前回の続き

- Proposition 2.1 内で $\langle \overline{R}_{XY}(Z), W\rangle = \langle \overline{R}_{X_M Y_M}(Z_M), W_M\rangle$ となる事を確認する

$$\begin{cases} X = X_M + X_R \\ Y = Y_M + Y_R \\ Z = Z_M + Z_R \\ W = W_M + W_R \end{cases}$$

と分解すると双線形性により $\langle \overline{R}_{XY}(Z), W\rangle$ は 16個の内積に分解される。

$$\begin{aligned}\langle \overline{R}_{XY}(Z), W\rangle &= \langle \overline{R}_{X_M Y_M}(Z_M), W_M\rangle + \langle \overline{R}_{X_R Y_R}(Z_R), W_R\rangle \\ &+ \langle \overline{R}_{X_R Y_R}(Z_R), W_M\rangle + \langle \overline{R}_{X_M Y_M}(Z_M), W_R\rangle \\ &+ (\text{M と R が混在する 12個の項})\end{aligned}$$

$\langle \overline{R}_{X_R Y_R}(Z_R), W_R\rangle$ について、$\overline{R}_{X_R Y_R}(Z_R)$ は $\mathbb{R}$ 上の曲率テンソルに対応するため、$\overline{R}_{X_R Y_R}(Z_R) = 0$ である。 $\therefore \langle \overline{R}_{X_R Y_R}(Z_R), W_R\rangle = 0$

$\langle \overline{R}_{X_R Y_R}(Z_R), W_M\rangle = 0$ . …①

$\langle \overline{R}_{X_M Y_M}(Z_M), W_R\rangle$ について、$R_{X_M Y_M}(Z_M) \in T_p(M)$ 、$W_R \in T_p(\mathbb{R})$ および $T_p(M) \oplus T_p(\mathbb{R})$ であるため、$\langle \overline{R}_{X_M Y_M}(Z_M), W_R\rangle = 0$ である。…②

($\perp$) 直交直和

積多様体 $M \times N$ の曲率テンソルについて、M と N の接ベクトルが混在する場合、$R = 0$ となる。よって、M と $\mathbb{R}$ が混在する 12個の項 $= 0$ となる。…③ (O'Neill p89 系58 (3))

①～③より 15個の項 $= 0$ となるため、$\langle \overline{R}_{XY}(Z), W\rangle = \langle \overline{R}_{X_M Y_M}(Z_M), W_M\rangle$ である。

• $\overline{\overline{\nabla}}_{e_k}(e_\beta) = \sum_{\alpha=0}^{n+1} \omega_\beta^\alpha(e_k) e_\alpha$ $(\beta = 1, \cdots, n)$ であった.

$\beta = 0, n+1$ の場合を確認する.

$k = 1, \cdots, n.$

∘ $\underbrace{\langle S e_k, e_\beta \rangle}_{a^{n+1}} = \begin{cases} \omega_\beta^{n+1}(e_k) & (\beta = 1, \cdots, n) \\ 0 & (\beta = 0) \cdots ① \\ 0 & (\beta = n+1) \cdots ② \end{cases}$

∵ ① について, $\langle S e_k, e_\beta \rangle$ に $\beta = 0$ を代入すると,

$\langle S e_k, e_0 \rangle = \langle S e_k, \overline{N} \rangle = 0.$

∵ $Se_k \in T_p(\cancel{M}\ V)$, $\overline{N} \in T_p^\perp(M \times \mathbb{R})$

② について, $\langle S e_k, e_\beta \rangle$ に $\beta = n+1$ を代入すると,

$\langle S e_k, e_{n+1} \rangle (= \omega_{n+1}^{n+1}(e_k)) = 0.$

$T_p(V)$　$N \in T_p^\perp(V)$　∵ 定義より $(\omega_{n+1}^{n+1} = 0)$

∘ $\underbrace{\langle \overline{\overline{\nabla}}_{e_k}(e_\beta), e_l \rangle}_{a^l \ (l=1,\cdots,n)} = \begin{cases} \omega_\beta^l(e_k) & (\beta = 1, \cdots, n) \\ \delta_l^k - \langle e_k, T \rangle \langle e_l, T \rangle & (\beta = 0) \cdots ③ \\ -\omega_l^{n+1}(e_k) & (\beta = n+1) \cdots ④ \end{cases}$

$\omega_r^0(e_k) := \langle \overline{S} e_k, e_r \rangle$

$= -k \langle e_k, e_r \rangle$

$+ k \langle e_k, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \langle e_r, \frac{\partial}{\partial t} \rangle.$

結果的には合ってる.

∵ ③ について, $\omega_0^l(e_k) = -k\, \omega_l^0(e_k)$

(左辺を計算する)

$= -k \left( -k \underbrace{\langle e_k, e_l \rangle}_{\delta_l^k} + k \langle e_k, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \langle e_l, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \right)$

$\frac{\partial}{\partial t} = T + \nu N$ 代入

$= \delta_l^k - \langle e_k, T \rangle \langle e_l, T \rangle.$

$\langle e_k, T \rangle + \nu \underbrace{\langle e_k, N \rangle}_{0}$

④ について, $\omega_{n+1}^l(e_k) \underset{\text{定義より}}{=} -\omega_l^{n+1}(e_k)$

$a_0 = k \langle \overline{S} e_k, e_\beta \rangle$

∘ $a_0 = \cancel{k} \langle \overline{S} e_k, e_\beta \rangle = \begin{cases} \omega_\beta^0(e_k) & (\beta = 1, \cdots, n) \\ 0 \ (k=1 \text{の時}), \text{任意の値} \ (k=-1 \text{の時}) & (\beta = 0) \cdots ⑤ \\ k \langle e_k, T \rangle (\langle N, T \rangle + \nu) & (\beta = n+1) \cdots ⑥ \end{cases}$

$\overline{S} X = -k\, d\overline{N}(X)$

∵ ⑤ について, $\omega_0^0 \underset{\text{定義より}}{=} -k\, \omega_0^0 \iff (1+k)\, \omega_0^0 = 0$

$\therefore \begin{cases} k = -1 \text{ のとき}, \omega_0^0 \text{ は任意の値をとる} \\ k = 1 \text{ のとき}, \omega_0^0 = 0. \end{cases}$

$\underbrace{\langle \bar{\bar{\nabla}}_{e_k}(e_\beta), e_i \rangle}_{\parallel}$

N: V の単位法ベクトル

$$\langle \bar{\bar{\nabla}}_{e_k}(\underbrace{e_{n+1}}_{\substack{\parallel \\ N}}), e_i \rangle = e_k \langle N, e_i \rangle - \langle N, \bar{\bar{\nabla}}_{e_k}(e_i) \rangle$$

$$S(v) := -\bar{\nabla}_v(N)$$

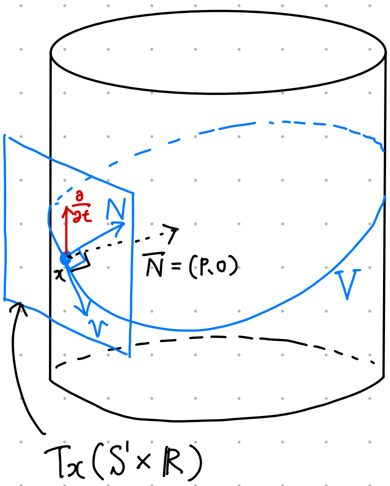
$$\bar{\bar{\nabla}}_{e_k} N = \bar{\nabla}_{e_k} N + \underbrace{\bar{\bar{\nabla}}^{\perp}_{e_k} N}$$ 考えなくてよい

$$= -Se_k + 〃$$

$\frac{\partial}{\partial t} = T + \nu N$ 代入

⑥ について、$\omega^{0}_{n+1}(e_k) = -k\langle e_k, e_{n+1}\rangle + k\left\langle e_k, \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle\left\langle e_{n+1}, \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle$

$$= -k\underbrace{\langle e_k, N\rangle}_{=0} + k\underbrace{\langle e_k, T+\nu N\rangle}_{=\langle e_k, T\rangle + \nu\underbrace{\langle e_k, N\rangle}_{=0}}\underbrace{\langle N, T+\nu N\rangle}_{=\langle N, T\rangle + \nu}$$




$n = 1$ のとき、$\mathbb{E}^{n+2}$ の ONB $= (e_0, e_1, e_2)$

$= (\overline{N}, e_1, N)$

## Proposition 2.4 (残り)

(5) $d\omega^i_j + \sum_{p=1}^n \omega^i_p \wedge \omega^p_j = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n \underbrace{R^i_{klj}}_{=\langle R_{e_k e_l}(e_j),\, e_i\rangle}\,\omega^k\wedge\omega^l$

(6) $d\omega^{n+1}_j + \sum_{p=1}^n \omega^{n+1}_p\wedge\omega^p_j = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n \langle \nabla_{e_k}(Se_l) - \nabla_{e_l}(Se_k) - S[e_k, e_l],\, e_j\rangle\,\omega^k\wedge\omega^l$

## Proof

・(5)を示す

$\omega^k(e_l) = \delta^k_l$ $(l=1,2)$ より, 書き方注意

$\omega^i_j(e_l) = \langle e_i, \nabla_{e_1}e_j\rangle\omega^1(e_l) + \langle e_i, \nabla_{e_2}e_j\rangle\omega^2(e_l)$

$= \langle e_i, \nabla_{e_l}e_j\rangle$ である. (定義と一致する)

$\omega^i_j = \sum_{k=1}^2 \langle e_i, \nabla_{e_k}e_j\rangle\omega^k$ であるので、外微分 $d\omega^i_j$ は

$$d\omega^i_j = d\left(\sum_{k=1}^2\langle e_i, \nabla_{e_k}e_j\rangle\omega^k\right)$$

積の微分公式 ($d(f\cdot\omega) = (df)\wedge\omega + f\cdot d\omega$)

$$= \sum_{k=1}^2 d\langle e_i, \nabla_{e_k}e_j\rangle\wedge\omega^k + \sum_{k=1}^2\langle e_i, \nabla_{e_k}e_j\rangle d\omega^k$$

$$= \sum_{k=1}^2\sum_{l=1}^2\left(e_l\langle e_i, \nabla_{e_k}e_j\rangle\,\omega^l\wedge\omega^k\right) + \sum_{k=1}^2\langle e_i, \nabla_{e_k}e_j\rangle d\omega^k$$

$$= \sum_{k=1}^2\sum_{l=1}^2\left(\left(\langle\nabla_{e_l}e_i, \nabla_{e_k}e_j\rangle + \langle e_i, \nabla_{e_l}(\nabla_{e_k}e_j)\rangle\right)\omega^l\wedge\omega^k\right)$$

$$- \sum_{k=1}^2\sum_{l=1}^2\langle e_i, \nabla_{e_k}e_j\rangle\,\omega^k_l\wedge\omega^l \quad \cdots ①$$

∵ ベクトル場 $V = \sum_l v^l(e_l)$

$df(V) := V(f)$

$= \sum_l v^l e_l(f)$.

$\omega^l(V) = v^l$ より.

$df = \sum_l \omega^l e_l(f)$

である. $(d = \sum_l e_l\omega^l)$

∵ 内積の微分公式より,

$e_l\langle e_i, \nabla_{e_k}(e_j)\rangle$

$= \langle\nabla_{e_l}e_i, \nabla_{e_k}(e_j)\rangle$

$+ \langle e_i, \nabla_{e_l}(\nabla_{e_k}e_j)\rangle$.

∵ ($\cancel{4}$ 3) より, $d\omega^k = -\sum_l \omega^k_l\wedge\omega^l$

① 右辺の $\sum_{k=1}^2\sum_{l=1}^2\langle e_i, \nabla_{e_k}e_j\rangle\,\omega^k_l\wedge\omega^l$ 部分を式変形していく.

$$\sum_{k=1}^2\sum_{l=1}^2\langle e_i, \nabla_{e_k}e_j\rangle\,\omega^k_l\wedge\omega^l = \sum_{k=1}^2\sum_{l=1}^2\sum_{h=1}^2\langle e_i, \nabla_{e_k}e_j\rangle\langle e_k, \nabla_{e_h}e_l\rangle\,\omega^h\wedge\omega^l$$

※1

$$= \sum_{l=1}^2\sum_{h=1}^2\langle e_i, \nabla_{(\nabla_{e_h}e_l)}e_j\rangle\,\omega^h\wedge\omega^l. \quad \cdots ②$$

※1 線形性より $f\nabla_X Y = \nabla_{fX}Y$ であるので, $f = \sum_k\langle e_k, \nabla_{e_h}e_l\rangle$ とすると,

$f\langle e_i, \nabla_{e_k}e_j\rangle = \langle e_i, f\nabla_{e_k}e_j\rangle = \langle e_i, \nabla_{fe_k}e_j\rangle$

$= \langle e_i, \nabla_{\sum_k\langle e_k, \nabla_{e_h}(e_l)\rangle e_k}e_j\rangle \quad \cdots ★$

また, $\nabla_{e_h}(e_l) = \sum_{k=1}^2\omega^k_l(e_h)e_k$

$= \sum_{k=1}^2\langle\nabla_{e_h}(e_l), e_k\rangle e_k$

であるので, ★に代入して $\sum_l\sum_h\langle e_i, \nabla_{(\nabla_{e_h}e_l)}e_j\rangle\,\omega^h\wedge\omega^l$ を得る

$\sum_{p=1}^2\omega^i_p\wedge\omega^p_j$ を $\omega^i_j = \sum_k\langle e_i, \nabla_{e_k}e_j\rangle\omega^k$ を用いて変形すると,

$$\sum_{p=1}^2\omega^i_p\wedge\omega^p_j = \sum_{k=1}^2\sum_{l=1}^2\sum_{p=1}^2\left\{\langle e_i, \nabla_{e_l}e_p\rangle\langle e_p, \nabla_{e_k}e_j\rangle\,\omega^l\wedge\omega^k\right\}$$

∵ $(e_1, \dots, e_n)$ は正規直交フレームなので,

$0 = e_l(\langle e_i, e_p\rangle)$

$\omega^{l}_{j} = \sum_{k=1}^{2} \langle e_l, \nabla_{e_k} e_j \rangle \omega^k$

2

- 左辺に $e_l$ を代入した $\omega^{l}_{j}(e_l) = \langle \nabla_{e_l} e_j, e_l \rangle$ である.
- 右辺に $e_l$ を代入した $\sum_{k=1}^{2} \langle e_l, \nabla_{e_k} e_j \rangle \omega^k(e_l)$ は

$$\langle e_l, \nabla_{e_1} e_j \rangle \underbrace{\omega^1(e_l)}_{=\delta^1_l} + \langle e_l, \nabla_{e_2} e_j \rangle \underbrace{\omega^2(e_l)}_{=\delta^2_l}$$

$l = 1, 2$ のいずれかの値をとるので,

$$\langle e_l, \nabla_{e_1} e_j \rangle \underbrace{\omega^1(e_l)}_{=1} + \langle e_l, \nabla_{e_2} e_j \rangle \underbrace{\omega^2(e_l)}_{=\delta^2_l}$$

$$= \langle e_l, \nabla_{e_l} e_j \rangle$$

$$= -\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}\sum_{p=1}^{2}\left\{\langle \nabla_{e_l}e_i, e_p\rangle\langle e_p, \nabla_{e_k}e_j\rangle \omega^l\wedge\omega^k\right\}$$

$= \langle \nabla_{e_l}e_i, e_p\rangle + \langle e_i, \nabla_{e_l}e_p\rangle$

$\Leftrightarrow \langle e_i, \nabla_{e_l}e_p\rangle = -\langle \nabla_{e_l}e_i, e_p\rangle$

$$= -\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}\left\{\langle \nabla_{e_l}e_i, \nabla_{e_k}e_j\rangle \omega^l\wedge\omega^k\right\}. \quad \cdots ③$$

※2.

※2 内積の線形性より、

$$\sum_p \langle \nabla_{e_l}e_i, e_p\rangle\langle e_p, \nabla_{e_k}e_j\rangle = \left\langle \sum_p \langle \nabla_{e_l}e_i, e_p\rangle e_p, \nabla_{e_k}e_j\right\rangle \cdots ☆$$

一方、$\nabla_{e_l}e_i = \sum_p \omega_i^p(e_l)e_p = \sum_p \langle \nabla_{e_l}e_i, e_p\rangle e_p \quad \cdots ☆'$ であるので、

☆' を ☆ へ代入して、

$$\sum_p \langle \nabla_{e_l}e_i, e_p\rangle\langle e_p, \nabla_{e_k}e_j\rangle = \langle \nabla_{e_l}e_i, \nabla_{e_k}e_j\rangle \text{ である。}$$

以上より、式(5)の左辺は ①、②、③ を用いて

$$d\omega_j^i + \sum_{p=1}^{2}\omega_p^i\wedge\omega_j^p = \sum_k\sum_l \left(\langle \nabla_{e_l}e_i, \nabla_{e_k}e_j\rangle + \langle e_i, \nabla_{e_l}(\nabla_{e_k}e_j)\rangle\right)\omega^l\wedge\omega^k$$
$$- \sum_k\sum_l \langle e_i, \nabla_{(\nabla_{e_l}e_k)}e_j\rangle \omega^l\wedge\omega^k$$
$$- \sum_k\sum_l \langle \nabla_{e_l}e_i, \nabla_{e_k}e_j\rangle \omega^l\wedge\omega^k$$

∵ 内積の線形性

$$= \sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}\left\{\cancel{\langle \nabla_{e_l}e_i, \nabla_{e_k}e_j\rangle} + \langle e_i, \nabla_{e_l}(\nabla_{e_k}e_j)\rangle - \langle e_i, \nabla_{(\nabla_{e_l}e_k)}e_j\rangle - \cancel{\langle \nabla_{e_l}e_i, \nabla_{e_k}e_j\rangle}\right\}\omega^l\wedge\omega^k$$
$$= \sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}\left\{\langle e_i, \nabla_{e_l}(\nabla_{e_k}e_j) - \nabla_{(\nabla_{e_l}e_k)}e_j\rangle \omega^l\wedge\omega^k\right\} \quad \cdots ④$$

である。④の式内の $k$ と $l$ を入れ替え、$\omega^k\wedge\omega^l = -\omega^l\wedge\omega^k$ を代入したものと足し合わせると、

$$2\left(d\omega_j^i + \sum_{p=1}^{2}\omega_p^i\wedge\omega_j^p\right) = \sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}\left\{\langle e_i, \nabla_{e_l}(\nabla_{e_k}e_j) - \nabla_{(\nabla_{e_l}e_k)}e_j\rangle \omega^l\wedge\omega^k\right\}$$
$$- \sum_{l=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\left\{\langle e_i, \nabla_{e_k}(\nabla_{e_l}e_j) - \nabla_{(\nabla_{e_k}e_l)}e_j\rangle \omega^l\wedge\omega^k\right\}$$

内積の線形性

$$= \sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}\left\{\langle e_i, \nabla_{e_l}(\nabla_{e_k}e_j) - \nabla_{(\nabla_{e_l}e_k)}e_j - \nabla_{e_k}(\nabla_{e_l}e_j) + \nabla_{(\nabla_{e_k}e_l)}e_j\rangle \omega^l\wedge\omega^k\right\}. \quad \cdots ⑤$$

ここで、接続の線形性より $\nabla_{(\nabla_{e_k}e_\ell)}e_j - \nabla_{(\nabla_{e_\ell}e_k)}e_j = \nabla_{\underbrace{(\nabla_{e_k}e_\ell - \nabla_{e_\ell}e_k)}_{= [e_k, e_\ell]}}e_j$

であるので、⑤の右辺は

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{\ell=1}^{2}\left\{\left\langle e_i, \underbrace{\nabla_{e_\ell}(\nabla_{e_k}e_j) - \nabla_{e_k}(\nabla_{e_\ell}e_j) + \nabla_{[e_k, e_\ell]}e_j}_{= R_{e_k e_\ell}(e_j)}\right\rangle\right\}$$

となる. よって式(5)が成り立つ.

$$\because\ \omega^{n+1}_j(e_\ell) = \langle Se_1, e_j\rangle \underbrace{\omega^1(e_\ell)}_{\delta^1_\ell} + \langle Se_2, e_j\rangle \underbrace{\omega^2(e_\ell)}_{\delta^2_\ell}$$
$$= \langle Se_\ell, e_j\rangle \text{ (定義と一致する)}$$

○式(6)を示す.

$\omega^{n+1}_j = \sum_{k=1}^{2}\langle Se_k, e_j\rangle\omega^k$ であるので、外微分 $d\omega^{n+1}_j$ は

$$\begin{aligned}
d\omega^{n+1}_j &= \sum_{k=1}^{2} d\left(\langle Se_k, e_j\rangle\omega^k\right)\\
&= \sum_{k=1}^{2}\left(\sum_{\ell=1}^{2} e_\ell\langle Se_k, e_j\rangle\omega^\ell\wedge\omega^k\right) + \sum_{k=1}^{2}\langle Se_k, e_j\rangle d\omega^k\\
&= \sum_{k=1}^{2}\left(\sum_{\ell=1}^{2}\langle\nabla_{e_\ell}(Se_k), e_j\rangle + \langle Se_k, \nabla_{e_\ell}(e_j)\rangle\ \omega^\ell\wedge\omega^k\right)\\
&\quad - \sum_{k=1}^{2}\left(\sum_{\ell=1}^{2}\langle Se_k, e_j\rangle\underbrace{\omega^k_\ell\wedge\omega^\ell}_{\because \text{式(4)より}}\right) \cdots ⑥
\end{aligned}$$

$\because$ $d(f\cdot\omega) = (df)\wedge\omega + fd\omega$

および、$df = \sum_\ell \omega^\ell e_\ell(f)$

を代入した.

式⑥の第二項部分を式変形していく.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2}\left(\sum_{\ell=1}^{2}\langle Se_k, e_j\rangle\omega^k_\ell\wedge\omega^\ell\right) &= \sum_{k=1}^{2}\sum_{\ell=1}^{2}\left\{\sum_{h=1}^{2}\langle Se_k, e_j\rangle\langle e_k, \nabla_{e_h}(e_\ell)\rangle\omega^h\wedge\omega^\ell\right\}\\
&= \sum_{\ell=1}^{2}\left\{\sum_{h=1}^{2}\langle Se_j, \nabla_{e_h}(e_\ell)\rangle\omega^h\wedge\omega^\ell\right\}. \cdots ⑦
\end{aligned}$$

$\because$ $S$ の定義より

$$Se_j = \sum_{k=1}^{2}\omega^{n+1}_k(e_j)e_k = \sum_{k=1}^{2}\langle Se_j, e_k\rangle e_k$$

であるので、$\langle Se_j, \nabla_{e_h}(e_\ell)\rangle$ は、

$$\langle Se_j, \nabla_{e_h}(e_\ell)\rangle = \sum_{k=1}^{2}\left\langle\langle Se_j, e_k\rangle e_k, \nabla_{e_h}(e_\ell)\right\rangle = \sum_{k=1}^{2}\langle Se_j, e_k\rangle\langle e_k, \nabla_{e_h}(e_\ell)\rangle$$

である.

$\sum_{p=1}^{2}\omega^{n+1}_p\wedge\omega^p_j$ を式変形していく.

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^{2}\omega^{n+1}_p\wedge\omega^p_j &= \sum_{k=1}^{2}\left(\sum_{p=1}^{2}\langle Se_k, e_p\rangle\omega^k\wedge\omega^p_j\right)\\
&= \sum_{k=1}^{2}\sum_{p=1}^{2}\left(\sum_{\ell=1}^{2}\langle Se_k, e_p\rangle\langle e_p, \nabla_{e_\ell}e_j\rangle\omega^k\wedge\omega^\ell\right)\\
&= \sum_{k=1}^{2}\left(\sum_{\ell=1}^{2}\langle Se_k, \nabla_{e_\ell}e_j\rangle\omega^k\wedge\omega^\ell\right). \cdots ⑧
\end{aligned}$$

$$\because\ \langle Se_k, \nabla_{e_\ell}e_j\rangle = \sum_{p=1}^{2}\langle Se_k, e_p\rangle\langle e_p, \nabla_{e_\ell}e_j\rangle$$

⑥、⑦、⑧より、$d\omega^{n+1}_j + \sum_{p=1}^{2} \omega^{n+1}_p \wedge \omega^p_j$ は、

$$d\omega^{n+1}_j + \sum_{p=1}^{2} \omega^{n+1}_p \wedge \omega^p_j = \sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}\Big(\cancel{-\langle Se_k, \nabla_{e_l} e_j\rangle} + \langle \nabla_{e_l}(Se_k), e_j\rangle$$
$$+ \cancel{\langle Se_k, \nabla_{e_l} e_j\rangle} - \langle Se_j, \nabla_{e_l} e_k\rangle\Big)\, \omega^l \wedge \omega^k$$

∵⑧　∵⑥　∵⑥　∵⑦

$$= \sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}\Big(\langle \nabla_{e_l}(Se_k), e_j\rangle - \langle Se_j, \nabla_{e_l} e_k\rangle\, \omega^l \wedge \omega^k\Big)$$
$$= \sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2} \langle e_j, \nabla_{e_l}(Se_k) - S(\nabla_{e_l} e_k)\rangle\, \omega^l \wedge \omega^k. \quad \cdots ⑨$$

※3

※3 内積の線形性より、

$$\langle e_j, \nabla_{e_l}(Se_k) - S(\nabla_{e_l} e_k)\rangle = \langle e_j, \nabla_{e_l}(Se_k)\rangle - \langle e_j, S(\nabla_{e_l} e_k)\rangle.$$

$S$ の対称性より、$\langle e_j, S(\nabla_{e_l} e_k)\rangle = \langle Se_j, \nabla_{e_l} e_k\rangle$ であるため、直前の式に代入すれば等式が成り立つ.

である. ⑨の式内の $k$ と $l$ を入れ替え、$\omega^k \wedge \omega^l = -\omega^l \wedge \omega^k$ を代入したものと足し合わせると、

$$2\Big(d\omega^{n+1}_j + \sum_{p=1}^{2} \omega^{n+1}_p \wedge \omega^p_j\Big) = \sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}\Big(\langle e_j, \nabla_{e_l}(Se_k) - S(\nabla_{e_l} e_k) - \nabla_{e_k}(Se_l) + S(\nabla_{e_k} e_l)\rangle\, \omega^l \wedge \omega^k\Big)$$
$$= \sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}\Big(\langle e_j, \nabla_{e_l}(Se_k) - \nabla_{e_k}(Se_l) + S[e_k, e_l]\rangle\, \omega^l \wedge \omega^k\Big)$$

である. よって式(6)が成り立つ.

以上より、prop 2.4 を示した. ▨

## 2.3 $S^n \times \mathbb{R}$ および $H^n \times \mathbb{R}$ の超曲面のいくつかの事実　(Lemma 3.6 途中まで)

$M^n \times \mathbb{R}$ 内の向き付け可能な超曲面 $V$ について考える.
($M^n = S^n$ または $H^n$ とする)

- $L^p$ を $p$ 次元ローレンツ空間とする. つまり、以下の2次形式を備えた $\mathbb{R}^p$ を考える:

$$-(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + \cdots + (dx^{p-1})^2$$

$S^n$ について次のような包含関係を使用する:

$$S^n = \left\{ (x^0, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; (x^0)^2 + \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 = 1 \right\}$$

したがって、$S^n \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+2}$ である.

$H^n$ についても次の包含関係を使用する:

$$H^n = \left\{ (x^0, \cdots, x^n) \in L^{n+1} \;\middle|\; -(x^0)^2 + \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 = -1,\ x^0 > 0 \right\}$$

したがって、$H^n \times \mathbb{R} \subset L^{n+1} \times \mathbb{R} = L^{n+2}$ である.

- 曲率 $K$ と接続を次のように定義する:
  - $S^n \times \mathbb{R}$ の場合、$K = 1$ および $E^{n+2} := \mathbb{R}^{n+2}$ とする.
  - $H^n \times \mathbb{R}$ の場合、$K = -1$ および $E^{n+2} := L^{n+2}$ とする.
  - $\nabla$ : $V$ 上の接続
  - $\overline{\nabla}$ : $M^n \times \mathbb{R}$ 上の接続
  - $\overline{\overline{\nabla}}$ : $E^{n+2}$ 上の接続

単位

点 $x \in M^n \times \mathbb{R}$ において、$E^{n+2}$ 内の $M^n \times \mathbb{R}$ の法ベクトル場 $\overline{N}(x)$ を

$$\overline{N}(x) := (x^0, \cdots, x^n, 0)$$

と表~~し~~せる。点 $x \in V$ における $M^n \times \mathbb{R}$ 内の $V$ の法ベクトル場を $N(x)$ とする.

- $M^n \times \mathbb{R}$ の形作用素を $\overline{S}$ として、次のように定義する:

$$\overline{S}X := -K\, d\overline{N}(\cancel{x}) = K\left(-X + \left\langle X, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \frac{\partial}{\partial t}\right)$$

接続を次のように選択する:

$$\overline{\overline{\nabla}}_X Y = \overline{\nabla}_X Y + \langle \overline{S}X, Y \rangle \overline{N}$$

つまり、$\langle \overline{S}X, Y \rangle = K \langle \overline{\overline{\nabla}}_X Y, \overline{N} \rangle$ である.

$S^n \times \mathbb{R}$ の場合、$\langle \overline{N}, \overline{N} \rangle = 1$ が成り立ち、$H^n \times \mathbb{R}$ の場合 $\langle \overline{N}, \overline{N} \rangle = -1$ が成り立つ。

- $(e_1, \cdots, e_n)$ を $V$ 上の局所正規直交フレームとして、
$e_{n+1} = N$、$e_0 = \overline{N}$ と定義する。また、2.2節と同様に
$\omega^i_j$、$\omega^{n+1}_j$、$\omega^i_{n+1}$、$\omega^{n+1}_{n+1}$ を定義する。さらに、次のように $\omega^0_r$ を設定する：

$$\omega^0_r(e_k) := \langle \overline{S} e_k, e_r \rangle = -k \langle e_k, e_r \rangle + k \langle e_k, \tfrac{\partial}{\partial t} \rangle \langle e_r, \tfrac{\partial}{\partial t} \rangle$$
$$\omega^r_0 := -k\,\omega^0_r$$

これらの定義を用いると、$\overline{\overline{\nabla}}_{e_k} e_\beta$ は

$$\overline{\overline{\nabla}}_{e_k} e_\beta = \sum_{\alpha=0}^{n+1} \omega^\alpha_\beta(e_k)\, e_\alpha$$

と表される。

$$\left( \overline{\overline{\nabla}}_{e_k} e_\beta = a^0 e_0 + \cdots + a^{n+1} e_{n+1} \xrightarrow{\text{両辺に } e_0 \text{ を内積}} \langle \overline{\overline{\nabla}}_{e_k} e_\beta, e_0 \rangle = a_0 \langle \overline{N}, \overline{N} \rangle = a_0 k. \right)$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $(E_0, \cdots, E_{n+1})$ を $\mathbb{E}^{n+2}$ の標準的 (canonical) なフレームとし、$\langle E_0, E_0 \rangle = k$、$E_{n+1} = \frac{\partial}{\partial t}$ とする。
$A \in M_{n+2}(\mathbb{R})$ を、フレーム $(E_\alpha)$ における $e_\beta$ の座標を列ベクトルとする行列とする。
つまり：

$$e_\beta = \sum_{\alpha=0}^{n+1} A^\alpha_\beta E_\alpha \qquad \left( A = (A^\alpha_\beta)_{\alpha,\beta=1,\cdots,n+2} \right) \qquad A = \begin{pmatrix} A^0_0 & \cdots & A^0_{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{n+1}_0 & \cdots & A^{n+1}_{n+1} \end{pmatrix}$$

である。よって、$\overline{\overline{\nabla}}_{e_k}(e_\beta)$ は

$$\overline{\overline{\nabla}}_{e_k}(e_\beta) = \sum_{\alpha=0}^{n+1} dA^\alpha_\beta(e_k) E_\alpha \qquad \left( \overline{\overline{\nabla}}_{e_k}\Big(\sum_{\alpha=0}^{n+1} A^\alpha_\beta E_\alpha\Big) = \sum_{\alpha=0}^{n+1}\Big(dA^\alpha_\beta E_\alpha + A^\alpha_\beta \underbrace{\overline{\overline{\nabla}}_{e_k} E_\alpha}_{=0}\Big) \right)$$

（$E_\alpha$ は $\mathbb{E}^{n+2}$ で固定された基底）

であり、一方で次のようにも表される

$$\overline{\overline{\nabla}}_{e_k}(e_\beta) = \sum_{\alpha=0}^{n+1}\sum_{r=0}^{n+1} \omega^r_\beta(e_k) A^\alpha_r E_\alpha \quad \cdots (*)$$

したがって、$A^{-1}dA = \Omega = \omega^\alpha_\beta \in M_{n+2}(\mathbb{R})$ が得られる。$\cdots (**)$

(*) $\overline{\overline{\nabla}}_{e_k}(e_\beta) = \sum_{r=0}^{n+1} \omega^r_\beta(e_k) e_r$ に $e_r = \sum_{\alpha=0}^{n+1} A^\alpha_r E_\alpha$ を代入すると、

$$\overline{\overline{\nabla}}_{e_k}(e_\beta) = \sum_{r=0}^{n+1} \omega^r_\beta(e_k) \Big(\sum_\alpha A^\alpha_r E_\alpha\Big)$$
$$= \sum_{r=0}^{n+1}\sum_{\alpha=0}^{n+1} \omega^r_\beta(e_k) A^\alpha_r E_\alpha \quad \text{である}$$

(**) $\overline{\overline{\nabla}}_{e_k}(e_\beta)$ を2通りの式で表した。よって

$$dA^\alpha_\beta(e_k) = \sum_{r=0}^{n+1} \omega^r_\beta(e_k) A^\alpha_r = \sum_{r=0}^{n+1} A^\alpha_r\, \omega^r_\beta(e_k)$$

であるため、$dA = A\Omega \iff A^{-1}dA = \Omega$ である。

かつ $A \in SO^+(\mathbb{E}^{n+2})$

- 対角行列 $G=(K, 1, \cdots, 1)\in M_{n+2}(\mathbb{R})$ を設定すると、次が成り立つ：

$$A\in SO^{+}(\mathbb{E}^{n+2}), \quad \Omega\in \mathfrak{so}(\mathbb{E}^{n+2})$$

ここで、$SO^{+}(\mathbb{E}^{n+2})$ は次の集合の $I_{n+2}$ における連結成分：

単位行列

$$SO(\mathbb{E}^{n+2})=\{Z\in M_{n+2}(\mathbb{R}) \mid {}^{t}ZGZ=G, \det Z=1\}$$

また、$\mathfrak{so}(\mathbb{E}^{n+2}):=\{H\in M_{n+2}(\mathbb{R}) \mid {}^{t}HG+GH=0\}$ である。

$S^{n}\times\mathbb{R}$ の場合、$SO^{+}(\mathbb{E}^{n+2})=SO(\mathbb{R}^{n+2})$ である。

$K=1$ を代入すると、$G=I_{n+2}$ となる。

# 3. $S^n\times\mathbb{R}$ または $H^n\times\mathbb{R}$ への等長的はめ込み

Lemma 3.4　3.5
↓
Lemma 3.6
↓
prop 3.7
↓
Theorem 3.4

## 3.1 整合方程式 (compatibility equation)

- $V$：次元 $n$ の単連結リーマン多様体
  $ds^2$：$V$ 上の計量（$\langle\cdot,\cdot\rangle$ とも表す）
  $\nabla$：$V$ 上のリーマン接続（レビチビタ接続）
  $R$：$V$ 上のリーマン曲率テンソル
  $S$：対称作用素 $S_y : T_yV \to T_yV$ の場
  $T$：$V$ 上のベクトル場で、$\|T\|\leqq 1$
  $\nu$：$V$ 上の滑らかな関数で、$\nu^2 \leqq 1$

→ 2.1節で定めた $S^n\times\mathbb{R}$ と $H^n\times\mathbb{R}$ 内の超曲面の整合方程式により、次の定義を導入する。

### Definition 3.1

組 $(ds^2, S, T, \nu)$ が $S^n\times\mathbb{R}$ および $H^n\times\mathbb{R}$ に対する整合方程式をそれぞれ満たす

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ◦ $\|T\|^2+\nu^2=1$

任意の $X, Y, Z\in\mathfrak{X}(V)$ に対して、以下4つを満たす：

(7) ◦
$$\begin{aligned}R_{XY}(Z) = &\langle SX, Z\rangle SY - \langle SY, Z\rangle SX\\ &+ \kappa\Big(\langle X, Z\rangle Y - \langle Y, Z\rangle X - \langle Y, T\rangle\langle X, Z\rangle T\\ &\quad -\langle X, T\rangle\langle Z, T\rangle Y + \langle X, T\rangle\langle Y, Z\rangle T + \langle Y, T\rangle\langle Z, T\rangle X\Big)\end{aligned}$$

(8) ◦ $\nabla_X(SY) - \nabla_Y(SX) - S[X, Y] = \kappa\nu\big(\langle Y, T\rangle X - \langle X, T\rangle Y\big)$

(9) ◦ $\nabla_X T = \nu SX$

(10) ◦ $d\nu(X) = -\langle SX, T\rangle$

（$\kappa=1$ は $S^n\times\mathbb{R}$ に、$\kappa=-1$ は $H^n\times\mathbb{R}$ に対応する）

### Remark 3.2

式 $\nabla_X T = \nu SX$ は、$\langle T, T\rangle + \nu^2 = 1$ を $X$ に関して微分することで、$\nu=0$ の場合を除き、$d\nu(X) = -\langle SX, T\rangle$ を含むことが分かる。

(∵) $\langle T, T\rangle + \nu^2 = 1$ を微分する。

$$\langle \nabla_X T, T\rangle + \langle T, \nabla_X T\rangle + \nabla_X(\nu^2) = 0$$
$$\Longleftrightarrow \cancel{2}\langle \nabla_X T, T\rangle + \cancel{2}\nu\, d\nu(X) = 0$$
$$\Longleftrightarrow \langle \nu SX, T\rangle + \nu\, d\nu(X) = 0$$
$$\Longleftrightarrow d\nu(X) = -\langle SX, T\rangle$$

∵ $\nu\neq 0$ より

## 3.2 $S^n\times\mathbb{R}$ および $H^n\times\mathbb{R}$ への 余次元1の等長はめ込み

このセクションで、定理3.3 を示す

**Theorem(再掲)**

仮定

$V$を$n$次元の単連結なリーマン多様体とし、$ds^2$を$V$の計量として、さらに
$\nabla$を$V$のリーマン接続(レビチビタ接続)とする。$S$を対称作用素$S_y: T_yV\to T_yV$の場(field)として、
$T$を$V$上のベクトル場とし、$\nu$を$\|T\|^2+\nu^2=1$を満たすような$V$上の滑らかな関数とする。

$M^n=S^n$または$M^n=\mathbb{H}^n$とする。組$(ds^2, S, T, \nu)$が$M^n\times\mathbb{R}$に対するガウス方程式とコダッチ方程式を満たし、さらに以下2つの方程式を満たしていると仮定する:

$$\nabla_X T=\nu SX \qquad d\nu(X)=-\langle SX, T\rangle$$

このとき、$f: V\longrightarrow M^n\times\mathbb{R}$ という等長的はめ込みが存在し、$f$に関する法ベクトル$N$と対応する形作用素が次を満たす:

$$df\circ S\circ df^{-1} \qquad \frac{\partial}{\partial t}=df(T)+\nu N$$

加えて、このはめ込みは$M^n\times\mathbb{R}$の大域的な$M^n$と$\mathbb{R}$の向きを保つ等長変換を除いて一意である。

- この定理を示すために、$V$上の局所正規直交フレーム$(e_1,\cdots,e_n)$を考え、2.2節のように形式$\omega^i$、$\omega^{n+1}$、$\omega^i_j$、$\omega^i_{n+1}$、$\omega^{n+1}_{n+1}$を設定する。

$$\omega^i(e_k)=\delta^i_k,\ \omega^i_j(e_k):=\langle\nabla_{e_k}(e_j), e_i\rangle,\ \omega^{n+1}_j(e_k):=\langle Se_k, e_j\rangle$$

$$\omega^j_{n+1}=-\omega^{n+1}_j, \qquad \omega^{n+1}_{n+1}:=0$$

さらに、$M^n$に応じて$\mathbb{E}^{n+2}$を$\mathbb{E}^{n+2}=\mathbb{R}^{n+2}$または$\mathbb{E}^{n+2}=\mathbb{L}^{n+2}$と設定する。
$(E_0,\cdots,E_{n+1})$を$\mathbb{E}^{n+2}$の標準的(canonical)フレーム($\mathbb{L}^{n+2}$の場合、$\langle E_0, E_0\rangle=-1$)とすると、
$E_{n+1}=\frac{\partial}{\partial t}$となる。

加えて、ベクトル場$T$を次のように設定する:

$$T^k:=\langle T, e_k\rangle,\quad T^{n+1}:=\nu,\quad T^0:=0.$$

- 先ほど定義した $T$ を用いて、さらに次の設定を行う：

$$\omega^0_j(e_k) := k(T^jT^k - \delta^k_j),\quad \omega^0_{n+1}(e_k) := k\nu T^k,$$
$$\omega^i_0 = -k\omega^0_i,\quad \omega^{n+1}_0 = -k\omega^0_{n+1},\quad \omega^0_0 = 0$$

$V$ 上で1次微分形式 $\eta$ を、$\eta(X) := \langle T, X\rangle$ と定義する。フレーム $(e_1, \cdots, e_n)$ では、$\eta = \sum_{k=1}^n T^k\omega^k$ となる。（$\because$ $X = \sum_j X^j e_j$、$T = \sum_k T^k e_k$ とすると、$\langle T, X\rangle = \sum_k\sum_j T^k \underbrace{X^j}_{\omega^j(X)} \underbrace{\langle e_k, e_j\rangle}_{\delta^k_j}$）

最後に、1次微分形式の行列 $\Omega$ を、$\Omega := (\omega^\alpha_\beta) \in M_{n+2}(\mathbb{R})$ とする。

- これ以降、定理3.3の仮定が成り立つとする。
初めに、整合方程式から導かれるいくつかの補題（3.4、3.5、3.6）を示す。

## Lemma 3.4

$d\eta = 0$ である。（$\eta$：$V$ 上の1次微分形式）

## Proof

1次微分形式の定義より、ベクトル場 $X, Y \in \mathfrak{X}(V)$ に対して

$$
\begin{aligned}
d\eta(X, Y) &= X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X, Y]) \qquad \eta(X) = \langle T, X\rangle \text{ 代入.}\\
&= X\langle T, Y\rangle - Y\langle T, X\rangle - \langle T, [X, Y]\rangle\\
&= \langle\nabla_X T, Y\rangle + \cancel{\langle T, \nabla_X Y\rangle} - (\langle\nabla_Y T, X\rangle + \cancel{\langle T, \nabla_Y X\rangle})\\
&\quad - (\cancel{\langle T, \nabla_X Y\rangle} - \cancel{\langle T, \nabla_Y X\rangle})\\
&= \langle\nabla_X T, Y\rangle - \langle\nabla_Y T, X\rangle \qquad \text{Def 3.1 } \nabla_X T = \nu SX \text{ 代入.}\\
&= \langle\nu SX, Y\rangle - \langle\nu SY, X\rangle\\
&= \nu(\underbrace{\langle SX, Y\rangle}_{=\langle SY, X\rangle \text{（自己随伴性）}} - \langle SY, X\rangle)\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

任意の $X, Y$ に対して成り立つため、$d\eta = 0$ である ■

## Lemma 3.5

$$dT^{\alpha} = \sum_{r=0}^{n+1} T^{r}\omega_{\alpha}^{r}$$ である.

**Proof** <u>$n=2$ の場合を示す</u>

$\alpha = 0$、$i\,(=1,2)$、$3$ の場合で分けて示す.

(i) $\alpha = 0$ の場合

$$(\text{左辺}) = dT^{0} = 0.$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= \underbrace{T^{0}}_{0}\omega_{0}^{0} + T^{1}\omega_{0}^{1} + T^{2}\omega_{0}^{2} + T^{3}\omega_{0}^{3} \\ &= -k\left(T^{1}\omega_{1}^{0} + T^{2}\omega_{2}^{0} + T^{3}\omega_{3}^{0}\right) \\ &= -k\left\{T^{1}\underline{k}(T^{1}T^{k}-\delta_{1}^{k}) + T^{2}\underline{k}(T^{2}T^{k}-\delta_{2}^{k}) + \nu^{2}\underline{k}T^{k}\right\} \cdots ①\end{aligned}$$

$\because\ \omega_{0}^{i} = -k\,\omega_{i}^{0}$、$\omega_{0}^{n+1} = -k\,\omega_{n+1}^{0}$、

$\omega$ に任意の基底 $e_k$ を適用させる

簡単のために※$k=1$ $(T^{k}=T^{1}$、$\delta_{1}^{k}=1$、$\delta_{2}^{k}=0)$ とすると、

$$\begin{aligned}(①\text{の右辺}) &= -k^{2}T^{1}\left\{(T^{1})^{2}-1 + (T^{2})^{2} + \nu^{2}\right\} \\ &= -k^{2}T^{1}(1-1) \\ &= 0.\end{aligned}$$

$\|T\|^{2}+\nu^{2}=1 \iff (T^{1})^{2}+(T^{2})^{2}+\nu^{2}=1$ 代入

(※$k=2$ の場合でも同様である)

左辺と右辺が一致する.

(ii) $\alpha = i\ (=1,2)$ の場合

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= dT^{i} \\ &= d\langle T, e_i\rangle \\ &= \langle dT, e_i\rangle + \langle T, de_i\rangle \\ &= \underline{\langle \nu SX, e_i\rangle} + \langle T, de_i\rangle \cdots ②\end{aligned}$$

$\forall X \in \mathfrak{X}(V)$ に対して、$dT(X) = \nabla_X T = \nu SX$ 代入

$de_i(X) = \nabla_X e_i$

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= \sum_{r=0}^{3} T^{r}\omega_{i}^{r} \\ &= \underbrace{T^{0}}_{0}\omega_{i}^{0} + T^{1}\omega_{i}^{1} + T^{2}\omega_{i}^{2} + T^{3}\omega_{i}^{3} \\ &= \langle T, e_1\rangle\langle \nabla_X e_i, e_1\rangle + \langle T, e_2\rangle\langle \nabla_X e_i, e_2\rangle \\ &\quad + \underline{\nu\langle SX, e_i\rangle} \cdots ③\end{aligned}$$

$T^{k} = \langle T, e_k\rangle$、$\forall X \in \mathfrak{X}(V)$ に対して、$\omega_{j}^{i}(X) = \langle \nabla_X e_j, e_i\rangle$ 代入.

②の右辺第2項について、$\nabla_X(e_j) = \sum_{i=1}^{2} \omega_j^i(X)\, e_i$ より、

$$\langle T, \nabla_X e_i \rangle = \left\langle T, \sum_{k=1}^{2} \omega_i^k(X)\, e_k \right\rangle$$
$$= \sum_{k=1}^{2} \omega_i^k(X) \langle T, e_k \rangle$$
$$= \sum_{k=1}^{2} T^k \omega_i^k(X) = T^1 \omega_i^1(X) + T^2 \omega_i^2(X).$$

$$\therefore (\text{②の右辺}) = \langle T, e_1 \rangle \langle \nabla_X e_i, e_1 \rangle + \langle T_2, e_2 \rangle \langle \nabla_X e_i, e_2 \rangle + \langle \nu SX, e_i \rangle$$
$$= (\text{②の左辺}).$$

左辺と右辺が一致する。

(iii) $\alpha = 3$ の場合

$$(\text{左辺}) = dT^3$$
$$= d\nu$$ 任意の $X \in \mathfrak{X}(V)$ に対して、$d\nu(X) = -\langle SX, T \rangle$ 代入
$$= -\langle SX, T \rangle \cdots ④$$

$$(\text{右辺}) = \sum_{r=0}^{3} T^r \omega_3^r$$
$$= \underbrace{T^0}_{0} \omega_3^0 + T^1 \omega_3^1 + T^2 \omega_3^2 + T^3 \underbrace{\omega_3^3}_{0}$$ $\omega_{n+1}^j = -\omega_j^{n+1}$ 代入
$$= T^1(-\omega_1^3) + T^2(-\omega_2^3)$$ 任意の $X \in \mathfrak{X}(V)$ に対して、$\omega_j^{n+1}(X) = \langle SX, e_j \rangle$ 代入.
$$= T^1(-\langle SX, e_1 \rangle) + T^2(-\langle SX, e_2 \rangle)$$
$$= -\langle T, e_1 \rangle \langle SX, e_1 \rangle - \langle T, e_2 \rangle \langle SX, e_2 \rangle$$

$T = \langle T, e_1 \rangle e_1 + \langle T_2, e_2 \rangle e_2$ であるため、④に代入すると、

$$(\text{左辺}) = -\langle SX, \langle T, e_1 \rangle e_1 + \langle T, e_2 \rangle e_2 \rangle$$
$$= -\left( \langle SX, \langle T, e_1 \rangle e_1 \rangle + \langle SX, \langle T, e_2 \rangle e_2 \rangle \right)$$
$$= -\langle T, e_1 \rangle \langle SX, e_1 \rangle - \langle T, e_2 \rangle \langle SX, e_2 \rangle$$
$$= (\text{右辺}).$$

以上より $\alpha = 0$、$i$、$3$ の場合で $dT^\alpha = \sum_{r=0}^{n+1} T^r \omega_\alpha^r$ を示した ■

## Lemma 3.6

$$d\Omega + \Omega \wedge \Omega = 0$$ である。 $\left(\Omega = (\omega)^{\alpha}_{\beta} \in M_{n+2}(\mathbb{R})\right)$

**Proof** n=2の場合を示す

$\Psi := d\Omega + \Omega\wedge\Omega$、 $R^{i}_{klj} = \langle R_{e_k e_l}(e_j), e_i \rangle$ とおく。 Proposition 2.4 より、

$$\begin{aligned}
\Psi^{i}_{j} &= d\omega^{i}_{j} + \sum_{\alpha=0}^{3} \omega^{i}_{\alpha} \wedge \omega^{\alpha}_{j} \\
&= \underbrace{-\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{2}\left(R^{i}_{klj}\,\omega^{k}\wedge\omega^{l}\right)}_{\text{Proposition 2.4 (5) より}} + \omega^{i}_{3}\wedge\omega^{3}_{j} + \omega^{i}_{0}\wedge\omega^{0}_{j}.
\end{aligned}$$

ガウス方程式(7)を満たしているので、$R^{i}_{klj}$ に代入する。

$$R^{i}_{klj} = \langle R_{e_k e_l}(e_j), e_i \rangle$$

$$\begin{aligned}
R_{e_k e_l}(e_j) = &\langle Se_k, e_j \rangle Se_l - \langle Se_l, e_j \rangle Se_k \\
&+ k\big(\langle e_k, e_j \rangle e_l - \langle e_l, e_j \rangle e_k - \langle e_l, T \rangle \langle e_k, e_j \rangle T \\
&\quad - \langle e_k, T \rangle \langle e_j, T \rangle e_l + \langle e_k, T \rangle \langle e_l, T \rangle T + \langle e_l, T \rangle \langle e_j, T \rangle e_k\big).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore R^{i}_{klj} = &\langle \langle Se_k, e_j \rangle Se_l - \langle Se_l, e_j \rangle Se_k, e_i \rangle \\
&+ k\langle \langle e_k, e_j \rangle e_l - \langle e_l, e_j \rangle e_k - \langle e_l, T \rangle \langle e_k, e_j \rangle T \\
&\quad - \langle e_k, T \rangle \langle e_j, T \rangle e_l + \langle e_k, T \rangle \langle e_l, e_j \rangle T + \langle e_l, T \rangle \langle e_j, T \rangle e_k, e_i \rangle
\end{aligned}$$

—— 部分を線形性を用いて分解すると、

$$\begin{aligned}
&\langle \langle Se_k, e_j \rangle Se_l, e_i \rangle - \langle \langle Se_l, e_j \rangle Se_k, e_i \rangle \\
&= \langle Se_k, e_j \rangle \langle Se_l, e_i \rangle - \langle Se_l, e_j \rangle \langle Se_k, e_i \rangle \\
&= \omega^{n+1}_{j}(e_k)\,\omega^{n+1}_{i}(e_l) - \omega^{n+1}_{j}(e_l)\,\omega^{n+1}_{i}(e_k) \\
&= \omega^{n+1}_{j} \wedge \omega^{n+1}_{i}(e_k, e_l). \quad \cdots ①
\end{aligned}$$

—— 部分を線形性および $\langle e_i, e_j \rangle = \delta^{i}_{j}$ を用いて分解すると、

$$\begin{aligned}
&k\big(\langle e_k, e_j \rangle \langle e_l, e_i \rangle - \langle e_l, e_j \rangle \langle e_k, e_i \rangle - \langle e_l, T \rangle \langle e_k, e_j \rangle \langle T, e_i \rangle \\
&\quad - \langle e_k, T \rangle \langle e_j, T \rangle \langle e_l, e_i \rangle + \langle e_k, T \rangle \langle e_l, e_j \rangle \langle T, e_i \rangle + \langle e_l, T \rangle \langle e_j, T \rangle \langle e_k, e_i \rangle\big) \\
&= k\left(\delta^{k}_{j}\delta^{l}_{i} - \delta^{l}_{j}\delta^{k}_{i} - T^{l}T^{i}\delta^{k}_{j} - T^{k}T^{j}\delta^{l}_{i} + T^{k}T^{i}\delta^{l}_{j} + T^{l}T^{j}\delta^{k}_{i}\right). \quad \cdots ②
\end{aligned}$$

よって、$R^i_{klj}$ = ① + ②.

一方で、$\omega^i_0 \wedge \omega^0_j (e_k, e_l)$ = ② であることが計算で分かる.※

※ $\omega^i_0 \wedge \omega^0_j (e_k, e_l) = \omega^i_0(e_k)\omega^0_j(e_l) - \omega^i_0(e_l)\omega^0_j(e_k)$

$$= -K^2(T^iT^k - \delta^k_i)(T^jT^l - \delta^l_j) + K^2(T^iT^l - \delta^l_i)(T^jT^k - \delta^k_j)$$

$$= K^2\Big(\cancel{T^iT^lT^jT^k} - T^iT^l\delta^k_j - T^jT^k\delta^l_i + \delta^l_i\delta^k_j$$

$$\cancel{-T^iT^kT^jT^l} + T^iT^k\delta^l_j + T^jT^l\delta^k_i - \delta^k_i\delta^l_j\Big)$$

= ②. ok

以上より $R^i_{klj} = \omega^i_{n+1} \wedge \omega^{n+1}_j (e_k, e_l) + \omega^i_0 \wedge \omega^0_j (e_k, e_l)$ であるため、$\Psi^i_j$ に代入して

$$-\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{2}\left(R^i_{klj}\,\omega^k \wedge \omega^l\right) + \omega^i_3 \wedge \omega^3_j + \omega^i_0 \wedge \omega^0_j.$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{2}\left\{\left(\omega^i_{n+1} \wedge \omega^{n+1}_j (e_k, e_l) + \omega^i_0 \wedge \omega^0_j (e_k, e_l)\right)\omega^k \wedge \omega^l\right\}$$

$$+\omega^i_3 \wedge \omega^3_j + \omega^i_0 \wedge \omega^0_j$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{2}\left\{\left(\omega^i_{n+1} \wedge \omega^{n+1}_j (e_k, e_l)\right)\omega^k \wedge \omega^l\right\} - \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{2}\left\{\left(\omega^i_0 \wedge \omega^0_j (e_k, e_l)\right)\omega^k \wedge \omega^l\right\}$$

$$+\omega^i_3 \wedge \omega^3_j + \omega^i_0 \wedge \omega^0_j$$