Def (部分多様体)

多様体Pが多様体Mの部分多様体であるとは、以下の条件を満たすことである。

(A1) PがMの部分位相空間である。
→ 相対位相を持つ部分空間

(A2) 包含写像$\jmath : P \subset M$が滑らかであり、各点$p \in P$において、包含写像の微分$d\jmath$が単射(one-to-one)であること。

Def (相対位相)

与えられた位相空間$(X, \mathcal{T})$とXの部分集合Sに対し、

S上の相対位相

$$\Longleftrightarrow \mathcal{T}_S = \{ S \cap U \mid U \in \mathcal{T} \}$$

(Xの開集合との交わり)

Prop (制限写像の滑らかさ)

P : Mの部分多様体

写像$\phi : M \to N$が滑らか

$\Longrightarrow$ Pへの制限写像$\phi|_P : P \to N$も滑らか

Proof

$\phi|_P = \phi \circ \jmath$ ($\jmath$: 包含写像)であるため、ϕと$\jmath$がそれぞれ滑らかであることを確認すればよい。

- ϕについて、仮定より滑らかである。
- $\jmath$について、26. Def (部分多様体)より滑らかである。

滑らかな写像同士の合成は滑らかであるため、$\phi \circ \jmath$は滑らかである。
よって、$\phi|_P$は滑らかである。 ■

※ 包含写像 $j: P \to M$ とその微分 $dj: T_p(P) \to T_p(M)$ はそれぞれ単射であるため、dj を無視して「接空間 $T_p(P)$」と「接空間 $T_p(M)$」を同一視する.

Example (部分多様体の例)

n 次元球面 S^n は、$\mathbb{R}^{n+1}$ の部分多様体である.

26. Definition の 2つの定義を確認すればよい。

(i) S^n が $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分位相空間であること

S^n は $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分集合として以下のように定義される.

$$S^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \|x\| = 1 \right\}$$

よって、S^n は $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分集合であるため、$\mathbb{R}^{n+1}$ の相対位相を持つ.

以上より、S^n は $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分位相空間である.

☆ (ii) 包含写像 j の滑らかさと dj が単射であること ($j: S^n \to \mathbb{R}^{n+1} \iff {}^\forall(U_i, \xi_i)$: S^n に対し、ξ^{-1} が C^∞)

→ アトラスがあることを確認する必要.

- 包含写像 $j: S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ は、S^n の各点を $\mathbb{R}^{n+1}$ の対応する点にそのまま写す写像である。これは恒等写像の制限と考えることができるため、滑らかである。
- 写像の微分 $dj: T_p(S^n) \to T_p(\mathbb{R}^{n+1})$ は、$T_p(S^n)$ の元 v を $T_p(\mathbb{R}^{n+1})$ の同じベクトル v へ写す. これは dj が一対一(単射)であることを示している。

以上の (i)、(ii) より、S^n が $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分多様体であることを確認した。

$P^p \subset M^m$ 、 P : mfd $\left({}^\exists\{(U, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda} \right.$: Pの座標系$\left.\right)$

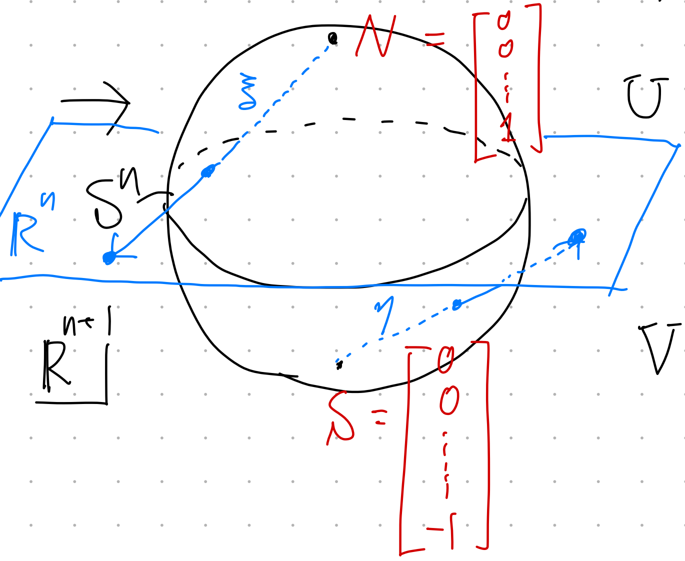
$j : P \longrightarrow M$: 包含写像 が C^∞級

$\Longleftrightarrow$ ${}^\forall(U, \xi)$: Pの座標近傍

部分多様体であることの確認

$j: S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$

「包含写像はそのままに写す点であるから滑らか」は ×



$U = S^n \setminus \{N\}$, $\xi: U \to \mathbb{R}^n$;

$$\xi(\underbrace{x^1, x^2, \cdots, x^{n+1}}_{n+1}) = \frac{1}{1-x^{n+1}}(\underbrace{x^1, x^2, \cdots, x^n}_{n})$$

$V = S^n \setminus \{S\}$, $\eta: V \to \mathbb{R}^n$

$$\eta(\underbrace{x^1, x^2, \cdots, x^{n+1}}_{n+1}) = \frac{1}{1+x^{n+1}}(\underbrace{x^1, x^2, \cdots, x^n}_{n})$$

$$\xi^{-1}(u^1, u^2, \cdots, u^n) = \frac{1}{1+\|u\|^2}(2u, \|u\|^2 - 1) \qquad \xi^{-1}: \mathbb{R}^n \to U : C^\infty$$

$$\eta^{-1}(v^1, v^2, \cdots, v^n) = \frac{1}{1+\|v\|^2}(2v, 1 - \|v\|^2) \qquad \eta^{-1}: \mathbb{R}^n \to V : C^\infty$$

$\therefore$ $j: S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ は C^∞ 級

dj が単射であることの確認

$\forall p \in S^n$ に対して、$(dj)_p : T_p(S^n) \longrightarrow T_{j(p)}(\mathbb{R}^{n+1})$ が単射

$$T_p(S^n) = \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial u^n}\right)_p \right\}$$

$\Longleftrightarrow$ $(dj)_p\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right)_p, \cdots, (dj)_p\left(\frac{\partial}{\partial u^n}\right)_p$ が一次独立

$\Longleftrightarrow$ $(\xi^{-1})_{u^1}(p), \cdots, (\xi^{-1})_{u^n}(p)$ が一次独立

u^1で微分

（逆写像の各偏微分が一次独立）

（※
$$(dj)_p\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right)_p = \frac{\partial(j \circ \xi^{-1})}{\partial u^1}(p) = \frac{\partial \xi^{-1}}{\partial u^1}(p) = (\xi^{-1})_{u^1}(p)$$
）

※

$$P = \{(x, y, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$\xi : P \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ ; \ \xi(x, y, 1) = (x, y)$$

$$\xi^{-1}(x, y) = (x, y, 1)$$

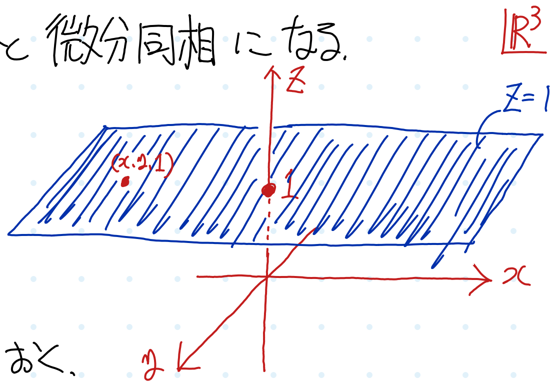
$d\xi$: 単射

$\Longleftrightarrow$ $\underbrace{(\xi^{-1})_x}_{=(1,0,0)}$, $\underbrace{(\xi^{-1})_y}_{=(0,1,0)}$ が1次独立

※座標系は部分多様体を生成する。 P16

Example

$\mathbb{R}^3$ において、平面 $z=1$ は $\mathbb{R}^3$ の部分多様体であり、
座標変換 $(x,y,1) \longrightarrow (x,y)$ によって $\mathbb{R}^2$ と微分同相になる。



(S^n のときと同様に考える)

(D1) を確認する (部分位相空間)

平面 $z=1$ を、$P=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, z=1\right\}$ とおく。
P は $\mathbb{R}^3$ の部分集合であるため、$\mathbb{R}^3$ の相対位相を持つ。

よって、(D1) (P は $\mathbb{R}^3$ の部分位相空間) を確認した。

(D2) を確認する (包含写像 j が滑らか かつ その微分 dj が単射)

- $j: P \to \mathbb{R}^3$ は、P の各点 $(x,y,1)$ を $\mathbb{R}^3$ の同じ点に写す。
  よって、滑らかである。
- 写像の微分 $dj: T_p(P) \longrightarrow T_p(\mathbb{R}^3)$ は、$T_p(P)$ の元 v を $T_p(\mathbb{R}^3)$ の同じベクトル v へ写す。これは dj が単射であることを示している。

以上の (D1)、(D2) より、平面 $z=1$ が $\mathbb{R}^3$ の部分多様体であることを確認した。

※ 部分多様体をより一般化する。　上の例: $\{(x,y,z) \mid z=1\}$

$\xi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ が多様体 M^n 上の座標系のとき、$(n-m)$ 個の座標を固定することで U の ξ 座標切片 (slice) Σ と呼ばれる m 次元部分多様体を生成する。

(n 次元空間上の m 次元平面を見ているイメージ)

P16

Def (部分多様体への適合 (adapted))

P : 多様体 M^n の部分集合。

M の座標系 $\xi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ が P に適合する。

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\underbrace{U \cap P}_{=\Sigma}$ が、U の ξ 座標切片である。

● 座標を並び換えることで、固定される定数は常に最後の $(n-m)$ 個の座標だと見ることができる。

このとき、$\xi_P : (U \cap P) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ を $U \cap P$ への $(x^1, x^2, \cdots, x^m)$ の制限とする。

$$(\underbrace{x^1, \cdots, x^m}_{m\text{個}}, \underbrace{\boxed{x^{m+1}, \cdots, x^n}}_{n-m\text{個}}) \longleftarrow \text{座標を固定}$$

inverse function theorem

● P が部分多様体である場合、逆関数定理を用いることで ξ_P が $\mathbb{R}^m$ への微分同相写像であり、P の座標系であることが分かる。

∵ 包含写像 j の微分 $dj : T_p(P) \longrightarrow T_p(M)$ は単射である。

一方、ヤコビ行列 $(J\xi_P)$ の rank $= m$ のため、dj が単射と合わせて、$(J\xi_P)$ の行列式 $\neq 0$.

逆関数定理より、ξ_P は $\mathbb{R}^m$ への微分同相写像である。

Theorem（逆関数定理）

$(d\Phi)_p : T_p(M) \longrightarrow T_{\Phi(p)}(N)$ が線型写像として同型（ヤコビ行列 $(J\Phi)_p$ の行列式 $\neq 0$）

$\Longrightarrow$ Φ は「p を含む開集合」から「$\Phi(p)$ を含む開集合」への微分同相写像

Prop（適合した座標系の存在） P16

M^n : n 次元多様体、P^m : M^n の m 次元部分多様体

$\forall p \in P$、$\exists \xi : M \longrightarrow \xi(M)$ s.t. P と適合

↳ $U \cap P$ が U の ξ 座標切片

Proof

$\xi = (x^1, x^2, \cdots, x^n)$ を $\forall p \in M$ における M の座標系とし、

$(y^1, y^2, \cdots, y^m)$ を P における P の座標系とする。

包含写像の微分 $dj : T_p(P) \longrightarrow T_p(M)$ が単射であるため、ヤコビ行列

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}(p) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$$

の $\mathrm{rank} = m$ である。※

したがって、以降は最初の m 行が線形独立と仮定しても良い。

※ Remark 松本「多様体の基礎」 P152

m 次元ベクトル空間 V から n 次元ベクトル空間 W への線型写像 $\phi : V \longrightarrow W$ が単射である

$\Longleftrightarrow$ n 行 m 列の行列 A で表したときに、$\mathrm{rank} A = m$.

また、演習7より、座標関数 $x^1, \dots, x^m$ の P への制限は点 p の近傍 W 上で座標系を形成する。

> p32
> M 上の点 p の近傍で、滑らかな実数値関数 $y^1, \dots, y^n$ が p の近傍で座標系を形成する
> $$\iff \exists x^1, \dots, x^n \quad \text{s.t.} \quad \det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}(p)\right) \neq 0$$

☆ f^k を $x^k|_P$ (P 上での x^k の制限) の座標表示とするとき、x^k は

$$x^k = f^k(x^1, x^2, \dots, x^m) \quad \text{on } W$$

であり、z^k を $\underbrace{z^k := x^k - f^k(x^1, x^2, \dots, x^m)}_{k = m+1, \dots, n}$ と定義すると、これは p の近傍で well-defined.

新たな座標系 $\overset{\text{ゼータ}}{\zeta} = (x^1, \dots, x^m, z^{m+1}, \dots, z^n)$ $(M \to R^n)$ について、p における $\overset{\text{ゼータ}}{\zeta}$ から $\overset{\text{グザイ}}{\xi}$ への変換

P17 では z^{m-1} と記載されていたが、z^{m+1} のミスプリント？
(z^{m-1} だと座標関数の総数が $n+2$ になる)

を表すヤコビ行列の形は、

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ A & I_{n-m} \end{bmatrix} = \overbrace{\left[\begin{array}{cccc|ccc}
\frac{\partial x^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x^1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial x^m} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{m+1}} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial x^n} \\
\vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\frac{\partial x^m}{\partial x^1} & \cdots & & \frac{\partial x^m}{\partial x^m} & \frac{\partial x^m}{\partial x^{m+1}} & \cdots & \frac{\partial x^m}{\partial x^n} \\
\hline
\frac{\partial z^{m+1}}{\partial x^1} & \cdots & & \frac{\partial z^{m+1}}{\partial x^m} & \frac{\partial z^{m+1}}{\partial x^{m+1}} & \cdots & \frac{\partial z^{m+1}}{\partial x^n} \\
\vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{\partial z^n}{\partial x^1} & \cdots & & \frac{\partial z^n}{\partial x^m} & \frac{\partial z^n}{\partial x^{m+1}} & \cdots & \frac{\partial z^n}{\partial x^n}
\end{array}\right]}^{n} \Bigg\} n$$

である。ブロック行列 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ に関する公式 (A が正則行列 $\Longrightarrow \det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(A) \cdot \det(D - CA^{-1}B)$)

より、このヤコビ行列 $\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ A & I_{n-m} \end{bmatrix}$ の行列式の値は 1 である。よって、逆行列が存在する。

逆行列が存在することから、$\mathcal{S} = (x^1, \cdots, x^m, z^{m+1}, \cdots, z^n)$ は $p \in M$ の近傍 U 上の座標系である。

(1) P が M の部分多様体であることから、P の近傍である W を含むように開集合 U を選ぶことができる。$((U \cap P) \subset W)$

☆(2) $\mathcal{O} := (x^1, x^2, \cdots, x^m)(U \cap P) : (U \cap P) \to \mathbb{R}^m$ は $\mathbb{R}^m$ の開集合を形成し、必要であれば近傍 U を縮小することで $(x^1, x^2, \cdots, x^m)(U) \subset \mathcal{O}$ となるように仮定。

$U \cap P$ 上では局所座標系は m 次元であったため、$z^k = x^k - f^k(x^1, x^2, \cdots, x^m)$ $(k = m+1, \cdots, n)$ は全て 0 として良い。
そのため、$U \cap P$ の各点では x^k が $f^k(x^1, x^2, \cdots, x^m)$ と等しい。$z^{m+1}, \cdots, z^n$ は以下の切片 Σ に含まれる。$((U \cap P) \subset \Sigma)$

$$\Sigma : z^{m+1} = 0, z^{m+2} = 0, \cdots, z^n = 0. \quad \left(\Sigma = \{(x^1, \cdots, x^m, z^{m+1}, \cdots, z^n) \in \mathbb{R}^n \mid z^{m+1} = \cdots = z^n = 0\}\right)$$

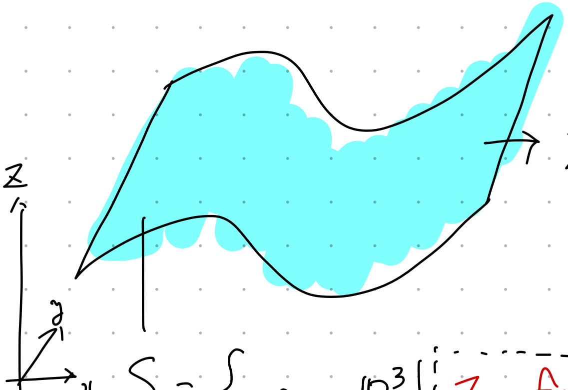
$(U \cap P) \supset \Sigma$ であることを確認する。

切片 Σ 上の点は、$z^{m+1} = \cdots = z^n = 0$ を満たしているため、選んだ点において

$$x^{m+1} = f^{m+1}(x^1, \cdots, x^m), \cdots, x^n = f^n(x^1, \cdots, x^m)$$

が成り立つ。これは $U \cap P$ に含まれる。

$\therefore U \cap P = \Sigma$ (座標切片) を示した ■



$\rightarrow z = f(x, y)$

$\left(Z^k := x^k - f^k(x^1, x^2, \cdots x^m) \right.$ は何?

$$S = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \overbrace{z - f(x,y)}^{Z} = 0 \}$$

(X, Y, Z) : $\mathbb{R}^3$ の座標 s.t. $\{(X, Y, 0)\} = S$ となるのを求めたい.

x y $z - f(x,y)$ ~

$\varphi(x, y, z) := (x, y, z - f(x,y)) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$: C^∞級 local-diffeo. ☆

☆ : $J\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -f_x & -f_y & 1 \end{bmatrix}$ は可逆. ∴ φ は local diffeo

(X, Y, Z) は $\mathbb{R}^3$ の各点において局所的に座標近傍.

このとき, S は スライス $Z = 0$ に対応するので, (X, Y, Z) は $\mathbb{R}^3$ の S に適合した座標系.

$\eta = (x^1, x^2, x^3)$: M^3 の座標

$\xi = (y^1, y^2)$: P^2 の座標

$(\eta \circ \xi^{-1})(y^1, y^2) : C^\infty = (x^1(y^1, y^2), x^2(y^1, y^2), x^3(y^1, y^2))$

$(\eta \circ \xi^{-1})_{y^1}, (\eta \circ \xi^{-1})_{y^2}$: 一次独立 $\Longleftrightarrow J(\eta \circ \xi^{-1}) = \begin{bmatrix} (x^1)_{y^1} & (x^1)_{y^2} \\ (x^2)_{y^1} & (x^2)_{y^2} \\ (x^3)_{y^1} & (x^3)_{y^2} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} (x^1)_{y^1} \\ (x^2)_{y^1} \\ (x^3)_{y^1} \end{bmatrix}$, $= \begin{bmatrix} (x^1)_{y^2} \\ (x^2)_{y^2} \\ (x^3)_{y^2} \end{bmatrix}$

$\Longleftrightarrow (\eta \circ \xi^{-1})_{y^1} \underset{\text{外積}}{\times} (\eta \circ \xi^{-1})_{y^2} \neq 0$ がrank2

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{vmatrix} (x^2)_{y^1} & (x^2)_{y^2} \\ (x^1)_{y^1} & (x^3)_{y^2} \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} (x^3)_{y^1} & (x^3)_{y^2} \\ (x^1)_{y^3} & (x^1)_{y^2} \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} (x^1)_{y^1} & (\quad) \\ (x^2)_{y^1} & (\quad) \end{vmatrix} \right) \neq (0,0,0)$$

必要であれば (x^1, x^2, x^3) の順番を入れ替えることで、

$$\begin{vmatrix} (x^1)_{y^1} & (x^1)_{y^2} \\ (x^2)_{y^1} & (x^2)_{y^2} \end{vmatrix} \neq 0$$

としてよい。

$$\therefore \ \varphi : (y^1, y^2) \longmapsto (x^1, x^2) = \left(\underline{x^1}(y^1, y^2), \underline{x^2}(y^1, y^2) \right)$$

は local-diffeo.

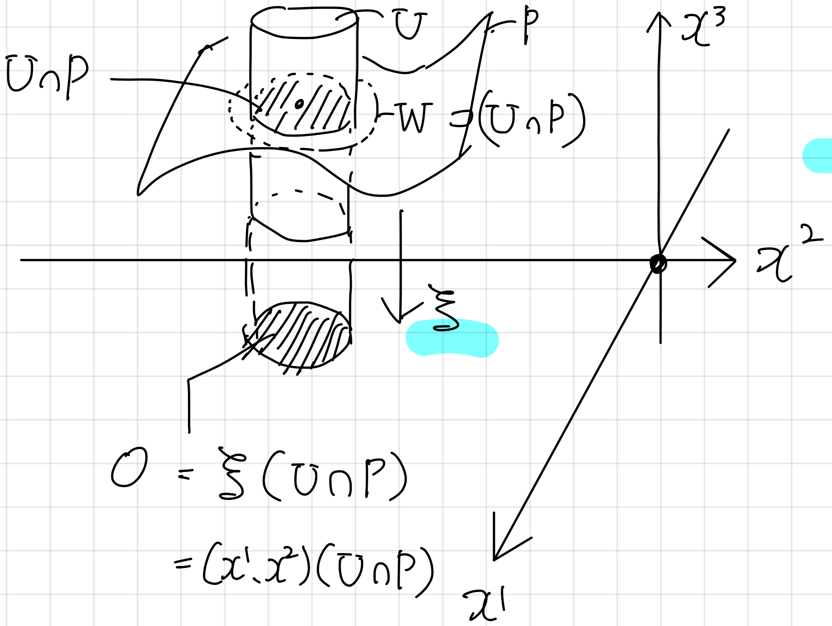
$\therefore \ \xi := (\underline{x^1}, \underline{x^2})$ は p の座標系である.

$$\varphi^{-1}(x^1, x^2) = \left(y^1(x^1, x^2), y^2(x^1, x^2) \right)$$

$$\left.\begin{aligned} x^1\left(y^1(x^1,x^2), \ y^2(x^1,x^2) \right) &= x^1 \\ x^2\left(y^1(x^1,x^2), \ y^2(x^1,x^2) \right) &= x^2 \end{aligned}\right) \ \text{⊛}$$

$$\begin{aligned} (\eta \circ \xi^{-1})(x^1, x^2) &= (\eta \circ \xi^{-1})(\xi \circ \varphi^{-1}) \\ &= \Big(\underline{x^1\left(y^1(x^1,x^2), y^2(x^1,x^2)\right)}, \quad = x^1 \\ &\qquad \underline{x^2\left(y^1(x^1,x^2), y^2(x^1,x^2)\right)}, \quad = x^2 \\ &\qquad \underline{x^3\left(y^1(x^1,x^2), y^2(x^1,x^2)\right)} \Big) \longrightarrow f^3(x^1,x^2) \text{ とおく.} \\ &= \left(x^1, x^2, f^3(x^1, x^2) \right) \end{aligned}$$

$$X^3 = x^3 - f^3(x^1, x^2)$$



$\mathcal{O} = \xi(U \cap P)$

$= (x^1, x^2)(U \cap P)$

$\xi(U) \subset \mathcal{O}$

$$\underset{\substack{\cup\\ P\cap U}}{}$$

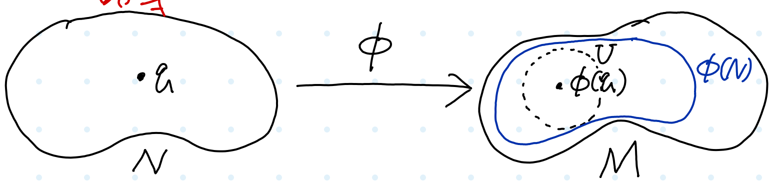
$$\xi : (x^1, x^2, x^3) \longmapsto (x^1, x^2)$$

Corollary (相対写像の滑らかさ) P17

M^n: 多様体、P^m: M^n の部分多様体

$\phi: N \to M$ が滑らか、$\phi(N) \subset P^m$

$\Longrightarrow$ ~~相対~~ 誘導 写像 $\Phi: N \longrightarrow P$ は滑らか.



Proof

$\forall q \in N$ に対して $\phi(q)$ の近傍 $U \subseteq M$ に、P と適合した座標系 $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ を考える.

仮定より ϕ は滑らかであることから、

- ϕ は連続である
- P は M の部分位相空間である

であり、Φ も連続である.

P^m へ制限した座標系 $(x^1|_P, x^2|_P, \cdots, x^m|_P)$ は $U \cap P$ の座標系とも見てよいので、包含写像 $\iota: P \to M$ を考えると、$x^i|_P \circ \Phi$ は

$$\underbrace{x^i|_P}_{P\to\mathbb{R}} \circ \underbrace{\Phi}_{N\to P} = \underbrace{x^i}_{M\to\mathbb{R}} \circ \underbrace{\iota}_{P\to M} \circ \Phi = x^i \circ \underbrace{\phi}_{N\to M} \quad (\because \Phi = \iota^{-1} \circ \phi)$$

と変形できる. 仮定より ϕ は滑らかであり、座標関数 x^i も滑らかであるので $x^i|_P \circ \Phi$ も滑らかである.

ここで演習1より、座標関数 $x^i|_P$ と Φ が滑らか $\Longrightarrow$ Φ が滑らか.

よって、Φ は滑らかである。

(a) 多様体 M 上のベクトル場 V が滑らかであることの必要条件は、
M を被覆するのに十分な座標系 ξ に対して Vx^i が滑らかなことである。

(b) 写像 $\phi : M \to N$ が滑らかであることの必要条件は、
M を被覆するのに十分な座標系 η に対して、$y^j \circ \phi$ が滑らかなことである。

Corollary（部分多様体）

P17

（高々一通りのみ）

滑らかな多様体 M の部分集合 P は、M の一意な部分多様体にすることができる。

Proof

部分多様体の定義より、P は M の相対位相を持つ。P に 2つのアトラスが割り当てられていると仮定すると、M には 2つの部分多様体 P_1、P_2 が生成される。

部分多様体の定義より、P_1 と P_2 の包含写像はそれぞれ滑らかであるため、Corollary29 から 2つの恒等写像 $\tilde{\varphi}_1 : P_1 \to P_2$、$\tilde{\varphi}_2 : P_2 \to P_1$ は滑らかである。そのため、

inverse diffeomorphic

これらの恒等写像は逆微分同相である。（$\tilde{\varphi}_1^{-1}$、$\tilde{\varphi}_2^{-1}$ も滑らか）

互いに滑らかな恒等写像は、P_1 と P_2 間の滑らかな座標変換と見ることができる。

よって、P_1 と P_2 のアトラスは同一であることより、完備なアトラスも同一となる。

以上より、部分集合 P は一意な部分多様体となる。∎

Prop

M^n: n次元多様体　P: Mの部分集合

Pがm次元部分多様体である　($\Longrightarrow$: 28 prop で確認した)

$\Longleftrightarrow$ $\forall p \in P$、$\exists \xi$: Mの座標系 s.t. m次元切片によってPと適合する.

Proof　$\Longleftarrow$ を示している　($j = m+1, \cdots, n$)

部分集合PにMからの誘導位相を割り当てる. $\forall p \in P$において、$U \cap P$が$x^j = x^j(p)$であるようなMの座標系$\xi: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$を考える ($\xi(p) = 0$とする).

ξは座標系の定義より同相写像であり、制限写像

$$\xi_P := (x^1, \cdots, x^m)\Big|_P : U \cap P \longrightarrow \mathbb{R}^{\cancel{n}\, m} \cap \xi(U)$$

も同相写像となる.

$i = 1, \cdots, m$に対して、任意の2つの座標系ξ_Pとη_Pは滑らかに重なる写像であるため、それらの合成$\xi_P \circ \eta_P^{-1}$も滑らかである. よって滑らかなu^iとの合成も滑らかである.

つまり、

$$u^i \circ \xi_P \circ \eta_P^{-1} = u^i \circ (\xi \circ \eta^{-1})\Big|_{\mathbb{R}^m}$$

($\mathbb{R}^m$: 最初のm個の座標で構成されるm次元平面)

が成り立つため、ξ_PはPのアトラスを形成する ($\because$ ξ_Pの定義域$U \cap P$は$\forall p \in P$で定義)

since

~~また、右辺"$u^i \circ (\xi \circ \eta^{-1})|_{\mathbb{R}^m}$"はm次元平面と見なされるため、m次元切片によってPと適合している.~~ ①

仮定

上のアトラスがPを部分多様体にしていることを示す:

上で定義した座標系ξに対して$i = 1, 2, \cdots, m$のとき、$x^i|_P = x^i \circ j$ (P上の座標関数) は滑らかであり、~~座標系を形成する~~.

演習1より包含写像$j: P \to M$は滑らかであるため、ξのヤコビ行列$(J\xi)$は、

(a) 多様体M上のベクトル場Vが滑らかであることの必要条件は、
Mを被覆するのに十分な座標系ξに対してVx^iが滑らかなことである.

(b) 写像$\phi: M \to N$が滑らかであることの必要条件は、
Mを被覆するのに十分な座標系ηに対して、$y^j \circ \phi$が滑らかなことである.

ξ_P に関して $m\times m$ の単位行列が含まれる。

$\therefore$ 包含写像の微分 dj は単射であり、P の接ベクトルを一意に M へ写すため j は滑らか。

よって、P は M^n の m 次元部分多様体である。②

$\because$ $(J\xi)$ は、行列内部に以下の $m\times m$ の要素を含む。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial x^m} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{m+1}} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial x^m}{\partial x^m} & & & \\ \frac{\partial x^{m+1}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial x^{m+1}}{\partial x^m} & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ \frac{\partial x^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial x^m} & \frac{\partial x^n}{\partial x^{m+1}} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial x^n} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}}^{m} \Big\} m$$

以上①、②より、命題の同値関係を示した。■

・P には相対位相が定まってる

・$\mathcal{A} := \left\{ \left(U_\lambda \cap P,\ \xi|_{U_\lambda \cap P} \right) \,\middle|\, U \cap P : M \text{の座標}、P \text{に適合} \right\}$

とおくと、$\mathcal{A}$ は P のアトラスを定める

∵ $\forall p \in P,\ {}^\exists U,\ {}^\exists \xi : U \to \mathbb{R}^n$

$$\rightsquigarrow \underbrace{\xi|_{U \cap P}}_{=: \xi_p} : U \cap P \longrightarrow \xi(U \cap P) \subset \mathbb{R}^n$$

$$\xi(U \cap P) = \xi(U) \cap \mathbb{R}^m$$

$x^{m+1} = x^{m+2} = \cdots = x^n = 0$

$$P = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \cap P$$

$(U, \xi), (V, \eta)$: M の P に適合する座標、

$(U \cap V \neq \phi)$

$$\eta \circ \xi^{-1} : \xi(U \cap V) \longrightarrow \eta(U \cap V) \ : C^\infty \ (\text{diffeo})$$

$$\xi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n, \quad \eta(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$$

$$\xi_p : U \cap P \longrightarrow \left(\xi(U) \cap \mathbb{R}^m \right) \subset \mathbb{R}^m$$

$$\eta_p : V \cap P \longrightarrow \left(\eta(V) \cap \mathbb{R}^m \right) \subset \mathbb{R}^m$$

$$\eta_p \circ \xi_p^{-1} : \xi(U \cap V) \cap \mathbb{R}^m \longrightarrow \eta(U \cap V) \cap \mathbb{R}^m$$

が C^∞ 級かどうか

$$\eta_p \circ \xi_p^{-1} = \eta|_{V \cap U \cap P} \circ \left(\xi|_{V \cap U \cap P} \right)^{-1}$$

$$= \eta \circ \xi^{-1} \Big|_{\xi(U \cap V) \cap \mathbb{R}^m}$$

$$\phi : M \longrightarrow N : C^\infty \iff {}^\forall \xi,\ {}^\forall \eta,\quad \eta \circ \phi \circ \xi^{-1} : C^\infty$$

$$\iff {}^\exists \xi,\ {}^\exists \eta \quad \text{s.t.}$$

$$\eta \circ \phi \circ \xi^{-1} : C^\infty$$

Prop (制限されたベクトル場の滑らかさ)

P を M の部分多様体とする。

(1) $X \in \mathfrak{X}(M)$ が P に接している

$\Longrightarrow$ 制限ベクトル場 $X|_P$ は、P 上の滑らかなベクトル場

(2) $Y \in \mathfrak{X}(M)$ も P に接している

$\Longrightarrow$ かっこ積 $[X, Y]$ は P に接している. かつ

$[X, Y]|_P = [X|_P, Y|_P]$ である.

Proof

(1) ベクトル場の制限が滑らかであることの証明.

$\forall p \in P$ の近傍 U において座標系 $\xi = (x^1, x^2, \cdots, x^n)$ が存在し、このうち P に制限した $P \cap U$ の座標系 $\xi_P = (x^1, x^2, \cdots, x^m)$ が部分多様体 P の座標系を形成する。

ベクトル場 X は、座標系 ξ を用いて

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \left(X_p = \sum_{i=1}^{n} X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \right)$$

と表される。このベクトル場を P 上に制限した $X|_P$ を考えると、

$$X|_P = \sum_{i=1}^{m} X^i|_P \frac{\partial}{\partial x^i}$$

である。今、$X^i : M \to \mathbb{R}$ は座標系 ξ の滑らかな関数であり、P 上の部分集合に制限しても $X^i|_P$ は座標系 ξ_P の滑らかな関数である。

よって、$X|_P$ は P 上の滑らかなベクトル場である。 ∎

$d\iota$:

(2) かっこ積の制限が滑らかであることの証明

仮定よりベクトル場 X と Y が部分多様体 P に接しているため、

$\forall p \in P$、X_p、$Y_p \in T_p(P)$。よって、$[X, Y]|_p$ も $T_p(P)$ に属している。

包含写像 $\iota : P \to M$ を考えると、20. Definition (ϕ-related) の ϕ の代わりに ι を当てることで、22. Lemma の等式

$$X_1 \underset{\phi}{\sim} Y_1 \text{ かつ } X_2 \underset{\phi}{\sim} Y_2 \Longrightarrow [X_1, X_2] \underset{\phi}{\sim} [Y_1, Y_2]$$

は、

$$X|_P \underset{\iota}{\sim} X \text{ かつ } Y|_P \underset{\iota}{\sim} Y \Longrightarrow [X|_P, Y|_P] \underset{\iota}{\sim} [X, Y]$$

と読み替えることができる。今 $[X|_P, Y|_P]$ は部分多様体 P におけるかっこ積の制限であるため、$[X|_P, Y|_P] = [X, Y]|_P$ である ■

IMMERSIONS AND SUBMERSIONS (はめ込みと沈め込み)

- 写像の微分に関する仮定より定義される2種類の滑らかな写像を扱う。

Lemma (写像の微分に関する同値な表現)

$\phi : M^m \longrightarrow N^n$: 滑らかな写像

$\forall p \in M$ に対して、以下の (A1) ~ (A3) は同値。

(A1) 写像の微分 $d\phi_p$ は 単射 (one-to-one) である。

(A2) $d\phi_p$ のヤコビ行列が、(どの座標系の選び方に対しても) ランク m を持つ。

(A3) $y^1, y^2, \cdots, y^m$ が $\phi(p)$ における N の座標系であるとき、ある整数 $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_m < n$ が存在して、写像 $y^{i_1}\circ\phi, \cdots, y^{i_m}\circ\phi$ が座標系を形成する。

Proof (A1) $\Rightarrow$ (A2)、(A2) $\Rightarrow$ (A3)、(A3) $\Rightarrow$ (A1) をそれぞれ示す。

(i) (A1) $\Rightarrow$ (A2) を示す

仮定より $d\phi_p : T_p(M) \longrightarrow T_{\phi(p)}(N)$ が単射であるため、$\ker(d\phi_p) = \{0\}$ である。

つまり、$\forall v \in T_p(M)$、$d\phi_p(v) = 0 \Longrightarrow v = 0$ である。

よって、ヤコビ行列の行は線形独立であるため、ランクは列ベクトルの数 $(= m)$ となる。

以上より、(A1) $\Rightarrow$ (A2) を示した。

(ii) (A2) $\Rightarrow$ (A3) を示す。 $y^{i_1}\circ\phi, \cdots, y^{i_m}\circ\phi$ (m個の写像) が線形独立であることを示す。

仮定より $d\phi_p$ のヤコビ行列 $(J\phi_p)$ のランクが m であるため、$d\phi_p$ によって m次元の部分空間に写すことができる。

次に、$y^1, \cdots, y^n$ の中から任意の m個の線形独立な座標関数 $y^{i_1}, \cdots, y^{i_m}$ を選ぶ。

$y^{i_1}, \cdots, y^{i_m}$ が線形独立 $\Longrightarrow$ 対応する写像 $y^{i_1}\circ\phi, \cdots, y^{i_m}\circ\phi$ が線形独立である。

よって、$\phi^1 = y^{i_1}\circ\phi$, $\phi^2 = y^{i_2}\circ\phi$, $\cdots$, $\phi^m = y^{i_m}\circ\phi$ が点 $p \in M$ の近傍で座標系を形成する。

以上より、(A2) $\Longrightarrow$ (A3) を示した。

(iii) (A3) $\Longrightarrow$ (A1) を示す.

仮定より、$y^1, \cdots, y^n$ が $\phi(p)$ における N の座標系であり、ある整数 $1 \le i_1 \le \cdots \le i_m < n$ が存在して、写像 $y^{i_1}\circ\phi, \cdots, y^{i_m}\circ\phi$ が点 $p \in M$ の近傍で座標系を形成している。

上の仮定より、m個の写像 $y^{i_1}\circ\phi, \cdots, y^{i_m}\circ\phi$ は p の近傍で線形独立である. よって、ヤコビ行列 $J = \left(\dfrac{\partial(y^{i_k}\circ\phi)}{\partial x^j}\right)_{\substack{1\le k\le m \\ 1\le j\le m}}$ を考えたときに、ランクが m である. また、m個の列ベクトルが線形独立であるため、$\ker(d\phi_p) = \{0\}$ である. (非ゼロベクトルは、非ゼロベクトルへ写される)
よって、$\forall v \in T_p(M)$ $(v \neq 0)$ に対して $d\phi_p(v) \neq 0$ であり、$d\phi_p$ は一対一に対応する。

以上より、(A3) $\Longrightarrow$ (A1) を示した。

以上の (i) 〜 (iii) より、(A1)、(A2) および (A3) は同値な表現である. ■

6/19 (水) → ~~6/21 (金)~~
6/26 (水) → 6/28 (金)

$\boxed{\text{次回：6/21 (金) 3限 (13:00〜)} \quad \text{次々回：7/}\cancel{4}\text{3 (水) 10:00〜}}$

(B3)

6/26(水) 4限
5限
6限