(b) ds_f^2 が non-eff symmetry φ をもつ場合

続

$$= \xi_u \xi_v \underbrace{\det\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u}, \nu\right)(u,v)}_{=0} + \xi_u \eta_v \det\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \nu\right)(u,v)$$

$$+ \eta_u \xi_v \det\left(\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial u}, \nu\right)(u,v) + \eta_u \eta_v \underbrace{\det\left(\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v}, \nu\right)(u,v)}_{=0}$$

$$= \xi_u \eta_v \det\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \nu\right)(u,v) + \eta_u \xi_v \underbrace{\det\left(\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial u}, \nu\right)(u,v)}_{= -\det\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \nu\right)(u,v)}$$

$$= \boxed{\left(\xi_u \eta_v - \eta_u \xi_v\right)} \boxed{\det\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \nu\right)(u,v)}$$

$\xi_u = \xi_u(u,v)$

$\xi_u \eta_v - \eta_u \xi_v = \det J$ （φ のヤコビアン）

$\frac{\partial f}{\partial u}(\xi(u,v), \eta(u,v))$, $(\xi(u,v), \eta(u,v))$

$$\det\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \nu\right)(\xi(u,v), \eta(u,v)) = \lambda \circ \varphi(u,v)$$

$$= \underbrace{(\det J)}_{?} \cdot \underbrace{(\lambda \circ \varphi)(u,v)}_{\geq 0}$$

$$\Rightarrow \det(g_u, g_v, \nu_g) = \varepsilon \cdot (\det J)\ (\lambda \circ \varphi)(u,v) = \underbrace{|\det J|}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(\lambda \circ \varphi)(u,v)}_{\geq 0}$$

$\therefore \det(g_u, g_v, \nu_g) \geq 0$ より ν_g は向きに同調した g の法ベクトル場

$\therefore \nu_g := \varepsilon \cdot \nu \circ \varphi$ とおく $\left(\varepsilon := \mathrm{sgn}(\det J) = \frac{\det J}{|\det J|} \in \{\pm 1\}\right)$

$$x_g(u) = \hat{\nu}_g(u) \times C'(u)$$

$$= \varepsilon \cdot \nu_f \circ \varphi(u,0) \times C'(u)$$

$$= \varepsilon \cdot \nu_f(u,0) \times C'(u)$$

$$= \varepsilon \cdot \hat{\nu}_f(u) \times C'(u)$$

$$= \underset{(\mathrm{sgn}(\det J))}{\varepsilon} \cdot x_f(u) \quad \cdots (*)$$

$\boxed{\text{示すこと}}$　$\varepsilon = -1$　（証明方針：$\varepsilon = 1$ だと矛盾）　HW.

次回　9/19（金）10:00 − 11:30.

$\theta_g = \pi - \sigma \theta_f$

- (b) $\Rightarrow$
- (c) $\Rightarrow$
- (d) $\Rightarrow$

((b) $\Rightarrow$ f と $\check{f}$ が合同である の証明 続き)

$\varepsilon := \mathrm{sgn}(\det J)$

$J := D\varphi = \begin{vmatrix} \xi_u & \eta_u \\ \xi_v & \eta_v \end{vmatrix}$

(*) より、 $\mathcal{X}_g(u) = \varepsilon\, \mathcal{X}_f(u)$

$= \varepsilon \cos\theta_f(u)\, n(u) - \varepsilon \sin\theta_f(u)\, b(u)$

• $\varepsilon = 1$ の場合

$\mathcal{X}_g(u) = \mathcal{X}_f(u)$ より、 $\theta_g(u) = \theta_f(u)$ $(\mathrm{mod}\ 2\pi)$ $\therefore$ $(g=)\ f\circ\varphi = f$.

• $\varepsilon = -1$ の場合

$\mathcal{X}_g(u) = -\cos\theta_f(u)\, n(u) + \sin\theta_f(u)\, b(u)$ $\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$, $\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$

$= \cos(\pi + \theta_f(u))\, n(u) - \sin(\pi + \theta_f(u))\, b(u)$ より、 $\theta_g(u) = \pi + \theta_f(u)$ $(\mathrm{mod}\ 2\pi)$

($\theta_g = \pm\frac{\pi}{2}$ なので、 $\kappa_s = 0$ 、 ノート参照)

$\longrightarrow \theta_g(u) = \theta_f(u) + \frac{1-\varepsilon}{2}\pi$

($\varphi = \mathrm{Id}$ になってしまう事を導けばよい。)

$\varepsilon = 1$ が矛盾すること の 証明. (ノート参照)

• non-eff symmetry φ について

$\varphi(u,v) = (\xi(u,v), \eta(u,v))$. … ①

$\varphi(u,0) = (u, 0)$ … ② $\xi(u,0) = u$、 $\eta(u,0) = 0$

• $\varphi^* ds_f^2 = ds_f^2$ … ③

$\varphi \neq \mathrm{Id}$ … ④

• $\det J = \begin{vmatrix} \xi_u & \eta_u \\ \xi_v & \eta_v \end{vmatrix}$ より、特異曲線上 $(v=0)$ における $\det J$ は、

$$\det J\Big|_{v=0} = \begin{vmatrix} \xi_u(u,0) & \eta_u(u,0) \\ \xi_v(u,0) & \eta_v(u,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \xi_v(u,0) & \eta_v(u,0) \end{vmatrix}$$

$$= \eta_v(u,0) \neq 0.$$

(φ は微分同相写像 なので、ヤコビアン $\neq 0$)

$\longrightarrow$ η_v が 正だと矛盾すること を示したい。

• $ds_f^2 = E(u,v)\,du^2 + 2F(u,v)\,du\,dv + G(u,v)\,dv^2$ および

$$\begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_u & \xi_v \\ \eta_u & \eta_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_u\, du + \xi_v\, dv \\ \eta_u\, du + \eta_v\, dv \end{bmatrix} \cdots ☆$$

より、 $\varphi^* ds_f^2$ を考える.

(wikipedia「Metric tensor」より)

Invariance of arclength under coordinate transformations [edit]

Ricci-Curbastro & Levi-Civita (1900) first observed the significance of a system of coefficients E, F, and G, that transformed in this way on passing from one system of coordinates to another. The upshot is that the first fundamental form (1) is *invariant* under changes in the coordinate system, and that this follows exclusively from the transformation properties of E, F, and G. Indeed, by the chain rule,

$$\begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial u'} & \dfrac{\partial u}{\partial v'} \\ \dfrac{\partial v}{\partial u'} & \dfrac{\partial v}{\partial v'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du' \\ dv' \end{bmatrix}$$

so that

$$\begin{aligned} ds^2 &= \begin{bmatrix} du & dv \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} du' & dv' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial u'} & \dfrac{\partial u}{\partial v'} \\ \dfrac{\partial v}{\partial u'} & \dfrac{\partial v}{\partial v'} \end{bmatrix}^{\mathsf T} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial u'} & \dfrac{\partial u}{\partial v'} \\ \dfrac{\partial v}{\partial u'} & \dfrac{\partial v}{\partial v'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du' \\ dv' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} du' & dv' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E' & F' \\ F' & G' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du' \\ dv' \end{bmatrix} \\ &= (ds')^2 . \end{aligned}$$

新しい座標(ξ,η)によるds_f^2は、

$$ds_f^2 = E(\xi(u,v),\eta(u,v))\,d\xi^2 + 2F(\xi(u,v),\eta(u,v))\,d\xi d\eta + G(\xi(u,v),\eta(u,v))\,d\eta^2$$

← 第一基本形式は座標系に依らない。

であるので、これを旧座標(u,v)に引き戻す($d\xi$, $d\eta$ に ☆ を代入して整理)と、

$$\varphi^* ds_f^2 = E(\xi,\eta)(\xi_u du + \xi_v dv)^2 + 2F(\xi,\eta)(\xi_u du + \xi_v dv)(\eta_u du + \eta_v dv) + G(\xi,\eta)(\eta_u du + \eta_v dv)^2$$

↓ $\boxed{\quad}\,du^2 + 2\boxed{\quad}\,dudv + \boxed{\quad}\,dv^2$ の形に整理。

$$\begin{aligned} &= \{E(\xi,\eta)\xi_u^2 + 2F(\xi,\eta)\xi_u\eta_u + G(\xi,\eta)\eta_u^2\}\,du^2 \\ &+ \{2E(\xi,\eta)\xi_u\xi_v + 2F(\xi,\eta)(\xi_u\eta_v + \eta_u\xi_v) + 2G(\xi,\eta)\eta_u\eta_v\}\,dudv \\ &+ \{E(\xi,\eta)\xi_v^2 + 2F(\xi,\eta)\xi_v\eta_v + G(\xi,\eta)\eta_v^2\}\,dv^2. \end{aligned}$$

$$\left(=: E'(u,v)\,du^2 + 2F'(u,v)\,dudv + G'(u,v)\,dv^2 \right)$$

③より、du^2, $dudv$, dv^2 の各係数を比較すると、

$$\begin{aligned} E(u,v) &= E(\xi(u,v),\eta(u,v))\xi_u^2 + 2F(\xi(u,v),\eta(u,v))\xi_u\eta_u + G(\xi(u,v),\eta(u,v))\eta_u^2 \\ F(u,v) &= E(\xi(u,v),\eta(u,v))\xi_u\xi_v + F(\xi(u,v),\eta(u,v))(\xi_u\eta_v + \eta_u\xi_v) + G(\xi(u,v),\eta(u,v))\eta_u\eta_v \\ G(u,v) &= E(\xi(u,v),\eta(u,v))\xi_v^2 + 2F(\xi(u,v),\eta(u,v))\xi_v\eta_v + G(\xi(u,v),\eta(u,v))\eta_v^2 \end{aligned}$$

である。

第2式に $v=0$ を代入すると、

$$F(u,0) = E(\xi(u,0),\ \eta(u,0))\ \overset{=1}{\xi_u(u,0)}\ \xi_v(u,0)$$

$$= E(u,0)\ \xi_v(u,0).$$

第1式に $v=0$ を代入すると、

$$E(u,0) = E(\xi(u,0),\ \eta(u,0))\ \overset{=1}{\xi_u^2(u,0)} + 2F(\xi(u,0),\ \eta(u,0))\ \xi_u(u,0)\ \overset{=0}{\eta_u(u,0)}$$

$$+ G(\xi(u,0),\ \eta(u,0))\ \overset{=0}{\eta_u(u,0)}{}^2$$

$$= E(u,0)$$

第3式に $v=0$ を代入すると、

$$G(u,0) = E(u,0)\ \xi_v(u,0)^2 + 2F(u,0)\ \xi_v(u,0)\ \eta_v(u,0) + G(u,0)\ \eta_v(u,0)^2$$

$$= E(u,0)\ \xi_v(u,0)^2 + 2E(u,0)\ \xi_v(u,0)^2\ \eta_v(u,0) + G(u,0)\ \eta_v(u,0)^2$$

$$\Longleftrightarrow (1-\eta_v(u,0)^2)\ G(u,0) = \left(\xi_v(u,0)^2 + 2\xi_v(u,0)^2\ \eta_v(u,0)\right) E(u,0)$$

$$= \left(1 + 2\eta_v(u,0)\right) \xi_v(u,0)^2\ E(u,0).$$

?

$$\varphi^* ds_f^2 = E(\xi(u,v),\eta(u,v))\,d\xi^2 + 2F(\xi(u,v),\eta(u,v))\,d\xi d\eta + G(\xi(u,v),\eta(u,v))\,d\eta^2$$

$$=: \tilde{E}\,du^2 + 2\tilde{F}\,dudv + \tilde{G}\,dv^2$$

$$= (E\xi_u^2 + 2F\xi_u\eta_u + G\eta_u^2)\,du^2 + 2(E\xi_u\eta_v + F\{\xi_u\eta_v + \xi_v\eta_u\} + G\eta_u\eta_v)\,dudv$$

$$+ (E\xi_v^2 + 2F\xi_v\eta_v + G\eta_v^2)\,dv^2$$

と表せる。※

※ 第一基本量の座標変換について

(Wikipedia「Metric tensor」より)

Coordinate transformations [edit]

Suppose now that a different parameterization is selected, by allowing u and v to depend on another pair of variables u' and v'. Then the analog of (2) for the new variables is

$$E' = \vec{r}_{u'} \cdot \vec{r}_{u'}, \quad F' = \vec{r}_{u'} \cdot \vec{r}_{v'}, \quad G' = \vec{r}_{v'} \cdot \vec{r}_{v'}. \tag{2'}$$

The chain rule relates E', F', and G' to E, F, and G via the matrix equation

$$\overset{(u',v')}{\begin{bmatrix} E' & F' \\ F' & G' \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial u}{\partial v'} \\ \frac{\partial v}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{bmatrix}^{\mathsf T} \overset{(u,v)}{\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial u}{\partial v'} \\ \frac{\partial v}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{bmatrix} \tag{3}$$

where the superscript T denotes the matrix transpose. The matrix with the coefficients E, F, and G arranged in this way therefore transforms by the Jacobian matrix of the coordinate change

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial u}{\partial v'} \\ \frac{\partial v}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} \xi_u & \eta_u \\ \xi_v & \eta_v \end{bmatrix}^{-1}$$

A matrix which transforms in this way is one kind of what is called a tensor. The matrix

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

with the transformation law (3) is known as the metric tensor of the surface.

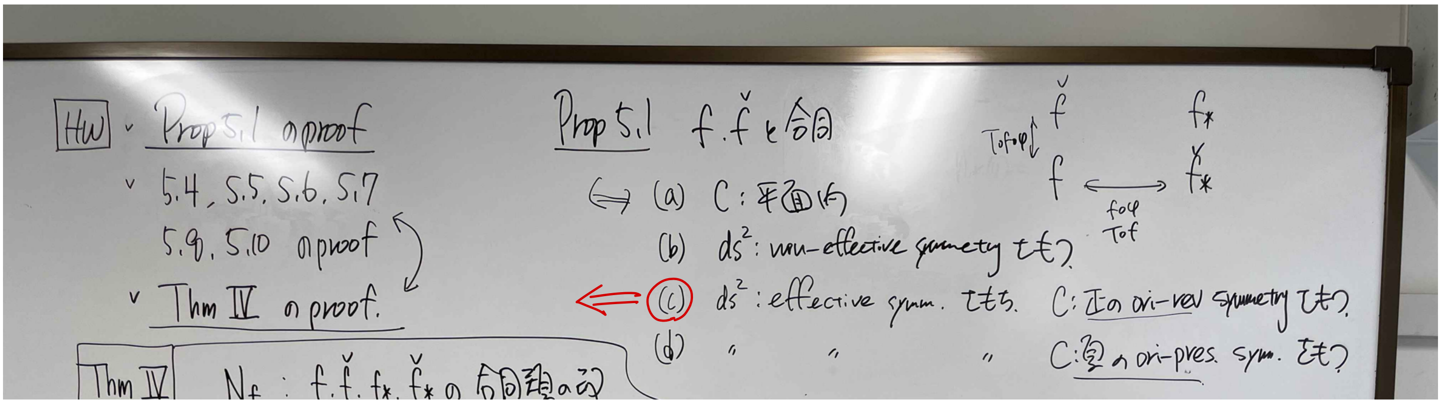
$$\overset{(u,v)\text{座標}}{\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \xi_u & \xi_v \\ \eta_u & \eta_v \end{bmatrix}^{\mathsf T}}_{= \begin{bmatrix} \xi_u & \eta_u \\ \xi_v & \eta_v \end{bmatrix}} \overset{(\xi,\eta)\text{座標}}{\begin{bmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \xi_u & \xi_v \\ \eta_u & \eta_v \end{bmatrix} \quad \text{より、}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_u & \eta_u \\ \xi_v & \eta_v \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_u & \xi_v \\ \eta_u & \eta_v \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{\xi_u\eta_v - \eta_u\xi_v} \cdot \frac{1}{\xi_u\eta_v - \eta_u\xi_v} \begin{bmatrix} \eta_v & -\eta_u \\ -\xi_v & \xi_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_v & -\xi_v \\ -\eta_u & \xi_u \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(\xi_u\eta_v - \eta_u\xi_v)^2} \begin{bmatrix} E\eta_v - F\eta_u & F\eta_v - G\eta_u \\ -E\xi_v + F\xi_u & -F\xi_v + G\xi_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_v & -\xi_v \\ -\eta_u & \xi_u \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\underbrace{(\xi_u\eta_v - \eta_u\xi_v)^2}_{(\det J)^2}} \begin{bmatrix} \eta_v(E\eta_v - F\eta_u) - \eta_u(F\eta_v - G\eta_u) & -\xi_v(E\eta_v - F\eta_u) + \xi_u(F\eta_v - G\eta_u) \\ \eta_v(-E\xi_v + F\xi_u) - \eta_u(-F\xi_v + G\xi_u) & -\xi_v(-E\xi_v + F\xi_u) + \xi_u(-F\xi_v + G\xi_u) \end{bmatrix}$$



(c) ds^2_f が effective symmetry φ を持ち、

C が 正 の ori-reversing symmetry T を持つ場合

$$\begin{cases} \cdot \det T = 1 \\ \cdot T \in O(3) \\ \cdot \forall p \in C,\ T(p) \neq p. \end{cases}$$

$g := T\circ f\circ\varphi$ とおく、$f(u,0) = \mathbb{C}(u)$ に対して、g の特異曲線は、

$$(g(u,0) =)\ T\circ f\circ\varphi(u,0) = T\circ f(-u,0) = T\mathbb{C}(-u) = \mathbb{C}(u).$$

であるため、f と $(g=)\ T\circ f\circ\varphi$ の特異曲線は一致する. 第一基本形式も共に等しい $\left(\begin{aligned} ds^2_g &= ds^2_{T\circ f\circ\varphi} \\ &= \varphi^* ds^2_f = ds^2_f \end{aligned}\right)$ ため、

$$(g=)\ T\circ f\circ\varphi = f \quad \text{または} \quad T\circ f\circ\varphi = \check{f}$$

である.

f の特異曲線 のフレネ枠 と

$(g=)\ T\circ f\circ\varphi$ の 特異曲線 の フレネ枠 は 同一. $\{\mathbb{e}(u), \mathbb{n}(u), \mathbb{b}(u)\}$

f のカスプ方向を $\mathcal{X}_f$、カスプ角を θ_f、

$(g=)\ T\circ f\circ\varphi$ のカスプ方向を $\mathcal{X}_g$、カスプ角を θ_g とすると、$\mathcal{X}_f$ と $\mathcal{X}_g$ は 次のように表せる.

$$\begin{cases} \mathcal{X}_f(u) = \cos\theta_f(u)\,\mathbb{n}(u) - \sin\theta_f(u)\,\mathbb{b}(u) \\ \mathcal{X}_g(u) = \cos\theta_g(u)\,\mathbb{n}(u) - \sin\theta_g(u)\,\mathbb{b}(u) \end{cases} \quad \cdots (*)$$

・単位法ベクトル場 $\hat{\nu}_g(u)$ と $\hat{\nu}_f(u)$ の関係式を求める.

$\nu_g(u,v) := \sigma\varepsilon T\nu_f\circ\varphi(u,v)$ とおく. $(\sigma := \det T,\ \varepsilon := \mathrm{sgn}(\det J))$

$$\det(g_u, g_v, \nu_g)(u,v) = \det\left((T\circ f\circ\varphi)_u, (T\circ f\circ\varphi)_v, \sigma\varepsilon T\nu_f\circ\varphi\right)(u,v)$$

$$= \underbrace{(\det T)}_{\sigma} \det\Big(\big(f(\xi(u,v),\eta(u,v))\big)_u, \big(f(\xi(u,v),\eta(u,v))\big)_v, \sigma\varepsilon\nu_f(\xi(u,v),\eta(u,v))\Big)$$

$$= \underset{=1}{\sigma^2}\varepsilon \det\Big(\big(f(\xi(u,v),\eta(u,v))\big)_u,\ \big(f(\xi(u,v),\eta(u,v))\big)_v,\ \nu_f(\xi(u,v),\eta(u,v)) \Big)$$

(b) と同様の合成関数の微分計算

$$= \varepsilon\ (\det J)\ (\lambda\circ\varphi)(u,v)$$

$$= \underbrace{|\det J|}_{>0}\ \underbrace{(\lambda\circ\varphi)(u,v)}_{\geq 0} \geq 0$$

よって、$\nu_g(u,v) = \sigma\varepsilon T\nu_f\circ\varphi(u,v)$ は、g の向きに同調した単位法ベクトル場である。
カスプ方向の定義より、$\mathcal{X}_g(u)$ は

$$\mathcal{X}_g(u) = \hat{\nu}_g(u) \times \mathbb{C}'(u) = \nu_g(u,0) \times \mathbb{C}'(u)$$

$$= \sigma\varepsilon T\nu_f\circ\varphi(u,0) \times \mathbb{C}'(u)$$

$\mathbb{C}(u) = T\mathbb{C}(-u)$ より、両辺 u で微分して $\mathbb{C}'(u) = -T\mathbb{C}'(-u)$

$$= \sigma\varepsilon \left\{ T\nu_f(-u,0) \times (-T\mathbb{C}'(-u)) \right\}$$

$$= -\sigma\varepsilon(\det T)\,T\left\{\nu_f(-u,0) \times \mathbb{C}'(-u)\right\}$$

$$= -\varepsilon T\,\mathcal{X}_f(-u)$$

となり、$\mathcal{X}_f$ を用いて表すことができる。(*) より、

$$\mathcal{X}_g(u) = -\varepsilon T\,\mathcal{X}_f(-u)$$

$$= -\varepsilon T\left\{\cos\theta_f(-u)\,\mathbb{n}(-u) - \sin\theta_f(-u)\,\mathbb{b}(-u)\right\}.$$

$u=0$ 代入して、補題1.2 $\big(T\mathbb{e}(0) = -\mathbb{e}(0),\ T\mathbb{n}(0) = \mathbb{n}(0),\ T\mathbb{b}(0) = -\sigma\mathbb{b}(0)\big)$ を適用すると、

$$\mathcal{X}_g(0) = -\varepsilon\left\{\cos\theta_f(0)\,\mathbb{n}(0) + \sigma\sin\theta_f(0)\,\mathbb{b}(0)\right\}$$

∘ $\varepsilon = 1$ の場合

$$\mathcal{X}_g(0) = -\cos\theta_f(0)\,\mathbb{n}(0) - \sigma\sin\theta_f(0)\,\mathbb{b}(0)$$

$$= -\cos(-\sigma\theta_f(0))\,\mathbb{n}(0) + \sin(-\sigma\theta_f(0))\,\mathbb{b}(0)$$

$$= \cos(\underbrace{\pi-\sigma\theta_f(0)}_{\theta_g(0)})\,\mathbb{n}(0) - \sin(\underbrace{\pi-\sigma\theta_f(0)}_{\theta_g(0)})\,\mathbb{b}(0)$$

$$\therefore\ \theta_g(0) = \pi - \sigma\theta_f(0) \quad (\mathrm{mod}\ 2\pi)$$

∘ $\varepsilon = -1$ の場合

$$\mathcal{X}_g(0) = \cos\theta_f(0)\,\mathbb{n}(0) + \sigma\sin\theta_f(0)$$

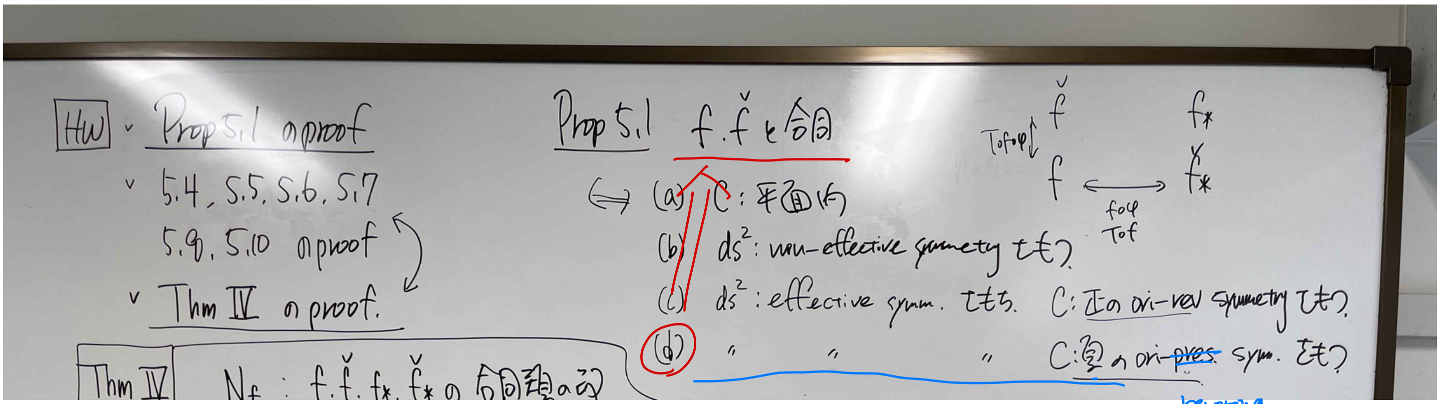
$$= \cos(-\sigma\theta_f(0))\,\mathbb{n}(0) - \sin(-\sigma\theta_f(0))\,\mathbb{b}(0)$$

$\therefore\ \theta_g(0) = -\sigma\theta_f(0)$ （まとめると、$\theta_g(0) = -\sigma\theta_f(0) + \frac{\varepsilon+1}{2}\pi$ ）

↪ $\sigma = 1$ なら、$(g=)\ T\circ f\circ\varphi = \check{f}$.

$\varphi(u,v) = (\xi(u,v),\ \eta(u,v))$

$\det J > 0$ … 向きを保つ.



reversing

(d) ds^2_f が effective symmetry φ を持ち、

C が負の ori-preserving symmetry T を持つ場合

$$\begin{cases} \cdot\ \det T = -1 \\ \cdot\ T \in O(3) \\ \cdot\ \forall P \in C,\ T(P) = P. \end{cases}$$

$g := T\circ f\circ\varphi$ とおく、$f(u,0) = \mathbb{C}(u)$ に対して、g の特異曲線は、

$$(g(u,0) =)\ T\circ f\circ\varphi(u,0) = T\circ f(-u,0) = T\mathbb{C}(-u) = \mathbb{C}(-u)\ \ (=: \mathbb{C}_*(u))$$

であるため、f と $(g=)\ T\circ f\circ\varphi$ の特異曲線は向きが逆となる。第一基本形式も共に等しいため、

$$(g=)\ T\circ f\circ\varphi = f_* \text{ または } T\circ f\circ\varphi = \check{f}_* \qquad ?$$

である。

$\mathbb{C}_*(u)\ (=\mathbb{C}(-u))$ のフレネ枠は $\{-\mathbb{e}(u),\ \mathbb{n}(-u),\ -\mathbb{b}(-u)\}$

f のカスプ方向を $\mathcal{X}_f$、カスプ角を θ_f、

$(g=)\ T\circ f\circ\varphi$ のカスプ方向を $\mathcal{X}_g$、カスプ角を θ_g とすると、$\mathcal{X}_f$ と $\mathcal{X}_g$ は次のように表せる。

$$\begin{cases} \mathcal{X}_f(u) = \cos\theta_f(u)\,\mathbb{n}(u) - \sin\theta_f(u)\,\mathbb{b}(u) \\ \mathcal{X}_g(u) = \cos\theta_g(u)\,\mathbb{n}_*(u) - \sin\theta_g(u)\,\mathbb{b}_*(u) \\ \qquad\quad = \cos\theta_g(u)\,\mathbb{n}(-u) + \sin\theta_g(u)\,\mathbb{b}(-u) \end{cases}$$

・単位法ベクトル場 $\hat{\nu}_g(u)$ と $\hat{\nu}_f(u)$ の関係式を求める。

(c) と同様に、$\nu_g(u,v) := \sigma\,\varepsilon\,T\,\nu_f\circ\varphi(u,v)$ とおけば、ν_g は g の向きに同調した単位法ベクトル場。

$\mathcal{X}_f$ と $\mathcal{X}_g$ の関係式を求める

$$
\begin{aligned}
\mathcal{X}_g(u) &= \hat{\nu}_g(u) \times \mathbb{C}_*'(u) \\
&= \sigma \varepsilon T \nu_f \circ \varphi(u, 0) \times \left(\frac{d}{du} \mathbb{C}(-u)\right) \\
&= \sigma \varepsilon T \hat{\nu}_f(-u) \times \left(\frac{d}{du} T\mathbb{C}(-u)\right) \\
&= -\sigma \varepsilon \left(T\hat{\nu}_f(-u)\right) \times \left(T\mathbb{C}'(-u)\right) \\
&= \underbrace{-\varepsilon T \mathcal{X}_f(-u)}_{\text{(c) と同じ}} \\
&= -\varepsilon \left(\cos\theta_f(-u)\, T\mathbb{n}(-u) - \sin\theta_f(-u)\, T\mathbb{b}(-u)\right)
\end{aligned}
$$

trivial symmetry T に対して、

$T\mathbb{e}(0) = \mathbb{e}(0)$、$T\mathbb{n}(0) = \mathbb{n}(0)$、$T\mathbb{b}(0) = \sigma\, \mathbb{b}(0)$.

$$
\mathcal{X}_g(0) = -\varepsilon \left(\cos\theta_f(0)\, \mathbb{n}(0) - \sin\theta_f(0)\, \sigma\, \mathbb{b}(0)\right).
$$

- $\varepsilon = -1$ の場合

$$
\begin{aligned}
\mathcal{X}_g(0) &= \cos\theta_f(0)\, \mathbb{n}(0) - \sin(\sigma\theta_f(0))\, \mathbb{b}(0) \\
&= \cos\underbrace{(-\sigma\theta_f(0))}_{\theta_g}\, \mathbb{n}(0) + \sin\underbrace{(-\sigma\theta_f(0))}_{\theta_g}\, \mathbb{b}(0).
\end{aligned}
$$

$$
\therefore\ \theta_g(0) = -\sigma\theta_f(0)
$$

- $\varepsilon = 1$ の場合

$$
\begin{aligned}
\mathcal{X}_g(0) &= -\cos\theta_f(0)\, \mathbb{n}(0) + \sin\theta_f(0)\, \sigma\, \mathbb{b}(0) \\
&= \cos\underbrace{(\pi - \sigma\theta_f(0))}\, \mathbb{n}(0) + \sin\underbrace{(\pi - \sigma\theta_f(0))}\, \mathbb{b}(0)
\end{aligned}
$$

$$
\therefore\ \theta_g(0) = \pi - \sigma\theta_f(0)
$$

(まとめると、$\theta_g(0) = -\sigma\theta_f(0) + \dfrac{\varepsilon+1}{2}\pi$)

HW prop 5.1 「f と $\check{f}$ が合同」 $\Longrightarrow$ (a) (b) (c) (d) のいずれか

※ T が trivial (ori-preserving) symmetry の場合の補題1.2は

$$T\boldsymbol{e}(0) = \boldsymbol{e}(0)$$
$$T\boldsymbol{n}(0) = \boldsymbol{n}(0)$$
$$T\boldsymbol{b}(0) = \sigma\, \boldsymbol{b}(0)$$ となる. (Remark 4.4 の計算より)

$g = T \circ f$ の場合

$g(u,0) = T\mathbb{C}(u) = \mathbb{C}(u)$. $\longrightarrow$ $T\circ f = f$ または $\check{f}$.

$$\det(g_u, g_v, \nu_g)(u,v) = \det\left((T\circ f(u,v))_u,\ (T\circ f(u,v))_v,\ \sigma T \nu_f(u,\check{v})\right)$$

$\nu_g = \sigma T \nu_f$

$$= (\det T) \det\left(f_u, f_v, \sigma \nu_f\right)(u,v)$$
$$= \underbrace{\sigma^2}_{=1} \det(f_u, f_v, \nu_f)(u,v)$$
$$= \lambda(u,v) \geq 0.$$

$$\mathcal{X}_g = \hat{\nu}_g(u) \times \mathbb{C}'(u)$$
$$= \nu_g(u,0) \times \mathbb{C}'(u)$$
$$= \sigma T \nu_f(u,0) \times \mathbb{C}'(u)$$
$$= \sigma T \mathcal{X}_f(u)$$

$$\therefore \mathcal{X}_g(u) = \sigma T\left(\cos\theta_f(u)\, \boldsymbol{n}(u) - \sin\theta_f(u)\, \boldsymbol{b}(u)\right)$$
$$= \sigma\left(\cos\theta_f(u)\, T\boldsymbol{n}(u) - \sin\theta_f(u)\, T\boldsymbol{b}(u)\right)$$

$$\mathcal{X}_g(0) = \sigma\left(\cos\theta_f(0)\, \boldsymbol{n}(0) - \sigma \sin\theta_f(0)\, \boldsymbol{b}(0)\right)$$
$$= \sigma \cos\theta_f(0)\, \boldsymbol{n}(0) - \sin\theta_f(0)\, \boldsymbol{b}(0)$$

$\longrightarrow$ $\sigma = 1$ なら $\theta_g(0) = \theta_f(0)$. $(T\circ f = f)$

$\downarrow$ $\sigma = -1$ の場合

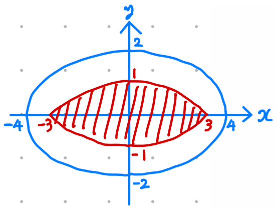
$$= -\cos\theta_f(0)\, \boldsymbol{n}(0) - \sin\theta_f(0)\, \boldsymbol{b}(0)$$
$$= \cos(\pi - \theta_f)\, \boldsymbol{n}(0) - \sin(\pi - \theta_f)\, \boldsymbol{b}(0)$$

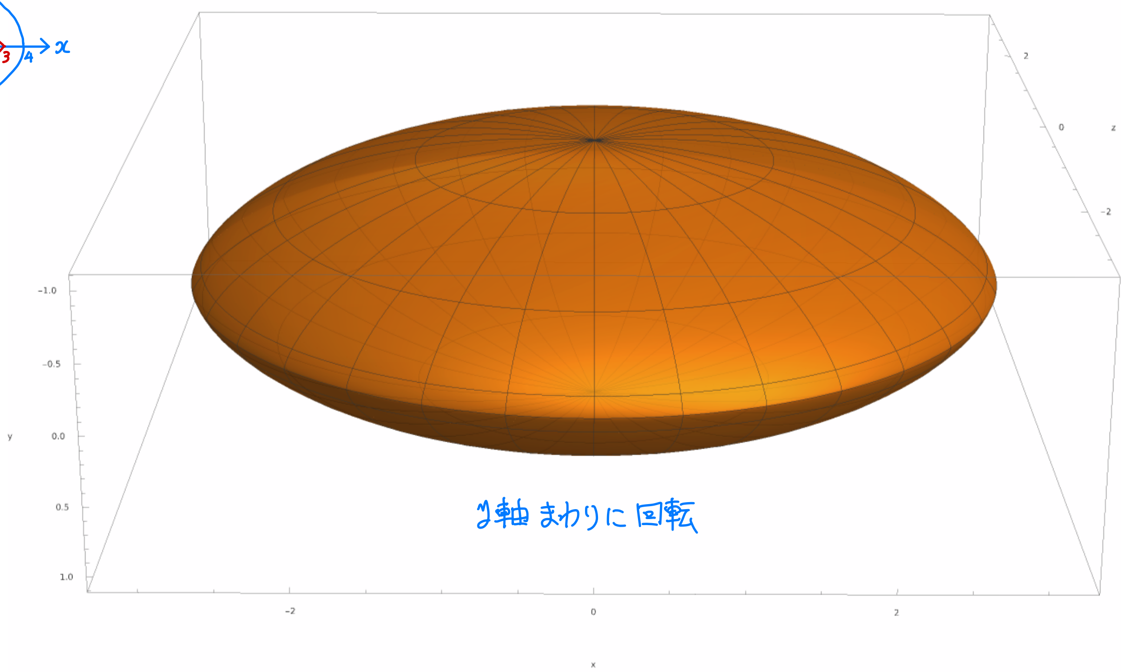
$$\therefore \theta_g(0) = \pi - \theta_f(0)$$

$g = f \circ \varphi$ の場合

- $(g(u,0) =)\ f \circ \varphi(u,0) = f(-u,0) = C(-u)$. ← $g = f_K$ または $\check{f}_K$ になってしまう

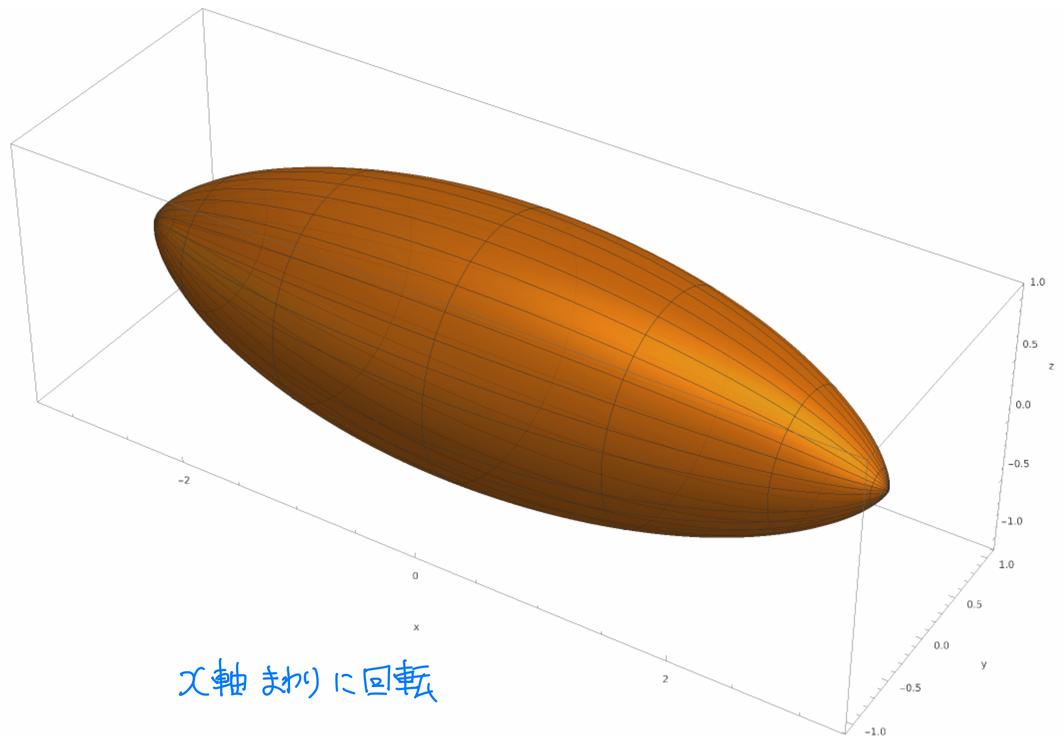
(3.4)-CE を持つ S^2 と同相な閉波面





y軸まわりに回転

$$f(\theta,\varphi) = \left(\cos\theta\cos\varphi\left\{4 - \frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta + 4\sin^2\theta}}\right\},\ 2\sin\theta\left\{1 - \frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta + 4\sin^2\theta}}\right\},\ \cos\theta\sin\varphi\left\{4 - \frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta + 4\sin^2\theta}}\right\} \right)$$



x軸まわりに回転

$$f(\theta,\varphi) = \left(\cos\theta\left\{4 - \frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta + 4\sin^2\theta}}\right\},\ 2\cos\varphi\sin\theta\left\{1 - \frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta + 4\sin^2\theta}}\right\},\ 2\sin\theta\sin\varphi\left\{1 - \frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta + 4\sin^2\theta}}\right\} \right)$$