前回の続き(命題3.7まで示した)

Theorem(再掲) 定理3.3

仮定

Vをn次元の単連結なリーマン多様体とし、ds^2をVの計量として、さらに∇をVのリーマン接続(レビチビタ接続)とする。Sを対称作用素$S_q: T_qV \to T_qV$の場(field)として、TをV上のベクトル場とし、νを$\|T\|^2+\nu^2=1$を満たすようなV上の滑らかな関数とする。

$M^n=S^n$または$M^n=\mathbb{H}^n$とする。組(ds^2, S, T, ν)が$M^n\times\mathbb{R}$に対するガウス方程式とコダッチ方程式を満たし、さらに以下2つの方程式を満たしていると仮定する:

$$\nabla_X T = \nu SX \qquad d\nu(X) = -\langle SX, T\rangle$$

このとき、$f: V \longrightarrow M^n\times\mathbb{R}$という等長的はめ込みが存在し、$f$に関する法ベクトル$N$と対応する形作用素が次を満たす:

$$df\circ S\circ df^{-1} \qquad \frac{\partial}{\partial t} = df(T) + \nu N$$

加えて、このはめ込みは$M^n\times\mathbb{R}$の大域的なM^nと$\mathbb{R}$の向きを保つ等長変換を除いて一意である。

3.3 の proof

$y_0 \in V$、$A \in Z(y)$、$t_0 \in \mathbb{R}$ とする.
V上で y_0 の近傍における局所正規直交フレーム $(e_1, \cdots, e_n)$ を考える.

proposition 3.7 より、以下を満たす一意な写像 $A : U_1 \longrightarrow SO^+(\mathbb{E}^{n+2})$ が存在する.

- $A^{-1}dA = \Omega$
- $\forall y \in U_1$、$A(y) \in Z(y)$ $\left(= \text{行列} Z \in SO^+(\mathbb{E}^{n+2}) \text{ の内、最終行の係数が } T^\beta(y) \text{ であるようなものの集合}\right)$
- $A(y_0) = A_0$

(ただし、U_1 は y_0 の近傍であり、単連結とする)

- $f^0 := A^0_0$、$f^i := A^i_0$ $(i=1,\cdots,n)$ として、f^{n+1} を $U_1(\subset V)$ 上の一意な関数として
  - $df^{n+1} := \eta$ (1次微分形式)
  - $f^{n+1}(y_0) = t_0 \in \mathbb{R}$

  を満たすとする. $(f^{n+1} \in \mathbb{R})$
  これにより、写像 $f : U_1 \longrightarrow \mathbb{E}^{n+2}$ を次のように定義する. $A^{n+1}_0 = T^0 = 0$ であるため、

  (i) $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ の場合

  $$(f^0)^2 + \sum_{i=1}^{n}(f^i)^2 = \sum_{\alpha=0}^{n+1}(A^\alpha_0)^2 = 1. \quad (f^0, f^1, \cdots, f^n \text{ の値は常に } \mathbb{S}^n \text{上にある})$$

  (ii) $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ の場合

  $$-(f^0)^2 + \sum_{i=1}^{n}(f^i)^2 = -(A^0_0)^2 + \sum_{i=1}^{n}(A^i_0)^2 + (A^{n+1}_0)^2$$
  $$= -1. \quad (f^0, f^1, \cdots, f^n \text{ の値は常に } \mathbb{H}^n \text{上にある})$$

  どちらのケースも $(f^0, f^1, \cdots, f^n) \in M^n$ であり、f の値は $\underbrace{M^n}_{(f^0,f^1,\cdots,f^n)} \times \underbrace{\mathbb{R}}_{f^{n+1}}$ に含まれる.

f がはめ込みであることを確認する.

- $A^{-1}dA = \Omega \iff dA = A\Omega$ であるため、$\alpha < n+1$ に対して次が成り立つ.

$$d\underbrace{f^\alpha}_{A^\alpha_0}(e_k) = d(A^\alpha_0(e_k))$$

dA = AΩ 代入

$$= \sum_{j=1}^{n} A^\alpha_j \omega^j_0(e_k) + A^\alpha_{n+1}\omega^{n+1}_0(e_k)$$

(∵ $\omega^0_0 = 0$ より、$\sum$ の添字範囲を 1 から $n+1$ にして良い)

$$= \sum_{j=1}^{n} A^\alpha_j(\delta^k_j - T^j T^k) - A^\alpha_{n+1} T^{n+1} T^k$$

$T^j = A^{n+1}_j$, $T^{n+1} = A^{n+1}_{n+1}$ 代入

$$= \sum_{j=1}^{n} A^\alpha_j \delta^k_j - T^k \sum_{j=1}^{n} A^\alpha_j T^j - A^\alpha_{n+1} T^{n+1} T^k$$

$$
\begin{aligned}
&= A^\alpha_k - T^k \sum_{j=1}^{n} A^\alpha_j A^{n+1}_j - T^k A^{n+1}_{n+1} A^\alpha_{n+1} \\
&= A^\alpha_k - T^k \sum_{\beta=0}^{n+1} A^\alpha_\beta A^{n+1}_\beta \\
&= A^\alpha_k .
\end{aligned}
$$

A は直交行列 である ⟺ 各列 が 互いに 直交している.

⟺ $\sum_{\beta=0}^{n+1} A^\alpha_\beta A^{n+1}_\beta = 0 \quad (\alpha \neq n+1)$

$n=2$.

$$
\begin{bmatrix}
A^0_0 & A^0_1 & A^0_2 & A^0_3 \\
A^1_0 & A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\
A^2_0 & A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \\
A^3_0 & A^3_1 & A^3_2 & A^3_3
\end{bmatrix}
$$

$\alpha = 0$ のとき:

$$
\begin{aligned}
\sum_{\beta=0}^{n+1} A^0_\beta A^3_\beta &= A^0_0 A^3_0 + A^0_1 A^3_1 \\
&\quad + A^0_2 A^3_2 + A^0_3 A^3_3 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
df^{n+1}(e_k) = \underbrace{\eta(e_k) = T^k}_{\eta\text{の定義}} = A^{n+1}_k .
$$

これにより、$df(e_k)$ は 行列 A の k番目 の 列 によって 与えられている ことが 分かる。

$$
\begin{bmatrix}
A^0_0 & \cdots & \boxed{A^0_k} & \cdots & A^0_{n+1} \\
A^1_0 & \cdots & A^1_k & \cdots & A^1_{n+1} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
A^{n+1}_0 & \cdots & A^{n+1}_k & \cdots & A^{n+1}_{n+1}
\end{bmatrix}
$$

$df(e_k)$

$$
df = \begin{array}{c}
\overbrace{\hphantom{df^0(e_1) \quad df^0(e_2) \quad \cdots \quad df^0(e_n)}}^{n} \\
\left[\begin{array}{cccc}
df^0(e_1) & df^0(e_2) & \cdots & df^0(e_n) \\
df^1(e_1) & df^1(e_2) & \cdots & df^1(e_n) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
df^{n+1}(e_1) & df^{n+1}(e_2) & \cdots & df^{n+1}(e_n)
\end{array}\right]
\end{array}
\left.\vphantom{\begin{array}{c} a\\a\\a\\a \end{array}}\right\} n+2
$$

- 行列 A が 可逆であるため、df は ランク n を 持ち、f は はめ込み である

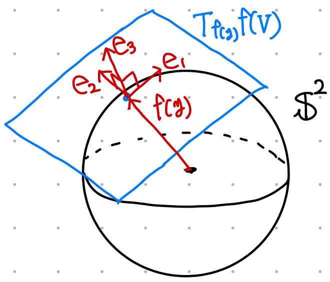
$\det A \neq 0$ $\left(\because A \in SO^+(\mathbb{E}^{n+2}) より、\det A = 1\right)$

⟺ df が 単射

⟺ df が n本の 線形独立な 列ベクトル

また、$A \in SO^+(\mathbb{E}^{n+2})$ であるため、$\langle df(e_p), df(e_q) \rangle = \delta^p_q$ である。
すなわち、f は 等長変換 である。

$$
\begin{aligned}
&= \langle A_p, A_q \rangle \\
&= \delta^p_q \quad (\because 行列Aは直交行列 ⟺ 各列ベクトル は ONB)
\end{aligned}
$$



- 行列 $A(y)$ の 列 (columns) は $\mathbb{E}^{n+2}$ の 正規直交基底 を 構成する。

1 から n 列目 は $T_{f(y)}f(V)$ 上の 正規直交基底 を 構成し、

0 列目 は $M^n \times \{0\}$ 上への $f(y)$ の 射影 を 構成し、

高さ 0 の 部分空間 に おける 単位法ベクトル $N(f(y))$

n+1 列目 は 点 $f(y)$ における $M^n \times \mathbb{R}$ 内の $f(V)$ と 法な 単位法ベクトル $N(f(y))$ である。

$$
A(y) = \begin{bmatrix}
A(y)^0_0 & A(y)^0_1 & \cdots & A(y)^0_n & A(y)^0_{n+1} \\
A(y)^1_0 & A(y)^1_1 & \cdots & A(y)^1_n & A(y)^1_{n+1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
A(y)^{n+1}_0 & A(y)^{n+1}_1 & \cdots & A(y)^{n+1}_n & A(y)^{n+1}_{n+1}
\end{bmatrix}
$$

0 列目 $= N(f(y))$、1 列目〜n 列目: $T_{f(y)}f(V)$ を張る 正規直交基底、n+1 列目 $= N(f(y))$

• $X_j := df(e_j)\left(= {}^t[A_j^0, A_j^1, \cdots, A_j^{n+1}]\right)$ とする. 内積 $\langle dX_j(X_k), N\rangle$ は

$$\underbrace{\langle dX_j(X_k), N\rangle}_{※} = \sum_{\alpha=0}^{n+1} dA_j^\alpha(e_k) A_{n+1}^\alpha$$

$dA = A\Omega$ 代入

$$= \sum_{\alpha=0}^{n+1}\left\{\sum_{\gamma=0}^{n+1} A_\gamma^\alpha \omega_j^\gamma(e_k)\right\} A_{n+1}^\alpha$$

• Aは直交行列 $\Longleftrightarrow$ A_γ と A_{n+1} は ONB

• Aは直交行列 $\Longleftrightarrow$ A_{n+1} が単位ベクトル $\Longleftrightarrow \sum_{\alpha=0}^{n+1} A_{n+1}^\alpha A_{n+1}^\alpha = 1.$

$$= \omega_j^{n+1}(e_k)$$

$$= \langle S(e_k), e_j\rangle.$$

$$\left(E_0 = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\right)$$

※

$\underbrace{df(e_j)}_{=X_j} = \sum_{\alpha=0}^{n+1} A_j^\alpha \overset{E_\alpha}{\cancel{e_\alpha}}$ より, $dX_j(X_k)$ は

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A_0^0 & A_1^0 & A_2^0 & A_3^0 \\ A_0^1 & A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_0^2 & A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_0^3 & A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \| & & & \| \\ df(e_0) & & & N \end{matrix} \end{array}$$

$$dX_j(X_k) = d\left(\sum_{\alpha=0}^{n+1} A_j^\alpha \overset{E_\alpha}{\cancel{e_\alpha}}\right)\left(\sum_{\beta=0}^{n+1} A_k^\beta \overset{E_\beta}{\cancel{e_\beta}}\right)$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{n+1}\sum_{\beta=0}^{n+1} d\left(A_j^\alpha \underset{E_\alpha}{\cancel{e_\alpha}}\right)\left(A_k^\beta \underset{E_\beta}{\cancel{e_\beta}}\right)$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{n+1}\sum_{\beta=0}^{n+1} (dA_j^\alpha)\underset{E_\alpha}{\cancel{e_\alpha}}\left(A_k^\beta \underset{E_\beta}{\cancel{e_\beta}}\right) + \sum_{\alpha=0}^{n+1}\sum_{\beta=0}^{n+1} A_j^\alpha d\left(\underset{E_\alpha}{\cancel{e_\alpha}}\right)\left(A_k^\beta \underset{E_\beta}{\cancel{e_\beta}}\right)$$

$$dN(X_k) = \sum_\alpha A_{n+1}^\alpha(X_k)$$

$$N = \sum_{\alpha=0}^{n+1} A_{n+1}^\alpha e_\alpha.$$

であるので, 内積 $\langle dX_j(X_k), N\rangle$ は

$$\langle dX_j(X_k), N\rangle = \left\langle \sum_{\alpha=0}^{n+1}\sum_{\beta=0}^{n+1} (dA_j^\alpha)\overset{E_\alpha}{\cancel{e_\alpha}}\left(A_k^\beta \overset{E_\beta}{\cancel{e_\beta}}\right) + \sum_{\alpha=0}^{n+1}\sum_{\beta=0}^{n+1} A_j^\alpha \underbrace{d\left(\overset{E_\alpha}{\cancel{e_\alpha}}\right)}_{=0}\left(A_k^\beta \overset{E_\beta}{\cancel{e_\beta}}\right),\ \sum_{\alpha=0}^{n+1} A_{n+1}^\alpha \overset{E_\alpha}{\cancel{e_\alpha}}\right\rangle$$

$$= \left\langle \sum_{\alpha=0}^{n+1}\sum_{\beta=0}^{n+1} (dA_j^\alpha)\overset{E_\alpha}{\cancel{e_\alpha}}\left(A_k^\beta \overset{E_\beta}{\cancel{e_\beta}}\right),\ \sum_{\gamma=0}^{n+1} A_{n+1}^\gamma \overset{E_\gamma}{\cancel{e_\gamma}}\right\rangle$$

$$\cancel{+\left\langle \sum_{\alpha=0}^{n+1}\sum_{\beta=0}^{n+1} A_j^\alpha d(e_\alpha)\left(A_k^\beta e_\beta\right),\ \sum_{\gamma=0}^{n+1} A_{n+1}^\gamma e_\gamma\right\rangle}$$

$\langle e_\beta, e_\alpha\rangle = \delta_\beta^\alpha$

$\langle E_\beta, E_\alpha\rangle = \delta_\beta^\alpha$

$$= \sum_{\alpha=0}^{n+1}\sum_{\beta=0}^{n+1} (dA_j^\alpha)\overset{E_\alpha}{\cancel{e_\alpha}} A_k^\beta A_{n+1}^\beta$$

$$\cancel{+\left\langle \sum_{\alpha=0}^{n+1}\sum_{\beta=0}^{n+1} A_j^\alpha d(e_\alpha)\left(A_k^\beta e_\beta\right),\ \underbrace{\sum_{\gamma=0}^{n+1} A_{n+1}^\gamma e_\gamma}_{=N}\right\rangle}$$

$$\langle dX_j(X_k), N \rangle$$

$$= X_k \langle X_j, N \rangle - \langle X_j, dN(X_k) \rangle$$

X_k は式変形しない。

$M^n \times \mathbb{R}$ 内の V の形作用素

これは、$M^n \times \mathbb{R}$ における $f(V)$ の形作用素 が $df \circ S \circ df^{-1}$ であることを意味している. … ①

∵
元の接空間 $T_{f(y)}f(V)$ にあるベクトル X_k を、V の接空間 $T_y(V)$ に写す
↓
$T_y(V)$ 上で 形作用素 S を適用させる
↓
df を適用して、再び $T_{f(y)}f(V)$ にもどす

$$X_k \longmapsto \underset{(=e_k)}{df^{-1}(X_k)} \longmapsto S(df^{-1}(X_k)) \longmapsto df(S(df^{-1}(X_k)))$$

- 最後に、正規直交フレーム $(N, X_1, \cdots, X_n, N)$ における垂直ベクトル $\frac{\partial}{\partial t} = E_{n+1}$ の係数は、行列 A の最終行によって与えられる.

任意の $y \in U_2$ に対して $A(y) \in Z(y)$ であるため、

$$\frac{\partial}{\partial t} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} T^j X_j}_{\text{接成分}} + \underbrace{T^{n+1} N}_{\text{法成分}} = df(\underset{\text{V上の接ベクトル場}}{T}) + \nu N \quad . \quad \cdots ②$$

接成分 ($M^n \times \mathbb{R}$ 上の)
$X_j = df(e_j)$

(df: V上の接ベクトル場 T を $M^n \times \mathbb{R}$ 上の接空間に写す)

- 次に、局所的なはめ込みが $M^n \times \mathbb{R}$ のグローバルな等長変換を除いて(up to) 一意であることを示す.

$\tilde{f}: U_3 \to M^n \times \mathbb{R}$ を定理の結論を満たす別のはめ込みとする (U_3 : y_0 を含む U_1 の単連結な近傍).

フレーム $(\tilde{X}_\beta)$ を次のように定義する:

- $\tilde{X}_j = d\tilde{f}(e_j)$
- $\tilde{X}_{n+1}$ は $M^n \times \mathbb{R}$ における $\tilde{f}(V)$ の法(normal)ベクトル
- $\tilde{X}_0$ は E^{n+2} 内で $M^n \times \mathbb{R}$ と法なベクトル

また、$\tilde{A}$ をフレーム (E_α) 内の $(\tilde{X}_\beta)$ の座標の行列とする.

$M^n \times \mathbb{R}$ の direct な等長変換を除いて、次のように仮定できる:

- $f(y_0) = \tilde{f}(y_0)$
- フレーム $(X_\beta(y_0))$ と $(\tilde{X}_\beta(y_0))$ が一致する. つまり $A(y_0) = \tilde{A}(y_0)$ 　初期条件の一致

また、T^α が x と $\tilde{x}$ で同じ値であるため、この等長変換 $\tilde{f}$ は $\frac{\partial}{\partial t}$ を確定(fix)させる.

$f(y)$ 　$\tilde{f}(y)$ (同じ点 $y \in V$ に対応する、異なるはめ込みによる点)

∵

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}, X_j \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} T^i X_i + T^{n+1} N, X_j \right\rangle$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} T^i X_i, X_j \right\rangle + \left\langle T^{n+1} N, X_j \right\rangle$$

$$= \left\langle T^j X_j, X_j \right\rangle + \left\langle T^{n+1} N, X_j \right\rangle$$

$$= T^j$$

同様に、$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}, N \right\rangle = T^{n+1}$.

$f(y_0) = \tilde{f}(y_0)$

よって、$T^j = \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, X_j \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, df(e_j) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, d\tilde{f}(e_j) \right\rangle = \tilde{T}^j$

$T^{n+1} = \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, N \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, X_{n+1} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \tilde{X}_{n+1} \right\rangle = \tilde{T}^{n+1}$　　$\therefore T^\alpha = \tilde{T}^\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \dots, n+1)$

$X_\beta = \tilde{X}_\beta$

行列 A と $\tilde{A}$ は それぞれ、$A^{-1}dA = \Omega$ および $\tilde{A}^{-1}d\tilde{A} = \Omega$ を満たす.（2.3節参照）
さらに、$A(y), \tilde{A}(y) \in Z(y)$ であり、$A(y_0) = \tilde{A}(y_0)$ であるため、命題3.7 における方程式の解の一意性から、$A(y) = \tilde{A}(y)$ が成り立つ.

これらの行列の0番目の列を考えると、次の関係が得られる：

- $f^i = \tilde{f}^i$
- $f^0 = \tilde{f}^0$.　　（f^{n+1}を除く0番目の列が一致する）

最後に、$df^{n+1} = \eta = d\tilde{f}^{n+1}$ であり、$f^{n+1}(y_0) = \tilde{f}^{n+1}(y_0)$ である. したがって、微分方程式の解の一意性より、$f^{n+1} = \tilde{f}^{n+1}$ である.

以上より、U_3 上で $f = \tilde{f}$ が示される.（局所的なはめ込み f が一意である）

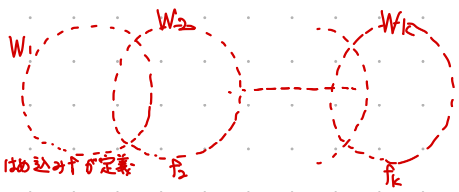
- 最後に、局所的なはめ込み f が V 全体に対して一意的に拡張できることを示す.

$y_1 \in V$ とする. このとき、ある曲線 $\Gamma : [0, 1] \to V$ が存在して、

$$\Gamma(0) = y_0 \quad \text{かつ} \quad \Gamma(1) = y_1$$

を満たす. 曲線 Γ の各点には近傍が存在し、そこでは定理の性質を満たす等長はめ込みが存在する.

この近傍の族から、曲線 Γ を覆う有限個の近傍族 $(W_1, \dots, W_p)$ を取り出すことができる.
$W_1 = U_1$ とする. すると、先程の一意性の議論により、はめ込み f を各 W_k に対して一意的に拡張できる. 特に、$f(y_1)$ が定義される.



- 最初の近傍 W_1 では はめ込みが すでに定義されている
↓
- W_1 と重なる次の近傍 W_2 では、一意性 により f を拡張できる.
↓
- 同様に $W_2, W_3, \cdots W_p$ と f の定義域を拡張できる

さらに、V が単連結であるという仮定より、$f(y_1)$ の値は y_0 と y_1 を結ぶ Γ の選び方に依存しない. ▨　　任意の閉じた曲線を一点にできる

Proposition 3.8

組(ds^2, S, T, ν) が両立条件を満たし、かつ はめ込み $f:\overset{cV}{\Sigma}\longrightarrow M^n\times\mathbb{R}$ に対応するならば、以下の3組もまた両立条件を満たしている

- $(ds^2, -S, T, -\nu)$ … ①
- $(ds^2, -S, -T, \nu)$ … ②
- $(ds^2, S, -T, -\nu)$ … ③

また、これらは $M^n\times\mathbb{R}$ の等長変換σ を用いたはめ込み $\sigma\circ f$ に対応する。
σ は以下の性質を持つものとする。

- ① に対応するσ の場合、M^nの向きを反転させて、
  $\mathbb{R}$ の向きは保つ。
- ② に対応するσ の場合、M^nの向きは保ち、
  $\mathbb{R}$ の向きを反転させる。
- ③ に対応するσ の場合、M^nと$\mathbb{R}$ どちらも向きを反転させる。

Proof

① の場合を考える。この時の組を$(ds^2, \hat{S}, \hat{T}, \hat{\nu})$とする。

$\hat{f}:=\sigma\circ f$ とする。このとき、$M^n\times\mathbb{R}$ と $\overset{\text{normal}}{\text{法}}$なベクトルは $\sigma\circ\overline{N}$ である。
また、仮定より σ は $M^n\times\mathbb{R}$ の向きを反転させるため、「$M^n\times\mathbb{R}$ 内の $\hat{f}(V)$」と法なベクトルは、
$\hat{N}=-\sigma\circ N$ である。これにより、$\hat{S}=-S$ である。
※1

また、定理3.3より $\frac{\partial}{\partial t}=df(T)+\nu N$ であり、さらにσは$\mathbb{R}$の向きを変えないため、
$\frac{\partial}{\partial t}$ の符号

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} &= \sigma\circ df(T)+\nu\,\sigma\circ N\\
&= d\hat{f}(T)-\nu\hat{N}.
\end{aligned}
$$

したがって、$\hat{T}=T$, $\hat{\nu}=-\nu$ であることが分かる。

② の場合、$M^n\times\mathbb{R}$ の向きを反転させるため $\hat{S}=-S$ である。
$\mathbb{R}$の向きが反転するので、微分方向としては $-\frac{\partial}{\partial t}$ が対応する。

よって、$\hat{T}$, $\hat{\nu}$ は ① の結果を反転させた $\hat{T}=-T$, $\hat{\nu}=\nu$ となる。

③の場合、M^nと$\mathbb{R}$の両方の向きを反転させるため、結果として$M^n\times\mathbb{R}$の向きは変わらない。よって、$\hat{N}=\sigma\circ N$、$\hat{S}=S$である。

$\mathbb{R}$の向きが反転するので、微分方向としては$-\frac{\partial}{\partial t}$が対応する。よって、

$$-\frac{\partial}{\partial t}=\sigma\circ df(T)+\nu\sigma\circ N$$
$$=d\hat{f}(T)+\nu\hat{N}$$

$$\Longleftrightarrow\ \frac{\partial}{\partial t}=d\hat{f}(-T)-\nu\hat{N}.$$

よって、$\hat{T}=-T$、$\hat{\nu}=-\nu$である。

以上より、命題3.8を示した■

※1 形作用素$S(v)=-\nabla_v(N)$であるので、$\hat{S}$は

$$\hat{S}(v)=-\nabla_v(\hat{N})$$

$\hat{N}$の定義

$$=-\nabla_v(-\sigma\circ N)$$

実数に関する線形性

$$=\nabla_v(\sigma\circ N)\cdots①$$

ここで、$\nabla_v(\sigma\circ N)=\sigma(\nabla_v N)$である。…②

※2で示す

$S(v)=-\nabla_v(N)\Longleftrightarrow\nabla_v(N)=-S(v)\cdots③$であるため、①に代入して

$$\hat{S}(v)=\nabla_v(\sigma\circ N)$$

$\because$ ②より

$$=\sigma(\nabla_v N)$$

$\because$ ③より

$$=\sigma(-S(v))$$
$$=-\sigma(S(v)).$$

$S(v)$と$\hat{S}(v)$の出力先の空間が同じとみなせるので、$\hat{S}(v)=-S(v)$である。

$\cap\ T_{f(p)}(M^n\times\mathbb{R})$　$\cap\ T_{\sigma(f(p))}(M^n\times\mathbb{R})$

※2 $\tilde{\nabla}_v(\sigma(X)) := \sigma(\nabla_v X)$ とした時に、 $\left(\sigma(X) = \sigma_*(X),\quad \overset{\text{押し出し}}{(\sigma_*(X))(\sigma(p)) := (d\sigma)_p(X(p))} \right)$

$\tilde{\nabla}$ がレビチビタ接続の性質を満たしていれば、レビチビタ接続の一意性より

- 計量と両立
- ねじれ 0

$$\tilde{\nabla}_v(\sigma(X)) = \nabla_v(\sigma(X))$$

となる。

(i) $\tilde{\nabla}$ が計量と両立の性質を満たすか確認

(示したいこと: $X(\langle \sigma(Y), \sigma(Z) \rangle) = \langle \tilde{\nabla}_X(\sigma(Y)), \sigma(Z) \rangle + \langle \sigma(Y), \tilde{\nabla}_X(\sigma(Z)) \rangle$

(左辺): $X(\langle \sigma(Y), \sigma(Z) \rangle) = X(\langle Y, Z \rangle) \cdots ④$

∵ σ は等長変換なので内積が不変

(右辺): $\langle \tilde{\nabla}_X(\sigma(Y)), \sigma(Z) \rangle + \langle \sigma(Y), \tilde{\nabla}_X(\sigma(Z)) \rangle$ ∵ $\tilde{\nabla}$ の定義

$= \langle \sigma(\nabla_X Y), \sigma(Z) \rangle + \langle \sigma(Y), \sigma(\nabla_X(Z)) \rangle$ ∵ σ は等長変換なので内積が不変

$= \langle \nabla_X(Y), Z \rangle + \langle Y, \nabla_X(Z) \rangle \cdots ⑤$

④、⑤ について、∇ はレビチビタ接続であるので、④ = ⑤ が成り立つ。 ∴ $\tilde{\nabla}$ は計量を両立する

(ii) ねじれ 0 を満たすか確認

(示したいこと: $\tilde{\nabla}_X(\sigma(Y)) - \tilde{\nabla}_Y(\sigma(X)) = [\sigma(X), \sigma(Y)]$)

定義より $\tilde{\nabla}_X(\sigma(Y)) = \sigma(\nabla_X Y)$ であったので、

$$\tilde{\nabla}_X(\sigma(Y)) - \tilde{\nabla}_Y(\sigma(X)) = \sigma(\nabla_X Y) - \sigma(\nabla_Y X)$$
$$= \sigma(\nabla_X Y - \nabla_Y X) \cdots ⑥$$

ここで、∇ はレビチビタ接続であるので $\nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) = [X, Y]$ であるので、⑥ へ代入して

$$\tilde{\nabla}_X(\sigma(Y)) - \tilde{\nabla}_Y(\sigma(X)) = \sigma([X, Y])$$
$$= [\sigma(X), \sigma(Y)]$$

∵ 多様体の基礎 P234、σ は等長変換 $\Rightarrow$ σ は diffeo より

よって、$\tilde{\nabla}$ はレビチビタ接続であり、レビチビタ接続の一意性より $\nabla = \tilde{\nabla}$ である。

∴ $\sigma(\nabla_X Y) = \nabla_X(\sigma(Y))$ が成り立つ。

$\boxed{\text{※ 2月末までに、進路を言うこと}}$

$$f : D \longrightarrow S^2\times\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^4, \quad D \subset \mathbb{R}^2$$

$$f = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \\ t(u,v) \end{pmatrix} \quad (x^2+y^2+z^2=1)$$

$$\bar{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T_{f(u,v)}(S^2\times\mathbb{R}) = \{ x\in\mathbb{R}^4 \mid \langle \bar{n}, x\rangle = 0 \}$$

f：はめこみ $\Longleftrightarrow$ f_u, f_v：1次独立.

$$\begin{cases} E = \langle f_u, f_u\rangle \\ F = \langle f_u, f_v\rangle \\ G = \langle f_v, f_v\rangle \end{cases}$$

$\boxed{\text{仮定}}$ (u,v)：等温座標系.

$E=G.\quad F=0.$

n：fに沿う単位法ベクトル場

$$\begin{cases} \langle n, \bar{n}\rangle = 0. & (n \in T_f(S^2\times\mathbb{R})) \\ \langle n, f_u\rangle = \langle n, f_v\rangle = 0. \\ \langle n, n\rangle = 1 \end{cases}$$

をみたす.

$L = \langle f_{uu}, n\rangle \qquad \nu = \langle n, \frac{\partial}{\partial t}\rangle$

$M = \langle f_{uv}, n\rangle \qquad T = \frac{\partial}{\partial t} - \nu n$

$N = \langle f_{vv}, n\rangle$

$\mathfrak{F} = (\bar{n}, f_u, f_v, n)$

$\mathfrak{F}_u = (\bar{n}_u, f_{uu}, f_{uv}, n_u)$

$\mathfrak{F}_v = (\bar{n}_v, f_{uv}, f_{vv}, n_v)$

$\therefore$ $\bar{n}_u, \bar{n}_v, f_{uu}, f_{uv}, f_{vv}, n_u, n_v$

を $\bar{n}, f_u, f_v, n$ の線形結合で表せば良い.

$$f_{uu} = A\bar{n} + Bf_u + Cf_v + Dn$$

$\underline{\langle \cdot, n\rangle}$ $\quad \langle f_{uu}, n\rangle = D \quad \therefore D = L.$

$\underline{\langle \cdot, f_u\rangle}$ $\quad \underbrace{\langle f_{uu}, f_u\rangle}_{=\frac{1}{2}E_u} = B\underbrace{\langle f_u, f_u\rangle}_{E} \quad \therefore B = \frac{E_u}{2E} = \Gamma_{11}^1$

$\langle \cdot, f_v\rangle$ $\quad \underbrace{\langle f_{uu}, f_v\rangle}_{=\langle f_u, f_v\rangle_u - \langle f_u, f_{uv}\rangle} = C\underbrace{\langle f_v, f_v\rangle}_{=E} \quad \therefore C = -\frac{E_v}{2E} = \Gamma_{11}^2$

$\quad = 0 - \frac{1}{2}E_v$

$\underline{\langle \cdot, \bar{n}\rangle}$: $\quad \underbrace{\langle f_{uu}, \bar{n}\rangle}_{\parallel} = A$

$\quad = \langle f_u, \bar{n}\rangle_u - \langle f_u, \bar{n}_u\rangle$

$\quad = 0 - \langle f_u, f_u - t_u \frac{\partial}{\partial t}\rangle$

$\quad = -E + t_u \langle f_u, \frac{\partial}{\partial t}\rangle$

$\quad = -E + t_u^2$

$$\bar{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = f - t(u,v)\frac{\partial}{\partial t}$$

---

nを求めたい：$\bar{n}, f_u, f_v$ と直交する. $(\longleftarrow n = \bar{n}\times f_u \times f_v\ ?)$

$X, Y, Z \in \mathbb{R}^4$ に直交するベクトル?

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}.$$

$$W = \left(+\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}, +\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \right)$$

W は X, Y, Z に直交する.

$\because$ $\langle X, W \rangle = x_1 \begin{vmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{vmatrix} - x_4 \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = 0.$$

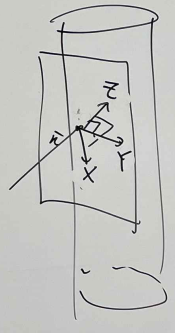
同じ.

次に示すこと

$$\boxed{\|W\|^2 = \det \begin{pmatrix} \langle X, X \rangle & \langle X, Y \rangle & \langle X, Z \rangle \\ \langle Y, X \rangle & \langle Y, Y \rangle & \langle Y, Z \rangle \\ \langle Z, Z \rangle & \langle Z, Z \rangle & \langle Z, Z \rangle \end{pmatrix}}$$

$\det(\bar{n}, f_u, f_v, n) > 0$

となるようにしたい.



$-\det(\bar{n}, X, Y, Z)$

$\omega = \det(\bar{n}, X, Y, Z)$

$\left(X, Y, Z \in \boxed{T_f(S^2 \times \mathbb{R})} \right)$ $\overset{V}{/\!/}$

$\omega : V \times V \times V \longrightarrow \mathbb{R}.$

(交代的な) 3次微分形式

on $S^2 \times \mathbb{R}$

$\mathcal{F} =$

$\mathcal{F}_u =$

$\mathcal{F}_v =$

$\therefore$ $\bar{n}_u$,

と $\bar{n}$

表せば

f_{uu}

$\langle \cdot, n \rangle$

$\langle \cdot, f_u \rangle$

$\langle \cdot, f_v \rangle$

$$n = \frac{\bar{n} \wedge f_u \wedge f_v}{\underbrace{\| \bar{n} \wedge f_u \wedge f_v \|}_{E=}}$$

ここで. $\| \bar{n} \wedge f_u \wedge f_v \|^2 = \det \begin{pmatrix} \langle \bar{n}, \bar{n} \rangle & \langle f_u, \bar{n} \rangle & \langle f_v, \bar{n} \rangle \\ \langle \bar{n}, f_u \rangle & \langle f_u, f_u \rangle & \langle f_v, f_u \rangle \\ \langle \bar{n}, f_v \rangle & \langle f_u, f_v \rangle & \langle f_v, f_v \rangle \end{pmatrix}$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} = E^2$$

$$f_u = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \\ t_u \end{pmatrix}, \quad \bar{n}_u = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t_u \end{pmatrix} = f_u - \bar{n}_u$$

$$\bar{n}_u = f_u - t_u \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\bar{n} \wedge f_u \wedge f_v = \begin{pmatrix} - \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & x_u & x_v \\ y & y_u & y_v \\ z & z_u & z_v \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \\ t_u \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \\ t_v \end{pmatrix}$$

$$\therefore \nu = \frac{1}{E} \begin{vmatrix} x & x_u & x_v \\ y & y_u & y_v \\ z & z_u & z_v \end{vmatrix} = \frac{1}{E} \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2} \sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}$$

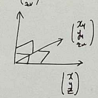
$$= \frac{1}{E} \sqrt{E - t_u^2} \sqrt{E - t_v^2}$$

$\langle \bar{n}, f_u \rangle = \langle \bar{n}, f_v \rangle = 0.$

$\langle f_u, f_u \rangle = \langle f_v, f_v \rangle = E$

$\langle f_u, f_v \rangle = 0.$

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 + t_u^2$$
$$= x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 + t_v^2$$



$\mathcal{F} = (\bar{n}, f_u, f_v, n)$

$\mathcal{F}_u = (\bar{n}_u, f_{uu}, f_{uv}, n_u)$

$\mathcal{F}_v = (\bar{n}_v, f_{uv}, f_{vv}, n_v)$

$\bar{n}_u, \bar{n}_v, f_{uu}, f_{uv}, f_{vv}, n_u, n_v$

を $\bar{n}, f_u, f_v, n$ の線形結合で

表せば良い.

$$\begin{cases} f_{uu} = (E + t_u^2)\bar{n} + \frac{E_u}{2E} f_u - \frac{E_v}{2E} f_v + L n \\ f_{uv} = \text{HW} \\ f_{vv} = \text{HW} \end{cases}$$

$$n_u = A\bar{n} + B f_u + C f_v + D n$$

$\langle \cdot, n \rangle$: $\underbrace{\langle n_u, n \rangle}_{\frac{1}{2}\langle n, n \rangle_u} = D.$ $\quad \therefore D = 0.$

$\langle \cdot, f_u \rangle$: $\underbrace{\langle n_u, f_u \rangle}_{\langle n, f_u \rangle_u - \langle n, f_{uu} \rangle} = B \underbrace{\langle f_u, f_u \rangle}_{E}$ $\quad \therefore B = \frac{-L}{E}$

$= 0 - L$

$\langle \cdot, f_v \rangle$: $\quad \therefore C = -\frac{M}{E}$

$\langle \cdot, \bar{n} \rangle$: $\underbrace{\langle n_u, \bar{n} \rangle}_{\langle n, \bar{n} \rangle_u - \langle n, \bar{n}_u \rangle} = A$ $\quad \therefore A = t_u \nu$

$= 0 - \langle n, f_u - t_u \frac{\partial}{\partial t} \rangle$

$= t_u \langle n, \frac{\partial}{\partial t} \rangle$

$= t_u \nu$

$\therefore n_u = t_u \nu \bar{n} - \frac{L}{E} f_u - \frac{M}{E} f_v$

$n_v = \text{HW}$

t_u, t_v と

$\boxed{E, L, M, N, \nu, \alpha, \beta}$

を用いて表せるか?

T: D上のベクトル場

$df(T) = \frac{\partial}{\partial t} - \nu n$

$\frac{\partial}{\partial t} = \nu n + df(T).$

$T = \alpha(u,v) \frac{\partial}{\partial u} + \beta(u,v) \frac{\partial}{\partial v}.$

$df(T) = \alpha f_u + \beta f_v$

$1 = (\alpha^2 + \beta^2)E + \nu^2$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} = \alpha f_u + \beta f_v + \nu n.}$$

$\bar{n}_u = f_u - t_u \frac{\partial}{\partial t}$

$= f_u - t_u (\alpha f_u + \beta f_v + \nu n)$

$= (1 - t_u \alpha) f_u - t_u \beta f_v - t_u \nu n$

$$\bar{n}_u = A\bar{n} + Bf_u + Cf_v + Dn$$

$\langle \cdot, \bar{n} \rangle$: $\underbrace{\langle \bar{n}_u, \bar{n} \rangle}_{=\frac{1}{2}\langle \bar{n}, \bar{n}\rangle_u} = A$ $\therefore A = 0.$

$\langle \cdot, f_u \rangle$: $\underbrace{\langle \bar{n}_u, f_u \rangle}_{= x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = E - t_u^2} = B \underbrace{\langle f_u, f_u \rangle}_{E}$ $\therefore B = 1 - \frac{t_u^2}{E}$

$\langle \cdot, f_v \rangle$: $\underbrace{\langle \bar{n}_u, f_v \rangle}_{= x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = -t_u t_v} = C \underbrace{\langle f_u, f_v \rangle}_{= E}$ $\therefore C = -\frac{t_u t_v}{E}$

$\langle \cdot, n \rangle$: $\underbrace{\langle \bar{n}_u, n \rangle}_{= \langle f_u - t_u \frac{\partial}{\partial t}, n\rangle} = D$

$= -t_u\nu.$ $\therefore D = -t_u\nu$

$$\therefore \begin{cases} 1 - t_u\alpha = 1 - \frac{t_u^2}{E} & \therefore t_u = \alpha E \\ -t_u\beta = -\frac{t_u t_v}{E} & t_v = \beta E \end{cases}$$

~~$\langle \circledast, f_u \rangle$:~~

~~$\langle f_u, \frac{\partial}{\partial t} \rangle = \alpha \frac{\langle f_u, f_u \rangle}{E}$~~

~~$= \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \\ t_u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\therefore t_u = \alpha E$~~

~~$= t_u.$~~

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t_u \end{pmatrix} = f_u - \bar{n}_u$$

$$\bar{n}_u = f_u - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t_u \end{pmatrix} = f_u - t_u \frac{\partial}{\partial t} = f_u - \alpha\left(\frac{\alpha}{E}f_u + \frac{\beta}{E}f_v + \nu n\right)$$

$$\boxed{T =: \frac{\alpha}{E}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\beta}{E}\frac{\partial}{\partial v}}$$ とおく.

← 別の choice $\left(T = \frac{\alpha}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\beta}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial v}\right)$

$$df(T) = \frac{\alpha}{E}f_u + \frac{\beta}{E}f_v$$

$\frac{\partial}{\partial t} = df(T) + \nu n$ より

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\alpha}{E}f_u + \frac{\beta}{E}f_v + \nu n} \text{ — } \circledast'$$

$\langle \circledast', f_u \rangle$: $t_u = \alpha$

$\langle \circledast', f_v \rangle$: $t_v = \beta.$

$$1 = \frac{\alpha^2}{E} + \frac{\beta^2}{E} + \nu^2$$

$$\begin{cases} f_{uu} = (-E + \alpha^2)\bar{n} + \frac{E_u}{2E}f_u - \frac{E_v}{2E}f_v + Ln \\ f_{uv} = \text{HW} \\ f_{vv} = \text{HW} \\ n_u = \alpha\nu\bar{n} - \frac{L}{E}f_u - \frac{M}{E}f_v \\ n_v = \text{HW} \\ \bar{n}_u = \left(1 - \frac{\alpha^2}{E}\right)f_u - \frac{\alpha\beta}{E}f_v - \alpha\nu n \\ \bar{n}_v = \text{HW} \end{cases}$$

Gauss-Weingarten の公式

$\mathcal{F}_u = \mathcal{F}\mathcal{U}$, $\mathcal{F}_v = \mathcal{F}\mathcal{V}$

$\Longrightarrow \boxed{\mathcal{F}_{uv} = \mathcal{F}_{vu}}$ はどういう形か?

可積分条件. (可)

HW

1. Gauss-Weingarten の公式を すべて求める.
2. 可積分条件を計算する.
3. 幾何学II の方法で, 曲面論の基本定理を作る.

E, L, M, N, α, β, ν を (可) をみたすものとする

1. この $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ を使って

微分方程式

$$\begin{cases} \mathcal{F}_u = \mathcal{F}\mathcal{U} \\ \mathcal{F}_v = \mathcal{F}\mathcal{V} \\ \mathcal{F}(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{E(u_0, v_0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{E(u_0, v_0)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

の解 $\mathcal{F}$ を定める.

3. $\mathcal{F} = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ とおくとき.

$a_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ を示す.

2. t を $\begin{cases} t_u = \alpha \\ t_v = \beta. \\ t(u_0, v_0) = 0 \end{cases}$ をみたすものとする.

($\alpha_v = \beta_u$ が成立することを示す)

$\Longrightarrow f = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, $\bar{n} = a_0$ とおく.

4. $f_u = a_1$, $f_v = a_2$

$\langle f_u, f_u \rangle = \langle f_v, f_v \rangle = E$

$\langle f_u, f_v \rangle = 0$

$\langle f, a_3 \rangle = \langle f_u, a_3 \rangle = \langle f_v, a_3 \rangle = 0$

$\langle a_3, a_3 \rangle = 1.$

を示し, $n = a_3$ とおく.

5. $L = \langle f_{uu}, n \rangle$

$M = \langle f_{uv}, n \rangle$

$N = \langle f_{vv}, n \rangle$

を示す.

6. $\nu = \langle n, \frac{\partial}{\partial t} \rangle.$

~~$\frac{1}{E}(\alpha^2 + \beta^2) + \nu^2 = 1.$~~ ← 仮定に入れる.

$$\frac{\alpha}{E}f_u + \frac{\beta}{E}f_v + \nu n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を示す.

$(n-1)$ 個のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \ldots \boldsymbol{x}_{n-1} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して,

$$\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_{n-1} := |\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{x}_{n-1},\ \boldsymbol{E}|$$

と定める．ここで，$E_1, \ldots, E_n$ を $\boldsymbol{R}^n$ の標準基底

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{とし，} \quad \boldsymbol{E} := \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{pmatrix}$$

とする.

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \\ \vdots \\ x_1^n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} x_2^1 \\ x_2^2 \\ \vdots \\ x_2^n \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{x}_{n-1} = \begin{pmatrix} x_{n-1}^1 \\ x_{n-1}^2 \\ \vdots \\ x_{n-1}^n \end{pmatrix},$$

と表すとき,

$$\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_{n-1} = \begin{vmatrix} x_1^1 & \ldots & x_{n-1}^1 & E_1 \\ x_1^2 & \ldots & x_{n-1}^2 & E_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^n & \ldots & x_{n-1}^n & E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1}^1 & x_{n-1}^2 & \ldots & x_{n-1}^n \\ E_1 & E_2 & \ldots & E_n \end{vmatrix}$$

である.

補題 1. $\boldsymbol{x}_n \in \boldsymbol{R}^n$ に対して,

$$(\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_{n-1}) \cdot \boldsymbol{x}_n = |\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n|$$

が成り立つ.

Proof.

$$\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_{n-1} = \left((-1)^{n+1} \begin{vmatrix} x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1}^2 & \ldots & x_{n-1}^n \end{vmatrix}, \ldots, (-1)^{n+n} \begin{vmatrix} x_1^1 & \ldots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1}^1 & \ldots & x_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} \right)^T$$

より,

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_{n-1}) \cdot \boldsymbol{x}_n &= (-1)^{n+1} x_n^1 \begin{vmatrix} x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1}^2 & \ldots & x_{n-1}^n \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{n+n} x_n^n \begin{vmatrix} x_1^1 & \ldots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1}^1 & \ldots & x_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_1^1 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^1 & \ldots & x_n^n \end{vmatrix} = |\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n|. \end{aligned}$$

□

k 個のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \ldots \boldsymbol{x}_k \in \boldsymbol{R}^n$ に対して,

$$(\boldsymbol{x}_1, \ldots \boldsymbol{x}_k)^T (\boldsymbol{x}_1, \ldots \boldsymbol{x}_k) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_2 & \ldots & \boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_k \\ \boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{x}_2 & \ldots & \boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{x}_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{x}_k \cdot \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_k \cdot \boldsymbol{x}_2 & \ldots & \boldsymbol{x}_k \cdot \boldsymbol{x}_k \end{pmatrix}$$

を $\boldsymbol{x}_1, \ldots \boldsymbol{x}_k$ の Gram 行列という．その行列式

$$\operatorname{gram}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k) := \begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_2 & \ldots & \boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_k \\ \boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{x}_2 & \ldots & \boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{x}_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{x}_k \cdot \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_k \cdot \boldsymbol{x}_2 & \ldots & \boldsymbol{x}_k \cdot \boldsymbol{x}_k \end{vmatrix}$$

を Gram 行列式という.

補題 2. *Gram* 行列は半正定値である.

Proof. $G = (\boldsymbol{x}_1, \ldots \boldsymbol{x}_k)^T (\boldsymbol{x}_1, \ldots \boldsymbol{x}_k)$ とおく． $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_k)^T \in \boldsymbol{R}^k$ に対して

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}^T G \boldsymbol{a} &= (a_1, \ldots, a_k)^T (\boldsymbol{x}_1, \ldots \boldsymbol{x}_k)^T (\boldsymbol{x}_1, \ldots \boldsymbol{x}_k) \boldsymbol{a} \\ &= ((\boldsymbol{x}_1, \ldots \boldsymbol{x}_k) \boldsymbol{a})^T (\boldsymbol{x}_1, \ldots \boldsymbol{x}_k) \boldsymbol{a} \\ &= (a_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + a_k \boldsymbol{x}_k)^T (a_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + a_k \boldsymbol{x}_k) \\ &= |a_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + a_k \boldsymbol{x}_k|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

□

この補題より，Gram 行列の固有値はすべて非負であることがわかる．とくに，Gram 行列式 $\operatorname{gram}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$ は非負である.

補題 3.

$$|\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_{n-1}|^2 = \operatorname{gram}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-1})$$

が成り立つ.

Proof. $g := \operatorname{gram}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-1})$ とおく.

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_{n-1}|^2 &= (\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_{n-1})^T (\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_{n-1}) \\ &= (\det(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{x}_{n-1},\ \boldsymbol{E}))^T \det(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{x}_{n-1},\ \boldsymbol{E}) \\ &= \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1^T \\ \boldsymbol{x}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_{n-1}^T \\ \boldsymbol{E}^T \end{pmatrix} \det(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{x}_{n-1},\ \boldsymbol{E}) \\ &= \det \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1^T \\ \boldsymbol{x}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_{n-1}^T \\ \boldsymbol{E}^T \end{pmatrix} (\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{x}_{n-1},\ \boldsymbol{E}) \right) \end{aligned}$$

$$
= \begin{vmatrix}
\boldsymbol{x}_1^T\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_1^T\boldsymbol{x}_2 & \dots & \boldsymbol{x}_1^T\boldsymbol{x}_{n-1} & \boldsymbol{x}_1^T\boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{x}_2^T\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2^T\boldsymbol{x}_2 & \dots & \boldsymbol{x}_2^T\boldsymbol{x}_{n-1} & \boldsymbol{x}_2^T\boldsymbol{E} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\boldsymbol{x}_{n-1}^T\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_{n-1}^T\boldsymbol{x}_2 & \dots & \boldsymbol{x}_{n-1}^T\boldsymbol{x}_{n-1} & \boldsymbol{x}_{n-1}^T\boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{E}^T\boldsymbol{x}_2 & \dots & \boldsymbol{E}^T\boldsymbol{x}_{n-1} & \boldsymbol{E}^T\boldsymbol{E}
\end{vmatrix}
$$

となる．ここで，$j = 1, \dots, n-1$ に対して，

$$
\boldsymbol{x}_j^T\boldsymbol{E} = x_j^1 E_1 + \dots + x_j^n E_n = \boldsymbol{x}_j, \quad \boldsymbol{E}^T\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{x}_j^T, \quad \boldsymbol{E}^T\boldsymbol{E} = E_1^T E_1 + \dots + E_n^T E_n = n
$$

より，

$$
|\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{x}_{n-1}|^2 = \begin{vmatrix}
\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_2 & \dots & \boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_{n-1} & \boldsymbol{x}_1 \\
\boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{x}_2 & \dots & \boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{x}_{n-1} & \boldsymbol{x}_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\boldsymbol{x}_{n-1} \cdot \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_{n-1} \cdot \boldsymbol{x}_2 & \dots & \boldsymbol{x}_{n-1} \cdot \boldsymbol{x}_{n-1} & \boldsymbol{x}_{n-1} \\
\boldsymbol{x}_1^T & \boldsymbol{x}_2^T & \dots & \boldsymbol{x}_{n-1}^T & n
\end{vmatrix}
$$

となる．第 n 列で余因子展開すると，

$$
\begin{aligned}
&|\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{x}_{n-1}|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+n} \begin{vmatrix}
\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_1 & \dots & \boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_{n-1} \\
\boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{x}_1 & \dots & \boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{x}_{n-1} \\
 & \vdots & \\
\boldsymbol{x}_{j-1} \cdot \boldsymbol{x}_1 & \dots & \boldsymbol{x}_{j-1} \cdot \boldsymbol{x}_{n-1} \\
\boldsymbol{x}_{j+1} \cdot \boldsymbol{x}_1 & \dots & \boldsymbol{x}_{j+1} \cdot \boldsymbol{x}_{n-1} \\
 & \vdots & \\
\boldsymbol{x}_{n-1} \cdot \boldsymbol{x}_1 & \dots & \boldsymbol{x}_{n-1} \cdot \boldsymbol{x}_{n-1} \\
\boldsymbol{x}_1^T & \dots & \boldsymbol{x}_{n-1}^T
\end{vmatrix} \boldsymbol{x}_j + (-1)^{n+n} n \begin{vmatrix}
\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_2 & \dots & \boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_{n-1} \\
\boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{x}_2 & \dots & \boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{x}_{n-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\boldsymbol{x}_{n-1} \cdot \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_{n-1} \cdot \boldsymbol{x}_2 & \dots & \boldsymbol{x}_{n-1} \cdot \boldsymbol{x}_{n-1}
\end{vmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+n} \begin{vmatrix}
\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_1 & \dots & \boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_{n-1} \\
\boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{x}_1 & \dots & \boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{x}_{n-1} \\
 & \vdots & \\
\boldsymbol{x}_{j-1} \cdot \boldsymbol{x}_1 & \dots & \boldsymbol{x}_{j-1} \cdot \boldsymbol{x}_{n-1} \\
\boldsymbol{x}_{j+1} \cdot \boldsymbol{x}_1 & \dots & \boldsymbol{x}_{j+1} \cdot \boldsymbol{x}_{n-1} \\
 & \vdots & \\
\boldsymbol{x}_{n-1} \cdot \boldsymbol{x}_1 & \dots & \boldsymbol{x}_{n-1} \cdot \boldsymbol{x}_{n-1} \\
\boldsymbol{x}_1^T\boldsymbol{x}_j & \dots & \boldsymbol{x}_{n-1}^T\boldsymbol{x}_j
\end{vmatrix} + ng \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+n} (-1)^{n-1-j} \begin{vmatrix}
\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_1 & \dots & \boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_{n-1} \\
\boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{x}_1 & \dots & \boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{x}_{n-1} \\
 & \vdots & \\
\boldsymbol{x}_{n-1} \cdot \boldsymbol{x}_1 & \dots & \boldsymbol{x}_{n-1} \cdot \boldsymbol{x}_{n-1}
\end{vmatrix} + ng = -(n-1)g + g = g
\end{aligned}
$$

□

命題 4. $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_{n-1}\}$ が *1* 次独立であるための必要十分条件は

$$
|\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{x}_{n-1}| > 0
$$

で与えられる．

Proof. $|\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_{n-1}| = 0$ と仮定すると，補題 3 より，

$$|(\boldsymbol{x}_1, \dots \boldsymbol{x}_{n-1})^T (\boldsymbol{x}_1, \dots \boldsymbol{x}_{n-1})| = 0$$

である．グラム行列 $(\boldsymbol{x}_1, \dots \boldsymbol{x}_{n-1})^T (\boldsymbol{x}_1, \dots \boldsymbol{x}_{n-1})$ は 0 を固有値の 1 つにもつので，$\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{R}^{n-1} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ で

$$(\boldsymbol{x}_1, \dots \boldsymbol{x}_{n-1})^T (\boldsymbol{x}_1, \dots \boldsymbol{x}_{n-1}) \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

をみたすものが存在する．したがって，$\boldsymbol{y} = c_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_{n-1} \boldsymbol{x}_{n-1}$ とおくと

$$|\boldsymbol{y}|^2 = \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}^T (\boldsymbol{x}_1, \dots \boldsymbol{x}_{n-1})^T (\boldsymbol{x}_1, \dots \boldsymbol{x}_{n-1}) \boldsymbol{c} = 0$$

となり，$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ が成り立つ．とくに，$(c_1, \dots, c_{n-1}) \neq (0, \dots, 0)$ で $c_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_{n-1} \boldsymbol{x}_{n-1} = \boldsymbol{0}$ をみたすものが存在するので，$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_{n-1}\}$ は 1 次従属である．

逆に，$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_{n-1}\}$ は 1 次従属であるとすると，$(c_1, \dots, c_{n-1}) \neq (0, \dots, 0)$ で $c_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_{n-1} \boldsymbol{x}_{n-1} = \boldsymbol{0}$ をみたすものが存在する．

$$\boldsymbol{0} = c_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_{n-1} \boldsymbol{x}_{n-1} = (\boldsymbol{x}_1, \dots \boldsymbol{x}_{n-1}) \boldsymbol{c} \qquad \left(\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} \right)$$

と表される．したがって，

$$(\boldsymbol{x}_1, \dots \boldsymbol{x}_{n-1})^T (\boldsymbol{x}_1, \dots \boldsymbol{x}_{n-1}) \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

が成り立つ．これはグラム行列 $(\boldsymbol{x}_1, \dots \boldsymbol{x}_{n-1})^T (\boldsymbol{x}_1, \dots \boldsymbol{x}_{n-1})$ の行列式が 0 であることを意味する：

$$|(\boldsymbol{x}_1, \dots \boldsymbol{x}_{n-1})^T (\boldsymbol{x}_1, \dots \boldsymbol{x}_{n-1})| = 0.$$

したがって補題 3 より，$|\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_{n-1}| = 0$ が成り立つ． □

補題 5. $\boldsymbol{x}_1, \dots \boldsymbol{x}_{n-1} \in \boldsymbol{R}^n$, $A \in M_{n-1}(\boldsymbol{R})$ に対して，$(\boldsymbol{y}_1, \dots \boldsymbol{y}_{n-1}) = (\boldsymbol{x}_1, \dots \boldsymbol{x}_{n-1}) A$ とおくとき，

$$|\boldsymbol{y}_1 \wedge \boldsymbol{y}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{y}_{n-1}| = |\det A|\, |\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_{n-1}|$$

が成り立つ．

Proof. $(\boldsymbol{y}_1, \dots \boldsymbol{y}_k)^T (\boldsymbol{y}_1, \dots \boldsymbol{y}_k) = A^T (\boldsymbol{x}_1, \dots \boldsymbol{x}_k)^T (\boldsymbol{x}_1, \dots \boldsymbol{x}_k) A$ なので，補題 3 より

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{y}_1 \wedge \boldsymbol{y}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{y}_{n-1}|^2 &= \mathrm{gram}(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_{n-1}) \\
&= |(\boldsymbol{y}_1, \dots \boldsymbol{y}_{n-1})^T (\boldsymbol{y}_1, \dots \boldsymbol{y}_{n-1})| \\
&= |A^T (\boldsymbol{x}_1, \dots \boldsymbol{x}_{n-1})^T (\boldsymbol{x}_1, \dots \boldsymbol{x}_{n-1}) A| \\
&= |A|^2 |(\boldsymbol{x}_1, \dots \boldsymbol{x}_{n-1})^T (\boldsymbol{x}_1, \dots \boldsymbol{x}_{n-1})| \\
&= |A|^2 \mathrm{gram}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_{n-1}) \\
&= |A|^2 |\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_{n-1}|^2
\end{aligned}$$

であるので，求める結果を得る． □