II. Navigation inertielle hybridée en translation

1° Principe général

* Objet

Algorithme qui estime position / vitesse d'un engin à partir de mesures

- accélérométrique ← accéléromètres
- de vitesse ← GPS, radar
- de position ← GPS, baromètre, radar

* Intérêt

On va pouvoir recaler l'estimation à partir des capteurs supplémentaires, et contrer la divergence de la navigation inertielle pure.

* Conception

Les capteurs doivent assurer l'observabilité des états retenus dans le modèle de synthèse du filtre de navigation.

2° Exemple : inertiel hybridé GPS

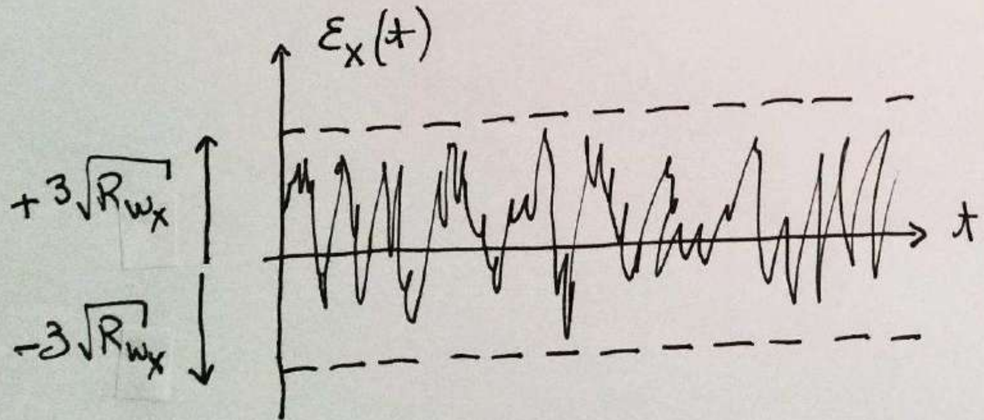
* Cinématique

$$\boxed{\begin{cases}\dot{X} = V \\ \dot{V} = A + G\end{cases}}$$

* Mesure GPS

$$X_m = X + \varepsilon_X$$

$$\boxed{\varepsilon_X \approx w_X} \leftarrow \text{bruit } \mathcal{N}(0, R_{w_X})$$



Gaussien $\Rightarrow$ $\max \approx 3\sigma$

d'où

$$\boxed{R_{w_X} = \left(\frac{\max \varepsilon_X}{3}\right)^2}$$

* Mesure accélérométrique

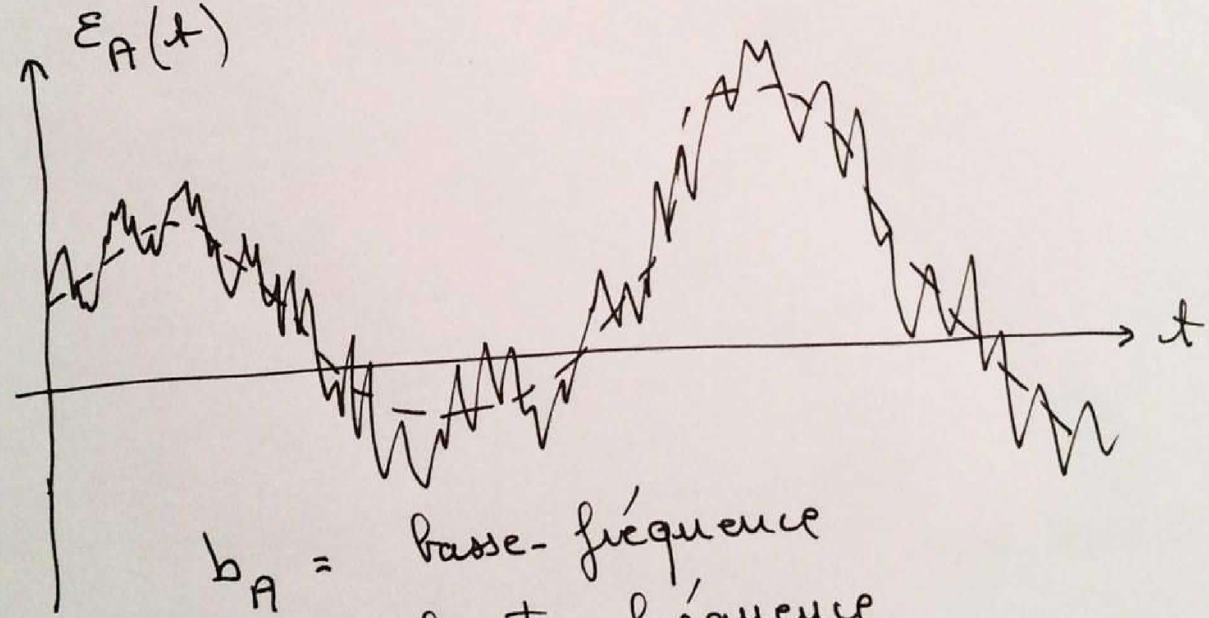
$$A_m = A + \mathcal{E}_A$$

$$\boxed{\mathcal{E}_A \approx b_A + v_A}$$ ← bruit $\mathcal{N}(0, Q_{v_A})$

b_A : biais, lentement variable, = dérive

$$\boxed{\dot{b}_A = v_{b_A}}$$

v_{b_A} : bruit $\mathcal{N}(0, Q_{v_{b_A}})$



b_A = basse-fréquence

v_A = haute-fréquence

Le terme de bruit est prépondérant en h.f.

$$\Rightarrow \boxed{Q_{v_A} \approx \left(\frac{\max \varepsilon_{A_{h.f.}}}{3}\right)^2}$$

Le terme de dérive est prépondérant en b.f.

$$\dot{b}_A = v_{b_A} \xRightarrow[\text{de Lyapunov}]{\text{par analyse}} var\left(b_A(t)\right) = t \cdot Q_{v_{b_A}}$$

$$\Rightarrow \boxed{Q_{v_{b_A}} \approx \frac{1}{T}\left(\frac{\max b_A}{3}\right)^2}$$

Si $\max b_A$ est la dérive maximale sur l'horizon T

Remarques :

$1/T$ = fréquence de transition entre basses et hautes fréquences

Variance de Allan =

Un outil pour analyser l'erreur ε et dimensionner les différents termes.

* Modèle de synthèse du filtre

$$\begin{cases} \dot{X} = V \\ \dot{V} = A_m - b_A - v_A + G \\ \dot{b}_A = v_{b_A} \end{cases}$$

$$X_m = X + w_X$$

$$x = \begin{bmatrix} X \\ V \\ b_A \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} v_A \\ v_{b_A} \end{bmatrix}$$

$$z = \begin{bmatrix} X_m \end{bmatrix} \qquad w = \begin{bmatrix} w_X \end{bmatrix}$$

hyp: $G = \text{cste}$

$$\dot{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{=A} x + \begin{bmatrix} 0 \\ A_m + G \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} v$$

$$z = \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=C} x + w$$

Observabilité : $\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & & 0 \\ & I & \\ 0 & & -I \end{bmatrix}$ de rang colonne plein

$\Rightarrow$ OK

• Discrétisation

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + \underset{\uparrow \, Q_c}{v} \\ z = Cx + \underset{\uparrow \, R_c}{w} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_{k+1} = F x_k + G u_k + \underset{\uparrow \, Q_d}{v_k} \\ z_k = H x_k + \underset{\uparrow \, R_d}{w_k} \end{cases}$$

- échantillonnage au pas Δt
- u bloquée

$$\boxed{\begin{array}{lll} F = e^{A\Delta t} & G = \int_0^{\Delta t} e^{A\tau} B \, d\tau & Q_d = \int_0^{\Delta t} e^{A\tau} Q_c \, e^{A^T\tau} d\tau \\ & & R_d = R_c \\ H = C & & \end{array}}$$

Si Δt petit

$$F \approx I + A\,\Delta t$$

$$G \approx B\,\Delta t$$

$$Q_d \approx Q_c\,\Delta t$$

remarque :

tout s'obtient à partir de la solution exacte

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \left[B u(\tau) + s(\tau) \right] d\tau$$

* Synthèse

Il suffit d'appliquer les formules (sans se tromper ...)

* mise en oeuvre du filtre

→ Phase d'initialisation

Si on part du repos, on peut ajouter des mesures fictives $V_m = 0$ avec une incertitude très petite pour accélérer la capture d'un $\hat{X}$ et $\hat{b}_A$ corrects.

③ Exemple : fusion baro-inertiel

Utilisé pour estimer la vitesse verticale

* <u>Modèle</u>

$$\begin{cases} \dot{z} = V_z \\ \dot{V}_z = A_z - g \end{cases}$$ cinématique

$$z_m = z + b_z + w_z$$ baromètre

$$\dot{b}_z = v_{b_z}$$ dérive

$$A_{z_m} = A_z + b_{A_z} + v_{A_z}$$ accéléromètre

$$\dot{b}_A = v_{b_A}$$

* ## Modèle de synthèse du filtre

On ne peut pas prendre $x = \begin{bmatrix} z \\ V_z \\ b_A \\ b_z \end{bmatrix}$ car pas observable

Si on néglige b_z, c'est observable (similaire au cas précédent de fusion inertiel + GPS)

L'estimation de z sera fausse à b_z près.

Mais comme $b_z \approx$ constant, V_z sera correctement estimée.

$\Longrightarrow$ | Estimation de V_z par fusion des mesures de A_z inertiel et z baro

4° Diverses remarques

* Navigation sans accéléromètres

Le modèle cinématique peut être une approximation de la cinématique vraie

$$\left\{ \dot{X} = \nu_X \right.$$

X lentement variable

$$\begin{cases} \dot{X} = V \\ \dot{V} = \nu_V \end{cases}$$

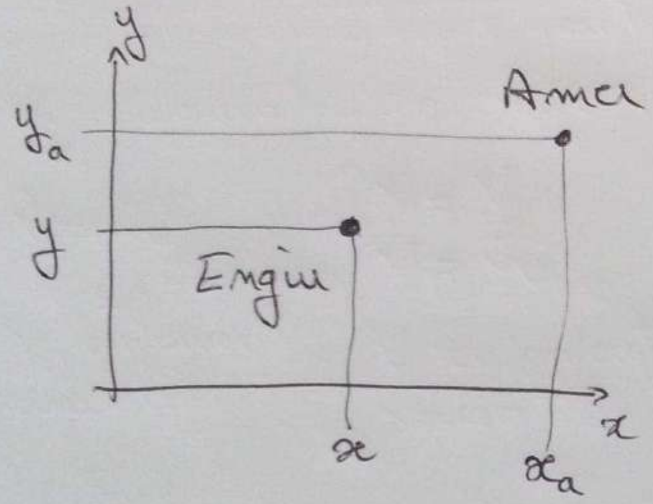
V lentement variable

$$\begin{cases} \dot{X} = V \\ \dot{V} = A \\ \dot{A} = \nu_A \end{cases}$$

A lentement variable

* Utilisation d'amers

Amer = point remarquable (généralement fixe)



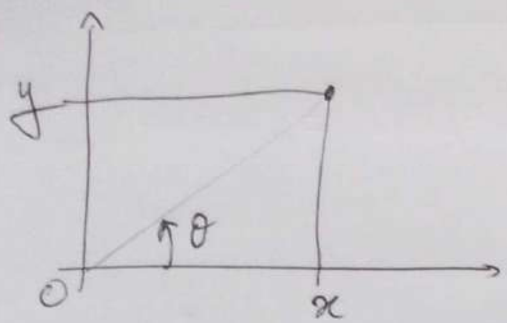
Quand l'amer est visible (et reconnu), certains capteurs (caméra, radar, antenne) donnent des mesures relatives intéressantes à exploiter.

Mesure de position relative

$$\delta X_m = X - X_a + w_{\delta X} \qquad \dot{X}_a = 0$$

Si X_a n'est pas connu, il faut l'ajouter dans l'état et l'estimer

* Traitement des mesures angulaires

- 

$$\begin{cases} \dot{X} = V \\ \dot{V} = v_V \\ \theta_m = \theta + w_\theta = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) + w_\theta \end{cases}$$

$\longrightarrow$ problème d'azimétrie

- Pour éviter le recours au FKE, on peut transformer la mesure en "pseudo-mesure" : $z = [\sin\theta_m \quad -\cos\theta_m]\, X$

On a : $H = [\sin\theta_m \quad -\cos\theta_m]$ temps variant

$\nu = z_m - \hat{z} = 0 - H\hat{X}$ $\quad X_m$ "correspond" à θ_m

$R_z = \|\hat{X}\|^2 \cdot R_\theta$ $\quad$ car $\frac{\partial z}{\partial w_\theta} = [\cos\theta_m \quad \sin\theta_m]\, X \approx \|X\|$

$\Longrightarrow$ On peut utiliser un FdK linéaire

III - Navigation en translation et rotation

1° Principe général

* Objet Algorithme qui estime position/vitesse/attitude d'un engin à partir de mesures

inertielles	accéléromètres
	gyromètres
autres	baromètre
	magnétomètre
	inclinomètres
	GPS
	odomètre
	radar
	vision

* Modèle cinématique

$$\begin{cases} \dot{X} = V \\ \dot{V} = A + G \end{cases}$$ cinématique de translation

$$\dot{R} = R.\omega_\times$$ cinématique de rotation

$$\omega_\times = S(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\dot{q} = \frac{1}{2} q \otimes \Omega$$

produit de quaternions

$$\omega = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$ vitesse de rotation projetée dans le repère engin

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

⚠ Attention à la discrétisation de la cinématique de rotation (→ Edwards)

* Les capteurs d'attitudes

Gyromètres :

mesurent les vitesses de rotation (ω)

biais généralement très faible et constant. On l'estime à l'initialisation

Inclinomètres :

mesurent l'attitude apparente et non l'attitude vraie.

c'est-à-dire la direction de A, et non celle de G.

Au repos c'est pareil ($A = -G$). Mais ils sont sensibles aux accélérations transverses.

Magnétomètres :

mesure 3 axes du champ magnétique. Mais fluctuations importantes (naturelle ou parasite)

* Schéma de principe