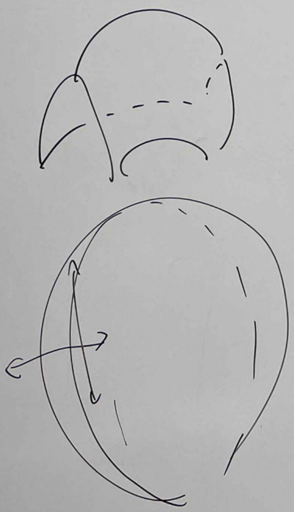
- 定理37を使って
  楕円面の平行曲面の
  特異点が(3,4)-カスプであることをチェック.



(HW)

- 服部修論を読み,
  $K_s = K\cos\theta$
  が成立するか, カクニン.
- m次折り目特異点をもつとき
  mは偶数か？
- Thm III, IV の m-type edge版
  を示す. (statementは本田ノート参照)
- 飯野ノートで, Thm IV 以降の
  ギロンを Lem / Prop にまとめ,
  参照しやすくする. (ノートの構成を
  みなおす)
- 各 symmetry をもつ場合に対応した例を作る

補題

$\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ をそれぞれ

$$\mathbf{v}_2 = (\cos\theta)\mathbf{n}(u) - (\sin\theta)\mathbf{b}(u)$$
$$\mathbf{v}_3 = (\sin\theta(u))\mathbf{n}(u) + (\cos\theta(u))\mathbf{b}(u)$$

とする (HNSUY の 4節参照). このとき、$\mathbf{v}_2$ はカスプ方向 $f_{vv}(u,0)$ と一致し、さらに

$$\mathbf{e}(u) \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3$$

が成り立つ.

実際に $\mathbf{e}(u) \times \mathbf{v}_2$ を計算すると、

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}(u) \times \mathbf{v}_2 &= \mathbf{e}(u) \times (\cos\theta\, \mathbf{n}(u) - \sin\theta\, \mathbf{b}(u)) \\
&= \cos\theta\, (\underbrace{\mathbf{e}(u) \times \mathbf{n}(u)}_{=\mathbf{b}(u)}) - \sin\theta\, (\mathbf{e}(u) \times \mathbf{b}(u)) \\
&= \cos\theta\, \mathbf{b}(u) + \sin\theta\, \mathbf{n}(u) \\
&= \mathbf{v}_3
\end{aligned}$$

$\mathbf{e} \times \mathbf{n} = \mathbf{b}$ より.
$\mathbf{e} \times \mathbf{b} = -\mathbf{n}$

である.

$$\mathbf{b}(u) := \mathbf{e}(u) \times \mathbf{n}(u),$$

which is the binormal vector of $\mathbf{c}(u)$. Since $f_{vv}(u,0)$ is perpendicular to $\mathbf{e}(u)$, we can write

(3.6) $$f_{vv}(u,0) = \cos\theta(u)\mathbf{n}(u) - \sin\theta(u)\mathbf{b}(u),$$

which is called the *cuspidal direction*. As defined in the introduction,

We now fix such a normal form f. We set

(4.3) $$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_2(u) \\ \mathbf{v}_3(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta(u) & -\sin\theta(u) \\ \sin\theta(u) & \cos\theta(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{n}(u) \\ \mathbf{b}(u) \end{pmatrix},$$

補題

特異曲線上の単位接ベクトル $\mathbb{e}(u)$ と カスプ方向 $\mathbb{x}(u)$ $(= f_{vv}(u,0))$ と 単位法ベクトル $\nu(u)$ は、それぞれ互いに直交している。
つまり、 $\mathbb{e}(u) \times \mathbb{x}(u) = \pm \nu(u)$ である。

$\mathbb{e}(u) \perp \mathbb{x}(u)$、 $\mathbb{x}(u) \perp \nu(u)$、 $\nu(u) \perp \mathbb{e}(u)$ を示せばよい。

単位法ベクトル場 $\nu(u)$ について、

$$\langle f_u, \nu \rangle = 0,\quad \langle f_v, \nu \rangle = 0$$

である。特に $\langle \underbrace{f_u}_{=\mathbb{e}(u)}, \nu \rangle = 0$ であるため、$\mathbb{e} \perp \nu$ である。次に $\langle f_v, \nu \rangle = 0$ を v で微分すると、

$$\langle f_{vv}, \nu \rangle + \langle f_v, \nu_v \rangle = 0.$$

$v=0$ を代入すると

$$\langle \underbrace{f_{vv}(u,0)}_{=\text{カスプ方向 } \mathbb{x}(u)}, \nu(u,0) \rangle + \langle \underbrace{f_v(u,0)}_{=0\ (\text{特異曲線 } v=0 \text{ 上})}, \nu_v(u,0) \rangle = 0$$

$\therefore$ $\mathbb{x}(u) \perp \nu(u)$ である。

後は $\mathbb{e}(u) \perp \mathbb{x}(u)$ を示せばよい。 $F(u,0) = \langle f_u(u,0), \underbrace{f_v(u,0)}_{=0} \rangle = 0$ を両辺 v で微分すると

$$\underbrace{\langle f_{uv}(u,0), f_v(u,0) \rangle}_{=0} + \langle \underbrace{f_u(u,0)}_{=\mathbb{e}(u)}, \underbrace{f_{vv}(u,0)}_{=\mathbb{x}(u)} \rangle = 0$$

$\therefore$ $\mathbb{e}(u) \perp \mathbb{x}(u)$ である。

$\left(\mathbb{e}(u) \times \underbrace{\mathbb{x}(u)}_{=\mathbb{V}_2} = \underbrace{\pm \nu(u)}_{=\mathbb{V}_3} \text{ である} \right)$

● m が偶数のとき、$\kappa_s(u) = \kappa(u)\cos\theta$ が成り立つこと確認。

定義 33 (特異曲率 [16, 2]). m を偶数，すなわち，n を奇数とする．$\hat{\gamma} := f \circ \gamma$，$\hat{\nu} := \nu \circ \gamma$ とする．このとき，定義 4 で与えられる $\hat{\lambda}$ と退化ベクトル場 η を用いて，

$$\kappa_s(t) := \epsilon_\gamma(t) \frac{\det(\hat{\gamma}'(t), \hat{\gamma}''(t), \hat{\nu}(t))}{|\hat{\gamma}'(t)|^3}$$

$$\epsilon_\gamma(t) = \mathrm{sgn}(\det(\hat{\gamma}'(t), \eta(t))\hat{\lambda}_\eta)$$

とする．この κ_s を第一種特異点からなる $\hat{\gamma}(t)$ 上の**特異曲率**という．

命題 58. $f : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ をフロンタル，$\gamma(u)$ を特異曲線とし，$\hat{\gamma}(= f \circ \gamma)$ が空間曲線としての曲率関数 $\kappa \neq 0$ を満たすとする．このとき，定義 *56* で定められる *angle function* θ を用いて，特異曲率 κ_s，極限法曲率 κ_ν はそれぞれ

$$\kappa_s = \kappa\cos\theta, \quad \kappa_\nu = \kappa\sin\theta$$

で表される． (m が奇数の場合の命題.)

● m が偶数の場合の証明は？

↓ $m=2$ の場合の証明

空間曲線 $\hat{\gamma}(u)$ の接ベクトルを $\mathbb{e}(u)$ とすると、

$$\mathbb{e}(u) = \hat{\gamma}'(u) \qquad \mathbb{e}'(u) = \hat{\gamma}''(u) \qquad \kappa(u) = \|\hat{\gamma}''(u)\|$$

となり、

$$\mathbb{n}(u) = \frac{1}{\kappa(u)}\mathbb{e}'(u), \qquad \mathbb{b}(u) := \mathbb{e}(u) \times \mathbb{n}(u)$$

と表せる. $\hat{\gamma}''$ について、単位法ベクトル場 $\nu(u)$ と カスプ方向 $x(u)$、実数 α、β を用いて

$$\hat{\gamma}''(u) = \alpha\, x(u) + \beta\, \nu(u) \cdots (*) \quad (\because \hat{\gamma}'' \perp \hat{\gamma}' \text{ かつ } \hat{\gamma}' \perp x,\ \hat{\gamma}' \perp \nu \text{ より})$$

と表せる. さらに、$\|\hat{\gamma}''(u)\| \left(= \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right) = \kappa(u)$ となる事から、実数 $\phi \in [-\pi, \pi)$ を用いて

$$\alpha = \kappa(u)\cos\phi, \qquad \beta = \kappa(u)\sin\phi$$

$$\hat{\gamma}''(u) = (\kappa(u)\cos\phi)\, x(u) + (\kappa(u)\sin\phi)\, \nu(u)$$

と表せる. 一方、m が偶数における特異曲率 κ_s、極限法曲率 κ_ν はそれぞれ

$$\kappa_s(u) = \mathrm{sgn}\left(\det(\hat{\gamma}'(u), \eta(u))\hat{\lambda}_\eta\right) \frac{\det(\hat{\gamma}'(u), \hat{\gamma}''(u), \nu(u))}{\|\hat{\gamma}'(u)\|^3}$$

$$\kappa_\nu(u) = \frac{\langle \hat{\gamma}''(u), \nu(u) \rangle}{\|\hat{\gamma}'(u)\|^2}$$

であるので、(＊) を代入して計算すると

$$\kappa_s(u) = \operatorname{sgn}\left(\det(\hat{r}'(u), \eta(u))\hat{\lambda}_1\right) \frac{\det\left(\hat{r}'(u), (\kappa(u)\cos\phi)x(u) + (\kappa(u)\sin\phi)\nu(u), \nu(u)\right)}{\|\hat{r}'(u)\|^3}$$

$$= \frac{\operatorname{sgn}\left(\det(\hat{r}'(u), \eta(u))\hat{\lambda}_1\right)}{\|\hat{r}'(u)\|^3}\left\{\det\left(\hat{r}'(u), (\kappa(u)\cos\phi)x(u), \nu(u)\right) + \underbrace{\det\left(\hat{r}'(u), (\kappa(u)\sin\phi)\nu(u), \nu(u)\right)}_{=0}\right\}$$

$$= \frac{\operatorname{sgn}\left(\det(\hat{r}'(u), \eta(u))\hat{\lambda}_1\right)}{\underbrace{\|\hat{r}'(u)\|^3}_{=1}}\left\{\det\left(\hat{r}'(u), (\kappa(u)\cos\phi)x(u), \nu(u)\right)\right\}$$

$$= \operatorname{sgn}\left(\det(\hat{r}'(u), \eta(u))\hat{\lambda}_1\right)\kappa(u)\cos\phi\left\{\underbrace{\det\left(\hat{r}'(u), x(u), \nu(u)\right)}\right\}$$

〰 部分について

m が偶数の場合、

$x(u) = \mathbb{V}_2 = \cos\theta(u)\,n(u) - \sin\theta(u)\,b(u)$

$\nu(u) = \pm\mathbb{V}_3 = \pm\sin\theta(u)\,n(u) \pm \cos\theta(u)\,b(u)$ （$\nu(u) = \mathbb{V}_3$ なら ⊕、$\nu(u) = -\mathbb{V}_3$ なら ⊖）

$$= \operatorname{sgn}\left(\det(\hat{r}'(u), \eta(u))\hat{\lambda}_1\right)\kappa(u)\cos\phi\,\underbrace{\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \pm\sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \pm\cos\theta \end{bmatrix}}_{=\pm 1}$$

$$= \pm\operatorname{sgn}\left(\det(\hat{r}'(u), \eta(u))\hat{\lambda}_1\right)\kappa(u)\cos\phi.$$

$$\kappa_\nu(u) = \frac{\left\langle(\kappa(u)\cos\phi)x(u) + (\kappa(u)\sin\phi)\nu(u), \nu(u)\right\rangle}{\|\hat{r}''(u)\|^2}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\|\hat{r}'(u)\|^2}}_{=1}\left\{\kappa(u)\cos\phi\underbrace{\langle x(u), \nu(u)\rangle}_{=0} + \kappa(u)\sin\phi\langle\nu(u), \nu(u)\rangle\right\}$$

$$= \kappa(u)\sin\phi$$

である。よって、$\hat{r}''(u) = \underbrace{(\kappa(u)\cos\phi)}_{\pm\operatorname{sgn}(\ \ )\kappa_s(u)}x(u) + \underbrace{(\kappa(u)\sin\phi)}_{\kappa_\nu(u)}\nu(u)$ と表される。

$\kappa(u) = \langle\hat{r}''(u), n(u)\rangle$ であることから、$\hat{r}''(u) = \left(\pm\operatorname{sgn}(\det(\hat{r}'(u), \eta(u))\hat{\lambda}_1)\kappa_s(u)\right)x(u) + (\kappa_\nu(u))\nu(u)$ と $n(u)$ の内積は

※ $\operatorname{sgn}(\det(\hat{r}'(u), \eta(u))\hat{\lambda}_1)$ を $\operatorname{sgn}(\ \ )$ と略記する。

$$\underbrace{\langle\hat{r}''(u), n(u)\rangle}_{\kappa(u)} = \left\langle\pm\operatorname{sgn}(\ \ )\kappa_s(u)x(u) + \kappa_\nu(u)\nu(u), n(u)\right\rangle$$

$$= \pm\operatorname{sgn}(\ \ )\kappa_s(u)\langle x(u), n(u)\rangle + \kappa_\nu(u)\langle\nu(u), n(u)\rangle$$

m が偶数の場合、

$x(u) = \mathbb{V}_2 = \cos\theta(u)\,n(u) - \sin\theta(u)\,b(u)$

$\nu(u) = \pm\mathbb{V}_3 = \pm\sin\theta(u)\,n(u) \pm \cos\theta(u)\,b(u)$

$$= \pm \operatorname{sgn}(\quad) K_s(u) \langle \cos\theta\, n(u) - \sin\theta\, b(u),\ n(u) \rangle$$
$$+ K_\nu(u) \langle \pm \sin\theta\, n(u) \pm \cos\theta\, b(u),\ n(u) \rangle$$

$$= \pm \operatorname{sgn}(\quad) K_s(u) \{ \cos\theta \underbrace{\langle n, n \rangle}_{=1} - \sin\theta \underbrace{\langle b, n \rangle}_{=0} \}$$
$$+ K_\nu(u) \{ \pm \sin\theta \underbrace{\langle n, n \rangle}_{=1} \pm \cos\theta \underbrace{\langle b, n \rangle}_{=0} \}$$

$$= \pm \operatorname{sgn}(\quad) K_s(u) \cos\theta \pm K_\nu \sin\theta \quad \cdots (**)$$

$\nu(u) = \mathbb{V}_3$ なら $\operatorname{sgn}(\quad) K_s(u) \cos\theta + K_\nu(u) \sin\theta$

$\nu(u) = -\mathbb{V}_3$ なら、 $-\operatorname{sgn}(\quad) K_s(u) \cos\theta - K_\nu(u) \sin\theta$

である. 同様に、$\hat{\gamma}''(u)$ と $b(u)$ の 内積 を考えると、

$$\underbrace{\langle \hat{\gamma}''(u), b(u) \rangle}_{=0} = \pm \operatorname{sgn}(\quad) K_s(u) \langle \cos\theta\, n(u) - \sin\theta\, b(u),\ b(u) \rangle$$
$$+ K_\nu(u) \langle \pm \sin\theta\, n(u) \pm \cos\theta\, b(u),\ b(u) \rangle$$
$$= \pm \operatorname{sgn}(\quad) K_s(u) \{ \cos\theta \underbrace{\langle n, b \rangle}_{=0} - \sin\theta \underbrace{\langle b, b \rangle}_{=1} \}$$
$$+ K_\nu(u) \{ \pm \sin\theta \underbrace{\langle n, b \rangle}_{=0} \pm \cos\theta \underbrace{\langle b, b \rangle}_{=1} \}$$

$$= \mp \operatorname{sgn}(\quad) K_s(u) \sin\theta \pm K_\nu(u) \cos\theta \quad \cdots (***)$$

$\nu(u) = \mathbb{V}_3$ なら $-\operatorname{sgn}(\quad) K_s(u) \sin\theta + K_\nu(u) \cos\theta$

$\nu(u) = -\mathbb{V}_3$ なら、 $\operatorname{sgn}(\quad) K_s(u) \sin\theta - K_\nu(u) \cos\theta$

である. $(**)(***)$ より.

$$\begin{cases} K(u) = \pm \operatorname{sgn}(\quad) K_s(u) \cos\theta \pm K_\nu \sin\theta \\ 0 = \mp \operatorname{sgn}(\quad) K_s(u) \sin\theta \pm K_\nu(u) \cos\theta \end{cases}$$

$K_s(u) = \pm \operatorname{sgn}(\quad) K(u) \cos\phi$

$K_\nu(u) = K(u) \sin\phi$ を代入.

$$\begin{cases} K(u) = K(u) \cos\phi \cos\theta \pm K(u) \sin\phi \sin\theta \\ 0 = -K(u) \cos\phi \sin\theta \pm K(u) \sin\phi \cos\theta \end{cases}$$

両辺を $K(\neq 0)$ で割る.

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 1 = \cos\phi\cos\theta \pm \sin\phi\sin\theta \\ 0 = -\cos\phi\sin\theta \pm \sin\phi\cos\theta \end{cases}$$

● $\nu(u) = \mathbb{V}_3$ のとき　$\left(K_s(u) = \mathrm{sgn}(\quad) K(u)\cos\phi \right)$

$$\begin{cases} 1 = \cos\phi\cos\theta + \sin\phi\sin\theta \\ 0 = -\cos\phi\sin\theta + \sin\phi\cos\theta \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 1 = \cos(\phi - \theta) \\ 0 = \sin(\phi - \theta) \end{cases}$$

$\therefore\ \phi = \theta + 2n\pi.$

$\longrightarrow \cos\phi = \cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta.$

$$\therefore\ K_s(u) = \mathrm{sgn}\Big(\underbrace{\det(\gamma'(u), \eta(u))}_{(u,v)\text{ の向き}}\ \underbrace{\hat{\lambda}_\eta}_{\nu\text{ の向き}}\Big) K(u)\cos\theta$$

$\det(\gamma'(u), \eta(u)) > 0$、$\nu(u) = \mathbb{V}_3$ となる向きを正とすると、$K_s(u) = K(u)\cos\theta.$

● $\nu(u) = -\mathbb{V}_3$ のとき　$\left(K_s(u) = -\mathrm{sgn}(\quad) K(u)\cos\phi \right)$

$$\begin{cases} 1 = \cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta \\ 0 = -\cos\phi\sin\theta - \sin\phi\cos\theta \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 1 = \cos(\phi + \theta) \\ 0 = -\sin(\phi + \theta) \end{cases}$$

$\therefore\ \phi = -\theta + 2n\pi$

$\longrightarrow \cos\phi = \cos(-\theta + 2n\pi) = \cos(-\theta)$

$$\therefore\ K_s(u) = -\mathrm{sgn}(\quad) K(u)\cos(-\theta)$$

$$= -\mathrm{sgn}\Big(\underbrace{\det(\hat{\gamma}(u), \eta(u))}_{(u,v)\text{ の向き}}\ \underbrace{\hat{\lambda}_\eta}_{\nu\text{ の向き}}\Big) K(u)\cos\theta$$

$\det(\gamma'(u), \eta(u)) > 0$、$\nu(u) = -\mathbb{V}_3$ となる向きを負とすると、$K_s(u) = K(u)\cos\theta.$

● 楕円の平行曲面が(3.4)-カスプ辺であることの確認

定理 37. フロンタル $f:\Sigma\to\boldsymbol{R}^3$ が $p\in\Sigma$ で $(3,4)$-カスプ辺であることと，f が波面 (フロント) であり，p が第一種退化次数 2 特異点であることが同値である．

定義 2 (波面 (フロント)). $f:\Sigma\to\boldsymbol{R}^3$ をフロンタル，$\nu:\Sigma\to\boldsymbol{S}^2$ を f の単位法ベクトル場とする．ここで，f が**波面 (フロント)** であるとは，$L:=(f,\nu):\Sigma\to\boldsymbol{R}^3\times\boldsymbol{S}^2$ がはめ込みである．つまり，Σ の座標系 (u,v) に対して 6 行 2 列の行列

$$M:=\begin{pmatrix} f_u & f_v \\ \nu_u & \nu_v \end{pmatrix}$$

が Σ 上の各点で階数が 2 であるときをいう．

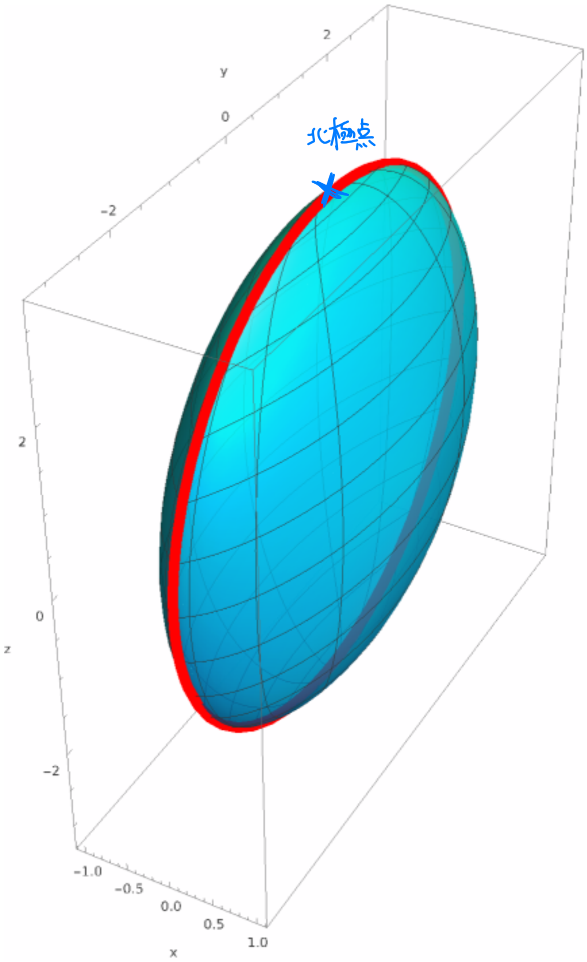
定義 3 (第一種特異点). 特異点 $p\in S(f)$ が**第一種特異点**であるとは，p において特異方向と退化方向が異なるとき，つまり退化方向 $\langle\eta_p\rangle_{\boldsymbol{R}}=\ker(df)_p$ が特異方向 $T_pS(f)$ と異なるときをいう．

定義 4 (退化次数 n 特異点 [2]). n を正の整数，$f:\Sigma\to\boldsymbol{R}^3$ をフロンタル，ν を f の単位法ベクトル場とする．ここで，f の特異点 p に対して p の座標近傍 $(U;u,v)$ 上で定義された符号付き面積密度関数を $\lambda=\det(f_u,f_v,\nu)$ とする．ここで，$p\in\Sigma$ が**退化次数 n 特異点**であるとは，$\mathrm{rank}(df)_p=1$ であり，p の近傍における C^∞ 級関数 $\hat\lambda,\alpha$ で，

- $\lambda=\alpha\hat\lambda^n$　　$\lambda=\alpha\hat\lambda^2$
- $(\hat\lambda_u,\hat\lambda_v)(p)\neq(0,0)$
- $\alpha(p)\neq 0$

を満たすものが存在するときをいう．

● ~~3次元楕円~~ 楕円面 ~~から~~ の 平行曲面 ~~を発射する~~ の 場合



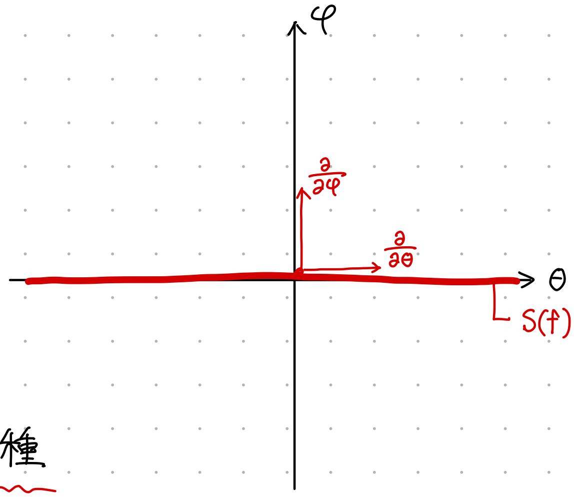
$$f(\theta,\varphi) = \left(-2\sin\varphi\sin\theta\left\{1-\frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta+\frac{1}{2}(5-3\cos2\varphi)\sin^2\theta}}\right\},\ \cos\varphi\sin\theta\left\{4-\frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta+\frac{1}{2}(5-3\cos2\varphi)\sin^2\theta}}\right\},\ \cos\theta\left\{4-\frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta+\frac{1}{2}(5-3\cos2\varphi)\sin^2\theta}}\right\} \right)$$

$\uparrow$

$\theta \neq 0, \pi$

特異集合 $S(f) = \{\varphi = 0\}$

$x = 2$
$y = 4$
$z = 4$



● 第1種特異点か？

特異方向 $= \frac{\partial}{\partial\theta}$

退化方向 $= \frac{\partial}{\partial\varphi}$

特異方向 $\neq$ 退化方向 より、第1種

● f は退化次数 2 特異点か？

$\left(\lambda(\theta,\varphi) = \det(f_\theta(\theta,\varphi), f_\varphi(\theta,\varphi), \nu(\theta,\varphi)) = (f_\theta \times f_\varphi)\cdot\nu \right)$

$= a\hat{\lambda}^2$?

$f_\theta(\theta,\varphi) \times f_\varphi(\theta,\varphi)$ を考える。

$\rightarrow$ $\varphi = 0$ まわりにおける $f_\theta(\theta,\varphi)$ および $f_\varphi(\theta,\varphi)$ のテイラー展開を考える。
$f_\theta(\theta,\varphi)$ と $f_\varphi(\theta,\varphi)$ はそれぞれ、

$$f_\theta(\theta,\varphi) = f_\theta(\theta,0) + \varphi f_{\theta\varphi}(\theta,0) + \frac{\varphi^2}{2} f_{\theta\varphi\varphi}(\theta,0) + O(\varphi^3)$$

$$f_\varphi(\theta,\varphi) = f_\varphi(\theta,0) + \varphi f_{\varphi\varphi}(\theta,0) + \frac{\varphi^2}{2} f_{\varphi\varphi\varphi}(\theta,0) + O(\varphi^3)$$

と表せる。特異点 $(\theta, 0)$ における偏微分は

$$f_\theta(\theta, 0) = (0,\ 3\cos\theta,\ -3\sin\theta)$$
$$f_{\theta\varphi}(\theta, 0) = 0$$
$$f_{\theta\varphi\varphi}(\theta, 0) = (0,\ 9\sin^2\theta\cos\theta - 3\cos\theta,\ -9\sin^3\theta + 6\sin\theta)$$
$$f_{\theta\varphi\varphi\varphi}(\theta, 0) = (-54\cos\theta\sin^2\theta,\ 0,\ 0)$$

$$f_\varphi(\theta, 0) = 0$$
$$f_{\varphi\varphi}(\theta, 0) = (0,\ -3\cos^2\theta\sin\theta,\ 3\cos\theta\sin^2\theta) = -\sin\theta\cos\theta\ f_\theta(\theta, 0)$$
$$f_{\varphi\varphi\varphi}(\theta, 0) = (-18\sin^3\theta,\ 0,\ 0)$$

であるため、$f_\theta(\theta, \varphi) \times f_\varphi(\theta, \varphi)$ は

$$\begin{aligned}
f_\theta(\theta, \varphi) \times f_\varphi(\theta, \varphi)
&= \left(f_\theta(\theta, 0) + \frac{\varphi^2}{2} f_{\theta\varphi\varphi}(\theta, 0) + O(\varphi^3)\right) \times \left(\varphi f_{\varphi\varphi}(\theta, 0) + \frac{\varphi^2}{2} f_{\varphi\varphi\varphi}(\theta, 0) + O(\varphi^3)\right) \\
&= \varphi\,\underbrace{\left(f_\theta(\theta, 0) \times f_{\varphi\varphi}(\theta, 0)\right)}_{f_\theta(\theta,0)\text{ と }f_{\varphi\varphi}(\theta,0)\text{ は平行なので }0} + \frac{\varphi^2}{2}\left(f_\theta(\theta, 0) \times f_{\varphi\varphi\varphi}(\theta, 0)\right) \\
&\quad + \frac{\varphi^3}{2}\left(f_{\theta\varphi\varphi}(\theta, 0) \times f_{\varphi\varphi}(\theta, 0)\right) + O(\varphi^4) \\
&= \frac{\varphi^2}{2}(0,\ 54\sin^4\theta,\ 54\sin^3\theta\cos\theta) + \frac{\varphi^3}{2}(9\cos^2\theta\sin^2\theta,\ 0,\ 0) + O(\varphi^4) \\
&= 27\sin^3\theta\,\varphi^2\,(0,\ \sin\theta,\ \cos\theta) + \frac{9}{2}\varphi^3\cos^2\theta\sin^2\theta\,(1,\ 0,\ 0) + O(\varphi^4)
\end{aligned}$$

である。ノルム $\|f_\theta(\theta, \varphi) \times f_\varphi(\theta, \varphi)\|$ は

$$\begin{aligned}
\|f_\theta(\theta, \varphi) \times f_\varphi(\theta, \varphi)\| &= \sqrt{27^2\sin^6\theta\,\varphi^4 + \left(\tfrac{9}{2}\right)^2\varphi^6\cos^4\theta\sin^4\theta} \\
&= \frac{9}{2}\sin^2\theta\,\varphi^2\sqrt{36\sin^2\theta + \varphi^2\cos^4\theta} \quad \cdots (*)
\end{aligned}$$

と表せるので、$\sin\theta \neq 0$ ~~ならば~~ ので、$\|f_\theta \times f_\varphi\| > 0$。$\lambda(\theta, \varphi)$ は

$$\begin{aligned}
\lambda(\theta, \varphi) &= \det\left(f_\theta(\theta, \varphi),\ f_\varphi(\theta, \varphi),\ \nu(\theta, \varphi)\right) \\
&= \left(f_\theta(\theta, \varphi) \times f_\varphi(\theta, \varphi)\right) \cdot \nu(\theta, \varphi) \neq \cancel{\frac{f_\theta \times f_\varphi}{\|f_\theta \times f_\varphi\|}}
\end{aligned}$$

(特異点を含んだ滑らかなベクトル場とは言えない)

$$= \| f_\theta(\theta,\varphi) \times f_\varphi(\theta,\varphi) \|$$ ② (*) より

$$= \underbrace{\frac{9}{2}\sin^2\theta\sqrt{36\sin^2\theta + \varphi^2\cos^4\theta}}_{a(\theta,\varphi)} \ \underbrace{\varphi^2}_{\hat{\lambda}^2(\theta,\varphi)}$$

$\exists \hat{\lambda} = \varphi$ とすれば、

と表せる. $a(\theta,\varphi) := \frac{9}{2}\sin^2\theta\sqrt{36\sin^2\theta + \varphi^2\cos^4\theta}$ 、 $\hat{\lambda} := \cancel{\pm}\varphi$ とすれば

- $\hat{\lambda}_\theta = 0$, $\hat{\lambda}_\varphi = \cancel{\pm}1$ より, $(\hat{\lambda}_\theta, \hat{\lambda}_\varphi)(\theta, 0) \neq (0,0)$

特異点 $P = (\theta, 0)$

- $a(\theta, 0) = \frac{9}{2}\sin^2\theta\sqrt{36\sin^2\theta}$

$$= \cancel{27\sin^3\theta} \neq 0 \quad (\because \sin\theta \neq 0)$$

$$27|\sin\theta|^3 > 0$$

以上より $\sin\theta \neq 0$ においては、退化次数 2 である.

● f はフロント(波面)か?

$(\because$ 正則なら f_θ と f_φ が 線形独立$)$

特異点 $\varphi = 0$ において、$M|_{\varphi=0} = \begin{bmatrix} f_\theta & f_\varphi \\ \nu_\theta & \nu_\varphi \end{bmatrix}_{\varphi=0}$ が はめ込みであること を示せばよい.

上の計算結果より、$\nu(\theta,\varphi)$ は

$$\nu(\theta,\varphi) = \frac{1}{\frac{9}{2}\sin^2\theta\ \varphi^2\sqrt{36\sin^2\theta + \varphi^2\cos^4\theta}} \begin{bmatrix} \frac{9}{2}\cos^2\theta\sin^2\theta\ \varphi^3 \\ 27\sin^4\theta\ \varphi^2 \\ 27\sin^3\theta\cos\theta\ \varphi^2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{36\sin^2\theta + \varphi^2\cos^4\theta}} \begin{bmatrix} \cos^2\theta\ \varphi \\ 6\sin^2\theta \\ 6\sin\theta\cos\theta \end{bmatrix}$$

であるため、$\nu_\varphi(\theta,\varphi)$ は $\left(\sqrt{36\sin^2\theta + \varphi^2\cos^4\theta}\right.$ を $\sqrt{\ }$ と略記する$\left.\right)$

$$\nu_\varphi(\theta,\varphi) = \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{\ }}\right)_\varphi}_{= -\frac{1}{2}\frac{2\varphi\cos^4\theta}{(36\sin^2\theta + \varphi^2\cos^4\theta)^{\frac{3}{2}}}} \begin{bmatrix} \cos^2\theta\ \varphi \\ 6\sin^2\theta \\ 6\sin\theta\cos\theta \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{\ }} \begin{bmatrix} 6\cos^2\theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ \nu_\varphi(\theta, 0) = \frac{1}{\sqrt{36\sin^2\theta}} \begin{bmatrix} 6\cos^2\theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (\sin\theta \neq 0).$$

よって、M は

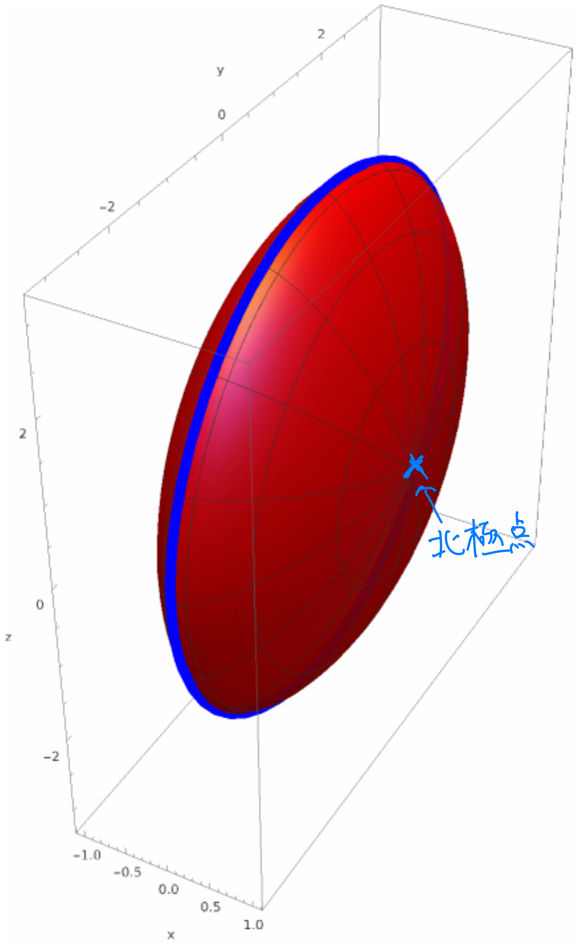
$$M\Big|_{\varphi=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3\cos\theta & 0 \\ -3\sin\theta & 0 \\ \boxed{\nu_\theta} & \begin{matrix} \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

と表されるため、ν_θ の値に関わらず、2つの列ベクトルは線形独立である。

$\therefore$ rank $M = 2$ より、f はフロント

以上より、この平行曲面は $\sin\theta \neq 0$ において $(3,4)$-カスプ辺である。$\blacksquare$

● ~~2次元~~ 楕円~~から発射された~~の平行曲線を回転させた場合



$$f(\theta,\varphi) = \left(2\sin\varphi\left\{-1+\frac{1}{\sqrt{\cos^2\varphi+4\sin^2\varphi}}\right\},\ \cos\varphi\cos\theta\left\{4-\frac{1}{\sqrt{\cos^2\varphi+4\sin^2\varphi}}\right\},\ \cos\varphi\sin\theta\left\{4-\frac{1}{\sqrt{\cos^2\varphi+4\sin^2\varphi}}\right\}\right)$$

特異集合 $S(f) = \{\varphi = 0\}$

$x = 2$

$y = 4$

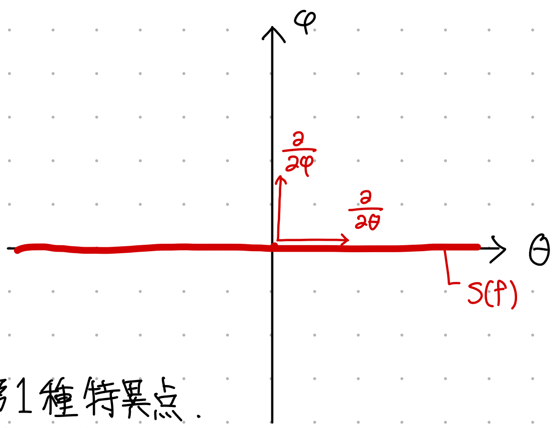
● 第1種特異点か?

$f(\theta,0) = (0,\ 3\cos\theta,\ 3\sin\theta)$ であり、

$f_\theta(\theta,0) = (0,\ -3\sin\theta,\ 3\cos\theta) \neq 0$

$f_\varphi(\theta,0) = 0$.

∴ 特異方向 $= \frac{\partial}{\partial\theta}$、退化方向 $= \frac{\partial}{\partial\varphi}$ より、第1種特異点.



● f は退化次数2特異点か?

$\left(\lambda(\theta,\varphi) = \det(f_\theta(\theta,\varphi),\ f_\varphi(\theta,\varphi),\ \nu(\theta,\varphi)) = (f_\theta \times f_\varphi)\cdot\nu\right)$

$= a\hat{\lambda}^2$?

$f_\theta(\theta,\varphi) \times f_\varphi(\theta,\varphi)$ を考える.

→ $\varphi = 0$ まわりにおける $f_\theta(\theta,\varphi)$ および $f_\varphi(\theta,\varphi)$ のテイラー展開を考える.

$f_\theta(\theta,\varphi)$ と $f_\varphi(\theta,\varphi)$ はそれぞれ

$$f_\theta(\theta,\varphi) = f_\theta(\theta,0) + \varphi f_{\theta\varphi}(\theta,0) + \frac{\varphi^2}{2} f_{\theta\varphi\varphi}(\theta,0) + \frac{\varphi^3}{6} f_{\theta\varphi\varphi\varphi}(\theta,0) + O(\varphi^4)$$

$$f_\varphi(\theta,\varphi) = f_\varphi(\theta,0) + \varphi f_{\varphi\varphi}(\theta,0) + \frac{\varphi^2}{2} f_{\varphi\varphi\varphi}(\theta,0) + \frac{\varphi^3}{6} f_{\varphi\varphi\varphi\varphi}(\theta,0) + O(\varphi^4)$$

と表せる. 特異点 $(\theta,0)$ における偏微分は

$$f_\theta(\theta,0) = (0,\ -3\sin\theta,\ 3\cos\theta) \qquad f_\varphi(\theta,0) = 0$$

$$f_{\theta\varphi}(\theta,0) = 0 \qquad f_{\varphi\varphi}(\theta,0) = 0$$

$$f_{\theta\varphi\varphi}(\theta,0) = 0 \qquad f_{\varphi\varphi\varphi}(\theta,0) = (-18,\ 0,\ 0)$$

$$f_{\theta\varphi\varphi\varphi}(\theta,0) = 0 \qquad f_{\varphi\varphi\varphi\varphi}(\theta,0) = (0,\ -108\cos\theta,\ -108\sin\theta)$$

であるため, $f_\theta(\theta,\varphi) \times f_\varphi(\theta,\varphi)$ は

$$f_\theta(\theta,\varphi) \times f_\varphi(\theta,\varphi) = \left(f_\theta(\theta,0) + O(\varphi^4)\right) \times \left(\frac{\varphi^2}{2} f_{\varphi\varphi\varphi}(\theta,0) + \frac{\varphi^3}{6} f_{\varphi\varphi\varphi\varphi}(\theta,0) + O(\varphi^4)\right)$$

$$= \frac{\varphi^2}{2}\left(f_\theta(\theta,0) \times f_{\varphi\varphi\varphi}(\theta,0)\right) + \frac{\varphi^3}{6}\left(f_\theta(\theta,0) \times f_{\varphi\varphi\varphi\varphi}(\theta,0)\right) + O(\varphi^4)$$

$$= \frac{\varphi^2}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ -54\cos\theta \\ -54\sin\theta \end{bmatrix} + \frac{\varphi^3}{6}\begin{bmatrix} 324 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + o(\varphi^3)$$

である. ノルム $\| f_\theta(\theta,\varphi) \times f_\varphi(\theta,\varphi) \|$ は

$$\| f_\theta(\theta,\varphi) \times f_\varphi(\theta,\varphi) \| = \sqrt{27^2\varphi^4 + 54^2\varphi^6}$$

$$= 27\varphi^2\sqrt{1 + 4\varphi^2} \quad \cdots (**)$$

と表せるので. $\lambda(\theta,\varphi)$ は

$$\lambda(\theta,\varphi) = \det\left(f_\theta(\theta,\varphi),\ f_\varphi(\theta,\varphi),\ \nu(\theta,\varphi)\right)$$

$$= \left(f_\theta(\theta,\varphi) \times f_\varphi(\theta,\varphi)\right) \cdot \nu(\theta,\varphi) \qquad \nu = \frac{f_\theta \times f_\varphi}{\| f_\theta \times f_\varphi \|}$$

$$= \| f_\theta(\theta,\varphi) \times f_\varphi(\theta,\varphi) \| \qquad (**)より$$

$$= \underbrace{27\sqrt{1 + 4\varphi^2}}_{=:\, a(\theta,\varphi)}\ \underbrace{\varphi^2}_{=:\, \hat{\lambda}^2(\theta,\varphi)}$$

である. $a(\theta,\varphi) := 27\sqrt{1+4\varphi^2}$, $\cancel{\hat{\lambda}^2 := \varphi^2}$ $\exists\, \hat{\lambda} = \varphi$ とおけば,

・$\hat{\lambda}_\theta = 0,\ \hat{\lambda}_\varphi = \pm 1$ より，$(\hat{\lambda}_\theta, \hat{\lambda}_\varphi)(\theta, 0) = (0, \pm 1) \neq (0, 0)$.

・$a(\theta, 0) = 27 \neq 0$

以上より，退化次数2である.

● f はフロント（波面）か？

（∵ 正則なら f_θ と f_φ が線形独立）

特異点 $\varphi = 0$ において，$M\Big|_{\varphi=0} = \begin{bmatrix} f_\theta & f_\varphi \\ \nu_\theta & \nu_\varphi \end{bmatrix}_{\varphi=0}$ がはめ込みであることを示せばよい.

上の計算結果より，$\nu(\theta, \varphi)$ は

$$\nu(\theta, \varphi) = \frac{1}{27\varphi^2\sqrt{1+4\varphi^2}} \begin{bmatrix} 54\varphi^3 \\ -27\varphi^2\cos\theta \\ -27\varphi^2\sin\theta \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+4\varphi^2}} \begin{bmatrix} 2\varphi \\ -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{bmatrix}$$

であるため，$\nu_\varphi(\theta, \varphi)$ は

$$\nu_\varphi(\theta, \varphi) = -\frac{1}{2}\frac{8\varphi}{(1+4\varphi^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{bmatrix} 2\varphi \\ -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{1+4\varphi^2}} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\therefore\ \nu_\varphi(\theta, 0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

よって，M は

$$M\Big|_{\varphi=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3\sin\theta & 0 \\ 3\sin\theta & 0 \\ & 2 \\ \nu_\theta & 0 \\ & 0 \end{bmatrix}$$

と表されるため，ν_θ の値に関わらず，2つの列ベクトルは線形独立である.

$\therefore \operatorname{rank} M = 2$ より、f はフロント

以上より、この平行曲面は $(3,4)$-カスプ辺である。$\blacksquare$