10/24 Nil (ハイゼンベルグ群)

・非線形 変数分離法

・Nil_3 の 極小曲面
3次元

2nd order PDE
→ 非線形
(正則関数で解を与える)

§1 Nil_3 (by サーストン)

$$Nil_3 := (\mathbb{R}^3(x_1, x_2, x_3), g)$$
$$g = dx_1^2 + dx_2^2 + \eta \otimes \eta$$
$$\eta := dx_3 + \frac{1}{2}(x_2 dx_1 - x_1 dx_2)$$

す…

・8つの3次元的のモデル空間
(単連結 $\exists G$, M^3上に 等長的かつ 推移的)

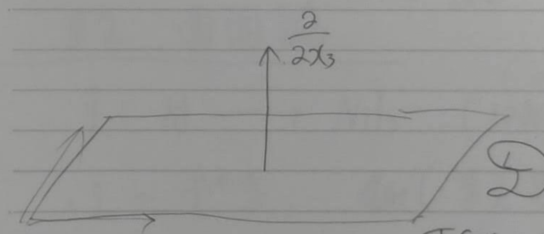
1) $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{E}^3$, $\mathbb{H}^3$
2) $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$
対称空間
3) Nil_3, $\widetilde{SL}$
4) Sol_3 ⁓ 接触構造

これらの関係が、Nil_3 の曲面論では必要

・接触構造 (contact structure)

M^3, η: 1-form
$d\eta \wedge \eta \neq 0$.
$\mathcal{D} = \{X \in TM \mid \eta(X) = 0\}$ … contact form

$\mathbb{S}^3$, $\mathbb{E}^3$, $\mathbb{H}^3$
- 等質 : 特別な点がない
- isotropic : 〃 方向がない



$T_{(x_1, x_2, x_3)} Nil_3$

$2 + 1 \neq 1 + 1 + 1$

3次元とは異なるので、回転+平行移動ができない
→ 自由度が少ない

正規直交

$$E_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{x_2}{2}\frac{\partial}{\partial x_3}$$
$$E_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{x_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_3}$$
$$E_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} \quad \text{(Reeb vector field)}$$

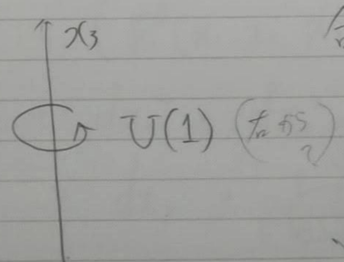
$K(E_1 \wedge E_2) = K(2$
$K(E_1 \wedge E_3) = -\frac{3}{4}$
$= K(E_2 \wedge E_3) = \frac{1}{4}$

$$\mathrm{Nil}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_3 + \frac{1}{2}(x_1 x_2) \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathrm{nil}_3 = \left\{ \left(\begin{bmatrix} 0 & u_1 & u_3 \\ 0 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \right. = u_1 E_1 + u_2 E_2 + u_3 E_3$$ ……ハイゼンベルグ代数

合同変換 … $\underbrace{\text{3次元の回転と 3次元の平行移動}}_{\text{合計 6次元}}$

in Nil_3



(x₃軸のみの回転が許される)

$$\mathrm{Osc} = \mathrm{Nil}_3 \ltimes U(1) = \left\{ \left(\begin{matrix} 1 & x_1 \sin t - x_2 \cos t, & x_1 \cos t + x_2 \sin t & 2x_3 \\ 0 & \cos t & -\sin t & x_1 \\ 0 & \sin t & \cos t & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right) \right.$$

$\to U(1)$

$\supset \mathrm{Nil}_3 = \mathrm{Osc}/U(1)$

測地線は全て等質

※複素との関係?

$\mathrm{Nil}_3 \times \mathbb{R}$

$JE_1 = E_2 \qquad JE_3 = -E_4$

$JE_2 = -E_1 \qquad JE_4 = E_3$

$(\mathrm{Nil}_3 \times \mathbb{R},\ g + dt^2,\ J)$

ヴァイスマン曲面
(vaisman surface)

§2 曲面論

$f: M \longrightarrow \mathrm{Nil}_3$ (はめ込み)

- $I = f^* g$ …(第1基本形式)
- 向き付け可能 (orientable)
- n: 単位法ベクトル

$\nu: M \to S^2 \subset \mathrm{nil}_3 \cong \mathbb{E}^3$
$\{E_1, E_2, E_3\}$

$\nu = f^{-1} n$ … ガウス写像

$\partial \to$ $M \subset \mathbb{C}$ $\quad z = x + \sqrt{-1}\, y$

domain

$$\alpha = f^{-1}(df) \qquad \text{モーレー・カルタン form}$$

$$= \underbrace{f^{-1}\frac{\partial f}{\partial z}\,dz}_{\alpha'} + \underbrace{f^{-1}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,d\bar{z}}_{\alpha''}$$

$$\alpha' = \omega_1 E_1 + \omega_2 E_2 + \omega_3 E_3$$

Prop (1999 頃)

f : minimal である

$\Longleftrightarrow$

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \omega_i \otimes \omega_i = 0$ (weakly conformed)
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \omega_i \otimes \overline{\omega_i} \neq 0$ (はめこみ)
- harmonic である, つまり

$$\bar{\partial}\omega_1 = \frac{1}{2}\left(\omega_2 \wedge \overline{\omega_3} - \overline{\omega_2} \wedge \omega_3\right)$$

$$\bar{\partial}\omega_2 = -\frac{1}{2}\left(\omega_1 \wedge \overline{\omega_3} - \overline{\omega_1} \wedge \omega_3\right)$$

$$\bar{\partial}\omega_3 = \frac{1}{2}\left(\omega_1 \wedge \overline{\omega_2} + \overline{\omega_1} \wedge \omega_2\right)$$

線積分

$\partial \to$ ワイエルシュトラス データ

$$f(z, \bar{z}) = 2\int_{z_0}^{z} \mathrm{Re}\left(\omega_1, \omega_2, \omega_3 + \frac{x_2\omega_1 - x_1\omega_2}{2}\right)$$

$$\| $$

$$\begin{bmatrix} x_1(z, \bar{z}) \\ x_2(z, \bar{z}) \\ x_3(z, \bar{z}) \end{bmatrix}$$

(表現公式はできるが、実用的ではない)

※

$$\begin{cases} F = \phi_1 - \sqrt{-1}\,\phi_2 \\ G = \dfrac{\phi_3}{\phi_1 - \sqrt{-1}\,\phi_2} \end{cases} : D \xrightarrow[g]{C^\infty} \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

$$\to \quad \nu = \frac{1}{1 + |\cancel{\phi}\, G|^2}\left(2\mathrm{Re}\,G,\ 2\mathrm{Im}\,G,\ |G|^2 - 1\right)$$

$$f : \text{minimal} \Longleftrightarrow \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{2\bar{G}}{1 - |G|^2}\frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial \bar{z}} = 0$$

Remark

Nil3 は

- 全臍的曲面 を持たない
- 全測地的曲面 を持たない

対称性が高くないと、自明な例が存在しない。

→ Nil3 の自明な例は非常に重要

§3 DPW-shemel

$\underset{\text{ポアンカレ円板}}{\underbrace{\mathbb{H}^2}} = SU(1,1)/U(1)$

$\Lambda SU(1,1)_\sigma = \{ \gamma : S^1 \to SU(1,1) \mid \sigma \text{同変} \}$

ループ群

$\Lambda sl(2,\mathbb{C})_\sigma = \{ \underset{\xi(\lambda)}{\xi} : S^1 \to sl(2,\mathbb{C}) \mid \sigma \text{同変} \}$

↘

① $\xi = \xi dz$

② 微分方程式 $dC = C\xi$ を解く (← 解の大きさに影響)

③ $C = \mathcal{F}_\lambda U_\lambda$: 無限次元の岩澤分解

$\mathcal{F}_\lambda \to \Lambda SU(1,1)$

$\longrightarrow \frac{\sqrt{-1}}{2} \mathrm{Ad}(\mathcal{F}_\lambda)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$: D \times S^1 \longrightarrow \mathbb{H}^2 \subset su(1,1)$

harmonic map の S^1-family

Nil3 の極小曲面？

$SU(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \bar\beta \\ \beta & \bar\alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{C} \ |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\}$

$su(1,1) = \mathrm{span}\{\underset{+}{\varepsilon_1}, \underset{+}{\varepsilon_2}, \underset{-}{\varepsilon_3}\} = \mathbb{L}^3$

$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$

$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$\varepsilon_3 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$

$su(1,1) \ni \varepsilon_i \longleftrightarrow E_i \in nil_3$

先ほどの

$$n^{\mathrm{II}}_\lambda := \frac{\sqrt{-1}}{2}\,\mathrm{Ad}(\tilde{F}_\lambda)\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$ について

$\tilde{F}_\lambda$ → extend frame

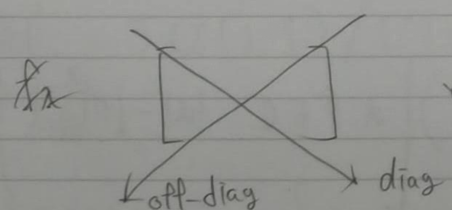
$$f^{\mathrm{II}}_\lambda = -\sqrt{-1}\,\lambda\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\tilde{F}_\lambda\right)\tilde{F}_\lambda^{-1} \qquad ①$$

$-n^{\mathrm{II}}_\lambda : D\times S^1 \longrightarrow \mathbb{L}^3$

$\mathbb{L}^3$内の spacelike space $H=\frac{1}{2}$

(n^{II}_λ はそのガウス写像)

。Ξ を介して、su(1,1) を nil3 と思い直す？



として、

$$f_\lambda = \left(f^{\mathrm{II}}_\lambda\right)_{\text{off-diag}} - \frac{\sqrt{-1}}{2}\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(f^{\mathrm{II}}_\lambda\right)_{\text{diag}} \qquad ②$$

は、n^{II}_λ をガウス写像にもつ Nil3 の極小曲面

①と②は平行して作れる。(双対性？)

①は特異点があり得る。
②は non-singular

$U(1) \subset SU(1,1)$ 　　 $g_{new} = dx_1^2 + dx_2^2 - 1\otimes 1$

$\circlearrowleft SU(1,1)$ isometric

$\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{H} = SU(1,1)/U(1)$

harmonic ($S^2 = SU(2)/U(1)$, g_{new})

$\circlearrowleft U(1)$ 　　 $\circlearrowleft SU(1,1)$

$\mathbb{D} \longrightarrow Nil_3 = Osc/U(1)$ 　　 $\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{L}^3$

minimal 　　 spacelike $H=\frac{1}{2}$

$\mathbb{R}^3$ 　　 Nil_3

ガウス・コダッチ eq $\longleftrightarrow$ スピノル構造

Example

$$\xi = -\frac{\sqrt{-1}}{4}\lambda^{-1}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}dz$$ (Nil3 の一番簡単な極小曲面)

$\rightsquigarrow$ $x_3 = \dfrac{x_1x_2}{2}$