

~~未完部分~~

- $N_f = 4$ の具体例の構成
- non-eff symmetry φ が向きを逆にすることのステートメント
- 参考文献の整理

修士学位論文

- 命題 5.3 の proof (合同の定義)

等長的な m -type edge と対称性

指導教員: 本田淳史 准教授

飯野 郁

横浜国立大学大学院理工学府
数物・電子情報系理工学専攻
数学教育分野

24NC101

2026年1月16日

• アルファベット
…先頭を大文字

目 次

1. 序論	1
1.1. 研究背景・動機	1
1.2. 主結果	1
1.3. 意義・証明のアイデアや方法	4
1.4. 今後の課題	4
1.5. 謝辞	4
2. 準備	5
2.1. 曲線の準備	5
2.2. 同値関係と m -type edge の準備	8
2.3. 退化次数 n 特異点と adapted coordinate system の導入	12
3. m -type edge の特異曲率	14
3.1. 極限法曲率と特異曲率の定義	14
3.2. 曲率関数, カスプ角との関係式	15
4. n 次 Kossowski 計量の等長変形定理	20
4.1. Kossowski 計量の導入	20
4.2. 等長双対, 逆, 逆双対の導入	22
4.3. m -type edge の等長変形定理	22
5. 主定理 A	24
5.1. 主定理のための補題	24
5.2. 主定理の主張および証明	29
5.3. 主定理 A の具体例	31
6. 主定理 B	37
6.1. 主定理のための補題	37
6.2. 主定理の主張および証明	44
6.3. 主定理 B の具体例	50
付 錄 A. 主定理 A の具体例のための補題	54
参考 文 献	60

* 概要と同じ修正をする.

1. 序論

1.1. 研究背景・動機

与えられたリーマン計量を第一基本形式としてもつ正則曲面は非可算個存在する。一方、同様の問題をカスプ辺をもつ曲面に対して考えると、特異点集合の像として定まる正則曲線が、新たなデータとして自然に現れる。Honda et al. [3] は、実解析的かつジェネリックな場合に、与えられた特異点をもつリーマン計量（Kossowski 計量と呼ばれる）を第一基本形式にもち、与えられた空間内の正則曲線を特異点集合にもつカスプ辺が、ちょうど 4 つ存在することを示した。さらに、それら 4 つのカスプ辺の像が 2 つになると、Kossowski 計量が対称性をもつことが同値であること、また 4 つのカスプ辺の合同類の個数と、計量および空間曲線の対称性との関係を明らかにした。

近年、カスプ辺を含む特異点のクラスとして、 m -type edge が Martins et al. [9] により導入された。 m が偶数の場合にはカスプ辺と類似した現象が確認される一方で、 m が奇数の場合にはカスプ辺とは異なる現象が起こることが指摘されている。本研究では、与えられた実解析的かつジェネリックな m -type edge に対し、特異曲線の像と第一基本形式を共有する m -type edge の右同値類および合同類の個数を分類した。

1.2. 主結果

Martins et al. により、カスプ辺の一般化として m -type edge と呼ばれる特異点を許容するクラスが導入された。 m を正の整数とし、 Σ を 2 次元部分多様体とする。このとき、 C^∞ 級写像 $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ が $p \in \Sigma$ で m -type edge であるとは、定義域と値域の局所座標系が存在して、 f を p の近傍で

$$f(u, v) = (u, v^m, v^{m+1}\alpha(u, v))$$

と表せるような C^∞ 級関数 $\alpha(u, v)$ が存在することをいう。特に $\alpha(u, v) = 1$, $m = 2$ の 2-type edge はカスプ辺、 $\alpha(u, v) = 1$, $m = 3$ の 3-type edge は(3, 4)-カスプ辺と呼ばれる（図 1）。(3, 4)-カスプ辺は楕円面の平行曲面で最初に現れる特異点である（図 2）。

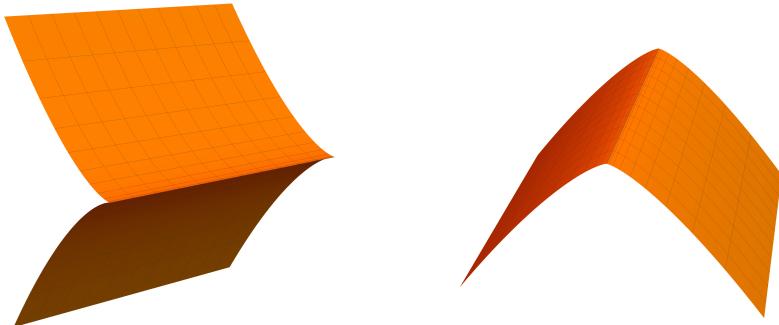


図 1. 左：標準的なカスプ辺、右：標準的な(3, 4)-カスプ辺

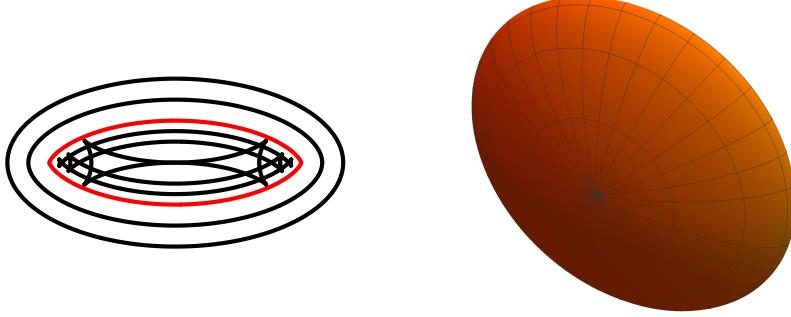


図 2. 左：楕円の平行曲線で表れる (3,4)-カスプ辺 (赤線部), 右：(3,4)-カスプ辺をもつ回転体

与えられた m -type edge に対して、同じ特異曲線の像と第一基本形式をもつ m -type edge が存在するための十分条件を満たす集合を定義する。 $\mathbf{c}(u)$ を閉区間 $J := [-l, l]$ ($l > 0$) 上で定義された、弧長パラメータ表示された \mathbb{R}^3 の正則曲線として、 J 上では $\kappa > 0$ とする。 U を \mathbb{R}^2 における $J \times \{0\}$ の近傍とし、 $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ を $J \times \{0\}$ で $\kappa_\nu \neq 0$ を満たす m -type edge のみをもつ実解析的な写像で

$$f(u, 0) = \mathbf{c}(u) \quad (u \in J)$$

であるものとする。また、 $\mathbf{c}(u)$ の像を $C := \mathbf{c}(J)$ と表し、 $\max_{u \in J} |\kappa_s(u)| < \min_{u \in J} \kappa(u)$ をみたす f の集合を

$$\mathcal{G}_{m,**}^\omega(\mathbb{R}_J^2, \mathbb{R}^3, C)$$

で表す。さらに本論文では $f \in \mathcal{G}_{m,**}^\omega(\mathbb{R}_J^2, \mathbb{R}^3, C)$ に対して同じ特異曲線の像と第一基本形式を持つ等長双対 \check{f} 、逆 f_* 、逆双対 \check{f}_* を

- (1) \check{f} が f の等長双対 $\iff \check{f}$ と f は特異曲線をたどる向きが同じ (つまり、 \check{f} と f は C に同じ向きを定める) で、カスプ角の符号が逆である。
- (2) f_* が f の逆 $\iff f_*$ と f は特異曲線をたどる向きが逆 (つまり、 f_* と f は C に逆の向きを定める) で、カスプ角の符号が同じである。
- (3) \check{f}_* が f の逆双対 $\iff \check{f}_*$ と f は特異曲線をたどる向きとカスプ角の符号がともに逆である。

で定義する。次に、第一基本形式 ds_f^2 に対して symmetry を導入する。 $\varphi^* ds_f^2 = ds_f^2$ が成り立ち、かつ φ が恒等写像ではないとき、 φ を ds_f^2 の symmetry という。さらに、

(1) φ が effective symmetry \iff symmetry φ が f の特異曲線の向きを反転させる
 (2) φ が non-effective symmetry \iff symmetry φ が f の特異曲線の向きを保つ

と定義する。これらの symmetry を用いて次の $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ の右同値類に関する主定理が得られた。

主定理 A. n_f を $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ の右同値類の数 (つまり、像の数) とする。このとき、次が成り立つ。

- (1) m が偶数の場合

- (a) $n_f = 2, 4$ である.
- (b) $n_f = 4 \iff ds_f^2$ は effective symmetry を持たない.
- (2) m が奇数の場合
 - (a) $n_f = 1, 2, 4$ である.
 - (b) $n_f = 4 \iff ds_f^2$ は symmetry を持たない.
 - (c) $n_f = 1 \iff ds_f^2$ は effective symmetry と non-effective symmetry の両方を持つ.

主定理 A は、与えられた特異曲線の像と第一基本形式に対して、同じデータをもつ m -type edge が右同値の意味で何通り現れるかを、 ds_f^2 の symmetry の有無だけで記述したものである。

第一基本形式 ds_f^2 と同様に、特異曲線の像 C に関する symmetry を定義する。 $\mathbf{c}(u)$ を閉区間 J 上で定義された、弧長パラメータ表示された \mathbb{R}^3 の埋め込まれた正則曲線で、 J 上では $\kappa > 0$ とする。このとき、

- (1) $T \in O(3)$ が C の symmetry $\iff T(C) = C$ かつ T は単位行列ではない.
- (2) symmetry T が orientation-preserving $\iff u \in J$ に対して, $T\mathbf{c}(u) = \mathbf{c}(u)$.
- (3) symmetry T が orientation-reversing $\iff u \in J$ に対して, $T\mathbf{c}(u) = \mathbf{c}(-u)$.

さらに、 $\det T = 1$ (resp. -1) のとき、 T が 正 (resp. 負) であるという。これらの (C, ds_f^2) の symmetry を用いて次の $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ の合同類に関する主定理が得られた。

主定理 B. N_f を $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ の合同類の数と定義する。このとき、 $N_f \neq 3$ を満たす。さらに、 m の偶奇に応じて次が成り立つ。

- (1) m が偶数の場合
 - (I) $N_f = 4 \iff C$ は symmetry をもたず、かつ ds_f^2 は effective symmetry をもたない.
 - (II) $N_f = 1 \iff$ 次のいずれかが成り立つ。
 - (a1) C が平面曲線かつ orientation-reversing symmetry をもつ.
 - (a2) C が平面曲線かつ ds_f^2 が effective symmetry をもつ.
 - (b) C が正の orientation-reversing symmetry をもち、かつ ds_f^2 が effective symmetry をもつ.
- (2) m が奇数の場合
 - (I) $N_f = 4 \iff ds_f^2$ と C はいずれも symmetry を持たない.
 - (II) $N_f = 1 \iff$ 次のいずれかが成り立つ。
 - (a1) C は平面曲線かつ C に orientation-reversing symmetry が存在する.
 - (a2) C は平面曲線かつ ds_f^2 に effective symmetry が存在する.
 - (b1) ds_f^2 に non-effective symmetry が存在して、かつ C に orientation-reversing symmetry が存在する.
 - (b2) ds_f^2 に non-effective symmetry と effective symmetry が存在する.
 - (c) C に正の orientation-reversing symmetry が存在して、かつ ds_f^2 にヤコビアンが負の effective symmetry が存在する。

- (d) C に負の orientation-reversing symmetry が存在して, かつ ds_f^2 にヤコビアンが正の effective symmetry が存在する.

主定理 A が定義域のパラメータ変換による同一視(右同値)に関する分類であるのに対し, 主定理 B は値域の回転と平行移動による同一視(合同)に関する分類を与える. そして, その合同類の個数を第一基本形式 ds_f^2 と特異曲線の像 C の symmetry から決定する定理である.

1.3. 意義・証明のアイデアや方法

Non-effective symmetry が右同値類や合同類の分類に現れるのは m が奇数特有の現象で、特に $n_f = 1$ が発生する理由である. 主結果では割愛したが、 m が偶数の場合は m -type edge f に m 次折り目特異点というクラスを特徴づけている. これらは Honda et al. のカスプ辺の場合の結果にはなかったものである.

主定理の証明では、2つの m -type edge f, g の向きに同調した単位法ベクトル場をそれぞれ求めることでカスプ角を比較し、右同値または合同であることを示した.

1.4. 今後の課題

値域となる空間 \mathbb{R}^3 を \mathbb{R}^n へ高次元化した場合に、同様に m -type edge の右同値類と合同類の分類がどの程度成立するか調べていきたい. また、 m -type edge の仮定で用いた実解析的の条件をどの程度まで緩めても (C^∞ 級など) 同様の分類が出来るかを検討していくたい.

1.5. 謝辞

本修士論文の執筆にあたり、終始丁寧な指導をしてくださった指導教員である本田淳史准教授に心より感謝を申し上げます.

2. 準備

本章では、主定理を導くうえで必要な曲線の設定と、 m -type edge およびその周辺の定義を述べ、整理する。

2.1. 曲線の準備

本節では、弧長パラメータ表示された正則曲線 $\mathbf{c}(u)$ に対し、パラメータの向きを反転させた曲線 $\mathbf{c}_*(u) := \mathbf{c}(-u)$ を導入し、そのフレネ枠および曲率と捩率がどのように表されるかを整理する。あわせて、後に特異点集合の対称性を扱うために、symmetry を導入する。以後、 \mathbb{R}^3 の平行移動により一般性を失わずに $\mathbf{c}(0) = \mathbf{0}$ を仮定する。

~~$\mathbf{c}(u)$ をパラメータ u に沿った正則曲線として~~ $\mathbf{c}_*(u) := \mathbf{c}(-u)$ とする。また、 $\{\mathbf{e}(u), \mathbf{n}(u), \mathbf{b}(u)\}$ を $\mathbf{c}(u)$ のフレネ枠とする。 $\mathbf{c}'_*(u) = -\mathbf{c}'(-u)$, $\mathbf{c}''_*(u) = \mathbf{c}''(-u)$, $\|\mathbf{c}''(-u)\| = \kappa(-u)$ より、

$\mathbf{C}(u)$ の曲率関数 $K > 0$

とする

$$\mathbf{e}_*(u) := -\mathbf{e}(-u)$$

$$\mathbf{n}_*(u) := \frac{1}{\kappa(-u)} \mathbf{c}''(-u) = \mathbf{n}(-u)$$

はそれぞれ $\mathbf{c}_*(u)$ に沿う単位接ベクトル場および主法線ベクトル場を与える。したがって、

$$\mathbf{b}_*(u) := \mathbf{e}_*(u) \times \mathbf{n}_*(u) = -\mathbf{e}(-u) \times \mathbf{n}(-u) = -\mathbf{b}(-u)$$

は $\mathbf{c}_*(u)$ に沿う従法線ベクトル場となる。よって、正則曲線 $\mathbf{c}_*(u) = \mathbf{c}(-u)$ のフレネ枠は

$$(2.1) \quad \{-\mathbf{e}(-u), \mathbf{n}(-u), -\mathbf{b}(-u)\}$$

と表される。また、 $\mathbf{c}_*(u)$ の曲率関数 κ_* と捩率関数 τ_* はそれぞれ

$$\kappa_*(u) := \|\mathbf{e}'_*(u)\| = \kappa(-u)$$

$$\tau_*(u) := \mathbf{n}'_*(u) \cdot \mathbf{b}_*(u) = -\mathbf{n}'(-u) \cdot (-\mathbf{b}(-u)) = \tau(-u)$$

となる。

以上を踏まえ、曲線の像を保つ直交変換のうち、弧長パラメータ u を保つ（あるいは反転する）ものを本論文では扱う。

定義 1 (Symmetry). $\mathbf{c}(u)$ を閉区間 $J := [-l, l]$ ($l > 0$) 上で定義された、弧長パラメータ表示された \mathbb{R}^3 の埋め込まれた正則曲線とする。 J 上では $\kappa > 0$ とする。さらに、 $\mathbf{c}(u)$ の像を $C := \mathbf{c}(J)$ とおく。
+ C は原点を通るところ

(1) $T \in O(3)$ が C の symmetry である $\iff T(C) = C$ かつ T は単位行列ではない。

(2) symmetry T が orientation-preserving $\iff \forall u \in J$ に対して、 $T\mathbf{c}(u) = \mathbf{c}(u)$ 。

(3) symmetry T が orientation-reversing $\iff \forall u \in J$ に対して、 $T\mathbf{c}(u) = \mathbf{c}(-u)$ 。

さらに、 $\det T = 1$ (resp. -1) のとき、 T が正 (resp. 負) であるという。日本語では、

C の を強調

Orientation-reversing symmetry について、次の補題が成り立つ。

C -ori-preserving 等、 C を強調する
 C -ori-reversing

命題

C-

補題 2 (Orientation-reversing symmetry). C が orientation-reversing symmetry T をもつとき,

$$Te(0) = -e(0), \quad Tn(0) = n(0), \quad Tb(0) = -\sigma b(0)$$

が成り立つ. ここで, $\sigma := \det T$ とした. とくに, $\cancel{P} = C(0)$

- (1) T が正, つまり $\sigma = 1$ ならば, T は $c(u)$ における主法線 L に関する線対称である.
- (2) T が負, つまり $\sigma = -1$ ならば, T は $c(u)$ の中点 $P = c(0)$ における法平面 $\Pi(P)$ に関する折り返しである.

証明. Orientation-reversing symmetry の定義より, $c(u) = Tc(-u)$ が成り立つ. 両辺を u で微分すると $c'(u) = -Tc'(-u)$ より,

$$(2.2) \quad e(u) = -Te(-u)$$

が成り立つ. 式 (2.2) をさらに両辺 u で微分して,

$$e'(u) = Te'(-u), \quad \|e'(u)\| = \|e'(-u)\|$$

となり, $\kappa(u) = \kappa(-u)$ かつ

$$(2.3) \quad n(u) = Tn(-u), \quad b(u) = -\sigma Tb(-u)$$

が成り立つ. これにより, $\tau(u) = \sigma\tau(-u)$ も従う. 以上より,

$$(2.4) \quad Te(-u) = -e(u), \quad Tn(-u) = n(u), \quad Tb(-u) = -\sigma b(u)$$

が成り立つ. 式 (2.4) に $u = 0$ を代入すれば, 補題の主張が従う.

□

Orientation-preserving symmetry についても, 類似の等式が成り立つ.

注意 3 (Orientation-preserving symmetry). C が orientation-preserving symmetry T を持つ場合, $Te(0), Tn(0), Tb(0)$ はそれぞれ

$$Te(0) = e(0), \quad Tn(0) = n(0), \quad Tb(0) = -b(0)$$

が成り立つ. 特に, $\det T = -1$ のみである.

証明. C が orientation-preserving symmetry T をもつとする (すなわち $Tc(u) = c(u)$). このとき微分して $Tc'(u) = c'(u)$, さらに $Tc''(u) = c''(u)$ が従うので, 特に

$$Te(0) = e(0), \quad Tn(0) = n(0)$$

が成り立つ. したがって $b(0) = e(0) \times n(0)$ より

$$Tb(0) = \det(T) b(0)$$

である. もし $\det(T) = 1$ なら $Tb(0) = b(0)$ でもあるから, T は正規直交基底 $\{e(0), n(0), b(0)\}$ を全て固定する. よって $T = I$ となり矛盾する. そのため, $\det(T) = -1$ かつ $Tb(0) = -b(0)$ が成り立つ.

□

Orientation-preserving symmetry の存在については, [3] で次のように述べられている.



注意 4 (orientation-preserving symmetry の存在性, [3]). C が平面曲線の場合, 平面に関する折り返しである $S \in O(3)$ が存在する. さらにその S は C の orientation-preserving symmetry となる.

注意 4 について, 次のような同値条件が成り立つ.

命題

~~補題 5~~ (orientation-preserving symmetry と平面曲線の同値性). 曲線 C が orientation-preserving symmetry T をもつ $\Leftrightarrow C$ は平面曲線であり, T は平面に関する折り返しである.

~~明らかであるため、~~

証明. \Leftarrow は [3] で述べられているため, \Rightarrow を示せばよい. $c(u)$ を弧長パラメータ表示, $\kappa(u)$ を空間曲線としての曲率として, $\kappa(u) > 0$ とする. 標準基底 e_1, e_2, e_3 をそれぞれ,

$$e_1 := (1, 0, 0)^T, \quad e_2 := (0, 1, 0)^T, \quad e_3 := (0, 0, 1)^T$$

とおく. 回転と平行移動により, $c'(u)$ と主法線ベクトル $n(u)$ は一般性を失わずに

$$c'(0) = (1, 0, 0)^T = e_1$$

$$n(0) = \frac{c''(0)}{\kappa(0)} = (0, 1, 0)^T = e_2$$

と仮定してよい. $Tc(u) = c(u)$ の両辺を u で微分すると,

$$Tc'(u) = c'(u)$$

である. $u = 0$ を代入すると, $Te_1 = e_1$ が成り立つ. さらにもう一度両辺を u で微分すると,

$$Tc''(u) = c''(u)$$

であるので, $u = 0$ を代入すると $Tc''(0) = c''(0)$ となり, つまり $Te_2 = e_2$ が成り立つ.

仮定より $\det T = \pm 1$ かつ T は恒等写像ではないので, T は具体的に

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

のみである. $c(u) = (x(u), y(u), z(u))^T$ とすると, $Tc(u)$ は

$$Tc(u) = (x(u), y(u), -z(u))^T$$

である. さらに仮定より $Tc(u) = c(u)$ であったので,

$$(x(u), y(u), -z(u))^T = (x(u), y(u), z(u))^T$$

が任意の u で成立する. したがって $z(u) = 0$ であるため, $c(u)$ は平面曲線である. \square

2.2. 同値関係と m -type edge の準備

本節では、特異点に関する基本用語を確認したのち、写像芽の同値関係(右同値、右左同値)と、値域の直交変換による合同を定義する。そのうえで、本論文の主対象である ~~(3,4)-カスプ~~
~~辺~~ m -type edge を導入する。

以降、 Σ を 2 次元多様体とする。さらに、値域の平行移動により一般性を失わずに $f(0,0) = \mathbf{0}$ を仮定する。

定義 6 (特異点). $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ を写像とする。 $p \in \Sigma$ が f の特異点であるとは、 f が p ではめ込みでない。つまり、 $\text{rank}(df)_p < 2$ を満たすときをいう。

フロンタルとその一種である波面(フロント)について定義を次に述べる。

定義 7 (フロンタル、波面(フロント)). $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ を写像とする。 f がフロンタルであるとは、 C^∞ 級写像 $\nu : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^2$ で、 Σ 上の任意の点 $q \in \Sigma$ と、その点での接空間上の任意のベクトル $v \in T_q \Sigma$ に対して $\overset{\uparrow}{\text{R}^3 \text{内の単位球面}} \text{ である} \nu(v)$ を書く。

$$\langle df_q(v), \nu(q) \rangle = 0$$

を満たすものが存在するときをいう。このような ν を、 f に沿った単位法ベクトル場という。

さらに、写像 $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ がフロンタルであるとする。ここで、 f が波面(フロント)であるとは、 $L := (f, \nu) : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$ がはめ込みである。つまり、 Σ の座標系 (u, v) に対して 6 行 2 列の行列

$$M := \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ \nu_u & \nu_v \end{pmatrix}$$

が、 Σ 上の各点で階数が 2 であるときをいう。

定義 8 (特異曲線、特異方向、退化方向). フロンタル $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ に対して、 $S(f)$ で f の特異点集合を表し、 $S(f)$ が正則曲線であることを仮定する。さらに、 $S(f)$ 上の点 p は階数が 1 の特異点であると仮定する。つまり、 $\text{rank}(df)_p = 1$ が成り立つ。このとき、

- (1) $S(f)$ を特異曲線という。
- (2) 特異曲線の接ベクトルを特異ベクトル、特異ベクトルの定める 1 次元ベクトル空間を特異方向といふ。
- (3) さらに、 $df(v) = 0$ を満たす零でない接ベクトル $v \in T_p \Sigma$ を退化ベクトル、退化ベクトルの定める方向を退化方向といふ。さらに、階数が 1 の特異点に対してはその近傍で定義される退化ベクトル場 η が存在する。

次に、主定理で述べられる二つの同値関係の定義を述べる。

定義 9 (右同値、右左同値). 2 つの C^∞ 級写像芽 $f : (\Sigma, p) \rightarrow (\mathbb{R}^3, f(p))$ と $\bar{f} : (\bar{\Sigma}, \bar{p}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \bar{f}(\bar{p}))$ を考える。

- (1) f と \bar{f} が右同値であるとは、 \mathbb{R}^2 の原点近傍で定義された微分同相写像 $\varphi : (\Sigma, p) \rightarrow (\bar{\Sigma}, \bar{p})$ が存在して、

$$\bar{f} = f \circ \varphi$$

を満たすことをいう(つまり、同じ像を持つ写像芽のこと)。

- (2) f と \bar{f} が右左同値(A -同値)であるとは、2つの微分同相写像芽 $\varphi : (\Sigma, p) \rightarrow (\bar{\Sigma}, \bar{p})$ と $\Phi : (\mathbb{R}^3, f(p)) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \bar{f}(\bar{p}))$ が存在して、

$$\Phi \circ f \circ \varphi^{-1} = \bar{f}$$

が成り立つときをいう。

以上の定義を用いて、本論文で扱う特異点である m -type edge と (3,4)-カスプ辺を導入する。

$\leftarrow m \text{ に対する}$

定義 10 ((3,4)-カスプ辺, m -type edge). $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ を C^∞ 級写像とする。

- (1) f に対して点 $p \in \Sigma$ が (3,4)-カスプ辺であるとは、写像芽 $f : (\Sigma, p) \rightarrow (\mathbb{R}^3, f(p))$ が原点での写像芽

$$\mathbb{R}^2 \ni (u, v) \mapsto (u, v^3, v^4) \in \mathbb{R}^3$$

と右左同値であるときを言う。

- (2) m を正の整数とする。 f に対して点 $p \in \Sigma$ が m -type edge であるとは、写像芽 $f : (\Sigma, p) \rightarrow (\mathbb{R}^3, f(p))$ が原点での写像芽

$$\mathbb{R}^2 \ni (u, v) \mapsto (u, v^m, v^{m+1}\alpha(u, v)) \in \mathbb{R}^3$$

④ m -type edge は m オンリーであることが分かる。

と右左同値となるような C^∞ 級関数 $\alpha(u, v)$ が存在するときを言う。

$d < 1$ および $m = 2$ はカスプ辺と呼ばれるも入る。

m -type edge の定義に現れる関数 $\alpha(u, v)$ について、 $\alpha(u, v) = 1$ および $m = 3$ とすると (3,4)-カスプ辺と一致する。さらに、 $\alpha(u, v) = u^{k+1} \pm v^2$, $m = 2$ とすればカスプ状 S_k^\pm 特異点と一致することから、 m -type edge はカスプ辺を一般化した非常に広いクラスと見なせる(図3)。

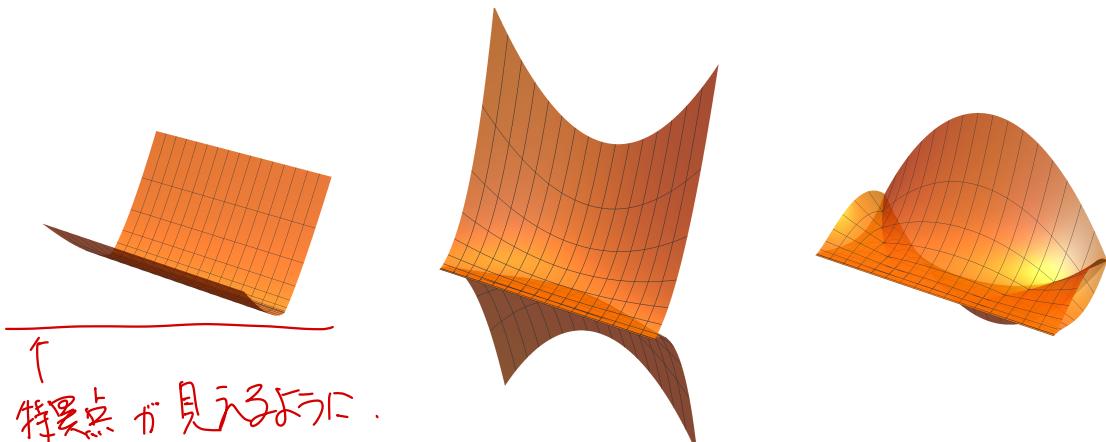


図 3. m -type edge の例

(左: $m = 3, \alpha = 1$, 中央: $m = 2, \alpha = u^2 + v^2$, 右: $m = 2, \alpha = u^2 - v^2$)

注意 11. 定義 10 の (3,4)-カスプ辺および m -type edge について、

消す。

f が点 p で (3,4)-カスプ辺である $\Rightarrow f$ が点 p で 3-type edge である

が成り立つ。

さらにこの m -type edge について、退化ベクトル場に関する次の事実が成り立つことが [9] によって示されている。

判定条件 [MSST]

事実 12 (m -type edge の同値表現). $S(f)$ をフロンタル $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ の特異点集合で正則曲線であるとし、 ξ を $S(f)$ の方向で $\xi \notin \ker(df_p)$ とする。このとき、 f が $p \in S(f)$ 上で m -type edge を持つこと、

$$\eta^i f = 0 \quad \text{holds on } S(f) \quad (i = 1, \dots, m-1)$$

$\xi f(p)$ と $\eta^m f(p)$ が線形独立。

を満たす退化ベクトル場 η が存在することは同値である。ここで、 ξf は f の ξ 方向での微分を表し、 $\eta^m f$ は f の η 方向での m 階微分を表す。

以降、 $O(3)$ を原点 0 を固定する \mathbb{R}^3 の直交群とする。これを用いて、主定理内の主張に登場する合同を定義する。

3次直交群

定義 13 (同じ像を持つ、合同). f_1 と f_2 が同じ像を持つとは、原点の近傍 $U_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ および $U_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ が存在して、

$$f_1(U_1) = f_2(U_2)$$

(注) 同値 \Rightarrow 像同値だが。

が成り立つときを言う。さらに、 f_1 と f_2 が合同であるとは、ある $T \in O(3)$ が存在して、 Tf_1 と f_2 が同じ像をもつときをいう。

（今は） Tf_1 と f_2 が同値であるとする。

定義 14 (等長的, symmetry). 2 つの写像芽 f と g が等長的 (isometric) であるとは、原点近傍で定義された微分同相写像 φ が存在して、

(サボトの補題)

・EL. 写像の 2 次を制限すると成る。

(ヤクザン・[ヤク], 一般化ヤクザン・[HNSVY, 2022])

$$\varphi^* ds_f^2 = ds_g^2$$

が成り立つときを言う。ここで、 f と g の第一基本形式をそれぞれ ds_f^2 , ds_g^2 とした。改行を消す。

さらに、 $f = g$ (つまり、 $\varphi^* ds_f^2 = ds_f^2$) の場合を考える。 φ が恒等写像ではないとき、 φ を ds_f^2 の symmetry という。さらに、

- (1) φ が effective symmetry である $\iff \varphi$ が f の特異曲線の向きを反転させる
- (2) φ が non-effective symmetry である $\iff \varphi$ が f の特異曲線の向きを保つ

本論文では、[3] で述べられている symmetry に対して新たに次の概念を導入する。

定義 15 (向きを保つ、向きを逆にする). 定義 14 の symmetry φ について、

- (1) φ が向きを保つ \iff (原点近傍で) φ のヤコビアンが正である
- (2) φ が向きを逆にする \iff (原点近傍で) φ のヤコビアンが負である

本論文では主定理 A と B の主張を述べるために、与えられた m -type edge に対して、同じ特異曲線の像と第一基本形式をもつ m -type edge が存在するための十分条件を満たす集合を次のように定義する。

定義 16 (admissible). $c(u)$ を閉区間 $J := [-l, l]$ 上で定義された、弧長パラメータ表示された \mathbb{R}^3 の正則曲線として、 J 上で $\kappa > 0$ とする。 U を \mathbb{R}^2 における $J \times \{0\}$ の近傍とし、 $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$

を $J \times \{0\}$ で極限法曲率 (定義 24 参照) $\kappa_\nu \neq 0$ を満たす m -type edge のみをもつ実解析的な写像で

$$f(u, 0) = \mathbf{c}(u) \quad (u \in J)$$

であるものとする。また、そのような f の集合を $\mathcal{G}_{m,*}^\omega(\mathbb{R}_J^2, \mathbb{R}^3, C)$ で表す。さらに、

$$\max_{u \in J} |\kappa_s(u)| < \min_{u \in J} \kappa(u)$$

をみたす $\mathcal{G}_{m,*}^\omega(\mathbb{R}_J^2, \mathbb{R}^3, C)$ を **admissible** といい、そのような f の集合を

$$\mathcal{G}_{m,**}^\omega(\mathbb{R}_J^2, \mathbb{R}^3, C)$$

で表す (特異曲率 κ_s は定義 25 参照)。

定義 17 (符号付き面積密度関数)。 $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ を m -type edge, ν を f の単位法ベクトル場とする。 f の特異点 p に対して、 p の座標近傍 $(U; u, v)$ 上で定義される

$$\lambda := \det(f_u, f_v, \nu)$$

を **符号付き面積密度関数** という。[m が奇数の場合、 λ は非負もしくは非正である。] → 定義の外で述べる。

m が偶数の場合、カスプ方向と角度関数は [3] と同様に定義される。 m が奇数の場合、カスプ方向と角度関数を次のように定義する。

定義 18 (向きに同調した単位法ベクトル場、カスプ方向、角度関数)。 m を奇数、 $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ を m -type edge, ν を f の単位法ベクトル場, λ を f の符号付き面積密度関数とする。

(1) U 上の任意の点に対して、 $\lambda \geq 0$ を満たすような単位法ベクトル場 ν を向きに同調した **単位法ベクトル場** (orientation-compatible unit normal vector field) という。

(2) f の特異曲線を $\gamma(t)$ とする。向きに同調した単位法ベクトル場 ν に対して $\mathbf{x}(t)$ を

$$\mathbf{x}(t) := \hat{\nu}(t) \times \left(\frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|} \right) \quad \begin{cases} \mathbf{c} &:= f \circ \gamma, \\ \hat{\nu} &:= \nu \circ \gamma, \end{cases}$$

と定義する。この $\mathbf{x}(t)$ を **カスプ方向** という。

(3) $\mathbf{c}(t)$ をフレネ・セレの公式を満たす曲線とする。つまり、 $\mathbf{c}(t)$ の (空間曲線としての) 曲率関数 $\kappa(t)$ が正とする。 $\mathbf{n}(t)$ と $\mathbf{b}(t)$ をそれぞれ $\mathbf{c}(t)$ の主法線ベクトル、従法線ベクトルとする。 $\mathbf{n}(t)$ のカスプ方向 $\mathbf{x}(t)$ から測った角度を $\theta(t)$ とし、**角度関数** (または**カスプ角**) という。

定義より、カスプ方向 $\mathbf{x}(t)$ 、向きに同調した単位法ベクトル場 $\nu(t)$ 、角度関数 $\theta(t)$ は次の関係式

$$\mathbf{x}(t) = (\cos \theta(t))\mathbf{n}(t) - (\sin \theta(t))\mathbf{b}(t), \quad \hat{\nu}(t) = (\sin \theta(t))\mathbf{n}(t) + (\cos \theta(t))\mathbf{b}(t)$$

を満たす。さらに $\mathbf{c}(t)$ が弧長パラメータ表示されているとき、 $\mathbf{c}'' = \kappa \mathbf{n}$ より極限法曲率 κ_ν は

$$\kappa_\nu(t) = \mathbf{c}'' \cdot \hat{\nu} = \kappa(t) \sin \theta(t)$$

と表される。よって、 f がジェネリック (つまり、 $\kappa_\nu \neq 0$) のとき、角度関数 $\theta(t)$ は

$$\theta(t) \in (-\pi, \pi)$$

を満たすように選ぶことができる。

2.3. 退化次数 n 特異点と adapted coordinate system の導入

本節では、退化次数 n 特異点とそれに対して用いることが出来る座標系である adapted coordinate system を導入する。また、前節で定義した m -type edge と退化次数 n 特異点の関係性を述べる。

本節以降、写像 f と定義域の座標系 $(\Sigma; u, v)$ に対して、 f_{v^i} を f の v 方向での i 階微分を表す。つまり、 $f_{v^i} = \partial^i f / \partial v^i$ とする。

定義 19 (第一種特異点). 特異点 $p \in S(f)$ が第一種特異点であるとは、 p において特異方向と退化方向が異なるとき、つまり退化方向 $\langle \eta_p \rangle_R = \ker(df)_p$ が特異方向 $T_p S(f)$ と異なるときをいう。

定義 20 (退化次数 n 特異点). n を正の整数、 $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ をフロンタル、 ν を f の単位法ベクトル場とする。ここで、 f の特異点 p に対して p の座標近傍 $(U; u, v)$ 上で定義された符号付き面積密度関数を $\lambda = \det(f_u, f_v, \nu)$ とする。ここで、 $p \in \Sigma$ が退化次数 n 特異点であるとは、 $\text{rank}(df)_p = 1$ であり、 p の近傍における C^∞ 級関数 $\hat{\lambda}, \alpha$ で、

- $\lambda = \alpha \hat{\lambda}^n$
- $(\hat{\lambda}_u, \hat{\lambda}_v)(p) \neq (0, 0)$
- $\alpha(p) \neq 0$

を満たすものが存在するときをいう。

注意 21. 定義 20 に $n = 1$ を代入した退化次数 1 特異点は、一般に非退化特異点と呼ばれる特異点である。点 $p \in \Sigma$ が非退化特異点であるとは、

$$(\lambda_u, \lambda_v)(p) \neq (0, 0)$$

が成り立つときをいう。

ここで、定義 20 の退化次数 n 特異点と m -type edge に関する事実 12 を用いると、以下の系が成り立つことが知られている。

事実 22 ([18]). n を正の整数、 $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ をフロンタル、点 $p \in \Sigma$ を f の特異点とする。このとき、次の同値条件

$$p \text{ が第一種退化次数 } n \text{ 特異点である} \iff p \text{ が } (n+1)\text{-type edge である}$$

が成り立つ。

これらの定義と事実を用いて、adapted coordinate system を導入する。

事実 23 (Adapted coordinate system [18]). $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ をフロンタル、 $p \in \Sigma$ を第一種退化次数 n 特異点、つまり $(n+1)$ -type edge であるとする。このとき、以下を満たす局所座標系 (u, v) で $p = (0, 0)$ となるものが存在する。

- (1) 特異点集合を $S(f)$ とすると、 $S(f) = \{(u, 0)\}$.

- (2) 退化ベクトル場を η とすると, $\eta = \partial/\partial v$ で, u 軸上で $f_v(u, 0) = f_{v^2}(u, 0) = \cdots = f_{v^n}(u, 0) = \mathbf{0}$.
- (3) ν を f の単位法ベクトル場とすると, $\{f_u(u, 0), f_{v^{n+1}}(u, 0), \nu(u, 0)\}$ が正規直交基底となる.

このような局所座標系 (u, v) を **adapted coordinate system (a.c.s)** と呼ぶ.

次章以降で, この adapted coordinate system を用いていく.

3. m -type edge の特異曲率

本章では、 m -type edge に対して極限法曲率 κ_ν と特異曲率 κ_s を定義し、その幾何学的意味を整理する。特に n が奇数ならば、第一種退化次数 n 特異点をもつフロンタル f 、つまり $m (= n + 1)$ -type edge に対して κ_s を符号を込めて定義することが出来る。さらに、特異曲線の像 $\hat{\gamma}$ の（空間曲線としての）曲率 κ とカスプ角 θ を用いて κ_ν, κ_s を表す公式を導く。

3.1. 極限法曲率と特異曲率の定義

本節では、極限法曲率と特異曲率の定義を行う。

定義 24 (極限法曲率 [20]). $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ をフロンタル、 ν を f の単位法ベクトル場、 $p \in \Sigma$ を第一種特異点とする。さらに、 $\gamma(t)$ を $\gamma(0) = p$ となる特異曲線、 $\hat{\gamma} := f \circ \gamma$, $\hat{\nu} := \nu \circ \gamma$ とする。このとき、

$$\kappa_\nu(t) := \frac{\langle \hat{\gamma}''(t), \hat{\nu}(t) \rangle}{\langle \hat{\gamma}'(t), \hat{\gamma}'(t) \rangle}$$

で定義される値 $\kappa_\nu(t)$ を極限法曲率という。

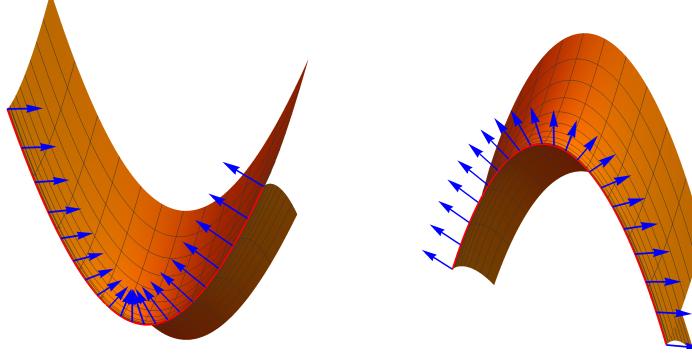


図 4. 左： $\kappa_\nu > 0$ のカスプ辺、右： $\kappa_\nu < 0$ のカスプ辺（青の矢印は単位法ベクトルを表す）

定義 24 は m の偶奇によらず m -type edge に対して定義される。一方、特異曲率は m の偶奇に応じて次のように定義される。

定義 25 (特異曲率 [18]). f を m -type edge、 $\gamma(t)$ を第一種特異点からなる特異曲線とする。さらに、 $\hat{\gamma} := f \circ \gamma$, $\hat{\nu} := \nu \circ \gamma$ とする。このとき、定義 8 で与えられる退化ベクトル場 η と定義 17 の符号付き面積密度関数 λ を用いて、 $\kappa_s(t)$ を

(1) m が偶数（つまり n が奇数）の場合、

$$\kappa_s(t) := \epsilon_\gamma(t) \frac{\det(\hat{\gamma}'(t), \hat{\gamma}''(t), \hat{\nu}(t))}{\|\hat{\gamma}'(t)\|^3}$$

$$\epsilon_\gamma(t) := \text{sgn}(\det(\gamma'(t), \eta(t)) \eta^{m-1} \lambda)$$

(2) m が奇数 (つまり n が偶数) の場合,

$$\kappa_s(t) := \frac{\det(\hat{\gamma}'(t), \hat{\gamma}''(t), \hat{\nu}(t))}{\|\hat{\gamma}'(t)\|^3}$$

とする. この値 $\kappa_s(t)$ を第一種特異点からなる $\hat{\gamma}$ 上の**特異曲率**という.

m が偶数の場合, 次の事実が成り立つ.

事実 26 ([15, 18]). m を偶数, $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ が点 $p \in \Sigma$ で m -type edge をもつとする. p において特異曲率 κ_s が正ならば, f の像はその点近傍で凸の形状である. 逆に, κ_s が負ならば f の像はその点近傍で鞍状である (図 5).

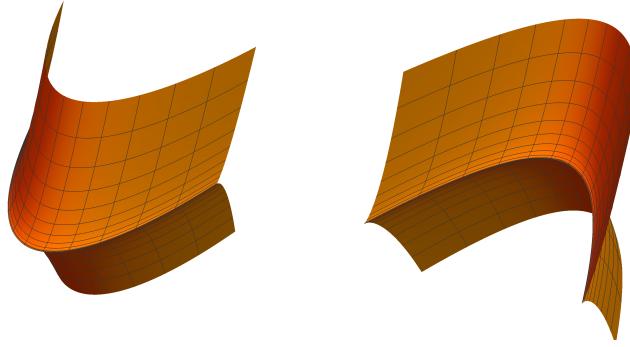


図 5. 左: $\kappa_s > 0$ のカスプ辺, 右: $\kappa_s < 0$ のカスプ辺

3.2. 曲率関数, カスプ角との関係式

本節では, 極限法曲率および特異曲率を曲率関数とカスプ角で表せることを示す. まず初めに, 本論文で利用する因子の補題を紹介する.

事実 27 (因子の補題 [18, 20]). $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ を Σ 上の C^∞ 級写像, Σ の局所座標系を (u, v) とし, k を非負整数とする. このとき,

$$f(u, 0) = f_v(u, 0) = f_{v^2}(u, 0) = \cdots = f_{v^k}(u, 0) = \mathbf{0}$$

が成り立っているとすると, Σ 上の C^∞ 級写像 $\psi(u, v)$ で

$$f(u, v) = v^{k+1} \psi(u, v) \quad ((u, v) \in \Sigma)$$

を満たすものが存在する.

この事実を用いて, adapted coordinate system における次の補題を示す.

補題 28. f を m -type edge, η を f の特異点における退化ベクトル場, ν を f の単位法ベクトル場, $\lambda = \det(f_u, f_v, \nu)$ を f の符号付き面積密度関数とする. また, (u, v) を事実 23 の adapted coordinate system とする. このとき,

$$\eta^{m-1} \lambda(u, 0) = \det(f_u, f_{v^m}, \nu)(u, 0)$$

である. 特に, $\det(f_u, f_{v^m}, \nu)(u, 0) \in \{-1, 1\}$ である.

証明. 仮定より (u, v) は adapted coordinate system であることから $f_v(u, 0) = f_{v^2}(u, 0) = \dots = f_{v^{m-1}}(u, 0) = \mathbf{0}$ および $f_{v^m}(u, 0) \neq \mathbf{0}$ であるため, 因子の補題(事実 27)よりある C^∞ 級写像 $\psi \neq \mathbf{0}$ が存在して

$$f_v(u, v) = v^{m-1} \psi(u, v)$$

と表せる. 特に $(m-1)$ 回 v 微分して $v=0$ を代入すると $f_{v^m}(u, 0) = (m-1)! \psi(u, 0)$ である. このとき $\lambda = \det(f_u, f_v, \nu)$ は

$$\lambda = v^{m-1} \det(f_u, \psi, \nu)$$

である. さらに adapted coordinate system では退化ベクトル場 $\eta = \frac{\partial}{\partial v}$ であることから, $\eta^{m-1} \lambda(u, 0)$ は

$$\begin{aligned} \eta^{m-1} \lambda(u, 0) &= \lambda_{v^{m-1}}(u, 0) \\ &= (m-1)! \det(f_u, \psi, \nu)(u, 0) \\ &= \det(f_u, f_{v^m}, \nu)(u, 0) \quad (\because f_{v^m}(u, 0) = (m-1)! \psi(u, 0) \iff \psi(u, 0) = \frac{1}{(m-1)!} f_{v^m}(u, 0) \text{を代入した}) \\ &=: \sigma \in \{-1, 1\} \quad (\because \{f_u(u, 0), f_{v^m}(u, 0), \nu(u, 0)\} \text{は正規直交基底}) \end{aligned}$$

と表せる. 以上より主張が従う. \square

命題 29 (カスプ角と曲率関数を用いた表現). f を m -type edge, (u, v) を事実 23 の adapted coordinate system, $\gamma(u)$ を f の特異曲線とし, $\hat{\gamma} := f \circ \gamma$ を弧長パラメータ表示された正則曲線で, (空間曲線としての)曲率関数 $\kappa \neq 0$ を満たすとする. このとき, 定義 18 のカスプ角 θ を用いて, 特異曲率 κ_s と極限法曲率 κ_ν はそれぞれ

$$\kappa_s = \kappa \cos \theta, \quad \kappa_\nu = \begin{cases} \kappa \sin \theta & (m \text{ が奇数, または } m \text{ が偶数かつ } \eta^{m-1} \lambda(u, 0) = 1) \\ -\kappa \sin \theta & (m \text{ が偶数かつ } \eta^{m-1} \lambda(u, 0) = -1) \end{cases}$$

と表される.

証明. $e(u) (= \hat{\gamma}'(u) = f_u(u, 0))$ を空間曲線 $\hat{\gamma}(u)$ の単位接ベクトルとする. $e'(u), \kappa(u)$ は

$$e(u) = \hat{\gamma}'(u), \quad e'(u) = \hat{\gamma}''(u), \quad \kappa(u) = \|\hat{\gamma}''(u)\|$$

であるため, 主法線ベクトル $n(u)$ と従法線ベクトル $b(u)$ はそれぞれ

$$n(u) = \frac{1}{\kappa(u)} e'(u), \quad b(u) = e(u) \times n(u)$$

と表せる. 事実 23 より $\{f_u(u, 0), f_{v^m}(u, 0), \nu(u, 0)\}$ は正規直交基底であることと, $\langle \hat{\gamma}'(u), \hat{\gamma}''(u) \rangle = 0$ であることから, $\hat{\gamma}''(u)$ は $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ を用いて

$$(3.1) \quad \hat{\gamma}''(u) = \alpha f_{v^m}(u, 0) + \beta \nu(u, 0)$$

と書ける. 式 (3.1) の両辺のノルムをとると $\kappa(u) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ であるため, $\alpha = \kappa(u) \cos \phi, \beta = \kappa(u) \sin \phi$ とおけば式 (3.1) は

$$(3.2) \quad \hat{\gamma}''(u) = (\kappa(u) \cos \phi) f_{v^m}(u, 0) + (\kappa(u) \sin \phi) \nu(u, 0)$$

と表せる。ただし、 $\phi \in [-\pi, \pi)$ である。極限法曲率 $\kappa_\nu(u) = \langle \hat{\gamma}''(u), \hat{\nu}(u) \rangle / \|\hat{\gamma}'(u)\|^2$ に式 (3.2) を代入すると、

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \kappa_\nu(u) &= \frac{\langle (\kappa(u) \cos \phi) f_{v^m}(u, 0) + (\kappa(u) \sin \phi) \hat{\nu}(u), \hat{\nu}(u) \rangle}{\|\hat{\gamma}'(u)\|^2} \\ &= \kappa(u) \sin \phi \end{aligned}$$

である。次に、特異曲率について考える。

- m が偶数の場合

特異曲率の定義より $\kappa_s(u) = \epsilon_\gamma(u) \det(\hat{\gamma}'(u), \hat{\gamma}''(u), \hat{\nu}(u)) / \|\hat{\gamma}'(u)\|^3$ であるので、式 (3.2) を代入すると

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \kappa_s(u) &= \frac{\epsilon_\gamma(u)}{\|\hat{\gamma}'(u)\|^3} \kappa(u) \cos \phi \det(\hat{\gamma}'(u), f_{v^m}(u, 0), \hat{\nu}(u)) \\ &= \sigma \epsilon_\gamma(u) \kappa(u) \cos \phi \end{aligned}$$

となる。ここで、補題 28 より $\det(\hat{\gamma}'(u), f_{v^m}(u, 0), \hat{\nu}(u)) =: \sigma \in \{-1, 1\}$ とした。

以降で、 $\phi = \theta + 2n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) を示す。フレネ・セレの公式より、 e', n', b' はそれぞれ

$$\begin{aligned} e'(u) &= \kappa(u) n(u) \\ n'(u) &= -\kappa(u) e(u) + \tau b(u) \\ b'(u) &= -\tau(u) n(u) \end{aligned}$$

であるため、 $\hat{\gamma}''(u) = (\sigma \epsilon_\gamma(u) \kappa_s(u)) f_{v^m}(u, 0) + (\kappa_\nu(u)) \nu(u, 0)$ と $n(u)$ の内積は

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \langle \hat{\gamma}''(u), n(u) \rangle &= \langle (\sigma \epsilon_\gamma(u) \kappa_s(u)) f_{v^m}(u, 0) + (\kappa_\nu(u)) \nu(u, 0), n(u) \rangle \\ &= \sigma \epsilon_\gamma(u) \kappa_s(u) \langle f_{v^m}(u, 0), n(u) \rangle + \kappa_\nu(u) \langle \nu(u, 0), n(u) \rangle \end{aligned}$$

である。カスプ角 θ を用いると、 $f_{v^m}(u, 0) = \cos \theta n(u) - \sin \theta b(u)$, $\nu(u, 0) = \sigma(\sin \theta n(u) + \cos \theta b(u))$ であるためこれらを式 (3.5) に代入すると

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \langle \hat{\gamma}''(u), n(u) \rangle &= \sigma \epsilon_\gamma(u) \kappa_s(u) \cos \theta \langle n(u), n(u) \rangle + \sigma \kappa_\nu(u) \sin \theta \langle n(u), n(u) \rangle \\ &= \sigma \epsilon_\gamma(u) \kappa_s(u) \cos \theta + \sigma \kappa_\nu(u) \sin \theta \end{aligned}$$

である。同様に、 $\langle \hat{\gamma}''(u), b(u) \rangle$ は

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \langle \hat{\gamma}''(u), b(u) \rangle &= \langle (\sigma \epsilon_\gamma(u) \kappa_s(u)) f_{v^m}(u, 0) + (\kappa_\nu(u)) \nu(u, 0), b(u) \rangle \\ &= \sigma \epsilon_\gamma(u) \kappa_s(u) \langle f_{v^m}(u, 0), b(u) \rangle + \kappa_\nu(u) \langle \nu(u, 0), b(u) \rangle \\ &= -\sigma \epsilon_\gamma(u) \kappa_s(u) \sin \theta + \sigma \kappa_\nu(u) \cos \theta \end{aligned}$$

である。式 (3.6) と式 (3.7) より

$$\begin{cases} \kappa(u) &= \sigma \epsilon_\gamma(u) \kappa_s(u) \cos \theta + \sigma \kappa_\nu(u) \sin \theta \\ 0 &= -\sigma \epsilon_\gamma(u) \kappa_s(u) \sin \theta + \sigma \kappa_\nu(u) \cos \theta \end{cases}$$

であり、式(3.3)と(3.4)より $\kappa_s(u) = \sigma\epsilon_\gamma(u)\kappa(u)\cos\phi$, $\kappa_\nu(u) = \kappa(u)\sin\phi$ を代入すると、仮定より $\kappa \neq 0$ であるので

$$(3.8) \quad \begin{aligned} & \begin{cases} \kappa(u) = \kappa(u)\cos\phi\cos\theta + \sigma\kappa(u)\sin\phi\sin\theta \\ 0 = -\kappa(u)\cos\phi\sin\theta + \sigma\kappa(u)\sin\phi\cos\theta \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} 1 = \cos\phi\cos\theta + \sigma\sin\phi\sin\theta \\ 0 = -\cos\phi\sin\theta + \sigma\sin\phi\cos\theta \end{cases} \end{aligned}$$

と表される。 $\sigma \in \{-1, 1\}$ の値に応じて次のように場合分けする。

(1) $\sigma = 1$ の場合

補題28より、 $\eta^{m-1}\lambda(u, 0) = 1$ である。式(3.8)に代入すると

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 1 = \cos\phi\cos\theta + \sin\phi\sin\theta \\ 0 = -\cos\phi\sin\theta + \sin\phi\cos\theta \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} 1 = \cos(\phi - \theta) \\ 0 = \sin(\phi - \theta) \end{cases} \end{aligned}$$

であるため、 $\phi = \theta + 2n\pi$ 。よって $\kappa_\nu(u) = \kappa(u)\sin\theta$ が成り立つ。特に $\hat{\gamma}'(u)$ と $\eta(u)$ を (u, v) 座標系における正の向きとすると $\det(\hat{\gamma}'(u), \eta(u)) > 0$ であることから、 $\kappa_s(u)$ は

$$\begin{aligned} \kappa_s(u) &= \underbrace{\sigma \operatorname{sgn}(\det(\hat{\gamma}'(u), \eta(u)) \eta^{m-1}\lambda)}_1 \kappa(u) \cos\phi \\ &= \kappa(u) \cos\theta \end{aligned}$$

である。

(2) $\sigma = -1$ の場合

補題28より、 $\eta^{m-1}\lambda(u, 0) = -1$ である。式(3.8)に代入すると

$$\begin{aligned} \kappa_\nu &= \kappa \sin\phi \\ \kappa_s &= \kappa \cos\phi \\ \iff & \begin{cases} 1 = \cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta \\ 0 = -\cos\phi\sin\theta - \sin\phi\cos\theta \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} 1 = \cos(\phi + \theta) \\ 0 = \sin(\phi + \theta) \end{cases} \end{aligned}$$

であるため、 $\phi = -\theta + 2n\pi$ 。よって $\kappa_\nu(u) = \kappa(u)\sin\phi = -\kappa(u)\sin\theta$ が成り立つ。同様に $\kappa_s(u)$ を求めると、

$$\begin{aligned} \kappa_s(u) &= \underbrace{\sigma \operatorname{sgn}(\det(\hat{\gamma}'(u), \eta(u)) \eta^{m-1}\lambda)}_1 \kappa(u) \cos\phi \\ &= \kappa(u) \cos\theta \end{aligned}$$

である。

- m が奇数の場合

定義より特異曲率 $\kappa_s(u)$ は

$$(3.9) \quad \kappa_s(u) = \frac{\det(\hat{\gamma}'(u), \hat{\gamma}''(u), \hat{\nu}(u))}{\|\hat{\gamma}'(u)\|^3}$$

であるので、偶数の場合と同様に式 (3.2) を式 (3.9) に代入すると、カスプ方向 (定義 18) が $\mathbf{x}(u) := f_{v^m}(u, 0)$ と表せることに注意して

$$\begin{aligned} (3.10) \quad \kappa_s(u) &= \frac{1}{\|\hat{\gamma}'(u)\|^3} \kappa(u) \cos \phi \det(\hat{\gamma}'(u), f_{v^m}(u, 0), \hat{\nu}(u)) \\ &= \frac{1}{\|\hat{\gamma}'(u)\|^3} \kappa(u) \cos \phi \langle \mathbf{x}(u), \hat{\nu}(u) \times \hat{\gamma}'(u) \rangle \\ &= \kappa(u) \cos \phi \langle \mathbf{x}(u), \mathbf{x}(u) \rangle \\ &= \kappa(u) \cos \phi \end{aligned}$$

と表せる。 m が偶数の場合と同様の議論で

$$(3.11) \quad \begin{cases} \kappa(u) &= \kappa(u) \cos \phi \cos \theta + \kappa(u) \sin \phi \sin \theta \\ 0 &= -\kappa(u) \cos \phi \sin \theta + \kappa(u) \sin \phi \cos \theta \end{cases} \iff \begin{cases} 1 &= \cos(\phi - \theta) \\ 0 &= \sin(\phi - \theta) \end{cases}$$

が成り立つため、式 (3.11) より $\phi = \theta + 2n\pi$ が成り立つ。式 (3.3) と (3.10) に代入すると、極限法曲率 $\kappa_\nu(u)$ と特異曲率 $\kappa_s(u)$ はそれぞれ

$$\kappa_\nu(u) = \kappa(u) \sin \theta$$

$$\kappa_s(u) = \kappa(u) \cos \theta$$

である。

□

4. n 次 Kossowski 計量の等長変形定理

本章では、まず m -type edge の第一基本形式を扱うために Kossowski 計量、とくに Type I の n 次 Kossowski 計量を導入する。ついで、これらの計量の枠組みのもとで、 m -type edge f に対する等長双対 \check{f} 、逆 f_* 、逆双対 \check{f}_* を定義する。最後に、これらの写像の存在と一意性を与えるために、 m -type edge の等長変形定理を述べる。

4.1. Kossowski 計量の導入

本節では、 f の等長双対 \check{f} 、逆 f_* 、逆双対 \check{f}_* の定義のために、Kossowski 計量を導入する。

定義 30 (null ベクトル, adjusted). Σ 上の与えられた半正定値計量 ds^2 の特異点を p とする。零でない接ベクトル $v \in T_p\Sigma$ が

$$(4.1) \quad ds^2(v, v) = 0$$

を満たすとき、 v を ds^2 の null ベクトルという。

さらに、局所座標近傍 $(U; u, v)$ が $p \in U$ において adjusted であるとは、 $\partial_v := \partial/\partial v$ が p において ds^2 の null ベクトルであるときをいう。

式 (4.1) および ds^2 が半正定値計量であることから、コーシー・シュワルツの不等式より任意の $w \in T_p\Sigma$ について $ds^2(v, w) = 0$ が成り立つことがわかる。また、 $(U; u, v)$ が $p \in U$ において adjusted である局所座標近傍であるとする。 ds^2 が

$$(4.2) \quad ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

と書けるとき、 $F(p) = G(p) = 0$ が成り立つ。

次に、Kossowski 計量の局所条件として以下の K-許容的の概念を導入する。

定義 31 (K-許容的). Σ 上の C^∞ 級半正定値計量 ds^2 の特異点 $p \in \Sigma$ が **K-許容的** (K-admissible) であるとは、 p において adjusted である局所座標近傍 $(U; u, v)$ が存在し、

$$(4.3) \quad E_v(p) = 2F_u(p), \quad G_u(p) = G_v(p) = 0$$

を満たすことをいう。ここで、 E, F, G は式 (4.2) で与えられる U 上の C^r 級関数である。

定義 32 (フロンタル計量). Σ の半正定値計量 ds^2 が **フロンタル計量** であるとは、局所座標近傍 $(U; u, v)$ に対して U 上で定義された C^∞ 級関数 λ が存在し、

$$(4.4) \quad EG - F^2 = \lambda^2$$

を満たすときをいう。ただし、 ds^2 は式 (4.2) を満たすとする。

一般に、フロンタル $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ に対して $ds^2 = \langle df, df \rangle$ と定めると、 ds^2 は Σ 上のフロンタル計量となる。実際、 f に沿った単位法ベクトル場 ν を用いて $\lambda = \det(f_u, f_v, \nu)$ と定めると、

$$E = \langle f_u, f_u \rangle, \quad F = \langle f_u, f_v \rangle, \quad G = \langle f_v, f_v \rangle$$

より $\lambda^2 = EG - F^2$ が成り立つ。また、 $p \in \Sigma$ が特異点であることと、フロンタル計量により定まる λ に対して $\lambda(p) = 0$ であることは同値である。

定義 33 (Kossowski 計量). Σ のフロンタル計量 $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ が **Kossowski 計量**であるとは、

- (1) ds^2 の各特異点 $p \in \Sigma$ が K-許容的であり、さらに
- (2) p の局所座標近傍 $(U; u, v)$ 上で定義された C^r 級関数 $\lambda(u, v)$ が存在して

$$(\lambda_u(p), \lambda_v(p)) \neq (0, 0)$$

を満たすことをいう (つまり、特異点 p が非退化である)。

ここで E, F, G は (4.2) で与えられる U 上の C^∞ 級関数である。

しかし本論文で扱う退化次数 n 特異点、つまり $(n+1)$ -type edge から誘導される第一基本形式は、一般に λ の高次退化を許す。この状況を扱うために、K-許容的を拡張した概念として D-許容的を導入して n 次 Kossowski 計量を定義する。フロンタル計量に対して、次の **D-許容的** の定義を導入する。

定義 34 (D-許容的). Σ のフロンタル計量 $ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$ が **D-許容的** であるとは、次の 3 つの条件を満たすときである。

- (1) 特異点集合 $S(ds^2)$ は Σ の 1 次元部分多様体である
- (2) 任意の特異点 p に対して、

$$\dim\{\mathbf{v} \in T_p\Sigma \mid (ds^2)_p(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0\} = 1$$

が成り立つ

- (3) 特異点 p の局所座標近傍 $(U; u, v)$ が存在し、次の 2 条件を満たす p の近傍上で定められる C^∞ 級関数 β が存在する。

- (i) U 上の特異点集合 $S(ds^2) \cap U$ 上の任意の点 q に対して、

$$(ds^2)_q \left(\left(\frac{\partial}{\partial v} \right)_q, \left(\frac{\partial}{\partial v} \right)_q \right) = 0$$

- (ii) $E_v - 2F_u = \beta \lambda$

以上の定義から、 n 次 **Kossowski 計量** を定義する。

定義 35 (n 次 Kossowski 計量, Type I). Σ のフロンタル計量 ds^2 が n 次 **Kossowski 計量** であるとは、

- (1) ds^2 が D-許容的であり、かつ
- (2) 全ての特異点が退化次数 n 特異点 (定義 20) である

ときをいう。

さらに、 n 次 Kossowski 計量が **Type I** であるとは、 Σ 上の全ての特異点 $p \in S(\Sigma)$ に対して、 p での特異曲線 $\gamma(t)$ の接方向 $\gamma'(p)$ と退化ベクトル場 $\eta(p)$ の向く退化方向が線形独立である、つまり、全ての特異点が第一種特異点であるときをいう。

注意 36 (Kossowski 計量と n 次 Kossowski 計量の関係). 定義 33 の Kossowski 計量は, 定義 35 の n 次 Kossowski 計量の $n = 1$ としたものである.

以上の定義と系から, 次の系が得られる [18].

系 37 ([18]). $(n + 1)$ -type edge から誘導される計量 ds^2 は, Type I の n 次 Kossowski 計量である.

事実 22 と合わせて, m -type edge は Type I の n 次 Kossowski 計量であることが分かる.

4.2. 等長双対, 逆, 逆双対の導入

本節では m -type edge f に対して, 特異曲線の像 C と第一基本形式 ds_f^2 を共有するフロンタルとして等長双対 \check{f} , 逆 f_* , 逆双対 \check{f}_* を定義する. これらは, 特異曲線をたどる向きとカスプ角の符号の 2 つのデータの組合せによって区別される 4 つの等長的実現を表している.

定義 38 (等長双対, 逆, 逆双対 [3]). $f \in \mathcal{G}_{m,*}^\omega(\mathbb{R}_J^2, \mathbb{R}^3, C)$ を m -type edge として, $\check{f}, f_*, \check{f}_*$ はいずれも f と同じ特異曲線の像と第一基本形式を持つとする.

- (1) \check{f} が f の**等長双対 (isometric dual)** である $\iff \check{f}$ と f は特異曲線をたどる向きが同じ (つまり, \check{f} と f は C に同じ向きを定める) で, カスプ角 (定義 18) の符号が逆である.

さらに, $f \in \mathcal{G}_{m,**}^\omega(\mathbb{R}_J^2, \mathbb{R}^3, C)$ である, つまり f が admissible(定義 16) であるとすると, f の逆と逆双対が定義される.

- (2) f_* が f の**逆 (inverse)** である $\iff f_*$ と f は特異曲線をたどる向きが逆 (つまり, f_* と f は C に逆の向きを定める) で, カスプ角の符号が同じである.
- (3) \check{f}_* が f の**逆双対 (inverse dual)** である $\iff \check{f}_*$ と f は特異曲線をたどる向きとカスプ角の符号がともに逆である.

与えられたジェネリック ($\kappa_\nu \neq 0$) かつ admissible な f に対する $\check{f}, f_*, \check{f}_*$ の存在と一意性は, [3, 18] で示されている.

4.3. m -type edge の等長変形定理

前節で導入した 4 つの m -type edge $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ が実際に存在し, しかもこの 4 つ以外には現れないことを保証する m -type edge の等長変形定理が [18] で述べられている.

事実 39 (m -type edge の等長変形定理 [18]). $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ を極限法曲率 κ_ν が零でなく, $p \in \Sigma$ で m -type edge を持つ実解析的なフロンタル, $\gamma(t)$ を $p = \gamma(0)$ を満たす特異曲線, $|\kappa_s(p)|$ を特異曲率の絶対値, $\Gamma(t)$ を実解析的な正則曲線で曲率関数 κ_Γ が $\kappa_\Gamma(0) > |\kappa_s(p)|$ を満たすとする. このとき, p の近傍 U と p で m -type edge を持つ U 上の実解析的なフロンタル g_Γ で以下の条件を満たすものが存在する.

- (1) g_Γ は f と等長的であり,
- (2) $g_\Gamma \circ \gamma$ の像は Γ の像と一致し,
- (3) g_Γ の極限法曲率は零でない.

さらに、そのような g_Γ は 4 つ存在する。

5. 主定理 A

本章では、1つ目の主定理である m -type edge f に対する右同値類の定理を述べる。その準備として、第一基本形式の symmetry(定義 14) と $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ (定義 38) に関する等式を述べた補題・命題を示し、最後に主定理 A を証明する。さらに、主定理の各条件に対応する具体例を述べる。

5.1. 主定理のための補題

本節では、主定理のために必要な補題をいくつか準備する。

補題 40 (向きに同調した単位法ベクトル場の構成). $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ をフロンタル, ν_f を f の単位法ベクトル場とする。 φ を *symmetry* とし、そのヤコビアンを $\det J$ とする。 $g := f \circ \varphi$, $\nu_g := \text{sgn}(\det J)\nu_f \circ \varphi$ を g の単位法ベクトル場, $\det(g_u, g_v, \nu_g)$ を g の符号付き面積密度関数とする。また、 λ を f の符号付き面積密度関数として、 $\lambda \geq 0$ を仮定する。このとき、 $\det(g_u, g_v, \nu_g)$ は

$$\det(g_u, g_v, \nu_g)(u, v) = |\det J|(\lambda \circ \varphi)(u, v) \geq 0$$

が成り立つ。すなわち、 $\nu_g = \text{sgn}(\det J)\nu_f \circ \varphi$ は向きに同調した g の単位法ベクトル場である。

証明. $\varepsilon := \text{sgn}(\det J)$, $\varphi(u, v) = (\xi(u, v), \eta(u, v))$ とおく。合成関数の微分と行列式の多重線形性を用いて $\det(g_u, g_v, \nu_g)$ を実際に計算すると、

$$\begin{aligned} \det(g_u, g_v, \nu_g)(u, v) &= \det((f \circ \varphi)_u, (f \circ \varphi)_v, \varepsilon \nu_f \circ \varphi)(u, v) \\ &= \varepsilon \det[\{f(\xi(u, v), \eta(u, v))\}_u, \{f(\xi(u, v), \eta(u, v))\}_v, \{\nu_f(\xi(u, v), \eta(u, v))\}] \\ &= \varepsilon \det\left(\frac{\partial f(\xi(u, v), \eta(u, v))}{\partial u} \frac{\partial \xi(u, v)}{\partial u} + \frac{\partial f(\xi(u, v), \eta(u, v))}{\partial v} \frac{\partial \eta(u, v)}{\partial u}, \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial f(\xi(u, v), \eta(u, v))}{\partial u} \frac{\partial \xi(u, v)}{\partial v} + \frac{\partial f(\xi(u, v), \eta(u, v))}{\partial v} \frac{\partial \eta(u, v)}{\partial v}, \nu_f(\xi(u, v), \eta(u, v))\right) \\ &= \varepsilon \left\{ \det\left(\frac{\partial f}{\partial u} \xi_u, \frac{\partial f}{\partial u} \xi_v + \frac{\partial f}{\partial u} \eta_v, \nu_f\right) + \det\left(\frac{\partial f}{\partial v} \eta_u, \frac{\partial f}{\partial u} \eta_v + \frac{\partial f}{\partial u} \xi_v, \nu_f\right) \right\} \\ &= \varepsilon \left\{ \det\left(\frac{\partial f}{\partial u} \xi_u, \frac{\partial f}{\partial u} \xi_v, \nu_f\right) + \det\left(\frac{\partial f}{\partial u} \xi_u, \frac{\partial f}{\partial u} \eta_v, \nu_f\right) + \det\left(\frac{\partial f}{\partial u} \eta_u, \frac{\partial f}{\partial u} \xi_v, \nu_f\right) + \det\left(\frac{\partial f}{\partial u} \eta_u, \frac{\partial f}{\partial u} \eta_v, \nu_f\right) \right\} \\ &= \varepsilon \left\{ \xi_u \xi_v \underbrace{\det\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u}, \nu_f\right)}_0 (\xi(u, v), \eta(u, v)) + \xi_u \eta_v \underbrace{\det\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \nu_f\right)}_0 (\xi(u, v), \eta(u, v)) \right. \\ &\quad \left. + \eta_u \xi_v \det\left(\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial u}, \nu_f\right) (\xi(u, v), \eta(u, v)) + \eta_u \eta_v \underbrace{\det\left(\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v}, \nu_f\right)}_0 (\xi(u, v), \eta(u, v)) \right\} \\ &= \varepsilon (\xi_u \eta_v - \eta_u \xi_v) \det\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \nu_f\right) (\xi(u, v), \eta(u, v)) \\ &= \varepsilon (\det J)(\lambda \circ \varphi)(u, v) = \underbrace{|\det J|}_{>0} \underbrace{(\lambda \circ \varphi)(u, v)}_{\geq 0} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

であるため、主張が導かれる。

φ が (ds_f^2 の) non-effective symmetry $\Rightarrow \varphi$ は向きを逆にする。 \square

補題 41 (non-effective symmetry の向きの一意性). m -type edge $f \in \mathcal{G}_{m,*}^\omega(\mathbb{R}_J^2, \mathbb{R}^3, C)$ に対し、 φ を ds_f^2 の non-effective symmetry とする。等式 $f \circ \varphi = f$ が成り立っているとき、 φ は向きを逆にする (定義 15) symmetry である。

証明. $U_+ := \{(u, v) \in U \mid v > 0\}$ とする。 φ が向きを保つと仮定すると、 $\varphi(U_+) = U_+$ である。 f は $v > 0$ の領域においてはめ込みであり、 v を十分小さくとれば埋め込み、とくに単射である。したがって、仮定 $f = f \circ \varphi$ と合わせると φ は恒等写像と一致する。これは $\varphi \neq \text{Id}$ に矛盾。したがって、 φ は向きを逆にする。 \square

次に、non-effective symmetry が存在するときに写像が $v \mapsto -v$ に関して偶対称な形をもつことを示すため、Whitney の補題を用意する。これにより、 m が偶数の場合に現れる m 次折り目特異点を定義し、non-effective symmetry を持つ必要十分条件 (命題 45) へつなげる。

事実 42 (Whitney の補題). $f(u, v)$ を \mathbb{R}^2 の原点近傍で定義された C^∞ 級関数で、 $f(u, v) = f(u, -v)$ が成り立つものとすると、 \mathbb{R}^2 の原点近傍で定義された C^∞ 級関数 $g(u, v)$ が存在して、原点近傍で $f(u, v) = g(u, v^2)$ と書ける。

定義 43 (m 次折り目特異点). m -type edge f が m 次折り目特異点であるとは、ある局所座標系 (u, v) が存在して、 $f(u, v) = f(u, -v)$ を満たすときをいう。

注意 44 (m 次折り目特異点の偶奇). m -type edge f が m 次折り目特異点であるとき、ある写像 g が存在して $f(u, v) = g(u, v^2)$ となる。とくに、 m は偶数となる。

証明. 事実 42 より、 m 次折り目特異点であるような m -type edge f は $f(u, v) = g(u, v^2)$ と書ける。 m が偶数であることを示す。 f は m -type edge であるため、事実 12 より

- $f_{v^i}(u, 0) = 0$ ($i = 1, \dots, m-1$)
- $f_{v^m}(u, 0)$ と $f_u(u, 0)$ が一次独立

である。一方、 f は m 次折り目特異点でもあるため、等式 $f(u, v) = f(u, -v)$ を v で $j (\in \mathbb{N})$ 回微分すると、

$$f_{v^j}(u, v) = (-1)^j f_{v^j}(u, -v)$$

である。 $v = 0$ を代入すると、 $f_{v^j}(u, 0) = (-1)^j f_{v^j}(u, 0)$ であるため、

- (1) j が奇数なら $(-1)^j = -1$ であるため、 $f_{v^j}(u, 0) = 0$.
- (2) j が偶数なら $(-1)^j = 1$ であるため、 $f_{v^j}(u, 0) = f_{v^j}(u, 0)$ (自明な式)。

が成り立つ。 m -type edge の性質より、 $f_{v^m}(u, 0)$ と $f_u(u, 0)$ が一次独立、つまり $f_{v^m}(u, 0) \neq \mathbf{0}$ であることが必要である。そのため、 m が奇数の場合は不適であり、 m は偶数である。 \square

以上の準備のもとで、 ds_f^2 が non-effective symmetry をもつことと、 f の表示 (m 次折り目特異点、あるいは \check{f} との一致) との対応を与える。

命題 45 (non-effective symmetry を持つ必要十分条件). m -type edge $f \in \mathcal{G}_{m,*}^\omega(\mathbb{R}_J^2, \mathbb{R}^3, C)$ に対し、第一基本形式 ds_f^2 が non-effective symmetry φ を持つための必要十分条件は、次で与えられる。

- (1) m が偶数のとき, f は m 次折り目特異点をもつ.
- (2) m が奇数のとき, $f \circ \varphi = \check{f}$ である. さらに, J 上で $\kappa_s(u) = 0$ である.

証明. f と $g := f \circ \varphi$ は同じ第一基本形式をもち, 特異曲線の像も向きを込めて一致するので, g は f または \check{f} と一致する. $U_+ := \{(u, v) \in U \mid v > 0\}$ とする. $\mathbf{x}_f(u), \mathbf{x}_g(u)$ をそれぞれ f, g のカスプ方向とし, $\theta_f(u), \theta_g(u)$ をそれぞれ f, g のカスプ角とするとき, $f(u, 0) = g(u, 0)$ より,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_f(u) &= \cos \theta_f(u) \mathbf{n}(u) - \sin \theta_f(u) \mathbf{b}(u), \\ \mathbf{x}_g(u) &= \cos \theta_g(u) \mathbf{n}(u) - \sin \theta_g(u) \mathbf{b}(u)\end{aligned}$$

が成り立つ.

- まず, m が偶数の場合を考える. $\mathbf{x}_g(u) = \mathbf{x}_f(u)$ より, $\theta_g(u) = \theta_f(u)$ である. したがって, $g = f$ である. さらにこのとき, 補題 41 より φ は f の特異曲線の向きを逆にする. このとき, $f = f \circ \varphi$ より $f = f \circ \varphi^2$ であることから, $\varphi^2(U_+) = U_+$ が成り立つため, $\varphi^2 = \text{Id}$ である. 微分同相写像 φ は向きを逆にし, involution であり, かつ, $\varphi(u, 0) = (u, 0)$ である. そのため, ある局所座標系 (x, y) が存在して, $\varphi(x, y) = (x, -y)$ と表される. (the Cartan-Bochner linearization theorem [21]). したがって, $f(x, y) = f(x, -y)$ となり, f は m 次折り目特異点をもつ.
- 逆に, f が m 次折り目特異点を持つと仮定する. このとき, $f(u, v) = f(u, -v)$ を満たす局所座標系 (u, v) が存在する. Whitney の補題(事実 42)より, ある写像 g が存在して, $f(u, v) = g(u, v^2)$ となる. このとき, φ を $\varphi(u, v) := (u, -v)$ と定めれば, これは non-effective symmetry である.

- 次に, m が奇数の場合を考える. φ を non-effective symmetry として, $g := f \circ \varphi$ とする. g と f の第一基本形式は一致し, さらに f と g の特異点集合 $\{v = 0\}$ 上では

$$\begin{aligned}f(u, 0) &= \mathbf{c}(u) \\ f \circ \varphi(u, 0) &= f(u, 0) = \mathbf{c}(u)\end{aligned}$$

であるため, $f \circ \varphi = f$ または \check{f} が成り立つ. ν_g と ν_f をそれぞれ向きを同調した g, f の単位法ベクトル場とする. $\det J$ を φ のヤコビアン, $\varepsilon := \text{sgn}(\det J)$, $\nu_g = \varepsilon \nu_f \circ \varphi$, $\lambda := \det(f_u, f_v, \nu_f) \geq 0$ とすると, 補題 40 より $\nu_g = \varepsilon \nu_f \circ \varphi$ は向きを同調した g の単位法ベクトル場である. 次に, g と f それぞれのカスプ方向を $\mathbf{x}_g, \mathbf{x}_f$ とすると,

$$\begin{aligned}(5.1) \quad \mathbf{x}_g(u) &:= \hat{\nu}_g(u) \times \mathbf{c}'(u) = \varepsilon \nu_f \circ \varphi(u, 0) \times \mathbf{c}'(u) = \varepsilon \nu_f(u, 0) \times \mathbf{c}'(u) \\ &= \varepsilon \mathbf{x}_f(u)\end{aligned}$$

となる. 式 (5.1) に $\mathbf{x}_f(u)$ を代入すると,

$$\mathbf{x}_g(u) = \varepsilon (\cos \theta_f(u) \mathbf{n}(u) - \sin \theta_f(u) \mathbf{b}(u))$$

と表せる. φ は non-effective symmetry であるため, 補題 41 より $\varepsilon = -1$ の場合のみを考えればよい. $\varepsilon = -1$ の場合, $\mathbf{x}_g(u)$ は

$$\mathbf{x}_g(u) = \cos(\pi + \theta_f(u)) \mathbf{n}(u) - \sin(\pi + \theta_f(u)) \mathbf{b}(u)$$

であるため, $\mathbf{x}_g(u) = \cos \theta_g(u) \mathbf{n}(u) - \sin \theta_g(u) \mathbf{b}(u)$ と比較すると, $\theta_g(u) = \pi + \theta_f(u)$ が成り立つ. $\theta_g(u) = \theta_f(u)$ または $-\theta_f(u)$ のいずれかであるため, これを満たすのは $\theta_g(u) = -\theta_f(u)$ である. よって,

$$f \circ \varphi = \check{f}$$

が成り立つ. 特に, $\theta_f(u) = \pm \pi/2$ であるため, 命題 29 より特異曲率について $\kappa_s(u) = 0$ も成り立つ.

逆に, $f \circ \varphi = \check{f}$ をみたす微分同相写像 φ があれば, $\varphi^* ds_f^2 = ds_{\check{f}}^2$ をみたす. $f \neq \check{f}$ より, φ は恒等写像ではない. したがって, φ は ds^2 の symmetry である. さらに, f と \check{f} の定める C の向きは同じなので, φ は non-effective symmetry を定める.

以上より, m の偶奇に応じた必要十分条件を示した. \square

次に, effective symmetry を持つための必要十分条件を示す.

命題 46 (effective symmetry を持つときの合同関係). m -type edge $f \in \mathcal{G}_{m,**}^\omega(\mathbb{R}_J^2, \mathbb{R}^3, C)$ に対し, 第一基本形式 ds_f^2 が effective symmetry φ をもつための必要十分条件は,

$$f \circ \varphi = \begin{cases} \check{f}_* & (m \text{ が偶数, もしくは } m \text{ が奇数で } \varphi \text{ が向きを逆にする場合}) \\ f_* & (m \text{ が奇数で } \varphi \text{ が向きを保つ場合}) \end{cases}$$

となることにより与えられる.

証明. $ds_{f \circ \varphi}^2 = \varphi^* ds_f^2 = ds_{\check{f}}^2$ より, f と $g := f \circ \varphi$ は同じ第一基本形式をもつ. さらに g は C の向きを逆にするので,

$$(5.2) \quad g = f_* \quad \text{または} \quad g = \check{f}_*$$

が成り立つ. $\mathbf{x}_f(u), \mathbf{x}_g(u)$ をそれぞれ f, g のカスプ方向とし, $\theta_f(u), \theta_g(u)$ をそれぞれ f, g のカスプ角とするとき,

$$g(u, 0) = f \circ \varphi(u, 0) = f(-u, 0) = \mathbf{c}(-u) =: \mathbf{c}_*(u)$$

である. 式 (2.1) より, $\mathbf{n}_*(u) := \mathbf{n}(-u)$, $\mathbf{b}_*(u) := -\mathbf{b}(-u)$ であるため,

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \mathbf{x}_f(u) &= \cos \theta_f(u) \mathbf{n}(u) - \sin \theta_f(u) \mathbf{b}(u), \\ \mathbf{x}_g(u) &= \cos \theta_g(u) \mathbf{n}_*(u) - \sin \theta_g(u) \mathbf{b}_*(u) \end{aligned}$$

が成り立つ.

- まず, m が偶数の場合を考える. $\mathbf{x}_f(0) = \mathbf{x}_g(0)$ および 式 (5.3) より,

$$\cos \theta_f(0) \mathbf{n}(0) - \sin \theta_f(0) \mathbf{b}(0) = \cos \theta_g(0) \mathbf{n}(0) + \sin \theta_g(0) \mathbf{b}(0)$$

となる. したがって, $\theta_g(0) = -\theta_f(0)$ となり, 式 (5.2) と合わせて $(g =) f \circ \varphi = \check{f}_*$ であることが分かる.

逆に, $f \circ \varphi$ が \check{f}_* と一致する場合, 第一基本形式について $\varphi^* ds_f^2 = ds_{\check{f}}^2$ が成り立つ. さらに, f が定める特異曲線の像 C の向きと \check{f}_* が定める C の向きは逆なので,

$\varphi(u, 0) = (-u, 0)$ となる。したがって、 φ は effective symmetry である。

- 次に、 m が奇数の場合を考える。 ν_g と ν_f をそれぞれ g, f の単位法ベクトル場とする。向きを同調した g の単位法ベクトル場を求める。 $\det J$ を φ のヤコビアン、 $\varepsilon := \text{sgn}(\det J)$, $\nu_g = \varepsilon \nu_f \circ \varphi$, $\lambda := \det(f_u, f_v, \nu_f) \geq 0$ とすると、補題 40 より $\nu_g = \varepsilon \nu_f \circ \varphi$ は向きを同調した g の単位法ベクトル場である。次に、 g, f のカスプ方向をそれぞれ $\mathbf{x}_g, \mathbf{x}_f$ とすると、

$$\begin{aligned} (5.4) \quad \mathbf{x}_g(u) &:= \hat{\nu}_g(u) \times \mathbf{c}'_*(u) \quad (\mathbf{c}_*(u) = \mathbf{c}(-u), \hat{\nu}_g(u) := \nu_g(u, 0)) \\ &= \varepsilon \nu_f \circ \varphi(u, 0) \times (-\mathbf{e}(-u)) \\ &= \varepsilon \hat{\nu}_f(-u) \times (-\mathbf{e}(-u)) \quad (\hat{\nu}_f(u) := \nu_f(u, 0)) \\ &= -\varepsilon \mathbf{x}_f(-u) \end{aligned}$$

となる。 g のカスプ角 θ_g を用いると $\mathbf{x}_g(u) = \cos \theta_g(u) \mathbf{n}(-u) + \sin \theta_g(u) \mathbf{b}(-u)$ と表せることに注意して、式 (5.4) に $\mathbf{x}_f(-u)$ を代入すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_g(u) &= -\varepsilon (\cos \theta_f(-u) \mathbf{n}(-u) - \sin \theta_f(-u) \mathbf{b}(-u)) \\ \therefore \mathbf{x}_g(0) &= -\varepsilon (\cos \theta_f(0) \mathbf{n}(0) - \sin \theta_f(0) \mathbf{b}(0)) \end{aligned}$$

と表せる。

- $\varepsilon = 1$ の場合、 $\mathbf{x}_g(0) = \cos(\pi - \theta_f(0)) \mathbf{n}(0) + \sin(\pi - \theta_f(0)) \mathbf{b}(0)$ であるため、 $\theta_g(0) = \pi - \theta_f(0)$ であり、これを満たすのは

$$(5.5) \quad \theta_g(0) = \theta_f(0)$$

である。特に、 $\theta_f(0) = \pm \pi/2$ である。

- $\varepsilon = -1$ の場合、 $\mathbf{x}_g(0) = \cos(-\theta_f(0)) \mathbf{n}(0) + \sin(-\theta_f(0)) \mathbf{b}(0)$ であるため、これを満たすのは

$$(5.6) \quad \theta_g(0) = -\theta_f(0)$$

である。以上の式 (5.2), (5.5), (5.6) より、 $f \circ \varphi$ は

$$f \circ \varphi = \begin{cases} f_* & (\varepsilon = 1) \\ \check{f}_* & (\varepsilon = -1) \end{cases}$$

である。

逆に、 $f \circ \varphi$ が f_* または \check{f}_* と一致する場合、第一基本形式について $\varphi^* ds_f^2 = ds_f^2$ が成り立つ。さらに、 f が定める特異曲線の像 C の向きと f_* および \check{f}_* が定める C の向きは逆なので、 $\varphi(u, 0) = (-u, 0)$ となる。したがって、 φ は effective symmetry である。

以上より、 m の偶奇に応じた必要十分条件を示した。 \square

注意 47 (m が偶数の場合の \check{f}). 命題 46 の m が偶数の場合において, ds_f^2 の effective symmetry φ を用いて,

$$\check{f} \circ \varphi = f_*$$

が成り立つ.

5.2. 主定理の主張および証明

前節で述べた補題を用いて, 本節では主定理 A(定理 48) の証明を行う.

定理 48 (m -type edge の右同値類の個数). n_f を $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ の右同値類の数とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) m が偶数の場合

- (a) $n_f = 2, 4$ である.
- (b) $n_f = 4 \iff ds_f^2$ は effective symmetry を持たない.

(2) m が奇数の場合

- (a) $n_f = 1, 2, 4$ である.
- (b) $n_f = 4 \iff ds_f^2$ は symmetry を持たない.
- (c) $n_f = 1 \iff ds_f^2$ は effective symmetry と non-effective symmetry の両方を持つ.

証明. まず, m が偶数の場合の主張を示す.

- $n_f = 4 \implies ds_f^2$ が effective symmetry を持たないとの対偶を示す. ds_f^2 が effective symmetry φ を持つと仮定する. 補題 46 および注意 47 より, $f \circ \varphi = \check{f}_*$ かつ $\check{f} \circ \varphi = f_*$ である. よって, $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ の右同値類の数は

$$(5.7) \quad n_f \leq 2$$

である. 特に, $n_f \neq 4$ であることが分かる.

- 逆に, $n_f \neq 4 \implies ds_f^2$ は effective symmetry をもつことを示す. $n_f \neq 4$ とすると, $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ のうち, いずれか 2 つが右同値である. 右同値な一方を f , もう一方を

$$g \in \{\check{f}, f_*, \check{f}_*\}$$

と仮定してよい. 命題 46 および注意 47 より, f と \check{f} は右同値にはなり得ないので $g = f_*$ または $g = \check{f}_*$ である. 仮定より f と g が右同値であるので, ある微分同相写像 φ が存在して, $f \circ \varphi = f_*$ または $f \circ \varphi = \check{f}_*$ である. よって命題 46 より, いずれの場合でも f は effective symmetry をもつ.

- 次に, $n_f = 2, 4$ を示す. まず, f と \check{f} は右同値になり得ないため, $n_f \geq 2$ である. さらに $n_f \neq 4$ の場合を考えると 式 (5.7) と (b) の必要条件の証明より

$$\begin{aligned} n_f \neq 4 &\implies ds_f^2 \text{ は effective symmetry を持つ} \\ &\implies n_f \leq 2 \end{aligned}$$

であるため、主張が従う。

次に、 m が奇数の場合の主張を示す。

- まず、 $n_f = 4 \implies ds_f^2$ は symmetry を持たないこの対偶を考える。つまり、 ds_f^2 がある symmetry φ を持つと仮定する。
 - (i) φ が effective symmetry の場合、 $f \circ \varphi$ および $\check{f} \circ \varphi$ の第一基本形式は ds_f^2 と一致し、特異点集合 $\{v = 0\}$ 上では、

$$\begin{aligned} f \circ \varphi(u, 0) &= f(-u, 0) = \mathbf{c}(-u) \\ \check{f} \circ \varphi(u, 0) &= \check{f}(-u, 0) = \mathbf{c}(-u) \end{aligned}$$

であるため、 $f \circ \varphi$ および $\check{f} \circ \varphi$ はそれぞれ f_* , \check{f}_* のいずれかと一致する。命題 46 より、

- (I) $f \circ \varphi = f_*$ なら、 f と f_* は右同値である。(同様に、 \check{f} は \check{f}_* と右同値である)
- (II) $f \circ \varphi = \check{f}_*$ なら、 f と \check{f}_* は右同値である。(同様に、 \check{f} は f_* と右同値である)

以上より、 $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ の右同値類の個数は 2 である。

- (ii) φ が non-effective symmetry の場合、 φ が effective symmetry である場合と同様の議論で、 $f \circ \varphi$ および $f_* \circ \varphi$ の第一基本形式は ds_f^2 と一致し、特異点集合 $\{v = 0\}$ 上では、

$$\begin{aligned} f \circ \varphi(u, 0) &= f(u, 0) = \mathbf{c}(u) \\ f_* \circ \varphi(u, 0) &= f_*(u, 0) = \mathbf{c}(-u) \end{aligned}$$

である。命題 45 より $f \circ \varphi$ は \check{f} と一致し、 $f_* \circ \varphi$ は \check{f}_* と一致する。よって、 f は \check{f} と右同値であり、 f_* は \check{f}_* と右同値である。よって、 $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ の右同値類の個数は 2 である。

以上の(i)(ii) より、 $n_f = 4 \implies ds_f^2$ は symmetry を持たないを示した。

- 逆に、 ds_f^2 は symmetry を持たない $\implies n_f = 4$ を示す。 $n_f < 4$ であると仮定する。 f と $g \in \{\check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ が右同値であるとして、一般性を失わない。

- (i) $g = f_*$ または \check{f}_* の場合、命題 46 より f は effective symmetry をもつ事が分かる。

- (ii) $g = \check{f}$ の場合、命題 45 より f は non-effective symmetry をもつ事が分かる。

以上の(i)(ii) より、 ds_f^2 は symmetry を持たない $\implies n_f = 4$ を示した。

- 次に、 $n_f = 1 \implies ds_f^2$ は effective symmetry と non-effective symmetry の両方を持つことを示す。 $n_f = 1$ であると仮定すると、 f は $\check{f}, f_*, \check{f}_*$ の 3 つと右同値であるため、

右同値の定義よりある微分同相写像 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ が存在して,

$$\check{f} = f \circ \varphi_1, \quad f_* = f \circ \varphi_2, \quad \check{f}_* = f \circ \varphi_3$$

が成り立つ. 命題 45 より φ_1 は non-effective symmetry であり, 命題 46 より φ_2 と φ_3 は effective symmetry である. 以上より, ds_f^2 は effective symmetry と non-effective symmetry の両方を持つ.

- 逆に, ds_f^2 が non-effective symmetry φ_1 と effective symmetry φ_2 を持つと仮定する. このとき, $\varphi_3 := \varphi_2 \circ \varphi_1$ も effective symmetry である. 実際,

$$f \circ \varphi_3(u, 0) = f \circ \varphi_1 \circ \varphi_2(u, 0) = f \circ \varphi_1(-u, 0) = f(-u, 0)$$

となり, $\varphi_3(u, 0) = (-u, 0)$ であるため, f の特異曲線の向きを反転させる. 命題 45 より, $\check{f} = f \circ \varphi_1$ である. $f \circ \varphi_2$ と $f \circ \varphi_3$ について,

- (1) φ_2 が向きを逆にする場合, φ_3 は向きを保つ. 命題 46 より, $f \circ \varphi_2 = \check{f}_*$ かつ $f \circ \varphi_3 = f_*$ である.
- (2) φ_2 が向きを保つ場合, φ_3 は向きを逆にする. 命題 46 より, $f \circ \varphi_2 = f_*$ かつ $f \circ \varphi_3 = \check{f}_*$ である.

が成り立つ. 以上より, ds_f^2 は effective symmetry と non-effective の両方を持つ $\Rightarrow n_f = 1$ である.

- 最後に, $n_f = 1, 2, 4$ を示す. $n_f \neq 4$ の場合を考える. (b) の必要条件の証明から, $n_f < 4 \Rightarrow ds_f^2$ は symmetry をもつ. さらに, (b) の十分条件の証明から, ds_f^2 が symmetry をもつ $\Rightarrow n_f \leq 2$ であるため, $n_f = 1, 2, 4$ のいずれかである.

□

注意 49. 定理 48 の m が奇数の場合において, $n_f = 2$ は ds_f^2 が effective symmetry か non-effective symmetry のいずれか一方のみを持つことと同値である.

5.3. 主定理 A の具体例

付録 A で示す補題を用いて, 主定理 A の n_f の各値に対応する $f(u, v)$ の具体例として以下が挙げられる.

- (1) カスプ辺の $n_f = 4$ に対応する具体例

$\phi_1(u, v) := 1 - v^2 - 2v^3 - uv^3$ として,

$$f_1(u, v) := (-1 + \phi_1(u, v) \cos u, \phi_1(u, v) \sin u, -v^2 + 2v^3 + uv^3)$$

とする ([3] より引用). このとき, f_1 は (u, v^2, v^3) と右左同値であるため, カスプ辺をもつ. 実際,

$$\begin{aligned}\Phi(X, Y, Z) = & (-1 + (1 - Y - 2Z - XZ) \cos X, \\ & (1 - Y - 2Z - XZ) \sin X \\ & - Y + 2Z + XZ), \\ \varphi = \text{Id} &\end{aligned}$$

とすると, Φ は原点付近で局所微分同相であり, $\bar{f}(u, v) := (u, v^2, v^3)$ とすれば $\Phi \circ \bar{f} \circ \varphi^{-1} = f_1$ である. f_1 の特異曲線の像を C_1 とする. C_1 の symmetry $S, T \in O(3)$ をそれぞれ

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると, $Sf(u, 0) = Sc(u) = c(u)$ および $Tc(u) = c(-u)$ であるため, S は orientation-preserving, T は orientation-reversing である. 補題 57 より, 等長双対 \check{f} , 逆 f_* , 等長双対 \check{f}_* はそれぞれ

$$\check{f} = Sf, \quad f_* = Tf, \quad \check{f}_* = STf (= TSf)$$

である (図 6).

(2) カスプ辺の $n_f = 2$ に対応する具体例

$\phi_2(u, v) := 1 - v^2$ として, f_2 を

$$f_2(u, v) := (-1 + \phi_2(u, v) \cos u, \phi_2(u, v) \sin u, v^2 + v^3)$$

とする. f_1 のときと同様に, f_2 はカスプ辺をもつ. f_2 の特異曲線の像を C_2 として, C_2 の symmetry $S \in O(3)$ と $ds_{f_2}^2$ の effective symmetry φ を

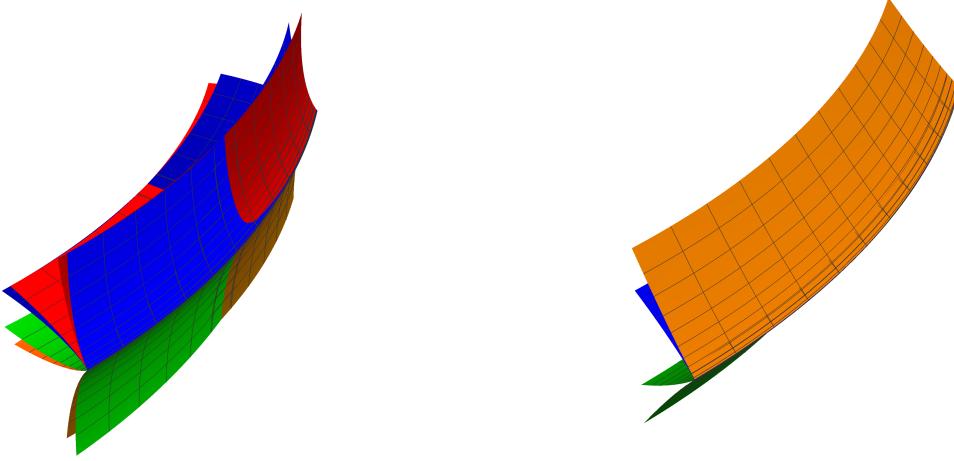
$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(u, v) := (-u, v)$$

とすると, 補題 58 より $\check{f}_2, f_{2*}, \check{f}_{2*}$ はそれぞれ

$$\check{f}_2 = Sf_2, \quad f_{2*} = Sf_2 \circ \varphi, \quad \check{f}_{2*} = f_2 \circ \varphi$$

である (図 6). この φ は $\varphi^* ds_{f_2}^2 = ds_{f_2}^2$ を満たすことを確認する. $\varphi^* ds_{f_2}^2$ を実際に計算すると

$$\begin{aligned}ds_{f_2}^2 &= (v^2 - 1)^2 du^2 + v^2(9v^2 + 12v + 8) dv^2 \\ \varphi^* ds_{f_2}^2 &= (v^2 - 1)^2 d(-u)^2 + v^2(9v^2 + 12v + 8) dv^2 \\ &= (v^2 - 1)^2 du^2 + v^2(9v^2 + 12v + 8) dv^2 \\ &= ds_{f_2}^2\end{aligned}$$

図 6. $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ の像の図示 (左: $f = f_1$, 右: $f = f_2$)

となり, φ は $ds_{f_2}^2$ の symmetry である定義を満たしている.

(3) (3,4)-カスプ辺の $n_f = 4$ に対応する具体例

$\phi_3(u, v) := 1 - v^3 - 2v^4 - uv^4$ として, f_3 を

$$f_3(u, v) := (-1 + \phi_3(u, v) \cos u, \phi_3(u, v) \sin u, -v^3 + 2v^4 + uv^4)$$

とする. このとき, f_3 は (u, v^3, v^4) と右左同値であるため, (3,4)-カスプ辺を持つ. 実際,

$$\begin{aligned} \Phi(X, Y, Z) = & (-1 + (1 - Y - 2Z - XZ) \cos X, \\ & (1 - Y - 2Z - XZ) \sin X, \\ & -Y + 2Z + XZ) \end{aligned}$$

$$\varphi = \text{Id}$$

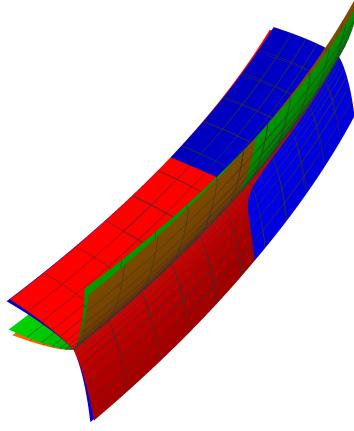
とすると, Φ は原点付近で局所微分同相であり, $\bar{f}(u, v) = (u, v^3, v^4)$ とすれば $\Phi \circ \bar{f} \circ \varphi^{-1} = f_3$ である. f_3 の特異曲線の像を C_3 とする. C_3 の symmetry $S, T \in O(3)$ をそれぞれ

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると, $Sf_3(u, 0) = Sc(u) = c(u)$ および $Tc(u) = c(-u)$ であるため, S は orientation-preserving, T は orientation-reversing である. 補題 57 より, f_3 に対応する等長双対 \check{f}_3 , 逆 f_{3*} , 等長双対 \check{f}_{3*} はそれぞれ

$$\check{f}_3 = Sf, \quad f_{3*} = Tf, \quad \check{f}_{3*} = STf (= TSf)$$

である (図 7).

図 7. $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ の像の図示 ($f = f_3$)

(4) (3,4)-カスプ辺の $n_f = 2$ かつ第一基本形式が effective-symmetry を持つ場合に対応する具体例

$\phi_4(u, v) := 1 + v^3$ として, f_4 を

$$f_4(u, v) := (-1 + \phi_4(u, v) \cos u, \phi_4(u, v) \sin u, v^3 + v^4)$$

とする. f_3 のときと同様に, f_4 は (3,4)-カスプ辺を持つ. f_4 の特異曲線の像を C_4 として, C_4 の orientation-preserving symmetry $S \in O(3)$ と $ds_{f_4}^2$ の effective symmetry φ を

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(u, v) := (-u, v)$$

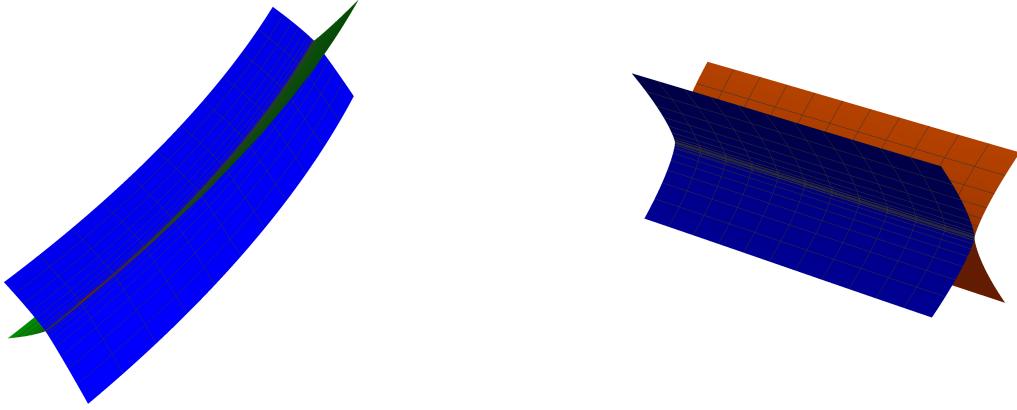
とすると, 補題 58 より $\check{f}, f_*, \check{f}_*$ はそれぞれ

$$\check{f} = Sf, \quad f_* = f \circ \varphi, \quad \check{f}_* = Sf \circ \varphi$$

である(図 8). この φ は $\varphi^* ds_{\check{f}}^2 = ds_{f_*}^2$ を満たすことを確認する. $\varphi^* ds_{f_*}^2$ を実際に計算すると,

$$\begin{aligned} ds_{f_4}^2 &= (v^3 + 1)^2 du^2 + 2v^4(8v^2 + 12v + 9) dv^2 \\ \varphi^* ds_{f_4}^2 &= (v^3 + 1)^2 d(-u)^2 + 2v^4(8v^2 + 12v + 9) dv^2 \\ &= (v^3 + 1)^2 du^2 + 2v^4(8v^2 + 12v + 9) dv^2 \\ &= ds_{f_*}^2 \end{aligned}$$

となり, φ は $ds_{f_*}^2$ の symmetry である定義を満たしている.

図 8. $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ の像の図示 (左: $f = f_4$, 右: $f = f_5$)

(5) (3,4)-カスプ辺の $n_f = 2$ かつ第一基本形式が non-effective symmetry を持つ場合に対応する具体例

$f_5(u, v)$ を

$$f_5(u, v) := (u + v^4, u^3 + v^4, v^3)$$

とする. f_3 のときと同様に, f_5 は (3,4)-カスプ辺を持つ. f_5 の特異曲線の像を C_5 として, C_5 の orientation-reversing symmetry $T \in O(3)$ と $ds_{f_5}^2$ の non-effective symmetry φ を

$$T := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(u, v) := (u, -v)$$

とすると, 補題 59 より $\check{f}_5, f_{5*}, \check{f}_{5*}$ はそれぞれ

$$\check{f}_5 = f_5 \circ \varphi, \quad f_{5*} = Tf_5, \quad \check{f}_{5*} = Tf_5 \circ \varphi$$

である (図 8). この φ は $\varphi^* ds_{f_5}^2 = ds_{\check{f}_5}^2$ を満たすことを確認する. $\varphi^* ds_{f_5}^2$ は実際に計算すると,

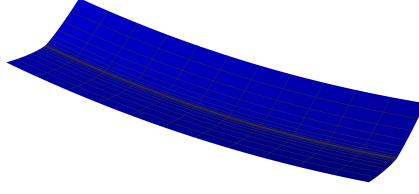
$$\begin{aligned} ds_{f_5}^2 &= (9u^4 + 1) du^2 + 4v^3(3u^2 + 1) dudv + v^4(32v^2 + 9) dv^2 \\ \varphi^* ds_{f_5}^2 &= (9u^4 + 1) du^2 + 4(-v)^3(3u^2 + 1) dud(-v) + (-v)^4(32\{-v\}^2 + 9) d(-v)^2 \\ &= (9u^4 + 1) du^2 + (-1)^2 4v^3(3u^2 + 1) dudv + v^4(32v^2 + 9) dv^2 \\ &= ds_{\check{f}_5}^2 \end{aligned}$$

となり, φ は $ds_{f_5}^2$ の symmetry である定義を満たしている.

(6) (3,4)-カスプ辺の $n_f = 1$ に対応する具体例

$f_6(u, v)$ を

$$f_6(u, v) := (u, v^3, u^2 + v^4)$$

図 9. $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ の像の図示 ($f = f_6$)

とする. f_3 のときと同様に, f_6 は (3,4)-カスプ辺を持つ. $ds_{f_6}^2$ の effective symmetry φ と non-effective symmetry ψ を

$$\varphi(u, v) := (-u, v), \quad \psi(u, v) := (u, -v)$$

とすると, 補題 61 より $\check{f}_6, f_{6*}, \check{f}_{6*}$ はそれぞれ

$$\check{f}_6 = f_6 \circ \psi, \quad f_{6*} = f_6 \circ \varphi, \quad \check{f}_{6*} = f_6 \circ \varphi \circ \psi$$

である(図 9). この φ と ψ は $ds_{f_6}^2$ の symmetry(定義 1) であるとの定義を満たすことを確認する. $\varphi^* ds_{f_6}^2$ を実際に計算すると,

$$\begin{aligned} ds_{f_6}^2 &= (4u^2 + 1) du^2 + 8uv^3 dudv + v^4(16v^2 + 9) dv^2 \\ \varphi^* ds_{f_6}^2 &= (4\{-u\}^2 + 1) d(-u)^2 + 8(-u)v^3 d(-u)dv + v^4(16v^2 + 9) dv^2 \\ &= (4u^2 + 1) du^2 + (-1)^2 8uv^3 dudv + v^4(16v^2 + 9) dv^2 \\ &= ds_{f_6}^2 \end{aligned}$$

となり, φ は $ds_{f_6}^2$ の symmetry である定義を満たしている. 同様に $\psi^* ds_{f_6}^2$ も,

$$\begin{aligned} \psi^* ds_{f_6}^2 &= (4u^2 + 1) du^2 + 8u(-v)^3 dud(-v) + (-v)^4(16\{-v\}^2 + 9) d(-v)^2 \\ &= (4u^2 + 1) du^2 + (-1)^2 8uv^3 dudv + v^4(16v^2 + 9) dv^2 \\ &= ds_{f_6}^2 \end{aligned}$$

であるため, ψ も $ds_{f_6}^2$ の symmetry である定義を満たしている.

6. 主定理 B

本章では、実解析的かつジェネリックな m -type edge f に対し、 $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ の合同関係を決定し、合同類の個数を C と ds_f^2 の symmetry の有無で分類する（主定理 B）。さらに、各条件に対応する具体例を示す。

6.1. 主定理のための補題

本節では、主定理のために必要な補題を 4 つ準備する。

補題 50 (C が平面曲線の場合の合同関係). $c(u)$ を閉区間 $J := [-l, l]$ ($l > 0$) 上で定義された、弧長パラメータ表示された \mathbb{R}^3 の埋め込まれた正則曲線で、 J 上では $\kappa > 0$ とする。さらに、 $c(u)$ の像を $C := c(J)$ とおく。 C が平面 Π 内にあるとして、 Π に関する鏡映を S とする。このとき、任意の $f \in \mathcal{G}_{m,*}^\omega(\mathbb{R}_J^2, \mathbb{R}^3, C)$ に対して

$$\check{f} = Sf$$

が成り立つ。

証明. 平面曲線 $c(u)$ 内の従法線ベクトル $b(u)$ は u に依存しない定ベクトル b_0 として表せ、平面 Π 内の法ベクトルである。主法線ベクトルを $n(u)$ とするとき、

$$S\mathbf{n}(u) = \mathbf{n}(u), \quad Sb_0 = -b_0$$

が成り立つ。 $g := Sf$ とおくと、 g と f は同じ第一基本形式をもち、さらに特異点集合 $\{v = 0\}$ 上では

$$g(u, 0) = Sf(u, 0) = Sc(u) = c(u)$$

より、 $g = f$ または $g = \check{f}$ である。 f, g のカスプ方向をそれぞれ x_f, x_g とし、角度関数を θ_f, θ_g とするとき、

$$\begin{aligned} x_f &= (\cos \theta_f)\mathbf{n} - (\sin \theta_f)b_0 \\ x_g &= (\cos \theta_g)\mathbf{n} - (\sin \theta_g)b_0 \end{aligned}$$

が成り立つ。 m の偶奇に応じて f と g の関係式を求める。

- m が偶数の場合を考える。 $g = Sf$ であるため x_g は、

$$\begin{aligned} x_g &= Sx_f \\ &= (\cos \theta_f)S\mathbf{n} - (\sin \theta_f)Sb_0 = (\cos \theta_f)\mathbf{n} + (\sin \theta_f)b_0 \\ &= (\cos(-\theta_f))\mathbf{n} - (\sin(-\theta_f))b_0 \end{aligned}$$

である。よって、 $\theta_g = -\theta_f$ であるため $g = \check{f}$ が成り立つ。

- m が奇数の場合を考える。 f の向きに同調する単位法ベクトル場を ν_f とおく。このとき、 $\nu_g := (\det S)S\nu_f$ は g の向きに同調する単位法ベクトル場である。実際、 f の符号

付き密度関数を $\lambda = \det(f_u, f_v, \nu_f) \geq 0$, g の符号付き密度関数を $\lambda_g = \det(g_u, g_v, \nu_g)$ とすると,

$$\begin{aligned}\det(g_u, g_v, \nu_g) &= (\det S) \det((Sf)_u, (Sf)_v, S\nu_f) \\ &= (\det S) \det(Sf_u, Sf_v, S\nu_f) \\ &= \underbrace{(\det S)(\det S)}_1 \det(f_u, f_v, \nu_f) \\ &= \lambda \geq 0\end{aligned}$$

となる. したがって, $\hat{\nu}_g(u) := \nu_g(u, 0)$ は

$$\hat{\nu}_g(u) = (\det S) S \nu_f(u, 0) = (\det S) S \hat{\nu}_f(u)$$

をみたす. 今, $S\mathbf{c}(u) = \mathbf{c}(u)$ より $S\mathbf{c}'(u) = \mathbf{c}'(u)$ なので, \mathbf{x}_g は

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_g(u) &= \hat{\nu}_g(u) \times \mathbf{c}'(u) = (\det S) S \hat{\nu}_f(u) \times S \mathbf{c}'(u) = \underbrace{(\det S)(\det S)}_1 S(\hat{\nu}_f(u) \times \mathbf{c}'(u)) \\ &= S\mathbf{x}_f(u) \\ &= (\cos \theta_f) S\mathbf{n} - (\sin \theta_f) S\mathbf{b}_0 = (\cos \theta_f) \mathbf{n} + (\sin \theta_f) \mathbf{b}_0 \\ &= (\cos(-\theta_f)) \mathbf{n} - (\sin(-\theta_f)) \mathbf{b}_0\end{aligned}$$

である. よって, $\theta_g = -\theta_f$ であるため, $g = \check{f}$ が成り立つ.

以上より, m の偶奇に関わらず $\check{f} = Sf$ が成り立つ. \square

補題 51 (orientation-reversing symmetry を持つときの合同関係). $f \in \mathcal{G}_{m,**}^\omega(\mathbb{R}_J^2, \mathbb{R}^3, C)$ とする. C が orientation-reversing symmetry $T \in O(3)$ をもつとき, Tf は

$$Tf = \begin{cases} f_* & (T \text{ が正、つまり } \det T = 1) \\ \check{f}_* & (T \text{ が負、つまり } \det T = -1) \end{cases}$$

である.

証明. $ds_{Tf}^2 = ds_f^2$ より, f と $g := Tf$ は同じ第一基本形式をもつ. さらに特異点集合 $\{v = 0\}$ 上を考えると,

$$g(u, 0) = Tf(u, 0) = T\mathbf{c}(u) = \mathbf{c}(-u) =: \mathbf{c}_*(u)$$

より, C の向きを逆にするので

$$(6.1) \quad g = f_* \quad \text{または} \quad g = \check{f}_*$$

が成り立つ. $\mathbf{x}_f(u)$ と $\mathbf{x}_g(u)$ をそれぞれ f, g のカスプ方向とし, $\theta_f(u)$ と $\theta_g(u)$ をそれぞれ f, g のカスプ角とする. 式 (2.1) より, $\mathbf{n}_*(u) := \mathbf{n}(-u)$, $\mathbf{b}_*(u) := -\mathbf{b}(-u)$ とすると, $\mathbf{x}_f(u)$ および $\mathbf{x}_g(u)$ は

$$(6.2) \quad \mathbf{x}_f(u) = \cos \theta_f(u) \mathbf{n}(u) - \sin \theta_f(u) \mathbf{b}(u),$$

$$\mathbf{x}_g(u) = \cos \theta_g(u) \mathbf{n}_*(u) - \sin \theta_g(u) \mathbf{b}_*(u)$$

が成り立つ.

- m が偶数の場合を考える. $\mathbf{x}_g(u) = T\mathbf{x}_f(u)$ および式 (6.2) より, $u = 0$ で評価すると

$$\cos \theta_g(0) \mathbf{n}_*(0) - \sin \theta_g(0) \mathbf{b}_*(0) = \cos \theta_f(0) T\mathbf{n}(0) - \sin \theta_f(0) T\mathbf{b}(0)$$

である. 補題 2 より orientation-reversing symmetry T に対して $T\mathbf{n}(0) = \mathbf{n}(0), T\mathbf{b}(0) = -\sigma\mathbf{b}(0)$ であることおよび式 (2.1) より $\mathbf{n}_*(0) = \mathbf{n}(0), \mathbf{b}_*(0) = -\mathbf{b}(0)$ を用いると,

$$\begin{aligned} \cos \theta_g(0) \mathbf{n}(0) + \sin \theta_g(0) \mathbf{b}(0) &= \cos \theta_f(0) \mathbf{n}(0) + \sigma \sin \theta_f(0) \mathbf{b}(0) \\ &= \cos(\sigma \theta_f(0)) \mathbf{n}(0) + \sin(\sigma \theta_f(0)) \mathbf{b}(0) \end{aligned}$$

を得る. したがって, $\theta_g(0) = \sigma \theta_f(0)$ となるため, 式 (6.1) より $\sigma = 1$, つまり T が正のときは $g = f_*$ が成り立つ. $\sigma = -1$, つまり T が負のときは $g = \check{f}_*$ が成り立つ.

- m が奇数の場合を考える. ν_g と ν_f をそれぞれ g と f の単位法ベクトル場とする. $\sigma := \det T, \lambda := \det(f_u, f_v, \nu_f) \geq 0$ とすると, $\nu_g = \sigma T \nu_f$ は向きに同調した g の単位法ベクトル場である. 実際,

$$\begin{aligned} \det(g_u, g_v, \nu_g)(u, v) &= \det((Tf(u, v))_u, (Tf(u, v))_v, \nu_g(u, v)) \\ &= \det(T(f(u, v))_u, T(f(u, v))_v, \sigma T \nu_f(u, v)) \\ &= \underbrace{\sigma(\det T)}_1 \det(f_u, f_v, \nu_f)(u, v) \\ &= \lambda(u, v) \geq 0. \end{aligned}$$

となり, g の符号付き面積密度関数は正となる. $\mathbf{x}_g(u)$ と $\mathbf{x}_f(u)$ をそれぞれ g と f のカスプ方向とする. このとき, $\mathbf{x}_g(u)$ は

$$(6.3) \quad \begin{aligned} \mathbf{x}_g(u) &:= \hat{\nu}_g(u) \times \mathbf{c}'_*(u) = \sigma T \nu_f(u, 0) \times (T\mathbf{c}'(u)) = \sigma(\det T) T(\hat{\nu}_f(u) \times \mathbf{c}'(u)) \\ &= T\mathbf{x}_f(u) \quad (\hat{\nu}_g(u) := \nu_g(u, 0), \hat{\nu}_f(u) := \nu_f(u, 0)) \end{aligned}$$

となる. $\mathbf{x}_f(u) = \cos \theta_f(u) \mathbf{n}(u) - \sin \theta_f(u) \mathbf{b}(u)$ および補題 2 より, 式 (6.3) は

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_g(u) &= \cos \theta_f(u) T\mathbf{n}(u) - \sin \theta_f(u) T\mathbf{b}(u) \\ \therefore \mathbf{x}_g(0) &= \cos \theta_f(0) \mathbf{n}(0) + \sigma \sin \theta_f(0) \mathbf{b}(0) \\ &= \cos(\sigma \theta_f(0)) \mathbf{n}(0) + \sin(\sigma \theta_f(0)) \mathbf{b}(0) \end{aligned}$$

と表せる. よって $\theta_g(0) = \sigma \theta_f(0)$ が成り立ち, 式 (6.1) と合わせて

$$\begin{cases} \sigma = 1 \text{ ならば, } (g =) Tf = f_* \\ \sigma = -1 \text{ ならば, } Tf = \check{f}_* \end{cases}$$

がわかる.

以上より, m の偶奇に関わらず補題が成り立つことを示した. \square

命題 52 (orientation-reversing symmetry と effective symmetry を持つときの合同関係). m -type edge $f \in \mathcal{G}_{m,**}^\omega(\mathbb{R}_J^2, \mathbb{R}^3, C)$ に対し, C が orientation-reversing symmetry T をもち, ds_f^2 が effective symmetry φ をもつとする. このとき, m の偶奇に応じて次が成り立つ.

(1) m が偶数の場合

- (a) T が正 ($\det T = 1$) ならば, $Tf \circ \varphi = \check{f}$. つまり, f と \check{f} は合同である.
- (b) T が負 ($\det T = -1$) ならば, $Tf \circ \varphi = f$.

(2) m が奇数の場合

- (a) φ が向きを保ち, かつ T が正ならば, $Tf \circ \varphi = f$ である. さらに, 特異曲率 κ_s について $\kappa_s(p) = 0$ が成り立つ.
- (b) φ が向きを保ち, かつ T が負ならば, $Tf \circ \varphi = \check{f}$ である. さらに, $\kappa_s(p) = 0$ が成り立つ.
- (c) φ が向きを逆にして, かつ T が正ならば, $Tf \circ \varphi = \check{f}$ である.
- (d) φ が向きを逆にして, かつ T が負ならば, $Tf \circ \varphi = f$ である.

証明. まず仮定より C が orientation-reversing symmetry T を持つため,

$$T\mathbf{c}(u) = \mathbf{c}(-u)$$

が成り立ち, さらに第一基本形式 ds_f^2 が effective symmetry φ をもつため,

$$\varphi^* ds_f^2 = ds_f^2$$

が成り立つ. $g := Tf \circ \varphi$ とおくと, $ds_g^2 = ds_{Tf \circ \varphi}^2 = \varphi^* ds_f^2 = ds_f^2$ であり, 特異点集合 $\{v = 0\}$ 上において g は

$$g(u, 0) = Tf \circ \varphi(u, 0) = Tf(-u, 0) = T\mathbf{c}(-u) = \mathbf{c}(u)$$

であるため, 特異曲線の像は向きを含めて f と一致する. よって g は

$$(6.4) \quad g = f \quad \text{または} \quad g = \check{f}$$

が成り立つ.

- m が偶数の場合を考える. $\mathbf{x}_f(0)$ と $\mathbf{x}_g(0)$ をそれぞれ f , g の $\mathbf{c}(0)$ におけるカスプ方向とし, $\theta_f(0), \theta_g(0)$ をそれぞれ f , g の $\mathbf{c}(0)$ におけるカスプ角とするとき, $\mathbf{x}_f(0)$ と $\mathbf{x}_g(0)$ はそれぞれ

$$\mathbf{x}_g(0) = \cos \theta_g(0) \mathbf{n}(0) - \sin \theta_g(0) \mathbf{b}(0), \quad \mathbf{x}_f(0) = \cos \theta_f(0) \mathbf{n}(0) - \sin \theta_f(0) \mathbf{b}(0)$$

と表される. $\mathbf{x}_g(0) = T\mathbf{x}_f(0)$ および補題 2 より,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_g(0) &= T\mathbf{x}_f(0) = T(\cos \theta_f(0) \mathbf{n}(0) - \sin \theta_f(0) \mathbf{b}(0)) \\ &= \cos \theta_f(0) T\mathbf{n}(0) - \sin \theta_f(0) T\mathbf{b}(0) \\ &= \cos \theta_f(0) \mathbf{n}(0) + \sigma \sin \theta_f(0) \mathbf{b}(0) \\ &= \cos(-\sigma \theta_f(0)) \mathbf{n}(0) - \sin(-\sigma \theta_f(0)) \mathbf{b}(0) \end{aligned}$$

が成り立つ. $\theta_g(0)$ と $\theta_f(0)$ を比較すると $\theta_g(0) = -\sigma \theta_f(0)$ が成り立つため, 式 (6.4) より

- (1) T が正, つまり $\sigma = 1$ ならば, $\theta_g(0) = -\theta_f(0)$ となり, $g = \check{f}$

- (2) T が負, つまり $\sigma = -1$ ならば, $\theta_g(0) = \theta_f(0)$ となり, $g = f$

が成り立つ. よって, m が偶数の場合の主張 (a)(b) が成り立つ.

- m が奇数の場合を考える. $\lambda = \det(f_u, f_v, \nu_f) \geq 0$ とし, さらに向きに同調した f と g の単位法ベクトル場をそれぞれ ν_f, ν_g とする. $\det J$ を φ のヤコビアン, $\sigma := \det T$, $\varepsilon := \text{sgn}(\det J)$ とすると, $\nu_g(u, v) = \sigma \varepsilon T \nu_f \circ \varphi(u, v)$ とおけば, これは向きを同調した g の単位法ベクトル場である. 実際, $\det(g_u, g_v, \nu_g)(u, v)$ に g と ν_g を具体的に代入すると

$$\begin{aligned}\det(g_u, g_v, \nu_g)(u, v) &= \det(T(f \circ \varphi)_u, T(f \circ \varphi)_v, \sigma \varepsilon T \nu_f \circ \varphi)(u, v) \\ &= \underbrace{(\det T)\sigma\varepsilon}_{1} \det((f \circ \varphi)_u, (f \circ \varphi)_v, \nu_f \circ \varphi)(u, v) \\ &= \varepsilon(\det J)(\lambda \circ \varphi)(u, v) \quad (\because \text{補題 40 より}) \\ &= \underbrace{|\det J|}_{>0} \underbrace{(\lambda \circ \varphi)(u, v)}_{\geq 0} \geq 0\end{aligned}$$

となる. x_f と x_g をそれぞれ f, g のカスプ方向とし, θ_f と θ_g をそれぞれカスプ角とすると, $x_f(0)$ と $x_g(0)$ はそれぞれ

$$\begin{aligned}x_f(0) &= \cos \theta_f(0) \mathbf{n}(0) - \sin \theta_f(0) \mathbf{b}(0) \\ x_g(0) &= \cos \theta_g(0) \mathbf{n}(0) - \sin \theta_g(0) \mathbf{b}(0)\end{aligned}$$

と表される. カスプ方向の定義より $x_g(u)$ は

$$\begin{aligned}(6.5) \quad x_g(u) &= \nu_g(u, 0) \times \mathbf{c}'(u) = \sigma \varepsilon T \nu_f \circ \varphi(u, 0) \times \mathbf{c}'(u) \\ &= \sigma \varepsilon T \nu_f(-u, 0) \times (-T \mathbf{c}'(-u)) \quad (\because \mathbf{c}(u) = T \mathbf{c}(-u) \text{ より}) \\ &= -\underbrace{\sigma(\det T)}_1 \varepsilon T (\nu_f(-u, 0) \times \mathbf{c}'(-u)) \\ &= -\varepsilon T x_f(-u)\end{aligned}$$

と表される. 式 (6.5) に補題 2 を用いると, $x_g(0)$ は

$$\begin{aligned}x_g(0) &= -\varepsilon(\cos \theta_f(0) T \mathbf{n}(0) - \sin \theta_f(0) T \mathbf{b}(0)) \\ &= -\varepsilon(\cos \theta_f(0) \mathbf{n}(0) + \sigma \sin \theta_f(0) \mathbf{b}(0))\end{aligned}$$

が成り立つ.

φ が向きを保つ (つまり, $\varepsilon = 1$) とき, $\theta_f(0)$ および $\theta_g(0) \in (-\pi, \pi)$ は

$$\begin{aligned}\cos \theta_g(0) &= -\cos \theta_f(0) \\ \sin \theta_g(0) &= \sigma \sin \theta_f(0)\end{aligned}$$

を満たすため, 整数 k を用いて $\theta_g(0) = (2k+1)\pi - \sigma \theta_f(0)$ が成り立つ.

- (1) T が正, つまり $\sigma = 1$ のとき, $\theta_g(0) = (2k+1)\pi - \theta_f(0)$ は $-\theta_f(0)$ と一致しないため $\theta_g(0) = \theta_f(0)$ となる. よって, $g = f$ が成り立つ. さらにこのとき,

$$\theta_f(0) = \frac{2k+1}{2}\pi$$

となる.

- (2) T が負, つまり $\sigma = -1$ のとき, $\theta_g(0) = (2k+1)\pi + \theta_f(0)$ は $\theta_f(0)$ と一致しないため $\theta_g(0) = -\theta_f(0)$ となる. よって, $g = \check{f}$ が成り立つ. さらにこのとき,

$$\theta_f(0) = -\frac{2k+1}{2}\pi$$

となる.

$\theta_f(0) \in (-\pi, \pi)$ より, 上記 (1)(2) いずれの場合も $\theta_f(0) = \pm\frac{\pi}{2}$ が成り立つため, $p := c(0)$ とすると命題 29 より特異曲率 κ_s について $\kappa_s(p) = 0$ が成り立つ. 以上より, m が奇数の場合の主張 (a)(b) が成り立つ.

φ が向きを逆にする (つまり, $\varepsilon = -1$) とき, $x_g(0)$ は

$$\begin{aligned} x_g(0) &= -\varepsilon(\cos \theta_f(0)\mathbf{n}(0) + \sigma \sin \theta_f(0)\mathbf{b}(0)) \\ &= \cos \theta_f(0)\mathbf{n}(0) + \sigma \sin \theta_f(0)\mathbf{b}(0) \\ &= \cos(-\sigma\theta_f(0))\mathbf{n}(0) - \sin(-\sigma\theta_f(0))\mathbf{b}(0) \end{aligned}$$

であるため, $\theta_g(0) = -\sigma\theta_f(0)$ が成り立つ. 特に,

- (3) T が正, つまり $\sigma = 1$ のとき, $\theta_g(0) = -\theta_f(0)$ となり, $g = \check{f}$ となる.

- (4) T が負, つまり $\sigma = -1$ のとき, $\theta_g(0) = \theta_f(0)$ となり, $g = f$ となる.

であるため, m が奇数の場合の主張 (c)(d) が成り立つ.

以上より, m の偶奇ごとの主張を示した. □

命題 53 (f とその等長双対 \check{f} が合同であるための必要十分条件). f と \check{f} が合同であるための必要十分条件は, 次のように与えられる.

- (1) m が偶数の場合, 次の (a)(b) のいずれかを満たしている.

(a) C が平面曲線である

(b) C が正の orientation-reversing symmetry をもち, かつ ds_f^2 が effective symmetry をもつ.

- (2) m が奇数の場合, 次の (a)(b)(c)(d) のいずれかを満たしている.

(a) C が平面曲線である

(b) ds_f^2 が non-effective symmetry をもつ

(c) C が正の orientation-reversing symmetry をもち, さらに ds_f^2 が向きを反転させる effective symmetry をもつ

(d) C が負の orientation-reversing symmetry をもち, さらに ds_f^2 が向きを保つ effective symmetry をもつ

証明. m が偶数の場合を考える. C が平面内にあるときは補題 50 より f と \check{f} は合同であるため, (a) は直ちに成り立つ. そのため, C が平面曲線でないかつ f と \check{f} が合同である \Rightarrow (b) が成り立つことを示す.

- f と \check{f} が合同であると仮定すると, ある \mathbb{R}^3 の等長変換 T と微分同相写像 φ が存在して,

$$\check{f} = Tf \circ \varphi$$

同じ像を持つ \Leftrightarrow 右同値を
使ってしまっている?

を満たす。両辺の第一基本形式を考えると、

$$\begin{aligned} \text{(左辺)} : ds_{\check{f}}^2 &= ds_f^2 \\ \text{(右辺)} : ds_{Tf \circ \varphi}^2 &= \varphi^* ds_{Tf}^2 = \varphi^* ds_f^2 \end{aligned}$$

であるため、 $\varphi^* ds_f^2 = ds_{\check{f}}^2$ が成り立つ。この式より φ は恒等写像か symmetry であるため、 $\varphi(u, 0) = (u, 0)$ または $\varphi(u, 0) = (-u, 0)$ が成り立つ。 T が単位行列の場合、 f と \check{f} が右同値となり矛盾する。よって、 T は単位行列ではなく C の orientation-preserving symmetry または orientation-reversing symmetry である。

もし T が orientation-preserving symmetry であるならば、補題 5 より C は平面曲線となり矛盾する。したがって、 T は orientation-reversing symmetry である。このとき、 $\varphi(u, 0) = (-u, 0)$ である。すなわち、 φ は ds_f^2 の effective symmetry である。命題 52 より、 T は正であるため (b) を満たしている。

- 逆に (b) を仮定すると、命題 52 より f と \check{f} は合同である。以上より、 m が偶数の場合の必要十分条件を示した。

次に、 m が奇数の場合を考える。

- まず、 f と \check{f} が合同である \implies (a)(b)(c)(d) のいずれかが成り立つことを示す。 f と \check{f} が合同であると仮定する。つまり、ある $T \in O(3)$ と 微分同相写像 φ が存在して、

$$(6.6) \quad Tf \circ \varphi = \check{f}$$

と表せる。

(あ) $T = \text{Id}$ の場合

式 (6.6) は $f \circ \varphi = \check{f}$ と表せる。補題 45 より φ が non-effective symmetry であるため、(b) に該当する。

(い) T が orientation-preserving symmetry の場合

補題 5 より、 f の特異曲線は平面曲線である。これは (a) に該当する。

(う) T が orientation-reversing symmetry の場合

命題 52 より、

- T が正であり、effective symmetry φ が向きを逆にする
 - T が負であり、effective symmetry φ が向きを保つ
- のいずれかに該当する。これは (c) または (d) に該当する。

以上より、 f と \check{f} が合同である \implies (a)(b)(c)(d) のいずれかが成り立つことを示した。

- 逆に、(a)(b)(c)(d) のいずれかが成り立つ $\implies f$ と \check{f} が合同であることを示す。

- (a) が成立すると仮定する。補題 5 より、平面に関する折返し $S \in O(3)$ を用いて

$$\check{f} = Sf$$

が成り立つ。よって f と \check{f} は合同である。

- (b) が成立すると仮定する。 m が奇数であるため、補題 45 より f と \check{f} は合同である。

- (c) が成立すると仮定する。これは命題 52 の (2)(c) に該当するため、正の orientation-reversing symmetry T と ヤコビアンが負である effective symmetry φ を用いて

$$Tf \circ \varphi = \check{f}$$

が成り立つ。よって f と \check{f} は合同である。

- (d) が成立すると仮定する。これは命題 52 の (2)(b) に該当するため、負の orientation-reversing symmetry T と ヤコビアンが正である effective symmetry φ を用いて

$$Tf \circ \varphi = \check{f}$$

が成り立つ。よって f と \check{f} は合同である。

以上より、(a)(b)(c)(d) のいずれかが成り立つ $\Rightarrow f$ と \check{f} が合同であるを示した。□

命題 53 について、次の系が成り立つ。

系 54 (f_* と \check{f}_* の合同関係)。命題 53 が成り立っている、つまり f と \check{f} が互いに合同である場合、 f_* と \check{f}_* も互いに合同である。

証明。命題 53において、 f を f_* に取り換えると、 m が偶数の場合の (a)(b) および m が奇数の場合の (a)(b)(c)(d) は不変であることから従う。□

6.2. 主定理の主張および証明

前節で述べた補題を用いて、主定理 B(定理 55) の証明を行う。

定理 55 (m -type edge の合同類の個数)。 N_f を $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ の合同類の数と定義する。このとき、 $N_f \neq 3$ を満たす。さらに、 m の偶奇に応じて次が成り立つ。

(1) m が偶数の場合、

例が作れてない (I) $N_f = 4 \iff C$ は symmetry をもたず、かつ ds_f^2 は effective symmetry をもたない。

(II) $N_f = 1 \iff$ 次のいずれかが成り立つ。

(a1) C が平面曲線かつ orientation-reversing symmetry をもつ。

(a2) C が平面曲線かつ ds_f^2 が effective symmetry をもつ。

(b) C が正の orientation-reversing symmetry をもち、かつ ds_f^2 が effective symmetry をもつ。

例が作れてない (2) m が奇数の場合、

(I) $N_f = 4 \iff ds_f^2$ と C はいずれも symmetry を持たない。

(II) $N_f = 1 \iff$ 次のいずれかが成り立つ。

(a1) C は平面曲線かつ C に orientation-reversing symmetry が存在する。

(a2) C は平面曲線かつ ds_f^2 に effective symmetry が存在する。

(b1) ds_f^2 に non-effective symmetry が存在して、かつ C に orientation-reversing symmetry が存在する。

• $C(u)$ は空間曲線

• f に一切 symmetry が無い。

→ $\check{f}, f_*, \check{f}_*$ をどのように構成する? (HNSUY の定理 3.8, 3.10 から構成?)

• f は Fukui 公式 6.5 作る?

$$(f(u,v) = C(u) + A(u,v)V_2(u) + B(u,v)V_3(u))$$

- (b2) ds_f^2 に non-effective symmetry が存在して, かつ ds_f^2 に effective symmetry が存在する
- (c) C に正の orientation-reversing symmetry が存在して, かつ ds_f^2 に向きを反転させる effective symmetry が存在する.
- (d) C に負の orientation-reversing symmetry が存在して, かつ ds_f^2 に向きを保つ effective symmetry が存在する.

証明. m が偶数の場合を考える.

- (I) について, $N_f = 4 \implies C$ は symmetry をもたず, かつ ds_f^2 は effective symmetry をもたないを示す.

C が orientation-preserving symmetry を持つと仮定する. 補題 5 より, C は平面曲線である. さらに命題 53 と系 54 より, f と \check{f} が合同かつ f_* と \check{f}_* が合同となるため, $N_f = 4$ と矛盾する.

C が orientation-reversing symmetry を持つと仮定する. 補題 51 より, f は f_* または \check{f}_* と合同であり, それに応じて \check{f} は \check{f}_* または f_* と合同となるため, $N_f = 4$ と矛盾する.

ds_f^2 が effective symmetry を持つと仮定する. 命題 46 および注意 47 より, $f \circ \varphi = \check{f}_*$ かつ $\check{f} \circ \varphi = f_*$ であるため, f は \check{f}_* と合同で, \check{f} は f_* と合同である. よって, $N_f = 4$ と矛盾する.

したがって, $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ がすべて合同でないならば, C は symmetry を持たず, ds_f^2 は effective symmetry を持たない. さらに, いずれの場合も

$$(6.7) \quad N_f \leq 2$$

が成り立つ.

逆に, 曲線 C が symmetry を持たず, かつ ds_f^2 も effective symmetry を持たないと仮定したとき, $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ はすべて互いに合同ではないことを示す. $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ のうち 2 つが合同であるとする. このとき一般性を失わずに, f と $g \in \{\check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ が合同であると仮定してよい. 命題 53 より, f と \check{f} が合同であるための必要十分条件を満たしていないため,

$$(6.8) \quad g = f_* \text{ または } g = \check{f}_*$$

である. 合同の定義より, 直交変換 $T \in O(3)$ と微分同相写像 φ が存在して,

$$(6.9) \quad f = Tg \circ \varphi$$

を満たす. 右辺の第一基本形式は $ds_{Tg \circ \varphi}^2 = ds_{g \circ \varphi}^2 = \varphi^* ds_g^2 = \varphi^* ds_f^2$ より,

$$ds_f^2 = \varphi^* ds_f^2$$

が成り立つ. このとき, φ は symmetry か恒等写像のいずれかである. いずれの場合でも, φ は特異点集合を特異点集合に写す. このとき, $T(C) = C$ である. 仮定より,

T は symmetry を持たないため, T は単位行列である. 式 (6.9) に代入して,

$$f = g \circ \varphi$$

が成り立つ. 式 (6.8) より, g が定める C の向きと f が定める C の向きは逆であるため, φ は

$$\varphi(u, 0) = (-u, 0)$$

を満たす. よって, φ は恒等写像ではなく effective symmetry であるため, 假定と矛盾する. したがって, 曲線 C が symmetry を持たず, ds_f^2 も effective symmetry を持たないのであれば, $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ はすべて合同でないことを示した.

- (II) について, $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ がすべて合同である $\implies (a1), (a2), (a3)$ のいずれかを満たすことを示す. まず假定より f と \check{f} が合同であるため, 命題 53 より
 - (a) 曲線 C が平面内にあるか,
 - (b) C が正の orientation-reversing symmetry を持ち, かつ ds_f^2 が effective symmetry を持つ

のいずれかを満たす. (b) が成り立つ \iff 定理 55 の m が偶数における (b) が成り立つことは自明であるため, (a) が成り立つときに, 定理 55 の (a1) または (a2) が成り立つことを示せばよい. f は f_* とも合同であるため, 等長変換 $T \in O(3)$ と微分同相写像 φ が存在して,

$$(6.10) \quad f_* = Tf \circ \varphi$$

を満たす. 両辺の第一基本形式を比較すると $ds_f^2 = \varphi^* ds_f^2$ となるため, φ は symmetry か恒等写像のいずれかである. とくに, $\varphi(u, 0) = (u, 0)$ または $\varphi(u, 0) = (-u, 0)$ が成り立つ. T が C の orientation-reversing symmetry の場合, (a1) が成立する. T が C の orientation-reversing symmetry ではない場合, 式 (6.10) を $(u, 0)$ に制限すると,

$$(左辺): \quad f_*(u, 0) = c(-u)$$

$$(右辺): \quad Tf \circ \varphi(u, 0) = \begin{cases} c(u) & (\varphi \text{ が non-effective symmetry または恒等写像}) \\ c(-u) & (\varphi \text{ が effective symmetry}) \end{cases}$$

である. よって, φ は effective symmetry でなければならない. よって, (a2) が成り立つ. したがって, $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ が全て合同であるならば, (a1), (a2), (b) のいずれかが成り立つ.

逆に, (a1), (a2), (b) のいずれかを假定したときに $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ のすべてが合同であることを示す. 命題 53 と系 54 より, f と \check{f} が合同, f_* と \check{f}_* が合同である. (a1) が成り立つとき, 補題 51 より f は f_* または \check{f}_* と合同である. (a2) または (b) が成り立つとき, f は \check{f}_* と合同である. したがって, (a1) または (a2) または (b) のいずれかが成り立つならば, $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ はすべて合同である.

- $N_f \neq 3$ を示す. 具体的に, $N_f = 3$ と仮定して矛盾を導く. $N_f \neq 4$ であるので, C が symmetry を持つまたは ds_f^2 が effective symmetry を持つ. さらに, 式 (6.7) より $N_f \leq 2$ であるため $N_f = 3$ に矛盾する. したがって $N_f \neq 3$ が示される.

次に, m が奇数の場合を考える.

- (I) について, $N_f = 4 \implies ds_f^2$ と C はいずれも symmetry を持たないことを示す. C が orientation-preserving symmetry を持つと仮定すると, 補題 5 より, C は平面曲線である. 命題 53 と 54 より, f と \check{f} は合同であり, f_* と \check{f}_* は合同となり矛盾. したがって C は orientation-preserving symmetry を持たない.

次に C が orientation-reversing symmetry を持つと仮定すると, 命題 51 より f は f_* または \check{f}_* と合同であり, それに応じて \check{f}_* と f_* と合同となるため矛盾. したがって C は orientation-reversing symmetry を持たない.

次に ds_f^2 が effective symmetry を持つと仮定すると, 命題 46 より f は f_* または \check{f}_* と合同であり, それに応じて \check{f} は \check{f}_* または f_* と合同であるため矛盾する. したがって, ds_f^2 は effective symmetry を持たない.

次に ds_f^2 が non-effective symmetry を持つと仮定すると, 命題 45 より f は \check{f} と合同であり, f_* は \check{f}_* と合同であるため矛盾. したがって, ds_f^2 は non-effective symmetry を持たない.

したがって, $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ がすべて合同でなければ C と ds_f^2 はいずれも symmetry を一切持たない. さらに, いずれの場合も

$$(6.11) \quad N_f \leq 2$$

が成り立つ.

逆に, C も ds_f^2 も symmetry を持たないときに, $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ はすべて互いに合同にはならないことを示す. $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ のうち 2 つが合同であると仮定すると, 一般性を失わずに f と $g \in \{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ が合同であると仮定してよい. 命題 53 より f と \check{f} が合同にはなり得ないため,

$$(6.12) \quad g = f_* \text{ または } g = \check{f}_*$$

である. このとき, 等長変換 $T \in O(3)$ と微分同相写像 φ が存在して

$$(6.13) \quad f = Tg \circ \varphi$$

を満たす. 式 (6.13) の両辺の第一基本形式を考えると $ds_f^2 = ds_{Tg \circ \varphi}^2 = \varphi^* ds_g^2 = \varphi^* ds_f^2$ であるため, φ は symmetry か恒等写像である. 特に, φ は特異点集合を特異点集合へ写す. このとき, $T(C) = C$ である. 仮定より C は symmetry を持たないため, T は単位行列である. 式 (6.13) に代入すると, $g \circ \varphi = f$ が成り立つ. 式 (6.12) より, g の定める C の向きと f の定める C の向きは逆であるため,

$$\varphi(u, 0) = (-u, 0)$$

を満たす。つまり φ は effective symmetry であるため、仮定と矛盾する。したがって、 C と ds_f^2 がいずれも symmetry を持たなければ、 $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ はすべて合同ではない。

- (II)について、 $N_f = 1 \implies (a1), (a2), (b1), (b2), (c), (d)$ のいずれかが成り立つことを示す。 f と \check{f} が合同であるので、命題 53 より
 - (a) 曲線 C が平面内にある
 - (b) ds_f^2 が non-effective symmetry をもつ
 - (c) C が正の orientation-reversing symmetry をもち、かつ ds_f^2 が向きを逆にする effective symmetry をもつ
 - (d) C が負の orientation-reversing symmetry をもち、かつ ds_f^2 が向きを保つ effective symmetry をもつ

のいずれかが成り立つ。 m が奇数における命題 53 の (c), (d) が成り立つときに定理 55 の (c), (d) が成り立つことは自明であるため、(a) (resp. (b)) のとき、(a1) または (a2)(resp. (b1) または (b2)) が成り立つことを示せば良い。 f は f_* と合同なので、等長変換 $T \in O(3)$ と微分同相写像 φ が存在して

$$(6.14) \quad f_* = Tf \circ \varphi$$

を満たす。式 (6.14) の両辺の第一基本形式を比較すると、 $ds_f^2 = ds_{Tf \circ \varphi}^2 = \varphi^* ds_f^2$ より、 $ds_f^2 = \varphi^* ds_f^2$ が成り立ち、 φ は symmetry か恒等写像である。とくに、 $\varphi(u, 0) = (u, 0)$ または $\varphi(u, 0) = (-u, 0)$ が成り立つ。

T が C の orientation-reversing symmetry のとき、(a1)(resp. (b1)) が成り立つ。

T が C の orientation-reversing symmetry でないとき (つまり、 $T = \text{Id}$ もしくは T が C の orientation-preserving symmetry のとき)、式 (6.14) を $(u, 0)$ に制限すると

$$\varphi(u, 0) = (-u, 0)$$

となるため、 φ は effective symmetry である。よって、(a2)(resp. (b2)) が成り立つ。したがって、 $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ がすべて合同であるならば、(a1), (a2), (b1), (b2), (c), (d) のいずれかが成り立つ。

逆に、(a1), (a2), (b1), (b2), (c), (d) のいずれかを仮定して、 $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ は全て合同であることを示す。命題 53 および系 54 より、 f と \check{f} は合同、 f_* と \check{f}_* は合同である。

(a1) または (b1) のとき、命題 51 より、 f は f_* または \check{f}_* のいずれかと合同である。

(a2) または (b2) のとき、命題 46 より、 f は f_* または \check{f}_* のいずれかと合同である。

(c) または (d) のとき、命題 46 と命題 51 より、 f は f_* または \check{f}_* のいずれかと合同である。

したがって、(a1), (a2), (b1), (b2), (c), (d) のいずれかが成り立つならば、 $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ はすべて合同である。

- $N_f \neq 3$ を示す。具体的に、 $N_f = 3$ として矛盾を導く。 $N_f \neq 4$ なので (I) より C は symmetry を持つ、または ds_f^2 が symmetry を持つ。式 (6.11) より $N_f \leq 2$ が成り立つため $N_f = 3$ と矛盾する。よって、 $N_f \neq 3$ である。

□

$N_f = 1$ における $\check{f}, f_*, \check{f}_*$ の具体的表示に関する注意を述べる.

注意 56 ($N_f = 1$ の場合の合同関係). 定理 55 の m が奇数の場合における, (a1)(a2)(b1)(b2)(c)(d) がそれぞれ成り立つ場合の $\check{f}, f_*, \check{f}_*$ は A 節と 6.1 節の補題を用いて次のように与えられる.

- (a1) が成り立つ場合

補題 57 より, orientation-preserving symmetry S と orientation-reversing symmetry T を用いて,

$$Sf = \check{f}, \quad Tf = \begin{cases} f_* & (\det T = 1) \\ \check{f}_* & (\det T = -1) \end{cases}, \quad STf = \begin{cases} \check{f}_* & (\det T = 1) \\ f_* & (\det T = -1) \end{cases}$$

と表せる.

- (a2) が成り立つ場合

補題 58 より, orientation-preserving symmetry S と effective symmetry φ を用いて

$$Sf = \check{f}, \quad f \circ \varphi = \begin{cases} f_* & (\varphi \text{ が向きを保つ}) \\ \check{f}_* & (\varphi \text{ が向きを逆にする}) \end{cases}, \quad Sf \circ \varphi = \begin{cases} \check{f}_* & (\varphi \text{ が向きを保つ}) \\ f_* & (\varphi \text{ が向きを逆にする}) \end{cases}$$

と表せる.

- (b1) が成り立つ場合

補題 59 より, orientation-reversing symmetry T と non-effective symmetry φ を用いて

$$f \circ \varphi = \check{f}, \quad Tf = \begin{cases} f_* & (\det T = 1) \\ \check{f}_* & (\det T = -1) \end{cases}, \quad Tf \circ \varphi = \begin{cases} \check{f}_* & (\det T = 1) \\ f_* & (\det T = -1) \end{cases}$$

と表せる.

- (b2) が成り立つ場合

補題 61 より, effective symmetry φ_1 と non-effective symmetry φ_2 を用いて

$$f \circ \varphi_2 = \check{f}, \quad f \circ \varphi_1 = \begin{cases} f_* & (\varphi_1 \text{ が向きを保つ}) \\ \check{f}_* & (\varphi_1 \text{ が向きを逆にする}) \end{cases}, \quad f \circ \varphi_1 \circ \varphi_2 = \begin{cases} \check{f}_* & (\varphi_1 \text{ が向きを保つ}) \\ f_* & (\varphi_1 \text{ が向きを逆にする}) \end{cases}$$

と表せる.

- (c) が成り立つ場合

命題 52 より, 正の orientation-reversing symmetry T と向きを逆にする effective symmetry φ を用いて

$$Tf \circ \varphi = \check{f}, \quad Tf = f_*, \quad f \circ \varphi = \check{f}_*$$

と表せる.

- (d) が成り立つ場合

命題 52 より, 負の orientation-reversing symmetry T と向きを保つ effective symmetry φ を用いて

$$Tf \circ \varphi = \check{f}, \quad f \circ \varphi = f_*, \quad Tf = \check{f}_*$$

と表せる。

6.3. 主定理 B の具体例

本節では、カスプ辺と (3,4)-カスプ辺における主定理 B(定理 55) の具体例を与える。

- (1) m が偶数で、(a1) を満たす場合に対応する具体例

5.3 節の $f_1(u, v) = (-1 + \phi_1(u, v) \cos u, \phi_1(u, v) \sin u, -v^2 + 2v^3 + uv^3)$ が条件を満たす具体例である。 f_1 の特異曲線の像を C_1 とすると、 C_1 は平面上の単位円となる。 C_1 の symmetry $S, T \in O(3)$ をそれぞれ

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると、 $Sf_1(u, 0) = f_1(u, 0)$ および $Tf_1(u, 0) = f_1(-u, 0)$ であるため、 S は orientation-preserving, T は orientation-reversing である。

- (2) m が偶数で、(a2) を満たす場合に対応する具体例

5.3 節の $f_2(u, v) = (-1 + \phi_2(u, v) \cos u, \phi_2(u, v) \sin u, v^2 + v^3)$ が条件を満たす具体例である。 f_2 の特異曲線の像を C_2 とすると、 C_2 は平面上の単位円となる。 C_2 の symmetry $S \in O(3)$ と $ds_{f_2}^2$ の effective symmetry φ はそれぞれ

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(u, v) := (-u, v)$$

と表せる。

- (3) m が偶数で、(b) を満たす場合に対応する具体例

5.3 節の $f_2(u, v) = (-1 + \phi_2(u, v) \cos u, \phi_2(u, v) \sin u, v^2 + v^3)$ が条件を満たす具体例である。 C_2 の symmetry $T \in O(3)$ と $ds_{f_2}^2$ の effective symmetry φ を

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(u, v) := (-u, v)$$

とすると、 $\det T = 1$ かつ $T\mathbf{c}(u) = \mathbf{c}(-u)$ を満たすため、 T は正の orientation-reversing symmetry である。

- (4) m が奇数で、(a1) を満たす場合に対応する具体例

5.3 節の $f_3(u, v) = (-1 + \phi_3(u, v) \cos u, \phi_3(u, v) \sin u, -v^3 + 2v^4 + uv^4)$ が条件を満たす具体例である。 f_3 の特異曲線の像を C_3 とすると、 C_3 は平面内の単位円である。 C_3 の symmetry $S, T \in O(3)$ をそれぞれ

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると, $Sf_3(u, 0) = f_3(u, 0)$ および $Tf_3(u, 0) = f_3(-u, 0)$ であるため, S は orientation-preserving, T は orientation-reversing である.

(5) m が奇数で, (a2) を満たす場合に対応する具体例

5.3 節の $f_4(u, v) = (-1 + \phi_4(u, v) \cos u, \phi_4(u, v) \sin u, v^3 + v^4)$ が条件を満たす具体例である. f_4 の特異曲線の像を C_4 とすると, C_4 は平面内の単位円である. C_4 の orientation-preserving symmetry $S \in O(3)$ と $ds_{f_4}^2$ の effective symmetry φ はそれぞれ

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(u, v) := (-u, v)$$

と表せる.

(6) m が奇数で, (b1) を満たす場合に対応する具体例

5.3 節の $f_5(u, v) = (u + v^4, u^3 + v^4, v^3)$ が条件を満たす具体例である. f_5 の特異曲線の像を C_5 として, C_5 の symmetry $T \in O(3)$ と $ds_{f_5}^2$ の non-effective symmetry φ を

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(u, v) = (u, -v)$$

とする. $Tf_5(u, 0) = f_5(-u, 0)$ が成り立つため, T は orientation-reversing symmetry である.

(7) m が奇数で, (b2) を満たす場合に対応する具体例

5.3 節の $f_6(u, v) = (u, v^3, u^2 + v^4)$ が条件を満たす具体例である. $ds_{f_6}^2$ の effective symmetry φ と non-effective symmetry ψ を

$$\varphi(u, v) = (-u, v), \quad \psi(u, v) = (u, -v)$$

とすればよい.

(8) m が奇数で, (c) を満たす場合に対応する具体例

Hattori-Honda-Morimoto[19] により導入された helicoidal n-type edge の Bour 型表現公式により表されるヘリコイドが該当する. f_7 を次のように定義する.

$$f_7(u, v) := (-\sqrt{1 - h^2} + x(v) \cos \theta(u, v), x(v) \sin \theta(u, v), z(v) + h\theta(u, v))$$

ただし, h は十分小さな正数, $x(v), z(v), \theta(u, v)$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} x(v) &= \sqrt{U(v)^2 - h^2} \\ z(v) &= \int_0^v \frac{\zeta^2 U(\zeta) \rho_{h,1}(\zeta)}{U(\zeta)^2 - h^2} d\zeta \\ \theta(u, v) &= u + h \int_0^v \frac{\zeta^2 \rho_{h,1}(\zeta)}{U(\zeta)(U(\zeta)^2 - h^2)} d\zeta \end{aligned}$$

であり, $U(v), \rho_{h,1}(v)$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} U(v) &= 1 + \int_0^v \zeta^2 \sin \zeta d\zeta \\ &= (-v^2 + 2) \cos v + 2v \sin v - 1 \\ \rho_{h,1}(v) &= \sqrt{U(v)^2 - h^2 - U(v)^2 V(v)^2} \end{aligned}$$

である. ここで $V(v)$ は $U'(v) = v^2 V(v)$ を満たす滑らかな関数であり, $V(v) = \sin v$ がとれる. この $f_7(u, v)$ は, (3.4)-カスプ辺と右左同値である [19]. $f_7(u, v)$ の特異点集合は $\{v = 0\}$ であるため, $\mathbf{c}(u)$ は

$$\mathbf{c}(u) = f_7(u, 0) = (\sqrt{1-h^2}(\cos u - 1), \sqrt{1-h^2} \sin u, hu)$$

である. f_7 の特異曲線の像を C_7 として, C_7 の symmetry $T \in O(3)$ と $ds_{f_7}^2$ の向きを逆にする effective symmetry φ を

$$T := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(u, v) := (-u, v)$$

とする. $\det T = 1$ かつ $T\mathbf{c}(u) = \mathbf{c}(-u)$ が成り立つため, T は正の orientation-reversing symmetry である. $\check{f}_7, f_{7*}, \check{f}_{7*}$ はそれぞれ注意 56 より

$$\check{f}_7 = Tf_7 \circ \varphi, \quad f_{7*} = Tf_7, \quad \check{f}_{7*} = f \circ \varphi$$

と表される(図 10). 最後に, この φ は $\varphi^* ds_f^2 = ds_{f_7}^2$ を満たすことを確認する. $f_7(u, v)$ の u 微分と v 微分はそれぞれ

$$(f_7)_u = (-x(v) \sin \theta(u, v), x(v) \cos \theta(u, v), h)$$

$$(f_7)_v = (x'(v) \cos \theta(u, v) - x(v) \sin \theta(u, v) \theta_v, x'(v) \sin \theta(u, v) + x(v) \cos \theta(u, v) \theta_v, -\frac{v^2 \rho_{h,1}(v)}{U(v)})$$

であるため, $\varphi^* ds_{f_7}^2$ は

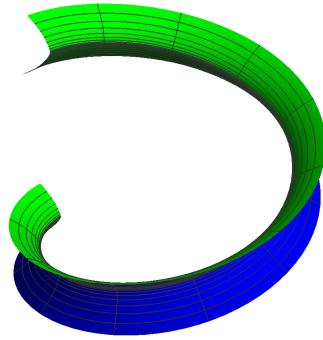
$$\begin{aligned} ds_{f_7}^2 &= \{(-v^2 + 2) \cos v + 2v \sin v - 1\}^2 du^2 + v^4 dv^2 \\ \varphi^* ds_{f_7}^2 &= \{(-v^2 + 2) \cos v + 2v \sin v - 1\}^2 d(-u)^2 + v^4 dv^2 \\ &= ds_{f_7}^2 \end{aligned}$$

である. これは φ が $ds_{f_7}^2$ の symmetry である定義を満たしている.

(9) m が奇数で, (d) を満たす場合に対応する具体例

5.3 節の $f_6(u, v) = (u, v^3, u^2 + v^4)$ が条件を満たす具体例である. f_6 の特異曲線の像を C_6 として, C_6 の symmetry $T \in O(3)$ と $ds_{f_6}^2$ の向きを保つ effective symmetry φ を

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(u, v) = (-u, -v)$$

図 10. $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ の像の図示 ($f = f_7, h = 0.25$)

とする. $\det T = -1$ かつ $Tf_6(u, 0) = f_6(-u, 0)$ が成り立つため, T は負の orientation-reversing symmetry である. 最後に, この φ は $\varphi^*ds_f^2 = ds_f^2$ を満たすことを確認する. $ds_{f_6}^2$ と $\varphi^*ds_{f_6}^2$ はそれぞれ,

$$\begin{aligned} ds_{f_6}^2 &= (4u^2 + 1) du^2 + 8uv^3 dudv + v^4(16v^2 + 9) dv^2 \\ \varphi^*ds_{f_6}^2 &= \{4(-u)^2 + 1\} d(-u)^2 + 8(-u)(-v)^3 d(-u)d(-v) + (-v)^4\{16(-v)^2 + 9\} d(-v)^2 \\ &= (4u^2 + 1) du^2 + (-1)^4 8uv^3 dudv + v^4(16v^2 + 9) dv^2 \\ &= ds_{f_6}^2 \end{aligned}$$

である. これは φ が $ds_{f_6}^2$ の symmetry である定義を満たしている.

付録 A. 主定理 A の具体例のための補題

本節では主定理 A の n_f の各値に対応する f の具体例を与えるために、補題をいくつか準備する。以降、 m -type edge $f \in \mathcal{G}_{m,**}^\omega(\mathbb{R}_J^2, \mathbb{R}^3, C)$ の等長双対、逆、逆双対をそれぞれ $\check{f}, f_*, \check{f}_*$ とする。

補題 57 (C が symmetry を 2つ持つ場合の合同表現). m -type edge $f \in \mathcal{G}_{m,**}^\omega$, $T \in O(3)$ を orientation-reversing symmetry, $S \in O(3)$ を orientation-preserving symmetry とする。このとき, STf は

$$STf = \begin{cases} \check{f}_* & (T \text{ が正}) \\ f_* & (T \text{ が負}) \end{cases}$$

である。

証明. m の偶奇に分けて示す。

- m が奇数の場合を考える。

$g := STf$ とする。 g の第一基本形式は ds_f^2 と等しく、特異点集合 $\{v = 0\}$ 上を考えると、

$$g(u, 0) = STf(u, 0) = ST\mathbf{c}(u) = \mathbf{c}(-u) =: \mathbf{c}_*(u)$$

であるため、

$$(A.1) \quad g = f_* \quad \text{または} \quad g = \check{f}_*$$

である。 f の符号付き面積密度関数を λ とし、 $\lambda \geq 0$ とする。 $\sigma := \det T$, f と g の単位法ベクトル場を ν_f, ν_g として、 $\nu_g = -\sigma ST\nu_f$ とおくと、 g の符号付き面積密度関数 $\lambda_g = \det(g_u, g_v, \nu_g)$ は

$$\begin{aligned} \det(g_u, g_v, \nu_g) &= \det((STf)_u, (STf)_v, -\sigma ST\nu_f) \\ &= \underbrace{-\sigma(\det S)(\det T)}_1 \det(f_u, f_v, \nu_f) \\ &= \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

となるため、 ν_g は向きに同調した g の単位法ベクトル場である。さらに、 f と g のカスプ方向を $\mathbf{x}_f, \mathbf{x}_g$ とすると、 \mathbf{x}_g は

$$\begin{aligned} (A.2) \quad \mathbf{x}_g(u) &:= \hat{\nu}_g(u) \times \mathbf{c}'_*(u) \quad (\hat{\nu}_g(u) := \nu_g(u, 0)) \\ &= -\sigma ST(\hat{\nu}_f(u) \times (ST\mathbf{c}'(u))) \quad (\hat{\nu}_f(u) := \nu_f(u, 0)) \\ &= \underbrace{-\sigma(\det S)(\det T)}_1 ST(\hat{\nu}_f(u) \times \mathbf{c}'(u)) \\ &= ST\mathbf{x}_f(u) \end{aligned}$$

となる. f と g のカスプ角を θ_f, θ_g として, 式 (A.2) に $\mathbf{x}_f(u) = (\cos \theta_f)\mathbf{n}(u) - (\sin \theta_f)\mathbf{b}(u)$ を代入すると,

$$\mathbf{x}_g(u) = \cos \theta_f(u) ST\mathbf{n}(u) - \sin \theta_f(u) ST\mathbf{b}(u)$$

であり, $u = 0$ を代入すると, 補題 2 と注意 3 より

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_g(0) &= \cos \theta_f(0)\mathbf{n}(0) - \sigma \sin \theta_f(0)\mathbf{b}(0) \\ &= \cos(-\sigma\theta_f(0))\mathbf{n}(0) + \sin(-\sigma\theta_f(0))\mathbf{b}(0) \end{aligned}$$

が成り立つため, $u = 0$ において $\theta_g(0) = -\sigma\theta_f(0)$ が成り立つ. 式 (A.1) より,

$$\begin{cases} \sigma = 1 \text{ ならば}, (g =) STf = \check{f}_* \\ \sigma = -1 \text{ ならば}, STf = f_* \end{cases}$$

が示される.

- m が偶数の場合を考える.
 $g := STf$ とする. m が偶数の場合, \mathbf{x}_g は \mathbf{x}_f, S, T を用いて

$$\mathbf{x}_g = ST\mathbf{x}_f$$

と表されるため, 奇数の場合と同様に示される.

□

補題 58 (C が symmetry を持ち ds_f^2 が effective symmetry を持つ場合の合同表現). m -type edge $f \in \mathcal{G}_{m,**}^\omega$, $S \in O(3)$ を orientation-preserving symmetry, φ を effective symmetry とする. このとき, $Sf \circ \varphi$ は

$$Sf \circ \varphi = \begin{cases} \check{f}_* & (m \text{ が奇数かつ } \varphi \text{ が向きを保つ}) \\ f_* & (m \text{ が偶数, または } m \text{ が奇数かつ } \varphi \text{ が向きを逆にする}) \end{cases}$$

である.

証明. 補題 57 と同様の手順で示せる.

- m が奇数の場合を考える.

$g := Sf \circ \varphi$ とすると, 第一基本形式が ds_f^2 と等しく, 特異点集合 $\{v = 0\}$ 上を考えると, g は

$$g(u, 0) = Sf \circ \varphi(u, 0) = Sf(-u, 0) = S\mathbf{c}(-u) = \mathbf{c}(-u) =: \mathbf{c}_*(u)$$

であるため, $g = f_*$ または \check{f}_* である. f の符号付き面積密度関数を λ とし, $\lambda \geq 0$ とする. $\det J$ を φ のヤコビアン, $\varepsilon := \operatorname{sgn}(\det J)$, f と g の単位法ベクトル場を ν_f, ν_g として, $\nu_g = -\varepsilon S\nu_f \circ \varphi$ とおくと, これは向きに同調した g の単位法ベクトル場であ

る. 次に, f と g のカスプ方向を $\mathbf{x}_f, \mathbf{x}_g$ とすると, \mathbf{x}_g は

$$\begin{aligned}
 (A.3) \quad \mathbf{x}_g(u) &:= \hat{\nu}_g(u) \times \mathbf{c}'_*(u) \quad (\hat{\nu}_g(u) := \nu_g(u, 0)) \\
 &= \varepsilon \sigma S \nu_f \circ \varphi(u, 0) \times (-S \mathbf{c}'(-u)) \\
 &= -\varepsilon \sigma (\det S) S(\hat{\nu}_f(-u) \times \mathbf{c}'(-u)) \\
 &= -\varepsilon S \mathbf{x}_f(-u)
 \end{aligned}$$

となる. 式 (A.3) に $\mathbf{x}_f(-u) = (\cos \theta_f(-u)) \mathbf{n}(-u) - (\sin \theta_f(-u)) \mathbf{b}(-u)$ および $u = 0$ を代入すると,

$$\mathbf{x}_g(0) = -\varepsilon (\cos \theta_f(0) \mathbf{n}(0) + \sin \theta_f(0) \mathbf{b}(0))$$

と表せる.

- $\varepsilon = 1$ の場合, θ_g は整数 k を用いて

$$\theta_g(0) = (2k + 1)\pi + \theta_f(0)$$

である. したがって $\theta_f = \theta_g$ は起こりえず,

$$\theta_g(0) = -\theta_f(0)$$

が成り立つ. よって $g = \check{f}_*$ であり, 特に $\theta_f(0) \in (-\pi, \pi)$ であるため, $\theta_f(0) = \pm\pi/2$ となる.

- $\varepsilon = -1$ の場合, $\theta_g(0) = \theta_f(0)$ が成り立つため, $g = f_*$ である.

以上より, $Sf \circ \varphi$ は

$$Sf \circ \varphi = \begin{cases} \check{f}_* & (\varepsilon = 1) \\ f_* & (\varepsilon = -1) \end{cases}$$

が成り立つ.

- m が偶数の場合を考える.

$g := Sf \circ \varphi$ とする. m が偶数の場合, \mathbf{x}_g は S, \mathbf{x}_f を用いて

$$(A.4) \quad \mathbf{x}_g = S \mathbf{x}_f$$

と表される. また, \mathbf{x}_g と \mathbf{x}_f はそれぞれカスプ角 θ_g, θ_f と $\mathbf{n}_*(u) = \mathbf{n}(-u), \mathbf{b}_*(u) = -\mathbf{b}(-u)$ を用いて

$$\begin{aligned}
 (A.5) \quad \mathbf{x}_g(0) &= \cos \theta_g(0) \mathbf{n}(0) + \sin \theta_g(0) \mathbf{b}(0) \\
 \mathbf{x}_f(0) &= \cos \theta_f(0) \mathbf{n}(0) - \sin \theta_f(0) \mathbf{b}(0)
 \end{aligned}$$

と表される. 式 (A.4), 式 (A.5) および注意 3 より,

$$\cos \theta_g(0) \mathbf{n}(0) + \sin \theta_g(0) \mathbf{b}(0) = \cos \theta_f(0) \mathbf{n}(0) + \sin \theta_f(0) \mathbf{b}(0)$$

であるため, $\theta_g(0) = \theta_f(0)$ が成り立つ. 特異曲線の像をたどる向きから, $g = f_*$ または \check{f}_* であったので, $g = Sf \circ \varphi = f_*$ となる.

□

補題 59 (C が symmetry を持ち ds_f^2 が non-effective symmetry を持つ場合の合同表現). m -type edge $f \in \mathcal{G}_{m,**}^\omega$, $T \in O(3)$ を orientation-reversing symmetry, φ を non-effective symmetry とする. このとき, $Tf \circ \varphi$ は

$$Tf \circ \varphi = \begin{cases} \check{f}_* & (m \text{ が偶数かつ } T \text{ が負, または } m \text{ が奇数かつ } T \text{ が正}) \\ f_* & (m \text{ が偶数かつ } T \text{ が正, または } m \text{ が奇数かつ } T \text{ が負}) \end{cases}$$

である.

証明. 補題 58 と同様に示せる.

- m が奇数の場合を考える.

$g := Tf \circ \varphi$ は f_* または \check{f}_* である. ν_f を f の単位法ベクトル場, $\sigma := \det T$, $\det J := \varphi$ のヤコビアン, $\varepsilon := \text{sgn}(\det J)$ とする. $\nu_g = \varepsilon \sigma T \nu_f \circ \varphi$ が向きに同調した g の単位法ベクトル場であることから, g のカスプ方向 \mathbf{x}_g が $\mathbf{x}_g(u) = \varepsilon T \mathbf{x}_f(u)$, とくに $u = 0$ では

$$\mathbf{x}_g(0) = \varepsilon(\cos \theta_f \mathbf{n}(0) + \sigma \sin \theta_f \mathbf{b}(0))$$

である. 補題 41 より, $\varepsilon = -1$ の場合のみを考えればよい. このとき, 整数 k を用いて θ_g は $\theta_g(0) = (2k+1)\pi + \sigma \theta_f(0)$ と表せるため, $g = Tf \circ \varphi$ は

$$Tf \circ \varphi = \begin{cases} \check{f}_* & (\sigma = 1) \\ f_* & (\sigma = -1) \end{cases}$$

が成り立つ.

- m が偶数の場合を考える.

$g := Tf \circ \varphi$ とする. m が偶数の場合, \mathbf{x}_g は T, \mathbf{x}_f を用いて

$$(A.6) \quad \mathbf{x}_g = T \mathbf{x}_f$$

と表される. また, \mathbf{x}_g と \mathbf{x}_f はそれぞれカスプ角 θ_g, θ_f と $\mathbf{n}_*(u) = \mathbf{n}(-u), \mathbf{b}_*(u) = -\mathbf{b}(-u)$ を用いて

$$(A.7) \quad \begin{aligned} \mathbf{x}_g(0) &= \cos \theta_g(0) \mathbf{n}(0) + \sin \theta_g(0) \mathbf{b}(0) \\ \mathbf{x}_f(0) &= \cos \theta_f(0) \mathbf{n}(0) - \sin \theta_f(0) \mathbf{b}(0) \end{aligned}$$

と表される. 式 (A.6), 式 (A.7) および補題 2 より,

$$\cos \theta_g(0) \mathbf{n}(0) + \sin \theta_g(0) \mathbf{b}(0) = \cos(\sigma \theta_f(0)) \mathbf{n}(0) + \sin(\sigma \theta_f(0)) \mathbf{b}(0)$$

であるため, $\theta_g(0) = \sigma \theta_f(0)$ が成り立つ. 特異曲線の像をたどる向きから, $g = f_*$ または \check{f}_* であったので,

$$\begin{cases} \sigma = 1 \text{ ならば, } g = f_* \\ \sigma = -1 \text{ ならば, } g = \check{f}_* \end{cases}$$

となる.

□

補題 60 (合成したヤコビアンの符号). $i = 1, 2$ とし, $\varphi_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を微分同相写像とする. 各点 $p \in \mathbb{R}^2$ における φ のヤコビアンを $\det J_i(p)$ とおく, $\varphi_{12} := \varphi_1 \circ \varphi_2$ のヤコビアンを $\det J_{12}(p)$ とする. このとき, 任意の $p \in \mathbb{R}^2$ について

$$\operatorname{sgn}(\det J_{12}) = \operatorname{sgn}(\det J_1) \operatorname{sgn}(\det J_2)$$

が成り立つ. ここで, \mathbb{R}^2 は連結であり $\det J_i \neq 0$ なので, $\operatorname{sgn}(\det J_i)$ は点 p に依らない定数である.

証明. 各点 $p \in \mathbb{R}^2$ におけるヤコビ行列を

$$J_i(p) := D\varphi_i(p) \quad (i = 1, 2)$$

とおく. また $\varphi_{12} := \varphi_1 \circ \varphi_2$ に対し $J_{12}(p) := D\varphi_{12}(p)$ とおく. 連鎖律より

$$J_{12}(p) = D\varphi_{12}(p) = D\varphi_1(\varphi_2(p)) D\varphi_2(p) = J_1(\varphi_2(p)) J_2(p)$$

が成り立つ. よって両辺の行列式をとると

$$\det J_{12}(p) = \det(J_1(\varphi_2(p))) \det(J_2(p))$$

を得る. ここで φ_1, φ_2 は微分同相写像なので,

$$\det J_i(p) \neq 0 \quad (i = 1, 2)$$

が任意の p で成り立つ. また $\det J_i$ は連続関数であり \mathbb{R}^2 は連結であるから, $\operatorname{sgn}(\det J_i(p))$ は p に依らない定数である. したがって

$$\operatorname{sgn}(\det(J_1(\varphi_2(p)))) = \operatorname{sgn}(\det J_1(p))$$

が成り立つ. 以上より任意の p について

$$\operatorname{sgn}(\det J_{12}(p)) = \operatorname{sgn}(\det J_1(p)) \operatorname{sgn}(\det J_2(p))$$

が従う. □

補題 61 (ds_f^2 が effective symmetry と non-effective symmetry を持つ場合の右同値表現). m -type edge $f \in \mathcal{G}_{m, **}^\omega$, φ_1 を non-effective symmetry, φ_2 を effective symmetry とする. このとき, $f \circ \varphi_1 \circ \varphi_2$ は

$$f \circ \varphi_1 \circ \varphi_2 = \begin{cases} \check{f}_* & (m \text{ が偶数, または } m \text{ が奇数かつ } \varphi_2 \text{ が向きを保つ}) \\ f_* & (m \text{ が奇数かつ } \varphi_2 \text{ が向きを逆にする}) \end{cases}$$

である.

証明. m の偶奇に分けて示す.

- m が奇数の場合を考える.

$\varphi_3 := \varphi_1 \circ \varphi_2$ とする. φ_3 は effective symmetry であることと補題 60 より, 補題 58 と同様の議論を用いることができる. $g := f \circ \varphi_3$ のカスプ方向 $\mathbf{x}_g(u)$ は $\mathbf{x}_g(u) = -\varepsilon_3 \mathbf{x}_f(-u)$ であるため, $u = 0$ において

$$\mathbf{x}_g(0) = -\varepsilon_3 (\cos \theta_f(0) \mathbf{n}(0) - \sin \theta_f(0) \mathbf{b}(0))$$

である。ここで、 $\det J_3 := \varphi_3$ のヤコビアン、 $\varepsilon_3 := \operatorname{sgn}(\det J_3)$ である。補題 41 より、non-effective symmetry φ_1 のヤコビアン J_1 の符号 ε_1 は $\varepsilon_1 = \operatorname{sgn}(J_1) = -1$ しかとりえないため、次のように補題 58 の場合分けと同様の議論を行う。

以降、 φ_2 のヤコビアンを J_2, J_3 の符号を ε_2 として、

- $\varepsilon_3 = 1$ 、つまり $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$ の場合、整数 n を用いて

$$\theta_g(0) = (2n + 1)\pi - \theta_f(0)$$

である。したがって、

$$\theta_g(0) = \theta_f(0)$$

が成り立つため、 $g = f_*$ である。

- $\varepsilon_3 = -1$ 、つまり $\varepsilon_1 = -1$ および $\varepsilon_2 = 1$ の場合、 $\theta_g(0) = -\theta_f(0)$ である。よって、 $g = \check{f}_*$ が成り立つ。

以上より、 $f \circ \varphi_1 \circ \varphi_2$ は

$$f \circ \varphi_1 \circ \varphi_2 = \begin{cases} \check{f}_* & (\varepsilon_2 = 1) \\ f_* & (\varepsilon_2 = -1) \end{cases}$$

が成り立つ。

- m が偶数の場合を考える。

$g := f \circ \varphi_1 \circ \varphi_2$ とする。 m が偶数の場合、 x_g は

$$(A.8) \quad x_g = x_f$$

と表される。また、 x_g と x_f はそれぞれカスプ角 θ_g, θ_f と $\mathbf{n}_*(u) = \mathbf{n}(-u), \mathbf{b}_*(u) = -\mathbf{b}(-u)$ を用いて

$$(A.9) \quad \begin{aligned} x_g(0) &= \cos \theta_g(0) \mathbf{n}(0) + \sin \theta_g(0) \mathbf{b}(0) \\ x_f(0) &= \cos \theta_f(0) \mathbf{n}(0) - \sin \theta_f(0) \mathbf{b}(0) \end{aligned}$$

と表される。式 (A.8) および式 (A.9) より、

$$\cos \theta_g(0) \mathbf{n}(0) + \sin \theta_g(0) \mathbf{b}(0) = \cos(-\theta_f(0)) \mathbf{n}(0) + \sin(-\theta_f(0)) \mathbf{b}(0)$$

であるため、 $\theta_g(0) = -\theta_f(0)$ が成り立つ。特異曲線の像をたどる向きから、 $g = f_*$ または \check{f}_* であったので、

$$g = f \circ \varphi_1 \circ \varphi_2 = \check{f}_*$$

となる。

□

整理する



参考文献

- [1] J.W. Bruce and T.J. Gaffney, *Simple singularities of mappings $\mathbb{C}, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$* , J. Lond. Math. Soc., II. Ser. **26** (1982), 465–474.
- [2] T. Fukuma, 有限次退化特異点に対するガウス・ポンネの定理, 修士論文, 横浜国立大学, 2024.
- [3] A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Duality on generalized cuspidal edges preserving singular set images and first fundamental forms*, J. Singul. **22** (2020), 59–91.
- [4] A. Honda, K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada, *Isometric deformations of wave fronts at non-degenerate singular points*, Hiroshima Math. J. **50** (2020), 269–312.
- [5] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic 3-space*, Pacific J. Math. **221** (2005), 303–351.
- [6] M. Kosssowski, *The Boy-Gauss-Bonnet theorems for C^∞ -singular surfaces with limiting tangent bundle*, Ann. Global Anal. Geom. **21** (2002), No. 1, 19–29.
- [7] L. F. Martins and K. Saji, *Geometric invariants of cuspidal edges*, Canad. J. Math. **68** (2016), no. 2, 445–462.
- [8] L. F. Martins and K. Saji, *Geometry of cuspidal edges with boundary*, Topol. Appl. **234** (2018) 209–219.
- [9] L.F. Martins, K. Saji, S.P. dos Santos and K. Teramoto, *Boundedness of geometric invariants near a singularity which is a suspension of a singular curve*, Revista de Lla UMA Vol. **67**, (2024), No. 2, 475–502.
- [10] L. F. Martins, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Behavior of Gaussian curvature and mean curvature near non-degenerate singular points on wave fronts*, Geometry and Topology of Manifold, Springer Proc. in Math. & Stat. **154**, 2016, Springer, 247–282.
- [11] Y. Matsushita, *Classifications of cusps appearing on plane curves*, preprint (arXiv:2402.12166).
- [12] K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada, *Isometric deformations of cuspidal edges*, Tohoku Math. J. (2) **68** (2016), 73–90.
- [13] I.R. Porteous, *Geometric differentiation for the intelligence of curves and surfaces*, Second edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [14] K. Saji, *Normal form of the swallowtail and its applications* Int. J. Math. 29, No. 7, Article ID 1850046, 17 p.
- [15] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. Math. (2) **169** (2009), No. 2, 491–529.
- [16] S. Shiba and M. Umehara, *The behavior of curvature functions at cusps and inflection points*, Differential Geom. Appl. **30** (2012), 285–299.
- [17] M. Umehara, K. Saji and K. Yamada, *Differential geometry of curves and surfaces with singularities*. Translated from the Japanese by Wayne Rossman. Series in Algebraic and Differential Geometry 1. Singapore: World Scientific. xvi, 370 p. (2022).
- [18] Y. Hattori, (3,4)-カスプ辺の内在的な不变量, 修士論文, 横浜国立大学, 2025.
- [19] Y. Hattori, A. Honda and T. Morimoto, *Bour's theorem for helicoidal surfaces with singularities*, Differ. Geom. Appl. **99** (2025), Article ID 102248, 23 pp. (Zbl 1567.53007).
- [20] M. Umehara, K. Saji and K. Yamada, 特異点をもつ曲線と曲面の微分幾何学, 丸善出版, 2024.
- [21] S. Bochner, *Compact groups of differentiable transformations*, Ann. of Math. (2) **46** (1945), 372–381.