Bryant の公式 (つづき)

・Bryant の表現公式 (Thm 3.4.4)

$$F_z = F \underbrace{\begin{bmatrix} g & -g^2 \\ 1 & -g \end{bmatrix} h}_{=:\alpha \text{ とする}}$$

$$\Longrightarrow f := FF^* : D \longrightarrow \mathbb{H}^3$$

CMC−1 曲面 s.t.

今回

$$\begin{cases} \underset{\sim}{\mathrm{I} = (1+|g|^2)^2 |h|^2 dz d\bar{z}} \\ \mathrm{II} = Q + \overline{Q} + \mathrm{I} \\ (Q = -hg' dz^2) \end{cases}$$

13回では ここ示した

$(g' = g_z,\ \overline{g}' = \overline{g}_{\bar{z}})$

逆に、与えられた $\mathbb{H}^3$ の CMC−1 曲面 は

局所的 に この方法で与えられる.

$\mathrm{II} := -\langle d\nu, df \rangle$ を計算したい.

$$\nu = \frac{f_u \times f_v}{\| f_u \times f_v \|}$$ を計算する.

$\boxed{\text{まずは}}$

補題 3.5.2

$$\nu = \frac{1}{1+|g|^2} F\beta F^* , \quad \beta := \begin{bmatrix} |g|^2-1 & 2g \\ 2\bar{g} & 1-|g|^2 \end{bmatrix}$$

である.

証明

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\right)$$ より

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

$$\frac{\partial}{\partial v} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$$

である. $\therefore$ $f_u = f_z + f_{\bar{z}}$, $f_v = i(f_z - f_{\bar{z}})$. ☆

一方, $f_z = F\alpha F^*$, $f_{\bar{z}} = F\alpha^* F^*$ である ☆☆

$X \times_p Y$
$= \frac{i}{2}(XP^{-1}Y$
$- YP^{-1}X$

$P = f = F$
$X = f_z$
$Y = f_{\bar{z}}$

$$\therefore f_u \times f_v = (f_z + f_{\bar{z}}) \times \{i(f_z - f_{\bar{z}})\}$$

☆より

$$= -2i\, f_z \times f_{\bar{z}}$$ 補題 3.4.3

$$= F\alpha \cancel{F^*} \underbrace{(FF^*)^{-1}}_{\cancel{(F^*)^{-1}}\cancel{F^{-1}}} \cancel{F}\alpha^* F^*$$

$$- F\alpha^* \cancel{F^*} \underbrace{(FF^*)^{-1}}_{\cancel{(F^*)^{-1}}\cancel{F^{-1}}} \cancel{F}\alpha F^*$$

$$= F(\alpha\alpha^* - \alpha^*\alpha)F^*$$ ☆☆☆

今 $\alpha = h\begin{bmatrix} g & -g^2 \\ 1 & -g \end{bmatrix}$, $\alpha^* = \bar{h}\begin{bmatrix} \bar{g} & 1 \\ -\bar{g}^2 & -\bar{g} \end{bmatrix}$ より,

$$\alpha\alpha^* = |h|^2 \begin{bmatrix} |g|^2(1+|g|^2) & g(1+|g|^2) \\ \bar{g}(1+|g|^2) & 1+|g|^2 \end{bmatrix}$$

$$= (1+|g|^2)|h|^2 \begin{bmatrix} |g|^2 & g \\ \bar{g} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha^*\alpha = (1+|g|^2)|h|^2 \begin{bmatrix} 1 & -g \\ -\bar{g} & |g|^2 \end{bmatrix}$$ であるので ☆☆☆ に代入すると,

$$\therefore f_u \times f_v = (1+|g|^2)|h|^2 F \underbrace{\begin{bmatrix} |g|^2-1 & 2g \\ 2\bar{g} & 1-|g|^2 \end{bmatrix}}_{\beta} F^*$$ である

$$\therefore \nu = \frac{f_u \times f_v}{\|f_u \times f_v\|}$$

$\|f_u \times f_v\|$
$= \sqrt{EG - \cancel{F^2}} = E = (1+|g|^2)^2|h|^2$

$$= \frac{1}{1+|g|^2} F\beta F^*$$ である.

$\mathrm{II} = -\langle d\nu, df \rangle$ の計算

$$= -\langle \nu_z dz + \nu_{\bar z} d\bar z,\ f_z dz + f_{\bar z} d\bar z \rangle$$

$$= -\langle \nu_z, f_z \rangle dz^2 - \underbrace{\left(\langle \nu_z, f_{\bar z} \rangle + \langle \nu_{\bar z}, f_z \rangle \right)}_{= 2\langle \nu_z, f_{\bar z} \rangle} dz d\bar z + \langle \nu_{\bar z}, f_{\bar z} \rangle d\bar z^2$$

$(\because \langle \nu_{\bar z}, f_z \rangle = \langle \nu_z, f_{\bar z} \rangle)$

・$\boxed{\nu_z}$ を計算する

$$\nu_z = \left(\frac{1}{1+|g|^2} \right)_z F\beta F^* \quad (= (1+|g|^2)\nu)$$

$$+ \frac{1}{1+|g|^2} \left(\underbrace{F_z}_{= F\alpha} \beta F^* + F\beta_z F^* + F\beta \underbrace{(F^*)_z}_{= 0} \right)$$

$$= \underbrace{\triangle \nu}_{} + \frac{1}{1+|g|^2} F(\alpha\beta + \beta_z) F^*$$

$\uparrow$ $f_z, f_{\bar z}$ と直交

f_z は ※※ より

$$\therefore \langle \nu_z, f_z \rangle = \frac{1}{1+|g|^2} \langle F(\alpha\beta + \beta_z)F^*, F\alpha F^* \rangle$$

$$= \frac{1}{1+|g|^2} \langle \alpha\beta + \beta_z, \alpha \rangle = \frac{1}{1+|g|^2} \left(\underbrace{\langle \alpha\beta, \alpha \rangle}_{\mathrm{II}_1} + \underbrace{\langle \beta_z, \alpha \rangle}_{\mathrm{II}_2} \right)$$

$\langle \nu_z, f_{\bar z} \rangle$ も同様に、

$$\langle \nu_z, f_{\bar z} \rangle = \frac{1}{1+|g|^2} \left(\underbrace{\langle \alpha\beta, \alpha^* \rangle}_{\mathrm{II}_3} + \underbrace{\langle \beta_z, \alpha^* \rangle}_{\mathrm{II}_4} \right)$$

を計算すると、

$\mathrm{II}_1 = 0$

$\mathrm{II}_2 = (1+|g|^2) h g_z$

$\mathrm{II}_3 = -\frac{1}{2}(1+|g|^2)^3 |h|^2$

$\mathrm{II}_4 = 0$

である

II_1 の proof

$$\mathrm{II}_1 = \langle \alpha\beta, \alpha \rangle = -\frac{1}{2} \mathrm{tr}(\alpha\beta\tilde\alpha) = -\frac{1}{2} \mathrm{tr}(\tilde\alpha\alpha\beta) = 0.$$

$$\alpha\tilde\alpha = \underbrace{(\det\alpha)}_{= 0} e_0$$

II_2 について

$$\beta = \begin{bmatrix} g\bar g - 1 & 2g \\ 2\bar g & 1 - g\bar g \end{bmatrix} \text{ より}$$

$$\beta_z = \begin{bmatrix} g_z \bar g & 2g_z \\ 0 & -g_z \bar g \end{bmatrix} \text{ である}$$

(※ $(\bar g)_z = 0$ を用いた)

$$\therefore \beta_z = g_z \begin{bmatrix} \bar g & 2 \\ 0 & -\bar g \end{bmatrix} \text{ である.}$$

$$\therefore \mathrm{II}_2 = \langle \beta_z, \alpha \rangle$$

$$= -\frac{1}{2} \mathrm{tr}\left(g_z \begin{pmatrix} \bar g & 2 \\ 0 & -\bar g \end{pmatrix} h \begin{pmatrix} -g & g^2 \\ -1 & g \end{pmatrix} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} h g_z \,\mathrm{tr} \begin{pmatrix} -g\bar g - 2 & * \\ * & -g\bar g \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2} h g_z \left(-2(1+|g|^2) \right)$$

$$= (1+|g|^2) h g_z$$

Ⅱ3, Ⅱ4 は 資料 P117～P118 より.

$$\therefore \langle \nu_z, f_z \rangle = \frac{1}{1+|g|^2} \left(\mathrm{II}_1 + \mathrm{II}_2 \right) = h g_z$$

$$\langle \nu_{\bar z}, f_z \rangle = \frac{1}{1+|g|^2} \left(\mathrm{II}_3 + \mathrm{II}_4 \right) = -\frac{1}{2}|h|^2 (1+|g|^2)^2$$

である

$$\therefore \mathrm{II} = -\langle \nu_z, f_z \rangle dz^2 - 2\langle \nu_z, f_{\bar z} \rangle dz d\bar z - \langle \nu_{\bar z}, f_{\bar z} \rangle d\bar z^2$$

$$= \underbrace{-h g_z dz^2}_{=Q} + \underbrace{|h|^2 (1+|g|^2)^2 dz d\bar z}_{=\mathrm{I}} \underbrace{- (\overline{h g_z}) d\bar z^2}_{=\bar Q}$$

と求まる. また, 一般に $\mathrm{II} = Q + \bar Q + H \cdot \mathrm{I}$ より,

$H \equiv 1$ である

逆に 与えられた CMC－1 曲面

$$f : D \longrightarrow \mathbb{H}^3 \quad (D \subset \mathbb{C})$$

は, この方法で与えられることを示す.

Lawson 対応より,

$$\exists! \tilde f : D \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ : 極小曲面 \ (H \equiv 0)$$

($\mathbb{R}^3$ の回転と平行移動を除いて一意)

Weierstrass の表現公式の証明 (付録C) より,

$$\begin{cases} \exists g : D \longrightarrow \mathbb{C} \ : 有理型関数 \\ \exists h : \quad 〃 \quad : 正則関数 \end{cases} \quad s.t.$$

$$\tilde f = \mathrm{Re} \left\{ \int (1+g^2, \ i(1-g^2), \ 2g) h \, dz \right\}$$

$$\begin{cases} \tilde{\mathrm{I}} = (1+|g|^2)^2 |h|^2 dz d\bar z \\ \tilde{\mathrm{II}} = Q + \bar Q \quad (Q = -h g_z) \end{cases}$$

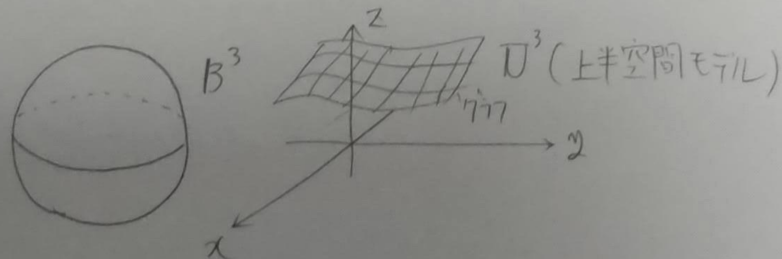
Lawson 対応の関係より

$$\begin{cases} \mathrm{I} = \tilde{\mathrm{I}} &= (1+|g|^2)^2 |h|^2 dz d\bar z \\ \mathrm{II} = \tilde{\mathrm{II}} + \mathrm{I} &= Q + \bar Q + \mathrm{I} \end{cases}$$

$\mathbb{H}^3$の曲面論の基本定理より、$f: D \longrightarrow \mathbb{H}^3$ はBryantの表現公式で与えられるものと $\mathbb{H}^3$ の向きを保つ合同変換でうつり合う

Remark

$\mathbb{H}^3$のCMC-1曲面は色々性質がある

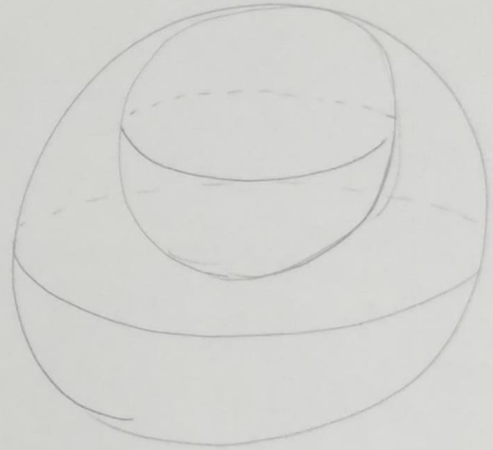


定理　U^3のグラフで、全平面で定義されるCMC-1曲面となるものは、ホロスフィアに限る。（双曲的ガウス写像、Liouvilleの定理）

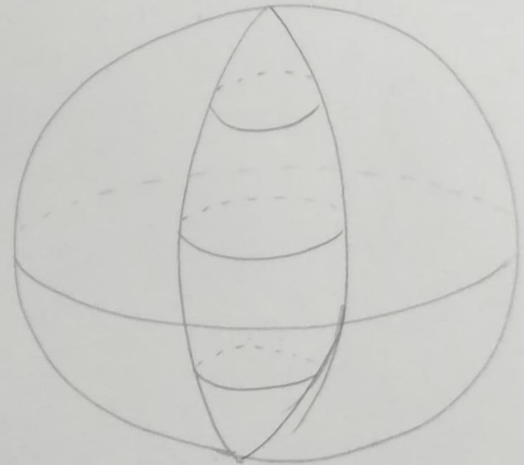
レポ3

・$\mathbb{H}^3$の $K_I \equiv 0$（flat surface）も、複素解析的な表現公式が知られている

しかし、$\mathbb{H}^3$の完備な平坦曲面は、ホロスフィアか双曲円柱に限られる。



ホロスフィア（課題11）

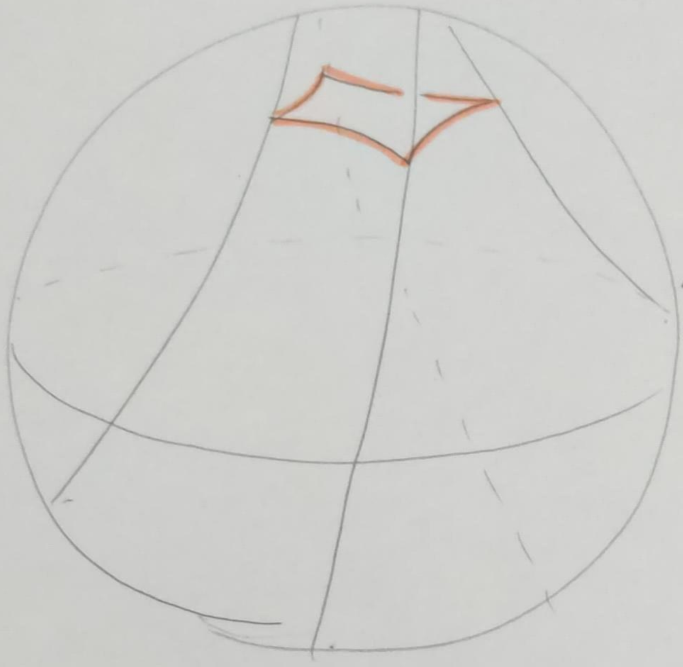


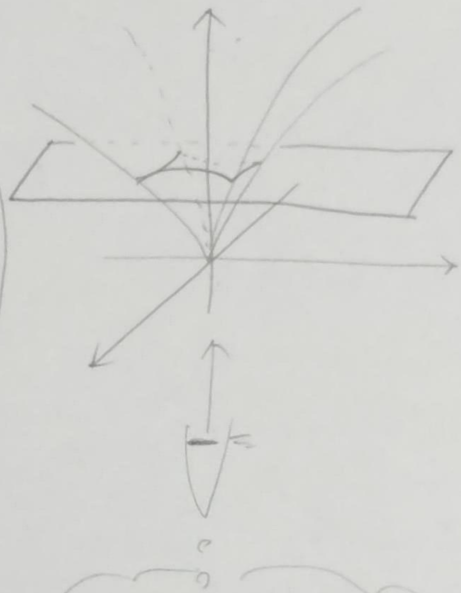
双曲円柱（課題12）

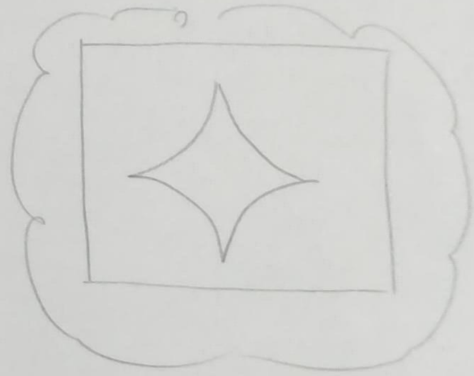
∴ $\mathbb{H}^3$の平坦曲面は、一般に特異点をもつ。（カスプ辺、ツバメの尾 等）

表現公式を用いて、

“特異点を許容する平坦曲面”の大域的性質も調べられる







アステロイド

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$$

レポ$\boxed{4}$ ← $\boxed{1}$ がヒント
（解の1つ）