#12 数理科学キカ

☆レポート ~7/31(木) 16時まで

☆課題 11、12 ともに 7/17(木) 16時まで

・$\mathbb{H}^3$の曲面
・基本定理
・ローソン対応
・CMC 1 の曲面

Def Σ を 2次元の C^∞ 多様体とする

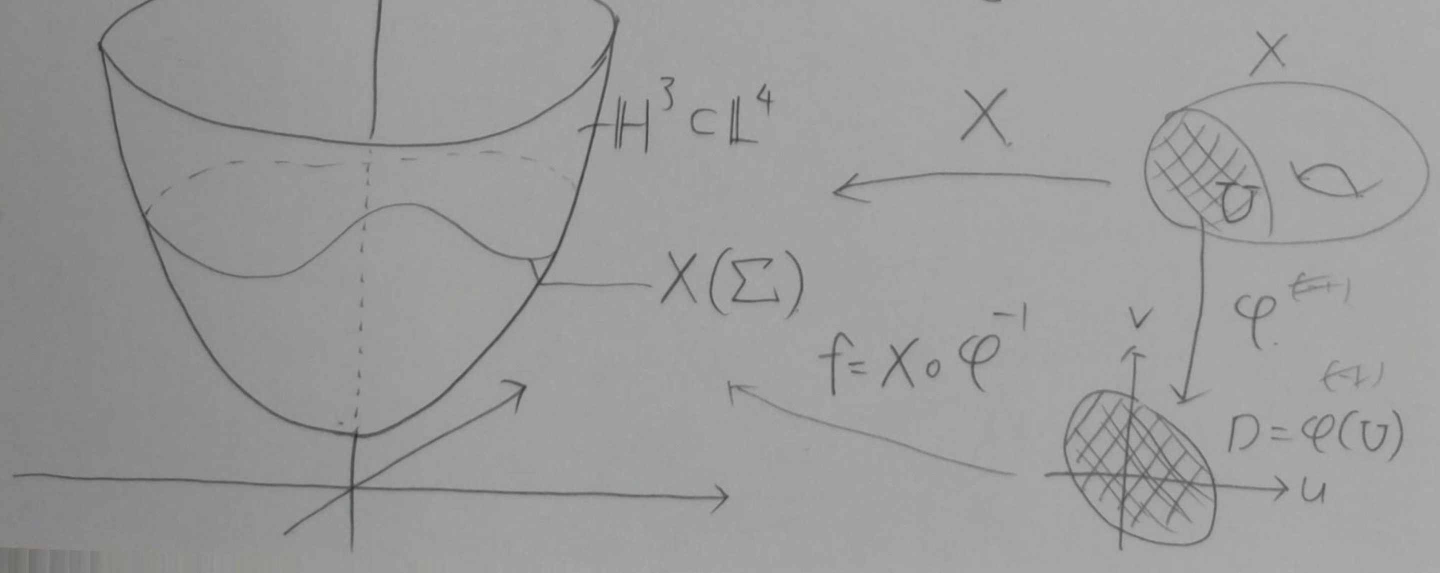
$X : \Sigma \longrightarrow \mathbb{H}^3$: C^∞-map

☆Remark X : C^∞級 at $p \in \Sigma$

$\iff \exists (U;\varphi) = (U; u, v)$: p の座標近傍

s.t. $\underset{X\circ\varphi^{-1}(u,v)}{\underset{\shortparallel}{f(u,v)}} = \begin{bmatrix} x_0(u,v) \\ x_1(u,v) \\ x_2(u,v) \\ x_3(u,v) \end{bmatrix}$ と表すとき、

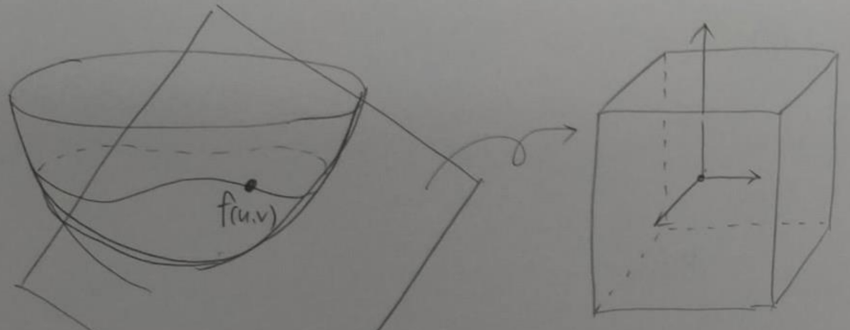
$x_0\ x_1\ x_2\ x_3$ は D上 C^∞-func.



Def

$X : \Sigma \longrightarrow \mathbb{H}^3$ はめ込み を 曲面 という

つまり $f = X \circ \varphi^{-1}$ は f_u と f_v が一次独立



$$T_{f(u,v)}\mathbb{H}^3 = \left\{ x \in \mathbb{L}^4 \mid \langle x, f(u,v) \rangle = 0 \right\}$$

$f_u, f_v \in$

$\because$ $\langle f, f \rangle = -1$ なので

$$\partial_u \swarrow \qquad \searrow \partial_v$$

$\langle f, f_u \rangle = 0$, $\langle f, f_v \rangle = 0$.

ここまで復習

・ガウス・ワインガルテンの公式

$X : \Sigma \longrightarrow \mathbb{H}^3$: 曲面

$f = X \circ \varphi^{-1} : D \to \mathbb{H}^3$: パラメタ表示

$\mathcal{F} = (f, f_u, f_v, \nu)$ ガウス枠

曲面の曲がり具合を表す

$\mathcal{F}_u = (f_u, \underline{f_{uu}}, \underline{f_{uv}}, \underline{\nu_u})$

$\mathcal{F}_v = (f_v, \underline{f_{uv}}, \underline{f_{vv}}, \underline{\nu_v})$

これら5種類を f, f_u, f_v, ν で表す。

Lemma 3.31 ($\mathbb{H}^3$ ver)

$$f_{uu} = Ef + \Gamma^1_{11} f_u + \Gamma^2_{11} f_v + L\nu$$

$$f_{uv} = Ff + \Gamma^1_{12} f_u + \Gamma^2_{12} f_v + M\nu$$

$$f_{vv} = Gf + \Gamma^1_{22} f_u + \Gamma^2_{22} f_v + N\nu$$

$$\nu_u = -A^1_1 f_u - A^2_1 f_v$$

$$\nu_v = -A^1_2 f_u - A^2_2 f_v$$

Proof

$\{f, f_u, f_v, \nu\}$ は $\mathbb{L}^4$ の基底なので、$\exists p, q, r, s$ を用いて、

$$f_{uu} = pf + qf_u + rf_v + s\nu \quad \cdots ☆$$

と表せる。まず、両辺に f を内積させると、

☆の

$$\underbrace{\langle f, f_{uu}\rangle} = p\underbrace{\langle f, f\rangle}_{=-1} \qquad \therefore\ p = E \text{ と分かる。}$$

$$\to \langle f, f_u\rangle_u - \langle f_u, f_u\rangle = 0 - E = -E$$

他も同様

行列表示

$$\mathcal{F}_u = (f_u, f_{uu}, f_{uv}, \nu_u)$$

$$= (f_u,\ Ef + \Gamma^1_{11} f_u + \Gamma^2_{11} f_v + L\nu,\ Ff + \Gamma^1_{12} f_u + \Gamma^2_{12} f_v + M\nu,\ \cancel{Gf + \Gamma^1_{22} f_u + \Gamma^2_{22} f_v + N\nu}\ -A^1_1 f_u - A^2_1 f_v)$$

$$= (f, f_u, f_v, \nu)\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & E & F & 0 \\ 1 & \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} & -A^1_1 \\ 0 & \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} & -A^2_1 \\ 0 & L & M & 0 \end{bmatrix}}_{=\mathcal{U}}$$

$$= \mathcal{F}\mathcal{U}$$

$$\therefore\ \mathcal{F}_u = \mathcal{F}\mathcal{U}$$

∴ ガウスワインガルテン公式（行列表示）

$$\begin{pmatrix} \mathcal{F}_u = \mathcal{F}\mathcal{U} \\ \mathcal{F}_v = \mathcal{F}\mathcal{V} \end{pmatrix} ⊛ \qquad \mathcal{V} = \begin{bmatrix} 0 & F & G & 0 \\ 0 & \Gamma^1_{12} & \Gamma^1_{22} & -A^1_2 \\ 1 & \Gamma^2_{12} & \Gamma^2_{22} & -A^2_2 \\ 0 & M & N & 0 \end{bmatrix}$$

⊛ の可積分条件 $\mathcal{F}_{uv} = \mathcal{F}_{vu} \iff \mathcal{U}_v - \mathcal{V}_u = \mathcal{U}\mathcal{V} - \mathcal{V}\mathcal{U}$

(16本)

$$\iff \begin{cases} L_v - M_u = L\Gamma^1_{12} + M(\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}) - N\Gamma^2_{11} \\ M_v - N_u = L\Gamma^1_{22} + M(\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}) - N\Gamma^2_{11} \\ K_I = K_{ext} - 1 \end{cases}$$

ホロスフィア
$K_I = 0$
$K_{ext} = 1$

（ガウス・コダッチ方程式という）

Theorem 3.3.4 H^3の曲面論の基本定理

D : $\mathbb{R}^2$の単連結領域

E、F、G、L、M、N ： D上 C^∞級関数

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad E>0, \quad G>0 \quad EG-F^2>0 \\ \text{(ii)} \quad \text{ガウスコダッチ方程式（前ページの3本の式）} \end{cases}$$

を満たす

このとき、$\exists 1\, f : D \longrightarrow H^3$: 曲面 s.t.

$$\begin{cases} \mathrm{I} = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \\ \mathrm{II} = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 \end{cases}$$

以降、X : 平均曲率は一定値 H ($\in \mathbb{R}$) とする。

Constant Mean Curvature

CMC-H

(u, v) : 等温座標系とすると、 $\begin{pmatrix} E=G \\ F=0 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{I} = E(du^2+dv^2)$$
$$= E\,dz\,d\bar{z} \quad (z = u + iv)$$

$q := L - N - 2iM$ 　 $Q = q\,dz^2$: Hopf微分

$(q = \langle f_{zz}, \nu \rangle)$

とおくと、

$$\mathrm{II} = Q + \overline{Q} + H \cdot \mathrm{I}$$

ガウス方程式 $\Longleftrightarrow (\ln E)_{z\bar{z}} = -\frac{E}{2}(H^2-1) + \frac{2}{E}|q|^2$

コダッチ方程式 $\Longleftrightarrow 2q_{\bar{z}} = EH_z \underset{\text{CMCであるので}}{\Longleftrightarrow} q_{\bar{z}} = 0$ 　(q : 正則)

Remark ガウス方程式は

$\mathbb{R}^3$: $(\ln E)_{z\bar{z}} = -\frac{E}{2}H^2 + \frac{2}{E}|q|^2$

$\mathbb{S}^3$: $(\ln E)_{z\bar{z}} = -\frac{E}{2}(H^2+1) + \frac{2}{E}|q|^2$

Prop 3.3.7

$X : \Sigma \longrightarrow \mathbb{H}^3$: 曲面に対して Hopf微分 が 正則2次微分

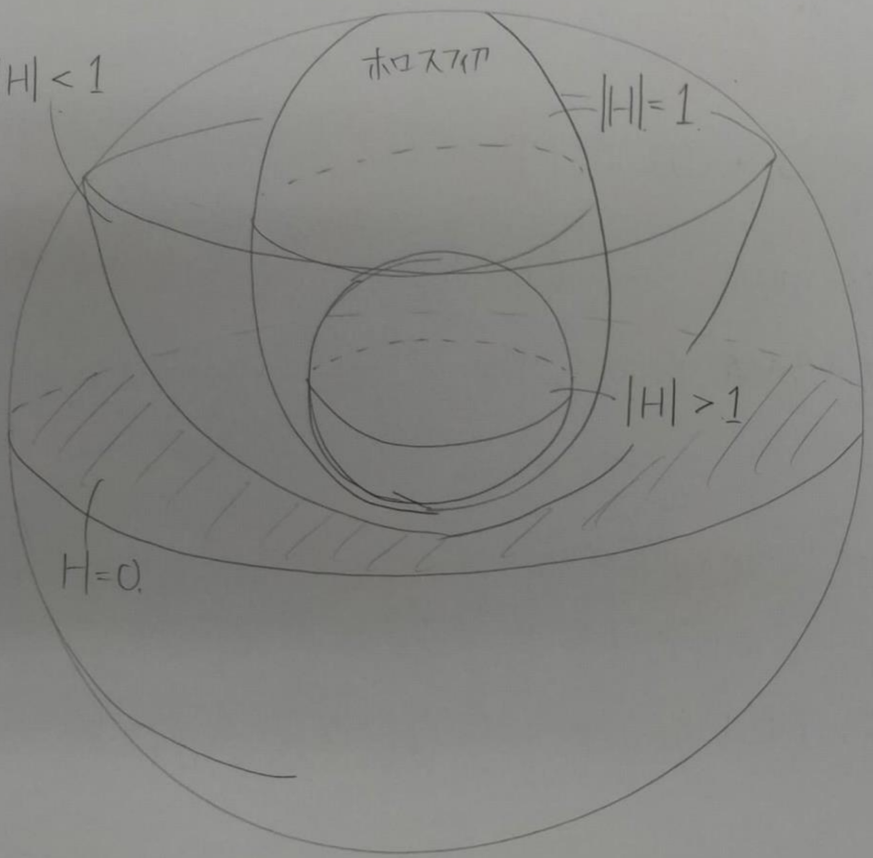
$\Longleftrightarrow$ X が CMC である。

Theorem 3.3.10

$X : \Sigma \longrightarrow \mathbb{H}^3$: CMC曲面

もし、Σ の 種数 $= 0$ （つまり、$\Sigma \approx S^2$ (同相)） ならば、

↳ Xは全臍的である (すべての点で $\lambda_1 = \lambda_2$)



Corollary 3.9 $\mathbb{H}^3$のCMC曲面に対する基本定理

D : $\mathbb{C}$の単連結領域　$H \in \mathbb{R}$

$E : D \to \mathbb{R}$: C^∞関数

$\mathcal{Q} : D \to \mathbb{C}$: 正則関数

もし、ガウス方程式が成立するならば

$\boxed{\mathbb{H}^3 \text{verの}}$ ↳ $$(\ln E)_{z\bar{z}} = -\frac{E}{2}(H^2-1) + \frac{2}{E}|\mathcal{Q}|^2$$

$\exists f : D \to \mathbb{H}^3$: CMC-H曲面 s.t. $\begin{cases} \mathrm{I} = E\,dz\,d\bar{z} \\ \mathrm{II} = \mathcal{Q} + \overline{\mathcal{Q}} + H \cdot \mathrm{I} \end{cases}$

Theorem 3.3.12 Lawson対応

D : $\mathbb{C}$上単連結

(1) $\mathbb{H}^3$のCMC-H曲面 $f : D \to \mathbb{H}^3$ に対し
$(|H| \geq 1)$

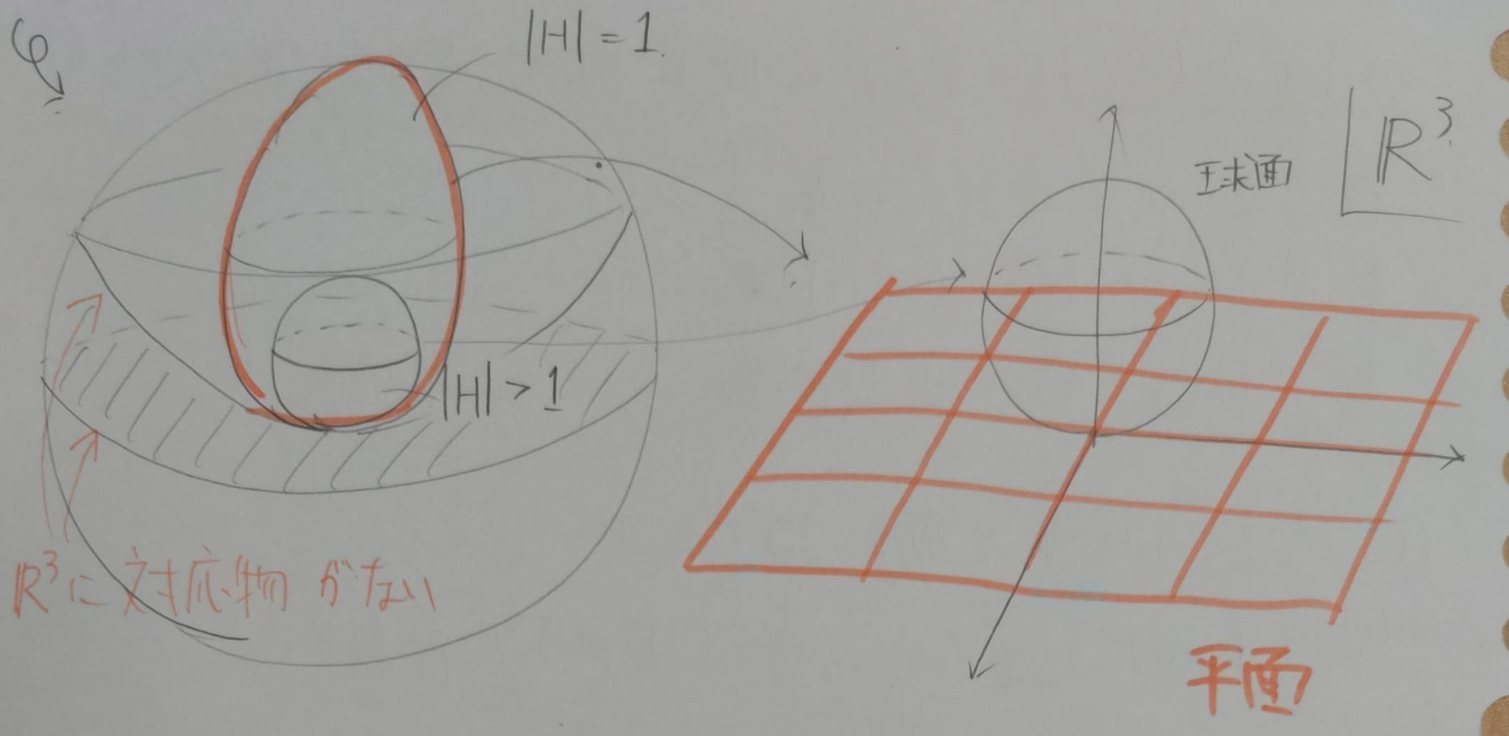
$\tilde{H} := \sqrt{H^2-1}$ とおくと

$\exists \tilde{f} : D \to \mathbb{R}^3$: CMC-$\tilde{H}$ 曲面 s.t.

- fと$\tilde{f}$は共通の第一基本形式をもつ
- fと$\tilde{f}$は共通のHopf微分をもつ

さらに、そのような$\tilde{f}$は$\mathbb{R}^3$の回転と平行移動を除いて一意

↳



☆ 特に、$\mathbb{H}^3$ の CMC-1 曲面は
$\mathbb{R}^3$ の極小曲面 ($H = 0$) に対応
→ $\mathbb{S}^3$ に対応物無し。

☆ $\mathbb{R}^3$ の極小曲面は Weierstrass 表現公式 をもつため、
$\mathbb{H}^3$ の CMC-1 曲面も
正則データを用いた表現公式が期待される。
→ Bryant の表現公式 1987

Remark

実は、$\mathbb{H}^3$ の $K_I = 0$ である曲面にも 正則データによる
表現公式がある。　レポート問3
12,13,14回授業参照
2003 Galvez - Martinez - Milan.