1

部分多様体とはめ込まれた部分多様体

$M = M^m,\ N = N^n$: C^∞ 級多様体 $(m \le n)$

$f : M \longrightarrow N$: C^∞ 級写像

Def f が はめ込み (immersion) $\Longleftrightarrow$ ${}^\forall p \in M$ に対して、微分写像 $df_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ が単射（線形写像）(←元々)

m が小さい → 単射は保証しない

f が 埋め込み (embedding) $\Longleftrightarrow$ f ははめ込みで $f : M \longrightarrow f(M)$: 同相写像 → 全単射

● 埋め込み $f : M \longrightarrow N$ に対して、その像 $S = f(M)\ (\subseteq N)$ を N の部分多様体 (submanifold) という

● はめ込みの像 $f(M)$ を はめ込まれた部分多様体 (immersed submanifold) という

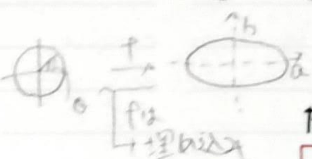
Ex $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$

$\iota : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$; $f(x,y,z) = (x,y,z)$ （包含写像）

$\overset{\text{よって}}{\Longrightarrow}$ ι : 埋め込み

↳ 自己交叉 無い

Ex) $f(\theta) = [a\cos\theta,\ b\sin\theta]$



f は埋め込み

＊単射かどうかの確認

$f'(\theta) = [-a\sin\theta,\ b\cos\theta]$

$\|f'(\theta)\|^2 = a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta > 0$ より

$f'(\theta) \neq 0$ ∴ df_p : 単射

$df : T_\theta S^1 \longrightarrow T_{f(\theta)}\mathbb{R}^2$

$d/d\theta \longmapsto f'(\theta)$

Prop C^∞ 級多様体 N の部分集合 S に対して

S が N の部分多様体

$\Longleftrightarrow$ ${}^\forall p \in S$ に対して $\begin{cases} {}^\exists U \subset S : p \text{ の }(S\text{ における})\text{開近傍} \\ {}^\exists D \subset \mathbb{R}^m : \text{開集合} \\ {}^\exists X : D \longrightarrow N : C^\infty\text{ 級写像} \end{cases}$

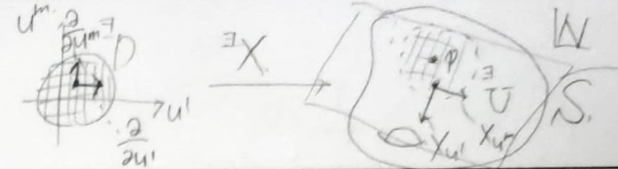
s.t. (i) $X : D \longrightarrow U$: 同相写像

(ii) ${}^\forall g \in D$ に対して $\{X_{u^1}(g), X_{u^2}(g), \dots, X_{u^m}(g)\}$ は1次独立 $(X_{u^i} := dX(\partial/\partial u^i))$

$\Longrightarrow$ 以前紹介した E^n の部分多様体の定義は今回のものと一致

＊ $N = E^n$ のとき、前回の submfd の定義と一致

2



$X_{u^1}, \dots, X_{u^m}$ が接平面を構成（一次独立）

Lem M : m 次元 C^∞ 級多様体

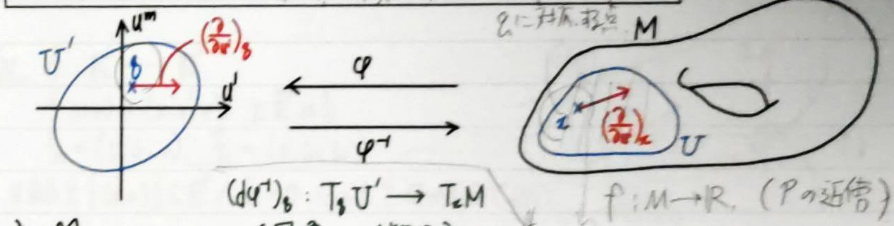
$(U, \varphi) = (U; u^1, \dots, u^m)$: 座標近傍 とする

${}^\forall g \in U' \ (:= \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m)$ に対して

$x := \varphi^{-1}(g) \in M$ とするとき、${}^\forall i = 1, \dots, m$ に対し

$$\boxed{(d\varphi^{-1})_g\left(\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_g\right) = \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_x} \quad (\in T_xM)$$

が成り立つ　$T_g(U')$, $T_x(M)$



$(d\varphi^{-1})_g : T_gU' \longrightarrow T_xM$ （写像の微分）

$f : M \to \mathbb{R}$ (P の近傍)

$f \circ \varphi^{-1} : U' \to \mathbb{R}$

証明

$\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_x \in T_xM$ は以下のように定義される：

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_x (f) := (f\circ\varphi^{-1})_{u^i}(g) = \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_g (f\circ\varphi^{-1})(u^1, \dots, u^m) \quad \left({}^\forall f : x \text{ の近傍で定義された } M \text{ 上の } C^\infty \text{ 級関数}\right)$$

$\varphi^{-1} : U' \longrightarrow M$ を多様体間の C^∞ 級写像とみなして

その微分 $(d\varphi^{-1})_g : T_gU' \longrightarrow T_xM$ は

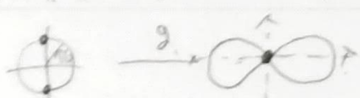
$$(d\varphi^{-1})_g(v)(f) := v(f\circ\varphi^{-1}) \quad \left({}^\forall f : x \text{ の近傍で定義された } M \text{ 上の } C^\infty \text{ 級関数}\right)$$

だったので $v = \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_g \in T_gU'$ とすると

$$(d\varphi^{-1})_g\left(\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_g\right)(f) = \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_g (f\circ\varphi^{-1}) \quad \left({}^\forall f : x \text{ の近傍で定義された } M \text{ 上の } C^\infty \text{ 級関数}\right)$$

したがって $(d\varphi^{-1})_g\left(\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_g\right) = \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_x \ (\in T_xM)$ が成り立つ //

Ex2) $g(\theta) = (\cos\theta,\ \cos\theta\sin\theta)$



はめ込みだが、単射ではない

3

Propの証明

$\forall p \in S = f(M)$ に対し、 $\bar{p} := f^{-1}(p)$ とおく　　$f^{-1}: N \longrightarrow M$ （fの逆写像）

M の $\bar{p}$ のまわりの座標近傍 $(V, \varphi = (u^1, \dots, u^m))$ をとり

$$\begin{cases} U := f(V) \\ D := \varphi(V) \\ X := f \circ \varphi^{-1} : D \longrightarrow N \end{cases}$$

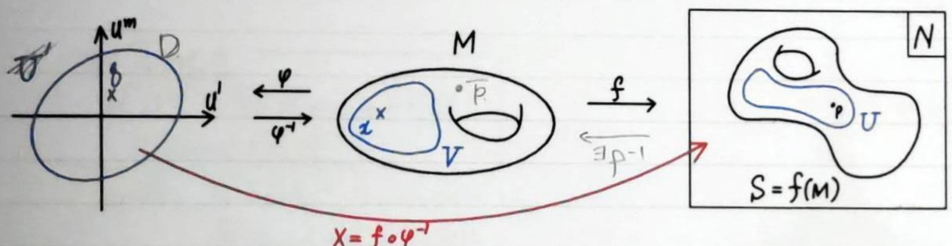
と定める

$f: M \to N$ 埋め込み
（df_p が単射、f が同相写像）

$f^{-1}: S \to M$　（$S = f(M)$）

$X^{-1} := \varphi \circ f^{-1} : U \longrightarrow D$ は 連続写像で

$X: D \longrightarrow U$ の逆写像なので $X: D \longrightarrow U$ は同相写像



$\forall q \in D$ に対し、 $x \in M$ を $x := \varphi^{-1}(q)$ とおくと　　Lem より

$$X_{u^i}(q) = dX_q\left(\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_q\right) = (df)_x\left((d\varphi^{-1})_q\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_q\right) = (df)_x\left(\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_x\right)$$

$a_1 X_{u^1}(q) + \cdots + a_m X_{u^m}(q) = 0$ （$a_i \in \mathbb{R}$）とすると

$$a_1 (df)_x\left(\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right)_x\right) + \cdots + a_m (df)_x\left(\left(\frac{\partial}{\partial u^m}\right)_x\right) = 0$$　df でくくる

$$\therefore (df)_x\left(a_1\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right)_x + \cdots + a_m\left(\frac{\partial}{\partial u^m}\right)_x\right) = 0$$

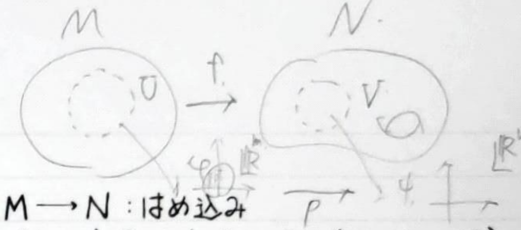
$$\therefore a_1\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right)_x + \cdots + a_m\left(\frac{\partial}{\partial u^m}\right)_x \in \mathrm{Ker}(df)_x$$

$(df)_x : T_xM \longrightarrow T_{f(x)}N$ ：単射より $\mathrm{Ker}(df)_x = \{0\}$

$$\therefore a_1\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right)_x + \cdots + a_m\left(\frac{\partial}{\partial u^m}\right)_x = 0$$　$T_x(M) = \mathrm{Span}\left(\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right)_x, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial u^m}\right)_x\right)$

$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right)_x, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial u^m}\right)_x\right\}$ ：1次独立より $a_1 = \cdots = a_m = 0$ //

4



Lem

$f: M \longrightarrow N$ ：はめ込み

$\iff \begin{cases} M\text{の座標近傍 } (U, \varphi) = (U; u^1, \dots, u^m) \\ N\text{の座標近傍 } (V, \psi) = (V; v^1, \dots, v^n) \end{cases}$

に対して、 $p := \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \underset{\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m}{\underset{\shortparallel}{D}} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

とおくとき $\left\{\frac{\partial p}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial p}{\partial u^m}\right\}$ が D の各点で1次独立

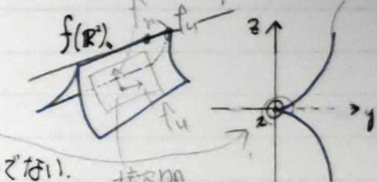
Ex　$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$f(u, v) = (u, v^2, v^3)$ と定める

$f_u = (1, 0, 0)$, $f_v = (0, 2v, 3v^2)$

u軸上 $\{(u, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ で $f_v = 0$ なので f：はめ込みでない.

はめ込みでない点
：特異点

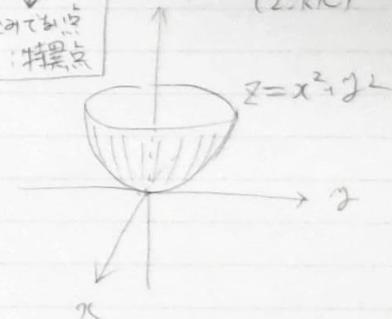


Ex　はめ込みの例

$f(u, v) := (u, v, u^2 + v^2)$

$f_u = (1, 0, 2u)$

$f_v = (0, 1, 2v)$



f_u, f_v が一次独立 $\iff f_u \times f_v \neq 0$

$(f_u \times f_v = (-2u, -2v, 1) \neq (0, 0, 0))$

$\therefore f$ は はめ込み

等長埋め込み

これ以降、(N, h) リーマン多様体 とする

C^∞級写像 $f: M \longrightarrow N$ に対し　内積とってる
M上の$(0,2)$-テンソル f^*h を次のように定める:

$$\boxed{(f^*h)_p(v,w) := h_{f(p)}(df_p(v), df_p(w))} \quad \begin{pmatrix} \forall p \in M \\ \forall v, w \in T_pM \end{pmatrix}$$

f^*h はなめらかな対称$(0,2)$-テンソルだが、正定値とは限らない

Lem $\boxed{①\ f^*h \text{ がリーマン計量} \iff ②\ f: \text{はめ込み}}$

(proof) $(f^*h)_p(v,v) = h_{f(p)}(df_p(v), df_p(v)) \geq 0$

- $(f^*h)_p(v,v) = 0$ （⟹ $v=0$ を示す）
  $\iff h_{f(p)}(df_p(v), df_p(v)) = 0$
  $\iff df_p(v) = 0$ （∵ hの正定値性） ⟹ $v \in \ker(df)$
- f^*h がリーマン計量 $\iff$
  $(f^*h)_p(v,v) = 0$ ならば $v = 0$

より、f^*h がリーマン計量 $\iff$ df_p: 単射 ▨

$g: T_p(M) \times T_p(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ が
「正定値」 $\iff g(v,v) > 0$
$(\forall v \in T_p(M) \setminus \{0\})$

f^*h を h と f による誘導計量 もしくは f の第一基本形式 という

Def $(M,g), (N,h)$: リーマン多様体
埋め込み $f: M \longrightarrow N$ が 等長埋め込み (isometric embedding)
$\iff g = f^*h$ & fが埋め込み

※ f: はめ込みのとき 等長はめ込み (isometric immersion)

$\mathbb{E}^3$の曲面（$\mathbb{E}^n$の部分多様体）
を一般化してリーマン多様体の概念が生まれた
つまり $\mathbb{E}^n$の部分多様体は（誘導計量を備えた）リーマン多様体である

問 すべてのリーマン多様体は $\mathbb{E}^n$ の部分多様体として実現できるか?
（言い換え: すべてのリーマン多様体は $\mathbb{E}^n$ に等長埋め込み可能か?）

f "=" $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i$ → Taylor 級数が元の f と一致 $\iff$ fは実解析的

Taylor展開可能 → C^∞級

$1+2+\cdots+m = \frac{m(m+1)}{2}$

局所的な場合

Janet-Cartanの定理 (1926, 1927)

> 実解析的な m次元リーマン多様体は
> 局所的に $\mathbb{E}^{\frac{1}{2}m(m+1)}$ に等長埋め込み可能

（つまり、(M,g): 実解析的な m次元リーマン多様体
$\Longrightarrow \forall p \in M$ に対して、$\exists U$: pの近傍
$\exists f: U \longrightarrow \mathbb{E}^{\frac{1}{2}m(m+1)}$: 等長埋め込み）

$m=2$代入

- $m=2$のとき (M^2, g): 実解析的
  $\Longrightarrow$ 局所的に $\mathbb{E}^3$ に等長的に埋め込み可能
- (M^2, g): C^∞級, $K \neq 0$ （ガウス曲率）
  $\Longrightarrow$ 局所的に $\mathbb{E}^3$ に等長的に埋め込み可能 (Hartman-Nirenberg, 1951)
- (M^2, g): C^∞級, $K = 0$, $dK \neq 0$ （ガウス曲率の外微分）
  $\Longrightarrow$ 局所的に $\mathbb{E}^3$ に等長的に埋め込み可能 (Lin, 1985)
- 一方、Pogorelov (1971):
  $\exists g$: $C^{2,1}$級リーマン計量 ／ $C^{2,1}$級: 2階微分がリプシッツ連続
  st (M^2, g)は $\mathbb{E}^3$ への局所等長埋め込みを持たない.

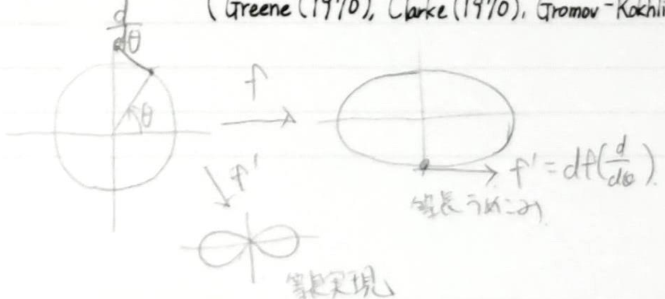
★ C^∞級リーマン計量でそのような例が作れるかは未解決

大域的な場合

J. Nash (1956)

> m次元 C^∞級リーマン多様体 (M,g) は
> - $\mathbb{E}^{\frac{1}{2}m(3m+11)}$ へ等長埋め込み可能（M: コンパクトの場合）
> - $\mathbb{E}^{\frac{1}{2}m(m+1)(3m+11)}$ へ等長埋め込み可能（M: 非コンパクトの場合）

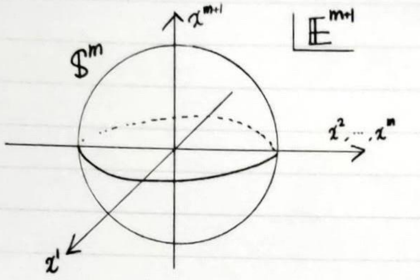
- $\mathbb{E}^n$の次元の評価は、その後、大幅に改良（次元を落としていく）
  (Greene (1970), Clarke (1970), Gromov-Rokhlin (1970), Günther (1991) 等)



双曲空間 $\mathbb{H}^m$ の等長埋め込み

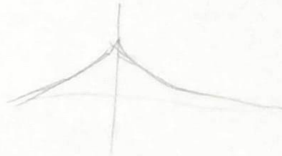
$\mathbb{E}^m, \mathbb{S}^m, \mathbb{H}^m$：単連結空間型

・$\mathbb{S}^m$：$\mathbb{E}^{m+1}$ の超曲面として等長的に実現



問 $\mathbb{H}^m$ も $\mathbb{E}^{m+1}$ の超曲面として等長的に実現か？

答 No (Hilbert (1901), $m=2$
Smyth-Xavier (1987))

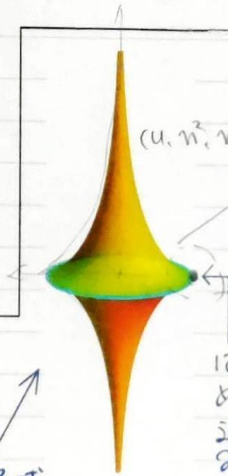


m=2のとき

$\mathbb{H}^2$ は $\mathbb{E}^3$ に等長埋め込み不可能（Hilbertの定理）

言い換え $\mathbb{E}^3$ の曲面で $K\equiv -1$ かつ完備なものは存在しない

see 定図



はめ込みでない

（特異点）

一方、Janet-Cartan の定理より、
$\mathbb{H}^2$ は $\mathbb{E}^3$ に局所的には等長埋め込み可能

Bertrami の擬球
（$\mathbb{E}^3$ の $K\equiv -1$ の回転面）

Rozendorn, 1960

$\mathbb{H}^2$ は $\mathbb{E}^5$ に等長埋め込み可能！

(1957) Nash $\Rightarrow$ $\mathbb{H}^2$ は $\mathbb{E}^{3\cdot 17}$
″ $\mathbb{E}^{51}$

★ $\mathbb{H}^2$ が $\mathbb{E}^4$ に等長埋め込み可能かどうかは未解決