3次元ドジッター空間における Weingerten 回転曲面

伊坂 麻琴

1 導入

M を連結で向き付けられた2次元以上の多様体とする．

定義. 1.1. ある関数 f に対し，

$$k_i = f(k_1, k_2, \cdots, k_{i-1}, k_{i+1}, \cdots, k_n)$$

となるような主曲率 k_i が存在するとき，超曲面 x を *Weingerten* 超曲面とよぶ．

命題 1.1. 平均曲率一定曲面は *Weingarten* 超曲面である．

定義. 1.2. 自然基底 $e_1, \cdots, e_n$ を持つ $\mathbb{E}_1^{n+1}$ を $(n+1)$ 次元ミンコフスキー空間とし，計量 $\langle\ ,\ \rangle$ を，

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - x_{n+1} y_{n+1} \qquad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E_1^{n+1}$$

とする．(ただし，$\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_{n+1}), \boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_{n+1})$ とする．)

定義. 1.3. $\mathbb{E}_1^{n+1}$ を $(n+1)$ 次元ミンコフスキー空間とする．このとき，

$$\mathbb{S}_1^n := \{x \in \mathbb{E}_1^{n+1}; \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 1\} \tag{1.1}$$

とする．これを n 次元 *de Sitter space* という．

$P^k (k = 2, 3)$ を原点を通る $\mathbb{E}_1^4$ の k 次元部分空間,$O(P^2)$ を P^2 を各点ごとに固定する正の行列式を持つ $\mathbb{E}_1^4$ の直交変換群とする．

定義. 1.4. $P^2 \subset P^3, P^3 \cap \mathbb{S}_1^3 \neq \emptyset$ となるように P^2, P^3 を選ぶ．$P^3 \cap \mathbb{S}_1^3$ において，P^2 と交わらない正則 C^2 曲線を C とする．$O(P^2)$ の作用下での C の軌道が $\mathbb{E}_1^4$ からの誘導計量 G により非退化になる場合，P^2 の周りに C によって生成される $\mathbb{S}_1^3$ の回転曲面 M と呼ばれる．さらに，$\bar{G}|(p^2)$ がローレンツ計量 *(*リーマン計量，退化した *2* 次形式*)* である場合，曲面 M は球面的 *(*双曲面的・放物面的*)* であると言う．

今回は，Weingarten"球面"回転面の関数の決定について証明を与える．

2 定理とその証明

定理. 2.1. M を3次元 *de sitter space* の *Weingerten* 球面とすると，M の主曲率 k_1, k_2 は，$k_2 = f(k_1)$ を満たし，以下の球面回転曲面として書くことができる．

(i)

$$r(u,v) = (y(u)\sin(v), y(u)\cos(v), z(u), w(u)), \qquad u \in J, \qquad v \in [0, 2\pi]$$
$$z(u) = (y(u)^2 - 1)^{1/2}\sinh\varphi(u)$$
$$w(u) = (y(u)^2 - 1)^{1/2}\cosh\varphi(u)$$
$$\varphi(u) = \int_0^u \frac{(\epsilon y(t)^2 + y'(t)^2 - \epsilon)^{1/2}}{(y(t)^2 - 1)}dt$$
$$y(u) = \exp(\int_0^u \frac{dt}{\epsilon f(t) - t}), \qquad |y(u)| > 1$$

(ii)

$$r(u,v) = (y(u)\sin(v), y(u)\cos(v), z(u), w(u)), \qquad u \in J, \qquad v \in [0, 2\pi]$$
$$z(u) = (1 - y(u)^2)^{1/2}\cosh\varphi(u)$$
$$w(u) = (1 - y(u)^2)^{1/2}\sinh\varphi(u)$$
$$\varphi(u) = \int_0^u \frac{(\epsilon y(t)^2 + y'(t)^2 - \epsilon)^{1/2}}{(y(t)^2 - 1)}dt$$
$$y(u) = \exp(\int_0^u \frac{dt}{\epsilon f(t) - t}), \qquad |y(u)| < 1$$

ここで，$\epsilon = \pm 1$ であり，$\epsilon = 1$ のとき，曲面は *spacelike* であり，$\epsilon = -1$ のとき，曲面は *timelike* である．

Proof. P^2 を $\mathbb{E}_1^4$ のローレンツ部分空間とすると，P^2, P^3 は以下のように書ける．

$$P^2 = span(e_3, e_4)$$
$$P^3 = span(e_2, e_3, e_4) = (0, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{E}_1^4$$

また，

$$S_1^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{E}_1^4 \quad | \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 1)\}$$

より，

$$S_1^3 \cap P^3 = \{(0, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{E}_1^4 \quad | \quad x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 1)\}$$

となり，このうちの曲線 $(0, x_2, x_3(u), x_4(u)) = \gamma(u)$ が P^2 と交わらないのは，$x_2(u) \neq 0$ となるときである．

定義. 2.1. $\mathbb{E}_1^4$ の直交変換群は

$$O(\mathbb{E}_1^4) = \{T : \mathbb{E}_1^4 \to \mathbb{E}_1^4 | \langle \boldsymbol{T(x)}, \boldsymbol{T(y)} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \quad (\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E_1^4)\}$$

である．ただし，$\boldsymbol{T}(x) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ であり，A は 4 次正方行列で

$$A^t Z A = Z \qquad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を満たす.

定義. 2.2. ローレンツ直交群 $O(3,1)$ とローレンツ特殊直交群 $SO(3,1)$ は

$$O(3,1) = \{A \in M_4(\mathbb{R}) \quad | \quad A^t Z A = Z \qquad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\}$$

$$SO(3,1) = \{A \in O(3,1) \quad | \quad detA = 1\}$$

である.

補題 2.1.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると, $A \in SO(3,1)$ かつ $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ を満たす.

よって,

$$O(P^2) = \{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} |\theta \in \mathbb{R}\}$$

とすると,

$$A\gamma(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \sin\theta \\ x_2 \cos\theta \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

以上の議論により,

$$r(u,v) = (y(u)\sin(v), y(u)\cos(v), z(u), w(u)), \quad u \in J, \quad v \in [0, 2\pi] \tag{2.1}$$

を得る. 以降, この曲面を M_1 とする.

補題 2.2. 曲面 M_1 に対して法線ベクトル場 ξ_1 は,

$$\xi_1(u,v) = \begin{pmatrix} (z'(u) - w(u) - w'(u)z(u))\sin(v) \\ (z'(u) - w(u) - w'(u)z(u))\cos(v) \\ w'(u)y(u) - y'(u)w(u) \\ z'(u)y(u) - y'(u)z(u) \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

と，$\langle \xi_1, r_u \rangle = \langle \xi_1, r_v \rangle = \langle \xi_1, r \rangle = 0, \langle \xi_1, \xi_1 \rangle = -\epsilon$ が成立する．ただし，$r_u = \dfrac{\partial_r(u,v)}{\partial_u}, r_v = \dfrac{\partial_r(u,v)}{\partial_v}$ である．

Proof. $r(u,v) = (y(u)\sin(v), y(u)\cos(v), z(u), w(u))$ のとき，

$$r_u = (y'(u)\sin(v), y'\cos(v), z'(u), w'(u)) \tag{2.3}$$

$$r_v = (y(u)\cos(v), -y(u)\sin(v), 0, 0) \tag{2.4}$$

第 1 基本量はそれぞれ

$$\langle r_u, r_u \rangle = y'(u)^2 + z'(u)^2 - w'(u)^2 = \epsilon \tag{2.5}$$

$$\langle r_v, r_v \rangle = y^2 \tag{2.6}$$

$$\langle r_u, r_v \rangle = 0 \tag{2.7}$$

より，$|r_u \times r_v| = \sqrt{|\langle r_u, r_u \rangle \langle r_v, r_v \rangle - \langle r_u, r_v \rangle^2|} = y(u)$．また，

$$r_u \times r_v = \begin{pmatrix} (z'(u) - w(u) - w'(u)z(u))\sin(v) \\ (z'(u) - w(u) - w'(u)z(u))\cos(v) \\ w'(u)y(u) - y'(u)w(u) \\ z'(u)y(u) - y'(u)z(u) \end{pmatrix} y(u)$$

であるので，

$$\xi_1 = \frac{r_u \times r_v}{\sqrt{r_u \times r_v}} = \begin{pmatrix} (z'(u) - w(u) - w'(u)z(u))\sin(v) \\ (z'(u) - w(u) - w'(u)z(u))\cos(v) \\ w'(u)y(u) - y'(u)w(u) \\ z'(u)y(u) - y'(u)z(u) \end{pmatrix}$$

□

主曲率を求めるために第 2 基本量を計算する．

曲面 M_1 に対し，

$$r_{uu} = (y''(u)\sin(v), y''(u)\cos(v), z''(u), w''(u))$$

$$r_{vv} = (-y(u)\sin(v), -y(u)\cos(v), 0, 0)$$

$$r_{uv} = (y'(u)\cos(v), -y'(u)\sin(v), 0, 0)$$

と，(2.2) より，

$$\begin{aligned} \langle \xi_1, r_{uu} \rangle &= y''(z'w - w'z) + z''(w'y - y'w) - w''(z'y - y'z) \\ &= y(z''w' - w''z') - y'(z''w - w''z) + y''(z'w - w'z) \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\langle \xi_1, r_{vv} \rangle = -y(z'w - w'z) \tag{2.9}$$

$$\langle \xi_1, r_{uv} \rangle = 0 \tag{2.10}$$

(2.5) ∼ (2.7), (2.8) ∼ (2.10) を用いて主曲率 k_1, k_2 を計算すると，

$$k_1 = y''(z'w - w'z) + z''(w'y - y'w) - w''(z'y - y'z) \tag{2.11}$$

$$k_2 = -y^{-1}(z'w - w'z) \tag{2.12}$$

となる．

次に，y, z, w の関数の決定を行う．曲面の作り方から，$y(u) \neq 0$ であることに注意する．$\langle r, r\rangle = y^2 + z^2 - w^2 = 1$ を用いると，

(i) $y(u)^2 - 1 > 0$ のとき，	(ii) $y(u)^2 - 1 < 0$ のとき
$z(u) = (y(u)^2 - 1)^{1/2} \sinh \varphi(u)$	$z(u) = (1 - y(u)^2)^{1/2} \cosh \varphi(u)$
$w(u) = (y(u)^2 - 1)^{1/2} \cosh \varphi(u)$	$w(u) = (1 - y(u)^2)^{1/2} \cosh \varphi(u)$

の 2 つを考えることができる．注意 1 $y^2 - 1 = 0$ になる場合はどうなるか？

以下では，(i) の場合の関数を決定する計算を記す．

(i) のとき，(2.5) に代入することで，$\varphi'(u)^2 = \dfrac{\epsilon y^2 + y'^2 - \epsilon}{(y^2-1)^2}$ を得る．J 上で $\epsilon y^2 + y'^2 - \epsilon > 0$ と仮定する．($\epsilon y^2 + y'^2 - \epsilon = 0$ のとき φ は定数) よって，関数 $\varphi(u)$ は

$$\epsilon y^2 + y'^2 - \epsilon > 0$$
$$\varphi(u) = \pm \int_0^u \frac{(\epsilon y^2 + y'^2 - \epsilon)^{1/2}}{|y(t)^2 - 1|} dt$$

という形で書ける．このとき，一般性を失うことなく，符号は $y^2 - 1 > 0$ の時に正，$y^2 - 1 < 0$ の時に負と仮定して良い．(注意 2 理由を書く) よって，

$$\epsilon y^2 + y'^2 - \epsilon > 0 \tag{2.13}$$
$$\varphi(u) = \int_0^u \frac{(\epsilon y^2 + y'^2 - \epsilon)^{1/2}}{|y(t)^2 - 1|} dt \tag{2.14}$$

となる．さらに，

(i) の関数と，$\langle r, r\rangle = y^2 + z^2 - w^2 = 1$，(2.5),(3.3) を用いることで，

$$z'w - w'z = (\epsilon y^2 + y'^2 - \epsilon)^{1/2} \tag{2.15}$$
$$z''w - w''z = \frac{\epsilon yy' + \epsilon y^2 - 1}{z'w - w'z} \tag{2.16}$$
$$z''w - w''z = \frac{-\epsilon yy'' + \epsilon y'^2 - 1}{z'w - w'z} \tag{2.17}$$

を得る．(2.15)∼(2.17) を (2.11),(2.12) に代入することで主曲率 k_1, k_2 は，

$$\begin{aligned} k_1 &= y''(z'w - w'z) + z''(w'y - y'w) - w''(z'y - y'z) \\ &= \frac{-\epsilon y'' - y}{(\epsilon yy' + \epsilon y^2 - 1)^{1/2}} \\ &= \frac{\epsilon y'' + y}{ty} \\ &= f(t) \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= -y^{-1}(z'w - w'z) \\ &= -y^{-1}(\epsilon yy' + \epsilon y^2 - 1)^{1/2} \\ &= t \end{aligned} \tag{2.19}$$

を得る．また，(2.19) より

$$
\begin{aligned}
y' &= \sqrt{t^2y^2 - \epsilon y^2 + \epsilon} \\
y'' &= \frac{t^2yy' + tt'y^2 - \epsilon yy'}{y'} \\
&= t^2y - \epsilon y + y^2t\frac{t'}{y'}
\end{aligned} \tag{2.20}
$$

を得る．以上の結果を (2.18) と (2.20) に代入することにより，

$$
\begin{aligned}
\epsilon f(t) - t &= \frac{y'' + \epsilon y}{ty} - t \\
&= y\frac{t'}{y'}
\end{aligned} \tag{2.21}
$$

以上より，

$$
y(u) = \exp(\int_0^u \frac{1}{\epsilon f(t) - t})dt \tag{2.22}
$$

を得る．よって，定理 2.1

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{i})r(u,v) = (y(u)\sin(v), y(u)\cos(v), z(u), w(u)), \qquad u \in J, \qquad v \in [0, 2\pi] \\
&z(u) = (y(u)^2 - 1)^{1/2}\sinh\varphi(u) \\
&w(u) = (y(u)^2 - 1)^{1/2}\cosh\varphi(u) \\
&\varphi(u) = \int_0^u \frac{(\epsilon y(t)^2 + y'(t)^2 - \epsilon)^{1/2}}{(y(t)^2 - 1)}dt \\
&y(u) = \exp(\int_0^u \frac{dt}{\epsilon f(t) - t}), \qquad |y(u)| > 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{ii})r(u,v) = (y(u)\sin(v), y(u)\cos(v), z(u), w(u)), \qquad u \in J, \qquad v \in [0, 2\pi] \\
&z(u) = (1 - y(u)^2)^{1/2}\cosh\varphi(u) \\
&w(u) = (1 - y(u)^2)^{1/2}\sinh\varphi(u) \\
&\varphi(u) = \int_0^u \frac{(\epsilon y(t)^2 + y'(t)^2 - \epsilon)^{1/2}}{(y(t)^2 - 1)}dt \\
&y(u) = \exp(\int_0^u \frac{dt}{\epsilon f(t) - t}), \qquad |y(u)| < 1
\end{aligned}
$$

を得る．

□

3　注意するべき点

注意 1　$y^2 - 1 = 0$ になる場合

定義から $y \neq 0$ は仮定しているが，$y^2 - 1 = 0$ になる場合は仮定していない．今回の定理では，(i)$y^2 - 1 > 0$ の場合と (ii)$y^2 - 1 < 0$ になる場合しか考えておらず，(iii)$y^2 - 1 = 0$ の場合どうなるかを考

える必要がある．

$$r(u,v) = (y(u)\sin(v), y(u)\cos(v), z(u), w(u))$$

より，

$$\begin{aligned} &y^2 + z^2 - w^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow z^2 - w^2 = 1 - y^2 \\ &z(u) \neq w(u) \Rightarrow 1 - y^2 \neq 0 \end{aligned}$$

より，$z(u) \neq w(u)$ の場合と，$z(u)w(u) = 0$ の場合を考える必要がある．

$1 - y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ より，この時曲面は

$$r(u,v) = (\cos(v), \sin(v), 0, 0)$$

という形になり.... ？

注意 2 $\varphi(u)$ の符号のつけ方

関数 $\varphi(u)$ は

$$\begin{aligned} &\epsilon y^2 + y'^2 - \epsilon > 0 \\ &\varphi(u) = \pm \int_0^u \frac{(\epsilon y^2 + y'^2 - \epsilon)^{1/2}}{|y(t)^2 - 1|} dt \end{aligned}$$

という形で書ける．このとき，一般性を失うことなく，符号は $y^2 - 1 > 0$ の時に正，$y^2 - 1 < 0$ の時に負と仮定して良い．

Proof. 曲面を作る際に，

$$B = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in SO(1,3)$$

とすれば，

$$Br(u,v) = \begin{pmatrix} -y\sin(v) \\ y\cos(v) \\ -(y^2-1)^{1/2}\sin\varphi \\ (y^2-1)^{1/2}\cos\varphi \end{pmatrix} = \tilde{r}(u,v) \tag{3.1}$$

とおくことで，$\varphi(u) \longmapsto -\varphi(u)$ に取り換えることができる．($u \mapsto -u, v \mapsto -v$ とすると元の曲面と同じ) □

よって，

$$\epsilon y^2 + y'^2 - \epsilon > 0 \tag{3.2}$$

$$\varphi(u) = \int_0^u \frac{(\epsilon y^2 + y'^2 - \epsilon)^{1/2}}{|y(t)^2 - 1|} dt \tag{3.3}$$

となる．