(3.4) - カスプ辺の内在的な不変量

補題55まで

2節 定義

Σ を 2次元多様体、$\mathbb{S}^2$ を 2次元球面とする.

定義 1 (特異点、フロンタル)

$f : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ を写像とする.

- $p \in \Sigma$ が f の 特異点 である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ f が p において はめ込み ではない.
  (つまり、$\mathrm{rank}(df)_p < 2$ を満たす)
- f が フロンタル である
  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ C^∞級写像 $\nu : \Sigma \to \mathbb{S}^2$ で、Σ 上の任意の点 $q \in \Sigma$ と
  その点での接空間上の任意のベクトル $v \in T_q(\Sigma)$ に対して、
  $$\langle df_q(v), \nu(q) \rangle = 0$$
  が存在する.
  (この ν を、f に沿った単位法ベクトル場という)

定義 2 (波面)

$f : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ をフロンタル、$\nu : \Sigma \to \mathbb{S}^2$ を f の単位法ベクトル場とする.

f が 波面 (フロント) である

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $L := (f, \nu) : \Sigma \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$ が はめ込み である

(つまり、Σ の座標系 (u, v) に対して

$$M := \begin{bmatrix} f_u & f_v \\ \nu_u & \nu_v \end{bmatrix} \quad (6\text{行}2\text{列})$$

が Σ 上の各点で 階数 が 2 である)

以降、$S(f)$ で フロンタル $f : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ の 特異点集合 を表し、

- $S(f)$ は正則曲線
- $S(f)$ 上の点 p は 階数 1 の特異点

であるとする (つまり、$\mathrm{rank}(df)_p = 1$). この時 $S(f)$ を 特異曲線 と呼び、その接ベクトル を 特異ベクトル と呼ぶ.

特異ベクトルの定める1次元ベクトル空間を特異方向という.

さらに、$df(v) = 0$ を満たす $v(\neq 0) \in T_p\Sigma$ を退化ベクトル、退化ベクトルの定める方向を退化方向という.

階数が1の特異点に対しては、その近傍において定義される退化ベクトル場 η が存在する.

定義3 (第一種特異点)

特異点 $p \in S(f)$ が第一種特異点である

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ p において特異方向と退化方向が異なる.

($つまり$、退化方向 $\langle \eta_p \rangle_{\mathbb{R}} = \ker(df)_p$ が 特異方向 $T_p(S(f))$ と異なる)

定義4 (退化次数 n 次特異点)

$f: \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^3$ をフロンタル、$\nu: \Sigma \longrightarrow \mathbb{S}^2$ を f の単位法ベクトル場とする. $n \in \mathbb{N}$ とする.
ここで、f の特異点 p に対して p の座標近傍 $(U; u, v)$ 上で定義された符号付き面積密度関数を

$$\lambda := \det(f_u, f_v, \nu)$$

とする. ここで、$p \in \Sigma$ が退化次数 n 特異点であるとは、$\mathrm{rank}(df_p) = 1$ であり、
p の近傍における C^∞ 級関数 $\hat{\lambda}$、α で

- $\lambda = \alpha \hat{\lambda}^n$
- $(\hat{\lambda}_u, \hat{\lambda}_v)(p) \neq (0, 0)$
- $\alpha(p) \neq 0$

を満たすものが存在するときをいう.

Remark 5

$n = 1$ のとき、退化次数 n 特異点は非退化特異点と呼ばれる特異点である.
ここで、$p \in \Sigma$ が非退化特異点である $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $(\lambda_u, \lambda_v)(p) \neq (0, 0)$ が成り立つ.
$(d\lambda := \lambda_u du + \lambda_v dv \neq 0 \quad \text{at } p)$

定義6 (m-type edge [10])

$m \in \mathbb{N}$ とする. C^∞ 級写像 $f: \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^3$ に対して,

$p \in \Sigma$ が m-type edge である

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ 写像芽 $f: (\Sigma, p) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, f(p))$ が 原点での写像芽

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ (u,v) & \longmapsto & (u^m,\ u^{m+1}a(u,v),\ v) \end{array}$$

と $\mathcal{A}$ 同値 になるような C^∞ 級関数 $a(u,v)$ が 存在する.
※

(※ 2つの写像 $f:(\Sigma,p)\to(\mathbb{R}^3,f(p))$、$\bar{f}:(\bar{\Sigma},\bar{p})\to(\mathbb{R}^3,\bar{f}(\bar{p}))$ が $\mathcal{A}$ 同値である

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 2つの微分同相写像芽 $\varphi:(\Sigma,p)\longrightarrow(\bar{\Sigma},\bar{p})$ と $\Phi:(\mathbb{R}^3,f(p))\longrightarrow(\mathbb{R}^3,\bar{f}(\bar{p}))$
が 存在して、

$$\Phi\circ f\circ\varphi^{-1}=\bar{f}$$

が 成り立つ.)

Remark 7

$(u,v)\longmapsto(u^2,\ u^3a(u,v),\ v)$

$m=2$ のとき、つまり 2-type edge は 一般化カスプ辺 と 呼ばれ、
Honda - Naokawa - Saji - Umehara - Yamada [4] により導入された.
→前回まで読んでいた論文.

事実 8 [10]

$S(f)$ を フロンタル $f:\Sigma\longrightarrow\mathbb{R}^3$ の 特異点集合 で 正則曲線 であるとし、
ξ を $S(f)$ の 方向で、$\xi\notin\ker(df)_p$ とする. このとき、次の2つは同値である.

f が $p\in S(f)$ 上で m-type-edge を持つ

$\Longleftrightarrow$ 次の 2条件 を 満たす退化ベクトル場 η が 存在する.

- $\eta^i f=0$ が $S(f)$ 上で 成り立つ. $(i=2,\cdots,m-1)$ … (2.1)
- $\xi f(p)$ と $\eta^m f(p)$ が 線形独立 である … (2.2)

(ξf は f の ξ 方向の 微分 を表し、$\eta^m f$ は f の η 方向での m 階微分 を表す)

退化次数 n 特異点 と $m(=n+1)$ - type edge に 関して、次の 関係性 が 成り立つ.

↓

系9 [2]

$n \in \mathbb{N}$、$f: \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^3$ をフロンタル、$p \in \Sigma$ を f の特異点とする. このとき、

p が第一種退化次数 n 特異点である $\Longleftrightarrow$ p が $(n+1)$-type edge である.

Proof

(i) $\Rightarrow$ を示す

点 p が第一種退化次数 n 特異点と仮定する. $\mathrm{rank}(df)_p = 1$ より、特異点集合 $S(f)$ が u 軸、つまり

$$S(f) = \{(u, 0)\}$$

であり、$S(f)$ 上で退化ベクトル場 η が $\eta = \frac{\partial}{\partial v}$、さらに f の第一基本形式 ds^2 が、

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2 \quad (G(u,0) = 0,\ E(u,v) > 0) \quad \cdots ①$$

を満たす座標系 (u, v) が存在する(補題54参照). このとき、$G = \langle f_v, f_v \rangle$ に対して $f_v(u,0) = \mathbf{0}$ より、$k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ と C^∞ 級写像 $\psi\ (\neq \mathbf{0})$ を用いて

$$f_v = v^k \psi(u,v), \quad G(u,v) = \langle f_v(u,v), f_v(u,v) \rangle = v^{2k} \langle \psi, \psi \rangle (u,v) \quad \cdots (2.3)$$

と表せる. f はフロンタルである事から、符号つき面積密度関数 λ に対して、

$$EG - F^2 = \lambda^2$$

$\lambda = \alpha \hat{\lambda}^n$、$\alpha \neq 0$

が成り立つ(フロンタル計量の定義). よって今の座標系で考えると、第一種退化次数 n 特異点の定義から、

$$\lambda^2(u,v) \underset{F=0\text{ と }(2.3)\text{代入}}{=} E(u,v)\, v^{2k} \langle \psi, \psi \rangle (u,v) \underset{\lambda = \alpha\hat{\lambda}^n\text{ より}}{=} \alpha(u,v)^2\, \hat{\lambda}(u,v)^{2n} \quad \cdots (2.4)$$

であり、$\hat{\lambda}(u,0) = 0$、$\hat{\lambda}_v(u,0) \neq 0$ となる. 特に、$\alpha(u,v) > 0$ としても一般性を失わない. ②

[式(2.4)より、$\hat{\lambda}(u,v) = \left(\frac{E(u,v)\langle \psi, \psi \rangle}{\alpha(u,v)^2} \right)^{\frac{1}{2n}} v^{\frac{k}{n}}$ であるので.

$\hat{\lambda}_v(u,0) = \left(\frac{E(u,0) \langle \psi, \psi \rangle (u,0)}{\alpha(u,0)^2} \right)^{\frac{1}{2n}} \neq 0$ $(\alpha \neq 0$、$E(u,v) > 0$、$\psi \neq \mathbf{0} \Longleftrightarrow$ 標準内積 $\langle \psi, \psi \rangle > 0)$

よって、$\beta(u,0) \neq 0$ を満たす C^∞ 級関数 β を用いて、

$$\hat{\lambda}(u,v) = v \beta(u,v) \quad (\hat{\lambda}_v(u,0) = \beta(u,0))$$

と表せる. これを式(2.4)に代入すると、

$$\overset{+}{E(u,v)}\,\overset{+}{v^{2k}}\langle\psi(u,v),\psi(u,v)\rangle = \overset{+}{\alpha(u,v)^2}\,\overset{+}{\beta(u,v)^{2n}}\,\overset{+}{v^{2n}} \quad \cdots ③$$

が成り立つ. $n<\infty$ であるため、k についても $k<\infty$ が成り立つ. さらに、

仮定より $\underbrace{E(u,v)>0}_{①より}$、$\underbrace{\alpha(u,v)>0}_{②より}$ であり、$\underbrace{\beta(u,v)^{2n}>0}_{\beta<0 \text{ であっても、} \beta^{2n}>0 \text{ になる.}}$、$\underbrace{\langle\psi(u,v),\psi(u,v)\rangle>0}_{③より}$

であることから、

$$v^{2k}=v^{2n} \implies k=n$$

が成り立つ. よって、式(2.3)より

$$f_v(u,v) = v^{n}\psi(u,v) \quad (\psi\neq 0) \quad \cdots ④ \quad \left(\begin{array}{l} ④\text{ から分かること} \\ f_v(u,0)=f_{vv}(u,0)=\cdots=f_{v^n}(u,0)=0 \end{array}\right)$$

kがnに換わった

である. $\underbrace{f_{v^{n+1}}}_{n+1\text{階微分}}(u,0)=n!\,\psi(u,0)\neq 0$ となることから、ξ と η をそれぞれ

$$\xi := \frac{\partial}{\partial u}, \quad \eta := \frac{\partial}{\partial v}$$

とすると、事実8の $m=n+1$ の場合を満たす※1. よって, p は $(n+1)$-type edge である.

※1 f が $p\in S(f)$ 上で $\overset{(n+1)}{m}$-type-edge を持つ

$\iff$ 次の2条件を満たす退化ベクトル場 η が存在する.

- $\eta^i f=0$ が $S(f)$ 上で成り立つ. $(i=2,\cdots,\overset{(n)}{m-1})$ …(2.1) ← ④より OK
- $\underbrace{\xi f(p)}_{=f_u}$ と $\underbrace{\eta^{\overset{(n+1)}{m}} f(p)}_{=n!\,\psi(u,0)}$ が線形独立である ※2 …(2.2)

※2 $\|f_u\times f_v\|>0$ より、$\|f_u\times\psi\|>0$.
外積が0でない $\iff$ 2つのベクトルは平行ではない より, f_u と ψ は線形独立.
$\therefore$ $\xi f(p)=f_u(u,0)$ と $\eta^m f(p)=n!\,\psi(u,0)$ も線形独立.

(ii) $\Longleftarrow$ を示す

逆に、p が $(n+1)$-type edge であると仮定する. この時、事実8より

$$\xi := \frac{\partial}{\partial u}, \quad \eta := \frac{\partial}{\partial v}$$

と取ることで、特異点集合 $S(f)$ が u 軸、つまり $S(f)=\{(u,0)\}$ であり、$S(f)$ 上で退化ベクトル場 η が $\eta=\frac{\partial}{\partial v}$ となるような局所座標系 (u,v) を取れる. この時、C^∞ 級写像 $\psi(\neq 0)$ を用いて

$$f_v(u,v) = v^n\psi(u,v)$$

と表せる. この事から、E, F, G はそれぞれ

$$E=\langle f_u, f_u\rangle,$$
$$F=\langle f_u, f_v\rangle = v^n\langle f_u, \psi\rangle,$$
$$G=\langle f_v, f_v\rangle = v^{2n}\langle \psi, \psi\rangle$$

となり、符号つき面積密度関数 λ に対して

$$\begin{aligned}\lambda^2 = EG-F^2 &= v^{2n}\langle f_u, f_u\rangle\langle\psi,\psi\rangle - v^{2n}\langle f_u,\psi\rangle^2\\ &= v^{2n}\left(\underline{\langle f_u, f_u\rangle\langle\psi,\psi\rangle-\langle f_u,\psi\rangle^2}\right) \quad \|A\times B\|^2=\langle A,A\rangle\langle B,B\rangle-\langle A,B\rangle^2\\ &= v^{2n}\underline{\|f_u\times\psi\|^2}\end{aligned}$$

である. 事実8より特異点集合上で $\|f_u\times\psi\|>0$ となることから、$\|f_u\times\psi\| =: \alpha$ とすると、

$$\lambda^2 = v^{2n}\alpha^2(u,v)$$

となる. 一方で、$f_v = v^n\psi(u,v)$ であったため、単位法ベクトル場 ν を

$$\nu := \frac{f_u\times\psi}{\|f_u\times\psi\|}$$

として定めると、これは C^∞ 級写像である. 以上より $\lambda=\det(f_u, f_v, \nu)$ を計算すると、

$$\begin{aligned}\lambda = \det(f_u, f_v, \nu) &= \det\left(f_u, v^n\psi, \frac{f_u\times\psi}{\|f_u\times\psi\|}\right)\\ &= \frac{v^n}{\|f_u\times\psi\|}\det(\underline{f_u, \psi}, \underline{f_u\times\psi}) \quad \text{スカラー三重積}\\ &= \frac{v^n}{\|f_u\times\psi\|}\underline{(f_u\times\psi)}\cdot\underline{(f_u\times\psi)}\\ &= v^n\|f_u\times\psi\|\end{aligned}$$

となる. よって、

$$\alpha(u,v) = \|f_u\times\psi\|(u,v) \overset{\neq 0}{}, \quad \hat{\lambda}=v \qquad (\text{つまり、} \lambda=\alpha\hat{\lambda}^n)$$

とすると、$\underbrace{d\hat{\lambda}}_{\hat{\lambda}_u du+\hat{\lambda}_v dv} = dv = \underbrace{\frac{\partial v}{\partial u}}_{=0}du + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial v}dv}_{\neq 0} \neq 0$. よって、点 p は退化次数 n 特異点の定義を満たしている. (定義4)

$$\left(\begin{aligned}&\lambda=\alpha\hat{\lambda}^n\\ &(\hat{\lambda}_u, \hat{\lambda}_v)(p)\neq(0,0)\\ &\alpha(p)\neq 0\end{aligned}\right)$$

(i)(ii)より、同値関係を示した ▨

2.2 m-type edge の不変量

不変量、内在的／外在的 の定義を行う.

定義 10（不変量）

$f : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ をフロンタルとし、$p \in \Sigma$ とする.

f と p により定まる値 $J(f, p)$ が 不変量 である

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathbb{R}^3$ の等長変換 T と Σ の微分同相写像 ϕ が存在して、

$$\underline{|J(f, p)| = |J(T \circ f \circ \phi^{-1}, \phi(p))|}$$

を満たす.

$ds^2_f = \langle df, df \rangle$ をフロンタル f の第一基本形式、

定義域の局所座標系を (u, v) としたとき、$ds^2_f = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ で表される

$$E = \langle f_u, f_u \rangle, \quad F = \langle f_u, f_v \rangle, \quad G = \langle f_v, f_v \rangle$$

を第一基本量とする.

定義 11（等長的、内在的、外在的）

$f : \Sigma \to \mathbb{R}^3$、$\bar{f} : \bar{\Sigma} \to \mathbb{R}^3$ をそれぞれフロンタルとし、点 $p \in \Sigma$ とする.

- f と $\bar{f}$ が 等長的 である

  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists$ 微分同相写像 $\phi : \Sigma \to \bar{\Sigma}$ s.t.

  $$\underline{\phi^* ds^2_{\bar{f}} = ds^2_f}$$

  を満たす.（ϕ^* は ϕ による引き戻し）

- 不変量 $J(f, p)$ が 内在的 である

  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ f と等長的な任意のフロンタル $\bar{f}$ に対して、

  $$\underline{|J(f, p)| = |J(\bar{f}, \phi(p))|}$$

  が成り立つ.

  第一基本形式が同じなら必ず値が一致？

- 不変量 $J(f, p)$ が 外在的 である

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ f と等長的な フロンタル $\tilde{f}$ が 存在して、

$$|J(f, p)| \neq |J(\tilde{f}, \phi(p))|$$

第一基本形式 が 同じでも 値 が 変わり得る？

が成り立つ. (つまり、内在的 ではないこと)

例12 (ガウス曲率、平均曲率)

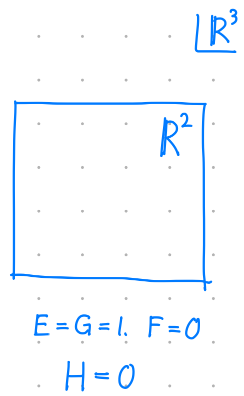
ガウス曲率 K は 内在的 な 不変量 であり、平均曲率 H は 外在的 な 不変量である.

- ガウス の驚異 の定理より、$\mathbb{R}^3$ の 曲面 f と g が 等長的 $\Longrightarrow$ f と g の ガウス曲率 は 一致

$\Updownarrow$

第一基本形式 が一致

- $H = \dfrac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)}$ は 第一基本形式 のみでは定まらない



定義6

定義13 ([10]、$(m, m+i)$-カスプ的曲率)

フロンタル $f:\Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^3$ が 点 $p\in\Sigma$ で m-type edge を持つとする.
このとき、$i=1,\cdots,m-1$ に対して $(m, m+i)$-カスプ的曲率 $\omega_{m,m+i}$ を

$$\omega_{m,m+i}(p) := \frac{\|\xi f\|^{(m+i)/m}\det(\xi f,\ \eta^m f,\ \eta^{m+i} f)}{\|\xi f\times \eta^m f\|^{(2m+i)/m}}(p) \quad \cdots (2.5)$$

で定める.

注意14

かつ $i=1$ のとき

$m=2$ のとき、$(2,3)$-カスプ的曲率 $\omega_{2,3}$ は カスプ的曲率 κ_c として
Martin-Saji-Umehara-Yamada [11] により導入されている.

事実15 [10]

$(m, m+i)$-カスプ的曲率 $\omega_{m,m+i}$ は、式(2.1)(2.2) を満たす正に向き付けられたベクトル場の取り方に依らない.

つまり、m-type edge に対して定義される $(m, m+i)$-カスプ的曲率 は 不変量である.

※

f が $p\in S(f)$ 上で m-type-edge を持つ

$\Longleftrightarrow$ 次の2条件を満たす退化ベクトル場 η が存在する.

- $\eta^i f = 0$ が $S(f)$ 上で成り立つ. $(i=2,\cdots,m-1)$ $\cdots (2.1)$
- $\xi f(p)$ と $\eta^m f(p)$ が 線形独立である $\cdots (2.2)$

※ $(m, m+i)$-カスプ的曲率

$$\omega_{m,m+i}(p) := \frac{\|\xi f\|^{(m+i)/m}\det(\xi f,\ \eta^m f,\ \eta^{m+i} f)}{\|\xi f\times \eta^m f\|^{(2m+i)/m}}(p)$$

が 等長変換 T と 座標変換 φ で 不変であることの確認.

- 等長変換 T について

9節 m-type edge の 等長変形定理

U上の点 p を第一種特異点とし、$\gamma(t)$ を $\gamma(0)=p$ となる特異曲線、$\eta(t)$ を γ に沿った退化ベクトル場とする.

定義33 では m が偶数の場合に符号を含めて特異曲率を定義した. ここで、※
m が奇数 の場合における $m(=n+1)$ type edge に対しての特異曲率を定義する.

> ※ 定義33 (特異曲率) 6節より
>
> m を偶数とする (すなわち、n は奇数). $\hat{\gamma} := f\circ\gamma$、$\hat{\nu} := \nu\circ\gamma$ とする.
> この時、定義4 で与えられている $\hat{\lambda}$ と退化ベクトル場 η を用いて、κ_s と ε_γ を
>
> $$\kappa_s(t) := \varepsilon_\gamma(t)\frac{\det(\hat{\gamma}'(t), \hat{\gamma}''(t), \hat{\nu}(t))}{|\hat{\gamma}'(t)|^3}$$
>
> $$\varepsilon_\gamma(t) := \mathrm{sgn}\left\{\det(\hat{\gamma}'(t), \eta(t))\,\hat{\lambda}_\eta\right\}$$
>
> とする. この κ_s を、第一種特異点からなる $\hat{\gamma}(t)$ 上の 特異曲率 という.

定義47 (特異曲率)

m を奇数とする (すなわち、n は偶数). $\hat{\gamma} := f\circ\gamma$、$\hat{\nu} := \nu\circ\gamma$ とする.
このとき、

$$\kappa_s(t) := \frac{\det(\hat{\gamma}'(t), \hat{\gamma}''(t), \hat{\nu}(t))}{|\hat{\gamma}'(t)|^3}$$

を、第一種特異点からなる $\hat{\gamma}(t)$ 上の 特異曲率 という.

定義47 と定義33 より、m の偶奇に関わらず、特異曲率の絶対値は定め方が一致する.

定義48 (計量に対する特異点)

ds^2 を Σ の半正定値計量とする. このとき、

$p\in\Sigma$ が ds^2 の 正則点 である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ds^2 が p で正定値となる.

$p\in\Sigma$ が ds^2 の 特異点 である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ds^2 が p で正定値ではない.

定義49 (フロンタル計量)

Σ の半正定値計量 ds^2 が フロンタル計量 である

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 各局所座標系 $(U; u, v)$ に対して、U 上で定義された C^∞ 級関数 λ が存在し、

$$EG - F^2 = \lambda^2 \quad \cdots (9.1)$$

を満たす ($ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ とする)

一般に、フロンタル $f : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^3$ に対して、$ds^2 = \langle df, df \rangle$ と定めれば、ds^2 は Σ 上のフロンタルとなる。実際、f に沿った単位法ベクトル場 ν を用いて

$$\lambda = \det(f_u, f_v, \nu)$$

と定めれば、$E = \langle f_u, f_u \rangle$、$F = \langle f_u, f_v \rangle$、$G = \langle f_v, f_v \rangle$ より、

$$\lambda^2 = EG - F^2$$

$(\lambda^2 = EG - F^2 = \|f_u \times f_v\|^2)$

が成り立つ。また、点 $p \in \Sigma$ が特異点である事と、フロンタル計量により定まる λ に対して $\lambda(p) = 0$ である事は同値である。

※ $\Rightarrow$ を示す

点 $p \in \Sigma$ が特異点であると仮定する。つまり、$f_u(p)$ と $f_v(p)$ が線形従属である。

線形従属 $\Longleftrightarrow \|f_u(p) \times f_v(p)\| = 0$ であるため、$\lambda^2(p) = \|f_u(p) \times f_v(p)\|^2 = 0$ となる。

$\Leftarrow$ を示す

$\lambda(p) = 0$ と仮定する。$0 = \lambda^2 = \|f_u \times f_v\|^2_{(p)}$ より、f_u と f_v が線形従属である。よって p は特異点。

定義4では フロンタルな写像 f に対して 退化次数 n 特異点 を定義していたが、ここで フロンタル計量に対して、退化次数 n 特異点 を定義し直す。

定義50 (退化次数 n 特異点)

ds^2 を Σ の フロンタル計量とする。このとき、

点 $p \in \Sigma$ が 退化次数 n 特異点 である

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (1) $\dim\{ v \in T_p(\Sigma) \mid (ds^2)_p(v, v) = 0 \} = 1$ かつ

(2) p の座標近傍 $(U; u, v)$ に対して、次を満たす U 上で定義された C^∞ 級関数 $\hat{\lambda}$ と $\alpha \neq 0$ が存在する：

$$\lambda = \alpha \hat{\lambda}^n, \quad (\hat{\lambda}_u(p), \hat{\lambda}_v(p)) \neq 0.$$

定義49 の フロンタル計量に対して、次の「D-許容的」の定義を導入する。

定義51 (D-許容的)

Σ のフロンタル計量 $ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$ が D-許容的 である

$\overset{\text{def}}{\iff}$ 以下の3つの条件を満たすとき.

(1) 特異点集合 $S(ds^2)$ は Σ の1次元部分多様体である

(2) 任意の特異点 p に対して,

null ベクトル

$$\dim\left\{ v \in T_p(\Sigma) \;\middle|\; (ds^2)_p(v, v) = 0 \right\} = 1$$

が成り立つ.

(3) 特異点 p の局所座標近傍 $(U; u, v)$ が存在し、次を満たす p の近傍上で定められる C^∞ 級関数 β が存在する.

(i) U 上の特異点集合 $S(ds^2) \cap U$ 上の任意の点 q に対して、

$$(ds^2)_q\left(\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)_q, \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)_q\right) = 0$$

(ii) $E_v - 2F_u = \beta\lambda$

これまでの定義から、n 次 Kossowski 計量を定義する.

定義52 (n次 Kossowski 計量)

Σ のフロンタル計量 ds^2 が n 次 Kossowski 計量 である

$\overset{\text{def}}{\iff}$ ds^2 が D-許容的であり、かつ全ての特異点が退化次数 n 特異点である.

さらに、n次 Kossowski 計量が Type I である

$\overset{\text{def}}{\iff}$ Σ 上の全ての特異点 $p \in S(\Sigma)$ に対して、p での特異曲線 $\gamma(t)$ の接方向 $\gamma'(p)$ と退化ベクトル場 $\eta(p)$ の向く退化方向が線形独立である.

(つまり、全ての特異点が第一種特異点であるとき)

p が第一種退化次数 n 特異点である $\iff$ p が $(n+1)$-type edge である

以上の定義と系9から、以下の系が得られる.

系53

$(n+1)$-type edge から誘導される計量 ds^2 は、Type I の n次 Kossowski 計量である.

Proof

- D-許容性を満たすことのチェック

$S(f)=\{v=0\}$、$f_v = v^n\psi(u,v)$ $(\psi(u,0)\neq 0)$

$E=\langle f_u, f_u\rangle$、$F=v^n\langle f_u, \psi\rangle$、$G=v^{2n}\langle \psi,\psi\rangle$ とする。

(1) 特異集合 $S(ds^2)$ が1次元であることの確認

$F(u,0)=0$、$G(u,0)=0$ より、$\lambda^2=EG-F^2=0 \iff v=0$. これは u 軸上なので一次元.

(2) null 空間の次元が1であることの確認

$v=0$ において、$\frac{\partial}{\partial v}$ と $\frac{\partial}{\partial u}$ がそれぞれ null ベクトルであるかどうかを確認する.

$$ds^2\left(\frac{\partial}{\partial v},\frac{\partial}{\partial v}\right)\Big|_{v=0} = G(u,0) = 0. \quad \text{ok}$$

$$ds^2\left(\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial u}\right)\Big|_{v=0} = E(u,0) > 0 \quad \text{不適}$$

したがって、null 空間は $\mathrm{span}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\right\}$ の1次元である.

(3-i) $\underbrace{ds^2\left(\frac{\partial}{\partial v},\frac{\partial}{\partial v}\right)}_{G(u,v)}=0$ が $\underbrace{\text{特異点集合 } S(ds^2)}_{v=0\text{ 上}}$ 上で成り立つこと確認.

$G(u,0)=0$ より成立.

(3-ii) $E_v - 2F_u = \beta\lambda$ の確認 (β : C^∞級関数)

$\lambda^2 = EG-F^2 = v^{2n}\|f_u\times\psi\|^2$ より、$\lambda=\pm v^n\|f_u\times\psi\|$ である. … ①

一方、$E_v = 2\langle f_{uv}, f_u\rangle = 2\left\langle \frac{\partial}{\partial u}(v^n\psi(u,v)), f_u\right\rangle = 2v^n\langle\psi_u, f_u\rangle$、

$F_u = v^n\langle f_{uu},\psi\rangle + v^n\langle f_u,\psi_u\rangle$ であることより、

$$\begin{aligned}
E_v-2F_u &= 2v^n\langle\psi_u, f_u\rangle - 2v^n\langle f_{uu},\psi\rangle - 2v^n\langle f_u,\psi_u\rangle\\
&= 2v^n\left(\cancel{\langle\psi_u, f_u\rangle} - \langle f_{uu},\psi\rangle \cancel{-\langle f_u,\psi_u\rangle}\right)\\
&= -2v^n\langle f_{uu},\psi\rangle\\
&= \underbrace{\pm v^n\|f_u\times\psi\|}_{=\lambda\ (\text{①より})}\underbrace{\left(\mp\frac{2\langle f_{uu},\psi\rangle}{\|f_u\times\psi\|}\right)}_{=:\beta}
\end{aligned}$$

$\therefore\ \beta(u,v) = \mp\dfrac{2\langle f_{uu},\psi\rangle}{\|f_u\times\psi\|}(u,v)$ とおけば、$E_v-2F_u=\beta\lambda$ が成り立つ.

(1)(2)(3-i)(3-ii) より、ds^2 は D-許容的である. 系9 より $p\in\Sigma$ は退化次数 n 特異点であるため、ds^2 は n 次 Kossowski 計量である.

さらに、特異曲線の接方向は $\frac{\partial}{\partial u}$、退化ベクトル場の退化方向(null 方向)は (2)より $\frac{\partial}{\partial v}$ のため、線形独立.
∴ Type I である. ds^2 は Type I の n 次 Kossowski 計量であることを示した. ∎

9.2 m-type edge に対する angle function の構成

Type I の n次 Kossowski 計量に対して $m(=n+1)$-type edge の等長実現定理を考えていく.

補題 54

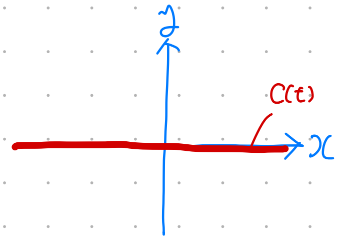
Jを原点を含む開区間、Σを$\mathbb{R}^2$の開部分集合、ds^2を計量、
$p\in\Sigma$を $\mathrm{rank}(ds^2)_p=1$ を満たす点とする.
(つまり、$N_p=\{\, v\in T_p(\Sigma)\mid ds^2(v,v)=0\,\}$ とした時、$\dim N_p=1$ となる点)

さらに、$c(t)$ を $c(0)=p$、$c'(t)\notin N_{c(t)}$ を満たす曲線とする. この時、
局所座標近傍 $(U;u,v)$ で次の3条件を満たすものが存在する.

(i) $ds^2\left(\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial v}\right)=0$ on U.

(ii) c の像が u軸と一致する.

(iii) $\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)_{(u,0)}\in N_{(u,0)}$. (null 方向)



Proof

曲線 $c(t)$ に対して $c'(t)\notin N_{c(t)}$ であることから、局所座標系 (x,y) で曲線 $c(t)$ の像が x軸と一致し、x軸上で退化ベクトル場が $\frac{\partial}{\partial y}$ となるものが存在する. 条件(ii)と対応.
ここで、ベクトル場 Z_1、Z_2 を

$$Z_1:=\frac{\partial}{\partial x},$$
$$Z_2:=-\hat F\frac{\partial}{\partial x}+\hat E\frac{\partial}{\partial y}\qquad \left(\hat E=ds^2\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}\right),\ \hat F=ds^2\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)\ \text{である}\right)$$

とすると、$ds^2(Z_1,Z_2)$ は

$$\begin{aligned}
ds^2(Z_1,Z_2)&=ds^2\left(\frac{\partial}{\partial x},-\hat F\frac{\partial}{\partial x}+\hat E\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad ds^2\text{の双線形性より}\\
&=-\hat F\,\underbrace{ds^2\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}\right)}_{=\hat E}+\hat E\,\underbrace{ds^2\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)}_{=\hat F}\\
&=\cancel{-\hat F\hat E}+\cancel{\hat E\hat F}\\
&=0 \quad (Z_1\text{と}Z_2\text{が直交している})
\end{aligned}$$

となる. よって、新しい局所座標系(u,v)で、

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial u}}_{u:=x\text{とおいた}}\parallel Z_1,\quad \underbrace{\frac{\partial}{\partial v}}_{Z_1(u\text{軸})\text{と直交している}}\parallel Z_2 \longrightarrow \text{条件(i)と対応.}$$

を満たすものが存在する。　条件(iii)？

条件(i)(ii)(iii)を満たすため、補題が成り立つ ▨

- 補題 54 の座標系の条件に対して、$(u,v)=(0,0)$ の近傍において $E(u,v)>0$ より、

(iii)より $\frac{\partial}{\partial v}$ は null 方向 および 補題54 の仮定 ($\mathrm{rank}(df)_p=1$) より、$T_p\Sigma$ 上では接ベクトルが1次元分存在 → $\frac{\partial}{\partial u}$ 方向。
$\therefore E=ds^2\left(\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial u}\right)>0$

$$\omega(u,v) = \ln E(u,v) \quad \cdots ①$$

とおく事ができ、C^∞ 級関数 $\omega_1(u,v)$ を用いて、

$$\omega(u,v)-\omega(u,0) = v\omega_1(u,v) \quad \cdots ②$$

因子の補題より ($f(u,v)=\omega(u,v)-\omega(u,0)$ とすると、$f(u,0)=0$)

と表せる。このことから、$E(u,v)$ は

$$E(u,v) \underset{①より}{=} e^{\omega(u,v)} \underset{②より}{=} e^{\omega(u,0)+v\omega_1(u,v)}$$
$$= e^{\omega(u,0)}e^{v\omega_1(u,v)}$$
$$= E(u,0)e^{v\omega_1(u,v)} \quad \cdots ③$$

となる。ここで座標変換として、

$$\tilde{u} := \int_0^u \sqrt{E(u,0)}\,du, \qquad \tilde{v} := v$$

を考えると、$d\tilde{u}^2 = E(u,0)du^2$ であり、補題 54 より $F=ds^2\left(\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial v}\right)=0$ より、(主張(i))

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2 \underset{③より}{=} E(u,0)e^{v\omega_1(u,v)}du^2 + G\,dv^2$$
$$= \tilde{E}\,d\tilde{u}^2 + \tilde{G}\,d\tilde{v}^2. \quad \left(\tilde{E}(\tilde{u},\tilde{v}) := e^{\tilde{v}\omega_1(\tilde{u},\tilde{v})},\ \tilde{G}(\tilde{u},\tilde{v}) = G(u,v)\right)$$

となる。よって、$\tilde{E}(\tilde{u},\tilde{v}) = e^{\tilde{v}\omega_1(\tilde{u},\tilde{v})}$ であるため $\tilde{E}(\tilde{u},0)=e^0=1$ が成立する。

以上より、補題 54 の座標系の条件に加えて、

(iv) $ds^2\left(\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial u}\right)(u,0) = 1$

を満たすような局所座標近傍 $(U;u,v)$ を取ることができる。

この任意の計量 ds^2 と曲線 C に対して以上の座標系 $(\tilde{u},\tilde{v})$ が取れることから、計量を n 次 Kossowski 計量、曲線を正則な特異曲線とすることで、次補題のような座標系が得られる。

補題 55

J を原点を含む開区間、U を $\mathbb{R}^2$ の開部分集合、ds^2 を実解析的な Type I の n 次 Kossowski 計量、$\gamma : J \longrightarrow U$ を実解析的な特異曲線で

$$ds^2(\gamma'(t), \gamma'(t)) > 0 \quad \cdots (9.2) \qquad (E > 0)$$

を満たすとする。

この時、各 $t_0 \in J$ に対して C^ω 級局所座標系 $(V; u, v)$ で $(t_0, 0)$ を含み、$V \subset U$ で第一基本形式

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

の係数 E, F, G が次の3条件を満たすものが存在する。

(I) V 上で $F(u, v) = 0$.

(II) 特異曲線が u 軸と一致し、$\gamma(u) = \gamma(u, 0)$ となり

$$E(u, 0) = 1, \quad E_v(u, 0) = E_{vv}(u, 0) = \cdots = E_{\underbrace{v^n}_{v\text{で}n\text{回微分}}}(u, 0) = 0.$$

(III) V 上の C^ω 級関数 G_0 で、

$$G(u, v) = v^{2n} G_0(u, v), \qquad (G_0(u, v) > 0)$$

Proof

補題 54 の条件 (i)(ii)(iii)(iv) より、$\underbrace{V \text{ 上で } F(u, v) = 0}_{(i)}$ であるため、(I) の主張が成立する。
さらに、特異曲線が u 軸と一致し、次をみたすような局所座標系 $(V; u, v)$ が取れる。

(ii) ◦ $\gamma(u) = (u, 0)$
(iv) ◦ $E(u, 0) = 1$
(iii) ◦ u 軸での退化ベクトル場が $\frac{\partial}{\partial v}$ である。

ds^2 が n 次 Kossowski 計量
$\Longleftrightarrow$ ◦ ds^2 が D-許容的 かつ
◦ 全ての特異点が退化次数 n 特異点

ここで、ds^2 が n 次 Kossowski 計量であることから、定義 52 より D-許容的であり、さらに定義 51 より、
(D-許容的の Def)

$$E_v - 2F_u = \beta\lambda \quad \cdots ④$$

を満たす C^∞ 級関数 β が存在する。今、$F(u, v) = 0$ であるため $F_u(u, v) = 0$ を ④ へ代入すると

$$E_v = \beta\lambda \quad \cdots (9.3)$$

と書き直せる。ここで、特異曲線が u 軸であることから、$\lambda(u, 0) = 0$ である。さらに、定義 52 より

$\lambda = \underset{C^\infty級}{\underline{\alpha}}\hat{\lambda}^n,\ \alpha \neq 0.$

特異点は全て退化次数 n 特異点であることから、定義50 の $\hat{\lambda}$ に関して、
(退化次数 n 特異点のDef)

$$\hat{\lambda}(u,0) = 0$$

が成り立つ. ここで因子の補題（事実16）より、C^∞ 級関数 Λ が存在して

$$\hat{\lambda}(u,v) = v\Lambda(u,v) \quad \cdots ⑤$$

$(\hat{\lambda}_u(p), \hat{\lambda}_v(p)) \neq 0.$

と表せる. さらに、⑤ より $\hat{\lambda}_u(u,0) = 0$ であることから 定義50 (2) より、$\hat{\lambda}_v(u,0) \neq 0$ でなくてはならない. よって、

$$\hat{\lambda}_v(u,v) \underset{⑤より}{=} \Lambda(u,v) + v\Lambda_v(u,v) \implies \Lambda(u,0) \neq 0$$

が成り立つ. 定義50 より $\lambda = \alpha\hat{\lambda}^n$ とする事から、$\alpha = 1$ とすることで

$$\lambda(u,v) = \hat{\lambda}^n(u,v) \underset{⑤より}{=} v^n\Lambda^n(u,v) \quad \cdots ⑥$$

を得る. ⑥ を 式(9.3) に代入することで、

$$E_v = v^n\beta(u,v)\Lambda^n(u,v)$$

が成り立つ. この事から、$E_v(u,0) = E_{vv}(u,0) = \cdots = E_{v^n}(u,0) = 0$ が成り立つ.
$E(u,0) = 1$ と合わせて、(II) の主張が得られる.

さらに、$EG - F^2 = \lambda^2$ より、座標近傍上 で $E(u,v) > 0$ を用いると
フロンタル計量の定義49.　　補題の仮定より.

$$E(u,v)G(u,v) \underset{\substack{F=0 \\ \lambda = v^n\Lambda^n(u,v)\text{を代入.}}}{=} v^{2n}\Lambda^{2n}(u,v) \iff G(u,v) = v^{2n}\frac{\Lambda^{2n}(u,v)}{E(u,v)}$$

となる. $E(u,0) = 1 > 0$、$\Lambda^{2n}(u,0) > 0$ より $\dfrac{\Lambda^{2n}(u,0)}{E(u,0)} > 0$. よって $G_0(u,v) := \dfrac{\Lambda^{2n}(u,v)}{E(u,v)}$ と定めれば、(III) の主張が得られる.

以上より、補題の主張 (I)(II)(III) を示した ▨

定義56（カスプ方向、angle function）

$f:\Sigma \to \mathbb{R}^3$ をフロンタル、点 $p\in\Sigma$ を第一種退化次数 n 特異点とし、$\gamma(t)$ を $p=\gamma(0)$ を通る特異曲線、$\hat{\gamma}(t)=f\circ\gamma(t)$ を弧長パラメータ表示された空間曲線とする。

(1) n が奇数のとき、[4] と同様にカスプ方向 $x(u)$ が定義される。

n が偶数のとき、$\underbrace{\hat{\lambda}^n \geq 0}_{\hat{\lambda}<0\text{ であっても }\hat{\lambda}^n\geq 0}$ であるので、符号つき面積密度関数

$$\lambda = \alpha\underbrace{\hat{\lambda}^n}_{\oplus}$$

は非正もしくは非負である（α の符号がそのまま λ の符号となる）。このように、U 上の任意の点に対して $\lambda\geq 0$ を満たすような単位法ベクトル場 ν を、Σ の向きに同調した単位法ベクトル場と呼ぶ。このとき、

$$x(t) := \hat{\nu}(t)\times\hat{\gamma}'(t) \quad \cdots(9.4) \quad \left(\text{ただし、}\hat{\nu}(t):=\nu\circ\gamma(t)\right)$$

と定義し、カスプ方向という。

(2) 特異曲線 γ の像 $\hat{\gamma}\,(=f\circ\gamma)$ が、空間曲線としての曲率関数 κ について、$\kappa\neq 0$ を満たすとする。$\hat{\gamma}$ の主法線ベクトルと従法線ベクトルをそれぞれ、

$$\boldsymbol{n}(t)、\ \boldsymbol{b}(t)$$

とする。$\boldsymbol{n}(t)$ のカスプ方向 $x(t)$ から測った角度を $\theta(t)$ とし、angle function と呼ぶ。