4. 擬リーマン部分多様体 (P. 97〜)　(補題7まで)

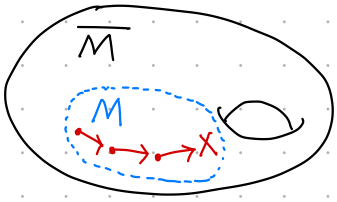
- M が $\overline{M}$ の 擬リーマン部分多様体 であるとする。

[M が $\overline{M}$ の 擬リーマン部分多様体 である
$\Leftrightarrow$ (1) M が $\overline{M}$ の部分多様体 である。
(2) 引き戻し $j^*(g)$ が、M 上の計量テンソルである。(j は包含写像)

→ M と $\overline{M}$ の レビ・チビタ接続 を 比較することで、無限小記述 (infinitesimal description) を与えるテンソル II が得られる。

→ M の幾何的性質は、II と $\overline{M}$ の 幾何的性質 から導かれる。

- 対応する幾何学的対象 を区別するために、オーバーバー ($\overline{M}$、$\overline{D}$、$\overline{R}$ など) を用いることにする。
  - 曲線上のベクトル場 Y の場合、記法 $\dot{Y} = \dfrac{\overline{D}Y}{ds}$ と $Y' = \dfrac{DY}{ds}$ を用いる。
  - $M \subset \overline{M}$ という略記は、M が $\overline{M}$ の 擬リーマン部分多様体 であるときに用いる。



TANGENTS AND NORMALS (接線と法線)

- M が $\overline{M}$ の 滑らかな部分多様体 であるならば、包含写像 $j: M \subset \overline{M}$ 上の ベクトル場 X は、「M 上の $\overline{M}$ ベクトル場」と呼ばれる。

→ X は M の各点 $p \in M$ において、接ベクトル X_p を $\overline{M}$ に割り当てる。X が滑らかであるのは、$f \in \mathfrak{F}(\overline{M})$ に対して $Xf \in \mathfrak{F}(M)$ が成立するとき であった。☆

☆ を満たすベクトル場 を全て集めた集合 $\overline{\mathfrak{X}}(M)$ は、$\mathfrak{F}(M)$ 上の 加群 (module) である。

[$f \in \mathfrak{F}(M)$、$X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して、
① $(f_1 f_2)X = f_1(f_2 X)$
② $f(X_1 + X_2) = fX_1 + fX_2$
③ $(f_1 + f_2)X = f_1 X + f_2 X$
④ $1X = X$ (1 は単位元)

任意の $Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ に対して、制限 $Y|_M$ は $\overline{\mathfrak{X}}(M)$ に含まれる。

ignore / submodule

今、写像jの微分を無視しているため、$\mathfrak{X}(M)$ は $\overline{\mathfrak{X}}(M)$ の部分加群である。

→ M上のベクトル場が、$\overline{M}$上のベクトル場としても扱えることを前提にしている

→ 加群 M の部分集合 N が部分加群
⟺ N が M と群に関して同様の性質を持つ

?

- 今、M を「$\overline{M}$ の擬リーマン部分多様体」とする。このとき、定義より

→ $T_p(M)$ が元々の多様体 $\overline{M}$ の接空間における部分空間として扱われる。

各接空間 $T_p(M)$ は $T_p(\overline{M})$ の非退化部分空間である。

2章の補題23より、次の直和分解が得られる。

→ V の部分空間 W が非退化である
⟺ V は「W と $W^{\perp}$ (perp) の直和」である。

$$T_p(\overline{M}) = T_p(M) + T_p(M)^{\perp}$$

(V を $T_p(\overline{M})$、W を $T_p(M)$ と同一視した)

ここで、$T_p(M)^{\perp}$ も非退化である。

W
∥

($\because$ V の部分空間 $W^{\perp}$ が非退化 ⟺ V は $W^{\perp}$ と $(W^{\perp})^{\perp}$ の直和である)

$T_p(M)^{\perp}$ の次元は、$\overline{M}^{n+k}$ 内の M^n の余次元 k である。

co-index

- $T_p(M)^{\perp}$ のインデックスは、M の余インデックスと呼ばれる。このとき、

2章の補題26より、

→ V のインデックス ν の値は、符号 $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ の負の個数

$$\mathrm{index}(\overline{M}) = \mathrm{index}(M) + \underset{\substack{\| \\ \mathrm{index}(T_p(M)^{\perp})}}{\text{co-index}(M)}$$

である。

- $T_p(M)^\perp$ 内のベクトルは、M に垂直(normal)であると言い、$T_p(M)$ 内のベクトルは M と接して(tangent)いる.

上記の和が直和であるということは、任意の $p \in M$、$x \in T_p(M)$ が次の一意な表示を持つ;

$$x = \tan x + \operatorname{nor} x$$

ここで、$\tan x \in T_p(M)$、$\operatorname{nor} x \in T_p(M)^\perp$ である. 結果として得られる2つの直交射影

$$\tan : T_p(\overline{M}) \longrightarrow T_p(M)$$
$$\operatorname{nor} : T_p(\overline{M}) \longrightarrow T_p(M)^\perp$$

は、明らかに $\mathbb{R}$-線形である.

∵ $u, v \in T_p(\overline{M})$ とする. 定義より、u と v はそれぞれ以下のように分解できる.

$$u = \tan(u) + \operatorname{nor}(u)$$
$$v = \tan(v) + \operatorname{nor}(v)$$

次に $a, b \in \mathbb{R}$ として、$au + bv$ を計算すると、

$$\begin{aligned} au + bv &= a(\tan(u) + \operatorname{nor}(u)) + b(\tan(v) + \operatorname{nor}(v)) \\ &= a\tan(u) + b\tan(v) + a\operatorname{nor}(u) + b\operatorname{nor}(v) \end{aligned}$$

$\tan$ は $T_p(M)$ を抽出する射影(接ベクトルの部分だけ取出す)ので、$\tan(au+bv)$ は、

$$\tan(au+bv) = a\tan(u) + b\tan(v)$$

となり、$\mathbb{R}$ に対して線形である(nor も同様).

- ベクトル場 $Z \in \mathfrak{X}(M)$ が M に対して垂直(normal)であるとは、$p \in M$ に対して各値 Z_p が M に対して垂直であることを指す.

→ そのような Z を全て集めた集合 $\mathfrak{X}(M)^\perp$ は、$\mathfrak{X}(M)$ の部分加群(submodule)である.

- $X \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$ に対して、M の各点で tan と nor を適用させると、ベクトル場 $\tan(X) \in \mathfrak{X}(M)$ と $\mathrm{nor}(X) \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ が得られる。

その結果として得られる直交射影

$$\tan : \overline{\mathfrak{X}}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$
$$\mathrm{nor} : \overline{\mathfrak{X}}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)^{\perp}$$

は、$\mathfrak{F}(M)$－線形であり、恒等式 $X = \tan(X) + \mathrm{nor}(X)$ は、直和 $\overline{\mathfrak{X}}(M) = \mathfrak{X}(M) + \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ から成り立つ。

$\because$ $(f, g \in \mathfrak{F}(M))$

$$fX + gY = f\tan(X) + g\tan(Y) + f\,\mathrm{nor}(X) + g\,\mathrm{nor}(Y)$$

上式の接成分 $\tan(fX + gY)$ は、

$$\tan(fX+gY) = f\tan(X) + g\tan(Y)$$

であり、$\mathfrak{F}(M)$ に対して線形性を持つ。

同様にして法成分 $\mathrm{nor}(fX+gY)$ も、

$$\mathrm{nor}(fX+gY) = f\,\mathrm{nor}(X) + g\,\mathrm{nor}(Y)$$

であるため、$\mathfrak{F}(M)$ に対して線形性を持つ。

※ 以降、この章では V と W は M と接するベクトル場を表し、Z は M と垂直なベクトル場とする。

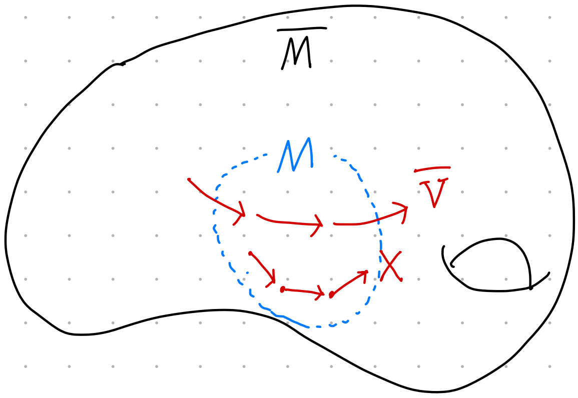
THE INDUCED CONNECTION (誘導接続)

- M が $\overline{M}$ の擬リーマン部分多様体であれば、$\overline{M}$ のレビ・チビタ接続 $\overline{D}$ は自然な方法で $M \subset \overline{M}$ 上の誘導接続 (induced connection) と呼ばれる写像：$\mathfrak{X}(M) \times \overline{\mathfrak{X}}(M) \longrightarrow \overline{\mathfrak{X}}(M)$ を与える。

もし $V \in \mathfrak{X}(M)$、$X \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$ ならば、接続 $\overline{D}_V X$ はまだ意味を持たない。
($\because$ V と X は $\mathfrak{X}(\overline{M})$ に含まれていない)

各 $p \in M$ に対して $\overline{V}$ と $\overline{X}$ を、$\overline{M}$ における p の座標近傍 U 上 V、X の局所的拡張とする。
(local / extension)

そして、各 $U \cap M$ に対して $\overline{D}_V(X)$ を、
「$U \cap M$ への $\overline{D}_{\overline{V}} \overline{X}$ の制限」
と定義する。



1. Lemma

$\overline{D}_V(X)$ は、$\overline{M}$ 上のベクトル場として well-defined である。

Proof

滑らかなベクトル場 $\overline{D}_{\overline{V}} \overline{X}$ の制限として、$\overline{D}_{\overline{V}} \overline{X}\big|_{U \cap M}$ は滑らかである。
したがって、$\overline{D}_V(X)$ がベクトル場 X を拡大した $\overline{X}$ に依らない事を示せばよい。

$\overline{M}$ のベクトル場 $\overline{X}$ を、

$$\overline{X} := \sum_{i=1}^{n} f^i (\partial_i)$$

と書くと、接続 $\overline{D}_V(\overline{X})$ は、

$$\overline{D}_{\overline{V}}(\overline{X}) = \overline{D}_{\overline{V}}\left(\sum_{i=1}^{n} f^i(\partial_i)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \overline{D}_{\overline{V}}\left(f^i(\partial_i)\right)$$

∵接続に関するライプニッツ則 $D_X(fY) = X(f)Y + fD_XY$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\overline{V}(f^i)\partial_i\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(f^i \overline{D}_{\overline{V}}(\partial_i)\right) \cdots ①$$

と表せる。

しかし、点 $q \in U \cap M$ において、$\overline{V}(f^i)$ と $\overline{D}_{\overline{V}}(\partial_i)$ はそれぞれ、

$$\overline{V}(f^i)\big|_q = (\overline{V} f^i)(q)$$

$$= V_q(f^i)$$

$$= V_q\left(f^i\big|_{U \cap M}\right) \cdots ②$$

∵ $q \in (U \cap M) \subseteq M \subset \overline{M}$ より、$\overline{V}\big|_q = V$ である。

$$\overline{D}_{\overline{V}}(\partial_i)\big|_q = \overline{D}_{V_q}(\partial_i) \cdots ③$$

である。①, ②, ③ より、点 q における $\overline{D}_{\overline{V}}(\overline{X})$ は、

$$\overline{D}_{\overline{V}}(\overline{X})\big|_q = \sum_{i=1}^{n} V_q\left(f^i\big|_{U \cap M}\right)\partial_i + \sum_{i=1}^{n} f^i\big|_{U \cap M}\overline{D}_{V_q}(\partial_i)$$

である。右辺の各項は V と X にのみ依存していることから、X から拡張されたベクトル場 $\overline{X}$ の共変微分を計算しても、その計算結果を M 上に制限すれば $\overline{D}_{\overline{V}}(\overline{X})$ と $\overline{D}_V(X)$ の結果は同じとなる。

よって、M 上で共変微分が一意に定義されているので、$\overline{D}_V(X)$ は well-defined である。∎

- 誘導された接続 $\overline{D}$ は、

$$\overline{D} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

であり、$\overline{M}$ のレビ・チビタ接続と深く関連している。(そのため、両方に同じ記法)

特に誘導接続は5つの性質を持つ。

2. Corollary

$\overline{D}$ を $M \subset \overline{M}$ の誘導接続とする. $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ および $X, Y \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$ ならば、以下 (A1) から (A5) が成り立つ.

(A1) $\overline{D}_V(X)$ は V 上の $\mathfrak{F}(M)$-線形である.

(A2) $\overline{D}_V(X)$ は X 上の $\mathbb{R}$-線形である.

(A3) $f \in \mathfrak{F}(M)$ に対して、

$$\overline{D}_V(fX) = VfX + f\overline{D}_V(X)$$

である. (ライプニッツ則)

(A4) $[V, W] = \overline{D}_V(W) - \overline{D}_W(V)$ (ねじれ無し)

(A5) $V\langle X, Y\rangle = \langle \overline{D}_V(X), Y\rangle + \langle X, \overline{D}_V(Y)\rangle$

Proof

各点 $p \in M$ に対して、全てのベクトル場と写像を、$\overline{M}$ 内の p 近傍に延長する. すると、対応する5つの性質は、$\overline{M}$ のレビ・チビタ接続に対して成り立つ.

→ $\overline{M}$ のレビ・チビタ接続を M に制限することで、次の (a)、(b)、(c) が成り立つ;

(a) $(\overline{D}_{\overline{V}}\overline{X})|_M = \overline{D}_V(X)$ (∵ 補題1より)

(b) $\overline{V}\overline{f}|_M = Vf$

(c) $\langle \overline{X}, \overline{Y}\rangle|_M = \langle X, Y\rangle$

さらに、1章の命題32によって、

→ P: M の部分多様体、$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ のとき、
$[X, Y]|_P = [X|_P, Y|_P]$

(d) $[\overline{V}, \overline{W}]\big|_M = [V, W]$

である。よって、$\overline{M}$ に関するレビ・チビタ接続 $\overline{D}$ の定義を書き直せば、(A1)〜(A5) の主張が得られる。■

(確認する)

(A1) $D_{fX+gY}(V) = fD_X(V) + gD_Y(V)$ を $\overline{M}$ のレビ・チビタ接続について考えると、

$$\overline{D}_{\overline{fX+gY}}(\overline{V})\big|_M = \overline{f}\,\overline{D}_{\overline{X}}(\overline{V})\big|_M + \overline{g}\,\overline{D}_{\overline{Y}}(\overline{V})\big|_M$$

$\Rightarrow \overline{D}_{fX+gY}(V) = f\overline{D}_X(V) + g\overline{D}_Y(V)$ である。 ($\because$ (a)、(b) より)

(A2) $D_X(aY+bV) = aD_X(Y) + bD_X(V)$ を $\overline{M}$ のレビ・チビタ接続について考えると、

$$\overline{D}_{\overline{X}}(\overline{aY+bV})\big|_M = a\overline{D}_{\overline{X}}(\overline{Y})\big|_M + b\overline{D}_{\overline{X}}(\overline{V})\big|_M$$

$\Rightarrow \overline{D}_X(aY+bV) = a\overline{D}_X(Y) + b\overline{D}_X(V)$ である。 ($\because$ (a) より)

(A3) $D_V(fX) = V(f)X + fD_V(X)$ を $\overline{M}$ のレビ・チビタ接続について考えると、

$$\overline{D}_{\overline{V}}(\overline{fX})\big|_M = \overline{V}(\overline{f})\overline{X}\big|_M + \overline{f}\,\overline{D}_{\overline{V}}(\overline{X})\big|_M$$

$\Rightarrow \overline{D}_V(fX) = V(f)X + f\overline{D}_V(X)$ である。 ($\because$ (a)、(b) より)

(A4) $[V, W] = D_V(W) - D_W(V)$ を $\overline{M}$ のレビ・チビタ接続について考えると、

$$[\overline{V}, \overline{W}]\big|_M = \overline{D}_{\overline{V}}(\overline{W})\big|_M - \overline{D}_{\overline{W}}(\overline{V})\big|_M$$

$\Rightarrow [V, W] = \overline{D}_V(W) - \overline{D}_W(V)$ である。 ($\because$ (a)、(d) より)

(A5) $V\langle X, Y\rangle = \langle D_V(X), Y\rangle + \langle X, D_V(Y)\rangle$ を $\overline{M}$ のレビ・チビタ接続について考えると、

$$\overline{V}\langle\overline{X}, \overline{Y}\rangle\big|_M = \langle\overline{D}_{\overline{V}}(\overline{X}), \overline{Y}\rangle\big|_M + \langle\overline{X}, \overline{D}_{\overline{V}}(\overline{Y})\rangle\big|_M$$

$\Rightarrow V\langle X, Y\rangle = \langle\overline{D}_V(X), Y\rangle + \langle X, \overline{D}_V(Y)\rangle$ である。 ($\because$ (a)、(c) より)

※ 2. Corollary から分かること

∇ と W がどちらも M に接していても、共変微分 $\overline{D}_V(W)$ が M に接している必要は無い。

次に、$\tan(\overline{D}_V W)$ と $\mathrm{nor}(\overline{D}_V W)$ を考える。

3. Lemma

$M \subset \overline{M}$ に対して $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ ならば

$$D_V(W) = \tan(\overline{D}_V(W))$$

である。D は M のレビ・チビタ接続とする。

Proof

任意のベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して、ベクトル場 X, V, W を局所的に延長して、さらにコシュール方程式

$$2\langle \overline{D}_{\overline{V}}(\overline{W}), \overline{X} \rangle = F(\overline{V}, \overline{W}, \overline{X})$$

を書き出す $\Big(F(\overline{V}, \overline{W}, \overline{X}) = \overline{V}\langle \overline{W}, \overline{X} \rangle + \overline{W}\langle \overline{V}, \overline{X} \rangle - \overline{X}\langle \overline{V}, \overline{W} \rangle + \langle [\overline{V}, \overline{W}], \overline{X} \rangle - \langle [\overline{W}, \overline{X}], \overline{V} \rangle + \langle [\overline{X}, \overline{V}], \overline{W} \rangle \Big)$

M への制限を考えると、$\langle \overline{D}_{\overline{V}}(\overline{W}), \overline{X} \rangle$ は $\langle D_V(W), X \rangle$ となり、補題2で登場した性質 (a)〜(d):

(a) $(\overline{D}_{\overline{V}}\overline{X})\big|_M = D_V(X)$　　(c) $\langle \overline{X}, \overline{Y} \rangle\big|_M = \langle X, Y \rangle$

(b) $\overline{V}\overline{f}\big|_M = Vf$　　(d) $[\overline{V}, \overline{W}]\big|_M = [V, W]$

を満たす。以上の性質より、$F(\overline{V}, \overline{W}, \overline{U})\big|_M = F(V, W, U)$ である。
したがって、

$$\langle \overline{D}_V(W), X \rangle = \langle D_V(W), X \rangle$$

となる。X が M と接しているので $\overline{D}_V(W)$ を $\tan(\overline{D}_V(W))$ に置き換えることができ、結論の等式 $\left(D_V(W) = \tan(\overline{D}_V(W)) \right)$ が得られる。▨

次に $\mathrm{nor}(\overline{D}_V(W))$ に関する補題を考える。

4. Lemma

以下のような写像 $\mathrm{II} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ を考える。

$$\mathrm{II}(V, W) := \mathrm{nor}\left(\overline{D}_V(W)\right)$$

このとき、$\mathrm{II}(V, W)$ は $\mathfrak{F}(M)$-双線形 かつ 対称 である。

$$\begin{cases} \mathrm{II}(V_1 + V_2, W) = \mathrm{II}(V_1, W) + \mathrm{II}(V_2, W) \\ \mathrm{II}(cV, W) = c\,\mathrm{II}(V, W) \end{cases}$$

※ II は $M \subset \overline{M}$ の形状テンソル (shape tensor) または第二基本形式テンソルと呼ばれる。

Proof

$\overline{D}_V(W)$ は V 上で $\mathfrak{F}(M)$-線形で、W 上で $\mathbb{R}$-線形であるので、$\mathrm{II}(V, W)$ も同様の性質を持つ。つまり、$\mathrm{II}(V, W_1 + W_2)$ と $\mathrm{II}(V_1 + V_2, W)$ は

$$\mathrm{II}(V, W_1 + W_2) = \mathrm{II}(V, W_1) + \mathrm{II}(V, W_2)$$

$$\mathrm{II}(V_1 + V_2, W) = \mathrm{II}(V_1, W) + \mathrm{II}(V_2, W)$$

である。次に、$\mathrm{II}(V, fW)$ および $\mathrm{II}(fV, W)$ を確認する。任意の $f \in \mathfrak{F}(M)$ に対して、

$$\overline{D}_V(fW) = VfW + f\overline{D}_V(W) \cdots ① \quad (\because \text{共変微分のライプニッツ則})$$

である．W は M と接しており、射影 nor は $\mathfrak{F}(M)$-線形であるため、
$\mathrm{I\!I}(V, fW)$ と $\mathrm{I\!I}(fV, W)$ はそれぞれ、

∵ ① および nor の線形性

$$\mathrm{I\!I}(V, fW) = \mathrm{nor}(\overline{D}_V(fW)) = f\,\mathrm{nor}(\overline{D}_V(W)) = f\,\mathrm{I\!I}(V, W)$$

∵ 共変微分の関数に関する線形性

$$\mathrm{I\!I}(fV, W) = \mathrm{nor}(\overline{D}_{fV}(W)) = f\,\mathrm{nor}(\overline{D}_V(W)) = f\,\mathrm{I\!I}(V, W)$$

である．これで $\mathfrak{F}(M)$-双線形性を示した …②

次に、対称性 ($\mathrm{I\!I}(V, W) = \mathrm{I\!I}(W, V)$) を確認する．
$\mathrm{I\!I}(V, W) - \mathrm{I\!I}(W, V)$ を計算すると、

$$\begin{aligned}\mathrm{I\!I}(V, W) - \mathrm{I\!I}(W, V) &= \mathrm{nor}(\overline{D}_V(W)) - \mathrm{nor}(\overline{D}_W(V)) \\ &= \mathrm{nor}(\overline{D}_V(W) - \overline{D}_W(V)) \\ &= \mathrm{nor}([V, W]) \\ &= 0 \quad \cdots ③\end{aligned}$$

∵ tan と nor は $\mathbb{R}$-線形

∵ V と W が共に M と接する
→ $[V, W]$ も M と接する
→ $[V, W]$ の法線方向の成分 $= 0$.

②, ③ より、$\mathrm{I\!I}(V, W)$ が $\mathfrak{F}(M)$-双線形かつ対称であることを示した ■

※ 補題4 で定義した $\mathrm{I\!I}$ について

- $\mathrm{I\!I}$ の値は $\mathfrak{X}(M)^{\perp}$ に属するため、2章で定義したテンソル場よりも
  more general
  一般的な(?) テンソル場である。

  K を環、r と s を自然数、V^* を V の双対空間とする。
  K-双線形写像 A を
  $$A : (V^*)^r \times V^s \longrightarrow K$$
  とするとき、A を V の (r, s) 型テンソルという。

- $\mathrm{I\!I}$ の $\mathfrak{F}(M)$-双線形より、2章の命題2 のような 点ごとの 性質を持っている。
  pointwise

  $p \in M$、$A \in \mathfrak{I}^r_s(M)$ とする。$\overline{\theta}^i|_p = \theta^i|_p$ と $\overline{X}_j|_p = X_j|_p$
  を満たしているとき、
  $$A(\overline{\theta}^1, \cdots, \overline{\theta}^r, \overline{X}_1, \cdots \overline{X}_s)(p) = A(\theta^1, \cdots, \theta^r, X_1, \cdots, X_s)(p)$$
  である。

$\longrightarrow$ したがって、$p \in M$ では、$\mathrm{I\!I}$ は以下のような $\mathbb{R}$-双線形写像を定義する。

$$\begin{array}{ccccc} T_p(M) & \times & T_p(M) & \longrightarrow & T_p(M)^{\perp} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ v & \times & w & \longmapsto & \mathrm{I\!I}(v, w) = \mathrm{nor}(\overline{D}_v(w)) \end{array}$$

- 先ほどの補題3と4は、次の式でまとめられる。

$$\overline{D}_V(W) = \underbrace{D_V(W)}_{M\text{と接している部分}} + \underbrace{\mathrm{I\!I}(V, W)}_{M\text{と垂直な部分}} \qquad (V, W \in \mathfrak{X}(M))$$

この分解は基本的な曲率の結果(ガウス方程式)につながる。

5. Theorem

M を $\overline{M}$ の擬リーマン部分多様体とする。

R および $\overline{R}$ を、M と $\overline{M}$ のリーマン曲率テンソル、$\mathrm{I\!I}$ を形状テンソル (shape tensor)（第二基本形式）とする。

すべての M と接するベクトル場 V, W, X, Y に対して、

$$\langle R_{VW}(X), Y\rangle = \langle \overline{R}_{VW}(X), Y\rangle + \langle \mathrm{I\!I}(V, X), \mathrm{I\!I}(W, Y)\rangle - \langle \mathrm{I\!I}(V, Y), \mathrm{I\!I}(W, X)\rangle$$

が成り立つ。

Proof

局所座標系を適切に選ぶことで、$[V, W] = 0$（ねじれ無し）と仮定できる。したがって、$\langle \overline{R}_{VW}(X), Y\rangle$ は、

$$\langle \overline{R}_{VW}(X), Y\rangle = -(VW) + (WV) \quad \cdots ①$$

である

$$\left((VW) := \langle \overline{D}_V(\overline{D}_W(X)), Y\rangle = \langle \overline{D}_V(D_W(X)), Y\rangle + \langle \overline{D}_V(\mathrm{I\!I}(W, X)), Y\rangle \right).$$

$\because$ $\overline{D}_W(X) = D_W(X) + \mathrm{I\!I}(W, X)$ および、共変微分の線形性より、

$$\langle \overline{D}_V(D_W(X) + \mathrm{I\!I}(W, X)), Y\rangle = \langle \overline{D}_V(D_W(X)), Y\rangle + \langle \overline{D}_V(\mathrm{I\!I}(W, X)), Y\rangle$$

※ ① について、等式が成り立つことを確認する。

リーマン曲率テンソル $R_{XY}(Z)$ は、$(X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M))$

$$R_{XY}(Z) := D_{[X,Y]}(Z) - (D_X D_Y(Z) - D_Y D_X(Z))$$

であるため、本補題で登場する $\overline{R}_{VW}(X)$ は、

$$\overline{R}_{VW}(X) = \underbrace{\overline{D}_{[V,W]}(X)}_{=0\ (\because [V,W]=0)} - \overline{D}_V(\overline{D}_W(X)) + \overline{D}_W(\overline{D}_V(X))$$

である。よって、$\langle \overline{R}_{VW}(X), Y\rangle$ は、

$$\begin{aligned}\langle \bar{R}_{VW}(X), Y\rangle &= \langle -\bar{D}_V(\bar{D}_W(X)) + \bar{D}_W(\bar{D}_V(X)), Y\rangle \\ &= \langle -\bar{D}_V(\bar{D}_W(X)), Y\rangle + \langle \bar{D}_W(\bar{D}_V(X)), Y\rangle \\ &= -(VW) + (WV)\end{aligned}$$

と表せる。

次に、$(VW) = \langle \bar{D}_V(D_W(X)), Y\rangle + \langle \bar{D}_V(\mathrm{I\!I}(W, X)), Y\rangle$

の式変形を考える。

共変微分の性質 $Z\langle X, Y\rangle = \langle D_Z(X), Y\rangle + \langle X, D_Z(Y)\rangle$ について、

X を $\mathrm{I\!I}(W, X)$、
Z を V、
D を $\bar{D}$

に置き換えると、

$$V\langle \mathrm{I\!I}(W, X), Y\rangle = \langle \bar{D}_V(\mathrm{I\!I}(W, X)), Y\rangle + \langle \mathrm{I\!I}(W, X), \bar{D}_V(Y)\rangle$$

$$\Longleftrightarrow \langle \bar{D}_V(\mathrm{I\!I}(W, X)), Y\rangle = V\langle \mathrm{I\!I}(W, X), Y\rangle - \langle \mathrm{I\!I}(W, X), \bar{D}_V(Y)\rangle \quad \cdots ②$$

である。

また、$\langle \bar{D}_V(D_W(X)), Y\rangle$ について、M は $\bar{M}$ の擬リーマン部分多様体であることから、$\bar{D}$ を D に置き換えてよく、

$$\langle \bar{D}_V(D_W(X)), Y\rangle = \langle D_V(D_W(X)), Y\rangle \quad \cdots ③$$

と変形できる。

②、③ および「$\mathrm{I\!I}(W, X)$ は M と normal 法である」ことから、(VW) は次のようになる。

$$\begin{aligned}(VW) &= \langle D_V(D_W(X)), Y\rangle + V\underbrace{\langle \mathrm{I\!I}(W, X), Y\rangle}_{0\ (\because Y \text{は} M \text{と接している})} - \langle \mathrm{I\!I}(W, X), \bar{D}_V(Y)\rangle \\ &= \langle D_V(D_W(X)), Y\rangle - \langle \mathrm{I\!I}(W, X), \mathrm{I\!I}(V, Y)\rangle \quad \cdots ④\end{aligned}$$

$\because \bar{D}_V(Y) = D_V(Y) + \mathrm{I\!I}(V, Y)$

および、法線成分のみ考えた。

以上より、①、④を用いて、

$$\langle \overline{R}_{vw}(X), Y\rangle = -(VW) + (WV)$$
$$= -\langle D_v(D_w(X)), Y\rangle + \langle \mathrm{I\!I}(w,X), \mathrm{I\!I}(v,Y)\rangle$$
$$+ \langle D_w(D_v(X)), Y\rangle - \langle \mathrm{I\!I}(v,X), \mathrm{I\!I}(w,Y)\rangle$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\langle D_w(D_v(X)), Y\rangle - \langle D_v(D_w(X)), Y\rangle}_{=\langle R_{vw}(X), Y\rangle} = \langle \overline{R}_{vw}(X), Y\rangle + \langle \mathrm{I\!I}(v,X), \mathrm{I\!I}(w,Y)\rangle - \underbrace{\langle \mathrm{I\!I}(w,X), \mathrm{I\!I}(v,Y)\rangle}_{=\langle \mathrm{I\!I}(v,Y), \mathrm{I\!I}(w,X)\rangle}$$

である。よって、$\langle R_{vw}(X), Y\rangle = \langle \overline{R}_{vw}(X), Y\rangle + \langle \mathrm{I\!I}(v,X), \mathrm{I\!I}(w,Y)\rangle - \langle \mathrm{I\!I}(v,Y), \mathrm{I\!I}(w,X)\rangle$

を示した■

※補題5について

ベクトル場を接ベクトルに置き換えても成立する。

→ 3章の補題39の公式に代入することで、「Mの断面曲率K」と「$\overline{M}$の断面曲率$\overline{K}$」の関係式が得られる。

$$\hookrightarrow K(v,w) = \frac{\langle R_{vw}(v), w\rangle}{\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2}$$

6. Corollary

ベクトルv, wがM上の非退化な接平面の基底を成すとき、

$$K(v,w) = \overline{K}(v,w) + \frac{\langle \mathrm{I\!I}(v,v), \mathrm{I\!I}(w,w)\rangle - \langle \mathrm{I\!I}(v,w), \mathrm{I\!I}(v,w)\rangle}{\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2}$$

が成立する。

Proof

断面曲率の公式

$$K(v,w)=\frac{\langle R_{vw}(v),w\rangle}{\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle-\langle v,w\rangle^2}$$

$$\overline{K}(v,w)=\frac{\langle \overline{R}_{vw}(v),w\rangle}{\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle-\langle v,w\rangle^2}$$

および、補題5より

$$\langle R_{vw}(v),w\rangle=\langle \overline{R}_{vw}(v),w\rangle+\langle \mathrm{II}(v,v),\mathrm{II}(w,w)\rangle-\underbrace{\langle \mathrm{II}(w,v),\mathrm{II}(v,w)\rangle}_{=\langle \mathrm{II}(v,w),\,\mathrm{II}(w,v)\rangle}$$

(内積の対称性)

であるため、

$$\begin{aligned}K(v,w)&=\frac{\langle R_{vw}(v),w\rangle}{\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle-\langle v,w\rangle^2}\\&=\frac{\langle \overline{R}_{vw}(v),w\rangle}{\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle-\langle v,w\rangle^2}+\frac{\langle \mathrm{II}(v,v),\mathrm{II}(w,w)\rangle-\langle \mathrm{II}(v,w),\mathrm{II}(w,v)\rangle}{\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle-\langle v,w\rangle^2}\\&=\overline{K}(v,w)+\frac{\langle \mathrm{II}(v,v),\mathrm{II}(w,w)\rangle-\langle \mathrm{II}(v,w),\mathrm{II}(v,w)\rangle}{\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle-\langle v,w\rangle^2}\end{aligned}$$

が成り立つ ■

※ 6. Corollary の応用

standard sphere

半径 r の標準球面 $S^n(r)$ が $n\geq 2$ のとき、一定な断面曲率

$$K=\frac{1}{r^2}$$

を持つことを示す。

$\mathbb{R}^{n+1}$ の位置ベクトル場 $P:=\sum_{i=1}^{n}u^i\partial_i$ は各点における標準球面 $S^n(r)\subset\mathbb{R}^{n+1}$ において法線である。$\overline{D}$ が $\mathbb{R}^{n+1}$ の接続であるとき、任意のベクトル場 X に対して、

$$\overline{D}_X(P)=\overline{D}_X\left(\sum_{i=1}^{n}u^i\partial_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\overline{D}_X(u^i\partial_i)=\sum_{i=1}^{n}Xu^i\partial_i=X$$

∵共変微分の定義

である。

球面の形状テンソル $\mathrm{II}(V,W)$ は、以下の形である。

$$\mathrm{II}(V,W)=\mathrm{nor}\left(\overline{D}_V(W)\right)=-\frac{1}{r}\langle V,W\rangle U\quad\left(U:=\frac{P}{r}\text{ とした}\right)$$

?

ここで、$U = \frac{p}{r}$ は $S^n(r)$ 上の外向き単位法線ベクトルであるため、

$$K(v,w) = \underset{\text{∵ ユークリッド空間内の曲率は0.}}{0} + \frac{\langle -\frac{1}{r}\langle v,v\rangle U, -\frac{1}{r}\langle w,w\rangle U\rangle - \langle -\frac{1}{r}\langle v,w\rangle U, -\frac{1}{r}\langle v,w\rangle U\rangle}{\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{r^2}\langle\langle v,v\rangle U, \langle w,w\rangle U\rangle - \frac{1}{r^2}\langle\langle v,w\rangle U, \langle v,w\rangle U\rangle}{\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2}$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\langle\langle v,v\rangle U, \langle w,w\rangle U\rangle - \langle\langle v,w\rangle U, \langle v,w\rangle U\rangle}{\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2}$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2}{\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2}$$

∵ U は単位法ベクトルより、$\langle U, U\rangle = 1$.

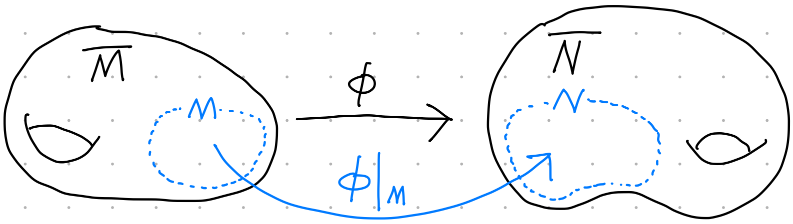
$$= \frac{1}{r^2}.$$

- M が $\overline{M}$ の擬リーマン部分多様体である場合、M の通常(usual)の幾何学は、「M の内在的幾何学(intrinsic geometry)」と呼ばれる。

→ M が $\overline{M}$ に含まれていることに依存しないことを強調。

「M の外在的幾何学(extrinsic geometry)」とは、$\overline{M}$ 内の観測者から見た M の幾何的性質のこと。

- $M \subset \overline{M}$ から $N \subset \overline{N}$ への対等長変換(pair isometry)とは、$\overline{M}$ から $\overline{N}$ への等長変換 ϕ であって、写像の制限 $\phi|_M$ が M から N への等長変換になるものを言う。



$\overline{M} = \overline{N}$ のとき、ϕ は M から N への合同変換(congruence)とよばれる。

- 対等長変換によって保存される M の特徴のうち、M の内在的幾何学に属さないものは、外在的幾何学を構成する。

たとえば、$M \subset \overline{M}$ の形状テンソル $\mathrm{I\!I}$ は、外在的不変量(extrinsic invariant)である。

- $\mathrm{I\!I}$ は $\mathfrak{X}(M)^{\perp}$ に値を持つ $(0,2)$ テンソルであるため、
  計量的に縮約されることで M 上の法ベクトルを得ることができる。

→ $n\ (=\dim M)$ で割ることにより、$M \subset \overline{M}$ の「平均ベクトル場 H」を得ることができる。$p \in M$ において、H_p は

$$H_p := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\varepsilon_i \mathrm{I\!I}(e_i, e_i)}_{\text{各フレーム毎の符号つき法曲率ベクトル}} \quad (e_1, \cdots, e_n \text{ は } p \in M \text{ における任意のフレーム})$$

フレーム → $T_p(M)$ の正規直交基底

である。

7. Lemma

P102

$M \subset \overline{M}$ から $N \subset \overline{N}$ への対等長変換 ϕ は、形状テンソルを保存する。(pair isometry)
つまり、

$$d\phi(\mathrm{I\!I}(v, w)) = \mathrm{I\!I}(d\phi(v), d\phi(w))$$

が、全ての $p \in M$、$v, w \in T_p(M)$ で成立する。

Proof

$V, W \in \mathfrak{X}(M)$ とする。$\phi|_M : M \to N$ は diffeo であるため、$d\phi(V)$ と $d\phi(W)$ は $\mathfrak{X}(N)$ に属する。$(d\phi(V), d\phi(W) \in \mathfrak{X}(N))$

$\phi : \overline{M} \to \overline{N}$ は接続を保存するため、
↳ ∵ 等長変換は接続を保存する(P90)

$$d\phi(\overline{D}_V(W)) = \overline{D}_{d\phi(V)}(d\phi(W)) \quad \cdots ①$$

である。各 $p \in M$ に対して、線形な等長変換 $d\phi : T_p(\overline{M}) \to T_p(\overline{N})$ は、

- $T_p(M)$ を $T_p(N)$ へ、(接成分)
- $T_p(M)^{\perp}$ を $T_p(N)^{\perp}$ へ (法成分)

写す。したがって、$d\phi$ は「接成分」と「法成分」を保存する。
したがって、$d\phi(\mathrm{I\!I}(v, w))$ は、

$$d\phi(\mathrm{II}(v,w)) = d\phi(\mathrm{nor}(\overline{D}_v W)) = \mathrm{nor}(d\phi(\overline{D}_v W))$$

∵ IIの定義　∵ dφは法成分を保存

$$= \mathrm{nor}(\overline{D}_{d\phi(v)}(d\phi(w))) \quad ∵ ①より$$

$$= \mathrm{II}(d\phi(v), d\phi(w)) \quad ∵ \mathrm{II}の定義$$

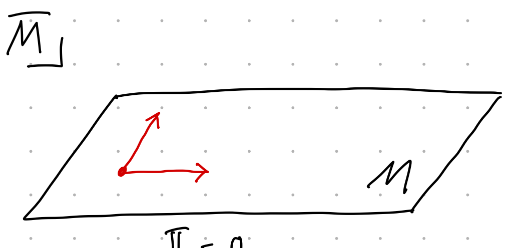
よって、$d\phi(\mathrm{II}(v,w)) = \mathrm{II}(d\phi(v), d\phi(w))$ が成立することを示した ■

※ 補題7 から分かること

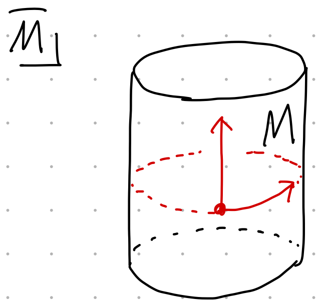
形状テンソル II は、M に対して内在的ではない。

→ たとえば、R^3 における紙片 (piece of paper) が 異なる形（平面や円筒など）を作って R^3 の

等長な部分多様体を表すとき、紙片が平坦な場合は $\mathrm{II}=0$ だが、
曲がっていたらその限りではない。



$\mathrm{II}=0$



$\mathrm{II}\neq 0$