7/25(金) キカ セミナ　　($f \in C^\infty(M)$)

§1 Background (重みつき リーマン mfd)

(M^n, g, f) ← 重みつきリーマン mfd　　↓ (M^n, g)

・$m_f := e^{-f}\,\mathrm{vol}$

・$\mathrm{Ric}_f^N := \mathrm{Ric} + \nabla^2 f - \dfrac{df \otimes df}{N-n}$

従来　$N \in [n, \infty]$ (Nは整数)

・$\mathrm{Ric}_f^N \ge 0 \Longrightarrow \dfrac{m_f(B_r(v))}{r^N}$ ↓ $(r \to \infty)$

$(N < \infty)$

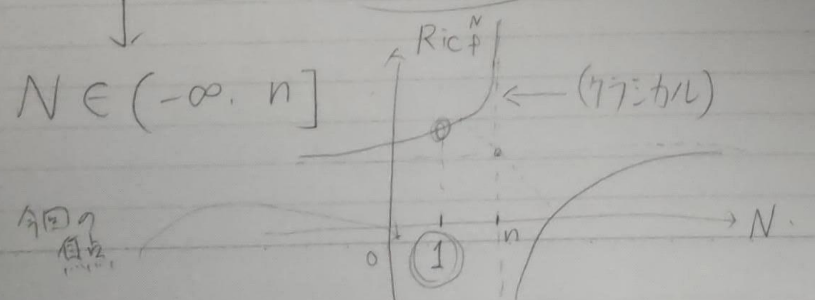
: 重みつき Bishop-Gromov.

・$\mathrm{Ric}_f^N \ge Kg \iff CD(K, N)$

$(K \in \mathbb{R})$

↓ nを下についても考えよう

$N \in (-\infty, n]$



??

$N = 1$ で考える

① Gromoll の分裂定理 (splitting theorem)

② Affine 接続

③ Energy condition in Lorentz キカ

① Splitting

定理 (Wylie 17)

(M^n, g, f): 完備 & $\mathrm{Ric}_f \ge 0$.

M が line $\gamma : \mathbb{R} \to M$ を含む

$\Rightarrow$ M は isom to a warped product $\mathbb{R} \times \Sigma^{n-1}$

・$M = \mathbb{R} \times \Sigma$

・$g = dt^2 + \exp\left(2 \,\underline{\qquad\qquad}\right) g_\Sigma$

・$f(\gamma_z(t)) = f_1(t) + f_2(z)$

Remark

$N < 1$, $\mathrm{Ric}_f^N \ge 0$

$\Rightarrow f_1$ const. along γ_z

射影同値
「同じ測地線を持つ」

② Affine connection

$$\nabla^f_X Y := \nabla_X Y - \frac{df(X)}{n-1} Y - \frac{df(Y)}{n-1} X$$

(X, Y: ベクトル場)

は、レビチビタ接続 ∇ と射影同値 (1921)

Remark

・$Ric^{\nabla^f} = Ric_f^1$

$$S_f(t) := \int_0^t \exp\left(\frac{-2f(\gamma(\eta))}{n-1}\right) d\eta$$

$\hat{\gamma} := \gamma \circ S_f^{-1}$: ∇^f-geodesics

$\rightsquigarrow Ric_f^g \geq (n-1)K \, e^{\frac{-4f}{n-1}} g \quad (K \in \mathbb{R})$

$\left(\Longleftrightarrow Ric^{\nabla^f}(\hat{\gamma}', \hat{\gamma}') \geq (n-1)K \right)$

③ Energy Condition.

(L^{n+1}, g) : Lorentz-mfd.

☆ アインシュタイン eq. 対称 (0,2) テンソル

$$Ric_g + \left(\Lambda - \frac{1}{2} R_g\right) g = 8\pi T$$

(T: stress energy tensor)

・Energy Condition "$T \geq 0$" (weak / strong / null / Dominant) energy condition

weak energy condition

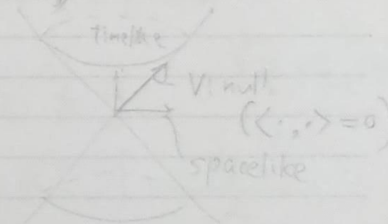
→ Singularity thm

Lorentz splitting thm

・(L, g) : NEC (null)

$\Longleftrightarrow T(V, V) \geq 0$

($\forall V$: null ベクトル場)



・(L, g) : static model

$\Longleftrightarrow L = \mathbb{R} \times M$

$g = -V^2 dt^2 + h$

(ボーネ マイアス? の定理)

命題 Wang - Wang - Zhang 17

static model (L, g) が NEC をみたす

$\Longleftrightarrow$ (M, h, V) が substatic である

(つまり、$V\,Ric_h - \nabla^2_h V + (\Delta_h V) \geq 0$)

命題 Borghini - Fogagnolo 23

(M, h, V) : substatic

$\Longleftrightarrow$ 重み付きリーマン mfd (M, g, f) given by

$f := -(n-1)\log V,\quad g := e^{\frac{2f}{n-1}} h$

satisfies $Ric_f' \geq 0$.

§2 主結果

(M^n, g, f) : 重み付きリーマン mfd ($m_f = e^{-f}\,\mathrm{vol}$)

Σ^{n-1} : M内の超曲面

・Σ : f-minimal

$\Longleftrightarrow$ critical pt of f-vol functional

$\Longleftrightarrow$ $H_{f,\Sigma} := H_\Sigma - f_\nu \equiv 0$

・Σ : stable

$\Longleftrightarrow$ 2nd 変分 of f-vol fct ≥ 0

$\forall$ cpt spt normal variation

$$\Longleftrightarrow \int_\Sigma \left(Ric_f^\infty(\nu, \nu) + |\mathrm{II}_\Sigma|^2\right)\phi^2\, dm_f \leq \int_\Sigma |\nabla_\Sigma \phi|^2\, dm_f \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Sigma)$$

結果

・Previous result : $Ric_f^\infty \geq kg$

e.g. ガウス sp i.e $M = \mathbb{R}^n$, $f = \frac{|\cdot|^2}{4}$

f - minimal hypersurface $\Longleftrightarrow$ self shrinker

("∞" $\rightsquigarrow$ "N")

∂_x

Note

For (M, h), f, Σ

Σ : stable min hypersurface in (M, h)

$\Longleftrightarrow$ Σ : stable f-min hypersurf in $(M, e^{\frac{2f}{n-1}} h, f)$

~~in view of vol $h\Sigma$ = e^{f} vol$_{g\Sigma}$~~

" stable min in substatic "

$\underset{\text{conf. change}}{\Longleftrightarrow}$ " stable f-min in $\mathrm{Ric}_f \geq 0$ "

$\boxed{\text{Theorem A}}$ (Fujitani - S)

(M^3, g, f) : 完備, $\mathrm{Ric}_f^1 \geq 0$, 向き付け可能

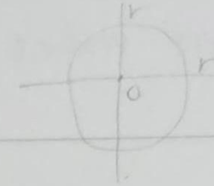
f : bounded from below

Σ^2 : 完備, 向き付け可能, f-area min surf in M

Then $\mathrm{II}_\Sigma \equiv \frac{f_2}{2} g_\Sigma$, $\mathrm{Ric}^1 (\nu, \nu) \equiv 0$

証明 の スケッチ　　条件 を 書き換え　　$\forall \phi \in C_0^\infty(\Sigma)$

$$\int_\Sigma \left(\mathrm{Ric}_f^1(\nu, \nu) + \left| \mathrm{II}_\Sigma - \frac{f_\nu}{n-1} g_\Sigma \right|^2 \right) \phi \, dm_{f\Sigma} \leq \int_\Sigma |\nabla_\Sigma \phi|^2 dm_f \Sigma$$



Lin Σ

∂

$$m_{f,\Sigma}(B_r^\Sigma(0)) \leq m_{f,\Sigma}(B_r(0) \cap \Sigma)$$
$$\leq m_{f\, \partial B_r(0)}(\partial B_r(0)),$$
$$\leq |S^{n-1}| \cdot e^{f(0) - 2 \cdot \inf f} \cdot r^{n-1}$$

Milnor conjecture

(M^n, g) : 完備, $\mathrm{Ric} \geq 0$.

$\pi_1(M)$: finitely generated ?

Ref

$n = 3 \implies$ 正しい

$n = 6 \to$ 反例 がある

($n = 4, 5$ は 不明)

$\boxed{\text{Thm}}$ (Lin 13A)

(M^3, g) : 完備, コンパクトでない, $\mathrm{Ric} \geq 0$

のとき、どっちかが成立.

- M が $\mathbb{R}^3$ と diffeo
- $\tilde{M}$ が $\mathbb{R} \times \Sigma^2$ と isometric　　($\sec_\Sigma \geq 0$)

direct product

NO

DATE

$\mathcal{C}$

$\boxed{\text{Theorem B}}$ (Fujitani)

(M^3, g, f)：完備，コンパクトでない，$\mathrm{Ric}^1_f \geq 0$，f：~~[illegible]~~ bdd

このとき，(a)(b)(c) どれか成立

(a) $\tilde{M}$ は wrapped product で isometry

(b) M is contractible

(c) $\forall o \in M$, $\exists \Sigma^2$：surf. passing through o.