10/18.

・Chern-Lashof の定理.

(文字) M^n … n次元、向き付き、コンパクト mfd

$f : M^n \to R^{n+r}$ … immersion (はめ込み)

$p \in M$、$B_p := \{ u \in T_p^{\perp}(M) \mid \|u\| = 1 \}$

$B := \bigcup_{p \in M} B_p$ (fの単位法バンドル)

$\hat{\xi} \in \Gamma(B)$、 (D … ユークリッド空間上の接続)

$D_X(\hat{\xi}) := -df(A_{\hat{\xi}} X) + D_X^{\perp}(\hat{\xi})$ $(X \in \mathfrak{X}(M))$

$\xi \in B_p$ ∴ $A_{\xi} : T_p(M) \to T_p(M)$

$G(p, \xi) := \det(A_{\xi})$

リプシッツ キリング曲率

Ex

$r=1$ G … ~~☆~~ ガウス・クロネッカー曲率

~~$r=2$~~

$r=1$、$n=2$ G … ガウス曲率

fの絶対全曲率 $\tau(M, f) := \dfrac{1}{\mathrm{Vol}(S^{n+r-1})} \int_B |G| \, d\mu_B$

$d\mu_B$ … Bの体積要素

チャーン・ラッシュの定理 (1)〜(3)

等号の必要十分条件は?
(決まっていない)

(1) $\tau(M, f) \geq \sum_{i=0}^{n} b_i(M)$.

b_i … ベッチ数.

(2) $\tau(M, f) < 3$

$\Longrightarrow M \cong S^n$ (S^nと位相同型) NOT diffeo.

(3) $\tau(M, f) = 2$ $\Longleftrightarrow$ $f(M)$ が凸な超曲面 ((n+1)次元アファイン部分空間の埋め込み)

Min

τのイメージ：凸凹の度合い

（フェンセルの定理の一般化）

参考

リーマン多様体へのはめ込み

$f: M^n \to (N, g)$ 　 ($K \le 0$) 　 chen (1967)

($K = 0$) 　 chen (1970)

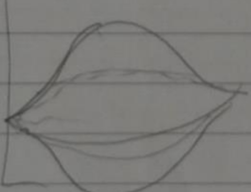
$\mathbb{R}^{n+1}_1$ (Izumiya 2014) 　 $\leftarrow CP^{n+r}$ (?)

CP^n (Hoisington 2022)

$f: M^2 \to \mathbb{R}^3$ — wave front (波面)

(Kossowski - Scherfner 2005)

$$\tau(M,f) := \frac{1}{2\pi}\int_M \underset{\text{ガウス曲率}}{|K|}\, dA + \frac{1}{\pi}\int_{\Sigma_f} |\kappa|\, ds$$



$$\tau(M,f) \ge b_0 + b_1 + b_2$$

残りの疑問点

☆ wave front → frontal ?

・ $f: M^2 \to \mathbb{R}^3 \to f: M^n \to \mathbb{R}^{n+r}$?

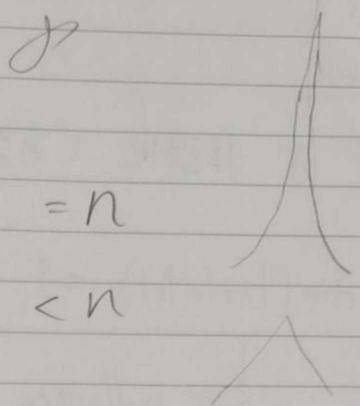
・ $\tau(M,f) = 2 \to$ 凸 ?

§2 frontal

(記号) $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+r}$

(Def) $p \in M$ が正則点 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\operatorname{rank}(df)_p = n$

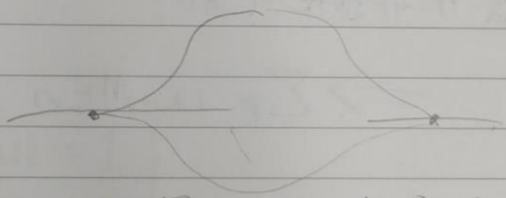
〃 特異点 $\iff$ $\operatorname{rank}(df)_p < n$



$f : M^n \to \mathbb{R}^{n+r}$ が frontal である

$\iff$ $\forall p \in M$, $\exists p \in U$, $\exists \Pi : U \to \widetilde{Gr}(n, n+r)$

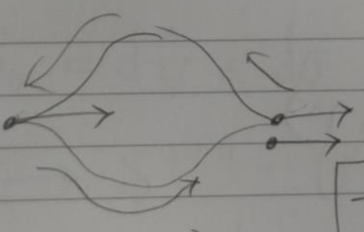
$df_q(X) \in \Pi(q)$ $(q \in U,\ X \in T_q(M))$



(Π … 一般化されたガウス写像) (特異点で接線が一致する?)

f が余向付け可能な frontal

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\Pi : M \to \widetilde{Gr}(n, n+r)$



ベクトルの向きが変わらない。

$\boxed{\text{一週しても}}$

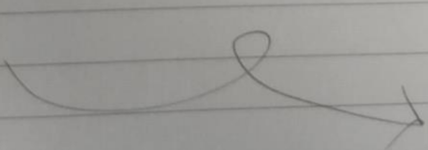
$(U ; u_1, \cdots, u_n)$

$$\lambda := \det\Big(\frac{\partial f}{\partial u^1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial u^n}, \underbrace{E_1, \cdots, E_r}_{\Pi^{\perp}\text{上の正規直交フレーム}}\Big)$$

(signed) 符号付き体積密度関数

・特異点 $p \in U$ が非退化である

$\iff$ $(d\lambda)_p \neq 0$



$\partial \searrow$

Lemma

p が非退化である $\Longrightarrow$ $\mathrm{rank}(df)_p = n-1$.

$\left(\underbrace{\dim(\ker(df_p))}_{\text{nullspace という.}} = 1. \right)$

$\Sigma_f :=$ f の特異集合とする.

「全ての特異点が非退化である」

$\Longrightarrow$ Σ_p は M 上の超曲面

Def

$p \in \Sigma_f$ … 非退化

p が第1種特異点 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\ker(df)_p \not\subset T_p(\Sigma_p)$

p が第2種特異点 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\ker(df)_p \subset T_p(\Sigma_p)$

Example

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 ; (u, v) \mapsto (u^2, u^3, v)$

$f_u = (2u, 3u^2, 0)$

$f_v = (0, 0, 1)$

$f_u|_{u=0} = 0$ なので $\Sigma_f = \{u=0\}$.

$T_p(\Sigma_f) = \mathrm{span}\{(\partial_v)_p\}$

C_f … 第2種 特異点 の集合.

~~証明~~

<u>Def</u> (Admissible frontal).

$f : M^n \to \mathbb{R}^{n+r}$ が admissible である.

$\Longleftrightarrow$
- 全ての特異点 が 非退化 である.
- ${}^\exists H$ … Σ_p の超曲面 ($\neq \Sigma_f$). s.t. $C_f \subseteq H$

$B_p = \{ u \in \Pi^{\perp} \mid \|u\| = 1 \}$

$d\hat{V} = \lambda\, du_1 \wedge du_2 \cdots \wedge du_n$

$dV = |\lambda|\, du_1 \wedge du_2 \wedge \cdots \wedge du_n$

$V \quad \sigma$

$V \quad V$

B のファイバー の 体積要素.

$d\sigma$

$d\hat{u}_B = d\hat{V} \wedge d\sigma$, $du_B = dV \wedge d\sigma$

$V : B \longrightarrow S^{n+r-1} ; (p, \xi) \longmapsto \xi$

canonical なガウス写像.

<u>Proposition</u>

$V^* du_{S^{n+r-1}} = (-1)^n G(p, \nu)\, d\hat{u}_B$

$|G(p, \xi)|\, du_B$ は B 上で 連続 となる.

φ γp κ κh f t frontal

$f: M^n \to \mathbb{R}^{n+r}$ --- addmissible frontal

$\bar{f} = f|_{\Sigma_f}$ $\qquad \bar{\pi}(p) = df_p(T_p(M))$

$\bar{\pi}: \Sigma_f \to G_r(n-1, n+r)$

$\bar{B}$、$\bar{G}$を、それぞれ$\bar{f}$に対するB、Gを表すとする

Def (絶対全曲率)

$$\tau(M, f) := \frac{1}{\mathrm{Vol}(S^{n+r-1})} \int_B |G| \, d\mu_B$$

Theorem (A)

(1) $\tau(M, f) \geq \sum_{i=0}^{n} b_i(M)$

(2) $\tau(M, f) < 3$ 、$M \cong S^n$ $\boxed{n+1 \text{ 次元}}$

(3) $\tau(M, f) = 2 \implies f(M)$はアフィン部分空間の部分集合

Theorem (B)

$\Sigma_f \neq \phi$、全ての特異点は第1種特異点とする

$\tau(M, f) = 2 \iff$
- $f(M)$ は n次元アフィン部分空間の閉じた凸領域
- $M \cong S^n$、$\Sigma_f \cong S^{n-1}$
- $f(\Sigma_f) = \partial f(M)$

(φ)

21

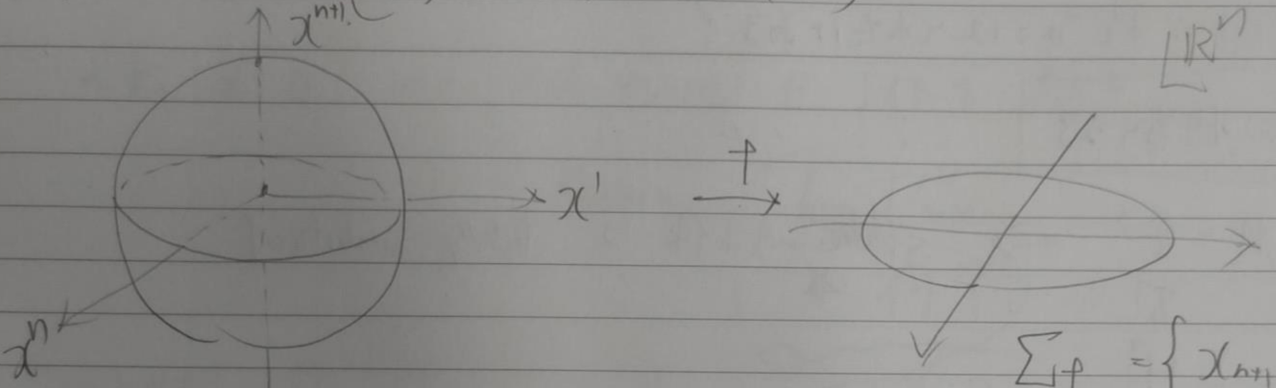
Uchimura

Example

$f: S^n \to \mathbb{R}^n,$

つぶす、

$f(x^1, \cdots, x^n, x^{n+1}) = (x^1, \cdots, x^n)$



$\Sigma_f = \{ x_{n+1} = 0 \}$

$\tau(M, f) = 3$ の場合の例も分からない〜

(例 $\tau(M, f) = 4$ の例 ⇒ 回転トーラス)