（前回の板書 再掲）

$\bar{n}_u = A\bar{n} + Bf_u + Cf_v + Dn$

$\langle\cdot,\bar{n}\rangle$: $\langle \bar{n}_u, \bar{n}\rangle = A$, $\langle \bar{n}_u, \bar{n}\rangle = \frac{1}{2}\langle\bar{n},\bar{n}\rangle_u$ ∴ $A=0$.

$\langle\cdot,f_u\rangle$: $\langle\bar{n}_u, f_u\rangle = B\underbrace{\langle f_u,f_u\rangle}_{E}$, $\langle\bar{n}_u, f_u\rangle = x_u^2+y_u^2+z_u^2 = E - t_u^2$ ∴ $B = 1 - \frac{t_u^2}{E}$

$\langle\cdot,f_v\rangle$: $\langle\bar{n}_u, f_v\rangle = C\langle f_u,f_v\rangle$, $\langle\bar{n}_u, f_v\rangle = x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v = -t_ut_v$ ∴ $C = -\frac{t_ut_v}{E}$

$\langle\cdot,n\rangle$: $\langle\bar{n}_u,n\rangle = D$, $\langle\bar{n}_u,n\rangle = \langle f_u - t_u\frac{\partial}{\partial t}, n\rangle = -t_u\nu$ ∴ $D=-t_u\nu$

∴ $\begin{cases} 1-t_u\alpha = 1-\frac{t_u^2}{E} & ∴ t_u=\alpha E \\ -t_u\beta = -\frac{t_ut_v}{E} & t_v=\beta E \end{cases}$

~~$\langle (*), f_u\rangle$: $\langle f_u, \frac{\partial}{\partial t}\rangle = \alpha\frac{\langle f_u,f_u\rangle}{E}$, $= \begin{pmatrix} x_u\\ y_u\\ z_u\\ t_u\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = t_u$. ∴ $t_u=\alpha E$~~

$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\t_u\end{pmatrix} = f_u - \bar{n}_u$

$\bar{n}_u = f_u - \begin{pmatrix}0\\0\\0\\t_u\end{pmatrix} = f_u - t_u\frac{\partial}{\partial t} = f_u - \alpha\left(\frac{\alpha}{E}f_u + \frac{\beta}{E}f_v + \nu n\right)$

$\boxed{T = \frac{\alpha}{E}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\beta}{E}\frac{\partial}{\partial v}}$ とおく。

←別の choice $T=\frac{\alpha}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\beta}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial v}$

$df(T) = \frac{\alpha}{E}f_u+\frac{\beta}{E}f_v$

$\frac{\partial}{\partial t} = df(T)+\nu n$ より

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\alpha}{E}f_u+\frac{\beta}{E}f_v+\nu n} \quad (*)'$$

$\langle(*)', f_u\rangle$: $t_u=\alpha$

$\langle(*)', f_v\rangle$: $t_v=\beta$

$1 = \frac{\alpha^2}{E}+\frac{\beta^2}{E}+\nu^2$

$\nu =$

$f_u = \begin{pmatrix}x_u\\y_u\\z_u\\t_u\end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} f_{uu} = (-E+\alpha^2)\bar{n} + \frac{E_u}{2E}f_u - \frac{E_v}{2E}f_v + Ln \\ f_{uv} = \text{(HW)} \\ f_{vv} = \text{(HW)} \\ n_u = \alpha\nu\bar{n} - \frac{L}{E}f_u - \frac{M}{E}f_v \\ n_v = \text{(HW)} \\ \bar{n}_u = \left(1-\frac{\alpha^2}{E}\right)f_u - \frac{\alpha\beta}{E}f_v - \alpha\nu n \\ \bar{n}_v = \text{(HW)} \end{array}\right\}$ Gauss-Weingarten の公式

$\mathcal{F}_u = \mathcal{F}\mathcal{U}$, $\mathcal{F}_v = \mathcal{F}\mathcal{V}$

⇒ $\boxed{\mathcal{F}_{uv} = \mathcal{F}_{vu}}$ はどういう形か？

可積分条件. (可)

HW

1. Gauss-Weingarten の公式 を すべて求める
2. 可積分条件を計算する
3. 幾何学IIの方法で、曲面論の基本定理を作る

E, L, M, N, α, β, ν を (可) をみたすものとする

1. この $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ を用いて 偏微分方程式
$$\begin{cases} \mathcal{F}_u = \mathcal{F}\mathcal{U} \\ \mathcal{F}_v = \mathcal{F}\mathcal{V} \\ \mathcal{F}(u_0,v_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{E(u_0,v_0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{E(u_0,v_0)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$
の解 $\mathcal{F}$ を定める.

2. t を $\begin{cases} t_u = \alpha \\ t_v = \beta \\ t(u_0,v_0) = 0 \end{cases}$ をみたすものとする ($\alpha_v = \beta_u$ が成り立つことを示す) ⇒ $f = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$, $\bar{n} = a_0$ とおく.

3. $\mathcal{F} = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ とおくとき $a_0 = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\0\end{pmatrix}$, $x^2+y^2+z^2=1$ を示す.

4. $f_u = a_1$, $f_v = a_2$
$\langle f_u, f_u\rangle = \langle f_v, f_v\rangle = E$
$\langle f_u, f_v\rangle = 0$
$\langle f, a_3\rangle = \langle f_u, a_3\rangle = \langle f_v, a_3\rangle = 0$
$\langle a_3, a_3\rangle = 1$.
を示し、 $n = a_3$ とおく.

5. $L = \langle f_{uu}, n\rangle$
$M = \langle f_{uv}, n\rangle$
$N = \langle f_{vv}, n\rangle$
を示す.

6. $\nu = \langle n, \frac{\partial}{\partial t}\rangle$ ← 修正した
~~$\frac{1}{E}(\alpha^2+\beta^2)+\nu^2 = 1$~~
$\frac{\alpha}{E}f_u + \frac{\beta}{E}f_v + \nu n = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ を示す.

・可積分条件を求める（続き）

$$\mathcal{U}\mathcal{V} - \mathcal{V}\mathcal{U} = \mathcal{U}_v - \mathcal{V}_u$$

前回、$\mathcal{U}\mathcal{V} - \mathcal{V}\mathcal{U}$ と $\mathcal{U}_v - \mathcal{V}_u$ をそれぞれ次のように表した。

$$\mathcal{U}\mathcal{V} - \mathcal{V}\mathcal{U} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -E_v - L\beta\nu + M\alpha\nu + \frac{E_v\alpha^2}{2E} + \frac{E_v\beta^2}{2E} & E_u - M\beta\nu + N\alpha\nu - \frac{E_u\alpha^2}{2E} - \frac{E_u\beta^2}{2E} & \frac{L\alpha\beta - M\alpha^2 + M\beta^2 - N\alpha\beta}{E} \\ \frac{EL\beta\nu - EM\alpha\nu - E_u\alpha\beta + \frac{E_v\alpha^2}{2} - \frac{E_v\beta^2}{2}}{E^2} & 0 & -E + \alpha^2 + \beta^2 - \frac{LN}{E} + \frac{M^2}{E} & \frac{E^2\beta\nu - E_uM + \frac{E_vL}{2} - \frac{E_vN}{2}}{E^2} \\ \frac{EM\beta\nu - EN\alpha\nu + \frac{E_u\alpha^2}{2} - \frac{E_u\beta^2}{2} + E_v\alpha\beta}{E^2} & E - \alpha^2 - \beta^2 + \frac{LN}{E} - \frac{M^2}{E} & 0 & \frac{-E^2\alpha\nu + \frac{E_uL}{2} - \frac{E_uN}{2} + E_vM}{E^2} \\ \frac{-L\alpha\beta + M\alpha^2 - M\beta^2 + N\alpha\beta}{E} & \frac{-2E^2\beta\nu + E_vL + E_vN}{2E} & \frac{2E^2\alpha\nu - E_uL - E_uN}{2E} & 0 \end{bmatrix}$$

計算： https://colab.research.google.com/drive/1HqjrKKGdWCQIJPqVt3EUC-YmCD7Z3afZ?usp=sharing

$$\mathcal{U}_v - \mathcal{V}_u = \begin{bmatrix} 0 & -E_v - \alpha_u\beta - \beta_u\alpha + 2\alpha_v\alpha & E_u + \alpha_v\beta + \beta_v\alpha - 2\beta_u\beta & \alpha_v\nu - \beta_u\nu - \nu_u\beta + \nu_v\alpha \\ \frac{\alpha(E_v\alpha - E_u\beta) + E(\alpha_u\beta + \beta_u\alpha - 2\alpha_v\alpha)}{E^2} & 0 & \frac{-E_u^2 - E_v^2 + E(E_{uu} + E_{vv})}{2E^2} & \frac{-E_uM + E_vL + E(-L_v + M_u)}{E^2} \\ \frac{\beta(E_v\alpha - E_u\beta) + E(-\alpha_v\beta - \beta_v\alpha + 2\beta_u\beta)}{E^2} & \frac{E_u^2 + E_v^2 - E(E_{uu} + E_{vv})}{2E^2} & 0 & \frac{-E_uN + E_vM + E(-M_v + N_u)}{E^2} \\ -\alpha_v\nu + \beta_u\nu + \nu_u\beta - \nu_v\alpha & L_v - M_u & M_v - N_u & 0 \end{bmatrix}$$

である。$\mathcal{U}\mathcal{V} - \mathcal{V}\mathcal{U} = \mathcal{U}_v - \mathcal{V}_u$ より、12個の等式（$0=0$ を除く）が成り立つ。
行列のどの成分に関する等式がガウス方程式、コダッチ方程式、論文内の式(9)、式(10)と同値であるかを確認していく。（結果は10ページ）

$T = \frac{\alpha}{E}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\beta}{E}\frac{\partial}{\partial v}$

(7) ガウス方程式 $\left(\underbrace{K_p}_{\text{断面曲率}} = \underbrace{\det S_p}_{=K_{ext}} + K(1-\|T\|^2)\right)$

- $K_{ext} = \lambda_1\lambda_2 = \dfrac{LN-M^2}{EG-F^2} \overset{E=G,\ F=0}{=} \dfrac{LN-M^2}{E^2}$ (外的曲率)
- $K = \dfrac{-\Delta(\ln E)}{2E} = \dfrac{-\{(\ln E)_{uu} + (\ln E)_{vv}\}}{2E} = \dfrac{E_u^2 + E_v^2 - E(E_{uu}+E_{vv})}{2E^3}$

$$(3.2):\ \frac{E_u^2 + E_v^2 - E(E_{uu}+E_{vv})}{2E^2} = E - \alpha^2 - \beta^2 + \frac{LN-M^2}{E}$$

$$\underset{\text{左辺に K代入する}}{\Longleftrightarrow} EK = E - \alpha^2 - \beta^2 + \frac{LN-M^2}{E}$$

$$\underset{\text{両辺を Eで割る}}{\Longleftrightarrow} K = 1 - \frac{\alpha^2+\beta^2}{E} + \frac{LN-M^2}{E^2}$$

$$\|T\|^2 = \left(\frac{\alpha}{E}\right)^2 \underbrace{g\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\right)}_{E} + 2\frac{\alpha}{E}\frac{\beta}{E}\underbrace{g\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right)}_{0} + \left(\frac{\beta}{E}\right)^2 \underbrace{g\left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v}\right)}_{E}$$

$$= 1 - \|T\|^2 + K_{ext}$$

$\frac{\partial}{\partial t} = T + \nu N$ より、

$$\underbrace{\left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle}_{1} = T^2 + \nu^2\langle N, N\rangle + 2\nu\underbrace{\langle T, N\rangle}_{0} = T^2 + \nu^2$$

$$= \nu^2 + K_{ext} \quad \text{(ガウス方程式)}$$

よって、ガウス方程式 $\Longleftrightarrow$ (3.2) ($\Longleftrightarrow$ (2.3)) である。

−1倍

$$\text{式(8)}\quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} S\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} S\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) - S\left(\left[\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right]\right) = \nu\left(\beta\frac{\partial}{\partial u} - \alpha\frac{\partial}{\partial v}\right) \qquad (K=1)$$

コダッチ方程式

- $\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial}{\partial u} = \frac{E_u}{2E}\frac{\partial}{\partial u} - \frac{E_v}{2E}\frac{\partial}{\partial v}$
- $\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial}{\partial v} = \frac{E_v}{2E}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{E_u}{2E}\frac{\partial}{\partial v}$
- $\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}\frac{\partial}{\partial v} = -\frac{E_u}{2E}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{E_v}{2E}\frac{\partial}{\partial v}$

- $X = \frac{\partial}{\partial u}$、$Y = \frac{\partial}{\partial v}$ とする.

$$\begin{cases} S\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) = A_1^1\frac{\partial}{\partial u} + A_1^2\frac{\partial}{\partial v} = \frac{1}{E}\left(L\frac{\partial}{\partial u} + M\frac{\partial}{\partial v}\right) \\ S\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) = A_2^1\frac{\partial}{\partial u} + A_2^2\frac{\partial}{\partial v} = \frac{1}{E}\left(M\frac{\partial}{\partial u} + N\frac{\partial}{\partial v}\right) \end{cases}$$

$$\left(A = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{EG-F^2}\begin{bmatrix} GL-FM & GM-FN \\ EM-FL & EN-FM \end{bmatrix}}_{E=G、F=0.}\right)$$

であるため、式(8) の 左辺は

$$-\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} S\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) = -\left(\left(\frac{L}{E}\right)_v\frac{\partial}{\partial u} + \frac{L}{E}\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}\frac{\partial}{\partial u}\right) + \left(\frac{M}{E}\right)_v\frac{\partial}{\partial v} + \frac{M}{E}\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}\frac{\partial}{\partial v}\right)\right)$$

$$+)\quad +\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} S\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) = \left(\frac{M}{E}\right)_u\frac{\partial}{\partial u} + \frac{M}{E}\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial}{\partial u}\right) + \left(\frac{N}{E}\right)_u\frac{\partial}{\partial v} + \frac{N}{E}\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial}{\partial v}\right)$$

$$\left\{\left(\frac{M}{E}\right)_u - \left(\frac{L}{E}\right)_v + \frac{M}{E}\frac{E_u}{2E} + \frac{N-L}{E}\frac{E_v}{2E} - \frac{M}{E}\frac{-E_u}{2E}\right\}\frac{\partial}{\partial u}$$

$$+\left\{\left(\frac{N}{E}\right)_u - \left(\frac{M}{E}\right)_v + \frac{M}{E}\frac{-E_v}{2E} + \frac{N-L}{E}\frac{E_u}{2E} - \frac{M}{E}\frac{E_v}{2E}\right\}\frac{\partial}{\partial v} \quad \text{である.}$$

式(8) の 右辺と 係数比較 すると、

$$\begin{cases} \left(\frac{M}{E}\right)_u - \left(\frac{L}{E}\right)_v + \frac{1}{2E^2}\left\{2ME_u + (N-L)E_v\right\} = \beta\nu \\ \left(\frac{N}{E}\right)_u - \left(\frac{M}{E}\right)_v + \frac{1}{2E^2}\left\{-2ME_v + (N-L)E_u\right\} = -\alpha\nu \end{cases} \cdots ☆$$

である. $\left(\frac{M}{E}\right)_u = \frac{M_uE - ME_u}{E^2}$、$\left(\frac{L}{E}\right)_v = \frac{L_vE - LE_v}{E^2}$、$\left(\frac{N}{E}\right)_u = \frac{N_uE - NE_u}{E^2}$、$\left(\frac{M}{E}\right)_v = \frac{M_vE - ME_v}{E^2}$

を ☆ に代入して整理すると、

$$\begin{cases} M_uE - L_vE + \frac{1}{2}LE_v + \frac{1}{2}NE_v = E^2\beta\nu & \cdots ① \\ N_uE - M_vE - \frac{1}{2}NE_u - \frac{1}{2}LE_u = -E^2\alpha\nu & \cdots ② \end{cases}$$

である.

・(2.4) を式変形して ① と等しいことを示す.

$$(2.4):\quad \frac{-E_uM + E_rL + E(-L_r + M_u)}{E^2} = \frac{E^2\beta\nu - E_uM + \frac{E_r}{2}(L-N)}{E^2}$$

$$\underset{\text{両辺を}E^2\text{倍}}{\iff} E_rL - EL_r + EM_u = E^2\beta\nu + \frac{1}{2}E_rL - \frac{1}{2}E_rN$$

$$\iff \frac{1}{2}E_rL + \frac{1}{2}E_rN - EL_r + EM_u = E^2\beta\nu \quad (①と一致)$$

$\therefore$ (2.4) $\iff$ ① である

・(3.4) を式変形して ② と等しいことを示す.

$$(3.4):\quad \frac{-E_uN + \cancel{E_rM} + E(-M_r + N_u)}{E^2} = \frac{-E^2\alpha\nu + \cancel{E_rM} + \frac{1}{2}E_u(L-N)}{E^2}$$

$$\underset{\text{両辺を}E^2\text{倍}}{\iff} -E_uN - EM_r + EN_u = -E^2\alpha\nu + \frac{1}{2}E_uL - \frac{1}{2}E_uN$$

$$\iff -\frac{1}{2}E_uN - \frac{1}{2}E_uL - EM_r + EN_u = -E^2\alpha\nu \quad (②と一致)$$

$\therefore$ (3.4) $\iff$ ② である.

式(9) $\nabla_X(T) = \nu S(X)$

- $T = \frac{\alpha}{E}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\beta}{E}\frac{\partial}{\partial v}$
- $\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial}{\partial u} = \frac{E_u}{2E}\frac{\partial}{\partial u} - \frac{E_v}{2E}\frac{\partial}{\partial v}$
- $\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial}{\partial v} = \frac{E_v}{2E}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{E_u}{2E}\frac{\partial}{\partial v}$
- $\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}\frac{\partial}{\partial v} = -\frac{E_u}{2E}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{E_v}{2E}\frac{\partial}{\partial v}$

(i) $X = \frac{\partial}{\partial u}$ の場合

$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}(T) = \nu S(\frac{\partial}{\partial u})$ に $T = \frac{\alpha}{E}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\beta}{E}\frac{\partial}{\partial v}$ を代入して、

$$\left(\frac{\alpha}{E}\right)_u\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\alpha}{E}\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial}{\partial u}\right) + \left(\frac{\beta}{E}\right)_u\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\beta}{E}\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial}{\partial v}\right) = \frac{\nu}{E}\left(L\frac{\partial}{\partial u} + M\frac{\partial}{\partial v}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{\alpha}{E}\right)_u\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\alpha}{2E^2}\left(E_u\frac{\partial}{\partial u} - E_v\frac{\partial}{\partial v}\right) + \left(\frac{\beta}{E}\right)_u\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\beta}{2E^2}\left(E_v\frac{\partial}{\partial u} + E_u\frac{\partial}{\partial v}\right)$$

$$= \frac{\nu}{E}\left(L\frac{\partial}{\partial u} + M\frac{\partial}{\partial v}\right)$$

係数比較をして、

$$\begin{cases} \left(\frac{\alpha}{E}\right)_u + \frac{\alpha E_u + \beta E_v}{2E^2} = \frac{\nu L}{E} \\ \left(\frac{\beta}{E}\right)_u + \frac{-\alpha E_v + \beta E_u}{2E^2} = \frac{\nu M}{E} \end{cases} \cdots ☆$$

である。

(ii) $X = \frac{\partial}{\partial v}$ の場合

$\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}(T) = \nu S(\frac{\partial}{\partial v})$ に $T = \frac{\alpha}{E}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\beta}{E}\frac{\partial}{\partial v}$ を代入して、

$$\left(\frac{\alpha}{E}\right)_v\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\alpha}{E}\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}\frac{\partial}{\partial u}\right) + \left(\frac{\beta}{E}\right)_v\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\beta}{E}\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial v}}\frac{\partial}{\partial v}\right) = \frac{\nu}{E}\left(M\frac{\partial}{\partial u} + N\frac{\partial}{\partial v}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{\alpha}{E}\right)_v\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\alpha}{2E^2}\left(E_v\frac{\partial}{\partial u} + E_u\frac{\partial}{\partial v}\right) + \left(\frac{\beta}{E}\right)_v\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\beta}{2E^2}\left(-E_u\frac{\partial}{\partial u} + E_v\frac{\partial}{\partial v}\right)$$

$$= \frac{\nu}{E}\left(M\frac{\partial}{\partial u} + N\frac{\partial}{\partial v}\right)$$

係数比較をして、

$$\begin{cases} \left(\frac{\alpha}{E}\right)_v + \frac{\alpha E_v - \beta E_u}{2E^2} = \frac{\nu M}{E} \\ \left(\frac{\beta}{E}\right)_v + \frac{\alpha E_u + \beta E_v}{2E^2} = \frac{\nu N}{E} \end{cases} \cdots ☆'$$

である。

$\left(\frac{\alpha}{E}\right)_u = \frac{\alpha_u E - \alpha E_u}{E^2}$、$\left(\frac{\beta}{E}\right)_u = \frac{\beta_u E - \beta E_u}{E^2}$、$\left(\frac{\alpha}{E}\right)_v = \frac{\alpha_v E - \alpha E_v}{E^2}$、$\left(\frac{\beta}{E}\right)_v = \frac{\beta_v E - \beta E_v}{E^2}$ を

☆、☆' に代入して分母を払うと、

$$
\begin{cases}
2\alpha_u E - \alpha E_u + \beta E_v = 2E\nu L & \cdots ① \\
2\beta_u E - \beta E_u - \alpha E_v = 2E\nu M & \cdots ② \\
2\alpha_v E - \alpha E_v - \beta E_u = 2E\nu M & \cdots ③ \\
2\beta_v E - \beta E_v + \alpha E_u = 2E\nu N & \cdots ④
\end{cases}
$$
である。

- ② の左辺と ③ の左辺が等しいので、

$$2\beta_u E - \cancel{\beta E_u} - \cancel{\alpha E_v} = 2\alpha_v E - \cancel{\alpha E_v} - \cancel{\beta E_u}$$

$\Longleftrightarrow \alpha_v = \beta_u$ が成り立つ。

- $\beta \times ① - \alpha \times ②$ より、（E_u を消去する）

$$2\alpha_u \beta E - 2\alpha\beta_u E + \beta^2 E_v + \alpha^2 E_v = 2E\nu L\beta - 2E\nu M\alpha$$

$$\Longleftrightarrow -L\beta\nu + M\alpha\nu = \frac{-2\alpha_u\beta E + 2\alpha\beta_u E - \beta^2 E_v - \alpha^2 E_v}{2E}$$

$$
\begin{aligned}
\Longleftrightarrow -L\beta\nu + M\alpha\nu + \frac{E_v\alpha^2}{2E} + \frac{E_v\beta^2}{2E} &= -\alpha_u\beta + \alpha\beta_u \\
&= -\alpha_u\beta + 2\alpha\beta_u - \alpha\beta_u \quad \text{) } \alpha_v = \beta_u \text{ 代入} \\
&= -\alpha_u\beta + 2\alpha\alpha_v - \alpha\beta_u
\end{aligned}
$$

$$\Longleftrightarrow -E_v - L\beta\nu + M\alpha\nu + \frac{E_v\alpha^2}{2E} + \frac{E_v\beta^2}{2E} = -E_v - \alpha_u\beta + 2\alpha\alpha_v - \alpha\beta_u .$$

$\therefore$ ①, ② $\Longleftrightarrow$ (1.2) が成り立つ。

- $\beta \times$ ② $- \alpha \times$ ④ より（E_r を消去する）

$$2\beta\beta_u E - 2\alpha\beta_v E - \beta^2 E_u - \alpha^2 E_u = 2E\nu(\beta M - \alpha N)$$

$$\Longleftrightarrow -M\beta\nu + N\alpha\nu = -\frac{2\beta\beta_u E - 2\alpha\beta_v E - \beta^2 E_u - \alpha^2 E_u}{2E}$$

$$\Longleftrightarrow -M\beta\nu + N\alpha\nu - \frac{E_u\alpha^2}{2E} - \frac{E_u\beta^2}{2E} = -\beta\beta_u + \alpha\beta_v$$

$$= \alpha\beta_v + \beta\beta_u - 2\beta\beta_u$$

$\alpha_v = \beta_u$ 代入

$$= \alpha\beta_v + \alpha_v\beta - 2\beta\beta_u$$

$$\Longleftrightarrow E_u - M\beta\nu + N\alpha\nu - \frac{E_u\alpha^2}{2E} - \frac{E_u\beta^2}{2E} = E_u + \alpha\beta_v + \alpha_v\beta - 2\beta\beta_u$$

∴ ②、④ $\Longleftrightarrow$ (1.3) が成り立つ

- (1.2) $\Longleftrightarrow$ (2.1) であることを確認する

$$(1.2): -E_v - L\beta\nu + M\alpha\nu + \frac{E_v\alpha^2}{2E} + \frac{E_v\beta^2}{2E} = -E_v - \alpha_u\beta + 2\alpha\alpha_v - \alpha\beta_u .$$

両辺に $\frac{E_u}{E}\alpha\beta$ 足す
E_v 足す

$$\Longleftrightarrow -\alpha_u\beta + 2\alpha\alpha_v - \alpha\beta_u + \frac{E_u}{E}\alpha\beta = -L\beta\nu + M\alpha\nu + \frac{E_v\alpha^2}{2E} + \frac{E_v\beta^2}{2E} + \frac{E_u}{E}\alpha\beta$$

両辺を -1 倍する

$$\Longleftrightarrow \alpha_u\beta - 2\alpha\alpha_v + \alpha\beta_u - \frac{E_u}{E}\alpha\beta = L\beta\nu - M\alpha\nu - \frac{E_v\alpha^2}{2E} - \frac{E_v\beta^2}{2E} - \frac{E_u}{E}\alpha\beta$$

両辺を $\frac{1}{E}$ 倍する

$$\Longleftrightarrow \frac{\alpha_u\beta}{E} - \frac{2\alpha\alpha_v}{E} + \frac{\alpha\beta_u}{E} - \frac{E_u\alpha\beta}{E^2} = \frac{L\beta\nu}{E} - \frac{M\alpha\nu}{E} - \frac{E_v\alpha^2}{2E^2} - \frac{E_v\beta^2}{2E^2} - \frac{E_u\alpha\beta}{E^2}$$

分母を E^2 に統一する

$$\Longleftrightarrow \frac{-E_u\alpha\beta + (\alpha_u\beta - 2\alpha\alpha_v + \alpha\beta_u)E}{E^2} = \frac{EL\beta\nu - EM\alpha\nu - E_u\alpha\beta - \frac{E_v\alpha^2}{2} - \frac{E_v\beta^2}{2}}{E^2}$$

両辺に $\frac{E_v\alpha^2}{E^2}$ 足す

$$\Longleftrightarrow \frac{-E_u\alpha\beta + E_v\alpha^2 + (\alpha_u\beta - 2\alpha\alpha_v + \alpha\beta_u)E}{E^2} = \frac{EL\beta\nu - EM\alpha\nu - E_u\alpha\beta + \frac{E_v\alpha^2}{2} - \frac{E_v\beta^2}{2}}{E^2}$$

これは(2.1)の等式部分と等しい。∴ (1.2) $\Longleftrightarrow$ (2.1) が成り立つ

- （同様の計算で、(1.3) $\Longleftrightarrow$ (3.1) である）

式(10) $d\nu(X) = -\langle S(X), T\rangle \quad (\forall X \in \mathfrak{X}(M))$

- $X = \frac{\partial}{\partial u}$ の場合

$$\underbrace{d\nu\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)}_{=\nu_u} = -\left\langle \frac{1}{E}\left(L\frac{\partial}{\partial u} + M\frac{\partial}{\partial v}\right), \frac{1}{E}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial u} + \beta\frac{\partial}{\partial v}\right)\right\rangle$$

$\left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v}\right\rangle = E$

$\left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right\rangle = 0$ 代入

$$= -\frac{1}{E}(L\alpha + M\beta)$$

- $X = \frac{\partial}{\partial v}$ の場合

$$\underbrace{d\nu\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)}_{=\nu_v} = -\left\langle \frac{1}{E}\left(M\frac{\partial}{\partial u} + N\frac{\partial}{\partial v}\right), \frac{1}{E}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial u} + \beta\frac{\partial}{\partial v}\right)\right\rangle$$

$$= -\frac{1}{E}(M\alpha + N\beta)$$

以上より、

$$\begin{cases} \nu_u = \dfrac{-1}{E}(L\alpha + M\beta) & \cdots ① \\ \nu_v = \dfrac{-1}{E}(M\alpha + N\beta) & \cdots ② \end{cases}$$

である。

② × α − ① × β より、

$$\nu_v\alpha - \nu_u\beta = \frac{-\alpha}{E}(M\alpha + N\beta) + \frac{\beta}{E}(L\alpha + M\beta)$$

$$= \frac{-M\alpha^2 - N\alpha\beta + L\alpha\beta + M\beta^2}{E}. \quad \cdots ③$$

式(9) より、$\alpha_v\nu - \beta_u\nu = \alpha_v\nu - \alpha_v\nu = 0$ である。$\alpha_v\nu - \beta_u\nu\ (=0)$ を ③ の 左辺に足すと、

$$\nu_v\alpha - \nu_u\beta + \alpha_v\nu - \beta_u\nu = \frac{-M\alpha^2 - N\alpha\beta + L\alpha\beta + M\beta^2}{E}$$

であるため、式(9)
式(10) $\Longleftrightarrow$ (1.4) ($\Longleftrightarrow$ (4.1)) である。

−1倍

以上をまとめると、

- ガウス方程式 $\iff$ (3,2) $\left(\iff (2,3) \right)$
- コダッチ方程式 $\iff \begin{cases} (2,4) & \left(\iff (4,2) \right) \\ (3,4) & \left(\iff (4,3) \right) \end{cases}$
  - $\dfrac{\partial}{\partial u}$ の係数比較
  - $\dfrac{\partial}{\partial v}$ の係数比較
- 式(9) $\iff \begin{cases} \alpha_v = \beta_u, \ \left(\alpha_u + \beta_v = \nu(L+N) \right) \\ (1,2) \ \left(\iff (2,1) \right) \\ (1,3) \ \left(\iff (3,1) \right) \end{cases}$
- $\alpha_v = \beta_u$、式(10) $\iff$ (1,4) $\left(\iff (4,1) \right)$

$$\begin{pmatrix} 0 & \cancel{(1,2)} & \cancel{(1,3)} & \cancel{(1,4)} \\ \cancel{(2,1)} & 0 & \cancel{(2,3)} & \cancel{(2,4)} \\ \cancel{(3,1)} & \cancel{(3,2)} & 0 & \cancel{(3,4)} \\ \cancel{(4,1)} & \cancel{(4,2)} & \cancel{(4,3)} & 0 \end{pmatrix}$$

・微分方程式の解 $\mathcal{F}$ を定める　（幾何学Ⅱ 第9回の証明を真似したい）

定理 9.1 (曲面論の基本定理). D を $\boldsymbol{R}^2$ の単連結領域とする．D 上定義された C^∞ 級関数 E, F, G, L, M, N が

(i) 各 $(u,v) \in D$ において $\begin{pmatrix} E(u,v) & F(u,v) \\ F(u,v) & G(u,v) \end{pmatrix}$ が正定値である[a],

(ii) E, F, G, L, M, N はガウス・コダッチ方程式をみたす

とする．このとき，正則曲面 $p : D \to \boldsymbol{R}^3$ で

- $p(u,v)$ の第一基本量は E, F, G と一致,
- $p(u,v)$ の第二基本量は L, M, N と一致

をみたすものが存在する．さらに，そのような曲面 $p : D \to \boldsymbol{R}^3$ は $\boldsymbol{R}^3$ の回転と平行移動を除いて一意的である．

[a] つまり，$E + G > 0$, $EG - F^2 > 0$ が成り立つ．

証明には，第 8 回に証明した**線形偏微分方程式の解の存在と一意性** (定理 8.6)，**ポアンカレの補題** (系 8.7) を用いる．

。ガウスコダッチ方程式が成り立つので、等式

$$\mathcal{U}_v - \mathcal{V}_u = \mathcal{U}\mathcal{V} - \mathcal{V}\mathcal{U}$$

が成立する．このとき、線形偏微分方程式の解の存在と一意性より、

$$\begin{cases} \mathcal{F}_u = \mathcal{F}\,\mathcal{U} \\ \mathcal{F}_v = \mathcal{F}\,\mathcal{V} \\ \mathcal{F}(u_0, v_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{E(u_0,v_0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{E(u_0,v_0)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\mathcal{F}\text{の初期値}) \\ (u_0, v_0) \in D \end{cases}$$

を満たす $\mathcal{F} : D \longrightarrow GL_4(\mathbb{R})$ が唯一つ存在する．

$\mathcal{F} := (g_1, g_2, g_3, g_4)$ と表し、$g_i\ (i = 1,2,3,4) : D \longrightarrow \mathbb{R}^4$ と定める．

$\mathcal{F}_u = \mathcal{F}\,\mathcal{U}$ より、

$$(g_1)_u = \left(1 - \frac{\alpha^2}{E}\right) g_2 - \frac{\alpha\beta}{E} g_3 - \alpha\nu\, g_4$$

$$(g_2)_u = (-E + \alpha^2) g_1 + \frac{E_u}{2E} g_2 - \frac{E_v}{2E} g_3 + L g_4$$

$$(g_3)_u = \alpha\beta\, g_1 + \frac{E_v}{2E} g_2 + \frac{E_u}{2E} g_3 + M g_4$$

$$(g_4)_u = \alpha\nu g_1 - \frac{L}{E}g_2 - \frac{M}{E}g_3$$

また、$\mathcal{F}_v = \mathcal{F}\mathcal{V}$ より、

$$(g_1)_v = -\frac{\alpha\beta}{E}g_2 + \left(1-\frac{\beta^2}{E}\right)g_3 - \beta\nu g_4$$

$$(g_2)_v = \alpha\beta g_1 + \frac{E_v}{2E}g_2 + \frac{E_u}{2E}g_3 + M g_4$$

$$(g_3)_v = (-E+\beta^2)g_1 - \frac{E_u}{2E}g_2 + \frac{E_v}{2E}g_3 + N g_4$$

$$(g_4)_v = \beta\nu g_1 - \frac{M}{E}g_2 - \frac{N}{E}g_3$$

である。$(g_3)_u = (g_2)_v$ なので、ポアンカレの補題より C^∞ 級写像 $f: D \to \mathbb{R}^4$ で、

$$f_u = g_2,\quad f_v = g_3,\quad f(u_0, v_0) = 0$$

を満たすものが唯一つ存在する。この $f(u, v)$ が

$$\langle f_u, f_u\rangle = E,\quad \langle f_u, f_v\rangle = F = 0,\quad \langle f_v, f_v\rangle = G = E$$

$$\langle f_{uu}, \nu\rangle = L,\quad \langle f_{uv}, \nu\rangle = M,\quad \langle f_{vv}, \nu\rangle = N$$

を満たすことを示す。(16ページ、17ページ)

∘ $P := {}^t\mathcal{F}\mathcal{F}$ とおく。 $(\mathcal{F} = (g_1, f_u, f_v, g_4))$

$$P = {}^t\mathcal{F}\mathcal{F}$$

$$= \begin{bmatrix} {}^tg_1 g_1 & {}^tg_1 f_u & {}^tg_1 f_v & {}^tg_1 g_4 \\ {}^tf_u g_1 & {}^tf_u f_u & {}^tf_u f_v & {}^tf_u g_4 \\ {}^tf_v g_1 & {}^tf_v f_u & {}^tf_v f_v & {}^tf_v g_4 \\ {}^tg_4 g_1 & {}^tg_4 f_u & {}^tg_4 f_v & {}^tg_4 g_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} g_1\cdot g_1 & g_1\cdot f_u & g_1\cdot f_v & g_1\cdot g_4 \\ f_u\cdot g_1 & f_u\cdot f_u & f_u\cdot f_v & f_u\cdot g_4 \\ f_v\cdot g_1 & f_v\cdot f_u & f_v\cdot f_v & f_v\cdot g_4 \\ g_4\cdot g_1 & g_4\cdot f_u & g_4\cdot f_v & g_4\cdot g_4 \end{bmatrix}.$$

$$P_u = {}^t\mathcal{F}_u\mathcal{F} + {}^t\mathcal{F}\mathcal{F}_u = {}^t(\mathcal{F}\mathcal{U})\mathcal{F} + {}^t\mathcal{F}\mathcal{F}\mathcal{U}$$
$$= {}^t\mathcal{U}P + P\mathcal{U} \cdots ①$$
$$P_v = {}^t\mathcal{F}_v\mathcal{F} + {}^t\mathcal{F}\mathcal{F}_v = {}^t(\mathcal{F}\mathcal{V})\mathcal{F} + {}^t\mathcal{F}\mathcal{F}\mathcal{V}$$
$$= {}^t\mathcal{V}P + P\mathcal{V} \cdots ②$$

が成り立つ。また、$(u, v) = (u_0, v_0)$ の時は

$$P(u_0, v_0) = {}^t\mathcal{F}(u_0, v_0)\mathcal{F}(u_0, v_0)$$
$$= {}^t\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{E(u_0, v_0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{E(u_0, v_0)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{E(u_0, v_0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{E(u_0, v_0)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{E(u_0, v_0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{E(u_0, v_0)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{E(u_0, v_0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{E(u_0, v_0)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E(u_0, v_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E(u_0, v_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$Q := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & F & 0 \\ 0 & F & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
とする。等温座標系 $(E = G,\ F = 0)$ を考えているので、

$P(u_0, v_0) = Q(u_0, v_0)$ である。 $\cdots$ ③

初期条件の一致

・$P_u = Q_u$、$P_v = Q_v$ を示す

$Q\mathcal{U}$ と ${}^t\mathcal{U}Q$ を計算すると、

$$Q\mathcal{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -E+\alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\nu \\ 1-\frac{\alpha^2}{E} & \frac{E_u}{2E} & \frac{E_v}{2E} & -\frac{L}{E} \\ -\frac{\alpha\beta}{E} & -\frac{E_v}{2E} & \frac{E_u}{2E} & -\frac{M}{E} \\ -\alpha\nu & L & M & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -E+\alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\nu \\ E-\alpha^2 & \frac{E_u}{2} & \frac{E_v}{2} & -L \\ -\alpha\beta & -\frac{E_v}{2} & \frac{E_u}{2} & -M \\ -\alpha\nu & L & M & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^t\mathcal{U}Q = {}^t\begin{bmatrix} 0 & -E+\alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\nu \\ 1-\frac{\alpha^2}{E} & \frac{E_u}{2E} & \frac{E_v}{2E} & -\frac{L}{E} \\ -\frac{\alpha\beta}{E} & -\frac{E_v}{2E} & \frac{E_u}{2E} & -\frac{M}{E} \\ -\alpha\nu & L & M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & E-\alpha^2 & -\alpha\beta & -\alpha\nu \\ -E+\alpha^2 & \frac{E_u}{2} & -\frac{E_v}{2} & L \\ \alpha\beta & \frac{E_v}{2} & \frac{E_u}{2} & M \\ \alpha\nu & -L & -M & 0 \end{bmatrix}$$ であるため、

$$Q\mathcal{U} + {}^t\mathcal{U}Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = Q_u$$ が成り立つ. … ④

同様に $Q\mathcal{V} + {}^t\mathcal{V}Q$ を計算する.

$$Q\mathcal{V} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha\beta & -E+\beta^2 & \beta\nu \\ -\alpha\beta & \frac{E_v}{2} & -\frac{E_u}{2} & -M \\ E-\beta^2 & \frac{E_u}{2} & \frac{E_v}{2} & -N \\ -\beta\nu & M & N & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^t\mathcal{V}Q = {}^t\begin{bmatrix} 0 & \alpha\beta & -E+\beta^2 & \beta\nu \\ -\frac{\alpha\beta}{E} & \frac{E_v}{2E} & -\frac{E_u}{2E} & -\frac{M}{E} \\ 1-\frac{\beta^2}{E} & \frac{E_u}{2E} & \frac{E_v}{2E} & -\frac{N}{E} \\ -\beta\nu & M & N & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\alpha\beta & E-\beta^2 & -\beta\nu \\ \alpha\beta & \frac{E_r}{2} & \frac{E_u}{2} & M \\ -E+\beta^2 & -\frac{E_u}{2} & \frac{E_r}{2} & N \\ \beta\nu & -M & -N & 0 \end{bmatrix}$$ であるため、

$$Q\mathcal{V} + {}^t\mathcal{V}Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = Q_r$$ が成り立つ. …⑤

以上①～⑤ より. 行列 P、Q はどちらも

$$\begin{cases} X_u = X\mathcal{U} + {}^t\mathcal{U}X \\ X_r = X\mathcal{V} + {}^t\mathcal{V}X \\ \text{初期条件 } X(u_0, r_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

の解である。一意性より、$P = Q$ が成り立つ. したがって、

$$P = {}^t\mathcal{F}\mathcal{F} = \begin{bmatrix} g_1\cdot g_1 & g_1\cdot f_u & g_1\cdot f_r & g_1\cdot g_4 \\ f_u\cdot g_1 & f_u\cdot f_u & f_u\cdot f_r & f_u\cdot g_4 \\ f_r\cdot g_1 & f_r\cdot f_u & f_r\cdot f_r & f_r\cdot g_4 \\ g_4\cdot g_1 & g_4\cdot f_u & g_4\cdot f_r & g_4\cdot g_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

が成り立つので、$f_u\cdot f_r = 0$、$f_u\cdot f_u = f_r\cdot f_r = E$ が成り立つ.

また、$g_1\cdot g_4 = 0$、$f_u\cdot g_4 = 0$、$f_r\cdot g_4 = 0$、$g_4\cdot g_4 = 1$ が成り立つ. $g_4 = n$ とおく.

$$\tilde{\mathcal{H}} = (g_1,\ f_u,\ f_r,\ n)$$

$$= \begin{bmatrix} (g_1)_1 & x_u & x_r & (n)_1 \\ (g_1)_2 & y_u & y_r & (n)_2 \\ (g_1)_3 & z_u & z_r & (n)_3 \\ (g_1)_4 & t_u & t_r & (n)_4 \end{bmatrix}$$ と表される

・ $L = \langle f_{uu}, n \rangle$、$M = \langle f_{uv}, n \rangle$、$N = \langle f_{vv}, n \rangle$ を示す

事前に n_u と n_v を $\bar{n}$、f_u、f_v、n の線形結合で表していた。

$$\begin{cases} n_u = \alpha\nu\bar{n} - \frac{L}{E} f_u - \frac{M}{E} f_v \\ n_v = \beta\nu\bar{n} - \frac{M}{E} f_u - \frac{N}{E} f_v \end{cases}$$

と表せることから、

上式を代入

$$f_{uu} \cdot n = -n_u \cdot f_u = \left(-\alpha\nu\bar{n} + \frac{L}{E} f_u + \frac{M}{E} f_v\right) \cdot f_u$$

$$= -\alpha\nu \underbrace{\bar{n} \cdot f_u}_{0} + \frac{L}{E} \underbrace{f_u \cdot f_u}_{E} + \frac{M}{E} \underbrace{f_u \cdot f_v}_{F=0}$$

$$= \frac{L}{E} E = L.$$

$$f_{uv} \cdot n = -n_u \cdot f_v = \left(-\alpha\nu\bar{n} + \frac{L}{E} f_u + \frac{M}{E} f_v\right) \cdot f_v$$

$$= -\alpha\nu \underbrace{\bar{n} \cdot f_v}_{0} + \frac{L}{E} \underbrace{f_u \cdot f_v}_{F=0} + \frac{M}{E} \underbrace{f_v \cdot f_v}_{G=E}$$

$$= \frac{M}{E} E = M.$$

$$f_{vv} \cdot n = -n_v \cdot f_v = \left(-\beta\nu\bar{n} + \frac{M}{E} f_u + \frac{N}{E} f_v\right) \cdot f_v$$

$$= -\beta\nu \underbrace{\bar{n} \cdot f_v}_{0} + \frac{M}{E} \underbrace{f_u \cdot f_v}_{F=0} + \frac{N}{E} \underbrace{f_v \cdot f_v}_{G=E}$$

$$= \frac{N}{E} E = N.$$

が成り立つ。

よって、$L = \langle f_{uu}, n \rangle$、$M = \langle f_{uv}, n \rangle$ $N = \langle f_{vv}, n \rangle$ である。▨

以上より、曲面の一意性は曲面の合同定理より従う。

定理 7.5. 2つの曲面 $p, \tilde{p} : D \to \boldsymbol{R}^3$ に対して，曲面 p の第一基本量を E, F, G，第二基本量を L, M, N とし，曲面 $\tilde{p}$ の第一基本量を $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$，第二基本量を $\tilde{L}, \tilde{M}, \tilde{N}$ とする．このとき，p と $\tilde{p}$ が回転と平行移動で移り合うことと，第一基本量，第二基本量がそれぞれ一致することは同値である：

$$E = \tilde{E}, \quad F = \tilde{F}, \quad G = \tilde{G}, \quad L = \tilde{L}, \quad M = \tilde{M}, \quad N = \tilde{N}.$$

・$t_u=\alpha$、$t_v=\beta$ であるような $t(u,v)$ の存在を示す　(ポアンカレの補題)

8.1.4　**ポアンカレの補題**　(幾何学II 第8回)

$(u,v)\in D$

$n=1$ の場合，C^∞ 級写像 $\Omega,\Lambda:D\to \mathrm{M}_n(\boldsymbol{R})$ は関数 $\Omega=\omega(u,v),\Lambda=\lambda(u,v):D\to\boldsymbol{R}$ である．$\Omega\Lambda-\Lambda\Omega=\omega\lambda-\lambda\omega$ より，可積分条件 (8.2) は $\omega_v-\lambda_u=0$ と表される．定理 8.6 において，$n=1$ とした結果から，次を得る．

系 8.7 (ポアンカレの補題)．D を $\boldsymbol{R}^2$ の単連結領域とする．$(u_0,v_0)\in D$，$c\in\boldsymbol{R}$ とする．C^∞ 級写像 $\omega(u,v),\Lambda(u,v)$ が $\omega_v-\lambda_u=0$ をみたすとき，C^∞ 級関数 $f:D\to\boldsymbol{R}$ で

$$\begin{cases} f_u=\omega,\ f_v=\lambda \\ f(u_0,v_0)=c \end{cases}$$

をみたすものが唯一つ存在する．

$\alpha_v=\beta_u$ が成り立っているので、$\omega=\alpha$、$\lambda=\beta$ と読み換えれば、
$\alpha_v-\beta_u=0$ を満たす. よって. C^∞級関数 $t:D\to\mathbb{R}$ で

$$\begin{cases} t_u=\alpha,\ t_v=\beta \\ t(u_0,v_0)=0 \end{cases}$$

を満たすものが唯一つ存在する。 ▨

・ $\frac{\alpha}{E} f_u + \frac{\beta}{E} f_v + \nu n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\nu = \langle n, \frac{\partial}{\partial t} \rangle$ を示す

$f_u = \begin{bmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \\ t_u \end{bmatrix}$ $f_v = \begin{bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \\ t_v \end{bmatrix}$

$\mathcal{F} = (a_0, f_u, f_v, a_2)$

(仮定: $\frac{1}{E}(\alpha^2 + \beta^2) + \nu^2 = 1$)

(i) $\frac{\alpha}{E} f_u + \frac{\beta}{E} f_v + \nu n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ を示す

$$\frac{\alpha}{E} f_u + \frac{\beta}{E} f_v + \nu n = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \cdots ①$$ とおく. $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$

①の両辺を f_u と内積させると、

$$\frac{\alpha}{E} \underbrace{\langle f_u, f_u \rangle}_{= E} = a x_u + b y_u + c z_u + d t_u$$

∵前ページより

$$\iff \alpha(u, v) = a x_u(u, v) + b y_u(u, v) + c z_u(u, v) + d \alpha(u, v) \cdots ②$$ である.

$(u, v) = (u_0, v_0)$ を代入する. 微分方程式の解 $\mathcal{F}$ を定めるとき (11ページ) に、

$$\mathcal{F}(u_0, v_0) = \begin{array}{cccc} & f_u(u_0,v_0) & f_v(u_0,v_0) & \\ & \| & \| & \\ \end{array}$$
$$\mathcal{F}(u_0, v_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{E(u_0, v_0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{E(u_0, v_0)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

と定めたので、$\alpha(u_0, v_0) = t_u(u_0, v_0) = 0$、$x_u(u_0, v_0) = z_u(u_0, v_0) = 0$、$y_u(u_0, v_0) = \sqrt{E(u_0, v_0)}$ である. よって②は

$$0 = b\sqrt{E(u_0, v_0)}$$

となる。$E \neq 0$ であるため、$b = 0$ である.
①の両辺を f_v と内積させると、同様の計算で $c = 0$ である.

$a_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{bmatrix}$ として、①の両辺を a_0 と内積させると、

$$0 = a x_0(u, v) + d t_0(u, v)$$

である。$(u, v) = (u_0, v_0)$ を代入すると、

$$0 = a\underbrace{x_0(u_0, v_0)}_{=1} + d\underbrace{t_0(u_0, v_0)}_{=0}$$

$$= a.$$

よって、$a = 0$ である。

以上より $a = b = c = 0$ であるため、② より

$$\alpha(u, v) = d\alpha(u, v) \iff d = 1$$ である。

$\therefore (a, b, c, d) = (0, 0, 0, 1)$ である。$\blacksquare$

(ii) $\nu = \left\langle n, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle$ を示す。

$$\frac{\alpha}{E} f_u + \frac{\beta}{E} f_v + \nu n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ の両辺を $\frac{\partial}{\partial t}$ と内積させると、

$$\frac{\alpha}{E} t_u + \frac{\beta}{E} t_v + \nu \left\langle n, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = 1$$

$$\iff \frac{1}{E}(\alpha^2 + \beta^2) - 1 + \nu \left\langle n, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = 0$$

仮定より $\frac{1}{E}(\alpha^2 + \beta^2) = 1 - \nu^2$ を代入した。

$$\iff \cancel{1} - \nu^2 \cancel{- 1} + \nu \left\langle n, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = 0$$

$$\iff \left\langle n, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = \nu$$ である。$\blacksquare$

• $\mathfrak{a}_0 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix}$、$x^2+y^2+z^2=1$ を示す

$$\left(\begin{aligned} \mathcal{F} &= (\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3) \\ &= (\mathfrak{a}_0, f_u, f_v, n) \end{aligned} \right)$$

$\mathfrak{a}_0 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$ とおく。$\underbrace{\frac{\alpha}{E} f_u}_{\mathfrak{a}_1} + \underbrace{\frac{\beta}{E} f_v}_{\mathfrak{a}_2} + \underbrace{\nu n}_{\mathfrak{a}_3}$ との内積をとると、

$$\left\langle \mathfrak{a}_0, \frac{\alpha}{E}\mathfrak{a}_1 + \frac{\beta}{E}\mathfrak{a}_2 + \nu\mathfrak{a}_3 \right\rangle$$

$$= \frac{\alpha}{E}\underbrace{\langle \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1 \rangle}_{0} + \frac{\beta}{E}\underbrace{\langle \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_2 \rangle}_{0} + \nu\underbrace{\langle \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_3 \rangle}_{0}$$

$= 0.$ …①

一方、$\frac{\alpha}{E} f_u + \frac{\beta}{E} f_v + \nu n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ であるため（前ページで示した）、

$$\mathfrak{a}_0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = t. \cdots ②$$

①、② より、$t=0$ である。

さらに、$\langle \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_0 \rangle = 1$ であるため

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \iff x^2+y^2+z^2=1$$ が成り立つ。

以上より、$\mathfrak{a}_0$ は $\mathfrak{a}_0 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix}$、$x^2+y^2+z^2=1$ である。▨