

修士学位論文

# 等長的な $m$ -type edge と対称性

指導教員: 本田淳史 准教授

飯野 郁

横浜国立大学大学院理工学府  
数物・電子情報系理工学専攻  
数学教育分野

24NC101

2026 年 1 月 16 日

## 目 次

1. 序論	1
1.1. 研究背景・動機	1
1.2. 主結果	1
1.3. 意義・証明のアイデアや方法	1
1.4. 今後の課題	1
1.5. 謝辞	1
2. 準備	2
2.1. 曲線の準備	2
2.2. 退化次数 $n$ 特異点と $m$ -type edge	4
2.3. adapted coordinate system の導入	7
2.4. $m$ -type edge に関する角度関数の導入	8
2.5. 補題の準備 TODO : セクションごと場所を移動する	8
3. $m$ -type edge の特異曲率	10
4. $n$ 次 Kossowski 計量の等長実現定理	11
4.1. Kossowski 計量の導入	11
4.2. 等長双対, 逆, 逆双対の導入	12
4.3. $m$ -type edge の等長変形定理	12
5. 主定理 A	13
5.1. 主定理のための補題	13
5.2. 主定理の主張および証明	17
5.3. 具体例	20
6. 主定理 B	21
6.1. 主定理のための補題	21
6.2. 主定理の主張および証明	28
6.3. 具体例	32
参考文献	33

# 1. 序論

## 1.1. 研究背景・動機

カスプ辺は波面に現れる基本的な特異点であることから, 等長実現問題の重要な研究対象である. 特に (2,3)-カスプ辺については, 特異曲線と第一基本形式の性質から右同値類と合同類の個数が分類されている. 一方, カスプ辺の一般化として導入された  $m$ -type edge に対しては, 分類に関する同様の結果は知られていない. 本研究では, どのような計量および特異曲線が多様な等長変形を許すか, あるいは一意な等長実現しか持たないかを調べるために,  $m$ -type edge に対する右同値類と合同類の分類を紹介する.

## 1.2. 主結果

## 1.3. 意義・証明のアイデアや方法

## 1.4. 今後の課題

## 1.5. 謝辞

本修士論文の執筆にあたり, 終始丁寧な指導をしてくださった指導教員である本田淳史准教授に心より感謝を申し上げます.

## 2. 準備

- 曲線の準備 【OK】
- 特異点
- (3,4)-カスプ辺
- m-type edge
- 右同値
- 右左同値
- 合同
- isometric
- same image
- symmetry, (orientation-preserving / orientation-reversing)symmetry
- (effective / non-effective)symmetry, 向きを保つ, 向きを反転する
- ラムダ
- 向きを同調した単位法ベクトル場
- adapted coordinate system
- 特異曲率 (m : 偶数奇数両方), 極限法曲率
- $\kappa_s(u) = \kappa(u) \sin \theta$ ,  $\kappa_\nu(u) = \kappa(u) \cos \theta$  の証明 (特に, m が偶数の場合)
- isometric dual
- inverse
- inverse dual
- 補題たち
- 主定理 B の補題 (HNSUY Prop 5.1 の (3,4)-CE 版)
- 主定理 B の補題の補題 (20250725.pdf の Prop 2.1)

### 2.1. 曲線の準備

$\mathbf{c}(u)$  をパラメータ  $u$  に沿った正則曲線として,  $\mathbf{c}_*(u) := \mathbf{c}(-u)$  とする. また,  $\{\mathbf{e}(u), \mathbf{n}(u), \mathbf{b}(u)\}$  を  $\mathbf{c}(u)$  のフレネ枠とする.  $\mathbf{c}'_*(u) = -\mathbf{c}'(-u)$ ,  $\mathbf{c}''_*(u) = \mathbf{c}''(-u)$ ,  $\|\mathbf{c}''(-u)\| = \kappa(-u)$  より,

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_*(u) &:= -\mathbf{e}(-u) \\ \mathbf{n}_*(u) &:= \frac{1}{\kappa(-u)} \mathbf{c}''(-u) = \mathbf{n}(-u)\end{aligned}$$

はそれぞれ  $\mathbf{c}_*(u)$  に沿う単位接ベクトル場および主法線ベクトル場を与える. したがって,

$$\mathbf{b}_*(u) := \mathbf{e}_*(u) \times \mathbf{n}_*(u) = -\mathbf{e}(-u) \times \mathbf{n}(-u) = -\mathbf{b}(-u)$$

は  $\mathbf{c}_*(u)$  に沿う従法線ベクトル場となる. したがって, 正則曲線  $\mathbf{c}_*(u) = \mathbf{c}(-u)$  のフレネ枠は

$$(2.1) \quad \{-\mathbf{e}(-u), \mathbf{n}(-u), -\mathbf{b}(-u)\}$$

と表される. また,  $\mathbf{c}_*(u)$  の曲率関数  $\kappa_*$  と捩率関数  $\tau_*$  はそれぞれ

$$\begin{aligned}\kappa_*(u) &:= \|\mathbf{e}'_*(u)\| = \kappa(-u) \\ \tau_*(u) &:= \mathbf{n}'_*(u) \cdot \mathbf{b}_*(u) = -\mathbf{n}'(-u) \cdot (-\mathbf{b}(-u)) = \tau(-u)\end{aligned}$$

となる.

定義 1 (Symmetry).  $\mathbf{c}(u)$  を閉区間  $J := [-l, l]$  ( $l > 0$ ) 上で定義された, 弧長パラメータ表示された  $\mathbb{R}^3$  の埋め込まれた正則曲線で,  $J$  上では  $\kappa > 0$  とする. さらに,  $\mathbf{c}(u)$  の像  $C$  を  $C := \mathbf{c}(J)$  とおく.

- (1)  $T \in O(3)$  が  $C$  の **symmetry** である  $\iff T(C) = C$  かつ  $T$  は単位行列ではない.
- (2) **symmetry**  $T$  が **orientation-preserving** である  $\iff u \in J$  に対して,  $T\mathbf{c}(u) = \mathbf{c}(u)$ .
- (3) **symmetry**  $T$  が **orientation-reversing** である  $\iff u \in J$  に対して,  $T\mathbf{c}(u) = \mathbf{c}(-u)$ .

さらに,  $\det T = 1$  (resp.  $-1$ ) のとき,  $T$  が**正** (resp. **負**) であるという.

**補題 2** (orientation-reversing symmetry).  $C$  が *orientation-reversing symmetry*  $T$  をもつとき,

$$T\mathbf{e}(0) = -\mathbf{e}(0), \quad T\mathbf{n}(0) = \mathbf{n}(0), \quad T\mathbf{b}(0) = -\sigma\mathbf{b}(0)$$

が成り立つ. ここで,  $\sigma := \det T$  とした. とくに,

- (1)  $T$  が正, つまり  $\sigma = 1$  ならば,  $T$  は  $\mathbf{c}(u)$  における主法線  $L$  に関する線対称である.
- (2)  $T$  が負, つまり  $\sigma = -1$  ならば,  $T$  は  $\mathbf{c}(u)$  の中点  $P = \mathbf{c}(0)$  における法平面  $\Pi(P)$  に関する折り返しである.

証明. orientation-reversing symmetry の定義より,  $\mathbf{c}(u) = T\mathbf{c}(-u)$  が成り立つ. 両辺を  $u$  で微分すると  $\mathbf{c}'(u) = -T\mathbf{c}'(-u)$  より,

$$(2.2) \quad \mathbf{e}(u) = -T\mathbf{e}(-u)$$

が成り立つ. 式 2.2 をさらに両辺  $u$  で微分して,

$$\mathbf{e}'(u) = T\mathbf{e}'(-u), \quad \|\mathbf{e}'(u)\| = \|\mathbf{e}'(-u)\|$$

となり,  $\kappa(u) = \kappa(-u)$  かつ

$$(2.3) \quad \mathbf{n}(u) = T\mathbf{n}(-u), \quad \mathbf{b}(u) = -\sigma T\mathbf{b}(-u)$$

が成り立つ. これにより,  $\tau(u) = \sigma\tau(-u)$  も従う. 以上より,

$$(2.4) \quad T\mathbf{e}(-u) = -\mathbf{e}(u), \quad T\mathbf{n}(-u) = \mathbf{n}(u), \quad T\mathbf{b}(-u) = -\sigma\mathbf{b}(u)$$

が成り立つ. 式 (2.4) に  $u = 0$  を代入すれば, 補題の主張が従う.

□

注意 3 (orientation-preserving symmetry).  $C$  が orientation-preserving symmetry  $T$  を持つ場合,  $T\mathbf{e}(0), T\mathbf{n}(0), T\mathbf{b}(0)$  はそれぞれ

$$T\mathbf{e}(0) = \mathbf{e}(0), \quad T\mathbf{n}(0) = \mathbf{n}(0), \quad T\mathbf{b}(0) = -\mathbf{b}(0)$$

が成り立つ. 特に,  $\det T = -1$  である.

注意 4 (orientation-preserving symmetry の存在性). [HNSUY] より,  $C$  が平面曲線の場合, 平面に関する折り返しである  $S \in O(3)$  が存在する. さらにその  $S$  は  $C$  の orientation-preserving symmetry となる.

**補題 5** (orientation-preserving symmetry と平面曲線の同値性). 曲線  $C$  が orientation-preserving symmetry  $T$  をもつ  $\iff C$  は平面曲線であり,  $T$  は平面に関する折り返しである.

証明.  $\iff$  は [HNSUY] で述べられているため,  $\implies$  を示せばよい.  $\mathbf{c}(u)$  を弧長パラメータ表示,  $\kappa(u)$  を空間曲線としての曲率として,  $\kappa(u) > 0$  とする. 標準基底  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  をそれぞれ,

$$\mathbf{e}_1 := (1, 0, 0)^T, \quad \mathbf{e}_2 := (0, 1, 0)^T, \quad \mathbf{e}_3 := (0, 0, 1)^T$$

とおく. 回転と平行移動により,  $\mathbf{c}'(u)$  と主法線ベクトル  $\mathbf{n}(u)$  は一般性を失わずに

$$\begin{aligned} \mathbf{c}'(0) &= (1, 0, 0)^T = \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{n}(0) &= \frac{\mathbf{c}''(0)}{\kappa(0)} = (0, 1, 0)^T = \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

と仮定してよい.  $T\mathbf{c}(u) = \mathbf{c}(u)$  の両辺を  $u$  で微分すると,

$$T\mathbf{c}'(u) = \mathbf{c}'(u)$$

である.  $u = 0$  を代入すると,  $T\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1$  が成り立つ. さらにもう一度両辺を  $u$  で微分すると,

$$T\mathbf{c}''(u) = \mathbf{c}''(u)$$

であるので,  $u = 0$  を代入すると  $T\mathbf{c}''(0) = \mathbf{c}''(0)$  となり, つまり  $T\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2$  が成り立つ.

仮定より  $\det T = \pm 1$  かつ  $T$  は恒等写像ではないので,  $T$  は具体的に

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

のみである.  $\mathbf{c}(u) = (x(u), y(u), z(u))^T$  とすると,  $T\mathbf{c}(u)$  は

$$T\mathbf{c}(u) = (x(u), y(u), -z(u))^T$$

である. さらに仮定より  $T\mathbf{c}(u) = \mathbf{c}(u)$  であったので,

$$(x(u), y(u), -z(u))^T = (x(u), y(u), z(u))^T$$

が任意の  $u$  で成立する. したがって  $z(u) = 0$  であるため,  $\mathbf{c}(u)$  は平面曲線である.  $\square$

## 2.2. 退化次数 $n$ 特異点と $m$ -type edge

HNSUY 0・1 章、特異点、 $m$ -type edge、面積密度関数 … (用語の定義メイン)

**定義 6** (特異点).  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  を写像とする.  $p \in \Sigma$  が  $f$  の特異点であるとは,  $f$  が  $p$  ではめ込みでない. つまり,  $\text{rank}(df)_p < 2$  を満たすときをいう.

定義 7 (フロンタル, 波面 (フロント)).  $f : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  を写像とする.  $f$  がフロンタルであるとは,  $C^\infty$  級写像  $\nu : \Sigma \rightarrow \mathbf{S}^2$  で,  $\Sigma$  上の任意の点  $q \in \Sigma$  と, その点での接空間上の任意のベクトル  $v \in T_q \Sigma$  に対して

$$\langle df_q(v), \nu(q) \rangle = 0$$

を満たすものが存在するときをいう. このような  $\nu$  を,  $f$  に沿った単位法ベクトル場という.

さらに, 写像  $f : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  がフロンタルであるとする. ここで,  $f$  が波面 (フロント) であるとは,  $L := (f, \nu) : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3 \times \mathbf{S}^2$  がはめ込みである. つまり,  $\Sigma$  の座標系  $(u, v)$  に対して 6 行 2 列の行列

$$M := \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ \nu_u & \nu_v \end{pmatrix}$$

が,  $\Sigma$  上の各点で階数が 2 であるときをいう.

定義 8 (特異曲線, 特異方向, 退化方向). フロンタル  $f : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  に対して,  $S(f)$  で  $f$  の特異点集合を表し,  $S(f)$  が正則曲線であることを仮定する. さらに,  $S(f)$  上の点  $p$  は階数が 1 の特異点であると仮定する. つまり,  $\text{rank}(df)_p = 1$  が成り立つ. このとき,

- (1)  $S(f)$  を特異曲線という.
- (2) 特異曲線の接ベクトルを特異ベクトル, 特異ベクトルの定める 1 次元ベクトル空間を特異方向という.
- (3) さらに,  $df(v) = 0$  を満たす零でない接ベクトル  $v \in T_p \Sigma$  を退化ベクトル, 退化ベクトルの定める方向を退化方向という.

定義 9 (右同値, 右左同値). 2 つの  $C^\infty$  級写像芽  $f : (\Sigma, p) \rightarrow (\mathbf{R}^3, f(p))$  と  $\bar{f} : (\bar{\Sigma}, \bar{p}) \rightarrow (\mathbf{R}^3, \bar{f}(\bar{p}))$  を考える.

- (1)  $f$  と  $\bar{f}$  が右同値であるとは,  $\mathbb{R}^2$  の原点近傍で定義された微分同相写像  $\varphi : (\Sigma, p) \rightarrow (\bar{\Sigma}, \bar{p})$  が存在して,

$$\bar{f} = f \circ \varphi$$

を満たすことをいう (つまり, 同じ像を持つ写像芽のこと).

- (2)  $f$  と  $\bar{f}$  が右左同値 (A-同値) であるとは, 2 つの微分同相写像芽  $\varphi : (\Sigma, p) \rightarrow (\bar{\Sigma}, \bar{p})$  と  $\Phi : (\mathbf{R}^3, f(p)) \rightarrow (\mathbf{R}^3, \bar{f}(\bar{p}))$  が存在して,

$$\Phi \circ f \circ \varphi^{-1} = \bar{f}$$

が成り立つときをいう.

定義 10 ((3,4)-カスプ辺, m-type edge).  $f : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  を  $C^\infty$  級写像とする.

- (1)  $f$  に対して点  $p \in \Sigma$  が (3,4)-カスプ辺であるとは, 写像芽  $f : (\Sigma, p) \rightarrow (\mathbb{R}^3, f(p))$  が原点での写像芽

$$\mathbf{R}^2 \ni (u, v) \mapsto (u, v^3, v^4) \in \mathbf{R}^3$$

と右左同値とであるときを言う.

- (2)  $m$  を正の整数とする.  $f$  に対して点  $p \in \Sigma$  が  $m$ -type edge であるとは, 写像芽  $f : (\Sigma, p) \rightarrow (\mathbf{R}^3, f(p))$  が原点での写像芽

$$\mathbf{R}^2 \ni (u, v) \mapsto (u^m, u^{m+1}a(u, v), v) \in \mathbf{R}^3$$

と右左同値となるような  $C^\infty$  級関数  $a(u, v)$  が存在するときを言う.

**事実 11** ( $m$ -type edge の同値表現).  $S(f)$  をフロンタル  $f : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  の特異点集合で正則曲線であるとし,  $\xi$  を  $S(f)$  の方向で  $\xi \notin \ker(df_p)$  とする. このとき,  $f$  が  $p \in S(f)$  上で  $m$ -type edge を持つことと,

$$\begin{aligned} \eta^i f = 0 & \quad \text{holds on } S(f) \quad (i = 1, \dots, m-1) \\ \xi f(p) & \text{ と } \eta^m f(p) \text{ が線形独立.} \end{aligned}$$

を満たす退化ベクトル場  $\eta$  が存在することは同値である. ここで,  $\xi f$  は  $f$  の  $\xi$  方向での微分を表し,  $\eta^m f$  は  $f$  の  $\eta$  方向での  $m$  階微分を表す.

**定義 12** (同じ像を持つ, 合同).  $f_1$  と  $f_2$  が同じ像を持つとは, 原点の近傍  $U_1$  および  $U_2 \subseteq \mathbf{R}^2$  が存在して,

$$f_1(U_1) = f_2(U_2)$$

が成り立つときを言う.

さらに,  $f_1$  と  $f_2$  が合同であるとは, ある  $T \in O(3)$  が存在して,  $T \circ f_1$  と  $f_2$  が同じ像をもつときをいう.

**定義 13** (等長的, symmetry). 2つの写像芽  $f$  と  $g$  が等長的 (isometric) であるとは, 原点近傍で定義された微分同相写像  $\varphi$  が存在して,

$$\varphi^* ds_f^2 = ds_g^2$$

が成り立つときを言う. ここで,  $f$  と  $g$  の第一基本形式をそれぞれ  $ds_f^2$ ,  $ds_g^2$  とした.

さらに,  $f = g$  (つまり,  $\varphi^* ds_f^2 = ds_f^2$ ) の場合を考える.  $\varphi$  が恒等写像ではないとき,  $\varphi$  を  $ds_f^2$  の symmetry という. さらに,

- (1)  $\varphi$  が effective symmetry である  $\iff \varphi$  が  $f$  の特異曲線の向きを反転させる
- (2)  $\varphi$  が non-effective symmetry である  $\iff \varphi$  が  $f$  の特異曲線の向きを保つ

**定義 14** (向きを保つ, 向きを逆にする). 定義 13 の symmetry  $\varphi$  について,

- (1)  $\varphi$  が向きを保つ  $\iff \varphi$  のヤコビアンが正である
- (2)  $\varphi$  が向きを逆にする  $\iff \varphi$  のヤコビアンが負である

**定義 15** (isomer, faithful isomer). aaa

**定義 16** (admissible).  $\mathbf{c}(u)$  を閉区間  $J := [-l, l]$  上で定義された, 弧長パラメータ表示された  $\mathbf{R}^3$  の正則曲線とする.  $J$  上で  $\kappa > 0$  とする.  $U$  を  $\mathbf{R}^2$  における  $J \times \{0\}$  の近傍とし,  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  を  $J \times \{0\}$  で  $\kappa_\nu \neq 0$  を満たす  $m$ -type edge のみをもつ実解析的な写像で

$$f(u, 0) = \mathbf{c}(u) \quad (u \in J)$$

であるものとする. また, そのような  $f$  の集合を  $\mathcal{G}_{m,*}^\omega(\mathbb{R}_J^2, \mathbb{R}^3, C)$  で表す. さらに,

$$\max_{u \in J} |\kappa_s(u)| < \min_{u \in J} \kappa(u)$$

をみたす  $\mathcal{G}_{m,*}^\omega(\mathbb{R}_J^2, \mathbb{R}^3, C)$  を **admissible** といい, そのような  $f$  の集合を

$$\mathcal{G}_{m,**}^\omega(\mathbb{R}_J^2, \mathbb{R}^3, C)$$

で表す. (★ TODO: 特異曲率の定義は別セクションで改めてやる★)

定義 17 (面積密度関数).  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  を  $m$ -type edge,  $\nu$  を  $f$  の単位法ベクトル場とする.  $f$  の特異点  $p$  に対して,  $p$  の座標近傍  $(U; u, v)$  上で定義される

$$\lambda := \det(f_u, f_v, \nu)$$

を**面積密度関数**という.  $m$  が奇数の場合,  $\lambda$  は非負もしくは非正である.

定義 18 (向きに同調した単位法ベクトル場, カスプ方向, 角度関数).  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  を  $m$ -type edge,  $\nu$  を  $f$  の単位法ベクトル場,  $\lambda$  を  $f$  の面積密度関数とする.  $U$  上の任意の点に対して,  $\lambda \geq 0$  を満たすような単位法ベクトル場  $\nu$  を**向きに同調した単位法ベクトル場 (orientation-compatible unit normal vector field)** という.

$f$  の特異曲線を  $\gamma(t)$  とする. 向きに同調した単位法ベクトル場  $\nu$  に対して  $\mathbf{x}(t)$  を

$$\mathbf{x}(t) := \hat{\nu}(t) \times \begin{pmatrix} \mathbf{c}'(t) \\ \|\mathbf{c}'(t)\| \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{c} & := f \circ \gamma, \\ \hat{\nu} & := \nu \circ \gamma, \end{pmatrix}$$

と定義する. この  $\mathbf{x}(t)$  を**カスプ方向**といいう.

$\mathbf{c}(t)$  は Frenet 曲線とする. つまり,  $\mathbf{c}(t)$  の (空間曲線としての) 曲率関数  $\kappa(t)$  が正とする.  $\mathbf{n}(t)$  と  $\mathbf{b}(t)$  をそれぞれ  $\mathbf{c}(t)$  の主法線ベクトル, 従法線ベクトルとする.  $\mathbf{n}(t)$  のカスプ方向  $\mathbf{x}(t)$  から測った角度を  $\theta(t)$  とし, **角度関数 (またはカスプ角)** という.

定義より, カスプ方向  $\mathbf{x}(t)$ , 向きに同調した単位法ベクトル場  $\nu(t)$ , 角度関数  $\theta(t)$  は次の関係式

$$\mathbf{x}(t) = (\cos \theta) \mathbf{n}(t) - (\sin \theta) \mathbf{b}(t), \quad \hat{\nu}(t) = (\sin \theta) \mathbf{n}(t) + (\cos \theta) \mathbf{b}(t)$$

を満たす.

### 2.3. adapted coordinate system の導入

定義 19 (退化次数  $n$  特異点).  $n$  を正の整数,  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  をフロンタル,  $\nu$  を  $f$  の単位法ベクトル場とする. ここで,  $f$  の特異点  $p$  に対して  $p$  の座標近傍  $(U; u, v)$  上で定義された符号付き面積密度関数を  $\lambda = \det(f_u, f_v, \nu)$  とする. ここで,  $p \in \Sigma$  が退化次数  $n$  特異点であるとは,  $\text{rank}(df)_p = 1$  であり,  $p$  の近傍における  $C^\infty$  級関数  $\hat{\lambda}, \alpha$  で,

- $\lambda = \alpha \hat{\lambda}^n$
- $(\hat{\lambda}_u, \hat{\lambda}_v)(p) \neq (0, 0)$
- $\alpha(p) \neq 0$

を満たすものが存在するときをいう.

**事実 20** (Adapted coordinate system).  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  をフロンタル,  $p \in \Sigma$  を第一種退化次数  $n$  特異点であるとする. このとき, 以下を満たす局所座標系  $(u, v)$  で  $p = (0, 0)$  となるものが存在する.

- (1) 特異点集合を  $S(f)$  とすると,  $S(f) = \{(u, 0)\}$ .
- (2) 退化ベクトル場を  $\eta$  とすると,  $\eta = \partial/\partial v$  で,  $u$  軸上で  $f_v(u, 0) = f_{v^2}(u, 0) = \cdots = f_{v^n}(u, 0) = \mathbf{0}$ .
- (3)  $\nu$  を  $f$  の単位法ベクトル場とすると,  $\{f_u(u, 0), f_{v^{n+1}}(u, 0), \nu(u, 0)\}$  が正規直交基底となる.

このような局所座標系  $(u, v)$  を **adapted coordinate system (a.c.s)** と呼ぶ.

#### 2.4. $m$ -type edge に関する角度関数の導入

#### 2.5. 補題の準備 TODO : セクションごと場所を移動する

以降,  $\mathcal{G}_{m,*}^\omega$  は実解析的な  $m$ -type edge の集合とする.

**補題 21.**  $m$  を奇数,  $f \in \mathcal{G}_{m,**}^\omega$ ,  $T \in O(3)$  を *orientation-reversing symmetry*,  $S \in O(3)$  を *orientation-preserving symmetry* とする. このとき,  $S \circ T \circ f$  は

$$S \circ T \circ f = \begin{cases} \check{f}_* & (\det T = 1) \\ f_* & (\det T = -1) \end{cases}$$

である.

証明. ★ TODO : ここを埋める★ □

**補題 22.**  $m$  を奇数,  $f \in \mathcal{G}_{m,**}^\omega$ ,  $S \in O(3)$  を *orientation-preserving symmetry*,  $\varphi$  を *effective symmetry*,  $J$  を  $\varphi$  のヤコビ行列とする. このとき,  $S \circ f \circ \varphi$  は

$$S \circ f \circ \varphi = \begin{cases} \check{f}_* & (\operatorname{sgn}(\det J) = 1) \\ f_* & (\operatorname{sgn}(\det J) = -1) \end{cases}$$

である.

証明. ★ TODO : ここを埋める★ □

**補題 23.**  $m$  を奇数,  $f \in \mathcal{G}_{m,**}^\omega$ ,  $T \in O(3)$  を *orientation-reversing symmetry*,  $\varphi$  を *non-effective symmetry*,  $J$  を  $\varphi$  のヤコビ行列とする. このとき,  $T \circ f \circ \varphi$  は

$$T \circ f \circ \varphi = \begin{cases} \check{f}_* & (\det T = 1) \\ f_* & (\det T = -1) \end{cases}$$

である.

証明. ★ TODO : ここを埋める★ □

**補題 24.**  $\varphi_1$  と  $\varphi_2$  を 微分同相写像,  $J_1$  を  $\varphi_1$  のヤコビ行列  $J_2$  を  $\varphi_2$  のヤコビ行列とする. さらに,  $\varphi_{12} := \varphi_1 \circ \varphi_2$  として,  $J_{12}$  を  $\varphi_{12}$  のヤコビ行列とする. このとき,

$$sgn(\det J_{12}) = sgn(\det J_1) sgn(\det J_2)$$

である.

証明. ★ TODO : ここを埋める★ □

**補題 25.**  $m$  を奇数,  $f \in \mathcal{G}_{m, **}^\omega$ ,  $\varphi_1$  を non-effective symmetry,  $\varphi_2$  を effective symmetry,  $J_2$  を  $\varphi_2$  のヤコビ行列とする. このとき,  $f \circ \varphi_1 \circ \varphi_2$  は

$$f \circ \varphi_1 \circ \varphi_2 = \begin{cases} \check{f}_* & (sgn(\det J_2) = 1) \\ f_* & (sgn(\det J_2) = -1) \end{cases}$$

である.

証明. ★ TODO : ここを埋める★ □

### 3. $m$ -type edge の特異曲率

## 4. $n$ 次 Kossowski 計量の等長実現定理

HNSUY2 章、服部主定理

### 4.1. Kossowski 計量の導入

$f$  の等長双対  $\check{f}$ , 逆  $f_*$ , 逆双対  $\check{f}_*$  の定義のために, Kossowski 計量を導入する.

定義 26 (null ベクトル, adjusted).  $\Sigma$  上の与えられた正半定値計量  $ds^2$  の特異点を  $p$  とする. 零でない接ベクトル  $v \in T_p\Sigma$  が

$$(4.1) \quad ds^2(v, v) = 0$$

を満たすとき,  $v$  を  $ds^2$  の null ベクトルという.

さらに, 局所座標近傍  $(U; u, v)$  が  $p \in U$  において adjusted であるとは,  $\partial_v := \partial/\partial v$  が  $p$  において  $ds^2$  の null ベクトルであるときをいう.

式 (4.1) から, 任意の  $w \in T_p\Sigma$  について  $ds^2(v, w) = 0$  が成り立つことがわかる. また,  $(U; u, v)$  が  $p \in U$  において adjusted である局所座標近傍であるとする.  $ds^2$  が

$$(4.2) \quad ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

と書けるとき,  $F(p) = G(p) = 0$  が成り立つ.

定義 27 (K-許容的).  $\Sigma$  上の  $C^\infty$  級半正定値計量  $ds^2$  の特異点  $p \in M^2$  が K-許容的 (K-admissible) であるとは,  $p$  において adjusted である局所座標近傍  $(U; u, v)$  が存在し,

$$(4.3) \quad E_v(p) = 2F_u(p), \quad G_u(p) = G_v(p) = 0$$

を満たすことをいう. ここで,  $E, F, G$  は式 (4.2) で与えられる  $U$  上の  $C^r$  級関数である.

定義 28 (フロンタル計量).  $\Sigma$  の半正定値計量  $ds^2$  がフロンタル計量であるとは, 局所座標近傍  $(U; u, v)$  に対して  $U$  上で定義された  $C^\infty$  級関数  $\lambda$  が存在し,

$$(4.4) \quad EG - F^2 = \underline{\lambda^2}$$

を満たすときをいう. ただし,  $ds^2$  は式 (4.2) を満たすとする.

一般に, フロンタル  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  に対して  $ds^2 = \langle df, df \rangle$  と定めると,  $ds^2$  は  $\Sigma$  上のフロンタル計量となる. 実際,  $f$  に沿った単位法ベクトル場  $\nu$  を用いて  $\lambda = \det(f_u, f_v, \nu)$  と定めると,

$$E = \langle f_u, f_u \rangle, \quad F = \langle f_u, f_v \rangle, \quad G = \langle f_v, f_v \rangle$$

より  $\lambda^2 = EG - F^2$  が成り立つ. また,  $p \in \Sigma$  が特異点であることと, フロンタル計量により定まる  $\lambda$  に対して  $\lambda(p) = 0$  であることは同値である.

定義 29 (Kossowski 計量).  $\Sigma$  のフロンタル計量  $g = Edu^2 + 2F du dv + G dv^2$  が Kossowski 計量であるとは,  $\check{f}$  は Kossowski 計量である.

(1)  $ds^2$  の各特異点  $p \in \Sigma$  が K-許容的であり, さらに

$\check{f}$  が K-許容的である.

(2)  $p$  の局所座標近傍  $(U; u, v)$  上で定義された  $C^r$  級関数  $\lambda(u, v)$  が存在して

$$(\lambda_u(p), \lambda_v(p)) \neq (0, 0)$$

を満たすことをいう (つまり, 特異点  $p$  が非退化である).

ここで  $E, F, G$  は (4.2) で与えられる  $U$  上の  $C^\infty$  級関数である.

フロンタル計量に対して, 次の **D-許容的** の定義を導入する.

定義 30 (D-許容的).  $\Sigma$  のフロンタル計量  $ds^2 = E du^2 + 2F dudv + G dv^2$  が **D-許容的** であるとは, 次の 3 つの条件を満たすときである.

- (1) 特異点集合  $S(ds^2)$  は  $\Sigma$  の 1 次元部分多様体である
- (2) 任意の特異点  $p$  に対して,

$$\dim\{\mathbf{v} \in T_p\Sigma \mid (ds^2)_p(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0\} = 1$$

が成り立つ

- (3) 特異点  $p$  の局所座標近傍  $(U; u, v)$  が存在し, 次の 2 条件を満たす  $p$  の近傍上で定められる  $C^\infty$  級関数  $\beta$  が存在する.

- (i)  $U$  上の特異点集合  $S(ds^2) \cap U$  上の任意の点  $q$  に対して,

$$(ds^2)_q \left( \left( \frac{\partial}{\partial v} \right)_q, \left( \frac{\partial}{\partial v} \right)_q \right) = 0$$

- (ii)  $E_v - 2F_u = \beta \lambda$

以上の定義から,  $n$  次 **Kossowski 計量** を定義する.

定義 31 ( $n$  次 Kossowski 計量, Type I).  $\Sigma$  のフロンタル計量  $ds^2$  が  $n$  次 **Kossowski 計量** であるとは,

- (1)  $ds^2$  が D-許容的であり, かつ
  - (2) 全ての特異点が退化次数  $n$  特異点 (定義 19) である
- ときをいう.

さらに,  $n$  次 Kossowski 計量が **Type I** であるとは,  $\Sigma$  上の全ての特異点  $p \in S(\Sigma)$  に対して,  $p$  での特異曲線  $\gamma(t)$  の接方向  $\gamma'(p)$  と退化ベクトル場  $\eta(p)$  の向く退化方向が線形独立である, つまり, 全ての特異点が第一種特異点であるときをいう.

~~定義 29 の Kossowski 計量は, 定義 31 の  $n$  次 Kossowski 計量の  $n = 1$  としたものである.~~

#### 4.2. 等長双対, 逆, 逆双対の導入

#### 4.3. $m$ -type edge の等長変形定理

## 5. 主定理 A

### 5.1. 主定理のための補題

**補題 32** (向きに同調した単位法ベクトル場の構成).  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  をフロンタル,  $\nu_f$  を  $f$  の単位法ベクトル場,  $\varphi$  を *symmetry*,  $\det J$  を  $\varphi$  のヤコビアン,  $g := f \circ \varphi$ ,  $\nu_g := \text{sgn}(\det J)\nu_f \circ \varphi$  を  $g$  の単位法ベクトル場,  $\det(g_u, g_v, \nu_g)$  を  $g$  の面積密度関数とする. また,  $\lambda$  を  $f$  の面積密度関数として,  $\lambda \geq 0$  とする. このとき,  $\det(g_u, g_v, \nu_g)$  は

$$\det(g_u, g_v, \nu_g)(u, v) = |\det J|(\lambda \circ \varphi)(u, v) \geq 0$$

が成り立つ. すなわち,  $\nu_g = \text{sgn}(\det J)\nu_f \circ \varphi$  は向きに同調した  $g$  の単位法ベクトル場である.

証明.  $\varepsilon := \text{sgn}(\det J)$ ,  $\varphi(u, v) = (\xi(u, v), \eta(u, v))$  とおく.  $\det(g_u, g_v, \nu_g)$  を実際に計算すると,

$$\begin{aligned} \det(g_u, g_v, \nu_g)(u, v) &= \det((f \circ \varphi)_u, (f \circ \varphi)_v, \varepsilon \nu_f \circ \varphi)(u, v) \\ &= \varepsilon \det[\{f(\xi(u, v), \eta(u, v))\}_u, \{f(\xi(u, v), \eta(u, v))\}_v, \{\nu_f(\xi(u, v), \eta(u, v))\}] \\ &= \varepsilon \det\left(\frac{\partial f(\xi(u, v), \eta(u, v))}{\partial u} \frac{\partial \xi(u, v)}{\partial u} + \frac{\partial f(\xi(u, v), \eta(u, v))}{\partial v} \frac{\partial \eta(u, v)}{\partial u}, \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial f(\xi(u, v), \eta(u, v))}{\partial u} \frac{\partial \xi(u, v)}{\partial v} + \frac{\partial f(\xi(u, v), \eta(u, v))}{\partial v} \frac{\partial \eta(u, v)}{\partial v}, \nu_f(\xi(u, v), \eta(u, v))\right) \\ &= \varepsilon \left\{ \det\left(\frac{\partial f}{\partial u} \xi_u, \frac{\partial f}{\partial u} \xi_v + \frac{\partial f}{\partial u} \eta_v, \nu_f\right) + \det\left(\frac{\partial f}{\partial v} \eta_u, \frac{\partial f}{\partial u} \eta_v + \frac{\partial f}{\partial u} \xi_v, \nu_f\right) \right\} \\ &= \varepsilon \left\{ \det\left(\frac{\partial f}{\partial u} \xi_u, \frac{\partial f}{\partial u} \xi_v, \nu_f\right) + \det\left(\frac{\partial f}{\partial u} \xi_u, \frac{\partial f}{\partial u} \eta_v, \nu_f\right) + \det\left(\frac{\partial f}{\partial u} \eta_u, \frac{\partial f}{\partial u} \xi_v, \nu_f\right) + \det\left(\frac{\partial f}{\partial u} \eta_u, \frac{\partial f}{\partial u} \eta_v, \nu_f\right) \right\} \\ &= \varepsilon \left\{ \underbrace{\xi_u \xi_v \det\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u}, \nu_f\right)(\xi(u, v), \eta(u, v))}_{0} + \xi_u \eta_v \det\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \nu_f\right)(\xi(u, v), \eta(u, v)) \right. \\ &\quad \left. + \eta_u \xi_v \det\left(\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial u}, \nu_f\right)(\xi(u, v), \eta(u, v)) + \eta_u \eta_v \det\left(\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v}, \nu_f\right)(\xi(u, v), \eta(u, v)) \right\} \\ &= \varepsilon (\xi_u \eta_v - \eta_u \xi_v) \det\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \nu_f\right)(\xi(u, v), \eta(u, v)) \\ &= \varepsilon (\det J)(\lambda \circ \varphi)(u, v) = \underbrace{|\det J|}_{>0} \underbrace{(\lambda \circ \varphi)(u, v)}_{\geq 0} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

であるため, 主張が導かれる.  $\square$

**補題 33** (non-effective symmetry の向きの一意性).  $\varphi$  を *non-effective symmetry*,  $J$  を  $\varphi$  のヤコビ行列,  $\varepsilon := \text{sgn}(\det J)$  とする. このとき,  $\varepsilon = -1$  である.

証明.  $U_+ := \{(u, v) \in U \mid v > 0\}$  とする.  $\varphi$  が向きを保つと仮定すると,  $\varphi(U_+) = U_+$  である.  $f$  は  $v > 0$  の領域においてはめ込みであり,  $v$  を十分小さくとれば埋め込み, とくに単射である. したがって,  $f = f \circ \varphi$  より,  $\varphi$  は恒等写像と一致する. これは  $\varphi \neq \text{Id}$  に矛盾. したがって,  $\varphi$  は向きを逆にする.  $\square$

**事実 34** (Whitney の補題).  $f(u, v)$  を  $\mathbb{R}^2$  の原点近傍で定義された  $C^\infty$  級関数で,  $f(u, v) = f(u, -v)$  が成り立つものとすると,  $\mathbb{R}^2$  の原点近傍で定義された  $C^\infty$  級関数  $g(u, v)$  が存在して, 原点近傍で  $f(u, v) = g(u, v^2)$  と書ける.

**定義 35** ( $m$  次折り目特異点).  $m$ -type edge  $f$  が  $m$  次折り目特異点であるとは, ある局所座標系  $(u, v)$  が存在して,  $f(u, v) = f(u, -v)$  を満たすときをいう.

**注意 36** ( $m$  次折り目特異点の偶奇).  $m$ -type edge  $f$  が  $m$  次折り目特異点であるとき, ある写像  $g$  が存在して  $f(u, v) = g(u, v^2)$  となる. とくに,  $m$  は偶数となる.

証明. 事実 34 より,  $m$  次折り目特異点であるような  $m$ -type edge  $f$  は  $f(u, v) = g(u, v^2)$  と書ける.  $m$  が偶数であることを示す.  $f$  は  $m$ -type edge であるため, 事実 11 より

- $f_{v^i}(u, 0) = 0$  ( $i = 1, \dots, m-1$ )
- $f_{v^m}(u, 0)$  と  $f_u(u, 0)$  が一次独立

である. 一方,  $f$  は  $m$  次折り目特異点でもあるため, 等式  $f(u, v) = f(u, -v)$  を  $v$  で  $j(\in \mathbb{N})$  回微分すると,

$$f_{v^j}(u, v) = (-1)^j f_{v^j}(u, -v)$$

である.  $v = 0$  を代入すると,  $f_{v^j}(u, 0) = (-1)^j f_{v^j}(u, 0)$  であるため,

- (1)  $j$  が奇数なら  $(-1)^j = -1$  であるため,  $f_{v^j}(u, 0) = 0$ .
- (2)  $j$  が偶数なら  $(-1)^j = 1$  であるため,  $f_{v^j}(u, 0) = f_{v^j}(u, 0)$  (自明な式).

が成り立つ.  $m$ -type edge の性質より,  $f_{v^m}(u, 0)$  と  $f_u(u, 0)$  が一次独立, つまり  $f_{v^m}(u, 0) \neq \mathbf{0}$  であることが必要である. そのため,  $m$  が奇数の場合は不適であり,  $m$  は偶数である.  $\square$

**命題 37** (non-effective symmetry を持つ必要十分条件).  $m$ -type edge  $f \in \mathcal{G}_{m,*}^\omega(\mathbb{R}_J^2, \mathbb{R}^3, C)$  に對し, 第一基本形式  $ds_f^2$  が non-effective symmetry  $\varphi$  を持つための必要十分条件は, 次で与えられる.

- (1)  $m$  が偶数のとき,  $f$  は  $m$  次折り目特異点をもつ.
- (2)  $m$  が奇数のとき,  $f \circ \varphi = \check{f}$  である. さらに,  $J$  上で  $\kappa_s(u) = 0$  である.

証明.  $f$  と  $g := f \circ \varphi$  は同じ第一基本形式をもち, 特異曲線の像も向きを込めて一致するので,  $g$  は  $f$  または  $\check{f}$  と一致する.  $U_+ := \{(u, v) \in U \mid v > 0\}$  とする.  $\mathbf{x}_f(u)$ ,  $\mathbf{x}_g(u)$  をそれぞれ  $f$ ,  $g$  のカスプ方向とし,  $\theta_f(u)$ ,  $\theta_g(u)$  をそれぞれ  $f$ ,  $g$  のカスプ角とするとき,  $f(u, 0) = g(u, 0)$  より,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_f(u) &= \cos \theta_f(u) \mathbf{n}(u) - \sin \theta_f(u) \mathbf{b}(u), \\ \mathbf{x}_g(u) &= \cos \theta_g(u) \mathbf{n}(u) - \sin \theta_g(u) \mathbf{b}(u) \end{aligned}$$

が成り立つ.

まず,  $m$  が偶数の場合を考える.  $\mathbf{x}_g(u) = \mathbf{x}_f(u)$  より,  $\theta_g(u) = \theta_f(u)$  である. したがって,  $g = f$  である. さらにこのとき, 補題 33 より  $\varphi$  は  $f$  の特異曲線の向きを逆にする. このとき,  $f = f \circ \varphi$  より,  $f = f \circ \varphi^2$  である.  $\varphi^2(U_+) = U_+$  より,  $\varphi^2 = \text{Id}$  である. 微分同相写像  $\varphi$  は向きを逆にし, involution であり, かつ,  $\varphi(u, 0) = (u, 0)$  である. そのため, ある局所座標系  $(x, y)$  が存在して,  $\varphi(x, y) = (x, -y)$  と表される.(the Cartan-Bochner linearization theorem [?, ?]). したがって,

$f(x, y) = f(x, -y)$  となり,  $f$  は  $m$  次折り目特異点をもつ.

逆に,  $f$  が  $m$  次折り目特異点を持つと仮定する. このとき,  $f(u, v) = f(u, -v)$  を満たす局所座標系  $(u, v)$  が存在する. Whitney の補題 (事実 34) より, ある写像  $g$  が存在して,  $f(u, v) = g(u, v^2)$  となる. このとき,  $\varphi$  を  $\varphi(u, v) := (u, -v)$  と定めれば, これは non-effective symmetry である.

次に,  $m$  が奇数の場合を考える.  $\varphi$  を non-effective symmetry として,  $g := f \circ \varphi$  とする.  $g$  と  $f$  の第一基本形式は一致し, さらに  $f$  と  $g$  の特異曲線  $\{v = 0\}$  上では

$$\begin{aligned} f(u, 0) &= \mathbf{c}(u) \\ f \circ \varphi(u, 0) &= f(u, 0) = \mathbf{c}(u) \end{aligned}$$

であるため,  $f \circ \varphi = f$  または  $\check{f}$  が成り立つ.  $\nu_g$  (resp.  $\nu_f$ ) を向きを同調した  $g$  (resp.  $f$ ) の単位法ベクトル場とする.  $\det J$  を  $\varphi$  のヤコビアン,  $\varepsilon := \text{sgn}(\det J)$ ,  $\nu_g = \varepsilon \nu_f \circ \varphi$ ,  $\lambda := \det(f_u, f_v, \nu_f) \geq 0$  とすると, 補題 32 より  $\nu_g = \varepsilon \nu_f \circ \varphi$  は向きを同調した  $g$  の単位法ベクトル場である. 次に,  $g$  (resp.  $f$ ) のカスプ方向を  $\mathbf{x}_g$  (resp.  $\mathbf{x}_f$ ) とすると,

$$\begin{aligned} (5.1) \quad \mathbf{x}_g(u) &:= \hat{\nu}_g(u) \times \mathbf{c}'(u) = \varepsilon \nu_f \circ \varphi(u, 0) \times \mathbf{c}'(u) = \varepsilon \nu_f(u, 0) \times \mathbf{c}'(u) \\ &= \varepsilon \mathbf{x}_f(u) \end{aligned}$$

となる. 式 5.1 に  $\mathbf{x}_f(u)$  を代入すると,

$$\mathbf{x}_g(u) = \varepsilon(\cos \theta_f(u) \mathbf{n}(u) - \sin \theta_f(u) \mathbf{b}(u))$$

と表せる.  $\varphi$  は non-effective symmetry であるため, 補題 33 より  $\varepsilon = -1$  の場合のみを考えればよい.  $\varepsilon = -1$  の場合,  $\mathbf{x}_g(u)$  は

$$\mathbf{x}_g(u) = \cos(\pi + \theta_f(u)) \mathbf{n}(u) - \sin(\pi + \theta_f(u)) \mathbf{b}(u)$$

であるため,  $\mathbf{x}_g(u) = \cos \theta_g(u) \mathbf{n}(u) - \sin \theta_g(u) \mathbf{b}(u)$  と比較すると,  $\theta_g(u) = \pi + \theta_f(u)$  が成り立つ.  $\theta_g(u) = \theta_f(u)$  または  $-\theta_f(u)$  のいずれかであるため, これを満たすのは  $\theta_g(u) = -\theta_f(u)$  である. よって,

$$f \circ \varphi = \check{f}$$

が成り立つ. 特に,  $\theta_f(u) = \pm \pi/2$  であるため,  $\kappa_s(u) = 0$  も成り立つ.

逆に,  $f \circ \varphi = \check{f}$  をみたす微分同相写像  $\varphi$  があれば,  $\varphi^* ds_f^2 = ds_{\check{f}}^2$  をみたす.  $f \neq \check{f}$  より,  $\varphi$  は恒等写像ではない. したがって,  $\varphi$  は  $ds^2$  の symmetry である. さらに,  $f$  と  $\check{f}$  の定める  $C$  の向きは同じなので,  $\varphi$  は non-effective symmetry を定める.

以上より,  $m$  の偶奇に応じた必要十分条件を示した.  $\square$

**命題 38** (effective symmetry を持つときの合同関係).  $m$ -type edge  $f \in \mathcal{G}_{m, **}^{\omega}(\mathbb{R}_J^2, \mathbb{R}^3, C)$  に対し, 第一基本形式  $ds_f^2$  が effective symmetry  $\varphi$  をもつための必要十分条件は,

$$f \circ \varphi = \begin{cases} \check{f}_* & (m \text{ が偶数, もしくは } m \text{ が奇数で } \varphi \text{ が向きを逆にする場合}) \\ f_* & (m \text{ が奇数で } \varphi \text{ が向きを保つ場合}) \end{cases}$$

となることにより与えられる.

証明.  $ds_{f \circ \varphi}^2 = \varphi^* ds_f^2 = ds_f^2$  より,  $f$  と  $g := f \circ \varphi$  は同じ第一基本形式をもつ. さらに  $g$  は  $C$  の向きを逆にするので,

$$(5.2) \quad g = f_* \quad \text{または} \quad g = \check{f}_*$$

が成り立つ.  $\mathbf{x}_f(u), \mathbf{x}_g(u)$  をそれぞれ  $f, g$  の cusp direction とし,  $\theta_f(u), \theta_g(u)$  をそれぞれ  $f, g$  の cuspidal angle とするとき,

$$g(u, 0) = f \circ \varphi(u, 0) = f(-u, 0) = \mathbf{c}(-u) = \mathbf{c}_*(u)$$

である. 式 2.1 より,  $\mathbf{n}_*(u) := \mathbf{n}(-u)$ ,  $\mathbf{b}_*(u) := -\mathbf{b}(-u)$  であるため,

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \mathbf{x}_f(u) &= \cos \theta_f(u) \mathbf{n}(u) - \sin \theta_f(u) \mathbf{b}(u), \\ \mathbf{x}_g(u) &= \cos \theta_g(u) \mathbf{n}_*(u) - \sin \theta_g(u) \mathbf{b}_*(u) \end{aligned}$$

が成り立つ.

まず,  $m$  が偶数の場合を考える.  $\mathbf{x}_f(0) = \mathbf{x}_g(0)$  および 式 5.3 より,

$$\cos \theta_f(0) \mathbf{n}(0) - \sin \theta_f(0) \mathbf{b}(0) = \cos \theta_g(0) \mathbf{n}(0) + \sin \theta_g(0) \mathbf{b}(0)$$

となる. したがって,  $\theta_g(0) = -\theta_f(0)$  となり, 式 5.2 と合わせて  $(g =) f \circ \varphi = \check{f}_*$  であることが分かる.

逆に,  $f \circ \varphi$  が  $\check{f}_*$  と一致する場合, 第一基本形式について  $\varphi^* ds_f^2 = ds_f^2$  が成り立つ. さらに,  $f$  が定める特異曲線の像  $C$  の向きと  $\check{f}_*$  が定める  $C$  の向きは逆なので,  $\varphi(u, 0) = (-u, 0)$  となる. したがって,  $\varphi$  は effective symmetry である.

次に,  $m$  が奇数の場合を考える.  $\nu_g$  (resp.  $\nu_f$ ) を  $g$  (resp.  $f$ ) の単位法ベクトル場とする. 向きを同調した  $g$  の単位法ベクトル場を求める.  $\det J$  を  $\varphi$  のヤコビアン,  $\varepsilon := \text{sgn}(\det J)$ ,  $\nu_g = \varepsilon \nu_f \circ \varphi$ ,  $\lambda := \det(f_u, f_v, \nu_f) \geq 0$  とすると, 補題 32 より  $\nu_g = \varepsilon \nu_f \circ \varphi$  は向きを同調した  $g$  の単位法ベクトル場である. 次に,  $g$  (resp.  $f$ ) のカスプ方向を  $\mathbf{x}_g$  (resp.  $\mathbf{x}_f$ ) とすると,

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \mathbf{x}_g(u) &:= \hat{\nu}_g(u) \times \mathbf{c}'_*(u) \quad (\mathbf{c}_*(u) = \mathbf{c}(-u)) \\ &= \varepsilon \nu_f \circ \varphi(u, 0) \times (-\mathbf{e}(-u)) \\ &= \varepsilon \hat{\nu}_f(-u) \times (-\mathbf{e}(-u)) \quad (\hat{\nu}_f(u) := \nu_f(u, 0)) \\ &= -\varepsilon \mathbf{x}_f(-u) \end{aligned}$$

となる.  $g$  のカスプ角  $\theta_g$  を用いると  $\mathbf{x}_g(u) = \cos \theta_g(u) \mathbf{n}(-u) + \sin \theta_g(u) \mathbf{b}(-u)$  と表せることに注意して, 式 5.4 に  $\mathbf{x}_f(-u)$  を代入すると,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_g(u) &= -\varepsilon (\cos \theta_f(-u) \mathbf{n}(-u) - \sin \theta_f(-u) \mathbf{b}(-u)) \\ \therefore \mathbf{x}_g(0) &= -\varepsilon (\cos \theta_f(0) \mathbf{n}(0) - \sin \theta_f(0) \mathbf{b}(0)) \end{aligned}$$

と表せる.

$\varepsilon = 1$  の場合,  $\mathbf{x}_g(0) = \cos(\pi - \theta_f(0)) \mathbf{n}(0) + \sin(\pi - \theta_f(0)) \mathbf{b}(0)$  であるため,  $\theta_g(0) = \pi - \theta_f(0)$  であり, これを満たすのは

$$(5.5) \quad \theta_g(0) = \theta_f(0)$$

である. 特に,  $\theta_f(0) = \pm\pi/2$  である.

$\varepsilon = -1$  の場合,  $\mathbf{x}_g(0) = \cos(-\theta_f(0))\mathbf{n}(0) + \sin(-\theta_f(0))\mathbf{b}(0)$  であるため, これを満たすのは

$$(5.6) \quad \theta_g(0) = -\theta_f(0)$$

である. 以上の式 5.2, 5.5, 5.6 より,  $f \circ \varphi$  は

$$f \circ \varphi = \begin{cases} f_* & (\varepsilon = 1) \\ \check{f}_* & (\varepsilon = -1) \end{cases}$$

である.

逆に,  $f \circ \varphi$  が  $f_*$  または  $\check{f}_*$  と一致する場合, 第一基本形式について  $\varphi^* ds_f^2 = ds_f^2$  が成り立つ. さらに,  $f$  が定める特異曲線の像  $C$  の向きと  $f_*$  および  $\check{f}_*$  が定める  $C$  の向きは逆なので,  $\varphi(u, 0) = (-u, 0)$  となる. したがって,  $\varphi$  は effective symmetry である.

以上より,  $m$  の偶奇に応じた必要十分条件を示した.  $\square$

注意 39 ( $m$  が偶数の場合の  $\check{f}$ ). 命題 38 の  $m$  が偶数の場合において,  $ds_f^2$  の effective symmetry  $\varphi$  を用いて,

$$\check{f} \circ \varphi = f_*$$

が成り立つ.

## 5.2. 主定理の主張および証明

定理 40 ((3,4)-カスプ辺の右同値類の個数).  $n_f$  を  $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$  の右同値類の数 (つまり, 像の数) とする. このとき, 次が成り立つ.

(1)  $m$  が偶数の場合

- (a)  $n_f = 2, 4$  である.
- (b)  $n_f = 4 \iff ds_f^2$  は effective symmetry を持たない.

(2)  $m$  が奇数の場合

- (a)  $n_f = 1, 2, 4$  である.
- (b)  $n_f = 4 \iff ds_f^2$  は symmetry を持たない.
- (c)  $n_f = 1 \iff ds_f^2$  は effective symmetry と non-effective symmetry の両方を持つ.

証明. まず,  $m$  が偶数の場合の主張を示す.  $n_f = 4 \implies ds_f^2$  が effective symmetry を持たないことの対偶を示す.  $ds_f^2$  が effective symmetry  $\varphi$  を持つと仮定する. 補題 38 および注意 39 より,  $f \circ \varphi = \check{f}_*$  かつ  $\check{f} \circ \varphi = f_*$  である. よって,  $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$  の右同値類の数は 2 以下である. 特に,  $n_f < 4$  であることが分かる.  $\cdots (*)$

逆に,  $n_f \neq 4 \implies ds_f^2$  は effective symmetry をもつことを示す.  $n_f \neq 4$  とすると,  $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$  のうち, いずれか 2 つが右同値である. 右同値な一方を  $f$ , もう一方を

$$g \in \{\check{f}, f_*, \check{f}_*\}$$

と仮定してよい. 補題 37 および補題 38 より,  $f$  と  $\check{f}$  は右同値にはなり得ないので  $g = f_*$  または  $g = \check{f}_*$  である. 仮定より  $f$  と  $g$  が右同値であるので, ある微分同相写像  $\varphi$  が存在して,  $f \circ \varphi = f_*$  または  $f \circ \varphi = \check{f}_*$  である. よって, 補題 38 と注意 ?? より, いずれの場合でも  $f$  は effective symmetry をもつ.  $\cdots$  (\*\*)

次に,  $n_f = 2, 4$  を示す. まず,  $f$  と  $\check{f}$  は右同値になり得ないため,  $n_f \geq 2$  である. さらに (\*), (\*\*) より

$$\begin{aligned} n_f \neq 4 &\implies ds_f^2 \text{ は effective symmetry を持つ} \\ &\implies n_f \leq 2 \end{aligned}$$

であるため, 主張が従う.

次に,  $m$  が奇数の場合の主張を示す. まず,  $n_f = 4 \implies ds_f^2$  は symmetry を持たないを示すために対偶を示すことを考える. つまり,  $ds_f^2$  がある symmetry  $\varphi$  を持つと仮定する.

(i)  $\varphi$  が effective symmetry の場合,  $f \circ \varphi$  および  $\check{f} \circ \varphi$  の第一基本形式は  $ds_f^2$  と一致し, 特異曲線  $\{v = 0\}$  上では,

$$\begin{aligned} f \circ \varphi(u, 0) &= f(-u, 0) = \mathbf{c}(-u) \\ \check{f} \circ \varphi(u, 0) &= \check{f}(-u, 0) = \mathbf{c}(-u) \end{aligned}$$

であるため,  $f \circ \varphi$  および  $\check{f} \circ \varphi$  はそれぞれ  $f_*$ ,  $\check{f}_*$  のいずれかと一致する.

(I)  $f \circ \varphi = f_*$  なら,  $f$  と  $f_*$  は右同値である. (同様に,  $\check{f}$  は  $\check{f}_*$  と右同値である)

(II)  $f \circ \varphi = \check{f}_*$  なら,  $f$  と  $\check{f}_*$  は右同値である. (同様に,  $\check{f}$  は  $f_*$  と右同値である)

以上より,  $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$  の右同値類の個数は 2 である.

(ii)  $\varphi$  が non-effective symmetry の場合,  $\varphi$  が effective symmetry である場合と同様の議論で,  $f \circ \varphi$  および  $\check{f} \circ \varphi$  の第一基本形式は  $ds_f^2$  と一致し, 特異曲線  $\{v = 0\}$  上では,

$$\begin{aligned} f \circ \varphi(u, 0) &= f(u, 0) = \mathbf{c}(u) \\ f_* \circ \varphi(u, 0) &= f_*(u, 0) = \mathbf{c}(-u) \end{aligned}$$

であるため,  $f \circ \varphi$  は  $\check{f}$  と一致し,  $f_* \circ \varphi$  は  $\check{f}_*$  と一致する. よって,  $f$  は  $\check{f}$  と右同値であり,  $f_*$  は  $\check{f}_*$  と右同値である. よって,  $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$  の右同値類の個数は 2 である.

以上の (i)(ii) より,  $n_f = 4 \implies ds_f^2$  は symmetry を持たないを示した.

逆に,  $ds_f^2$  は symmetry を持たない  $\implies n_f = 4$  を示す.  $n_f < 4$  であると仮定する.  $f$  と  $g \in \{\check{f}, f_*, \check{f}_*\}$  が右同値であるとして, 一般性を失わない.

(i)  $g = f_*$  または  $\check{f}_*$  の場合,  $f$  と右同値であるので, ある微分同相写像  $\varphi$  が存在して,  $g = f \circ \varphi$  を満たす. それぞれの第一基本形式  $ds^2$  を  $ds_g^2, ds_{f \circ \varphi}^2$  とするとき,

$$\begin{aligned} ds_g^2 &= ds_f^2 \\ ds_{f \circ \varphi}^2 &= \varphi^* ds_f^2 \end{aligned}$$

であるため,  $ds_f^2 = \varphi^* ds_f^2$  である. よって,  $\varphi$  は  $\text{Id}$  か symmetry である. もし  $\varphi$  が  $\text{Id}$  なら  $f = g$  となるため,

$$f = f_* \quad \text{または} \quad f = \check{f}_*$$

が成り立つ. しかし, これでは曲線の像  $C = c(J)$  の向きが  $f$  と  $f_*$  で同じとなり, 矛盾する. よって,  $\varphi \neq \text{Id}$  であり,  $\varphi$  は  $ds_f^2$  の symmetry である.

- (ii)  $g = \check{f}$  の場合,  $f$  と右同値であるので, ある微分同相写像  $\varphi$  が存在して,  $\check{f} = f \circ \varphi$  を満たす. (a) の場合と同様の議論で,  $ds_f^2 = \varphi^* ds_{\check{f}}^2$  である. もし  $\varphi = \text{Id}$  なら,  $f = \check{f}$  である.

一方,  $f$  のカスプ角  $\theta_f$  および単位法ベクトル  $\nu_f$  は  $f$  から決まるので,

$$f = \check{f} \implies \theta_f = \theta_{\check{f}}$$

となるが,  $\check{f}$  の性質より  $\theta_{\check{f}} = -\theta_f$  であるため,  $\theta = 0$  となる. しかし, カスプ角の定義域は  $0 < |\theta| < \pi$  であったため, この事実と矛盾する. よって,  $\varphi \neq \text{Id}$  であり,  $\varphi$  は  $ds_f^2$  の symmetry である.

以上の (a)(b) より,  $ds_f^2$  は symmetry を持たない  $\implies n_f = 4$  を示した.

次に,  $n_f = 1 \implies ds_f^2$  は effective symmetry と non-effective symmetry の両方を持つを示す.  $n_f = 1$  であると仮定すると,  $f$  は  $\check{f}, f_*, \check{f}_*$  の 3 つと右同値であるため, 右同値の定義よりある微分同相写像  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  が存在して,

$$\check{f} = f \circ \varphi_1, \quad f_* = f \circ \varphi_2, \quad \check{f}_* = f \circ \varphi_3$$

が成り立つ. 補題 37 より  $\varphi_1$  は non-effective symmetry であり, 補題 38 より  $\varphi_2$  と  $\varphi_3$  は effective symmetry である. 以上より,  $ds_f^2$  は effective symmetry と non-effective symmetry の両方を持つ.

逆に,  $ds_f^2$  が non-effective symmetry  $\varphi_1$  と effective symmetry  $\varphi_2$  を持つと仮定する. このとき,  $\varphi_3 := \varphi_2 \circ \varphi_1$  も effective symmetry である. 実際,

$$f \circ \varphi_3(u, 0) = f \circ \varphi_1 \circ \varphi_2(u, 0) = f \circ \varphi_1(-u, 0) = f(-u, 0)$$

となり,  $\varphi_3(u, 0) = (-u, 0)$  であるため,  $f$  の特異曲線の向きを反転させる. 命題 37 より,  $\check{f} = f \circ \varphi_1$  である.  $f \circ \varphi_2$  と  $f \circ \varphi_3$  について,

- (1)  $\varphi_2$  が向きを逆にする場合,  $\varphi_3$  は向きを保つ. 命題 38 より,  $f \circ \varphi_2 = \check{f}_*$  かつ  $f \circ \varphi_3 = f_*$  である.
- (2)  $\varphi_2$  が向きを保つ場合,  $\varphi_3$  は向きを逆にする. 命題 38 より,  $f \circ \varphi_2 = f_*$  かつ  $f \circ \varphi_3 = \check{f}_*$  である.

が成り立つ. 以上より,  $ds_f^2$  は effective symmetry と non-effective の両方を持つ  $\implies n_f = 1$  である.

最後に,  $n_f = 1, 2, 4$  を示す. (b) の後半の証明から,  $n_f < 4 \implies ds_f^2$  は symmetry をもつ. さらに, (b) の前半の証明から,  $ds_f^2$  が symmetry をもつ  $\implies n_f \leq 2$  であるため,  $n_f = 1, 2, 4$  のいずれかである.  $\square$

注意 41. 定理 40 の  $m$  が奇数の場合において,  $n_f = 2$  は  $ds_f^2$  が effective symmetry か non-effective symmetry のいずれか一方のみを持つことと同値である.

### 5.3. 具体例

( $n_f = 1$  の例)

(3,4)-カスプ辺  $f(u, v) = (u, v^3, u^2 + v^4)$  とする.  $\varphi(u, v)$  を effective symmetry,  $\psi(u, v)$  を non-effective symmetry とする.  $ds_f^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$  とする.

特異曲線  $\mathbf{c}(u) = f(u, 0) = (u, 0, u^2)$

- $\varphi$  が向きを保つ場合

$\varphi_1(u, v) = (-u, -v)$ ,  $\psi_1(u, v) = (u, -v)$  とすると

- $\varphi$  が向きを逆にする場合

$\varphi_2(u, v) = (-u, v)$ ,  $\psi_2(u, v) = (u, -v)$  とすると

$$\begin{cases} f \circ \varphi_1 = f^* \\ f \circ \psi_1 = f \end{cases}$$

$$\begin{cases} f \circ \varphi_2 = f^* \\ f \circ \psi_2 = f \end{cases}$$

( $m$ -type edge は  
( $m-1$ )-次 Kossowski 計量)

$$\begin{aligned} \varphi^* ds_f^2 &= \{1 + 4(-u)^2\} d(-u)^2 \\ &\quad + 16(-u)(-v)^3 d(-u)d(-v) \\ &\quad + (-v)^4 (9 + 16(-v)^2) d(-v)^2 \\ &= (1 + 4u^2) du^2 + 16uv^3 du dv + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ds_f^2 &= E du^2 + 2F du dv + G dv^2 = (1 + 4u^2) du^2 + 16uv^3 du dv + \\ E &= \langle f_u, f_u \rangle = \langle (1, 0, 2u), ( \dots ) \rangle \\ &= 1 + 4u^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \langle f_u, f_v \rangle = \langle (1, 0, 2u), (0, 3v^2, 4v^3) \rangle \\ &= 8uv^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= \langle f_v, f_v \rangle = 9v^4 + 16v^6 \\ &= v^4 (9 + 16v^2) \end{aligned}$$

定義 19 (退化次数  $n$  特異点).  $n$  を正の整数,  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  をフロントル,  $\nu$  を  $f$  の単位法ベクトル場とする. ここで,  $f$  の特異点  $p$  に対して  $p$  の座標近傍  $(U; u, v)$  上で定義された符号付き面積密度関数を  $\lambda = \det(f_u, f_v, \nu)$  とする. ここで,  $p \in \Sigma$  が退化次数  $n$  特異点であるとは,  $\text{rank}(df)_p = 1$  であり,  $p$  の近傍における  $C^\infty$  級関数  $\hat{\lambda}, \alpha$  で,

- $\lambda = \alpha \hat{\lambda}^n$
- $(\hat{\lambda}_u, \hat{\lambda}_v)(p) \neq (0, 0)$
- $\alpha(p) \neq 0$

を満たすものが存在するときをいう.

$$m = n+1$$

$$3 \quad 2$$

$ds_p^2$  は 第2次 Kossowski 計量?

• 7D-parallel 計量 である  
• 退化次数 2 特異点 である  
• D-admissible である

$n_f \neq 3$  は何故?

7D-parallel 計量  $\iff EG - F^2 = \lambda_{(u,v)}$

特異点  $p = (u, 0)$

$$\frac{\sqrt{9+36u^2+16v^2}}{d(u,v)} = \lambda_{(u,v)}$$

$$\hat{\lambda}_{(u,v)}^2 = \frac{9+36u^2+16v^2}{d(u,v)}$$

$$\hat{\lambda} = v$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \hat{\lambda} = v \text{ とすれば, } (\hat{\lambda}_u, \hat{\lambda}_v)_{(p)} = (0, 1) \neq 0 \\ \cdot d(p) = \sqrt{9+36u^2} \neq 0 \end{array} \right.$$

→ 退化次数 2 特異点である

•  $S(ds^2_p) =$

定義 30 (D-許容的).  $\Sigma$  のフロンタル計量  $ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$  が D-許容的であるとは, 次の 3 つの条件を満たすときである.

- (1) 特異点集合  $S(ds^2)$  は  $\Sigma$  の 1 次元部分多様体である  $p \in S(ds^2)$  の 正定値  $\Leftrightarrow \int \cdot ds^2(v, v) \geq 0$
- (2) 任意の特異点  $p$  に対して,  $\dim \{v \in T_p \Sigma \mid (ds^2)_p(v, v) = 0\} = 1 \Leftrightarrow (ds^2)(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$

が成り立つ

- (3) 特異点  $p$  の局所座標近傍  $(U; u, v)$  が存在し, 次の 2 条件を満たす  $p$  の近傍上で定められる  $C^\infty$  級関数  $\beta$  が存在する.

(i)  $U$  上の特異点集合  $S(ds^2) \cap U$  上の任意の点  $q$  に対して,

$$(ds^2)_q \left( \left( \frac{\partial}{\partial v} \right)_q, \left( \frac{\partial}{\partial v} \right)_q \right) = 0$$

(ii)  $E_v - 2F_u = \beta \lambda$

以上の定義から,  $n$  次 Kossowski 計量を定義する.

$$(v = \frac{\partial}{\partial u})$$

$$\text{半正定値} \Leftrightarrow ds^2(v, v) = 0$$

## 6. 主定理 B

### 6.1. 主定理のための補題

**補題 42** ( $C$  が平面曲線の場合の合同関係).  $C$  が平面  $\Pi$  内にあるとして,  $\Pi$  に関する鏡映を  $S$  とする. このとき, 任意の  $f \in \mathcal{G}_{m,*}^\omega(\mathbb{R}_J^2, \mathbb{R}^3, C)$  に対して

$$\check{f} = S \circ f$$

が成り立つ.

証明. 平面曲線  $\mathbf{c}(u)$  内の従法線ベクトル  $\mathbf{b}(u)$  は  $u$  に依存しない定ベクトル  $\mathbf{b}_0$  として表せ, 平面  $\Pi$  内の法ベクトルである. 主法線ベクトルを  $\mathbf{n}(u)$  とするとき,

$$S \circ \mathbf{n}(u) = \mathbf{n}(u), \quad S \circ \mathbf{b}_0 = -\mathbf{b}_0$$

が成り立つ.  $g := S \circ f$  とおくと,  $g$  と  $f$  は同じ第一基本形式をもち, さらに  $v = 0$  上では,

$$g(u, 0) = S \circ f(u, 0) = S\mathbf{c}(u) = \mathbf{c}(u)$$

より,  $g = f$  または  $g = \check{f}$  である. 今,  $f$  (resp.  $g$ ) のカスプ方向を  $\mathbf{x}_f$  (resp.  $\mathbf{x}_g$ ), 角度関数を  $\theta_f$  (resp.  $\theta_g$ ) とするとき,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_f &= (\cos \theta_f) \mathbf{n} - (\sin \theta_f) \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{x}_g &= (\cos \theta_g) \mathbf{n} - (\sin \theta_g) \mathbf{b}_0 \end{aligned}$$

が成り立つ.  $m$  の偶奇に応じて  $f$  と  $g$  の関係式を求める.

$m$  が偶数の場合を考える.  $g = S \circ f$  であるため  $\mathbf{x}_g$  は,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_g &= S \circ \mathbf{x}_f \\ &= (\cos \theta_f) S \circ \mathbf{n} - (\sin \theta_f) S \circ \mathbf{b}_0 = (\cos \theta_f) \mathbf{n} + (\sin \theta_f) \mathbf{b}_0 \\ &= (\cos(-\theta_f)) \mathbf{n} - (\sin(-\theta_f)) \mathbf{b}_0 \end{aligned}$$

である. よって,  $\theta_g = -\theta_f$  であるため,  $g = \check{f}$  が成り立つ.

$m$  が奇数の場合を考える.  $f$  の向きに同調する単位法ベクトル場を  $\nu_f$  とおく. このとき,  $\nu_g := (\det S) S \nu_f$  は  $g$  の向きに同調する単位法ベクトル場である. 実際,  $g$  の符号付き密度関数  $\det(g_u, g_v, \nu_g)$  を考えると,

$$\begin{aligned} \det(g_u, g_v, \nu_g) &= (\det S) \det((Sf)_u, (Sf)_v, S\nu_f) \\ &= (\det S) \det(Sf_u, Sf_v, S\nu_f) \\ &= \underbrace{(\det S)(\det S)}_1 \det(f_u, f_v, \nu_f) \\ &= \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

となる. したがって,  $\hat{\nu}_g(u) := \nu_g(u, 0)$  は

$$\hat{\nu}_g(u) = (\det S)S\nu_f(u, 0) = (\det S)S\hat{\nu}_f(u)$$

をみたす. 今,  $S\mathbf{c}(u) = \mathbf{c}(u)$  より  $S\mathbf{c}'(u) = \mathbf{c}'(u)$  なので,  $\mathbf{x}_g$  は

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_g(u) &= \hat{\nu}_g(u) \times \mathbf{c}'(u) = (\det S)S\hat{\nu}_f(u) \times S\mathbf{c}'(u) = \underbrace{(\det S)(\det S)}_1 S(\hat{\nu}_f(u) \times \mathbf{c}'(u)) \\ &= S\mathbf{x}_f(u) \\ &= (\cos \theta_f)S \circ \mathbf{n} - (\sin \theta_f)S \circ \mathbf{b} = (\cos \theta_f)\mathbf{n} + (\sin \theta_f)\mathbf{b}_0 \\ &= (\cos(-\theta_f))\mathbf{n} - (\sin(-\theta_f))\mathbf{b}_0 \end{aligned}$$

である. よって,  $\theta_g = -\theta_f$  であるため,  $g = \check{f}$  が成り立つ.

以上より,  $m$  の偶奇に関わらず  $\check{f} = S \circ f$  が成り立つ.  $\square$

**補題 43** (orientation-reversing symmetry を持つときの合同関係).  $f \in \mathcal{G}_{m, **}^\omega(\mathbb{R}_J^2, \mathbb{R}^3, C)$  とする.  $C$  が orientation-reversing symmetry  $T$  をもつとき,  $T \circ f$  は

$$T \circ f = \begin{cases} f_* & (T \text{ が正, つまり } \det T = 1) \\ \check{f}_* & (T \text{ が負, つまり } \det T = -1) \end{cases}$$

である.

証明.  $ds_{T \circ f}^2 = ds_f^2$  より,  $f$  と  $g := T \circ f$  は同じ第一基本形式をもつ. さらに,

$$g(u, 0) = T \circ f(u, 0) = T \circ \mathbf{c}(u) = \mathbf{c}(-u) = \mathbf{c}_*(u)$$

より,  $C$  の向きを逆にするので

$$(6.1) \quad g = f_* \quad \text{または} \quad g = \check{f}_*$$

が成り立つ.  $\mathbf{x}_f(u), \mathbf{x}_g(u)$  をそれぞれ  $f, g$  の cusp direction とし,  $\theta_f(u), \theta_g(u)$  をそれぞれ  $f, g$  の cuspidal angle とする. 式 2.1 より,  $\mathbf{n}_*(u) := \mathbf{n}(-u), \mathbf{b}_*(u) := -\mathbf{b}(-u)$  とすると,  $\mathbf{x}_f(u)$  および  $\mathbf{x}_g(u)$  は

$$\begin{aligned} (6.2) \quad \mathbf{x}_f(u) &= \cos \theta_f(u) \mathbf{n}(u) - \sin \theta_f(u) \mathbf{b}(u), \\ \mathbf{x}_g(u) &= \cos \theta_g(u) \mathbf{n}_*(u) - \sin \theta_g(u) \mathbf{b}_*(u) \end{aligned}$$

が成り立つ.

$m$  が偶数の場合を考える.  $\mathbf{x}_g(u) = T\mathbf{x}_f(u)$  および式 6.2 より,  $u = 0$  で評価すると

$$\cos \theta_g(0) \mathbf{n}_*(0) - \sin \theta_g(0) \mathbf{b}_*(0) = \cos \theta_f(0) T\mathbf{n}(0) - \sin \theta_f(0) T\mathbf{b}(0)$$

である. 補題 2 より orientation-reversing symmetry  $T$  に対して  $T\mathbf{n}(0) = \mathbf{n}(0), T\mathbf{b}(0) = -\sigma \mathbf{b}(0)$  であることおよび式 2.1 より  $\mathbf{n}_*(0) = \mathbf{n}(0), \mathbf{b}_*(0) = -\mathbf{b}(0)$  を用いると,

$$\begin{aligned} \cos \theta_g(0) \mathbf{n}(0) + \sin \theta_g(0) \mathbf{b}(0) &= \cos \theta_f(0) \mathbf{n}(0) + \sigma \sin \theta_f(0) \mathbf{b}(0) \\ &= \cos(\sigma \theta_f(0)) \mathbf{n}(0) + \sin(\sigma \theta_f(0)) \mathbf{b}(0) \end{aligned}$$

を得る. したがって,  $\theta_g(0) = \sigma\theta_f(0)$  となるため, 式 6.1 より  $\sigma = 1$ , つまり  $T$  が正のときは  $g = f_*$ ,  $\sigma = -1$ , つまり  $T$  が負のときは  $g = \check{f}_*$  が成り立つ.

$m$  が奇数の場合を考える.  $\nu_g$  と  $\nu_f$  をそれぞれ,  $g$  と  $f$  の単位法ベクトル場とする.  $\sigma = \det T$ ,  $\lambda := \det(f_u, f_v, \nu_f) \geq 0$  とすると,  $\nu_g = \sigma T \nu_f$  は向きに同調した  $g$  の単位法ベクトル場である. 実際,

$$\begin{aligned} \det(g_u, g_v, \nu_g)(u, v) &= \det((T \circ f(u, v))_u, (T \circ f(u, v))_v, \nu_g(u, v)) \\ &= \det(T \circ (f(u, v))_u, T \circ (f(u, v))_v, \sigma T \nu_f(u, v)) \\ &= \underbrace{\sigma(\det T)}_1 \det(f_u, f_v, \nu_f)(u, v) \\ &= \lambda(u, v) \geq 0. \end{aligned}$$

となり,  $g$  の面積密度関数は正となる.  $\mathbf{x}_g(u)$  と  $\mathbf{x}_f(u)$  をそれぞれ,  $g$  と  $f$  のカスプ方向とする. このとき,  $\mathbf{x}_g(u)$  は

$$(6.3) \quad \begin{aligned} \mathbf{x}_g(u) &:= \hat{\nu}_g(u) \times \mathbf{c}'(u) = \sigma T \nu_f(u, 0) \times (T \mathbf{c}'(u)) = \sigma(\det T) T(\hat{\nu}_f(u) \times \mathbf{c}'(u)) \\ &= T \mathbf{x}_f(u) \quad (\hat{\nu}_g(u) := \nu_g(u, 0), \hat{\nu}_f(u) := \nu_f(u, 0)) \end{aligned}$$

となる.  $\mathbf{x}_f(u) = \cos \theta_f(u) \mathbf{n}(u) - \sin \theta_f(u) \mathbf{b}(u)$  および補題 2 より, 式 6.3 は

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_g(u) &= \cos \theta_f(u) T \mathbf{n}(u) - \sin \theta_f(u) T \mathbf{b}(u) \\ \therefore \mathbf{x}_g(0) &= \cos \theta_f(0) \mathbf{n}(0) + \sigma \sin \theta_f(0) \mathbf{b}(0) \\ &= \cos(\sigma \theta_f(0)) \mathbf{n}(0) + \sin(\sigma \theta_f(0)) \mathbf{b}(0) \end{aligned}$$

と表せる. よって  $\theta_g(0) = \sigma \theta_f(0)$  が成り立ち, 式 6.1 と合わせて

$$\begin{cases} \sigma = 1 \text{ ならば, } (g =) T \circ f = f_* \\ \sigma = -1 \text{ ならば, } T \circ f = \check{f}_* \end{cases}$$

がわかる.

以上より,  $m$  の偶奇に関わらず補題が成り立つことを示した.  $\square$

**命題 44** (orientation-reversing symmetry と effective symmetry を持つときの合同関係).  $m$ -type edge  $f \in \mathcal{G}_{m, **}^{\omega}(\mathbf{R}_J^2, \mathbf{R}^3, C)$  に対し,  $C$  が orientation-reversing symmetry  $T$  をもち,  $ds_f^2$  が effective symmetry  $\varphi$  をもつとする. このとき,  $m$  の偶奇に応じて次が成り立つ.

(1)  $m$  が偶数の場合

- (a)  $T$  が正 ( $\det T = 1$ ) ならば,  $T \circ f \circ \varphi = \check{f}$ . つまり,  $f$  と  $\check{f}$  は合同である.
- (b)  $T$  が負 ( $\det T = -1$ ) ならば,  $T \circ f \circ \varphi = f$ .

(2)  $m$  が奇数の場合

- (a)  $\varphi$  が向きを保ち, かつ  $T$  が正ならば,  $T \circ f \circ \varphi = f$  である. さらに, 特異曲率  $\kappa_s$  について  $\kappa_s(p) = 0$  が成り立つ.
- (b)  $\varphi$  が向きを保ち, かつ  $T$  が負ならば,  $T \circ f \circ \varphi = \check{f}$  である. さらに,  $\kappa_s(p) = 0$  が成り立つ.

- (c)  $\varphi$  が向きを逆にして, かつ  $T$  が正ならば,  $T \circ f \circ \varphi = \check{f}$  である.
- (d)  $\varphi$  が向きを逆にして, かつ  $T$  が負ならば,  $T \circ f \circ \varphi = f$  である.

証明. まず仮定より  $C$  が orientation-reversing symmetry  $T$  を持つため,

$$T\mathbf{c}(u) = \mathbf{c}(-u)$$

が成り立ち, さらに第一基本形式  $ds_f^2$  が effective symmetry  $\varphi$  をもつため,

$$\varphi^*ds_f^2 = ds_f^2$$

が成り立つ.  $g := T \circ f \circ \varphi$  とおくとき,  $ds_g^2 = ds_{T \circ f \circ \varphi}^2 = \varphi^*ds_f^2 = ds_f^2$  であり,  $v = 0$  において  $g$  は

$$g(u, 0) = T \circ f \circ \varphi(u, 0) = T \circ f(-u, 0) = T\mathbf{c}(-u) = \mathbf{c}(u)$$

であるため,  $f$  の特異曲線と一致する. よって  $g$  は

$$(6.4) \quad g = f \quad \text{または} \quad g = \check{f}$$

が成り立つ.

$m$  が偶数の場合を考える.  $\mathbf{x}_f(0), \mathbf{x}_g(0)$  をそれぞれ  $f, g$  の  $\mathbf{c}(0)$  におけるカスプ方向とし,  $\theta_f(0), \theta_g(0)$  をそれぞれ  $f, g$  の  $\mathbf{c}(0)$  におけるカスプ角とするとき,  $\mathbf{x}_f(0)$  と  $\mathbf{x}_g(0)$  はそれぞれ

$$\mathbf{x}_g(0) = \cos \theta_g(0) \mathbf{n}(0) - \sin \theta_g(0) \mathbf{b}(0), \quad \mathbf{x}_f(0) = \cos \theta_f(0) \mathbf{n}(0) - \sin \theta_f(0) \mathbf{b}(0)$$

と表される.  $\mathbf{x}_g(0) = T\mathbf{x}_f(0)$  および補題 2 より,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_g(0) &= T\mathbf{x}_f(0) = T(\cos \theta_f(0) \mathbf{n}(0) - \sin \theta_f(0) \mathbf{b}(0)) \\ &= \cos \theta_f(0) T\mathbf{n}(0) - \sin \theta_f(0) T\mathbf{b}(0) \\ &= \cos \theta_f(0) \mathbf{n}(0) + \sigma \sin \theta_f(0) \mathbf{b}(0) \\ &= \cos(-\sigma \theta_f(0)) \mathbf{n}(0) - \sin(-\sigma \theta_f(0)) \mathbf{b}(0) \end{aligned}$$

が成り立つ.  $\theta_g(0)$  と  $\theta_f(0)$  を比較すると  $\theta_g(0) = -\sigma \theta_f(0)$  が成り立つため, 式 6.4 より

- (1)  $T$  が正, つまり  $\sigma = 1$  ならば,  $\theta_g(0) = -\theta_f(0)$  となり,  $g = \check{f}$
- (2)  $T$  が負, つまり  $\sigma = -1$  ならば,  $\theta_g(0) = \theta_f(0)$  となり,  $g = f$

が成り立つ. よって,  $m$  が偶数の場合の主張 (a)(b) が成り立つ.

$m$  が奇数の場合を考える.  $\lambda = \det(f_u, f_v, \nu_f) \geq 0$  とし, さらに向きに同調した  $f$  (resp,  $g$ ) の単位法ベクトル場を  $\nu_f$  (resp,  $\nu_g$ ) としたとき,

$$\det(g_u(u, v), g_v(u, v), \nu_g(u, v)) \geq 0$$

を満たすような  $\nu_g(u, v)$  を求める.  $\det J$  を  $\varphi$  のヤコビアン,  $\sigma := \det T$ ,  $\varepsilon := \text{sgn}(\det J)$  とすると,  $\nu_g(u, v) = \sigma \varepsilon T \nu_f \circ \varphi(u, v)$  とおけば, これは向きを同調した  $g$  の単位法ベクトル場である

る. 実際,  $\det(g_u(u, v), g_v(u, v), \nu_g(u, v))$  に  $g$  と  $\nu_g$  を具体的に代入すると

$$\begin{aligned}\det(g_u(u, v), g_v(u, v), \nu_g(u, v)) &= \det(T(f \circ \varphi)_u, T(f \circ \varphi)_v, \sigma \varepsilon T \nu_f \circ \varphi)(u, v) \\ &= \underbrace{(\det T)\sigma \varepsilon}_{1} \det((f \circ \varphi)_u, (f \circ \varphi)_v, \nu_f \circ \varphi)(u, v) \\ &= \varepsilon(\det J)(\lambda \circ \varphi)(u, v) \quad (\because \text{補題 32 より}) \\ &= \underbrace{|\det J|}_{>0} \underbrace{(\lambda \circ \varphi)(u, v)}_{\geq 0} \geq 0\end{aligned}$$

となる.  $\mathbf{x}_f(0), \mathbf{x}_g(0)$  をそれぞれ  $f, g$  の  $\mathbf{c}(0)$  におけるカスプ方向とし,  $\theta_f(0), \theta_g(0)$  をそれぞれ  $f, g$  の  $\mathbf{c}(0)$  におけるカスプ角とするとき,  $\mathbf{x}_f(0)$  と  $\mathbf{x}_g(0)$  はそれぞれ

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_f(0) &= \cos \theta_f(0) \mathbf{n}(0) - \sin \theta_f(0) \mathbf{b}(0) \\ \mathbf{x}_g(0) &= \cos \theta_g(0) \mathbf{n}(0) - \sin \theta_g(0) \mathbf{b}(0)\end{aligned}$$

と表される. カスプ方向の定義より  $\mathbf{x}_g(u)$  は

$$\begin{aligned}(6.5) \quad \mathbf{x}_g(u) &= \nu_g(u, 0) \times \mathbf{c}'(u) = \sigma \varepsilon T \nu_f \circ \varphi(u, 0) \times \mathbf{c}'(u) \\ &= \sigma \varepsilon T \nu_f(-u, 0) \times (-T \mathbf{c}'(-u)) \quad (\because \mathbf{c}(u) = T \mathbf{c}(-u) \text{ より}) \\ &= -\underbrace{\sigma(\det T)}_{1} \varepsilon T (\nu_f(-u, 0) \times \mathbf{c}'(-u)) \\ &= -\varepsilon T \mathbf{x}_f(-u)\end{aligned}$$

と表される. 式 6.5 に補題 2 を用いると,  $\mathbf{x}_g(0)$  は

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_g(0) &= -\varepsilon(\cos \theta_f(0) T \mathbf{n}(0) - \sin \theta_f(0) T \mathbf{b}(0)) \\ &= -\varepsilon(\cos \theta_f(0) \mathbf{n}(0) + \sigma \sin \theta_f(0) \mathbf{b}(0))\end{aligned}$$

が成り立つ.

$\varphi$  が向きを保つ (つまり,  $\varepsilon = 1$ ) とき,  $\theta_f(0)$  および  $\theta_g(0) \in (-\pi, \pi)$  は

$$\begin{aligned}\cos \theta_g(0) &= -\cos \theta_f(0) \\ \sin \theta_g(0) &= \sigma \sin \theta_f(0)\end{aligned}$$

を満たすため, 整数  $m$  を用いて  $\theta_g(0) = (2m+1)\pi - \sigma \theta_f(0)$  が成り立つ.

- (1)  $T$  が正, つまり  $\sigma = 1$  のとき,  $\theta_g(0) = (2m+1)\pi - \theta_f(0)$  は  $-\theta_f(0)$  と一致しないため  $\theta_g(0) = \theta_f(0)$  となる. よって,  $g = f$  が成り立つ. さらにこのとき,

$$\theta_f(0) = \frac{2m+1}{2}\pi$$

となる.

- (2)  $T$  が負, つまり  $\sigma = -1$  のとき,  $\theta_g(0) = (2m+1)\pi - \theta_f(0)$  は  $\theta_f(0)$  と一致しないため  $\theta_g(0) = -\theta_f(0)$  となる. よって,  $g = \check{f}$  が成り立つ. さらにこのとき,

$$\theta_f(0) = -\frac{2m+1}{2}\pi$$

となる.

$\theta_f(0) \in (-\pi, \pi)$  より, 上記 (1)(2) いずれの場合も  $\theta_f(0) = \pm \frac{\pi}{2}$  が成り立つため, 特異曲率  $\kappa_s$  について  $\kappa_s(p) = 0$  が成り立つ. 以上より,  $m$  が奇数の場合の主張 (a)(b) が成り立つ.

$\varphi$  が向きを逆にする (つまり,  $\varepsilon = -1$ ) とき,  $\mathbf{x}_g(0)$  は

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_g(0) &= -\varepsilon(\cos \theta_f(0)\mathbf{n}(0) + \sigma \sin \theta_f(0)\mathbf{b}(0)) \\ &= \cos \theta_f(0)\mathbf{n}(0) + \sigma \sin \theta_f(0)\mathbf{b}(0) \\ &= \cos(-\sigma \theta_f(0))\mathbf{n}(0) - \sin(-\sigma \theta_f(0))\mathbf{b}(0)\end{aligned}$$

であるため,  $\theta_g(0) = -\sigma \theta_f(0)$  が成り立つ. 特に,

- (3)  $T$  が正, つまり  $\sigma = 1$  のとき,  $\theta_g(0) = -\theta_f(0)$  となり,  $g = \check{f}$  となる.
- (4)  $T$  が負, つまり  $\sigma = -1$  のとき,  $\theta_g(0) = \theta_f(0)$  となり,  $g = f$  となる.

であるため,  $m$  が奇数の場合の主張 (c)(d) が成り立つ.

以上より,  $m$  の偶奇ごとの主張を示した.  $\square$

**命題 45** (等長双対と合同であるための必要十分条件).  $f$  と  $\check{f}$  が合同であるための必要十分条件は, 次のように与えられる.

- (1)  $m$  が偶数の場合, 次の (a)(b) のいずれかを満たしている.
  - (a)  $C$  が平面曲線である
  - (b)  $C$  が正の orientation-reversing symmetry をもち, かつ  $ds_f^2$  が effective symmetry をもつ.
- (2)  $m$  が奇数の場合, 次の (a)(b)(c)(d) のいずれかを満たしている.
  - (a)  $C$  が平面曲線である
  - (b)  $ds_f^2$  が non-effective symmetry をもつ
  - (c)  $C$  が正の orientation-reversing symmetry をもち, さらに  $ds_f^2$  が向きを反転させる (ヤコビアンが負) effective symmetry をもつ
  - (d)  $C$  が負の orientation-reversing symmetry をもち, さらに  $ds_f^2$  が向きを保つ (ヤコビアンが正) effective symmetry をもつ

証明.  $m$  が偶数の場合を考える.  $C$  が平面内にあるときは補題 42 より  $f$  と  $\check{f}$  は合同であるため, (a) は直ちに成り立つ. そのため,  $C$  が平面曲線でない場合かつ  $f$  と  $\check{f}$  が合同である  $\Rightarrow$  (b) が成り立つを示す.  $f$  と  $\check{f}$  が合同であると仮定すると, ある  $\mathbb{R}^3$  の等長変換  $T$  と微分同相写像  $\varphi$  が存在して,

$$\check{f} = T \circ f \circ \varphi$$

を満たす. 両辺の第一基本形式を考えると,

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) : ds_{\check{f}}^2 &= ds_f^2 \\ (\text{右辺}) : ds_{T \circ f \circ \varphi}^2 &= \varphi^* ds_{T \circ f}^2 = \varphi^* ds_f^2\end{aligned}$$

であるため,  $\varphi^* ds_f^2 = ds_f^2$  が成り立つ. この式より  $\varphi$  は恒等写像か symmetry であるため,  $\varphi(u, 0) = (u, 0)$  または  $\varphi(u, 0) = (-u, 0)$  が成り立つ.  $T$  が単位行列の場合,  $f$  と  $\check{f}$  が右同値と

なり矛盾する. よって,  $T$  は単位行列ではなく  $C$  の orientation-preserving symmetry または orientation-reversing symmetry である.

もし  $T$  が orientation-preserving symmetry であるならば, 補題 5 より  $C$  は平面曲線となり矛盾する. したがって,  $T$  は orientation-reversing symmetry である. このとき,  $\varphi(u, 0) = (-u, 0)$  である. すなわち,  $\varphi$  は  $ds_f^2$  の effective symmetry である. 命題 44 より,  $T$  は正であるため (b) を満たしている.

逆に (b) を仮定すると, 命題 44 より  $f$  と  $\check{f}$  は合同である. 以上より,  $m$  が偶数の場合の必要十分条件を示した.

次に,  $m$  が奇数の場合を考える. まず,  $f$  と  $\check{f}$  が合同である  $\Rightarrow$  (a)(b)(c)(d) のいずれかが成り立つを示す.  $f$  と  $\check{f}$  が合同であると仮定する. つまり, ある  $T \in O(3)$  と 微分同相写像  $\varphi$  が存在して,

$$T \circ f \circ \varphi = \check{f} \quad \cdots (*)$$

と表せる.

(あ)  $T = \text{Id}$  の場合

与式 (\*) は  $f \circ \varphi = \check{f}$  と表せる. 補題 37 より  $\varphi$  が non-effective symmetry であるため, (b) に該当する.

(い)  $T$  が orientation-preserving symmetry の場合

補題 5 より,  $f$  の特異曲線  $C$  は平面曲線である. これは (a) に該当する.

(う)  $T$  が orientation-reversing symmetry の場合

命題 44 より,

- $T$  が正であり, effective symmetry  $\varphi$  のヤコビアンが負である
  - $T$  が負であり, effective symmetry  $\varphi$  のヤコビアンが正である
- のいずれかに該当する. これは (c) または (d) に該当する.

以上より,  $f$  と  $\check{f}$  が合同である  $\Rightarrow$  (a)(b)(c)(d) のいずれかが成り立つを示した.

逆に, (a)(b)(c)(d) のいずれかが成り立つ  $\Rightarrow$   $f$  と  $\check{f}$  が合同であるを示す.

- (a) が成立すると仮定する. 補題 5 より, 平面に関する折返し  $S \in O(3)$  を用いて

$$\check{f} = S \circ f$$

が成り立つ. よって  $f$  と  $\check{f}$  は合同である.

- (b) が成立すると仮定する.  $m$  が奇数であるため, 補題 37 より  $f$  と  $\check{f}$  は合同である.
- (c) が成立すると仮定する. これは命題 44 の (2)(c) に該当するため, 正の orientation-reversing symmetry  $T$  と ヤコビアンが負である effective symmetry  $\varphi$  を用いて

$$T \circ f \circ \varphi = \check{f}$$

が成り立つ. よって  $f$  と  $\check{f}$  は合同である.

- (d) が成立すると仮定する. これは命題 44 の (2)(b) に該当するため, 負の orientation-reversing symmetry  $T$  と ヤコビアンが正である effective symmetry  $\varphi$  を用いて

$$T \circ f \circ \varphi = \check{f}$$

が成り立つ. よって  $f$  と  $\check{f}$  は合同である.

以上より, (a)(b)(c)(d) のいずれかが成り立つ  $\Rightarrow f$  と  $\check{f}$  が合同であるを示した.  $\square$

**系 46** ( $f_*$  と  $\check{f}_*$  の合同関係). 命題 45 が成り立っている, つまり  $f$  と  $\check{f}$  が互いに合同である場合,  $f_*$  と  $\check{f}_*$  も互いに合同である.

証明. 命題 45において,  $f$  を  $f_*$  に取り換えると,  $m$  が偶数の場合の (a)(b) および  $m$  が奇数の場合の (a)(b)(c)(d) は不変であることから従う.  $\square$

## 6.2. 主定理の主張および証明

**定理 47** ((3,4)-カスプ辺の合同類の個数).  $N_f$  を  $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$  の合同類の数と定義する. このとき,  $N_f \neq 3$  を満たす. さらに,  $m$  の偶奇に応じて次が成り立つ.

(1)  $m$  が偶数の場合,

- (I)  $N_f = 4 \iff C$  は symmetry をもたず, かつ  $ds_f^2$  は effective symmetry をもたない.
- (II)  $N_f = 1 \iff$  次のいずれかが成り立つ.
  - (a1)  $C$  が平面曲線 かつ orientation-reversing symmetry をもつ.
  - (a2)  $C$  が平面曲線 かつ  $ds_f^2$  が effective symmetry をもつ.
  - (b)  $C$  が正の orientation-reversing symmetry をもち, かつ  $ds_f^2$  が effective symmetry をもつ.

(2)  $m$  が奇数の場合,

- (I)  $N_f = 4 \iff ds_f^2$  と  $C$  はいずれも symmetry を持たない.
- (II)  $N_f = 1 \iff$  次のいずれかが成り立つ.
  - (a1)  $C$  は平面曲線 かつ  $C$  に orientation-reversing symmetry が存在する.
  - (a2)  $C$  は平面曲線 かつ  $ds_f^2$  に effective symmetry が存在する.
  - (b1)  $ds_f^2$  に non-effective symmetry が存在して, かつ  $C$  に orientation-reversing symmetry が存在する.
  - (b2)  $ds_f^2$  に non-effective symmetry が存在して, かつ  $ds_f^2$  に effective symmetry が存在する
  - (c)  $C$  に正の orientation-reversing symmetry が存在して, かつ  $ds_f^2$  に向きを反転させる effective symmetry が存在する.
  - (d)  $C$  に負の orientation-reversing symmetry が存在して, かつ  $ds_f^2$  に向きを保つ effective symmetry が存在する.

証明.  $m$  が偶数の場合を考える.

- (I) について,  $N_f = 4 \Rightarrow C$  は symmetry をもたず, かつ  $ds_f^2$  は effective symmetry をもたないを示す.

$C$  が orientation-preserving symmetry を持つと仮定する. 補題 5 より,  $C$  は平面曲線である. さらに命題 45 と系 46 より,  $f$  と  $\check{f}$  が合同かつ  $f_*$  と  $\check{f}_*$  が合同となるため,  $N_f = 4$  と矛盾する.

$C$  が orientation-reversing symmetry を持つと仮定する. 補題 43 より,  $f$  は  $f_*$  または  $\check{f}_*$  と合同であり, それに応じて  $\check{f}$  は  $\check{f}_*$  または  $f_*$  と合同となるため,  $N_f = 4$  と矛盾する.

$ds_f^2$  が effective symmetry を持つと仮定する. 命題 38 および注意 39 より,  $f \circ \varphi = \check{f}_*$  かつ  $\check{f} = f_*$  であるため,  $f$  は  $\check{f}_*$  と合同で,  $\check{f}$  は  $f_*$  と合同である. よって,  $N_f = 4$  と矛盾する.

したがって,  $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$  がすべて合同でないならば,  $C$  は symmetry を持たず,  $ds_f^2$  は effective symmetry を持たない. さらに, いずれの場合も  $N_f \leq 2$  が成り立つ.

逆に, 曲線  $C$  が symmetry を持たず, かつ  $ds_f^2$  も effective symmetry を持たないと仮定する. つまり,  $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$  のうち 2 つが合同であるとする. このとき, 一般性を失わずに,  $f$  と  $g \in \{\check{f}, f_*, \check{f}_*\}$  が合同であると仮定してよい. 命題 45 より,  $f$  と  $\check{f}$  が合同であるための必要十分条件をいずれも満たしていないため,

$$(6.6) \quad g = f_* \quad \text{または} \quad g = \check{f}_*$$

である. 合同の定義より, 直交変換  $T \in O(3)$  と微分同相写像  $\varphi$  が存在して,

$$(6.7) \quad f = T \circ g \circ \varphi$$

を満たす. 右辺の第一基本形式は  $ds_{T \circ g \circ \varphi}^2 = ds_{g \circ \varphi}^2 = \varphi^* ds_g^2 = \varphi^* ds_f^2$  より,

$$ds_f^2 = \varphi^* ds_f^2$$

が成り立つ. このとき,  $\varphi$  は symmetry か恒等写像のいずれかである. いずれの場合でも,  $\varphi$  は特異点集合を特異点集合に写す. このとき,  $T(C) = C$  である. 仮定より,  $T$  は symmetry を持たないため,  $T$  は単位行列である. 式 6.7 に代入して,

$$f = g \circ \varphi$$

が成り立つ. 式 6.6 より,  $g$  が定める  $C$  の向きと  $f$  が定める  $C$  の向きは逆であるため,  $\varphi$  は

$$\varphi(u, 0) = (-u, 0)$$

を満たす. よって,  $\varphi$  は恒等写像ではなく effective symmetry であるため, 仮定と矛盾する. したがって, 曲線  $C$  が symmetry を持たず,  $ds_f^2$  も effective symmetry を持たないのであれば,  $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$  はすべて合同でないことを示した.

- (II) について,  $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$  がすべて合同である  $\implies$  (a1)(a2)(a3) のいずれかを満たすことを示す. まず仮定より  $f$  と  $\check{f}$  が合同であるため, 命題 45 より
  - (a) 曲線  $C$  が平面内にあるか,

- (b)  $C$  が正の orientation-reversing symmetry を持ち, かつ  $ds_f^2$  が effective symmetry を持つ

のいずれかを満たす. (b) が成り立つ  $\iff$  定理 47 の ( $m$  が偶数における)(b) が成り立つことは自明であるため, (a) が成り立つときに, (a1) または (a2) が成り立つことを示せばよい.  $f$  は  $f_*$  とも合同であるため, 等長変換  $T \in O(3)$  と微分同相写像  $\varphi$  が存在して,

$$(6.8) \quad f_* = T \circ f \circ \varphi$$

を満たす. 両辺の第一基本形式を比較すると  $ds_f^2 = \varphi^* ds_f^2$  となるため,  $\varphi$  は symmetry か恒等写像のいずれかである. とくに,  $\varphi(u, 0) = (u, 0)$  または  $\varphi(u, 0) = (-u, 0)$  が成り立つ.  $T$  が  $C$  の orientation-reversing symmetry の場合, (a1) が成立する.  $T$  が  $C$  の orientation-reversing symmetry ではない場合, 式 6.8 を  $(u, 0)$  に制限すると,

$$(\text{左辺}): \quad f_*(u, 0) = \mathbf{c}(-u)$$

$$(\text{右辺}): \quad T \circ f \circ \varphi(u, 0) = \begin{cases} \mathbf{c}(u) & (\varphi \text{ が non-effective symmetry または恒等写像}) \\ \mathbf{c}(-u) & (\varphi \text{ が effective symmetry}) \end{cases}$$

である. よって,  $\varphi$  は effective symmetry でなければならない. よって, (a2) が成り立つ. したがって,  $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$  が全て合同であるならば, (a1), (a2), (b) のいずれかが成り立つ.

逆に, (a1), (a2), (b) のいずれかを仮定したときに  $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$  のすべてが合同であることを示す. 命題 45 と系 46 より,  $f$  と  $\check{f}$  が合同,  $f_*$  と  $\check{f}_*$  が合同である. (a1) が成り立つとき, 補題 43 より  $f$  は  $f_*$  または  $\check{f}_*$  と合同である. (a2) または (b) が成り立つとき,  $f$  は  $\check{f}_*$  と合同である. したがって, (a1) または (a2) または (b) のいずれかが成り立つならば,  $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$  はすべて合同である.

- $N_f \neq 3$  を示す. 具体的に,  $N_f = 3$  と仮定して矛盾を導く.  $N_f \neq 4$  であるので,  $C$  が symmetry を持つまたは  $ds_f^2$  が effective symmetry を持つ. さらに, (I) の十分条件の証明により  $N_f \leq 2$  であるため  $N_f = 3$  に矛盾する. したがって  $N_f \neq 3$  が示される.

次に,  $m$  が奇数の場合を考える.

- (I) について,  $N_f = 4 \implies ds_f^2$  と  $C$  はいずれも symmetry を持たないことを示す.  $C$  が orientation-preserving symmetry を持つと仮定すると, 補題 5 より,  $C$  は平面曲線である. 命題 45 と 46 より,  $f$  と  $\check{f}$  は合同であり,  $f_*$  と  $\check{f}_*$  は合同となり矛盾. したがって  $C$  は orientation-preserving symmetry を持たない.

次に  $C$  が orientation-reversing symmetry を持つと仮定すると, 命題 43 より  $f$  は  $f_*$  または  $\check{f}_*$  と合同であり, それに応じて  $\check{f}_*$  と  $f_*$  と合同となるため矛盾. したがって  $C$  は orientation-reversing symmetry を持たない.

次に  $ds_f^2$  が effective symmetry を持つと仮定すると, 命題 38 より  $f$  は  $f_*$  または  $\check{f}_*$  と合同であり, それに応じて  $\check{f}$  は  $\check{f}_*$  または  $f_*$  と合同であるため矛盾する. したがって,  $ds_f^2$  は effective symmetry を持たない.

次に  $ds_f^2$  が non-effective symmetry を持つと仮定すると, 命題 37 より  $f$  は  $\check{f}$  と合同であり,  $f_*$  は  $\check{f}_*$  と合同であるため矛盾. したがって,  $ds_f^2$  は non-effective symmetry を持たない.

したがって,  $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$  がすべて合同でなければ  $C$  と  $ds_f^2$  はいずれも symmetry を一切持たない. さらに, いずれの場合も  $N_f \leq 2$  が成り立つ.

逆に,  $C$  も  $ds_f^2$  も symmetry を持たないときに,  $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$  はすべて互いに合同にはならないことを示す.  $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$  のうち 2 つが合同であると仮定すると, 一般性を失わずに  $f$  と  $g \in \{\check{f}, f_*, \check{f}_*\}$  が合同であると仮定してよい. 命題 45 より  $f$  と  $\check{f}$  が合同にはなり得ないため,

$$(6.9) \quad g = f_* \quad \text{または} \quad g = \check{f}_*$$

である. このとき, 等長変換  $T \in O(3)$  と微分同相写像  $\varphi$  が存在して

$$(6.10) \quad f = T \circ g \circ \varphi$$

を満たす. 式 6.10 の両辺の第一基本形式を考えると  $ds_f^2 = ds_{T \circ g \circ \varphi}^2 = \varphi^* ds_g^2 = \varphi^* ds_f^2$  であるため,  $\varphi$  は symmetry か恒等写像である. 特に,  $\varphi$  は特異点集合を特異点集合へ写す. このとき,  $T(C) = C$  である. 仮定より  $C$  は symmetry を持たないため,  $T$  は単位行列である. 式 6.10 に代入すると,  $g \circ \varphi = f$  が成り立つ. 式 6.9 より,  $g$  の定める  $C$  の向きと  $f$  の定める  $C$  の向きは逆であるため,

$$\varphi(u, 0) = (-u, 0)$$

を満たす. つまり  $\varphi$  は effective symmetry であるため, 仮定と矛盾する. したがって,  $C$  と  $ds_f^2$  がいずれも symmetry を持たなければ,  $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$  はすべて合同ではない.

- (II) について,  $N_f = 1 \implies (a1), (a2), (b1), (b2), (c), (d)$  のいずれかが成り立つことを示す.  $f$  と  $\check{f}$  が合同であるので, 命題 45 より
  - (a) 曲線  $C$  が平面内にある
  - (b)  $ds_f^2$  が non-effective symmetry をもつ
  - (c)  $C$  が正の orientation-reversing symmetry をもち, かつ  $ds_f^2$  が orientation-reversing effective symmetry をもつ
  - (d)  $C$  が負の orientation-reversing symmetry をもち, かつ  $ds_f^2$  が orientation-preserving effective symmetry をもつ

のいずれかが成り立つ.  $m$  が奇数における定理 47 と命題 45 それぞれの (c), (d) は自明な必要十分条件であるため, (a) (resp. (b)) のとき, (a1) または (a2) (resp. (b1) または (b2)) が成り立つことを示せば良い.  $f$  は  $f_*$  と合同なので,  $\mathbb{R}^3$  の等長変換  $T$  と微分同相写像  $\varphi$  が存在して

$$(6.11) \quad f_* = T \circ f \circ \varphi$$

を満たす. 式 6.11 の両辺の第一基本形式を比較すると,  $ds_f^2 = ds_{T \circ f \circ \varphi}^2 = \varphi^* ds_f^2$  より,  $ds_f^2 = \varphi^* ds_f^2$  が成り立ち,  $\varphi$  は symmetry か恒等写像である. とくに,  $\varphi(u, 0) = (u, 0)$

または  $\varphi(u, 0) = (-u, 0)$  が成り立つ.

$T$  が  $C$  の orientation-reversing symmetry のとき, (a1)(resp. (b1)) が成り立つ.

$T$  が  $C$  の orientation-reversing symmetry でないとき (つまり,  $T = \text{Id}$  もしくは  $T$  が  $C$  の orientation-preserving symmetry のとき), 式 6.11 を  $(u, 0)$  に制限すると

$$\varphi(u, 0) = (-u, 0)$$

となるため,  $\varphi$  は effective symmetry である. よって, (a2)(resp. (b2)) が成り立つ. したがって,  $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$  がすべて合同であるならば, (a1), (a2), (b1), (b2), (c), (d) のいずれかが成り立つ.

逆に, (a1), (a2), (b1), (b2), (c), (d) のいずれかを仮定して,  $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$  は全て合同であることを示す. 命題 45 および系 46 より,  $f$  と  $\check{f}$  は合同,  $f_*$  と  $\check{f}_*$  は合同である.

(a1) または (b1) のとき, 命題 43 より,  $f$  は  $f_*$  または  $\check{f}_*$  のいずれかと合同である.

(a2) または (b2) のとき, 命題 38 より,  $f$  は  $f_*$  または  $\check{f}_*$  のいずれかと合同である. したがって, (a1), (a2), (b1), (b2) のいずれかが成り立つならば,  $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$  はすべて合同である.

- $N_f \neq 3$  を示す. 具体的に,  $N_f = 3$  として矛盾を導く.  $N_f \neq 4$  なので (I) より  $C$  は symmetry を持つ, または  $ds_f^2$  が symmetry を持つ. (I) の十分条件の証明により,  $N_f \leq 2$  が成り立つため  $N_f = 3$  と矛盾する. よって,  $N_f \neq 3$  である.

□

注意 48. 定理 47 の  $m$  が奇数の場合における, (a1)(a2)(b1)(b2)(c)(d) がそれぞれ成り立つ場合の  $\check{f}, f_*, \check{f}_*$  は次のように表される.

- (a1) が成り立つ場合
- (a2) が成り立つ場合
- (b1) が成り立つ場合
- (b2) が成り立つ場合
- (c) が成り立つ場合
- (d) が成り立つ場合

### 6.3. 具体例

## 参考文献

- [1] J.W. Bruce and T.J. Gaffney, *Simple singularities of mappings  $\mathbb{C}, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$* , J. Lond. Math. Soc., II. Ser. **26** (1982), 465–474.
- [2] T. Fukuma, 有限次退化特異点に対するガウス・ポンネの定理, 修士論文, 横浜国立大学, 2024.
- [3] Y. Hattori, A. Honda and T. Morimoto, *Bour's theorem for helicoidal surfaces with singularities*, preprint (arXiv : 2310.16418).
- [4] A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Duality on generalized cuspidal edges preserving singular set images and first fundamental forms*, J. Singul. **22** (2020), 59–91.
- [5] A. Honda, K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada, *Isometric deformations of wave fronts at non-degenerate singular points*, Hiroshima Math. J. **50** (2020), 269–312.
- [6] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic 3-space*, Pacific J. Math. **221** (2005), 303–351.
- [7] M. Kosssowski, *The Boy-Gauss-Bonnet theorems for  $C^\infty$ -singular surfaces with limiting tangent bundle*, Ann. Global Anal. Geom. **21** (2002), No. 1, 19–29.
- [8] L. F. Martins and K. Saji, *Geometric invariants of cuspidal edges*, Canad. J. Math. **68** (2016), no. 2, 445–462.
- [9] L. F. Martins and K. Saji, *Geometry of cuspidal edges with boundary*, Topol. Appl. **234** (2018) 209–219.
- [10] L.F. Martins, K. Saji, S.P. dos Santos and K. Teramoto, *Boundedness of geometric invariants near a singularity which is a suspension of a singular curve*, Revista de Lla UMA Vol. **67**, (2024), No. 2, 475–502.
- [11] L. F. Martins, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Behavior of Gaussian curvature and mean curvature near non-degenerate singular points on wave fronts*, Geometry and Topology of Manifold, Springer Proc. in Math. & Stat. **154**, 2016, Springer, 247–282.
- [12] Y. Matsushita, *Classifications of cusps appearing on plane curves*, preprint (arXiv:2402.12166).
- [13] K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada, *Isometric deformations of cuspidal edges*, Tohoku Math. J. (2) **68** (2016), 73–90.
- [14] I.R. Porteous, *Geometric differentiation for the intelligence of curves and surfaces*, Second edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [15] K. Saji, *Normal form of the swallowtail and its applications* Int. J. Math. 29, No. 7, Article ID 1850046, 17 p.
- [16] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. Math. (2) **169** (2009), No. 2, 491–529.
- [17] S. Shiba and M. Umehara, *The behavior of curvature functions at cusps and inflection points*, Differential Geom. Appl. **30** (2012), 285–299.
- [18] M. Umehara, K. Saji and K. Yamada, *Differential geometry of curves and surfaces with singularities*. Translated from the Japanese by Wayne Rossman. Series in Algebraic and Differential Geometry 1. Singapore: World Scientific. xvi, 370 p. (2022).