先進数理科学 幾何

第 9 回

前回のおさらい

写像 $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ が以下の (D1), (D2), (D3) を満たすとき ∇ を**接続，共変微分**という．

(D1) $\nabla_{(fV+hW)}X = f\nabla_V X + h\nabla_W X$

(D2) $\nabla_V(aX + bY) = a\nabla_V X + b\nabla_W Y$

(D3) $\nabla_V(fZ) = (Vf)Z + \nabla_V Z$

接続：ベクトル場を微分するルール

接続 ∇ が**レビチビタ接続（リーマン接続）** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

(D4) $\nabla_V Z - \nabla_Z V = [V, Z]$

(D5) $X\langle V, W\rangle = \langle \nabla_X V, W\rangle + \langle V, \nabla_X W\rangle$

命題（Koszul の公式）

写像 ∇ がレビチビタ接続 $\Longleftrightarrow$

$$
\begin{aligned}
2\langle \nabla_V W, X\rangle = V\langle W, X\rangle + W\langle X, V\rangle - X\langle V, W\rangle \\
- \langle V, [W, X]\rangle + \langle W, [X, V]\rangle + \langle X, [V, W]\rangle
\end{aligned}
$$

定理

リーマン多様体 (M, g) 上には唯一つのレビチビタ接続が存在する.

- 前回は一意性のみを示していた．レビチビタ接続の存在性を示す際にも「Koszul の公式」を用いる.
- 証明のために，テンソル場の話を紹介.

加群上のテンソル

加群の直積

可換環 R に対して，s 個の R-加群 $K_1, \ldots K_s$ を考える．このとき集合 $K_1 \times \cdots \times K_s$ を

$$K_1 \times \cdots \times K_s := \{(v_1, \ldots, v_k) \,|\, v_j \in K_j \ (j = 1, \ldots, s)\}$$

と定めると R-加群である．

定義

$K_1 \times \cdots \times K_s$ を $K_1, \ldots, K_s$ の**直積**と呼ぶ．

$K_1 = \cdots = K_s \,(= K)$ のとき，

$$K_1 \times \cdots \times K_s \,(= K \times \cdots \times K) = K^s$$

と表す．

加群の線形写像

K, L を R-加群とする.

定義

写像 $f : K \to L$ が

$$\begin{aligned} f(v+w) &= f(v) + f(w) \\ f(rv) &= rf(v) \end{aligned} \qquad (\forall v, w \in K,\ r \in R)$$

を満たすとき，R-**線形写像**と呼ばれる.

とくに，$L = R$（係数環）のとき，
R-線形写像 $f : K \to R$ を R-**線形関数**と呼ぶ.

多重線形写像

$K_1, \dots K_s, L$ を R-加群とする.

定義

写像 $A : K_1 \times \cdots \times K_s \to L$ が R-**線形多重写像**であるとは,

- 各 $k \in \{1, \dots, s\}$ と,
- 各 $v_j \in K_j$ $(j = 1, \dots, s,\ j \neq k)$

を固定する毎に定まる写像

$$K_k \ni \boldsymbol{w} \longmapsto A(v_1, \dots, v_{k-1}, \boldsymbol{w}, v_{k+1}, \dots, v_s) \in L$$

が R-線形写像であるときをいう.

双対加群

R-加群 K に対して,

$$K^* := \{f : K \to R \,|\, f \text{ は } R\text{-線形}\}$$

もまた R-加群となる.

定義

K^* を K の**双対加群**という.

テンソル

K を R-加群とする．

定義

自然数 $s, t \in \mathbb{N}$ に対して，R-多重線形写像

$$A : (K^*)^s \times K^t \longrightarrow R$$

を，K 上の (s, t) **型テンソル**と呼ぶ．さらに，

- R-多重線形写像 $A : K^t \to R$ を $(0, t)$ **型テンソル**，もしくは**共変テンソル**と呼ぶ．
- R-多重線形写像 $A : (K^*)^s \to R$ を $(s, 0)$ **型テンソル**，もしくは**半変テンソル**と呼ぶ．

$(0, 0)$ 型テンソルは，単に R の元を表すこととする．

テンソル全体のなす集合

$A, B \in \mathcal{T}_t^s(K)$ と $r \in R$ に対し

$$(A + B)(T_1, \ldots, T_s, v_1, \ldots, v_t)$$
$$:= A(T_1, \ldots, T_s, v_1, \ldots, v_t) + B(T_1, \ldots, T_s, v_1, \ldots, v_t)$$
$$(rA)(T_1, \ldots, T_s, v_1, \ldots, v_t) := r\,A(T_1, \ldots, T_s, v_1, \ldots, v_t)$$

により，$A + B$, rA を定める．

命題

(s, t) 型テンソル全体のなす集合

$$\mathcal{T}_t^s(K) := \{A : (K^*)^s \times K^t \longrightarrow R \,|\, A \text{ は } R\text{-線形}\}$$

も R-加群である．

多様体上のテンソル場

テンソル場

M を滑らかな多様体とする．以後，前述の通り

- 可換環 $R = C^\infty(M)$

$$C^\infty(M) := \{M \text{ 上の滑らかな関数}\}$$

- $C^\infty(M)$-加群 $K = \mathfrak{X}(M)$

$$\mathfrak{X}(M) := \{M \text{ 上の滑らかなベクトル場}\}$$

とする．

$K = \mathfrak{X}(M)$ の双対加群を $K^* = \mathfrak{X}^*(M)$ で表す．実は，

$$\mathfrak{X}^*(M) = \Omega^1(M) = \{M \text{ 上の滑らかな 1 次微分形式}\}$$

テンソル場

定義

$C^\infty(M)$-加群 $\mathfrak{X}(M)$ のテンソルを**テンソル場**と呼ぶ.

- M 上の (s,t) **型テンソル場**とは,
  $C^\infty(M)$-多重線形写像のこと：

$$A : \mathfrak{X}^*(M)^s \times \mathfrak{X}(M)^t \longrightarrow C^\infty(M)$$

- (s,t) 型テンソル場全体のなす空間を

$$\mathcal{T}_t^s(M)$$

と表す. $C^\infty(M)$-加群である.

Remark

(0, 0) 型テンソルは係数環 R の元を表すという約束だったので,

$$\mathcal{T}^0_0(M) = C^\infty(M)$$

である.

Remark

$$\mathcal{T}^1_0(M) \cong \mathfrak{X}(M), \qquad \mathcal{T}^0_1(M) \cong \Omega^1(M)$$

が成り立つ.

- ここで, $\cong$ は $C^\infty(M)$-加群としての同形を表す.
- とくに, 双対加群 $\mathfrak{X}^*(M)$ は $\Omega^1(M)$ に $C^\infty(M)$-加群として同形である.

テンソル場の例

$E : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ を

$$E(\theta, X) := \theta(X) \qquad (\theta \in \mathfrak{X}^*(M),\ X \in \mathfrak{X}(M))$$

と定め，評価関数と呼ぶ．評価関数 E は $C^\infty(M)$-線形である．

【証明】$\theta, \omega \in \mathfrak{X}^*(M), X, Y \in \mathfrak{X}(M), f \in C^\infty(M)$ とする．

$$\begin{aligned}
E(\theta+\omega, X) &= (\theta+\omega)(X) = \theta(X) + \omega(X) = E(\theta, X) + E(\omega, X) \\
E(\theta, X+Y) &= \theta(X+Y) = \theta(X) + \theta(Y) = E(\theta, X) + E(\theta, Y) \\
E(f\theta, X) &= (f\theta)(X) = f\theta(X) = f\,E(\theta, X) \\
E(\theta, fX) &= \theta(fX) = f\theta(X) = f\,E(\theta, X)
\end{aligned}$$

したがって，評価関数 E は $(1,1)$ 型テンソル場である．

テンソル場でない例

0 でない滑らかな 1 次微分形式 $\omega \in \Omega^1(M)$ を 1 つとる．
$F : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ を

$$F(X, Y) := X(\omega Y) \qquad (X, Y \in \mathfrak{X}(M))$$

と定めると，F は $C^\infty(M)$-線形でない．
実際，$f \in C^\infty(M)$ とするとき

$$\begin{aligned} F(X, fY) &= X(\omega(fY)) \\ &= X(f\omega Y) \\ &= (Xf)\,\omega Y + f\,X(\omega Y) \neq fF(X, Y) \end{aligned}$$

となる．とくに，F はテンソル場ではない．

課題

問 1 (M,g) をリーマン多様体，∇ を接続とする．

$$A(X,Y,Z) := \langle \nabla_X Y, Z\rangle \qquad (X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M))$$

で定まる写像 $A : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ はテンソル場かどうか．

問 2 $\theta, \omega \in \Omega^1(M)$ とする．

$$(\theta\otimes\omega)(X,Y) := \theta(X)\omega(Y) \qquad (X,Y \in \mathfrak{X}(M))$$

で定まる写像 $\theta\otimes\omega : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ はテンソル場かどうか．

$C^\infty(M)$-線形写像 $\alpha : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ の全体

$$\mathrm{Hom}(\mathfrak{X}(M), \mathfrak{X}(M)) = \{\alpha : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M) \mid C^\infty(M)\text{-線形写像}\}$$

は $(1,1)$-テンソル場全体 $\mathcal{T}^1_1(M)$ と同型：

$$\mathrm{Hom}(\mathfrak{X}(M), \mathfrak{X}(M)) \cong \mathcal{T}^1_1(M)$$

$\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{X}(M), \mathfrak{X}(M))$ に対して
$A_\alpha : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ を

$$A_\alpha(\theta, X) := \theta(\alpha(X))$$

と定めると，$A_\alpha \in \mathcal{T}^1_1(M)$．これが同型写像を与える：

$$\mathrm{Hom}(\mathfrak{X}(M), \mathfrak{X}(M)) \ni \alpha \longmapsto A_\alpha \in \mathcal{T}^1_1(M)$$

多重線形写像に対しても同様のことが成り立つ：

$C^\infty(M)$-多重線形写像 $\alpha : \mathfrak{X}(M)^t \to \mathfrak{X}(M)^s$ の全体

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}(\mathfrak{X}(M)^t, \mathfrak{X}(M)^s)\\ &\qquad = \left\{\alpha : \mathfrak{X}(M)^t \to \mathfrak{X}(M)^s \,\middle|\, C^\infty(M)\text{-多重線形写像}\right\}\end{aligned}$$

は (s,t)-テンソル場全体 $\mathcal{T}^s_t(M)$ と同型：

$$\mathrm{Hom}(\mathfrak{X}(M)^t, \mathfrak{X}(M)^s) \cong \mathcal{T}^s_t(M)$$

各点におけるテンソル場

各点でのテンソルとテンソル場

問い

なぜ $C^\infty(M)$-線形性が必要なのか

へのひとつの答えを与える：

- テンソル場 A に対して,
- 1 次微分形式とベクトル場を与えると定まる関数

$$A(\theta^1, \ldots, \theta^s, X_1, \ldots, X_t) : M \to \mathbb{R}$$

は，**各 1 次微分形式やベクトル場に依存しているわけではなく，**ただ単に**その点 $p \in M$ にのみ依存している**ということである.

示したいこと

- (s,t) 型テンソル場 $A \in \mathcal{T}^s_t(M)$
- 1 次微分形式 $\theta^1, \ldots, \theta^s, \bar{\theta}^1, \ldots, \bar{\theta}^s \in \Omega^1(M)$
- ベクトル場 $X_1, \ldots, X_t, \bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_t \in \mathfrak{X}(M)$

とする.

定理 7

もし，点 $p \in M$ において，$\forall i \in \{1, \ldots, s\}, \forall j \in \{1, \ldots, t\}$ に対して

$$\theta^i\big|_p = \bar{\theta}^i\big|_p, \qquad X_j\big|_p = \bar{X}_j\big|_p$$

が成り立つならば,

$$A(\theta^1, \ldots, \theta^s, X_1, \ldots, X_t)(p) = A(\bar{\theta}^1, \ldots, \bar{\theta}^s, \bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_t)(p).$$

定理７より，(s,t) 型テンソル場は，１次微分形式 $\theta^1,\dots,\theta^s,\bar{\theta}^1,\dots,\bar{\theta}^s \in \Omega^1(M)$ やベクトル場 $X_1,\dots,X_t,\bar{X}_1,\dots,\bar{X}_t \in \mathfrak{X}(M)$ に依存するわけではなく，**それらの点 $p \in M$ での値のみに依存する．**
まとめると，次を得る．

系 8

(s,t) 型テンソル場 $A \in \mathcal{T}^s_t(M)$ に対して，各点 $p \in M$ において多重線形写像 $A_p : (T^*_pM)^s \times (T_pM)^t \to \mathbb{R}$ を

$$
\begin{aligned}
A_p(\alpha^1,\dots,\alpha^s,\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_t) &:= A(\theta^1,\dots,\theta^s,X_1,\dots,X_t)(p) \\
&(\alpha^1,\dots,\alpha^s \in T^*_pM, \quad \boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_t \in T_pM)
\end{aligned}
$$

ただし，$\theta^i \in \Omega^1(M), X_j \in \mathfrak{X}(M)$ は $(\theta^i)_p = \alpha^i$, $(X_j)_p = \boldsymbol{v}_j$ を満たすような拡張とする．

テンソル場が各点における
テンソルを定めること

証明のために，次の補題を用意する．

補題 11

点 $p \in M$ と，その開近傍 U を任意に与えたとする．
$\Longrightarrow \exists V : p$ の開近傍，$\exists f : M \to \mathbb{R} : C^\infty$ 級関数 s.t.

$$\bar{V} \subset U, \qquad \text{かつ} \qquad \begin{cases} f(q) = 1 & \left(\forall q \in \bar{V}\right) \\ 0 \leqq f(q) < 1 & \left(\forall q \in U - \bar{V}\right) \\ f(q) = 0 & (\forall q \in M - U) \end{cases}$$

ただし，$\bar{V}$ は V の閉包である．

補題 11 の証明は,『多様体の基礎』(松本幸夫著, 東京大学出版) の命題 13.11 を参照のこと．

補題 11 の証明は,『多様体の基礎』(松本幸夫著, 東京大学出版) の命題 13.11 を参照のこと.

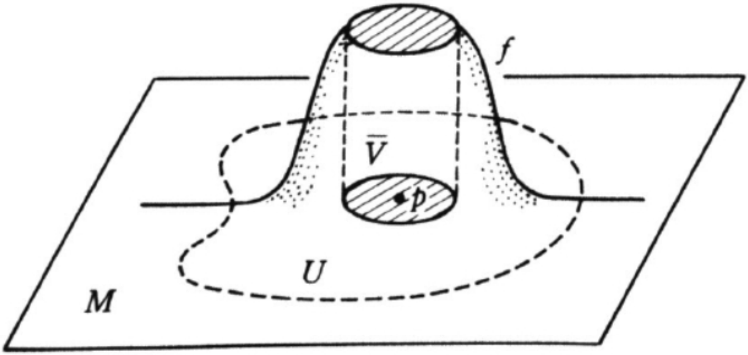

Figure: 補題 11 の C^∞ 級関数 $f : M \to \mathbb{R}$. 『多様体の基礎』(松本幸夫著, 東京大学出版) の図 13.8

補題 12

$\theta^1, \ldots, \theta^s \in \Omega^1(M)$, $X_1, \ldots, X_t \in \mathfrak{X}(M)$ が
$p \in M$ においてどれか 1 つでも 0 ならば,

$$A(\theta^1, \ldots, \theta^s, X_1, \ldots, X_t)(p) = 0.$$

$s = t = 1$ の場合を示そう.
$X_p = \mathbf{0}$ のとき, $A(\theta, X)(p) = 0$ を示す.
p の座標近傍 $(U, x^1, \ldots, x^m)$ において, C^∞ 級関数
$X^1, \ldots, X^m \in C^\infty(U)$ を用いて

$$X = \sum_{i=1}^{m} X^i \partial_i$$

と表される.

$f : M \to \mathbb{R}$ を補題 11 の関数とするとき，
各 $i = 1, \ldots, m$ に対して

- fX^i は M **全体で定義された** C^∞ 級関数，
- $f\partial_i$ は M **全体で定義された** C^∞ 級ベクトル場

である．したがって

$$f^2 A(\theta, X) = A(\theta, f^2 X) = A\left(\theta, \sum_{i=1}^{m} fX^i f\partial_i\right) = \sum_{i=1}^{m} fX^i A(\theta, f\partial_i)$$

と変形されるため，p において

$$f(p)^2 A(\theta, X)(p) = \sum_{i=1}^{m} (fX^i)(p) A(\theta, f\partial_i)(p)$$

となる．

p において

$$f(p)^2 A(\theta, X)(p) = \sum_{i=1}^{m} (fX^i)(p)\, A(\theta, f\partial_i)(p) \tag{1}$$

となる.
ここで, $f(p) = 1$ であり, また $X_p = \mathbf{0}$ より

$$X^1(p) = \cdots = X^m(p) = 0$$

なので, 各 $i = 1, \ldots, m$ に対して

$$(fX^i)(p) = f(p)\, X^i(p) = 0$$

が成り立つ. よって (1) より $A(\theta, X)(p) = 0$ を得る.

示したいこと

- (s,t) 型テンソル場 $A \in \mathcal{T}^s_t(M)$
- 1 次微分形式 $\theta^1, \ldots, \theta^s, \bar{\theta}^1, \ldots, \bar{\theta}^s \in \Omega^1(M)$
- ベクトル場 $X_1, \ldots, X_t, \bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_t \in \mathfrak{X}(M)$

とする.

定理 7

もし，点 $p \in M$ において，$\forall i \in \{1, \ldots, s\}, \forall j \in \{1, \ldots, t\}$ に対して

$$\theta^i\big|_p = \bar{\theta}^i\big|_p, \qquad X_j\big|_p = \bar{X}_j\big|_p$$

が成り立つならば,

$$A(\theta^1, \ldots, \theta^s, X_1, \ldots, X_t)(p) = A(\bar{\theta}^1, \ldots, \bar{\theta}^s, \bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_t)(p).$$

定理7の証明

$s = 1, t = 2$ の場合を示してみよう.

- $\theta, \bar{\theta} \in \Omega^1(M)$,
- $X, Y, \bar{X}, \bar{Y} \in \mathfrak{X}(M)$

に対し,

$$\theta|_p = \bar{\theta}\Big|_p, \ X|_p = \bar{X}\Big|_p, \ Y|_p = \bar{Y}\Big|_p$$

を満たすとするとき,

$$A(\theta, X, Y)(p) = A(\bar{\theta}, \bar{X}, \bar{Y})(p)$$

となることを示そう.

$A(\theta, X, Y) - A(\bar{\theta}, X, Y) = A(\theta - \bar{\theta}, X, Y)$ などの多重線形性を用いる：

$$
\begin{aligned}
&A(\theta, X, Y) - A(\bar{\theta}, \bar{X}, \bar{Y}) \\
&= A(\theta - \bar{\theta}, X, Y) + A(\bar{\theta}, X, Y) - A(\bar{\theta}, \bar{X}, \bar{Y}) \\
&= A(\theta - \bar{\theta}, X, Y) + A(\bar{\theta}, X - \bar{X}, Y) + A(\bar{\theta}, \bar{X}, Y) - A(\bar{\theta}, \bar{X}, \bar{Y}) \\
&= A(\theta - \bar{\theta}, X, Y) + A(\bar{\theta}, X - \bar{X}, Y) + A(\bar{\theta}, \bar{X}, Y - \bar{Y})
\end{aligned}
$$

なので，補題 12 より

$$A(\theta, X, Y)(p) - A(\bar{\theta}, \bar{X}, \bar{Y})(p) = 0$$

が成り立つことがわかる．
同様に，一般の s, t に対しても同様に示すことができる．

レビチビタ接続の存在性の証明

補題 9

任意の 1 次微分形式 $\theta \in \Omega^1(M)$ に対して，ベクトル場 $V \in \mathfrak{X}(M)$ が存在して次のように表される：

$$\theta(X) = \langle V, X\rangle \qquad (X \in \mathfrak{X}(M))$$

証明． 各座標近傍 $(U; x^1, \ldots, x^m)$ において示せば良い．行列 $G = (g_{ij})_{i,j}$ の逆行列 G^{-1} の (i,j) 成分を g^{ij} と表す．U 上で $\theta = \sum_{i=1}^m \theta_i dx^i$ のとき，$V := \sum_{i,j=1}^m g^{ij}\theta_i\partial_j$ とおくと

$$\langle V, \partial_k\rangle = \sum_{i,j=1}^m g^{ij}\theta_i \left\langle \partial_j, \partial_k \right\rangle = \sum_{i,j=1}^m \theta_i g^{ij} g_{jk} = \sum_{i=1}^m \theta_i \delta_{ik} = \theta_k$$
$$= \theta(\partial_k)$$

補題 10

ベクトル場 $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ に対して，$\theta_{V,W}$ を

$$\theta_{V,W}(X) := \frac{1}{2}\Big(V\langle W, X\rangle + W\langle X, V\rangle - X\langle V, W\rangle - \langle V, [W, X]\rangle + \langle W, [X, V]\rangle + \langle X, [V, W]\rangle\Big)$$

と定めると $\theta_{V,W} \in \Omega^1(M)$

証明． 各 C^∞ 級関数 $f \in C^\infty(M)$ に対して

$$\theta_{V,W}(fX) = f\,\theta_{V,W}(X)$$

を示せば良い．直接計算でわかる．

定理 3

リーマン多様体 (M,g) 上には唯一つのレビチビタ接続が存在する．

証明． 補題 10 のように $\theta_{V,W} \in \Omega^1(M)$ を定める．補題 9 より，$Z_{V,W} \in \mathfrak{X}(M)$ で $\langle Z_{V,W}, X\rangle = \theta_{V,W}(X)$ を満たすものが存在する．

$$\begin{aligned}\langle Z_{V,W}, X\rangle = \frac{1}{2}&(V\langle W,X\rangle + W\langle X,V\rangle - X\langle V,W\rangle\\ &-\langle V,[W,X]\rangle + \langle W,[X,V]\rangle + \langle X,[V,W]\rangle)\end{aligned}$$

この $Z_{V,W}$ が (D1), (D2), (D3) を満たすことがわかるので，$\nabla_V W := Z_{V,W}$ は接続である．

まとめ

定理 3

リーマン多様体 (M, g) 上には唯一つのレビチビタ接続が存在する.

- テンソル場 A は, $C^\infty(M)$-**線形性**を満たす.
- 1 次微分形式とベクトル場を与えると定まる関数

$$A(\theta^1, \ldots, \theta^s, X_1, \ldots, X_t) : M \to \mathbb{R}$$

は, **各 1 次微分形式やベクトル場に依存しているわけではなく**, ただ単に**その点 $p \in M$ での値にのみ依存している**.

課題の提出締切: **6 月 17 日 (月) 16 時**