

# 等長的な $m$ -type edge と対称性

横浜国立大学 大学院理工学府 数物・電子情報系理工学専攻  
飯野郁 (Kaoru IINO) \*

## 概要

カスプ辺は波面に現れる安定特異点の一つである．このカスプ辺を含む特異点のクラスとして  $m$ -type edge が Martins et al. [1] により導入された．本研究では，与えられた実解析的かつジェネリックな  $m$ -type edge に対し，特異曲線の像と第一基本形式を共有する  $m$ -type edge の右同値類と合同類の個数の分類を行った．

$m$  が偶数の場合には Honda et al. [2] のカスプ辺に対する結果の一般化が得られ， $m$  が奇数の場合にはカスプ辺には無かった結果が得られた．具体的に，カスプ辺の場合では現れなかった第一基本形式の対称性 (non-effective symmetry) が分類において重要な役割を果たすことが確認された．

## 1 導入

与えられたリーマン計量を第一基本形式としてもつ正則曲面は非可算個存在する．一方，同様の問題をカスプ辺をもつ曲面に対して考えると，特異点集合の像として定まる正則曲線が，新たなデータとして自然に現れる．Honda et al. [2] は，実解析的かつジェネリックな場合に，与えられた特異点をもつリーマン計量 (Kossowski 計量と呼ばれる) を第一基本形式にもち，与えられた空間内の正則曲線を特異点集合にもつカスプ辺が，ちょうど 4 つ存在することを示した．さらに，それら 4 つのカスプ辺の像が 2 つになることと，Kossowski 計量が対称性をもつことが同値であること，また 4 つのカスプ辺の合同類の個数と，計量および空間曲線の対称性との関係を明らかにした．[2] で導入された一般化カスプ辺に対しても同様の結果が [3, Theorem 5.7] によって示されている．

近年，カスプ辺を含む特異点のクラスとして， $m$ -type edge が Martins et al. [1] により導入された． $m$ -type edge はカスプ辺や (3,4)-カスプ辺，一般化カスプ辺などを含むことから，カスプ辺を含む非常に広いクラスと見なせる． $m$  が偶数の場合にはカスプ辺と類似した現象が確認される一方で， $m$  が奇数の場合にはカスプ辺とは異なる現象が起こることが指摘されている．

以上を踏まえて，カスプ辺や一般化カスプ辺の場合と同様に  $m$ -type edge を持つ曲面に対して次の問題を考える．

**問題．** 与えられた実解析的かつジェネリックな  $m$ -type edge に対して，同じ特異曲線の像と第一基本形式を持つ  $m$ -type edge の個数の分類はどのようなになるか？

---

\* E-mail: iino-kaoru-rb@ynu.jp

## 2 定義

$\Sigma$  を 2 次元多様体とする．初めに，写像芽に関する同値関係を定義する．

定義 1. 2 つの  $C^\infty$  級写像芽  $f : (\Sigma, p) \rightarrow (\mathbf{R}^3, f(p))$  と  $\bar{f} : (\bar{\Sigma}, \bar{p}) \rightarrow (\mathbf{R}^3, \bar{f}(\bar{p}))$  を考える．

- (1)  $f$  と  $\bar{f}$  が**右同値**であるとは， $\mathbf{R}^2$  の原点近傍で定義された微分同相写像  $\varphi : (\Sigma, p) \rightarrow (\bar{\Sigma}, \bar{p})$  が存在して， $\bar{f} = f \circ \varphi$  を満たすことをいう．
- (2)  $f$  と  $\bar{f}$  が**右左同値 (A-同値)** であるとは，2 つの微分同相写像芽  $\varphi : (\Sigma, p) \rightarrow (\bar{\Sigma}, \bar{p})$  と  $\Phi : (\mathbf{R}^3, f(p)) \rightarrow (\mathbf{R}^3, \bar{f}(\bar{p}))$  が存在して， $\Phi \circ f \circ \varphi^{-1} = \bar{f}$  が成り立つときをいう． ←  $\bar{f} = \Phi \circ f \circ \varphi^{-1}$  に注意
- (3)  $f$  と  $\bar{f}$  が**合同**であるとは，ある 3 次直交群  $T \in O(3)$  が存在して， $Tf$  と  $\bar{f}$  が右同値であるときをいう．

### 2.1 特異点とフロンタル

$f : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  を写像としたとき， $p \in \Sigma$  が  $f$  の**特異点**であるとは， $f$  が  $p$  ではめ込みでないときをいう．このような特異点をもつ曲面のクラスとして，曲面上の任意の点で単位法ベクトル場がとれるような**フロンタル**と呼ばれるクラスがある．まず，1 章 (導入) で登場した“フロンタルがジェネリックであること”の定義を述べる．

定義 2. フロンタル  $f : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  に対して， $S(f)$  で  $f$  の特異点集合を表し， $S(f)$  が正則曲線であることを仮定する．さらに， $S(f)$  上の点  $p$  は階数 1 の特異点であると仮定する．このとき，

- (1)  $S(f)$  を**特異曲線**という．
- (2) 特異曲線の接ベクトルを**特異ベクトル**，特異ベクトルの定める 1 次元ベクトル空間を**特異方向**という．
- (3) さらに， $df(\mathbf{v}) = 0$  を満たす零でない接ベクトル  $\mathbf{v} \in T_p \Sigma$  を**退化ベクトル**，退化ベクトルの定める方向を**退化方向**という．

定義 3. 特異点  $p \in S(f)$  が**第一種特異点**であるとは， $p$  において特異方向と退化方向が異なるとき，つまり退化方向  $\langle \eta_p \rangle_{\mathbf{R}} = \ker(df)_p$  が特異方向  $T_p S(f)$  と異なるときをいう．

定義 4.  $f : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  をフロンタル， $\nu$  を  $f$  の単位法ベクトル場， $p \in \Sigma$  を第一種特異点とする．さらに， $\gamma(t)$  を  $\gamma(0) = p$  となる特異曲線， $\hat{\gamma} := f \circ \gamma$ ， $\hat{\nu} := \nu \circ \gamma$  とする．フロンタル  $f$  が**ジェネリック**であるとは， $f$  の極限法曲率  $\kappa_\nu(t) := \langle \hat{\gamma}''(t), \hat{\nu}(t) \rangle / \langle \hat{\gamma}'(t), \hat{\gamma}'(t) \rangle$  が特異点集合上で零でないときをいう．

さらにフロンタルの一種として，**波面 (フロント)** と呼ばれるクラスが存在する．この波面に頻繁に現れる特異点として，**カस्प辺**と**ツバメの尾**が存在する．本稿では特にカस्प辺に注目し，より一般化したクラスである  $m$ -type edge を基にして議論を行う．

## 2.2 $m$ -type edge の導入

以降、値域の平行移動により一般性を失わずに  $f(p) = \mathbf{0}$  を仮定する.

定義 5.  $m$  を正の整数とする. このとき,  $C^\infty$  級写像  $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  が  $p \in \Sigma$  で  $m$ -type edge であるとは, 写像芽  $f: (\Sigma, p) \rightarrow (\mathbf{R}^3, f(p))$  が原点での写像芽

$$\mathbf{R}^2 \ni (u, v) \mapsto (u, v^m, v^{m+1}\alpha(u, v)) \in \mathbf{R}^3$$

と右左同値となるような  $C^\infty$  級関数  $\alpha(u, v)$  が存在するときをいう.

$m$ -type edge の定義に現れる  $m$  および  $\alpha(u, v)$  について,  $m = 2$  としたものは一般化カスプ辺 (generalized cuspidal edge) とよばれる [2]. さらに,

- $m = 2$  および  $\alpha(u, v) = 1$  としたものは, カスプ辺とよばれる (図 1).
- $m = 3$  および  $\alpha(u, v) = 1$  としたものは, (3, 4)-カスプ辺とよばれる (図 1).

特に (3, 4)-カスプ辺は楕円面の平行曲面で最初に現れる特異点であり (図 2), 自然に表れる特異点であることから重要な研究対象である.

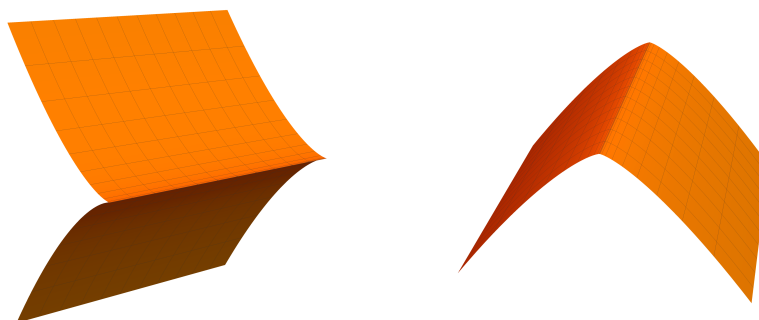


図 1 左: 標準的なカスプ辺, 右: 標準的な (3, 4)-カスプ辺

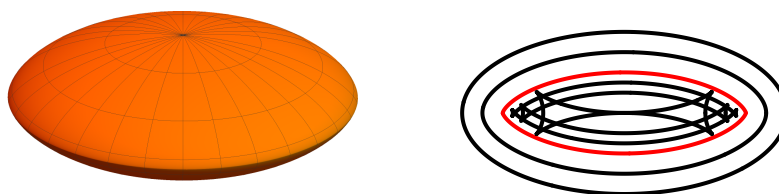


図 2 楕円の平行曲面で表れる (3, 4)-カスプ辺

与えられた  $m$ -type edge に対して, 同じ特異曲線の像と第一基本形式をもつ  $m$ -type edge が存在するための十分条件を満たす集合を定義する.  $\mathbf{c}(u)$  を閉区間  $J := [-l, l]$  ( $l > 0$ ) 上で定義された, 弧長パラメータ表示された  $\mathbf{R}^3$  の正則曲線として,  $J$  上では  $\kappa > 0$  とする.  $U$  を  $\mathbf{R}^2$  における  $J \times \{0\}$  の近傍とし,  $f: U \rightarrow \mathbf{R}^3$  を  $J \times \{0\}$  でジェネリック (定義 4) な  $m$ -type edge のみをもつ実解析的な写像で

$$f(u, 0) = \mathbf{c}(u) \quad (u \in J)$$

であるものとする．また， $\mathbf{c}(u)$  の像を  $C := \mathbf{c}(J)$  と表し， $\max_{u \in J} |\kappa_s(u)| < \min_{u \in J} \kappa(u)$  をみたす  $f$  の集合を **admissible** といい，

$$\mathcal{G}_{m,**}^\omega(\mathbf{R}_J^2, \mathbf{R}^3, C)$$

で表す．

定義 6.  $f \in \mathcal{G}_{m,**}^\omega(\mathbf{R}_J^2, \mathbf{R}^3, C)$  を  $m$ -type edge として， $\check{f}$ ,  $f_*$ ,  $\check{f}_*$  はいずれも  $f$  と同じ特異曲線の像と第一基本形式を持つとする．

- (1)  $\check{f}$  が  $f$  の**等長双対**とは， $\check{f}$  と  $f$  は特異曲線をたどる向きが同じ (つまり， $\check{f}$  と  $f$  は  $C$  に同じ向きを定める) で，極限法曲率の符号が逆であるときをいう．
- (2)  $f_*$  が  $f$  の**逆**であるとは， $f_*$  と  $f$  は特異曲線をたどる向きが逆 (つまり， $f_*$  と  $f$  は  $C$  に逆の向きを定める) で，極限法曲率の符号が同じであるときをいう．
- (3)  $\check{f}_*$  が  $f$  の**逆双対**であるとは， $\check{f}_*$  と  $f$  は特異曲線をたどる向きと極限法曲率の符号がともに逆である．

注意 7. 与えられたジェネリックかつ **admissible** なカスプ辺  $f$  に対して  $\check{f}$ ,  $f_*$ ,  $\check{f}_*$  が実際に存在し，しかもこの 4 つ以外には現れないことは [2] で示されている． $f$  が  $m$ -type edge の場合についても同様に存在と一意性が [5] で示されている．

## 2.3 第一基本形式と特異曲線の像に対する symmetry

まず，第一基本形式に対して **symmetry** と呼ばれる対称性を導入する．以降， $f$  の第一基本形式を  $ds_f^2$  とする．

定義 8.  $\varphi$  を微分同相写像とする． $\varphi^* ds_f^2 = ds_f^2$  が成り立ち，かつ  $\varphi$  が恒等写像ではないとき， $\varphi$  を  $ds_f^2$  の **symmetry** という．さらに，

- (1)  $\varphi$  が **effective symmetry** とは，**symmetry**  $\varphi$  が  $f$  の特異曲線の向きを反転させるときをいう．
- (2)  $\varphi$  が **non-effective symmetry** とは，**symmetry**  $\varphi$  が  $f$  の特異曲線の向きを保つときをいう．

第一基本形式  $ds_f^2$  と同様に，特異曲線の像  $C$  に関する対称性を定義する．

定義 9.  $\mathbf{c}(u)$  を閉区間  $J$  上で定義された，弧長パラメータ表示された  $\mathbf{R}^3$  の埋め込まれた正則曲線として， $J$  上では  $\kappa > 0$  とする．さらに， $\mathbf{c}(u)$  の像を  $C := \mathbf{c}(J)$  とおき， $C$  は原点を通るとする．

- (1)  $T \in O(3)$  が  $C$  の **symmetry** であるとは， $T(C) = C$  かつ  $T$  は単位行列ではないときをいう．
- (2) **symmetry**  $T$  が  **$C$ -orientation-preserving** であるとは，任意の  $u \in J$  に対して  $T\mathbf{c}(u) = \mathbf{c}(u)$  であるときをいう．
- (3) **symmetry**  $T$  が  **$C$ -orientation-reversing** であるとは，任意の  $u \in J$  に対して  $T\mathbf{c}(u) = \mathbf{c}(-u)$  であるときをいう．

さらに,  $\det T = 1$  (resp.  $-1$ ) のとき,  $T$  が正 (resp. 負) であるという.

### 3 主結果

#### 3.1 $m$ -type edge の右同値類の個数

2.2 節の  $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$  および 2.3 節で述べた  $ds_f^2$  の symmetry を用いて次の右同値類に関する主定理が得られた.

**定理 A.**  $f \in \mathcal{G}_{m,**}^\omega(\mathbf{R}_J^2, \mathbf{R}^3, C)$  を  $m$ -type edge として,  $n_f$  を  $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$  の右同値類の数 (つまり, 像の数) とする. このとき, 次が成り立つ.

(1)  $m$  が偶数の場合

(a)  $n_f = 2, 4$  である.

(b)  $n_f = 4$  であることと,  $ds_f^2$  が effective symmetry を持たないことは同値である.

(2)  $m$  が奇数の場合

(a)  $n_f = 1, 2, 4$  である.

(b)  $n_f = 4$  であることと,  $ds_f^2$  が symmetry を持たないことは同値である.

(c)  $n_f = 1$  であることと,  $ds_f^2$  が effective symmetry と non-effective symmetry の両方を持つことは同値である.

この主定理 A は与えられた特異曲線の像と第一基本形式に対して, 同じデータをもつ  $m$ -type edge が右同値の意味で何通り現れるかを,  $ds_f^2$  の symmetry の有無だけで記述したものである.

注意 10 ([2], Theorem III).  $f$  が  $m$ -type edge ではなくカスプ辺の場合, 次の右同値類の定理が知られている.

$f$  をジェネリック (定義 4) かつ admissible なカスプ辺として,  $n_f$  を  $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$  の右同値類の数とする. このとき, 次が成り立つ.

$$\hookrightarrow f \in \mathcal{G}_{2,**}^\omega(\mathbf{R}_J^2, \mathbf{R}^3, C)$$

(a)  $n_f = 2, 4$  である.

(b)  $n_f = 4$  であることと,  $ds_f^2$  が symmetry を持たないことは同値である.

#### 3.2 $m$ -type edge の合同類の個数

さらに 2.3 節で述べた特異曲線の像の symmetry を用いて次の合同類に関する主定理が得られた.

**主定理 B.**  $f \in \mathcal{G}_{m,**}^\omega(\mathbf{R}_J^2, \mathbf{R}^3, C)$  を  $m$ -type edge として,  $N_f$  を  $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$  の合同類の数と定義する. このとき,  $N_f \neq 3$  を満たす. さらに,  $m$  の偶奇に応じて次が成り立つ.

(1)  $m$  が偶数の場合

(I)  $N_f = 4$  であることと,  $C$  は symmetry をもたず, かつ  $ds_f^2$  は effective symmetry をも

たないことは同値である.

(II)  $N_f = 1$  であることと, 次のいずれかが成り立つことは同値である.

(a1)  $C$  が平面曲線かつ  $C$ -orientation-reversing symmetry をもつ.

(a2)  $C$  が平面曲線かつ  $ds_f^2$  が effective symmetry をもつ.

(b)  $C$  が正の  $C$ -orientation-reversing symmetry をもち, かつ  $ds_f^2$  が effective symmetry をもつ.

(2)  $m$  が奇数の場合

(I)  $N_f = 4$  であることと,  $ds_f^2$  と  $C$  はいずれも symmetry を持たないことは同値である.

(II)  $N_f = 1$  であることと, 次のいずれかが成り立つことは同値である.

(a1)  $C$  は平面曲線かつ  $C$  に  $C$ -orientation-reversing symmetry が存在する.

(a2)  $C$  は平面曲線かつ  $ds_f^2$  に effective symmetry が存在する.

(b1)  $ds_f^2$  に non-effective symmetry が存在して, かつ  $C$  に  $C$ -orientation-reversing symmetry が存在する.

(b2)  $ds_f^2$  に non-effective symmetry と effective symmetry が存在する.

(c)  $C$  に正の  $C$ -orientation-reversing symmetry が存在して, かつ  $ds_f^2$  にヤコビアンが負の effective symmetry が存在する.

(d)  $C$  に負の  $C$ -orientation-reversing symmetry が存在して, かつ  $ds_f^2$  にヤコビアンが正の effective symmetry が存在する.

主定理 A が定義域のパラメータ変換による同一視 (右同値) に関する分類であるのに対し, 主定理 B は値域の回転と平行移動による同一視 (合同) に関する分類を与える. そして, その合同類の個数を第一基本形式  $ds_f^2$  と特異曲線の像  $C$  の symmetry から決定する定理である.

**注意 11** ([2], Theorem IV).  $f$  が  $m$ -type edge ではなくカスプ辺の場合, 次の合同類の定理が知られている.

$f$  をジェネリック (定義 4) かつ admissible なカスプ辺として,  $N_f$  を  $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$  の合同類の数と定義する. このとき  $N_f \neq 3$  であり, さらに次を満たす.

(I)  $N_f = 4$  であることと,  $C$  は symmetry をもたず, かつ  $ds_f^2$  は symmetry をもたないことは同値である.

(II)  $N_f = 1$  であることと, 次のいずれかが成り立つことは同値である.

(a1)  $C$  が平面曲線かつ  $C$ -orientation-reversing symmetry をもつ.

(a2)  $C$  が平面曲線かつ  $ds_f^2$  が symmetry をもつ.

(b)  $C$  が正の  $C$ -orientation-reversing symmetry をもち, かつ  $ds_f^2$  が symmetry をもつ.

## 4 具体例

(3,4)-カスプ辺 (つまり,  $\alpha(u,v) = 1$  かつ  $m = 3$ ) の場合における, 主定理 A および主定理 B の  $N_f = 1$  に対応する具体例を以下に述べる.

#### 4.1 主定理 A の具体例

- (3, 4)-カusp 辺の  $n_f = 4$  に対応する具体例

$\phi_1(u, v) := 1 - v^3 - 2v^4 - uv^4$  として,  $f_1$  を

$$f_1(u, v) := (-1 + \phi_1(u, v) \cos u, \phi_1(u, v) \sin u, -v^3 + 2v^4 + uv^4)$$

とする.  $f_1$  の特異曲線の像を  $C_1$  とする.  $C_1$  の symmetry  $S, T \in O(3)$  をそれぞれ

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると,  $S$  は  $C$ -orientation-preserving,  $T$  は  $C$ -orientation-reversing である.  $f_1$  に対応する等長双対  $\check{f}_1$ , 逆  $f_{1*}$ , 等長双対  $\check{f}_{1*}$  はそれぞれ

$$\check{f}_1 = Sf, \quad f_{1*} = Tf, \quad \check{f}_{1*} = STf (= TSf)$$

である (図 3).

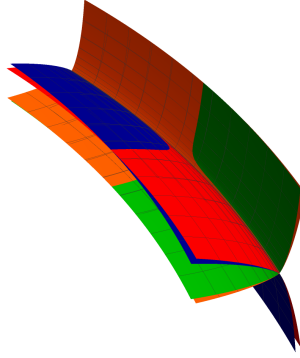


図 3  $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$  の原点近傍における像の図示 ( $f = f_1$ ). 橙色, 赤色, 緑色, 青色の曲面がそれぞれ  $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$  に対応している. 図は像が異なる 4 種類の曲面を表す.

- (3, 4)-カusp 辺の  $n_f = 2$  に対応する具体例

$f_2(u, v)$  を

$$f_2(u, v) := (u + v^4, u^3 + v^4, v^3)$$

とする.  $f_2$  の特異曲線の像を  $C_2$  として,  $C_2$  の  $C$ -orientation-reversing symmetry  $T \in O(3)$  と  $ds_{f_2}^2$  の non-effective symmetry  $\varphi$  を

$$T := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(u, v) := (u, -v)$$

とする.  $f_2$  に対応する等長双対  $\check{f}_2$ , 逆  $f_{2*}$ , 逆双対  $\check{f}_{2*}$  はそれぞれ

$$\check{f}_2 = f_2 \circ \varphi, \quad f_{2*} = Tf_2, \quad \check{f}_{2*} = Tf_2 \circ \varphi$$

である (図 4).  $\varphi^* ds_{f_2}^2$  は実際に計算すると,

$$\begin{aligned} ds_{f_2}^2 &= (9u^4 + 1) du^2 + 4v^3(3u^2 + 1) dudv + v^4(32v^2 + 9) dv^2 \\ \varphi^* ds_{f_2}^2 &= (9u^4 + 1) du^2 + 4(-v)^3(3u^2 + 1) dud(-v) + (-v)^4(32\{-v\}^2 + 9) d(-v)^2 \\ &= (9u^4 + 1) du^2 + (-1)^2 4v^3(3u^2 + 1) dudv + v^4(32v^2 + 9) dv^2 \\ &= ds_{f_2}^2 \end{aligned}$$

となり,  $\varphi$  は  $ds_{f_2}^2$  の symmetry である定義を満たしている.

- (3, 4)-カusp 辺の  $n_f = 1$  に対応する具体例

$f_3(u, v)$  を

$$f_3(u, v) := (u, v^3, u^2 + v^4)$$

とする.  $ds_{f_3}^2$  の effective symmetry  $\varphi$  と non-effective symmetry  $\psi$  を

$$\varphi(u, v) := (-u, v), \quad \psi(u, v) := (u, -v)$$

とすると,  $f_3$  に対応する等長双対  $\check{f}_3$ , 逆  $f_{3*}$ , 逆双対  $\check{f}_{3*}$  はそれぞれ

$$\check{f}_3 = f_3 \circ \psi, \quad f_{3*} = f_3 \circ \varphi, \quad \check{f}_{3*} = f_3 \circ \varphi \circ \psi$$

である (図 4).  $\varphi^* ds_{f_3}^2$  を実際に計算すると,

$$\begin{aligned} ds_{f_3}^2 &= (4u^2 + 1) du^2 + 8uv^3 dudv + v^4(16v^2 + 9) dv^2 \\ \varphi^* ds_{f_3}^2 &= (4\{-u\}^2 + 1) d(-u)^2 + 8(-u)v^3 d(-u)dv + v^4(16v^2 + 9) dv^2 \\ &= (4u^2 + 1) du^2 + (-1)^2 8uv^3 dudv + v^4(16v^2 + 9) dv^2 \\ &= ds_{f_3}^2 \end{aligned}$$

となり,  $\varphi$  は  $ds_{f_3}^2$  の symmetry である定義を満たしている.  $\psi$  も同様に symmetry であることが確認できる.

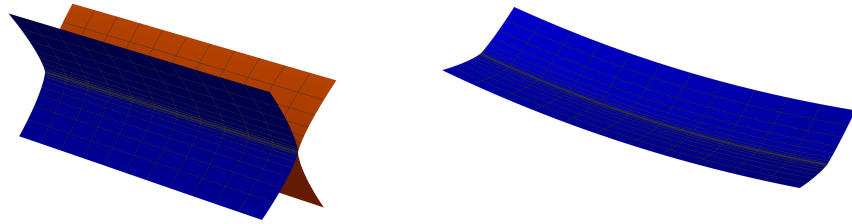


図 4  $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$  の原点近傍における像の図示 (左:  $f = f_2$ , 右:  $f = f_3$ ). 左図は  $f$  と  $\check{f}$  (橙色の曲面) および  $f_*$  と  $\check{f}_*$  (青色の曲面) がそれぞれ像として一致し, 右図は  $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$  すべてが像として一致している.

## 4.2 主定理 B の具体例

- $m$  が奇数で, (a1) を満たす場合に対応する具体例

4.1 節の  $f_1$  が条件を満たす.



- $m$  が奇数で, (a2) を満たす場合に対応する具体例

$\phi_4(u, v) := 1 + v^3$  として,  $f_4$  を

$$f_4(u, v) := (-1 + \phi_4(u, v) \cos u, \phi_4(u, v) \sin u, v^3 + v^4)$$

とする.  $f_4$  の特異曲線の像を  $C_4$  として,  $C_4$  の  $C$ -orientation-preserving symmetry  $S \in O(3)$  と  $ds_{f_4}^2$  の effective symmetry  $\varphi$  を

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(u, v) := (-u, v)$$

とする.  $f_4$  に対応する等長双対  $\check{f}_4$ , 逆  $f_{4*}$ , 逆双対  $\check{f}_{4*}$  はそれぞれ

$$\check{f} = Sf, \quad f_* = f \circ \varphi, \quad \check{f}_* = Sf \circ \varphi$$

である (図 5).

- $m$  が奇数で, (b1) を満たす場合に対応する具体例

4.1 節の  $f_2$  が条件を満たす.

- $m$  が奇数で, (b2) を満たす場合に対応する具体例

4.1 節の  $f_3$  が条件を満たす.

- $m$  が奇数で, (c) を満たす場合に対応する具体例

Hattori-Honda-Morimoto[4] により導入された helicoidal  $n$ -type edge の Bour 型表現公式により表されるヘリコイドが該当する.  $f_5$  を次のように定義する.

$$f_5(u, v) := (-\sqrt{1 - h^2} + x(v) \cos \theta(u, v), x(v) \sin \theta(u, v), z(v) + h\theta(u, v))$$

ただし,  $h$  は十分小さな正数,  $x(v), z(v), \theta(u, v)$  はそれぞれ

$$\begin{aligned} x(v) &= \sqrt{U(v)^2 - h^2} \\ z(v) &= \int_0^v \frac{\zeta^2 U(\zeta) \rho_{h,1}(\zeta)}{U(\zeta)^2 - h^2} d\zeta \\ \theta(u, v) &= u + h \int_0^v \frac{\zeta^2 \rho_{h,1}(\zeta)}{U(\zeta)(U(\zeta)^2 - h^2)} d\zeta \end{aligned}$$

であり,  $U(v), \rho_{h,1}(v)$  はそれぞれ

$$\begin{aligned} U(v) &= 1 + \int_0^v \zeta^2 \sin \zeta d\zeta \\ &= (-v^2 + 2) \cos v + 2v \sin v - 1 \\ \rho_{h,1}(v) &= \sqrt{U(v)^2 - h^2 - U(v)^2 V(v)^2} \end{aligned}$$

である. ここで  $V(v)$  は  $U'(v) = v^2 V(v)$  を満たす滑らかな関数であり,  $V(v) = \sin v$  がとれる.  $f_5$  の特異曲線の像を  $C_5$  として,  $C_5$  の symmetry  $T \in O(3)$  と  $ds_{f_5}^2$  のヤコビアンが負となる effective symmetry  $\varphi$  を

$$T := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(u, v) := (-u, v)$$

とする.  $\det T = 1$  かつ  $T\mathbf{c}(u) = \mathbf{c}(-u)$  が成り立つため,  $T$  は正の  $C$ -orientation-reversing symmetry である.  $f_5$  に対応する等長双対  $\check{f}_5$ , 逆  $f_{5*}$ , 逆双対  $\check{f}_{5*}$  はそれぞれ

$$\check{f}_5 = Tf_5 \circ \varphi, \quad f_{5*} = Tf_5, \quad \check{f}_{5*} = f \circ \varphi$$

と表される (図 5).  $\varphi^* ds_{f_5}^2$  を計算すると

$$\begin{aligned} ds_{f_5}^2 &= \{(-v^2 + 2) \cos v + 2v \sin v - 1\}^2 du^2 + v^4 dv^2 \\ \varphi^* ds_{f_5}^2 &= \{(-v^2 + 2) \cos v + 2v \sin v - 1\}^2 d(-u)^2 + v^4 dv^2 \\ &= ds_{f_5}^2 \end{aligned}$$

である. これは  $\varphi$  が  $ds_{f_5}^2$  の symmetry である定義を満たしている.

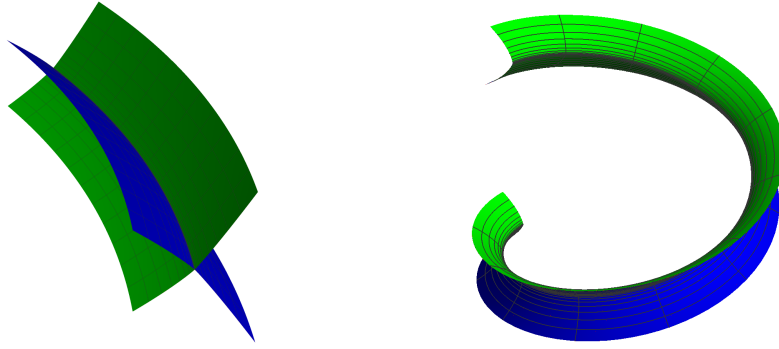


図 5  $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$  の像の図示 (左:  $f = f_4$ , 右:  $f = f_5$ ,  $h = 0.25$ ). 左図は  $f$  と  $f_*$  (緑色の曲面) および  $\check{f}$  と  $\check{f}_*$  (青色の曲面) がそれぞれ像として一致している. 右図は  $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$  すべてが像として一致している.

- $m$  が奇数で, (d) を満たす場合に対応する具体例  
4.1 節の  $f_3$  が条件を満たす.

## 参考文献

- [1] L.F. Martins, K. Saji, S.P. dos Santos and K. Teramoto, *Boundedness of geometric invariants near a singularity which is a suspension of a singular curve*, Revista de la UMA Vol. **67**, (2024), No. 2, 475–502.
- [2] A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Duality on generalized cuspidal edges preserving singular set images and first fundamental forms*, J. Singul. **22** (2020), 59–91.
- [3] A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *A generalization of Zakalyukin’s lemma, and symmetries of surface singularities*, J. Singul. **25** (2022), 299–324.
- [4] Y. Hattori, A. Honda and T. Morimoto, *Bour’s theorem for helicoidal surfaces with singularities*, Differ. Geom. Appl. **99** (2025), Article ID 102248, 23 pp.
- [5] Y. Hattori, (3, 4)-カスプ辺の内在的な不変量, 修士論文, 横浜国立大学, 2025.