Lemma. 57

ベクトル場Vと点Pがあり、$V_P \neq 0$とする。このとき、点Pの近傍には座標系$(x^1, x^2, \cdots, x^n)$が存在し、その座標近傍でVは

$$V = \frac{\partial}{\partial x^1}$$

となる。(点Pまわりで、ベクトル場の向きが一定になるように座標を取り直せる)

Proof $V \in \mathfrak{X}(M)$、$P \in M$とする。

写像$\psi : U \times I \longrightarrow M$をベクトル場$V$の局所流れと定義する。
(Uは点Pの近傍で、$V \neq 0$の範囲内である)

- 超曲面Sの設定

開集合U内で、点Pを通るように超曲面S ($\subset U$) を取り、V_Pが

$$V_P \notin T_P(S)$$

を満たすようにする。(点Pでのベクトル場V_PがSの接空間に含まれない)

上より、局所流れψの制限$\psi : S \times I \longrightarrow M$を考える。

- 微分同相写像の確認

$\psi|_{(S\times 0)}$ は、超曲面Sへの微分同相写像である ($\because \psi|_{(S\times 0)}$は$S$上の各点をそのまま写す恒等写像)
($t=0$)

$\psi_{(P,0)}$の微分$d\psi_{(P,0)}$は、Sの接空間$T_{(P,0)}(S)$を$T_P(S)$に同一視してよい。

$d\psi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\Big|_{(p,0)} = V_p \notin T_p(S)$ であるため、$d\psi_{(p,0)}$ は同型写像※である。

※ 線形性、単射性、全射 の 確認

(i) 線形性 について

$d\psi$ は 微分同相写像 ψ の 微分 であるため線形写像である

(ii) 単射性 について ($\forall v \in T_{(p,0)}(U\times I)$ に対して $d\psi_{(p,0)}(v)=0 \Rightarrow v=0$)

$v = (v_U, v_I)$ とおく. ($v_U \in T_p(U)$、$v_I \in T_0(I)$)

$d\psi_{(p,0)}(v) = d\psi_{(p,0)}(v_U, v_I) = 0$ なので、2つの条件

$d\psi_{(p,0)}(v_U)=0$ かつ $d\psi_{(p,0)}(v_I)=0$

を満たすことを確認すれば良い.

- $d\psi$ は 線形写像 であるため、$d\psi_{(p,0)}(v_U)=0 \Rightarrow v_U=0$ である.
- $d\psi_{(p,0)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = V_p \neq 0$ (問題文より) のため、$V_p=0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = v_I = 0$ である.

∴ $d\psi$ は 単射 である.

(iii) 全射性 について ($\forall v \in T_p(M)$ に対して、$\exists u \in T_{(p,0)}(U\times I)$ s.t. $d\psi_{(p,0)}(u) = v$)

$T_p(U)$ の 基底 を $\{e_1, \cdots, e_n\}$、

$T_0(I)$ の 基底 を $\partial/\partial t$ とする.

$v \in T_p(M)$ は、基底ベクトル $d\psi_{(p,0)}(e_1), \cdots, d\psi_{(p,0)}(e_n)$、$V_p$ の 線形結合 で表される. つまり、

$$v = a_1 d\psi_{(p,0)}(e_1) + \cdots + a_n d\psi_{(p,0)}(e_n) + b\cdot V_p$$

と書ける. (a_i ($i=1,\cdots,n$)、$b \in \mathbb{R}$)

$T_{(p,0)}(U\times I)$ の元 X を、$X := a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n + b\cdot\frac{\partial}{\partial t}$ とすれば、

$d\psi$ の線形性より $d\psi_{(p,0)}(X) = v$ となる　∴ $d\psi$ は 全射である.

したがって、ψ は $(p,0)$ の近傍 $\mathcal{V}\times J$ から、$P\in M$ の近傍 W への微分同相写像である。（$\because$ $d\psi$ が同型写像 $\Longleftrightarrow$ ψ が局所微分同相）

逆関数定理

局所

- $\mathcal{V}\subset S$ の座標系の構築

$\underbrace{y^2, y^3, \cdots, y^n}_{n-1}$ が $\mathcal{V}$ 上の超曲面 S の座標系とし、

$y^1(=t)$ を $J\subset\mathbb{R}^1$ 上の自然な座標系（時間方向の座標）とする。

微分同相写像 $\psi|_{\mathcal{V}\times J}$ ~~によって~~ によって $(y^1,\cdots,y^n)$ を W へ写すことにより、新たな座標系 $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ が得られる。

x^1 が時間 t に対応するとすれば、$\dfrac{\partial}{\partial x^1} = d\psi\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right) = V$ である

（$\because$ $\psi(p,t) = \alpha_p(t)$ であるため、$\alpha_p(t)$ は積分曲線そのもので、その接ベクトル V はベクトル場でもある）

よって、$V = \dfrac{\partial}{\partial x^1}$ となるような座標系が存在することを示した。■

◎ ベクトル場のかっこ積 (bracket)

ベクトル場のかっこ積は流れ (flow) ψ に基づいて記述ができる。
有限次元のベクトル空間 V への滑らかな写像 $F : I \to V$ は、次のような導関数 $F' : I \to V$ を持つ。

$$F'(s) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[F(s+t) - F(s)\right] = \sum_{i=1}^{n} \frac{df^i}{dt}(s)\, e_i$$

大かっこ

(ここで、$F = \sum_{i=1}^{n} f^i e_i$ であり、$\{e_1, \cdots, e_n\}$ は V の基底とする。)

次に、ベクトル場 W の「ベクトル場 V に関する導関数」を次のように取る。

$\forall p \in M$ に対して、α_p を p から始まる V の積分曲線と定義する。
V の流れを用いて、$\alpha_p(s)$ に沿って W の値を $T_p(M)$ 内に逆方向に移動させる。そして、$s=0$ でベクトル導関数をとると、その値は

$$[V, W]_p$$

と表される。

58. Proposition

$\forall V, W \in \mathfrak{X}(M)$ に対して、$p \in M$ の近傍においてベクトル場 V の局所流れを ψ とする。このとき、

$$[V, W]_p = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[d\psi_{-t}(W_{\psi_t(p)}) - W_p\right]$$

である。

$(\psi : M \times \mathbb{R} \to M)$

Proof

$F_p(t) := d\psi_{-t}(W_{\psi_t(p)})$ と定義すると、$\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\left[d\psi_{-t}(W_{\psi_t(p)}) - W_p\right]$ は、

$F_p'(0)$ と表される。$\left(F_p'(0) = \lim_{t\to0}\frac{F_p(t)-F_p(0)}{t-0} \right)$

$V_p\neq0$、$V=0$、$V_p=0$ の3パターンに場合分けして考える。

(1) $V_p\neq0$ の場合

$V=\frac{\partial}{\partial x^1}$ となるように、座標系 $x^1,\cdots,x^n$ を取る(補題57と同じ)。

このとき、V の流れは x^1 のみで変化する。p 近傍の点を q として、

$$x^1(\psi_t(q)) = x^1(q) + t$$
$$x^j(\psi_t(q)) = x^j(q) \quad (2\leq j\leq n \text{ の場合})$$

である。これにより、任意の q、t に対して $d\psi_t\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=\frac{\partial}{\partial x^i}$ となる。

したがって、ベクトル場 $W\in\mathfrak{X}(M)$ が $W=\sum_{i=1}^n W^i\partial_i$ と書けるならば

$$\begin{aligned}
F_p(t) &= d\psi_{-t}(W_{\psi_t(p)})\\
&= d\psi_{-t}\left(\sum_{i=1}^n W^i(\psi_t(p))\,\partial_i\right)\\
&= \sum_{i=1}^n W^i(\psi_t(p))\,\partial_i\Big|_p
\end{aligned}$$

$\because$ $d\psi_{-t}$ によって接ベクトルが移動するが、∂_i は不変なので $\underline{d\psi_{-t}(\partial_i)=\partial_i}$

である。添字 p を省略して計算すると、

$$\begin{aligned}
F_p'(0) &= \sum_{i=1}^n \underline{\frac{d}{dt}(W^i\circ\alpha_p)(0)}\,\partial_i\\
&= \sum_{i=1}^n \underline{V_p(W^i)}\,\partial_i\\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial W^i}{\partial x^1}(0)\,\partial_i\\
&= \left[\frac{\partial}{\partial x^1}, W\right]_p\\
&= [V, W]_p
\end{aligned}$$

$\boxed{V=\frac{\partial}{\partial x^1} \text{ より}}$

かっこ積の公式 (Exercise 4)

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^1}, W\right] = \sum_{i,j=1}^n\left\{\underline{\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^j}\frac{\partial W^i}{\partial x^j} - W^j\underline{\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^i}\right\}\partial_i$$

$\to = \begin{cases}1 & (j=1)\\ 0 & (j\neq1)\end{cases}$ を用いた

$\to 0$

※ 〜〜〜 部分の式変形について

$$\frac{d}{dt}(W^{l}\circ\alpha_p)(0)\,\partial_l = \left(\frac{\partial W^{l}}{\partial x^{l}}\cdot\frac{dx^{l}}{dt}\right)\Bigg|_{\cancel{\psi_t(p)}\ p}\partial_l$$

$$= \left(\frac{\partial W^{l}}{\partial x^{l}}\cdot V^{l}\right)\Bigg|_{\cancel{\psi_t(p)}\ p}\partial_l$$

$$\left(\sum_j \frac{\partial W^{l}}{\partial x^{j}}\frac{dx^{j}}{dt}\right) \qquad \frac{dx^{j}}{dt} = V^{j}$$

$$= \left(\sum_j V^{j}\frac{\partial}{\partial x^{j}}\right)(W^{l})\,\partial_l \qquad \sum_j V^{j}\frac{\partial}{\partial x^{j}} = V_p$$

$F_p'(t)$ を $t=0$ で評価すると、

$$F_p'(0) = \sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial W^{l}}{\partial x^{l}}V^{l}\right)\Bigg|_p\partial_l$$

$$\overset{?}{=} \sum_{l=1}^{n} V_p(W^{l})\,\partial_l$$

$$\left(V(\varphi) = \sum V^{l}\frac{\partial\varphi}{\partial x^{l}}\right)$$

である。$F_p'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[d\psi_{-t}(W_{\psi_t(p)}) - W_p\right]$ であったため、命題の等式を満たす。 ⑥

P32

(ii) $V=0$ の場合

点 $p\in M$ の近傍で $V=0$ であるとする。このとき、任意の関数 $f\in\mathfrak{F}(M)$ に対して、

$$
\begin{aligned}
[V,W](f) &= V(Wf) - W(Vf) \\
&= 0 - W(0) \\
&= 0 - 0 \\
&= 0 \quad \cdots ①
\end{aligned}
$$

$\because W = W^1\partial_1 + \cdots + W^n\partial_n$、$f=0$ とすると、

$$
\begin{aligned}
W(f) &= (W^1\partial_1 + \cdots + W^n\partial_n)(f) \\
&= W^1\partial_1(f) + \cdots + W^n\partial_n(f) \\
&= W^1 \underset{0}{f_{x^1}} + \cdots + W^n \underset{0}{f_{x^n}} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

である。従って、p の近傍で積分曲線は定数で $\forall t\in\mathbb{R}$ に対して

$$\psi_t = Id \ (恒等写像)$$

である。$F_p(t) = d\psi_{-t}(W_{\psi_t(p)})$ と $\psi_t(p) = p$ より、$F_p(t)$

$$
\begin{aligned}
F_p(t) &= d\psi_{-t}(W_{\psi_t p}) \\
&= d\psi_{-t}(W_p) \\
&= W_p \quad (\because \psi_{-t} が恒等写像 \Rightarrow d\psi_{-t} も恒等写像)
\end{aligned}
$$

となり、t に依存しない値である。よって $F_p(t)$ は定数と見なすことができて、

$F_p'(t) = 0 \quad \cdots ②$ である。

①、② より $[V,W]_p = F_p'(0) \ (=0)$ である。

(iii) $V_p = 0$ の場合

$p \in M$ が、$V_{p_i} \neq 0$ であるような点列 $\{p_i\}_{i=1,\cdots,n,}$ の極限値とする。

(つまり、$\lim_{i \to \infty} p_i = p$)

これらの座標による表現は $F_p'(0)$ と $[V, W]_p$ の両方が、p に連続的に依存している。

$\rightarrow \lim_{i \to \infty} F_{p_i}'(0) = F_p'(0)$ 、 $\lim_{i \to \infty} [V, W]_{p_i} = [V, W]_p$

(i) では $V_p \neq 0$ の場合に対して結果が導かれている。今回のケースでは $V_{p_i} \neq 0$ のため、(i) の p を p_i に置換した

$$F_{p_i}'(0) = [V, W]_{p_i}$$

である。点 p_i が p に収束することから、(i) の場合に帰着させて議論してよく、

$$F_p'(0) = [V, W]_p$$

である。

(i) ~ (iii) より、$V_p \neq 0$、$V = 0$、$V_p = 0$ の状況に対して命題が成り立つことを確認した。 ▨

2. TENSORS

テンソル場の概念：多様体上の実数値関数、ベクトル場、一次微分形式の概念を一般化したもの

$\longrightarrow$ 特徴的な性質：多重線形性

BASIC ALGEBRA

以下の定義で、次の2ケースを考える。

1. $\mathcal{F}(M)$ 上の加群 $\mathfrak{X}(M)$
2. $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $T_p(M)$

module

$V_1, \cdots, V_s$ を、環 K 上の加群とする。このとき、$V_1 \times \cdots \times V_s$ は各 $v_i \in V_i$ からなる全ての s 個~~一~~組 $(v_1, \cdots, v_s)$ の集合である。

要素ごとの加法および K の要素による乗法の定義により、$V_1 \times \cdots \times V_s$ は K 上の加群となる。この加群は直積 $(\times)$ または直和 $(\oplus)$ と呼ばれる。W も K 上の加群であるならば、写像

$$A : V_1 \times \cdots \times V_s \longrightarrow W$$

は以下の条件を満たすときに K-多重線形である。

slot

(条件) A が各スロットにおいて K-線形である。すなわち、$1 \leq i \leq s$ および $v_j \in V_j$ $(i \neq j)$ に対して、写像

$$v \rightarrow A(v_1, \cdots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \cdots, v_s)$$

が K-線形である

Vが環K上の加群であるならば、V^*を「VからKへの全てのK-線形写像の集合」と定義する。写像の加法の定義およびKの要素による乗法の定義により、V^*はK上の加群となる。
→ このV^*を、Vの双対加群とよぶ。

もし$V_i = V$ ~~∈~~ $(1 \leq i \leq s)$のとき、記法$V_1 \times \cdots \times V_s$は、
abbreviated
V^sと略記される。

1. Definition

整数r、sが$r \geq 0$、$s \geq 0$で両方とも0ではないとき、K-多重線形写像

$$A : (V^*)^r \times V^s \longrightarrow K$$

を、V上の(r, s)型テンソルと呼ぶ。
$r = 0$の場合、$A : V^s \longrightarrow K$、$s = 0$の場合、$A : (V^*)^r \longrightarrow K$とする。

- V上の全ての(r, s)型テンソルの集合$\mathcal{I}^r_s(V)$は再びK上の加群であり、写像の加法およびKの要素による乗法の定義が適用される。

- V上の$(0, 0)$型テンソルは、Kの要素である。
element

→ スカラー値

TENSOR FIELDS

多様体M上のテンソル場Aは、前項(BASIC ALGEBRA)の$\mathfrak{F}(M)$-加群$\mathfrak{X}(M)$上のテンソルである。

したがって、Aが(r,s)型であるならば、Aは$\mathfrak{X}(M)$-多重線形写像

$$A: \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$$

である。つまり、Aはr個の1次微分形式$\theta^1, \cdots, \theta^r$および$s$個のベクトル場$X_1, \cdots, X_s$が与えられると、実数値関数

$$f = A(\theta^1, \cdots, \theta^r, X_1, \cdots, X_s) \in \mathfrak{F}(M)$$

を1つ生成する多重線形マシン(?)である。
machine

(θ^iはi番目の反変スロットを占め、X_jはAのj番目の共変スロットを占める)
contravariant slot
covariant slot
上付き添字
下付き添字

- 多様体M上の(r,s)型の全てのテンソル場の集合$\mathfrak{T}^r_s(M)$は、$\mathfrak{F}(M)$上の加群となる。(和とスカラー倍が定義)
  $r=s=0$の例外的な場合では、M上の$(0,0)$型テンソル場は単なる関数$f \in \mathfrak{F}(M)$である(つまり、$\mathfrak{T}^0_0(M) = \mathfrak{F}(M)$)。

- 与えられた写像$A: \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$がテンソルであることを示すために、各スロット(つまり、各変数に対して別々に)で$\mathfrak{F}(M)$-線形であることを示さないといけない。

  各スロットでの加法性は明らか($\because$ Aは$\mathfrak{X}(M)$-多重線形写像)なので、重要な問題は「各スロットから関数fを外に出せるかどうか」である。

$$A(\theta^1, \cdots\cdots, \theta^r, X_1, \cdots\cdots, fX_i, \cdots\cdots, X_s) = fA(\theta^1, \cdots, \theta^r, X_1, \cdots, X_s)$$

関数fについても線形性は成り立つ(上の等式が成り立つ)

(iv) 関数 $f \in \mathfrak{F}(M)$ についても線形性が成り立つことを確認.

$X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して、fX は X の f 倍を表すため、$\left(fX := \{f(p)X_p\}_{p \in M}\right)$

$$A(\theta^1, \cdots, \theta^r, X_1, \cdots, fX_l, \cdots X_s) = fA(\theta^1, \cdots, \theta^r, X_1, \cdots, X_l, \cdots, X_s)$$

と線形性が適用される.

(v) $\mathfrak{X}(M)$ - 多重線形性:

$$\begin{aligned} &A(\theta^1, \cdots, \theta^r, X_1, \cdots, aX_l + bX_l', \cdots, X_s) \\ &= aA(\theta^1, \cdots, \theta^r, X_1, \cdots, X_l, \cdots, X_s) \\ &+ bA(\theta^1, \cdots, \theta^r, X_1, \cdots, X_l', \cdots, X_s) \end{aligned}$$

- 次の2つの例を考える。

(1) 評価関数 $E : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ は、

$$E(\theta, X) := \theta X$$

で定義される関数である。Eは各スロットで $\mathfrak{F}(M)$-線形であるため、M上の(1, 1)型テンソル場である。

Proof $\mathfrak{X}^*(M)$ と $\mathfrak{X}(M)$ に対して和とスカラー倍が定義されていることを確認。

(i) $\mathfrak{X}^*(M)$ の和とスカラー倍が定義されていること確認。

$\theta, \omega \in \mathfrak{X}^*(M)$、$f, g \in \mathfrak{F}(M)$ として、

$$\begin{aligned} E(f\theta + g\omega, X) &= (f\theta + g\omega)(X) \\ &= f(\theta(X)) + g(\omega(X)) \\ &= fE(\theta, X) + gE(\omega, X) \end{aligned}$$

$\because$ 1次微分形式の ~~公式~~ 線形性

(ii) $\mathfrak{X}(M)$ の和とスカラー倍が定義されていることを確認。

$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$、$f, g \in \mathfrak{F}(M)$ として、

$$\begin{aligned} E(\theta, fX + gY) &= \theta(fX + gY) \\ &= f(\theta(X)) + g(\theta(Y)) \\ &= fE(\theta, X) + gE(\theta, Y) \end{aligned}$$

$\because$ 1次微分形式の線形性

(i), (ii) より、各スロットで $\mathfrak{F}(M)$-線形である。■

(2) 1次微分形式 $\omega \neq 0$ を固定し、$F : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ を以下のように定義する。

$$F(X, Y) := X(\omega Y), \quad {}^\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

このとき、Xについては $\mathfrak{F}(M)$-線形であるが Yについては成り立たない。

$$F(X, fY) = X(\omega fY) = X(f(\omega Y)) \underset{※}{=} (Xf)\omega Y + fX(\omega Y)$$

※ライプニッツ則 $X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$ を用いた。

よって、F はテンソル場ではない。

- 任意の2つのテンソルを次のように掛けることができる。

$A \in \mathfrak{X}^r_s(M)$、$B \in \mathfrak{X}^{r'}_{s'}(M)$ とするとき、

$$A \otimes B : \mathfrak{X}^*(M)^{r+r'} \times \mathfrak{X}(M)^{s+s'} \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$$

を以下で定義する。

$$(A \otimes B)(\theta^1, \cdots, \theta^{r+r'}, X_1, \cdots, X_{s+s'})$$

$$:= A(\underbrace{\theta^1, \cdots, \theta^r}_{r}, \underbrace{X_1, \cdots, X_s}_{s}) B(\underbrace{\theta^{r+1}, \cdots, \theta^{r+r'}}_{r'}, \underbrace{X_{s+1}, \cdots, X_{s+s'}}_{s'})$$

このとき、$A \otimes B$ は $(r+r', s+s')$ 型のテンソルであり、「AとBのテンソル積」と呼ばれる。$r' = s' = 0$ のとき、B は $f \in \mathfrak{F}(M)$ と見なせるので、

$A \otimes f$ を以下で定義する。

$$A \otimes f = f \otimes A := fA$$

Aも$(0,0)$型テンソルだとすると、テンソル積は $\mathfrak{F}(M)$ 上の通常の掛け算に帰着される。

- テンソル積は $\mathfrak{F}(M)$-双線形性であるため、以下が成り立つ。

$$(fA + gA') \otimes B = fA \otimes B + gA' \otimes B$$

(Bについても同様に成り立つ)

Proof 定義式に従って、左辺 ~~右辺~~ のテンソル積を具体的に計算する

(i) 左辺の計算

$\theta^i \in \mathfrak{X}^*(M)$、$X_j \in \mathfrak{X}(M)$ に対して、定義に従って計算すると、
$(i = 1, 2, \cdots, r+r'$、$j = 1, 2, \cdots, s+s')$

$$
\begin{aligned}
&\{(fA + gA') \otimes B\}(\theta^1, \cdots, \theta^{r+r'}, X_1, \cdots, X_{s+s'}) \\
&= (fA + gA')(\theta^1, \cdots, \theta^r, X_1, \cdots, X_s) \cdot B(\theta^{r+1}, \cdots, \theta^{r+r'}, X_{s+1}, \cdots, X_{s+s'}) \\
&= \{fA(\theta^1, \cdots, \theta^r, X_1, \cdots, X_s) + gA'(\theta^1, \cdots, \theta^r, X_1, \cdots, X_s)\} \\
&\quad \cdot B(\theta^{r+1}, \cdots, \theta^{r+r'}, X_{s+1}, \cdots, X_{s+s'}) \\
&= fA(\theta^1, \cdots, \theta^r, X_1, \cdots, X_s) \cdot B(\theta^{r+1}, \cdots, \theta^{r+r'}, X_{s+1}, \cdots, X_{s+s'}) \\
&\quad + gA'(\theta^1, \cdots, \theta^r, X_1, \cdots, X_s) \cdot B(\theta^{r+1}, \cdots, \theta^{r+r'}, X_{s+1}, \cdots, X_{s+s'}) \\
&= fA \otimes B + gA' \otimes B
\end{aligned}
$$

よって、$\mathfrak{F}(M)$-双線形性を確認した。■

- テンソル積は結合的 (associative) であるため、任意の型のテンソルに対して

$$A \otimes B \otimes C$$

は well-defined. $(= A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C)$ 結合律が成り立つ。

- テンソル積は可換 (commutative) ではない。例えば座標近傍において

$$(dx^1 \otimes dx^2)(\partial_1, \partial_2) = dx^1(\partial_1)\, dx^2(\partial_2) = 1 \cdot 1 = 1$$
$$(dx^2 \otimes dx^1)(\partial_1, \partial_2) = dx^2(\partial_1)\, dx^1(\partial_2) = 0$$

であるため、$dx^1 \otimes dx^2 \neq dx^2 \otimes dx^1$

一方、テンソル積 $A \otimes B$ と関数 f は可換である。具体的に、

$$f(A \otimes B) := fA \otimes B = A \otimes fB$$

◎ テンソル積 $A\otimes B\otimes C$ の結合律の確認

以下では、テンソル A, B, C がそれぞれ (r, s), (r', s'), (r'', s'') 型とする。

- $$\big(A\otimes(B\otimes C)\big)(\theta^1, \cdots, \theta^{r+r'+r''}, X_1, \cdots, X_{s+s'+s''})$$

$$= A(\theta^1, \cdots, \theta^r, X_1, \cdots, X_s)\cdot(B\otimes C)(\theta^{r+1}, \cdots, \theta^{r+r'+r''}, X_{s+1}, \cdots, X_{s+s'+s''})$$

$$= A(\theta^1, \cdots, \theta^r, X_1, \cdots, X_s)\cdot B(\theta^{r+1}, \cdots, \theta^{r+r'}, X_{s+1}, \cdots, X_{s+s'})$$
$$\cdot\, C(\theta^{r+r'+1}, \cdots, \theta^{r+r'+r''}, X_{s+s'+1}, \cdots, X_{s+s'+s''})$$

- $$\big((A\otimes B)\otimes C\big)(\theta^1, \cdots, \theta^{r+r'+r''}, X_1, \cdots, X_{s+s'+s''})$$

についても、同様に展開される。

◎ 関数 f が可換であることの確認

$$f(A\otimes B)(\theta^1, \cdots, \theta^{r+r'}, X_1, \cdots, X_{s+s'})$$

$$= f\cdot\left\{A(\theta^1, \cdots, \theta^r, X_1, \cdots, X_s)\cdot B(\theta^{r+1}, \cdots, \theta^{r+r'}, X_{s+1}, \cdots, X_{s+s'})\right\}$$

↳ スカラーなので積のどの位置へも移動できる。

$$= (fA)(\theta^1, \cdots, \theta^r, X_1, \cdots, X_s)\cdot B(\theta^{r+1}, \cdots, \theta^{r+r'}, X_{s+1}, \cdots, X_{s+s'})$$

$$= A(\theta^1, \cdots, \theta^r, X_1, \cdots, X_s)\cdot (fB)(\theta^{r+1}, \cdots, \theta^{r+r'}, X_{s+1}, \cdots, X_{s+s'})$$

- contraction
- tensor derivation

◎ P57. Lemma 5

◎ 課題 [4]