

修士論文

低エネルギー有効理論に対する制約条件の探索: 沼地問題および正值性条件

京都大学基礎物理学研究所

池田 賢矢

2023 年 1 月 25 日

概要

沼地問題は、量子重力理論と現象論モデルの整合条件を探索する取り組みである。沼地問題では沼地予想と呼ばれる一連の予想により低エネルギー有効理論に対する制約を与えることで、現象論と量子重力を関連付けることが目指されている。一方、理論の散乱振幅に対するユニタリ性をはじめとする物理的仮定のみから出発して低エネルギー有効理論に対する制約条件を与える手法も発展しており、この手法により導かれるのが有効結合定数に対する正值性条件である。本修士論文ではこの沼地問題と正值性条件の2つのアプローチにより低エネルギー有効理論に制約を与える議論について総説する。また後半の研究パートにおいて、三重積振幅と呼ばれる新しいクラスの散乱振幅を用いた正值性条件の探索について述べる。

目次

第 1 章	導入	3
1.1	概要: 量子重力の探索	3
1.2	本論文の構成	6
第 1 部	沼地問題および正値性条件のレビュー	7
第 2 章	沼地予想	8
2.1	大域的対称性の非存在予想	8
2.1.1	主張内容	8
2.1.2	具体例	9
2.1.3	証拠	11
2.2	弱い重力予想	14
2.2.1	荷電ブラックホールの extremal 条件	14
2.2.2	主張内容	15
2.2.3	証拠	23
第 3 章	散乱振幅の一般論	27
3.1	散乱振幅に関する基本事項	27
3.1.1	解析性	29
3.1.2	ユニタリ性	30
3.1.3	部分波展開	32
3.2	正値性条件	34
3.2.1	理論に対する仮定	35
3.2.2	散乱振幅の低エネルギー展開	36
3.2.3	分散関係式	37
3.2.4	最適化問題	39
3.2.5	数値計算の実行	41
3.2.6	許容領域に対する解析的考察	43
第 4 章	散乱振幅の具体形	48
4.1	弦理論振幅	48
4.1.1	Virasoro-Shapiro 振幅の導出	48

4.1.2	弦理論振幅の具体例	51
4.2	三重積振幅	53
4.2.1	非重力の場合	53
4.2.2	重力を含む場合	55
第 2 部	研究: 三重積振幅による正值性条件の探索	59
第 5 章	三重積振幅による正值性条件の探索	60
5.1	問題設定: 正值性条件の十分性の検証	60
5.2	有効結合定数を求める手法	62
5.3	結果	64
5.4	考察	65
第 6 章	まとめと展望	68
付録 A	弦理論振幅の計算の詳細	70
参考文献		72

第 1 章

導入

1.1 概要: 量子重力の探索

素粒子物理学において最大のテーマの一つは、相互作用の統一的な記述である。現在確立されている素粒子標準模型では、電磁気力、強い力、弱い力の 3 つが記述され、加速器実験の大部分が矛盾なく説明されている。また大統一理論では、これら 3 つの相互作用が 1 つのゲージ理論に統合される。しかし標準模型、大統一理論ともに、重力は記述に含まれていない。すなわち相互作用の統一において最後に残っている困難が重力の量子化である。

重力を伝播する自由度は massless スピン 2 の重力子であり、重力を通常の場合の理論の枠組みで量子化しようとするときくりこみ可能な理論としての記述は出来ない。重力を取り入れた場の理論を考えたい場合、低エネルギー有効理論 (Effective Field Theory, 以下 EFT と表記) としての扱いがなされる。低エネルギー有効理論とは、低エネルギーの自由度のみで物理を有効的に記述する近似理論である。その有効 Lagrangian は次のような形式で書かれる。

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_{\text{ren}} + \sum_{n=d}^{\infty} \frac{g_n \mathcal{O}_n}{\Lambda^{n-d}}. \quad (1.1)$$

ここで第 1 項 \mathcal{L}_{ren} はくりこみ可能な部分である。第 2 項はスケール Λ より上の高エネルギーの自由度を積分して粗視化した結果生じる項であり、 \mathcal{O}_n がくりこみ不可能な高階微分項を表している。 Λ はカットオフと呼ばれ、EFT の適用限界のエネルギースケールに対応する。この EFT により低エネルギー領域では重力の量子論が記述可能となる。ただし高エネルギーの理論がどのような自由度で記述されるかは低エネルギー側の情報だけでは不明であるため、量子重力理論の直接的探索には別のアプローチも必要となる。

量子重力理論の最も有望な候補として、弦理論がある。弦理論の基本的構成要素は、1 次元的に広がった物体の弦である。弦には開弦と閉弦があり、閉弦の振動モードが重力を含んでいると見なせる。また弦が広がりを持つことで弦理論における相互作用は非局所的となり、このため点粒子の理論に存在した高エネルギー発散が弦理論では取り除かれると解釈できる。ただし弦理論が無矛盾に構成できるのは臨界次元と呼ばれる特定の次元においてのみであり、フェルミオンを含む超弦理論の臨界次元は 10 次元である。このため超弦理論の低エネルギー有効理論として 4 次元の理論を得るには、時空 10 次元のうち 6 次元はコンパクト化されなければならない。コンパクト化の方法には様々な仕方があり、それに応じて非常に多数の弦理論の真空が生じる。その中から標準模型に対応する真空を一意的に得る方法は確立されていない。

より近年では、量子重力理論はホログラフィー原理によっても探索されている。特に AdS/CFT 対応では一般に、AdS 時空中の重力理論が、境界のある種のゲージ理論と等価であることが対応づけられる。この対応がよ

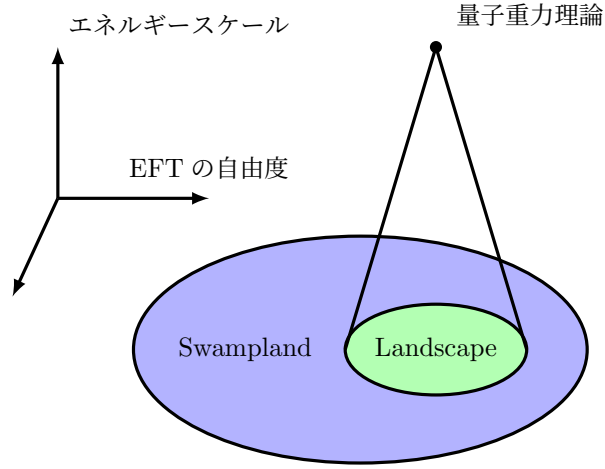


図 1.1 沼地問題の概念図

く示されているのは large N 極限の領域であり、この領域では重力の効果は古典的になる。一方、有限 N の領域を解析できれば、量子重力効果を含む領域を調べられると期待される。ホログラフィー原理により様々な理解が進められているものの、量子重力が完全に理解されたという状況には未だ遠い。

量子重力を実験により直接検証することも困難である。4 次元時空において量子重力理論の効果が典型的に現れるのは、次の Planck スケールの領域である。

$$M_P \sim \sqrt{\frac{c\hbar}{G_N}} \sim 10^{19} \text{ GeV} . \quad (1.2)$$

ここで c は光速、 \hbar は換算 Planck 定数、 G_N は Newton 定数である。これは現状加速器実験で可能なエネルギースケールより遥かに大きい。一方 Eötvös 型の実験では量子重力の効果による重力ポテンシャルへの補正の影響が観測できる可能性はあるが、現在のところその影響は明確ではない。

沼地問題

このように、量子重力理論は様々な方面から追求されながら未完成であり、特に実験可能な領域の物理と関連づけることは難しい。この量子重力理論をめぐる状況に対し、新しい手がかりを与えうる議論の枠組みが沼地問題 (Swampland program) である。沼地問題とは、沼地予想の観点から量子重力理論と現象論模型の整合条件を探索する取り組みである [1]. ^{*1}ここで沼地予想 (Swampland conjectures) とは、量子重力の考察から提起される、低エネルギー有効理論が量子重力理論と整合するための制約条件である。例えば弦理論のコンパクト化の議論では、重力と結合した低エネルギー有効理論のうち弦理論に紫外補完されるものは一部のみであることが経験的に知られている。このことから一般に、低エネルギー有効理論が弦理論への紫外補完を持つためには、ある制約条件を満たさなければならないことが示唆される。

低エネルギー有効理論全体の集合のうち、この制約を満たす部分を Landscape(風景)、満たさない部分を Swampland (沼地) と呼ぶ (図 1.1)。沼地予想以外の観点において一見無矛盾な現象論模型が真に無矛盾と

^{*1} ここで量子重力理論として、特定の理論を仮定しない立場と、弦理論のみを考える立場があるが、本論文では基本的に後者の弦理論のみを考える立場で議論する。また両者は等しい、すなわち弦理論の Landscape により量子重力理論全体の Landscape が尽くされるという仮説もあり、String Lamppost Principle と呼ばれる。

なるには、さらに Landscape に入るという条件を満たすことが必要になる。このように現象論と量子重力を関連付け定量的な予言を与えることを目指して、沼地予想の提起, 検証, 精密化, 応用などが活発に取り組まれている。

提起されている沼地予想のうち最も基礎的なものは、大域的対称性の非存在予想である。この予想にはブラックホールのエントロピーの有界性に基づく議論など、複数の証拠となる議論にもとづいている。これらの証拠は幾分定性的であり厳密に証明されたとは言えないが、沼地予想の中では最も広く信じられる主張である。また他の多くの沼地予想は、この大域的対称性の非存在予想を出発点として導かれる。そのため大域的対称性の非存在予想は沼地問題においてもっとも基本的な予想であるといえる。

また沼地予想の中でも主な予想の一つとして、弱い重力予想がある。これは大まかには、Planck 質量を単位として重力とゲージ力を比べたとき、重力がより弱くはたらく状態の存在を要請する予想である。この弱い重力予想にもいくつかの証拠があり、代表的なものは荷電ブラックホールの安定性の考察である。しかしこの議論は extremal ブラックホールの崩壊先の存在という仮定にもとづいており、完全な証明とはいえない。そのためより堅牢な仮定にもとづく別の議論が探索されてきた。

正值性条件

一方そのような中で、上記のような量子重力の特徴にもとづく議論とは異なるアプローチにより低エネルギー有効理論の理論空間に制限を与える手法も発展している。それは、理論に対する物理的に妥当な基本的仮定のみから出発して低エネルギー有効理論の高階微分項の係数に制約条件を与えるという方針であり、正值性条件と呼ばれる。ここで基本的仮定とは、Lorentz 不変性、ユニタリ性、因果性、解析性、局所性、有界性、交差対称性である。これらのうち考える系に応じた複数の性質を、議論の出発点となる公理として設定する。

正值性条件は、高エネルギー理論と低エネルギー有効理論を関連づける分散関係式から導かれる、有効結合係数に対する制約条件である。ここで高エネルギー理論とは低エネルギー有効理論のカットオフスケール以上の領域の理論を指しており、重力を含めて考える場合には高エネルギー理論は量子重力理論であると設定される。散乱振幅の解析性の仮定のもとで、散乱振幅を複素関数へと解析接続することができる。このとき複素平面において 1 粒子状態は極、多粒子状態は分枝切断として表現される。この複素平面上での積分経路の変形により高エネルギー理論と低エネルギー有効理論を関連づけることができる。それにより有効結合係数 (式 (1.1) の g_n) はある範囲に収まるよう制約され、これらが正值性条件と呼ばれる。

この手法の強力な点は、高エネルギー領域の理論についてユニタリ性、解析性、因果性の仮定以外には、理論の詳細は未知であってよい点である。特に高エネルギー理論が弱結合であるとも仮定されないため、摂動論に限定されない議論となっている。このような散乱振幅についての基本的性質のみから出発して理論を決定する議論は一般に S-matrix bootstrap と呼ばれ、沼地問題の発展以前においても古くから物理学の発展上重要な役割を果たしてきた。例えば W ボゾン散乱振幅においてユニタリ性を満たすためには未発見の粒子が必要であることが予言され、その後に Higgs 粒子が発見されている。

近年の発展として、重力を含む理論における正值性条件である重力正值性条件が考察されている。このとき重力子が massless スピン 2 粒子である点に起因して、重力特有の発散の問題が生じる。この問題を回避するための方法は複数議論されており、その 1 つでは弱い重力予想の導出につながりうる新たな条件が得られる。この重力正值性条件は重力と結合した EFT を制約する点で、広い意味での沼地問題の一環と言える。

このように、EFT への制約条件を与える取り組みは、量子重力的アプローチと S 行列的アプローチの両面から推し進められている。その中で特に定量的な予言を与えられるのが量子重力的アプローチにおいては弱い重力予想、S 行列的アプローチにおいては正值性条件である。そこで本修士論文ではこの弱い重力予想と正值

性条件を中心として,EFT への制約条件を与える取り組みについて総説する.

1.2 本論文の構成

本論文は大きくレビューパートと研究パートに分かれる. まずレビューパートである第 1 部では, EFT の理論空間に制限を与える 2 通りのアプローチである沼地問題および正值性条件について総説する. 2 章では沼地予想のうち大域的対称性の非存在予想および弱い重力予想について説明する. 3 章では, 散乱振幅の基本的性質について述べたのち, 低エネルギー有効理論の結合係数に対する正值性条件を導く. 4 章では, 具体的散乱振幅の例として弦理論振幅および三重積振幅について述べる.

研究パートである第 2 部では現在進行途中の研究 [2] について述べる. 5 章では, 三重積振幅と正值性条件の許容領域の関係について調べる現在進行途中の研究について述べる.

第 1 部

沼地問題および正值性条件のレビュー

第 2 章

沼地予想

沼地問題 (Swampland Program) とは沼地予想の形で量子重力理論と現象論モデルの整合条件を決定する取り組みである。沼地問題では量子重力理論が満たすべき性質を出発点として、重力と結合した低エネルギー有効理論への制約条件が与えられる。本論文では沼地予想のうち、特に大域的対称性の非存在予想および弱い重力予想の 2 つについて述べる。まず初めに 2.1 節では、最も基本的な沼地予想である大域的対称性の非存在予想について [3] [4] [5] に基づき主張内容、例、証拠を解説する。続く 2.2 節では本論文で中心的に扱う弱い重力予想について [3] [6] に基づき解説する。弱い重力予想には複数の派生形があるため、これらの主張内容、例、証拠を順を追って説明する。また沼地問題全体の総説的資料としては [3, 6–10] があり、本章全体の記述はこれらを参考としている。

2.1 大域的対称性の非存在予想

2.1.1 主張内容

沼地問題において最も基本的な予想が、次の大域的対称性の非存在予想である。

大域的対称性の非存在予想 (No global symmetry conjecture)

量子重力理論に大域的対称性は存在しない。すなわち、重力を含む EFT が大域的対称性を持つならば、高エネルギー領域への紫外補完を考えると、その対称性は破れるか、ゲージ化されるかのいずれかでなければならない。

ここで大域的対称性とは、対称性変換を生成するユニタリ演算子の存在によって特徴づけられる。正確には、次のように定義される。

定義 1. ある理論に大域的対称性が存在するとは、群 G の元 $g \in G$ に対応した局所ユニタリ演算子 $U(g)$ が存在し、次の条件を満たすことをいう：

1. 群の合成則を満たす：

$$U(g)U(g') = U(gg') . \quad (2.1)$$

2. Hilbert 空間に対し非自明に作用する：局所荷電演算子 $\mathcal{O}(x)$ が存在し、

$$U^\dagger(g)\mathcal{O}(x)U(g) \neq \mathcal{O}(x) . \quad (2.2)$$

ゲージ場と結合した理論の場合、この $\mathcal{O}(x)$ はゲージ不変に定義されていなければならない。

3. エネルギー運動量テンソルが $U(g)$ による変換のもとで不変である。

$$U^\dagger(g)T_{\mu\nu}(x)U(g) = T_{\mu\nu}(x) . \quad (2.3)$$

4. $U(g)$ による変換で、局所演算子は局所演算子に写る。

1つ目の条件は対称性演算子どうしの合成則を規定する条件である。2つ目の条件は対称性演算子が作用する対象の存在を要請しており、群作用が忠実である条件とも言い換えられる。3つ目の条件は局所的なエネルギー保存の条件であり、対称性演算子が理論の Hamiltonian と可換であることと等価である。4つ目の条件は対称性変換の下での理論の局所性を保証するものである。

なお、これらは通常の対称性に対する定義だが、この定義はより一般的な形に拡張することができる。例えば1つ目の条件の式 (2.1) の群の合成則の条件は、より一般的な合成則へと緩めることができる。そのような拡張は一般化対称性と呼ばれ、沼地問題への応用も研究されている [11]。

注意として、large ゲージ変換は上記の大域的対称性の定義に含まれず、大域的対称性の非存在予想に違反することなく存在できると考えられる。ここで large ゲージ変換とは、ゲージ変換のパラメタを無限遠で減衰しない定数にとったときの変換で、ゲージ変換の global part とも呼ばれる。この場合には定義1の2つ目の条件を満たすゲージ不変な荷電演算子が一般に存在しないため、この定義では大域的対称性には含まれないとみなされる。

大域的対称性の非存在予想は、定義1で定められる大域的対称性存在は量子重力理論では禁止されるということを主張している。その根拠となる議論は次の 2.1.3 節で述べる。以下ではまず大域的対称性の例を複数提示する。

2.1.2 具体例

例 1. 典型的な通常の大域的対称性の例として、axion ϕ の shift symmetry

$$\phi \rightarrow \phi + c \quad (2.4)$$

を考える。ここで c は任意定数である。この対称性変換に付随するカレントは $j = d\phi$ である。これを用いて対称性演算子は

$$U = \exp \left(i\alpha \int *j \right) \quad (2.5)$$

と構成される。また電荷 q の荷電演算子は

$$\mathcal{O}(x) = \exp(iq\phi) \quad (2.6)$$

と構成することができる。

この理論が量子重力理論として無矛盾であるためには、大域的対称性の非存在予想から、この対称性を破るかゲージ化しなければならない。対称性を破るには、この axion 場を電荷を持った別の場と結合させることが一つの手段である。一方、対称性をゲージ化するには、axion 場をゲージ場と結合させる。ここではこのゲージ化の例を見る。

Lagrangian に $\int A \wedge *j$ の結合を加えることで、 ϕ の運動項は

$$\mathcal{L} \supset (d\phi - A)^2 \quad (2.7)$$

と共変微分の形になる．すると次のゲージ変換:

$$\begin{cases} \phi & \rightarrow \phi + c(x), \\ A & \rightarrow A + dc(x) \end{cases} \quad (2.8)$$

の下で Lagrangian は不変となる．ゲージ化の後には $\mathcal{O}(x)$ はゲージ不変でなくなるため，定義 1 の 2 つ目の条件を満たさない．このようにすることで大域的対称性の非存在定理との矛盾はなくなる．

例 2. 次に大域的 p -形式対称性の例を考える．ここで見る p -形式対称性とは，次の p -形式 $U(1)$ ゲージ場 A_p に対する変換

$$A_p \rightarrow A_p + \lambda_p \quad (2.9)$$

の下での対称性である．ここで λ_p は閉 p -形式である．この対称性はゲージ場が持つ大域的対称性である．このような高次形式対称性に対しても大域的対称性の非存在定理は適用されると考えられる．

カレントは $J_{p+1} = dA_p$ であり，対称性演算子は次のように定義される．

$$U_\alpha(M^{d-p-1}) = \exp \left(i\alpha \oint_{M^{d-p-1}} *J_{p+1} \right) . \quad (2.10)$$

ここで積分は $(d-p-1)$ 次元多様体 M^{d-p-1} 上で行われている．一方対応する荷電演算子は， p 次元多様体 γ_p 上で定義され，Wilson line 演算子と呼ばれる．

$$\mathcal{O}(\gamma_p) = \exp \left(in \oint_{\gamma_p} A_p \right) . \quad (2.11)$$

この大域的 p -形式対称性についても先ほどの例と同様に，破るかゲージ化しなければならない．ここではゲージ化の例を説明する．ゲージ化するには，カレントと $(p+1)$ -形式ゲージ場 B_{p+1} を結合させる．すなわち $\int B_{p+1} \wedge *J$ の結合を Lagrangian に加える．その結果，式 (2.7) と同様の形式

$$\mathcal{L} \supset (dA_p - B_{p+1})^2 \quad (2.12)$$

となる．この操作によりゲージ不変な荷電演算子は存在しなくなり，量子重力理論として無矛盾となる．なお弦理論においても，典型的には Chern-Simons 項の存在によりこのようなゲージ化が起こることが知られている．

例 3. 最後に離散対称性の例を考える．大域的対称性の非存在予想は，離散対称性についても連続対称性と同様に破るかゲージ化されることを要求する．ここで離散対称性に対するゲージ化とは，対称性変換が時空の diffeomorphism (あるいは reparametrization) の一部となることをいう．すなわちゲージ化された対称性変換とは真に状態に作用するものではなく，理論の記述の冗長性を反映したものである．

そのような離散対称性を持つ量子重力理論の例として $E_8 \times E_8$ ヘテロティック弦理論を考える．これは超弦理論の 1 つであるヘテロティック弦理論のうち $E_8 \times E_8$ のゲージ群を持つ理論である．この理論のスペクトルには，超対称多重項に加え，それぞれのゲージ対称性 E_8 について随伴表現であるベクトル多重項が存在

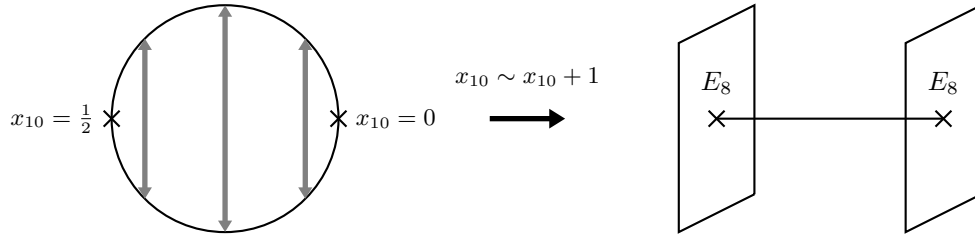


図 2.1 $E_8 \times E_8$ ヘテロティック弦理論と等価な S^1/\mathbb{Z}_2 上の M 理論.

する. 単一の E_8 についての随伴表現は 248 次元であるため, ベクトル多重項には $E_8 \times E_8$ について $(248, 1)$ 表現および $(1, 248)$ 表現の場が存在する. すなわち 2 つの E_8 は全く同じ構造をしているため, この理論には 2 つの E_8 群を入れ替える \mathbb{Z}_2 対称性が存在する. この \mathbb{Z}_2 対称性は一見大域的対称性にも見える. しかしこの対称性はゲージ化されているため, 大域的対称性の非存在予想には抵触しないと考えられている.

このことは以下に述べる幾何的解釈から理解される. $E_8 \times E_8$ ヘテロティック弦理論は, 強結合極限において M 理論を線分 S^1/\mathbb{Z}_2 上にコンパクト化したものと等価であることが知られている. この様子を図 2.1 に示した. ここでコンパクト化方向を x_{10} と書き, 円周長 1 の S^1 へのコンパクト化を考えている. 図の左側の S^1 における上下の矢印は \mathbb{Z}_2 による同一視

$$x_{10} \sim x_{10} + 1 \quad (2.13)$$

を表しており, $x_{10} = 0, \frac{1}{2}$ はその固定点である. この同一視を取ると図の右側のように S^1/\mathbb{Z}_2 は線分で図示され, その両端の平面はノンコンパクト方向の広がりを表している. この描像では線分 S^1/\mathbb{Z}_2 の両端 $x_{10} = 0, \frac{1}{2}$ に E_8 群が付随するとみなすことができる. いま問題の \mathbb{Z}_2 変換はこの線分についての反転であるが, これは

$$x_{10} \rightarrow x_{10} + \frac{1}{2} \quad (2.14)$$

という並進により実現できる. この並進は時空の diffeomorphism の特別な場合であるとみなせるため, \mathbb{Z}_2 変換は離散ゲージ対称性であると解釈される.*¹

以上が大域的対称性およびそのゲージ化の典型的な例である. 後述する他の沼地予想の大部分は, ここで述べた大域的対称性の非存在予想を出発点として導かれる. そのため大域的対称性の非存在予想は沼地問題においてもっとも基本的な予想であるといえる.

2.1.3 証拠

大域的対称性の非存在予想には複数の証拠となる議論が提起されている. ここではそれらのうち代表的なものの 2 つを述べる.

*¹ type IIB 超弦理論の $SL(2, \mathbb{Z})$ 対称性に対しても同様の議論が可能である. $SL(2, \mathbb{Z})$ 変換についてはトーラスに対する diffeomorphism の一部であることから, ゲージ化された離散対称性であると解釈される.

弦理論の連続対称性

代表的な議論の一つとして、弦理論における連続対称性の議論から大域的対称性の非存在予想を動機づけることができる。ここでは摂動的弦理論における議論 [4, 12–14] を紹介する。

簡単のためボゾン弦理論を考える (同様の議論は超弦理論にも適用できる)。ボゾン場 X^M についての世界面理論は 2 次元共形場理論であり、一般的な背景時空での世界面作用は次のように書ける。

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z [G_{MN}(X)\partial X^M\bar{\partial}X^N + B_{MN}(X)\partial X^M\bar{\partial}X^N + \alpha'R\Phi(X)] \quad (2.15)$$

ここで $M = 0, 1, \dots, 25$ であり、 G_{MN} は標的空間の計量テンソル場、 B_{MN} は反対称テンソル場、 $R\Phi(X)$ はディラトン項である。背景時空が平坦の場合には、 $G_{MN} = \eta_{MN}$ 、 $B_{MN} = 0$ となり Polyakov 作用に帰着する。

このもとで、世界面の大域的対称性を考える。対称性が存在するとき、次の形の世界面電荷が定義できる。

$$Q = \frac{1}{2\pi i} \oint (dzJ - d\bar{z}\bar{J}) . \quad (2.16)$$

ここで J, \bar{J} は世界面上の保存カレントである。この世界面電荷に対する共形不変性のため、右辺の共形ウェイトは合計 0 でなければならない。よって J, \bar{J} はそれぞれウェイト $(1, 0)$ および $(0, 1)$ のプライマリ演算子として変換することが要求される。

一般にウェイト $(1, 0)$ および $(0, 1)$ のプライマリ演算子の保存カレント J, \bar{J} が存在する場合、

$$\int d^2z V(z, \bar{z}), \quad V(z, \bar{z}) = \epsilon_\mu J \bar{\partial} X^\mu e^{ik \cdot X} \quad (2.17)$$

という形の頂点演算子が構成できる。このような頂点演算子の構成の最も簡単な例としては、重力波背景時空における Kaluza-Klein コンパクト化が考えられる。この例では、時空の計量が次のように平坦部分と重力子部分の和に書けると仮定する。

$$G_{MN}(X) = \eta_{MN} + \epsilon_{MN}(k)e^{ik \cdot X} \quad (2.18)$$

ここで $\epsilon_{MN}(k)$ は偏極テンソルであり、横波条件 $\epsilon_{MN}k^N = 0$ および massless 条件 $k^2 = 0$ を満たす。これにより重力子頂点演算子が、

$$\int d^2z \epsilon_{MN} \bar{\partial} X^M \partial \bar{X}^N e^{ik \cdot X} \quad (2.19)$$

と構成できる。ここでも共形不変となるよう式全体のウェイトは 0 となっている。

ここで 26 次元時空のうち d 次元時空 M_d 以外をトラスコンパクト化し、時空構造を $M_d \times T^{26-d}$ とする。このとき計量は次のようにノンコンパクト方向とコンパクト方向に分解される。

$$g_{MN} = \left(\begin{array}{c|c} g_{\mu\nu} & A^a{}_\nu \\ \hline A^b{}_\mu & \Phi^a{}_b \end{array} \right), \quad \begin{cases} \mu, \nu = 0, \dots, d-1, \\ a, b = d, \dots, 25 \end{cases} \quad (2.20)$$

$g_{\mu\nu}$ は d 次元時空の計量、 $\Phi^a{}_b$ はスカラーである。非対角成分 $A^a{}_\nu$ 、 $A^b{}_\mu$ は KK photon と呼ばれ、トラス方向の並進の $U(1)$ 対称性をゲージ群とするゲージボゾンである。KK photon の頂点演算子は、式 (2.19) の非対角成分より

$$\int d^2z \epsilon_\mu (J^a \bar{\partial} X^\mu + \partial X^\mu \bar{J}^a) e^{ik \cdot X}, \quad J^a = \partial X^a, \quad \bar{J}^a = \bar{\partial} X^a \quad (2.21)$$

と得られる．この例から分かることは、頂点演算子において保存カレント J^a, \bar{J}^a とゲージボゾン $\epsilon_\mu \bar{\partial} X^\mu, \epsilon_\mu \partial X^\mu$ の結合が生じるということである．

式 (2.17) の一般の場合においても、世界面の大域的対称性の保存カレントから構成される頂点演算子が、世界面電荷 Q と結合する massless ゲージボゾンを生成するという構造になっている．すなわち世界面の大域的対称性に対し、対応するゲージボゾンの頂点演算子が構成される場合には、対称性は時空においてゲージ化されるため大域的対称性にはならないと結論できる．

ただし、世界面で保存カレントが存在しないような例ではこのようなゲージ化は起こらない．そのような例として axion shift symmetry が知られている．しかしこの対称性は、非摂動効果により explicit に破れると考えられている．また時空の Lorentz 対称性についても、正則なカレントが存在しないため上述のゲージ化は起こらないが、Lorentz 対称性はゲージ化された diffeomorphism の一部とみなされる．そのためこれらは大域的対称性の非存在予想自体に対する反例にはならないと考えられる．

ブラックホールのエントロピーの有界性

大域的対称性の非存在予想は、ブラックホール (以下 BH と表記) のエントロピーの有界性によっても動機づけられる．ここでブラックホールのエントロピーについての思考実験的議論を紹介する [11, 14, 15]．

はじめに、重力と結合した理論において大域的対称性が存在すると仮定する．ここでは簡単な例として $SU(2)$ 対称性を考える (その他の対称性でも類似の議論が可能である)．この理論中の単位電荷すなわちスピン $1/2$ を持つ場を ϕ とかく．場 ϕ に対応する粒子状態が十分な密度で多数存在するとき、これらは重力崩壊しブラックホールを形成することができる．そのためこの理論のスペクトルには、大域的対称性についての電荷を持ったブラックホールの状態が存在する．このブラックホールの持つ大域的電荷を J (J は整数または半整数) とする．大域的電荷に上限を与える制約はなく、 J は任意に大きい値を取りうる．

ブラックホールは一般に Hawking 放射により蒸発する．このとき Hawking 放射は熱的であるため、期待値としては大域的電荷を運ばない．また Hawking 放射の計算では半古典的近似を用いるため、ブラックホールの Schwarzschild 半径 r_S がプランク長 l_P より十分大きい限り適用可能である．そのため蒸発の過程においてこれらが同程度 $r_S \sim l_P$ となるまでは、ブラックホールが初期状態で持っていた大域的電荷は一定に保たれる．

また大域的対称性はゲージ化されていないことから、大域的電荷の情報を伝達する粒子は理論に存在しない．このため遠方の観測者からブラックホールの大域的電荷は観測することができない．すなわち大域的電荷 J を持つ $2J+1$ 通りの状態が、外側の観測者から区別できないという状況になっている．

一方、ブラックホール熱力学によりブラックホールのエントロピーを与える関係として、次の Bekenstein-Hawking の公式がよく知られている [16]．

$$S_{\text{BH}} = \frac{k_B}{4l_P^2} A_{\text{BH}} , \quad (2.22)$$

ここで k_B は Boltzmann 定数、 $l_P^2 = \hbar G_N / c^3$ は Planck 長、 A_{BH} はブラックホールの表面積である．この公式は一般相対論におけるブラックホール解に対し、熱力学関係式をみたすようエントロピーを定義することで導かれる．より一般に、漸近平坦時空において重力と弱く結合した物質の系のエントロピーには、次の Bekenstein bound による上限がある [16, 17]．

$$S \leq \frac{2\pi k_B R E}{\hbar c} \quad (2.23)$$

ここで E は系の全質量, R は系を囲むよう取れる最小の球の半径である. 式 (2.22) の S_{BH} は, この bound を飽和することが知られている.

いま初期状態の大域的電荷 J を十分大きく取ることで, ブラックホールのエントロピーに対して

$$k_B \log(2J + 1) > S_{\text{BH}} \quad (2.24)$$

という不等式を成り立たせることができる. しかしこれは式 (2.23) の bound と矛盾する. 言い換えると, 蒸発の過程におけるいずれかの時点で, Bekenstein bound で許される状態数よりも多くの状態数がブラックホール中に存在することになってしまう. このように量子重力的な系において大域的対称性が存在するとエントロピーの有限性との間に矛盾が生じることから, 量子重力理論における大域的対称性の非存在が示唆される.

その他の証拠

ここまで大域的対称性の非存在予想について代表的な 2 つの証拠を述べたが, これら以外にも様々な文脈での証拠が知られている.

例えば大域的対称性の非存在予想は, AdS/CFT 対応の観点によっても支持される [18, 19]. これらの論文では holographic 双対を持つ漸近 AdS 空間を考え, 境界の CFT における大域的対称性がバルクではゲージ対称性とみなされることが議論されている. このことからバルクにおいて大域的対称性が存在すると仮定すると矛盾が生じることが示される.

より最近では, 2 次元重力理論において, 重力経路積分に対する Euclidean wormhole の効果により大域的対称性が破られることが示されている [20, 21]. これらも大域的対称性の非存在定理に合致する結果である.

2.2 弱い重力予想

ここまで沼地問題の基本的予想として大域的対称性の非存在予想について述べてきた. ただしこの予想は大域的対称性が存在しないという定性的な主張に留まっており, 定量的な予言を導くことが難しい. そこで大域的対称性の非存在予想をより定量的な形に推し進めた主張が弱い重力予想 (Weak Gravity Conjecture, 以下 WGC と表記する) である [22]. まず準備として荷電ブラックホールの extremal 条件について述べたのち, 弱い重力予想の様々な派生形について順に説明する.

2.2.1 荷電ブラックホールの extremal 条件

弱い重力予想の前提知識として, 荷電ブラックホールの extremal 条件について述べる. 簡単のため 4 次元を考える. 重力と U(1) ゲージ場が結合した理論である Einstein-Maxwell 理論の作用は次の通りである.

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_{\text{P}}^2}{2} R - \frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \quad (2.25)$$

ここで M_{P} , g は Planck 質量およびゲージ結合定数であり, 以下では $G_{\text{N}} = \frac{1}{8\pi M_{\text{P}}^2}$, $k = \frac{g^2}{4\pi}$ の関係により Newton 定数 G_{N} および k で書かれる. この理論の球対称, 静的で電荷を持つ運動方程式の解として, 次の

Reissner-Nordström 解が知られている:

$$\begin{cases} ds^2 &= -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2, \\ f(r) &= 1 - \frac{2G_N M}{r} + \frac{G_N k Q^2}{r^2}, \\ F_{tr} &= F_{rt} = \frac{kQ}{r^2}. \end{cases} \quad (2.26)$$

ここで M, Q はそれぞれブラックホール解の ADM 質量および電荷である. 便利のため次の量を定義しておく.

$$\begin{aligned} \Delta(r) &:= r^2 f(r) = r^2 - 2G_N M r + G_N k Q^2 = (r - r_+)(r - r_-), \\ r_{\pm} &= G_N M \pm \sqrt{G_N(G_N M^2 - k Q^2)}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Reissner-Nordström 解はこの 2 次方程式 $\Delta(r) = 0$ の解に応じて以下のように 3 つの場合に分類される.

1. $G_N M^2 > k Q^2$ の場合 (nonextremal と呼ぶ). $\Delta(r)$ は 2 つの実数解 $r = r_{\pm}$ を持つ. これは通常の荷電ブラックホールを記述しており, $r = r_+$ は event horizon, $r = r_-$ は Cauchy horizon に対応する. また熱力学関係式から, このブラックホールの温度は

$$T = \frac{r_+ - r_-}{4\pi r_+^2} \quad (2.28)$$

と定義される.

2. $G_N M^2 = k Q^2$ の場合 (extremal と呼ぶ). $\Delta(r)$ は重解 $r = r_H = G_N M$ を持ち, 2 つの horizon は重なっている. この extremal ブラックホールはゼロ温度 $T = 0$ となる.
3. $G_N M^2 < k Q^2$ の場合 (superextremal と呼ぶ). $\Delta(r)$ は実数解を持たない. このとき $r > 0$ の全範囲で $\Delta(r) > 0$ となるため, horizon が形成されず, $r = 0$ の曲率特異点が裸の特異点となる. そのためこのようなブラックホール解は理論の物理的状態としては存在できないと考えられる.

図 2.2 にこれらの分類を図示した. 横軸 Q が電荷, 縦軸 M が質量であり, これらの量は $G_N = k = 1$ と規格化されている. 青い領域は nonextremal BH, 赤の直線 $M = Q$ 上は extremal BH, 緑の領域は superextremal 状態である. 裸の特異点のない物理的なブラックホール解が存在するのは extremal line $M = Q$ 直上とそれより上側の領域のみである. なお巨視的なブラックホールは Planck 質量以上の質量を持つため, 点線 $M = M_P$ より上側に存在する.

2.2.2 主張内容

4 次元以上の一般の D 次元において, 重力と結合した $U(1)$ ゲージ理論を考える. 特に低エネルギー極限において Einstein-Maxwell 理論に帰着するクラスの理論を考える.*2そのような理論の低エネルギー有効作用は次のように書ける.

$$S = \int d^D x \sqrt{-g} \left(\frac{M_P^{D-2}}{2} R - \frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \dots \right). \quad (2.29)$$

*2 低エネルギー極限において他の物質場の項が残る場合の議論も存在する [3] が, ここでは触れない.

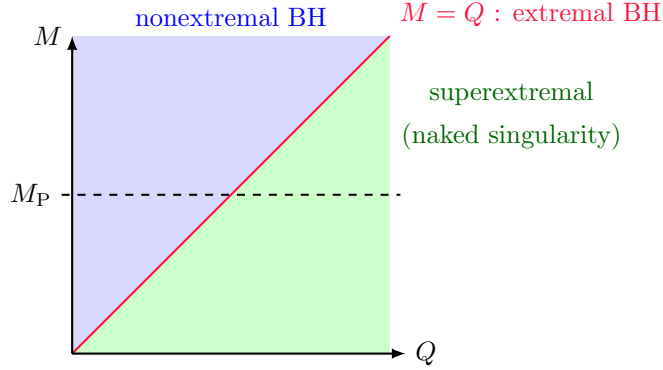


図 2.2 Einstein-Maxwell 理論のブラックホールの分類を示す電荷-質量図. 横軸 Q が電荷, 縦軸 M が質量であり, $G_N = k = 1$ と規格化されている. 青い領域は nonextremal と呼ばれ, horizon を持つブラックホール状態である. 赤の直線 $M = Q$ 上は extremal BH と呼ばれ, 裸の特異点なく存在可能な限界の状態である. 緑の領域は superextremal と呼ばれ, 裸の特異点を持つため理論の物理的状態として存在できない. また巨視的なブラックホールは点線で示した $M = M_P$ 以上の質量を持つ.

ここで Planck 質量はニュートン定数と $8\pi G_N = M_P^{-(D-2)}$ と関係し, g^2 はゲージ結合定数である. ... は高階微分項を表している. 弱い重力予想はこのような設定のもとで述べられる.

mild form WGC

弱い重力予想にはいくつかの派生形が存在する. まず通常の弱い重力予想の主張内容を述べる. これは派生形の中で最も条件の緩い主張であり, mild form WGC とも呼ばれる.

弱い重力予想 (Weak Gravity Conjecture, WGC)

式 (2.29) の形で重力と結合した $U(1)$ ゲージ理論を考える. このとき次の条件を満たす質量 $m > 0$, 電荷 q の荷電物体が理論のスペクトル中に少なくとも一つ存在しなければならない:

$$\frac{|q|}{m} \geq \left. \frac{|Q|}{M} \right|_{\text{ext}}. \quad (2.30)$$

ここで $Q|_{\text{ext}}, M|_{\text{ext}}$ は高階微分項による補正を含めない場合の extremal ブラックホールの電荷および質量である. また荷電状態の電荷 q は Dirac 量子化条件により離散化されており, ゲージ結合定数 g を含めて定義されている:

$$q = gn, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.31)$$

注意として, extremal ブラックホールの電荷質量比は一般に高階微分項による補正を受けるが, 式 (2.30) の $|Q|/M|_{\text{ext}}$ はこの補正を含めない場合で定義されている.

D 次元の荷電ブラックホール解の表式から $|Q|/M|_{\text{ext}}$ は次の形となることが知られている.

$$\left. \frac{|Q|}{M} \right|_{\text{ext}} = \gamma^{\frac{1}{2}} \kappa, \quad (2.32)$$

ここで γ および重力結合定数 κ は次式で定義される.

$$\gamma := \frac{D-3}{D-2}, \quad \kappa^2 = 8\pi G_N = \frac{1}{M_{\text{P}}^{D-2}} \quad (2.33)$$

すなわち $|Q|/M|_{\text{ext}}$ は Planck 質量を単位として $\mathcal{O}(1)$ の量である.

式 (2.30) にはいくつかの異なる書き方がある. まず電荷質量比 $z := \frac{|q|}{m}$ を定義すると, 弱い重力予想は

$$z \geq \gamma^{\frac{1}{2}} \kappa \quad (2.34)$$

と書ける. また m を以下のように規格化すると, 同じ条件を次の形で書ける.

$$|q| \geq \tilde{m}, \quad \tilde{m} := \gamma^{\frac{1}{2}} \kappa \cdot m \quad (2.35)$$

これは, 電荷が Planck 質量を単位として質量より大きいという式である. あるいは規格化された電荷質量比 \tilde{z} を $\tilde{z} := \frac{|q|}{\tilde{m}}$ と定義して, 弱い重力予想を

$$\tilde{z} \geq 1 \quad (2.36)$$

と書くこともよくされる.

具体例として最も基本的なのは, 2.2.1 節で見た 4 次元時空における Einstein-Maxwell 理論である.

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{M_{\text{P}}^2}{2} R - \frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \quad (2.37)$$

4 次元では $\gamma = 1/2$, $\kappa = 1/M_{\text{P}}$ となるため, extremal 条件は次のようになる.

$$\left. \frac{|Q|}{M} \right|_{\text{ext}} = \frac{1}{\sqrt{2}M_{\text{P}}} \quad (2.38)$$

すなわちこの場合には, 弱い重力予想は

$$\frac{|q|}{m} \geq \frac{1}{\sqrt{2}M_{\text{P}}} \quad (2.39)$$

を満たす荷電状態 (m, q) の存在を要求する.

extremal ブラックホールの電荷質量比よりも大きな電荷質量比を持つ (すなわち $\tilde{z} \geq 1$ である) 状態を superextremal と呼ぶ. この mild form WGC は, 理論のスペクトルにおける superextremal な荷電状態の存在を要求する予想である. mild form という呼称は, 少なくとも一つの状態の存在のみの要求であることを指している.

弱い重力予想は大域的対称性の非存在予想を含んだ主張である. これは $g \rightarrow 0$ の極限を考えることで見てとれる. この極限ではゲージ場と物質は decouple し, ゲージ化されていた対称性は大域的対称性に還元される. 一方, 弱い重力予想の式 (2.30) では $q = gn \rightarrow 0$ より左辺が 0 となるため, 不等式を満たす荷電状態 (q, m) が存在できないことになる. つまり弱い重力予想を仮定する限り, 大域的対称性を回復させる decoupling 極限 $g \rightarrow 0$ を取りきくことはできないことが分かる.

もう一つの解釈として, 弱い重力予想は重力がゲージ力よりも弱くはたらく状態の存在を要求していると解釈できる. この予想が弱い重力予想と呼ばれるのはこのためである. 実際, ある状態にはたらく重力 F_{grav} がゲージ力 F_{EM} に比べて弱いという条件

$$F_{\text{grav}} \leq F_{\text{EM}} \quad (2.40)$$

は、電荷が Planck 質量を単位として質量より大きい: $|q| \geq \tilde{m}$ と等価である。

より一般的な場合として、 d 次元時空の Einstein-Maxwell 理論における p -形式ゲージ場も、弱い重力予想の対象である。この場合にはブラックブレン解に対する extremal 条件から、 p -形式ゲージ場に対する弱い重力予想が得られる。

p -形式ゲージ場に対する弱い重力予想

重力と結合した p -形式ゲージ場の理論を考える。このとき次の条件を満たす張力 T_p 、電荷 q を持った $(p-1)$ -ブレンが理論のスペクトル中に少なくとも一つ存在しなければならない。

$$\frac{|Q|}{T_p} \geq \frac{|Q|}{T_p} \Big|_{\text{extremal}}. \quad (2.41)$$

ここで $Q|_{\text{ext}}, T_p|_{\text{ext}}$ は理論中の extremal ブラックブレンの電荷および張力である。

ここで考えられている低エネルギー作用の典型例は次のような形である。

$$S = \int d^D x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{2\kappa^2} - \frac{1}{4\kappa^2} (\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2g_p^2} e^{-\alpha_p \phi} F_{p+1}^2 \right). \quad (2.42)$$

ここで $F_{p+1} = dA_p$ は p -形式ゲージ場 A_p に対する場の強さであり、

$$F_{p+1}^2 = \frac{1}{(p+1)!} F_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} F^{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} \quad (2.43)$$

と規格化されている。 κ は重力結合定数であり、Planck 質量および Newton 定数と

$$\kappa^2 = 8\pi G_N = \frac{1}{M_P^{D-2}} \quad (2.44)$$

と関係づく。またスカラー ϕ をシフトして $\langle \phi \rangle = 0$ とすることができ、このとき g_p^2 は真空におけるゲージ結合定数である。この場合に extremal ブラックブレンにおける電荷張力比が

$$\begin{aligned} \frac{|Q|}{T_p} \Big|_{\text{ext}} &= \gamma_p^{\frac{1}{2}} \kappa, \\ \gamma_p &= \frac{\alpha_p^2}{2} + \frac{p(D-p-2)}{D-2} \end{aligned} \quad (2.45)$$

となることが知られている。 $\alpha_p = 0$ の場合に M_P による表示に書き直すと、

$$\frac{|Q|}{T_p} \geq \sqrt{\frac{p(D-p-2)}{(D-2)}} \frac{1}{M_P^{\frac{D-2}{2}}} \quad (2.46)$$

となり、 $D = 4$, $p = 1$ とすると確かに 4 次元の 1-形式ゲージ場の場合に還元する。

次に、磁氣的弱い重力予想 (magnetic WGC) の説明に移る。これは通常の電氣的 $U(1)$ ゲージ場の双対ゲージ場に対する弱い重力予想である。一般的な p -形式ゲージ場の場合の主張を述べる。

磁氣的弱い重力予想 (magnetic WGC)

重力と結合した p -形式ゲージ場の理論では、以下の superextremal 条件を満たす、張力 T_{D-p-2} 、磁荷 \tilde{Q} を持った $(D-p-3)$ -ブレーンの存在が要求される。

$$\frac{|\tilde{Q}|}{T_{D-p-2}} \geq \frac{|\tilde{Q}|}{T_{D-p-2}} \Big|_{\text{ext}} \quad (2.47)$$

これは 4 次元、 $p=1$ では、磁気モノポールの質量 m_{mon} と磁荷 \tilde{g} に対する次の制約となる。

$$\frac{\tilde{g}}{m_{\text{mon}}} \gtrsim \frac{1}{M_{\text{P}}} . \quad (2.48)$$

ここでは定性的な議論をするので $\mathcal{O}(1)$ 定数は省略されている。この不等式は、モノポールの質量は Planck 質量を単位として磁荷よりも小さくなければならない、すなわち重力は磁力よりも弱いということを言っている。

式 (2.48) は、以下のような議論から理論のカットオフに対する制約へと言い換えることができる。モノポールの質量は、モノポールによって作られる磁場の蓄えるエネルギーで見積もることができる。このエネルギーは UV 発散的であるが、いま考えている理論を EFT として扱い、カットオフスケール Λ を導入することで有限にできる。静磁場のエネルギーをカットオフ以下まで積分した値は Λ/g^2 より、モノポールの質量は

$$m_{\text{mon}} \sim \frac{\Lambda}{g^2} \quad (2.49)$$

と見積もることができる。また Dirac 量子化条件より、磁氣的ゲージ結合定数 \tilde{g} と電氣的ゲージ結合定数 g は逆数の関係にある。

$$\tilde{g} = 2\pi/g \quad (2.50)$$

以上より、magnetic WGC は次のように言い換えられる。

$$\Lambda \lesssim g M_{\text{P}} . \quad (2.51)$$

すなわち、カットオフ Λ にはゲージ結合定数による上限が与えられる。^{*3}

大域的対称性を回復させる極限である decoupling 極限 $g \rightarrow 0$ を考えると、 Λ の取り得る値は 0 のみとなる。すなわち EFT による記述が有効な範囲は存在しなくなり、この極限で EFT には完全に破綻する。このことから magnetic WGC が大域的対称性の非存在予想を定量化した主張となっていることがわかる。

複数のゲージ場が存在する場合

ここまでの議論では、1 種類のゲージ場のみが存在する場合を考えていた。しかし一般の量子重力理論では複数のゲージ場が理論中に存在しうる。そのため弱い重力予想の主張を複数のゲージ場が存在する場合に拡張することが必要となる。簡単のためここでは 1-形式ゲージ場のみを考えるが、高次形式ゲージ場について電荷を持つブレーンの場合にも類似の議論が可能である。

まずいくつかの概念の定義を行う。 N 個の $U(1)$ ゲージ場が存在する理論において、粒子の電荷は i 番目のゲージ場についての電荷 Q_i を第 i 成分とする N 次元ベクトル \vec{Q} によって表される。このとき Dirac の量

^{*3} 同じ結論を、ブラックホールでない磁気モノポールが理論に存在する、すなわちモノポールの質量は Planck 質量を単位として Schwarzschild 半径より小さくなければならないと要求することによっても導くことができる [3, 23, 24] .

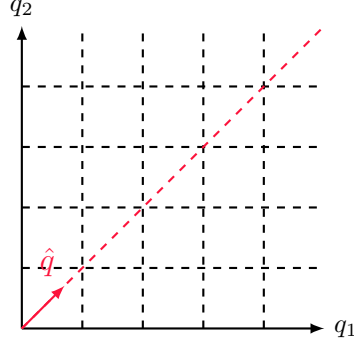


図 2.3 有理的な電荷方向の例. 電荷空間が 2 次元の場合を描いている. 軸および点線の各交点にサイトが存在する. 電荷方向 $\hat{q} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ は $(1, 1), (2, 2), \dots$ を通るため有理的である.

子化条件と整合する全ての電荷ベクトル \vec{Q} の集合は、電荷格子 (charge lattice) と呼ばれる N 次元の格子 $\Gamma \simeq \mathbb{Z}^N \subset \mathbb{R}^N$ を形成する. この N 次元空間 \mathbb{R}^N を電荷空間と呼ぶ. また電荷格子の各点はサイトと呼ばれる.

電荷空間において「斜め方向」に存在するサイトは、複数の $U(1)$ ゲージ場についての電荷を一定の割合で混合した電荷を持つ (図 2.3 を参照). このような斜め方向を扱うため、電荷方向および有理的な方向を次のように定義する.

定義 2. 電荷方向 (charge direction) \hat{Q} を、電荷空間内の単位ベクトルとして定義する.

定義 3. $\lambda \hat{Q} \in \Gamma$ をみたすような実数 $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在するとき、電荷方向 \hat{Q} は有理的 (rational) であるという.

電荷方向 \hat{Q} が有理的であることは、 \hat{Q} の延長線上に電荷格子内のサイトが存在することと等価である. 図 2.3 に有理的な電荷方向の例を示した.

定義 4. ここでの議論における多粒子状態を、単一あるいは複数の実粒子からなる状態であって、その質量 m および電荷 \vec{q} が各構成粒子の質量および電荷の和に等しい状態として定義する.

多粒子状態は、構成粒子どうしが違いに無限に遠く離れており相互作用しない状況に相当する.

さて重要な点として、ある多粒子状態 (\vec{q}, m) が superextremal となる条件は、電荷質量比ベクトル $\vec{z} := \vec{q}/m$ が、電荷方向 \hat{q} における extremal ブラックホールの電荷質量比ベクトル $\vec{Z} := \vec{Q}/M|_{\text{ext}}$ 以上の長さを持つことである. すなわち superextremal 条件は、

$$|\vec{z}| \geq |\vec{Z}|, \quad (2.52)$$

ここでベクトル \vec{z} の長さ $|\vec{z}|$ は、次の $U(1)$ ゲージ場の kinetic matrix の逆行列を測度として定義される.

定義 5. Lagrangian の運動項を $-\frac{1}{4}K_{ij}F_{\mu\nu}^i F^{j\mu\nu}$ を書くとき、 \vec{z} の長さは

$$|\vec{z}| := (K^{ij}z_i z_j)^{1/2} \quad (2.53)$$

与えられる. ここで $K^{ij}K_{jk} = \delta_k^i$ である.

このような準備のもとで、mild form WGC の複数ゲージ場への一般化は次のようになる.

— 複数のゲージ場に対する弱い重力予想 —

複数の $U(1)$ ゲージ場が存在する理論において、電荷空間における全ての有理的な方向 \hat{Q} に対して、 $\vec{z} \propto \hat{Q}$ をみたす superextremal な多粒子状態が存在する。

理論中に有限個の安定な粒子が存在するとき、複数のゲージ場に対する弱い重力予想は次の convex hull condition (以下 CHC と表記) と呼ばれる条件と等価となる [25].

— convex hull condition (CHC) —

理論中の全ての粒子の電荷質量比ベクトル $\vec{z}_i = \vec{Q}_i/m_i$ の集合を考える。この集合の凸包 (convex hull):

$$\left\{ c_i \vec{z}_i \mid c_i \geq 0, \sum_i c_i = 1 \right\} \quad (2.54)$$

の領域が、ブラックホール領域

$$K^{ij} z_i z_j \leq \gamma \kappa^2 \quad (2.55)$$

を内包しなければならない。

これを満たす例を図 2.4 に図示した。赤および青の点が安定な荷電状態を表しており、それらをつなぐ点線の内側が式 (2.54) で定義される convex hull である。青のスペクトルにおける convex hull は BH 領域を完全に含んでいるため CHC を満たす。一方、赤のスペクトルでは BH 領域の一部が convex hull からみ出しており、CHC を満たさない。

図 2.4 の赤のスペクトルは各方向 z_1, z_2 についての単一のゲージ場についての WGC を独立に考えると、一見 WGC を満たすように見える。しかし複数ゲージ場の場合には「斜め方向」、すなわち有理的に混合されたゲージ場についても WGC が課されるため、条件はより厳しくなる。すなわち単一のゲージ場についての WGC を独立に満たしているスペクトルであっても、複数ゲージ場の場合の WGC は満たさない場合が存在する。

strong form WGC

mild form WGC では、少なくとも一つの superextremal な荷電状態の存在が要求された。しかしこのとき荷電状態の質量はいくら大きく取ってもよいから、理論の低エネルギー領域に制限を与えるという応用においては条件が緩すぎるが多い。有用な物理的示唆を与えるためには、弱い重力予想の主張をより強めることが求められる。また後で見るように、弦理論の典型的なスペクトルでは、superextremal な荷電状態の質量は上限なく無限個生じる。このことから弱い重力予想の主張は少なくとも一つの superextremal 状態の存在の要請から、複数個さらには無限個の superextremal 状態の存在の要請へと強めることができると期待される。

mild form WGC は条件を満たす少なくとも一つの粒子の存在を要求したが、tower WGC は同様の条件を満たす無限個の粒子の存在を要求する。複数ゲージ場の場合を含む一般的な主張は次の通りである。

— tower 弱い重力予想 (tower WGC) —

電荷格子内の全てのサイト $\vec{q} \in \Gamma$ のそれぞれについて、ある正の整数 $n_{\vec{q}}$ が存在して、電荷 $n_{\vec{q}} \vec{q}$ を持ち superextremal な粒子が理論のスペクトル中に存在する。

これは別の言い方をすれば、任意の有理的な電荷方向 \hat{q} において、superextremal 粒子の無限塔が存在しなけ

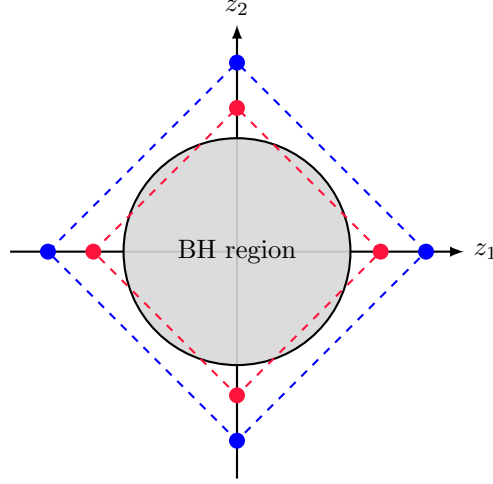


図 2.4 convex hull condition を満たす例および満たさない例. 電荷空間が 2 次元の場合を描いている. 真ん中の灰色領域は式 (2.55) の BH 領域である. 赤および青の点が安定な荷電状態を表し, それらをつなぐ点線の内側が convex hull である. 青の convex hull は BH 領域を完全に含んでおり CHC を満たす一方, 赤は BH 領域の一部がはみ出しているため CHC を満たさない.

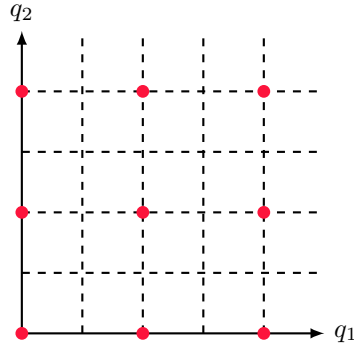


図 2.5 sublattice WGC を満たすスペクトルの例. 電荷空間が 2 次元で, coarseness $n = 2$ の場合を示した. 赤の点が superextremal な状態を表している.

ればならないということである. 無限塔とは粒子状態の無限列で, 質量が順次増大していくようなものである. tower WGC はこの表現で定義されることも多いが, ここで提示した方がよりフォーマルな表現である. tower WGC を満たす典型例として, 図 2.6 のヘテロティック弦理論のスペクトルがある.

反例が知られていない, もう一つのより強い予想が次の sublattice WGC である.

sublattice 弱い重力予想 (sublattice WGC)

ある正の整数 n が存在して, 電荷格子内の全てのサイト $\vec{q} \in \Gamma$ に対し, 電荷 $n\vec{q}$ を持ち superextremal な粒子が理論のスペクトル中に存在する.

ここで n は sublattice の粗さ (coarseness) と呼ばれる. $n = 1$ の場合の主張は lattice WGC と呼ばれる.*⁴

*⁴ ただし lattice WGC には反例が知られており, $T^6/(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}')$ 上にコンパクト化された type II 弦理論の例では成り立たない [6].

sublattice WGC は、電荷格子の部分集合であって、その各サイトが全て superextremal 状態であるようなものが存在することと等価である。この部分集合を sublattice と呼んでいる。sublattice WGC を満たすスペクトルの例を図 2.5 に示した。

sublattice WGC は tower WGC を強めた主張である。実際、tower WGC で $n_{\vec{q}}$ を全て同じ n に取った特別な場合が sublattice WGC である。よって sublattice WGC が成り立つならば tower WGC が成立する。

2.2.3 証拠

弱い重力予想の証拠となる議論は複数知られている。ここではそのうちヘテロティック弦理論のスペクトル、extremal ブラックホールの不安定性、および Einstein-Maxwell EFT を考察することにより弱い重力予想の証拠が得られることを議論する。

ヘテロティック弦理論のスペクトル

弱い重力予想の代表的な証拠として、弦理論の典型的なスペクトルにおいて sublattice WGC までが支持されることが知られている。ここでは $SO(32)$ ヘテロティック弦理論の例を述べる。Einstein フレームでの有効 Lagrangian は、次のような Einstein-Maxwell 理論にディラトン項が加わった形である [13]。

$$\frac{1}{2g_s^2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-g} \left(R - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right) - \frac{1}{2g_s^2 g_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-g} e^{-\phi/2} \text{Tr}_V(|F_2|^2), \quad (2.56)$$

ここで Tr_V は基本表現でのトレースであり、生成子の基底 T^a に対し $\text{Tr}_V(T^a T^b) = 2\delta^{ab}$ となるよう規格化されている。ここから 10 次元の Planck 質量 M_{10} およびゲージ結合定数 e^2 は次のように読み取れる。

$$\begin{aligned} 8\pi G_N &= M_{10}^{-8} = g_s^2 \kappa_{10}^2 = \frac{1}{2} g_s^2 (2\pi)^7 \alpha'^4, \\ e^2 &= \frac{1}{2} g_s^2 g_{10}^2 = g_s^2 (2\pi)^7 \alpha'^3. \end{aligned} \quad (2.57)$$

この理論の電荷格子は次の形の電荷ベクトル \vec{q} 全体により構成されることが知られている。

$$\begin{aligned} \vec{q} &= (q_1, q_2, \dots, q_{16}) \quad \text{or} \quad \vec{q} = (q_1 + \frac{1}{2}, \dots, q_{16} + \frac{1}{2}) \\ &\quad \text{with} \quad q_i \in \mathbb{Z}, \quad \sum_i q_i \in 2\mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

また理論中の全ての状態は、次のレベルマッチング条件を満たす。

$$\frac{\alpha'}{4} m^2 = N_L + \frac{1}{2} |\vec{q}|^2 - 1 = N_R - \frac{1}{2}, \quad (2.59)$$

ここで $N_{L,R}$ は左/右向きモードの占有数であり、 N_L は非負整数、 N_R は正の半整数となる。任意の $N_L \geq 0$ および $\vec{q} \neq 0$ に対して N_R はレベルマッチング条件を満たすよう決まる。これよりある $\vec{q} \neq 0$ に対する最軽量状態は、

$$m^2 = \frac{2}{\alpha'} (|\vec{q}|^2 - 2) \quad (2.60)$$

反例が知られていないのは sublattice WGC までである。

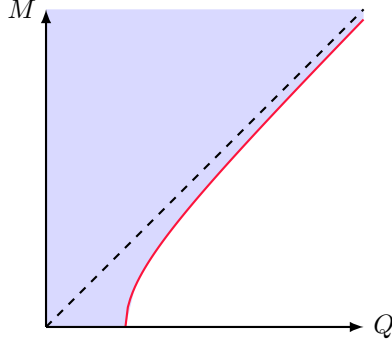


図 2.6 ヘテロティック弦理論のスペクトル。赤線上が式 (2.60) の最軽量状態のスペクトルであり、青の領域がその他のセクターから由来するスペクトルである。各状態はこれらの領域内に離散的に存在している。

を満たすことがわかる。この状態の電荷質量比は次を満たす。

$$|\vec{Z}|^2 = \frac{\alpha'}{2} \left| \frac{\vec{q}^2}{\vec{q}^2 - 2} \right| > 1, \quad (2.61)$$

よってこれらの状態は全て superextremal である。

これより $SO(32)$ ゲージ群の全ての表現において superextremal な粒子が存在することがわかる。すなわちこの理論は nonabelian ゲージ群に対する lattice WGC を満たしている。またこの理論を T^n 上にコンパクト化して Wilson line を入れると、ゲージ群は Cartan 部分群に破れることが知られている。その結果生じる理論は上述の $U(1)$ ゲージ場に対する lattice WGC を満たす (当然 sublattice WGC, tower WGC も満たすことになる)。なお $E_8 \times E_8$ ヘテロティック弦理論においても同様の superextremal なスペクトルが得られることが知られている。

このように弦理論のスペクトルの全ての既知の例において sublattice WGC, tower WGC が満たされている。このことが弱い重力予想を strong form まで押し進めて主張する有力な動機付けである。

extremal ブラックホールの不安定性

理論に複数の超対称性があるとき、理論中の物体の質量と電荷に制限が与えられる。これは BPS bound と呼ばれる。例えば超弦理論における D ブレーンは、BPS bound を飽和する場合には対称性により守られているため安定的に存在できる。一方いま考えている超対称でない通常の Einstein-Maxwell 理論の extremal ブラックホールは、対称性で守られていない。ここでの議論の出発点は、対称性で守られていない extremal ブラックホールは、安定的に存在し続ける理由はないため崩壊先を持つはずであると考えることである。

いま extremal ブラックホール (M, Q) が i でラベルされる複数の崩壊先 (m_i, q_i) へ崩壊する状況を考える。崩壊先の状態について、質量の和 $\sum_i m_i$ は分離エネルギーのぶん元の M より小さくなる。

$$\sum_i m_i < M. \quad (2.62)$$

一方電荷については電荷保存則から、

$$\sum_i q_i = Q \quad (2.63)$$

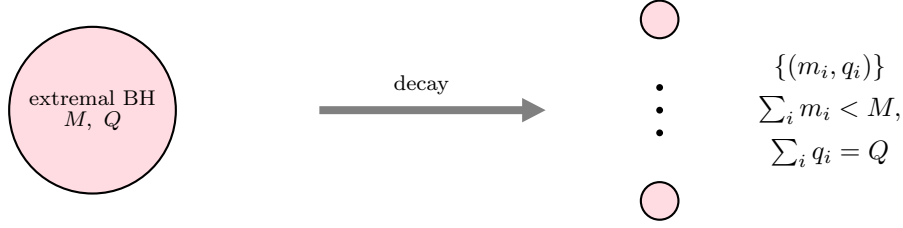


図 2.7 荷電ブラックホールの extremal 条件

が成り立つ。この状況を図 2.7 に示した。

これらの関係から、extremal ブラックホールの電荷質量比に対して次のような評価ができる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{M}{Q}\right)_{\text{ext}} &\geq \frac{1}{Q} \sum_i m_i = \frac{1}{Q} \sum_i \frac{m_i}{q_i} q_i \\ &\geq \frac{1}{Q} \left(\frac{m}{q}\right)_{\min} \sum_i q_i = \left(\frac{m}{q}\right)_{\min}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

いま理論のスペクトル中に弱い重力予想で要求される状態が一切存在しないと仮定する。すなわち全ての状態 i について $\frac{m_i}{q_i} > \left(\frac{M}{Q}\right)_{\text{ext}}$ であると仮定すると、ここで導いた不等式と矛盾する。これより extremal ブラックホールが崩壊先を持つことを仮定するならば、少なくとも一つの状態が WGC の主張 $\frac{m_i}{q_i} \leq \left(\frac{M}{Q}\right)_{\text{ext}}$ を満たさなければならないことが結論づけられる。

Einstein-Maxwell EFT

2.2.1 節では補正のない pure Einstein-Maxwell 理論を考えたが、より一般には高階微分項を含む次の Einstein-Maxwell EFT が考えられる。

$$\begin{aligned} S = \int d^4x \sqrt{-g} &\left[\frac{M_{\text{P}}^2}{2} R - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\alpha_1}{4M_{\text{P}}^4} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})^2 \right. \\ &\left. + \frac{\alpha_2}{4M_{\text{P}}^4} (\tilde{F}_{\mu\nu} F^{\mu\nu})^2 + \frac{\alpha_3}{2M_{\text{P}}^2} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} W^{\mu\nu\rho\sigma} \right] \end{aligned} \quad (2.65)$$

ここで $W_{\mu\nu\rho\sigma}$ は Weyl テンソル、 $\tilde{F}_{\mu\nu} := \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$ は $F_{\mu\nu}$ の双対テンソルである。Einstein-Maxwell 理論の高階微分項として 4 階微分までの項を全て書き出すと、上記にない $R_{\mu\nu}^2$ のような項も存在する。しかしこれらは全て場の再定義により上記の 3 つの項に吸収できることが知られている。また $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \tilde{F}^{\rho\sigma}$ のようなパリティ対称性を破る項は leading order では extremal 条件に影響しないことが知られている。そのためパリティ不変かつ 4 階微分までの項を考えると、上記の 3 つの項で表すことができる。

これら $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ の高階微分項によりブラックホール解は補正を受ける。ブラックホールが十分重い $M^2 \gg \alpha_i M_{\text{P}}^2$ という条件のもとで、高階微分補正を受けた extremal BH の電荷質量比は次のように計算される [26, 27]。

$$\left(\frac{\sqrt{2}Q}{M/M_{\text{P}}}\right)_{\text{ext}} = 1 + \frac{4}{5} \frac{(4\pi)^2 M_{\text{P}}^2}{M^2} (2\alpha_1 - \alpha_3). \quad (2.66)$$

この様子を図 2.8 に示した。 $2\alpha_1 - \alpha_3 < 0$ の場合にはスペクトルは図 2.8(a) のようになり、ブラックホール

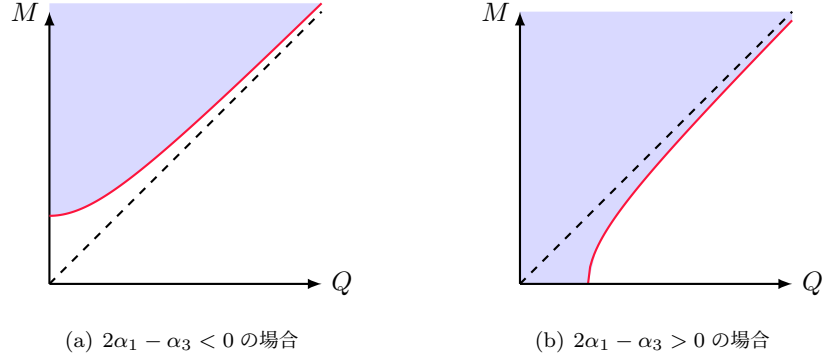


図 2.8 高階補正項 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ が加わった Einstein-Maxwell EFT の、質量-電荷図におけるブラックホール状態のスペクトル.

状態は $M = Q$ の線より上側のみに存在する. 一方 $2\alpha_1 - \alpha_3 > 0$ の場合にはスペクトルは図 2.8(b) のようになり, $M = Q$ の点線より下側にもブラックホール状態が存在する.

このような場合には WGC の要求する superextremal な荷電状態として通常の粒子状態の他に, 荷電ブラックホール自体が該当する可能性がある. pure Einstein-Maxwell 理論の場合には $M < Q$ となるブラックホールは裸の特異点を生じるため存在できなかった. しかし Einstein-Maxwell EFT においては高階微分項の補正により $M < Q$ となるブラックホールも存在する可能性がある. $2\alpha_1 - \alpha_3 > 0$ の場合には荷電ブラックホール自体が WGC の要求する荷電状態となり, WGC が自明な形で満たされることになる.

以上の議論から WGC の導出を与えるには, EFT 係数の組 $2\alpha_1 - \alpha_3$ の符号を決定することが重要となることが分かる. これを可能にする議論として, 理論のユニタリ性をはじめとする物理的仮定にもとづく S 行列的アプローチがある. 3 章以降ではこのような手法について述べる.

第 3 章

散乱振幅の一般論

前章の沼地問題では、エントロピーの有界性や弦理論の結果から支持される大域的対称性の非存在を出発点として低エネルギー有効理論に対する制約を導いた。一方出発点の異なるアプローチとして、散乱振幅の満たすべき基本的仮定から出発して低エネルギーに対する制約を導くことができ、これは S 行列的アプローチと呼ばれる。S 行列的アプローチにおいて散乱振幅の満たすべき基本的仮定とは Lorentz 不変性、ユニタリ性、因果性、解析性、局所性、有界性、交差対称性である。これらのうち考える系に応じて成り立つと仮定できるものを議論の出発点として設定する。その結果、低エネルギー有効理論の高階結合係数が取り得る値がある範囲に制約されるということを導くことができる。

3.1 節では [28] に基づき、散乱振幅の基本事項として解析性、ユニタリ性、部分波展開について述べる。続く 3.2 節では [29] に基づき、上記の基本的仮定から出発して低エネルギー有効理論に対する制約を与える方法を説明する。また本章全体の記述において [30, 31] を参考としている。

3.1 散乱振幅に関する基本事項

ここでは本論文で必要となる散乱振幅に関する基本知識をまとめる。はじめに S 行列と散乱振幅の表示について述べ、その後解析性、ユニタリ性、部分波展開について順に述べる。

以下では $d \geq 4$ 次元平坦時空における質量 m の同スカラー粒子の 2 体-2 体散乱振幅を扱う。また理論の \mathbb{Z}_2 対称性を仮定し偶数次の相互作用のみが存在するとする。S 行列演算子 \hat{S} を、次のように 2 つの寄与に分離して書く。

$$\hat{S} = \hat{1} + i\hat{\mathcal{M}}. \quad (3.1)$$

ここで恒等演算子 $\hat{1}$ は素通しの寄与であり、 $\hat{\mathcal{M}}$ は connected な相互作用の寄与を表す散乱振幅演算子である。2 体-2 体散乱において、S 行列要素 $S_{2,2}$ は次のように定められる。

$$S_{2,2} \langle p_3, p_4 | p_1, p_2 \rangle \equiv \langle p_3, p_4 | \hat{S} | p_1, p_2 \rangle. \quad (3.2)$$

ここで $|p_1, p_2\rangle$, $\langle p_3, p_4|$ は 2 粒子状態の始状態および終状態であり、これらをラベルする 4 元運動量 p は質量殻条件 $p^2 = -m^2$ および正エネルギー条件 $p^0 > 0$ を満たす。

散乱振幅演算子 $\hat{\mathcal{M}}$ により connected 部分の行列要素 $S_{2,2}^{\text{conn}}$ 、および興味のある量である散乱振幅 $\mathcal{M}(s, t)$ が以下のように定義される。

$$S_{2,2}^{\text{conn}} \langle p_3, p_4 | p_1, p_2 \rangle \equiv i \langle p_3, p_4 | \hat{\mathcal{M}} | p_1, p_2 \rangle = i(2\pi)^d \delta^{(d)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \mathcal{M}(s, t). \quad (3.3)$$

ここで 2 体-2 体散乱振幅をパラメトライズする Lorentz 不変量として、以下のように定義される Mandelstam 変数 s, t, u を用いた.

$$\begin{aligned} s &:= -(p_1 + p_2)^2 \\ t &:= -(p_1 - p_3)^2 \\ u &:= -(p_1 - p_4)^2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

ここでは運動量 p_1, p_2 の向きづけは ingoing, p_3, p_4 は outgoing としている.*¹ 重心系での運動学図を図 3.1 に示した. s は s チャンネル散乱における重心系エネルギーの 2 乗である. また t, u は重心系での散乱角 θ と次の

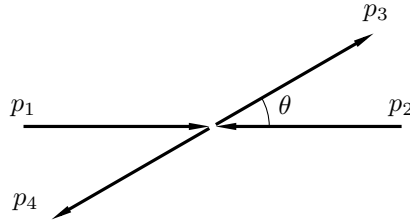


図 3.1 2 体-2 体散乱の重心系での運動学図. 矢印は 4 元運動量の向きづけを表す

ように関係づいている.

$$\begin{aligned} s &= 4(m^2 + \vec{p}^2) \\ t &= -2\vec{p}^2(1 - \cos \theta) \\ u &= -2\vec{p}^2(1 + \cos \theta). \end{aligned} \quad (3.5)$$

ここで重心系での表示 $p_1 = (m, \vec{p})$, $p_2 = (m, -\vec{p})$ により \vec{p} を定めた. これらの関係より, 散乱角は次のように書ける.

$$\cos \theta = 1 + \frac{2t}{s - 4m^2}. \quad (3.6)$$

また s, t, u の和は on-shell において次の条件を満たす.

$$s + t + u = 4m^2. \quad (3.7)$$

この条件のため, 3 つの変数のうち独立なのは 2 変数である. そのため本論文では s チャンネル散乱振幅の独立変数として s と t を用いる. またこれら s, t, u の取りうる値について, 物理的な散乱に対応する範囲は限られている. 全ての外線状態 $i = 1, 2, 3, 4$ に対し正のエネルギー $p_i^0 > 0$ および実の運動量 \vec{p}_i が存在するための条件として, 各チャンネルの散乱に対する物理的領域は次の条件で指定される.

$$\begin{aligned} s &\geq 4m^2, \quad t \leq 0, \quad u \leq 0 \quad (s \text{ チャンネル散乱}) \\ t &\geq 4m^2, \quad u \leq 0, \quad s \leq 0 \quad (t \text{ チャンネル散乱}) \\ u &\geq 4m^2, \quad s \leq 0, \quad t \leq 0 \quad (u \text{ チャンネル散乱}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

これらの物理的領域は図 3.2 の Mandelstam diagram で図示される領域である.

*¹ p_1, p_2, p_3, p_4 を全て ingoing な向きづけとする notation も存在する. このようにすると Mandelstam 変数の定義式 (3.4) を対

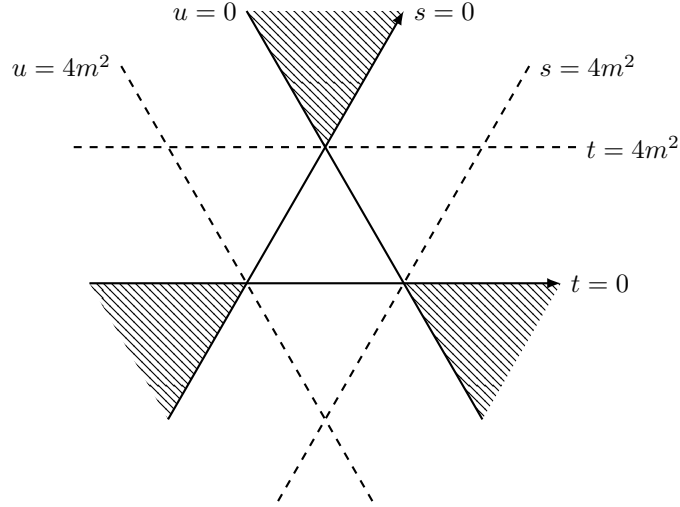


図 3.2 Mandelstam diagram. 斜線部が物理的領域.

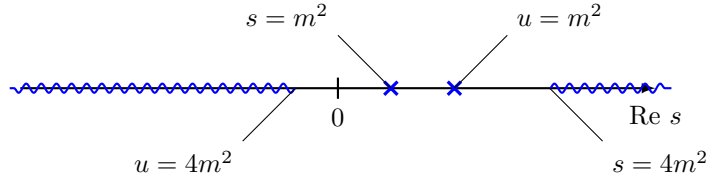


図 3.3 複素 s 平面における散乱振幅の極と分枝切断

3.1.1 解析性

物理的な散乱振幅 $\mathcal{M}(s, t)$ は式 (3.8) の物理的領域を定義域としていたが、S 行列アプローチでは散乱振幅を複素関数へと拡張して議論する．すなわち複素数 $s, t \in \mathbb{C}$ を引数とする解析接続された散乱振幅 $\mathcal{M}_{\text{a.c.}}(s, t)$ を考える．このとき、物理的領域での接続条件を次のように課す．

$$\mathcal{M}(s, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{M}_{\text{a.c.}}(s + i\epsilon, t) \quad \text{for } s, t \in \mathbb{R}, -s + 4m^2 < t < 0, 4m^2 < s. \quad (3.9)$$

以下ではこの解析接続された散乱振幅を単に $\mathcal{M}(s, t)$ と書く．

複素数 s, t の複素関数としての散乱振幅の解析的性質については歴史的に多くの議論がある．極大解析性と呼ばれる設定では、ユニタリ性と交差対称性による実軸上の極および分枝切断を除き、散乱振幅が複素 (s, t) 平面全体で解析的であると仮定される [32]．これを証明しようとする試みはなされているが、完全には証明されていない [33, 34]．本論文では解析性条件として、 $\mathcal{M}(s, t)$ は固定 $|t| < 4m^2$ の下で、 s の実軸上の極と branch cut を除いて解析的であることを仮定する．これは散乱振幅のスペクトル表示を用いた収束性の議論から示される [35]．この仮定を満たす散乱振幅の解析的構造を図 3.3 に示した．複素関数としての散乱振幅において 1 粒子状態は極、2 粒子以上の連続状態は分枝切断として記述される．

この解析性条件に加え、散乱振幅の解析的性質について基本的仮定として用いる 2 つの条件を述べる．1 つ

称的な形式にできる．4 章の弦理論振幅ではこちらの notation を用いる．

目は次の散乱振幅の交差対称性

$$\mathcal{M}(s, t) = \mathcal{M}(t, s) = \mathcal{M}(u, t) \quad (3.10)$$

である。この条件より、異なるチャネルの物理的散乱振幅が単一の解析関数により記述されることが要請される。2体-2体散乱の交差対称性については、[36]で証明が提示されている。

もう一つの条件が次の実解析性である。

$$\mathcal{M}(s^*, t^*) = \mathcal{M}^*(s, t) . \quad (3.11)$$

これは Schwarz の鏡像原理とも呼ばれ、[37]で公理的場の理論の文脈での証明が述べられている。

3.1.2 ユニタリ性

S 行列のユニタリ性を散乱振幅に対する条件に書き直す。まず S 行列のユニタリ性 $\hat{S}\hat{S}^\dagger = \hat{1}$ を T 行列で書くことで、次の関係が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \langle p_3, p_4 | \hat{\mathcal{M}} - \hat{\mathcal{M}}^\dagger | p_1, p_2 \rangle &= \langle p_3, p_4 | \hat{\mathcal{M}} \hat{\mathcal{M}}^\dagger | p_1, p_2 \rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int d\mu(q_1, \dots, q_{2n}) \langle p_3, p_4 | \hat{\mathcal{M}} | \{q_i\}_{i=1}^{2n} \rangle \langle \{q_i\}_{i=1}^{2n} | \hat{\mathcal{M}}^\dagger | p_1, p_2 \rangle , \end{aligned} \quad (3.12)$$

ここで2つ目の等号において、漸近状態の完全系 $\hat{1} = \sum_{n=1}^{\infty} \int d\mu(q_1, \dots, q_{2n}) | \{q_i\}_{i=1}^{2n} \rangle \langle \{q_i\}_{i=1}^{2n} |$ を挿入した。いま \mathbb{Z}_2 対称性を仮定しているため偶数個の粒子状態のみが可能である。また Lorentz 不変測度 $d\mu(q_1, \dots, q_{2n})$ は

$$d\mu(p_1, \dots, p_n) := \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^n d\mu(p_i) , \quad d\mu(p) := \frac{1}{(2\pi)^{d-1}} \theta(p^0) \delta(p^2 + m^2) d^d p \quad (3.13)$$

と定義している。

エネルギー保存から、散乱の中間状態として $2n$ 粒子状態が on-shell 状態として寄与するのは $s > (2nm)^2$ の領域のみである。特に \mathbb{Z}_2 対称な理論において $4m^2 < s < 16m^2$ の領域では、中間状態として2粒子状態のみが寄与できる。よってこの領域では、式 (3.12) の総和において $n = 1$ の2体-2体遷移のみが寄与する。 $4m^2 < s < 16m^2$ は弾性散乱領域と呼ばれる。この弾性散乱領域で考えると、式 (3.12) を変形して次の関係を導くことができる。

$$2\mathcal{M}_s(s, t) = \frac{1}{2} \int \frac{d^{d-1}\vec{q}'}{(2\pi)^{d-1} 2E_{\vec{q}'}} \int \frac{d^{d-1}\vec{q}''}{(2\pi)^{d-1} 2E_{\vec{q}''}} (2\pi)^d \delta^d(p_1 + p_2 - q' - q'') \mathcal{M}^{(+)}(s, t') \mathcal{M}^{(-)}(s, t'') , \quad (3.14)$$

ここで新たな notation の定義は、

$$\mathcal{M}_s(s, t) := \text{Disc}_s \mathcal{M}(s, t) = \frac{1}{2i} \left(\mathcal{M}^{(+)}(s, t) - \mathcal{M}^{(-)}(s, t) \right) , \quad \mathcal{M}^{(\pm)}(s, t) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{M}(s \pm i\epsilon) , \quad (3.15)$$

および $t' = -(\vec{p}_1 - \vec{q}')^2$, $t'' = -(\vec{q}'' - \vec{p}_4)^2$ である。また式 (3.11) の実解析性を用いている。

式 (3.14) における \vec{q}', \vec{q}'' についての積分を散乱角についての積分へと簡単化することができる。重心系で考え、 $\vec{q}' = -\vec{q}'' \equiv p\vec{n}$ と書く。ここで \vec{n} は $(d-1)$ 次元単位ベクトルであり、 $p = \sqrt{s - 4m^2}/2$ である。これらの変数を用いて運動量の絶対値方向の積分を実行することにより、式 (3.14) の弾性ユニタリ性条件は次の

ように書き直せる.

$$2\mathcal{M}_s(s, t) = \frac{p^{d-2}}{(2\pi)^{d-2}(2E_p)^2} \frac{E_p}{4p} \int d^{d-2}\Omega_{\vec{n}} \mathcal{M}^{(+)}(s, t') \mathcal{M}^{(-)}(s, t'') , \quad (3.16)$$

ここで $\frac{E_p}{2p} \equiv \frac{\sqrt{s}}{2\sqrt{s-4m^2}}$ であり, この因子はデルタ関数積分の部分に由来する. 積分 $\int d^{d-2}\Omega_{\vec{n}}$ は次の 2 つの散乱角

$$x' = \cos \theta' = \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{n}}{|\vec{p}_1|}, \quad x'' = \cos \theta'' = \frac{\vec{p}_3 \cdot \vec{n}}{|\vec{p}_3|} \quad (3.17)$$

のみについての積分で書くことができる.

$$\int d^{d-2}\Omega_{\vec{n}} \equiv \int_{-1}^1 dx' \int_{-1}^1 dx'' \mathcal{P}_d(x, x', x''), \quad x' = \cos \theta = \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3}{|\vec{p}_1| |\vec{p}_3|} = 1 + \frac{2t}{s-4m^2}, \quad (3.18)$$

ここで積分核の $\mathcal{P}_d(x, x', x'')$ は Mandelstam kernel と呼ばれ, その具体的表式は次のようになる.

$$\mathcal{P}_d(x, x', x'') = \begin{cases} 2\sqrt{1-x^2}\delta(1-x^2-x'^2-x''^2+2xx'x'') & (\text{for } d=3) \\ \frac{2\pi^{\frac{d-3}{2}}}{\Gamma(\frac{d-3}{2})}(1-x^2)^{\frac{4-d}{2}} \frac{\Theta(1-x^2-x'^2-x''^2+2xx'x'')}{(1-x^2-x'^2+2xx'x'')^{\frac{5-d}{2}}} & (\text{for } d>3) \end{cases} \quad (3.19)$$

ここで Θ は step 関数である. これを用いて, 式 (3.16) は次のように書ける.

弾性ユニタリ性条件

$4m^2 \leq s \leq 16m^2$ の弾性領域の散乱振幅に対し, 散乱振幅の不連続性は次の方程式を満たす.

$$\mathcal{M}_s(s, t) = \frac{(s-4m^2)^{\frac{d-3}{2}}}{8(4\pi)^{d-2}\sqrt{s}} \int_{-1}^1 dx' \int_{-1}^1 dx'' \mathcal{P}_d(x, x', x'') \mathcal{M}^{(+)}(s, t(x')) \mathcal{M}^{(-)}(s, t(x'')) , \quad (3.20)$$

ここで $t(x) := -(s-4m^2)(1-x)/2$.

一方 $s > 16m^2$ の領域に対しては, ユニタリ性条件は 2 粒子以上の寄与を含む. この非弾性領域におけるユニタリ性条件は散乱振幅に対する不等式として得られる. 式 (3.12) の $\hat{\mathcal{M}}\hat{\mathcal{M}}^\dagger$ が半正定値行列であることに注目する. すなわち任意の状態 Ψ に対して次の半正定値性が満たされる.

$$\langle \Psi | \hat{\mathcal{M}} | \{q_i\}_{i=1}^{2n} \rangle \langle \{q_i\}_{i=1}^{2n} | \hat{\mathcal{M}}^\dagger | \Psi \rangle = \left| \langle \Psi | \hat{\mathcal{M}} | \{q_i\}_{i=1}^{2n} \rangle \right|^2 \geq 0 . \quad (3.21)$$

よって式 (3.12) において 2 粒子以上の全ての寄与を落とすことで, 2 体-2 体散乱行列に対する次の不等式が得られる.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{i} \int d\mu(p_1, p_2) d\mu(p_3, p_4) \psi(p_1, p_2) \psi^*(p_3, p_4) \times \langle p_3, p_4 | \hat{\mathcal{M}} - \hat{\mathcal{M}}^\dagger | p_1, p_2 \rangle \\ & > \int d\mu(p_1, p_2) d\mu(p_3, p_4) \psi(p_1, p_2) \psi^*(p_3, p_4) \int d\mu(q_1, q_2) \langle p_3, p_4 | \hat{\mathcal{M}} | q_1, q_2 \rangle \langle q_1, q_2 | \hat{\mathcal{M}}^\dagger | p_1, p_2 \rangle \geq 0 . \end{aligned} \quad (3.22)$$

ここで $\psi(p_1, p_2)$, $\psi^*(p_3, p_4)$ は 2 粒子波動関数である. 特に以下, $p_3 = p_1$, $p_4 = p_2$ の場合を考える. これは $t = 0$, $\theta = 0$ の前方極限に対応する. さらに 2 粒子波動関数として運動量の固有状態を取ると, 式 (3.22) は次の非弾性ユニタリ性条件の形に書ける.

非弾性ユニタリ性条件

$s \geq 16m^2$ の非弾性領域の散乱振幅に対し、前方極限 $t = 0$ における散乱振幅の不連続性 $\mathcal{M}_s(s, 0)$ は次の不等式を満たす。

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_s(s, 0) &> \frac{(s - 4m^2)^{\frac{d-3}{2}}}{8(4\pi)^{d-2}\sqrt{s}} \int_{-1}^1 dx' \int_{-1}^1 dx'' \mathcal{P}_d(1, x', x'') \mathcal{M}^{(+)}(s, t(x')) \mathcal{M}^{(-)}(s, t(x'')) \\ &\propto \int_{-1}^1 dx' (1 - x'^2)^{\frac{d-4}{2}} \left| \mathcal{M}^{(+)}(s, t(x')) \right|^2. \end{aligned} \quad (3.23)$$

ここで制約条件に移る際、 $\mathcal{P}_d(1, x', x'') \propto (1 - x'^2)^{\frac{d-4}{2}} \delta(x' - x'')$ という関係を用いた。

前方散乱におけるユニタリ性条件の帰結として、次の光学定理が知られている。

$$\mathcal{M}_s(s, 0) = \text{Im}[\mathcal{M}(s, 0)] = \sqrt{s(s - 4m^2)} \sigma_{\text{tot}}(s) \quad (3.24)$$

ここで $\sigma_{\text{tot}}(s)$ は全散乱断面積である。上述の式 (3.20), (3.23) はこれを具体的に表示したものとなっている。

3.1.3 部分波展開

ここまでで S 行列のユニタリ性の帰結として、散乱振幅についての非線形積分方程式 (3.20), (3.23) を得た。これらをさらに簡単化するため、 $\mathcal{M}(s, t)$ を Lorentz 対称性 $SO(1, d-1)$ の既約表現の完全系により分解する。この既約表現とは、エネルギー運動量 p および $SO(d-1)$ に付随する角運動量 (J, \vec{m}) でラベルされる粒子状態 $|p, J, \vec{m}\rangle$ のことである。この既約表現は積分核 $\mathcal{P}_d(x, x', x'')$ による積分を対角化する基底となるため、ユニタリ性条件を簡単な形に還元することができる。これらにより 2 粒子状態は次のように表示される。

$$\langle p_1, p_2 | p, J, \vec{m} \rangle \propto \delta^d(p - p_1 - p_2) Y_{J, \vec{m}}^{(d)}(\hat{p}_1), \quad (3.25)$$

ここで $Y_{J, \vec{m}}^{(d)}$ は d 次元の球面調和関数である。この基底 $|p, J, \vec{m}\rangle$ により散乱振幅演算子 $\hat{\mathcal{M}}$ を全ての可能なスピンについての和に展開することができる。その際の展開係数 $f_J(p^2)$ は次の形式で取り出すことができる。

$$f_J(p^2) \propto \frac{\langle p, J, \vec{m} | \hat{\mathcal{M}} | p, J, \vec{m} \rangle}{\langle p, J, \vec{m} | p, J, \vec{m} \rangle} \quad (3.26)$$

これを用いて、散乱振幅の部分波展開は次のように書くことができる。

$$\mathcal{M}(s, t) = \sum_{\text{even } J} n_J^{(d)} f_J(s) P_J^{(d)}(\cos \theta) \quad (3.27)$$

ここで J についての和は全ての偶数 $J = 0, 2, 4, \dots$ について取られ、 $n_J^{(d)}$ は convention に依存する規格化定数である。 $P_J^{(d)}(\cos \theta)$ は部分波基底であり、スピン J 粒子交換の寄与の角度依存性を表す。この関数形は重心系において放出粒子の状態に対し $SO(d-1)$ の Casimir 演算子を作用させることで決定でき、その際得られる微分方程式は次のようになる。

$$\left[(1 - x^2)^{\frac{4-d}{2}} \frac{d}{dx} (1 - x^2)^{\frac{d-2}{2}} \frac{d}{dx} + J(J + d - 3) \right] P_J^{(d)}(x) = 0, \quad (3.28)$$

ここで $x = \cos \theta$ である．これを満たす解は x の J 次多項式であり，次で与えられる．

$$P_J^{(d)}(x) = {}_2F_1 \left(-J, J + d - 3, \frac{d-2}{2}, \frac{1-x}{2} \right) . \quad (3.29)$$

ここで ${}_2F_1$ は Gauss の超幾何関数である． $P_J^{(d)}(x)$ は部分波基底と呼ばれ，次の Gegenbauer 多項式

$$G_J^{(d)}(x) = \frac{\Gamma(d+J-3)}{\Gamma(J+1)\Gamma(d-3)} {}_2F_1 \left(-J, J + d - 3, \frac{d-2}{2}, \frac{1-x}{2} \right) \quad (3.30)$$

と overall 因子を除けば同じである．*2 散乱振幅から部分波展開係数を抽出するには，部分波基底についての直交性関係

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx (1-x^2)^{\frac{d-4}{2}} P_J^{(d)}(x) P_{\bar{J}}^{(d)}(x) = \frac{\delta_{J\bar{J}}}{\mathcal{N}_d n_J^{(d)}} . \quad (3.31)$$

を用いる．ここで規格化定数の値は

$$\mathcal{N}_d = \frac{(16\pi)^{\frac{2-d}{2}}}{\Gamma(\frac{d-2}{2})}, \quad n_J^{(d)} = \frac{(4\pi)^{\frac{d}{2}} (d+2J-3) \Gamma(d+J-3)}{\pi \Gamma(\frac{d-2}{2}) \Gamma(J+1)} \quad (3.32)$$

とする convention をとる．この下で散乱振幅から部分波展開係数 $f_J(s)$ を求める表式は次のように得られる．

$$f_J(s) = \frac{\mathcal{N}_d}{2} \int_{-1}^1 dx (1-x^2)^{\frac{d-4}{2}} P_J^{(d)}(x) \mathcal{M}(s, t(x)) . \quad (3.33)$$

これを用いて，式 (3.11) の $\mathcal{M}(s, t)$ の実解析性は次の f_J についての実解析性に翻訳される．

$$f_J(s^*) = f_J^*(s) . \quad (3.34)$$

この下で，部分波の不連続性は虚部により評価できる： $\frac{1}{2i} (f_J(s+i\epsilon) - f_J(s-i\epsilon)) = \text{Im} f_J(s)$ ．

Mandelstam kernel はスピンについて対角な以下の形で分解することができることが知られている．

$$\mathcal{P}_d(x, x', x'') = (4\pi)^{d-2} \mathcal{N}_d^2 (1-x'^2)^{\frac{d-4}{2}} (1-x''^2)^{\frac{d-4}{2}} \sum_{J=0}^{\infty} n_J^{(d)} P_J^{(d)}(x) P_J^{(d)}(x') P_J^{(d)}(x'') . \quad (3.35)$$

これらの関係を弾性ユニタリ条件 (3.20) に対して用いることにより，部分波に対する弾性ユニタリ条件は次のように書ける．

部分波弾性ユニタリ条件

$4m^2 \leq s \leq 16m^2$ の弾性領域の散乱振幅に対し，部分波 $f_J(s)$ は次の関係を満たす．

$$2\text{Im} f_J(s) = \frac{(s-4m^2)^{\frac{d-3}{2}}}{\sqrt{s}} |f_J(s)|^2 . \quad (3.36)$$

同じ内容は，

$$|S_J(s)| = 1 \quad \text{with} \quad S_J(s) := 1 + i \frac{(s-4m^2)^{\frac{d-3}{2}}}{\sqrt{s}} f_J(s) \quad (3.37)$$

*2 Gegenbauer 多項式は $d=4$ では Legendre 多項式に帰着する．本節で行っている議論は 4 次元での Legendre 多項式による部分波展開の d 次元への一般化である．

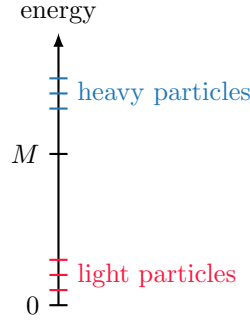


図 3.4 heavy 粒子と light 粒子のスペクトル

と書くこともできる．この表記では，自明な S 行列 $\hat{S} = \hat{1}$ は部分波基底では $S_J = 1$ に対応する．

また $f_J(s)$ の次の形式は式 (3.36) の解となる．

$$f_J(s) = \frac{\sqrt{s}}{(s - 4m^2)^{\frac{d-2}{2}}} i(1 - e^{2i\delta_J(s)}) , \quad (3.38)$$

ここで $\delta_J(s)$ は $4m^2 < s < 16m^2$ では実であり，散乱位相と呼ばれる．

また非弾性領域 $s > 16m^2$ に対しては，式 (3.22) において 2 粒子波動関数として $\psi(p_1, p_2) = \langle p_1, p_2 | p, J, \vec{m} \rangle$ と選ぶ．その結果得られる式は，部分波弾性ユニタリ条件の等号を不等号に置き換えたものとなる．

部分波非弾性ユニタリ条件

$s > 16m^2$ の非弾性領域の散乱振幅に対し，部分波 $f_J(s)$ は次の不等式を満たす．

$$2\text{Im}f_J(s) > \frac{(s - 4m^2)^{\frac{d-3}{2}}}{\sqrt{s}} |f_J(s)|^2 . \quad (3.39)$$

これは $|S_J(s)| < 1$ ，および散乱位相についての条件 $\text{Im}[\delta_J(s)] > 0$ とも書ける．

3.2 正值性条件

上記の準備にもとづき，低エネルギー有効理論の有効結合定数が満たすべき必要条件を与える議論について解説する．以下では低エネルギー有効理論のカットオフを M とかき，カットオフ M 以上の質量を持つ粒子を heavy 粒子と呼ぶ．これら heavy 粒子は低エネルギー有効理論では直接的には記述されない積分された自由度であり，heavy 粒子の影響は高階微分項として記述される．一方カットオフ M 以下の質量を持つ，低エネルギー有効理論で直接記述される粒子を light 粒子と呼ぶ．散乱振幅 $\mathcal{M}(s, t)$ の $s \ll M^2$ の低エネルギー領域における表式を \mathcal{M}_{low} とかく．

以下では最も基本的な例として，light 粒子が massless スカラーのみの理論を考える．ただし massless 粒子を仮定しているのは表式を簡単にするためだけであり，本来は light 粒子として十分小さい mass を持つ massive 粒子を考えている．すなわち理論のスペクトルは図 3.4 のようになる．

massless スカラーの 2 体-2 体散乱において， s チャネルの物理的領域は $s > 0$ ， $-s < t < 0$ である．重心系における散乱角は

$$x = \cos \theta = 1 + \frac{2s}{t} \quad (3.40)$$

と表される．散乱振幅の部分波展開は次のように書かれる．

$$\mathcal{M}(s, t(x)) = \sum_{J \text{ even}} n_J^{(d)} f_J(s) P_J^{(d)}(x) \quad (3.41)$$

ここで $n_J^{(d)}$ は式 (3.32) で与えた規格化定数， $f_J(s)$ は部分波展開係数， $P_J^{(d)}(x)$ は式 (3.29) の部分波基底である．これにより散乱振幅の虚部は次のように書ける．

$$\text{Im} \mathcal{M}(s, t(x)) = s^{\frac{4-d}{2}} \sum_{J \text{ even}} n_J^{(d)} \rho_J(s) P_J^{(d)}(x) \quad (3.42)$$

ここで $\rho_J(s) := s^{\frac{d-4}{2}} \text{Im} f_J(s)$ はスペクトル密度である．3.1.3 節の議論から，ユニタリ性条件は任意の $s > 0$ ， J に対して

$$0 \leq \rho_J(s) \leq 2 \quad (3.43)$$

が成り立つことである．このうち正値性条件の議論で用いられる条件は $\rho_J(s) \geq 0$ の側のみであるため，正値性条件はユニタリ性から得られる条件の一部のみを反映している．すなわち正値性条件は紫外完全化のための必要条件ではあるが，十分性は必ずしも成り立たないことに注意しなければならない．

さらに散乱振幅が任意の位置 $s = m_n^2$ で極を持つ場合，その虚部は次のように留数で評価できる．

$$\begin{aligned} \text{Im} \mathcal{M}(s, t) &= \frac{1}{2i} (\mathcal{M}(s + i\epsilon, t) - \mathcal{M}(s - i\epsilon, t)) \\ &= \frac{1}{2i} \left(i\pi \text{Res}_{s=m_n^2} \mathcal{M}(s, t) \right) . \end{aligned} \quad (3.44)$$

これにより極に対するユニタリ性条件は，極における留数の部分波展開係数が正であることと言い換えられる．

$$\begin{aligned} \text{Res}_{s=m_n^2} \mathcal{M}(s, t(x)) &= \sum_{J \text{ even}} B_{n,J}^{(d)} P_J^{(d)}(x), \\ B_{n,J}^{(d)} &\geq 0 . \end{aligned} \quad (3.45)$$

ここで極 $s = m_n^2$ における留数の部分波展開係数 $B_{n,J}^{(d)}$ と書いた．例えばツリーレベル振幅を考える場合には，振幅は分枝切断を持たず極のみを持つため，ユニタリ性から全ての留数における部分波展開係数 $B_{n,J}^{(d)}$ が正であることが必要となる．

3.2.1 理論に対する仮定

3.1.1 節で述べた通り，散乱振幅 $\mathcal{M}(s, t)$ は固定 $t < 0$ のもとで複素 s 平面上の複素関数として扱うことができる．この複素 s 平面上の複素関数としての散乱振幅に対し，次の一連の基本的仮定を設定する．

1. ユニタリ性: 任意の J ， $s > 0$ に対して，スペクトル密度は次の条件を満たす．

$$0 \leq \rho_J(s) \leq 2 . \quad (3.46)$$

2. 解析性: $\mathcal{M}(s, t)$ は実軸上の極および分枝切断を除いて解析的である．

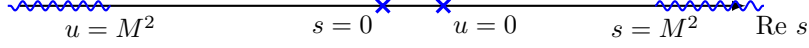


図 3.5 複素 s 平面における massless 散乱振幅の解析的構造. 低エネルギー理論に対する弱結合の仮定により, カットオフ M 以下には light 粒子の極のみがあり, M 以上に分枝切断が存在する

3. s^2 有界性: $\mathcal{M}(s, t)$ は固定 s , $|s| \rightarrow \infty$ の Regge 極限における次の有界性を満たす.

$$\lim_{|s| \rightarrow 0} \left| \frac{\mathcal{M}(s, t)}{s^2} \right| = 0. \quad (3.47)$$

4. 低エネルギー領域での交差対称性: 低エネルギー領域の散乱振幅 \mathcal{M}_{low} は (s, t, u) の次の置換のもとで対称である.

$$\mathcal{M}_{\text{low}}(s, t) = \mathcal{M}_{\text{low}}(t, u) = \mathcal{M}_{\text{low}}(u, s). \quad (3.48)$$

5. 低エネルギー領域での弱結合性: 有効 Lagrangin 中の任意の相互作用項 $\mathcal{L}_{\text{eff}} \sim g_n \mathcal{O}_n$ に対して,

$$\frac{g_n}{M^{n-d}} \ll 1 \quad (3.49)$$

を仮定する.

ツリーレベルの寄与に対しループレベルの寄与は $\mathcal{O}(g^2)$ で抑えられる. そのため弱結合の仮定のもとでは, ループ補正がツリーレベルに対し無視できない寄与を出すのは M 以上のスケールのみとなる. このことから弱結合性の仮定のもとで分枝切断は $s \geq M^2$ のみに存在し, $s \leq M^2$ の領域には light 粒子の極のみが存在することになる (図 3.5 を参照).

3.2.2 散乱振幅の低エネルギー展開

上記の仮定のもとで, 低エネルギー振幅 $\mathcal{M}_{\text{low}}(s, t)$ を s, t, u について対称的に展開することができる. 外線粒子は massless $s + t + u = 0$ であることから, 高階微分項部分は 2 つの対称式 stu と $(s^2 + t^2 + u^2)$ を基底として次のように展開できる.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\text{low}}(s, t) = & -g^2 \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \frac{1}{u} \right) - \lambda \\ & + g_2(s^2 + t^2 + u^2) + g_3(stu) + g_4(s^2 + t^2 + u^2)^2 + g_5(s^2 + t^2 + u^2)(stu) \\ & + g_6(s^2 + t^2 + u^2)^3 + g'_6(stu)^2 + g_7(s^2 + t^2 + u^2)^2(stu) + \dots \end{aligned} \quad (3.50)$$

1 行目はスカラー交換および 4 点相互作用であり, 2 行目以降が高階微分項に対応する接触項である. この振幅に対応する Feynman diagram で図示すると図 3.6 のようになる. このような散乱振幅の展開は低エネ

$$\mathcal{M}_{\text{low}}(s, t) = \text{[Bubble diagram]} + \text{[Cross diagram]} + \text{[Cross diagram with } \partial^4 \text{]} + \text{[Cross diagram with } \partial^6 \text{]} + \dots$$

図 3.6 低エネルギー散乱振幅の Feynman diagram

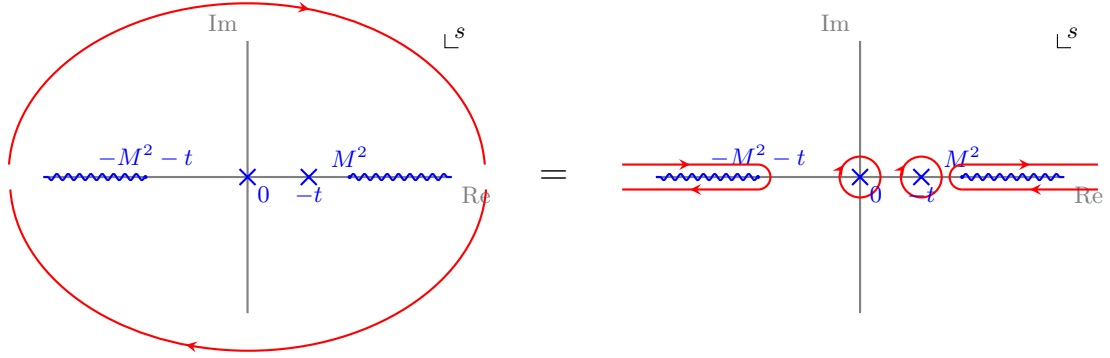


図 3.7 分散関係式を与える積分経路の変形

ギー展開または IR 展開と呼ばれる．この低エネルギー展開の高階結合係数 g_2, g_3, \dots は理論の高エネルギー領域におけるユニタリ性を反映しており，ある範囲のみの値を取るよう制約を受ける．この制約は以下で述べる分散的総和則によって導かれる．

3.2.3 分散関係式

複素平面における積分経路の変形により得られる，高エネルギー領域と低エネルギー領域を結びつける関係を分散関係式 (dispersion relations) という．

出発点となるのは次の周回積分である．

$$\oint_{\infty} \frac{ds'}{2\pi i(s' - s)} \frac{\mathcal{M}(s', t)}{(s' - s_1)(s' - s_2)} = 0 \quad (3.51)$$

ここで積分経路は半径無限大の大円上である． s_1, s_2 は任意の 2 点であり，減算点と呼ぶ． s' を大きく取る極限では $\sim \mathcal{M}(s'^3, t)/s'^3$ となるため， s^2 有界性の仮定 (3.47) よりこの積分はゼロとなる．ここで $s' = 0$ と $s' = -t$ を減算点として選ぶと，

$$\oint_{\infty} \frac{ds'}{2\pi i(s' - s)} \frac{\mathcal{M}(s', t)}{s'(s' + t)} = 0 \quad (3.52)$$

となる．ここで多項式 $s(s + t)$ は $s \leftrightarrow u$ の入れ替えの下で不変である．すなわちこのような減算点の選び方をしたのは $s \leftrightarrow u$ 交差対称性を明白にするためである．

式 (3.52) の積分経路を図 3.7 のように実軸の上下を通るよう変形することで，次のように書き直すことができる．

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{M}_{\text{low}}(s, t)}{s(s + t)} + \text{Res}_{s'=0} \left[\left(\frac{1}{s' - s} + \frac{1}{s' + s + t} \right) \frac{\mathcal{M}_{\text{low}}(s', t)}{s'(s' + t)} \right] \\ = \int_{M^2}^{\infty} \frac{ds'}{\pi} \left(\frac{1}{s' - s} + \frac{1}{s' + s + t} \right) \text{Im} \left[\frac{\mathcal{M}_{\text{high}}(s', t)}{s'(s' + t)} \right], \end{aligned} \quad (3.53)$$

ここで第 2 項の留数は実軸上の s および u チャネルの極からの寄与，右辺の実軸上の積分は s および u チャネルの分枝切断からの寄与である．

この式 (3.52) に対し，低エネルギー展開式 (3.50) および部分波展開 (3.41) を代入することで次の分散的総

和則が得られる.

$$2g_2 - g_3t + 4g_4(2t^2 + s(s+t)) + \dots = \left\langle \frac{(2m^2 + t)P_J^{(d)}(1 + \frac{2t}{m^2})}{(m^2 + t)(m^2 - s)(m^2 + s + t)} \right\rangle, \quad (3.54)$$

ここで heavy average $\langle \dots \rangle$ を

$$\langle (\dots) \rangle := \frac{1}{\pi} \sum_{J \text{ even}} n_J^{(d)} \int_{M^2}^{\infty} dm^2 m^{2-d} \rho_J(m^2) (\dots). \quad (3.55)$$

で定義した. これはスケール M 以上の heavy 粒子のスペクトル密度による平均である.

この総和則を small s および t 周りで展開する. その結果, 低エネルギー理論の有効結合定数 g_k に対する総和則が得られる. 以下が Mandelstam 変数について 4 次までの総和則である.

$$\begin{aligned} g_2 &= \left\langle \frac{1}{m^4} \right\rangle, \quad g_3 = \left\langle \frac{3 - \frac{4}{d-2} \mathcal{J}^2}{m^6} \right\rangle, \quad g_4 = \left\langle \frac{1}{2m^8} \right\rangle, \\ g_4 &= \left\langle \frac{1 + \frac{4-5d}{2d(d-2)} \mathcal{J}^2 + \frac{1}{d(d-2)} \mathcal{J}^4}{2m^8} \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.56)$$

ここで $\mathcal{J} := J(J + d - 3)$ はスピン Casimir 演算子の固有値である.

いまユニタリ性の仮定から $\rho_J(m^2) > 0$ である. そのため重要な特徴として, 正の量の heavy average は常に正となる. 例えば g_2, g_4 については内が正の量であるため, $g_2 > 0$ および $g_4 > 0$ がすぐに従う. これらは最低次の正值性条件の例である. ただし本論文では総和則から導かれる g_K に対する制約条件に対し, 総称として正值性条件と呼ぶことにする.

ここで g_4 が 2 通りで与えられていることが制約条件の最適化において重要な役割を果たす. 式 (3.56) における 2 通りの g_4 の式が両立するためには, 次の null 制約条件が満たされなければならない.

$$0 = \langle n_4(m^2, J) \rangle, \quad n_4(m^2, J) := \frac{\mathcal{J}^2 (2\mathcal{J}^2 - (5d - 4))}{m^8} \quad (3.57)$$

この条件は heavy average を定義しているスペクトル密度 $\rho_J(s)$ に対する制約条件として機能する. すなわち heavy average は null 制約関数 $n_4(m^2, J)$ に対して作用したとき消えなければならない.

null 制約関数 $n_4(m^2, J)$ のスピン J の関数としてのグラフを図 3.8 に示した. 図 3.8 から分かる通り, null 制約関数 $n_4(m^2, J)$ に対して与える寄与は, スピン 0 成分が 0, スピン 2 成分は負, スピン 4 以上の成分は全て正である. 実際, n_4 の符号が負から正に切り替わる地点での J の値は $J_{\text{critical}} = \frac{1}{2}(3 - d + \sqrt{d(d+4)+1})$ であり, これは常に $2 < J_{\text{critical}} < 3$ を満たしている. このことから以下のことが分かる.

- スピン 0 成分は null 制約関数に影響を与えない. すなわち null 制約条件 $\langle n_4(m^2, J) \rangle = 0$ を満たすスペクトル関数からスピン 0 成分のみを足し引きしたものも, null 制約関数を満たし続ける.
- スピン 2 の部分波が存在する場合, その寄与を相殺するため必ず高階スピン粒子も存在しなければならない.
- 逆に高階スピン粒子が存在するとき, スピン 2 の粒子も存在しなければならない.

null 制約条件の中で最低次の条件が $n_4(m^2, J)$ であるが, より高次の総和則を考えることで一般には無限個の null 制約条件が得られる.

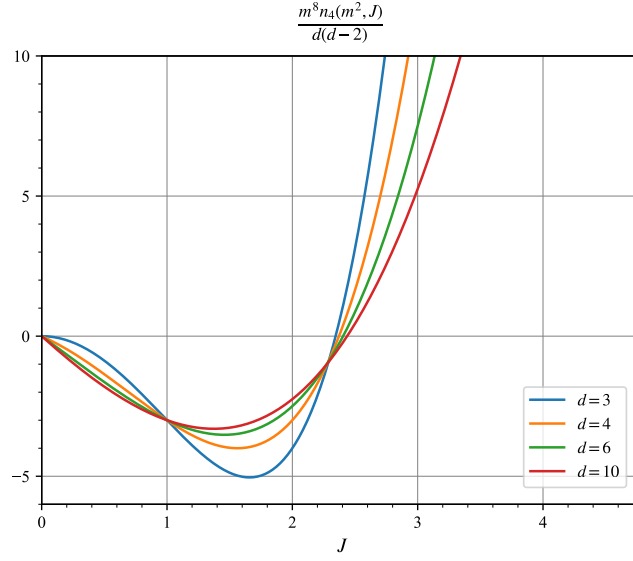


図 3.8 各時空次元 d に対してスピン J の関数として描かれた null 制約関数 n_4 .

なお以下では g_3, g_4, \dots について, g_2 およびカットオフ M によって次のように無次元に規格化する.

$$\tilde{g}_3 = g_3 \frac{M^2}{g_2}, \quad \tilde{g}_4 = g_4 \frac{M^4}{g_2}, \quad \tilde{g}_5 = g_5 \frac{M^6}{g_2}, \dots \quad (3.58)$$

3.2.4 最適化問題

ここまでで正値性条件を導いたが, 正値性条件の組み合わせ方によって g_k への制約条件は変化する. そこで正値性条件を適切に組み合わせることで, 可能な中で最も厳しい制約条件を与える方法を考えたい. 正値性条件として用いることができる条件は, g_k 関数 $g_k(m^2, J)$ および null 関数 $n_k(m^2, J)$ の 2 種類がある. g_k 関数 $g_k(m^2, J)$ は heavy average を取ることで g_k を与える関数として定義される:

$$g_2 = \langle g_2(m^2, J) \rangle, \quad g_3 = \langle g_3(m^2, J) \rangle, \quad g_4 = \langle g_4(m^2, J) \rangle, \dots \quad (3.59)$$

すなわち式 (3.56) の右辺の括弧内が $g_k(m^2, J)$ の具体形である. null 関数 $n_k(m^2, J)$ は heavy average を取ることで 0 となる関数である.

$$0 = \langle n_4(m^2, J) \rangle = \langle n_5(m^2, J) \rangle = \langle n_6(m^2, J) \rangle = \dots \quad (3.60)$$

最低次の $n_4(m^2, J)$ については式 (3.57) で具体的表式を与えた.

まず g_2 が既知, g_k ($k \geq 4$) が未知である場合に g_3 への制約を決定する例を述べる. 制約条件の設定のため, g_2, g_3 および null 制約条件を組み合わせた次のベクトル $v(m^2, J)$ を定義する.

$$v(m^2, J) := (g_2(m^2, J), M^2 g_3(m^2, J), n_4(m^2, J), n_5(m^2, J), \dots) \quad (3.61)$$

これを用いて次のように最適化問題を定式化する．

$$\begin{cases} \text{maximize : } A \\ \text{subject to : } 0 \leq (-A, 1, c_4, c_5, \dots) \cdot v(m^2, J) \quad \forall m^2 \geq M^2, \forall J = 0, 2, 4, \dots \end{cases} \quad (3.62)$$

この書き方は、2行目の制約条件を満たす組 (A, c_i) の全ての値の中から、 A を最大化する組み合わせを決定せよという意味である．そのような c_i および A が見つけれられたと仮定する．2行目の制約条件について heavy average を取ることにより

$$0 \leq -Ag_2 + M^2g_3 + 0 \quad (3.63)$$

が得られる．これを変形すると

$$A \leq \tilde{g}_3 \quad (3.64)$$

となる． A は最大化されているので、これで最適化された \tilde{g}_3 の下限値が得られた．

\tilde{g}_3 の上限値についても同様に求めることができる．今度は次のようにする．

$$\begin{cases} \text{minimize : } B \\ \text{subject to : } 0 \leq (B, -1, c_4, c_5, \dots) \cdot v(m^2, J) \quad \forall m^2 \geq M^2, \forall J = 0, 2, 4, \dots \end{cases} \quad (3.65)$$

この最適化問題を解くことにより、同様にして最適化された上限 $\tilde{g}_3 \leq B$ が得られる．以上の両方を合わせて、両側からの最適化された制約条件

$$A \leq \tilde{g}_3 \leq B \quad (3.66)$$

を得る．

上記の手順を応用してさらに高次の係数に対する制約を得ることができる．例として、 $(\tilde{g}_3, \tilde{g}_4)$ 平面の許容領域を決定することを考える．最適化問題の制約条件を与えるベクトル $v(m^2, J)$ は

$$v(m^2, J) := (g_2(m^2, J), M^2g_3(m^2, J), M^4g_4(m^2, J), n_4(m^2, J), n_5(m^2, J), \dots) \quad (3.67)$$

と設定する．この場合の最適化問題は次のように定式化される．

$$\begin{cases} \text{maximize : } h := A_1 + A_2M^2\tilde{g}_3^{(0)} \\ \text{subject to : } 0 \leq (-A_1, -A_2, 1, c_4, c_5, \dots) \cdot v(m^2, J) \quad \forall m^2 \geq M^2, \forall J = 0, 2, 4, \dots \end{cases} \quad (3.68)$$

ここで $\tilde{g}_3^{(0)}$ は適当な値に取られた初期値である．この最適化問題を解くことにより得られる関係は、

$$h|_{\max} = A_1 + A_2\tilde{g}_3^{(0)} \quad (3.69)$$

および2行目の制約条件について heavy average を取って

$$\begin{aligned} 0 &\leq -A_1g_2 - A_2M^2g_3 + M^4g_4, \\ \tilde{g}_4 - A_2\tilde{g}_3 &\geq A_1 \end{aligned} \quad (3.70)$$

である．これに式 (3.69) を代入して A_1 を消去すると、

$$\tilde{g}_4 \geq A_2(\tilde{g}_3 - \tilde{g}_3^{(0)}) + h|_{\max} \quad (3.71)$$

が得られる．この式により $(\tilde{g}_3, \tilde{g}_4)$ 平面は半分に分けられ、次の直線より上側が許容領域、下側が排除領域と

なる。

$$\tilde{g}_4 = A_2(\tilde{g}_3 - \tilde{g}_3^{(0)}) + h|_{\max} \quad (3.72)$$

この最適化をあらゆる可能な $\tilde{g}_3^{(0)}$ の値で行う。その結果、各 \tilde{g}_3 についての \tilde{g}_4 の下限値が求められる。さらに、直線 (3.72) 上の各点 $\tilde{g}_3 = \tilde{g}_3^{(0)}$ において直線は許容領域の接線となっている。すなわち、あらゆる可能な $\tilde{g}_3^{(0)}$ の値についてのこの直線の包絡線が許容領域の境界を与える。上限値についても同様の議論で決定できる。このようにして $(\tilde{g}_3, \tilde{g}_4)$ 平面の許容領域を決定することができる。

3.2.5 数値計算の実行

3.2.4 節で g_k 許容領域決定の線形計画問題としての定式化を述べた。本節ではこれを数値計算により実行する方法について述べる。数値計算を実行する上で次に述べる追加の注意点が数点ある。

- heavy 粒子の質量 m^2 はカットオフ M^2 以上の範囲の値を取る。そのため $m^2 = (1+x)M^2$ によりパラメタ $x \geq 0$ を導入し、式全体を M の適当な幂で割ることで無次元化を行う。
- 理論的には式 (3.61) に含まれる null 制約条件 $n_k(m^2, J)$ は無限個あるが、数値計算で扱えるのは有限個の制約条件のみである。考慮すべき制約条件の個数は、低エネルギー散乱振幅 \mathcal{M}_{low} における Mandelstam 変数の近似次数に応じて決められる。
- 最適化問題における制約条件は任意の $x \geq 0$ および $J = 0, 2, 4, \dots$ について課されるが、これら全てを数値的に扱うことはできないため有限化を行う。 x については得られる境界線が十分に滑らかとなるよう離散化の間隔と上限値を定める。 J については十分大きな $J = 0, 2, \dots, J_{\max}$ までの制約条件を列挙し、さらに $J \rightarrow \infty$ に対応する x の関数を一つ加える。

上述の有限化は、有限化の次数をそれ以上に大きくとっても得られる結果が十分微小にしか変化しないことを確認することで正当化される。

固定 \tilde{g}_3 に対する \tilde{g}_4 の下限を決定する問題を考える。以下では簡単のため Mandelstam 変数の近似次数が 4 次の例を説明するが、より高次の場合も手順は同様である。制約条件を与えるベクトル v は M により適当にスケール倍することで次のようになる。

$$\begin{aligned} v(x, J) &= M^4(1+x)^4 \times (g_2, M^2 g_3, M^4 g_4, M^4 n_4) \\ &= \left((1+x)^2, (1+x)(3-2J(J+1)), \frac{1}{2}, 2J(J+1)(J(J+1)-8) \right). \end{aligned} \quad (3.73)$$

また $J \rightarrow \infty$ 極限での J^4 の係数を読み取って

$$v(x, J = \infty) = (0, 0, 0, 2) \quad (3.74)$$

を制約条件の 1 つとして加える。Mandelstam 変数の近似次数 $n = 4$ としたことから決定変数は 4 次元ベクトル $y \in \mathbb{R}^4$ となる。最適化問題としての定式化は次のようになる。

$$\begin{cases} \text{maximize :} & h := y \cdot (-1, -\tilde{g}_3^{(0)}, 0, 0) \\ \text{subject to :} & 0 \leq y \cdot v(x, J) \quad x \in \{0.1, 0.2, \dots, 10.0\}, J \in \{0, 2, 4, \dots, 40, \infty\}, \\ & y \cdot (0, 0, 1, 0) = 1 \end{cases} \quad (3.75)$$

これは基本的に式 (3.68) と同じ内容であるが、計算機での実行に適した形として y の規格化を制約条件の一

つとして書いている.

本論文では Python で実行可能な凸最適化問題のモデリング言語である CVXPY およびソルバーとして ECOS を用いて最適化を行った.^{*3}その際時空次元を $d = 4$, スピンの最大値を $J_{\max} = 40$, Mandelstam 変数の近似次数を $n = 6$ として計算を行った. また初期値の範囲を $\tilde{g}_3^{(0)} \in [-11, 3]$ とし, この範囲中の 1000 点でサンプリングした. その結果, 例えば $\tilde{g}_3^{(0)} = -10.5$ に対する最適化された目的関数 h および決定変数 y の値は,

$$\begin{aligned} h &= 0.4284989 \\ y &\approx (2.200, 0.2503, 1.0, 0.01991, -8.63 \times 10^{-5}, 1.86 \times 10^{-6}) \end{aligned} \quad (3.76)$$

と求められた. また同様の操作により \tilde{g}_4 の上限も求めた.

上記の数値計算の結果として $(\tilde{g}_3, \tilde{g}_4)$ 平面の許容領域は図 3.9 に示す通り得られた. 緑色で図示した領域

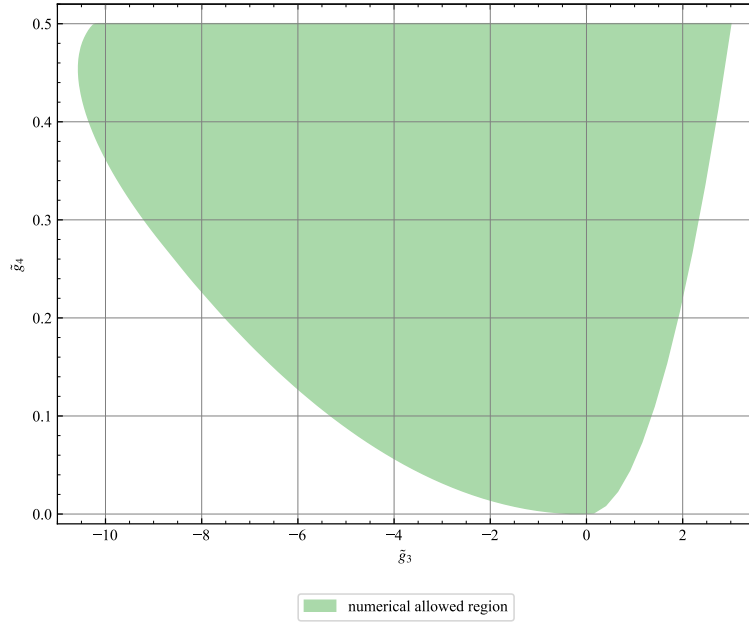


図 3.9 線形計画法により数値的に求められた $(\tilde{g}_3, \tilde{g}_4)$ の許容領域

が排除されずに残った許容領域である. \tilde{g}_3, \tilde{g}_4 の取り得る最小値, 最大値はそれぞれ $-10.5342 \leq \tilde{g}_3 \leq 3$, $0 \leq \tilde{g}_4 \leq 0.5$ である. 右上の端点の座標は $(3, 0.5)$, 左上の端点の座標は $(-10.152, 0.5)$ である.^{*4}これら 2 ヶ所の kink を除いて境界は滑らかであると読み取ることができる.

以上で述べた手順において, 制約条件は $J = 0, 2, \dots, J_{\max}, \infty$ について全てを課して最適化を行なった. 一方 $J = 0$ についての制約条件のみを設定することで, スピン 0 成分のみを持つ振幅に対する許容領域が得られる. また同様に, $J \geq 2$ についての制約条件のみを課すことでスピン 2 以上の成分のみを持つ振幅に対する許容領域が得られる. これらの結果を図 3.10 に示した. 図の右側の青い領域がスピン 0 成分のみを持つ振幅

^{*3} 他に共形場理論などの解析でも用いられる半正定値計画問題の有力なソルバーとして SDPB がある [38].

^{*4} なお左上の端点の座標についてはより精度を高くした計算では $(-10.19196, 0.5)$ となる [29].

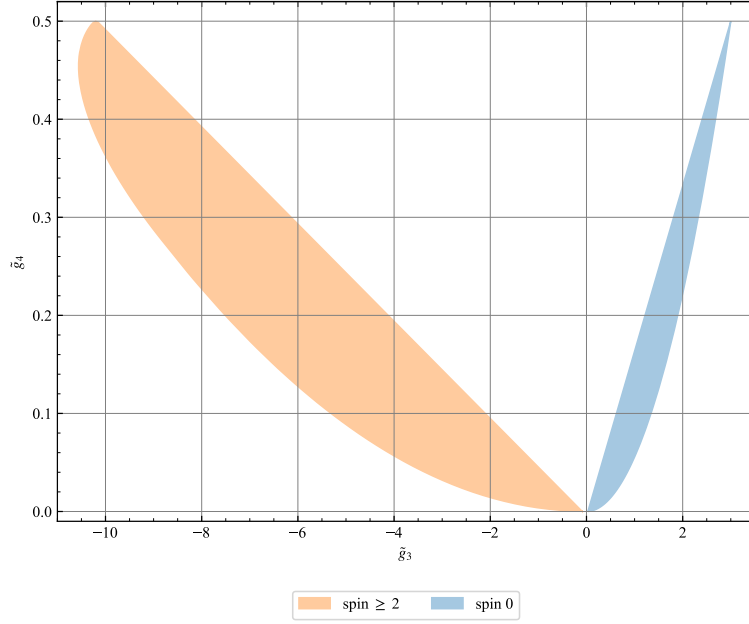


図 3.10 スピン $J \geq 2$ および $J = 0$ の振幅に対する許容領域

に対する許容領域，左側のオレンジの領域がスピン 2 以上の成分のみを持つ振幅に対する許容領域である．

3.2.6 許容領域に対する解析的考察

図 3.9 で得られた $(\tilde{g}_3, \tilde{g}_4)$ 許容領域の結果について解析的に考察する．

\tilde{g}_4 の取り得る範囲

まず \tilde{g}_4 の取り得る範囲について考える．正值性条件 (3.56) と規格化の定義 (3.58) から \tilde{g}_4 は次のように書ける．

$$\tilde{g}_4 = \frac{g_4 M^4}{g_2} = \frac{1}{2} \frac{\left\langle \frac{1}{m^8} \right\rangle M^4}{\left\langle \frac{1}{m^4} \right\rangle} \quad (3.77)$$

この分母分子ともに正の量の heavy average となっているので正であり，それらの比で定義される \tilde{g}_4 も正となる．よって \tilde{g}_4 が正の値のみを取ることはすぐに理解できる．一方 \tilde{g}_4 の上限値が $\frac{1}{2}$ であることは次のようにして分かる．heavy average を定めるスペクトル関数がカットオフ $s = M^2$ 直上にもみ単一のピークを持つ $\rho_J(m^2) \propto \delta(m^2 - M^2)$ の場合を考える．この単一ピークのスペクトルは，スペクトル関数の取りうる全ての関数形のうち最も小さい領域にスペクトルが局在した極限的な状況である．このとき heavy average の値は

$$\left\langle \frac{1}{m^8} \right\rangle \sim \frac{1}{M^{10}}, \quad \left\langle \frac{1}{m^4} \right\rangle \sim \frac{1}{M^6} \quad (3.78)$$

となるため，この場合が上限の $\tilde{g}_4 = \frac{1}{2}$ を与える．

一方，スペクトルが 2 つのピークを持つ場合として $\rho_J(m^2) \sim \delta(m^2 - M^2) + \delta(m^2 - rM^2)$ ($r > 1$) を考

えると,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{m^8} \right\rangle &\sim \frac{1}{M^{10}} \left(1 + \frac{1}{r^4} \right), \quad \left\langle \frac{1}{m^4} \right\rangle \sim \frac{1}{M^6} \left(1 + \frac{1}{r^2} \right), \\ \tilde{g}_4 &= \frac{1}{2} \frac{1 + \frac{1}{r^4}}{1 + \frac{1}{r^2}} < \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3.79)$$

となる．この結果からスペクトル関数がさらに複数のピークや連続スペクトルを持ったとしても，それらは \tilde{g}_4 の値を小さくする効果のみをもたらすことが類推できる．このことから \tilde{g}_4 の取り得る範囲が $0 \leq \tilde{g}_4 \leq \frac{1}{2}$ であることが理解できる．

\tilde{g}_3 の取り得る範囲

次に \tilde{g}_3 の取り得る範囲について考える．上記と同様に，正値性条件 (3.56) と規格化の定義 (3.58) から \tilde{g}_3 は次のように書ける．

$$\tilde{g}_3 = \frac{g_3 M^2}{g_2} = \left\langle \frac{3 - \frac{4}{d-2} \mathcal{J}^2}{m^6} \right\rangle \frac{M^2}{\left\langle \frac{1}{m^4} \right\rangle}. \quad (3.80)$$

これより \tilde{g}_3 の正負は次の g_3 関数で決定されることが分かる．

$$g_3(J) := m^6 g_3(m^2, J) = 3 - \frac{4}{d-2} \mathcal{J}^2. \quad (3.81)$$

様々な時空次元に対して J の関数として描かれた g_3 関数のグラフを図 3.11 に示した．なお J は $J = 0, 2, 4, \dots$ と偶数のみを取るが，これを実数値に拡張して描いている．*5

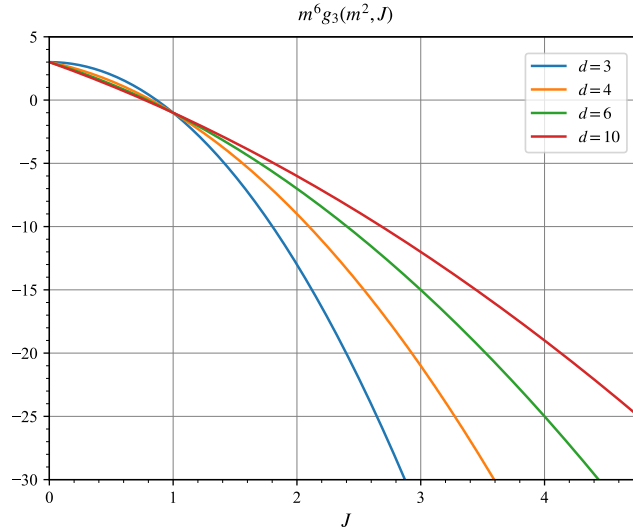


図 3.11 各時空次元 d に対して J の関数として描かれた g_3 関数

*5 なお 4.2.1 節で説明した通り， $t \leftrightarrow u$ 交差対称性により偶数スピン成分のみが nonzero であり，奇数スピン成分は存在しない．

図 3.11 から見てとれる通り、 g_3 関数は $g_3(J=0)=3$, $g_3(J=1)=-1$ を d の値によらず通り、 J について単調減少する。この振る舞いから g_3 に対して正の寄与を与えるのはスピン 0 成分のみであることが分かる。すなわち g_3 の最大値を与える振幅を具体的に構成するには、スピン 0 成分のみを持つ振幅を用意すればよいと期待される。

そのような振幅は具体的に与えることができる。スピン 0 成分のみを持つ s^2 有界かつ (s, t, u) 交差対称な振幅は一意的であり、以下のスピン 0 振幅である。

$$\mathcal{M}_{\text{spin-0}} = \frac{1}{-s+m^2} + \frac{1}{-t+m^2} + \frac{1}{-u+m^2} . \quad (3.82)$$

このスピン 0 振幅の低エネルギー近似により生じる $(\tilde{g}_3, \tilde{g}_4)$ の値は直接的に計算することができる。各項について $s < m^2$ の下で

$$\frac{1}{-s+m^2} = \frac{1}{m^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{s}{m^2} \right)^n \quad (3.83)$$

と展開する。これより次のように低エネルギー展開が可能である。

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\text{spin-0}} &= \frac{1}{m^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{s}{m^2} \right)^n + \left(\frac{t}{m^2} \right)^n + \left(\frac{u}{m^2} \right)^n \right) \\ &= \frac{3}{m^2} + \frac{1}{m^6} (s^2 + t^2 + u^2) + \frac{3}{m^8} stu + \frac{1}{2m^{10}} (s^2 + t^2 + u^2)^2 + \dots \end{aligned} \quad (3.84)$$

ここで... は Mandelstam 変数について 5 次以上の項である。なおここで massless 条件 $s+t+u=0$ から $s+t+u$ に比例する項は全て消えている。この低エネルギー展開と式 (3.50) の低エネルギー振幅の一般形を比較することで、

$$g_2 = \frac{1}{m^6}, \quad g_3 = \frac{3}{m^8}, \quad g_4 = \frac{1}{2m^{10}} \quad (3.85)$$

と読み取ることができる。 g_2 および M による規格化を行うことで、規格化された結合定数 \tilde{g}_3, \tilde{g}_4 が次のように求められる。

$$\tilde{g}_3 = \frac{3}{\tilde{m}^2}, \quad \tilde{g}_4 = \frac{1}{2\tilde{m}^4} . \quad (3.86)$$

ここで $\tilde{m} := \frac{m}{M}$ と定義した。これより $\tilde{g}_4 = \frac{1}{18}(\tilde{g}_3)^2$ の関係が読み取れる。この 2 次関数は図 3.9 の数値計算における \tilde{g}_3 の最大値を与える右端の境界にちょうど一致する。特に $\tilde{m} = 1$ のとき $(\tilde{g}_3, \tilde{g}_4) = (3, \frac{1}{2})$ となり、図 3.9 の右上の端点を再現することが確認できる。

最後に \tilde{g}_3 の下限について考える。図 3.11 の g_3 関数の振る舞いより、 $J \geq 2$ の高階スピン成分を出来るだけ多く含む振幅が \tilde{g}_3 の下限を与えると期待される。そのような高階スピン成分を無限に多く持つ振幅として、経験的に知られているのが次の積の形式である。

$$\frac{1}{(-s+m^2)(-t+m^2)} \quad (3.87)$$

このような形の振幅は s チャネル極 $s = m^2$ における留数部分 $\frac{1}{-t+m^2}$ を t の多項式で表示した際無限次となることから、無限に高いスピン成分を含んでいることが分かる。これを踏まえて、高階スピン成分を無限次まで含み、 s^2 有界かつ (s, t, u) 交差対称な振幅として最も簡単な例は、

$$\frac{1}{(-s+m^2)(-t+m^2)(-u+m^2)} \quad (3.88)$$

という形である．さらにこの振幅に対し，以下で説明するスピン 0 成分の相殺を行った振幅を次のように定義する．

$$\mathcal{M}_{stu} = \frac{m^4}{(-s+m^2)(-t+m^2)(-u+m^2)} - \gamma(d)\mathcal{M}_{\text{spin-0}} . \quad (3.89)$$

ここで $\gamma(d)$ は振幅全体のスピン 0 成分が消えるように決定される定数であり，時空次元 d に応じて決まる． $\gamma(d)$ の値を決定するには，4.2 章で行なった部分波展開係数の計算を実行する．すなわち式 (4.34) により振幅を s および散乱角 x で表示し， $s = m^2$ における留数を求め，Gegenbauer 多項式との内積を計算する．

$$\rho_J(s)|_{stu} = 2\pi\mathcal{N}_d m^{d-4} \delta(s-m^2) \int_{-1}^1 dx (1-x^2)^{\frac{d-4}{2}} \mathcal{P}_J(x) \left(\frac{1}{9-z^2} - \frac{\gamma(d)}{4} \right) . \quad (3.90)$$

スピン 0 成分が相殺される条件は $\rho_0(m^2) = 0$ である．これを満たす $\gamma(d)$ の値は次のように求められる．

$$\gamma(d) = \frac{4}{9} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{d-1}{2}, \frac{1}{9}\right) . \quad (3.91)$$

振幅 (3.89) から計算される有効結合定数は次のように得られる．

$$\tilde{g}_3 = \frac{2}{\tilde{m}^2} \frac{3\gamma(d)-1}{2\gamma(d)-1}, \quad \tilde{g}_4 = \frac{1}{2\tilde{m}^4} . \quad (3.92)$$

この式の $\gamma(d)$ に対して $0 \leq \gamma(d) \leq \frac{4}{9} {}_2F_1(\frac{1}{2}, 1, \frac{d-1}{2}, \frac{1}{9})$ を満たす値を代入することができる．このようにして既知の振幅により取り得る $(\tilde{g}_3, \tilde{g}_4)$ の領域を図示した結果が図 3.12 である．

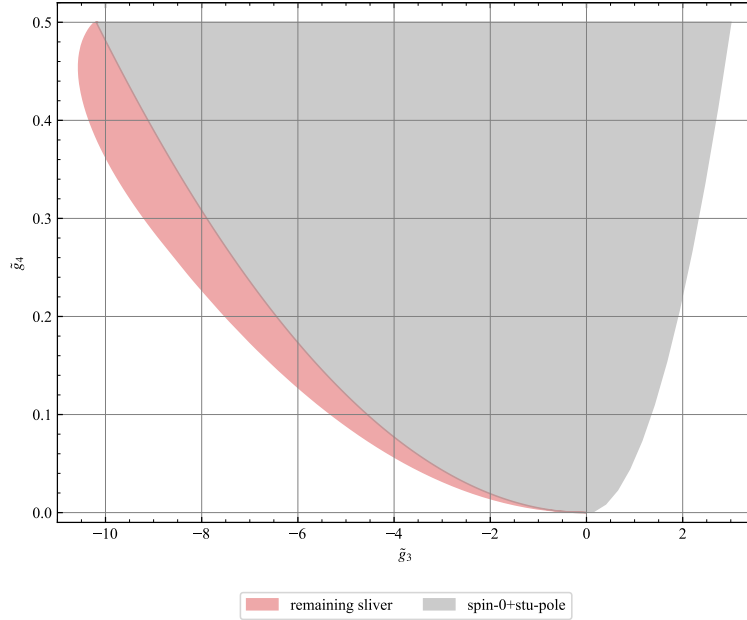


図 3.12 $(\tilde{g}_3, \tilde{g}_4)$ 平面の既知の領域および remaining sliver

図 3.12 では，スピン 0 成分をちょうど相殺する $\gamma(d)$ の値において $\tilde{m} = 1$ の場合に $(\tilde{g}_3, \tilde{g}_4) = (-10.19196, 0.5)$ となり，数値計算で得られた $(\tilde{g}_3, \tilde{g}_4)$ 平面左上の限界値と一致している．一方図 3.12

の左端の赤く塗られた細長い領域は上記の \mathcal{M}_{stu} では覆うことのできない領域であり, remaining sliver (残った薄片) と呼ばれる.

以上の考察から提起される問題は, 最適化法による許容領域の全てを基本的仮定を満たす具体的振幅で埋め切れるかという疑問である. 5 章ではこのような疑問について探索する.

第 4 章

散乱振幅の具体形

ここまで散乱振幅についての一般論について述べた。これらを踏まえ本章では散乱振幅の具体例を複数提示し、その性質について解説する。本章で扱う具体例は弦理論振幅、三重積振幅の 2 種類である。弦理論振幅は様々な弦理論から得られる振幅の総称であり、一般に高階スピン状態の無限列をスペクトルに持つことや、高エネルギー領域における Regge 化という挙動を特徴として持つ。また弦理論振幅とは別の形で重力子振幅を紫外完全化する振幅が三重積振幅である。本章の目標は散乱振幅の具体例として提起されているこれらの振幅について把握し、その性質を理解することである。4.1 節では [39] に基づき弦理論振幅の 1 つの表式を導き、その他の具体例を見る。4.2 節では [40] に基づき三重積振幅のユニタリ性について述べる。これらに加えて本章の議論は [41–43] を参考としている。

4.1 弦理論振幅

4.1.1 Virasoro-Shapiro 振幅の導出

ここでは簡単のためボゾン弦理論を考え、閉弦の 4 点ツリーレベル散乱振幅である Virasoro-Shapiro 振幅の導出を行う。26 次元の平坦時空中のボゾン弦理論において、閉弦の世界面作用は次のように書ける。

$$S_{\text{string}} = S_{\text{Poly}} + \lambda\chi, \quad (4.1)$$

ここで S_{Poly} は次の Polyakov 作用である。

$$S_{\text{Poly}} = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu}. \quad (4.2)$$

α' は弦の基本長、 X^μ は弦座標、 $g_{\alpha\beta}$ は世界面計量である。 μ, ν は時空 $0, 1, \dots, 25$ を動く添字であり、 α, β は世界面座標 σ^1, σ^2 を動く添字である。また λ は実数のパラメタであり、 χ は世界面計量から計算される Ricci 曲率 R を世界面にわたり積分した量である。

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} R. \quad (4.3)$$

この量 χ は位相的不変量となっており、世界面の種数 g との間に $\chi = 2 - 2g$ の関係がある。このため作用 (4.1) の第 2 項 $\lambda\chi$ は力学的でなく、古典的運動方程式には寄与しない。しかし弦の量子効果を考える際には非自明な影響を与え、以下で説明するように弦の結合定数として機能する。

世界面経路積分

弦理論において散乱振幅を計算するには、弦座標 X および世界面計量 $g_{\alpha\beta}$ を力学的自由度として世界面についての経路積分を行う。その際、世界面経路積分は次のように形式的に書ける。

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\text{metrics} \\ \text{topologies}}} e^{-S_{\text{string}}} &= \sum_{\text{topologies}} e^{-\lambda(2-2g)} \int \mathcal{D}X \mathcal{D}g e^{-S_{\text{Poly}}} \\ &= \sum_{g=0}^{\infty} g_s^{-(2-2g)} \int \mathcal{D}X \mathcal{D}g e^{-S_{\text{Poly}}} . \end{aligned} \quad (4.4)$$

ここで総和 $\sum_{\text{topologies}}$ は世界面計量 $g_{\alpha\beta}$ の配位および世界面の位相にわたる足し上げを形式的に表している。閉弦の世界面はツリーレベルでは種数 $g=0$ の球面に同相であり、1 ループでは $g=1$ のトーラスに同相である。 $\sum_{\text{topologies}}$ はこのような種数 $g=0, 1, \dots$ についての総和となる。また2行目に移る際、弦の結合定数 g_s を

$$g_s := e^\lambda \quad (4.5)$$

と定義した。式(4.4)では種数 g の世界面の経路積分に対する寄与が $(g_s^2)^{g-1}$ で重み付けされており、 g_s は実際に弦の結合定数として機能していることが分かる。弱結合 $g_s \ll 1$ の仮定の下では経路積分を低次の世界面位相のみについて計算することが良い近似となり、摂動論を行うことができる。

一般の m 点振幅は次のように書かれる。

$$\mathcal{A}^{(m)}(\Lambda_i, p_i) = \sum_{\text{topologies}} g_s^{-(2-2g)} \frac{1}{\text{Vol}} \int \mathcal{D}X \mathcal{D}g e^{-S_{\text{Poly}}} \prod_{i=1}^m V_{\Lambda_i}(p_i) . \quad (4.6)$$

ここで Λ_i は漸近状態を指定するラベル全てを形式的に表し、 $V_{\Lambda_i}(p_i)$ はこの漸近状態に対応する頂点演算子である。Vol は世界面のゲージ対称性のゲージ軌道方向の体積を表している。この体積で割ることにより物理的に独立な配位について正しく足し上げられた経路積分にしている。^{*1}

以下ではツリーレベル振幅を考えるため $g=0$ の項を取り出す。

$$\mathcal{A}^{(m)} = \frac{1}{g_s^2} \frac{1}{\text{Vol}} \int \mathcal{D}X \mathcal{D}g e^{-S_{\text{Poly}}} \prod_{i=1}^m V_{\Lambda_i}(p_i) \quad (4.7)$$

球面上の任意の計量は平坦計量に共形同値である。よって世界面の共形対称性を用いて球面上の計量を平坦計量に固定することができる。この固定により計量についての積分 $\int \mathcal{D}g$ はゲージ軌道の体積による割り算と相殺する。

$$\mathcal{A}^{(m)} = \frac{1}{g_s^2} \frac{1}{\text{Vol}(SL(2; \mathbb{C}))} \int \mathcal{D}X e^{-S_{\text{Poly}}} \prod_{i=1}^m V_{\Lambda_i}(p_i) \quad (4.8)$$

ただしここで $\text{Vol}(SL(2; \mathbb{C}))$ という因子があるのは以下の理由による。共形変換の無限小生成子 $l_n = z^{n+1} \partial_z$ のうち、 l_{-1}, l_0, l_1 の3つは球面上の全域で正則となる。これらは球面の共形 Killing 群と呼ばれる large ゲージ対称性 $SL(2; \mathbb{C})$ を生成する。^{*2} この対称性のゲージ固定が必要であり、そのための因子 $\text{Vol}(SL(2; \mathbb{C}))$ が分母に残っている。

^{*1} 一般にはゲージ固定のためゴーストを取り入れる必要がある。しかしここでの議論ではツリーレベルのみを考えるため、世界面計量は平坦に固定できる。この場合にはゴーストは寄与しないため無視することが出来る。

^{*2} 正確には球面の共形 Killing 群は $SL(2; \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2 = PSL(2; \mathbb{C})$ であるが、この違いは以下の議論には影響しない。

タキオン振幅における Gauss 積分の実行

以上に基づき、最も簡単な例として最低レベル状態の振幅を計算する。ボゾン弦理論における最低レベル状態はタキオン状態であり、その頂点演算子は次のように与えられる。

$$V(p_i) = g_s \int d^2 z e^{ip_i \cdot X} \equiv g_s \int d^2 z \hat{V}(z, p_i). \quad (4.9)$$

これを用いて、 m 点タキオン振幅は次のように書ける。

$$\mathcal{A}^{(m)}(p_1, \dots, p_m) = \frac{g_s^{m-2}}{\text{Vol}(SL(2; \mathbb{C}))} \int \prod_{i=1}^m \langle \hat{V}(z_1, p_1) \dots \hat{V}(z_m, p_m) \rangle, \quad (4.10)$$

ここでは $\langle \dots \rangle$ は平坦計量での Polyakov 作用による期待値であり、

$$\langle \hat{V}(z_1, p_1) \dots \hat{V}(z_m, p_m) \rangle = \int \mathcal{D}X \exp \left(\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2 z \partial X \cdot \bar{\partial} X \right) \exp \left(i \sum_{i=1}^m p_i \cdot X(z_i, \bar{z}_i) \right) \quad (4.11)$$

となっている。

平坦計量に固定された Polyakov 作用は自由場の理論であるため、式 (4.11) は計算可能な Gauss 積分の形になっている。以下の Gauss 積分の公式が適用可能である。

$$\int \mathcal{D}X \exp \left(\int d^2 z \frac{1}{2\pi\alpha'} X \cdot \partial \bar{\partial} X + i J \cdot X \right) \sim \exp \left(\frac{\pi\alpha'}{2} \int d^2 z' J(z, \bar{z}) \frac{1}{\partial \bar{\partial}} J(z', \bar{z}') \right). \quad (4.12)$$

ここで \sim は overall な規格化定数が省略されていることを表す。また右辺の $1/\partial \bar{\partial}$ は次の伝播関数 $G(z, \bar{z})$ を略記したものである。

$$\partial \bar{\partial} G(z, \bar{z}; z', \bar{z}') = \delta(z - z', \bar{z} - \bar{z}'). \quad (4.13)$$

これを満たす 2 次元の解は次の形となる。

$$G(z, \bar{z}; z', \bar{z}') = \frac{1}{2\pi} \ln |z - z'|^2. \quad (4.14)$$

また期待値 (4.11) と Gauss 積分公式 (4.12) を比較することで、ソース J は次の形であることが分かる。

$$J(z, \bar{z}) = \sum_{i=1}^m p_i \delta(z - z_i, \bar{z} - \bar{z}_i). \quad (4.15)$$

これらを代入することにより、求めたい振幅は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{(m)} &\sim \frac{g_s^{m-2}}{\text{Vol}(SL(2; \mathbb{C}))} \delta^{26}(\sum_i p_i) \int \prod_{i=1}^m d^2 z_i \exp \left(\frac{\alpha'}{2} \sum_{j,l} p_j \cdot p_l \ln |z_j - z_l| \right) \\ &= \frac{g_s^{m-2}}{\text{Vol}(SL(2; \mathbb{C}))} \delta^{26}(\sum_i p_i) \int \prod_{i=1}^m d^2 z_i \prod_{j < l} |z_j - z_l|^{\alpha' p_j \cdot p_l}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

ここで X^μ のゼロモード x^μ は $\partial \bar{\partial}$ の作用で 0 となるため、対応する伝播関数 $1/\partial \bar{\partial}$ が定義されない。そのため Gauss 積分において正確には X のゼロモードについては別個に扱う必要がある。このようにゼロモードを分離して扱った結果として、 $\int dx \exp(i \sum_{i=1}^m p_i \cdot x) \sim \delta^{26}(\sum_i p_i)$ と運動量保存を表すデルタ関数が生じる。また 2 行目に移る際、総和における $j = l$ の項は正規順序を取ると落ちることを用いている。

閉弦 4 点振幅の計算

以上において $m = 4$ とすることでタキオン状態の 2 体-2 体振幅を表す 4 点振幅が求められる。その際、残ったゲージ対称性 $SL(2; \mathbb{C})$ の固定を行う必要がある。 $SL(2; \mathbb{C})$ の独立な自由度は 3 つあるため、これにより頂点演算子の 4 つの挿入点のうち 3 点は任意の位置に写すことが出来る。ここでは次のように 4 点を取る。

$$z_1 = \infty, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = z, \quad z_4 = 1. \quad (4.17)$$

これらを式 (4.16) に代入すると次の形に帰着する。

$$\mathcal{A}^{(4)} \sim g_s^2 \delta^{26} \left(\sum_i p_i \right) \int d^2 z |z|^{2a-2} |1-z|^{2b-2} |1-z|^{2c-2}. \quad (4.18)$$

この積分はガンマ関数により次のように評価できる。

$$\int d^2 z |z|^{2a-2} |1-z|^{2b-2} |1-z|^{2c-2} = \frac{2\pi \Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(c)}{\Gamma(1-a) \Gamma(1-b) \Gamma(1-c)}, \quad a+b+c=1. \quad (4.19)$$

この公式の導出は付録 A で述べる。また p_i の内積は次で定義する Mandelstam 変数で表すことができる。

$$s = -(p_1 + p_2)^2, \quad t = -(p_1 + p_3)^2, \quad u = -(p_1 + p_4)^2, \quad (4.20)$$

ボゾン閉弦のタキオンの場合、質量が $M^2 = -\frac{D-2}{6\alpha'}$ であることから $s+t+u = -\sum_i p_i^2 = -\frac{16}{\alpha'}$ である。

以上を用いることで、最終的に次の表式を得る。

$$\mathcal{A}^{(4)} \sim g_s^2 \delta^{26} \left(\sum_i p_i \right) \frac{\Gamma(-1 - \frac{\alpha' s}{4}) \Gamma(-1 - \frac{\alpha' t}{4}) \Gamma(-1 - \frac{\alpha' u}{4})}{\Gamma(2 + \frac{\alpha' s}{4}) \Gamma(2 + \frac{\alpha' t}{4}) \Gamma(2 + \frac{\alpha' u}{4})}. \quad (4.21)$$

このボゾン弦理論の閉弦のタキオンツリーレベル振幅は Virasoro-Shapiro 振幅と呼ばれる。

4.1.2 弦理論振幅の具体例

ここでは上記で求めた Virasoro-Shapiro 振幅を含め様々な弦理論のツリーレベル振幅について最終的な表式を紹介する。以下では overall 因子である弦の結合定数および運動量保存のデルタ関数は含めずに書く。

ボゾン弦振幅

上述の通り、ボゾン弦理論の閉弦振幅は Virasoro-Shapiro 振幅と呼ばれる。

$$\mathcal{A}_{\text{closed, bos}} = \frac{\Gamma(-1 - \frac{\alpha' s}{4}) \Gamma(-1 - \frac{\alpha' t}{4}) \Gamma(-1 - \frac{\alpha' u}{4})}{\Gamma(2 + \frac{\alpha' s}{4}) \Gamma(2 + \frac{\alpha' t}{4}) \Gamma(2 + \frac{\alpha' u}{4})}. \quad (4.22)$$

一方、ボゾン弦理論の開弦振幅は次の表式で与えられ、Veneziano 振幅と呼ばれる [44]。

$$\mathcal{A}_{\text{open, bos}} = B(-\alpha(s), -\alpha(t)) = \frac{\Gamma(-\alpha(s)) \Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(s) - \alpha(t))}, \quad \alpha(s) = \alpha' s + \alpha_0. \quad (4.23)$$

ここで B は Euler ベータ関数であり、 α' は Regge slope、 α_0 は Regge 切片と呼ばれる量である。

Veneziano 振幅は重要な特徴としてチャネル双対性を持つ。Euler ベータ関数を極 $v = -n$ まわりの振る舞

いの和として表示できる.

$$B(u, v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{v+n} \frac{(-1)^n}{n!} (u-1) \cdots (u-n) \quad (4.24)$$

これはガンマ関数の性質:

$$\Gamma(z) \sim \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} \quad \text{at } z \sim -n \quad (4.25)$$

および $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ により得られる. 特に後者の性質により, 係数部分が u, v 両方について極のない多項式となっていることが重要な点である.

この表示を s, t それぞれについてこれを行うことで,

$$\begin{aligned} A(s, t) &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha(s)+1) \cdots (\alpha(s)+n)}{n!} \frac{1}{\alpha(t)-n}, \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha(t)+1) \cdots (\alpha(t)+n)}{n!} \frac{1}{\alpha(s)-n} \end{aligned} \quad (4.26)$$

と 2 通りに表示できる. このように Veneziano 振幅は s チャネル極のみの和として表せる一方, 同じ形の t チャネル極のみの和としても表せる. この性質はチャネル双対性と呼ばれ, 弦理論振幅が 2 次元的な世界面経路積分で求められることにより自然に解釈される.

Type II 閉弦振幅

これらの他に, 超弦理論では次のようなツリーレベル振幅が知られている. Type II 理論における massless レベルの閉弦振幅は次の形となる.

$$\mathcal{M}_{\text{type II, closed}} = -\kappa^2 \mathbb{R}^4 \frac{\Gamma(-\frac{\alpha' s}{4}) \Gamma(-\frac{\alpha' t}{4}) \Gamma(-\frac{\alpha' u}{4})}{\Gamma(1 + \frac{\alpha' s}{4}) \Gamma(1 + \frac{\alpha' t}{4}) \Gamma(1 + \frac{\alpha' u}{4})}. \quad (4.27)$$

ここで κ^2 は重力結合定数, \mathbb{R}^4 は偏極因子である.

Type II 閉弦振幅は重力を含む紫外完全な振幅となっている. 実際, $\alpha' = 4$ の規格化の下で低エネルギー極限 $s \ll 1$ を考えると, $\Gamma(-s) \simeq -\frac{1}{s}$, $\Gamma(1+s) \simeq 1$ より, 重力子振幅

$$\mathcal{M}_{\text{grav}} = \frac{\kappa^2 \mathbb{R}^4}{stu} \quad (4.28)$$

に帰着することが見てとれる.

なお偏極因子 \mathbb{R}^4 は外線粒子がスピン 2 粒子の場合には Ricci テンソルの積で書かれる. 外線粒子が massless スカラーの場合には $\mathbb{R}^4 = (s^2 + t^2 + u^2)^2$ となり, この場合には $\mathcal{M}_{\text{grav}} \sim \frac{t^2}{s}$ となる. これよりこの振幅が実際に massless スピン 2 粒子の交換を記述していることが読み取れる.

この振幅は $s = n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) に 1 位の極を持つ. 偏極因子以外の部分について, 極 $s = n$ における

留数は次のように書ける．

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &:= \frac{\Gamma(-s)\Gamma(-t)\Gamma(-u)}{\Gamma(1+s)\Gamma(1+t)\Gamma(1+u)}, \\ R_n(x) &:= \operatorname{Res}_{s=n} \mathcal{M} = \frac{(-1)^n \left(-\frac{n(x+1)}{2} + 1\right)^{(n-1)} \left(\frac{n(x-1)}{2} + 1\right)^{(n-1)}}{(\Gamma(n+1))^2}.\end{aligned}\tag{4.29}$$

ここで $x = \cos \theta$ である．これより留数は x について有限次の多項式となることが分かる．

4.2 三重積振幅

ユニタリかつ重力子散乱の紫外補完を与える新しいクラスのツリーレベル振幅が提案されている [40]．この振幅は特徴的な三重積の構造 $\mathcal{A}(s)\mathcal{A}(t)\mathcal{A}(u)$ を持つ．三重積構造は、弦理論のツリーレベル振幅にも同様の構造を持つものが存在することからも興味を持たれている．ここではこの三重積振幅の性質について詳しく説明する．5章の研究パートではこの振幅の応用を考えるため、本節の記述がそのための準備となる．

4.2.1 非重力の場合

massive な極のみを持つ三重積振幅 $\mathcal{M}_{\text{triple,nongrav}}^{(N)}$ は次のように定義される．

$$\mathcal{M}_{\text{triple,nongrav}}^{(N)} = m^4 \mathcal{A}_{\text{nongrav}}^{(N)}(s) \mathcal{A}_{\text{nongrav}}^{(N)}(t) \mathcal{A}_{\text{nongrav}}^{(N)}(u),\tag{4.30}$$

$$\mathcal{A}_{\text{nongrav}}^{(N)}(s) = \sum_{n=1}^N \frac{f_n}{-s + m_n^2}, \quad \forall m_n^2 > 0, \quad \forall f_n \geq 0.\tag{4.31}$$

ここで m_n^2 は (0 でない) 正の質量スペクトル、 f_n は 0 以上の結合定数である． N は極の数であり、有限および無限 $N = \infty$ の両方の場合を考えることができる．また外線状態は massless である状況を考えており、 $s + t + u = 0$ である．

この三重積振幅はユニタリ性条件を満たす．3.2 節で説明した通り、ツリーレベル振幅に対するユニタリ性条件は各質量極における留数の部分波展開係数が正であることに換言される．このことが今の三重積振幅で成り立つことを以下で実際に確認する．各質量極における留数は次のように書くことができる．^{*3}

$$R_n(x) := \lim_{s \rightarrow m_n^2} (-s + m_n^2) \mathcal{M}_{\text{triple,nongrav}}^{(N)}(s, t(x)) \equiv \sum_{i,j=1}^N R_n^{ij}(x),\tag{4.32}$$

$$\begin{aligned}R_n^{ij}(x) &= \frac{f_n f_i f_j}{(-t + m_i^2)(t + m_n^2 + m_j^2)} \\ &= \frac{f_n f_i f_j}{\left(-\frac{m_n^2(x-1)}{2} + m_i^2\right)\left(\frac{m_n^2(x+1)}{2} + m_j^2\right)} \\ &= \frac{4f_n f_i f_j}{m_n^4} \frac{1}{\left(-x + 1 + \frac{2m_i^2}{m_n^2}\right)\left(x + 1 + \frac{2m_j^2}{m_n^2}\right)}.\end{aligned}\tag{4.33}$$

^{*3} なおここでの留数の定義は通常定義と -1 倍ずれていることに注意．

$s = m_n^2$ における留数 $R_n(x)$ は i, j についての和の形で書かれ、総和記号の中身を $R_n^{ij}(x)$ と定義している．式 (4.33) の変形では massless 条件 $s + t + u = 0$ と散乱角の定義 $x = \cos \theta = 1 + \frac{2t}{s}$ より

$$\begin{cases} t &= \frac{s(x-1)}{2}, \\ u &= \frac{-s(x+1)}{2} \end{cases} \quad (4.34)$$

と書けることを用いた．この関係から分かる通り $s = m_n^2 > 0$ のとき t, u は負であるため、留数は $s = m_n^2$ の極だけの寄与を持ち、 $\mathcal{A}_{\text{nongrav}}^{(N)}(t)\mathcal{A}_{\text{nongrav}}^{(N)}(u)|_{s=m_n^2}$ に比例する形となる．

ここで無次元の質量パラメタ $M_{i,n}^2$ を次で定義する．

$$M_{i,n}^2 := 1 + \frac{2m_i^2}{m_n^2} > 1. \quad (4.35)$$

定義から $M_{i,n}^2$ は常に 1 より大きい．これを用いて留数 $R_n(x)$ は次のように書き直すことができる．

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \sum_{i,j=1}^N R_n^{ij}(x) = \sum_{i,j=1}^N R_n^{(ij)}(x), \\ R_n^{(ij)}(x) &= \frac{4f_n f_i f_j}{m_n^4 (M_{i,n}^2 + M_{j,n}^2)} \left(\frac{M_{i,n}^2}{M_{i,n}^4 - x^2} + \frac{M_{j,n}^2}{M_{j,n}^4 - x^2} \right). \end{aligned} \quad (4.36)$$

2 つ目の等号では添字 i, j についての和が対称的に取られていることから、 i, j について対称化: $R_n^{(ij)}(x) := (R_n^{ij}(x) + R_n^{ji}(x))/2$ を行った． $M_{i,n}^2, M_{j,n}^2 > 0$ および $|x| \leq 1$ より、式 (4.36) の () 内の因子を x^2 の等比級数の形に書き直すことができる．

$$\frac{M_{i,n}^2}{M_{i,n}^4 - x^2} = \frac{1}{M_{i,n}^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{M_{i,n}^4} \right)^k. \quad (4.37)$$

さらに x^{2k} は次のように Gegenbauer 多項式により部分波展開される．

$$x^{2k} = \sum_{J=0}^k \frac{(2k)!(\frac{d-3}{2} + 2J)\Gamma(\frac{d-1}{2})}{(d-3)2^{2k-1}(k-J)!\Gamma(\frac{d-1}{2} + k + J)} G_{2J}^{(d)}(x). \quad (4.38)$$

この部分波展開における係数部分は任意の $d \geq 3$ で正である．この結果を式 (4.37) に代入し、さらに式 (4.36) に代入することで $R_n(x)$ 全体の部分波展開が求められる．代入の際に追加で掛かる因子 $\frac{1}{M_{i,n}^2}$ および $\frac{4f_n f_i f_j}{m_n^4 (M_{i,n}^2 + M_{j,n}^2)}$ は全て正であるため、 $R_n(x)$ 全体の部分波展開係数も正であることが分かる．

この結果を明示的に表記すれば次のようになる．

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \sum_{J=0}^{\infty} B_{J,n}^{(d)} G_J^{(d)}(x), \\ B_{J,n}^{(d)} &= \begin{cases} \frac{8f_n F_J^{(d)}}{m_n^4} \sum_{i,j=1}^N \frac{f_i f_j M_{i,n}^2 I_J^{(d)}(M_{i,n}^2)}{M_{i,n}^2 + M_{j,n}^2}, & (J \text{ が偶数のとき}) \\ 0 & (J \text{ が奇数のとき}) \end{cases} \end{aligned} \quad (4.39)$$

ここで $B_{J,n}^{(d)}$ が部分波展開係数である．また $F_J^{(d)}$ は Gegenbauer 多項式の直交関係に由来する規格化定数， $I_J^{(d)}(v)$ は部分波展開係数を抽出する積分であり，以下で定義される．

$$F_J^{(d)} := \frac{J!(J + \frac{d-3}{2})(\Gamma(\frac{d-3}{2}))^2}{\pi 2^{2-d} \Gamma(J+d-3)}, \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} I_J^{(d)}(v) &:= \int_{-1}^{+1} dx (1-x^2)^{\frac{d-4}{2}} G_J^{(d)}(x) \frac{1}{v^2 - x^2} \\ &= \frac{\pi \Gamma(J+d-3)}{2^{J+d-4} \Gamma(\frac{d-3}{2}) \Gamma(J + \frac{d-1}{2})} \frac{{}_2F_1\left(\frac{J+1}{2}, \frac{J+2}{2}; J + \frac{d-1}{2}; \frac{1}{v^2}\right)}{v^{J+2}}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

式 (4.39) で J が奇数の部分波が消えているのは $t \leftrightarrow u$ 交差対称性のためである． $t \leftrightarrow u$ 交差対称な量は $t+u = -s$ および $tu = -\frac{s^2}{4}(x^2-1)$ の多項式で書ける (式 (4.34) を用いた)．これらは $G_0^{(d)} = 1$, $G_2^{(d)} \propto x^2 - \frac{1}{d-1}$ の線形結合で書けるため，奇数スピンの部分波は生じない．

以上のようにして非重力三重積振幅はユニタリ性条件を満たすことが分かる．

4.2.2 重力を含む場合

以下では $d \geq 5$ 次元を考える．*4 非重力の場合に対し少し変更を加えると，重力を含む三重積振幅を構成することができる．三重積を構成するユニットを次のような表式に変更する．

$$\mathcal{A}_{\text{grav}}^{(N)}(s) = \frac{1}{s} + \sum_{n=1}^N \frac{f_n}{-s + m_n^2} \quad (4.42)$$

ここで質量スペクトルおよび結合定数は非重力の場合と同様に $m_n^2 > 0$, $f_n \geq 0$ であり， N について無限大の場合も同様に考えることができる．非重力の場合と異なる点は，massless 極 $\frac{1}{s}$ が追加されたこと，およびそれに伴い結合定数 f_n に対して次の制約条件が課されることである．

$$\sum_{n=1}^N f_n = 1. \quad (4.43)$$

また振幅全体は次のように追加因子を掛けて定義される．

$$\mathcal{M}_{\text{triple, grav}}^{(N)} = \kappa^2 \mathbb{R}^4 \mathcal{A}_{\text{grav}}^{(N)}(s) \mathcal{A}_{\text{grav}}^{(N)}(t) \mathcal{A}_{\text{grav}}^{(N)}(u), \quad (4.44)$$

ここで $\kappa^2 = 8\pi G_N$ は重力結合定数， \mathbb{R}^4 は外線の偏極因子であり，外線がスカラー粒子の場合には

$$\mathbb{R}^4 = (s^2 t^2 + t^2 u^2 + u^2 s^2) \quad (4.45)$$

*4 $d = 4$ では重力子の t チャネル極 $\sim \frac{1}{t}$ が存在し，前方極限 $t \rightarrow 0$ で $t \propto \theta^{-2}$ と振る舞う一方，体積要素は $d\Omega \sim \theta^{d-3} d\theta$ と振る舞う．このため部分波展開が発散してしまうという問題が存在する [45]．

となる．この追加因子を掛けることにより低エネルギー極限で一般相対論の結果に帰着させることができる． $s, t, u \ll m_n^2$ においてこの振幅は

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\text{triple,grav}}^{(N)} &\simeq \kappa^2 \mathbb{R}^4 \frac{1}{stu} \\ &= \kappa^2 \left(\frac{tu}{s} + \frac{us}{t} + \frac{st}{u} \right) .\end{aligned}\tag{4.46}$$

となり，massless スピン 2 粒子交換に対応することが分かる．これは実際に線形化近似におけるツリーレベル重力子振幅の表式に一致している．

一方，式 (4.43) の結合定数制約条件は高エネルギーでの振幅の有界性を保証するために必要となる．固定角高エネルギー極限: fixed t/s , large $s = E^2$ において三重積振幅を展開すると，

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\text{triple,grav}}^{(N)} &\propto E^8 \left(\left(1 - \sum_{n=1}^N f_n \right)^3 E^{-6} + \left(1 - \sum_{n=1}^N f_n \right)^2 \left(\sum_{n=1}^N f_n m_n^2 \right) E^{-8} \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{n=1}^N f_n m_n^2 \right)^3 E^{-12} + \mathcal{O}(E^{-14}) \right)\end{aligned}\tag{4.47}$$

となる．これより結合定数制約条件がない場合高エネルギーで $\mathcal{M}_{\text{triple,grav}}^{(N)} \propto E^2$ と振幅は増大する一方，結合定数制約条件を課すことで $\mathcal{M}_{\text{triple,grav}}^{(N)} \propto E^{-4}$ となり減衰するようになることが分かる．Regge 極限: fixed t , large s でも同様の手順で評価することができる．その結果，結合定数制約条件がない場合高エネルギーで $\mathcal{M}_{\text{triple,grav}}^{(N)} \propto s^2$ と振幅は増大する一方，結合定数制約条件を課すことで $\mathcal{M}_{\text{triple,grav}}^{(N)} \propto s^0$ となる．以上より式 (3.47) の s^2 有界性を満たす三重積振幅を構成するためには式 (4.43) の結合定数制約条件が必要となることが分かる．

この重力三重積振幅の場合にも部分波展開によりユニタリであることが確かめられる． $d \leq 10$ の場合に外線因子 \mathbb{R}^4 が正係数で部分波展開されることが [46] で示されている．ここでは残りの部分 $\mathcal{A}_{\text{grav}}^{(N)}(s)\mathcal{A}_{\text{grav}}^{(N)}(t)\mathcal{A}_{\text{grav}}^{(N)}(u)$ が正係数で部分波展開されることを確認する．

まず $s = 0$ の massless 極における留数を考える．

$$\begin{aligned}R_0 &:= \lim_{s \rightarrow 0} (-s) \mathcal{A}_{\text{grav}}^{(N)}(s) \mathcal{A}_{\text{grav}}^{(N)}(t) \mathcal{A}_{\text{grav}}^{(N)}(u) = \left(\frac{1}{t} + \sum_{i=1}^N \frac{f_i}{-t + m_i^2} \right) \left(\frac{1}{t} + \sum_{j=1}^N \frac{f_j}{-t - m_j^2} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^N f_i f_j \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{-t + m_i^2} \right) \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{-t - m_j^2} \right) ,\end{aligned}\tag{4.48}$$

ここで 2 行目に移る際，結合定数制約条件 (4.43) を用いた．これを t の冪級数で書き直すと次のようになる．

$$R_0 = \sum_{i,j=1}^N \frac{f_i f_j}{m_i^2 + m_j^2} \sum_{\substack{l \geq 0 \\ \text{even}}} t^{l-2} \left(\frac{m_i^2}{m_i^{2l}} + \frac{m_j^2}{m_i^{2l}} \right) \geq 0 .\tag{4.49}$$

ここで総和は t について偶数次のみについて取られ，() 内の係数部分は常に正であるため，任意の t の値に対して総和部分は正である．またその前に掛かる因子も全て正であることから，全体 R_0 も任意の t の値に対して正となる．よって massless 極はユニタリ性条件を満たしている．

overall 因子 \mathbb{R}^4 は $\sim t^4$ と振る舞うため、総和の最低次の t^{-2} の項が $\mathcal{M} \sim \frac{t^2}{s}$ の形となりスピン 2 の重力子に相当する。他の項は高階スピン粒子に対応するとみなすことができる。その際、高階スピン粒子は偶数スピンの無限列となっており上限を持たないことがこの振幅の特徴である。

続いて massive 極 $s = m_n^2$ における留数を考える。

$$\begin{aligned} R_n &= \lim_{s \rightarrow m_n^2} (-s + m_n^2) \mathcal{A}_{\text{grav}}^{(N)}(s) \mathcal{A}_{\text{grav}}^{(N)}(t) \mathcal{A}_{\text{grav}}^{(N)}(u) \\ &= f_n \left(\frac{1}{t} + \sum_{i=1}^N \frac{f_i}{-t + m_i^2} \right) \left(\frac{-1}{t + m_n^2} + \sum_{j=1}^N \frac{f_j}{t + m_n^2 + m_j^2} \right) \end{aligned} \quad (4.50)$$

ここで () を展開すると $\mathcal{O}(f^1), \mathcal{O}(f^2), \mathcal{O}(f^3)$ の 3 種類の項が生じる。そこで R_n を次のように 3 つの部分に分けて書く。

$$R_n := R_n^{00} + \sum_{i=1}^N R_n^{0i} + \sum_{i,j=1}^N R_n^{ij}, \quad (4.51)$$

$$\begin{cases} R_n^{00} = -\frac{f_n}{t(t + m_n^2)} \\ R_n^{0i} = \frac{f_n f_i}{t(t + m_n^2 + m_i^2)} + \frac{f_n f_i}{(t + m_n^2)(t - m_i^2)} \\ R_n^{ij} = \frac{f_n f_i f_j}{(-t + m_i^2)(t + m_n^2 + m_j^2)} \end{cases} \quad (4.52)$$

ここで R_n^{00} は第 1 項同士の積であり $\mathcal{O}(f^1)$ の項、 R_n^{0i} は cross term であり $\mathcal{O}(f^2)$ の項、 $R_n^{(ij)}$ は第 2 項同士の積であり $\mathcal{O}(f^3)$ の項である。

これらは x についてそれぞれ次のように級数表示できる。

$$\begin{cases} R_n^{00} = \frac{4f_n}{m_n^4(1-x^2)} = \frac{4f_n}{m_n^4} \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} \\ R_n^{0i} = -\frac{8f_n f_i}{m_n^4(1+M_{i,n}^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{M_{i,n}^{4k+2}} \right) x^{2k} \\ R_n^{(ij)} = \frac{4f_n f_i f_j}{m_n^4(M_{i,n}^2 + M_{j,n}^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^{2k}}{M_{i,n}^{4k+2}} + \frac{x^{2k}}{M_{j,n}^{4k+2}} \right). \end{cases} \quad (4.53)$$

ここで R_n^{ij} は非重力の場合の式 (4.33) と全く同じ表式であり、非重力の場合と同様に $\sum_{i,j=1}^N R_n^{ij} = \sum_{i,j=1}^N R_n^{(ij)}$ の関係により i, j について対称化された量 $R_n^{(ij)}$ にして考えている。これを見ると R_n^{00} および $R_n^{(ij)}$ は正係数である一方、 R_n^{0i} は負係数となっているが、実はこれらは次のように一つの表式にうまくまとめることができる。

$$R_n = \frac{4f_n}{m_n^4} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i,j=1}^N f_i f_j Q_{nijk} x^{2k}, \quad (4.54)$$

$$Q_{nijk} = \frac{(M_{i,n}^2 - 1)(M_{j,n}^{4k+4} - 1)}{M_{j,n}^{4k+2}(1 + M_{j,n}^2)(M_{i,n}^2 + M_{j,n}^2)} + (i \leftrightarrow j). \quad (4.55)$$

式 (4.43) の結合定数制約条件によって上記 3 つの部分が Q_{nijk} の 1 つの量にまとめられている。定義から $M_{i,n}^2 > 1$ であることから、この Q_{nijk} は明白に正である。これと式 (4.38) から全ての部分波展開係数が正であることが分かる。

この結果を明示的に表記すれば次のようになる。

$$R_n(x) = \sum_{J=0}^{\infty} B_{J,n}^{(d)} G_J^{(d)}(x) ,$$

$$B_{J,n}^{(d)} = \begin{cases} 8g_n^2 m_n^{-4} \sum_{i,j=1}^N f_i f_j \beta_{J,n}^{(d)ij} , & (\text{J が偶数のとき}) \\ 0 & (\text{J が奇数のとき}) \end{cases} \quad (4.56)$$

ここで $\beta_{J,n}^{(d)ij}$ は以下で定義される。

$$\beta_{J,n}^{(d)ij} = \frac{F_J^{(d)}}{2(1 + M_{i,n}^2)} \left(\frac{M_{i,n}^2(1 - M_{j,n}^2)I_J^{(d)}(M_{i,n}^2)}{M_{i,n}^2 + M_{j,n}^2} + \frac{M_{i,n}^2 - 1}{2} I_J^{(d)}(1) \right) + (i \leftrightarrow j) . \quad (4.57)$$

$F_J^{(d)}$ および $I_J^{(d)}(v)$ は式 (4.40) および式 (4.41) で定義した量である。以上から重力的三重積振幅についてもユニタリであることが示された。

弦理論振幅には弦理論という明確な由来となる理論が存在するのに対し、三重積振幅を導く具体的理論は知られていない。実際、重力的三重積振幅 (4.44) は重力の紫外補完として弦理論とは異なるものとなっている。重力的三重積振幅の massless 極における留数 (4.49) は無限に高いスピン成分を含む一方、弦理論の Type II 振幅 (4.27) の留数多項式は有限次である。

第 2 部

研究: 三重積振幅による正值性条件の探索

第 5 章

三重積振幅による正值性条件の探索

本章では現在進行途中の研究である，三重積振幅による正值性条件の探索について述べる [2]。3.2 節で述べた通り，正值性条件は低エネルギー有効理論の結合定数に対する一連の制約として，理論が紫外完全化されるための必要条件を与える。複数の正值性条件の組み合わせから最も強い制限を得る問題は，最適化問題の形に定式化され数値的に解くことができ，最適化された正值性条件を満たす領域として結合定数の許容領域が決定できる。ただし正值性条件を与えるのは紫外補完の必要条件のみであり，得られた許容領域の各点に対して対応する具体的な理論が常に存在するという保証はない。

一方，基本的仮定を満たす具体的な理論モデルの散乱振幅を考えると，低エネルギー散乱振幅の高階結合定数を直接読み取ることができる。すなわち具体的な振幅について結合定数の取り得る値の範囲を解析的に調べることで，正值性条件の十分性の検証が可能となる。

本研究では基本的な例である massless スカラー 2 体振幅の場合を考える。高階結合定数の最初の 2 項である \tilde{g}_3, \tilde{g}_4 について，現状では数値的許容領域のうち大部分は対応する振幅が既知である。しかし \tilde{g}_3 が負となる数値的限界値付近の一部の領域については，対応する具体的な振幅が知られていない [29]。そのため特に許容領域の境界付近の値を与える具体的なモデルを調べるのが重要となる。

そのような中で，ユニタリ性を満たしかつ重力子振幅を紫外補完する，最近提示された新しいクラスのツリーレベル散乱振幅が 4.2 節で解説した三重積振幅である [40]。本研究では有効結合定数 \tilde{g}_3 を最も小さくする既知の具体例が単一の極を持つ場合の三重積振幅の形となっていることに着目し，この拡張として 2 つの極を持つ場合の三重積振幅における有効結合定数の取り得る値について調べた。本章ではこの計算手法および結果に対する考察について述べる。

5.1 問題設定: 正值性条件の十分性の検証

4 次元平坦時空における massless スカラー粒子の理論の 2 体振幅を考える。^{*1}この振幅に対し 3.2.1 節で述べた基本的仮定として，ユニタリ性，解析性， s^2 有界性，低エネルギー領域での交差対称性および弱結合性を

^{*1} 簡単のため $d = 4$ としたが，一般の $d \geq 4$ でも同様の議論が可能である。

を満たすことを要請する．低エネルギー振幅は一般に次の (s, t, u) についての対称式により展開できる．

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\text{low}(s,t)} = & -g^2 \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \frac{1}{u} \right) - \lambda \\ & + g_2(s^2 + t^2 + u^2) + g_3(stu) + g_4(s^2 + t^2 + u^2)^2 + g_5(s^2 + t^2 + u^2)(stu) \\ & + g_6(s^2 + t^2 + u^2)^3 + g'_6(stu)^2 + g_7(s^2 + t^2 + u^2)^2(stu) + \dots\end{aligned}\quad (5.1)$$

これらの高階結合定数 g_k に対し，3.2.3 節の分散関係式の議論により正値性条件が与えられる．

$$\begin{aligned}g_2 &= \left\langle \frac{1}{m^4} \right\rangle, \quad g_3 = \left\langle \frac{3 - \frac{4}{d-2} \mathcal{J}^2}{m^6} \right\rangle, \quad g_4 = \left\langle \frac{1}{2m^8} \right\rangle, \\ g_4 &= \left\langle \frac{1 + \frac{4-5d}{2d(d-2)} \mathcal{J}^2 + \frac{1}{d(d-2)} \mathcal{J}^4}{2m^8} \right\rangle.\end{aligned}\quad (5.2)$$

ここで $\mathcal{J} := J(J + d - 3)$ であり，heavy average $\langle \dots \rangle$ は heavy 粒子のスペクトル密度 $\rho_J(s)$ による平均であり式 (3.55) で定義される．これらは理論が高エネルギー領域においてユニタリな紫外補完を持つための必要条件である．

3.2.5 節で説明した手法により，これら複数の正値性条件の線形結合から最も強い制約を得る問題は最適化問題として定式化され，数値的に解くことができる．その結果 $(\tilde{g}_3, \tilde{g}_4)$ の許容領域が図 3.9 のように求められる．

ただし正値性条件が与えるのは紫外補完の必要条件のみであり，得られた許容領域の各点に対して対応する具体的理論が常に存在することは保証されない．実際に 3.2.6 節で述べた通り，この数値計算による許容領域の一部が既知の振幅による解析解では埋まらないことが知られている．この解析解で埋まらない領域とは図 3.12 に示した \tilde{g}_3 が負の境界付近における remaining sliver と呼ばれる領域である．

既知の振幅による解析解のうち， \tilde{g}_3 の値を最小化する振幅が次の \mathcal{M}_{stu} である．

$$\mathcal{M}_{stu} = \frac{m^4}{(-s + m^2)(-t + m^2)(-u + m^2)} - \gamma(d) \mathcal{M}_{\text{spin-0}}. \quad (3.89)$$

この第一項は極が 1 つの場合の三重積振幅の形式になっている．またこの三重積構造の振幅は高階スピン係数を無限次まで含むため， \tilde{g}_3 の下限を与えることが期待される．そこで本研究では極が 1 つの場合の拡張として，極が 2 つの場合の三重積振幅を考える．

2 つの massive な極を持つ三重積振幅は次のように書ける．

$$\mathcal{M}_{\text{triple}}^{(2)} = m_1^4 \mathcal{A}^{(2)}(s) \mathcal{A}^{(2)}(t) \mathcal{A}^{(2)}(u), \quad (5.3)$$

ここで $\mathcal{A}^{(2)}(s)$ は三重積のユニットであり，

$$\mathcal{A}^{(2)}(s) = \frac{f_1}{-s + m_1^2} + \frac{f_2}{-s + m_2^2}, \quad M^2 \leq m_1^2 \leq m_2^2, \quad f_1, f_2 \geq 0, \quad (5.4)$$

と書かれる．これは式 (4.30) の一般的な非重力三重積振幅で $N = 2$ とした場合に相当する．ここで交換粒子として heavy 粒子のみが存在する状況を考えるため，交換粒子の質量がカットオフ以上であること： $M^2 \leq m_1^2 \leq m_2^2$ を要請している．結合定数に対する条件 $f_1, f_2 \geq 0$ はこの振幅のユニタリ性を保証するため必要となる．また全体の質量次元を -2 とするため，prefactor として最軽量交換粒子の質量 m_1^4 を掛けて

いる。

本研究で調べる振幅は、上記 (5.3) に対してスピン 0 相殺項を 2 つ加えた次の振幅である。

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\text{triple, sub}}^{(2)} = & \mathcal{M}_{\text{triple}}^{(2)} - \gamma_1 \left(\frac{1}{-s + m_1^2} + \frac{1}{-t + m_1^2} + \frac{1}{-u + m_1^2} \right) \\ & - \gamma_2 \left(\frac{1}{-s + m_2^2} + \frac{1}{-t + m_2^2} + \frac{1}{-u + m_2^2} \right). \end{aligned} \quad (5.5)$$

ここで第 2, 3 項はそれぞれ $s = m_1^2$, $s = m_2^2$ に極を持つスピン 0 振幅であり、係数 γ_1, γ_2 はスピン 0 成分を相殺するよう後で決定される定数である。 $s = m_1^2$ の極におけるスピン 0 相殺を γ_1 が担い、 $s = m_2^2$ の極は γ_2 が担う。

5.2 有効結合定数を求める手法

本研究の目標は極が 2 つの場合の三重積振幅から計算される有効結合定数 (\tilde{g}_3, \tilde{g}_4) の値が許容領域内をどのように動くかを調べることである。以下でこの手順を説明する。

\tilde{g}_3, \tilde{g}_4 を求める解析計算の方法

スピン 0 振幅を引いた三重積振幅 (5.5) から対応する \tilde{g}_3, \tilde{g}_4 を計算するためには、まずこの振幅の低エネルギー展開の形を求める必要がある。振幅 (5.5) は $s, t, u \ll m_n^2$ の下で次のように展開できる。

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\text{triple, sub}}^{(2)} = & m_1^4 \sum_{i,j,k=1}^{\infty} \mu_i \mu_j \mu_k s^{i-1} t^{j-1} u^{k-1} - \gamma_1 \frac{1}{m_1^2} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\left(\frac{s}{m_1^2} \right)^i + \left(\frac{t}{m_1^2} \right)^i + \left(\frac{u}{m_1^2} \right)^i \right) \\ & - \gamma_2 \frac{1}{m_2^2} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\left(\frac{s}{m_2^2} \right)^i + \left(\frac{t}{m_2^2} \right)^i + \left(\frac{u}{m_2^2} \right)^i \right). \end{aligned} \quad (5.6)$$

ここで μ_i は質量 m_n および結合定数 f_n を含む因子であり、次で定義される。

$$\mu_i = \sum_{n=1}^N \frac{f_n}{m_n^{2i}}. \quad (5.7)$$

この表式は、低エネルギー $s, t, u \ll m_n^2$ の下で各ユニットが

$$\frac{1}{-s + m_n^2} = \frac{1}{m_n^2} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{s}{m_n^2} \right)^i \quad (5.8)$$

と展開されることから導かれる。

この三重積振幅に対する低エネルギー展開と一般の振幅に対する低エネルギー展開 (3.50) を比較することで、係数 g_2, g_3, g_4 の値を読み取ることができる。すなわち式 (5.6) の低次部分を具体的に書き下したときの $(s^2 + t^2 + u^2)$, stu , $(s^2 + t^2 + u^2)^2$ の係数部分がそれぞれ g_2, g_3, g_4 に対応する。この手順の結果として、振

幅 (5.3) に対する g_2, g_3, g_4 の値は次のように明示的に求められる.

$$\left\{ \begin{array}{l} g_2 = \frac{f_1^3}{2m_1^6} + \frac{f_1^2 f_2}{m_2^6} - \frac{f_1^2 f_2}{m_1^2 m_2^4} + \frac{3f_1^2 f_2}{2m_1^4 m_2^2} + \frac{3f_1 f_2^2 m_1^2}{2m_2^8} \\ \quad - \frac{f_1 f_2^2}{m_2^6} + \frac{f_1 f_2^2}{m_1^2 m_2^4} + \frac{f_2^3 m_1^4}{2m_2^{10}} - \frac{\gamma_1}{m_1^6} - \frac{\gamma_2}{m_2^6} \\ g_3 = \frac{f_1^3}{m_1^8} + \frac{3f_1^2 f_2}{m_2^8} - \frac{3f_1^2 f_2}{m_1^2 m_2^6} + \frac{3f_1^2 f_2}{m_1^6 m_2^2} + \frac{3f_1 f_2^2 m_1^2}{m_2^{10}} - \frac{3f_1 f_2^2}{m_1^2 m_2^6} + \frac{3f_1 f_2^2}{m_1^4 m_2^4} + \frac{f_2^3 m_1^4}{m_2^{12}} - \frac{3\gamma_1}{m_1^8} - \frac{3\gamma_2}{m_2^8} \\ g_4 = \frac{f_1^3}{4m_1^{10}} + \frac{f_1^2 f_2}{2m_2^{10}} - \frac{f_1^2 f_2}{2m_1^2 m_2^8} + \frac{f_1^2 f_2}{2m_1^4 m_2^6} - \frac{f_1^2 f_2}{2m_1^6 m_2^4} + \frac{3f_1^2 f_2}{4m_1^8 m_2^2} + \frac{3f_1 f_2^2 m_1^2}{4m_2^{12}} - \frac{f_1 f_2^2}{2m_2^{10}} \\ \quad + \frac{f_1 f_2^2}{2m_1^2 m_2^8} - \frac{f_1 f_2^2}{2m_1^4 m_2^6} + \frac{f_1 f_2^2}{2m_1^6 m_2^4} + \frac{f_2^3 m_1^4}{4m_2^{14}} - \frac{\gamma_1}{2m_1^{10}} - \frac{\gamma_2}{2m_2^{10}}. \end{array} \right. \quad (5.9)$$

これらを用いて, g_2 および M による規格化

$$\tilde{g}_3 = g_3 \frac{M^2}{g_2}, \quad \tilde{g}_4 = g_4 \frac{M^4}{g_2} \quad (5.10)$$

を行うことにより, 求めたかった規格化された結合定数 \tilde{g}_3, \tilde{g}_4 が得られる.

スピン 0 成分を相殺する γ の決定方法

3.2.6 節の g_3 関数の J 依存性についての議論より, \tilde{g}_3 の下限を与える具体的振幅を探索するためにはスピン 0 成分のない振幅を得る必要がある. そのため式 (5.5) におけるスピン 0 振幅の係数 γ_1, γ_2 を以下のように決定する. 4.2.1 節で, 三重積振幅 (4.30) の留数の部分波展開係数は式 (4.39) のように求められた. いま知りたい 4 次元の 2 つの極を持つスピン 0 成分は, この結果に $d = 4, N = 2, J = 0$ を代入することで次のように得られる.

$$B_{J=0,n}^{(d=4)} = \frac{f_n}{2\pi m_n^4} \sum_{i,j=1,2} \frac{f_i f_j}{M_{i,n}^2 (M_{i,n}^2 + M_{j,n}^2)} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; \frac{1}{M_{i,n}^2} \right). \quad (5.11)$$

ここで $M_{i,n}^2 := 1 + \frac{2m_i^2}{m_n^2}$ であり, ${}_2F_1$ は Gauss の超幾何関数である. いま考えている振幅 (5.5) は prefactor m_1^4 を持つことを加味して, γ_1, γ_2 の値について以下のように決定できる.

$$\gamma_1 = m_1^4 B_{J=0,n=1}^{(d=4)}, \quad \gamma_2 = m_1^4 B_{J=0,n=2}^{(d=4)} \quad (5.12)$$

このように設定することで, スピン 0 の部分波を相殺することができる.

$(\tilde{g}_3, \tilde{g}_4)$ プロットの作成方法

三重積振幅は任意性のある量を含んでいる. 任意性のある量とはカットオフ M , 極の位置 m_1, m_2 および結合定数 f_1, f_2 のことであり, これらは $M^2 \leq m_1^2 \leq m_2^2$, $f_1, f_2 \geq 0$ の範囲の任意の値を取りうる. 上記で導かれた $(\tilde{g}_3, \tilde{g}_4)$ の表式もこれらの量により記述されているため, これらの任意性のある量を適当な方法でパラメタ付けする必要がある. ここで本研究で採用したパラメタ付けについて順に述べる. まず 1 つめの極 m_1 およびカットオフ M について次のように定めた.

$$\begin{aligned} m_1 &= 1 \\ M &= x, \quad x \in [0, 1] \end{aligned} \quad (5.13)$$

ここで1つめの極の質量 m_1 は1に規格化されている．またカットオフ M は $x \in [0, 1]$ でパラメトライズされており, $0 \leq M \leq 1$ の範囲を動く．規格化された結合定数の定義式 (5.10) から分かる通り, \tilde{g}_3, \tilde{g}_4 はカットオフと質量の比 M/m のみに依存している．このため上記の m_1 を1に規格化するパラメタ付けを行なった．

次に2つめの極の位置 m_2 について次のように設定した．

$$m_2 = \frac{1}{y}, \quad y \in (0, 1] \quad (5.14)$$

m_2 は $y \in (0, 1]$ でパラメトライズされており, $1 \leq m_2 \leq \infty$ の範囲を動く, $y = 1$ では m_2 は1となり, m_1 の値と一致する． $y \rightarrow 0$ の極限では m_2 は無限大となり, 2つめの極の位置は無限遠方に遠ざかる．このような $\frac{1}{y}$ の形でパラメタ付けを行なった理由は, 有限の y の値によって m_2 が無限大となる領域を含めて記述するためである．

結合定数 f_1 および f_2 については次のように設定した．

$$f_1 = z, \quad f_2 = 1 - z, \quad z \in [0, 1]. \quad (5.15)$$

f_1, f_2 は $z \in [0, 1]$ でパラメトライズされており, $0 \leq f_1, f_2 \leq 1$ の範囲を動く． $z = 0$ では m_1 の極は消え, m_2 の極のみが存在する．また $z = 1$ では m_2 の極は消え, m_1 の極のみが存在する． z が $[0, 1]$ の範囲を動くとき, 和 $f_1 + f_2$ は一定に保たれ, 比 f_1/f_2 は0から無限大までの値を取る．以下で計算する全ての量は, 振幅全体に掛かる overall な定数倍因子には依存しない． f_1, f_2 について和 $f_1 + f_2$ が一定となるようなパラメタ付けを行なった理由は, このような冗長な overall な定数倍因子を含まないようにするためである．*2

以上のパラメタ (x, y, z) の設定により, 振幅において任意性を持った全ての量 M, m_1, m_2, f_1, f_2 が可能な全範囲を動くようパラメタ付けが行われた．

最終的に計算機により $(\tilde{g}_3, \tilde{g}_4)$ のプロットを行うには, パラメタの離散化を行う必要がある．本研究では以下のように離散化を行なった．パラメタ x については値域 $[0, 1]$ において等間隔に100点を取った．パラメタ y については $y = \left(\frac{i}{100}\right)^2$, $i = 1, 2, \dots, 100$ と取った．パラメタ z については $(0, 10^{-6}, 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 0.1, 0.5, 1)$ の9点を取った．これらの値は得られるプロットが十分滑らかとなり, かつ実行可能な計算時間となるよう決定した．この離散化の下で各 y, z の値ごとに x についてプロットすることで, スピン0相殺された2つの極を持つ三重積振幅が取り得る $(\tilde{g}_3, \tilde{g}_4)$ の取りうる領域が求められる．

5.3 結果

以上のように決定した $(\tilde{g}_3, \tilde{g}_4)$ の値をプロットした結果を図5.1に示した．ここで緑で薄く塗られた領域は3.2.5節で実行した数値計算から決定される許容領域である．青の一連の細い線が, ここで興味のある2つの極のスピン0相殺三重積振幅から得られた $(\tilde{g}_3, \tilde{g}_4)$ の取り得る値である．ここでは複数の y および z の値に対する結果を全て重ねて描いている．また1つの極のスピン0相殺三重積振幅における結果も赤い線で補助的に示されている．

図5.2では同様の結果について f_1, f_2 の比を定めるパラメタ z の値ごとに9個の図に分けて表示した．各図における青い線のそれぞれが, 固定された各 y, z の下で x の関数として描いた $(\tilde{g}_3, \tilde{g}_4)$ 曲線である．

*2 よりシンプルな $f_1 = 1, f_2 = r$, $r \in (0, \infty)$ のようなパラメタ付けも可能である．本研究では有限のパラメタの値により比 f_1/f_2 が0および無限大となる状況を考えたため, 本文で述べた z によるパラメタ付けを採用した．

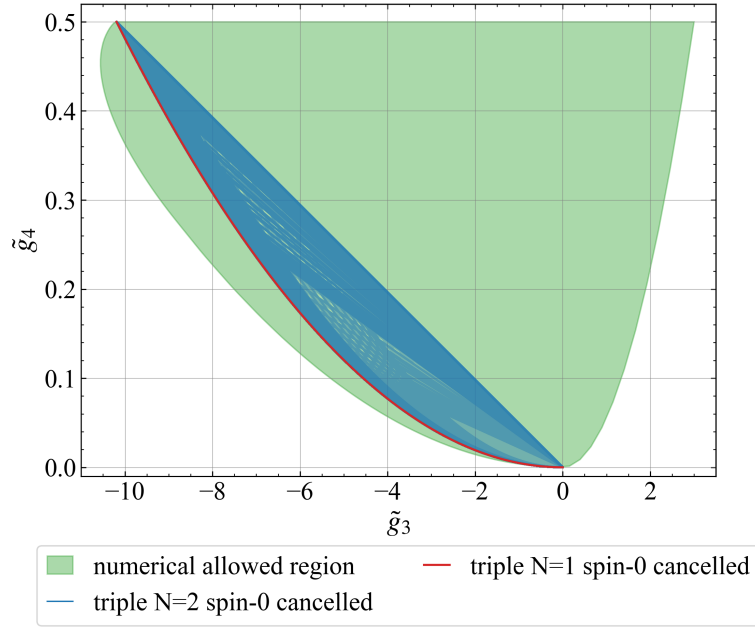


図 5.1 spin0 相殺された $N = 2$ 三重積振幅から得られる有効結合定数 $(\tilde{g}_3, \tilde{g}_4)$ のプロット

さらに図 5.3 では 2 つめの極の位置を定めるパラメタ y の値を鉛直方向に取り $(\tilde{g}_3, \tilde{g}_4, y)$ の値を 3 次元的に表示した図を, z の値ごとに 9 個に分けて示した.

5.4 考察

図 5.1 から, 2 つの極のスピン 0 相殺三重積振幅から得られる \tilde{g}_3 の値は, 1 つの極の場合と比較して増大する側のみに動き, remaining sliver 領域の値は取らないことが読み取れる. よって本研究で扱った $N = 2$ 三重積振幅という具体例からは, 正值性条件が紫外完全化の十分条件となることは示唆されない.

このことから正值性条件の十分性に対して考えられる可能性は 2 通りである. まずユニタリ性の情報を全て反映した真の許容領域がここで得た許容領域よりもさらに狭くなっている可能性がある. 正值性条件の十分性が保証されない根本的な原因として, 正值性条件を導く議論において S 行列のユニタリ性条件 (3.43) のうち片方の $\rho_J(s) > 0$ のみを使っていることや, ユニタリ性条件 (3.23) の導出において前方極限を取っていることがある. 正值性条件としてより強い制限を与えるには, ユニタリ性から得られる情報をより多く反映した制約条件を導くことが必要となる.

一方, 三重積振幅以外の具体例を一般に考えた際, remaining sliver 領域の値を取りうる振幅が構成できる可能性も残っている. ただしそのような候補を見つけるには $J \geq 2$ の高階スピン成分を三重積構造より多く持つような振幅の構造が必要となる. 例えば式 (4.27) のような弦理論振幅は一般に高階スピン成分を含んでいる. しかし弦理論振幅の各極における部分波展開は有限次多項式である. そのため弦理論振幅に対して正值性条件の境界を飽和する振る舞いは期待されない.

また $(\tilde{g}_3, \tilde{g}_4)$ は図 3.10 で示したスピン 2 以上の範囲のみを動いていることが分かる. これは 5.2 節で決定した γ_1, γ_2 の値によりスピン 0 成分が正しく相殺されていることを支持する結果である.

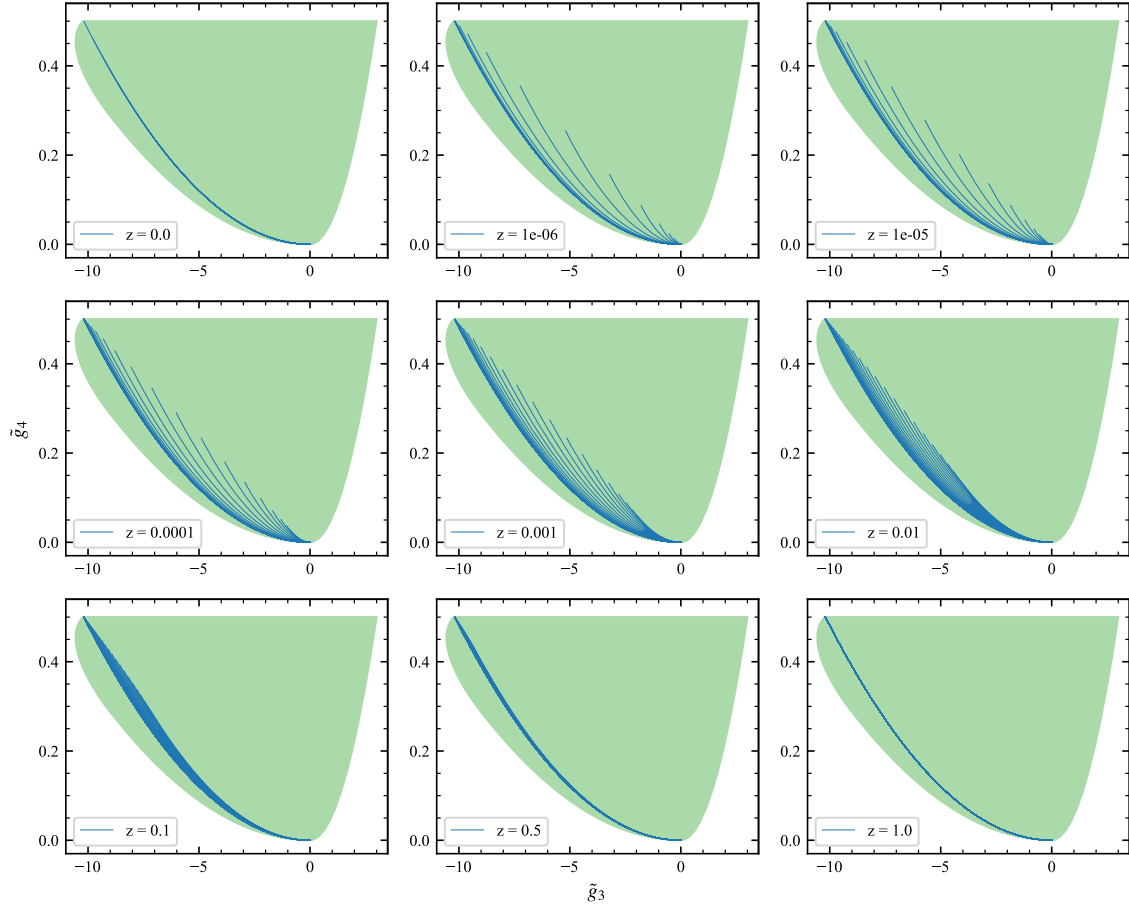


図 5.2 各 z の値における spin0 相殺された $N = 2$ 三重積振幅から得られる $(\tilde{g}_3, \tilde{g}_4)$ の値

図 5.3 の 3 次元表示からは、 \tilde{g}_3 を y の関数としてみたとき $y \simeq 0$ から増大し y の中間的な値で極大値を取り、それ以降減少するという振る舞いを見ることがとれる。 $y \sim 0$ と $y = 1$ では 1 つの極の場合に帰着しており、このような振る舞いに関しては次の定性的理解が可能である。まず $y = 1$ では 2 つの極 m_1^2, m_2^2 は重なるため、単一極 $N = 1$ の場合に帰着することが期待される。また $y \rightarrow 0$ は 2 つめの極 $s = m_2^2$ の位置が無限大となる極限である。この極限では 2 つめの極がスペクトル密度に影響しなくなると考えられるため、この場合も単一極 $N = 1$ の場合に帰着することが期待される。

以上のように既知の事項と矛盾のない結果は得られたが、三重積振幅から得られる有効結合定数が新たな領域を埋めることはしなかった。

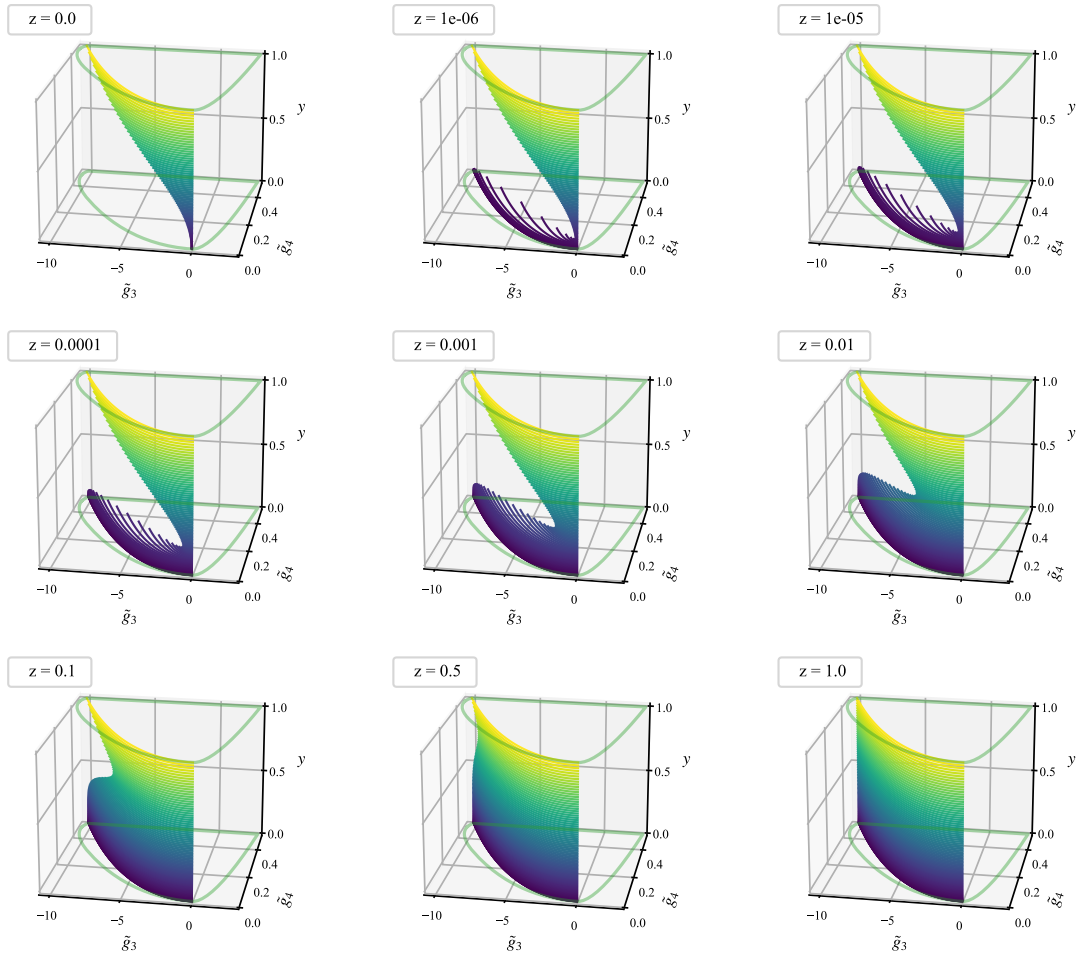


図 5.3 $(\tilde{g}_3, \tilde{g}_4, y)$ の 3 次元で描いた spin0 相殺された三重積振幅

第 6 章

まとめと展望

本修士論文では沼地問題および正値性条件の 2 通りのアプローチにより、低エネルギー有効理論に対する制約条件が導れることを総説した。2 章では沼地予想における大域的対称性の非存在予想および弱い重力予想について、主張、具体例、および証拠を説明した。また重力と結合した EFT において S 行列的アプローチを考えることで沼地予想の検証を進めることができることを述べた。今後さらに定量的に現象論模型への予言を与えるには、弱い重力予想に代表される沼地予想の精密化が重要となると考えられる。また沼地予想の定量的検証を発展させることにより、沼地問題の信頼性をより高めることが目指される。

3 章では、散乱振幅の基本的性質について述べたのち、低エネルギー有効理論の結合係数に対する制約条件を導いた。このとき分散的総和則から得られる null 制約条件は、高エネルギーのスペクトルに対する制約として機能した。これより低エネルギーの物理から高エネルギーの物理への制約を与えることも可能となることが期待できる。また S 行列的アプローチの計算では低エネルギー領域での弱結合性を仮定したツリーレベルでの議論が多くなされているが、ループレベルでの議論については未発展である。ループレベルを計算し、正値性条件への補正を調べることは興味深い課題である。

4 章では、具体的散乱振幅の例について述べた。弦理論振幅について述べたのち、最近提示された新しいクラスの振幅である三重積振幅が弦理論とは異なる形で重力の紫外完全化を与えることを示した。弦理論振幅には三重積構造を持つものが存在する。しかし三重積振幅では結合定数が正の定数に限られるため、弦理論振幅を含んだ議論にはなっていない。弦理論振幅を含むように三重積振幅を拡張することができれば非常に興味深い。紫外補完を与える振幅として弦理論振幅と弦理論に由来しない振幅にはどのような違いがあるのかを調べることは、沼地問題の観点からも非常に重要となる。

研究パートである 5 章では、三重積振幅と正値性条件の許容領域の関係について調べる現在進行途中の研究について述べた。2 つの極を持つ場合の三重積振幅から得られる有効結合定数 \tilde{g}_3, \tilde{g}_4 は、remaining sliver 領域の値は取らないという結果が得られた。このため正値性条件が紫外完全化のための十分条件であることはこの具体例では示されないことが分かった。真に最適化された許容領域を決定するためには、S 行列のユニタリ性の情報をより多く反映した制約を与えることが重要となる。また三重積構造以外に高階スピン成分をさらに多く含むような具体的振幅が存在するかどうかにも検証する必要がある。

上記のように、本論文では沼地問題および S 行列的アプローチにより、低エネルギーの物理に対する制約条件を得る議論について横断的に述べた。この議論をさらに推し進めることで、低エネルギーの物理と高エネルギーの物理において双方向的に制約条件を得ることが期待される。そしてこのような方針に基づき量子重力理論に対するより強力な探索手段を開拓することが全体を通した今後の展望である。

謝辞

本修士論文の作成にあたり，指導教員の杉本茂樹教授，および青木勝輝特定助教のお二方には1年以上にわたり研究について多大なご支援と助言を頂きました．ここに心より感謝申し上げます．

また基礎物理学研究所所属の先輩方や同期の友人たち，および家族をはじめとする支えてくださった皆様に深くお礼申し上げます．

付録 A

弦理論振幅の計算の詳細

ここでは 4 章において弦理論振幅の導出で用いる, ガンマ関数に関する公式 (4.19) について [39] に基づき記述する.

ガンマ関数は $\operatorname{Re} z > 0$ に対しては次の表示で定義される.

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt \, t^{z-1} e^{-t}. \quad (\text{A.1})$$

Virasoro-Shapiro 振幅の導出において必要となるのは次の形式の積分である.

$$C(a, b) = \int d^2 z \, |z|^{2a-2} |1-z|^{2b-2} \quad (\text{A.2})$$

以下ではこの積分を式 (4.19) のようにガンマ関数の積の形に書けることを示す. 初めに被積分関数の各因子が次のように書けることから出発する.

$$|z|^{2a-2} = \frac{1}{\Gamma(1-a)} \int_0^\infty dt \, t^{-a} e^{-|z|^2 t} \quad (\text{A.3})$$

$$|1-z|^{2b-2} = \frac{1}{\Gamma(1-b)} \int_0^\infty du \, u^{-b} e^{-|1-z|^2 u}. \quad (\text{A.4})$$

これらはガンマ関数の定義 (A.1) からすぐに従う.

これにより, 積分 $C(a, b)$ を次のように書き直せる.

$$\begin{aligned} C(a, b) &= \int \frac{d^2 z \, du \, dt}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} t^{-a} u^{-b} e^{-|z|^2 t} e^{-|1-z|^2 u} \\ &= 2 \int \frac{dx \, dy \, du \, dt}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} t^{-a} u^{-b} e^{-(t+u)(x^2+y^2)+2xu-u} \\ &= 2 \int \frac{dx \, dy \, du \, dt}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} t^{-a} u^{-b} \exp \left(-(t+u) \left[\left(x - \frac{u}{t+u} \right)^2 + y^2 \right] - u + \frac{u^2}{t+u} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

1 行目から 2 行目に移る際, 複素変数 z について $z = x + iy$ と分解し, $d^2 z = 2dx dy$ とした. 2 行目から 3 行目では指数部分において x について平方完成を行なった. これにより $dx dy$ 積分は Gauss 積分となり, 積分を実行することで次を得る.

$$C(a, b) = \frac{2\pi}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} \int_0^\infty du \, dt \, \frac{t^{-a} u^{-b}}{t+u} e^{-\frac{tu}{t+u}}. \quad (\text{A.6})$$

さらに $t = \alpha\beta$, $u = (1 - \beta)\alpha$ と変数変換を行う．新変数の値域は $\alpha \in [0, \infty)$, $\beta \in [0, 1]$ であり，ヤコビアンは α である．これより次を得る．

$$C(a, b) = \frac{2\pi}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} \int d\alpha d\beta \frac{\alpha^{1-a-b}}{\alpha} \beta^{-a} (1-\beta)^{-b} e^{-\alpha\beta(1-\beta)}, \quad (\text{A.7})$$

ここで $d\alpha$ 積分は次のようにガンマ関数で書ける．

$$\int_0^\alpha d\alpha \alpha^{-a-b} e^{-\beta\alpha(1-\beta)} = (\beta(1-\beta))^{a+b-1} \Gamma(1-a-b). \quad (\text{A.8})$$

この結果において $c = 1 - a - b$ と書き式 (A.7) に代入すると，

$$C(a, b) = \frac{2\pi\Gamma(c)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} \int_0^1 d\beta (1-\beta)^{a-1} \beta^{b-1} \quad (\text{A.9})$$

となる．さらにこの積分は Euler ベータ関数の形となっている．

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^1 dt t^{x-1} (1-t)^{y-1}. \quad (\text{A.10})$$

この表示を用いることで，最終的に求めたかった次の表式が得られる．

$$C(a, b) = \frac{2\pi\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)\Gamma(1-c)}. \quad (\text{A.11})$$

参考文献

- [1] C. Vafa, *The String landscape and the swampland*, [arXiv:hep-th/0509212](#). 1.1
- [2] K. Aoki, K. Ikeda, and S. Sugimoto, “Work on progress.”. 1.2, 5
- [3] M. van Beest, J. Calderón-Infante, D. Mirfendereski, and I. Valenzuela, *Lectures on the Swampland Program in String Compactifications*, *Phys. Rept.* **989** (2022) 1–50, [arXiv:2102.01111 \[hep-th\]](#). 2, *2, *3
- [4] 野海俊文, “集中講義：量子重力と現象論.” 京都大学基礎物理学研究所 <https://www.yukawa.kyoto-u.ac.jp/seminar/s52894>, 9, 2021. 2, 2.1.3
- [5] 濱田雄太, “量子重力の沼地問題.” 2022 年中部夏の学校 <https://sway.office.com/FIkehATC6JA1wz90>, 8, 2022. 2
- [6] D. Harlow, B. Heidenreich, M. Reece, and T. Rudelius, *The Weak Gravity Conjecture: A Review*, [arXiv:2201.08380 \[hep-th\]](#). 2, *4
- [7] T. D. Brennan, F. Carta, and C. Vafa, *The String Landscape, the Swampland, and the Missing Corner*, *PoS TASI2017* (2017) 015, [arXiv:1711.00864 \[hep-th\]](#). 2
- [8] E. Palti, *The Swampland: Introduction and Review*, *Fortsch. Phys.* **67** (2019) 1900037, [arXiv:1903.06239 \[hep-th\]](#). 2
- [9] M. Graña and A. Herráez, *The Swampland Conjectures: A Bridge from Quantum Gravity to Particle Physics*, *Universe* **7** (2021) 273, [arXiv:2107.00087 \[hep-th\]](#). 2
- [10] N. B. Agmon, A. Bedroya, M. J. Kang, and C. Vafa, *Lectures on the string landscape and the Swampland*, [arXiv:2212.06187 \[hep-th\]](#). 2
- [11] C. Cordova, K. Ohmori, and T. Rudelius, *Generalized Symmetry Breaking Scales and Weak Gravity Conjectures*, [arXiv:2202.05866 \[hep-th\]](#). 2.1.1, 2.1.3
- [12] T. Banks and L. J. Dixon, *Constraints on String Vacua with Space-Time Supersymmetry*, *Nucl. Phys. B* **307** (1988) 93–108. 2.1.3
- [13] J. Polchinski, *String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 12, 2007. 2.1.3, 2.2.3
- [14] T. Banks and N. Seiberg, *Symmetries and Strings in Field Theory and Gravity*, *Phys. Rev. D* **83** (2011) 084019, [arXiv:1011.5120 \[hep-th\]](#). 2.1.3, 2.1.3
- [15] 濱田雄太, “量子重力のスワンプランド予想.” 大阪公立大学理学研究科、NITEP・素粒子・数理合同セミナー <https://www.youtube.com/watch?v=4KF2VWF4FF0>, 6, 2022. 2.1.3
- [16] R. Bousso, *The Holographic principle*, *Rev. Mod. Phys.* **74** (2002) 825–874, [arXiv:hep-th/0203101](#). 2.1.3, 2.1.3

- [17] J. D. Bekenstein, *A Universal Upper Bound on the Entropy to Energy Ratio for Bounded Systems*, *Phys. Rev. D* **23** (1981) 287. 2.1.3
- [18] D. Harlow and H. Ooguri, *Constraints on Symmetries from Holography*, *Phys. Rev. Lett.* **122** (2019) 191601, [arXiv:1810.05337 \[hep-th\]](#). 2.1.3
- [19] D. Harlow and H. Ooguri, *Symmetries in quantum field theory and quantum gravity*, *Commun. Math. Phys.* **383** (2021) 1669–1804, [arXiv:1810.05338 \[hep-th\]](#). 2.1.3
- [20] D. Harlow and E. Shaghoulian, *Global symmetry, Euclidean gravity, and the black hole information problem*, *JHEP* **04** (2021) 175, [arXiv:2010.10539 \[hep-th\]](#). 2.1.3
- [21] Y. Chen and H. W. Lin, *Signatures of global symmetry violation in relative entropies and replica wormholes*, *JHEP* **03** (2021) 040, [arXiv:2011.06005 \[hep-th\]](#). 2.1.3
- [22] N. Arkani-Hamed, L. Motl, A. Nicolis, and C. Vafa, *The String landscape, black holes and gravity as the weakest force*, *JHEP* **06** (2007) 060, [arXiv:hep-th/0601001](#). 2.2
- [23] N. Arkani-Hamed, S. Dubovsky, A. Nicolis, and G. Villadoro, *Quantum Horizons of the Standard Model Landscape*, *JHEP* **06** (2007) 078, [arXiv:hep-th/0703067](#). *3
- [24] A. de la Fuente, P. Saraswat, and R. Sundrum, *Natural Inflation and Quantum Gravity*, *Phys. Rev. Lett.* **114** (2015) 151303, [arXiv:1412.3457 \[hep-th\]](#). *3
- [25] C. Cheung and G. N. Remmen, *Naturalness and the Weak Gravity Conjecture*, *Phys. Rev. Lett.* **113** (2014) 051601, [arXiv:1402.2287 \[hep-ph\]](#). 2.2.2
- [26] Y. Kats, L. Motl, and M. Padi, *Higher-order corrections to mass-charge relation of extremal black holes*, *JHEP* **12** (2007) 068, [arXiv:hep-th/0606100](#). 2.2.3
- [27] Y. Hamada, T. Noumi, and G. Shiu, *Weak Gravity Conjecture from Unitarity and Causality*, *Phys. Rev. Lett.* **123** (2019) 051601, [arXiv:1810.03637 \[hep-th\]](#). 2.2.3
- [28] M. Correia, A. Sever, and A. Zhiboedov, *An analytical toolkit for the S-matrix bootstrap*, *JHEP* **03** (2021) 013, [arXiv:2006.08221 \[hep-th\]](#). 3
- [29] S. Caron-Huot and V. Van Duong, *Extremal Effective Field Theories*, *JHEP* **05** (2021) 280, [arXiv:2011.02957 \[hep-th\]](#). 3, *4, 5
- [30] A. Adams, N. Arkani-Hamed, S. Dubovsky, A. Nicolis, and R. Rattazzi, *Causality, analyticity and an IR obstruction to UV completion*, *JHEP* **10** (2006) 014, [arXiv:hep-th/0602178](#). 3
- [31] R. J. Eden, P. V. Landshoff, D. I. Olive, and J. C. Polkinghorne, *The analytic S-matrix*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1966. 3
- [32] S. Mandelstam, *Determination of the pion - nucleon scattering amplitude from dispersion relations and unitarity. General theory*, *Phys. Rev.* **112** (1958) 1344–1360. 3.1.1
- [33] R. J. Eden, *Proof of the Mandelstam Representation for Every Order in Perturbation Theory*, *Phys. Rev.* **121** (1961) 1567–1576. 3.1.1
- [34] R. J. Eden, P. V. Landshoff, J. C. Polkinghorne, and J. C. Taylor, *Mandelstam representation with anomalous thresholds*, *Phys. Rev.* **122** (Apr, 1961) 307–312. 3.1.1
- [35] A. Martin, *Extension of the axiomatic analyticity domain of scattering amplitudes by unitarity. 1.*, *Nuovo Cim. A* **42** (1965) 930–953. 3.1.1
- [36] J. Bros, H. Epstein, and V. Glaser, *A proof of the crossing property for two-particle amplitudes in general quantum field theory*, *Commun. Math. Phys.* **1** (1965) 240–264. 3.1.1

- [37] D. Olive, *Unitarity and the evaluation of discontinuities*, *Nuovo Cimento* **26** (1962) 73–102. 3.1.1
- [38] D. Simmons-Duffin, *A Semidefinite Program Solver for the Conformal Bootstrap*, *JHEP* **06** (2015) 174, [arXiv:1502.02033 \[hep-th\]](#). *3
- [39] D. Tong, *String Theory*, [arXiv:0908.0333 \[hep-th\]](#). 4, A
- [40] Y.-t. Huang and G. N. Remmen, *UV-complete gravity amplitudes and the triple product*, *Phys. Rev. D* **106** (2022) L021902, [arXiv:2203.00696 \[hep-th\]](#). 4, 4.2, 5
- [41] M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten, *Superstring Theory. Vol. 1: Introduction*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. 7, 1988. 4
- [42] J. Polchinski, *String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 12, 2007. 4
- [43] K. Becker, M. Becker, and J. H. Schwarz, *String theory and M-theory: A modern introduction*. Cambridge University Press, 12, 2006. 4
- [44] G. Veneziano, *Construction of a crossing - symmetric, Regge behaved amplitude for linearly rising trajectories*, *Nuovo Cim. A* **57** (1968) 190–197. 4.1.2
- [45] S. B. Giddings and R. A. Porto, *The Gravitational S-matrix*, *Phys. Rev. D* **81** (2010) 025002, [arXiv:0908.0004 \[hep-th\]](#). *4
- [46] N. Arkani-Hamed, L. Eberhardt, Y.-t. Huang, and S. Mizera, *On unitarity of tree-level string amplitudes*, *JHEP* **02** (2022) 197, [arXiv:2201.11575 \[hep-th\]](#). 4.2.2