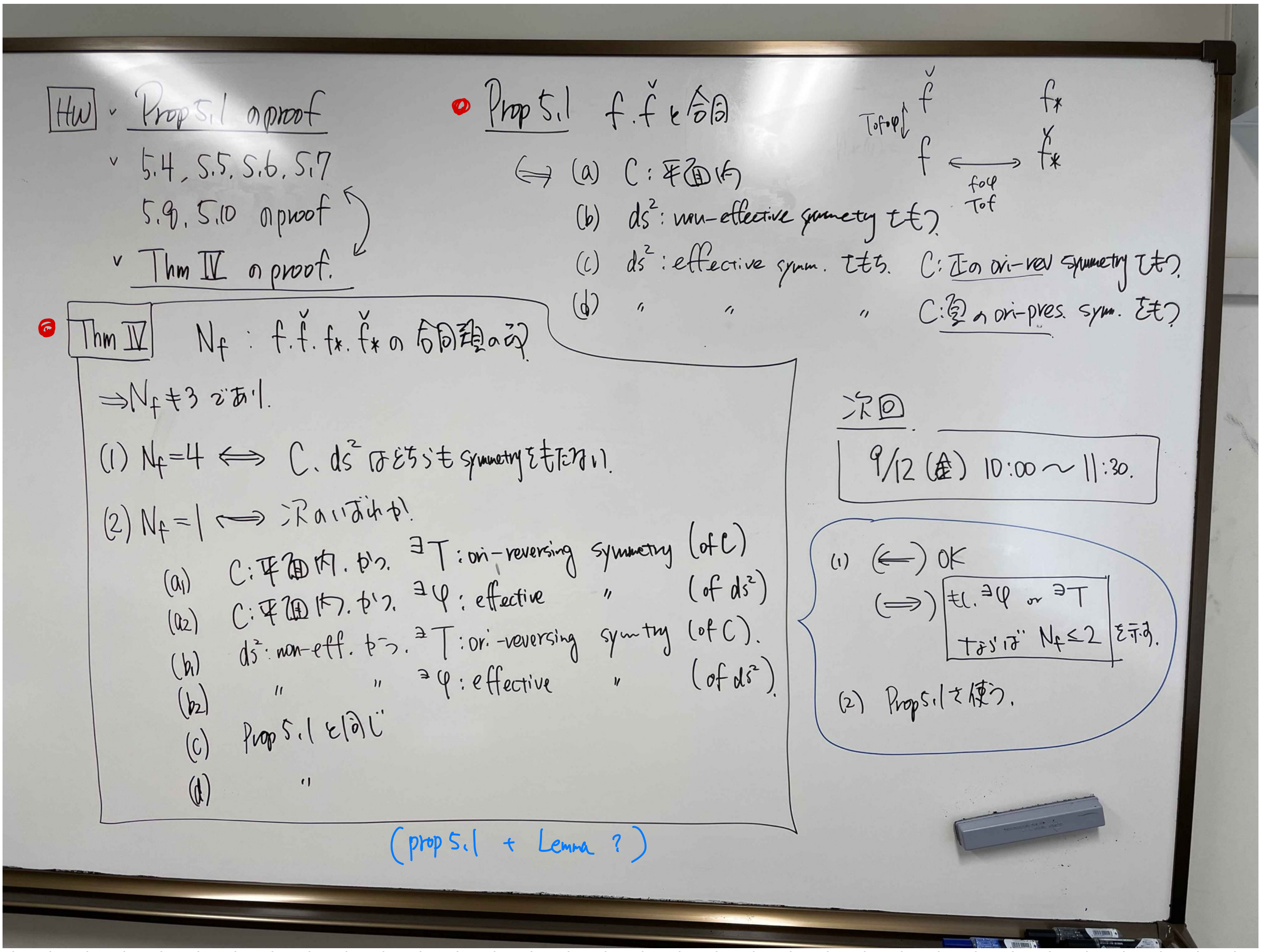
- Prop 5.1

Prop 5.10?

  - $\Longleftarrow$ を示す
  - $\Longrightarrow$ を示す

- 定理4
  - $N_f = 4$ ($\Longleftarrow$)
  - $N_f = 4$ ($\Longrightarrow$)
  - $N_f = 1$ ($\Longleftarrow$)
  - $N_f = 1$ ($\Longrightarrow$)

$f \in g^{\omega}_{4/3,**}$



# Prop 5.1 の Proof ($\exists T$、$\exists \varphi$ s.t. $T \circ f \circ \varphi = \check{f}$)

## ◦ ($\Longleftarrow$ を示す)

◦ (a) 特異曲線 $C$ が 平面曲線 の 場合

平面による 折り返し $S \in O(3)$ を 用いて、$\check{f} = Sf$ と 表されるため、
$f$ と $\check{f}$ は 合同.

◦ (b) $ds_f^2$ が non-effective symmetry $\varphi$ を 持つ 場合 ($\varphi(u,v) = (u,-v)$ または $(u,v)$)

(示したいこと: $\underbrace{T}_{\mathrm{Id}} \circ f \circ \varphi = \check{f}$)

↓ そのために

($g :=$) $f\varphi$ として、$\theta_g(0) = -\theta_f(0)$ を 示したい.

- まず、$f(u,0) = \mathbb{C}(u)$ である.
- ($g(u,0) =$) $f\varphi(u,0) = f(u,0) = \mathbb{C}(u)$. ← $f$の 特異曲線と 向きが一致.

また、($g =$) $f\varphi$ と $f$ は 同じ 第一基本形式 を 持つため、

$$(g=)\ f\varphi = f \quad \text{または} \quad f\varphi = \check{f}$$

である.

↓ $f$の カスプ方向 を $x_f$、
($g=$) $f\varphi$ の カスプ方向 を $x_g$ と する.

- $f$ と ($g=$) $f\varphi$ の フレネ枠 は 共に 等しい($\{e(u), n(u), b(u)\}$) ため、
$x_f$ と $x_g$ は それぞれ 次のように 表せる.

$$x_f = \cos\theta_f\, n(u) - \sin\theta_u\, b(u)$$

$$x_g = \cos\theta_g\, n(u) - \sin\theta_g\, b(u)$$

($\theta_f$、$\theta_g$ は それぞれ $f$、$g$ に 対応する カスプ角)

- ($g=$) $f\varphi$ の 向きに 同調する 単位法ベクトル場 $\nu_g(u,v)$ を 求める.

→ つまり、$\det(g_u, g_v, \nu_g)(u,v) \geq 0$ となるように $\nu_g(u)$ を 選ぶ.

$$\det(g_u, g_v, \nu_g) = \det((f\varphi)_u, (f\varphi)_v, \nu_g)(u,v)$$
$$= \det(f_u(u,-v), -f_v(u,-v), \nu_g(u,v))$$
$$= -\det(f_u(u,-v), f_v(u,-v), \nu_g(u,v))$$

$\varphi \neq \mathrm{Id}$ のため、non-effective なら $\varphi(u,v) = (u,-v)$ のみ.

$\nu_g(u,v) = -\nu_f(u,-v)$ とすると、先程の行列式は

$$-\det(f_u(u,-v), f_v(u,-v), -\nu_f(u,-v))$$
$$= \det(f_u, f_v, \nu_f)(u,-v)$$
$$= \lambda(u,-v)$$

$\nu_g(u) = -\nu_f(u)$ とすれば、$\det(g_u, g_v, \nu_g) = (-1)^2 \det(f_u, f_v, \nu_f) = \lambda \geq 0$.

$x_g = \nu_g(u) \times \mathbb{c}'(u)$ に代入する

- $\underbrace{x_g = \nu_g(u) \times \mathbb{c}'(u)}_{\text{カスプ方向の定義式}} = -\nu_f(u) \times \mathbb{c}'(u) = -x_f$
  $= -\cos\theta_f\, \mathbb{n}(u) + \sin\theta_f\, \mathbb{b}(u).$ …①

一方、$x_g = \cos\theta_g\, \mathbb{n}(u) - \sin\theta_g\, \mathbb{b}(u)$ であるので、係数比較すると

$$-\cos\theta_f = \cos\theta_g$$
$$\sin\theta_f = -\sin\theta_g$$

$g = Tf\varphi$

$\varphi(u,v) = (-u,v)$

・(c) $ds_f^2$ が effective symmetry $\varphi$ を持ち、かつ

$C$ が 正 の ori-reversing symmetry $T$ を持つ場合

$\leftrightarrow$ non-trivial

(示したいこと; $T \circ f \circ \varphi = \check{f}$ )

$\Big\downarrow$ そのために

$g := Tf\varphi$ として、 $\theta_g(0) = -\sigma\theta_f(0)$ を示したい。

- まず、$f(u,0) = \mathbb{C}(u)$ である。
- $(g(u,0) =)\ Tf\varphi(u,0) = Tf(-u,0) = T\mathbb{C}(-u) = \mathbb{C}(u)$.

↑ $f$ の特異曲線と向きが一致。

また、$(g=)\ Tf\varphi$ と $f$ は 同じ第一基本形式 を 持つため、

$$(g=)\ Tf\varphi = f \quad \text{または} \quad Tf\varphi = \check{f}$$

である。

$\Big\downarrow$ $f$ の カスプ方向 を $x_f$、$(g=)\ f\varphi$ の カスプ方向 を $x_g$ とする。

- $f$ と $(g=)\ Tf\varphi$ の フレネ枠 は共に等しい($\{e(u), n(u), b(u)\}$) ため、

$x_f$ と $x_g$ は それぞれ 次のように表せる。

$$x_f = \cos\theta_f\, n(u) - \sin\theta_u\, b(u)$$
$$x_g = \cos\theta_g\, n(u) - \sin\theta_g\, b(u)$$

($\theta_f$、$\theta_g$ は それぞれ $f$、$g$ に対応する カスプ角)

- $(g=)\ Tf\varphi$ の 向きに 同調 する 単位法ベクトル場 $\nu_g(u,v)$ を 求める。

$\longrightarrow$ つまり、$\det(g_u, g_v, \nu_g)(u,v) = \lambda(u,v) \geq 0$ となるように $\nu_g(u)$ を 選ぶ。

$$\det(g_u, g_v, \nu_g)(u,v) = \det(T(f\varphi)_u, T(f\varphi)_v, \nu_g)(u,v).$$

$\nu_g(u,v) = \sigma T\nu_f\varphi(u,v)$ とすると、先ほどの行列式は、

$$\det(T(f\varphi)_u, T(f\varphi)_v, \sigma T\nu_f\varphi)(u,v)$$
$$= \sigma(\det T)\det((f\varphi)_u, (f\varphi)_v, \nu_f\varphi)(u,v)$$

$$
=\begin{cases}
\det(-f_u,\ f_v,\ \nu_f)(-u,v) & (\varphi(u,v)=(-u,v) \text{ の場合}) \\
\det(-f_u,\ -f_v,\ \nu_f)(-u,-v) & (\varphi(u,v)=(-u,-v) \text{ の場合})
\end{cases}
$$

$$
=\begin{cases}
-\det(f_u,\ f_v,\ \nu_f)(-u,v) \\
\det(f_u,\ f_v,\ \nu_f)(-u,-v)
\end{cases}
$$

$$
=\begin{cases}
-\lambda(-u,v) & (\varphi(u,v)=(-u,v) \text{ の場合}) \\
\lambda(-u,-v) & (\varphi(u,v)=(-u,-v) \text{ の場合})
\end{cases}
$$

$$\downarrow$$

- $\lambda(u,v)$ を用いて表せないか？　　($f$ は $(3,4)$-カスプ辺)
- $\varphi(u,v)=(-u,v)$ の場合は $\nu_g(u,v) := -\sigma T \nu_f(u,v)$ とすると、

$$\det(g_u, g_v, \nu_g) = \lambda(-u,v).$$

$\varphi(u,v)=(-u,-v)$ の場合は $\nu_g(u,v) := \sigma T \nu_f(u,v)$ とすると、

$$\det(g_u, g_v, \nu_g) = \lambda(-u,-v).$$

($\lambda(u,v) \neq \lambda(-u,v) \neq \lambda(-u,-v)$ なので、$\det(g_u, g_v, \nu_g) \geq 0$ かは分からない)

$$\nu_g(u) = T\nu_f\varphi(u)$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_g(u) &= \nu_g(u) \times \boldsymbol{c}'(u) \\
&= T\nu_f(-u) \times (-T\boldsymbol{c}'(-u)) \\
&= -\sigma T(\nu_f(-u) \times \boldsymbol{c}'(-u)) \\
&= -\sigma T \boldsymbol{x}_f(-u) \\
&= -\sigma T(\cos\theta_f(-u)\boldsymbol{n}(-u) - \sin\theta_f(-u)\boldsymbol{b}(-u)) \\
&= -\sigma \cos\theta_f(-u) T\boldsymbol{n}(-u) + \sigma \sin\theta_f(-u) T\boldsymbol{b}(-u)
\end{aligned}
$$

$u=0$

$$\boldsymbol{x}_g(0) = -\sigma \cos\theta_f(0)\boldsymbol{n}(0) - \sin\theta_f(\underset{0}{\cancel{-u}})\boldsymbol{b}(0)$$

$$\boxed{K_\nu = 0}$$

$f(u,v) = (u,\ v^3,\ v^4)$ とする.

$f_u(u,v) = (1,\ 0,\ 0)$. $\rightarrow f_u(u,v) = f_u(-u,v) = f_u(-u,-v)$

$f_v(u,v) = (0,\ 3v^2,\ 4v^3)$ $\rightarrow f_v(u,v) = f_v(-u,v)$

$$\lambda(u,v) = \det(f_u(u,v),\ f_v(u,v),\ \nu_f(u,v)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3v^2 & \frac{-4v}{\sqrt{16v^2+9}} \\ 0 & 4v^3 & \frac{3}{\sqrt{16v^2+9}} \end{vmatrix}$$

$$\lambda(-u,v) = \det(f_u(-u,v),\ f_v(-u,v),\ \nu_f(-u,v)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 3v^2 & \boxed{\phantom{x}} \\ 0 & 4v^3 & \end{vmatrix} = \lambda(u,v)$$

$$\lambda(-u,-v) = \det(f_u(-u,-v),\ f_v(-u,-v),\ \nu_f(-u,-v)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3v^2 & \frac{4v}{\sqrt{16v^2+9}} \\ 0 & -4v^3 & \frac{3}{\sqrt{\phantom{x}}} \end{vmatrix} = \lambda(u,v)$$

(d) $ds_f^2$ が effective symmetry $\varphi$ を持ち、かつ
$C$ が 負の ori-preserving symmetry $T\in O(3)$ を持つ場合.
$\det T=-1$.

（示したいこと：$T\circ f\circ\varphi=\check{f}$）

↓ そのために

$g:=Tf\varphi$ として、$\theta_g(0)=\sigma\theta_f(0)$ を示したい.

- まず、$f(u,0)=\mathbb{C}(u)$ である.

f の特異曲線

- $(g(u,0)=)\ Tf\varphi(u,0)=Tf(-u,0)=T\mathbb{C}(-u)=\mathbb{C}(-u).$ $(=:\mathbb{C}_*(u))$

↓ $\mathbb{C}(u)$ のフレネ枠 $\{\mathbb{e}(u), n(u), b(u)\}$ を用いると、（$g=Tf\varphi$ の特異曲線）$\mathbb{C}_*(u)$ のフレネ枠 $\{\mathbb{e}_*(u), n_*(u), b_*(u)\}$ は次のように表される.

$$\begin{cases} \mathbb{e}_*(u)=-\mathbb{e}(-u)\\ n_*(u)=n(-u)\\ b_*(u)=-b(-u)\end{cases}$$

また、$(g=)\,Tf\varphi$ と $f$ は 同じ第一基本形式を 持つため、

$$(g=)\,Tf\varphi=f \quad \text{または} \quad Tf\varphi=\check{f}$$

である.

↓ $f$ のカスプ方向を $x_f$、カスプ角を $\theta_f$、$g$ のカスプ方向を $x_g$、カスプ角を $\theta_g$ とおく.

- $x_f$ と $x_g$ は それぞれ、

$$x_f=\cos\theta_f\, n(u)-\sin\theta_f\, b(u)$$
$$x_g=\cos\theta_g\, n_*(u)-\sin\theta_g\, b_*(u)$$

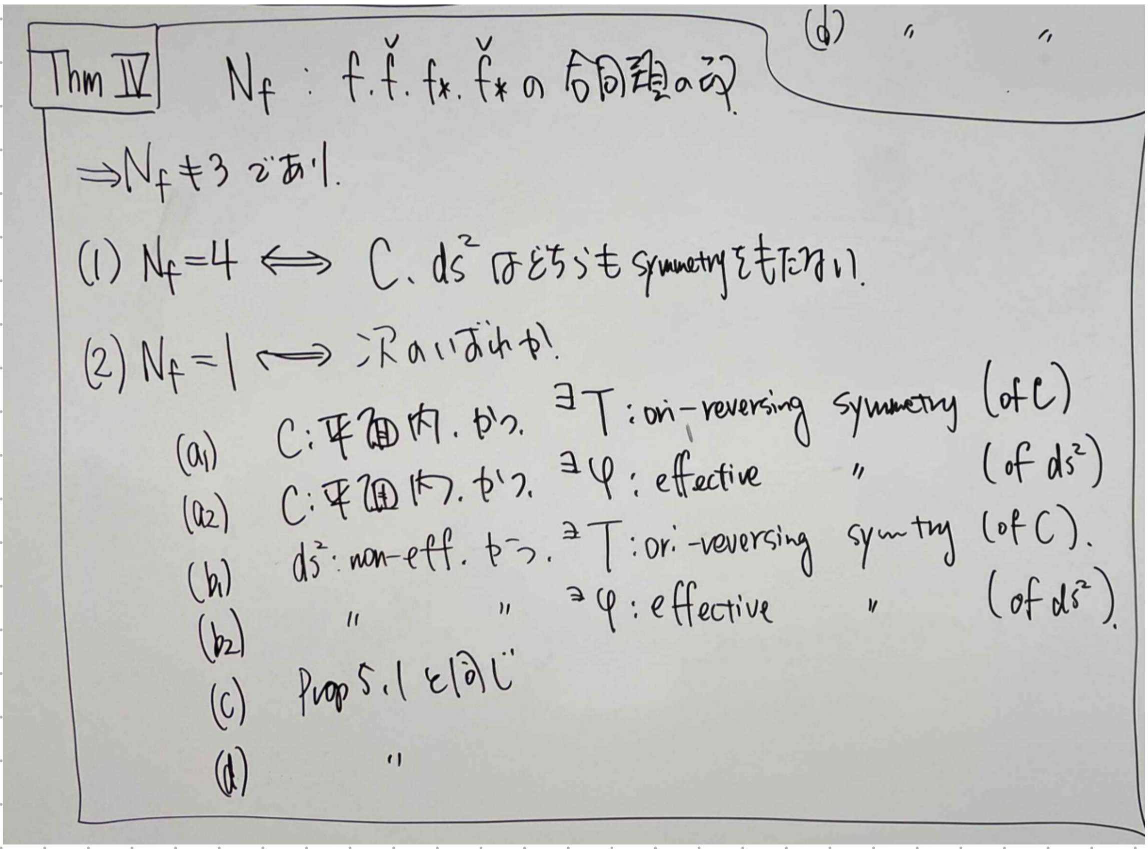
と表せる.

- $(g=)\,Tf\varphi$ の 向きに同調する 単位法ベクトル場 $\nu_g(u,v)$ を 求める.

→ つまり、$\det(g_u, g_v, \nu_g)\geq 0$ となるように $\nu_g(u)$ を 選ぶ.

(c) の 場合と同様.

# Theorem IV



$\boxed{\text{Thm IV}}$ $N_f$ : $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ の合同類の数

(d) 〃 〃

$\Rightarrow N_f \neq 3$ であり.

(1) $N_f = 4 \iff C, ds^2$ はどちらも symmetry をもたない.

(2) $N_f = 1 \iff$ 次のいずれか.

(a1) $C$:平面内. かつ. $\exists T$ : ori-reversing symmetry (of $C$)

(a2) $C$:平面内. かつ. $\exists \varphi$ : effective 〃 (of $ds^2$)

(b1) $ds^2$: non-eff. かつ. $\exists T$ : ori-reversing symmetry (of $C$).

(b2) 〃 〃 $\exists \varphi$ : effective 〃 (of $ds^2$).

(c) Prop 5.1 と同じ

(d) 〃

(1) $N_f = 4 \iff C$ と $ds_f^2$ は どちらも symmetry を持たない.

(⇐ を 示す)

$C$ または $ds_f^2$ に symmetry が 1つでもあれば、$N_f < 4$ となることを示せばよい.

~~・Prop 5.1 (a) の 場合に、symmetry が 存在することを示せばよい.~~

~~平面曲線 に関する補題より、「$C$ は 平面曲線」$\iff$「$C$ は ori-preserving symmetry~~

~~$\leftrightarrow$ non-trivial~~

~~$T \in O(3)$ を 持つ」 であるため、~~

~~Prop 5.1 の (a)(b)(c)(d) どの場合でも、いずれかの symmetry を 持っている~~

~~$\therefore N_f < 4 \iff C$ と $ds_f^2$ の いずれかは symmetry を 持っている~~

~~$\therefore N_f = 4 \iff C$ と $ds_f^2$ は いずれも symmetry を 持っていない.~~

$f$ と $\check{f}$ が合同である $\Longleftrightarrow {}^{\exists}T \circ f \circ {}^{\exists}\varphi = \check{f}$.

$T$ と $\varphi$ が共に Id だと、～～～ は $f(u,v) = \check{f}(u,v)$ となるが、これは不適.
(像が一致することはあっても、
各点で $f$ と $\check{f}$ は一致しない)

$f$ と $f_*$、$f$ と $\check{f}_*$ に対しても同様に、$T$ と $\varphi$ が共に Id の場合は合同の定義に不適.

$\therefore$ $T$ と $\varphi$ がどちらも Id、つまり $C$ と $ds_p^2$ が symmetry を持たない

$\Downarrow$

合同の定義を満たす $T$ および $\varphi$ が存在しないため、$N_p = 4$.

($\Longrightarrow$ を示す) 背理法で示す.

$ds_p^2$ が symmetry $\varphi$ を持つと仮定する

- $\varphi$ が non-effective の場合、Prop 5.1 (b) に該当するため、$f$ と $\check{f}$ が合同.

$\longrightarrow$ $N_p = 4$ と矛盾.

○ $\varphi$ が effective の場合、

→ Prop 5.5、5.6、5.10 が該当.

・Prop 5.5 の場合

・$\varphi$ が $ds_f^2$ の eff sym、C は平面曲線ではない、ori-reversing symmetry を持たない

$\Downarrow$

・$f$ と $\check{f}$ は合同ではない.
・等長双対：$\check{f}$、逆：$\check{f}\circ\varphi$、逆双対：$f\circ\varphi$

→「$f$ と逆双対 $f\circ\varphi$」、「$\check{f}$ と逆 $\check{f}\circ\varphi$」がそれぞれ合同であるため、$N_f = 4$ と矛盾.

・Prop 5.6 の場合

・$\varphi$ は $ds_f^2$ の eff sym、C は平面曲線、ori-reversing symmetry を持たない.

$\Downarrow$

$\check{f} = S\circ f$ が成り立つ. ($S\in O(3)$ は平面の折返し)

→ $N_f = 4$ と矛盾.

・Prop 5.10 の場合

・$\varphi$ は $ds_f^2$ の eff-sym、C は平面曲線ではない、ori-reversing symmetry $T\in O(3)$ を持つ.

$\Downarrow$

T が正 ($\det T = 1$、T は回転行列) → $f$ と $\check{f}$ は合同. ∴ $N_f = 4$ と矛盾.
T が負 ($\det T = -1$、T は回転 + 折返し) → $f$ と $\check{f}$ は合同ではない.

→ $ds_f^2$：effective symmetry $\varphi$ を持ち、
C：負の ori-reversing symmetry を持つ
→ $N_f = 4$ になる？

$f_a$、$\check{f}_a$？

(3,4)-カスプ辺の場合の
Prop 5.10 の主張異なる？

続

特異曲線 $C$ が symmetry $T$ を持つと仮定する.

→ Prop 5.7、5.8、5.10 が該当.

- Prop 5.7 の場合

  - $C$ は平面曲線ではない、non-trivial (ori-reversing) symmetry $T \in O(3)$ を持つ、$ds_f^2$ は eff symmetry をもたない

$$\Downarrow$$

- $f$ と $\check{f}$ は合同ではない.
- 逆: $T \circ \check{f}$、逆双対: $T \circ f$

→「$f$ と逆双対 $T \circ f$」、「$\check{f}$ と逆 $T \circ \check{f}$」がそれぞれ合同であるため、$N_f = 4$ と矛盾.

- Prop 5.8 の場合

  - $C$ は平面曲線、non-trivial (ori-reversing) symmetry $T \in O(3)$ を持つ.

$$\Downarrow$$

- $\check{f} = S \circ f$ である.
- $f_* = S \circ T \circ f$、$\check{f}_* = T \circ f$.

→ $\check{f}$、$f_*$、$\check{f}_*$ は全て $f$ と合同であるため、$N_f = 4$ と矛盾.

- Prop 5.10 の場合

  - $\varphi$ は $ds_f^2$ の eff-sym、$C$ は平面曲線ではない、ori-reversing symmetry $T \in O(3)$ を持つ.

$$\Downarrow$$

- $T$ が正 ($\det T = 1$、$T$ は回転行列) → $f$ と $\check{f}$ は合同　∴ $N_f = 4$ と矛盾.
- $T$ が負 ($\det T = -1$、$T$ は回転 + 折返し) → $f$ と $\check{f}$ は合同ではない
  → $N_f = 4$?　　$f_*$、$\check{f}_*$

(2) $N_f = 1 \iff$ 次のいずれか

$$\begin{cases} (a_1)\ C\text{ は平面曲線 かつ ori-rev symmetry } T \in O(3) \text{ が存在.} \\ (a_2)\ C\text{ は平面曲線 かつ } ds_f^2 \text{ に eff symmetry } \varphi \text{ が存在.} \\ (b_1)\ ds_f^2 \text{ に non-eff symmetry } \varphi \text{ が存在 かつ } C \text{ に ori-rev symmetry } T \in O(3) \text{ が存在.} \\ (b_2)\ ds_f^2 \text{ に non-eff symmetry } \varphi_1 \text{ が存在 かつ eff symmetry } \varphi_2 \text{ が存在.} \\ (c)\ \text{Prop 5.1 (c) と同じ} \\ (d)\ \text{Prop 5.1 (d) と同じ} \end{cases}$$

($\Longrightarrow$ を示す)

$N_f = 1$ ということは、$f$ と $\check{f}$ が合同.(Prop 5.1 の状況)

- $C$ が平面曲線の場合 ($\check{f} = S \circ f$)

$\longrightarrow$ Prop 5.6, 5.8 が該当.

- Prop 5.6 の場合 ($(a_2)$ に該当)
  - $\varphi$ は $ds_f^2$ の eff sym、$C$ は平面曲線、ori-reversing symmetry を持たない.

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \check{f} = S \circ f \ (S \in O(3) \text{ は平面の折返し}) \\ f_* = S \circ f \circ \varphi \\ \check{f}_* = f \circ \varphi \end{cases}$$

$\longrightarrow N_f = 1.$

- Prop 5.8 の場合 ($(a_1)$ に該当)
  - $C$ は平面曲線、non-trivial (ori-reversing) symmetry $T \in O(3)$ を持つ.

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \cdot\ \check{f} = S \circ f \text{ である.} \\ \cdot\ f_* = S \circ T \circ f,\ \check{f}_* = T \circ f. \end{cases}$$

$\longrightarrow N_f = 1.$

(逆に、$(a_1) \Longrightarrow N_f = 1$ および $(a_2) \Longrightarrow N_f = 1$ も $\boxed{\text{Prop 5.6, 5.8 より}}$ 成り立つ)

- $ds_f^2$ が non-effective symmetry $\varphi$ を持つ場合
  - eff symmetry も持つ場合. 定理Ⅲ ((3.4)-カスプ辺 ver) より.

$ds_f^2$ が eff-symmetry と non-eff symmetry の両方を持つ $\Longleftrightarrow$ 像の数 $=1$

であった. 「右同値類の数 (= 像の数) $= 1$」 $\Longrightarrow$ 「合同類の数 $= 1$」であるため、

$g = f \circ \varphi$ 　　　　　　　　　　$g = \underset{\text{Id にすればよい.}}{T} \circ f \circ \varphi$

$(b_2)$ の場合に該当.

$((b_2) \Longrightarrow N_f = 1)$

$N_f = 1 \Longrightarrow (b_2)$ は成り立つ? 定理Ⅲの主張と不整合?

- (c) … Prop 5.10 と対応.

$f$ の isomer $g$ は、$\check{f}$、$\check{f} \circ \varphi$、$f \circ \varphi$ のいずれかと右同値

↳ $f$ と右同値ではない