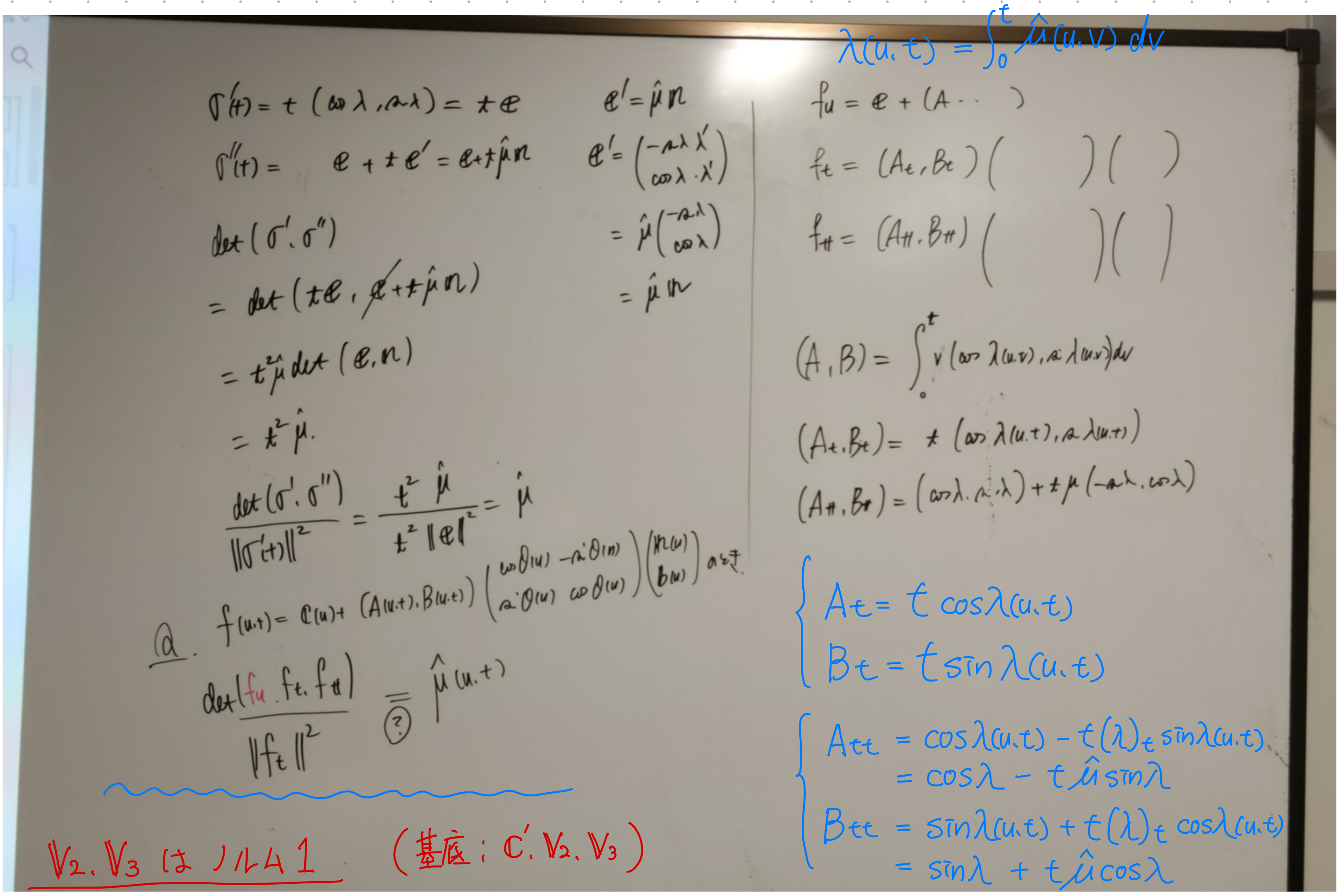
• Fukui の公式の かくにん



$$f(u,t) = \mathbb{C}(u) + (A(u,t), B(u,t))\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ b \end{pmatrix}}_{=:\begin{pmatrix} \mathbb{V}_2 \\ \mathbb{V}_3 \end{pmatrix}}$$

$$= \mathbb{C}(u) + A(u,t)\mathbb{V}_2 + B(u,t)\mathbb{V}_3$$

$$f_t = A_t\mathbb{V}_2 + B_t\mathbb{V}_3 = t\cos\lambda\,\mathbb{V}_2 + t\sin\lambda\,\mathbb{V}_3$$

$$\|f_t\|^2 = A_t^2\mathbb{V}_2^2 + B_t^2\mathbb{V}_3^2 = t^2\cos^2\lambda(u,t) + t^2\sin^2\lambda = t^2$$

$$f_{tt} = A_{tt}\mathbb{V}_2 + B_{tt}\mathbb{V}_3$$
$$= (\cos\lambda - t\hat{u}\sin\lambda)\mathbb{V}_2 + (\sin\lambda + t\hat{u}\cos\lambda)\mathbb{V}_3$$

$$f_u = \mathbb{C}'(u) + A_u\mathbb{V}_2 + A\mathbb{V}_2' + B_u\mathbb{V}_3 + B\mathbb{V}_3'$$

Lemma 4.8 より
$$\begin{cases} \mathbb{V}_2' = -\kappa\cos\theta\,\mathbb{C}' + (\tau - \theta')\mathbb{V}_3 \\ \mathbb{V}_3' = -\kappa\sin\theta\,\mathbb{C}' - (\tau - \theta')\mathbb{V}_2 \end{cases}$$

$$= (1 - A\kappa\cos\theta - B\kappa\sin\theta)\mathbb{C}'(u)$$
$$+ (A_u - B(\tau - \theta'))\mathbb{V}_2$$
$$+ (B_u + A(\tau - \theta'))\mathbb{V}_3$$

$$\det(f_u, f_t, f_{tt}) = \begin{vmatrix} 1-A\kappa\cos\theta - B\kappa\sin\theta & 0 & 0 \\ A_u - B(\tau-\theta') & t\cos\lambda & \cos\lambda - t\hat{u}\sin\lambda \\ B_u + A(\tau-\theta') & t\sin\lambda & \sin\lambda + t\hat{u}\cos\lambda \end{vmatrix}$$

余因子展開

$$= \{1-\kappa(A\cos\theta + B\sin\theta)\}\begin{vmatrix} t\cos\lambda & \cos\lambda - t\hat{u}\sin\lambda \\ t\sin\lambda & \sin\lambda + t\hat{u}\cos\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \{1-\kappa(A\cos\theta + B\sin\theta)\}\left(\cancel{t\sin\lambda}\cos\lambda + t^2\hat{u}\cos^2\lambda - \cancel{t\sin\lambda}\cos\lambda + t^2\hat{u}\sin^2\lambda\right)$$

$$= t^2\hat{u}\{1-\kappa(A\cos\theta + B\sin\theta)\}$$

$$\frac{\det(f_u, f_t, f_{tt})}{\|f_t\|^2} = \hat{u}\{1-\kappa(A\cos\theta + B\sin\theta)\} \overset{?}{=} \hat{u}(u,t)$$

(基底：c', n, b)

$$f(u,t) = c(u) + (A(u,t), B(u,t))\underbrace{\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ b\end{pmatrix}} \to \begin{bmatrix} n\cos\theta - b\sin\theta \\ n\sin\theta + b\cos\theta\end{bmatrix}$$

$$f_u = c'(u) + (A_u, B_u)R_\theta\begin{pmatrix} n \\ b\end{pmatrix} + (A, B)(R_\theta)_u\begin{pmatrix} n \\ b\end{pmatrix} + (A, B)R_\theta\begin{pmatrix} n_u \\ b_u\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= c'(u) + A_u(n\cos\theta - b\sin\theta) + B_u(n\sin\theta + b\cos\theta) \\ &\quad + A(-n\sin\theta - b\cos\theta) + B(n\cos\theta - b\sin\theta) \\ &\quad + A(n_u\cos\theta - b_u\sin\theta) + B(n_u\sin\theta + b_u\cos\theta) \\ &= c'(u) + (A_u\cos\theta - A\sin\theta + B_u\sin\theta + B\cos\theta)\,n \\ &\quad + (-A_u\sin\theta - A\cos\theta + B_u\cos\theta - B\sin\theta)\,b \\ &\quad + (A\cos\theta + B\sin\theta)\,n_u + (-A\sin\theta + B\cos\theta)\,b_u \end{aligned}$$

フレネセレ公式
$n' = -\kappa e + \tau b$
を代入

フレネセレ公式
$b' = -\tau n$
を代入

$A\sin\theta(\tau-1) + B\cos\theta(-\tau+1)$

$$= \{1 - \kappa(A\cos\theta + B\sin\theta)\}\, c'(u)$$

$$+ \{A_u\cos\theta \underline{- A\sin\theta} + B_u\sin\theta + \underline{B\cos\theta} - \tau(\underline{-A\sin\theta} + \underline{B\cos\theta})\}\, n$$

$$+ \{-A_u\sin\theta \underline{- A\cos\theta} + B_u\cos\theta \underline{- B\sin\theta} + \tau(\underline{A\cos\theta} + \underline{B\sin\theta})\}\, b$$

$= A\cos\theta(-1+\tau) + B\sin\theta(-1+\tau)$

$$f_t = A_t(n\cos\theta - b\sin\theta) + B_t(n\sin\theta + b\cos\theta)$$

$$= t\cos\lambda\,(n\cos\theta - b\sin\theta) + t\sin\lambda\,(n\sin\theta + b\cos\theta)$$

$$= (t\cos\lambda\cos\theta + t\sin\lambda\sin\theta)\, n + (-t\cos\lambda\sin\theta + t\sin\lambda\cos\theta)\, b$$

$$\|f_t\|^2 = (t\cos\lambda\cos\theta + t\sin\lambda\sin\theta)^2 + (-t\cos\lambda\sin\theta + t\sin\lambda\cos\theta)^2$$

$$= t^2\cos^2\lambda\cos^2\theta + t^2\sin^2\lambda\sin^2\theta \cancel{+ 2t^2\cos\lambda\sin\lambda\cos\theta\sin\theta}$$

$$+ t^2\cos^2\lambda\sin^2\theta + t^2\sin^2\lambda\cos^2\theta \cancel{- 2t^2\cos\lambda\sin\lambda\cos\theta\sin\theta}$$

$$= t^2\{\cos^2\lambda(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \sin^2\lambda(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\} = \underline{t^2}$$

$$f_{tt} = A_{tt}(n\cos\theta - b\sin\theta) + B_{tt}(n\sin\theta + b\cos\theta)$$

$$= (\cos\lambda - t\hat{\mu}\sin\lambda)(n\cos\theta - b\sin\theta) + (\sin\lambda + t\hat{\mu}\cos\lambda)(n\sin\theta + b\cos\theta)$$

$$= (\cos\lambda\cos\theta - t\hat{\mu}\sin\lambda\cos\theta + \sin\lambda\sin\theta + t\hat{\mu}\cos\lambda\sin\theta)\, n$$

$$+ (-\cos\lambda\sin\theta + t\hat{\mu}\sin\lambda\sin\theta + \sin\lambda\cos\theta + t\hat{\mu}\cos\lambda\cos\theta)\, b$$

$$\det(f_u, f_t, f_{tt}) = \begin{vmatrix} 1 - \kappa(A\cos\theta + B\sin\theta) & 0 & 0 \\ A_u\cos\theta + B_u\sin\theta + A\sin\theta(\tau-1) + B\cos\theta(-\tau+1) & t\cos\lambda\cos\theta + t\sin\lambda\sin\theta & \cos\lambda\cos\theta - t\hat{\mu}\sin\lambda\cos\theta + \sin\lambda\sin\theta + t\hat{\mu}\cos\lambda\sin\theta \\ -A_u\sin\theta + B_u\cos\theta + A\cos\theta(-1+\tau) + B\sin\theta(-1+\tau) & -t\cos\lambda\sin\theta + t\sin\lambda\cos\theta & -\cos\lambda\sin\theta + t\hat{\mu}\sin\lambda\sin\theta + \sin\lambda\cos\theta + t\hat{\mu}\cos\lambda\cos\theta \end{vmatrix}$$

計算機で
計算

$$= \hat{\mu}t^2\{1 - \kappa(A\cos\theta + B\sin\theta)\}$$

$$\frac{\det(f_u, f_t, f_{tt})}{\|f_t\|^2} = \hat{u}\{1 - \kappa(A\cos\theta + B\sin\theta)\} = \hat{u}(u,t)$$

?

$(\kappa > 0)$

$$A\cos\theta + B\sin\theta = 0$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{A^2+B^2}\,\sin\left(\theta + \mathrm{Arcsin}\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \theta + \mathrm{Arcsin}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right) = n\pi$$

$(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$

Theorem II を証明する.

Theorem II (再掲)

第二対合 (second involution) が

$$I_c^*: \mathcal{g}^\omega_{**}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C) \ni f \longmapsto f_* \in \mathcal{g}^\omega_{**}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$$

として $\mathcal{g}^\omega_{**}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$ 上に定義され、次の4つの性質を満たす

(1) f_* は f と同一の第一基本形式を持ち、かつ f の忠実な異性体である

(2) $I_c^* \circ I_c = I_c \circ I_c^*$ である (I_c は Theorem I の第一対合).

(3) f と f_* を原点 O での写像芽とすると、I_c^* は写像

$$I_0^*: \mathcal{g}^\omega_*(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3, C) \ni f \longmapsto f_* \in \mathcal{g}^\omega_*(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3, C) \qquad (1.4)$$

を誘導し、$\underbrace{J_0 \circ I_0^* = J_0}_{\text{第一基本量が不変}}$ および $I_0^* \circ I_0 = I_0 \circ I_0^*$ を満たす

(4) もし g が $\mathcal{g}^\omega_*(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3, C)$ (または $\mathcal{g}^\omega_{**}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$) に属し、$g$ の第一基本形式が f の第一基本形式と等長であるならば、g は $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ のいずれかと右同値である.

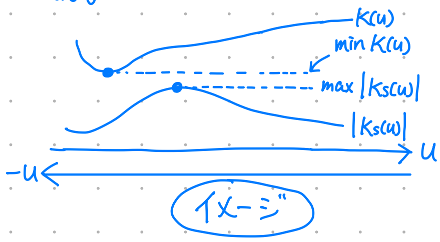
$$\begin{array}{ccc} J_0: \mathcal{g}^r_*(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3, C) & \longrightarrow & K^r_{a,*}(\mathbb{R}^2_0) \\ \Psi & & \Psi \\ f & \longmapsto & ds^2_f \end{array}$$

Proof

任意に $f \in \mathcal{g}^\omega_{**}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$ を固定し、その第一基本形式を ds^2_f と記す

f が許容的 (admissible) であるので、特異曲率 $K_s(u)$ は式(0.9)を満たし、したがって式(0.7)も満たす

→ 式(0.9)が成り立つこと　　$\max_{u \in J} |K_s(u)| < \min_{u \in J} K(u)$　　$|K_s(u)| < K(u)$



定理3.8より、ds^2_f と同じ第一基本形式を持つ2つのカスプ辺

$$g_+ , g_- \qquad (ds^2_f = ds^2_{g_+} = ds^2_{g_-})$$

が存在し、「$g_+ = f$」(便宜的) かつ「写像 $u \longmapsto g_-(u, 0)$ は $u \longmapsto f(u, 0)$ と同じ向きを与える」(定理3.8(1)).

f が許容的であるため、特異曲率 K_s は ds^2_f のみで決定される. ゆえに $g_\pm$ も (f と同様に) $\mathcal{g}^\omega_{**}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$ に属する.

→ $0 < |K_s(u)| < K(u)$　　→ $K_s(u) = \dfrac{-E_{vv}(u,0)}{2}$ (Lemma 3.7)

定理 I の証明より、

$\check{f} := g_-$

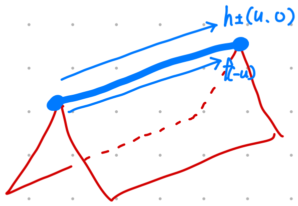
が f の等長双対(isometric dual)を与える.

一方で、パラメータを $u \longmapsto -u$ と取り替えて曲線 C の向きを反転させることを考える.
f が許容的であることから

$$0 < |\kappa_s(u)| < \min_{u\in J} \kappa(u) \leq \kappa(-u)$$

が成り立つ. 再び定理 3.8 を適用すると、f と第一基本形式が等しい相異なる2つの一般化カスプ辺

↳ ds_f^2 (の $u \to -u$ 版)



$$h_+,\ h_- \in \mathcal{G}^{\omega}_{**}(\mathbb{R}^2_J,\ \mathbb{R}^3,\ C)$$

が存在し、写像 $u \longmapsto h_\pm(u,0)$ は $u \longmapsto f(-u,0)$ と同じ向きを持つ.

式(3.11)より、カスプ角 $\theta_*(u)$ (それぞれ h_+ では $\theta_*(u)$、h_- では $-\theta_*(u)$、かつ 正負が一致 $\theta_*(u)\theta(u) > 0$) は、

hの

$$\begin{cases} X(u) := \cos\theta(u)\, n(u) \mp \sin\theta(u)\, b(u) \\ \cos\theta(u) := \dfrac{\kappa_s(u)}{\kappa(u)} \end{cases}$$

$$\cos\theta_*(u) = \frac{\kappa_s(u)}{\kappa(-u)}$$

第一基本形式のみで決まるため、パラメータの向きを変えても同じ値

曲線の向きを反転した曲率 ($u \to -u$ で向き反転)

を満たす. $h_\pm$ の特異曲線の向きは f と逆であるため、二つの写像 $h_\pm$ は f の non faithful isomer である. ここで、

・第一基本量が一致するdiffeoが存在
・曲線をたどる向きが一致
・f と等長
・f と右同値でない

$$f_* := h_+ \ (\text{逆像}) \qquad \check{f}_* := h_- \ (\text{逆双対})$$

とおく. Remark 4.5 によれば、写像

$$f_\#(u,v) := f(-u,v)$$

のカスプ角は $\underbrace{-\theta(-u)}_{\theta_\#(u)}$ であり、$\theta_*(u)$ は $f_\#(u,v)$ のカスプ角と符号が反転する.

→ $\theta_*(u)\theta(u) > 0$
⇕
$\theta_*(u)$ と $\theta(u)$ の符号が一致.
⇕
$\theta_*(u)$ と $-\theta(-u)$ の符号は逆.

したがって、f の像 $\neq$ f_* の像であり、f_* は f の異性体である.

※ $f_\#$ の像 $\neq$ f_* の像 (角度がちがうので、像もちがう) ※

⇓

f は $f_\#$ のパラメータを反転しただけなので、$f_\#$ の像 = f の像である.

⇓

f の像 $\neq$ f_* の像である. (同じ像を持たない $\overset{\text{Remark 4.5}}{\Longleftrightarrow}$ 右同値ではない)

⇓

「f と $f_*(=h_+)$ の第一基本形式が一致する」と合わせると、f_* は f の異性体である.

※

f_* の構成から、性質(1)(2)(3)は自明であるので、(4)のみを示す.

※ (1) 同じ第一基本形式 かつ non-faithful isomer である.

- f_* ($=h_+$) は定理3.8で同じ第一基本形式を持つよう選ばれる. ($ds_f^2 = ds_{h_+}^2$)
- $h_\pm$ のつくり方から, f_* は f の non-faithful isomer である.

(2) $I_c^* \circ I_c = I_c \circ I_c^*$ (I_c は定理I の first involution)

$f \mapsto f_*$　$f \mapsto \check{f}$

I_c^* … パラメータの u 軸を反転
I_c … カスプ角が $-\theta$ に反転

- I_c … カスプ角 θ だけを

$$\theta \longmapsto -\theta$$

に取り替える. つまり, 基本データ $(\kappa(u), \tau(u), \theta(u), \hat{\mu}(u,t))$ を

$$(\kappa(u), \tau(u), \theta(u), \hat{\mu}(u,t)) \longmapsto (\kappa(u), \tau(u), -\theta(u), \hat{\mu}(u,t))$$

に取り替える.

- I_c^* … パラメータ u を $u \mapsto -u$ で反転することで, 基本データ $(\kappa(u), \tau(u), \theta(u), \hat{\mu}(u,t))$ を

$$(\kappa(u), \tau(u), \theta(u), \hat{\mu}(u,t)) \longmapsto (\kappa(-u), \tau(-u), -\theta(-u), -\hat{\mu}(-u,t))$$

に取り替える.

- **$I_c^* \circ I_c$ の場合**

$$(\kappa(u), \tau(u), \theta(u), \hat{\mu}(u,t)) \xmapsto{I_c} (\kappa(u), \tau(u), -\theta(u), \hat{\mu}(u,t))$$
$$\xmapsto{I_c^*} (\kappa(-u), \tau(-u), \theta(-u), -\hat{\mu}(-u,t))$$

- **$I_c \circ I_c^*$ の場合**

$$(\kappa(u), \tau(u), \theta(u), \hat{\mu}(u,t)) \xmapsto{I_c^*} (\kappa(-u), \tau(-u), -\theta(-u), -\hat{\mu}(-u,t))$$
$$\xmapsto{I_c} (\kappa(-u), \tau(-u), \theta(-u), -\hat{\mu}(-u,t))$$

(3) 写像芽でも可換性が保たれる

I_c も I_c^* も, パラメータの符号反転のみ

$\Downarrow$

原点付近の近傍でも定義できる

- $f \sim f \circ I_c$
- $f \sim f \circ I_c^*$
- 原点付近で像が不変なので

$$J_0 = J_0 \circ I_0^*$$

第一基本形式が $ds^2_{\mathfrak{p}}$ に等しな一般化カスプ辺として $\to$ $\varphi^*(ds^2_K) = ds^2_{\mathfrak{p}}$

$\underline{K} \in \mathcal{g}^{\omega}_{**}(\mathbb{R}^2_I, \mathbb{R}^3, C)$ （$K \in \mathcal{g}^{\omega}_{*}(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3, C)$ は Lemma 0.1 で得られた）

を取る. 第一基本形式は座標の選択によらないので、$J \times \{0\}$ 近傍上の微分同相写像 φ に対して、$J_c(f \circ \varphi) = J_c(f) \circ \varphi$ が成り立つ.

よって、一般性を失わずに $ds^2_{\mathfrak{p}} = ds^2_K$ として良い. ※

※ $\tilde{K} := K \circ \varphi$ とすると、$\tilde{K}$ は右同値なので 同じ K と見なして構わない.

$ds^2_{\tilde{K}} = (\varphi^* ds^2_K) = ds^2_{\mathfrak{p}}$ と書ける.

K と $\tilde{K}$ は右同値

(3.9) の初期値問題（初期条件：(3.10)）の解の一意性より、K は

$$\{g_+, g_-, h_+, h_-\}$$

のいずれかと一致する.※ $\blacksquare$

※
- 初期値は

$$g(u,0) = C(u) \quad \xi(u,0) = C'(u) \quad \zeta(u,0) = X(u).$$

ただし、$X(u)$ は

$$X(u) = \cos\theta(u) n(u) \pm \sin\theta(u) b(u) \quad \text{または}$$

$$\cos\theta_*(u) n(u) \pm \sin\theta_*(u) b(u),$$

の4通り.

∘ $g_+ \cdots \cos\theta\, n + \sin\theta\, b \quad (\theta, +)$

∘ $g_- \cdots \cos(-\theta) n + \sin(-\theta) b = \cos\theta\, n - \sin\theta\, b \quad (\theta, -)$

∘ $h_+ \cdots \cos\theta_*\, n + \sin\theta_*\, b \quad (\theta_*, +)$

∘ $h_- \cdots \cos(-\theta_*) n + \sin(-\theta_*) b = \cos\theta_*\, n - \sin\theta_*\, b \quad (\theta_*, -)$

- Cauchy – Kovalevski の定理より、初期値を決めれば解が一意に決まる

$\to K$ は g_+, g_-, h_+, h_- のいずれか.

Definition 4.6

前節（定理Ⅱ の 証明）で 構成した

f_*、 $\check{f}_*$

を、それぞれ $f \in \mathfrak{g}^{\omega}_{**}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$ の 逆像（inverse）、 逆双対（inverse dual）と 呼ぶ。

• 次に、拡張された 半カスプ的 曲率関数 $\hat{\mu}$ を用いて、与えられた 一般化 カスプ辺の 芽 が

- カスプ辺
- カスプ状 交差帽子
- 5/2 - カスプ辺

の いずれ に 当たるかを 判定する 基準を 示す。

Proposition 4.7

$f \in \mathfrak{g}^r(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$ を 基本データ $(\kappa, \tau, \theta, \hat{\mu})$ に 対応する 一般化 カスプ辺 とする。
この時、

(i) $\hat{\mu}(u, 0) \neq 0$ ならば、f は u 軸上で カスプ辺 を 与える。

(ii) $\hat{\mu}(0, 0) = 0$ かつ $\hat{\mu}_u(0, 0) \neq 0$ ならば、f は 点 0 で カスプ状交差帽子 を 与える。

(iii) $\hat{\mu}(u, 0) = 0$ かつ $\hat{\mu}_{vv}(u, 0) \neq 0$ ならば、f は u 軸上で 5/2 - カスプ辺 を 与える。

である。(i)(ii) は [3. Proposition 1.6] で 既に 証明されている。

> **Proposition A.2**
>
> v を $w = 0$ における 一般化 カスプ $\sigma(w)$ の 正規化 半弧長 パラメータ とする。この時、
>
> (1) $w = 0$ は σ の カスプ である
>
> $\iff \mu_0 \neq 0$ である
>
> (2) $w = 0$ は σ の 5/2 - カスプ である
>
> $\iff \mu_0 = 0$ かつ $\mu_2 \neq 0$ である

Proof（概略）

f を 正規形 で 書けると 仮定する。

(Def 4.1)

$$f(u, v) := c(u) + (A(u,v), B(u,v)) \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n(u) \\ b(u) \end{pmatrix}$$ の とき、

- u が 曲線 C の 弧長パラメータ
- $t \longmapsto (A(u,t), B(u,t)) \in \mathbb{R}^2$ が $t = 0$ で 一般化 カスプ となり、
  さらに t が 正規化された 半弧長 パラメータ を 与える。

(i) は Appendix の proposition A.2 の (1) から 従う。※

(ii) は [2] に 与えられた カスプ状交差帽子 判定 と [3. Proposition 4.4] の (2) を 用いれば より 簡単 に 示せる。
?

(iii) は Appendix A.2 の (2) からの 結果 である。※

※ $\hat{\mu}(u,v)$ は Lemma A.1 より $\hat{\mu}(u,v) = \mu_0 + \mu_1 v + \mu_2 v^2 + O(v^3)$.

$\therefore\ \hat{\mu}(u,0) = \mu_0(u)$

また、2階微分 $\hat{\mu}_{vv}(u,v)$ は $\hat{\mu}_{vv}(u,v) = 2\mu_2 + O(v^2)$

$\therefore\ \frac{1}{2}\hat{\mu}_{vv}(u,0) = \mu_2(u)$

$\underset{(=)}{\mu_0 \neq 0} \iff \underset{(=)}{\hat{\mu}(u,0) \neq 0}$ 、$\hat{\mu}_{vv}(u,0) \neq 0 \iff \mu_2 \neq 0$ と対応している.

[3. Proposition 1.6]

Proposition 1.6. *Let $f : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^3, 0)$ be a map as in the first paragraph in this section. We have that*

- *the singularity of f is cuspidal edge if $b_3(0) \neq 0$, and*
- *the singularity of f is cuspidal cross-cap if $b_3(0) = 0$, $b_3'(0) \neq 0$,*

where b_3 is the invariant defined in (1.5)

Proof. See Appendix B.1. □

$b_k = \det(t, f_2, f_k)$

Appendix B. Criteria of singularity types

B.1. Criteria of singularity types of singular surfaces. Assume that $f : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^3, 0)$, $(u, v) \mapsto f(u, v)$, has rank one singularity at 0 and an unit normal vector is extended to $\boldsymbol{\nu}$ on the singular locus. Set $\lambda = \det(f_u\ f_v\ \boldsymbol{\nu})$, $\psi = \det(\boldsymbol{t}\ \eta\boldsymbol{\nu}\ \boldsymbol{\nu})$, where $\boldsymbol{t}$ is a unit tanget vector, and η is a vector field whose restriction is null to the singular locus. We have that $(f, \boldsymbol{\nu}) : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, (0, \boldsymbol{\nu}(0)))$ is an embedding, if and only if $\psi(0) \neq 0$.

Lemma B.1. *The singularity of f is*

- *cuspidal edge, if $\psi(0) \neq 0$, $\eta\lambda(0) \neq 0$;*
- *swallowtail, if $\psi(0) \neq 0$, $\eta\lambda(0) = 0$, $\eta^2\lambda(0) \neq 0$;*
- *cuspidal cross-cap, if $\psi(0) = 0$, $\eta\lambda(0) \neq 0$, $\psi'(0) \neq 0$.*

Proof. See [6, §1–2] and [2, §1]. □

Proof of Proposition 1.6. In the notation in §1, $\eta = \partial_t$. Setting $f_t = t\boldsymbol{v}$, $\lambda = |f_s\ f_t\ \boldsymbol{\nu}| = |f_s\ t\boldsymbol{v}\ \boldsymbol{\nu}| = t \times (\text{unit})$,

$$\psi(s,0) = \det(\boldsymbol{t}, \eta\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu})(s,0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -b_3/2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{b_3}{2}.$$

So the criteria above shows the proposition. □

fundamental data

f の 第一基本形式 と 第二基本形式 を 基本データ から計算するには、
特異曲線 の フレネ型公式 が 便利である.

Lemma 4.8 (Izumiya - Saji - Takeuchi [7] and Fukui [3])

式(4.3) より、次が成り立つ.

$$\begin{pmatrix} \mathbb{v}_2(u) \\ \mathbb{v}_3(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta(u) & -\sin\theta(u) \\ \sin\theta(u) & \cos\theta(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{n}(u) \\ \mathbb{b}(u) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbb{e}' \\ \mathbb{v}_2' \\ \mathbb{v}_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa\cos\theta & \kappa\sin\theta \\ -\kappa\cos\theta & 0 & \tau-\theta' \\ -\kappa\sin\theta & -(\tau-\theta') & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{e} \\ \mathbb{v}_2 \\ \mathbb{v}_3 \end{pmatrix} \quad \cdots (4.7)$$

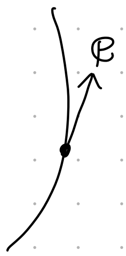
この式 は 次のように書き直せる ((4.3) 参照).　式(4.2)？ $\kappa_s(u) = \kappa(u)\cos\theta(u)$, $\kappa_\nu(u) = \kappa(u)\sin\theta(u)$

$$\begin{pmatrix} \mathbb{e}' \\ \mathbb{v}_2' \\ \mathbb{v}_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_s & \kappa_\nu \\ -\kappa_s & 0 & \kappa_t \\ -\kappa_\nu & -\kappa_t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{e} \\ \mathbb{v}_2 \\ \mathbb{v}_3 \end{pmatrix}$$

これは Izumiya - Saji - Takeuchi [7. Proposition 3.1] で与えられているもので、また
κ_t は [11] で 定義された カスプ方向捩率 (cusp directional torsion) であり、

$$\kappa_t := \tau - \theta'$$

で 表される ([3. Page 7] 参照).



Proof　示したいこと：
$$\begin{pmatrix} \mathbb{e}' \\ \mathbb{v}_2' \\ \mathbb{v}_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa\cos\theta & \kappa\sin\theta \\ -\kappa\cos\theta & 0 & \tau-\theta' \\ -\kappa\sin\theta & -(\tau-\theta') & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{e} \\ \mathbb{v}_2 \\ \mathbb{v}_3 \end{pmatrix}$$

Fukui[3. Lemma 1.3] を参照する.

$$\begin{pmatrix} \mathbb{v}_2(u) \\ \mathbb{v}_3(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta(u) & -\sin\theta(u) \\ \sin\theta(u) & \cos\theta(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{n}(u) \\ \mathbb{b}(u) \end{pmatrix}$$
であるので、両辺を微分すると

$$\begin{pmatrix} \mathbb{v}_2' \\ \mathbb{v}_3' \end{pmatrix} = \theta' \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix}}_{-\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \mathbb{n} \\ \mathbb{b} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{n}' \\ \mathbb{b}' \end{pmatrix}}$$

フレネセレの
公式より　$\{\mathbb{e}, \mathbb{n}, \mathbb{b}\}$: ONB

$$
= -\theta' \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}
$$

$\mathbb{V}_2 = \mathbf{n}\cos\theta - \mathbf{b}\sin\theta$

$\mathbb{V}_3 = \mathbf{n}\sin\theta + \mathbf{b}\cos\theta$

$\Longleftrightarrow$ $\mathbf{b} = -\sin\theta\,\mathbb{V}_2 + \cos\theta\,\mathbb{V}_3$

$\mathbf{n} = \cos\theta\,\mathbb{V}_2 + \sin\theta\,\mathbb{V}_3$ を代入する.

$$
= -\theta' \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{V}_2 \\ \mathbb{V}_3 \end{pmatrix}
$$

$$
+ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbb{V}_2 \\ \mathbb{V}_3 \end{pmatrix}
$$

$$
= -\theta' \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{V}_2 \\ \mathbb{V}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\kappa\cos\theta & 0 & \tau \\ -\kappa\sin\theta & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbb{V}_2 \\ \mathbb{V}_3 \end{pmatrix}
$$

$$
= \underbrace{-\kappa \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \mathbf{e}}_{\mathbf{e}\text{ でまとめる}} + \underbrace{(\tau-\theta') \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{V}_2 \\ \mathbb{V}_3 \end{pmatrix}}_{\mathbb{V}_2,\ \mathbb{V}_3\text{ でまとめる.}} .
$$

よって, $\begin{cases} \mathbb{V}_2' = -\kappa\cos\theta\,\mathbf{e} + (\tau-\theta')\mathbb{V}_3 \\ \mathbb{V}_3' = -\kappa\sin\theta\,\mathbf{e} - (\tau-\theta')\mathbb{V}_2 \end{cases}$ である. --- ☆

次に, $\mathbf{e}' = s\mathbf{e} + t\mathbb{V}_2 + u\mathbb{V}_3$ を満たす $s, t, u \in \mathbb{R}$ を求める.

$\langle \mathbf{e}', \mathbf{e} \rangle = s$ $\quad \langle \mathbf{e}', \mathbf{e} \rangle + \langle \mathbf{e}, \mathbf{e}' \rangle$

$= \frac{1}{2}\langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle' = 0$

$\langle \mathbf{e}', \mathbb{V}_2 \rangle = t$

$= \langle \mathbf{e}, \mathbb{V}_2 \rangle' - \langle \mathbf{e}, \mathbb{V}_2' \rangle$

$= 0 - \langle \mathbf{e}, -\kappa\cos\theta\,\mathbf{e} + (\tau-\theta')\mathbb{V}_3 \rangle$

$= \kappa\cos\theta.$

$\langle \mathbb{e}', \mathbb{V}_3 \rangle = u$

$\hookrightarrow = \langle \mathbb{e}, \mathbb{V}_3 \rangle' - \langle \mathbb{e}, \mathbb{V}_3' \rangle$

$= 0 - \langle \mathbb{e}, -\kappa \sin\theta\, \mathbb{e} - (\tau - \theta')\mathbb{V}_2 \rangle$

$= \kappa \sin\theta.$

よって、$\mathbb{e}' = \kappa\cos\theta\, \mathbb{V}_2 + \kappa\sin\theta\, \mathbb{V}_3$ である. …… ☆☆

☆、☆☆ を行列でまとめれば、

$$\begin{pmatrix} \mathbb{e}' \\ \mathbb{V}_2' \\ \mathbb{V}_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa\cos\theta & \kappa\sin\theta \\ -\kappa\cos\theta & 0 & \tau - \theta' \\ -\kappa\sin\theta & -(\tau-\theta') & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{e} \\ \mathbb{V}_2 \\ \mathbb{V}_3 \end{pmatrix}$$

である ▨

$$\mathbb{V}_2 = \mathbb{n}\cos\theta - \mathbb{b}\sin\theta \qquad \rightarrow \qquad \sin\theta\,\mathbb{V}_2 = \mathbb{n}\sin\theta\cos\theta - \mathbb{b}\sin^2\theta$$

$$\mathbb{V}_3 = \mathbb{n}\sin\theta + \mathbb{b}\cos\theta \qquad - \big) \quad \cos\theta\,\mathbb{V}_3 = \mathbb{n}\sin\theta\cos\theta + \mathbb{b}\cos^2\theta$$

$$\sin\theta\,\mathbb{V}_2 - \cos\theta\,\mathbb{V}_3 = -\mathbb{b}$$

$$\Longleftrightarrow \mathbb{b} = -\sin\theta\,\mathbb{V}_2 + \cos\theta\,\mathbb{V}_3,$$

$$\mathbb{n} = \cos\theta\,\mathbb{V}_2 + \sin\theta\,\mathbb{V}_3$$

Lemma 4.8 を用いると、計算で次の Proposition 4.9 を示せる.

Proposition 4.9

正規形 (4.5) に対し、その第一基本形式 $ds_P^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ の係数は、

$\to f(u,t) := \mathbb{C}(u) + (A(u,t),\ B(u,t)) \begin{pmatrix} \cos\theta(u) & -\sin\theta(u) \\ \sin\theta(u) & \cos\theta(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n(u) \\ b(u) \end{pmatrix}$

$$E = \{1-(A\cos\theta + B\sin\theta)\kappa\}^2 + \{A_u + (\theta' - \tau)B\}^2 + \{B_u - (\theta' - \tau)A\}^2,$$

$$F = A_t\{A_u + (\theta' - \tau)B\} + B_t\{B_u - (\theta' - \tau)A\},$$

$$G = t^2$$

で与えられる. κ, τ, θ は u の関数、A, B は (u,t) の関数である.

Proof

$E = f_u \cdot f_u,\quad F = f_u \cdot f_t,\quad G = f_t \cdot f_t$ より、f_u と f_t をそれぞれ計算する.

$f = \mathbb{C}(u) + A(u,t)\mathbb{V}_2(u) + B(u,t)\mathbb{V}_3(u)$ であるので、

式(4.7) より

$$\begin{aligned} f_u &= \mathbb{C}'(u) + A_u\mathbb{V}_2 + A(\mathbb{V}_2)_u + B_u\mathbb{V}_3 + B(\mathbb{V}_3)_u \\ &= \mathbb{e}(u) + A_u\mathbb{V}_2 + A\left(-\kappa\cos\theta\,\mathbb{e} + (\tau - \theta')\mathbb{V}_3\right) \\ &\quad + B_u\mathbb{V}_3 + B\left(-\kappa\sin\theta\,\mathbb{e} - (\tau - \theta')\mathbb{V}_2\right) \\ &= \{1 - \kappa(A\cos\theta + B\sin\theta)\}\mathbb{e}(u) + \{A_u + (\theta' - \tau)B\}\mathbb{V}_2(u) + \{B_u - (\theta' - \tau)A\}\mathbb{V}_3(u) \end{aligned}$$

$$f_t = \mathbb{V}_2 A_t(u,t) + \mathbb{V}_3 B_t(u,t).$$

以上より、E, F, G はそれぞれ

$$\begin{aligned} E &= f_u \cdot f_u \\ &= \{1 - \kappa(A\cos\theta + B\sin\theta)\}^2 + \{A_u + (\theta' - \tau)B\}^2 + \{B_u - (\theta' - \tau)A\}^2 \end{aligned}$$

$\mathbb{e}, \mathbb{V}_2, \mathbb{V}_3$ は単位ベクトルより、$\|\mathbb{e}\|^2 = \|\mathbb{V}_2\|^2 = \|\mathbb{V}_3\|^2 = 1$.

$$\begin{aligned} F &= f_u \cdot f_t \\ &= A_t\{A_u + (\theta' - \tau)B\} + B_t\{B_u - (\theta' - \tau)A\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= f_t \cdot f_t \\ &= A_t^2 + B_t^2 \overset{\text{式(4.6)より}}{=} (t\cos\lambda(u,t))^2 + (t\sin\lambda(u,t))^2 = t^2 \end{aligned}$$

である ∎

- ここで、

$$(4.6)\ \lambda(u,t) := \int_0^t \hat{\mu}(u,v)\,dv$$

$$\hat{\mu}(u,t) = \mu_0(u) + \mu_1(u) + \mu_2(u)t^2 + \mu_3(u,t)t^3$$

とおくと、Lemma A.1 から次が従う. ※

$$A = \frac{t^2}{2} - \frac{\mu_0(u)^2}{8}t^4 - \frac{\mu_0(u)\mu_1(u)}{10}t^5 + t^6 a_6(t,u) \quad \text{--- (4.10)}$$

$$B = \frac{\mu_0(u)}{3}t^3 + \frac{\mu_1(u)}{8}t^4 + \overset{?}{\frac{2(-\mu_0(u)^3 + 2\mu_2(u))}{30}}t^5 + t^6 b_6(t,u) \quad \text{--- (4.11)}$$

ここで、$a_6(t,u)$ と $b_6(t,u)$ は C^r 級関数である.

※ (4.6) より、A、B はそれぞれ

$$A(u,t) = \int_0^t v\cos\lambda(u,v)\,dv$$

$$B(u,t) = \int_0^t v\sin\lambda(u,v)\,dv$$

である. 一方、Lemma A.1 の $\sigma(v)$ は

$$\sigma(v) = \int_0^v u(\cos\theta(u),\ \sin\theta(u))\,du$$

Lemma A.1

v を $w=0$ における一般化カスプ $\sigma(w)$ の正規化半弧長パラメータとする.
この時、向きを保つ $\mathbb{R}^2$ の等長変換 T が存在して、

$$T\circ\sigma(v) = \left(\frac{v^2}{2} - \frac{\mu_0^2 v^4}{8} - \frac{\mu_0\mu_1 v^5}{10},\ \frac{\mu_0 v^3}{3} + \frac{\mu_1 v^4}{8} + \frac{(-\mu_0^3 + 2\mu_2)v^5}{30}\right) + O(v^5)$$

となる. ただし、

$$\hat{\mu}(v) = \sum_{j=0}^{2}\mu_j v^j + O(v^3) \quad \left(= \mu_0 + \mu_1 v + \mu_2 v^2 + O(v^3)\right)$$

である. $O(v^5)$ は v^5 より高次項を表す.

$$\sigma(t) = \int_0^t v(\cos\theta(v),\ \sin\theta(v))\,dv$$

であるため、σ のパラメータを v から t へ置換し、積分変数を u から v へ置換すれば、

$$\begin{aligned}(A(u,t),\ B(u,t)) &= \sigma(t) \\ &= \Bigg(\frac{t^2}{2} - \frac{\mu_0^2 t^4}{8} - \frac{\mu_0\mu_1 t^5}{10} + \underbrace{t^6 a_6(t,u)}_{\text{高次項 } O(t^6)},\\ &\qquad \frac{\mu_0 t^3}{3} + \frac{\mu_1 t^4}{8} + \frac{(-\mu_0^3 + 2\mu_2)t^5}{30} + \underbrace{t^6 b(t,u)}_{\text{高次項 } O(t^6)}\Bigg)\end{aligned}$$

と書ける.

Corollary 4.10

第一基本形式 ds_f^2 の ガウス曲率 K は,

$$K(u,t) = \frac{K_0(u)}{t} + K_1(u) + K_2(u)t + K_3(u,t)t^2$$

を満たす. 各係数 は

$$K_0(u) := \mu_0(u)\kappa_\nu(u)$$
$$K_1(u) := -\kappa_s(u)\mu_0^2(u) - \kappa_t^2(u) + \kappa_\nu(u)\mu_1(u)$$
$$K_2(u) := -\frac{\kappa_\nu(u)\mu_0^3(u)}{2} + \frac{\kappa_s(u)\kappa_\nu(u)\mu_0(u)}{2} - \frac{3\kappa_s(u)\mu_0(u)\mu_1(u)}{2} + \kappa_\nu(u)\mu_2(u) - 2\mu_0'(u)\kappa_t(u) + \frac{\mu_0(u)}{2}\kappa_t'(u)$$

であり, かつ $K_3(u,t)$ は C^r級関数 である. κ_s、κ_ν、κ_t は 式(0.4) および (4.8) である.
また、$\mu_0 = \dfrac{\kappa_c}{2}$ $\left(\kappa_c(u) := \dfrac{\mu(u,0)}{2}\right)$ である.

$\kappa_t = \tau - \theta'$
$\kappa_s(u) = \kappa(u)\cos\theta(u)$
$\kappa_\nu(u) = \kappa(u)\sin\theta(u)$

- Fukui [3, Theorem 1.8] で、第一項 K_0 と 第二項 K_1 は すでに求められている.
  したがって、上の Corollary で 重要 なのは K_2 である.

Proof

ds_f^2 の 断面曲率 を 直接計算して導くか、[3] のように f の 第二基本形式 を 求めることで得られる.
(いずれであっても、式(4.10)(4.11) が 重要)

断面曲率 は ガウスの 驚異 の 定理 を用いると、

$$\begin{aligned} K = &\frac{E(E_tG_t - 2F_uG_t + \overset{=0}{G_u^2})}{4(EG-F^2)^2} \\ &+ \frac{F(E_uG_t - E_t\overset{=0}{G_u} - 2E_tF_t - 2F_u\overset{=0}{G_u} + 4F_uF_t)}{4(EG-F^2)^2} \\ &+ \frac{G(E_u\overset{=0}{G_u} - 2E_uF_t + E_v^2)}{4(EG-F^2)^2} \\ &- \frac{E_{tt} - 2F_{ut} + \overset{=0}{G_{uu}}}{2(EG-F^2)^2} \end{aligned}$$

と表せるので、E、F、G を 計算する.

f_u と f_t は それぞれ、 $\left(f(u,t) = \mathbb{c}(u) + (A(u,t), B(u,t)) \begin{pmatrix} \cos\theta(u) & -\sin\theta(u) \\ \sin\theta(u) & \cos\theta(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{n}(u) \\ \mathbb{b}(u) \end{pmatrix} \right)$

$$
\begin{aligned}
f_u &= \mathbb{c}'(u) + \underline{A_u \mathbb{V}_2} + \underline{A(\mathbb{V}_2)_u} + \underline{B_u \mathbb{V}_3} + \underline{B(\mathbb{V}_3)_u} \\
&= \mathbb{e}(u) + A_u \mathbb{V}_2 + A\left(-\kappa_s(u)\mathbb{e}(u) + \kappa_t(u)\mathbb{V}_3(u)\right) \\
&\qquad + B_u \mathbb{V}_3 + B\left(-\kappa_\nu(u)\mathbb{e}(u) - \kappa_t(u)\mathbb{V}_2(u)\right) \\
&= \left(1 - \kappa_s A - \kappa_\nu B\right)\mathbb{e} + \left(A_u - \kappa_t B\right)\mathbb{V}_2 + \left(B_u + \kappa_t A\right)\mathbb{V}_3
\end{aligned}
$$

$$
f_t = \mathbb{V}_2 A_t(u,t) + \mathbb{V}_3 B_t(u,t).
$$

である。E、F、G はそれぞれ、

$$
\begin{aligned}
E &= \left(1 - \kappa_s(u)A(u,t) - \kappa_\nu(u)B(u,t)\right)^2 + \left(A_u(u,t) - \kappa_t(u)B(u,t)\right)^2 + \left(B_u(u,t) + \kappa_t(u)A(u,t)\right)^2 \\
F &= A_t(u,t)\left(A_u(u,t) - \kappa_t(u)B(u,t)\right) + B_t(u,t)\left(B_u(u,t) + \kappa_t(u)A(u,t)\right) \\
G &= A_t^2(u,t) + B_t^2(u,t) = t^2
\end{aligned}
$$

となるので、ガウスの驚異の定理に代入する。 計算量膨大？