Theorem IV の証明残り

- $N_f = 1 \Longrightarrow$ 次のいずれか ....
- $N_f \neq 3$ であること.

(d) 〃 〃

Thm IV $\quad N_f$: $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ の合同類の数

$\Rightarrow N_f \neq 3$ であり.

(1) $N_f = 4 \Longleftrightarrow C, ds^2$ はどちらも symmetry をもたない.

(2) $N_f = 1 \overset{\Rightarrow}{\Longleftrightarrow}$ 次のいずれか.

- (a₁) C: 平面内. かつ. $\exists T$: ori-reversing symmetry (of C)
- (a₂) C: 平面内. かつ. $\exists \varphi$: effective 〃 (of ds^2)
- (b₁) ds^2: non-eff. かつ. $\exists T$: ori.-reversing symmetry (of C).
- (b₂) 〃 〃 $\exists \varphi$: effective 〃 (of ds^2).
- (c) Prop 5.1 と同じ
- (d) 〃

Prop 5.1 の (3.4)-CE 版

f と $\check{f}$ が合同

$\Longleftrightarrow$

- (a) C が平面曲線.
- (b) ds_f^2 が non-effective symmetry をもつ.
- (c) C: 正の ori-reversing sym. をもつ. ds_f^2: ori-reversing effective sym. をもつ.
- (d) C: 負の ori-reversing sym. をもつ. ds_f^2: ori-preserving effective sym. をもつ.

HW 7/25 のノート (pdf ファイル) の $\boxed{\text{命題2.1}}$ を用いて示す.

↖ これも示す.

((2)、$\Longrightarrow$ を示す)

特に f と $\check{f}$ が合同なので

仮定より f、$\check{f}$、f_*、$\check{f}_*$ が合同であるため、Prop 5.1 より (a)(b)(c)(d) のいずれかを満たしている。

- Prop 5.1 (a) を満たしている場合

  f と f_* も合同であるため、$\exists T \in O(3)$、φ: diffeo s.t. $T \circ f \circ \varphi = f_*$ … $(*)$
  (a1) の両辺それぞれの第一基本形式は

  $\in O(3)$
  (左辺) $ds^2_{T\circ f\circ\varphi} = \varphi^* ds^2_f$ ($\because$ T は直交変換より内積を保つ)

  (右辺) $ds^2_{f_*} = ds^2_f$ ($\because$ f_* の性質より、第一基本形式が f と一致)

  であるため、$ds^2_f = \varphi^* ds^2_f$. よって、$\varphi$ は Id または symmetry のいずれかである. つまり、$\varphi(u,0) = (\pm u, 0)$ である.

  - T が ori-reversing symmetry の場合、Theorem IV の (a1) に該当.
  - T が ori-preserving symmetry または Id の場合、$v=0$ を $(*)$ に代入すると、

$$T\circ f\circ\varphi(u,0) = \begin{cases} T\circ f(u,0) & (\varphi \text{ が non-eff または Id}) \\ T\circ f(-u,0) & (\varphi \text{ が effective}) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} T\mathbb{C}(u) \\ T\mathbb{C}(-u) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mathbb{C}(u) \\ \mathbb{C}(-u) \end{cases}.$$

  となる. f_* は特異曲線をたどる向きが f と逆であるため、$f_*(u,0) = \mathbb{C}(-u)$ である.
  よって φ は effective でなければならず、これは (a2) に該当する.

- Prop 5.1 (b) を満たしている場合

  (先程と同様) f と f_* も合同であるため、$\exists T \in O(3)$、φ: diffeo s.t.
  $T \circ f \circ \varphi = f_*$ … $(*)$

  両辺の第一基本形式が一致するため、φ は Id か symmetry.

  - T が ori-reversing symmetry の場合、Theorem IV (b1) に該当.
  - T が ori-preserving symmetry または Id の場合、同様に $v=0$ を $(*)$ へ代入すると、

$$(f_*(u,0) =) T \circ f \circ \varphi(u,0) = \begin{cases} \mathbb{C}(u) & (\varphi \text{ が non-effective または } Id) \\ \mathbb{C}(-u) & (\varphi \text{ が effective}) \end{cases}$$

f と f_* は特異曲線をたどる向きが逆であるため、$f_*(u,0) = \mathbb{C}(-u)$. つまり φ は effective でないといけない.

よって、Theorem IV (b2) に該当する.

- Prop 5.1 (c) を満たしている場合、Theorem IV (c) も同じ条件であるため満たされている.

(Prop 5.1 (d) も同様)

以上より、(2) の十分条件 ($\Longrightarrow$) を示した.

$\boxed{(N_f \neq 3 \text{ であることの証明})}$

いずれかの symmetry を1つのみ存存する場合を考える.

● ds_f^2 に symmetry φ が存在する場合

φ が non-eff $\longrightarrow$ Prop 5.1 (b) より、f と $\check{f}$ が合同.

~~$g := f_* \circ \varphi$ とすると、~~ $\check{f} = f \circ \varphi$ を示したときと同様の議論で、

$$\check{f}_* = f_* \circ \varphi$$

となる. よって $N_f < 3$.

φ が effective $\rightarrow$ ~~$g := \check{f} \circ \varphi$ とすると、~~ $f \circ \varphi = \begin{cases} f_* & (\varphi \text{ が正}) \\ \check{f}_* & (\varphi \text{ が負}) \end{cases}$ を示すときの

同様の議論 (2025/001.pdf の (a2)) で、$\check{f} \circ \varphi$ は

$$\check{f} \circ \varphi = \begin{cases} \check{f}_* & (\varphi \text{ が正}) \\ f_* & (\varphi \text{ が負}) \end{cases}$$

となる. よって $N_f < 3$.

● C に symmetry T が存在する場合

T が ori-preserving symmetry $\longrightarrow$ Prop 5.1 (a) より、f と $\check{f}$ が合同 ($\check{f} = T \circ f$).

同様の議論で、$\check{f}_* = T \circ f_*$ が示される.

よって $N_f < 3$.

T が ori-reversing symmetry $\longrightarrow$ $T \circ f = \begin{cases} f_* & (\sigma = 1) \\ \check{f}_* & (\sigma = -1) \end{cases}$ を示すときの

同様の議論 (2025/001.pdf の (a1)) で、$T \circ \check{f}$ は

$$T \circ \check{f} = \begin{cases} \check{f}_* & (\sigma = 1) \\ f_* & (\sigma = -1) \end{cases}$$

となる. よって、$N_f < 3$.

(<3)

以上より、symmetry が1つ以上存在すると、$N_f \neq 3$ となる.

※ φ が non-effective の場合に $f_* \circ \varphi = \check{f}_*$ であることの証明

$g_* := f_* \circ \varphi$ とすると、第一基本形式が ds^2_f と一致し、$v=0$ とすると

$$g(u,0) = f_* \circ \varphi(u,0) = f_*(u,0) = C(-u)$$

であるため、$(g=)\ f_* \circ \varphi = f_*$ または $\check{f}_*$ である。$\lambda_*(u,v) := \det\left((f_*)_u, (f_*)_v, \nu_{f_*}\right)(u,v) \geq 0$ として、

$$\det\left((g)_u, (g)_v, \nu_g\right)(u,v) = \det\left((f_* \circ \varphi(u,v))_u, (f_* \circ \varphi(u,v))_v, \nu_{g_*}(u,v)\right)$$

$\nu_{g_*} = \varepsilon \nu_f \circ \varphi$

$$= \varepsilon\,(\det J)\,(\lambda_* \circ \varphi)(u,v)$$

$$= |\det J|\,(\lambda_* \circ \varphi)(u,v) \geq 0.$$

よって $\nu_g = \varepsilon_* \nu_{f_*} \circ \varphi$ は向きが同調した g の単位法ベクトル場。同様の流れで

$$x_g(u) = \varepsilon_* \left(\cos\theta_{f_*}(u)\, n(-u) + \sin\theta_{f_*}(u)\, b(-u)\right)$$

であるため、

$\varphi = \mathrm{Id}$ となるため矛盾。

$$\begin{cases} \varepsilon_* = 1 \text{ の場合、} \theta_g(0) = \theta_{f_*}(0) \text{ であるため、} f_* \circ \varphi = f_*. \times \\ \varepsilon_* = -1 \text{ の場合、} \theta_g(0) = \pi + \theta_{f_*}(0) \text{ であるため、} f_* \circ \varphi = \check{f}_*. \end{cases}$$

※ φ が effective の場合に $\check{f}$ が f_* または $\check{f}_*$ と合同であることの証明

$g := \check{f} \circ \varphi$ とする。第一基本形式は ds^2_f と等しく、特異集合 $\{v=0\}$ 上では

$$g(u,0) = \check{f} \circ \varphi(u,0) = \check{f}(-u,0) = C(-u)$$

であるため、$(g=)\ \check{f} \circ \varphi = f_*$ または $\check{f}_*$ である。$\check{\lambda}(u,v) := \det\left(\check{f}_u, \check{f}_v, \nu_{\check{f}}\right)(u,v) \geq 0$ とすると、

$$\det\left((\check{f} \circ \varphi(u,v))_u, (\check{f} \circ \varphi(u,v))_v, \nu_g(u,v)\right) = \underbrace{|\det J|}_{>0}\, \underbrace{(\check{\lambda} \circ \varphi)(u,v)}_{\geq 0} \geq 0$$

$\nu_g = \check{\varepsilon} \nu_{\check{f}} \circ \varphi$

よって、$\nu_g = \check{\varepsilon} \nu_{\check{f}} \circ \varphi$ は向きを同調した g の単位法ベクトル場である。同様の流れで

$$x_g(u) = -\check{\varepsilon}\left(\cos\theta_{\check{f}}(-u)\, n(-u) - \sin\theta_{\check{f}}(-u)\, b(-u)\right)$$

であるため、

$$\begin{cases} \check{\varepsilon} = 1 \text{ の場合、} \theta_g(0) = \pi - \theta_{\check{f}}(0) \text{ であるため、} (g=)\ \check{f} \circ \varphi = \check{f}_*. \\ \check{\varepsilon} = -1 \text{ の場合、} \theta_g(0) = -\theta_{\check{f}}(0) \text{ であるため、} \check{f} \circ \varphi = f_*. \end{cases}$$

※ T が ori-preserving symmetry の場合に $T\circ f_* = \check{f}_*$ であることの証明

$g := T\circ f_*$ とおくと、第一基本形式は ds^2_f と等しく、特異集合 $\{v=0\}$ 上では

$$g(u,0) = T\circ f_*(u,0) = T\mathbb{C}(-u) = \mathbb{C}(-u)$$

であるため、($g=$) $T\circ f_* = f_*$ または $\check{f}_*$ である. $\lambda_*(u,v) := \det\left((f_*)_u, (f_*)_v, \nu_{f_*}\right)(u,v) \geq 0$ とすると、

$$\det(g_u, g_v, \nu_g) = \det\left(T\circ(f_*(u,v))_u,\ T\circ(f_*(u,v))_v,\ \sigma T\nu_{f_*}(u,v)\right)$$

$\nu_g = \sigma T \nu_{f_*}$

$$= \sigma(\det T)\det\left((f_*)_u, (f_*)_v, \nu_{f_*}\right)(u,v)$$

$$= \lambda_*(u,v) \geq 0.$$

よって、$\nu_g = \sigma T\nu_{f_*}$ は向きを同調した g の単位法ベクトル場. 同様の流れで

$$x_g(u) = T x_{f_*}(u)$$

$$= T\left(\cos\theta_{f_*}(u)\, n(-u) + \sin\theta_{f_*}(u)\, b(-u)\right)$$

$u=0$ として、$Tn(0) = n(0)$ および $Tb(0) = \sigma b(0)$ を代入して

$$x_g(0) = \cos\theta_{f_*}(0)\, n(0) + \sigma\sin\theta_{f_*}(0)\, b(0)$$

となる. よって、　ori-preserving は負しか存在しない.

$$\begin{cases} \sigma = 1 & \text{ならば } \theta_g(0) = \theta_{f_*}(0) \text{ であるため } T\circ f_* = f_* \\ \sigma = -1 & \text{ならば } \theta_g(0) = -\theta_{f_*}(0) \text{ であるため } T\circ f_* = \check{f}_*. \end{cases}$$

※ T が ori-reversing symmetry の場合に $T\circ\check{f}$ が f_* または $\check{f}_*$ と合同であることの証明.

$g := T\circ\check{f}$ とすると、第一基本形式は ds^2_f と等しく、特異曲線 $\{v=0\}$ 上では

$$g(u,0) = T\circ\check{f}(u,0) = T\mathbb{C}(u) = \mathbb{C}(-u).$$

よって、$T\circ\check{f} = f_*$ または $\check{f}_*$. $\check{\lambda}(u,v) := \det\left(\check{f}_u, \check{f}_v, \nu_{\check{f}}\right)(u,v) \geq 0$ とすると、

$$\det(g_u, g_v, \nu_g)(u,v) = \det\left(T\circ(\check{f}(u,v))_u,\ T\circ(\check{f}(u,v))_v,\ \sigma T\nu_{\check{f}}(u,v)\right)$$

$\nu_g = \sigma T\nu_{\check{f}}$

$$= \cancel{\sigma(\det T)}\,\check{\lambda}(u,v) \geq 0.$$

$\nu_g = \sigma T\nu_{\check{f}}$ は向きを同調した g の単位法ベクトル場. 同様の流れで

$$x_g(u) = T\, x_*(u)$$

$$= \cos\theta_*(u)\, T n(u) - \sin\theta_*(u)\, T b(u).$$ $u=0$ 代入して.

$$x_g(0) = \cos\theta_*(0)\, n(0) + \sigma \sin\theta_*(0)\, b(0)$$

となる. よって

$$\begin{cases} \sigma = 1 \text{ ならば } T \circ \check{f} = \check{f}_* \\ \sigma = -1 \text{ ならば、 } T \circ \check{f} = f_*. \end{cases}$$

($N_f = 4 \Rightarrow C,\ d s_f^2$ は symmetry をもたない の証明)

示したいこと　symmetry が 1個でも存在する $\Longrightarrow N_f < 4$

- ds_f^2 に symmetry φ が 存在する場合.

定理Ⅲ ((3.4)-CE 版) より、右同値類の数 $n_f \leq 2$. 一般性を失わずに f と $\check{f}$ が右同値であると仮定すると、右同値の定義より $f \circ \varphi = \check{f}$.

$\longrightarrow$ これは f と $\check{f}$ が 合同であるので、$N_f < 4$ となる.

- 特異曲線 C に ori-preserving symmetry T がある場合

T が ori-preserving $\Longleftrightarrow$ C は平面曲線
$\Longleftrightarrow$ f と $\check{f}$ は合同.
$\Longrightarrow$ $N_f < 4$.

- 特異曲線 C に ori-reversing symmetry T がある場合

$T \circ f$ の第一基本形式が ds_f^2 と一致し、$T \circ f(u, 0) = C(-u)$ であることから、

$$T \circ f = f_* \text{ または } \check{f}_*$$

となる. よって f は f_* か $\check{f}_*$ と 合同となるため、$N_f < 4$ となる.

以上より、(1) の十分条件 ($\Rightarrow$) を示した

($N_f = 4 \Leftarrow C.\ ds_f^2$ は symmetry をもたない の証明)

示したいこと　symmetry を持たない $\Longrightarrow$ 合同は矛盾する.

$\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ の いずれか 2つが合同であると仮定する. f と $g \in \{\check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ が合同であるとして一般性を失わない. Prop 5.1 の (a)(b)(c)(d) いずれも満たさないため、$g \neq \check{f}$ である. ☆
f と g が合同であるため、$\exists T \in O(3)$、$\exists \varphi$: diffeo s.t.

$$g = T \circ f \circ \varphi \quad \cdots (*)$$

と書ける. $(*)$ の第一基本形式について、

(左辺) $ds_g^2 = ds_f^2$

(右辺) $ds^2_{T\circ f\circ\varphi} = \varphi^* ds_f^2$

であるため、$ds_f^2 = \varphi^* ds_g^2$. φ は symmetry ではないので、$\varphi = \mathrm{Id}$ である. よって、
$(*)$ は $g = T \circ f$ と書ける. 特異曲線 $\{v = 0\}$ 上を考えると

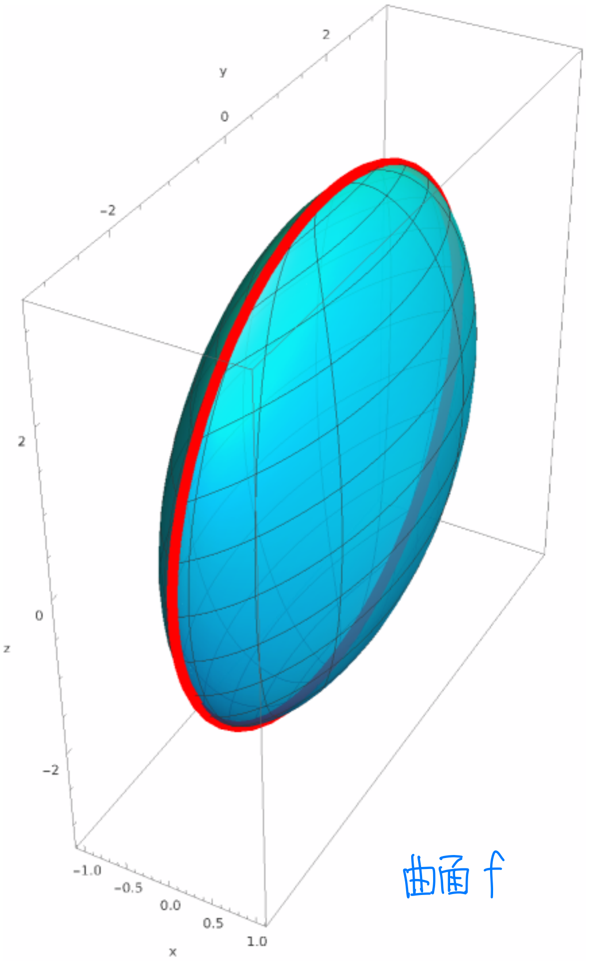
(左辺) $g(u, 0) = C(-u)$　（∵ ☆ より、g は f_* または $\check{f}_*$ ）

(右辺) $T \circ f(u, 0) = TC(u)$.

よって、$C(-u) = TC(u)$. これは T が ori-reversing symmetry でなければいけないため、symmetry を持たないことと矛盾.

$\therefore\ ds_f^2$, C が symmetry を持たない $\Longrightarrow N_f = 4$ ▨

$a=2 \quad b=c=4$



曲面 f

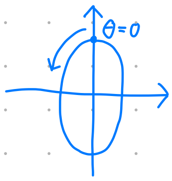
$(2\cos\varphi\sin\theta,\ 4\sin\varphi\sin\theta,\ 4\cos\theta)$

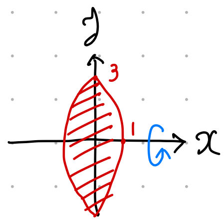
空間上の楕円から平行曲面をとばす ($t=1$)

Out[ ]= $\left\{2\,\mathrm{Cos}[\varphi]\,\mathrm{Sin}[\theta]\left(1-\dfrac{t}{\sqrt{\mathrm{Cos}[\theta]^2+\frac{1}{2}(5+3\,\mathrm{Cos}[2\varphi])\,\mathrm{Sin}[\theta]^2}}\right),\ \mathrm{Sin}[\theta]\left(4-\dfrac{t}{\sqrt{\mathrm{Cos}[\theta]^2+\frac{1}{2}(5+3\,\mathrm{Cos}[2\varphi])\,\mathrm{Sin}[\theta]^2}}\right)\mathrm{Sin}[\varphi],\ \mathrm{Cos}[\theta]\left(4-\dfrac{t}{\sqrt{\mathrm{Cos}[\theta]^2+\frac{1}{2}(5+3\,\mathrm{Cos}[2\varphi])\,\mathrm{Sin}[\theta]^2}}\right)\right\}$

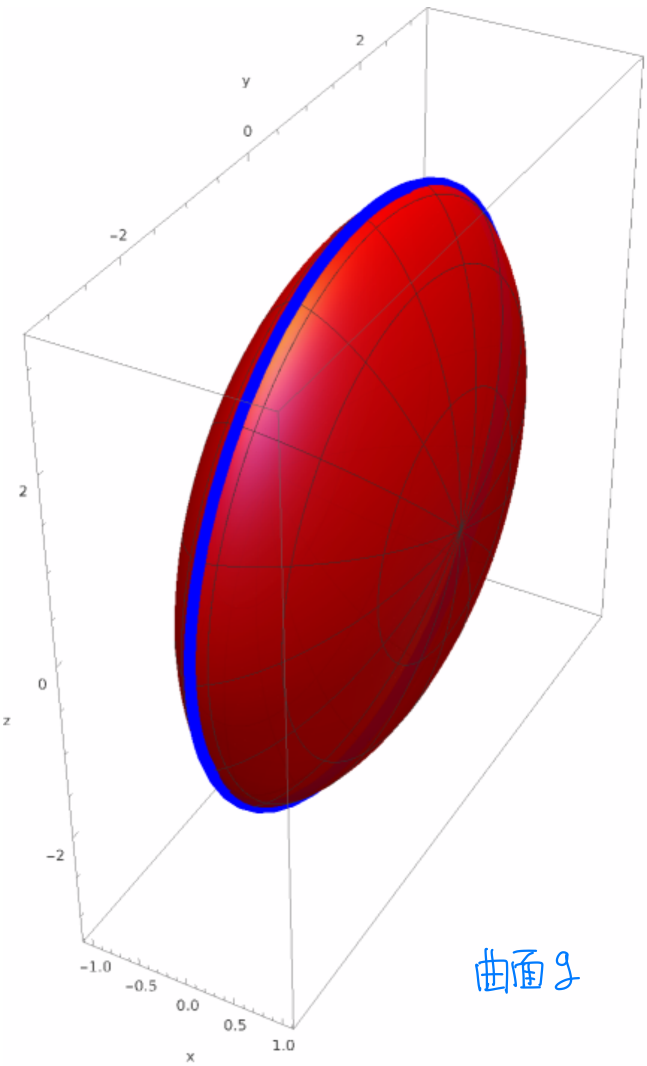
特異曲線：$f(\theta, \frac{\pi}{2}) = (0,\ 3\sin\theta,\ 3\cos\theta)$

$(\varphi = \frac{\pi}{2})$





楕円：$(2\cos(\theta+\pi),\ 4\sin(\theta+\frac{\pi}{2}))$



曲面 g

平面曲線 ($t=1$) を回転させる.

Out[ ]= $\left\{2\,\mathrm{Sin}[\theta]\left(-1+\dfrac{t}{\sqrt{\mathrm{Cos}[\theta]^2+4\,\mathrm{Sin}[\theta]^2}}\right),\ \mathrm{Cos}[\theta]\,\mathrm{Cos}[\varphi]\left(4-\dfrac{t}{\sqrt{\mathrm{Cos}[\theta]^2+4\,\mathrm{Sin}[\theta]^2}}\right),\ \mathrm{Cos}[\theta]\left(4-\dfrac{t}{\sqrt{\mathrm{Cos}[\theta]^2+4\,\mathrm{Sin}[\theta]^2}}\right)\mathrm{Sin}[\varphi]\right\}$

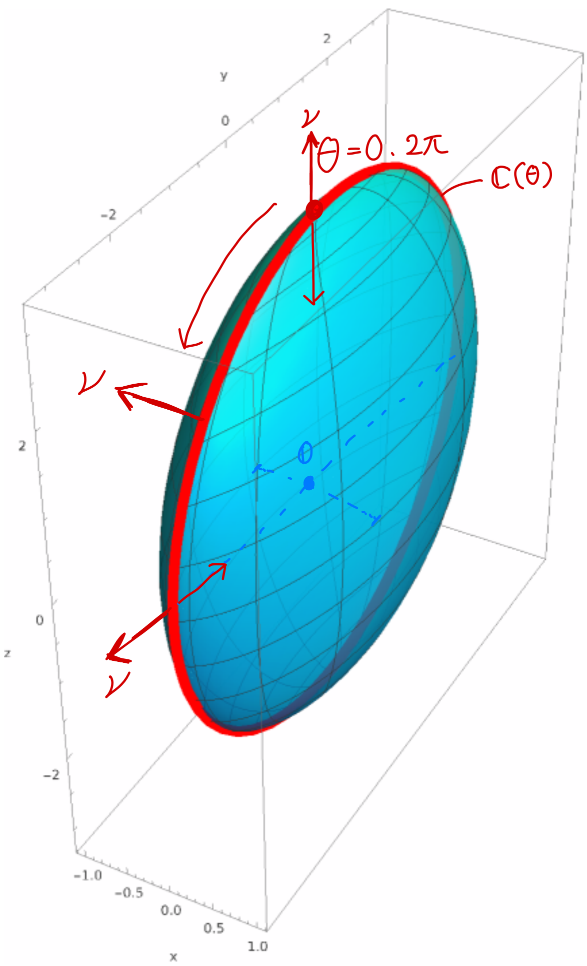
特異曲線：$g(0, \varphi) = (0,\ 3\cos\varphi,\ 3\sin\varphi)$

$(\theta = 0)$

今，(3, 4)-カスプ辺は定義より 3-type edge である．よって，系 9 より，(3, 4)-カスプ辺は第一種退化次数 2 特異点である．このことから，(3, 4)-カスプ辺の判定条件を以下で与えることができる．

定理 37. フロンタル $f : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ が $p \in \Sigma$ で (3, 4)-カスプ辺であることと，f が波面 (フロント) であり，p が第一種退化次数 2 特異点であることが同値である．

- f が波面(フロント) $\iff \begin{cases} \cdot\ \exists \text{単位法ベクトル } \nu \text{ s.t. } \langle f_u, \nu \rangle = \langle f_v, \nu \rangle = 0 \\ \cdot\ (f, \nu) : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2 \text{ が はめ込み} \end{cases}$ $\left(\begin{bmatrix} f_u & f_v \\ \nu_u & \nu_v \end{bmatrix} \text{ が ランク2} \right)$
- 点 P が 第一種特異点 $\iff$ 特異方向 と 退化方向 が 異なる.
- 点 P が 退化次数 2 特異点 $\iff \begin{cases} \cdot\ \operatorname{rank}(df)_p = 1 \\ \cdot\ \exists \check{\lambda}, \alpha \text{ s.t. } \begin{cases} \lambda = \alpha \check{\lambda} & (\alpha(p) \neq 0) \\ (\check{\lambda}_u, \check{\lambda}_v)(p) \neq (0, 0) \end{cases} \end{cases}$



- 特異曲線 $(\varphi = \frac{\pi}{2})$ 上 の 単位法ベクトル $\nu(\theta)$ は

$$\nu = \pm (0, \cos\theta, \sin\theta) \qquad (|\nu| = 1)$$

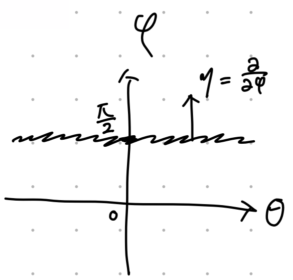
- 正則点上 の 単位法ベクトル $\nu(\theta, \varphi)$ は

$$\nu(\theta, \varphi) = \frac{f_\theta \times f_\varphi}{\| f_\theta \times f_\varphi \|}$$

$$f_\theta(\theta, \varphi) = \boxed{\qquad\qquad}$$
$$f_\varphi(\theta, \varphi) = \boxed{\qquad\qquad}$$

- f の 特異曲線 の 特異方向 : ∂_θ

退化ベクトル $\eta = \partial_\varphi$



$$\gamma = \begin{bmatrix} t \\ \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$$

9.1. 計量を用いた設定

U 上の点 p を第一種特異点とし，$\gamma(t)$ を $\gamma(0)=p$ となる特異曲線，$\eta(t)$ を γ に沿った退化ベクトル場とする．まず初めに特異曲率を考える．定義 33 では m が偶数の場合に符号を込めて特異曲率を定義した．ここで，m が奇数の場合における $m(=n+1)$-type edge に対しての特異曲率を定義する．

定義 47 (特異曲率). m を奇数，すなわち，n を偶数とする．$\hat{\gamma}:=f\circ\gamma$，$\hat{\nu}:=\nu\circ\gamma$ とする．このとき，

$$\kappa_s(t):=\frac{\det(\hat{\gamma}'(t),\hat{\gamma}''(t),\hat{\nu}(t))}{|\hat{\gamma}'(t)|^3}$$

を第一種特異点からなる $\hat{\gamma}(t)$ 上の**特異曲率**という．

以上の定義と定義 33 から，m が奇数の場合と偶数の場合で特異曲率の絶対値は定め方が一致する．