数理科学 幾何　レポート問題　　　　提出締切：2025 年 7 月 31 日（木）16 時

$\boxed{\text{問 1}}$ **（35 点）**弧長パラメータ表示された曲線 $\gamma : I \to S^2$ を考える．ただし，I は開区間で，S^2 は 2 次元球面

$$S^2 = \left\{ \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, p_1^2 + p_2^2 + p_3^3 = 1 \right\}$$

を表す．$\kappa(s)$ を $\gamma(s)$ の曲率関数とする．

S^3 の大球面

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, p_1^2 + p_2^2 + p_3^3 = 1 \right\}$$

に対して，写像 $\psi : S^2 \to E$ を，

$$\psi \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と定める．さらに，$\Gamma(s) = \psi \circ \gamma(s)$ とする．

$D = \{(s,t) \mid s \in I, -\pi/2 < t < \pi/2\}$ により定まる領域 D に対して，$f : D \to S^3$ を

$$f(s,t) := \Gamma(s)\cos t + \xi \sin t, \qquad \xi := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と定める．

(1) 曲面 $f : D \to S^3$ の第 1 基本形式 I，第 2 基本形式 II，外的曲率 K_e，断面曲率 K_I，平均曲率 H を求めよ．

(2) $\gamma : \mathbb{R} \to S^2$ を

$$\gamma(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(s\sqrt{2}) \\ \sin(s\sqrt{2}) \\ 1 \end{pmatrix}$$

とするとき，曲面 $f : D \to S^3$ の図を，立体射影を用いて描け．どのようなソフトウェアを用いてもかまわない．使用したソフトウェア名を明記すること．

$\boxed{\text{問}\,2}$ **（35 点）** 正の実数 c に対して $H^3(-c^2)$ を

$$H^3(-c^2) = \left\{ \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{L}^4 \;\middle|\; -p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = -\frac{1}{c^2},\ p_0 > 0 \right\}$$

と定める．$f : D \to H^3(-c^2)$ を等温座標系によりパラメータ表示された曲面とする．すなわち，

$$E = \langle f_u, f_u \rangle, \qquad F = \langle f_u, f_v \rangle, \qquad G = \langle f_v, f_v \rangle$$

と定めるとき，$E = G$ かつ $F = 0$ を満たす．$\Delta(\log E) = (\log E)_{uu} + (\log E)_{vv}$ とするとき，

$$K_I = -\frac{\Delta(\log E)}{2E}$$

とおく．ν を

$$\langle \nu, f \rangle = \langle \nu, f_u \rangle = \langle \nu, f_v \rangle = 0, \qquad \langle \nu, \nu \rangle = 1$$

をみたす単位法ベクトル場とする．

$$L = \langle f_{uu}, \nu \rangle, \qquad M = \langle f_{uv}, \nu \rangle, \qquad N = \langle f_{vv}, \nu \rangle$$

を用いて

$$K_e = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \qquad H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}$$

と定める．次の問いに答えよ．

(1) 次式

$$\begin{aligned} f_{uu} &= A\, f + \Gamma_{11}^1\, f_u + \Gamma_{11}^2\, f_v + X\, \nu \\ f_{uv} &= B\, f + \Gamma_{12}^1\, f_u + \Gamma_{12}^2\, f_v + Y\, \nu \\ f_{vv} &= C\, f + \Gamma_{22}^1\, f_u + \Gamma_{22}^2\, f_v + Z\, \nu \end{aligned}$$

をみたす D 上の関数 A, B, C, X, Y, Z, Γ_{11}^1, Γ_{11}^2, Γ_{12}^1, Γ_{12}^2, Γ_{22}^1, Γ_{22}^2 を E, L, M, N を用いて表せ．

(2) 次式

$$\begin{aligned} \nu_u &= -A_1^1\, f_u - A_1^2\, f_v \\ \nu_v &= -A_2^1\, f_u - A_2^2\, f_v \end{aligned}$$

をみたす D 上の関数 A_1^1, A_1^2, A_2^1, A_2^2, を E, L, M, N を用いて表せ．

(3) $\mathcal{F} = (f, f_u, f_v, \nu)$ と定める．行列値関数 $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ を

$$\mathcal{F}_u = \mathcal{F}\mathcal{U}, \qquad \mathcal{F}_v = \mathcal{F}\mathcal{V} \tag{GW}$$

と定める．$\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ を E, L, M, N を用いて表せ．

(4) 微分方程式 (GW) の可積分条件 $\mathcal{U}_v - \mathcal{V}_u = \mathcal{U}\mathcal{V} - \mathcal{V}\mathcal{U}$ は,

$$L_v - M_u = L\Gamma_{12}^1 + M(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - N\Gamma_{11}^2 \tag{Codazzi-1}$$

$$M_v - N_u = L\Gamma_{22}^1 + M(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - N\Gamma_{12}^2 \tag{Codazzi-2}$$

$$K_I = K_e - c^2 \tag{Gauss-H^3}$$

と同値であることを証明せよ.

(5) $z = u + iv$ とし，$q : D \to \mathbb{C}$ を

$$q = \frac{L - N - 2iM}{4}$$

と定める．このとき，(Codazzi-1), (Codazzi-2), (Gauss-H^3) は

$$(\log E)_{z\bar{z}} = -\frac{E}{2}(H^2 - c^2) + \frac{2}{E}|q|^2, \qquad 2q_{\bar{z}} = EH_z$$

と同値であることを証明せよ.

$\boxed{\text{問 3}}$ **（15 点）** D を $\mathbb{C}$ の単連結領域，$\omega(z), \theta(z)$ を D 上の正則関数で,

$$|\omega(z)| \neq |\theta(z)| \qquad (\forall z \in D)$$

をみたすものとする．$z_0 \in D$ をひとつ固定する．$F : D \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ を

$$F'(z) = F(z)\begin{pmatrix} 0 & \omega(z) \\ \theta(z) & 0 \end{pmatrix}, \qquad F(z_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

をみたすものとする．このとき，$f : D \to H^3$ を

$$f(z) = F(z)\,(F(z))^*$$

と定める．曲面 $f : D \to H^3$ の第 1 基本形式 I，第 2 基本形式 II，外的曲率 K_e，断面曲率 K_I，平均曲率 H を求めよ.

$\boxed{\text{問 4}}$ **（15 点）** H^3 の曲面が全測地的であるとは，$L = M = N = 0$ となるときをいう.

$$\left\{ \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{L}^4 \;\middle|\; -p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 = -1,\ p_0 > 0 \right\}$$

で定まる曲面は全測地的である．全測地的曲面は $K_I = -1$ をみたす．H^3 の $K_I = -1$ である曲面で，全測地的でない例を挙げよ．その例が $K_I = -1$ をみたすことも示せ.