In[31]:=
```
(* 射影関数 proj の定義 *)
(* 入力の 3次元ベクトル {x,y,t} に対して、
   z成分を0にして {x,y,0} を返す。 与えられた点を xy平面 へ射影する。 *)
proj[{x_, y_, t_}] = {x, y, 0};
```

In[32]:=
```
ψ[{w_, t_}] = {Cos[w], Sin[w], t};
```

In[33]:=
```
(* 曲線 γ の定義 *)
(* ここでは、関数 θ[s] が s に依存する角度関数（別途定義されることが想定）と仮定 *)
(* 2つの不定積分を計算：
- 第一成分： Integrate[Cos[θ[s]], s]
- 第二成分： Integrate[Sin[θ[s]], s]
これにより、s に沿った積分曲線が得られる。

得られたリスト {∫Cos[θ(s)] ds, ∫Sin[θ(s)] ds} を、
  演算のパイプライン//により ψ へ入力する。 ψ は引数を {w, t} として受け取るので、
- 第一成分（∫Cos[θ(s)] ds）が w として、
- 第二成分（∫Sin[θ(s)] ds）が t として解釈され、
その結果、ψ は {Cos[∫Cos[θ(s)] ds], Sin[∫Cos[θ(s)] ds], ∫Sin[θ(s)] ds} を返す。 *)
γ[s_] = {Integrate[Cos[θ[s]], s], Integrate[Sin[θ[s]], s]} // ψ // Simplify
```

Out[33]=

$$\left\{\mathrm{Cos}\left[\int \mathrm{Cos}[\theta[s]]\,ds\right],\ \mathrm{Sin}\left[\int \mathrm{Cos}[\theta[s]]\,ds\right],\ \int \mathrm{Sin}[\theta[s]]\,ds\right\}$$

In[34]:=
```
(* 射影された曲線 Γ の定義 *)
(* γ[s] の xy 成分だけを取り出し、xy 平面上の曲線 Γ[s] を得る *)
Γ[s_] = γ[s] // proj
```

Out[34]=

$$\left\{\mathrm{Cos}\left[\int \mathrm{Cos}[\theta[s]]\,ds\right],\ \mathrm{Sin}\left[\int \mathrm{Cos}[\theta[s]]\,ds\right],\ 0\right\}$$

In[35]:=
```
(* 接線ベクトル e[s] の定義 *)
(* γ[s] を s で微分することで、曲線 γ の接線方向を示すベクトル e[s] を得る *)
e[s_] = γ'[s] // Simplify
```

Out[35]=

$$\left\{-\mathrm{Cos}[\theta[s]]\times \mathrm{Sin}\left[\int \mathrm{Cos}[\theta[s]]\,ds\right],\ \mathrm{Cos}\left[\int \mathrm{Cos}[\theta[s]]\,ds\right]\times \mathrm{Cos}[\theta[s]],\ \mathrm{Sin}[\theta[s]]\right\}$$

In[36]:=
```
(* 法線ベクトル n[s] の定義 *)
(* Γ[s]と e[s]（接線ベクトル）との外積を取ることで、 両者に垂直なベクトル n[s] を得る *)
n[s_] = Cross[Γ[s], e[s]] // Simplify
```

Out[36]=

$$\left\{\mathrm{Sin}\left[\int \mathrm{Cos}[\theta[s]]\,ds\right]\times \mathrm{Sin}[\theta[s]],\ -\mathrm{Cos}\left[\int \mathrm{Cos}[\theta[s]]\,ds\right]\times \mathrm{Sin}[\theta[s]],\ \mathrm{Cos}[\theta[s]]\right\}$$

In[37]:=
```
(* フレーム F[s] の定義 *)
(* F[s] は各列ベクトルが次の 3 つのベクトルで構成される 3×3 の行列：
- 第一列：Γ[s] （xy 平面上の射影された位置）
- 第二列：e[s] （接線方向）
- 第三列：n[s] （法線方向）
これらでフレネ枠（のようなもの）を構成する *)
F[s_] = {Γ[s], e[s], n[s]} // Simplify
```

Out[37]=

$$\left\{\left\{\cos\left[\int\cos[\theta[s]]\,ds\right],\ \sin\left[\int\cos[\theta[s]]\,ds\right],\ 0\right\},\right.$$
$$\left\{-\cos[\theta[s]]\times\sin\left[\int\cos[\theta[s]]\,ds\right],\ \cos\left[\int\cos[\theta[s]]\,ds\right]\times\cos[\theta[s]],\ \sin[\theta[s]]\right\},$$
$$\left.\left\{\sin\left[\int\cos[\theta[s]]\,ds\right]\times\sin[\theta[s]],\ -\cos\left[\int\cos[\theta[s]]\,ds\right]\times\sin[\theta[s]],\ \cos[\theta[s]]\right\}\right\}$$

In[38]:=
```
(* F[s] の各列ベクトルが正規直交基底であることを確認 *)
F[s].Transpose[F[s]] // Simplify
```

Out[38]=

{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}

In[39]:=
```
(* フレーム各要素の内積に関する性質を確認 *)
Γ'[s].e[s] // Simplify
Γ'[s].n[s] // Simplify
e'[s].Γ[s] // Simplify
e'[s].n[s] // Simplify
n'[s].Γ[s] // Simplify
n'[s].e[s] // Simplify
```

Out[39]=

$\cos[\theta[s]]^2$

Out[40]=

$-\cos[\theta[s]]\times\sin[\theta[s]]$

Out[41]=

$-\cos[\theta[s]]^2$

Out[42]=

$\theta'[s]$

Out[43]=

$\cos[\theta[s]]\times\sin[\theta[s]]$

Out[44]=

$-\theta'[s]$