In[45]:=

```
(* 定義：写像 ψ *)
(* 入力 {w,t} を受け取り，{Cos[w],Sin[w],t} を返す．(w,t) から円柱面上の点が得られる． *)
ψ[{w_, t_}] := {Cos[w], Sin[w], t};
```

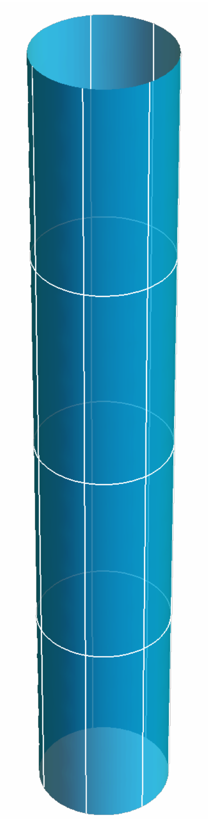
In[46]:=

```
(* 定義：円柱状の面（シリンダー）のプロット *)
(* 定義する写像 ψ ： {w, t} ↦ {Cos[w], Sin[w], t} は， w を角度，t を高さとして，
   円柱（半径1）の側面を描画． w の範囲は -π から π，t の範囲は -2π から 2π. *)
CYL = ParametricPlot3D[ψ[{w, t}],
{w, -π, π}, {t, -2 π, 2 π},
Mesh → {6, 3}, PlotPoints → 20,
PlotStyle → Directive[Cyan, Opacity[0.8]],
MeshStyle → Directive[White, Thickness[0.005]],
Axes → False,
Boxed → False,
PlotRange → {{-1, 1}, {-1, 1}, {-2 π, 2 π}}
];
```

In[47]:=

```
(* 円柱のグラフを出力する *)
CYL
```

Out[47]=



In[48]:=
```
(* 定義：平面への射影関数 proj *)
(* 入力の3次元ベクトル {x,y,t} に対して，t座標を 0 に置き換え，xy平面上の点 {x,y,0} を返す．*)
proj[{x_, y_, t_}] = {x, y, 0};
```

In[49]:=
```
(* 関数 c は、パラメータ k と s に依存する曲線を定義するものである。
ここでは、まず (1/k) 倍した {Cos[k s], Sin[k s]} を作る。
  この 2 成分のリストは、ψ の入力として用いられ、
ψ は第一成分を角度、第二成分を高さとみなして 3 次元の点を返す。

結果として、c[k, s] は円柱上の点 {Cos[(1/k)*Cos[k s]], Sin[(1/k)*Cos[k s]], (1/k)*Sin[k s]} となる。

※この定義により、
  xy 平面への射影は常に単位円上の点となる（ψ によって Cos と Sin が施されるため） が、
z 座標は (1/k)*Sin[k s] により変動する。 最後に Simplify で式を簡単化。 *)
```

$$c[k\_, s\_] = \frac{1}{k}\{\mathrm{Cos}[k\,s], \mathrm{Sin}[k\,s]\} \mathbin{//} \psi \mathbin{//} \mathrm{Simplify}$$

```
γ[s_] := c[k, s];
```

Out[49]=

$$\left\{\mathrm{Cos}\left[\frac{\mathrm{Cos}[k\,s]}{k}\right], \mathrm{Sin}\left[\frac{\mathrm{Cos}[k\,s]}{k}\right], \frac{\mathrm{Sin}[k\,s]}{k}\right\}$$

In[51]:=
```
(* 定義：曲線の xy平面への射影 Γ *)
(* Γ[s] は，曲線 γ[s] の3次元点から，proj を用いて z座標（高さ成分）を0にしたもの． *)
Γ[s_] = γ[s] // proj
```

Out[51]=

$$\left\{\mathrm{Cos}\left[\frac{\mathrm{Cos}[k\,s]}{k}\right], \mathrm{Sin}\left[\frac{\mathrm{Cos}[k\,s]}{k}\right], 0\right\}$$

In[52]:=
```
(* 定義：接線ベクトル e[s] *)
e[s_] = γ'[s] // Simplify
```

Out[52]=

$$\left\{\mathrm{Sin}[k\,s]\times\mathrm{Sin}\left[\frac{\mathrm{Cos}[k\,s]}{k}\right], -\mathrm{Cos}\left[\frac{\mathrm{Cos}[k\,s]}{k}\right]\times\mathrm{Sin}[k\,s], \mathrm{Cos}[k\,s]\right\}$$

In[53]:=
```
(* ⑧ 定義：補助的な法線ベクトル n[s] *)
(* n[s] は，曲線の射影 Γ[s] と接線 e[s] の外積により定義．
  ※ この n[s] は後に作るフレームの一要素．*)
n[s_] = Cross[Γ[s], e[s]] // Simplify
```

Out[53]=

$$\left\{\mathrm{Cos}[k\,s]\times\mathrm{Sin}\left[\frac{\mathrm{Cos}[k\,s]}{k}\right], -\mathrm{Cos}[k\,s]\times\mathrm{Cos}\left[\frac{\mathrm{Cos}[k\,s]}{k}\right], -\mathrm{Sin}[k\,s]\right\}$$

In[54]:=
```
(* 定義：フレーム F[s] *)
(* F[s] は3つのベクトルを列ベクトルとして並べた 3×3 行列で，
   それぞれ Γ[s]（射影された位置ベクトル），e[s]（接線），n[s]（法線）で構成される． *)
F[s_] = {Γ[s], e[s], n[s]} // Simplify
```

Out[54]=

$$\left\{\left\{\mathrm{Cos}\left[\frac{\mathrm{Cos}[k\,s]}{k}\right],\ \mathrm{Sin}\left[\frac{\mathrm{Cos}[k\,s]}{k}\right],\ 0\right\},\ \left\{\mathrm{Sin}[k\,s]\times\mathrm{Sin}\left[\frac{\mathrm{Cos}[k\,s]}{k}\right],\ -\mathrm{Cos}\left[\frac{\mathrm{Cos}[k\,s]}{k}\right]\times\mathrm{Sin}[k\,s],\ \mathrm{Cos}[k\,s]\right\},\ \left\{\mathrm{Cos}[k\,s]\times\mathrm{Sin}\left[\frac{\mathrm{Cos}[k\,s]}{k}\right],\ -\mathrm{Cos}[k\,s]\times\mathrm{Cos}\left[\frac{\mathrm{Cos}[k\,s]}{k}\right],\ -\mathrm{Sin}[k\,s]\right\}\right\}$$

In[55]:=
```
(* F[s] が直交行列（各列が互いに直交し、長さが 1 である）であることを確認するための計算。
結果が単位行列になるはず。 *)
F[s].Transpose[F[s]] // Simplify
```

Out[55]=

{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}

In[56]:=
```
(* 内積を計算 *)
Γ'[s].e[s] // Simplify
Γ'[s].n[s] // Simplify
e'[s].Γ[s] // Simplify
e'[s].n[s] // Simplify
n'[s].Γ[s] // Simplify
n'[s].e[s] // Simplify
```

Out[56]=

$\mathrm{Sin}[k\,s]^2$

Out[57]=

$\frac{1}{2}\,\mathrm{Sin}[2\,k\,s]$

Out[58]=

$-\mathrm{Sin}[k\,s]^2$

Out[59]=

k

Out[60]=

$-\frac{1}{2}\,\mathrm{Sin}[2\,k\,s]$

Out[61]=

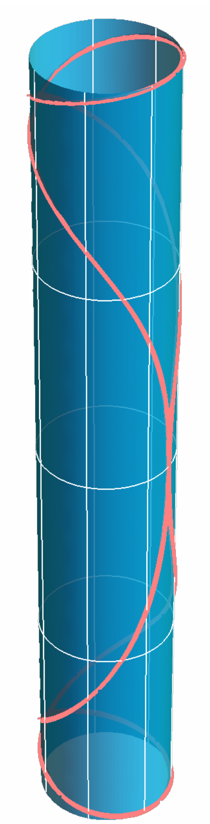
$-k$

In[62]:=
```
(* LGT[k] は、パラメータ k に依存して、曲線の s に関する範囲を決定するための値。
ここでは、1 周するための s の範囲を 2π/k と定義している。 *)
LGT[k_] = 2 π / k;
```

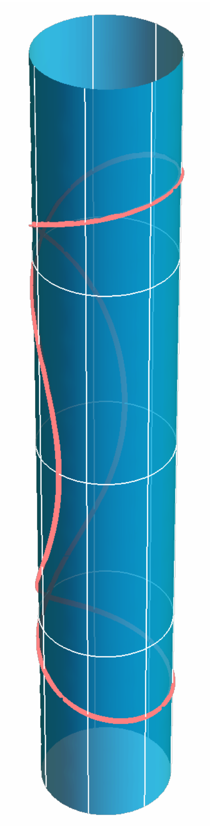
In[63]:=
```
(* Fig[k] を、【先に描画した円柱 CYL と、パラメトリックに定義された曲線
        c[k,s] を 同じグラフ上に重ね合わせて表示するための関数】と定義。
曲線は s = 0 から s = LGT[k] まで描かれ、プロットスタイルとしてピンク色・太めの線。 *)
Fig[k_] := Show[CYL,
  ParametricPlot3D[c[k, s],
{s, 0, LGT[k]},
PlotStyle → Directive[Pink, Thickness[0.02]]
  ]
 ]
```

In[64]:=
```
Fig[0.5 / π]
Fig[0.7 / π]
Fig[1 / π]
Fig[1]
Fig[π]
```

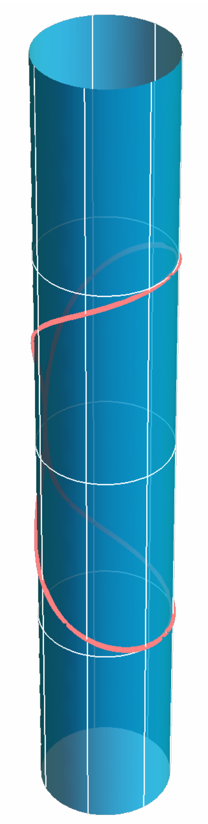
Out[64]=



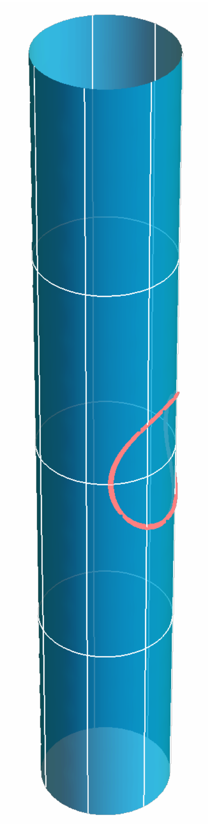
Out[65]=



Out[66]=



Out[67]=



Out[68]=