目次

6/26(木) セミナー資料

飯野 郁

2025/06/26

1　前回の宿題

やること

- 論文の誤記をリストアップ
- 論文のセクション 5 の正しい版を日本語でまとめる

2　論文の誤記をリストアップ

2.1　セクション 3

Lemma 3.7 Proof で、次のように書かれている。

> （Lemma 3.7 Proof より）
>
> If (u,v) is the local coordinate system as in Lemma 3.5, then $F=0$, $\boldsymbol{\lambda = v\sqrt{EG_0}}$ and $E(u,0)=1$ hold.

赤文字の部分は、$\lambda = v\sqrt{\frac{EG_0}{2}}$ が正しい？ ($\lambda = EG - F^2$ に $F=0$ と $G=\frac{v^2G_0}{2}$ を代入すると分母に 2 が出る)

Lemma 3.10 Proof で、次のように書かれている。

(Lemma 3.10 Proof より)

By (3.6), $x(u)$ can be written in the form

$$(\mathbf{x}_+(u) :=)\mathbf{x}(u) = \cos\theta(u)\mathbf{n}(u) - \sin\theta(u)\mathbf{b}(u), \tag{2.1}$$

where $\theta(u)$ is the function defined by (3.11) and $\kappa(u)$ (resp. $\kappa_s(u)$) is the curvature function of $\mathbf{c}(u)$ (resp. the singular curvature function defined by (3.7)). In fact, since the singular curvature κ_s of ds^2 is less than κ on I, there exists a real analytic angular function $\theta : I \to \mathbf{R}$ satisfying (3.11) and

$$\boldsymbol{0 < |\theta(u)| < \frac{\pi}{2}} \quad (u \in I).$$

赤文字の部分は、$\boldsymbol{0 < |\theta(u)| < \pi}$ が正しい？

2.2 セクション 4

Remark 4.4 で、次のように書かれている。

(Remark 4.4 より)

Differentiating $\boldsymbol{T \circ c_0(u) = c_1(u)}$, we have...

赤文字の部分は、$\boldsymbol{T \circ c_0(-u) = c_1(u)}$ が正しい？

Remark 4.4 で、次のように書かれている。

(Remark 4.4 より)

Using this, one can also obtain the relation $\boldsymbol{-\sigma\tau_0(-u) = \tau_1(u)}$, where τ_i $(i = 1, 2)$ is the torsion function of c_i.

赤文字の部分は、$\boldsymbol{\sigma\tau_0(-u) = \tau_1(u)}$ が正しい？

Remark 4.5 で、次のように書かれている。

（Remark 4.5 より）

Then $f_\#(u,t) := f(-u,t)$ is also a generalized cuspidal edge along the same space curve as f but with the reversed orientation. If we set $c_\#(u) := c(-u)$, then $c_\#(u) = f_\#(u,0)$ holds. By a similar calculation like as in Remark 4.4, one can easily verify that $\boldsymbol{(\kappa(-u), -\tau(-u), -\theta(-u), \hat{\mu}(-u,t))}$ gives the fundamental data of $f_\#(u,t)$.

赤文字の部分は、$\boldsymbol{(\kappa(-u), \tau(-u), -\theta(-u), -\hat{\mu}(-u,t))}$ が正しい？

Proof of Theorem II で、次のように書かれている。

（Proof of Theorem II より）

Since f is admissible, the singular curvature κ_s is determined only by ds^2_f.

一方、Lemma3.7 では次のように書かれている。

（Lemma3.7 より）

The singular curvature is intrinsic. In particular, it is defined along the singular curve with respect to a given Kossowski metric. More precisely,

$$\kappa_s(u) = -\frac{E_{vv}(u,0)}{2} \tag{2.2}$$

holds, where (u,v) is the coordinate system as in Lemma 3.5.

（Lemma3.5 より）

Let ds^2 be a C^ω-differentiable Kossowski metric defined on an open subset $U(\subset \mathbb{R}^2)$. Suppose that $\gamma : J \to U$ is a real analytic singular curve with respect to ds^2 such that

$$ds^2(\gamma'(t), \gamma'(t)) > 0 \quad (t \in J). \tag{2.3}$$

Then, for each $t_0 \in J$, there exists a C^ω-differentiable local coordinate system $(V; u, v)$ containing $(t_0, 0)$ such that $V \subset U$ and the coefficients E, F, G of the first fundamental form

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

satisfy the following three conditions:

(1) $\gamma(u) = (u, 0)$, $E(u, 0) = 1$ and $E_v(u, 0) = 0$ hold along the u-axis,
(2) $F(u, v) = 0$ on V, and
(3) there exists a C^ω-function G_0 defined on V such that $G(u, v) = \frac{v^2 G_0(u,v)}{2}$ and $G_0(u, 0) = 2$.

『f が admissible である』という仮定がなくても、κ_s は第一基本形式のみで表すことができている。赤文字の部分は不要？

Proof of Theorem II で、次のように書かれている。

（Proof of Theorem II より）

Since the orientation of the singular curves of $h_\pm$ is opposite of that of f, the two maps $h_\pm$ are **non-faithful isomers** of f.

そもそも isomer ではない（f と右同値である）場合がある。赤文字部分は "not isomers" が適切？

Proof of Theorem II で、次のように書かれている。

（Proof of Theorem II より）

Since the first fundamental form is determined independently of a choice of local coordinate system, we have $\boldsymbol{J_C(f \circ \phi) = J_C(f) \circ \phi}$, where ϕ is a diffeomorphism on a certain tubular neighborhood of $J \times \{0\}$.

赤文字部分について、

- 論文内に J_C の定義がない？（J_o の定義はセクション 1 に次のようにある）

Considering the first fundamental form ds^2_f of f, we can define a map

$$J_o : g^*_r(\mathbf{R}^2_o, \mathbf{R}^3, C) \ni f \mapsto ds^2_f \in K^r_I(\mathbf{R}^2_o). \tag{2.4}$$

- $J_C(f) \circ \phi$ ではなく、$\phi * J_C(f)$？

Proposition4.9 直後の式 (4.11) で、次のように書かれている。

（式 4.11 より）

$$B = \frac{\mu_0(u)}{3}t^3 + \frac{\mu_1(u)}{8}t^4 + \frac{\mathbf{2}(-\mu_0(u)^3 + 2\mu_2(u))}{30}t^5 + t^6 b_6(t, u) \tag{2.5}$$

赤文字部分は不要？ (Lemma A.1 では 2 は付いていない)

2.3 セクション 5

Proposition 5.1 の証明で、次のように書かれている。

（Proposition 5.1 Proof より）

We suppose that $\check{f}$ is congruent to f. **By Remark 4.5**, it is sufficient to consider the case that C does not lie in any plane.

赤文字は Remark 5.2？

（Remark 5.2 より）

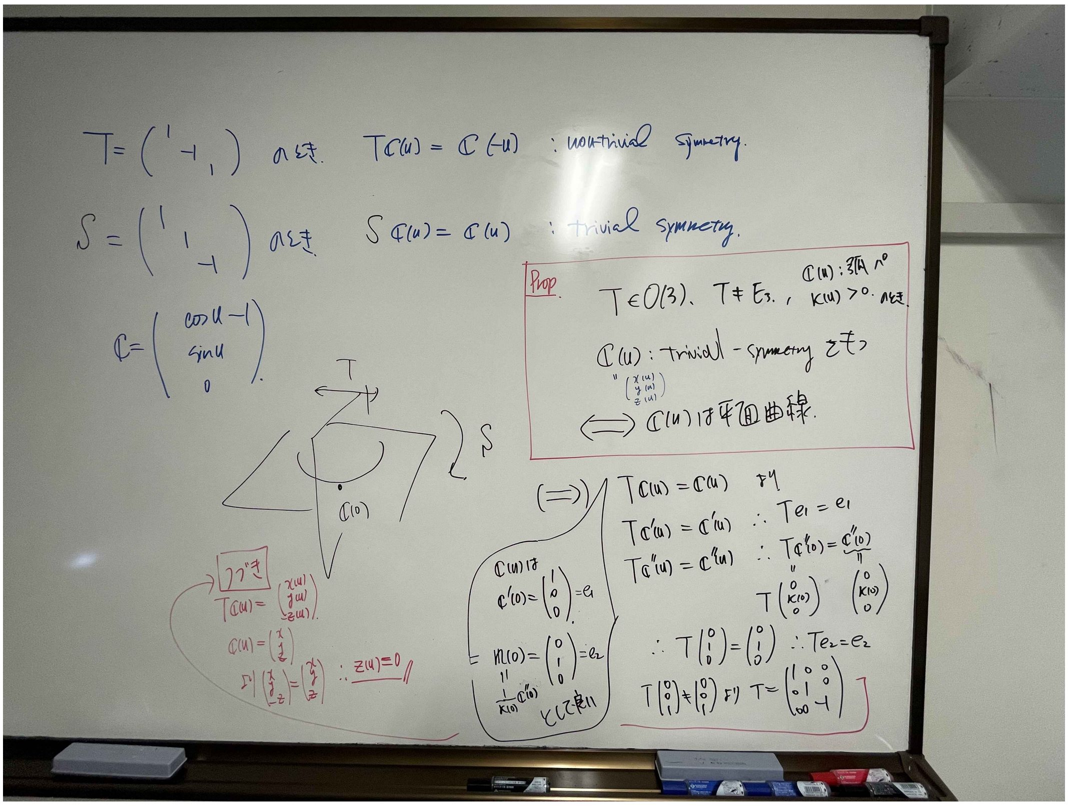
Suppose that C is planar and S is the reflection with respect to the plane containing C. For each $f \in g^r_{*,3/2}(\mathbf{R}^2_J, \mathbf{R}^3, C)$, $S \circ f$ gives a faithful isomer of f. Moreover, if f is real analytic (i.e. $r = \omega$), then we have $\check{f} = S \circ f$ (cf. Definition 3.18).

Proposition 5.1 の証明で、次のように書かれている。

(Proposition 5.1 Proof より)

We consider the case that T fixes each point of C. **Then C must lie in a plane**, a contradiction. So T is a non-trivial symmetry of C, that is, it reverses the orientation of C.

『$c(u)$ が trivial symmetry を持つ ⇒ $c(u)$ は平面曲線である』は論文内では明記されていない(ゼミの時間に示した)。



Proposition 5.1 の証明で、次のように書かれている。

(Proposition 5.1 Proof より)

Conversely, if C has a positive non-trivial symmetry and the first fundamental form ds_f^2 has an effective symmetry ϕ, **then $T \circ f \circ \phi$ is a faithful isomer of f as seen in (a) of Remark 4.4**. Since such an isomer is uniquely determined (cf. Theorem 3.8), we have (5.1).

ϕ が一意であることを証明するには、追加で Propositoin 3.15 が必要?

（Proposition 3.15 より）

Let ds^2 be a real analytic Kossowski metric belonging to $K_*^\omega(\mathbf{R}_o^2)$. Suppose that ϕ is a local C^ω-diffeomorphism satisfying $\phi^* ds^2 = ds^2$ and $\phi(o) = o$ which is not the identity map. Then ϕ is an involution which reverses the orientation of the singular curve. Moreover, such a ϕ is uniquely determined.

Corollary 5.8 で、次のように書かれている。

（Corollary 5.8 より）

Let $f \in g^\omega_{**,3/2}(\mathbf{R}^2_J, \mathbf{R}^3, C)$. Suppose that C lies in a plane and admits a nontrivial symmetry T at the origin 0. Then $\check{f} = S \circ f$ holds, **and $T \circ f, S \circ T \circ f$ give the inverse and the inverse dual of f**, where S is a reflection with respect to the plane. As a consequence, $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ belong to a single congruence class.

赤文字部分の対応が逆である？（$T \circ f$ が f の inverse dual, $S \circ T \circ f$ が f の inverse？）

Corollary 5.8 の証明で、次のように書かれている。

（Corollary 5.8 Proof より）

Obviously, $\check{f} = S \circ f$ holds (cf. Remark 5.2). **On the other hand, $T \circ f$ gives a non-faithful isomer**, and its isometric dual $S \circ T \circ f$ also gives another non-faithful isomer.

そもそも、$T \circ f$ は isomer ではない可能性がある。（T と $T \circ f$ の像が一致する場合がある）

2.4 Appendix

Proposition A.2 で、次のように書かれている。

（Proposition A.2 より）

It is remarkable that the coefficient μ_1 does not affect the criterion for 5/2-cusps. In this case, $\mu_0 = 0$ holds, and μ_1 **and** μ_2 **are proportional to the "secondary cuspidal curvature" and the "bias"** of $\sigma(t)$ at $t = 0$, respectively.

赤文字は μ_1 **and** μ_2 **are proportional to the "bias" and the "secondary cuspidal curvature"** が正しい？（bias と secondary cuspidal curvature が入れ替わってる）

3　Section 5 を日本語ノートにまとめる

本節では、isomer のいくつかの性質を示し、イントロダクションで述べた Theorem III, IV の主張を証明する。

3.1　Proposition 5.1

$f \in g^{\omega}_{**,3/2}(\mathbf{R}^2_J, \mathbf{R}^3, C)$ とする．このとき, 次の (a) と (b) は同値である．

(a) $\check{f}$ が f と合同である (定義 0.2 参照)

(b) 次の (i), (ii) の少なくとも一方が成り立つ

  (i) 曲線 C が平面内にある

  (ii) C が正の non-trivial symmetry をもち, かつ f の第一基本形式 ds^2_f が effective symmetry をもつ (定義 0.4 参照)

(Proof)【ここに証明を書く】

3.2　Remark 5.2

C が平面内にあるとし, その平面に関する鏡映 (reflection) を S とする．

任意の $f \in g^{\omega}_{**,3/2}(\mathbf{R}^2_J, \mathbf{R}^3, C)$ に対し, $S \circ f$ は f の faithful isomer になる．さらに, f が実解析的 (つまり, $r = \omega$) なら $\check{f} = S \circ f$ が成り立つ (定義 3.18 参照).

3.3　Example 5.3

$f \in g^{\omega}_{**,3/2}(\mathbf{R}^2_J, \mathbf{R}^3, C)$ を, 基本データ $(\kappa, \tau, \theta, \hat{\mu})$ $(\tau \neq 0)$ をもつ admissible な一般化カスプ辺とする．ここで κ, τ, θ は定数, 拡張半カスプ曲率関数 $\hat{\mu}$ は u に依らないとする．この場合, 実解析性を仮定せずとも, 次のようにして SO(3) の等長変換 T と ds^2_f の effective symmetry φ を取り, $T \circ f \circ \varphi$ が f の faithful isomer となることを示せる．

実際, C の曲率は κ, 捩率は τ で共に定数である．$\tau \neq 0$ なので C は $\mathbb{R}^3$ 内の螺旋 (helix) であり, 点 $\mathbf{0} \in C$ での主法線に関する 180° 回転 $T \in \mathrm{SO}(3)$ が存在して $T(C) = C$ となる．Proposition 5.10 の前半より, 第一基本形式

$$ds^2_f = E(t)du^2 + 2F(t)dudt + G(t)dt^2$$

が involution としての effective symmetry φ をもつことを示せば十分である. 実際, そのような φ が存在すれば, $\check{f} := T \circ f \circ \varphi$ が f の isometric dual となる.

この状況では, 関数 A, B (式 (4.6), (4.9) 参照) は

$$A(t) = t^2\alpha(t), \quad B(t) = t^3\beta(t)$$

と書け, α, β は C^r 級である. Proposition 4.9 により,

- $E(t) > 0$ である
- $F(t) = t^4 F_0(t)$ となる C^∞ 関数 $F_0(t)$ が存在し, $G(t) = t^2$ である

が成り立つ.

いま, ω_1 と ω_2 を

$$\omega_1 = \sqrt{E(t)}\left(du + \frac{F(t)}{E(t)}dt\right), \quad \omega_2 = t\sqrt{\frac{E(t) - t^6 F_0(t)^2}{E(t)}}\, dt$$

と置けば $ds_f^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2$ となる. さらに x と y を

$$x(u,t) := u + \int_0^t \frac{F(v)}{E(v)}\, dv, \qquad y(t) := \int_0^t \sqrt{\frac{E(v) - v^6 F_0(v)^2}{E(v)}}\, dv$$

とおくと, (x, y) は $(0,0)$ を中心とする新たな局所座標系となり, t を y の関数 $t = t(y)$ とみなせる. そして,

$$ds_f^2 = E(y)dx^2 + t(y)^2 dy^2,$$

が成り立つ. したがって, 局所微分同相写像 $\varphi\colon (x, y) \mapsto (-x, y)$ は ds_f^2 の effective symmetry となる.

f の基本データが $(\kappa, \tau, \theta, \mu)$ であることを踏まえ, 後ほど Proposition 6.1 で, $\check{f}$ が $(\kappa, \tau, -\theta, \mu)$ を基本データとするカスプ辺と右同値であることを示す.

3.4 Theorem III

$f \in g^{\omega}_{**,3/2}(\mathbf{R}^2_J, \mathbf{R}^3, C)$ とする. すなわち f を admissible とする. このとき,

$$f, \quad \check{f}, \quad f^*, \quad \check{f}^*$$

の右同値類の個数が 4 であるための必要十分条件は, 第一基本形式 ds_f^2 が symmetry を持たない (定義 0.4 参照) ことである.

(Proof)【ここに証明を書く】

3.5 Corollary 5.4

$f \in g^{\omega}_{**,3/2}(\mathbf{R}^2_J, \mathbf{R}^3, C)$ とする. さらに, 次を仮定する.

(1) C は平面曲線であり, 原点 $\mathbf{0}$ において non-trivial symmetry をもたない

(2) 第一基本形式 ds^2_f は effective symmetry をもたない (定義 0.4 参照)

このとき, 次が成り立つ.

- $\check{f} := S \circ f$ が成り立つ. ただし, $S \in \mathrm{O}(3)$ は C を含む平面についての鏡映 (reflection) である
- 等長双対, 逆, 逆双対はそれぞれ $S \circ f$, f_*, $S \circ f_*$ で与えられる. さらに, f_* は f と合同ではない

特に, これら 4 つの写像

$$f, \quad S \circ f, \quad f_*, \quad S \circ f_*$$

は 2 つの合同類を構成する.

(Proof)【ここに証明を書く】

3.6 Proposition 5.5

$f \in g^{\omega}_{**,3/2}(\mathbf{R}^2_J, \mathbf{R}^3, C)$ とする. さらに, 次を仮定する.

(1) C は平面曲線ではなく, 原点 $\mathbf{0}$ において non-trivial symmetry をもたない

(2) f の第一基本形式 ds^2_f は effective symmetry φ をもつ

このとき, $\check{f}(:= I_C(f))$ は f と合同ではなく,

$$\check{f}, \quad \check{f} \circ \varphi, \quad f \circ \varphi$$

がそれぞれ等長双対, 逆, 逆双対を与える.

(Proof)【ここに証明を書く】

3.7 Corollary 5.6

$f \in g^{\omega}_{**,3/2}(\mathbf{R}^2_J, \mathbf{R}^3, C)$ とする. さらに, 次を仮定する.

(1) C は平面曲線で, 原点 $\mathbf{0}$ において non-trivial symmetry をもたない
(2) f の第一基本形式 ds_f^2 は effective symmetry φ をもつ

このとき, 次が成り立つ.

- $\check{f} = S \circ f$ が成り立つ. ただし $S \in \mathrm{O}(3)$ は C を含む平面に関する鏡映 (reflection) である
- $S \circ f, \quad S \circ f \circ \varphi, \quad f \circ \varphi$ はそれぞれ, f の等長双対, 逆, 逆双対を与える

したがって, f のすべての isomer は f と合同になる.

(Proof)【ここに証明を書く】

3.8 Proposition 5.7

$f \in g^{\omega}_{**,3/2}(\mathbf{R}^2_J, \mathbf{R}^3, C)$ とする. さらに, 次を仮定する.

(1) C は平面曲線ではなく, 原点 $\mathbf{0}$ において non-trivial symmetry $T \in \mathrm{O}(3)$ をもつ
(2) f の第一基本形式 ds_f^2 は effective symmetry をもたない

このとき, 次が成り立つ.

- $\check{f} := I_C(f)$ は f と合同ではない
- $T \circ \check{f}$ は f の逆, $T \circ f$ は f の逆双対を与える

特に,

$$f, \quad \check{f}, \quad T \circ \check{f}, \quad T \circ f$$

は 2 つの合同類をなす.

(Proof)【ここに証明を書く】

3.9 Corollary 5.8

$f \in g^{\omega}_{**,3/2}(\mathbf{R}^2_J, \mathbf{R}^3, C)$ とする. 曲線 C が平面内にあり, 原点 $\mathbf{0}$ において non-trivial symmetry T をもつと仮定する. このとき,

$$\check{f} = S \circ f.$$

が成り立つ. ただし $S\in \mathrm{O}(3)$ は平面に関する鏡映 (reflection) である. さらに, $T\circ f$ は f の逆双対, $S\circ T\circ f$ は f の逆を与える.

結果として,

$$f,\quad \check{f},\quad f_*,\quad \check{f}_*$$

の 4 つはすべて同一の合同類に属する.

(Proof)【ここに証明を書く】

3.10 Example 5.9

次のように写像 f を定める.

$$f(u,v) := \big(\varphi(u,v)\cos u-1, \varphi(u,v)\sin u, v^3u+2v^3-v^2\big).$$

ただし, $\varphi(u,v)$ は

$$\varphi(u,v)=-v^3u-2v^3-v^2+1$$

とする. このとき, f は

$$\mathbf{c}(u):=f(u,0)=(\cos u-1,\sin u,0)$$

上にカスプ辺特異点をもつ.

また, 行列

$$S:=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\qquad T:=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

を用いると、$S\circ f$ は f の faithful isomer であり、$T\circ f$ および $TS\circ f$ は non-faithful isomer となる.

なお, f は Fukui のデータ (θ,A,B) の

$$\theta=\frac{\pi}{4},\quad A(u,v)=\sqrt{2}\,v^2,\quad B(u,v)=\sqrt{2}\,v^3(u+2)$$

に対応している.

3.11 Proposition 5.10

$f\in g^{\omega}_{**,3/2}(\mathbf{R}^2_J,\mathbf{R}^3,C)$ とする. さらに, 次を仮定する.

(1) C は平面曲線ではなく, 原点 $\mathbf{0}$ において non-trivial symmetry $T\in \mathrm{O}(3)$ をもつ

(2) f の第一基本形式 ds_f^2 は effective symmetry φ をもつ

このとき, f の任意の isomer は

$$\check{f}, \quad \check{f} \circ \varphi, \quad f \circ \varphi$$

のいずれかと右同値である．さらに, 次が成り立つ.

- T が正（すなわち $T \in \mathrm{SO}(3)$）のとき, $\check{f} = T \circ f \circ \varphi$ が成立する
- T が負（すなわち $T \notin \mathrm{SO}(3)$）のとき, $\check{f}$ は f と合同でない

(Proof)【ここに証明を書く】

3.12 Theorem IV

$f \in g^{\omega}_{**,3/2}(\mathbf{R}^2_J, \mathbf{R}^3, C)$ とする．また, $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ の像が属する合同類の個数を N_f とすると, 次が成り立つ.

(1) 曲線 C が symmetry を持たず, かつ第一基本形式 ds_f^2 も symmetry を持たない $\Leftrightarrow N_f = 4$

(2) 上記 (1) の条件を満たさない場合は, $N_f \leq 2$.

(3) $N_f = 1 \Leftrightarrow$ 下記 (a)(b)(c) のいずれかを満たす

  (a) 曲線 C が平面内にあり, かつ non-trivial symmetry をもつとき

  (b) 曲線 C が平面内にあり, 第一基本形式 ds_f^2 が symmetry をもつとき

  (c) 曲線 C が正の symmetry（$T \in \mathrm{SO}(3)$）をもち, かつ第一基本形式 ds_f^2 も symmetry をもつとき

(Proof)【ここに証明を書く】