火2 数理キ何 ③

①

- 等温 における ガウスコダッチ
- Hopf ビ分 の 正則性

(u, v) が 等温座標系 である.

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} E = G \\ F = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \\ &= E(du^2 + dv^2) \\ &= E\,dz\,d\bar{z} \end{aligned}$$

Proposition 13　(前回 の 復習)

(u, v) : 等温座標系 のとき.

$$\mathrm{I} = E\,dz\,d\bar{z}$$

$$\mathrm{II} = Q + \overline{Q} + H \cdot \mathrm{I} \qquad \left(\begin{array}{l} H : \text{平均曲率} \\ Q = q\,dz^2 \\ \quad : \text{Hopf ビ分} \end{array} \right)$$

(~~Gauss~~ コダッチ 方程式)　$2 q_{\bar{z}} = E H_z$

(ガウス は)　$(\ln E)_{z\bar{z}} = -\frac{E}{2} H^2 + \frac{2}{E} |q|^2$

ここで.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right) \end{cases}$$

とする.

$$\Rightarrow \{ dz = du + i\,dv,\ d\bar{z} = du - i\,dv \}$$

は $\left\{ \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right\}$ の双対基底である (Def 11)

$$\left(\xrightarrow{*} \quad du = \frac{dz + d\bar{z}}{2}, \quad dv = \frac{dz - d\bar{z}}{2i} \right)$$

(Proposition 13 の proof, II について)

$$\mathrm{II} = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

* 代入

$$= L\,\frac{dz^2 + 2dz\,d\bar{z} + d\bar{z}^2}{4} + 2M\,\frac{dz^2 - d\bar{z}^2}{4i} + N\,\frac{dz^2 - 2dz\,d\bar{z} + d\bar{z}^2}{-4}$$

dz^2, $d\bar{z}^2$ でくくる.

$$= \underbrace{\frac{L-N-2iM}{4}}_{\varphi} dz^2 + \underbrace{\frac{L-N+2iM}{4}}_{\bar{\varphi}} d\bar{z}^2 + \underbrace{\frac{L+N}{2E}}_{H} \cdot \underbrace{E\,\cancel{du}\,d\bar{z}}_{I}$$

dz

$$= Q + \bar{Q} + HI \quad // \quad \text{である.}$$

(※ dz^2, $d\bar{z}^2$, $dz\,d\bar{z}$ は正則な座標変換から不変である)

(次回)

・コダッチ方程式について

$$2\varphi_{\bar{z}} = \varphi_u + i\varphi_v$$

$$= \frac{1}{4}\left\{ (L_u - N_u - 2iM_v) + i(L_v - N_v - 2iM_u) \right\}$$

$$EH_z = \frac{1}{4}\left\{ L_u + N_u - 2E_uH + i(-L_v - N_v + 2E_vH) \right\}$$

なので: $2\varphi_{\bar{z}} = EH_z$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -N_u + M_v = -E_uH \\ L_v - M_u = E_vH \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$ コダッチ方程式である.

$\varphi = \frac{L-N-2iM}{4}$ より,

$|\varphi|^2 = \frac{(L-N)^2 + 4M^2}{16}$

Lemma 10

次が成立する: $4|\varphi|^2 = E^2(H^2 - K)$

$\because$ $H = \frac{L+N}{2E}$, $K = \frac{LN - M^2}{E^2}$ なので

$$E^2(H^2 - K) = E^2\left(\frac{(L+N)^2}{4E^2} - \frac{LN - M^2}{E^2} \right)$$

$$= \frac{1}{4}\left((L-N)^2 + 4M^2 \right) = 4|\varphi|^2 \text{ である } ▨$$

Gauss 方程式について

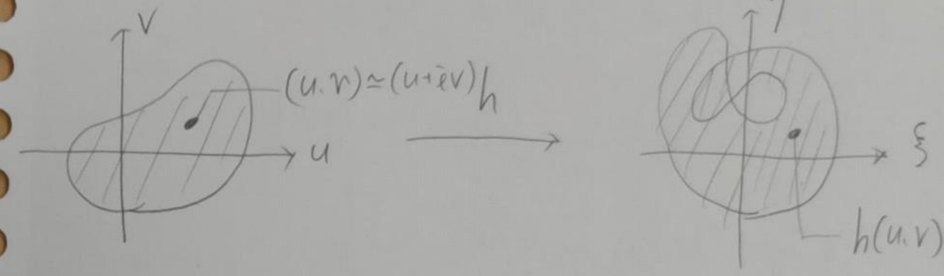
$$-\frac{\Delta(\ln E)}{2E} = K \quad (\text{Gauss 方程式})$$

$$\begin{cases} \cdot\ \Delta = \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^2 = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \\ \cdot\ (\text{Lemma 10 より})\quad K = H^2 - \frac{4}{E^2}|\phi|^2 \ \text{を代入する.} \end{cases}$$

$$\rightarrow -\frac{2(\ln E)_{z\bar{z}}}{E} = H^2 - \frac{4}{E^2}|\phi|^2.$$

正則関数

$$\mathbb{R}^2 \ni (X, Y) \xleftrightarrow{\text{同一視}} X + iY \in \mathbb{C}$$



$= (\xi(u,v) + \eta(u,v))$

$\cong \xi(u,v) + i\eta(u,v)$

関数 $w = h(z)$ は、$h(u,v) = (\xi(u,v), \eta(u,v))$ により、

$(h : D \longrightarrow \mathbb{C})$ 　写像 $h : \underset{\mathbb{R}^2}{\underset{\cap}{D}} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ と同一視

Def

関数 $w = h(z)$ が 正則関数 (holomorphic function) である

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \xi_u = \eta_v \\ \xi_v = -\eta_u \end{cases} \quad (\overset{C}{\text{コーシー}}-\overset{R}{\text{リーマン}} \text{ の 方程式})$$

Proposition 3

$w = h(z)$ が 正則 である $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{\partial h}{\partial \bar{z}} = 0$ である.

Proof

$$\frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(h_u + i h_v)$$ に $h = \xi + i\eta$ 代入

$$= \frac{1}{2}\{(\xi_u + i\eta_u) + i(\xi_v + i\eta_v)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{(\xi_u - \eta_v) + i(\xi_v + \eta_u)\}$$

$\therefore \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = 0 \iff$ (CR が成立つ)

Remark

$h(z)$ が正則 $\iff \left\{ \exists \lim_{z \to \alpha} \frac{h(z) - h(\alpha)}{z - \alpha} \ (= h'(\alpha)),\ \forall \alpha \in D \right.$ であり、$h'(\alpha)$ が連続

$\overset{\text{コーシーの積分定理}}{\Longrightarrow}$ h は C^∞ 級写像 (実は C^ω 級でもある)

各点ごとに Taylor 展開可能

Def

$Q = q\,dz^2$ が正則2次微分である

$\iff q$ が正則関数である

($q_{\bar{z}} = 0$)

Remark

$q_{\bar{z}} = 0$ という性質は、座標の取り方に依らない。

Theorem 4 Constant Mean Curvature

$f : D \to \mathbb{R}^2$ が平均曲率一定である

$\iff Q$ が正則である

($q_{\bar{z}} = 0$)

Proof

f : CMC の時、$H_u = H_v = 0$ である

$\therefore H_z = \frac{1}{2}(H_u - iH_v) = 0$

コダッチ方程式より、$2q_{\bar{z}} = E\underbrace{H_z}_{0} = 0$ である $\therefore Q$ は正則

逆に、$q_{\bar{z}} = 0$ の時、$H_z = 0$

$\iff H_u - iH_v = 0$ に 複素共役

$\iff H_u + iH_v = 0$

$\therefore H_u = 0,\ H_v = 0$ であるため、

CMC である ∎

Theorem 5 (曲面論の基本定理、等温座標 ver) (CMC ver.)

$$\begin{cases} \cdot\ D \subset \mathbb{C} : \text{単連結領域} \\ \cdot\ E, H : D \longrightarrow R : C^\infty\text{級}, E > 0 \\ \cdot\ q : D \longrightarrow \mathbb{C} : \quad〃 \end{cases}$$ とする

(q : 正則)

このとき、$\exists f : D \longrightarrow R^3$、パラメタ表示された曲面 (CMC曲面) s.t

$$(*) \begin{cases} f \text{ の第一基本形式が } \mathrm{I} = E\,dz\,d\bar{z} \\ f \text{ の第二基本形式が } \mathrm{II} = Q + \overline{Q} + H \cdot \mathrm{I} \quad (Q = q\,dz^2) \end{cases}$$

※ さらに、E, H, q は

$$\begin{cases} (\text{ガウス}) & (\ln E)_{z\bar{z}} = \dfrac{-E}{2}H^2 + \dfrac{2}{E}|q|^2 \\ (\text{コダッチ}) & 2q_{\bar{z}} = EH_z \end{cases}$$

を満たすとする。

↳ CMCのとき、不要

Corollary 6

D : $\mathbb{C}$ の単連結領域

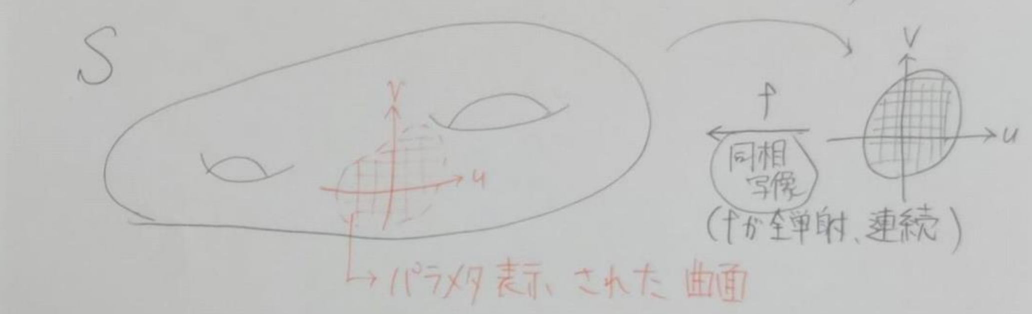
$$\begin{cases} \cdot\ E : D\text{上 } C^\infty\text{級}, E > 0. \\ \cdot\ q : D\text{上 正則関数} \\ \cdot\ H : \text{定数} \end{cases}$$ とする。 ($H \in \mathbb{R}$)

もし、(ガウス) が成立する

$\Longrightarrow \exists f : D \to \mathbb{R}^3$: CMC曲面 s.t. (*) を満た

⑤

曲面の定ギ



Def

S : $\mathbb{R}^3$ の部分集合とする (← 相対位相 により、$\mathbb{R}^3$ の部分位相 sp)

S が曲面である $\Longleftrightarrow$ $\forall p \in S$ に対して $\exists U$: p の開近傍
$\exists D$: $\mathbb{R}^2$ の領域
$\exists$ ☆

(☆ : $f : D \to \mathbb{R}^3$: パラメタ表示された曲面 s.t $f : D \to U$ が同相写像)

Def

$D, \tilde{D}$: $\mathbb{R}^2$ の領域

$\psi : D \to \tilde{D}$、$(u, v) \longmapsto \psi(u, v)$ に対し、

$$J := \begin{bmatrix} \xi_u & \xi_v \\ \eta_u & \eta_v \end{bmatrix}$$: ヤコビ行列

$|J|$: Jacobian という