

• Proposition 4.7 (i)(ii) の確認

(\Rightarrow)

(i) $\hat{\mu}(u, 0) \neq 0$ ならば、 f は u 軸上で カスプ辺 を与える。

一方で、4節冒頭より、 $B_{rrr}(u, 0) \neq 0 \Leftrightarrow f$ は カスプ辺 であった。

Question

$$\hat{\mu}(u, 0) \neq 0 \Leftrightarrow B_{rrr}(u, 0) \neq 0$$

• $B_r = r^2 \beta(u, r)$ と表されていたので、

$$B_{rr} = 2r\beta + r^2 \beta_r,$$

$$B_{rrr} = 2\beta + 2r\beta_r + r^2 \beta_{rr}$$

$$= 2\beta + r(2\beta_r + r\beta_{rr}).$$

$$\therefore B_{rrr}(u, 0) = 2\beta(u, 0)$$

$$B_{rrr}(u, 0) \neq 0 \Leftrightarrow \beta(u, 0) \neq 0 \Leftrightarrow f \text{ が } (u, 0) \text{ で カスプ辺}$$

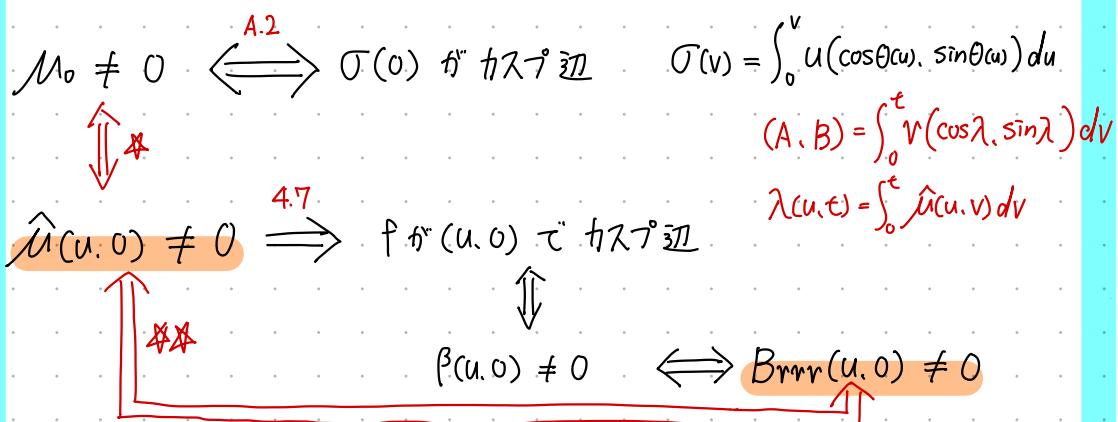
• $\hat{\mu}(u, r)$ (は Lemma A.1 より) $\hat{\mu}(u, r) = M_0 + M_1 r + M_2 r^2 + O(r^3)$.

$$\hat{\mu}(u, 0) = M_0(u)$$
 である。---*

• $B(u, t) = \int_0^t r \sin \lambda(u, r) dr$ より、 t の 3 階微分は、 $B_{ttt}(u, t) = 2(\lambda)_t \cos \lambda(u, t) + t(\lambda)_{tt} \cos \lambda(u, t) - t(\lambda)_{tt} \sin \lambda(u, t)$.
 ここで、 $B_{ttt}(u, 0) = 2\hat{\mu}(u, 0)$. $B_{rrr}(u, 0) \neq 0 \Leftrightarrow \hat{\mu}(u, 0) \neq 0$

$$\lambda_t = \hat{\mu}(u, t)$$

Proposition A.2 と Proposition 4.7、 $B(u, v)$ の対応関係をまとめる。



(ii) $\hat{\mu}(0, 0) = 0$ かつ $\hat{\mu}_u(0, 0) \neq 0$ ならば、 f は 点 0 で カスプ状交差帽子 を与える。

(次ページ)

Proposition 1.6. Let $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ be a map as in the first paragraph in this section. We have that

- the singularity of f is cuspidal edge if $b_3(0) \neq 0$, and
- the singularity of f is cuspidal cross-cap if $b_3(0) = 0, b'_3(0) \neq 0$,

where b_3 is the invariant defined in (1.5)

Proof. See Appendix B.1. □

[3] Proposition 1.6

$$\begin{aligned} b_3(s) &= |f_t, f_{t\bar{t}}, f_{\bar{t}\bar{t}}|(s) \quad (f_k(s) = \frac{\partial f}{\partial t^k}|_{t=0}) \\ &= |f_t, f_{tt}(s, 0), f_{ttt}(s, 0)| \\ &= |f_s(s, 0), f_{tt}(s, 0), f_{ttt}(s, 0)| \end{aligned}$$

• $b_3(0) = 0, b'_3(0) \neq 0$ である

$\Rightarrow f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ の特異点はカスプ状交差帽子である。

Proof Appendix B.1 を見よ。



Appendix B. Criteria of singularity types

B.1. Criteria of singularity types of singular surfaces. Assume that $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0), (u, v) \mapsto f(u, v)$, has rank one singularity at 0 and a unit normal vector is extended to ν on the singular locus. Set $\lambda = \det(f_u, f_v, \nu)$, $\psi = \det(t, \eta, \nu)$, where t is a unit tangent vector, and η is a vector field whose restriction is null to the singular locus. We have that $(f, \nu) : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, (0, \nu(0)))$ is an embedding, if and only if $\psi(0) \neq 0$.

Lemma B.1. The singularity of f is

- cuspidal edge, if $\psi(0) \neq 0, \eta\lambda(0) \neq 0$;
- swallowtail, if $\psi(0) \neq 0, \eta\lambda(0) = 0, \eta^2\lambda(0) \neq 0$;
- cuspidal cross-cap, if $\psi(0) = 0, \eta\lambda(0) \neq 0, \psi'(0) \neq 0$.

- t : 単位接ベクトル
- $\psi(0) \neq 0 \Leftrightarrow (f, \nu)$ が埋め込み

Proof. See [6, §1–2] and [2, §1]. → 第一種特異点の条件。 □

Proof of Proposition 1.6. In the notation in §1, $\eta = \partial_v$. Setting $f_t = tv, \lambda = |f_s, f_t, \nu| = |f_s, tv, \nu| = t \times (\text{unit})$,

$$t |f_s, \eta, \nu| \quad \psi(s, 0) = \det(t, \eta, \nu)(s, 0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -b_3/2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{b_3}{2}.$$

So the criteria above shows the proposition. □

$\psi := \det(t, \eta, \nu), \lambda := \det(f_u, f_v, \nu)$ とする。 (↑: 退化ベクトル場)

Lemma B.1

$\psi(0) = 0, \eta\lambda(0) \neq 0, \psi'(0) \neq 0$ である

$\Rightarrow f$ の特異点集合はカスプ状交差帽子である。

↑
認めて用いる。

$\psi(0) = 0, \eta\lambda(0) \neq 0, \psi'(0) \neq 0 \Leftrightarrow b_3(0) = 0, b'_3(0) \neq 0$ を示せばよい。

- $\psi(s, t) = |t, \eta_2, \nu|$ について。

$$b_3 = |t, f_2, f_3|$$

(Sの関数)

[3, Lemma 1.7] より、単位法ベクトルの漸近展開は

$$\begin{aligned} \nu(s, t) &= \left[(\theta' - \tau) \frac{t^2}{2} + O(t^3) \right] \alpha_1 + \left[-\frac{b_3}{2} t + O(t^3) \right] \alpha_2 + \left[1 - \frac{(b_3)^2}{8} t^2 + O(t^3) \right] \alpha_3 \\ &\text{tの次数で} \\ &\text{整理} = \alpha_3 + \left(-\frac{b_3}{2} \alpha_2 \right) t + \left[(\theta' - \tau) \alpha_1 - \frac{b_3^2}{8} \alpha_3 \right] t^2 + O(t^3) \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\downarrow \quad t \in \text{微分}$$

$$\partial_t \nu = \eta \nu$$

$$= -\frac{b_3}{2} \alpha_2 + 2 \left[(\theta' - \tau) \alpha_1 - \frac{b_3^2}{8} \alpha_3 \right] t + O(t^2). \cdots \textcircled{2}$$

単位接ベクトル $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}|_{t=0}$

また、1.1項より、正規直交基底として $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = \{t, f_2, t \times f_2\}$ がとれる。…③

$$\psi(s, 0) = |t, \eta_2, \nu|_{(s, 0)} \quad \text{①, ②を代入}$$

$$= |t, -\frac{b_3}{2} \alpha_2, \alpha_3|_{(s, 0)} \quad \text{③を代入}$$

$$= |\alpha_1, -\frac{b_3}{2} \alpha_2, \alpha_3|_{(s, 0)}$$

$$= -\frac{b_3}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad ? \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ではない?}$$

$$= \frac{b_3(s)}{2}.$$

$$\therefore \text{t}, \psi(0, 0) = \frac{b_3(0)}{2}, \psi'(s, 0)|_{s=0} = \frac{b_3'(0)}{2} \cdots \textcircled{4} \quad \psi(0, 0) = 0 \iff b_3(0) = 0$$

$$\psi'(0, 0) \neq 0 \iff b_3'(0) \neq 0$$

- $\lambda(s, t) = |f_s, f_t, \nu|$ について

1.1項より、 $f_s(s, t)$ と $f_t(s, t)$ はそれぞれ

$$f_s(s, t) = t(s) + \sum_{k=1}^{m-1} f_k'(s) \frac{t^k}{k!} + O(t^m) = t(s) + t f'_1(s) + O(t^2)$$

↑
単位接ベクトル

$$f_t(s, t) = \sum_{k=0}^{m-1} f_{k+1}(s) \frac{t^k}{k!} + O(t^m) = f_1(s) + t f_2(s) + O(t^2)$$

である。1.1項より $\langle f_t(s, t), f_t(s, t) \rangle = t^2$ であるので、 $t=0$ を代入すると、

$$\langle f_t(s, t), f_t(s, t) \rangle \Big|_{t=0} = \langle f_1(s), f_1(s) \rangle = 0$$

よって、 $f_1(s) = 0$ である。次に、 $f_t(s, t) = t f_2(s) + O(t^2)$ を $\langle f_t(s, t), f_t(s, t) \rangle = t^2$ へ代入すると、
⑤

$$\begin{aligned} t^2 &= \langle t f_2(s) + O(t^2), t f_2(s) + O(t^2) \rangle \\ &= t^2 \underbrace{\langle f_2(s), f_2(s) \rangle}_{\substack{\\ 1}} + O(t^3). \end{aligned}$$

よって、 $|f_2(s)| = 1$ である(単位ベクトル)。…⑥

以上より、 $\lambda(s, t)$ は

$$\begin{aligned} \lambda(s, t) &= |f_s, f_t, \nu|_{(s, t)} \xrightarrow{\text{⑤代入}} \\ &= |t + O(t^2), t f_2 + O(t^2), \nu|_{(s, t)} \\ &= t |\underbrace{t + O(t^2)}_{\substack{\text{単位ベクトル}}, \underbrace{f_2 + O(t^2)}_{\substack{\text{単位ベクトル}}, \underbrace{\nu}_{\substack{\text{単位ベクトル}}}}|_{(s, t)} \\ &\quad \because \text{⑥} \end{aligned}$$

$$\gamma \lambda(s, t) = \lambda_t(s, t)$$

$$= |t + O(t^2), f_2 + O(t^2), \nu|_{(s, t)} + t \left(|t + O(t^2), f_2 + O(t^2), \nu|_{(s, t)} \right)_t$$

である。 $\gamma \lambda(0, 0) = |t, f_2, \nu|_{(0, 0)} \neq 0$ …⑦

\downarrow
 1. 1 個め $\langle t, f_2 \rangle = 0$ とす。
 $\nu := \frac{t \times f_2}{|t \times f_2|}$ とする。

④, ⑦ より、

$$\begin{aligned} b_3(0) = 0 &\iff \psi(0, 0) = 0 \\ b_3'(0) = 0 &\iff \psi'(0, 0) \neq 0 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Lemma B} \\ \Rightarrow f \text{ の特異点集合はカスプ状交差帽子である。} \end{array}$$

□

\$\gamma \lambda(0, 0) \neq 0\$

どこで使う？

5節 異性体の関係性

- 本節では異性体のいくつかの性質を示し、
イントロダクションで述べた Theorem III と IV の主張を証明する。

弧長パラメータで表される空間曲線

$$C(u) \quad (C(0) = 0, u \in J, J := [-l, l], l > 0)$$

を固定し、その曲率関数 $K(u)$ が区間 J 全体で正であるとする。

C が trivial symmetry をもつ

Proposition 5.1 $\iff C(u)$ は平面曲線

$$(SO(3) \subset O(3))$$

$f \in \mathcal{G}_{*,3/2}^{\omega}(R^2_3, R^3, C)$ とする。このとき、

等長双対 \hat{f} が f と合同である \iff (1) C が平面内にある または $T \equiv 0$
 \hat{f} が f と合同である \iff (2) C が正の非自明な対称性を持ち、
 $T \neq 0$ に対して、
 $T \circ f$ と \hat{f} が同じ像を持つ。
 f の第一基本形式 ds_f^2 が effective な対称性を持つ。
 \hat{f} の第一基本形式 $ds_{\hat{f}}^2$ が effective な対称性を持つ。
 \hat{f} の特異曲線の向きを反転させる。

Proof

(1) \Rightarrow を示す

一般化カスプ辺 $f(u, t)$ の基本データが $(K(u), T(u), \theta(u), \mu(u, t))$ である
 $\hat{f}_*(u, t) = f(-u, t)$ の基本データは $(K(-u), T(-u), -\theta(-u), -\mu(-u, t))$

\hat{f} と f が合同であると仮定する。Remark 4.5 より、 C がいかなる平面にも含まれない場合のみを考えれば十分である。

C が平面曲線だと (1) が必ず満たされるから？

（仮定）

C が空間曲線のときに、(2) が満たされることを示す

Remark 0.5 より、 R^3 の等長変換 T と、 f の特異曲線近傍で定義された

\hat{f} と f が同じ像を持つ $\iff f$ と \hat{f} は右同値である $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \varphi: \text{diffeo s.t. } g = f \circ \varphi$

diffeo φ が存在して、

$(g \leftarrow \hat{f}, f \leftarrow T \circ f)$

$$T \circ f \circ \varphi = \hat{f} \quad \dots (5.1)$$

右同値の定義よ！

を満たす。

まず、 T が C の各点を固定する場合を考える。この時、 C は平面内になければならず、

$$\hookrightarrow T(P) = P \ (\forall P \in C), T \neq \text{Id} \\ (\text{つまり, trivial symmetry})$$

$$C = \mathbb{C}(u) = \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ でなければ, } T(P) = P \text{ となる } T \text{ は存在しない}$$

5/29 で示した。

仮定と矛盾する。したがって T は C の non-trivial symmetry であり、 C の向きを反転させる。
Def 1.2 より。

T が負の symmetry であると仮定すると、Remark 4.4(b) より、 f の像と $T \circ f$ の像は一致する。

$$\hookrightarrow T \in O(3) \setminus SO(3) \quad \hookrightarrow f_0(u, t) = T \circ f_0(-u, t)$$

しかし、 f の像は \check{f} の像とは異なるので、矛盾する。

※

$$\begin{array}{c} \text{※ } f \text{ の像} = T \circ f \text{ の像} \Rightarrow f \text{ の像} = T \circ f \circ \varphi \text{ の像} \Rightarrow f \text{ の像} = \check{f} \text{ の像} \\ \xrightarrow{\substack{\text{Remark 4.4(b) より,} \\ \text{T} \circ f \text{ と } T \circ f \circ \varphi \\ \text{が右同値}}} \xrightarrow{\substack{\text{式(5.1)} \\ \text{より}}} \end{array}$$

一方で、イントロダクションより 等長双対 \check{f} は f とカスプ角が反転するため、像は一致しない。矛盾

ゆえに T は 正の symmetry であり、このとき φ は $ds_{\check{f}}$ の effective symmetry を与える。※

$$\hookrightarrow T \in SO(3)$$

∴ (2) を満たす。

※ φ が symmetry であることの確認

$\varphi \neq \text{Id}$ を示す

$$\begin{array}{c} \text{定理3.8より, } \check{f} \text{ は内積保存} \quad \cancel{T \circ f = T \circ f \circ \varphi} \\ \text{且つ } \varphi \text{ の第一基本形式は} \\ \text{一致. } ds_{\check{f}}^2 = ds_{T \circ f \circ \varphi}^2 \quad || \quad || \end{array}$$

$ds_{\check{f}}^2 = \varphi^* ds_f^2$ であるため、 φ は symmetry である。

φ が effective であることの確認 (φ が f の特異曲線の向きを反転させる)

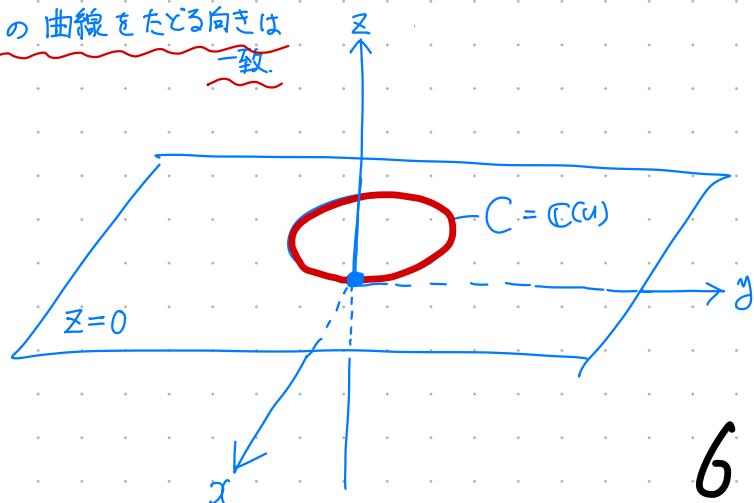
式(5.1) より、 $\check{f} = T \circ f \circ \varphi$ 。また、等長双対 \check{f} は f との faithful isomer であるため、 \check{f} と f の曲線をたどる向きは一致。

$$\check{f} = T \circ f \circ \varphi$$

non-trivial
symmetry
なので、 C を反転

\check{f} も曲線をたどる向き
を反転させれば、 T と φ で
反転が相殺される。

∴ φ は effective.



(ii) \Leftarrow を示す

$$\varphi(u, t) = (-u, t)$$

条件 (2)

C が正の non-trivial symmetry T を持ち、 $d\tilde{s}_f^2$ が effective symmetry φ を持つと仮定する。

$T \circ f \circ \varphi$ は Remark 4.4(a) により、 f の faithful isomer となる。異性体は一意である (Theorem 3.8)。

Proposition 3.15 を使っている (一意性) $\rightarrow T \in SO(3), \tilde{f}_*(u, t) = f_*(u, t) = T \circ f_*(-u, t)$ より。
 $\tilde{f}(u, t) = T \circ f(-u, t) = T \circ f \circ \varphi(u, t)$.

ため、式 (5.1) が従う。よって $T \circ f$ と \tilde{f} は右同値であるため、同じ像を持つ。よって、 f と \tilde{f} は合同である。

$$\rightarrow T \circ f \circ \varphi = \tilde{f} \quad (\Leftrightarrow)$$

合同の定義より。

(i)(ii) より、 \Leftrightarrow を示した ■

Remark 5.2

reflection

C が平面内にあるとし、その平面に関する鏡映を S とする。

任意の $f \in \mathcal{J}_{k,3/2}^r(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, C)$ に対して、 $S \circ f$ は f の faithful isomer となる。

さらに、 f が実解析的 ($r=\omega$) ならば、※1

$$\tilde{f} = S \circ f$$

が成り立つ (定義 3.18 参照)

※2

reflection について

・定義 1.2 より、 $S \in O(3)$

・ $S(P) = P$ ($\forall P \in C$) (trivial symmetry)

・平面と垂直な成分だけ符号反転

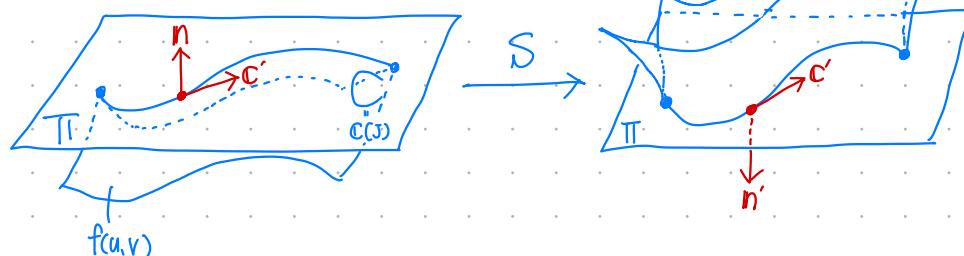
※1 確認すること

isomer $\left\{ \begin{array}{l} \cdot S \circ f \text{ と } f \text{ が等長である } (S \text{ は } \mathbb{R}^3 \text{ の等長変換なので, } d\tilde{s}_f^2 = d\tilde{s}_{S \circ f}^2) \\ \cdot S \circ f \text{ と } f \text{ が右同値でない } (\Leftrightarrow \text{像が異なる}) \text{ 平面と垂直な成分である法ベクトルが反転} \\ \qquad \qquad \qquad \rightarrow \text{像が異なる} \end{array} \right.$

faithful $\left\{ \begin{array}{l} \cdot \exists \varphi: \text{diffeo s.t. } \varphi^* d\tilde{s}_f^2 = d\tilde{s}_{S \circ f}^2 \quad \leftarrow \varphi = \text{Id} \text{ を考へればよい} \\ \cdot S \circ f \text{ と } f \circ \varphi \text{ の特異曲線 } C \text{ をたどる向きが同じ} \end{array} \right.$

$f \circ \varphi: u \mapsto C(u)$
 $S \circ f: u \mapsto S(C(u))$

平面内の点は不動であるため,
 $S(C(u)) = C(u)$



*2 定義3.18 と定理3.8 より.

- ある第一基本形式 ds^2 に対しては、 $C: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ と向きが同じ 実解析的な一般化カスプ辺 は

g_+, g_-

の2つしか存在しない。 g_+ は g_- の faithful isomer である。

- $g_+ = f$ とする。faithful isomer が一意であるため、 $g_- = \check{f}$ 。

- 一方、すでにもう一つの faithful isomer $S \circ f$ を得ていたので、 $\check{f} = S \circ f$ となる。
※より

Example 5.3

$f \in \mathcal{G}_*(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, C)$ を、基本データ $(K, \tau, \theta, \hat{\mu})$ ($\tau \neq 0$) を持つ許容的な一般化カスプ辺とする。ここで、

- K, τ, θ は定数で、
- 拡張半カスプ曲率関数 $\hat{\mu}$ は u に依らない

とする。この場合、 f の実解析性を仮定せずとも、 $T \circ f \circ \varphi$ が f の faithful isomer となる事を示せる。

実際、 C の曲率(K)と振率(τ)は共に定数である。 $\tau \neq 0$ なので C は \mathbb{R}^3 内のらせんであり、点 $0 \in C$ の主法線ベクトルに関する 180° 回転 $T \in SO(3)$ が存在して $T(C) = C$ となる。

Proposition 5.10 の前半より、 f の第一基本形式

※

$$ds_f^2 = E(t) du^2 + 2F(t) du dt + G(t) dt^2$$

が、対合(involution)としての effective symmetry φ を持つことを示せば十分である。

※ Proposition 5.10 $\star(2)$ を示せば、 $\star\star$ が成立。

$f \in \mathcal{G}_{**3/2}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, C)$ とする。次を仮定する。

- ※ (1) C は平面曲線ではなく、点 0 において non-trivial symmetry $T \in O(3)$ を持つ。
(2) ds_f^2 は effective symmetry φ をもつ。

この時、 f の任意の異性体は $\check{f}, \check{f} \circ \varphi, f \circ \varphi$ のいずれかと合同である。

※※ (1) T が正(つまり $T \in SO(3)$)の場合、 $\check{f} = T \circ f \circ \varphi$ となる。

(2) T が負(つまり $T \notin SO(3)$)の場合、 f と \check{f} は合同ではない。

実際、そのような φ が存在すれば、

$$\check{f} := T \circ f \circ \varphi$$

が f の等長双対となる。この状況では、関数 A, B はそれぞれ。

$$(A(u,t), B(u,t)) = \int_0^t V(\cos \lambda(u,n), \sin \lambda(u,n)) dr$$

$$A(u,t) = \int_0^t \hat{\mu}(u,v) dv$$

uに依らない関数

$$\underline{A(t) = t^2 d(t)}, \quad \underline{B(t) = t^3 \beta(t)}$$

※

※ 因子の補題を用いる

$$A(u,t) = \int_0^t V \cos \lambda(u,n) dr \text{ より}, \quad A(u,0) = 0.$$

$$A_t(u,t) = t \cos \lambda(u,t) \text{ より}, \quad A_t(u,0) = 0.$$

∴ 因子の補題より、 C^∞ 級関数 $d(u,t)$ で $A(u,t) = t^2 d(u,t)$ を満たすものが存在。

$$B(u,t) \text{ についても同様に } B(u,0) = 0, \quad B_t(u,0) = 0.$$

$$\text{さらに, } B_{tt}(u,t) = \sin \lambda(u,t) + t(\lambda)_t \cos \lambda(u,t) \text{ より}, \quad B_{tt}(u,0) = \sin \lambda(u,0) = \sin 0 = 0.$$

∴ 因子の補題より、 C^∞ 級関数 $\beta(u,t)$ で $B(u,t) = t^3 \beta(u,t)$ を満たすものが存在。

と書け、 α と β は C^r 級関数である。Proposition 4.9 より。

• 各 t に対して $E(t) > 0$ である。

• $F(t) = t^4 F_0(t)$, $G(t) = t^2$ となる C^∞ 級関数 F_0 と G が存在する。

※1

が成り立つ。

※1 Proposition 4.9 の $F = \sim$ の式に

$$A(t) = t^2 d(t), \quad A_u = 0, \quad A_t = 2t d + t^2 d_t, \quad B(t) = t^3 \beta(t), \quad B_u = 0, \quad B_t = 3t^2 \beta + t^3 \beta_t \text{ を代入すると、}$$

$$F = t^4 (\theta' - \tau) \left\{ (2d + t d_t) \beta - (3\beta + t \beta_t) d \right\} \text{ となり, } t^4 \text{ が因数として出る.} \\ := F_0(t)$$

• 今 ω_1 と ω_2 を

$$\omega_1 = \sqrt{E(t)} \left(du + \frac{F(t)}{E(t)} dt \right), \quad \omega_2 = t \sqrt{\frac{E(t) - t^6 F_0(t)^2}{E(t)}} dt$$

と置けば、 $(\omega_1)^2 + (\omega_2)^2 = ds_\dagger^2$ となる。

※2

さらに、 $X(u,t)$ と $\mathcal{Y}(t)$ を

$$X(u,t) := u + \int_0^t \frac{F(r)}{E(r)} dr$$

$$\mathcal{Y}(t) := \int_0^t \sqrt{\frac{E(r) - r^6 F_0(r)^2}{E(r)}} dr$$

と置くと、 (x, y) は $(0,0)$ を中心とする新たな局所座標系となり。

t を y の関数 ($t = t(y)$) と見なせる。したがって、 ds_\dagger^2 を

$$ds_\dagger^2 = E(y) dx^2 + t(y) dy^2$$

※3

と書ける。

$$\begin{aligned} \textcircled{*}2 \quad (\omega_1)^2 &= E(t) \left(du + \frac{F(t)}{E(t)} dt \right)^2 = E(t) \left(du^2 + \frac{F(t)^2}{E(t)^2} dt^2 + \frac{2F(t)}{E(t)} dudt \right) \\ (\omega_2)^2 &= t^2 \frac{E(t) - t^6 F_0(t)^2}{E(t)} dt^2 = \left(t^2 - \frac{t^8 F_0(t)^2}{E(t)} \right) dt^2 \text{ より.} \\ (\omega_1)^2 + (\omega_2)^2 &= E(t) du^2 + 2F(t) dudt + \left(\frac{F(t)^2}{E(t)} + t^2 - \frac{t^8 F_0(t)^2}{E(t)} \right) dt^2 \\ &= E(t) du^2 + 2F(t) dudt + G(t) dt^2 \\ &= ds_F^2 \quad \text{OK} \end{aligned}$$

$ds_F^2 = E(y) dx^2 + t(y) dy^2$ の確認

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial t} dt \\ &= 1 du + \frac{F(t)}{E(t)} dt \text{ より.} \end{aligned}$$

$$\omega_1 = \sqrt{E(t)} \left(du + \frac{F(t)}{E(t)} dt \right) \text{ に代入すると } \omega_1 = \sqrt{E(t)} dx.$$

$$\begin{aligned} dy &= \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial t} dt \\ &= 0 + \sqrt{\frac{E(t) - t^6 F_0(t)^2}{E(t)}} dt \text{ より.} \end{aligned}$$

$$\omega_2 = t \sqrt{\frac{E(t) - t^6 F_0(t)^2}{E(t)}} dt \text{ に代入すると, } \omega_2 = t dy.$$

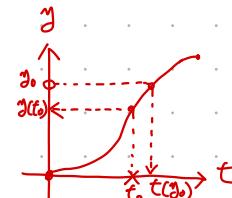
$$\therefore \underline{ds_F^2 = E(t) dx^2 + t^2 dy^2} \text{ である. } \text{OK}$$

↓ $t = 0$ の近傍で

• t を y の関数 ($t = t(y)$) と見なせることを確認

任意の t で、 $y(t)$ の逆関数が存在すればよい.

\Leftrightarrow 任意の t で $\frac{dt}{dy} \neq 0$.



$$y(t) = \int_0^t \sqrt{\frac{E(r) - r^6 F_0(r)^2}{E(r)}} dr \text{ より, } \frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{E(t) - t^6 F_0(t)^2}{E(t)}} > 0.$$

* 分子が $E(t) - t^6 F_0(t)^2 > 0$ であることを確認すればよい.



$$F_0(t) = (\theta' - \tau) \left\{ (2d + t\alpha_t) \beta - (3\beta + t\beta_t) d \right\} \quad \text{および}$$

$$E(t) = \left\{ 1 - (A \cos \theta + B \sin \theta) K \right\}^2 + \left\{ A u + (\theta' - \tau) B \right\}^2 + \left\{ B u - (\theta' - \tau) A \right\}^2.$$

よし、 $E(t) - t^6 F_0(t)$ は

$$E(t) - t^6 F_0(t) = 1 - 2kd \cos \theta t^2 - 2k\beta \sin \theta t^3 + d^2(k^2 \cos^2 \theta + \tau^2) t^4 \\ + 2k^2 d \beta \sin \theta \cos \theta t^5 + \{\beta^2 (k^2 \sin^2 \theta + \tau^2) - \tau d \beta\} t^6 \\ + \tau (d_t \beta - \beta_t d) t^7.$$

\rightarrow 正であるとは言えない？

$t=0$ の近くなら正と言える。

したがって、局所微分同相写像 $\underline{\varphi}: (x, y) \mapsto (-x, y)$ は ds_F^2 の effective symmetry となる。

- f の基本データが (k, τ, θ, μ) であることを踏まえて、後ほど Proposition 6.1 で \check{f} が $(K, \tau, -\theta, \mu)$ を基本データとするカスプ辺と右同値であることを示す。

Theorem III の Proof