```
In[26]:= (* κ（カッパ）という変数に 0 を代入。
      これは後で曲線の性質（例えば曲率）の一部として使うが、 今回は 0 。 *)
κ = 0;

In[27]:= (* θ（シータ）を κ s + m と定義。
      s はパラメータ（曲線上の「距離」）、 m は定数パラメタ（回転角や初期位相）。 *)
θ = κ s + m;

In[28]:= (* θ に依存する基本的な三角関数を定義。 α（アルファ）＝sin(θ) 、 ν（ニュー）＝cos(θ) *)
α = Sin[θ];
ν = Cos[θ];

In[30]:= (* ※計算の途中経過を確認するためのもの *)
1 - α^2 // Simplify
-α ν // Simplify

Out[30]=
Cos[m]^2

Out[31]=
-Cos[m] × Sin[m]

In[32]:= (* 3×3 の行列 A を定義. この行列は歪対称行列. 各成分は α,ν,κ を用いて表される. *)
A = {{0, -1 + α^2, α ν}, {1 - α^2, 0, -κ}, {-α ν, κ, 0}};

In[33]:= (* ---------------------------- 回転行列 A0 の定義 ---------------------------- *)
(* A0 は 3次元空間で x 軸周りに m だけ回転する回転行列。
      これにより、後で生成する行列（＝フレーム）の初期状態に回転を与える。 *)
A0 = {{1, 0, 0}, {0, Cos[m], -Sin[m]}, {0, Sin[m], Cos[m]}};
```

In[34]:=

```
(* --------------------------- 行列指数を使ったフレームの生成 ---------------------------*)
(* F[s] を定義。 ここでは、行列 A の s 倍（sA）の行列指数 MatrixExp[s A] を計算し、
   それに A0 を掛け合わせ。 行列指数は、微分方程式の解や連続的な回転（リー群の元）を得る。
   結果として、F[s] はパラメータ s に依存する 3×3 の行列となり、
   その各列は空間内の直交するベクトル（「フレーム」）を表す。 *)
F[s_] = A0.MatrixExp[s A] // Simplify
F[s_] = % // PowerExpand // FullSimplify
```

Out[34]=

$$\left\{\left\{\frac{1}{2}\left(e^{-s\sqrt{-\mathrm{Cos}[m]^2}}+e^{s\sqrt{-\mathrm{Cos}[m]^2}}\right),\ \frac{1}{2}e^{-s\sqrt{-\mathrm{Cos}[m]^2}}\left(-1+e^{2s\sqrt{-\mathrm{Cos}[m]^2}}\right)\sqrt{-\mathrm{Cos}[m]^2},\ -\frac{1}{2}e^{-s\sqrt{-\mathrm{Cos}[m]^2}}\left(-1+e^{2s\sqrt{-\mathrm{Cos}[m]^2}}\right)\sqrt{-\mathrm{Cos}[m]^2}\ \mathrm{Tan}[m]\right\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{2}e^{-s\sqrt{-\mathrm{Cos}[m]^2}}\left(-1+e^{2s\sqrt{-\mathrm{Cos}[m]^2}}\right)\sqrt{-\mathrm{Cos}[m]^2}\ \mathrm{Sec}[m],\ \frac{1}{2}e^{-s\sqrt{-\mathrm{Cos}[m]^2}}\left(1+e^{2s\sqrt{-\mathrm{Cos}[m]^2}}\right)\mathrm{Cos}[m],\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{2}e^{-s\sqrt{-\mathrm{Cos}[m]^2}}\left(1+e^{2s\sqrt{-\mathrm{Cos}[m]^2}}\right)\mathrm{Sin}[m]\right\},\ \{0,\ \mathrm{Sin}[m],\ \mathrm{Cos}[m]\}\right\}$$

Out[35]=

$$\{\{\mathrm{Cos}[s\,\mathrm{Cos}[m]],\ -\mathrm{Cos}[m]\times\mathrm{Sin}[s\,\mathrm{Cos}[m]],\ \mathrm{Sin}[m]\times\mathrm{Sin}[s\,\mathrm{Cos}[m]]\},$$
$$\{\mathrm{Sin}[s\,\mathrm{Cos}[m]],\ \mathrm{Cos}[m]\times\mathrm{Cos}[s\,\mathrm{Cos}[m]],\ -\mathrm{Cos}[s\,\mathrm{Cos}[m]]\times\mathrm{Sin}[m]\},\ \{0,\ \mathrm{Sin}[m],\ \mathrm{Cos}[m]\}\}$$

In[36]:=

```
(* F[s] の各列ベクトルを取り出して f1, f2, f3 として定義.
  ここで各 f_i[s] は空間中の直交する単位ベクトルを表している.
  f1[s]：F[s] の第1列， f2[s]：第2列， f3[s]：第3列 *)
f1[s_] = {F[s][[1]][[1]], F[s][[2]][[1]], F[s][[3]][[1]]} // Simplify
f2[s_] = {F[s][[1]][[2]], F[s][[2]][[2]], F[s][[3]][[2]]} // Simplify
f3[s_] = {F[s][[1]][[3]], F[s][[2]][[3]], F[s][[3]][[3]]} // Simplify
```

Out[36]=

$$\{\mathrm{Cos}[s\,\mathrm{Cos}[m]],\ \mathrm{Sin}[s\,\mathrm{Cos}[m]],\ 0\}$$

Out[37]=

$$\{-\mathrm{Cos}[m]\times\mathrm{Sin}[s\,\mathrm{Cos}[m]],\ \mathrm{Cos}[m]\times\mathrm{Cos}[s\,\mathrm{Cos}[m]],\ \mathrm{Sin}[m]\}$$

Out[38]=

$$\{\mathrm{Sin}[m]\times\mathrm{Sin}[s\,\mathrm{Cos}[m]],\ -\mathrm{Cos}[s\,\mathrm{Cos}[m]]\times\mathrm{Sin}[m],\ \mathrm{Cos}[m]\}$$

In[39]:=

```
(* t[s] を s に関する積分として定義.
積分対象は Sin(θ) で，θ = κs + m である.  ※ κ=0 としているので，
   実際には Sin(m) となり定数となるため， 結果は s Sin(m) となる *)
t[s_] = Integrate[Sin[θ], s]
```

Out[39]=

$$s\,\mathrm{Sin}[m]$$

In[40]:= (* γ[m, s] は、3次元空間上のパラメトリック曲線を表す。
x, y 座標は F[s] の第1列（f1[s]）の x, y 成分から、 z 座標は t[s] により与えられる。
すなわち、フレームのある成分と積分結果を組み合わせて曲線を構成。 *)

```
γ[m_, s_] = {F[s]〚1〛〚1〛, F[s]〚2〛〚1〛, t[s]}
```

Out[40]=

{Cos[s Cos[m]], Sin[s Cos[m]], s Sin[m]}

In[41]:=

```
Solve[s Cos[m] == π, s]
```

Out[41]=

{{s → π Sec[m]}}

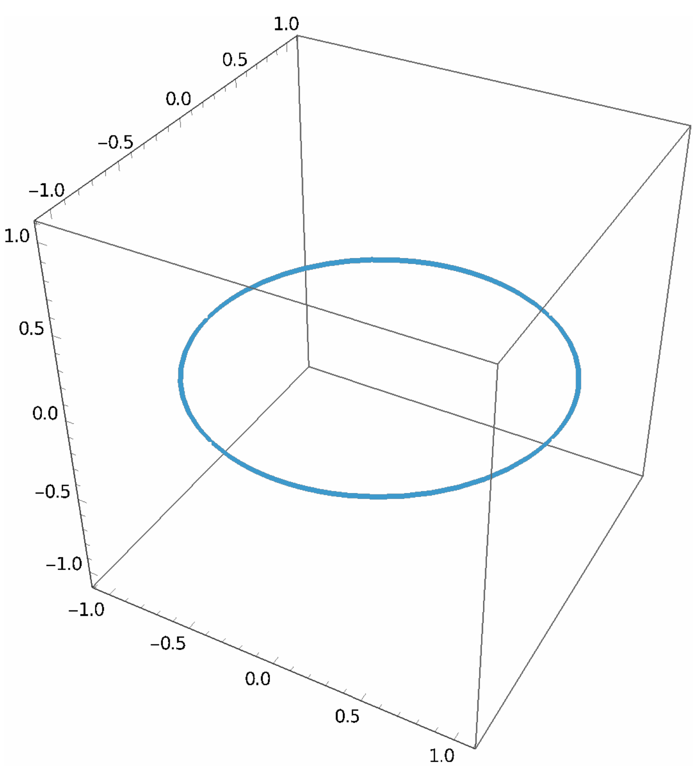
In[42]:= (* LGT[m] (長さ（length）)を定義． 解いた s の値から π Sec(m) として定義される *)

```
LGT[m_] = π Sec[m];
```

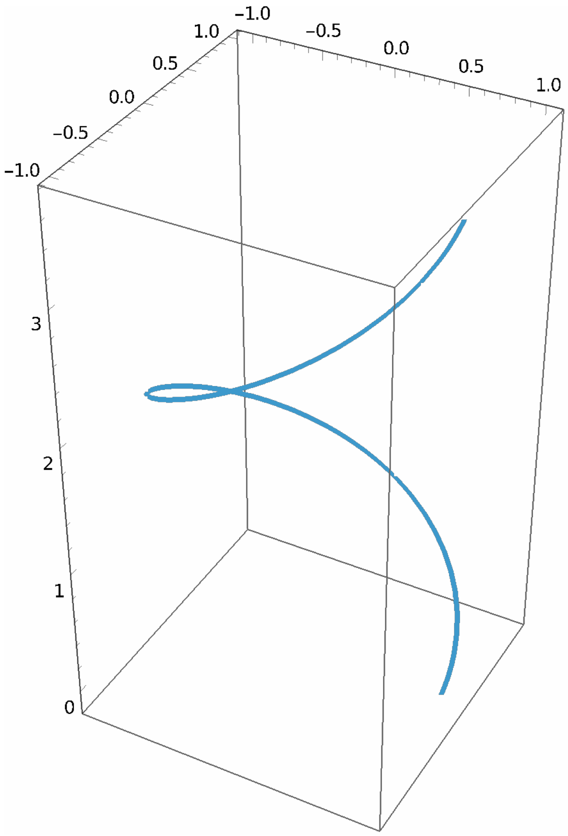
In[43]:= (* ParametricPlot3D 関数を使って、異なる m の値に対する曲線 γ[m, s] を 3 次元で描画。
各プロットでは、s の範囲が m の値によって異なり、
曲線の形状の変化（回転や高さの伸び）を視覚的に確認。 *)

```
ParametricPlot3D[γ[0, s], {s, -π, π}]
ParametricPlot3D[γ[π/6, s], {s, 0, 2 LGT[π/6]}]
ParametricPlot3D[γ[π/4, s], {s, 0, 2 LGT[π/4]}]
ParametricPlot3D[γ[π/3, s], {s, 0, 2 LGT[π/3]}]
ParametricPlot3D[γ[π/2, s], {s, 0, π}]
```

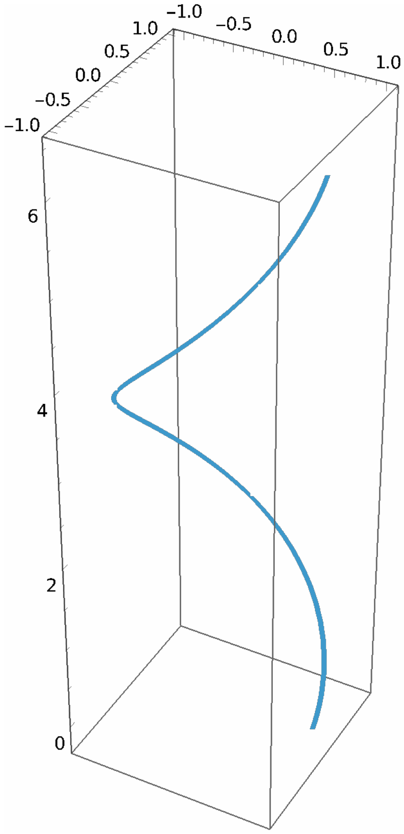
Out[43]=



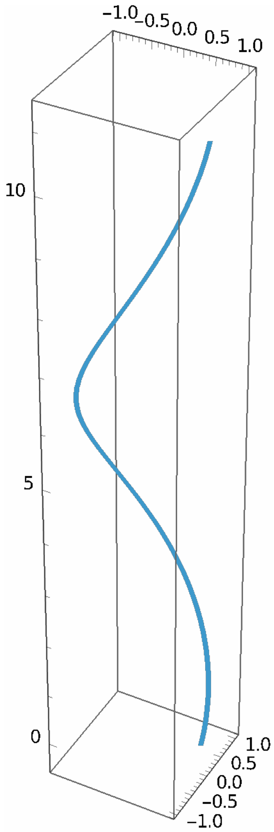
Out[44]=



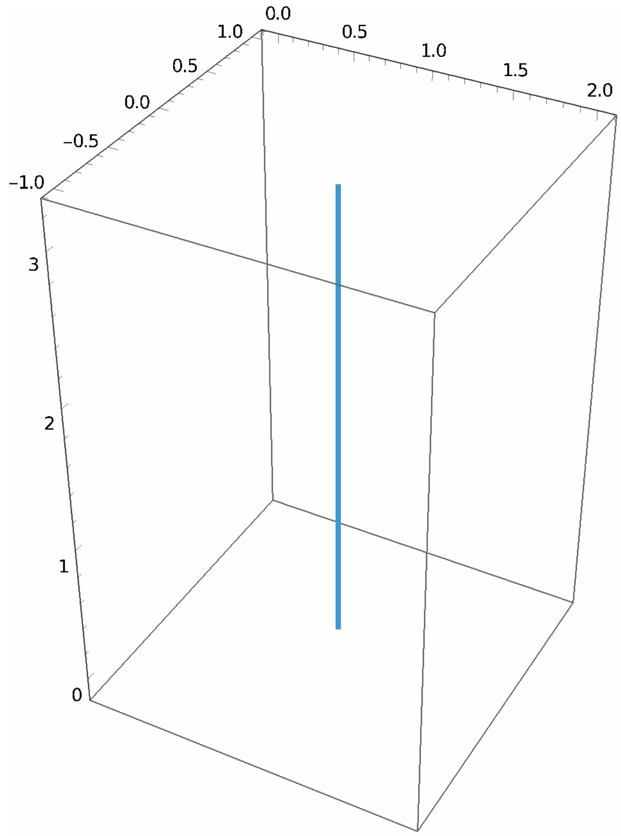
Out[45]=



Out[46]=

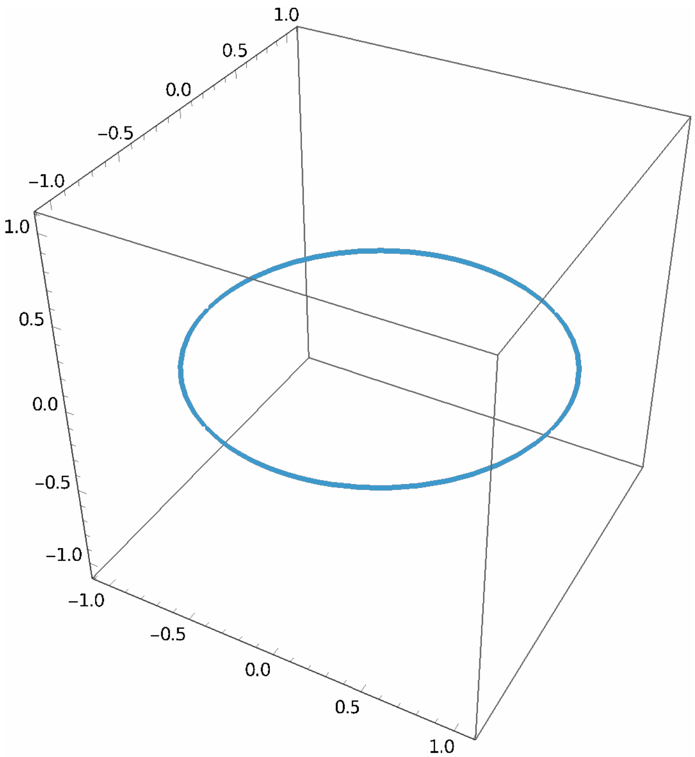


Out[47]=



In[48]:=
```
ParametricPlot3D[γ[π, s], {s, 0, 2 π}]
```

Out[48]=



In[49]:=
```
γ[θ, s] (* 曲線γ=(x(s), y(s), t(s))の式を確認 *)
```

Out[49]=
```
{Cos[s Cos[m]], Sin[s Cos[m]], s Sin[m]}
```

In[50]:=
```
F[s_]
```

Out[50]=
```
{{Cos[Cos[m] s_], -Cos[m] × Sin[Cos[m] s_], Sin[m] × Sin[Cos[m] s_]},
 {Sin[Cos[m] s_], Cos[m] × Cos[Cos[m] s_], -Cos[Cos[m] s_] × Sin[m]}, {0, Sin[m], Cos[m]}}
```