3次元~~同次~~等質多様体への等長的はめ込み (Benoît Daniel)

homogeneous

(Proposition 21 まで)

1. イントロダクション
2. 4次元等長変換群を持つ 3次元~~同次~~等質多様体
3. 準備
4. 3次元~~同次~~等質多様体への曲面の等長的はめ込み
5. 3次元~~同次~~等質多様体における平均曲率一定 (CMC) 曲面

分からなかった部分

- (P89) K を ds^2 の曲率としたとき、

  ガウス方程式 ; $K = \det S + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)\nu^2$

  コダッチ方程式 ; $\nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X,Y]$

  $$= (\kappa - 4\tau^2)\nu(\langle Y,T\rangle X - \langle X,T\rangle Y)$$

  の証明

- ~~(P92) $\overline{R}$ の基底を $(E_2 \wedge E_3, E_3 \wedge E_1, E_1 \wedge E_2)$ としたとき、~~

  ~~$\overline{R}$ の行列形式が~~

  $$\cancel{\overline{R} = \mathrm{diag}(\tau^2, \tau^2, -3\tau^2 + 2\sigma\tau)}$$

  ~~と表示されること (特に $E_1 \wedge E_2$ の場合).~~ OK

- (P92) $\overline{M} \to M$ が沈め込み (submersion) のとき、正規直交組

  $\forall p \in M$, $df_p : T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$ が全射.

  (X, Y) で生成される平面 Π において、断面曲率 $K(\Pi)$ が

  $$K(\Pi) = \overline{K}(\overline{\Pi}) + \frac{3}{4}\|[X,Y]^V\|^2$$

  と表されること.

  $[E_1, E_2] = 2\tau E_3$

  $[E_2, E_3] = \sigma E_1$

  $[E_3, E_1] = \sigma E_2$

- (P93) Prop 21 の式変形で K, τ が表れる変形 (途中まで記載)

1. イントロダクション

・考えたい問題：リーマン多様体 V が別のリーマン多様体 $\overline{V}$ へ
等長的にはめ込まれるか？
（余次元1のはめ込みに限定して議論する）

※ $\overline{V}$ が積多様体 $S^n \times \mathbb{R}$ または $H^n \times \mathbb{R}$ の場合はすでに研究した
（[Dan 04]）.

・本論文では、等長変換群の次元が4である ~~同次~~ 等質 (homogeneous) 多様体を考える.

→ このような多様体は、ファイブレーションの基底曲面 (base surface) の曲率 κ と
束曲率 (bundle curvature) τ によって分類される（$\kappa \neq 4\tau^2$）.

（束曲率 τ は、$\overline{\nabla}_X \xi = \tau \underbrace{X}_{\overline{V}\text{上のベクトル場}} \times \underbrace{\xi}_{\text{法ベクトル場}}$ を満たす実数である）

→ $\tau = 0$ の場合は [Dan 04] で扱った.

・$\tau \neq 0$ の場合、等長変換群は2つの連結成分を持つ：

① ファイバーとファイブレーションの基底の両方の向きを保存する等長変換
② 〃 を反転する等長変換

この多様体には、以下のような3種類がある.

◦ $\kappa > 0$ の場合：Berger球面の等長変換群

$U_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $U_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ を基底とする

計量が $\begin{pmatrix} t & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ を満たす. $(t>0)$

◦ $K=0$ の場合：Heisenberg群 Nil_3

$\begin{bmatrix} 1 & b & c+\frac{1}{2}ab \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

◦ $K<0$ の場合：$PSL_2(\mathbb{R})$

projective special linear

$SL_2(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \,\middle|\, ad-bc=1 \right\}$

$PSL_2(\mathbb{R}) := SL_2(\mathbb{R}) / \{\pm I\}$ （I：単位行列）

本論文ではこれら3種類を扱っていく.

• K を ds^2 の計量とすると、ガウス方程式とコダッチ方程式は以下のようになる：

◦ $K = \det S + \tau^2 + (\kappa - 4\tau^2)\nu^2$

◦ $\nabla_X(SY) - \nabla_Y(SX) - S[X, Y]$
$= (\kappa - 4\tau^2)\nu(\langle Y, T\rangle X - \langle X, T\rangle Y)$

主定理（4.3節で再掲） P89

- $\mathcal{V}$ ：単連結な向き付けられた2次元リーマン多様体
- ds^2 ：$\mathcal{V}$の計量（$\langle \cdot, \cdot \rangle$とも表記）
- ∇ ：$\mathcal{V}$のリーマン接続（レビチビタ接続）
- J ：$T\mathcal{V}$上の角度$\frac{\pi}{2}$の回転（行列）
- S ：対称作用素$S_y : T_y\mathcal{V} \longrightarrow T_y\mathcal{V}$を持つ場
- T ：$\mathcal{V}$上のベクトル場
- ν ：$\mathcal{V}$上の滑らかな関数で、

$$\|T\|^2 + \nu^2 = 1$$

　が成り立つ.

- $\mathbb{E}$ ：4次元等長変換群を持つ同次3次元多様体
- ξ ：$\mathbb{E}$のベクトル場
- κ ：$\mathbb{E}$の基底曲率（base curvature）
- τ ：$\mathbb{E}$の束曲率（bundle curvature）

このとき、以下の同値条件が成り立つ.

等長的はめ込み$f : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{E}$が存在して、以下の2条件

(i) fに関連する法ベクトル場Nに関して、形作用素Sが

$$df \circ S \circ df^{-1}$$

を満たす

(ii) ベクトル場ξが　$\xi = df(T) + \nu N$　である

を満たす　$\Longleftrightarrow$

(ds^2, S, T, ν) が V 上の任意のベクトル場 X について、
ガウス・コダッチの方程式を満たしている：

$$\nabla_X T = \nu (SX - \tau JX)$$

$$d\nu(X) + \langle SX - \tau JX, T \rangle = 0$$

※ このとき、はめ込みはファイバーとファイブレーションの基底の両方の
向きを保存する E の大域的等長変換 (grobal isometry) を除いて
一意的である。

P87. コダッチ方程式の証明

示したい式：$\nabla_X(SY) - \nabla_Y(SX) - S[X,Y] = \bar{R}_{XY}(N)$ …①

リーマン曲率テンソルの定義を用いると、①の右辺は

$$\bar{\nabla}_{[X,Y]}(N) - \bar{\nabla}_X(\bar{\nabla}_Y N) + \bar{\nabla}_Y(\bar{\nabla}_X N) \quad \cdots ②$$

と表せる。

①の左辺について、

(i) 第1項 $\nabla_X(SY)$

$$\nabla_X(SY) = \nabla_X(-\bar{\nabla}_Y N)$$ （∵ 形作用素Sの性質より）

$$= -\bar{\nabla}_X(\bar{\nabla}_Y N)$$ （∵ $\bar{\nabla}_Y N$ を微分するために外の空間 $\bar{\nabla}$ の接続を用いる）

(ii) 第2項 $\nabla_Y(SX)$

(i)と同様に、$\nabla_Y(SX) = -\bar{\nabla}_Y(\bar{\nabla}_X N)$

(iii) 第3項 $S[X,Y]$

形作用素Sの性質より、$S[X,Y] = -\bar{\nabla}_{[X,Y]}N$

であるため、最終的に

$$-\bar{\nabla}_X(\bar{\nabla}_Y N) + \bar{\nabla}_Y(\bar{\nabla}_X N) + \bar{\nabla}_{[X,Y]}N \quad \cdots ③$$

である。②と③が一致するため、等式①を示した ■

P87. ガウス方程式の証明（概略）

示したい式：$\langle R_{XY}(Z), W\rangle - \langle \overline{R}_{XY}(Z), W\rangle$

$$= \langle SX, Z\rangle\langle SY, W\rangle - \langle SY, Z\rangle\langle SX, W\rangle \quad \cdots ①$$

接続に関して、XとYを∇上のベクトル場、Nを法ベクトルとすると、

$$\overline{\nabla}_X Y = \tan(\overline{\nabla}_X Y) + \mathrm{nor}(\overline{\nabla}_X Y)$$

$$= \nabla_X Y + \langle SX, Y\rangle N \quad \cdots ②$$

が成り立つ.

$R_{XY}(Z)$と$\overline{R}_{XY}(Z)$をリーマン曲率テンソルの定義を用いてそれぞれ表すと、

$$R_{XY}(Z) = \nabla_{[X,Y]}Z + \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_X(\nabla_Y Z) \quad \cdots ③$$

$$\overline{R}_{XY}(Z) = \overline{\nabla}_{[X,Y]}Z + \overline{\nabla}_Y(\overline{\nabla}_X Z) - \overline{\nabla}_X(\overline{\nabla}_Y Z) \quad \cdots ④$$

である。④の右辺について、各項を具体的に計算すると、

$$\overline{\nabla}_{[X,Y]}Z = \nabla_{[X,Y]}Z + \langle S[X,Y], Z\rangle N \quad \text{（②を用いて変形した）}$$

$$\overline{\nabla}_Y(\overline{\nabla}_X Z) = \nabla_Y(\nabla_X Z) + \nabla_Y\langle SX, Z\rangle N - \langle SX, Z\rangle S(Y) \quad \text{（②および } SX = -\overline{\nabla}_X N \text{ を用いた）}$$

$$\overline{\nabla}_X(\overline{\nabla}_Y Z) = \nabla_X(\nabla_Y Z) + \nabla_X\langle SY, Z\rangle N - \langle SY, Z\rangle S(X) \quad \text{（②および } SX = -\overline{\nabla}_X N \text{ を用いた）}$$

となるため、上記の計算結果および③を①へ代入すると、

$$\langle R_{XY}(Z), W\rangle - \langle \overline{R}_{XY}(Z), W\rangle$$

$$= -\langle S[X,Y], Z\rangle\langle N, W\rangle - (\nabla_Y\langle SX, Z\rangle)\langle N, W\rangle + \langle SX, Z\rangle\langle SY, W\rangle$$
$$+ (\nabla_X\langle SY, Z\rangle)\langle N, W\rangle - \langle SY, Z\rangle\langle SX, W\rangle$$

→

Nは法ベクトル、WはVの接空間に含まれる接ベクトルであるため、
$\langle N, W\rangle = 0$ を代入して整理すると、

$$\begin{aligned}&\langle R_{XY}(Z), W\rangle - \langle \overline{R}_{XY}(Z), W\rangle \\ &\qquad = \langle SX, Z\rangle\langle SY, W\rangle - \langle SY, Z\rangle\langle SW, X\rangle\end{aligned}$$

が成り立つため、①の右辺と等しくなることを確認した ▨

P92 ($\overline{R} = \mathrm{diag}(\tau^2, \tau^2, -3\tau^2+2\sigma\tau)$ の確認)

$\langle \overline{R}(X \wedge Y), Z \wedge W \rangle := \langle \overline{R}_{XY}(Z), W \rangle$ とする。

$\overline{R}$ の行列を、基底 $(E_2 \wedge E_3, E_3 \wedge E_1, E_1 \wedge E_2)$ とすると、

$$\overline{R} = \mathrm{diag}(\tau^2, \tau^2, \underbrace{-3\tau^2 + 2\sigma\tau})$$

と表せる。

(I) 基底 $E_2 \wedge E_3$ の場合

基底における対角成分は $\langle \overline{R}(E_2 \wedge E_3), E_2 \wedge E_3 \rangle$

$$= \langle \underbrace{\overline{R}_{E_2 E_3}(E_2)}_{☆}, E_3 \rangle .$$

☆部分はリーマン曲率テンソルの定義より、

$$\overline{R}_{E_2E_3}(E_2) = \underbrace{\overline{\nabla}_{[E_2, E_3]} E_2}_{①} + \underbrace{\overline{\nabla}_{E_3}(\overline{\nabla}_{E_2} E_2)}_{②} - \underbrace{\overline{\nabla}_{E_2}(\overline{\nabla}_{E_3} E_2)}_{③}$$

①：$\overline{\nabla}_{[E_2, E_3]} E_2 = \overline{\nabla}_{\sigma E_1} E_2$ (∵ P91 より)

$= \sigma \overline{\nabla}_{E_1} E_2$ クリストッフェル記号の定義より

$= \sigma \sum_{k=1}^{3} \Gamma_{12}^{k} E_k$

$= \sigma \tau E_3 .$

②：$\overline{\nabla}_{E_2} E_2 = 0 \Rightarrow \overline{\nabla}_{E_3}(\overline{\nabla}_{E_2} E_2) = 0 .$

③：$\underbrace{[E_3, E_2]}_{= -[E_2, E_3] = -\sigma E_1} = \overline{\nabla}_{E_3} E_2 - \underbrace{\overline{\nabla}_{E_2} E_3}_{= \tau E_2 \times E_3 = \tau E_1}$ (接続の性質) より、

$\Longleftrightarrow \overline{\nabla}_{E_3} E_2 = (\tau - \sigma) E_1 .$

↘

$$\bar{\nabla}_{E_2}(\bar{\nabla}_{E_3}E_2) = (\tau-\sigma)\bar{\nabla}_{E_2}E_1$$
$$= (\tau-\sigma)\sum_{k=1}^{3}\Gamma_{21}^{k}E_k$$
$$= -\tau(\tau-\sigma)E_3 .$$

以上より、

$$\langle \bar{R}_{E_2E_3}(E_2), E_3 \rangle = \langle \sigma\tau E_3 + \tau(\tau-\sigma)E_3, E_3 \rangle$$
$$= \sigma\tau \underbrace{\langle E_3, E_3 \rangle}_{=1} + \tau(\tau-\sigma)\underbrace{\langle E_3, E_3 \rangle}_{=1}$$
$$= \tau^2 \quad \text{ok}$$

(基底 $E_3 \wedge E_1$ についても同様)

(iii) 基底 $E_1 \wedge E_2$ の場合

基底における対角成分は、$\langle \bar{R}(E_1\wedge E_2), E_1\wedge E_2 \rangle$

$$= \langle \underbrace{\bar{R}_{E_1E_2}(E_1)}_{☆}, E_2 \rangle .$$

☆部分はリーマン曲率テンソルの定義より、

$$\bar{R}_{E_1E_2}(E_1) = \underbrace{\bar{\nabla}_{[E_1, E_2]}E_1}_{①} + \underbrace{\bar{\nabla}_{E_2}(\bar{\nabla}_{E_1}E_1)}_{②} - \underbrace{\bar{\nabla}_{E_1}(\bar{\nabla}_{E_2}E_1)}_{③} .$$

①: $\bar{\nabla}_{[E_1, E_2]}E_1 = \bar{\nabla}_{2\tau E_3}E_1$ (∵ P91 より)

$$= 2\tau\bar{\nabla}_{E_3}E_1$$
$$= 2\tau\sum_{k=1}^{3}\Gamma_{31}^{k}E_k$$
$$= 2\tau(\sigma-\tau)E_2$$

② = 0.

③ : $\bar{\nabla}_{E_1}(\bar{\nabla}_{E_2}E_1) = \bar{\nabla}_{E_1}(-\tau E_3)$

$= -\tau\bar{\nabla}_{E_1}E_3$

$= -\tau(\tau E_1 \times E_3)$

$= \tau^2 E_2$.

以上より、

$\langle \bar{R}_{E_1E_2}(E_1), E_2 \rangle = \langle 2\tau(\sigma-\tau)E_2 + \tau^2 E_2, E_2 \rangle$

$= 2\tau(\sigma-\tau) + \tau^2$

$= -3\tau^2 + 2\sigma\tau$ ok

(P93) Proposition 2.1

$\mathbb{E}$上の任意のベクトル場 X、Y、Z、W に対して、

$$\langle \overline{R}_{XY}(Z), W \rangle = (k-3\tau^2)\langle R_0(X,Y)Z, W \rangle + (k-4\tau^2)\langle R_1(\xi;X,Y)Z, W \rangle$$

である。ここで R_0 と R_1 はそれぞれ、

$$R_0(X,Y)Z := \langle X,Z \rangle Y - \langle Y,Z \rangle X$$

$$R_1(V;X,Y)Z := \langle Y,V \rangle\langle Z,V \rangle X + \langle Y,Z \rangle\langle X,V \rangle V - \langle X,Z \rangle\langle Y,V \rangle V - \langle X,V \rangle\langle Z,V \rangle Y$$

である。

ベクトル場 X、Y、Z、W をそれぞれ水平成分と法成分に分解すると、

$$\begin{cases} X = \underset{\text{水平}}{\widetilde{X}} + \underset{\text{法}}{x\xi} \\ Y = \widetilde{Y} + y\xi \\ Z = \widetilde{Z} + z\xi \\ W = \widetilde{W} + w\xi \end{cases} \quad \cdots ①$$

と表せる。$\langle \overline{R}_{XY}(Z), W \rangle$ を ① および双線形性を用いて表すと、

$$\langle \overline{R}_{XY}(Z), W \rangle = \langle \overline{R}_{(\widetilde{X}+x\xi)(\widetilde{Y}+y\xi)}(\widetilde{Z}+z\xi), \widetilde{W}+w\xi \rangle$$

→

$$
\begin{aligned}
&= \langle \bar{R}_{\tilde{X}\tilde{Y}}(\tilde{Z}), \tilde{W} \rangle + w\cancel{\langle \bar{R}_{\tilde{X}\tilde{Y}}(\tilde{Z}), \xi \rangle} \\
&\cancel{+ z\langle \bar{R}_{\tilde{X}\tilde{Y}}(\xi), \tilde{W} \rangle} \cancel{+ zw\langle \bar{R}_{\tilde{X}\tilde{Y}}(\xi), \xi \rangle} \\
&\cancel{+ y\langle \bar{R}_{\tilde{X}\xi}(\tilde{Z}), \tilde{W} \rangle} + yw\langle \bar{R}_{\tilde{X}\xi}(\tilde{Z}), \xi \rangle \\
&+ yz\langle \bar{R}_{\tilde{X}\xi}(\xi), \tilde{W} \rangle \cancel{+ yzw\langle \bar{R}_{\tilde{X}\xi}(\xi), \xi \rangle} \\
&\cancel{+ x\langle \bar{R}_{\xi\tilde{Y}}(\tilde{Z}), \tilde{W} \rangle} + xw\langle \bar{R}_{\xi\tilde{Y}}(\tilde{Z}), \xi \rangle \\
&+ xz\langle \bar{R}_{\xi\tilde{Y}}(\xi), \tilde{W} \rangle \cancel{+ xzw\langle \bar{R}_{\xi\tilde{Y}}(\xi), \xi \rangle} \\
&\cancel{+ xy\langle \bar{R}_{\xi\xi}(\tilde{Z}), \tilde{W} \rangle} \cancel{+ xyw\langle \bar{R}_{\xi\xi}(\tilde{Z}), \xi \rangle} \\
&\cancel{+ xyz\langle \bar{R}_{\xi\xi}(\xi), \tilde{W} \rangle} \cancel{+ xyzw\langle \bar{R}_{\xi\xi}(\xi), \xi \rangle}.
\end{aligned}
$$

ここで、以下3パターンは反対称性によって消える.

(i) ξ が 3回 または 4回 表れる項

(ii) 第1引数 と 第2引数 が 共に ξ である項

(iii) 第3引数 と 第4引数 が 共に ξ である項

さらに、ξ が1回だけ現れる項も消える.

$\because$ 行列の非対角成分に対応するため

$$
\begin{aligned}
\therefore \langle \bar{R}_{XY}(Z), W \rangle &= \langle \bar{R}_{\tilde{X}\tilde{Y}}(\tilde{Z}), \tilde{W} \rangle + yw\langle \bar{R}_{\tilde{X}\xi}(Z), \xi \rangle \\
&+ yz\langle \bar{R}_{\tilde{X}\xi}(\xi), \tilde{W} \rangle + xw\langle \bar{R}_{\xi\tilde{Y}}(\tilde{Z}), \xi \rangle \\
&+ xz\langle \bar{R}_{\xi\tilde{Y}}(\xi), \tilde{W} \rangle \\
&= (K-3\tau^2)\left(\langle \tilde{X}, \tilde{Z} \rangle\langle \tilde{Y}, \tilde{W} \rangle - \langle \tilde{X}, \tilde{W} \rangle\langle \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle\right) \\
&+ \tau^2\left(yw\langle \tilde{X}, \tilde{Z} \rangle - yz\langle \tilde{X}, \tilde{W} \rangle - xw\langle \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle + xz\langle \tilde{Y}, \tilde{W} \rangle\right)
\end{aligned}
$$

(P92) ファイブレーションの基底の曲率 K の計算について

$\overline{M} \to M$ が リーマン沈め込み (Riemannian submersion) であるならば、M内の正規直交ペア (X, Y) によって生成される2次元平面 Π の断面曲率は、

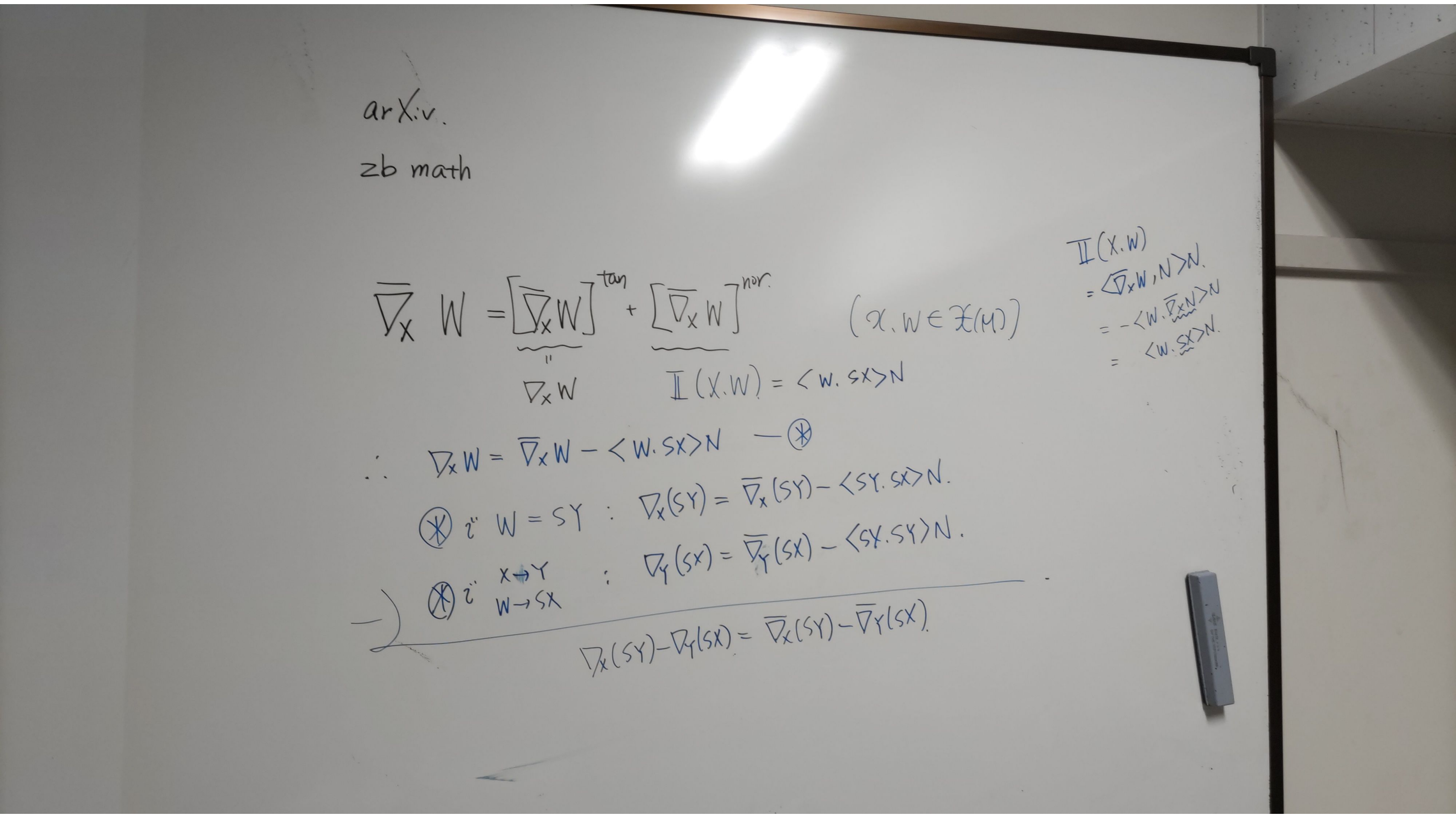
$$K(\Pi) = \overline{K}(\overline{\Pi}) + \frac{3}{4}\left\| [\overline{X}, \overline{Y}]^{v} \right\|^2$$

と表される. $\overline{X}$ と $\overline{Y}$ は それぞれ X と Y の 水平持ち上げ、$\overline{K}(\overline{\Pi})$ は $(\overline{X}, \overline{Y})$ によって生成される $\overline{\Pi}$ の断面曲率、Z^{v} は $\overline{M}$ 内のベクトル場 Z の法成分 (= nor Z) を表す.

$X = E_1$、$Y = E_2$ を代入して計算すると、　$(E_1 \perp E_2$ 、$[E_1, E_2] = 2\tau E_3)$

$$\begin{aligned} K &= \frac{\langle \overline{R}_{E_1 E_2}(E_1), E_2 \rangle}{\boxed{\langle E_1, E_1 \rangle \langle E_2, E_2 \rangle - \langle E_1, E_2 \rangle^2}_{=1}} + \frac{3}{4}\left\| (2\tau E_3)^{v} \right\|^2 \\ &= -3\tau^2 + 2\sigma\tau \qquad + \frac{3}{4} \cdot 4\tau^2 \\ &= 2\sigma\tau . \end{aligned}$$

E_3 は $\overline{M}$ の法成分



arXiv.
zb math
$\overline{\nabla}_X W = \underbrace{[\overline{\nabla}_X W]^{tan}}_{= \nabla_X W} + \underbrace{[\overline{\nabla}_X W]^{nor.}}_{\mathrm{II}(X.W) = \langle W. SX \rangle N}$ $(X. W \in \mathfrak{X}(M))$
$\mathrm{II}(X.W)$
$= \langle \overline{\nabla}_X W, N \rangle N.$
$= -\langle W. \overline{\nabla}_X N \rangle N$
$= \langle W. SX \rangle N.$
$\therefore \nabla_X W = \overline{\nabla}_X W - \langle W. SX \rangle N$ — ⊛
⊛ で $W = SY$: $\nabla_X(SY) = \overline{\nabla}_X(SY) - \langle SY. SX \rangle N.$
⊛ で $X \to Y$, $W \to SX$: $\nabla_Y(SX) = \overline{\nabla}_Y(SX) - \langle SX. SY \rangle N.$
$\nabla_X(SY) - \nabla_Y(SX) = \overline{\nabla}_X(SY) - \overline{\nabla}_Y(SX)$

arXiv … プレプリントサーバー.

zb math … 数学論文のデータベースサイト.
(math sci net)

P.100 Thm 5.

$$\boxed{\begin{aligned} &\langle R_{XY}Z, W\rangle - \langle \bar{R}_{XY}Z, W\rangle \\ =\ &\langle \mathrm{II}(X,Z), \mathrm{II}(Y,W)\rangle - \langle \mathrm{II}(X,W), \mathrm{II}(Y,Z)\rangle \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} \text{(RHS)} &= \big\langle \langle SX, Z\rangle N, \langle SY, W\rangle N \big\rangle \\ &\quad - \big\langle \langle SX, W\rangle N, \langle SY, Z\rangle N \big\rangle \\ &= \langle SX, Z\rangle\langle SY, W\rangle - \langle SX, W\rangle\langle SY, Z\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{II}(X,W) \\ &= \langle \bar{\nabla}_X W, N\rangle N \\ &= -\langle W, \bar{\nabla}_X N\rangle N \\ &= \langle W, SX\rangle N \\ &= \langle SX, W\rangle N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(X,Y) &= \langle SX, Y\rangle \\ \text{(0,2)-tensor} &= \langle \mathrm{II}(X,Y), N\rangle \end{aligned}$$

$\bar{\nabla}$: space form (E^n, S^n, H^n) のとき $M^n \subset \bar{\nabla}^{n+1}$: hyper surface

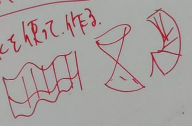
$\Leftrightarrow$ Ⓖ.Ⓒ on $(M^n, \langle\,,\rangle, h = \langle S\cdot, \cdot\rangle)$ ($\langle\,,\rangle = g$)

(曲面論の基本定理)

$$\left(\begin{aligned} g &= E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \\ h &= L\,du^2 + 2M\,du\,dv + G\,dv^2 \end{aligned}\right)$$

③ $\boxed{H^2 \times \mathbb{R},\ S^2 \times \mathbb{R}\ \text{の曲面}}$

の曲線を使って作る.



① Daniel 2009 を読む
($H^2\times\mathbb{R}$, $S^2\times\mathbb{R}$ の曲面論の基本定理)

② $H^2\times\mathbb{R}$, $S^2\times\mathbb{R}$ の曲線論の基本定理を調べる
(なければ作る)

$p: D \to \mathbb{R}^3$ ← ポアンカレの補題

$\longrightarrow \quad \mathcal{F}_1 = (p_u, p_v, \nu)$

$\longrightarrow \quad \begin{cases} \mathcal{F}_u = \mathcal{F}\mathcal{U} \\ \mathcal{F}_v = \mathcal{F}\mathcal{V} \end{cases}$

$\longrightarrow \quad \mathcal{U}_v - \mathcal{V}_u = \mathcal{U}\mathcal{V} - \mathcal{V}\mathcal{U}$

$(\mathcal{F}_{uv} = \mathcal{F}_{vu})$ $\Updownarrow$

(G), (C)

$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\text{Thm}} \quad D,\ g,\ h,\ \text{(G)(C)をみたす} \\ \Longrightarrow \ {}^{\exists} p: D \to \mathbb{R}^3 \\ \text{s.t.} \begin{cases} \text{1.f.f} = g \\ \text{2.f.f} = h \end{cases} \end{array}}$