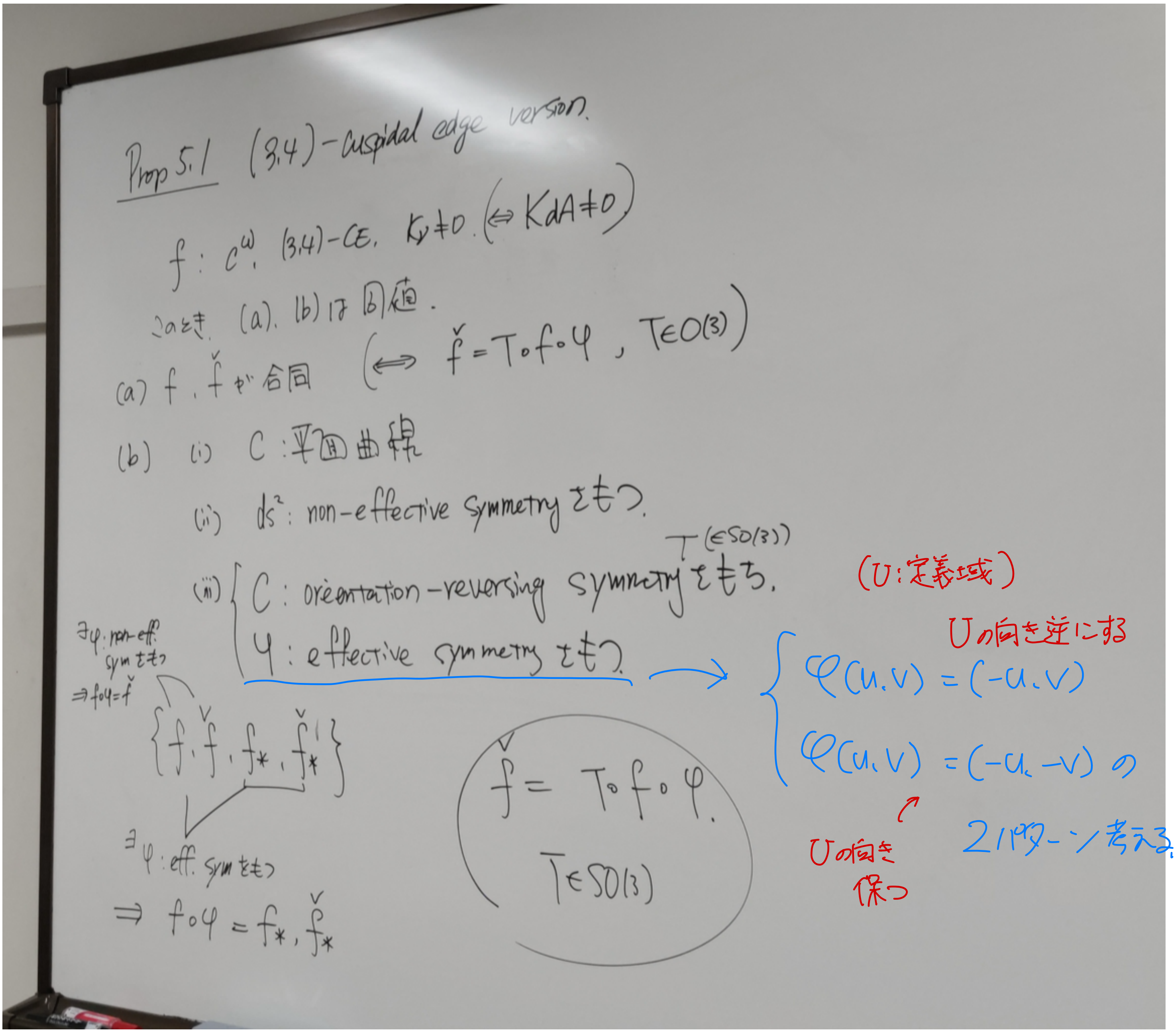


(3.4)-CE 版の Proposition 5.1 を作りたい.

Proposition 5.1 (3.4)-CE 版 (予想)

f を C^ω 級の (3.4)-CE とする. 極限法曲率 $\kappa_\nu \neq 0$ とする.
この時、次の (a) (b) は同値である.

(a) f と $\check{f}$ (等長双対) は合同である.

(b) 次の (i) (ii) (iii) のいずれかを満たす.

(i) 特異曲線 $\mathbb{C}(u)$ の像 C が平面曲線である.

new (ii) ds_f^2 が non-effective symmetry φ を持つ.

(iii) C が orientation-reversing symmetry $T \in SO(3)$ を持ち、かつ
ds_f^2 が effective symmetry φ を持つ.

Proof

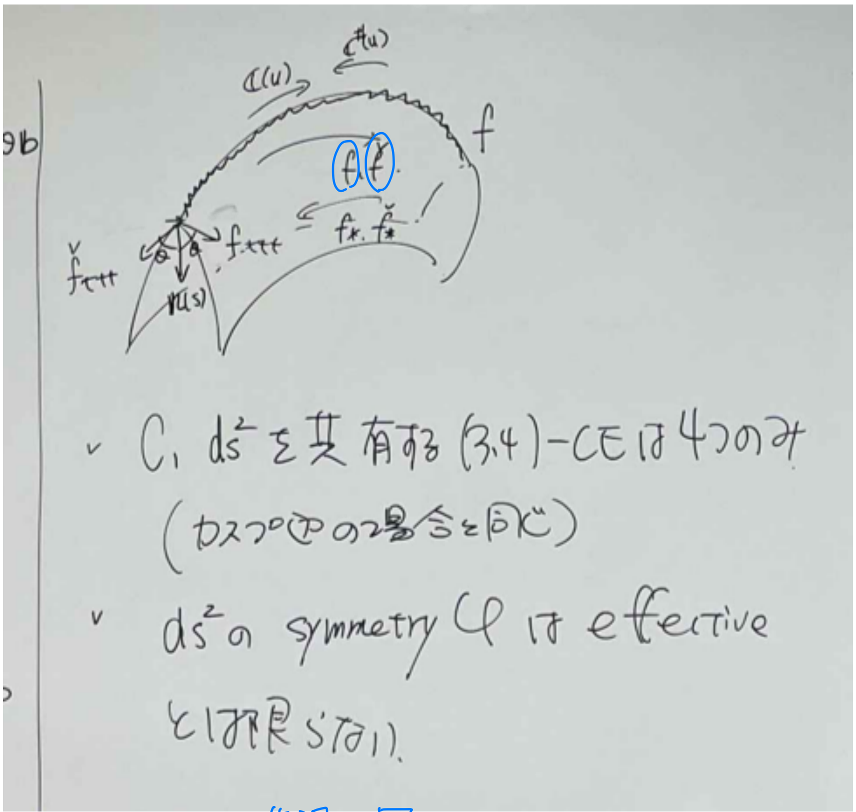
(⟹ を示す)

仮定より、$\exists T \in O(3)$、$\exists \varphi$: diffeo s.t. $\check{f} = T \circ f \circ \varphi$ である. …… ☆

① $T = \mathrm{Id}$ の場合

☆は $\check{f} = f \circ \varphi$ となる. ここで $\varphi = \mathrm{Id}$ と仮定すると、$\check{f} = f$ となる. しかし、Theorem Ⅲ ((3,4)-CE版)の証明と同様に、カスプ角 $\theta = 0$ となるため、定義域 $(0 < |\theta| < \pi)$ と矛盾する.

∴ $\varphi \neq \mathrm{Id}$ である. φ は曲線の向きを保存するため、φ は non-effective symmetry である.
((ii) が成立する)



先週の図

② $T \neq \mathrm{Id}$ かつ T が orientation-preserving symmetry の場合

平面曲線に関する補題
($T \in O(3)$ が ori-preserving symmetry である ⟺ C は平面曲線で、T はその平面に関する折り返し)
より、(b)(i) が従う.

→ (b)(iii) を示したい

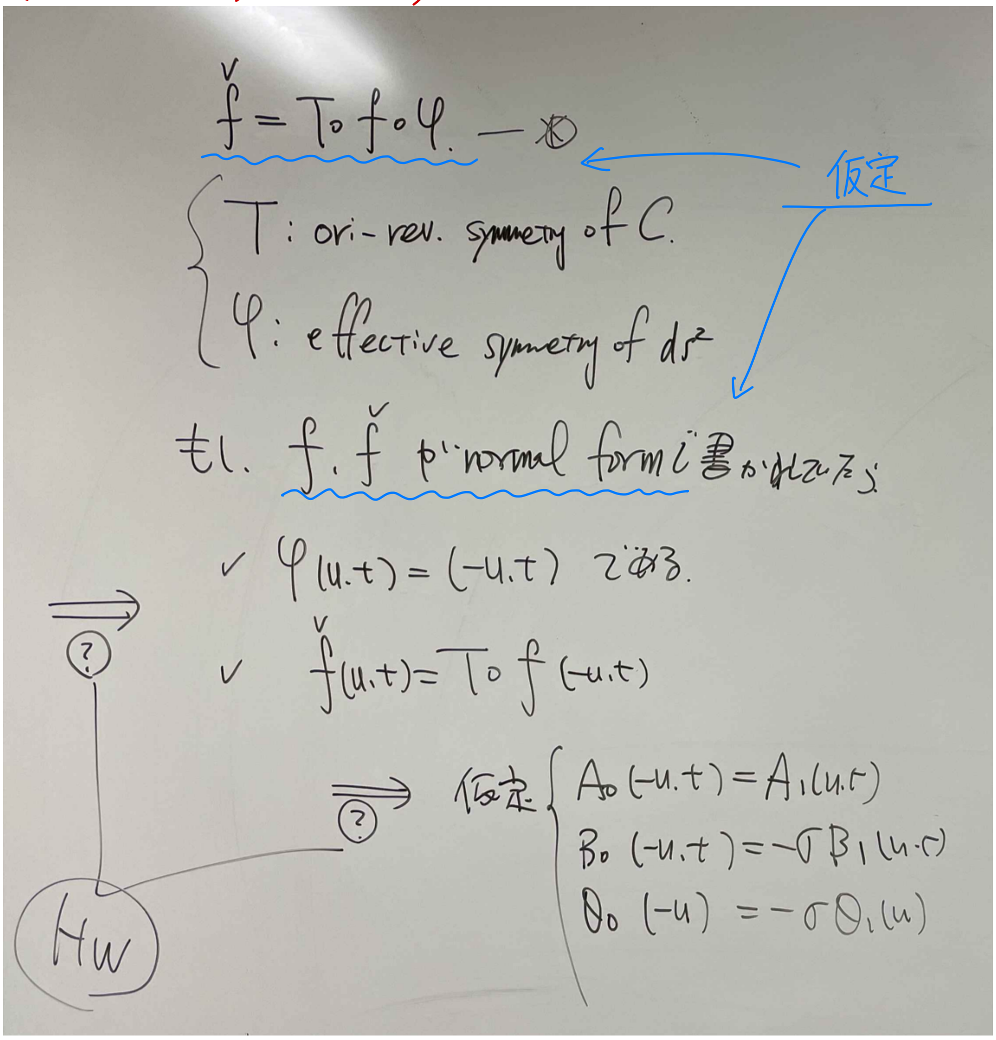
③ $T \neq \mathrm{Id}$ かつ T が orientation-reversing symmetry の場合

f と $\check{f}$ の向きが同じであること および T が向きを反転させる回転であることから、
$\check{f} = T \circ f \circ \varphi$ が成立するには T の他にも φ で f の向きを反転させないといけない。

$\therefore$ φ は effective symmetry である。

あと示したいこと … T が $SO(3)$ に属すること
$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$

(Remark 4.4 (a) を用いたい)



4. A REPRESENTATION FORMULA FOR GENERALIZED CUSPIDAL EDGES

We set $J = [-l, l]$ $(l > 0)$. Let $\mathbf{c} : J \to \boldsymbol{R}^3$ be an embedding with arc-length parameter whose curvature function $\kappa(u)$ is positive everywhere. We denote by $\mathbf{e}(u) := \mathbf{c}'(u)$, and by C the image of $\mathbf{c}$. We let $\mathbf{n}(u)$ and $\mathbf{b}(u)$ be the unit principal normal vector field and unit binormal vector field of $\mathbf{c}(u)$, respectively. We fix a sufficiently small $\delta(>0)$ and consider a map given by

$$f(u,v) := \mathbf{c}(u) + (A(u,v), B(u,v)) \begin{pmatrix} \cos\theta(u) & -\sin\theta(u) \\ \sin\theta(u) & \cos\theta(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{n}(u) \\ \mathbf{b}(u) \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

where $u \in J$ and $|v| < \delta$. Here $A(u,v)$, $B(u,v)$ and $\theta(u)$ are C^r-functions, and satisfy

$$A(u,0) = A_v(u,0) = 0, \quad A_{vv}(u,0) \neq 0, \quad B(u,0) = B_v(u,0) = B_{vv}(u,0) = 0.$$

- f と $\check{f}$ が normal form で書かれているため、式(4.1) および Def 4.1 より、

$$f(u,t) = \mathbf{c}(u) + \mathbf{n}(u)\big(A(u,t)\cos\theta(u) - B(u,t)\sin\theta(u)\big) + \mathbf{b}(u)\big(-A(u,t)\sin\theta(u) + B(u,t)\cos\theta(u)\big) \quad \cdots ①$$

$$\check{f}(u,t) = \check{\mathbf{c}}(u) + \check{\mathbf{n}}(u)\big(\check{A}(u,t)\cos\check{\theta}(u) - \check{B}(u,t)\sin\check{\theta}(u)\big) + \check{\mathbf{b}}(u)\big(-\check{A}(u,t)\sin\check{\theta}(u) + \check{B}(u,t)\cos\check{\theta}(u)\big) \quad \cdots ②$$

$\{\underset{\mathbf{e}}{\underset{\shortparallel}{\mathbf{c}'}}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$: 線形独立

$A(u,0) = A_t(u,0) = 0, \quad A_{tt}(u,0) \neq 0, \quad B(u,0) = B_t(u,0) = B_{tt}(u,0) = 0.$

$\sigma = \det T$

• Remark 4.4 の前半部より、

$$n_1(u) = T n_0(-u) = n_0(u),\quad b_1(u) = -\sigma T b_0(-u) = -\sigma b_0(u),\quad C_1(u) = T C_0(-u) = C_0(u) \quad \cdots ③$$

T は ori-reversing のため u が反転

T は ori-reversing のため u が反転

• $\varphi(u,t) = (\underbrace{\alpha(u,t)}_{C^\infty}, \underbrace{\beta(u,t)}_{C^\infty})$ として $T\circ f\circ\varphi(u,t)$ を書き下すと、

$$\begin{aligned} T\circ f\circ\varphi(u,t) &= T C(\alpha(u,t)) + T n(\alpha(u,t))\big(A(\alpha(u,t),\beta(u,t))\cos\theta(\alpha(u,t)) \\ &\qquad - B(\alpha(u,t),\beta(u,t))\sin\theta(\alpha(u,t))\big) \\ &\quad + T b(\alpha(u,t))\big(-A(\alpha(u,t),\beta(u,t))\sin\theta(\alpha(u,t)) \\ &\qquad + B(\alpha(u,t),\beta(u,t))\cos\theta(\alpha(u,t))\big) \\ &= C(-\alpha(u,t)) + n(-\alpha(u,t))\big(A(\alpha(u,t),\beta(u,t))\cos\theta(\alpha(u,t)) \\ &\qquad - B(\alpha(u,t),\beta(u,t))\sin\theta(\alpha(u,t))\big) \\ &\quad + b(-\alpha(u,t))\big(-A(\alpha(u,t),\beta(u,t))\sin\theta(\alpha(u,t)) \\ &\qquad + B(\alpha(u,t),\beta(u,t))\cos\theta(\alpha(u,t))\big) \quad \cdots ④ \end{aligned}$$

③より

である. 仮定より $\check{f} = T\circ f\circ\varphi$ であるため、$\check{f}$ を f_1、f を f_0 と見ることで、C のパラメータを比較すると ②、④ より

$$\underbrace{C_0(u)}_{= C_1(u) = \check{C}(u)} = C_0(-\alpha(u,t))$$

であるため、$\alpha(u,t) = -u$ である. ~~同様に ②、④ の b のパラメータを比較すると、~~

$$\cancel{\underbrace{-\sigma b_0(u)}_{= -\sigma T b_0(-u) = b_1(u)} = b_0(u)}$$

$\beta(u,t)$ が求まらない？

$$n_1\big(A_1(u,t)\cos\theta_1(u) - B_1(u,t)\sin\theta_1(u)\big)$$
$$\| $$
$$n_0\big(A_0(-u,t)\cos\theta_0(-u) - B_0(-u,t)\sin\theta_0(-u)\big)$$

$$b_1\big(\quad\text{———}\quad\big)$$
$$\|$$
$$b_0\big(\quad\text{———}\quad\big)$$

式2本、未知数6個？

($\Leftarrow$ を示す)

① C が平面曲線の場合

f が C^ω であることから、Remark 5.2 より $\exists S$: 平面に関する折り返し s.t. $\check{f} = S \circ f$.
これは、合同の同値表現 $\check{f} = T \circ f \circ \varphi$ を、$T = S$、$\varphi = \mathrm{Id}$ としたものである.

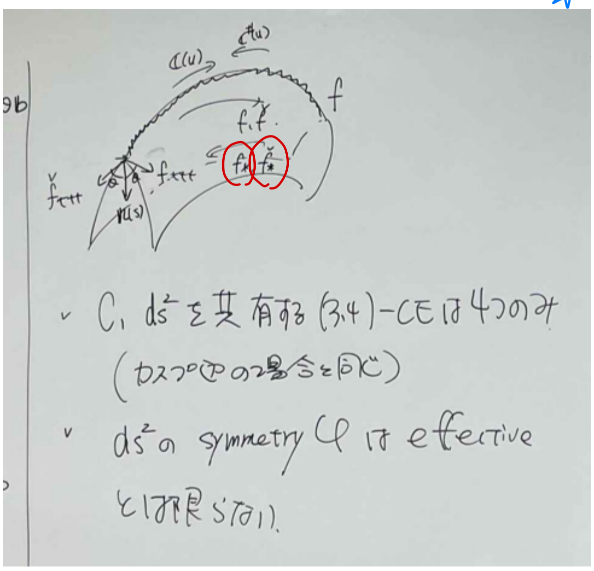
② ds_f^2 が non-effective symmetry φ を持つ場合

$\varphi^* ds_f^2 = ds_f^2$ かつ 曲線の向きを保つ かつ $\varphi \neq \mathrm{Id}$ を満たす
この条件を満たす $f \circ \varphi$ は、$f \circ \varphi = \check{f}$ のみである.
$\therefore$ $T = \mathrm{Id} \in O(3)$ とすれば、$\check{f} = T \circ f \circ \varphi$ が成り立つ.

Remark 4.5 ?

③ C は orientation-reversing symmetry $T \in SO(3)$ が存在し、かつ
ds_f^2 は effective symmetry φ を持つ場合

$\varphi^* ds_f^2 = ds_f^2$ かつ 曲線の向きを反転させる かつ $\varphi \neq \mathrm{Id}$ を満たす
この条件を満たす $f \circ \varphi$ は、$f \circ \varphi = f_*$ または $\check{f}_*$ である. ☆



$T \circ f \circ \varphi = f$ または $\check{f}$

さらに、orientation-reversing symmetry $T \in SO(3)$ が存在するため、☆ と合わせて

$$T \circ f \circ \varphi = f \quad \text{または} \quad \check{f}$$

が成り立つ. これは、「f と f が合同」または「f と $\check{f}$ が合同」を表している.

いらない？