火2 数理科学 幾何 (6回)

- リーマン面
- 正則 2次 微分
- 正則 ガウス写像 と 極小曲面

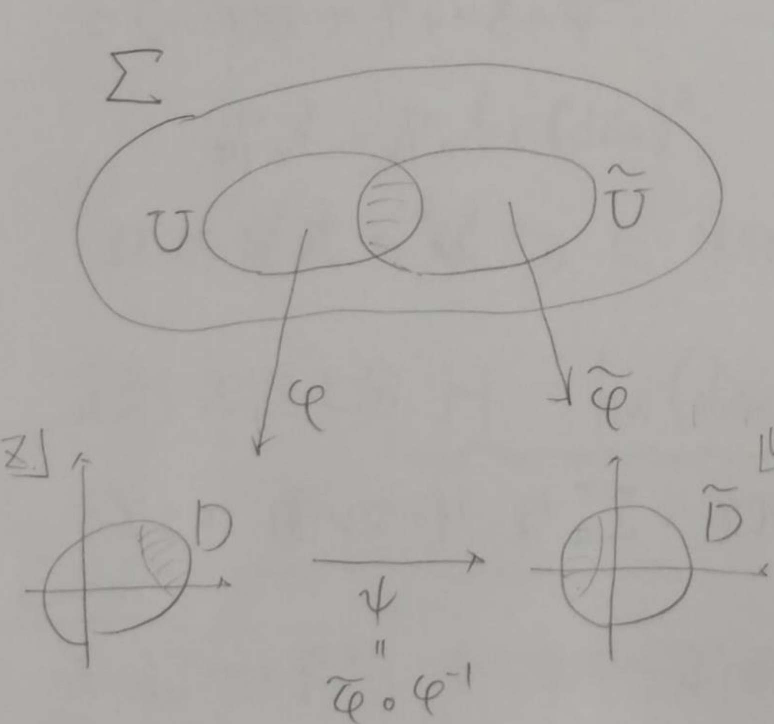
Σ: ハウスドルフ かつ 第2可算公理 を みたす

$U\ (\subset \Sigma)$: 開集合

$\varphi: U \longrightarrow \varphi(U)\ (\subseteq \mathbb{R}^2)$: 同相写像 ($\simeq \mathbb{C}$)

(U, φ): Σ の 座標近傍 という

複素



座標変換 $w = \varphi(z)$

Def

「1次元複素 mfd」ともいう.

Σ が リーマン面 である

$\Longleftrightarrow$ Σ が:

(1) $\Sigma = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$

(2) $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ のとき

~~のとき~~ $\psi_{\beta\alpha} := \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ が 正則関数 である.

Remark

リーマン面は 2次元 C^∞ 多様体 であり, 向き付け可能.

$\because$ 正則関数のヤコビアン

$\psi = \xi + i\eta$ とおくと, J は

$J = \xi_u \eta_v - \xi_v \eta_u$

$= \xi_u^2 + \xi_v^2 > 0.$

Theorem 6.2

曲面 $X : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ に対して, Σ は リーマン面 である

Proof

Σ: 第2可算な ハウスドルフ

$\left\{ \begin{array}{l} \circ \ {}^\exists \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda} \text{ : 等温座標系表示 } (\because \text{Theorem 5.11}) \\ \circ \text{ 座標変換 は 正則関数 } (\because \text{Theorem 5.12}) \end{array} \right.$ ▨

Def

Σ: リーマン面上の 正則2次ビ分 H とは,

∘ 各座標近傍 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ に対して, 正則関数 $h_\alpha = h(z_\alpha)$ を対応させ,

∘ (U_β, φ_β): 別の座標 $(z_\beta = \psi_{\beta\alpha}(z_\alpha))$ は

$$h_\beta = h_\alpha \left(\frac{dz_\alpha}{dz_\beta}\right)^2$$

を満たす.

($dz_\beta = \frac{dz_\beta}{dz_\alpha} dz_\alpha$ より,

$$h_\beta (dz_\beta)^2 = h_\alpha \left(\frac{dz_\alpha}{dz_\beta}\right)^2 \left(\frac{dz_\beta}{dz_\alpha}\right)^2 (dz_\alpha)^2$$

$$= h_\alpha (dz_\alpha)^2.$$

よって, 座標の取り方に依らない.)

正則2次ビ分 $H = h_\alpha (dz_\alpha)^2$ と表す

Example

$X : \Sigma \to \mathbb{R}^3$: 平均曲率一定曲面 とする.

$\Longrightarrow Q = \varrho\, dz^2$: Hopf ビ分

$\left(\varrho = \frac{L - N - 2Mi}{4} = f_{zz} \cdot \nu = -f_z \cdot \nu_z \right)$

X : CMC

$\Longleftrightarrow \varrho_{\bar z} = 0$

Q は Σ 上の 正則2次ビ分 (Theorem 3.4) である。

コンパクトリーマン面 (閉リーマン面): Σ

上の正則2次ビ分の空間は、有限次元複素ベクトル空間をなす。

$=: A(\Sigma)$

$H_1 = h_1 dz^2$、$H_2 = h_2 dz^2 \in A(\Sigma)$ に対し、

$c_1, c_2 \in \mathbb{C}$、

$c_1H_1 + c_2H_2 := (c_1h_1 + c_2h_2)\, dz^2$ とおくと、

$c_1H_1 + c_2H_2 \in A(\Sigma)$ である。

Theorem 6.7

$$\dim_{\mathbb{C}} A(\Sigma) = \begin{cases} 0 & (g=0) \\ 1 & (g=1) \\ 3g-3 & (g \geq 2) \end{cases}$$

ただし、$g = \frac{1}{2} b_1(\Sigma)$: Σ の種数 (genus) という。

→ ホモロジー群のランク

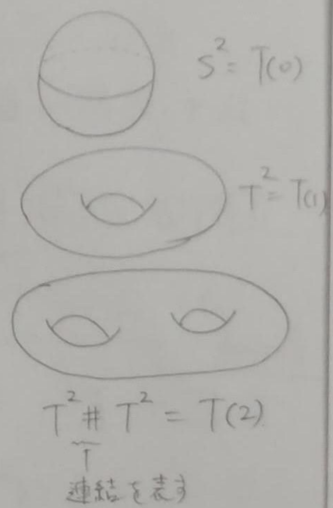
$b_1 = \mathrm{rank}\, H_1(\Sigma)$

※ 任意の閉リーマン面は、

$T(g)$ $(g = 0, 1, 2, \cdots)$

と同相。(実は diffeo でもある)

正則同値とは限らない



Σ, Σ' : 2つの2次元 C^∞ mfd (リーマン面) が 微分同相 である

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists \Phi : \Sigma \longrightarrow \Sigma'$: C^∞級写像 s.t.

$$\begin{cases} \Phi : \text{全単射} \ (\text{正則写像}) \\ \Phi^{-1} : C^\infty\text{級} \ (\text{正則写像}) \end{cases}$$

Corollary

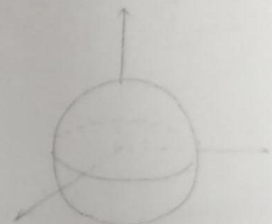
$g = 0$ のリーマン面 Σ $(\approx S^2)$ 上の 正則2次微分 は

0 のみ。

Theorem 6.8 (Hopf の定理)

$X : \Sigma \to R^3$: CMC 曲面

$\Sigma \underset{\text{同相}}{\approx} S^2 \Longrightarrow X(\Sigma)$ は 球面。



Proof

X の Hopf ビ分 は、Corollary より $Q = q\, dz^2 = 0$

一方、$q = 0$ は 臍点 (umbilic point) $\Longleftrightarrow H^2 = K$

→ 主曲率 λ_1, λ_2 について

$\lambda_1 = \lambda_2$

となる点 $(\lambda^2 - 2H\lambda + K = 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 = H \pm \sqrt{H^2 - K})$

全ての点が臍点の曲面：全臍的 (totally umbilic surface)
な曲面

そのようなものは、平面 or 球面 に限る
~~(の一部)~~ (の一部)

∴ X はコンパクトな全臍的曲面なので、球面
である ▨

Remark

Theorem 6.8 で $(\Sigma \approx S^2)$ という仮定を外すと、反例が存在する。

$\Sigma \approx T^2$, ${}^{\exists}X: \Sigma \to R^3$: コンパクト CMC 曲面

Wente トーラス

Theorem (Alexandrov の定理)

コンパクトで埋め込まれた CMC 曲面は、球面に限る。

高次元でも成立

$X: \Sigma^n \to R^{n+1}$: 埋め込まれた コンパクト CMC 曲面 (超) は 球面

§ 正則ガウス写像

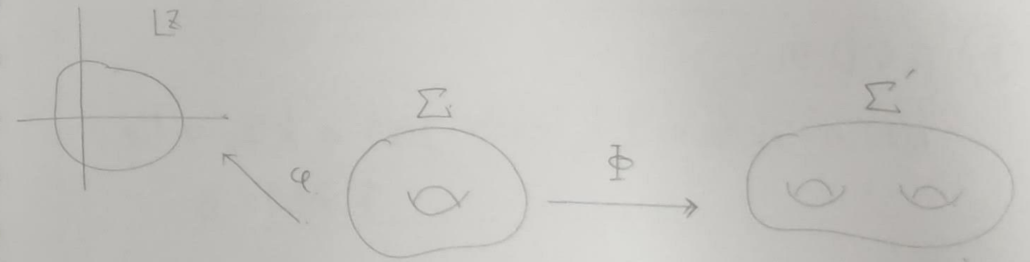
Question

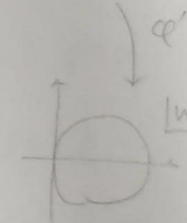
単位法ベクトル場

$\nu : \Sigma \longrightarrow S^2$

リーマン面

は、いつ正則写像になるか？





Φ が正則写像

$\Longleftrightarrow$ $\varphi' \circ \Phi \circ \varphi^{-1}$ が、(ℂ から ℂ への)
正則関数である。

⑤

φ

Theorem

$\nu: \Sigma \longrightarrow S^2$ が正則写像 $\Longleftrightarrow X: \Sigma \to \mathbb{R}^3$ が $H=0$ (極小曲面)

＊ 極小曲面は、正則データ で表される.

Theorem 6.11

$$\begin{cases} D (\subset \mathbb{C}) : \text{領域、単連結} \\ h : D\text{上の正則関数 (holomorphic function)} \\ g : D\text{上の有理型関数 (meromorphic function)} \end{cases}$$

(＊) $a \in D$ が

$h(z)$ の $2k$ 位の零点 $\Longleftrightarrow$ $g(z)$ の k 位の極

を満たすとする.

この時 ($z_0 \in D$ を固定して),

$\Phi(z) = (\varphi_1(z), \varphi_2(z), \varphi_3(z))$ を用いて.

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(z) = \int_{z_0}^{z} (1 - g(\zeta)^2)\, h(\zeta)\, d\zeta \\ \varphi_2(z) = \int_{z_0}^{z} i(1 + g(\zeta)^2)\, h(\zeta)\, d\zeta \\ \varphi_3(z) = \int_{z_0}^{z} 2 g(\zeta)\, h(\zeta)\, d\zeta \end{pmatrix}$$

逆に、与えられた極小曲面はこの形で表される.

$f: D \to \mathbb{R}^3$, $f(z) = \mathrm{Re}(\Phi(z))$ と定めて. 極小曲面を与える

Remark

$f = \mathrm{Re}(\Phi)$ の第一、第二基本形式は.

$$\mathrm{I} = (1 + |g|^2)\, |h|^2\, dz\, d\bar{z}$$

$$\mathrm{II} = Q + \overline{Q} \quad (Q = -hg' dz^2)$$

で与えられる.

◦ 一般に、$H \neq 0$ の CMC 曲面については.

このような Weierstras 表現公式は無い (知られていない).