

In[1]:= (* === 全体の描画内容 ===

1. $S^1 \times \mathbb{R}$ の円柱 (xy 平面の単位円を z 軸方向に延ばした図形) を描画する。
2. 円柱上に、弧長パラメータ s で定義された曲線 $\gamma(s)$ (ヘリックス) を描画する。
3. 曲線上の任意の点 $p(x, y, z)$ を描画する (p は $x^2 + y^2 = 1$ を満たす)。
4. 点 p の xy 平面への射影 $q = (x, y, 0)$ を求め、原点から q への位置ベクトル r を描画する。
5. 同じ位置ベクトル r を、点 p を始点として描画し、色を変えて強調するものである。 *)

(* --- ヘリックス曲線 $\gamma(s)$ の定義 ---

$\gamma(s) = \{\cos(\alpha s), \sin(\alpha s), \beta s\}$ と定める。

弧長パラメータとして単位速さとなるように、 $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ となる。

ここでは、 $\alpha = 0.8$, $\beta = 0.6$ と定める。 *)

Clear[gamma, s]; gamma[s_] := {Cos[0.8 s], Sin[0.8 s], 0.6 s};

In[2]:= (* --- 曲線上の点 p の定義 ---

点 p は曲線 γ 上の特定のパラメータ値 s_0 に対応する点である。

ここでは $s_0 = 5$ としている。 *)

$s_0 = 5$; p = gamma[s0];

In[3]:= (* --- 点 p の xy 平面への射影と位置ベクトル r の定義 ---

点 $p = (x, y, z)$ であるので、その射影 q は $(x, y, 0)$ である。

原点から q への位置ベクトル r は、単に q と同一である。 *)

$q = \{p[[1]], p[[2]], 0\}$; vecGamma = q; (* 位置ベクトル r *)

(* なお、先に作った位置ベクトル r を点 p を始点として描画する場合は、

その矢印は点 p から $p + \text{vecGamma}$ へ向かう。 *)

pShiftedVec = p + vecGamma;

(* --- $S^1 \times \mathbb{R}$ の円柱の描画 ---

円柱は、xy 平面の単位円 $\{\cos[w], \sin[w]\}$ を z 軸方向に $-3 \leq z \leq 3$ まで延ばしたものである。 *)

```
cylinder = ParametricPlot3D[
{Cos[w], Sin[w], z},
{w, 0, 2 Pi},
{z, -5, 5},
Mesh -> None,
PlotStyle -> Directive[LightGray, Opacity[0.5]]
];
```

(* --- 曲線 $\gamma(s)$ の描画 ---

s の範囲は $0 \leq s \leq 10$ として、曲線 $\gamma(s)$ を描画する。 *)

curve = ParametricPlot3D[gamma[s], {s, -2, 8}, PlotStyle -> {Thick, Red}];

(* --- 点pの描画 ---

点pは Graphics3D の Sphere を用いて描画する。

サイズは適宜調整している。 *)

```
pointP = Graphics3D[{Blue, Sphere[p, 0.1]}];
```

(* --- 原点から点qへの位置ベクトルrの描画 ---

Arrow を用いて、原点 (0,0,0) から点qへの矢印を描画する。 *)

```
arrowOriginToQ = Graphics3D[{Orange, Arrow[{0, 0, 0}, q]}];
```

(* --- 点pを始点とした位置ベクトルrの描画 ---

先に定義した位置ベクトルrを、点pを始点として再描画する。

色を Magenta にして強調している。 *)

```
arrowPToPplusVec = Graphics3D[{Orange, Arrow[{p, p + vecGamma}]}];
```

(* === 以下、追加部分 === *)

(* 原点 (0,0,0) を視覚的に示すために、原点に小さな Sphere を描画する。 *)

```
originPoint = Graphics3D[{Black, Sphere[{0, 0, 0}, 0.1]}];
```

(* 点 p における接ベクトル $e(s_0)$ の計算と描画。

曲線 $\gamma(s)$ の接ベクトルは微分 $\gamma'(s)$ であり、 s_0 における接ベクトルを正規化して長さ1にする。 *)

```
e = Normalize[D[gamma[s], s] /. s -> s0];
```

```
arrowTangent = Graphics3D[{Blue, Arrow[{p, p + e}]}];
```

(* 位置ベクトル r と接ベクトル e に直交する単位ベクトル n の計算と描画。

n は、

点 p の射影 q (すなわち vecGamma) と接ベクトル e の外積をとり正規化することで求める。 *)

```
n = Normalize[Cross[vecGamma, e]];
```

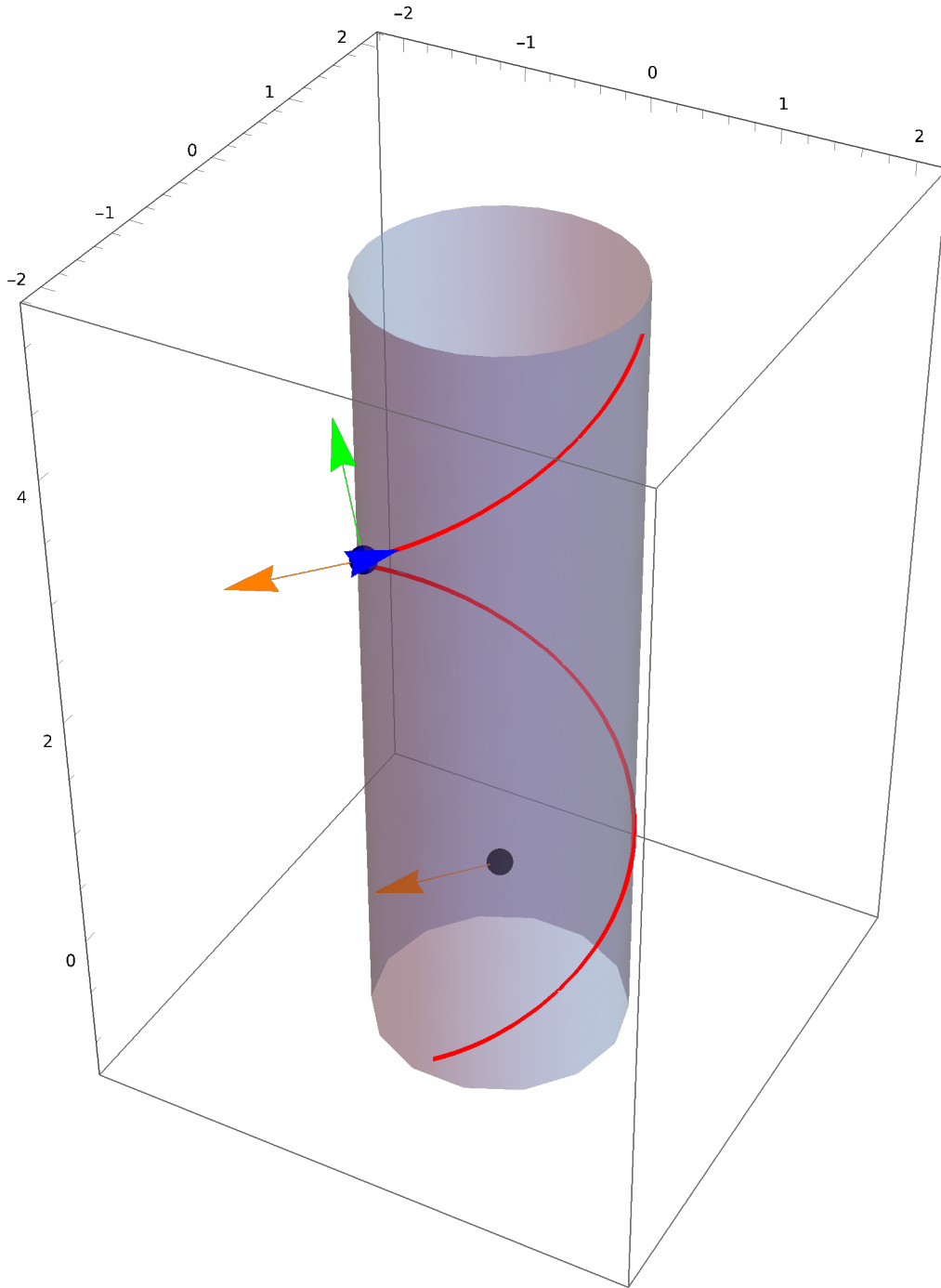
```
arrowNormal = Graphics3D[{Green, Arrow[{p, p + n}]}];
```

(* --- すべての要素を同一画面内に表示 ---

Show を用いて、円柱、曲線、点、矢印、原点表示、接ベクトル、法線を重ね合わせて描画する。 *)

```
Show[
  cylinder,
  curve,
  pointP,
  arrowOriginToQ,
  arrowPToPplusVec,
  originPoint,
  arrowTangent, arrowNormal,
  Axes -> True,
  Boxed -> True,
  PlotRange -> {{-2, 2}, {-2, 2}, {-1, 5}},
  ImageSize -> Large
]
```

Out[18]=

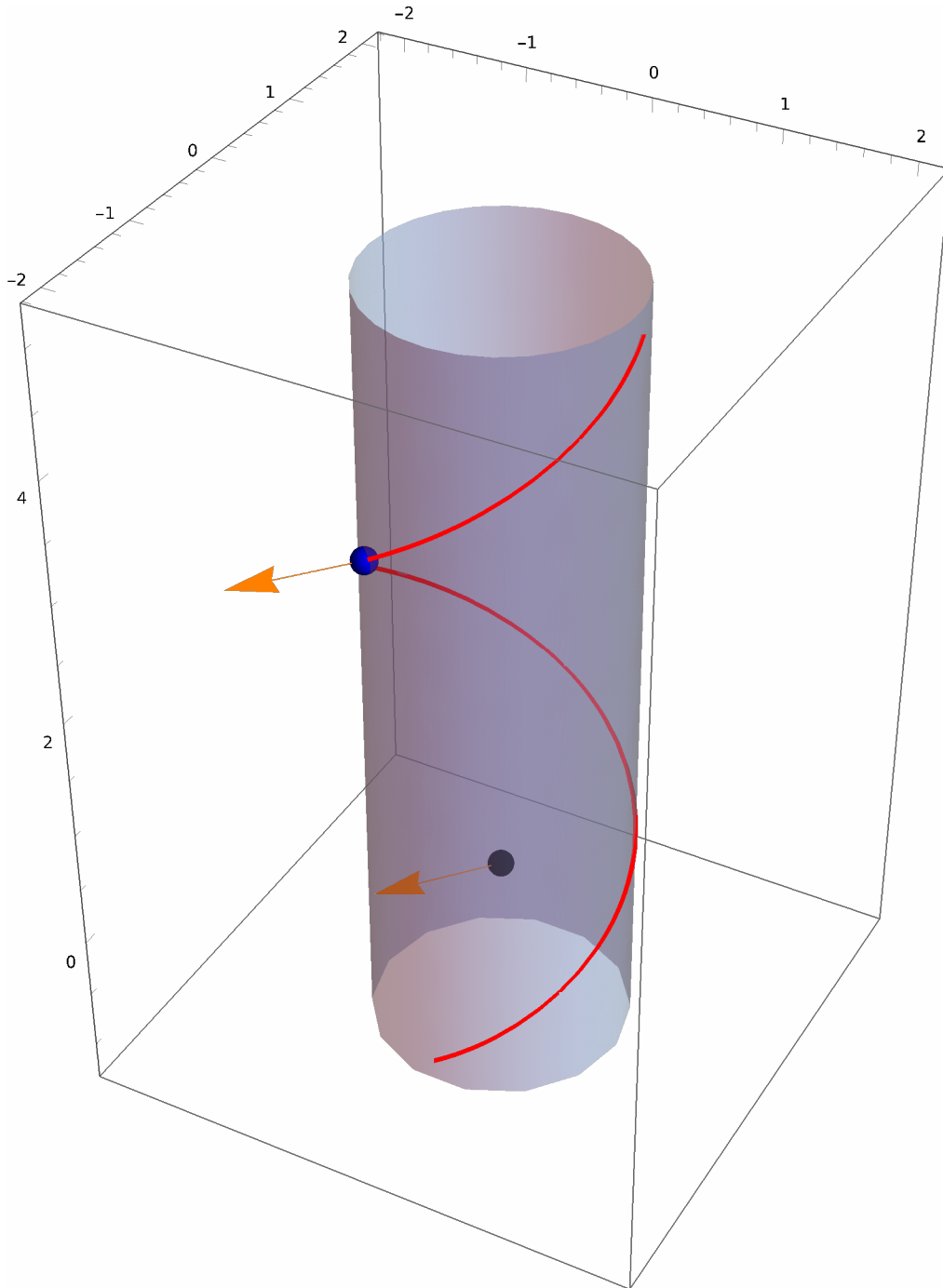


```

In[19]:= (*Γのみ描画*)
Show[
  cylinder,
  curve,
  pointP,
  arrowOriginToQ,
  arrowPToPplusVec,
  originPoint,
  (*arrowTangent, arrowNormal,*)
  Axes → True,
  Boxed → True,
  PlotRange → {{-2, 2}, {-2, 2}, {-1, 5}},
  ImageSize → Large
]

```

Out[19]=

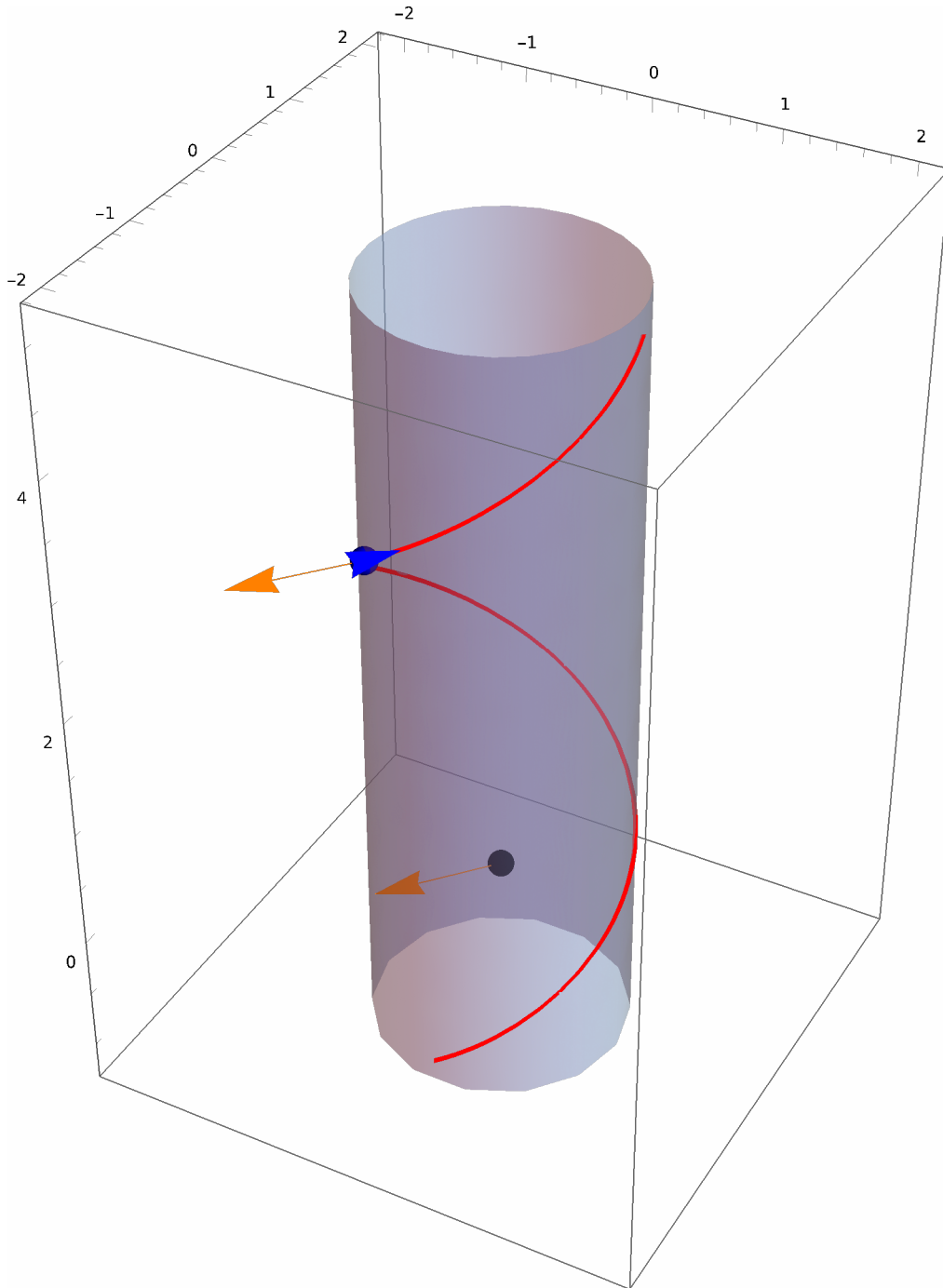


```

In[20]:= (*Γ、eを描画*)
Show[
  cylinder,
  curve,
  pointP,
  arrowOriginToQ,
  arrowPToPplusVec,
  originPoint,
  arrowTangent, (* arrowNormal,*)
  Axes → True,
  Boxed → True,
  PlotRange → {{-2, 2}, {-2, 2}, {-1, 5}},
  ImageSize → Large
]

```

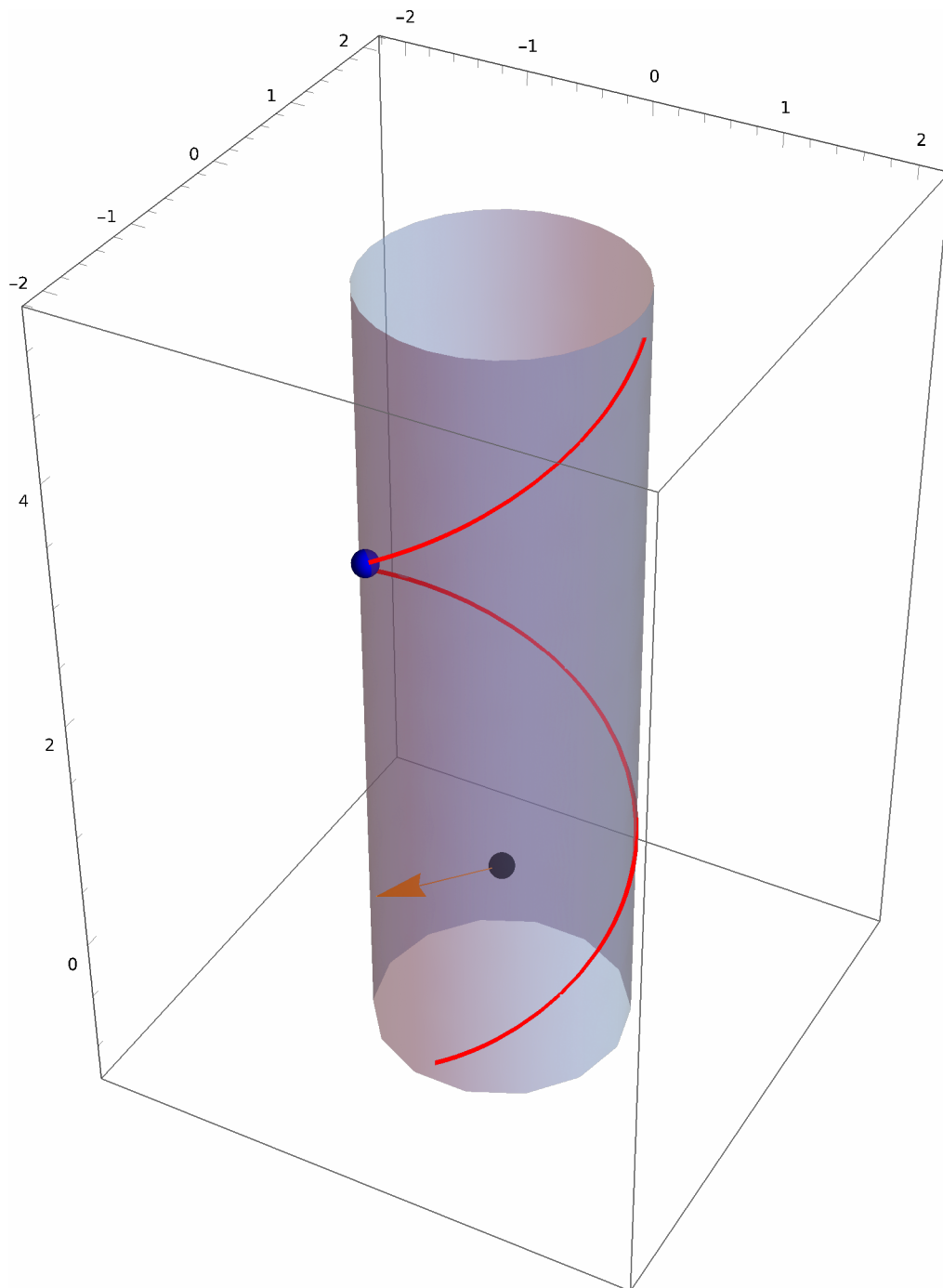
Out[20]=



In[24]:= (*ベクトルを描画していない場合*)

```
Show[
  cylinder,
  curve,
  pointP,
  arrowOriginToQ,
  (*arrowPToPplusVec,*)
  originPoint,
  (*arrowTangent, arrowNormal,*)
  Axes → True,
  Boxed → True,
  PlotRange → {{-2, 2}, {-2, 2}, {-1, 5}},
  ImageSize → Large
]
```


Out[24]=



In[21]:= **normOriginToQ = Norm[q] // Simplify**

Out[21]=

1.

In[22]:= **normPToPplusVec = Norm[(p + vecGamma) - p] // Simplify**

Out[22]=

1.