(CODAZZI EQUATION 続き)

P118 補題 38 まで

分からなかった部分：
補題 38

32. Definition

$M \subset \overline{M}$ の形テンソルを II とする. $V, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ のとき、
$\nabla_V \mathrm{II} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ を以下のように定義する.

$$(\nabla_V \mathrm{II})(X, Y) := D_V^{\perp}(\mathrm{II}(X, Y)) - \mathrm{II}(D_V(X), Y) - \mathrm{II}(X, D_V(Y))$$

II と同様に, $\nabla_V \mathrm{II}$ も「$\mathfrak{F}(M)$-双線形」かつ「対称」である.

Proof

(i) $\mathfrak{F}(M)$-双線形性について
(示したいこと：$\nabla_V \mathrm{II}(fX_1 + gX_2, Y) = f\nabla_V \mathrm{II}(X_1, Y) + g\nabla_V \mathrm{II}(X_2, Y)$)

$\nabla_V \mathrm{II}$ の定義より, $\nabla_V \mathrm{II}(fX_1 + gX_2, Y)$ は、

$$\nabla_V \mathrm{II}(fX_1 + gX_2, Y) = D_V^{\perp}(\mathrm{II}(fX_1 + gX_2, Y)) - \mathrm{II}(D_V(fX_1 + gX_2), Y) - \mathrm{II}(fX_1 + gX_2, D_V Y) \quad \cdots ①$$

である. ① の右辺の各項をそれぞれ式変形する.

- $$D_V^{\perp}(\mathrm{II}(fX_1 + gX_2, Y)) = D_V^{\perp}(f\mathrm{II}(X_1, Y) + g\mathrm{II}(X_2, Y)) = D_V^{\perp}(f\mathrm{II}(X_1, Y)) + D_V^{\perp}(g\mathrm{II}(X_2, Y)) = fD_V^{\perp}(\mathrm{II}(X_1, Y)) + gD_V^{\perp}(\mathrm{II}(X_2, Y)) \quad \cdots ②$$
- $$\mathrm{II}(D_V(fX_1 + gX_2), Y) = \mathrm{II}(fD_V(X_1), Y) + \mathrm{II}(gD_V(X_2), Y) = f\mathrm{II}(D_V(X_1), Y) + g\mathrm{II}(D_V(X_2), Y) \quad \cdots ③$$
- $$\mathrm{II}(fX_1 + gX_2, D_V Y) = f\mathrm{II}(X_1, D_V(Y)) + g\mathrm{II}(X_2, D_V(Y)) \quad \cdots ④$$

② ～ ④ を ① に代入すると、

$$\nabla_V \mathrm{II}(fX_1 + gX_2, Y) = fD_V^{\perp}(\mathrm{II}(X_1, Y)) + gD_V^{\perp}(\mathrm{II}(X_2, Y)) - f\mathrm{II}(D_V(X_1), Y) - g\mathrm{II}(D_V(X_2), Y)$$

$$- f\,\mathrm{I\!I}(X_1, D_V(Y)) - g\,\mathrm{I\!I}(X_2, D_V(Y))$$
$$= f\,\nabla_V \mathrm{I\!I}(X_1, Y) + g\,\nabla_V \mathrm{I\!I}(X_2, Y)$$

$$f\nabla_V \mathrm{I\!I}(X_1, Y) = f\left\{ D_V^{\perp}(\mathrm{I\!I}(X_1, Y)) - \mathrm{I\!I}(D_V(X_1), Y) - \mathrm{I\!I}(X_1, D_V(Y)) \right\}$$
$$g\nabla_V \mathrm{I\!I}(X_2, Y) = g\left\{ D_V^{\perp}(\mathrm{I\!I}(X_2, Y)) - \mathrm{I\!I}(D_V(X_2), Y) - \mathrm{I\!I}(X_2, D_V(Y)) \right\}$$

となる。
($\nabla_V \mathrm{I\!I}(X_1, fY_1 + gY_2)$ も同様)

(ii) 対称性 について
(示したいこと：$\nabla_V \mathrm{I\!I}(X, Y) = \nabla_V \mathrm{I\!I}(Y, X)$)

$$\begin{aligned}\nabla_V \mathrm{I\!I}(X, Y) &= D_V^{\perp}(\mathrm{I\!I}(X, Y)) - \mathrm{I\!I}(D_V(X), Y) - \mathrm{I\!I}(X, D_V(Y)) \\ &= D_V^{\perp}(\mathrm{I\!I}(Y, X)) - \mathrm{I\!I}(D_V(Y), X) - \mathrm{I\!I}(Y, D_V(X)) \\ &= \nabla_V \mathrm{I\!I}(Y, X).\end{aligned}$$

$\mathrm{I\!I}$ の対称性

(i)、(ii) より、$\mathfrak{F}(M)$-線形性 と 対称性 を 示した ▨

- ガウス方程式 は、$R_{VW}(X)$ の 法成分 を 形テンソル $\mathrm{I\!I}$ を用いて 記述できる。
(命題 33)

33. Proposition

M を $\overline{M}$ の擬リーマン部分多様体とする.

$V, W, X \in \mathfrak{X}(M)$ のとき、$\overline{R}_{VW}(X)$ の法成分は、

$$\mathrm{nor}\left(\overline{R}_{VW}(X)\right) = -(\nabla_V \mathrm{II})(W, X) + (\nabla_W \mathrm{II})(V, X)$$

である.

Proof

局所座標を適切に選ぶことで、$[V, W] = 0$（ねじれ無し）と仮定できる.

このとき、$\mathrm{nor}\left(\overline{R}_{VW}(X)\right)$ は次のように書ける:

$$\mathrm{nor}\left(\overline{R}_{VW}(X)\right) = -\,\mathrm{nor}\left(\overline{D}_V(\overline{D}_W(X))\right) + \mathrm{nor}\left(\overline{D}_W(\overline{D}_V(X))\right) \cdots ①$$

（∵ リーマン曲率テンソル R は、

$$R_{XY}(Z) = D_{[X,Y]}(Z) - \left(D_X(D_Y Z) - D_Y(D_X Z)\right)$$
）

$(VW) := \mathrm{nor}\left(\overline{D}_V \overline{D}_W X\right)$ とすると、

$$\begin{aligned}
VW &= \mathrm{nor}\left(\overline{D}_V \overline{D}_W X\right) \\
&= \mathrm{nor}\left(\overline{D}_V\left(D_W X + \mathrm{II}(W, X)\right)\right) \\
&= \mathrm{nor}\left(\overline{D}_V(D_W X)\right) + \mathrm{nor}\left(\overline{D}_V(\mathrm{II}(W, X))\right) \\
&= \mathrm{nor}\left(D_V(D_W X) + \mathrm{II}(V, D_W X)\right) \\
&\quad + \mathrm{nor}\left(D_V(\mathrm{II}(W, X)) + D_V^{\perp}(\mathrm{II}(W, X))\right) \\
&= \mathrm{nor}\left(D_V(D_W X)\right) + \mathrm{nor}\left(\mathrm{II}(V, D_W X)\right) \\
&\quad + \mathrm{nor}\left(D_V(\mathrm{II}(W, X))\right) + \mathrm{nor}\left(D_V^{\perp}(\mathrm{II}(W, X))\right). \cdots ②
\end{aligned}$$

② の右辺について、接成分のみを表す $D_V(D_W X)$ と $D_V(\mathrm{II}(W, X))$ については、

$$\begin{cases} \mathrm{nor}\left(D_V(D_W X)\right) = 0 \\ \mathrm{nor}\left(D_V(\mathrm{II}(W, X))\right) = 0 \end{cases} \cdots ③$$

である。さらに、$D^\perp_V(\mathrm{II}(W,X))$ は定義32より、

$$D^\perp_V(\mathrm{II}(W,X)) = (\nabla_V \mathrm{II})(W,X) + \mathrm{II}(D_V(W), X) + \mathrm{II}(W, D_V(X)) \quad \cdots ④$$

である事から、②に③と④を代入して、

$$\begin{aligned} \mathrm{V}W &= \mathrm{nor}(\mathrm{II}(V, D_W X)) \\ &\quad + \mathrm{nor}(\nabla_V \mathrm{II}(W,X) + \mathrm{II}(D_V W, X) + \mathrm{II}(W, D_V X)) \\ &= \mathrm{II}(V, D_W X) + \nabla_V \mathrm{II}(W,X) + \mathrm{II}(D_V W, X) + \mathrm{II}(W, D_V X) \quad \cdots ⑤ \end{aligned}$$

∵ $\mathrm{II}(\cdot,\cdot)$ と $\nabla_V \mathrm{II}(\cdot,\cdot)$ は法成分のみ

と表すことができる。同様の計算を $(W\mathrm{V}) = \mathrm{nor}(\overline{D}_W(\overline{D}_V X))$ に対しても行うと、

$$W\mathrm{V} = \mathrm{II}(W, D_V X) + \nabla_W \mathrm{II}(V,X) + \mathrm{II}(D_W V, X) + \mathrm{II}(V, D_W X) \quad \cdots ⑥$$

と表せる。①、⑤、⑥より、$\mathrm{nor}(\overline{R}_{VW}(X))$ は、

$$\begin{aligned} \mathrm{nor}(\overline{R}_{VW}(X)) &= -\mathrm{nor}(\overline{D}_V(\overline{D}_W X)) + \mathrm{nor}(\overline{D}_W(\overline{D}_V X)) \\ &= -(\mathrm{V}W) + (W\mathrm{V}) \\ &= -\nabla_V \mathrm{II}(W,X) + \nabla_W \mathrm{II}(V,X) \end{aligned}$$

と表せる。よって、命題内の等式を示した ▨

- (系34 の準備)

ベクトル場 $Z \in \mathfrak{X}(M)^\perp$ が法平行 (normal parallel) である
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $D^\perp_V(Z) = 0$、 $\forall V \in \mathfrak{X}(M)$.

34. Corollary

$\overline{M}$ が一定の曲率を持つとする.

(i) $M \subset \overline{M}$ に対するコダッチ方程式は以下である:

$$(\nabla_V \mathrm{I\!I})(W, X) = (\nabla_W \mathrm{I\!I})(V, X) \quad , \ {}^{\forall}V, W, X \in \mathfrak{X}(M)$$

(ii) M が形作用素 S を持つ $\overline{M}$ 内の超曲面であるとき、以下が成り立つ:

$$(D_V S)(W) = (D_W S)(V) \quad , \ {}^{\forall}V, W \in \mathfrak{X}(M)$$

Proof

(i) 3章の系43 より, $\overline{R}_{VW}(X)$ は M と接していて, $\mathrm{nor}(\overline{R}_{VW}(X)) = 0$ である. …①

M が定曲率 C を持つとき、リーマン曲率テンソル $R_{xy}(Z)$ は、

$$R_{xy}(Z) = C\{\langle Z, x\rangle y - \langle Z, y\rangle x\}$$

である.

命題33より $\mathrm{nor}(\overline{R}_{VW}(X)) = -\nabla_V \mathrm{I\!I}(W, X) + \nabla_W \mathrm{I\!I}(V, X)$ であるため、①を代入して、$\nabla_V \mathrm{I\!I}(W, X) = \nabla_W \mathrm{I\!I}(V, Y)$ が導かれる.

$D_V^{\perp} U = \mathrm{nor}(D_V U)$
$\mathrm{I\!I}(V, W) = \mathrm{nor}(\overline{D}_V W)$

(ii) 形作用素 S が単位法ベクトル U から導かれると仮定する. このとき、U は ${}^{\forall}X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して、法平行 ($D_X^{\perp} U = 0$) である.

ベクトル場 $V, W, X \in \mathfrak{X}(M)$ は点 p において、M の共変微分の値が 0 になると仮定する. よって、

$$\begin{aligned}
\langle (D_V S)(W), X\rangle &\overset{\text{ライプニッツ則+仮定 ($D_V W$は法成分無い)}}{=} \langle D_V(SW), X\rangle \\
&\overset{\text{内積に関する接続の性質+仮定}}{=} V\langle SW, X\rangle \\
&\overset{\text{Shape operator の定義}}{=} V\langle \mathrm{I\!I}(W, X), U\rangle \\
&\overset{\text{内積に関する接続の性質+仮定}}{=} \langle D_V(\mathrm{I\!I}(W, X)), U\rangle \\
&\overset{\nabla_V \mathrm{I\!I}\text{の定義}}{=} \langle \nabla_V \mathrm{I\!I}(W, X), U\rangle \\
&\overset{\text{補題(1)}}{=} \langle \nabla_W \mathrm{I\!I}(V, X), U\rangle \\
&= \langle (D_W S)(V), X\rangle
\end{aligned}$$

($D_V U$ は法成分 $= 0$ かつ U は接空間に沿っても変化しない)

である. 以上より、(i)(ii) が成り立つ ▨

TOTALLY UMBILIC HYPERSURFACE

(全臍的超曲面)

$\forall p \in M$,
$\forall v, w \in T_p(M)$, $\exists Z \in T_p(M)^{\perp}$ s.t.
$\mathrm{II}(v, w) = \langle v, w \rangle Z$

↳ 擬ユークリッド空間 R^n_ν の 連結な 全臍的超曲面を見つけることを考える.

- すでに、R^n_ν の全ての「連結な全測地線の超曲面」が非退化な超平面の開集合であることを確認した.

→ 全測地的 ($\mathrm{II}=0$) ではない全臍的超曲面の特定が残っている.

重要なステップ: コダッチ方程式の応用例

35. Lemma

全臍的: M内の全ての点で,
$\mathrm{II}(v, w) = \langle v, w \rangle Z$
が成り立つ. ($v, w \in T_p(M)$, $Z \in T_p^{\perp}(M)$)

$\Longleftrightarrow$ (P108 補題21)

S はスカラー作用素
($S(v) = \underset{\text{スカラー}}{k}\, v$)
(法曲率)

☆

$M \subset \overline{M}$ を、

- 連結
- 符号数: ε
- $\dim(M) \geq 2$

を満たす擬リーマン超曲面とする.

$\overline{M}$: R^n_ν ⇐ $\overline{C}=0$.
M: $C=0$.

もし M が全臍的であり, $\overline{M}$ が定曲率 $\overline{C}$ を持つならば、法曲率 (normal curvature) k は (符号を除いて) 一定であり、M の曲率 C は,

$$C = \overline{C} + \varepsilon k^2$$

と表せる. ($C=0$, $\overline{C}=0$)

☆ $k=0 \Rightarrow S=0$.

$V, W \in \mathfrak{X}(M)$

Def $\langle \underset{=0}{S(V)}, W \rangle = \langle \underset{=0}{\mathrm{II}(V, W)}, U \rangle$ (全臍的)

Proof

- もし法曲率 k が定数であれば、曲率の主張

$$C = \overline{C} + \varepsilon k^2$$

は明らかである.

∵ ガウス方程式 (P107. 系20) $K(v, w) = \overline{K}(v, w) + \varepsilon \dfrac{\langle Sv, v \rangle \langle Sw, w \rangle - \langle Sv, w \rangle^2}{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2}$ に、
($K(v,w) = C$, $\overline{K}(v,w) = \overline{C}$)

$$\begin{cases} \langle Sv, v \rangle = k \langle v, v \rangle \\ \langle Sw, w \rangle = k \langle w, w \rangle \\ \langle Sv, w \rangle = k \langle v, w \rangle \end{cases}$$
(仮定: 法曲率 k が定数 を使用した)

を代入すると, 右辺の第2項は,

$$\varepsilon \frac{\langle Sv, v\rangle\langle Sw, w\rangle - \langle Sv, w\rangle^2}{\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2} = \varepsilon \frac{k^2\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - k^2\langle v, w\rangle^2}{\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2}$$

$$= \varepsilon k^2$$

となるため、$C = \overline{C} + \varepsilon k^2$ である。

よって、連結な M 上の任意の点で k が定数であることを示すために、

$$\underbrace{{}^\forall v \in T_p(M),\ v(k) = 0}_{} \quad \cdots (*)$$

→関数 k はどんな方向 v に沿っても変化しない。(= 定数)

を示せばよい。

$v \in T_p(M)$ のとき、$V, W \in \mathfrak{X}(M)$ を適切に選んで、

- $V_p = v$
- W_p が V_p に依存しない

となるようにする。形作用素は $S = kI$ であるので、$(D_V S)(W)$ は

ライプニッツ則

$$(D_V S)(W) = D_V(SW) - S(D_V W)$$

$$= D_V(kW) - k(D_V W)$$

ライプニッツ則

$$= VkW \quad \cdots ①$$

と表せる。系34(2)より $(D_V S)(W) = (D_W S)(V)$ であるため、① と合わせて

$$VkW = (D_V S)(W) = (D_W S)(V) = WkV \quad \cdots ② \qquad (V, W \in \mathfrak{X}(M))$$

である。② の等式について、$V(k) \neq 0$ と仮定する。

(i) $W(k) = 0$ の場合 $(WkV = 0)$

左辺 (VkW) は $VkW \neq 0$ となる可能性があり、等式は成り立たない。

(ii) $W(k) \neq 0$ の場合

VkW と WkV の値が一致するには、V と W が特定の関係式を持つ必要がある。
しかし、V と W の選び方 (W_p は V_p に依存しない) と矛盾する。

(i)(ii)より、V と W で等式 $VkW = WkV$ が常に成り立つには、

$$V(k) = 0$$

でなければいけない. Wについても同様の議論より、$W(k)=0$ でなければいけない.
よって(*)より、kはM上で定数である ■

$\mathrm{II}(v,w) := \mathrm{nor}(\bar{D}_v W)$

証

例として、擬ユークリッド空間R^n_ν内の平坦な全臍的超曲面は全測地的である.
$k=0$　$\mathrm{II}=0$

central

・R^n_νの中心二次超曲面は$\langle p, p\rangle = c \neq 0$ によって与えられ、これを
$p \to p - x_0$ への平行移動によって x_0 を中心とする二次超曲面に変換でき、
$\langle p - x_0, p - x_0\rangle = c$ で与えられる.

$\phi|_M$ が $M \to N$ への等長変換となる

pair isometry

明らかに、この平行移動は対等長変換であり、ゆえに全ての二次超曲面は全臍的である.

任意の2点p、q間の距離を表す内積$\langle p-q, p-q\rangle$は、
$\langle p-q, p-q\rangle = \langle (p-x_0)-(q-x_0), (p-x_0)-(q-x_0)\rangle$
と変形できる. よって、平行移動 $p \mapsto p - x_0$ は対等長変換.

二次超曲面 $\langle p, p\rangle = c\ (\neq 0)$ を、中心をx_0へずらすと、
$\langle p-x_0, p-x_0\rangle = c$
である. 対等長変換は第二基本形式IIを保存するため、任意の二次超曲面は全臍的である.

・二次元多様体の擬リーマン超曲面は全臍的であるため、
$n \geq 3$ の場合のR^n_νについてのみ扱う.

P117

36. Proposition

MがR^n_ν内の連結な擬リーマン超曲面で、

- $n \geq 3$
- 全臍的である　$(\mathrm{II}(v,w) = \langle v, w\rangle Z)$
- 全測地的ではない　$(\mathrm{II} \neq 0)$

とする. このとき、Mは二次超曲面内の開集合である. ゆえに、

M が完備であれば、M は二次超曲面の成分 (component) である

Proof

U を M 上で局所的に定義された単位法ベクトルとする（形作用素 $S = kI$ となる）.
このとき、前の補題35より、k は定数である. また、法ベクトル場 $\frac{U}{k} = \frac{(-U)}{(-k)}$ は M 上で well-defined である.

R^n_ν の接ベクトル空間を標準的 (canonical) な同相写像 (isomorphism) で R^n_ν 自身と同一視し、
写像 $\phi : M \longrightarrow R^n$ を以下で定義する.

$$\phi(P) := P + \frac{U_P}{k} \quad \cdots ①$$

証明のゴールは ϕ が定数写像であることを示すことである.

∵ 定数 $\phi(\cdot) = x_0$ に対して、内積 $\langle P - x_0, P - x_0 \rangle = \mathrm{Const}$
が言えれば、条件を満たす任意の $P \in M$ が
二次超曲面に含まれることが言える.

M は連結であるため、ϕ の微分 $d\phi = 0$ であることを示せばよい.
（∵ $\forall v \in T_P(M)$ に対して $d\phi(v) = 0$ であれば、写像 ϕ は定数である）

① より任意の接ベクトル $v \in T_P(M)$ に対して微分写像 $d\phi(v)$ は、

$$d\phi(v) = v + \frac{\bar{D}_v U}{k} \quad \cdots ②$$

であるため、② の両辺が R^n_ν の自然な座標系 $(u^1, \cdots, u^n)$ に対して
同じ成分を持つことを示せばよい. 単位法ベクトル U を

$$U = \sum_{i=1}^{\dim M} f^i (\partial_i) \quad \cdots ③$$

とおくと、$u^i(\phi(P))$ は ① より

$$u^i(\phi(P)) = u^i(P) + \frac{f^i(P)}{k} \quad \cdots ④ \quad (\forall P \in M)$$

である. したがって $(d\phi(v)) u^i$ は、

$$(d\phi(v)) u^i \underset{「写像の微分」の定義}{=} v(u^i \circ \phi) \underset{∵ ④ を代入}{=} v u^i + \frac{v f^i}{k}$$

である. $\overline{D}_{\nu}(U) = \boxed{\sum \nu f^i(\partial_i)}$ であるため, 主張(②の両辺が座標 $u^1, \cdots, u^n$ に関して同じ成分を持つこと)が成立する。

$$\left(\because \begin{aligned} (d\phi(\nu))\,u^i &= \nu u^i + \frac{\nu f^i}{k} \\ \left(\nu + \frac{\boxed{\overline{D}_{\nu}U}}{k}\right)u^i &= \nu u^i + \frac{\nu f^i}{k} \end{aligned} \right.$$

となり、座標 $(u^1, \cdots, u^n)$ に関して両辺が一致する。)

今, $\overline{D}_{\nu}(U) = -S(\nu) = -k\nu$ であるため、$d\phi(\nu)$ は

∵補題19より (P107)　∵補題21より (P108)

$$d\phi(\nu) = \nu + \frac{-\cancel{k}\nu}{\cancel{k}} = 0$$

である. したがって, ϕ は $\mathbb{R}^n$ の点 x_0 への定数写像である. すると、M上の任意の点 P に対して

$$P - x_0 = -\frac{U_P}{k} \quad \left(\because P - x_0 = -\frac{U_P}{k} \Longleftrightarrow \underset{\phi(P)}{x_0} = P + \frac{U_P}{k} \right)$$

である. したがって内積 $\langle P - x_0, P - x_0 \rangle$ は、

$$\begin{aligned} \langle P - x_0, P - x_0 \rangle &= \frac{U_P^2}{k^2} \\ &= \frac{\varepsilon}{k^2} \quad (=\text{定数}) \end{aligned}$$

と書け、M は二次超曲面 Q に含まれている事が分かる.
さらに、M は連結であるため、M は Q 内の単一成分 C に含まれている.

1章の Exercise 8 より、M は C の開部分多様体である. … ⑤

(a) P と Q がそれぞれ M の部分多様体であり、
$P \subseteq Q$ ならば、P は Q の部分多様体である.

*(b) P が M の部分多様体であり、$\dim M = \dim P$ であれば、
P は M の開部分多様体である.

さらに、もし M が完備であれば、3章の Exercise 7 より,

$$M = C \quad \cdots ⑥$$

である.

P を擬リーマン多様体 M の開部分多様体とする.
- P が完備
- M が連結

$\Longrightarrow$ $P = M$ である.

⑤, ⑥ より 命題を示した ▨

- $\mathbb{R}^n_\nu$ $(n \geq 3)$ の
  - 完備である
  - 連結である
  - 全臍的である

を満たす超曲面は、まさに $\mathbb{R}^n_\nu$ の非退化な超平面であり、
二次超曲面の構成要素である。

- この外在的な幾何情報に基づいて、
  非ゼロな定曲率を持つ $\mathbb{R}^n_\nu$ の擬リーマン超曲面を内在的に特徴付けていく。

P117

37. Proposition

M を $\mathbb{R}^n_\nu$ $(n \geq 4)$ の連結な擬リーマン超曲面とし、定曲率 C $(\neq 0)$ を持つとする。
このとき、M は二次超曲面内の開集合となる。

ゆえに、M が完備であるならば、M は二次超曲面の成分である。

(証明に命題36と補題38を用いるため、先に補題38を示す)

P118

38. Lemma

M を $\overline{M}$ の擬リーマン超曲面とする。M と $\overline{M}$ が以下の3つの条件

(i) M と $\overline{M}$ は定曲率を持つ (C、$\overline{C}$ とおく)

(ii) $C \neq \overline{C}$ である

(iii) $\dim(M) \geq 3$

を満たすならば、M は全臍的である。

Proof

形作用素 S がスカラー作用素であることを示せば良い。($\because$ 補題21)

$\Delta = \varepsilon(C - \overline{C})$ と定義する。ε は M の符号、C と $\overline{C}$ はそれぞれ M と $\overline{M}$ の定曲率である。
仮定より $C \neq \overline{C}$ であるため、$\Delta \neq 0$ である。

$C = \overline{C} + \varepsilon \dfrac{(\quad)}{(\quad)}$

(a) $\langle Sv, v\rangle\langle Sw, w\rangle - \langle Sv, w\rangle^2 = \Delta\left(\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2\right)$ である.

ただし、vとwがMに対する非退化平面を張るときに成り立つ. この関係は任意のv, wに対して有効である(∵ 3章補題40)

スカラー積空間のベクトルv, wが与えられたとき、
v, wにはそれぞれ任意に近いベクトル$\overline{v}, \overline{w}$があり、
それら($\overline{v}$と$\overline{w}$)は非退化平面を張る

各点$p \in M$において$T_p(M)$上の形作用素Sは可逆である.
invertible

∵ Sが単射であることを確認すれば良い.
($v \neq 0 \Rightarrow Sv \neq 0$)
vとwが非退化な平面を張り、さらにΔの仮定より (a)の右辺$\neq 0$である.
よって(a)の左辺$\neq 0$であり、特に$Sv \neq 0$となる.

実際、3章の補題40の証明内の主張より、

$$\forall v \in T_p(M),\ \exists w \in T_p(M) \quad \text{s.t.} \quad \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2 \neq 0$$

である. このため、$Sv \neq 0$である. … ①

次に、$T_p(M)$内の任意のv, w, x, yに対して以下を証明する.

$\Delta = \varepsilon(C - \overline{C})$

(b) $\langle Sv, x\rangle\langle Sw, y\rangle - \langle Sv, y\rangle\langle Sw, x\rangle = \Delta\left(\langle v, x\rangle\langle w, y\rangle - \langle v, y\rangle\langle w, x\rangle\right)$ である.

※(b)の両辺は曲率的(curvaturelike)な~~曲線~~関数である)

P79

実ベクトル空間V上のテンソル$R \in \mathcal{I}^0_4(V)$が曲率的である
$\iff$ テンソルRが以下を満たす

∘(i) $R(v, w, x, y) = -R(w, v, x, y)$
$= -R(v, w, y, x)$

∘(ii) $R(v, w, x, \cdot) + R(w, x, v, \cdot) + R(x, v, w, \cdot) = 0$

($\forall w, v, x, y \in V$)

※(i)と(ii)を合わせて、$R(v, w, x, y) = R(x, y, v, w)$
(先進数理 幾何 第10回資料より)

$F(v, w, v, w)$
$:= \langle Sv, v\rangle\langle Sw, w\rangle$
$- \langle Sv, w\rangle\langle Sw, v\rangle$
$\langle Sv, w\rangle$

3章の系42を用いると、(a) $\Rightarrow$ (b) であることが分かる。

(P79)
F を以下の等式を満たす $T_p(M)$ 上の曲率的な写像とする。

$$K(v,w) = \frac{F(v,w,v,w)}{\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2}$$

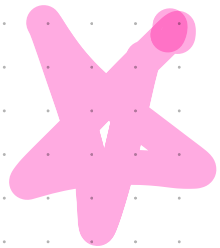
($v, w \in T_p(M)$ は非退化平面を張る)

このとき、全ての $v, w, x, y \in T_p(M)$ に対して、

$$F(v,w,x,y) = \langle R_{vw}x, y\rangle$$

である。

∵



写真

- 仮定より $\dim(M) \geq 3 \iff \dim(T_p(M)) \geq 3$ であるため、v、Sv の両方と直交するようなベクトル y $(\neq 0)$ が存在する。

よって、(b)の式は、$\langle Sv, y\rangle = 0$ と $\langle v, y\rangle = 0$ を代入することで、

$$\langle Sv, x\rangle\langle Sw, y\rangle = \Delta\langle v, x\rangle\langle w, y\rangle \quad (\forall v, w, x) \cdots ②$$

と表示できる。

$\{v \in T_p(M) \mid v \perp y\}$ $/\!/$

①より 形作用素 S が可逆であるため、S の像 $\mathrm{Im}(S)$ は $y^\perp$ に含まれない。

∵ S の像が $y^\perp$ に含まれていると仮定する。この場合、$S(v)$ は全て y と直交しているため、

$$\langle S(v), y\rangle = 0$$

となる。S が $T_p(M)$ 全体を覆えなくなり、S が可逆である仮定と反する。

ゆえに、$\langle Sw, y\rangle \neq 0$ となるようなベクトル w が存在する。(∵ $Sw \notin y^\perp$ であるため)

よって、②の両辺を $\langle Sw, y\rangle$ で割ると

$$\langle Sv, x\rangle = \frac{\Delta\langle w, y\rangle}{\langle Sw, y\rangle}\langle v, x\rangle$$

∵ Δ、$\langle w, y\rangle$、$\langle Sw, y\rangle$ は全てスカラーであるため、積もスカラー

※ $C = K(v,w) = \dfrac{F(v,w,v,w)}{\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2}$ … ✡

$\langle R_{vw}x, y\rangle$

$R_{vw}(x)$

$= C(\langle x,v\rangle w - \langle x,w\rangle v)$

$\overline{C} = \overline{K}(v,w) = \dfrac{\overline{F}(v,w,v,w)}{\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2}$ … ⊛

今、$F(v,w,x,y)$ を以下で定義する

$F(v,w,x,y) := \varepsilon(\langle Sv,x\rangle\langle Sw,y\rangle - \langle Sv,y\rangle\langle Sw,x\rangle) + \varepsilon\overline{F}(v,w,x,y)$

$\Longrightarrow F : (T_p(M))^4 \to \mathbb{R}$; curvaturelike

$F(v,w,v,w) = \varepsilon(\langle Sv,v\rangle\langle Sw,w\rangle - \langle Sv,w\rangle\underbrace{\langle Sw,v\rangle}_{\|\ \text{自己随伴}\ \langle Sv,w\rangle}) + \varepsilon\overline{F}(v,w,v,w)$

$= \varepsilon(\langle Sv,v\rangle\langle Sw,w\rangle - \langle Sv,w\rangle^2) + \varepsilon\overline{C}(\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2)$

∵(a)

$= K(\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2)$

$\therefore K = \dfrac{F(v,w,v,w)}{\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2}$

$\therefore F(v,w,x,y) = \langle R_{vw}(x), y\rangle = C(\langle x,v\rangle\langle w,y\rangle - \langle x,v\rangle\langle v,y\rangle)$

ⓐ $\varepsilon(\langle Sv,v\rangle\langle Sw,w\rangle - \langle Sv,w\rangle^2) = (C - \overline{C})(\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2)$

$F(v,w,x,y) := \varepsilon(\langle Sv,x\rangle\langle Sw,y\rangle - \langle Sv,y\rangle\langle Sw,x\rangle) + \boxed{\overline{C}(\langle v,x\rangle\langle w,y\rangle - \langle v,y\rangle\langle w,x\rangle)}$

✡ とおくと、curvaturelike

$F(v,w,v,w) = \varepsilon(\langle Sv,v\rangle\langle Sw,w\rangle - \langle Sv,w\rangle^2) + \overline{C}(\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2)$

∵ⓐ

$= C(\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2)$

$\therefore (K=)\, C = \dfrac{F(v,w,v,w)}{\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2}$ と表せるので、補題より

$F(v,w,x,y) = \langle R_{vw}(x), y\rangle$ ✡✡

$= C(\langle v,x\rangle\langle w,y\rangle - \langle v,y\rangle\langle w,x\rangle)$

✡、✡✡ より

$\varepsilon(\langle Sv,x\rangle\langle Sw,y\rangle - \langle Sv,y\rangle\langle Sw,x\rangle) = \varepsilon(C - \overline{C})(\langle v,x\rangle\langle w,y\rangle - \langle v,y\rangle\langle w,x\rangle)$

∴ (b) であるので、(a) ⟹ (b) である。

$$= k\langle v, x\rangle \quad (k:\text{定数})$$

と表せるため、S はスカラー作用素である.

$\therefore M$ は全臍的である. ▨

以上を踏まえて、命題37にもどる.

(P118)

> **37. Proposition**
>
> M を $\mathbb{R}^n_\nu$ $(n \geq 4)$ の連結な擬リーマン超曲面とし、定曲率 C $(\neq 0)$ を持つとする.
> このとき、M は二次超曲面内の開集合となる.
>
> ゆえに、M が完備であるならば、M は二次超曲面の成分である.

(命題37の) Proof

仮定より、M は定曲率 C $(\neq 0)$ を持ち、$\mathbb{R}^n_\nu$ $(n \geq 4)$ に含まれる

$\stackrel{\because 38}{\Longrightarrow}$ M は全臍的である

$\stackrel{\because 36}{\Longrightarrow}$ M は二次超曲面 Q の開集合である.

補題36より、M が完備である $\Longrightarrow$ M は二次超曲面の成分である.

以上より示した ▨

- 命題37において、$C = \bar{C}$ が成り立つのであれば、部分多様体 M の形 (shape) は常に明示できるとは限らない
  (補題38の仮定を満たさなくなる)

(次：法接続 (normal connection) から)