9 テンソル場とレビチビタ接続の存在性の証明

9.1 前回のおさらい

定義 1. 写像 $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ が以下を満たすとき ∇ を**接続**，**共変微分**という．

(D1) 任意の $f, h \in C^\infty(M)$, $V, W, X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して，

$$\nabla_{(fV+hW)}X = f\nabla_V X + h\nabla_W X$$

(D2) 任意の $a, b \in \mathbb{R}$, $V, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して，

$$\nabla_V(aX + bY) = a\nabla_V X + b\nabla_W Y$$

(D3) 任意の $f \in C^\infty(M)$, $V, Z \in \mathfrak{X}(M)$ に対して，

$$\nabla_V(fZ) = (Vf)Z + \nabla_V Z$$

接続とは ... ベクトル場を微分するルール．

定義 2. 接続 ∇ が以下を満たすとき ∇ を**レビチビタ接続**（**リーマン接続**）という．

(D4) 任意の $V, Z \in \mathfrak{X}(M)$ に対して，

$$\nabla_V Z - \nabla_Z V = [V, Z]$$

(D5) 任意の $X, V, W \in \mathfrak{X}(M)$ に対して，

$$X\langle V, W\rangle = \langle \nabla_X V, W\rangle + \langle V, \nabla_X W\rangle$$

定理 3. リーマン多様体 (M, g) 上には唯一つのレビチビタ接続が存在する．

前回は「Koszul の公式」を用いて一意性を示していた．

命題 4 (Koszul の公式)**.** 接続 ∇ がレビチビタ接続 $\iff$ 任意の $X, V, W \in \mathfrak{X}(M)$ に対して，

$$2\langle \nabla_V W, X\rangle = V\langle W, X\rangle + W\langle X, V\rangle - X\langle V, W\rangle - \langle V, [W, X]\rangle + \langle W, [X, V]\rangle + \langle X, [V, W]\rangle$$

が成り立つ．

Koszul の公式を用いると，レビチビタ接続の存在性も示すことができる．今回は，存在性の証明のために，まずはテンソル場の話を紹介する．

直積 $v = (v_1, v_2, \dots, v_s) \in K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_s$
$v' = (v_1', v_2', \dots, v_s') \in$ 〃 とする．

① 和の定ぎ：$v + v' := (v_1 + v_1', \dots, v_s + v_s')$ とおくと，$v + v' \in K_1 \times \cdots \times K_s$

② スカラー倍の定ぎ $rv := (rv_1, \dots, rv_s) \in K_1 \times \cdots \times K_s$

9.2 加群上のテンソル

9.2.1 加群の直積

可換環 R に対して，s 個の R-加群 $K_1, \dots K_s$ を考える．このとき集合 $K_1 \times \cdots \times K_s$ を

$$K_1 \times \cdots \times K_s := \{(v_1, \dots, v_k) \mid v_j \in K_j \ (j = 1, \dots, s)\}$$

と定めると R-加群である．$K_1 \times \cdots \times K_s$ を $K_1, \dots K_s$ の**直積**と呼ぶ．

$K_1 = \cdots = K_s (= K)$ のとき，$K_1 \times \cdots \times K_s (= K \times \cdots \times K) = K^s$ と表す．

9.2.2 加群の線形写像，多重線形写像

和 と スカラー倍 の定ぎ．

R-加群 K, L に対して，写像 $f : K \to L$ が

$$f(v + w) = f(v) + f(w), \qquad f(r\,v) = r\,f(v) \qquad (\forall v, w \in K,\ r \in R)$$

を満たすとき，**R-線形写像**と呼ばれる．

R-加群 $K_1, \dots K_s$，L に対して，写像 $A : K_1 \times \cdots \times K_s \times \to L$ が **R-線形多重写像**であるとは，各 $\mathfrak{s} \in \{1, \dots, s\}$ と，各 $v_j \in K_j$ $(j = 1, \dots, s,\ j \neq \mathfrak{s})$ を固定する毎に定まる写像

$$K_{\mathfrak{s}} \ni \boldsymbol{w} \longmapsto A(v_1, \dots, v_{\mathfrak{s}-1}, \boldsymbol{w}, v_{\mathfrak{s}+1}, \dots, v_s) \in L$$

↳ 1コだけ固定しては．

が R-線形写像であるときをいう．

9.2.3 テンソル

R-加群 K に対して，$K^* := \{f : K \to R \mid f \text{ は } R\text{-線形}\}$ もまた R-加群となる．K^* を K の**双対加群**という．

定義 5 (テンソル)**.** R-加群 K と自然数 $s, t \in \mathbb{N}$ に対して，R-多重線形写像 $A : (K^*)^s \times K^t \longrightarrow R$ を，K 上の **(s, t) 型テンソル**と呼ぶ．さらに，

- R-多重線形写像 $A : K^t \to R$ を $(0, t)$ 型テンソル，もしくは**共変テンソル**と呼ぶ．
- R-多重線形写像 $A : (K^*)^s \to R$ を $(s, 0)$ 型テンソル，もしくは**半変テンソル**と呼ぶ．

$(0, 0)$ 型テンソルは，単に R の元を表すこととする．

9.2.4 注意

(s, t) 型テンソル全体のなす集合

$$T_t^s(K) := \{A : (K^*)^s \times K^t \longrightarrow R \mid A \text{ は } R\text{-線形}\}$$

を考える．$A, B \in T_t^s(K)$ と $r \in R$ に対し

$$(A + B)(T_1, \dots, T_s, v_1, \dots, v_t) := A(T_1, \dots, T_s, v_1, \dots, v_t) + B(T_1, \dots, T_s, v_1, \dots, v_t)$$
$$(rA)(T_1, \dots, T_s, v_1, \dots, v_t) := r\,A(T_1, \dots, T_s, v_1, \dots, v_t)$$

により，$A + B$, rA を定めると，$T_t^s(K)$ も R-加群である．

Prop (s,t) 型テンソル全体のなす集合
$T_t^s(K) := \{A : (K^*)^s \times K^t \to R \mid A \text{ は } R\text{-線形}\}$
も R-加群

9.3 テンソル場

K = 𝔛(M) の双対加群 を，K* = 𝔛*(M) で表す．

9.3.1 定義

M を滑らかな多様体とする．

- 可換環 R として M 上の滑らかな関数全体のなす可換環 $C^\infty(M)$，
- R-加群 K として M 上の滑らかなベクトル場全体のなす $C^\infty(M)$-加群 $\mathfrak{X}(M)$

を採用することで，**テンソル場**という概念が定義される．K の双対加群 K^* を $K^* = \mathfrak{X}^*(M)$ で表す．

定義 6 (テンソル場). $C^\infty(M)$-加群 $\mathfrak{X}(M)$ のテンソルを**テンソル場**と呼ぶ．

- M 上テンソル場 A が (s,t) 型テンソル場であるとは，$C^\infty(M)$-多重線形写像

$$A : \mathfrak{X}^*(M)^s \times \mathfrak{X}(M)^t \longrightarrow C^\infty(M)$$

一次微分形式を s 個　ベクトル場を t 個

である．

- (s,t) 型テンソル場全体のなす空間を $\mathcal{T}^s_t(M)$ と表す．$C^\infty(M)$-加群である．
- $(0,0)$ 型テンソルは係数環 R の元を表すという約束だったので，$\mathcal{T}^0_0(M) = C^\infty(M)$ である．
- $\mathcal{T}^1_0(M) \cong \mathfrak{X}(M)$，$\mathcal{T}^0_1(M) \cong \Omega^1(M)$ が成り立つ．ここで，$\cong$ は $C^\infty(M)$-加群としての同形を表す．とくに，双対加群 $\mathfrak{X}^*(M)$ は $\Omega^1(M)$ に $C^\infty(M)$-加群として同形である．

$$\begin{cases} T^1_0 \cong \mathfrak{X}(M) \\ T^0_1 \cong \Omega^1(M) \end{cases}$$

9.3.2 テンソル場の例

$E : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ を

(1,1)テンソル場　$$E(\theta, X) := \theta(X) \qquad (\theta \in \mathfrak{X}^*(M),\ X \in \mathfrak{X}(M))$$

と定め，評価関数と呼ぶ．評価関数 E は $C^\infty(M)$-線形である．

・𝔛*(M) に対して和とスカラー倍
・𝔛(M) に対して和とスカラー倍，

証明. $\theta, \omega \in \mathfrak{X}^*(M)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$ とする．

$$E(\theta + \omega, X) = (\theta + \omega)(X) = \theta(X) + \omega(X) = E(\theta, X) + E(\omega, X)$$
$$E(\theta, X + Y) = \theta(X + Y) = \theta(X) + \theta(Y) = E(\theta, X) + E(\theta, Y)$$
$$E(f\theta, X) = (f\theta)(X) = f\theta(X) = f\,E(\theta, X)$$
$$E(\theta, fX) = \theta(fX) = f\theta(X) = f\,E(\theta, X)$$

したがって，評価関数 E は $(1,1)$ 型テンソル場である．

☆ 9.3.3 テンソル場でない例

0 でない滑らかな 1 次微分形式 $\omega \in \Omega^1(M)$ を 1 つとる．$F : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ を

$$F(X, Y) := \boxed{X(\underbrace{\omega Y}_{\in C^\infty(M)})}_{\in C^\infty(M)} \qquad (X, Y \in \mathfrak{X}(M))$$

導関数．

と定めると，F は $C^\infty(M)$-線形でない．実際，$f \in C^\infty(M)$ とするとき

$$F(X, fY) = X(\omega(fY)) = X(f\omega Y) = (Xf)\,\omega Y + f\,X(\omega Y)$$

となる．とくに，F はテンソル場ではない．

$Ad : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ を

$Ad(\theta, X) := \theta(\underbrace{d(X)}_{\in \mathfrak{X}(M)})$．

9.4 テンソル場が各点でのテンソルを定めること

ここでは「なぜ $C^\infty(M)$-線形性が必要なのか」という問いへのひとつの答えを与える．本質的な事実は，テンソル場 A に対して，1 次微分形式とベクトル場を与えると定まる関数

$$A(\theta^1, \ldots, \theta^s, X_1, \ldots, X_t) : M \to \mathbb{R}$$

は，各 1 次微分形式やベクトル場に依存しているわけではなく，ただ単にその点 $p \in M$ にのみ依存しているということである．

定理 7. $p \in M$, $A \in \mathcal{T}^s_t(M)$ とする．$\theta^1, \ldots, \theta^s, \bar{\theta}^1, \ldots, \bar{\theta}^s \in \Omega^1(M)$, $X_1, \ldots, X_t, \bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_t \in \mathfrak{X}(M)$ は

$$\theta^i\big|_p = \bar{\theta}^i\big|_p \quad (\forall i \in \{1, \ldots, s\}), \qquad X_j\big|_p = \bar{X}_j\big|_p \quad (\forall j \in \{1, \ldots, t\})$$

を満たすとするとき，

$$A(\theta^1, \ldots, \theta^s, X_1, \ldots, X_t)(p) = A(\bar{\theta}^1, \ldots, \bar{\theta}^s, \bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_t)(p)$$

が成り立つ．

定理 7 の証明は後半を参照のこと．

定理 7 より，(s,t) 型テンソル場は，

- 1 次微分形式 $\theta^1, \ldots, \theta^s, \bar{\theta}^1, \ldots, \bar{\theta}^s \in \Omega^1(M)$,
- ベクトル場 $X_1, \ldots, X_t, \bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_t \in \mathfrak{X}(M)$

に依存するわけではなく，それらの点 $p \in M$ での値

$\nabla_v W$ は，W の p の周辺の値にも依存する

- 余接ベクトル $\alpha^1, \ldots, \alpha^s \in T^*_pM$ (ただし $\alpha^i := (\theta^i)_p$, $i = 1, \ldots, s$)
- 接ベクトル $v_1, \ldots, v_t \in T_pM$ (ただし $v_j := (X_j)_p$, $j = 1, \ldots, t$)

のみに依存する．まとめると，次を得る．

系 8. $A \in \mathcal{T}^s_t(M)$ を (s,t) 型テンソル場とする．各点 $p \in M$ において，多重線形写像

$$A_p : (T^*_pM)^s \times (T_pM)^t \to \mathbb{R}$$

を

$$A_p(\alpha^1, \ldots, \alpha^s, v_1, \ldots, v_t) := A(\theta^1, \ldots, \theta^s, X_1, \ldots, X_t)(p)$$
$$(\alpha^1, \ldots, \alpha^s \in T^*_pM,\ v_1, \ldots, v_t \in T_pM)$$

により定める．ただし，$\theta^i \in \Omega^1(M)$ $(i = 1, \ldots, s)$, $X_j \in \mathfrak{X}(M)$ $(j = 1, \ldots, t)$ は

$$(\theta^i)_p = \alpha^i, \quad (X_j)_p = v_j \qquad (i = 1, \ldots, s,\ j = 1, \ldots, t)$$

を満たすような拡張とする．このとき，A_p は拡張 θ^i $(i = 1, \ldots, s)$, X_j $(j = 1, \ldots, t)$ の取り方によらず *well-defined* である．

~~$\mathfrak{X}^*(M) = \Omega^1(M)$~~

Riesz の 表現定理

$\begin{cases} (V, \langle , \rangle) : \text{内積を持つベクトル空間} \\ \alpha : V \to \mathbb{R} : V\text{の双対ベクトル} \end{cases}$

$\Rightarrow \exists\, a \in V$ s.t. $\alpha(v) = \langle a, v \rangle \quad \forall v \in V$

9.5 レビチビタ接続の存在性 (定理 3) の証明

補題 9. 任意の 1 次微分形式 $\theta \in \Omega^1(M)$ に対して，ベクトル場 $V \in \mathfrak{X}(M)$ が存在して

$$\theta(X) = \langle V, X \rangle \qquad (X \in \mathfrak{X}(M))$$

(内積)

と表される．

証明. 各座標近傍 $(U; x^1, \ldots, x^m)$ において示せば良い．行列 $G = (g_{ij})_{i,j}$ の逆行列 G^{-1} の (i,j) 成分を g^{ij} と表す．U 上で $\theta = \sum_{i=1}^m \theta_i dx^i$ のとき，$V := \sum_{i,j=1}^m g^{ij}\theta_i \partial_j$ とおくと

(リースの表現定理) Riesz

$$\langle V, \partial_k \rangle = \sum_{i,j=1}^m g^{ij}\theta_i \langle \partial_j, \partial_k \rangle = \sum_{i,j=1}^m \theta_i g^{ij} g_{jk} = \sum_{i=1}^m \theta_i \delta_{ik} = \theta_k = \theta(\partial_k)$$

となる．任意のベクトル場は $\partial_1, \ldots, \partial_m$ の $C^\infty(M)$-線型結合で表されるので，任意の $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $\theta(X) = \langle V, X \rangle$ が成り立つことがわかる． □

補題 10. ベクトル場 $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ に対して，$\theta_{V,W}$ を

$$\theta_{V,W}(X) := \frac{1}{2}\left(V\langle W, X\rangle + W\langle X, V\rangle - X\langle V, W\rangle - \langle V, [W,X]\rangle + \langle W, [X,V]\rangle + \langle X, [V,W]\rangle\right)$$

と定めると $\theta_{V,W} \in \Omega^1(M)$

証明. 各 C^∞ 級関数 $f \in C^\infty(M)$ に対して $\theta_{V,W}(fX) = f\theta_{V,W}(X)$ を示せば良い．

$$[W, fX] = (Wf)X + f[W,X], \qquad [fX, V] = -(Vf)X + f[X,V]$$

より，

$$\begin{aligned} 2\theta_{V,W}(fX) &= V\langle W, fX\rangle + W\langle fX, V\rangle - fX\langle V, W\rangle - \langle V, [W, fX]\rangle + \langle W, [fX, V]\rangle + \langle fX, [V,W]\rangle \\ &= Vf\langle W, X\rangle + fV\langle W, X\rangle + (Wf)\langle X, V\rangle + fW\langle X, V\rangle - fX\langle V, W\rangle \\ &\quad - \langle V, (Wf)X + f[W,X]\rangle + \langle W, -(Vf)X + f[X,V]\rangle + \langle fX, [V,W]\rangle \\ &= f\left(V\langle W, X\rangle + W\langle X, V\rangle - X\langle V, W\rangle - \langle V, [W,X]\rangle + \langle W, [X,V]\rangle + \langle X, [V,W]\rangle\right) \end{aligned}$$

1次ビ分形式

となり示せた． □

定理 3 の証明. 与えられたベクトル場 $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ に対して，補題 10 のように $\theta_{V,W} \in \Omega^1(M)$ を定める．補題 9 より，あるベクトル場 $Z_{V,W} \in \mathfrak{X}(M)$ が存在して，$\langle Z_{V,W}, X\rangle = \theta_{V,W}(X)$ を満たす．すなわち

$$\langle Z_{V,W}, X\rangle = \frac{1}{2}\left(V\langle W, X\rangle + W\langle X, V\rangle - X\langle V, W\rangle - \langle V, [W,X]\rangle + \langle W, [X,V]\rangle + \langle X, [V,W]\rangle\right) \tag{9.1}$$

が成り立つ．このとき，$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ を $\nabla_T U := Z_{T,U}$ $(T, U \in \mathfrak{X}(M))$ と定めると，(D1), (D2), (D3) を満たすことがわかるので接続である．さらに，$\nabla_V W = Z_{V,W}$ は (9.1) より Koszul 公式 を満たすので，(D4), (D5) も成り立つ．したがって，∇ はレビチビタ接続である． □

(D1). $Z_{f_1V_1 + f_2V_2,\, W} = \cdots = f_1 Z_{V_1, W} + f_2 Z_{V_2, W}$

(D2) $Z_{V_1, W_1 + W_2} = Z_{V_1 W_1} + Z_{V_1 W_2}$

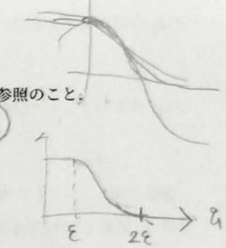
(D3) $Z_{V, fW} =$

9.6 テンソル場が各点でのテンソルを定めること (定理 7) の証明

テンソル場が各点でのテンソルを定めること (定理 7) の証明のために，補題 11, 12 を準備する．

補題 11. C^∞ 級多様体 M の点 $p \in M$ と，その開近傍 U を任意に与えたとする．このとき，p の開近傍 V と，C^∞ 級関数 $f : M \to \mathbb{R}$ で

$$\bar{V} \subset U, \qquad \text{かつ} \qquad \begin{cases} f(q) = 1 & (\forall q \in \bar{V}) \\ 0 \leqq f(q) < 1 & (\forall q \in U - \bar{V}) \\ f(q) = 0 & (\forall q \in M - U) \end{cases}$$



を満たすものが存在する．ただし，$\bar{V}$ は V の閉包である．

補題 11 の証明は，『多様体の基礎』(松本幸夫著，東京大学出版) の命題 13.11 を参照のこと．

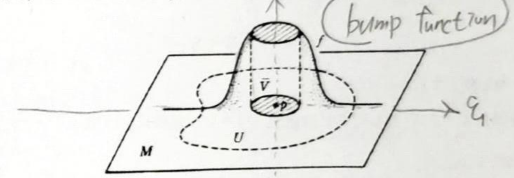


図 1 補題 11 の C^∞ 級関数 $f : M \to \mathbb{R}$．『多様体の基礎』(松本幸夫著，東京大学出版) の図 13.8

補題 12. $\theta^1, \ldots, \theta^s \in \Omega^1(M)$, $X_1, \ldots, X_t \in \mathfrak{X}(M)$ が $p \in M$ においてどれか 1 つでも 0 ならば，

$$A(\theta^1, \ldots, \theta^s, X_1, \ldots, X_t)(p) = 0$$

が成り立つ．

証明. $s = t = 1$ の場合を示そう．$X_p = \mathbf{0}$ のとき，$A(\theta, X)(p) = 0$ を示す．p の座標近傍 $(U, x^1, \ldots, x^m)$ において，C^∞ 級関数 $X^1, \ldots, X^m \in C^\infty(U)$ を用いて

$X_p = 0 \iff X^1(p) = X^2(p) = \cdots = X^m(p) = 0$

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \partial_i$$

と表される．$f : M \to \mathbb{R}$ を補題 11 の関数とする．このとき，

- fX^i $(i = 1, \ldots, m)$ は M **全体で定義**された C^∞ 級関数,
- $f\partial_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ は M **全体で定義**された C^∞ 級ベクトル場

である．したがって

$$f^2 A(\theta, X) = A(\theta, f^2 X) = A\left(\theta, \sum_{i=1}^n fX^i f\partial_i\right) = \sum_{i=1}^n fX^i A(\theta, f\partial_i)$$

(2乗) $C^\infty(M)$ $\mathfrak{X}(M)$ $A(\theta, gX) = gA(\theta, X)$.

と変形されるため，p において

$$1 = f(p)^2 A(\theta, X)(p) = \sum_{i=1}^m (fX^i)(p)\, A(\theta, f\partial_i)(p) \tag{9.2}$$

$= 0$

となる．ここで，$f(p) = 1$ であり，また $X_p = \mathbf{0}$ より $X^1(p) = \cdots = X^m(p) = 0$ なので，各 $i = 1, \ldots, m$ に対して

$$(fX^i)(p) = f(p)X^i(p) = 0$$

が成り立つ．したがって，(9.2) より $A(\theta, X)(p) = 0$ を得る．

(9.2). $1 \cdot A(\theta, X)(p) = 0$

$\therefore A(\theta, X)(p) = 0$.

補題 12 を用いて，テンソル場が各点でのテンソルを定めること (定理 7) を示そう．

定理 7 の証明．ここでは簡単のため，$s=1, t=2$ の場合の証明を紹介する．(一般の s, t に対しても同様に示すことができる．)

$\theta, \bar{\theta} \in \Omega^1(M), X, Y, \bar{X}, \bar{Y} \in \mathfrak{X}(M)$ に対し，

$$\theta|_p = \bar{\theta}|_p, \; X|_p = \bar{X}|_p, \; Y|_p = \bar{Y}|_p$$

を満たすとするとき，

$$A(\theta, X, Y)(p) = A(\bar{\theta}, \bar{X}, \bar{Y})(p)$$

となることを示そう．

$A(\theta, X, Y) - A(\bar{\theta}, X, Y) = A(\theta - \bar{\theta}, X, Y)$ などの多重線形性を用いる：

$$\begin{aligned} A(\theta, X, Y) - A(\bar{\theta}, \bar{X}, \bar{Y}) &= A(\theta - \bar{\theta}, X, Y) + \boxed{A(\bar{\theta}, X, Y)} - A(\bar{\theta}, \bar{X}, \bar{Y}) \\ &= A(\theta - \bar{\theta}, X, Y) + \boxed{A(\bar{\theta}, X - \bar{X}, Y) + A(\bar{\theta}, \bar{X}, Y)} - A(\bar{\theta}, \bar{X}, \bar{Y}) \\ &= \underbrace{A(\theta - \bar{\theta}, X, Y)}_{0 \text{ at } p} + \underbrace{A(\bar{\theta}, X - \bar{X}, Y)}_{0 \text{ at } p} + \underbrace{A(\bar{\theta}, \bar{X}, Y - \bar{Y})}_{0 \text{ at } p} \end{aligned}$$

$A(\bar{\theta}, \bar{X}, Y) - A(\bar{\theta}, \bar{X}, \bar{Y})$

□ をまとめた．

なので，補題 12 より $A(\theta, X, Y)(p) - A(\bar{\theta}, \bar{X}, \bar{Y})(p) = 0$ が成り立つことがわかる．

$A(X, fY, Z) = \langle \nabla_X fY, Z \rangle$

2

$\omega X : M \longrightarrow \mathbb{R}$ を $(\omega X)(p) := \omega_p(X_p)$ とおく．

$\forall f \in C^\infty(M)$ に対し，

$\omega(fX) = f \cdot \omega(X)$ である．

$\omega(fX)(p) = \omega_p(\underbrace{f(p)}_{\mathbb{R}} \underbrace{X_p}_{\in T_p(M)}) \in T_p(M)$ $= f(p)\, \omega_p(X_p)$

$= (f \cdot \omega(X))(p)$

$\omega_p : T_p(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ は線形なので

$\omega_p(rv) = r\, \omega_p(v)$

$\therefore \omega(fX) = f \cdot \omega(X)$ である

先進数理科学 幾何 課題 No. 9

$\langle\, ,\, \rangle$: 内積

(D3)，**問 1** (M, g) をリーマン多様体，∇ を接続とする．写像 $A : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ を

$$A(X, Y, Z) := \langle \nabla_X Y, Z \rangle \qquad (X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M))$$

により定める．$A : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ はテンソル場かどうかを答えよ．以下の (1), (2) から正しいものを一つ選べ．

$\mathfrak{X}(M)$ について和とスカラー倍．

(1) テンソル場である

(2) テンソル場でない

$A(fX, Y, Z) = \langle \nabla_{fX} Y, Z \rangle = \langle f \nabla_X Y, Z \rangle$　　$A(X, fY, Z) := \langle \nabla_X fY, Z \rangle$

問 2 M を C^∞ 級多様体，$\theta, \omega \in \Omega^1(M)$ とする．写像 $\theta \otimes \omega : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ を

$$(\theta \otimes \omega)(X, Y) := \theta(X)\omega(Y) \qquad (X, Y \in \mathfrak{X}(M))$$

により定める．$\theta \otimes \omega : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ はテンソル場かどうかを答えよ．以下の (1), (2) から正しいものを一つ選べ．

(1) テンソル場である

(2) テンソル場でない

・ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ とは $M \ni p \longmapsto X_p \in T_p(M)$ の対応．

$\omega(X)(p) := \omega_p(X_p)$ であると，$\omega(X) : M \to \mathbb{R}$

・1次微分形式 $\omega \in \Omega^1(M)$ は，$M \ni p \longmapsto \omega_p \in T_p^*M$ の対応．

問 3 $\mathbb{H}^3$ を 3 次元双曲空間 $\mathbb{H}^3 = (\mathbb{R}^3_+, g_H)$ とする：

$$\mathbb{R}^3_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; z > 0\}, \qquad g_H = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}.$$

$(x, y, z) = (x^1, x^2, x^3)$ とし，クリストッフェル記号 $\{\Gamma^k_{ij}\}_{i,j,k=1,2}$ とするとき，Γ^2_{11} を求めよ．以下の (1)–(4) から正しいものを一つ選べ．

(1) $\frac{1}{z}$　(2) $-\frac{1}{z}$　(3) $-\frac{1}{z^2}$　(4) 0

問 4 $\mathbb{H}^3$ を 3 次元双曲空間 $\mathbb{H}^3 = (\mathbb{R}^3_+, g_H)$ とする：

$$\mathbb{R}^3_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; z > 0\}, \qquad g_H = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}.$$

$(x, y, z) = (x^1, x^2, x^3)$ とし，クリストッフェル記号 $\{\Gamma^k_{ij}\}_{i,j,k=1,2}$ とするとき，Γ^3_{11} を求めよ．以下の (1)–(4) から正しいものを一つ選べ．

(1) $\frac{1}{z}$　(2) $-\frac{1}{z}$　(3) $-\frac{1}{z^2}$　(4) 0