Rem 4.4 ((3.4)-CE 版)

$C(u)$: $^{\exists}T$: orientation-reversing symmetry.

$\therefore\ C(-u) = T\,C(u) \qquad (u \in [-l, l])$

このとき $\kappa(-u) = \kappa(u)$

$\tau(-u) = \sigma\,\tau(u) \qquad (\sigma = \det T \in \{\pm 1\})$

仮定 $\begin{cases} A_0(-u,t) = A_1(u,t) \\ B_0(-u,t) = -\sigma B_1(u,t) \\ \theta_0(-u) = -\sigma\,\theta_1(u) \end{cases}$ $\qquad C_0(u) = C_1(u) = C(u)$

$f_i = C + (A_i, B_i)\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ b \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow\ f_1(u,t) = T \circ f_0(-u,t) \qquad \psi(u,t) = (-u,t)$

$ds^2_{f_1} = \psi^* ds^2_{f_0}$ (つまり f_0, f_1 は isometric)

$\therefore\ \exists\,\varphi$: diffeo s.t. $\boxed{f_2 = f_1 \circ \varphi \ \text{(後日まとめ直す)}}$

$ds^2_{f_2} = ds^2_{f_0}, \quad \varphi^* ds^2_{f_0} = ds^2_{f_0}$

$\therefore$ f_0, f_2 は $\boxed{\text{同じ第一基本形式をもつ}}$

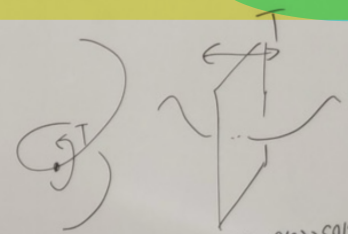
φ : effective symmetry なので. f_0, f_2 の特異曲線の像は C に入り, $\boxed{C\text{の向きと同じ.}}$

φ : Uの向きを保つとき

$\theta_2 = \theta_1 = \begin{cases} -\theta_0 & (\sigma = 1) \Rightarrow f_2 = \check{f}_0 \\ \theta_0 & (\sigma = -1) \Rightarrow f_2 = f_0 \end{cases}$

φ : Uの向きを逆にするとき

$\theta_2 = -\theta_1 = \begin{cases} \theta_0 & (\sigma = 1) \Rightarrow f_2 = f_0 \\ -\theta_0 & (\sigma = -1) \Rightarrow f_2 = \check{f}_0 \end{cases}$



$T \in SO(3)$ $\qquad T \in O(3) \setminus SO(3)$

HW 次回この例を作り. 上が成立する例を探す.

- $\sigma = 1 \ (T \in SO(3))$ の場合 (らせん)

$\mathbb{C}_0(u) = \left(a\cos\frac{u}{c} - a,\ a\sin\frac{u}{c},\ \frac{b}{c}u\right)$ $(c := \sqrt{a^2+b^2})$ を考える.

$\|\mathbb{C}_0'(u)\| = 1$ より、弧長パラメータ表示.

$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ とすると、

- $\det(T) = 1$. ($\sigma = 1$ をみたす)
- $T\mathbb{C}_0(u) = \left(a\cos\frac{u}{c} - a,\ -a\sin\frac{u}{c},\ -\frac{b}{c}u\right)$

$= \left(a\cos\left(\frac{-u}{c}\right) - a,\ a\sin\left(\frac{-u}{c}\right),\ \frac{b}{c}(-u)\right)$

$= \mathbb{C}_0(-u)$ … ⓪

→ T は orientation - reversing symmetry である.
(non - trivial)

$\mathbb{C}_1(u) := T\mathbb{C}_0(-u) = \mathbb{C}_0(u)$ とおく.

また、Remark 4.4 の前半より、

$\mathbb{n}_1(u) = T\mathbb{n}_0(-u)$、

$\mathbb{b}_1(u) = -\sigma T\mathbb{b}_0(-u) = -T\mathbb{b}_0(-u)$

である. 一方、$\mathbb{C}_0(u) = \left(a\cos\frac{u}{c} - a,\ a\sin\frac{u}{c},\ \frac{b}{c}u\right)$ から具体的に $\mathbb{e}_0(u)$、$\mathbb{n}_0(u)$、$\mathbb{b}_0(u)$ を計算すると、

$\mathbb{e}_0(u) = \mathbb{C}_0'(u) = \left(-\frac{a}{c}\sin\frac{u}{c},\ \frac{a}{c}\cos\frac{u}{c},\ \frac{b}{c}\right)$ … ① $\left(\mathbb{e}_0(0) = \left(0,\ \frac{a}{c},\ \frac{b}{c}\right)\right)$

$\mathbb{n}_0(u) = \dfrac{\mathbb{e}_0'(u)}{\kappa_0(u)}$

$= \dfrac{\mathbb{e}_0'(u)}{\|\mathbb{e}_0'(u)\|} = \dfrac{a^2+b^2}{a}\left(-\frac{a}{c^2}\cos\frac{u}{c},\ -\frac{a}{c^2}\sin\frac{u}{c},\ 0\right)$

$= \left(-\cos\frac{u}{c},\ -\sin\frac{u}{c},\ 0\right)$ … ② $\left(\mathbb{n}_0(0) = (-1, 0, 0)\right)$

$\mathbb{b}_0(u) = \mathbb{e}_0(u) \times \mathbb{n}_0(u)$

$= \left(\frac{b}{c}\sin\frac{u}{c},\ -\frac{b}{c}\cos\frac{u}{c},\ \frac{a}{c}\right)$ … ③ $\left(\mathbb{b}_0(0) = \left(0,\ -\frac{b}{c},\ \frac{a}{c}\right)\right)$

である. よって、$T\mathbb{n}_0(-u)$ と $T\mathbb{b}_0(-u)$ は それぞれ

$T\mathbb{n}_0(-u) \overset{②}{=} \left(-\cos\frac{-u}{c},\ \sin\frac{-u}{c},\ 0\right)$

$= \mathbb{n}_0(u)$ … ④

$$T\boldsymbol{b}_0(-u) \overset{③}{=} \left(\frac{b}{c}\sin\frac{-u}{c},\ \frac{b}{c}\cos\frac{-u}{c},\ -\frac{a}{c}\right)$$
$$= \left(-\frac{b}{c}\sin\frac{u}{c},\ \frac{b}{c}\cos\frac{u}{c},\ -\frac{a}{c}\right)$$
$$= -\boldsymbol{b}_0(u) \quad \cdots ⑤$$

である。Remark 4.4より、$\underbrace{\boldsymbol{n}_1(u) = T\boldsymbol{n}_0(-u) = \boldsymbol{n}_0(u)}_{⑥}$、$\underbrace{\boldsymbol{b}_1(u) = -T\boldsymbol{b}_0(-u) = \boldsymbol{b}_0(u)}_{⑦}$ が成り立つ。

A_0、A_1、B_0、B_1、θ_0、θ_1 をそれぞれ → A, B が特異点を持っていない

$$\cancel{A_0(u,t) = t,\quad A_1(u,t) = A_0(-u,t) = t,}$$
$$\cancel{B_0(u,t) = 0,\quad B_1(u,t) = -\sigma B_0(-u,t) = 0,}$$
$$\cancel{\theta_0(u) = \frac{\pi}{4},\quad \theta_1(u) = -\sigma\theta_0(-u) = -\frac{\pi}{4}}$$

$\boxed{A_0(u,t) = t^3 \ (= A_1),\quad B_0(u,t) = t^4 \ (= B_1),\quad \theta_0(u) = \frac{\pi}{4},\quad \theta_1(u) = -\frac{\pi}{4}}$

とする。$f_i(u,t) = \boldsymbol{c}_i(u) + (A_i(u,t), B_i(u,t))\begin{pmatrix}\cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{n}_i(u) \\ \boldsymbol{b}_i(u)\end{pmatrix}$ にそれぞれ代入すると、

$$f_0(u,t) = \boldsymbol{c}_0(u) + \boldsymbol{n}_0(u)\left(A_0\cos\theta_0 - \overset{=0}{B_0}\sin\theta_0\right) + \boldsymbol{b}_0\left(-A_0\sin\theta_0 + \overset{=0}{B_0}\cos\theta_0\right)$$
$$= \boldsymbol{c}_0(u) + t\left(\cos\frac{\pi}{4}\boldsymbol{n}_0 - \sin\frac{\pi}{4}\boldsymbol{b}_0\right)$$
$$= \boldsymbol{c}_0(u) + \frac{\sqrt{2}}{2}t(\boldsymbol{n}_0 - \boldsymbol{b}_0) \quad \cdots ⑧$$

$$f_1(u,t) = \boldsymbol{c}_1(u) + \boldsymbol{n}_1\left(A_1\cos\theta_1 - \overset{=0}{B_1}\sin\theta_1\right) + \boldsymbol{b}_1\left(-A_1\sin\theta_1 + \overset{=0}{B_1}\cos\theta_1\right)$$
$$= \boldsymbol{c}_1(u) + t\left(\cos\frac{-\pi}{4}\boldsymbol{n}_1 + \sin\frac{-\pi}{4}\boldsymbol{b}_1\right)$$
$$= \boldsymbol{c}_1(u) + \frac{\sqrt{2}}{2}t(\boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{b}_1) \quad \cdots ⑨$$

$(f_0(u,t) \neq f_1(u,t))$

$$Tf_0(u,t) \overset{⑧より}{=} T\boldsymbol{c}_0(u) + \frac{\sqrt{2}}{2}t\left(T\boldsymbol{n}_0(u) - T\boldsymbol{b}_0(u)\right)$$

⓪、⑥、⑦ より

$$= \boldsymbol{c}_0(-u) + \frac{\sqrt{2}}{2}t\left(\boldsymbol{n}_1(-u) + \boldsymbol{b}_1(-u)\right)$$
$$= \boldsymbol{c}_1(-u) + \quad //$$

⑨より

$$= f_1(-u,t).$$

(Remark 4.4 の等式が成り立つ)

$$Tf_0(u,t) = f_1 \circ \psi(u,t) \qquad (\psi(u,t) = (-u,t))$$

とする. $A(u,t)$, $B(u,t)$ を

$$A(u,t)=\int_0^t v^{m-1}\cos\psi(u,v)\,dv,\quad B(u,t)=\int_0^t v^{m-1}\sin\psi(u,v)\,dv\quad\left(\psi(u,t)=\int_0^t \mu(u,v)\,dv\right)$$

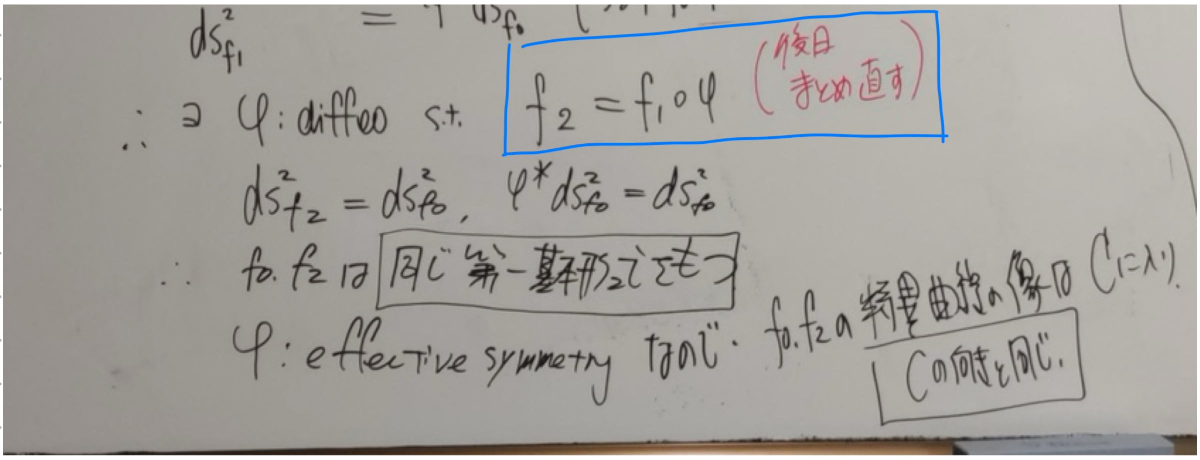
$$A(u.t)=\int_0^t v^2\cos\psi(u.v)\,dv.\qquad B(u.t)=\int_0^t v^2\sin\psi(u.v)\,dv$$

$m=3$

$$\left(\psi(u.t):=\int_0^t \mu(u.v)\,dv\right)$$

$A_0=A$

$B_0=B$



$$f_2=f_1\circ\varphi$$

$$=\left(c_1(u)+\frac{\sqrt2}{2}t(n_1+b_1)\right)\circ\varphi$$

$A=t^3$. $B=t^4$. $\theta=\frac{\pi}{4}$ 代入.

$$f_0(u.t)=c_0(u)+n_0(u)\left(\underset{=t^3}{A_0}\cos\theta_0-\underset{=t^4}{B_0}\sin\theta_0\right)+b_0\left(-\underset{=t^3}{A_0}\sin\theta_0+\underset{=t^4}{B_0}\cos\theta_0\right)$$

$$=c_0(u)+t^3n_0(u)\left(\cos\frac{\pi}{4}-t\sin\frac{\pi}{4}\right)+t^3b_0(u)\left(-\sin\frac{\pi}{4}+t\cos\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=c_0(u)+\frac{\sqrt2}{2}t^3n_0(u)(1-t)+\frac{\sqrt2}{2}t^3b_0(u)(t-1)$$

$$f_0(u.t)=c_0(u)+\frac{\sqrt2}{2}t^3(1-t)\,(n_0(u)-b_0(u))$$

$$f_0\circ\underset{=(\tilde u.\tilde t)}{\varphi(u.t)}=c_0(\tilde u)+\frac{\sqrt2}{2}(\tilde t)^3n_0(\tilde u)(1-\tilde t)+\frac{\sqrt2}{2}(\tilde t)^3b_0(\tilde u)(\tilde t-1)$$

$A_1 = t^3$, $B_1 = t^4$, $\theta_1 = -\frac{\pi}{4}$ 代入 $(\sin\theta_1 = -\sin\theta_0,\ \cos\theta_1 = \cos\theta_0)$

$$\begin{aligned} f_1(u,t) &= \mathbb{C}_1(u) + t^3 n_1(u)\left(\cos\frac{\pi}{4} + t\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ &\quad + t^3 b_1(u)\left(\sin\frac{\pi}{4} + t\cos\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \mathbb{C}_1(u) + \frac{\sqrt{2}}{2}t^3 n_1(u)(1+t) + \frac{\sqrt{2}}{2}t^3 b_1(u)(1+t) \\ &= \mathbb{C}_1(u) + \frac{\sqrt{2}}{2}t^3(1+t)\left(n_1(u) + b_1(u)\right) \end{aligned}$$

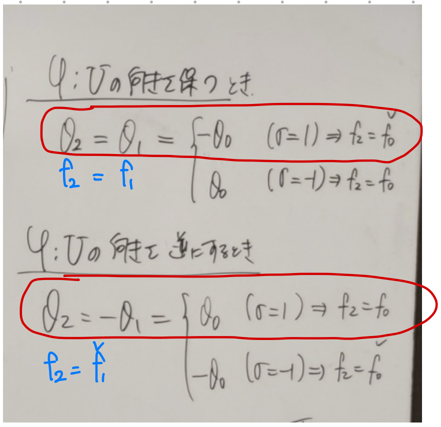
$$T n_0(-u) = n_1(u) = n_0(u)$$
$$-\sigma T b_0(-u) = b_1(u) = b_0(u)$$
$$T \mathbb{C}_0(-u) = \mathbb{C}_1(u) = \mathbb{C}_0(u)$$

$$f_2(u,t) = f_1 \circ \underbrace{\varphi(u,t)}_{=(\tilde{u},\tilde{t})} = \underbrace{\mathbb{C}_1(\tilde{u})}_{=T\mathbb{C}_0(-\tilde{u})} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\tilde{t})^3(1+\tilde{t})\left(\underbrace{n_1(\tilde{u})}_{=Tn_0(-\tilde{u})} + \underbrace{b_1(\tilde{u})}_{=-Tb_0(-\tilde{u})}\right)$$

$$\overset{\times}{=} T f_0(-\tilde{u}, \tilde{t})$$

$f_2(u,t) := f_1 \circ \underline{\varphi(u,t)}$ (φ: diffeo)

$\cancel{(u,t)}$
$(u,-t)$
$(-u,t)$
$(-u,-t)$


φ: Uの向きを保つとき

$$\theta_2 = \theta_1 = \begin{cases} -\theta_0 & (\sigma=1) \Rightarrow f_2 = f_0 \\ \theta_0 & (\sigma=-1) \Rightarrow f_2 = f_0 \end{cases}$$

$f_2 = f_1$

φ: Uの向きを逆にするとき

$$\theta_2 = -\theta_1 = \begin{cases} \theta_0 & (\sigma=1) \Rightarrow f_2 = f_0 \\ -\theta_0 & (\sigma=-1) \Rightarrow f_2 = f_0 \end{cases}$$

$f_2 = \cancel{f_1}$

$f_2(u,t) := f_1 \circ \varphi(u,t)$ (φ: diffeo) とすると、$\theta_2(u)$ と $\theta_1(u)$ の関係は、

- φ が曲線の向きを保つ ($\varphi(u,t) = (u,-t)$)

$\sigma = -1$ ($T \in O(3) \setminus SO(3)$) の場合（平面曲線）

5せんでは、$\det T = -1$ となるような symmetry T は存在しない

$\mathbb{C}_0(u) = (\sin u,\ \cos u - 1,\ 0)$ を考える.

$\|\mathbb{C}_0'(u)\| = 1$ より、弧長パラメータ表示.

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ とすると、

- $\det(T) = -1$
- $$\begin{aligned} T\mathbb{C}_0(u) &= (-\sin u,\ \cos u - 1,\ 0) \\ &= (\sin(-u),\ \cos(-u) - 1,\ 0) \\ &= \mathbb{C}_0(-u) \end{aligned}$$

→ T は orientation - reversing symmetry である.
(non - trivial)

$\mathbb{C}_1(u) := T\mathbb{C}_0(-u) = \mathbb{C}_0(u)$ とおく.

$\mathbb{C}_0(u) = (\sin u,\ \cos u - 1,\ 0)$ から具体的に $\mathbb{e}_0(u)$、$\mathbb{n}_0(u)$、$\mathbb{b}_0(u)$ を計算すると、

$$\mathbb{e}_0(u) = (\cos u,\ -\sin u,\ 0) \cdots ⑩ \qquad (\mathbb{e}_0(0) = (1, 0, 0))$$

$$\begin{aligned} \mathbb{n}_0(u) &= \frac{\mathbb{e}_0'(u)}{K_0(u)} \\ &= \frac{\mathbb{e}_0'(u)}{\|\mathbb{e}_0'(u)\|} \overset{⑩より}{=} (-\sin u,\ -\cos u,\ 0) \cdots ⑪ \qquad (\mathbb{n}_0(0) = (0, -1, 0)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{b}_0(u) &= \mathbb{e}_0(u) \times \mathbb{n}_0(u) \\ &= (0, 0, -1) \cdots ⑫ \end{aligned}$$

である. よって、$T\mathbb{n}_0(-u)$ と $T\mathbb{b}_0(-u)$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} T\mathbb{n}_0(-u) &\overset{⑪より}{=} (\sin(-u),\ -\cos(-u),\ 0) \\ &= \mathbb{n}_0(u) \cdots ⑬ \end{aligned}$$

$$T\mathbb{b}_0(-u) = (0, 0, -1) = \mathbb{b}_0(u) \cdots ⑭$$

である. Remark 4.4 より、$\underbrace{\mathbb{n}_1(u) = T\mathbb{n}_0(-u) \overset{⑬より}{=} \mathbb{n}_0(u)}_{⑮}$、 $\underbrace{\mathbb{b}_1(u) = -\sigma T\mathbb{b}_0(-u) \overset{\sigma=-1,\ ⑭より}{=} \mathbb{b}_0(u)}_{⑯}$ が成り立つ.

A_0、A_1、B_0、B_1、θ_0、θ_1 をそれぞれ

$$A_0(u,t) = t、\quad A_1(u,t) = A_0(-u,t) = t.$$

$$B_0(u,t) = 0、\quad B_1(u,t) = -\sigma B_0(-u,t) = 0、$$

$$\theta_0(u) = \frac{\pi}{4}、\quad \theta_1(u) = -\overset{-1}{\sigma}\theta_0(-u) = \frac{\pi}{4}$$

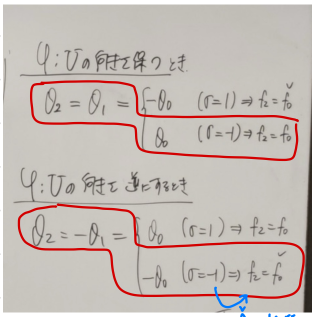
とする. $f_i(u,t) = \mathbb{C}_i(u) + (A_i(u,t), B_i(u,t))\begin{pmatrix}\cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_i(u) \\ b_i(u)\end{pmatrix}$ にそれぞれ代入すると、

$$\begin{aligned}
f_0(u,t) &= \mathbb{C}_0(u) + n_0(u)\left(A_0\cos\theta_0 - \overset{=0}{B_0}\sin\theta_0\right) \\
&\qquad + b_0(u)\left(-A_0\sin\theta_0 + \overset{=0}{B_0}\cos\theta_0\right) \\
&= \mathbb{C}_0(u) + t\left(\cos\frac{\pi}{4}n_0 - \sin\frac{\pi}{4}b_0\right) \\
&= \mathbb{C}_0(u) + \frac{\sqrt{2}}{2}t\left(n_0(u) - b_0(u)\right) \quad \cdots ⑰
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_1(u,t) &= \mathbb{C}_1(u) + n_1(u)\left(A_1\cos\theta_1 - \overset{=0}{B_1}\sin\theta_1\right) \\
&\qquad + b_1(u)\left(-A_1\sin\theta_1 + \overset{=0}{B_1}\cos\theta_1\right) \\
&= \mathbb{C}_1(u) + t\left(\cos\frac{\pi}{4}n_1 - \sin\frac{\pi}{4}b_1\right) \\
&= \mathbb{C}_1(u) + \frac{\sqrt{2}}{2}t\left(n_1(u) - b_1(u)\right) \\
&\overset{⑮、⑯より}{=} \mathbb{C}_0(u) + \frac{\sqrt{2}}{2}t\left(n_0(u) - b_0(u)\right) \\
&= f_0(u,t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Tf_0(u,t) &\overset{⑰より}{=} T\mathbb{C}_0(u) + \frac{\sqrt{2}}{2}t\left(Tn_0(u) - Tb_0(u)\right) \\
&\overset{⑮、⑯より}{=} \mathbb{C}_1(-u) + \frac{\sqrt{2}}{2}t\left(n_1(-u) - b_1(-u)\right) \\
&= f_1(-u,t)
\end{aligned}$$

(Remark 4.4 の等式が成り立つ)


φ : Uの向きを保つとき

$\theta_2 = \theta_1 = \begin{cases} -\theta_0 & (\sigma=1) \Rightarrow f_2 = \check{f}_0 \\ \theta_0 & (\sigma=-1) \Rightarrow f_2 = f_0 \end{cases}$

φ : Uの向きを逆にするとき

$\theta_2 = -\theta_1 = \begin{cases} \theta_0 & (\sigma=1) \Rightarrow f_2 = f_0 \\ -\theta_0 & (\sigma=-1) \Rightarrow f_2 = \check{f}_0 \end{cases}$

$\check{f}$ の性質

$f_2(u,t) := f_1 \circ \varphi(u,t)$ (φ: diffeo) とすると、$\theta_2(u)$ と $\theta_1(u)$ $(= \theta_0(u))$ の関係は、

- φ がカスプ角の符号を保つ $\Longrightarrow \theta_2(u) = \theta_1(u)$
  ($\varphi(u,t) = (u,t)$ または $(-u,-t)$)
- φ がカスプ角の符号を反転させる $\Longrightarrow \theta_2(u) = -\theta_1(u)$

$$d\varphi_{(u,t)} = \frac{\partial(\tilde{u},\tilde{t})}{\partial(u,t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial u} & \frac{\partial\tilde{u}}{\partial t} \\ \frac{\partial\tilde{t}}{\partial u} & \frac{\partial\tilde{t}}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ または } \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

・平面曲線ではない、$\sigma=-1$ のパターン　$\left(T=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)$

$\mathbb{c}_0(u)=\left(\sin(\sin u),\ \cos(\sin u)-1,\ 1-\cos u\right)$ が考えられる

・$\mathbb{c}_0(0)=(0,0,0)$.　$T\mathbb{c}_0(-u)=\left(-\sin(\sin-u),\ \cos(\sin(-u))-1,\ 1-\cos(-u)\right)=\mathbb{c}_0(u)$ ok

・$\mathbb{c}_0'(u)=\left(\cos u\cdot\cos(\sin u),\ -\cos u\cdot\sin(\sin u),\ \sin u\right)$ より、　$\left(\mathbb{e}_0(0)=(1,0,0)\right)$

$$\|\mathbb{c}_0'(u)\|=\sqrt{\cos^2u\cos^2(\sin u)+\cos^2u\sin^2(\sin u)+\sin^2u}$$

$$=\sqrt{\cos^2u\left(\cos^2(\sin u)+\sin^2(\sin u)\right)+\sin^2u}=1.$$ ok　$\mathbb{c}(u)$ は弧長パラメータ表示.

・$$\mathbb{n}_0(u)=\frac{\mathbb{e}_0'(u)}{\|\mathbb{e}_0'(u)\|}\quad \left(=\mathbb{c}_0''(u)\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\sin^4u-2\sin^2u+2}}\Big(-\sin u\cos(\sin u)-\cos^2u\sin(\sin u),\ \sin u\sin(\sin u)-\cos^2u\cos(\sin u),\ \cos u\Big).\ \cdots ☆$$

$\mathbb{c}_0(u)$、$\mathbb{n}_0(u)$ 代入

・$$\mathbb{b}_0(u)=\mathbb{e}_0(u)\times\mathbb{n}_0(u).$$　$\left(\mathbb{n}_0(0)=\frac{1}{\sqrt2}(0,-1,1)\right)$

$$=\frac{1}{\sqrt{\sin^4u-2\sin^2u+2}}\Big(-\sin(\sin u)+\sin u\cos^2u\cos(\sin u),\ -\cos(\sin u)-\sin u\cos^2u\sin(\sin u),\ -\cos^3u\Big)\ \cdots ☆'$$

$\left(\mathbb{b}_0(0)=\frac{1}{\sqrt2}(0,-1,-1)\right)$

・$\mathbb{c}_1(u)=\mathbb{c}_0(u)$ であったため、両辺を u で微分すると $\mathbb{e}_1(u)=\mathbb{e}_0(u)$.　$\therefore\ \kappa_1(u)=\kappa_0(u)$.

$\mathbb{n}_1(u)$ を計算すると、

☆より

$$\mathbb{n}_1(u)=T\mathbb{n}_0(-u)=\Big(\sin(-u)\cos(\sin(-u))+\cos^2(-u)\sin(\sin(-u)),\ \sin(-u)\sin(\sin(-u))-\cos^2(-u)\cos(\sin(-u)),\ \cos(-u)\Big)$$

$$=\Big(-\sin u\cos(\sin u)-\cos^2u\sin(\sin u),\ \sin(u)\sin(\sin u)-\cos^2u\cos(\sin u),\ \cos u\Big)$$

$$=\mathbb{n}_0(u).$$ ok

・$\mathbb{b}_1(u)=-\sigma T\mathbb{b}_0(-u)$ より、具体的に表示すると　($\sigma=-1$)

☆'より

$$\mathbb{b}_1(u)=T\mathbb{b}_0(-u)=\Big(\sin(\sin(-u))-\sin(-u)\cos^2(-u)\cos(\sin(-u)),\ -\cos(\sin(-u))-\sin(-u)\cos^2(-u)\sin(\sin(-u)),\ -\cos^3(-u)\Big)$$

$$=\Big(-\sin(\sin u)+\sin u\cos^2u\cos(\sin u),$$

$$-\cos(\sin u) - \sin u \cos^2 u \sin(\sin u),\ -\cos^3 u\ )$$

$$= \mathbb{b}_0(u).$$ ok

・A_0、A_1、B_0、B_1、θ_0、θ_1 を それぞれ

$$A_0(u,t) = ut, \quad A_1(u,t) = A_0(-u,t) = -ut.$$

$$B_0(u,t) = 0, \quad B_1(u,t) = -\sigma B_0(-u,t) = 0.$$

$$\theta_0(u) = \frac{\pi}{4}, \quad \theta_1(u) = -\overset{-1}{\sigma}\theta_0(-u) = \frac{\pi}{4}.$$

とする. $f_i(u,t) = \mathbb{C}_i(u) + (A_i(u,t), B_i(u,t))\begin{pmatrix}\cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbb{n}_i(u) \\ \mathbb{b}_i(u)\end{pmatrix}$ に それぞれ代入すると、

$$f_0(u,t) = \mathbb{C}_0(u) + \mathbb{n}_0(A_0\cos\theta_0 - B_0\sin\theta_0) + \mathbb{b}_0(-A_0\sin\theta_0 + B_0\cos\theta_0)$$

$$= \mathbb{C}_0(u) + ut\left(\cos\frac{\pi}{4}\mathbb{n}_0 - \sin\frac{\pi}{4}\mathbb{b}_0\right)$$

$$= \mathbb{C}_0(u) + \frac{\sqrt{2}}{2}ut\left(\mathbb{n}_0(u) - \mathbb{b}_0(u)\right)$$

$\boxed{\text{Prop 5-1}}$ (3.4)-CE ver.

次の (a) と (b) は同値である.

(a) f と $\check{f}$ が合同である

(b) 次の (i), (ii), (iii), (iv) のいずれかを満たす

(i) f の特異曲線の像 C が平面曲線である.

(ii) ds_f^2 が non-effective symmetry を持つ.

(iii) $\begin{cases} C: \text{orientation-reversing symmetry を持ち、} \\ ds_f^2: \text{effective symmetry を持つ.} \end{cases}$

さらにこの時、φ: orientation-preserving $\Rightarrow T \in SO(3)$.

(iv) $\begin{cases} C: \text{orientation-preserving symmetry を持ち、} \\ ds_f^2: \text{effective symmetry を持つ.} \end{cases}$ $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$

さらにこの時、φ: orientation-reversing $\Rightarrow T \in O(3) \setminus SO(3)$.

場合分けの方法を、φ が effective symmetry or NOT ? で考える.

Proof

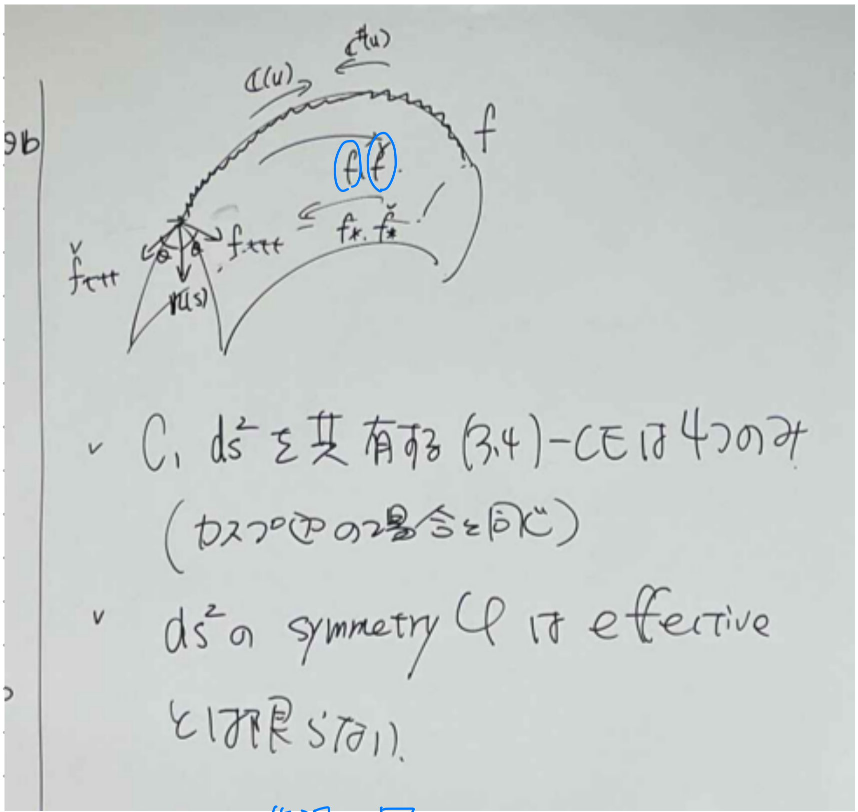
($\Longrightarrow$ を示す)

仮定より、$\exists T \in O(3)$、$\exists \varphi$: diffeo s.t. $\check{f} = T \circ f \circ \varphi$ である. …… ☆

① $T = Id$ の場合

☆ は $\check{f} = f \circ \varphi$ となる. ここで $\varphi = Id$ と仮定すると、$\check{f} = f$ となる. しかし、
Theorem Ⅲ ((3.4)-CE 版) の証明と同様に、カスプ角 $\theta = 0$ となるため、定義域 $(0 < |\theta| < \pi)$ と矛盾する.

$\therefore \varphi \neq Id$ である. φ は曲線の向きを保存するため、φ は non-effective symmetry である.
((ii) が成立する)



先週の図

② $T \neq Id$ かつ T が orientation-preserving symmetry の場合

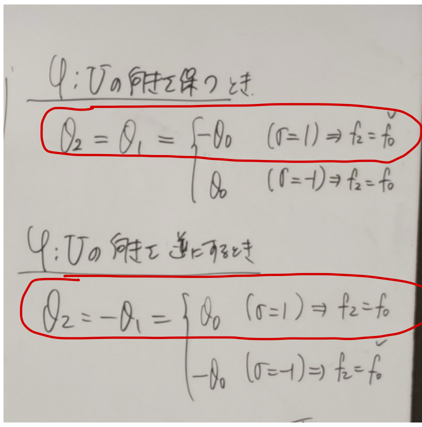
平面曲線に関する補題
($T \in O(3)$ が ori-preserving symmetry である $\Longleftrightarrow$ C は平面曲線で、T はその平面に関する折り返し)
より、(b)(i) が従う.

③ $T \neq Id$ かつ T が ori-reversing symmetry の場合

(3-1) $\sigma := \det T = 1$ のとき

T は ori-reversing. $f_2 := f_1 \circ \varphi$ としており、f_1 と f_2 は第一基本形式が等しい.

$f_2 = f_0$ または $f_2 = \check{f}_0$


φ : Uの向きを保つとき

$\theta_2 = \theta_1 = \begin{cases} -\theta_0 & (\sigma = 1) \Rightarrow f_2 = \check{f}_0 \\ \theta_0 & (\sigma = -1) \Rightarrow f_2 = f_0 \end{cases}$

φ : Uの向きを逆にするとき

$\theta_2 = -\theta_1 = \begin{cases} \theta_0 & (\sigma = 1) \Rightarrow f_2 = f_0 \\ -\theta_0 & (\sigma = -1) \Rightarrow f_2 = \check{f}_0 \end{cases}$

φ が U の向きを保つとき、$f_2 = \check{f}_0$ であるため、

$\exists \psi$: diffeo s.t $f_2 = f_0 \circ \psi$.

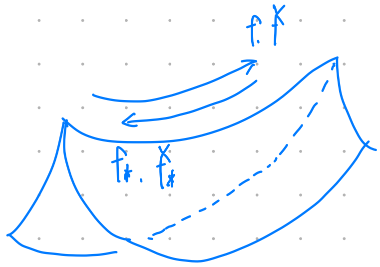
effective symmetry ではない

φ が symmetry

$\to \varphi \neq \mathrm{Id}$

(3-2) $\sigma (= \det T) = -1$ のとき

T は ori-reversing symmetry



($\Leftarrow$ を示す)

① C が平面曲線の場合

f が C^ω であることから、Remark 5.2 より $\exists S$: 平面に関する折り返し s.t. $\check{f} = S \circ f$.

これは、合同の同値表現 $\check{f} = T \circ f \circ \varphi$ を、$T = S$、$\varphi = Id$ としたものである.

② ds_f^2 が non-effective symmetry φ を持つ場合

$\varphi^* ds_f^2 = ds_f^2$ かつ 曲線の向きを保つ かつ $\varphi \neq Id$ を満たす.

この条件を満たす $f \circ \varphi$ は、$f \circ \varphi = \check{f}$ のみである.

$\therefore T = Id \in O(3)$ とすれば、$\check{f} = T \circ f \circ \varphi$ が成り立つ.

③ $\begin{cases} C: \text{orientation-reversing symmetry を持ち、} \\ ds_f^2: \text{effective symmetry を持つ.} \end{cases}$

さらにこの時、φ: orientation-preserving $\Longrightarrow T \in SO(3)$ の場合

「$T \in O(3)$」と「$\varphi^* ds_f^2 = ds_f^2$ かつ 曲線の向きを反転するかつ $\varphi \neq Id$ を満たす φ が存在」

$$\varphi_1(u, v) = (u, -v)$$

vについて偶関数 でないといけない

$$\varphi_2(u, v) = (-u, v)$$

$$\varphi_3(u, v) = (-u, -v)$$