

$$\begin{cases} f_u(u, 0) \neq 0 \\ f_v(u, 0) = 0 \end{cases} \quad \text{rank } (df) = 1$$

$$f_u \neq 0 \Leftrightarrow \nu_v(u, 0) \neq 0.$$

$$(HW) \bullet K_s = K \cos \theta$$

• 修論をまとめると 次回  
共有弧  
(II/II)

$$g(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} 2 \sin \theta & \\ 4 \cos \theta \omega \varphi & \\ 4 \cos \theta \sin \varphi & \end{pmatrix} : \text{積円錐のベクトル表示}, \quad (\theta | \theta < \frac{\pi}{2}, |\varphi| < \pi).$$

$$f(\theta, \varphi) = g(\theta, \varphi) + \frac{1}{d} \nu(\theta, \varphi) : \text{平行曲面}.$$

優先

- 人字口 (積円錐の平行曲面と等しい)
- 溝筋 (m-type edge, ...),  $K_{S(u)}$  (m: 保証) を明記
- n次 Koss 計量の等価実現定理 (Hatten, 定理 67) の証明
- 主定理 A (HNSV の Thm III).
- 主定理 B (HNSV の Thm IV)

(symmetry,  $f$  の具体例 ← 後で考える)

• M-type edge  $\Leftrightarrow$  第1種退化次数 (m-1) 特異点

$$\Leftrightarrow \exists \begin{cases} f_r(u, 0) = \dots = f_{r^{m-1}}(u, 0) = 0 \\ \{f_u(u, 0), f_{r^m}(u, 0), \nu(u, 0)\} \text{ が ONB (a.c.s)} \end{cases}$$

•  $f_u(u, 0) = \epsilon \mathbf{e}_u$  に対して カスプ角  $\theta$  を用いて

$$f_{r^m}(u, 0) = \cos \theta \mathbf{n}(u) - \sin \theta \mathbf{b}(u)$$

$$\nu(u, 0) = \sigma \sin \theta \mathbf{n}(u) + \sigma \cos \theta \mathbf{b}(u)$$

$$\text{として良い } (\det(f_u(u, 0), f_{r^m}(u, 0), \nu(u, 0)) = \sigma \in \{-1, 1\})$$

$$K_s(u) = \text{sgn}(\det(r', r'')) \frac{\det(\hat{r}', \hat{r}'', \nu)}{\|\hat{r}'(u)\|^3} \quad (m: \text{偶数})$$

\$\hookrightarrow r^{m-1} \lambda\$ と変更しても良い。

$\lambda(u, v) = \hat{\lambda}^{m-1}(u, v)$  とおく.  $r = \frac{\partial}{\partial v}$  とし.  $r$  で両辺を微分すると

$$r \lambda = (m-1) \hat{\lambda}^{m-2} \cdot r \hat{\lambda}$$

$$r^2 \lambda = (m-1) \left\{ (\hat{\lambda}^{m-2})_r r \hat{\lambda} + \hat{\lambda}^{m-2} (r \hat{\lambda})_r \right\}$$

$$(m-2) \hat{\lambda}^{m-3} (r \hat{\lambda})^2$$

$$\gamma^{m-1} \lambda_{(u,0)} = (m-1)! (\hat{\lambda})_{(u,0)}^{m-1}$$

$\boxed{\text{M-1回}}$

$\rightarrow \hat{\lambda}^{m-1}$  を 微分した項のみが残る.

( $u,0$ ) が 特異曲線 の 場合.

$$\lambda_{(u,0)} = 0 \iff \hat{\lambda}_{(u,0)} = 0$$

$\hat{\lambda}_{(u,0)}$	$(\hat{\lambda})_{(u,0)}^{m-1}$	$\gamma^{m-1} \lambda_{(u,0)}$
⊕	⊕	⊕ $\rightarrow \gamma^{m-1} \lambda_{(u,0)}$ と $\hat{\lambda}_{(u,0)}$ は 符号一致
⊖	<del>⊕</del> <del>奇数</del> ⊖	<del>⊖</del> $\rightarrow \gamma^{m-1} \lambda_{(u,0)}$ と $\hat{\lambda}_{(u,0)}$ の 符号が一致しない 場合がある?

$\therefore m$  が 偶数 の時、  $\hat{\lambda}_{(u,0)}$  と  $\gamma^{m-1} \lambda_{(u,0)}$  の 符号は 一致する.

$K_S = \varepsilon_g \frac{\det(\hat{\gamma}', \hat{\gamma}'', \gamma)}{\|\hat{\gamma}'\|^3}$ 
 $\varepsilon_g = \operatorname{sgn} \left( \det(\gamma', \gamma) \cdot \hat{\lambda}_g \right)$ 

$\boxed{\gamma^{m-1} \lambda \text{ と 变更}}$

 $\lambda = \hat{\lambda}^{m-1}$ 
 $\gamma \lambda = (m-1) \hat{\lambda}^{m-2} \cdot \hat{\lambda}$ 
 $\vdots$ 
 $\gamma^{m-1} \lambda_{(u,0)} = (m-1)! (\hat{\lambda})_{(u,0)}^{m-1}$ 

$\boxed{\text{M-1乗?}}$

M: 偶数

$f: m\text{-type edge at } p$

 $\Rightarrow \exists (V; u, v) : p_{(0,0)} \in V \text{ 且 } f \text{ coord}$ 

s.t.

- $f_{(u,0)}$  も 特異曲線.
- $f_u(u,0) = \dots = f_{V^{-1}(u,0)} = 0$
- $\{f_u(u,0), f_v(u,0), \gamma(u,0)\}$  : ONB.

Def.  $\gamma(u) := f_v(u,0)$

$\hat{\gamma}$  cuspidal direction と.

(HW)  $\gamma$  時も  $K_S = K \otimes g$  が 成立する?

•  $f_v(u, v) = V^{m-1} \exists \psi(u, v)$  且  $\lambda = \det(f_u, f_v, \nu)$  は

$$\lambda = V^{m-1} \det(f_u, \psi, \nu)$$

である.  $K_S(u)$  の 符号  $\varepsilon_r = \operatorname{sgn} (\det(\gamma_{(u,0)}, \gamma_{(u,0)}) \gamma^{m-1} \lambda)$  は.  $\gamma^{m-1} \lambda_{(u,0)}$  の 正負 が 判ればよい.

$$\begin{aligned} \therefore \gamma^{m-1} \lambda_{(u,0)} &= \lambda_{V^{-1}(u,0)} = (m-1)! \det(f_u, \psi, \nu)(u,0) \quad \Rightarrow f_u(u,0) = (m-1)! \psi(u,0) \\ &= \frac{(m-1)!}{(m-1)!} \det(f_u, f_v, \nu)(u,0) \quad \Leftrightarrow \psi(u,0) = \frac{1}{(m-1)!} f_v(u,0) \text{ 且 } \lambda \\ &= \sigma \in \{-1, 1\} \cdots \star \quad \therefore \varepsilon_r \text{ の 符号} \text{ は } \gamma^{m-1} \lambda_{(u,0)} \text{ の 符号} \text{ と 一致}. \end{aligned}$$

m-type edge

④  $K_s(u) = K_s(u) \cos \theta$  か? ( $m > 2$ , 偶数)

$\mathbf{e}(u) = f_u(u, 0)$  を空間曲線  $\hat{r}(u)$  の単位接ベクトルとする。 $\mathbf{e}(u), K(u)$  は

$$\mathbf{e}(u) = \hat{r}'(u), \quad \mathbf{e}'(u) = \hat{r}''(u), \quad K(u) = \|\hat{r}''(u)\|$$

となる。 $n(u), b(u)$  はそれぞれ

$$n(u) = \frac{1}{K(u)} \mathbf{e}'(u), \quad b(u) = \mathbf{e}(u) \times n(u)$$

と表せる。 $\langle \hat{r}'(u), \hat{r}''(u) \rangle = 0$  より  $\hat{r}'(u)$  と  $\hat{r}''(u)$  は直交しており、さらに  $\hat{r}'(u) \perp f_{v^m}(u, 0)$ 、  
 $\hat{r}'(u) \perp \nu(u, 0)$  であるため、 $\hat{r}''(u)$  は  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  を用いて

$$\hat{r}''(u) = \alpha f_{v^m}(u, 0) + \beta \nu(u, 0) \cdots (*)$$

と書ける。 $(*)$  の両辺のノルムをとると、

$$(左辺): \|\hat{r}''(u)\| = K(u)$$

$$(右辺): \|\alpha f_{v^m}(u, 0) + \beta \nu(u, 0)\| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

であるため、 $\alpha = K(u) \cos \phi, \beta = K(u) \sin \phi$  とおけば、 $\hat{r}''(u)$  は

$$\hat{r}''(u) = (K(u) \cos \phi) f_{v^m}(u, 0) + (K(u) \sin \phi) \nu(u, 0) \cdots (**)$$

である。特異曲率の定義より、 $K_s(u) = \text{sgn}(\det(r(u), \eta(u), \gamma^{m-1} \lambda)) \frac{\det(\hat{r}'(u), \hat{r}''(u), \nu(u))}{\|\hat{r}'(u)\|^3}$   
 であるので、 $\det()$  の中に  $(**)$  を代入すると、

$$K_s(u) = \frac{\text{sgn}(\det(\hat{r}'(u), f_{v^m}(u, 0), \nu(u, 0)))}{\|\hat{r}'(u)\|^3} K(u) \cos \phi = \sigma \in \{-1, 1\}$$

特異点  $(u, 0)$  で m-type edge

$\Leftrightarrow$  第1種退化次數  $(m-1)$  特異点

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cdot f_v(u, 0) = \dots = f_{v^{m-1}}(u, 0) = 0 \\ \cdot \{f_u(u, 0), f_{v^m}(u, 0), \nu(u, 0)\} がONB \end{cases}$$

$$= \sigma \text{sgn}( ) K(u) \cos \phi$$

となる。(つまり、 $K(u) \cos \phi = \sigma \text{sgn}( ) K_s(u)$ )

以降で、 $\phi = \theta + 2n\pi$  を示すフレセレの公式より、 $\mathbf{e}', \mathbf{n}', \mathbf{b}'$  はそれぞれ

$$\mathbf{e}'(u) = K(u) n(u)$$

$$n'(u) = -K(u) \mathbf{P}(u) + T \mathbf{b}(u)$$

$$b'(u) = -T(u) n(u)$$

であり、 $\hat{r}''(u) = (\sigma \operatorname{sgn}(\ ) K_s(u)) f_{v^m}(u, 0) + (K_v(u)) v(u, 0)$  と  $n(u)$  の内積は

$$\underbrace{\langle \hat{r}''(u), n(u) \rangle}_{\text{}} = \langle (\sigma \operatorname{sgn}(\ ) K_s(u)) f_{v^m}(u, 0) + (K_v(u)) v(u, 0), n(u) \rangle$$

$$\stackrel{\text{}}{=} \langle (\sigma \operatorname{sgn}(\ ) K_s(u)) f_{v^m}(u, 0), n(u) \rangle + \langle K_v(u) v(u, 0), n(u) \rangle$$

$$= \sigma \operatorname{sgn}(\ ) K_s(u) \langle f_{v^m}(u, 0), n(u) \rangle$$

$$+ K_v(u) \langle v(u, 0), n(u) \rangle$$

$$f_{v^m} = \cos \theta \mathbf{n} - \sin \theta \mathbf{b}$$

$$v = \sigma (\sin \theta \mathbf{n} + \cos \theta \mathbf{b}) \text{ 代入}$$

$$= \sigma \operatorname{sgn}(\ ) K_s(u) \cos \theta \underbrace{\langle n(u), n(u) \rangle}_{=1} + \sigma K_v(u) \sin \theta \underbrace{\langle n, n \rangle}_{=1}$$

$$= \sigma \operatorname{sgn}(\ ) K_s(u) \cos \theta + \sigma K_v(u) \sin \theta \cdots (\star)$$

である。同様に、 $\langle \hat{r}''(u), b(u) \rangle$  は

$$\underbrace{\langle \hat{r}''(u), b(u) \rangle}_{\text{}} = \langle (\sigma \operatorname{sgn}(\ ) K_s(u)) f_{v^m}(u, 0) + (K_v(u)) v(u, 0), b(u) \rangle$$

$$\stackrel{\text{}}{=} \langle (\sigma \operatorname{sgn}(\ ) K_s(u)) f_{v^m}(u, 0), b(u) \rangle + \langle K_v(u) v(u, 0), b(u) \rangle$$

$$= \sigma \operatorname{sgn}(\ ) K_s(u) \langle f_{v^m}(u, 0), b(u) \rangle$$

$$+ K_v(u) \langle v(u, 0), b(u) \rangle$$

$$f_{v^m} = \cos \theta \mathbf{n} - \sin \theta \mathbf{b}$$

$$v = \sigma (\sin \theta \mathbf{n} + \cos \theta \mathbf{b}) \text{ 代入}$$

$$= -\sigma \operatorname{sgn}(\ ) K_s(u) \sin \theta \underbrace{\langle b(u), b(u) \rangle}_{=1} + \sigma K_v(u) \cos \theta \underbrace{\langle b(u), b(u) \rangle}_{=1}$$

$$= -\sigma \operatorname{sgn}(\ ) K_s(u) \sin \theta + \sigma K_v(u) \cos \theta \cdots (\star\star)$$

である。以上 (★)(★★) より。

$$\begin{cases} K(u) = \sigma \operatorname{sgn}(\ ) K_s(u) \cos \theta + \sigma K_v(u) \sin \theta \\ 0 = -\sigma \operatorname{sgn}(\ ) K_s(u) \sin \theta + \sigma K_v(u) \cos \theta \end{cases}$$

$\downarrow$

$$\begin{aligned} K_s(u) &= \sigma \operatorname{sgn}(\ ) K(u) \cos \phi \\ K_v(u) &= K(u) \sin \phi \quad \text{を代入。} \quad (\sigma^2 = 1) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} K(u) = K(u) \cos \phi \cos \theta + \sigma K(u) \sin \phi \sin \theta \\ 0 = -K(u) \cos \phi \sin \theta + \sigma K(u) \sin \phi \cos \theta \end{cases}$$

$\iff$

$$\begin{cases} 1 = \cos \phi \cos \theta + \sigma \sin \phi \sin \theta \\ 0 = -\cos \phi \sin \theta + \sigma \sin \phi \cos \theta \end{cases}$$

両辺を  
 $K(+0)$ で  
割る。

■  $\sigma = 1$  つまり  $\gamma^{n-1} \lambda_{(u,0)} = \lambda_{v^{n-1}(u,0)} = 1$  のとき ( $\because$  ★よ)

$$\begin{cases} 1 = \cos \phi \cos \theta + \sin \phi \sin \theta \\ 0 = -\cos \phi \sin \theta + \sin \phi \cos \theta \end{cases}$$

$\iff$

$$\begin{cases} 1 = \cos(\phi - \theta) \\ 0 = \sin(\phi - \theta) \end{cases} \quad \therefore \phi = \theta + 2n\pi.$$

$\rightarrow \cos \phi = \cos(\theta + 2n\pi) = \cos \theta.$

$$\therefore K_s(u) = \operatorname{sgn}(\det(r'(w), \gamma(u)) \underbrace{\gamma^{n-1} \lambda}_{\substack{\uparrow \\ (u,v) \text{の向き(正)}}}) \underbrace{K(u) \cos \theta}_1$$

$$= \underbrace{K(u) \cos \theta}_{} \quad (K_v = K \sin \theta)$$

■  $\sigma = -1$  つまり  $\gamma^{n-1} \lambda_{(u,0)} = \lambda_{v^{n-1}(u,0)} = -1$  のとき ( $\because$  ★よ)

$$\begin{cases} 1 = \cos \phi \cos \theta - \sin \phi \sin \theta \\ 0 = -\cos \phi \sin \theta - \sin \phi \cos \theta \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1 = \cos(\phi + \theta) \\ 0 = -\sin(\phi + \theta) \end{cases} \quad \therefore \phi = -\theta + 2n\pi$$

$\rightarrow \cos \phi = \cos(-\theta + 2n\pi) = \cos(-\theta)$

$$\begin{aligned} \therefore K_s(u) &= -\operatorname{sgn}(\text{ }) K(u) \cos(-\theta) \\ &= -\operatorname{sgn}(\det(r'(u), \gamma(u)) \overset{\text{m-1}}{\underset{\text{II}}{\lambda}}) K(u) \cos \theta \\ &\quad \uparrow \text{(u,v)の向き(正)} \quad \text{-1} \\ &= \text{~~~~~} K(u) \cos \theta \quad (K_v = -K \sin \theta) \end{aligned}$$

$\therefore \sigma$  の値に関わらず、 $K_s(u) = K(u) \cos \theta$  である。  $\blacksquare$

~~X~~  $f_{v^m}(u, 0)$  と  $\nu(u, 0)$  の具体的な表示を使わない場合

$$f_{v^m}(u, 0) = A \mathbf{e}(u) + B \mathbf{n}(u) + C \mathbf{b}(u)$$

$$\nu(u, 0) = D \mathbf{e}(u) + E \mathbf{n}(u) + F \mathbf{b}(u) \quad \text{とおく。}$$

$$\langle f_u(u, 0), f_{v^m}(u, 0) \rangle = \langle f_u(u, 0), \nu(u, 0) \rangle = 0 \quad \text{より。} \quad A = D = 0$$

$$\langle f_{v^m}(u, 0), f_{v^m}(u, 0) \rangle = \langle \nu(u, 0), \nu(u, 0) \rangle = 1 \quad \text{より。} \quad B^2 + C^2 = 1, \\ E^2 + F^2 = 1.$$

$$\langle f_{v^m}(u, 0), \nu(u, 0) \rangle = 0 \quad \text{より。} \quad BE + CF = 0.$$

$$\det(f_u, f_{v^m}, \nu)(u, 0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & B & E \\ 0 & C & F \end{vmatrix} = \sigma \in \{-1, 1\} \quad \text{より。} \quad BF - CE = \sigma.$$

以上より、 $(E, F) = (-\sigma C, \sigma B)$  と表せる。 $(B, C) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$   
とすれば ( $\varphi \in \mathbb{R}$ ).

$$(B, C, E, F) = (\cos \varphi, \sin \varphi, -\sigma \sin \varphi, \sigma \cos \varphi)$$

と表せる。(カスパ角  $\theta$  に対して、 $\varphi = -\theta$ .)

$$\therefore f_{v^m}(u, 0) = \cos \varphi \mathbf{n}(u) + \sin \varphi \mathbf{b}(u)$$

$$\nu(u, 0) = -\sigma \sin \varphi \mathbf{n}(u) + \sigma \cos \varphi \mathbf{b}(u).$$