Def (はめ込み) immersion

写像 $\phi: M \longrightarrow N$; 滑らか がはめ込みである

$\Longleftrightarrow$ $\forall p \in M$ に対して、$d\phi_p : T_p(M) \longrightarrow T_{\phi(p)}(N)$ が 単射 (one-to-one) である.

例えば、すべての正則曲線 は はめ込み である.

Def (正則曲線)

曲線 $\alpha : I \longrightarrow M$ が正則曲線である

$\Longleftrightarrow$ $\forall t \in I$ に対し、速度ベクトル $\alpha'(t) \neq 0$.

(曲線がどの点においても停止しない)

$\because$ $\ker(d\alpha_t) = \{ v \in T_t I \mid d\alpha_t(v) = 0 \} = \{0\}$ であるため、

$\alpha'(t) \neq 0 \Rightarrow t \neq 0$

であり、上式は $d\alpha_t$ が単射であることと一致する.

Def (埋め込み) imbedding

多様体 P から M への 埋め込み

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ 単射の はめ込み $\phi: M \longrightarrow N$

s.t. 誘導された写像 (induced mapping) $\bar{\phi}: P \rightarrow \phi(P)$ が、部分空間 $\phi(P) \subset M$ 上の同相写像

(1) $\bar{\phi}$ が連続、全単射

(2) $\bar{\phi}^{-1}$ が連続

たとえば、写像 $(\underbrace{a_1, \cdots, a_m}_{m}) \rightarrow (\underbrace{a_1, \cdots, a_m}_{m}, \underbrace{0, \cdots, 0}_{n-m})$ が例である. ---☆

(Lemma 33 (3) は、局所的にすべての埋め込みが ☆ のように見える)

Lemma 33(3)

$y^1, \cdots, y^n$ が $\phi(P)$ における N の座標系である

$\Rightarrow$ ある m 個の整数 $1 \le i_1 \le \cdots \le i_m \le n$ が 存在して、写像 $y^{i_1} \circ \phi, \cdots, y^{i_m} \circ \phi$ が 座標系を形成する.

$\phi:(a_1,\cdots,a_m)\longmapsto(a_1,\cdots,a_m,0,\cdots,0)$ が埋め込みであることを確認するために、

(1) ϕ が滑らか

(2) $d\phi$ が単射

(3) ϕ が同相写像

を示せばよい。

(1) ϕ が滑らか について

ヤコビ行列 $(J\phi)$ の値は a_i $(i=1,\cdots,m)$ または 0 の値のいずれかであるため、これらの成分の偏導関数は全て連続である。

よって ϕ は滑らか。

(2) $d\phi$ が単射 について

$$\text{ヤコビ行列 }(J\phi)=\begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{\begin{matrix}1&0&\cdots&0\end{matrix}}}^{m} \\ n\left\{\begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\right. \end{array}$$

は、ランク m であるため、$d\phi$ が単射である。

(3) ϕ が同相写像 について （連続で、逆写像も連続）

ϕ の像 $\phi(P)$ は $\mathbb{R}^n$ の部分集合で、以下のように表せる。

$$\phi(P)=\{(a_1,\cdots,a_m,a_{m+1},\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n \mid a_{m+1}=a_{m+2}=\cdots=a_n=0\}$$

よって、逆写像 ϕ^{-1} は

$$\phi^{-1}(a_1,\cdots,a_m,0,\cdots,0)=(a_1,\cdots,a_m)$$

と表せる。ϕ の連続性から ϕ^{-1} は連続である。　(1)〜(3)より、ϕ は埋め込み ▨

● P が M の部分多様体であれば、包含写像 $j : P \subset M$ は埋め込みである.

● 逆に、$\phi : P \longrightarrow M$ が埋め込みであれば、写像 $\phi(P)$ は

誘導写像 $\Phi : P \to \Phi(P)$ が diffeo

となるような多様体となる.

この場合、$\phi(P)$ は M の部分空間であり、包含写像 $j : \phi(P) \subseteq M$ は

連鎖律により $\phi \circ \Phi^{-1}$ と等しくなる. よって、$\phi(P)$ は M の部分多様体である.

Proof

(i) P が M の部分多様体 $\Longrightarrow$ 包含写像 $j : P \subset M$ は埋め込み

(● j の微分 $dj_p : T_p(P) \longrightarrow T_{j(p)}(M)$ が単射

● j が同相写像である)

部分多様体の定義 (26.Definition) より、j は滑らか かつ dj は単射である.

また、P の位相 は M から相対位相 を入れたものだったため、j は 同相写像 である.

よって、包含写像 j は 埋め込みの定義を満たしている.

(ii) $\phi : P \to M$ が埋め込み $\Longrightarrow$ ϕ の像 $\phi(P)$ が M の部分多様体

● 誘導写像 $\Phi : P \to \phi(P)$ が diffeo であることを確認.

仮定より ϕ が埋め込みであったことから、埋め込みの定義より ϕ は同相写像 である.

Φ は ϕ の 制限写像 であるため、Φ も 同相写像 である.

埋め込みの定義より ϕ は滑らかで、かつ写像の微分 $d\phi$ は各点で単射である

ため、Φ も滑らかである …①

Φ^{-1}について、逆写像定理より、ϕが滑らかで$d\phi$が単射であれば、
ϕの局所的な逆写像Φ^{-1}：滑らかが存在する…②

①、②よりΦとΦ^{-1}が滑らかであるため、Φがdiffeoであることを確認した。

・包含写像$j : \phi(P) \subseteq M$が$\phi \circ \Phi^{-1}$と等しいことを確認

連鎖律により、$\phi : P \to M$は$\phi = j \circ \Phi$と表せる。Φはdiffeoであるため、
逆写像Φ^{-1}が存在し、$j = \phi \circ \Phi^{-1}$と上式を変形できる。

よって、jが$\phi \circ \Phi^{-1}$と等しいことを確認した。

・$\phi(P)$がMの部分多様体であることを確認

(i) $\phi(P)$がMの位相部分空間であることを確認

$\phi : P \to M$は埋め込みであるため、$\phi(P)$はMの部分集合であり、
ϕは同相写像である。

よって、$\phi(P)$はMの位相部分空間である。

(ii) jが滑らかであることを確認

$j = \phi \circ \Phi^{-1}$であったため、ϕとΦ^{-1}がそれぞれ滑らかであることを示せばよい。

ϕの埋め込みの定義より、ϕは滑らかである。

Φはdiffeoであったため、ΦとΦ^{-1}が滑らかである。

よって、滑らかな写像同士の合成であるjは滑らかである。

(iii) $d\jmath$ が単射であることを確認

$\jmath = \phi \circ \Phi^{-1}$ であったため、$d\jmath = d(\phi \circ \Phi^{-1}) = d\phi \circ d\Phi^{-1}$ と表される。

$d\phi$ と $d\Phi^{-1}$ がそれぞれ単射であることを確認すればよい。

ϕ の埋め込みの定義より、$d\phi$ は単射である。

(Φ^{-1}: diffeo の微分 $d\Phi^{-1}$ が単射であることを示したい。)

Theorem (逆写像定理)　藤岡「具体例から学ぶ多様体」P135

$a \in \mathbb{R}^n$ を固定しておき、写像 $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を a を含む $\mathbb{R}^n$ の開集合 U で C^r 級写像とする。

このとき、f が $f'(a) \neq 0$ を満たすならば、$f(a)$ を含む $\mathbb{R}^n$ の開集合 V で C^r 級の f の逆写像 f^{-1} が存在する。

Def (はめ込まれた部分多様体) Immersed

M：多様体、P：Mの部分集合である多様体

PがMのはめ込まれた部分多様体である

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ 包含写像 $\iota : P \subset M$ がはめ込みである.

(部分多様体 $\Longrightarrow$ はめ込まれた部分多様体)
(部分多様体 $\not\Longleftarrow$ はめ込まれた部分多様体)

→ 定義に相対位相が含まれている.

→ 相対位相を持っていない

※ $\Longleftarrow$ が成り立つ条件は Exercise 15 参照 (P33)

→「$\phi(P)$がMのはめ込まれた部分多様体」かつ「Pがコンパクト」
($\phi : M \to N$)
$\Longrightarrow$ $\phi(P)$は部分多様体

$\boxed{\text{one-to-one 単射}}$

Lemma (写像の微分の同値表現)

$\psi : M^m \longrightarrow N^n$ を滑らかな写像とする. $\forall p \in M$ とするとき、
以下の3条件は同値である. $(m \geq n)$

(1) 写像の微分 $d\psi_p : T_p(M^m) \longrightarrow T_{\psi(p)}(N^n)$ が全射 (onto)

(2) 写像の微分 $d\psi_p$ のヤコビ行列が、p および $\psi(p)$ の任意の座標系に対して階数 n を持つ.

(3) $y^1, y^2, \cdots, y^n$ が $\psi(p)$ における N の座標系ならば、p における M の座標系が $(y^1\circ\psi, \cdots, y^n\circ\psi, x^{n+1}, \cdots, x^m)$ である.

Proof (1) $\Longleftrightarrow$ (2)、(2) $\Longleftrightarrow$ (3) を それぞれ示す

(i) (2) $\Longrightarrow$ (1) を示す.

仮定より $d\psi_p$ のヤコビ行列のランクが n である.
すべての N の座標系に対して n 個の座標が線形独立であるため、
$d\psi_p$ は全射である.

(1) $\Longrightarrow$ (2) を示す.

仮定より写像の微分 $d\psi_p$ は全射である.
よって、ヤコビ行列は独立な列ベクトルが n 本存在することが分かる.
$\therefore$ $d\psi_p$ のヤコビ行列のランクは n である.

(ii) (2) $\Longrightarrow$ (3) を示す.

仮定より、$d\psi_p$ のヤコビ行列のランクが n である.
このとき、$\forall p \in M$ を適切に選ぶと $\psi(p)$ における座標系 $(y^1, y^2, \cdots, y^n)$ に対応するように M の座標系を入れ替えてもよい.
具体的には、$(y^1 \circ \psi, \cdots, y^n \circ \psi, x^{n+1}, \cdots, x^m)$ と座標系を並べ替えることができる.

$\therefore$ (2) $\Longrightarrow$ (3) を示した.

(3) $\Longrightarrow$ (2) を示す.

仮定より、$(y^1, \cdots, y^n)$ が $\psi(p)$ における N の座標系であり、
$(y^1 \circ \psi, \cdots, y^n \circ \psi, x^{n+1}, \cdots, x^m)$ が p における M の座標系である.

写像の微分 $d\psi_p$ のヤコビ行列 $J\psi$ は、

$$(J\psi) = \left.\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial(y^1\circ\psi)}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial(y^1\circ\psi)}{\partial x^n} & \frac{\partial(y^1\circ\psi)}{\partial x^{n+1}} & \cdots & \frac{\partial(y^1\circ\psi)}{\partial x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial(y^n\circ\psi)}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial(y^n\circ\psi)}{\partial x^n} & \frac{\partial(y^n\circ\psi)}{\partial x^{n+1}} & \cdots & \frac{\partial(y^n\circ\psi)}{\partial x^m} \end{bmatrix}}_{m}\right\}n$$

である。

ここで、$(y^1\circ\psi, \cdots, y^n\circ\psi)$ は N の座標系 $(y^1, \cdots, y^n)$ に対応するため、$(J\psi)$ の
の最初の n 列は線形独立である。

よって、ヤコビ行列の階数は n である。

以上より、(1) $\Longleftrightarrow$ (2)、(2) $\Longleftrightarrow$ (3) を示した ■

P20

$q \in N$ が滑らかな写像 $\psi : M \longrightarrow N$ の正則値である

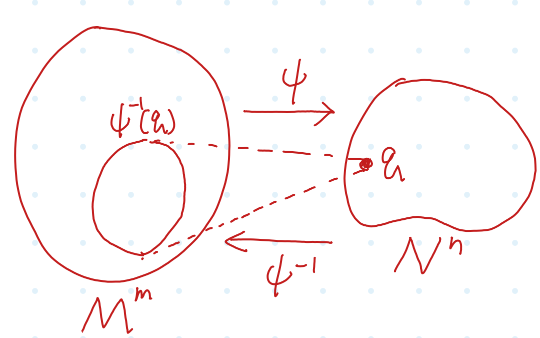
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ q の逆像に含まれるすべての $p \in \psi^{-1}(q)$ に対して、
写像の微分 $d\psi_p$ が全射である。(先程の Lemma の (1))

Corollary.36

$q \in \psi(M)$ が滑らかな写像 $\psi : M \longrightarrow N$ の正則値である場合、$\psi^{-1}(q)$ は
M の部分多様体であり、次元は

$$\dim M = \dim N + \dim \psi^{-1}(q)$$

である。



Proof Lemma 35 (1) $\Longleftrightarrow$ (3)、(1) $\Longleftrightarrow$ (2) を用いる.

仮定より $q \in \psi(M)$ は $\psi: M \longrightarrow N$ の正則値であるため、qの逆像に含まれる全ての $p \in \psi^{-1}(q)$ に対して、写像の微分 $d\psi_p$ は全射である. さらに、Lemma 35 より、(1) $\Longleftrightarrow$ (3) であったため、

$y^1, y^2, \cdots, y^n$ が $\psi(p)$ における Nの座標系ならば、p における Mの座標系が $(y^1 \circ \psi, \cdots, y^n \circ \psi, \underbrace{x^{n+1}, \cdots, x^m}_{m-n})$ である.

である. …①

(1) $\Longleftrightarrow$ (2) より、ψのヤコビ行列 $(J\psi) = \left(\dfrac{\partial \psi^i}{\partial x_j}\right)$ のランクは n である.

陰関数定理 によりあるpの近傍 $U \subset M$ において、$\psi(x) = q$ を満たす x の座標系を次のように再配置できる.

- 座標 $(x^1, \cdots, x^n)$ は、ψ に対応する座標変数 (①より、それぞれ $y^1 \circ \psi, \cdots, y^n \circ \psi$ に写される)
- 残りの座標 $(x^{n+1}, \cdots, x^m)$ は独立した変数

よって、$\psi^{-1}(q)$ は以下のように表される.

$$\psi^{-1}(q) = \left\{ (x^{n+1}, \cdots, x^m) \in \mathbb{R}^{m-n} \,\middle|\, \psi(x^1, \cdots, x^n) = q \right\}.$$

M上において $\psi^{-1}(q)$ は $(x^{n+1}, \cdots, x^m)$ の $m-n$ 個の座標で表される部分多様体であり、次元は $m-n$ である.

以上より、$\dim(\psi^{-1}(q)) = \dim M - \dim N$ が成立するため、Corollary の等式を示した. ■

Theorem（陰関数定理）　藤岡「具体例から学ぶ多様体」p.124

$m, n \in \mathbb{N}$ として、$\mathbb{R}^{m+n}$ の点を (x, y) $(x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n)$ と表す。

写像 $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を、点 (a, b) を含む $\mathbb{R}^{m+n}$ の開集合 U 上の写像として、

$f(a, b) = 0$ を満たすとする。$(a \in \mathbb{R}^m, b \in \mathbb{R}^n)$

また、$x = (x^1, \cdots, x^m)$、$y = (y^1, \cdots, y^n)$、$f = (f^1, \cdots, f^n)$ と表しておき、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^1}{\partial x^m} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^m} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial y^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^1}{\partial y^n} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial y^n} \end{bmatrix}$$

とするとき、以下が成り立つ。

f が $\det\left(\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right) \neq 0$ を満たすならば、a を含む $\mathbb{R}^m$ の

ある開集合 V で写像 $\psi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ が一意的に存在し、

$$\psi(a) = b, \quad f(x, \psi(x)) = 0 \quad (x \in V).$$

である。さらに、$\psi'(x)$ は、

$$\psi'(x) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x, \psi(x)) \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, \psi(x))\right)^{-1}$$

である。

wikipedia では正則値定理. 松本「多様体の基礎」P207 では名称無し.

Remark

W.Tu「トゥー 多様体」では、正則レベル集合定理(陰関数定理)として記載.

Theorem(正則レベル集合定理、P125)

$F: M^m \longrightarrow N^n$ を多様体間の C^∞ 級写像とする. このとき正則値 $c \in N$ について、空集合でない正則レベル集合 $F^{-1}(c)$ は M の正則部分多様体となり、その次元 $\dim(F^{-1}(c))$ は

$$\dim(F^{-1}(c)) = \dim M - \dim N$$

である.

正則レベル集合 … 正則値 c の逆像 $F^{-1}(c)$. (P122)

正則部分多様体 … 局所的にいくつかの座標関数が消えている点の集合 (P119)

(逆関数定理を用いて導出)

※ 多様体 M における超曲面 とは、以下の次元を満たす部分多様体 P のこと。
(hypersurface)

$$\dim M = \dim P + 1$$

$\psi^{-1}(e_i)$

p20

Corollary.37

c を関数 $f \in \mathcal{F}(M)$ の値とする。 $(c \in \mathbb{R})$

$f^{-1}(c) = \{ p \in M \mid f(p) = c \}$ の各点において写像の微分 df_p が非ゼロ であれば、

$f^{-1}(c)$ は M の部分多様体 である.

(このとき、f は M の 等位超曲面 とよばれる.)
(level hypersurface)

Proof 陰関数定理 を 用いる

仮定より、f が C^∞ 級 かつ 微分 $df_p \neq 0$ であるため、陰関数定理より 等位集合 $f^{-1}(c)$ は、局所的に次のように表される.

$$f^{-1}(c) = \{ (x^1, \cdots, x^{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1} \mid f(x) = c \}$$

よって、$f^{-1}(c)$ は座標 $(x^1, \cdots, x^{m-1})$ で表される部分多様体である.

また、$\dim M - \dim(f^{-1}(c)) = 1$ より、$f^{-1}(c)$ は M の 超曲面 である ▨

Example (等位超曲面の例：S^n)

$\mathbb{R}^{n+1}$ 上で $f := \sum (u^i)^2$ とすると、f の微分 $df = 2\sum u^i du^i$ となる.

f と df が 0 になるのは原点のみであるため、半径 $r > 0$ の n 次元球面

$$S^n(r) = f^{-1}(r^2)$$

は $\mathbb{R}^{n+1}$ の等位超曲面である.

P20

Def (しずめ込み) submersion

滑らかな写像 $\psi : M \longrightarrow B$ が沈め込みである.

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $^\forall p \in M$、写像の微分 $d\psi_p : T_p(M) \longrightarrow T_{\psi(p)}(B)$ が全射 (onto) である

沈め込みの全ての値は正則であるため、$^\forall q \in B$ に対して M は部分多様体 $\psi^{-1}(q)$ に分割される.

Example

写像 $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ が、$(t_1, \cdots, t_m) \mapsto (t_1, \cdots, t_n)$ $(m \geq n)$ であるとき、f は沈め込みである.

$$\because \ f \text{ のヤコビ行列 } (Jf) = \begin{array}{c} \\ n \end{array} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}^{n \qquad\qquad m-n} \text{ である.}$$

$\therefore$ $^\forall r \in \mathbb{R}^n$ に対して、対応する接ベクトル $T_{f(p)}\mathbb{R}^n$ に写像 df_p で移すことができる.
よって. df_p は全射である.

TOPOLOGY OF MANIFOLDS

- 多様体は局所的にはユークリッド空間のように見なせる

→ 多様体 M の各点には、ユークリッド空間と同相である近傍が取れる

- 多様体は、ユークリッド空間が持つ局所的な性質を共有:

(A1) 局所的連結性 (local connectedness)

(A2) 局所的コンパクト性

Def (コンパクト)

位相空間 X がコンパクト

$\Longleftrightarrow$ 開被覆 $\mathcal{U} \subset X$ に対して $^{\exists}$ 開集合 $U_1, \cdots, U_n$ s.t. $X = U_1 \cup U_2 \cdots \cup U_n$

- 「局所的なユークリッド空間」は、ハウスドルフである必要は無い。

→ 定義3 (滑らかな多様体) に ハウスドルフ空間 であることが含まれている。

Def (滑らかな多様体)

M が 滑らかな多様体 である

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (D1) M は完備なアトラスを持つ

(D2) M は ハウスドルフ空間 である

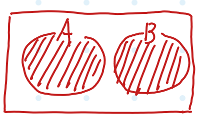
A. Connectedness (連結性)

(Def) 連結

多様体 M が「連結」である

$\Longleftrightarrow$ 空でない2つの集合の 非交和 (disjoint union) として表されない

↳ 交わりを持たない和集合



$\Longleftrightarrow$ $^{\forall} U, V \subset M$ $(U \neq \phi, V \neq \phi)$、$U \cup V = M \Rightarrow U \cap V \neq \phi$

連結の例

多様体の座標近傍は、任意の2点間が十分に小さいと曲線セグメントによって

連結される。従って、

多様体 M が連結である $\Longleftrightarrow$ $^\forall p, q \in M$ 、p と q が区分的に滑らかな曲線セグメントで結ばれる

[
Def (区分的に滑らかな曲線分)

写像 $\beta : [a, b] \longrightarrow M$ が区分的に滑らかな曲線分である

$\Longleftrightarrow$ $[a, b]$ の分割 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < t_{k+1} = b$ が存在し、

それぞれの $\beta|_{[t_i, t_{i+1}]}$ が曲線分である。

$[a, b]$ を含む開区間 $(a-\varepsilon, b+\varepsilon)$ まで滑らかに延長できる
]

second countability

B. 第二可算公理

(Def) 第二可算空間

位相空間 S が第二可算空間である

$\Longleftrightarrow$ 位相が可算基 $\mathcal{B}$ を持つ

countable base

(開集合の可算な集まりがあり、全ての開集合がその集まりの部分集合の和として表される)

collection

$\mathcal{B}$ subcollection

Example ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の可算基の例

a_i, b_i : 有理数 とする。

$\mathbb{R}^n$ は $\{p \in \mathbb{R}^n \mid a_i < p_i < b_i\}$ を満たす集合からなる可算基を持っている。

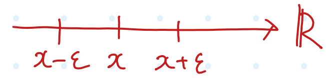
開長方形

有理数 $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ 上稠密

Proof

有理数 $\mathbb{Q}$ は 実数 $\mathbb{R}$ 上で 稠密 であるため、任意の実数 x と 正数 ε に対して、以下の不等式を満たす有理数 q が存在する.

$$x-\varepsilon < q < x+\varepsilon \quad \cdots ①$$

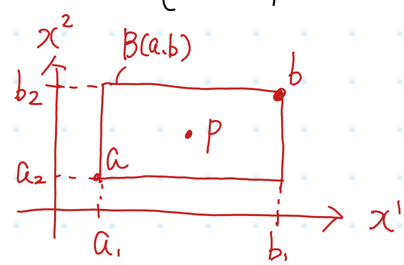


① の性質より、以下の不等式を満たす有理数 a、b が存在するとしてよい.

$$x-\varepsilon < a < x < b < x+\varepsilon$$

$\mathbb{R}^n$ 上の任意の開集合 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ は 開長方形 $B(a,b) := \{ p \in \mathbb{R}^n \mid a_i < p_i < b_i \}$ を用いて、B の和集合として 以下のように表せる.

$$U = \bigcup_{p\in U} B(a,b)$$



これにより、任意の点 $p \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ は いずれかの $B(a,b)$ に必ず含まれている.

$\therefore$ $\mathbb{R}^n$ は $B(a,b)$ を可算基として持っている ∎

Def (稠密)

$A \subset \mathbb{R}$ が $\mathbb{R}$ 上で稠密である

$\Longleftrightarrow$ $^\forall x, y \in \mathbb{R}\ (x<y)$、$^\exists q \in A$ s.t. $x < q < y$

- 第二可算空間 は 以下の 性質 を 満たしている.

(A1) 第二可算空間 の 部分空間 は、第二可算空間 となる.

(A2) 第二可算空間 の デカルト積 (cartesian product) は、第二可算空間 となる.

(A3) 「第二可算 な 開部分空間 の 可算和 である空間」 は、第二可算空間 となる.

a space that is countable union of second countable open subspace is itself second countable.

Proof

(A1) 部分空間 $A \subset S$ も 可算基 を持つことを確認する.

$\mathcal{B} := \{B_i\}_{i=1,\dots,n\dots}$ が S の 可算基 であるとする.

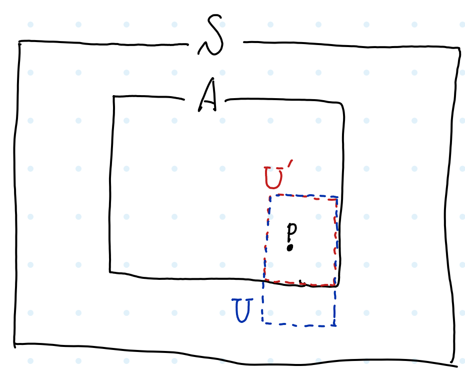
U'を部分空間$A \subseteq S$の開集合とし、$p \in U'$とする。

相対位相の定義より、　$U' = U \cap A$となるようなSの開集合Uが存在する。$p \in (U \cap A) \subset U$であるため、

$$p \in B_i \subset U$$

を満たす開集合$B_i \in \mathcal{B}$が存在する。このとき、

$$p \in (B_i \cap A) \subset (U \cap A) = U'$$



であるため、族$\{B_i \cap A \mid B_i \in \mathcal{B}\}$が$A$の可算基である。

以上より、$\mathcal{B} = \{B_i\}_{i=1,\cdots,n,\cdots}$が$S$の可算基であるならば、$A$の可算基として$\mathcal{B}_A = \{B_i \cap A\}$が取れるため（A1）を示した。

(A2) 第二可算空間X、Yのデカルト積（直積）$X \times Y$も可算基を持つことを確認する。

Xの可算基を$\mathcal{B}_X := \{B_{Xi}\}_{i=1,\cdots,n,\cdots}$、$Y$の可算基を$\mathcal{B}_Y := \{B_{Yj}\}_{j=1,\cdots,n,\cdots}$とおく。

$X \times Y$の開集合Wと点$(x, y) \in W$が与えられたとき、直積位相の定義から、

$$(x, y) \in U \times V \subset W \ , \quad U \in \mathcal{O}_X \ , \ V \in \mathcal{O}_Y \quad \cdots ①$$

を満たす開集合U、Vが存在する。今、$\{B_{Xi}\}_{i=1,\cdots,n,\cdots}$は$X$の可算基であるため、ある$B_{Xi}$に対して、

$$x \in B_{Xi} \subset U \quad \cdots ②$$

が成り立つ。yについても同様に、あるB_{Yj}に対して、

$$y \in B_{Yj} \subset V \quad \cdots ③$$

が成り立つ。したがって、①②③より、

$$(x, y) \in B_{x_i} \times B_{y_j} \subset U \times V \subset W$$

であるため、族 $\{B_{x_i} \times B_{y_j} \mid B_{x_i} \in \mathcal{B}_X, B_{Y_j} \in \mathcal{B}_Y\}$ が $X \times Y$ の可算基である。

以上より、(A2) を示した。

(A3)「第二可算な開部分空間 $\{U_i\}$ の可算和 である空間 $\bigcup_i U_i$ も第二可算であること を確認する」

countable union

(どこの開集合か不明?)

仮定より、各 U_i が第二可算空間であるため、各 U_i には可算基 $\mathcal{B}_i$

$$\mathcal{B}_i := \{B_{i1}, B_{i2}, \cdots\}$$

が存在する。また、可算和 U を $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ とおく。

各 U_i に対して開集合 $V_i \subset U_i$ を取ると、V_i は $\mathcal{B}_i$ の元の和として、

$$V_i := \bigcup_{j \in J_i} B_{ij} \quad \cdots ①$$

として表される。

また、可算基 $\mathcal{B}_i$ の和集合 $\mathcal{B}$ を、

$$\mathcal{B} := \bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i = \{B_{ij}\}_{\substack{i = 1, \cdots, n, \cdots \\ j = 1, \cdots, n, \cdots}} \quad \cdots ②$$

と定義する。

U 上の開集合 $V \subset U$ を取ると、V は V_i を用いて、

$^{c}U_i$

$$V := \bigcup_{i \in I} V_i = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J_i} B_{ij} \quad (\because ①)$$

と表される。②より $B_{ij} \in \mathcal{B}$ であるため、V は $\mathcal{B}$ の元の和として表される。

以上より、$\mathcal{B}$ は可算和 U の可算基であるため、$U = \bigcup_{i \in I} U_i$ は第二可算である。

(A3) を示した

(A1)〜(A3) より、第二可算空間は3つの性質を満たす。■

P21

Def (開被覆)

位相空間 S の開被覆 $\mathcal{C}$ とは、S の部分集合であり かつ 自身(開被覆)の和が S であるような開集合の集まりである。

Lindelöf

第二可算空間 S は、リンデレフ空間の性質を持っている。

→ S の任意の開被覆 $\mathcal{C}$ は可算な部分被覆を持つ。

P22

※ 特に、第二可算な多様体は連結成分が可算個しかないため、今後は多様体が第二可算であることを仮定する。

位相多様体 において、

第二可算 $\Longleftrightarrow$ リンデレフ空間 $\Longleftrightarrow$ σコンパクト

$\Longleftrightarrow$ パラコンパクト かつ 連結成分が可算個。