Lemma 3.6 後より 続き

記号の定義

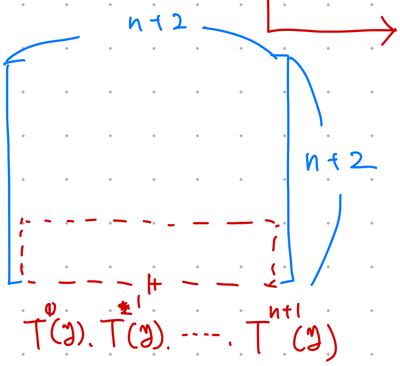
- 任意の $y \in V$ に対して、「行列 $Z \in SO^+(\mathbb{E}^{n+2})$ の内、最終行の係数が $T^\beta(y)$ であるようなものの集合」を $Z(y)$ と定義する。

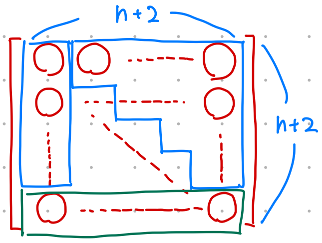
$T^k(y) = \langle T(y), e_k \rangle$

$T^{n+1}(y) = 2$

$T^0(y) = 0$

この集合は次元 $\frac{n(n+1)}{2}$ を持つ多様体である。

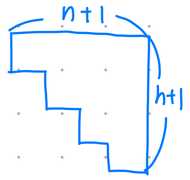




⊙ $SO^+(\mathbb{E}^{n+2}) = \left\{ Z \in M_{n+2}(\mathbb{R}) \,\middle|\, \begin{array}{l} \cdot\ Z^T Z = I_{n+2} \\ \cdot\ \det(Z) = 1 \end{array} \right\}$

$\Longleftrightarrow$ 各行ベクトルが ONB である（各ノルム1、各行ベクトル直交）

⊙ 最終行ベクトルが固定されている



$$= (n+1) + n + \cdots + 2 + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\therefore Z(y) \text{ の次元} = (n+2)^2 - \underbrace{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}_{\text{直交条件分}} - \underbrace{(n+1)}_{\text{単位ノルム分}} - \underbrace{(n+2)}_{\text{最終行ベクトル固定分}}$$

$$= (n+2)\left(n+2 - \frac{n+1}{2} - 1\right) - (n+1)$$

$$= (n+2)\left(\frac{n+1}{2}\right) - (n+1)$$

$$= (n+1)\left(\frac{n+\cancel{2}}{2} \cancel{-1}\right)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}$$

（写像 $F : SO^+(\mathbb{E}^{n+2}) \longrightarrow S(\mathbb{E}^{n+2})$、$Z \longmapsto (Z^{n+1}_\beta)_{\beta = 0,1,\cdots,n+1}$ として、ここで $S(\mathbb{E}^{n+2}) = \{ x \in \mathbb{E}^{n+2} \mid \langle x, x \rangle = 1 \}$ は沈め込みであるため）

$F(Z)$ は Z の最終行

Proposition 3.7

$M^n \times \mathbb{R}$ 上の両立条件（Def 3.1）が満たされていると仮定する。
この時、$y_0 \in V$、$A_0 \in Z(y_0)$ に対して y_0 の近傍 $U_1 \subset V$ と、以下を満たす一意な写像 $A : U_1 \longrightarrow SO^+(\mathbb{E}^{n+2})$ が存在する。

- $A^{-1}dA = \Omega$
- $\forall y \in U_1$、$A(y) \in Z(y)$
- $A(y_0) = A_0$

Proof

V: n次元
$SO^+(\mathbb{E}^{n+2}) \mid Z \in Z(y)$: $\frac{n(n+1)}{2}$次元

U: Vにおける座標近傍とする。この時、集合$\mathcal{F}$を

$$\mathcal{F} := \{ (\underset{\sim}{y}, \underset{\sim}{Z}) \in U \times SO^+(\mathbb{E}^{n+2}) \mid Z \in Z(y) \}$$

で定義すると、$\mathcal{F}$は次元 $\underset{\sim}{n} + \underset{\sim}{\frac{n(n+1)}{2}}$ の多様体である。さらに接空間 $T_{(y,Z)}(\mathcal{F})$ を

$$T_{(y,Z)}\mathcal{F} := \{ (u, \zeta) \in T_y(U) \oplus T_Z SO^+(\mathbb{E}^{n+2}) \mid \underbrace{\zeta^{n+1}_\beta}_{\text{接ベクトル}\ \zeta\ \text{の}\ n+1\text{行}\ \beta\text{列目の成分}} = \underbrace{(dT^\beta)_y(u)}_{T^\beta(y)\text{の微分}} \}$$

と定義する。

実際、Uの任意の点の近傍では、写像 $y \mapsto M(y) \in SO^+(\mathbb{E}^{n+2})$ が存在し、
$M(y)$の最終行が $(T^\beta(y))_{\beta=0,1,\cdots,n+1}$ であるようにできる。このとき、以下の同値条件が成り立つ。

$$Z \in Z(y) \underset{※}{\Longleftrightarrow} Z M(y)^{-1} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B \in SO^+(\mathbb{E}^{n+1})$$

したがって、もしφがこのような行列集合の局所的なパラメータ~~変換~~表示であるなら、
写像 $(y, v) \mapsto (y, \varphi(v)M(y))$ は$\mathcal{F}$の局所的なパラメータ~~変換~~表示である。

※ $\Rightarrow$ を示す

仮定より $Z \in Z(y)$ であるため、行列Zの最終行はベクトル$T^\beta(y)$で表される。

$$Z = \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & * \\ T^0(y) & T^1(y) & \cdots & T^{n+1}(y) \end{bmatrix}$$

$T^0(y)\ T^1(y) \cdots T^{n+1}(y) = T^\beta(y)$

また、$M(y) \in SO^+(\mathbb{E}^{n+2})$ かつ最終行が $T^\beta(y)$ であるため、全ての行ベクトルが単位ベクトルであるような行列である。

$$M(y) = \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & * \\ T^0(y) & T^1(y) & \cdots & T^{n+1}(y) \end{bmatrix}$$

$= T^\beta(y)$

Zと$M(y)$の最終行が一致していることから、$ZM(y)^{-1}$の最終行は$(0,\cdots,0,1)$となる。

$\underbrace{Z}_{SO^+(\mathbb{E}^{n+2})}\underbrace{M(y)^{-1}}_{SO^+(\mathbb{E}^{n+2})} \in SO^+(\mathbb{E}^{n+2})$であるため、行列の形は

$$ZM(y)^{-1} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (B \in SO^+(\mathbb{E}^{n+1}))$$

単位ベクトル

単位ベクトル

と表される。

$\Longleftarrow$ を示す。

球面 $S^n \times R$ の場合

仮定より、$ZM(y)^{-1} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B \in SO^+(\mathbb{E}^{n+1})$ である。

Mは直交行列であるため、${}^tMM = I \iff {}^tM = M^{-1}$である。

Zの最終行をZ_{n+1}と表すと、$Z_{n+1}M(y)^{-1} = Z_{n+1}{}^tM = (0,0,\cdots,0,1)$となる。

これは、Zの最終行が$M(y)$の最終行、つまり$T^\beta(y)$であることを意味する $(\because T^0(y)^2 + \cdots + T^{n+1}(y)^2 = 1)$.

以上より、Zの最終行ベクトルが$T^\beta(y)$であるため$Z \in \mathcal{Z}(y)$である。

Zを射影 $U \times SO^+(\mathbb{E}^{n+2}) \longrightarrow SO^+(\mathbb{E}^{n+2}) \subset M^{n+2}(\mathbb{R})$ と定義する。このZを用いて、
$\mathcal{F}$上に次のような1次微分形式の行列を考える。

$$\Theta := Z^{-1}dZ - \Omega.$$

つまり、$(y, Z) \in \mathcal{F}$ に対して Θ は

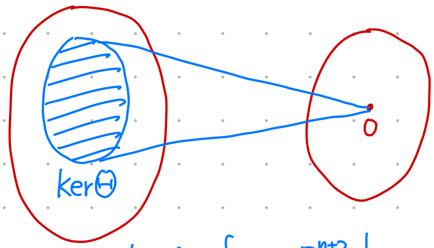
$$\Theta_{(y,Z)} : T_{(y,Z)}\mathcal{F} \longrightarrow M_{n+2}(\mathbb{R})$$
$$\Theta_{(y,Z)}(u, \zeta) = Z^{-1}\zeta - \Omega_y(u) \qquad (dZ = \zeta)$$

である。

・ここで、$\forall (y, Z) \in \mathcal{F}$ に対して、空間

$$\mathcal{D}(y, Z) := \ker \Theta_{(y,Z)}$$

の次元が n であることを示していく。
まず、行列 Θ が $\mathfrak{so}(\mathbb{E}^{n+2})$ に属していることに注意する。



$\ker\Theta = \{ x \in \mathbb{R}^{n+2} \mid \Theta x = 0 \}$

$\hookrightarrow \{ H \in M_{n+2}(\mathbb{R}) \mid {}^tHG + GH = 0 \}$

$\because$ $Z \in SO^+(\mathbb{E}^{n+2})$ とする。
${}^tZGZ = G$ を Zで微分すると、

$$d({}^tZ)GZ + {}^tZGd(Z) = 0$$
$$\Longleftrightarrow \ {}^t(dZ)GZ + {}^tZGd(Z) = 0 \qquad \circlearrowright \times {}^t(Z^{-1})$$
$$\Longleftrightarrow \ {}^t(Z^{-1}dZ)G + G(Z^{-1}dZ) = 0 \qquad \therefore Z^{-1}dZ \in \mathfrak{so}(\mathbb{E}^{n+2})$$

定義(P8)より $\Omega \in \mathfrak{so}(\mathbb{E}^{n+2})$ であるため、
2つの差である Θ も $\mathfrak{so}(\mathbb{E}^{n+2})$ に属する。

$(Z\Theta)^{n+1}_\beta$ を計算すると、

$$(Z\Theta)^{n+1}_\beta = dZ^{n+1}_\beta - \underbrace{\sum_{\gamma=0}^{n+1} Z^{n+1}_\gamma \omega^\gamma_\beta}_{\text{行列の積}} \qquad (\because \Theta = Z^{-1}dZ - \Omega \Longleftrightarrow Z\Theta = dZ - Z\Omega)$$
$$= dT^\beta - \sum_{\gamma=0}^{n+1} T^\gamma \omega^\gamma_\beta \qquad (\because Z^{n+1}_\beta = T^\beta)$$
$$= 0. \qquad (\because 補題3.5)$$

であるため、$\Theta_{(y,Z)}$ の値は以下の空間 $\mathcal{H}$ に属する：

$$\mathcal{H} := \{ H \in \mathfrak{so}^+(\mathbb{E}^{n+2}) \mid (ZH)^{n+1}_\beta = 0 \}.$$

また、この空間の次元 $= \dfrac{n(n+1)}{2}$ である。

$(\pm x_0^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1)$

実際、写像 $F : SO^+(\mathbb{E}^{n+2}) \to \mathbb{S}(\mathbb{E}^{n+2})$ は沈め込みであり、

$$\begin{array}{ccc} \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ Z & \longmapsto & (Z^{n+1}_{\beta})_{\beta} \end{array}$$

→ 微分が全射である。

(・・) 最終行ベクトルは球面上の任意の点を取り得るため、局所的に全ての接ベクトルを生成できる。

$H \in \mathcal{H}$ である $\Longleftrightarrow$ $ZH \in \ker(dF)_Z$ である。
※

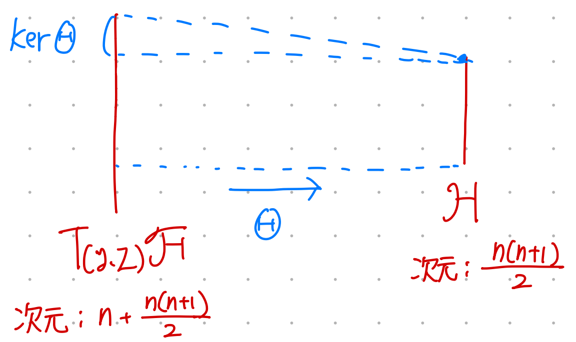
※ $\Rightarrow$ を示す
仮定より ZHの最終行はゼロベクトルである。
dF_Z は ZHの最終行を取り出す写像なので、
$dF_Z(H) = 0$ である。
$\therefore ZH \in \ker(dF_Z)$

$\Leftarrow$ を示す。
仮定より、$dF_Z(H) = 0$.(ZHの最後の行ベクトル $= \mathbb{0}$)
これは $H \in \mathcal{H}$ である条件を満たしている。
$\therefore H \in \mathcal{H}$ である。

$= \{(u, \xi) \in T_y(U) \oplus T_Z SO^+(\mathbb{E}^{n+2}) \mid \xi^{n+1}_{\beta} = (dT^{\beta})_y(u)\}$

さらに、空間 $T_{(y,Z)}\mathcal{F}$ は部分空間 $\{(0, ZH) \mid H \in \mathcal{H}\}$ を含み、この部分空間上の $\Theta_{(y,Z)}$ の制限は、写像 $(0, ZH) \mapsto H$ に対応する。($\because \Theta_{(y,Z)}(0, ZH) = Z^{-1}ZH = H$)

したがって、$\Theta_{(y,Z)}$ は $\mathcal{H}$ への全射であり、線形写像 $\Theta_{(y,Z)}$ のランクは $\frac{n(n+1)}{2}$ である。



これにより、$\ker\Theta_{(y,Z)}$ の次元は、次元定理より

$$\begin{aligned} \dim(\ker\Theta) &= n + \frac{n(n+1)}{2} - \mathrm{rank}(\ker\Theta) \\ &= n \end{aligned}$$

$\Theta_{(y,Z)} : T_{(y,Z)}\mathcal{F} \to M_{n+2}(\mathbb{R})$

である。

- 次に、分布(distribution) D が対合(involutive)であることを示す。
※1 ※2

※1
M : m次元 C^{∞}級多様体.
$n \leq m$ とし、各点 $x \in M$ に対して接空間 $T_x(M)$ の n次元部分空間 $\Delta_x \subseteq T_x(M)$ を割り当てる。
このとき、ある近傍 $N_x \subset M$ が存在し、n個の線形独立なベクトル場 $X_1, \cdots, X_n$ が存在して、
任意の点 $y \in N_x$ に対して $X_1(y), \cdots, X_n(y)$ が Δ_y を張るようにする。
Δ を「M上の全ての Δ_x の集合」とし、Δ を「M上の n次元分布」と呼ぶ。
ベクトル場の集合 $\{X_1, \cdots, X_n\}$ を Δ の局所基底と呼ぶ。

https://planetmath.org/distribution1 より

※2

M上の分布Dが involutive である

$\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の点 $x \in M$ に対して局所基底 $\{X_1, \cdots, X_n\}$ が点 x の近傍に存在し、
任意の $1 \leq i, j \leq n$ に対して、ベクトル場 X_i と X_j のかっこ積 $[X_i, X_j]$ が $\{X_1, \cdots, X_n\}$ の線形結合になること。

通常 $[\Delta, \Delta] \subset \Delta$ と表記される。

https://planetmath.org/distribution1 より

$d\Theta$ を計算すると、

$$\begin{cases} \bullet\ d(Z^{-1}) = -Z^{-1}dZZ^{-1} & (Z^{-1}\text{を}\cancel{定}\overset{係}{数}\text{と見る}) \\ \bullet\ d(Z^{-1}dZ) = d(Z^{-1})\wedge dZ + Z^{-1}\underbrace{d(dZ)}_{=0} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} d\Theta &= d(Z^{-1}dZ - \Omega) \\ &= -Z^{-1}dZ \wedge Z^{-1}dZ - d\Omega \quad \text{Θの定義式より} \\ &= -(\Theta+\Omega)\wedge(\Theta+\Omega) - d\Omega \quad \text{補題3.6より} \\ &= -\Theta\wedge\Theta - \Theta\wedge\Omega - \Omega\wedge\Theta - \Omega\wedge\Omega - (-\Omega\wedge\Omega) \\ &= -\Theta\wedge\Theta - \Theta\wedge\Omega - \Omega\wedge\Theta. \end{aligned}$$

$\Theta(\xi_1) = \Theta(\xi_2) = 0$

この公式より、「$\xi_1, \xi_2 \in D$」$\Longrightarrow$「$d\Theta(\xi_1, \xi_2) = 0$」が分かる

そして $\Theta([\xi_1, \xi_2]) = \xi_1 \underbrace{\Theta(\xi_2)}_{=0} - \xi_2 \underbrace{\Theta(\xi_1)}_{=0} - \underbrace{d\Theta(\xi_1, \xi_2)}_{=0} = 0$ であるため、

$[\xi_1, \xi_2]$ に作用する Θ がゼロになる $\longrightarrow$ $[\xi_1, \xi_2]$ が $D(=\ker\Theta)$ に含まれる。 $\therefore [\xi_1, \xi_2] \in D$.

$$d\Theta(\xi_1, \xi_2) = \xi_1\Theta(\xi_2) - \xi_2\Theta(\xi_1) - \Theta([\xi_1, \xi_2])$$

よって D は involutive であり、さらにフロベニウスの定理より、D は $\overset{\text{integrable}}{\text{可積分}}$ である。

教科書？ ※3

※3 (フロベニウスの定理)

D ; C^∞ 多様体 M 上の分布

D が完全可積分である $\iff$ D に属する任意のベクトル場 X, Y に対して、
$[X, Y]$ も D に属している。 = 可積分条件

↳ M の各点を通る積分多様体が存在する

※4

https://www.mathi.uni-heidelberg.de/~lee/Andrea_Rincon.pdf より

※4

積分曲線の一般化。

M の部分多様体 N が分布 D の積分多様体である

$\iff$ $\forall p \in N$ において、$T_p(N) = D_p$ が成り立つ。

https://www.mathi.uni-heidelberg.de/~lee/Andrea_Rincon.pdf より

$Z^{-1}Z = I$

$d(Z^{-1}) = -Z^{-1}dZZ^{-1}$

$d(Z^{-1}Z) = 0$

$d(Z^{-1})Z + Z^{-1}d(Z) = 0 \quad \times Z^{-1}$

$d(Z^{-1}) + Z^{-1}d(Z)Z^{-1} = 0$

$$d\Theta = d(Z^{-1}dZ - \Omega)$$
$$= -Z^{-1}dZ \wedge Z^{-1}dZ - d\Omega$$
$$= -(\Theta + \Omega) \wedge (\Theta + \Omega) - d\Omega$$
$$= -\Theta\wedge\Theta - \Theta\wedge\Omega - \Omega\wedge\Theta - \Omega\wedge\Omega - (-\Omega\wedge\Omega)$$
$$= -\Theta\wedge\Theta - \Theta\wedge\Omega - \Omega\wedge\Theta.$$

$\Theta(\xi_1) = \Theta(\xi_2) = 0$

$$d\Theta(\xi_1, \xi_2) = -\underbrace{\Theta(\xi_1)}_{=0}\wedge\underbrace{\Theta(\xi_2)}_{=0} - \underbrace{\Theta(\xi_1)}_{=0}\wedge\Omega(\xi_2) - \Omega(\xi_1)\wedge\underbrace{\Theta(\xi_2)}_{=0}$$
$$= 0$$

(交代性は成立していない)

・$\mathcal{A}$ を点(y_0, A_0)を通る積分多様体とする。　($\mathcal{F}$ の n次元部分 mfd)

もし $\zeta \in T_{A_0}SO^+(\mathbb{E}^{n+2})$ が条件

$$\underset{u}{(0,} \underset{\zeta}{\zeta)} \in T_{(y_0, A_0)}\mathcal{A} = D_{(y_0, A_0)} \left(= \ker \Theta_{(y_0, A_0)}\right)$$

を満たすならば、$0 = \Theta_{(y_0, A_0)}(0, \zeta) = A_0^{-1}\zeta$ である。

$\Theta_{(y_0, A_0)}(0, \zeta) = A_0^{-1} dA_0 (0, \zeta) - \Omega_{(y_0, A_0)}(0, \zeta)$ …①

また、$(0, \zeta) \in T_{y_0}(U) \oplus T_{A_0}SO^+(\mathbb{E}^{n+2})$ において $dA_0 = \zeta$ である。…②

$(0, \zeta)$ において、$\Omega_{y_0}(0) = 0$ …③　(Ω は線形)

さらに $\ker\Theta_{(y_0, A_0)}$ に $(0, \zeta) \in T_{(y_0, A_0)}\mathcal{A}$ が属しているため、$\Theta_{(y_0, A_0)}(0, \zeta) = 0$ である…④

①,②,③より、$\Theta_{(y_0, A_0)}(0, \zeta) = A_0^{-1}\zeta$
④より、　$0 = \Theta_{(y_0, A_0)}(0, \zeta)$　である。

③,④, $\Theta_{(y, Z)}(u, \zeta)$ の定義式を用いれば良い

これにより、$T_{(y_0, A_0)}\mathcal{A} \cap \left(\{0\} \times T_{A_0}SO^+(\mathbb{E}^{n+2})\right) = \{0\}$ である。※

$T_{(y_0, A_0)}\mathcal{A}$: y成分とA成分の両方を持つ ($u=0$ にならない)

$\{0\} \times T_{A_0}SO^+(\mathbb{E}^{n+2})$: 行列$A_0$に関する接空間 $\zeta \in T_{A_0}SO^+(\mathbb{E}^{n+2})$

∵ もし$(0, \zeta)$が$T_{(y_0, A_0)}\mathcal{A}$に含まれているとしたら、$\Theta_{(y_0, A_0)}(0, \zeta) = 0$ を満たす必要がある。
しかし、$\Theta_{(y_0, A_0)}(0, \zeta) = A_0^{-1}\zeta$ であるため、これがゼロになるためには $\zeta = 0$ でなくてはいけない。
($A_0 \in SO^+(\mathbb{E}^{n+2})$ より、A_0はゼロにならない)
よって、接空間の共通部分は 0 のみである。

したがって、積分多様体$\mathcal{A}$は、写像$A: U_1 \longrightarrow SO^+(\mathbb{E}^{n+2})$の局所的なグラフとして表される($U_1$: $y_0 \in U_0$ の近傍)。
この構成により、写像Aは3.7の性質を満たし、一意である。

$\longrightarrow \mathcal{A} = \{(y, A(y)) \mid y \in U_1\}$

- $A^{-1}dA = \Omega$
- 初期条件 $A(y_0) = A_0$　(グラフで表せることより)
- $A(y) \in Z(y)$

よって、命題3.7を示した ▨

Theorem（再掲）　定理3.3

仮定

V を n 次元の単連結なリーマン多様体とし、ds^2 を V の計量として、さらに ∇ を V のリーマン接続（レビチビタ接続）とする。S を対称作用素 $S_q : T_qV \to T_qV$ の場（field）として、T を V 上のベクトル場とし、ν を $\|T\|^2 + \nu^2 = 1$ を満たすような V 上の滑らかな関数とする。

$M^n = S^n$ または $M^n = \mathbb{H}^n$ とする。組 (ds^2, S, T, ν) が $M^n \times \mathbb{R}$ に対するガウス方程式とコダッチ方程式を満たし、さらに以下2つの方程式を満たしていると仮定する：

$$\nabla_X T = \nu S X \qquad d\nu(X) = -\langle SX, T\rangle$$

このとき、$f : V \longrightarrow M^n \times \mathbb{R}$ という等長的はめ込みが存在し、f に関する法ベクトル N と対応する形作用素が次を満たす：

$$df \circ S \circ df^{-1} \qquad \frac{\partial}{\partial t} = df(T) + \nu N$$

加えて、このはめ込みは $M^n \times \mathbb{R}$ の大域的な M^n と $\mathbb{R}$ の向きを保つ等長変換を除いて一意である。

3.3 の proof

$y_0 \in V$、$A \in Z(y)$、$t_0 \in \mathbb{R}$ とする。
V 上で y_0 の近傍における局所正規直交フレーム $(e_1, \cdots, e_n)$ を考える。

proposition 3.7 より、以下を満たす一意な写像 $A : U_1 \longrightarrow SO^+(\mathbb{E}^{n+2})$ が存在する。

- $A^{-1}dA = \Omega$
- $\forall y \in U_1$、$A(y) \in Z(y)$
- $A(y_0) = A_0$

(ただし、U_1 は y_0 の近傍であり、単連結とする)

- $f^0 := A^0_0$、$f^i := A^i_0$ として、f^{n+1} を U_1 上の一意な関数として
  - $df^{n+1} := \eta$ (1次微分形式)
  - $f^{n+1}(y_0) = t_0$

  を満たすとする。
  これにより、写像 $f : U_1 \longrightarrow \mathbb{E}^{n+2}$ を次のように定義する。$A^{n+1}_0 = T^0 = 0$ であるため、

  (i) $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ の場合

$$(f^0)^2 + \sum_{i=1}^{n} (f^i)^2 = \sum_{\alpha=0}^{n+1} (A^\alpha_0)^2 = 1.$$

  (ii) $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ の場合

$$-(f^0)^2 + \sum_{i=1}^{n} (f^i)^2 = -(A^0_0)^2 + \sum_{i=1}^{n} (A^i_0)^2 + (A^{n+1}_0)^2$$
$$= -1.$$

  どちらのケースも $(f^0, f^1, \cdots, f^n) \in M^n$ であり、f の値は $M^n \times \mathbb{R}$ に含まれる。

- $A^{-1}dA = \Omega \iff dA = A\Omega$ であるため、$\alpha < n+1$ に対して次が成り立つ。

$$df^\alpha(e_k) = d(A^\alpha_0(e_k))$$

dA = AΩ 代入

$$= \sum_{j=1}^{n} A^\alpha_j \omega^j_0(e_k) + A^\alpha_{n+1} \omega^{n+1}_0(e_k) \qquad (\because \omega^0_0 = 0)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} A^\alpha_j (\delta^k_j - T^j T^k) - A^\alpha_{n+1} T^{n+1} T^k$$

$$= \sum_{j=1}^{n} A^\alpha_j \delta^k_j - T^k \sum_{j=1}^{n} A^\alpha_j T^j - A^\alpha_{n+1} T^{n+1} T^k$$

$T^j = A^{n+1}_j$
$T^{n+1} = A^{n+1}_{n+1}$ 代入

$$= A^\alpha_k - T^k \sum_{j=1}^{n} A^\alpha_j A^{n+1}_j - T^k A^{n+1}_{n+1} A^\alpha_{n+1}$$

$$= A^\alpha_k - T^k \sum_{\beta=0}^{n+1} A^\alpha_\beta A^{n+1}_\beta$$

$$= A^\alpha_k .$$

Aは直交行列である ⟺ 各列が互いに直交している.

⟺ $\sum_{\beta=0}^{n+1} A^\alpha_\beta A^{n+1}_\beta = 0 \quad (\alpha \neq n+1)$

$n=2.$

$$\begin{bmatrix} A^0_0 & A^1_0 & A^2_0 & A^3_0 \\ A^0_1 & A^1_1 & A^2_1 & A^3_1 \\ A^0_2 & A^1_2 & A^2_2 & A^3_2 \\ A^0_3 & A^1_3 & A^2_3 & A^3_3 \end{bmatrix}$$

$$df^{n+1}(e_k) = \underbrace{\eta(e_k) = T^k}_{\eta\text{の定義}} = A^{n+1}_k .$$

これにより、$df(e_k)$ は行列Aのk番目の列によって与えられていることが分かる。

$$\begin{bmatrix} A^0_0 & \cdots & \boxed{A^0_k} & \cdots & A^0_{n+1} \\ A^1_0 & \cdots & A^1_k & \cdots & A^1_{n+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A^{n+1}_0 & \cdots & A^{n+1}_k & \cdots & A^{n+1}_{n+1} \end{bmatrix}$$

$df(e_k)$

- 行列Aが可逆であるため、dfはランクnを持ち、fははめ込みである.

  dfが全単射　　定義域である$T_q(U_1)$はn次元　　⟺ dfが単射

また、$A \in SO^+(E^{n+2})$ であるため、$\langle df(e_p), df(e_q)\rangle = \delta^p_q$ である。
すなわち、fは等長変換である。

$= \langle A_p, A_q \rangle$

$= \delta^p_q$　(∵行列Aは直交行列 ⟺ 各列ベクトルはONB)

- 行列$A(q)$の列(columns)はE^{n+2}の正規直交基底を構成する.

  1からn列目は$T_{f(q)}f(V)$上の正規直交基底を構成し、
  0列目は$M^n \times \{0\}$上への$f(q)$の射影を構成し、
  高さ0の部分空間における単位法ベクトル $N(f(q))$
  n+1列目は点$f(q)$における$M^n \times \mathbb{R}$内の$f(V)$と法な単位法ベクトル$N(f(q))$である.

- $X_j := df(e_j)\left(= {}^t[A^0_j, A^1_j, \cdots, A^{n+1}_j]\right)$ とする。内積 $\langle dX_j(X_k), N\rangle$ は

$$\langle dX_j(X_k), N\rangle = \sum_{\alpha=0}^{n+1} dA^\alpha_j(e_k) A^\alpha_{n+1}$$

$dA = A\Omega$ 代入

$$= \sum_{\alpha=0}^{n+1} \left\{ \sum_{\gamma=0}^{n+1} A^\alpha_\gamma \omega^\gamma_j(e_k) \right\} A^\alpha_{n+1}$$

$$= \omega^{n+1}_j(e_k)$$

- Aは直交行列 ⟺ A_γとA_{n+1}はONB.
- Aは直交行列 ⟺ A_{n+1}が単位ベクトル ⟺ $\sum_{\alpha=0}^{n+1} A^\alpha_{n+1} A^\alpha_{n+1} = 1.$

$= \langle S(e_k), e_j \rangle.$

これは、$M^n \times \mathbb{R}$ における $f(V)$ の形作用素が $df \circ S \circ df^{-1}$ であることを意味している. …①

$\because X_k = df(e_k) \iff e_k = df^{-1}(X_k)$ より.

$$\langle dX_j(X_k), N \rangle = \langle S(e_k), e_j \rangle$$
$$= \langle S(\underbrace{df^{-1}(X_k)}_{\in T_y(V)}), df^{-1}(X_j) \rangle$$

〜〜 部分を再び $M^n \times \mathbb{R}$ の接空間に対応させるにはもう一度 df を適用させて、$df(S(df^{-1}(X_k)))$ と表す. $\therefore S_{f(V)}(X_k) = df \circ S \circ df^{-1}(X_k)$

- 最後に、正規直交フレーム $(\overline{N}, X_1, \cdots, X_n, N)$ における垂直ベクトル $\frac{\partial}{\partial t} = E_{n+1}$ の係数は、行列 A の最終行によって与えられる.

任意の $y \in U_2$ に対して $A(y) \in Z(y)$ であるため、

$$\frac{\partial}{\partial t} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} T^j X_j}_{\text{接成分}} + \underbrace{T^{n+1} N}_{\text{法成分}} = d\underbrace{f(T)}_{\text{V上の接ベクトル場}} + \nu N . \quad \cdots ②$$

接成分 ($M^n \times \mathbb{R}$ 上の)

$X_j = df(e_j)$

(df: V上の接ベクトル場 T を $M^n \times \mathbb{R}$ 上の接空間に写す)

- 次に、局所的なはめ込みが $M^n \times \mathbb{R}$ のグローバルな等長変換を除いて (up to) 一意であることを示す.

$\tilde{f}: U_3 \to M^n \times \mathbb{R}$ を定理の結論を満たす別のはめ込みとする (U_3: y_0 を含む U_1 の単連結な近傍).

フレーム $(\tilde{X}_\beta)$ を次のように定義する:

- $\tilde{X}_j = d\tilde{f}(e_j)$
- $\tilde{X}_{n+1}$ は $M^n \times \mathbb{R}$ における $\tilde{f}(V)$ の法ベクトル (normal)
- $\tilde{X}_0$ は E^{n+2} 内で $M^n \times \mathbb{R}$ と法なベクトル

また、$\tilde{A}$ をフレーム (E_α) 内の $(\tilde{X}_\beta)$ の座標の行列とする.

$M^n \times \mathbb{R}$ の direct な等長変換を除いて、次のように仮定できる:

- $f(y_0) = \tilde{f}(y_0)$.
- フレーム $(X_\beta(y_0))$ と $(\tilde{X}_\beta(y_0))$ が一致する. つまり $A(y_0) = \tilde{A}(y_0)$ 　初期条件の一致

また、T^α が x と $\tilde{x}$ で同じであるため、この等長変換 $\tilde{f}$ は $\frac{\partial}{\partial t}$ を確定 (fix) させる.

行列 A と $\tilde{A}$ はそれぞれ、$A^{-1}dA = \Omega$ および $\tilde{A}^{-1}d\tilde{A} = \Omega$ を満たす. (2.3節参照)
さらに、$A(y), \tilde{A}(y) \in Z(y)$ であり、$A(y_0) = \tilde{A}(y_0)$ であるため、命題3.7における方程式の解の一意性から、$A(y) = \tilde{A}(y)$ が成り立つ.

これらの行列の0番目の列を考えると、次の関係が得られる：

- $f^i = \tilde{f}^i$
- $f^0 = \tilde{f}^0$　　(f^{n+1}を除く0番目の列が一致する)

最後に、$df^{n+1} = \eta = d\tilde{f}^{n+1}$ であり、$f^{n+1}(y_0) = \tilde{f}^{n+1}(y_0)$ である。したがって、微分方程式の解の一意性より、$f^{n+1} = \tilde{f}^{n+1}$ である。

以上より、U_3 上で $f = \tilde{f}$ が示される。(局所的なはめ込み f が一意である)

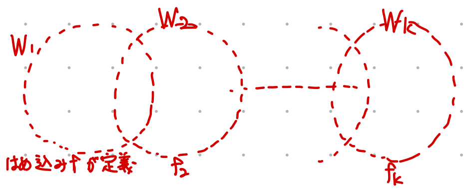
- 最後に、局所的なはめ込み f が V 全体に対して一意的に拡張できることを示す。

$y_1 \in V$ とする。このとき、ある曲線 $\Gamma : [0, 1] \to V$ が存在して、

$$\Gamma(0) = y_0 \quad \text{かつ} \quad \Gamma(1) = y_1$$

を満たす。曲線 Γ の各点には近傍が存在し、そこでは定理の性質を満たす等長はめ込みが存在する。

この近傍の族から、曲線 Γ を覆う有限個の近傍族 $(W_1, \cdots, W_p)$ を取り出すことができる。
$W_1 = U_1$ とする。すると、先程の一意性の議論により、はめ込み f を各 W_k に対して一意的に拡張できる。特に、$f(y_1)$ が定義される。



- 最初の近傍 W_1 でははめ込みがすでに定義されている
  ↓
- W_1 と重なる次の近傍 W_2 では、一意性により f を拡張できる。
  ↓
- 同様に $W_2, W_3, \cdots W_p$ と f の定義域を拡張できる

さらに、V が単連結であるという仮定より、$f(y_1)$ の値は y_0 と y_1 を結ぶ Γ の選び方に依存しない。∎　任意の閉じた曲線を一点にできる

来週 12/25(水)
13:00 スタート