11/17.(木) ver.

Weingerten 回転面の分類

伊坂 麻琴

1 de Sitter 空間の導入

定義. 1.1. 自然基底 $e_1 = (1,0,\cdots,0),\cdots,e_n = (0,\cdots,1,0), e_{n+1} = (0,\cdots,0,1)$ を持つ $\mathbb{E}_1^{n+1}$ を $(n+1)$ 次元ミンコフスキー空間とし，計量 $\langle\ ,\ \rangle$ を，

$$\bar{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - x_{n+1}y_{n+1} \qquad \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in E_1^{n+1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$$

とする．(ただし，$\boldsymbol{x} = (x_1,\cdots,x_{n+1}), \boldsymbol{y} = (y_1,\cdots,y_{n+1})$ とする．)

定義. 1.2. $\mathbb{E}_1^{n+1}$ を $(n+1)$ 次元ミンコフスキー空間とする．このとき，

$$\mathbb{S}_1^n := \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{E}_1^{n+1}; \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle = 1\} \tag{1.1}$$

とする．これを n 次元 *de Sitter space* という．

M を連結で向き付けられた 2 次元以上の多様体とし，$x : M \to \mathbb{S}^{n+1}$ をはめ込みとする．

定義. 1.3. x が空間的であるとは，$x^*\langle\ ,\ \rangle$ が M 上リーマン計量になるときである．また，x が時間的であるとは，$x^*\langle\ ,\ \rangle$ が M 上ローレンツ計量になるときである．

定義. 1.4. $x \to \mathbb{S}^{n+1}$ が空間的もしくは時間的のとき，非退化超曲面という．

$x : M^2 \to \mathbb{S}_1^3$ を空間的とする．このとき，$x, x_u, x_v, \xi,\quad ((u,v)\in M^2)$ が定まり,ξ は

$$\langle\xi,\xi\rangle = -1$$
$$\langle\xi,x\rangle = \langle\xi,x_u\rangle = \langle\xi,x_v\rangle = 0$$

をみたす．さらに，

$$E := \langle x_u, x_u\rangle \qquad L := \langle x_{uu},\xi\rangle$$
$$F := \langle x_u, x_v\rangle \qquad M := \langle x_{uv},\xi\rangle$$
$$G := \langle x_v, x_v\rangle \qquad N := \langle x_{vv},\xi\rangle$$

と定める．ワインガルテン公式より

$$\hat{I} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

$$\xi_u = Bx_u + Cx_v$$
$$\xi_v = B'x_u + C'x_v$$

と書ける．

注意 1.1. x が時間的の場合，$\langle \xi, \xi \rangle = 1$ である．

定義．1.5.

$$A = (dx^{-1}) \circ (-d\xi) = (dx^{-1})(-(\xi_u du + \xi_v dv)) : T_pM \to T_pM \tag{1.2}$$

と定める．この A を *shape operator* という．

定義．1.6. A の固有値を主曲率という．

命題 1.1. A は

$$A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

をみたす．

Proof. 定義 1.5 より，

$$\xi_u = -A_1^1 x_u - A_1^2 x_v \tag{1.3}$$

$$\xi_v = -A_2^1 x_u - A_2^2 x_v \tag{1.4}$$

と書ける．また，(1.3),(1.4) と x_u, x_v を内積することで，

$$-L = \langle x_u, \xi_u \rangle = -A_1^1 E - A_1^2 F$$

を得る．同様に計算することで，

$$A_1^1 E + A_1^2 F = L \qquad A_2^1 E + A_2^2 F = M$$
$$A_1^1 F + A_1^2 G = M \qquad A_2^1 F + A_2^2 G = N$$

を得ることができ，方程式を解くことで

$$A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

を得る． □

定理．1.1. $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ が正定値ならば，A の固有値は実数である．

Proof. $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \hat{\mathrm{I}}$，$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \hat{\mathrm{II}}$ とおく．$\hat{\mathrm{I}}$ は正定値対称行列なので，ある直交行列 P が存在し，

$$P^{-1}\,\hat{\mathrm{I}}\,P = \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ o & \rho^2 \end{pmatrix} \qquad (\omega, \rho > 0) \tag{1.5}$$

と書ける．$\hat{\mathrm{I}} = P \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ o & \rho^2 \end{pmatrix} P^{-1}$, $R := P \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ o & \rho \end{pmatrix} P^{-1}$ とおく．このとき，

$$\begin{aligned} RAR^{-1} &= R\,\hat{\mathrm{I}}^{-1}\,\hat{\mathrm{II}}\,R^{-1} \\ &= PGP^{-1}\,\hat{\mathrm{II}}\,PGP^{-1} \\ &:= S \end{aligned}$$

と置く．ただし，$G := \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix}$ である．この転置行列を考えると，

$$\begin{aligned} S^t &= (PGP^{-1}\,\hat{\mathrm{II}}\,PGP^{-1})^t \\ &= PGP^{-1}\,\hat{\mathrm{II}}\,PGP^{-1} \\ &= S \end{aligned}$$

となるので，S は対称行列である．共役な行列の固有値は一致し，対称行列の固有値は実数であるので，対称行列 S と共役になる A の固有値は実数である．

□

注意 1.2. $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ がローレンツならば，A の固有値は実数とは限らない．

注意 1.3. 以上の議論を踏まえると，A は，

(ｉ) 対角化可能で固有値実数
(ii) 対角化可能で固有値虚数
(iii) 対角化不可能

の 3 つに場合分けされるが，今回の論文では x は空間系であるため，(ｉ) の場合を考えればよい．

定義．1.7. $x : M \to S_1^{n+1}$ を非退化超曲面，主曲率 $k_1, \cdots, k_n$ を実数とする．この時，ある関数 f が存在し，

$$k_i = f(k_1, k_2, \cdots, k_{i-1}, k_{i+1}, \cdots, k_n)$$

となるとき，x を *Weingerten* 超曲面とよぶ．

命題 1.2. 平均曲率一定曲面は *Weingarten* 超曲面である．

定義．1.8. ローレンツ直交群 $O(3,1)$ とローレンツ特殊直交群 $SO(3,1)$ を

$$\overset{\star}{Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}\}$$

$$\begin{aligned} O(3,1) &= \{A \in M_4(\mathbb{R}) \quad | \quad A^t Z A = Z\} \\ SO(3,1) &= \{A \in O(3,1) \quad | \quad det A = 1\} \end{aligned}$$

とする．ただし、Z= ☆ である．

$P^k (k = 2, 3)$ を原点を通る $\mathbb{E}_1^4$ の k 次元部分空間,$O(P^2)$ を P^2 を各点ごとに固定するローレンツ特殊直交群とする．

定義．1.9. $P^2 \subset P^3, P^3 \cap \mathbb{S}_1^3 \neq \emptyset$ となるように P^2, P^3 を選ぶ．$P^3 \cap \mathbb{S}_1^3$ において，P^2 と交わらない正則 C^2 曲線を C とする．

$$O(P^2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, v \in \mathbb{R} \right\} \subset SO(3,1)$$

の作用下での C の軌道

$$O(P^2)C = \left\{ \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2(u) \\ x_3(u) \\ x_4(u) \end{pmatrix} \middle| u \in J, v \in R \right\} \in \boldsymbol{E}_1^4$$

が $\mathbb{E}_1^4$ からの誘導計量 G により非退化になる場合，その軌道を P^2 の周りに C によって生成される $\mathbb{S}_1^3$ の回転面 M と呼ばれる．さらに，$\bar{G}|_{P^2}$ がローレンツ計量 (リーマン計量，退化した 2 次形式) である場合，曲面 M は楕円的 (双曲的・放物的) であると言う．

これから，3 次元 de Sitter 空間における Weingarten 回転面の関数の決定について証明を与える．

2 $\mathbb{S}_1^3$ における楕円的回転面

定理．2.1． M を 3 次元 *de sitter space* の *Weingerten* 楕円面とすると，M の主曲率 k_1, k_2 は，$k_2 = f(k_1)$ を満たし，以下の楕円的回転面として書くことができる．

(i)$y(u) > 1, y \neq 0, y \neq 1$ のとき

$$\begin{aligned} r(u,v) &= (y(u)\sin v, y(u)\cos v, z(u), w(u)), \qquad u \in J, \qquad v \in [0, 2\pi] \\ z(u) &= (y(u)^2 - 1)^{1/2} \sinh \varphi(u) \\ w(u) &= (y(u)^2 - 1)^{1/2} \cosh \varphi(u) \\ \varphi(u) &= \int_0^u \frac{(\epsilon y(t)^2 + y'(t)^2 - \epsilon)^{1/2}}{(y(t)^2 - 1)} dt \\ y(u) &= \exp(\int_0^u \frac{dt}{\epsilon f(t) - t}) \end{aligned}$$

(ii)$0 < y(u) < 1, y \neq 0, y \neq 1$ のとき

$$\begin{aligned} r(u,v) &= (y(u)\sin v, y(u)\cos v, z(u), w(u)), \qquad u \in J, \qquad v \in [0, 2\pi] \\ z(u) &= (1 - y(u)^2)^{1/2} \cosh \varphi(u) \\ w(u) &= (1 - y(u)^2)^{1/2} \sinh \varphi(u) \\ \varphi(u) &= \int_0^u \frac{(\epsilon y(t)^2 + y'(t)^2 - \epsilon)^{1/2}}{(y(t)^2 - 1)} dt \\ y(u) &= \exp(\int_0^u \frac{dt}{\epsilon f(t) - t}) \end{aligned}$$

ここで，$\epsilon = \pm 1$ であり，$\epsilon = 1$ のとき，曲面は *spacelike* であり，$\epsilon = -1$ のとき，曲面は *timelike* である．

Proof. P^2 を $\mathbb{E}_1^4$ のローレンツ部分空間とすると，P^2, P^3 は一般性を失わず以下のように書ける．

$$\begin{aligned} P^2 &= span(e_3, e_4) \\ P^3 &= span(e_2, e_3, e_4) = (0, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{E}_1^4 \end{aligned}$$

また，

$$S_1^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{E}_1^4 \quad | \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 1\}$$

より，

$$S_1^3 \cap P^3 = \{(0, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{E}_1^4 \quad | \quad x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 1\}$$

となり，このうちの曲線 $(0, x_2(u), x_3(u), x_4(u)) = \gamma(u)$ が P^2 と交わらないのは，$x_2(u) \neq 0$ となるときである．

定義. 2.1. $\boldsymbol{T}(x) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ (ただし A は 4 次正方行列で

$$A^t Z A = Z \qquad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を満たす．ものを $\mathbb{E}_1^4$ の直交変換群と呼び，直交変換群全体のなす集合を $O(\boldsymbol{E}_1^4)$ と表す．

導入理由？

補題 2.1.

$$A = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると，$A \in SO(3,1)$ かつ $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ を満たす．

よって，

$$O(P^2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| v \in \mathbb{R} \right\}$$

とすると，

$$A\gamma(u) = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \sin v \\ x_2 \cos v \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

以上の議論により，

$$r(u,v) = (y(u)\sin v, y(u)\cos v, z(u), w(u)), \quad u \in J, \quad v \in [0, 2\pi] \tag{2.1}$$

を得る．以降，この曲面を M_1 とする．

補題 2.2. 曲面 M_1 に対して法線ベクトル場 ξ_1 は,

$$\xi_1(u,v) = \begin{pmatrix} (z'(u)w(u) - w'(u)z(u))\sin v \\ (z'(u)w(u) - w'(u)z(u))\cos v \\ w'(u)y(u) - y'(u)w(u) \\ z'(u)y(u) - y'(u)z(u) \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

と,$\langle \xi_1, r_u \rangle = \langle \xi_1, r_v \rangle = \langle \xi_1, r \rangle = 0, \langle \xi_1, \xi_1 \rangle = -\epsilon$ が成立する.ただし,$r_u = \dfrac{\partial_r(u,v)}{\partial_u}, r_v = \dfrac{\partial_r(u,v)}{\partial_v}$ である.

Proof. $r(u,v) = (y(u)\sin v, y(u)\cos v, z(u), w(u))$ のとき,

$$\langle r, r \rangle = y^2 + z^2 - w^2 = 1 \tag{2.3}$$
$$r_u = (y'(u)\sin v, y'\cos v, z'(u), w'(u)) \tag{2.4}$$
$$r_v = (y(u)\cos v, -y(u)\sin v, 0, 0) \tag{2.5}$$

となり,第 1 基本量はそれぞれ

$$\langle r_u, r_u \rangle = y'(u)^2 + z'(u)^2 - w'(u)^2 = \epsilon \tag{2.6}$$
$$\langle r_v, r_v \rangle = y^2 \tag{2.7}$$
$$\langle r_u, r_v \rangle = 0 \tag{2.8}$$

である.特に,$\langle r_v, r_v \rangle = y^2 > 0$ より,$y(u) > 0$ としてよい.よって,

$$\begin{aligned} |r_u \times r_v| &= \sqrt{|\langle r_u, r_u \rangle \langle r_v, r_v \rangle - \langle r_u, r_v \rangle^2|} \\ &= y(u) \end{aligned}$$

また,

$$r_u \times r_v = \begin{pmatrix} (z'(u)w(u) - w'(u)z(u))\sin v \\ (z'(u)w(u) - w'(u)z(u))\cos v \\ w'(u)y(u) - y'(u)w(u) \\ z'(u)y(u) - y'(u)z(u) \end{pmatrix} y(u)$$

であるので,

$$\xi_1 = \frac{r_u \times r_v}{\sqrt{r_u \times r_v}} = \begin{pmatrix} (z'(u)w(u) - w'(u)z(u))\sin v \\ (z'(u)w(u) - w'(u)z(u))\cos v \\ w'(u)y(u) - y'(u)w(u) \\ z'(u)y(u) - y'(u)z(u) \end{pmatrix}$$

となる. □

主曲率を求めるために第 2 基本量を計算する.

曲面 M_1 に対し,

$$\begin{aligned} r_{uu} &= (y''(u)\sin v, y''(u)\cos v, z''(u), w''(u)) \\ r_{vv} &= (-y(u)\sin v, -y(u)\cos v, 0, 0) \\ r_{uv} &= (y'(u)\cos v, -y'(u)\sin v, 0, 0) \end{aligned}$$

と，(2.2) より，

$$
\begin{aligned}
\langle \xi_1, r_{uu} \rangle &= y''(z'w - w'z) + z''(w'y - y'w) - w''(z'y - y'z) \\
&= y(z''w' - w''z') - y'(z''w - w''z) + y''(z'w - w'z) && (2.9) \\
\langle \xi_1, r_{vv} \rangle &= -y(z'w - w'z) && (2.10) \\
\langle \xi_1, r_{uv} \rangle &= 0 && (2.11)
\end{aligned}
$$

(2.6) ∼ (2.8), (2.9) ∼ (2.11) を用いて主曲率 k_1, k_2 を計算すると，

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \epsilon(y''(z'w - w'z) + z''(w'y - y'w) - w''(z'y - y'z)) \\
&= \epsilon(y(z''w' - w''z') - y'(z''w - w''z) + y''(z'w - w'z)) && (2.12) \\
k_2 &= -y^{-1}(z'w - w'z) && (2.13)
\end{aligned}
$$

となる．

次に，y, z, w の関数の決定を行う．$y(u) > 0$ であることに注意し，$y(u) \neq 1$ であると仮定する．

$\langle r, r \rangle = y^2 + z^2 - w^2 = 1$ を用いると，

$$
\left[\begin{array}{l}
(\mathrm{i})\, y(u) > 1 \text{ のとき，} \\
z(u) = (y(u)^2 - 1)^{1/2} \sinh \varphi(u) \\
w(u) = (y(u)^2 - 1)^{1/2} \cosh \varphi(u)
\end{array}\right.
\qquad
\left[\begin{array}{l}
(\mathrm{ii})\, 0 < y(u) < 1 \text{ のとき} \\
z(u) = (1 - y(u)^2)^{1/2} \cosh \varphi(u) \\
w(u) = (1 - y(u)^2)^{1/2} \cosh \varphi(u)
\end{array}\right.
$$

の 2 つを考えることができる．

はじめに (i) の場合において各関数を決定する計算を記す．

(i) のとき，(2.6) に代入することで， $\langle r_u, r_u \rangle = y'(u)^2 + z'(u)^2 - w'(u)^2 = \varepsilon$

$$
\varphi'(u)^2 = \frac{(\epsilon y^2 + y'^2 - \epsilon)}{(y^2 - 1)^2} \tag{2.14}
$$

を得る．J 上で $\epsilon y^2 + y'^2 - \epsilon > 0$ と仮定する．(任意の $u \in J$ に対し $\epsilon y(u)^2 + y(u)'^2 - \epsilon = 0$ のとき φ は定数）よって，関数 $\varphi(u)$ は

$$
\begin{aligned}
&\epsilon y^2 + y'^2 - \epsilon > 0 \\
&\varphi(u) = \pm \int_0^u \frac{(\epsilon y^2 + y'^2 - \epsilon)^{1/2}}{y(t)^2 - 1} dt
\end{aligned}
$$

となる．このとき，一般性を失うことなく，符号は正と仮定してよい．(命題 7.1 を参照) よって，

$$
\begin{aligned}
&\epsilon y^2 + y'^2 - \epsilon > 0 \\
&\varphi(u) = \int_0^u \frac{(\epsilon y^2 + y'^2 - \epsilon)^{1/2}}{y(t)^2 - 1} dt && (2.15)
\end{aligned}
$$

となる．さらに，

(i) の関数と，(2.3)，(2.6),(2.15) を用いることで，

$$
\begin{aligned}
z'w - w'z &= (\epsilon y^2 + y'^2 - \epsilon)^{1/2} && (2.16) \\
z''w - w''z &= \frac{\epsilon y y' + y'y''}{z'w - w'z} && (2.17)
\end{aligned}
$$

を得る．さらに，(2.3), (2.6) を微分すると，

$$
\begin{cases}
yy' + zz' = ww' \\
yy'' + zz'' = ww'' - \epsilon \\
yy'' + zz'' = w'w''
\end{cases}
$$

より，

$$
\begin{cases}
(z'w - w'z)z'' = -wy'y'' + w'(\epsilon + yy'') \\
(z'w - w'z)w'' = z'(yy'' + \epsilon) - zy'y''
\end{cases}
$$

となるので，これらを組み合わせることで

$$
z''w' - w''z' = \frac{-\epsilon yy'' + \epsilon y'^2 - 1}{z'w - w'z} \tag{2.18}
$$

を得る．

(2.16)~(2.18) を (2.12),(2.13) に代入し，主曲率 k_1, k_2 は，

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \epsilon(y(z''w' - w''z') - y'(z''w - w''z) + y''(z'w - w'z)) \\
&= \epsilon \frac{-\epsilon y'' - y}{(\epsilon yy' + \epsilon y^2 - 1)^{1/2}} \\
&= \epsilon \frac{\epsilon y'' + y}{ty} \\
&=: \epsilon f(t) && (2.19) \\
k_2 &= -y^{-1}(z'w - w'z) \\
&= -y^{-1}(\epsilon yy' + \epsilon y^2 - 1)^{1/2} \\
&=: t && (2.20)
\end{aligned}
$$

となる．また，(2.20) より

$$
\begin{aligned}
y' &= \sqrt{t^2y^2 - \epsilon y^2 + \epsilon} \\
y'' &= \frac{t^2yy' + tt'y^2 - \epsilon yy'}{y'} \\
&= t^2y - \epsilon y + y^2 t \frac{t'}{y'} && (2.21)
\end{aligned}
$$

を得る．以上の結果を (2.19) と (2.21) に代入することにより，$k_1 = f(t)$ のとき，

$$
\begin{aligned}
\cancel{\epsilon} f(t) - t &= \frac{y'' + \epsilon y}{ty} - t \\
&= y\frac{t'}{y'} \quad (\epsilon=1 \text{ 代入}) && (2.22)
\end{aligned}
$$

$k_1 = -f(t)$ のとき，

$$
\begin{aligned}
-\cancel{\epsilon} f(t) - t &= \frac{y'' + \epsilon y}{ty} - t \\
&= y\frac{t'}{y'} \quad (\epsilon=-1 \text{ 代入}) && (2.23)
\end{aligned}
$$

(ii) $0 < y(u) < 1, y \neq 0, y \neq 1$ のとき

$$r(u,v) = (y(u)\sin v, y(u)\cos v, z(u), w(u)), \qquad u \in J, \qquad v \in [0, 2\pi]$$
$$z(u) = (1 - y(u)^2)^{1/2}\cosh\varphi(u)$$
$$w(u) = (1 - y(u)^2)^{1/2}\sinh\varphi(u)$$
$$\varphi(u) = \int_0^u \frac{(\epsilon y(t)^2 + y'(t)^2 - \epsilon)^{1/2}}{(y(t)^2 - 1)} dt$$
$$y(u) = \exp\left(\int_0^u \frac{dt}{\epsilon f(t) - t}\right)$$

を得る．

□

3 $\mathbb{S}^3_1$ における双曲的回転面

定理. 3.1. M を *3* 次元 *de sitter space* の *Weingarten* 双曲面とすると，M の主曲率 k_1, k_2 は $k_2 = f(k_1)$ を満たし，以下の双曲的回転面として書くことができる．

(i) $\cancel{w \neq 0, x \neq 0, y \neq 0}$ のとき，

曲面という仮定から

$W \neq 0$ である

$$r(u,v) = (x(u), y(u), w(u)\sinh v, w(u)\cosh v) \qquad u \in J, \qquad v \in \boldsymbol{R}$$
$$x(u) = (w(u)^2 + 1)^{1/2}\cos\varphi(u)$$
$$y(u) = (w(u)^2 + 1)^{1/2}\sin\varphi(u)$$
$$\varphi(u) = \int_0^u \frac{(\epsilon w(t)^2 + w'(t)^2 + \epsilon)^{1/2}}{w(t)^2 + 1} dt$$
$$w(u) = \exp\left(\int_0^u \frac{dt}{\epsilon f(t) - t}\right)$$

ここで，$\epsilon = 1$ のとき，曲面は *spacelike* であり，ϵ=*-1* のとき，曲面は *timelike* である．

(ii) $0 < w(u) < 1, w \neq 0, w \neq 1$ のとき

w(u) sinh v

$$r(u,v) = (x(u), y(u), w(u)\cosh v, \cancel{\sinh v}) \qquad u \in J, \qquad v \in \boldsymbol{R}$$
$$x(u) = (1 - w(u)^2)^{1/2}\cos\varphi(u)$$
$$y(u) = (1 - w(u)^2)^{1/2}\sin\varphi(u)$$
$$\varphi(u) = \int_0^u \frac{(1 - w(t)^2 - w'(t)^2)^{1/2}}{w(t)^2 - 1} dt$$
$$w(u) = \exp\left(\int_0^u \frac{dt}{-f(t) - t}\right)$$

この時，曲面は *spacelike* である．

Proof. 初めに定理 3.1 の前半を示す．P^2 を $\mathbb{E}^4_1$ のローレンツ部分空間とすると，P^2, P^3 は一般性を失わず以下のように書ける．

$$P^2 = span(e_1, e_2)$$
$$P^3 = span(e_1, e_2, e_3) = (x_1, x_2, x_3, 0) \in \mathbb{E}^4_1$$
$$S^3_1 \cap P^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{E}^4_1 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

よって，曲線 $(x_1, x_2, x_3, 0) = \gamma(u)$ が P^2 と交わらないのは，$x_3(u) \neq 0$ となるときである．さらに，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh v & \sinh v \\ 0 & 0 & \sinh v & \cosh v \end{pmatrix}$$

とすると，補題 2.1 と同様の議論により

$$r(u, v) = (x(u), y(u), w(u) \sinh v, w(u) \cosh v) \qquad u \in J, \qquad v \in \boldsymbol{R} \tag{3.1}$$

を得る．以降，この曲面を M_2 とする．さらに，P^3 を取り換えることにより，

$$r(u, v) = (x(u), y(u), w(u) \cosh v, w(u) \sinh v) \qquad u \in J, \qquad v \in \boldsymbol{R} \tag{3.2}$$

を得る．この曲面を M_3 とする．

補題 3.1. 曲面 M_2 に対して法線ベクトル場 ξ_2 は，

$$\xi_2(u, v) = \begin{pmatrix} y'(u)w(u) - w'(u)y(u) \\ w'(u)x(u) - x'(u)w(u) \\ (y'(u)x(u) - x'(u)y(u)) \sinh v \\ (y'(u)x(u) - x'(u)y(u)) \cosh v \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

と，$\langle \xi_1, r_u \rangle = \langle \xi_1, r_v \rangle = \langle \xi_1, r \rangle = 0, \langle \xi_1, \xi_1 \rangle = -\epsilon$ が成立する．ただし，$r_u = \dfrac{\partial_r(u, v)}{\partial_u}, r_v = \dfrac{\partial_r(u, v)}{\partial_v}$ である．

主曲率を求めるために第 1 基本量と第 2 基本量を計算する．曲面 M_2 に対し，

$$\langle r, r \rangle = x^2 + y^2 - w^2 = 1 \tag{3.4}$$
$$r_u = (x'(u), y'(u), w'(u) \sinh v, w'(u) \cosh v) \tag{3.5}$$
$$r_v = (0, 0, w(u) \cosh v, w(u) \sinh v) \tag{3.6}$$

より，

$$\langle r_u, r_u \rangle = x'(u)^2 + y'(u)^2 - w'(u)^2 = \epsilon \tag{3.7}$$
$$\langle r_v, r_v \rangle = w(u)^2 \tag{3.8}$$
$$\langle r_u, r_v \rangle = 0 \tag{3.9}$$

である．特に，$\langle r_v, r_v \rangle = w(u)^2 > 0$ より，$w(u) > 0$ としてよい．

さらに，

$$
\begin{aligned}
r_{uu} &= (x''(u), y''(u), w''(u)\sinh v, w''(u)\cosh v) \\
r_{uv} &= (0, 0, w'(u)\cosh v, w'(u)\sinh v) \\
r_{vv} &= (0, 0, w(u)\sinh v, w(u)\cosh v)
\end{aligned}
$$

より，補題 3.1 を用いることで，

$$
\begin{aligned}
\langle \xi_2, r_{uu} \rangle &= x''(y'w - w'y) + y''(w'x - x'w) - w''(y'x - x'y) \\
&= w(x''y' - y''x) + w'(y''x - x''y) - w''(y'x - x'y) \qquad (3.10) \\
\langle \xi_2, r_{vv} \rangle &= -w(y'x - x'y) \qquad (3.11) \\
\langle \xi_2, r_{uv} \rangle &= 0 \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

を得る．以上より，(3.7) $\sim$ (3.9), (3.10) $\sim$ (3.12) を用いて主曲率 k_1, k_2 を計算すると，

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \epsilon\{w(x''y' - y''x) + w'(y''x - x''y) - w''(y'x - x'y)\} \qquad (3.13) \\
k_2 &= -w^{-1}(y'x - x'y) \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

を得る．

次に，y, z, w の関数の決定を行う．$w(u) > 0$ であることに注意する．$\langle r, r \rangle = x^2 + y^2 - w^2 = 1$ を用いると，

$x^2 + y^2 = w^2 + 1$

$$
\begin{aligned}
x(u) &= (w(u)^2 + 1)^{1/2} \cos\varphi(u) \qquad (3.15) \\
y(u) &= (w(u^2) + 1)^{1/2} \sin\varphi(u) \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

を得る．また，この関数を (3.7) に代入することで，

$$
\varphi'(u)^2 = \frac{\epsilon w^2 + w'^2 + \epsilon}{(w^2 + 1)^2}
$$

を得る．J 上で $\epsilon w^2 + w'^2 + \epsilon > 0$ と仮定する．(任意の $u \in J$ に対し，$\epsilon w^2 + w'^2 + \epsilon = 0$ のとき，φ は定数.) よって，関数 $\varphi(u)$ は

$$
\begin{aligned}
&\epsilon w^2 + w'^2 + \epsilon > 0 \\
&\varphi(u) = \pm \int_0^u \frac{(\epsilon w^2 + w'^2 + \epsilon)^{1/2}}{w^2 + 1}
\end{aligned}
$$

となる．このとき，一般性を失うことなく，符号は正と仮定して良い．(命題 7.1を参照) よって，

$$
\begin{aligned}
&\epsilon y^2 + y'^2 - \epsilon > 0 \\
&\varphi(u) = \int_0^u \frac{(\epsilon w^2 + w'^2 + \epsilon)^{1/2}}{w^2 + 1} \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

となる．(3.15), (3.16), (3.4), (3.7), (3.17) を用いることで，

$$
\begin{aligned}
y'x - xy &= (\epsilon w^2 + w'^2 + \epsilon)^{1/2} \qquad (3.18) \\
y''x - x''y &= \frac{(\epsilon w w' + w'w'')}{y'x - xy} \qquad (3.19) \\
x''y - y''x &= \frac{\epsilon w w'' + \epsilon w'^2 - 1}{y'x - xy} \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

pseudo ortho

を得るので，(3.18) ∼ (3.20) を主曲率 (3.13), (3.14) に代入することで，

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \epsilon\frac{w+\epsilon w''}{tw} &(3.21)\\
&=: f(t) &(3.22)\\
k_2 &= -w^{-1}(\epsilon w^2 + w'^2 + \epsilon)^{1/2} =: t &(3.23)
\end{aligned}
$$

となる．以降，定理 2.1 と同様の計算により

$$
w(u) = \exp\left(\int_0^u \frac{dt}{\epsilon f(t) - t}\right) \tag{3.24}
$$

を得る．以上より，定理 3.1 の前半を得る．

次に，定理 3.1 の後半を示す．

補題 3.2. 曲面 M_3 に対して法線ベクトル ξ_3 は，

$$
\begin{pmatrix}
w'(u)y(u) - y'(u)w(u)\\
x'(u)w(u) - w'(u)x(u)\\
(y'(u)x(u) - x'(u)y(u))\cosh v\\
(y'(u)x(u) - x'(u)y(u))\sinh v
\end{pmatrix}
$$

と，$\langle \xi_1, r_u\rangle = \langle \xi_1, r_v\rangle = \langle \xi_1, r\rangle = 0, \langle \xi_1, \xi_1\rangle = 1$ が成立する．ただし，$r_u = \dfrac{\partial_r(u,v)}{\partial_u}, r_v = \dfrac{\partial_r(u,v)}{\partial_v}$ である．ここで，M_3 は *timelike* であるので，$\epsilon = -1$ を用いた．

主曲率を求めるために第 1 基本量と第 2 基本量を計算する．曲面 M_3 に対し，

$$
\begin{aligned}
\langle r, r\rangle &= x^2 + y^2 + w^2 = 1 &(3.25)\\
r_u &= (x'(u), y'(u), w'(u)\cosh v, w'(u)\sinh v) &(3.26)\\
r_v &= (0, 0, w(u)\sinh v, w(u)\cosh v) &(3.27)
\end{aligned}
$$

より，

$$
\begin{aligned}
\langle r_u, r_u\rangle &= x'(u)^2 + y'(u)^2 + w'(u)^2 = 1 > 0 &(3.28)\\
\langle r_v, r_v\rangle &= w(u)^2 &(3.29)\\
\langle r_u, r_v\rangle &= 0 &(3.30)
\end{aligned}
$$

$\therefore M_3$ は spacelike

である．特に，$\langle r_v, r_v\rangle = w(u)^2 > 0$ より，$w(u) > 0$ としてよい．

さらに，

$$
\begin{aligned}
r_{uu} &= (x''(u), y''(u), w''(u)\cosh v, w''(u)\sinh v)\\
r_{uv} &= (0, 0, w'(u)\sinh v, w'(u)\cosh v)\\
r_{vv} &= (0, 0, w(u)\cosh v, w(u)\sinh v)
\end{aligned}
$$

より，補題 3.2 を用いることで，

$$
\begin{aligned}
\langle \xi_2, r_{uu}\rangle &= w(y''x' - x''y') + w'(x''y - y''x) + w''(y'x - x'y) &(3.31)\\
\langle \xi_2, r_{vv}\rangle &= w(y'x - x'y) &(3.32)\\
\langle \xi_2, r_{uv}\rangle &= 0 &(3.33)
\end{aligned}
$$

を得る．以上より，(3.28) $\sim$ (3.30), (3.31) $\sim$ (3.33) を用いて主曲率 k_1, k_2 を計算すると，

$$k_1 = \epsilon\{w(y''x' - x''y') + w'(x''y - y''x) + w''(y'x - x'y)\} \tag{3.34}$$

$$k_2 = w^{-1}(x'y - y'x) \tag{3.35}$$

を得る．次に y, z, w の関数の決定を行う．$w(u) > 0$ であることに注意し，$w(u) \neq 1$ であると仮定する．$\langle r, r\rangle = x^2 + y^2 + w^2 = 1$ を用いると，$w^2 - 1 = -(x^2 + y^2)$ となり右辺は負であるから，左辺も負であるので，

$$0 < w(u) < 1 \tag{3.36}$$

$$x(u) = (1 - w(u)^2)^{1/2} \cos\varphi(u) \tag{3.37}$$

$$y(u) = (1 - w(u)^2)^{1/2} \sin\varphi(u) \tag{3.38}$$

を代入することができる．また，この関数を (3.28) に代入することで，

$$\varphi'(u)^2 = \frac{1 - w^2 - w'^2}{(1 - w^2)^2} \tag{3.39}$$

を得る．J 上で $1 - w^2 - w'^2 > 0$ と仮定する．($1 - w^2 - w'^2 = 0$ の時，φ は定数．よって，関数 $\varphi(u)$ は

$$1 - w^2 - w'^2 > 0$$

$$\varphi(u) = \pm \int_0^u \frac{(1 - w^2 - w'^2 \cancel{> 0})^{1/2}}{(1 - w(t))^2} dt$$

となる．このとき，一般性を失うことなく符号は負と仮定して良い．(命題 7.1 を参照) よって，

$$1 - w^2 - w'^2 > 0 \tag{3.40}$$

$$\varphi(u) = \int_0^u \frac{(1 - w^2 - w'^2 > 0)^{1/2}}{(w(t))^2 - 1} dt \tag{3.41}$$

となる．これまでの議論と同様に，

$$x'y - y'x = (1 - w^2 - w'^2)^{1/2} \tag{3.42}$$

$$x''y - y''x = \frac{-ww' - w'w''}{x'y - y'x} \tag{3.43}$$

$$x''y' - y''x' = \frac{1 + ww'' - w'^2}{x'y - y'x} \tag{3.44}$$

を得るので，主曲率 k_1, k_2 は

$$k_1 = \epsilon\{\frac{-w - w''}{x'y - y'x}\} \tag{3.45}$$

$\frac{1}{t} + \frac{w^2}{wt}$

$$:= \epsilon(\frac{w + w'}{wt}) := f(t) \tag{3.46}$$

$$k_2 = w^{-1}(1 - w^2 - w'^2)^{1/2} := t \tag{3.47}$$

となり，

$$w(u) = \exp(\int_0^u \frac{dt}{-f(t) - t}) \tag{3.48}$$

を得る．以上より，定理 3.1 を得る．

□

2つ 2つ

$$\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{bmatrix}$$

O(2,2) SO(2,2)

4 anti de Sitter 空間の導入

定義. 4.1. 自然基底 $e_1=(1,0,0,0), e_2=(0,1,0,0), e_3=(0,0,1,0), e_4=(0,0,0,1)$ を持つ $\mathbb{E}^4_2$ を 4 次元擬ユークリッド空間とし，計量 $\langle\ ,\ \rangle$ を，

$$\bar{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=x_1y_1+x_2y_2-x_3y_3-x_4y_4 \qquad \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in E^4_2$$

とする．(ただし，$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_4), \boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_4)$ とする．)

定義. 4.2. $\mathbb{E}^4_2$ を 4 次元擬ユークリッド空間とする．このとき，

$$\mathbb{H}^3_1=\{\boldsymbol{x}\in E^4_2;\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle=-1\} \tag{4.1}$$

とする．これを，3 次元 *anti de Sitter* 空間という．

M を連結で向き付けられた 2 次元以上の多様体とし，$x:M\to\mathbb{H}^{n+1}$ をはめ込みとし，$P^k(k=2,3)$ を原点を通る E^4_2 の k 次元部分空間，$O(P^2)$ を P^2 を各点ごとに固定する正の行列式を持つ $\mathbb{E}^4_2$ の直交変換群とする． $(\mathbb{H}^3_1)$

定義. 4.3. $P^2\subset P^3, P^3\cap\mathbb{H}^3_1\neq 0$ となるように P^2 と P^3 を選ぶ．$P^3\cap\mathbb{H}^3_1$ において P^2 と交わらない正則 C^2 曲線を C とする．$O(P^2)$ の作用下での C の軌道が $\mathbb{E}^4_2$ からの誘導計量 G により非退化になる場合，その軌道を P^2 の周りに C によって生成される $\mathbb{H}^3_1$ の回転面 M と呼ばれる．さらに，$\bar{G}$ を P^2 に制限したものが *definite* 計量 *(*ローレンツ計量*)* である場合，曲面 M は楕円的 *(*双曲的*)* であるという．

これから，3 次元 anti de Sitter 空間における Weingarten 回転面の関数の決定について証明を与える．

5 $\mathbb{H}^3_1$ における楕円的回転面

定理. 5.1. M を 3 次元 *anti de Sitter space* の *Weingarten* 楕円面とすると，M の主曲率 k_1,k_2 は $k_2=f(k_1)$ を満たし，以下の楕円的回転面として書くことができる．

(i) *negative definite* で $x\neq 0$ のとき

不定値 負

$$r(u,v)=(x(u)\cos v, x(u)\sin v, y(u), w(u)) \qquad u\in J, \qquad v\in[0,2\pi]$$

$$y(u)=(x(u)^2+1)^{1/2}\cos\varphi(u)$$

$$w(u)=(x(u)^2+1)^{1/2}\sin\varphi(u)$$

$$x(u)=\exp\left(\int_0^u\frac{dt}{\epsilon f(t)-t}\right)$$

$$\varphi(u)=-\int_0^u\frac{(x'(t)^2-\epsilon x(t)^2-\epsilon)^{1/2}}{x(t)^2+1}dt$$

(ii)*positive definite* で $0<x<1$ のとき

$$
\begin{aligned}
r(u,v) &= (y(u), z(u), x(u)\cos v, x(u)\sin v) \qquad u\in J, \qquad v\in[0,2\pi] \\
y(u) &= (x(u)^2-1)^{1/2}\cos\varphi(u) \\
z(u) &= (x(u)^2-1)^{1/2}\sin\varphi(u) \\
x(u) &= \exp\left(\int_0^u \frac{dt}{\epsilon f(t)-t}\right) \\
\varphi(u) &= \int_0^u \frac{(\epsilon x(t)^2 - x'(t)^2-\epsilon)^{1/2}}{1-x(t)^2}dt
\end{aligned}
$$

Proof. P^2 を $\mathbb{E}_2^4$ の negative definite だとすると，一般性を失うことなく以下のように書ける．

$$
\begin{aligned}
P^2 &= span(e_3, e_4) \\
P^3 &= span(e_1, e_3, e_4) = (x_1, 0, x_3, x_4) \in \mathbb{E}_2^4
\end{aligned}
$$

また，

$$\mathbb{H}_1^3 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in E_2^4 | x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2=-1\}$$

より，

$$\mathbb{H}_1^3\cap P^3 = \{(x_1,0,x_3,x_4)\in E_2^4 | x_1^2-x_3^2-x_4^2=-1\}$$

となり，これらのうちの曲線 $(x_1,0,x_3,x_4)=\gamma(u)$ が P^2 と交わらないのは $x_1(u)\neq 0$ となるときである．

定義. 5.1. $\boldsymbol{T}(x) = A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$(ただし A は 4 次正方行列で

$$A^tZA = Z \qquad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を満たす．) ものを $\mathbb{E}_2^4$ の直交変換群と呼び，直交変換群全体のなす集合を $O(\boldsymbol{E}_2^4)$ と表す．

補題 5.1.

$$A = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると，$A\in SO(2,2)$ かつ $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ を満たす．

よって，

$$O(P^2) = \{\begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} | v\in\mathbb{R}\}$$

とすると，

$$A\gamma(u) = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos v \\ x_1 \sin v \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

以上の議論により，

$$r(u,v) = (x(u)\cos v, x(u)\sin v, y(u), w(u)), \quad u \in J, \quad v \in [0, 2\pi] \tag{5.1}$$

を得る．以降，この曲面を M_1' とする．

次に，P^2 を positive definite だとすると，一般性を失うことなく以下のように書ける．

$$P^2 = span(e_1, e_2)$$
$$P^3 = span(e_1, e_2, e_3) = (x_1, x_2, x_3, 0) \in \mathbb{E}_2^4$$

よって，

$$\mathbb{H}_1^3 \cap P^3 = \{(x_1, x_2, x_3, 0) \in \mathbb{E}_2^4 | x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1\}$$

となり，これらのうちの曲線 $(x_1, x_2, x_3, 0) = \gamma(u)$ が P^2 と交わらないのは $x_3(u) \neq 0$ となるときである．

補題 5.2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos v & -\sin v \\ 0 & 0 & \sin v & \cos v \end{pmatrix}$$

とすると，$A \in SO(2,2)$ かつ $A = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ をみたす．

よって，

$$r(u,v) = (y(u), z(u)x(u)\sin v, x(u)\overset{\cos v}{\cancel{\sin}}\, v)$$

を得る．以降この曲面を M_2' とする．

まず初めに M_1' の曲面の関数の決定を行うために M_1' の主曲率を計算する．

補題 5.3. 曲面 M_1' に対して法線ベクトル場 ξ_1' は，

$$\xi_1'(u,v) = \begin{pmatrix} (y'(u)w(u) - w'(u)y(u))\cos v \\ (y'(u)w(u) - w'(u)y(u))\sin v \\ x'(u)w(u) - w'(u)x(u) \\ y'(u)x(u) - x'(u)y(u) \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

と，$\langle \xi_1', r_u \rangle = \langle \xi_1', r_v \rangle = \langle \xi_1', r \rangle = 0, \langle \xi_1', \xi_1' \rangle = \epsilon$ が成立する．ただし，$r_u = \dfrac{\partial_r(u,v)}{\partial_u}, r_v = \dfrac{\partial_r(u,v)}{\partial_v}$ である．

Proof. 曲面 M_1' に対し，

$$\langle r, r\rangle = x^2 - y^2 - z^2 \tag{5.3}$$
$$r_u = (x'\cos v, x'\sin v, y', w') \tag{5.4}$$
$$r_v = (-x\sin v, x\cos v, 0, 0) \tag{5.5}$$
$$E = \langle r_u, r_u\rangle = x'^2 - y'^2 - z'^2 := \epsilon \tag{5.6}$$
$$F = \langle r_v, r_v\rangle = x^2 \tag{5.7}$$
$$G = \langle r_u, r_v\rangle = 0 \tag{5.8}$$

が成り立つ．特に，$\langle r_v, r_v\rangle = x(u)^2$ より，$x(u) > 0$ としてよい．よって，

$$\begin{aligned} |r_u \times r_v| &= \sqrt{|\langle r_u, r_u\rangle \langle r_v, r_v\rangle - \langle r_u, r_v\rangle^2|} \\ &= x(u) \end{aligned}$$

また，

$$r_u \times r_v = \begin{pmatrix} (y'(u)w(u) - w'(u)y(u))\cos v \\ (y'(u)w(u) - w'(u)y(u))\sin v \\ x'(u)w(u) - w'(u)x(u) \\ y'(u)x(u) - x'(u)y(u) \end{pmatrix} x(u)$$

であるので，

$$\xi_1' = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|} = \begin{pmatrix} (y'(u)w(u) - w'(u)y(u))\cos v \\ (y'(u)w(u) - w'(u)y(u))\sin v \\ x'(u)w(u) - w'(u)x(u) \\ y'(u)x(u) - x'(u)y(u) \end{pmatrix}$$

となる． □

主曲率を求めるために第２基本量を計算する．曲面 M_1' に対し，

$$r_{uu} = (x''\cos v, x''\sin v, y'', w'') \tag{5.9}$$
$$r_{vv} = (-x\cos v, -x\sin v, 0, 0) \tag{5.10}$$
$$r_{uv} = (-x'\sin v, x'\cos v, 0, 0) \tag{5.11}$$

と，補題 5.3 より，

$$\begin{aligned} \langle \xi_1', r_{uu}\rangle &= x''(y'w - w'y) - y''(x'w - w'x) - w''(y'x - x'y) \\ &= x(w'y'' - y'w'') + x'(yw'' - wy'') + x''(y'w - w'y) \end{aligned} \tag{5.12}$$
$$\langle \xi_1', r_{vv}\rangle = -x(y'w - w'y) \tag{5.13}$$
$$\langle \xi_1', r_{uv}\rangle = 0 \tag{5.14}$$

となる．よって，(5.6) ∼ (5.8), (5.12) ∼ (5.14) を用いて主曲率 k_1, k_2 を計算すると，

$$k_1 = \epsilon\{x(w'y'' - y'w'') + x'(yw'' - wy'') + x''(y'w - w'y)\} \tag{5.15}$$
$$k_2 = -x^{-1}(y'w - w'y) \tag{5.16}$$

となる．次に，x, y, z の関数の決定を行う．$x(u) > 0$ であることに注意すると，(5.3) より，$x^2+1 = y^2+w^2 > 0$ より，

$$\begin{aligned} y(u) &= (x^2+1)^{1/2}\cos\varphi(u) \\ w(u) &= (x^2+1)^{1/2}\sin\varphi(u) \end{aligned}$$

を代入することができる．(y, w を逆にしても良い．）このとき，(5.6) に各関数を代入することで，

$$\varphi'(u)^2 = \frac{x'^2 - \epsilon x^2 - \epsilon}{(x^2+1)^2} \tag{5.17}$$

を得る．J 上で $x'^2 - \epsilon x^2 - \epsilon > 0$ と仮定する．(任意の $u \in J$ に対し $x'^2 - \epsilon x^2 - \epsilon = 0$ とすると $\varphi(u)$ は定数．）よって関数 $\varphi(u)$ は

$$\begin{aligned} &x'^2 - \epsilon x^2 - \epsilon > 0 \\ &\varphi(u) = \pm\int_0^u \frac{(x'^2 - \epsilon x^2 - \epsilon)^{1/2}}{x^2+1} \end{aligned}$$

となる．このとき，一般性を失うことなく符号は負と仮定して良い．（命題 7.1）を参照よって，

$$\begin{aligned} &x'^2 - \epsilon x^2 - \epsilon > 0 \\ &\varphi(u) = -\int_0^u \frac{(x'^2 - \epsilon x^2 - \epsilon)^{1/2}}{x^2+1} \end{aligned} \tag{5.18}$$

となる．さらに，各関数と 5.18 を用いることで

$$y'w - w'y = (x'^2 - \epsilon x^2 - \epsilon)^{1/2} \tag{5.19}$$

$$yw'' - wy'' = \frac{-x'x'' + \epsilon x x'}{y'w - w'y} \tag{5.20}$$

$$w'y'' - y'w'' = \frac{xx''\epsilon - \epsilon x'^2 + 1}{y'w - w'y} \tag{5.21}$$

を得る．(5.19) ~ (5.21) を (5.15), (5.16) に代入することで，

$$\begin{aligned} k_1 &= \epsilon\left(\frac{x - \epsilon x''}{y'w - w'y}\right) = \epsilon\left(\frac{x - \epsilon x''}{-xt}\right) := f(t) \\ k_2 &= -x^{-1}(y'w - w'y) := t \end{aligned} \tag{5.22}$$

を得る．最後に定理 2.1 と同様の計算により

$$x(u) = \exp\int_0^u \left(\frac{dt}{\epsilon f(t) - t}\right) \tag{5.23}$$

となり，定理 5.1 の前半を得る．

曲面 M_2' に対しても同様に関数の決定を行う．

補題 5.4. 曲面 M_2' に対して法線ベクトル場 ξ_2' は，

$$\xi_2'(u, v) = \begin{pmatrix} z'x - x'z \\ x'y - y'x \\ (z'y - y'z)\cos v \\ (z'y - y'z)\sin v \end{pmatrix} \tag{5.24}$$

と，$\langle \xi_1', r_u\rangle = \langle \xi_1', r_v\rangle = \langle \xi_1', r\rangle = 0, \langle \xi_1', \xi_1'\rangle = \epsilon$ が成立する．ただし，$r_u = \dfrac{\partial_r(u,v)}{\partial_u}, r_v = \dfrac{\partial_r(u,v)}{\partial_v}$ である．

$$\begin{bmatrix} +1 & & & \\ & +1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$$

Proof. 曲面 M_2' に対し，

$$\langle r, r\rangle = y^2 + z^2 - x^2 \tag{5.25}$$
$$r_u = (y', z', x'\cos v, x'\sin v) \tag{5.26}$$
$$r_v = (0, 0, -x\sin v, x\cos v) \tag{5.27}$$
$$\langle r_u, r_u\rangle = y'^2 + z'^2 - x'^2 := \cancel{\epsilon}\,1 \tag{5.28}$$
$$\langle r_v, r_v\rangle = -x^2 \tag{5.29}$$
$$\langle r_u, r_v\rangle = 0 \tag{5.30}$$

が成り立つ．特に，$\langle r_v, r_v\rangle = -x(u)^2 < 0$ より，$x(u) > 0$ としてよい．よって，

$\epsilon = 1$ ~~$\epsilon = 1$~~

$$\begin{aligned} |r_u \times r_v| &= \sqrt{|\langle r_u, r_u\rangle\langle r_v, r_v\rangle - \langle r_u, r_v\rangle^2|} \\ &= x(u) \end{aligned}$$

また，

$$r_u \times r_v = \begin{pmatrix} z'x - x'z \\ x'y - y'x \\ (z'y - y'z)\cos v \\ (z'y - y'z)\sin v \end{pmatrix} x(u)$$

であるので，

$$\xi_2' = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|} = \begin{pmatrix} z'x - x'z \\ x'y - y'x \\ (z'y - y'z)\cos v \\ (z'y - y'z)\sin v \end{pmatrix}$$

となる． □

主曲率を求めるために第２基本量を計算する．曲面 M_2' に対し，

$$r_{uu} = (y'', z'', x''\cos v, x''\sin v) \tag{5.31}$$
$$r_{vv} = (0, 0, -x\cos v, -x\sin v) \tag{5.32}$$
$$r_{uv} = (0, 0, -x'\sin v, x'\cos v) \tag{5.33}$$

と，補題 5.4 より，

$$\langle \xi_2', r_{uu}\rangle = x(y''z' - z''y') + x'(z''y - y''z) + x''(y'z - z'y) \tag{5.34}$$
$$\tag{5.35}$$
$$\langle \xi_1', r_{vv}\rangle = x(y'z - z'y) \tag{5.36}$$
$$\langle \xi_1', r_{uv}\rangle = 0 \tag{5.37}$$

となる．よって，(5.28) ∼ (5.30), (5.35) ∼ (5.37) を用いて主曲率 k_1, k_2 を計算すると，

$$k_1 = \cancel{\epsilon}\{x(y''z' - z''y') + x'(z''y - y''z) + x''(y'z - z'y)\} \tag{5.38}$$
$$k_2 = -x^{-1}(y'z - z'y) \tag{5.39}$$

$\langle r, r \rangle = y^2 + z^2 - x^2$

となる．次に，x, y, z の関数の決定を行う．$x(u) > 0$ であることに注意すると，(5.25) より，$x^2 - 1 = y^2 + z^2 > 0$ より，

$$
\begin{aligned}
y(u) &= (x^2 - 1)^{1/2} \cos\varphi(u) \\
w(u) &= (x^2 - 1)^{1/2} \sin\varphi(u)
\end{aligned}
$$

を代入することができる．(y, w を逆にしても良い．) このとき，(5.28) に各関数を代入することで，

$$
\varphi'(u)^2 = \frac{\epsilon x^2 - x'^2 - \epsilon}{(x^2 - 1)^2} \tag{5.40}
$$

を得る．J 上で $\epsilon x^2 - x'^2 - \epsilon > 0$ と仮定する．(任意の $u \in J$ に対し $x'^2 - \epsilon x^2 - \epsilon = 0$ とすると $\varphi(u)$ は定数．) よって関数 $\varphi(u)$ は

$$
\begin{aligned}
&\epsilon x^2 - x'^2 - \epsilon > 0 \\
&\varphi(u) = \pm \int_0^u \frac{(\epsilon x^2 - x'^2 - \epsilon)^{1/2}}{x^2 - 1}
\end{aligned}
$$

となる．このとき，一般性を失うことなく符号は負と仮定して良い．(命題 7.1) を参照よって，

$$
\begin{aligned}
&\epsilon x^2 - x'^2 - \epsilon > 0 \\
&\varphi(u) = -\int_0^u \frac{(\epsilon x^2 - x'^2 - \epsilon)^{1/2}}{x^2 - 1}
\end{aligned} \tag{5.41}
$$

となる．さらに，各関数と (5.41) を用いることで

$$
y'z - z'y = (\epsilon x^2 - x'^2 - \epsilon)^{1/2} \tag{5.42}
$$

$$
z''y - y''z = \frac{x'x'' - \epsilon x x'}{y'z - z'y} \tag{5.43}
$$

$$
z'y'' - y'z'' = \frac{-xx''\epsilon + \epsilon x'^2 + 1}{y'z - z'y} \tag{5.44}
$$

を得る．(5.42) ~ (5.44) を (5.38), (5.39) に代入することで，

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \cancel{\epsilon}\left(\frac{x - \epsilon x''}{y'z - z'y}\right) = \cancel{\epsilon}\left(\frac{x - \epsilon x''}{-xt}\right) := f(t) \\
k_2 &= -x^{-1}(y'z - z'y) := t
\end{aligned} \tag{5.45}
$$

を得る．最後に定理 2.1 と同様の計算により

$$
x(u) = \exp \int_0^u \left(\frac{dt}{\epsilon f(t) - t}\right) \tag{5.46}
$$

となり，定理 5.1 が成り立つ．

□

6 $\mathbb{H}^3_1$ における双曲的回転面

定理. 6.1. 最後に，M を *3* 次元 *anti de sitter space* の *Weingarten* 双曲面とすると，M の主曲率 K_1, k_2 は $k_2 = f(k_1)$ を満たし，以下の双曲的回転面として書くことができる．

(i) $z(u) \neq 0$ のとき

$$
\begin{aligned}
r(u,v) &= (y(u), z(u)\cosh v, z(u)\sinh v, w(u)) \qquad u \in J, \qquad v \in \mathbb{R} \\
y(u) &= (z(u)^2+1)^{1/2}\sinh\varphi(u) \\
w(u) &= (z^2+1)^{1/2}\cosh\varphi(u) \\
z(u) &= \exp(\int_0^u \frac{dt}{\epsilon f(t)-t}) \\
\varphi(u) &= \int_0^u \frac{(\epsilon z(t)^2 - z'(t)^2 + \epsilon)^{1/2}}{z(t)^2+1} dt
\end{aligned}
$$

(ii) $z(u) > 1, z(u) \neq 0, z(u) \neq 1$ のとき

$$
\begin{aligned}
r(u,v) &= (y(u), z(u)\sinh v, z(u)\cosh v, w(u)) \qquad u \in J, \qquad v \in \mathbb{R} \\
y(u) &= (z(u)^2-1)^{1/2}\cosh\varphi(u) \\
w(u) &= (z^2-1)^{1/2}\sinh\varphi(u) \\
z(u) &= \exp(\int_0^u \frac{dt}{\epsilon f(t)-t}) \\
\varphi(u) &= \int_0^u \frac{(-\epsilon z(t)^2 + z'(t)^2 + \epsilon)^{1/2}}{z(t)^2-1} dt
\end{aligned}
$$

もしくは, $0 < z < 1$ のとき

$$
\begin{aligned}
r(u,v) &= (y(u), z(u)\sinh v, z(u)\cosh v, w(u)) \qquad u \in J, \qquad v \in \mathbb{R} \\
y(u) &= (1-z(u)^2)^{1/2}\sinh\varphi(u) \\
w(u) &= (1-z(u)^2)^{1/2}\cosh\varphi(u) \\
z(u) &= \exp(\int_0^u \frac{dt}{\epsilon f(t)-t}) \\
\varphi(u) &= \int_0^u \frac{(-\epsilon z(t)^2 + z'(t)^2 + \epsilon)^{1/2}}{z(t)^2-1} dt
\end{aligned}
$$

Proof. P^2 を $\mathbb{E}^4_2$ のローレンツ部分空間とすると，P^2, P^3 は一般性を失わず以下のように書ける．

$$
\begin{aligned}
P^2 &= span(e_1, e_4) \\
P^3 &= span(e_1, e_2, e_4) = (x_1, x_2, 0, x_4) \in \mathbb{E}^4_2 \\
\mathbb{H}^3_1 \cap P^3 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{E}^4_2 | x_1^2 + x_2^2 - x_4^2 = -1\}
\end{aligned}
$$

よって，曲線 $(x_1, x_2, 0, x_4) = \gamma(u)$ が P^2 と交わらないのは，$x_2(u) \neq 0$ となるときである．さらに，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh v & \sinh v & 0 \\ 0 & \sinh v & \cosh v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると，補題 5.1 と同様の議論により

$$r(u,v) = (y(u), z(u)\cosh v, z(u)\sinh v, w(u)) \qquad u \in J, \qquad v \in \boldsymbol{R} \tag{6.1}$$

を得る．以降，この曲面を M_3' とする．さらに，P^3 を取り換えることにより，

$$r(u,v) = (y(u), z(u)\sinh v, z(u)\cosh v, w(u)) \qquad u \in J, \qquad v \in \boldsymbol{R} \tag{6.2}$$

を得る．この曲面を M_4' とする．

補題 6.1. 曲面 M_3' に対して法線ベクトル場 ξ_3' は，

$$\xi_3'(u,v) = \begin{pmatrix} w'(u)z(u) - z'(u)w(u) \\ y'(u)w(u) - w'(u)y(u)\cosh v \\ (y'(u)w(u) - w'(u)y(u))\sinh v \\ (y'(u)z(u) - z'(u)y(u)) \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

と，$\langle \xi_1, r_u \rangle = \langle \xi_1, r_v \rangle = \langle \xi_1, r \rangle = 0, \langle \xi_1, \xi_1 \rangle = -\epsilon$ が成立する．ただし，$r_u = \dfrac{\partial_r(u,v)}{\partial_u}, r_v = \dfrac{\partial_r(u,v)}{\partial_v}$ である．

主曲率を求めるために第１基本量と第２基本量を計算する．曲面 M_2 に対し，

$$\langle r, r \rangle = x^2 + y^2 - w^2 = 1 \tag{6.4}$$
$$r_u = (x'(u), y'(u), w'(u)\sinh v, w'(u)\cosh v) \tag{6.5}$$
$$r_v = (0, 0, w(u)\cosh v, w(u)\sinh v) \tag{6.6}$$

より，

$$\langle r_u, r_u \rangle = y'(u)^2 + z'(u)^2 - w'(u)^2 = \epsilon \tag{6.7}$$
$$\langle r_v, r_v \rangle = -z(u)^2 \tag{6.8}$$
$$\langle r_u, r_v \rangle = 0 \tag{6.9}$$

である．特に，$\langle r_v, r_v \rangle = -z(u)^2 < 0$ より，$z(u) > 0$ としてよい．

さらに，

$$r_{uu} = (y''(u), z''(u)\cosh v, z''(u)\sinh v, w''(u))$$
$$r_{uv} = (0, z(u)\cosh v, z(u)\sinh v, 0)$$
$$r_{vv} = (0, z'(u)\cosh v, z'(u)\sinh v, 0)$$

より，補題 6.1 を用いることで，

$$\langle \xi_3', r_{uu}\rangle = y''(w'z - z'w) + z''(y'w - w'y) - w''(y'z - z'y)$$
$$= z(y''w' - w''y') + z'(w''y - y''w) + w''(y'w - w'y) \tag{6.10}$$
$$\langle \xi_3', r_{vv}\rangle = z(y'w - w'y) \tag{6.11}$$
$$\langle \xi_3', r_{uv}\rangle = 0 \tag{6.12}$$

を得る．以上より，(6.7) $\sim$ (6.9), (6.10) $\sim$ (6.10) を用いて主曲率 k_1, k_2 を計算すると，

$$k_1 = \epsilon\{z(y''w' - w''y') + z'(w''y - y''w) + w''(y'w - w'y)\} \tag{6.13}$$
$$k_2 = -z^{-1}(y'w - w'y) \tag{6.14}$$

を得る．

次に，y, z, w の関数の決定を行う．$z(u) > 0$ であることに注意する．$\langle r, r\rangle = y^2 + z^2 - w^2 = -1$ を用いると，

$$w(u) = (z(u)^2 + 1)^{1/2}\cosh\varphi(u) \tag{6.15}$$
$$y(u) = (z(u)^2 + 1)^{1/2}\sinh\varphi(u) \tag{6.16}$$

を得る．また，この関数を (6.7) に代入することで，

$$\varphi'(u)^2 = \frac{\epsilon z^2 - z'^2 + \epsilon}{(z^2 + 1)^2}$$

を得る．J 上で $\epsilon z^2 - z'^2 + \epsilon > 0$ と仮定する．(任意の $u \in J$ に対し，$\epsilon z^2 - z'^2 + \epsilon = 0$ のとき，φ は定数.) よって，関数 $\varphi(u)$ は

$$\epsilon z^2 - z'^2 + \epsilon > 0$$
$$\varphi(u) = \pm\int_0^u \frac{(\epsilon z^2 - z'^2 + \epsilon)^{1/2}}{z^2 + 1}$$

となる．このとき，一般性を失うことなく，符号は正と仮定して良い．(命題 7.1を参照) よって，

$$\epsilon z^2 - z'^2 + \epsilon > 0$$
$$\varphi(u) = \int_0^u \frac{(\epsilon z^2 - z'^2 + \epsilon)^{1/2}}{z^2 + 1} \tag{6.17}$$

となる．(6.15), (6.16), (6.4), (6.7), (6.17) を用いることで，

$$y'w - w'y = (\epsilon z^2 - z'^2 + \epsilon)^{1/2} \tag{6.18}$$
$$w''y - y''w = \frac{(-\epsilon zz' + z'z'')}{y'w - w'y} \tag{6.19}$$
$$y''w' - w''y' = \frac{-\epsilon zz'' + \epsilon z'^2 - 1}{y'w - w'y} \tag{6.20}$$

を得るので，(6.18) $\sim$ (6.20) を主曲率 (6.13), (6.14) に代入することで，

$$k_1 = \epsilon\frac{-z + \epsilon z''}{-tz} \tag{6.21}$$
$$=: f(t) \tag{6.22}$$
$$k_2 = -z^{-1}(\epsilon z^2 - z'^2 + \epsilon)^{1/2} =: t \tag{6.23}$$

となる．以降，定理 2.1 と同様の計算により

$$z(u) = \exp(\int_0^u \frac{dt}{\epsilon f(t) - t}) \tag{6.24}$$

を得る．以上より，定理 6.1 の前半 (i) を得る．

最後に定理 6.1 の（ii）を示す．

補題 6.2. 曲面 M_4' に対して法線ベクトル ξ_4' は，

$$\begin{pmatrix} -w'(u)z(u) + z'(u)w(u) \\ y'(u)w(u) - w'(u)y(u)\sinh v \\ (y'(u)w(u) - w'(u)y(u))\cosh v \\ -(y'(u)z(u) - z'(u)y(u)) \end{pmatrix}$$

と，$\langle \xi_1, r_u \rangle = \langle \xi_1, r_v \rangle = \langle \xi_1, r \rangle = 0, \langle \xi_1, \xi_1 \rangle = 1$ が成立する．ただし，$r_u = \dfrac{\partial_r(u,v)}{\partial_u}, r_v = \dfrac{\partial_r(u,v)}{\partial_v}$ である．

主曲率を求めるために第 1 基本量と第 2 基本量を計算する．曲面 M_4' に対し，

$$\langle r, r \rangle = y^2 - z^2 - w^2 = -1 \tag{6.25}$$

$$r_u = (y'(u), z'(u)\sinh v, z'(u)\cosh v, w'(u)) \tag{6.26}$$

$$r_v = (0, z(u)\cosh v, z(u)\sinh v, 0) \tag{6.27}$$

より，

$$\langle r_u, r_u \rangle = y'(u)^2 - z'(u)^2 - w'(u)^2 = -1 \tag{6.28}$$

$$\langle r_v, r_v \rangle = z(u)^2 \tag{6.29}$$

$$\langle r_u, r_v \rangle = 0 \tag{6.30}$$

である．特に，$\langle r_v, r_v \rangle = z(u)^2 > 0$ より，$z(u) > 0$ としてよい．

さらに，

$$\begin{aligned} r_{uu} &= (y''(u), z''(u)\sinh v, z''(u)\cosh v, w'') \\ r_{vv} &= (0, z(u)\sinh v, z(u)\cosh v, 0) \\ r_{uv} &= (0, z'(u)\sinh v, z'(u)\cosh v, 0) \end{aligned}$$

より，補題 6.2 を用いることで，

$$\langle \xi_4', r_{uu} \rangle = z(w''y' - y''w') + z'(y''w - w''y) + z''(w'y - y'w) \tag{6.31}$$

$$\langle \xi_2, r_{vv} \rangle = -z(y'w - w'y) \tag{6.32}$$

$$\langle \xi_2, r_{uv} \rangle = 0 \tag{6.33}$$

を得る．以上より，(6.28) ∼ (6.30), (6.31) ∼ (6.33) を用いて主曲率 k_1, k_2 を計算すると，

$$k_1 = \epsilon\{z(w''y' - y''w') + z'(y''w - w''y) + z''(w'y - y'w)\} \tag{6.34}$$

$$k_2 = -z^{-1}(y'w - w'y) \tag{6.35}$$

を得る．次に y, z, w の関数の決定を行う．$z(u) > 0$ であることに注意し，$z(u) \neq 1$ であると仮定する．$\langle r, r\rangle = y^2 - z^2 - w^2 = -1$ を用いると，

①$z > 1$	②$0 < z < 1$
$y(u) = (z(u)^2 - 1)^{1/2} \cos\varphi(u)$	$y(u) = (1 - z(u)^2)^{1/2} \sin\varphi(u)$
$w(u) = (z(u)^2 - 1)^{1/2} \sin\varphi(u)$	$w(u) = (1 - z(u)^2)^{1/2} \cos\varphi(u)$

を代入することができる．初めに①の時を考える．①の関数を (6.30) に代入することで，

$$\varphi'(u)^2 = \frac{-(\epsilon z^2 - z'^2 - \epsilon)}{(z^2-1)^2} \tag{6.36}$$

を得る．J 上で $\epsilon z^2 - z'^2 - \epsilon > 0$ と仮定する．($\epsilon z^2 - z'^2 - \epsilon = 0$ の時，φ は定数．よって，関数 $\varphi(u)$ は

$$\epsilon z^2 - z'^2 - \epsilon > 0$$
$$\varphi(u) = \pm \int_0^u \frac{-(\epsilon z^2 - z'^2 - \epsilon > 0)^{1/2}}{(z(t))^2 - 1} dt$$

となる．このとき，一般性を失うことなく符号は正と仮定して良い．(命題 7.1 を参照) よって，

$$\epsilon z^2 - z'^2 - \epsilon > 0 \tag{6.37}$$
$$\varphi(u) = \int_0^u \frac{(\epsilon z^2 - z'^2 - \epsilon > 0)^{1/2}}{(w(t))^2 - 1} dt \tag{6.38}$$

となる．これまでの議論と同様に，

$$w'y - y'w = (-\epsilon z^2 + z'^2 + \epsilon)^{1/2} \tag{6.39}$$
$$w''y - y''w = \frac{-\epsilon z z' + z' z''}{w'y - y'w} \tag{6.40}$$
$$y''w' - w''y' = \frac{-\epsilon z z'' + \epsilon z'^2 - 1}{w'y - y'w} \tag{6.41}$$

を得るので，主曲率 k_1, k_2 は

$$k_1 = \epsilon\{\frac{\epsilon z'' + Z}{w'y - y'w}\} \tag{6.42}$$
$$:= \epsilon(\frac{\epsilon z'' + z}{zt}) := f(t) \tag{6.43}$$
$$k_2 = z^{-1}(w'y - y'w) := t \tag{6.44}$$

となり，

$$z(u) = \exp(\int_0^u \frac{dt}{\epsilon f(t) - t}) \tag{6.45}$$

を得る．同様に②の場合も計算し結果を得る．このとき，$\varphi(u) < 0$ として計算することに注意する．

以上より，定理 6.1 を得る．

□

7 付録

命題 7.1 ($\varphi(u)$ の符号のつけ方)．関数 $\varphi(u)$ は

$$\begin{aligned} &\epsilon y^2 + y'^2 - \epsilon > 0 \\ &\varphi(u) = \pm \int_0^u \frac{(\epsilon y^2 + y'^2 - \epsilon)^{1/2}}{|y(t)^2 - 1|} dt \end{aligned}$$

という形で書ける．このとき，一般性を失うことなく，符号は $y^2 - 1 > 0$ の時に正，$y^2 - 1 < 0$ の時に負と仮定して良い．

Proof. 曲面を作る際に，

$$B = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in SO(3,1)$$

とすれば，

$$Br(u,v) = \begin{pmatrix} -y \sin v \\ y \cos v \\ -(y^2 - 1)^{1/2} \sin \varphi \\ (y^2 - 1)^{1/2} \cos \varphi \end{pmatrix} = \tilde{r}(u,v) \tag{7.1}$$

とおくことで，$\varphi(u) \longmapsto -\varphi(u)$ に取り換えることができる． □

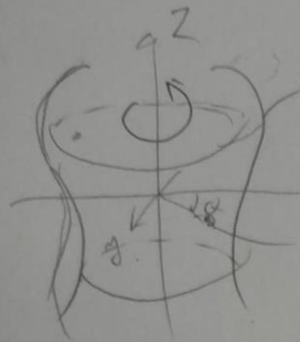
よって，

$$\epsilon y^2 + y'^2 - \epsilon > 0 \tag{7.2}$$

$$\varphi(u) = \int_0^u \frac{(\epsilon y^2 + y'^2 - \epsilon)^{1/2}}{|y(t)^2 - 1|} dt \tag{7.3}$$

となる．

※ ユークリッドの場合 $\langle \cdot , \cdot \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$



$(x(u), z(u))$

$$r(u,v) = \begin{bmatrix} x(u)\cos v \\ x(u)\sin v \\ z(u) \end{bmatrix}$$

弧長パラメタを
とっている.

$$★ \begin{cases} E = (y')^2 + (x')^2 = 1 \\ F = 0 \\ G = y^2 > 0 \end{cases}$$

$$法ベクトル\ \xi(u,v) = \begin{bmatrix} -x'\cos v \\ -x'\sin v \\ y' \end{bmatrix}$$

$$★★ \begin{cases} L = -y''x' + x''y' \\ M = 0 \\ N = x'y. \end{cases}$$

$r_{uu} = (y''\cos v ,\ y''\sin v ,\ x'')$

$r_{vv} = (-y\cos v ,\ -y\sin v ,\ 0)$

$k_1 = -y''x' + x''y' =: f(t)$

$k_2 = y^{-1}x' =: t$

$$\begin{cases} x' = yt \\ x'' = y't + yt' \end{cases}$$

$\cancel{k_1}$