目次

7/17(木) セミナー資料

飯野 郁

2025/07/17

1 前回の宿題

やること

- 定理 3 の (3,4)-CE 版をまとめる
- 平面曲線の同値条件まとめる
- (3,4)-CE における右同値類の数

2 定理 3 の (3,4)-CE 版をまとめる

(3,4)-CE 版 右同値類の数に関する必要十分条件
$f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ の右同値類 (つまり, 像の数) が 4 である $\Leftrightarrow$ 第一基本形式 ds_f^2 が symmetry を"持たない"ときである (つまり, 一般化カスプ辺のときと同じ).

(⇒ を示す)『$f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ の右同値類 (つまり, 像の数) が 4 である $\Rightarrow$ 第一基本形式 ds_f^2 を"持たない"』 の対偶を示す. つまり, ds_f^2 が, symmetry φ を持つと仮定する.

(a) φ が effective ~~orientation-reversing~~ symmetry の場合
$f \circ \varphi, \check{f} \circ \varphi$ は $f_*, \check{f}_*$ のいずれかと一致する (図より分かる).
  - $f \circ \varphi = f_*$ なら, f と f_* は右同値である. (同様に, $\check{f}$ は $\check{f}_*$ と右同値である)
  - $f \circ \varphi = \check{f}_*$ なら, f と $\check{f}_*$ は右同値である. (同様に, $\check{f}$ は f_* と右同値である)

$\therefore \{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ の右同値類の個数は 2 である.

(b) φ が ~~orientation-preserving~~ non-effective symmetry の場合

$f \circ \varphi$ は $\check{f}$ と右同値である (f と向きが一致するのは $\check{f}$ のみ).
$f_* \circ \varphi$ は $\check{f}_*$ と右同値である (f_* と向きが一致するのは $\check{f}_*$ のみ).
$\therefore \{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ の右同値類の個数は 2 である.

(a)(b) より, φ は orientation-perserving/reversing に関わらず『$f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ の右同値類 (つまり, 像の数) が 4 である $\Rightarrow$ 第一基本形式 ds_f^2 を"持たない"』を示した.

$\boxed{\text{は symmetry}}$

(⇐ を示す)$f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ の右同値類 (つまり, 像の数) が 4"ではない"と仮定する.(つまり, いずれか 2 つが右同値であると仮定する)
f が $g \in \{\check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ と右同値であるとして, 一般性を失わない.

(1) $g = f_*$ または $\check{f}_*$ の場合
f と右同値であるので, $\exists \varphi$: diffeo s.t. $g = f \circ \varphi$. それぞれの第一基本形式 ds^2 を $ds_g^2, ds_{f\circ\varphi}^2$ とすると, $ds_g^2 = \varphi^* ds_f^2$. 定理 2(1) より f_* は f と同じ第一基本形式を持ち, 63 ページより $\check{f}$ は f と同じ第一基本形式を持つため, $ds_g^2 = ds_f^2$ である. したがって, $ds_f^2 = \varphi^* ds_f^2$ である.

もし $\varphi = \mathrm{Id}$ なら, $g = f$ が成り立ち, $f = f_*$ または $\check{f}_*$ が成り立つ. しかし, これでは曲線の像 $C = c(J)$ の向きが f と f_* で同じとなり, 矛盾.
$\therefore \varphi \neq \mathrm{Id}$ であり, Def 0.4 より φ は ds_f^2 の symmetry である.

(2) $g = \check{f}$ の場合
f と右同値であるので, $\exists \varphi$: diffeo s.t. $\check{f} = f \circ \varphi$. (1) と同様に, $ds_f^2 = \varphi^* ds_f^2$ である. もし $\varphi = \mathrm{Id}$ なら, $f = \check{f}$ である.

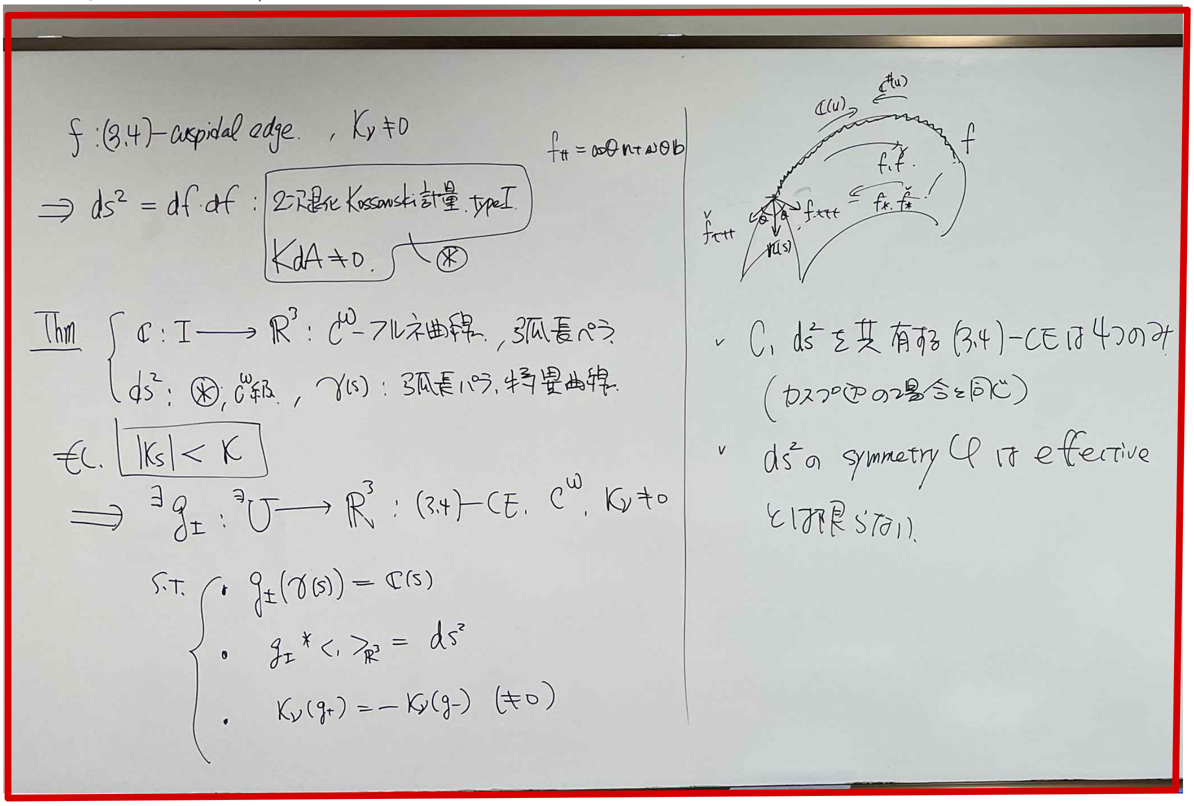
(Hattori 論文 定理 67)

ここで図より, カスプ角は f から決まる (ν も f から決まる) ので, $f = \check{f} \Rightarrow \theta = \check{\theta}$ となるが, $\theta = -\check{\theta}$ より, $\theta = 0$ となる. しかしカスプ角の定義域 $0 < |\theta| < \pi$ であったため, この事実と矛盾する.
$\therefore \varphi \neq \mathrm{Id}$ であり, Def 0.4 より φ は ds_f^2 の symmetry である.

(1)(2) より,『第一基本形式 ds_f^2 が symmetry を"持たない" $\Rightarrow f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ の右同値類 (つまり, 像の数) が 4 である』を示した.

以上より, 同値条件が成立する. ■

(Theorem 3 は (3,4)-CE でも成立する．しかも orientation-preserving, orientation-reserving に関係ない)



3　平面曲線の同値条件まとめる

『$T \in O(3)$ が orientation-preserving symmetry(trivial) である (つまり, $\forall P \in C$ に対して, $T(P) = P$) $\Leftrightarrow$ C は平面曲線であり, T は平面に関する折り返し』

まず, $\Leftarrow$ は自明である (論文 66 ページの Def 1.2 に記載).

そのため, $\Rightarrow$ を示す.
$\mathbf{c}(u)$ を弧長パラメータ表示, $\kappa(u) > 0$ とする (つまり, $\mathbf{c}(u)$ は直線ではない).
回転と平行移動により, $\mathbf{c}(0)$ と $\mathbf{n}(0)$ は

$$\mathbf{c}'(0) = [1, 0, 0]^T = \mathbf{e}_1,$$
$$\mathbf{n}(0) = \frac{\mathbf{c}''(0)}{\kappa(0)} = [0, 1, 0]^T = \mathbf{e}_2 \quad (\text{つまり}, \mathbf{c}''(0) = [0, \kappa(0), 0]^T)$$

として良い.

まず仮定より, $T\mathbf{c}(u) = \mathbf{c}(u)$ であった．両辺を u で微分すると

$$T\mathbf{c}'(u) = \mathbf{c}'(u)$$

である．$u = 0$ を代入すると, $T\mathbf{c}'(0) = \mathbf{c}'(0)$, つまり $T\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1$ が成り立つ．さらに $T\mathbf{c}'(u) = \mathbf{c}'(u)$ をもう一度 u で微分すると,

$$T\mathbf{c}''(u) = \mathbf{c}''(u)$$

であるので, $u = 0$ を代入すると, $T\mathbf{c}''(0) = \mathbf{c}''(0)$．つまり $T\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2$ が成り立つ．

仮定より T は orientation-preserving symmetry(trivial) である, つまり恒等写像ではないので, $T \in O(3)$ (つまり, $\det T = \pm 1$) かつ

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix}, \quad T \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を満たす T は,

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

のみである．$\mathbf{c}(u) = [x(u), y(u), z(u)]^T$ とすると, T より

$$T\mathbf{c}(u) = [x(u), y(u), -z(u)]^T$$

である．さらに仮定より $T\mathbf{c}(u) = \mathbf{c}(u)$ であったので,

$$[x(u), y(u), -z(u)]^T = [x(u), y(u), z(u)]^T$$

が $\forall u$ で成立する．つまり $z(u) = 0$ が成立する．

$\therefore \mathbf{c}(u) = [x(u), y(u), 0]^T$ となり，これは平面曲線である．■

4 (3,4)-CE における右同値類の数

← Theorem Ⅲ とまとめて 1つにする．

(3,4)-CE における右同値類の数 (つまり, 像の数)について

$\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ の右同値類の数を n とする．このとき,

(a) $n = 4 \Leftrightarrow ds_f^2$ が symmetry を~~持つ~~ 持たない

(b) $n \neq 4 \Rightarrow n = 1$ または 2

(c) $n = 1 \Leftrightarrow ds_f^2$ が effective symmetry と non-effective symmetry の両方を持つ

Proof.

(a) は, (3,4)-CE における定理 3 ですでに示したため, 成り立つ.

(c) が正しいことを示す. $n = 1 \Leftrightarrow f$ は $\check{f}, f_*, \check{f}_*$ の 3 つ全てと右同値 であるので, (3,4)-CE における定理 3 の, 『f の右同値類の個数 < 4』を仮定した場合の

(1)$g = f_*$ または $g = \check{f}_*$ の場合と

(2)$g = \check{f}$

の両方を満たしている状況である.

(1) が成り立つ $\Leftrightarrow$ f と $f_*, \check{f}_*$ が右同値である $\Leftrightarrow$ $\exists \varphi$: diffeo s.t. f_*(または $\check{f}_*$) $=$ $f \circ \varphi$ ($\varphi \neq \mathrm{Id}$).
f と f_* (または $\check{f}_*$) は向きが逆であるため, diffeo φ は曲線の向きを反転させる.
$\therefore$ Def 0.4 より, φ は effective である.

(2) が成り立つ $\Leftrightarrow$ f と $\check{f}$ は右同値である $\Leftrightarrow$ $\exists \psi$: diffeo s.t. $\check{f} = f \circ \psi$ ($\psi \neq \mathrm{Id}$).
f と $\check{f}$ は向きが同じであるため, diffeo ψ は曲線の向きを保つ.
$\therefore$ Def 0.4 より, ψ は non-effective symmetry である.

以上をまとめると,

$n = 1$ $\Leftrightarrow$ f は $\check{f}, f_*, \check{f}_*$ の 3 つ全てと右同値
$\Leftrightarrow$ (3,4)-CE における定理 3(仮定 : 右同値の数が 4 未満) の (1)(2) がどちらも成り立つ
$\Leftrightarrow$ ds_f^2 は effective symmetry φ と non-effective symmetry ψ の両方を持つ

$\therefore$(c) が成り立つ.

($n = 2$ が成り立つのは, (1) か (2) のいずれか一方のみを満たす場合である)