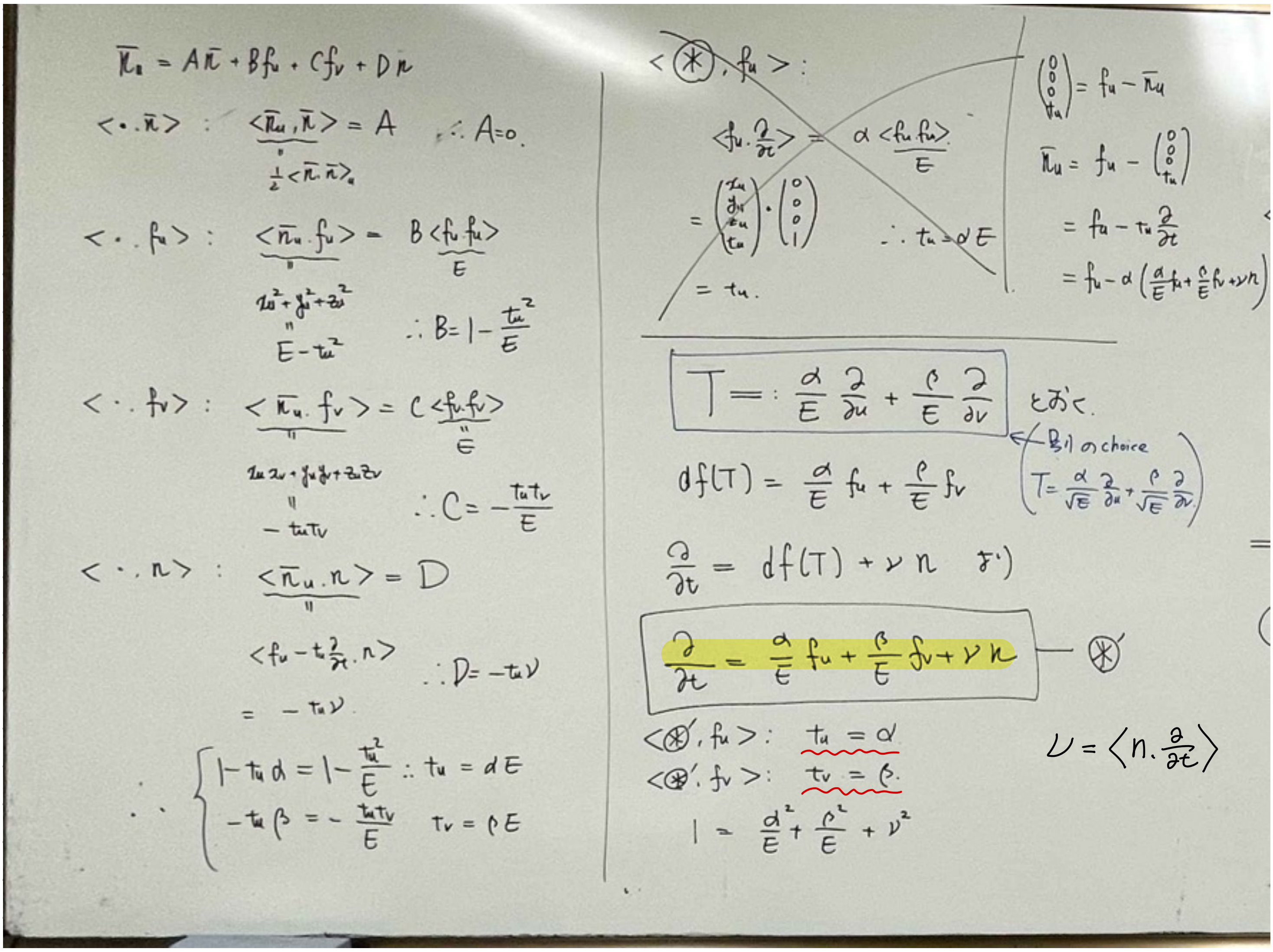
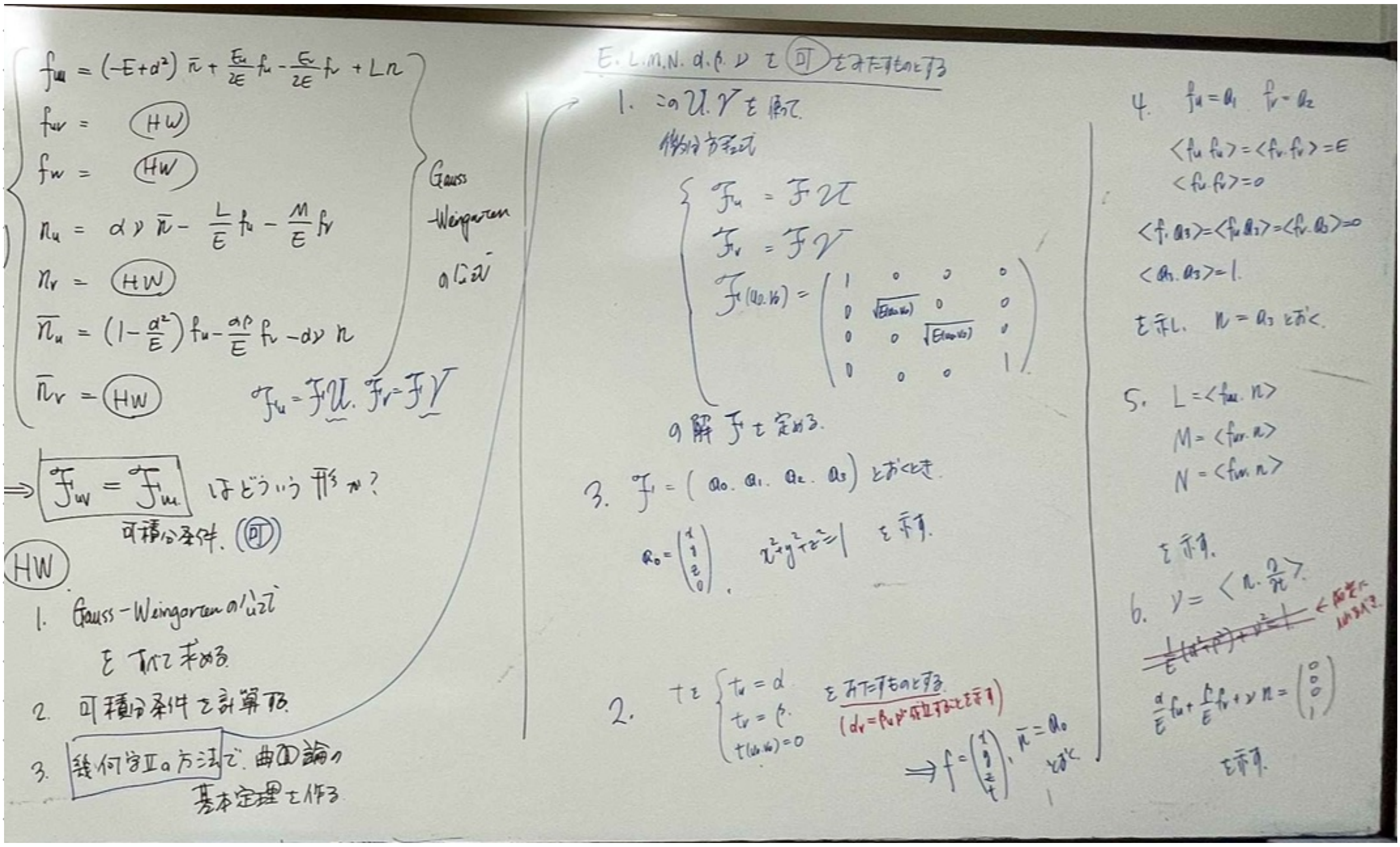
(前回の 板書 再掲)

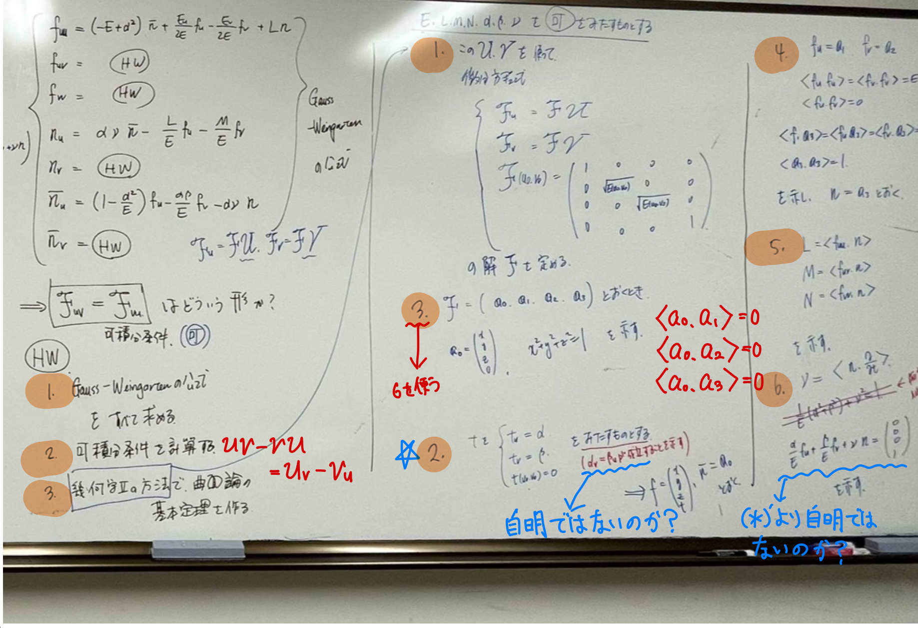


n̄u = A n̄ + B fu + C fv + D n
<・, n̄> : <n̄u, n̄> = A = ½<n̄, n̄>u ∴ A=0.
<・, fu> : <n̄u, fu> = B <fu, fu>/E
xu² + yu² + zu² = E − tu²
∴ B = 1 − tu²/E
<・, fv> : <n̄u, fv> = C <fu, fv>/E
xu xv + yu yv + zu zv = − tu tv
∴ C = − tu tv / E
<・, n> : <n̄u, n> = D
<fu − tu ∂/∂t, n> = − tu ν
∴ D = − tu ν
∴ { 1 − tu α = 1 − tu²/E ∴ tu = αE ; − tu β = − tu tv / E  tv = βE
<(*), fu> :
<fu, ∂/∂t> = α <fu, fu>/E
= tu.
∴ tu = αE
(0,0,0,tu) = fu − n̄u
n̄u = fu − (0,0,0,tu)
= fu − tu ∂/∂t
= fu − α (α/E fu + β/E fv + ν n)
T =: α/E ∂/∂u + β/E ∂/∂v とおく.
別の choice T = α/√E ∂/∂u + β/√E ∂/∂v
df(T) = α/E fu + β/E fv
∂/∂t = df(T) + ν n より
∂/∂t = α/E fu + β/E fv + ν n — (*)′
<(*)′, fu> : tu = α
<(*)′, fv> : tv = β.
1 = α²/E + β²/E + ν²
ν = <n, ∂/∂t>

fuu = (−E + α²) n̄ + Eu/2E fu − Ev/2E fv + L n
fuv = (HW)
fvv = (HW)
nu = α ν n̄ − L/E fu − M/E fv
nv = (HW)
n̄u = (1 − α²/E) fu − αβ/E fv − α ν n
n̄v = (HW)
Gauss-Weingarten の公式
Fu = F U, Fv = F V
⟹ Fuv = Fvu はどういう形か?
可積分条件. (可)
(HW)
1. Gauss-Weingarten の公式 を すべて 求める
2. 可積分条件 を 計算する
3. 幾何学II の方法で, 曲面論の 基本定理を作る
E, L, M, N, α, β, ν は (可) をみたすものとする
1. この U, V を用いて 偏微分方程式
Fu = F U
Fv = F V
F(u0, v0) = diag(1, √E(u0,v0), √E(u0,v0), 1)
の解 F を定める.
3. F = (a0 a1 a2 a3) とおくとき
a0 = (x, y, z, 0) x² + y² + z² = 1 を示す.
2. t を { tu = α, tv = β, t(u0, v0) = 0 } をみたすものとする (αv = βu が成立することを示す)
⟹ f = (x, y, z, t), n̄ = a0 とおく
4. fu = a1 fv = a2
<fu, fu> = <fv, fv> = E
<fu, fv> = 0
<f, a3> = <fu, a3> = <fv, a3> = 0
<a3, a3> = 1
を示し, n = a3 とおく.
5. L = <fuu, n>
M = <fuv, n>
N = <fvv, n>
を示す.
6. ν = <n, ∂/∂t>
~~1/E (α² + β²) + ν² = 1~~ ← 必要ない
α/E fu + β/E fv + ν n = (0, 0, 0, 1)
を示す.

# 曲面論の基本定理 続き




## • ガウス・ワインガルテンの公式を全て求める

$t_u = \alpha,\ t_v = \beta$

やりたい事　（仮定：等温座標系 $E=G,\ F=0$）

$\bar{n}_u, \bar{n}_v, f_{uu}, f_{uv}, f_{vv}, n_u, n_v$ を $\bar{n}, f_u, f_v, n$ の線形結合で表したい。（結果：16ページ）

思い出す

• $f_{uu} = A\bar{n} + Bf_u + Cf_v + Dn$ とおく。（係数 A, B, C, D を求めたい）

(i) D を求める。

$\langle n, n\rangle = 1$ より、内積 $\langle f_{uu}, n\rangle$ を考えればよい。よって、

$$\underbrace{\langle f_{uu}, n\rangle}_{L} = \langle Dn, n\rangle$$
$$= D$$
（A, B, C の項は $n$ と直交するため、内積 $=0$ になる）

$\therefore D = L$　ok

(ii) C を求める。

内積 $\langle f_{uu}, f_v\rangle$ を考えると、

$$\langle f_{uu}, f_v\rangle = \langle Cf_v, f_v\rangle$$
$$= CE$$
（A, B, D の項は $f_v$ と直交するため、内積 $=0$ になる）

$\rightarrow \langle f_u, f_v\rangle_u = \langle f_{uu}, f_v\rangle + \langle f_u, f_{uv}\rangle$ より、

$$\Longleftrightarrow \langle f_{uu}, f_v\rangle = \langle f_u, f_v\rangle_u - \langle f_u, f_{uv}\rangle$$
$$= 0 - \frac{1}{2}E_v$$

$E = \langle f_u, f_u\rangle$ より、
$E_v = \langle f_{uv}, f_u\rangle + \langle f_u, f_{uv}\rangle$
$= 2\langle f_{uv}, f_u\rangle$

$\therefore C = -\dfrac{E_v}{2E}$　ok

(iii) $B$ を求める.

内積 $\langle f_{uu}, f_u \rangle$ を考えると,

$$\langle f_{uu}, f_u \rangle = \langle Bf_u, f_u \rangle$$
$$= BE$$

$$\underbrace{\langle f_u, f_u \rangle_u}_{E_u} = 2\langle f_{uu}, f_u \rangle$$

$$\Longleftrightarrow \langle f_{uu}, f_u \rangle = \frac{1}{2}E_u$$

$$\therefore B = \frac{E_u}{2E}$$ ok

(iv) $A$ を求める 要注意

内積 $\langle f_{uu}, \bar{n} \rangle$ を考えると,

$$\langle f_{uu}, \bar{n} \rangle = A\underbrace{\langle \bar{n}, \bar{n} \rangle}_{1}$$
$$= A$$

$$\langle f_u, \bar{n} \rangle_u = \langle f_{uu}, \bar{n} \rangle + \langle f_u, \bar{n}_u \rangle$$ より,

$\bar{n} = f - t(u,v)\frac{\partial}{\partial t}$ なので,

$\bar{n}_u = f_u - t_u\frac{\partial}{\partial t}$.

$$\Longleftrightarrow \langle f_{uu}, \bar{n} \rangle = \underbrace{\langle f_u, \bar{n} \rangle_u}_{0} - \langle f_u, \bar{n}_u \rangle$$
$$= 0 - \langle f_u, f_u - t_u\frac{\partial}{\partial t} \rangle$$
$$= -\langle f_u, f_u \rangle + \langle f_u, t_u\frac{\partial}{\partial t} \rangle$$
$$= -E + (t_u)^2$$

$f_u = \begin{bmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \\ t_u \end{bmatrix}$, $t_u\frac{\partial}{\partial t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t_u \end{bmatrix}$ より, 内積 $= (t_u)^2$

$\therefore A = -E + (t_u)^2$ だが, $t_u$ は Daniel のデータに無い

→ $t_u$ を用いずに, $A$ を表したい ※(後で考える)

$\therefore$ $f_{uu}$ について,

$$(A, B, C, D) = \left(-E + t_u^2, \frac{E_u}{2E}, -\frac{E_v}{2E}, L\right)$$

$t_u = \alpha$ 代入

$$= \left(-E + \alpha^2, \frac{E_u}{2E}, -\frac{E_v}{2E}, L\right)$$

$$\boxed{T = \frac{\alpha}{E}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\beta}{E}\frac{\partial}{\partial v}}$$

• $n_u = A\bar{n} + Bf_u + Cf_v + Dn$ とおく（係数 A, B, C, D）

(i) D を求める

内積 $\langle n_u, n \rangle$ を考えると、

$$\langle n_u, n \rangle = \langle Dn, n \rangle$$

（∵ A, B, C の項は $n$ と直交するので内積は消える）

$$= D\underbrace{\langle n, n \rangle}_{=1}$$

$$= D.$$

$$\langle n, n \rangle_u = \langle n_u, n \rangle + \langle n, n_u \rangle$$

$$= 2\langle n_u, n \rangle \text{ より、}$$

$$\iff \langle n_u, n \rangle = \frac{1}{2}\underbrace{\langle n, n \rangle_u}_{1}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 0$$

$$= 0$$

∴ $D = 0$ ok

(ii) C を求める

内積 $\langle n_u, f_v \rangle$ を考える.

$$\langle n_u, f_v \rangle = C\underbrace{\langle f_v, f_v \rangle}_{=E}$$

$$= CE$$

$$\langle n, f_v \rangle_u = \langle n_u, f_v \rangle + \langle n, f_{uv} \rangle \text{ より、}$$

$$\iff \langle n_u, f_v \rangle = \underbrace{\langle n, f_v \rangle_u}_{=0} - \langle n, f_{uv} \rangle$$

$$L = \langle f_{uu}, n \rangle$$
$$M = \langle f_{uv}, n \rangle$$
$$N = \langle f_{vv}, n \rangle$$

$$= 0 - M = -M$$

∴ $C = -\dfrac{M}{E}$ ok

(iii) $B$ を求める

内積 $\langle n_u, f_u \rangle$ を考えると、

$$\langle n_u, f_u \rangle = B \langle f_u, f_u \rangle$$ （A, C, Dの項は $f_u$ と直交するので 内積 = 0 になる）

$$= BE \qquad \langle f_u, f_u \rangle = E$$

$$\langle n, f_u \rangle_u = \langle n_u, f_u \rangle + \langle n, f_{uu} \rangle$$ より、

$$\Longleftrightarrow \langle n_u, f_u \rangle = \underbrace{\langle n, f_u \rangle_u}_{=0} - \underbrace{\langle n, f_{uu} \rangle}_{=L}$$

$$= 0 - L = -L$$

$$\therefore B = -\frac{L}{E}$$ Ok

(iv) $A$ を求める 要注意

内積 $\langle n_u, \bar{n} \rangle$ を考えると、

$$\langle n_u, \bar{n} \rangle = A \langle \bar{n}, \bar{n} \rangle$$

$$= A \qquad \langle \bar{n}, \bar{n} \rangle = 1$$

$$\langle n, \bar{n} \rangle_u = \langle n_u, \bar{n} \rangle + \langle n, \bar{n}_u \rangle$$ より、

$$\Longleftrightarrow \langle n_u, \bar{n} \rangle = \underbrace{\langle n, \bar{n} \rangle_u}_{=0} - \langle n, \bar{n}_u \rangle$$

$\bar{n} = f - t(u,v)\frac{\partial}{\partial t}$ なので、

$\bar{n}_u = f_u - t_u\frac{\partial}{\partial t}$.

$$= 0 - \langle n, f_u - t_u\frac{\partial}{\partial t} \rangle$$

$$= -\langle n, f_u \rangle + \langle n, t_u\frac{\partial}{\partial t} \rangle$$

$\nu = \langle n, \frac{\partial}{\partial t} \rangle$

$$= -0 + t_u\nu = t_u\nu$$

$\therefore A = t_u\nu$ であるが、$t_u$ は Daniel のデータに無い。

$\longrightarrow$ $t_u$ を用いずに $A$ を表したい ※（後で考える）

$\therefore n_u$ について、

$$(A, B, C, D) = \left(t_u\nu, -\frac{L}{E}, -\frac{M}{E}, 0\right)$$ $t_u = \alpha$ 代入

$$= \left(\alpha\nu, -\frac{L}{E}, -\frac{M}{E}, 0\right)$$

• $\overline{n}_u$ を求める（方法1）

まず，$\overline{n} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix} = f - t\dfrac{\partial}{\partial t}$ であるので，$\overline{n}_u$ は

$$\overline{n}_u = f_u - t_u \frac{\partial}{\partial t}$$

である．

T：D上のベクトル場で，$df(T) = \dfrac{\partial}{\partial t} - \nu N$ とする．

Daniel の定理3.3 参照

$T =: \dfrac{\alpha}{E}\dfrac{\partial}{\partial u} + \dfrac{\beta}{E}\dfrac{\partial}{\partial r}$ とおく．$df(T)$ は

分母の E：係数調整用． $\alpha = \alpha(u,r)$，$\beta = \beta(u,r)$

$$df(T) = \frac{\alpha}{E} f_u + \frac{\beta}{E} f_r$$

となる。$\dfrac{\partial}{\partial t} = df(T) + \nu n$ であるので，

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\alpha}{E} f_u + \frac{\beta}{E} f_r + \nu n$$

である．以上より $\overline{n}_u$ は，

$$\overline{n}_u = f_u - t_u\left(\frac{\alpha}{E} f_u + \frac{\beta}{E} f_r + \nu n\right)$$
$$= \left(1 - \frac{\alpha}{E} t_u\right) f_u - \frac{\beta}{E} t_u f_r - \nu t_u n$$

である。$\left(A = 0,\ B = 1 - \dfrac{\alpha}{E} t_u,\ C = -\dfrac{\beta}{E} t_u,\ D = -\nu t_u\right)$

→ $t_u$ が残ってしまっているので、別の方法でも A, B, C, D を求めたい．

• $\overline{n}_u$ を求める（方法2）→ $\overline{n}_u$ を内積の方法でも求めてみる．

$\overline{n}_u = A\overline{n} + Bf_u + Cf_r + Dn$ とおく．係数A, B, C, Dを1つずつ考える．

(i) D を求める

内積 $\langle \overline{n}_u, n \rangle$ を考えると，

$$\langle \overline{n}_u, n \rangle = D\underbrace{\langle n, n \rangle}_{1} \qquad (A, B, C \text{の項は } n \text{と直交するので 内積} = 0)$$

$= D$

$\overline{n}_u = f_u - t_u \frac{\partial}{\partial u}$ より、

$\langle f_u - t_u \frac{\partial}{\partial t}, n \rangle = \underbrace{\langle f_u, n \rangle}_{0} - \langle t_u \frac{\partial}{\partial t}, n \rangle$　$\nu = \langle n, \frac{\partial}{\partial t} \rangle$

$= 0 - t_u \nu = -t_u \nu.$

$\therefore D = -t_u \nu$ ($t_u$ を用いずに表したい)

(ii) $C$ を求める

内積 $\langle \overline{n}_u, f_v \rangle$ を考えると、

$\langle \overline{n}_u, f_v \rangle = C \underbrace{\langle f_v, f_v \rangle}_{E} = CE.$

$\overline{n}_u = \begin{bmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \\ 0 \end{bmatrix}$, $f_v = \begin{bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \\ t_v \end{bmatrix}$ なので、$\langle \overline{n}_u, f_v \rangle = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$

$= -t_u t_v$ ☆

$f$ がはめ込み $\Longleftrightarrow$ $f_u$ と $f_v$ が一次独立であるので、$\langle f_u, f_v \rangle = 0$

$\Longleftrightarrow x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v + t_u t_v = 0$

$\Longleftrightarrow x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = -t_u t_v$

$\therefore C = -\frac{t_u t_v}{E}$ ($t_u$ $t_v$ を用いずに表したい)

方法1 で求めた $C$ と連立すると、

$\cancel{-}\frac{\beta}{\cancel{E}} \cancel{t_u} = \cancel{-}\frac{1}{\cancel{E}} \cancel{t_u} t_v$

$\therefore t_v = \beta$ が求まる

(iii) $B$ を求める

内積 $\langle \overline{n}_u, f_u \rangle$ を考えると、

- $\langle \overline{n}_u, f_u \rangle = \begin{bmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \\ t_u \end{bmatrix} = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = E - t_u^2.$ ☆

$E = \langle f_u, f_u \rangle$ より、$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 + t_u^2$

$\Longleftrightarrow x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = E - t_u^2$

$\circ \langle \overline{n}_u, f_u \rangle = B \underbrace{\langle f_u, f_u \rangle}_{E} = BE.$

$\therefore B = 1 - \dfrac{t_u^2}{E}$ ($t_u$を用いずに表したい)

方法1で求めたBと連立すると、

$$\cancel{1} - \frac{\alpha}{\cancel{E}} t_u = \cancel{1} - \frac{t_u^{\cancel{2}}}{\cancel{E}}$$

$\therefore t_u = \alpha$ が求まる

(iv) A を求める

内積 $\langle \overline{n}_u, \overline{n} \rangle$ を考えると、

$\circ \langle \overline{n}_u, \overline{n} \rangle$

$\underbrace{\langle \overline{n}, \overline{n} \rangle}_{1}{}_u = \langle \overline{n}_u, \overline{n} \rangle + \langle \overline{n}, \overline{n}_u \rangle = 2 \langle \overline{n}_u, \overline{n} \rangle$ より、

$\Longleftrightarrow \langle \overline{n}_u, \overline{n} \rangle = \frac{1}{2} \underbrace{\langle \overline{n}, \overline{n} \rangle}_{1}{}_u = 0.$

$\circ \langle \overline{n}_u, \overline{n} \rangle = A \underbrace{\langle \overline{n}, \overline{n} \rangle}_{1} = A$

$\therefore A = 0$ ok

$\therefore \overline{n}_u$ について、

$$(A, B, C, D) = \left(0, \ 1 - \frac{t_u^2}{E}, \ -\frac{t_u t_n}{E}, \ -t_u \nu \right)$$ $t_u = \alpha$、$t_n = \beta$ を代入。

$$= \left(0, \ 1 - \frac{\alpha^2}{E}, \ -\frac{\alpha\beta}{E}, \ -\alpha\nu \right)$$

- $f_{uv} = A\bar{n} + Bf_u + Cf_v + Dn$ とおく．（係数 A, B, C, D を求めたい）

$\mathcal{F}_1 = (\bar{n}, f_u, f_v, n)$

(i) $D$ を求める．

内積 $\langle f_{uv}, n\rangle$ を考えると，

$$\underbrace{\langle f_{uv}, n\rangle}_{M\ (\because \text{定義より})} = D\underbrace{\langle n, n\rangle}_{1} = D. \qquad \therefore D = M$$

(ii) C を求める

内積 $\langle f_{uv}, f_v\rangle$ を考えると，

$$\langle f_{uv}, f_v\rangle = C\underbrace{\langle f_v, f_v\rangle}_{G=E} = EC.$$

※ $\underbrace{\langle f_v, f_v\rangle_u}_{E_u} = \langle f_{uv}, f_v\rangle + \langle f_v, f_{uv}\rangle$ なので，

$$= 2\langle f_{uv}, f_v\rangle$$

$$\Longleftrightarrow \langle f_{uv}, f_v\rangle = \frac{1}{2}E_u$$

$$\therefore C = \frac{E_u}{2E}.$$

(iii) B を求める．

内積 $\langle f_{uv}, f_u\rangle$ を考えると，

$$\langle f_{uv}, f_u\rangle = B\langle f_u, f_u\rangle = BE.$$

$$\underbrace{\langle f_u, f_u\rangle_v}_{E} = \langle f_{uv}, f_u\rangle + \langle f_u, f_{uv}\rangle$$

$$= 2\langle f_u, f_{uv}\rangle$$

$$\Longleftrightarrow \langle f_{uv}, f_u\rangle = \frac{1}{2}E_v$$

$$\therefore B = \frac{E_v}{2E}$$

(iv) $A$ を求める.

内積 $\langle f_{ur}, \overline{n} \rangle$ を考えると,

$$\langle f_{ur}, \overline{n} \rangle = A \underbrace{\langle \overline{n}, \overline{n} \rangle}_{1} = A.$$

$F_I = (\overline{n}, f_u, f_r, n)$

$\langle f_u, \overline{n} \rangle_r = \langle f_{ur}, \overline{n} \rangle + \langle f_u, \overline{n}_r \rangle$ なので:

$$\Longleftrightarrow \langle f_{ur}, \overline{n} \rangle = \underbrace{\langle f_u, \overline{n} \rangle}_{0}{}_r - \langle f_u, \overline{n}_r \rangle$$

$\overline{n} = f - t(u,r)\frac{\partial}{\partial t}$

$$= -\left\langle f_u, f_r - t_r \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle$$

$$= -\langle f_u, f_r \rangle + \left\langle f_u, t_r \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle$$

$$\begin{bmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \\ t_u \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t_r \end{bmatrix} = t_u t_r$$

$$= \underbrace{-F}_{0} + t_u t_r$$

$$= t_u t_r$$

$$\therefore A = t_u t_r$$
$$= \alpha\beta.$$

$\therefore f_{ur}$ について,

$$(A, B, C, D) = \left(t_u t_r, \frac{E_r}{2E}, \frac{E_u}{2E}, M\right)$$
$$= \left(\alpha\beta, \frac{E_r}{2E}, \frac{E_u}{2E}, M\right)$$

$t_u = \alpha$
$t_r = \beta$ 代入.

- $f_{rr} = A\bar{n} + Bf_u + Cf_v + Dn$ とおく (係数 A, B, C, D を求めたい)

$J_r = (\bar{n}, f_u, f_r, n)$

(i) D を求める

内積 $\langle f_{rr}, n\rangle$ を考えると、

$$\underbrace{\langle f_{rr}, n\rangle}_{= N \text{ (定義より)}} = D\underbrace{\langle n, n\rangle}_{1} = D.$$

$\therefore D = N$

(ii) C を求める

内積 $\langle f_{rr}, f_r\rangle$ を考えると、

$$\langle f_{rr}, f_r\rangle = C\langle f_r, f_r\rangle = CE.$$

$$\underbrace{\langle f_r, f_r\rangle_r}_{E_r} = \langle f_{rr}, f_r\rangle + \langle f_r, f_{rr}\rangle$$
$$= 2\langle f_{rr}, f_r\rangle$$

$$\Longleftrightarrow \langle f_{rr}, f_r\rangle = \frac{E_r}{2}$$

$$\therefore C = \frac{E_r}{2E}$$

(iii) B を求める.

内積 $\langle f_{rr}, f_u\rangle$ を求めると、

$$\langle f_{rr}, f_u\rangle = B\langle f_u, f_u\rangle = BE$$

$\langle f_r, f_u\rangle_r = \langle f_{rr}, f_u\rangle + \langle f_r, f_{ur}\rangle$ なので、

$$\Longleftrightarrow \langle f_{rr}, f_u\rangle = \langle f_r, f_u\rangle_r - \langle f_r, f_{ur}\rangle$$
$$= \underbrace{F_r}_{0} - \langle f_r, f_{ur}\rangle$$
$$= -\frac{1}{2}E_u$$

$$\langle f_r, f_r\rangle_u = 2\langle f_r, f_{ur}\rangle$$
$$\Longleftrightarrow \langle f_r, f_{ur}\rangle = \frac{1}{2}\langle f_r, f_r\rangle_u$$
$$= \frac{1}{2}E_u.$$

$$\therefore B = -\frac{E_u}{2E}$$

(iv) $A$ を求める.

内積 $\langle f_{vv}, \bar{n} \rangle$ を求めると、

$$\langle f_{vv}, \bar{n} \rangle = A \underbrace{\langle \bar{n}, \bar{n} \rangle}_{1} = A.$$

$\langle f_v, \bar{n} \rangle_v = \langle f_{vv}, \bar{n} \rangle + \langle f_v, \bar{n}_v \rangle$ より、

$$\Longleftrightarrow \langle f_{vv}, \bar{n} \rangle = \underbrace{\langle f_v, \bar{n} \rangle_v}_{0} - \langle f_v, \bar{n}_v \rangle$$

$$= -\langle f_v, \bar{n}_v \rangle$$

$\bar{n} = f - t(u,v)\frac{\partial}{\partial t}$ なので、

$\bar{n}_v = f_v - t_v \frac{\partial}{\partial t}$.

$$= -\langle f_v, f_v - t_v \tfrac{\partial}{\partial t} \rangle$$

$$= -\langle f_v, f_v \rangle + \langle f_v, t_v \tfrac{\partial}{\partial t} \rangle$$

$$\begin{bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \\ t_v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t_v \end{bmatrix} = t_v^2$$

$$= -E + t_v^2$$

$$\therefore A = -E + t_v^2$$
$$= -E + \beta^2$$

$\therefore$ $f_{vv}$ について、

$$(A, B, C, D) = \left(-E + t_v^2, -\frac{E_u}{2E}, \frac{E_v}{2E}, N\right)$$

$t_v = \beta$ を代入.

$$= \left(-E + \beta^2, -\frac{E_u}{2E}, \frac{E_v}{2E}, N\right)$$

• $n_r = A\bar{n} + Bf_u + Cf_r + Dn$ とおく(係数 A, B, C, D)

$\mathcal{F} = (\bar{n}, f_u, f_r, n)$

(i) D を求める

内積 $\langle n_r, n\rangle$ を考えると、

$$\langle n_r, n\rangle = D\underbrace{\langle n, n\rangle}_{1} = D.$$

$$\langle n, n\rangle_r = \langle n_r, n\rangle + \langle n, n_r\rangle$$
$$= 2\langle n_r, n\rangle \text{ なので、}$$

$$\Longleftrightarrow \langle n_r, n\rangle = \frac{1}{2}\underbrace{\langle n, n\rangle_r}_{0}$$
$$= 0.$$

$$\therefore D = 0$$

(ii) C を求める

内積 $\langle n_r, f_r\rangle$ を考えると、

$$\langle n_r, f_r\rangle = C\underbrace{\langle f_r, f_r\rangle}_{E=G} = CE.$$

$$\langle n, f_r\rangle_r = \langle n_r, f_r\rangle + \langle n, f_{rr}\rangle \text{ より、}$$

$$\Longleftrightarrow \langle n_r, f_r\rangle = \underbrace{\langle n, f_r\rangle_r}_{0} - \langle n, f_{rr}\rangle$$
$$= -\langle n, f_{rr}\rangle$$
$$= -N$$

$$\therefore C = -\frac{N}{E}$$

(iii) B を求める

内積 $\langle n_r, f_u\rangle$ を考えると、

$$\langle n_r, f_u\rangle = B\underbrace{\langle f_u, f_u\rangle}_{=E} = BE$$

$$\langle n, f_u\rangle_r = \langle n_r, f_u\rangle + \langle n, f_{ur}\rangle \text{ より、}$$

$$\Longleftrightarrow \langle n_r, f_u\rangle = \underbrace{\langle n, f_u\rangle_r}_{0} - \underbrace{\langle n, f_{ur}\rangle}_{M}$$
$$= -M.$$

$$\therefore B = -\frac{M}{E}$$

(iv) A を求める

内積 $\langle n_r, \bar{n}\rangle$ を考えると、

$$\langle n_r, \bar{n}\rangle = A\underbrace{\langle \bar{n}, \bar{n}\rangle}_{1} = A.$$

$$\langle n, \bar{n}\rangle_r = \langle n_r, \bar{n}\rangle + \langle n, \bar{n}_r\rangle \text{ より、}$$

$$\Longleftrightarrow \langle n_r, \bar{n}\rangle = \underbrace{\langle n, \bar{n}\rangle_r}_{0} - \langle n, \bar{n}_r\rangle$$
$$= -\langle n, \bar{n}_r\rangle$$

$\bar{n} = f - t(u,v)\frac{\partial}{\partial t}$ より、$\bar{n}_r = f_r - t_r\frac{\partial}{\partial t}$.

$$= -\left\langle n, f_r - t_r\frac{\partial}{\partial t}\right\rangle$$
$$= -\underbrace{\langle n, f_r\rangle}_{0} + \left\langle n, t_r\frac{\partial}{\partial t}\right\rangle$$
$$= \left\langle n, t_r\frac{\partial}{\partial t}\right\rangle$$

$\nu = \left\langle n, \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle$

$$= t_r\nu$$

$$\therefore A = t_r\nu = \beta\nu$$

∴ $n_r$ について、

$$(A, B, C, D) = \left(t_v \nu,\ -\frac{M}{E},\ -\frac{N}{E},\ 0\right)$$ $t_v = \beta$ 代入

$$= \left(\beta \nu,\ -\frac{M}{E},\ -\frac{N}{E},\ 0\right)$$

・$\overline{n}_r = A\overline{n} + Bf_u + Cf_r + Dn$ とおく (係数 A, B, C, D)

$\mathcal{F} = (\overline{n}, f_u, f_r, n)$

(i) D を求める

内積 $\langle \overline{n}_r, n\rangle$ を考えると、

$$\langle \overline{n}_r, n\rangle = D\underbrace{\langle n, n\rangle}_{=1} = D.$$

$\overline{n}_r = f_r - t_r\frac{\partial}{\partial t}$ より、

$$\langle \overline{n}_r, n\rangle = \langle f_r - t_r\tfrac{\partial}{\partial t}, n\rangle$$
$$= \underbrace{\langle f_r, n\rangle}_{=0} - t_r\underbrace{\langle \tfrac{\partial}{\partial t}, n\rangle}_{\nu}$$
$$= -t_r\nu$$

$\therefore D = -t_r\nu$

(ii) C を求める.

内積 $\langle \overline{n}_r, f_r\rangle$ を考えると、

$$\langle \overline{n}_r, f_r\rangle = C\underbrace{\langle f_r, f_r\rangle}_{G=E} = CE.$$

$$\begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \\ 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \\ t_r \end{bmatrix} = x_r^2 + y_r^2 + z_r^2$$

$\langle f_r, f_r\rangle = G = E$ より, $x_r^2 + y_r^2 + z_r^2 + t_r^2 = E$

$$= E - t_r^2$$

$$\therefore C = \frac{E - t_r^2}{E} = 1 - \frac{t_r^2}{E}$$

(iii) B を求める.

内積 $\langle \overline{n}_r, f_u\rangle$ を考えると、

$$\langle \overline{n}_r, f_u\rangle = B\underbrace{\langle f_u, f_u\rangle}_{E} = BE.$$

$$\begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \\ 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \\ t_u \end{bmatrix} = x_u x_r + y_u y_r + z_u z_r$$

$f_u$ と $f_r$ は一次独立

$\Downarrow$

$\langle f_u, f_r\rangle = 0.$

$\Downarrow$

$x_u x_r + y_u y_r + z_u z_r + t_u t_r = 0.$

$$= -t_u t_r$$

$$\therefore B = -\frac{t_u t_r}{E}.$$

(iv) A を求める.

内積 $\langle \overline{n}_r, \overline{n}\rangle$ を考えると、

$$\langle \overline{n}_r, \overline{n}\rangle = A\underbrace{\langle \overline{n}, \overline{n}\rangle}_{=1} = A.$$

$$\langle \overline{n}, \overline{n}\rangle_r = \langle \overline{n}_r, \overline{n}\rangle + \langle \overline{n}, \overline{n}_r\rangle$$
$$= 2\langle \overline{n}_r, \overline{n}\rangle \text{ より.}$$

$$\Longleftrightarrow \langle \overline{n}_r, \overline{n}\rangle = \frac{1}{2}\underbrace{\langle \overline{n}, \overline{n}\rangle_r}_{=0.}$$
$$= 0.$$

$\therefore A = 0$

$\therefore\ \bar{n}_r$ について、

$$(A, B, C, D) = \left(0,\ -\frac{t_u t_r}{E},\ 1-\frac{t_r^2}{E},\ -t_r\nu\right)$$

$t_u = \alpha$
$t_u = \beta$ 代入.

$$= \left(0,\ -\frac{\alpha\beta}{E},\ 1-\frac{\beta^2}{E},\ -\beta\nu\right)$$

まとめると、

$\bar{n}_u : (A, B, C, D) = \left(0,\ 1-\frac{\alpha^2}{E},\ -\frac{\alpha\beta}{E},\ -\alpha\nu\right)$

$\bar{n}_r : (A, B, C, D) = \left(0,\ -\frac{\alpha\beta}{E},\ 1-\frac{\beta^2}{E},\ -\beta\nu\right)$

$f_{uu} : (A, B, C, D) = \left(-E+\alpha^2,\ \frac{E_u}{2E},\ -\frac{E_r}{2E},\ L\right)$

$f_{ur} : (A, B, C, D) = \left(\alpha\beta,\ \frac{E_r}{2E},\ \frac{E_u}{2E},\ M\right)$

$f_{rr} : (A, B, C, D) = \left(-E+\beta^2\ -\frac{E_u}{2E},\ \frac{E_r}{2E},\ N\right)$

$n_u : (A, B, C, D) = \left(\alpha\nu,\ -\frac{L}{E},\ -\frac{M}{E},\ 0\right)$

$n_r : (A, B, C, D) = \left(\beta\nu,\ -\frac{M}{E},\ -\frac{N}{E},\ 0\right)$

である。

# 可積分条件を計算する

- 可積分条件を求めたい

$\downarrow$

- $\mathcal{F}_{uv} = \mathcal{F}_{vu}$

$\iff \mathcal{V}\mathcal{U} + \mathcal{U}_v = \mathcal{U}\mathcal{V} + \mathcal{V}_u$ を求めたい. (幾何学II 第6回より.)　　$(\mathcal{U}\mathcal{V} - \mathcal{V}\mathcal{U} = \mathcal{U}_v - \mathcal{V}_u)$

$\downarrow$

- $4\times4$ 行列 $\mathcal{U}$. $\mathcal{V}$ を求めたい

$\downarrow$

- $\mathcal{F}_u = (\bar{n}_u, f_{uu}, f_{uv}, n_u)$

$\mathcal{F}_v = (\bar{n}_v, f_{uv}, f_{vv}, n_v)$ から. 行列 $\mathcal{U}$. $\mathcal{V}$ の各成分を求める.

$$\mathcal{U} := \begin{bmatrix} u^1_1 & u^1_2 & u^1_3 & u^1_4 \\ u^2_1 & u^2_2 & u^2_3 & u^2_4 \\ u^3_1 & u^3_2 & u^3_3 & u^3_4 \\ u^4_1 & u^4_2 & u^4_3 & u^4_4 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{V} := \begin{bmatrix} v^1_1 & v^1_2 & v^1_3 & v^1_4 \\ v^2_1 & v^2_2 & v^2_3 & v^2_4 \\ v^3_1 & v^3_2 & v^3_3 & v^3_4 \\ v^4_1 & v^4_2 & v^4_3 & v^4_4 \end{bmatrix}$$

とおき、ガウス・ワインガルテンの公式が成り立つと仮定する.

$\to \mathcal{F}_u = \mathcal{F}\mathcal{U}$, $\mathcal{F}_v = \mathcal{F}\mathcal{V}$

$\mathcal{F}_u = (\bar{n}_u, f_{uu}, f_{uv}, n_u)$, $\mathcal{F} = (\bar{n}, f_u, f_v, n)$ であるため、

$$\mathcal{F}_u = \mathcal{F}\mathcal{U}$$

$$\iff \begin{cases} \bar{n}_u = u^1_1 \bar{n} + u^2_1 f_u + u^3_1 f_v + u^4_1 n \\ f_{uu} = u^1_2 \bar{n} + u^2_2 f_u + u^3_2 f_v + u^4_2 n \\ f_{uv} = u^1_3 \bar{n} + u^2_3 f_u + u^3_3 f_v + u^4_3 n \\ n_u = u^1_4 \bar{n} + u^2_4 f_u + u^3_4 f_v + u^4_4 n \end{cases}$$

である。$\bar{n}_u$, $\bar{n}_v$, $f_{uu}$, $f_{uv}$, $f_{vv}$, $n_u$, $n_v$ は $(\bar{n}, f_u, f_v, n)$ の線形結合で表せるため、$\mathcal{U}$ は

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} u^1_1 & u^1_2 & u^1_3 & u^1_4 \\ u^2_1 & u^2_2 & u^2_3 & u^2_4 \\ u^3_1 & u^3_2 & u^3_3 & u^3_4 \\ u^4_1 & u^4_2 & u^4_3 & u^4_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -E+\alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\nu \\ 1-\frac{\alpha^2}{E} & \frac{E_u}{2E} & \frac{E_v}{2E} & -\frac{L}{E} \\ -\frac{\alpha\beta}{E} & -\frac{E_v}{2E} & \frac{E_u}{2E} & -\frac{M}{E} \\ -\alpha\nu & L & M & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\left(\begin{aligned} &\bar{n}_u : (A, B, C, D) = \left(0,\ 1-\tfrac{\alpha^2}{E},\ -\tfrac{\alpha\beta}{E},\ -\alpha\nu\right) \\ &\bar{n}_v : (A, B, C, D) = \left(0,\ -\tfrac{\alpha\beta}{E},\ 1-\tfrac{\beta^2}{E},\ -\beta\nu\right) \\ &f_{uu} : (A, B, C, D) = \left(-E+\alpha^2,\ \tfrac{E_u}{2E},\ -\tfrac{E_v}{2E},\ L\right) \\ &f_{uv} : (A, B, C, D) = \left(\alpha\beta,\ \tfrac{E_v}{2E},\ \tfrac{E_u}{2E},\ M\right) \\ &f_{vv} : (A, B, C, D) = \left(-E+\beta^2,\ -\tfrac{E_u}{2E},\ \tfrac{E_v}{2E},\ N\right) \\ &n_u : (A, B, C, D) = \left(\alpha\nu,\ -\tfrac{L}{E},\ -\tfrac{M}{E},\ 0\right) \\ &n_v : (A, B, C, D) = \left(\beta\nu,\ -\tfrac{M}{E},\ -\tfrac{N}{E},\ 0\right) \end{aligned}\right)$$

同様に、$\mathcal{F}_v = (\bar{n}_v, f_{uv}, f_{vv}, n_v)$ であるため、

$$\mathcal{F}_v = \mathcal{F}\mathcal{V}$$

$$\iff \begin{cases} \bar{n}_v = \bar{n} v^1_1 + f_u v^2_1 + f_v v^3_1 + n v^4_1 \\ f_{uv} = \bar{n} v^1_2 + f_u v^2_2 + f_v v^3_2 + n v^4_2 \\ f_{vv} = \bar{n} v^1_3 + f_u v^2_3 + f_v v^3_3 + n v^4_3 \\ n_v = \bar{n} v^1_4 + f_u v^2_4 + f_v v^3_4 + n v^4_4 \end{cases}$$

である。$\mathcal{U}$の場合と同様に $\bar{n}_r$, $f_{rr}$, $f_{ur}$, $n_r$ は $(\bar{n}, f_u, f_r, n)$ の線形結合で表せるため、

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} V_1^1 & V_2^1 & V_3^1 & V_4^1 \\ V_1^2 & V_2^2 & V_3^2 & V_4^2 \\ V_1^3 & V_2^3 & V_3^3 & V_4^3 \\ V_1^4 & V_2^4 & V_3^4 & V_4^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha\beta & -E+\beta^2 & \beta\nu \\ -\frac{\alpha\beta}{E} & \frac{E_r}{2E} & -\frac{E_u}{2E} & -\frac{M}{E} \\ 1-\frac{\beta^2}{E} & \frac{E_u}{2E} & \frac{E_r}{2E} & -\frac{N}{E} \\ -\beta\nu & M & N & 0 \end{bmatrix}.$$

- 以上より、$\mathcal{U}\mathcal{V} - \mathcal{V}\mathcal{U}$ は、

$\mathcal{U}\mathcal{V} =$

$$\begin{bmatrix} \frac{\alpha\beta\left(-E\nu^2+2E-\alpha^2-\beta^2\right)}{E} & \frac{2EM\alpha\nu+E_u\alpha\beta-E_v\left(E-\alpha^2\right)}{2E} & \frac{2EN\alpha\nu+E_u\left(E-\alpha^2\right)+E_v\alpha\beta}{2E} & \frac{M\left(E-\alpha^2\right)-N\alpha\beta}{E} \\ \frac{2EL\beta\nu-E_u\alpha\beta+E_v\left(E-\beta^2\right)}{2E^2} & \frac{E\left(-LM+\alpha\beta\left(E-\alpha^2\right)\right)+\frac{E_uE_v}{2}}{E^2} & \frac{-4E\left(LN+\left(E-\alpha^2\right)\left(E-\beta^2\right)\right)-E_u^2+E_v^2}{4E^2} & \frac{2E\beta\nu\left(E-\alpha^2\right)-E_uM-E_vN}{2E^2} \\ \frac{2EM\beta\nu+E_u\left(E-\beta^2\right)+E_v\alpha\beta}{2E^2} & \frac{-4E\left(M^2+\alpha^2\beta^2\right)+E_u^2-E_v^2}{4E^2} & \frac{E\left(-MN+\alpha\beta\left(E-\beta^2\right)\right)+\frac{E_uE_v}{2}}{E^2} & \frac{-2E\alpha\beta^2\nu-E_uN+E_vM}{2E^2} \\ \frac{-L\alpha\beta+M\left(E-\beta^2\right)}{E} & \frac{-2E\alpha^2\beta\nu+E_uM+E_vL}{2E} & \frac{2E\alpha\nu\left(E-\beta^2\right)-E_uL+E_vM}{2E} & \frac{-E\alpha\beta\nu^2-LM-MN}{E} \end{bmatrix}$$

$\mathcal{V}\mathcal{U} =$

$$\begin{bmatrix} \frac{\alpha\beta\left(-E\nu^2+2E-\alpha^2-\beta^2\right)}{E} & \frac{2EL\beta\nu+E_u\alpha\beta+E_v\left(E-\beta^2\right)}{2E} & \frac{2EM\beta\nu-E_u\left(E-\beta^2\right)+E_v\alpha\beta}{2E} & \frac{-L\alpha\beta+M\left(E-\beta^2\right)}{E} \\ \frac{2EM\alpha\nu+E_u\alpha\beta+E_v\left(E-\alpha^2\right)}{2E^2} & \frac{E\left(-LM+\alpha\beta\left(E-\alpha^2\right)\right)+\frac{E_uE_v}{2}}{E^2} & \frac{-4E\left(M^2+\alpha^2\beta^2\right)-E_u^2+E_v^2}{4E^2} & \frac{-2E\alpha^2\beta\nu+E_uM-E_vL}{2E^2} \\ \frac{2EN\alpha\nu+E_u\left(E-\alpha^2\right)-E_v\alpha\beta}{2E^2} & \frac{-4E\left(LN+\left(E-\alpha^2\right)\left(E-\beta^2\right)\right)+E_u^2-E_v^2}{4E^2} & \frac{E\left(-MN+\alpha\beta\left(E-\beta^2\right)\right)+\frac{E_uE_v}{2}}{E^2} & \frac{2E\alpha\nu\left(E-\beta^2\right)-E_uL-E_vM}{2E^2} \\ \frac{M\left(E-\alpha^2\right)-N\alpha\beta}{E} & \frac{2E\beta\nu\left(E-\alpha^2\right)+E_uM-E_vN}{2E} & \frac{-2E\alpha\beta^2\nu+E_uN+E_vM}{2E} & \frac{-E\alpha\beta\nu^2-LM-MN}{E} \end{bmatrix}$$

より、

$\mathcal{U}\mathcal{V} - \mathcal{V}\mathcal{U} =$

$$\begin{bmatrix} 0 & -E_v - L\beta\nu + M\alpha\nu + \frac{E_v\alpha^2}{2E} + \frac{E_v\beta^2}{2E} & E_u - M\beta\nu + N\alpha\nu - \frac{E_u\alpha^2}{2E} - \frac{E_u\beta^2}{2E} & \frac{L\alpha\beta-M\alpha^2+M\beta^2-N\alpha\beta}{E} \\ \frac{EL\beta\nu-EM\alpha\nu-E_u\alpha\beta+\frac{E_v\alpha^2}{2}-\frac{E_v\beta^2}{2}}{E^2} & 0 & -E+\alpha^2+\beta^2-\frac{LN}{E}+\frac{M^2}{E} & \frac{E^2\beta\nu-E_uM+\frac{E_vL}{2}-\frac{E_vN}{2}}{E^2} \\ \frac{EM\beta\nu-EN\alpha\nu+\frac{E_u\alpha^2}{2}-\frac{E_u\beta^2}{2}+E_v\alpha\beta}{E^2} & E-\alpha^2-\beta^2+\frac{LN}{E}-\frac{M^2}{E} & 0 & \frac{-E^2\alpha\nu+\frac{E_uL}{2}-\frac{E_uN}{2}+E_vM}{E^2} \\ \frac{-L\alpha\beta+M\alpha^2-M\beta^2+N\alpha\beta}{E} & \frac{-2E^2\beta\nu+E_vL+E_vN}{2E} & \frac{2E^2\alpha\nu-E_uL-E_uN}{2E} & 0 \end{bmatrix}.$$

計算： https://colab.research.google.com/drive/1HqjrKKGdWCQIJPqVt3EUC-YmCD7Z3afZ?usp=sharing

一方で，$\mathcal{U}_r - \mathcal{V}_u$ は

$$
\mathcal{U}_r - \mathcal{V}_u = \begin{bmatrix}
0 & -E_r - \alpha_u\beta - \beta_u\alpha + 2\alpha_r\alpha & E_u + \alpha_r\beta + \beta_r\alpha - 2\beta_u\beta & \alpha_r\nu - \beta_u\nu - \nu_u\beta + \nu_r\alpha \\
\dfrac{\alpha(E_r\alpha - E_u\beta) + E(\alpha_u\beta + \beta_u\alpha - 2\alpha_r\alpha)}{E^2} & 0 & \dfrac{-E_u^2 - E_r^2 + E(E_{uu} + E_{rr})}{2E^2} & \dfrac{-E_uM + E_rL + E(-L_r + M_u)}{E^2} \\
\dfrac{\beta(E_r\alpha - E_u\beta) + E(-\alpha_r\beta - \beta_r\alpha + 2\beta_u\beta)}{E^2} & \dfrac{E_u^2 + E_r^2 - E(E_{uu} + E_{rr})}{2E^2} & 0 & \dfrac{-E_uN + E_rM + E(-M_r + N_u)}{E^2} \\
-\alpha_r\nu + \beta_u\nu + \nu_u\beta - \nu_r\alpha & L_r - M_u & M_r - N_u & 0
\end{bmatrix}
$$

である．$\mathcal{U}\mathcal{V} - \mathcal{V}\mathcal{U} = \mathcal{U}_r - \mathcal{V}_u$ より、12個の等式（$0=0$ を除く）が成り立つ．

## ・微分方程式の解 $\mathcal{F}$ を定める　（幾何学Ⅱ 第9回の証明を真似したい）

○ ガウスコダッチ方程式が成り立つので、等式

$$\mathcal{U}_v - \mathcal{V}_u = \mathcal{U}\mathcal{V} - \mathcal{V}\mathcal{U}$$

が成立する．線形偏微分方程式の解の存在と一意性より、

$$\begin{cases} \mathcal{F}_u = \mathcal{F}\mathcal{U} \\ \mathcal{F}_v = \mathcal{F}\mathcal{V} \\ \mathcal{F}(u_0, v_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{E(u_0,v_0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{E(u_0,v_0)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\mathcal{F}\text{の初期値}) \\ (u_0, v_0) \in D \end{cases}$$

を満たす $\mathcal{F} : D \longrightarrow GL_4(\mathbb{R})$ が唯一つ存在する．

$\mathcal{F} := (g_1, g_2, g_3, g_4)$ と表し、$g_i\ (i=1,2,3,4) : D \longrightarrow \mathbb{R}^4$ と定める．
$\mathcal{F}_u = \mathcal{F}\mathcal{U}$ より、

$$\begin{aligned}
(g_1)_u &= \left(1 - \frac{\alpha^2}{E}\right) g_2 - \frac{\alpha\beta}{E} g_3 - \alpha\nu g_4 \\
(g_2)_u &= (-E + \alpha^2) g_1 + \frac{E_u}{2E} g_2 - \frac{E_v}{2E} g_3 + L g_4 \\
(g_3)_u &= \alpha\beta g_1 + \frac{E_v}{2E} g_2 + \frac{E_u}{2E} g_3 + M g_4 \\
(g_4)_u &= \alpha\nu g_1 - \frac{L}{E} g_2 - \frac{M}{E} g_3
\end{aligned}$$

また、$\mathcal{F}_v = \mathcal{F}\mathcal{V}$ より、

$$\begin{aligned}
(g_1)_v &= -\frac{\alpha\beta}{E} g_2 + \left(1 - \frac{\beta^2}{E}\right) g_3 - \beta\nu g_4 \\
(g_2)_v &= \alpha\beta g_1 + \frac{E_v}{2E} g_2 + \frac{E_u}{2E} g_3 + M g_4 \\
(g_3)_v &= (-E + \beta^2) g_1 - \frac{E_u}{2E} g_2 + \frac{E_v}{2E} g_3 + N g_4 \\
(g_4)_v &= \beta\nu g_1 - \frac{M}{E} g_2 - \frac{N}{E} g_3
\end{aligned}$$

である．$(g_3)_u = (g_2)_v$ なので、ポアンカレの補題より $C^\infty$ 級写像 $f : D \to \mathbb{R}^4$ で、

$$f_u = g_2, \quad f_v = g_3, \quad f(u_0, v_0) = 0$$

を満たすものが唯一つ存在する。この $f(u,v)$ が

$$\langle f_u, f_u \rangle = E, \quad \langle f_u, f_v \rangle = F = 0, \quad \langle f_v, f_v \rangle = G = E$$

$$\langle f_{uu}, \nu \rangle = L, \quad \langle f_{uv}, \nu \rangle = M, \quad \langle f_{vv}, \nu \rangle = N$$

を満たすことを示す.

$P := {}^t\mathcal{F}\mathcal{F}$ とおく。 $(\mathcal{F} = (g_1, f_u, f_v, g_4))$

$$P = {}^t\mathcal{F}\mathcal{F}$$

$$= \begin{bmatrix} {}^tg_1 g_1 & {}^tg_1 f_u & {}^tg_1 f_v & {}^tg_1 g_4 \\ {}^tf_u g_1 & {}^tf_u f_u & {}^tf_u f_v & {}^tf_u g_4 \\ {}^tf_v g_1 & {}^tf_v f_u & {}^tf_v f_v & {}^tf_v g_4 \\ {}^tg_4 g_1 & {}^tg_4 f_u & {}^tg_4 f_v & {}^tg_4 g_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} g_1 \cdot g_1 & g_1 \cdot f_u & g_1 \cdot f_v & g_1 \cdot g_4 \\ f_u \cdot g_1 & f_u \cdot f_u & f_u \cdot f_v & f_u \cdot g_4 \\ f_v \cdot g_1 & f_v \cdot f_u & f_v \cdot f_v & f_v \cdot g_4 \\ g_4 \cdot g_1 & g_4 \cdot f_u & g_4 \cdot f_v & g_4 \cdot g_4 \end{bmatrix}.$$

$$P_u = {}^t\mathcal{F}_u\mathcal{F} + {}^t\mathcal{F}\mathcal{F}_u = {}^t(\mathcal{F}\mathcal{U})\mathcal{F} + {}^t\mathcal{F}\mathcal{F}\mathcal{U}$$
$$= {}^t\mathcal{U}P + P\mathcal{U} \quad \cdots ①$$

$$P_v = {}^t\mathcal{F}_v\mathcal{F} + {}^t\mathcal{F}\mathcal{F}_v = {}^t(\mathcal{F}\mathcal{V})\mathcal{F} + {}^t\mathcal{F}\mathcal{F}\mathcal{V}$$
$$= {}^t\mathcal{V}P + P\mathcal{V} \quad \cdots ②$$

が成り立つ。また、$(u,v) = (u_0, v_0)$ の時は

$$P(u_0, v_0) = {}^t\mathcal{F}(u_0, v_0)\mathcal{F}(u_0, v_0)$$

$$= {}^t\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{E(u_0,v_0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{E(u_0,v_0)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{E(u_0,v_0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{E(u_0,v_0)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{E(u_0, v_0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{E(u_0, v_0)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{E(u_0, v_0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{E(u_0, v_0)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E(u_0, v_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E(u_0, v_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
$$

$$
Q := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & F & 0 \\ 0 & F & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

とする. 等温座標系($E=G$, $F=0$)を考えているので、

$P(u_0, v_0) = Q(u_0, v_0)$ である …③

初期条件の一致

$P_u = Q_u$, $P_v = Q_v$ を示す

$QU$ と ${}^tUQ$ を計算すると、

$$
QU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 & -E+\alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\nu \\ 1-\frac{\alpha^2}{E} & \frac{E_u}{2E} & \frac{E_v}{2E} & -\frac{L}{E} \\ -\frac{\alpha\beta}{E} & -\frac{E_v}{2E} & \frac{E_u}{2E} & -\frac{M}{E} \\ -\alpha\nu & L & M & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 0 & -E+\alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\nu \\ E-\alpha^2 & \frac{E_u}{2} & \frac{E_v}{2} & -L \\ -\alpha\beta & -\frac{E_v}{2} & \frac{E_u}{2} & -M \\ -\alpha\nu & L & M & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^tUQ = {}^t\begin{bmatrix} 0 & -E+\alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\nu \\ 1-\frac{\alpha^2}{E} & \frac{E_u}{2E} & \frac{E_v}{2E} & -\frac{L}{E} \\ -\frac{\alpha\beta}{E} & -\frac{E_v}{2E} & \frac{E_u}{2E} & -\frac{M}{E} \\ -\alpha\nu & L & M & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 0 & E-\alpha^2 & -\alpha\beta & -\alpha\nu \\ -E+\alpha^2 & \frac{E_u}{2} & -\frac{E_v}{2} & L \\ \alpha\beta & \frac{E_v}{2} & \frac{E_u}{2} & M \\ \alpha\nu & -L & -M & 0 \end{bmatrix}
$$

であるため、

$$Q\mathcal{U} + {}^t\mathcal{U}Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = Q_u$$ が成り立つ. … ④

同様に $Q\mathcal{V} + {}^t\mathcal{V}Q$ を計算する.

$$Q\mathcal{V} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha\beta & -E+\beta^2 & \beta\nu \\ -\alpha\beta & \frac{E_v}{2} & -\frac{E_u}{2} & -M \\ E-\beta^2 & \frac{E_u}{2} & \frac{E_v}{2} & -N \\ -\beta\nu & M & N & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^t\mathcal{V}Q = {}^t\begin{bmatrix} 0 & \alpha\beta & -E+\beta^2 & \beta\nu \\ -\frac{\alpha\beta}{E} & \frac{E_v}{2E} & -\frac{E_u}{2E} & -\frac{M}{E} \\ 1-\frac{\beta^2}{E} & \frac{E_u}{2E} & \frac{E_v}{2E} & -\frac{N}{E} \\ -\beta\nu & M & N & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\alpha\beta & E-\beta^2 & -\beta\nu \\ \alpha\beta & \frac{E_v}{2} & \frac{E_u}{2} & M \\ -E+\beta^2 & -\frac{E_u}{2} & \frac{E_v}{2} & N \\ \beta\nu & -M & -N & 0 \end{bmatrix}$$ であるため、

$$Q\mathcal{V} + {}^t\mathcal{V}Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = Q_v$$ が成り立つ. … ⑤

以上①～⑤より. 行列 $P$、$Q$ はどちらも

$$\begin{cases} X_u = X\mathcal{U} + {}^t\mathcal{U}X \\ X_v = X\mathcal{V} + {}^t\mathcal{V}X \\ \end{cases}$$

初期条件 $X(u_0, v_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

の解である。一意性より、$P = Q$ が成り立つ。したがって、

$$P = {}^t\mathfrak{F}\mathfrak{F} = \begin{bmatrix} g_1 \cdot g_1 & g_1 \cdot f_u & g_1 \cdot f_v & g_1 \cdot g_4 \\ f_u \cdot g_1 & f_u \cdot f_u & f_u \cdot f_v & f_u \cdot g_4 \\ f_v \cdot g_1 & f_v \cdot f_u & f_v \cdot f_v & f_v \cdot g_4 \\ g_4 \cdot g_1 & g_4 \cdot f_u & g_4 \cdot f_v & g_4 \cdot g_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

が成り立つので、$f_u \cdot f_v = 0$、$f_u \cdot f_u = f_v \cdot f_v = E$ が成り立つ。

$$\mathfrak{F} = (g_1, f_u, f_v, g_4) = \begin{bmatrix} (g_1)_1 & x_u & x_v & (g_4)_1 \\ (g_1)_2 & y_u & y_v & (g_4)_2 \\ (g_1)_3 & z_u & z_v & (g_4)_3 \\ (g_1)_4 & t_u & t_v & (g_4)_4 \end{bmatrix}$$ と表される

・ $L=\langle f_{uu}, n\rangle$、$M=\langle f_{uv}, n\rangle$、$N=\langle f_{vv}, n\rangle$ を示す

$$\begin{cases} n_u = \alpha\nu\overline{n} - \frac{L}{E}f_u - \frac{M}{E}f_v \\ n_v = \beta\nu\overline{n} - \frac{M}{E}f_u - \frac{N}{E}f_v \end{cases}$$

と表せることから、

上式を代入

$$\begin{aligned} f_{uu}\cdot n &= -n_u\cdot f_u = \left(-\alpha\nu\overline{n} + \frac{L}{E}f_u + \frac{M}{E}f_v\right)\cdot f_u \\ &= -\alpha\nu\underbrace{\overline{n}\cdot f_u}_{=0} + \frac{L}{E}\underbrace{f_u\cdot f_u}_{=E} + \frac{M}{E}\underbrace{f_u\cdot f_v}_{F=0} \\ &= \frac{L}{E}E = L. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{uv}\cdot n &= -n_u\cdot f_v = \left(-\alpha\nu\overline{n} + \frac{L}{E}f_u + \frac{M}{E}f_v\right)\cdot f_v \\ &= -\alpha\nu\underbrace{\overline{n}\cdot f_v}_{=0} + \frac{L}{E}\underbrace{f_u\cdot f_v}_{F=0} + \frac{M}{E}\underbrace{f_v\cdot f_v}_{G=E} \\ &= \frac{M}{E}E = M. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{vv}\cdot n &= -n_v\cdot f_v = \left(-\beta\nu\overline{n} + \frac{M}{E}f_u + \frac{N}{E}f_v\right)\cdot f_v \\ &= -\beta\nu\underbrace{\overline{n}\cdot f_v}_{=0} + \frac{M}{E}\underbrace{f_u\cdot f_v}_{F=0} + \frac{N}{E}\underbrace{f_v\cdot f_v}_{G=E} \\ &= \frac{N}{E}E = N. \end{aligned}$$

が成り立つ.

よって、$L=\langle f_{uu}, n\rangle$、$M=\langle f_{uv}, n\rangle$ $N=\langle f_{vv}, n\rangle$ である. ▨

・$\frac{\alpha}{E} f_u + \frac{\beta}{E} f_r + \nu n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ を示す　　$\left( \nu = \left\langle n, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \cdots n \text{の第4成分} \right)$

仮定 $\frac{1}{E}(\alpha^2 + \beta^2) + \nu^2 = 1.$

$\frac{\alpha}{E} f_u + \frac{\beta}{E} f_r + \nu n$ の第4成分のみを考えると、

$$\frac{\alpha}{E}\alpha + \frac{\beta}{E}\beta + \nu^2 = \frac{1}{E}(\alpha^2 + \beta^2) + \nu^2 = 1.$$

仮定より

以降、$\frac{\alpha}{E} f_u + \frac{\beta}{E} f_r + \nu n = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{bmatrix}$ とする。$(a, b, c \in \mathbb{R})$

両辺を $f_u$ と内積させると、

(左辺)：$\frac{\alpha}{E}\langle f_u, f_u \rangle = \alpha = t_u$

(右辺)：$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \\ t_u \end{bmatrix} = a x_u + b y_u + c z_u + t_u.$

(左辺) = (右辺) なので、$a x_u + b y_u + c z_u = 0.$　$f$ がはめ込み ($f_u$ と $f_r$ が一次独立)

$f_u \neq 0$

かつ、任意の $f_u = \begin{bmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \\ t_u \end{bmatrix}$ で ～～ が成り立つことから、

$$a x_u + b y_u + c z_u = 0 \iff a = b = c = 0$$

が成り立つ。

以上より、$\frac{\alpha}{E} f_u + \frac{\beta}{E} f_r + \nu n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ である。▨

• $\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix}$, $x^2+y^2+z^2=1$ を示す　$(\mathcal{F} = (\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3))$

$\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$ とおく。$\underbrace{\frac{\alpha}{E} f_u}_{=\mathbf{a}_1} + \underbrace{\frac{\beta}{E} f_v}_{=\mathbf{a}_2} + \nu \underbrace{n}_{=\mathbf{a}_3}$ との内積をとると、

$$\left\langle \mathbf{a}_0, \frac{\alpha}{E}\mathbf{a}_1 + \frac{\beta}{E}\mathbf{a}_2 + \nu\mathbf{a}_3 \right\rangle$$

$$= \frac{\alpha}{E}\underbrace{\langle \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1 \rangle}_{=0} + \frac{\beta}{E}\underbrace{\langle \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_2 \rangle}_{=0} + \nu\underbrace{\langle \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_3 \rangle}_{=0}$$

$$= 0. \quad \cdots ①$$

一方、$\frac{\alpha}{E} f_u + \frac{\beta}{E} f_v + \nu n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ であるため（前ページで示した）、

$$\mathbf{a}_0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = t. \cdots ②$$

①、② より、$t = 0$ である。

さらに、$\langle \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_0 \rangle = 1$ であるため

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \iff x^2+y^2+z^2=1 \text{ が成り立つ.}$$

以上より、$\mathbf{a}_0$ は $\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix}$, $x^2+y^2+z^2=1$ である。 ▨