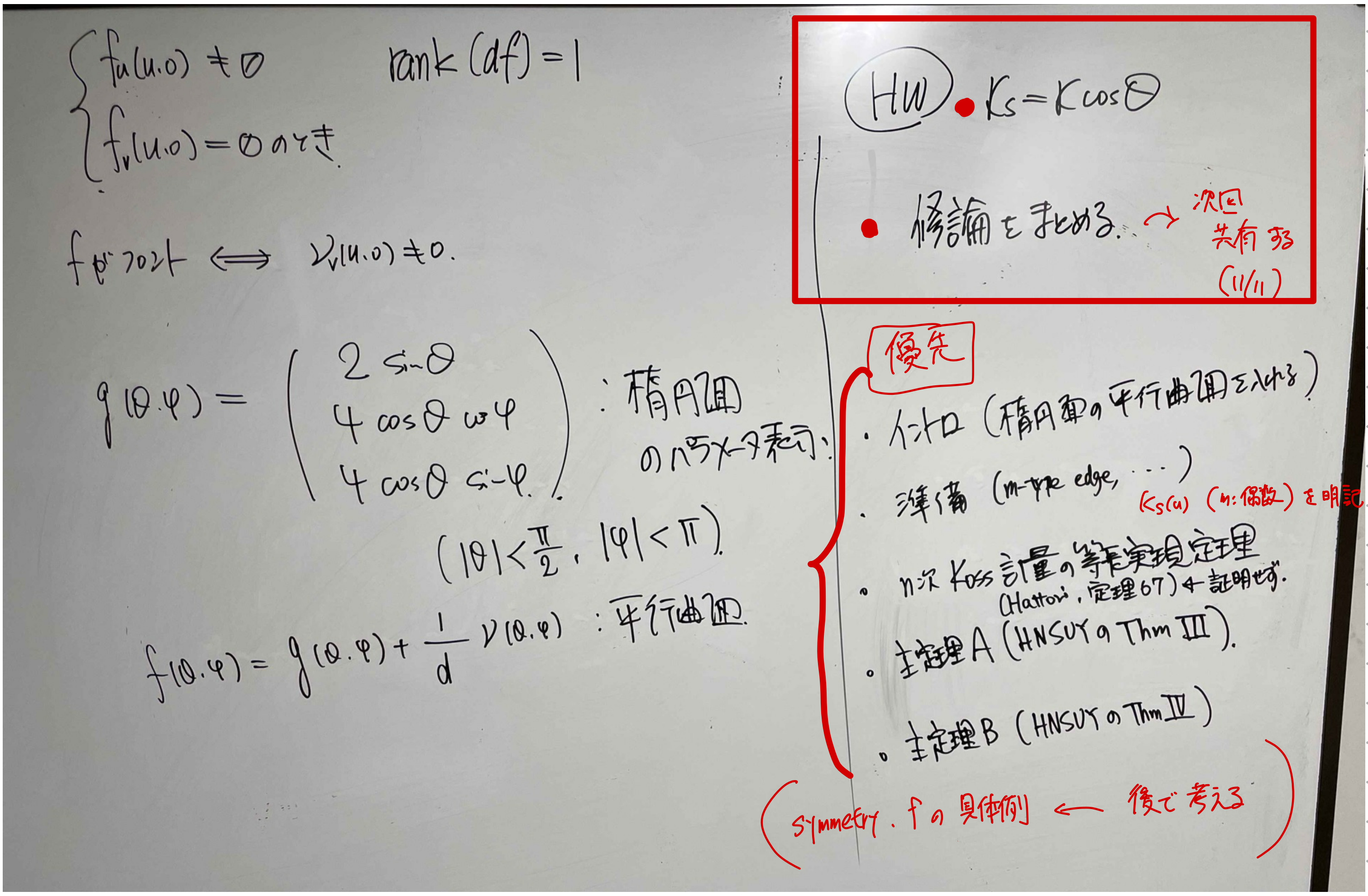


• m-type edge $\Longleftrightarrow$ 第1種退化次数$(m-1)$特異点

$$\Longleftrightarrow \exists \begin{cases} \cdot\ f_v(u,0) = \cdots = f_{v^{m-1}}(u,0) = 0 \\ \cdot\ \{ f_u(u,0),\ f_{v^m}(u,0),\ \nu(u,0) \} \text{ が ONB} \end{cases} \qquad (a.c.s)$$

• $f_u(u,0) = \boldsymbol{e}(u)$ に対して、カスプ角 θ を用いて

$$f_{v^m}(u,0) = \cos\theta\, \boldsymbol{n}(u) - \sin\theta\, \boldsymbol{b}(u)$$

$$\nu(u,0) = \sigma \sin\theta\, \boldsymbol{n}(u) + \sigma \cos\theta\, \boldsymbol{b}(u)$$

として良い $\left(\det(f_u(u,0),\ f_{v^m}(u,0),\ \nu(u,0)) = \sigma \in \{-1, 1\} \right)$

• $$\kappa_s(u) = \operatorname{sgn}\left(\det(r', \eta) \cdot \underbrace{\eta\hat{\lambda}(u,0)}_{\to\ \eta^{m-1}\lambda \text{ と変更しても良い.}}\right) \frac{\det(\hat{r}', \hat{r}'', \nu)}{\|\hat{r}'(u)\|^3} \qquad (m: \text{偶数})$$

∵ $\lambda(u,v) =: \hat{\lambda}^{m-1}(u,v)$ とおく。$\eta = \frac{\partial}{\partial v}$ として、η で両辺を微分すると

$$\eta\lambda = (m-1)\hat{\lambda}^{m-2} \cdot \eta\hat{\lambda}$$

$$\eta^2\lambda = (m-1)\left\{ \underbrace{(\hat{\lambda}^{m-2})_\eta\, \eta\hat{\lambda}}_{= (m-2)\hat{\lambda}^{m-3}(\eta\hat{\lambda})^2} + \hat{\lambda}^{m-2}(\eta\hat{\lambda})_\eta \right\}$$

$\vdots$

$$\eta^{m-1}\lambda(u,0) = (m-1)!\,(\eta\hat{\lambda})^{m-1}(u,0)$$

← m-1乗？

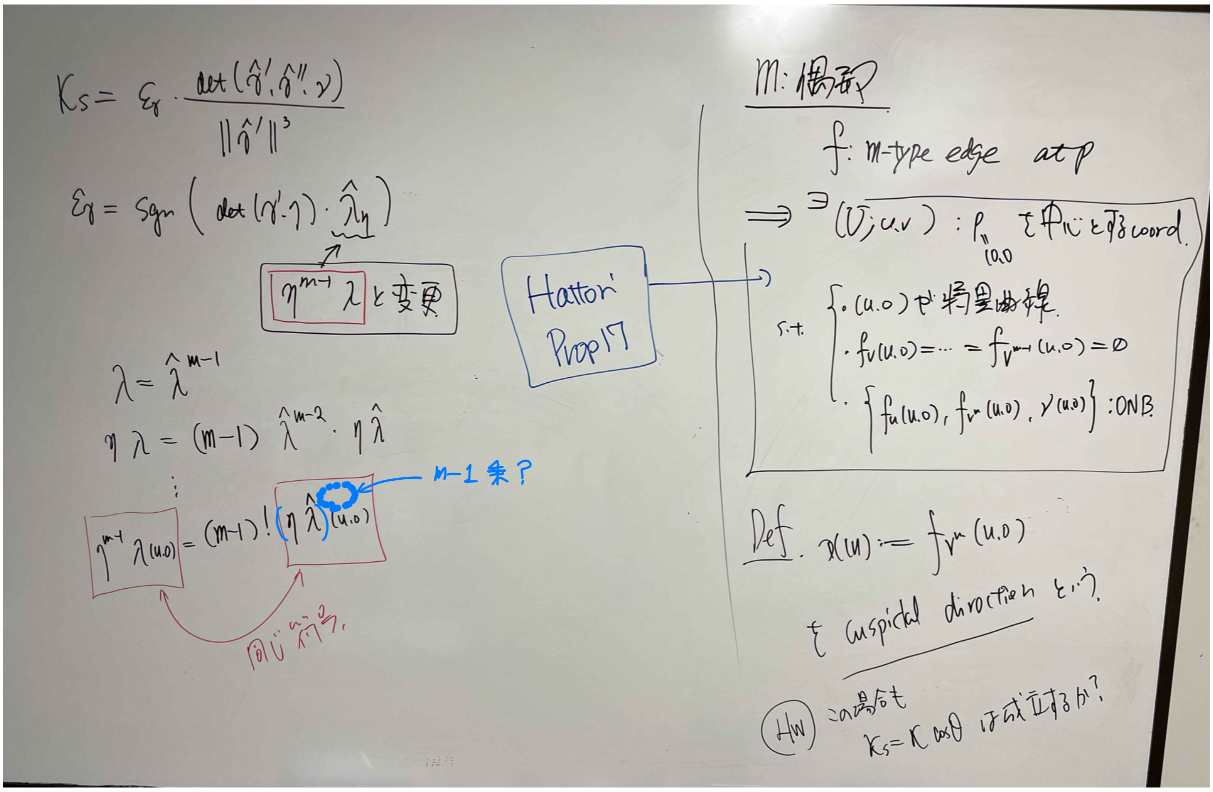
→ $\hat{\lambda}^{m-1}$ を $\boxed{m-1回}$ 微分した項のみが残る.

((u,0) が特異曲線の場合、 $\lambda(u,0)=0 \iff \hat{\lambda}(u,0)=0$)

$\eta\hat{\lambda}(u,0)$	$(\eta\hat{\lambda})^{m-1}(u,0)$	$\eta^{m-1}\lambda(u,0)$
$+$	$+$	$+$ → $\eta^{m-1}\lambda(u,0)$ と $\eta\hat{\lambda}(u,0)$ は符号一致
$-$	m-1 が ~~偶なら $+$~~ 奇なら $-$	~~$+$~~ $-$ ~~→ $\eta^{m-1}\lambda(u,0)$ と $\eta\hat{\lambda}(u,0)$ の符号が一致しない場合がある？~~

∴ m: 偶数

∴ m が偶数の時、 $\eta\hat{\lambda}(u,0)$ と $\eta^{m-1}\lambda(u,0)$ の符号は一致する.



- $f_v(u,v) = v^{m-1}\,\exists\psi(u,v)$ より、 $\lambda = \det(f_u, f_v, \nu)$ は

$$\lambda = v^{m-1}\det(f_u, \psi, \nu)$$

である. $K_s(u)$ の符号 $\varepsilon_\gamma = \mathrm{sgn}\left(\underbrace{\det(\gamma'(u), \eta(u))}_{正}\,\eta^{m-1}\lambda\right)$ は、 $\eta^{m-1}\lambda(u,0)$ の正負が判ればよい.

∵ $\eta^{m-1}\lambda(u,0) = \lambda_{v^{m-1}}(u,0) = (m-1)!\,\det(f_u, \psi, \nu)(u,0)$

$f_{v^m}(u,0) = (m-1)!\,\psi(u,0) \iff \psi(u,0) = \frac{1}{(m-1)!} f_{v^m}(u,0)$ 代入

$$= \frac{\cancel{(m-1)!}}{\cancel{(m-1)!}}\det(f_u, f_{v^m}, \nu)(u,0)$$

$$= \sigma \in \{-1, 1\} \quad \cdots ☆$$

∴ ε_γ の符号は $\eta^{m-1}\lambda(u,0)$ の符号と一致

m-type edge

● $\kappa_s(u) = \kappa_s(u)\cos\theta$ か？ ($m > 2$, 偶数)

$\mathbb{e}(u) = f_u(u,0)$ を空間曲線 $\hat{\gamma}(u)$ の単位接ベクトルとする. $\mathbb{e}'(u)$、$\kappa(u)$ は

$$\mathbb{e}(u) = \hat{\gamma}'(u), \qquad \mathbb{e}'(u) = \hat{\gamma}''(u), \qquad \kappa(u) = \|\hat{\gamma}''(u)\|$$

となる. $\mathbb{n}(u)$、$\mathbb{b}(u)$ はそれぞれ

$$\mathbb{n}(u) = \frac{1}{\kappa(u)}\mathbb{e}'(u), \qquad \mathbb{b}(u) = \mathbb{e}(u) \times \mathbb{n}(u)$$

と表せる. $\langle \hat{\gamma}'(u), \hat{\gamma}''(u)\rangle = 0$ より $\hat{\gamma}'(u)$ と $\hat{\gamma}''(u)$ は直交しており、さらに $\hat{\gamma}'(u) \perp f_{v^m}(u,0)$、$\hat{\gamma}'(u) \perp \nu(u,0)$ であるため、$\hat{\gamma}''(u)$ は $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\hat{\gamma}''(u) = \alpha f_{v^m}(u,0) + \beta \nu(u,0) \quad \cdots (*)$$

と書ける. $(*)$ の両辺のノルムをとると、

$$(\text{左辺}) : \|\hat{\gamma}''(u)\| = \kappa(u)$$
$$(\text{右辺}) : \|\alpha f_{v^m}(u,0) + \beta \nu(u,0)\| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

であるため、$\alpha = \kappa(u)\cos\phi$、$\beta = \kappa(u)\sin\phi$ とおけば、$\hat{\gamma}''(u)$ は

$$\hat{\gamma}''(u) = \big(\kappa(u)\cos\phi\big) f_{v^m}(u,0) + \big(\kappa(u)\sin\phi\big)\nu(u,0) \quad \cdots (**)$$

である. 特異曲率の定義より、$\kappa_s(u) = \mathrm{sgn}\big(\det(\gamma'(u), \eta(u))\,\underbrace{\eta^{m-1}\lambda}_{\text{変更部分}}\big)\dfrac{\det(\hat{\gamma}'(u), \hat{\gamma}''(u), \nu(u))}{\|\hat{\gamma}'(u)\|^3}$

であるので. $\det(\ )$ の中に $(**)$ を代入すると、

$\mathrm{sgn}(\det(\gamma', \eta)\cdot \eta^{m-1}\lambda)$ を略記

$$\kappa_s(u) = \frac{\mathrm{sgn}(\quad)}{\|\hat{\gamma}'(u)\|^3}\kappa(u)\cos\phi\ \underbrace{\det\big(\hat{\gamma}'(u), f_{v^m}(u,0), \nu(u,0)\big)}_{=\sigma\in\{-1,1\}}$$

特異点 $(u,0)$ で m-type edge

$\Longleftrightarrow$ 第1種退化次数 $(m-1)$ 特異点

$\Longleftrightarrow \begin{cases} \cdot\ f_v(u,0) = \cdots = f_{v^{m-1}}(u,0) = 0 \\ \cdot\ \{f_u(u,0), f_{v^m}(u,0), \nu(u,0)\} \text{ が ONB} \end{cases}$

$$= \sigma\,\mathrm{sgn}(\quad)\,\kappa(u)\cos\phi$$

となる. (つまり、$\kappa(u)\cos\phi = \sigma\,\mathrm{sgn}(\ )\,\kappa_s(u)$)

以降で、$\phi = \theta + 2n\pi$ を示す. フレネセレの公式より、$\mathbb{e}'$、$\mathbb{n}'$、$\mathbb{b}'$ はそれぞれ

$$\mathbb{e}'(u) = \qquad \kappa(u)\mathbb{n}(u)$$

$$n'(u) = -\kappa(u)e(u) \qquad\qquad + \tau b(u)$$

$$b'(u) = \qquad\qquad -\tau(u)n(u)$$

であり、$\hat{\gamma}''(u) = (\sigma\,\mathrm{sgn}(\ )\,\kappa_s(u))\,f_{v^m}(u,0) + (\kappa_\nu(u))\,\nu(u,0)$ と $n(u)$ の内積は

$$\underbrace{\langle \hat{\gamma}''(u), n(u)\rangle}_{\kappa(u)} = \langle (\sigma\,\mathrm{sgn}(\ )\,\kappa_s(u))\,f_{v^m}(u,0) + (\kappa_\nu(u))\,\nu(u,0),\ n(u)\rangle$$

$$= \langle (\sigma\,\mathrm{sgn}(\ )\,\kappa_s(u))\,f_{v^m}(u,0),\ n(u)\rangle + \langle \kappa_\nu(u)\,\nu(u,0),\ n(u)\rangle$$

$$= \sigma\,\mathrm{sgn}(\ )\,\kappa_s(u)\langle f_{v^m}(u,0),\ n(u)\rangle$$

$$+ \kappa_\nu(u)\langle \nu(u,0),\ n(u)\rangle$$

$f_{v^m} = \cos\theta\, n - \sin\theta\, b$

$\nu = \sigma(\sin\theta\, n + \cos\theta\, b)$ 代入

$$= \sigma\,\mathrm{sgn}(\ )\,\kappa_s(u)\cos\theta\underbrace{\langle n(u), n(u)\rangle}_{=1} + \sigma\,\kappa_\nu(u)\sin\theta\underbrace{\langle n, n\rangle}_{=1}$$

$$= \sigma\,\mathrm{sgn}(\ )\,\kappa_s(u)\cos\theta + \sigma\,\kappa_\nu(u)\sin\theta \quad \cdots (\ast)$$

である。同様に、$\langle \hat{\gamma}''(u), b(u)\rangle$ は

$$\underbrace{\langle \hat{\gamma}''(u), b(u)\rangle}_{0} = \langle (\sigma\,\mathrm{sgn}(\ )\,\kappa_s(u))\,f_{v^m}(u,0) + (\kappa_\nu(u))\,\nu(u,0),\ b(u)\rangle$$

$$= \langle (\sigma\,\mathrm{sgn}(\ )\,\kappa_s(u))\,f_{v^m}(u,0),\ b(u)\rangle + \langle \kappa_\nu(u)\,\nu(u,0),\ b(u)\rangle$$

$$= \sigma\,\mathrm{sgn}(\ )\,\kappa_s(u)\langle f_{v^m}(u,0),\ b(u)\rangle$$

$$+ \kappa_\nu(u)\langle \nu(u,0),\ b(u)\rangle$$

$f_{v^m} = \cos\theta\, n - \sin\theta\, b$

$\nu = \sigma(\sin\theta\, n + \cos\theta\, b)$ 代入

$$= -\sigma\,\mathrm{sgn}(\ )\,\kappa_s(u)\sin\theta\underbrace{\langle b(u), b(u)\rangle}_{=1} + \sigma\,\kappa_\nu(u)\cos\theta\underbrace{\langle b(u), b(u)\rangle}_{=1}$$

$$= -\sigma\,\mathrm{sgn}(\ )\,\kappa_s(u)\sin\theta + \sigma\,\kappa_\nu(u)\cos\theta \quad \cdots (\ast\ast)$$

である. 以上 (※)(※※) より.

$$\begin{cases} K(u) = \sigma\ \mathrm{sgn}(\quad)\ K_s(u)\cos\theta + \sigma\ K_\nu(u)\sin\theta \\ 0 = -\sigma\ \mathrm{sgn}(\quad)\ K_s(u)\sin\theta + \sigma\ K_\nu(u)\cos\theta \end{cases}$$

$K_s(u) = \sigma\ \mathrm{sgn}(\quad)\ K(u)\cos\phi$
$K_\nu(u) = K(u)\sin\phi$ を代入. $(\sigma^2 = 1)$

$$\begin{cases} K(u) = K(u)\cos\phi\cos\theta + \sigma K(u)\sin\phi\sin\theta \\ 0 = -K(u)\cos\phi\sin\theta + \sigma K(u)\sin\phi\cos\theta \end{cases}$$

両辺を $K(\neq 0)$ で割る.

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 1 = \cos\phi\cos\theta + \sigma\sin\phi\sin\theta \\ 0 = -\cos\phi\sin\theta + \sigma\sin\phi\cos\theta \end{cases}$$

● $\sigma = 1$. つまり $\eta^{n-1}\lambda(u,0) = \lambda v^{n-1}(u,0) = 1$ のとき (∵ ※より)

$$\begin{cases} 1 = \cos\phi\cos\theta + \sin\phi\sin\theta \\ 0 = -\cos\phi\sin\theta + \sin\phi\cos\theta \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 1 = \cos(\phi-\theta) \\ 0 = \sin(\phi-\theta) \end{cases}$$

$\therefore\ \phi = \theta + 2n\pi.$

$\longrightarrow \cos\phi = \cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta.$

$$\therefore\ K_s(u) = \mathrm{sgn}\Big(\underbrace{\det(\gamma'(u), \eta(u))}_{\uparrow\ (u,v)\text{の向き(正)}}\ \underbrace{\eta^{n-1}\lambda}_{=1}\Big)\ K(u)\cos\theta$$

$$= K(u)\cos\theta \qquad (K_\nu = K\sin\theta)$$

● $\sigma = -1$. つまり $\eta^{n-1}\lambda(u,0) = \lambda v^{n-1}(u,0) = -1$ のとき (∵ ※より)

$$\begin{cases} 1 = \cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta \\ 0 = -\cos\phi\sin\theta - \sin\phi\cos\theta \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 1 = \cos(\phi + \theta) \\ 0 = -\sin(\phi + \theta) \end{cases}$$

$$\therefore \ \phi = -\theta + 2n\pi$$

$$\longrightarrow \cos\phi = \cos(-\theta + 2n\pi) = \cos(-\theta)$$

$$\therefore \ \kappa_s(u) = -\mathrm{sgn}(\quad)\, \kappa(u) \cos(-\theta)$$

$$= -\mathrm{sgn}\Big(\underbrace{\det(\gamma'(u), \eta(u))}_{(u,v)\text{の向き(正)}}\ \underbrace{\eta^{m-1}\lambda}_{=-1}\Big)\, \kappa(u) \cos\theta$$

$$= \underbrace{\kappa(u) \cos\theta}$$

$$(\kappa_\nu = -\kappa \sin\theta)$$

$\therefore$ σ の値に関わらず、$\kappa_s(u) = \kappa(u) \cos\theta$ である。$\blacksquare$

$f_{v^m}(u,0)$ と $\nu(u,0)$ の具体的な表示を使わない場合

$$f_{v^m}(u,0) = A\,\mathbb{e}(u) + B\,\mathbb{n}(u) + C\,\mathbb{b}(u)$$

$$\nu(u,0) = D\,\mathbb{e}(u) + E\,\mathbb{n}(u) + F\,\mathbb{b}(u)$$ とおく.

$\langle f_u(u,0),\ f_{v^m}(u,0) \rangle = \langle f_u(u,0),\ \nu(u,0) \rangle = 0$ より. $A = D = 0$

$\langle f_{v^m}(u,0),\ f_{v^m}(u,0) \rangle = \langle \nu(u,0),\ \nu(u,0) \rangle = 1$ より. $B^2 + C^2 = 1$、

$E^2 + F^2 = 1$.

$\langle f_{v^m}(u,0),\ \nu(u,0) \rangle = 0$ より、 $BE + CF = 0$.

$$\det(f_u, f_{v^m}, \nu)(u,0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & B & E \\ 0 & C & F \end{vmatrix} = \sigma \in \{-1, 1\}$$ より. $BF - CE = \sigma$.

以上より、 $(E, F) = (-\sigma C,\ \sigma B)$ と表せる. $(B, C) = (\cos\varphi,\ \sin\varphi)$ とすれば ($\varphi \in \mathbb{R}$)、

$$(B, C, E, F) = (\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ -\sigma\sin\varphi,\ \sigma\cos\varphi)$$

と表せる (カスプ角 θ に対して、$\varphi = -\theta$.)

$$\therefore\ f_{v^m}(u,0) = \cos\varphi\,\mathbb{n}(u) + \sin\varphi\,\mathbb{b}(u)$$

$$\nu(u,0) = -\sigma\sin\varphi\,\mathbb{n}(u) + \sigma\cos\theta\,\mathbb{b}(u).$$