火2 数理キカ ⑨

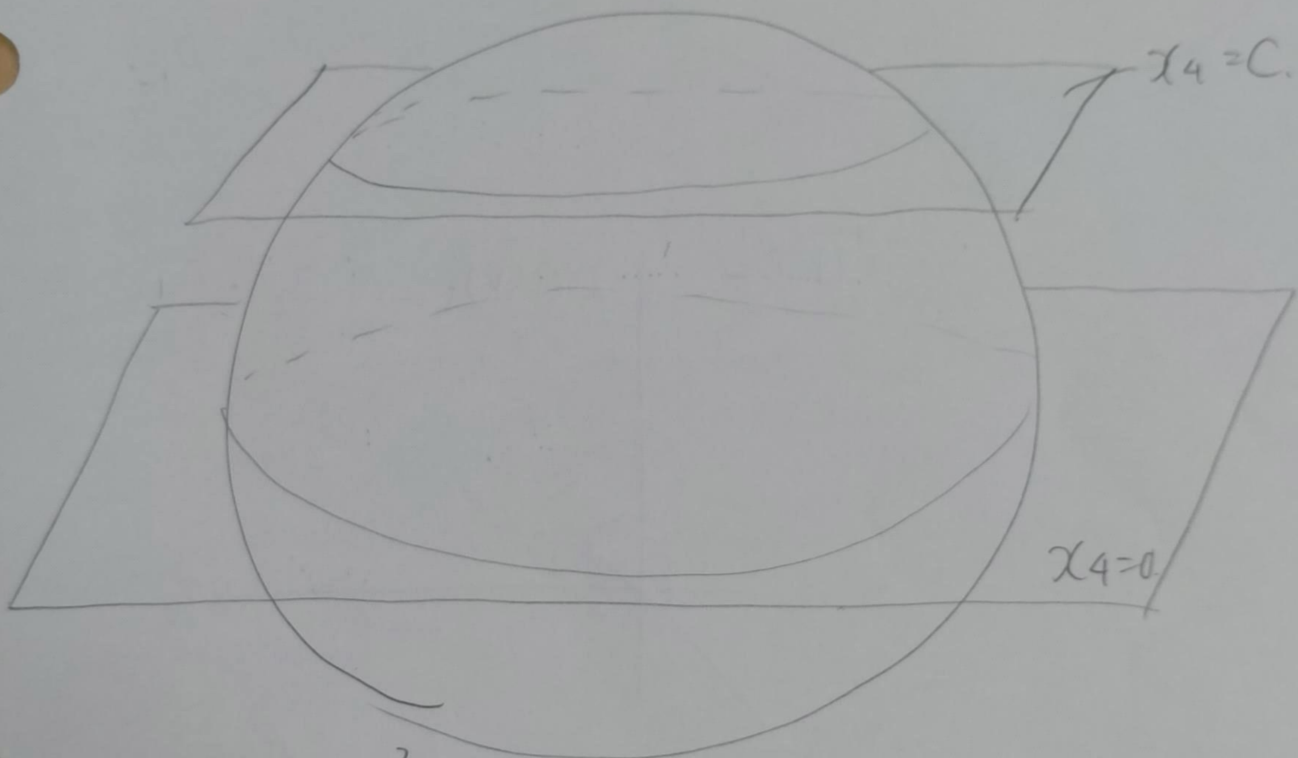
Lawson 対応

Example

$S^3 \cap \{x_4 = c\}$.

$c = 0$: 大球面

$c \neq 0$: 小球面

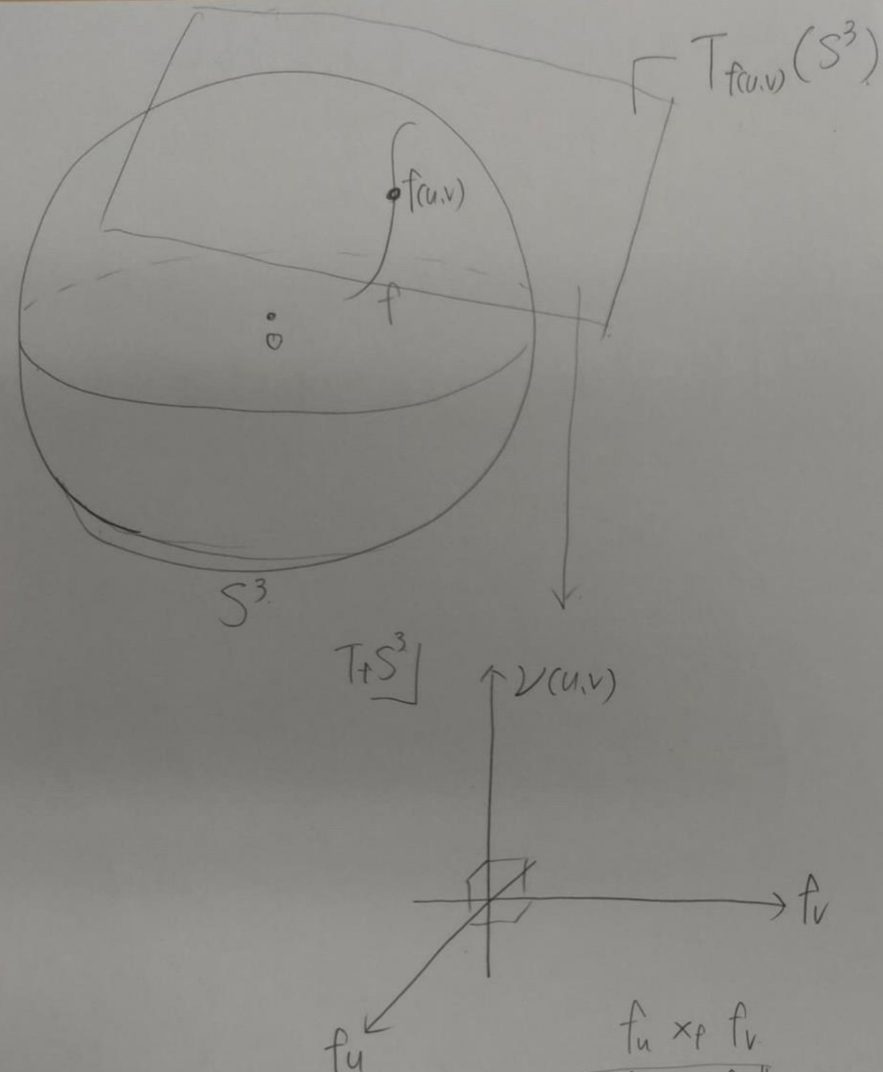


$$K_{ext} = \frac{c^2}{1-c^2}$$

(実は, $K_{ext} + 1 = K_I$)

$$H = -\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}$$

$$K_I = \frac{1}{1-c^2}$$



$\dfrac{f_u \times_f f_v}{\|f_u \times_f f_v\|}$

各$(u,v) \in D$において

$\underbrace{\mathcal{F} := \{ f(u,v),\ f_u(u,v),\ f_v(u,v),\ \nu(u,v) \}}$ は$\mathbb{R}^4$の基底である

$$\det \mathcal{F} = \frac{1}{\|f_u \times_f f_v\|} \det(f, f_u, f_v, f_u \times_f f_v)$$ スカラー三重積

$$= \quad 〃 \quad (f_u \times_f f_v) \cdot (f_u \times_f f_v)$$

$$= \|f_u \times_f f_v\| > 0$$

$$\left(= \sqrt{EG - F^2} > 0 \right)$$

とくに、$\mathcal{F} : D \longrightarrow GL_4(\mathbb{R})$ を定める

この$\mathcal{F}$をガウス枠という。

曲面の曲がり具合 $=$ $\mathcal{F}$の変化率

$(\mathcal{F}_u, \mathcal{F}_v)$

$$\mathcal{F}_u = (f_u, \underset{\sim}{f_{uu}}, f_{vu}, \underset{\sim}{\nu_u})$$ …… 未知

$$\mathcal{F}_v = (f_v, f_{uv}, \underset{\sim}{f_{vv}}, \underset{\sim}{\nu_v})$$

f_{uu}, f_{vv}, f_{uv}
ν_u, ν_v の5つ

Lemma 2.31 (ガウスワインガルテン公式) S^3 ver

S^3特有の項

$$f_{uu} = \underset{\sim}{-Ef} + \Gamma_{11}^1 f_u + \Gamma_{11}^2 f_v + L\nu$$

$$f_{uv} = \underset{\sim}{-Ff} + \Gamma_{12}^1 f_u + \Gamma_{12}^2 f_v + M\nu$$

$$f_{vv} = \underset{\sim}{-Gf} + \Gamma_{22}^1 f_u + \Gamma_{22}^2 f_v + N\nu$$

$$\nu_u = -A_1^1 f_u - A_1^2 f_v$$

$$\nu_v = -A_2^1 - A_2^2 f_v.$$

Proof の概略

$f_{uu} = {}^{\exists}a f + {}^{\exists}b f_u + {}^{\exists}c f_v + {}^{\exists}d \nu$ と表せる

↓ 両辺を f と内積させる

$$f_{uu}\cdot f = \langle af, f\rangle = a$$

$$f_{uu}\cdot f = (f\cdot f_u)_u - f_u\cdot f_u = -E$$

($f\cdot f_u = 0$)

$\therefore a = -E$

b, c, d も同様に、内積で値が求まる。

$$\mathcal{F}_u = (f_u, f_{uu}, f_{uv}, \nu_u) = \underbrace{(f, f_u, f_v, \nu)}_{=\mathcal{F}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -E & -F & 0 \\ 1 & +\Gamma^1_{11} & +\Gamma^1_{12} & -A^1_1 \\ 0 & +\Gamma^2_{11} & +\Gamma^2_{12} & -A^2_1 \\ 0 & L & M & 0 \end{bmatrix}}_{=\mathcal{U}}$$

($f_{uu} = af + bf_u + cf_v + d\nu$)

$\mathcal{U}$ とおく。

$\therefore \mathcal{F}_u = \mathcal{F}\mathcal{U}$. 同様に、$\mathcal{F}_v = \mathcal{F}\mathcal{V}$. (← ガウス・ワインガルテン公式)

$F_v U + F U_v = F_u V + F V_u$

命題 2.3.3 (S^3 版のガウスコダッチ方程式)

$$\mathcal{F}_{uv} = \mathcal{F}_{vu} \iff (\mathcal{F}\mathcal{U})_v = (\mathcal{F}\mathcal{V})_u$$

($\mathcal{F}_v = \mathcal{F}\mathcal{V}$, $\mathcal{F}_u = \mathcal{F}\mathcal{U}$ 代入)

$$\iff \mathcal{F}(\mathcal{U}_v - \mathcal{V}_u) = \mathcal{F}(\mathcal{U}\mathcal{V} - \mathcal{V}\mathcal{U})$$

$$\iff \mathcal{U}_v - \mathcal{V}_u = \mathcal{U}\mathcal{V} - \mathcal{V}\mathcal{U}$$

(16本の等式)

$$\iff \begin{cases} L_v - M_u = L\Gamma^1_{12} + M(\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}) - N\Gamma^2_{11} \\ M_v - N_u = L\Gamma^1_{22} + M(\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}) - N\Gamma^2_{12} \\ K_I = K_{ext} + 1 \end{cases}$$

プリント参照

コダッチ方程式

ガウス方程式

(3本の等式)

定理 2.3.4 (S^3 の曲面に対する曲面論の基本定理)

D: $\mathbb{R}^2$ の単連結領域

E, F, G, L, M, N : D 上 C^∞ 級関数

(i) $E, G > 0$, $EG - F^2 > 0$

(ii) ガウスコダッチ方程式をみたす

$\Longrightarrow {}^{\exists} f : D \longrightarrow S^3$: 曲面 s.t.

- f の第一基本形式 $= E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$
- f の第二 〃 $= L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$

◦ S^3 の CMC 曲面

(u,v)：等温座標系　$(E=G,\ F=0)$

$$K_I = -\frac{1}{2E}\Delta(\ln E)$$

$$K_{ext} = \frac{\cancel{LN-N^2}\ LN-M^2}{EG-F^2} = \frac{LN-M^2}{E^2}$$

$$H = \frac{EN+GL-2FM}{2(EG-F^2)} = \frac{L+N}{2E}$$

Hopf 微分 $q := \dfrac{L-N-2iM}{4}$

$\to Q := q\,dz^2$

命題 2.3.6

$I = E\,dz\,d\bar{z}$, $II = Q + \overline{Q} + H\cdot I$

（ガウス）：$(\ln E)_{z\bar{z}} = -\dfrac{E}{2}(H^2+1) + \dfrac{2}{E}|q|^2$

（コダッチ）：$2q_{\bar{z}} = EH_z$　　S^3 特有

$\therefore X:\Sigma \to S^3$: CMC 曲面 である

$\Longleftrightarrow Q$：正則 2次微分
holomorphic

系 2.3.9（S^3 の CMC 曲面に対する基本定理）

D：$\mathbb{C}$ の単連結領域
E：D 上の C^∞ 級関数（$E>0$）
q：D 上の 正則関数（← コダッチ方程式が解けている）
H：実数の定数　　とする.

ガウス方程式が成立

$\Longrightarrow \exists f: D \to S^3$: CMC 曲面 s.t.

$$\begin{cases} \cdot\ f\text{の第一基本形式} = E\,dz\,d\bar{z} \\ \cdot\ f\text{の第二} \quad 〃 \quad = Q + \overline{Q} + H\cdot I \end{cases}$$

$\mathbb{R}^3$ の CMC 曲面

$\tilde{I} = \tilde{E}\,dz\,d\bar{z}$, $\tilde{II} = \tilde{Q} + \overline{\tilde{Q}} + \tilde{H}\cdot\tilde{I}$

（ガウス方程式）：$(\ln\tilde{E})_{z\bar{z}} = -\dfrac{\tilde{E}}{2}\tilde{H}^2 + \dfrac{2}{\tilde{E}}|q|^2$

S^3 と異なる部分
$(S^3: H^2+1)$

(E, q, H)：S^3 の CMC 曲面 のデータ.
$(\tilde{E}, q, \tilde{H})$：$\mathbb{R}^3$ の　　〃

$(S^3$ のガウス方程式$)$: $(\ln E)_{z\bar{z}} = -\frac{E}{2}\underbrace{(H^2+1)}_{=\tilde{H}^2} + \frac{2}{E}|Q|^2$

$(\tilde{E}, \tilde{Q}, \tilde{H}) := (E, Q, \sqrt{H^2+1})$ とすると、$\mathbb{R}^3$ のガウス方程式を満たす。

$\Longrightarrow \exists \tilde{f} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$: CMC曲面 s.t.

$\tilde{I} = I$

$\tilde{II} = Q + \bar{Q} + \tilde{H} I$.

定理 2.3.12 (Lawson 対応)

$f : D \longrightarrow \cancel{\mathbb{R}^3}\ S^3$

(1) S^3 の CMC-H 曲面に対して、$\tilde{H} := \sqrt{H^2+1}$ とおくとき、

$\exists \tilde{f} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ の CMC-$\tilde{H}$ 曲面 s.t.

f と $\tilde{f}$ は同じ「第一基本形式」と「Hopf 微分」を持つ。 ☆

等長的

(2) $\mathbb{R}^3$ の CMC-H 曲面 $(|H| > 1)$ $f : D \to \mathbb{R}^3$ に対して、

$\tilde{H} := \sqrt{H^2-1}$ とおくと、

$\exists \tilde{f} : D \to S^3$ ~~の~~ の CMC-$\tilde{H}$ 曲面 s.t.

f と $\tilde{f}$ は同じ ☆.

・S^3 の全臍的曲面 (totally umbilical surface)

$f : \Sigma \longrightarrow S^3$: 曲面

$p \in \Sigma$: 臍点 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\lambda_1(p) = \lambda_2(p)$

$\left(K_{ext} = \lambda_1\lambda_2,\ H = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} \right)$ λ_1, λ_2 は

$\lambda^2 - 2H\lambda + K_{ext} = 0$ の解

$(\lambda_1, \lambda_2 = H \pm \sqrt{H^2 - K_{ext}})$

p : 臍点 $\Longleftrightarrow$ $H(p)^2 = K_{ext}(p)$

Example 2.2.12 (S^3 の球面)

$S^3 \cap \{x_4 = c\}$ $(-1 < c < 1)$

$$\begin{cases} K_{ext} = \dfrac{c^2}{1-c^2} \\ H = \dfrac{-c}{\sqrt{1-c^2}} \end{cases} \quad \therefore H^2 \equiv K_{ext} \text{ (全て臍点)}$$

定理 2.2.14

S^3 の全臍的曲面は、S^3 の球面の一部。

(と合同)