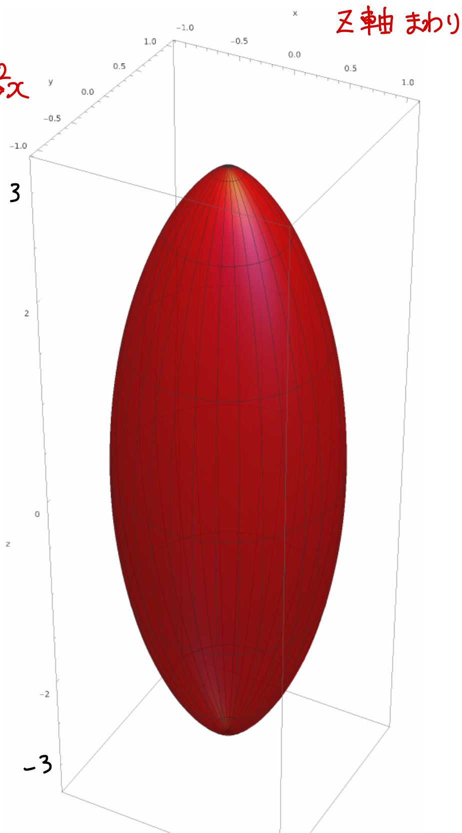


Out[•]= $$\left\{2\,\mathrm{Cos}[\varphi]\,\mathrm{Sin}[\theta]\left(1-\frac{\overset{=1}{t}}{\sqrt{\mathrm{Cos}[\theta]^2+\frac{1}{2}(5+3\,\mathrm{Cos}[2\varphi])\,\mathrm{Sin}[\theta]^2}}\right),\ \mathrm{Sin}[\theta]\left(4-\frac{\overset{=1}{t}}{\sqrt{\mathrm{Cos}[\theta]^2+\frac{1}{2}(5+3\,\mathrm{Cos}[2\varphi])\,\mathrm{Sin}[\theta]^2}}\right)\mathrm{Sin}[\varphi],\ \mathrm{Cos}[\theta]\left(4-\frac{\overset{=1}{t}}{\sqrt{\mathrm{Cos}[\theta]^2+\frac{1}{2}(5+3\,\mathrm{Cos}[2\varphi])\,\mathrm{Sin}[\theta]^2}}\right)\right\}$$

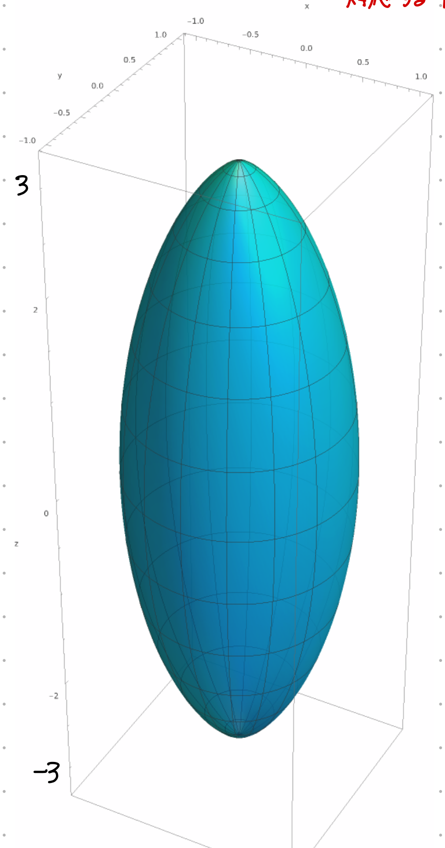
- $a=b=2,\ c=4$ の場合



平行曲線($t=1$)を z軸まわりに回転



$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$$ に対応する平行曲面($t=1$)



Out[•]= $$\left\{2\,\mathrm{Cos}[\varphi]\,\mathrm{Sin}[\theta]\left(-1+\frac{\overset{=1}{t}}{\sqrt{\mathrm{Cos}[\theta]^2+4\,\mathrm{Sin}[\theta]^2}}\right),\ 2\,\mathrm{Sin}[\theta]\left(-1+\frac{\overset{=1}{t}}{\sqrt{\mathrm{Cos}[\theta]^2+4\,\mathrm{Sin}[\theta]^2}}\right)\mathrm{Sin}[\varphi],\ \mathrm{Cos}[\theta]\left(4-\frac{\overset{=1}{t}}{\sqrt{\mathrm{Cos}[\theta]^2+4\,\mathrm{Sin}[\theta]^2}}\right)\right\}$$

Out[•]= $$\left\{2\left(1-\frac{\sqrt{2}\,\overset{=1}{t}}{\sqrt{5-3\,\mathrm{Cos}[2\theta]}}\right)\mathrm{Cos}[\varphi]\,\mathrm{Sin}[\theta],\ 2\left(1-\frac{\sqrt{2}\,\overset{=1}{t}}{\sqrt{5-3\,\mathrm{Cos}[2\theta]}}\right)\mathrm{Sin}[\theta]\,\mathrm{Sin}[\varphi],\ \mathrm{Cos}[\theta]\left(4-\frac{\sqrt{2}\,\overset{=1}{t}}{\sqrt{5-3\,\mathrm{Cos}[2\theta]}}\right)\right\}$$