11/22(金) 幾何セミナー　(次数つき mfd における モジュラー類の拡張)

ベクトル場 X　(mfd を代数的視点でみる)

$\Longleftrightarrow X: M \to TM$

(接束 TM への切断)

$\left(\Longleftrightarrow X(fg) = \cancel{f(X)g} + X(f)g + X(g)f \right)$

$$C^\infty(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}\text{-alg}}(C^\infty(N), C^\infty(M))$$
$$f \longmapsto (f^*: g \longmapsto g \circ f)$$

は全単射である.

$\mathbb{R}$代数として,

$$M \approx N \ (\text{diffeo}) \Longleftrightarrow C^\infty(M) \cong C^\infty(N)$$

(smooth mfd は関数環で特徴付けられる)

- 環付き空間 (各開集合に環が対応している)

↳ 環付き空間としての mfd を考える.

$$U \longmapsto C^\infty(U) =: C^\infty_M(U) \text{ と表示.}$$

空間 (M, C^∞_M)

・Kベクトルsp A が K代数である

$\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \text{・Aは環} \\ \text{・Aの和と積はK線型である} \end{cases}$

・G−次数付き代数

$$\mathrm{End}_{\bullet}(V) := \bigoplus_{i \in G} \mathrm{End}_i(V) := \bigoplus_{i \in G} \{ F \in \mathrm{End}(V) \mid |F| = i \} \subset \mathrm{End}(V),$$

グローバル ブイ？

は、合成によってG−次数付き代数となる。

superalgebra
超代数 $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$−次数つき代数

（次数 $= 0$; even
$\quad = 1$; odd

supercommutive
$$fg = (-1)^{|f||g|} gf \quad (\forall f, g \in A) \Longleftrightarrow \text{超可換}$$

$$\Omega(M) = \Omega^{even}(M) \oplus \Omega^{odd}(M)$$

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{ij} \eta \wedge \omega = (-1)^{|\eta||\omega|} \eta \wedge \omega$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \omega \in \Omega^i(M) \\ \eta \in \Omega^j(M) \end{array}}$$

なので、ウェッジ積について、$\Omega(M)$ は超可換である。

超Lie代数が生まれる。
（Lie代数の各条件に超可換性を加味したもの）

超Jacobi恒等式

・超多様体　ライプニッツ則、乱れる

非可換な関数をもつ mfd が得られます
($=$ 非可換 mfd)

(n, m) 次元の超 mfd

$\Longleftrightarrow$ 局所環付き空間 $(M, \mathcal{A})$

・M - n 次元 mfd、smooth、

・$\forall p \in M$,

$$\mathcal{A}(U) \cong C^\infty(M \cap U) \otimes \Lambda^{\cdot}\langle x^{n+1}, x^{n+2}, \ldots, x^{n+m} \rangle$$

・組 (M, Q) が Q 多様体 である

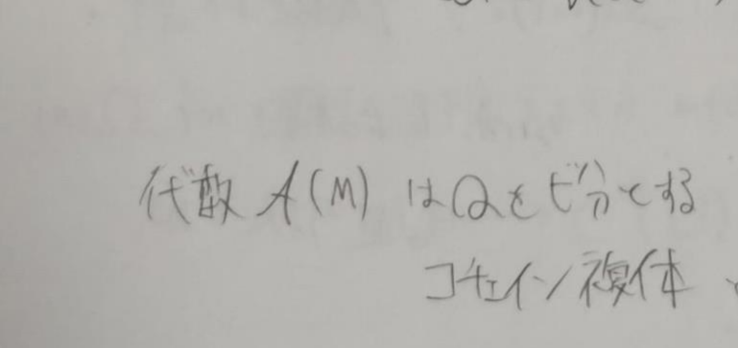
$\Longleftrightarrow$ ・M は超 mfd

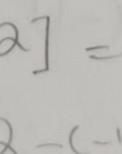
・$Q \in \mathrm{Vect}(M)$ は $|Q| = 1$

$$[Q, Q] = 0 \quad (= 2Q \circ Q)$$
$$\parallel$$
$$Q \circ Q - (-1)^{|Q||Q|} Q \circ Q$$

代数 $\mathcal{A}(M)$ は Q を微分とする

コチェイン複体 とみなせる.





・シフトされた接束 (shifted tangent bundle) $|dx^a| = |x^a| + 1.$

(ΠTM)

$(x^1, \cdots, x^n, dx^1, \cdots, dx^n)$ を座標として、

および座標変換 $dy^a = \sum_{b=1}^{n} dx^b \frac{\partial y^a}{\partial x^b}$

を持つ超mfd のこと。

・行列式束

・体積形式 ($:= \mathrm{Vol} = D(x) S(x)$).

$\downarrow$ Berezin 体積形式

・Berezin 束

・Berezin 体積形式

(M, Q): 体積形式 vol をもつ Q 多様体.

$Q(\mathrm{Div}_{\mathrm{vol}} Q) = 0.$

(M, Q) のモジュラー類 $\Longleftrightarrow$ コホモロジー

・higher poisson mfd $\Longleftrightarrow$ 多重ベクトル場 (s.t. $[\![P, P]\!] = 0$ をみたす).

・

ρ-可換代数

$a : b = c : d$

$ad - bc = u$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

- 交換因子 $\rho : G \times G \to \mathbb{K}$
- ρ-可換代数

$\Longleftrightarrow fg = \rho(|f|, |g|)\, gf \quad (\forall f, g \in A)$

- 非可換トーラス

{
- ρ-Lie 代数
- ρ-行列式 (~~[illegible]~~ 1984 Kobayashi-Nagamachi)

↓

- ρ-Berezinian

moduler

多分原子 (ハラコ)

H. 2022

超多様体上では

- 陰関数 & 逆関数定理 成立つ

- ρ-多様体

$X(fg) = X(f)g + \rho(|X|, |f|)\, f X(g)$

↓

- ρ-Q多様体
  - ρ-Berezinian 束
  - ρ-体積形式
- Schouten かっこ積

- BRST 微分 $Q := \sum_{a=1}^{m} 2\pi\sqrt{-1}\, \eta^a u^a \frac{\partial}{\partial u^a}$