```
In[1]:= (* 内積と行列の定義 *)
        (* LIP3を定義：3次元空間において最初の成分に負の符号を付け，
            残りの成分に正の符号を付けた内積を定義する関数（双曲空間の内積）。
        すなわち，LIP3[{a0, a1, a2}, {b0, b1, b2}] = -a0*b0 + a1*b1 + a2*b2 である。 *)
        LIP3[{a0_, a1_, a2_}, {b0_, b1_, b2_}] := -a0 b0 + a1 b1 + a2 b2;
        (* Zは対角成分が{-1, 1, 1}である対角行列であり， 内積LIP3を行列表示する際に用いる。 *)
        Z = DiagonalMatrix[{-1, 1, 1}];

In[3]:= (* 射影関数の定義 *)
        (* projは，3次元の点{ x, y, t }からt成分を除去し， xy平面上の点{ x, y, 0 }に射影する関数。 *)
        proj[{x_, y_, t_}] = {x, y, 0};

In[4]:= (* 写像ψの定義 *)
        (* ψは，パラメータ{w, t}に対して{ Cosh[w], Sinh[w], t }という点を返す写像。
        今回はH1空間を考えているので、sin/cosではなく双曲線関数sinh/cosh。 *)
        ψ[{w_, t_}] = {Cosh[w], Sinh[w], t};
```

```
In[5]:= (* 曲線γの定義 *)
        (* γは，θ[s]に依存して定義される曲線。
        まず， 第１成分としてCos[θ[s]]のsに関する不定積分，
        第２成分としてSin[θ[s]]のsに関する不定積分を計算する。 その2成分の結果をψに入力することで，
           { Cosh[∫Cos[θ[s]]ds], Sinh[∫Cos[θ[s]]ds], ∫Sin[θ[s]]ds }という3次元の点を得る。
        最後にSimplifyで式を簡単化。 *)
        γ[s_] = {Integrate[Cos[θ[s]], s], Integrate[Sin[θ[s]], s]} // ψ // Simplify
Out[5]= {Cosh[∫Cos[θ[s]] ⅆs], Sinh[∫Cos[θ[s]] ⅆs], ∫Sin[θ[s]] ⅆs}

In[6]:= (* 接ベクトルの計算 *)
        (* e[s]は，曲線γのsによる微分であり，すなわち接ベクトル。 *)
        e[s_] = γ'[s] // Simplify
Out[6]= {Cos[θ[s]] × Sinh[∫Cos[θ[s]] ⅆs], Cos[θ[s]] × Cosh[∫Cos[θ[s]] ⅆs], Sin[θ[s]]}

In[7]:= (* 接ベクトルの微分の内積計算 *)
        (* LIP3[e'[s], e'[s]]は，接ベクトルの微分e'[s]のLIP3(双曲空間における)内積を計算。 *)
        LIP3[e'[s], e'[s]] // Simplify
Out[7]= -Cos[θ[s]]^4 + θ'[s]^2

In[8]:= (* 曲率κの定義 *)
        κ[s_] = Sqrt[-Cos[θ[s]]^4 + θ'[s]^2];
```

In[9]:= (* 曲率が1となる条件の下でθの微分方程式を解く *)
(* DSolveを用いて，κ[s] == 1となるようなθ[s]を求める微分方程式を解く。 *)
```
DSolve[κ[s] == 1, θ[s], s]
```

Out[9]=
$$\left\{\left\{\theta[s] \to \text{InverseFunction}\left[\frac{(1-i)^{3/2}\,\text{Cos}[\#1]^2\,\text{EllipticF}\left[i\,\text{ArcSinh}\left[\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{i}{2}}\,\text{Tan}[\#1]\right], i\right]\sqrt{2+(1-i)\,\text{Tan}[\#1]^2}\,\sqrt{2+(1+i)\,\text{Tan}[\#1]^2}}{2\sqrt{2}\,\sqrt{11+4\,\text{Cos}[2\,\#1]+\text{Cos}[4\,\#1]}}\&\right]\left[-\frac{s}{2\sqrt{2}}+c_1\right]\right\}, \left\{\theta[s] \to \text{InverseFunction}\left[\frac{(1-i)^{3/2}\,\text{Cos}[\#1]^2\,\text{EllipticF}\left[i\,\text{ArcSinh}\left[\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{i}{2}}\,\text{Tan}[\#1]\right], i\right]\sqrt{2+(1-i)\,\text{Tan}[\#1]^2}\,\sqrt{2+(1+i)\,\text{Tan}[\#1]^2}}{2\sqrt{2}\,\sqrt{11+4\,\text{Cos}[2\,\#1]+\text{Cos}[4\,\#1]}}\&\right]\left[\frac{s}{2\sqrt{2}}+c_1\right]\right\}\right\}$$

In[10]:= (* 主法線ベクトルpnの定義 *)
(* pn[s]は，接ベクトルe[s]の微分を曲率κ[s]で割ることで得られる主法線ベクトル。 *)
```
pn[s_] = e'[s] / κ[s] // Simplify
```

Out[10]=
$$\left\{\frac{\text{Cos}[\theta[s]]^2\,\text{Cosh}\left[\int\text{Cos}[\theta[s]]\,ds\right] - \text{Sin}[\theta[s]] \times \text{Sinh}\left[\int\text{Cos}[\theta[s]]\,ds\right]\theta'[s]}{\sqrt{-\text{Cos}[\theta[s]]^4+\theta'[s]^2}}, \frac{\text{Cos}[\theta[s]]^2\,\text{Sinh}\left[\int\text{Cos}[\theta[s]]\,ds\right] - \text{Cosh}\left[\int\text{Cos}[\theta[s]]\,ds\right] \times \text{Sin}[\theta[s]]\,\theta'[s]}{\sqrt{-\text{Cos}[\theta[s]]^4+\theta'[s]^2}}, \frac{\text{Cos}[\theta[s]]\,\theta'[s]}{\sqrt{-\text{Cos}[\theta[s]]^4+\theta'[s]^2}}\right\}$$

In[11]:= (* 副法線ベクトルbnの定義 *)
(* bn[s]は，接ベクトルe[s]と主法線pn[s]の外積にZを掛けることで得られる。
これにより，フレームの捩率や回転に関する解析に用いる副法線が定義される。 *)
```
bn[s_] = Z.Cross[e[s], pn[s]] // Simplify
```

Out[11]=
$$\left\{\frac{\text{Cos}[\theta[s]]^2\,\text{Sin}[\theta[s]] \times \text{Sinh}\left[\int\text{Cos}[\theta[s]]\,ds\right] - \text{Cosh}\left[\int\text{Cos}[\theta[s]]\,ds\right]\theta'[s]}{\sqrt{-\text{Cos}[\theta[s]]^4+\theta'[s]^2}}, \frac{\text{Cos}[\theta[s]]^2\,\text{Cosh}\left[\int\text{Cos}[\theta[s]]\,ds\right] \times \text{Sin}[\theta[s]] - \text{Sinh}\left[\int\text{Cos}[\theta[s]]\,ds\right]\theta'[s]}{\sqrt{-\text{Cos}[\theta[s]]^4+\theta'[s]^2}}, -\frac{\text{Cos}[\theta[s]]^3}{\sqrt{-\text{Cos}[\theta[s]]^4+\theta'[s]^2}}\right\}$$

In[12]:= (* 捩率τの定義 *)
(* τ[s]は，主法線の微分pn'[s]と副法線bn[s]とのLIP3内積によって定義される捩率。*)
```
τ[s_] = LIP3[pn'[s], bn[s]] // Simplify
```

Out[12]=
$$\frac{\text{Cos}[\theta[s]]\left(-\text{Cos}[\theta[s]]^4\,\text{Sin}[\theta[s]] + 3\,\text{Sin}[\theta[s]]\,\theta'[s]^2 + \text{Cos}[\theta[s]]\,\theta''[s]\right)}{\text{Cos}[\theta[s]]^4 - \theta'[s]^2}$$

In[13]:=
```
(* 振率が1となる条件の下でθの微分方程式を解く *)
(* DSolveを用いて，τ[s] == 1となるようなθ[s]を求める微分方程式を解く。 *)
DSolve[τ[s] == 1, θ[s], s]
```

Out[13]=

$$\left\{\left\{\theta[s] \to \text{InverseFunction}\left[\int_1^{\#1} -\frac{1}{\sqrt{\text{Cos}[K[1]]^4 + e^{-2\,\text{Tan}[K[1]]}\, c_1\, \text{Cos}[K[1]]^6}}\, dK[1]\ \&\right][s + c_2]\right\},\right.$$
$$\left.\left\{\theta[s] \to \text{InverseFunction}\left[\int_1^{\#1} \frac{1}{\sqrt{\text{Cos}[K[2]]^4 + e^{-2\,\text{Tan}[K[2]]}\, c_1\, \text{Cos}[K[2]]^6}}\, dK[2]\ \&\right][s + c_2]\right\}\right\}$$

In[14]:=
```
(* xy平面への射影Γの定義 *)
(* Γ[s]は，曲線γ[s]をprojを用いてxy平面上に射影したもの。
すなわち，Γ[s] = proj(γ[s])であり，z成分が0となる。 *)
Γ[s_] = γ[s] // proj
```

Out[14]=

$$\left\{\text{Cosh}\left[\int \text{Cos}[\theta[s]]\, ds\right],\ \text{Sinh}\left[\int \text{Cos}[\theta[s]]\, ds\right],\ 0\right\}$$

In[15]:=
```
(* 投影された曲線に対する法線nの定義 *)
(* n[s]は，射影された位置ベクトルΓ[s]と接ベクトルe[s]の外積にZを掛けることで得られる。
これにより，投影された曲線に対する法線が定義される。*)
n[s_] = Z.Cross[Γ[s], e[s]] // Simplify
```

Out[15]=

$$\left\{-\text{Sin}[\theta[s]] \times \text{Sinh}\left[\int \text{Cos}[\theta[s]]\, ds\right],\ -\text{Cosh}\left[\int \text{Cos}[\theta[s]]\, ds\right] \times \text{Sin}[\theta[s]],\ \text{Cos}[\theta[s]]\right\}$$

In[16]:=
```
(* フレームFの構築 *)
(* F[s]は，局所的な直交座標系（フレーム）を構成する3つのベクトルからなる行列。
第一列が射影された位置ベクトルΓ[s]， 第二列が接ベクトルe[s]， 第三列が法線n[s]である。 *)
F[s_] = {Γ[s], e[s], n[s]} // Simplify
```

Out[16]=

$$\left\{\left\{\text{Cosh}\left[\int \text{Cos}[\theta[s]]\, ds\right],\ \text{Sinh}\left[\int \text{Cos}[\theta[s]]\, ds\right],\ 0\right\},\right.$$
$$\left\{\text{Cos}[\theta[s]] \times \text{Sinh}\left[\int \text{Cos}[\theta[s]]\, ds\right],\ \text{Cos}[\theta[s]] \times \text{Cosh}\left[\int \text{Cos}[\theta[s]]\, ds\right],\ \text{Sin}[\theta[s]]\right\},$$
$$\left.\left\{-\text{Sin}[\theta[s]] \times \text{Sinh}\left[\int \text{Cos}[\theta[s]]\, ds\right],\ -\text{Cosh}\left[\int \text{Cos}[\theta[s]]\, ds\right] \times \text{Sin}[\theta[s]],\ \text{Cos}[\theta[s]]\right\}\right\}$$

In[17]:=
```
(* フレームの直交性の確認 *)
(* F[s]に対してZを挟んで転置行列と掛け合わせることで， F[s]がZに関して直交行列であることを確認。 *)
F[s].Z.Transpose[F[s]] // Simplify
```

Out[17]=

```
{{-1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}
```

In[18]:=
```
(* 各ベクトルおよびその微分間の内積計算 *)
LIP3[Γ '[s], e[s]] // Simplify
LIP3[Γ '[s], n[s]] // Simplify
LIP3[e '[s], Γ[s]] // Simplify
LIP3[e '[s], n[s]] // Simplify
LIP3[n '[s], Γ[s]] // Simplify
LIP3[n '[s], e[s]] // Simplify
```

Out[18]=

Cos[θ[s]]^2

Out[19]=

-Cos[θ[s]] × Sin[θ[s]]

Out[20]=

-Cos[θ[s]]^2

Out[21]=

θ′[s]

Out[22]=

Cos[θ[s]] × Sin[θ[s]]

Out[23]=

-θ′[s]