目次

2/19(水) セミナー資料

飯野 郁

2025/02/19

1　前回の宿題

考えたい問題は次の 2 つであった。

- 論文内の Ω と 曲線論の行列値関数 K は同じものか？
- 曲線 γ の角度関数が θ であること

2　Ω と 曲線論の行列値関数 K は同じものか

2.1　論文内の Ω について

論文内で、Ω と ω に関して次のように書かれている。

（論文内セクション 2.3. より）

$A \in M_{n+2}(\mathbb{R})$、$A^{-1}dA = \Omega = (\omega^\alpha_\beta) \in M_{n+2}(\mathbb{R})$ とする。さらに対角行列 $G = \mathrm{diag}(\kappa, 1, \ldots, 1) \in M_{n+2}(\mathbb{R})$ を設定すると、

$$A \in SO^+(\mathbb{E}^{n+2}), \quad \Omega \in \mathfrak{so}(\mathbb{E}_{n+2}) \tag{2.1}$$

が成り立つ。ここで、$SO^+(\mathbb{E}^{n+2})$ は $SO(\mathbb{E}^{n+2})$ の単位行列 I_{n+2} を含む連結成分であり、

$$SO(\mathbb{E}^{n+2}) = \{Z \in M_{n+2}(\mathbb{R}) \mid Z^T G Z = G, \det Z = 1\} \tag{2.2}$$

で定義される。また、~~リー代数~~ $\mathfrak{so}(\mathbb{E}^{n+2})$ は、

$$\mathfrak{so}(\mathbb{E}^{n+2}) = \{H \in M_{n+2}(\mathbb{R}) \mid H^T G + GH = 0\} \tag{2.3}$$

と定義される。

（論文内セクション 2.2. より）

$(e_1, \ldots, e_n)$ を V 上の局所正規直交フレームとし、$(\omega^1, \ldots, \omega^n)$ をその双対基底とする。すなわち、

$$\omega^i(e_k) = \delta^i_k. \tag{2.4}$$

さらに、

$$\omega^{n+1} = 0 \tag{2.5}$$

$(\omega_0^0 = 0$ とする$)$

と定める。

V 上の微分形式 $\omega^i_j, \omega^{n+1}_j, \omega^i_{n+1}, \omega^{n+1}_{n+1}$ を以下のように定義する。

$$\omega^i_j(e_k) = \langle \nabla_{e_k} e_j, e_i \rangle, \tag{2.6}$$

$$\omega^{n+1}_j(e_k) = \langle S e_k, e_j \rangle, \tag{2.7}$$

$$\omega^j_{n+1} = -\omega^{n+1}_j, \tag{2.8}$$

$$\omega^{n+1}_{n+1} = 0. \tag{2.9}$$

2.5. $K(\neq 0)$ の場合

$\neq n+1$

$\omega_r^0(e_k) = \langle Se_k, e_r \rangle$,　$\omega_0^r = -K\omega_r^0$

$= -K\langle e_k, e_r \rangle + K\langle e_k, \frac{\partial}{\partial t}\rangle\langle e_r, \frac{\partial}{\partial t}\rangle$

（論文内セクション 3.2. より）

$\mathbb{E}^{n+2}$ を（$\mathbb{M}^n$ に応じて） $\mathbb{E}^{n+2} = \mathbb{R}^{n+2}$ または $\mathbb{E}^{n+2} = \mathbb{L}^{n+2}$ と定める。$(E_0, \ldots, E_{n+1})$ を $\mathbb{E}^{n+2}$ の標準フレームとし、特に $\mathbb{L}^{n+2}$ の場合には $\langle E_0, E_0 \rangle = -1$ である。さらに、$E_{n+1} = \frac{\partial}{\partial t}$ とする。

T を以下のように定義する。

$$T^k = \langle T, e_k \rangle, \quad T^{n+1} = \nu, \quad T^0 = 0. \tag{2.10}$$

$e_k \to \frac{d}{ds}$

$K = 1$ 　$(\gamma' = e(s))$

$\omega_r^0(e_k) = -\langle e(s), e_r \rangle$

$+ \langle e(s), \frac{\partial}{\partial t}\rangle\langle e_r, \frac{\partial}{\partial t}\rangle$

$\gamma = 0, 1, 2$

$\nu = \langle N, \frac{\partial}{\partial t} \rangle$

(i) $\gamma = 0$ の場合.

(与式) $= \omega_i^0(e_k) = 0$.

(ii) $\gamma = 1$ 〃.

(与式) $= -1 + \langle e(s), \frac{\partial}{\partial t} \rangle^2$

$=$

また、次のように ω を設定する。

$$\omega_j^0(e_k) = \kappa\big(T_j T_k - \delta_j^k\big), \tag{2.11}$$

$$\omega_{n+1}^0(e_k) = \kappa\,\nu\,T^k, \tag{2.12}$$

$$\omega_0^i = -\kappa\,\omega_i^0, \tag{2.13}$$

$$\omega_0^{n+1} = -\kappa\,\omega_{n+1}^0, \tag{2.14}$$

$$\omega_0^0 = 0. \tag{2.15}$$

$n = 1$ の場合、$n + 2 = 3$ となり、Ω は以下のような 3×3 の行列で表される。

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_0^0 & \omega_1^0 & \omega_2^0 \\ \omega_0^1 & \omega_1^1 & \omega_2^1 \\ \omega_0^2 & \omega_1^2 & \omega_2^2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(\mathbb{E}^3). \tag{2.16}$$

$\mathfrak{so}(\mathbb{E}^3)$ は、計量 G に関して歪対称な 3×3 行列の空間として定義される。すなわち、

$$\mathfrak{so}(\mathbb{E}^3) = \{\Omega \in M_3(\mathbb{R}) \mid \Omega^T G + G\Omega = 0\}. \tag{2.17}$$

ここで、$\kappa = 1$ の場合、すなわちユークリッド計量 $G = I$ の場合には、単に歪対称行列になる。

$$\mathfrak{so}(\mathbb{E}_3) = \{\Omega \in M_3(\mathbb{R}) \mid \Omega^T + \Omega = 0\}. \tag{2.18}$$

上で与えられた関係式を総合すると、Ω は以下のような歪対称行列となる。

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_2^1 & \omega_3^1 \\ -\omega_2^1 & \omega_2^2 & \omega_3^2 \\ -\omega_3^1 & -\omega_3^2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

(2.18) より $\omega_2^2 = 0$ が分かる

ここで、$\omega_2^2 = 0$ である（別セクションで証明）。この結果を踏まえ、次節では K がこの条件を満たしているかを検討する。

2.1.1 $\omega_2^2 = 0$ の証明

補題 1. リーマン多様体 V 上の局所正規直交フレームを $(e_1, \ldots, e_n)$ とし、e_k 上で定義された微分形式を ω_j^i $(i, j = 0, \ldots, n+1)$ とする。このとき、

$$\omega_i^i = 0 \tag{2.20}$$

である。

証明. $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_j^i$ のため、

$$\langle e_i, e_i \rangle = 1 \tag{2.21}$$

(i) $\gamma=0$ の場合.

$$(与式) = \omega_1^0(e_k) = 0.$$

(ii) $\gamma=1$ 〃

$$(与式) = -1 + \left\langle e(s), \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle^2$$

$$= -1 + \left\langle e(s), \sin\theta(s)\, e(s)\right\rangle^2$$

$$= -1 + \sin^2\theta(s)$$

$$= -\cos^2\theta(s) \qquad \left(= \omega_1^0\left(\frac{d}{ds}\right)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \sin\theta(s)\, e(s) + \cos\theta(s)\, n(s)$$

tan　　　nor

$$\hat{\Omega} = \left(\hat{\omega}_j^i(s)\right)$$

にすれば,

$$\hat{\Omega} = K \text{ となる.}$$

$$\left(\Omega\left(\frac{d}{ds}\right) = K(s)\right)$$

(iii) $\gamma=2$ の場合　　ω_{n+1}^0

$$(与式) = 0 + \left\langle e(s), \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle\left\langle n(s), \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle$$

$$= 0 + \left\langle e(s), \sin\theta(s)\, e(s)\right\rangle\left\langle n(s), \cos\theta(s)\, n(s)\right\rangle$$

$$= \sin\theta(s)\cos\theta(s) \qquad \left(= \omega_2^0\left(\frac{d}{ds}\right)\right)$$

である。この式の左辺を e_k で微分すると、

$$\nabla_{e_k}(\langle e_i, e_i\rangle) = \langle \nabla_{e_k} e_i, e_i\rangle + \langle e_i, \nabla_{e_k} e_i\rangle = 2\langle \nabla_{e_k} e_i, e_i\rangle \tag{2.22}$$

である。一方、右辺を e_k で微分すると 0 であるため、

$$\omega^i_i(e_k) = \langle \nabla_{e_k} e_i, e_i\rangle = 0 \tag{2.23}$$

が成り立つ。定義より $\omega^i_j(e_k) = \langle \nabla_{e_k} e_j, e_i\rangle$ であるため、j を i に置き換えて直前の式に代入すると、

$$\omega^i_i(e_k) = 0 \tag{2.24}$$

が成り立つ。これは任意の e_k に対して成り立つため、$\omega^i_i = 0$ である。 □

以上より、Ω は

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega^1_2 & \omega^1_3 \\ -\omega^1_2 & 0 & \omega^2_3 \\ -\omega^1_3 & -\omega^2_3 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.25}$$

の形で表示される。

2.2 行列 K の検証

$S^n \times R$ $(n=1)$

具体例として考えている行列

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -1+\sin^2\theta(s) & \sin\theta(s)\cos\theta(s) \\ 1-\sin^2\theta(s) & 0 & -\theta'(s) \\ -\sin\theta(s)\cos\theta(s) & \theta'(s) & 0 \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

が、$\mathfrak{so}(\mathbb{E}^3)$ の元となるかを確認する。

$\mathfrak{so}(\mathbb{E}^3)$ は~~$k=1$ における~~歪対称な 3×3 行列の空間なので、$K^T + K = 0$ が成り立つ必要がある。行列 K の転置は、

$$K^T = \begin{pmatrix} 0 & 1-\sin^2\theta(s) & -\sin\theta(s)\cos\theta(s) \\ -1+\sin^2\theta(s) & 0 & \theta'(s) \\ \sin\theta(s)\cos\theta(s) & -\theta'(s) & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.27}$$

これと $-K$ を比較すると、すべての成分が一致することがわかるため、

$$K^T = -K \tag{2.28}$$

が成り立つ。したがって $K \in \mathfrak{so}(\mathbb{E}^3)$ である。

2.3　$\Omega = K$ の確認

$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ 上の正規直交フレーム $F(s) = \big(\Gamma(s), e(s), n(s)\big)$ が与えられた状況において、接続形式 Ω と行列値関数 K が一致すること、すなわち

$$\Omega\Big(\frac{d}{ds}\Big) = K(s) \tag{2.29}$$

となることを確認したい。ここで、$\frac{d}{ds}$ は曲線 $\gamma(s)$ に沿った接ベクトル $\gamma'(s)$ を表す。

接続形式は次のように定義されている。

$$\omega^i_j\Big(\frac{d}{ds}\Big) \underbrace{=}_{\text{論文内の定義より}} \langle \nabla_{\frac{d}{ds}} e_j, e_i\rangle = \Big\langle \frac{d}{ds}e_j,\, e_i\Big\rangle, \quad (i, j = 0, 1, 2) \tag{2.30}$$

($\langle \nabla_{\frac{d}{ds}} e_j, e_i\rangle = \Big\langle \frac{d}{ds}e_j,\, e_i\Big\rangle$ は次セクションで証明する）つまり、$\frac{d}{ds}$ という接ベクトルに対して、各 ω^i_j は内積計算によってスカラー値を返す 1 次微分形式である。

Ω は反対称行列として

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega^1_2 & \omega^1_3 \\ -\omega^1_2 & 0 & \omega^2_3 \\ -\omega^1_3 & -\omega^2_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

と表される。

一方、問題文で定義された行列値関数 $K(s)$ は

$$\begin{aligned} K(s) &= \begin{pmatrix} K^0_0 & K^0_1 & K^0_2 \\ K^1_0 & K^1_1 & K^1_2 \\ K^2_0 & K^2_1 & K^2_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 + \sin^2\theta(s) & \sin\theta(s)\cos\theta(s) \\ 1 - \sin^2\theta(s) & 0 & -\theta'(s) \\ -\sin\theta(s)\cos\theta(s) & \theta'(s) & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(\mathbb{E}^3) \end{aligned} \tag{2.32}$$

と与えられている。

以下、$\Omega = K$ であることを確認する。

$$\tilde{\nabla}_{\frac{d}{ds}}(e_j) = \underbrace{\nabla_{\frac{d}{ds}}(e_j)}_{\text{tan}} + \underbrace{\mathrm{II}\left(\frac{d}{ds}, e_j\right)}_{\text{nor}}$$

2.3.1 ★ $\langle \nabla_{\frac{d}{ds}} e_j, e_i \rangle = \left\langle \frac{d}{ds} e_j,\, e_i \right\rangle$ の証明

補題 2. $\{e_0(s), e_1(s), e_2(s)\}$ を $\mathbb{R}^3$ に埋め込まれた $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ 上の曲線 $\gamma(s)$ の *moving frame*、∇ を $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ のレビチビタ（接続）とする。このとき、

$$\langle \nabla_{\frac{d}{ds}} e_j, e_i \rangle = \left\langle \frac{d}{ds} e_j,\, e_i \right\rangle \tag{2.33}$$

である。

O'NEILL P100

証明. $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}^3$ に埋め込まれているとみなす。すると、ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ における通常の微分 $\frac{d}{ds} e_j$ は、次のように接空間への成分と接空間に垂直な法方向成分に分解される。

$$\frac{d}{ds} e_j = \nabla_{\gamma'(s)} e_j + (\text{法方向成分}). \tag{2.34}$$

すなわち、

$$\nabla_{\gamma'(s)} e_j = \frac{d}{ds} e_j - (\text{法方向成分}). \tag{2.35}$$

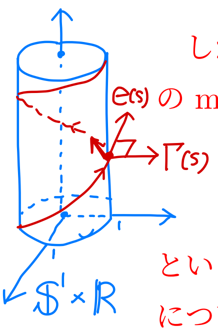
また、$\{e_1(s), e_2(s)\}$ は $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ の接空間に属するため、法方向成分は任意の接ベクトル $e_i(s)$（$i = 1, 2$）との内積で消える．従って、

$e_0 = \Gamma(s)$ ← $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ と法方向

$e_1 = e(s)$, $e_2 = n(s)$ ← $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ と接方向

$$\langle \nabla_{\gamma'(s)} e_j, e_i \rangle = \left\langle \frac{d}{ds} e_j, e_i \right\rangle. \tag{2.36}$$

□



しかし、$e_0(s) = \Gamma(s)$ の場合は法方向（すなわち接空間に属さない）であるため、上記の moving frame の読み替え（$e_0(s) = \Gamma(s)$, $e_1(s) = e(s)$, $e_2(s) = n(s)$）をした場合に、

$$\langle \nabla_{\frac{d}{ds}} e_j, e_i \rangle = \left\langle \frac{d}{ds} e_j,\, e_i \right\rangle$$

という主張は、接空間に属する e_i（$i = 1, 2$）については成り立つが、$i = 0$（$e_0(s) = \Gamma(s)$）については一般には成立しない？

2.3.2 $\Omega = K$ の確認（続き）

まず、フレネセレ型の公式より、

$$\begin{cases} \Gamma'(s) = (1 - \sin^2\theta(s)) e(s) - \sin\theta(s)\cos\theta(s) n(s) \\ e'(s) = -(1 - \sin^2\theta(s))\Gamma(s) + \theta'(s) n(s) \\ n'(s) = \sin\theta(s)\cos\theta(s)\Gamma(s) - \theta'(s) e(s) \end{cases} \tag{2.37}$$

$$K_{(s)} = \begin{bmatrix} \langle \Gamma'(s), \Gamma(s) \rangle & \langle e'(s), \Gamma(s) \rangle & \langle n'(s), \Gamma(s) \rangle \\ \langle \Gamma'(s), e(s) \rangle & \langle e'(s), e(s) \rangle & \langle n'(s), e(s) \rangle \\ \langle \Gamma'(s), n(s) \rangle & \langle e'(s), n(s) \rangle & \langle n'(s), n(s) \rangle \end{bmatrix}$$

$$\omega^i_j\left(\frac{d}{ds}\right) \overset{?}{=} \left\langle \nabla_{\frac{d}{ds}} e_i, e_j \right\rangle \quad (i, j = 0, 1, 2)$$

である。正規直交フレーム $F(s) = \big(e_0(s) \mid e_1(s) \mid e_2(s)\big)$（ここでは $e_0(s) = \Gamma(s)$, $e_1(s) = e(s)$, $e_2(s) = n(s)$ とする）の各列ベクトルに関して、各 ω^i_j $(i, j = 0, 1, 2)$ は補題 2 を用いて、

$$\begin{aligned} \omega^0_0\left(\frac{d}{ds}\right) &= \left\langle \frac{d}{ds} e_0, e_0 \right\rangle = \langle \Gamma'(s), \Gamma(s) \rangle = 0, \\ \omega^0_1\left(\frac{d}{ds}\right) &= \left\langle \frac{d}{ds} e_1, e_0 \right\rangle = \langle e'(s), \Gamma(s) \rangle = -(1 - \sin^2 \theta(s)), \\ \omega^0_2\left(\frac{d}{ds}\right) &= \left\langle \frac{d}{ds} e_2, e_0 \right\rangle = \langle n'(s), \Gamma(s) \rangle = \sin \theta(s) \cos \theta(s), \\ \omega^1_1\left(\frac{d}{ds}\right) &= \left\langle \frac{d}{ds} e_1, e_1 \right\rangle = \langle e'(s), e(s) \rangle = 0, \\ \omega^1_2\left(\frac{d}{ds}\right) &= \left\langle \frac{d}{ds} e_2, e_1 \right\rangle = \langle n'(s), e(s) \rangle = -\theta'(s), \\ \omega^2_2\left(\frac{d}{ds}\right) &= \left\langle \frac{d}{ds} e_2, e_2 \right\rangle = \langle n'(s), n(s) \rangle = 0. \end{aligned} \tag{2.38}$$

補題2では
別で示した.

また、反対称性（$\omega^i_j = -\omega^j_i$）から、

$$\begin{aligned} \omega^1_0\left(\frac{d}{ds}\right) &= -\omega^0_1\left(\frac{d}{ds}\right) = 1 - \sin^2 \theta(s), \\ \omega^2_0\left(\frac{d}{ds}\right) &= -\omega^0_2\left(\frac{d}{ds}\right) = -\sin \theta(s) \cos \theta(s), \\ \omega^2_1\left(\frac{d}{ds}\right) &= -\omega^1_2\left(\frac{d}{ds}\right) = \theta'(s). \end{aligned} \tag{2.39}$$

が成り立つ。

2.3.3 $K(s)$ の各成分との比較

行列 $K(s)$ の成分は、

$$\begin{aligned} &K^0_0 = 0, \quad K^0_1 = -1 + \sin^2 \theta(s), \quad K^0_2 = \sin \theta(s) \cos \theta(s), \\ &K^1_0 = 1 - \sin^2 \theta(s), \quad K^1_1 = 0, \quad K^1_2 = -\theta'(s), \\ &K^2_0 = -\sin \theta(s) \cos \theta(s), \quad K^2_1 = \theta'(s), \quad K^2_2 = 0 \end{aligned} \tag{2.40}$$

となっている。前セクションで求めた ω^i_j と比較すると、

$$\omega^i_j = K^i_j \quad (i, j = 0, 1, 2) \tag{2.41}$$

となり、行列 Ω の各成分が行列 K の各成分と一致する。すなわち

$$\Omega\left(\frac{d}{ds}\right) = K(s), \tag{2.42}$$

である。

3　曲線 γ の角度関数が θ であるか

以下の定理は、$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ 上の曲線論に関する基本定理である。

3.1　$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ の曲線論の基本定理

定理.　$\theta(s)$ を区間 I 上の C^∞ 関数として任意に与える。このとき、次を満たす曲線 (K)

$$\gamma(s) : I \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \qquad (\mathbb{E}^2,\ \mathbb{S}^2,\ \mathbb{H}^2)$$

が存在する：

(1) $\gamma(s)$ は弧長パラメータ表示である（すなわち $|\gamma'(s)| = 1$）。

(2) $\gamma(s)$ の角度関数は $\theta(s)$ に一致する（このとき、曲率は $\theta'(s)$）。

(曲率)　(κ)

さらに、このような $\gamma(s)$ は、$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ の向きを保つ合同変換（回転など）を除いて一意である。

$(\mathbb{E}^2, \mathbb{S}^2, \mathbb{H}^2)$

定理内の存在性と一意性をそれぞれ証明する。

3.2　存在性の証明

$(s_0$: 初期値$)$

次のように曲線 $\gamma(s)$ を定義する：

$$\gamma(s) := \left(\cos\left(\int_{\substack{\cancel{0}\\ s_0}}^{s} \cos\theta(t)\, dt \right),\ \sin\left(\int_{\substack{\cancel{0}\\ s_0}}^{s} \cos\theta(t)\, dt \right),\ \int_{\substack{\cancel{0}\\ s_0}}^{s} \sin\theta(t)\, dt \right) \tag{3.1}$$

$(\Longrightarrow$ (1) (2) を みたす$)$

3.2.1　存在性の証明（$\gamma(s)$ が弧長パラメータ表示）

まず、$\gamma(s)$ が弧長パラメータ表示であることを示す。以降、簡単のために

$$\phi(s) := \int_0^s \cos\theta(t) dt \tag{3.2}$$

とおくと、先ほどの $\gamma(s)$ は

$$\gamma(s) = \left(\cos\phi(s), \sin\phi(s), \int_0^s \sin\theta(t) dt \right) \tag{3.3}$$

と表される。$\phi'(s) = \cos\theta(s)$ および $\frac{d}{ds}\int_0^s \sin\theta(t)dt = \sin\theta(s)$ であるため、各成分を微分すると、

$$\gamma'(s) = (-\sin\phi(s)\cos\theta(s), \cos\phi(s)\cos\theta(s), \sin\theta(s)) \tag{3.4}$$

である。ノルムを計算すると、

$$\begin{aligned} |\gamma'(s)|^2 &= (-\sin\phi(s)\cos\theta(s))^2 + (\cos\phi(s)\cos\theta(s))^2 + (\sin\theta(s))^2 \\ &= \sin^2\phi(s)\cos^2\theta(s) + \cos^2\phi(s)\cos^2\theta(s) + \sin^2\theta(s) \end{aligned} \tag{3.5}$$

$\cos^2\theta(s) + \sin^2\theta(s) = 1$ を代入して整理すると、$|\gamma'(s)| = 1$ となる。よって、$\gamma(s)$ は弧長パラメータ表示である。

書き換え.

3.2.2 存在性の証明（$\gamma(s)$ の角度関数が θ）

次に、$\gamma(s)$ の角度関数が θ であることを示す。$\gamma(s)$ の正規直交フレームを $\Gamma(s), e(s), n(s)$ とすると、フレネセレ型の公式より、

$$\begin{cases} \Gamma'(s) = (1-\sin^2\theta(s))e(s) - \sin\theta(s)\cos\theta(s)n(s) \\ e'(s) = -(1-\sin^2\theta(s))\Gamma(s) + \kappa(s)n(s) \\ n'(s) = \sin\theta(s)\cos\theta(s)\Gamma(s) - \kappa(s)e(s) \end{cases} \tag{3.6}$$

である。一方、式（3.1）で定義した $\gamma(s)$ に対して、$\Gamma(s)$, $e(s)$ および $n(s)$ を次のように定義する（フレネセレ型の公式と区別するため、$\bar{\theta}$ とおく）。

$$\begin{cases} \Gamma(s) := (\cos\varphi(s), \sin\varphi(s), 0) \\ e(s) := \gamma'(s) \\ \qquad = \left(-\sin\phi(s)\cos\bar{\theta}(s),\ \cos\phi(s)\cos\bar{\theta}(s),\ \sin\bar{\theta}(s)\right) \\ n(s) := \Gamma(s) \times e(s) \\ \qquad = \left(\sin\phi(s)\sin\bar{\theta}(s),\ -\cos\phi(s)\sin\bar{\theta}(s),\ \cos\bar{\theta}(s)\right). \end{cases} \tag{3.7}$$

直前の式から $\Gamma(s)$ の微分を求める。

$$\Gamma'(s) = \left(-\sin\phi(s)\cos\bar{\theta}(s),\ \cos\phi(s)\cos\bar{\theta}(s),\ 0\right). \tag{3.8}$$

このベクトルと $n(s)$ の内積 $\Gamma'(s)\cdot n(s)$ を計算すると、

$$\begin{aligned} \Gamma'(s)\cdot n(s) &= -\sin^2\phi(s)\cos\bar{\theta}(s)\sin\bar{\theta}(s) - \cos^2\phi(s)\cos\bar{\theta}(s)\sin\bar{\theta}(s) \\ &= -\cos\bar{\theta}(s)\sin\bar{\theta}(s)\left(\sin^2\phi(s) + \cos^2\phi(s)\right) \\ &= -\cos\bar{\theta}(s)\sin\bar{\theta}(s) \end{aligned} \tag{3.9}$$

である。同様に内積 $\Gamma'(s)\cdot e(s)$, $e'(s)\cdot\Gamma(s)$, $e'(s)\cdot n(s)$, $n'(s)\cdot\Gamma(s)$, $n'(s)\cdot e(s)$ を計算すると、$\frac{d}{ds}\sin\bar\theta(s) = \bar\theta'(s)\cos\bar\theta(s)$ および $\frac{d}{ds}\cos\bar\theta(s) = -\bar\theta'(s)\sin\bar\theta(s)$ に注意して

$$
\begin{aligned}
\Gamma'(s)\cdot e(s) &= 1-\sin^2\bar\theta(s)\\
e'(s)\cdot\Gamma(s) &= -(1-\sin^2\bar\theta(s))\\
e'(s)\cdot n(s) &= \bar\theta'(s)\\
n'(s)\cdot\Gamma(s) &= \sin\bar\theta(s)\cos\bar\theta(s)\\
n'(s)\cdot e(s) &= -\bar\theta'(s)
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

θ: n と $\frac{\partial}{\partial t}$ のなす角

となる。これらの内積の値とフレネセレ型の公式（3.7）を比較すると、

$\theta := \mathrm{Arccos}\left(\left\langle \frac{\partial}{\partial t}, n\right\rangle\right)$

$\theta(s) = \bar\theta(s) + \pi$

$$
\left\{
\begin{aligned}
1-\sin^2\theta(s) &= 1-\sin^2\bar\theta(s)\\
\sin\theta(s)\cos\theta(s) &= \sin\bar\theta(s)\cos\bar\theta\\
\theta'(s) &= \bar\theta'(s)
\end{aligned}
\right.
\tag{3.11}
$$

$\theta : I \to \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ の C^∞-map.

となる。さらに、$\theta(s)$ の初期条件を $\bar\theta(s)$ と一致するように定めれば

$$\theta(s_0) = \bar\theta(s_0) = C \in \mathbb{R} \tag{3.12}$$

$f(s) := \theta(s) - \bar\theta(s)$
$f'(s) = 0$ (3.11 より)
$f(0) = 0$ (3.12 より)

である。式 (3.11) ~~および (3.12)~~ より、$\theta(s) = \bar\theta(s)$ が成り立つ。

→ $f(s)$ は定数 0. $\therefore\ \theta(s) - \bar\theta(s) = 0$

3.3　一意性の証明

以下、$\gamma(s)$ と $\bar\gamma(s)$ を条件 (1) と (2) を満たす曲線とする。まず、次のように定義する：

$$
\gamma(s) = \left(\cos\left(\int_0^s \cos\theta(t)\,dt\right),\ \sin\left(\int_0^s \cos\theta(t)\,dt\right),\ \int_0^s \sin\theta(t)\,dt\right),
$$

ここは必要

$$
\left\{
\begin{aligned}
\Gamma(s) &= \left(\cos\left(\int_0^s \cos\theta(t)\,dt\right),\ \sin\left(\int_0^s \cos\theta(t)\,dt\right),\ 0\right),\\
e(s) &= \gamma'(s),\\
n(s) &= \Gamma(s)\times e(s).
\end{aligned}
\right.
\tag{3.13}
$$

$\Gamma(s) := \begin{pmatrix} x(s)\\ y(s)\\ 0\end{pmatrix}$

これらを用いて、曲線に付随して動く正規直交フレーム（moving frame）として

$$F(s) = (\Gamma(s)\ e(s)\ n(s)) \tag{3.14}$$

を定義する。同様にして曲線 $\bar\gamma(s)$ に対しても

$$\bar F(s) = (\bar\Gamma(s)\ \bar e(s)\ \bar n(s)) \tag{3.15}$$

とする。両方のフレームは、共通の行列値関数 $K(s)$ を用いた以下の微分方程式が成り立つ。

$$F'(s) = F(s)K(s), \qquad \bar{F}'(s) = \bar{F}(s)K(s) \tag{3.16}$$

ただし、行列値関数 $K(s)$ は、

$$K(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1+\sin^2\theta(s) & \sin\theta(s)\cos\theta(s) \\ 1-\sin^2\theta(s) & 0 & -\kappa(s) \\ -\sin\theta(s)\cos\theta(s) & \kappa(s) & 0 \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

とする。(ここに初期値のギロン) $\tilde{F}(s) := AF(s)$, $A := F(s_0)F^{-1}(s_0)$

このとき、微分方程式の解の一意性から、ある定数行列 $A \in \mathrm{SO}(3)$ が存在して

$$\bar{F}(s) = A\,F(s) \tag{3.18}$$

がすべての s について成立する(A の存在は~~別セクションで~~補題3で証明する)。

先に初期値が一致することの議論が必要

一意性の証明のためには、最終的に A が「xy 平面上の回転」、すなわち

$$A = \begin{pmatrix} \cos\lambda & -\sin\lambda & 0 \\ \sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

の形であることを示せばよい(2 つの曲線の間に現れる差異は回転と平行移動によるものでしかないことを意味するため、$\gamma(s)$ と $\bar{\gamma}(s)$ は向きを保つ合同変換によって一致する)。

一方、以下のような回転行列 B と $\bar{B}$ が存在する。 別で補題で示す

$$B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \bar{B} = \begin{pmatrix} \cos\bar{\beta} & -\sin\bar{\beta} & 0 \\ \sin\bar{\beta} & \cos\bar{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

これらはそれぞれ、$F(s_0)$ と $\bar{F}(s_0)$ を標準形に整えるためのものである。これらを用いて、初期値 s_0 において

$$B\,F(s_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_0 & -\sin\theta_0 \\ 0 & \sin\theta_0 & \cos\theta_0 \end{pmatrix}, \qquad \bar{B}\,\bar{F}(s_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_0 & -\sin\theta_0 \\ 0 & \sin\theta_0 & \cos\theta_0 \end{pmatrix}, \tag{3.21}$$

が成り立つ($\theta_0 = \theta(s_0)$)。これにより、

$$\bar{B}\bar{F}(s_0) = BF(s_0) \tag{3.22}$$

である。$\bar{F}(s_0) = AF(s_0)$ を代入すると、式（3.22）は

$$\bar{B}AF(s_0) = BF(s_0) \tag{3.23}$$

となる。$F(s_0)$ は回転行列なので可逆であり、両辺に $F(s_0)^{-1}$ を掛けると、

$$\bar{B}A = B \Leftrightarrow A = \bar{B}^{-1}B \tag{3.24}$$

である。$B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ および $\bar{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\bar{\beta} & \sin\bar{\beta} & 0 \\ -\sin\bar{\beta} & \cos\bar{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ であるため、加法定理を用いて右辺を具体的に計算すると、

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\beta-\bar{\beta}) & -\sin(\beta-\bar{\beta}) & 0 \\ \sin(\beta-\bar{\beta}) & \cos(\beta-\bar{\beta}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

である。これは A が「xy 平面上の回転」であることを表す。これにより、$\gamma(s)$ と $\bar{\gamma}(s)$ は $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ の対称性（xy 平面での回転と t 軸方向の平行移動）を除けば同一であることを示すため、一意性が証明される。

3.4　定数行列 $A \in \mathrm{SO}(3)$ が存在することの証明

補題 3. ある定数行列 $A \in \mathrm{SO}(3)$ が存在して

$$\bar{F}(s) = A\,F(s)$$

がすべての s について成立する

証明. 曲線 $\gamma(s)$ と $\bar{\gamma}(s)$ に対応するフレーム $F(s)$ と $\bar{F}(s)$ は、同じ行列 $K(s)$ を用いた微分方程式

$$F'(s) = F(s)K(s), \quad \bar{F}'(s) = \bar{F}(s)K(s) \tag{3.26}$$

を満たす。ここで、両フレームの差を表す行列を

※ $F \in SO(3)$ なので、

$$A(s) := \bar{F}(s)F(s)^{-1} \tag{3.27}$$

$F(s)^{-1} = F(s)^T$ にした方が良い。(楽にできる)

と定義する。$A(s)$ を微分すると、

$$A'(s) = \bar{F}'(s)F(s)^{-1} - \bar{F}(s)F(s)^{-1}F'(s)F(s)^{-1}. \tag{3.28}$$

$F'(s) = F(s)K(s)$ および $\bar{F}'(s) = \bar{F}(s)K(s)$ を代入すると、

$$A'(s) = \bar{F}(s)K(s)F(s)^{-1} - \bar{F}(s)F(s)^{-1}\big[F(s)K(s)\big]F(s)^{-1}. \tag{3.29}$$

ここで、$F(s)^{-1}F(s) = I$ であるため、

$$\bar{F}(s)F(s)^{-1}\big[F(s)K(s)\big]F(s)^{-1} = \bar{F}(s)\big[F(s)^{-1}F(s)\big]K(s)F(s)^{-1}. \tag{3.30}$$

したがって、

$$A'(s) = \bar{F}(s)K(s)F(s)^{-1} - \bar{F}(s)K(s)F(s)^{-1} = 0. \tag{3.31}$$

よって、$A'(s) = 0$ となり、$A(s)$ は s に依存しない定数行列となる。すなわち、ある定数行列

$$A := A(s_0) = \bar{F}(s)F(s)^{-1} \quad (\forall\, s) \tag{3.32}$$

が存在し、これにより

$$\bar{F}(s) = A\,F(s) \tag{3.33}$$

がすべての s に対して成立する。また、$F(s)$ と $\bar{F}(s)$ は共に $\mathrm{SO}(3)$ の元であるため、A も $\mathrm{SO}(3)$ に属する。 $\square$

3.5　$\mathbb{H}^1 \times \mathbb{R}$ の曲線論の基本定理

$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ の場合と同様に、$\mathbb{H}^1 \times \mathbb{R}$ においても以下のような曲線論の基本定理が成り立つ。

定理． $\theta(s)$ **を区間** I **上の** C^∞ **関数として任意に与える。このとき、次を満たす曲線**

$$\gamma(s) : I \to \mathbb{H}^1 \times \mathbb{R}$$

が存在する：

(1) $\gamma(s)$ **は弧長パラメータ表示である（すなわち** $|\gamma'(s)| = 1$**）。**
(2) $\gamma(s)$ **の角度関数は** $\theta(s)$ **に一致する（このとき、曲率は** $\theta'(s)$**）。**

さらに、このような $\gamma(s)$ **は、**$\mathbb{H}^1 \times \mathbb{R}$ **の向きを保つ合同変換（回転など）を除いて一意である。**

証明のアイディア：$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ の場合に定義した曲線 $\gamma(s)$ について、cos を cosh に、sin を sinh に置換して計算をする

25分 (20min + 質問 5min)

4　発表スライド内容下書き

4.1　ダニエル論文紹介（論文内は n が 2 以上に興味・動機）

「等長~~埋~~はめ込みと極小曲面への応用」

著者：BENOIT DANIEL

- 積空間 $S^n \times \mathbb{R}$ および $H^n \times \mathbb{R}$ へのはめ込み問題は、古典的な等長はめ込み理論（球面、ユークリッド空間、双曲空間の場合）の拡張版。
- $S^2 \times \mathbb{R}$ や $H^2 \times \mathbb{R}$ における極小曲面の研究が盛んに行われており、その理論的背景の構築が求められている。

背景の全体像、対象論文の位置づけを示す

■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■

古典的理論とガウス・コダッチ方程式

基本概念の復習

- 形状作用素 S （$SX = -\overline{\nabla}_X N$ により表現される）

ガウス・コダッチ方程式

- ガウス方程式：曲率と形状作用素の関係を記述
- コダッチ方程式：形状作用素の変化と接続の関係を記述

空間の曲率が一定値の場合、たとえば S^{n+1}、$\mathbb{R}^{n+1}$、H^{n+1} では、これらの方程式が内在的に定義されている。

■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■

積空間 $S^n \times \mathbb{R}$ および $H^n \times \mathbb{R}$ の新たな課題（積空間特有の問題点）

- 垂直方向（$\mathbb{R}$ 成分）の影響が現れるため、追加の情報が必要となる。
- 垂直ベクトル場 $\dfrac{\partial}{\partial t}$ の接成分 T と法線成分

$$\nu = \langle N, \frac{\partial}{\partial t} \rangle$$

  により、ガウス・コダッチ方程式は T と ν を含む形で再定式化される。
- 従来の理論を拡張し、積空間への等長埋め込みのための新たな整合条件を構築する必要性がある。

■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■
定理 3.3 の設定

- 対象：単連結な n 次元リーマン多様体 V
- 付与されるデータ：
  - リーマン計量 ds^2
  - 対称作用素（形状作用素） $S : T_yV \to T_yV$
  - ベクトル場 T と滑らかな関数 ν （$\|T\|^2 + \nu^2 = 1$）

追加の整合条件は次の 2 つ

$$\nabla_X T = \nu\, SX, \quad d\nu(X) = -\langle SX, T\rangle.$$

結論

- 上記条件を満たすならば、V は $S^n \times \mathbb{R}$ または $H^n \times \mathbb{R}$ に等長はめ込み可能。
- はめ込みは、法線に関する形状作用素が $df \circ S \circ df^{-1}$ となる形で一意。

条件と結論を箇条書きや簡略図で整理し、聴衆が定理の流れを追いやすいようにする。
■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■
まとめと次への展開
これまでの成果のまとめ

- この論文がやった事：古典的なガウス・コダッチ理論の拡張
- 定理 3.3 により、必要十分条件が明確になり、はめ込みの一意性も確保された。
- この論文では、$n \geq 2$ **の場合を想定している（$\because$ 平面という 2 次元部分空間を想定している、** $S^2 \times \mathbb{R}$ **や** $H^2 \times \mathbb{R}$ **における極小曲面について議論されている）**

次への展開

- 具体例として $n = 1$ の場合、 $S^1 \times \mathbb{R}$ および $H^1 \times \mathbb{R}$ の埋め込みの作成方法を紹介予定。と伝え、発表の流れを明確にする。

$n=1$ で、
定曲率空間 と どのように異なるか？

1.

・$S^n \times R$, $H^n \times R$ の超曲面の基本定理

・整合方程式 (4つ) をみたす (ds^2, T, ν, S)

$\to \exists f : M^n \to S^n \times R$ (or $H^n \times R$) 等長はめ込み s.t.

- f の第一基本形式 $= ds^2$
- 〃 形作用素 $= S$
- $\left[\frac{\partial}{\partial t}\right]^{tan} = df(T)$
- $\left[\frac{\partial}{\partial t}\right]^{nor} \cdot n = \nu$

↑ $n \geq 2$ の場合.

4.2 $S^1\times R, H^1\times R$ の曲線 n=1

・θ の定義

・定理、その証明をざっくりと.

4.2.1 $S^1\times R$ の曲線 n=1

4.2.2 $H^1\times R$ の曲線 n=1

4.3 今後の研究の課題：$S^2\times R, H^2\times R$ の曲線 n=2

4.4 タイトル

$S^1 \times \mathbb{R}$ における角度関数を持つ曲線の特徴づけ

問 $n=1$ の場合はどうなのか？

・曲線論の基本定理を比較

$$\left(\begin{matrix} S^1\times R \\ H^1\times R \end{matrix} \longleftrightarrow \begin{matrix} E^2 \\ S^2 \\ H^2 \end{matrix} \right)$$

2. $S^1 \times R$ の曲線論

$\gamma : I \to S^1 \times R$: 正則曲線

$\Longrightarrow \exists s$ s.t. $\|\gamma'(s)\| = 1$

$T(s)$, $e(s)$, $n(s)$

κ. $\frac{\partial}{\partial t} = \left[\frac{\partial}{\partial t}\right]^{tan} + \left[\frac{\partial}{\partial t}\right]^{nor}$

$= T(s) + \nu(s) n(s)$

$= \alpha(s) e(s) + \nu(s) n(s)$

$(\alpha^2 + \nu^2 = 1)$

Def

$$\begin{cases} \alpha = \sin\theta(s) \\ \nu = \cos\theta(s) \end{cases}$$ を みたす $\theta(s)$

→ angle function と呼ぶ.

4.2　$S^1\times R, H^1\times R$ の曲線 n=1

4.2.1　$S^1\times R$ の曲線 n=1

4.2.2　$H^1\times R$ の曲線 n=1

4.3　今後の研究の課題：$S^2\times R, H^2\times R$ の曲線 n=2

4.4　タイトル

$S^1\times\mathbb{R}$ における角度関数を持つ曲線の特徴づけ

命題　$\theta'(s) = K(s)$ である

↳ 整合条件 (9) (10) より成立.

(外の空間の設定を復習.)

$$S^1\times R = \{(x, y, t)\in E^3 \mid x^2+y^2=1\}$$

E^3 の部分多様体.

・(向きを保つ) 等長変換

$$(x, y, t) \mapsto \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \\ t + c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

3. $S^1 \times \mathbb{R}$ における

曲線論の基本定理 (定理)

$$\Theta \longmapsto {}^{\exists}\gamma$$

↖ γ を復元できる.

$\boxed{\text{Remark}}$ $\mathbb{E}^2$, S^2, $\mathbb{H}^2$ の場合, κ で曲線を定めた.

$\kappa(s)$ だけでは γ を一意に復元できない.

$\Theta(s)$ が必要

(もしくは, $(\kappa(s), \Theta(s_0))$ で決まる)

4. 証明 (の アウトライン) (時間調整)

- 存在
- 一意性

存在: $\gamma(s) = \left(\cos\phi, \sin\phi, \int \sin\Theta \, ds\right)$

$\left(\phi = \int \cos\Theta \, ds\right)$

5. さいごに

- $\mathbb{H}^1 \times \mathbb{R}$ のときも同様の定理を得た.
- 大域性質
  - 4頂点定理
  - Fenchel 定理

  は, $S^1 \times \mathbb{R}$ では不成立.

質問

- K を Θ に置き換えても成立?
- $\mathbb{H}'\times\mathbb{R}$ では?

- 面白すぎん、

- $\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}$、$\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$ の曲線論
(面)