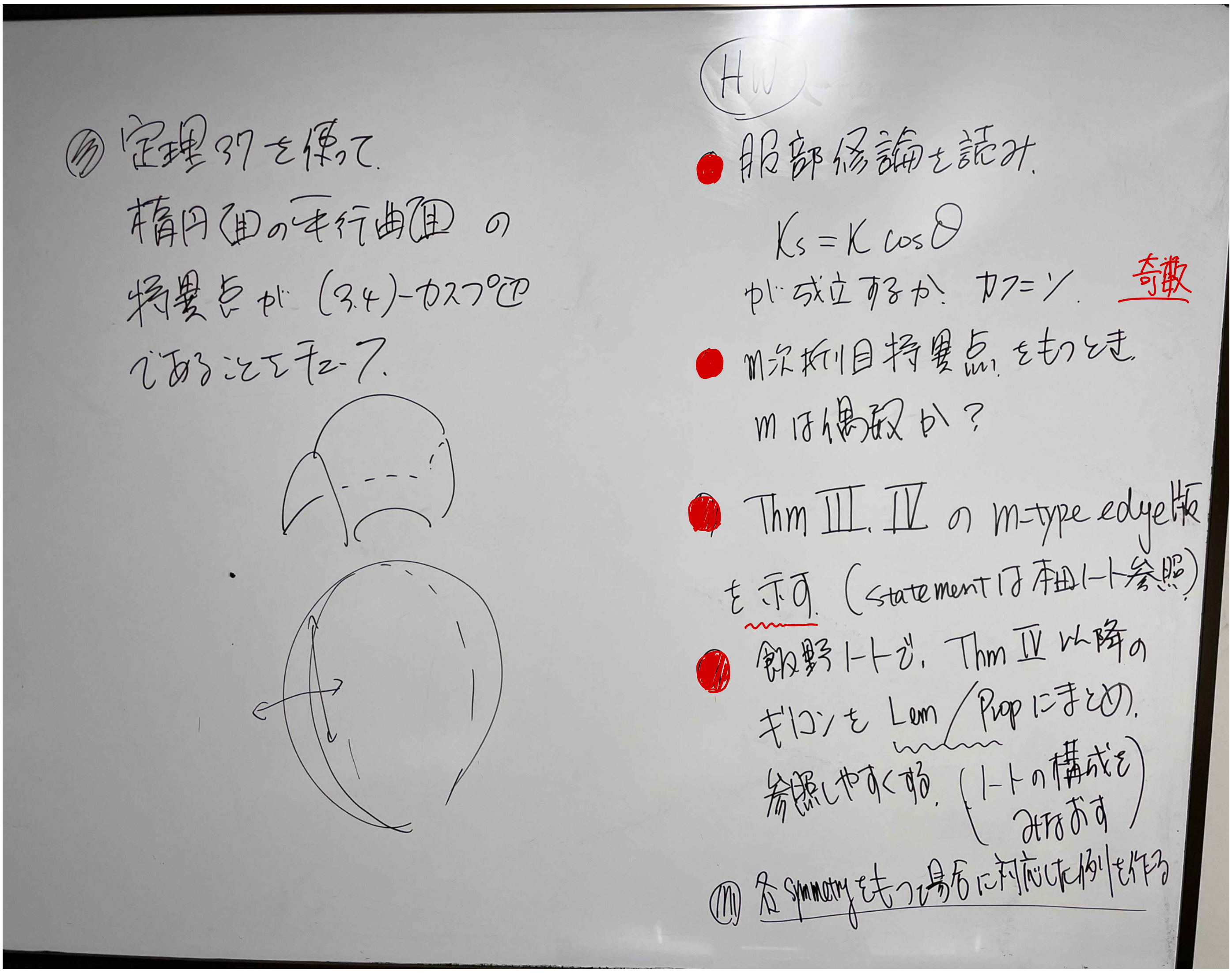

● f が m次折り目特異点 を持つとき、m は偶数か？

• f が m-type edge である $\iff$
$$\begin{cases} \bullet\ f_{v^i}(u,0) = 0 \quad (i = 2, 3, \cdots, m-1) \\ \bullet\ \underbrace{f_{v^m}(u,0)}_{\neq 0} \text{ と } f_u(u,0) \text{ が一次独立.} \end{cases}$$

• m-type edge f が m次折り目特異点 $\iff$ $f(u,v) = f(u,-v)$ が成り立つ.

f は折り目特異点であるため、等式 $f(u,v) = f(u,-v)$ を v で j回微分すると、 $(j \in \mathbb{N})$

$$f_{v^j}(u,v) = (-1)^j f_{v^j}(u,-v)$$

である. $v=0$ を代入すると、$f_{v^j}(u,0) = (-1)^j f_{v^j}(u,0)$ であるため、

- j が奇数なら $(-1)^j = -1$ より $f_{v^j}(u, 0) = 0$.
- j が偶数なら $f_{v^j}(u, 0) = f_{v^j}(u, 0)$. (自明)

m-type edge の定義より、$f_{v^m}(u, 0) \neq 0$ であることが必要. そのため、
m が奇数 (つまり、$f_{v^m}(u, 0) = 0$) では不適.

$\therefore$ m は偶数である. ∎

• $\kappa_s = \kappa\cos\theta$ が成り立つか？

補題

$\hat{\gamma}(t)$ を弧長パラメータ表示された空間曲線とする。このとき、

$$\frac{\hat{\gamma}'(t)\times\hat{\gamma}''(t)}{\|\hat{\gamma}'(t)\times\hat{\gamma}''(t)\|} = \mathbb{b}(t)\ \left(=\mathbb{e}(t)\times\mathbb{n}(t)\right)$$ である.

証明

$\hat{\gamma}'(t) \overset{\text{ノルム1}}{=} \mathbb{e}(t)$、$\hat{\gamma}''(t) = \mathbb{e}'(t) \overset{\text{フレネセレ公式より}}{=} \kappa(t)\mathbb{n}(t)$ であるので、ベクトル積 $\hat{\gamma}'(t)\times\hat{\gamma}''(t)$ は

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}'(t)\times\hat{\gamma}''(t) &= \mathbb{e}(t)\times\left(\kappa(t)\mathbb{n}(t)\right)\\ &= \kappa(t)\left(\mathbb{e}(t)\times\mathbb{n}(t)\right)\\ &= \kappa(t)\mathbb{b}(t) \quad \cdots ①\end{aligned}$$

である. ① について、両辺のノルムをとると

$$(\text{左辺}) : \|\hat{\gamma}'(t)\times\hat{\gamma}''(t)\|$$

$$(\text{右辺}) : \|\kappa(t)\mathbb{b}(t)\| = \kappa(t)\|\mathbb{b}(t)\| \overset{\text{作り方より ノルム1}}{=} \kappa(t)$$

である. よって、① の長さを両辺 1 にして単位化すると、

$$\begin{aligned}\frac{\hat{\gamma}'(t)\times\hat{\gamma}''(t)}{\|\hat{\gamma}'(t)\times\hat{\gamma}''(t)\|} &= \frac{\cancel{\kappa(t)}\,\mathbb{b}(t)}{\cancel{\kappa(t)}}\\ &= \mathbb{b}(t)\end{aligned}$$

が成り立つ. ▨

● $\kappa_s = \kappa \cos\theta$ が成り立つか？

n が奇数のとき

κ_s の定義より、$\kappa_s = \dfrac{\det\left(\hat{\gamma}'(t),\ \hat{\gamma}''(t),\ \hat{\nu}(t)\right)}{\|\hat{\gamma}'(t)\|^3}$ である。

$\det\left(\hat{\gamma}'(t),\ \hat{\gamma}''(t),\ \hat{\nu}(t)\right) = \left(\hat{\gamma}'(t) \times \hat{\gamma}''(t)\right) \cdot \hat{\nu}(t)$ であるので、

$$\kappa_s = \frac{\left(\hat{\gamma}'(t) \times \hat{\gamma}''(t)\right)\cdot \hat{\nu}(t)}{\|\hat{\gamma}'(t)\|^3} = \underbrace{\frac{\|\hat{\gamma}'(t) \times \hat{\gamma}''(t)\|}{\|\hat{\gamma}'(t)\|^3}}_{=:\kappa(t)} \frac{\hat{\gamma}'(t) \times \hat{\gamma}''(t)}{\|\hat{\gamma}'(t) \times \hat{\gamma}''(t)\|} \cdot \nu(t)$$

$$= \kappa(t)\left(\frac{\hat{\gamma}'(t) \times \hat{\gamma}''(t)}{\|\hat{\gamma}'(t) \times \hat{\gamma}''(t)\|} \cdot \nu(t)\right)$$

$\left\| \dfrac{\hat{\gamma}'(t) \times \hat{\gamma}''(t)}{\|\hat{\gamma}'(t) \times \hat{\gamma}''(t)\|} \right\| = 1.$ $\|\nu(t)\| = 1.$

$\left(a \cdot b = \underbrace{|a||b|}_{=1} \cos\angle(a, b)\right)$

$$= \kappa(t) \cos\angle\underbrace{\left(\frac{\hat{\gamma}'(t) \times \hat{\gamma}''(t)}{\|\hat{\gamma}'(t) \times \hat{\gamma}''(t)\|},\ \nu(t)\right)}_{\theta\text{ と一致するか？}} \quad \cdots (*)$$

一方、スカラー三重積の循環性 $\left(a(b \cdot c) = c(a \cdot b) = b(c \cdot a)\right)$ より、

$$\kappa(t)\left(\frac{\hat{\gamma}'(t) \times \hat{\gamma}''(t)}{\|\hat{\gamma}'(t) \times \hat{\gamma}''(t)\|} \cdot \nu(t)\right) \overset{\text{補題より}}{=} \kappa(t)\left(\nu(t) \cdot b(t)\right)$$

$$= \kappa(t)\left(\nu(t) \cdot \left(\hat{\gamma}'(t) \times n(t)\right)\right)$$

スカラー三重積の循環性

$$= \kappa(t)\left(n(t) \cdot \left(\underbrace{\nu(t) \times \hat{\gamma}'(t)}\right)\right)$$

カスプ方向の定義より

$$= \kappa(t)\underbrace{\left(n(t) \cdot \underbrace{x(t)}\right)}$$

内積の公式およびカスプ角の定義より

$$= \kappa(t) \cos(\theta) = \kappa(t) \cos\theta. \quad \cdots (**)$$

$(*)\ (**)$ より、$\kappa_s = \kappa \cos\theta$ が成り立つ。$\blacksquare$

m が偶数のとき

κ_s の定義より、 $\kappa_s = \underbrace{\mathrm{sgn}\left(\det(\hat{\gamma}'(t), \eta(t))\hat{\lambda}_\eta\right)}_{\in\{\pm 1\}} \dfrac{\det\left(\hat{\gamma}'(t), \hat{\gamma}''(t), \hat{\nu}(t)\right)}{\|\hat{\gamma}'(t)\|^3}$. (Hattori 修論より)

定義 33 (特異曲率 [16, 2]). m を偶数，すなわち，n を奇数とする．$\hat{\gamma} := f \circ \gamma$，$\hat{\nu} := \nu \circ \gamma$ とする．このとき，定義 4 で与えられる $\hat{\lambda}$ と退化ベクトル場 η を用いて，

$$\kappa_s(t) := \epsilon_\gamma(t) \frac{\det(\hat{\gamma}'(t), \hat{\gamma}''(t), \hat{\nu}(t))}{|\hat{\gamma}'(t)|^3}$$

$$\epsilon_\gamma(t) = \mathrm{sgn}(\det(\hat{\gamma}'(t), \eta(t))\hat{\lambda}_\eta)$$

とする．この κ_s を第一種特異点からなる $\hat{\gamma}(t)$ 上の**特異曲率**という．

HNSUY. P70 より、カスプ方向は

$$(x(u) =)\ f_{vv}(u, 0) = \cos\theta(u)\,\mathbf{n}(u) - \sin\theta(u)\,\mathbf{b}(u)$$

であり、特異曲率 $\kappa_s(u)$ は

$$\kappa_s(u) = \frac{-E_{vv}(u, 0)}{2}$$

$$\mathbf{b}(u) := \mathbf{e}(u) \times \mathbf{n}(u),$$

which is the binormal vector of $\mathbf{c}(u)$. Since $f_{vv}(u, 0)$ is perpendicular to $\mathbf{e}(u)$, we can write

(3.6) $$f_{vv}(u, 0) = \cos\theta(u)\mathbf{n}(u) - \sin\theta(u)\mathbf{b}(u),$$

which is called the *cuspidal direction*. As defined in the introduction,

- the plane $\Pi(\mathbf{c}(u))$ passing through $\mathbf{c}(u)$ spanned by $\mathbf{n}(u)$ and $\mathbf{b}(u)$ is the normal plane of the space curve $\mathbf{c}(u)$,
- the section of the image of f by $\Pi(\mathbf{c}(u))$ is a plane curve, which is called the *sectional cusp* at $\mathbf{c}(u)$, and
- the vector $f_{vv}(u, 0)$ points in the tangential direction of the sectional cusp at $\mathbf{c}(u)$. So we call $\theta(u)$ the *cuspidal angle function*.
- By using $\theta(u)$, the *singular curvature* κ_s and the *limiting normal curvature* κ_ν along the edge of f (cf. [16]) are given in (0.4).

The following fact is important:

Lemma 3.7 ([16]). *The singular curvature is intrinsic. In particular, it is defined along the singular curve with respect to a given Kossowski metric* (cf. [4, (2.17)]). *More precisely,*

(3.7) $$\kappa_s(u) = \frac{-E_{vv}(u, 0)}{2}$$

holds, where (u, v) *is the coordinate system as in Lemma 3.5.*

定義 4 (退化次数 n 特異点 [2]). n を正の整数，$f:\Sigma\to\boldsymbol{R}^3$ をフロンタル，ν を f の単位法ベクトル場とする．ここで，f の特異点 p に対して p の座標近傍 $(U;u,v)$ 上で定義された符号付き面積密度関数を $\lambda=\det(f_u,f_v,\nu)$ とする．ここで，$p\in\Sigma$ が**退化次数** n **特異点**であるとは，$\operatorname{rank}(df)_p=1$ であり，p の近傍における C^∞ 級関数 $\hat\lambda,\alpha$ で，

- $\lambda=\alpha\hat\lambda^n$
- $(\hat\lambda_u,\hat\lambda_v)(p)\neq(0,0)$
- $\alpha(p)\neq 0$ 　　$\alpha\equiv 1$ とする.

を満たすものが存在するときをいう．

$$\nu=\frac{f_u\times f_{v^m}}{\|f_u\times f_{v^m}\|}$$

● 定理 III, IV の m-type edge 版 の 証明 （確認）

Prop 3.4, 3.5

3.3　右同値類の個数の分類

定理 3.6 $\boxed{\text{(Theorem III}}$ の m-type edge 版). $f \in \mathcal{G}^{\omega}_{m,**}(\boldsymbol{R}^2_J, \boldsymbol{R}^3, C)$ とし，f, $\check{f}$, f_*, $\check{f}_*$ の右同値類の個数を n_f とする．

(1) m が偶数とき，　(2, 3)

(i) $n_f = 2, 4$ である．

(ii) $n_f = 4 \iff ds^2_f$ が *effective symmetry* を持たない．

(2) m が奇数とき，　(3, 4)

(i) $n_f = 1, 2, 4$ である．

(ii) $n_f = 4 \iff ds^2_f$ が *symmetry* を持たない．

(iii) $n_f = 1 \iff ds^2_f$ が *effective symmetry* と *non-effective symmetry* の両方を持つ．

m が 奇数 の 場合

$n_f = 1, 2, 4$

次に，(i) を示す．

- 上記 (ii) の後半の証明から，$n_f \neq 4 \Longrightarrow ds^2_f$ は ~~effective~~ symmetry を持つ．
- 上記 (ii) の前半の証明から，ds^2_f が ~~effective~~ symmetry をもつ $\Longrightarrow n_f \leq 2$

を得る．よって，$n_f \neq 4 \Longrightarrow n_f = 1, 2$ を示せた．

定理 4.5 (Theorem IV の m-type edge 版). $f \in \mathcal{G}^{\omega}_{m,**}(\boldsymbol{R}^2_J, \boldsymbol{R}^3, C)$ とする. f, $\check{f}$, f_*, $\check{f}_*$ の合同類の個数 N_f は, $N_f \neq 3$ をみたす. さらに,

(1) m が偶数とき,
  (i) $N_f = 4 \iff$ C は *symmetry* をもたず, かつ, ds^2_f は *effective symmetry* をもたない.
  (ii) $N_f = 1 \iff$ 下記 (a1)—(b) のいずれかを満たす
    (a1) C が平面内で, *orientation-reversing symmetry* をもつ
    (a2) C が平面内にあり, ds^2_f が *effective symmetry* をもつ
    (b) C が正の *orientation-reversing symmetry* をもち, かつ, ds^2_f も *effective symmetry* をもつ

(2) m が奇数とき,
  (i) $N_f = 4 \iff$ C も ds^2_f も両方とも *symmetry* をもたない.
  (ii) $N_f = 1 \iff$ (a1)—(d) のいずれかを満たす
    (a1) C が平面内で, *orientation-reversing symmetry* をもつ
    (a2) C が平面内にあり, ds^2_f が *effective symmetry* をもつ
    (b1) C が *orientation-reversing symmetry* をもち, かつ, ds^2_f が *non-effective symmetry* をもつ
    (b2) ds^2_f が *effective symmetry* と *non-effective symmetry* を両方もつ
    (c) C が正の *orientation-reversing symmetry* をもち, かつ, ds^2_f が *orientation-reversing effective symmetry* をもつ.
    (d) C が負の *orientation-reversing symmetry* をもち, かつ, ds^2_f が *orientation-preserving effective symmetry* をもつ.

定理 4.5 の証明： (1) **m が偶数の場合**. **(i) の ($\Longrightarrow$)** $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ は全て互いに合同でないならば, C は symmetry をもたず, ds^2_f は effective symmetry をもたないことを示そう.

- C が orientation-preserving symmetry を持つと仮定すると, 補題 1.3 より, C は平面曲線である. 命題 4.4 より, f と $\check{f}$ は合同であり, f_* と $\check{f}_*$ は合同となり矛盾. したがって, C は orientation-preserving symmetry を持たない.
- C が orientation-reversing symmetry を持つと仮定すると, 命題 4.2 より, f は f_* または $\check{f}_*$ と合同であり, それに応じて $\check{f}$ は $\check{f}_*$ または f_* と合同となり矛盾. したがって, C は orientation-reversing symmetry を持たない.
- ds^2_f が effective symmetry を持つと仮定すると, 命題 3.5 より, f は ~~f_* または~~ $\check{f}_*$ と合同であり, それに応じて $\check{f}$ は ~~$\check{f}_*$ または~~ f_* と合同となり矛盾. したがって, ds^2_f は effective symmetry をもたない.

したがって, $\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ が全て合同でなければ, C は symmetry をもたず, ds^2_f は effective symmetry をもたない. さらに, いずれの場合も, $N_f \leq 2$ が成り立つ.

命題 3.5. *m-type edge* $f \in \mathcal{G}^{\omega}_{m,**}(\mathbb{R}^2_J, \mathbb{R}^3, C)$ に対し，第一基本形式 ds^2_f が *effective symmetry* φ をもつための必要十分条件は，

$$f \circ \varphi = \begin{cases} \check{f}_* & (m \text{ が偶数, もしくは } m \text{ が奇数で } \varphi \text{ が向きを逆にする場合}) \\ f_* & (m \text{ が奇数で } \varphi \text{ が向きを保つ場合}) \end{cases}$$

となることにより与えられる．

命題 4.2. $f \in \mathcal{G}^{\omega}_{m,**}(\boldsymbol{R}^2_J, \boldsymbol{R}^3, C)$ とする． C が *orientation-reversing symmetry* T をもつとき，

$$Tf = \begin{cases} f_* & (T \text{ が正のとき}) \\ \check{f}_* & (T \text{ が負のとき}) \end{cases}$$

が成り立つ．

定理4 mが偶数

(ii) の ($\Longleftarrow$)

(ii) の ($\Longleftarrow$) (a1), (a2), (b) のいずれかを仮定して，$\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ は全て合同であることを示そう．命題 4.4 より，f と $\check{f}$ は合同であり，f_* と $\check{f}_*$ も合同である．

要証明である.

fと$\check{f}$は合同で. f_*と$\check{f}_*$が合同である. さらに、

- (a1) のとき，命題 4.2 より，f_* または $\check{f}_*$ のどちらかは f と合同である．
- (a2) のとき，命題 3.5 より，~~f_* また~~は $\check{f}_*$ のどちらかは f と合同である．
- (b) のとき，命題 3.5 または命題 4.2 より，f_* または $\check{f}_*$ ~~のどちらか~~は f と合同である．
  $\begin{cases} \det T = 1 \text{ ならば、} f_* \text{ と } \check{f}_* \text{ は } f \text{ と合同.} \\ \det T = -1 \text{ ならば、} \check{f}_* \text{ は } f \text{ と合同.} \end{cases}$

したがって，(a1), (a2), (b) のいずれかが成り立つならば，$\{f, \check{f}, f_*, \check{f}_*\}$ は全て合同である．