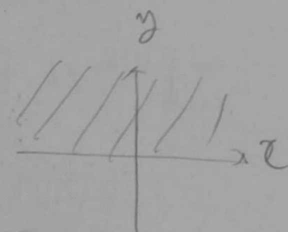
火2 数理キカ ⑩　　　　　　　　　　　　　　　　　　1

定曲率

$\mathbb{R}^3$: 定曲率 $= 0$
$\mathbb{S}^3$: 〃 $= 1$
} リーマン mfd

$\mathbb{H}^3$: 〃 $= -1$

双曲くうかん



Upper Half Plane
・上半平面 $U^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$

$$g_H = \frac{dx^2 + dy^2}{y}$$: U上リーマン計量

$$K_I = \frac{-\Delta(\ln E)}{2E}$$: 断面曲率 $\left(E = \frac{1}{y^2}\right)$

(= ガウスきょくりつ)

$$\boxed{\begin{aligned} &\ln E = -2\ln y \\ &(\ln E)_x = (\ln E)_{xx} = 0. \\ &(\ln E)_y = -\frac{2}{y}, \quad (\ln E)_{yy} = \frac{2}{y^2} \end{aligned}}$$

$$= \frac{-\frac{2}{y^2}}{2 \cdot \frac{1}{y^2}} = -1$$

Remark

$\mathbb{U}^n$ は、$\mathbb{R}^{n+1}$ の超曲面として実現できない（ヒルベルトの定理）

S^n のような扱いができない、ということ。

ただし

ミンコフスキー空間 $\mathbb{L}^{n+1}$ には実現可能。

→ $\mathbb{L}^{n+1}$ の中では双曲空間を

球面のように扱える。（扱いたい）

Lorentz-Minkowski

・ミンコフスキー空間

$\mathbb{L}^{n+1}$ とは、$x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ を $x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ $y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ と表すとき、

$\mathbb{R}^{n+1}$ に内積

$$\langle x, y \rangle := -x_0 y_0 + x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

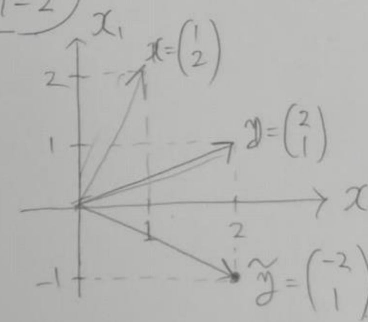
を定めたもの。（$\mathbb{L}^{n+1} = (\mathbb{R}^{n+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$）

$B = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$ とすると、$\langle x, y \rangle = x^T B y$ と書ける。

$\tilde{y} = B y$ （$\tilde{y} = \begin{pmatrix} -y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$）とすると、　$\cos\theta = \dfrac{4}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}$

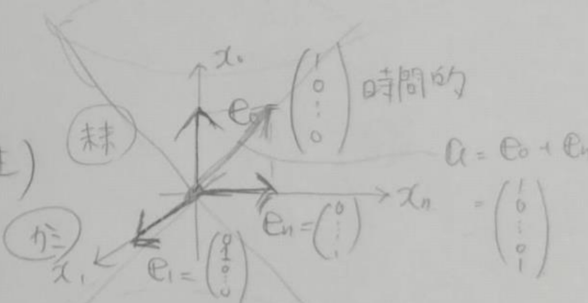
$$\langle x, y \rangle = x^T \tilde{y} = \underbrace{x \cdot \tilde{y}}_{\text{ユークリッド内積}}$$

$n=2$



x と y … ミンコフスキーの意味で直交

x と $\tilde{y}$ … ユークリッドの意味で直交



・Casuality（因果性）

$x \in \mathbb{L}^{n+1}$ が

$$\begin{cases} \text{空間的 (spacelike)} \iff \langle x, x \rangle > 0 \\ \text{時間的 (timelike)} \iff \quad〃 \quad < 0 \\ \text{光的 (lightlike)} \iff \quad〃 \quad = 0 \end{cases}$$

Example　$\langle e_0, e_0 \rangle = -1^2 + 0 + \cdots + 0 < 0$　spacelike

$i = 1, \ldots, n$　$\langle e_i, e_i \rangle = 1 > 0$　timelike

$\langle a, a \rangle = -1^2 + 1^2 = 0.$　null

Def

$v \in \mathbb{L}^{n+1}$ とする。

時間的 or 光的 が 未来向き

$\Longleftrightarrow v = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ とするとき、$v_0 > 0$

$\mathbb{L}^{n+1}$ の基底 $\{e_0, e_1, \cdots, e_n\}$ が ONB

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \langle e_0, e_0 \rangle = -1 \\ \langle e_i, e_i \rangle = 1 & (i = 1, \cdots, n) \\ \langle e_i, e_j \rangle = 0 & (i, j = 0, \cdots, n,\ i \neq j) \end{cases}$$

・$\mathbb{L}^{n+1}$ の合同変換

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{L}^{n+1} \\ \cup & & \cup \\ x & \longmapsto & Rx + b \end{array} \qquad (R \in SO^+(1,n),\ b \in \mathbb{L}^{n+1})$$

ここで、

$$O(1,n) = \{ R \in M_{n+1}(\mathbb{R}) \mid R^T B R = B \}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

3

$$SO(1,n) = \{ R \in O(1,n) \mid \det R = 1 \}$$

$$SO^+(1,n) = \{ R \in SO(1,n) \mid R = (R_{ij})_{i,j=0,\cdots,n},\ R_{00} > 0 \}$$

・$R \in O(1,n)$ に対して

$$\langle Rx, Ry \rangle = \langle x, y \rangle \quad (\forall x, y)$$

$$\begin{aligned} \because \langle Rx, Ry \rangle &= (Rx)^T B (Ry) \\ &= x^T \underbrace{R^T B R}_{= B} y \\ &= \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

・$R \in SO(1,n)$ に対し　正 $\Longleftarrow$ 正

$$\det(Rx_1, Rx_2, \cdots, Rx_{n+1}) = \det(x_1, \cdots, x_{n+1}) \quad (\forall x_1, \cdots, x_{n+1} \in \mathbb{L}^{n+1})$$

$SO(1,n)$ は $\mathbb{L}^{n+1}$ の向きを保つ

x：未来向き $\Longrightarrow$ Rx：未来向き

$SO^+(1,n)$ は $\mathbb{L}^{n+1}$ の時間向きも保つ

・$\mathbb{L}^{n+1}$ のベクトル積

$x, y \in \mathbb{L}^3$ に対して

$$x \times y = \begin{bmatrix} -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_0 & y_0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$(x \times y = Bx \times_e y)$

$\times_e$ → R^3 のベクトル積

性質　$x, y, z \in \mathbb{L}^3$ に対して、　付録 B 参照

(1) $\langle x \times y, z \rangle = \det(x, y, z)$

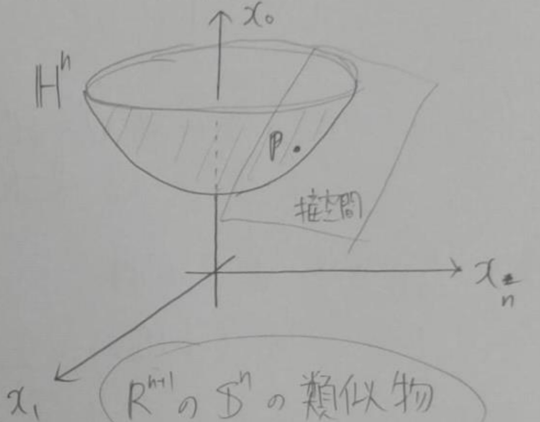
(2) $\langle x \times y, x \times y \rangle = \langle x, y \rangle^2 - \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$

・双曲空間

$$\mathbb{H}^n = \{ p \in \mathbb{L}^{n+1} \mid \langle p, p \rangle = -1, \ p_0 > 0 \}$$

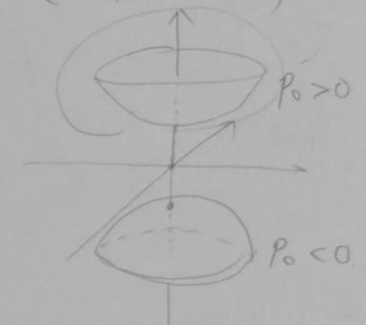
→ $-x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = -1$

を、n次元双曲空間 (hyperbolic space) という.



R^{n+1} の S^n の類似物

(二葉双曲面)



$R \in SO^+(1, n)$ に対して

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^n & \longrightarrow & \mathbb{H}^n \\ \cup & & \cup \\ p & \longmapsto & Rp \end{array}$$

を、$\mathbb{H}^n$ の向きを保つ合同変換という.

・$\mathbb{H}^n$ の接空間

ミンコフスキー空間の意味で

$$T_p(\mathbb{H}^n) := \{ X \in \mathbb{L}^{n+1} \mid \langle p, X \rangle = 0 \} \ (= p^\perp$$

※ $X \in T_p(\mathbb{H}^n)$ に対して $\langle X, X \rangle \geq 0$ が成立.

$\langle X, X \rangle = 0 \Rightarrow X = 0$.

U^n(上半空間) と $\mathbb{H}^n$ の 関係

$$\begin{cases} U^n = \{(v_1, v_2, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n \mid v_n > 0\} \\ g_H = \dfrac{dv_1^2 + \cdots + dv_n^2}{v_n^2} \end{cases}$$ ：上半空間という

$\phi_H : \mathbb{H}^n \longrightarrow U^n$

ϕ_H により U^n と $\mathbb{H}^n$ は同一視される

$\phi_H(p) = \dfrac{1}{p_0 - p_n}(p_1, \cdots, p_{n-1}, 1)$ は 全単射 (diffeo)

$\mathbb{H}^2$ の 曲線 (I：開区間)

$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{H}^2$ で $\dot{\gamma} \neq 0$ をみたすものを $\mathbb{H}^2$ の正則曲線という

$\frac{d\gamma}{dt}$

$\langle \gamma, \gamma \rangle = -1$
$\langle \dot{\gamma}, \gamma \rangle = 0$

両辺 t で 微分

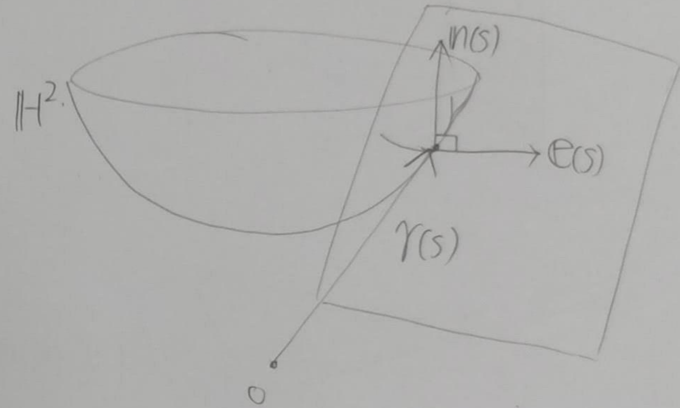
$\therefore \underset{\substack{\nparallel \\ 0}}{\dot{\gamma}(t)} \in T_{\gamma(t)}\mathbb{H}^2 \Longrightarrow \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle > 0$

$s(t) = \int_{s_0}^{t} \|\dot{\gamma}\| dt$ とおくと、$\frac{ds}{dt} = \|\dot{\gamma}\| > 0$ より、$\exists\, t = t(s)$：逆関数

$\Longrightarrow \tilde{\gamma}(s) := \gamma(t(s))$ は弧長パラ.

$e = \gamma'(s) \left(= \frac{d\gamma}{ds}\right)$ ：単位接ベクトル

$n = \gamma(s) \times e(s)$ ：単位法ベクトル



Def

$K(s) := \langle e'(s), n(s) \rangle$ を $\gamma(s)$ の 曲率関数 という

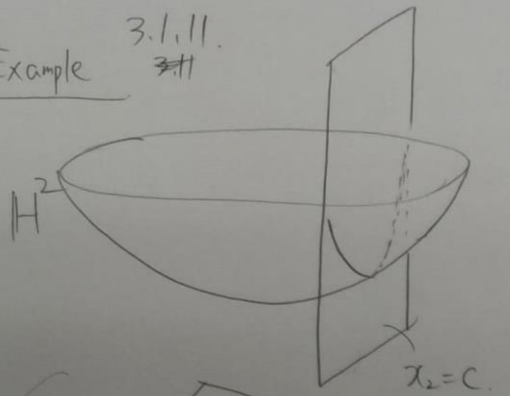
Proposition

弧長パラメータ表示された $\gamma(s)$ の 曲率関数 は

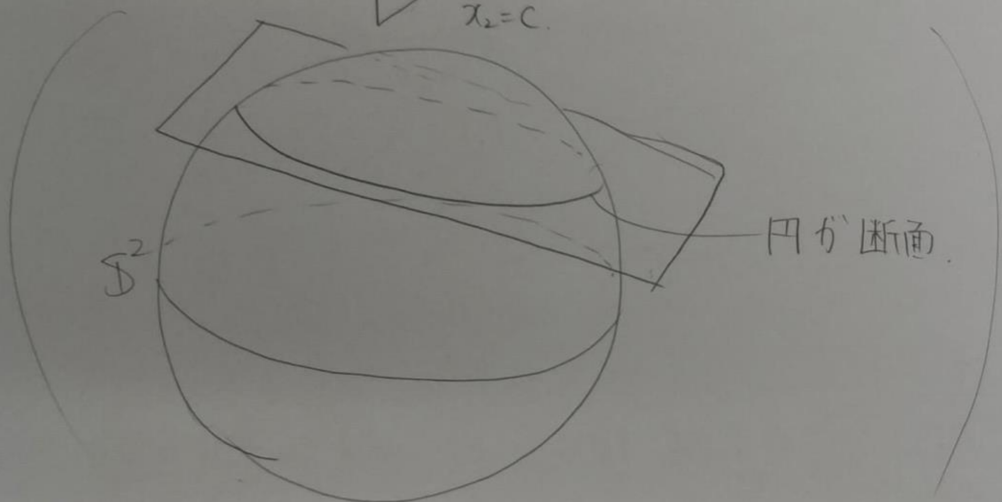
$K(s) = \det(\gamma(s), \gamma'(s), \gamma''(s))$ と表せる

$$\begin{aligned} \because K &= \langle n, e' \rangle \\ &= \langle \gamma \times e, e' \rangle \\ &= \det(\gamma, e, e') \\ &= \det(\gamma, \gamma', \gamma'') \end{aligned}$$

Example 3.1.11 ~~3.11~~



を考える



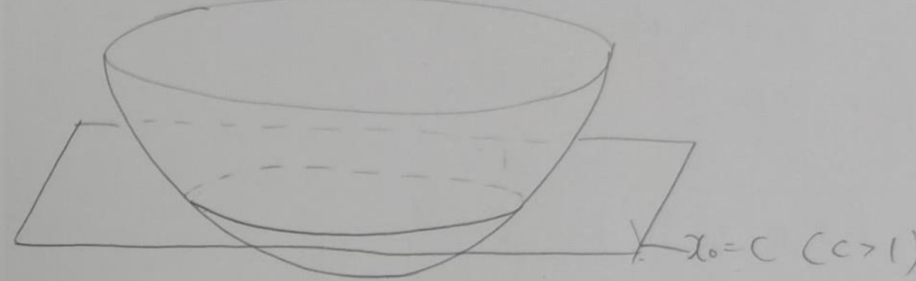
$$\gamma(s) = \begin{bmatrix} \sqrt{1+c^2}\cosh\left(\frac{s}{\sqrt{1+c^2}}\right) \\ \sqrt{1+c^2}\sinh\left(\frac{s}{\sqrt{1+c^2}}\right) \\ c \end{bmatrix}$$

は, $\mathbb{H}^2 \cap \{x_2 = c\}$ の弧長パラメタ表示.

$$K(s) = \frac{-c}{\sqrt{1+c^2}}$$

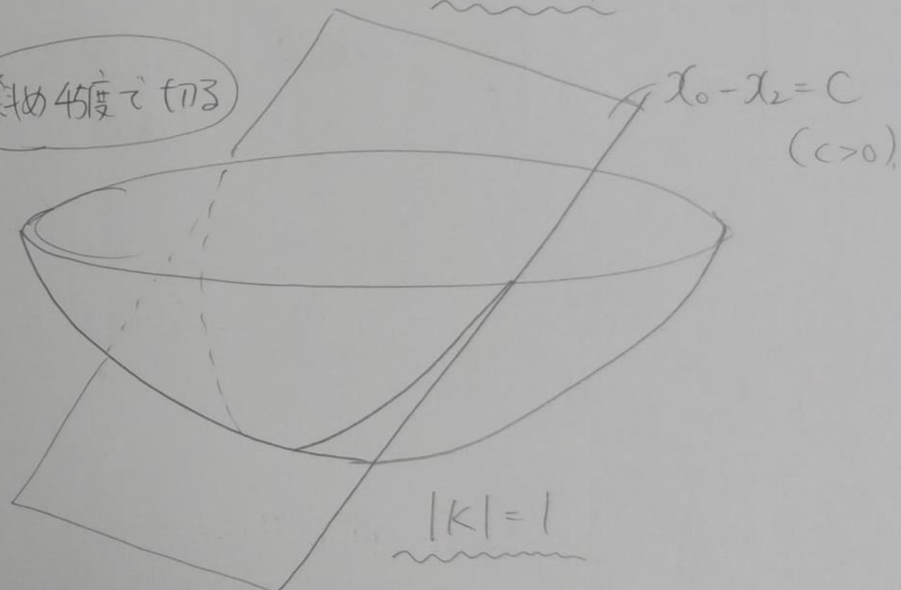
$|K| < 1$ である

Example



$K(s)$ は定数で, $1 < |K|$.

斜め45度で切る



$|K| = 1$

フルネの公式

$$\mathbb{e}' = \mathbb{r} + \kappa \mathbb{n}$$

$$\mathbb{n}' = -\kappa \mathbb{e}$$

$$F = (\mathbb{r}, \mathbb{e}, \mathbb{n}) : I \longrightarrow SO^+(1,2)$$

$$F' = F \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\kappa \\ 0 & \kappa & 0 \end{bmatrix}$$

曲線論の基本定理
も成り立つ