Lemma（かっこ積の性質）

$\mathfrak{X}(M)$ 上の かっこ積 : $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ は以下の性質を持つ.

(A1) $\mathbb{R}$-線形性 : $[aV+bW, X] = a[V, X] + b[W, X]$

$[X, aV+bW] = a[X, V] + b[X, W]$

(A2) 反対称性 : $[V, W] = -[W, V]$

(A3) ヤコビ恒等式 : $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

Proof

かっこ積の定義

$$[V, W]_p(f) = V_p(Wf) - W_p(Vf) \quad (p \in M,\ V, W \in T_p(M))$$

と、接ベクトルの線形性とライプニッツ則を用いて式変形する.

(A1) について、$^\forall a, b \in \mathbb{R}$、$^\forall V, W, X \in \mathfrak{X}(M)$、$^\forall f \in \mathcal{F}(M)$ に対して

ベクトル場の線形性

$$\begin{aligned}
[aV+bW, X](f) &= (aV+bW)(Xf) - X((aV+bW)f) \\
&= aV(Xf) + bW(Xf) - X(aV(f) + bW(f)) \\
&= aV(Xf) + bW(Xf) - aX(Vf) - bX(Wf) \\
&= a(V(Xf) - X(Vf)) + b(W(Xf) - X(Wf)) \\
&= a[V, X](f) + b[W, X](f)
\end{aligned}$$

であり、これは任意の $f \in \mathcal{F}(M)$ で成り立つため、$[aV+bW, X] = a[V, X] + b[W, X]$ が成立する.

同様の議論で、$[X, aV+bW] = a[X, V] + b[X, W]$ が成り立つ.

(A2) について　$^\forall V, W \in \mathfrak{X}(M)$、$^\forall f \in \mathfrak{F}(M)$ に対して、

$$
\begin{aligned}
[V, W](f) &= V(Wf) - W(Vf) \\
&= -\left(W(Vf) - V(Wf)\right) \\
&= -[W, V](f)
\end{aligned}
$$

であり、これは任意の $f \in \mathfrak{F}(M)$ で成り立つため、$[V, W] = -[W, V]$ が成り立つ。

(A3) について、$[X, [Y, Z]]$ と $[Y, [Z, X]]$ と $[Z, [X, Y]]$ をそれぞれ計算する。

$$
\begin{aligned}
[X, [Y, Z]](f) &= X([Y, Z]f) - [Y, Z](Xf) \\
&= X\left(Y(Zf) - Z(Yf)\right) - \left(Y(Z(Xf)) - Z(Y(Xf))\right) \\
&= \underset{①}{X(Y(Zf))} \underset{②}{- X(Z(Yf))} \\
&\quad \underset{③}{- Y(Z(Xf))} \underset{④}{+ Z(Y(Xf))} \quad \cdots ☆
\end{aligned}
$$

☆ の等式について、

$$
\begin{cases} X \to Y \\ Y \to Z \\ Z \to X \end{cases}, \quad \begin{cases} X \to Z \\ Y \to X \\ Z \to Y \end{cases}
$$

とそれぞれ置き換えれば、残り2つのかっこ積は、

$$
\begin{aligned}
[Y, [Z, X]](f) &= \underset{③}{Y(Z(Xf))} \underset{⑤}{- Y(X(Zf))} \underset{⑥}{- Z(X(Yf))} \underset{②}{+ X(Z(Yf))} \\
[Z, [X, Y]](f) &= \underset{⑥}{Z(X(Yf))} \underset{④}{- Z(Y(Xf))} \underset{①}{- X(Y(Zf))} \underset{⑤}{+ Y(X(Zf))}
\end{aligned}
$$

であり、和をとると12個の項がそれぞれ打ち消し合うため、

任意の $f \in \mathfrak{F}(M)$ に対して、$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$。

以上より、(A1)～(A3) を示した。■

※ (A1) の $\mathbb{R}$線形性 について

かっこ積$[\cdot,\cdot]$は $\mathbb{R}$線形 であるが、$\mathfrak{F}(M)$双線形 ではない。

↳ 成り立つのであれば、$[fV, gW] = fg[V, W]$

$$[fV, gW] = fg[V, W] + f(Vg)W - g(Wf)V$$ である。

Proof 実際に計算して確認する。

$$\begin{aligned}
[fV, gW](h) &= fV(gW(h)) - gW(fV(h)) \\
&= f\Big(V\big(g\cdot W(h)\big)\Big) - g\Big(W\big(f\cdot V(h)\big)\Big) \\
&= f\Big(V(g)\cdot W(h) + g\cdot V\big(W(h)\big)\Big) \\
&\quad - g\Big(W(f)\cdot V(h) + f\cdot W\big(V(h)\big)\Big) \\
&= fV(g)W(h) + fgV(W(h)) \\
&\quad - gW(f)V(h) - fgW(V(h)) \\
&= fg\big(V(Wh) - W(Vh)\big) + f(Vg)(Wh) - g(Wf)(Vh) \\
&= fg[V, W](h) + f(Vg)(Wh) - g(Wf)(Vh)
\end{aligned}$$

接ベクトルのライプニッツ則

任意の$h \in \mathfrak{F}(M)$において成り立つので、

$$[fV, gW] = fg[V, W] + f(Vg)W - g(Wf)V$$ が成り立つ。■

※ $[\partial_i, \partial_j]$ について

かっこ積の中身が同一座標系の中の任意の座標ベクトルの場合、

$$[\partial_i, \partial_j] = 0 \quad \forall i, j \in \mathbb{N}$$

となる。

$$\begin{aligned}
[\partial_i, \partial_j](f) &= \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial}{\partial x^j} f\right) - \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} f\right) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^i x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j x^i} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Example (かっこ積の計算例)

x, y : $\mathbb{R}^2$の座標

$V = y\partial_x$, $W = x\partial_y$ のときに、$[V, W](f)$ を計算すると、

$$
\begin{aligned}
[V, W](f) &= [y\partial_x, x\partial_y](f) \\
&= y\partial_x(x\partial_y f) - x\partial_y(y\partial_x f) \\
&= yx\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - x\partial_y\left(y\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\
&= yx\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - x\left(\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) \\
&= -x\frac{\partial f}{\partial x} \\
&= -Wf
\end{aligned}
$$

積の微分

である.

Remark (かっこ積の具体的な形)

松本「多様体の基礎」P233より、$[X, Y]$の具体的な表示方法が記述.

ベクトル場X, Yを座標近傍$(U; x^1, x^2, \cdots, x^m)$の上で局所座標表示したものが

$$X = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \sum_{j=1}^{m} \eta_j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

とすると、$[X, Y]$の具体的な表示は、

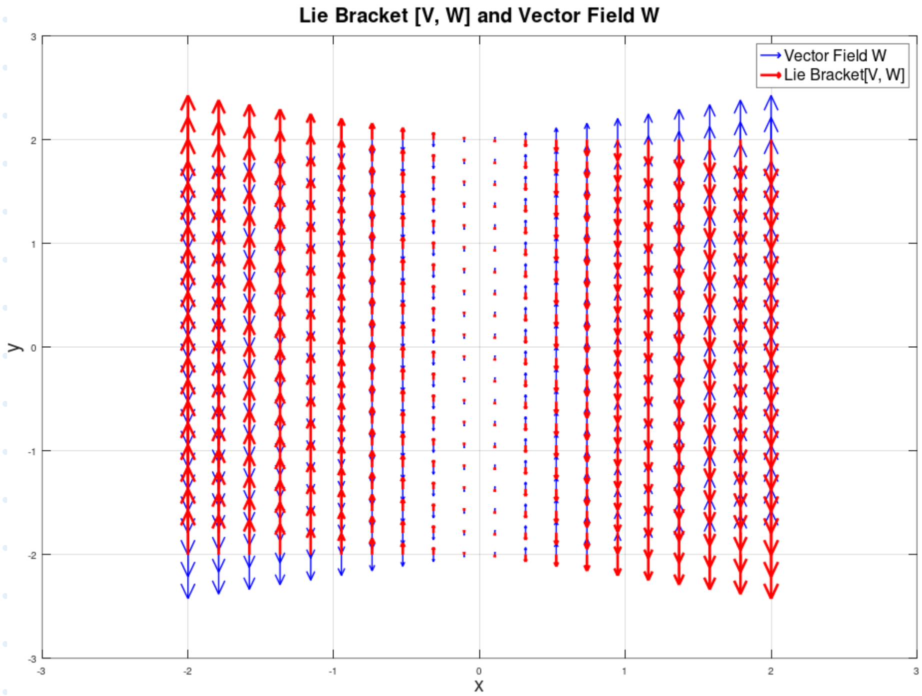
$$[X, Y] = \sum_{i=1}^{m}\left\{\sum_{j=1}^{m}\left(\xi_j \frac{\partial \eta_i}{\partial x^j} - \eta_j \frac{\partial \xi_i}{\partial x^j}\right)\right\}\frac{\partial}{\partial x^i}$$

<u>Ex</u> $m = 2$ のとき

$X = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x^2}$, $Y = \eta_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial x^2}$ とすると、$[X, Y]$は

$$
\begin{aligned}
[X, Y] = &\left(\xi_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial x^1} - \eta_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x^1} + \xi_2 \frac{\partial \eta_1}{\partial x^2} - \eta_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x^1} \\
&+ \left(\xi_1 \frac{\partial \eta_2}{\partial x^1} - \eta_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial x^1} + \xi_2 \frac{\partial \eta_2}{\partial x^2} - \eta_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x^2}
\end{aligned}
$$

公式にしたがって上のExampleの$[V, W]$を計算してプロットした。(合ってそう)



ベクトル場 $W = x\partial_y$ と $V = y\partial_y$ による$[V, W]$

P14

Def (ϕ関係)

ϕ-related

$\phi: M \longrightarrow N$ を滑らかな写像とする。M上のベクトル場 X と N上のベクトル場 Y が ϕ関係 (related) である

$$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad \underbrace{d\phi(X_p)}_{\in T_{\phi p}(N)} = \underbrace{Y_{\phi p}}_{\in T_{\phi p}(N)} \quad \forall p \in M$$

→ 点ϕpにおけるベクトル場 $Y \in \mathfrak{X}(N)$

→ 点pにおけるベクトル場$X \in \mathfrak{X}(M)$の微分写像

Lemma (ϕ関係と同値な表現)

ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ および $Y \in \mathfrak{X}(N)$ が ϕ関係 (ϕ-related) であることと、

$X(g \circ \phi) = Yg \circ \phi$ は同値である。

Proof

直接2つの式の同値関係を示すことは難しいので、以下の5つの等式が同値であることを確認していく。

(A1) $X(g\circ\phi) = Yg\circ\phi$, $\forall g\in\mathcal{F}(N)$

(A2) $X(g\circ\phi)(p) = (Yg\circ\phi)(p)$, $\forall p\in M$、$\forall g\in\mathcal{F}(N)$

(A3) $X_p(g\circ\phi) = (Yg)(\phi p)$, $\forall p\in M$、$\forall g\in\mathcal{F}(N)$

(A4) $(d\phi X_p)g = Y_{\phi p}(g)$, $\forall p\in M$、$\forall g\in\mathcal{F}(N)$

(A5) $d\phi(X_p) = Y_{\phi p}$, $\forall p\in M$

(A1) $\Longleftrightarrow$ (A2) $\Longleftrightarrow$ (A3) $\Longleftrightarrow$ (A4) $\Longleftrightarrow$ (A5)

今回のLemmaで証明したい同値関係

(i) (A1) $\Longleftrightarrow$ (A2) を示す

(I) (A1) $\Longrightarrow$ (A2)

(A1)の等式を$\forall p\in M$で評価すると、$X(g\circ\phi)(p) = (Yg\circ\phi)(p)$であり、これは(A2)の等式と一致する。

(II) (A2) $\Longrightarrow$ (A1)

(A2)の等式は$\forall p\in M$で成り立つため、$X(g\circ\phi)(p) = Yg\circ\phi$ とpを省略して書ける。これは(A1)の等式と一致する。

(ii) (A2) $\Longleftrightarrow$ (A3) を示す

$$\left(\begin{array}{ll}(A2)\ X(g\circ\phi)(p) & = (Yg\circ\phi)(p) \\ (A3)\ X_p(g\circ\phi) & = (Yg)(\phi p)\end{array}\right)$$

(I) (A2) $\Longrightarrow$ (A3)

$X(g\circ\phi)(p)$について、ベクトル場の定義$\left((Vf)(p) = V_p(f)\right)$より、$X(g\circ\phi)(p) = X_p(g\circ\phi)$と書ける。

また、$(Yg\circ\phi)(p)$は写像$Yg : N\to\mathbb{R}$に点ϕpを代入したものであるため、$(Yg\circ\phi)(p) = (Yg)(\phi p)$と書ける。

以上より、(A2) $\Longrightarrow$ (A3) を示した

(II) (A3) $\Longrightarrow$ (A2) は (I) と同様の式変形で示すことができる。

(III) (A3) $\Longleftrightarrow$ (A4) を示す。

$$\left(\begin{array}{lll}(A3) & X_p(g\circ\phi) & = (Yg)(\phi p) \\ (A4) & (d\phi X_p)g & = Y_{\phi p}(g)\end{array}\right)$$

(I) (A3) $\Longrightarrow$ (A4)

$X_p(g\circ\phi)$ について、写像の微分の定義 $\left(d\phi_p(v)(g) = v(g\circ\phi)\right)$ より、

$$X_p(g\circ\phi) = d\phi_p(X_p)(g)$$

である。

また、$(Yg)(\phi p)$ についてベクトル場の定義より、

$$(Yg)(\phi p) = Y_{\phi p}(g)$$

である。

(II) (A4) $\Longrightarrow$ (A3) は (I) と同様に、写像の微分とベクトル場の定義より示される。

(IV) (A4) $\Longleftrightarrow$ (A5) を示す

$$\left(\begin{array}{lll}(A4) & (d\phi X_p)g & = Y_{\phi p}(g) \\ (A5) & d\phi(X_p) & = Y_{\phi p}\end{array}\right)$$

(I) (A4) $\Longrightarrow$ (A5)

仮定より $\forall g \in \mathcal{F}(N)$ で成り立つため、(A4) の等式は写像としても同一であり、$d\phi(X_p) = Y_{\phi_p}$ である。これは (A5) の等式と一致する。

(II) (A5) $\Longrightarrow$ (A4)

仮定より $d\phi(X_p) = Y_{\phi p}$ であり、この等式を $\forall g \in \mathfrak{F}(N)$ で評価すると、

$$d\phi(X_p)(g) = Y_{\phi p}(g)$$

が成立する. これは (A4) の等式と一致する.

以上の (I) 〜 (IV) より

$$(A1) \Longleftrightarrow (A2) \Longleftrightarrow (A3) \Longleftrightarrow (A4) \Longleftrightarrow (A5)$$

であることから、(A1) $\Longleftrightarrow$ (A5) である.

$\therefore\ d\phi(X_p) = Y_{\phi p} \Longleftrightarrow X(g \circ \phi) = Yg \circ \phi$ である. ■

ϕ-relatedness

このLemmaを用いると、かっこ積はϕ関係を保存することを示せる.

Lemma (かっこ積のϕ関係)

~~$\phi: M \to N$ を diffeo~~, $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$、$Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$ をそれぞれベクトル場とする.

$X_1 \sim_\phi Y_1$ かつ $X_2 \sim_\phi Y_2$ のとき、$[X_1, X_2] \sim_\phi [Y_1, Y_2]$ である.

Proof

ϕ関係の定義より、$X_1 \sim_\phi Y_1$ と $X_2 \sim_\phi Y_2$ はそれぞれ

$$d\phi(X_{1p}) = Y_{1\phi p}$$

$$d\phi(X_{2p}) = Y_{2\phi p}$$

である。また、Lemma 21 より、ϕ関係の同値な表現として

$$X_1(g\circ\phi) = (Y_1 g)\circ\phi$$
$$X_2(g\circ\phi) = (Y_2 g)\circ\phi \qquad (\forall g \in \mathcal{F}(N))$$

$g\circ\phi : M \to \mathbb{R}$ をかっこ積 $[X_1, X_2]$ に作用させると、

$$\begin{aligned}
[X_1, X_2](g\circ\phi) &= X_1(X_2(g\circ\phi)) - X_2(X_1(g\circ\phi)) \\
&= X_1((Y_2 g)\circ\phi) - X_2((Y_1 g)\circ\phi) \\
&= (Y_1(Y_2 g)\circ\phi) - (Y_2(Y_1 g)\circ\phi) \\
&= \{Y_1(Y_2 g) - Y_2(Y_1 g)\}\circ\phi \\
&= [Y_1, Y_2](g)\circ\phi
\end{aligned}$$

Lemma21 $(X(g\circ\phi) = Yg\circ\phi)$

Lemma21 (〃)

であり、この等式が任意の $g \in \mathcal{F}(N)$ で成り立つので、かっこ積 $[X_1, X_2]$ と $[Y_1, Y_2]$ の間には ϕ 関係がある。

よって、$X_1 \underset{\phi}{\sim} Y_1$ かつ $X_2 \underset{\phi}{\sim} Y_2$ のとき、$[X_1, X_2] \underset{\phi}{\sim} [Y_1, Y_2]$ である。 ∎

Prop ($d\phi(X)$ の滑らかさと一意性)

$\phi : M \to N$: diffeo とする。$\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して、X と ϕ 関係にあるベクトル場 $Y = d\phi(X) \in \mathfrak{X}(N)$ は一意に存在する。

Proof $d\phi(X)$ が一意であることと、$d\phi(X)$ が滑らかであることを確認する。

(i) $d\phi(X)$ が一意であること (背理法)

$X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して 2つの異なるベクトル場 $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$ が存在し、X と ϕ 関係であると仮定する。ϕ 関係の定義 (20. Definition) より、

$\forall q = \phi(p) \in N$ に対して、

$$Y_{1\,q} = d\phi(X_p), \quad Y_{2\,q} = d\phi(X_p)$$

である。これは Y_1 と Y_2 が N 上の任意の点で同一のベクトルを持つことであり、仮定「Y_1 と Y_2 は異なるベクトル場」に矛盾する。

よって、Xとϕ関係なベクトル場は1つしか存在しない(一意である).

(ii) $d\phi(X)$が滑らかであること

ベクトル場$d\phi(X)$は次のように定義される.

$$(d\phi(X))_q = d\phi(X_p) \quad \forall q = \phi(p) \in N.$$

このベクトル場が関数$g \in \mathcal{F}(N)$に作用すると、

$$(d\phi(X))_q(g) = d\phi(X_p)(g).$$

ここで、微分の性質より、$d\phi(X_p)(g)$は

$$\begin{aligned} d\phi(X_p)(g) &= X_p(g \circ \phi) \\ &= X(g \circ \phi)(p) \\ &= X(g \circ \phi) \circ \phi^{-1}(q) \end{aligned}$$

よって、$(d\phi(X))_q(g) = X(g \circ \phi) \circ \phi^{-1}(q)$は$\forall q \in N$で成り立つので、

$(d\phi(X))(g) = X(g \circ \phi) \circ \phi^{-1}$である. ··· ☆

仮定よりX、$g \circ \phi$は滑らかより、$X(g \circ \phi)$は滑らか.

また、ϕはdiffeoより、ϕ^{-1}も滑らか.

よって、滑らかな写像同士の合成$X(g \circ \phi) \circ \phi^{-1}$は滑らかであるため、

☆より$(d\phi(X))(g)$は滑らか.

ベクトル場の滑らかさの定義より、「$d\phi(X)(g)$が滑らか」$\Longleftrightarrow$「$d\phi(X)$が滑らか」

∴ $d\phi(X)$は滑らかである ▨

$d\phi(X) \in \mathfrak{X}(N)$

以上より、$\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して、X と ϕ 関係にあるベクトル場 $d\phi(X) \in \mathfrak{X}(N)$ が一意に存在することを確認した ∎

(このようなベクトル場 $d\phi(X) \in \mathfrak{X}(N)$ を、X の転送された transferred ベクトル場という)

P14~15

ONE-FORMS (一次微分形式)

- 多様体 M 上の一次微分形式は、ベクトル場に対する双対な対象.
- $\forall p \in M$ において、接ベクトル空間 $T_p(M)$ の双対空間 $T_p(M)^*$ は、p における M の余接空間 cotangent space と呼ばれる。

Def(双対空間)

V をベクトル空間とする. V^* が V の双対空間である

$\Longleftrightarrow V^* := \{ f : V \to \mathbb{R} \mid f$ は線形写像 $\}$

- $T_p(M)^*$ の元は共ベクトル covectors と呼ばれ、$T_p(M)$ から $\mathbb{R}$ への線形写像.

$T_p(M)^* = \{ f : T_p(M) \to \mathbb{R} \mid$ 線形写像 $\}$

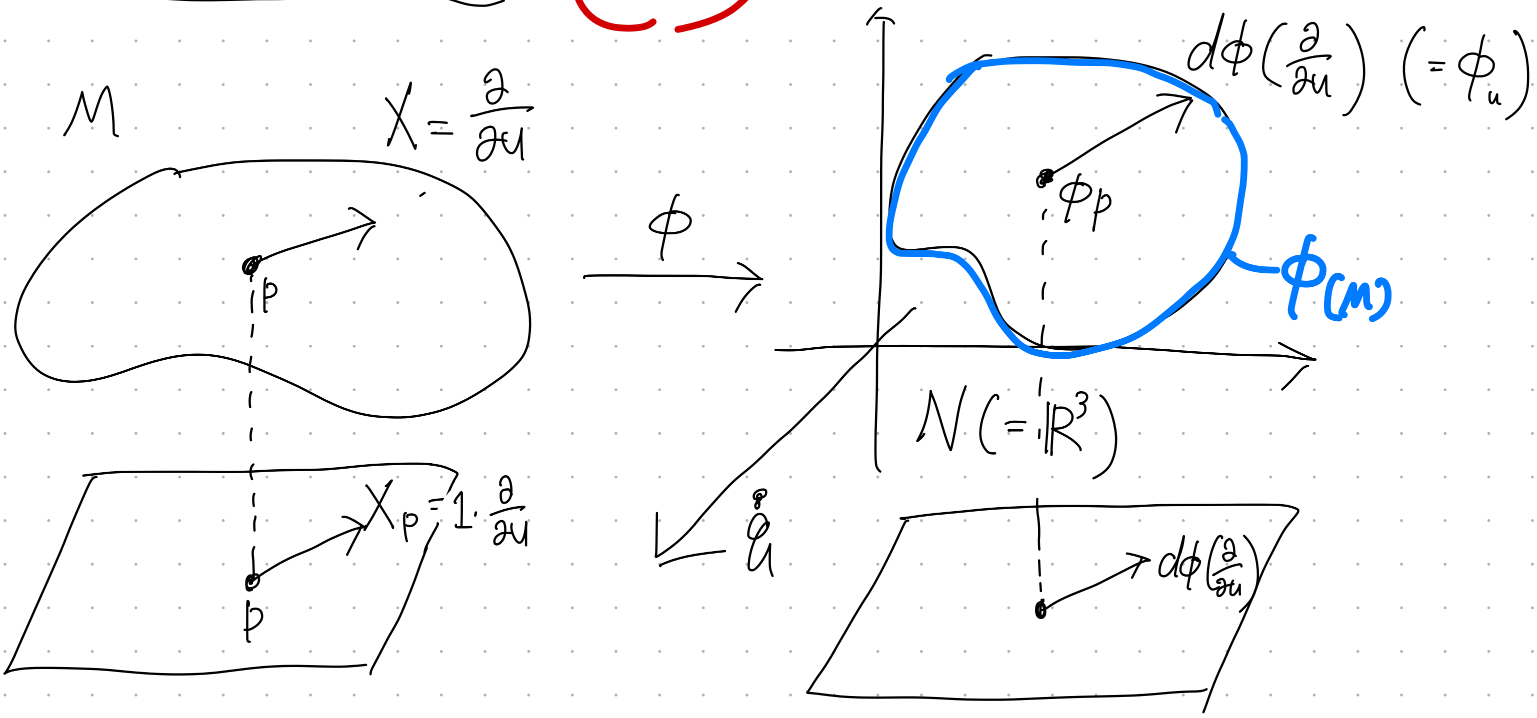
Def(一次微分形式)

多様体 M 上の一次微分形式 θ

$\Longleftrightarrow \forall p \in M$ に対して余接空間 $T_p(M)^*$ の元 θ_p を割り当てる関数

φ-related の補足

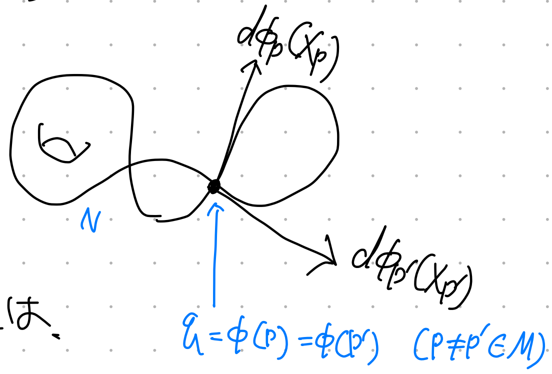
追加



$d\phi(X)$ を N のベクトル場とは思えない。

なぜなら、φの像 $\phi(M)\subset N$ の点 ϕp では $d\phi_p(X_p)$ とベクトルを定めることができるが、それ以外の点 $q\in N\setminus\phi(M)$ はベクトルが定まらない。

↓ ベクトル場 $Y\in\mathfrak{X}(N)$ を考える。



Y (Nのベクトル場) があらかじめ定義されているときは、

φ-related という関係が $X\in\mathfrak{X}(M)$ と $Y\in\mathfrak{X}(N)$ で紐付け。

$(d\phi(X_p)=Y_{\phi_p})$

$$\left(\begin{array}{ccc} p & \longmapsto & \theta_p \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ M & \longrightarrow & T_p(M)^* \end{array}\right)$$

${}^\forall X \in \mathfrak{X}(M)$、${}^\forall p \in M$、${}^\forall X_p \in T_p(M)$ に対して、

$$\theta X(p) := \theta_p(X_p) \in \mathbb{R}$$

- θ の滑らかさについては、以下のように定義

$$\theta \text{ が滑らか} \iff {}^\forall X \in \mathfrak{X}(M),\ \theta X \in \mathbb{R} \text{ が滑らか}$$

- 一次微分形式には 和 と 実数値関数 $f \in \mathcal{F}(M)$ による 掛け算 が 定義.

和の定義 ： $(\theta + \omega)_p = \theta_p + \omega_p \qquad {}^\forall \theta_p, \omega_p \in T_p(M)^*$

掛け算の定義 ： $(f\theta)_p = f(p)\theta_p \qquad {}^\forall f \in \mathcal{F}(M)$

M 上の滑らかな 一次微分形式 の 集合 を $\mathfrak{X}^*(M)$ と すると、$\mathfrak{X}^*(M)$ は

$\mathcal{F}$ $\cancel{\mathfrak{X}}(M)$ の $\underset{}{\overset{\text{module}}{\text{加群}}}$ となる. $(\theta, \omega \in \mathfrak{X}^*(M))$

Def (加群)

R ： 可換環、$1 \in R$ ： 単位元、$K = (K, +)$ ： $\overset{\text{可換群}}{\text{アーベル群}}$ とする.

作用 $\bullet : R \times K \longrightarrow K$ からなる 組 $(K, +, \bullet)$ が 加群 である

$\overset{\text{def}}{\iff}$ ${}^\forall a, b \in R$、${}^\forall X, Y \in K$ に対して、

(M1) 分配則 $a \cdot (X + Y) = a \cdot X + a \cdot Y$

(M2) 作用の結合則 $a \cdot (bX) = (ab) \cdot X$

(M3) 単位元 1 の作用 $1 \cdot X = X$

(M4) 作用の分配則 $(a + b) \cdot X = a \cdot X + b \cdot X$

(M 上の全ての滑らかなベクトル場の集合 $\mathfrak{X}(M)$ は 環 $\mathcal{F}(M)$ 上の 加群)

Def（微分）

$f \in \mathcal{F}(M)$ の微分 df

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall p \in M$、$\forall v \in T_p(M)$ に対して、$(df)(v) := v(f)$
を満たす1次微分形式 $df \in \mathfrak{X}^*(M)$

・微分 df は1次微分形式であることは、df の線形性と滑らかさより分かる。

Proof ベクトル場の定義に従って、「線形性」と「滑らかであること」を確認する。

(i) 線形性の確認

$\forall a, b \in \mathbb{R}$、$\forall v, w \in T_p(M)$ に対して

$$(df)_p(av + bw) \overset{\text{微分のDef}}{=} (av + bw)(f)p$$

$$= av(f)p + bw(f)p \quad \because \text{接ベクトルの線形性}$$

$$= a(df)_p(v) + b(df)_p(w)$$

$\forall p \in M$ で成り立つため、(df) は線形であることを示した。

(ii) 滑らかであることの確認

$\forall V \in \mathfrak{X}(M)$ に対して、$(df)(V) = V(f)$ が滑らかであることを示せばよい。

ベクトル場の定義より、V が滑らか $\Longleftrightarrow$ $\forall f \in \mathcal{F}(M)$ に対して Vf が滑らか

→ P12．6行目より

今、V は M 上の滑らかなベクトル場であるため、Vf は滑らかである。

よって、$(df)(V)$ も滑らか。

$\forall V \in \mathfrak{X}(M)$ で成り立つため、(df) は滑らかであることを示した。

$\therefore$ df は1次微分形式の性質を満たすことを確認した ∎

Lemma（双対基底）

$(U, \varphi) = (U; x^1, x^2, \cdots, x^n)$：座標近傍の一次微分形式 $dx^1, dx^2, \cdots, dx^n$ は U の各点において座標ベクトル場 $\partial_1, \partial_2, \cdots, \partial_n$ の双対基底となる。つまり、

$$(dx^i)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_{ij}.$$

Proof 外微分の定義に従って式変形する

微分の定義 $\left((df)(v) = v(f)\right)$ より、

$$\underbrace{(dx^i)}_{f}\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)}_{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)(x^i)$$

$$= \frac{\partial x^i}{\partial x^j}$$

$$= \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

$$= \delta_{ij}. \quad \blacksquare$$

以上のLemmaより、次の命題が成り立つ。 P15

Prop

${}^\forall \theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ に対して、

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} \theta(\partial_i)\, dx^i \quad \text{on } U.$$

（$x^1, x^2, \cdots, x^n$ は $U \subset M$ の座標系、$dx^1, dx^2, \cdots, dx^n$ は座標近傍の一次微分形式）

Proof 基底定理を用いる

${}^\forall p \in U$ に対して、$\theta_p \in T_p(M)^*$ であるため基底定理（12. Theorem）より、

$$\theta_p = \sum_{i=1}^{n} \theta_i(p)\, (dx^i)_p \qquad (\because T_p(M)^* \text{の基底は } dx^i \ (i = 1, 2, \cdots, n),\ \theta_1(p), \cdots, \theta_n(p) \in \mathbb{R})$$

と表される．任意の p について成り立つため、上式は

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} \theta_i (dx^i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \theta(\partial_i)(dx^i)$$

$$\left(\because \ \theta_i = \theta_1 \underbrace{dx^1\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)}_{=0} + \cdots + \theta_i \underbrace{dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)}_{=1} + \cdots + \theta_n \underbrace{dx^n\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)}_{=0} = \left(\theta_1 dx^1 + \cdots + \theta_n dx^n\right)\frac{\partial}{\partial x^i} = \theta\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \quad \left(\because \theta = \sum_{i=1}^{n} \theta_i (dx^i)\right) \right)$$

以上より、命題の等式を示した．■

Prop（全微分）

$\forall f \in \mathcal{F}(M)$、$df\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial f}{\partial x^i}$ のとき、

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \quad \text{on } U.$$

Proof

先ほどの命題 $\left(\theta = \sum_{i=1}^{n} \theta(\partial_i) dx^i,\ {}^\forall\theta \in \mathfrak{X}^*(M)\right)$ より、$df \in \mathfrak{X}^*(M)$ に対して

$$df = \sum_{i=1}^{n} (df)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) dx^i$$

仮定 $df\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial f}{\partial x^i}$ より．

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) dx^i \quad \text{on } U$$

より、命題の等式を示した．■

Lemma（一次微分形式の性質）

$\forall f \in \mathfrak{F}(M)$ の微分 $df \in \mathfrak{X}^*(M)$ は以下の性質を持つ.

(A1) $d : \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{X}^*(M)$ は $\mathbb{R}$ 線形性.

(A2) 積の法則：$\forall f, g \in \mathfrak{F}(M)$ に対して、$d(fg) = g\,df + f\,dg$

(A3) $\forall f \in \mathfrak{F}(M)$、$\forall h \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^1)$ に対して、$d(h(f)) = h'(f)\,df$.

Proof

(A1) について

$d(af+bg) = a\,df + b\,dg$ を示せばよい.

$\forall f, g \in \mathfrak{F}(M)$、$\forall a, b \in \mathbb{R}$、$\forall v \in T_p(M)$ に対して、

$$d(af+bg)(v) \overset{\text{微分の定義}}{=} v(af+bg) = a\,v(f) + b\,v(g)$$

$$\overset{\text{微分の定義}}{=} a(df)(v) + b(dg)(v).$$

任意の v で成り立つため、$d(af+bg) = a(df) + b(dg)$.

$\therefore$ d は $\mathbb{R}$ 線形である.

(A2) について

$\forall f, g \in \mathfrak{F}(M)$、$\forall v \in T_p(M)$ に対して、

$$d(fg)(v) = v(fg) \overset{\text{接ベクトルのライプニッツ則}}{=} v(f)g + f\,v(g)$$

$$= (df)(v)g + f(dg)(v).$$

任意の v で成り立つため、$d(fg) = g\,df + f\,dg$.

$\therefore$ 積の法則が成り立つ.

(A3)について

$\forall f \in \mathcal{F}(M)$、$\forall h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^1)$、$\forall v \in T_p(M)$ に対して、

$$
\begin{aligned}
d(h(f))(v) &= v(h(f)) \\
&= \frac{d}{dt}(h \circ f \circ \alpha)\Big|_{t=0} \\
&= h'(f)\,\frac{d}{dt}(f \circ \alpha)\Big|_{t=0} \\
&= h'(f)\,v(f) \\
&= h'(f)\,(df)(v)
\end{aligned}
$$

方向微分の定義 (17. Definition)

$v(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)\Big|_{t=0}$

連鎖律より

任意の v で成り立つため、$d(h(f)) = h'(f)(df)$.

∴ (A3) が成り立つ

以上より、(A1)〜(A3) の性質を確認した ▨

SUBMANIFOLD (部分多様体)

P16

- 多様体 M の部分多様体 P は M の部分集合であり、P 自身も多様体の構造を持つ.

(P は M から誘導された位相を持つ)

induced topology

Def (部分多様体)

多様体 P が多様体 M の部分多様体である.

$\overset{def}{\iff}$ (A1) P は M の部分位相空間

(A2) 包含写像 $j : P \subseteq M$ が滑らかであり、$\forall p \in P$ で写像の微分 dj が全単射.

Def（部分位相空間）

$(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間、$Z \subseteq X$ を X の部分集合とする。このとき、

$$\mathcal{O}_Z := \{ O \cap Z \mid O \in \mathcal{O}_X \}$$

とおくと、$(Z, \mathcal{O}_Z)$ は位相空間となる。$(Z, \mathcal{O}_Z)$ を $(X, \mathcal{O}_X)$ の部分位相空間という。

Def（包含写像）

$X \subset Y$、$\forall x \in X$ のとき、$i : X \longrightarrow Y$ を $i(x) = x$ で定める。この写像 i を包含写像と呼ぶ

Def（写像の微分）

写像 $\phi : M \to N$ を滑らかとする。$\forall p \in M$ に対して、写像

$$d\phi_p : T_p(M) \longrightarrow T_{\phi_p}(N)$$

は、接ベクトル $v \in T_p(M)$ を $v_\phi \in T_{\phi_p}(N)$ へ写す写像であり、点 p における写像 ϕ の微分とよぶ。

$d\phi$ と ϕ は、等式

$$(d\phi_p(v))(g) = v(g \circ \phi) \qquad \forall v \in T_p(M),\ \forall g \in \mathcal{F}(N)$$

が成り立つ。

P が M の部分多様体であり、$\phi : M \to N$ が滑らかなら、制限写像 $\phi|_P$ も P への滑らかな写像である。

36 proof

逆関数
陰関数
定理

部分多様体の例

追加

$S^n = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1 \}$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分多様体

正則値定理（陰関数定理）

$\varphi : M^m \longrightarrow N^n$: C^∞-map

$q \in N$, $S := \varphi^{-1}(q)$

$= \{ p \in M \mid \varphi(p) = q \}$ とおく.

$S \neq \overset{\text{空集合}}{\phi}$ φ が S の各点 $p \in S$ で

$d\varphi_p : T_pM \longrightarrow T_{\varphi(p)}N$: 全射

をみたす.　　$\hookrightarrow m \geq n$

$\Longrightarrow$ S は M の $(m-n)$ 次元部分多様体である.

Ex) $M = \mathbb{R}^{n+1}$, $S = S^n$ (n次元球面) とする.

$\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^1$; $\varphi(x) = \|x\|^2 - 1$

$= (x^1)^2 + (x^2)^2 + \cdots + (x^{n+1})^2 - 1$ $\in \mathbb{R}$

$S = \varphi^{-1}(0)$ とおいて,

$S = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \varphi(x) = 0 \}$

$= \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1 \}$　　なので $S = S^n$

$$\forall p \in S^n,\ d\varphi_p : T_p\mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^1$$

$\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{n+1}}$

$$T_p\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}, \quad T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}^1$$

$\therefore$ $d\varphi_p$: 全射 $\iff \mathrm{Im}(d\varphi_p) = T_{\varphi_p}\mathbb{R}$

$\iff {}^\exists X \in T_{\varphi_p}\mathbb{R}^{n+1}$ s.t. $d\varphi_p(X) \neq 0$

$$d\varphi_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = 2x^i \quad (i = 1, 2, \cdots, n+1)$$

$$Y = \left(d\varphi_p\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right), d\varphi_p\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right), \cdots, d\varphi_p\left(\frac{\partial}{\partial x^{n+1}}\right)\right)$$

$= (2x^1, 2x^2, \cdots, 2x^{n+1})$ が、どの点 $p = (x^1, x^2, \cdots, x^{n+1}) \in S$

において 0 でないことが分かれば OK

もし $Y = 0 \Rightarrow x^1 = x^2 = \cdots = x^{n+1} = 0 \Rightarrow p \in S^{n+1}$ の条件に矛盾.

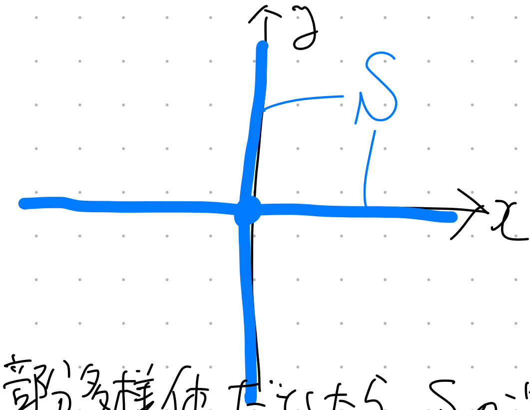
$\therefore Y \neq 0$ ☆

☆ ${}^\forall p \in S$ において $d\varphi_p$: 全射 $\therefore$ 正則値定理より $S = S^n$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の

n次元部分多様体.

※ 部分多様体**ではない**例

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$$



このとき、S は $\mathbb{R}^2$ の部分多様体ではない。（部分多様体だとしたら S の次元 $=1$）

$P = (0, 0) \in S$ において、S は多様体ではない

1次元

∵ もし多様体なら $\exists (U, \xi)$：座標近傍、U は連結としてよい。

$P \in U$、$\xi : U \to \xi(U)$：同相写像

$U \subset \mathbb{R}^2$、$\xi(U) \subset \mathbb{R}^1$

・$\mathbb{R}$ の連結開集合より、

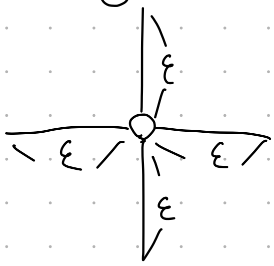
$\xi(U)$ は開区間 …①

$U \subset S$：開集合、相対位相なので、

$\exists \tilde{U}$：$\mathbb{R}^2$ の開集合 s.t. $\tilde{U} \cap S = U$

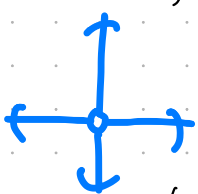
半径 ε の円

$\tilde{U}$ を小さくとり直して $\tilde{U} = B(0, \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ としてよい。

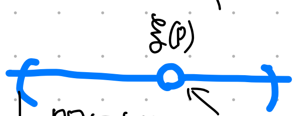


(0,0)

$U \setminus \{p\}$　　$\xi|_{U \setminus \{p\}} : U \setminus \{p\} \to \xi(U) \setminus \{\xi(p)\}$：同相写像



連結成分4つ



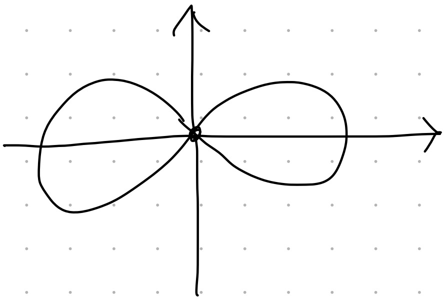
開区間から1点を除いたもの

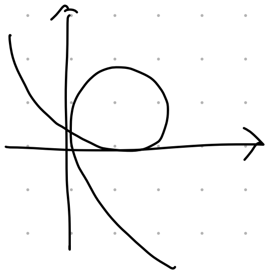
$\xi(U)$

連結成分2つ

∴「S は多様体」という仮定が矛盾

∴ S は $\mathbb{R}^2$ の部分多様体ではない。





$r' \neq 0$

→ これらは 部分多様体 ではないが、

はめ込み : $\varphi : M \to N$ の像 になっている。

→ はめ込まれた 部分多様体。

Def (はめ込み)

M, N : C^∞-mfd

$\varphi : M^m \to N^n$: C^∞-map とする

φ が はめ込み (immersion)

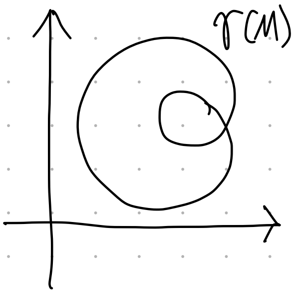
$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall p \in M$ において

$d\varphi_p : T_p(M) \longrightarrow T_{\varphi(p)}(N)$

が 単射

→ $m \leq n$

M : 1次元、 $N = \mathbb{R}^2$ として、



$r : M \to \mathbb{R}^2$

$T_p(M) = \mathrm{Span}\left\{\frac{d}{dt}\right\}$

dr : 単射 $\iff dr\left(\frac{d}{dt}\right) = r' \neq 0$

dr : 単射 $\iff$ 「$dr(v) = 0 \Rightarrow v = 0$」

$\iff$ 「$v \neq 0 \Rightarrow \underbrace{dr(v)}_{= r'} \neq 0$」

「曲線が正則である」の条件だ。

∴ 正則曲線は「はめ込まれた部分多様体」である。