partition of unity

C. 1の分割

多様体上の積分につながる。

p22〜

locally finite

Def (局所有限)

collection

空間 S の部分集合の族 $\mathcal{L}$ が局所有限である

$\overset{\text{def}}{\iff}$ S の各点が、$\mathcal{L}$ の有限個の要素としか近傍を持たない。

◎ $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ を、多様体 M 上の滑らかな関数の族

s.t. $\{\mathrm{supp}(f_\alpha) : \alpha \in A\}$ が局所有限である

$\Rightarrow$ f_α の総和 $\sum_\alpha f_\alpha$ は、M 上の well-defined な滑らかな関数

(∵ 有限個の α を除いて f_α は M 上で 0 になる
$\Rightarrow$ $\sum_\alpha f_\alpha$ は M 上で有限和.)

unity

Def (滑らかな1の分割)

多様体 M 上の滑らかな1の分割とは、以下の3つを満たす関数の族 $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ のこと.

(D1) $\forall \alpha \in A$、$0 \leq f_\alpha \leq 1$

(D2) $\{\mathrm{supp}(f_\alpha) : \alpha \in A\}$ が局所有限である.

(D3) $\sum_\alpha f_\alpha = 1$

x

特に、分割が M の開被覆 $\mathbb{C}$ に従属するとは、各 $\mathrm{supp}(f_\alpha)$ が $\mathbb{C}$ のある要素に含まれていることを指す。

open covering subordinate

40. Prop

M が（第二可算公理を満たす）多様体である

$\Longrightarrow$ ${}^\forall\mathbb{C}$：開被覆、${}^\exists\{f_\alpha : \alpha \in A\}$：1の分割 s.t. $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ が $\mathbb{C}$ に従属

※ 証明は Matsushima, Y「Differential Geometry」、Spivak, M「A Comprehensive Introduction to Differential Geometry」を参照.

確認できていないです.

※「任意の開被覆に従属する1の分割の存在」は、位相的性質のパラコンパクト性に該当する

Def（パラコンパクト）

位相空間 X がパラコンパクトである

$\Longleftrightarrow$ X 上の任意の開被覆 $\mathbb{C}$ に対して、その細分となる局所有限な開被覆が存在する.

$(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$、$(V_\mu)_{\mu\in M}$: X の被覆

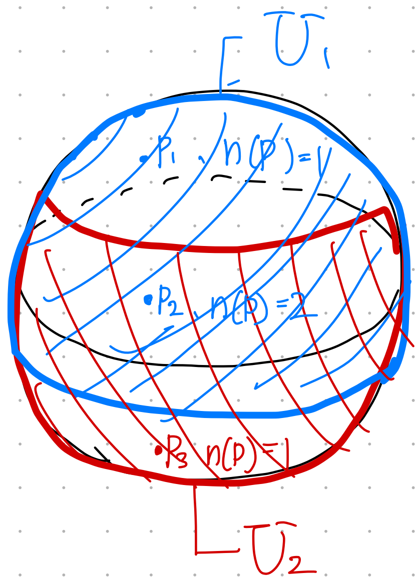
$(V_\mu)_{\mu\in M}$ は $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の細分

$\Longleftrightarrow$ ${}^\forall\mu\in M, {}^\exists\lambda\in\Lambda$ s.t. $V_\mu \subset U_\lambda$

※ 1の分割 補足

M：コンパクト

$\{U_i\}_{i=1,\cdots,k}$：Mの開被覆，$M=\bigcup_{i=1}^{k} U_i$



$^\forall p\in M$ に対して，

$n(p) := (p$を含むU_iの個数$)$

と定義する。$(n: M\longrightarrow \mathbb{N})$

次に，$i=1,2,\cdots,k$ に対して，$\chi_i : M\longrightarrow \mathbb{R}$ を，

$$\chi_i(p) := \begin{cases} 0 & (p\notin U_i) \\ \dfrac{1}{n(p)} & (p\in U_i) \end{cases}$$

$$\chi_1(p) = \begin{cases} 1 & (p\in U_1\setminus U_2) \\ \frac{1}{2} & (p\in U_1\cap U_2) \\ 0 & (p\in U_2\setminus U_1) \end{cases}$$

$$\chi_2(p) = \begin{cases} 0 & (p\in U_1\setminus U_2) \\ \frac{1}{2} & (p\in U_1\cap U_2) \\ 1 & (p\in U_2\setminus U_1) \end{cases}$$

とする。このとき，M上で

$$\boxed{\chi_1+\chi_2+\cdots+\chi_k = 1}$$

が成立つ

※ 1の分割は積分で使う

$$\int f\cdot 1\, d_M = \int f\chi_1 + f\chi_2 + \cdots + f\chi_k\, d_M$$

orientability
D. 向き付け可能性

orientable
Def (向き付け可能)

多様体 M が向き付け可能である

def / domain
$\overset{\text{def}}{\iff}$ 定義域が M を覆う座標系の集合 $\mathcal{O}$ が存在し、

各 $\xi, \eta \in \mathcal{O}$ に対して ヤコビ行列式関数

$$J(\xi, \eta) := \det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)$$

が正の値であることを言う.

- 向き付け可能な例：$\mathbb{R}^n$、球面、トーラス

  - $\mathbb{R}^n$ は 1つの座標近傍 $(\mathbb{R}^n, 1_{\mathbb{R}^n})$ からなる C^∞ 級座標近傍を持つ.

☆ - n 次元球面 S^n は 2つの立体射影

$$\varphi : S^n \setminus (0, 0, \cdots, 0, 1) \to \mathbb{R}^n,\quad \varphi(x^1, \cdots, x^{n+1}) = \left(\frac{x^1}{1 - x^{n+1}}, \cdots\cdots, \frac{x^n}{1 - x^{n+1}}\right) \in \mathbb{R}^n$$

$$\psi : S^n \setminus (0, 0, \cdots, 0, -1) \to \mathbb{R}^n,\quad \psi(x^1, \cdots, x^{n+1}) = \left(\frac{x^1}{1 + x^{n+1}}, \cdots\cdots, \frac{x^n}{1 + x^{n+1}}\right) \in \mathbb{R}^n$$

$$\psi \circ \varphi^{-1}(x) = \left(\frac{x^1}{\|x\|^2}, \cdots\cdots, \frac{x^n}{\|x\|^2}\right)$$ に対するヤコビ行列 J を考える.

変換は

$$y_i = \frac{x^i}{\|x\|^2} \qquad (\|x\| = (x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2)$$

であるため、各成分の導関数 $\dfrac{\partial y^i}{\partial x^j}$ は、

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{x^i}{(x^1)^2 + \cdots\cdots + (x^n)^2}\right)$$

$$= \frac{\delta_{ij} \cdot \|x\|^2 - 2x^i x^j}{\|x\|^4} \qquad \left(\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}\right)$$

と表せる。よって、ヤコビ行列式 $\det(J)$ は、

$$
\det(J) = \begin{vmatrix}
\dfrac{\|x\|^2 - 2(x^1)^2}{\|x\|^4} & \dfrac{-2x^1x^2}{\|x\|^4} & \cdots & \dfrac{-2x^1x^n}{\|x\|^4} \\
\dfrac{-2x^2x^1}{\|x\|^4} & \dfrac{\|x\|^2 - 2(x^2)^2}{\|x\|^4} & \cdots & \dfrac{-2x^2x^n}{\|x\|^4} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\dfrac{-2x^nx^1}{\|x\|^4} & \dfrac{-2x^nx^2}{\|x\|^4} & \cdots & \dfrac{\|x\|^2 - 2(x^n)^2}{\|x\|^4}
\end{vmatrix}
$$

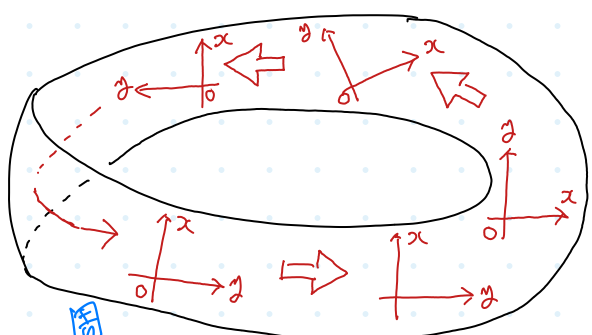
ここからどうやって具体的に計算する？

$$
\det(J)_n = \left(\frac{1}{\|x\|^4}\right)^n \begin{vmatrix} \cdots \\ \vdots \; \ddots \end{vmatrix}
$$

行列式の解を考える

- 向き付け不可能な例：メビウスの輪、クラインのツボ
  - メビウスの輪内の各点 p で局所座標をとる。

帯に沿って連続的に一週させると、元に戻った時には最初と向きが異なってしまう。



具体的な座標系？

一~~週~~周すると法線ベクトルの向きが逆になってしまうイメージ

$$\det J_n = \left(\frac{1}{\|x^4\|}\right)^n \begin{vmatrix} \|x\|^2 - 2x^1x^1 & -2x^2x^1 & \cdots & -2x^nx^1 \\ -2x^1x^2 & \|x\|^2 - 2x^2x^2 & \cdots & -2x^nx^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2x^1x^n & -2x^2x^n & \cdots & \|x\|^2 - \cancel{2x}\, 2x^nx^n \end{vmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \|x\|^4 \cdot \det J_n = \begin{vmatrix} \|x\|^2 & -2x^2x^1 & \cdots & -2x^nx^1 \\ 0 & \|x\|^2 - 2x^2x^2 & \cdots & -2x^nx^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -2x^2x^n & \cdots & \|x\|^2 - 2x^nx^n \end{vmatrix}$$

$\hookrightarrow J_{n-1}$

$$-2x^1 \cdot \begin{vmatrix} x^1 & -2x^2x^1 & \cdots & -2x^nx^1 \\ x^2 & \|x\|^2 - 2x^2x^2 & \cdots & -2x^nx^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^n & -2x^2x^n & \cdots & \|x\|^2 - 2x^nx^n \end{vmatrix}$$

$$\hookrightarrow \det J_{n-1} = \|x\|^2 \det J_{n-2} - 2(x^2)^2 \|x\|^{2(n-2)}$$

$$= \|x\|^2 \det J_{n-1} - 2(x^1)^2 \cdot \|x\|^{2(n-1)}$$

$$= \|x\|^2 \left\{ \|x\|^2 \det J_{n-2} - 2(x^2)^2 \|x\|^{2(n-2)} \right\} - 2(x^1)^2 \|x\|^{2(n-1)}$$

$$\vdots$$

$$= \|x\|^{2(n-1)} \det J_1 - 2\left\{ (x^1)^2 + \cdots + (x^{n-1})^2 \right\} \|x\|^{2(n-1)}$$

ここで、 $\det J_1 = \|x\|^2 - \cancel{m}\, 2x^nx^n$ より、

$$= \|x\|^{2(n-1)} \left\{ \|x\|^2 - 2(x^n)^2 \right\} - 2\left(\|x\|^2 - (x^n)^2 \right) \|x\|^{2(n-1)} = -\|x\|^{2n}$$

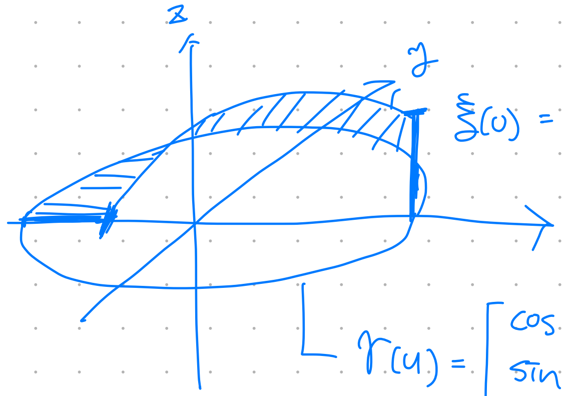
$$\|x\|^{4n} \det(J_n) = \|x\|^{2(n-1)} \det J_1 - 2\left\{ (x^1)^2 + \cdots + (x^{n-1})^2 \right\} \|x\|^{2(n-1)}$$

see 写真

$$\left(\det J_1 = \|x\|^2 - 2x^n x^n \right)$$

$$=$$

メビウスの帯 補足



$$\xi(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$r(u) = \begin{bmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{bmatrix}$$

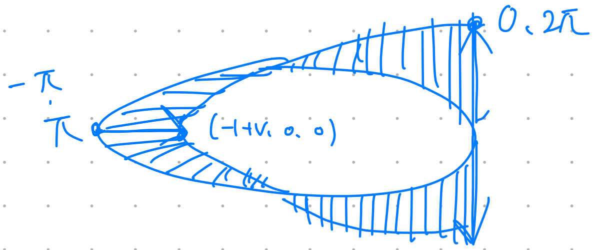
$$f(u,v) := r(u) + v\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos\frac{u}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sin\frac{u}{2}\sin u \\ \sin\frac{u}{2}\cos u \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} -\sin\frac{u}{2}\sin u \\ \sin\frac{u}{2}\cos u \\ \cos\frac{u}{2} \end{bmatrix}$$

$$\left(u \in (0, 2\pi],\ v \in \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \right)$$

★ $S = \left\{ f(u,v) \;\middle|\; \begin{array}{l} u \in \mathbb{R} \\ v \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{array} \right\}$ は、

$\mathbb{R}^3$ の部分多様体である。 (法線ベクトル N が定義されない。
$N(u+2\pi, 0) = -N(u, 0)$)



$S \subset \mathbb{R}^3$ に対し、
法線 N が S 上で定義される
$\Longleftrightarrow$ S は向き付け可能

$\varphi : U \to (0, 2\pi) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $\varphi(x,y,z) = f^{-1}(x,y,z)$

(実際、$f|_{(0,2\pi)\times(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$ は 単射)
$: (0, 2\pi) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \longrightarrow U$

$V = S \setminus \left\{ \begin{pmatrix} -1+v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; v \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\}$ のとき、

$\psi : V \to (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $\psi(x,y,z) = f^{-1}(x,y,z)$

Prop.42 ?

Σ : 抽象集合 (abstract set) とする.

$\forall \alpha \in A$ に対して $\xi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \xi_\alpha(U_\alpha)$ を、Σ の部分集合 U_α から $\mathbb{R}^n$ の開集合 $\xi_\alpha(U_\alpha)$ への単射な写像とする. + 全射

以下 (A1) ~ (A3) を仮定する.

(A1) 定義域 (domain) $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ が Σ を被覆する.

(A2) $\forall \alpha, \beta \in A$ に対して、写像 $\xi_\beta \circ \xi_\alpha^{-1}$ がユークリッド空間上で滑らかであり、定義域 $\xi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ は $\mathbb{R}^n$ 上の開集合である.

(A3) Σ 上で $p \neq q$ のとき、p と q は

- 単一の U_α のみに含まれている
- $^\exists \alpha, \beta \in A$ s.t. $p \in U_\alpha$、$q \in U_\beta$、$U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ (disjoint)

のいずれかである.

(A3) より明らか

このとき、Σ 上には一意のハウスドルフ位相と完備なアトラスが存在し、各 ξ_α は多様体の座標系である. さらに、可算個の U_α が Σ を被覆するならば、その多様体は第二可算である. 同相

U_α で被覆.

Proof ?

- $\forall \alpha \in A$ に対して、ξ_α が多様体の座標系であるためには、ξ_α が同相写像である必要がある.
  - 連続、全単射
  - 逆写像も連続

Σ 内の部分集合 V が開集合であると定義する必要がある.

(具体的に、V が Σ 内の開集合である $\Longleftrightarrow$ $\xi_\alpha(V \cap U_\alpha)$ が $\xi_\alpha(U_\alpha)$ 内で開集合)

この定義により、これらの開集合がΣの位相を構成する。

(i) ϕについて、$\xi_\alpha(\phi \cap U_\alpha) = \phi$なので開集合

Σについて、$\xi_\alpha(\Sigma \cap U_\alpha) = \xi_\alpha(U_\alpha)$なので開集合

- $X \in \mathcal{O}$かつ$\phi \in \mathcal{O}$
- $U_1, U_2, \cdots, U_k \in \mathcal{O}$ならば、$U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_k \in \mathcal{O}$
- 任意の集合族$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$について、$U_\lambda \in \mathcal{O}$ならば$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$

(ii) k個の開集合$V_1, V_2, \cdots, V_k$の交わり部分

$$V = \bigcap_{n=1}^{k} V_n$$

に対して、$\xi_\alpha(V \cap U_\alpha)$は、

$$\begin{aligned}\xi_\alpha(V \cap U_\alpha) &= \xi_\alpha\left(\bigcap_{n=1}^{k} V_n \cap U_\alpha\right) \\ &= \xi_\alpha\left(\bigcap_{n=1}^{k} \{V_n \cap U_\alpha\}\right) \\ &= \bigcap_{n=1}^{k} \xi_\alpha(V_n \cap U_\alpha)\end{aligned}$$

全単射より。

となり、開集合の共通部分として表されるので開集合である。

(iii) 開集合の合併$V = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$に対して、$\xi_\alpha(V \cap U_\alpha)$は、

$$\begin{aligned}\xi_\alpha(V \cap U_\alpha) &= \xi_\alpha\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda \cap U_\alpha\right) \\ &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \xi_\alpha(V_\lambda \cap U_\alpha)\end{aligned}$$

全単射より。

ξ_α　ξ_α^{-1} が連続。をそれぞれ示す。

となり、開集合の合併として表されるので開集合である。

ここまでで、開集合Vを定義したので、ξ_αが同相写像であることを示していく。

(i) 連続性の確認

任意の開集合$V \subseteq \xi_\alpha(U_\alpha)$に対して、その逆像$\xi_\alpha^{-1}(V)$が$U_\alpha$内で開集合であることを示せばよい。

$\alpha, \beta \in A$ である場合、$\xi_\beta \circ \xi_\alpha^{-1} : \xi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \xi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$
が同相写像であることを(A2)を用いて示せる

☆ $$\xi_\beta(\xi_\alpha^{-1}(W) \cap U_\beta) = (\xi_\beta \circ \xi_\alpha^{-1})(W \cap \xi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta))$$

この集合が開集合であることを示している。したがって、$\xi_\alpha^{-1}(W)$ は開集合である。

(ii) 逆写像 ξ_α^{-1} の連続性の確認

- ハウスドルフ性と第二可算性の確認

仮定(A3)を用いて、Σ がハウスドルフ空間であることを確認する。
(異なる2点 $p, q \in \Sigma$ が、互いに交わりを持たない開近傍を持つことの確認)

- p、q が同一の開集合 U_α 内にある場合、ξ_α は単射であるという仮定から $\xi_\alpha(p) \neq \xi_\alpha(q)$ であるため、それぞれの開近傍をとることができる。

- p、q が異なる開集合 U_α、U_β 内にある場合、U_α と U_β は交わらないため、それぞれの開近傍が存在する。

また、各 U_α が $\mathbb{R}^n$ において第二可算であることを確認する。
各 U_α は $\mathbb{R}^n$ の開集合と同相(homeomorphic)であるため、この多様体は第二可算である。

→ 位相が可算基を持つ

Prop 41 補足

$V \subset \Sigma$: open

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\forall \alpha$ に対して, $\xi_\alpha(U_\alpha \cap V) \subset \xi(V)$: open

示したいこと $\xi_\alpha : U_\alpha \to \xi_\alpha(U_\alpha)$ が同相写像

↳ 全単射

$\Longleftrightarrow$ ◦ ξ_α : 連続

◦ ξ_α^{-1} : 連続

◎ $\xi_\alpha^{-1} : \xi_\alpha(U_\alpha) \to U_\alpha$: 連続 $\Longleftrightarrow$ ${}^\forall V \subset U_\alpha$ に対して, $\xi_\alpha(V) = (\xi_\alpha^{-1})^{-1}(V)$: open

(:) ${}^\forall V \subset U_\alpha$: open に対して, $\xi_\alpha(V)$ が $\xi_\alpha(U_\alpha)$ の開集合であることを示す

${}^\exists \tilde{V}$: Σ の開集合 s.t. $V = \tilde{V} \cap U_\alpha$.

$\xi_\alpha(V) = \xi_\alpha(\tilde{V} \cap U_\alpha)$: 開集合 in $\xi_\alpha(U_\alpha)$ ($\because$ $\tilde{V}$ が Σ の開集合であることの定義より)

◎ ξ_α : 連続 $\Longleftrightarrow$ ${}^\forall W \subset \xi_\alpha(U_\alpha)$: 開集合 に対して,

$\xi_\alpha^{-1}(W) \subset U_\alpha$: 開集合

(:) $W \subset \xi_\alpha(U_\alpha)$: 開集合 とする. ${}^\exists \tilde{W}$: $\mathbb{R}^n$ の開集合 s.t.

$$
\begin{aligned}
W &= \xi_\alpha(U_\alpha) \cap \tilde{W} \\
&= \xi_\alpha(U_\alpha \cap \xi_\alpha^{-1}(\underbrace{\tilde{W} \cap \xi_\alpha(U_\alpha)}_{W})) \\
&= \xi_\alpha(U_\alpha \cap \xi_\alpha^{-1}(W))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V := \xi_\alpha^{-1}(W) &= \xi_\alpha^{-1}(\xi_\alpha(U_\alpha \cap \xi_\alpha^{-1}(W))) \\
&= U_\alpha \cap \xi_\alpha^{-1}(W)
\end{aligned}
$$

V : open

$\Longleftrightarrow$ $\forall \beta$ に対して $\xi_\beta(U_\beta \cap V)$ が $\xi_\beta(U_\beta)$ の開集合.

$$\xi_\beta(U_\beta \cap V) = \xi_\beta(U_\beta \cap U_\alpha \cap \xi_\alpha^{-1}(W))$$
$$= \underbrace{\xi_\beta(U_\beta \cap U_\alpha)}_{\text{open}} \cap \underbrace{\xi_\beta \circ \xi_\alpha^{-1}(W)}_{\text{open}}$$

- あとは Σ に位相があることを確認すればよい.

$\mathcal{O} := \{ V \subset \Sigma \mid V: \text{開集合} \}$ とおく.

① $\phi, \Sigma \in \mathcal{O}$ ~~は~~ は OK

② $V_1, V_2 \in \mathcal{O}$ に対して $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{O}$ を示すぞ.

$$\xi_\alpha(U_\alpha \cap V_1 \cap V_2) = \underbrace{\xi_\alpha(U_\alpha \cap V_1)}_{\text{open}} \cap \underbrace{\xi_\alpha(U_\alpha \cap V_2)}_{\text{open}}$$

③ $\{V_\lambda\} \subset \mathcal{O}$ に対し $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda \in \mathcal{O}$ を示す

$$\xi_\alpha\left(U_\alpha \cap \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda\right)\right) = \underbrace{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \underbrace{\xi_\alpha(U_\alpha \cap V_\lambda)}_{\text{open}}}_{\text{open}}$$

SOME SPECIAL MANIFOLD（特殊な多様体）

A. 積多様体

積座標系を用いると、以下の(A)〜(D)が確認できる.

(A) 2つの射影 π, σ について、

$$\pi : M \times N \longrightarrow M \quad (p, q) \longmapsto p$$

$$\sigma : M \times N \longrightarrow N \quad (p, q) \longmapsto q$$

は滑らかな写像 かつ 沈め込みである.

→ $f : M \to B$ が沈め込み

$\Longleftrightarrow {}^{\forall}p \in M$、$df_p : T_p(M) \to T_{f(p)}(B)$ が全射.

Proof （π, σは同様の議論のため、πのみ示す）

(i) 沈め込みの証明

πの微分 $d\pi_{(p,q)} : T_{(p,q)}(M \times N) \to T_p(M)$ は、$T_q(N)$上の接ベクトルを消す操作

つまり、${}^{\forall}(p, q) \in M \times N$、${}^{\forall}(u, v) \in T_p(M) \times T_q(N)$ に対して

$$d\pi_{(p,q)}(u, v) = u$$

は どんな $u \in T_p(M)$ であっても、$d\pi_{(p,q)}$によって得られることを意味する.

よって、$d\pi_{(p,q)}$は全射であるため沈め込みの定義を満たす.

(ii) 滑らかの証明 （$\xi \circ \pi \circ (\xi \circ \eta)^{-1}$ が滑らかの証明）

M, Nにそれぞれ局所座標(U, ξ)と(V, η)が存在し、

$$\xi : U \to \mathbb{R}^m$$

$$\eta : V \to \mathbb{R}^n$$

とする。

積多様体 $M \times N$ には局所座標 $(U \times V, \xi \times \eta)$ が対応し、π が滑らかであるためには $\xi \circ \pi \circ (\xi \circ \eta)^{-1}$ がユークリッド空間上で滑らかである必要がある。

よって、$\forall u \in \xi(U)$、$\forall v \in \eta(V)$ に対して、

$$\xi \circ \pi \circ (\xi \circ \eta)^{-1}(u, v) = u$$

である。これは (u, v) を v に写す写像であるため、滑らかである。

よって、写像 π は滑らかである。

(i)、(ii) より、π が滑らかかつ沈め込みであることを確認した。 ▨

(b) 写像 $\phi : P \longrightarrow M \times N$ が滑らかである

$\Longleftrightarrow$ $\pi \circ \phi : P \longrightarrow M$ と $\sigma \circ \phi : P \longrightarrow N$ が滑らかである

Proof

(滑らかの積が滑らか を言えばよい)

(i) $\Longleftarrow$ を示す

(多様体 P、M、N が滑らかであることを前提とする)

また、$\forall p \in P$ に対して以下のように局所座標を設定する.

- P の開集合 $U \subseteq P$ と 局所座標 $x = (x^1, x^2, \cdots, x^n)$
- M の開集合 $V \subseteq M$
- N の開集合 $W \subseteq N$

写像 $\phi : P \longrightarrow M \times N$ の局所表現を考える. $\phi(U) \subseteq V \times W$ より、$\phi(x)$ は

$$\phi(x) = (\pi \circ \phi(x), \sigma \circ \phi(x))$$

と表される. 仮定より $\pi \circ \phi$ と $\sigma \circ \phi$ が滑らかであるため、滑らかな写像同士の積で表されている ϕ も滑らかである.

(ii) $\Longrightarrow$ を示す

ϕ が滑らかであると仮定する. このとき、ϕ は局所的に

$$\phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x)) \quad , \quad \phi_1 : U \longrightarrow V, \ \phi_2 : U \longrightarrow W$$

という形で表され、ϕ_1 と ϕ_2 はそれぞれ滑らかである.

よって、$\pi \circ \phi(x) = \phi_1(x)$、$\sigma \circ \phi(x) = \phi_2(x)$ も、それぞれ滑らかである.

(i)、(ii) より、同値関係を示した. ▨

(C) 各 $(p, q) \in M \times N$ に対して、以下の部分集合

$$M \times q = \{(r, q) \in M \times N \mid r \in M\}$$

$$p \times N = \{(p, r) \in M \times N \mid r \in N\}$$

は、それぞれ $M \times N$ の部分多様体である。

- 相対位相
- $j: M \times q \to M \times N$ が滑らか & 単射

Proof $M \times q$ の場合を考える。

(i) 部分集合 $M \times q$ が部分位相空間を持つことを確認

$M \times q$ は M の各点 r と固定された点 q の組み合わせである。M の開集合 $U \subseteq M$ に対し、

$$U \times q \ (\subset M \times q)$$

q は一点なので、開集合

は $M \times N$ の積位相における ~~開集合~~ である。

よって、$U \times q$ が $M \times N$ の開集合として定義できるため、$M \times q$ は $M \times N$ の部分位相空間を持つ。

(ii) 包含写像 j が滑らかであることの確認

$j: M \times q \longrightarrow M \times N$ は $\forall r \in M$ に対し $j(r) = (r, q)$ である …①

$r \in M$ に対するチャートを (U, φ)、$q \in N$ に対するチャートを (V, ψ) とすると、
$M \times N$ の点 (r, q) に対するチャートは $(U \times V, \varphi \times \psi)$ と表示できる。…②

①, ② より、j は以下のように座標表示される。

$$(\varphi \times \psi) \circ j(r) = (\varphi(r), \psi(q))$$

$\varphi(r)$ は r に関して滑らかであり、$\psi(q)$ は固定された点であるため滑らかである。
よって、$(\varphi \times \psi) \circ j(r)$ は滑らかであるため、j は滑らかな写像である。

(iii) j の微分 dj が単射であることの確認

$dj : T_r(M) \longrightarrow T_{(r,a)}(M \times N)$ は、$\forall v \in T_r(M)$ に対して、

$$dj(v) = (v, \underset{0}{\cancel{c}})$$

である。($a \in N$ を固定しているため、N における接ベクトルは一定の値 $c \in T_a(N)$ として良い)

よって、dj は v を (v, c) に写すため単射(一対一で対応)である。

(i)〜(iii) より、$M \times a$ が $M \times N$ の部分多様体であることを確認した。

$P \times N$ についても同様の議論で部分多様体であることを確認できることから、(c) を示した。□

(d)
$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, phantom, "\underset{\text{diffeo.}}{\cong}"] & M \times a \arrow[r, shift left=2, "j", "C^\infty"'] & M \times N \arrow[l, shift left=2, "{\pi,\ C^\infty}"]
\end{tikzcd}
$$

7/24(火) 通常通り

接ベクトル 補足

$$
\begin{array}{ccc}
j : M \times q & \longrightarrow & M \times N \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
(p, q) & \longmapsto & (p, q)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
v \in T_{(p,q)}(M, q) & \cong & T_p(M) \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
v' & & v
\end{array}
$$

$$dj(v) = (j \circ \alpha)'(0) = (v, 0)$$

$\alpha(t)$ は $M \times q$ の曲線で

$$\begin{cases} \alpha(0) = (p, q) \\ \alpha'(0) = v \end{cases}$$

$$\alpha(t) = (\tilde{\alpha}(t), q)$$

$\tilde{\alpha}(t)$ → M の曲線

$$v' = \alpha'(0) = (\underbrace{\tilde{\alpha}'(0)}_{= v}, 0)$$

$\therefore$ $dj(v) = (v, 0)$

$$dj : T_{(p,q)}(M \times q) \longrightarrow T_{(p,q)}(M \times N)$$

P が単射 $\Longleftrightarrow$ $dj(v) = (0, 0)$ ならば $v = 0$.

今 $dj(v) = (v, 0)$ なので $dj(v) = (0, 0) = (v, 0)$

$\therefore v = 0$

$\therefore$ dj は単射.