先進数理科学 幾何　レポート問題　　　　提出締切：2024 年 7 月 30 日（火）15 時

$\boxed{\text{問 1}}$ M を滑らかな m 次元多様体とする．1 次微分形式 $\theta, \omega \in \Omega^1(M)$ に対して，

$$\theta \wedge \omega := \frac{1}{2}(\theta \otimes \omega - \omega \otimes \theta)$$

を θ, ω の**交代積**という．次の問いに答えよ．

(1) 各 $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ に対して，

$$(\theta \wedge \omega)(V, W) = -(\theta \wedge \omega)(W, V)$$

が成り立つことを示せ．

(2) $\theta \in \Omega^1(M)$ に対して，

$$\theta \wedge \theta = 0$$

が成り立つことを示せ．

(3) $(U; x^1, \dots, x^m)$ を座標近傍とする．1 次微分形式 $\theta \in \Omega^1(M)$ は U 上の C^∞ 級関数 $\theta_1, \dots, \theta_m \in C^\infty(U)$ を用いて $\theta = \sum_{i=1}^m \theta_i \, dx^i$ と表される．このとき $d\theta$ を

$$d\theta := \sum_{i=1}^m d\theta_i \wedge dx^i$$

と定めると，局所座標の取り方によらないことが知られている．$d\theta$ を θ の**外微分**という．M 上の滑らかな関数 $f \in C^\infty(M)$ に対して $d^2 f$ を $d^2 f := d(df)$ と定めるとき，

$$d^2 f = 0$$

が成り立つことを示せ．

$\boxed{\text{問 2}}$ 2 次元リーマン多様体 (M, g) に対して，以下の 3 条件が同値であることを示せ．

(A) (M, g) は定曲率リーマン多様体，

(B) (M, g) はアインシュタイン多様体，

(C) (M, g) のスカラー曲率は一定．

先進数理科学 幾何　レポート問題 提出締切：2024 年 7 月 30 日（火）15 時

$\boxed{問 3}$ m を 3 以上の整数とする．I を開区間で原点 0 を含むものとする．C^∞ 級関数 $\varphi : I \to \mathbb{R}$ は正値，つまり各 $x^1 \in I$ に対して $\varphi(x^1) > 0$ を満たすとする．関数 $\rho : I \to \mathbb{R}$ を

$$\rho := \frac{1}{2} \log \varphi$$

とおく．$\mathbb{R}^m$ の領域 $U := I \times \mathbb{R}^{m-1}$ 上のリーマン計量 g を

$$g := \varphi \left((dx^1)^2 + \cdots + (dx^m)^2 \right) \qquad (x^1 \in I, \quad x^2, \ldots, x^m \in \mathbb{R})$$

と定める．$\{\Gamma^k_{i,j}\}_{i,j,k=1,\ldots,m}$ をクリストッフェル記号，Ric をリッチ曲率テンソル

$$\mathrm{Ric} = \sum_{i,j=1}^{m} R_{ij} dx^i dx^j$$

とし，S をスカラー曲率とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) Γ^1_{11} を ρ を用いて表せ．

(2) Γ^1_{ii} $(i = 2, \ldots, m)$ を ρ を用いて表せ．

(3) Γ^k_{1k} $(k = 2, \ldots, m)$ を ρ を用いて表せ．

(4) R_{11} を ρ を用いて表せ．

(5) R_{ii} $(i = 2, \ldots, m)$ を ρ を用いて表せ．

(6) スカラー曲率 S を ρ を用いて表せ．

(7) $S = 0$ かつ $\varphi(0) = \varphi'(0) = 1$ が成り立つとき，関数 $\varphi = \varphi(x^1)$ を求めよ．

$\boxed{問 4}$ 定曲率リーマン多様体でないアインシュタイン多様体の例を挙げよ．