THE NORMAL CONNECTION (法接続)

P123. Prop44 まで

※定理41 命題44

余次元 ≥ 1 の場合、法接続 $D^\perp$ はより重要になる.

- 形テンソルが $M \subset \overline{M}$ において D と $\overline{D}$ の違いを測るのと同じように、D と $D^\perp$ の違いも測る.

39. Remarks

$M \subset \overline{M}$ のテンソル $\widetilde{\mathrm{II}}$ を考える.

(i) $M \subset \overline{M}$ のとき、$V \in \mathfrak{X}(M)$ と $Z \in \mathfrak{X}(M)^\perp$ によって、$\widetilde{\mathrm{II}}$ を

$$\widetilde{\mathrm{II}}(V, Z) := \tan(\overline{D}_V Z)$$

と定義する. すなわち、

$$\overline{D}_V(Z) = \underbrace{\widetilde{\mathrm{II}}(V, Z)}_{M\text{と接する}} + \underbrace{D^\perp_V(Z)}_{M\text{と法である.}}$$

である.

$\widetilde{\mathrm{II}} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^\perp \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ は $\mathfrak{F}(M)$ - 双線形である.

ゆえに、各点 $p \in M$ において、$\widetilde{\mathrm{II}}$ は $\mathbb{R}$ - 双線形写像

$$T_p(M) \times T_p(M)^\perp \longrightarrow T_p(M)$$

である.

Proof (示したいこと: $\widetilde{\mathrm{II}}(f_1V_1 + f_2V_2, Z) = f_1\widetilde{\mathrm{II}}(V_1, Z) + f_2\widetilde{\mathrm{II}}(V_2, Z)$)

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{II}}(f_1V_1 + f_2V_2, Z) &= \tan(D^\perp_{(f_1V_1 + f_2V_2)}(Z)) \\
&= \tan(f_1 D^\perp_{V_1}(Z) + f_2 D^\perp_{V_2}(Z)) \\
&= f_1 \tan(D^\perp_{V_1}(Z)) + f_2 \tan(D^\perp_{V_2}(Z)) \\
&= f_1 \widetilde{\mathrm{II}}(V_1, Z) + f_2 \widetilde{\mathrm{II}}(V_2, Z) \quad \text{OK}
\end{aligned}$$

$D^\perp$ の $\mathfrak{F}(M)$-線形性

tan の $\mathfrak{F}(M)$-線形性

(ii) テンソル $\widetilde{\mathrm{II}}$ を定義したが、新しい情報は何も無い。

任意の $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ と $Z \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ について、

$$\langle \widetilde{\mathrm{II}}(V, Z), W \rangle = -\langle \mathrm{II}(V, W), Z \rangle \cdots (*)$$

だからである。この恒等式は $\langle Z, W \rangle = 0$ を微分することで導かれ、

$$\langle \overline{D}_V Z, W \rangle = -\langle Z, \overline{D}_V W \rangle$$

となる。

(*) の Proof

$Z \in \mathfrak{X}^{\perp}(M)$、$W \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $\langle Z, W \rangle = 0$ を V に沿って微分すると、

$$\begin{aligned} V\langle Z, W \rangle &= \langle \overline{D}_V Z, W \rangle + \langle Z, \overline{D}_V W \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \langle \overline{D}_V Z, W \rangle = -\langle Z, \overline{D}_V W \rangle \cdots ①$$

である。$\widetilde{\mathrm{II}}(V, Z) = \tan(\overline{D}_V Z)$ より、$\langle \widetilde{\mathrm{II}}(V, Z), W \rangle$ は、

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{\mathrm{II}}(V, Z), W \rangle &= \langle \tan(\overline{D}_V Z), W \rangle \\ &= \langle \overline{D}_V Z, W \rangle \cdots ② \end{aligned}$$

$W \in \mathfrak{X}(M)$

である。② の右辺に ① を代入すると、

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{\mathrm{II}}(V, Z), W \rangle &= -\langle Z, \overline{D}_V W \rangle \\ &= -\langle Z, \mathrm{nor}(\overline{D}_V W) \rangle \\ &= -\langle Z, \mathrm{II}(V, W) \rangle \\ &= -\langle \mathrm{II}(V, W), Z \rangle \end{aligned}$$

$Z \in \mathfrak{X}^{\perp}(M)$

となり、(*) と一致する。∎

(iii) 特定の $Z \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ が重要な場合、記法

$$S_Z V = -\widetilde{\mathrm{II}}(V, Z)$$

が便利な時もある。内積で考えると、

$$\langle S_Z(V), W \rangle = \langle \mathrm{II}(V, W), Z \rangle$$

self-adjoint

であり、S_Z は各点 $p \in M$ において、$T_p(M)$ 上の自己随伴な線形作用素を与える。

超曲面に対する単位法線の場合、S_Z は定義18に従い「shape operator」と呼ばれる。

Proof (示したいこと: $\langle S_Z(v), w \rangle = \langle v, S_Z(w) \rangle$)

$$\langle S_Z(V), W \rangle = \langle -\widetilde{\mathrm{II}}(V, Z), W \rangle = \langle \mathrm{II}(V, W), Z \rangle.$$

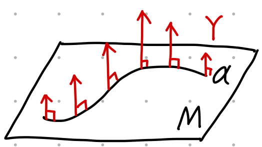
$$\begin{aligned}\langle V, S_Z(W) \rangle = \langle V, -\widetilde{\mathrm{II}}(W, Z) \rangle &= \langle Z, \mathrm{II}(W, V) \rangle \\ &= \langle \mathrm{II}(W, V), Z \rangle \\ &= \langle \mathrm{II}(V, W), Z \rangle.\end{aligned}$$

$\because$ II の対称性(補題4)

よって、$\langle S_Z(V), W \rangle = \langle V, S_Z(W) \rangle$ であるため、自己随伴である ▨

- 法接続 $D^{\perp}$ は、$M \subset \overline{M}$ 上の曲線に沿ったベクトル場に適用される。

Y を常に M と法な曲線 α 上のベクトル場とする。



このとき、法共変微分 (normal covariant derivative)

$$Y' = \frac{D^{\perp} Y}{ds}$$

は、$\overline{M}$ における共変微分 $\dot{Y} = \frac{\overline{D} Y}{ds}$ の法成分として定義される。

3章の命題18の性質は、Y' に対しても同様である。

(P65) $\alpha: I \to M$ を擬リーマン多様体 M 上の曲線とする。
このとき、誘導された共変微分 (induced covariant derivative) と呼ばれる

写像：$\mathfrak{X}(\alpha) \longrightarrow \mathfrak{X}(\alpha)$ が、以下のように存在する.

$$Z \longmapsto \frac{DZ}{dt} \quad (= Z')$$

この写像は、以下4つの性質を持つ.

(i) $a, b \in \mathbb{R}$ に対して、

$$(aZ_1 + bZ_2)' = aZ_1' + bZ_2'$$

(ii) $h \in \mathfrak{F}(I)$ に対して、

$$(hZ)' = \left(\frac{dh}{dt}\right)Z + hZ'$$

(iii) $t \in I$、$V \in \mathfrak{X}(M)$ に対して、

$$(V_\alpha)'(t) = D_{\alpha'(t)}(V)$$

(iv) $$\frac{d}{dt}\langle Z_1, Z_2\rangle = \langle Z_1', Z_2\rangle + \langle Z_1, Z_2'\rangle$$

- 命題8に対応する $\dot{Y}$ と Y' に関する等式は、

$$\dot{Y} = \underbrace{\tilde{\mathrm{II}}(\alpha', Y)}_{M\text{と接する}} + \underbrace{Y'}_{M\text{と法}}$$

と表せる.

P119

40. Lemma (一意性の確認)

α を $M \subset \overline{M}$ 上の曲線とする.
y を $\alpha(a)$ における M と法なベクトルとするとき、α 上には
$Y(a) = y$ を満たす法平行なベクトル場 Y が一意に存在する.

Proof

※適合(adapted)座標系と射影 nor を用いることで、α の部分区間上で、
各点において法空間の基底を与える法ベクトル場

$$E_1, E_2, \cdots, E_k$$

を見つけることができる.

※座標系によって「部分多様体」は座標を固定することで表される.

somewhat work　　　　　　　　　　　　　　patch
さらに、多少の作業でこれらの法ベクトル場を滑らかに繋ぎ合わせることで、
曲線 α 全体で定義された法ベクトル場を得ることができる。

今、ベクトル場 $Y := \sum_i f_i E_i$、ベクトル $y := \sum_i C_i E_i \big|_{\alpha(a)}$ とそれぞれ表す。さらに、
$E_i' = \sum_j h_{ij} E_j$ $(j=1,2,\dots,k)$ とする。このとき、Y' は

$$
\begin{aligned}
Y' &= \sum_i f_i' E_i + \sum_i f_i E_i' \\
&= \sum_i f_i' E_i + \sum_i \Big\{ f_i \Big(\sum_j h_{ij} E_j \Big) \Big\} \\
&= \sum_i \Big\{ f_i' E_i + f_i \sum_j h_{ij} E_j \Big\} \\
&= \sum_i \Big(f_i' + \sum_j h_{ij} f_j \Big) E_i
\end{aligned}
$$

添字を入れ替え

と表せる。ここで、$f_1, \dots, f_k$ を線形微分方程式

$$
f_i' + \sum_j h_{ij} f_j = 0
$$
$$
f_i(a) = C_i \qquad (i = 1, \dots, k)
$$

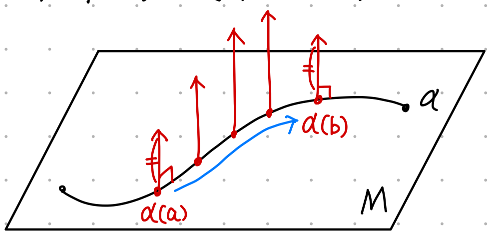
の一意な解とする。この解 (f_i) は開区間 I 上の全てで定義されている。つまり、
$Y(\alpha(a)) = \sum f_i(a) E_i = \sum C_i E_i = y$ が成り立つ。
よって、$Y = \sum_i f_i E_i$ が求めるべきベクトル場である。∎

- 補題内の表記では、$Y(b)$ は y の平行移動であり、
「3章の補題20に似た証明」により、法平行移動 (normal parallel translation)

$$
y \longrightarrow Y(b)
$$

平行移動は線形等長変換である。

※ が、線形等長変換 $P : T_{\alpha(a)}(M)^{\perp} \longrightarrow T_{\alpha(b)}(M)^{\perp}$ であることを示している。



したがって、法フレームの法平行移動によって、曲線 α 上の法平行フレーム場が得られる。

※の Proof

(i) 線形性を示す

法ベクトル $y_1, y_2 \in T_{\alpha(a)}(M)^{\perp}$ に対して、対応する平行移動を Y_1, Y_2 とすると、

Y_1+Y_2 も 法平行である。よって、

$$P(y_1+y_2) = (Y_1+Y_2)(b) = Y_1(b) + Y_2(b) = P(y_1) + P(y_2) \quad \cdots ①$$

が成り立つ。 また、スカラー $c \in \mathbb{R}$ に対して cY も 法平行である。このとき、

$$P(cy) = (cY)(b) = cY(b) = cP(y) \quad \cdots ②$$

が成り立つ。①、② より P は 線形写像である。

(ii) 等長性 を 示す。

補題20 と 同様に、法ベクトル $y_1, y_2 \in T_{\alpha(a)}(M)^{\perp}$ に対して、対応する平行移動を Y_1、Y_2 とする。
このとき、内積について以下が成り立つ。

$$\frac{d}{dt}\langle Y_1(t), Y_2(t)\rangle = \langle Y_1'(t), Y_2(t)\rangle + \langle Y_1(t), Y_2'(t)\rangle = 0$$

∵命題18 (4)

∵平行の定義より
$Y' = 0 \Rightarrow \langle Y', \cdot \rangle = 0$

よって、内積 $\langle Y_1(t), Y_2(t)\rangle$ は t に依存せず一定である。
初期条件 $Y_1(a) = y$ より、

$$\langle y_1, y_2\rangle = \langle Y_1(a), Y_2(a)\rangle = \langle Y_1(b), Y_2(b)\rangle = \langle P(y_1), P(y_2)\rangle$$

が成り立つ。したがって、P は 内積を保つ 等長変換 である。

以上より、P は線形等長変換 である ■

• 補題7に類似した証明によって、「法接続は対等長変換によって保存されること」が分かる。
pair-isometry

よって、$D^{\perp}$と補助概念 は $M\subset\overline{M}$の外在的な幾何の性質に属している。
subsidiary notion

P102

$M\subset\overline{M}$ から $N\subset\overline{N}$ への対等長変換 は 形テンソル を 保存する。

すなわち、$\forall v, w\in T_p(M)$、$p\in M$ に対して

$$d\phi(\mathrm{II}(v, w)) = \mathrm{II}(d\phi(v), d\phi(w))$$

が成り立つ。

Proof (〜〜部分の証明)

(i) 法接続は対等長変換によって保存される事を示す

(示したいこと：$d\phi(D^{\perp}_v(w)) = D^{\perp}_{d\phi(v)}(d\phi(w))$)

補題7より、

$$d\phi(\mathrm{II}(v, w)) = \mathrm{II}(d\phi(v), d\phi(w)) \quad \cdots ①$$

$$d\phi(\overline{D}_v(w)) = \overline{D}_{d\phi(v)}(d\phi(w)) \quad \cdots ②$$

である。

$\overline{D}_v(w) = \tilde{\mathrm{II}}(v, w) + D^{\perp}_v(w)$ に等長変換ϕを適用させると、

$$d\phi(\overline{D}_v(w)) = d\phi(\tilde{\mathrm{II}}(v, w) + D^{\perp}_v(w))$$

$d\phi$は接/法成分を保つ

$$= d\phi(\tilde{\mathrm{II}}(v, w)) + d\phi(D^{\perp}_v(w)) \quad \cdots ③$$

となる。①と②を③に代入すると、

$$\overline{D}_{d\phi(v)}(d\phi(w)) = \underbrace{\tilde{\mathrm{II}}(d\phi(v), d\phi(w))}_{\text{接成分}} + \underbrace{d\phi(D^{\perp}_v(w))}_{\text{法成分}}$$

となり、$d\phi(D^{\perp}_v(w))$ は N における法接続 $D^{\perp}$の対応する成分であることが示され、

$D^{\perp}$が対等長変換で保存される。つまり

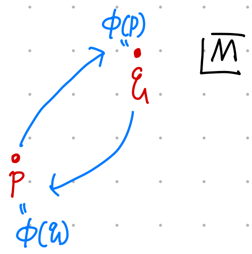
$$d\phi(D^{\perp}_v(w)) = D^{\perp}_{d\phi(v)}(d\phi(w))$$

である。∎

CONGRUENCE THEOREM (合同定理)

→ 初等ユークリッド幾何と同様に、

擬リーマン多様体 $\overline{M}$ における 2つの対象が合同である



$\Longleftrightarrow$ $\overline{M}$ の等長変換が一方を他方へ写す

である.

- 特に、$\overline{M}$ の部分多様体 M_1 と M_2 は、「$\overline{M}$ の等長変換 ψ が存在し、$\psi|_{M_1}$ が M_1 から M_2 への等長変換となる」ときに合同である.

→ この定義により、M_1 と M_2 は同一の内在的/外在的な幾何的性質を持つ.

$M = \mathbb{R}^n$ とした場合、

「等長な部分多様体が合同である」 $\Longleftrightarrow$ 「同じ形テンソルを持つ」

が成立することを定理41で示していく。

41. Theorem

$\phi : M_1 \to M_2$ を $\mathbb{R}^n_\nu$ の擬リーマン部分多様体の等長変換とする. このとき、

「ある等長変換 $\tilde{\phi}$ が存在して $\tilde{\phi}|_{M_1} = \phi$ を満たす」

$\Longleftrightarrow$ 点 $o \in M_1$ において以下の性質を満たす線形等長変換 $F_o : T_o(M_1)^{\perp} \longrightarrow T_{\phi(o)}(M_2)^{\perp}$ が存在する.

- α が M_1 内の点 o から始まる任意の曲線であるとき、各 s に対して次の線形等長変換が成り立つ.

$$F_{\alpha(s)} = P_{\phi(\alpha)} \circ F_o \circ P_\alpha^{-1} : T_{\alpha(s)}(M_1)^{\perp} \longrightarrow T_{\phi(\alpha(s))}(M_2)^{\perp}$$

(P は法平行移動)

$F_{\alpha(s)}$ は形テンソルを保つ、つまり

$$F_{\alpha(s)}(\mathrm{I\!I}_1(v, w)) = \mathrm{I\!I}_2(d\phi(v), d\phi(w)) \quad \left(\forall v, w \in T_{\alpha(s)}(M_1)\right)$$

である.

Proof

形テンソルに関する条件は必要条件である。なぜなら法平行移動と形テンソルが外在的幾何に属しているからである。
十分条件($\Leftarrow$)を証明するために、曲線 α を上記のように取る。

(a) Z を M_1 と法な α 上の法ベクトル場とするとき、$(F_\alpha Z)(s) = F_{\alpha(s)} Z(s)$ は M_2 と法な $\phi \circ \alpha$ 上の法ベクトル場を定義する。

$F_{\alpha(s)}$ の定義から、Z が法平行であれば $F_\alpha Z$ も法平行である事が分かる。
任意の Z を α 上の法平行なフレーム場で表すことにより、

$$(F_\alpha Z)' = F_\alpha(Z')$$

が成り立つ。

Proof (〰〰 部分の証明)

「Z が法平行である」$\Longrightarrow$「$F_\alpha(Z)$ が法平行である」を示す

Z が法平行であるため、共変微分 $\frac{DZ}{ds} = 0 \cdots ①$
仮定より F_α は線形等長変換であるため、

$$F_\alpha \text{ は線形等長変換である} \iff F_\alpha \text{ は接続を保存する}$$
$$\iff \underline{\frac{D}{ds}(F_\alpha(Z)) = F_\alpha\left(\frac{DZ}{ds}\right)}$$

である。＿＿部分について、①より

$$\frac{D}{ds}(F_\alpha(Z)) = F_\alpha(0) = 0$$

となるため、$F_\alpha(Z)$ が法平行であることを示した ■

Proof (〰〰 部分の証明)

Z を法平行フレーム場 $\{E_i\}$ を用いて表すと、スカラー値関数 f_i を用いて、

$$Z = \sum_{i=1} f_i E_i \qquad \text{(P119 補題40 より)}$$

と表せる。Z の微分 Z' は、

$$Z' = \sum_{i=1} f_i' E_i + \sum_{i=1} f_i (E_i)'$$

と表せる。E_i は法平行フレーム場であるため $(E_i)' = 0$ として良く、

$$Z' = \sum_{i=1} f_i' E_i \quad \cdots ①$$

となる。①より $F_\alpha(Z')$ は、

$$F_\alpha(Z') = F_\alpha\left(\sum_{i=1} f_i' E_i\right)$$

F_α の線形性

$$= \sum_{i=1} f_i' F_\alpha(E_i)$$

$$\because \left(F_\alpha(Z)\right)' = \sum_{i=1} f_i' F_\alpha(E_i) + \sum_{i=1} f_i \left(F_\alpha(E_i)\right)' = \sum_{i=1} f_i' F_\alpha(E_i)$$

$F_\alpha(E_i)$ は曲線に沿って法平行であるため、ビ分は 0. (P119)

$$= \left(F_\alpha(Z)\right)'$$

であるため、〜〜 を示した。

(b) F_α が形テンソル II を保存(preserve)するので、$\widetilde{\mathrm{II}}$ も保存する事が分かる。すなわち、

$$d\phi\left(\widetilde{\mathrm{II}}_1(V, Z)\right) = \widetilde{\mathrm{II}}_2\left(d\phi(V), F_\alpha(Z)\right)$$

である。ここで、V は M と接して、Z は M と法なベクトル場である。(〜〜 を確認するために、定理内の II の式の両辺に $d\phi(W)$ とのスカラー積を取り、Remark 39 (2) を用いる。)

Proof (〜〜 部分の証明)

(i) $d\phi\left(\widetilde{\mathrm{II}}_1(V, Z)\right)$ と $d\phi(W)$ の内積を考える

ϕ が等長変換であることから、

$$\left\langle d\phi\left(\widetilde{\mathrm{II}}_1(V, Z)\right), d\phi(W)\right\rangle = \left\langle \widetilde{\mathrm{II}}_1(V, Z), W\right\rangle \cdots ①$$

である。さらに Remark 39 (2) より $\left\langle \widetilde{\mathrm{II}}(V, Z), W\right\rangle = -\left\langle \mathrm{II}(V, W), Z\right\rangle$ であるため、①の右辺に代入して

$$\left\langle d\phi\left(\widetilde{\mathrm{II}}_1(V, Z)\right), d\phi(W)\right\rangle = -\left\langle \mathrm{II}_1(V, W), Z\right\rangle \cdots ②$$

となる。

(ii) $\widetilde{\mathrm{II}}_2\left(d\phi(V), F_\alpha(Z)\right)$ と $d\phi(W)$ の内積を考える。

$$\left\langle \widetilde{\mathrm{II}}_2\left(d\phi(V), F_\alpha(Z)\right), d\phi(W)\right\rangle = -\left\langle \mathrm{II}_2\left(d\phi(V), d\phi(W)\right), F_\alpha(Z)\right\rangle$$

$= -\langle F_\alpha^{-1} \circ \mathrm{II}_2(d\phi(v), d\phi(w)), Z \rangle$　∵ F_α^{-1} は等長変換 (P58)

$= -\langle \mathrm{II}_1(V, W), Z \rangle$ … ③　∵ 仮定より $F_\alpha(\mathrm{II}_1(V,W)) = \mathrm{II}_2(d\phi(v), d\phi(w))$

② と ③ の右辺が一致するので、

$$\langle d\phi(\tilde{\mathrm{II}}_1(V,Z)), d\phi(W) \rangle = \langle \tilde{\mathrm{II}}_2(d\phi(V), F_\alpha(Z)), d\phi(W) \rangle$$

よって、$d\phi(\tilde{\mathrm{II}}_1(V,Z)) = \tilde{\mathrm{II}}_2(d\phi(V), F_\alpha(Z))$ である ■

(c) 各 s に対して、$d\phi + F_{\alpha(s)}$ は $T_{\alpha(s)}(R^n_\nu)$ から $T_{\phi\alpha(s)}(R^n_\nu)$ への well-defined な線形等長変換である. X が α 上の R^n_ν ベクトル場であるならば、$(d\phi + F_\alpha)X$ は $\phi \circ \alpha$ 上の R^n_ν ベクトル場である.

ϕ: 等長変換

X が R^n_ν 上で平行であるならば、$(d\phi + F_\alpha)X$ も平行であることを主張していく:

$\dot{X}$ を α に沿った R^n_ν の共変微分とする. このとき、

$\tilde{\mathrm{II}}: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^\perp \to \mathfrak{X}(M)$

$\mathrm{II}: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)^\perp$

$$0 = \dot{X} = (\tan X)^\cdot + (\mathrm{nor} X)^\cdot \quad \cdots ①$$

tan と nor は一次独立 $\Rightarrow$ tan = 0, nor = 0

は、以下 2つの等式

$$\begin{cases} (\tan X)' + \tilde{\mathrm{II}}_1(\alpha', \mathrm{nor} X) = 0 \\ \mathrm{II}_1(\alpha', \tan X) + (\mathrm{nor} X)' = 0 \end{cases} \quad \cdots ②$$

が与えられる.

(∵ P119 より $\dot{Y} = \underbrace{\tilde{\mathrm{II}}(\alpha', Y)}_{M\text{と接する}} + \underbrace{Y'}_{M\text{と法}}$, $Y' = \frac{D^\perp Y}{ds}$　(YはMと法)

P102 より $\dot{Y} = \underbrace{Y'}_{M\text{と接する}} + \underbrace{\mathrm{II}(\alpha', Y)}_{M\text{と法}}$, $Y' = \frac{DY}{ds}$　(YはMと接する)　である事を用いる?)

$$(\tan X)^\cdot = (\tan X)' + \mathrm{II}(\alpha', \tan X)$$

よって、$((d\phi + F_\alpha)X)^\cdot$ は

$$((d\phi + F_\alpha)X)^\cdot = (d\phi \tan X)^\cdot + (F_\alpha \mathrm{nor} X)^\cdot$$

$X = \tan X + \mathrm{nor} X$ および
接成分に $d\phi$ を、接成分を F_α を適用する.

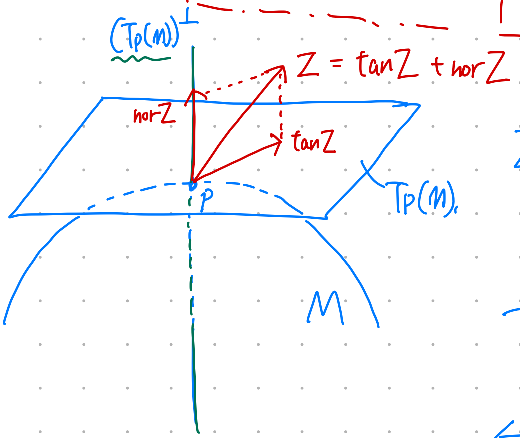
※ (P119) $\dot{Y} = \tilde{\mathrm{II}}(\alpha', Y) + Y'$ に、$Y = F_\alpha(\mathrm{nor} X)$ を代入

※ (P102) $\dot{Y} = Y' + \mathrm{II}(\alpha', Y)$ に、$Y = d\phi(\tan X)$ を代入

tan　　　　nor

$$(\tan X)^\circ = (\tan X)' + \mathrm{II}(\alpha', \tan X) = 0$$

$$(\mathrm{nor}\, X)^\circ = \widetilde{\mathrm{II}}(\alpha', \mathrm{nor}\, X) + (\mathrm{nor}\, X)' = 0$$



$$Z = 0 \iff \begin{cases} \tan Z = 0 \\ \mathrm{nor}\, Z = 0 \end{cases}$$

代入すれば良い.

$$T_p(\overline{M}) = (T_p(M)) \underset{\text{直和}}{\oplus} (T_p(M))^\perp$$

$$\iff \begin{cases} T_p(\overline{M}) = T_p(M) + T_p(M)^\perp \\ T_p(M) \cap T_p(M)^\perp = \{0\} \end{cases}$$

$$= \underline{(d\phi \tan X)' + \mathrm{II}_2(d\phi(\alpha'), d\phi \tan X)}$$
$$+ \underline{\widetilde{\mathrm{II}}_2(d\phi(\alpha'), F_\alpha \operatorname{nor} X) + (F_\alpha \operatorname{nor} X)'} \cdots ③$$

である。(a)、(b) および 等長変換の 性質より、③ の 右辺は

$$d\phi((\tan X)' + \underbrace{\widetilde{\mathrm{II}}_1(\alpha', \operatorname{nor} X)}_{\because (b)}) + F_\alpha(\underbrace{\mathrm{II}_1(\alpha', \tan X)}_{\because 仮定} + (\operatorname{nor} X)') \cdots ④$$

となる。方程式 $\dot{X} = 0$ は ④ の値が 0 であることを 示している。

$\therefore (d\phi + F_\alpha) X$ も 平行である。

P.124

(d) 曲線 $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^n_\nu$ が $\overbrace{\alpha(0) = \beta(0),\ \alpha'(0) = \beta'(0)}^{始点と初速度が一致}$ を満たし、任意の s に対して $\alpha''(s) \parallel \beta''(s)$ (つまり、 遠隔平行性 distant parallelism) であるならば、$\alpha = \beta$ である。

∵ 実際、この平行性は α と β の 自然な座標 が

$$\frac{d^2(u^i \circ \alpha)}{ds^2} = \frac{d^2(u^i \circ \beta)}{ds^2}$$

を満たすことを意味する。したがって、この 2階微分方程式 の 一般解

$$u^i \circ \alpha - u^i \circ \beta = a_i s + b_i \cdots ① \ (a_i, b_i : 積分定数)$$

が 任意の i で 成り立つ。初期条件 より $\alpha(0) = \beta(0)$、$\alpha'(0) = \beta'(0)$ であるため $a_i = b_i = 0$ である。…②

$\therefore$ ①、② より $u^i \circ \alpha = u^i \circ \beta$ となり、$\alpha = \beta$ である。

(e) 等長変換 は部分多様体 の 内在的/外在的 幾何 を 保存するため、定理における点 $o \in M_1$ および $\underline{\phi(o) \in M_2 が 共に \mathbb{R}^n_\nu の 原点 にあると仮定しても}$ 一般性を失わない。
∵ 空間内のどの点も任意 に 原点へ平行移動 できる。

(f) $\tilde{\Phi}$ を $d\phi_0 + F_0 : T_0(\mathbb{R}^n_\nu) \to T_0(\mathbb{R}^n_\nu)$ に対応する $\mathbb{R}^n_\nu$ の線形等長変換とする.
このとき、$d\tilde{\Phi} = d\phi_0 + F_0$ である.

$\tilde{\phi}|_{M_1} = \phi$ を示す. （$\Leftarrow$ を示す）

$p \in M_1$、$0 \in \mathbb{R}^n_\nu$ のとき、0 から p への曲線 α を考える. $\phi \circ \alpha = \tilde{\Phi} \circ \alpha$ を示せば良い.
(e) より $0 \in M_1$ および $\phi(0) \in M_2$ が原点にあると仮定しているので、

$$\phi(0) = 0 = \tilde{\Phi}(0) \quad \cdots ①$$ （始点が一致）

である。さらに

$$d\tilde{\Phi}|_{T_0(M)} = d\phi \quad \cdots ②$$ （速度が一致）

であるため、①と②より 2つの曲線 $\phi \circ \alpha$ と $\tilde{\Phi} \circ \alpha$ は同じ初期位置と初期速度を持つ.

$\ddot{\alpha}$ は $\mathbb{R}^n_\nu$ 上の加速度を表すとすると、$(\phi \circ \alpha)^{\cdot\cdot}$ は

$$\begin{aligned}(\phi \circ \alpha)^{\cdot\cdot} &= (\phi \circ \alpha)'' + \mathrm{I\!I}_2(d\phi(\alpha'), d\phi(\alpha')) \\ &= d\phi(\alpha'') + F_\alpha \mathrm{I\!I}_1(\alpha', \alpha') \\ &= (d\phi \circ F_\alpha)(\ddot{\alpha})\end{aligned}$$

$\because$ 系9 $\ddot{\alpha} = \alpha'' + \mathrm{I\!I}(\alpha', \alpha')$

$\because$ P11 および 定理41 の仮定

$\because$ $\mathrm{I\!I}(\alpha', \alpha') = \ddot{\alpha}$

である. A_s を $T_0(\mathbb{R}^n)$ 内で $\ddot{\alpha}(s)$ と遠隔平行なベクトルとする. (c) より、

$$\ddot{\alpha}(s) \parallel A_s \Rightarrow (d\phi + F_{\alpha(s)})(\ddot{\alpha}(s)) \parallel (d\phi_0 + F_0)(A_s)$$

である. 後者 $(d\phi_0 + F_0)(A_s)$ のベクトルは $d\tilde{\Phi}(A_s)$ である. $\tilde{\Phi}$ は線形等長変換のため、

$$d\tilde{\Phi}(A_s) \parallel d\tilde{\Phi}(\ddot{\alpha}(s))$$ （$\tilde{\Phi}$ は平行性を保つ）

となる. ここで 2番目のベクトル $d\tilde{\Phi}(\ddot{\alpha}(s))$ は $(\phi \circ \alpha)^{\cdot\cdot}(s)$ である.
その結果、任意の s に対して $(\phi \circ \alpha)^{\cdot\cdot}(s) \parallel (\tilde{\Phi} \circ \alpha)^{\cdot\cdot}(s)$ が成り立つ.

したがって、(d) より $\phi \circ \alpha = \tilde{\Phi} \circ \alpha$ が成り立つ. ▨

ISOMETRIC IMMERSIONS (等長~~埋め~~はめ込み)

本章の(今までの)結果の適用範囲は次の方法で拡張できる.

42. Definition

M と $\overline{M}$ をそれぞれ計量テンソル g および $\overline{g}$ を持つ擬リーマン多様体とする.

M の $\overline{M}$ への等長~~埋め~~はめ込み(isometric immersion)とは、$\phi^*(\overline{g}) = g$ を満たす滑らかな~~埋め~~はめ込みの事である.

$\forall p \in M$, $d\phi_p$ が単射.

等長埋め込み(isometric imbedding)とは単射(one-to-one)な等長~~埋め~~はめ込みである.

- 後者の概念(notion)(等長埋めこみ)には擬リーマン部分多様体 $M \subset \overline{M}$ の概念が含まれていて、包含写像 $j : M \subset \overline{M}$ が等長埋め込みであることを意味する.

擬リーマン部分多様体を研究するための手法は、ほとんどの場合、(包含写像) j を ϕ に置き換えることで、一般的な場合に適用できる. 写像上のベクトル場の概念に関しては、$\overline{\mathfrak{X}}(M)$ は $\mathfrak{X}(j)$ と見なせる. このようにして $\overline{\mathfrak{X}}(M)$ は $\mathfrak{X}(\phi)$ に置き換えられ、同様に $\mathfrak{X}^{\perp}(M)$ は以下で置き換えられる:

∴ M 上のベクトル場が j によって $\overline{M}$ 上のベクトル場と見なされる

$$\mathfrak{X}^{\perp}(\phi) = \{ Z \in \mathfrak{X}(\phi) \mid Z_p \perp d\phi(T_p(M)) \ , \forall p \in M \}$$

→ ϕ によって M 上の法ベクトルが $\overline{M}$ に移され、$d\phi(T_p(M))$ と直交するベクトル場全体として $\mathfrak{X}^{\perp}(M)$ が捉えられている

43. Lemma

$\phi : M \to \overline{M}$ を等長埋め込みとする. このとき、

(i) 各点 $p \in M$ に対して、$\phi|_U$ が埋め込みであるような近傍 U が存在する.

(ii) $\phi(U)$ に対して誘導された写像 $U \to \phi(U)$ が等長変換となるような計量テンソルが割り当てられると、$\phi(U)$ は $\overline{M}$ の擬リーマン多様体となる.

Proof

(i) 1章の補題33の直接的な結果である.

→ $\phi : M^m \to N^n$ を滑らかな写像として、p を M の点とする. 以下3つは同値である.

(i) $d\phi_p$ は単射である.

(ii) $d\phi_p$ のヤコビ行列は、任意の座標系の選択に対してランク m を持つ.

(iii) $y^1, \cdots, y^n$ が $\phi(p)$ における N の座標系であるとき、整数

$$1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_m \leq n$$

が存在して、写像

$$y^{i_1} \circ \phi, \cdots, y^{i_m} \circ \phi$$

が $p \in M$ の近傍で座標系を形成する.

仮定より ϕ は等長埋め込みであるため、各点 $p \in M$ に対して $d\phi_p$ が単射である.（補題33 (1)）
1章補題 33 (1) $\Longrightarrow$ (3) より、M の近傍 U で座標系を形成する.

$\phi : M \to N$ が埋め込みである.

(ii) $v, w \in T_p(M)$、$p \in U$ のとき、ϕ は等長変換であるため内積 $\langle d\phi(v), d\phi(w) \rangle$ は $\langle v, w \rangle$ と同じ値を持つ ($g(v, w) = \bar{g}(d\phi(v), d\phi(w))$).

計量テンソル $\bar{g}$ が $\phi(U)$ 上に滑らかに割り当てられるので、$\phi(U)$ は $\bar{M}$ の擬リーマン部分多様体である. ∎

TWO-PARAMETER MAPS (2パラメータ写像)

- $\mathbb{R}^2$ の開集合 $\mathscr{D}$ が以下の区間条件を満たすとする:

  水平線または垂直線が $\mathscr{D}$ と区間内で交わる

このとき、2パラメータ写像とは滑らかな写像 $X: \mathscr{D} \to M$ である。したがって、X は2つの絡み合った (interweave) パラメータ曲線の族から構成される。具体的に、

- u パラメータ曲線 $v = v_0$ に対する X は、 $u \longmapsto X(u, v_0)$
- v パラメータ曲線 $u = u_0$ に対する X は、 $v \longmapsto X(u_0, v)$

である。偏微分 (partial derivative) は、

$$X_u = dx(\partial u)$$
$$X_v = dx(\partial v)$$

であり、X 上のベクトル場となる。明らかに (Evidently)、$X_u(u_0, v_0)$ は u パラメータ曲線 $v = v_0$ の u_0 における速度ベクトルであり、$X_v(u_0, v_0)$ に対しても対称的に成り立つ。

Proof

固定された $v = v_0$ に対して、写像 $\gamma(u)$ を

$$\gamma(u) := X(u, v_0)$$

を定義する。(u 方向に沿って動く曲線)

$X_u(u, v_0)$ は座標 (u, v_0) における u の偏微分であるため、

$$X_u(u, v_0) = \frac{\partial X}{\partial u}(u, v_0) = \frac{d\gamma}{du}$$

となるため、X_u が速度ベクトルとなることが分かる

γ の変数を u から v に置き換えた $\eta(v) := X(u_0, v)$ に対しても同様の議論ができるため、$X_v(u_0, v)$ に対しても対称的に成り立つ。∎

- X が座標系 $(x^1, \cdots, x^n)$ の定義域に含まれている場合、その座標関数

$$X^i = x^i \circ X \quad (i = 1, \cdots, n)$$

は $\mathscr{D}$ 上の実数値関数であり、偏微分 X_u と X_v はそれぞれ、

$$X_u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X^i}{\partial u} \partial_i, \qquad X_v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X^i}{\partial v} \partial_i \quad \cdots ①$$

である。

- M が擬リーマン多様体であると仮定する。Z が x 上の滑らかなベクトル場であれば、その偏共変微分 (partial covariant derivatives) は、

$$Z_u = \frac{DZ}{\partial u} \quad (u\text{パラメータ曲線に沿った } Z \text{ の共変微分})$$

$$Z_v = \frac{DZ}{\partial v} \quad (v\text{パラメータ曲線} \quad \text{〃} \quad)$$

である。明らかに (Explicitly)、$Z_u(u_0, v_0)$ は曲線 $u \longmapsto x(u, v_0)$ におけるベクトル場 $u \longmapsto Z(u, v_0)$ の u_0 における共変微分である。

∵ 上記の $Z_u = \frac{DZ}{\partial u}$ の定義より、Z_u は u パラメータ曲線に沿った Z の共変微分である。

u_0 は u の定義域に含まれている成分であるため、$u = u_0$ を代入した $\left.\frac{DZ}{\partial u}(u, v_0)\right|_{u=u_0} = Z_u(u_0, v_0)$ も Z の共変微分である。

• 座標で表すと $Z = \sum Z^i \partial_i$ であり、各 $Z^i = Z(x^i)$ は $\mathcal{D}$ 上の実数値関数である。
したがって、3章の命題18より、

$$Z_u = \sum_{k=1} \left\{ \frac{\partial Z^k}{\partial u} + \sum_{i,j=1} \Gamma^k_{ij} Z^i \frac{\partial x^j}{\partial u} \right\} \partial_k \quad \cdots ②$$

である。特別な場合として $Z = x_u$ のとき、導関数 $Z_u = x_{uu}$ は u パラメータ曲線の加速度を与え、x_{vv} は v パラメータ曲線の加速度を与える。

44. Proposition

(1) x が擬リーマン多様体 M への2パラメータ写像とする。このとき、
$x_{uv} = x_{vu}$ である。

(2) Z が x 上のベクトル場であるとき、

$$\underline{Z_{uv}} - \underline{Z_{vu}} = \underline{R(x_u, x_v)Z}$$

である。R は M のリーマン曲率テンソルである。

Proof

(1) x_u と x_v について、上記①の座標表記に従い、②の Z を x_v に置き換えると、

$$x_{vu} = \sum_k \left\{ \frac{\partial x^k}{\partial v \partial u} + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial v} \frac{\partial x^j}{\partial u} \right\} \partial_k$$

となる。この公式は i と j に関して対称であるため、u と v に関して対称である。∎

(2) 座標計算により $Z_{uv} - Z_{vu}$ は 3章の補題38 のように曲率を生じる

$$Z_u = \sum_{k=1} \left\{ \frac{\partial Z^k}{\partial u} + \sum_{i,j=1} \Gamma^k_{ij} Z^i \frac{\partial x^j}{\partial u} \right\} \partial_k$$

$$x_u = \sum_{i=1} \frac{\partial x^i}{\partial u} \partial_i$$

$$x_v = \sum_{j=1} \frac{\partial x^j}{\partial v} \partial_j$$

$$Z = \sum_{k=1} Z^k \partial_k$$

座標系 $(x^1, \cdots, x^n)$ の座標近傍において、

$$R(\partial_k, \partial_\ell)(\partial_j) = \sum_{i=1} R^i_{jk\ell} \partial_i$$

である。ここで R は、

$$R^i_{jk\ell} = \frac{\partial}{\partial x^\ell} \Gamma^i_{jk} - \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma^i_{j\ell}$$

$$\Gamma^i_{\ell m} \Gamma^m_{jk} - \sum_{m=1} \Gamma^i_{km} \Gamma^m_{j\ell}$$

で表され

Z_{uv} と Z_{vu} を求めるために、$Z_u = \sum_k \left\{ \frac{\partial Z^k}{\partial u} + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij} Z^i \frac{\partial X^j}{\partial u} \right\} \partial_k$ を v で微分する。

共変

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial Z^k}{\partial u}\right) = \frac{\partial^2 Z^k}{\partial v \partial u}$$

☆ $D_{\partial_u}(\partial_k) = \sum_i \Gamma^i_{uk} \partial_i$ (P62)

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\Gamma^k_{ij} Z^i \frac{\partial X^j}{\partial u}\right) = \cancel{\frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial v} Z^i \frac{\partial X^j}{\partial u}} + \Gamma^k_{ij} \frac{\partial Z^i}{\partial v} \frac{\partial X^j}{\partial u} + \Gamma^k_{ij} Z^i \frac{\partial^2 X^j}{\partial u \partial v}$$

であるため、Z_{uv} は

$$Z_{uv} = \sum_k \left\{ \frac{\partial^2 Z^k}{\partial u \partial v} + \sum_{i,j} \left(\cancel{\frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial v} Z^i \frac{\partial X^j}{\partial u}} + \Gamma^k_{ij} \frac{\partial Z^i}{\partial v} \frac{\partial X^j}{\partial u} + \Gamma^k_{ij} Z^i \frac{\partial^2 X^j}{\partial u \partial v} \right) \right\} \partial_k.$$

同様に、Z_{vu} は

$$Z_{vu} = \sum_k \left\{ \frac{\partial^2 Z^k}{\partial v \partial u} + \sum_{i,j} \left(\cancel{\frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial u} Z^i \frac{\partial X^j}{\partial v}} + \Gamma^k_{ij} \frac{\partial Z^i}{\partial u} \frac{\partial X^j}{\partial v} + \Gamma^k_{ij} Z^i \frac{\partial^2 X^j}{\partial v \partial u} \right) \right\} \partial_k.$$

である。よって $Z_{uv} - Z_{vu}$ は

$$Z_{uv} - Z_{vu} = \sum_k \sum_{i,j} \left(\cancel{\frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial v} Z^i \frac{\partial X^j}{\partial u}} - \cancel{\frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial u} Z^i \frac{\partial X^j}{\partial v}} + \Gamma^k_{ij} \frac{\partial Z^i}{\partial v} \frac{\partial X^j}{\partial u} - \Gamma^k_{ij} \frac{\partial Z^i}{\partial u} \frac{\partial X^j}{\partial v} \right) \partial_k$$

（2階微分は順番に依らないため、—— 部分と —— 部分が打ち消し合う）

☆ リーマン曲率テンソルと一致しない？

$$R(X_u, X_v)Z \overset{P74}{=} D_{[X_u X_v]}Z - \left(D_{X_u}(D_{X_v}(Z)) - D_{X_v}(D_{X_u}(Z))\right)$$

$$= D_{[X_u X_v]}Z - \underbrace{[D_{X_u}\ D_{X_v}]}_{\parallel}Z$$

(P32) $\sum_{i,j}\left((D_{X_u})^i \frac{\partial D_{X_v}{}^j}{\partial x^i} - (D_{X_v})^i \frac{\partial D_{X_u}{}^j}{\partial x^i} \right) \partial_j$

☆ 火午前中 or 水午前中

打合せ
@熊本