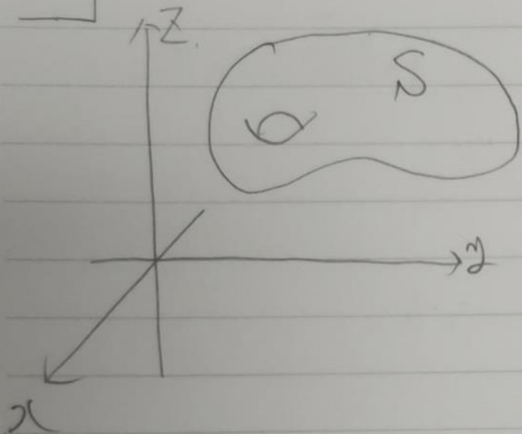
① NO.

DATE 火2

・6 特割員
→ 問合内容共有

4/8(火) 数理科学 キ何 1回

$\mathbb{R}^3$: 3次元ユークリッド



曲面S …… K (ガウス曲率) など

位相不変量

$$\frac{1}{2\pi}\int_S K\,dA = \chi(S)$$

オイラー標数

ガウスボンネの定理

・外の空間($\mathbb{R}^3$)が無いキ何 ⟶ リーマンキ何

↳ (M^n, g) の幾何学

$\mathbb{R}^3 \rightsquigarrow X$

$S \rightsquigarrow M^n$ (多様体)

第一基本形式 $\rightsquigarrow g$ (リーマン計量)

↳ K が定義できる!

$$\frac{1}{2\pi}\int_{M^2} K\,dA = \chi(M^2)$$

・特に良いクラス : 空間型

→ 定曲率リーマン多様体 で、完備なもの

↳ $g \rightsquigarrow d_g$ (リーマンキョリ)

(M, d_g) : 完備距離空間

Example : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{H}^n$
(ユークリッド) (球面) (双曲空間)

②

NO.

DATE

$\boxed{\text{定理}}$

$\mathbb{R}^n$、$\mathbb{S}^n$、$\mathbb{H}^n$ は ~~単~~ 空間型であり、逆に単連結な空間型はこれら3つのみ。（等長変換を除いて一意）

（$\mathbb{S}^n(c)$、$\mathbb{H}^n(c)$、 c…断面曲率）

球面

$$\mathbb{S}^n = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1 \}$$

$$\parallel$$

$$\mathbb{S}^n(1)$$

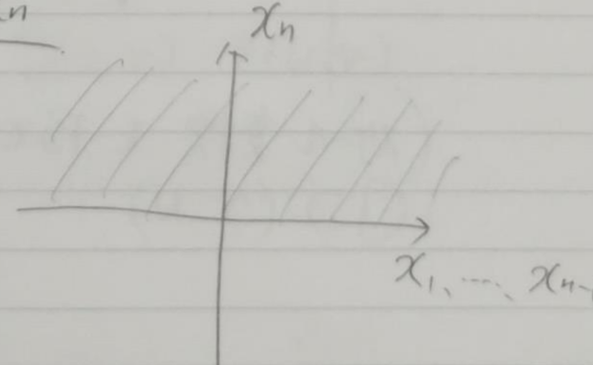
双曲空間

$$\mathbb{H}^n = (\mathbb{R}^n_+ ,\ g_H)$$

$$\mathbb{R}^n_+ = \{ (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0 \}$$

$$g_H = \frac{dx_1^2 + \cdots + dx_n^2}{(x_n)^2}$$

（ガウス曲率とかが定まっていく）



③ 0800-500-0294

※双曲空間は色々な場面で表れる

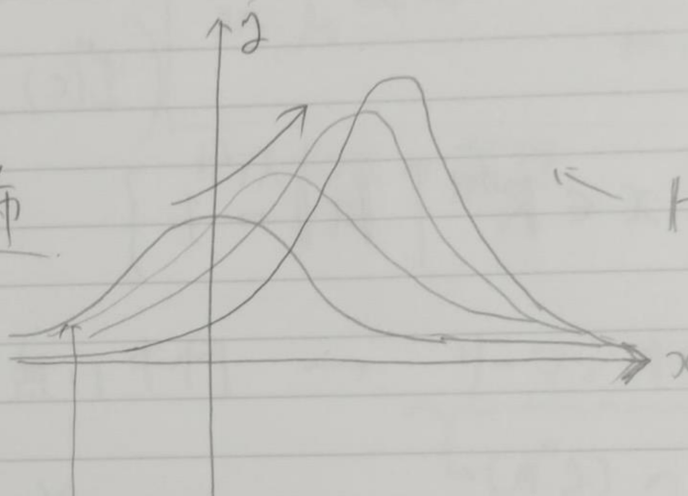
・情報キ何学

確率密度関数 の 空間(パラメータ族)

\+ フィッシャー情報計量 ($= g_F$)

リーマン計量

Example：正規分布



H^2の中の曲率

平均、分散
(u)　(v)

良い曲線

⤳「測地線」
(測地的曲率 = 0)

$$g_F = \frac{du^2 + dv^2}{V^2}$$

(スケール変換をすると)

④

NO.

DATE

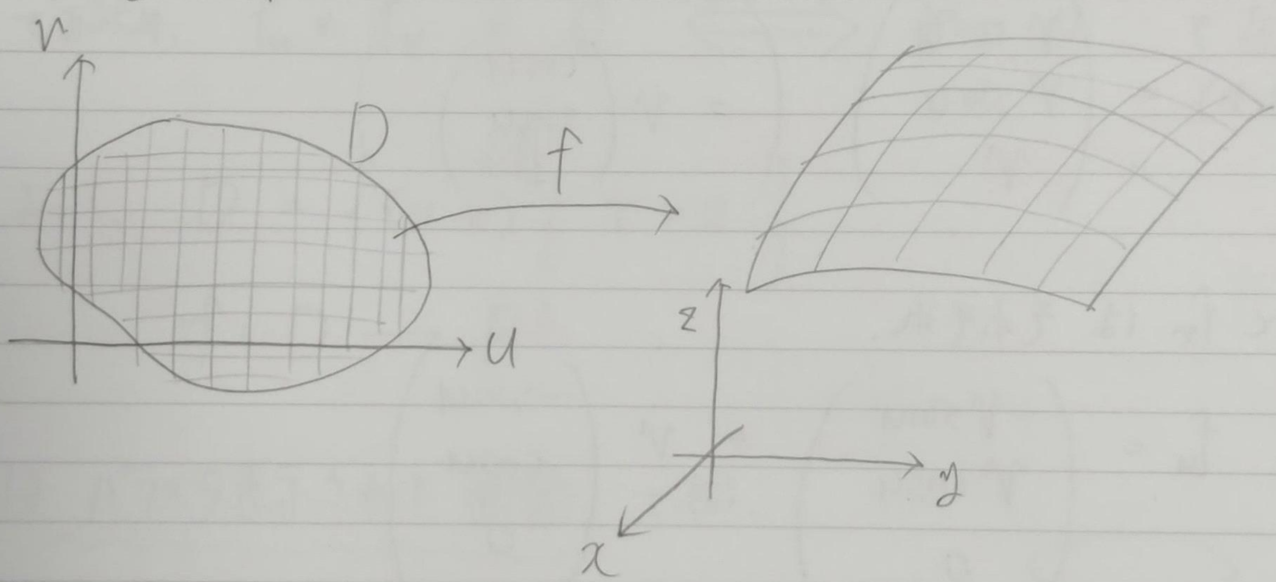
授業の目標

S^3、H^3 の曲面(曲線)の幾何を学ぶ

#1 $\mathbb{R}^3$ の曲面 (ガウス曲率、平均曲率の定義)

パラメタ表示された曲面

$D \subset \mathbb{R}^2$; 領域



D上の C^∞ 級関数 $x(u,v)$、$y(u,v)$、$z(u,v)$

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} \quad (u,v) \in D$$

は、写像 $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ を定める

$$\begin{matrix} D & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \cup\!\!\!\!\!\!\; \text{\rotatebox{90}{$\in$}} & & \text{\rotatebox{90}{$\in$}} \\ (u,v) & \longmapsto & f(u,v) \end{matrix}$$

(このような f を、C^∞ 級写像という)

⑤

NO.

DATE

定義

C^∞ 級写像 $f: D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ で、

$$\star \quad f_u(u,v) \times f_v(u,v) \neq 0 \qquad (\forall (u,v) \in D)$$

を満たすものを パラメタ表示された曲面 という。

($\star \Longleftrightarrow f_u$ と f_v が一次独立である)

Example (円錐面)

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} v\cos u \\ v\sin u \\ v \end{pmatrix} \quad \left(= v\begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

f_u と f_v はそれぞれ、

$$f_u = \begin{pmatrix} -v\sin u \\ v\cos u \\ 0 \end{pmatrix} = v\begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_v = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。外積 $f_u \times f_v$ を計算すると、

$$f_u \times f_v = v\begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= r \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ -1 \end{pmatrix}$$

である。ノルム $\|f_u \times f_r\|^2$ は

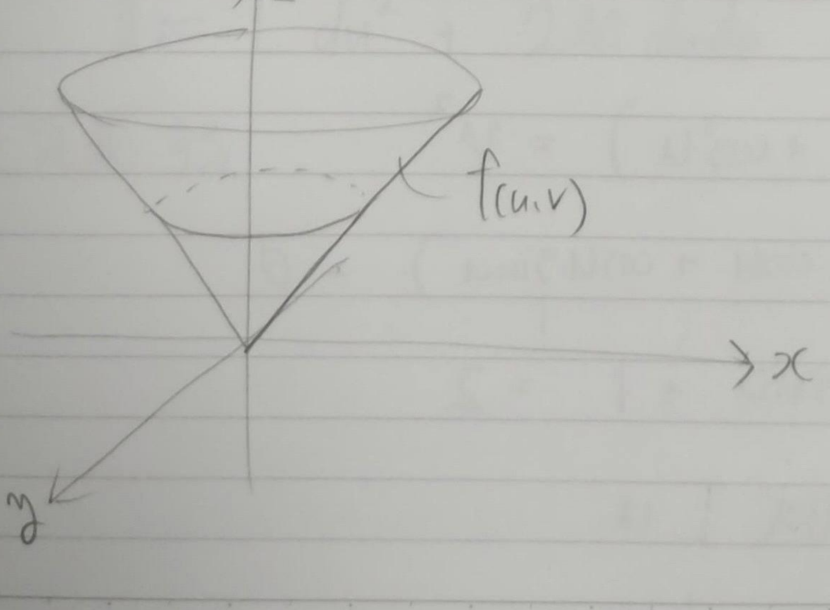
$$\|f_u \times f_r\|^2 = r^2 (\cos^2 u + \sin^2 u + 1)$$
$$= 2r^2$$

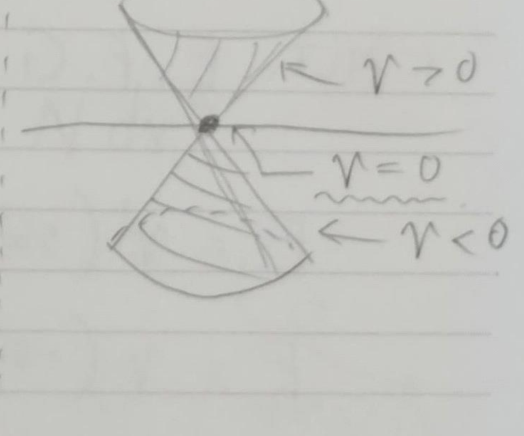
であるため、$f_u \times f_r \neq 0 \iff r = 0$ である。

よって、$D = \{ \underset{}{(u, r)} \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0 \}$,

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

は パラメタ表示された曲面 である。





NO.

DATE

~~第~~ 第一基本形式

$$\begin{cases} E = f_u \cdot f_u \\ F = f_u \cdot f_v \\ G = f_v \cdot f_v \end{cases} \qquad (D上C^{\infty}級関数)$$

第一基本形式 I を、

$$\mathrm{I} := E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

と定義する。

Example (円錐面)

$$f_u = v\begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_v = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f_u \times f_v = v\begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ -1 \end{pmatrix}$$

に対して、E、F、G を考える。それぞれ、

$$E = v^2(\sin^2 u + \cos^2 u) = v^2$$

$$F = v(-\sin u \cos u + \cos u \sin u) = 0$$

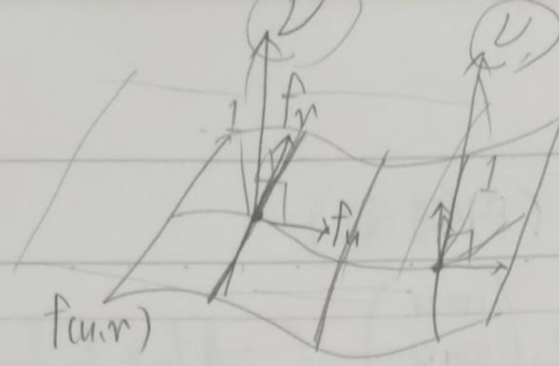
$$G = \cos^2 u + \sin^2 u + 1 = 2$$

であるので、第一基本形式 I は、

$$\mathrm{I} = v^2 du^2 + 2dv^2.$$

⑧

単位法ベクトル



単位法ベクトル $\nu(u,v)$ を、

$$\nu(u,v) := \frac{f_u \times f_v}{\|f_u \times f_v\|}$$

と定義する。

0でない！
（∵ パラメタ表示された曲面なので）

第二基本形式

$$\begin{cases} L = f_{uu} \cdot \nu \\ M = f_{uv} \cdot \nu \\ N = f_{vv} \cdot \nu \end{cases}$$

（D上 C^∞ 級関数）

第二基本形式 II を、

$$\mathrm{II} := L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

と定義する。

次ページ Example

II の Example（円錐面）

$$f_u \times f_v = v\begin{pmatrix}\cos u\\ \sin u\\ -1\end{pmatrix}, \quad \|f_u \times f_v\| = \sqrt{2}\,v$$

$$\mathrm{I} = v^2 du^2 + 2dv^2$$

であるので、ν は、

$$\nu(u,v) = \frac{1}{\sqrt{2}v} \cdot v\begin{pmatrix}\cos u\\ \sin u\\ -1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\cos u\\ \sin u\\ -1\end{pmatrix}$$

である。また、f_{uu}、f_{uv}、f_{vv} は、

$$f_{uu} = v\begin{pmatrix}-\cos u\\ -\sin u\\ 0\end{pmatrix}, \quad f_{uv} = \begin{pmatrix}-\sin u\\ \cos u\\ 0\end{pmatrix}$$

$$f_{vv} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

である。以上より L、M、N は

$$L = \frac{v}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-\cos u\\ -\sin u\\ 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos u\\ \sin u\\ -1\end{pmatrix} = -\frac{v}{\sqrt{2}} \qquad (f_{uu}\cdot\nu)$$

$$M = 0 \qquad (f_{uv}\cdot\nu)$$

$$N = 0 \qquad (f_{vv}\cdot\nu)$$

なので、$\mathrm{II} = -\frac{v}{\sqrt{2}}du^2$ である

NO.

DATE

ワインガルテン行列

$$A := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

定理

Aの固有値は必ず実数である。

$\boxed{\lambda_1、\lambda_2}$

このとき、K と H を次のように定義する。

$$K = \lambda_1 \lambda_2 \quad ; \text{ガウス曲率}$$

$$H = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \quad ; \text{平均曲率}$$

命題

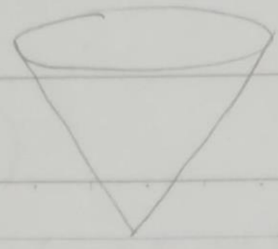
K と H はそれぞれ、

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}$$

である。

No. 11



Example (円錐面)

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{0-0}{2v^2-0} = 0$$

$$H = \frac{2\left(-\frac{v}{\sqrt{2}}\right)}{2(2v^2-0)} = -\frac{1}{2\sqrt{2}v}$$

※ $K \equiv 0$ の曲面 … 平坦曲面 (flat surface)

($H \equiv 0$ の曲面 … 極小曲面)

(紙を折り曲げて作った曲面は $K \equiv 0$)