Duality on Generalized Cuspital Edges Preserving Singular Set Images And First Fundamental Forms.

Introduction

セクション3
命題3.1まで

- f：空間曲線 C を特異点集合の像として持つ、ジェネリックなカスピタルエッジの芽(germ)

- 異性体(isomer)：f と同じ「第一基本形式(first fundamental form)」と「特異点集合の像」を持ち、f と右同値(right equivalent)ではないカスピタルエッジ(cuspital edge)のこと

カスプ辺

(f の異性体…$\check{f}$)

(S^2)
$S^n \times R$?
$H^1 \times R$?
(H^2)

- C の向きを反転させることで、新たな2つの異性体候補

  f_* (f の inverse)

  $\check{f}_*$ (f の dual inverse)

が得られる。本論文では、f の異性体は全て

$\check{f}$、f_*、$\check{f}_*$

のいずれかと右同値であることを示す。

また、これら異性体の間で生じる合同類(congruence class)の個数を決定する。

用語の設定

- C^r-微分可能とは、
  - $r=\infty$ の時に C^∞-differentiability
  - $r=\omega$ の時に実解析的

を意味するものとする。

- $\mathbb{R}^3$：3次元ユークリッド空間
- U：uv 平面 $\mathbb{R}^2$ の原点$(0,0)$の近傍
- $f: U \to \mathbb{R}^3$：C^r級写像

◦ 一般性を失わず、$f(0)=\mathbb{0}$ と仮定してよい。

$0 := (0,0)$

$\mathbb{0} := (0,0,0)$

$(0,1)$

• $p \in U$ が 特異点 である
singular point

$\overset{\text{def}}{\iff}$ f が p において はめ込み ではない ことを言う。
immersion

• p が カスピダルエッジ点 (あるいは 一般化カスピダルエッジ点) である

$\overset{\text{def}}{\iff}$ 局所 C^r 級微分同相写像

◦ φ ($\mathbb{R}^2$ の側)

◦ Φ ($\mathbb{R}^3$ の側)

が存在し、次の3条件を満たす。

① $\varphi(0) = p$

② $\Phi(f(p)) = \mathbb{0}$

③ $(f_{3/2} :=)$ $(u, v^2, v^3) = \Phi \circ f \circ \varphi(u,v)$

(あるいは $(u, v^2, v^3 a(u,v)) = \Phi \circ f \circ \varphi(u,v)$)

C^r 級関数

• $p \in U$ が $\frac{5}{2}$ カスピダルエッジ点 (あるいは 折り特異点) である
fold singular point

目

$\overset{\text{def}}{\iff}$ 局所 C^r 級微分同相写像

◦ φ ($\mathbb{R}^2$ の側)

◦ Φ ($\mathbb{R}^3$ の側)

が存在し、次の3条件を満たす。

① $\varphi(0) = p$

② $\Phi(f(p)) = \mathbb{0}$

③ $(f_{5/2} :=)$ $(u, v^2, v^5) = \Phi \circ f \circ \varphi(u,v)$

(あるいは、$(u, v^2, 0) = \Phi \circ f \circ \varphi(u,v)$)

一般化カスピダルエッジ点
$a(u,v) = v^2$

• 特異点 $p \in U$ が カスピダル交差帽子点 (cross cap point) である

$\overset{\text{def}}{\iff}$ 局所 C^r 級微分同相写像

・φ ($\mathbb{R}^2$ の側)

・Φ ($\mathbb{R}^3$ の側)

が存在し、次の3条件を満たす.

① $\varphi(0) = p$

② $\Phi(f(p)) = 0$

③ $(f_{ccr} :=)\ (u, v^2, uv^3) = \Phi \circ f \circ \varphi(u, v)$

$\boxed{\text{一般化カスピダルエッジ点}\quad a(u,v) = u}$

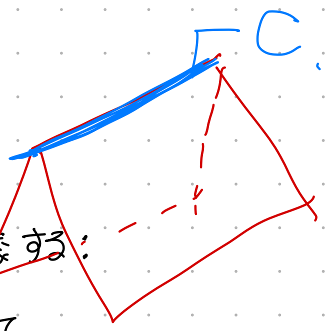
• $g^r_{3/2}(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3)$ (あるいは $g^r(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3)$) を、$f(0) = 0$ を満たす C^r 級カスピダルエッジ (あるいは一般化 C^r 級カスピダルエッジ) の 芽 (germ) の集合と定義する.

さらに $l > 0$ を固定して、$C(0) = 0$ を満たすような 埋め込み (つまり、単純正則空間曲線)

$$C : J \to \mathbb{R}^3 \quad (J := [-l, l])$$

を考える. 曲線 C に対して、$u \mapsto C(u)$ が 弧長パラメータ表示 は 仮定しない.

• $\mathcal{C}$ を C の像 (image) と定義する. $\mathcal{C}$ の向き付けを無視して、これを「f の特異点集合の像」とみなす.



$g^r_{3/2}(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3, \mathcal{C})$ (あるいは $g^r(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3, \mathcal{C})$) を次のように定義する:

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $g^r_{3/2}(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3)$ (あるいは $g^r(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3)$) の部分集合であって、$f$ の特異点集合像 が $\mathcal{C}$ に含まれる. (つまり、$\mathcal{C}$ は f の エッジ (辺) である)

同様に、カスプ交差帽子 の 芽 (または、5/2 カスピダルエッジ の芽) からなる 部分集合

$$g^r_{ccr}(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3, \mathcal{C}) \quad (\text{または、} g^r_{5/2}(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3, \mathcal{C}))$$

も 定義される.

- 論文を通して、$C(u)$ の曲率関数 $\kappa(u)$ は

$$\kappa(u) > 0 \quad (u \in J) \qquad (0.2)$$

を満たすと仮定する.

- U を $\mathbb{R}^2$ 内の $J \times \{0\}$ の近傍とし、写像 $f: U \to \mathbb{R}^3$ は $J \times \{0\}$ に沿って一般化カスピダルエッジ点を持ち、

$$f(u, 0) = C(u) \quad (u \in J) \qquad (0.3)$$

を満たすとする. このような f 全体の集合を $\mathcal{G}^r_{\cancel{3/2}}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$ と表し、これを「C に沿った一般化カスピダルエッジ」と呼ぶ.

- 0(原点)での写像芽 (map germ) と同様に、集合

$$\mathcal{G}^r_{3/2}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C), \quad \mathcal{G}^r_{ccr}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C), \quad \mathcal{G}^r_{2/5}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$$

C^r 級カスピダルエッジ　カスプ交差帽子　$\frac{5}{2}$ カスピダルエッジ

も自然に定義される.

C 上の点 P に対して、C に垂直かつ P を通る平面 $\Pi(P)$ を、f の P における法平面 (normal plane) と呼ぶ.

- C 上の点 P の $\Pi(P)$ によって出来る f の切断面は、P で特異点を持つ平面曲線となる.

$\rightarrow$ これを、f の P における「断面カスプ (sectional cusp)」と呼ぶ.

さらに、P において断面カスプの接線方向となる接ベクトル $v \in T_P\mathbb{R}^3$ が存在する.

$\rightarrow$ これを、「カスプ方向 (cuspidal direction)」と呼ぶ. (内側のみ)

また、カスプ方向と C の主法線ベクトルのなす角 θ_P を「カスプ角 (cuspidal angle)」と呼ぶ.

- $C(0)$ $(= 0)$ における初期値 $\theta_{C(0)} \in (-\pi, \pi]$ を正規化 (normalize) すれば、$C(u)$ におけるカスプ角

$$\theta(u) := \theta_{C(u)} \quad (u \in J)$$

は、C^r 級関数として一意に定まる. [12, 16] では、エッジ $C(u)$ に沿う特異曲率 (singular curvature) $\kappa_s(u)$ と極限法曲率 (limiting normal curvature) $\kappa_\nu(u)$ が定義されており、本状況ではそれぞれ

$$\kappa_s(u) := \kappa(u)\cos\theta(u),\quad \kappa_\nu(u) := \kappa(u)\sin\theta(u) \quad (u \in J) \tag{0.4}$$

と表される。定義より、$\kappa(u) = \sqrt{\kappa_s(u)^2 + \kappa_\nu(u)^2}$ が J 上で成り立つ。

- $f \in \mathcal{g}^r(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3, C)$ が原点 O で「ジェネリック (generic)」であるとは、

$$|\kappa_s(0)| < \kappa(0) \tag{0.5}$$

$(\Longleftrightarrow \kappa_\nu \neq 0)$

を満たすことを言う。

generic $\Longleftrightarrow \kappa(0)^2 - \kappa_s(0)^2 > 0$

$\Longleftrightarrow \kappa_\nu(0)^2 > 0.$

$\Longleftrightarrow \kappa_\nu(0) \neq 0.$

- ジェネリックな C^r 級一般化カスピダルエッジの芽の集合を、

$$\mathcal{g}^r_*(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3, C)$$

と記し、さらに

$$\begin{aligned}
\mathcal{g}^r_{*\,3/2}(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3, C) &:= \mathcal{g}^r_*(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3, C) \cap \mathcal{g}^r_{3/2}(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3, C) \\
\mathcal{g}^r_{*\,ccr}(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3, C) &:= \mathcal{g}^r_*(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3, C) \cap \mathcal{g}^r_{ccr}(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3, C) \\
\mathcal{g}^r_{*\,5/2}(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3, C) &:= \mathcal{g}^r_*(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3, C) \cap \mathcal{g}^r_{5/2}(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3, C)
\end{aligned} \tag{0.6}$$

と定義する。一方、$f \in \mathcal{g}^r(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$ に対して、条件

$$|\kappa_s(u)| < \kappa(u) \quad (u \in J) \tag{0.7}$$

を考える。これは、C に沿う f の特異点が全てジェネリックであることを意味する。
この条件 (0.7) を満たす $f \in \mathcal{g}^r(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$ の集合を、

$$\mathcal{g}^r_*(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C) \tag{0.8}$$

とする。さらに、次の条件

$$\max_{u \in J} |\kappa_s(u)| < \min_{u \in J} \kappa(u) \tag{0.9}$$

が成り立つならば、f は「許容的 (admissible)」と呼ぶ。許容的な $f \in \mathcal{g}^r(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$ の集合を、

$$\mathcal{g}^r_{**}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C) \tag{0.10}$$

と記す。式 (0.6) を真似することで、

$$\mathcal{g}^r_{*,\,2/3}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C),\quad \mathcal{g}^r_{**,\,3/2}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C) \tag{0.11}$$

が定義される. 次の補題 0.1 は自明である.

Lemma 0.1

f が $\mathcal{G}^r_{3/2}(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3, C)$ (または $\mathcal{G}^r_{*,3/2}(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3, C)$) に属するとする. このとき、ある正の実数 ε (>0) が存在して、f は

$$\mathcal{G}^r_{3/2}(\mathbb{R}^2_{J(\varepsilon)}, \mathbb{R}^3, C) \quad (\text{または } \mathcal{G}^r_{**,3/2}(\mathbb{R}^2_{J(\varepsilon)}, \mathbb{R}^3, C))$$

の要素である. $J(\varepsilon) := [-\varepsilon, \varepsilon]$ とする.

- $O(3)$ (または $SO(3)$) を、原点 0 を固定する $\mathbb{R}^3$ の 等長変換群 (isometry group) (または、向きを保存する等長変換群) としての直交群 (または特殊直交群) と定義する.

Definition 0.2

f_i ($i=1,2$) を $\mathcal{G}^r(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3, C)$ (または $\mathcal{G}^r(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$) に属する一般化カスピダルエッジとする. このとき、0 (または $J\times\{0\}$) の近傍 $U_i \subset \mathbb{R}^2$ が存在して

$$f_1(U_1) = f_2(U_2)$$

となるならば、f_1 の像は f_2 の像と「同一の像 (same image)」を持つ、と言う.

一方、f_1 と f_2 が「合同 (congruent)」であるとは、ある直交行列 $T \in O(3)$ が存在して、$T \circ f_1$ の像が $\cancel{f_2}$ f_2 の像と一致することである.

次に、以下の2種類の同値関係を定義する.

Definition 0.3

与えられた $f \in \mathcal{G}^r(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3, C)$ (または $\mathcal{G}^r(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$) に対して、その第一基本量を ds^2_f と表す. 一般化カスピダルエッジ $g \in \mathcal{G}^r(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3, C)$ (または $\mathcal{G}^r(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$) が

fと「右同値(right equivalent)」であるとは、$\mathbb{R}^2$の原点(または $J\times\{0\}$)の近傍上で定義された微分同相写像 φ が存在して、

$$g = f\circ\varphi$$

と書けることをいう。

Definition 0.4

与えられた一般化カスピダルエッジ $f\in\mathcal{g}^r(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3, C)$ (または $\mathcal{g}^r(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$) に対し、その第一基本量を ds_f^2 と記す。一般化カスピダルエッジ $g\in\mathcal{g}^r(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3, C)$ (または $\mathcal{g}^r(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$) が f と「等長(isometric)」であるとは、$\mathbb{R}^2$の原点(または $J\times\{0\}$)の近傍上で定義された微分同相写像 φ が存在して、

$$\varphi^* ds_f^2 = ds_g^2$$

が成立することを言う。

特に、$f=g$ の場合を考える。もし

$$\varphi^* ds_f^2 = ds_f^2 \quad \text{かつ} \quad \varphi \text{ が恒等写像でない}$$

時、φ を ds_f^2 の「対称性(symmetry)」と呼ぶ。さらに、φ が f の特異曲線の向きを反転させるならば、φ は effective と呼ばれる。

Remark 0.5

カスピダルエッジ $g\in\mathcal{g}^r_{3/2}(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3, C)$ (または $\mathcal{g}^r_{2/3}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$) が与えられた $f\in\mathcal{g}^r_{3/2}(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3, C)$ (または $\mathcal{g}^r_{3/2}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$) と 同一の像を持つことは、$g$ が f と右同値であることと同値である。

$g = f\circ\varphi \quad (\varphi:\text{diffeo})$

もし2つの一般化カスピダルエッジ $f, g\in\mathcal{g}^r_{3/2}(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3, C)$ (または $\mathcal{g}^r_{2/3}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$) が右同値であるならば、互いに等長となる。 $\varphi^* ds_f^2 = ds_g^2$

しかし、逆(互いに等長 $\Rightarrow$ 互いに右同値)は必ずしも成り立たない。そこで以下を定義する。

Definition 0.6

与えられた $f \in \mathcal{g}^r(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3, C)$ (または $\mathcal{g}^r(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$) に対し、一般化カスピダルエッジ $g \in \mathcal{g}^r(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3, C)$ (または $\mathcal{g}^r(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$) が f の「異性体 (isomer)」であるとは、次の条件を満たすことを言う。

(i) g と f は等長である。かつ、
(ii) g は f と右同値ではない。

この状況において、さらに次の2条件を満たすならば、g を f の「忠実な異性体 (faithful isomer)」と呼ぶ。

- 局所的な微分同相写像 φ が存在して、
$$\varphi^* ds^2_f = ds^2_g$$
を満たす。
- $u \longmapsto f \circ \varphi(u,0)$ により誘導される C の向きと $u \longmapsto g(u,0)$ により与えられる C の向きが、$u \longmapsto f(u,0)$ によって与えられる向きと一致 (compatible) する。

- [14, Corollary D] において、対合 (involution) の存在が示された。

$$\mathcal{g}^\omega_{*,3/2}(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3, C) \ni f \longmapsto \check{f} \in \mathcal{g}^\omega_{*,3/2}(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3, C) \qquad (0.12)$$

$\check{f}$ を構成するには、実解析的な偏微分方程式に対する Cauchy - Kowalevski の定理 (Theorem 3.8) を適用する必要がある。ここで、$\check{f}$ は f の「等長双対 (isometric dual)」と呼ばれ、以下の性質を満たす。

(i) $\check{f}$ の第一基本量は f の第一基本量と一致する。
(ii) $\check{f}$ は f の忠実な異性体である。
(iii) $P \in C$ における f のカスプ角 (cuspital angle) が $\theta(P)$ であれば、$\check{f}$ の同一点でのカスプ角は $-\theta(P)$ である。

[14] では、ある半正定値計量が C に沿うカスピダルエッジの第一基本量として実現するための必要十分条件が示されている。
本論文では [14] の手法を用いて次を証明する。

Theorem I.

第一の対合(first involution)と呼ばれる対合が存在する。

$$I_C : g^\omega_*(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C) \ni f \longmapsto \check{f} \in g^\omega_*(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C) \qquad (0.13)$$

が $g^\omega_*(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$ 上で定義され、上述の性質 (i)(ii)(iii) を満たす。さらに、f と $\check{f}$ を原点 O における写像芽と見なすと(Lemma 0.1 参照)、I_C は写像

$$I_0 : g^\omega_*(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3, C) \ni f \longmapsto \check{f} \in g^\omega_*(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3, C) \qquad (0.14)$$

を誘導し、これは (0.12) の写像の一般化となる。

- 写像 I_0 の存在は [5. Theorem B] からも従う。なぜなら、$\check{f}$ は [5. Definition 3] の意味で合同だからである。

  しかし、I_C の存在自体は [5] から従わない。

  → Theorem I で与えられる $\check{f}$ は原点での写像芽ではなく、曲線 C に沿った写像芽であるため。

  (swallowtail ツバメの尾の場合、上述の性質 (i)(ii)(iii) に対応する双対性は得られていない。)

- Theorem I は、次の幾何的問題を示唆している:

  (1) $\check{f}$ 以外に f の異性体の右同値類(right equivalence class)は、何種類存在するか?

  (2) いつ異性体は合同でないのか?

  (3) 等長双対(isometric dual)の存在は Cauchy-Kowalevski の定理を用いて証明されるため、与えられた一般化カスピダルエッジは実解析的であると仮定する必要がある。従って、C^∞ 級微分可能なカテゴリーで等長双対を構成する手法が見つかるか?

  (4) 等長双対性を、例えばツバメの尾に対しても、より広いクラスへ拡張できるか?

- 本論文では、次を示す：

  - 与えられた一般化カスピダルエッジ $f \in \mathcal{G}^{\omega}_{**}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$ に対して、$C(-u)$ に沿って f と同じ第一基本量を持ち、かつ f と同符号のカスプ角を持つ一般化カスピダルエッジ $f_* \in \mathcal{G}^{\omega}_{**}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$ （f の逆（inverse）と呼ぶ）が存在する。

    さらに、f の任意の異性体は $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ のいずれかと右同値である。

    （Theorem II 参照。$\check{f}_* := I_C(f_*)$ は、f の逆双対（inverse dual）と呼ばれる）

  - 4つの写像 $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ は、一般には互いに合同ではない。また、これら4つの曲面の右同値類および合同類は、C と ds^2_f の性質によって決まる。（Theorem III、IV 参照。）

  - もし C^∞ 級微分可能なカスピダルエッジ f の像が $\mathbb{R}^3$ の非自明な対称性 $T \in SO(3)$ （定義1.2）によって不変であるならば、Cauchy-Kowalevski の定理を用いずに $\check{f}$ の明示的構成が可能である。（Example 5.3 参照）

- 問題(4) について、与えられたツバメの尾の異性体が一般に存在するかは不明であると考えている。

  → 本論文の手法は直接適用できないためであり、未解決の問題として残っている。

- 本論文の構成は次の通り。

  - セクション1：主結果を説明
  - セクション2：Kossowski 計量の定義と性質
  - セクション3：[14] の証明の修正版を用いて Theorem I を証明する。
  - セクション4：Fukui [3] による一般化カスピダルエッジの表示公式を思い出して、Theorem II を証明する。
  - セクション5：対称性を持つジェネリックなカスピダルエッジの性質を調べ、

Theorem Ⅲ、Ⅳ を証明する.

- セクション6 ; いくつかの具体例
- 付録 ; ユークリッド平面における一般化カスプの表示公式

1章 主結果

ds^2 を、C^r級微分可能な2次元多様体 M^2 上の C^r級微分可能な半正定値計量とする。

- 点 $o \in M^2$ が ds^2 の 正則点(Regular Point) である
  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ o が ds^2 において 正定値 である.

- 点 $o \in M^2$ が ds^2 の 特異点(Singular Point) である
  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ o が ds^2 において 正定値 で ない

- Kossowski [8] は、この半正定値計量のうち、特定の性質を持つものを Kossowski 計量 を定義した(セクション2 参照)

2章では ds^2 を kossowski そのような 計量とする. すると、M^2 の各特異点 o に対して、正則曲線 $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M^2$ が存在して, $\gamma(0) = o$ となり、γ は ds^2 の o 近傍の特異集合 のパラメータ表示となる.
このような曲線を、ds^2 の o における 特異曲線(singular curve) と呼ぶ.

- ds^2 が o において type I である
  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $ds^2(\gamma'(0), \gamma'(0))$ が does not vanish 消えていない(ゼロでない).

なお、一般化カスピダルエッジの芽 の 第一基本形式 (すなわち 誘導計量) は、type I の Kossowski計量 に属する. (命題3.1 参照)

- $M^2 := (\mathbb{R}^2; u, v)$ として、原点 $o := (0, 0)$ における type I の C^r級 Kossowski 計量 の芽の集合を、$K^r_I(\mathbb{R}^2_o)$ と記す.

そのような $ds^2 \in K^r_I(\mathbb{R}^2_o)$ を 固定すると、計量は

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

と表される. また、ある C^r 級関数 λ が存在して、

$$\lambda^2 = EG - F^2$$

が成り立つ.

ds^2 が正定値であるような点で定義されるガウス曲率を K とすると、次のように $\hat{K}$ を定義できる；

$$\hat{K} := \lambda K \qquad (1.1)$$

これは、原点近傍 $U \subset \mathbb{R}^2$ で C^r 級関数として考えられる. ([5][12] 参照)

- ds^2 が特異点 $q \in U$ において放物的 (parabolic) である
  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 特異点 $q \in U$ において $\hat{K}$ が消える
- ds^2 が特異点 $q \in U$ において非放物的 (non-parabolic) である
  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 特異点 $q \in U$ において $\hat{K}$ が消えない.

- o における typeI の非放物的な C^r 級 Kossowski 計量の芽の集合を

$$K_*^r(\mathbb{R}_o^2)$$

と表し、放物的な C^r 級 Kossowski 計量の芽の集合を

$$K_p^r(\mathbb{R}_o^2)$$

と表す. また、$K_p^r(\mathbb{R}_o^2)$ の部分集合 $K_{p,*}^r(\mathbb{R}_o^2)$ を次のように定義する.

$$K_{p,*}^r(\mathbb{R}_o^2) := \{ ds^2 \in K_p^r(\mathbb{R}_o^2) \;;\; \hat{K}'(o) \neq 0 \}$$

$$\left(= \{ ds^2 \in K_{\mathrm{I}}^r(\mathbb{R}_o^2) \;;\; \hat{K}(o) = 0,\ \hat{K}'(o) \neq 0 \} \right)$$

$K_{p,*}^r(\mathbb{R}_o^2)$ に属する計量を P-ジェネリック (p-generic) と呼ぶ.

一方、もし $ds^2 \in K_{\mathrm{I}}^r(\mathbb{R}_o^2)$ において $\overset{(=\lambda K)}{\hat{K}}$ が計量の特異点曲線に沿って恒等的に消える (ゼロになる) ならば、ds^2 を type I の漸近 Kossowski 計量 (asymptotic Kossowski) と呼ぶ. このような計量の芽の集合を、

$$K_a^r(\mathbb{R}_o^2)$$

と表す.

この用語は次の2点に由来する.

- 正則曲面では、法曲率が消える(ゼロになる)方向は漸近方向と呼ばれる.
- 極限法曲率 κ_ν が、その特異点集合に沿って恒等的に消える(ゼロになる)ようなカスピダルエッジの誘導計量は $K^r_a(\mathbb{R}^2_o)$ に属する.

(このようなカスピダルエッジは漸近的カスピダルエッジと呼ばれる. 命題4.12)

- 定義より、次の3つが成立する.

$$K^r_*(\mathbb{R}^2_o) \cap K^r_p(\mathbb{R}^2_o) = \emptyset$$

$$K^r_*(\mathbb{R}^2_o) \cap K^r_p(\mathbb{R}^2_o) = K^r_I(\mathbb{R}^2_o)$$

$$K^r_a(\mathbb{R}^2_o) \subset K^r_p(\mathbb{R}^2_o) \subset K^r_I(\mathbb{R}^2_o)$$

$ds^2 \in K^r_a(\mathbb{R}^2_o)$ の場合、ガウス曲率 K は原点 o 近傍で C^r 級関数として延長可能である. 漸近 Kossowski 計量 ds^2 の特異点 o におけるヌルベクトルを

$$\eta \in T_o\mathbb{R}^2$$

とする. もし、

$$dK(\eta)(o) \neq 0 \qquad (1.2)$$

← 5/2 カスプ辺と対応

であるならば、ds^2 は a-generic と呼ばれる.

そのような a-generic な漸近 Kossowski 計量の芽の集合を $K^r_{a,*}(\mathbb{R}^2_o) \subset K^r_a(\mathbb{R}^2_o)$ と記す. さらに f の第一基本形式 ds^2_f を考えると、写像

$$J_o : \mathcal{g}^r_*(\mathbb{R}^2_o, \mathbb{R}^3, C) \ni f \longmapsto ds^2_f \in K^r_I(\mathbb{R}^2_o) \qquad (1.3)$$

を定めることができる.

Theorem II

第二対合(second involution)が

$$I_C^*: g^\omega_{**}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C) \ni f \longmapsto f_* \in g^\omega_{**}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$$

として $g^\omega_{**}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$ 上に定義され、次の4つの性質を満たす.

(1) f_* は f と同一の第一基本形式を持ち、かつ f の忠実な異性体である.

(2) $I_C^* \circ I_C = I_C \circ I_C^*$ である(I_C は Theorem I の第一対合).

(3) f と f_* を原点 0 での写像芽とすると、I_C^* は写像

$$I_0^*: g^\omega_*(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3, C) \ni f \longmapsto f_* \in g^\omega_*(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3, C) \qquad (1.4)$$

を誘導し、$J_0 \circ I_0^* = J_0$ および $I_0^* \circ I_0 = I_0 \circ I_0^*$ を満たす.

(4) もし g が $g^\omega_*(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3, C)$ (または $g^\omega_{**}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$) に属し、$g$ の第一基本形式が f の第一基本形式と等長であるならば、g は $f, \check{f}, f_*, \check{f}_*$ のいずれかと右同値である.

- Fukui[3] は、$\mathbb{R}^3$ 内のエッジに沿う一般化カスピダルエッジの表示公式を与えた.

 $\mathbb{R}$ (または $\mathbb{R}^2$) の原点における C^r 級関数の芽の集合を

$$C^r(\mathbb{R}_0) \qquad (\text{または } C^r(\mathbb{R}^2_0))$$

と記す. 任意に一般化カスピダルエッジ $f \in g^r(\mathbb{R}^2_0, \mathbb{R}^3, C)$ を固定する. $C(u)$ における f の断面カスプは、関数 $\mu(u,t) \in C^r(\mathbb{R}^2_0)$ を誘導し、これは $C(u)$ における断面カスプの正規化された曲率関数を与える拡張された半カスピダル曲率関数と呼ばれる. その値

$$\kappa_c(u) := \frac{\mu(u,0)}{2} \qquad (1.5)$$

は、断面カスプの特異点におけるカスピダル曲率と一致するため、f のカスピダル曲率関数と呼ばれる([12] 参照).

- セクション4では Bjorling 型のカスピダルエッジ表示公式(命題 4.3 参照)

を示すが、これはFukui[3]の公式の修正版である.

→ Fukuiはカスピダルエッジのいくつかの幾何的不変量を κ_s、κ_ν、θ により説明している.

- セクション4では、修正されたFukuiの公式のいくつかの性質とTheorem Iの証明を組み合わせ、写像 I_0 と J_0 の像を決定する次の主張を再証明する.

Fact 1.1

写像 I_0、I_0^*、J_0 ((0.14)、(1.3)、(1.4) 参照) は、次の3つの性質を満たす.

(1) I_0 と I_0^* は $\mathcal{G}^{\omega}_{*,3/2}(R_0^2, R^3, C)$ 上の対合(involution)であり、
J_0 はこの集合 $\mathcal{G}^{\omega}_{*,3/2}(R_0^2, R^3, C)$ を $K^{\omega}_{*}(R_0^2)$ へ全射する. ([14], Theorem 12 参照)

(2) I_0 と I_0^* は $\mathcal{G}^{\omega}_{*,ccr}(R_0^2, R^3, C)$ 上の対合(involution)であり、
J_0 はこの集合 $\mathcal{G}^{\omega}_{*,ccr}(R_0^2, R^3, C)$ を $K^{\omega}_{P,*}(R_0^2)$ へ全射する. ([5], Theorem A 参照)

(3) I_0 と I_0^* は $\mathcal{G}^{\omega}_{*,5/2}(R_0^2, R^3, C)$ 上の対合(involution)であり、
J_0 はこの集合 $\mathcal{G}^{\omega}_{*,5/2}(R_0^2, R^3, C)$ を $K^{\omega}_{a,*}(R_0^2)$ へ全射する. ([6], Theorem 5.6 参照)

- 原点 0 を C の中心と仮定して、次の用語を定める.

Definition 1.2.

曲線 C が原点 0 において対称である(symmetry)

$\overset{\text{def}}{\iff}$ ある $T \in O(3)$ が存在して、

- $T(C) = C$ かつ
- T が恒等写像でない

を満たしている.

さらに、T が trival である

$\overset{\text{def}}{\iff}$ すべての $P \in C$ で、$T(P) = P$ が成り立つ.

(このような T のうち、恒等写像でないものを非自明な対称(non-trivial symmetry)と呼ぶ)

非自明な対称性が positive (または negative) である

$\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ $T\in SO(3)$ (または $T\in O(3)\setminus SO(3)$) である.

- もしCが平面内にあるならば、その平面に関する反射(reflection) $S\in O(3)$ が存在し、Sは C の自明な対称性である.

Theorem Ⅲ

$f\in \mathcal{g}^{\omega}_{**,3/2}(R^2_J, R^3, C)$ (すなわち f は許容的) とすると、f, $\check{f}$, f_*, $\check{f}_*$ の右同値数の数が4つである事と、ds^2_f が対称性を持たない事は同値である. (定義0.4参照)

Theorem Ⅳ

$f\in \mathcal{g}^{\omega}_{**,3/2}(R^2_J, R^3, C)$ とすると、f, $\check{f}$, f_*, $\check{f}_*$ の像の合同類の数 N_f は、次の3つの性質を満たす.

(1) C が非自明な対称性を持たず、かつ ds^2_f も対称性を持たなければ、$N_f=4$.

(2) 条件(1)が成立しない場合、$N_f\leq 2$.

(3) $N_f=1$ となるのは、次のいずれかの場合である.

(a) C が平面内にあり、かつ非自明な対称性を持つ

(b) C が平面内にあり、かつ ds^2_f が対称性を持つ

(c) C が positive な対称性を持ち、かつ ds^2_f が対称性を持つ

2章 Kossowski計量

Definition 2.1

p を M^2 上の半正定値計量 ds^2 の特異点とする.

このとき、ゼロでない接ベクトル $v \in T_pM^2$ が ヌルベクトル (null vector) である

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\underbrace{ds^2(v, v) = 0}_{(2.1)}$ が成り立つ.

さらに、局所座標近傍 $(U; u, v)$ が $p \in U$ で adjusted である

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ p において、$\partial_v := \frac{\partial}{\partial v}$ が ds^2 の ヌルベクトル を与える

- 式(2.1)から、任意の $w \in T_pM^2$ に対して $ds^2(v, w) = 0$ となることは容易に確認できる.

  コーシーシュワルツの不等式 $\left(|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle\right)$ より、

  $$(ds^2(v, w))^2 \leq \underbrace{ds^2(v, v)}_{=0} ds^2(w, w)$$

  $$\therefore ds^2(v, w) = 0$$

もし p に対して局所座標近傍 $(U; u, v)$ が adjusted であるならば、ds^2 は

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \qquad (2.2)$$

と表され、このとき $F(p) = G(p) = 0$ となる.

Definition 2.2

M^2 上の C^r 級微分可能な半正定値計量 ds^2 の特異点 p が K-admissible である

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ p で adjusted な局所座標近傍 $(U; u, v)$ が存在して、

$$E_v(p) = 2F_u(p), \quad G_u(p) = G_v(p) = 0 \qquad (2.3)$$

を満たす. E, F, G は式(2.2)で与えられる C^r 級関数である.

- もし ds^2_p が C^r 級写像 $f: U \to R^3$ の誘導計量であり、さらに $f_v(p) = 0$ であれば、式(2.3)は自動的に成立する(命題3.1参照).

  もし $f_v(p) = 0$ であれば、F と G は

  $$F(p) = f_u(p) \cdot f_v(p) = 0$$
  $$G(p) = f_v(p) \cdot f_v(p) = 0.$$

  $$F_u = \underbrace{f_{uu} \cdot f_v}_{=0} + f_u \cdot f_{uv} = f_u \cdot f_{uv}, \quad E_v = 2f_u \cdot f_{uv} = 2F_u.$$

  また、$G_u = 2\boxed{f_v} \cdot f_{uu}$, $G_v = 2\boxed{f_v} \cdot f_{vv}$ である ($\boxed{f_v} = 0$) ため、$G_u(p) = G_v(p) = 0$ である.

Definition 2.3

半正定値の C^r 級微分可能な計量 ds^2 が Kossowski 計量である

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ds^2 の特異点 $p \in M^2$ が K-admissible であり、さらに p の局所座標近傍 $(U; u, v)$ 上に C^r 級関数 $\lambda(u, v)$ が存在して、

$$\lambda^2 = EG - F^2 \quad (\text{on } U) \qquad (2.4)$$

$$(\lambda_u(p), \lambda_v(p)) \neq (0, 0) \qquad (2.5)$$

が成り立つ.

(上記の λ は、$\pm$ の任意性を除いて一意的に定まる. [5, proposition 3] 参照)

- このような λ を、局所座標近傍 $(U; u, v)$ に関する ds^2 の符号つき面積密度関数 (signed area density function) と呼ぶ.

以下の事実が知られている ([8, 16] 参照).

Fact 2.4

ds^2 を uv 平面の定義域 U 上に定義された C^r 級微分可能な Kossowski 計量とする. すると、2次微分形式

$$d\hat{A} := \lambda\, du \wedge dv$$

は、adjusted な局所座標 (u, v) の選び方に依存せず定まる.

この $d\hat{A}$ を、ds^2 の符号付き面積形式 (signed area form) と呼ぶ.

K を、ds^2 の特異集合の補集合 (complement) 上で定義されるガウス曲率とする.

Fact 2.5 ([8] および [4, Theorem 2.15])

2次微分形式

$$\Omega := K\, d\hat{A}$$

は、U 上の C^r 級微分可能な形式として延長できる.

Definition 2.6

Ω を ds^2 の オイラー形式 と呼ぶ.

- 特異点 $p \in U$ が 放物点 (parabolic point) である

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ Ω が ds^2 の 特異点 $p \in U$ で 消失する

- 特異点 $p \in U$ が 非放物点 (non-parabolic point) である

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ Ω が ds^2 の 特異点 $p \in U$ で 消失しない.

以下の事実も知られている ([8],[4],[5] 参照).

Fact 2.7

Kossowski 計量 ds^2 の 特異点 p において、ds^2 の null space (つまり、p でのヌルベクトル が生成する部分空間) は 1次元 である.

- 式(2.5) の λ に対して 陰関数定理 を適用すると、uv 平面内に 正則曲線 $\gamma(t)$ $(|t| < \varepsilon)$ が存在して、これが $\gamma(0) = p$ を満たすような ds^2 の 特異集合 を パラメータ表示 (parametrizing) している.
この曲線 を 特異曲線 (singular curve) と呼ぶ.

- $\gamma(t)$ に沿って、計量 ds^2 の null 方向 ($ds^2_p(\eta(t), \eta(t)) = 0$) を指すような C^r 級微分可能 な 非ゼロ の ベクトル場 $\eta(t)$ が 存在する. これを 特異曲線 $\gamma(t)$ に 沿う null ベクトル場 と 呼ぶ.

Definition 2.8

Kossowski 計量 ds^2 の 特異点 $p \in M$ が type I または A_2 点 である

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ p において、特異曲線 $\gamma(t)$ の $t=0$ における 微分 $\gamma'(0)$ (これを 特異方向 と呼ぶ) が、null ベクトル $\eta(0)$ と 線形独立 である.

さらに、ds^2 が type I である

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ds^2 の 特異点 が 全て、type I である

3章 一般化カスピダルエッジ

有限閉区間 $J \subset \mathbb{R}$ を固定し、弧長パラメータによる C^r 級埋め込み

$$\mathbf{c} : J \to \mathbb{R}^3$$

を考える. ここで $\mathbf{c}(u)$ の曲率関数 $\kappa(u)$ は、全域で正であると仮定する.

xy 平面 $\mathbb{R}^2$ のある定義域 $\tilde{U}$ 内に $J_1 \times \{0\}$ を含む C^r 級写像

$$\tilde{f} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^3$$

を固定する. ここで $J_1 \subset \mathbb{R}$ は有界閉区間であり、$J_1 \times \{0\}$ の各点が一般化カスピダルエッジ点であり、

$$\tilde{f}(J_1 \times \{0\}) = C \quad (\text{ただし、} C := \mathbf{c}(J))$$

となる. このような $\tilde{f}$ を、C に沿った一般化カスピダルエッジと呼ぶ.
このような $\tilde{f}$ に対して、次のような微分同相写像 φ が存在する：

$$\varphi : U \ni (u, v) \longmapsto (x(u,v), y(u,v)) \in \varphi(U) \quad (\subset \tilde{U}) \qquad \text{s.t.}$$

$$\underbrace{f(u,v) := \tilde{f}(x(u,v), y(u,v))}_{(3.1)} \quad \text{が} \quad \underbrace{f(u,v) = \mathbf{c}(u) + \frac{v^2}{2}\hat{\xi}(u,v)}_{(3.2)} \quad \text{を満たす}$$

ここで、$\hat{\xi}(u,0)$ は $\mathbf{c}(u)$ に沿うベクトル場であり、$\mathbf{c}'(u)$ と線形独立である.

Proposition 3.1

C^r 級微分可能な一般化カスピダルエッジの誘導計量は、C^r 級微分可能な Kossowski 計量であり、その特異点は全て type I である.

Proof

一般化カスピダルエッジ f を式(3.2)の形で表すとする. f の第一基本形式は

$$ds_f^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

と書くと、E, F, G について

$$E = f_u \cdot f_u \ , \quad F = f_u \cdot f_v \ , \quad G = f_v \cdot f_v \qquad (\cdot \text{ は } \mathbb{R}^3 \text{ の内積})$$

が成立する. $f_v(u,0) = 0$ であるため、式(2.3)が成立することが確認できる. 式(3.2)から

$$EG - F^2 = |f_u \times f_v|^2$$

(3.2)を u, v で微分.

$$= v^2 \left| \left(\mathbb{C}' + \frac{v^2}{2}\hat{\xi}_u\right) \times \left(\hat{\xi} + \frac{v}{2}\hat{\xi}_v\right) \right|^2 \quad (\times \text{ は } \mathbb{R}^3 \text{ の外積})$$

と表せる.

$\mathbb{C}'(u)$ と $\hat{\xi}(u,0)$ が線形独立であるため. U上に以下のような関数λが存在する

外積が非零ベクトル

$$\lambda := v\lambda_0 \quad , \quad \lambda_0 := \left| \left(\mathbb{C}' + \frac{v^2}{2}\hat{\xi}_u\right) \times \left(\hat{\xi} + \frac{v}{2}\hat{\xi}_v\right) \right| \qquad (3.3)$$

(λは C^r級関数で、$\lambda_0(u,0) \neq 0$ である)

また、λ^2 は $EG - F^2$ に一致する. さらに、$\lambda_v \neq 0$ であるため ds_f^2 は Kossowski計量である.

$\lambda_v = \lambda_0 + v(\lambda_0)_v$

また、$f_v(u,0) = 0$ であるので、$\partial_v \left(:= \frac{\partial}{\partial v}\right)$ が null方向を与え、これは特異方向 ∂_u と線形独立である. したがって、ds_f^2 の全ての特異点は type I である. ▨

$$\begin{cases} f(u,v) = \mathbb{C}(u) + \frac{v^2}{2}\hat{\xi}(u,v) \text{ より、} \\ f_v(u,v) = v\hat{\xi}(u,v) + \frac{v^2}{2}\hat{\xi}_v(u,v). \\ \therefore f_v(u,0) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} ds_f^2(\partial_v, \partial_v) = f_v(u,0)\cdot f_v(u,0) \\ \qquad = 0. \\ \partial_u \cancel{=} \left(f_u(u,0) = \mathbb{C}'(u) \right) \end{cases}$$