キカⅡの記号

$$f : \underset{\sim}{D} \xrightarrow{\subset \mathbb{R}^2} \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^4 \qquad f = \begin{pmatrix} f^1(u,v) \\ f^2(u,v) \\ f^3(u,v) \\ f^4(u,v) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \\ t(u,v) \end{pmatrix}$$

$\frac{\partial}{\partial t} = T + \nu n.$

T

$\overline{n} = \{0\,\mathbb{S}^2\} \times \{0\}$

$$:= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left(T_{f(u,v)}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}) = \{ x \in \mathbb{R}^4 \mid \langle \overline{N}, x \rangle = 0 \} \right)$$

f がはめ込み $\Longleftrightarrow$ f_u と f_v が1次独立。

$$\begin{cases} E = \langle f_u, f_u \rangle \\ F = \langle f_u, f_v \rangle \\ G = \langle f_v, f_v \rangle \end{cases}$$

$\boxed{\text{仮定}}$ 簡単のため、(u,v) 等温座標系 → $\begin{cases} E = G \\ F = 0. \end{cases}$

n: $\underset{\sim}{f\text{に沿う}}$ 単位法ベクトル場 $\left(n \in T_f(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}) \right)$

$$\begin{cases} \langle n, \overline{n} \rangle = 0 \\ \langle n, f_u \rangle = \langle N, f_{\overset{u}{v}} \rangle = 0. \\ \langle n, n \rangle = 1 \end{cases}$$

をみたす。

$L = \langle f_{uu}, \overset{n}{\cancel{N}} \rangle$

$M = \langle f_{uv}, \overset{n}{\cancel{N}} \rangle$

$N = \langle f_{vv}, \overset{n}{\cancel{N}} \rangle$,

$\overset{フレーム}{\mathcal{F}} := (\overset{\bar{n}}{\cancel{\bar{N}}}, f_u, f_v, \overset{n}{\cancel{N}})$ とする.

$\left(\mathcal{F}_u = (\bar{n}_u, f_{uu}, f_{uv}, n_u) \right)$

$\nu := \langle \underset{n}{\cancel{N}}, \frac{\partial}{\partial t} \rangle$, $T := \frac{\partial}{\partial t} - \nu \overset{n}{\cancel{N}}$ とする.

$\underset{\bar{n}_u}{\cancel{\bar{N}_u}}, \underset{\bar{n}_v}{\cancel{\bar{N}_v}}, f_{uu}, f_{uv}, f_{vv}, \underset{n_u}{\cancel{N_u}}, \underset{n_v}{\cancel{N_v}}$ を

$\underset{n}{\cancel{\bar{N}}}, f_u, f_v, \underset{n}{\cancel{N}}$ の線形結合で表したい.

$f_{uu} = A\bar{n} + Bf_u + Cf_v + Dn$ とおく,

$\langle f_{uu}, \underset{n}{\cancel{N}} \rangle = D$. $\therefore D = L$.

$\underbrace{\langle f_{uu}, f_u \rangle}_{\frac{1}{2}E_u} = B \underbrace{\langle f_u, f_u \rangle}_{E}$ $\therefore B = \frac{E_u}{2E}$

$\langle f_{uu}, f_v \rangle = C \underbrace{\langle f_v, f_v \rangle}_{E}$ $\therefore C = -\frac{E_v}{2E}$

$\| $

$\langle f_u, f_u \rangle_u - \langle f_u, f_{uv} \rangle$

$= 0 - \frac{1}{2}E_{\underset{v}{\cancel{u}}}$.

NEW

$\langle \cdot, \overline{n} \rangle$ を考える.

$$\overline{n} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix} = f - t(u,v)\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\langle f_{uu}, \overline{n} \rangle = A \underbrace{\langle \overline{n}, \overline{n} \rangle}_{\overset{\shortparallel}{1}}$$

$$= A$$

$$= \langle f_u, \overline{n} \rangle_u - \langle f_u, \overline{n}_u \rangle$$

$$= 0 - \langle f_u, f_u - t_u \tfrac{\partial}{\partial t} \rangle$$

$$= -E + (t_u)^2$$

ν と T で表したい.

---

n を求めたい : $\overline{n}, f_u, f_v$ に直交する. ($\leftarrow n = \overline{n} \times f_u \times f_v$?)

$X, Y, Z \in \mathbb{R}^4$ に直交するベクトル?

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}$$

$x_2 y_3 - x_3 y_2$

$$\underset{\underset{X \wedge Y \wedge Z}{\shortparallel}}{W\cancel{A}} = \left(\overset{+}{(-)} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}, \overset{-}{(+)} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}, \overset{+}{(-)} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}, \overset{-}{(+)} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \right)$$

とおくと. W は X, Y, Z に直交する。

$X=(x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$\because \langle X, W\rangle = x_1\begin{vmatrix} x_2 & & \\ x_3 & & \\ x_4 & & \end{vmatrix} - x_2\begin{vmatrix} x_1 & & \\ x_3 & & \\ x_4 & & \end{vmatrix}$$

$$+ x_3\begin{vmatrix} x_1 & & \\ x_2 & & \\ x_4 & & \end{vmatrix} - x_4\begin{vmatrix} x_1 & & \\ x_2 & & \\ x_3 & & \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & x_3 & y_3 & z_3 \\ \underbrace{x_4} & \underbrace{x_4} & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = 0$$

同じ

（$\langle Y, W\rangle$, $\langle Z, W\rangle$ も同様。）

$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ $Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

なので、$\overline{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_u = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \\ t_u \end{pmatrix}$. $f_v = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \\ t_v \end{pmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ で考えれば、W と同じ要領で n を求められる。

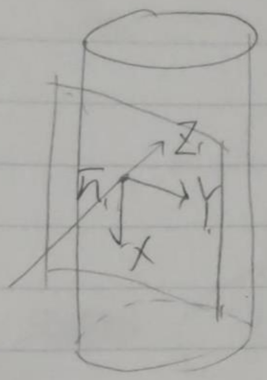
$\nu = \langle n, \frac{\partial}{\partial t}\rangle = n$ の第4成分

$$\|W\|^2 = \det\begin{pmatrix} \langle X, X\rangle, & \langle X, Y\rangle, & \langle X, Z\rangle, \\ \langle Y, X\rangle, & \langle Y, Y\rangle, & \langle Y, Z\rangle \\ \langle Z, X\rangle, & \langle Z, Y\rangle, & \langle Z, Z\rangle, \end{pmatrix}$$

（次に示したいこと）

$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ $Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

（2次元で確認すること）



$$\left(X、Y、Z \in \overset{V}{\overset{\shortparallel}{T_f(S^2 \times \mathbb{R})}}\right),$$

$$\omega = \det(\bar{n}、X、Y、Z), \qquad -\det(\bar{n}、X、Y、Z)$$

$$(\omega : V \times V \times V \longrightarrow \mathbb{R}),$$

（交代的な），3次微分形式　on $S^2 \times \mathbb{R}$

（volume - form），

体積形式

→各点ごとに，スカラー倍を除いて1コのみ，

$\det(\bar{n}、f_u、f_v、n) > 0$　となるようにしたい．

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

$\begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{matrix}$

まず，

$$n = \frac{\bar{n} \wedge f_u \wedge f_v}{\|\bar{n} \wedge f_u \wedge f_v\|}$$ である。

ここで，$\|\bar{n} \wedge f_u \wedge f_v\|^2 = \det \begin{pmatrix} \langle \bar{n}、\bar{n} \rangle & \langle f_u、\bar{n} \rangle & \langle f_v、\bar{n} \rangle \\ \langle \bar{n}、f_u \rangle & \langle f_u、f_u \rangle & \langle f_v、f_u \rangle \\ \langle \bar{n}、f_v \rangle & \langle f_u、f_v \rangle & \langle f_v、f_v \rangle \end{pmatrix}$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} = E^2$$

なので，$\|\bar{n} \wedge f_u \wedge f_v\| = E$　である．

あとは分子を考える。

$$\overline{n}\wedge f_u\wedge f_v = \begin{pmatrix} - \\ \\ + \\ \\ - \\ \\ \underbrace{+\begin{vmatrix} x & x_u & x_v \\ y & y_u & y_v \\ z & z_u & z_v \end{vmatrix}}_{\substack{\| \\ D}} \end{pmatrix}$$

$$\overset{\|}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix}} \overset{\|}{\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \\ t_u \end{pmatrix}} \overset{\|}{\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \\ t_v \end{pmatrix}}.$$

$$\therefore D = \frac{1}{E}\begin{vmatrix} x & x_u & x_v \\ y & y_u & y_v \\ z & z_u & z_v \end{vmatrix} = \frac{1}{E}\sqrt{x_u^2+y_u^2+z_u^2}\sqrt{x_v^2+y_v^2+z_v^2}$$

$$= \frac{1}{E}\sqrt{1-t_u^2}\sqrt{1-t_v^2}$$

- $\langle \overline{n}, f_u\rangle = \langle \overline{n}, f_v\rangle = 0$
- $\langle f_u, f_u\rangle = \langle f_v, f_v\rangle = E$
- $\langle f_u, f_v\rangle = 0.$

$$\downarrow$$

$$E = x_u^2 + \cancel{x}\, y_u^2 + z_u^2 + t_u^2$$

$$= x_v^2 + \text{-----} + t_v^2$$

$$\to 0 = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v + t_u t_v.$$

(まとめると)

$$f_{uu} = A\overline{n} + B f_u + C f_v + D n$$

$$= (-E + f_u^2) + \frac{E_u}{2E} f_u - \frac{E_v}{2E} f_v + L n.$$

~~ToDo~~ (ToDo) $f_{uv} = ?$

$f_{vv} = ?$

$n_u = A\overline{n} + B f_u + C f_v + D n$ として、

AからDまでを考える.

内積をとっていく.

・$\underset{\substack{\| \\ \frac{1}{2}\langle n, n\rangle_u}}{\langle n_u, n\rangle} = D$ $\therefore D = 0$

・$\underset{\substack{\| \\ \langle n, f_u\rangle_u - \langle n, f_{uu}\rangle}}{\langle n_u, f_u\rangle} = B \underset{\substack{\| \\ E}}{\langle f_u, f_u\rangle}$ $\therefore B = -\frac{L}{E}.$

$= 0 - L.$

・$\langle n, f_v\rangle$ も同様, $C = -\frac{M}{E}$

$$\nu = \langle n, \frac{\partial}{\partial t} \rangle$$

$\downarrow$

$$\langle n_u, \bar{n} \rangle$$

$$\parallel$$

$$\langle n, \bar{n} \rangle_u - \langle n, \bar{n}_u \rangle$$

$$= 0 - \langle n, f_u - t_u \frac{\partial}{\partial t} \rangle$$

$$= -\langle n, f_u \rangle + \langle n, t_u \frac{\partial}{\partial t} \rangle$$

$$= 0 + t_u \cdot \nu$$

$\therefore A = t_u \nu$

$\therefore n_u = t_u \nu \cdot \bar{n} - \frac{L}{E} f_u - \frac{M}{E} f_v$ と書ける

TODO n_v も同様に.

$\partial \rightarrow$

$T = \frac{\partial}{\partial t} - \nu n$

T: D上のベクトル場

$df(T) = \frac{\partial}{\partial t} - \nu n$.　∴ $\frac{\partial}{\partial t} = df(T) + \nu \overset{n}{\cancel{\text{[illegible]}}}$

（ここから、αに $t_u = \alpha\xi$、~~β~~ $t_v = \beta\xi$ が分かる。）

$T = \alpha(u,v)\frac{\partial}{\partial u} + \beta(u,v)\frac{\partial}{\partial v}$ とおく。

$df(T) = \alpha f_u + \beta f_v$ なので、$\frac{\partial}{\partial t} = \alpha f_u + \beta f_v + \nu n$

2乗

$1 = (\alpha^2 + \beta^2)E + \nu^2$

代入する。

$\overline{n}_u = f_u - t_u \frac{\partial}{\partial t}$

$= (1 - t_u\alpha) f_u - t_u\beta \cdot \underset{f_v}{\cancel{\text{[illegible]}}} - t_u \nu n$

t_u を消せる？（DANIEL のデータには無い）
t_n.

※t_u、t_v を E、L、M、N、ν、$\overset{\alpha、\beta}{\cancel{\text{[illegible]}}}$ を用いて表せるか？
（Tのこと）

$\overline{n}_u$ を内積の方法でも求めてみる。

$\bar{n}_u = A\bar{n} + Bf_u + Cf_v + Dn$ とおいて、

$$\underbrace{\langle \bar{n}_u, \bar{n} \rangle}_{0} = A \qquad \therefore A = 0$$ あってる

$$\underbrace{\langle \bar{n}_u, f_u \rangle}_{\cancel{\langle n, f_u \rangle}} = B \underbrace{\langle f_u, f_u \rangle}_{E}$$

$$f_u = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \\ t_u \end{pmatrix}, \quad \bar{n}_u = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = E - t_u^2 \qquad \therefore B = 1 - \frac{t_u^2}{E}$$

$$\underbrace{\langle \bar{n}_u, f_v \rangle}_{x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v} = C \underbrace{\langle f_v, f_v \rangle}_{E}$$

$t_u^2 = E t_u \alpha$

$1 - t_u \alpha$

$t_u = E\alpha$

$$x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = -t_u t_v \qquad \therefore C = -\frac{t_u t_v}{E}$$

$$\underbrace{\langle \bar{n}_u, n \rangle}_{\langle f_u - t_u \frac{\partial}{\partial t}, n \rangle} = D \qquad \therefore D = -t_u \nu$$

$$\langle f_u - t_u \frac{\partial}{\partial t}, n \rangle = -t_u \nu$$

∂_v $\quad T =: \frac{\alpha}{E}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\beta}{E}\frac{\partial}{\partial v}$ とおく。

以上より、

$$f_{uu} = (-E + f_u^2)\,\overline{n} + \frac{E_u}{2E} f_u - \frac{E_v}{2E} f_v + L\cancel{E}\,n,$$

$$df(T) = \frac{\alpha}{E} f_u + \frac{\beta}{E} f_v$$ となる。

$$\frac{\partial}{\partial t} = df(T) + Ln$$ より、

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\alpha}{E} f_u + \frac{\beta}{E} f_v + Ln} \cdots (*)'$$

$\langle (*)', f_u \rangle$: $t_u = \alpha$.

$\langle (*)', f_v \rangle$: $f_v = \cancel{\alpha}\beta$.

$$1 = \frac{\alpha^2}{E} + \frac{\beta^2}{E} + L^2$$

~~f_{uu}~~ よって、

$$\begin{cases} f_{uu} = -(E + \alpha^2)\,\overline{n} + \frac{E_u}{2E} f_u - \frac{E_v}{2E} f_v + Ln \\ f_{uv} = \text{TODO} \\ f_{vv} = \text{TODO} \\ n_u = \alpha L\,\overline{n} - \frac{L}{E} f_u - \frac{M}{E} f_v \\ \overline{n}_u = \end{cases}$$

ガウス
ワインガルテン
公式

∂_r

$$\overline{n}_u = f_u - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t_u \end{bmatrix}$$

$$= f_u - t_u \frac{\partial}{\partial t}$$

$$= f_u - \alpha\left(\frac{\alpha}{E} f_u + \frac{\beta}{E} f_v + L n\right)$$

$$\therefore \overline{n}_u = \left(1 - \frac{\alpha^2}{E}\right) f_u - \frac{\alpha\beta}{E} f_v - \alpha L n.$$

$\overline{n}_v$ も同様にできる。

$\rightarrow$ $\mathcal{F}_{uv} = \mathcal{F}_{vu}$ はどういう形か？

~~ガウスコダッチ方程式~~ 両立条件
（可積分条件）

TODO

1. ガウス・ワインガルテン公式を全て求める。
2. 可積分条件を求める（← キカⅡ参照）
3. 曲面論の基本定理（← キカⅡ参照）

E、L、M、N、α、β、γ を 可積分条件 を 満たすとする。

→ $\mathcal{F}_u = \mathcal{F}\underset{\sim}{U}$

$\mathcal{F}_v = \mathcal{F}\underset{\sim}{V}$ より U、V が求まる。

1. この U、V を使って、ビア方程式

$$\begin{cases} \mathcal{F}_u = \mathcal{F}U \\ \mathcal{F}_v = \mathcal{F}V \\ \mathcal{F}(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{E(u_0, v_0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{E(u_0, v_0)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

の解 $\mathcal{F}$ を求める。

2. $\alpha_v = \beta_u$ が成立することをかくにんする。 $\neq$

3. $\mathcal{F} = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ とおくとき

$a_0 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix}$. ~~$a_1 =$~~ $\begin{bmatrix} \cancel{x_u} \\ y_u \\ z_u \\ t_u \end{bmatrix}$ ~~$a_2 =$~~ $\begin{bmatrix} \cancel{x_v} \\ y_v \\ z_v \\ t_v \end{bmatrix}$ 、$\underset{\sim}{x^2+y^2+z^2=1}$ を示す。

~~$(x^2+y^2+z^2=1)$~~、

$\Rightarrow f = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ とおく。

$\bar{n} = a_0$.

$\langle a_3, a_0 \rangle = \langle a_3, a_1 \rangle = \langle a_3, a_2 \rangle = 0$.

$\langle a_3, a_3 \rangle = 1$

t を、$\begin{cases} t_u = \alpha \\ t_v = \beta \\ t(u_0, v_0) = 0 \end{cases}$ を満たすとする。

($\alpha_v = \beta_u$ が成立)

4. ~~$a_1 = (a_0)_u + \begin{pmatrix}0\\0\\0\\\alpha\end{pmatrix}$~~

~~$a_2 = (a_0)_v + \begin{pmatrix}0\\0\\0\\\beta\end{pmatrix}$~~

~~$\langle a_1, a_1\rangle = \langle a_2, a_2\rangle$~~

$$\boxed{\begin{gathered} f_u = a_1 \\ f_v = a_2 \\ \langle f_u, f_u\rangle = \langle f_v, f_v\rangle = E \\ \langle f_u, f_v\rangle = 0 \\ \\ \langle f, a_3\rangle = \langle f_u, a_3\rangle = \langle f_v, a_3\rangle \\ \langle a_3, a_3\rangle = 1 \end{gathered}}$$

を示し、$n := a_3$ とおく。

5.
$$\boxed{\begin{gathered} L = \langle f_{uu}, n\rangle \\ M = \langle f_{uv}, n\rangle \\ N = \langle f_{vv}, n\rangle \end{gathered}}$$
を示す

最初に 両立条件 が 仮定 されていることで、

6.
- $\nu = \langle n, \frac{\partial}{\partial t}\rangle$.

$$\frac{1}{E}(\alpha^2+\beta^2)+\nu^2 = 1$$

- $\frac{\alpha}{E} f_u + \frac{\beta}{E} f_v + \nu n = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\left(= \frac{\partial}{\partial t}\right)$ を示す。