接ベクトル∈$T_p(M)$ を3つ入れる

→ 接ベクトル∈$T_p(M)$が1コ

1

前回 曲率作用素 $R_{xy}z$ $(x, y, z \in T_pM)$

Prop (曲率作用素の性質)

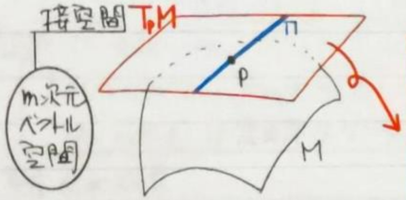
(1) $R_{xy} = -R_{yx}$ $({}^\forall x, y \in T_pM)$ $(\Rightarrow R_{vv} = 0)$

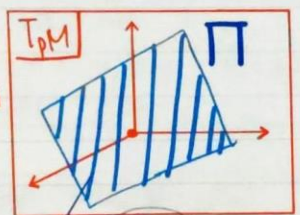
(2) $\langle R_{xy}v, w\rangle = -\langle R_{xy}w, v\rangle$ $({}^\forall x, y, v, w \in T_pM)$

(3) $R_{xy}z + R_{yz}x + R_{zx}y = 0$ $({}^\forall x, y, z \in T_pM)$ 第1ビアンキ恒等式

(4) $\langle R_{xy}v, w\rangle = \langle R_{vw}x, y\rangle$ $({}^\forall x, y, v, w \in T_pM)$

今回 断面曲率 (スカラー値)





2次元部分ベクトル空間 $\Pi \subseteq T_pM$ を接平面という

$\Pi \subseteq T_pM$: 接平面 に対して

$av+bw$

v, w : Πの基底 (つまり $\Pi = \mathrm{Span}\{v, w\}$) とする

→ とくに, $v, w \in T_pM$: 1次独立

$\Rightarrow \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2 > 0$

$= Q(v, w)$ とおく

$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$

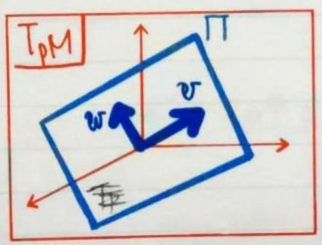
$v, w \in T_p(M)$ $K(v, w) := \dfrac{\langle R_{vw}v, w\rangle}{Q(v, w)} \in \mathbb{R}$ とおく (Q>0だから ok)

Prop $\{v, w\}, \{v', w'\}$: Πの基底 $\Longrightarrow K(v, w) = K(v', w')$ (後で証明)

∴ Kは Πの基底のとり方に依らず Πのみに依存

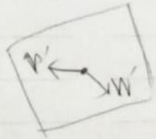
$K(\Pi) := K(v, w)$ と表される

Def $K(\Pi)$をΠの断面曲率 (sectional curvature) と呼ぶ



$\langle ○, □\rangle$

内積 : スカラー値



2

$K(v, w) = \dfrac{\langle R_{vw}v, w\rangle}{Q(v, w)}$

$K(v', w') = \dfrac{\langle R_{v'w'}v', w'\rangle}{Q(v', w')}$

Prop $\{v, w\}, \{v', w'\}$: Πの基底 $\Longrightarrow K(v, w) = K(v', w')$

proof $\exists a, b, c, d \in \mathbb{R}$ s.t. $\begin{bmatrix} v' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$

$\begin{cases} v' = av + bw \\ w' = cv + dw \end{cases}$ かつ $ad - bc \neq 0$ と表わされる

逆行列の存在

双線形性で展開

$\langle v', v'\rangle = \langle av+bw, av+bw\rangle$

$= a^2\langle v, v\rangle + 2ab\langle v, w\rangle + b^2\langle w, w\rangle$

$= a^2X + 2abY + b^2Z$

$\langle v', w'\rangle = acX + (ad+bc)Y + bdZ$

$\langle w', w'\rangle = c^2X + 2cdY + d^2Z$

Qの定義 $Q(v', w') = \langle v', v'\rangle\langle w', w'\rangle - \langle v, w\rangle^2$

$Q(v', w') = (a^2X + 2abY + b^2Z)(c^2X + 2cdY + d^2Z) - \{acX + (ad+bc)Y + bdZ\}^2$

$= \cdots$

$= (ad-bc)^2 \underbrace{Q(v, w)}_{XZ - Y^2}$

一方, 曲率作用素の性質(前回)より

$\begin{cases} R_{vw} = -R_{wv} & \text{—— ①} \Rightarrow R_{vv} = 0 \\ \langle R_{vw}x, y\rangle = -\langle R_{vw}y, x\rangle & \text{—— ②} \Rightarrow \langle R_{..}x, x\rangle = 0 \end{cases}$

①より $R_{v'w'} = R_{(av+bw),(cv+dw)} = R_{av,dw} + R_{bw,cv} = (ad-bc)R_{vw}$ (双線形性)

②より $\langle R_{..}v', w'\rangle = \langle R_{..}(av+bw), cv+dw\rangle$

$= \langle R_{..}(av), dw\rangle + \langle R_{..}(bw), cv\rangle = (ad-bc)\langle R_{..}v, w\rangle$

より $\langle R_{v'w'}v', w'\rangle = (ad-bc)\langle R_{vw}v', w'\rangle$ (∵ ~~②~~ ①)

$= (ad-bc)^2\langle R_{vw}v, w\rangle$ (∵ ②)

$\therefore \dfrac{\langle R_{v'w'}v', w'\rangle}{Q(v', w')} = \dfrac{\cancel{(ad-bc)^2}\langle R_{vw}v, w\rangle}{\cancel{(ad-bc)^2}Q(v, w)} = \dfrac{\langle R_{vw}v, w\rangle}{Q(v, w)}$ □

$\underbrace{R_{av,dw}}_{ad R_{v,w}} + \underbrace{R_{bw,cv}}_{bc R_{w,v}} = R_{av,dw} - R_{cv,bw}$

$= (ad-bc)R_{vw}$

断面曲率

☆ K は M 上の関数ではない．$G(2,T_pM):=\{\Pi\subseteq T_pM \mid 2$次元部分空間$\}$ とおく

$G(2,M):=\bigcup_{p\in M} G(2,T_pM)$ とおくと K は $G(2,M)$ 上の関数．$\underline{G(2,T_pM)}$ グラスマン多様体

$(K: G(2,M)\to\mathbb{R})$

☆ リーマン曲率テンソル R ⇝ 断面曲率 K を定めるが．

復元可能　実は逆もOK！（詳細は省略）　同じ情報量

定曲率リーマン多様体

Def $\forall p\in M$ において，$\forall\Pi\subseteq T_pM$：2次元部分空間に対して

$K(\Pi)$ が定数 となるとき

リーマン多様体 (M,g) を 定曲率リーマン多様体 という．

Lem C：定数とする．(M,g)：リーマン多様体とする．

$\forall p\in M$ において $R_{xy}z = C(\langle z,x\rangle y-\langle z,y\rangle x)$　$(\forall x,y,z\in T_pM)$

$\Rightarrow (M,g)$ は定曲率リーマン多様体である

実は逆が成立：

Prop (M,g)：定曲率$_C$ $\Longleftrightarrow$ $\forall p\in M$, $\forall x,y,z\in T_pM$ に対して

$R_{xy}z = C(\langle z,x\rangle y-\langle z,y\rangle x)$

Example $\mathbb{E}^m=(\mathbb{R}^m,g_E)$, $g_E=(dx^1)^2+\cdots+(dx^m)^2$ $\leftarrow \begin{cases} g_{ii}=1 \\ g_{ij}=0 \ (i\neq j)\end{cases}$

ユークリッド空間

$\forall i,j,k,l$ に対して $R^i_{jkl}=0$

$\mathbb{E}^m$ のリーマン曲率テンソル R は $\boxed{R=0}$　flat（平坦 という）　∴ $\mathbb{E}^m$ は $\underline{定曲率0}$

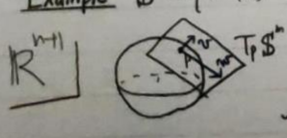
Example $\mathbb{H}^m=(\mathbb{R}^m_+,g_H)$：($m$次元) 双曲空間

$$\left(\begin{aligned} \mathbb{R}^m_+ &:= \{(x^1,\dots,x^m)\in\mathbb{R}^m \mid x^m>0\} \\ g_H &:= \sum_{i=1}^m \frac{(dx^i)^2}{(x^m)^2} = \frac{1}{(x^m)^2}\left((dx^1)^2+\cdots+(dx^m)^2\right)\end{aligned}\right)$$

断面曲率 = −1

$\underline{\mathbb{H}^m \text{は定曲率} (-1) \text{を持つ}}$

Example $\mathbb{S}^m=\{x=(x^1,\dots,x^{m+1})\in\mathbb{R}^{m+1} \mid (x^1)^2+\cdots+(x^{m+1})^2=1\}$：単位球面



$g_s(v,w):=v^1w^1+\cdots+v^{m+1}w^{m+1}$

（$\mathbb{E}^n$ のベクトルと思って内積をとる）．

⇝ g_s：$\mathbb{S}^m$ のリーマン計量　$\mathbb{S}^m=(\mathbb{S}^m,g_s)$　$\underline{\mathbb{S}^m \text{は定曲率} 1 \text{を持つ}}$

2次元リーマン多様体　$m=2$ とする．

- T_pM：2次元なので，断面曲率 $K(\Pi)=K(T_pM)=K(p)$

K は M 上の関数になる．

└ ガウス曲率 という．

$\frac{\partial}{\partial u}$ $\frac{\partial}{\partial v}$

K は E^3 の曲面のガウス曲率の一般化

∘ (M,g) の座標近傍 $(U;u,v)$ において

$g = g_{11}du^2+2g_{12}du\,dv+g_{22}dv^2$

$= E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$ とする

$g_{11}=g(\partial_u,\partial_u)=\langle\partial_u,\partial_u\rangle$
$g_{12}=\langle\partial_u,\partial_v\rangle$
$g_{22}=\langle\partial_v,\partial_v\rangle$

$K=\frac{\langle R_{uv}u,n\rangle}{Q(u,v)}$

∘ $\{(\partial_u)_p,(\partial_v)_p\}$：$T_pM$ の基底

$Q(\partial_u,\partial_v)=\langle\partial_u,\partial_u\rangle\langle\partial_v,\partial_v\rangle-\langle\partial_u,\partial_v\rangle^2 = EG-F^2 > 0$

∘ $K=\dfrac{\langle R_{\partial_u\partial_v}\partial_u,\partial_v\rangle}{EG-F^2}$　$R_{\partial_u\partial_v}(\partial_j)=\sum R^i_{jkl}\partial_i$

∘ $R_{\partial_u\partial_v}\partial_u = R_{\partial_1\partial_2}\partial_1=\sum_{i=1}^2 R^i_{112}\partial_i = R^1_{112}\partial_1+R^2_{112}\partial_2$ より

$K=\dfrac{\langle R^1_{112}\partial_1+R^2_{112}\partial_2,\partial_2\rangle}{EG-F^2}=\dfrac{R^1_{112}F+R^2_{112}G}{EG-F^2}$　（内積を実際に計算した）

∘ $R^i_{jkl}=\frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^i_{lj}-\frac{\partial}{\partial x^l}\Gamma^i_{kj}+\sum_{\alpha=1}^m\left(\Gamma^i_{k\alpha}\Gamma^\alpha_{lj}-\Gamma^i_{l\alpha}\Gamma^\alpha_{kj}\right)$ を代入すると

$$\boxed{K=\frac{E\left(E_vG_v-2F_uG_v+(G_u)^2\right)+G\left(E_uG_u-2E_uF_v+(E_v)^2\right)}{4(EG-F^2)^2} + \frac{F\left(E_uG_v-E_vG_u-2E_vF_v-2F_uG_u+4F_uF_v\right)}{4(EG-F^2)^2}-\frac{E_{vv}-2F_{uv}+G_{uu}}{2(EG-F^2)}}$$

ガウスの驚異の定理の式

E^3 の曲面のガウス曲率 $K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}$ は E,F,G のみで表される

∴ 断面曲率は，E^3 の曲面のガウス曲率の一般化

ガウスボンネの定理

(M,g)：2次元リーマン多様体　$(dA=\sqrt{EG-F^2}\,du\wedge dv)$

M：コンパクト，向き付けられてる．

$\Longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_M K\,dA = \chi(M)=2-2g$

$\chi(\text{◎◎})=2-2g$　(g：種数 ←穴の数)

11

(1) $\mathbb{R}^2_+ := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ → 2次元

リーマン計量 $g = \frac{2}{y^2}(dx^2 + dy^2)$

断面曲率（ガウス曲率）＝？

$K(\Pi) = K(T_p(M)) = K(p)$

$g = \frac{2}{y^2}\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$ $\quad K = \frac{\langle R_{xy}x, y\rangle}{Q(x, y)} = \frac{\langle R_{\partial x \partial y}\partial_x, \partial_y\rangle}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$

$g^{-1} = \frac{y^2}{2}\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$ $\quad g_{11} = \frac{2}{y^2}$ $\quad g_{22} = \frac{2}{y^2}$ $\quad = \frac{R^1_{112}g_{12} + R^2_{112}g_{22}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$

$\begin{cases} g_{12} = 0 \\ g_{22} = 1 \end{cases}$ より、R^2_{112} のみ計算すればよい。 $\cdots ☆$ $\quad = -\frac{1}{y^2}$

☆. R^2_{112} $(i = 2, j = 1, k = 1, l = 2)$

$$R^2_{112} = \frac{\partial}{\partial x^2}\Gamma^2_{11} - \frac{\partial}{\partial x^1}\Gamma^2_{21} + \sum_{a=1}^{m}\left(\Gamma^2_{2a}\Gamma^a_{11} - \Gamma^2_{1a}\Gamma^a_{21}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\Gamma^2_{11}}_{-y^{-2}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\Gamma^2_{21}}_{0} + \left(\cancel{\Gamma^2_{21}\underbrace{\Gamma^1_{11}}_{0}} - \underbrace{\Gamma^2_{11}\Gamma^1_{21}}_{-\frac{1}{y^2}} + \underbrace{\Gamma^2_{22}\Gamma^2_{11}}_{-\frac{1}{y^2}} - \cancel{\Gamma^2_{12}\underbrace{\Gamma^2_{21}}_{0}}\right) = -y^{-2}$$

y^{-1}

$$\begin{bmatrix} \Gamma^1_{11} \\ \Gamma^2_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}g^{-1}\begin{bmatrix} \partial_1 g_{11} + \cancel{\partial_1 g_{11}} - \cancel{\partial_1 g_{11}} \\ \cancel{\partial_1 g_{21}} + \cancel{\partial_1 g_{12}} - \partial_2 g_{11} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{y^2}{2}\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \partial_1 g_{11} \\ -\partial_2 g_{11} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{y^2}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 4y^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{y} \end{bmatrix}$$

$2y^{-2}$

$-4y^{-3}$

リーマン計量に定数倍が加わっても、Γの値は変わらない。

Γの具体的な値は、(前に計算した)

$\Gamma^1_{11} = 0$, $\quad \Gamma^1_{22} = 0$ $\quad \Gamma^1_{12} = -\frac{1}{y}$

$\Gamma^2_{11} = \cancel{\frac{2}{y}}\ \frac{1}{y}$ $\quad \Gamma^2_{22} = \cancel{\frac{2}{y}}\ -\frac{1}{y}$ $\quad \Gamma^2_{12} = 0.$

(2)

~~解 $K = -\frac{1}{2}$~~

$$\cancel{K = \frac{0 + (-\frac{1}{y^2})\cdot\frac{2}{y^2}}{(\frac{2}{y^2})^2 - 0^2}}$$

$$\cancel{= \frac{-2y^{-4}}{2\cdot y^{-4}}}$$

$$\cancel{= \frac{1}{2}\cdot -y^2}$$

$$= -\frac{1}{2}y^2$$

$-\frac{2}{4}$

$-\frac{1}{2}$

$$K = \frac{0 + (-\frac{1}{y^2})\cdot\frac{2}{y^2}}{(\frac{2}{y^2})^2 - 0}$$

問　　題

1.　$\boldsymbol{R}^2$ のリーマン計量 $ds^2 = du^2 + dv^2$ について，ラプラシアンが

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

で与えられることを確かめよ．

2.　2次元リーマン多様体 (S, ds^2) の等温座標系 (u, v) によってリーマン計量が $ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2)$ と表されているとき，ラプラシアンは

$$\Delta = e^{-2\sigma}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)$$

で与えられることを示せ．さらに，補題15.3を適用することにより，ガウス曲率 K は

$E = e^{2\sigma} \iff \sigma = \frac{1}{2}\ln E$　　$-\frac{1}{2E}\Delta(\ln E)$

$$K = -e^{-2\sigma}(\sigma_{uu} + \sigma_{vv})$$

$\Delta\left(\frac{1}{2}\ln E\right) = \frac{1}{2}\Delta(\ln E)$

をみたすことを示せ．

3.　上半平面 $D := \{(u, v) \in \boldsymbol{R}^2 \mid v > 0\}$ 上にリーマン計量

$$ds_{\mathrm{H}}{}^2 := \frac{1}{v^2}(du^2 + dv^2)$$

を定める（§10のコラム（118ページ）参照）．このとき，

（1）　$ds_{\mathrm{H}}{}^2$ のガウス曲率は恒等的に -1 となることを示せ．

（2）　D 上の v 軸に平行な直線は，弧長によりパラメータ表示すれば測地線になることを示せ．

（3）　$\boldsymbol{R}^2$ を複素平面と同一視して，$z = u + iv$ とおくとき，写像

$$f : D \ni z \longmapsto \frac{az + b}{cz + d} \in D \qquad (a, b, c, d \in \boldsymbol{R}\,;\ ad - bc = 1)$$

による計量 $ds_{\mathrm{H}}{}^2$ の引き戻しは，$ds_{\mathrm{H}}{}^2$ に一致することを示せ．（したがって，この写像は $(D, ds_{\mathrm{H}}{}^2)$ の等長変換を与えている．）

（4）　とくに $cd \neq 0$ のとき，上の変換により，v 軸に平行な直線は，u 軸に直角に交わる円に写ることを示せ．（したがって，u 軸に直交する円は，計量 $ds_{\mathrm{H}}{}^2$ に関する測地線を与えている．）