レビ・チビタ接続 (Levi-Civita connection) ← 2階ビブン（ベクトル場のビブン）

M: C^∞級多様体

Def M上の共変微分とは、写像

$$\nabla : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$
$$(V, W) \longmapsto \nabla_V W$$

で (D1)〜(D3) をみたすもの　($V_i, W_j \in \mathfrak{X}(M)$)

fに関して $\mathbb{R}$線形

(D1) ${}^\forall f, g \in C^\infty(M)$ に対して $\nabla_{fV_1+gV_2} W = f(\nabla_{V_1}W) + g(\nabla_{V_2}W)$　Vに関して $C^\infty(M)$-線形

とくに $a, b \in \mathbb{R} \Longrightarrow \nabla_{aV_1+bV_2} W = a(\nabla_{V_1}W) + b(\nabla_{V_2}W)$

(D2) ${}^\forall a, b \in \mathbb{R} \Longrightarrow \nabla_V(aW_1 + bW_2) = a(\nabla_V W_1) + b(\nabla_V W_2)$　Wに関して $\mathbb{R}$-線形

(D3) ${}^\forall f \in C^\infty(M)$ に対して $\nabla_V(fW) = (Vf)\cdot W + f\nabla_V W$　Leibniz rule

→ ここだけ接続

接続 … 2階微分，ベクトル場の微分

前回

$$X_{u^i u^j} = \underbrace{[X_{u^i u^j}]^T}_{} + [X_{u^i u^j}]^N$$

!!

$$\nabla_{\partial u^i} X_{u^j} = \Gamma^1_{ij} X_{u^1} + \cdots + \Gamma^m_{ij} X_{u^m}$$

$\nabla_V W$

V: 微分するベクトル場

W: 微分されるベクトル場)

$$[y\partial_x, \partial_y](f) = y\partial_x(f_y) - \partial_y(y f_x)$$
$$= y f_{xy} - (\partial_y(y) f_x + y f_{xy})$$
$$= -f_x = -\partial_x(f)$$

Example　$M = \mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ の C^∞級ベクトル場 $V, W \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ を任意にとる

$W^i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ $(i = 1, \cdots, n)$ が存在して

$$W = W^1\partial_1 + \cdots + W^n\partial_n \quad \left(\text{ただし } \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$

と表される。このとき

$$D_V W := V(W^1)\partial_1 + \cdots + V(W^m)\partial_m$$

により定まる $D: \mathfrak{X}(\mathbb{R}^m)\times\mathfrak{X}(\mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{R}^m)$ を

$\mathbb{R}^m$ の標準接続 (canonical connection) という

例えば $m = 2$ の場合

$(x^1, x^2) = (x, y)$ として

$$D_{\partial_x}(x^2\partial_x + \underbrace{\partial_y}_{1\partial_y}) = \underbrace{\partial_x(x^2)}_{2x}\cdot\partial_x + \underbrace{\partial_x(1)}_{0}\cdot\partial_y = 2x\partial_x$$

$$\begin{cases} W = W^1\partial_x + W^2\partial_y \\ D_V(W) = V(W^1)\partial_x + V(W^2)\partial_y \end{cases}$$

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x^1} \longleftrightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \partial_m = \frac{\partial}{\partial x^m} \longleftrightarrow \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$$

の同一視の下

(V, W: m次元のベクトル場 $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^m)$)

$$V = \begin{pmatrix}V^1\\\vdots\\V^m\end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix}W^1\\\vdots\\W^m\end{pmatrix}$$

と表される。このとき

$$D_V W = \begin{pmatrix}V(W^1)\\\vdots\\V(W^m)\end{pmatrix}$$

$$W = W^1\partial_1 + W^2\partial_2 + \cdots + W^m\partial_m = W^1\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} + W^2\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix} + \cdots + W^m\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}W^1\\W^2\\\vdots\\W^n\end{bmatrix}$$ なので

$$D_{\partial/\partial x^1} W = \begin{bmatrix}W^1_{x^1}\\W^2_{x^1}\\\vdots\\W^m_{x^1}\end{bmatrix}$$

(成分を x^1 で微分)

$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x} = \binom{1}{0}$, $\partial_y = \frac{\partial}{\partial y} = \binom{0}{1}$ の同一視の下,

$x^2\partial_x + \partial_y = \binom{x^2}{1}$ と表されるため,

$$\therefore D_{\partial_x}\begin{pmatrix}x^2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial_x(x^2)\\\partial_x(1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x\\0\end{pmatrix} = 2x\partial_x$$

←標準接続で使う

ブラケット積，括弧積

$V \in \mathfrak{X}(M),\ f \in C^\infty(M) \Longrightarrow Vf \in C^\infty(M)$ だった　$(Vf)(p) = V_p(f)\ (p \in M)$

$W \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $\begin{cases} W(Vf) も C^\infty(M) の元 \\ V(Wf) も \quad 。\end{cases}$

$$[V,W](f) := V(\underbrace{Wf}_{C^\infty(M)}) - W(\underbrace{Vf}_{C^\infty(M)})$$

$C^\infty(M)$

と定めると，$[V,W] \in \mathfrak{X}(M)$　V, W のブラケット積（括弧積）という

$$\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$
$$(V,W) \longmapsto [V,W]$$

括弧積の性質

① $[V,W] = -[W,V]$（それぞれ実際に計算すれば良）

② ${}^\forall f \in C^\infty(M)$ に対して $\begin{cases} [V,fW] = (Vf)W + f[V,W] \\ [fV,W] = -(Wf)V + f[V,W] \end{cases}$ ← Levi の (D3) と同じ

③ ${}^\forall V,W,Z \in \mathfrak{X}(M)$ に対し

$$[[V,W],Z] + [[W,Z],V] + [[Z,V],W] = 0 \quad (\text{Jacobi 恒等式})$$

④ 座標近傍 $(U; x^1,\cdots,x^n)$ において

$$[\partial_i, \partial_j] = 0 \quad ({}^\forall i,j) \qquad [\partial_i,\partial_j](f) = \partial_i(\partial_j f) - \partial_j(\partial_i f) = (f_{x^j})_{x^i} - (f_{x^i})_{x^j} = 0$$

Ex. $M = \mathbb{R}^2 \quad (x^1, x^2) = (x, y)$

$$\underset{V}{[\partial_x}, \underset{W}{\partial_y]}(f) = \partial_x(\partial_y f) - \partial_y(\partial_x f)$$
$$= f_{yx} - f_{xy}$$
$$= 0$$

$W = 1\partial_x + 0\partial_y$

（どんな関数 f 入れても 0 になる）

$$[x\partial_x, \partial_y](f) = \cancel{\partial\partial}$$
$$= x\partial_x(f_y) - \partial_y(xf_x)$$
$$= xf_{xy} - (\partial_y(x)f_x + xf_{xy})$$
$$= xf_{xy} - xf_{xy} = 0$$

※ $[V,W] \in \mathfrak{X}(M)$ の証明（m = 2次元の場合）

$\because$ $V = V^1\partial_x + V^2\partial_y, \quad W = W^1\partial_x + W^2\partial_y$

$$Vf = V^1 f_x + V^2 f_y \quad \cdots ☆$$

W で ☆ を偏微分すると，

$$W(Vf) = W(V^1 f_x + V^2 f_y)$$
$$= \underbrace{W(V^1)f_x} + \underbrace{V^1 \cdot W(f_x)} + \underbrace{W(V^2)f_y} + V^2 \cdot W(f_y)$$

$$\Longleftrightarrow W(Vf) = W(V^1)f_x + W(V^2)f_y + V^1(W^1 f_{xx} + W^2 f_{xy}) + V^2(W^1 f_{xy} + W^2 f_{yy})$$

☆' より，

$$\underset{(f)}{[V,W]} = \{ \sim\sim \}(f)$$

と f をくくり出せる　∴ $[V,W]$ は ベクトル場

一方，同様の手順で $V(Wf)$ を計算すると，

$$V(Wf) = V(W^1)f_x + V(W^2)f_y + W^1(V^1 f_{xx} + V^2 f_{xy}) + W^2(V^1 f_{xy} + V^2 f_{yy})$$

$$\therefore [V,W](f) := V(Wf) - W(Vf)$$
$$= -(W(V^1)f_x + W(V^2)f_y) + V(W^1)f_x + V(W^2)f_y$$

（雑多な項がキャンセルされる）$\cdots$☆'

ここから (M,g)：リーマン多様体とする　　Riemann のときの性質

> **Def** 接続 ∇ が
>
> (D4) $\nabla_V W - \nabla_W V = [V,W] \quad ({}^\forall V,W \in \mathfrak{X}(M))$ ← torsion-free ねじれ無し
>
> (D5) $X\langle V,W\rangle = \langle \nabla_X V, W\rangle + \langle V, \nabla_X W\rangle \quad ({}^\forall X,V,W \in \mathfrak{X}(M))$ ← 計量的接続 metric connection
>
> をみたすとき，(M,g) のレビ・チビタ接続，リーマン接続という

$g(X,Y) = \langle X, Y\rangle$

$(X,Y \in \mathfrak{X}(M) \Rightarrow \langle X,Y\rangle \in C^\infty(M))$

> **Theorem** ${}^\forall(M,g)$：リーマン多様体 $\Longrightarrow {}^{\exists 1}\nabla$：レビ・チビタ接続

1つしか存在しない

(D5) $X\langle V,W\rangle = \langle \nabla_X V, W\rangle + \langle V, \nabla_X W\rangle$

証明にはコジュール公式（Koszul formula）を用いる

> **Prop** ∇：M上の接続とするとき
>
> ∇ が (D4), (D5) をみたす
>
> $\Longleftrightarrow {}^\forall X,V,W \in \mathfrak{X}(M)$ に対して
>
> $$2\langle \nabla_V W, X\rangle = V\langle W,X\rangle + W\langle X,V\rangle - X\langle V,W\rangle - \langle V,[W,X]\rangle + \langle W,[X,V]\rangle + \langle X,[V,W]\rangle$$ が成立

スライド P16 参照

右辺で ∇_V が使われていない

$V\langle X,W\rangle = \langle \nabla_V X, W\rangle + \langle X, \nabla_V W\rangle$
$\Rightarrow -\langle W, \nabla_V X\rangle = -V\langle X,W\rangle + \langle X, \nabla_V W\rangle$

（Prop ⟹ の証明）

$$-\langle V,[W,X]\rangle + \langle W,[X,V]\rangle + \langle X,[V,W]\rangle$$
$$\overset{(D4)}{=} -\langle V, \nabla_W X - \nabla_X W\rangle + \langle W, \nabla_X V - \nabla_V X\rangle + \langle X, \nabla_V W - \nabla_W V\rangle$$
$$= -\langle V,\nabla_W X\rangle + \langle V,\nabla_X W\rangle + \langle W,\nabla_X V\rangle - \langle W,\nabla_V X\rangle + \langle X,\nabla_V W\rangle - \langle X,\nabla_W V\rangle$$
$$= \underbrace{\langle \nabla_X W, V\rangle + \langle W, \nabla_X V\rangle}_{\overset{(D5)}{=} X\langle W,V\rangle} - \underbrace{(\langle \nabla_W X, V\rangle + \langle X, \nabla_W V\rangle)}_{\overset{(D5)}{=} W\langle X,V\rangle} - V\langle X,W\rangle + \underbrace{\langle X,\nabla_V W\rangle + \langle X,\nabla_V W\rangle}_{2\langle X,\nabla_V W\rangle}$$
$$= -V\langle W,X\rangle - W\langle X,V\rangle + X\langle V,W\rangle + 2\langle X, \nabla_V W\rangle \quad ▨$$

Propの逆を示すために、次を準備する

Lem Q：ベクトル空間，$\langle\ ,\ \rangle$：内積
もし $^\forall x \in Q$ に対して $\langle v, x\rangle = 0$
$\Longrightarrow v = 0$ （内積の非退化性）

$\because$ $v = x$ とすれば $\langle v, v\rangle = 0$ $\therefore v = 0$ //

（xをvにする）

（Prop $\Longleftarrow$ の証明） コシュール公式を用いる

$\langle V, W\rangle = \langle W, V\rangle$
$[V, W] = -[W, V]$

まず(D5)について

$$\langle\nabla_X V, W\rangle = \frac{1}{2}(X\langle W, V\rangle + W\langle V, X\rangle - V\langle X, W\rangle - \langle X, [W, V]\rangle + \langle W, [V, X]\rangle + \langle V, [X, W]\rangle)$$
$$+)\ \langle\nabla_X W, V\rangle = \frac{1}{2}(X\langle V, W\rangle + V\langle W, X\rangle - W\langle X, V\rangle - \langle X, [V, W]\rangle + \langle V, [W, X]\rangle + \langle W, [X, V]\rangle)$$
$$\langle\nabla_X V, W\rangle + \langle\nabla_X W, V\rangle = \frac{1}{2}\cdot 2\, X\langle V, W\rangle \quad //$$

☆ (D4)について

$$\langle\nabla_V W, X\rangle = \frac{1}{2}(V\langle W, X\rangle + W\langle X, V\rangle - X\langle V, W\rangle - \langle V, [W, X]\rangle + \langle W, [X, V]\rangle + \langle X, [V, W]\rangle)$$
$$-)\ \langle\nabla_W V, X\rangle = \frac{1}{2}(W\langle V, X\rangle + V\langle X, W\rangle - X\langle W, V\rangle - \langle W, [V, X]\rangle + \langle V, [X, W]\rangle + \langle X, [W, V]\rangle)$$
$$\langle\nabla_V W, X\rangle - \langle\nabla_W V, X\rangle = \frac{1}{2}(\langle X, [V, W]\rangle - \langle X, [W, V]\rangle)$$
$$= \frac{1}{2}\langle X, [V, W] - [W, V]\rangle = \frac{1}{2}\cdot 2\langle X, [V, W]\rangle$$

$\langle\nabla_V W, X\rangle - \langle\nabla_W V, X\rangle = \langle X, [V, W]\rangle$
$\langle\nabla_V W, X\rangle - \langle\nabla_W V, X\rangle - \langle [V, W], X\rangle = 0$
$\langle\nabla_V W - \nabla_W V - [V, W], X\rangle = 0 \quad (^\forall X \in \mathfrak{X}(M))$
Lemより $\nabla_V W - \nabla_W V - [V, W] = 0$ // ▨

（Theoremの一意性の証明）

∇, ∇'：(D1)〜(D5)をみたす M 上の接続とする

Propより （右辺がどちらも同じ）

$$\begin{cases} \langle\nabla_V W, X\rangle = \frac{1}{2}(V\langle W, X\rangle + W\langle X, V\rangle - X\langle V, W\rangle - \langle V, [W, X]\rangle + \langle W, [X, V]\rangle + \langle X, [V, W]\rangle) \\ \langle\nabla'_V W, X\rangle = \frac{1}{2}(V\langle W, X\rangle + W\langle X, V\rangle - X\langle V, W\rangle - \langle V, [W, X]\rangle + \langle W, [X, V]\rangle + \langle X, [V, W]\rangle) \end{cases}$$

$\therefore \langle\nabla_V W, X\rangle = \langle\nabla'_V W, X\rangle \quad (^\forall V, W, X \in \mathfrak{X}(M))$

Lemより $\nabla_V W = \nabla'_V W \quad (^\forall V, W \in \mathfrak{X}(M))$，$\therefore \nabla = \nabla'$ ▨

（存在の証明は次回）

レビチビタ接続の局所座標による表示

(M, g)：m次元リーマン多様体とする
$(U; x^1, \cdots, x^m)$：座標近傍
$V, W \in \mathfrak{X}(M) \Rightarrow \nabla_V W \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{cases} V = V^1\partial_1 + \cdots + V^m\partial_m \\ W = W^1\partial_1 + \cdots + W^m\partial_m \end{cases} \Longrightarrow \nabla_V W = \bigcirc\partial_1 + \cdots + \bigcirc\partial_m$$

$$\nabla_V W = \nabla_{(V^1\partial_1 + \cdots + V^m\partial_m)} W$$
$$\overset{(D1)}{=} V^1(\nabla_{\partial_1} W) + \cdots + V^m(\nabla_{\partial_m} W)$$
$$\nabla_{\partial_i} W = \nabla_{\partial_i}(W^1\partial_1 + \cdots + W^m\partial_m)$$
$$\overset{(D2)}{=} \nabla_{\partial_i}(W^1\partial_1) + \cdots + \nabla_{\partial_i}(W^m\partial_m)$$
$$\nabla_{\partial_i}(W^j\partial_j) \overset{(D3)}{=} \partial_i(W^j)\partial_j + W^j\boxed{\nabla_{\partial_i}\partial_j}$$

$\nabla_{\partial_i}\partial_j$ が定まれば $\nabla_V W$ の値は定まる

$\nabla_{\partial_i}\partial_j \in \mathfrak{X}(U) \Longrightarrow \nabla_{\partial_i}\partial_j = \bigcirc\partial_1 + \cdots + \bigcirc\partial_m$ という形で書ける

Def $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma^1_{ij}\partial_1 + \cdots + \Gamma^m_{ij}\partial_m$ により定まる関数 $\{\Gamma^k_{ij}\}_{i,j,k=1,\cdots,m}$ を Christoffel 記号と呼ぶ

$$= \sum_{k=1}^m \Gamma^k_{ij}\partial_k$$

$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$

Γ^k_{ij} の求め方：Koszul公式

$$\langle\nabla_V W, X\rangle = \frac{1}{2}(V\langle W, X\rangle + W\langle X, V\rangle - X\langle V, W\rangle - \langle V, [W, X]\rangle + \langle W, [X, V]\rangle + \langle X, [V, W]\rangle)$$

$V = \partial_i,\ W = \partial_j,\ X = \partial_k$ を代入　　$[\partial_i, \partial_j] = 0$

$$\langle\nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_k\rangle = \frac{1}{2}(\partial_i\langle\partial_j, \partial_k\rangle + \partial_j\langle\partial_i, \partial_k\rangle - \partial_k\langle\partial_i, \partial_j\rangle)$$
$$\left\langle\sum_{l=1}^m \Gamma^l_{ij}\partial_l, \partial_k\right\rangle = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij})$$
$$\sum_{l=1}^m \Gamma^l_{ij} g_{lk} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij})$$
$$g_{1k}\Gamma^1_{ij} + g_{2k}\Gamma^2_{ij} + \cdots + g_{mk}\Gamma^m_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij})$$

ijk $(i, j, k = 1, \cdots, m)$

$$\boxed{\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^m g^{ak}(\partial_i g_{aj} + \partial_j g_{ia} - \partial_a g_{ij})}$$ を得る

See + スライド P27 → クリストフェル記号のスタートが異なっても、最終的な形は同じ

→ ベクトル場の局所座標表示ができる。

7

対称性 $\nabla_{\partial_i}\partial_j - \nabla_{\partial_j}\partial_i = [\partial_i, \partial_j] = 0$ より $\boxed{\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k}$

$\because$ $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k \partial_k$

$-)$ $\nabla_{\partial_j}\partial_i = \sum_{j=1}^m \Gamma_{ji}^k \partial_k$

$\nabla_{\partial_i}\partial_j - \nabla_{\partial_j}\partial_i = \sum_{k=1}^m (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k)\partial_k$, $= 0$

$$\begin{cases} V = V^1\partial_1 + \cdots + V^m\partial_m \\ W = W^1\partial_1 + \cdots + W^m\partial_m \end{cases}$$ に対して ◇ より

$$\boxed{\nabla_V W = \sum_{i,j=1}^m \left\{ V^i(\partial_i W^j)\partial_j + \sum_{k=1}^m V^i W^j \Gamma_{ij}^k \partial_k \right\}}$$ を得る

Example $\mathbb{E}^m = (\mathbb{R}^m, g_E)$, $g_E = (dx^1)^2 + \cdots + (dx^m)^2$ ← $\begin{cases} g_{ii} = 1 \\ g_{ij} = 0 \ (i \neq j) \end{cases}$

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^m g^{\alpha k}(\partial_i g_{\alpha j} + \partial_j g_{i\alpha} - \partial_\alpha g_{ij})$$

g_{ij} 定数なので 微分 $\partial_k g_{ij} = 0$

$\therefore \Gamma_{ij}^k = 0$ ($\forall i, j, k = 1, \dots, m$)

よって $\nabla_V W = \sum_{i,j=1}^m V^i(\partial_i W^j)\partial_j = \sum_{j=1}^m (VW^j)\partial_j = D_V W$

$\therefore$ $\mathbb{E}^m$ の(一意的に存在する)レビチビタ接続 ∇ は 標準接続 D と一致

Example $(m=2)$ $g = g_{11}(dx^1)^2 + 2g_{12}\,dx^1dx^2 + g_{22}(dx^2)^2$ $(x^1, x^2) = (x, y)$

もし $\begin{cases} g_{11} = g_{22} = E \ (>0) \\ g_{12} = 0 \end{cases}$ のとき (等温座標系)

$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $G^{-1} = \frac{1}{E}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{12} & g^{22} \end{pmatrix}$

$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^2 g^{\alpha 1}(\underbrace{\partial_1 g_{\alpha 1} + \partial_1 g_{\alpha 1}}_{2\partial_1 g_{\alpha 1}} - \partial_\alpha g_{11})$

$= \frac{1}{2}(g^{11}(2\partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) + \overset{0}{g^{21}}(\cdots)) = \frac{1}{2}\frac{1}{E}\partial_1 E = \frac{E_x}{2E}$

同様に $\Gamma_{11}^2 = -\frac{E_y}{2E}$ $\Gamma_{12}^1 = \frac{E_y}{2E}$ $\Gamma_{12}^2 = \frac{E_x}{2E}$ $\Gamma_{22}^1 = -\frac{E_x}{2E}$ $\Gamma_{22}^2 = \frac{E_y}{2E}$

(1) $E = 1$ (つまり $(M, g) = \mathbb{E}^2$ のとき) $\Gamma_{ij}^k = 0$ ($\forall i, j, k = 1, 2$)

(2) $E = 1/y^2$ (つまり $(M, g) = \mathbb{H}^2$ のとき) $E_x = 0$

$E_y = -2/y^3$ $\frac{E_y}{2E} = \frac{1}{2}y^2 \cdot \frac{-2}{y^3} = -\frac{1}{y}$

$\Gamma_{11}^1 = 0$ $\Gamma_{12}^1 = -\frac{1}{y}$ $\Gamma_{22}^1 = 0$

$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y}$ $\Gamma_{12}^2 = 0$ $\Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y}$

$D_V W = \begin{bmatrix} W^1_V \\ W^2_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^1_{\partial x} \\ W^2_{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2x \end{bmatrix} = 2x\partial_y$

先進数理科学 幾何 課題 No. 8

問1 $\mathbb{R}^2$ 上の滑らかなベクトル場 $V, W \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ を

$$V := \partial_x, \qquad W := \partial_x + x^2\partial_y$$

$W_1 = 1$ $W_2 = x^2$

とおく．自然な共変微分 $D_V W$ を求めよ．以下の (1), (2) から正しいものを一つ選べ．

(1) 0

(2) $2x\,\partial_y$

→ 標準接続

$D_V W = D_{x\partial_x}(0\partial_x + xy\partial_y) = x \cdot \partial_x(xy)\partial_y$

$= xy\,\partial_y$

問2 $\mathbb{R}^2$ 上の滑らかなベクトル場 $V, W \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ を

$$V := x\,\partial_x, \qquad W := xy\,\partial_y$$

とおく．自然な共変微分 $D_V W$ を求めよ．以下の (1), (2) から正しいものを一つ選べ．

(1) $xy\,\partial_x$

(2) $xy\,\partial_y$

$D_V W = D_{x\partial_x}(\sim) = x D_{\partial_x}(xy\partial_y)$

~~$D_V W = D_{x\partial_x}($~~

問3 $\mathbb{R}^2$ 上の滑らかなベクトル場 $V, W \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ を

$$V := x\,\partial_x, \qquad W := xy\,\partial_y$$

とおく．自然な共変微分 $D_W V$ を求めよ．以下の (1), (2) から正しいものを一つ選べ．

(1) 0

(2) $2x\,\partial_y$

$D_W V = D_{xy\partial_y}(x\partial_x + 0\partial_y)$

$= \cancel{xy}(= xy\,\partial_y(x)\partial_x + xy\,\partial_y(0)\partial_y$

$= \cancel{xy} = 0 + 0$

$= 0$

問4 $\mathbb{R}^2$ 上の滑らかなベクトル場 $V, W \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ を

$$V := x\,\partial_x, \qquad W := xy\,\partial_y$$

とおく．括弧積 $[V, W]$ を求めよ．以下の (1), (2) から正しいものを一つ選べ．

(1) $xy\,\partial_x$

(2) $xy\,\partial_y$

$$\nabla_V W = \sum_{i,j=1}^m \left\{ V^i(\partial_i W^j)\partial_j + \sum_{k=1}^m V^i W^j \Gamma_{ij}^k \right\}$$

$(M, g) = \mathbb{E}^n$

$$= \sum_{i,j=1}^m V(W^j)\partial_j = D_V W$$