43. Lemma

direct sum

$T_{(p,q)}(M\times N)$ は、部分空間 $T_{(p,q)}(M)$ と $T_{(p,q)}(N)$ の直和である。

すなわち、$T_{(p,q)}(M\times N)$ の各要素は、$x\in T_{(p,q)}(M)$ と $v\in T_{(p,q)}(N)$ を用いて

$$x+v$$

と一意的に表される。

V_1 と V_2 が直和である $\Longleftrightarrow V_1\cap V_2=\{0\}$

Proof

$\forall p\in M$ に対して、$\pi|_p : M\times N \longrightarrow M$ は定数であるため、(p,q) における π の微分 $d\pi$ は $T_{(p,q)}(N)$ を 0 に送る。

$\left(v\in T_p(M),\ w\in T_q(N)\right.$ に対して、$\left.d\pi_{(p,q)}(v,w)=v\right)$

(c) より、$d\pi|_{T_{(p,q)}(M)}$ は同型写像（全単射）であるため、$T_{(p,q)}(M)$ と $T_{(p,q)}(N)$ について、

$$T_{(p,q)}(M)\cap T_{(p,q)}(N)=0 \quad \cdots ☆$$

が成り立つ。

$\because$ 単射性：$d\pi(v,w)=v$ より、$d\pi(v,w)=0\Rightarrow v=0$

全射性：$\forall v\in T_p(M)$ に対して、$\exists (v,w)\in T_{(p,q)}(M\times N)$ s.t. $d\pi(v,w)=v$.

つまり、任意の $T_p(M)$ の元が $d\pi$ によって得られる。

☆ は $T_{(p,q)}(M\times N)$ の任意の接ベクトルが $T_{(p,q)}(M)$ または $T_{(p,q)}(N)$ のいずれかのみに存在することを意味している。すなわち、

$$T_{(p,q)}(M\times N)=T_{(p,q)}(M)\oplus T_{(p,q)}(N)$$

であり、任意の $u \in T_{(p,q)}(M \times N)$ は一意的に $u = x + v$ の形で表される ($x \in T_{(p,q)}(M)$, $v \in T_{(p,q)}(N)$).

また、x と v は直和の関係にあることから、接空間 $T_{(p,q)}(M \times N)$ の次元は、

$$\begin{aligned} \dim\left(T_{(p,q)}(M \times N)\right) &= \dim\left(T_{(p,q)}(M)\right) + \dim\left(T_{(p,q)}(N)\right) \\ &= \dim(M) + \dim(N). \end{aligned}$$

以上より、接空間 $T_{(p,q)}(M \times N)$ は $T_{(p,q)}(M)$ と $T_{(p,q)}(N)$ の直和であることを示した。■

- 積多様体 $M \times N$ の微積分のための概念：持ち上げ (lifting)

Def (持ち上げ)

関数

- $\forall f \in \mathfrak{F}(M)$ に対して、f の $M \times N$ への持ち上げ $\tilde{f}$

$\overset{\text{def}}{\iff} \tilde{f} = f \circ \pi \in \mathfrak{F}(M \times N)$

接ベクトル

- $\forall x \in T_p(M)$、$\forall q \in N$ に対して、x の (p, q) への持ち上げ $\tilde{x} \in T_{(p,q)}(M)$

$\overset{\text{def}}{\iff} d\pi(\tilde{x}) = x$

ベクトル場

- $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して、X の $M \times N$ への持ち上げ $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(M \times N)$

$\iff$ 各 (p, q) における $\tilde{X}$ の値が、X_p (接ベクトル) の (p, q) への持ち上げと等しい。

$\left(\tilde{X} = d\pi(\tilde{X}_p) \right)$

X の $M\times N$ への持ち上げ $\tilde{X}$ は $\mathfrak{X}(M\times N)$ の中で一意な要素であり、
これは X と π-related であり、N 上のゼロベクトル場と σ-related である。

$\hookrightarrow d\pi(\tilde{X}_p)=X$　　$\hookrightarrow d\sigma(\tilde{X}_p)=0$

※ 以降、このような全ての水平持ち上げ (horizontal lift) $\tilde{X}$ の集合を $\mathcal{L}(M)$ と表す。

π の代わりに $\sigma: M\times N \to N$ を用いることでも、関数や接ベクトル、N 上のベクトル場を $M\times N$ に持ち上げられる。$\mathcal{L}(N)$ は垂直持ち上げ (vertical lift) と呼ばれる。

$\mathcal{L}(M)$ と $\mathcal{L}(N)$ は、共に $\mathfrak{X}(M\times N)$ のベクトル部分空間である

Example

R^2 における座標ベクトル場 $\partial_x=\frac{\partial}{\partial x}$ は R^1 上のベクトル場 $\frac{d}{dx}$ の
x 軸に関する水平持ち上げであるが、$y\frac{\partial}{\partial x}$ は持ち上げではない。

(i) $\partial_x=\frac{\partial}{\partial x}$ について

R^1 上のベクトル場 $\frac{d}{dx}$ を R^2 へ持ち上げると、R^2 の x 軸方向の微分を表す
∂_x になる。∂_x は各点 (x, y) において x にのみ依存し、y の値には依存しない。

$\therefore$ ∂_x は $\frac{d}{dx}$ の持ち上げである。

(ii) $y\frac{\partial}{\partial x}$ について

持ち上げの概念では持ち上げられる元のベクトルが（今回の例では）R^1 上で表示される
関数でなければならない。よって、y と x の2変数に依存している $y\frac{\partial}{\partial x}$ は持ち上げではない。

44. Corollary（持ち上げされたベクトル場に関するかっこ積）

(1) $^\forall \tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{L}(M)$ に対して、$[\tilde{X}, \tilde{Y}] = [X, Y]^{\sim} \in \mathfrak{L}(M)$ であり、
$\mathfrak{L}(N)$ についても同様に成り立つ.

Lemma 22

$X_1 \underset{\phi}{\sim} Y_1$、$X_2 \underset{\phi}{\sim} Y_2$

$\Longrightarrow [X_1, X_2] \underset{\phi}{\sim} [Y_1, Y_2]$

(2) $\tilde{X} \in \mathfrak{L}(M)$、$\tilde{V} \in \mathfrak{L}(N)$ ならば、$[\tilde{X}, \tilde{V}] = 0$.

Proof

(1) 任意の関数 $f \in \mathfrak{F}(M)$ に対して、

$[\tilde{X}, \tilde{Y}](f) = \tilde{X}(\tilde{Y} f) - \tilde{Y}(\tilde{X} f)$

$[X, Y]^{\sim}(f) =$?

(2) 任意の関数 $f \in \mathfrak{F}(M \times N)$ に対して、

$[\tilde{X}, \tilde{V}](f) = \tilde{X}(\tilde{V} f) - \tilde{V}(\tilde{X} f)$

ここで $\tilde{V} f$ と $\tilde{X} f$ の値をそれぞれ考えると、

?

$[\tilde{X}, \tilde{V}] \underset{\pi}{\sim} [X, 0] = 0$

$[\tilde{X}, \tilde{V}] \underset{\sigma}{\sim} [0, V] = 0$.

$\because \tilde{X} \underset{\pi}{\sim} X$、$\tilde{V} \underset{\pi}{\sim} 0$

$\tilde{X} \underset{\sigma}{\sim} 0$、$\tilde{V} \underset{\sigma}{\sim} V$

※ 実際には補題43は、$T_{(p,q)}(M \times N) = T_p(M) \times T_q(N)$
のように表され、持ち上げから「〜（チルダ）」は省略される.

B. Vector Spaces as Manifolds

V：$\mathbb{R}^n$上のベクトル空間

- ξ、η：$V \longrightarrow \mathbb{R}^n$（線形同型写像）のとき、合成写像

  $\xi \circ \eta^{-1}$：$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

  は線形同型写像であり、微分同相写像でもある。

- 全ての線形同型写像 ξ：$V \to \mathbb{R}^n$ が座標系となるように、V を多様体にする一意な方法が存在する。

---

45. Def

$p, v \in V$ のとき、曲線 $\alpha(t) = p + tv$ に対する初速度 $\alpha'(0)$ の値を $v_p \in T_p(V)$ とする。

v_p は p から $p+v$ へ向かう矢印として描かれる。

46. Lemma

$x^1, x^2, \cdots, x^n$ を V上の線形座標系とするとき、v_p の値は

$$v_p = \sum_{i=1}^{n} x^i(v)\, \partial_i \Big|_p$$

である。

Proof

仮定より x^i $(i=1,\cdots,n)$ は線形であるため、$\alpha(t)=p+tv$ に沿って、

$$x^i(\alpha(t)) = x^i(p+tv) = x^i(p) + t x^i(v).$$

速度公式により、v_p は

$$v_p = \alpha'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d(x^i\circ\alpha)}{dt}(0)\,\partial_i\Big|_p$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x^i(v)\,\partial_i\Big|_p.$$

$\because \frac{d}{dt}(x^i\circ\alpha) = \frac{d}{dt}(x^i(p)+tx^i(v))$
$= x^i(v)$

よって、補題の等式を示した。■

P26

補題から分かること；

(0) v_p は点 p における接ベクトルであり、$v\in V$ と同じ座標系を持つ。

(1) 固定された $p\in V$ に対して、写像 $v\longrightarrow v_p$ は線形同型写像 $V\approx T_p(V)$.

(2) $p, q\in V$ に対して、写像 $v_p\to v_q$ は線形同型写像 $T_p(V)\approx T_q(V)$.

→ 線形写像かつ全単射

Proof

(1) $v\longrightarrow v_p$ の線形性：

$a, b\in\mathbb{R}$ とベクトル $v, w\in V$ に対して、$v_p=\sum_{i=1}^{n} x^i(v)\,\partial_i\big|_p$ の v を $av+bw$ に置き換えると、

$$\sum_{i=1}^{n} x^i(av+bw)\,\partial_i\Big|_p = \sum_{i=1}^{n} a x^i(v) + b x^i(w)\,\partial_i\Big|_p$$

$$= a\sum_{i=1}^{n} x^i(v)\,\partial_i\Big|_p + b\sum_{i=1}^{n} x^i(w)\,\partial_i\Big|_p$$

$= av_p + bw_p$ ∴ 線形性を満たす

- $v \longrightarrow v_p$ の単射性：

任意の v_p、w_p について、$v_p = w_p \Longrightarrow v = w$ を示せばよい。

$\sum_{i=1}^{n} x^i(v)\,\partial_i\big|_p = \sum_{i=1}^{n} x^i(w)\,\partial_i\big|_p$ であると仮定する。各座標成分を比較すると

$$x^i(v) = x^i(w) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

よって、全ての i に対して $x^i(v) = x^i(w)$ が成り立つ。∴ $v = w$ である。

- $v \longrightarrow v_p$ の全射性：

任意の $u_p \in T_p(V)$ が与えられたときに、u_p へと写されるような $v \in V$ が存在することを示せばよい。u_p は具体的に、

$$u_p = \sum_{i=1}^{n} x^i(u)\,\partial_i\big|_p$$

である。このとき、$u = v$ とすると、$u_p = v_p$ である。

よって、任意の接ベクトル u_p が写像先に存在するため、全射性を示した。

(2) について

- $v_p \longrightarrow v_q$ の線形性

$a, b \in \mathbb{R}$ と接ベクトル v_p、$w_p \in T_p(V)$ に対して、$av_p + bw_p$ は曲線 $\alpha(t) = p + t(av + bw)$ に沿った速度ベクトル $\alpha'(0)$ に対応している。… ①

同様に、対応する接ベクトル v_q、$w_q \in T_q(V)$ に対して、$av_q + bw_q$ は曲線 $\beta(t) = q + t(av + bw)$ に沿った速度ベクトル $\beta'(0)$ に対応している …②

①、② より、$av_p + bw_p = \alpha'(0) = av + bw = \beta'(0) = av_q + bw_q$.

∴ $v_p \longrightarrow v_q$ は線形性を満たす。

- $v_p \to v_q$ の単射性：

任意の $v_p = w_p$ に対して $v_q = w_q$ を示せばよい.

$$v_p = w_p \Rightarrow v = w \quad (\because v \to v_p \text{ は単射})$$

$$\Rightarrow v_q = w_q$$

よって、$v_p \to v_q$ は単射である.

- $v_p \to v_q$ の全射性：

任意の $u_q \in T_q(V)$ に対して、u_q へと写されるような $v_p \in T_p(V)$ が存在することを示せばよい. 具体的に、$v_p = u_q$ と置けば $v_p \to v_q$ の像は u_q となる.（恒等写像のようなイメージ）

よって、$v_p \to v_q$ は全射である.

(1)、(2) より、$v \to v_p$ および $v_p \to v_q$ が線形同型写像であることを確認した ∎

- 既知のケース：$V = \mathbb{R}^3$ において、これらの正規同型写像 (canonical) は V の点 v および p から $p+v$ への矢印 v_p 間の自由な置換が可能

- 位置 (position) ベクトル場 $P \in \mathfrak{X}(V)$ は、各 $p \in V$ に対して接ベクトル $P_p \in T_p(V)$ を割り当てる. 線形座標系の表現を用いると、

$$P = \sum_{i=1}^{n} x^i \partial_i.$$

C. The Tangent Bundle

- 多様体 M に対して、TM を M の全ての接ベクトルの集合とする。具体的に、

$$TM = \bigcup \{ T_p(M) \mid p \in M \}.$$

※ 各 $p \in M$ に対して、$0 \in T_p(M)$ は 0_p と置き換える。

- 各 $v \in TM$ は一意の $T_p(M)$ に属し、射影 $\pi : TM \longrightarrow M$ は v を p に写す。つまり、

$$\pi^{-1}(p) = T_p(M).$$

TM を多様体にする方法：M の接バンドル（tangent bundle）

→ $\xi : U \subset M$ 上の座標系とする。

もし v が点 $p \in U$ において M と接しているのであれば、v は「p の座標」と「p における $\partial_1, \partial_2, \cdots, \partial_n$ に対する v の座標」によって一意に定まる。
（「p における $\partial_1, \partial_2, \cdots, \partial_n$ に対する v の座標」 $= v_p$）

今、実数値関数 $\dot{x}^i$ を $\pi^{-1}(U) \subset M$ 上で、

$$\dot{x}^i(v) = v(x^i)$$

によって与える。さらに、写像 $\tilde{\xi} : \pi^{-1}(U) \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ を以下で定義する。

$$\tilde{\xi} = (\underbrace{x^1 \circ \pi, \cdots, x^n \circ \pi}_{n}, \underbrace{\dot{x}^1, \cdots, \dot{x}^n}_{n})$$

基底定理によれば $v \in \pi^{-1}(U)$ の場合、$v = \sum_{i=1}^{n} \dot{x}^i(v) \, \partial_i \big|_{\pi(v)}$ となる。

$$\because \quad v = \sum_{i=1}^{n} v(x^i) \, \partial_i \big|_{\pi(v)} \quad \Big) \; v(x^i) = \dot{x}^i(v)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \dot{x}^i(v) \, \partial_i \big|_{\pi(v)}$$

したがって、ξ は $\pi^{-1}(U)$ から開集合 $\xi(U) \times \mathbb{R}^n$ への全単射である。

- 上で定義したような $\tilde{\xi}$、$\tilde{\eta}$ が滑らかに重なる(overlap)ことを確認する。($\tilde{\xi}$ の滑らかさ)

$(a, b) \in \eta(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ のとき、$i = 1, 2, \cdots, n$ に対して

$$u^i \circ \tilde{\xi} \circ \tilde{\eta}^{-1}(a, b) = x^i \circ \pi \circ \tilde{\eta}^{-1}(a, b) = x^i \eta^{-1}(a).$$

$\tilde{\xi} = (x^1 \circ \pi, \cdots, x^n \circ \pi, \dot{x}^1, \cdots, \dot{x}^n)$ より、第 i 成分は $x^i \circ \pi$

$\pi : TM \to M$ は、$\pi(p, v_p) = p$

$$\frac{\partial}{\partial y^i} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial x^k}{\partial y^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^k}$$ であるので、再び $i = 1, 2, \cdots, n$ に対して、

?

$$u^{n+i} \circ \tilde{\xi} \circ \tilde{\eta}^{-1}(a, b) = \dot{x}^i \circ \tilde{\eta}^{-1}(a, b) = \sum_{k=1}^{n} b^k \frac{\partial x^i}{\partial y^k}(\eta^{-1} a).$$

$\tilde{\xi} = (x^1 \circ \pi, \cdots, x^n \circ \pi, \dot{x}^1, \cdots, \dot{x}^n)$ より、第 $i+n$ 成分は $\dot{x}^i$

?

$\tilde{\xi}$ がユークリッド空間上で滑らかであることを確認し、$\tilde{\eta}$ も同様にユークリッド空間上で滑らかであるため、$\tilde{\xi} \circ \tilde{\eta}^{-1}$ はユークリッド空間上で滑らか(に重なる)である。

- Prop 42 の条件(1)〜(3)を確認することにより、TM がハウスドルフ空間かつ

(1) 定義域 $\{U_\alpha ; \alpha \in A\}$ が Σ を被覆
(2) $\forall \alpha, \beta \in A$ に対して写像 $\xi_\beta \circ \xi_\alpha^{-1}$ がユークリッド空間上で滑らかであり、定義域 $\xi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ は $\mathbb{R}^n$ 上の開集合である.
(3) Σ 上で $p \neq q$ のとき、p と q は
- 単一の U_α のみに含まれている
- $\exists \alpha, \beta \in A$ s.t. $p \in U_\alpha$, $q \in U_\beta$, $U_\alpha \cap U_\beta \overset{\text{disjoint}}{=} \phi$

のいずれか

第二可算空間であることが分かる.

(1) の確認

Σ が TM に対応している.

$\forall p \in M$ に対して開集合 $U_p \subset M$ を取ることができ、U_p 上のチャート $\xi_p : U_p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ が存在する.

これにより、TM 全体が $\{U_p \mid p \in M\}$ によって被覆される.

$\therefore$ (1) を満たす.

(2) の確認

先ほど $\tilde{\xi} \circ \tilde{\eta}^{-1}$ がユークリッド空間上で滑らかであることを確認した.

さらに、開集合 $U, V \subset M$ に対して $\eta(U \cap V)$ が滑らかであることから、$\tilde{\xi} \circ \tilde{\eta}^{-1}$ の定義域 $\eta(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ も滑らかである.

$\therefore$ (2) を満たす

(3) の確認（異なる点が開集合で分離可能）

多様体 M 上のチャートとして (U, ξ) が与えられると、接バンドル TM 上の局所座標 $\tilde{\xi} : TU \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ を定義できる。（$TU \subset TM$: U の接バンドル）

任意の2点 (p, v)、$(q, w) \in TM$ を考える。（$p, q \in M$、$v \in T_p(M)$、$w \in T_q(N)$）
M がハウスドルフ空間であるため、$p \neq q$ に対して互いに素な開集合 U_p、$U_q \subset M$ が存在する。これに対応する開集合 TU_p、$TU_q \subset TM$ も、互いに素である。

よって、TM は条件(3)を満たす

---

p27.

47. Def（滑らかな写像上のベクトル場）

ベクトル場 Z が滑らかな写像 $\phi : M \longrightarrow N$ 上にある場合、
$Z : P \rightarrow TM$ という写像であり、$\pi \circ Z = \phi$ を満たす。（$\pi : TM \longrightarrow M$）

$$d\pi\,[\tilde{X}.\tilde{V}] = [d\pi(\tilde{X}).\,d\pi(\tilde{V})]$$
$$= [X.0]$$
$$= 0$$
$$\therefore\ [\tilde{X},\tilde{V}] \in \mathcal{L}(N)$$

$$d\sigma\,[\tilde{X},\tilde{V}] = [d\sigma(\tilde{X}).\,d\sigma(\tilde{V})]$$
$$= [0,V]$$
$$= 0$$
$$\therefore\ [\tilde{X},\tilde{V}] \in \mathcal{L}(M).$$
$$\therefore\ [\tilde{X},\tilde{V}] \in \mathcal{L}(M)\cap\mathcal{L}(N) = \{0\}.$$
$$\therefore\ [\tilde{X},\tilde{V}] = 0$$

よって $[\tilde{X}.\tilde{V}]=0$

Lem 22

$d\phi(X_1) = Y_1$

$d\phi(X_2) = Y_2$

$\Rightarrow [d\phi(X_1).\,d\phi(X_2)] = d\phi[X_1,X_2]$

(全単射. 線形)

$\tilde{X} \in \mathcal{L}(M)$, $\tilde{V} \in \mathcal{L}(N)$

$\downarrow d\pi$ $\quad \downarrow d\sigma$

$X \in \mathfrak{X}(M)$. $V \in \mathfrak{X}(N)$

$X = d\pi(\tilde{X})$ $(\tilde{X} = (d\pi)^{-1}(X))$.

$V = d\sigma(\tilde{V})$ $(\tilde{V} = (d\sigma)^{-1}(V))$

$\tilde{X} \in \mathcal{L}(M)$ $\quad \tilde{V} \in \mathcal{L}(N)$,

$\downarrow d\sigma$ $\quad \downarrow d\pi$

$0 \in \mathfrak{X}(N)$ $\quad 0 \in \mathfrak{X}(M)$

$$\tilde{\xi} : \pi^{-1}(U) \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

$$(p, v) \longmapsto (x^1(p), \cdots, x^n(p), v^1, \cdots, v^n)$$

$$\underset{T_pM}{v} = \underbrace{v^1\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p + \cdots + v^n\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p}$$

$$\dot{x}^i(v) := v(x^i) = v^i$$

$$\tilde{\eta} : \pi^{-1}(V) \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

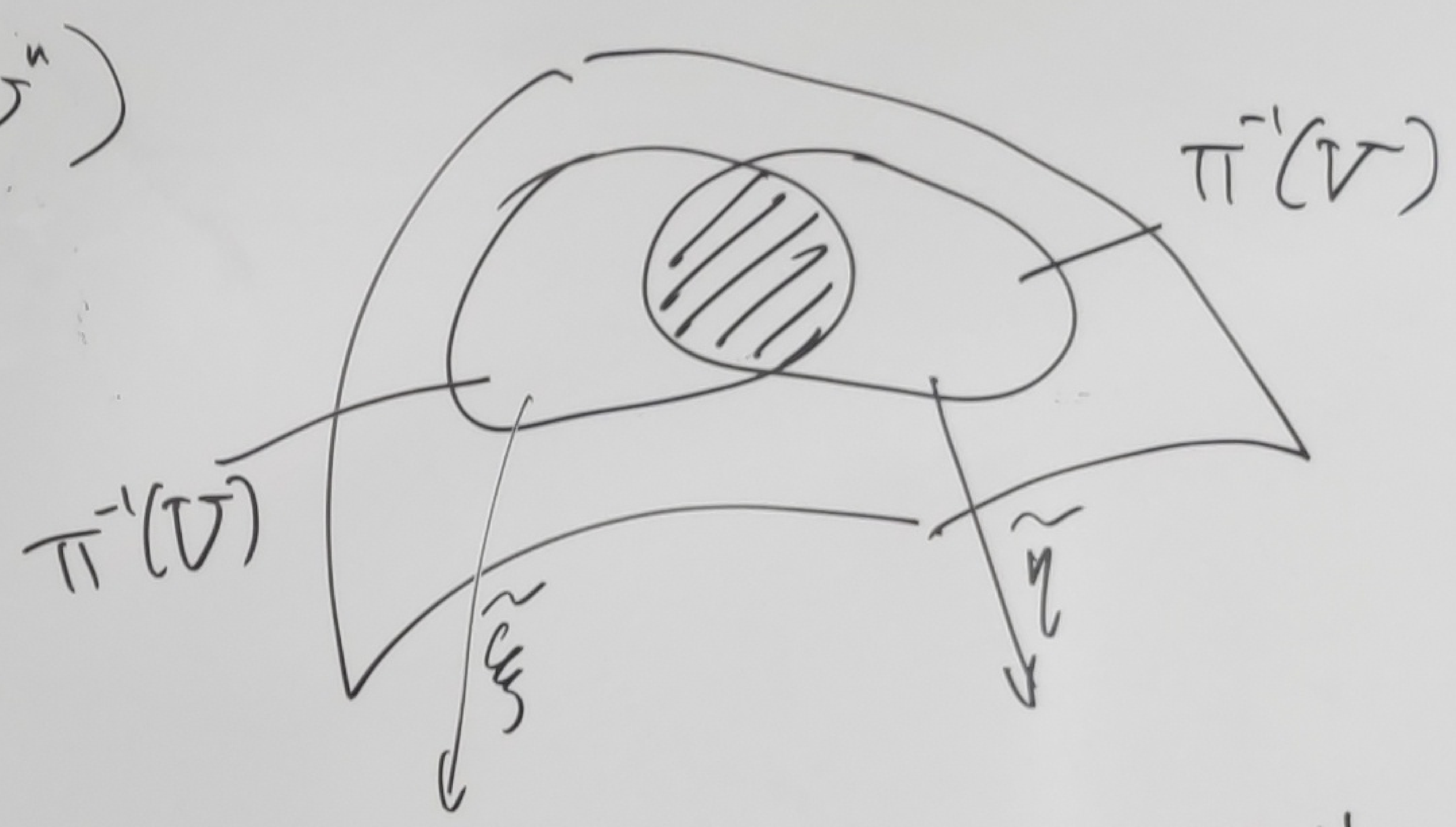
$$(p, v) \longmapsto (\underset{\text{"}a^1\text{"}}{y^1(p)}, \cdots, \underset{\text{"}a^n\text{"}}{y^n(p)}, \underset{\text{"}b^1\text{"}}{w^1}, \cdots, \underset{\text{"}b^n\text{"}}{w^n})$$

$$v = w^1\left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)_p + \cdots + w^n\left(\frac{\partial}{\partial y^n}\right)_p$$

$$\dot{y}^i(v) := v(y^i) = w^i$$

$\boxed{w^i \text{ o's } v^j \text{ 관계}}$

$$TM = \pi^{-1}(U) \simeq \underset{\underset{\mathbb{R}^n}{\xi(U) \subset}}{U} \times \mathbb{R}^n$$



$$(a^1, \cdots, a^n, b^1, \cdots, b^n)$$

$$\tilde{\xi} \circ \tilde{\eta}^{-1}(a^1, \cdots, a^n, b^1, \cdots, b^n)$$

$$= (\underset{n\text{개}}{\underline{\xi \circ \eta^{-1}(a^1, \cdots, a^n)}}, v^1, \cdots, v^n)$$

$$\boxed{v^i = \sum_{k=1}^n b^k \frac{\partial x^i}{\partial y^k}}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_p = \frac{\partial x^1}{\partial y^i}\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p + \cdots + \frac{\partial x^n}{\partial y^i}\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p$$

$$v = \sum_{i=1}^n w^i \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_p = \sum_{k=1}^n \underset{}{\boxed{\left(\sum_{i=1}^n w^i \frac{\partial x^k}{\partial y^i}\right)}}^{\overset{v^k}{\|}} \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_p$$

$$= \sum_{i=1}^n w^i \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial y^i}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_p$$

$$= v^1\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p + \cdots + v^n\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p$$

$\gamma : \underset{\substack{\cup\\ s}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}^3$: C^∞級写像.

$T_s I = \left\{ a \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_s \,\middle|\, a \in \mathbb{R} \right\}$

$d\gamma\Big(\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_s}_{\in\, T_s I} \Big) = \frac{d\gamma}{ds} \in T_{\gamma(s)}\mathbb{R}^3$

$d\gamma : T_s I \longrightarrow T_{\gamma(s)}\mathbb{R}^3$

$e = \frac{d\gamma}{ds}$

$n = \frac{1}{\kappa} e'$

$\left(n : I \longrightarrow \mathbb{R}^3 \right)$

$s \in I$ に対し, $n(s) \in T_{\gamma(s)}\mathbb{R}^3$

$\therefore\ n \in \mathfrak{X}(\gamma, \mathbb{R}^3)$

$\gamma(s)$

$T_{\gamma(s)}S^2 = \gamma(s)^\perp$

$\gamma : I \longrightarrow S^2$: $\|\gamma\| = 1$, $\|\gamma'\| = 1$

$\left(\underline{\text{e.g.}}\ \ \gamma(s) = \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ (弧長パラメータ表示された球面曲線)

$p \in S^2$ において

$T_p S^2 = p^\perp$

$\boxed{n(s) := \gamma(s) \times \gamma'(s)}$

を $\gamma(s)$ の単位法ベクトル場という

$\left(n(s) \in T_{\gamma(s)} S^2,\ n(s) \cdot \gamma'(s) = 0 \right)$

$\Downarrow$

$n(s) \cdot \gamma(s) = 0$

この n は <u>γ に沿った S^2 のベクトル場である</u>.