ロードマップ

本スライド 5/8

P4〜P8

- (ギ)リーマン幾何の土台の構築
  - 多様体、テンソル
  - リーマン、ローレンツ (1,2,3,4,5,7章)
- (ギ)リーマン幾何の代数学的考察 (8,9,11章)
- 相対性理論へローレンツ幾何の導入 (6章)
- 物理的対象の考察 (12,13章)
- ローレンツ多様体との(因果)関係 (14章)

なめらかな写像（SMOOTH MAPPING）　5/8 ここから

多様体 M 上の実数値関数 f について、特殊なケースを考える。

$\xi : U \to \mathbb{R}^n$ が M の座標系である場合、f との合成関数

グザイ

$f \circ \xi^{-1} : \xi(U) \to \mathbb{R}^1$ を、ξ に関する f の座標~~式~~表示と呼ぶ。

Coordinate expression

グザイ

M 上の任意の座標系 ξ に対して、座標式 $f \circ \xi^{-1}$ が通常のユークリッド空間で滑らかであるならば、「関数 $f : M \to \mathbb{R}^1$ も滑らかである」と定義するのは自然な発想。

→ C^∞級

（実際、U 上において、$f = (f \circ \xi^{-1})(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ である）

$M \to \mathbb{R}^1$　　$\xi(U) \to \mathbb{R}^1$

Def　関数 f が滑らか $(f : M \to \mathbb{R}^1)$ $\Longleftrightarrow$ M 上の任意の座標系 ξ に対して、$f \circ \xi^{-1}$ が C^∞ 級である。

M上の任意の座標系 ξ に対して $f\circ\xi^{-1}$ が C^∞ 級である。

補題

M上の関数 f, g がいずれも滑らかであるとき、
それらの和 $f+g$ と 積 $f\cdot g$ も同様に滑らかになる。

$(f\cdot g)\circ(\xi^{-1}) =$ 。

$(f+g)\circ(\xi^{-1})$ が C^∞ 級を示したい。

証明

$f+g$ と fg が、それぞれ滑らか(C^∞級)の定義を満たすことを確認

C^∞級 … f が何回でも微分できる。

(i) $f+g$ について

$(f+g)' = f' + g'$ より、f と g がそれぞれ C^n 級なら、$f+g$ も C^n 級である。

∴ f と g がそれぞれ滑らか(C^∞級)であるならば、和 $f+g$ も滑らかである。∎

$(f+g)\circ(\xi^{-1}) = f\circ\xi^{-1} + g\circ\xi^{-1}$ で 前提「f と g が M上で滑らか」より、$(f+g)\circ(\xi^{-1})$ も滑らか。

(ii) fg について

C^n級関数同士の積がC^n級 $(n\in\mathbb{N})$ であることを数学的帰納法で示す。

(I) $n=1$ のとき

fとgがそれぞれC^1級とする。fgの微分を考えると、

C^1級…・fが微分可能
・導関数f'が連続

$$(fg)'=f'\cdot g+f\cdot g'$$

である。今、fとgは連続で、f'、g'も連続であるため、$(fg)'$は連続である。

$\therefore$ fgはC^1級である …①

C^n級…・fが微分可能
・n階導関数$f^{(n)}$が連続

(II) $n=k\ (\in\mathbb{N})$ で成立すると仮定して、$n=k+1$ のとき、

fとgがそれぞれC^{k+1}級とする。fgの微分は同様に $f'g+fg'$ である。

f'とg'はC^k級であるので、仮定より $f'g$とfg'はC^k級。

よって、$(fg)'=f'g+fg'$ はC^k級であるため、fgはC^{k+1}級である …②

①、②より、fとgがC^∞級であれば $fg\in C^\infty$級である。■

M上の任意の座標系 ξ に対して、$f\circ\xi^{-1}$
が、C^∞ 級 である。

(2) $(f\cdot g)\circ(\xi^{-1})$ が 滑らかで あることを 示す.

$$(f\cdot g)\circ(\xi^{-1}) = \underbrace{(f\circ\xi^{-1})}_{\in\mathbb{R}^1}\cdot\underbrace{(g\circ\xi^{-1})}_{\in\mathbb{R}^1}$$

$\underline{\xi(U)} \to \mathbb{R}^1$

$\mathbb{R}^n$ の開集合 上 で 定義された関数

前提より、$f, g \in M$ が なめらか $f\circ\xi^{-1}$ と $g\circ\xi^{-1}$ は なめらか.

なめらかな関数同士の積は なめらか (上のスライドで示した)

$f+g$　$f\cdot g$　　　　algebraic rule

これらの2つの演算($+$, $\times$)には通常の代数の規則が適用され、エフ $\mathfrak{F}(M)$ は可換環となる。

多様体M上の全ての滑らかな実数関数の集合

値

定義(可換環)

集合Rと乗法$\cdot$、加法$+$の組$(R, \cdot, +)$が以下の4つの性質を満たすとき、$(R, \cdot, +)$を可換環という。

- (R1) 加法について可換群
  - (G1) 結合則 ; $(x+y)+z = x+(y+z)$
  - (G2) 単位元の存在 : $0+x = x+0 = x$
  - (G3) 逆元の存在 ; $-x+x = x+(-x) = 0$
  - (G4) 可換則 ; $x+y = y+x$
- (R2) 乗法の結合則 $(xy)z = x(yz)$
- (R3) 分配則 $x(y+z) = xy+xz$、$(x+y)z = xz+yz$
- (R4) 可換則 $xy = yx$

積の単位元の存在
$1\cdot x = x\cdot 1 = x$

単位元をもつ可換環

滑らかの概念を、実数関数から多様体の写像へ拡張することを考える。値

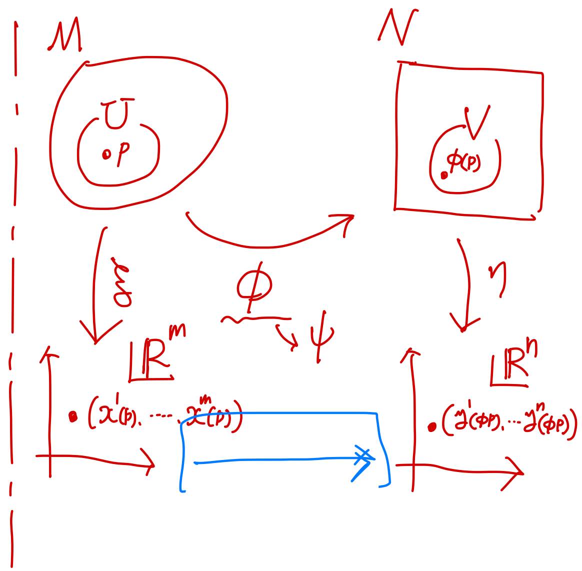
定義（滑らかな多様体間の写像）

M, Nを多様体とする。写像$\phi: M \to N$が「滑らか」であるとは、M上の任意の座標系ξとN上の任意の座標系ηに対して、座標式

$\eta \circ \phi \circ \xi^{-1}$

が、ユークリッド空間上で滑らかであることである。

Euclidian smooth



Uをξの領域、Vをηの領域とするとき、

任意の$p \in \phi^{-1}(V) \cap U$について、座標$y^j(\phi p)$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$は、

座標$x^1(p), x^2(p), \cdots\cdots, x^m(p)$に依存した形となる。→ ηで写像される$\mathbb{R}^n$内の座標

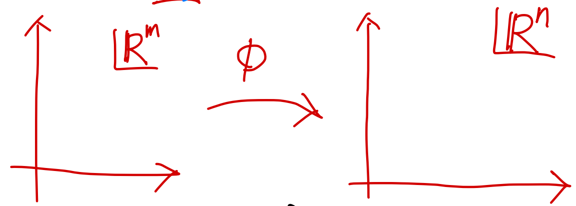
→ ξで写像される$\mathbb{R}^m$内の座標

注釈

(1) M と N を被覆するのに十分な数の座標系について、滑らかであることを確認すれば十分.

(2) 開集合 $U \subset \mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への(ユークリッド空間上で)滑らかな写像 ϕ は、先ほどの定義の意味で滑らかとなる。

仮定



identity coordinate system

∵ ϕ は U と $\mathbb{R}^n$ 上の恒等座標系に対する座標式であるため

(同様に、この定義は先に登場した $f: M \to \mathbb{R}^1$ の定義を満たす)

$\phi: U \to \mathbb{R}^n$ がユークリッド空間上の写像として滑らか $\Longrightarrow$ $\phi: U \to \mathbb{R}^n$ が多様体間の写像として滑らか

(3) 多様体の恒等写像は滑らかであり、滑らかな写像の合成も滑らかである。

仮定

$\phi: M \to N$
$\psi: N \to Q$

$\phi = \eta \circ \psi \circ \xi^{-1}$

(4) 座標系 ξ と 座標関数 x^i $(i=1,2,\cdots,m)$ は、ξ の ~~領域上~~ 定義域 の滑らかな写像となる.

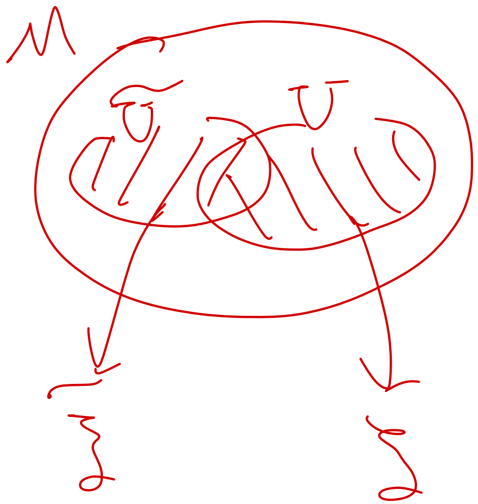
(1) $\Phi : M^m \to N^n$ がなめらか

$\iff$ $^\forall p \in M$, $^\exists(U, \xi)$: $p \in U$ であるMの座標系,

$^\exists(V, \eta)$: $\Phi(p) \in V$ 〃 N 〃.

s.t. $\eta \circ \Phi \circ \xi^{-1} : \xi(U) \to \mathbb{R}^n$ が (ユークリッド空間の写像として) ☆ なめらか

$$\xi(U) \subset \mathbb{R}^m$$



$(U, \xi), (\tilde{U}, \tilde{\xi})$: Mの座標近傍

$\eta \circ \Phi \circ \xi^{-1}$ が ☆ なめらか

$\iff$ $\eta \circ \Phi \circ \tilde{\xi}^{-1}$ が ☆ なめらか

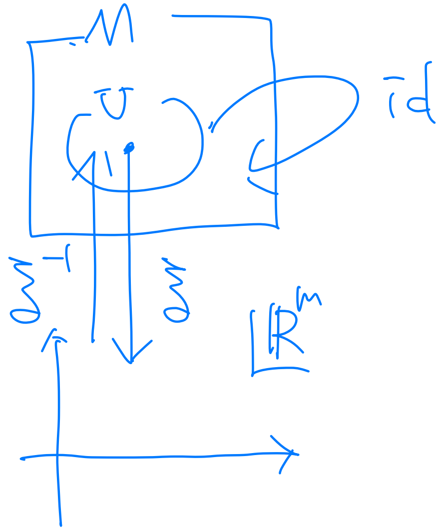
∵ ($\Longrightarrow$)　　($\Longleftarrow$)も同様.

$$\eta \circ \Phi \circ \tilde{\xi}^{-1} = (\eta \circ \Phi \circ \xi^{-1}) \circ (\xi \circ \tilde{\xi}^{-1})$$

(3)①

$id : M \longrightarrow M$

$\xi \circ id \circ \xi^{-1}$ を考える



(3)②

$\phi : M \to N$ が なめらか
$\psi : N \to Q$

$\Downarrow$

$\psi \circ \phi : M \to Q$ が なめらか

(proof)

$\forall p \in M$ に対し、

次

prop $id : M \to M$ が なめらか

(proof) $\forall p \in M$、$(U, \xi) : p \in U$ である M の座標系

$id(p) = p$ なので、$(U, \xi) : id(p) = p \in U$ である M の座標系。

$\underbrace{\xi \circ id \circ \xi^{-1}}_{= id} : \xi(U) \to \mathbb{R}^m$ が なめらか ∎

$id_{\xi(U)}(x^1, x^2, \cdots, x^n) = (x^1, x^2, \cdots, x^n)$

$^\forall p \in M$ に対し、(U, ξ) ; $p \in U$ である M の座標近傍
(W, ζ) ; $(\psi \circ \phi)(p) \in W$ である Q の 〃

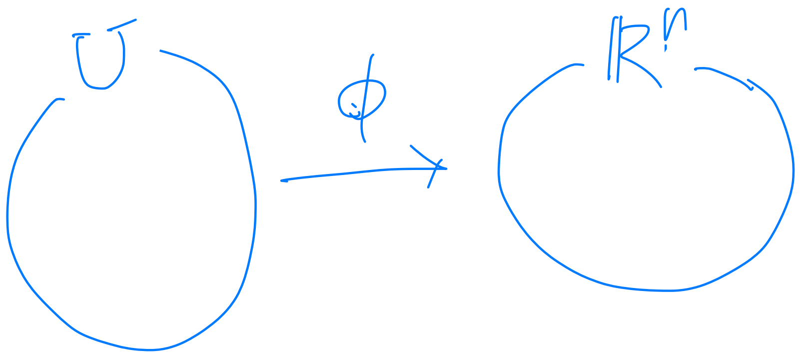
$\zeta \circ (\psi \circ \phi) \circ \xi^{-1} : \xi(U) \to \mathbb{R}^q$ が ✡ なめらか を示したい。

① (V, η) : $\phi(p) \in V$ である N の座標近傍

$\underline{\eta \circ \phi \circ \xi^{-1}} : \xi(U) \to \mathbb{R}^n$ が ✡ なめらか

② $\underline{\zeta \circ \psi \circ \eta^{-1}} : \eta(V) \to \mathbb{R}^q$ が ✡ なめらか

$$\zeta \circ (\psi \circ \phi) \circ \xi^{-1} = \underbrace{(\zeta \circ \psi \circ \eta^{-1})}_{C^\infty} \circ \underbrace{(\eta \circ \phi \circ \xi^{-1})}_{C^\infty}$$


U
ϕ
ℝⁿ

(4)

prop

$(U, \xi) = (U, x^1, x^2, \cdots, x^n)$; M の座標近傍 $\Longrightarrow$ $\xi : U \xrightarrow{C^M} \mathbb{R}^n$

$x^i : U \xrightarrow{C^M} \mathbb{R}$ が各 なめらか である

proof

$\forall p \in U$, $(\mathbb{R}^n, \mathrm{id})$; $\xi(p) \in \mathbb{R}^n$ である $\mathbb{R}^n$ の座標近傍

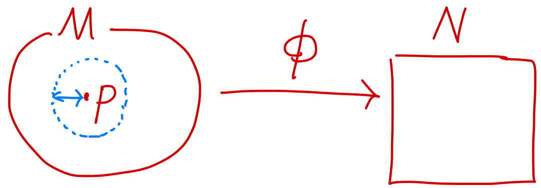
$$\underbrace{\mathrm{id} \circ \xi \circ \xi^{-1}}_{\mathrm{id}_{\xi(U)}(x^1, \cdots, x^n) = (x^1, \cdots, x^n)} : \xi(U) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$ はなめらか

$(\mathbb{R}, \mathrm{id})$: $x^i(p) \in \mathbb{R}$ である $\mathbb{R}$ の座標近傍

$$\underbrace{\mathrm{id}\circ x^i\circ\xi^{-1}}_{\parallel} : \xi(U)\to\mathbb{R} \quad \text{は なめらか!} \quad \blacksquare$$

$$x^i\circ\xi^{-1}(x^1,\ldots,x^i,\ldots,x^n) = x^i$$

(5) 滑らかさは局所的な~~特性~~ 性質である。



restriction

$p \in M$ の近傍で ϕ の制限が滑らかであれば、$\phi: M \longrightarrow N$ は p において滑らかと定義する。~~ϕ は M 上の全ての点で滑らかである場合に限り、滑らかとなる~~

↳ ϕ が滑らか $\Longleftrightarrow$ ϕ が M の各点において滑らか

(6) 滑らかな写像は連続である。

各インデックス $\alpha \in A$ に対して、U_α を滑らかな多様体 M の開集合とし、

$\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow N$ を滑らかな写像とする。任意の $\alpha, \beta \in A$ で

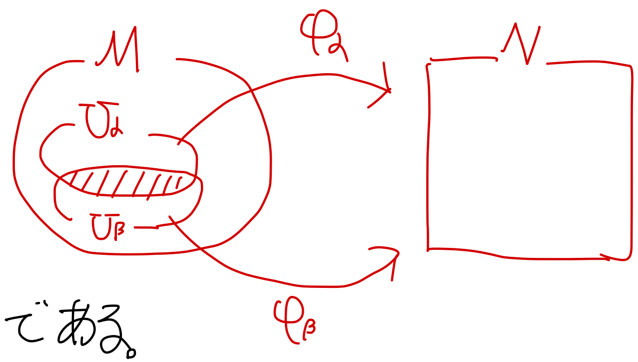
$$\varphi_\alpha = \varphi_\beta \qquad (U_\alpha \cap U_\beta)$$

combine

であるとする。これらの写像が結合して、任意の $\alpha \in A$ に対して

$$\phi : \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \longrightarrow N \quad \text{s.t.} \quad \phi\big|_{U_\alpha} = \varphi_\alpha$$

となるような写像 ϕ が与えられる。



滑らかさは局所的な性質なので、ϕ は滑らかである。

(6)

prop

$\phi: M \to N$ がなめらか $\Longrightarrow$ $\phi: M \to N$ が連続写像

$\Longleftrightarrow$ $^\forall V$: Nの開集合に対して、

$\phi^{-1}(V)$ は M の開集合

proof

$^\forall V$: N の開集合とする。

$^\forall p \in \phi^{-1}(V)$ に対し、$^\exists U$: M の開集合 s.t. $x \in U \subset \phi^{-1}(V)$ を示せばよい。

$f = \eta \circ \phi \circ \xi^{-1}$ は ※ なので、特に連続 $\therefore \phi = \eta^{-1} \circ f \circ \xi$

(※ η と ξ は同相写像なので、連続。)

定義（微分同相写像）

微分同相写像 $\phi : M \to N$ は、滑らかな写像で、
逆関数も滑らかである。

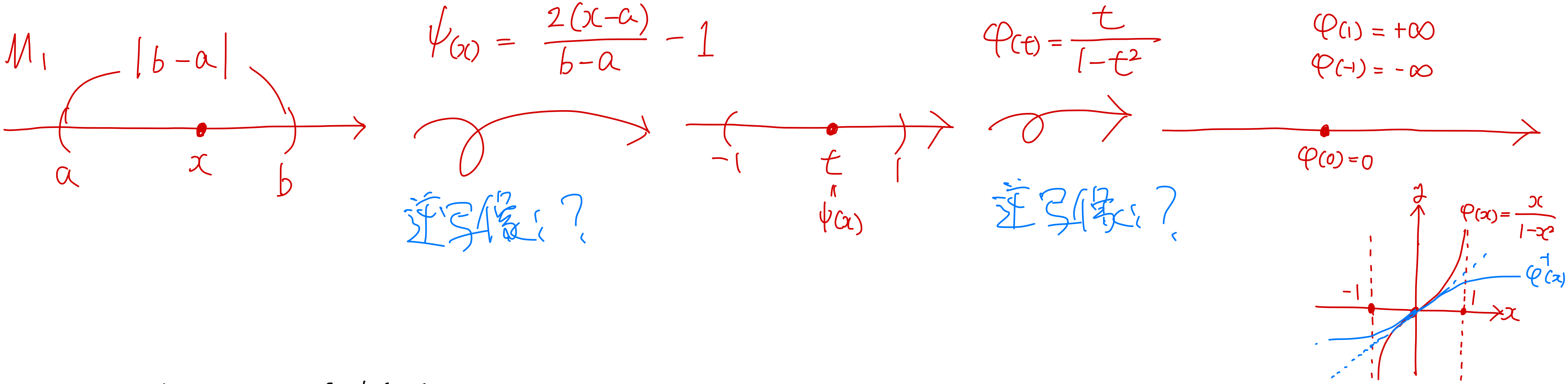
compositions

（多様体の恒等写像、微分同相写像の合成、微分同相写像の逆写像も、微分同相写像である）

多様体 M から N への微分同相写像 ϕ が存在するとき、M と N は ϕ のもとで **微分同相** である、という。

Ex

$M_1 = (a, b)$ は、それぞれ適当な微分同相写像を選ぶことで、
$N_1 = (-1, 1)$ と微分同相。
$M_2 = (-1, 1)$ も同様に、$\varphi(t) = \dfrac{t}{1-t^2}$ の下では $\mathbb{R}^1$ と微分同相。



Σを集合、Mを多様体とする。

写像 φ が $\varphi : \Sigma \longrightarrow M$ の 1対1(one-to-one)に対応する関数 であるならば、φ が微分同相写像であるような Σ を多様体にする一意な方法がある。
(Σ 上に一意なトポロジーと完備なアトラスがある)

C^∞級 $\Rightarrow$ C^n級 $\Rightarrow$ C^1級
$\Rightarrow$ 微分可能 $\Rightarrow$ 連続

滑らかな写像は連続であるため、

微分同相写像 $\Longrightarrow$ 同相写像

連続かつ全単射
逆写像も連続

である。その逆(同相写像 $\Longrightarrow$ 微分同相写像)は、滑らか($= C^\infty$級)でない可能性があるため成り立たない。 Ex $f(t) = t^3$ (逆関数が $t=0$ で微分不可能)

全ての座標系ξは、領域Uから$\xi(U)\subset\mathbb{R}^n$への微分同相写像である。
(逆に言えば、)開集合$V\subset M$から$\phi(V)\subset\mathbb{R}^n$への、どの微分同相写像$\phi$も多様体$M$上の座標系である。

every

$\xi : U \to \mathbb{R}^n$
$\phi : V \to \mathbb{R}^n$

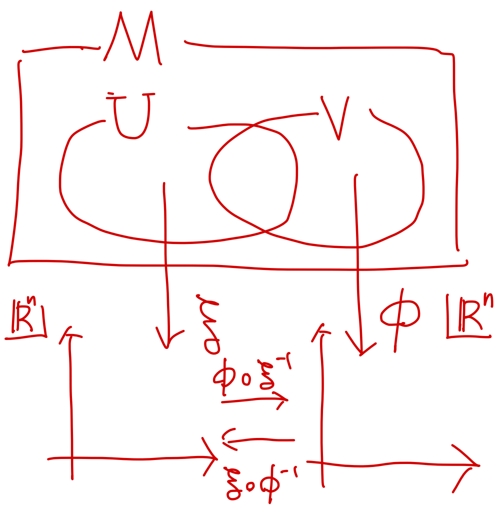
$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$　　$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

任意の座標系ξに対して、写像$\phi\circ\xi^{-1}$と$\xi\circ\phi^{-1}$はいずれも滑らかであり、Mのアトラスは完備であるため、ϕはM内にある。

follow

したがって、$\mathbb{R}^n$の微分同相写像によって座標系をたどると、再び座標系を得られる。
(特に、$p\in M$の場合は常に$\xi(p)=0\in\mathbb{R}^n$となる座標系が存在する)

→ ユークリッド空間$\mathbb{R}^n$で原点に対応する点が存在する



補題（隆起関数）

多様体Mの点pにおいて開近傍Uが与えられるとき、

pにおいて以下の条件(A1)〜(A3)を満たす関数$f \in \mathcal{F}(M)$が存在する。

(A1) $0 \leq f \leq 1$.

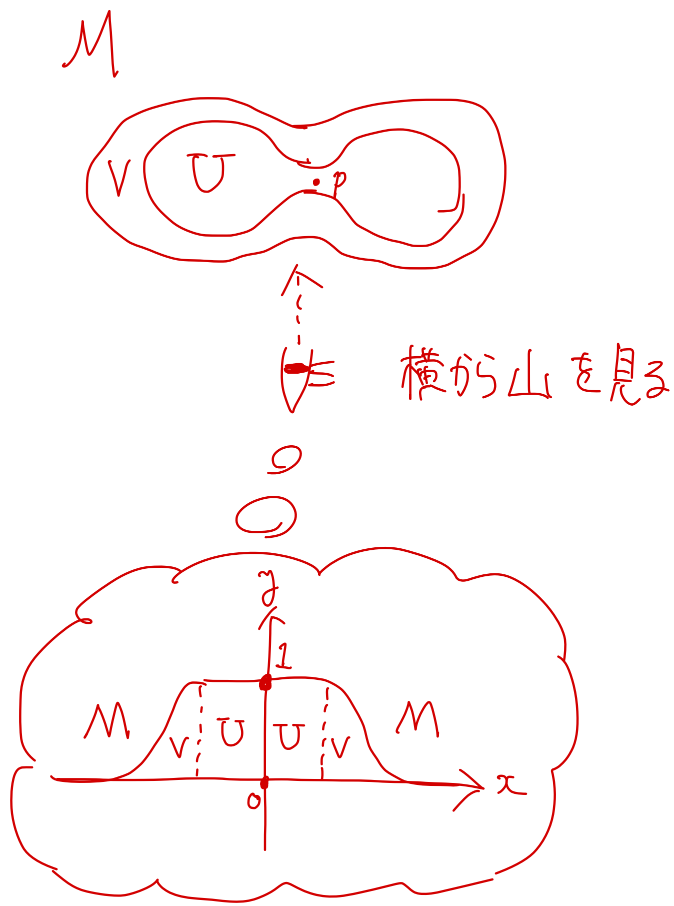
(A2) pの近傍において、$f = 1$.

(A3) $\mathrm{Supp}(f) \subset U$.

$$\overline{\{p \in M \mid f(p) \neq 0\}}$$

（このようなfを隆起関数と呼ぶ）
bump function

イメージ

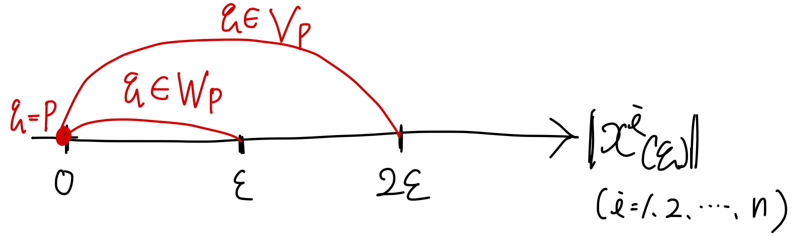


証明　参考：松島「多様体入門」p62〜63

多様体 M の点 p のまわりの局所座標系 $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ を $x^i(p)=0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ となるように選ぶ。 $\varepsilon>0$ を十分小さな正数として、V_p および W_p を、

$$V_p := \{q\in M \mid \|x^i(q)\| < 2\varepsilon,\ i=1,2,\cdots,n\}$$

$$W_p := \{q\in M \mid \|x^i(q)\| < \varepsilon,\ i=1,2,\cdots,n\}$$



で定義すると、V_p および W_p は p の近傍では $\overline{W_p}\subset V_p$ となる。

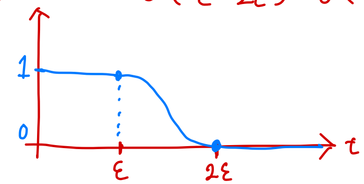
また、$h(t)\in\mathbb{R}^1$ を C^∞ 級として、以下の条件(*)を満たすとする。今、多様体 M 上の関数 f_p を、

$$f_p(q) := \begin{cases} h(x^1(q))\cdot h(x^2(q)) \cdots\cdots h(x^n(q)) & (q\in V_p) \\ 0 & (q\notin V_p) \end{cases}$$

Ex

$$\begin{cases} f(t) = e^{-\frac{1}{t^2}} \\ g(t) = \dfrac{f(t)}{f(t)+f(1-t)} \end{cases}$$ として、

$$h(t) = g\left(\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon-2\varepsilon}\right)\cdot g\left(\frac{-t+\varepsilon}{\varepsilon-2\varepsilon}\right)$$



により定義する。f_p は C^∞ 級であって、

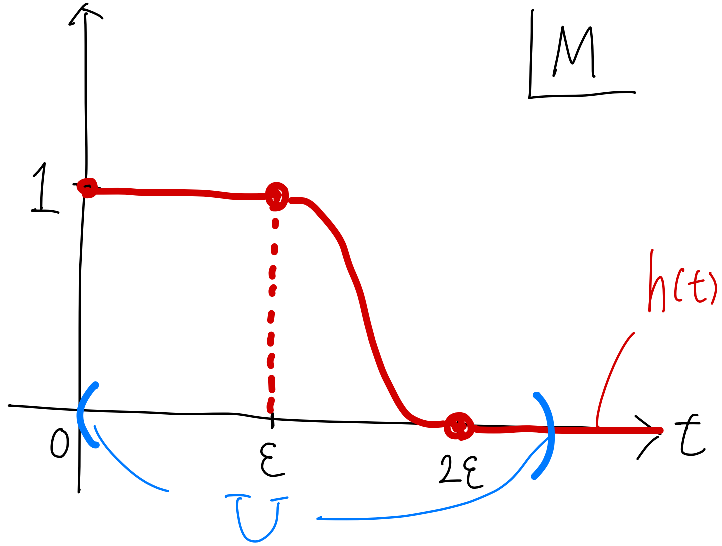
- $q\in\overline{W_p}$ のとき、　$f_p(q)=1$
- $q\in V_p-\overline{W_p}$ のとき、 $0<f_p(q)<1$
- $q\notin V_p$ のとき、　$f_p(q)=0$

(*) $h(t) \in \mathbb{R}^1$ の条件 (P6)

(1) $t < \varepsilon$ で. $h(t) = 1$

(2) $2\varepsilon < t$ で. $h(t) = 0$

(3) $0 \leq h \leq 1$



$\mathbb{M}$

を満たす。このf_pは補題内の条件(A1)〜(A3)も満たすため、補題が示された。■

接ベクトル(TANGENT VECTORS)

P7

$\mathbb{R}^n$から多様体へと微積分を一般化するにあたり、ユークリッド空間上の方向微分を公理化する以下の定義が重要となる。

directional derivative

(方向微分と接ベクトルを同一視)

定義(接ベクトル)

pを多様体M上の点とする。点pにおけるMの接ベクトルとは、

実数関数$v: \mathcal{J}(M) \to \mathbb{R}$が、以下の条件

(A1) 線形性 : $v(af+bg) = av(f)+bv(g)$ $\quad (a, b \in \mathbb{R},\ f, g \in \mathcal{J}(M))$

(A2) ライプニッツ則 : $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$

を満たすものである。

各点 $p \in M$ において、$T_p(M)$ を p における M への全ての 接ベクトルの集合 とする。

通常の関数の加算とスカラー倍の定義より、

$T_p(M)$ は実数 $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間となる。

※ $T_p(M)$ は、点 p における M への接空間と呼ばれる。

接空間 $T_p(M) = \left\{ a_1 \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p + a_2 \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_p + \cdots + a_n \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p \,\middle|\, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$

明示的に、…

補題 (Explictly …)

v と w を実数関数とする。($v : \mathfrak{J}(M) \to \mathbb{R}$、$w : \mathfrak{J}(M) \to \mathbb{R}$)

接ベクトルに以下の性質を定義すると、$T_p(M)$ はベクトル空間になる。

(1) $(v + w)(f) = v(f) + w(f)$ (和の定義)

方向微分の和　　実数同士の足し算

(2) $(av)(f) = av(f)$ (スカラ倍の定義)

方向微分のスカラ倍　　実数同士のかけ算

証明

(1)、(2) の定義により、$T_p(M)$ が ベクトル空間の公理 を満たすことを確認する。

8つ

ベクトル空間の公理

参考：松本「多様体の基礎」P10

和

(V1) 結合則 ; $((u+v)+w)(f) \overset{\text{☺(1)}}{=} u(f)+v(f)+w(f) = (u+(v+w))(f)$

(V2) 交換則 ; $(v+w)(f) \overset{\text{☺(1)}}{=} v(f)+w(f) = w(f)+v(f) = (w+v)(f)$

(V3) 単位元の存在 ; $^{\forall}f \in \mathcal{J}(M)$ に 0 を対応させる方向微分 $0 : \mathcal{J}(M) \to \mathbb{R}$ を考えると、

$$(v+0)(f) = v(f) + 0 = v(f)$$

となり、全ての $v \in \mathcal{J}(M)$ で成り立つ。

(V4) 逆元の存在 ; 任意の v に対し、逆元 $-v$ を、

$$(-v)(f) = -v(f)$$

と定義すれば、v に対して $(-v)$ がただ1つ定まる。

スカラー

(V5) ベクトルに関する分配法則 ; $a, b \in \mathbb{R}$、 $v \in T_p(M)$ に対し、

$$((a+b)v)(f) \overset{(2)}{=} (a+b)\cdot v(f)$$
$$= av(f) + bv(f)$$
$$= (av + bv)(f)$$

(V6) スカラーに関する分配法則 ; $a \in \mathbb{R}$、 $v, w \in T_p(M)$ に対し、

$$(a(v+w))(f) \overset{(2)}{=} a\cdot(v+w)(f)$$
$$= av(f) + aw(f) \quad (1)$$
$$= (av + aw)(f)$$

(V7) スカラー倍の結合則 ; $(ab\cdot v)(f) \overset{(2)}{=} ab\cdot v(f) = a\cdot bv(f)$
$$= (a\cdot bv(f))$$

(V8) スカラー倍の単位元の存在 ; $1 \in \mathbb{R}$ に対して、

$$(1\cdot v)(f) = 1\cdot v(f) = v(f)$$

∴ 和とスカラ倍の定義より、$T_p(M)$ がベクトル空間となることを確認した ■

多様体上で偏微分を定義するには、座標系を使用して関数 f をユークリッド空間に戻してから偏微分を計算する。

定義（自然な座標関数）

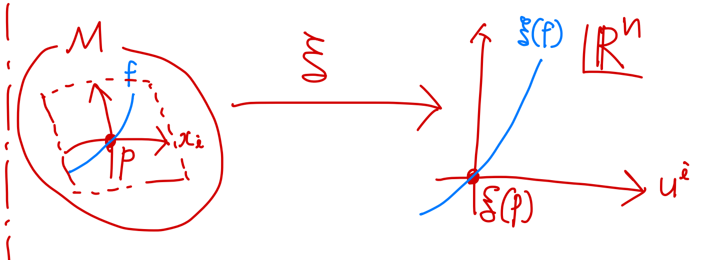
$\xi = (x^1, x^2, \cdots, x^n)$ を多様体 M の点 p における座標系とする。

$f \in \mathcal{J}(M)$ のとき、

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial (f \circ \xi^{-1})}{\partial u^i}(\xi p) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

natural coordinate function

は $\mathbb{R}^n$ の自然な座標関数となる。



$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$：点 p における x_i 方向の基底

(A1) 線形性

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}(af + bg)\right|_p = a \cdot \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p + b \cdot \left.\frac{\partial g}{\partial x^i}\right|_p$$

(A2) ライプニッツ則

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}(f \cdot g)\right|_p = \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p \cdot g(p) + f(p) \cdot \left.\frac{\partial g}{\partial x^i}\right|_p$$

※簡単な計算で、各 $f \in \mathcal{J}(M)$ を $\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)(p)$ に送る関数

$$\partial_i|_p = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p : \mathcal{J}(M) \to \mathbb{R} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

は、点 p における M の接ベクトルであることが分かる。

→ 微分演算子の「線形性」と「ライプニッツ則」の確認

補題

$v \in T_p(M)$ とする.

(1) $f, g \in \mathcal{J}(M)$ が点 p の近傍で等しいとき、$v(f) = v(g)$ である.

(2) $h \in \mathcal{J}(M)$ が点 p の近傍で定数のとき、$v(h) = 0$ である.

$\mathcal{J}(M)$ .. M 上の滑らかな実数関数の集合

$f = g \Longrightarrow v(f) = v(g)$

$\Updownarrow$

$f - g = 0 \Longrightarrow v(f - g) = 0$

証明

(1) 線形性により、「点 p の近傍で $f = 0$ であるならば、$v(f) = 0$」である事を示せばよい.

今、g を点 p における隆起関数とする(開集合 U 内に台を持つ)と、全ての M 上で

$$f \cdot g = 0$$

$0 \leq g \leq 1$ on M
$g = 1$ at p の近傍
$\mathrm{supp}(g) \subset U$

となる. ここで、$v(0) = v(0+0) = v(0) + v(0)$ より、$v(0) = 0$ であるので、$f(p) = 0$、$g(p) = 1$ であるので、

$$0 \underset{f g = 0}{=} v(f \cdot g) \underset{\text{ライプニッツ則}}{=} v(f) g(p) + f(p) v(g) \underset{f(p)=0,\ g(p)=1}{=} v(f)$$

である. よって、「点 p の近傍で $f = 0$ ならば $v(f) = 0$」であるため、(1) が示された. ■

*

点pの近傍 ~~U~~ Uで、

したいこと

$f = g \longrightarrow v(f) = v(g)$

$f(p) = g(p)$

$\Updownarrow$

$f - g = 0 \longrightarrow \underbrace{v(f) - v(g)}_{\parallel} = 0$

$v(\underbrace{f-g}_{\parallel\ h}) = 0$

$h = 0 \longrightarrow v(h) = 0$

$h(p) = 0$

$h(p) = 0$
$g(p) = 1$

$v(f+g) = v(f) + v(g)$

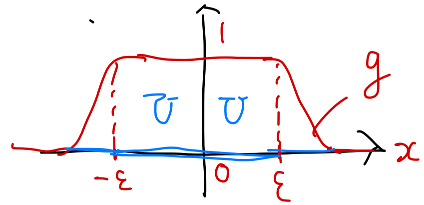
$g :=$ 点p における隆起函数

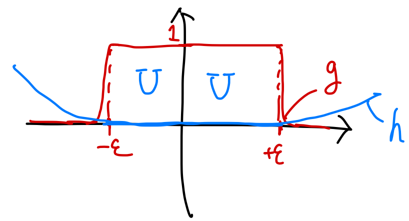
全てのM上で、

$\underline{h \cdot g = 0}$

となる。ここで、

$h(p) = 0$
$g(p) = 1$
$v(0) = 0$





ライプニッツ則

より、$0 = v(h \cdot g)$ ↓

$= v(h) \cdot \underbrace{g(p)}_{=1} + \underbrace{h(p)}_{=0} \cdot v(g)$

$= v(h)$

$\therefore h = 0 \Longrightarrow v(h) = 0$

点pの近傍で

(2) 関数 h が多様体 M 上の全ての点で、定数 C であるとする。

今 $1 \in \mathcal{J}(M)$ を定数 1 の関数とすると、

$$v(\underset{\in \mathcal{J}(M)}{1}) = v(\underset{\in \mathcal{J}(M)}{1} \cdot \underset{\in \mathcal{J}(M)}{1}) = v(1)\cdot 1 + 1\cdot v(1) = 2v(1)$$

$v(fg)|_p = v(f)\cdot g(p) + f(p)\cdot v(g)$

であるため、$v(1) = 0$ となる。同様の議論で $v(h)$ も、

$$v(\underset{\in \mathcal{J}(M)}{h}) = v(\underset{\in \mathbb{R}}{C} \cdot \underset{\in \mathcal{J}(M)}{1}) = C\cdot v(1) = 0 \quad (\because v(1) = 0)$$

である。よって、$v(h) = 0$ である ■

先ほどの補題で、接ベクトルが局所的な対象であることを確認した。
local object

別バージョン

U が多様体 M の開集合とすると、開部分多様体として U は点 $p \in U$ に接空間 $T_p(U)$ を持つ。$v \in T_p(U)$ を、

$$\tilde{v}(f) = v(f|_U) \quad {}^\forall f \in \mathcal{J}(M)$$

と定義する。$v \in T_p(M)$ であるので $\tilde{v} \in T_p(M)$ であり、関数 $v \longrightarrow \tilde{v}$ は線形同型写像である。 linear isomorphism

f が全単射である $V \simeq W$ 線形写像

($\text{以降}、T_p(U) = T_p(M)$ と表記)

座標と接ベクトルの間の重要な関係として、基底定理がある。
basis theorem

定理（基底定理）

$\xi := (x^1, x^2, \cdots, x^n)$ を多様体 M 上の点 p における座標系とする。

このとき、座標ベクトル $\partial_1|_p, \partial_2|_p, \cdots, \partial_n|_p$ は、接空間 $T_p(M)$ の基底を形成する。

そして、任意の $v \in T_p(M)$ について、

$$v = \sum_{i=1}^{n} v(x^i)\, \partial_i|_p$$

が成り立つ。

方針

- $\partial_1|_p, \partial_2|_p, \cdots, \partial_n|_p$ が接空間 $T_p(M)$ の基底であることの証明 … 一次独立の確認

  → $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ に対して、

  $$a_1\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p + a_2\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_p + \cdots + a_n\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p = 0 \Longrightarrow a_1 = 0,\ a_2 = 0, \cdots, a_n = 0$$

  を示したい。

- 接ベクトルの定義より、$v \in T_p(M)$ が接空間 $T_p(M)$ の基底を用いて書けることを利用

(本書の"接ベクトル"の定義は、松本「多様体の基礎」の"方向微分"の定義に該当) Pg

P7 P80

証明

(1) 座標ベクトル $\partial_1|_p, \partial_2|_p, \cdots \partial_n|_p$ が、接空間 $T_p(M)$ の基底を形成することを確認する。

以降、$\partial_1|_p = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p$、$\partial_2|_p = \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p$、------、$\partial_n|_p = \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p$ と表記する。

実数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ が、

$$a_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p + a_2\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p + \cdots\cdots + a_n\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p = 0 \Longrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

を満たすことを示せばよい。

接ベクトルの和とスカラー倍の定義より、$^\forall f$：点 p の近傍で定義された C^∞ 級関数について、

$$a_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p(f) + a_2\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p(f) + \cdots\cdots + a_n\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p(f) = 0 \quad \cdots ①$$

が成り立つ。今、関数 f は任意であったため、$f = x^1 \in C^\infty(M)$ とする。

①に $f=x^1$ を代入すると、

$$a_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p(x^1)+a_2\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p(x^1)+\cdots\cdots+a_n\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p(x^1)=0 \quad \cdots ②$$

となり、$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p(x^1)=1$、$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p(x^1)=0$ $(i=2,3,\cdots,n)$ であるため、②の式は

$$a_1+\cancel{a_2\cdot 0}+\cdots\cdots+\cancel{a_n\cdot 0}=0$$

となる。よって、$a_1=0$ が分かる。

f に代入する関数を $f=x^2$、$f=x^3$、$\cdots$、$f=x^n$ と変えていくことで、同様の計算により

$a_2=0$、$a_3=0$、$\cdots$、$a_n=0$ が示される。

これで、座標ベクトル $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p$、$\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_p$、$\cdots$ $\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p$ は一次独立であるため、
接空間 $T_p(M)$ の基底を形成することを確認できた。 ■

(2) $v = \sum_{i=1}^{n} v(x^i)\, \partial_i|_p$ を示す。

接空間によって張られる接ベクトルを $v \in T_p(M)$ とする。 (1)より基底は

$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p$, $\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_p$, $\cdots\cdots$, $\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p$

の n 個のベクトルであることが示されているので、それぞれの係数を

$v(x^1)$, $v(x^2)$, $\cdots$, $v(x^n)$

とすれば、任意の接ベクトル v は、

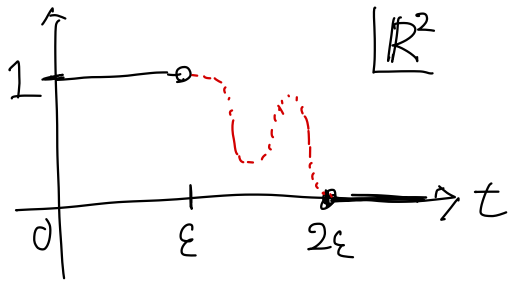
$$v = v(x^1)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p + v(x^2)\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_p + \cdots\cdots + v(x^n)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p$$

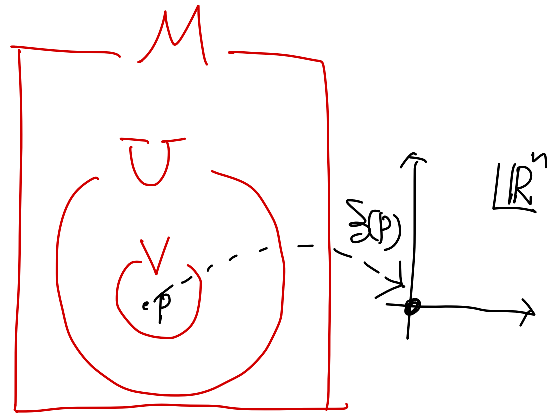
と表される。この v の式は (2) で示す形と一致しているため、任意の $v \in T_p(M)$ について、

$v = \sum_{i=1}^{n} v(x^i)\cdot \partial_i|_p$ であることを示した。■

任意の $\varepsilon\,(>0)$ に対して、以下のような関数 h を構築できる。

$$h(t) := \begin{cases} 1 & (t < \varepsilon) \\ 0 & (2\varepsilon \leq t) \end{cases} \quad \cdots\cdots ①$$





ここで、$\xi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を、$\xi(p) = 0$ および $V \subset U$ である

M の座標系とする。

$\xi(V)$ と ε に関連ある?

$\varepsilon > 0$ が十分に小さい場合、$\xi(V)$ には $\mathbb{R}^n$ 内の 0 の近傍 $\{p \in \mathbb{R}^n \mid |p|^2 < 3\varepsilon\}$?

が含まれる。

$\mathbb{R}$　　n次元の norm?　　(球面)　　$N \in V \in M$

$h(x_1^2 + x_2^2 + \cdots\cdots + x_n^2)$

$\mathbb{R}$?

さらに、V上で $N = \sum (x^i)^2$ を考える。

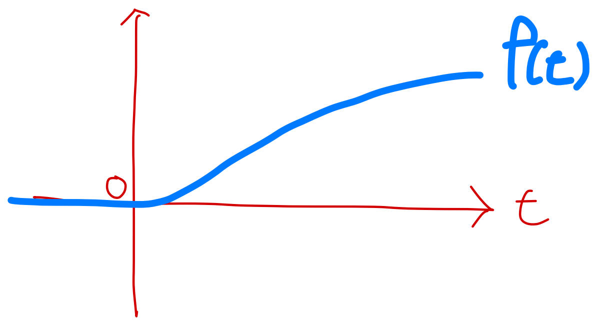
①で定義した関数 h について、V上で $f = h \circ N$ となる関数 f を定義する。

この場合、$h \circ N$ は M上で滑らかであり、(A1)〜(A3) を満たす。

$$N = |\xi(V)|^2$$

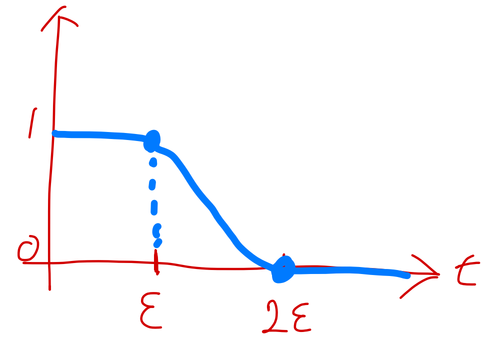
証明

参考：松島「多様体入門」p62〜63



以下のような関数 $f(t)$ を考える。（f は C^∞ 級）

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}} & (t>0) \\ 0 & (t \leq 0) \end{cases}$$



任意の $\varepsilon > 0$ に対して、以下のような関数 $h(t)$ を考える。

$$h(t) = \begin{cases} 1 & (t \leq \varepsilon) \\ 0 & (2\varepsilon \leq t) \end{cases}$$

$0 < h(t) < 1 \quad (\varepsilon < t < 2\varepsilon)$

Ex

$\begin{cases} f(t) = e^{-\frac{1}{t^2}} \\ g(t) = \dfrac{f(t)}{f(t)+f(1-t)} \end{cases}$ として、

$h(t) = g\left(\dfrac{t+\varepsilon}{\varepsilon - 2\varepsilon}\right) \cdot g\left(\dfrac{-t+\varepsilon}{\varepsilon - 2\varepsilon}\right)$

ここで、U、V を開集合とする。（p：多様体上の点、$p \in U$）

$\xi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を 多様体 M 上の座標系として、$\xi(p) = 0$、$V \subset U$ とする。

$\varepsilon > 0$ が十分に小さいとき、$\xi(V)$ には $0 \in \mathbb{R}^n$ の近傍 $P\ \{p \in \mathbb{R}^n \mid |p|^2 < 3\varepsilon\}$ を含んでいる。

V上において、$N = \sum_{l=1}^{m} (x^l)^2$とする。上スライドで定義した$h(t)$に対して、

関数gを、

$$g = \begin{cases} h \circ N & (\text{on } V) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

で定義する。このとき、gはM上で滑らかであり、条件(A1)〜(A3)を満たしている。