10/20.(金) 幾何セミナー.

(四元数対称空間に付随するR空間と全複素部分多様体)

・複素射影sp $\mathbb{H}P^n$ 内の第2基本形式平行な部分mfdの分類

9ページ

(塚田による)
1985

$$
\begin{tikzcd}
S^{4n+3} \arrow[d] \arrow[rr, "\pi\ (\text{ホップファイブレーション})"] & & \mathbb{H}P^n \\
\mathbb{C}P^{2n+1} \arrow[rr] & & \mathbb{H}P^n \\
\tilde{N}^n \arrow[u] \arrow[rr] & & N^{2n} \arrow[u, "\text{tot. cplx}"']
\end{tikzcd}
$$

記号のかくにん

$$
\begin{tikzcd}
\varphi^{-1}TM \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & TM \arrow[d, "\pi"'] \arrow[d, phantom, shift left=6, "(\nabla^M, g_M)"] \\
N^n \arrow[r, "\varphi"'] & M^m
\end{tikzcd}
$$

g_M に関するTM上のレビチビタ接続

$$\nabla^{\varphi}_X(d\varphi(Y)) = d\varphi(\nabla^N_X Y) + \alpha^N(X, Y)$$

$\varphi: N \to M$ の第2基本形式.

∇

・$\alpha^N \equiv 0 \iff \varphi$ は全測地的

・$H \equiv 0 \iff \varphi$ は極小はめ込み

しげん
四元数 $\mathbb{H} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$

- $i^2 = j^2 = k^2 = -1$
- $ij = -ji = k$ （〜〜$=j$、〜〜$=i$ の式も成立する）

Hopf ファイブレーション

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{H}^2 \ (\cong \mathbb{R}^8) & \\
 & \mathbb{S}^7(1) \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[dl, bend right, "\pi_j"'] \arrow[dr, bend left, "\pi_i"] \arrow[dd, "\pi"', "S^3"] & \\
\mathbb{C}_jP^3 \arrow[dr, "p_j"'] & & \mathbb{C}_iP^3 \arrow[dl, "p_i"] \\
 & \mathbb{S}^4(1) &
\end{tikzcd}
$$

$\mathbb{H}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{4(n+1)}$

これの高次元 ver は？

- ベロネーゼ極小曲面
- ベロネーゼ埋め込み

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{H}^{n+1} & \\
 & \mathbb{S}^{4n+3}(1) \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[dl, "\pi_j"', "S^1"] \arrow[dr, bend left, "\pi_i", "S^1"'] \arrow[dd, "\pi"', "S^3"] & \\
\mathbb{C}_jP^{2n+1} \arrow[dr, bend right, "p_j"', "S^2"] & & \mathbb{C}_iP^{2n+1} \arrow[dl, "p_i", "S^2"'] \\
 & \mathbb{H}P^n &
\end{tikzcd}
$$

$$\mathbb{H}^{n+1} := \left\{ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{bmatrix} \middle| x_i \in \mathbb{H} \quad (i = 1, 2, \cdots, n+1) \right\}$$

$$X\lambda := \begin{bmatrix} x_1\lambda \\ \vdots \\ x_{n+1}\lambda \end{bmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{H}$$

・内積：$\langle\langle x, y \rangle\rangle$

・$\mathbb{H}^{n+1}$の線形同型写像を考える.

~~Sp~~

四次数射影sp：$\mathbb{H}P^n := \left\{ W \subset \mathbb{H}^{n+1} \middle| 1次元\mathbb{H}上ベクトルsp. \right\}$

$Sp(W)$

$Sp(W)$

$Sp(W^\perp)$

$Sp(W^\perp)$

Def
~~M^{4n}~~ ;g.
四元数ケーラー多様体?

・四~~次~~元数ケーラー構造

$\Longleftrightarrow$ $P \in M$に対し近傍Uで定ぎされたQの局所枝場

$\{I, J, K\}$が存在 s.t

$$I^2 = J^2 = K^2 = -Id$$

$$IJ = -JI = K \quad (\sim\sim = I, \quad \sim\sim = J)$$

四元数ケーラー構造Qの局所標準基底

Def

なめらかはめ込み $\varphi: N \longrightarrow (M, g, Q)$ が全複素はめ込み

$\Longleftrightarrow$ N が開被覆 $N = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ を持ち、

切断 J^λ が $\varphi^{-1}Q$ に対して存在 s.t.

$$\begin{cases} (1)\ J^\lambda \circ J^\lambda = -\mathrm{Id} \\ (2)\ J^\lambda((d\varphi)_p \\ (3) \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} \varphi^{-1}Q \arrow[r] \arrow[d] & (Q, \nabla^Q) \subset \mathrm{END}(TM) \arrow[d] \\ U_\lambda \subset N \arrow[r, "\varphi"] & M. \end{tikzcd}$$

$$\mathbb{H}P^n \cong \frac{Sp(\mathbb{H}^{n+1})}{Sp(W) \times Sp(W^\perp)}$$

・$\mathbb{H}P^n$ の四元数ケーラー構造

$$Q := \bigsqcup_{W \in \mathbb{H}P^n} Q_W = \bigsqcup_{W \in \mathbb{H}P^n} sp(W)$$

・Prop

$\varphi: N \longrightarrow \mathbb{H}P^n$ が全複素はめ込みである

$\Longleftrightarrow$ $\varphi: N \to \mathbb{H}P^n$ の水平な複素正則リフト $\tilde{\varphi}: \tilde{N} \to Z(\mathbb{H}P^n)$ が存在。

2)

$$\begin{array}{ccc} \tilde{N} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \mathbb{C}P^{2n+1} \cong Z(\mathbb{H}P^n) \\ \downarrow & & \downarrow p_3 \;\; \mathbb{C}P^1 \\ N^{2l} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{H}P^n \end{array}$$

- 複素ルジャンドル部分mfd
- 極小 〃

・四元数対称sp (by J.A. Wolf)

Ricci曲率 $\neq 0$ の四元数ケーラー多様体で既約対称空間になるものが分類

Adjoint

Def R空間

$K/K_E = \mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}}(K)$に $C_{\mathfrak{p}}$

これを R空間 (S-表現の軌道)

R空間 $\overset{\times}{\Longrightarrow}$ 対称sp

計量的接続

Def

∇^c on TN が標準接続

$\Longleftrightarrow$ (1) $\nabla^c g = 0$

(2) $\nabla^c D^c = 0$

($D^c := \nabla - \nabla^c$)

・$\hat{N} := \pi^{-1}(N)$

$= \{ (p, x) \in N \times S^{4n+3}(1) \mid p \in N, \pi(x) \}$

$\hat{N} \subset S^{4n+3}$ は S表現のある特異軌道

4

Theorem (Olmos-Sánchez 1991)

(1) N は $\nabla^c \alpha = 0$ をみたす TN 上の標準接続 ∇^c をもつ

$\Updownarrow$

(2) N は主曲率一定

Theorem (C-H-O)

$\nabla^c D = 0$ をみたし、
レビチビタ接続 $\nabla^{\hat{N}}$ とは異なる。

$l=n$、接束 $T\hat{N}$ 上に標準接続 $\nabla^c = \nabla^{\hat{N}} - D$
が存在して、

$$(\nabla^c_X \alpha^{\hat{N}})(Y, Z) := (\nabla^c_{\mathcal{H}X} \alpha^{\hat{N}})(\mathcal{H}Y, \mathcal{H}Z)$$

$$= ((\nabla^*_{\pi_* X} \alpha^N)(\pi_* Y, \pi_* Z))^{\sim}$$

$(\forall X, Y, Z \in T_{\pi(u)} N)$

・Lemma

$\nabla^c = \nabla^{\hat{N}} - D$ は、以下をみたす

$\nabla^c g_{\hat{N}} = 0$ かつ $\nabla^c D = 0$

(よって、∇^c は $T\hat{N}$ 上のレビチビタとは異なる標準接続)

$\hookrightarrow$ $(G, K) = (G_2, SO(4))$

$\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{so}(4) \oplus \mathfrak{p}$

$\mathfrak{p} \cong \mathbb{H}^2$

20 ±12 17 ×

21 22 23 24

$$
\begin{tikzcd}
 & S^7(1) \arrow[rr, "\pi_i"] \arrow[d, "\pi_j"] \arrow[drr, "\pi"] & & \mathbb{C}_iP^3 \arrow[d, "p_i"'] \\
SO(4)/O(2) = \pi^{-1}(\mathbb{R}P^2) \arrow[ur] & \mathbb{C}_jP^3 \arrow[rr, "p_j"] & & S^4(1) \cong \mathbb{H}P^1 \\
 & \Sigma^3 = \pi_j^{-1}(\mathbb{C}P^1) \arrow[uu] \arrow[rr, "\mathbb{Z}_4"] & & L^3 = \pi_i(\Sigma)
\end{tikzcd}
$$

Def

R. Chiang ラグランジュ部分 mfd $L^3 \subset \mathbb{C}P^3$

$$\Longleftrightarrow L^3 = \left\{ [z_0 : z_1 : z_2 : z_3] \in \mathbb{C}P^3 \,\middle|\, \begin{array}{l} 3|z_0|^2 + |z_1|^2 - |z_2|^2 - 3|z_3|^2 = 0 \\ z_0\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 = 0 \end{array} \right.$$

~~minimal Lagran~~

・運動量写像

$$X \in \mathfrak{p},\quad \hat{\mu}(X) - \hat{\mu}(0) = -\frac{1}{2}[X, X_i]^{\mathfrak{p}'} = 0$$

$X \in \mathfrak{p}$ を適切に
えらぶと $= 0$
に移る