$V_1 = \{(0, s, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$

$V_2 = \{(s, t, 0) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$

$V_3 = \{(s, s, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$

$g(x, y) = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2$

(1) V_1 は非退化部分空間か？

方針 正定値である $\Longrightarrow$ 非退化である を用いる

$\forall v \in V_1 \setminus \{0\}$ に対して、$g(v, v)$ は

$$g(v, v) = -0^2 + s^2 + t^2$$
$$= s^2 + t^2 > 0 \quad (\because v \neq (0, 0, 0))$$

以上より、$g|_{V_1}$ は正定値かつ非退化であるため、V_1 は非退化部分空間である //

(2) V_2 は非退化部分空間か？

$\forall w \in V_2$ に対して、$g(v, w) = 0 \Longrightarrow v = 0$ を示せば $g|_{V_2}$ は非退化である。

$v = (v_0, v_1, 0)$, $w = (w_0, w_1, 0)$ として $g(v, w)$ は

$$g(v, w) = -v_0 w_0 + v_1 w_1,$$

$$g(v, w) = 0 \Longleftrightarrow v_0 w_0 = v_1 w_1.$$

任意の $w \in V_2$（つまり、任意の $w_0, w_1 \in \mathbb{R}$）であっても ～～～ が必ず成立する場合、

$v = (v_0, v_1, 0) = (0, 0, 0)$ である。よって $g|_{V_2}$ は非退化。

$v \in V_2$

$g(v, v) = -v_0^2 + v_1^2$ より、g は v_0 と v_1 の大小関係によって正、負、ゼロ全てを取り得る。

よって、g は不定値である。

以上より、$g|_{V_2}$ は不定値かつ非退化であるため、V_2 は非退化部分空間である。//

(3) V_3 は退化部分空間か？

示したいこと　$\exists v \in V_3 \setminus \{0\}$ s.t. $g(v, w) = 0$、$\forall w \in V_3$　(¬非退化の条件)

$v = (v_0, v_0, v_2)$、$w = (w_0, w_0, w_2)$ として、

$$g(v, w) = -\cancel{v_0 w_0} + \cancel{v_0 w_0} + v_2 w_2$$

$$= v_2 w_2.$$

よって、$v = (1, 1, 0)$ とおけば、w の値に依らず、$v \neq 0$ かつ $g(v, w) = 0$ を満たす。

よって、$g|_{V_3}$ は退化であるため、V_3 は退化部分空間である。//

SEMI-RIEMANNIAN MANIFOLDS

1. Def (計量テンソル g)

滑らかな多様体 M 上の計量テンソル g とは、定数インデックスを持つ M 上の対称非退化 $(0,2)$ テンソル場 のことである。

$T_p(M) \times T_p(M) \to \mathbb{R}$

言い換えると、$g \in \mathcal{T}^0_2(M)$ は M の各点 p に接空間 $T_p(M)$ 上のスカラー積 g_p を滑らかに割り当て、g_p のインデックスは p と等しい。

2. Def (擬リーマン多様体)

M が擬リーマン多様体である

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ M が計量テンソル g を備えた滑らかな多様体である

- 擬リーマン多様体は順序付けられた組 (M, g) であり、同じ多様体上に異なる計量テンソルが存在する場合、それぞれが異なる擬リーマン多様体を構成する。

  $g_1 \neq g_2$ なら、(M, g_1) と (M, g_2) は異なる擬リーマン多様体

- 擬リーマン多様体 M 上のインデックス g_p の共通の値 ν は、M のインデックスと呼ばれる $(0 \leq \nu \leq \dim M)$.

  $\nu = 0$ なら、M はリーマン多様体で、各 g_p は $T_p(M)$ 上の正定値の内積となる。

  $\nu = 1$ かつ $n(=\dim M) \geq 2$ なら、M は Lorentz ローレンツ多様体と呼ばれる。

- 擬リーマン (Semi-Riemannian) 多様体は「pseudo-Riemmanian 多様体」と呼ばれることもある。また、古い用語だと「リーマン多様体」とも呼ばれているが、正定値の場合に限定して用いることにする。

- $\langle\ ,\ \rangle$ を g の代替表記として使用し、接ベクトルに対しては

$$g(v, w) = \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$$

と書き、ベクトル場に対しては

$$g(V, W) = \langle V, W \rangle \in \mathcal{F}(M)$$

と書くことにする。

- $x^1, \cdots, x^n$ が開集合 $U \subseteq M$ 上の座標系であるならば、U 上の計量テンソル g の成分 g_{ij} は、

↳ 定義より非退化

$$g_{ij} := \langle \partial_i, \partial_j \rangle \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

である。したがって、ベクトル場 $V = \sum_{i=1}^{n} V^i \partial_i$ および $W = \sum_{j=1}^{n} W^j \partial_j$ に対しては

$$g(V, W) = \langle V, W \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} V^i \partial_i, \sum_{j=1}^{n} W^j \partial_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} V^i W^j$$

である。g が非退化であるため、U の各点 p で行列 $(g_{ij}(p))$ は可逆であり、逆行列は $(g^{ij}(p))$ と表記される。

(補題 19 より、g が非退化 $\Longleftrightarrow$ $(g_{ij}(p))$ が可逆)

- g は対称であるため、

$$g_{ij} = g_{ji} \ 、\ g^{ij} = g^{ji} \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

である。U上の計量テンソルは次のように書ける。

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j .$$

各点 $p \in \mathbb{R}^n$ に対して、自然な座標系の観点から v を $v_p = \sum_{i=1}^{n} v^i \partial_i$ へと送る、
$\mathbb{R}^n$ から $T_p(\mathbb{R}^n)$ への 標準線形同型写像 (canonical linear isomorphism) が存在する。

※基底の取り方に依らない線形同型写像を「標準線形同型写像」と呼ぶ

標準線形同型写像を f とすると、

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_p(\mathbb{R}^n)$$
$$v \longmapsto v_p$$

したがって、$\mathbb{R}^n$ 上のドット積は次のような計量テンソル $\langle v_p, w_p \rangle$ を与える

$$\langle v_p, w_p \rangle = v \cdot w = \sum_{i=1}^{n} v^i w^i .$$

(今後の文脈では、$\mathbb{R}^n$ は結果的に得られるリーマン多様体を表し、これをユークリッド n 次元空間と呼ぶ)

- $0 \leq \nu \leq n$ を満たす整数 ν を用いて、$\langle v_p, w_p \rangle$ の最初の ν 個の正の符号を負に変えると、インデックス ν の計量テンソルが得られる。

$$\langle v_p, w_p \rangle = -\sum_{i=1}^{\nu} v^i w^i + \sum_{j=\nu+1}^{n} v^j w^j$$

結果として得られる擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n_\nu$ は、$\nu = 0$ の場合に $\mathbb{R}^n$ に簡約 (reduce) される。

$n \geq 2$ の場合、$\mathbb{R}^n_\nu$ は n 次元ミンコフスキー空間と呼ばれ、$n = 4$ が相対性時空 (spacetime) の最も単純な例である。

・$v \neq 0 \Rightarrow g(v, v) > 0$ のとき、
(<)
gは正定値
(負)

- ε_i の記法を次のように固定する.

$$\varepsilon_i = \begin{cases} -1 & (1 \leq i \leq \nu) \\ +1 & (\nu+1 \leq i \leq n) \end{cases}$$

このとき、$\mathbb{R}^n_\nu$ の計量テンソル g は

$$g = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \, du^i \otimes du^i$$

↳ du^i が正定値か負定値かを示す符号の役割

と書かれる.

擬リーマン多様体におけるインデックスの意味は、以下の3つの区分(trichotomy)から導かれる.

3. Def (接ベクトルの分類)

M の接ベクトル v は、内積 $\langle v, v \rangle$ に関して

(1) $\langle v, v \rangle > 0$ または $v = 0$ なら 空間的(spacelike)

(2) $\langle v, v \rangle = 0$ かつ $v \neq 0$ なら null

(3) $\langle v, v \rangle < 0$ なら 時間的(timelike)

と呼ぶ.

→ 二次形式 $q(v) = 0$ かつ $v \neq 0$

- $T_p(M)$ における全ての null ベクトルの集合は、$p \in M$ における null 錐(nullcone) と呼ばれる.
接ベクトルが属する(3. Defの)分類は、「因果特性(casual character)」と呼ばれる. この用語は相対性理論から派生し、特にローレンツ多様体の場合において、null ベクトルは光的(light like)と呼ばれる.

- M上の各接ベクトル v について、$q(v) := \langle v, v \rangle$ と定義する.
各点 $p \in M$ で、q はスカラー積に対応する二次形式を与える. よって q は計量

テンソルを決定する.

↳ g が内積の具体的な形を決定する

∵ 双線形性

$g(fV) = \langle fV, fV \rangle = f^2 \langle V, V \rangle = f^2 g(V)$

- $V \in \mathfrak{X}(M)$、$f \in \mathcal{F}(M)$ ならば $g(fV) = f^2 g(V) \in \mathcal{F}(M)$ であるので、g はテンソル場ではない. 古典的には、g は M の線素 (line element) と呼ばれ、ds^2 で表される.

∵ テンソル場ならば、「$g(fV) = f\,g(V)$」が成り立つべき

座標系で表すと、g は

$$g = ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, dx^i dx^j$$

$\left((g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ならば、} ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 \right)$

と表される. 微分 (dx^i, dx^j) の並置 (juxtaposition) は関数の通常の積を示しているため、

$$g(V) = \sum g_{ij}\, dx^i(V)\, dx^j(V)$$

$$= \sum g_{ij} V^i V^j .$$

(chapter 2 のように) 接ベクトル v のノルム $|v|$ は $|g(v)|^{\frac{1}{2}} = |\langle v, v \rangle|^{\frac{1}{2}}$ であり、

単位ベクトル、直交性 (orthogonality)、正規直交性 (orthonormality) は chapter 2 と同じ.

$u = \frac{v}{|v|}$　　$\langle v, w \rangle = 0$　　$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$

↳ 擬リーマン多様体におけるベクトルの性質が通常の多様体と同じ

※記法 ds^2 の起源は次のように考えることができる.

M をリーマン多様体とする. 点 p と p' がそれぞれ、座標 $(x^1, \cdots, x^n)$ と $(x^1 + \Delta x^1, \cdots, x^n + \Delta x^n)$ を持つ近傍同士の点であると仮定する. この場合、点 p での接ベクトル $\Delta p = \sum_{i=1}^{n} \Delta x^i \partial_i$ は おおよそ (approximately) p' を指している.

したがって、「p から p' までの距離 Δs の二乗」は以下のように計算される.

Δp ?

$$|\Delta p|^2 = \langle \Delta p, \Delta p \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(p)\, \Delta x^i \Delta x^j .$$

(これは、公式 $ds^2 = \sum g_{ij}\, dx^i dx^j$ に対応している)

⑪ 古い多様体から新しい滑らかな多様体を得る方法が与えられた場合、
古い多様体の計量テンソルから新しい計量テンソルを導く方法が存在.

P がリーマン多様体 M の部分多様体であると仮定する. P の接空間 $T_p(P)$ は $T_p(M)$ の部分空間と見なされるため、リーマン計量テンソル g を P 上の接ベクトルのペアに適用することで、P 上のリーマン計量テンソル g_P を得ることができる.

形式的に、g_P は引き戻し $j^*(g)$ (pullback) であり、$j: P \subset M$ は包含写像である.

※ $f: M \to N$ を C^∞ 級写像、g を M のリーマン計量とする.
各点 $p \in M$ において写像 $h_p: T_p(M) \times T_p(M) \to \mathbb{R}$ を

$$h_p(v, w) := g_{f(p)}(\underbrace{f_* v, f_* w}_{f\text{の微分}}), \quad v, w \in T_p(M)$$

によって定義すれば、h_p は M のリーマン計量 h を定める. この h を $f^*(g)$ と書いて、リーマン計量 g の f による引き戻し (pullback) という.

上の例では $f^*(g)$ の f を包含写像 j に置き換えている. ($j(P) = P$)

例えば、半径 $r > 0$ の標準 n 次元球面はリーマン部分多様体である.

$$S^n(r) := \{ p \mid |p| = r \} \quad \text{of} \quad \mathbb{R}^{n+1}$$

$\therefore$ $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の計量テンソルを $S^n(r)$ でも考えられる.

M の計量テンソル g が不定の場合、引き戻し $j^*(g)$ (pullback) は必ずしも P 上の計量である必要は無い.

それ ($j^*(g)$) が滑らかな対称 $(0,2)$ テンソル場であるため、
「$j^*(g)$ が計量であること」と、「各 $T_p(P)$ が g に関して $T_p(M)$ 内で非退化であり、$T_p(P)$ のインデックスが全ての p で同じ値である」ことは同値である.

Proof

jを包含写像、gを計量テンソルとする.

(i) $\Longrightarrow$ を示す（仮定：引き戻し $j^*(g)$ が計量である）

（示したいこと：・$V \in T_p(P)$ に対して、$j^*(g)(V, W) = 0 \Rightarrow W(\in T_p(P)) = 0$
・$\forall p \in P$ でインデックスが一定）

- 仮定より $j^*(g)$ が計量であるため、$\forall W \in T_p(P)$ に対して「$j^*(g)(V, W) = 0$」$\Rightarrow$「$V = 0$」. $j^*(g)(V, W) = g(j_* V, j_* W)$ であるため、元の多様体 M 上で $g(j_* V, j_* W) = 0$ になる. gは計量テンソルより非退化であるため、$j_* V = 0$ になる. これは $V = 0$ でないといけない.

- g は計量テンソルで、定義より $p \in P$ で g_p が滑らかである. そのため、$T_p(P)$ のインデックスは一定である. ∴ (i) を示した.

(ii) $\Longleftarrow$ を示す（仮定：各 $T_p(P)$ が gに関して $T_p(M)$ 内で非退化であり、$T_p(P)$ のインデックスが全ての p で同じ値）

- 仮定より、$\forall V \in T_p(P)$ に対して「$g(V, W) = 0$」$\Rightarrow$「$W = 0$」. よって、

$$j^*(g)(V, W) \underset{j^*(g) = g}{=} g(V, W) = 0.$$

以上より、$j^*(g)$ に関しても非退化である.

- 仮定より $\forall p \in P$ で $T_p(P)$ のインデックスが等しいため、計量テンソルの各固有値の正負が不変である。よって、計量テンソル gの滑らかさが保たれ、$j^*(g)$ も滑らかとなる.

- gが対称より、$j^*(g)$ も対称. ∴ (ii) を示した.

以上より、同値関係を示した■

4. Def（擬リーマン部分多様体）

P が擬リーマン多様体 M の 擬リーマン部分多様体である

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
- P は M の部分多様体である.
- 引き戻し $j^*(g)$ が、部分多様体 P 上の計量テンソルである.

※ P がリーマン多様体 または ローレンツ多様体 である場合、「擬リーマン部分多様体」という用語は「部分リーマン多様体」や「部分ローレンツ多様体」に置き換わる.

5. Lemma

M、N をそれぞれ計量テンソル g_M、g_N を持つ擬リーマン多様体とする。
$\pi : M \times N \longrightarrow M$ 、$\sigma : M \times N \longrightarrow N$ をそれぞれ射影とするとき、g を以下で定義する。

$$g := \pi^*(g_M) + \sigma^*(g_N)$$

このとき、g は擬リーマン積多様体を構成する $M \times N$ 上の計量テンソルである。

→ 対称、非退化、定数インデックス

Proof

- 引き戻し表記からの変換

$v, w \in T_{(p,q)}(M \times N)$ のとき、計量 $g(v, w)$ は

$$g(v, w) = g_M(d\pi(v), d\pi(w)) + g_N(d\sigma(v), d\sigma(w)) \cdots ☆$$

である。

☆について、計量 g が対称 $(g(v, w) = g(w, v))$ であることを確認する。
計量テンソルの定義より、g_M と g_N はそれぞれ対称であるため、

→ 1. Def

$$g_M(d\pi(v), d\pi(w)) = g_M(d\pi(w), d\pi(v))$$
$$g_N(d\sigma(v), d\sigma(w)) = g_N(d\sigma(w), d\sigma(v))$$

である。よって、

$$\begin{aligned} g(v, w) &= g_M(d\pi(v), d\pi(w)) + g_N(d\sigma(v), d\sigma(w)) \\ &= g_M(d\pi(w), d\pi(v)) + g_N(d\sigma(w), d\sigma(v)) \\ &= g(w, v). \end{aligned}$$

よって、g は対称である。 -- ①

- 非退化性の確認

g の非退化 ($\forall w \in T_{(p,q)}(M \times N)$ 、「$g(v, w) = 0$」 $\Rightarrow$ 「$v = 0$」) を確認する。

仮定より、$\forall w \in T_{(p,q)}(M \times N)$ に対して $g(v, w) = 0$ である。このとき、$w \in T_{(p,q)}(M)$ に対しても成立する。このときの $d\sigma(w)$ は、

$$d\sigma(w) = 0$$

である。よって、$g(v, w)$ は

$$\begin{aligned} g(v, w) &= g_M(d\pi(v), d\pi(w)) + g_N(d\sigma(v), \underbrace{d\sigma(w)}_{=0}) \\ &= g_M(d\pi(v), d\pi(w)) + g_N(d\sigma(v), 0) \\ &= g_M(d\pi(v), d\pi(w)) + 0 \quad \cdots \ast\ast \end{aligned}$$

$\because$ g_N の双線形性

である。任意の w に対して $\ast\ast$ の右辺が 0 であるため、$d\pi(v) = 0$ である。同様の議論で N についても考えることで、$d\sigma(v) = 0$ である。よって、$v \in T_{(p,q)}(M \times N)$ は 0 である。

よって、v が非退化であることを示した。… ②

- 正規直交基底の結合

$T_p(M)$ の正規直交基底を $\{e_1, \cdots, e_m\}$、
$T_q(N)$ の正規直交基底を $\{e'_1, \cdots, e'_n\}$ とする。

$M \times N$ 上の接空間 $T_{(p,q)}(M \times N)$ は、各点において $T_p(M)$ と $T_q(N)$ の直積として表される。つまり、

$$T_{(p,q)}(M \times N) = T_p(M) \oplus T_q(N)$$

である。$T_p(M)$ と $T_q(N)$ の基底を結合 $(\{e_1, \cdots, e_m, e'_1, \cdots, e'_n\})$ することで $T_{(p,q)}(M \times N)$ の正規直交基底を得ることができる。

よって、新しい計量テンソル g のインデックスは、g_M のインデックス $(= \mathrm{ind}\, M)$ と g_N のインデックス $(= \mathrm{ind}\, N)$ の和となる。… ③

①、②、③ より、g が計量テンソルであることを示した ■

同様の scheme 系は、有限個の積の擬リーマン多様体へ拡張可能.

例えば、擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n_\nu$ は

$$\underbrace{\mathbb{R}^1_1 \times \mathbb{R}^1_1 \times \cdots\cdots \times \mathbb{R}^1_1}_{\nu} \times \underbrace{\mathbb{R}^1 \times \cdots\cdots \times \mathbb{R}^1}_{n-\nu} = \mathbb{R}^\nu_\nu \times \mathbb{R}^{n-\nu}.$$

ここで、$\mathbb{R}^1_1$ は通常の $\mathbb{R}^1$ 上のドット積の負の値を持つ計量テンソルを備えた実数直線と定義される.