#11 数理科学 キカ

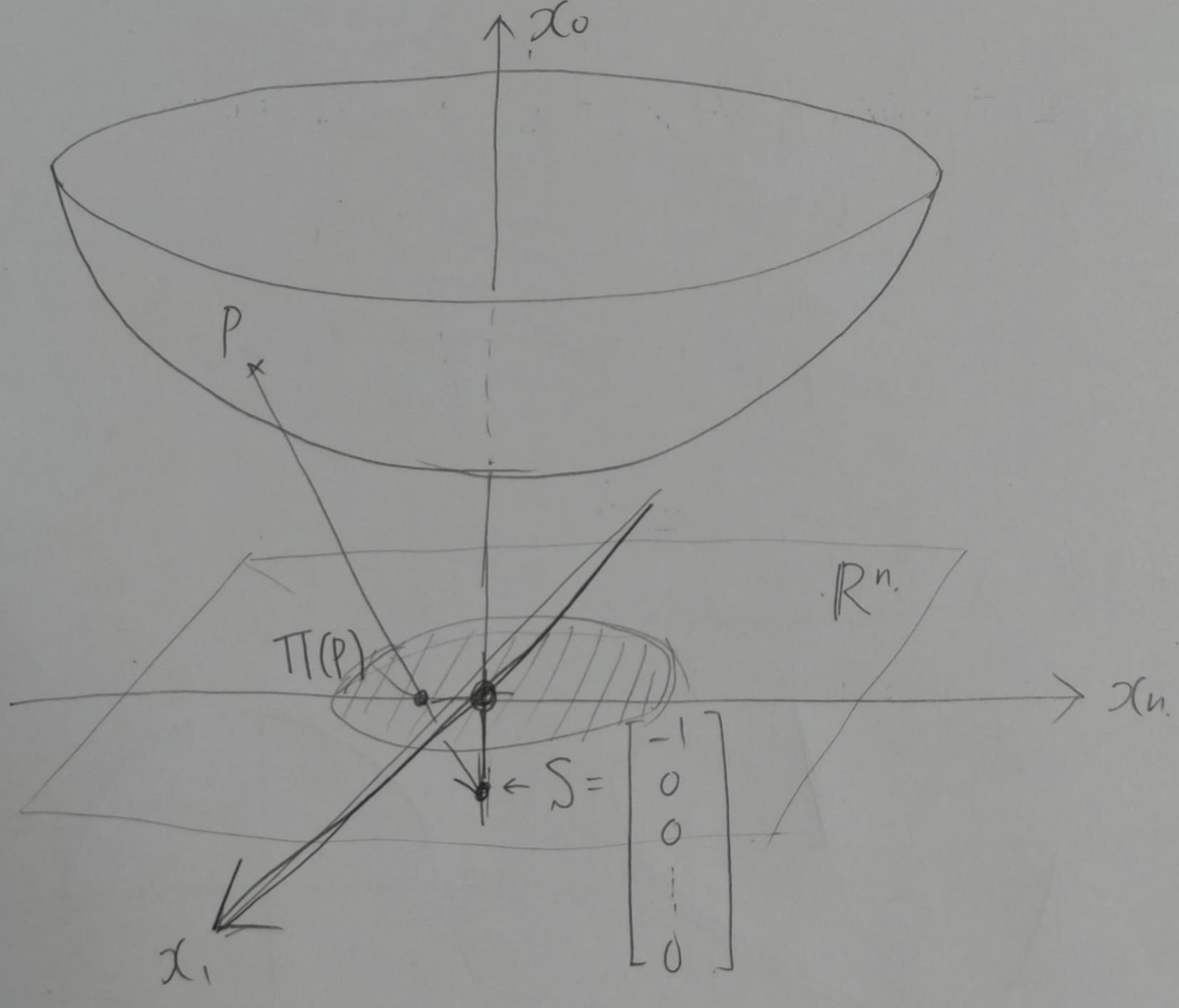
・ボールモデル

・$\mathbb{H}^3$

・平均／外的／ガウス 曲りつ

（双曲）
ミンコフスキー空間

$$\mathbb{H}^n = \left\{ x \in \mathbb{L}^{n+1} \;\middle|\; \langle x, x \rangle = -1,\ x_0 > 0 \right\}$$



南極点Sへの射影$\pi(P)$を考える.

$$\begin{array}{rcl} \pi : \mathbb{H}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ P & \longmapsto & \pi(P) \end{array}$$

像：$\pi(\mathbb{H}^n)$ は 単位球体 となる.

$$\mathbb{B}^n = \left\{ (u_1 \cdots u_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; u_1^2 + \cdots + u_n^2 < 1 \right\}$$

$\varphi \downarrow$

$\because\ \pi(p) = \dfrac{1}{1+p_0}(p_1, \cdots, p_n)$

$\langle p, p \rangle = -1$

$-p_0^2 + p_1^2 + \cdots + p_n^2 = -1.$

$\downarrow$

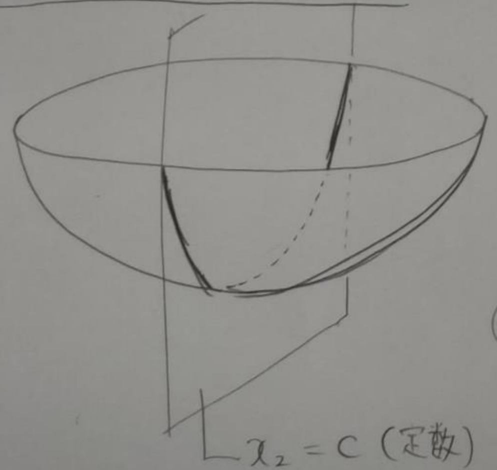
$\|\pi(p)\|^2 = \dfrac{1}{(1+p_0)^2}(p_1^2, p_2^2, \cdots, p_n^2)$

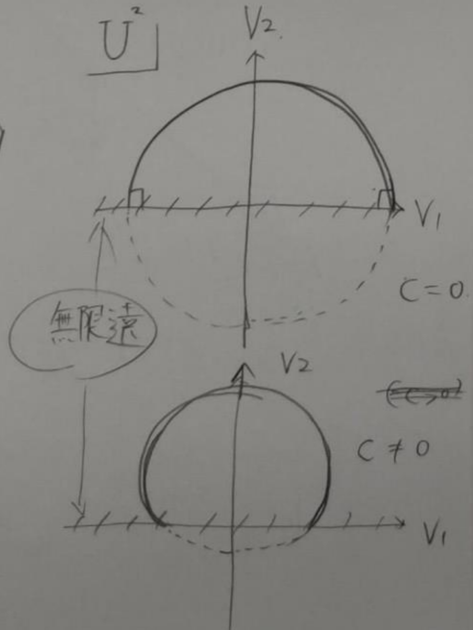
$\hookrightarrow p = \begin{bmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$ より、 $p_0^2 - 1$ と等しい!

$1 - \|\pi(p)\|^2 = 1 + \dfrac{-p_0^2+1}{(1+p_0)^2}$

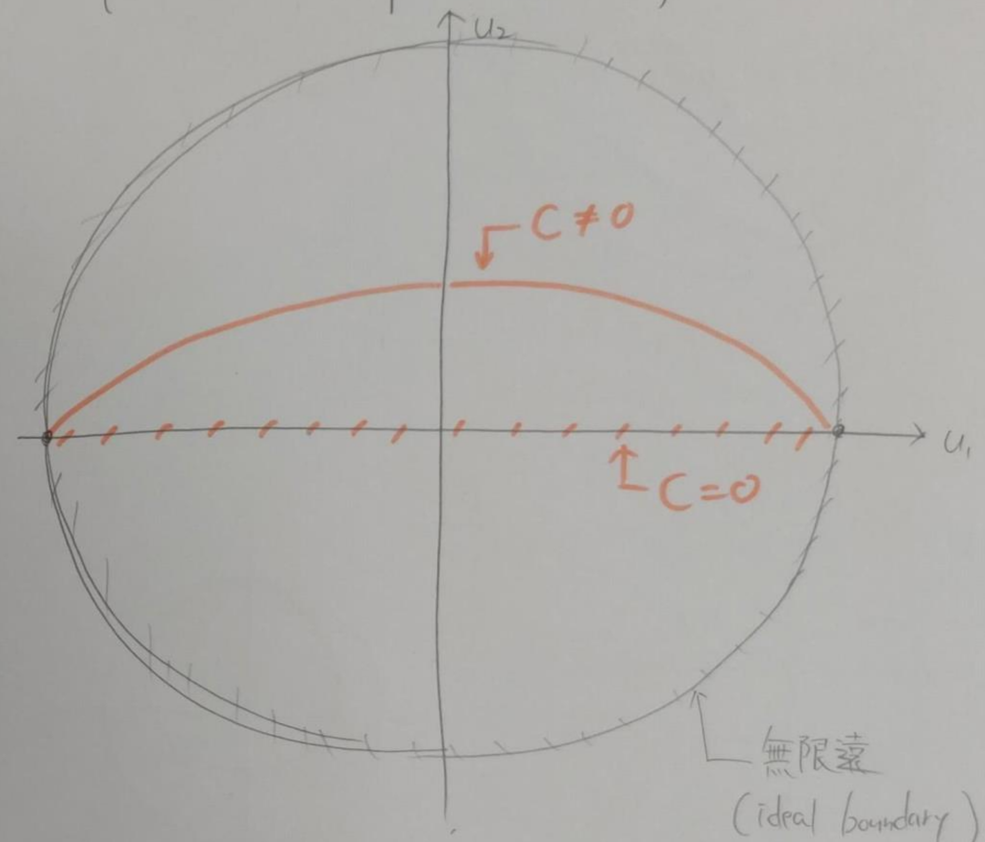
$= \dfrac{2+2p_0}{(1+p_0)^2} = \dfrac{2}{1+p_0} > 0.$

$\mathbb{H}^2$ の曲線の可視化

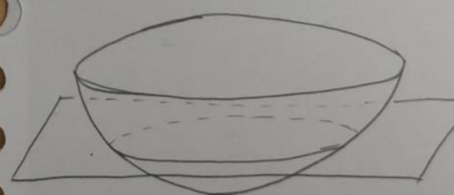


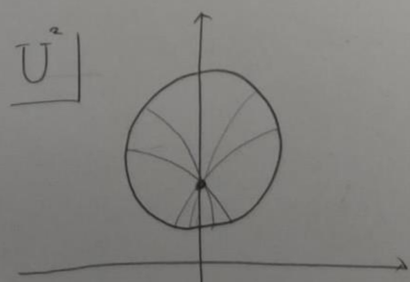


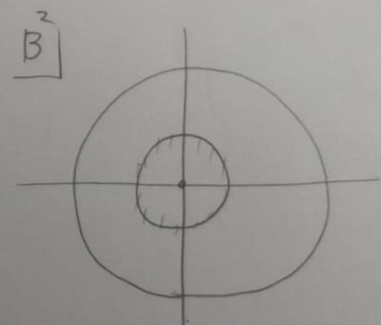
$\mathbb{B}^2 = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid u_1^2 + u_2^2 < 1\}$ ··· 円板モデル



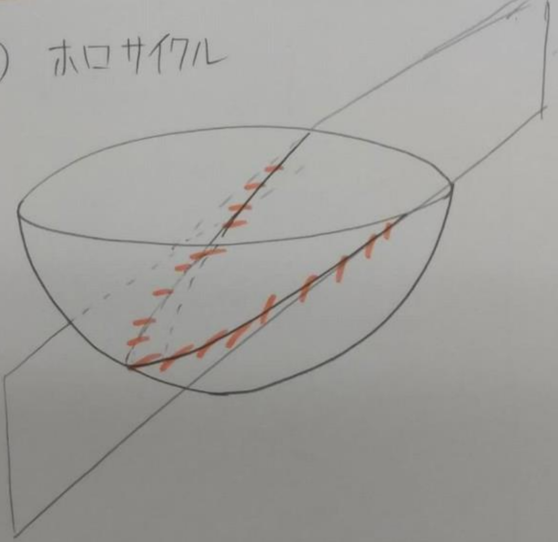
Ex(円)



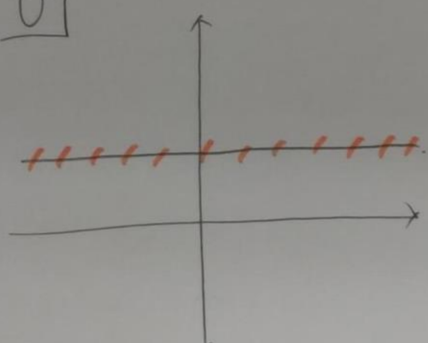




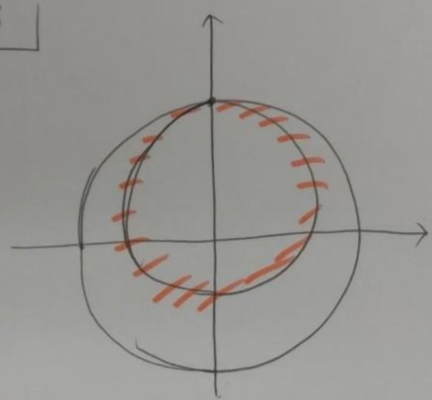
Ex) ホロサイクル



U^2



B^2



$\mathbb{H}^3$の曲面

$$X : \Sigma \longrightarrow \mathbb{H}^3 \ (\subset \mathbb{L}^4)$$

$$X(p) = \begin{bmatrix} x_0(p) \\ x_1(p) \\ x_2(p) \\ x_3(p) \end{bmatrix} \quad (p \in \Sigma)$$

X : C^∞級 $\iff$ $\forall (U; u, v)$ において

$X \circ \varphi^{-1}(u, v)$: C^∞級

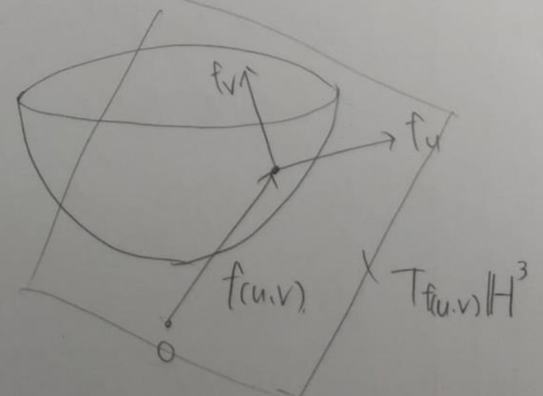
$\left((u,v) \mapsto \begin{pmatrix} x_0(u,v) \\ x_1(u,v) \\ x_2(u,v) \\ x_3(u,v) \end{pmatrix} \text{として} \right)$

Def (はめこみ)

$X : \Sigma \longrightarrow \mathbb{H}^3$ が はめ込み

$\iff$ $\forall (U; u, v)$ において $f = X \circ \varphi^{-1}$ とすると、

f_u と f_v が一次独立.



$\because \langle f(u,v), f(u,v) \rangle = -1$

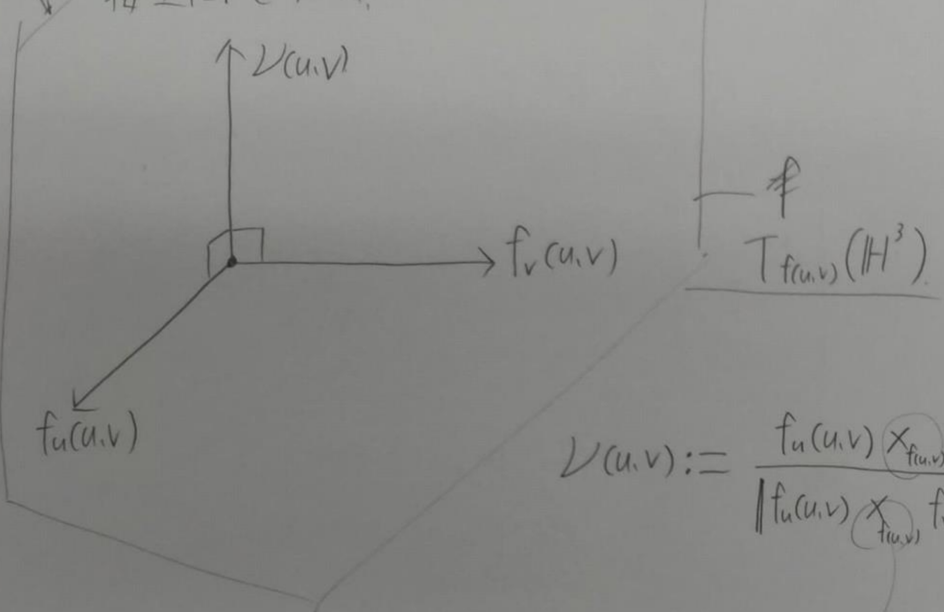
$\downarrow$ uでビ分

$\cancel{2}\langle f_u, f_u \rangle = 0.$

vでビ分

$\cancel{2}\langle f_v, f_v \rangle = 0.$

接空間をズーム。



$$\nu(u,v) := \frac{f_u(u,v) \times_{f(u,v)} f_v(u,v)}{\| f_u(u,v) \times_{f(u,v)} f_v(u,v) \|}$$

ここで、$p \in \mathbb{H}^3$、$a, b \in T_p(H^3)$ に対して

$$p = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$a \times_p b = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} p_1 & a_1 & b_1 \\ p_2 & a_2 & b_2 \\ p_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} p_0 & a_0 & b_0 \\ p_2 & a_2 & b_2 \\ p_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} p_0 & a_0 & b_0 \\ p_1 & a_1 & b_1 \\ p_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} p_0 & a_0 & b_0 \\ p_1 & a_1 & b_1 \\ p_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

ここもプラス

と定めると、

- $a \times_p b \in T_p(H^3)$

(つまり $\langle p, a \times_p b \rangle = 0$)

- $a \perp a \times_p b$, $b \perp a \times_p b$

(つまり $\langle a, a \times_p b \rangle = \langle b, a \times_p b \rangle = 0$)

- $\| a \times_p b \| = \sqrt{\|a\|^2 \|b\|^2 - \langle a, b \rangle^2}$

第一基本形式 $\mathrm{I} = \langle dX, dX \rangle = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$

$(dX = f_u\,du + f_v\,dv)$

座標によらない

$(E = \langle f_u, f_u \rangle,\ F = \langle f_u, f_v \rangle,\ G = \langle f_v, f_v \rangle)$

第二基本形式 $\mathrm{II} = \langle dX, -d\nu \rangle = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$

$(L = -\langle f_u, \nu_u \rangle,\ M = -\langle f_u, \nu_v \rangle = -\langle f_v, \nu_v \rangle,\ N = -\langle f_v, \nu_v \rangle)$

ワインガルテン行列 $A = \hat{\mathrm{I}}^{-1} \hat{\mathrm{II}}$

$$\left(\hat{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathrm{II}} = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \right)$$

Theorem

A の固有値 λ_1、λ_2 は実数である

Def (曲率)

- λ_1、λ_2：主曲率
- $K_{ext} = \lambda_1 \lambda_2$ (外的曲率)
- $H = \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$ (平均曲率)

これらは座標に依らない。

$\mathrm{I} = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ に対して.

式 3.2.3

$$K_{\mathrm{I}} = \frac{E(E_v G_v \cdots)}{4(EG-F^2)} + \cdots + \cdots + \cdots$$

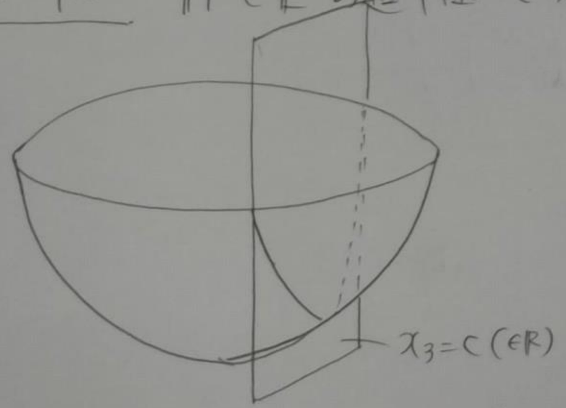
で定まる K_{I} を ガウス曲率（断面曲率）

→ 座標 によらない

等温座標系（$E=G,\ F=0$）のとき,

$$K_{\mathrm{I}} = -\frac{\Delta(\ln E)}{2E}$$

Example $\mathbb{H}^3$ と $\mathbb{L}^4$ の超平面 との 交わり



$$\mathbb{H}^3 \cap \{x_3 = c\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ c \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1 \\ x_0 > 0 \end{array} \right\}$$

パラメタ表示

$$f(u,v) = \frac{1}{1-u^2-v^2} \begin{bmatrix} \sqrt{1+c^2}\,(1+u^2+v^2) \\ 2\sqrt{1+c^2}\,u \\ 2\sqrt{1+c^2}\,v \\ c(1-u^2-v^2) \end{bmatrix}$$

$(u^2+v^2<1)$

$$\begin{cases} \overbrace{\langle f_u, f_u \rangle}^{=E} = \dfrac{4(1+c^2)}{(1-u^2-v^2)^2} = \overbrace{\langle f_v, f_v \rangle}^{=G} \\ \overbrace{\langle f_u, f_v \rangle}^{=F} = 0 \end{cases} \longrightarrow \text{等温座標系}$$

$$\mathrm{I} = \frac{4(1+c^2)}{(1-u^2-v^2)^2}(du^2+dv^2)$$

$$\mathrm{II} = \frac{-4c\sqrt{1+c^2}}{(1-u^2-v^2)^2}(du^2+dv^2)$$

$$\therefore \begin{cases} A = \dfrac{-c}{\sqrt{1+c^2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{-c}{\sqrt{1+c^2}} \\ K_{ext} = \dfrac{c^2}{1+c^2} \\ H = \dfrac{-c}{\sqrt{1+c^2}} \\ K_{\mathrm{I}} = \dfrac{-1}{1+c^2} \end{cases}$$

となる.

Remark

✓ $\mathbb{R}^3$ では $K_{ext} = K_I$

✓ $\mathbb{S}^3$ では $K_{ext} = K_I - 1$

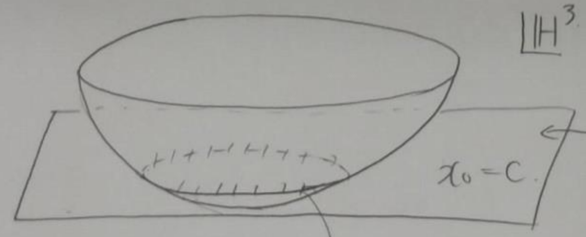
✓ $\mathbb{H}^3$ では $K_{ext} = K_I + 1$ が成立する.

実は…

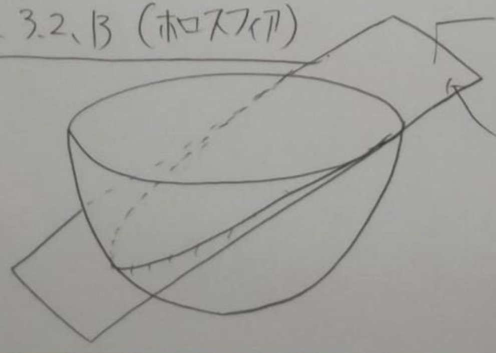
$\mathbb{H}^3$ の曲面は、全て

この式をみたす (ガウス方程式)

Ex 3.2.12 (球面)



Ex 3.2.13 (ホロスフィア)



Def (臍点)

せいてん

・$P \in \Sigma$ が臍点である (umbilic point)

$\Longleftrightarrow \lambda_1(P) = \lambda_2(P)$

・全ての点が臍点である曲面を、全臍的曲面という.

※ Example 3.2.11、3.2.12、3.2.13 は全て非全臍的。

逆に、全臍的曲面はこれらと向きを保つ合同変換でうつりあう. (定理 3.2.15)

7/1(火) レポート公開 ← (めやす) 7月末ごろ

7/8(火) 休講 ここで課題終わり.

7/15 13回

7/22 14回