・Theorem 4 の Proof (途中)

Thm IV N_f : $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ の合同類の数

(d) 〃 〃

$\Rightarrow N_f \neq 3$ であり.

(1) $N_f = 4 \iff C, ds^2$ はどちらも symmetry をもたない.

(2) $N_f = 1 \iff$ 次のいずれか!

- (a1) C: 平面内. かつ $\exists T$: ori-reversing symmetry (of C)
- (a2) C: 平面内. かつ $\exists \varphi$: effective 〃 (of ds^2)
- (b1) ds^2: non-eff. かつ $\exists T$: ori-reversing symmetry (of C).
- (b2) 〃 〃 $\exists \varphi$: effective 〃 (of ds^2).
- (c) Prop 5.1 と同じ
- (d) 〃

Prop 5.1 の (3,4)-CE 版

f と $\check{f}$ が合同

$\iff$

- (a) C が平面曲線.
- (b) ds^2_f が non-effective symmetry をもつ.
- (c) C : 正の ori-reversing sym. をもつ.
  ds^2_f : ori-reversing effective sym. をもつ.
- (d) C : 負の ori-reversing sym. をもつ.
  ds^2_f : ori-preserving effective sym. をもつ.

HW 7/25のノート(pdfファイル)の $\boxed{\text{命題2.1}}$ を用いて示す.

← これも示す.

Thm IV N_f : $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ の合同類の数

(d) 〃 〃

$\Rightarrow N_f \neq 3$ であり、

(1) $N_f = 4 \iff C, ds^2$ はどちらも symmetry をもたない.

(2) $N_f = 1 \iff$ 次のいずれか.

- (a1) C: 平面内, かつ $\exists T$: ori-reversing symmetry (of C)
- (a2) C: 平面内, かつ $\exists \varphi$: effective 〃 (of ds^2)
- (b1) ds^2: non-eff. かつ $\exists T$: ori-reversing symmetry (of C).
- (b2) 〃 〃 $\exists \varphi$: effective 〃 (of ds^2).
- (c) Prop 5.1 と同じ
- (d) 〃

$\boxed{(a1)}$ が成り立っていると仮定する。つまり、$\exists S \in O(3)$: ori-preserving, $T \in O(3)$, ori-reversing

- Prop 5.1 より、f と $\check{f}$ は合同. ($\check{f} = S \circ f$)
- $S \circ T \circ f$ と $T \circ f$ は共に第一基本形式が f と等しい ($\because$ S, T は共に isometry より). また、それぞれの特異集合 ($\{v=0\}$) は

$$S \circ T \circ f(u,0) = S\mathbb{C}(-u) = \mathbb{C}(-u) \quad (=: \mathbb{C}_*(u))$$
$$T \circ f(u,0) = \mathbb{C}(-u).$$

であるため、$S \circ T \circ f = f_*$ または $\check{f}_*$, $T \circ f = \check{f}_*$ または f_* となる.

(いつどちらと等しくなるかは、定理4の証明には不要)

- $T \circ f$ が f_* または $\check{f}_*$ ~~と等しいことを示す~~ になる条件を調べる. $g := T \circ f$ として、g の単位法ベクトル場を $\nu_g(u,v)$ とすると、

$$\det(g_u, g_v, \nu_g)(u,v) = \det(T \circ f_u, T \circ f_v, \nu_g)(u,v)$$
$$= \underbrace{\sigma_T(\det T)}_{=1} \det(f_u, f_v, \nu_f)(u,v)$$
$$= \lambda(u,v) \geq 0.$$

$\nu_g = \sigma_T T \nu_f$ を代入. ($\sigma_T := \det T$)

よって、$\nu_g = \sigma T \nu_f$ は向きを同調した g の単位法ベクトル場である. f, g のカスプ方向をそれぞれ x_g, x_f とすると、

$$x_g(u) := \hat{\nu}_g(u) \times \mathbb{C}'_*(u)$$

$\mathbb{C}_*(u) = T\mathbb{C}(u)$ より.

$$= \nu_g(u,0) \times \left(T\mathbb{C}'(u)\right)$$

$$= \sigma_T T \nu_f(u,0) \times \left(T\mathbb{C}'(u)\right)$$

$$= \underbrace{\sigma_T(\det T)}_{=1} T\left(\hat{\nu}_f(u) \times \mathbb{C}'(u)\right)$$

$$= T\,\mathbb{x}_f(u). \quad \cdots (a1.1)$$

gの特異曲線 $\mathbb{C}(-u)$ に対応するフレネ枠は $\{-\mathbb{e}(-u),\ \mathbb{n}(-u),\ -\mathbb{b}(-u)\}$ であるため、$\mathbb{x}_g$ はカスプ角 θ_g とフレネ枠を用いて

$$\mathbb{x}_g(u) = \cos\theta_g(u)\,\mathbb{n}(-u) \ \underset{\sim}{+}\ \sin\theta_g(u)\,\mathbb{b}(-u) \quad \cdots (a1.2)$$

と表されることに注意する。(a1.1) に $\mathbb{x}_f$ を代入すると、

$$\mathbb{x}_g(u) = \cos\theta_f(u)\,T\mathbb{n}(u) - \sin\theta_f(u)\,T\mathbb{b}(u)$$

となる。$u=0$ として 20250725-CE-symmetry.pdf の 補題1.2 を用いると、

$$\mathbb{x}_g(0) = \cos\theta_f(0)\,\mathbb{n}(0) + \sigma\sin\theta_f(0)\,\mathbb{b}(0)$$

$$= \cos\big(\underbrace{\sigma\theta_f(0)}_{=\theta_g(0)}\big)\,\mathbb{n}(0) + \sin\big(\underset{\sim}{\sigma\theta_f(0)}\big)\,\mathbb{b}(0).$$

よって、(a1.2) と比較すると $\theta_g(0) = \sigma\theta_f(0)$ であり、$\sigma \in \{-1, 1\}$ より

$\sigma_T = 1$ ならば、$(g=)\ T\circ f = f_*$. ($\because$ f_* は f とカスプ角の符号が等しい)

$\sigma_T = -1$ ならば、$T\circ f = \check{f}_*$ $\cdots (a1.3)$

である。

- $S\circ T\circ f$ について、$g := S\circ T\circ f$ として同様に単位法ベクトル場 $\nu_g(u,v)$ を考えると、

$$\det(g_u, g_v, \nu_g)(u,v) = \det(S\circ T\circ f_u,\ S\circ T\circ f_v,\ \nu_g)(u,v)$$

$\nu_g = \sigma_S\sigma_T ST\nu_f$ を代入。

$$= \cancel{\sigma_S}\cancel{\sigma_T}(\cancel{\det}S)(\cancel{\det}T)\det(f_u, f_v, \nu_f)(u,v)$$

$(\sigma_S := \det S,\ \sigma_T := \det T)$

$$= \lambda(u,v) \geq 0.$$

よって、$\nu_g = \sigma_S\sigma_T ST\nu_f$ は向きを同調した g の単位法ベクトル場である。
次に、fとgのカスプ方向を $\mathbb{x}_f$, $\mathbb{x}_g$ とすると、

$$\mathcal{X}_g(u) := \hat{\nu}_g(u) \times \mathbb{C}_*'(u) \quad \curvearrowright \mathbb{C}_*(u) = ST\,\mathbb{C}(u) \text{ より}$$

$$= \sigma_S \sigma_T ST\, \nu_f(u,0) \times (ST\,\mathbb{C}'(u))$$

$$= \cancel{\sigma_S}\, \cancel{\sigma_T} (\cancel{\det} S)(\cancel{\det} T)\, ST\, (\hat{\nu}_f(u) \times \mathbb{C}'(u))$$

$$= ST\, \mathcal{X}_f(u) \quad \cdots (a1.4).$$

$\mathcal{X}_g$ は (a1.2) のように表されることに注意して、(a1.4) に $\mathcal{X}_f$ を代入すると、

$$\mathcal{X}_g(u) = \cos\theta_f(u)\, ST\, \mathbb{n}(u) - \sin\theta_f(u)\, ST\, \mathbb{b}(u).$$

$u=0$ として 20250725-CE-symmetry.pdf の 補題1.2 および、補題1.2 の ori-preserve symmetry 版 を 代入すると、

※

$$\mathcal{X}_g(0) = \cos\theta_f(0)\, \mathbb{n}(0) + \sigma_S \sigma_T \sin\theta_f(0)\, \mathbb{b}(0)$$

$$= \cos(\underbrace{\sigma_S \sigma_T \theta_f(0)})\, \mathbb{n}(0)$$

$$+ \sin(\underbrace{\sigma_S \sigma_T \theta_f(0)}_{\theta_g})\, \mathbb{b}(0).$$

※ C が orientation-preserving symmetry S をもつとき、

$$S\mathbb{e}(0) = \mathbb{e}(0),$$
$$S\mathbb{n}(0) = \mathbb{n}(0),$$
$$S\mathbb{b}(0) = \sigma_S \mathbb{b}(0)$$

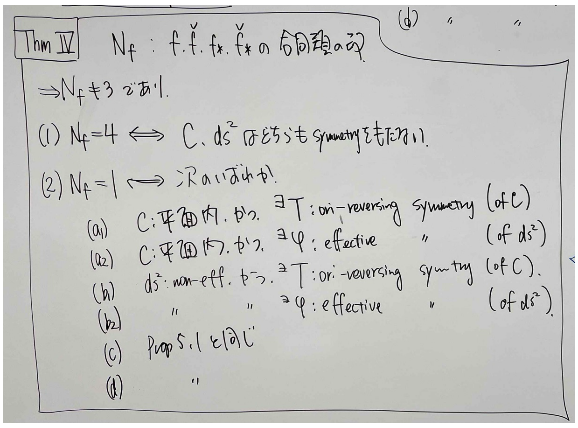
が成り立つ。

ori-preserving symmetry は 平面曲線 が 乗った 平面の 折返しであるため、行列式 の 値 は -1. $\therefore \sigma_S = -1$.

$$\sigma_T = 1 \text{ ならば、} S \circ T \circ f = \check{f}_*$$
$$\sigma_T = -1 \text{ ならば、} S \circ T \circ f = f_*. \quad \cdots (a1.5)$$

(a1.3) および (a1.5) より、f は $\check{f}$、f_*、$\check{f}_*$ の いずれとも合同 であるため、$N_f = 1$.

$\therefore$ (a1) が 成り立つ $\Longrightarrow$ $N_f = 1$ を 示した.



Thm IV N_f : $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ の合同類の数

$\Rightarrow N_f \neq 3$ であり.

(1) $N_f = 4 \iff C, ds^2$ はどちらも symmetry をもたない.

(2) $N_f = 1 \iff$ 次のいずれか.

(a1) C: 平面内. かつ. $\exists T$: ori-reversing symmetry (of C)

(a2) C: 平面内. かつ. $\exists \varphi$: effective 〃 (of ds^2)

(b1) ds^2: non-eff. かつ. $\exists T$: ori-reversing symmetry (of C).

(b2) 〃 〃 $\exists \varphi$: effective 〃 (of ds^2).

(c) Prop 5.1 と同じ

(d) 〃

$\boxed{(a2)}$ が成り立っていると仮定する. つまり, $\exists S \in O(3)$: ori-preserve, $\exists \varphi$: effective.

- Prop 5.1 より, f と $\check{f}$ は合同. $(\check{f} = S \circ f)$
- $S \circ f \circ \varphi$ と $f \circ \varphi$ はそれぞれ,

  第一基本形式が f と一致

  $S \circ f \circ \varphi(u, 0) = S \circ f(-u, 0) = S C(-u) = \mathbb{C}(-u) \quad (:= \mathbb{C}_*(u))$

  $f \circ \varphi(u, 0) = f(-u, 0) = C(-u)$

  であるため, $f \circ \varphi = f_*$ または $\check{f}_*$, $S \circ f \circ \varphi = \check{f}_*$ または f_*.

- $f \circ \varphi$ が f_* または $\check{f}_*$ と等しいことを示す. $g := f \circ \varphi$ として,

$\nu_g = \varepsilon \nu_f \circ \varphi$ $(\varepsilon := \mathrm{sgn}(\det J))$ とする.

$$
\begin{aligned}
\det(g_u, g_v, \nu_g)(u, v) &= \det\left((f \circ \varphi(u,v))_u, (f \circ \varphi(u,v))_v, \nu_g(u,v)\right) \\
&= \det\left((f \circ \varphi(u,v))_u, (f \circ \varphi(u,v))_v, \varepsilon \nu_f \circ \varphi(u,v)\right) \\
&= \varepsilon (\det J)(\lambda \circ \varphi)(u,v) \\
&= \underbrace{|\det J|}_{\geq 0} \underbrace{(\lambda \circ \varphi)(u,v)}_{\geq 0} \geq 0.
\end{aligned}
$$

よって, $\nu_g = \varepsilon \nu_f \circ \varphi$ は向きを同調した g の単位法ベクトル場である.

次に, f と g それぞれのカスプ方向を $\mathcal{X}_f$, $\mathcal{X}_g$ とすると,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{X}_g(u) &= \hat{\nu}_g(u) \times \mathbb{C}_*'(u) \\
&= \varepsilon \nu_f \circ \varphi(u, 0) \times (-\mathbb{e}(-u)) \\
&= \varepsilon \hat{\nu}_f(-u) \times (-\mathbb{e}(-u)) \\
&= -\varepsilon \mathcal{X}_f(-u) \quad \cdots (a2.1)
\end{aligned}
$$

$\mathcal{X}_g(u) = \cos\theta_g(u) n(-u) + \sin\theta_g(u) b(-u)$ と表せることに注意して, (a2.1) に $\mathcal{X}_f(-u)$ を代入すると,

$$\mathcal{X}_g(u) = -\varepsilon\left(\cos\theta_f(-u) n(-u) - \sin\theta_f(-u) b(-u)\right)$$

$$\therefore \mathcal{X}_g(0) = -\varepsilon\left(\cos\theta_f(0) n(0) - \sin\theta_f(0) b(0)\right)$$

- $\varepsilon = 1$ の場合, $\mathcal{X}_g(0) = \cos\underbrace{(\pi - \theta_f(0))}_{= \theta_g} n(0) + \sin\underbrace{(\pi - \theta_f(0))} b(0)$

$\therefore\ \theta_g(0) = \pi - \theta_f(0)$ であり、これを満たすのは $\theta_g(0) = \theta_f(0)$. …(a2.2)

$\left(\theta_f(0) = \frac{\pi}{2}\right.$ であり、$\left. K_s = 0\right)$

・$\varepsilon = -1$ の場合、$x_g(0) = \cos(-\theta_f(0))\,n(0) + \sin(-\theta_f(0))\,b(0)$

$\therefore\ \theta_g(0) = -\theta_f(0)$ である. …(a2.3)

・$S\circ f\circ\varphi$ が f_* または $\check{f}_*$ と等しいことを示す $g := S\circ f\circ\varphi$ として、

$$
\begin{aligned}
\det(g_u, g_v, \nu_g)(u,v) &= \det\left((S\circ f\circ\varphi(u,v))_u, (S\circ f\circ\varphi(u,v))_v, \nu_g(u,v)\right)\\
&= \det\left(S(f\circ\varphi(u,v))_u, S(f\circ\varphi(u,v))_v, \varepsilon\sigma S\nu_f\circ\varphi(u,v)\right)\\
&= (\cancel{\det S})\cancel{\sigma}\det\left((f\circ\varphi(u,v))_u, (f\circ\varphi(u,v))_v, \varepsilon\nu_f\circ\varphi(u,v)\right)\\
&= \underbrace{|\det J|}_{>0}\ \underbrace{(\lambda\circ\varphi)(u,v)}_{\geqq 0} \geqq 0.
\end{aligned}
$$

よって、$\nu_g = \varepsilon\sigma\nu_f\circ\varphi$ は向きを同調した g の単位法ベクトル場. f と g それぞれのカスプ方向を x_f, x_g とすると

$\mathbb{C}_*(u) = S\mathbb{C}(-u)$

$$
\begin{aligned}
x_g(u) &:= \hat{\nu}_g(u) \times \mathbb{C}_*'(u)\\
&= \varepsilon\sigma S\nu_f\circ\varphi(u,0) \times (-S\mathbb{C}'(-u))\\
&= -\varepsilon\cancel{\sigma}(\cancel{\det S})\,S\,(\hat{\nu}_f(-u)\times\mathbb{C}'(-u))\\
&= -\varepsilon S x_f(-u). \quad \cdots (a2.4)
\end{aligned}
$$

$x_g(u) = \cos\theta_g(u)\,n(-u) + \sin\theta_g(u)\,b(-u)$ と表せることに注意して、(a2.4) に $x_f(-u)$ を代入すると、

$$x_g(u) = -\varepsilon\left(\cos\theta_f(-u)\,Sn(-u) - \sin\theta_f(-u)\,Sb(-u)\right)$$

である. $u=0$ を代入して $Sn(0) = n(0)$、$Sb(0) = -b(0)$ を用いると

$$x_g(0) = -\varepsilon\left(\cos\theta_f(0)\,n(0) + \sin\theta_f(0)\,b(0)\right)$$

・$\varepsilon = 1$ の場合、$x_g(0) = \cos(\pi + \theta_f(0))\,n(0) + \sin(\pi + \theta_f(0))\,b(0)$.

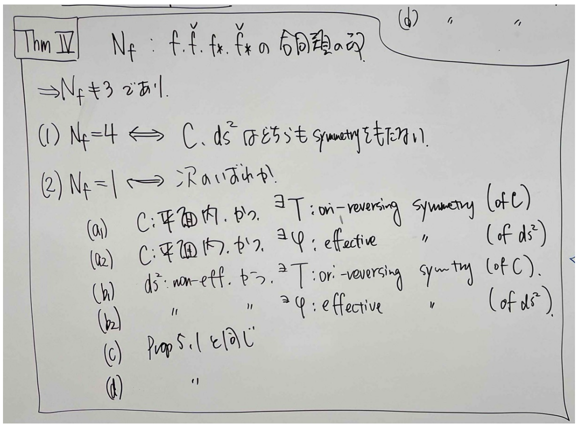
$\therefore\ \theta_g(0) = \pi + \theta_f(0)$ …(a2.5)

・$\varepsilon = -1$ の場合、$x_g(0) = \cos\theta_f(0)\,n(0) + \sin\theta_f(0)\,b(0)$.

$\therefore\ \theta_g(0) = \theta_f(0)$. …(a2.6) (a2.2)(a2.3)(a2.5)(a2.6) より、

$\varepsilon = 1$ のとき $\begin{cases} f \circ \varphi = f_* \\ S \circ f \circ \varphi = \check{f}_* \end{cases}$ $\varepsilon = -1$ のとき $\begin{cases} f \circ \varphi = \check{f}_* \\ S \circ f \circ \varphi = f_* \end{cases}$.

f は $\check{f}$、f_*、$\check{f}_*$ の いずれとも合同であるため、$N_f = 1$. ∴ (a2) が成立 $\Longrightarrow$ $N_f = 1$ である.



$\boxed{(b1)}$ が成り立っていると仮定する. つまり $\exists\varphi$: non-eff, $\exists T \in O(3)$: ori-reserving symmetry.

- Prop 5.1 より、f と $\check{f}$ は合同である. ($\check{f} = f\circ\varphi$)

- $T\circ f\circ\varphi$ と $T\circ f$ はそれぞれ、

  第一基本形式が f と一致

  $$T\circ f\circ\varphi(u,0) = T\circ f(u,0) = TC(u) = C(-u) \quad (:= C_*(u))$$

  $$T\circ f(u,0) = TC(u) = C(-u)$$

であるため、$T\circ f = f_*$ または $\check{f}_*$、$T\circ f\circ\varphi = \check{f}_*$ または f_*.

- $T\circ f$ が f_* または $\check{f}_*$ と等しいことを示す. $g := T\circ f$ として.

$$\det(g_u, g_v, \nu_g)(u,v) = \det(T\circ f_u, T\circ f_v, \sigma T\nu_f)(u,v)$$

$\nu_g = \sigma T\nu_f$ とした. ($\sigma := \det T$)

$$= \cancel{\sigma}(\cancel{\det T})\det(f_u, f_v, \nu_f)(u,v)$$

$$= \lambda(u,v) \geq 0.$$

よって、$\nu_g = \sigma T\nu_f$ は向きを同調した g の単位法ベクトル場. カスプ方向を考えると、

$$\chi_g(u) := \hat{\nu}_g(u) \times C_*'(u)$$

$C_*(u) = TC(u)$ より.

$$= \sigma T\nu_f(u,0) \times TC'(u)$$

$$= \cancel{\sigma}(\cancel{\det T})\, T(\hat{\nu}_f(u) \times C'(u))$$

$$= T\chi_f(u). \quad \cdots (b1.1)$$

(b1.1) に $\chi_f(u)$ を代入する. $\chi_g(u) = \cos\theta_g(u)\, n(-u) \underline{+} \sin\theta_g(u)\, b(-u)$ であることに注意して.

$$\chi_g(u) = \cos\theta_f(u)\, Tn(u) - \sin\theta_f(u)\, Tb(u)$$

$u=0$ 代入して 20250725-CE-Symmetry.pdf の補題 1.2 を適用すると

$$\chi_g(0) = \cos\theta_f(0)\, n(0) + \sigma\sin\theta_f(0)\, b(0)$$

$$= \cos(\underbrace{\sigma\theta_f(0)}_{\theta_g(0)})\, n(0) + \sin(\underbrace{\sigma\theta_f(0)})\, b(0)$$

$\therefore\ \theta_g(0) = \sigma\theta_f(0)$ であり、 $\begin{cases} \sigma = 1 \text{ ならば } T\circ f = f_* \\ \sigma = -1 \text{ ならば } T\circ f = \check{f}_* \end{cases}$ … (b1.2)

• $T\circ f\circ\varphi$ が f_* または $\check{f}_*$ と等しいことを示す。 $g := T\circ f\circ\varphi$ として、

$$\det(g_u, g_v, \nu_g)(u,v) = \det\left(T(f\circ\varphi(u,v))_u,\ T(f\circ\varphi(u,v))_v,\ \varepsilon\sigma T\nu_f\circ\varphi(u,v)\right)$$

$\nu_g = \varepsilon\sigma T\nu_f\circ\varphi$ とした。
$(\varepsilon := \mathrm{sgn}(\det J))$

$$= (\cancel{\det T})\,\varepsilon\cancel{\sigma}\det\left((f\circ\varphi(u,v))_u,\ (f\circ\varphi(u,v))_v,\ \nu_f\circ\varphi(u,v)\right)$$

$$= \varepsilon(\det J)(\lambda\circ\varphi)(u,v)$$

$$= \underbrace{|\det J|}_{>0}\ \underbrace{(\lambda\circ\varphi)(u,v)}_{\neq 0} \neq 0.$$

よって、 $\nu_g = \varepsilon\sigma T\nu_f\circ\varphi$ は向きを同調した g の単位法ベクトル場。 g のカスプ方向 χ_g について、

$$\chi_g(u) := \hat{\nu}_g(u) \times \mathbb{C}_*'(u)$$

$\mathbb{C}_*(u) = T\mathbb{C}(u)$ より。

$$= \varepsilon\sigma T\nu_f\circ\varphi(u,0) \times T\mathbb{C}'(u)$$

$$= \varepsilon\cancel{\sigma}(\cancel{\det T})\,T\left(\hat{\nu}_f(u) \times \mathbb{C}'(u)\right)$$

$$= \varepsilon T\chi_f(u). \quad\cdots\ (b1.3)$$

(b1.3) に $\chi_f(u)$ を代入する。 $\chi_g(u) = \cos\theta_g(u)\, n(-u) \pm \sin\theta_g(u)\, b(-u)$ であることに注意して、

$$\chi_g(u) = \varepsilon\left(\cos\theta_f(u)\, T n(u) - \sin\theta_f(u)\, T b(u)\right)$$

$$\therefore\ \chi_g(0) = \varepsilon\left(\cos\theta_f(0)\, n(0) + \sigma\sin\theta_f(0)\, b(0)\right)$$

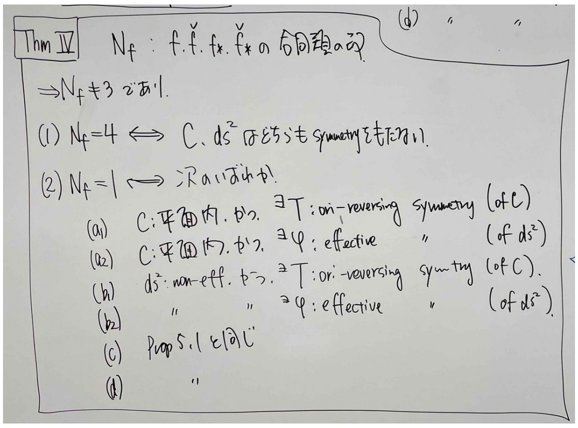
• $\varepsilon = -1$ のとき　($\varepsilon = 1$ の non-effective symmetry は存在しない)

$$\chi_g(0) = \cos\left(\pi + \sigma\theta_f(0)\right) n(0) + \sin\left(\pi + \sigma\theta_f(0)\right) b(0)$$

$\therefore\ \theta_g(0) = \pi + \sigma\theta_f(0)$ であり、 $\begin{cases} \sigma = 1 \text{ ならば } T\circ f\circ\varphi = \check{f}_* \\ \sigma = -1 \text{ ならば } T\circ f\circ\varphi = f_*. \end{cases}$ … (b1.4) (b1.2)(b1.4)より $\begin{cases} \sigma = 1 \text{ ならば } T \circ f = f_* & T \circ f \circ \varphi = \check{f}_* \\ \sigma = -1 \text{ ならば } T \circ f = \check{f}_* & T \circ f \circ \varphi = f_* . \end{cases}$

f は $\check{f}$、f_*、$\check{f}_*$ のいずれとも合同であるため、$N_f = 1$.　　$\therefore$ (b1) が成立 $\Longrightarrow N_f = 1$.

(b2) が成立すると仮定する. つまり、$\exists \varphi_1$: non-eff symmetry.
$\exists \varphi_2$: effective symmetry.



• Prop 5.1 より、f と $\check{f}$ は合同である. $(\check{f} = f \circ \varphi_1)$

• $f \circ \varphi_2$ と $f \circ \varphi_1 \circ \varphi_2$ はそれぞれ、

第一基本形式が f と等しい $\left(\because\ ds^2_{f\circ\varphi_1\circ\varphi_2} = \varphi_2^* ds^2_{f\circ\varphi_1} = ds^2_{f\circ\varphi_1} = \varphi_1^* ds^2_f = ds^2_f.\right)$

$f \circ \varphi_2(u,0) = f(-u,0) = C(-u)\ \ (=: C_*(u))$

$f \circ \varphi_1 \circ \varphi_2(u,0) = f \circ \varphi_1(-u,0) = f(-u,0) = C(-u).$

であるため、$f \circ \varphi_2 = f_*$ または $\check{f}_*$、 $f \circ \varphi_1 \circ \varphi_2 = \check{f}_*$ または f_*.

• $f \circ \varphi_2$ が f_* または $\check{f}_*$ と等しいことを示す. $g := f \circ \varphi_2$ として、

$$\det(g_u, g_v, \nu_g)(u,v) = \det\left((f\circ\varphi_2(u,v))_u,\ (f\circ\varphi_2(u,v))_v,\ \varepsilon_2 \nu_f \circ \varphi_2(u,v)\right)$$

$\nu_g = \varepsilon_2 \nu_f \circ \varphi$ とした.
$(\varepsilon_2 := \operatorname{sgn}(\det D\varphi_2))$

$$= \varepsilon_2 \underbrace{(\det J_2)}_{\varphi_2(u,v)\text{のヤコビアン}} (\lambda \circ \varphi)(u,v)$$

$$= \underbrace{|\det J_2|}_{\geq 0}\ \underbrace{(\lambda \circ \varphi)(u,v)}_{\geq 0} \geq 0.$$

よって、$\nu_g = \varepsilon_2 \nu_f \circ \varphi_2$ は向きを同調した g の単位法ベクトル場. カスプ方向 $\mathcal{X}_g$ について、

$$\mathcal{X}_g(u) := \hat{\nu}_g(u) \times C_*'(u)$$
$$= \varepsilon_2 \nu_f \circ \varphi_2(u,0) \times (-C'(-u))$$
$$= -\varepsilon_2 \mathcal{X}_f(-u). \quad \cdots \text{(b2.1)}$$

(b2.1) に $\mathcal{X}_f(-u)$ を代入する. $\mathcal{X}_g(u) = \cos\theta_g(u)\, n(-u) \pm \sin\theta_g(u)\, b(-u)$ であることに注意して、

$$\mathcal{X}_g(u) = -\varepsilon_2 \left(\cos\theta_f(-u)\, n(-u) - \sin\theta_f(-u)\, b(-u)\right)$$

$$\mathcal{X}_g(0) = -\varepsilon_2 \left(\cos\theta_f(0)\, n(0) - \sin\theta_f(0)\, b(0)\right)$$

• $\varepsilon_2 = 1$ の場合、 $\mathcal{X}_g(0) = \cos(\underbrace{\pi - \theta_f(0)}_{\theta_g(0)})\, n(0) + \sin(\underbrace{\pi - \theta_f(0)}_{})\, b(0)$

$\therefore\ \theta_g(0) = \pi - \theta_f(0).$ （ $\theta_g(0) = \theta_f(0)$ であり、$\theta_f(0) = \frac{\pi}{2}$ のため $K_s = 0$ ）

$f \circ \varphi_2 = \hat{f}_*. \quad \cdots (b2.2)$

• $\varepsilon_2 = -1$ の場合、$x_g(0) = \cos\left(-\theta_f(0)\right) n(0) + \sin\left(-\theta_f(0)\right) b(0).$

$\therefore\ \theta_g(0) = -\theta_f(0)$ であり、$f \circ \varphi_2 = \check{f}_*. \quad \cdots (b2.3)$

• $f\circ\varphi_1\circ\varphi_2$ が f_* または $\check{f}_*$ と等しいことを示す。$g := f\circ\varphi_1\circ\varphi_2$ として、

$$\det(g_u,\ g_v,\ \nu_g)(u,v) = \det\left((f\circ\varphi_1\circ\varphi_2(u,v))_u,\ (f\circ\varphi_1\circ\varphi_2(u,v))_v,\ \varepsilon_1\varepsilon_2\nu_f\circ\varphi_1\circ\varphi_2\right)$$

$\nu_g = \varepsilon_1\varepsilon_2\nu_f\circ\varphi_1\circ\varphi_2$ とした。
$\left(\varepsilon_1 := \mathrm{sgn}(D\varphi_1),\ \varepsilon_2 = \mathrm{sgn}(D\varphi_2)\right)$

$\varphi_1\circ\varphi_2$ のヤコビアンを $\det J_{12}$、$\mathrm{sgn}(\det J_{12}) =: \varepsilon_{12}$ とおく。

$\varepsilon_{12} = \varepsilon_1\cdot\varepsilon_2$?
$\mathrm{sgn}(\det D(\varphi_1\circ\varphi_2))$

$$= \underbrace{\varepsilon_{12}}_{\overset{?}{=}\ \varepsilon_1\cdot\varepsilon_2}\ \underbrace{(\det J_{12})}_{=\ \varphi_1\circ\varphi_2(u,v)\text{ のヤコビアン}}\ (\lambda\circ\varphi_1\circ\varphi_2)(u,v)$$

$$= |\det J_{12}|\,(\lambda\circ\varphi_{12})(u,v) \geq 0.$$

よって、$\nu_g = \varepsilon_1\varepsilon_2\nu_f\circ\varphi_1\circ\varphi_2$ は向きを同調した g の単位法ベクトル場。カスプ方向 x_g について、

$$\begin{aligned}
x_g(u) &:= \hat{\nu}_g(u) \times \mathbb{C}_*'(u) \\
&= \varepsilon_{12}\ \nu_f\circ\varphi_1\circ\varphi_2(u,0) \times \left(-\mathbb{C}'(-u)\right) \\
&= \varepsilon_{12}\ \nu_f(-u,0) \times \left(-\mathbb{C}'(-u)\right) \\
&= -\varepsilon_{12}\, x_f(-u). \quad \cdots (b2.4)
\end{aligned}$$

(b2.4) に $x_f(-u)$ を代入する。$x_g(u) = \cos\theta_g(u)\,n(-u) \pm \sin\theta_g(u)\,b(-u)$ であることに注意して、

$$x_g(u) = -\varepsilon_{12}\left(\cos\theta_f(-u)\,n(-u) - \sin\theta_f(-u)\,b(-u)\right)$$

$$x_g(0) = -\varepsilon_{12}\left(\cos\theta_f(0)\,n(0) - \sin\theta_f(0)\,b(0)\right)$$

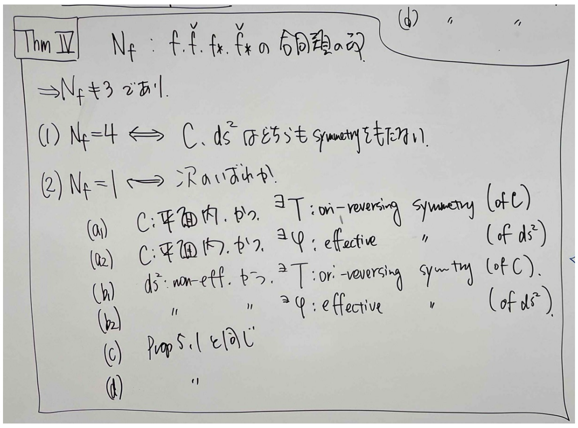
? $\varepsilon_{12} = \varepsilon_1\cdot\varepsilon_2$

• $\varepsilon_{12} = 1$、つまり $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (-1, -1)$ の場合、$\theta_g(0) = \pi - \theta_f(0)$ であり、
$\varepsilon_1 = 1$ は矛盾する。
(b2.5)
$\theta_g(0) = \theta_f(0).$

• $\varepsilon_{12} = -1$、つまり $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (-1, 1)$ の場合、$\theta_g(0) = -\theta_f(0). \quad \cdots (b2.6)$

(b2.2)(b2.3)(b2.5)(b2.6) より、
$$\begin{cases} \varepsilon_2 = 1 \text{ ならば、} f \circ \varphi_2 = f_*\text{、} & f \circ \varphi_1 \circ \varphi_2 = \check{f}_* \\ \varepsilon_2 = -1 \text{ ならば、} f \circ \varphi_2 = \check{f}_*\text{、} & f \circ \varphi_1 \circ \varphi_2 = f_*. \end{cases}$$

f は $\check{f}$、f_*、$\check{f}_*$ の いずれとも合同であるため、$N_f = 1$.　　$\therefore$ (b2) が成立 $\Longrightarrow N_f = 1$.



Thm IV　N_f : $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ の合同類の数

$\Rightarrow N_f \neq 3$ であり

(1) $N_f = 4 \iff C, ds^2$ はどちらも symmetry をもたない

(2) $N_f = 1 \iff$ 次のいずれか

(a1) C: 平面内, かつ, $\exists T$: ori-reversing symmetry (of C)

(a2) C: 平面内, かつ, $\exists \varphi$: effective 〃 (of ds^2)

(b1) ds^2: non-eff. かつ, $\exists T$: ori-reversing symmetry (of C).

(b2) 〃 〃 $\exists \varphi$: effective 〃 (of ds^2).

(c) Prop 5.1 と同じ

(d) 〃

$\boxed{(c)}$ が成立すると仮定する. つまり,

$\exists T \in O(3)$: 正の ori-reversing symmetry.

$\exists \varphi$: ori-reversing effective symmetry.

- Prop 5.1 (c) より, f と $\check{f}$ は合同. $(\check{f} = T \circ f \circ \varphi)$
- $T \circ f$ と $f \circ \varphi$ それぞれについて,

　　第一基本形式 が f と等しい

　　$T \circ f(u, 0) = T C(u) = C(-u)$.

　　$f \circ \varphi(u, 0) = f(-u, 0) = C(-u)$.

　であるため, $T \circ f = f_*$ または $\check{f}_*$, $f \circ \varphi = \check{f}_*$ または f_* を示せばよい.

- $f \circ \varphi$ について, 「(a2) $\Rightarrow N_f = 1$」の証明より, $\varepsilon = -1 \Rightarrow f \circ \varphi = \check{f}_*$ である.

- $T \circ f$ について, 「(b1) $\Rightarrow N_f = 1$」の証明より, $\sigma = 1 \Rightarrow T \circ f = f_*$ である.

以上より, f は $\check{f}, f_*, \check{f}_*$ と合同. $\therefore$ (c) が成立 $\Rightarrow N_f = 1$.

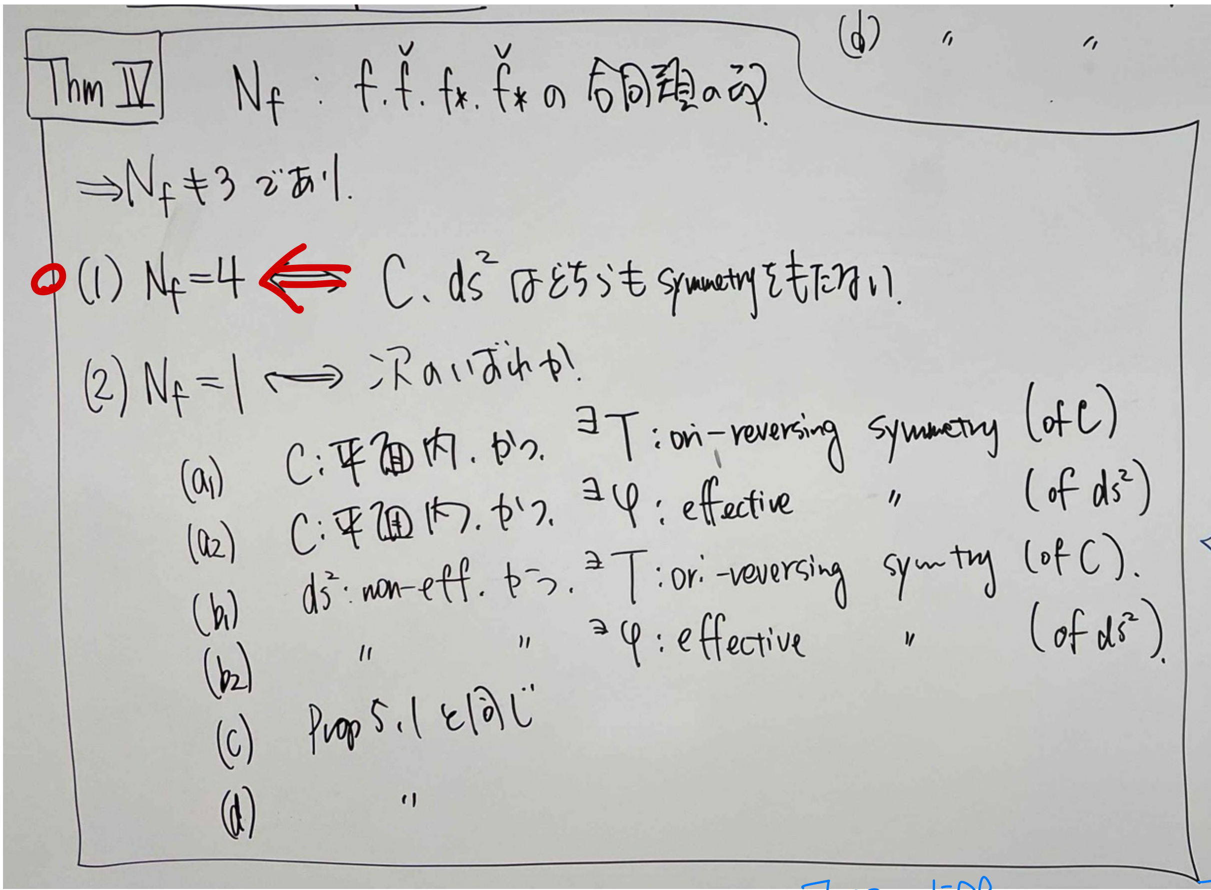
$\boxed{(d)}$ が成立すると仮定する. つまり, $\exists T \in O(3)$: 負の ori-reversing symmetry,

$\exists \varphi$: ori-preserving effective symmetry.

- Prop 5.1 (d) より, f と $\check{f}$ は合同. $(\check{f} = T \circ f \circ \varphi)$
- (c) の場合と同様に, $T \circ f = f_*$ または $\check{f}_*$, $f \circ \varphi = \check{f}_*$ または f_* を示せばよい.

- $f \circ \varphi$ について, 「(a2) $\Rightarrow N_f = 1$」の証明より, $\varepsilon = 1 \Rightarrow f \circ \varphi = f_*$ である.
- $T \circ f$ について, 「(b1) $\Rightarrow N_f = 1$」の証明より, $\sigma = -1 \Rightarrow T \circ f = \check{f}_*$ である.

以上より, f は $\check{f}, f_*, \check{f}_*$ と合同. $\therefore$ (d) が成立 $\Rightarrow N_f = 1$.



(d) 〃 〃

Thm IV　N_f : $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ の合同類の数

⇒ $N_f \neq 3$ であり、

(1) $N_f = 4 \Longleftrightarrow$ C, ds^2 はどちらも symmetry をもたない。

(2) $N_f = 1 \Longleftrightarrow$ 次のいずれか!

- (a1) C: 平面内, かつ $\exists T$: ori-reversing symmetry (of C)
- (a2) C: 平面内, かつ $\exists \varphi$: effective 〃 (of ds^2)
- (b1) ds^2: non-eff. かつ $\exists T$: ori-reversing symmetry (of C).
- (b2) 〃 〃 $\exists \varphi$: effective 〃 (of ds^2).
- (c) Prop 5.1 と同じ
- (d) 〃

$\exists T \in O(3)$, $\exists \varphi$: diffeo s.t. $T \circ f \circ \varphi = \check{f}$

↳ $\varphi^* ds^2_f = ds^2_f$ が まだ分からない。

((1). ⇐ を示す)

仮定より Prop 5.1 の (a)(b)(c)(d) を全て満たさないため、f と $\check{f}$ は合同ではない。

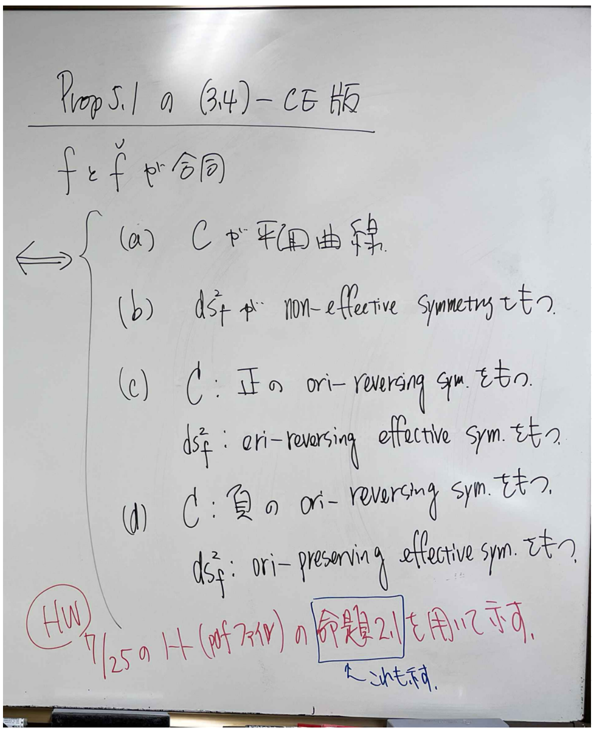
さらに、f と f_* および $\check{f}_*$ の特異曲線C がパラメータu に沿って動く向きは互いに逆向きであるため、f と $\{f_*, \check{f}_*\}$ が合同~~になるには~~であると仮定すると、φ と T のいずれかが reversing symmetry でなければいけない。

ds^2_f の symmetry φ あるいは C の symmetry T が存在して、

→ しかし、仮定より symmetry は存在しないので、f と $\{f_*, \check{f}_*\}$ は合同ではない。

以上より、f は $\check{f}, f_*, \check{f}_*$ の いずれとも合同ではないので、$N_f = 4$ である。

証明は、写真参照



Prop 5.1 の (3.4)−CE 版

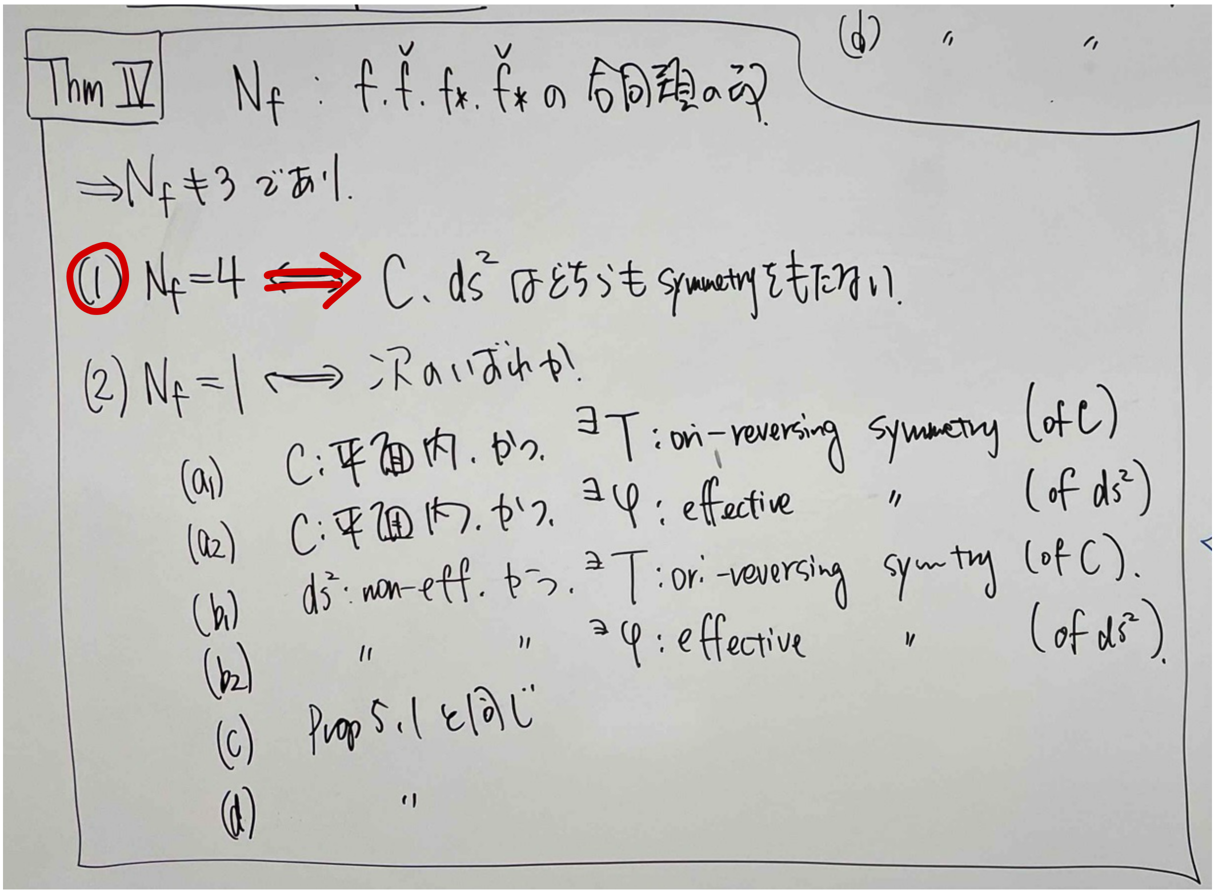
f と $\check{f}$ が合同

$\Longleftrightarrow$

- (a) C が平面曲線
- (b) ds^2_f が non-effective symmetry をもつ
- (c) C: 正の ori-reversing sym. をもつ
  ds^2_f: ori-reversing effective sym. をもつ
- (d) C: 負の ori-reversing sym. をもつ
  ds^2_f: ori-preserving effective sym. をもつ

HW 7/25の H-T (pdfファイル) の $\boxed{\text{命題2.1}}$ を用いて示す。

↖ これも示す。



(d) 〃 〃

Thm IV　N_f : $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ の合同類の数

$\Rightarrow N_f \neq 3$ であり、

(1) $N_f = 4 \iff C$、ds^2 はどちらも symmetry をもたない.

(2) $N_f = 1 \iff$ 次のいずれか.

(a1) C: 平面内, かつ, $\exists T$: ori-reversing symmetry (of C)

(a2) C: 平面内, かつ, $\exists \varphi$: effective 〃 (of ds^2)

(b1) ds^2: non-eff. かつ, $\exists T$: ori-reversing symmetry (of C).

(b2) 〃 〃 $\exists \varphi$: effective 〃 (of ds^2).

(c) Prop 5.1 と同じ

(d) 〃

((1)、$\Rightarrow$ を示す)

示したいこと　symmetry が 1個でも存在する $\Rightarrow N_f < 4$.

- ds_f^2 に symmetry φ が存在する場合.

  定理III ((3.4)-CE 版) より、右同値類の数 $n_f \leq 2$. 一般性を失わずに f と $\check{f}$ が右同値であると仮定すると、右同値の定義より $f \circ \varphi = \check{f}$.

  $\longrightarrow$ これは f と $\check{f}$ が合同であるので、$N_f < 4$ となる.

- 特異曲線 C に ori-preserving symmetry T がある場合

  T が ori-preserving $\iff C$ は平面曲線

  $\iff f$ と $\check{f}$ は合同.

  $\Longrightarrow N_f < 4$.

- 特異曲線 C に ori-reversing symmetry T がある場合