P10

CURVES (曲線)

Def (曲線)

多様体Mにおける曲線

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ 開区間IからMへの滑らかな写像：$I \to M$

・開部分多様体としてのI

開区間Iは実数直線$\mathbb{R}$の開部分多様体として捉えられる。

これにより、Iは恒等写像uを座標系として持つ。

・座標ベクトルとしてのu

$\forall t \in \mathbb{R}$に対して、座標ベクトル$\left(\frac{d}{du}\right)(t) \in T_t(\mathbb{R})$は接空間の元を成す。この座標ベクトル$\left(\frac{d}{du}\right)(t)$は、$t$における正の$u$方向の単位ベクトルとして捉えることができる。

P10

Def (速度ベクトル)

$\alpha : I \to M$を曲線とする。$t \in I$におけるαの速度ベクトル

$$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad \alpha'(t) = d\alpha\left(\left.\frac{d}{du}\right|_t\right) \in T_{\alpha(t)}(M)$$

$\alpha'(t)$は$t \in I$におけるαの変化率を表すベクトルとして表される。

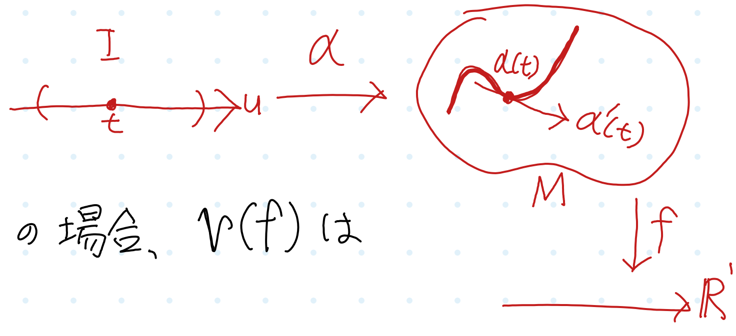
速度ベクトルの性質を4つ述べる。

directional derivatives

(i) 方向微分

$\alpha(t)$を多様体上の曲線、fをM上の関数とする。速度ベクトル$\alpha'(t)$をfに適用すると、

$$\alpha'(t) f = \frac{d(f \circ \alpha)}{du}(t).$$



特に、αが任意の曲線で、$\alpha'(0) = v$の場合、$v(f)$は

$$v(f) = \left(\frac{d(f\circ\alpha)}{dt}\right)(0).$$

Proof

$\alpha'(t)$ は M 上の点 $\alpha(t)$ における接ベクトル $\left(\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)}(M)\right)$ である
ことから、$^{\forall} f \in C^{\infty}(M)$ に対して、

$$\begin{aligned}
\alpha'(t)(f) &= d\alpha\left(\left.\frac{d}{du}\right|_t\right)(f) \\
&= \left.\frac{d(f\circ\alpha)}{du}\right|_t \\
&= \frac{d(f\circ\alpha)}{du}(t). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Lemma 14
$$d\phi_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right)(y^i) = \frac{\partial(y^i\circ\phi)}{\partial x^j}(p)$$

(ii) 座標表示

$(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ を多様体 M 上の点 $\alpha(t)$ での座標系とする.
$\alpha'(t)$ は基底定理と方向微分の等式を用いて、

$$\alpha'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d(x^i\circ\alpha)}{du}(t)\cdot\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\alpha(t)}$$

と表される.

basis theorem

Def (基底定理)

$\xi = (x^1, x^2, \cdots, x^n)$ を M の点 p における座標系とする. このとき、
基底ベクトル $\partial_1|_p, \partial_2|_p, \cdots, \partial_n|_p$ は接空間 $T_p(M)$ の基底を構成する.

また、$^{\forall} v \in T_p(M)$ に対して、v は

$$v = \sum_{i=1}^{n} v(x^i)\cdot\partial_i|_p$$

である.

Proof $\alpha'(t)$ を、基底定理による表現と、方向微分の定義による表現の2通りで考える.

速度ベクトル $\alpha'(t)$ は $T_{\alpha(t)}(M)$ の元であるため、基底定理を用いると

$$\alpha'(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha'(t)\cdot(x^i)\cdot \partial_i\Big|_{\alpha(t)} \quad \cdots ①$$

と表される.

一方、$\alpha'(t)$ が座標関数 x^i に作用することを具体的に書き下すと、

$$\alpha'(t)\cdot(x^i) = \frac{d(x^i\circ\alpha)}{du}(t) \quad \cdots ②$$

(i) の方向微分で f の代わりに代入

∴ ① に ② を代入して、

$$\alpha'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d(x^i\circ\alpha)}{du}(t)\cdot \partial_i\Big|_{\alpha(t)}$$

と表される. ▨

---

reparametrization

P11

(iii) 再パラメータ化

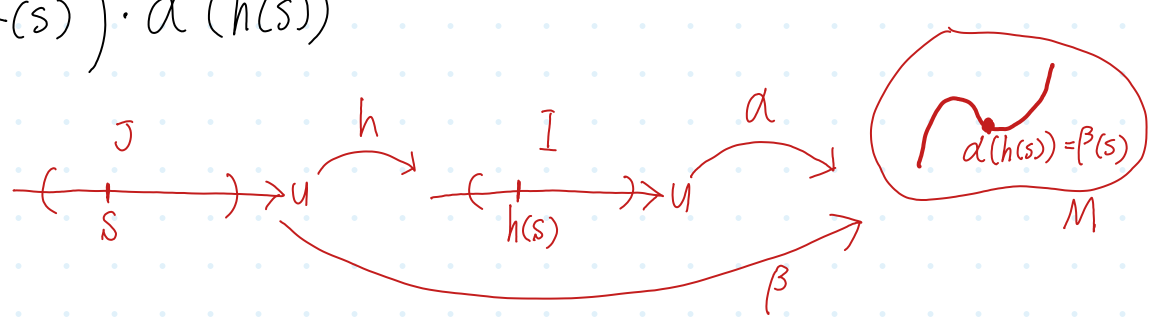
$\alpha: I \to M$ を曲線、$h: J \to I$ を区間 J 上の滑らかな関数とする. (interval)

このとき、曲線 $\beta = \alpha(h): J \to M$ を α の再パラメータ化と呼ぶ.

再パラメータ化された曲線 β の速度ベクトル $\beta'(s)$ は、 $(s \in J)$

$$\beta'(s) = \left(\frac{dh}{du}(s)\right)\cdot \alpha'(h(s))$$

と表される.



Proof

Lemma 15（連鎖律）から

$$d(\alpha\circ h)_{(s)} = d\alpha_{(h(s))}\circ dh_{(s)}$$

であることより、$\beta'(s)$ は

$$\beta'(s) = \frac{d}{ds}(\alpha\circ h)(s)$$

$$= \alpha'(h(s))\cdot\frac{dh}{ds}.$$ （連鎖律を用いた）

$\frac{dh}{ds}$ を $\frac{dh}{du}(s)$ に書き換えて、

$$\alpha'(h(s))\cdot\frac{dh}{ds} = \alpha'(h(s))\cdot\frac{dh}{du}(s)$$

よって、$\beta'(s) = \frac{dh}{du}(s)\cdot\alpha'(h(s))$ である ■

P11

(iv) 写像の効果

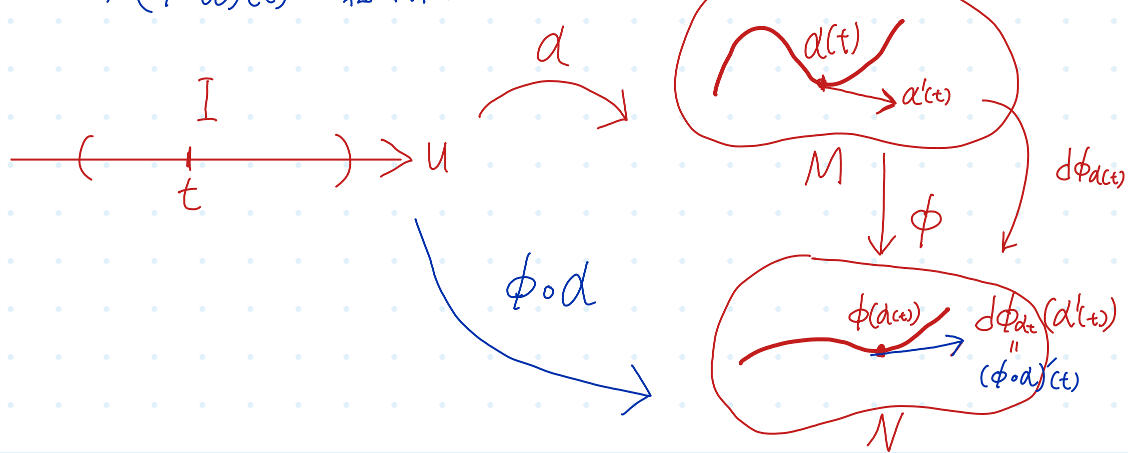
effect

$\alpha: I\longrightarrow M$ を M における曲線として、$\phi: M\longrightarrow N$ を滑らかな写像とする。（このとき、$\phi\circ\alpha: I\longrightarrow N$）

写像の微分 $d\phi$ は速度を保存し、

$$\underbrace{d\phi(\alpha'(t))}_{\text{接ベクトル}\,\alpha'(t)\,\text{の微分}} = \underbrace{(\phi\circ\alpha)'(t)}_{(\phi\circ\alpha)(t)\,\text{の接ベクトル}} \quad \forall t\in I.$$

が成り立つ。



Proof

曲線 $\beta := \phi \circ \alpha$ と定義すると $\beta(t) = \phi \circ \alpha(t)$ となり、この微分は

$$\beta'(t) = \underbrace{\frac{d}{dt}(\phi \circ \alpha)(t)}$$

Lemma 15 (連鎖律)

$$= d\phi_{\alpha(t)} \cdot \frac{d\alpha}{dt}(t)$$

$$= \underbrace{d\phi_{\alpha(t)} \cdot \alpha'(t)}$$

式を簡略化して、

$$\underbrace{d\phi(\alpha'(t))} = \underbrace{(\phi \circ \alpha)'(t)} \quad \blacksquare$$

曲線に関する用語の定義． P11

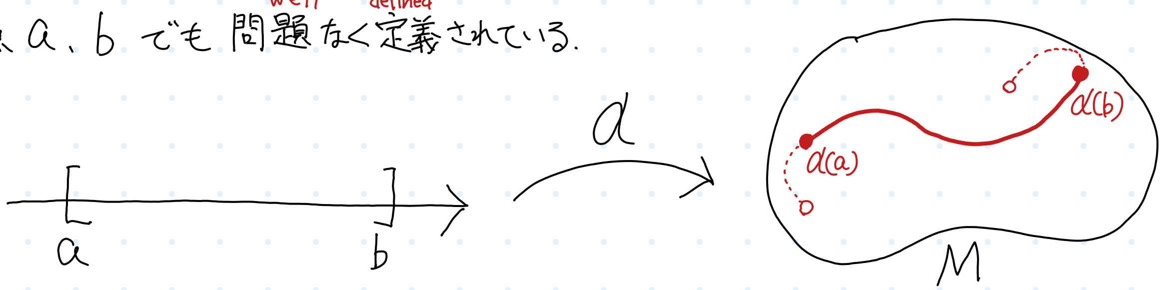
Def (正則曲線)

曲線 $\alpha : I \to M$ が正則である

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall t \in I$ に対し、速度ベクトル $\alpha'(t) \neq \mathbb{0}$

(曲線がどの点においても停止しない)

$[a, b]$ が $\mathbb{R}^1$ 上の閉区間であるとき、曲線分 (curve segment) $\alpha : [a, b] \to M$ は $[a, b]$ を含む開区間への滑らかな拡張を持つ．また、速度ベクトル α' は端点 a、b でも問題なく定義されている (well defined)．



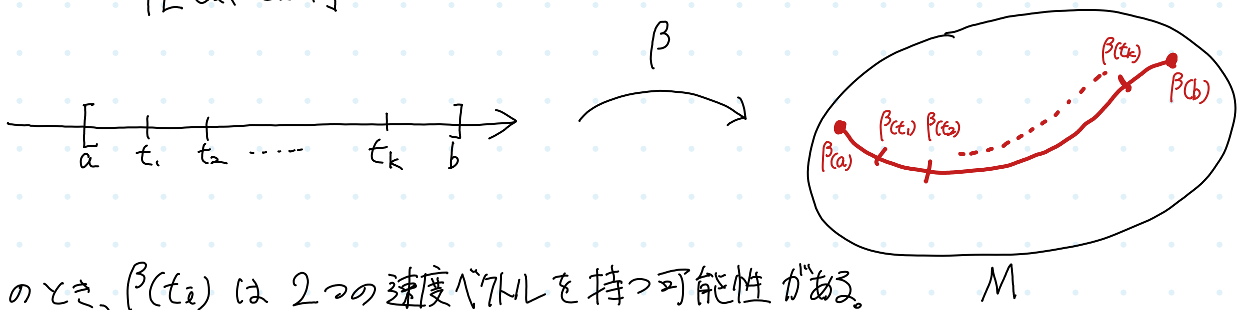
piecewise　　curve segment

Def (区分的に滑らかな曲線分)

関数 $\beta : [a, b] \longrightarrow M$ が部分的に滑らかな曲線分である

$\overset{def}{\iff}$ $[a, b]$ の分割 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k+1} = b$ が存在し、それぞれの

$\beta|_{[t_i, t_{i+1}]}$ が曲線分である.



このとき、$\beta(t_i)$ は2つの速度ベクトルを持つ可能性がある。

$\beta(t_i)$ を終点とする曲線分上の速度ベクトル $\beta'(t_i)$ $\overset{?}{=}$ $\beta(t_i)$ を始点とする曲線分上の速度ベクトル $\beta'(t_i)$

(曲線が連続していても、滑らかでないことが許される)

piecewise

Def (区分的に滑らか)

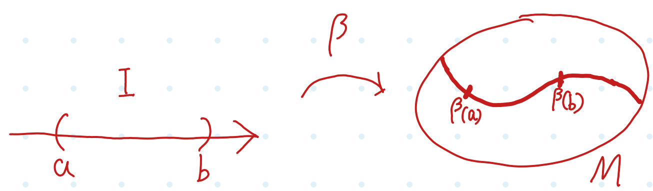
piecewise

開区間 I に対して、$\beta : I \longrightarrow M$ が区分的に滑らかである

$\overset{def}{\iff}$ ・$\forall a, b \in I \ (a < b)$ に対して、制限付き関数 $\beta|_{[a,b]}$ が区分的に滑らか.

・分割点が I 内に集積点を持たない.

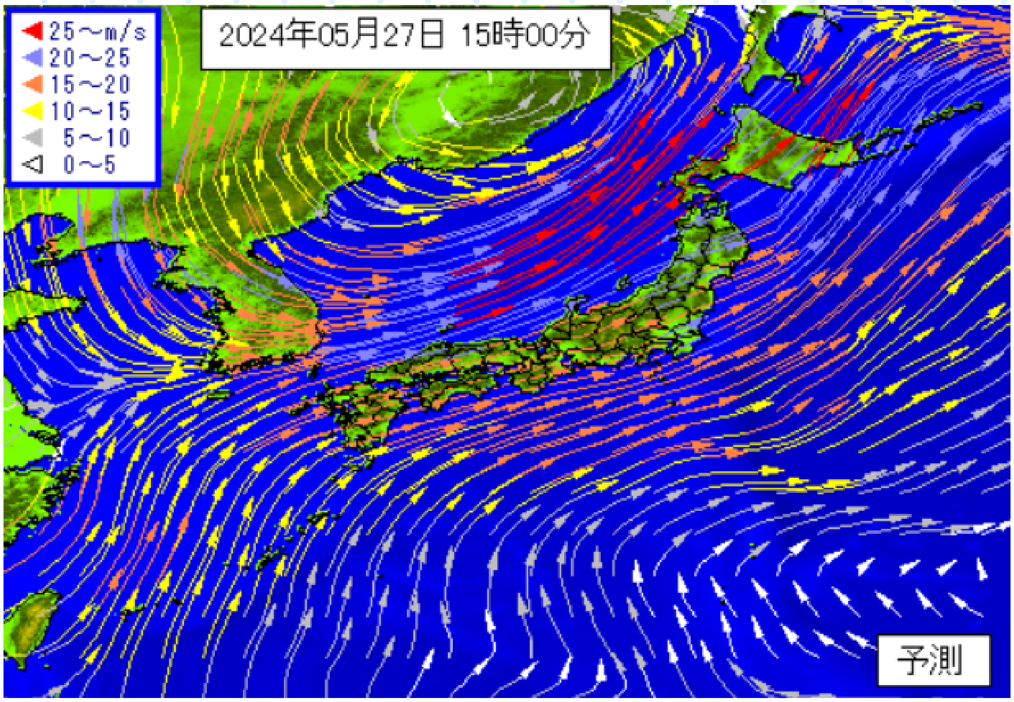
↳ 無限に密集しない.



※ 曲線の分類をするにあたって、再パラメータ化 (Ex. $t \mapsto t+c \mapsto \alpha(t+c)$) の有無は重要ではないため、以降は表記の簡略化のために定義域には0が含まれることを仮定する.

VECTOR FIELD（ベクトル場）

多様体M上のベクトル場Vは、M上の各点pに対して接ベクトルV_pを割り当てる関数.（Mの各点に接する矢印の集まりのイメージ）



Vが多様体Mのベクトル場であり、$f \in \mathcal{F}(M)$がM上の実数値関数であるとき、Vfは次のように定義される.

$$(Vf)(p) := V_p(f) \quad \forall p \in M.$$

Vfが$\mathcal{F}(M)$の全てのfに対して滑らかであるならば、ベクトル場Vは滑らかであるという.

ベクトル場の和とスカラー倍は、次のように定義される.

① 和の定義 ： $(V+W)_p = V_p + W_p$ 　$T_p(M)$の和

② スカラー倍の定義 ： $(fV)_p = f(p)V_p$ 　$T_p(M)$のスカラー倍

$\forall p \in M.$

このように定義することで、ベクトル空間の公理を満たす.

Proof

(i) 結合法則　ベクトル場 V, W, X に対して

$$((V+W)+X)_p = (V+W)_p + X_p$$
$$= V_p + W_p + X_p$$
$$= (V+(W+X))_p$$

(ii) 交換法則　ベクトル場 V, W に対して、

$$(V+W)_p = V_p + W_p$$
$$= W_p + V_p$$
$$= (W+V)_p$$

(iii) 零元の存在

$\forall p \in M$ に対して 0 を返すベクトル場 $0 : M \to TM$ を考えると、

$$(V+0)_p = V_p + 0_p$$
$$= V_p$$

となり、0 は零元である。

(iv) 逆元の存在

$\forall p \in M$ に対して -1 を返す関数 $-1 : M \to \mathbb{R}$ を考えると、

$$(-1 \cdot V)_p = -1(p) \cdot V_p$$
$$= -V_p$$

となり、$-V_p$ は V_p の逆元である。

(v) ベクトルに関する分配法則

$\forall p \in M$、$\forall f, g \in \mathcal{F}(M)$ に対して $f(p), g(p) \in \mathbb{R}$ を考えると、

$$\begin{aligned}((f+g)\cdot V)_p &= (f+g)(p)\cdot V_p \\ &= f(p)\cdot V_p + g(p)\cdot V_p\end{aligned}$$

(vi) スカラーに関する分配法則

$$\begin{aligned}(f(V+W))_p &= f(p)\cdot(V+W)_p \\ &= f(p)\cdot(V_p + W_p) \\ &= f(p)\cdot V_p + f(p)\cdot W_p\end{aligned}$$

(vii) スカラー倍の結合則

$\forall p \in M$、$\forall f, g \in \mathcal{F}(M)$ に対して $f(p), g(p) \in \mathbb{R}$ を考えると、

$$\begin{aligned}(fg\cdot V)_p &= (fg)_p \cdot V_p \\ &= f(p)\cdot g(p) V_p \\ &= (f\cdot gV)_p\end{aligned}$$

(viii) スカラー倍の単位元の存在

$\forall p \in M$ に対して 1 を返す関数 $1 : M \to \mathbb{R}$ を考えると、

$$\begin{aligned}(1\cdot V)_p &= 1(p)\cdot V_p \\ &= V_p\end{aligned}$$

以上より、和とスカラー倍の定義により、ベクトル場 V が
ベクトル空間の公理を満たすことを確認した。

Remark

ベクトル場 V, W, X と多様体上の関数 $f: M \to \mathbb{R}$ について、以下の公式が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
&(A1)\quad V + W &&= W + V \\
&(A2)\quad (V+W)+X &&= V + (W+X) \\
&(A3)\quad f(V+W) &&= fV + fW \\
&(A4)\quad (f+g)V &&= fV + gV \\
&(A5)\quad (fg)V &&= f(gV)
\end{aligned}
$$

松本「多様体の基礎」P.222より

Prop (ベクトル場の滑らかさ)

P12

2つのベクトル場 V, W が滑らかであるとき、
ベクトル場 $V+W$ および fV も滑らかである。 $(f \in \mathcal{F}(M))$

Proof

ベクトル場 V が滑らか $\Longleftrightarrow$ $^\forall f \in \mathcal{F}(M)$ に対して、Vf が滑らか

(i) $V+W$ が滑らかであることの証明.

$^\forall f \in \mathcal{F}(M)$: 滑らか に対して $(V+W)(f)$ が滑らかであることを示せばよい.

$$
\begin{aligned}
(V+W)_p(f) &\overset{\text{和の定義}}{=} V_p(f) + W_p(f) \\
&= (Vf)(p) + (Wf)(p)
\end{aligned}
$$

ベクトル場の定義

仮定より Vf と $Wf \in C^\infty(M)$ が滑らかであるため、滑らかな関数の和は滑らかである.

$\therefore$ $(V+W)(f)$ が滑らかであるため、$V+W$ は滑らかなベクトル場である.

(ii) fV が滑らかであることの証明

$^\forall g \in \mathcal{F}(M)$：滑らかに対して $(fV)(g)$ が滑らかであることを示せばよい。

$$(fV)(g)_p \overset{\text{スカラー倍の定義}}{=} f(p)\cdot V_p(g) \overset{\text{ベクトル場の定義}}{=} f(p)\cdot(Vg)(p)$$

である。仮定より V が滑らかであり、Vg も滑らかである. また、$f \in \mathcal{F}(M)$ は多様体 M 上の滑らかな関数であるため、滑らかな関数の積 $f\cdot Vg$ も滑らかである.

$\therefore$ $f\cdot V(g)$ が滑らかであるため、fV は滑らかなベクトル場である.

(i)、(ii) より、滑らかなベクトル場の和とスカラー倍もまた滑らかなベクトル場である ■

※ この2つの性質により、多様体 M 上の全ての滑らかなベクトル場の集合 $\mathfrak{X}(M)$ は、環 $\mathcal{F}(M)$ 上の加群(module)を形成する.

Def（環上の加群）

環 R 上の(左)加群 M は、以下4つの性質を満たす可換群 $(M,+)$ と作用 $\cdot : R\times M \to M$ からなる組 $(M,+,\cdot)$ である.

(D1) 分配則 $^\forall a \in R$、$^\forall x, y \in M$、$a\cdot(x+y) = a\cdot x + a\cdot y$

(D2) 作用の結合則 $^\forall a, b \in R$、$^\forall x \in M$、$a\cdot(bx) = (ab)\cdot x$

(D3) 単位元 1_R の作用 $^\forall x \in M$、$1_R\cdot x = x$

(D4) 作用の分配則 $^\forall a, b \in R$、$^\forall x \in M$、$(a+b)\cdot x = a\cdot x + b\cdot x$

Def（座標ベクトル場）

$\xi=(x^1,x^2,\cdots,x^n)$ が開集合 $U\subset M$ 上の座標系であるとするとき、各 $i=1,2,\cdots,n$ に対してベクトル場 ∂_i は U 上で各点 p を $\partial_i|_p$ に送るベクトル場とする。

このベクトル場 ∂_i を、ξ の i 番目の座標ベクトル場と呼ぶ。
∂_i は滑らかであり、

$$\partial_i(f)=\frac{\partial f}{\partial x^i}$$

が成立する。また、基底定理から $\forall V$ に対して

$$V=\sum_{i=1}^{n}V(x^i)\cdot\partial_i \quad \text{on } U$$

が成立する。

Proof

$\forall p\in U$ に対して $V_p\in T_p(M)$ であるため、基底定理より

$$V_p=\sum_{i=1}^{n}V(x^i)\cdot\partial_i|_p$$
$$=\sum_{i=1}^{n}V^i(p)\,\partial_i|_p.$$

$$\therefore V=V^1\partial_1+V^2\partial_2+\cdots+V^n\partial_n$$
$$=\sum_{i=1}^{n}V(x^i)\cdot\partial_i \quad \text{on } U \quad ■$$

→ 局所座標を用いてベクトル場を表した。

Def ($\mathcal{F}(M)$上の微分作用素)

$\mathcal{F}(M)$上の微分 $\mathcal{D}:\mathcal{F}(M)\longrightarrow\mathcal{F}(M)$

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ 以下の2つの性質を持つ関数. ($f.g\in\mathcal{F}(M)$、$a.b\in\mathbb{R}$)

(A1) 線形性 : $\mathcal{D}(af+bg)=a\cdot\mathcal{D}(f)+b\cdot\mathcal{D}(g)$

(A2) ライプニッツ則 : $\mathcal{D}(fg)=\mathcal{D}(f)\cdot g+f\cdot\mathcal{D}(g)$.

接ベクトルの定義から、ベクトル場$V\in\mathfrak{X}(M)$に対して関数

$$f\longrightarrow Vf$$

は$\mathcal{F}(M)$上の微分であることが分かる.

→ {線形性, ライプニッツ則}　(微分$\mathcal{D}$と接ベクトルVは同じ性質が定義されている)

Proof

ベクトル場$V\in\mathfrak{X}(M)$に対して、関数$\mathcal{D}:\mathcal{F}(M)\longrightarrow\mathcal{F}(M)$を

$$\mathcal{D}(f):=V(f)\qquad (f,\ V(f)\in\mathcal{F}(M))$$

と定義する。接ベクトルの定義(線形性、ライプニッツ則)より、

$$\mathcal{D}(af+bg)=V(af+bg)=aV(f)+bV(g)$$
$$=a\mathcal{D}(f)+b\mathcal{D}(g).$$

$$\mathcal{D}(fg)=V(fg)=V(f)\cdot g+f\cdot V(g)$$
$$=\mathcal{D}(f)\cdot g+f\cdot\mathcal{D}(g)$$

∴、接ベクトルの定義より、関数$f\longrightarrow Vf$は$\mathcal{F}(M)$上の微分であることを確認した. ■

以上のことから、V は多様体 M 上で well-defined なベクトル場.

$V(f) = \mathcal{D}(f) \in \mathcal{F}(M)$ であり、任意の $f \in \mathcal{F}(M)$ で成立するため、V は滑らかであり、微分 $\mathcal{D}$ が一意に決まる.

(M 上のベクトル場 V が滑らか $\Longleftrightarrow$ $\forall f \in \mathcal{F}(M)$ に対して Vf が滑らか)

以降、必要に応じてベクトル場を「$\mathcal{F}(M)$ 上の微分」として扱う.

Def (かっこ積 bracket)

ベクトル場 $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ に対して、演算子 $[V, W] : \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$ を

$$[V, W] := VW - WV$$

と定義する. $[V, W]$ は V と W の かっこ積 (bracket) と呼ぶ.

VW は関数 f を $V(Wf)$ に写し、WV は f を $W(Vf)$ に写す.

$[V, W]$ は $\mathcal{F}(M)$ の微分である (したがって、M 上の滑らかなベクトル場)

Proof

かっこ積の定義より、$[V, W](f)$ は、

$$[V, W](f) = V(Wf) - W(Vf)$$

である. 線形性とライプニッツ則をそれぞれ確認する.

(i) 線形性について

$$
\begin{aligned}
[V,W](af+bg) &= V(W(af+bg)) - W(V(af+bg)) \\
&= V(a\cdot Wf + b\cdot Wg) - W(a\cdot Vf + b\cdot Vg) \\
&= a\cdot V(Wf) + b\cdot V(Wg) - a\cdot W(Vf) - b\cdot W(Vg) \\
&= a\left(V(Wf) - W(Vf)\right) + b\left(V(Wg) - W(Vg)\right) \\
&= a[V,W](f) + b[V,W](g).
\end{aligned}
$$

ベクトル場の線形性

(ii) ライプニッツ則について

$$
\begin{aligned}
[V,W](fg) &= V(Wfg) - W(Vfg) \\
&= V\left(W(f)\cdot g + f\cdot W(g)\right) - W\left(V(f)\cdot g + f\cdot V(g)\right) \\
&= V\left(W(f)\cdot g\right) + V\left(f\cdot W(g)\right) - W\left(V(f)\cdot g\right) - W\left(f\cdot V(g)\right) \\
&= V(W(f))\cdot g + \cancel{W(f)\cdot V(g)} + \cancel{V(f)\cdot W(g)} + f\cdot V(W(g)) \\
&\quad - \left(W(V(f))\cdot g + \cancel{V(f)\cdot W(g)} + \cancel{W(f)\cdot V(g)} + f\cdot W(V(g))\right) \\
&= f\left(V(W(g)) - W(V(g))\right) + g\left(V(W(f)) - W(V(f))\right) \\
&= f[V,W](g) + g[V,W](f).
\end{aligned}
$$

ベクトル場のライプニッツ則

(i)、(ii) より、$[V,W](f)$ が線形性とライプニッツ則を満たすことから、

$\mathcal{F}(M)$ 上の微分であることを確認した ■

(M上の滑らかなベクトル場でもある)