PositivityBoundsByNN

Kenya Ikeda

December 2023

とりあえず細かい点には触れず要点のみ書いているので、詳しくは ExtremalEFT 論文を参照ください。

1 問題

d 次元時空中の massless real scalar EFT の一般形を考えます。

$$\mathcal{L}_{\text{low}} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{g}{3!}\phi^3 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \frac{g_2}{2}[(\partial_\mu\phi)^2]^2 + \frac{g_3}{3}(\partial_\mu\partial_\nu\phi)^2(\partial_\sigma\phi)^2 + 4g_4[(\partial_\mu\partial_\nu\phi)^2]^2 + \ldots \tag{1}$$

最終目標は、このような EFT の高階微分項の結合定数 $g_2, g_3, \ldots$ に対して、高エネルギー領域においても理論が unitary であるなどといった物理的仮定にもとづき、取りうる値の制限を決定することです (positivity bounds と呼ばれます)。

この理論の tree レベル散乱振幅に対する分散関係式の議論から、高階結合定数 g_k は、次のような g_k 関数 $g_k(m^2, J)$ の heavy average という操作によって与えられることが導けます。

$$g_2 = \left\langle g_2(m^2, J)\right\rangle, \quad g_3 = \left\langle g_3(m^2, J)\right\rangle, \quad g_4 = \left\langle g_4(m^2, J)\right\rangle, \ \ldots \tag{2}$$

これらを分散的総和則と呼びます。g_k 関数の具体形は、

$$g_2(m^2, J) = \frac{1}{m^4} \tag{3}$$

$$g_3(m^2, J) = \frac{3 - \frac{4}{d-2}\mathcal{J}^2}{m^6} \tag{4}$$

$$g_4(m^2, J) = \frac{1 + \frac{4-5d}{2d(d-2)}\mathcal{J}^2 + \frac{1}{d(d-2)}\mathcal{J}^4}{2m^8} \tag{5}$$

といった感じです。m^2 はエネルギー、 J はスピンをパラメトライズする変数です。

$\mathcal{J}^2 := J(J+d-3)$ です (spin Casimir 演算子の固有値)。

heavy average $\left\langle f(m^2, J)\right\rangle$ の定義は、

$$\left\langle f(m^2, J)\right\rangle := \sum_{J \text{ even}} n_J^{(d)} \int_{M^2}^{\infty} \frac{dm^2}{\pi} m^{2-d} \rho_J(m^2)\ f(m^2, J) \tag{6}$$

です。

M^2 は EFT の UV cutoff です。

$n_J^{(d)}$ は規格化定数です。

$\rho_J(m^2)$ はスペクトル密度で, 高エネルギー領域でも理論が unitarity であるという要請から $0 \leq \rho_J(s)$ を満たします。

つまり heavy average とは、cutoff 以上の高エネルギー領域にわたるスペクトル密度で重みづけした積分、およびスピンにわたる総和をとる操作です。

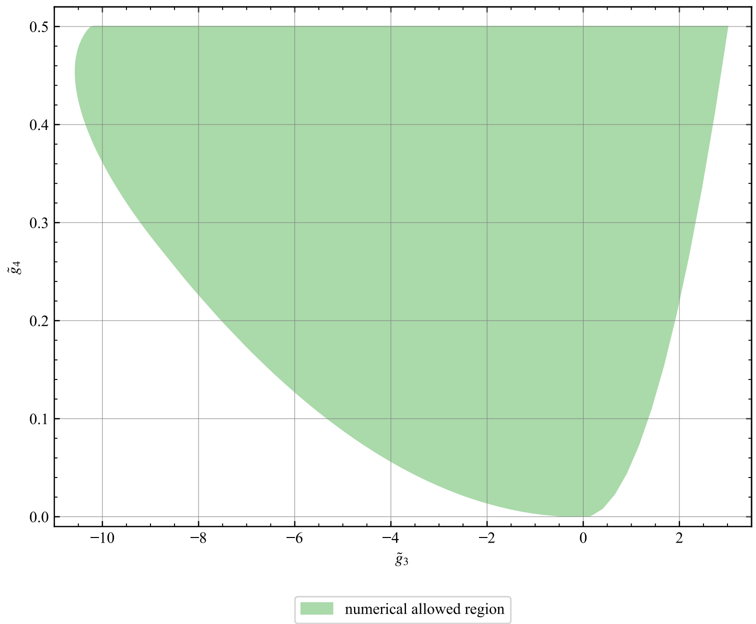
また g_4 以上については複数通りの分散的総和則が得られ、それらの両立条件から次の null constraint $n_k(m^2, J)$ が要求されます。

$$0 = \left\langle n_4(m^2, J) \right\rangle, \quad n_4(m^2, J) := \frac{\mathcal{J}^2\left(2\mathcal{J}^2 - (5d-4)\right)}{m^8} \tag{7}$$

よって考えたい問題は、null constraint (7) を満たすという拘束条件の下で、スペクトル密度 $\rho_J(m^2)$ を任意に動かして、その際に分散的総和則 (2) で得られる高階結合定数 g_k の取り得る値の上限/下限を決定したい、ということになります。

先行研究の ExtremalEFT 論文では、heavy average が半正定値な汎関数であることを利用し、この問題を半正定値計画法により解いています。

g_3, g_4 についての結果は以下のような感じになります。



緑色で図示した領域が許容領域です。

ただ、半正定値計画法による手法には以下のような不満点があります。

- 尖った部分については描画が難しく、適宜メッシュを細かくする必要がある
- next step の研究として、low spin dominance という仮定を追加したい。これはスペクトル密度 $\rho_J(m^2)$ に対する追加の拘束条件になるが、半正定値計画法ではスペクトル密度に対する条件を直接的に扱うことが難しい

そこで同じ問題を NN で解くことが出来ないかと考えています。現行のコード lib/attempt4.py では、g_2, g_3 についての positivity bounds を計算するため、以下のように NN を設計しています。

- 入力: m^2, J の 2 変数。どちらも適当な値でメッシュに切り離散化
- 出力: スペクトル密度 $\rho_J(m^2)$

- 損失関数:

$$\mathrm{Loss} = a_2 \left\langle g_2(m^2, J) \right\rangle + a_3 \left\langle g_3(m^2, J) \right\rangle + w_4 \left| \left\langle n_4(m^2, J) \right\rangle \right| \tag{8}$$

この場合、係数 a_2, a_3, w_4 を手で適当に調整することにより、null constraint $\left\langle n_4(m^2, J) \right\rangle = 0$ が満たされた下で、g_2、g_3 が最小化され下限が得られることを期待しています。(上限を得たい時は損失関数中の対応する項を逆数にします。) その上で a_2 と a_3 の比を動かしていくことで、上の図のような許容領域の絵が描ける、というのがやりたいことです。

2　現状

lib/attempt4.py というファイルが現行のコード

損失関数がうまく収束せず、結果がうまく出力できていない状況

損失関数の中に拘束条件項があり、その重みづけのパラメータの値を色々変えてみるなど試したが、大抵の場合で損失関数の値が 0 か inf となってしまう

3　フォルダ構成

- lib/ : 本番ファイル- practice/ : 練習、試行用

4　計画

1. [ExtremalEFT 論文](https://arxiv.org/abs/2011.02957) の (g3,g4) plot を NN に描かせる: 教師なし PINN null constraint は損失関数に加えることで考慮

2. High Spin Supression を考えてみる: spectral density に対する constraint を扱うことができるはず

5　期待されるメリット

SDPB との比較

- メッシュの細かさを自動的に最適化してくれる

- constraint の扱いが簡単 損失関数に加えるだけ