前回まで

Thm $\gamma \rightsquigarrow \alpha, \nu, \kappa$ が定まり,
$F=(\Gamma, e, n)$ は ㊟ をみたす.

1

問 I：開区間.
κ, α, ν ：I上 C^∞級関数で $\boxed{\alpha^2+\nu^2=1}$ をみたすとする.

$\overset{?}{\Longrightarrow}$ $\exists \gamma : I \longrightarrow S^1 \times \mathbb{R}$

s.t. $\begin{cases} \gamma：弧長パラメータ表示 \\ \gamma の曲率 = \kappa \\ \gamma の \boxed{} = \nu \\ \gamma の \boxed{} = \alpha \end{cases}$

2

HW κ, α, ν がすべて定数である $\gamma(s) : I \longrightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ はどのような式で与えられるか?

$\alpha^2+\nu^2=1$

$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha = \sin \theta(s) \\ \nu = \cos \theta(s) \end{cases}$

このとき

(9) $\Longleftrightarrow (\theta' - \kappa) \cos \theta = 0$ $\Longrightarrow$ k

(10) $\Longleftrightarrow (\theta' - \kappa) \sin \theta = 0$

3

確めてほしいこと

曲線 $\gamma : I \longrightarrow S^2 \times \mathbb{R}$ のときも

(9) (10) が成立つか?

$\gamma : I \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$

$\gamma : I \rightarrow S^2 \times \mathbb{R}$

$\boxed{1}$ I：開区間

κ, α, ν：I 上 C^∞ 級関数で、$\alpha^2 + \nu^2 = 1$ を満たす

このとき、以下を満たす $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ は存在するか？

- γ：弧長パラメータ表示
- κ：γ の曲率関数 → Daniel のスライド (2023) https://www4.ujaen.es/~jmprego/hw23/
- ν：γ の $\boxed{\text{角度関数？}}$ $\left(\nu = \langle n, \frac{\partial}{\partial t} \rangle\right)$ n の第3成分
- α：γ の $\boxed{}$ $\left(\alpha(s) = t'(s)\right)$ e の第3成分

$s_0 \in I$ を任意に一つ固定する．行列値関数 $K(s)$ を

$$K(s) = \begin{bmatrix} 0 & -1 + \alpha(s)^2 & \alpha(s)\nu(s) \\ 1 - \alpha(s)^2 & 0 & -\kappa(s) \\ -\alpha(s)\nu(s) & \kappa(s) & 0 \end{bmatrix}$$

と定める．E_3 を3次単位行列とするとき、初期値問題

$$F' = FK, \quad F(s_0) = E_3$$

は唯一の解 $F(s)$ を持つ．（幾何学I 定理7.2.2）

$F(s) \in SO(3)$ である事は前回（1/15 水）に確認した．

$F(s) = (\Gamma(s), e(s), n(s))$ と表すと、各 $s \in I$ ごとに、$\{\Gamma(s), e(s), n(s)\}$ は $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ の正規直交基底である．$F' = FK$ より、

$$\ast \begin{cases} \Gamma' = (1-\alpha^2)e - \alpha\nu n \\ e' = (-1+\alpha^2)\Gamma + \kappa n \\ n' = \alpha\nu\Gamma - \kappa e \end{cases}$$

である．次に、曲線 $\gamma(s) := \int_{s_0}^{s} e(u)\,du$ と定義する．

$\begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \\ t(s) \end{bmatrix}$

$\left(\|e(s)\| = 1 \text{ なので } \gamma(s) \text{は弧長パラメータ表示である}\right)$

$\gamma'(s) = e(s)$

- κ、α、ν が所望の値になることの確認

$$\begin{cases} \kappa(s) \overset{?}{=} \langle \mathbb{e}'(s), n(s) \rangle \\ \alpha(s) \overset{?}{=} t'(s) & (\mathbb{e}\text{の第3成分}) \\ \nu(s) \overset{?}{=} \langle n(s), \frac{\partial}{\partial t} \rangle & (n\text{の第3成分}) \end{cases}$$

(i) $\kappa(s) = \langle \mathbb{e}'(s), n(s) \rangle$ の確認

曲率関数の定義

$\tilde{\kappa}(s) := \langle \mathbb{e}'(s), n(s) \rangle$ と定義すると、それが ☆ 内の $\kappa(s)$ と一致することを示したい.

$\mathbb{e}'(s) = (-1 + \alpha(s)^2)\Gamma(s) + \kappa(s) n(s)$ であるため、内積 $\langle \mathbb{e}'(s), n(s) \rangle$ は

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}(s) &:= \langle \mathbb{e}'(s), n(s) \rangle \\ &= \langle (-1+\alpha(s)^2)\Gamma(s) + \kappa(s) n(s), n(s) \rangle \\ &= (-1+\alpha(s)^2)\underbrace{\langle \Gamma(s), n(s) \rangle}_{=0} + \kappa(s)\underbrace{\langle n(s), n(s) \rangle}_{=1} \\ &= \kappa(s). \end{aligned}$$

よって、$\underline{\tilde{\kappa}(s) = \kappa(s) = \langle \mathbb{e}'(s), n(s) \rangle}$ である.

(ii) $\alpha(s) = t'(s)$ であることの確認

問題設定から、

$$T(s) := \frac{\partial}{\partial t} - \nu(s) n(s)$$

は $\Gamma(s)$ と $n(s)$ に直交するため、$\mathbb{e}$ 方向にのみ成分を持つ. つまり

$$T(s) = \alpha(s)\mathbb{e}(s)$$

と表せる. この事から、内積 $\langle \frac{\partial}{\partial t}, \mathbb{e}(s) \rangle$ は

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \mathbb{e}(s) \right\rangle &= \langle T(s) + \nu(s) n(s), \mathbb{e}(s) \rangle \\ &= \langle \alpha(s)\mathbb{e}(s) + \nu(s) n(s), \mathbb{e}(s) \rangle \\ &= \alpha(s)\underbrace{\langle \mathbb{e}(s), \mathbb{e}(s) \rangle}_{=1} + \nu(s)\underbrace{\langle n(s), \mathbb{e}(s) \rangle}_{=0} \\ &= \alpha(s). \end{aligned}$$

一方、左辺について $\mathbb{e}(s) = \gamma'(s)$ であるため、 $\left(\gamma(s) := \int_{s_0}^{s} \mathbb{e}(u)\,du\right)$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \mathbb{e}(s) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \gamma'(s) \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{\partial}{\partial t},\ (x'(s),\ y'(s),\ t'(s)) \right\rangle$$

$$= t'(s).$$

よって、$a(s) = t'(s)$ である.

(iii) $\nu = \left\langle n(s), \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle$ の確認

$\tilde{\nu} := \left\langle n(s), \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle$ と定義する. 内積を実際に計算して ν と一致することを確認する.

$\frac{\partial}{\partial t} = T(s) + \nu(s) n(s)$ であるため、内積 $\left\langle n(s), \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle$ は

$$\begin{aligned}
\tilde{\nu}(s) &:= \left\langle n(s), \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \\
&= \left\langle n(s),\ T(s) + \nu(s) n(s) \right\rangle \\
&= \langle \underbrace{n(s)}_{\frac{\partial}{\partial t}\text{の法成分}},\ \underbrace{T(s)}_{\frac{\partial}{\partial t}\text{の接成分}} \rangle + \left\langle n(s),\ \nu(s) n(s) \right\rangle \\
&= 0 + \nu(s) \left\langle n(s),\ n(s) \right\rangle \\
&= \nu(s).
\end{aligned}$$

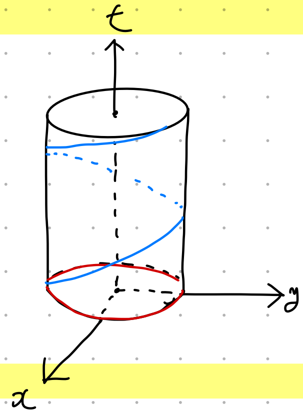
よって、$\tilde{\nu}(s) = \nu(s) = \left\langle n(s), \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle$ である.

$\boxed{2}$ κ、α、ν が全て定数である $\gamma(s): I \to S^1 \times \mathbb{R}$ はどのような式で与えられるか？

$F'(s) = F(s)A(s)$

$$A(s) = \begin{bmatrix} 0 & -1+\alpha^2 & \alpha\nu \\ 1-\alpha^2 & 0 & -\kappa \\ -\alpha\nu & \kappa & 0 \end{bmatrix}$$

直感　円 or らせん？



- 曲率 κ が一定 → 曲がり具合（曲線の半径）が一定
- α $(= t'(s))$ が一定 → 垂直方向 の 上昇速度 が一定
- ν が一定 → 法ベクトルと $\underbrace{\text{垂直方向}}_{=\frac{\partial}{\partial t}}$ の成す角が一定

Fの初期条件 $F(0)$ を

$$F(0) = (\Gamma(0), \mathbb{e}(0), \mathbb{n}(0)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \gamma(s) = \int_{s_0}^{s} \mathbb{e}(u)\,du$$

とすると、この常微分方程式は一階線形系であるので、行列の指数関数を用いて、$F(s)$ は

$$F(s) = F(0)\exp(sA)$$

と書ける. $\Gamma(s)$、$\mathbb{e}(s)$、$\mathbb{n}(s)$ はそれぞれ、

$$\Gamma(s) = F(0)\exp(sA)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbb{e}(s) = F(0)\exp(sA)\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbb{n}(s) = F(0)\exp(sA)\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

である。

また、A は歪対称行列 $({}^tA = -A)$ で、ベクトル $(\kappa, \alpha\nu, 1-\alpha^2) \in \mathbb{R}^3$ との外積演算を表している。

※ 任意の歪対称行列

$$\begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix}$$

は、(v_1, v_2, v_3) との外積を返す演算子になる。

今回、行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1+\alpha^2 & \alpha\nu \\ 1-\alpha^2 & 0 & -\kappa \\ -\alpha\nu & \kappa & 0 \end{bmatrix}$ なので、ベクトル $(\kappa, \alpha\nu, \underbrace{1-\alpha^2}_{=\nu^2}) \in \mathbb{R}^3$ との外積演算に対応する。

ノルム $= \sqrt{\kappa^2 + \alpha^2\nu^2 + \nu^4}$

$= \sqrt{\kappa^2 + \nu^2}$

- $\exp(sA)$ は以下の回転軸と回転角による回転行列になる.
  - 回転軸：$V = (\kappa, \alpha\nu, 1-\alpha^2)$　（原点を通る）
  - 回転角：$\underbrace{s}_{\text{時間}}\underbrace{\|V\|}_{\text{角速度}}$

• ロドリゲスの回転公式を用いて $\exp(sA)$ によるベクトル $\mathbb{X}$ の回転を表すと、

$$\exp(sA)\mathbb{X} = \mathbb{X} + \frac{\sin\theta}{\|\mathbb{V}\|}(\mathbb{V}\times\mathbb{X}) + \frac{1-\cos\theta}{\|\mathbb{V}\|^2}\{\mathbb{V}\times(\mathbb{V}\times\mathbb{X})\} \quad \cdots ☆$$

$(\mathbb{V}=(\kappa, d\nu, 1-d^2)、\theta = s\|\mathbb{V}\| = s\sqrt{\kappa^2+\nu^2})$

と書ける。

(i) $\Gamma(s) = \exp(sA)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ を ☆ を用いて求める

$\mathbb{X}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ とすれば、☆ の左辺は $\Gamma(s)$ そのものであるので、$e_1 := \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ として

$$\Gamma(s) = e_1 + \frac{\sin\theta}{\|\mathbb{V}\|}(\mathbb{V}\times e_1) + \frac{1-\cos\theta}{\|\mathbb{V}\|^2}\{\mathbb{V}\times(\mathbb{V}\times e_1)\}$$

$$= \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \frac{\sin(s\sqrt{\kappa^2+\nu^2})}{\sqrt{\kappa^2+\nu^2}}\begin{bmatrix}0\\\nu^2\\-d\nu\end{bmatrix} + \frac{1-\cos(s\sqrt{\kappa^2+\nu^2})}{\kappa^2+\nu^2}\begin{bmatrix}-\nu^2\\d\nu\kappa\\\kappa\nu^2\end{bmatrix}$$

• $\|\mathbb{V}\| = \sqrt{\kappa^2+\nu^2}$
• $\theta = s\sqrt{\kappa^2+\nu^2}$
• $\mathbb{V}\times e_1 = (0, \nu^2, -d\nu)$
• $\mathbb{V}\times(\mathbb{V}\times e_1) = (-\nu^2, d\nu\kappa, \kappa\nu^2)$

$$= \frac{1}{\kappa^2+\nu^2}\begin{bmatrix}\kappa^2+\nu^2\cos(s\sqrt{\kappa^2+\nu^2})\\ \nu^2\sqrt{\kappa^2+\nu^2}\sin(s\sqrt{\kappa^2+\nu^2}) + d\nu\kappa(1-\cos(s\sqrt{\kappa^2+\nu^2}))\\ -d\nu\sqrt{\kappa^2+\nu^2}\sin(s\sqrt{\kappa^2+\nu^2}) + \kappa\nu^2(1-\cos(s\sqrt{\kappa^2+\nu^2}))\end{bmatrix} \cdots ①$$

$\left(s=0 \text{ のとき、} \Gamma(0) = \frac{1}{\kappa^2+\nu^2}\begin{bmatrix}\kappa^2+\nu^2\\0\\0\end{bmatrix}\right)$

(ii) $\mathbb{e}(s) = \exp(sA)\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ を ☆ を用いて求める。

$\mathbb{X}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ とすれば ☆ の左辺は $\mathbb{e}(s)$ そのものであるので、$e_2 := \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ として

$$\mathbb{e}(s) = e_2 + \frac{\sin\theta}{\|\mathbb{V}\|}(\mathbb{V}\times e_2) + \frac{1-\cos\theta}{\|\mathbb{V}\|^2}\{\mathbb{V}\times(\mathbb{V}\times e_2)\}$$

$$= \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + \frac{\sin(s\sqrt{\kappa^2+\nu^2})}{\sqrt{\kappa^2+\nu^2}}\begin{bmatrix}-\nu^2\\0\\\kappa\end{bmatrix} + \frac{1-\cos(s\sqrt{\kappa^2+\nu^2})}{\kappa^2+\nu^2}\begin{bmatrix}\kappa d\nu\\-\nu^4-\kappa^2\\d\nu^3\end{bmatrix}$$

• $\mathbb{V}\times e_2 = (-\nu^2, 0, \kappa)$
• $\mathbb{V}\times(\mathbb{V}\times e_2) = (\kappa d\nu, -\nu^4-\kappa^2, \nu^3 d)$

$$= \frac{1}{\kappa^2+\nu^2}\begin{bmatrix}-\nu^2\sqrt{\kappa^2+\nu^2}\sin(s\sqrt{\kappa^2+\nu^2}) + \kappa d\nu\{1-\cos(s\sqrt{\kappa^2+\nu^2})\}\\ \nu^2(1-\nu^2) + (\nu^4+\kappa^2)\cos(s\sqrt{\kappa^2+\nu^2})\\ \kappa\sqrt{\kappa^2+\nu^2}\sin(s\sqrt{\kappa^2+\nu^2}) + d\nu^3\{1-\cos(s\sqrt{\kappa^2+\nu^2})\}\end{bmatrix} \cdots ②$$

$\left(s=0 \text{ のとき、} \mathbb{e}(0) = \frac{1}{\kappa^2+\nu^2}\begin{bmatrix}0\\\kappa^2+\nu^2\\0\end{bmatrix}\right)$

(iii) $n(s) = \exp(sA)\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ を ☆ を用いて求める.

$X=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ とすれば ☆ の左辺は $n(s)$ そのものであるので、$e_3 := \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ として

$$n(s) = e_3 + \frac{\sin\theta}{\|V\|}(V\times e_3) + \frac{1-\cos\theta}{\|V\|^2}\{V\times(V\times e_3)\}$$

$$= \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} + \frac{\sin(s\sqrt{\kappa^2+\nu^2})}{\sqrt{\kappa^2+\nu^2}}\begin{bmatrix}\alpha\nu\\-\kappa\\0\end{bmatrix} + \frac{1-\cos(s\sqrt{\kappa^2+\nu^2})}{\kappa^2+\nu^2}\begin{bmatrix}-\kappa\nu^2\\\alpha\nu^3\\-(\kappa^2+\alpha^2\nu^2)\end{bmatrix}$$

・$V\times e_3 = (\alpha\nu, -\kappa, 0)$

・$V\times(V\times e_3) = (-\kappa\nu^2, \alpha\nu^3, -\kappa^2-\alpha^2\nu^2)$

$$= \frac{1}{\kappa^2+\nu^2}\begin{bmatrix}\alpha\nu\sqrt{\kappa^2+\nu^2}\sin(s\sqrt{\kappa^2+\nu^2}) - \kappa\nu^2\{1-\cos(s\sqrt{\kappa^2+\nu^2})\}\\ -\kappa\sqrt{\kappa^2+\nu^2}\sin(s\sqrt{\kappa^2+\nu^2}) + \alpha\nu^3\{1-\cos(s\sqrt{\kappa^2+\nu^2})\}\\ \nu^2(1-\alpha^2) + (\kappa^2+\alpha^2\nu^2)\cos\theta\end{bmatrix} \cdots ③$$

($s=0$ のとき、$n(0) = \frac{1}{\kappa^2+\nu^2}\begin{bmatrix}0\\0\\\kappa^2+\nu^2\end{bmatrix}$)

・$\gamma(s)$ を具体的に求めていく。② と $\gamma(s)$ の定義より

$$\int_0^s \sin(u\sqrt{\kappa^2+\nu^2})\,du = \left[-\frac{\cos(u\sqrt{\kappa^2+\nu^2})}{\sqrt{\kappa^2+\nu^2}}\right]_0^s$$

$$\int_0^s \cos(u\sqrt{\kappa^2+\nu^2})\,du = \left[\frac{\sin(u\sqrt{\kappa^2+\nu^2})}{\sqrt{\kappa^2+\nu^2}}\right]_0^s$$

$$\gamma(s) = \int_{s_0}^s e(u)\,du$$ ② 代入

$$= \frac{1}{\kappa^2+\nu^2}\Big(\int_{s_0}^s -\nu^2\sqrt{\kappa^2+\nu^2}\sin(u\sqrt{\kappa^2+\nu^2}) + \kappa\alpha\nu\{1-\cos(u\sqrt{\kappa^2+\nu^2})\}\,du,$$ 第1成分

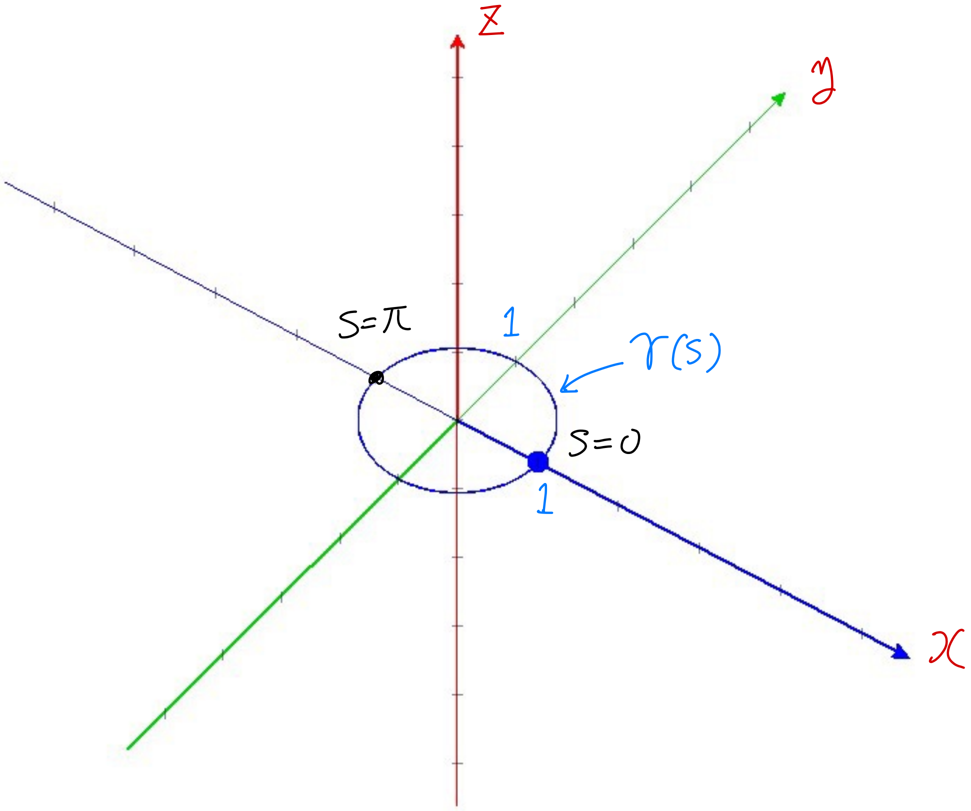
$$\int_{s_0}^s \nu^2(1-\nu^2) + (\nu^4+\kappa^2)\cos(u\sqrt{\kappa^2+\nu^2})\,du,$$ 第2成分

$$\int_{s_0}^s \kappa\sqrt{\kappa^2+\nu^2}\sin(u\sqrt{\kappa^2+\nu^2}) + \alpha\nu^3\{1-\cos(u\sqrt{\kappa^2+\nu^2})\}\,du\Big)$$ 第3成分

$$= \frac{1}{\kappa^2+\nu^2}\Big(\nu^2\cos(s\sqrt{\kappa^2+\nu^2}) - \frac{\kappa\alpha\nu}{\sqrt{\kappa^2+\nu^2}}\sin(s\sqrt{\kappa^2+\nu^2}) + \kappa\alpha\nu s,$$ 第1成分

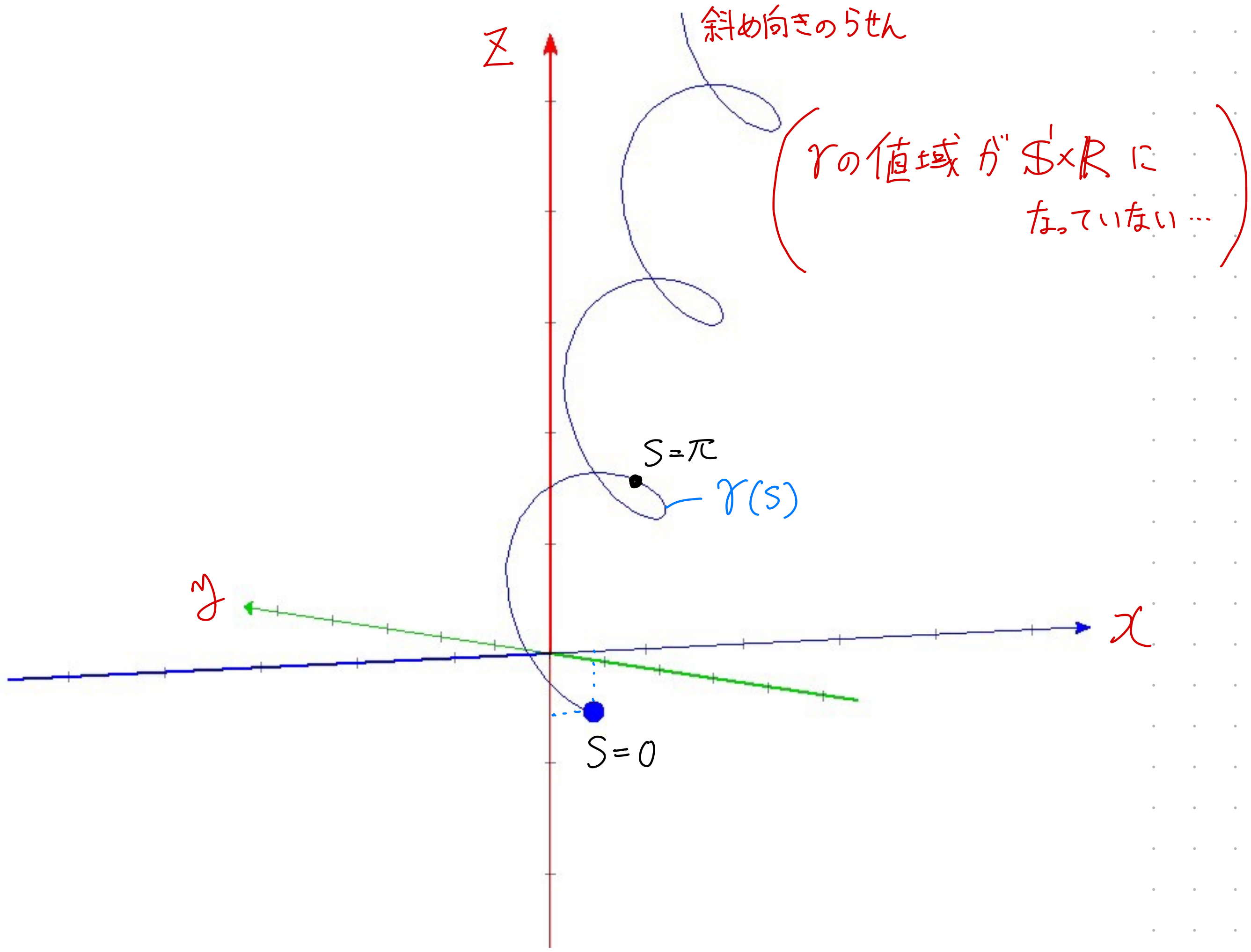
$$\frac{\kappa^2+\nu^4}{\sqrt{\kappa^2+\nu^2}}\sin(s\sqrt{\kappa^2+\nu^2}) + s\nu^2(1-\nu^2),$$ 第2成分

$$-\kappa\cos(s\sqrt{\kappa^2+\nu^2}) - \frac{\alpha\nu^3}{\sqrt{\kappa^2+\nu^2}}\sin(s\sqrt{\kappa^2+\nu^2}) + \alpha\nu^3 s\Big)$$ 第3成分



$K=0$、$\theta=0$ の場合

$\nu=\cos\theta$、$d=\sin\theta$



$K=1$、$\theta=\frac{\pi}{4}$ の場合

$\nu=\cos\theta$、$d=\sin\theta$

3 曲線 $\gamma: I \longrightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ のときも、 (余次元 = 1)

(9) $\nabla_X T = \nu S(X)$

(10) $d\nu(X) = -\langle S(X), T\rangle$

が成り立つか？

→ 部分多様体 V が 1次元曲線 $\gamma: I \longrightarrow S^1 \times \mathbb{R}$.

$S^1 \times \mathbb{R}$ は 2次元、部分多様体(曲線) は 1次元 なので、余次元 = 2 − 1 = 1.

よって、元の Proposition 2.2 が前提とする超曲面 に当てはまる.

示したい式

$$\nabla_{\gamma'} T = \nu S\gamma' \qquad d\nu(\gamma') = -\langle S\gamma', T\rangle$$

(γ': 曲線 γ の微分、S: 形作用素、ν: スカラー関数、T: $\frac{\partial}{\partial t}$ の 接方向成分、N: 単位法ベクトル場)

$\frac{\partial}{\partial t}$ が $S^1 \times \mathbb{R}$ で平行であるため、$\overline{\nabla}_{\gamma'}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = 0$.

$\frac{\partial}{\partial t}$ を曲線 γ の接方向 γ' と 法方向 N に分解すると、$\frac{\partial}{\partial t} = T + \nu N$

Proposition 2.2 と同様に $\overline{\nabla}_{\gamma'}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = 0$ を式変形すると、

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{\gamma'}\left(\tfrac{\partial}{\partial t}\right) &= \overline{\nabla}_{\gamma'}(T + \nu N) \\
&= \overline{\nabla}_{\gamma'} T + \underbrace{\overline{\nabla}_{\gamma'}(\nu N)}_{} \quad \text{積 の 法則} \\
&= \overline{\nabla}_{\gamma'} T + (d\nu(\gamma'))N + \nu \overline{\nabla}_{\gamma'} N \\
&= \tan(\overline{\nabla}_{\gamma'} T) + \mathrm{nor}(\overline{\nabla}_{\gamma'} T) + \quad // \\
&= \nabla_{\gamma'} T + \langle S\gamma', T\rangle N + (d\nu(\gamma'))N + \nu(\underbrace{\nabla_{\gamma'} N}_{=-S\gamma'} + \underbrace{\langle S\gamma', N\rangle}_{=0} N) \\
&= (\nabla_{\gamma'} T - \nu S\gamma') + (\langle S\gamma', T\rangle N + (d\nu(\gamma'))N) \cdots ☆
\end{aligned}$$

$T_p(\gamma)$ $T_p^{\perp}(\gamma)$

接成分 と 法成分 は 一次独立であるため、☆ の 接成分 と 法成分 は

$$\nabla_{\gamma'} T - \nu S\gamma' = 0 \iff \nabla_{\gamma'} T = \nu S\gamma'$$

$$\langle S\gamma', T\rangle N + (d\nu(\gamma'))N = 0 \iff d\nu(\gamma') = -\langle S\gamma', T\rangle$$

が成り立つ ▨

$\boxed{4}$ 曲線 $\gamma : I \to S^2 \times R$ の場合も　(余次元 = 2)

(9) $\nabla_X T = \nu S(X)$

(10) $d\nu(X) = -\langle S(X), T \rangle$

が成り立つか？

→ 部分多様体 V が 1次元曲線 $\gamma : I \to S^2 \times R$

$S^2 \times R$ は 3次元、部分多様体は曲線 (1次元) なので、余次元 $= 3 - 1 = 2$.

フレネセレの公式のように、

- 法空間を張る 2つの正規ベクトルを N_1、N_2 として、フレームとして動かす

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} = T + \nu_1 N_1 + \nu_2 N_2 \right)$$

$T = \frac{d}{ds}$、 $\alpha \frac{d}{ds}$

曲線上の接ベクトル場 $T(s)$ を $T(s) := \gamma'(s)$ (弧長パラメータ表示).
2次元の法空間を張るような N_1、N_2 を合わせた

$$\{ T(s), N_1(s), N_2(s) \}$$

を局所的な正規直交フレームにする.

$\frac{\partial}{\partial t}$ が $S^2 \times R$ で平行であるため、$\bar{\nabla}_{\gamma'} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = 0$.

$$\begin{aligned}
0 &= \bar{\nabla}_{\gamma'} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \\
&= \bar{\nabla}_{\gamma'} \left(T + \nu_1 N_1 + \nu_2 N_2 \right) \\
&= \bar{\nabla}_{\gamma'} T + (d\nu_1(\gamma')) N_1 + \nu_1 \bar{\nabla}_{\gamma'} N_1 + (d\nu_2(\gamma')) N_2 + \nu_2 \bar{\nabla}_{\gamma'} N_2 . \\
&= \cdots
\end{aligned}$$

一方、$\bar{\nabla}_{\gamma'} T$、$\bar{\nabla}_{\gamma'} N_1$、$\bar{\nabla}_{\gamma'} N_2$ はそれぞれ、次のように表される.

(T、N_1、N_2 の線形結合)

$$
\begin{cases}
\overline{\nabla}_{\gamma'} T = \overset{a_{11}}{(\text{接成分})}\, T + \overset{a_{12}}{(\text{法成分}\,1)}\, N_1 + \overset{a_{13}}{(\text{法成分}\,2)}\, N_2 \\
\overline{\nabla}_{\gamma'} (\nu_1 N_1) = \overset{a_{21}}{(\text{接成分})}\, T + \overset{a_{22}}{(\text{法成分}\,1)}\, N_1 + \overset{a_{23}}{(\text{法成分}\,2)}\, N_2 \\
\overline{\nabla}_{\gamma'} (\nu_2 N_2) = \overset{a_{31}}{(\text{接成分})}\, T + \overset{a_{32}}{(\text{法成分}\,1)}\, N_1 + \overset{a_{33}}{(\text{法成分}\,2)}\, N_2
\end{cases}
$$

(i) $\overline{\nabla}_{\gamma'} T$ について　　$T = \frac{d}{ds}$

$$\langle \overline{\nabla}_{\gamma'} T, T \rangle = a_{11} \underbrace{\langle T, T \rangle}_{=1} \qquad \therefore\ a_{11} = 0$$

$$\to \langle T, T \rangle' = 2 \langle \overline{\nabla}_{\gamma'} T, T \rangle$$

$$\Longleftrightarrow \langle \overline{\nabla}_{\gamma'} T, T \rangle = 0.$$

曲率 κ_1、κ_2 を次のように定義する.　　$(\kappa = \langle e', n \rangle)$

$$\kappa_1 := \langle \overline{\nabla}_{\gamma'} T, N_1 \rangle \qquad \kappa_2 := \langle \overline{\nabla}_{\gamma'} T, N_2 \rangle$$

このとき、$a_{12} = \langle \overline{\nabla}_{\gamma'} T, N_1 \rangle = \kappa_1$、$a_{13} = \langle \overline{\nabla}_{\gamma'} T, N_2 \rangle = \kappa_2$ である.

$\therefore\ \overline{\nabla}_{\gamma'} T = \kappa_1 N_1 + \kappa_2 N_2$ と表せる.

(9)(10) $\Longleftrightarrow$ $\kappa(s)=\theta'(s)$ の確認

・$\gamma : I \to S^1 \times \mathbb{R}$ が、(9)(10) を満たすとする.

(9) $\nabla_X T = \nu S(X)$

$X=\frac{d}{ds}$、$T=a\frac{d}{ds}$ とする. $S(X)$ を計算する.

$$S(X) = d\gamma^{-1}[-dn(X)]^{\tan}$$

$$\Longleftrightarrow S\left(\tfrac{d}{ds}\right) = d\gamma^{-1}[-n'(s)]^{\tan}$$

$$= d\gamma^{-1}[-a(s)\nu(s)\Gamma(s) + \underbrace{\kappa(s)e(s)}_{=\kappa\gamma'(s)}]^{\tan}$$

$$= d\gamma^{-1}\left(\kappa\, d\gamma\left(\tfrac{d}{ds}\right)\right)$$

$$= \kappa\frac{d}{ds}.$$

$(S=\kappa)$ S は スカラー関数 を 掛ける 形 に 等価.

よって、$\nabla_X T = \nu S(X) \Longleftrightarrow \nabla_{\frac{d}{ds}}\left(a\frac{d}{ds}\right) = \nu(s)\kappa\frac{d}{ds}$

$$\Longleftrightarrow a'\frac{d}{ds} + a\underbrace{\left(\nabla_{\frac{d}{ds}}\frac{d}{ds}\right)}_{=0} = \nu\kappa\frac{d}{ds}$$

$$\left(\because \nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial u^k} \Rightarrow \nabla_{\frac{d}{ds}}\left(\frac{d}{ds}\right) = \underbrace{\Gamma^1_{11}}_{=0}\frac{d}{ds}\right)$$

$$\Longleftrightarrow a'(s) = \kappa(s)\nu(s) \qquad \nu=\cos\theta(s),\ a=\sin\theta(s)$$

$$\Longleftrightarrow \theta'(s)\cos\theta(s) = \kappa(s)\cos\theta(s)$$

$$\Longleftrightarrow (\kappa-\theta')\cos\theta = 0 \qquad \therefore\ \kappa=\theta' \text{ または } \cos\theta(s)=0.$$

(10) $d\nu(X) = -\langle SX, T\rangle$

$X=\frac{d}{ds}$、$T=a\frac{d}{ds}$、$SX=S\left(\frac{d}{ds}\right)=\kappa\frac{d}{ds}$ より.

$$d\nu(X) = -\langle SX, T\rangle \Longleftrightarrow d\nu\left(\tfrac{d}{ds}\right) = -\left\langle \kappa\tfrac{d}{ds}, a\tfrac{d}{ds}\right\rangle$$

$$\Longleftrightarrow \nu'(s) = -\kappa(s)a(s)\underbrace{\left\langle\tfrac{d}{ds},\tfrac{d}{ds}\right\rangle}_{=1}$$

$$\Longleftrightarrow \cos\theta(s)' = -\kappa(s)\sin\theta(s)$$

$$\Longleftrightarrow -\theta'\sin\theta(s) = -\kappa(s)\sin\theta(s)$$

$$\Longleftrightarrow (\theta'(s)-\kappa(s))\sin\theta(s) = 0 \qquad \therefore\ \kappa=\theta' \text{ または } \sin\theta(s)=0$$