今回 ベクトル場, 1次微分形式

M: C^∞級多様体 (C^∞-mfd), $\mathcal{S} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$: Mのアトラス とする

M上の関数 $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ が C^∞級 (なめらか)
$\Longleftrightarrow$ $\forall(U,\varphi)\in\mathcal{S}$ に対して
$f\circ\varphi^{-1}: U' \longrightarrow \mathbb{R}$ が ($\mathbb{R}^m$上の関数として) C^∞級 ---- ☆

なめらかな関数の集合

$$C^\infty(M) := \{ f: M \longrightarrow \mathbb{R} : C^\infty\text{級関数} \}$$

は自然に可換環の構造を持つ

復習 集合Rが可換環
$\Longleftrightarrow$ 2つの演算 +(加法), ×(積) があって以下をみたすときをいう.

(1) $(R,+)$ はアーベル群, i.e. $\forall a,b,c\in R$ に対して
- $(a+b)+c = a+(b+c)$
- $\exists 0\in R$ st $0+a = a+0 = a$ (0:零元)
- $\forall a\in R$ に対して $\exists b\in R$ st $a+b=0$ (このとき $b=-a$ と表す)
- $a+b = b+a$

(2) $(R,\times)$ は可換な半群, i.e.
- $(a\times b)\times c = a\times(b\times c)$
- $\exists 1\in R$ st $1\times a = a\times 1 = a$ (1:単位元)
- $a\times b = b\times a$

(3) 分配律が成立つ, i.e.
$a\times(b+c) = a\times b + a\times c$

$\forall f,g\in C^\infty(M)$ に対して, M上の関数 $f+g$, $\boxed{f\times g}$ を

$$\begin{cases} (f+g)(p) := f(p)+g(p) & (\forall p\in M) \\ (fg)(p) := f(p)g(p) & (\ \ 〃\ \ ) \end{cases}$$

$f\times g$ を fg と書く

とするとなめらか
i.e. $f+g,\ fg \in C^\infty(M)$ が成立つ ← ☆を満たすことを確認すればよい.

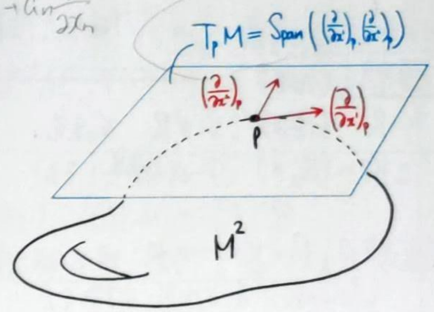
$(f+g)\circ\varphi^{-1} = f\circ\varphi^{-1} + g\circ\varphi^{-1}$

$(fg)\circ\varphi^{-1} = (f\circ\varphi^{-1})\cdot(g\circ\varphi^{-1})$ 一般に, (C^∞の積はC^∞)

$a_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + a_n\frac{\partial}{\partial x_n}$

接ベクトル (復習)

M^m: C^∞-mfd, $p\in M^m$
T_pM: p における M^m の接空間
(m次元ベクトル空間)
T_pM の元 $v\in T_pM$ を
$p\in M$ における接ベクトル という.
(方向微分)



Def $p\in M^m$ の近傍で定義された C^∞-関数 f に対し,
実数 $v(f)$ を対応させる操作
$f \longmapsto v(f)$
で, 以下の性質

(0) ある p の近傍 $W\subseteq U$ において $f,g\in C^\infty(W)$ が一致 $(f=g)$
$\Longrightarrow v(f) = v(g)$

(1) $a,b\in\mathbb{R}$ に対して $v(af+bg) = a\,v(f) + b\,v(g)$

(2) $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$

をみたすものを, 点pにおける方向微分 という

$(U,\varphi) = (U; x^1,\dots,x^m)$: 座標近傍

$$T_pM = \mathrm{Span}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p\right)$$
$$= \left\{ a_1\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p + a_2\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_p + \cdots + a_m\left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p \;\middle|\; a_1,\dots,a_m\in\mathbb{R} \right\}$$

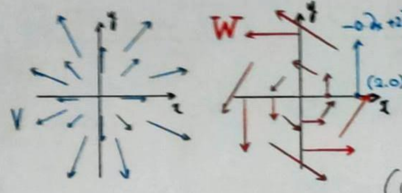
Span(·) ... (·)の線形結合

x^i方向にビ分する作用素.

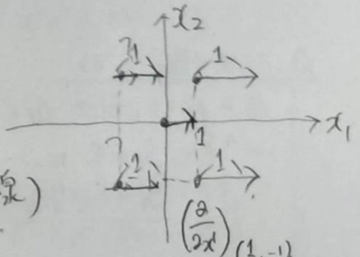
Def M上の<u>ベクトル場</u>とは
各点 $p\in M$ に接ベクトル $V_p \in T_pM$ を対応させるもの
$$M^m \ni p \longmapsto V_p \in T_pM$$

Example $(U,\varphi)=(U;x^1,\dots,x^m)$：座標近傍において
$\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^m}$ を「$\frac{\partial}{\partial x^i}_p := \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$ $(i=1,\dots,m)$」
と定めると、U上のベクトル場　$\frac{\partial}{\partial x^i}$ を ∂_i と表すこともある

Example $M=\mathbb{R}^2$, $V=x\partial_x+y\partial_y$, $W=-y\partial_x+x\partial_y$　　**Ex.** $M=\mathbb{R}^2$, $V=\frac{\partial}{\partial x_1}$ (定数)



(cf. 積分曲線)



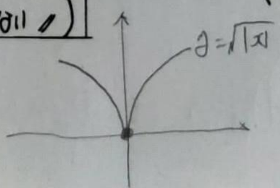
ベクトル場の滑らかさ
V：ベクトル場, $f\in C^\infty(M)$ に対して
$$Vf(p) := V_p(f) \quad (p\in M)$$
導関数　接ベクトル(方向微分)　点pにおけるf方向へのビブン
によりM上の関数 Vf が定まる　$Vf\in C^\infty(M)$ とは限らない

Def M上のベクトル場Vが<u>なめらか</u> (C^∞級)
$\Longleftrightarrow$ $^\forall f\in C^\infty(M)$ に対して、$Vf\in C^\infty(M)$

エックス $\mathfrak{X}(M) := \{$M上のなめらかなベクトル場$\}$

Ex $M=\mathbb{R}^2$, $V=\frac{\partial}{\partial x^1}$ は C^∞級ベクトル場
☺ $^\forall f\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ に対して、
$$Vf=\frac{\partial f}{\partial x^1}\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$$

Example $V=x\partial_x+y\partial_y\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$
☺ $^\forall f(x,y)\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ に対し、
$$\begin{aligned} Vf &= (x\partial_x+y\partial_y)(f) \\ &= x\partial_x(f)+y\partial_y(f) \quad \left(=x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ &= x f_x(x,y)+y f_y(x,y)\in C^\infty(\mathbb{R}^2) \ // \end{aligned}$$
$\hat V=\sqrt{|x|}\,\partial_x$ はなめらかでない
☺ $\hat V x=(\sqrt{|x|}\,\partial_x)x=\sqrt{|x|}\,\partial_x(x)=\sqrt{|x|}$: $x=0$ において微分可能でない //
意地悪に選んだ　$\sqrt{|x|}\cdot\frac{\partial x}{\partial x}$　1



局所座標による表示
V：M上のベクトル場
$(U,\varphi)=(U;x^1,\dots,x^m)$：座標近傍とする

・各点 $p\in U$ において、$V_p\in T_pM$ なので
$^\exists V^1(p),\dots,V^m(p)\in\mathbb{R}$ s.t.
$$V_p = V^1(p)\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p + V^2(p)\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_p+\cdots+V^m(p)\left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p$$
→ T_pM の $a_1,\dots,a_n$ を $V^1(p),\dots,V^m(p)$ に換えたもの (pに依存)

・$i=1,\dots,m$ に対して
$V^i: U\ni p\longmapsto V^i(p)\in\mathbb{R}$
により $V^1,\dots,V^m$ はU上の関数
$$\begin{array}{ccc} V^i: U & \to & \mathbb{R} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ p & \mapsto & V^i(p) \end{array}$$

・つまり $^\forall$M上のベクトル場, $^\exists$U上の関数 $V^1,\dots,V^m$
s.t. $V=V^1\partial_1+V^2\partial_2+\cdots+V^m\partial_m$ (on U)

Prop $V\in\mathfrak{X}(M)$ $\Longleftrightarrow$ 任意の座標近傍 $(U;x^1,\dots,x^m)$ に対して
$V=V^1\partial_1+\cdots+V^m\partial_m$ と表すとき $V^i\in C^\infty(U)$ $(^\forall i=1,\dots,m)$
C^∞ベクトル場の集合

※・なめらかの積 → なめらか
　・なめらかの和 → なめらか

(proof) ($\Longleftarrow$) $^\forall f\in C^\infty(M)$ に対して ※
$$\begin{aligned} Vf &= V^1\partial_1(f)+\cdots+V^m\partial_m(f) \\ &= V^1\frac{\partial f}{\partial x^1}+\cdots+V^m\frac{\partial f}{\partial x^m} : C^\infty\text{級} \ // \end{aligned}$$
C^∞級　C^∞級 (∵ f なめらか)

($\Longrightarrow$) $V=V^1\partial_1+\cdots+V^m\partial_m$ と表す. 各 V^i がU上なめらかを示す
$^\forall f\in C^\infty(M)$ に対して $Vf\in C^\infty(M)$ なので　fが滑らかなら導関数Vfもなめらか
$f=x^i$ $(i=1,\dots,m)$ に対して $Vx^i\in C^\infty(U)$
一方 $Vx^i = V^1\frac{\partial x^i}{\partial x^1}+V^2\frac{\partial x^i}{\partial x^2}+\cdots+V^m\frac{\partial x^i}{\partial x^m} = V^i$　∴ $V^i\in C^\infty(U)$ $(^\forall i=1,\dots,m)$
iのときのみ1

$f=x^1$
$f=x^2$
⋮
$f=x^m$ で ~~[illegible]~~
m回確認すればOK

5

$\mathfrak{X}(M)$の代数構造 ← ベクトル空間の一般化

復習（加群）

R：可換環，$1 \in R$：単位元
$K=(K,+)$：アーベル群とする

作用 $R \times K \longrightarrow K$ が
（$^\forall r,s \in R$，$^\forall X,Y \in K$ に対して）

$$\begin{cases} (1)\ r(X+Y)=rX+rY \\ (2)\ (rs)X=r(sX) \\ (3)\ 1X=X \end{cases}$$

をみたす

このとき K を R-加群（R-module）という

とくに R：体のとき K は R-ベクトル空間という

和の定義 ▨ $^\forall V,W \in \mathfrak{X}(M)$ に対して ベクトル場 $V+W$ を
$(V+W)_p := V_p + W_p$
とおくと $V+W$ なめらか （V_pとW_pがなめらか → 和もなめらか）
$V+W \in \mathfrak{X}(M)$ ← $\mathfrak{X}(M)$はアーベル群

▨ $^\forall V \in \mathfrak{X}(M)$，$^\forall f \in C^\infty(M)$ に対して，（定数 a を関数 f に換えた）
ベクトル場 fV を
$(fV)_p := f(p)V_p$
とおくと fV もなめらか
$fV \in \mathfrak{X}(M)$ ← $\mathfrak{X}(M)$は$C^\infty(M)$を係数環とする$C^\infty(M)$-加群

スカラ倍の定義 ▨ 定数関数として $\mathbb{R} \subseteq C^\infty(M)$
$^\forall V \in \mathfrak{X}(M)$ $^\forall a \in \mathbb{R}$ に対して，$(aV)_p := a\,V_p$
とすると，$aV \in \mathfrak{X}(M)$ ← $\mathfrak{X}(M)$は $\mathbb{R}$上ベクトル空間（無限次元）

6

1次微分形式

復習（双対ベクトル空間）

V：ベクトル空間とする

$V^* := \{f : V \to \mathbb{R} \mid f$は線形写像（関数）$\}$

とおくと $\boxed{V^*}$：ベクトル空間
Vの双対ベクトル空間という

∵ $f,g \in V^*$，$t \in \mathbb{R}$ に対し
$f+g$，$tf : V \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$\begin{cases} (f+g)(v) := f(v)+g(v) & (v \in V) \\ (tf)(v) := t \cdot f(v) & (v \in V) \end{cases}$$

と定めると $f+g$，$tf \in V^*$

和とスカラー倍がV^*に含まれる証明
$f \in V^*$（線形関数）より，
$^\forall c_1,c_2 \in \mathbb{R}$，$^\forall v_1,v_2 \in V$ に対して
$f(c_1v_1+c_2v_2)=c_1f(v_1)+c_2f(v_2)$
$g(c_1v_1+c_2v_2)=c_1g(v_1)+c_2g(v_2)$
$(f+g)(c_1v_1+c_2v_2)=c_1(f+g)(v_1)+c_2(f+g)(v_2)$

Ex $\mathbb{R}^3=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \,\middle|\, x,y,z \in \mathbb{R}\right\}$：列ベクトル空間と呼ぼう
$f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$：線形 は
$^\exists a,b,c \in \mathbb{R}$ を用いて $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = ax+by+cz$ と表わされる $=(a\ b\ c)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

∴ $(\mathbb{R}^3)^*=\{(a\ b\ c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$：行ベクトル空間

双対基底 $\dim V = m$ とする
$\{e_1,\dots,e_m\}$：Vの基底に対し，$\sigma^1,\dots,\sigma^m \in V^*$ を

$$\begin{matrix} \sigma^1(e_1)=1, & \sigma^1(e_2)=0, & \cdots, & \sigma^1(e_m)=0 \\ & & \vdots & \\ \sigma^m(e_1)=0, & \sigma^m(e_2)=0, & \cdots, & \sigma^m(e_m)=1 \end{matrix}$$

つまり $\sigma^i(e_j)=\delta^i_j$（クロネッカーのデルタ）

となるように定めると $\{\sigma^1,\dots,\sigma^m\}$：$V^*$の基底となる
$\{e_1,\dots,e_m\}$に関する双対基底という

$\{\sigma^1,\dots,\sigma^m\}$が$V^*$の基底
⟺ (1) $\sigma^1,\dots,\sigma^m$が1次独立
$(t_1\sigma^1+t_2\sigma^2+\cdots+t_m\sigma^m=0 \Rightarrow t_1=\cdots=t_m=0)$
(2) $^\forall f \in V^*$ に対して，
$^\exists a_1,\dots,a_m \in \mathbb{R}$
s.t. $f=a_1\sigma_1+\cdots+a_m\sigma_m$

Ex $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$：$\mathbb{R}^3$の基底
$\{e_1,e_2,e_3\}$の双対基底は
$\sigma^1=(1,0,0)$，$\sigma^2=(0,1,0)$，$\sigma^3=(0,0,1)$ $\in (\mathbb{R}^3)^*$

M^m : C^∞-mfd, $p \in M$ とする

「双対」のこと

Def 接空間 T_pM の双対空間を
T_p^*M : 余接空間 (cotangent space) という
$T_p^*M := \{\alpha : T_pM \to \mathbb{R} \text{ 線形関数}\}$
T_p^*M の元を余接ベクトル (cotangent vector) という

Def M 上の1次微分形式 θ とは
M の各点 $p \in M$ に対して 余接ベクトル $\theta_p \in T_p^*M$ を対応させるもの
$\theta : M \ni p \longmapsto \theta_p \in T_p^*M$

$X \in \mathfrak{X}(M)$ は $M \to T_pM$, $p \mapsto X_p$

双対

1次微分形式 は $M \to T_p^*M$, $p \mapsto \alpha_p$

なめらかさ

1-form

M 上のベクトル場 V, 1次微分形式 θ に対して
$\theta V(p) := \theta_p(V_p) \in \mathbb{R}$ $({}^\forall p \in M)$
$\theta_p : T_pM \to \mathbb{R}$, $V_p \in T_pM$
により M 上の関数 θV が定まる
← C^∞ 級かは不明

Def 1次微分形式 θ がなめらか
$\Longleftrightarrow$ ${}^\forall V \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $\theta V \in C^\infty(M)$

V がなめらか
$\Longleftrightarrow$ ${}^\forall f \in C^\infty(M)$ に対して $Vf \in C^\infty(M)$

$\Omega^1(M) := \{M \text{ 上のなめらかな 1次微分形式}\}$
← $\mathfrak{X}(M)$ と同様に $C^\infty(M)$-加群の構造をもつ

(※) $\Omega^k(M) = \{C^\infty \text{級 } k \text{次微分形式}\}$

$\Omega^0(M)$

外微分 ${}^\forall f \in C^\infty(M)$ に対し 1次微分形式 df を
$df_p(v) := v(f)$ $({}^\forall v \in T_pM, {}^\forall p \in M)$
と定める. df を f の外微分 という

$dx^1{}_p\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p(x^1)$

(★) df はなめらか (すなわち $df \in \Omega^1(M)$)

→ df_p は線形関数　$d : C^\infty(M) \to \Omega^1(M)$

$df_p : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ は線形

$df_p(c_1v_1 + c_2v_2)$
$= (c_1v_1 + c_2v_2)(f)$
$= c_1 f(v_1) + c_2 f(v_2)$
$= c_1\, df_p(v_1) + c_2\, df_p(v_2)$

df は C^∞ 級 1-form $\Longleftrightarrow$ ${}^\forall V \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $df(V)$ は C^∞ 級関数

局所座標表示

$(U, \varphi) = (U; x^1, \dots, x^m)$: 座標近傍 において
$x^i \in C^\infty(U)$ $(i = 1 \cdots m)$
$\Longrightarrow dx^1, \dots, dx^m \in \Omega^1(U)$

よって各 $p \in U$ において $(dx^i)_p \in T_p^*M$ $(i = 1, \dots, m)$

Lem $(dx^i)_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p = \delta^i_j$ $({}^\forall i, j = 1, \dots, m)$

$\Longrightarrow$ $\{(dx^1)_p, \dots, (dx^m)_p\}$ は $\left(\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p\right\} \text{ に関する}\right)$ T_p^*M の双対基底

(:) 外微分の def
$(dx^1)_{(p)}\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p x^1 = 1$
$(dx^1)_{(p)}\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_p x^2$ ← 外微分の定義 $= 0$

θ : 1次微分形式 とする.
- 各点 $p \in U$ に対して $\theta_p \in T_p^*M = \mathrm{Span}((dx^1)_p, \dots, (dx^m)_p)$
  $\rightsquigarrow {}^\exists \theta_1(p), \dots, \theta_m(p) \in \mathbb{R}$ s.t.
  $\theta_p = \theta_1(p)(dx^1)_p + \theta_2(p)(dx^2)_p + \dots + \theta_m(p)(dx^m)_p$
- $\theta_1, \dots, \theta_m$ は U 上の関数 : $\theta_i : U \ni p \longmapsto \theta_i(p) \in \mathbb{R}$
- よって任意の1次微分形式 θ は 関数 $\theta_1 \cdots \theta_m$ を用いて
  $\theta = \theta_1 dx^1 + \dots + \theta_m dx^m$ (on U)
  と表わされる

Prop $\theta \in \Omega^1(M)$ (θ が C^∞ 級で1-form)　ノート P4 Prop 参照
$\Longleftrightarrow$ 任意の座標近傍 $(U; x^1, \dots, x^m)$ に対して
$\theta = \theta_1 dx^1 + \dots + \theta_m dx^m$ と表すとき $\theta_i \in C^\infty(U)$ $({}^\forall i = 1, \dots, m)$

${}^\forall \theta \in \Omega^1(U)$ に対し $\theta = \theta_1 dx^1 + \dots + \theta_m dx^m$ の θ_i は $\theta_i = \theta(\partial_i)$ で求められる
とくに $f \in C^\infty(M)$ に対して $df(\partial_i) = \partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x^i}$ より

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}dx^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^m}dx^m}$$

と表わされる (全微分)

外微分の定義

(:) $\theta\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right) = \left(\theta_1 dx^1 + \theta_2 dx^2 + \dots + \theta_m dx^m\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)$
$= \theta_1 \cdot dx^1\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right) + \dots + \theta_2 \cdot dx^2\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right) + \dots = \theta_2$