

Reporte de Actividades

Bartolo García Luis Enrique

03 de Noviembre del 2021

Resumen

Se entregará el avance de los resultados obtenidos sobre las actividades asignadas relacionadas a la tesis.

1. Introducción

El sistema con el que se trabajó es un levitador magnético formado por un resistor conectado en serie con una bobina en el que debajo de ella se sitúa un objeto de masa $m[kg]$ hecho de material ferromagnético, un controlador variará el campo magnético de la bobina lo que generará una fuerza de atracción sobre el objeto modificando su posición vertical $r[m]$ respecto a esta.

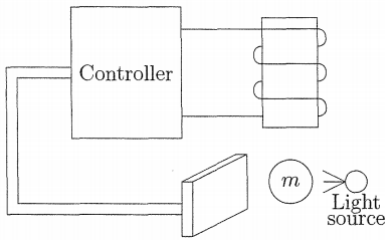


Figura 1: Levitador Magnético

De acuerdo a la descripción del funcionamiento del sistema se plantearon los siguientes objetivos:

- Llevar al objeto antes mencionado a una posición determinada sujeta a ciertas restricciones.
- Implementar controladores lineales como LQR, PD y PID.
- Aplicar controladores no lineales basados en modos deslizantes.
- Obtener un sistema de orden reducido al que se le diseñarán sus propios controladores.
- Controlar al levitador con los controladores diseñados para el sistema de orden reducido.
- Aplicar perturbaciones al sistema para comparar el desempeño de los controladores implementados.

2. Sistema de 3er Orden

Representación del sistema

El sistema está determinado por 3 ecuaciones diferenciales que modelan la parte mecánica y la parte eléctrica:

- $m\ddot{y} + k\dot{y} + mg - F(y, i) = 0$
- $v = \dot{\phi} + Ri$
- $\phi = L(y)i$

Donde m es la masa del objeto, y es la posición vertical del objeto medida desde un punto de referencia ($y = 0$ es justo debajo de la bobina), k es el coeficiente de fricción viscosa, g es la aceleración debido a la gravedad, i es la corriente eléctrica, R es la resistencia eléctrica y ϕ es el flujo magnético.

La funciones auxiliares $L(y)$ y $F(y, i)$ que modelan la inductancia y la fuerza generada por la bobina respectivamente están definidas por:

- $L(y) = L_1 + \frac{L_0}{1 + y/a}$
- $F(y, i) = -\frac{L_0 i^2}{2a(1 + y/a)^2}$

Donde L_0, L_1 y a son constantes positivas.

Para lograr los objetivos planteados se eligió una representación en espacio de estados del sistema donde

$x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, $x_3 = i$ y $u = v$, dando como resultado un sistema de 3er orden que toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_2 - g + \frac{aL_0x_3^2}{2m(a + x_1)^2} \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{L(x_1)}(-Rx_3 + \frac{aL_0x_2x_3}{(a + x_1)^2} + u) \end{aligned}$$

Parámetro	Valor
m	0.1203 [kg]
k	0.01 [N.m/s]
R	1.75[Ω]
L_0	0.245 [H]
L_1	0.1 [H]
g	9.815 [m/s ²]
a	0.0088 [m]

Cuadro 1: Lista de Parámetros.

Para llevar al objeto a una posición de interés y mantenerlo ahí los estados del sistema deben de tomar un conjunto de valores específicos X_d debido a una entrada de valor U_d que harán que $\dot{x} = 0$, a este conjunto de valores se le conoce como punto de operación, para este sistema en concreto será:

$$X_D = \begin{bmatrix} X_{1_D} \\ 0 \\ \sqrt{\frac{2mg}{aL_0}}(a + X_{1_D})^2 \end{bmatrix}$$

$$U_d = R\sqrt{\frac{2mg}{aL_0}}(a + X_{1_D})^2$$

X_{1_D} es la distancia a la cual queremos situar el objeto y se eligió 0.01[m], valor que se mantuvo constante para todas las actividades restantes, obteniendo lo siguiente:

$$X_D = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0 \\ 0.6222 \end{bmatrix}$$

$$U_d = 1.0888$$

Teniendo en cuenta los objetivos planteados, más adelante se agregaron perturbaciones constantes y variables al sistema, para ello se modificaron un poco las ecuaciones de estado anteriores:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_2 - g + \frac{aL_0x_3^2}{2m(a+x_1)^2} + f(t) \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{L(x_1)}(-Rx_3 + \frac{aL_0x_2x_3}{(a+x_1)^2} + u) \end{aligned}$$

Donde $f(t)$ es una perturbación acotada que entra al sistema, de manera concreta se aplicó en la ecuación para \dot{x}_2 ya que en ella se expresan las aceleraciones que actúan sobre el objeto que es movido por la bobina, por lo que el término $f(t)$ lo tenderá a sacar de balance alterando la posición a la que se le quiere llevar, con esto se quiso probar la robustez de los controladores empleados.

Análisis del sistema

Dejando de lado un momento el sistema perturbado y trabajando con el sistema original, el análisis de estabilidad del punto de operación se realizó mediante el Método Indirecto de Lyapunov (MIL), por lo que se requirió linealizar al sistema para obtener una representación $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$, las matrices A , B , C y D se calculan obteniendo el jacobiano del sistema y valuándolo en X_d y U_d .

Para facilitar el proceso se usó un modelo de Simulink junto con el comando linmode de MATLAB, con lo que se obtuvo el valor numérico de las matrices requeridas:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1044.1495 & -0.0831 & 31.5496 \\ 0 & 17.6793 & -8.1516 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4.6581 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ya teniendo esa información, acorde con el MIL se verificaron los eigenvalores de la matriz A los cuales son:

$$\lambda(A) = \{3.2072 \pm 23.89001i, -14.6492\}$$

hay un par de eigenvalores con parte real positiva por lo que se puede concluir que el punto de operación X_d es ISL.

La controlabilidad del sistema se verificó también con ayuda de MATLAB, en específico con los comandos ctrb y rank se calculó la matriz de controlabilidad del sistema linealizado y su rango ρ , al tener esta matriz rango completo se concluyó que el sistema es completamente controlable.

Control del Sistema

Sin Perturbaciones

En este caso se utilizó un controlador LQR, el cual es un control u que minimiza un funcional J de coste sujeto a ciertas restricciones

$$J = \int_0^\infty x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)dt$$

En vez de asignar polos estables, por medio de 2 matrices positivas definidas Q y R se puede ajustar la respuesta del sistema a lo que se requiera, por ejemplo se puede privilegiar más la convergencia de los estados o el gasto energético del control.

La ganancia de control se obtiene como $K = R^{-1}B^TP$, donde P se obtiene de resolver la ecuación algebraica de Riccati

$$A^TP + PA - PBR^{-1}B^TP + Q = 0$$

y el control que entrará al sistema es:

$$u = -K(x - X_d) + U_d$$

Lo siguiente fue implementar leyes de control basadas en modos deslizantes, para este tipo de controladores el sistema tiene que estar en forma de cadena de integradores:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= u \end{aligned}$$

Para lograr aquello, lo primero que se verificó es si el sistema se encontraba en una forma afín al control

$\dot{x} = f(x) + g(x)u$, como el sistema no tenía esa forma se tuvo que buscar una transformación $z = T(x)$ que permitiera llevarlo a la forma anterior:

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 \\ z_2 &= x_2 \\ z_3 &= -\frac{k}{m}x_2 - g + \frac{aL_0x_3^2}{2m(a+x_1)^2} \end{aligned}$$

Después de aplicar dicha transformación se generó el siguiente sistema equivalente:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= f(z) + g(z)u \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{k^2}{m^2}z_2 + \frac{kg}{m} + 2\left(\frac{k}{m}z_2 + g + z_3\right) \\ &\quad \left(-\frac{k}{2m} - \frac{R}{L(z_1)} - \frac{z_2}{a+z_1} + \frac{aL_0z_2}{L(z_1)(a+z_1)^2}\right) \\ g(z) &= \frac{1}{(a+z_1)L(z_1)}\sqrt{\frac{2aL_0}{m}\left(\frac{k}{m}z_2 + g + z_3\right)} \end{aligned}$$

una vez que el sistema obtuvo esa forma se aplicó un control por linealización exacta $u = g(z)^{-1}(\nu - f(z))$ para poder cancelar los terminos $f(z)$ y $g(z)$ del sistema y así finalmente obtener una cadena de integradores, el termino ν puede ser un control lineal o no lineal.

El primer controlador que se aplicó fue:

$$\begin{aligned} u &= g^{-1}(z)(\nu - f(z)) \\ \nu &= -k_1[z_1 - Z_{1D}]^{\frac{1}{4}} - k_2[z_2]^{\frac{1}{3}} - k_3[z_2]^{\frac{1}{2}} \\ [\cdot]^n &= |\cdot|^n \text{sign}(\cdot) \end{aligned}$$

Donde ν es un controlador homogéneo.

El último controlador que se aplicó fue:

$$\begin{aligned} u &= g^{-1}(z)(\nu - f(z)) \\ \nu &= -k_1[z_1 - Z_{1D}]^{\frac{1}{4}} - k_2[z_2]^{\frac{1}{3}} - k_3[z_2]^{\frac{1}{2}} + \eta \\ \dot{\eta} &= -k_4[z_1 - Z_{1D}]^0 - k_5[z_2]^0 - k_6[z_3]^0 \\ [\cdot]^n &= |\cdot|^n \text{sign}(\cdot) \end{aligned}$$

Donde ν es un Controlador Twisting Continuo, todos los resultados que se obtuvieron fueron sin perturbaciones $f(t) = 0$ y se muestran en la Figura 2.

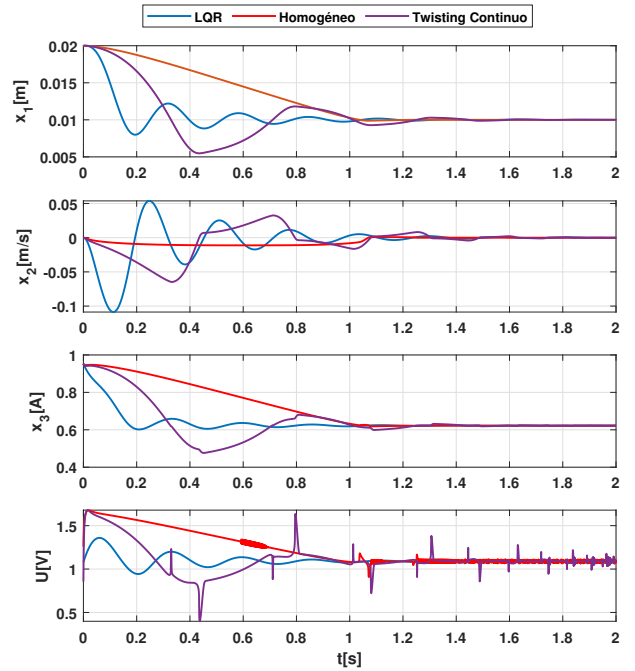


Figura 2: Comportamiento del sistema debido a controladores de 3er orden con $f(t) = 0$

Se puede ver que con los 3 controladores se alcanzó el punto de operación pero con ciertas diferencias en las trayectorias que siguen los estados, el comportamiento debido a los controladores lineales es más rápido y hay convergencia en tiempo finito.

Con Perturbaciones

Para este caso se incluyeron perturbaciones (variables en el tiempo), en concreto fue una suma de senos y cosenos $f(t) = 0.5(\text{sen}(t) + \text{cos}(2t) + 1)$ cuya gráfica se muestra en la Figura 3.

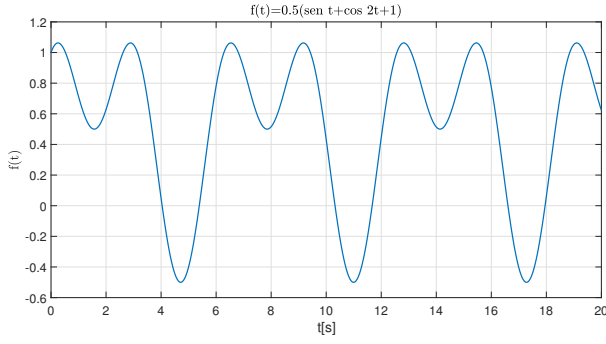


Figura 3: Perturbación variable $f(t) = 0.5(\sin(t) + \cos(2t) + 1)$

Las trayectorias que siguieron los estados y la entrada con este cambio se muestran en la Figura 4.

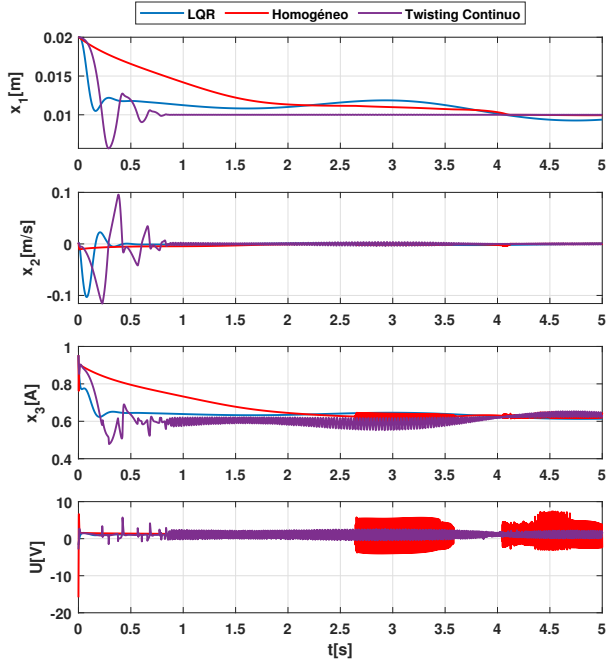


Figura 4: Comportamiento del sistema debido a controladores de 3er orden con $f(t) = 0.5(\sin(t) + \cos(2t) + 1)$

Aquí se pudo ver que el controlador PID no es capaz de rechazar esas perturbaciones pero tampoco el controlador Homogéneo (aunque lo hace mejor), el único que si pudo manejar las perturbaciones es el controlador Twisting Continuo.

3. Sistema de 2do Orden

Aprovechando que el transitorio de la dinámica eléctrica del sistema es estable y más rápida que la mecánica lo siguiente fue hacer una reducción del sistema tomando solo dicha parte mecánica del sistema original o de 3er orden, obteniendo un sistema de 2do orden formado por los estados x_1 y x_2 por lo que x_3 no se consideró para los cálculos, esto fue con el objetivo de analizar su comportamiento y diseñarle controladores.

Representación del Sistema

Con base en la ecuaciones de estado del sistema de 3er orden para x_2 :

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_2 - g + \frac{aL_0x_3^2}{2m(a+x_1)^2}$$

se tomó al termino $L_0x_3^2$ como la nueva entrada de control u y solo se consideraron las ecuaciones para \dot{x}_1 y \dot{x}_2 obteniendo la siguiente representación:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_2 - g + \frac{a}{2m(a+x_1)^2} \cdot u$$

Con un punto de operación X_d debido a una U_d al cual llevar al sistema, tal que $\dot{x} = 0$:

$$X_d = \begin{bmatrix} X_{1D} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$U_d = \frac{2mg}{a}(a + X_{1D})^2$$

Donde X_{1D} es la distancia a la cual queremos situar el objeto, manteniendo 0.01[m] se obtuvo:

$$X_d = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$U_d = 0.0948$$

Control del Sistema

Al igual que en el sistema de 3er orden, para el de 2do orden se diseñó un controlador LQR de la forma $u = -K(x - X_d) + U_d$.

Por lo que con ayuda de MATLAB se tuvo que realizar una linealización del sistema para obtener una representación $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$, los valores numéricos de las matrices A , B , C y D que se obtuvieron son los siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1044.1495 & -0.0831 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 103.4836 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lo siguiente fue comprobar la controlabilidad del sistema, igualmente con la ayuda de MATLAB, una vez que se supo que el sistema es completamente controlable, se calcularon las ganancias para el controlador.

Los siguientes controladores fueron un PD de la forma:

$$u = -k_1 e - k_2 x_2$$

$$e = x_1 - X_{1D}$$

Y un PID de la forma:

$$u = -k_1 e - k_2 \int_0^t e dt - k_3 x_2$$

$$e = x_1 - X_{1D}$$

Con los siguientes controladores primero se llevó al sistema a una forma de cadena de integradores por lo que se siguió un procedimiento parecido al que se había utilizado en el sistema de 3er orden pero con la ventaja que el sistema de 2do orden ya se encontraba en una forma afín al control, debido a ello se implementó un control por linealización exacta $u = g(x)^{-1}(\nu - f(x))$ sin necesidad de hacer una transformación previa, ν puede ser un control lineal o no lineal.

Donde:

$$f(x) = -\frac{k}{m}x_2 - g$$

$$g(x) = \frac{a}{2m(a + x_1)^2}$$

El primer controlador que se diseñó fue:

$$u = g^{-1}(x)(\nu - f(x))$$

$$\nu = -k_1[x_1 - X_{1D}]^{\frac{1}{3}} - k_2[x_2]^{\frac{1}{3}}$$

Donde ν es un controlador homogéneo.

Y el segundo controlador que se diseñó fue:

$$u = g^{-1}(x)(\nu - f(x))$$

$$\nu = -k_1[x_1 - X_{1D}]^{\frac{1}{3}} - k_2[x_2]^{\frac{1}{2}} + \eta$$

$$\dot{\eta} = -k_3[x_1 - X_{1D}]^0 - k_4[x_2]^0$$

Donde ν es un controlador Twisting continuo.

4. Control del sistema de 3er Orden mediante controladores de 2do Orden

Sin Perturbaciones

Todo lo realizado en la sección anterior se hizo con el objetivo de familiarizarse con las características y el comportamiento del sistema para poder aprovecharlas y facilitar la tarea del control, esto quiere decir usar los controladores de segundo orden (los diseñados para el sistema de 2do orden) y con ellos controlar al sistema de 3er orden u original, por lo que se le estaría llevando al punto de operación deseado con la información de solo el estado x_1 y x_2 .

Para lograr ese objetivo lo primero que se hizo fue implementar directamente un control por linealización exacta $u = g(x)^{-1}(\nu - f(x))$ con:

$$f(x) = -\frac{k}{m}x_2 - g$$

$$g(x) = \frac{a}{2m(a + x_1)^2}$$

Esto se pudo hacer, como se había mencionado antes, debido a que el transitorio de la dinámica de la parte eléctrica del sistema es estable y se desvanece muy rápido dejándonos prácticamente con un sistema de 2do orden en el que se encuentra la información de la parte mecánica más lenta que domina el comportamiento transitorio del sistema de 3er orden.

Como solo se controlaron los estados x_1 y x_2 se hicieron ajustes en las ganancias de los controladores de 2do orden empleados para compensar que no se tomó en cuenta la parte eléctrica.

El primer controlador que se utilizó fue:

$$u = g^{-1}(x)(\nu - f(x))$$

$$\nu = -k_1 e - k_2 x_2$$

$$e = x_1 - X_{1D}$$

Donde ν es un control PD.

El segundo controlador que se utilizó fue:

$$u = g^{-1}(x)(\nu - f(x))$$

$$\nu = -k_1 e - k_2 \int_0^t e dt - k_3 x_2$$

$$e = x_1 - X_{1D}$$

Donde ν es un control PID.

El tercer controlador que se utilizó fue:

$$u = g^{-1}(x)(\nu - f(x))$$

$$\nu = -k_1[x_1 - X_{1D}]^{\frac{1}{3}} - k_2[x_2]^{\frac{1}{3}}$$

Donde ν es un control homogéneo.

El último controlador que se utilizó fue:

$$\begin{aligned}
 u &= g^{-1}(x)(\nu - f(x)) \\
 \nu &= -k_1[x_1 - X_{1D}]^{\frac{1}{3}} - k_2[x_2]^{\frac{1}{2}} + \eta \\
 \dot{\eta} &= -k_3[x_1 - X_{1D}]^0 - k_4[x_2]^0
 \end{aligned}$$

Donde ν es un control Twisting continuo.

Sin considerar perturbaciones los resultados que se obtuvieron se muestran en la Figura 5.

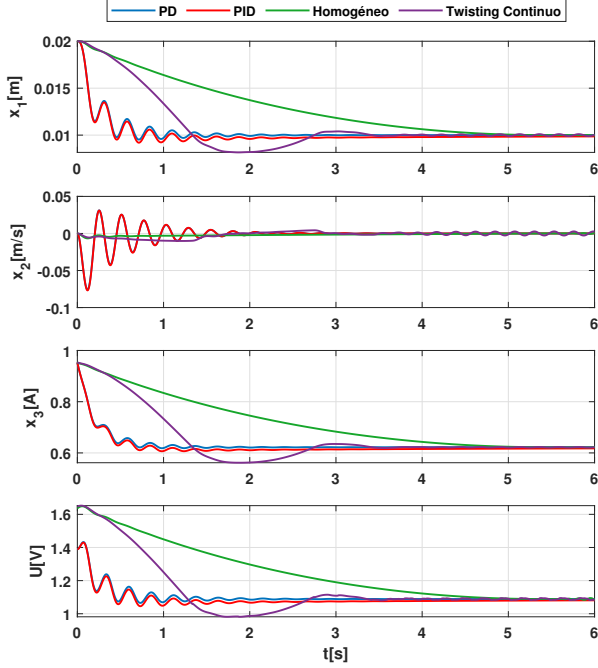


Figura 5: Comportamiento del sistema debido a controladores de 2do Orden con $f(t) = 0$

Se observó que estos controladores también son capaces de llevar al sistema al punto de operación o cuando menos a una región cercana a él, pero tomándose más tiempo para ello.

Con Perturbaciones

Lo siguiente que se hizo fue cambiar a perturbaciones constantes y variables eligiendo $f(t) = 0.5$ y $f(t) = 0.5(\sin(t) + \cos(2t) + 1)$, el como respondieron los estados del sistema y su entrada se muestran en las Figuras 6 y 7 respectivamente.

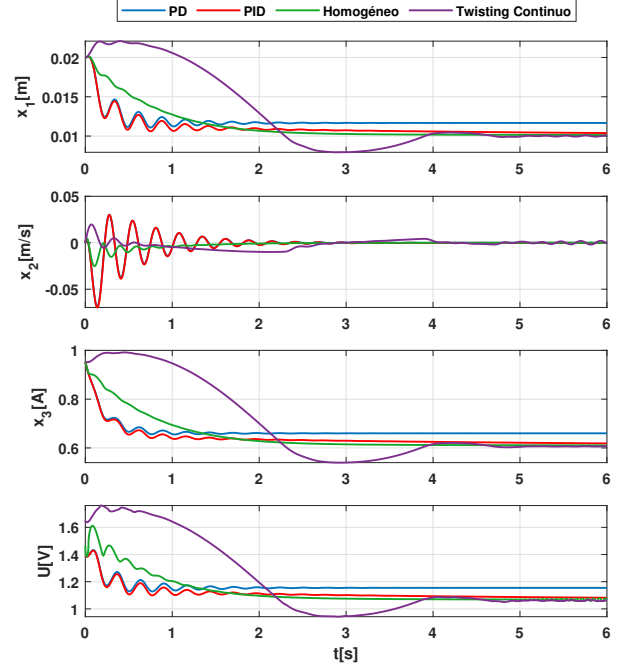


Figura 6: Comportamiento del sistema debido a controladores de 2do Orden con $f(t) = 0.5$

En este caso el controlador PD fue el único incapaz de llevar al sistema al punto de operación, siempre hubo un error en estado estacionario, pudo estabilizar al sistema pero los estados quedaban muy lejos de los valores deseados.

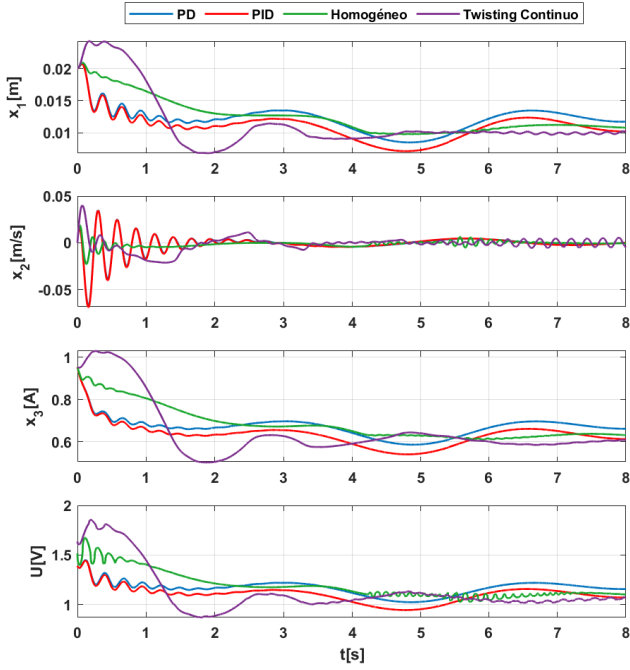


Figura 7: Comportamiento del Sistema debido a controladores 2do Orden con $f(t) = 0.5(\sin(t) + \cos(2t) + 1)$

Aquí solo el Controlador Twisting Continuo pudo llevar al sistema a una región cercana del punto de operación, fue quien mejor manejo la perturbación variable, el PID ya no pudo rechazarla, tampoco el controlador Homogéneo pero tuvo un desempeño no tan malo.

Comparación entre controladores

Como se pudo observar en las gráficas mostradas antes, al aplicar controladores lineal y no lineales de 2do y 3er orden al sistema original sin perturbaciones se logró alcanzar y permanecer en el punto de operación establecido pero con diferencias en el desempeño entre las diferentes técnicas empleadas por lo que con base en ciertos criterios y dependiendo de la aplicación así como de los recursos disponibles surgirán tanto ventajas como desventajas.

Una forma de hacer más notorias estas diferencias de desempeño fue aplicar perturbaciones constantes y variables para ver la robustez de los controladores empleados

pero siempre con controladores del mismo orden, por lo que lo siguiente fue contrastar en una misma gráfica el comportamiento de los estados y la entrada del sistema debido a controladores de 2do Orden y su contraparte de 3er Orden, recordando que se quiere llegar a:

$$X_D = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0 \\ 0.6222 \end{bmatrix}$$

$$U_d = 1.0888$$

Controladores Lineales

Se compararon los estados y entrada del sistema debido a controladores lineales de 2do Orden como el PD y el PID además del LQR de 3er Orden con perturbaciones constantes y variables, los resultados obtenidos se muestran en las Figuras 8 y 9 respectivamente.

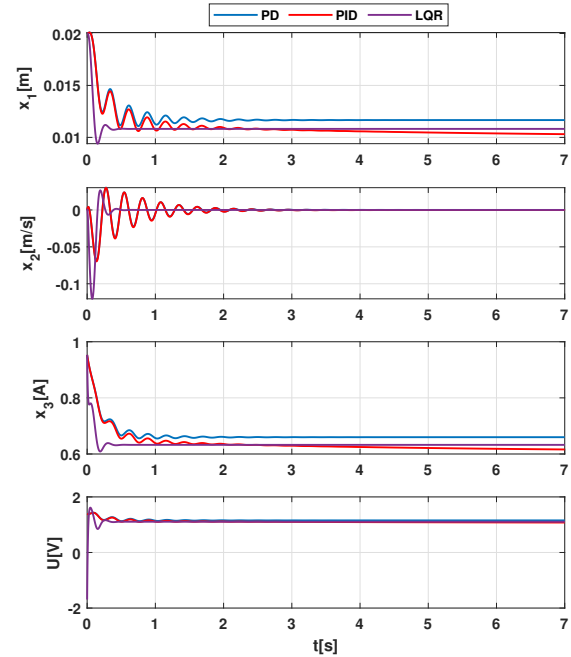


Figura 8: Comportamiento del sistema debido a controladores lineales de 2do y 3er orden con $f(t) = 0.5$

Como se había observado antes, el controlador PID fue el único capaz de lidiar con la perturbación constante, ni siquiera el LQR (aunque fue el más rápido en estabilizar al sistema).

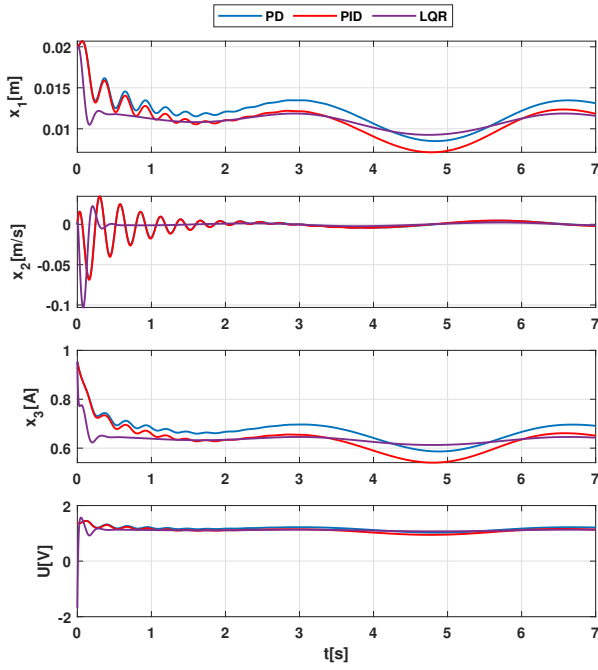


Figura 9: Comportamiento del sistema debido a controladores lineales de 2do y 3er orden con $f(t) = 0.5(\sin(t) + \cos(2t) + 1)$

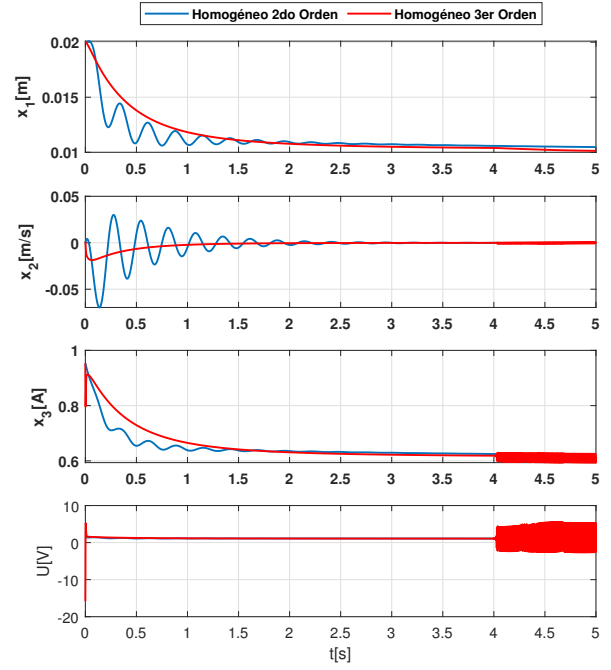


Figura 10: Comportamiento del sistema debido a controladores Homogéneos de 2do y 3er Orden con $f(t) = 0.5$

En esta situación ya ninguno de los 3 controladores fue capaz de lidiar de buena manera con la perturbación variable.

Controladores no Lineales

Por último se compararon los estados y entrada del sistema debido a controladores no lineales de 2do y 3er Orden como el Homogéneo y Twisting Continuo con perturbaciones constantes y variables, los resultados obtenidos se muestran en las figuras 10 a 13.

Como se puede ver en las gráficas el controlador Homogéneo de 3er Orden tuvo un mejor desempeño al manejar la perturbación constante, pero eso no quiere decir que no sea aceptable el controlador de 2do Orden, una ventaja que tiene es que la señal de control que produce no es tan abrupta como la del controlador de 3er Orden.

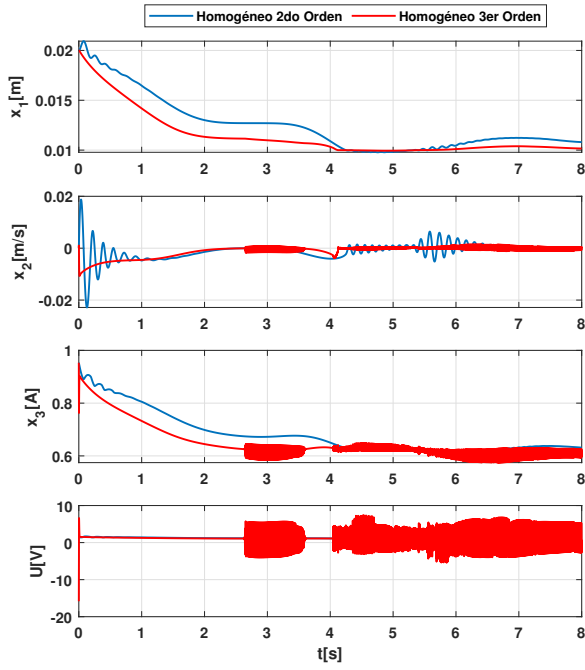


Figura 11: Comportamiento del sistema debido a controladores Homogéneos de 2do y 3er Orden con $f(t) = 0.5(\sin(t) + \cos(2t)) + 1$

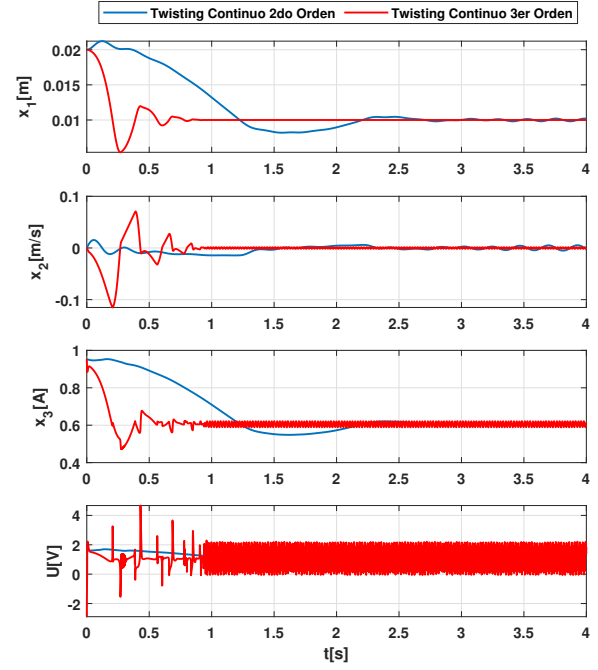


Figura 12: Comportamiento del sistema debido a controladores Twisting Continuos de 2do y 3er Orden con $f(t) = 0.5$

Ninguno de los 2 controladores pudo rechazar de buena manera la perturbación variable, sin embargo el controlador de 3er Orden tuvo un mejor desempeño.

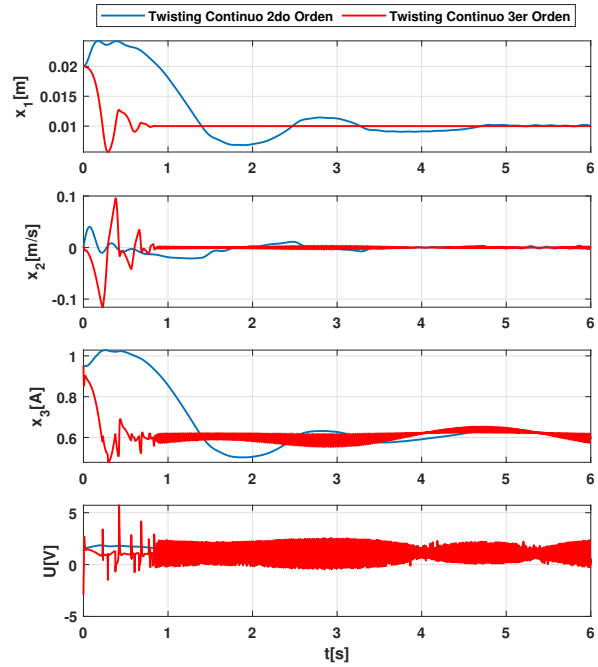


Figura 13: Comportamiento del sistema debido a controladores Twisting Continuos de 2do y 3er Orden con $f(t) = 0.5(\sin(t) + \cos(2t)) + 1$

Tanto con perturbaciones variables como constantes se tuvo un comportamiento aceptable, los controladores son capaces de rechazarlas pero el controlador de 3er Orden hace que el sistema converga al punto de operación más rápido pero produciendo señales de control muy abruptas.

5. Conclusiones

Se pudieron observar diferencias como un mayor tiempo de convergencia de los estados y mayor comportamiento oscilatorio en las trayectorias del sistema debido al controlador de 2do Orden respecto del 3er Orden ya que al estado x_3 se le deja libre, no se le controla, se tiene que esperar a que converga a su estado estacionario para que x_1 y x_2 puedan converger también, antes de ello solo se les mantiene acotados.

Otra forma de interpretar estas diferencias es haciendo distinción entre controladores lineales y no lineales, en las que una de las más importantes fue la capacidad de rechazar perturbaciones tanto constantes como variables, dicha capacidad fue mejor entre los controladores no lineales además de hicieron que los estados del sistema tengan una mayor rapidez de convergencia al punto de operación, pero con la desventaja que por ejemplo comparandolo con el PID producían señales de control más accidentes y en el caso del controlador Homogéneo con saltos muy pronunciados (también en el LQR pero eso fue debido a las altas ganancias que se eligieron).

6. Referencias

- Khalil, H.. (2002). Nonlinear Systems. USA: Prentice Hall.
- Moore, J.. (1989). Optimal Control Linear Quadratic Method. USA: Prentice Hall.
- Slotine, J. J. E., & Li, W. (1991). Applied nonlinear control (Vol. 199, No. 1). Englewood Cliffs, NJ: Prentice hall.
- Williams, R. L., & Lawrence, D. A. (2007). Linear state-space control systems. John Wiley & Sons.