INTEGRAL CURVES

Def(積分曲線)

$\alpha : I \longrightarrow M$ が $V \in \mathfrak{X}(M)$ 上の積分曲線である

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall t \in I$ に対して、$\alpha'(t) = V_{\alpha(t)}$ である

→ 曲線$\alpha(t)$は、ベクトル場Vに各点で接する。

(直感的な理解:粒子pがVに沿って流されていくときの曲線)

- 各点で、曲線αはVによって決められた速度を持つ。

  このとき、以下のような微分方程式の系を持つ。

$$\frac{d(x^i \circ \alpha)}{dt} = F^i(x^1 \circ \alpha, x^2 \circ \alpha, \cdots\cdots, x^n \circ \alpha) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

(F^iはVx^iの座標表示)

- パラメータtが右辺に現れないため、ベクトル場Vを「Mを通る流体の定常流の速度」(時間に依存しない流れ)として考えることができる。

49. Prop

$V \in \mathfrak{X}(M)$ならば、Mの各点pに対して、0の周辺に区間Iと、Vの一意的な積分曲線$\alpha : I \to M$が存在し、$\alpha(0) = p$である。

また、もしαがVの積分曲線であるならば、$t \longrightarrow \alpha(t+c)$もまた積分曲線である。

Proof

☆(i) 前半部分 ($V \in \mathfrak{X}(M)$ ならば 〜 積分曲線 $\alpha : I \to M$ が存在し、$\alpha(0) = p$)

与えられたベクトル場Vがリプシッツ連続ならば、ピカール・リンデレフの定理より※1 $\alpha'(t) = V_{\alpha(t)}$ の一意な解 $\alpha(t) = (x^1(t), \cdots, x^n(t))$ が存在する。$p = (x^1(0), \cdots x^n(0))$ とおけば $\alpha(0) = p$ であり、積分曲線の初期条件を満たす。

※1 (ピカール・リンデレフの定理)

微分方程式の初期値問題

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

について、関数 f が y に一様にリプシッツ連続※2であり、かつ t について連続

$\Longrightarrow$ ある正数 $\varepsilon > 0$ に対して、閉区間 $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ 上で唯一の解 $y(t)$ が存在する。

※2 (リプシッツ連続)

関数 $f : X \to Y$ がリプシッツ連続である

$\Longleftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in X$ に対して、$\exists K > 0$ s.t. $|f(x_1) - f(x_2)| \leq K |x_1 - x_2|$

(ii) 後半部分 ($\alpha(t)$ が積分曲線 $\Longrightarrow$ $\alpha(t+c)$ も積分曲線)

仮定より $\alpha(t)$ が V の積分曲線であるため、以下の等式

$$\alpha'(t) = V(\alpha(t))$$

を満たす。

次に、$\alpha(t+c)$ の微分 $\alpha'(t+c)$ を考えると、

$$\frac{d}{dt}(\alpha(t+c)) = \alpha'(t+c) \qquad (\text{微分の値が } c \text{ に依存しない})$$

であるため、$\alpha'(t)$ と同様に

$$\alpha'(t+c) = V(\alpha(t+c))$$

である。よって、積分曲線の定義より、$\alpha(t+c)$ は積分曲線である。

50. Corollary

$\alpha, \beta : I \longrightarrow M$ がベクトル場 V の積分曲線であり、ある $a \in I$ に対して $\alpha(a) = \beta(a)$ であるならば、$\alpha = \beta$ である。

(ベクトル場と通過する点が1つ決まっているなら、積分曲線は1つのみ)

Proof

連続性より、一致集合 $A = \{ t \in I \mid \alpha(t) = \beta(t) \}$ は閉集合である。
agreement set

(∵ 開集合だとすると、A は空集合ではないため、$A = I$ となる。)

ここで、ある $t \in I$ を固定する。このとき、2つの写像

$$s \longrightarrow \alpha(t+s)$$
$$s \longrightarrow \beta(t+s)$$

は、$s=0$ で一致する V の積分曲線である。49. Proposition より、初期条件が与えられれば積分曲線は一意に定まるため、

$$\alpha(a) = \beta(a) \quad \forall a \in I$$

が成立する。■

Def(極大積分曲線)

$p \in M$ で始まる積分曲線 $\alpha : I_\alpha \to M$ の集合を考える。任意の2つの
$\hookrightarrow \alpha(0) = p.$

積分曲線 α, β に対して $I_\alpha \cap I_\beta$ 上で $\alpha = \beta$ であることを主張している。

$\rightsquigarrow$ p5の注釈より、これら全ての曲線は $\alpha_p : I_p \to M$ という単一の積分曲線を定義できる $\left(I_p = \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha \right)$

$\hookrightarrow$ 各インデックス $\alpha \in A$ に対して U_α を多様体 M の開集合とし、
$\phi_\alpha : U_\alpha \to N$ を滑らかとする。
$\phi_\alpha = \phi_\beta$ on $U_\alpha \cap U_\beta$
のとき、これらの写像は単一の写像 $\phi : \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \to N$ にまとめることができる。

この α_p を、点 p を始点とする V の極大積分曲線という。
(これ以上定義域を延長することができない)

Example

平面 $\mathbb{R}^2$ 上で、ベクトル場 $V = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$ を考える。このとき、曲線 $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ が V の積分曲線であるのは

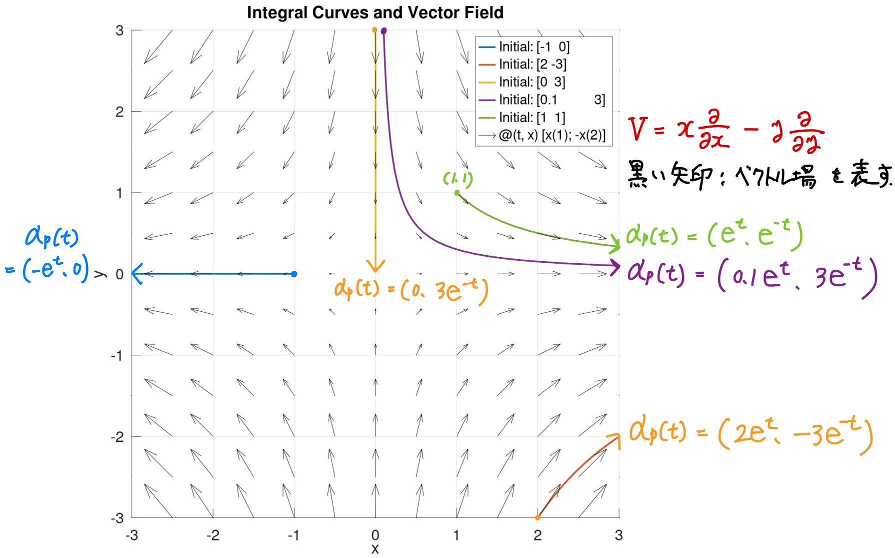
$$\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = -y$$

の場合である。従って、$x(t) = Ae^t$、$y(t) = Be^{-t}$ と表示できる。

点 $p = (p_1, p_2)$ で始まる極大積分曲線は、

$$\alpha_p(t) = (p_1 e^t, p_2 e^{-t})$$

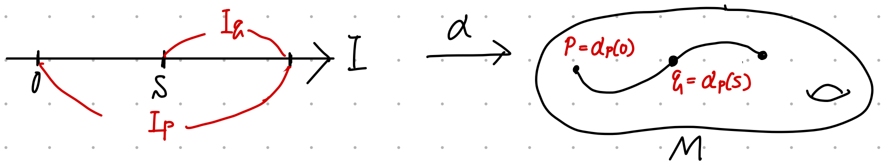
と表される。
(次ページにプロット図)


Integral Curves and Vector Field
Initial: [-1 0]
Initial: [2 -3]
Initial: [0 3]
Initial: [0.1 3]
Initial: [1 1]
@(t, x) [x(1); -x(2)]
y
x
V = x ∂/∂x − y ∂/∂y
黒い矢印：ベクトル場 を表す
(1,1)
αp(t) = (e^t, e^-t)
αp(t) = (0.1e^t, 3e^-t)
αp(t) = (0, 3e^-t)
αp(t) = (-e^t, 0)
αp(t) = (2e^t, −3e^-t)

52. Lemma

$\forall V \in \mathfrak{X}(M)$ に対して、点 $q = \alpha_p(s)$ とする。このとき $s + I_q = I_p$ であり、$\forall t \in I_q$ に対して $\alpha_p(s+t) = \alpha_q(t)$ が成り立つ。

(s: 積分曲線のパラメータ、I_q: 積分曲線 α_q の定義域、I_p: 積分曲線 α_p の定義域)



Proof

写像 $\beta(u) := \alpha_q(u-s)$ を定義する。(β は $s + I_q$ 上で定義される V の積分曲線)

$u = s$ を代入すると、$\beta(s)$ は

$$\beta(s) = \alpha_q(s-s) = \alpha_q(0) = q = \alpha_p(s) \quad \cdots ①$$

→ 仮定より

→ 積分曲線の定義より

である。Corollary 50 より、「初期条件が同じであれば積分曲線は同一」であるため、①より $(s + I_q) \cap I_p$ 上では、積分曲線は $\beta = \alpha_p$ である。

したがって、β と α_p は $(s + I_q) \cup I_p$ 上で単一の積分曲線を形成し、I_p が極大 (これ以上定義域を延長できない) であるため $s + I_q \subseteq I_p$ である。$\cdots ②$

次に曲線 $\alpha_p(s+t)$ を考える。
ここで $\forall t \in I_q$ に対して $\alpha_p(s+t) = \beta(s+t) = \alpha_q(t)$ であり、I_q も極大であるため (q から始まる積分曲線の定義域を延長できない)、$I_q \supseteq -s + I_p \cdots ③$

②、③より、$s + I_q = I_p$ である。■

Def (周期的)
periodic

定数曲線でない $\gamma: \mathbb{R} \longrightarrow M$ が「周期的」である

$\Longleftrightarrow$ $\forall t \in \mathbb{R},\ \exists C > 0$ s.t. $\gamma(t+C) = \gamma(t)$.

「γ が定数ではない」という条件から、最小の C が存在し、これを γ の周期と~~呼ぶ~~.

さらに、γ が区間 $[a, a+C)$ で一対一に対応（単射）するならば、γ は「単純周期的」であると言う.
simply periodic

● 前の補題から分かること：

全ての積分曲線は、

① 一対一対応（単射）である

② 単純周期的である

③ 定数である

のいずれかである.

Def (完備なベクトル場の流れ)

complete　flow

完備なベクトル場 V の流れは、以下の写像 $\psi: M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$ で与えられる.

↳ V の積分曲線をいくらでも延長できる.

$$\psi(p, t) = \alpha_p(t)$$

ここで $\alpha_p(t)$ は点 p を始点とする極大積分曲線である.

p が固定されるとき、$t \longrightarrow \psi(p, t)$ は積分曲線 α_p である.
一方、t を固定するとき、$p \rightarrow \psi(p, t)$ は各点 p をちょうど時間 t だけ流れる関数 $\psi_t: M \rightarrow M$ を定義する. この ψ_t を、流れ ψ の t 番目の段階と言う.
stage

（$\{\psi_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ を V の流れと~~呼ぶ~~こともある）

54. Lemma

ψ を完備なベクトル場の流れ (flow) とするとき、(A1) ~ (A3) が成立。

(A1) ψ_0 ($\psi(p,t)$ の時刻 $t=0$ に対応する写像) は M の恒等写像である。

(A2) $\forall s, t \in \mathbb{R}$ に対して、$\psi_s \circ \psi_t = \psi_{s+t}$

(A3) 各段階 (stage) は diffeo であり、$\psi_t^{-1} = \psi_{-t}$ である。

Proof

(A1) を示す。

$\psi(p,t)\big|_{t=0}$ は点 p を始点とする積分曲線 α_p の $t=0$ における値 $\alpha_p(0)$ と等しい。すなわち、$\psi(p,0) = \alpha_p(0)$ である …①

また、積分曲線の定義より、α_p は点 p を始点とする。すなわち、$\alpha_p(0) = p$ …② である。

①、② より、$\psi_0(p) = \psi(p,0) = p$ であるため、ψ_0 は恒等写像である。

(A2) を示す。(時間 s だけ進めた後に、さらに時間 t だけ進めることが、時間 $s+t$ 進めることと同値)

$\forall p \in M$, に対して、

$$\psi_s \circ \psi_t(p) = \psi_s(\psi_t(p)) = \psi_s(\alpha_p(t)) \quad \cdots ①$$

補題 52 (積分曲線の一意性) より、$\alpha_p(t) = q$ とおくと、

$\alpha_p(s+t) = \alpha_q(t)$ が成り立つ …②

したがって、①、② より、

$$\begin{aligned} \psi_s(\alpha_p(t)) &= \alpha_{\alpha_p(t)}(s) \quad \because ② \\ &= \alpha_p(s+t) \\ &= \psi_{s+t}(p) \end{aligned}$$

$\therefore\ \psi_s \circ \psi_t(p) = \psi_{s+t}(p)$ これは任意の $p \in M$ で成り立つため、
(A2) を示した。

(A3) を示す $\left(\psi_{-t} = (\psi_t)^{-1}\right)$

$\psi_t \circ \psi_{-t} = id_M$ かつ $\psi_{-t} \circ \psi_t = id_M$ を示せばよい。

(A2) より $\psi_t \circ \psi_{-t} = \psi_{t-t}$

$= \psi_0$ $\because$ (A1)

$= id_M$

$\psi_{-t} \circ \psi_t$ も同様に id_M になっているため、ψ_t と ψ_{-t} は互いに逆写像になっている。さらに両方とも C^∞ 級であるため、ψ_t と ψ_{-t} は diffeo である。

以上より、(A1) ～ (A3) を示した ■

※
ベクトル場 V が完備でない場合でも、定義53 に従って局所的な流れ

$\psi : M \times \mathbb{R}^1 \to M$
$\psi(p, t) = \alpha_p(t)$

$\psi : U \times I \to M$ を定義できる (U: $p \in M$ の近傍、I: $\mathbb{R}^1$ の 0 近傍の区間)
この場合でも、補題54 と類似の性質をもつ。

(1) ψ_0 は U 上の恒等写像

(2) $s, t, s+t \in I$ のとき、$\psi_{s+t} = \psi_s \circ \psi_t$

(3) $\forall t \in I$ に対して、$\psi_t : U \to \psi_t(U)$ は diffeo.

◎ ベクトル場 V が完備ではない場合、流れ $\psi(p,t)=\alpha_p(t)$ は最大の定義域

$$\mathcal{D}=\left\{(p,t)\in M\times\mathbb{R}^1 \;\middle|\; t\in I_p\right\}$$

を持つ。滑らかな局所的流れをつなぎ合わせる (patching) と、$\mathcal{D}$ は $M\times\mathbb{R}^1$ の開集合であり、$\psi:\mathcal{D}\to M$ は滑らかとなる (cf. [L] 4章、定理5)

55. Def (延長可能 (extendible)、端点 (endpoint))

区分的に滑らかな曲線 $\alpha\,[0,B)\to M$ が延長可能である

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ α が連続的な延長 $\tilde{\alpha}:[0,B]\to M$ を持つ。

このとき、$\tilde{\alpha}(B)$ を α の端点とよぶ

同様に、$[0,B)$ 内の任意の数列 (sequence) $\{s_i\}$ が B に近付くとき、数列 $\{\alpha(s_i)\}$ が点 $q\,(=\tilde{\alpha}(B))\in M$ に収束するような q が存在する (振動、発散しない)

56. Lemma

$\alpha:[0,b)\to M\ (b<\infty)$ をベクトル場 $V\in\mathfrak{X}(M)$ の積分曲線とする。

このとき、以下の (A1)〜(A4) は同値である。

(A1) α は極大ではない。
(α は V の積分曲線として、より大きな区間 $[0,b+\varepsilon)$ に延長可能である。

(A2) α は延長可能である

(A3) α は M のコンパクト集合に含まれる。

(A4) 数列 $\{\alpha(s_i)\}$ が収束するような数列 $\{s_i\}$ が存在し、$\{s_i\}\to b\ (i\to\infty)$ である。

→ M の任意の開被覆に対して有限部分被覆が存在する。

(点列コンパクト：Mの任意の点列が収束部分列を持つ)

Proof (A1) ⇒ (A2) ⇒ (A3) ⇒ (A4) ⇒ (A1) を示す

- (A1) ⇒ (A2)

条件(A1)で正数εを取っているので、$[0, b+\varepsilon) \Longrightarrow [0, b]$を含む。

$\therefore\ \alpha : [0, b) \to M$ は延長可能の定義を満たしている。

- (A2) ⇒ (A3)

定義55より、αが延長可能であるならばαの極限値はM内で収束する。

αがM内で収束するということは、Mのあるコンパクトな部分集合に含まれることを示す。

$\therefore$ αが延長可能ならば、αはMのコンパクト集合に含まれる。

- (A3) ⇒ (A4)

仮定よりαがMのコンパクト集合Aに含まれていると仮定する($\alpha([0, b)) \subset A$)。

$s_i = b - \frac{1}{i}$と選べば、数列$\{s_i\}$は$\{s_i\} \to b$ $(i \to \infty)$であり、コンパクト集合の性質から、$\{\alpha(s_i)\}$の部分列はA内で収束する。

よって、$\{\alpha(s_i)\}$全体がコンパクト集合に含まれるため、$\{\alpha(s_i)\}$自身も収束する。

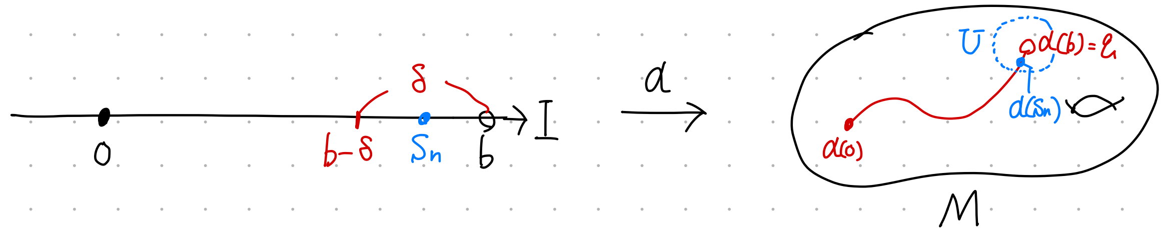
$\therefore$ (A3) ⇒ (A4)を示した。

- (A4) ⇒ (A1)

点列$\{s_i\}$がbに近付くとき、点列$\{\alpha(s_i)\}$が点$q \in M$に収束すると仮定する。

qの近傍Uで、ベクトル場Vの流れが$U \times (-\delta, \delta)$の形で定義できる。

このとき、$b - \delta < s_n$ および $\alpha(s_n) \in U$ であるような $n \in \mathbb{N}$ が存在するとして良い。($\because$ 点列$\{s_i\}$がbに近付き、点列$\{\alpha(s_i)\}$がqに近付くため)



次に「$\alpha(s_n)$ を始点とする V の積分曲線」を考える。少なくとも $[0,\delta)$ 上で定義されている …①

補題52より、$\alpha(s_n)$ を点 P と考え、α を端点 b を超えて延長するには、
$\alpha(s_n)$ を始点とする積分曲線が $[0,\delta)$ で定義されていればよい。…② $(\because b-\delta<s_n<b)$

①、② より、α は b を超えて延長可能であることから、α は区間 $[0, b+\varepsilon)$ に延長可能であることを示した。

以上より、(A1)、(A2)、(A3)、(A4) は全て同値である。■

57. Lemma

V はベクトル場で、点 P は $V_P\neq 0$ であるような点とする。
このとき、座標近傍で $V=\frac{\partial}{\partial x^1}$ を満たすような P における座標系 $x^1, x^2, \dots, x^n$ が存在する。 （点 P まわりで、ベクトル場の方向が一定の向きになるように座標を取り直せる）

Proof

写像 $\psi: U\times I\to M$ とおく。（V の局所流れ）
このとき、U はゼロでないベクトル場 V 上の点 P における近傍である。S を P を通る U 内の超曲面として、$V_P\notin T_P(S)$ とする。さらに、ψ の制限写像：$S\times I\to M$ を考える。

写像 $\psi|_{S\times 0}$ は S への diffeo であり、$d\psi_{(P,0)}$ は $T_{(P,0)}(S)$ と $T_P(S)$ を同一視する。
また、$d\psi\left(\partial/\partial t|_{(P,0)}\right) = V_P\notin T_P(S)$ であるため、$d\psi_{(P,0)}$ は同型写像である。
したがって、ψ は $(P,0)$ の近傍 $\mathcal{V}\times J$ から M 内の P の近傍 W への diffeo である。

$y^2,\dots,y^n$ を $\mathcal{V}$ 上の S の座標系であると仮定できる。平面 $y^1=t$ を、$J\subset\mathbb{R}^1$ 上の自然な座標系とする。
微分同相写像 $\psi|_{(\mathcal{V}\times J)}$ により $y^1,\dots,y^n$ を W へ移すことで、必要な

座標系 $x^1, \cdots, x^n$ が得られる. 実際に、$\psi(p, t) = \alpha_p(t)$ のため

$$\frac{\partial}{\partial x^1} = d\psi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \tilde{V}$$

である。

$x^1(t), \cdots, x^n(t)$: unknown.

$$\begin{cases} \dfrac{dx^1}{dt} = F^1(x^1, \cdots, x^n) \\ \vdots \\ \dfrac{dx^n}{dt} = F^n(x^1, \cdots, x^n) \end{cases}$$

$x(t) := (x^1(t), \cdots, x^n(t))$. $\mathbb{F} := (F^1, \cdots, F^n)$

$$\frac{dx}{dt} = \mathbb{F}(x)$$

Thm. $\dfrac{dx}{dt} = \mathbb{F}(t, x)$ / $\circledast$ $\left(F : D \to \mathbb{R}^n : \text{連続写像}\right)$, $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$\mathbb{F}$: x について リプシッツ なら!

${}^\forall (t_0, x_0)$ に対して、 ${}^\exists I$: t_0 を含む開区間.

${}^\exists x(t)$ s.t. $\circledast$ をみたし、

$x(t_0) = x_0$.

Prop $\mathbb{F} : D \to \mathbb{R}^n$: C^1級 $\Rightarrow$ $\mathbb{F}$: x について リプシッツ.

$(n=1)$. $\displaystyle\lim_{x_2 \to x_1} \frac{F(t, x_1) - F(t, x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\partial F}{\partial x}(x_1)$

$\therefore \left| \dfrac{F(t, x_1) - F(t, x_2)}{x_1 - x_2} \right| < C$ //

$V \in \mathfrak{X}(M)$: 完備.

$\Longleftrightarrow$ V のすべての積分曲線が

$\mathbb{R}$ 上で定義されている.

$F_1(x,y) = 1+x^2$

$F_2(x,y) = 1+y^2$

$V = (1+x^2)\frac{\partial}{\partial x}$ ... y.

$\boldsymbol{x}(t) = (x(t), y(t))$

$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = (F_1(\boldsymbol{x}), F_2(\boldsymbol{x}))$

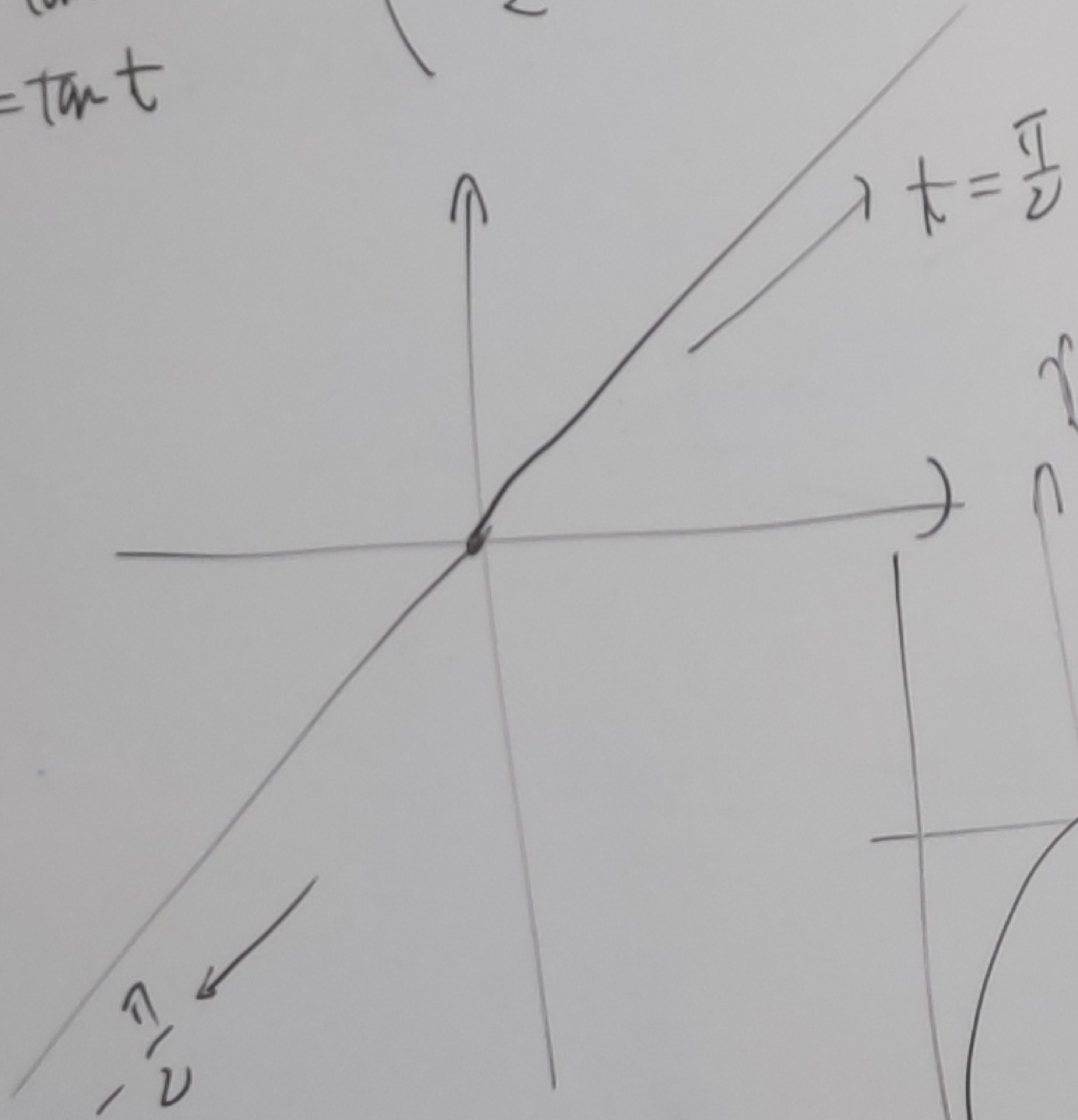
$\Longleftrightarrow \begin{cases} x' = 1+x^2 \\ y' = 1+y^2 \end{cases}$

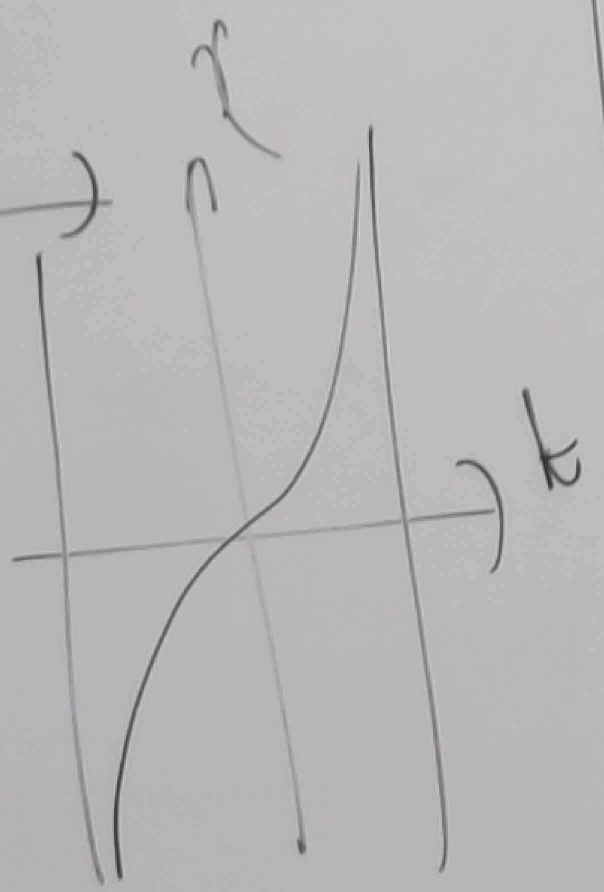
$x(0) = y(0) = 0.$

極大存在区間.

$\left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$

$\begin{cases} x(t) = \tan t \\ y(t) = \tan t \end{cases}$





Prop. $\mathbb{E}$: D

$(n=1)$. $\lim_{x_2 \to x}$

$V \in$

$\Longleftrightarrow$

$$F_1(x, y) = 1 + x^2$$

$$F_2(x, y) = 1 + y^2$$

$$V = (1+x^2)\frac{\partial}{\partial x} + (1+y^2)\frac{\partial}{\partial y}.$$

$$x(t) = (x(t), y(t))$$

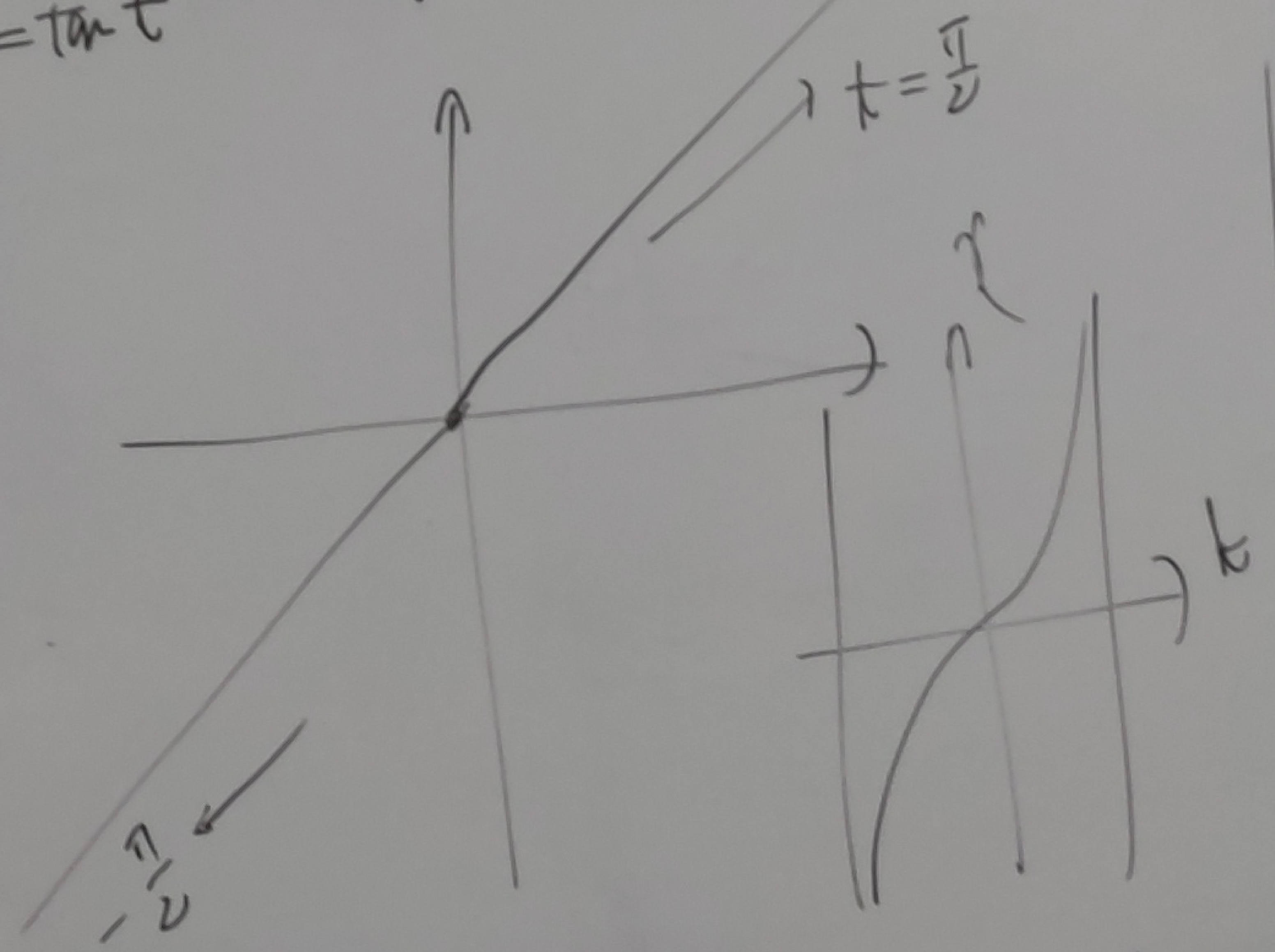
$$\frac{dx}{dt} = (F_1(x), F_2(x))$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x' = 1 + x^2 \\ y' = 1 + y^2 \end{cases}$$

$$x(0) = y(0) = 0.$$

$$\begin{cases} x(t) = \tan t \\ y(t) = \tan t \end{cases} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$$

極大存在区間.



Prop. $F : D \to \mathbb{R}^n : C^1$級 $\Rightarrow$ $F : x$について リプシッツ.

$(n=1)$. $\displaystyle\lim_{x_2 \to x_1} \frac{F(t, x_1) - F(t, x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\partial F}{\partial x}(x_1)$

$\therefore \left| \dfrac{F(t, x_1) - F(t, x_2)}{x_1 - x_2} \right| < C$ //

$V \in \mathfrak{X}(M)$: 完備.

$\Longleftrightarrow$ Vのすべての積分曲線が $\mathbb{R}$上で定義されている.

$$\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y.$$

$$[X, fY] = (Xf)Y + f[X, Y]$$

($[fX, Y] \neq f[X, Y]$ なので $[\,,\,] : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ は $\mathcal{F}$線形でない)