

2^a Edición

Mecánica del vuelo

**Miguel Ángel Gómez Tierno
Manuel Pérez Cortés
César Puentes Márquez**

MECÁNICA DEL VUELO

2^a EDICIÓN

Miguel Ángel Gómez Tierno

Catedrático de Universidad

Departamento de Vehículos Aeroespaciales

Escuela de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio, Universidad Politécnica de Madrid

Manuel Pérez Cortés

Profesor Titular de Universidad

Departamento de Vehículos Aeroespaciales

Escuela de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio, Universidad Politécnica de Madrid

César Puentes Marquez

Ex Profesor Asociado

Escuela de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio,

Universidad Politécnica de Madrid.

Ex Director de Proyectos Futuros y Tecnologías en EADS-CASA

Garceta
grupo editorial

MECÁNICA DEL VUELO. 2^a EDICIÓN**Miguel Ángel Gómez Tierno, Manuel Pérez Cortés, César Puentes Marquez****ISBN: 978-84-1545-201-0****IBERGARCETA PUBLICACIONES, S.L., Madrid, 2012****Edición: 2^a****Nº de páginas: 482****Formato: 17 × 24 cm.****Materia CDU: 629.7 Técnica de los medios de transporte aéreo y espacial.
Aeronáutica. Cohetes. Astronáutica y vehículos espaciales.**

Reservados los derechos para todos los países de lengua española. De conformidad con lo dispuesto en el artículo 270 y siguientes del código penal vigente, podrán ser castigados con penas de multa y privación de libertad quienes reprodujeren o plagiaren, en todo o en parte, una obra literaria, artística o científica fijada en cualquier tipo de soporte sin la preceptiva autorización. Ninguna parte de esta publicación, incluido el diseño de la cubierta, puede ser reproducida, almacenada o trasmisida de ninguna forma, ni por ningún medio, sea éste electrónico, químico, mecánico, electro-óptico, grabación, fotocopia o cualquier otro, sin la previa autorización escrita por parte de la editorial.

Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos), www.cedro.org, si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra.

COPYRIGHT © 2012 IBERGARCETA PUBLICACIONES, S.L.**info@garceta.es****© Miguel Ángel Gómez Tierno, Manuel Pérez Cortés, César Puentes Marquez****MECÁNICA DEL VUELO. 2^a EDICIÓN.****ISBN: 978-84-1545-201-0****Edición: 2^a.****Impresión: 2^a.****Depósito legal: M-6304-2012****Impresión:****PRINT HOUSE, marca registrada de Coplar S.A.****OI: 100/2015****IMPRESO EN ESPAÑA-PRINTED IN SPAIN**

Nota sobre enlaces a páginas web ajenas: Este libro puede incluir referencias a sitios web gestionados por terceros y ajenos a IBERGARCETA PUBLICACIONES, SL, que se incluyen sólo con finalidad informativa. IBERGARCETA PUBLICACIONES, SL, no asume ningún tipo de responsabilidad por los daños y perjuicios derivados del uso de los datos personales que pueda hacer un tercero encargado del mantenimiento de las páginas web ajenas a IBERGARCETA PUBLICACIONES, SL, y del funcionamiento, accesibilidad y mantenimiento de los sitios web no gestionados por IBERGARCETA PUBLICACIONES, SL, directamente. Las referencias se proporcionan en el estado en que se encuentran en el momento de publicación sin garantías expresas o implícitas, sobre la información que se proporcione en ellas.

Índice general

Índice general

v

Prólogo

xii

1 SISTEMAS DE REFERENCIA	1
1.1. Introducción	1
1.2. Sistemas básicos de referencia	1
1.2.1. Sistema de referencia inercial, $F_I(O_I, x_I, y_I, z_I)$	2
1.2.2. Sistema de referencia geocéntrico giratorio, $F_g(O_g, x_g, y_g, z_g)$. .	2
1.2.3. Sistema de ejes tierra, $F_e(O_e, x_e, y_e, z_e)$	2
1.2.4. Sistema de ejes horizonte local, $F_h(O_h, x_h, y_h, z_h)$	3
1.2.5. Sistema de ejes de cuerpo, $F_b(O_b, x_b, y_b, z_b)$	3
1.2.6. Sistema de ejes viento, $F_w(O_w, x_w, y_w, z_w)$	4
1.3. Orientación entre dos sistemas de referencia con origen común	5
1.4. Orientación del sistema de ejes cuerpo respecto al sistema de ejes horizonte local	8
1.5. Orientación del sistema de ejes viento respecto al sistema de ejes horizonte local	10
1.6. Orientación del sistema de ejes cuerpo respecto al sistema de ejes viento	11
1.7. Problemas 1.1 y 1.2	13
2 ECUACIONES GENERALES DEL MOVIMIENTO	17
2.1. Introducción	17
2.2. Relaciones dinámicas	18
2.3. Acciones exteriores y términos gravitatorios	20
2.4. Hipótesis de tierra plana	23
2.5. Relaciones cinemáticas angulares	23
2.6. Relaciones cinemáticas lineales y determinación de la trayectoria . . .	25
2.7. Ecuaciones del vuelo estacionario	25
2.8. Problemas 2.1 y 2.2	28

3 RELACIONES BÁSICAS PARA LA DETERMINACIÓN DE ACTUACIONES	33
3.1. Introducción	33
3.2. Relaciones dinámicas de fuerza y relación másica	34
3.3. Relaciones cinemáticas lineales	37
3.4. Características aerodinámicas y propulsivas	37
3.5. Discusión general del sistema y casos particulares	38
3.5.1. Motor fijo con respecto al avión	39
3.5.2. Vuelo simétrico en un plano vertical	40
3.5.3. Vuelo simétrico en un plano horizontal	43
3.6. Problemas 3.1 y 3.2	45
4 ACTUACIONES DEL PLANEADOR	51
4.1. Introducción	51
4.2. Fuerzas aerodinámicas y polar parabólica	51
4.3. Resistencia adimensional	55
4.4. Ecuaciones adimensionales	58
4.5. Actuaciones de punto	61
4.6. Actuaciones integrales	64
4.6.1. Planeo con ángulo de ataque constante	65
4.6.2. Planeo con velocidad constante	66
4.7. Problemas 4.1 y 4.2	67
5 ACTUACIONES DE AVIONES PROPULSADOS POR TURBOREACTORES. VUELO HORIZONTAL RECTILÍNEO	73
5.1. Introducción	73
5.2. Hipótesis acerca de las características del motor	73
5.3. Ecuaciones adimensionales	75
5.4. Actuaciones de punto	77
5.4.1. Velocidades de vuelo horizontal	78
5.4.2. Velocidad horizontal máxima de las máximas	80
5.4.3. Techo teórico	82
5.5. Actuaciones integrales	83
5.5.1. Vuelo a ángulo de ataque constante	86
5.5.2. Vuelo a velocidad constante	87
5.5.3. Vuelo a empuje constante	88
5.5.4. Comparación entre las distintas leyes de pilotaje	90
5.6. Problemas 5.1 y 5.2	92
6 ACTUACIONES DE AVIONES PROPULSADOS POR TURBOREACTORES. OTROS VUELOS	97
6.1. Introducción	97
6.2. Actuaciones de punto en subida y descenso	97
6.2.1. Análisis para ángulos de asiento de velocidad pequeños	100
6.2.2. Corrección para vuelo acelerado	103

6.3. Actuaciones de punto en viraje casi-estacionario	104
6.4. Actuaciones de punto en viraje instantáneo	111
6.5. Problemas 6.1 y 6.2	114
7 ACTUACIONES DE AVIONES PROPULSADOS POR HÉLICES	121
7.1. Introducción	121
7.2. Potencia disipada adimensional	121
7.3. Hipótesis acerca de las características del grupo motopropulsor	125
7.3.1. Motores alternativos	125
7.3.2. Hélices	126
7.4. Transformación de la ecuación de fuerza tangencial en ecuación de potencia	128
7.5. Vuelo horizontal rectilíneo. Actuaciones de punto	129
7.6. Vuelo horizontal rectilíneo. Actuaciones integrales	132
7.6.1. Vuelo a ángulo de ataque constante	135
7.6.2. Vuelo a velocidad constante	136
7.6.3. Vuelo a potencia del motor constante	137
7.6.4. Comparación entre las distintas leyes de pilotaje	138
7.7. Actuaciones de punto en subida y descenso	138
7.8. Actuaciones de punto en viraje casi-estacionario	141
7.9. Problemas 7.1 y 7.2	144
8 ACTUACIONES DE DESPEGUE Y ATERRIZAJE	151
8.1. Introducción	151
8.2. Rodadura en el suelo en el despegue	152
8.2.1. Rodadura con todas las ruedas en el suelo	153
8.2.2. Rotación del avión	155
8.2.3. Rodadura con el tren principal en el suelo	156
8.2.4. Despegue del avión	157
8.2.5. Cálculo de la distancia recorrida y del tiempo invertido en la rodadura en el suelo	161
8.3. Recorrido en el aire en el despegue	161
8.3.1. Transición	162
8.3.2. Subida rectilínea estabilizada	162
8.3.3. Cálculo de la distancia horizontal recorrida y del tiempo invertido en el recorrido en el aire	163
8.4. Distancia total recorrida y tiempo total empleado en el despegue	164
8.5. Actuaciones en aterrizaje	165
8.6. Problemas 8.1 y 8.2	167
9 ACTUACIONES DE AVIONES DE ALTA VELOCIDAD	175
9.1. Introducción	175
9.2. Resistencia aerodinámica y factor de empuje	177
9.3. Envolvente del dominio de vuelo	180

9.3.1.	Limitación aerodinámica	180
9.3.2.	Limitación estructural	181
9.3.3.	Limitaciones térmica y por características del motor	182
9.4.	Algunos diagramas M- <i>h</i>	183
9.4.1.	Diagrama M- <i>h</i> del factor de empuje	183
9.4.2.	Diagrama M- <i>h</i> de la aceleración tangencial	184
9.4.3.	Diagrama M- <i>h</i> de la velocidad ascensional	185
9.4.4.	Diagrama M- <i>h</i> del radio de viraje	187
9.5.	Energía específica y su derivada respecto del tiempo	188
9.6.	El estado de energía	191
9.7.	Problemas 9.1 y 9.2	197
10	ESTABILIDAD Y CONTROL ESTÁTICOS LONGITUDINALES	203
10.1.	Introducción	203
10.2.	Sustentación total	204
10.3.	Momento de cabeceo total	208
10.4.	Índice de estabilidad estática longitudinal con mandos fijos y punto neutro con mandos fijos	211
10.5.	Posibles métodos de obtención del control longitudinal	214
10.6.	Deflexión del timón de profundidad necesaria para el equilibrio	215
10.7.	Determinación del punto neutro con mandos fijos mediante ensayos en vuelo	217
10.8.	Posición más adelantada del centro de masas por mando longitudinal	219
10.9.	Problemas 10.1 y 10.2	220
11	FUERZA EN EL MANDO LONGITUDINAL	229
11.1.	Introducción	229
11.2.	Tipos de sistemas de mando	230
11.3.	Momento de charnela del timón de profundidad	233
11.4.	Efecto de liberar el timón de profundidad sobre la sustentación y el momento de cabeceo	235
11.5.	Índice de estabilidad estática longitudinal con mandos libres y punto neutro con mandos libres	236
11.6.	Fuerza en palanca y gradiente de fuerza en palanca	238
11.7.	Efecto de pesos y muelles sobre la estabilidad con mandos libres	241
11.8.	Problemas 11.1 y 11.2	245
12	ESTABILIDAD Y CONTROL ESTÁTICOS LONGITUDINALES EN MANIOBRA	255
12.1.	Introducción	255
12.2.	Amortiguamiento en cabeceo	256
12.3.	Relación entre la velocidad angular de cabeceo y el factor de carga	258
12.4.	Índice de estabilidad estática longitudinal en maniobra con mandos fijos y punto de maniobra con mandos fijos	259
12.5.	Deflexión del timón de profundidad en maniobra	261

12.6. Índice de estabilidad estática longitudinal en maniobra con mandos libres y punto de maniobra con mandos libres	263
12.7. Fuerza en palanca en maniobra	265
12.8. Efecto de los pesos sobre la estabilidad en maniobra con mandos libres	268
12.9. Problemas 12.1 y 12.2	270
13 ESTABILIDAD Y CONTROL ESTÁTICOS LATERAL-DIRECCIONALES	279
13.1. Introducción	279
13.2. Coeficientes de fuerza y momentos lateral-direccionales en vuelo rectilíneo estacionario	280
13.3. Fuerza lateral total	282
13.3.1. Derivada del coeficiente de fuerza lateral respecto a β	282
13.3.2. Derivada del coeficiente de fuerza lateral respecto a δ_a	284
13.3.3. Derivada del coeficiente de fuerza lateral respecto a δ_r	284
13.4. Momento de balance total	285
13.4.1. Efecto Diedro	286
13.4.2. Potencia de Control Lateral	290
13.4.3. Derivada del coeficiente de momento de balance respecto a δ_r	290
13.5. Momento de guiñada total	291
13.5.1. Estabilidad Direccional	291
13.5.2. Guiñada Adversa	293
13.5.3. Potencia de Control Direccional	294
13.6. Fuerzas en los mandos lateral y direccional	294
13.7. Estabilidad direccional con mandos libres	297
13.8. Fuerza y momentos lateral-direccionales en vuelo curvilíneo estacionario	298
13.9. Problemas 13.1 y 13.2	299
14 ESTABILIDAD Y CONTROL DINÁMICOS. LINEALIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DEL MOVIMIENTO	307
14.1. Introducción	307
14.2. Linealización de las ecuaciones del movimiento	307
14.2.1. Particularización para una condición de referencia de vuelo estacionario rectilíneo simétrico con las alas a nivel	313
14.3. Derivadas de estabilidad y linealización de los términos aerodinámicos y propulsivos	315
14.4. Ecuaciones linealizadas dimensionales	319
14.5. Ecuaciones linealizadas adimensionales del movimiento longitudinal .	320
14.6. Ecuaciones linealizadas adimensionales del movimiento lateral-direccional	325
14.7. Problemas 14.1 y 14.2	331
15 DERIVADAS DE ESTABILIDAD LONGITUDINALES Y LATERAL-DIRECCIONALES	337
15.1. Introducción	337

15.2. Expresiones de C_X , C_Z , C_m	339
15.3. Las derivadas respecto de \hat{u}	340
15.4. Las derivadas respecto de α	341
15.5. Las derivadas respecto de $\hat{\alpha}$	342
15.6. Las derivadas respecto de \hat{q}	344
15.7. Las derivadas respecto de δ_e y $\hat{\delta}_e$	345
15.8. Las derivadas respecto de β	346
15.9. Las derivadas respecto de \hat{p}	346
15.10. Las derivadas respecto de \hat{r}	349
15.11. Las derivadas respecto de δ_a , $\hat{\delta}_a$, δ_r y $\hat{\delta}_r$	352
15.12. Problemas 15.1 y 15.2	354
16 ESTABILIDAD Y CONTROL DINÁMICOS LONGITUDINALES EN CADENA ABIERTA	359
16.1. Introducción	359
16.2. Cuártica de estabilidad	360
16.3. Modos longitudinales. Determinación de autovalores, autovectores y formas de los modos	362
16.4. Ecuaciones simplificadas del modo fugoide	366
16.5. Ecuaciones simplificadas del modo de corto período	370
16.6. Respuesta al control longitudinal	373
16.6.1. Respuesta válida para tiempos pequeños	379
16.7. Problemas 16.1 y 16.2	384
17 ESTABILIDAD Y CONTROL DINÁMICOS LATERAL-DIRECCIONALES EN CADENA ABIERTA	391
17.1. Introducción	391
17.2. Cuártica de estabilidad	392
17.3. Modos lateral-direccionales. Determinación de autovalores, autovectores y formas de los modos	394
17.4. Ecuaciones simplificadas del modo de convergencia en balance	397
17.5. Ecuaciones simplificadas del modo espiral	398
17.6. Ecuaciones simplificadas del modo balanceo holandés	400
17.7. Respuesta a los controles lateral y direccional	403
17.7.1. Respuesta al mando lateral válida para tiempos pequeños	407
17.7.2. Respuesta al mando direccional para un modelo con el grado de libertad de guiñada	409
17.8. Problemas 17.1 y 17.2	411
18 CUALIDADES DE VUELO Y SISTEMAS DE CONTROL DE VUELO	417
18.1. Introducción	417
18.2. Normas de cualidades de vuelo	418
18.2.1. Evolución histórica de las Normas de Cualidades de Vuelo	419

18.2.2. Factores de los que dependen las Normas de Cualidades de Vuelo	420
18.2.3. La escala de Cooper-Harper	422
18.3. Requerimientos de las normas de cualidades de vuelo	424
18.3.1. Modo fugoide	424
18.3.2. Modo de corto periodo	425
18.3.3. Modo de convergencia en balance	428
18.3.4. Modo espiral	431
18.3.5. Modo de balanceo holandés	432
18.4. Sistemas de control de vuelo (FCS)	434
18.4.1. Sistemas de Aumento de Estabilidad (SAS)	435
18.4.2. Método de colocación de los polos (Pole-Placement Method) .	439
18.4.3. Autopilotos (AP)	441
18.5. Problemas 18.1 y 18.2	444
BIBLIOGRAFÍA	452
ÍNDICE ALFABÉTICO	455



PRÓLOGO

PRÓLOGO A LA PRIMERA EDICIÓN

La Mecánica del Vuelo puede definirse como la ciencia aplicada que se ocupa del estudio del movimiento de los vehículos voladores. Conviene matizar el término vehículo volador que aparece en la definición propuesta:

- Vehículo es cualquier objeto artificial formado por un conjunto arbitrario de sistemas deformables, ligados entre sí de alguna forma.
- Vuelo es el movimiento de un vehículo a través de un medio fluido o en el vacío.

Según esta definición, la Mecánica del Vuelo estudia el movimiento de un submarino, un avión, un globo, un helicóptero, un boomerang, un lanzador, un satélite artificial, etc.

Se propone estudiar de forma unificada los vuelos de vehículos tan diversos debido a que todos ellos tienen dos grandes denominadores comunes.

El primero es la ausencia de las ligaduras cinemáticas típicas en el movimiento de otros vehículos: por ejemplo, un tren está obligado a desplazarse por los raíles de la vía y un coche utiliza para situarse en un plano horizontal las acciones de contacto rueda-suelo. Esta ausencia de ligaduras cinemáticas conduce a características especiales de los sistemas de control utilizados por los vehículos voladores que son, básicamente, la deflexión de superficies aerodinámicas en campos fluidos y la utilización de motores cohete en el vacío.

El segundo gran denominador común es la naturaleza específica de los campos de fuerza exteriores que actúan sobre los vehículos voladores. Estos campos de fuerza exteriores pueden clasificarse en intensos (gravitatorio y

fluidodinámico-fluidoestático) y débiles (presión de radiación solar, magnético, etc.).

Hasta ahora se ha contemplado la Mecánica del Vuelo desde una perspectiva demasiado ambiciosa, ya que un estudio unificado de los movimientos de vehículos tan diversos, no siempre operando en el mismo entorno, presenta algunos problemas. El estudio del movimiento de los submarinos lo abordan los Ingenieros Navales y a las disciplinas que estudian el vuelo de los vehículos espaciales se las denomina “Mecánica Orbital” y “Dinámica de Actitud”. Además el estudio del movimiento de los aerostatos (aeronaves menos pesadas que el aire, como los globos y dirigibles), de las aeronaves de ala giratoria, de los lanzadores y de los UAV (en inglés, “Unmanned Air Vehicles”, es decir, Aeronaves no Tripuladas) suele efectuarse de forma separada al de los aviones.

Por todo lo expuesto en párrafos anteriores este libro sólo tratará la **Mecánica del Vuelo de Aviones**, definida como “**la ciencia aplicada que se ocupa del estudio del movimiento atmosférico de los aviones**”.

Los campos de fuerza débiles tienen gran trascendencia en el análisis de las perturbaciones del vuelo espacial. Sin embargo, para estudiar el movimiento de los aviones, solamente juegan un papel importante los campos de fuerza intensos. Y, dentro de los campos intensos, las fuerzas de flotación son despreciables en el vuelo de aeronaves más pesadas que el aire (aerodinos) y son comparables a las gravitatorias en el vuelo de globos y dirigibles (aerostatos).

Los movimientos del avión pueden clasificarse en:

- Grandes movimientos:

- Movimiento del centro de masas a lo largo de la trayectoria
- Rotaciones de la aeronave como cuerpo rígido alrededor de su centro de masas (cambios de actitud)

- Pequeños movimientos:

- Movimientos relativos de subsistemas giratorios y articulados
- Deformaciones elásticas de la estructura
- Etc.

Para plantear y resolver los problemas que aparecen en el estudio de los movimientos anteriormente mencionados, es necesario que la Mecánica del Vuelo solicite ayuda a una serie de disciplinas básicas, como son la Aerodinámica, la Propulsión, la Mecánica del Sólido Rígido, la Mecánica de las Estructuras Elásticas y la Matemática Aplicada. Por otra parte, esta ciencia tiene una repercusión importante en el proyecto y operación del avión y en el entrenamiento del piloto.

Una de las peculiaridades más importantes de la Mecánica del Vuelo es la necesidad de un cálculo previo de las fuerzas aerodinámicas que actúan sobre la aeronave. Según nos enseña la Aerodinámica, dichas fuerzas dependen de la geometría del cuerpo, del régimen de vuelo y de la historia del movimiento, si éste es no estacionario. Y no conviene olvidar las dificultades adicionales que introduce el sistema propulsivo utilizado (hélices, aerorreactores, motores cohete, etc.).

Tradicionalmente se ha dividido el estudio del movimiento del avión en las tres áreas siguientes:

- **Actuaciones**
- **Estabilidad y Control**
- **Aeroelasticidad**

De forma muy general, puede decirse que las Actuaciones se ocupan del estudio del movimiento del centro de masas del avión a lo largo de su trayectoria; que mediante la Estabilidad y el Control se analizan las rotaciones del avión alrededor de su centro de masas, como un sólido rígido al que pueden estar unidos otros cuerpos también rígidos que giran con respecto al principal con velocidad angular conocida; y que la Aeroelasticidad trata aquellos problemas donde las deformaciones elásticas de la estructura son importantes y por tanto se produce interacción entre las fuerzas aerodinámicas, elásticas e iniciales.

En aviones no convencionales o en aviones con actuaciones elevadas, los problemas relacionados con estas tres áreas están acoplados y es necesario recurrir, para su solución, a las ecuaciones generales del avión elástico. Sin embargo, en este libro se supondrá que **el avión es un sólido rígido** y se tratarán solamente los problemas de Actuaciones y de Estabilidad y Control.

La separación de las áreas de Actuaciones y Estabilidad y Control está basada, asimismo, en una aproximación. Según la Mecánica del Sólido Rígido se sabe que el movimiento del centro de masas de la aeronave está gobernado por el teorema de la cantidad de movimiento, mientras que el movimiento de rotación como sólido rígido alrededor de su centro de masas viene descrito por el teorema del momento cinético.

Para controlar el avión es necesario cambiar la magnitud y dirección de las acciones aerodinámicas y/o propulsivas, actuando sobre las superficies de mando adecuadas y/o sobre los mandos que controlan el motor. Por tanto, es imposible modificar independientemente fuerzas y momentos exteriores (un cambio en las fuerzas da lugar a un cambio en los momentos, y viceversa) y, estrictamente hablando, no pueden separarse los problemas de Actuaciones de los de Estabilidad y Control.

Sin embargo, es posible suponer que los efectos de las deflexiones de las superficies de mando sobre las fuerzas exteriores son mucho menores que los correspondientes efectos sobre los momentos. De esta forma las ecuaciones de la cantidad de movimiento y del momento cinético quedan desacopladas y pueden resolverse independientemente: la ecuación de fuerzas proporciona la trayectoria descrita por el avión y posteriormente, con la ecuación de momentos, se está en condiciones de calcular las deflexiones de las superficies de mando necesarias para seguir esa trayectoria.

A continuación se analizan brevemente los problemas más importantes de Actuaciones y de Estabilidad y Control:

A) ACTUACIONES

El propósito del estudio de Actuaciones (o “Performances”) es establecer la configuración del avión más adecuada para realizar determinada misión y precisar la utilidad operacional de un avión ya diseñado.

Atendiendo al carácter del movimiento en estudio, pueden clasificarse los problemas de Actuaciones en dos grandes grupos:

- Problemas casi-estacionarios
- Problemas no estacionarios

En los problemas casi-estacionarios, se supone que las fuerzas de inercia tangenciales a la trayectoria son despreciables frente a otras fuerzas que intervienen en el problema; esto ocurre en casi todos los aviones convencionales

durante la mayor parte de sus trayectorias, lo que no quiere decir que el movimiento sea estrictamente rectilíneo y con velocidad constante. Los problemas no estacionarios están relacionados con el estudio del despegue y aterrizaje de los aviones convencionales o con el estudio de trayectorias de aviones propulsados por motores cohete, planeadores hipersónicos, aviones convencionales en situaciones especiales de vuelo, etc.

Dentro de los problemas casi-estacionarios, existen asimismo otros dos grandes grupos:

- **Problemas de actuaciones de punto**
- **Problemas de actuaciones integrales**

Los problemas de actuaciones de punto corresponden a las propiedades locales de la trayectoria del avión. Por ejemplo, son problemas de actuaciones puntuales los cálculos de:

- Velocidades de pérdida en distintas condiciones de vuelo
- Velocidad horizontal máxima y altitud para la que se produce
- Techo
- Velocidad para máximo ángulo de subida y ángulo de subida máximo
- Velocidad para máxima velocidad ascensional y velocidad ascensional máxima
- Actuaciones en virajes horizontales estacionario e instantáneo
- Velocidades para máxima autonomía específica y autonomía específica máxima
- Velocidades para máximo alcance específico y alcance específico máximo

Las actuaciones integrales se ocupan del estudio global de la trayectoria, es decir, del comportamiento del avión entre los puntos inicial y final de una misión determinada. A este grupo pertenecen los cálculos de:

- Autonomía máxima para carga de combustible dada, con cierta ley de pilotaje

- Alcance máximo para carga de combustible dada, con cierta ley de pilotaje
- Tiempo mínimo para cambios de altitud y velocidad dados

Para determinar los problemas de punto, según el método casi-estacionario, es necesario resolver un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales, ya que se desprecian los términos iniciales tangenciales en las ecuaciones del movimiento, y en consecuencia la obtención de condiciones de vuelo óptimas se reduce a un problema de máximos y mínimos. Por otra parte, un problema integral de actuaciones conduce a la integración de las ecuaciones del movimiento supuestas conocidas las condiciones en los límites y la ley de pilotaje, por lo que la optimización de condiciones de vuelo normalmente debe formularse como un problema variacional.

A pesar de la gran simplificación introducida por el método casi-estacionario, se trata todavía de un campo demasiado extenso a causa de la gran variedad de regímenes de vuelo y modelos de fuerzas aerodinámicas y sistemas propulsivos que pueden considerarse. Para obtener soluciones analíticas cerradas es necesario realizar hipótesis simplificativas adicionales respecto a la atmósfera, las características del avión y las del grupo motopropulsor: por ejemplo, atmósfera estándar, polar parabólica de coeficientes constantes y empuje de un aerorreactor independiente de la velocidad y proporcional a alguna potencia de la densidad atmosférica.

Las soluciones obtenidas de esta forma están obviamente sujetas a limitaciones considerables, pero representan una primera aproximación a las actuaciones reales del avión y muestran la influencia de los parámetros de diseño sobre dichas actuaciones.

En cuanto a los problemas no estacionarios, hay que decir que la trayectoria no puede ser estudiada desde un punto de vista local. Para resolverlos es preciso integrar las ecuaciones del movimiento, conocida la ley de control y las condiciones en los límites. La optimización de actuaciones requiere el Cálculo de Variaciones, no siendo suficiente la teoría matemática ordinaria de máximos y mínimos.

Por último, y al igual que en los problemas casi-estacionarios, la adopción de hipótesis simplificativas adicionales, permite obtener soluciones cerradas, que son una primera aproximación de las actuaciones reales y que sirven para estimar el efecto de los parámetros de diseño sobre dichas actuaciones.

B) ESTABILIDAD Y CONTROL

Cualquier nuevo proyecto de avión exige además de la determinación de la configuración básica que proporcione actuaciones óptimas o casi óptimas, una predicción cuidadosa de su comportamiento y la comprobación de que se satisfacen en todo el dominio de vuelo las cualidades de vuelo impuestas por las normas.

Se definen como **Cualidades de Vuelo** aquellas características de la aeronave que determinan la opinión del piloto sobre la facilidad para controlarla en vuelo estacionario y en maniobra, y llevar a cabo la misión pretendida en condiciones adecuadas de seguridad.

La determinación objetiva y cuantificada de las Cualidades de Vuelo ha dado lugar a considerables dificultades durante el desarrollo histórico del vuelo. Al no estar claramente definidas las cualidades deseables, no es de extrañar que el tema de la estabilidad y el control se tratase de forma puramente cualitativa, el dimensionado de las superficies de mando se efectuase solamente en función de parámetros típicos obtenidos a partir de aviones semejantes y la determinación de las cualidades de vuelo se dejase bajo la responsabilidad del piloto y equipo de experimentación. Por ello, después de la fase de ensayos en vuelo eran necesarios cambios constructivos importantes, tales como alargar el fuselaje o cambiar la posición y dimensionado de las superficies de mando.

Los programas sistematizados de ensayos dieron lugar a un conjunto de recomendaciones que constituyen las Normas de Cualidades de Vuelo. A pesar de que existen variaciones entre las distintas normas particulares, las especificaciones recogidas por todas ellas son esencialmente las mismas, y su cumplimiento permite asegurar buenas cualidades de vuelo para el avión considerado.

Las cualidades de vuelo de un avión están directamente relacionadas con su estabilidad y controlabilidad, conceptos básicos fundamentales para la comprensión de la problemática de dichas cualidades.

Se dice que un avión es estable cuando, a partir de una condición inicial, y después de una perturbación sobre el mismo, tiende a volver a su posición de equilibrio sin que el piloto actúe sobre los mandos. Como situación inicial se considera generalmente una de vuelo estacionario, la cual tiene la propiedad de que todas las magnitudes características del movimiento permanecen invariantes durante el mismo.

Existen dos tipos de condiciones esenciales para que un avión tenga un comportamiento estable: las llamadas estabilidad estática y estabilidad dinámica.

Cuando un avión presenta una tendencia a desarrollar fuerzas y momentos que se oponen directamente a la perturbación de una variable del movimiento a partir de una condición de vuelo estacionario, se dice que es **estable estáticamente** (a la estabilidad estática se la denomina, a veces, estabilidad inherente). Y se denomina **estabilidad dinámica** a la tendencia a anularse con el tiempo de las amplitudes de ese movimiento de perturbación.

La controlabilidad de un avión se caracteriza por cómo es su respuesta a un accionamiento de los mandos por el piloto, bien sea alcanzando una nueva situación de vuelo estacionario, bien sea realizando distintos movimientos no estacionarios. Una consecuencia de ello es la diferenciación entre controlabilidad estática y dinámica.

La controlabilidad estática estudia las relaciones existentes entre las distintas condiciones de vuelo estacionario y las deflexiones de mandos y fuerzas en palanca y pedales que tiene que aplicar el piloto para volar el avión en las condiciones mencionadas. Asimismo, corresponde a este campo el análisis de la capacidad de compensación, entendiendo por tal, la posibilidad de anular las fuerzas en los mandos en vuelo estacionario mediante la deflexión de unas superficies aerodinámicas auxiliares llamadas “tabs” o compensadores.

La controlabilidad dinámica se ocupa del análisis del movimiento del avión que sigue al accionamiento de los mandos según una ley determinada. La forma en que el avión evoluciona hacia un nuevo estado de equilibrio depende de sus características de estabilidad, estando, por tanto, estrechamente relacionadas la estabilidad y la controlabilidad dinámicas.

En aquellos aviones con un dominio de vuelo y una configuración convencionales, dotados además de plano de simetría en el que está contenido el vector velocidad durante casi todas las situaciones de vuelo, es posible descomponer su movimiento general en **simétrico o longitudinal** y **asimétrico o lateral-direccional**, introduciendo la hipótesis de pequeñas perturbaciones. Esta descomposición ha resultado muy útil para la Mecánica del Vuelo, ya que ha permitido proyectar el avión teniendo en cuenta los dos grandes grupos de cualidades de vuelo por separado. Sin embargo, en aquellos proyectos en los que la configuración o el dominio de vuelo difieren sensiblemente de los convencionales, es preciso analizar cuidadosamente hasta qué punto se satisfacen las condiciones necesarias para la separación de los

modos longitudinales y lateral-direccionales.

El aumento tremendo de las actuaciones de los aviones a partir de los años cuarenta del siglo pasado, vino acompañado por un incremento paralelo en los valores de sus momentos de charnela y por un deterioro de sus características de estabilidad aerodinámica inherente.

Existen casos en que, debido a los elevados valores de los momentos de charnela, no es posible obtener márgenes adecuados de fuerzas en los mandos y es preciso recurrir a sistemas de potencia auxiliar y a sistemas irreversibles (o servomandos). En los sistemas de potencia auxiliar, una parte de la fuerza necesaria para equilibrar el momento aerodinámico de charnela es suministrada por el piloto y la parte restante por el sistema de potencia auxiliar. Con un servomando, la totalidad de la fuerza necesaria para equilibrar ese momento de charnela es generada por un actuador y el piloto se limita a posicionar la superficie de control a través de un sistema completamente irreversible. En este último caso, y mediante otro sistema auxiliar especial, se introduce la fuerza en palanca adecuada para transmitir al piloto la sensación de mando a la que está habituado.

El deterioro de las características de estabilidad aerodinámica inherente que ha acompañado al incremento de las actuaciones del avión, ha obligado a introducir artificialmente estabilidad y control mediante sistemas automáticos de control en vuelo. Estos sistemas automáticos influyen en la configuración del avión, por lo que es preciso realizar el proyecto del control activo al mismo tiempo que el proyecto aerodinámico, estructural y del grupo motopropulsor, dando lugar a una nueva filosofía de diseño: la Aeronave Configurada por el Sistema de Control.

De acuerdo con todo lo establecido en párrafos anteriores, se ha estructurado el presente libro en 18 capítulos. Como paso previo al estudio de las actuaciones y la estabilidad y control, en los dos primeros capítulos se presentan los sistemas básicos de referencia a utilizar en la Mecánica del Vuelo de los aviones y se deducen las ecuaciones generales del movimiento de un avión rígido.

Del capítulo 3 al capítulo 9 se estudian los problemas de actuaciones. En el capítulo 3 se presentan las relaciones básicas para el estudio de estos problemas, en el capítulo 4 se analizan las actuaciones de planeadores, en los capítulos 5 y 6 se presentan las actuaciones para aviones propulsados por turborreactores, tanto en vuelo horizontal rectilíneo como en otros vuelos, en el capítulo 7 se repite el estudio de los dos capítulos anteriores para

aviones propulsados por hélices, en el capítulo 8 se analizan las actuaciones en despegue y aterrizaje de aviones típicos y en el capítulo 9 se efectúa una introducción a las actuaciones de aviones de alta velocidad.

Del capítulo 10 al capítulo 13 se estudian los problemas de estabilidad y controlabilidad estáticas. En el capítulo 10 se efectúa el estudio de la estabilidad y el control estáticos longitudinales, en el capítulo 11 se introducen las ideas de fuerzas y deflexiones en los sistemas de mando, en el capítulo 12 se analiza la estabilidad y el control estáticos longitudinales en maniobra, y en el capítulo 13 se repite el estudio de los capítulos anteriores para la estabilidad y control estáticos lateral-direccionales.

Y, por último, del capítulo 14 al capítulo 18 se estudian los problemas de estabilidad y controlabilidad dinámicas. En el capítulo 14 se da un paso previo consistente en linealizar todas las ecuaciones del movimiento a partir de una condición de referencia, en el capítulo 15 se presentan las derivadas de estabilidad longitudinales y lateral-direccionales, en el capítulo 16 se lleva a cabo el estudio de la estabilidad y control dinámicos longitudinales en lazo abierto, en el capítulo 17 se repite el estudio del capítulo anterior para la estabilidad y el control dinámicos lateral-direccionales en lazo abierto y, para concluir el libro, en el capítulo 18 se presentan las Cualidades de Vuelo y se cierra el lazo mediante los llamados Sistemas de Control de Vuelo o FCS (siglas en inglés de “Flight Control Systems”).

A nuestro parecer el presente libro presenta dos hechos distintivos, muy difíciles de encontrar en otros libros de texto similares de Mecánica del Vuelo a nivel mundial. En primer lugar trata todas las áreas de la Mecánica del Vuelo de aviones (actuaciones y estabilidad y control estáticos y dinámicos), sin restringirse a alguna de ellas. Y en segundo lugar, presenta, para cada capítulo, un par de problemas o casos prácticos originales, de considerable extensión y resueltos, que matizan y amplían el desarrollo del capítulo.

Finalmente los autores quieren agradecer a las siguientes personas su contribución a que esta obra vea la luz: al Prof. Juan José Martínez García (q.e.p.d.), Catedrático de Mecánica del Vuelo y maestro de todos nosotros, cuyos apuntes de Mecánica del Vuelo y su magisterio son el germen del presente libro; al resto de Profesores que pertenecen o han pertenecido a la Cátedra de Mecánica del Vuelo en sus épocas recientes (Eduardo García Juliá, Carlos Bachmaier, José Luis Tejo, Javier Ruiz de Ojeda y Francisco Díaz Fernández); a los becarios y personal que han pasado por el Laboratorio de Mecánica del Vuelo; a todos los alumnos de Ingeniería Aeronáutica de centros universitarios nacionales y extranjeros, en especial a los de la Escuela Técnica Superior de

Ingenieros Aeronáuticos (ETSIA) de la Universidad Politécnica de Madrid (UPM), quienes han sido, son y serán el motivo fundamental de este libro; a los Editores de la “Serie de Ingeniería y Tecnología Aeroespacial”, Profesores José Meseguer y Ángel Pedro Sanz, por la oportunidad que nos han brindado y el ánimo que nos han transmitido para realizar esta publicación; y al personal del IDR y de la empresa GMV, por el magnífico trabajo realizado con la ejecución de las figuras.

Los autores.

Madrid, febrero de 2009.

PRÓLOGO A LA SEGUNDA EDICIÓN

La segunda edición de este texto básicamente coincide con la primera edición que vio la luz hace tres años. Simplemente se han corregido diversas erratas, aclarado varios párrafos, completado algunos desarrollos e introducido un índice alfabético.

Como hicieron en la primera edición, los autores quieren expresar su agradecimiento a todos los alumnos de Ingeniería Aeronáutica de centros universitarios nacionales y extranjeros, en especial a los de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronáuticos (ETSIA) de la Universidad Politécnica de Madrid (UPM), quienes han sido los responsables del notable éxito obtenido por la primera edición, y a los Editores de la “Serie de Ingeniería y Tecnología Aeroespacial”, Profesores José Meseguer y Ángel Pedro Sanz, por la nueva oportunidad que nos han brindado.

Adicionalmente, un agradecimiento muy especial en esta edición va dedicado a Donato Franco del IDR, por el magnífico trabajo realizado con el mecanografiado final del texto.

Los autores.

Madrid, febrero de 2012.

1.1. Introducción

La Mecánica del Vuelo utiliza una serie de sistemas de referencia específicos con el fin de proyectar sobre ellos las fuerzas y momentos, las aceleraciones lineales y angulares, las velocidades lineales y angulares, y las posiciones y rotaciones, que intervienen en las ecuaciones dinámicas y cinemáticas del movimiento del avión que se deducirán en el próximo capítulo.

Estos sistemas de referencia se representarán de forma genérica como $F(O,x,y,z)$, con un origen (O) y tres ejes mutuamente perpendiculares entre sí formando un triángulo rectángulo (x,y,z).

En el apartado 1.2 se definen los sistemas de referencia más importantes entre los muchos utilizados por la Mecánica del Vuelo, en el apartado 1.3 se orienta de forma general un sistema de referencia respecto de otro (ambos con el mismo origen), y en los tres apartados siguientes se plantean las relaciones angulares que permiten transformar las magnitudes deseadas de ejes horizonte local a ejes cuerpo, de ejes horizonte local a ejes viento y de ejes viento a ejes cuerpo.

1.2. Sistemas básicos de referencia

A continuación se definen los seis sistemas de referencia más importantes de la Mecánica del Vuelo: sistema de referencia inercial, sistema de referencia geocéntrico giratorio, sistema de ejes tierra, sistema de ejes horizonte local, sistema de ejes cuerpo y sistema de ejes viento.

1.2.1. Sistema de referencia inercial, $F_I(O_I, x_I, y_I, z_I)$

Según la Mecánica Clásica, el sistema inercial se define, bien como un sistema que está en reposo (o en movimiento rectilíneo, uniforme y no rotante) respecto a las estrellas fijas, o bien como un sistema en el que para una masa puntual es posible aplicar la expresión fuerza igual a masa por aceleración.

En Mecánica del Vuelo de aviones es más que suficiente considerar como sistema inercial un sistema geocéntrico ligado a estrellas fijas como el representado en la Figura 1.1. El origen del mismo, O_I , es el centro de la Tierra (considerada esférica y con su centro moviéndose en los tiempos característicos de vuelo de un avión en condiciones inerciales, esto es, en movimiento rectilíneo y uniforme), el eje z_I coincide con el eje de rotación de la Tierra y apunta hacia el polo norte, el eje x_I está contenido en el Ecuador terrestre y se orienta hacia un punto fijo de la esfera celeste (por ejemplo, el llamado punto γ , punto Aries, punto vernal o equinoccio de primavera) y el eje y_I forma un tryedro a derechas con los dos anteriores.

1.2.2. Sistema de referencia geocéntrico giratorio, $F_g(O_g, x_g, y_g, z_g)$

Se trata de un sistema ligado a la Tierra que, en un instante genérico, coincide con el sistema inercial y posteriormente se mueve respecto de éste debido a la rotación de la Tierra alrededor de su eje (ver Figura 1.1). El eje x_g suele estar contenido en el Meridiano de Greenwich y, si se elige como origen de tiempos el instante en que coinciden los ejes x_I y x_g , el ángulo existente entre estos ejes será Ωt , donde Ω es la velocidad angular de rotación de la Tierra y t es el tiempo.

1.2.3. Sistema de ejes tierra, $F_e(O_e, x_e, y_e, z_e)$

El sistema de ejes tierra es un sistema topocéntrico giratorio (Figura 1.1). El origen del mismo, O_e , es un punto cualquiera de la superficie terrestre definido por su longitud, τ_e , y su latitud, λ_e , el eje z_e está dirigido hacia el centro de la Tierra, el eje x_e está contenido en un plano horizontal y dirigido hacia una dirección fija de éste (normalmente el Norte) y el eje y_e forma un tryedro a derechas con los dos anteriores (si el eje x_e se dirige hacia el Norte, el eje y_e estará dirigido hacia el Este). Algunos autores denominan a este sistema

de referencia “sistema navegacional”, ya que es muy útil para representar la trayectoria del avión desde su aeropuerto de partida.

1.2.4. Sistema de ejes horizonte local, $F_h(O_h, x_h, y_h, z_h)$

El origen de este sistema, O_h , podría ser cualquier punto del plano de simetría del avión (se supone que los aviones tienen siempre plano de simetría) aunque, por defecto, se elige el centro de masas del mismo (representado en la Figura 1.1 por CG). Los ejes x_h, y_h, z_h se toman paralelos a los ejes tierra que existirían en el punto subavión, representado en la Figura 1.1 por O_l (intersección con la superficie terrestre del radio vector que une el centro de masas del avión con el centro de la Tierra); es decir, los ejes x_h, y_h, z_h son paralelos a los ejes x_l, y_l, z_l .

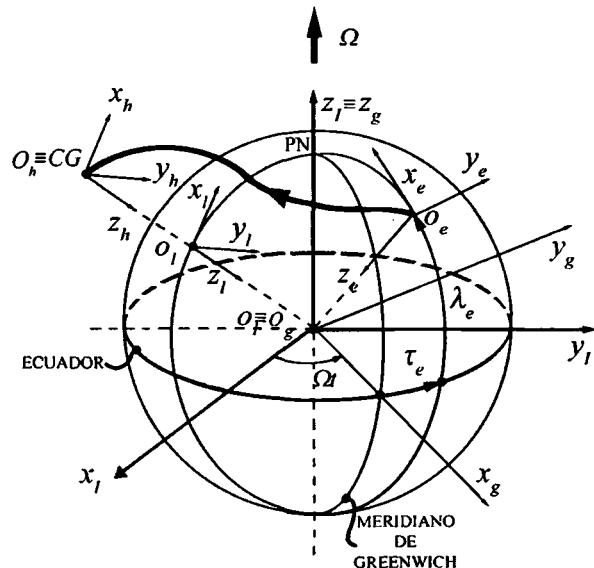


Figura 1.1. Sistemas de referencia inercial, geocéntrico giratorio, tierra y horizonte local.

1.2.5. Sistema de ejes de cuerpo, $F_b(O_b, x_b, y_b, z_b)$

El sistema de ejes cuerpo representa al sólido rígido avión. Su origen, O_b , podría ser cualquier punto del plano de simetría del avión aunque, por

defecto, se elige su centro de masas (Figura 1.2). El eje x_b está contenido en el plano de simetría del avión, es paralelo a una línea de referencia del mismo y está dirigido hacia delante. El eje z_b está contenido en el plano de simetría del avión, es perpendicular a x_b y está dirigido hacia abajo en actitud normal de vuelo, y el eje y_b , por tanto, será perpendicular al plano de simetría y apuntará hacia el ala derecha. Una vez definido un sistema de ejes cuerpo particular, éste permanece ligado al avión en todos sus movimientos.

Entre los infinitos sistemas de ejes cuerpo que pueden definirse, dos sistemas tienen gran relevancia:

- Sistema de ejes principales de inercia: En este sistema los ejes x_b , y_b , z_b son principales de inercia (siempre suponiendo que el avión es un cuerpo rígido).
- Sistema de ejes de estabilidad, $F_s(O_s, x_s, y_s, z_s)$: Se trata de un sistema de ejes cuerpo muy utilizado en el estudio de las pequeñas perturbaciones a partir de una condición de vuelo estacionario de referencia. El eje x_s tiene la dirección del vector velocidad aerodinámica \vec{V} del avión en vuelo estacionario de referencia, si esta velocidad está contenida en el plano de simetría, mientras que si no lo está, x_s se toma según la proyección de \vec{V} sobre el plano de simetría. Por ser F_s un sistema de ejes cuerpo, permanece ligado al avión en el movimiento de perturbación subsiguiente.

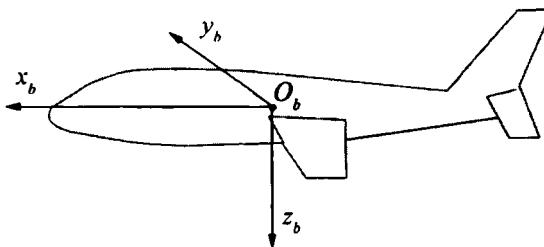


Figura 1.2. Sistema de ejes cuerpo.

1.2.6. Sistema de ejes viento, $F_w(O_w, x_w, y_w, z_w)$

El sistema de ejes viento está ligado a la velocidad aerodinámica instantánea del avión. Su origen, O_w , podría ser cualquier punto del plano de simetría del avión aunque, por defecto, se elige el centro de masas. El eje x_w está dirigido, en cada instante, según el vector velocidad aerodinámica \vec{V}

del avión, y en su mismo sentido. El eje z_w está situado en el plano de simetría, perpendicular a x_w y orientado hacia abajo en la actitud normal de vuelo del avión, y el eje y_w forma un triángulo a derechas con los dos anteriores. Obsérvese que si la velocidad aerodinámica está contenida en el plano de simetría del avión, $y_w \equiv y_b$.

1.3. Orientación entre dos sistemas de referencia con origen común

Según la Mecánica Clásica para situar con toda generalidad un sistema de referencia, F_a , respecto a otro, F_b , cuando ambos tienen el origen común, hay que efectuar una rotación genérica hasta que coincidan los ejes. Si los sistemas tuvieran distintos orígenes, además de la citada rotación, sería preciso efectuar una traslación para hacer coincidir los orígenes.

Existen distintos métodos para orientar entre sí dos sistemas con un origen común, como, por ejemplo, los cosenos directores, los Ángulos de Euler o los cuaterniones. En este libro de Mecánica del Vuelo se utilizarán los denominados **Ángulos de Euler**, es decir, tres rotaciones sucesivas finitas dadas en un orden especificado (téngase en cuenta que las rotaciones finitas no son magnitudes vectoriales y, por tanto, no son comutativas), ya que se considera el mejor método para comprender el significado físico de las rotaciones involucradas.

En primer lugar (ver Figura 1.3) se rota el sistema F_a alrededor del eje z_a un ángulo δ_3 y se obtiene un primer sistema intermedio F_1 ; después se rota el sistema F_1 alrededor del eje y_1 un ángulo δ_2 y se obtiene un segundo sistema intermedio F_2 ; y por último, se rota el sistema F_2 alrededor del eje x_2 un ángulo δ_1 para obtener el sistema final F_b .

Este orden preciso de las rotaciones suele denominarse Convención zyx (donde cada letra representa el eje de la rotación), Convención 321 (donde cada número representa asimismo el eje de rotación) o **Convención de Tait-Bryan**, y es universalmente utilizado para orientar aeronaves y vehículos espaciales. En otros campos científicos como la Física de Partículas o la Astronomía, son usuales convenciones distintas como la zyz o la zxz .

Para expresar un vector cualquiera \vec{A} en el sistema de referencia F_b , cuando se conocen sus tres componentes en el sistema de referencia F_a , se recurre al concepto de matriz de transformación o de rotación entre ambos

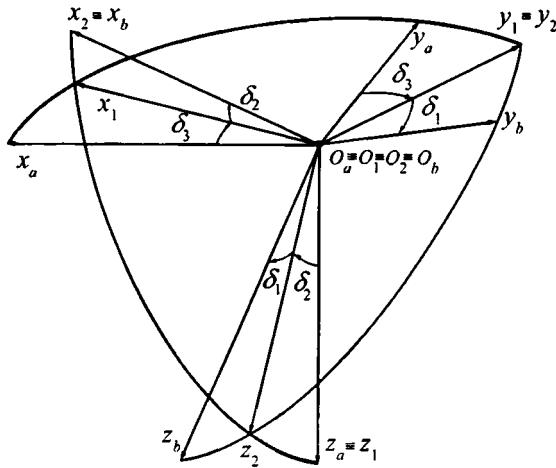


Figura 1.3. Orientación de un sistema de referencia F_b respecto a otro sistema F_a .

sistemas, L_{ba} :

$$\vec{A}_b = L_{ba} \vec{A}_a \quad (1.1)$$

Esta matriz de rotación L_{ba} puede obtenerse determinando previamente las tres matrices de las rotaciones individuales alrededor de cada uno de los tres ejes y posteriormente multiplicándolas adecuadamente para obtener la matriz final. Expresando los versores del sistema F_1 en función de los del sistema F_a (Figura 1.4 (a)):

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{i}_1 \\ \vec{j}_1 \\ \vec{k}_1 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} \cos \delta_3 & \sin \delta_3 & 0 \\ -\sin \delta_3 & \cos \delta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \vec{i}_a \\ \vec{j}_a \\ \vec{k}_a \end{array} \right\} \quad (1.2)$$

La matriz de rotación individual que permite pasar del sistema F_a al sistema F_1 , L_{1a} , será:

$$L_{1a} = R_3(\delta_3) = \left[\begin{array}{ccc} \cos \delta_3 & \sin \delta_3 & 0 \\ -\sin \delta_3 & \cos \delta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (1.3)$$

$$\vec{A}_1 = L_{1a} \vec{A}_a \quad (1.4)$$

Obsérvese que a una matriz individual de rotación de un ángulo δ_3 alrededor del tercer eje (o eje z) se la denomina mediante el símbolo $R_3(\delta_3)$ o $R_z(\delta_3)$.

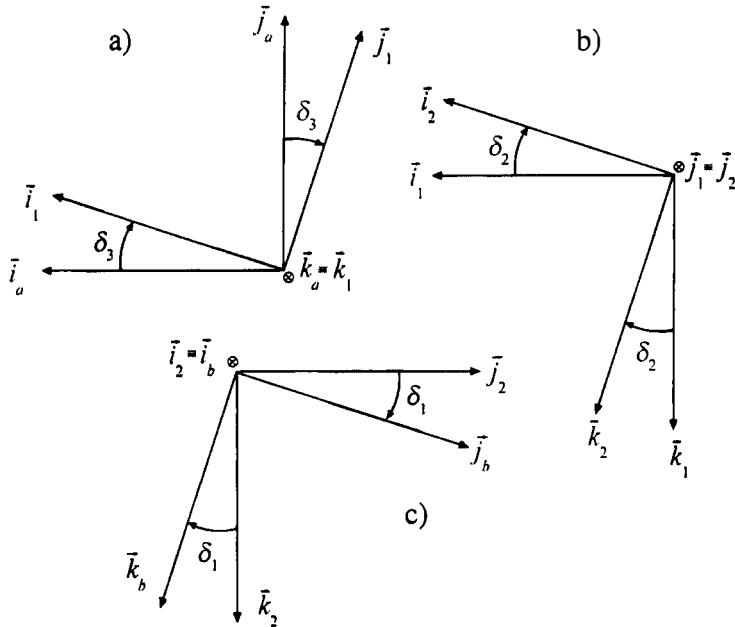


Figura 1.4. Las tres rotaciones básicas: a) alrededor de z_a ; b) alrededor de y_1 ; c) alrededor de x_2 .

Operando análogamente con la segunda rotación, se obtendrá (Figura 1.4 (b)):

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{i}_2 \\ \vec{j}_2 \\ \vec{k}_2 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} \cos \delta_2 & 0 & -\sin \delta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \delta_2 & 0 & \cos \delta_2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \vec{i}_1 \\ \vec{j}_1 \\ \vec{k}_1 \end{array} \right\} \quad (1.5)$$

$$L_{21} = R_2(\delta_2) = \left[\begin{array}{ccc} \cos \delta_2 & 0 & -\sin \delta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \delta_2 & 0 & \cos \delta_2 \end{array} \right] \quad (1.6)$$

$$\vec{A}_2 = L_{21} \vec{A}_1 \quad (1.7)$$

Y finalmente, para la tercera rotación queda (Figura 1.4 (c)):

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{i}_b \\ \vec{j}_b \\ \vec{k}_b \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta_1 & \sin \delta_1 \\ 0 & -\sin \delta_1 & \cos \delta_1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \vec{i}_2 \\ \vec{j}_2 \\ \vec{k}_2 \end{array} \right\} \quad (1.8)$$

$$L_{b2} = R_1(\delta_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta_1 & \sin \delta_1 \\ 0 & -\sin \delta_1 & \cos \delta_1 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

$$\vec{A}_b = L_{b2} \vec{A}_2 \quad (1.10)$$

Componiendo ahora las tres matrices de rotación individuales, se obtiene:

$$\vec{A}_b = L_{b2} \vec{A}_2 = L_{b2} L_{21} \vec{A}_1 = L_{b2} L_{21} L_{1a} \vec{A}_a \quad (1.11)$$

y por tanto la matriz de rotación global L_{ba} quedará:

$$L_{ba} = L_{b2} L_{21} L_{1a} \quad (1.12)$$

$$L_{ba} = \begin{bmatrix} c\delta_2 c\delta_3 & c\delta_2 s\delta_3 & -\sin \delta_2 \\ s\delta_1 s\delta_2 c\delta_3 - c\delta_1 s\delta_3 & s\delta_1 s\delta_2 s\delta_3 + c\delta_1 c\delta_3 & s\delta_1 c\delta_2 \\ c\delta_1 s\delta_2 c\delta_3 + s\delta_1 s\delta_3 & c\delta_1 s\delta_2 s\delta_3 - s\delta_1 c\delta_3 & c\delta_1 c\delta_2 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

donde se ha utilizado la notación: $c\delta_i c\delta_j = \cos \delta_i \cos \delta_j$, $s\delta_i s\delta_j = \sin \delta_i \sin \delta_j$, $c\delta_i s\delta_j = \cos \delta_i \sin \delta_j$, $s\delta_i s\delta_j c\delta_k = \sin \delta_i \sin \delta_j \cos \delta_k$, etc.

Por último, conviene recordar que las matrices de transformación entre dos sistemas de referencia cualesquiera son ortogonales y, por ello, la inversa de una matriz es igual a su traspuesta y su determinante vale la unidad; es decir, pueden utilizarse las siguientes reglas prácticas:

$$L_{ab} = L_{ba}^{-1} = L_{ba}^T \quad ; \quad |L_{ab}| = 1 \quad (1.14)$$

1.4. Orientación del sistema de ejes cuerpo respecto al sistema de ejes horizonte local

Para situar el sistema de ejes cuerpo respecto del sistema de ejes horizonte local, se particulariza el desarrollo general efectuado en el apartado anterior para:

- $F_a \equiv F_h$ y $F_b \equiv F_b$
- $\delta_3 \equiv \psi = \text{Ángulo de guiñada del avión } (0 \leq \psi < 2\pi)$
- $\delta_2 \equiv \theta = \text{Ángulo de asiento del avión } (-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2)$
- $\delta_1 \equiv \phi = \text{Ángulo de balance del avión } (-\pi \leq \phi < \pi)$

Estos tres ángulos se representan en la Figura 1.5 y su interpretación física es la siguiente: el ángulo de asiento, θ , es el ángulo existente entre el eje x_b del avión y su proyección sobre el plano horizontal; el ángulo de guiñada, ψ , es el ángulo existente entre la dirección de referencia x_h (por ejemplo, el Norte) y la proyección de x_b sobre el plano horizontal; y el ángulo de balance, ϕ , es el ángulo existente entre el eje y_b y la intersección del plano y_b-z_b con el plano horizontal (cuando $\phi = 0$ se dice que el avión vuela con las “alas a nivel”).

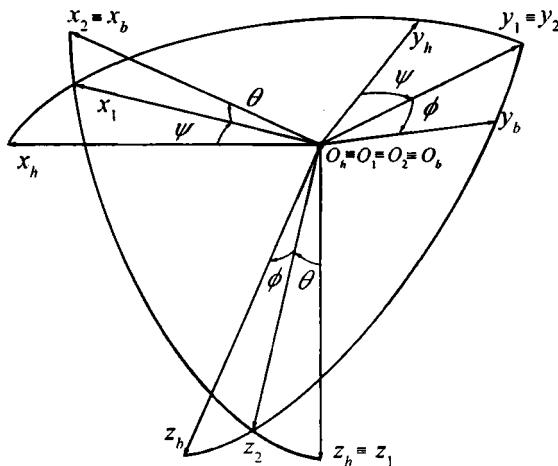


Figura 1.5. Orientación de F_b respecto a F_h .

Particularizando la matriz L_{ba} , dada por la expresión (1.13), para este caso concreto, se obtiene la matriz de transformación del sistema de ejes horizonte local al sistema de ejes cuerpo, L_{bh} :

$$L_{bh} = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -\sin \theta \\ s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi c\theta \\ c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi c\theta \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

habiéndose empleado en esta expresión una notación semejante a la utilizada al escribir la (1.13), es decir, $c\theta c\psi = \cos \theta \cos \psi$, $c\theta s\psi = \cos \theta \sin \psi$, $s\phi s\theta c\psi = \sin \phi \sin \theta \cos \psi$, $s\phi s\theta s\psi = \sin \phi \sin \theta \sin \psi$, etc.

1.5. Orientación del sistema de ejes viento respecto al sistema de ejes horizonte local

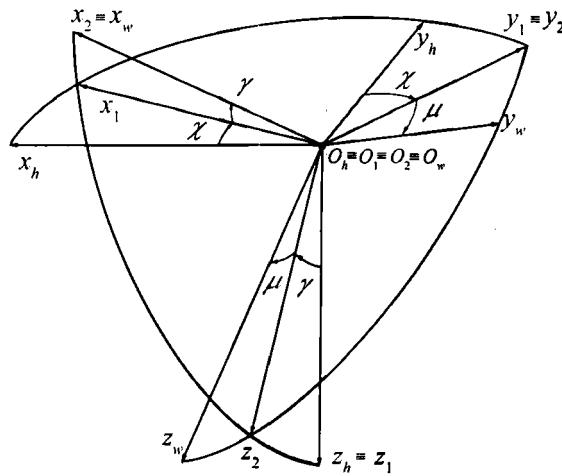
Para situar el sistema de ejes viento respecto del sistema de ejes horizonte local, se particulariza el desarrollo general efectuado en el apartado 1.3 para:

- $F_a \equiv F_h$ y $F_b \equiv F_w$
 - $\delta_3 \equiv \chi = \text{Ángulo de guiñada de velocidad}$ ($0 \leq \chi < 2\pi$)
 - $\delta_2 \equiv \gamma = \text{Ángulo de asiento de velocidad}$ ($-\pi/2 \leq \gamma \leq \pi/2$)
 - $\delta_1 \equiv \mu = \text{Ángulo de balance de velocidad}$ ($-\pi \leq \mu < \pi$)
-

Estos tres ángulos se representan en la Figura 1.6 y su interpretación física es la siguiente: el ángulo de asiento de velocidad, γ , es el ángulo existente entre el vector velocidad aerodinámica (eje x_w) y su proyección sobre el plano horizontal; el ángulo de guiñada de velocidad, χ , es el ángulo existente entre la dirección de referencia x_h y la proyección del vector velocidad aerodinámica sobre el plano horizontal; y el ángulo de balance de velocidad, μ , es el ángulo existente entre el eje y_w y la intersección del plano y_w-z_w con el plano horizontal.

Particularizando la matriz L_{ba} , dada por la expresión (1.13), para este caso concreto, se obtiene la matriz de transformación del sistema de ejes horizonte local al sistema de ejes viento, L_{wh} :

$$L_{wh} = \begin{bmatrix} c\gamma c\chi & c\gamma s\chi & -\sin \gamma \\ s\mu s\gamma c\chi - c\mu s\chi & s\mu s\gamma s\chi + c\mu c\chi & s\mu c\gamma \\ c\mu s\gamma c\chi + s\mu s\chi & c\mu s\gamma s\chi - s\mu c\chi & c\mu c\gamma \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

Figura 1.6. Orientación de F_w respecto a F_h .

siendo, al igual que en (1.13) y (1.15) $c\gamma c\chi = \cos \gamma \cos \chi$, $c\gamma s\chi = \cos \gamma \sin \chi$, $s\mu s\gamma c\chi = \sin \mu \sin \gamma \cos \chi$, etc.

1.6. Orientación del sistema de ejes cuerpo respecto al sistema de ejes viento

Para situar el sistema de ejes cuerpo respecto del sistema de ejes viento, se particulariza el desarrollo general efectuado en apartado 1.3 para:

- $F_a \equiv F_w$ y $F_b \equiv F_b$
- $\delta_3 \equiv -\beta$; donde $\beta = \text{Ángulo de resbalamiento}$ ($-\pi \leq \beta < \pi$)
- $\delta_2 \equiv \alpha = \text{Ángulo de ataque}$ ($-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$)
- $\delta_1 = 0$

Por definición, el eje z_w tiene que estar contenido en el plano $x_b - z_b$ (plano de simetría del avión); por ello sólo serán necesarias las dos primeras rotaciones, ya que la tercera sacaría al eje z_w del plano de simetría (Figura 1.7).

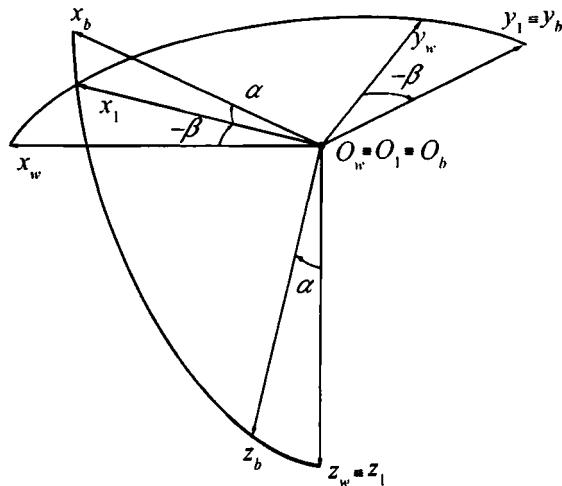


Figura 1.7. Orientación de F_b respecto a F_w .

El ángulo de resbalamiento, β , es el ángulo existente entre el vector velocidad aerodinámica y su proyección sobre el plano de simetría del avión (por convenio suele decirse que un avión tiene un ángulo de resbalamiento positivo cuando la velocidad aerodinámica está situada a la derecha del plano de simetría) y el ángulo de ataque, α , es el ángulo existente entre la proyección del vector velocidad aerodinámica sobre el plano de simetría del avión y el eje x_b . Téngase en cuenta que las acciones aerodinámicas sobre el avión dependerán de estos dos ángulos y que las teorías linealizadas habituales utilizadas para el cálculo de las mismas presuponen que la corriente está adherida y que, por tanto, ambos ángulos son pequeños.

Particularizando la matriz L_{ba} , dada por la expresión (1.13), para este caso concreto, se obtiene la matriz de transformación del sistema de ejes viento al sistema de ejes cuerpo, L_{bw} :

$$L_{bw} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \sin \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

1.7. Problemas 1.1 y 1.2

PROBLEMA 1.1

1º) Determinar $\gamma = f(\theta, \phi, \alpha, \beta)$ y $\theta = f(\gamma, \mu, \alpha, \beta)$.

2º) Determinar $\mu = f(\theta, \phi, \alpha, \beta)$ y $\phi = f(\gamma, \mu, \alpha, \beta)$.

3º) Simplificar γ y μ para los casos:

a) $\beta = 0$

b) $\beta = 0$ y $\phi = 0$

c) Todos los ángulos, excepto ϕ , son pequeños.

4º) Simplificar θ y ϕ para los casos:

a) $\beta = 0$

b) $\beta = 0$ y $\mu = 0$

c) Todos los ángulos, excepto μ , son pequeños.

Solución:

1º) Combinando matrices de transformación en la forma $L_{wh} = L_{wb}L_{bh} = L_{bw}^T L_{bh}$, y eligiendo el término 1-3 de las matrices resultantes se obtiene:

$$\sin\gamma = \sin\theta \cos\alpha \cos\beta - \cos\theta \sin\phi \sin\beta - \cos\theta \cos\phi \sin\alpha \cos\beta$$

Combinando matrices de transformación en la forma $L_{bh} = L_{bw}L_{wh}$, y eligiendo el término 1-3 de las matrices resultantes se obtiene

$$\sin\theta = \sin\gamma \cos\alpha \cos\beta + \cos\gamma \sin\mu \cos\alpha \sin\beta + \cos\gamma \cos\mu \sin\alpha$$

2º) Eligiendo los términos 2-3 y 3-3 del primer producto de matrices del apartado anterior y dividiéndolos entre sí:

$$\tan\mu = \frac{\cot\alpha \sin\beta - \cot\theta \cos\phi \tan\alpha \sin\beta + \cot\theta \sin\phi \csc\alpha \cos\beta}{1 + \cot\theta \cos\phi \cot\alpha}$$

Eligiendo ahora los términos 2-3 y 3-3 del segundo producto de matrices del apartado anterior y dividiéndolos entre sí:

$$\tan\phi = \frac{\cos\gamma \sin\mu \cos\beta - \sin\gamma \sin\beta}{\cos\gamma \cos\mu \cos\alpha - \sin\gamma \sin\alpha \cos\beta - \cos\gamma \sin\mu \sin\alpha \sin\beta}$$

3º)

a) $\beta = 0$: $\sin \gamma = \sin \theta \cos \alpha - \cos \theta \cos \phi \sin \alpha$

$$\tan \mu = \frac{\cos \theta \sin \phi}{\sin \theta \sin \alpha + \cos \theta \cos \phi \cos \alpha}$$

b) $\beta = 0$ y $\phi = 0$:

$$\gamma = \theta - \alpha ; \quad \mu = 0$$

c) Ángulos pequeños (excepto ϕ):

$$\gamma \cong \theta - \beta \sin \phi - \alpha \cos \phi ; \quad \mu \cong \phi$$

4º)

a) $\beta = 0$: $\sin \theta = \sin \gamma \cos \alpha + \cos \gamma \cos \mu \sin \alpha$

$$\tan \phi = \frac{\cos \gamma \sin \mu}{\cos \gamma \cos \mu \cos \alpha - \sin \gamma \sin \alpha}$$

b) $\beta = 0$ y $\mu = 0$:

$$\theta = \gamma + \alpha ; \quad \phi = 0$$

c) Ángulos pequeños (excepto μ):

$$\theta \cong \gamma + \beta \sin \mu + \alpha \cos \mu ; \quad \varphi \cong \mu$$

PROBLEMA 1.2

La circunferencia representada en la figura esquematiza la trayectoria descrita por un avión que está efectuando un viraje en un plano horizontal en presencia de un viento uniforme cuyo módulo V_w es constante y conocido, cuya dirección está contenida en el plano horizontal de la trayectoria y cuyo sentido es el indicado en la figura. El avión efectúa el viraje con su eje x_b tangente a la trayectoria y con velocidad respecto a tierra de módulo V_g constante y conocido.

Se pide:

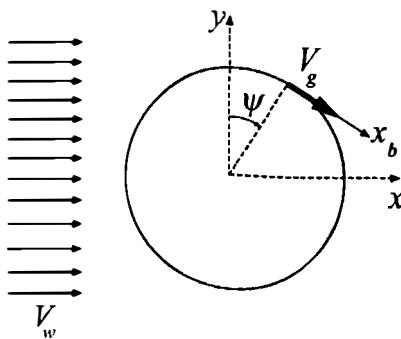
1º) Determinar la función $V/V_g = f(V_w/V_g, \psi)$, donde V representa el módulo de la velocidad aerodinámica del avión y ψ el ángulo azimutal indicado en la figura.

2º) Determinar la función $\beta' = f(V_w/V_g, \psi)$, donde β' representa el ángulo formado por los ejes x_b y x_w .

3º) Determinar la función $\beta = f(V_w/V_g, \psi, \phi)$.

4º) Determinar la función $\alpha = f(V_w/V_g, \psi, \phi)$.

5º) Suponiendo $V_w/V_g = \varepsilon \ll 1$, simplificar las expresiones anteriores despreciando términos de orden superior a ε .



Solución:

1º) Utilizando la composición clásica de velocidades $\vec{V} = \vec{V}_g - \vec{V}_w$, determinando las dos componentes de \vec{V} en los ejes de la figura adjunta y calculando su módulo, se obtiene:

$$\frac{V}{V_g} = \sqrt{1 + \left(\frac{V_w}{V_g}\right)^2 - 2\left(\frac{V_w}{V_g}\right)\cos\psi}$$

2º) Aplicando el teorema del seno al triángulo de velocidades $\vec{V}, \vec{V}_g, \vec{V}_w$ se obtiene:

$$\sin\beta' = \frac{V_w}{V} \sin\psi = \frac{\frac{V_w}{V_g} \sin\psi}{\sqrt{1 + \left(\frac{V_w}{V_g}\right)^2 - 2\left(\frac{V_w}{V_g}\right)\cos\psi}}$$

3º) El sistema de ejes cuerpo se obtiene rotando un ángulo ϕ el sistema de ejes intrínsecos de la trayectoria (tangente, normal y binormal), alrededor

del eje x_b . Por ello, las proyecciones del versor velocidad aerodinámica \vec{u}_w en ambos sistemas son:

$$(\vec{u}_w)_b = L_{bt}(\vec{u}_w)_t$$

$$(\vec{u}_w)_b = \begin{Bmatrix} \cos \beta \cos \alpha \\ \sin \beta \\ \cos \beta \sin \alpha \end{Bmatrix}; \quad L_{bt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}; \quad (\vec{u}_w)_t = \begin{Bmatrix} \cos \beta' \\ \sin \beta' \\ 0 \end{Bmatrix}$$

y la segunda componente de este versor proporciona:

$$\sin \beta = \sin \beta' \cos \phi = \frac{\frac{V_w}{V_g} \sin \psi}{\sqrt{1 + \left(\frac{V_w}{V_g}\right)^2 - 2 \left(\frac{V_w}{V_g}\right) \cos \psi}} \cos \phi$$

4º) Dividiendo las componentes tercera y primera del versor \vec{u}_w obtenido en el apartado anterior, queda:

$$\tan \alpha = -\tan \beta' \sin \phi \text{ (con } \beta' \text{ dado en 2º).}$$

5º) Si $V_w/V_g = \varepsilon \ll 1$, los resultados de los apartados anteriores se simplifican, obteniéndose:

$$\frac{V}{V_g} = 1 - \varepsilon \cos \psi$$

$$\beta' = \varepsilon \sin \psi$$

$$\beta = \varepsilon \sin \psi \cos \phi$$

$$\alpha = -\varepsilon \sin \psi \sin \phi$$

Ecuaciones generales del movimiento 2

2.1. Introducción

El modelo físico-matemático que permite estudiar el movimiento del avión en cierto entorno (atmósfera), está constituido por las ecuaciones generales del movimiento que se desarrollan en este capítulo.

La hipótesis simplificativa fundamental a utilizar consiste en considerar el avión como un **sólido rígido con seis grados de libertad**: tres de traslación de su centro de masas respecto a cierto sistema de referencia (que será el sistema de ejes tierra) y tres de rotación como sólido rígido alrededor de otro sistema de referencia (estas tres rotaciones serán los ángulos de orientación del sistema de ejes cuerpo respecto del sistema de ejes horizonte local).

En el apartado 2.2 se formulan las llamadas ecuaciones de Euler del movimiento del avión, en el apartado 2.3 se proyectan en ejes cuerpo las acciones aerodinámicas, propulsivas y gravitatorias que constituyen las acciones exteriores a introducir en las ecuaciones de Euler, en el apartado 2.4 se demuestra que, en la mayor parte de los problemas prácticos de la Mecánica del Vuelo, el sistema de ejes tierra puede considerarse como inercial, en el apartado 2.5 se formulan las denominadas relaciones cinemáticas angulares (expresiones que relacionan velocidades angulares y derivadas de ángulos), en el apartado 2.6 se desarrollan las relaciones cinemáticas lineales que permitirían determinar la trayectoria del avión y, por último, en el apartado 2.7 se particulariza el modelo físico-matemático general para el vuelo estacionario y para el vuelo estacionario rectilíneo.

2.2. Relaciones dinámicas

El modelo dinámico del movimiento del avión está constituido por dos teoremas fundamentales de la Mecánica Clásica: el teorema de la cantidad de movimiento y el teorema del momento cinético.

El teorema de cantidad de movimiento establece que:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} \quad (2.1)$$

donde:

\vec{F} ≡ Resultante de las fuerzas exteriores.

\vec{V} ≡ Velocidad absoluta del centro de masas del avión (en ejes iniciales).

m ≡ Masa del avión.

t ≡ Tiempo.

Para un avión convencional se cumple que la variación de su masa respecto del tiempo (debido al gasto de combustible) es lo suficientemente lenta como para que pueda despreciarse el término $m\ddot{V}$ con respecto a los otros términos que intervienen en el teorema. Es decir, el teorema de la cantidad de movimiento puede expresarse como:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{V}}{dt} \quad (2.2)$$

El teorema del momento cinético establece que:

$$\vec{G} = \frac{d\vec{h}}{dt} \quad (2.3)$$

$$\vec{h} = I\vec{\omega}$$

donde:

\vec{G} ≡ Resultante de los momentos exteriores alrededor del centro de masas.

\vec{h} ≡ Momento cinético total del avión.

$\vec{\omega}$ ≡ Velocidad angular absoluta del avión.

$I \equiv$ Tensor de inercia del avión.

El tensor de inercia se define mediante:

$$I = \begin{bmatrix} I_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & I_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & I_z \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

donde I_x, I_y, I_z son los momentos de inercia alrededor de los tres ejes del sistema de referencia considerado y J_{xy}, J_{xz}, J_{yz} son los correspondientes productos de inercia. Estos seis parámetros másico-geométricos se determinan mediante las conocidas expresiones:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_m (y^2 + z^2) dm ; \quad I_y = \int_m (x^2 + z^2) dm ; \quad I_z = \int_m (x^2 + y^2) dm \\ J_{xy} &= \int_m xy dm ; \quad J_{xz} = \int_m xz dm ; \quad J_{yz} = \int_m yz dm \end{aligned} \quad (2.5)$$

Los dos teoremas de la cantidad de movimiento y del momento cinético pueden ahora proyectarse en cualquier sistema de referencia. En particular, la utilización de los ejes cuerpo presenta una doble ventaja: en primer lugar la distribución másica del avión respecto a los ejes cuerpos es prácticamente constante y son despreciables los términos donde intervienen las derivadas respecto del tiempo de los momentos y productos de inercia, respecto a otros términos de los desarrollos; y en segundo lugar, como se ha supuesto que el avión tiene plano de simetría (plano $x_b - z_b$), los productos de inercia J_{xy} y J_{yz} son idénticamente nulos.

Según esto, las tres componentes en ejes cuerpo de la fuerza total, el momento total, la velocidad lineal absoluta y la velocidad angular absoluta, se denotan por:

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)^T, \quad \vec{G} = (L, M, N)^T, \quad \vec{V} = (u, v, w)^T, \quad \vec{\omega} = (p, q, r)^T \quad (2.6)$$

Téngase en cuenta ahora que para obtener la derivada respecto del tiempo de un vector en un sistema de referencia inercial, cuando se conoce su derivada en un sistema rotante (por ejemplo, los ejes cuerpo), es preciso añadir a esta última un término que es el producto vectorial del vector velocidad angular del sistema rotante respecto del inercial multiplicado por el propio

vector a derivar. Es decir, los teoremas de la cantidad de movimiento y del momento cinético en un sistema rotatorio pueden escribirse como:

$$\vec{F} = m\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}\right), \quad \vec{G} = \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} + \vec{\omega} \wedge \vec{h} \quad (2.7)$$

y operando con las expresiones anteriores, finalmente se obtiene:

$$\begin{aligned} F_x &= m(\dot{u} - rv + qw) \\ F_y &= m(\dot{v} + ru - pw) \\ F_z &= m(\dot{w} - qu + pv) \\ L &= I_x \dot{p} - J_{xz} \dot{r} + (I_z - I_y) qr - J_{xz} pq \\ M &= I_y \dot{q} - (I_z - I_x) pr + J_{xz} (p^2 - r^2) \\ N &= I_z \dot{r} - J_{xz} \dot{p} - (I_x - I_y) pq + J_{xz} qr \end{aligned} \quad (2.8)$$

El sistema de ecuaciones (2.8) se denomina **Ecuaciones de Euler del Movimiento del Avión.**

Conviene resaltar que, para obtener este sistema, se han despreciado todos los efectos dinámicos asociados a las deformaciones elásticas de la estructura, a los grados de libertad de los subsistemas articulados (timones, flaps, etc.) y a los momentos cinéticos respecto del avión de los subsistemas giratorios (hélices, compresores, etc.). Cuando, por ejemplo, no sean despreciables los momentos cinéticos de los subsistemas giratorios (llamados usualmente términos giroscópicos), se han de introducir en la formulación anterior términos adicionales, tal y como se ilustra en el Problema 13.2.

2.3. Acciones exteriores y términos gravitatorios

No es posible integrar las ecuaciones de Euler del movimiento del avión, para obtener las tres componentes de la velocidad lineal y las tres de la velocidad angular, debido a que no se conocen todavía las fuerzas y momentos exteriores que intervienen en ellas.

Las acciones exteriores se descomponen en propulsivas, aerodinámicas y gravitatorias (subíndices T , A y G respectivamente) según las expresiones:

$$\vec{F} = \vec{F}_T + \vec{F}_A + \vec{F}_G \quad (2.9)$$

$$\vec{G} = \vec{G}_T + \vec{G}_A$$

La fuerza gravitatoria puede expresarse fácilmente en el sistema de ejes horizonte local mediante:

$$(\vec{F}_G)_h = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

donde g es la aceleración de la gravedad. Esta aceleración, en el vuelo atmosférico de aviones, puede tomarse como una constante ($g = g_0 = 9.81 \text{ m/s}^2$), debido a que la altitud de vuelo es muy pequeña comparada con el radio terrestre y por tanto son despreciables las pequeñas variaciones de la aceleración de la gravedad con la altitud producidas al estar sometido el avión a un potencial gravitatorio de módulo (en primera aproximación) inversamente proporcional a la distancia centro de masas del avión-centro de la Tierra.

Para proyectar la fuerza gravitatoria en el sistema de ejes cuerpo, se utiliza la matriz de rotación L_{bh} (ecuación (1.15)):

$$(\vec{F}_G)_b = \begin{Bmatrix} F_{Gx} \\ F_{Gy} \\ F_{Gz} \end{Bmatrix} = L_{bh}(\vec{F}_G)_h = \begin{Bmatrix} -mg \sin \theta \\ mg \cos \theta \sin \phi \\ mg \cos \theta \cos \phi \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

Introduciendo las acciones aerodinámicas, propulsivas y gravitatorias en el sistema de ecuaciones (2.8), se obtiene:

$$\begin{aligned} -mg \sin \theta + F_{Tx} + F_{Ax} &= m(\dot{u} - rv + qw) \\ mg \cos \theta \sin \phi + F_{Ty} + F_{Ay} &= m(\dot{v} + ru - pw) \\ mg \cos \theta \cos \phi + F_{Tz} + F_{Az} &= m(\dot{w} - qu + pv) \\ L_T + L_A &= I_x \dot{p} - J_{xz} \dot{r} + (I_z - I_y) qr - J_{xz} pq \\ M_T + M_A &= I_y \dot{q} - (I_z - I_x) pr + J_{xz} (p^2 - r^2) \\ N_T + N_A &= I_z \dot{r} - J_{xz} \dot{p} - (I_x - I_y) pq + J_{xz} qr \end{aligned} \quad (2.12)$$

Los tres momentos aerodinámicos de balance, cabeceo y guiñada, L_A, M_A, N_A , pueden ser controlados por el piloto mediante las tres superficies aerodinámicas de mando denominadas **alerones**, **timón de profundidad** y **timón de dirección**, cuyas deflexiones se representan, respectivamente, por $\delta_a, \delta_e, \delta_r$. Téngase en cuenta que estas deflexiones intervienen asimismo en las tres componentes de la fuerza aerodinámica (F_{Ax}, F_{Ay}, F_{Az}), por lo que las seis ecuaciones de fuerzas y momentos están acopladas.

En la Figura 2.1 se muestra el criterio de signos para los tres momentos aerodinámicos de balance, cabeceo y guiñada, L_A, M_A, N_A : cada momento es positivo si está dirigido en el sentido positivo de su respectivo eje cuerpo. En cuanto a las tres deflexiones de las superficies de mando, en este libro se tomará el convenio siguiente (ver asimismo la Figura 2.1): una deflexión positiva de alerones genera un momento de balance positivo y, por tanto, el alerón izquierdo baja y el derecho sube; una deflexión positiva de timón de profundidad genera un momento de cabeceo negativo y, por tanto, el timón de profundidad baja; y una deflexión positiva de timón de dirección genera un momento de guiñada positivo y, por tanto, el timón de dirección se deflecta hacia la derecha.

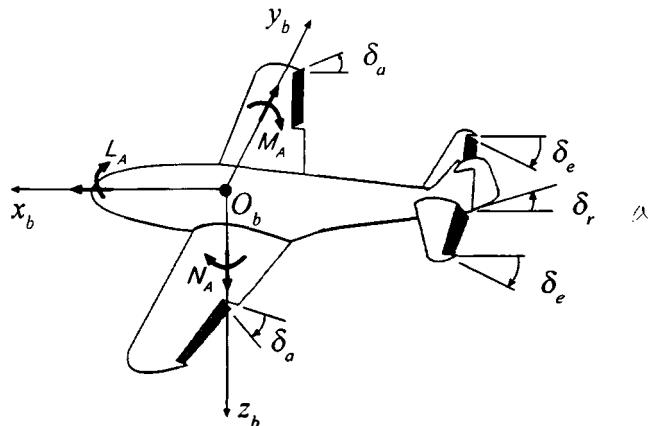


Figura 2.1. Nomenclatura y criterio de signos para los momentos aerodinámicos y las deflexiones de las superficies de mando, en un avión convencional.

2.4. Hipótesis de tierra plana

Ya se comentó en el apartado 1.2.1 del capítulo anterior que, para la Mecánica del Vuelo de aviones, es suficiente considerar como sistema inercial a un sistema geocéntrico ligado a las estrellas fijas (ver Figura 1.1). E incluso este sistema es demasiado “inercial” para la práctica totalidad de los problemas dinámicos que aparecen en el vuelo atmosférico de los aviones convencionales.

Considérese ahora el sistema topocéntrico giratorio de la Figura 1.1, llamado sistema de ejes tierra. Denotando el centro de masas del avión por CG , su aceleración respecto del sistema inercial (aceleración absoluta del avión), \vec{a}_{bI}^{CG} , puede escribirse mediante la conocida composición de aceleraciones de la Mecánica Clásica:

$$\vec{a}_{bI}^{CG} = \vec{a}_{be}^{CG} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}_{O,CG}) + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{be}^{CG} \quad (2.13)$$

en donde \vec{a}_{be}^{CG} representa la aceleración del centro de masas del avión respecto del sistema de ejes tierra, \vec{V}_{be}^{CG} es la velocidad del avión respecto de los ejes tierra, $\vec{r}_{O,CG}$ es el radiovector que une el centro de la Tierra con el centro de masas del avión y $\vec{\Omega}$ es el vector velocidad angular de la Tierra, supuesto constante ($\vec{\Omega} = \vec{\omega}_{eI} = cte$).

Introduciendo en la expresión anterior valores típicos para el vuelo de los aviones (velocidad angular de la Tierra igual a una revolución por día, velocidad de un avión respecto del suelo del orden de 200-300 m/s y distancia de un avión al centro de la Tierra del orden de 6380 km), puede estimarse que tanto la aceleración centrípeta como la aceleración de Coriolis son despreciables. Por todo ello:

$$\vec{a}_{bI}^{CG} \cong \vec{a}_{be}^{CG} \quad (2.14)$$

y será suficiente considerar como sistema inercial el sistema de ejes tierra. Cuando el sistema de ejes tierra se considera inercial, suele decirse que se aplica la “**hipótesis de tierra plana**”.

2.5. Relaciones cinemáticas angulares

La fuerza gravitatoria que aparece en los primeros términos de las ecuaciones escalares de fuerzas (tres primeras ecuaciones del sistema (2.12)) introduce dos nuevas incógnitas en las ecuaciones de Euler: el ángulo de asiento del avión, θ , y el ángulo de balance del avión, ϕ .

A continuación se relacionan las tres componentes de la velocidad angular absoluta del avión con los ángulos (y sus derivadas respecto del tiempo) de orientación del avión respecto del sistema de ejes horizonte local.

Como se ha demostrado en el apartado anterior, los ejes tierra pueden suponerse inerciales y por tanto:

$$\vec{\omega}_{bI} = \vec{\omega}_{be} = \vec{\omega}_{bh} + \vec{\omega}_{he} \quad (2.15)$$

Despreciando velocidad angular de los ejes horizonte local respecto de los ejes tierra, se obtiene:

$$\vec{\omega}_{bI} \cong \vec{\omega}_{bh} = \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} = \dot{\phi}\vec{i}_b + \dot{\theta}\vec{j}_l + \dot{\psi}\vec{k}_h \quad (2.16)$$

Proyectando los versores de la expresión anterior en ejes cuerpo, se obtienen finalmente las tres relaciones cinemáticas angulares directas:

$$\begin{aligned} p &= \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta \\ q &= \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi \\ r &= -\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi \end{aligned} \quad (2.17)$$

De las tres expresiones anteriores pueden despejarse las relaciones cinemáticas angulares inversas, es decir, las derivadas de los ángulos de asiento, balance y guiñada del avión en función de estos ángulos y de las componentes de la velocidad angular:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= p + (q \sin \phi + r \cos \phi) \tan \theta \\ \dot{\theta} &= q \cos \phi - r \sin \phi \\ \dot{\psi} &= (q \sin \phi + r \cos \phi) \sec \theta \end{aligned} \quad (2.18)$$

Supuestos conocidos los términos aerodinámicos y propulsivos que intervienen en el sistema dinámico (2.12) en función de u, v, w, p, q, r (y, eventualmente, de sus derivadas primeras respecto del tiempo), el sistema (2.12) más la primera y segunda ecuaciones de las relaciones cinemáticas angulares inversas (2.18) constituyen un sistema de 8 ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de primer orden, que permitiría obtener en función del tiempo las incógnitas u, v, w, p, q, r, θ y ϕ .

Si por el contrario se sustituyen las tres relaciones cinemáticas angulares directas (2.17) en el sistema dinámico (2.12), se obtiene un sistema

de 6 ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de segundo orden, que permitiría obtener en función del tiempo las incógnitas u, v, w, ψ, θ y ϕ .

2.6. Relaciones cinemáticas lineales y determinación de la trayectoria

Considerando de nuevo al sistema de ejes tierra como sistema inercial y suponiendo además que los ejes tierra son paralelos a los ejes horizonte local, la velocidad absoluta del avión puede expresarse proyectada en ejes tierra como:

$$\vec{V}_e = \begin{Bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{z}_e \end{Bmatrix} = L_{hb} \vec{V}_b = L_{hb} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = L_{bh}^T \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

y utilizando la expresión (1.15) de la matriz de transformación L_{bh} , se obtienen las llamadas relaciones cinemáticas lineales:

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= (\cos \theta \cos \psi)u + (\sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi)v + \\ &\quad + (\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi)w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_e &= (\cos \theta \sin \psi)u + (\sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi)v + \\ &\quad + (\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi)w \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\dot{z}_e = -\sin \theta u + \sin \phi \cos \theta v + \cos \phi \cos \theta w$$

Introduciendo en estas expresiones los valores de u, v, w, ψ, θ y ϕ en función del tiempo, obtenidos al integrar el sistema dinámico y cinemático angular, puede determinarse la ley del movimiento del centro de masas del avión y la ecuación de la trayectoria.

2.7. Ecuaciones del vuelo estacionario

A un vuelo se le denomina estacionario si las tres componentes de la velocidad lineal absoluta y las tres componentes de la velocidad angular absoluta, proyectadas en el sistema de ejes cuerpo, permanecen constantes con el tiempo (es decir, u, v, w, p, q, r son constantes del movimiento).

Para el vuelo estacionario, el sistema dinámico de ecuaciones (2.12) se simplifica en:

$$\begin{aligned}
 -mg \sin \theta + F_{Tx} + F_{Ax} &= m(-rv + qw) \\
 mg \cos \theta \sin \phi + F_{Ty} + F_{Ay} &= m(ru - pw) \\
 mg \cos \theta \cos \phi + F_{Tz} + F_{Az} &= m(-qu + pv) \\
 L_T + L_A &= (I_z - I_y)qr - J_{xz}pq \\
 M_T + M_A &= -(I_z - I_x)pr + J_{xz}(p^2 - r^2) \\
 N_T + N_A &= -(I_x - I_y)pq + J_{xz}qr
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Obsérvese que, con la definición propuesta para el vuelo estacionario, las tres componentes de la velocidad angular han de ser constantes, pero no necesariamente han de ser nulas.

Imponiendo en el sistema de ecuaciones anterior la condición adicional $\bar{\omega}_{bh} = 0$, se obtienen las expresiones a utilizar en el **vuelo estacionario rectilíneo**:

$$\begin{aligned}
 p &= q = r = 0 \\
 \dot{\psi} &= 0 \rightarrow \psi = cte \\
 \dot{\theta} &= 0 \rightarrow \theta = cte \\
 \dot{\phi} &= 0 \rightarrow \phi = cte
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Introduciendo estas relaciones en el sistema dinámico de ecuaciones de fuerzas y momentos del vuelo estacionario, queda un sistema en donde no aparece ningún término inercial:

$$\begin{aligned}
 -mg \sin \theta + F_{Tx} + F_{Ax} &= 0 \\
 mg \cos \theta \sin \phi + F_{Ty} + F_{Ay} &= 0 \\
 mg \cos \theta \cos \phi + F_{Tz} + F_{Az} &= 0 \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_T + L_A &= 0 \\ M_T + M_A &= 0 \\ N_T + N_A &= 0 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Obsérvese que todo vuelo estacionario con $\vec{\omega}_{bh} = 0$ es rectilíneo, pero no todo vuelo rectilíneo estacionario satisface esta relación.

2.8. Problemas 2.1 y 2.2

PROBLEMA 2.1

Con objeto de estudiar el movimiento de una aeronave suponiendo la Tierra esférica y giratoria alrededor de su eje polar, se consideran los sistemas de referencia definidos en la Figura 1.1 y en el apartado 1.2. Son datos del problema:

$R \equiv$ Radio de la Tierra

$\Omega \equiv$ Módulo de la velocidad angular de la Tierra (constante)

$\tau_e \equiv$ Longitud de O_e

$\lambda_e \equiv$ Latitud de O_e

$m \equiv$ Masa de la aeronave

$g_0 \equiv$ Constante de la gravedad (al nivel del mar)

Se pide:

1º) Determinar la matriz de transformación L_{hI} en función del tiempo, t , de la longitud de la aeronave, τ , y de su latitud, λ .

2º) Determinar las tres componentes de la velocidad angular absoluta de la aeronave en ejes cuerpo, p_b, q_b, r_b , en función de $\psi, \theta, \phi, \tau, \lambda, h$ (donde $h = \overline{O_lCG}$) y sus derivadas.

3º) Determinar las tres componentes de la velocidad absoluta de la aeronave en ejes cuerpo, u_b, v_b, w_b , en función de $\psi, \theta, \phi, \tau, \lambda, h$ y sus derivadas.

4º) Plantear el sistema de ecuaciones dinámicas que permiten determinar la movimiento de la aeronave en función de las componentes en ejes cuerpo de las fuerzas y momentos aerodináMICOS y propulsivos, $F_{Ax}, F_{Ay}, F_{Az}, F_{Tx}, F_{Ty}, F_{Tz}, L_A, M_A, N_A, L_T, M_T, N_T$.

Solución:

1º) Combinando matrices de transformación en la forma:

$$L_{hI} = L_{hl}L_{lI}$$

con $L_{hl} = I$ y $L_{lI} = R_2(-(90 + \lambda))R_3(\Omega t + \tau)$ se obtiene:

$$L_{hI} = L_{lI} = \begin{bmatrix} -\sin \lambda \cos(\Omega t + \tau) & -\sin \lambda \cos(\Omega t + \tau) & \cos \lambda \\ -\sin(\Omega t + \tau) & \cos(\Omega t + \tau) & 0 \\ -\cos \lambda \cos(\Omega t + \tau) & -\cos \lambda \sin(\Omega t + \tau) & -\sin \lambda \end{bmatrix}$$

2º) Componiendo velocidades angulares:

$$\vec{\omega}_{bI} = \vec{\omega}_{bh} + \vec{\omega}_{hl} + \vec{\omega}_{le} + \vec{\omega}_{eg} + \vec{\omega}_{gI}$$

donde

$$\vec{\omega}_{bh} = (p, q, r)^T, \text{ dada por las expresiones (2.17)}$$

$$\vec{\omega}_{hl} = \vec{\omega}_{eg} = 0$$

$$\vec{\omega}_{le} = \dot{\tau} \vec{k}_I - \dot{\lambda} \vec{j}_h$$

$$\vec{\omega}_{gI} = \Omega \vec{k}_I$$

Transformando los versores \vec{k}_I y \vec{j}_h a ejes cuerpo mediante las matrices $L_{bI} = L_{bh} L_{hI}$ (L_{bh} viene dada por la ecuación (1.15) y L_{hI} ha sido calculada en el apartado 1º) y L_{bh} , respectivamente, queda:

$$p_b = (\dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta) + (\dot{\tau} + \Omega)(\cos \theta \cos \psi \cos \lambda + \sin \theta \sin \lambda) - \dot{\lambda} \cos \theta \sin \psi$$

$$q_b = (\dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi) + \\ + (\dot{\tau} + \Omega)((\sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi) \cos \lambda - \sin \phi \cos \theta \sin \lambda) - \\ - \dot{\lambda}(\sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi)$$

$$r_b = (-\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi) + \\ + (\dot{\tau} + \Omega)((\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) \cos \lambda - \cos \phi \cos \theta \sin \lambda) - \\ - \dot{\lambda}(\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi)$$

3º) Por definición la velocidad absoluta del avión es: $\vec{V} = d\vec{r}/dt$, donde \vec{r} es el radiovector que une O_I con CG , es decir, $\vec{r} = -(R + h)\vec{k}_h$

Como:

$$\vec{\omega}_{hI} = (\dot{\tau} + \Omega)\vec{k}_I - \dot{\lambda}\vec{j}_h = (\dot{\tau} + \Omega) \cos \lambda \vec{i}_h - \dot{\lambda} \vec{j}_h - (\dot{\tau} + \Omega) \sin \lambda \vec{k}_h$$

operando se obtiene la velocidad absoluta en ejes horizonte local:

$$\vec{V} = -\dot{h}\vec{k}_h + \vec{\omega}_{hI} \wedge \vec{r} = \dot{\lambda}(R + h)\vec{i}_h + (\dot{\tau} + \Omega) \cos \lambda(R + h)\vec{j}_h - \dot{h}\vec{k}_h$$

Por último, para pasar esta velocidad a ejes cuerpo se hace $\vec{V}_b = L_{bh} \vec{V}_h$, obteniéndose:

$$u_b = \cos \theta \cos \psi \dot{\lambda} (R + h) + \cos \theta \sin \psi (\dot{\tau} + \Omega) \cos \lambda (R + h) + \sin \theta \dot{h}$$

$$v_b = (\sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi) \dot{\lambda} (R + h) + (\sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi) (\dot{\tau} + \Omega) \cos \lambda (R + h) - \sin \phi \cos \theta \dot{h}$$

$$w_b = (\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) \dot{\lambda} (R + h) + (\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi) (\dot{\tau} + \Omega) \cos \lambda (R + h) - \cos \phi \cos \theta \dot{h}$$

4º) El sistema de ecuaciones dinámicas (2.12) adquiere ahora la forma:

$$-mg \sin \theta + F_{Tx} + F_{Ax} = m(\dot{u}_b - r_b v_b + q_b w_b)$$

$$mg \cos \theta \sin \phi + F_{Ty} + F_{Ay} = m(\dot{v}_b + r_b u_b - p_b w_b)$$

$$mg \cos \theta \cos \phi + F_{Tz} + F_{Az} = m(\dot{w}_b - q_b u_b + p_b v_b)$$

$$L_T + L_A = I_x \ddot{p}_b - J_{xz} \dot{r}_b + (I_z - I_y) q_b r_b - J_{xz} p_b q_b$$

$$M_T + M_A = I_y \ddot{q}_b - (I_z - I_x) p_b r_b + J_{xz} (p_b^2 - r_b^2)$$

$$N_T + N_A = I_z \ddot{r}_b - J_{xz} \dot{p}_b - (I_x - I_y) p_b q_b + J_{xz} q_b r_b$$

En ellas se introducen las expresiones obtenidas en los apartados 2º y 3º) y una ecuación adicional para la aceleración de la gravedad, g ; es decir:

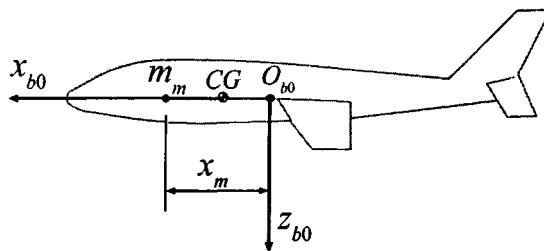
$$p_b, q_b, r_b = f(\psi, \theta, \phi; \tau, \lambda), \quad u_b, v_b, w_b = f(\psi, \theta, \phi; \tau, \lambda, h), \quad g = g_0(R/(R+h))^2$$

Suponiendo ahora datos del problema las características másicas, y suponiendo conocidas las acciones aerodinámicas y propulsivas ($F_{Ax}, F_{Ay}, F_{Az}, F_{Tx}, F_{Ty}, F_{Tz}, L_A, M_A, N_A, L_T, M_T, N_T$), el sistema anterior es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de 2º orden que, con las adecuadas condiciones iniciales, permitiría obtener la evolución con el tiempo de las seis incógnitas del problema ($\psi, \theta, \phi, \tau, \lambda, h$).

PROBLEMA 2.2

Se considera un avión de masa m_a y centro de masas en O_{b0} en una condición inicial de vuelo simétrico, horizontal, rectilíneo, estacionario y con las alas a nivel. Por el interior del avión puede moverse una masa puntual m_m que, en la situación inicial considerada, se encuentra en el punto O_{b0} (por tanto, la masa total del sistema, m , es $m = m_a + m_m$).

Para $t \geq t_0$ la masa puntual se desplaza a lo largo del eje x_{b0} , perteneciente al sistema de ejes cuerpo F_{b0} con origen en O_{b0} , y su posición $x_m(t)$ se supone conocida en función del tiempo (ver figura).



Se supone además que todas las variables lateral-direccionales del problema son nulas y que las características geométricas, aerodinámicas y másicas del sistema son conocidas; en particular el tensor de inercia del sistema en el instante inicial, I_0 , viene dado por:

$$I_0 = \begin{bmatrix} I_{x0} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y0} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z0} \end{bmatrix}$$

Se pide:

1º) Utilizando el sistema de ejes cuerpo instantáneo, F_b (su origen, O_b , es el centro de masas instantáneo del sistema mecánico, y los ejes x_b , y_b , z_b son paralelos a los ejes x_{b0} , y_{b0} , z_{b0} del sistema F_{b0}), plantear las ecuaciones dinámicas de fuerzas según los ejes x_b y z_b , y de momento según el eje y_b , expresándolas en función de F_x , F_z , M , u_{cg} , w_{cg} , q , m , I_{yt} (u_{cg} , w_{cg} son las componentes en ejes cuerpo, F_b , de la velocidad del centro de masas instantáneo, q es la velocidad angular de cabeceo e I_{yt} es el momento de inercia instantáneo alrededor del eje y_b) y, eventualmente, de sus derivadas respecto al tiempo.

2º) Suponiendo además que $m_m/m_a = \epsilon \ll 1$ y despreciando términos de orden superior al primero, expresar las ecuaciones anteriores en función de F_x , F_z , M , u , w , q , m , I_{y0} , x_m , y, eventualmente, de sus derivadas respecto al tiempo, donde u , w representan las componentes de la velocidad del punto O_{b0} .

Solución:

1º) Planteando de nuevo los teoremas de la cantidad de movimiento y del momento cinético:

$$\vec{F} = m \left(\frac{\partial \vec{V}_{cg}}{\partial t} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_{cg} \right)$$

$$\vec{G} = \frac{\partial (I\vec{\omega})}{\partial t} + \vec{\omega} \wedge (I\vec{\omega})$$

con :

$$\vec{F} = (F_x, 0, F_z)^T, \quad \vec{G} = (0, M, 0)^T, \quad \vec{V}_{cg} = (u_{cg}, 0, w_{cg})^T, \quad \vec{\omega} = (0, q, 0)^T$$

$$I_t = \begin{bmatrix} I_{xt} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yt} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zt} \end{bmatrix}$$

queda

$$F_x = m(\dot{u}_{cg} + qw_{cg})$$

$$F_z = m(\dot{w}_{cg} - qu_{cg})$$

$$M = I_{yt}\dot{q} + \dot{I}_{yt}q$$

2º) La nueva posición del centro de masas, x_{cg} , respecto de O_{b0} , es:

$$m_m(x_m - x_{cg}) = m_a x_{cg} \rightarrow x_{cg} = \frac{m_m}{m_a + m_m} x_m$$

Introduciendo en ella el parámetro pequeño ε :

$$x_{cg} = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} x_m = \varepsilon x_m$$

Mediante el teorema de Steiner es posible determinar I_{yt} e \dot{I}_{yt} :

$$I_{yt} = (I_{y0} + m_a x_{cg}^2) + m_m(x_m - x_{cg})^2 = I_{y0} + \varepsilon m_a x_m^2 = I_{y0} + \varepsilon m x_m^2$$

$$\dot{I}_{yt} = 2\varepsilon m_a x_m \dot{x}_m = 2\varepsilon m x_m \dot{x}_m$$

La relación entre las componentes de la velocidad de O_b y O_{b0} viene dada por:

$$\vec{V}_{cg} = \vec{V}_{O_{b0}} + \dot{x}_{cg} \vec{i}_b - qx_{cg} \vec{k}_b \rightarrow \begin{cases} u_{cg} = u + \dot{x}_{cg} = u + \varepsilon \dot{x}_m \rightarrow \\ \rightarrow \dot{u}_{cg} = \dot{u} + \varepsilon \ddot{x}_m \\ w_{cg} = w - qx_{cg} = w - \varepsilon q x_m \rightarrow \\ \rightarrow \dot{w}_{cg} = \dot{w} - \varepsilon \dot{q} x_m - \varepsilon q \dot{x}_m \end{cases}$$

Sustituyendo finalmente en las expresiones obtenidas en el apartado 1º, queda:

$$F_x = m[\dot{u} + qw + \varepsilon(\ddot{x}_m - q^2 x_m)]$$

$$F_z = m[\dot{w} - qu - \varepsilon(\dot{q}x_m + 2q\dot{x}_m)]$$

$$M = I_{y0}\dot{q} + \varepsilon m x_m (x_m \dot{q} + 2\dot{x}_m q)$$

Relaciones básicas para la determinación de actuaciones

3

3.1. Introducción

Como ya se estableció en el Prólogo, las Actuaciones se ocupan del estudio de los grandes movimientos del centro de masas del avión a lo largo de su trayectoria mediante una serie de relaciones dinámicas, básicas y cinemáticas. Asimismo se comentó que, en general, no pueden separarse los problemas de Actuaciones de los de Estabilidad y Control.

El control rotacional del avión se consigue deflectando las tres superficies aerodinámicas primarias denominadas alerones, timón de profundidad y timón de dirección, los ángulos $\delta_a, \delta_e, \delta_r$ respectivamente (ver Figura 2.1). Estas tres deflexiones prácticamente no influyen en las fuerzas y momentos propulsivos que aparecen en el sistema (2.12), pero sí afectan a las fuerzas y momentos aerodinámicos mediante relaciones funcionales de la forma:

$$\begin{aligned}\vec{F}_A &= \vec{F}_A(\delta_a, \delta_e, \delta_r) \\ \vec{G}_A &= \vec{G}_A(\delta_a, \delta_e, \delta_r)\end{aligned}\tag{3.1}$$

Por tanto las seis ecuaciones escalares de fuerzas y momentos del sistema (2.12) deben resolverse simultáneamente.

No obstante, para estudiar los problemas de actuaciones puede suponerse que los efectos de las deflexiones de las superficies de mando sobre las fuerzas aerodinámicas son mucho menores que los correspondientes efectos sobre los momentos aerodinámicos y así las tres deflexiones ($\delta_a, \delta_e, \delta_r$) no aparecerán en el teorema de la cantidad de movimiento.

Mediante esta hipótesis se utilizarán las tres ecuaciones escalares de fuerzas para resolver los problemas de actuaciones y posteriormente se emplearán las tres ecuaciones escalares de momentos para determinar las

deflexiones de mandos necesarias para mantener el avión a lo largo de la trayectoria (problemas de estabilidad y controlabilidad).

A continuación, en el siguiente apartado se plantea el teorema de la cantidad de movimiento (proyectando todas las variables involucradas en el mismo en ejes viento) y se formula la llamada relación básica del avión, en el apartado 3.3 se desarrollan las ecuaciones cinemáticas lineales, en el apartado 3.4 se establecen relaciones funcionales genéricas para las características aerodinámicas del avión y las características propulsivas del grupo motopropulsor y en el apartado 3.5 se efectúa una discusión general del sistema de ecuaciones, determinando los grados de libertad matemáticos del mismo y desarrollando algunos casos particulares de gran interés como son los vuelos simétricos en un plano vertical y en un plano horizontal.

3.2. Relaciones dinámicas de fuerza y relación básica

En el capítulo 2 se han obtenido las seis relaciones dinámicas de fuerzas y momentos (ver sistema (2.8)) proyectando los teoremas de la cantidad de movimiento y del momento cinético en el sistema de ejes cuerpo, ya que en estos ejes el tensor de inercia es prácticamente constante.

Si se quiere analizar ahora de forma separada los problemas de actuaciones de los de estabilidad y control, el hecho de que el tensor de inercia sea constante en los ejes cuerpo no representa ninguna ventaja a la hora de formular las ecuaciones de fuerzas.

Salvo que se indique expresamente lo contrario en el desarrollo de este libro, la atmósfera se considera en calma, es decir, la velocidad del viento respecto del suelo, \vec{V}_w , es nula. Por tanto la velocidad aerodinámica (velocidad del avión respecto del aire), \vec{V} , y la velocidad del avión respecto de tierra, \vec{V}_g , son iguales, y proyectando ambas en ejes viento puede escribirse:

$$\vec{V} = \vec{V}_g = \begin{Bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

donde V representa el módulo de la velocidad aerodinámica.

Así pues resulta más útil proyectar el teorema de la cantidad de movimiento en ejes viento, donde coinciden los vectores velocidad respecto de tierra y velocidad aerodinámica y además están dirigidos según el eje x_w .

Para proyectar el teorema de la cantidad de movimiento, dado por la expresión (2.2), en ejes viento, bien puede realizarse un desarrollo análogo al del apartado 2.2, o bien pueden efectuarse las sustituciones siguientes en las tres primeras relaciones dinámicas escalares del sistema (2.12):

Ángulos de orientación	Velocidades lineales	Velocidades angulares
ψ por χ	u por V	p por p_w
θ por γ	v por 0	q por q_w
ϕ por μ	w por 0	r por r_w

Fuerza aerodinámica (Figura 3.1)	Fuerza propulsiva (Figura 3.2)
F_{Ax} por $-D$	F_{Tx} por $T \cos \varepsilon \cos \nu$
F_{Ay} por $-Q$	F_{Ty} por $T \cos \varepsilon \sin \nu$
F_{Az} por $-L$	F_{Tz} por $-T \sin \varepsilon$

donde: p_w , q_w , r_w son las tres componentes de la velocidad angular de los ejes viento respecto de los ejes iniciales, expresadas en ejes viento; D , Q , L son, respectivamente, la **resistencia**, la **fuerza lateral** y la **sustentación** del avión; T , ε , ν son, respectivamente, el **empuje** y los **ángulos de ataque y resbalamiento del empuje**.

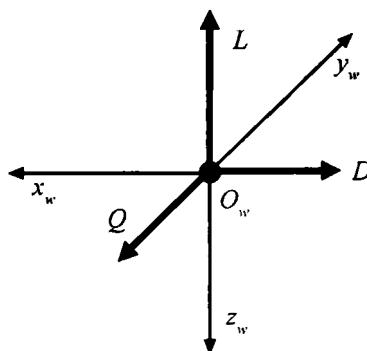


Figura 3.1. Componentes de la fuerza aerodinámica en ejes viento.

Las ecuaciones escalares de fuerza quedarán en la forma:

$$\begin{aligned} -mg \sin \gamma + T \cos \varepsilon \cos \nu - D &= m\dot{V} \\ mg \cos \gamma \sin \mu + T \cos \varepsilon \sin \nu - Q &= mr_w V \\ mg \cos \gamma \cos \mu - T \sin \varepsilon - L &= -mq_w V \end{aligned} \quad (3.3)$$

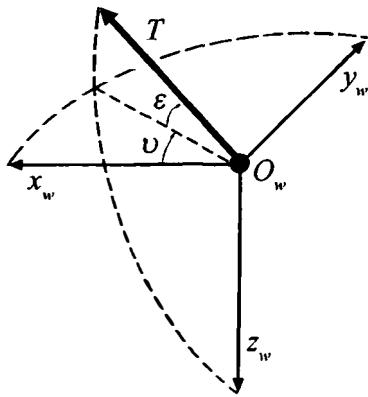


Figura 3.2. Orientación del empuje respecto a los ejes viento.

Efectuando las mismas hipótesis del apartado 2.5 (los ejes tierra son inerciales y los ejes horizonte local prácticamente no giran respecto de los ejes tierra), pueden sustituirse las componentes de la velocidad angular y los ángulos de orientación que aparecen en las relaciones cinemáticas angulares (2.17) por los correspondientes valores de los ejes viento, obteniéndose:

$$\begin{aligned} p_w &= \dot{\mu} - \dot{\chi} \sin \gamma \\ q_w &= \dot{\gamma} \cos \mu + \dot{\chi} \cos \gamma \sin \mu \\ r_w &= -\dot{\gamma} \sin \mu + \dot{\chi} \cos \gamma \cos \mu \end{aligned} \quad (3.4)$$

Teniendo en cuenta estas últimas expresiones, el sistema (3.3) queda:

$$\begin{aligned} T \cos \varepsilon \cos \nu - D - mg \sin \gamma - m \dot{V} &= 0 \\ T \cos \varepsilon \sin \nu - Q + mg \cos \gamma \sin \mu + mV(\dot{\gamma} \sin \mu - \dot{\chi} \cos \gamma \cos \mu) &= 0 \\ -T \sin \varepsilon - L + mg \cos \gamma \cos \mu + mV(\dot{\gamma} \cos \mu + \dot{\chi} \cos \gamma \sin \mu) &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

La masa del avión que aparece en el anterior sistema de ecuaciones, puede descomponerse en una masa fija (invariable durante el vuelo) y en la masa de combustible contenida en los depósitos que varía muy lentamente durante el vuelo, por lo que el teorema de la cantidad de movimiento puede escribirse en la forma simplificada de fuerza igual a masa por aceleración. La variación de la masa del avión con respecto del tiempo o, lo que es lo mismo, la variación de la masa del combustible de los depósitos, está relacionada con el **gasto másico de combustible del motor**, φ , mediante la expresión:

$$\dot{m} + \varphi = 0 \quad (3.6)$$

Obsérvese que φ es una magnitud siempre positiva y que la masa del avión siempre disminuye con el tiempo (excepto para los planeadores, donde $\dot{m} = \varphi = 0$).

3.3. Relaciones cinemáticas lineales

Introduciendo ahora en las expresiones (2.20) los cambios de los ángulos de orientación y de las componentes de la velocidad lineal señalados en el apartado anterior, se obtiene simplemente (ver Figura 3.3):

$$\begin{aligned}\dot{x}_e &= V \cos \gamma \cos \chi \\ \dot{y}_e &= V \cos \gamma \sin \chi \\ \dot{z}_e &= -V \sin \gamma\end{aligned}\tag{3.7}$$

La última relación cinemática también puede escribirse como:

$$V_a = \dot{h} = -\dot{z}_e = V \sin \gamma\tag{3.8}$$

donde V_a es la llamada **velocidad ascensional** del avión y h es la altitud.

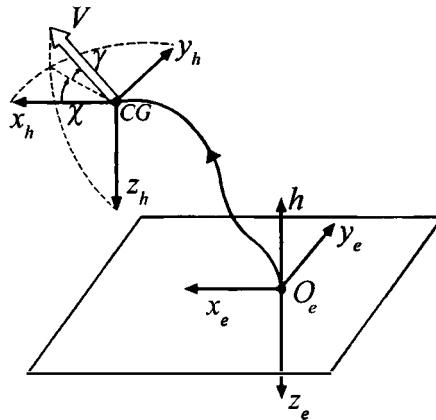


Figura 3.3. Trayectoria del avión respecto de los ejes tierra.

3.4. Características aerodinámicas y propulsivas

El movimiento de traslación del avión viene descrito por tres ecuaciones dinámicas de fuerzas, una ecuación de conservación de la masa y tres

ecuaciones cinemáticas lineales (sistemas (3.5), (3.6) y (3.7)). Contenidas en estas ecuaciones están las cinco variables siguientes, que dependen de las características aerodinámicas del avión y de las características de su grupo motopropulsor: D, Q, L, T, φ . ζ

Si se evalúan estas características aerodinámicas y propulsivas desde un punto de vista casi-estacionario y se hacen diversas hipótesis simplificativas adicionales (por ejemplo, las deflexiones de los mandos no influyen en ellas, la geometría del avión está fijada, etc.), D, Q, L, T, φ serán funciones de $h, V, \alpha, \beta, \varepsilon, \nu, \pi$, donde π es el llamado parámetro de control del empuje (por ejemplo, las revoluciones de un turborreactor). Por tanto:

$$\begin{aligned} D &= D(h, V, \alpha, \beta, \varepsilon, \nu, \pi) \\ Q &= Q(h, V, \alpha, \beta, \varepsilon, \nu, \pi) \\ L &= L(h, V, \alpha, \beta, \varepsilon, \nu, \pi) \\ T &= T(h, V, \alpha, \beta, \varepsilon, \nu, \pi) \\ \varphi &= \varphi(h, V, \alpha, \beta, \varepsilon, \nu, \pi) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Se define **vuelo simétrico** como aquel vuelo que, desde el punto de vista de las actuaciones, respeta la simetría que introduce el plano de simetría del avión (plano x_b-z_b), es decir, aquel vuelo en dónde $\beta = \nu = 0$. Adicionalmente en un vuelo simétrico la fuerza lateral Q es despreciable ($Q \cong 0$).

En un vuelo simétrico, por tanto, D, L, T, φ serán funciones de $h, V, \alpha, \varepsilon, \pi$, y suponiendo además que ε y π no influyen sobre las fuerzas aerodinámicas y que α y ε no influyen sobre las actuaciones del motor, quedarán las siguientes relaciones funcionales:

$$D = D(h, V, \alpha), \quad L = L(h, V, \alpha), \quad T = T(h, V, \pi), \quad \varphi = \varphi(h, V, \pi) \quad (3.10)$$

3.5. Discusión general del sistema y casos particulares

Introduciendo las relaciones funcionales (3.9) en el sistema de ecuaciones diferenciales compuesto por las 7 expresiones (3.5), (3.6) y (3.7), se identifican las siguientes variables:

- 1 variable independiente: t

- 13 variables dependientes o incógnitas, de las cuales 7 son variables derivadas o de estado ($x_e, y_e, h, V, \chi, \gamma, m$), y 6 son variables no derivadas o de control ($\alpha, \beta, \mu, \varepsilon, \nu, \pi$)

Téngase en cuenta que como la aceleración de la gravedad, g , puede considerarse constante (ver apartado 2.3), el peso del avión, W , puede reemplazar a su masa, m , como variable derivada o de estado ($W = mg$).

Por definición, **número de grados de libertad matemáticos de un sistema de ecuaciones diferenciales**, N , es el número de variables dependientes menos el número de ecuaciones. En este caso:

$$N = 13 - 7 = 6$$

Es posible controlar un avión mediante los seis grados de libertad siguientes:

- Ángulo de ataque, ángulo de resbalamiento y ángulo de balance de velocidad (para modificar estos tres grados de libertad, puede pensarse que el piloto dispone de timón de profundidad, timón de dirección y alerones).
- Ángulos de ataque y de resbalamiento del empuje y parámetro de control del empuje.

Por tanto, si un piloto efectúa una maniobra especificada de los mandos, es decir, si $\alpha, \beta, \mu, \varepsilon, \nu, \pi$ son funciones dadas del tiempo, la integración de las siete ecuaciones diferenciales permite obtener las siete variables derivadas o de estado, en función del tiempo y de las constantes de integración. Estas últimas se determinan mediante condiciones iniciales y/o finales adecuadas.

A continuación se presentan una serie de casos particulares de gran interés práctico para la Mecánica del Vuelo.

3.5.1. Motor fijo con respecto al avión

Casi la totalidad de los aviones que existen en el mundo tienen los motores rígidamente unidos a su estructura.

Siendo k_1, k_2, k_3 las tres componentes del vensor empuje, \vec{t} , proyectado en ejes cuerpo (es decir, sus tres cosenos directores), pueden relacionarse con sus tres componentes en ejes viento mediante la matriz L_{bw} dada por la expresión (1.17):

$$\vec{t}_b = \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{Bmatrix} = L_{bw} \vec{t}_w = L_{bw} \begin{Bmatrix} \cos \varepsilon \cos \nu \\ \cos \varepsilon \sin \nu \\ -\sin \varepsilon \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

Operando se obtienen tres relaciones adicionales:

$$\begin{aligned} \cos \varepsilon \cos \alpha \cos(\nu + \beta) + \sin \varepsilon \sin \alpha &= k_1 \\ \cos \varepsilon \sin(\nu + \beta) &= k_2 \\ \cos \varepsilon \sin \alpha \cos(\nu + \beta) - \sin \varepsilon \cos \alpha &= k_3 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Estas tres relaciones adicionales han de cumplir:

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 1 \quad (3.13)$$

y por tanto, de las tres, sólo hay dos relaciones independientes.

El número de grados de libertad matemáticos del sistema para un avión con el motor fijo respecto de la estructura será ahora (las variables dependientes son las mismas pero se dispone de dos ecuaciones más):

$$N = 13 - 9 = 4$$

y es posible controlar el avión mediante el timón de profundidad, el timón de dirección, los alerones y el parámetro de control del empuje.

3.5.2. Vuelo simétrico en un plano vertical

En muchos casos prácticos el centro de masas del avión no sale de un plano vertical especificado por las condiciones iniciales. Tomando el origen de ángulos de guiñada de velocidad en ese plano vertical, es decir, tomando el eje y_e perpendicular al plano vertical, la segunda relación cinemática del sistema (3.7) proporciona:

$$y_e = 0 \rightarrow \dot{y}_e = V \cos \gamma \sin \chi = 0 \rightarrow \chi = 0, \pi \quad (3.14)$$

Además, por tratarse de un vuelo simétrico $\beta = \nu = 0 \rightarrow Q \cong 0$. Introduciendo estos valores particulares de las variables en el sistema general

de ecuaciones cinemáticas, dinámicas y másica (expresiones (3.5), (3.6) y (3.7)), se obtiene (ver Figura 3.4):

$$\begin{aligned}\dot{x}_e &= V \cos \gamma \\ \dot{h} &= V \sin \gamma \\ T \cos \varepsilon - D - mg \sin \gamma - m\dot{V} &= 0 \\ -T \sin \varepsilon - L + mg \cos \gamma + mV\dot{\gamma} &= 0 \\ \dot{m} + \varphi &= 0\end{aligned}\tag{3.15}$$

En la ecuación de fuerzas según el eje z_w , se ha introducido la condición $\mu = 0$ (alas a nivel) que constituye la solución más habitual de la ecuación de fuerzas según el eje y_w (ecuación que ya no es preciso considerar si se emplea esta condición).

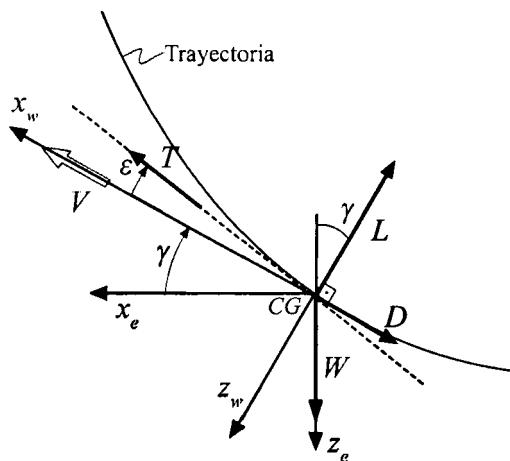


Figura 3.4. Fuerzas en el vuelo simétrico en un plano vertical.

Según todo dicho, el sistema anterior está constituido por:

- 5 ecuaciones
- 8 variables dependientes o incógnitas, que son las 5 variables derivadas o de estado (x_e , h , V , γ , m) y las 3 variables no derivadas o de control (α , ε , π)

El número de grados de libertad matemáticos del sistema será:

$$N = 8 - 5 = 3$$

En el vuelo simétrico dentro de un plano vertical, es posible controlar un avión mediante el timón de profundidad, el ángulo de ataque del empuje y el parámetro de control del empuje.

Si el motor está fijo respecto de la estructura del avión, el sistema de ecuaciones (3.12) proporciona una relación más:

$$\varepsilon - \alpha = cte \quad (3.16)$$

y a su vez esta ecuación hace que disminuya hasta 2 el número de grados de libertad matemáticos del sistema: es posible controlar un avión, con el motor fijo respecto de la estructura, mediante el timón de profundidad y el parámetro de control del empuje.

Si en el sistema de ecuaciones de vuelo simétrico en un plano vertical antes desarrollado se introducen las tres siguientes hipótesis:

- Vuelo casi-estacionario (fuerza de inercia tangencial a la trayectoria despreciable frente a otras fuerzas del problema)
- Vuelo casi-rectilíneo (fuerza de inercia normal a la trayectoria despreciable frente a otras fuerzas del problema)
- Ángulo de ataque del empuje, ε , pequeño (su coseno es entonces prácticamente la unidad y $T \sin \varepsilon$ es mucho menor que L)

el sistema queda reducido a:

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= V \cos \gamma \\ \dot{h} &= V \sin \gamma \\ T - D - mg \sin \gamma &= 0 \\ L - mg \cos \gamma &= 0 \\ \dot{m} + \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

El sistema ahora propuesto sigue teniendo dos grados de libertad matemáticos (por ejemplo, α y π).

3.5.3. Vuelo simétrico en un plano horizontal

Considérese ahora que el centro de masas del avión no sale de un plano horizontal especificado por las condiciones iniciales. La tercera relación cinemática (ecuación (3.8)) proporcionaría:

$$h = cte \rightarrow \dot{h} = V \sin \gamma = 0 \rightarrow \gamma = 0 \quad (3.18)$$

Además, por tratarse de un vuelo simétrico $\beta = \nu = 0 \rightarrow Q \cong 0$. Introduciendo estos valores particulares de las variables en el sistema general de ecuaciones cinemáticas, dinámicas y másica (expresiones (3.5), (3.6) y (3.7)), se obtiene (ver Figura 3.5):

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= V \cos \chi \\ \dot{y}_e &= V \sin \chi \\ T \cos \varepsilon - D - mV &= 0 \\ mg \sin \mu - mV \dot{\chi} \cos \mu &= 0 \\ -T \sin \varepsilon - L + mg \cos \mu + mV \dot{\chi} \sin \mu &= 0 \\ \dot{m} + \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

El sistema anterior está constituido por:

- 6 ecuaciones
- 9 variables dependientes o incógnitas: $x_e, y_e, V, \chi, m, \alpha, \mu, \varepsilon, \pi$

El número de grados de libertad matemáticos del sistema será:

$$N = 9 - 6 = 3$$

En el vuelo simétrico dentro de un plano horizontal, es posible controlar un avión mediante el timón de profundidad, el ángulo de ataque del empuje y el parámetro de control del empuje.

Si el motor está fijo respecto de la estructura del avión, el sistema de ecuaciones (3.12) proporciona $\varepsilon - \alpha = cte$ y a su vez esta ecuación hace que disminuya hasta 2 el número de grados de libertad matemáticos del sistema: es posible controlar un avión con el motor fijo respecto de la estructura mediante el timón de profundidad y el parámetro de control del empuje.

Si en el sistema de ecuaciones de vuelo simétrico en el plano horizontal antes desarrollado se introducen las dos siguientes hipótesis:

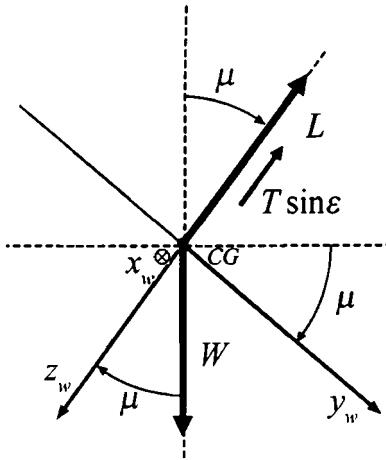


Figura 3.5. Fuerzas en el vuelo simétrico en un plano horizontal (en el plano y_w-z_w).

- Vuelo casi-estacionario (fuerza de inercia tangencial a la trayectoria despreciable frente a otras fuerzas del problema)
- Ángulo de ataque del empuje, ϵ , pequeño (su coseno es entonces prácticamente la unidad y $T \sin \epsilon$ es mucho menor que L)

el sistema queda reducido a:

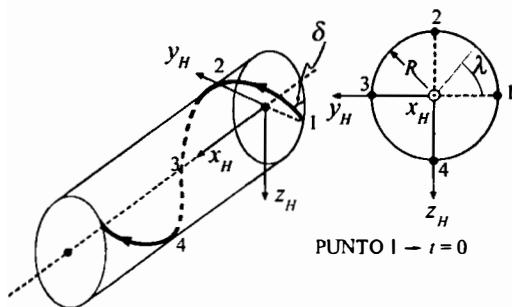
$$\begin{aligned}
 \dot{x}_e &= V \cos \chi \\
 \dot{y}_e &= V \sin \chi \\
 T - D &= 0 \\
 mg \sin \mu - mV \dot{\chi} \cos \mu &= 0 \\
 -L + mg \cos \mu + mV \dot{\chi} \sin \mu &= 0 \\
 \dot{m} + \varphi &= 0
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

El sistema ahora propuesto sigue teniendo dos grados de libertad matemáticos (por ejemplo, α y π).

3.6. Problemas 3.1 y 3.2

PROBLEMA 3.1

Un avión describe la trayectoria acrobática esquematizada en las figuras adjuntas, que consiste en una hélice sobre un cilindro de eje horizontal y de radio R , con ángulo de paso δ y con velocidad V , siendo R, δ, V constantes conocidas del problema (tonel volado ideal).



Suponiendo además que:

1. Se conocen todas las características geométricas y másicas del avión (el peso del avión W es constante y la superficie alar es S).
2. La sustentación puede modelizarse como $L = (1/2)\rho V^2 S C_L$, donde ρ es la densidad del aire y C_L el coeficiente de sustentación, y la resistencia como $D = (1/2)\rho V^2 S C_D = (1/2)\rho V^2 S(C_{D0} + k C_L^2)$, donde C_D es el coeficiente de resistencia (C_{D0} y k son constantes conocidas).
3. El empuje del avión está siempre dirigido según el eje x_w .
4. La atmósfera está en calma y para el margen de altitudes del problema puede considerarse que la densidad, ρ , y la aceleración de la gravedad, g , son constantes conocidas.
5. Los ejes x_H, y_H, z_H representados en las figuras son paralelos a los ejes tierra correspondientes.
6. El vuelo es simétrico.

Se pide:

- 1º) Plantear el sistema de ecuaciones cinemáticas y dinámicas del avión, y determinar el número de grados de libertad matemáticos del mismo.
- 2º) Determinar los ángulos de asiento y guiñada de velocidad en función del tiempo, $\gamma = \gamma(t)$ y $\chi = \chi(t)$.
- 3º) Determinar el empuje del avión, T , el ángulo de balance de velocidad, μ , y el coeficiente de sustentación, C_L , en función del tiempo y, en su caso, de los grados de libertad matemáticos del sistema.

Solución:

- 1º) Introduciendo las condiciones del enunciado en las ecuaciones dinámicas (expresiones (3.5)):

$$T - D - mg \sin \gamma = 0$$

$$mg \cos \gamma \sin \mu + mV(\dot{\gamma} \sin \mu - \dot{\chi} \cos \gamma \cos \mu) = 0$$

$$L - mg \cos \gamma \cos \mu - mV(\dot{\gamma} \cos \mu + \dot{\chi} \cos \gamma \sin \mu) = 0$$

Obsérvese que, mediante las hipótesis 2 y 4, L y D sólo son funciones de C_L .

Tomando el eje x_H como origen de ángulos de guiñada de velocidad, las relaciones cinemáticas lineales son:

$$\dot{x}_H = V \cos \gamma \cos \chi$$

$$\dot{y}_H = V \cos \gamma \sin \chi$$

$$\dot{z}_H = -V \sin \gamma$$

En el apartado 2º) se determinan de forma puramente cinemática $\gamma = \gamma(t)$ y $\chi = \chi(t)$, y por tanto el sistema anterior de 6 ecuaciones (3 dinámicas y 3 cinemáticas lineales) tiene 6 variables dependientes (x_H , y_H , z_H , T , C_L , μ), siendo cero su número de grados de libertad matemáticos ($N = 0$ y todas las incógnitas serán funciones sólo del tiempo).

2º) En la figura adjunta se define el ángulo polar λ , que es una función conocida del tiempo:

$$\lambda = \frac{V \cos \delta}{R} t$$

y mediante este ángulo las relaciones cinemáticas lineales quedan:

$$\dot{x}_H = V \sin \delta$$

$$\dot{y}_H = V \cos \delta \sin \lambda$$

$$\dot{z}_H = -V \cos \delta \cos \lambda$$

Igualando estas expresiones con las relaciones cinemáticas del apartado 1º), se obtiene:

$$\sin \gamma = \cos \delta \cos \lambda = \cos \delta \cos \left(\frac{V \cos \delta}{R} t \right)$$

$$\tan \chi = \frac{\sin \lambda}{\tan \delta} = \cot \delta \sin \left(\frac{V \cos \delta}{R} t \right)$$

3º) Multiplicando la tercera relación dinámica por $\sin \mu$ y la segunda por $\cos \mu$ y sumando, y multiplicando después la tercera relación dinámica por $\cos \mu$ y la segunda por $\sin \mu$ y restando, se obtienen las dos relaciones dinámicas siguientes:

$$L \sin \mu - mV \dot{\chi} \cos \gamma = 0$$

$$L \cos \mu - mg \cos \gamma - mV \dot{\gamma} = 0$$

Estas dos expresiones están proyectadas en dos ejes rotados un ángulo μ respecto de los ejes y_w , z_w y tienen la ventaja, respecto a las correspondientes expresiones en ejes viento, de que en una de ellas aparece $\dot{\chi}$ y en otra $\dot{\gamma}$.

Dividiendo entre sí las dos ecuaciones anteriores, e introduciendo las funciones $\gamma = \gamma(t)$ y $\chi = \chi(t)$ deducidas en el apartado 2º), se obtiene μ :

$$\tan \mu = \frac{V \dot{\chi} \cos \gamma}{g \cos \gamma + V \dot{\gamma}} \rightarrow \mu = \mu(t)$$

Introduciendo ahora este ángulo μ en la primera relación se obtiene C_L :

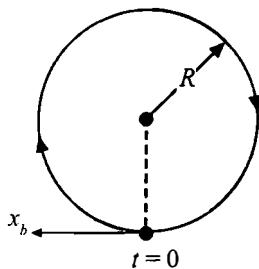
$$C_L = \frac{2W}{\rho V^2 S g} \sqrt{(V \dot{\chi} \cos \gamma)^2 + (g \cos \gamma + V \dot{\gamma})^2} \rightarrow C_L = C_L(t)$$

e introduciendo $\gamma = \gamma(t)$ y $C_L = C_L(t)$ en la ecuación dinámica según el eje x_w , se obtiene el empuje:

$$T = \frac{1}{2} \rho V^2 S (C_{D0} + k C_L^2) + W \sin \gamma \rightarrow T = T(t)$$

PROBLEMA 3.2

El centro de masas de un avión acrobático describe una circunferencia de radio R conocido, contenida en un plano vertical, con velocidad V_0 constante y conocida (“looping” o rizo ideal).



Suponiendo además que:

1. Se conocen todas las características geométricas y másicas del avión (el peso del avión W es constante y la superficie alar es S).
2. La sustentación puede modelizarse como $L = (1/2)\rho V^2 S C_L = (1/2)\rho V^2 S(C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha)$, donde ρ es la densidad del aire, C_L el coeficiente de sustentación y α el ángulo de ataque (siempre pequeño), y la resistencia como $D = (1/2)\rho V^2 S C_D = (1/2)\rho V^2 S(C_{D0} + kC_L^2)$, donde C_D es el coeficiente de resistencia ($C_{L\alpha}$, C_{D0} y k son constantes conocidas).
3. El sistema de ejes cuerpo elegido es tal que eje x_b coincide con la dirección del vector velocidad en el punto más bajo de la trayectoria; el empuje está dirigido siempre según dicho eje x_b ; y $T \sin \alpha$ es despreciable frente a las demás fuerzas del problema.
4. La atmósfera está en calma y para el margen de altitudes del problema puede considerarse que la densidad, ρ , es una constante conocida.
5. El vuelo es simétrico y con las alas a nivel.

Se pide:

- 1º) Determinar el ángulo de ataque del avión, α , el ángulo de asiento del avión, θ , y el ángulo de ataque del empuje, ε , en función del tiempo.

2º) Determinar el empuje, T , en función del tiempo.

3º) Determinar la velocidad de cabeceo del avión, q , en función del tiempo.

4º) ¿El “looping” ideal es un movimiento estacionario?

Solución:

1º) Introduciendo las condiciones del enunciado y las hipótesis simplificativas 2 y 3 en las ecuaciones dinámicas del sistema (3.15), se obtiene:

$$T - D - W \sin \gamma = 0$$

$$L - W \cos \gamma - \frac{W}{g} V_0 \dot{\gamma} = 0$$

Como $\dot{\gamma} = V_0/R \rightarrow \gamma = (V_0/R)t$, la segunda ecuación anterior queda:

$$L = W \cos \gamma + \frac{W}{g} \frac{V_0^2}{R} = W \cos \left(\frac{V_0}{R} t \right) + \frac{W}{g} \frac{V_0^2}{R}$$

$$\frac{1}{2} \rho V_0^2 S (C_{L0} + C_{L\alpha} \alpha) = W \cos \left(\frac{V_0}{R} t \right) + \frac{W}{g} \frac{V_0^2}{R}$$

En el punto más bajo de la trayectoria $t = 0 \rightarrow \alpha = 0$ y, por tanto:

$$\frac{1}{2} \rho V_0^2 S C_{L0} = W + \frac{W}{g} \frac{V_0^2}{R}$$

expresión que permite calcular C_{L0} (no es dato del problema). Restando las dos últimas expresiones y sabiendo que $\alpha = \varepsilon$ (por la hipótesis 3)):

$$\alpha = \varepsilon = \frac{2W}{\rho V_0^2 S C_{L\alpha}} \left[\cos \left(\frac{V_0}{R} t \right) - 1 \right]$$

Sabiendo que $\theta = \gamma + \alpha$:

$$\theta = \frac{V_0}{R} t + \frac{2W}{\rho V_0^2 S C_{L\alpha}} \left[\cos \left(\frac{V_0}{R} t \right) - 1 \right]$$

2º) De la primera relación dinámica se deduce:

$$T = D + W \sin \gamma = \frac{1}{2} \rho V_0^2 S (C_{D0} + k C_L^2) + W \sin \left(\frac{V_0}{R} t \right)$$

y como el coeficiente de sustentación vale

$$C_L = \frac{2W}{\rho V_0^2 S} \left[\cos \left(\frac{V_0}{R} t \right) + \frac{V_0^2}{gR} \right]$$

el empuje queda finalmente:

$$T = \frac{1}{2} \rho V_0^2 S C_{D0} + \frac{2kW^2}{\rho V_0^2 S} \left[\cos \left(\frac{V_0}{R} t \right) + \frac{V_0^2}{gR} \right]^2 + W \sin \left(\frac{V_0}{R} t \right)$$

3º) Mediante la definición de velocidad angular de cabeceo y con los resultados del apartado 1º) queda:

$$q = \dot{\theta} = \dot{\gamma} + \dot{\alpha} = \frac{V_0}{R} \left[1 - \frac{2W}{\rho V_0^2 S C_{L\alpha}} \sin \left(\frac{V_0}{R} t \right) \right]$$

4º) El “looping” ideal no es un movimiento estacionario ya que, ni la componente de la velocidad según el eje z_b (proporcional al ángulo de ataque), ni la velocidad angular de cabeceo, son constantes.

Actuaciones del planeador **4**

4.1. Introducción

Es habitual comenzar el cálculo preliminar de las Actuaciones en Mecánica del Vuelo abordando los planeadores, ya que, por tratarse de aeronaves que carecen de grupo motopropulsor, pueden obtenerse soluciones analíticas cerradas mediante las ecuaciones del vuelo simétrico en un plano vertical, casi-estacionario y casi-rectilíneo, introduciendo en ellas algunas hipótesis simplificativas básicas respecto de sus características aerodinámicas y de las características de la atmósfera.

En el apartado 4.2 se efectúa un resumen de las características aerodinámicas de los aviones en general, considerando que tienen polar parabólica de coeficientes constantes; en el apartado 4.3 se introduce el concepto de resistencia adimensional y se obtienen resultados adimensionales universales de gran elegancia, válidos para todos los aviones existentes dotados de polar parabólica de coeficientes constantes; en el apartado 4.4 se establece una formulación adimensional de las ecuaciones dinámicas y cinemáticas de los planeadores; en el apartado 4.5 se calculan sus actuaciones de punto óptimas, concretamente el ángulo de descenso mínimo y la velocidad de descenso mínima, y se indica como influyen sobre las mismas los parámetros de diseño del planeador; y por último, en el apartado 4.6 se determinan las actuaciones integrales de un planeador (básicamente, el alcance y la autonomía) en función de la ley de pilotaje.

4.2. Fuerzas aerodinámicas y polar parabólica

En este apartado se efectúa un resumen de las características aerodinámicas más importantes de los aviones, desde el punto de vista del cálculo preliminar de Actuaciones en Mecánica del Vuelo.

Se considera que el avión vuela en régimen subsónico incompresible siendo, por tanto, despreciables los efectos del número de Mach, M , sobre todas sus características aerodinámicas. Además, debido a que los aviones vuelan a altos Números de Reynolds (Re del orden de 10^7), los efectos de la viscosidad están confinados en la capa límite alrededor del cuerpo y la región exterior puede considerarse no viscosa.

Ya se estableció en el apartado 3.4 que, en vuelo simétrico ($\beta = \nu = 0$), la fuerza aerodinámica lateral es despreciable ($Q \cong 0$). Si se supone además que la sustentación y la resistencia del avión no dependen de las deflexiones de los mandos (véase el apartado 3.1), éstas pueden escribirse, en primera aproximación, como:

$$L = qSC_L(\alpha) = \frac{1}{2}\rho V^2 SC_L(\alpha) \quad (4.1)$$

$$D = qSC_D(\alpha) = \frac{1}{2}\rho V^2 SC_D(\alpha) \quad (4.2)$$

donde:

C_L , $C_D \equiv$ Coeficiente de sustentación y coeficiente de resistencia, funciones del ángulo de ataque, α .

$q \equiv$ Presión dinámica del aire.

$\rho \equiv$ Densidad atmosférica.

$V \equiv$ Velocidad aerodinámica del avión.

$S \equiv$ Superficie alar.

La densidad del aire, ρ , es una función de la altitud, h , dada por los perfiles que establece la Atmósfera Estándar Internacional (ISA, International Standard Atmosphere) para las distintas capas de nuestra atmósfera. Para el rango de altitudes donde vuelan habitualmente los aviones, la ISA proporciona las expresiones siguientes:

- Troposfera ($0 \leq h < 11000$ m):

$$\rho/\rho_0 = \sigma = (1 - 22.558 \times 10^{-6} \times h(\text{m}))^{4.2559} \quad (4.3)$$

- Tropopausa ($h = 11000$ m):

$$\rho_{11}/\rho_0 = \sigma_{11} = 0.2971 \quad (4.4)$$

■ Parte inferior de la Estratosfera ($11000 \text{ m} < h < 20000 \text{ m}$):

$$\rho/\rho_0 = \sigma = 0.2971 \times \exp[-157.69 \times 10^{-6} \times (h(\text{m}) - 11000)] \quad (4.5)$$

en donde: los subíndices “0” y “11” representan respectivamente el nivel del mar y la tropopausa; y $\rho_0 = 1.225 \text{ kg/m}^3$.

Introduciendo esta variación de ρ con h en las ecuaciones (4.1) y (4.2), quedan justificadas las relaciones funcionales de D y L propuestas en el apartado 3.4 (ver expresiones (3.10)).

La Aerodinámica enseña que el coeficiente de sustentación es una función lineal del ángulo de ataque, salvo para grandes ángulos de ataque positivos y negativos, donde pierde la linealidad y se alcanza la pérdida positiva con un coeficiente de sustentación máximo, $C_{L\max}$, y la pérdida negativa con un coeficiente de sustentación mínimo, $C_{L\min}$.

A la ecuación que relaciona el coeficiente de resistencia con el coeficiente de sustentación se le denomina **polar del avión**. Además puede demostrarse que el coeficiente de resistencia es, básicamente, parabólico respecto al coeficiente de sustentación, por lo que suele decirse que un avión está dotado de **polar parabólica**.

Por tanto, dos expresiones que modelizan razonablemente bien los coeficientes de sustentación y de resistencia de un avión son las siguientes (ver Figuras 4.1 y 4.2):

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha \quad (4.6)$$

$$C_D = C_{D0} + kC_L^2$$

donde C_{L0} es la ordenada en el origen del coeficiente de sustentación y $C_{L\alpha}$ es la pendiente de la curva de sustentación. A C_{D0} y k se les llama coeficientes de la polar, son aproximadamente constantes en régimen subsónico incompresible y pueden estimarse de manera preliminar mediante las expresiones siguientes:

$$C_{D0} = C_f \frac{S_{wet}}{S} \quad (4.7)$$

$$k = \frac{1}{\pi Ae}$$

donde C_f representa un coeficiente de fricción medio (un valor típico del mismo es $C_f = 0.003$), S_{wet} es la superficie mojada del avión, A es el alargamiento del ala ($A = b^2/S$, siendo b la envergadura alar) y e es el llamado Factor de Oswald (para una ala elíptica $e = 1.0$ y para un avión completo $0.6 < e < 1.0$).

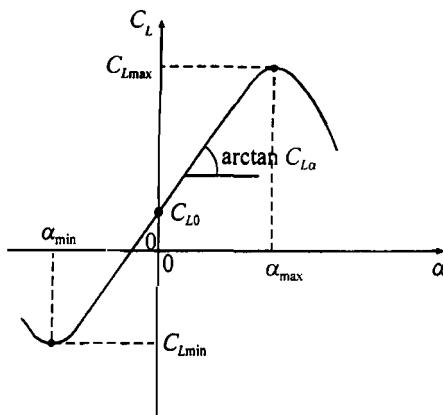


Figura 4.1. Coeficiente de sustentación de un avión en función del ángulo de ataque.

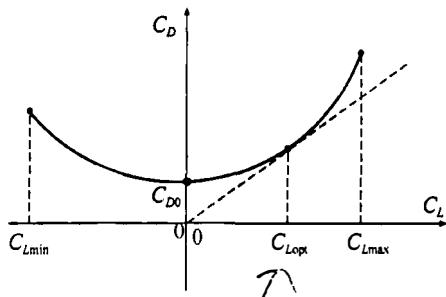


Figura 4.2. Coeficiente de resistencia de un avión en función del coeficiente de sustentación.

La relación entre la sustentación y la resistencia se denomina **eficiencia aerodinámica**, E , o relación sustentación-resistencia (ver Figura 4.3):

$$E = \frac{L}{D} = \frac{C_L}{C_D} = E(\alpha) \quad (4.8)$$

Obsérvese que, debido a las características de las funciones coeficiente de sustentación y coeficiente de resistencia en función del ángulo de ataque, la eficiencia aerodinámica presentará un máximo que se producirá para cierto coeficiente de sustentación óptimo. Si la polar es parabólica puede escribirse:

$$E = \frac{C_L}{C_D} = \frac{C_L}{C_{D0} + C_L^2} \quad (4.9)$$

y la **eficiencia aerodinámica máxima**, E_m , y el **coeficiente de**

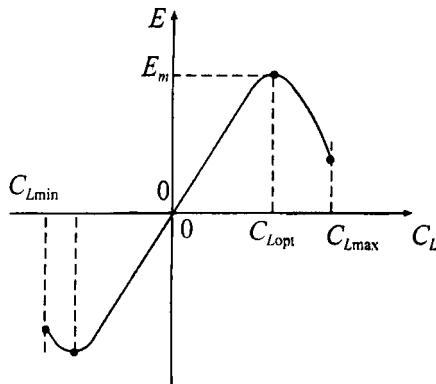


Figura 4.3. Eficiencia aerodinámica en función del coeficiente de sustentación.

sustentación óptimo, $C_{L\text{opt}}$, vendrán dados por:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{E_m}} &= \frac{1}{2\sqrt{C_{D0}k}} \\ \underline{\underline{C_{L\text{opt}}}} &= \sqrt{\frac{C_{D0}}{k}} \end{aligned} \quad (4.10)$$

4.3. Resistencia adimensional

Introduciendo la expresión de la polar parabólica de coeficientes constantes (2^a relación (4.6)), en la ecuación (4.2), queda:

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D0} + \frac{1}{2}\rho V^2 S k C_L^2 \quad (4.11)$$

Ahora puede definirse la resistencia parásita, D_p , y la resistencia inducida, D_i , mediante:

$$D_p = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D0}; \quad D_i = \frac{1}{2}\rho V^2 S k C_L^2 \quad (4.12)$$

$$D = D_p + D_i$$

Si en la expresión anterior de la resistencia inducida se sustituye el coeficiente de sustentación por:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V^2 S} \quad (4.13)$$

la resistencia queda de la forma:

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_{D0} + k \frac{\frac{L^2}{2}}{\frac{1}{2} \rho V^2 S} \quad (4.14)$$

En esta ecuación es posible introducir ahora el concepto de **factor de carga**, n , definido como el cociente entre la sustentación y el peso del avión:

$$n = L/W ; \quad W = mg \quad (4.15)$$

quedando:

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_{D0} + k \frac{n^2 W^2}{\frac{1}{2} \rho V^2 S} \quad (4.16)$$

Obsérvese que la resistencia parásita es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad y la resistencia inducida es inversamente proporcional al cuadrado de la velocidad, y tanto a muy bajas velocidades como a muy altas velocidades la resistencia total tenderá a infinito. Por ello, una velocidad de referencia de gran importancia para la Mecánica del Vuelo es la denominada **velocidad base**, V_B , definida como la velocidad de mínima resistencia para el caso de $L = W$ (o $n = 1$). Para obtenerla se deriva la última expresión (con $n = 1$) respecto de V , quedando:

$$\frac{\partial D}{\partial V} = 0 \rightarrow V_{(D_{mín})_{n=1}} = V_B = \sqrt{\frac{2W}{\rho S}} \sqrt[4]{\frac{k}{C_{D0}}} = \sqrt{\frac{2W}{C_{Lopt} \rho S}} \quad (4.17)$$

$$(D_{mín})_{n=1} = \frac{W}{E_m}$$

Mediante los conceptos anteriormente establecidos es posible definir ahora una resistencia aerodinámica adimensional, \hat{D} , y una velocidad aerodinámica adimensional, \hat{V} , en la forma:

$$\hat{D} = \frac{D}{(D_{mín})_{n=1}} = \frac{DE_m}{W} \quad (4.18)$$

$$\hat{V} = \frac{V}{V_B}$$

Introduciendo estas variables adimensionales en la ecuación (4.16), se obtiene:

$$\hat{D} = \frac{1}{2} \left(\hat{V}^2 + \frac{n^2}{\hat{V}^2} \right) \quad (4.19)$$

La resistencia adimensional dada por la expresión anterior puede descomponerse asimismo en resistencia adimensional parásita y resistencia adimensional inducida (Figuras 4.4 y 4.5):

$$\hat{D}_p = \frac{1}{2} \hat{V}^2 \quad ; \quad \hat{D}_i = \frac{1}{2} \frac{n^2}{\hat{V}^2} \quad (4.20)$$

$$\hat{D} = \hat{D}_p + \hat{D}_i$$

Además la resistencia adimensional presenta un mínimo y una velocidad para la que se produce ese mínimo (funciones del factor de carga), que vienen dados respectivamente por:

$$\hat{D}_{min} = \frac{D_{min} E_m}{W} = \underline{n} \quad (4.21)$$

$$\hat{V}_{\hat{D}_{min}} = \sqrt{\underline{n}} \quad (4.22)$$

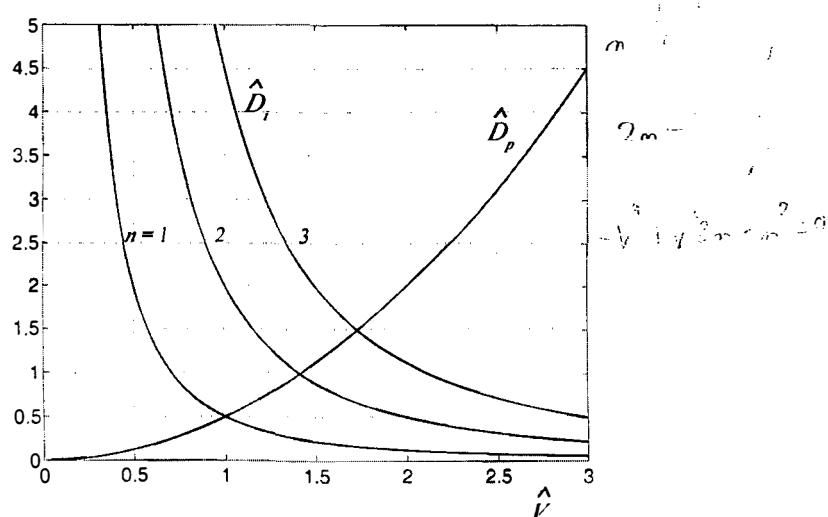


Figura 4.4. Resistencias adimensionales parásita e inducida.

A veces interesa expresar la resistencia adimensional en función del coeficiente de sustentación, en lugar del factor de carga o de la velocidad aerodinámica adimensional. Para ello se expresa el factor de carga como:

$$n = \frac{L}{W} = \frac{\rho S V^2 C_L}{2W} \quad (4.23)$$

y mediante la definición de velocidad aerodinámica adimensional, se obtiene:

$$n = \hat{V}^2 \frac{C_L}{C_{L\text{opt}}} \quad (4.24)$$

Por ejemplo, la resistencia adimensional en función de la velocidad aerodinámica adimensional y del coeficiente de sustentación viene dada por:

$$\hat{D} = \frac{1}{2} \hat{V}^2 \left(1 + \left(\frac{C_L}{C_{L\text{opt}}} \right)^2 \right) \quad (4.25)$$

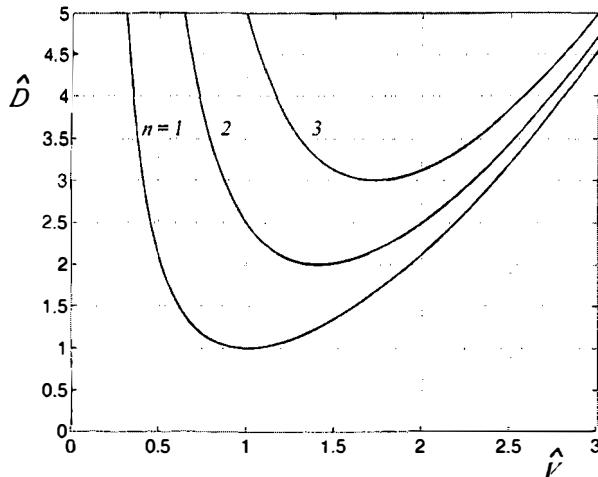


Figura 4.5. Resistencia adimensional.

4.4. Ecuaciones adimensionales

Si en el sistema de ecuaciones válido para vuelo simétrico en un plano vertical, casi-estacionario y casi-rectilíneo (sistema (3.17) del apartado 3.5.2),

se introduce la condición matemática para el planeador:

$$T = \varphi = 0 \quad (4.26)$$

este sistema queda reducido a:

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= V \cos \gamma \\ \dot{h} &= V_a = V \sin \gamma \\ -D - mg \sin \gamma &= 0 \\ L - mg \cos \gamma &= 0 \\ \dot{m} &= 0 \rightarrow m = cte \end{aligned} \quad (4.27)$$

Teniendo en cuenta que ahora la masa del planeador es un dato del problema, el sistema propuesto tiene un grado de libertad matemático (por ejemplo, α).

Dividiendo entre sí las dos relaciones dinámicas del sistema anterior se obtiene:

$$\tan \gamma = -\frac{D}{L} = -\frac{1}{E(\alpha)} \quad (4.28)$$

De las expresiones anteriores se observa que la resultante de las fuerzas aerodinámicas del planeador es vertical y del mismo módulo y sentido contrario que el peso (ver Figura 4.6), que un planeador siempre tiene un ángulo de asiento de velocidad negativo (siempre cae) y que este ángulo de asiento de velocidad será máximo para eficiencia aerodinámica máxima.

Para adimensionalizar las dos relaciones cinemáticas y las dos dinámicas, se dividen las relaciones cinemáticas por la velocidad base, la primera relación dinámica por la resistencia mínima para factor de carga igual a la unidad y la segunda relación dinámica por el peso, apareciendo las variables adimensionales factor de carga, resistencia adimensional y velocidad aerodinámica adimensional definidas en el apartado anterior:

$$\begin{aligned} \hat{x}_e &= \hat{V} \cos \gamma \\ \hat{V}_a &= \hat{V} \sin \gamma \\ -\hat{D} - E_m \sin \gamma &= 0 \\ n - \cos \gamma &= 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Además se ha definido una nueva variable llamada velocidad ascensional adimensional, \hat{V}_a , dividiendo la velocidad ascensional, V_a , por la velocidad base.

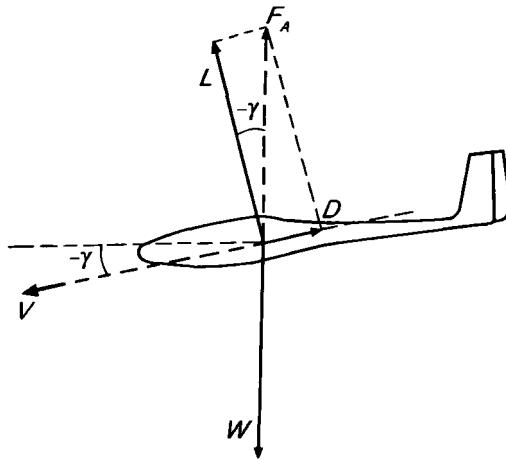


Figura 4.6. Equilibrio de fuerzas en un planeador.

Este sistema se completa con la resistencia adimensional para polar parabólica de coeficientes constantes y con la expresión del factor de carga (ecuaciones (4.19) y (4.24)):

$$\hat{D} = \frac{1}{2} \left(\hat{V}^2 + \frac{n^2}{\hat{V}^2} \right)$$

$$n = \hat{V}^2 \frac{C_L}{C_{L\text{opt}}}$$

El sistema de ecuaciones adimensionales anterior sigue teniendo, obviamente, un grado de libertad matemático.

Como el valor de la eficiencia aerodinámica máxima de un planeador es grande (del orden de 30-40), los planeadores caen con un ángulo de asiento de velocidad de módulo pequeño (ver expresión (4.28)), por lo que en la mayor parte de los casos es posible aplicar la siguiente hipótesis simplificativa:

$$|\gamma| \ll 1 \rightarrow \sin \gamma \cong \gamma, \cos \gamma \cong 1 \quad (4.30)$$

Introduciendo esta hipótesis en el sistema adimensional (4.29) se

obtiene:

$$\begin{aligned}\hat{x}_e &= \hat{V} \\ \hat{V}_a &= \hat{V}\gamma \\ -\hat{D} - E_m\gamma &= 0 \\ n &= 1 \\ \hat{D} &= \frac{1}{2} \left(\hat{V}^2 + \frac{n^2}{\hat{V}^2} \right) \\ n &= \hat{V}^2 \frac{C_L}{C_{L\text{opt}}}\end{aligned}\tag{4.31}$$

Obviamente el factor de carga siempre vale la unidad (aproximadamente), y el sistema anterior puede simplificarse aún más:

$$\begin{aligned}\hat{x}_e &= \hat{V} \\ \hat{V}_a &= \hat{V}\gamma \\ -\hat{D} - E_m\gamma &= 0 \\ \hat{D} &= \frac{1}{2} \left(\hat{V}^2 + \frac{1}{\hat{V}^2} \right) \\ 1 &= \hat{V}^2 \frac{C_L}{C_{L\text{opt}}}\end{aligned}\tag{4.32}$$

En las cinco ecuaciones anteriores se cuentan como variables dependientes \hat{x}_e , \hat{V} , \hat{V}_a , γ , \hat{D} y C_L , por lo que el sistema sigue teniendo un grado de libertad matemático.

4.5. Actuaciones de punto

Operando con el sistema anterior se obtienen el ángulo de asiento de velocidad y la velocidad ascensional adimensional en función del grado de libertad elegido (la velocidad aerodinámica adimensional):

$$\gamma = \gamma(\hat{V}) = -\frac{1}{2E_m} \left(\hat{V}^2 + \frac{1}{\hat{V}^2} \right)\tag{4.33}$$

$$\hat{V}_a = \hat{V}_a(\hat{V}) = -\frac{1}{2E_m} \left(\hat{V}^3 + \frac{1}{\hat{V}} \right)\tag{4.34}$$

Como ya se ha comentado, para el caso de los planeadores ambas variables son siempre negativas, por lo que es habitual cambiarles el signo y

hablar de ángulo de descenso, γ_d , y de velocidad de descenso, V_d . Según esto, los ángulos de descenso y las velocidades de descenso adimensionales son:

$$\gamma_d = -\gamma = \frac{1}{2E_m} \left(\hat{V}^2 + \frac{1}{\hat{V}^2} \right) \quad (4.35)$$

$$\hat{V}_d = -\hat{V}_a = \frac{1}{2E_m} \left(\hat{V}^3 + \frac{1}{\hat{V}} \right) \quad (4.36)$$

Para obtener la condición de **ángulo de descenso mínimo** se deriva la expresión (4.35) con respecto a la velocidad adimensional y se iguala a cero, obteniéndose:

$$\begin{aligned} \hat{V}_{\gamma_{d\min}} &= 1 \\ \gamma_{d\min} &= \frac{1}{E_m} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Puede observarse que la velocidad a la que hay que volar para conseguir un ángulo de descenso mínimo es la de mínima resistencia aerodinámica (con $n = 1$). Además, introduciendo el valor de la eficiencia aerodinámica máxima en la última ecuación queda:

$$\gamma_{d\min} = 2\sqrt{C_{D0}k} = 2\sqrt{\frac{C_{D0}}{\pi Ae}} = 1.128 \frac{1}{e^{1/2}} \frac{C_{D0}^{1/2}}{A^{1/2}} \quad (4.38)$$

Para conseguir una disminución del ángulo de descenso mínimo de un planeador es preciso diseñarlo con un coeficiente de resistencia parásita lo menor posible y un alargamiento lo mayor posible.

Para obtener la condición de **velocidad de descenso mínima** se deriva \hat{V}_d (ecuación (4.36)) con respecto a la velocidad adimensional y se iguala a cero, obteniéndose:

$$\begin{aligned} \hat{V}_{\hat{V}_{d\min}} &= \frac{1}{3^{1/4}} = 0.760 \\ \hat{V}_{d\min} &= \frac{2}{3^{3/4}} \frac{1}{E_m} = 0.877 \frac{1}{E_m} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Puede observarse que la velocidad a la que hay que volar para conseguir una velocidad de descenso mínimo es un 24% menor que la de mínimo ángulo

de descenso. Además, introduciendo los valores de la eficiencia aerodinámica máxima y de la velocidad base en la última expresión queda:

$$V_{d\min} = \frac{4}{3^{3/4}} \sqrt{C_{D0} k} \sqrt{\frac{2W}{\rho S}} \sqrt[4]{\frac{k}{C_{D0}}} = 1.052 \frac{(W/S)^{1/2}}{\rho^{1/2} e^{3/4}} \frac{C_{D0}^{1/4}}{A^{3/4}} \quad (4.40)$$

Para conseguir disminuir la velocidad de descenso mínima de un planeador es preciso diseñarlo con un coeficiente de resistencia parásita lo menor posible y un alargamiento lo mayor posible (como en el caso del ángulo de descenso), pero además conviene reducir la carga alar, W/S , y disminuir la altitud de vuelo (la densidad del aire es mayor cuanto más cerca del suelo esté el planeador).

La Figura 4.7 representa la curva de eficiencia aerodinámica en función del coeficiente de sustentación (o lo que es lo mismo, del ángulo de ataque). En el punto A el planeador caería con el mínimo ángulo de descenso y en el punto B con la mínima velocidad de descenso, pero la velocidad de vuelo en el punto A sería mayor que en el punto B. Para los puntos C y D el planeador caería con el mismo ángulo de descenso, pero en C la velocidad de vuelo es mayor que en D.

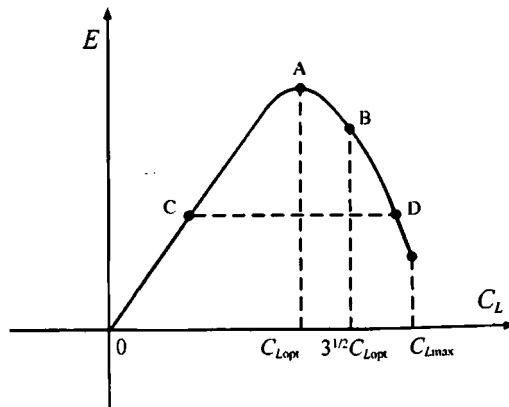


Figura 4.7. Condiciones de ángulo de descenso mínimo (punto A) y velocidad de descenso mínima (punto B).

4.6. Actuaciones integrales

Ahora se determinan el **alcance** (distancia horizontal recorrida) y la **autonomía** (tiempo empleado) por un planeador desde que se le suelta a una altitud inicial h_i hasta que llega a una altitud final h_f (obviamente $h_i > h_f$) en las mismas condiciones de vuelo para las que se ha hecho el análisis de actuaciones de punto, esto es, vuelo simétrico en un plano vertical casi-rectilíneo y casi-estacionario. Tomando h como variable independiente, en lugar del tiempo, mediante las relaciones cinemáticas lineales es posible plantear las dos ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned}\frac{dx_e}{dh} &= \frac{1}{\gamma} \\ \frac{dt}{dh} &= \frac{1}{V_B \hat{V} \gamma}\end{aligned}\tag{4.41}$$

En la última ecuación, V_B representa la velocidad base expresada mediante:

$$V_B = \sqrt{\frac{2W}{\rho S}} \sqrt[4]{\frac{k}{C_{D0}}} = \sqrt{\frac{2W}{\rho_0 S}} \sqrt[4]{\frac{k}{C_{D0}}} \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} = \frac{V_{B0}}{\sqrt{\sigma}}\tag{4.42}$$

donde V_{B0} es la velocidad base al nivel del mar y σ la densidad adimensional del aire, función de la altitud de vuelo (ver ecuaciones (4.3), (4.4) y (4.5)).

Sustituyendo en el sistema (4.41) la expresión de γ en función de la velocidad adimensional (ecuación (4.33)) y la ecuación (4.42), queda:

$$\begin{aligned}\frac{dx_e}{dh} &= -2E_m \frac{\hat{V}^2}{\hat{V}^4 + 1} \\ \frac{dt}{dh} &= -2E_m \frac{\sqrt{\sigma}}{V_{B0}} \frac{\hat{V}}{\hat{V}^4 + 1}\end{aligned}\tag{4.43}$$

Integrando las anteriores expresiones se obtiene:

$$\begin{aligned}x_e &= \int_{h_i}^{h_f} -2E_m \frac{\hat{V}^2}{\hat{V}^4 + 1} dh \\ t &= \int_{h_i}^{h_f} -2E_m \frac{\sqrt{\sigma}}{V_{B0}} \frac{\hat{V}}{\hat{V}^4 + 1} dh\end{aligned}\tag{4.44}$$

Para calcular estas integrales es preciso imponer una **ley del piloteaje matemática** que permita fijar el grado de libertad matemático del problema; es decir, es preciso imponer una ley del tipo:

$$\hat{V} = \hat{V}(\sigma) = \hat{V}(h) \quad (4.45)$$

A continuación se desarrollan dos casos particulares de gran interés: el planeo con ángulo de ataque constante y el planeo con velocidad constante.

4.6.1. Planeo con ángulo de ataque constante

Si el ángulo de ataque es constante y siempre igual a su valor inicial puede establecerse que:

$$\alpha = \alpha_i = cte \rightarrow C_L = C_{Li} = cte \rightarrow \hat{V} = \hat{V}_i = cte \quad (4.46)$$

y por tanto el alcance del planeador viene dado por:

$$x_e = 2E_m \frac{\hat{V}_i^2}{\hat{V}_i^4 + 1} (h_i - h_f) \quad (4.47)$$

Obsérvese que para maximizar la distancia horizontal recorrida por el planeador es preciso volar a $\hat{V}_i = 1$, obteniéndose:

$$x_{e \text{ máx}} = E_m(h_i - h_f) = E_m \Delta h \quad (4.48)$$

La eficiencia aerodinámica representa la distancia horizontal máxima que es capaz de recorrer un planeador, expresada en metros, por cada metro descendido, y por ello a la eficiencia aerodinámica máxima también se le suele denominar relación de planeo.

La autonomía del planeador quedará como:

$$t = \frac{2E_m}{V_{B0}} \frac{\hat{V}_i}{\hat{V}_i^4 + 1} \int_{h_f}^{h_i} \sqrt{\sigma} dh \quad (4.49)$$

Obsérvese que para maximizar la autonomía del planeador es preciso volar a $\hat{V}_i = 1/3^{1/4}$, quedando:

$$t_{\text{máx}} = 1.140 \frac{E_m}{V_{B0}} \int_{h_f}^{h_i} \sqrt{\sigma} dh \quad (4.50)$$

Por último puede introducirse aquí la expresión de la densidad adimensional en función de la altitud recogida en el apartado 4.2 y calcular la integral inmediata resultante.

4.6.2. Planeo con velocidad constante

La ley de pilotaje matemática será ahora:

$$V = V_i = cte \rightarrow \hat{V} = \frac{V}{V_B} = \frac{V_i}{V_{B0}} \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma_i}} = \hat{V}_i \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma_i}} = C \sqrt{\sigma} \quad (4.51)$$

donde V_{B0} representa la velocidad base en el instante inicial del vuelo, \hat{V}_i la velocidad adimensional con la que comienza el vuelo y $C = \hat{V}_i / \sqrt{\sigma_i}$ una constante útil para la integración. Introduciendo esta ley en las expresiones (4.44) se obtiene:

$$x_e = 2E_m C^2 \int_{h_f}^{h_i} \frac{\sigma}{C^4 \sigma^2 + 1} dh \quad (4.52)$$

$$t = \frac{2E_m}{V_{B0}} C \int_{h_f}^{h_i} \frac{\sigma}{C^4 \sigma^2 + 1} dh$$

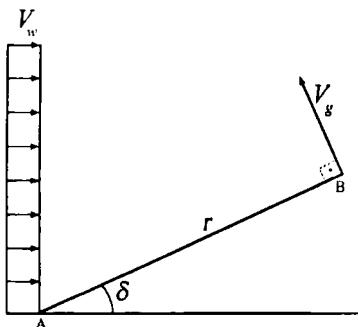
Obsérvese que, como no podía ser de otra forma por tratarse de un vuelo a velocidad constante, $x_e = CV_{B0}t = V_i t$.

Por último puede introducirse aquí la expresión de la densidad adimensional en función de la altitud recogida en el apartado 4.2 y calcular las integrales resultantes.

4.7. Problemas 4.1 y 4.2

PROBLEMA 4.1

La figura representa un planeador unido al suelo por su centro de masas mediante un cable AB de longitud r constante y conocida. El planeador vuela simétricamente con las alas a nivel en un plano vertical en presencia de un viento de cara de velocidad V_w constante y conocida.



Suponiendo además que las características aerodinámicas, geométricas y másicas del planeador son conocidas (en concreto, su polar es parabólica de coeficientes constantes), que el cable no tiene peso y siempre está tenso, que las acciones aerodinámicas sobre el mismo son despreciables y que el movimiento tiene lugar a C_L constante y conocido, se pide:

1º) Plantear las ecuaciones dinámicas del movimiento del centro de masas del planeador en el sistema de ejes intrínsecos de la trayectoria y determinar el número de grados de libertad matemáticos del sistema.

2º) Determinar el ángulo polar, δ_{eq} , para que el planeador no se mueva respecto del suelo.

3º) Determinar el valor que tendría que tener C_L para maximizar el ángulo de equilibrio obtenido en el apartado anterior y determinar su límite cuando:

$$\frac{2W}{\rho V_w^2 S} \rightarrow 0$$

Solución:

1º) El planeador describe, respecto del suelo, una circunferencia con el módulo de la velocidad respecto del suelo, V_g , sólo dependiente del ángulo

polar, δ :

$$V_g = r\dot{\delta}$$

Utilizando la combinación clásica de velocidades $\vec{V} = \vec{V}_g - \vec{V}_w$, se determinan en primer lugar las dos componentes de la velocidad aerodinámica \vec{V} según la tangente y la normal a la trayectoria, V_t y V_n , y a partir de ellas el módulo de la velocidad aerodinámica, V , y el ángulo, λ , que forma la velocidad aerodinámica con el cable:

$$\left. \begin{array}{l} V_t = V_g + V_w \sin \delta \\ V_n = V_w \cos \delta \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V = \sqrt{V_w^2 + V_g^2 + 2V_w V_g \sin \delta} \rightarrow V = V(\delta, \dot{\delta}) \\ \tan \lambda = \tan \delta + \frac{V_g}{V_w \cos \delta} \rightarrow \lambda = \lambda(\delta, \dot{\delta}) \end{array} \right.$$

Planteando el equilibrio de fuerzas según la tangente y la normal a la trayectoria:

$$\begin{aligned} L \cos \lambda - D \sin \lambda - W \cos \delta &= \frac{W}{g} r \ddot{\delta} \\ -L \sin \lambda - D \cos \lambda + W \sin \delta + T_c &= \frac{W}{g} r \dot{\delta}^2 \end{aligned}$$

donde T_c representa la tensión del cable. Introduciendo las características aerodinámicas:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho V^2 S C_L \cos \lambda - \frac{1}{2} \rho V^2 S (C_{D0} + k C_L^2) \sin \lambda - W \cos \delta - \frac{W}{g} r \ddot{\delta} &= 0 \\ -\frac{1}{2} \rho V^2 S C_L \sin \lambda - \frac{1}{2} \rho V^2 S (C_{D0} + k C_L^2) \cos \lambda + W \sin \delta + T_c - \frac{W}{g} r \dot{\delta}^2 &= 0 \end{aligned}$$

Si en este sistema de dos ecuaciones se introducen las expresiones deducidas para V y λ , podrían determinarse T_c y δ en función del tiempo (el sistema tiene cero grados de libertad matemáticos).

2º) En el equilibrio se cumple que $\dot{\delta} = \ddot{\delta} = 0$ y las ecuaciones del apartado anterior se simplifican:

$$V_g = 0 \quad , \quad V = V_w \quad , \quad \lambda = \delta_{eq}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho V_w^2 S C_L \cos \delta_{eq} - \frac{1}{2} \rho V_w^2 S (C_{D0} + k C_L^2) \sin \delta_{eq} - W \cos \delta_{eq} &= 0 \\ -\frac{1}{2} \rho V_w^2 S C_L \sin \delta_{eq} - \frac{1}{2} \rho V_w^2 S (C_{D0} + k C_L^2) \cos \delta_{eq} + W \sin \delta_{eq} + T_c &= 0 \end{aligned}$$

La ecuación dinámica según la tangente proporciona directamente el ángulo buscado:

$$\tan \delta_{eq} = \frac{C_L - \frac{2W}{\rho V_w^2 S}}{C_{D0} + k C_L^2}$$

3º) Derivando la última expresión respecto del coeficiente de sustentación se obtiene el valor de este (C_{Lopt}) que maximiza el ángulo de equilibrio:

$$C_{Lopt} = \frac{2W}{\rho V_w^2 S} + \sqrt{\left(\frac{2W}{\rho V_w^2 S}\right)^2 + \frac{C_{D0}}{k}}$$

Si se desprecia $\frac{2W}{\rho V_w^2 S}$, se obtiene:

$$C_{Lopt} = \sqrt{\frac{C_{D0}}{k}}, \quad \tan(\delta_{eq})_{\max} = E_m = \frac{1}{2\sqrt{C_{D0}k}}$$

PROBLEMA 4.2

Un planeador efectúa un vuelo simétrico en un plano vertical con las alas a nivel desde la vertical de un punto A hasta la vertical de un punto B, en presencia de un viento horizontal de cara de módulo V_w constante y conocido, y vuelve desde la vertical de B hasta la de A en presencia del mismo viento, pero ahora de cola. Todo el vuelo (ida y vuelta) lo realiza a velocidad aerodinámica, V , constante y a ángulo de asiento de velocidad aerodinámica constante.

Suponiendo además que:

1. Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del planeador necesarias para la resolución del problema (por ejemplo, el peso W , la superficie alar S , los coeficientes constantes de la polar parabólica, etc.).
2. La altura h_A es lo suficientemente grande como para que el planeador no choque contra el suelo; la distancia d entre los puntos A y B es conocida.
3. La transición efectuada en la vertical de B para dar la vuelta es despreciable.
4. Los módulos de los ángulos de asiento de velocidad aerodinámica y de velocidad respecto a tierra son pequeños; $V > V_w$.

5. ρ y g son constantes conocidas dentro del intervalo de alturas considerado.

Se pide:

1º) Determinar la velocidad aerodinámica, V_1 , y el coeficiente de sustentación, C_{L1} , que minimizan la altura total que desciende el planeador desde que sale de la vertical de A hasta que regresa a esa misma vertical. Determinar asimismo esa altura total descendida mínima, $\Delta h_{T\min}$, y el tiempo total que emplea el planeador en ir y volver, Δt_T .

2º) Discutir la influencia sobre la velocidad aerodinámica y sobre la altura descendida, obtenidas en el apartado anterior, de V_w , W/S y ρ .

Solución:

1º) Para el tramo AB, las dos ecuaciones cinemáticas (donde el subíndice “g” indica magnitudes respecto de tierra) y las dos ecuaciones dinámicas (con los vectores velocidad aerodinámica y velocidad respecto de tierra constantes) son:

$$\begin{aligned}\frac{dx_e}{dt} &= V_g \cos \gamma_g = V \cos \gamma_d - V_w \cong V - V_w \\ \frac{dh}{dt} &= V_g \sin \gamma_g = -V \sin \gamma_d \cong -V \gamma_d \\ -D + W \sin \gamma_d &= 0 \rightarrow -D + W \gamma_d = 0 \\ -L + W \cos \gamma_d &= 0 \rightarrow L = W\end{aligned}$$

Para obtener estas expresiones se ha tenido en cuenta la hipótesis 4. De las expresiones tercera y cuarta anteriores se obtiene:

$$\gamma_d = \frac{1}{2E_m} \left(\hat{V}^2 + \frac{1}{\hat{V}^2} \right)$$

y de las dos primeras expresiones se obtiene:

$$\frac{dx_e}{dh} = -\frac{\hat{V} - \hat{V}_w}{\hat{V} \gamma_d}, \text{ con } \hat{V}_w = V_w/V_B.$$

Combinando las dos últimas expresiones, se obtiene la altura total descendida en el tramo AB, Δh_{AB} , en función del grado de libertad \hat{V} :

$$\Delta h_{AB} = \frac{d}{2E_m} \frac{\hat{V}^4 + 1}{\hat{V}(\hat{V} - \hat{V}_w)}$$

Para el tramo BA, se repiten todos los pasos anteriores:

$$\begin{aligned}\frac{dx_e}{dt} &= V_g \cos \gamma_g = V \cos \gamma_d + V_w \cong V + V_w \\ \frac{dh}{dt} &= V_g \sin \gamma_g = -V \sin \gamma_d \cong -V \gamma_d \\ -D + W \sin \gamma_d &= 0 \rightarrow -D + W \gamma_d = 0 \\ -L + W \cos \gamma_d &= 0 \rightarrow L = W \\ \gamma_d &= \frac{1}{2E_m} \left(\hat{V}^2 + \frac{1}{\hat{V}^2} \right) \\ \frac{dx_e}{dh} &= -\frac{\hat{V} + \hat{V}_w}{\hat{V} \gamma_d}\end{aligned}$$

quedando para la altura total descendida en este tramo, Δh_{BA} :

$$\Delta h_{BA} = \frac{d}{2E_m} \frac{\hat{V}^4 + 1}{\hat{V}(\hat{V} + \hat{V}_w)}$$

Sumando las dos alturas descendidas en los dos tramos, se obtiene finalmente:

$$\Delta h_T = \Delta h_{AB} + \Delta h_{BA} = \frac{d}{E_m} \frac{\hat{V}^4 + 1}{\hat{V}^2 - \hat{V}_w^2}$$

Derivando esta expresión respecto de \hat{V} e igualándola a cero, se obtiene:

$$\hat{V}_1^4 - 2\hat{V}_w^2\hat{V}_1^2 - 1 = 0 \rightarrow \hat{V}_1 = \sqrt{\hat{V}_w^2 + \sqrt{\hat{V}_w^4 + 1}}$$

Finalmente, recuperando las dimensiones:

$$V_1 = \sqrt{V_w^2 + \sqrt{V_w^4 + V_B^4}} = \sqrt{V_w^2 + \sqrt{V_w^4 + \frac{4(W/S)^2 k}{\rho^2 C_{D0}}}}$$

Con esta velocidad, el coeficiente de sustentación y la altura total descendida mínima son:

$$\begin{aligned}\frac{C_{L1}}{C_{L\text{opt}}} &= \frac{1}{\hat{V}_1^2} = \sqrt{\hat{V}_w^4 + 1} - \hat{V}_w^2 \\ \Delta h_{T \text{mín}} &= \frac{2d}{E_m} \left(\hat{V}_w^2 + \sqrt{\hat{V}_w^4 + 1} \right) = \frac{2d}{E_m} \left(\frac{V_w^2}{V_B^2} + \sqrt{\frac{V_w^4}{V_B^4} + 1} \right)\end{aligned}$$

En cuanto al tiempo total empleado por el planeador en ir y volver:

$$\begin{aligned}\Delta t_T &= \Delta t_{AB} + \Delta t_{BA} = \frac{d}{V_1 - V_w} + \frac{d}{V_1 + V_w} = \frac{2dV_1}{V_1^2 - V_w^2} = \\ &= \frac{2d}{V_B} \sqrt{\frac{\hat{V}_w^2 + \sqrt{\hat{V}_w^4 + 1}}{\hat{V}_w^4 + 1}}\end{aligned}$$

Obsérvese que si no hay viento ($\hat{V}_w = 0$) se obtiene $V_1 = V_B$, $C_{L1} = C_{Lopt}$, $\Delta h_{T\text{mín}} = 2d/E_m$ y $\Delta t_T = 2d/V_B$, lo cual coincide con los resultados ya obtenidos en este capítulo.

2º) Para aumentar la velocidad aerodinámica es preciso aumentar la velocidad del viento, aumentar la carga alar y disminuir la densidad (aumentar la altitud). Para disminuir la altura total descendida mínima es preciso disminuir la velocidad del viento, aumentar la carga alar y disminuir la densidad (aumentar la altitud).

Actuaciones de aviones propulsados por turborreactores. Vuelo horizontal rectilíneo

5

5.1. Introducción

Partiendo de las ecuaciones del vuelo simétrico casi-estacionario en un plano vertical, en este capítulo se analizan las actuaciones puntuales e integrales de aviones provistos de turborreactores, para el caso concreto de vuelo horizontal rectilíneo.

En el apartado 5.2 se establece, como paso previo, un modelo aproximado para el empuje y el consumo específico de los turborreactores, con objeto de poder deducir fórmulas cerradas para el cálculo de actuaciones; en el apartado 5.3 se establece un modelo adimensional para las ecuaciones cinemáticas y dinámicas, y para las características aerodinámicas del avión y propulsivas del turborreactor; en el apartado 5.4 se calculan una serie de actuaciones de punto, como las dos posibles velocidades de vuelo para cada empuje, la velocidad máxima de vuelo a cada altitud y la altitud para la que se consigue la velocidad máxima de las máximas, y el denominado techo teórico; y para concluir el capítulo, se estudian las actuaciones integrales de un avión provisto de turborreactores, concretamente el alcance y la autonomía del mismo para un vuelo de crucero.

5.2. Hipótesis acerca de las características del motor

En los sistemas de ecuaciones que permiten estudiar los vuelos simétricos en un plano vertical y en un plano horizontal (expresiones (3.15) y (3.19)), intervienen las siguientes relaciones funcionales del grupo motopropulsor que proporcionan, respectivamente, el empuje y el gasto másico

de combustible (ver expresiones (3.10)):

$$\begin{aligned} T &= T(h, V, \pi) \\ \varphi &= \varphi(h, V, \pi) \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde h es la altitud de vuelo, V es la velocidad aerodinámica y π es el parámetro de control de empuje. Para el caso de un turborreactor de flujo simple o de un turborreactor de doble flujo (turbofan), el parámetro de control de empuje puede ser las revoluciones del rotor o, lo que es lo mismo, la posición de la palanca de gases del avión.

Una hipótesis simplificativa habitual en estudios preliminares de actuaciones de aviones dotados de turborreactores en vuelo subsónico, consiste en suponer que el **empuje** y el **consumo específico** (peso de combustible consumido, por unidad de tiempo y por unidad de empuje) son independientes de la velocidad y proporcionales a cierta potencia de la densidad. Además, suele utilizarse la tropopausa como altitud representativa en la que establecer un empuje de referencia y un consumo de referencia del turborreactor, ambos dependientes del parámetro de control del empuje.

Según esto, el empuje, T , y el consumo específico, c_J , pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} \frac{T}{T_{11}(\pi)} &= \left(\frac{\rho}{\rho_{11}} \right)^x \\ \frac{c_J}{c_{J11}(\pi)} &= \left(\frac{\rho}{\rho_{11}} \right)^y \end{aligned} \quad (5.2)$$

donde el subíndice “11” se reserva para valores en la tropopausa ($h = 11000$ m) y los exponentes x e y son números que ajustan las curvas de empuje y consumo específico en función de la altitud (para valores típicos de ambos exponentes, ver Tabla 5.1).

La relación entre el gasto másico, φ , el consumo específico y el empuje vendrá dada por:

$$\varphi = \frac{c_J T}{g} = \frac{c_{J11} T_{11}}{g} \left(\frac{\rho}{\rho_{11}} \right)^{x+y} = \varphi_{11} \left(\frac{\rho}{\rho_{11}} \right)^{x+y} \quad (5.3)$$

donde φ_{11} es el gasto másico en la tropopausa.

Turborreactor (flujo simple)		Turbofan	
$0 \leq h \leq 11$ km	$h > 11$ km	$0 \leq h \leq 11$ km	$h > 11$ km
x	0.7	1.0	0.9
y	0.2	0	0.2

Tabla 5.1. Exponentes del empuje y consumo específico en turborreactores.

5.3. Ecuaciones adimensionales

Si en el sistema de ecuaciones de vuelo simétrico en un plano vertical, casi-estacionario, casi-rectilíneo y con ángulo de ataque del empuje pequeño (ver sistema de ecuaciones (3.17)), se introduce la condición matemática de vuelo horizontal:

$$\gamma = 0 \quad (5.4)$$

el sistema queda reducido a (ver Figura 5.1):

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= V \\ V_e &= 0 \rightarrow h = cte \\ T - D &= 0 \\ L - W &= 0 \\ \dot{m} + \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Este sistema ha de ser completado con las adecuadas características aerodinámicas del avión y las características del grupo motopropulsor.

Para estudiar las actuaciones en vuelo horizontal de aviones provistos de turborreactores es usual prescindir de la segunda relación cinemática, ya que la altitud de vuelo vendrá fijada por las condiciones iniciales del problema.

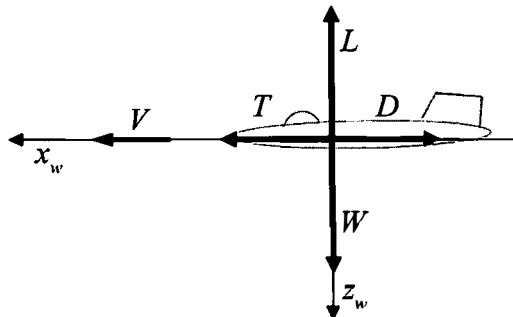


Figura 5.1. Fuerzas exteriores en el vuelo horizontal rectilíneo casi-estacionario.

A continuación se adimensionalizan todas las ecuaciones que intervienen en el problema, con excepción de la relación másica y del consumo específico (por ahora se dejan en su forma dimensional hasta que se estudien las actuaciones integrales en el apartado 5.5). Para ello se recuperan los conceptos de velocidad aerodinámica adimensional, \hat{V} , velocidad base, V_B , y factor de carga, n , definidos en el apartado 4.3, y se introduce el empuje adimensional, \hat{T} , mediante la expresión:

$$\hat{T} = \frac{T}{T_B} = \frac{T}{W/E_m} \quad (5.6)$$

donde T_B es el llamado **empuje base**, definido como el empuje mínimo necesario para el vuelo horizontal, rectilíneo y casi-estacionario, e igual a la resistencia mínima para $n = 1$. Para este vuelo se satisfacen, por tanto, las expresiones siguientes:

$$E = \frac{L}{D} = \frac{W}{D} \rightarrow D = \frac{W}{E} \rightarrow (D_{\min})_{n=1} = \frac{W}{E_m} \quad (5.7)$$

$$T_{\min} = T_B = (D_{\min})_{n=1} = \frac{W}{E_m} \quad (5.8)$$

$$V_B = V_{(D_{\min})_{n=1}} = \sqrt{\frac{2W}{C_{Lopt}\rho S}} = \sqrt{\frac{2W}{\rho S}} \sqrt[4]{\frac{k}{C_{D0}}} \quad (5.9)$$

El sistema final quedará formado por seis ecuaciones adimensionales (una relación cinemática, dos relaciones dinámicas, dos relaciones relativas a las características aerodinámicas del avión, y una relación que proporciona el empuje del turborreactor) y por dos ecuaciones con dimensiones (la relación másica y la relación del consumo específico del turborreactor):

$$\begin{aligned} \hat{x}_e &= \hat{V}, & \hat{T} - \hat{D} &= 0 \\ n - 1 &= 0, & \hat{D} &= \frac{1}{2} \left(\hat{V}^2 + \frac{n^2}{\hat{V}^2} \right) \\ n &= \hat{V}^2 \frac{C_L}{C_{Lopt}}, & \frac{\hat{T}}{\hat{T}_{11}(\pi)} &= \left(\frac{\sigma}{\sigma_{11}} \right)^x \\ \frac{dW}{dt} + c_J T &= 0, & \frac{c_J}{c_{J11}(\pi)} &= \left(\frac{\sigma}{\sigma_{11}} \right)^y \end{aligned} \quad (5.10)$$

donde, como ya se ha definido en el apartado 4.2, $\sigma = \rho/\rho_0 = \sigma(h)$ (ρ_0 es la densidad del aire al nivel del mar) y $\sigma_{11} = \rho_{11}/\rho_0 = 0.2971$.

Obviamente el factor de carga vale siempre la unidad en este vuelo y el sistema anterior puede simplificarse:

$$\begin{aligned}\hat{x}_e &= \hat{V}, & \hat{T} - \hat{D} &= 0 \\ \hat{D} &= \frac{1}{2} \left(\hat{V}^2 + \frac{1}{\hat{V}^2} \right) \\ 1 &= \hat{V}^2 \frac{C_L}{C_{Lopt}}, & \frac{\hat{T}}{\hat{T}_{11}(\pi)} &= \left(\frac{\sigma}{\sigma_{11}} \right)^x \\ \frac{dW}{dt} + c_J T &= 0, & \frac{c_J}{c_{J11}(\pi)} &= \left(\frac{\sigma}{\sigma_{11}} \right)^y\end{aligned}\tag{5.11}$$

Obsérvese que, según la primera ecuación de la tercera línea del sistema anterior, para aumentar la velocidad de vuelo adimensional es preciso disminuir el coeficiente de sustentación (y por lo tanto, disminuir el ángulo de ataque) y viceversa.

5.4. Actuaciones de punto

Para el estudio de las actuaciones puntuales en vuelo horizontal de aviones provistos de turborreactores, son irrelevantes la relación másica (el peso del avión es una constante local del problema) y la relación que proporciona el consumo de combustible o el consumo específico del motor. El sistema a utilizar es el siguiente:

$$\hat{x}_e = \hat{V}$$

$$\hat{T} - \hat{D} = 0$$

...

...

$$\begin{aligned}\hat{D} &= \frac{1}{2} \left(\hat{V}^2 + \frac{1}{\hat{V}^2} \right) \\ 1 &= \hat{V}^2 \frac{C_L}{C_{L\text{opt}}} \\ \frac{\hat{T}}{\hat{T}_{11}(\pi)} &= \left(\frac{\sigma}{\sigma_{11}} \right)^x\end{aligned}\tag{5.12}$$

En las cinco ecuaciones anteriores se cuentan como variables dependientes \hat{x}_e , \hat{V} , \hat{T} , \hat{D} , C_L y π , por lo que el sistema tiene un grado de libertad matemático.

A continuación se estudian tres actuaciones de punto de gran interés para la Mecánica del Vuelo, como son las velocidades de vuelo horizontal, la altitud para la que se consigue la velocidad de vuelo máxima de las máximas y el techo teórico o techo de empuje.

5.4.1. Velocidades de vuelo horizontal

Operando con las ecuaciones segunda y tercera del sistema (5.12) y considerando que el empuje adimensional es el grado de libertad matemático, se obtiene (ver Figura 5.2):

$$\hat{T} = \frac{1}{2} \left(\hat{V}^2 + \frac{1}{\hat{V}^2} \right) \rightarrow \hat{V} = \sqrt{\hat{T} \pm \sqrt{\hat{T}^2 - 1}}\tag{5.13}$$

Para que la velocidad de vuelo sea real el empuje adimensional ha de ser mayor o igual que la unidad o, lo que es lo mismo, ha de satisfacerse la siguiente relación entre empuje, eficiencia aerodinámica máxima y peso:

$$\hat{T} \geq 1 \rightarrow \frac{T}{W} E_m \geq 1\tag{5.14}$$

Como $\hat{T} \geq 1$ existirán dos posibles velocidades de vuelo para cada

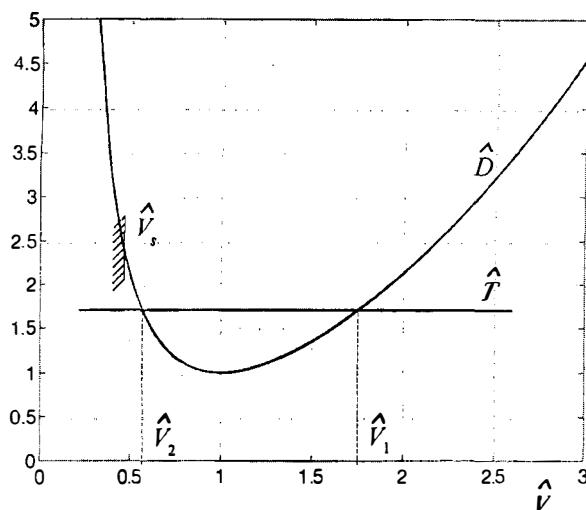


Figura 5.2. Velocidades de vuelo horizontal rectilíneo casi-estacionario.

empuje:

$$\hat{T} \geq 1 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{V}_1 = \sqrt{\hat{T} + \sqrt{\hat{T}^2 - 1}} \\ \hat{V}_2 = \sqrt{\hat{T} - \sqrt{\hat{T}^2 - 1}} \end{array} \right\} \rightarrow \hat{V}_1 \hat{V}_2 = 1 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{V}_1 \geq 1 \\ \hat{V}_2 \leq 1 \end{array} \right. \quad (5.15)$$

En resumen, pueden presentarse tres casos:

- $\hat{T} > 1 \rightarrow$ Dos velocidades de vuelo ($\hat{V}_1 > 1, \hat{V}_2 < 1$)
- $\hat{T} = 1 \rightarrow$ Una velocidad de vuelo ($\hat{V}_1 = \hat{V}_2 = 1$)
- $\hat{T} < 1 \rightarrow$ Vuelo imposible

Se dice que un avión vuela en primer régimen cuando vuela a una velocidad superior a su velocidad base y en segundo régimen cuando es inferior (de ahí proceden los subíndices de las velocidades adimensionales), y puede demostrarse que el primer régimen es estable frente a perturbaciones en velocidad (manteniendo el vuelo horizontal y el empuje constante) y el segundo régimen inestable.

Se define la **velocidad de pérdida**, V_S , como aquella velocidad por debajo de la cual es imposible mantener el vuelo horizontal rectilíneo casi-

estacionario por alcanzar el avión su coeficiente de sustentación máximo. Como en este vuelo se cumple:

$$L = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_L = W \rightarrow V = \sqrt{\frac{2W}{C_L \rho S}} \quad (5.16)$$

la velocidad de pérdida con dimensiones y la velocidad de pérdida adimensional vendrán dadas por:

$$V_S = \sqrt{\frac{2W}{C_{L\max} \rho S}} \rightarrow \hat{V}_S = \frac{V_S}{V_B} = \sqrt{\frac{C_{L\text{opt}}}{C_{L\max}}} \quad (5.17)$$

Un avión puede que tenga suficiente empuje como para alcanzar una velocidad de segundo régimen muy baja, pero también es posible que esa velocidad esté por debajo de la velocidad de pérdida (no tiene el avión suficiente coeficiente de sustentación máximo) y por tanto no es alcanzable (ver Figura 5.2).

Para una altitud de vuelo dada, la velocidad horizontal máxima es una velocidad de primer régimen y se consigue imponiendo el empuje adimensional, \hat{T}_{\max} , alcanzable a esa altitud:

$$\hat{V}_{\max} = \sqrt{\hat{T}_{\max} + \sqrt{\hat{T}_{\max}^2 - 1}} \rightarrow V_{\max} = \hat{V}_{\max} V_B \quad (5.18)$$

5.4.2. Velocidad horizontal máxima de las máximas

A continuación se determina la altitud de vuelo para la que la velocidad máxima determinada en el apartado anterior, V_{\max} , presenta un máximo, y el valor correspondiente de la velocidad máxima de las máximas, $(V_{\max})_{\max}$.

El empuje adimensional máximo viene dado, en función de la altitud, por la expresión:

$$\frac{\hat{T}_{\max}}{\hat{T}_{11\max}(\pi_{\max})} = \left(\frac{\sigma}{\sigma_{11}} \right)^x \quad (5.19)$$

A medida que aumenta la altitud de vuelo la velocidad adimensional máxima disminuye (debido a que la densidad disminuye con la altitud y por tanto también lo hace el empuje adimensional máximo, \hat{T}_{\max}) y puede concluirse que la velocidad adimensional máxima alcanza su máximo al nivel del mar. Sin embargo la velocidad base aumenta con la altitud y, según la

ecuación (5.18), no está claro cuál de las dos tendencias es más importante a la hora de determinar la velocidad máxima de las máximas.

Formulando el problema con rigor, la velocidad máxima viene dada por:

$$V_{\max} = \hat{V}_{\max} V_B = \frac{V_{B0}}{\sqrt{\sigma}} \sqrt{\hat{T}_{\max} + \sqrt{\hat{T}_{\max}^2 - 1}} \quad (5.20)$$

La velocidad máxima de las máximas se producirá a la altitud para la que es máxima la función:

$$\frac{\hat{V}_{\max}^2}{\sigma} = \frac{\hat{T}_{\max} + \sqrt{\hat{T}_{\max}^2 - 1}}{\sigma} \quad (5.21)$$

En la Tabla 5.1 puede observarse que existen dos exponentes distintos x que ajustan las variaciones del empuje con la densidad según se encuentren los turborreactores en la troposfera o en la estratosfera. Por tanto, al derivar la expresión anterior respecto de σ e igualarla a cero para obtener su máximo, se presentarán dos casos (supóngase el caso de un turborreactor de flujo simple):

- a) Velocidad máxima de las máximas en la troposfera ($x = 0.7$)

$$\hat{T}_{\max} = 1.400, (\hat{V}_{\max})_{\max} = 1.543$$

$$\sigma_{(V_{\max})_{\max}} = \sigma_{11} \left(\frac{1.400}{\hat{T}_{11 \max}} \right)^{1/0.7}, (V_{\max})_{\max} = 1.543 \frac{V_{B0}}{\sqrt{\sigma_{(V_{\max})_{\max}}}} \quad (5.22)$$

Obsérvese que para que la velocidad máxima de las máximas se encuentre en la troposfera, ha de verificarse que:

$$\hat{T}_{11 \max} < 1.400 \quad (5.23)$$

- b) Velocidad máxima de las máximas fuera de la troposfera

Para que esto ocurra ha de cumplirse que:

$$\hat{T}_{11 \max} \geq 1.400 \quad (5.24)$$

Debido a que en la estratosfera $x = 1.0$ ahora se satisface:

$$\frac{\hat{T}_{\max}}{\hat{T}_{11 \max}(\pi_{\max})} = \frac{\sigma}{\sigma_{11}} \rightarrow \frac{\hat{T}_{\max}}{\sigma} = \frac{\hat{T}_{11 \max}}{\sigma_{11}} = cte \quad (5.25)$$

y la función (5.21) es monótonamente decreciente con la altitud, por lo que la velocidad máxima de las máximas se producirá en la propia tropopausa:

$$\sigma_{(V_{\max})_{\max}} = \sigma_{11}, \quad (V_{\max})_{\max} = V_{B0} \sqrt{\frac{\hat{T}_{11 \max}}{\sigma_{11}} + \sqrt{\left(\frac{\hat{T}_{11 \max}}{\sigma_{11}}\right)^2 - \frac{1}{\sigma_{11}^2}}} \quad (5.26)$$

Puede concluirse que la velocidad máxima de las máximas se presenta en la troposfera o en la tropopausa, pero nunca en la estratosfera.

5.4.3. Techo teórico

El techo teórico (también llamado **techo de empuje**) es la altitud máxima a la que es posible el vuelo horizontal rectilíneo casi-estacionario, para un peso y configuración dados.

Como el empuje adimensional es una función monótonamente creciente con la densidad y, por tanto, decreciente con la altitud de vuelo, el techo teórico será aquella altitud para la que se satisface que:

$$\hat{T}_{\max} = 1 \quad (5.27)$$

De nuevo pueden presentarse dos casos (supóngase que el avión está dotado de turborreactores de flujo simple):

a) Techo teórico en la troposfera ($x = 0.7$)

$$\sigma_T = \sigma_{11} \frac{1}{(\hat{T}_{11 \max})^{1/0.7}} \quad (5.28)$$

Obsérvese que para que el techo se encuentre en la troposfera, ha de verificarse que:

$$\hat{T}_{11 \max} < 1.000 \quad (5.29)$$

b) Techo teórico en la estratosfera ($x = 1.0$)

$$\sigma_T = \sigma_{11} \frac{1}{\hat{T}_{11 \max}} \quad (5.30)$$

Para que el techo se encuentre en la estratosfera, ha de verificarse que:

$$\hat{T}_{11 \max} > 1.000 \quad (5.31)$$

y para que se encuentre en la tropopausa:

$$\hat{T}_{11\text{ máx}} = 1.000 \quad (5.32)$$

Por último conviene destacar la importancia que tiene para el techo teórico (y para la velocidad máxima de las máximas) el parámetro:

$$\hat{T}_{11\text{ máx}} = \frac{T_{11\text{ máx}} E_m}{W} \quad (5.33)$$

Según la ecuación anterior (y las expresiones (5.28) o (5.30)), para aumentar el techo de un avión se ha de aumentar el empuje máximo del turborreactor a una altitud de referencia, aumentar la eficiencia aerodinámica máxima o disminuir el peso del avión.

En el apartado 6.2.1 se demostrará que el techo teórico también puede definirse como aquella altitud para la cual la velocidad ascensional máxima de las máximas que puede alcanzarse es nula. Esto significa que es muy difícil subir hasta el techo teórico, ya que cuando el avión se va acercando al mismo le queda muy poca capacidad de subida. Por ello algunos autores definen los siguientes techos alternativos, utilizando un remanente de velocidad ascensional máxima de las máximas:

- **Techo de servicio:** $(V_{a\text{ máx}})_{\text{máx}} = 100 \text{ ft/min.}$
- **Techo de crucero:** $(V_{a\text{ máx}})_{\text{máx}} = 300 \text{ ft/min.}$
- **Techo operacional:** $(V_{a\text{ máx}})_{\text{máx}} = 500 \text{ ft/min.}$

5.5. Actuaciones integrales

Se pretende ahora calcular el alcance y la autonomía en vuelo horizontal rectilíneo de un avión provisto de turborreactores, entendiendo por alcance la distancia que es capaz de recorrer el avión para una carga de combustible dada y por autonomía el tiempo que puede permanecer el avión en el aire para dicha carga de combustible.

Para la determinación de las actuaciones integrales, las ecuaciones clave serán la relación másica y la relación que proporciona el consumo específico (dos últimas ecuaciones del sistema (5.11)), ecuaciones que no tienen

ninguna trascendencia para el cálculo de las actuaciones puntuales. La relación másica puede escribirse en la forma:

$$\frac{dW}{dt} = -c_J T \quad (5.34)$$

Como el peso del avión es perfectamente conocido en los instantes inicial y final, y el tiempo es una de las incógnitas que se intentan calcular, se efectúa a continuación el cambio de variable independiente tiempo por peso para determinar el alcance y la autonomía. Dividiendo la primera ecuación del sistema (5.11) por la relación másica anterior e invirtiendo esta relación másica, quedan las dos ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{dx_e}{dW} &= \frac{V}{dW/dt} = -\frac{V}{c_J T} \\ \frac{dt}{dW} &= \frac{1}{dW/dt} = -\frac{1}{c_J T} \end{aligned} \quad (5.35)$$

Las magnitudes $-dx_e/dW$ y $-dt/dW$ son variables puntuales de la trayectoria y se denominan respectivamente **alcance específico** (distancia recorrida por unidad de peso de combustible consumido) y **autonomía específica** (tiempo que permanece el avión en el aire por unidad de peso de combustible consumido). Introduciendo en el sistema (5.35) el empuje del avión en función de la velocidad de vuelo, queda:

$$\begin{aligned} \frac{dx_e}{dW} &= -\frac{V_B \hat{V}}{c_J T_B \hat{T}} = -\frac{E_m}{c_J} \frac{1}{W} V_B \frac{2\hat{V}^3}{\hat{V}^4 + 1} \\ \frac{dt}{dW} &= -\frac{1}{c_J T_B \hat{T}} = -\frac{E_m}{c_J} \frac{1}{W} \frac{2\hat{V}^2}{\hat{V}^4 + 1} \end{aligned} \quad (5.36)$$

Suponiendo que el consumo específico de un turborreactor no depende del parámetro de control del empuje (es decir, $c_{J11} \neq f(\pi)$), se adimensionalizan ahora la distancia, el tiempo y el peso que intervienen en las ecuaciones anteriores de la siguiente forma:

$$\hat{x}_e = \frac{x_e}{x^*}; \quad \hat{t} = \frac{t}{t^*}; \quad \hat{W} = \frac{W}{W^*} \quad (5.37)$$

donde x^* es una longitud característica ($x^* = V_{Bi} E_m / c_J$, con $V_{Bi} = \sqrt[4]{2W_i / (\rho S) \sqrt[4]{k/C_D}}$), t^* un tiempo característico ($t^* = E_m / c_J$), y W^* un peso característico ($W^* = W_i$, siendo W_i el peso en el instante inicial).

Según esto:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{x}_e}{d\hat{W}} &= -\frac{1}{\sqrt{\hat{W}}} \frac{2\hat{V}^3}{\hat{V}^4 + 1} \\ \frac{d\hat{t}}{d\hat{W}} &= -\frac{1}{\hat{W}} \frac{2\hat{V}^2}{\hat{V}^4 + 1}\end{aligned}\quad (5.38)$$

Los valores de la velocidad adimensional que maximizan el alcance específico y la autonomía específica se obtienen a partir de las expresiones anteriores derivándolas e igualándolas a cero:

$$\begin{aligned}\frac{d(d\hat{x}_e/d\hat{W})}{d\hat{V}} = 0 &\rightarrow \hat{V}_{|d\hat{x}_e/d\hat{W}|_{\max}} = \sqrt[4]{3} = 1.316 \\ \frac{d(d\hat{t}/d\hat{W})}{d\hat{V}} = 0 &\rightarrow \hat{V}_{|d\hat{t}/d\hat{W}|_{\max}} = 1\end{aligned}\quad (5.39)$$

Obsérvese que para volar con autonomía específica máxima es preciso imponer una velocidad de vuelo igual a la velocidad base, ya que de esta forma se minimiza la resistencia aerodinámica. Sin embargo, para volar con alcance específico máximo hay que imponer la velocidad de vuelo que minimice el cociente entre la resistencia y la velocidad, y que resulta ser una velocidad un 32 % superior a la velocidad base.

Integrando las expresiones del alcance específico y de la autonomía específica queda:

$$\begin{aligned}\hat{x}_e &= - \int_{\hat{W}_i}^{\hat{W}_f} \frac{1}{\sqrt{\hat{W}}} \frac{2\hat{V}^3}{\hat{V}^4 + 1} d\hat{W} \\ \hat{t} &= - \int_{\hat{W}_i}^{\hat{W}_f} \frac{1}{\hat{W}} \frac{2\hat{V}^2}{\hat{V}^4 + 1} d\hat{W}\end{aligned}\quad (5.40)$$

Además, denotando por W_{FT} el peso total de combustible que se utiliza durante el vuelo y definiendo un parámetro adimensional de peso total de combustible de la forma:

$$\zeta = \frac{W_{FT}}{W_i} \quad (5.41)$$

los límites inferior y superior de las integrales quedarán como:

$$\begin{aligned}\hat{W}_i &= 1 \\ \hat{W}_f &= \frac{W_f}{W_i} = \frac{W_i - W_{FT}}{W_i} = 1 - \zeta\end{aligned}\tag{5.42}$$

Para poder integrar las expresiones (5.40) es preciso fijar el grado de libertad matemático que tiene el vuelo horizontal, es decir, es preciso especificar una **ley de pilotaje matemática** de la forma:

$$\hat{V} = \hat{V}(\hat{W})\tag{5.43}$$

A continuación se determinan el alcance y la autonomía para varias leyes de pilotaje matemáticas concretas.

5.5.1. Vuelo a ángulo de ataque constante

El vuelo a ángulo de ataque constante es un vuelo a velocidad adimensional constante (ver la cuarta ecuación del sistema (5.11)); es decir:

$$\alpha = \alpha_i \leftrightarrow C_L = C_{Li} \leftrightarrow \hat{V} = \hat{V}_i\tag{5.44}$$

Integrando el alcance y la autonomía entre los pesos adimensionales inicial y final se obtiene:

$$\begin{aligned}\hat{x}_e &= \frac{4\hat{V}_i^3}{\hat{V}_i^4 + 1} (1 - \sqrt{1 - \zeta}) \\ \hat{t} &= \frac{2\hat{V}_i^2}{\hat{V}_i^4 + 1} \ln \frac{1}{1 - \zeta}\end{aligned}\tag{5.45}$$

Para obtener el alcance máximo y la autonomía máxima se derivan las expresiones anteriores respecto de la velocidad inicial adimensional y se igualan a cero:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{x}_e}{d\hat{V}_i} &= 0, (\hat{V}_i)_{\hat{x}_{\max}} = \sqrt[4]{3}, \hat{x}_{e \max} = 3^{3/4} (1 - \sqrt{1 - \zeta}) \\ \frac{d\hat{t}}{d\hat{V}_i} &= 0, (\hat{V}_i)_{\hat{t}_{\max}} = 1, \hat{t}_{\max} = \ln \frac{1}{1 - \zeta}\end{aligned}\tag{5.46}$$

Luego:

$$\begin{aligned} x_{e \text{ máx}} &= \frac{V_{Bi} E_m}{c_J} \hat{x}_{e \text{ máx}} = \frac{V_{Bi} E_m}{c_J} 3^{3/4} (1 - \sqrt{1 - \zeta}) \\ t_{\text{máx}} &= \frac{E_m}{c_J} \hat{t}_{\text{máx}} = \frac{E_m}{c_J} \ln \frac{1}{1 - \zeta} \end{aligned} \quad (5.47)$$

Estas dos últimas expresiones reciben el nombre de **Fórmulas de Breguet** y de ellas se deducen importantes conclusiones para el diseño preliminar de aviones: si se quiere aumentar el alcance y la autonomía, es preciso aumentar ζ , disminuir c_{J11} , aumentar E_m (es decir, disminuir C_{D0} o disminuir k). Además, como c_J disminuye al aumentar la altitud en la troposfera y puede suponerse constante con la altitud en la estratosfera (ver Tabla 5.1), la autonomía máxima de las máximas se da en el techo (suponiendo que el techo está en la troposfera) o en la tropopausa (suponiendo que el techo está en la tropopausa o en la estratosfera). También puede demostrarse que el alcance máximo de los máximos se produce muy cerca del techo.

La velocidad de vuelo y el empuje han de disminuir según se desarrolla este vuelo y el avión va gastando combustible. Sus expresiones en función del peso adimensional son las siguientes:

$$\begin{aligned} V &= \hat{V} V_B = \hat{V}_i V_{Bi} \sqrt{\hat{W}} = V_i \sqrt{\hat{W}} \\ T &= \hat{T} T_B = \hat{T}_i \frac{W}{E_m} = \hat{T}_i \frac{W_i \hat{W}}{E_m} = T_i \hat{W} \end{aligned} \quad (5.48)$$

5.5.2. Vuelo a velocidad constante

En el vuelo a velocidad constante se cumple:

$$\underline{V} = V_i \leftrightarrow \hat{V} = \frac{V}{V_B} = \frac{V_i}{V_{Bi} \sqrt{\hat{W}}} = \frac{\hat{V}_i}{\sqrt{\hat{W}}} \quad (5.49)$$

Integrando el alcance y la autonomía entre los pesos adimensionales inicial y final (ver ecuaciones (5.40)) se obtiene:

$$\begin{aligned} \hat{x}_e &= 2\hat{V}_i \arctan \frac{\zeta \hat{V}_i^2}{1 - \zeta + \hat{V}_i^4} \\ \hat{t} &= 2 \arctan \frac{\zeta \hat{V}_i^2}{1 - \zeta + \hat{V}_i^4} \end{aligned} \quad (5.50)$$

Obsérvese que para esta ley de pilotaje matemática se cumple:

$$x_e = Vt = V_i t \rightarrow \hat{x}_e = \hat{V}_i \hat{t} \quad (5.51)$$

Para obtener el alcance máximo y la autonomía máxima se derivan las expresiones anteriores respecto de la velocidad inicial adimensional y se igualan a cero. El caso del alcance máximo es difícil de resolver de forma analítica por lo que es recomendable recurrir a métodos numéricos. Sin embargo, la velocidad inicial adimensional que maximiza la autonomía adimensional y la correspondiente autonomía adimensional máxima se obtienen fácilmente de forma cerrada, quedando:

$$\begin{aligned} (\hat{V}_i)_{\hat{t}_{\max}} &= \sqrt[4]{1 - \zeta} \\ \hat{t}_{\max} &= 2 \arctan \frac{\zeta}{2\sqrt{1 - \zeta}} \end{aligned} \quad (5.52)$$

Multiplicando la última ecuación por el adimensionalizador de tiempos ($t^* = E_m/c_J$) se obtendría la autonomía máxima para esta ley de pilotaje.

Como ya se ha visto, con esta ley la velocidad adimensional aumenta durante el vuelo. El coeficiente de sustentación y el empuje, sin embargo, han de disminuir según se desarrolla el vuelo y el avión va gastando combustible, según las expresiones:

$$\begin{aligned} C_L &= C_{Lopt} \frac{1}{\hat{V}^2} = C_{Lopt} \frac{\hat{W}}{\hat{V}_i^2} = C_{Li} \hat{W} \\ T &= \hat{T} T_B = \frac{1}{2} \left(\hat{V}^2 + \frac{1}{\hat{V}^2} \right) \frac{W}{E_m} = \frac{1}{2} T_{Bi} \left(\hat{V}_i^2 + \frac{\hat{W}^2}{\hat{V}_i^2} \right) \end{aligned} \quad (5.53)$$

5.5.3. Vuelo a empuje constante

La ley de pilotaje para el vuelo a empuje constante es:

$$T = T_i \leftrightarrow \hat{T} = \frac{T}{T_B} = \frac{T_i}{W/E_m} = \frac{\hat{T}_i}{\hat{W}} ; \hat{V} = \sqrt{\frac{\hat{T}_i}{\hat{W}} + \sqrt{\left(\frac{\hat{T}_i}{\hat{W}}\right)^2 - 1}} \quad (5.54)$$

Obsérvese que, de las dos posibles velocidades de vuelo para cada empuje, se ha escogido la velocidad de primer régimen.

Para determinar el alcance se introduce esta ley de pilotaje en la primera expresión del sistema (5.38), obteniéndose:

$$\frac{d\hat{x}_e}{d\hat{W}} = -\frac{1}{\sqrt{\hat{W}}}\frac{\hat{V}}{\hat{T}} = -\frac{1}{\hat{T}_i}\sqrt{\hat{T}_i + \sqrt{\hat{T}_i^2 - \hat{W}^2}} \quad (5.55)$$

Manipulando algebraicamente esta expresión e integrando queda:

$$\hat{x}_e = \frac{2}{3}\sqrt{\hat{T}_i} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\hat{W}}{\hat{T}_i}\right)^2} \right) \left(2 + \sqrt{1 - \left(\frac{\hat{W}}{\hat{T}_i}\right)^2} \right) \Big|_{1-\zeta}^1 \quad (5.56)$$

El empuje adimensional inicial que maximiza el alcance adimensional, $(\hat{T}_i)_{\hat{x}_e \text{ máx}}$, se obtendría derivando la expresión anterior respecto de \hat{T}_i e igualando a cero, y el alcance adimensional máximo se obtendría introduciendo este empuje adimensional inicial en la expresión (5.56). Debido a las dificultades algebraicas del proceso, es recomendable efectuar estos cálculos numéricamente.

En cuanto a la autonomía se puede integrar directamente la segunda ecuación del sistema (5.35), para empuje constante:

$$t = - \int_{W_i}^{W_f} \frac{1}{c_J T} dW = \frac{1}{c_J T_i} (W_i - W_f) = \frac{W_f T}{c_J T_i} = \frac{\zeta E_m}{c_J \hat{T}_i} \rightarrow \hat{t} = \frac{\zeta}{\hat{T}_i} \quad (5.57)$$

La autonomía máxima se producirá cuando se comienza el vuelo con empuje inicial mínimo y se mantiene ese empuje constante hasta el final. Es decir:

$$(\hat{T}_i)_{\hat{t}_{\text{máx}}} = 1 \rightarrow (T_i)_{t_{\text{máx}}} = \frac{W_i}{E_m} \rightarrow t_{\text{máx}} = \frac{\zeta E_m}{c_J} \rightarrow \hat{t}_{\text{máx}} = \zeta \quad (5.58)$$

Como ya se ha visto, con esta ley la velocidad adimensional aumenta durante el vuelo. La velocidad (con dimensiones) asimismo aumenta durante vuelo y el coeficiente de sustentación disminuye, según las expresiones:

$$V = V_B \hat{V} = V_{B_i} \sqrt{\hat{W}} \hat{V} = V_{B_i} \sqrt{\hat{T}_i + \sqrt{\hat{T}_i^2 - \hat{W}^2}}$$

$$C_L = C_{L_{\text{opt}}} \frac{1}{\hat{V}^2} = C_{L_{\text{opt}}} \frac{1}{\frac{\hat{T}_i}{\hat{W}} + \sqrt{\left(\frac{\hat{T}_i}{\hat{W}}\right)^2 - 1}} \quad (5.59)$$

5.5.4. Comparación entre las distintas leyes de pilotaje

La técnica de vuelo a ángulo de ataque constante es la mejor entre todas las posibles, si se pretende conseguir máximo alcance o máxima autonomía, ya que en ella la velocidad adimensional se mantiene constante a lo largo de toda la trayectoria, pudiéndose maximizar así localmente el alcance específico o la autonomía específica.

Esto significa que los valores numéricos proporcionados por las Fórmulas de Breguet representan límites superiores insuperables en cualquier vuelo horizontal rectilíneo casi-estacionario.

A título de ejemplo, la Figura 5.3 representa las expresiones de \hat{t}_{\max} en función del parámetro adimensional de peso de combustible, ζ , para las tres leyes de pilotaje estudiadas en los tres apartados anteriores (ver expresiones (5.46), (5.52) y (5.58)).

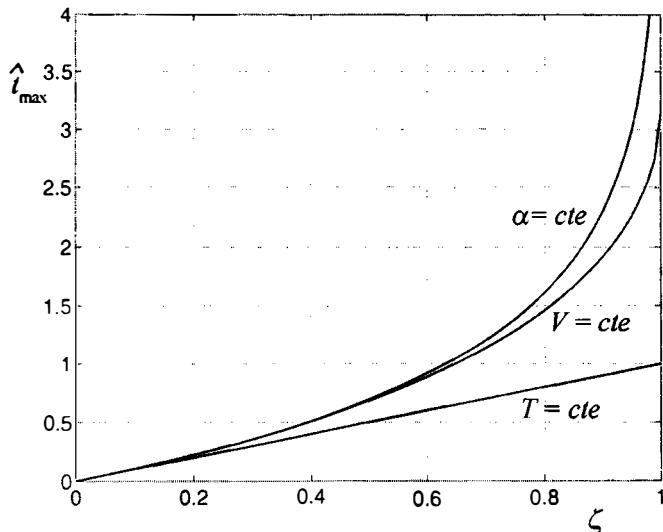


Figura 5.3. Autonomía máxima en función del parámetro adimensional de peso de combustible, para distintas leyes de pilotaje.

Como ya se ha comentado, la ley que proporciona una mayor autonomía es la ley de ángulo de ataque constante. Además se observa que, para valores pequeños de ζ ($\zeta \ll 1$) las tres autonomías coinciden, para posteriormente irse separando, ya que sus desarrollos en serie de potencias del parámetro ζ proporcionan las aproximaciones siguientes:

$$\begin{aligned}\alpha = \alpha_i \rightarrow \hat{t}_{\max} &= \ln \frac{1}{1 - \zeta} \quad \rightarrow \quad \hat{t}_{\max} = \zeta + \frac{1}{2}\zeta^2 + \frac{1}{3}\zeta^3 + \dots \\ V = V_i \rightarrow \hat{t}_{\max} &= 2 \arctan \frac{\zeta}{2\sqrt{1-\zeta}} \quad \rightarrow \quad \hat{t}_{\max} = \zeta + \frac{1}{2}\zeta^2 + \frac{7}{24}\zeta^3 + \dots \\ T = T_i \rightarrow \hat{t}_{\max} &= \zeta \quad \rightarrow \quad \hat{t}_{\max} = \zeta\end{aligned}\tag{5.60}$$

5.6. Problemas 5.1 y 5.2

PROBLEMA 5.1

Se considera cierto avión cuya polar puede aproximarse mediante la expresión:

$$C_D = C_{Dm} + k (C_L - C_{Lm})^2$$

siendo C_{Dm} , k y C_{Lm} constantes dentro del intervalo de velocidades considerado. El avión está provisto de turborreactores cuyo empuje varía con la velocidad y con la altitud según la ley:

$$\frac{T}{T_{11}} = \left(\frac{V}{V_R} \right)^{x_V} \left(\frac{\sigma}{\sigma_{11}} \right)^{x_\sigma}$$

donde $V_R, \sigma_{11}, x_V, x_\sigma$ son constantes conocidas. Se pide:

1º) Determinar E_m y C_{Lopt} en función de C_{D0} ($C_{D0} = (C_D)_{C_L=0}$), k y C_{Lm} .

2º) Determinar D/W en función de \hat{C}_{D0} , n , \hat{C}_{Lm} y \hat{V} , donde:

$$\hat{C}_{D0} = \frac{C_{D0}}{C_{Lopt}}, \quad n = \frac{L}{W}, \quad \hat{C}_{Lm} = \frac{C_{Lm}}{C_{Lopt}}, \quad \hat{V} = \frac{V}{V_B}, \quad V_B = \sqrt{\frac{2W}{C_{Lopt}\rho S}}$$

3º) Determinar la velocidad adimensional que minimiza la resistencia obtenida en el apartado anterior, $\hat{V}_{D_{min}}$, así como el valor de esa resistencia mínima, D_{min}/W , todo ello función de \hat{C}_{D0} , n y \hat{C}_{Lm} .

4º) Particularizar las expresiones de E_m , C_{Lopt} , V_B , $\hat{V}_{D_{min}}$ y D_{min}/W obtenidas en los apartados anteriores, para el caso $C_{Lm} = 0$ (polar simétrica).

5º) Para vuelo horizontal, rectilíneo, simétrico, estacionario, con las alas a nivel y con la componente del empuje en sentido normal a la trayectoria despreciable, determinar un polinomio en \hat{V} a partir del cual se deducirían las velocidades adimensionales de vuelo para \hat{T}_{11} y σ dados. Considérese $V_R = V_B$ y $\hat{T}_{11} = T_{11}/(2W\hat{C}_{D0})$.

6º) Suponiendo además que $x_V = 0$, particularizar el polinomio obtenido en el apartado anterior, determinar las velocidades adimensionales de vuelo en función de \hat{T} ($\hat{T} = T/2W\hat{C}_{D0}$) y determinar el techo teórico del avión suponiendo que éste se produzca en la estratosfera.

Solución:

1º)

$$C_{D0} = (C_D)_{C_L=0} = C_{Dm} + kC_{Lm}^2$$

$$E = \frac{C_L}{C_D} = \frac{C_L}{C_{Dm} + k(C_L - C_{Lm})^2}$$

Derivando E con respecto a C_L e igualando a cero, se obtiene:

$$C_{Lopt} = \sqrt{\frac{C_{Dm} + kC_{Lm}^2}{k}} = \sqrt{\frac{C_{D0}}{k}}$$

$$E_m = \frac{1}{2(\sqrt{C_{D0}k} - C_{Lm}k)}$$

2º) Mediante la expresión de la resistencia puede escribirse:

$$\begin{aligned} \frac{D}{W} &= \frac{qS}{W}(C_{D0} + kC_L^2 - 2kC_{Lm}C_L) = \frac{qS}{W}(C_{D0} + k\frac{n^2W^2}{q^2S^2} - 2kC_{Lm}\frac{nW}{qS}) = \\ &= \frac{qS}{W}C_{D0} + k\frac{n^2W}{qS} - 2kC_{Lm}n \end{aligned}$$

e introduciendo ahora las todas las variables del enunciado:

$$\frac{D}{W} = \hat{C}_{D0} \left(\hat{V}^2 + \frac{n^2}{\hat{V}^2} - 2\hat{C}_{Lm}n \right)$$

donde $\hat{C}_{D0} = \frac{C_{D0}}{C_{Lopt}} = \sqrt{C_{D0}k} = kC_{Lopt}$

3º) Derivando la anterior expresión con respecto de la velocidad adimensional e igualándola a cero, se obtiene:

$$\hat{V}_{D_{min}} = \sqrt{n}, \quad \frac{D_{min}}{W} = 2\hat{C}_{D0}n(1 - \hat{C}_{Lm})$$

4º) Haciendo en las expresiones de los apartados anteriores $C_{Lm} = 0$:

$$C_{Lopt} = \sqrt{\frac{C_{D0}}{k}}, \quad E_m = \frac{1}{2\sqrt{C_{D0}k}}, \quad V_B = \sqrt{\frac{2W}{C_{Lopt}\rho S}} = \sqrt{\frac{2W}{\rho S}} \sqrt[4]{\frac{k}{C_{D0}}}$$

$$\hat{V}_{D_{min}} = \sqrt{n}, \quad \frac{D_{min}}{W} = 2\hat{C}_{D0}n = 2\sqrt{C_{D0}k}n = \frac{n}{E_m}$$

5º) Para la condición de vuelo del enunciado ($\gamma = 0, n = 1, \dot{V} = 0$) puede escribirse:

$$T = D \rightarrow \hat{T} = \frac{1}{2} \left(\hat{V}^2 + \frac{1}{\hat{V}^2} - 2\hat{C}_{Lm} \right)$$

donde $\hat{T} = \frac{T}{2W\hat{C}_{D0}}$. Introduciendo en esta expresión la ley de empuje en función de la velocidad y la altitud propuesta:

$$\hat{T}_{11}\hat{V}^{x_V} \left(\frac{\sigma}{\sigma_{11}} \right)^{x_\sigma} = \frac{1}{2} \left(\hat{V}^2 + \frac{1}{\hat{V}^2} - 2\hat{C}_{Lm} \right)$$

donde $\hat{T}_{11} = \frac{T_{11}}{2W\hat{C}_{D0}}, \sigma = \frac{\rho}{\rho_0}, \sigma_{11} = 0.2971$.

Reordenando la última expresión, queda:

$$\hat{V}^4 - 2\hat{C}_{Lm}\hat{V}^2 - 2\hat{T}_{11}\hat{V}^{2+x_V} \left(\frac{\sigma}{\sigma_{11}} \right)^{x_\sigma} + 1 = 0$$

6º) Imponiendo $x_V = 0$, el polinomio anterior queda como:

$$\hat{V}^4 - 2(\hat{T} + \hat{C}_{Lm})\hat{V}^2 + 1 = 0$$

donde $\frac{\hat{T}}{\hat{T}_{11}} = \left(\frac{\sigma}{\sigma_{11}} \right)^{x_\sigma}$, y las dos posibles velocidades de vuelo serán:

$$\hat{T} + \hat{C}_{Lm} \geq 1 \rightarrow \begin{cases} \hat{V}_1 = \sqrt{(\hat{T} + \hat{C}_{Lm}) + \sqrt{(\hat{T} + \hat{C}_{Lm})^2 - 1}} \\ \hat{V}_2 = \sqrt{(\hat{T} + \hat{C}_{Lm}) - \sqrt{(\hat{T} + \hat{C}_{Lm})^2 - 1}} \end{cases}$$

En cuanto al techo teórico se producirá donde:

$$\hat{T}_{\max} + \hat{C}_{Lm} = 1 \rightarrow \hat{T}_{\max} = 1 - \hat{C}_{Lm}$$

y si se encuentra en la estratosfera ($x_\sigma = 1.0$):

$$\sigma_T = \sigma_{11} \frac{1 - \hat{C}_{Lm}}{\hat{T}_{11 \max}}$$

Para que el techo se encuentre en la estratosfera ha de verificarse que $\hat{T}_{11 \max} > 1 - \hat{C}_{Lm}$.

PROBLEMA 5.2

1º) Plantear una ecuación que permita determinar la velocidad aerodinámica que maximiza el alcance específico en vuelo horizontal rectilíneo casi-estacionario para un avión dotado de turborreactores volando con viento de cola (supóngase viento horizontal de módulo constante V_w).

2º) Suponiendo que $\hat{V}_w = V_w/V_B = \varepsilon \ll 1$, obtener la solución linealizada del problema.

3º) Repetir los dos apartados anteriores para el caso de viento de cara.

Solución:

1º) Las ecuaciones a partir de las cuales se deduce el alcance específico y la autonomía específica en presencia de viento de cola son:

$$-\frac{dx_e}{dW} = \frac{V_g}{c_J T} = \frac{V + V_w}{c_J T}$$

$$-\frac{dt}{dW} = \frac{1}{c_J T}$$

Introduciendo en ellas ahora la condición de $T = D$:

$$-\frac{dx_e}{dW} = \frac{E_m}{c_J} \frac{1}{W} V_B \frac{2\hat{V}^2 (\hat{V} + \hat{V}_w)}{\hat{V}^4 + 1}$$

$$-\frac{dt}{dW} = \frac{E_m}{c_J} \frac{1}{W} \frac{2\hat{V}^2}{\hat{V}^4 + 1}$$

Obsérvese que el viento no influye en la autonomía específica, pero sí en el alcance específico. Derivando el alcance específico respecto del grado de libertad, \hat{V} , se obtiene el siguiente polinomio:

$$\hat{V}^5 + 2\hat{V}_w \hat{V}^4 - 3\hat{V} - 2\hat{V}_w = 0$$

2º) Si no existiera viento ($\hat{V}_w = 0$), la solución del polinomio sería $\hat{V} = \sqrt[4]{3}$, lo cual coincide con el resultado ya obtenido en este capítulo. Si en el polinomio se introduce $\hat{V}_w = \varepsilon \ll 1$ resulta:

$$\hat{V}^5 + 2\varepsilon \hat{V}^4 - 3\hat{V} - 2\varepsilon = 0$$

Si ahora se impone una solución linealizada del tipo:

$$\hat{V} = \hat{V}_0 + \varepsilon \hat{V}_1$$

se introduce en el polinomio y se igualan términos del mismo orden, queda $\hat{V}_0 = \sqrt[4]{3}$, $\hat{V}_1 = -1/3$. Por tanto, la solución linealizada buscada es:

$$\hat{V} = \sqrt[4]{3} - \frac{1}{3}\varepsilon \rightarrow V = \sqrt[4]{3}V_B - \frac{1}{3}V_w$$

3º) Para repetir el problema con viento de cara, simplemente se sustituye en los dos apartados anteriores \hat{V}_w por $-\hat{V}_w$, quedando:

$$\hat{V}^5 - 2\hat{V}_w\hat{V}^4 - 3\hat{V} + 2\hat{V}_w = 0$$

$$\hat{V} = \sqrt[4]{3} + \frac{1}{3}\varepsilon \rightarrow V = \sqrt[4]{3}V_B + \frac{1}{3}V_w$$

Actuaciones de aviones propulsados por turborreactores. Otros vuelos

6

6.1. Introducción

En este capítulo se completa el estudio de las actuaciones de punto de aviones propulsados por turborreactores, comenzado en el capítulo anterior, mediante una formulación y unas hipótesis simplificativas similares.

En el apartado 6.2 se determinan las actuaciones de punto en subida y descenso, tanto para ángulos de asiento de velocidad pequeños como para ángulos grandes, y se corrigen los resultados obtenidos con el método casi-estacionario en el caso de que la aceleración no sea despreciable. En el apartado 6.3 se introducen los virajes horizontales simétricos casi-estacionarios y se obtienen actuaciones óptimas desde el punto de vista del factor de carga, la velocidad angular de viraje y el radio de viraje. Y en el apartado 6.4 se estudian los virajes horizontales simétricos no estacionarios (denominados coloquialmente virajes instantáneos) y se obtienen asimismo los virajes instantáneos óptimos.

6.2. Actuaciones de punto en subida y descenso

Si el sistema de ecuaciones del vuelo simétrico en un plano vertical, casi-estacionario, casi-rectilíneo y con ángulo de ataque del empuje pequeño (ver apartado 3.5.2), se completa con las correspondientes hipótesis respecto a características del avión (ver apartado 4.3) y del grupo motopropulsor (ver apartado 5.2), y se adimensionaliza como se ha establecido en el apartado 5.3, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones adimensionales que permiten

estudiar las actuaciones puntuales en subidas y descensos (ver Figura 6.1):

$$\hat{x}_e = \hat{V} \cos \gamma$$

$$\hat{V}_a = \hat{V} \sin \gamma$$

$$\hat{T} - \hat{D} - E_m \sin \gamma = 0$$

$$n - \cos \gamma = 0$$

$$\hat{D} = \frac{1}{2} \left(\hat{V}^2 + \frac{n^2}{\hat{V}^2} \right) \quad (6.1)$$

$$n = \hat{V}^2 \frac{C_L}{C_{L_{\text{opt}}}}$$

$$\frac{\hat{T}}{\hat{T}_{11}(\pi)} = \left(\frac{\sigma}{\sigma_{11}} \right)^x$$

En el estudio de las actuaciones puntuales son irrelevantes la relación másica (el peso del avión es una constante local del problema) y la relación que proporciona el consumo de combustible o consumo específico del motor, y por ello no se han añadido al sistema anterior.

Suponiendo además que la altitud de vuelo es un dato del problema, en las siete ecuaciones anteriores se cuentan nueve variables dependientes (\hat{x}_e ,

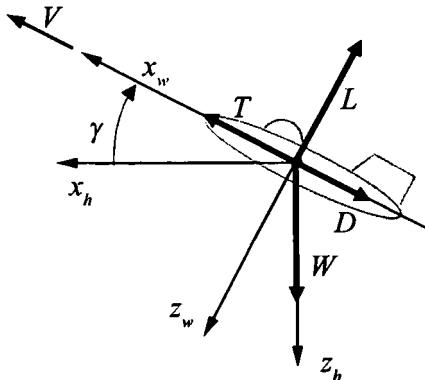


Figura 6.1. Fuerzas exteriores en el vuelo en subida o descenso en un plano vertical.

\hat{V} , γ , \hat{V}_a , \hat{T} , \hat{D} , n , C_L y π), por lo que el sistema tiene dos grados de libertad matemáticos.

Cuando los aviones ascienden o descienden con un módulo no pequeño del ángulo de asiento de velocidad, es preciso retener los senos y cosenos en los desarrollos del sistema de ecuaciones previo.

Para determinar el ángulo de asiento de velocidad, γ , y la velocidad ascensional adimensional, \hat{V}_a , en función de los dos grados de libertad del problema, \hat{V} y \hat{T} , en primer lugar se introducen las expresiones de la resistencia adimensional y del factor de carga en la primera ecuación dinámica de fuerzas; es decir:

$$\hat{T} - \frac{1}{2} \left(\hat{V}^2 + \frac{\cos^2 \gamma}{\hat{V}^2} \right) - E_m \sin \gamma = 0 \quad (6.2)$$

$$\sin^2 \gamma - 2E_m \hat{V}^2 \sin \gamma + 2\hat{T}\hat{V}^2 - 1 - \hat{V}^4 = 0$$

Despejando γ de la última expresión, queda:

$$\gamma = \gamma(\hat{V}, \hat{T}) = \arcsin \left(E_m \hat{V}^2 \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2\hat{T}\hat{V}^2 - 1 - \hat{V}^4}{E_m^2 \hat{V}^4}} \right) \right) \quad (6.3)$$

Para el cálculo de la velocidad ascensional adimensional, se recurre a la segunda ecuación cinemática del sistema (6.1):

$$\hat{V}_a = \hat{V}_a(\hat{V}, \hat{T}) = E_m \hat{V}^3 \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{2\hat{T}\hat{V}^2 - 1 - \hat{V}^4}{E_m^2 \hat{V}^4}} \right] \quad (6.4)$$

Derivando las dos expresiones anteriores respecto de la velocidad adimensional e igualándolas a cero, podrían calcularse los valores de $\hat{V}_{\gamma_{\max}}$, $\sin \gamma_{\max}$, $\hat{V}_{\hat{V}_a \max}$ y $\hat{V}_a \max$.

Obsérvese que se obtienen expresiones analíticas de difícil manipulación algebraica. Debido a que muchos aviones ascienden y descienden con un módulo pequeño del ángulo de asiento de velocidad, a continuación se introduce esta hipótesis en las ecuaciones. Posteriormente se efectuará una corrección para el caso de que el vuelo sea acelerado.

6.2.1. Análisis para ángulos de asiento de velocidad pequeños

Si el módulo del ángulo de asiento de velocidad es pequeño, se cumple:

$$|\gamma| \ll 1 \rightarrow \sin \gamma \cong \gamma; \cos \gamma \cong 1 \quad (6.5)$$

y el sistema de ecuaciones (6.1) se simplifica de la forma:

$$\hat{x}_e = \hat{V}$$

$$\hat{V}_a = \hat{V}\gamma$$

$$\hat{T} - \hat{D} - E_m\gamma = 0$$

$$n - 1 = 0$$

$$\hat{D} = \frac{1}{2} \left(\hat{V}^2 + \frac{n^2}{\hat{V}^2} \right) \quad (6.6)$$

$$n = \hat{V}^2 \frac{C_L}{C_{L_{\text{opt}}}}$$

$$\frac{\hat{T}}{\hat{T}_{11}(\pi)} = \left(\frac{\sigma}{\sigma_{11}} \right)^x$$

De nuevo el factor de carga vale la unidad (aproximadamente) y el sistema anterior puede simplificarse aún más:

$$\hat{x}_e = \hat{V}$$

$$\hat{V}_a = \hat{V}\gamma$$

$$\hat{T} - \hat{D} - E_m\gamma = 0$$

$$\hat{D} = \frac{1}{2} \left(\hat{V}^2 + \frac{1}{\hat{V}^2} \right) \quad (6.7)$$

$$1 = \hat{V}^2 \frac{C_L}{C_{L_{\text{opt}}}}$$

$$\frac{\hat{T}}{\hat{T}_{11}(\pi)} = \left(\frac{\sigma}{\sigma_{11}} \right)^x$$

Ahora pueden determinarse otra vez el ángulo de asiento de velocidad y la velocidad ascensional adimensional, en función de los dos grados de libertad matemáticos del sistema (\hat{V} y \hat{T}):

$$\begin{aligned}\gamma &= \gamma(\hat{V}, \hat{T}) = \frac{1}{E_m} \left[\hat{T} - \frac{1}{2} \left(\hat{V}^2 + \frac{1}{\hat{V}^2} \right) \right] \\ \hat{V}_a &= \hat{V}_a(\hat{V}, \hat{T}) = \frac{1}{E_m} \left[\hat{T}\hat{V} - \frac{1}{2} \left(\hat{V}^3 + \frac{1}{\hat{V}} \right) \right]\end{aligned}\quad (6.8)$$

Las actuaciones en subida y descenso se expresan universalmente en términos de una familia de soluciones dependientes de dos parámetros (\hat{V} y \hat{T}) e independientes del avión considerado (E_m).

Derivando las dos expresiones anteriores respecto de \hat{V} e igualándolas a cero, se obtiene:

$$\hat{V}_{\gamma_{\max}} = 1 \rightarrow E_m \gamma_{\max} = \hat{T} - 1 \quad (6.9)$$

$$\hat{V}_{\hat{V}_{a \max}} = \sqrt{\frac{\hat{T} + \sqrt{\hat{T}^2 + 3}}{3}} \rightarrow \quad (6.10)$$

$$\rightarrow E_m \hat{V}_{a \max} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \sqrt{\hat{T} + \sqrt{\hat{T}^2 + 3}} \left(2\hat{T} - \sqrt{\hat{T}^2 + 3} \right)$$

La Figura 6.2 representa las distintas condiciones de vuelo en un plano vertical (subida, descenso, vuelo horizontal y planeo) en un diagrama $\hat{V} - \hat{T}$. En esta figura puede observarse que si el empuje adimensional es menor que la unidad los aviones siempre descienden, pero si es mayor que la unidad pueden descender, volar horizontalmente o ascender. Además se cumple:

$$\begin{aligned}\hat{T} > 1 &\rightarrow \hat{V}_2 < \hat{V}_{\gamma_{\max}} = 1 < \hat{V}_{\hat{V}_{a \max}} < \hat{V}_1 \\ \hat{T} = 1 &\rightarrow \hat{V}_2 = \hat{V}_{\gamma_{\max}} = \hat{V}_{\hat{V}_{a \max}} = \hat{V}_1 = 1 \\ \hat{T} < 1 &\rightarrow \hat{V}_{\gamma_{\max}} = 1 > \hat{V}_{\hat{V}_{a \max}}\end{aligned}\quad (6.11)$$

Obviamente la condición $\hat{T} = 0$ (eje de abcisas) corresponde al planeador.

Los valores máximos del ángulo de asiento de velocidad y de la velocidad ascensional adimensional son funciones monótonas crecientes del

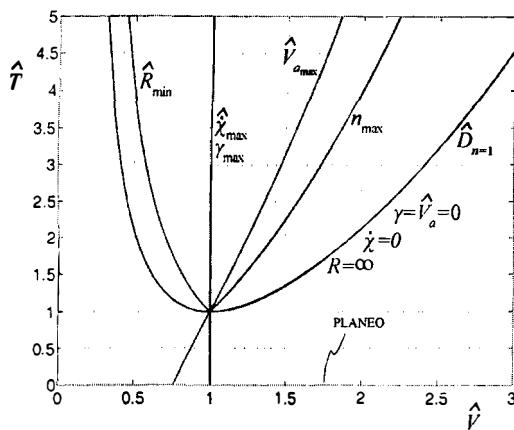


Figura 6.2. Diagrama velocidad-empuje adimensionales para vuelo en un plano vertical y para viraje casi-estacionario.

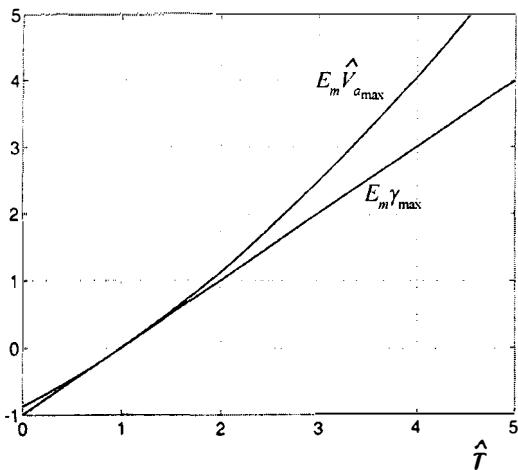


Figura 6.3. Valores máximos del ángulo de asiento de velocidad y de la velocidad ascensional adimensional.

empuje adimensional \hat{T} (ver Figura 6.3), por lo que los valores máximos de los máximos se obtendrán imponiendo el valor máximo del empuje adimensional, \hat{T}_{\max} , para cada altitud de vuelo:

$$E_m(\gamma_{\max})_{\max} = \hat{T}_{\max} - 1 \quad (6.12)$$

$$E_m(\hat{V}_{a \max})_{\max} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \sqrt{\hat{T}_{\max}^2 + 3} \left(2\hat{T}_{\max} - \sqrt{\hat{T}_{\max}^2 + 3} \right) \quad (6.13)$$

Cuando el avión se encuentra en su techo teórico ($\hat{T}_{\max} = 1$), son nulos tanto el ángulo de asiento de velocidad máximo de los máximos como la velocidad ascensional adimensional máxima.

Por último es interesante resaltar que, en la jerga coloquial de la Mecánica del Vuelo, suele hablarse de tres tipos de subidas óptimas: subida más pendiente o con máximo gradiente (matemáticamente, subida con γ_{\max}), subida más rápida (subida con $V_a \max$) y subida más económica (subida con el mínimo peso de combustible consumido por unidad de altitud ganada, es decir, subida con $|dW/dh|_{\min}$).

6.2.2. Corrección para vuelo acelerado

En el análisis casi-estacionario de actuaciones efectuado hasta ahora se consideran despreciables las fuerzas de inercia tangenciales a la trayectoria y, por tanto, la energía suministrada por el motor se invierte en incrementar la energía potencial y en compensar la energía disipada por la resistencia, despreciándose el incremento de energía cinética. Si la aceleración a lo largo de la trayectoria de subida no es despreciable (lo que sucede en aviones con T/W alto), esto no es aplicable.

Para realizar un análisis más completo, se siguen efectuando las hipótesis habituales (por ejemplo, el ángulo de ataque del empuje es pequeño), pero ahora se supone que la aceleración tangencial no es despreciable.

El equilibrio de fuerzas según el eje x_w será ahora (ver el sistema de ecuaciones (3.15)):

$$T - D - W \sin \gamma = \frac{W}{g} \frac{dV}{dt} \quad (6.14)$$

Multiplicando la anterior expresión por la velocidad aerodinámica, queda:

$$(T - D)V = W(V \sin \gamma + \frac{1}{g} V \frac{dV}{dt}) \quad (6.15)$$

e introduciendo aquí la definición de velocidad ascensional:

$$\frac{(T - D)V}{W} = V_a + \frac{1}{g} V \frac{dV}{dh} \frac{dh}{dt} = V_a(1 + \frac{d(V^2/2)}{d(gh)}) \quad (6.16)$$

En la ecuación anterior se observa que el empuje que le sobra a un avión respecto de la resistencia disipada puede utilizarse en subir o en acelerar. Por

ello se denomina **Exceso de Potencia Específico, SEP** (del inglés, “Specific Excess Power”) a:

$$\text{SEP} = \frac{(T - D)V}{W} \quad (6.17)$$

Introduciendo esta nueva variable en la expresión (6.16) se obtiene:

$$V_a = \frac{\text{SEP}}{1 + \frac{d(V^2/2)}{d(gh)}} \quad (6.18)$$

Si el avión volara de forma casi-estacionaria, con el mismo valor de SEP que en el caso no estacionario, la relación entre la velocidad ascensional para el vuelo no-estacionario, V_a , y la velocidad ascensional para el vuelo casi-estacionario, $(V_a)_{ce}$, sería:

$$(V_a)_{ce} = \text{SEP} \rightarrow \frac{V_a}{(V_a)_{ce}} = \frac{1}{1 + \frac{d(V^2/2)}{d(gh)}} \quad (6.19)$$

Obsérvese que si un avión se acelera apreciablemente en su trayectoria de subida, la velocidad ascensional que se obtiene es menor que la que se obtendría si no se acelerara (caso casi-estacionario) y empleara todo su exceso de potencia en subir.

6.3. Actuaciones de punto en viraje casi-estacionario

Para curvar la trayectoria de un avión en un plano horizontal, es preciso crear una fuerza normal a la misma y contenida en dicho plano que proporcione la aceleración centrípeta necesaria. Esto se podría conseguir de distintas formas.

- En primer lugar se podría disponer de un “motor” que proporcionara fuerza lateral, lo cual nunca ha sido llevado a la práctica por motivos obvios.
- En segundo lugar se podría hacer resbalar el avión con las alas a nivel, con lo que aparece una fuerza lateral, Q . Sin embargo, esta fuerza lateral es pequeña y el incremento de resistencia asociado con los ángulos de resbalamiento distintos de cero es grande.

- Y una tercera forma, la universalmente empleada, consiste en generar un ángulo de balance sin resbalamiento, con lo que la componente de la sustentación en el plano horizontal curva la trayectoria y la componente de la sustentación perpendicular al plano horizontal equilibra el peso (ver Figura 6.4).

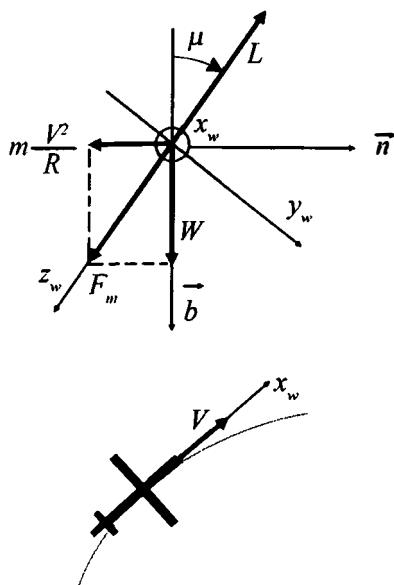


Figura 6.4. Fuerzas exteriores en un viraje horizontal simétrico.

En un viraje simétrico, correcto o coordinado ($\beta = 0$) la resultante F_m de las fuerzas másicas (peso más fuerza “centrífuga”) está contenida en el plano de simetría del avión, ya que la fuerza aerodinámica lateral Q es despreciable ($Q \cong 0$) y la sustentación L (que está contenida en el plano de simetría) debe equilibrar a F_m (ver Figura 6.4).

Sin embargo, en un viraje no simétrico o no coordinado ($\beta \neq 0$) aparece una fuerza aerodinámica lateral Q y la resultante de las fuerzas aerodinámicas F_A en el plano $y_w - z_w$ (resultante de L y Q) se sale del plano de simetría: para $\beta > 0$ está desplazada hacia la izquierda del plano de simetría y para $\beta < 0$ hacia la derecha. Por tanto la resultante F_m de las fuerzas másicas (peso más fuerza “centrífuga”), que debe equilibrar a F_A , estará desplazada, para $\beta > 0$ hacia la derecha del plano de simetría y para $\beta < 0$ hacia la izquierda (ver

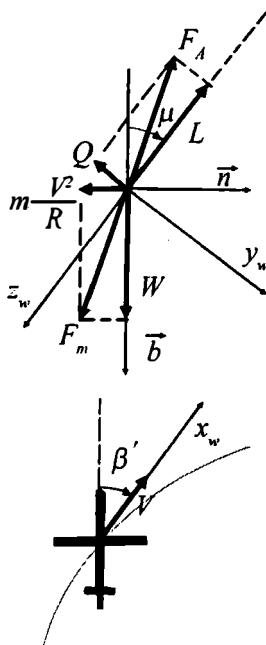


Figura 6.5. Fuerzas exteriores en un viraje horizontal no simétrico.

Figura 6.5).

Este hecho es la base del movimiento de la bola en el instrumento de vuelo llamado bastón-bola o indicador de viraje.

La bola, que puede moverse libremente por un canal, sigue a la fuerza másica y por tanto indica cualitativamente el signo del ángulo de resbalamiento: la bola se desplazará hacia la derecha del plano de simetría cuando $\beta > 0$ y hacia la izquierda cuando $\beta < 0$. Así pues, para contrarrestar un ángulo de resbalamiento positivo, el piloto debe introducir un momento de guiñada positivo, por lo que debe deflectar el timón de dirección hacia la derecha, pisando el pedal derecho del mando direccional. A esta regla práctica de pilotaje, los pilotos se refieren coloquialmente como "pisar la bola".

El bastón, segundo elemento del instrumento bastón-bola, está conectado directamente a un giróscopo e indica velocidad angular del avión según el eje z_b (normalmente en °/min, hacia la derecha o hacia la izquierda).

Las ecuaciones del movimiento que se utilizarán para este cálculo de actuaciones puntuales en viraje son las de vuelo simétrico en un plano horizontal, casi-estacionario y con ángulo de ataque del empuje pequeño

(ver apartado 3.5.3). Aunque las tres ecuaciones dinámicas de fuerzas se proyectaron en ejes viento, a partir de ahora se expresarán en el triángulo intrínseco de la trayectoria (tangente, normal y binormal), con objeto de clarificar más el sentido físico de los virajes.

Según esto el sistema de dos ecuaciones cinemáticas y tres dinámicas en ejes intrínsecos queda en la forma (ver Figura 6.4):

$$\begin{aligned}\dot{x}_e &= V \cos \chi \\ \dot{y}_e &= V \sin \chi \\ T - D &= 0 \\ L \sin \mu &= \frac{W}{g} V \dot{\chi} \\ W - L \cos \mu &= 0\end{aligned}\tag{6.20}$$

Para adimensionalizar el sistema se recurre a los mismos adimensionadores introducidos en el apartado 5.3 (empuje base, T_B , velocidad base, V_B , y peso, W):

$$\begin{aligned}\hat{x}_e &= \hat{V} \cos \chi \\ \hat{y}_e &= \hat{V} \sin \chi \\ \hat{T} - \hat{D} &= 0 \\ n \sin \mu - \hat{V} \frac{V_B \dot{\chi}}{g} &= 0 \\ n \cos \mu - 1 &= 0\end{aligned}\tag{6.21}$$

Este sistema de cinco ecuaciones hay que completarlo con las características aerodinámicas del avión (ver apartado 4.3) y las características

propulsivas del turborreactor (ver apartado 5.2):

$$\begin{aligned}\hat{D} &= \frac{1}{2} \left(\hat{V}^2 + \frac{n^2}{\hat{V}^2} \right) \\ n &= \hat{V}^2 \frac{C_L}{C_{L\text{opt}}} \\ \frac{\hat{T}}{\hat{T}_{11}(\pi)} &= \left(\frac{\sigma}{\sigma_{11}} \right)^x\end{aligned}\tag{6.22}$$

Suponiendo además que la altitud de vuelo es un dato del problema, en las ocho ecuaciones anteriores se cuentan como variables dependientes \hat{x}_e , \hat{y}_e , \hat{V} , χ , \hat{T} , \hat{D} , n , μ , C_L y π , por lo que el sistema tiene dos grados de libertad matemáticos.

La velocidad de pérdida, V_S , en viraje simétrico horizontal se define como la mínima velocidad a la que es posible ese vuelo a cada altitud y para cada configuración. Utilizando la ecuación de fuerzas según la binormal de la trayectoria:

$$V_S = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{L\text{máx}}} \frac{1}{\cos \mu}} \rightarrow \hat{V}_S = \frac{V_S}{V_B} = \sqrt{n} \sqrt{\frac{C_{L\text{opt}}}{C_{L\text{máx}}}}\tag{6.23}$$

Obsérvese que en viraje el factor de carga ha de ser siempre superior a la unidad. Además el factor de carga y el ángulo de balance de velocidad están relacionados de forma que si uno aumenta el otro también lo hace, hasta llegar a un ángulo de 90° para el cual el factor de carga es infinito (Figura 6.6).

Comparando las expresiones obtenidas en este apartado con las del vuelo horizontal rectilíneo (apartado 5.4), puede deducirse que n , α , V_S , T y D son mayores en viraje horizontal que en vuelo horizontal rectilíneo, para las mismas condiciones de vuelo y la misma configuración.

De las tres relaciones dinámicas adimensionales ahora se despejan el factor de carga, n , el ángulo de balance de velocidad, μ , y la **velocidad angular de viraje**, $\dot{\chi}$, en función de los dos grados de libertad escogidos (\hat{V}, \hat{T}):

$$n = \hat{V} \sqrt{2\hat{T} - \hat{V}^2}\tag{6.24}$$

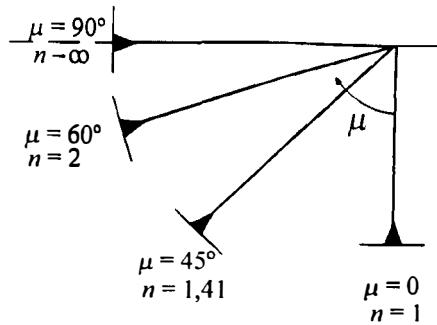


Figura 6.6. Ángulos de balance de velocidad y factores de carga en viraje horizontal simétrico.

$$\cos \mu = \frac{1}{n} = \frac{1}{\hat{V} \sqrt{2\hat{T} - \hat{V}^2}} \quad (6.25)$$

$$\hat{\chi} = \frac{\dot{\chi} V_B}{g} = \sqrt{2\hat{T} - \hat{V}^2 - \frac{1}{\hat{V}^2}} \quad (6.26)$$

Obsérvese que se ha introducido una velocidad angular de viraje adimensional, $\hat{\chi}$, utilizando como adimensionalizador g/V_B . Además también es interesante determinar el **radio del viraje**, R :

$$R = \frac{V}{\dot{\chi}} \rightarrow \hat{R} = \frac{Rg}{V_B^2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\hat{T}}{\hat{V}^2} - 1 - \frac{1}{\hat{V}^4}}} \quad (6.27)$$

donde ahora se ha introducido un radio de viraje adimensional, \hat{R} , utilizando como adimensionalizador V_B^2/g .

Téngase en cuenta que para \hat{V} y \hat{T} dados, n y μ no dependen de la altitud, mientras que $\dot{\chi}$ y R empeoran con la altitud ($\dot{\chi}$ disminuye y R aumenta).

Derivando respecto a la velocidad adimensional las expresiones de n , $\dot{\chi}$ y \hat{R} , es posible obtener los tres virajes óptimos que se resumen a continuación:

- a) Viraje con factor de carga máximo (o ángulo de balance máximo)

Haciendo $\partial n / \partial \hat{V} = 0$, se obtiene:

$$\hat{V}_{n_{\max}} = \sqrt{\hat{T}}, \quad n_{\max} = \hat{T}, \quad \frac{(C_L)_{n_{\max}}}{C_{L_{\text{opt}}}} = 1 \quad (6.28)$$

b) Viraje con velocidad angular máxima

Haciendo $\partial \hat{\chi} / \partial \hat{V} = 0$, se obtiene:

$$\hat{V}_{\dot{\chi}_{\max}} = 1, \quad \hat{\chi}_{\max} = \sqrt{2\hat{T} - 2}, \quad n_{\dot{\chi}_{\max}} = \sqrt{2\hat{T} - 1}, \quad \frac{(C_L)_{\dot{\chi}_{\max}}}{C_{L_{\text{opt}}}} = \sqrt{2\hat{T} - 1} \quad (6.29)$$

c) Viraje con radio de giro mínimo

Haciendo $\partial \hat{R} / \partial \hat{V} = 0$, se obtiene:

$$\hat{V}_{R_{\min}} = \frac{1}{\sqrt{\hat{T}}}, \quad \hat{R}_{\min} = \frac{1}{\sqrt{\hat{T}^2 - 1}}, \quad n_{R_{\min}} = \sqrt{2 - \frac{1}{\hat{T}^2}}, \quad \frac{(C_L)_{R_{\min}}}{C_{L_{\text{opt}}}} = \sqrt{2\hat{T}^2 - 1} \quad (6.30)$$

Obsérvese que si $\hat{T} = 1$ los tres virajes óptimos anteriores “colapsan” y el avión vuela con velocidad base, factor de carga igual a la unidad, coeficiente de sustentación óptimo, velocidad angular nula y radio de viraje infinito (vuelo rectilíneo). Para que el viraje sea posible, se ha de cumplir que $\hat{T} > 1$ y entonces se satisface (ver Figura 6.2):

$$\begin{aligned} \hat{V}_{R_{\min}} &< \hat{V}_{\dot{\chi}_{\max}} = 1 < \hat{V}_{n_{\max}} \\ (C_L)_{R_{\min}} &> (C_L)_{\dot{\chi}_{\max}} > (C_L)_{n_{\max}} = C_{L_{\text{opt}}} \end{aligned} \quad (6.31)$$

Combinando las desigualdades de velocidades dadas por la expresión anterior, con las proporcionadas por la expresión (6.11) para el vuelo en subida, se concluye que:

$$\hat{T} > 1 \rightarrow \hat{V}_2 < \hat{V}_{R_{\min}} < \hat{V}_{\gamma_{\max}} = \hat{V}_{\dot{\chi}_{\max}} = 1 < \hat{V}_{\hat{V}_{\alpha_{\max}}} < \hat{V}_{n_{\max}} < \hat{V}_1 \quad (6.32)$$

La Figura 6.7 representa los valores máximos para el factor de carga, la velocidad angular de guiñada adimensional y el radio de viraje adimensional, en función del empuje adimensional \hat{T} . Obsérvese que las actuaciones óptimas en viraje casi-estacionario mejoran con \hat{T} y por tanto, para cada altitud, los valores óptimos de los óptimos se conseguirán imponiendo \hat{T}_{\max} :

$$(n_{\max})_{\max} = \hat{T}_{\max} \quad (6.33)$$

$$(\hat{\chi}_{\max})_{\max} = \sqrt{2\hat{T}_{\max} - 2} \quad (6.34)$$

$$(\hat{R}_{\min})_{\min} = \frac{1}{\sqrt{\hat{T}_{\max}^2 - 1}} \quad (6.35)$$

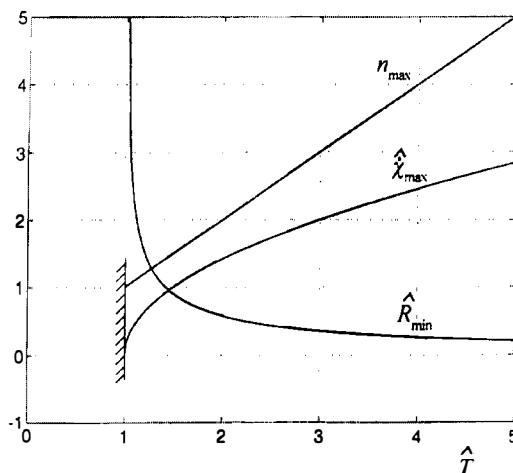


Figura 6.7. Valores máximos del factor de carga, velocidad angular de giñada adimensional y radio de viraje adimensional.

De las expresiones anteriores puede deducirse que las actuaciones óptimas empeoran con la altitud de vuelo, ya que al aumentar ésta el empuje adimensional máximo disponible disminuye (ver la última ecuación del sistema (6.22)) y la velocidad base aumenta. En el techo teórico del avión ($\hat{T}_{\max} = 1$), el factor de carga máximo de los máximos es la unidad, la velocidad angular máxima de las máximas es nula y el radio de viraje mínimo de los mínimos es infinito (vuelo rectilíneo).

En los virajes óptimos de los óptimos anteriormente desarrollados es preciso imponer limitaciones por factor de carga (el factor de carga requerido debe ser menor que el factor de carga máximo que es capaz de soportar la estructura o el piloto) y por coeficiente de sustentación (el coeficiente de sustentación requerido debe ser menor que el $C_{L\max}$).

6.4. Actuaciones de punto en viraje instantáneo

En este apartado se analizan las actuaciones puntuales de un avión provisto de turborreactores en viraje simétrico en un plano horizontal y con un ángulo de ataque del empuje pequeño, pero en lugar de introducir la hipótesis de vuelo casi-estacionario como en el apartado anterior, ahora se supone que el vuelo tiene una aceleración apreciable.

Las ecuaciones de fuerzas según la normal y la binormal son idénticas

a las formuladas en el apartado anterior (cuarta y quinta expresiones (6.20)):

$$L \sin \mu = \frac{W}{g} V \dot{\chi} \quad (6.36)$$

$$W - L \cos \mu = 0$$

Operando con ellas se obtiene para la velocidad angular de viraje y el radio de viraje:

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= \frac{g}{V} \sqrt{n^2 - 1} \\ R &= \frac{V}{\dot{\chi}} = \frac{V^2}{g \sqrt{n^2 - 1}} \end{aligned} \quad (6.37)$$

Introduciendo en estas expresiones la definición de factor de carga y adimensionalizando de forma análoga al apartado anterior, queda:

$$\hat{\chi} = \frac{\dot{\chi} V_B}{g} = \sqrt{\left(\frac{C_L}{C_{L_{\text{opt}}}}\right)^2 \hat{V}^2 - \frac{1}{\hat{V}^2}} \quad (6.38)$$

$$\hat{R} = \frac{R g}{V_B^2} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{C_L}{C_{L_{\text{opt}}}}\right)^2 - \frac{1}{\hat{V}^4}}} \quad (6.39)$$

Para una velocidad fijada cualquiera, el piloto puede elegir el coeficiente de sustentación que estime oportuno, pero la máxima velocidad angular adimensional y el mínimo radio de viraje adimensional se obtienen ambos imponiendo que el coeficiente de sustentación sea $C_{L_{\text{máx}}}$; es decir:

$$\hat{\chi}_{\text{máx}} = \sqrt{\left(\frac{C_{L_{\text{máx}}}}{C_{L_{\text{opt}}}}\right)^2 \hat{V}^2 - \frac{1}{\hat{V}^2}} \quad (6.40)$$

$$\hat{R}_{\text{mín}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{C_{L_{\text{máx}}}}{C_{L_{\text{opt}}}}\right)^2 - \frac{1}{\hat{V}^4}}} \quad (6.41)$$

A este viraje se le suele denominar viraje instantáneo óptimo. El vocablo “óptimo” proviene de la imposición de que se vuela con coeficiente

de sustentación máximo y el vocablo “instantáneo” se introduce para resaltar que no se puede mantener este viraje ya que la velocidad evolucionará con el tiempo de acuerdo con la ecuación de fuerzas según la tangente a la trayectoria, no utilizada hasta ahora:

$$T - D = \frac{W}{g} \frac{dV}{dt} \quad (6.42)$$

que adimensionalizada usualmente presenta la forma (ver ecuación (4.25)):

$$\hat{T} - \frac{1}{2} \hat{V}^2 \left[1 + \left(\frac{C_{L\max}}{C_{Lopt}} \right)^2 \right] = \frac{V_B E_m}{g} \frac{d\hat{V}}{dt} \quad (6.43)$$

El piloto puede introducir ahora como segundo grado de libertad $\hat{T} = \hat{T}_{\max}$ y ya se podrá integrar la expresión anterior para obtener la velocidad adimensional en función del tiempo. En primer lugar se reordena esta ecuación en la forma:

$$t = \frac{2V_B E_m}{g \left[1 + \left(\frac{C_{L\max}}{C_{Lopt}} \right)^2 \right]} \int_{\hat{V}_i}^{\hat{V}} \frac{d\hat{V}}{a^2 - \hat{V}^2} \quad (6.44)$$

donde

$$a = \sqrt{\frac{2\hat{T}_{\max}}{1 + \left(\frac{C_{L\max}}{C_{Lopt}} \right)^2}}$$

La solución de esta integral inmediata es:

$$t = \frac{V_B E_m}{g \sqrt{2\hat{T}_{\max}} \left[1 + \left(\frac{C_{L\max}}{C_{Lopt}} \right)^2 \right]} \ln \frac{(\hat{V} + a)(\hat{V}_i - a)}{(\hat{V} - a)(\hat{V}_i + a)} \quad (6.45)$$

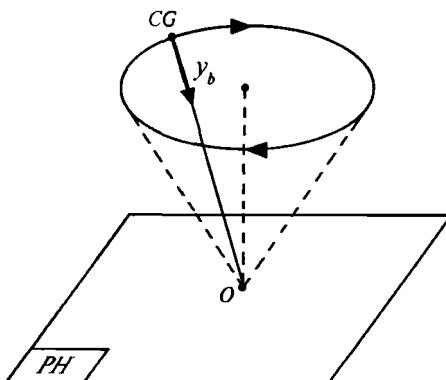
en donde se ha supuesto que $\hat{V} > a$, es decir, que según la ecuación (6.43) el movimiento es siempre decelerado.

Invertiendo la ecuación anterior se obtiene la evolución de la velocidad adimensional con el tiempo, $\hat{V} = \hat{V}(t)$, e introduciendo esta función en las expresiones (6.40) y (6.41) se determinan \hat{x}_{\max} y \hat{R}_{\min} en función del tiempo.

6.5. Problemas 6.1 y 6.2

PROBLEMA 6.1

La figura adjunta representa un avión efectuando un viraje horizontal, simétrico y estacionario, con su eje y_b apuntando siempre hacia un objetivo situado en el suelo (punto O).



Suponiendo además que:

1. Se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y básicas de avión (por ejemplo, el peso W es una constante, la polar es parabólica de coeficientes constantes, etc.).
2. El empuje de los motores, T , está dirigido según el eje x_w .
3. La atmósfera está en calma y su densidad ρ es una constante conocida en el margen de altitudes considerado.
4. La constante de la gravedad g es conocida.

Se pide:

1º) Plantear el sistema de ecuaciones que describen el comportamiento del avión y determinar el número de grados de libertad matemáticos de dicho sistema.

2º) Determinar el radio de curvatura, R , la altura, h , el ángulo de balance de velocidad, μ , y la distancia avión-objetivo, d , en función de T/W , C_L , y en caso necesario, de los restantes grados de libertad del sistema.

3º) Determinar la distancia mínima, $(d_{\min})_{\min}$, así como los valores de T/W y μ correspondientes.

Solución:

1º) El sistema de ecuaciones dinámicas para un viraje simétrico, horizontal y estacionario es:

$$\begin{aligned} T - D &= 0 \\ L \sin \mu - \frac{W}{g} \frac{V^2}{R} &= 0 \\ L \cos \mu - W &= 0 \end{aligned}$$

En este sistema pueden introducirse las expresiones de la sustentación y la resistencia:

$$L = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_L; \quad D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D = \frac{1}{2} \rho V^2 S (C_{D0} + k C_L^2)$$

Adicionalmente la ligadura geométrica de que el eje y_b (que coincide con el eje y_w al no existir resbalamiento) apunte siempre hacia el objetivo O , se formula mediante:

$$\tan \mu = \frac{h}{R}$$

En este sistema de cuatro ecuaciones (tres ecuaciones de fuerzas y una ecuación de ligadura geométrica) hay seis variables dependientes (T, C_L, V, μ, R, h), por lo que el sistema tiene dos grados de libertad matemáticos (se tomarán, como sugiere el enunciado, T/W y C_L).

2º) De la primera relación dinámica se obtiene una expresión para la velocidad en función de los dos grados de libertad matemáticos:

$$T = D = \frac{1}{2} \rho V^2 S (C_{D0} + k C_L^2) \rightarrow V = \sqrt{\frac{2W}{\rho S}} \sqrt{\frac{T/W}{C_{D0} + k C_L^2}}$$

De la tercera relación dinámica:

$$\cos \mu = \frac{W}{L} = \frac{2W}{\rho V^2 S C_L} = \frac{1}{T/W} \frac{C_{D0} + k C_L^2}{C_L}$$

Obsérvese que se ha de cumplir:

$$\frac{T}{W} \frac{C_L}{C_D} \geq 1$$

Dividiendo la segunda relación dinámica por la tercera e igualando con la ligadura:

$$\tan \mu = \frac{V^2}{gR} = \frac{h}{R} \rightarrow h = \frac{V^2}{g} = \frac{2W}{\rho S g} \frac{T/W}{C_{D0} + kC_L^2}$$

Para calcular el radio de curvatura se opera con las ecuaciones dinámicas segunda y tercera:

$$R = \frac{V^2}{g\sqrt{n^2 - 1}} = \frac{1}{g\sqrt{(n/V^2)^2 - 1/V^4}} = \frac{2W}{\rho S g} \frac{1}{\sqrt{C_L^2 - \frac{(C_{D0} + kC_L^2)^2}{(T/W)^2}}}$$

Finalmente la distancia del avión (punto CG) al objetivo (punto O) queda:

$$d = \frac{R}{\cos \mu} = \frac{2W}{\rho S g} \frac{\frac{T}{W} \frac{C_L}{C_{D0} + kC_L^2}}{\sqrt{C_L^2 - \frac{(C_{D0} + kC_L^2)^2}{(T/W)^2}}}$$

3º) Para resolver este apartado, conviene efectuar un cambio en los grados de libertad elegidos y plantear así la distancia en función de C_L, μ :

$$d = \frac{h}{\sin \mu} = \frac{V^2}{g \sin \mu} = \frac{4W}{\rho S g} \frac{1}{C_L \sin 2\mu}$$

La distancia mínima de las mínimas se obtiene haciendo $\mu = 45^\circ$ y $C_L = C_{L\max}$:

$$(d_{\min})_{\min} = \frac{4W}{\rho S g} \frac{1}{C_{L\max}}$$

y el valor de T/W correspondiente se obtiene de la expresión del $\cos \mu$:

$$\cos \mu = \frac{1}{T/W} \frac{C_{D0} + kC_L^2}{C_L} \rightarrow \frac{T}{W} = \sqrt{2} \frac{C_{D0} + kC_{L\max}^2}{C_{L\max}}$$

Téngase en cuenta que para que pueda alcanzarse la distancia calculada no debe superarse el empuje máximo de los motores; es decir:

$$\frac{T_{\max}}{W} \geq \sqrt{2} \frac{C_{D0} + kC_{L\max}^2}{C_{L\max}}$$

PROBLEMA 6.2

Un avión en vuelo atmosférico pretende efectuar una serie de experimentos en condiciones de gravedad nula ($0-g$), es decir, en condiciones en las cuales el avión no ejerce acción alguna sobre los pasajeros ni la carga y éstos parecen que “flotan”. Para ello efectúa un vuelo simétrico con las alas a nivel contenido en el plano vertical a partir de unas condiciones iniciales de velocidad V_i y de ángulo de asiento de velocidad γ_i (no necesariamente pequeño) datos del problema.

Suponiendo además que:

1. Se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (en particular, el peso del avión W es constante, la deflexión del timón de profundidad no contribuye a la sustentación del avión y la polar es parabólica de coeficientes constantes).
2. El empuje de los motores está dirigido según el eje x_w y pasa por el centro de masas del avión.
3. La bodega donde se realizan los experimentos de $0-g$ se supone que coincide con el centro de masas del avión.
4. g es una constante conocida y se conoce la función $\rho = \rho(h)$.

Se pide:

1º) Plantear el sistema de ecuaciones dinámicas que permite estudiar el movimiento del avión en $0-g$, discutiendo cuáles son las condiciones a imponer para volar en $0-g$ y los grados de libertad matemáticos del sistema.

2º) Determinar la evolución del ángulo de asiento de velocidad γ con el tiempo y la trayectoria descrita por el avión, para valores fijados de los grados de libertad matemáticos del sistema.

3º) Determinar las evoluciones con el tiempo del ángulo de ataque y del empuje, para valores fijados de los grados de libertad matemáticos del sistema.

Solución:

1º) Planteando las ecuaciones de fuerza para una carga en la bodega, de peso W_p , y teniendo en cuenta que las paredes no pueden realizar ninguna

acción sobre ella queda:

$$-W_p \sin \gamma - \frac{W_p}{g} \dot{V} = 0$$

$$W_p \cos \gamma + \frac{W_p}{g} V \dot{\gamma} = 0$$

es decir, se cumple que:

$$\sin \gamma + \frac{\dot{V}}{g} = 0$$

$$\cos \gamma + \frac{V \dot{\gamma}}{g} = 0$$

Planteando ahora las ecuaciones de fuerza del avión completo:

$$T - D - W \sin \gamma - \frac{W}{g} \dot{V} = 0 \rightarrow T - D - W(\sin \gamma + \frac{\dot{V}}{g}) = 0$$

$$-L + W \cos \gamma + \frac{W}{g} V \dot{\gamma} = 0 \rightarrow -L + W(\cos \gamma + \frac{V \dot{\gamma}}{g}) = 0$$

e introduciendo en ellas la condición cinemática de la carga se obtiene:

$$T = D$$

$$L = 0$$

Por tanto el piloto del avión, para que la carga en la bodega vaya en condiciones de 0-g, debe imponer sustentación nula y una ley de empuje que equilibre exactamente la resistencia del avión. De esta forma el avión volará siempre en caída libre, con el peso como única fuerza del problema. Obviamente el sistema no tiene grados de libertad matemáticos y cualquier variable puede determinarse en función del tiempo.

2º) Las ecuaciones cinemáticas en un plano vertical son:

$$\dot{x}_e = V \cos \gamma$$

$$\dot{h} = V \sin \gamma$$

Dividiendo ambas entre sí e imponiendo las relaciones cinemáticas deducidas en el apartado 1º) para este vuelo a 0-g, queda:

$$\frac{dh}{dx_e} = \tan \gamma = \frac{1}{V} \frac{dV}{d\gamma}$$

que es fácilmente integrable para obtener:

$$\frac{V}{V_i} = \frac{\cos \gamma_i}{\cos \gamma}$$

De la relación cinemática primera:

$$\dot{x}_e = V \cos \gamma = V_i \cos \gamma_i = cte \rightarrow x_e = V_i \cos \gamma_i t$$

donde se ha supuesto que para $t = 0$, $x_e = 0$.

De la segunda relación cinemática del apartado 1º) se obtiene:

$$\cos^2 \gamma + \frac{V \cos \gamma}{g} \frac{d\gamma}{dt} = 0 \rightarrow \tan \gamma = \tan \gamma_i - \frac{g}{V_i \cos \gamma_i} t$$

A continuación se plantea la ecuación cinemática para h :

$$\frac{dh}{dx_e} = \tan \gamma = \tan \gamma_i - \frac{g}{V_i \cos \gamma_i} t \rightarrow dh = V_i \cos \gamma_i \left(\tan \gamma_i - \frac{g}{V_i \cos \gamma_i} t \right) dt$$

e integrando:

$$h = h_i + V_i \sin \gamma_i t - \frac{1}{2} g t^2$$

Finalmente la trayectoria vendrá dada por:

$$h = h_i + x_e \tan \gamma_i - \frac{g}{2V_i^2 \cos^2 \gamma_i} x_e^2$$

que responde a la ecuación matemática de una parábola. Esta es la razón por la que a los vuelos atmosféricos a 0-g se les denomina “vuelos parabólicos”. A este mismo resultado se podría haber llegado más rápidamente planteando el problema en ejes ligados al suelo y suponiendo que la única fuerza del problema es la gravedad.

3º) El coeficiente de sustentación, el ángulo de ataque y el empuje vienen dados por:

$$L = 0 \rightarrow C_L = C_{L0} + C_{L\alpha} \alpha = 0 \rightarrow \alpha = -\frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}}$$

$$T = D \rightarrow T = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_{D0}$$

y como la velocidad viene dada por:

$$V^2 = \dot{x}_e^2 + \dot{h}^2 = V_i^2 - 2g(h - h_i) = V_i^2 - 2gV_i \sin \gamma_i t + g^2 t^2$$

finalmente se obtiene:

$$T = \frac{\rho S C_{D0}}{2} (V_i^2 - 2gV_i \sin \gamma_i t + g^2 t^2)$$

Téngase en cuenta que en la expresión anterior $\rho = \rho(h)$, donde h ya ha sido calculada como función del tiempo:

$$h = h_i + V_i \sin \gamma_i t - \frac{1}{2}gt^2$$

Actuaciones de aviones propulsados por hélices

7

7.1. Introducción

Las razones por las que se requiere un tratamiento ligeramente distinto en la determinación de actuaciones para los aviones provistos de turborreactores y para los aviones propulsados por motores alternativos y hélices son, básicamente, dos: las curvas características del turborreactor proporcionan información relativa a su empuje mientras que las del motor alternativo proporcionan información relativa a su potencia; y la información de potencia del motor alternativo hay que combinarla con las características de la hélice con el fin de obtener la potencia disponible para el vuelo.

En este capítulo se establece, en primer lugar, una formulación de la polar parabólica de coeficientes constantes en forma de potencia disipada adimensional; en el apartado 7.3 se efectúan una serie de hipótesis simplificativas con respecto a las características del grupo motopropulsor (motor alternativo y hélice), con objeto de obtener expresiones cerradas para las actuaciones; en el apartado 7.4 se formula la ecuación de fuerza tangente a la trayectoria en forma de potencia; en los apartados 7.5 y 7.6 se estudian, respectivamente, las actuaciones de punto e integrales en vuelo horizontal rectilíneo; en el apartado 7.7 se analizan las actuaciones puntuales en subidas y descensos; y, finalmente, en el apartado 7.8 se desarrollan las actuaciones puntuales para el caso de virajes horizontales simétricos casi-estacionarios.

7.2. Potencia disipada adimensional

El concepto de polar parabólica de coeficientes constantes, que se desarrolló en el apartado 4.3 bajo la forma de resistencia adimensional, se puede expresar alternativamente bajo la forma de potencia disipada adimensional.

En primer lugar, se define la potencia disipada por resistencia en un avión, P_d , como el producto de la resistencia por la velocidad aerodinámica:

$$P_d = DV = \frac{1}{2}\rho V^3 S C_{D0} + \frac{1}{2}\rho V^3 S k C_L^2 \quad (7.1)$$

Asimismo se define la potencia disipada parásita, P_{dp} , y la potencia disipada inducida, P_{di} , mediante:

$$P_{dp} = \frac{1}{2}\rho V^3 S C_{D0} \quad ; \quad P_{di} = \frac{1}{2}\rho V^3 S k C_L^2 \quad (7.2)$$

$$P_d = P_{dp} + P_{di}$$

Introduciendo ahora en la potencia disipada el concepto de factor de carga, n , se obtiene:

$$P_d = \frac{1}{2}\rho V^3 S C_{D0} + k \frac{n^2 W^2}{1/2\rho V S} \quad (7.3)$$

A continuación se introduce un nuevo adimensionalizador llamado **potencia base**, P_B , definido como el producto del empuje base por la velocidad base (ver apartado 5.3); es decir:

$$P_B = T_B V_B = \frac{W}{E_m} V_B \quad (7.4)$$

Mediante la potencia base es posible adimensionalizar la potencia disipada para obtener la potencia disipada adimensional, \hat{P}_d :

$$\hat{P}_d = \frac{P_d}{P_B} = \frac{DV}{(W/E_m)V_B} = \hat{D}\hat{V} = \frac{1}{2} \left(\hat{V}^3 + \frac{n^2}{\hat{V}} \right) \quad (7.5)$$

La potencia disipada adimensional, dada por la expresión anterior, puede descomponerse en potencia disipada adimensional parásita, \hat{P}_{dp} , y potencia disipada adimensional inducida, \hat{P}_{di} , mediante (ver Figuras 7.1 y 7.2):

$$\hat{P}_{dp} = \frac{1}{2}\hat{V}^3 \quad ; \quad \hat{P}_{di} = \frac{1}{2} \frac{n^2}{\hat{V}} \quad (7.6)$$

$$\hat{P}_d = \hat{P}_{dp} + \hat{P}_{di}$$

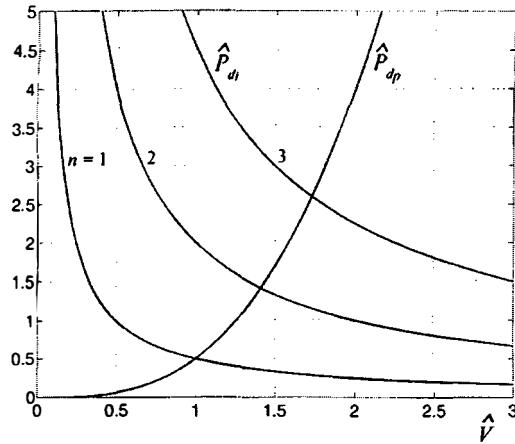


Figura 7.1. Potencias disipadas adimensionales parásita e inducida.

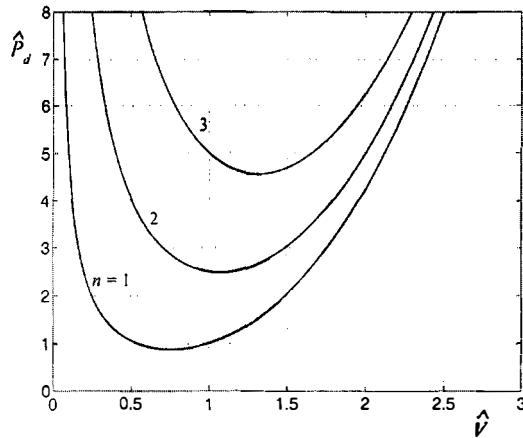


Figura 7.2. Potencia disipada adimensional.

Además, a cierta velocidad adimensional la potencia disipada adimensional presenta un mínimo. Tanto la potencia como la velocidad son funciones del factor de carga y vienen dadas por:

$$\hat{P}_{d\min} = \frac{P_{d\min}}{(W/E_m)V_B} = \frac{2}{3^{3/4}} n^{3/2} = 0.877 n^{3/2} \quad (7.7)$$

$$\hat{V}_{\hat{P}_{d\min}} = \frac{1}{3^{1/4}} \sqrt{n} = 0.760 \sqrt{n} \quad (7.8)$$

Obsérvese que la potencia disipada mínima es menor que la potencia

disipada para resistencia mínima y que la velocidad aerodinámica a la que hay que volar para que la potencia disipada sea mínima es menor que la velocidad aerodinámica de resistencia mínima (ver expresiones (4.21) y (4.22)); es decir:

$$0.877n^{3/2} = \hat{P}_{d\min} < (\hat{P}_d)_{\hat{D}_{\min}} = n^{3/2} \quad (7.9)$$

$$0.760\sqrt{n} = \hat{V}_{\hat{P}_{d\min}} < \hat{V}_{\hat{D}_{\min}} = \sqrt{n}$$

En la Figura 7.3 se representa, de forma geométrica, la diferencia entre los puntos de potencia disipada mínima y de resistencia mínima. Este último punto se obtiene trazando desde el origen la tangente a la curva de potencia disipada en función de la velocidad, ya que el punto de tangencia es el que proporciona un valor mínimo del cociente ordenada-abcisa.

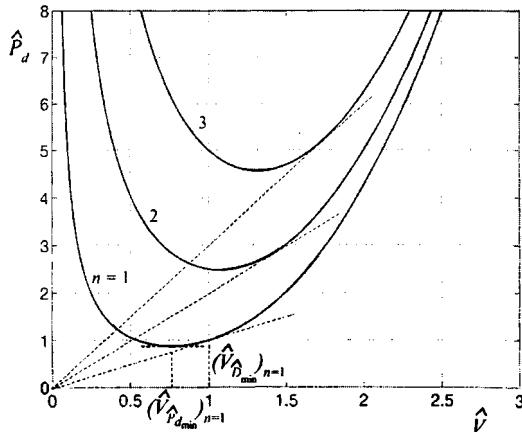


Figura 7.3. Condiciones de potencia disipada mínima y resistencia mínima.

Operando análogamente al apartado 4.3, en toda la formulación desarrollada es posible introducir el coeficiente de sustentación en lugar del factor de carga o de la velocidad aerodinámica adimensional.

Por último, la potencia disipada mínima, con dimensiones, vendrá dada por:

$$P_{d\min} = 0.877n^{3/2} \frac{W}{E_m} V_B = 2.482n^{3/2} \frac{W^{3/2}}{\rho^{1/2} S^{1/2}} C_{D0}^{1/4} k^{3/4} \quad (7.10)$$

7.3. Hipótesis acerca de las características del grupo motopropulsor

El grupo motopropulsor motor alternativo-hélice está compuesto, obviamente, por dos subsistemas. A continuación se establecen las hipótesis más usuales que, desde el punto de vista de la Mecánica del Vuelo, suelen aplicarse a motores alternativos y a hélices.

7.3.1. Motores alternativos

Las dos características más importantes de un motor alternativo, para los fines perseguidos en este libro, son la potencia proporcionada por el motor en su eje, P_m , y su gasto máscio de combustible, φ . Ambas pueden expresarse como funciones de la altitud, h , de la velocidad de vuelo, V , y de la presión de admisión, π . Es decir:

$$\begin{aligned} P_m &= P_m(h, V, \pi) \\ \varphi &= \varphi(h, V, \pi) \end{aligned} \tag{7.11}$$

Al igual que ocurría en el caso del turborreactor, es más conveniente para la Mecánica del Vuelo utilizar el consumo específico del motor alternativo, c_P , en lugar del gasto de combustible, φ . El consumo específico se define mediante:

$$c_P = \frac{\varphi g}{P_m} = c_P(h, V, \pi) \tag{7.12}$$

Téngase en cuenta que el consumo específico de un turborreactor, c_J , se define como el peso de combustible consumido por unidad de tiempo y unidad de empuje (ver expresión (5.3)) y en un motor alternativo su consumo específico, c_P , se define como el peso de combustible consumido por unidad de tiempo y unidad de potencia en el eje. Esto implica que las dimensiones de ambos son distintas: c_J tiene dimensiones de s^{-1} y c_P de m^{-1} .

El primer paso para establecer un modelo analítico simplificado de P_m consiste en suponer que es independiente de la velocidad (lo cual es una magnífica aproximación). Para c_P se va más allá y se supone simplemente que es una constante del problema. Es decir:

$$\begin{aligned} P_m &= P_m(h, \pi) \\ c_P &= cte \end{aligned} \tag{7.13}$$

El último paso para expresar la potencia en el eje de un motor alternativo, consiste en establecer que, para cada presión de admisión, es proporcional a cierta potencia de la densidad (en la troposfera y en la estratosfera los exponentes que ajustan el modelo son distintos, como ocurría para el turborreactor). Además, si el motor alternativo está sobrealimentado, la potencia no disminuye con la altitud hasta que se alcanza una altitud crítica, h_{crit} (dependiendo del motor, h_{crit} puede llegar hasta unos 20000 ft). Según todo lo anterior, el siguiente modelo constituye una aproximación razonable para los estudios preliminares de Actuaciones:

a) Motor alternativo convencional:

$$\begin{aligned} 0 \leq h \leq 11000 \text{ m} : \frac{P_m}{P_{m0}(\pi)} &= \sigma^{0.8} \\ 11000 \text{ m} < h : \frac{P_m}{P_{m0}(\pi)} &= 1.275\sigma \end{aligned} \quad (7.14)$$

b) Motor alternativo sobrealimentado:

$$\begin{aligned} 0 \leq h \leq h_{crit} : \frac{P_m}{P_{m0}(\pi)} &= 1 \\ h_{crit} < h \leq 11000 \text{ m} : \frac{P_m}{P_{m0}(\pi)} &= \frac{\sigma^{0.8}}{\sigma_{crit}^{0.8}} \\ 11000 \text{ m} < h : \frac{P_m}{P_{m0}(\pi)} &= 1.275 \frac{1}{\sigma_{crit}^{0.8}} \sigma \end{aligned} \quad (7.15)$$

en donde los subíndices “0” y “*crit*” representan, respectivamente, el nivel del mar y la altitud crítica para el motor sobrealimentado (recuérdese que $\sigma_{crit} = \sigma_{crit}(h_{crit})$ y $\sigma_{11} = 0.2971$).

7.3.2. Hélices

Desde el punto de vista de la Mecánica del Vuelo, la característica más destacada de las hélices es el llamado rendimiento propulsivo, η_p , definido como:

$$\eta_p = \frac{P_u}{P_m} = \frac{TV}{P_m} \quad (7.16)$$

donde P_u es la potencia útil para el vuelo, P_m es la potencia proporcionada por el motor alternativo en su eje, T es la tracción de la hélice y V es la velocidad aerodinámica.

En general el rendimiento propulsivo de una hélice, η_p , de una familia dada y con un diámetro dado, D , puede expresarse mediante una relación funcional del tipo:

$$\left. \begin{array}{l} \eta_p = \eta_p(J, \beta_{0.75}) \\ J = \frac{V}{ND} \end{array} \right\} \rightarrow \eta_p = \eta_p(V, N, \beta_{0.75}) \quad (7.17)$$

donde J es el llamado parámetro de avance; N representa aquí la velocidad angular de la hélice y $\beta_{0.75}$ es el ángulo de paso geométrico en la sección de la pala situada a una distancia del buje de 0.75 veces el radio de la hélice.

En una hélice de paso fijo, el piloto no puede cambiar el ángulo de paso de la misma y la expresión anterior quedaría:

$$\eta_p = \eta_p(V, N) \quad (7.18)$$

No es fácil disponer de modelos analíticos que proporcionen el rendimiento propulsivo de una hélice, aunque una hipótesis muy habitual consiste en suponer que el rendimiento propulsivo, η_p , es una constante del problema:

$$\eta_p = cte \quad (7.19)$$

Como ya se ha comentado en el apartado 5.2, el piloto de un avión dotado de turborreactores dispone de un único mando para controlar el empuje (la palanca de gases, que básicamente actúa sobre la cantidad de combustible inyectada y por tanto sobre las revoluciones del rotor), es decir, existe un solo parámetro de control del empuje, π .

Sin embargo, el piloto de un avión dotado de motor alternativo-hélice dispone de una palanca de gases (que actúa sobre la mariposa y permite cambiar la presión de admisión), de una palanca de revoluciones (sólo en aquellos aviones equipados con hélices de paso variable en vuelo) e incluso de una palanca de riqueza de mezcla. Por tanto, cuando se habla de “parámetro de control de empuje” en este tipo de sistemas propulsivos, se está presuponiendo que el piloto fija la mezcla, fija las revoluciones (si la hélice es de paso variable) y sólo actúa en vuelo sobre los gases, que son directamente el parámetro de control de empuje, π . Si se quisiera estudiar la influencia de los tres mandos

sobre las actuaciones del avión, deberían introducirse en la formulación tres “parámetros de control de empuje” (π_1, π_2, π_3).

7.4. Transformación de la ecuación de fuerza tangencial en ecuación de potencia

La expresión de fuerzas según la tangente a la trayectoria, para un vuelo casi-estacionario y con ángulo de ataque del empuje pequeño es (ver la tercera ecuación del sistema (3.17)):

$$T - D - W \sin \gamma = 0 \quad (7.20)$$

Multiplicando esta expresión por la velocidad aerodinámica, e introduciendo en ella el concepto de velocidad ascensional, V_a , se escribe la ecuación de fuerza tangencial en forma de potencia:

$$P_u - P_d - WV_a = 0 \quad (7.21)$$

donde P_u es la llamada potencia útil (o disponible) del grupo motopropulsor y P_d es la potencia disipada por resistencia.

Combinando las características del motor alternativo y de la hélice (ver apartado anterior), la potencia útil puede escribirse como:

$$P_u = TV = \eta_p P_m \quad (7.22)$$

y la potencia disipada por resistencia ya ha sido deducida en el apartado 7.2. Adimensionalizando la ecuación (7.21) mediante la potencia base, P_B , dada por la ecuación (7.4), se obtiene:

$$\hat{P}_u - \hat{P}_d - E_m \hat{V}_a = 0 \quad (7.23)$$

donde la potencia útil adimensional será:

$$\hat{P}_u = \frac{P_u}{P_B} = \frac{TV}{P_B} = \frac{\eta_p P_m}{P_B} \quad (7.24)$$

y la potencia disipada adimensional vendrá dada por la ecuación (7.5).

7.5. Vuelo horizontal rectilíneo. Actuaciones de punto

El sistema de ecuaciones de vuelo simétrico en un plano vertical, casi-estacionario, casi-rectilíneo y con ángulo de ataque del empuje pequeño, en donde se introduce la condición adicional de vuelo horizontal ($\gamma = 0$), ha sido desarrollado en el apartado 5.3 (ver expresiones (5.5)). Este sistema es válido, tanto para aviones dotados de turborreactores, como para aviones cuyo grupo motopropulsor es un motor alternativo y una hélice.

Sin embargo la ecuación de fuerzas según el eje x_w es más útil si se expresa en forma de potencias multiplicando esta ecuación por la velocidad (ver apartado anterior). El sistema tendrá ahora la forma siguiente:

$$\dot{x}_e = V$$

$$V_a = 0 \rightarrow h = cte$$

$$P_u - P_d = 0 \quad (7.25)$$

$$L - W = 0$$

$$\dot{m} + \varphi = 0$$

Este sistema ha de ser completado con las características aerodinámicas del avión y las características del grupo motopropulsor (ver apartados 7.2 y 7.3).

Para estudiar las actuaciones en vuelo horizontal de aviones provistos de motores alternativos y hélices se prescinde de la segunda relación cinemática, ya que la altitud de vuelo vendrá fijada por las condiciones iniciales del problema. Además, en el estudio de las actuaciones puntuales son irrelevantes la relación másica (el peso del avión es una constante local del problema) y la relación que proporciona el consumo de combustible o consumo específico del motor.

A continuación se adimensionalizan la relación cinemática restante y las dos relaciones dinámicas mediante los conceptos de velocidad adimensional, factor de carga y potencia base. El sistema adimensional final quedará formado

por las seis ecuaciones siguientes:

$$\hat{x}_e = \hat{V}$$

$$\hat{P}_u - \hat{P}_d = 0$$

$$n - 1 = 0$$

$$\hat{P}_d = \frac{1}{2} \left(\hat{V}^3 + \frac{n^2}{\hat{V}} \right) \quad (7.26)$$

$$n = \hat{V}^2 \frac{C_L}{C_{L\text{opt}}}$$

$$\hat{P}_u = \frac{\eta_p P_m}{P_B}$$

Obviamente el factor de carga vale siempre la unidad en este vuelo y el sistema anterior puede simplificarse, quedando:

$$\hat{x}_e = \hat{V}$$

$$\hat{P}_u - \hat{P}_d = 0$$

$$\hat{P}_d = \frac{1}{2} \left(\hat{V}^3 + \frac{1}{\hat{V}} \right) \quad (7.27)$$

$$1 = \hat{V}^2 \frac{C_L}{C_{L\text{opt}}}$$

$$\hat{P}_u = \frac{\eta_p P_m}{P_B}$$

Mediante la segunda y tercera ecuaciones del sistema anterior, se despeja la potencia útil adimensional en función de la velocidad adimensional de vuelo:

$$\hat{P}_u = \frac{1}{2} \left(\hat{V}^3 + \frac{1}{\hat{V}} \right) \quad (7.28)$$

y de ahí se obtiene la siguiente ecuación:

$$\hat{V}^4 - 2\hat{V}\hat{P}_u + 1 = 0 \quad (7.29)$$

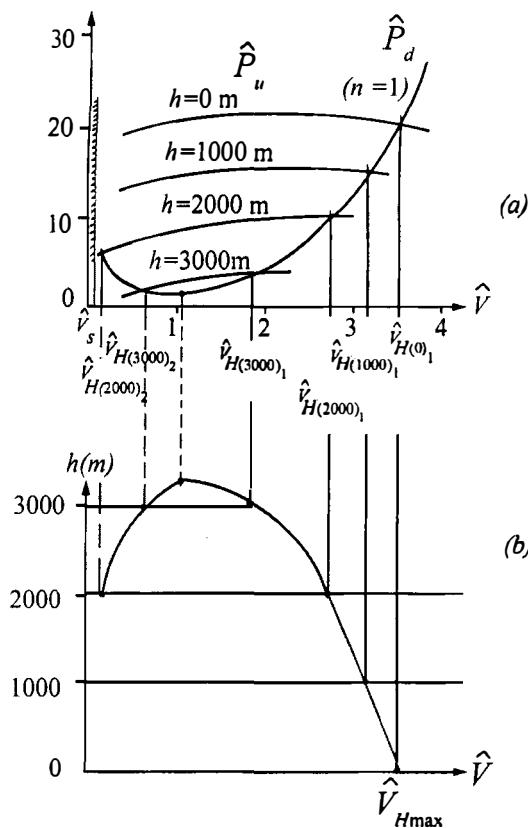


Figura 7.4. Actuaciones de punto en vuelo horizontal rectilíneo: a) Potencia útil y potencia disipada adimensionales; b) Velocidades de vuelo adimensionales en función de la altitud.

Si en esta expresión se introdujera un modelo analítico de la potencia útil adimensional, podría obtenerse la velocidad (o velocidades) adimensionales de vuelo horizontal rectilíneo.

La Figura 7.4 (a) representa de forma esquemática la potencia útil adimensional en función de la velocidad adimensional y de la altitud, para un valor dado del parámetro de control de empuje, π , y la potencia disipada adimensional en función de la velocidad adimensional. Igualando ambas potencias, se obtienen las dos velocidades adimensionales de vuelo horizontal para cada altitud (ver Figura 7.4 (b)). Obsérvese que el avión tal vez no pueda volar a la velocidad más baja de las dos, por ser inferior a la velocidad de pérdida adimensional, \hat{V}_S .

Para un valor dado del parámetro de control de empuje, a medida que

aumenta la altitud de vuelo la potencia del motor disminuye y la potencia base aumenta (por hacerlo la velocidad base) por lo que, suponiendo además que el rendimiento propulsivo de la hélice no varía demasiado con la altitud, la potencia útil adimensional cae fuertemente con la altitud (ver ecuación (7.24)). Esto significa que cuando el avión alcance la altitud en la que la curva de potencia útil adimensional máxima es tangente a la curva de potencia disipada adimensional, está en su **techo teórico**.

La velocidad máxima a cierta altitud se consigue imponiendo la potencia útil máxima. Al aumentar la altitud la velocidad máxima adimensional disminuye (por hacerlo la potencia útil adimensional), pero la velocidad base aumenta, por lo que no se dispone de información suficiente para determinar cual es la altitud para la que la velocidad máxima es máxima (en la práctica, si se introducen valores concretos de la potencia útil se observa que se produce al nivel del mar).

7.6. Vuelo horizontal rectilíneo. Actuaciones integrales

Se pretende ahora calcular el **alcance** y la **autonomía** en vuelo horizontal de un avión provisto de motor alternativo-hélice, entendiendo por alcance la distancia que es capaz de recorrer el avión para una carga de combustible dada y por autonomía el tiempo que puede permanecer el avión en el aire para dicha carga de combustible.

El sistema de ecuaciones a utilizar es el sistema (7.27), al cual es preciso añadir la relación másica:

$$\frac{dW}{dt} + c_P P_m = 0 \quad (7.30)$$

donde el consumo específico del motor alternativo, c_P , se supondrá constante.

Como el peso del avión es perfectamente conocido en los instantes inicial y final, y el tiempo es una de las incógnitas que se intentan calcular, se efectúa a continuación el cambio de variable independiente tiempo por peso para calcular el alcance y la autonomía:

$$\begin{aligned} \frac{dx_e}{dW} &= \frac{V}{dW/dt} = -\frac{V}{c_P P_m} \\ \frac{dt}{dW} &= \frac{1}{dW/dt} = -\frac{1}{c_P P_m} \end{aligned} \quad (7.31)$$

Las magnitudes $-dx_e/dW$ y $-dt/dW$ son magnitudes puntuales de la trayectoria y se denominan respectivamente **alcance específico** (distancia recorrida por unidad de peso de combustible consumido) y **autonomía específica** (tiempo que permanece el avión en el aire por unidad de peso de combustible consumido).

Desarrollando ahora la potencia del motor alternativo en función de la velocidad de vuelo, queda:

$$P_m = \frac{P_u}{\eta_p} = \frac{\hat{P}_u T_B V_B}{\eta_p} = \frac{W}{E_m \eta_p} V_B \frac{\hat{V}^4 + 1}{2\hat{V}} \quad (7.32)$$

y por tanto:

$$\begin{aligned} \frac{dx_e}{dW} &= -\eta_p \frac{E_m}{c_P} \frac{1}{W} \frac{2\hat{V}^2}{\hat{V}^4 + 1} \\ \frac{dt}{dW} &= -\eta_p \frac{E_m}{c_P} \frac{1}{V_B W} \frac{2\hat{V}}{\hat{V}^4 + 1} \end{aligned} \quad (7.33)$$

A continuación se adimensionalizan la distancia, el tiempo y el peso en las ecuaciones anteriores de la siguiente forma:

$$\hat{x}_e = \frac{x_e}{x^*}, \quad \hat{t} = \frac{t}{t^*}, \quad \hat{W} = \frac{W}{W^*} \quad (7.34)$$

donde x^* es una longitud característica ($x^* = E_m/c_P$), t^* un tiempo característico ($t^* = E_m/(V_{Bi} c_P)$, con $V_{Bi} = \sqrt{2W_i/(\rho S)^{4/5} k/C_D}$), y W^* un peso característico ($W^* = W_i$, siendo W_i el peso en el instante inicial).

Según esto:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}_e}{d\hat{W}} &= -\eta_p \frac{1}{\hat{W}} \frac{2\hat{V}^2}{\hat{V}^4 + 1} \\ \frac{d\hat{t}}{d\hat{W}} &= -\eta_p \frac{1}{\hat{W}^{3/2}} \frac{2\hat{V}}{\hat{V}^4 + 1} \end{aligned} \quad (7.35)$$

La autonomía y el alcance específicos, para un \hat{W} dado, son funciones de \hat{V} y η_p , y el rendimiento propulsivo es una función complicada de las características del grupo motopropulsor (ver apartado 7.3.2). Suponiendo $\eta_p = cte$, los valores de la velocidad adimensional que maximizan el alcance específico y la autonomía específica en un avión dotado de motor alternativo-hélice, se obtienen a partir de las expresiones anteriores derivándolas respecto

de la velocidad adimensional e igualándolas a cero:

$$\frac{d(d\hat{x}_e/d\hat{W})}{d\hat{V}} = 0 \rightarrow \hat{V}_{|d\hat{x}_e/d\hat{W}|_{\max}} = 1 \quad (7.36)$$

$$\frac{d(d\hat{t}/d\hat{W})}{d\hat{V}} = 0 \rightarrow \hat{V}_{|d\hat{t}/d\hat{W}|_{\max}} = 1/\sqrt[3]{3} = 0.760$$

Obsérvese que para volar con alcance específico máximo es preciso imponer una velocidad de vuelo igual a la velocidad base, ya que de esta forma se minimiza la resistencia aerodinámica, es decir, se minimiza el cociente entre la potencia disipada y la velocidad de vuelo. Sin embargo, para volar con autonomía específica máxima es preciso imponer una velocidad de vuelo igual a la de mínima potencia disipada.

Integrando las expresiones del alcance específico y de la autonomía específica queda:

$$\hat{x}_e = - \int_{\hat{W}_i}^{\hat{W}_f} \eta_p \frac{1}{\hat{W}} \frac{2\hat{V}^2}{\hat{V}^4 + 1} d\hat{W} \quad (7.37)$$

$$\hat{t} = - \int_{\hat{W}_i}^{\hat{W}_f} \eta_p \frac{1}{\hat{W}^{3/2}} \frac{2\hat{V}}{\hat{V}^4 + 1} d\hat{W}$$

Denotando por W_{FT} el peso total de combustible que se utiliza durante el vuelo y definiendo un parámetro adimensional de peso total de combustible, ζ , de la misma forma que en el apartado 5.5 (es decir, $\zeta = W_{FT}/W_i$), los límites inferior y superior de las integrales quedarán asimismo idénticos a los utilizados en el apartado 5.5 para aviones dotados de turborreactores (ver expresiones (5.42)).

También se observa, comparando las expresiones (5.40) y (7.37), que el alcance adimensional para aviones dotados de motores alternativos y hélices puede obtenerse multiplicando la autonomía adimensional para aviones dotados de turborreactores por el rendimiento propulsivo de la hélice, suponiendo éste constante.

Para poder efectuar las integrales anteriores es preciso fijar el grado de libertad matemático que tiene el vuelo horizontal, es decir, es preciso especificar una **ley de pilotaje matemática** de la forma $\hat{V} = \hat{V}(\hat{W})$. A continuación se determinan el alcance y la autonomía para varias leyes

de pilotaje matemáticas concretas, suponiendo constante el rendimiento propulsivo de la hélice.

7.6.1. Vuelo a ángulo de ataque constante

El vuelo a ángulo de ataque constante es un vuelo a velocidad adimensional constante (ver la cuarta ecuación del sistema (7.27)); es decir:

$$\alpha = \alpha_i \leftrightarrow C_L = C_{Li} \leftrightarrow \hat{V} = \hat{V}_i \quad (7.38)$$

Integrando el alcance y la autonomía entre los pesos adimensionales inicial y final (suponiendo η_p constante) se obtiene:

$$\begin{aligned} \hat{x}_e &= \eta_p \frac{2\hat{V}_i^2}{\hat{V}_i^4 + 1} \ln \frac{1}{1 - \zeta} \\ \hat{t} &= \eta_p \frac{4\hat{V}_i}{\hat{V}_i^4 + 1} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \zeta}} - 1 \right) \end{aligned} \quad (7.39)$$

Para obtener el alcance máximo y la autonomía máxima se derivan las expresiones anteriores respecto de la velocidad inicial adimensional y se igualan a cero:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}_e}{d\hat{V}_i} &= 0, \quad (\hat{V}_i)_{\hat{x}_{e\max}} = 1, \quad \hat{x}_{e\max} = \eta_p \ln \frac{1}{1 - \zeta} \\ \frac{d\hat{t}}{d\hat{V}_i} &= 0, \quad (\hat{V}_i)_{\hat{t}_{\max}} = 1/\sqrt[4]{3}, \quad \hat{t}_{\max} = 3^{3/4} \eta_p \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \zeta}} - 1 \right) \end{aligned} \quad (7.40)$$

luego:

$$\begin{aligned} x_{e\max} &= \frac{E_m}{c_P} \hat{x}_{e\max} = \eta_p \frac{E_m}{c_P} \ln \frac{1}{1 - \zeta} \\ t_{\max} &= \frac{E_m}{c_P V_{Bi}} \hat{t}_{\max} = \eta_p \frac{E_m}{c_P V_{Bi}} 3^{3/4} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \zeta}} - 1 \right) \end{aligned} \quad (7.41)$$

Estas dos últimas expresiones reciben el nombre de **Fórmulas de Breguet** y de ellas se deducen importantes conclusiones para el diseño preliminar de aviones dotados de motor alternativo-hélice: si se quiere aumentar el alcance y la autonomía, es preciso aumentar ζ , aumentar η_p ,

disminuir c_P , disminuir C_{D0} o disminuir k . Además, como c_P y η_p se suponen constantes al variar la altitud de vuelo, la autonomía máxima de las máximas se produce al nivel del mar (téngase en cuenta que la velocidad base aumenta con la altitud) y el alcance máximo de los máximos es independiente de la altitud.

La velocidad de vuelo y la potencia del motor han de disminuir según se desarrolla el vuelo y el avión va gastando combustible. Sus expresiones en función del peso adimensional son las siguientes:

$$\begin{aligned} V &= \hat{V} V_B = \hat{V}_i V_{Bi} \sqrt{\hat{W}} = V_i \sqrt{\hat{W}} \\ P_m &= \frac{W}{E_m \eta_p} V_B \frac{\hat{V}^4 + 1}{2\hat{V}} = \frac{W_i \hat{W}}{E_m \eta_p} V_{Bi} \hat{W}^{1/2} \frac{\hat{V}_i^4 + 1}{2\hat{V}_i} = P_{mi} \hat{W}^{3/2} \end{aligned} \quad (7.42)$$

7.6.2. Vuelo a velocidad constante

En el vuelo a velocidad constante se cumple:

$$V = V_i \leftrightarrow \hat{V} = \frac{V}{V_B} = \frac{V_i}{V_{Bi} \sqrt{\hat{W}}} = \frac{\hat{V}_i}{\sqrt{\hat{W}}} \quad (7.43)$$

Integrando el alcance y la autonomía adimensionales entre los pesos adimensionales inicial y final (ecuaciones (7.37)) se obtiene:

$$\begin{aligned} \hat{x}_e &= 2\eta_p \arctan \frac{\zeta \hat{V}_i^2}{1 - \zeta + \hat{V}_i^4} \\ \hat{t} &= \frac{2\eta_p}{\hat{V}_i} \arctan \frac{\zeta \hat{V}_i^2}{1 - \zeta + \hat{V}_i^4} \end{aligned} \quad (7.44)$$

Obsérvese que para esta ley de pilotaje matemática también se cumple la ecuación (5.51), deducida para el caso de aviones dotados de turborreactores ($\hat{x}_e = \hat{V}_i \hat{t}$).

Para obtener el alcance adimensional máximo y la autonomía adimensional máxima se derivan las expresiones anteriores respecto de la velocidad inicial adimensional y se igualan a cero. El caso de la autonomía máxima es difícil de resolver de forma analítica por lo que es recomendable recurrir a métodos numéricos. Sin embargo, la velocidad inicial

adimensional que maximiza el alcance adimensional y el correspondiente alcance adimensional máximo se obtienen fácilmente de forma cerrada, quedando:

$$\begin{aligned} (\hat{V}_i)_{\hat{x}_{\max}} &= \sqrt[4]{1 - \zeta} \\ \hat{x}_{e \max} &= 2\eta_p \arctan \frac{\zeta}{2\sqrt{1 - \zeta}} \end{aligned} \quad (7.45)$$

Multiplicando la última ecuación por el adimensionalizador de longitudes ($x^* = E_m/c_P$) se obtendría el alcance máximo para esta ley de pilotaje.

Como ya se ha visto, con esta ley la velocidad adimensional aumenta durante el vuelo. El coeficiente de sustentación y la potencia del motor, sin embargo, han de disminuir según se desarrolla el vuelo y el avión va gastando combustible, según las expresiones:

$$\begin{aligned} C_L &= C_{L_{\text{opt}}} \frac{1}{\hat{V}^2} = C_{L_{\text{opt}}} \frac{\hat{W}}{\hat{V}_i^2} = C_{Li} \hat{W} \\ P_m &= \frac{P_u}{\eta_p} = \frac{W}{E_m \eta_p} V_B \frac{\hat{V}^4 + 1}{2\hat{V}} = \frac{W_i}{E_m \eta_p} V_{Bi} \frac{\hat{V}_i^4 + \hat{W}^2}{2\hat{V}_i} = \frac{P_{Bi}}{\eta_p} \frac{\hat{V}_i^4 + \hat{W}^2}{2\hat{V}_i} \end{aligned} \quad (7.46)$$

7.6.3. Vuelo a potencia del motor constante

La ley de pilotaje para el vuelo a potencia del motor constante queda:

$$P_m = P_{mi} \leftrightarrow P_u = \eta_p P_m = P_{ui}, \quad \hat{P} = \frac{\hat{P}_{ui}}{\hat{W}^{3/2}} \rightarrow \frac{\hat{V}^4 + 1}{2\hat{V}} = \frac{\hat{P}_{ui}}{\hat{W}^{3/2}} \quad (7.47)$$

Para determinar el alcance adimensional y la autonomía adimensional se opera como en los dos apartados anteriores. El alcance adimensional, la velocidad adimensional que maximiza el alcance adimensional y el alcance adimensional máximo se calculan numéricamente siguiendo el siguiente proceso: de

$$\hat{x}_e = -\eta_p \int_1^{1-\zeta} \frac{1}{\hat{W}} \left(\frac{2\hat{V}}{\hat{V}^4 + 1} \right) \hat{V} d\hat{W} \quad (7.48)$$

se obtiene $\hat{x}_e = \hat{x}_e(\eta_p, \zeta, \hat{V}_i)$, que en el caso $(\hat{V}_i)_{\hat{x}_{\max}}$ proporciona $\hat{x}_{e \max} = \hat{x}_{e \max}(\eta_p, \zeta)$.

Para obtener la autonomía adimensional se opera directamente con la segunda ecuación (7.35) y con la ley de pilotaje (7.47), quedando:

$$\frac{d\hat{t}}{d\hat{W}} = -\frac{\eta_p}{\hat{P}_{ui}} \rightarrow \hat{t} = \frac{\eta_p \zeta}{\hat{P}_{ui}} = \eta_p \frac{2\hat{V}_i}{\hat{V}_i^4 + 1} \zeta \quad (7.49)$$

La autonomía adimensional máxima se obtiene derivando la expresión anterior respecto de la velocidad inicial adimensional e igualando el resultado a cero, quedando:

$$(\hat{V}_i)_{\hat{t}_{\max}} = 1/\sqrt[4]{3} \rightarrow \hat{t}_{\max} = \frac{3^{3/4}}{2} \eta_p \zeta \quad (7.50)$$

Obsérvese que con esta ley de pilotaje tanto la velocidad de vuelo como el coeficiente de sustentación no se mantienen constantes.

7.6.4. Comparación entre las distintas leyes de pilotaje

La técnica de vuelo a ángulo de ataque constante es la mejor entre todas las posibles, si se pretende conseguir máximo alcance o máxima autonomía, ya que en ella la velocidad adimensional se mantiene constante a lo largo de toda la trayectoria, pudiéndose maximizar así en cada punto el alcance específico o la autonomía específica. Esto significa que los valores numéricos proporcionados por las Fórmulas de Breguet representan límites superiores insuperables en cualquier vuelo horizontal rectilíneo casi-estacionario, para un avión dotado de motor alternativo-hélice.

7.7. Actuaciones de punto en subida y descenso

Si el sistema de ecuaciones (3.17), válido para el vuelo simétrico en un plano vertical, casi-estacionario, casi-rectilíneo y con ángulo de ataque del empuje pequeño, se completa con las correspondientes hipótesis respecto a características del avión (ver apartado 7.2) y del grupo motopropulsor (ver apartado 7.3), se adimensionaliza como se ha establecido en los apartados 7.4 y 7.5, y se hace la hipótesis de que los aviones ascienden y descienden con un ángulo de asiento de velocidad pequeño ($|\gamma| \ll 1 \rightarrow \sin \gamma \cong \gamma, \cos \gamma \cong 1$), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones adimensionales que permite estudiar las actuaciones puntuales en subidas y descensos:

$$\hat{x}_e = \hat{V}$$

$$\hat{V}_a = \hat{V}\gamma$$

$$\hat{P}_u - \hat{P}_d - E_m \hat{V}_a = 0$$

$$n - 1 = 0$$

$$\hat{P}_d = \frac{1}{2} \left(\hat{V}^3 + \frac{n^2}{\hat{V}} \right) \quad (7.51)$$

$$n = \hat{V}^2 \frac{C_L}{C_{L\text{opt}}}$$

$$\hat{P}_u = \frac{\eta_p P_m}{P_B}$$

En el estudio de las actuaciones puntuales son irrelevantes la relación básica (el peso del avión es una constante local del problema) y la relación que proporciona el consumo de combustible o consumo específico del motor, y por ello no se han añadido al sistema anterior.

Operando con el sistema anterior (obsérvese que el factor de carga siempre vale la unidad) se obtienen la velocidad ascensional adimensional y el ángulo de asiento de velocidad:

$$\begin{aligned} \hat{V}_a &= \frac{1}{E_m} \left[\hat{P}_u - \frac{1}{2} \left(\hat{V}^3 + \frac{1}{\hat{V}} \right) \right] \\ \gamma &= \frac{\hat{V}_a}{\hat{V}} = \frac{1}{E_m} \left[\frac{\hat{P}_u}{\hat{V}} - \frac{1}{2} \left(\hat{V}^2 + \frac{1}{\hat{V}^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (7.52)$$

Si en estas expresiones se introdujera un modelo analítico para la potencia útil adimensional, podrían obtenerse de forma cerrada la velocidad ascensional adimensional y el ángulo de asiento de velocidad.

Obsérvese que la diferencia entre las potencias adimensionales útil y disipada para cada velocidad adimensional es una medida de la velocidad ascensional adimensional (ver la Figura 7.4 (a) y la primera ecuación del sistema (7.52)). Según esto, la Figura 7.5 representa de forma cualitativa las

velocidades ascensionales adimensionales en función de la velocidad de vuelo adimensional y de la altitud.

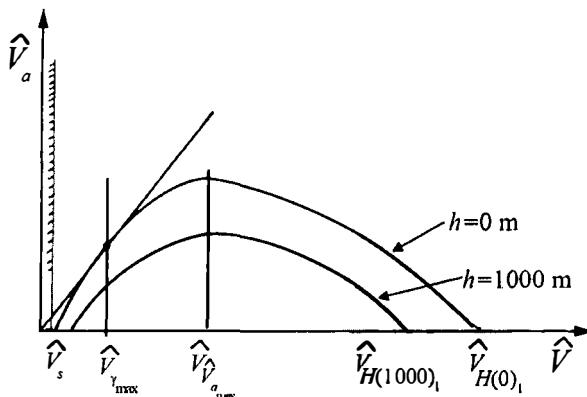


Figura 7.5. Actuaciones de punto en subida y descenso. Velocidad ascensional adimensional en función de la velocidad adimensional y la altitud.

Ya se ha establecido que a medida que aumenta la altitud de vuelo la potencia útil adimensional cae fuertemente. Esto significa que cuando el avión alcance su techo teórico la velocidad ascensional máxima será nula y el ángulo de asiento de velocidad máxima será asimismo nulo.

La velocidad ascensional máxima a cierta altitud se consigue imponiendo la potencia útil máxima. Al aumentar la altitud la velocidad ascensional adimensional máxima disminuye (por hacerlo la potencia útil adimensional), pero la velocidad base aumenta, por lo que no se dispone de información suficiente para determinar cual es la altitud para la que es máxima la velocidad ascensional máxima (en la práctica, si se introducen valores concretos de la potencia útil se observa que se produce al nivel del mar).

Si en las curvas que proporcionan velocidad ascensional adimensional en función de la velocidad de vuelo adimensional, se trazan sus tangentes desde el origen, los puntos de tangencia representan las velocidades para las que se obtienen los ángulos de subida máximos (ver Figura 7.5). El valor máximo de los ángulos de subida máximos se alcanza al nivel del mar.

7.8. Actuaciones de punto en viraje casi-estacionario

Las ecuaciones del movimiento son las ya deducidas en el apartado 3.5.3 para el vuelo simétrico en un plano horizontal, con las hipótesis adicionales de que el vuelo es casi-estacionario (aceleración tangencial despreciable y aceleración normal no) y que el ángulo de ataque del empuje es pequeño (y su componente según el eje z_w es despreciable). El sistema de ecuaciones (3.20) se completa con las correspondientes hipótesis respecto a las características del avión (ver apartado 7.2) y del grupo motopropulsor (ver apartado 7.3), y se adimensionaliza como se ha establecido en los apartados 7.4 y 7.5, quedando:

$$\hat{x}_e = \hat{V} \cos \chi$$

$$\hat{y}_e = \hat{V} \sin \chi$$

$$\hat{P}_u - \hat{P}_d = 0$$

$$n \sin \mu - \hat{V} \frac{V_B \dot{\chi}}{g} = 0$$

$$n \cos \mu - 1 = 0 \quad (7.53)$$

$$\hat{P}_d = \frac{1}{2} \left(\hat{V}^3 + \frac{n^2}{\hat{V}} \right)$$

$$n = \hat{V}^2 \frac{C_L}{C_{L\text{opt}}}$$

$$\hat{P}_u = \frac{\eta_p P_m}{P_B}$$

En el estudio de las actuaciones puntuales son de nuevo irrelevantes la relación másica (el peso del avión es una constante local del problema) y la relación que proporciona el consumo de combustible o consumo específico del motor, y por ello no se han añadido al sistema anterior.

Igualando en el sistema anterior las potencias adimensionales útil y

dissipada

$$\hat{P}_u = \hat{P}_d = \frac{1}{2} \left(\hat{V}^3 + \frac{n^2}{\hat{V}} \right) \quad (7.54)$$

se obtiene la siguiente expresión para el factor de carga:

$$n = \sqrt{2\hat{P}_u \hat{V} - \hat{V}^4} \quad (7.55)$$

Si en esta expresión se introdujera un modelo analítico para la potencia útil adimensional, podría obtenerse de forma cerrada el factor de carga.

En el gráfico superior de la Figura 7.6 se representa de forma esquemática la potencia útil adimensional en función de la velocidad adimensional y de la altitud, para cierto parámetro de control del empuje, y la potencia dissipada adimensional en función de la velocidad adimensional y del factor de carga. Igualando ambas potencias, se obtiene el factor de carga en función de la velocidad de vuelo adimensional y de la altitud (ver el gráfico inferior de la Figura 7.6).

Ya se ha establecido que a medida que aumenta la altitud de vuelo la potencia útil adimensional cae fuertemente. Esto significa que cuando el avión alcance su techo teórico el factor de carga máximo de los máximos valdrá la unidad.

El factor de carga máximo a cierta altitud se consigue imponiendo la potencia útil máxima y el valor máximo del factor de carga máximo se consigue al nivel del mar.

Para terminar téngase en cuenta que los virajes a baja velocidad están limitados por la velocidad de pérdida. Esta velocidad ya fue deducida en el apartado 6.3 (ver ecuación (6.23)) y por tanto está representada mediante una parábola en el diagrama $n-\hat{V}$ de la Figura 7.6 (gráfico inferior).

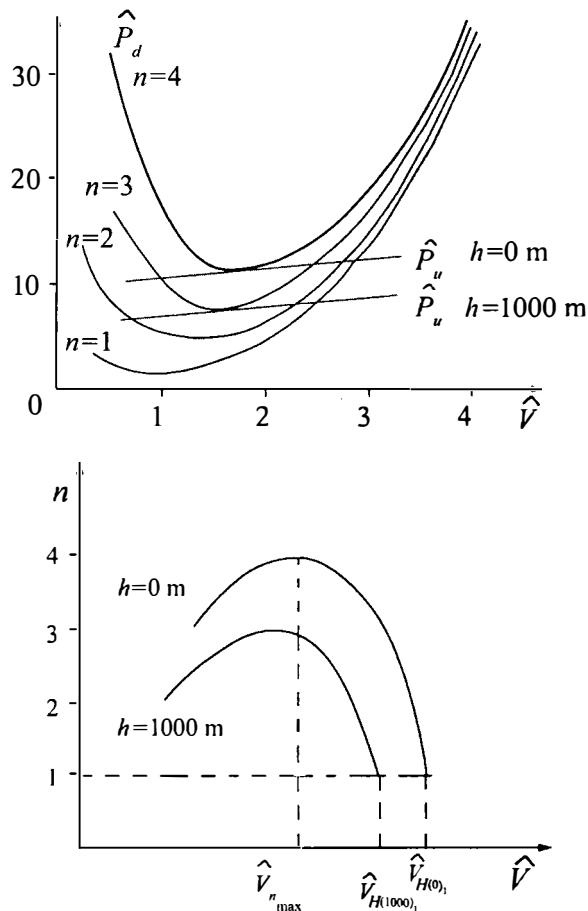
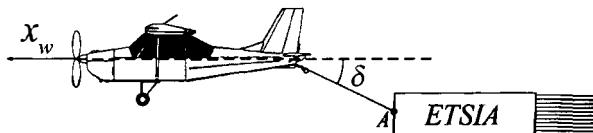


Figura 7.6. Actuaciones de punto en viraje casi-estacionario: Potencia útil y potencia disipada adimensionales (gráfico superior). Factor de carga en función de la velocidad adimensional y la altitud (gráfico inferior).

7.9. Problemas 7.1 y 7.2

PROBLEMA 7.1

En cierta playa de moda, una avioneta arrastra un cartel publicitario en vuelo rectilíneo horizontal simétrico casi-estacionario con las alas a nivel (ver figura adjunta).



Suponiendo además que:

1. Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas de la avioneta necesarias para la resolución del problema (por ejemplo, la superficie alar S_A , los coeficientes constantes de la polar parabólica, C_{D0A} , k_A , la función $C_L = C_L(\alpha)$, etc.).
2. El grupo motopropulsor motor alternativo-hélice tiene una línea de acción del empuje paralela a x_w ; su rendimiento propulsivo, η_p , y su consumo específico, c_P , son constantes conocidas.
3. El cartel tiene un peso W_C conocido y las acciones aerodinámicas sobre él se reducen a una resistencia, con un coeficiente de resistencia, C_{D0C} , y una superficie de referencia, S_C , constantes y conocidos. El peso y la resistencia se suponen aplicados en el punto A.
4. El cable es inextensible y son despreciables su peso y las fuerzas aerodinámicas que actúan sobre él.
5. No existen interferencias avioneta-cable-cartel.
6. ρ es una constante conocida.

Se pide:

- 1º) Determinar, para un peso genérico de la avioneta W_A , la velocidad de vuelo, V , y la potencia del motor alternativo, P_m , en función del coeficiente de sustentación, C_L .

2º) Determinar, para un peso genérico de la avioneta W_A , el ángulo δ que forma el cable con la horizontal, en función del coeficiente de sustentación, C_L . Indicar cómo obtendría el piloto el valor mínimo para este ángulo.

3º) Suponiendo ahora que siempre se vuela en condiciones de autonomía específica máxima y que el peso inicial de la avioneta es W_{Ai} , determinar el peso de combustible consumido, W_F , durante un tiempo de vuelo dado, t . Comentar la influencia del arrastre del cartel en el peso de combustible calculado.

Solución:

1º) El equilibrio de fuerzas del sistema global avión-cartel proporciona:

$$T = D_A + D_C \rightarrow \eta_p P_m = (D_A + D_C)V$$

$$L = W_A + W_C$$

Operando con la última ecuación se obtiene:

$$\frac{1}{2}\rho V^2 S_A C_L = W_A + W_C \rightarrow V = \sqrt{\frac{2W_T}{\rho S_A C_L}}$$

donde $W_T = W_A + W_C$. Operando con la primera ecuación de fuerzas:

$$\eta_p P_m = \frac{1}{2}\rho S_A V^3 (C_{D0A} + k_A C_L^2) + \frac{1}{2}\rho S_C V^3 C_{D0C} = \frac{1}{2}\rho S_A V^3 (C_{D0T} + k_A C_L^2)$$

donde $C_{D0T} = C_{D0A} + (S_C/S_A)C_{D0C}$.

Introduciendo la velocidad en esta expresión, queda finalmente para la potencia del motor alternativo:

$$P_m = \frac{W_T^{3/2}}{\eta_p (\rho S_A / 2)^{1/2}} \left(\frac{C_{D0T}}{C_L^{3/2}} + k_A C_L^{1/2} \right)$$

Obsérvese que el sistema avión-cartel es completamente equivalente a otro avión con un peso mayor que el del avión sin cartel ($W_T = W_A + W_C$) y un coeficiente de resistencia parásita también mayor ($C_{D0T} = C_{D0A} + (S_C/S_A)C_{D0C}$).

2º) Cortando el cable y planteando el equilibrio de fuerzas del cartel:

$$T_C \cos \delta = D_C$$

$$T_C \sin \delta = W_C$$

donde T_C representa la tensión del cable. Dividiendo entre sí estas dos ecuaciones:

$$\tan \delta = \frac{W_C}{D_C} = \frac{W_C}{W_A + W_C} \frac{S_A}{S_C} \frac{C_L}{C_{D0C}}$$

El valor mínimo de δ se obtiene con el mínimo valor de C_L , que a su vez se consigue imponiendo la velocidad máxima. Por último, la velocidad máxima, V_{\max} , se obtiene imponiendo el valor máximo de la potencia útil y resolviendo el polinomio siguiente:

$$V_{\max}^4 - \frac{(\eta_p P_m)_{\max}}{(\rho S_A/2) C_{D0T}} V_{\max} + \frac{k_A W_T^2}{(\rho S_A/2)^2 C_{D0T}} = 0$$

Obviamente V_{\max} será la mayor de las dos velocidades obtenidas al resolver el polinomio.

3º) La ecuación que proporciona el gasto másico del motor alternativo de la avioneta puede escribirse como:

$$\frac{dW_A}{dt} = -c_P P_m \rightarrow \frac{d(W_A + W_C)}{dt} = \frac{dW_T}{dt} = -c_P P_m$$

y según esto, son aplicables las expresiones obtenidas en este capítulo para la autonomía específica máxima de un sistema avión-cartel, con peso $W_T = W_A + W_C$ y con coeficiente de resistencia parásita $C_{D0T} = C_{D0A} + (S_C/S_A)C_{D0C}$. La velocidad para autonomía máxima y la autonomía máxima son:

$$(V)_{t_{\max}} = \frac{V_B}{\sqrt[4]{3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \sqrt{\frac{2W_T}{\rho S_A}} \sqrt[4]{\frac{k_A}{C_{D0T}}}$$

$$t = \eta_p \frac{E_m}{c_P V_{Bi}} 3^{3/4} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\zeta}} - 1 \right)$$

donde

$$\zeta = \frac{W_F}{W_{Ai} + W_C}, \quad E_m = \frac{1}{2\sqrt{C_{D0T}k_A}}, \quad \text{y} \quad V_{Bi} = \sqrt{\frac{2(W_{Ai} + W_C)}{\rho S_A}} \sqrt[4]{\frac{k_A}{C_{D0T}}}$$

Finalmente, despejando el peso de combustible consumido de la expresión que proporciona la autonomía máxima se obtiene:

$$\frac{W_F}{W_{Ai} + W_C} = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{2c_P t}{3^{3/4} \eta_p} \sqrt{\frac{2(W_{Ai} + W_C)}{\rho S_A}} \sqrt[4]{k_A^3 C_{D0T}} \right)^2}$$

Puede observarse que el arrastre del cartel tiene dos efectos sobre el peso de combustible consumido: al aumentar el peso del cartel, W_C , aumenta W_F y al aumentar el producto (SCC_{DOC}), que está contenido dentro de C_{DOT} , también aumenta W_F .

PROBLEMA 7.2

Un avión acrobático, provisto de un grupo motopropulsor motor alternativo-hélice, vuela estacionariamente con resbalamiento nulo según una trayectoria helicoidal descrita sobre un cilindro vertical de radio a constante conocido y con ángulo de asiento de velocidad γ , no pequeño, asimismo constante y conocido.

Suponiendo además que:

1. Se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (en particular, el peso W es constante, las características aerodinámicas se conocen en unos ejes cuerpo genéricos, la polar es parabólica de coeficientes constantes, son despreciables las contribuciones de la deflexión del timón de profundidad y de la velocidad angular de cabeceo al coeficiente de sustentación, etc.).
2. El empuje del motor está dirigido según el eje x_w ; el rendimiento propulsivo de la hélice η_p y el consumo específico del motor c_P son constantes conocidas; la fuerza aerodinámica lateral es despreciable.
3. Todos los ángulos que intervienen en el problema, excepto el ángulo de ataque, no son pequeños.
4. ρ y g son constantes conocidas en el margen de alturas considerado.

Se pide:

1º) Plantear el sistema de ecuaciones dinámicas de fuerzas y determinar el número de grados de libertad matemáticos del sistema.

2º) Determinar el gasto másico de combustible φ en función de la velocidad de vuelo V y, en caso de que sea necesario, del resto de grados de libertad matemáticos.

3º) Determinar la velocidad de vuelo, V_c , que minimiza el gasto másico de combustible obtenido en el apartado anterior. Para esta velocidad, determinar el factor de carga, n_c , el ángulo de balance de velocidad, μ_c , el

ángulo de ataque, α_c , el ángulo de asiento del avión, θ_c , y el ángulo de balance del avión, ϕ_c .

4º) Comparar los valores de V_c , n_c , μ_c y α_c para una trayectoria helicoidal ascendente y otra descendente, efectuadas con los mismos valores de a y $|\gamma|$.

Solución:

1º) El sistema de ecuaciones de fuerza en ejes viento, para un avión en vuelo simétrico ($\beta = \nu = 0 \rightarrow Q \cong 0$) y con ángulo de ataque del empuje nulo, se obtiene a partir de las expresiones (3.5), quedando:

$$T - D - mg \sin \gamma - m\dot{V} = 0$$

$$mg \cos \gamma \sin \mu + mV(\dot{\gamma} \sin \mu - \dot{\chi} \cos \gamma \cos \mu) = 0$$

$$-L + mg \cos \gamma \cos \mu + mV(\dot{\gamma} \cos \mu + \dot{\chi} \cos \gamma \sin \mu) = 0$$

Si se proyectan la segunda y tercera ecuación del sistema anterior en dos ejes obtenidos girando los ejes y_w-z_w un ángulo $-\mu$ alrededor del eje x_w (ejes y_2-z_2 de la Figura 1.6), queda:

$$T - D - mg \sin \gamma - m\dot{V} = 0$$

$$L \sin \mu - mV \dot{\chi} \cos \gamma = 0$$

$$L \cos \mu - mg \cos \gamma - mV \dot{\gamma} = 0$$

Entre las condiciones adicionales impuestas por el vuelo estacionario (ver apartado 2.7) está la de que u , v y w sean constantes, y por tanto:

$$V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = cte \rightarrow \dot{V} = 0$$

$$\tan \alpha = \frac{u}{w} = cte$$

Obsérvese que, para el vuelo simétrico, además $\beta = \nu = 0$. Si ahora se plantean las expresiones para la sustentación y la resistencia:

$$L = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_L(\alpha) = cte; \quad D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D(\alpha) = cte$$

Para vuelo estacionario ($V = cte$, pero no conocida), con ángulo de asiento de velocidad γ constante y conocido, el sistema de ecuaciones de fuerzas queda:

$$T - D - W \sin \gamma = 0$$

$$L \sin \mu - \frac{W}{g} V \dot{\chi} \cos \gamma = 0$$

$$L \cos \mu - W \cos \gamma = 0$$

en donde se ha de cumplir $T = cte$, $\dot{\chi} = cte$ y $\mu = cte$. Téngase en cuenta que además se satisface:

$$\dot{\chi} = \frac{V \cos \gamma}{a}$$

Este sistema de tres ecuaciones dinámicas, más una relación de ligadura cinemática, tiene cinco variables dependientes (T , C_L , μ , $\dot{\chi}$, V) y por tanto tiene un grado de libertad matemático (V). Si se expresa la ecuación de fuerzas según el eje x_w en forma de potencias, la variable dependiente empuje, T , se sustituiría por la potencia del motor alternativo, P_m .

2º) Para determinar el gasto masico de combustible del motor alternativo en función de la velocidad de vuelo se recurre a la definición de consumo específico:

$$c_P = \frac{\varphi g}{P_m} \rightarrow \varphi = \frac{c_P}{g} P_m$$

El empuje del grupo motopropulsor se relaciona con la potencia del motor alternativo y el rendimiento de la hélice mediante:

$$TV = \eta_p P_m$$

y la ecuación de fuerzas según la tangente a la trayectoria, $TV - DV - WV \sin \gamma = 0$, proporciona la potencia necesaria en el motor alternativo:

$$P_m = \frac{TV}{\eta_p} = \frac{1}{\eta_p} \left(\frac{1}{2} \rho V^3 S C_{D0} + k \frac{n^2 W^2}{(1/2) \rho V S} + W \sin \gamma V \right)$$

Para que la última expresión sea únicamente función de la velocidad, es preciso determinar el factor de carga a partir de la segunda y tercera ecuaciones dinámicas:

$$n = \frac{\cos \gamma}{\cos \mu} = \cos \gamma (1 + \tan^2 \mu)^{1/2} = \cos \gamma \left(1 + \frac{V^4 \cos^2 \gamma}{g^2 a^2} \right)^{1/2}$$

Reagrupando términos queda finalmente:

$$\varphi = AV^3 + BV + C \frac{1}{V}$$

$$A = \frac{c_P}{g\eta_p} \left(\frac{\rho S C_{D0}}{2} + \frac{2kW^2}{\rho S g^2 a^2} \cos^4 \gamma \right)$$

$$B = \frac{c_P}{g\eta_p} W \sin \gamma$$

$$C = \frac{c_P}{g\eta_p} \frac{2kW^2}{\rho S} \cos^2 \gamma$$

3º) Derivando la expresión obtenida en el apartado anterior respecto de la velocidad:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial V} = 0 \rightarrow 3AV_c^2 + B - C \frac{1}{V_c^2} = 0 \rightarrow V_c = \sqrt{\frac{\sqrt{B^2 + 12AC} - B}{6A}}$$

Para esta velocidad, los valores del factor de carga, n_c , del ángulo de balance de velocidad, μ_c , y del ángulo de ataque, α_c , vienen dados por:

$$n_c = \cos \gamma \left(1 + \frac{V_c^4 \cos^2 \gamma}{g^2 a^2} \right)^{1/2}$$

$$\tan \mu_c = \frac{V_c^2 \cos \gamma}{ga}$$

$$C_{Lc} = \frac{2n_c W}{\rho S V_c^2} = C_{L0} + C_{L\alpha} \alpha_c \rightarrow \alpha_c = -\frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}} + \frac{2W}{\rho S C_{L\alpha}} \cos \gamma \left(\frac{1}{V_c^4} + \frac{\cos^2 \gamma}{g^2 a^2} \right)^{1/2}$$

Para determinar el ángulo de asiento del avión, θ_c , y el ángulo de balance del avión, ϕ_c , se recurre a los resultados obtenidos en el problema 1.1:

$$\sin \theta_c = \sin \gamma \cos \alpha_c + \cos \gamma \sin \alpha_c \cos \mu_c \cong \sin \gamma + \alpha_c \cos \mu_c \cos \gamma$$

$$\tan \phi_c = \frac{\cos \gamma \sin \mu_c}{\cos \gamma \cos \alpha_c \cos \mu_c - \sin \gamma \sin \alpha_c} \cong \frac{\cos \gamma \sin \mu_c}{\cos \gamma \cos \mu_c - \alpha_c \sin \gamma}$$

4º) La formulación de los apartados anteriores es válida para ángulos de asiento de velocidad positivos (hélices en subida) y negativos (hélices en descenso). Analizando los resultados obtenidos en el apartado anterior se concluye que:

$$V_{cs} < V_{cd}; \quad n_{cs} < n_{cd}; \quad \mu_{cs} < \mu_{cd}; \quad \alpha_{cs} > \alpha_{cd}$$

donde el subíndice “s” significa subida y el subíndice “d” descenso.

Actuaciones de despegue y aterrizaje

8

8.1. Introducción

El despegue es la maniobra que va desde la suelta de frenos en cabecera de pista hasta el punto donde el avión alcanza una velocidad y altura definidas en las Normas de Aeronavegabilidad. Esta maniobra se efectúa con empuje máximo al despegue en los motores operativos, flaps en posición de despegue y tren de aterrizaje extendido.

Para calcular las actuaciones de despegue es preciso aplicar teoría no estacionaria, pues las aceleraciones tangenciales son importantes.

En la maniobra de despegue se distinguen dos fases (Figura 8.1):

- Rodadura en el suelo: avión en contacto con la pista.
- Recorrido en el aire: avión en el aire

En cada una de estas fases es preciso calcular las distancias recorridas, los tiempos invertidos y algunas velocidades características.

Es importante señalar que el cálculo de actuaciones de despegue no sólo incluye problemas de actuaciones (movimiento del centro de masas a lo largo de la trayectoria), sino también de estabilidad (cambios de actitud del avión para efectuar el despegue), por lo que se planteará, además de las ecuaciones de fuerzas, la ecuación de momentos de cabeceo correspondiente. Se supondrá además que el avión está dotado de turborreactores.

En cuanto a la maniobra de aterrizaje, puede considerarse, en primera aproximación, como un despegue invertido.

En el apartado 8.2 se estudia la primera fase del despegue (rodadura en el suelo), descomponiéndola en dos subfases (rodadura con todas las ruedas en

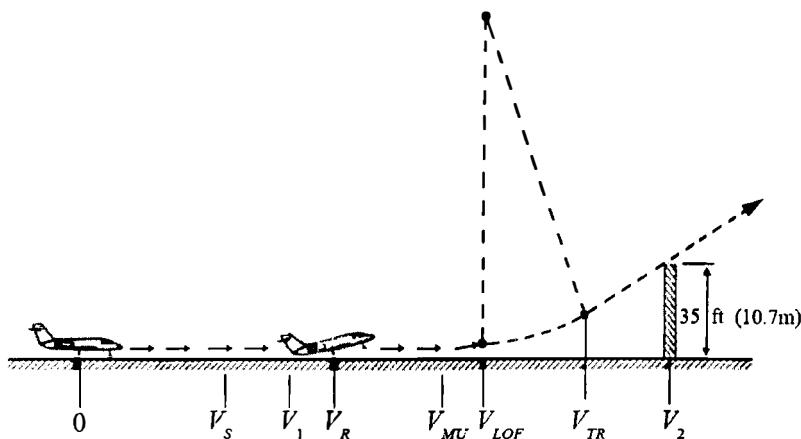


Figura 8.1. Fases, velocidades y distancias características en la maniobra de despegue para aviones con tren triciclo.

el suelo y rodadura con el tren principal en el suelo), calculando las llamadas velocidades de rotación y de despegue, y determinando la distancia recorrida y el tiempo empleado; en el apartado 8.3 se estudia la segunda fase del despegue (recorrido en el aire), descomponiéndola asimismo en dos subfases (transición y subida rectilínea estabilizada) y determinando asimismo la distancia recorrida y el tiempo empleado en esta segunda fase; en el apartado 8.4 se suman las distancias y los tiempos obtenidos en las dos fases del despegue para obtener los valores totales de la distancia y el tiempo de despegue, y se simplifican las expresiones obtenidas suponiendo que el movimiento siempre es uniformemente acelerado; y por último, en el apartado 8.5 se repiten las consideraciones del despegue para la maniobra de aterrizaje.

8.2. Rodadura en el suelo en el despegue

Se considera un avión dotado de tren triciclo y solamente se estudia el movimiento longitudinal o simétrico del avión (las ecuaciones de fuerza lateral, de momento de balance y de momento de guñada son idénticamente nulas).

La rodadura en el suelo se divide en dos etapas (Figura 8.1):

- Rodadura con todas las ruedas en el suelo ($0 \leq V \leq V_R$)
- Rodadura con el tren principal en el suelo ($V_R < V \leq V_{LOF}$)

En este apartado se calculan las características más importantes de estas dos etapas y las velocidades de rotación, V_R , y de despegue, V_{LOF} .

8.2.1. Rodadura con todas las ruedas en el suelo

El empuje de los motores se supone paralelo al eje de la pista y, en general, sin pasar por el centro de masas del avión (ver Figura 8.2).

Las ecuaciones de fuerzas según los ejes x_w y z_w y la ecuación de momentos según el eje y_w son:

$$T - D - F_{r1} - F_{r2} = \frac{W}{g} \frac{dV}{dt} \quad (8.1)$$

$$L - W + N_1 + N_2 = 0$$

$$M_A + M_T - N_2 x_2 + N_1 x_1 - (F_{r1} + F_{r2}) z_g = 0$$

En la expresión anterior F_{r1} y F_{r2} representan las fuerzas de rozamiento por rodadura en el tren de morro y en el tren principal, respectivamente, y son proporcionales a las acciones normales en las ruedas, N_1 y N_2 , mediante una constante de proporcionalidad igual al coeficiente de rozamiento por rodadura, μ_r ; es decir:

$$F_{r1} = \mu_r N_1, \quad F_{r2} = \mu_r N_2 \quad (8.2)$$

La resistencia, sustentación y momento de cabeceo aerodinámico del avión completo pueden expresarse mediante (ver expresiones (4.1), (4.2), (4.6))

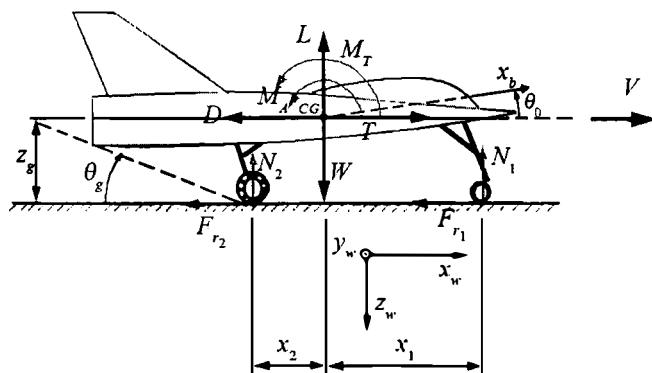


Figura 8.2. Representación gráfica de las fuerzas y momentos que aparecen en la rodadura con todas las ruedas en el suelo.

y (10.17)):

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D = \frac{1}{2} \rho V^2 S (C_{D0} + k C_L^2) \\ L &= \frac{1}{2} \rho V^2 S C_L = \frac{1}{2} \rho V^2 S (C_{L0} + C_{L\alpha} \alpha) \\ M_A &= \frac{1}{2} \rho V^2 S c C_{mA} = \frac{1}{2} \rho V^2 S c (C_{m0} + C_{m\alpha} \alpha + C_{m\delta_e} \delta_e) \end{aligned} \quad (8.3)$$

donde C_D , C_L y C_{mA} son, respectivamente, los coeficientes aerodinámicos de resistencia, sustentación y momento de cabeceo del avión (todos ellos calculados con efecto suelo), c es la cuerda media aerodinámica, δ_e es la deflexión del timón de profundidad, y C_{D0} , k , C_{L0} , $C_{L\alpha}$, C_{m0} , $C_{m\alpha}$ y $C_{m\delta_e}$ representan características aerodinámicas conocidas.

En cuanto al momento de cabeceo propulsivo, M_T , es habitual determinarlo mediante:

$$M_T = T d_T \quad (8.4)$$

donde d_T es la distancia entre la línea de acción del empuje y el centro de masas del avión (considerada aquí positiva cuando el empuje pasa por debajo del centro de masas).

Téngase en cuenta que en esta fase, debido a la ligadura cinemática impuesta de que el avión debe rodar con todas las ruedas en contacto con la pista, el ángulo de asiento de velocidad, γ , es nulo y el ángulo de ataque, α , es igual al ángulo de asiento del avión, θ , siendo éste una constante del tramo. Es decir:

$$\gamma = 0 \rightarrow \alpha = \theta = \theta_0 = cte \quad (8.5)$$

Si en el sistema de ecuaciones formado por las expresiones (8.1) a (8.5) el piloto fija el empuje, T (constante o una función de la velocidad), y la deflexión del timón de profundidad, δ_e , el número de grados de libertad matemáticos del mismo es cero, y pueden calcularse la velocidad aerodinámica, V , la normal en el tren principal, N_2 , y la normal en el tren de morro, N_1 , en función del tiempo. Al fijar T , en las dos primeras ecuaciones de fuerza del sistema (8.1) no queda ningún grado de libertad y, por tanto, pueden calcularse la velocidad aerodinámica, V , y la suma de las reacciones normales $N_1 + N_2$. En función de cual sea la deflexión del timón de profundidad se calcula con la ecuación de momentos qué parte es N_1 y N_2 a partir de la suma anterior $N_1 + N_2$.

Operando con este sistema la aceleración del avión, a_1 , viene dada por:

$$a_1 = \frac{dV}{dt} = g \left(\frac{T}{W} - \mu_r - \frac{\rho(C_D - \mu_r C_L)}{2W/S} V^2 \right) \quad (8.6)$$

Analizando esta expresión se observa que la aceleración es únicamente función de la velocidad ya que por desplazarse el avión con todas las ruedas en contacto con la pista, C_D y C_L son constantes. Integrando esta expresión se obtiene de forma inmediata la velocidad en función del tiempo ($V = V(t)$). Mediante la ecuación de fuerza según el eje z_w y la ecuación de momentos según el eje y_w (segunda y tercera ecuaciones del sistema (8.1)), se obtienen N_1 y N_2 en función del tiempo.

8.2.2. Rotación del avión

Se define por rotación del avión la operación en la que éste levanta la rueda de morro del suelo, siguiendo el tren principal en contacto con la pista. En el instante exacto de la rotación son válidas las ecuaciones desarrolladas en el apartado anterior, pero haciendo en ellas:

$$N_1 = 0 \quad (8.7)$$

con lo que, mediante la ecuación de fuerzas según el eje z_w , se despeja la normal en el tren principal:

$$N_2 = W - L \quad (8.8)$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación de momentos, junto con:

$$\begin{aligned} M_A &= \frac{1}{2} \rho V^2 S c (C_{m0} + C_{m\alpha} \theta_0 + C_{m\delta_e} \delta_e) \\ M_T &= T d_T = cte \end{aligned} \quad (8.9)$$

es posible determinar la llamada **velocidad de rotación** del avión, V_R :

$$V_R = \sqrt{\frac{2W}{\rho S} \frac{(x_2 + \mu_r z_g) - d_T(T/W)}{c(C_{m0} + C_{m\alpha} \theta_0 + C_{m\delta_e} \delta_e) + (x_2 + \mu_r z_g)(C_{L0} + C_{L\alpha} \theta_0)}} \quad (8.10)$$

Para cada deflexión de timón de profundidad dada, δ_e , se obtiene una velocidad de rotación, V_R , distinta. Imponiendo timón de profundidad a tope hacia arriba (es decir, $(C_{m\delta_e} \delta_e)_{\max}$), se obtendrá la velocidad de rotación mínima, $V_{R\min}$.

8.2.3. Rodadura con el tren principal en el suelo

Se supone que el eje x_w sigue siendo paralelo al suelo y que el ángulo de ataque del empuje es pequeño durante toda la subfase. Las ecuaciones del movimiento son muy similares a las expresiones (8.1), aunque introduciendo la velocidad angular de cabeceo tanto en los términos iniciales como en los aerodinámicos:

$$T - D - \mu_r N_2 = \frac{W}{g} \frac{dV}{dt}$$

$$L - W + N_2 \cong 0 \quad (8.11)$$

$$M_A + M_T - N_2(x_2 + \mu_r z_g) = I_y \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Como la velocidad aerodinámica se supone paralela al suelo (el ángulo de asiento de velocidad, γ , es aproximadamente nulo), el ángulo de ataque, α , es igual al ángulo de asiento del avión, θ , pero ahora no son constantes del problema. Es decir:

$$\gamma \cong 0 \rightarrow \alpha \cong \theta \neq cte \quad (8.12)$$

La sustentación y la resistencia pueden determinarse mediante las dos primeras ecuaciones del sistema (8.3), ya utilizadas, pero en el momento aerodinámico de cabeceo del avión completo es preciso introducir ahora la velocidad angular de cabeceo (ver ecuación (12.5)):

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2} \rho V^2 S (C_{D0} + k C_L^2) \\ L &= \frac{1}{2} \rho V^2 S (C_{L0} + C_{L\alpha} \alpha) \\ M_A &= \frac{1}{2} \rho V^2 S c (C_{m0} + C_{m\alpha} \alpha + C_{m\delta_e} \delta_e + C_{mq} \frac{d\theta}{dt}) \end{aligned} \quad (8.13)$$

Si en el sistema de ecuaciones formado por las expresiones (8.11) a (8.13) el piloto fija el empuje, T (constante o una función de la velocidad), y la deflexión del timón de profundidad, δ_e , el número de grados de libertad matemáticos del mismo es cero, y pueden determinarse la velocidad aerodinámica, V , la normal en el tren principal, N_2 , y el ángulo de asiento o el ángulo de ataque, θ o α , en función del tiempo.

Operando con este sistema se deduce la aceleración en el tramo, a_2 :

$$a_2 = \frac{dV}{dt} = g \left[\frac{T}{W} - \mu_r - \frac{\rho(C_D - \mu_r C_L)}{2W/S} V^2 \right] \quad (8.14)$$

Aparentemente esta ecuación es idéntica a la ecuación (8.6). Sin embargo, como C_D y C_L son funciones del ángulo de asiento, la aceleración es ahora función de la velocidad y del ángulo de asiento; es decir:

$$a_2 = \frac{dV}{dt} = a_2(V, \theta) \quad (8.15)$$

y no se puede integrar directamente esta expresión para obtener la velocidad en función del tiempo.

Como se ha supuesto que el avión tiene polar parabólica de coeficientes constantes, se puede calcular el valor del coeficiente de sustentación que maximiza localmente la aceleración, derivando la expresión (8.14) respecto a C_L e igualando a 0. Operando se obtiene:

$$(C_L)_{a_{max}} = \frac{\mu_r}{2k} \quad (8.16)$$

8.2.4. Despegue del avión

El despegue del avión se produce en el instante en que éste deja de estar en contacto con la pista. Por tanto, la condición matemática del mismo es:

$$N_2 = 0 \quad (8.17)$$

Mediante la ecuación de fuerzas según el eje z_w del sistema (8.11) se obtiene:

$$L - W \cong 0 \quad (8.18)$$

de donde es posible calcular la llamada **velocidad de despegue**, V_{LOF} (las letras del subíndice provienen del inglés “Lift-OFF”):

$$V_{LOF} = \sqrt{\frac{2W}{\rho S} \frac{1}{C_L(\theta)}} \quad (8.19)$$

Para que esta ecuación sea válida, el avión se ha de ir al aire con ángulos de asiento pequeños, es decir, la componente vertical del empuje ha de ser despreciable frente a otras fuerzas del problema.

Como se aprecia, la velocidad de despegue depende de la actitud del avión y presentará un valor máximo, $(V_{LOF})_{\text{máx}}$, para la condición de todas las ruedas apoyadas en el suelo o de ángulo de asiento mínimo, $\theta_{\text{mín}} = \theta_0$; es decir:

$$(V_{LOF})_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{2W}{\rho S} \frac{1}{C_L(\theta_0)}} \quad (8.20)$$

Este valor máximo de la velocidad de despegue no tiene ninguna aplicación práctica. Sin embargo, el valor mínimo tiene gran importancia en las actuaciones de despegue y se denomina **velocidad mínima de despegue**, V_{MU} (las letras del subíndice provienen del inglés “Minimum Unstick”):

$$V_{MU} = (V_{LOF})_{\text{mín}} \quad (8.21)$$

Para calcular la velocidad mínima de despegue es preciso tener en cuenta la componente vertical del empuje de los motores, pues el despegue de aviones a estas velocidades implica normalmente ángulos de asiento importantes (ver Figura 8.3). Suponiendo que en el instante del despegue el empuje T está dirigido según el eje x_b y que la velocidad aerodinámica sigue siendo básicamente paralela al suelo ($\varepsilon = \alpha \cong \theta$), el sistema de ecuaciones a utilizar es:

$$\begin{aligned} T \cos \theta - \frac{1}{2} \rho V^2 S (C_{D0} + k C_L^2(\theta)) &\cong \frac{W}{g} \frac{dV}{dt} \\ T \sin \theta + \frac{1}{2} \rho V^2 S C_L(\theta) - W &\cong 0 \\ \frac{1}{2} \rho V^2 S c (C_{m0} + C_{m\alpha} \theta + C_{m\delta_e} \delta_e) + M_T &\cong 0 \end{aligned} \quad (8.22)$$

En este sistema se ha supuesto que en el momento del despegue $q = \dot{q} = 0$. La expresión que proporciona ahora la velocidad de despegue es:

$$V_{LOF} = \sqrt{\frac{2W}{\rho S} \frac{1 - \frac{T}{W} \sin \theta}{C_L(\theta)}} \quad (8.23)$$

Para el cálculo de la velocidad mínima de despegue, V_{MU} , a partir de la expresión anterior hay que introducir en ella el máximo valor posible del ángulo de asiento. Por tanto, se presentan dos limitaciones:

- Velocidad mínima de despegue limitada por geometría

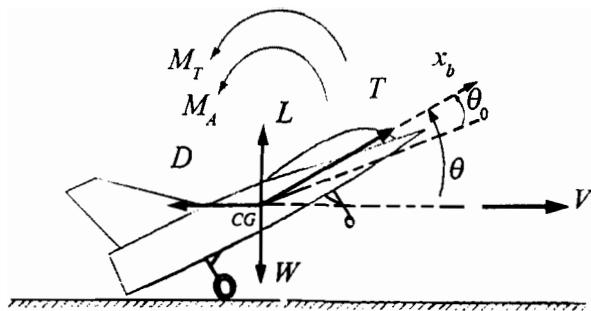


Figura 8.3. Representación gráfica de las fuerzas y momentos que aparecen a la velocidad de mínima de despegue.

- Velocidad mínima de despegue limitada por mando longitudinal

a) Velocidad mínima de despegue limitada por geometría

Se supondrá que el ángulo de asiento máximo es inferior al ángulo de ataque de pérdida ($\theta_{\max} \leq \alpha_S$). Además se denomina **ángulo de guarda longitudinal**, θ_g , al ángulo representado en la Figura 8.2, por lo que el máximo ángulo de asiento del avión es:

$$\theta_{\max} = \theta_g + \theta_0 \quad (8.24)$$

donde θ_0 es el ángulo de asiento cuando el avión se encuentra situado en cabecera de pista.

El ángulo de asiento en el despegue, θ_{MU} , la velocidad mínima de despegue, V_{MU} , y la deflexión del timón de profundidad en el despegue, δ_{eMU} , vendrán dados por:

$$\theta_{MU} = \theta_{\max} = \theta_g + \theta_0$$

$$V_{MU} = \sqrt{\frac{2W}{\rho S} \frac{1 - \frac{T}{W} \sin \theta_{\max}}{C_L(\theta_{\max})}} \quad (8.25)$$

$$C_{m\delta_e} \delta_{eMU} = -\frac{\frac{T}{W} \frac{d_T}{c}}{1 - \frac{T}{W} \sin \theta_{\max}} C_L(\theta_{\max}) - C_{m\alpha} \theta_{\max} - C_{m0}$$

(nótese que debe cumplirse $C_{m\delta_e} \delta_{eMU} \leq (C_{m\delta_e} \delta_e)_{\max}$).

b) Velocidad mínima de despegue limitada por mando longitudinal

Si al calcular la deflexión del timón de profundidad mediante la última ecuación del sistema (8.25), se obtiene un valor mayor (en módulo) que el ángulo máximo permitido por los topes del timón, el avión no dispone de mando longitudinal suficiente para mantener $\theta_{\text{máx}}$ a la V_{MU} calculada, o lo que es lo mismo, no puede satisfacerse la ecuación de momentos. Entonces, para el timón de profundidad a tope hacia arriba:

$$C_{m\delta_e} \delta_e MU = (C_{m\delta_e} \delta_e)_{\text{máx}} \quad (8.26)$$

se plantean las dos ecuaciones siguientes:

$$V_{MU} = \sqrt{\frac{2W}{\rho S} \frac{1 - \frac{T}{W} \sin \theta_{MU}}{C_L(\theta_{MU})}} \quad (8.27)$$

$$V_{MU} = \sqrt{-\frac{2W}{\rho S} \frac{M_T/W}{c(C_{m0} + C_{m\alpha} \theta_{MU} + (C_{m\delta_e} \delta_e)_{\text{máx}})}}$$

siendo las incógnitas del problema V_{MU} y θ_{MU} y cumpliéndose que $\theta_{MU} \leq \theta_{\text{máx}}$.

Evidentemente, la velocidad mínima de despegue calculada con la limitación geométrica es inferior a la calculada con la limitación por mando longitudinal.

De la primera expresión de fuerzas del sistema (8.22) se deduce que existe una limitación adicional al despegue: para que el avión pueda despegar a V_{MU} , es necesario que se siga acelerando, es decir, que se cumpla:

$$\frac{T}{W} \cos \theta_{MU} - \frac{\rho}{2W/S} V_{MU}^2 (C_{D0} + kC_L^2(\theta_{MU})) > 0 \quad (8.28)$$

Analizando cuidadosamente todas las expresiones desarrolladas hasta ahora, puede observarse la gran importancia de los parámetros W/S (carga aérea) y T/W (relación empuje/peso) durante el despegue.

8.2.5. Cálculo de la distancia recorrida y del tiempo invertido en la rodadura en el suelo

Utilizando la relación cinemática lineal que proporciona la distancia recorrida en el suelo y la definición de aceleración, se obtiene:

$$\begin{aligned} dx &= V dt = \frac{V dV}{a} \\ dt &= \frac{dV}{a} \end{aligned} \tag{8.29}$$

La distancia recorrida, x_s , y el tiempo invertido en la rodadura en el suelo, t_s , se calcularán entonces integrando estas dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_s &= \int_0^{V_{LOF}} \frac{V dV}{a} = \int_0^{V_R} \frac{V dV}{a_1} + \int_{V_R}^{V_{LOF}} \frac{V dV}{a_2} \\ t_s &= \int_0^{V_{LOF}} \frac{dV}{a} = \int_0^{V_R} \frac{dV}{a_1} + \int_{V_R}^{V_{LOF}} \frac{dV}{a_2} \end{aligned} \tag{8.30}$$

donde:

$$a_1 = a_2 = g \left(\frac{T}{W} - \mu_r - \frac{\rho (C_{D0} + k C_L^2 - \mu_r C_L)}{2W/S} V^2 \right) \tag{8.31}$$

Como $a_1 = a_1(V)$ y $a_2 = a_2(V, C_L(\theta))$, las primeras integrales de las dos expresiones anteriores son inmediatas, pero las segundas integrales requieren cálculo numérico.

8.3. Recorrido en el aire en el despegue

De forma análoga al estudio efectuado en el apartado anterior para la rodadura en el suelo, para el análisis del recorrido en el aire solamente se considera el movimiento longitudinal o simétrico del avión (las ecuaciones de fuerza lateral, de momento de balance y de momento de guiñada son idénticamente nulas), aunque ahora es indiferente que el avión esté dotado de tren triciclo o de tren con rueda de cola.

En el recorrido en el aire, desde el punto de despegue en el que la velocidad es V_{LOF} , hasta el punto en que el avión alcanza la altura de obstáculo, h , con velocidad V_2 , se distinguen dos tramos (ver Figura 8.1):

- Transición ($V_{LOF} < V \leq V_{TR}$)
- Subida rectilínea estabilizada ($V_{TR} < V \leq V_2$)

En este apartado se establece la formulación que permitiría determinar las distancias recorridas y los tiempos empleados en el recorrido en el aire.

8.3.1. Transición

Este tramo consiste en una pequeña trayectoria curvilínea acelerada que, a veces, suele modelizarse como un arco de circunferencia. Las ecuaciones dinámicas de fuerzas según los ejes x_w y z_w , la de momentos alrededor del eje y_w , y la ecuación que relaciona los ángulos de asiento, asiento de velocidad y ataque (ver el problema 1.1), son las siguientes:

$$\begin{aligned} T - \frac{1}{2}\rho V^2 S(C_{D0} + kC_L^2(\alpha)) - W \sin \gamma &= \frac{W}{g} \frac{dV}{dt} \\ \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L(\alpha) - W \cos \gamma &= \frac{W}{g} V \frac{d\gamma}{dt} \\ \frac{1}{2}\rho V^2 S c(C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta_e}\delta_e + C_{mq}\frac{d\theta}{dt}) + T d_T &= I_y \frac{d^2\theta}{dt^2} \\ \theta &= \gamma + \alpha \end{aligned} \quad (8.32)$$

Este sistema de ecuaciones permite calcular la velocidad aerodinámica, V , el ángulo de asiento del avión, θ , el ángulo de asiento de velocidad, γ , y el ángulo de ataque, α , en función del tiempo (para valores fijados del empuje, T , y de la deflexión del timón de profundidad, δ_e).

8.3.2. Subida rectilínea estabilizada

En este tramo el avión efectúa una subida rectilínea acelerada. Las ecuaciones dinámicas de fuerzas según los ejes x_w y z_w , y la de momentos

alrededor del eje y_w , son las siguientes:

$$\begin{aligned} T - \frac{1}{2}\rho V^2 S(C_{D0} + kC_L^2(\alpha)) - W \sin \gamma &= \frac{W}{g} \frac{dV}{dt} \\ \frac{1}{2}\rho V^2 SC_L(\alpha) - W \cos \gamma &= 0 \\ \frac{1}{2}\rho V^2 Sc(C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta_e}\delta_e) + T d_T &\cong 0 \end{aligned} \quad (8.33)$$

Este sistema de ecuaciones permite, de nuevo, calcular la velocidad aerodinámica, V , el ángulo de asiento de velocidad, γ , y el ángulo de ataque, α , en función del tiempo (para valores fijados del empuje, T , y de la deflexión del timón de profundidad, δ_e).

8.3.3. Cálculo de la distancia horizontal recorrida y del tiempo invertido en el recorrido en el aire

Utilizando la relación cinemática lineal que proporciona la distancia horizontal recorrida y la definición de aceleración, se obtiene:

$$\begin{aligned} dx &= V \cos \gamma dt = \frac{V \cos \gamma dV}{a} \\ dt &= \frac{dV}{a} \end{aligned} \quad (8.34)$$

Suponiendo $\gamma \ll 1$ (si no fuera así sería preciso calcular el valor de γ a partir de los apartados 8.3.1 y 8.3.2), la distancia, x_a , y el tiempo para el recorrido en el aire, t_a , vienen dados por:

$$\begin{aligned} x_a &= \int_{V_{LOF}}^{V_2} \frac{V dV}{a} = \int_{V_{LOF}}^{V_{TR}} \frac{V dV}{a_3} + \int_{V_{TR}}^{V_2} \frac{V dV}{a_4} \\ t_a &= \int_{V_{LOF}}^{V_2} \frac{dV}{a} = \int_{V_{LOF}}^{V_{TR}} \frac{dV}{a_3} + \int_{V_{TR}}^{V_2} \frac{dV}{a_4} \end{aligned} \quad (8.35)$$

donde las aceleraciones a_3 y a_4 son las obtenidas respectivamente en los apartados 8.3.1 y 8.3.2.

Normalmente las integrales que aparecen en las expresiones anteriores sólo pueden resolverse numéricamente.

8.4. Distancia total recorrida y tiempo total empleado en el despegue

En toda la maniobra de despegue la distancia y el tiempo total empleados, x_d y t_d , se determinan mediante:

$$\begin{aligned} x_d &= x_s + x_a \\ t_d &= t_s + t_a \end{aligned} \quad (8.36)$$

donde los valores x_s y t_s se obtienen de las ecuaciones (8.30), y los de x_a y t_a de las ecuaciones (8.35).

A continuación se efectúan una serie de hipótesis simplificativas adicionales a las ya señaladas, mediante las cuales es posible obtener, de forma aproximada, la distancia y el tiempo en la maniobra de despegue.

En primer lugar se supone que el avión tiene un movimiento uniformemente acelerado con una fuerza media hacia delante, F_d , que será el empuje de los motores (supuesto constante) disminuido ligeramente por el rozamiento de las ruedas y la resistencia aerodinámica. Y en segundo lugar se supone que la velocidad V_2 a la que el avión termina el despegue (rodadura en tierra más recorrido en el aire) es la velocidad de pérdida en configuración de despegue multiplicada por cierto factor establecido por las Normas de Aeronavegabilidad (normalmente se toma este factor como 1.2). Según esto puede escribirse:

$$x_d = \frac{V_2^2}{2g(F_d/W)} \quad (8.37)$$

$$t_d = \frac{V_2}{g(F_d/W)} = \sqrt{\frac{2x_d}{g(F_d/W)}}$$

en donde:

$$V_2 = 1.2V_S = 1.2\sqrt{\frac{2W/S}{\rho C_{L \text{máx}}}} \quad (8.38)$$

Por tanto dos expresiones aproximadas para la distancia de despegue y para el tiempo empleado en el despegue son:

$$x_d = C \frac{W/S}{\rho C_{L \text{máx}}(T/W)} \quad (8.39)$$

$$t_d = 1.18C \frac{1}{T/W} \sqrt{\frac{W/S}{\rho C_{L \text{máx}}}}$$

donde $C = 1.44/(gF_d/T)$ tiene dimensiones de la inversa de la aceleración y su valor concreto depende del valor que se le asigne a F_d/T (obviamente $F_d/T < 1$, ya que la fuerza media aceleradora en el despegue es menor que el empuje de los motores).

8.5. Actuaciones en aterrizaje

Para aviones dotados de tren triciclo, la maniobra de aterrizaje es una especie de despegue invertido. Se efectúa con empujes pequeños o nulos (e incluso negativos), flaps en posición de aterrizaje y tren extendido, y puede considerarse dividida en dos grandes fases (Figura 8.4):

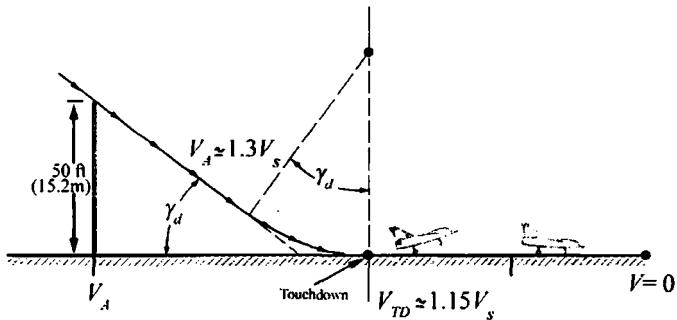


Figura 8.4. Fases, velocidades y distancias características en la maniobra de aterrizaje para aviones con tren triciclo.

- **Recorrido en el aire** ($V_A \geq V > V_{TD}$): desde que el avión tiene una altura h y una velocidad V_A dadas, en un descenso estabilizado, hasta que entra en contacto con el suelo. A su vez puede descomponerse en otras dos subfases:

- Aproximación final: consiste en una trayectoria rectilínea casi estacionaria, a una velocidad que debe ser aproximadamente un 30 % superior a la velocidad de pérdida en la configuración de aterrizaje.
- Redondeo: puede suponerse como un arco de circunferencia. El desplome del avión (en inglés “Touchdown”) se produce a una velocidad V_{TD} del orden de $1.15V_s$.

- Rodadura en el suelo ($V_{TD} \geq V \geq 0$): desde que el avión toca el suelo hasta que se para. Esta fase a su vez puede suponerse descompuesta en dos subfases:
 - Rodadura con el tren principal en el suelo: el avión se desplaza con el tren principal rodando por el suelo y con el tren de morro levantado.
 - Rodadura con todas las ruedas en el suelo: el avión se desplaza como un coche, con todas las ruedas apoyadas en el suelo, hasta su parada. Durante esta subfase las dos ecuaciones de fuerzas y la ecuación de momentos de cabeceo que rigen el movimiento del avión son idénticas a las de la primera subfase del despegue (expresiones (8.1)), aunque con los siguientes cambios:

T : en lugar de ser el empuje máximo al despegue, tiene un valor muy pequeño (empuje residual), nulo (planeadores) o incluso negativo (aviones con reversa).

D : en el despegue interesa tener una resistencia lo más baja posible y en el aterrizaje lo más alta posible, mediante el uso de spoilers, paracaídas, etc.

μ_r : al aplicar frenos el coeficiente de rodadura con ruedas frenadas es mucho mayor (para cemento o asfalto secos, un valor típico es 0.40) que el correspondiente a ruedas libres (del orden de 0.02, en iguales condiciones).

L : en el aterrizaje los spoilers “rompen” la sustentación y hacen que el avión se “pegue” más a tierra, siendo así los frenos más efectivos.

Suponiendo que existe una fuerza deceleradora constante, F_L , durante toda la rodadura en el suelo, la distancia recorrida en tierra y el tiempo empleado pueden aproximarse por las fórmulas del movimiento uniformemente decelerado:

$$x_L = \frac{V_{TD}^2}{2g(F_L/W)} \quad (8.40)$$

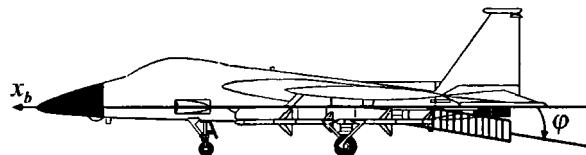
$$t_L = \frac{V_{TD}}{g(F_L/W)} = \sqrt{\frac{2x_L}{g(F_L/W)}}$$

Las dos expresiones anteriores pueden simplificarse si se supone que el empuje de los motores es nulo y que las acciones aerodinámicas son despreciables, en cuyo caso $F_L = \mu_r W$.

8.6. Problemas 8.1 y 8.2

PROBLEMA 8.1

Se considera un avión que está efectuando un despegue y cuyas características geométricas, aerodinámicas y másicas son conocidas. El avión está provisto de un turborreactor que proporciona un empuje en el despegue $T = (W/3) - cvV^2$ (donde W es el peso del avión constante y conocido y cv es asimismo una constante conocida) y dispone además de un cohete para ayuda al despegue (RATO, Rocket Assisting Take-Off) que suministra un empuje adicional $T_c = W/6$, pudiendo ser controlada por el piloto su orientación, φ , respecto al eje x_b ($0 \leq \varphi \leq 90^\circ$).



Suponiendo además que:

1. El eje x_b y el empuje del motor son paralelos al eje de la pista.
2. El recorrido en tierra se efectúa con todas las ruedas en contacto con la pista.
3. Son conocidos el coeficiente de rodadura, μ_r , la densidad atmosférica, ρ , y la aceleración de la gravedad, g .
4. La aceleración del avión durante su recorrido en tierra, con y sin cohete, es siempre positiva.

Se pide:

1º) Determinar la distancia recorrida en tierra con cohete, x_c , y sin cohete, x .

2º) Determinar, para el caso de avión con cohete, el ángulo φ que proporciona aceleración máxima, $\varphi_{a_{\max}}$.

3º) Determinar, para el caso de avión con cohete, el ángulo φ que proporciona distancia recorrida mínima, $\varphi_{x_{c\min}}$. Explicar las razones por las que este ángulo coincide (o no coincide) con el valor obtenido en 2º).

Solución:

1º) Las dos ecuaciones de fuerzas para el avión con cohete son:

$$T + T_c \cos \varphi - D - (F_{r1} + F_{r2}) = \frac{W}{g} \frac{dV}{dt}$$

$$L + T_c \sin \varphi + (N_1 + N_2) - W = 0$$

Imponiendo en la primera ecuación $F_{r1} = \mu_r N_1, F_{r2} = \mu_r N_2$, despejando de la segunda ecuación la suma de las dos normales, $N_1 + N_2$, e introduciendo esta suma en la primera ecuación, se obtiene la aceleración durante el despegue:

$$a = \frac{dV}{dt} = V \frac{dV}{dx} = \frac{d(V^2/2)}{dx} = g(A_c - B_c V^2)$$

donde

$$A_c = \left(\frac{1}{3} - \mu_r\right) + \frac{1}{6}(\cos \varphi + \mu_r \sin \varphi)$$

$$B_c = \frac{\rho S}{2W}(C_D - \mu_r C_L) + \frac{c_V}{W}$$

Integrando la ecuación diferencial anterior:

$$x_c = \frac{1}{g} \int_0^{V_{LOF_c}} \frac{d(V^2/2)}{A_c - B_c V^2} = \frac{1}{2gB_c} \ln \frac{A_c}{A_c - B_c V_{LOF_c}^2}$$

Téngase en cuenta que la velocidad de despegue con cohete, que aparece en la última expresión, no es un dato del problema y puede calcularse imponiendo en la segunda ecuación de fuerzas que las acciones normales sean nulas:

$$\frac{1}{2}\rho V_{LOF_c}^2 SC_L + T_c \sin \varphi - W = 0 \rightarrow V_{LOF_c} = \sqrt{\frac{2W}{\rho SC_L} \left(1 - \frac{1}{6} \sin \varphi\right)}$$

Para determinar la distancia recorrida por el avión sin el cohete, se eliminan de las expresiones anteriores los términos del cohete, quedando:

$$x = \frac{1}{2gB} \ln \frac{A}{A - BV_{LOF}^2}$$

$$A = \frac{1}{3} - \mu_r \quad ; \quad B = B_c = \frac{\rho S}{2W}(C_D - \mu_r C_L) + \frac{c_V}{W} \quad ; \quad V_{LOF} = \sqrt{\frac{2W}{\rho SC_L}}$$

Como $A_c > A$, $B = B_c$ y $V_{LOF_c} < V_{LOF}$, obsérvese que siempre se cumple $x_c < x$.

2º) El ángulo del cohete que proporciona aceleración máxima se obtiene derivando la aceleración (o, lo que es lo mismo, A_c) respecto de φ :

$$\frac{\partial A_c}{\partial \varphi} = 0 \rightarrow \tan \varphi_{a_{\max}} = \mu_r$$

3º) Para determinar $\varphi_{x_{c \min}}$ reorganízese la expresión obtenida para x_c en la forma:

$$x_c = \frac{1}{2gB_c} \ln \frac{1}{1 - (B_c V_{LOF_c}^2 / A_c)}$$

y obsérvese ahora que minimizar la distancia respecto de φ equivale a minimizar $V_{LOF_c}^2 / A_c$, dado por:

$$\frac{V_{LOF_c}^2}{A_c} = \frac{2W}{\rho S C_L} \frac{1 - \frac{1}{6} \sin \varphi}{(\frac{1}{3} - \mu_r) + \frac{1}{6} (\cos \varphi + \mu_r \sin \varphi)}$$

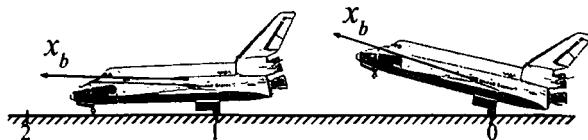
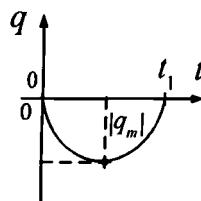
Derivando esta expresión con respecto de φ se obtiene finalmente:

$$2 \cos \varphi - 6 \sin \varphi + 1 = 0 \rightarrow \varphi_{x_{c \min}} = 27^\circ 32'$$

Este resultado es independiente de μ_r y no coincide con el resultado obtenido para la condición de aceleración máxima del apartado 2º (que sí depende de μ_r). Si en la expresión obtenida para la distancia recorrida con cohete sólo apareciera el ángulo φ en su denominador (a través de la aceleración), maximizar la aceleración equivaldría a minimizar la distancia. Sin embargo, el límite superior de la integral (la velocidad de despegue) también depende de φ y ocurre que para el ángulo que proporciona aceleración máxima, $\varphi_{a_{\max}}$, la velocidad de despegue aumenta y la distancia recorrida también aumenta.

PROBLEMA 8.2

Un planeador tipo “Space Shuttle”, con tren triciclo, pretende realizar una rodadura en el suelo en cierto aterrizaje descompuesta en los dos tramos siguientes (ver la figura adjunta):



- Tramo 0-1 ($0 \leq t < t_1$): Rodadura con el tren principal en el suelo, con velocidad angular de cabeceo q supuesta parabólica en función del tiempo (ver la figura adjunta, donde $q_m < 0$ y t_1 son constantes conocidas) y sin utilizar paracaídas de frenado.

- Tramo 1-2 ($V_1 \geq V \geq 0$): Rodadura con todas las ruedas en el suelo y en las dos situaciones siguientes:

- utilizando paracaídas de frenado
- sin utilizar paracaídas de frenado

Suponiendo además que:

1. Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del planeador (por ejemplo, la polar es parabólica de coeficientes constantes, el coeficiente de sustentación viene dado por $C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha$, etc.) y del paracaídas de frenado (sólo introduce una resistencia aerodinámica, con coeficiente de resistencia C_{D0p} referido a una superficie de referencia S_p).
2. En el punto 0 la velocidad V_0 es conocida y la acción normal en el tren principal es nula; durante el tramo 0-1 la velocidad puede suponerse paralela a la pista; en los dos tramos, $(C_D - \mu_r C_L) > 0$.
3. La transición entre los dos tramos es despreciable y el ángulo de asiento del planeador siempre es pequeño.
4. ρ , g y μ_r son constantes conocidas.

Se pide:

1º) Para el tramo 0-1, plantear una ecuación diferencial que permita calcular la velocidad en función del tiempo. Supuesta conocida esta función determinar la deflexión del timón de profundidad y la reacción normal en el tren principal, como funciones del tiempo.

2º) Para el tramo 1-2, y para las dos situaciones posibles con y sin paracaídas de frenado, determinar los tiempos empleados en la rodadura, t_p y t , y las distancias rodadas, x_p y x , y compararlos entre sí.

Solución:

1º) La velocidad angular de cabeceo propuesta para el tramo 0-1 responde a la expresión:

$$q = -4q_m \left[\left(\frac{t}{t_1} \right)^2 - \frac{t}{t_1} \right]$$

Integrando esta expresión se obtiene el ángulo de asiento del planeador:

$$\theta = \int_0^{t_1} q dt = -\frac{4q_m}{3t_1^2} t^3 + \frac{2q_m}{t_1} t^2 + \theta_0$$

El ángulo θ_0 se determina a partir de la condición impuesta de que en el punto 0 el planeador vuela horizontalmente ($\gamma \cong 0 \rightarrow \theta \cong \alpha$) y que la normal en el tren principal es nula ($N_2 = 0$):

$$L = W \rightarrow \frac{1}{2} \rho V_0^2 S (C_{L0} + C_{L\alpha} \theta_0) = W \rightarrow \theta_0 = \frac{2W}{\rho S V_0^2 C_{L\alpha}} - \frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}}$$

Como el tiempo empleado en el tramo 0-1 es conocido, se puede determinar θ_1 :

$$t = t_1 \rightarrow \theta_1 = \frac{2}{3} q_m t_1 + \theta_0$$

Las ecuaciones dinámicas de fuerzas y momentos son:

$$-\frac{1}{2} \rho V^2 S (C_{D0} + k C_L^2) - \mu_r N_2 = \frac{W}{g} \frac{dV}{dt}$$

$$\frac{1}{2} \rho V^2 S C_L - W + N_2 \cong 0$$

$$\frac{1}{2}\rho V^2 Sc(C_{m0} + C_{m\alpha}\theta + C_{m\delta_e}\delta_e + C_{mq}q) - N_2(x_2 + \mu_r z_g) = I_y \dot{q}$$

Introduciendo la reacción normal de la segunda ecuación en la primera:

$$-\mu_r W - \frac{1}{2}\rho V^2 S(C_{D0} + kC_L^2 - \mu_r C_L) = \frac{W}{g} \frac{dV}{dt}$$

donde el coeficiente de sustentación es una función conocida del tiempo:

$$C_L = \frac{2W}{\rho SV_0^2} - \frac{4q_m C_{L\alpha}}{3t_1^2} t^3 + \frac{2q_m C_{L\alpha}}{t_1} t^2$$

Y finalmente queda una ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{dV}{dt} + V^2 f(t) = -g\mu_r$$

siendo

$$f(t) = \frac{\rho S g}{2W} (C_{D0} + kC_L^2 - \mu_r C_L) > 0$$

ecuación que podría integrarse con la condición inicial $t = 0, V = V_0$.

Una vez obtenida $V = V(t)$, la velocidad final del tramo se obtiene haciendo $t = t_1 \rightarrow V = V_1 < V_0$.

Para determinar la normal en el tren principal y la deflexión del timón de profundidad, se utilizan las otras dos ecuaciones dinámicas:

$$N_2 = W - \frac{1}{2}\rho V^2 SC_L$$

$$C_{m\delta_e}\delta_e = \frac{2W\hat{x}}{\rho V^2 S} + \frac{2I_y}{\rho V^2 Sc}\dot{q} - C_{mq}q - (\hat{x}C_{L\alpha} + C_{m\alpha})\theta - (\hat{x}C_{L0} + C_{m0})$$

donde $\hat{x} = (x_2 + \mu_r z_g)/c$ y $\dot{q} = -8q_m(t/t_1^2) + 4q_m(1/t_1)$.

2º) Para el tramo 1-2 las dos ecuaciones de fuerzas para el caso de paracaídas son:

$$-(D + D_p) - \mu_r(N_1 + N_2) = \frac{W}{g} \frac{dV}{dt}$$

$$L + (N_1 + N_2) - W = 0$$

Operando con ellas se obtiene la siguiente expresión para la aceleración del planeador:

$$a = \frac{dV}{dt} = g \left(-\mu_r - \frac{\rho S}{2W} (C_D + \frac{S_p}{S} C_{D0p} - \mu_r C_L) V^2 \right)$$

donde C_D y C_L son constantes aerodinámicas para este tramo. Integrando la expresión anterior se obtiene la distancia recorrida y el tiempo empleado:

$$x_p = -\frac{1}{g} \int_{V_1}^0 \frac{d(V^2/2)}{\mu_r + B_p V^2} = \frac{1}{2gB_p} \ln(1 + \frac{B_p}{\mu_r} V_1^2)$$

$$t_p = -\frac{1}{g} \int_{V_1}^0 \frac{dV}{\mu_r + B_p V^2} = \frac{1}{g\sqrt{\mu_r B_p}} \arctan \sqrt{\frac{B_p}{\mu_r}} V_1$$

donde

$$B_p = \frac{\rho S}{2W} (C_D + \frac{S_p}{S} C_{D0p} - \mu_r C_L)$$

La distancia y el tiempo para el caso sin paracaídas serán:

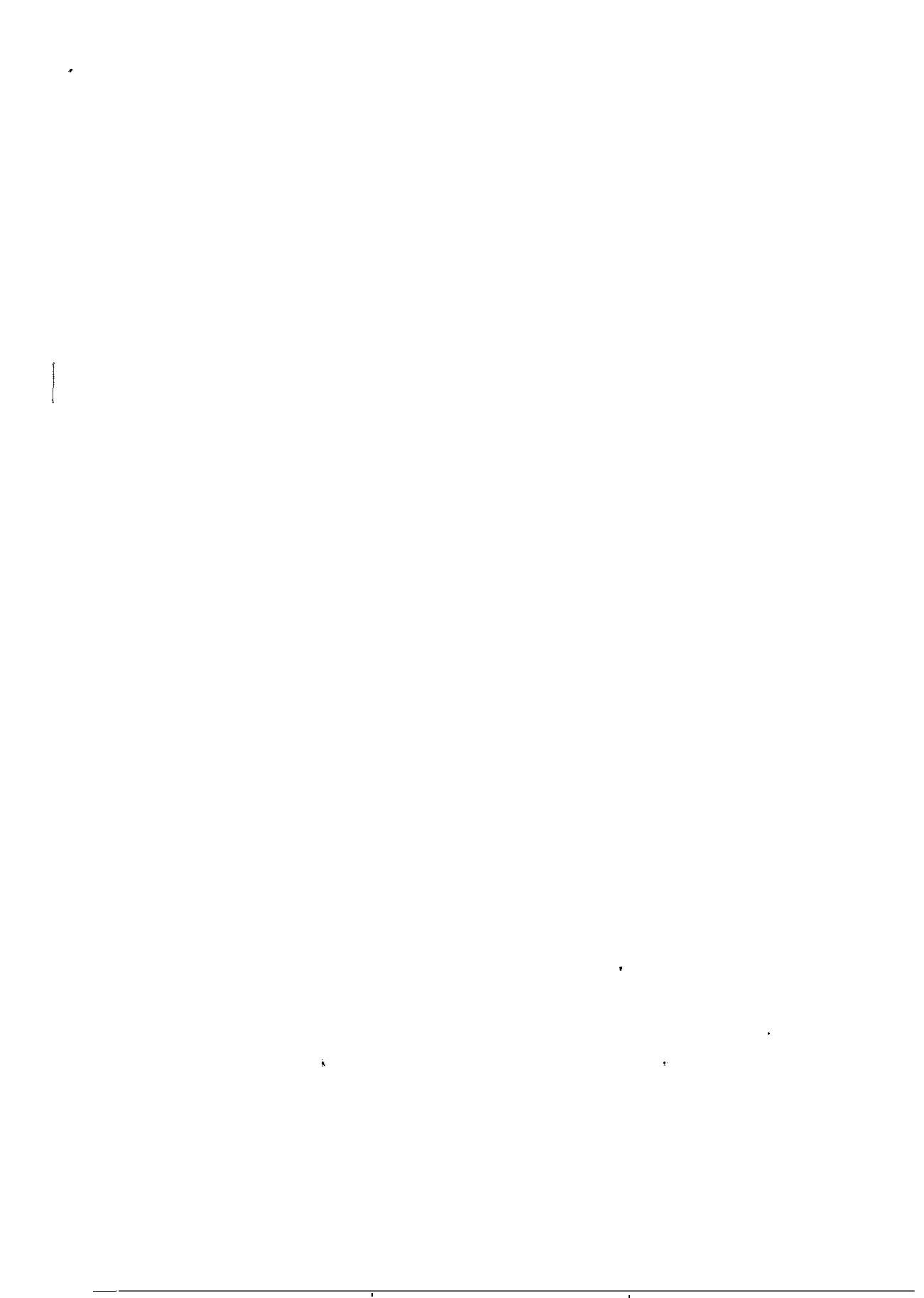
$$x = \frac{1}{2gB} \ln(1 + \frac{B}{\mu_r} V_1^2)$$

$$t = \frac{1}{g\sqrt{\mu_r B}} \arctan \sqrt{\frac{B}{\mu_r}} V_1$$

donde

$$B = \frac{\rho S}{2W} (C_D - \mu_r C_L) < B_p$$

Puede demostrarse que $x_p < x$ y $t_p < t$. Obsérvese además que para resolver este apartado no es preciso utilizar la ecuación de momentos de cabeceo.



Actuaciones de aviones de alta velocidad

9

9.1. Introducción

En este capítulo se pretende calcular el dominio de vuelo en el plano $M-h$ (número de Mach-altitud) y las actuaciones para los denominados aviones de alta velocidad, es decir, para aquellos aviones en los que no son despreciables los efectos de la compresibilidad sobre las características aerodinámicas del avión y sobre las actuaciones del grupo motopropulsor.

Según esto, para el régimen compresible (tanto subsónico, como transónico o supersónico), podrá considerarse una polar parabólica, pero con coeficientes dependientes del número de Mach, M (ver Figura 9.1). Además, el coeficiente de sustentación máximo, $C_{L \text{ máx}}$, será función del número de Mach para aviones con diseños subsónico, transónico y supersónico (ver Figura 9.2). Por consiguiente:

$$C_D = C_{D0} + kC_L^2 \quad ; \quad C_{D0} = C_{D0}(M) , \quad k = k(M)$$
$$C_{L \text{ máx}} = C_{L \text{ máx}}(M) \quad (9.1)$$

En cuanto a las características del grupo motopropulsor, en régimen compresible serán dependientes del número de Mach y de la altitud de vuelo, para cada posición de palanca. Por ejemplo, las características para máximo empuje serían (ver Figura 9.3):

$$T_{\text{máx}} = T_{\text{máx}}(M, h)$$
$$c_J_{\text{máx}} = c_J_{\text{máx}}(M, h) \quad (9.2)$$

El apartado 9.2 presenta una expresión válida para calcular la resistencia aerodinámica cuando el número de Mach juega un papel destacado, e introduce el concepto de factor de empuje; en el apartado 9.3 se establecen

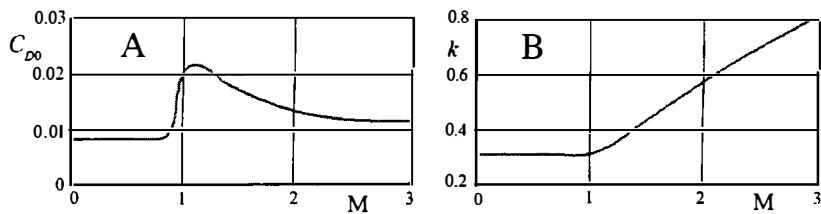


Figura 9.1. Coeficientes de la polar de un avión típico en función de M:
A) $C_{D0} = C_{D0}(M)$; B) $k = k(M)$.

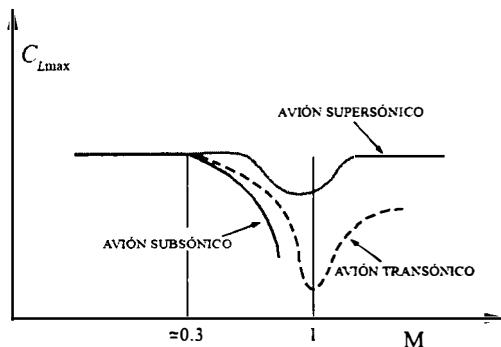


Figura 9.2. Coeficiente de sustentación máximo, $C_{L\max}$, en función de M.

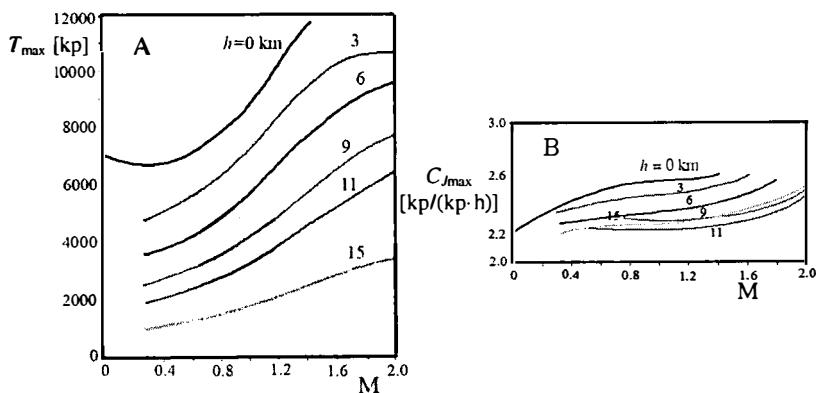


Figura 9.3. Empuje máximo y consumo específico de un turborreactor típico en función de M y de h : A) $T_{\max} = T_{\max}(M, h)$; B) $c_{J\max} = c_{J\max}(M, h)$.

las limitaciones más importantes al dominio de vuelo; en el apartado 9.4 se ofrecen los diagramas $M-h$ para el factor de empuje, la aceleración tangencial, la velocidad ascensional y el radio de viraje; en el apartado 9.5 se definen la energía específica y su derivada respecto del tiempo; y por último, en el apartado 9.6 se desarrolla la aproximación del llamado estado de energía y se indica el procedimiento para obtener trayectorias casi-óptimas en un plano vertical como, por ejemplo, la subida en tiempo mínimo entre dos puntos del diagrama $M-h$.

9.2. Resistencia aerodinámica y factor de empuje

Para deducir una expresión de la resistencia aerodinámica válida para régimen compresible, se parte de la ecuación (4.11) escrita en la forma:

$$D = qS(C_{D0} + kC_L^2) \quad (9.3)$$

e introduciendo en ella la definición de coeficiente de sustentación:

$$C_L = \frac{nW/S}{q} \quad (9.4)$$

se obtiene:

$$\frac{D}{W} = \frac{qC_{D0}}{W/S} + kn^2 \frac{W/S}{q} \quad (9.5)$$

A continuación se expresan la presión dinámica, q , y la velocidad aerodinámica, V , mediante:

$$q = \frac{1}{2}\rho V^2$$

$$V = Ma = M\sqrt{\gamma' \frac{p}{\rho}} \quad (9.6)$$

donde a es la velocidad del sonido en el aire, p es la presión atmosférica, ρ es la densidad atmosférica y γ' es la relación entre los calores específicos a presión constante y a volumen constante (para el gas aire, $\gamma' = 1.40$). Según esto la presión dinámica puede escribirse como:

$$q = \frac{\gamma'}{2}pM^2 \quad (9.7)$$

y sustituyéndola en la ecuación (9.5), se obtiene para la resistencia:

$$\frac{D}{W} = \frac{p}{\Gamma} M^2 C_{D0} + n^2 \frac{\Gamma}{p} \frac{k}{M^2} \quad (9.8)$$

donde se ha definido una nueva carga alar, Γ , mediante la expresión:

$$\Gamma = \frac{2}{\gamma'} \frac{W}{S} = 1.429 \frac{W}{S} \quad (9.9)$$

En las expresiones anteriores aparecen como variables la presión, p , y la velocidad del sonido, a , que son dos características de la atmósfera. Utilizando la Atmósfera Estándar Internacional, ambas pueden expresarse en función de la altitud, h , mediante ecuaciones similares a las (4.3), (4.4) y (4.5), que proporcionaban la densidad en función de la altitud. Las expresiones $p = p(h)$ y $a = a(h)$ en ISA son:

- Troposfera ($0 \leq h < 11000$ m):

$$\begin{aligned} p/p_0 &= \delta = (1 - 22.558 \times 10^{-6} h(\text{m}))^{5.2559} \\ a/a_0 &= (1 - 22.558 \times 10^{-6} \times h(\text{m}))^{0.5} \end{aligned} \quad (9.10)$$

- Tropopausa ($h = 11000$ m):

$$\begin{aligned} p_{11}/p_0 &= \delta_{11} = 0.2234 \\ a_{11}/a_0 &= 0.8671 \end{aligned} \quad (9.11)$$

- Parte inferior de la Estratosfera ($11000 \text{ m} < h < 20000 \text{ m}$):

$$\begin{aligned} p/p_0 &= \delta = 0.2234 \times \exp[-157.69 \times 10^{-6} \times (h(\text{m}) - 11.000)] \\ a/a_0 &= 0.8671 \end{aligned} \quad (9.12)$$

donde los subíndices “0” y “11” representan respectivamente el nivel del mar y la tropopausa; y $p_0 = 101325 \text{ Pa}$ y $a_0 = 340.294 \text{ m/s}$.

Introduciendo en la expresión (9.8) la presión en función de la altitud, $p = p(h)$, y los coeficientes de la polar en función del número de Mach, $C_{D0} =$

$C_{D0}(M)$ y $k = k(M)$, la resistencia aerodinámica de un avión fijado (con peso y superficie alar dados) queda de la forma:

$$D = D(M, h, n) = W \left[\frac{p(h)}{\Gamma} M^2 C_{D0}(M) + n^2 \frac{\Gamma}{p(h)} \frac{k(M)}{M^2} \right] \quad (9.13)$$

En condiciones de vuelo simétrico, horizontal, rectilíneo, casi-estacionario y con ángulo de ataque del empuje pequeño, se cumple:

$$L - W = 0 \rightarrow n = 1$$

$$D = D(M, h, 1) = D_1(M, h) \quad (9.14)$$

$$T = D_1(M, h) = W \left[\frac{p(h)}{\Gamma} M^2 C_{D0}(M) + \frac{\Gamma}{p(h)} \frac{k(M)}{M^2} \right]$$

donde se ha representado mediante $D_1(M, h)$ la resistencia para factor de carga igual a la unidad.

En un amplio dominio de valores de M y h debe cumplirse que:

$$T_{\max}(M, h) > D_1(M, h) \quad (9.15)$$

y de esta forma el avión puede utilizar el exceso de empuje en acelerar, virar y/o volar en subida.

Se define ahora el **factor de empuje**, r , mediante la siguiente expresión:

$$r = \frac{T(M, h)}{T_{\max}(M, h)} \leq 1 \quad (9.16)$$

donde $T(M, h)$ es el empuje seleccionado por el piloto y $T_{\max}(M, h)$ es el empuje máximo.

Sea r_1 el valor de r que corresponde a vuelo simétrico, horizontal, rectilíneo, casi-estacionario y con ángulo de ataque del empuje pequeño, en un punto M, h . Entonces:

$$r_1 = \frac{T(M, h)}{T_{\max}(M, h)} = \frac{D_1(M, h)}{T_{\max}(M, h)} \quad (9.17)$$

y por tanto este vuelo sólo es posible en aquellas zonas del plano $M-h$ donde $r_1 \leq 1$.

9.3. Envolvente del dominio de vuelo

Se denomina dominio de vuelo a aquella zona del plano $M-h$ en la que es posible el vuelo del avión. Las limitaciones de distinto tipo que restringen los puntos $M-h$ donde se puede volar definen la llamada envolvente del dominio de vuelo.

Existen diversas limitaciones al dominio de vuelo, entre las que se pueden mencionar:

- Limitación aerodinámica
- Limitación estructural
- Limitación térmica
- Limitación por características del motor

A continuación se desarrollan sucintamente estas limitaciones.

9.3.1. Limitación aerodinámica

Utilizando las expresiones (9.4), (9.7) y (9.9), puede escribirse para el coeficiente de sustentación:

$$C_L = n \frac{\Gamma}{pM^2} \leq C_{L\max}(M) \quad (9.18)$$

es decir:

$$C_{L\max}(M)M^2 \geq n \frac{\Gamma}{p(h)} \quad (9.19)$$

Multiplicando $C_{L\max}(M)$, dado por la Figura 9.2, por el número de Mach elevado al cuadrado, se obtiene $C_{L\max}(M)M^2$. Imponiendo ahora en la expresión (9.19) el símbolo de igualdad y considerando W, S y n dados ($n = 1$ en vuelo simétrico, horizontal, rectilíneo, casi-estacionario y con ángulo de ataque del empuje pequeño), se obtiene una curva en el plano $M-h$ que limita el dominio de vuelo por pérdida, ya que sobre ella se alcanza $C_{L\max}$ (ver Figura 9.4).

Obsérvese que, para h dada, la pérdida en un avión subsónico se presenta con dos valores del número de Mach (pérdidas de “baja” y de “alta”).

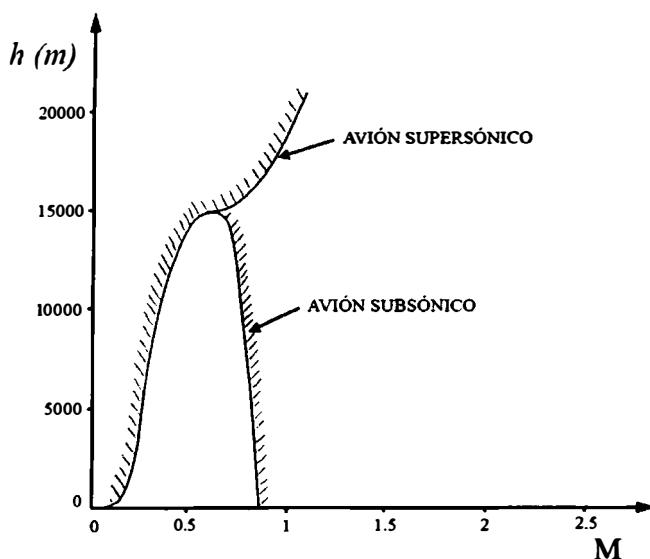


Figura 9.4. Limitaciones por pérdida para un avión subsónico y para un avión supersónico.

La altitud para la que ambos valores coinciden recibe el nombre de **techo de sustentación**.

9.3.2. Limitación estructural

La estructura de un avión no es capaz de soportar una presión dinámica por encima de cierto valor de diseño, q_{\max} . Por tanto, dentro del dominio de vuelo, es preciso imponer la limitación siguiente:

$$q = \frac{\gamma'}{2} p M^2 \leq q_{\max} \quad (9.20)$$

es decir:

$$\frac{\gamma'}{2} M^2 \leq \frac{q_{\max}}{p(h)} \quad (9.21)$$

Imponiendo en la expresión anterior el símbolo de igualdad, se obtiene una curva en el plano $M-h$ que limita el dominio de vuelo por motivos estructurales, ya que sobre ella se alcanza q_{\max} (ver Figura 9.5).

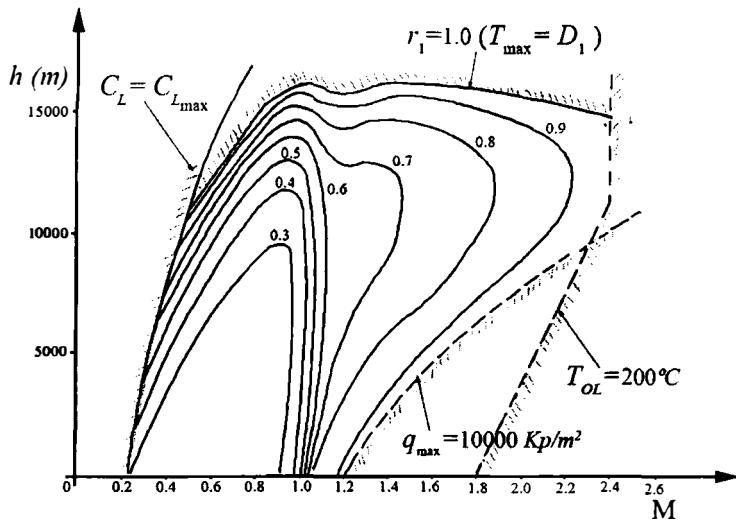


Figura 9.5. Diagrama $M-h$ del factor de empuje r_1 para un avión supersónico típico.

9.3.3. Limitaciones térmica y por características del motor

Debido a restricciones en las características de los materiales de construcción de los aviones, la temperatura de remanso de la corriente fluida, T_0 , debe mantenerse por debajo de cierto valor límite, T_{0L} :

$$T_0 \leq T_{0L} \quad (9.22)$$

La temperatura de remanso viene dada por la expresión:

$$T_0 = T \left(1 + \frac{\gamma' - 1}{2} M^2 \right) \quad (9.23)$$

siendo T el valor de la temperatura en atmósfera estándar que es función de la altitud según las expresiones siguientes:

- Troposfera ($0 \leq h < 11000$ m):

$$T/T_0 = 1 - 22.558 \times 10^{-6} h(m) \quad (9.24)$$

- Tropopausa ($h = 11000$ m):

$$T_{11}/T_0 = 0.7519 \quad (9.25)$$

- Parte inferior de la Estratosfera ($11000 \text{ m} < h < 20000 \text{ m}$):

$$T/T_0 = 0.7519 \quad (9.26)$$

donde los subíndices “0” y “11” representan respectivamente el nivel del mar y la tropopausa; y $T_0 = 288.15 \text{ K}$.

Según todo lo anterior se obtiene la siguiente limitación térmica:

$$\left(1 + \frac{\gamma' - 1}{2} M^2\right) \leq \frac{T_{0L}}{T(h)} \quad (9.27)$$

Imponiendo en esta expresión el símbolo de igualdad, se obtiene una curva en el plano M-h que limita el dominio de vuelo por temperatura, ya que sobre ella se alcanza T_{0L} (ver Figura 9.5).

Por último, el motor puede introducir limitaciones en temperaturas y en presiones como consecuencia de restricciones en la operación del mismo, como por ejemplo:

$$\begin{aligned} T_{2T} &\leq T_{2TL}, \quad T_{3T} \leq T_{3TL} \\ p_{2T \min} &\leq p_{2T} \leq p_{2T \max} \end{aligned} \quad (9.28)$$

donde el subíndice “2T” representa la salida del compresor y entrada en la cámara de combustión, el subíndice “3T” la salida de la cámara de combustión y entrada de la turbina y el subíndice “L” las condiciones límites establecidas.

Estas limitaciones se traducirían en curvas de la forma $f(M, h, \pi) = 0$, donde π representa el parámetro de control de empuje del motor.

9.4. Algunos diagramas M-h

A continuación se desarrollan los diagramas M-h del factor de empuje, de la aceleración tangencial, de la velocidad ascensional y del radio de viraje.

9.4.1. Diagrama M-h del factor de empuje

La expresión (9.17) proporciona r_1 , es decir, el factor de empuje en vuelo simétrico, horizontal, rectilíneo, casi-estacionario y con ángulo de ataque

del empuje pequeño, en un punto M, h . Introduciendo en ella la expresión (9.14) para la resistencia a $n = 1$, queda:

$$r_1 = r_1(M, h) = \frac{W}{T_{\max}(M, h)} \left[\frac{p(h)}{\Gamma} M^2 C_{D0}(M) + \frac{\Gamma}{p(h)} \frac{k(M)}{M^2} \right] \quad (9.29)$$

La ecuación anterior define una familia de curvas en el plano $M-h$ con r_1 como parámetro (Figura 9.5). Si $r_1 < 1$, hay un exceso de empuje (el empuje máximo es mayor que la resistencia para el vuelo) y este exceso podrá emplearse en subir, acelerar o maniobrar.

El exceso de empuje se reduce conforme el avión se aproxima a $r_1 = 1$. De la Figura 9.5 se obtiene directamente el valor de la altitud máxima alcanzable en este vuelo (techo teórico o techo de empuje), en función del número de Mach.

9.4.2. Diagrama $M-h$ de la aceleración tangencial

En vuelo simétrico, horizontal, rectilíneo, con ángulo de ataque del empuje pequeño y no estacionario se tiene:

$$T - D = \frac{W}{g} \dot{V} \quad (9.30)$$

$$L - W = 0 \rightarrow n = 1$$

Por tanto:

$$\frac{\dot{V}}{g} = \frac{T - D_1}{W} \quad (9.31)$$

Como $T = rT_{\max}$ y $D_1 = r_1T_{\max}$ (ecuaciones (9.16) y (9.17)), se introducen estas expresiones en la última ecuación, obteniéndose:

$$\frac{\dot{V}}{g} = (r - r_1) \frac{T_{\max}}{W} = f(r, M, h) \quad (9.32)$$

El máximo valor de la aceleración tangencial vendrá dado por la condición $r = 1$:

$$\left(\frac{\dot{V}}{g} \right)_{\max} = f(M, h) = \frac{T_{\max}(M, h)}{W} - \left[\frac{p(h)}{\Gamma} M^2 C_{D0}(M) + \frac{\Gamma}{p(h)} \frac{k(M)}{M^2} \right] \quad (9.33)$$

En el dominio de vuelo M-h, limitado por las envolventes correspondientes, se pueden dibujar las curvas de valor constante de $(\dot{V}/g)_{\max} = f(M, h)$. Obsérvese que la condición de $r_1 = 1$ coincide con la de aceleración tangencial máxima nula.

9.4.3. Diagrama M-h de la velocidad ascensional

Se considera vuelo simétrico en un plano vertical, rectilíneo (o casi-rectilíneo), casi estacionario, y con ángulo de ataque del empuje pequeño. Las relaciones cinemáticas son entonces (ver apartado 3.5.2):

$$\begin{aligned}\dot{x}_e &= V \cos \gamma \\ V_a &= V \sin \gamma\end{aligned}\tag{9.34}$$

y las relaciones dinámicas:

$$\begin{aligned}T - D - W \sin \gamma &= 0 \\ L - W \cos \gamma &= 0\end{aligned}\tag{9.35}$$

que junto con las expresiones (9.13) y (9.16) conforman el sistema de ecuaciones a resolver.

Como primer paso se obtiene una solución simplificada, válida para $|\gamma| \ll 1$ (es decir, se cumple que $\cos \gamma = 1$ y $\sin \gamma = \gamma$). La segunda ecuación del sistema anterior proporciona $n = 1$, por lo que la resistencia queda:

$$D = D(M, h, 1) = D_1(M, h) = r_1 T_{\max}(M, h)\tag{9.36}$$

Despejando el ángulo de asiento de velocidad y la velocidad ascensional de los sistemas (9.34) y (9.35):

$$\begin{aligned}\gamma &= (r - r_1) \frac{T_{\max}}{W} \\ V_a &= V \gamma = V(r - r_1) \frac{T_{\max}}{W} = (r - r_1) \frac{T_{\max}}{W} Ma\end{aligned}\tag{9.37}$$

donde la velocidad del sonido, a , es una función de la altitud, h , según las expresiones (9.10), (9.11) y (9.12).

Obsérvese que, para la velocidad ascensional, queda una expresión de la forma $V_a = V_a(r, M, h)$ y por tanto para $r = 1$ se obtiene la velocidad ascensional máxima (ver Figura 9.6):

$$V_{a \max} = V_{a \max}(M, h) = (1 - r_1(M, h)) \frac{T_{\max}(M, h)}{W} Ma(h)\tag{9.38}$$

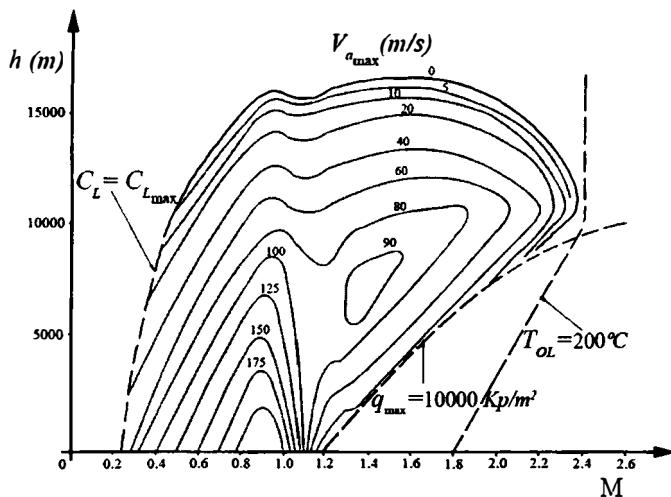


Figura 9.6. Diagrama $M-h$ de la velocidad ascensional máxima para un avión supersónico típico.

Con objeto de obtener una mejor aproximación al problema, ahora no se efectúa la hipótesis $|\gamma| \ll 1$ y se retienen los senos y cosenos en el sistema de ecuaciones (9.35):

$$\sin \gamma = \frac{T - D}{W} \quad (9.39)$$

$$n = \cos \gamma$$

Operando con el sistema anterior, y teniendo en cuenta las expresiones (9.13) y (9.16), se obtienen las expresiones siguientes para el ángulo de asiento de velocidad y la velocidad ascensional:

$$\sin \gamma = \frac{1}{2} \frac{pM^2}{\Gamma k} \left[1 - \sqrt{1 - 4 \frac{\Gamma k}{pM^2} (r - r_1) \frac{T_{\max}}{W}} \right] \quad (9.40)$$

$$V_a = V \sin \gamma = Ma \sin \gamma = \frac{1}{2} \frac{pM^3 a}{\Gamma k} \left[1 - \sqrt{1 - 4 \frac{\Gamma k}{pM^2} (r - r_1) \frac{T_{\max}}{W}} \right]$$

En las dos expresiones anteriores, se ha escogido el signo negativo (entre los dos posibles signos \pm que aparecen delante de las raíces) para que si $r = r_1$, $\gamma = 0$.

Obsérvese que, para la velocidad ascensional, queda una expresión de la forma $V_a = V_a(r, M, h)$ y por tanto para $r = 1$ se obtiene la velocidad ascensional máxima:

$$V_{a\max} = V_{a\max}(M, h) =$$

$$= \frac{p(h)a(h)M^3}{2\Gamma k(h)} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4\Gamma k(h)}{p(h)M^2} (1 - r_1(M, h)) \frac{T_{\max}(M, h)}{W}} \right] \quad (9.41)$$

Existen dos casos particulares de interés:

- $r_1 = 1 \rightarrow$ si $r < 1$, $V_a < 0$ y $\gamma < 0$; si $r = 1$, $V_a = \gamma = 0$
- $\gamma = \pi/2$, $n = 0 \rightarrow T = W + D = rT_{\max}$, $D = W(p/\Gamma)M^2C_{D0}$, y por tanto es necesario que: $T_{\max} \geq W + D = W[1 + (p/\Gamma)M^2C_{D0}]$

9.4.4. Diagrama M-h del radio de viraje

Se considera un viraje en un plano horizontal, simétrico, casi-estacionario y con ángulo de ataque del empuje pequeño. Las ecuaciones dinámicas son (ver apartado 3.5.3):

$$T - D = 0$$

$$L \sin \mu - \frac{W}{g} \frac{V^2}{R} = 0 \quad (9.42)$$

$$L \cos \mu - W = 0$$

que junto con las expresiones (9.13) y (9.16) conforman el sistema de ecuaciones a resolver.

Se desea obtener el radio de curvatura de la trayectoria, $R = R(r, M, h)$ y para ello, en primer lugar, se buscan expresiones de la forma $R = R(V, n)$ y $n = n(r, M, h)$. Operando con las dos últimas ecuaciones dinámicas del sistema (9.42) queda:

$$\begin{aligned} n \sin \mu &= \frac{V^2}{gR} \\ n \cos \mu &= 1 \end{aligned} \quad (9.43)$$

$$R = \frac{V^2}{g} \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} = \frac{M^2 a^2}{g} \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

Por otra parte, se tiene:

$$T = rT_{\max} = D \quad (9.44)$$

$$D = D_1 + (n^2 - 1) \frac{\Gamma k}{pM^2} W = r_1 T_{\max} + (n^2 - 1) \frac{\Gamma k}{pM^2} W$$

de donde:

$$n^2 - 1 = \frac{pM^2}{\Gamma k} (r - r_1) \frac{T_{\max}}{W} \quad (9.45)$$

Introduciendo la ecuación anterior en la última expresión del sistema (9.43), finalmente queda una ecuación del tipo $R = R(r, M, h)$:

$$R = \frac{M^2 a^2}{g} \left(\frac{pM^2}{\Gamma k} (r - r_1) \frac{T_{\max}}{W} \right)^{-1/2} \quad (9.46)$$

Entonces, para cada punto M, h , el valor mínimo del radio de curvatura se obtiene haciendo $r = 1$:

$$R_{\min} = R_{\min}(M, h) = \frac{M^2 a^2(h)}{g} \left[\frac{p(h)M^2}{\Gamma k(M)} (1 - r_1(M, h)) \frac{T_{\max}(M, h)}{W} \right]^{-1/2} \quad (9.47)$$

Téngase en cuenta que, en cualquier viraje, es preciso verificar que no se excedan las limitaciones, aerodinámica por coeficiente de sustentación máximo, $C_{L\max}$, y estructural por factor de carga máximo, n_{\max} . Es decir, sólo es posible volar donde el factor de carga, n , satisfaga las condiciones:

$$C_{L\max}(M)M^2 \geq n \frac{\Gamma}{p(h)} \quad , \quad n \leq n_{\max} \quad (9.48)$$

9.5. Energía específica y su derivada respecto del tiempo

Se define la energía específica del avión, e , como la energía mecánica de su centro de masas por unidad de peso. Es decir:

$$e = \frac{\frac{W}{g} \frac{V^2}{2} + Wh}{W} = \frac{V^2}{2g} + h \quad (9.49)$$

Introduciendo aquí el concepto de número de Mach y la velocidad del sonido en función de la altitud para atmósfera estándar (ver apartado 9.2), queda:

$$e = e(M, h) = \frac{M^2 a^2(h)}{2g} + h \quad (9.50)$$

Para obtener ahora la derivada con respecto del tiempo de la energía específica, se deriva la ecuación (9.49) y se obtiene:

$$\dot{e} = \frac{V\dot{V}}{g} + \dot{h} \quad (9.51)$$

La tercera relación cinemática lineal y la primera relación dinámica, para ángulos de ataque y de resbalamiento del empuje despreciables, establecen respectivamente que (ver expresiones (3.8) y (3.5)):

$$\begin{aligned} V_a &= \dot{h} = V \sin \gamma \\ T - D &= W \sin \gamma + \frac{W}{g} \dot{V} \end{aligned} \quad (9.52)$$

Operando con ambas expresiones y con la ecuación (9.51) se obtiene:

$$\dot{e} = \frac{T - D}{W} V \quad (9.53)$$

Obsérvese que, según la expresión (6.17), la derivada de la energía específica respecto del tiempo coincide con el exceso de potencia específico, SEP; es decir:

$$\dot{e} = \text{SEP} = \frac{T - D}{W} V \quad (9.54)$$

Introduciendo en esta ecuación las expresiones (9.13) y (9.16) queda:

$$\dot{e} = \dot{e}(r, M, h, n) = \frac{Ma(h)}{W} [r T_{\max}(M, h) - D(M, h, n)] \quad (9.55)$$

Para calcular el valor del factor de carga, n , se utiliza la relación dinámica de fuerzas según el eje z_w (ver la tercera expresión del sistema (3.5)). En el caso de vuelo simétrico en un plano vertical con alas a nivel y suponiendo

que la componente del empuje según el eje z_w es despreciable, el factor de carga queda:

$$n = \frac{L}{W} = \cos \gamma + \frac{V}{g} \dot{\gamma} \quad (9.56)$$

Existen multitud de vuelos donde $|\gamma| \ll 1$ y $|V\dot{\gamma}/g| \ll 1$, es decir, donde $n \approx 1$. En este caso, la ecuación de la derivada respecto del tiempo de la energía específica se simplifica, quedando:

$$\dot{e} = \dot{e}(r, M, h) = Ma(h) \frac{T_{\max}(M, h)}{W} (r - r_1(M, h)) \quad (9.57)$$

El valor máximo de la derivada de la energía específica respecto del tiempo se obtiene para $r = 1$:

$$\dot{e}_{\max} = \dot{e}_{\max}(M, h) = Ma(h) \frac{T_{\max}(M, h)}{W} (1 - r_1(M, h)) \quad (9.58)$$

Mediante las ecuaciones (9.50) y (9.57) se pueden representar en un diagrama $M-h$ las curvas $e = cte$ y $\dot{e} = cte$ (para un r dado, normalmente $r = 1$), como se ilustra en la Figura 9.7. De esta figura se pueden extraer, entre otros, los siguientes comentarios:

- Avión con $\dot{e} = 0$: se encuentra en el techo de empuje; si se quiere pasar del punto C al punto D, no se puede subir directamente por la línea del techo de empuje que los une, sino que hay que entrar previamente en zonas con $\dot{e} > 0$, desde las que se pueda aumentar la energía específica para alcanzar el punto D.
- Punto C: puede demostrarse que el vuelo es inestable frente a perturbaciones de velocidad; Punto C': puede demostrarse que el vuelo es estable frente a perturbaciones de velocidad.
- Para volar en condiciones de vuelo horizontal rectilíneo estacionario en el punto E, hay que reducir r hasta que valga cero la curva correspondiente de \dot{e} que pasa por E.
- Se denomina **techo dinámico** la máxima altitud que es capaz de alcanzar un avión, a pesar de que no pueda mantenerse en ella en vuelo horizontal rectilíneo casi-estacionario. Para alcanzar el techo dinámico (punto G) se debe abandonar la curva $\dot{e} = 0$ en aquel punto en que e sea máxima (punto F). Así puede alcanzarse el punto G, si no hay otras razones relacionadas con la envolvente de vuelo que lo impidan.

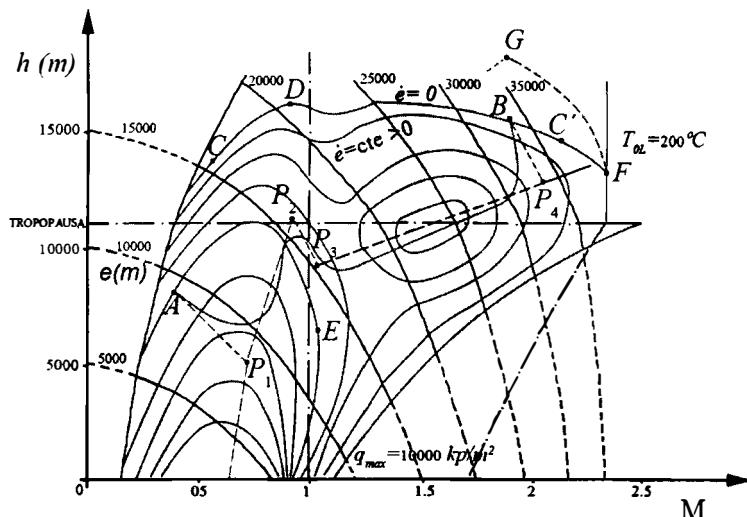


Figura 9.7. Diagrama M- h de la energía específica y de su derivada respecto del tiempo para un avión supersónico típico. Minimización del tiempo de subida desde (M_1, h_1) hasta (M_2, h_2) .

9.6. El estado de energía

Mediante el diagrama M- h se pueden obtener, de forma aproximada, trayectorias casi-óptimas en el plano vertical, las cuales no difieren demasiado de las soluciones exactas.

La utilización con este fin del diagrama M- h de la energía específica y de su derivada respecto del tiempo, se basa en la aproximación del llamado “estado de energía”, que consiste, simplemente, en reformular el sistema de ecuaciones y utilizar la energía específica como la variable independiente del problema.

El sistema de ecuaciones del vuelo simétrico en un plano vertical, con alas a nivel, con el ángulo de ataque del empuje pequeño y su componente según el eje z_w despreciable, y considerando el peso como una constante conocida, es el siguiente:

Ecuaciones del movimiento (1 cinemática y 2 dinámicas):

$$\dot{h} = V \sin \gamma$$

...

$$\begin{aligned} T - D - W \left(\sin \gamma + \frac{\dot{V}}{g} \right) &= 0 \\ n - \left(\cos \gamma + \frac{V \dot{\gamma}}{g} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (9.59)$$

Relaciones funcionales del avión y motor:

$$\begin{aligned} \frac{D}{W} &= \frac{p}{\Gamma} M^2 C_{D0}(M) + n^2 \frac{\Gamma}{p} \frac{k(M)}{M^2} \\ T &= r T_{\max}(M, h) \end{aligned} \quad (9.60)$$

Relaciones funcionales de la atmósfera:

$$\begin{aligned} V &= a M \\ p &= p(h) , \quad a = a(h) \end{aligned} \quad (9.61)$$

Si se introducen las relaciones funcionales del avión y motor, y de la atmósfera, en las tres ecuaciones del movimiento, el sistema global queda de la forma siguiente:

Variable independiente: t

Variables dependientes: M, h, γ, r, n

Ecuaciones: 3

Grados de libertad matemáticos $\equiv N = 2$

Para simplificar el sistema anterior, puede suponerse adicionalmente que $|\gamma| \ll 1$ y $|V \dot{\gamma}/g| \ll 1$ (es decir, $n \cong 1$) y así el sistema se transforma en:

Ecuaciones del movimiento (1 cinemática y 1 dinámica):

$$\begin{aligned} \dot{h} &= V \gamma \\ T - D - W \left(\gamma + \frac{\dot{V}}{g} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (9.62)$$

Relaciones funcionales del avión y motor, y de la atmósfera:

$$\frac{D}{W} = \frac{p}{\Gamma} M^2 C_{D0}(M) + \frac{\Gamma}{p} \frac{k(M)}{M^2}$$

$$T = r T_{\max}(M, h) \quad (9.63)$$

$$V = aM$$

$$p = p(h), \quad a = a(h)$$

Variable independiente: t

Variables dependientes: M, h, γ, r

Ecuaciones: 2

Grados de libertad matemáticos $\equiv N = 2$

Otra formulación alternativa al sistema anterior se efectúa introduciendo en él los conceptos de energía específica y derivada respecto del tiempo de la energía específica (ecuaciones (9.50) y (9.57)):

Ecuaciones del movimiento (1 cinemática y 1 dinámica):

$$\dot{h} = V\gamma \quad (9.64)$$

$$\dot{e} = Ma \frac{T_{\max}}{W} (r - r_1)$$

Ecuación de la energía específica y relaciones funcionales del avión y motor, y de la atmósfera:

$$e = \frac{M^2 a^2}{2g} + h$$

$$T_{\max} = T_{\max}(M, h)$$

$$r_1 = \frac{W}{T_{\max}(M, h)} \left(\frac{p}{\Gamma} M^2 C_{D0}(M) + \frac{\Gamma}{p} \frac{k(M)}{M^2} \right) \quad (9.65)$$

$$V = aM$$

$$p = p(h), \quad a = a(h)$$

Variable independiente: t

Variables dependientes: M, h, γ, r

Ecuaciones: 2

Grados de libertad matemáticos $\equiv N = 2$

Por último, a partir de la primera ecuación del sistema (9.65) para la energía específica se puede obtener una relación de la forma:

$$h = h(M, e) \quad (9.66)$$

Adicionalmente es posible efectuar un cambio de variable independiente y tomar e como la nueva variable independiente, pasando a ser variable dependiente el tiempo t . Introduciendo la expresión (9.66) en el sistema anterior, resulta:

Ecuaciones del movimiento (1 cinemática y 1 dinámica):

$$\begin{aligned} \dot{h} &= V\gamma \\ \dot{e} &= Ma \frac{T_{\max}}{W} (r - r_1) \end{aligned} \quad (9.67)$$

Ecuación de la energía específica y relaciones funcionales del avión y motor, y de la atmósfera:

$$h = h(M, e)$$

$$T_{\max} = T_{\max}(M, e)$$

$$r_1 = r_1(M, e) \quad (9.68)$$

$$V = V(M, e)$$

$$a = a(M, e)$$

Variable independiente: e

Variables dependientes: M, t, γ, r

Ecuaciones: 2

Grados de libertad matemáticos $\equiv N = 2$

Las dos ecuaciones del sistema (9.67) están desacopladas: la segunda ecuación permite determinar t , en función de M , r (variables dependientes, que se toman como variables de control) y e (variable independiente), y la primera ecuación permite determinar γ , en función de las mismas variables. La segunda ecuación quedaría de la forma:

$$\frac{dt}{de} = \frac{W}{MaT_{\max}(r - r_1)} = f(r, M, e) \quad (9.69)$$

Suponiendo además que r está dado, el sistema tendrá solamente un grado de libertad. Tomando M como variable de control se puede determinar la ley $M(e)$ que optimice algún criterio predeterminado.

A título de ejemplo, se pretende determinar la ley $M(e)$ que minimice el tiempo de subida desde un punto de partida del diagrama $M-h$, (M_1, h_1) , hasta otro de llegada, (M_2, h_2) , para un valor dado de r (normalmente $r = 1$). Mediante la última ecuación:

$$\frac{dt}{de} = \frac{1}{\dot{e}(M, e)} \quad (9.70)$$

$$t = \int_{e_1}^{e_2} \frac{1}{\dot{e}(M(e), e)} de$$

Para obtener e_1 y e_2 se utiliza la ecuación (9.50) o el diagrama de la energía específica con los valores (M_1, h_1) y (M_2, h_2) . La ley $M(e)$ que minimiza t es la que maximiza \dot{e} para cada e , y se obtiene a partir de:

$$\left[\frac{\partial}{\partial M} \dot{e}(M, e) \right]_e = 0 \quad (9.71)$$

La determinación analítica de esta ley de control es un problema complicado, mientras que la resolución gráfica, mediante el diagrama de energía específica, es mucho más fácil.

En el diagrama de energía específica, el valor de M que satisface la ecuación anterior es el correspondiente a la tangencia de la curva de $e = cte$ considerada, con una curva de la familia $\dot{e} = cte$. El lugar geométrico de los puntos de tangencia es la curva discontinua representada en la Figura 9.7 (línea que une P₁-P₂ y P₃-P₄), la cual representa la relación óptima entre M y h para subir en tiempo mínimo.

Para resolver el problema en el que los puntos A $\equiv (M_1, h_1)$ y B $\equiv (M_2, h_2)$ no estén sobre la curva obtenida, sólo es necesario tener en cuenta que, de acuerdo con la segunda ecuación del sistema (9.70), el tiempo necesario para desplazarse a lo largo de una curva $e = cte$ (cambio de energía cinética por energía potencial) es muy pequeño comparado con el tiempo necesario para incrementar e . Según esto, la ley óptima aproximada de subida entre dos puntos genéricos A y B consta de los cinco tramos siguientes (ver Figura 9.7):

1. Picado $\overline{AP_1}$ con $e = cte$.
2. Subida $\overline{P_1P_2}$ con \dot{e}_{\max} para cada e .
3. Picado $\overline{P_2P_3}$ con $e = cte$.
4. Subida $\overline{P_3P_4}$ con \dot{e}_{\max} para cada e .
5. Subida $\overline{P_4B}$ con $e = cte$.

La solución exacta de este problema, obtenida numéricamente, se esquematiza asimismo en la Figura 9.7 mediante una línea continua cercana a la solución aproximada de los cinco tramos. Como puede observarse existe un acuerdo razonable entre ambas soluciones.

9.7. Problemas 9.1 y 9.2

PROBLEMA 9.1

Se supone que el coeficiente de sustentación máximo de un avión subsónico viene dado por la expresión $C_{L\text{máx}} = A(1 - M^2)$, donde A es una constante conocida y M es el número Mach de vuelo. Suponiendo además que son conocidas la carga alar del avión, W/S , la constante de la gravedad, g , y las funciones de la atmósfera estándar $\sigma(h) = \rho/\rho_0$ y $\delta(h) = p/p_0$, y que el ángulo de ataque del empuje es despreciable, se pide:

- 1º) Determinar el factor de carga máximo, n_m , en función de M y h .
- 2º) Determinar el número de Mach que maximiza n_m , M_{opt} , y el valor del factor de carga máximo de los máximos, n_{mm} , en función de h .
- 3º) Determinar la altitud que maximiza n_{mm} , así como el valor correspondiente de ese factor de carga máximo, n_{mmm} .
- 4º) Determinar el techo de sustentación del avión, H .
- 5º) Determinar el dominio de vuelo a cada altitud h ($M_{\text{mín}} \leq M \leq M_{\text{máx}}$) para el avión en vuelo horizontal rectilíneo a $C_{L\text{máx}}$. Comentar la influencia de la altitud en este dominio.
- 6º) Obtener un polinomio a partir del cual sería posible determinar el número de Mach que maximiza la velocidad angular en viraje simétrico horizontal instantáneo, $M_{\dot{\chi}_{\text{máx}}}$, para cada altitud h .

Solución:

- 1º) Planteando la definición de factor de carga máximo:

$$n_m = \frac{\rho S V^2}{2W} C_{L\text{máx}} = \frac{Ap_0}{\Gamma} \delta(h) (M^2 - M^4) = B \delta(h) (M^2 - M^4)$$

$$\text{donde } B = \frac{Ap_0}{\Gamma} = \frac{\gamma' Ap_0}{2(W/S)}$$

- 2º) Derivando la expresión del apartado anterior con respecto a M :

$$M_{\text{opt}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow n_{mm} = \frac{B}{4} \delta(h) = \frac{\gamma' Ap_0}{8(W/S)} \delta(h)$$

- 3º) Como n_{mm} es una función monótonamente creciente con δ , n_{mmm}

se alcanza al nivel del mar:

$$h = 0 \rightarrow \delta(h) = 1 \rightarrow n_{\text{mm}} = \frac{B}{4} = \frac{\gamma' A p_0}{8(W/S)}$$

4º) El techo de sustentación se define como aquella altitud por encima de la cual no se puede mantener la condición $L = W$. Por tanto la condición matemática a imponer será $n_{\text{mm}} = 1$:

$$n_{\text{mm}} = 1 \rightarrow \delta(H) = \frac{8(W/S)}{\gamma' A p_0}$$

5º) El margen de números de Mach para los que es posible volar a cada altitud se obtiene imponiendo $n_m = 1$ en la expresión obtenida en el apartado 1º):

$$1 = B\delta(h)(M^2 - M^4) \rightarrow M^4 - M^2 + \frac{1}{B\delta(h)} = 0$$

y resolviendo esta ecuación queda:

$$M = \frac{\sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{B\delta(h)}}}}{\sqrt{2}} \rightarrow \begin{cases} M_{\max} = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{8(W/S)}{\gamma' A p_0} \frac{1}{\delta(h)}}}}{\sqrt{2}} \\ M_{\min} = \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{8(W/S)}{\gamma' A p_0} \frac{1}{\delta(h)}}}}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Obsérvese que el margen de números de Mach va disminuyendo con la altitud. Este margen es máximo al nivel del mar

$$h = 0 \rightarrow \delta(h) = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow M_{\min} = \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{8(W/S)}{\gamma' A p_0}}}}{\sqrt{2}} \leq M \leq \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{8(W/S)}{\gamma' A p_0}}}}{\sqrt{2}} = M_{\max}$$

y nulo en el techo de sustentación

$$h = H \rightarrow \delta(H) = \frac{8(W/S)}{\gamma' A p_0} \rightarrow M_{\min} = M_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

6º) La velocidad angular de viraje instantánea máxima se determina mediante:

$$\dot{\chi} = \frac{g}{V} \sqrt{n^2 - 1} \rightarrow \dot{\chi}_{\max} = \frac{g}{V} \sqrt{n_m^2 - 1}$$

Teniendo en cuenta el resultado obtenido en el apartado 1º) y que $a = \sqrt{\gamma' p / \rho} = a_0 \sqrt{\delta / \sigma}$, queda:

$$\dot{\chi}_{\max} = \frac{g}{Ma} \sqrt{B^2 \delta^2(h) (M^2 - M^4)^2 - 1} = \frac{g}{a_0} \sqrt{\frac{\sigma(h)}{\delta(h)}} \sqrt{B^2 \delta^2(h) (M - M^3)^2 - \frac{1}{M^2}}$$

y derivando esta expresión con respecto al número de Mach se obtiene el siguiente polinomio:

$$3M_{\dot{\chi}_{\max}}^8 - 4M_{\dot{\chi}_{\max}}^6 + M_{\dot{\chi}_{\max}}^4 + \frac{1}{B^2 \delta^2(h)} = 0$$

PROBLEMA 9.2

Considérese un avión volando en atmósfera estándar (las funciones $\sigma(h) = \rho/\rho_0$ y $\delta(h) = p/p_0$ son conocidas), con una polar dada por $C_D = C_{D0}(M) + k(M)C_L^2$, donde $C_{D0}(M)$ y $k(M)$ son funciones conocidas del número de Mach, y con un coeficiente de sustentación máximo función asimismo conocida del número de Mach, $C_{L\max}(M)$. Suponiendo además que se conoce la constante de la gravedad, g , y que el ángulo de ataque del empuje es despreciable, se pide, para valores dados de la altitud, h_1 , y del número de Mach, M_1 :

1º) Determinar la carga alar óptima, $(W/S)_{\text{opt}}$, que permite efectuar un viraje horizontal simétrico estacionario con velocidad angular dada, $\dot{\chi}_1$, y con la relación empuje-peso mínima. Determinar asimismo el valor de esa relación $(T/W)_{\min}$, comentando el resultado obtenido.

2º) Determinar la carga alar máxima permisible, $(W/S)_{\max}$, para efectuar un viraje horizontal simétrico instantáneo con velocidad angular dada, $\dot{\chi}_1$.

3º) Determinar la relación empuje-peso para que el avión pueda efectuar una subida rectilínea simétrica casi-estacionaria con las alas a nivel,

con velocidad ascensional dada, V_{a1} (comparable con la velocidad de vuelo), y con la carga alar determinada en el apartado anterior.

Solución:

1º) Al fijar la velocidad angular, la altitud y el número de Mach, el factor de carga viene asimismo fijado:

$$\dot{\chi}_1 = \frac{g}{V_1} \sqrt{n_1^2 - 1} \rightarrow n_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{\dot{\chi}_1 V_1}{g} \right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{a_0 \dot{\chi}_1}{g} \right)^2 M_1^2 \frac{\delta(h_1)}{\sigma(h_1)}}$$

Como el empuje ha de ser igual a la resistencia queda:

$$\frac{T}{W} = \frac{D}{W} \rightarrow \frac{T}{W} = \frac{p}{\Gamma} M^2 C_{D0} + n^2 \frac{\Gamma}{p} \frac{k}{M^2}$$

donde $\Gamma = 2W/\gamma' S$. Reordenando la expresión anterior queda:

$$\frac{T}{W} = K \frac{\delta(h_1) M_1^2 C_{D0}(M_1)}{(W/S)} + \frac{n_1^2}{K} \frac{k(M_1)}{\delta(h_1) M_1^2} (W/S)$$

donde $K = \gamma' p_0 / 2$. Derivando esta expresión respecto de la carga alar:

$$\frac{\partial(T/W)}{\partial(W/S)} = 0 \rightarrow \left(\frac{W}{S} \right)_{\text{opt}} = \frac{K \delta(h_1) M_1^2}{n_1} \sqrt{\frac{C_{D0}(M_1)}{k(M_1)}}$$

El empuje mínimo al que conduce esta carga alar es:

$$\begin{aligned} \left(\frac{T}{W} \right)_{\text{min}} &= 2n_1 \sqrt{C_{D0}(M_1) k(M_1)} = \\ &= 2 \sqrt{C_{D0}(M_1) k(M_1)} \sqrt{1 + \left(\frac{a_0 \dot{\chi}_1}{g} \right)^2 M_1^2 \frac{\delta(h_1)}{\sigma(h_1)}} \end{aligned}$$

Obsérvese que este resultado coincide con el empuje mínimo necesario para régimen incompresible (apartados 4.3 y 6.3), sin más que introducir el concepto de eficiencia aerodinámica máxima:

$$E_m = \frac{1}{2 \sqrt{C_{D0}(M_1) k(M_1)}} \rightarrow \left(\frac{T}{W} \right)_{\text{min}} = \frac{n_1}{E_m(M_1)}$$

2º) El factor de carga para velocidad angular, altitud y número de Mach dados, ya ha sido determinado en el apartado 1º:

$$n_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{a_0 \dot{\chi}_1}{g}\right)^2 M_1^2 \frac{\delta(h_1)}{\sigma(h_1)}}$$

Ahora se introduce la definición de factor de carga:

$$n = \frac{\rho S V^2}{2W} C_L = \frac{\gamma' p_0}{2} \delta(h) M^2 \frac{C_L}{W/S}$$

y se observa que, para h_1 , M_1 , n_1 dados, al aumentar la carga alar debe aumentar asimismo el coeficiente de sustentación. Por tanto la carga alar máxima permisible se obtiene imponiendo el coeficiente de sustentación máximo:

$$\left(\frac{W}{S}\right)_{\text{máx}} = \frac{\gamma' p_0}{2} \delta(h_1) \frac{M_1^2 C_{L \text{ máx}}(M_1)}{\sqrt{1 + \left(\frac{a_0 \dot{\chi}_1}{g}\right)^2 M_1^2 \frac{\delta(h_1)}{\sigma(h_1)}}}$$

3º) Si la velocidad ascensional, el número de Mach y la altitud están fijados, el ángulo de asiento de velocidad estará también fijado y vendrá dado por:

$$V_{a1} = V_1 \sin \gamma = M_1 a \sin \gamma \rightarrow \sin \gamma_1 = \frac{V_{a1}}{a_0 M_1} \sqrt{\frac{\sigma(h_1)}{\delta(h_1)}}$$

y el factor de carga estará asimismo determinado:

$$n_1 = \cos \gamma_1 = \sqrt{1 - \sin^2 \gamma_1} = \sqrt{1 - \frac{V_{a1}^2}{a_0^2 M_1^2} \frac{\sigma(h_1)}{\delta(h_1)}}$$

En una subida rectilínea simétrica casi-estacionaria con las alas a nivel se cumple:

$$V_a = \frac{(T - D)V}{W} = Ma \left(\frac{T}{W} - \frac{p}{\Gamma} M^2 C_{D0} - n^2 \frac{\Gamma}{p} \frac{k}{M^2} \right)$$

es decir, que la relación empuje-peso vendrá dada por:

$$\frac{T}{W} = \frac{V_a}{Ma} + \frac{p}{\Gamma} M^2 C_{D0} + n^2 \frac{\Gamma}{p} \frac{k}{M^2}$$

donde $\Gamma = 2(W/S)/\gamma'$. Operando queda:

$$\frac{T}{W} = \frac{V_{a1}}{M_1 a_0} \sqrt{\frac{\sigma(h_1)}{\delta(h_1)}} + \frac{\gamma' p_0}{2} \frac{\delta(h_1) M_1^2 C_{D0}(M_1)}{(W/S)_{\text{máx}}} + \frac{2n_1^2}{\gamma' p_0} \frac{k(M_1)}{\delta(h_1) M_1^2} (W/S)_{\text{máx}}$$

Introduciendo en la expresión anterior el valor de la carga alar obtenido en el apartado anterior y el valor del factor de carga obtenido en este apartado, queda finalmente:

$$\frac{T}{W} = \frac{V_{a1}}{M_1 a_0} \sqrt{\frac{\sigma(h_1)}{\delta(h_1)}} + \frac{C_{D0}(M_1)}{C_{L\max}(M_1)} \sqrt{1 + \left(\frac{a_0 \dot{\chi}_1}{g}\right)^2 M_1^2 \frac{\delta(h_1)}{\sigma(h_1)}} + \\ + \frac{k(M_1) C_{L\max}(M_1) \left(1 - \frac{V_{a1}^2}{a_0^2 M_1^2} \frac{\sigma(h_1)}{\delta(h_1)}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{a_0 \dot{\chi}_1}{g}\right)^2 M_1^2 \frac{\delta(h_1)}{\sigma(h_1)}}}$$

Estabilidad y control estáticos longitudinales

10

10.1. Introducción

Desde el capítulo 3 hasta el capítulo 9 se han analizado las Actuaciones del avión, es decir, los movimientos de su centro de masas a lo largo de la trayectoria. A partir de este capítulo se estudiarán la estabilidad y controlabilidad del avión, es decir, los cambios de actitud como sólido rígido alrededor de su centro de masas, y se comenzará este estudio por la estabilidad y la controlabilidad puramente estáticas (ver prólogo).

Como se ha supuesto que el avión tiene un plano de simetría (el plano $x_b - z_b$), sus movimientos pueden descomponerse en dos grandes categorías:

- Movimiento longitudinal: Todas las variables lateral-direccionales del problema son idénticamente nulas ($\beta, \phi, p, r, \delta_a, \delta_r$), por lo que las tres ecuaciones dinámicas lateral-direccionales (una de fuerza según el eje y_b , perpendicular al plano de simetría, y dos de momentos según los ejes x_b y z_b , que conforman el plano de simetría) son idénticamente nulas, y sólo han de plantearse dos ecuaciones dinámicas de fuerzas (según los ejes x_b y z_b) y una ecuación dinámica de momentos (según el eje y_b).
- Movimiento lateral-direccional: Alguna de las variables lateral-direccionales del problema no es idénticamente nula, por lo que hay que plantear las tres ecuaciones dinámicas lateral-direccionales, además de las longitudinales.

Otra hipótesis adicional habitual para comenzar estos estudios consiste en suponer el avión en vuelo de planeo o, lo que es el mismo, suponer que el empuje del avión pasa por su centro de masas y además son despreciables los efectos de potencia sobre sus características aerodinámicas.

Por tanto, en este capítulo se estudia la estabilidad y controlabilidad estáticas longitudinales del avión, comenzando por la determinación de su sustentación y momento de cabeceo totales en vuelo en planeo rectilíneo estacionario (apartados 10.2 y 10.3, respectivamente); en el apartado 10.4 se introduce el índice de estabilidad estática longitudinal con mandos fijos y factor de carga constante, y el punto neutro con mandos fijos; en el apartado 10.5 se pasa revista a los posibles métodos para efectuar el control longitudinal; en el apartado 10.6 se determina la deflexión del timón de profundidad para volar equilibradamente en vuelo rectilíneo estacionario; y en los apartados 10.7 y 10.8 se desarrolla un método para determinar el punto neutro con mandos fijos mediante un sencillo ensayo en vuelo y se calcula la posición más adelantada que puede ocupar el centro de masas teniendo en cuenta la limitación por mando longitudinal.

10.2. Sustentación total

Además de las distintas hipótesis ya efectuadas en la introducción a este capítulo, se supone que la sustentación y el momento de cabeceo totales de un planeador pueden obtenerse a partir de las contribuciones de las distintas partes y de las interferencias, siendo estas contribuciones funciones lineales del ángulo de ataque

En la Figura 10.1 se representa un planeador desde un punto de vista longitudinal, el cual está constituido simplemente por el ala, el fuselaje y la cola horizontal (denotados, respectivamente, por los subíndices “*w*”, “*b*” y “*t*”). El ala, el fuselaje y los efectos de interferencia mutuos se suelen agrupar en el llamado conjunto ala-fuselaje (subíndice “*wb*”). El conjunto ala-fuselaje y la cola horizontal se idealizan mediante sus respectivas Líneas de Sustentación Nula (LSN), pasando por sus respectivos centros aerodinámicos (*ac*).

Por tanto, las acciones aerodinámicas a considerar para cada superficie sustentadora serán la sustentación, la resistencia y el momento alrededor del centro aerodinámico; es decir:

- Conjunto ala-fuselaje: L_{wb} , D_{wb} , M_{acwb}
- Cola horizontal: L_t , D_t , M_{act}

La Aerodinámica enseña que el momento alrededor del centro

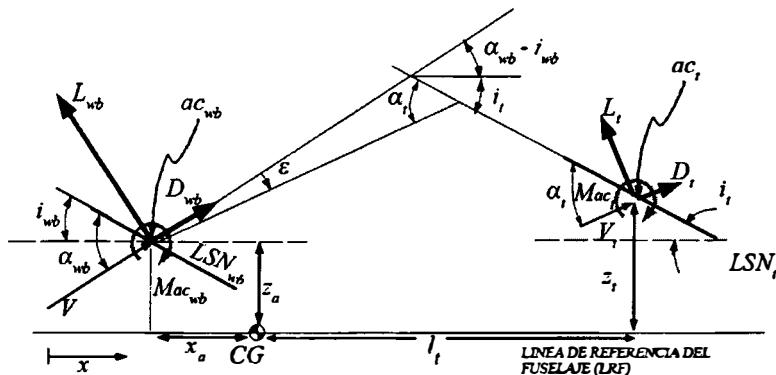


Figura 10.1. Fuerzas y momentos aerodinámicos de un planeador en vuelo longitudinal.

aerodinámico de una superficie sustentadora no depende de su ángulo de ataque.

Además hay que tener en cuenta dos efectos de interferencia del ala sobre la cola horizontal:

- Deflexión de estela, ε : representa la disminución en el ángulo de ataque de la cola horizontal, respecto del ángulo de ataque del ala, debida a la velocidad inducida por los torbellinos desprendidos del ala.
- Eficiencia aerodinámica de la cola, η_t : representa la reducción de la presión dinámica en la cola, respecto de la presión dinámica de la corriente libre, por estar la cola inmersa en la estela del ala.

Estos dos efectos de interferencia pueden modelizarse mediante las expresiones siguientes:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \right) \alpha_{wb} \quad (10.1)$$

$$\eta_t = \frac{q_t}{q}$$

en donde α_{wb} es el ángulo de ataque del conjunto ala-fuselaje (medido respecto de su línea de sustentación nula), ε_0 y $(\partial \varepsilon / \partial \alpha)$ son características aerodinámicas conocidas dependientes, respectivamente, de la torsión aerodinámica del ala y de la intensidad de los torbellinos desprendidos por el ala, y q_t y q son las presiones dinámicas de la cola horizontal y de la corriente libre.

En la Figura 10.1 se han representado asimismo las velocidades sobre el conjunto ala-fuselaje y sobre la cola horizontal, la geometría a considerar y las fuerzas y momentos que actúan en el plano de simetría del avión, todo ello referido a una la línea de referencia del fuselaje (LRF). Según esto, la sustentación, la resistencia, el coeficiente de sustentación y el coeficiente de resistencia del avión completo pueden escribirse como:

$$L = L_{wb} + L_t \cos \varepsilon - D_t \sin \varepsilon$$

$$D = D_{wb} + D_t \cos \varepsilon + L_t \sin \varepsilon$$

$$C_L = \frac{L}{qS} = C_{Lwb} + C_{Lt}\eta_t \frac{S_t}{S} \cos \varepsilon - C_{Dt}\eta_t \frac{S_t}{S} \sin \varepsilon \quad (10.2)$$

$$C_D = \frac{D}{qS} = C_{Dwb} + C_{Dt}\eta_t \frac{S_t}{S} \cos \varepsilon + C_{Lt}\eta_t \frac{S_t}{S} \sin \varepsilon$$

donde S y S_t representan, respectivamente, la superficie alar y la superficie de la cola horizontal.

Para calcular el coeficiente de sustentación de un avión convencional es usual considerar que el ángulo de deflexión de estela es pequeño ($\varepsilon \ll 1$) y que el coeficiente de sustentación de la cola es un orden de magnitud mayor que el coeficiente de resistencia ($C_{Dt} \ll C_{Lt}$). Así pues, la tercera ecuación del sistema anterior puede simplificarse, quedando:

$$C_L = C_{Lwb} + C_{Lt}\eta_t \frac{S_t}{S} \quad (10.3)$$

A continuación se desarrollan los coeficientes de sustentación del conjunto ala-fuselaje, C_{Lwb} , y de la cola horizontal, C_{Lt} , mediante el siguiente modelo lineal:

$$C_{Lwb} = a_{wb}\alpha_{wb}$$

$$C_{Lt} = a_t\alpha_t \quad (10.4)$$

$$\alpha_t = \alpha_{wb} - i_{wb} + i_t - \varepsilon + \tau_e \delta_e$$

en donde a_{wb} y a_t son las pendientes de las curvas de sustentación del conjunto ala-fuselaje y de la cola horizontal, α_{wb} y α_t son los ángulos de ataque del conjunto ala-fuselaje y de la cola horizontal (medidos respecto de sus respectivas líneas de sustentación nula), i_{wb} e i_t son las incidencias o calados de las líneas de sustentación nula del ala-fuselaje y de la cola horizontal

respecto de la línea de referencia del fuselaje, τ_e es la efectividad del timón de profundidad y δ_e es su deflexión, y ε es la deflexión de estela, dada por la primera ecuación del sistema (10.1).

Introduciendo las expresiones del sistema (10.4) en la ecuación (10.3), queda finalmente para el coeficiente de sustentación del avión completo, C_L :

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha_{wb} + C_{L\delta_e}\delta_e \quad (10.5)$$

donde:

$$\begin{aligned} C_{L0} &= a_t \eta_t \frac{S_t}{S} (i_t - i_{wb} - \varepsilon_0) \\ C_{L\alpha} &= a_{wb} + a_t \eta_t \frac{S_t}{S} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) \\ C_{L\delta_e} &= a_t \eta_t \frac{S_t}{S} \tau_e \end{aligned} \quad (10.6)$$

La representación gráfica de este modelo lineal se ofrece en la Figura 10.2. Obsérvese que, como $C_{L\alpha} > 0$ y $C_{L\delta_e} > 0$, el modelo está constituido por una serie de rectas paralelas con pendiente positiva, que se desplazan hacia arriba al deflectar positivamente el timón de profundidad.

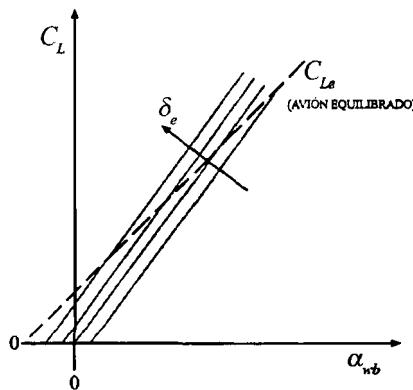


Figura 10.2. Coeficiente de sustentación de un avión completo, en función del ángulo de ataque y de la deflexión del timón de profundidad.

Por tanto, la deflexión del timón de profundidad sí influye en el coeficiente de sustentación del avión completo y la hipótesis simplificativa efectuada en el apartado 3.1 de que las deflexiones de las superficies de mando no influyen en las fuerzas aerodinámicas, sólo constituye una primera aproximación con el fin de efectuar un estudio preliminar de actuaciones.

El modelo lineal desarrollado en párrafos anteriores es válido para otros orígenes de ángulos de ataque, incorporando la diferencia al coeficiente C_{L0} . Por ejemplo, si se miden ángulos de ataque respecto de la línea de referencia del fuselaje, en lugar de respecto de la línea de sustentación nula del ala (es decir, se utiliza ahora el ángulo de ataque α_b en lugar del ángulo α_{wb}), la ecuación (10.5) queda de la forma:

$$\begin{aligned} C_L &= C'_{L0} + C_{L\alpha}\alpha_b + C_{L\delta_e}\delta_e \\ \alpha_b &= \alpha_{wb} - i_{wb} \\ C'_{L0} &= C_{L0} + C_{L\alpha}i_{wb} \end{aligned} \tag{10.7}$$

Para calcular la situación de la línea de sustentación nula del avión completo, se hace $C_L = 0$ en la ecuación (10.5), obteniéndose:

$$(\alpha_{wb})_{C_L=0} = -\frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}} - \frac{C_{L\delta_e}\delta_e}{C_{L\alpha}} \tag{10.8}$$

Obsérvese que la línea de sustentación nula de un avión completo depende de la deflexión del timón de profundidad. Denotando ahora el ángulo de ataque medido a partir de esta línea por α_{LSN} , queda:

$$\alpha_{LSN} = \alpha_{wb} - (\alpha_{wb})_{C_L=0} \rightarrow C_L = C_{L\alpha}\alpha_{LSN} \tag{10.9}$$

10.3. Momento de cabeceo total

Utilizando de nuevo la Figura 10.1 y proyectando las fuerzas existentes según las direcciones normal y paralela a la línea de referencia del fuselaje, se obtienen las llamadas fuerzas normales y axiales del conjunto ala-fuselaje, N_{wb} y C_{wb} , y de la cola horizontal, N_t y C_t (la fuerza normal se considera positiva hacia arriba y la fuerza axial hacia detrás); es decir:

$$N_{wb} = L_{wb} \cos(\alpha_{wb} - i_{wb}) + D_{wb} \sin(\alpha_{wb} - i_{wb})$$

$$\begin{aligned} C_{wb} &= -L_{wb} \sin(\alpha_{wb} - i_{wb}) + D_{wb} \cos(\alpha_{wb} - i_{wb}) \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_t &= L_t \cos(\alpha_t - i_t) + D_t \sin(\alpha_t - i_t) \\ C_t &= -L_t \sin(\alpha_t - i_t) + D_t \cos(\alpha_t - i_t) \end{aligned} \quad (10.10)$$

Las dos primeras expresiones del sistema anterior se adimensionalizan mediante la superficie alar, S , y la presión dinámica de la corriente libre, q , para obtener los coeficientes de fuerza normal y axial del conjunto ala-fuselaje, C_{Nwb} y C_{Cwb} , y las dos últimas expresiones se adimensionalizan mediante la superficie de la cola horizontal, S_t , y la presión dinámica en la cola, q_t , para obtener los coeficientes de fuerza normal y axial en la cola horizontal, C_{Nt} y C_{Ct} :

$$\begin{aligned} C_{Nwb} &= \frac{N_t}{qS} = C_{Lwb} \cos(\alpha_{wb} - i_{wb}) + C_{Dwb} \sin(\alpha_{wb} - i_{wb}) \\ C_{Cwb} &= \frac{C_t}{qS} = -C_{Lwb} \sin(\alpha_{wb} - i_{wb}) + C_{Dwb} \cos(\alpha_{wb} - i_{wb}) \\ C_{Nt} &= \frac{N_t}{q_t S_t} = C_{Lt} \cos(\alpha_t - i_t) + C_{Dt} \sin(\alpha_t - i_t) \\ C_{Ct} &= \frac{C_t}{q_t S_t} = -C_{Lt} \sin(\alpha_t - i_t) + C_{Dt} \cos(\alpha_t - i_t) \end{aligned} \quad (10.11)$$

Tomando ahora momentos aerodinámicos de todo el avión alrededor de su centro de masas, queda:

$$M_A = N_{wb}x_a + C_{wb}z_a + M_{acwb} - N_t l_t + C_t z_t + M_{act} \quad (10.12)$$

Para adimensionalizar el momento de cabeceo total se utilizan usualmente la presión dinámica de la corriente libre, q , la superficie alar, S , y la cuerda media aerodinámica del ala, c . Así pues, el coeficiente aerodinámico de momento de cabeceo, C_{mA} , vendrá dado por:

$$\begin{aligned} C_{mA} &= \frac{M_A}{qSc} = C_{Nwb}\hat{x}_a + C_{Cwb}\hat{z}_a + C_{macwb} - C_{Nt}\hat{V}_t\eta_t + \\ &+ C_{Ct}\eta_t \frac{S_t c_t}{Sc} + C_{mact}\eta_t \frac{S_t c_t}{Sc} \end{aligned} \quad (10.13)$$

en donde \hat{V}_t representa el llamado coeficiente de volumen de la cola horizontal y \hat{x}_a , \hat{z}_a son las dos distancias x_a , z_a adimensionalizadas con la cuerda media aerodinámica:

$$\hat{V}_t = \frac{S_t l_t}{Sc}, \quad \hat{x}_a = \frac{x_a}{c} , \quad \hat{z}_a = \frac{z_a}{c} \quad (10.14)$$

El sistema de ecuaciones (10.11) puede simplificarse si se considera que los ángulos implicados son pequeños y que el coeficiente de sustentación de una superficie sustentadora es un orden de magnitud mayor que su coeficiente de resistencia ($C_{Dwb} \ll C_{Lwb}$, $C_{Dt} \ll C_{Lt}$). Así pues:

$$\begin{aligned} C_{Nwb} &\cong C_{Lwb} \\ C_{Cwb} &\cong -C_{Lwb}(\alpha_{wb} - i_{wb}) + C_{Dwb} \\ C_{Nt} &\cong C_{Lt} \\ C_{Ct} &\cong -C_{Lt}(\alpha_t - i_t) + C_{Dt} \end{aligned} \quad (10.15)$$

Por último, pueden despreciarse algunos términos muy pequeños frente a otros en la expresión (10.13), obteniéndose:

$$C_{mA} = C_{Lwb}(\hat{x}_{cg} - \hat{x}_{acwb}) + C_{macwb} - C_{Lt}\hat{V}_t\eta_t \quad (10.16)$$

En esta expresión se ha introducido la relación $\hat{x}_a = \hat{x}_{cg} - \hat{x}_{acwb}$, donde \hat{x}_{cg} y \hat{x}_{acwb} representan las posiciones del centro de masas del avión y del centro aerodinámico del conjunto ala-fuselaje, medidas según la línea de referencia del fuselaje, a partir de un punto genérico de la misma (morro del avión, borde de ataque del ala, etc.), positivas hacia atrás y adimensionalizadas con la cuerda media aerodinámica c .

Sustituyendo los valores de C_{Lwb} y C_{Lt} obtenidos en el apartado anterior (ver sistema de ecuaciones (10.4)), en la expresión (10.16), queda:

$$C_{mA} = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha_{wb} + C_{m\delta_e}\delta_e \quad (10.17)$$

donde

$$\begin{aligned} C_{m0} &= C_{macwb} - a_t\eta_t\hat{V}_t(i_t - i_{wb} - \varepsilon_0) \\ C_{m\alpha} &= a_{wb}(\hat{x}_{cg} - \hat{x}_{acwb}) - a_t\eta_t\hat{V}_t(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}) \end{aligned} \quad (10.18)$$

$$C_{m\delta_e} = -a_t\eta_t\hat{V}_t\tau_e$$

En esta expresión lineal del coeficiente de momento de cabeceo aerodinámico en función del ángulo de ataque del conjunto ala-fuselaje y de la deflexión del timón de profundidad, aparecen dos coeficientes aerodinámicos que tienen nombre propio:

- $C_{m\alpha} \equiv$ **Índice de estabilidad estática longitudinal con mandos fijos** (frente a perturbaciones en ángulo de ataque y a factor de carga constante), que se estudiará en siguiente apartado.
- $C_{m\delta_e} \equiv$ **Potencia de control longitudinal**, que se tratará en el apartado 10.5.

La representación gráfica de este modelo lineal se ofrece en la Figura 10.3. Sabiendo que $C_{m\delta_e} < 0$ y suponiendo $C_{m\alpha} < 0$, se observa que el modelo está constituido por una serie de rectas paralelas con pendiente negativa, que se desplazan hacia abajo al deflectar positivamente el timón de profundidad.

10.4. Índice de estabilidad estática longitudinal con mandos fijos y punto neutro con mandos fijos

Como se estableció en el prólogo, se dice que un avión es estable estáticamente cuando tiene tendencia a desarrollar fuerzas y momentos que se oponen directamente a la perturbación de una variable del movimiento a partir de una condición de vuelo estacionario. Existirían, por tanto, muchas formas de analizar la estabilidad estática, ya que en teoría se podrían perturbar distintas variables del movimiento y estudiar la tendencia del avión a generar fuerzas o momentos que se opusieran a las perturbaciones.

Por defecto, en Mecánica del Vuelo, cuando se habla de estabilidad estática longitudinal se sobreentiende que la perturbación se produce en ángulo de ataque y la reacción del avión en momento de cabeceo. Así pues un avión será estable frente a perturbaciones en ángulo de ataque cuando para un incremento positivo del ángulo aparece un momento de cabeceo negativo.

De forma matemática, el criterio de estabilidad estática longitudinal con mandos fijos, frente a perturbaciones en ángulo de ataque y a $n = cte$ (normalmente $n = 1$), vendrá dado simplemente por el signo de la derivada

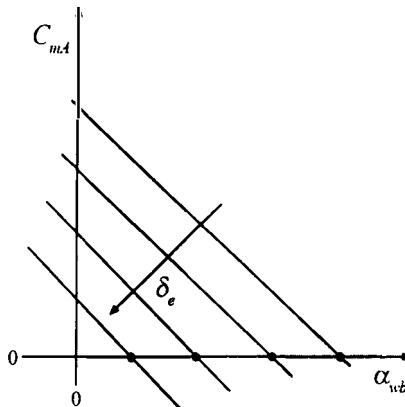


Figura 10.3. Coeficiente de momento de cabeceo aerodinámico de un avión completo, en función del ángulo de ataque y de la deflexión del timón de profundidad.

parcial del coeficiente de momento de cabeceo total del avión con respecto del ángulo de ataque; es decir:

$$\left(\frac{\partial C_m}{\partial \alpha_{wb}} \right)_{\delta_e, n} \begin{cases} < 0 & \rightarrow \text{Avión ESTABLE} \\ = 0 & \rightarrow \text{Avión INDIFERENTE} \\ > 0 & \rightarrow \text{Avión INESTABLE} \end{cases} \quad (10.19)$$

Como se está estudiando un avión no motorizado (planeador), para este caso concreto se deriva la expresión (10.17), obteniéndose:

$$\left(\frac{\partial C_m}{\partial \alpha_{wb}} \right)_{\delta_e, n} = \left(\frac{\partial C_{mA}}{\partial \alpha_{wb}} \right)_{\delta_e, n} = C_{m\alpha} \quad (10.20)$$

y, por tanto, a $C_{m\alpha}$ se le denomina “Índice de estabilidad estática longitudinal con mandos fijos” (frente a perturbaciones en ángulo de ataque y a factor de carga constante) y su signo dará idea de la estabilidad estática del planeador:

$$C_{m\alpha} \begin{cases} < 0 & \rightarrow \text{Avión ESTABLE} \\ = 0 & \rightarrow \text{Avión INDIFERENTE} \\ > 0 & \rightarrow \text{Avión INESTABLE} \end{cases} \quad (10.21)$$

La Figura 10.4 representa las cuatro posibles rectas de C_{mA} en función de α_{wb} para $\delta_e = 0$. Téngase en cuenta que sólo es posible volar en equilibrio de momentos y con $\alpha_{wb} > 0$ en el punto A (rectas 2 y 3) y que, de éstas, sólo la recta 2 garantiza un planeador estable.

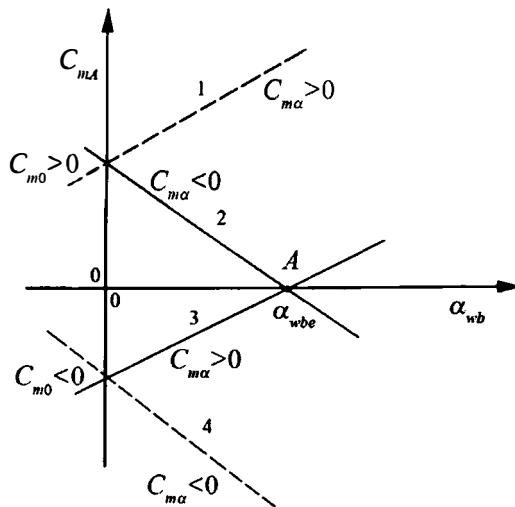


Figura 10.4. Casos que pueden presentarse para el momento de cabeceo en función del ángulo de ataque, con timón de profundidad nulo.

Si se analiza la segunda ecuación del sistema (10.18) se observa que modificando la posición del centro de masas de un avión, se modifica automáticamente su estabilidad. Se denomina **Punto Neutro con Mandos Fijos**, N_0 , a la posición del centro de masas (adimensionalizada con la cuerda media aerodinámica) que anula $C_{m\alpha}$; es decir:

$$N_0 = (\hat{x}_{cg})_{C_{m\alpha}=0} \quad (10.22)$$

Introduciendo esta definición en la segunda ecuación del sistema (10.18), y suponiendo $l_t = cte$, se obtiene:

$$N_0 = \hat{x}_{acwb} + \frac{a_t}{a_{wb}} \eta_t \hat{V}_t \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) \quad (10.23)$$

$$C_{m\alpha} = a_{wb}(\hat{x}_{cg} - N_0)$$

El punto neutro representa la posición más retrasada que puede ocupar el centro de masas para que el avión sea estáticamente estable con mandos fijos, frente a perturbaciones en ángulo de ataque y en vuelo a factor de carga constante (ver Figura 10.5).

Se denomina **Margen Estático con Mandos Fijos**, H_0 , a:

$$H_0 = N_0 - \hat{x}_{cg} \quad (10.24)$$

Obsérvese que, como

$$C_{m\alpha} = -a_{wb}H_0 \quad (10.25)$$

un avión estable tiene un margen estático con mandos fijos positivo y uno inestable, negativo.

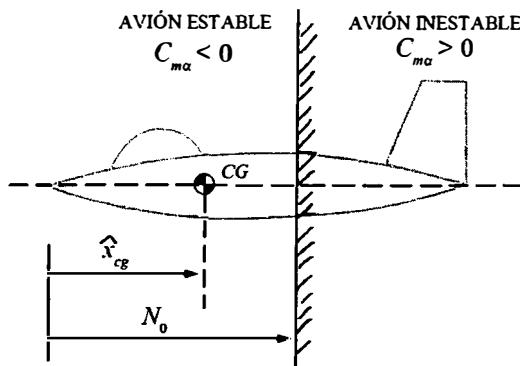


Figura 10.5. Punto neutro con mandos fijos.

10.5. Posibles métodos de obtención del control longitudinal

Como se estableció en el prólogo, la controlabilidad estática estudia las relaciones existentes entre las distintas condiciones de vuelo estacionario y las deflexiones de mandos y fuerzas en palanca y pedales que tiene que aplicar el piloto.

Por defecto, en Mecánica del Vuelo, se sobreentiende por control estático longitudinal la relación existente entre la deflexión del timón de profundidad y alguna variable de la condición de vuelo estacionaria (normalmente el ángulo de ataque o la velocidad).

La expresión (10.17) proporciona el coeficiente de momento de cabeceo aerodinámico como una función lineal del ángulo de ataque y de la deflexión del timón de profundidad. Para que el planeador vuele estacionaria y rectilíneamente a cierto ángulo de ataque (vuelo equilibrado) es preciso que:

$$C_m = C_{mA} = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha_{wb} + C_{m\delta_e}\delta_e = 0 \quad (10.26)$$

Según esto, para un planeador determinado y con una deflexión del timón de profundidad fijada (por ejemplo nula), el equilibrio de momentos dado por la ecuación anterior sólo se consigue en el único punto donde la recta corta al eje de abcisas (punto A de la Figura 10.4).

Por tanto es necesario disponer de medios que modifiquen el ángulo de ataque de equilibrio, α_{wbe} , y así permitan cambiar la condición de vuelo. Podría hablarse de tres métodos:

- Cambio de la ordenada en el origen: Por ejemplo, mediante la deflexión de los flaps puede cambiarse C_{m0} (a través del cambio en C_{macwb}) y, como consecuencia de ello, se modifica el ángulo de ataque de equilibrio.
- Cambio de la posición del centro de masas: Modifica $C_{m\alpha}$ y por tanto, además de cambiar el ángulo de ataque de equilibrio, cambia el índice de estabilidad estática longitudinal.
- Deflexión del timón de profundidad: Modifica el término $C_{m\delta_e}\delta_e$, con lo que se modifica a su vez el ángulo de ataque de equilibrio.

Obviamente la práctica totalidad de los aviones existentes incorporan el tercer método para cambiar el equilibrio de momentos, con la excepción de las alas delta que se controlan mediante el segundo método.

10.6. Deflexión del timón de profundidad necesaria para el equilibrio

Despejando de la ecuación (10.26) la deflexión del timón de profundidad, se obtiene:

$$\delta_e = -\frac{C_{m0}}{C_{m\delta_e}} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta_e}}\alpha_{wbe} = \delta_{e0} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta_e}}\alpha_{wbe} \quad (10.27)$$

en donde $\delta_{e0} = -C_{m0}/C_{m\delta_e}$.

Esta expresión proporciona la deflexión del timón de profundidad para volar a distintos ángulos de ataque de equilibrio, α_{wbe} . Derivando con respecto del ángulo de ataque queda:

$$\frac{d\delta_e}{d\alpha_{wbe}} = -\frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta_e}} \quad (10.28)$$

Como $C_{m\delta_e} < 0$, se cumple la siguiente igualdad:

$$\operatorname{sgn} C_{m\alpha} = \operatorname{sgn} \frac{d\delta_e}{d\alpha_{wbe}} \quad (10.29)$$

donde “sgn” representa el operador signo. Por tanto existe una relación entre el índice fundamental de estabilidad estática longitudinal con mandos fijos, $C_{m\alpha}$, y otro índice derivado de este, $d\delta_e/d\alpha_{wbe}$.

La Figura 10.6 representa la deflexión del timón de profundidad en función del ángulo de ataque de equilibrio para un avión estáticamente estable con mandos fijos.

Sustituyendo la expresión (10.27) en la expresión (10.5), se obtiene:

$$C_{Le} = (C_{L0} - C_{L\delta_e} \frac{C_{m0}}{C_{m\delta_e}}) + (C_{L\alpha} - C_{L\delta_e} \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta_e}}) \alpha_{wbe} \quad (10.30)$$

donde C_{Le} es el coeficiente de sustentación para el avión equilibrado (ver Figura 10.2). La pendiente de la curva de sustentación del avión equilibrado vendrá dada por:

$$\frac{dC_{Le}}{d\alpha_{wbe}} = C_{L\alpha} - C_{L\delta_e} \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta_e}} \quad (10.31)$$

Obsérvese que, para un avión estable, esta pendiente es menor que $C_{L\alpha}$ (debido a que $C_{m\alpha} < 0$, $C_{L\delta_e} > 0$, $C_{m\delta_e} < 0$), como se esquematiza en la Figura 10.2.

Invirtiendo la ecuación (10.30), se obtendría $\alpha_{wbe} = f(C_{Le})$, y sustituyendo este resultado en la ecuación (10.27), se obtendría $\delta_e = f(C_{Le})$;

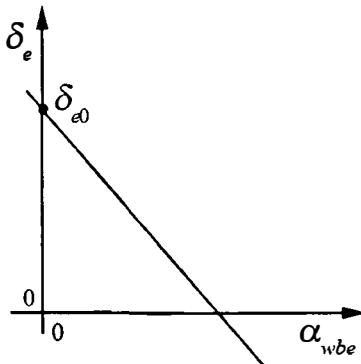


Figura 10.6. Deflexión del timón de profundidad en función del ángulo de ataque de equilibrio.

es decir:

$$\begin{aligned}\alpha_{wbe} &= -\frac{C_{L0}C_{m\delta_e} - C_{m0}C_{L\delta_e}}{C_{L\alpha}C_{m\delta_e} - C_{m\alpha}C_{L\delta_e}} + \frac{C_{m\delta_e}}{C_{L\alpha}C_{m\delta_e} - C_{m\alpha}C_{L\delta_e}}C_{Le} \\ \delta_e &= \frac{C_{L0}C_{m\alpha} - C_{L\alpha}C_{m0}}{C_{L\alpha}C_{m\delta_e} - C_{m\alpha}C_{L\delta_e}} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{L\alpha}C_{m\delta_e} - C_{m\alpha}C_{L\delta_e}}C_{Le}\end{aligned}\quad (10.32)$$

10.7. Determinación del punto neutro con mandos fijos mediante ensayos en vuelo

En vuelo casi-rectilíneo con módulo de ángulo de asiento de velocidad pequeño, y despreciando la contribución de la deflexión del timón de profundidad a la sustentación total del avión, el coeficiente de sustentación se puede expresar mediante:

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha_{wb} = \frac{L}{qS} = \frac{2W}{\rho SV^2} \quad (10.33)$$

El ángulo de ataque se despeja de la expresión anterior, obteniéndose:

$$\alpha_{wb} = -\frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}} + \frac{2W}{\rho SV^2 C_{L\alpha}} = \alpha_0 + \frac{2W}{\rho SV^2 C_{L\alpha}} \quad (10.34)$$

en donde $\alpha_0 = -C_{L0}/C_{L\alpha}$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación (10.27) queda:

$$\delta_e = \delta_{e0} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta_e}}\alpha_{wbe} = (\delta_{e0} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta_e}}\alpha_0) - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta_e}C_{L\alpha}}\frac{2W}{\rho SV^2} \quad (10.35)$$

Obsérvese que se podía haber obtenido directamente esta última expresión, introduciendo $C_{L\delta_e} = 0$ en la segunda ecuación del sistema (10.32), es decir, despreciando la contribución de la deflexión del timón de profundidad a la sustentación total del avión.

Derivando la deflexión del timón de profundidad respecto de la velocidad de vuelo, en lugar de respecto del ángulo de ataque, se obtiene:

$$\frac{d\delta_e}{dV} = \frac{4W}{\rho SV^3 C_{m\delta_e}} \frac{a_{wb}}{C_{L\alpha}} (\hat{x}_{cg} - N_0) \quad (10.36)$$

Por tanto $d\delta_e/dV$ es otro criterio de estabilidad estática longitudinal con mandos fijos, ya que (ver expresión (10.29)):

$$\operatorname{sgn} C_{m\alpha} = \operatorname{sgn} \frac{d\delta_e}{d\alpha_{wbe}} = -\operatorname{sgn} \frac{d\delta_e}{dV} \quad (10.37)$$

La Figura 10.7 representa la deflexión del timón de profundidad en función de la velocidad de vuelo para dos posiciones del centro de masas y para un avión estáticamente estable con mandos fijos.

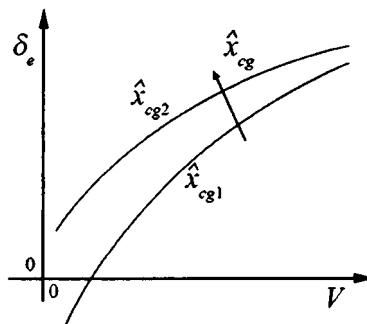


Figura 10.7. Deflexión del timón de profundidad en función de la velocidad.

Por todo lo anterior, la posición del centro de masas que anula $d\delta_e/dV$ también es el punto neutro con mandos fijos. Como esta derivada es una función lineal de la posición del centro de masas (ver ecuación (10.36)), si se estiman dos valores de la misma para dos centrados distintos y se extrae la recta que une los dos puntos hasta que corte al eje de abscisas, este punto de corte representa el punto neutro con mandos fijos (ver Figuras 10.7 y 10.8).

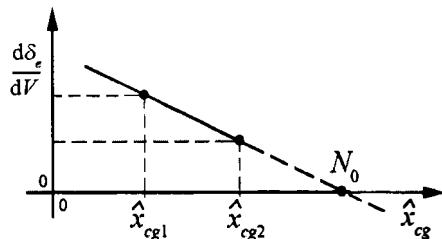


Figura 10.8. Determinación del punto neutro con mandos fijos mediante ensayos en vuelo.

10.8. Posición más adelantada del centro de masas por mando longitudinal

Como ya se ha demostrado, el punto neutro con mandos fijos representa un límite por detrás para el centro de masas de un avión. Además existe una posición del centro de masas por delante de la cual un avión estable necesitaría una deflexión de timón de profundidad hacia arriba, para equilibrar el avión en la pérdida ($\alpha_{wbe \text{ máx}}$), menor del mínimo alcanzable posible por diseño del mando longitudinal ($\delta_{e \text{ mín}}$).

De forma gráfica esta idea se representa en la Figura 10.9 (suponiendo que la linealidad se extiende hasta la pérdida) y de forma analítica la posición más adelantada del centro de masas, $\hat{x}_{cg \text{ lím}}$, se calcula a partir de las ecuaciones (10.23) y (10.27), quedando:

$$\hat{x}_{cg \text{ lím}} = N_0 + \frac{C_m \delta_e (\delta_{e0} - \delta_{e \text{ mín}})}{a_{wb} \alpha_{wbe \text{ máx}}} \quad (10.38)$$

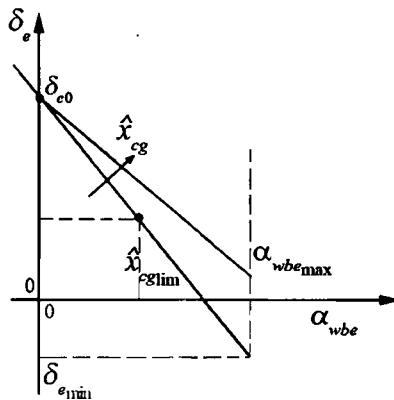
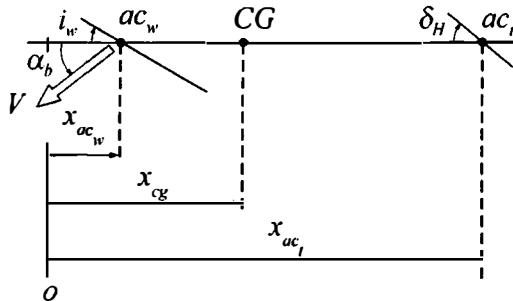


Figura 10.9. Posición más adelantada del centro de masas por mando longitudinal.

10.9. Problemas 10.1 y 10.2

PROBLEMA 10.1

La figura adjunta representa el modelo longitudinal simplificado de un avión formado por un ala, un fuselaje y una cola horizontal toda móvil.



Suponiendo además que:

1. Se conocen las siguientes características geométricas y aerodinámicas del ala: superficie alar, S , cuerda media aerodinámica, c , ángulo de incidencia, i_w , pendiente de la curva de sustentación, a_w , parámetros de deflexión de estela, $\partial\varepsilon/\partial\alpha_w$ y $\varepsilon_0 = 0$, situación del centro aerodinámico de ala respecto de cierta referencia O, x_{acw} , y coeficiente de momentos alrededor del centro aerodinámico del ala, C_{macw} .
2. Se conocen las siguientes características aerodinámicas del fuselaje: fuselaje no sustentador, coeficiente de momentos (referido a S y c) dado por la expresión $C_{mb} = C_{m0b} + (\partial C_{mb}/\partial\alpha)\alpha_b$, donde C_{m0b} , $(\partial C_{mb}/\partial\alpha_b)$ son datos.
3. Se conocen las siguientes características geométricas y aerodinámicas de la cola horizontal: superficie de la cola, S_t , pendiente de la curva de sustentación, a_t , eficiencia aerodinámica de la cola, η_t , situación del centro aerodinámico de la cola respecto de cierta referencia O, x_{act} , y cola plana sin torsión formada por perfiles simétricos.
4. El peso del avión, W , y la posición del centro de masas, x_{cg} , son constantes conocidas

5. El empuje de los motores pasa por el centro de masas del avión y es paralelo al eje x_w ; la densidad atmosférica, ρ , es constante y conocida.

Se pide:

1º) Determinar la situación del centro aerodinámico del conjunto ala-fuselaje, \hat{x}_{acw} , y el coeficiente de momentos de éste respecto de su centro aerodinámico, C_{macw} .

2º) Determinar el coeficiente de sustentación, C_L , y el coeficiente de momento aerodinámico de cabecero, C_{mA} , del avión completo, en función del ángulo de ataque del fuselaje, α_b , y de la deflexión de la cola horizontal, δ_H .

3º) Determinar la posición del punto neutro con mandos fijos, N_0 , suponiendo que la distancia centro de masas-centro aerodinámico de la cola horizontal no es constante. Comentar la influencia de la relación entre las superficies de la cola horizontal y del ala, S_t/S , sobre este punto. Determinar asimismo el índice de estabilidad estática longitudinal con mandos fijos, $C_{m\alpha}$, en función de N_0 .

4º) Determinar la deflexión de la cola horizontal, δ_H , en vuelo simétrico, horizontal, rectilíneo estacionario con las alas a nivel, en función de la velocidad de vuelo, V , suponiendo que la contribución de la cola horizontal a la sustentación del avión completo no es despreciable.

Solución:

1º) Planteando el momento del ala respecto de un punto genérico (situado a una distancia x de la referencia O) y sumándole el momento puro del fuselaje se obtiene el momento genérico del conjunto ala-fuselaje:

$$\begin{aligned} M_x &= M_{acw} + L_w(x - x_{acw}) + M_b = \\ &= qSc \left[C_{macw} + C_{m0b} + \frac{\partial C_{mb}}{\partial \alpha_b} \alpha_b + a_w(\alpha_b + i_w)(\hat{x} - \hat{x}_{acw}) \right] = \\ &= qSc \left\{ C_{macw} + C_{m0b} + a_w i_w (\hat{x} - \hat{x}_{acw}) + \alpha_b \left[\frac{\partial C_{mb}}{\partial \alpha_b} + a_w (\hat{x} - \hat{x}_{acw}) \right] \right\} \end{aligned}$$

Imponiendo ahora la condición de centro aerodinámico (aquel punto en donde el momento no depende del ángulo de ataque) queda:

$$\hat{x}_{acw} - \hat{x}_{acw} = -\frac{1}{a_w} \frac{\partial C_{mb}}{\partial \alpha_b}$$

El coeficiente de momentos alrededor del centro aerodinámico del conjunto al-fuselaje será:

$$C_{macwb} = C_{macw} + C_{m0b} + a_w i_w (\hat{x}_{acwb} - \hat{x}_{acw}) = C_{macw} + C_{m0b} - i_w \frac{\partial C_{mb}}{\partial \alpha_b}$$

2º) Para determinar C_L en un avión de cola horizontal toda móvil se repite el método desarrollado en el apartado 10.2 de este capítulo:

$$C_L = C_{Lwb} + C_{Lt} \eta_t \frac{S_t}{S} = a_w (\alpha_b + i_w) + \eta_t \frac{S_t}{S} a_t (\alpha_b + \delta_H - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_w} (\alpha_b + i_w))$$

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha} \alpha_b + C_{L\delta_H} \delta_H$$

$$C_{L0} = (a_w - a_t \eta_t \frac{S_t}{S} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_w}) i_w$$

$$C_{L\alpha} = a_w + a_t \eta_t \frac{S_t}{S} (1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_w})$$

$$C_{L\delta_H} = a_t \eta_t \frac{S_t}{S}$$

Para determinar C_{mA} en un avión de cola horizontal toda móvil se repite el método desarrollado en el apartado 10.3 de este capítulo, teniendo en cuenta que ahora la distancia entre el centro de masas y el centro aerodinámico de la cola, l_t , es función de la posición del centro de masas (es decir $l_t = x_{act} - x_{cg}$):

$$C_{mA} = C_{Lwb} (\hat{x}_{cg} - \hat{x}_{acwb}) + C_{macwb} - C_{Lt} \eta_t \frac{S_t (x_{act} - x_{cg})}{S_c} =$$

$$= a_w (\alpha_b + i_w) (\hat{x}_{cg} - \hat{x}_{acwb}) + C_{macwb} -$$

$$- a_t \eta_t \frac{S_t}{S} (\hat{x}_{act} - \hat{x}_{cg}) (\alpha_b + \delta_H - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_w} (\alpha_b + i_w))$$

$$C_{mA} = C_{m0} + C_{m\alpha} \alpha_b + C_{m\delta_H} \delta_H$$

$$C_{m0} = C_{macwb} + a_w i_w (\hat{x}_{cg} - \hat{x}_{acwb}) + a_t \eta_t \frac{S_t}{S} (\hat{x}_{act} - \hat{x}_{cg}) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_w} i_w$$

$$C_{m\alpha} = a_w (\hat{x}_{cg} - \hat{x}_{acwb}) - a_t \eta_t \frac{S_t}{S} (\hat{x}_{act} - \hat{x}_{cg}) (1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_w})$$

$$C_{m\delta_H} = -a_t \eta_t \frac{S_t}{S} (\hat{x}_{act} - \hat{x}_{cg})$$

3º) El punto neutro con mandos fijos se obtiene anulando $C_{m\alpha}$:

$$C_{m\alpha} = 0 \rightarrow N_0 - \hat{x}_{acwb} = (\hat{x}_{act} - \hat{x}_{acwb}) \frac{a_t \eta_t \frac{S_t}{S} (1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_w})}{a_w + a_t \eta_t \frac{S_t}{S} (1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_w})}$$

Obsérvese que $N_0 - \hat{x}_{acwb}$ es una función monótonamente creciente con S_t/S : cuando $S_t/S \rightarrow 0$, $N_0 \rightarrow \hat{x}_{acwb}$ y cuando $S_t/S \rightarrow \infty$, $N_0 \rightarrow \hat{x}_{act}$.

El índice de estabilidad estática longitudinal con mandos fijos, $C_{m\alpha}$, como función de N_0 , responde a la expresión:

$$C_{m\alpha} = \left[a_w + a_t \eta_t \frac{S_t}{S} (1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_w}) \right] (\hat{x}_{cg} - N_0) = C_{L\alpha} (\hat{x}_{cg} - N_0)$$

4º) En vuelo simétrico, horizontal, rectilíneo, estacionario, con las alas a nivel:

$$C_m = C_{mA} = C_{m0} + C_{m\alpha} \alpha_b + C_{m\delta_H} \delta_H = 0 \rightarrow \alpha_b = -\frac{C_{m0}}{C_{m\alpha}} - \frac{C_{m\delta_H}}{C_{m\alpha}} \delta_H$$

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha} \alpha_b + C_{L\delta_H} \delta_H = \frac{2W}{\rho S V^2}$$

Despejando δ_H como función de V , queda:

$$\delta_H = \frac{C_{L0} C_{m\alpha} - C_{L\alpha} C_{m0} - C_{m\alpha} \frac{2W}{\rho S V^2}}{C_{L\alpha} C_{m\delta_H} - C_{m\alpha} C_{L\delta_H}}$$

Obsérvese la similitud entre esta expresión y la segunda ecuación del sistema (10.32). Además, el denominador de esta expresión puede simplificarse, quedando:

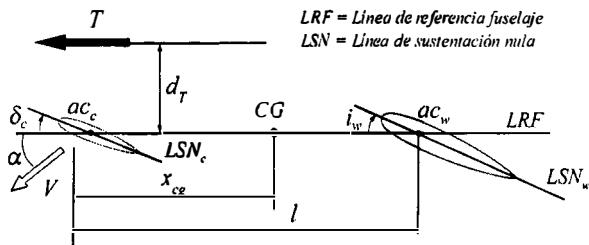
$$C_{L\alpha} C_{m\delta_H} - C_{m\alpha} C_{L\delta_H} = -a_w a_t \eta_t \frac{S_t}{S} (\hat{x}_{act} - \hat{x}_{acwb})$$

Si se hace $C_{L\delta_H} = 0$ se obtiene una expresión similar a la ecuación (10.35):

$$\delta_H = \left(-\frac{C_{m0}}{C_{m\delta_H}} + \frac{C_{L0} C_{m\alpha}}{C_{L\alpha} C_{m\delta_H}} \right) - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta_H} C_{L\alpha}} \frac{2W}{\rho S V^2}$$

PROBLEMA 10.2

La figura adjunta representa un modelo de avión tipo “canard” compuesto por un ala y unas aletas delanteras completamente móviles. Mediante un mando longitudinal convencional reversible el piloto modifica la deflexión del canard δ_c .



Suponiendo además que:

1. Se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (en concreto: se conocen todas las longitudes representadas en las figuras, el calado del ala, las características aerodinámicas y geométricas del ala y del canard, y el peso del avión; la polar es parabólica de coeficientes constantes y conocidos; las contribuciones del canard a la sustentación y al momento de cabeceo totales no son despreciables; etc.).
2. No existe ningún efecto de interferencia mutuo entre el ala y el canard.
3. La línea de acción del empuje pasa a una distancia d_T del centro de masas del avión y la componente del empuje según la dirección perpendicular a la trayectoria es despreciable.
4. La densidad atmosférica ρ es una constante conocida.
5. Todos los ángulos que intervienen en el problema son pequeños.

Se pide:

- 1º) Determinar el coeficiente de sustentación del avión completo, expresándolo en la forma $C_L = C_L(\alpha, \delta_c)$.

2º) Determinar el coeficiente de momentos de cabeceo del avión completo alrededor del centro de masas, expresándolo como $C_m = C_m(\alpha, \delta_c, C_T)$, con $C_T = 2T/\rho V^2 S$.

3º) Determinar el índice de estabilidad estática longitudinal, $\partial C_m / \partial \alpha$ (con δ_c fijo, a partir de una condición de vuelo simétrico horizontal rectilíneo estacionario, y correspondiente a perturbaciones en ángulo de ataque que tengan lugar manteniendo el equilibrio de fuerzas que actúan sobre el avión), como función de la presión dinámica q .

4º) A partir del índice obtenido en el apartado anterior, determinar el punto neutro con mandos fijos, N_0 , en función del punto neutro con mandos fijos para el avión con el empuje pasando por el centro de masas, $(N_0)_p$. Comentar la influencia estabilizante o desestabilizante del empuje.

5º) Determinar la deflexión del canard, δ_c , en vuelo simétrico, horizontal, rectilíneo estacionario con las alas a nivel, en función de la velocidad de vuelo, V .

Solución:

1º) Planteando la sustentación total del avión queda:

$$L = L_w + L_c \rightarrow C_L = \frac{L}{qS} = C_{Lw} + \frac{S_c}{S} C_{Lc} = a_w(\alpha + i_w) + \frac{S_c}{S} a_c(\alpha + \delta_c)$$

y por tanto:

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha + C_{L\delta_c}\delta_c$$

$$C_{L0} = a_w i_w$$

$$C_{L\alpha} = a_w + a_c \frac{S_c}{S}$$

$$C_{L\delta_c} = a_c \frac{S_c}{S}$$

2º) El momento de cabeceo total alrededor del centro de masas tendrá una componente aerodinámica y otra propulsiva:

$$M = M_A + M_T = -L_w(l - x_{cg}) + M_{acw} + L_c x_{cg} - T d_T$$

El coeficiente de momento de cabeceo total será:

$$\begin{aligned} C_m &= \frac{M}{qSc} = -C_{Lw}(\hat{l} - \hat{x}_{cg}) + C_{macw} + C_{Lc} \frac{S_c}{S} \hat{x}_{cg} - C_T \hat{d}_T \\ &= -a_w(\alpha + i_w)(\hat{l} - \hat{x}_{cg}) + C_{macw} + \frac{S_c}{S} a_c(\alpha + \delta_c) \hat{x}_{cg} - C_T \hat{d}_T \end{aligned}$$

y por tanto:

$$\begin{aligned} C_m &= C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta_c}\delta_c - C_T \hat{d}_T \\ C_{m0} &= C_{macw} - a_w i_w (\hat{l} - \hat{x}_{cg}) \\ C_{m\alpha} &= (a_w + a_c \frac{S_c}{S}) \hat{x}_{cg} - a_w \hat{l} \\ C_{m\delta_c} &= a_c \frac{S_c}{S} \hat{x}_{cg} \end{aligned}$$

3º) El índice de estabilidad estática longitudinal con mandos fijos se calcula con deflexión fijada del canard y manteniendo el equilibrio de fuerzas; es decir:

$$T = D \rightarrow C_T = C_D = C_{D0} + kC_L^2$$

$$L = W \rightarrow C_L = W/qS$$

$$C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta_c}\delta_c - C_D \hat{d}_T = (C_{m0} - C_{D0} \hat{d}_T) + C_{m\alpha}\alpha - k \hat{d}_T C_L^2 + C_{m\delta_c}\delta_c$$

Derivando la expresión anterior respecto del ángulo de ataque:

$$\frac{\partial C_m}{\partial \alpha} = C_{m\alpha} - 2k \hat{d}_T C_{L\alpha} C_L = C_{m\alpha} - 2k \hat{d}_T C_{L\alpha} \frac{W}{qS} < C_{m\alpha}$$

Como puede apreciarse el empuje tiene efecto estabilizante (disminuye $C_{m\alpha}$).

4º) El punto neutro con mandos fijos para el avión con $\hat{d}_T = 0$ se obtiene haciendo $C_{m\alpha} = 0$:

$$(N_0)_p = \frac{a_w}{a_w + a_c \frac{S_c}{S}} \hat{l}$$

$$C_{m\alpha} = (a_w + a_c \frac{S_c}{S}) (\hat{x}_{cg} - (N_0)_p) = C_{L\alpha} (\hat{x}_{cg} - (N_0)_p)$$

y el punto neutro con mandos fijos para el avión con $\hat{d}_T \neq 0$ se obtiene haciendo $\partial C_m / \partial \alpha = 0$:

$$N_0 - (N_0)_p = 2k \hat{d}_T \frac{W}{qS}$$

$$\frac{\partial C_m}{\partial \alpha} = (a_w + a_c \frac{S_c}{S}) (\hat{x}_{cg} - N_0) = C_{L\alpha} (\hat{x}_{cg} - N_0)$$

Como puede apreciarse el empuje tiene efecto estabilizante (retrasa el punto neutro).

5º) En vuelo simétrico, horizontal, rectilíneo, estacionario, con las alas a nivel:

$$C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta_c}\delta_c - C_T \hat{d}_T =$$

$$= (C_{m0} - C_{D0}\hat{d}_T) + C_{m\alpha}\alpha - k\hat{d}_T C_L^2 + C_{m\delta_c}\delta_c = 0$$

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha + C_{L\delta_c}\delta_c = \frac{W}{qS}$$

Despejando α y C_L de la última expresión y sustituyéndolos en la penúltima, queda:

$$\delta_c = A + B \frac{1}{q} + C \frac{1}{q^2}$$

$$A = \frac{C_{L0}C_{m\alpha} - C_{L\alpha}C_{m0} + C_{L\alpha}C_{D0}\hat{d}_T}{C_{L\alpha}C_{m\delta_c} - C_{m\alpha}C_{L\delta_c}}$$

$$B = -\frac{C_{m\alpha}}{C_{L\alpha}C_{m\delta_c} - C_{m\alpha}C_{L\delta_c}} \frac{W}{S}$$

$$C = \frac{C_{L\alpha}k\hat{d}_T}{C_{L\alpha}C_{m\delta_c} - C_{m\alpha}C_{L\delta_c}} \left(\frac{W}{S} \right)^2$$

Téngase en cuenta que $C_{L\alpha}C_{m\delta_c} - C_{m\alpha}C_{L\delta_c} = a_w a_c \frac{S_c}{S} \hat{l}$.

Además, para un avión con el empuje pasando por el centro de masas y con un canard que no contribuya a la sustentación total del avión ($\hat{d}_T = C_{L\delta_c} = 0$), se obtiene un resultado análogo al del apartado 10.7 (ver ecuación (10.35)):

$$\delta_c = \left(-\frac{C_{m0}}{C_{m\delta_c}} + \frac{C_{L0}C_{m\alpha}}{C_{L\alpha}C_{m\delta_c}} \right) - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta_c}C_{L\alpha}} \frac{2W}{\rho S V^2}$$



Fuerza en el mando longitudinal

11

11.1. Introducción

En el capítulo anterior se analizó el criterio de estabilidad estática longitudinal con mandos fijos a factor de carga constante y se vio su relación con la deflexión del timón de profundidad necesaria para equilibrar el avión a un ángulo de ataque dado.

Otro principio físico a través del cual el piloto “siente” la estabilidad estática longitudinal del avión viene dado por la fuerza que tiene que efectuar en la palanca (o en los cuernos) para variar la velocidad de vuelo (o el coeficiente de sustentación), a partir de una condición de compensación (fuerza en palanca nula). Las Normas de Aeronavegabilidad establecen que para aumentar la velocidad de vuelo por encima de la de compensación, es preciso aplicar una fuerza a empujar, y para disminuirla a tirar.

El presente capítulo trata esta nueva forma de apreciar la estabilidad estática longitudinal, usualmente denominada estabilidad con mandos libres. Se comienza, en el apartado 11.2, efectuando un breve repaso a los sistemas de mando de los aviones convencionales; el apartado 11.3 estudia el llamado momento de charnela del timón de profundidad (momento de las acciones aerodinámicas sobre el eje de giro del timón) e introduce el concepto de tabs o compensadores; en el apartado 11.4 se libera el timón de profundidad y se ve cómo afecta este hecho a la sustentación y al momento de cabeceo totales; en el apartado 11.5 se determina el índice de estabilidad estática longitudinal con mandos libres y el punto neutro con mandos libres; en el apartado 11.6 se calcula la fuerza en palanca y su derivada con respecto de la velocidad, usualmente llamada gradiente de fuerza en palanca, y se estudia su relación con la estabilidad estática longitudinal con mandos libres; y por último, en el apartado 11.7, se presenta un método para cambiar la estabilidad con mandos libres de un avión ya diseñado mediante la colocación en la palanca de mando de pesos o muelles.

11.2. Tipos de sistemas de mando

La Figura 2.1 del capítulo 2 recoge los signos positivos para los tres momentos aerodinámicos (balance, cabeceo y guiñada) y para las tres deflexiones de las superficies aerodinámicas primarias de mando (alerones, timón de profundidad y timón de dirección), en un avión convencional.

El piloto del avión debe disponer en cabina de dispositivos que le permitan deflectar las tres superficies de mando, para de esa forma controlar los tres momentos aerodinámicos. Al principio de la Historia de la Aeronáutica se utilizaron distintos dispositivos para conseguir estas deflexiones, pero en muy pocos años se llegó al siguiente estándar universalmente aceptado (Figura 11.1):

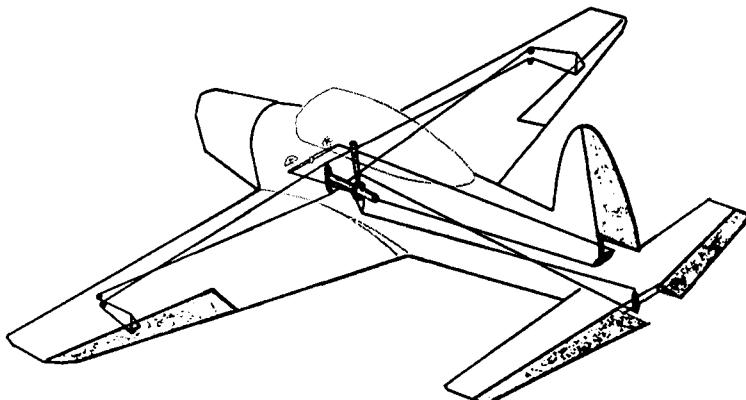


Figura 11.1. Accionamiento desde cabina de las superficies aerodinámicas primarias de mando.

- Timón de profundidad (o de altura): Se opera mediante la palanca de mando (o los cuernos) moviéndola hacia delante y hacia atrás (deflectando la palanca hacia delante el timón baja y hacia atrás el timón sube).
- Alerones: También se accionan con la palanca de mando (o los cuernos) moviéndola hacia la derecha y la izquierda (deflectando la palanca hacia la derecha el alerón izquierdo baja y el alerón derecho sube y deflectándola hacia la izquierda el alerón izquierdo sube y el derecho baja).

- **Timón de dirección:** Se opera mediante los dos pedales derecho e izquierdo moviéndolos hacia delante y hacia atrás (adelantando el pedal derecho y retrasando el izquierdo el timón se deflecta hacia la derecha y adelantando el pedal izquierdo y retrasando el derecho el timón se deflecta hacia la izquierda).

A todos los mecanismos que unen la palanca (o cuernos) y los pedales con el timón de profundidad, los alerones y el timón de dirección, se les suele denominar, respectivamente, **Sistema de Mando Longitudinal**, **Sistema de Mando Lateral** y **Sistema de Mando Direccional**.

Para cualquiera de estos sistemas de mando existen tres grandes categorías:

- **Sistema reversible:** La unión entre el mando en cabina accionado por el piloto y la superficie aerodinámica primaria correspondiente es puramente mecánica. Por tanto, el piloto realiza una fuerza en el mando que equilibra directamente el momento aerodinámico alrededor del eje de giro o charnela de la superficie (Figura 11.2). A este sistema se le denomina “reversible” porque es posible aplicar el principio de los trabajos virtuales, al no existir ni disipación ni aporte de energía al sistema.

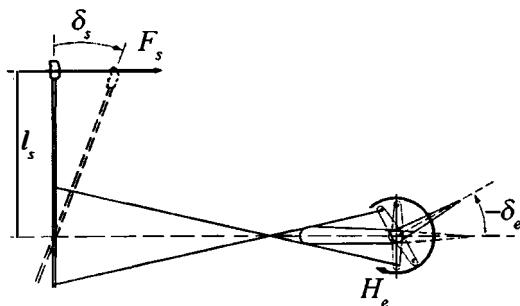


Figura 11.2. Esquema de un sistema de mando reversible.

- **Sistema irreversible:** La fuerza que realiza el piloto en cabina no equilibra el momento aerodinámico de charnela (el cual es equilibrado, en general, por un servomecanismo), sino que es producida por un sistema de sensación artificial de fuerzas (Figura 11.3). Entre los sistemas

irreversibles se encuentran los llamados sistemas “Fly By Wire” (FBW).

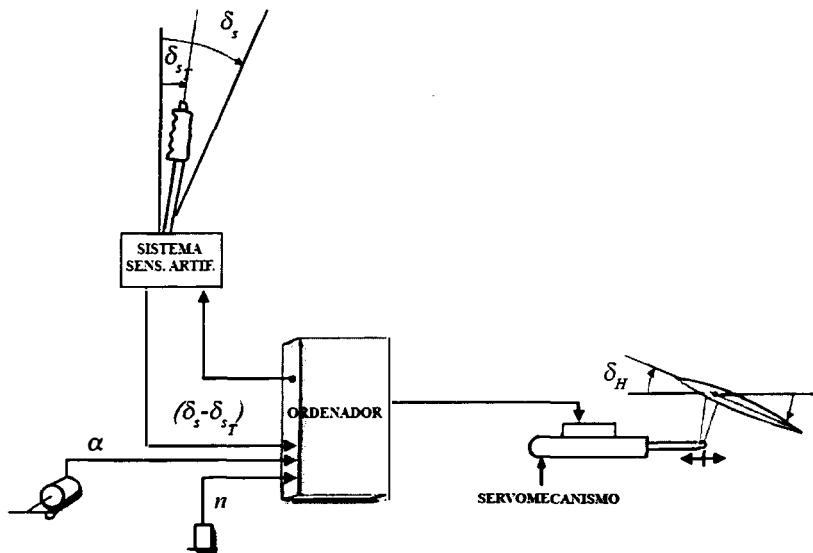


Figura 11.3. Esquema de un sistema de mando irreversible.

- **Sistema con potencia auxiliar:** Sistema intermedio entre el reversible y el irreversible (Figura 11.4).

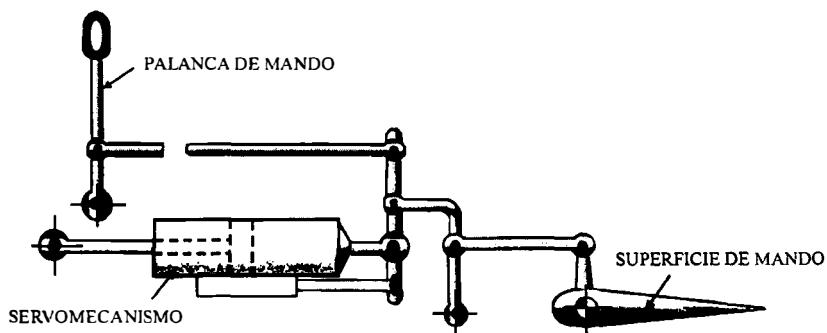


Figura 11.4. Esquema de un sistema de mando con potencia auxiliar.

11.3. Momento de charnela del timón de profundidad

El momento de charnela del timón de profundidad, H_e , es el momento alrededor de la charnela (o eje de giro) del timón que generan las acciones aerodinámicas que actúan sobre él. Este momento puede adimensionalizarse para obtener el coeficiente de momento de charnela del timón de profundidad, C_{he} , en la forma siguiente (Figura 11.5):

$$C_{he} = \frac{H_e}{\frac{1}{2}\rho V_t^2 S_e c_e} \quad (11.1)$$

donde:

V_t ≡ Velocidad aerodinámica en la cola horizontal.

S_e ≡ Superficie del timón de profundidad (por detrás de la línea de charnela).

c_e ≡ Cuerda media aerodinámica del timón de profundidad (por detrás de la línea de charnela).

Para equilibrar este momento de charnela y así disminuir o anular la fuerza en palanca que ha de ejercer el piloto, se coloca en el borde de salida del timón un **tab o compensador** (podría considerarse como un timón del timón) directamente accionado por el piloto mediante otro mando adicional a la palanca.

Existe gran dificultad para elaborar modelos matemáticos precisos de C_{he} , ya que este coeficiente aerodinámico está afectado por varios parámetros geométricos, siendo además muy relevantes los llamados efectos de escala (estado de la capa límite en el borde de salida). Aplicando teoría linealizada de perfiles es posible escribir:

$$C_{he} = C'_{he0} + C'_{he\alpha} \alpha_t + C'_{he\delta_e} \delta_e + C'_{he\delta_t} \delta_t \quad (11.2)$$

en donde C'_{he0} , $C'_{he\alpha}$, $C'_{he\delta_e}$, $C'_{he\delta_t}$ son coeficientes aerodinámicos conocidos, α_t es el ángulo de ataque de la cola, δ_e es la deflexión del timón de profundidad y δ_t representa la deflexión del tab (supuesta positiva hacia abajo). Como además se cumple (ver la tercera ecuación del sistema (10.4)):

$$\alpha_t = \alpha_{wb}(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}) - i_{wb} + i_t - \varepsilon_0 \quad (11.3)$$

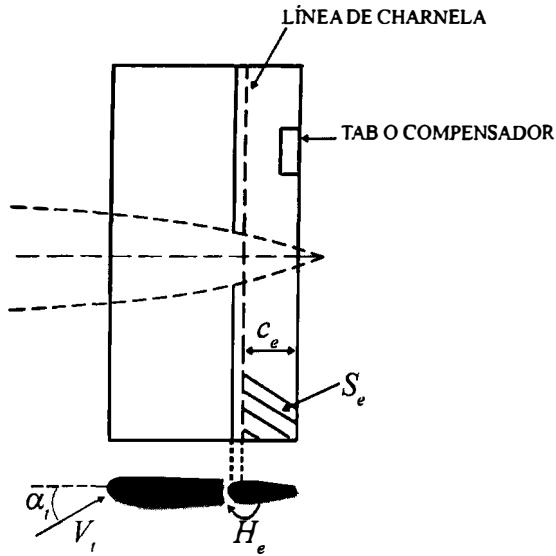


Figura 11.5. Geometría de la cola horizontal.

operando con las dos últimas expresiones queda:

$$C_{he} = C_{he0} + C_{he\alpha}\alpha_{wb} + C_{he\delta_e}\delta_e + C_{he\delta_t}\delta_t \quad (11.4)$$

donde:

$$C_{he0} = C'_{he0} + C'_{he\alpha}(i_t - i_{wb} - \varepsilon_0)$$

$$C_{he\alpha} = C'_{he\alpha}\left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) \quad (11.5)$$

$$C_{he\delta_e} = C'_{he\delta_e}$$

$$C_{he\delta_t} = C'_{he\delta_t}$$

Téngase en cuenta que, con el criterio de signos utilizado en este texto y suponiendo que el timón de profundidad no tiene una compensación aerodinámica excesiva, $C_{he\alpha} < 0$, $C_{he\delta_e} < 0$ y $C_{he\delta_t} < 0$.

11.4. Efecto de liberar el timón de profundidad sobre la sustentación y el momento de cabeceo

Al dejar el piloto el mando longitudinal libre, es decir, al hacerse nula la fuerza, F_s , en la empuñadura de la palanca o en los cuernos, en un sistema reversible sin rozamiento el timón de profundidad queda en equilibrio “flotando” a un ángulo δ_{ef} , denominado ángulo de flotación. En el apartado 11.6 se demostrará que puede calcularse este ángulo de flotación mediante la condición $H_e = 0$; imponiendo esta condición ahora:

$$H_e = 0 \rightarrow C_{he} = 0 \rightarrow \delta_{ef} = -\frac{1}{C_{he\delta_e}}(C_{he0} + C_{he\alpha}\alpha_{wb} + C_{he\delta_t}\delta_t) \quad (11.6)$$

Se supone que la deflexión del tab del timón de profundidad tiene un efecto despreciable sobre la sustentación y el momento de cabeceo totales del avión y por tanto son aplicables las expresiones (10.5) y (10.17), para C_L y C_{mA} respectivamente.

Sustituyendo en la expresión (10.5) el ángulo de flotación, se obtiene para el coeficiente de sustentación:

$$(C_L)_f = (C_{L0})_f + (C_{L\alpha})_f\alpha_{wb} + (C_{L\delta_t})_f\delta_t \quad (11.7)$$

donde el subíndice “*f*” significa flotación o mandos libres, y los coeficientes $(C_{L0})_f$, $(C_{L\alpha})_f$, $(C_{L\delta_t})_f$ vienen dados por:

$$\begin{aligned} (C_{L0})_f &= C_{L0} - \frac{C_{L\delta_e}}{C_{he\delta_e}} C_{he0} \\ (C_{L\alpha})_f &= C_{L\alpha} - \frac{C_{L\delta_e}}{C_{he\delta_e}} C_{he\alpha} \\ (C_{L\delta_t})_f &= -\frac{C_{L\delta_e}}{C_{he\delta_e}} C_{he\delta_t} \end{aligned} \quad (11.8)$$

Operando análogamente con la expresión (10.17), se obtiene para C_{mA} :

$$(C_{mA})_f = (C_{m0})_f + (C_{m\alpha})_f\alpha_{wb} + (C_{m\delta_t})_f\delta_t \quad (11.9)$$

donde

$$\begin{aligned}(C_{m0})_f &= C_{m0} - \frac{C_{m\delta_e}}{C_{he\delta_e}} C_{he0} \\ (C_{m\alpha})_f &= C_{m\alpha} - \frac{C_{m\delta_e}}{C_{he\delta_e}} C_{he\alpha} \\ (C_{m\delta_t})_f &= -\frac{C_{m\delta_e}}{C_{he\delta_e}} C_{he\delta_t}\end{aligned}\quad (11.10)$$

11.5. Índice de estabilidad estática longitudinal con mandos libres y punto neutro con mandos libres

De forma análoga a lo establecido en el apartado 10.4, puede definirse un criterio de estabilidad estática longitudinal con mandos libres, frente a perturbaciones en ángulo de ataque y a $n = cte$ (normalmente $n = 1$) mediante:

$$\left(\frac{\partial C_m}{\partial \alpha_{wb}} \right)_{F_s=0,n} \begin{cases} < 0 & \rightarrow \text{Avión ESTABLE} \\ = 0 & \rightarrow \text{Avión INDIFERENTE} \\ > 0 & \rightarrow \text{Avión INESTABLE} \end{cases} \quad (11.11)$$

Como se está estudiando un avión no motorizado (planeador):

$$\left(\frac{\partial C_m}{\partial \alpha_{wb}} \right)_{F_s=0,n} = \left(\frac{\partial C_{mA}}{\partial \alpha_{wb}} \right)_{F_s=0,n} = (C_{m\alpha})_f \quad (11.12)$$

y por tanto a $(C_{m\alpha})_f$ se le denomina **Índice de estabilidad estática longitudinal con mandos libres** (frente a perturbaciones en ángulo de ataque y a factor de carga constante) y su signo dará idea de otra forma de ver la estabilidad estática del planeador:

$$(C_{m\alpha})_f \begin{cases} < 0 & \rightarrow \text{Avión ESTABLE} \\ = 0 & \rightarrow \text{Avión INDIFERENTE} \\ > 0 & \rightarrow \text{Avión INESTABLE} \end{cases} \quad (11.13)$$

En el apartado anterior ya ha sido calculado este índice de estabilidad (ver segunda ecuación del sistema (11.10)). Introduciendo en esta expresión la

definición de punto neutro con mandos fijos (ver ecuaciones (10.23)), queda:

$$(C_{m\alpha})_f = C_{m\alpha} - C_{m\delta_e} \frac{C_{he\alpha}}{C_{he\delta_e}} = a_{wb}(\hat{x}_{cg} - N_0) - C_{m\delta_e} \frac{C_{he\alpha}}{C_{he\delta_e}} \quad (11.14)$$

Téngase en cuenta que $(C_{m\alpha})_f$ es una función lineal de la posición del centro de masas y aumenta al retrasarse éste. Se denomina **Punto Neutro con Mandos Libres**, N'_0 , a la posición del centro de masas que anula $(C_{m\alpha})_f$:

$$N'_0 = (\hat{x}_{cg})_{(C_{m\alpha})_f=0} \quad (11.15)$$

Según esto:

$$N'_0 - N_0 = \frac{1}{a_{wb}} C_{m\delta_e} \frac{C_{he\alpha}}{C_{he\delta_e}} \quad (11.16)$$

y la ecuación (11.14) se puede escribir como:

$$(C_{m\alpha})_f = a_{wb}(\hat{x}_{cg} - N'_0) \quad (11.17)$$

El punto neutro con mandos libres representa la posición más retrasada que puede ocupar el centro de masas para que el avión sea estáticamente estable con mandos libres, frente a perturbaciones en ángulo de ataque y en vuelo a factor de carga constante (ver Figura 11.6).

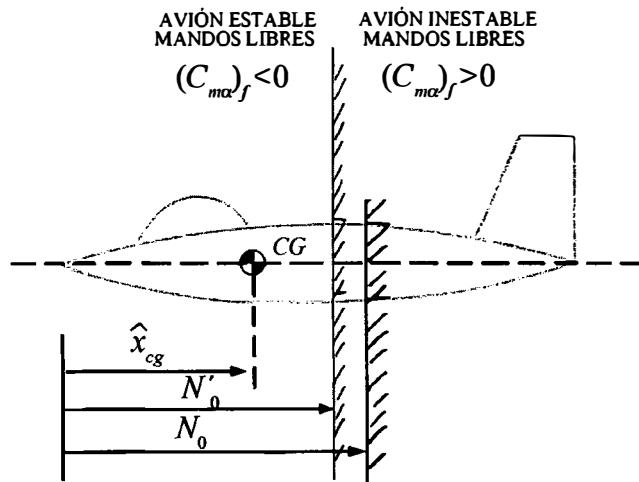


Figura 11.6. Punto neutro con mandos libres y situación relativa respecto del punto neutro con mandos fijos.

Se denomina **Margen Estático con Mandos Libres**, H'_0 , a:

$$H'_0 = N'_0 - \hat{x}_{cg} \quad (11.18)$$

Obsérvese que, como $(C_{m\alpha})_f = -a_{wb}H'_0$, un avión estable tiene un margen estático con mandos libres positivo y uno inestable, negativo.

Para un avión típico, en la ecuación (11.16) son negativos los coeficientes $C_{m\delta_e}$, $C_{he\alpha}$ y $C_{he\delta_e}$ y por tanto $N'_0 - N_0 < 0$; es decir, la “barrera” de mandos libres está más adelantada que la de mandos fijos (o, lo que es lo mismo, el margen estático con mandos libres es menor que el margen estático con mandos fijos) y el avión es más estable con mandos fijos que con mandos libres (ver Figura 11.6).

11.6. Fuerza en palanca y gradiente de fuerza en palanca

En este apartado se obtiene, en primer lugar, la fuerza en palanca, F_s , para un avión dotado de un sistema de mando longitudinal reversible y equilibrado básicamente (los pesos de los distintos elementos están situados en los ejes de giro o charnelas del sistema) y, posteriormente, el llamado gradiente de fuerza en palanca, dF_s/dV . El esquema del sistema de mando y los signos que se consideran positivos para las fuerzas, los momentos y los ángulos aparecen representados en la Figura 11.2.

Aplicando el principio de los trabajos virtuales a este sistema (considerando que no existe rozamiento, ni otros métodos de disipación o de aporte de energía), se obtiene:

$$F_s l_s d\delta_s + H_e d\delta_e = 0 \quad (11.19)$$

y reorganizando esta expresión:

$$F_s = -\frac{d\delta_e}{l_s d\delta_s} H_e = -G_e H_e \quad (11.20)$$

donde se denomina relación de mecanismos del mando longitudinal a $G_e = d\delta_e/(l_s d\delta_s)$. Obsérvese que esta relación de mecanismos es una cantidad negativa y que tiene dimensiones de m^{-1} .

De las ecuaciones (11.1) y (11.4) se obtiene:

$$H_e = q\eta_t S_e c_e (C_{he0} + C_{he\alpha} \alpha_{wb} + C_{he\delta_e} \delta_e + C_{he\delta_t} \delta_t) \quad (11.21)$$

y la fuerza en palanca será por tanto:

$$F_s = Kq(C_{he0} + C_{he\alpha}\alpha_{wb} + C_{he\delta_e}\delta_e + C_{he\delta_t}\delta_t) \quad (11.22)$$

donde $K = -G_e\eta_t S_e c_e$ ($K > 0$).

Además, despreciando $C_{L\delta_e}\delta_e$ respecto a los otros términos que intervienen en la expresión (10.5) que proporciona el coeficiente de sustentación, y llamando $\alpha_0 = -C_{L0}/C_{L\alpha}$ y $\delta_{e0} = -C_{m0}/C_{m\delta_e}$, se pueden utilizar las expresiones (10.34) y (10.35) para determinar α_{wb} y δ_e en función de la velocidad para vuelo horizontal rectilíneo equilibrado. Introduciendo estas expresiones en la ecuación (11.22), queda:

$$F_s = K \frac{1}{2} \rho V^2 (A' + C_{he\delta_t}\delta_t) - K \frac{W}{SC_{L\alpha}} \frac{C_{he\delta_e}}{C_{m\delta_e}} (C_{m\alpha} - C_{m\delta_e} \frac{C_{he\alpha}}{C_{he\delta_e}}) \quad (11.23)$$

donde:

$$A' = C_{he0} + (C_{he\alpha} - C_{he\delta_e} \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta_e}}) \alpha_0 + C_{he\delta_e} \delta_{e0} \quad (11.24)$$

Utilizando ahora el valor de $(C_{m\alpha})_f$ dado por la expresión (11.14), queda finalmente:

$$F_s = A + B \frac{1}{2} \rho V^2 \quad (11.25)$$

donde:

$$A = G_e \eta_t S_e c_e \frac{W}{SC_{L\alpha}} \frac{C_{he\delta_e}}{C_{m\delta_e}} (C_{m\alpha})_f \quad (11.26)$$

$$B = -G_e \eta_t S_e c_e (A' + C_{he\delta_t}\delta_t)$$

La expresión (11.25) representa, para la fuerza en palanca en función de la velocidad, un familia de parábolas de eje vertical dependiente de los parámetros A (en donde está contenido el índice de estabilidad estática longitudinal con mandos libres) y B (en donde aparece la deflexión del tab o compensador).

Deflectando el tab, el piloto puede conseguir un vuelo con fuerza en palanca nula ($F_s = 0$), a cierta velocidad llamada velocidad de compensación y representada por V_T (ver Figura 11.7). Por tanto, para que las parábolas corten al eje de abcisas, de los cuatro casos posibles (los parámetros A y B positivos o negativos), sólo son realistas los dos casos esquematizados en esta figura (si $A > 0$, ha de ser $B < 0$, y si $A < 0$, ha de ser $B > 0$).

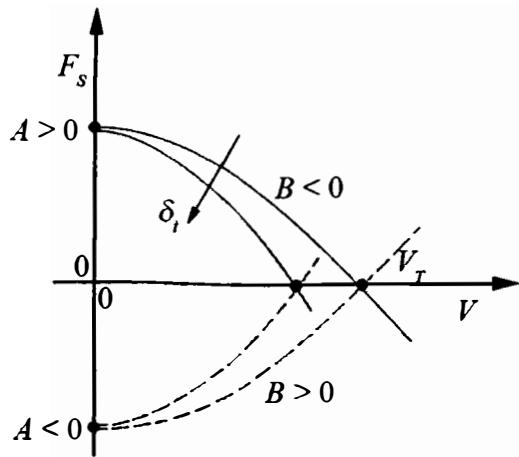


Figura 11.7. Fuerza en palanca en función de la velocidad de vuelo y de la deflexión del tab para un sistema de mando longitudinal convencional reversible.

Si se quiere poner de manifiesto la influencia de $(C_{m\alpha})_f$ sobre el gradiente de fuerza en palanca, dF_s/dV , hay que imponer la condición de que $F_s = 0$ para $V = V_T$. Así pues, pueden deducirse las tres expresiones siguientes:

$$F_s = 0 = A + B \frac{1}{2} \rho V_T^2 \rightarrow B = -\frac{A}{1/2 \rho V_T^2} \quad (11.27)$$

$$\delta_t = \frac{1}{C_{he\delta_t}} \left(\frac{2W}{\rho S V_T^2} \frac{C_{he\delta_e}}{C_{L\alpha} C_{m\delta_e}} (C_{m\alpha})_f - A' \right) \quad (11.28)$$

$$\frac{d\delta_t}{dV_T} = -\frac{4W}{\rho S V_T^3} \frac{C_{he\delta_e}}{C_{he\delta_t} C_{L\alpha} C_{m\delta_e}} (C_{m\alpha})_f \quad (11.29)$$

Además, si en la expresión (11.25) se sustituye la deflexión del tab necesaria para volar en vuelo compensado, por la correspondiente velocidad de compensación (expresión (11.27)), se obtiene la fuerza en palanca necesaria para volar a una velocidad V cuando se ha compensado el avión a otra velocidad V_T . Es decir:

$$F_s = -G_e \eta_t S_e c_e \frac{W}{S C_{L\alpha}} \frac{C_{he\delta_e}}{C_{m\delta_e}} (C_{m\alpha})_f \left[\left(\frac{V}{V_T} \right)^2 - 1 \right] \quad (11.30)$$

Derivando esta expresión respecto de la velocidad se obtiene el gradiente de fuerza en palanca a cualquier velocidad y el gradiente de fuerza

en palanca en vuelo compensado:

$$\frac{dF_s}{dV} = -2G_e \eta_t S_e c_e \frac{W}{SC_{L\alpha}} \frac{C_{he\delta_e}}{C_{m\delta_e}} (C_{m\alpha})_f \frac{V}{V_T^2} \quad (11.31)$$

$$\left(\frac{dF_s}{dV} \right)_{V=V_T} = -2G_e \eta_t S_e c_e \frac{W}{SC_{L\alpha}} \frac{C_{he\delta_e}}{C_{m\delta_e}} (C_{m\alpha})_f \frac{1}{V_T} \quad (11.32)$$

Analizando los signos de la primera ecuación del sistema (11.26) y de las ecuaciones (11.29) y (11.32), se concluye que:

$$\operatorname{sgn}(C_{m\alpha})_f = -\operatorname{sgn} A = \operatorname{sgn} \frac{d\delta_t}{dV_T} = \operatorname{sgn} \left(\frac{dF_s}{dV} \right)_{V=V_T} \quad (11.33)$$

Por tanto pueden utilizarse cualquiera de los criterios anteriores para determinar el punto neutro con mandos libres mediante ensayos en vuelo. Por ejemplo, la Figura 11.8 representa un esquema para la determinación del punto neutro con mandos libres a partir del penúltimo criterio de la expresión anterior.

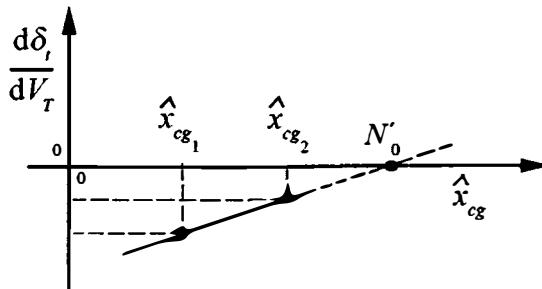


Figura 11.8. Determinación del punto neutro con mandos libres mediante ensayos en vuelo.

11.7. Efecto de pesos y muelles sobre la estabilidad con mandos libres

Añadiendo un peso o un muelle que tienda a desplazar la palanca hacia delante o hacia detrás (respecto del piloto), es posible modificar la estabilidad con mandos libres de un avión completamente diseñado y, por tanto, con todas sus características geométricas, aerodinámicas y másicas ya fijadas. En

un sistema puramente reversible como el estudiado hasta ahora, la estabilidad con mandos fijos queda inalterada.

Considérense los dos sistemas convencionales reversibles de la Figura 11.9. Para ambos la fuerza en palanca será:

$$F_s = -G_e H_e + P \quad (11.34)$$

donde P es una constante que viene dada por:

- Peso: $P = W_p \frac{l_p}{l_s}$

- Muelle: $P = T_m \frac{l_m}{l_s}$

siendo W_p el valor del peso y T_m la fuerza proporcionada por el muelle (se supone que esta fuerza es constante y no es función del alargamiento del muelle).

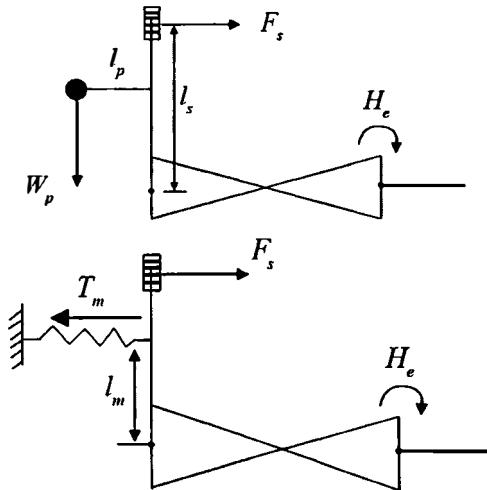


Figura 11.9. Sistemas reversibles con pesos (esquema superior) y muelles (esquema inferior).

El ángulo de flotación para el equilibrio, δ_{ef} , ahora será distinto al proporcionado por la ecuación (11.6), ya que hay que obtenerlo a partir de la

nueva condición de mandos libres; es decir:

$$\begin{aligned} F_s = 0 &= -G_e q \eta_t S_e c_e (C_{he0} + C_{he\alpha} \alpha_{wb} + C_{he\delta_e} \delta_{ef} + C_{he\delta_t} \delta_t) + P \\ \delta_{ef} &= -\frac{1}{C_{he\delta_e}} (C_{he0} + C_{he\alpha} \alpha_{wb} + C_{he\delta_t} \delta_t) + \frac{P}{C_{he\delta_e} G_e q \eta_t S_e c_e} \end{aligned} \quad (11.35)$$

Para calcular el nuevo índice de estabilidad estática longitudinal con mandos libres es preciso hacer un desarrollo análogo al del apartado 11.5. Derivando respecto del ángulo de ataque la expresión (10.17) que proporciona el coeficiente de momentos de cabeceo, queda:

$$\left(\frac{\partial C_m}{\partial \alpha_{wb}} \right)_{F_s=0,n} = \left(\frac{\partial C_{mA}}{\partial \alpha_{wb}} \right)_{F_s=0,n} = (C_{m\alpha})_{f,P} = C_{m\alpha} + C_{m\delta_e} \frac{\partial \delta_{ef}}{\partial \alpha_{wb}} \quad (11.36)$$

donde $(C_{m\alpha})_{f,P}$ es el nuevo índice de estabilidad estática longitudinal con mandos libres, con el peso o el muelle.

Para calcular $\partial \delta_{ef} / \partial \alpha_{wb}$ se utiliza la expresión (11.35), teniendo en cuenta que por estar estudiando la estabilidad a $n = 1$, las variaciones de ángulo de ataque van acompañadas de variaciones de velocidad; es decir:

$$\begin{aligned} C_L &= C_{L0} + C_{L\alpha} \alpha_{wb} = \frac{L}{qS} = \frac{W}{qS} \\ \frac{\partial \delta_{ef}}{\partial \alpha_{wb}} &= -\frac{C_{he\alpha}}{C_{he\delta_e}} + \frac{P}{C_{he\delta_e} G_e \eta_t S_e c_e} \frac{\partial(1/q)}{\partial \alpha_{wb}} = \\ &= -\frac{C_{he\alpha}}{C_{he\delta_e}} + \frac{P}{C_{he\delta_e} G_e \eta_t S_e c_e} \frac{C_{L\alpha}}{W/S} \end{aligned} \quad (11.37)$$

Finalmente, operando con el sistema de ecuaciones (11.36), (11.37) y (11.14), se obtiene:

$$(C_{m\alpha})_{f,P} = (C_{m\alpha})_f + \frac{C_{m\delta_e} C_{L\alpha}}{C_{he\delta_e}} \frac{S}{G_e \eta_t S_e c_e W} P \quad (11.38)$$

El nuevo Punto Neutro con Mandos Libres, con peso o con muelle, $N'_{0,P}$, vendrá dado por:

$$N'_{0,P} - N'_0 = -\frac{C_{m\delta_e} C_{L\alpha}}{C_{he\delta_e} a_{wb}} \frac{S}{G_e \eta_t S_e c_e W} P \quad (11.39)$$

y el nuevo índice de estabilidad estática longitudinal con mandos libres se podrá expresar también como:

$$(C_{m\alpha})_{f,P} = a_{wb}(\hat{x}_{cg} - N'_{0,P}) \quad (11.40)$$

Obsérvese que un peso o un muelle que tiendan a desplazar la palanca hacia delante del piloto ($P > 0$), estabilizan el avión o, lo que es lo mismo, retrasan el punto neutro con mandos libres ($N'_{0,P} - N'_0 > 0$, ya que $C_{m\delta_e}, C_{he\delta_e}, G_e$ son negativos). Si el peso o el muelle tendieran a desplazar la palanca hacia el piloto ($P < 0$), el avión sería más inestable con mandos libres comparado con el avión sin peso o muelle.

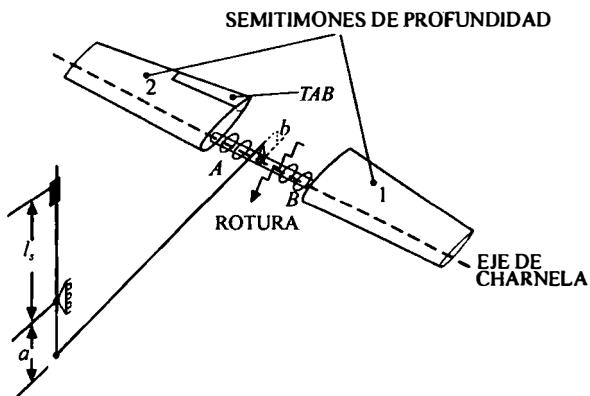
Efectuando un análisis similar al realizado en el apartado anterior se demuestra fácilmente que también pueden utilizarse los criterios de estabilidad derivados recogidos en la expresión (11.33); es decir:

$$\operatorname{sgn}(C_{m\alpha})_{f,P} = -\operatorname{sgn}A_P = \operatorname{sgn}\left(\frac{d\delta_t}{dV_T}\right)_P = \operatorname{sgn}\left(\frac{dF_s}{dV}\right)_{V=V_T,P} \quad (11.41)$$

11.8. Problemas 11.1 y 11.2

PROBLEMA 11.1

Un avión cuyas características geométricas, aerodinámicas y másicas son conocidas está provisto del sistema de mando longitudinal convencional reversible indicado en la figura. La cola horizontal está constituida por un estabilizador (no representado por simplicidad del esquema) y por dos semitimones de profundidad idénticos, formados por perfiles planos y simétricos, en los que únicamente el semitimón derecho dispone de tab de compensación.



Se desea estudiar la estabilidad y el control longitudinal de este avión en vuelo horizontal rectilíneo simétrico estacionario, en el caso de que el tubo de torsión AB, que une los dos semitimones, se rompa por el lugar indicado, quedándose el semitimón izquierdo girando libremente alrededor de su charnela.

Suponiendo además que:

1. Son conocidas todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión.
2. Es despreciable la contribución de las deflexiones de los semitimones a la sustentación total del avión, la línea de acción del empuje pasa por el centro de masas y es despreciable la componente del empuje según la dirección perpendicular a la trayectoria.
3. Se conoce la densidad atmosférica, ρ .

Se pide:

- 1º) Determinar la deflexión del semitimón derecho, δ_{e2} , en función de la velocidad de vuelo, V .
- 2º) Determinar y comparar entre sí los puntos neutros con mandos fijos y libres para los casos de rotura y no rotura de la barra de torsión AB.
- 3º) Determinar la fuerza en palanca, F_s , en función de V y de la velocidad de compensación, V_T .

Solución:

1º) Llamando S_e a la superficie total de los dos semitimones idénticos y planteando el momento de charnela para cada semitimón (se reserva el subíndice 1 para el izquierdo y el 2 para el derecho):

$$C_{he2} = \frac{H_{e2}}{(1/2)\rho V_t^2 (S_e/2)c_e} = C'_{he2\alpha} \alpha_t + C'_{he2\delta_e} \delta_{e2} + C'_{he2\delta_t} \delta_{t2}$$

$$C_{he1} = \frac{H_{e1}}{(1/2)\rho V_t^2 (S_e/2)c_e} = C'_{he2\alpha} \alpha_t + C'_{he2\delta_e} \delta_{e1}$$

Obsérvese que para los dos semitimones los coeficientes aerodinámicos son los mismos y que se ha impuesto $C'_{he0} = 0$, por tratarse de una cola horizontal dotada de perfiles planos y simétricos. Además δ_{t2} representa la deflexión del tab existente en el semitimón derecho. Sumando ahora las contribuciones de los dos semitimones:

$$H_e = H_{e1} + H_{e2} \rightarrow C_{he} = \frac{H_e}{(1/2)\rho V_t^2 S_e c_e} = \frac{H_{e1} + H_{e2}}{(1/2)\rho V_t^2 S_e c_e} = \frac{1}{2} C_{he1} + \frac{1}{2} C_{he2}$$

$$C_{he} = \frac{1}{2} C_{he1} + \frac{1}{2} C_{he2} = C'_{he\alpha} \alpha_t + C'_{he\delta_e} \frac{\delta_{e1} + \delta_{e2}}{2} + C'_{he\delta_t} \delta_{t2}$$

donde $C'_{he\alpha} = C'_{he2\alpha}$, $C'_{he\delta_e} = C'_{he2\delta_e}$ y $C'_{he\delta_t} = C'_{he2\delta_t}/2$.

Introduciendo ahora

$$\alpha_t = \alpha_{wb}(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}) - i_{wb} + i_t - \varepsilon_0$$

se obtiene finalmente:

$$C_{he} = C_{he0} + C_{he\alpha} \alpha_{wb} + C_{he\delta_e} \frac{\delta_{e1} + \delta_{e2}}{2} + C_{he\delta_t} \delta_{t2}$$

donde $C_{he0} = C'_{he\alpha}(i_t - i_{wb} - \varepsilon_0)$, $C_{he\alpha} = C'_{he\alpha}(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha})$, $C_{he\delta_e} = C'_{he\delta_e}$ y $C_{he\delta_t} = C'_{he\delta_t}$.

En cuanto al momento de cabeceo total del avión, descompuesto en las contribuciones de los dos semitimones, puede escribirse:

$$C_m = C_{mA} = C_{m0} + C_{m\alpha} \alpha_{wb} + C_{m\delta_e} \frac{\delta_{e1} + \delta_{e2}}{2}$$

donde los valores de C_{m0} , $C_{m\alpha}$, $C_{m\delta_e}$ son los recogidos en el apartado 10.3.

Para determinar ahora la deflexión del semitimón derecho en función de la velocidad de vuelo se impone, en primer lugar, la condición de flotación del semitimón izquierdo:

$$C_{he1} = 0 \rightarrow \delta_{e1} = -\frac{1}{C_{he\delta_e}} (C_{he0} + C_{he\alpha} \alpha_{wb})$$

y se introduce después este resultado en el equilibrio de momentos:

$$C_m = 0 \rightarrow \delta_{e2} = \left(-\frac{2C_{m0}}{C_{m\delta_e}} + \frac{C_{he0}}{C_{he\delta_e}} \right) - \left(\frac{2C_{m\alpha}}{C_{m\delta_e}} - \frac{C_{he\alpha}}{C_{he\delta_e}} \right) \alpha_{wb}$$

Finalmente, de la condición de vuelo se obtiene:

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha} \alpha_{wb} = \frac{2W}{\rho SV^2} \rightarrow \alpha_{wb} = -\frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}} + \frac{2W}{\rho SV^2 C_{L\alpha}} = \alpha_0 + \frac{2W}{\rho SV^2 C_{L\alpha}}$$

y la deflexión del semitimón derecho queda:

$$\delta_{e2} = \left(-\frac{2C_{m0}}{C_{m\delta_e}} + \frac{C_{he0}}{C_{he\delta_e}} \right) - \left(\frac{2C_{m\alpha}}{C_{m\delta_e}} - \frac{C_{he\alpha}}{C_{he\delta_e}} \right) \alpha_0 - \left(\frac{2C_{m\alpha}}{C_{m\delta_e}} - \frac{C_{he\alpha}}{C_{he\delta_e}} \right) \frac{2W}{\rho SV^2 C_{L\alpha}}$$

2º) El punto neutro con mandos fijos con rotura, $(N_0)_R$, puede obtenerse igualando a cero cualquiera de los dos índices siguientes: $(\partial C_m / \partial \alpha_{wb})_{\delta_{e2}, n}$ y $d\delta_{e2} / d\alpha_{wb}$. Utilizando el primero de ellos:

$$\left(\frac{\partial C_m}{\partial \alpha_{wb}} \right)_{\delta_{e2}, n} = C_{m\alpha} + \frac{C_{m\delta_e}}{2} \frac{\partial \delta_{e1}}{\partial \alpha_{wb}} = C_{m\alpha} - \frac{C_{m\delta_e}}{2} \frac{C_{he\alpha}}{C_{he\delta_e}} = 0$$

Como, en general, $C_{m\alpha} = a_{wb}(\hat{x}_{cg} - N_0)$, puede escribirse:

$$(N_0)_R - N_0 = \frac{1}{a_{wb}} \frac{C_{m\delta_e}}{2} \frac{C_{he\alpha}}{C_{he\delta_e}}$$

Los puntos neutros con mandos libres para los casos de rotura y no rotura obviamente coinciden ($(N'_0)_R = N'_0$). En el apartado 11.5 se obtuvo:

$$N'_0 - N_0 = \frac{1}{a_{wb}} C_{m\delta_e} \frac{C_{he\alpha}}{C_{he\delta_e}}$$

Por tanto el punto neutro con mandos fijos con rotura equidista entre el punto neutro con mandos fijos sin rotura y el punto neutro con mandos libres sin rotura.

3º) Para el cálculo de la fuerza en palanca se repite todo el proceso seguido en el apartado 11.6, aunque ahora el piloto solamente siente en la palanca el momento de charnela del semitimón derecho, mientras que el izquierdo está en flotación:

$$F_s = -G_e H_{e2} = -G_e \frac{1}{2} \rho V^2 \eta_t \frac{S_e}{2} c_e (C_{he0} + C_{he\alpha} \alpha_{wb} + C_{he\delta_e} \delta_{e2} + 2C_{he\delta_t} \delta_{t2})$$

Obsérvese que para este sistema de mando es posible determinar la relación de mecanismos en función de características geométricas más sencillas del mismo:

$$G_e = \frac{d\delta_{e2}}{l_s d\delta_s} = -\frac{a}{l_s b}$$

Ahora la deflexión del semitimón derecho y el ángulo de ataque serán:

$$\alpha_{wb} = \alpha_0 + \frac{2W}{\rho S V^2 C_{L\alpha}}$$

$$\delta_{e2} = \left(-\frac{2C_{m0}}{C_{m\delta_e}} + \frac{C_{he0}}{C_{he\delta_e}} \right) - \left(\frac{2C_{m\alpha}}{C_{m\delta_e}} - \frac{C_{he\alpha}}{C_{he\delta_e}} \right) \alpha_0 - \left(\frac{2C_{m\alpha}}{C_{m\delta_e}} - \frac{C_{he\alpha}}{C_{he\delta_e}} \right) \frac{2W}{\rho S V^2 C_{L\alpha}}$$

Introduciendo estas expresiones en la ecuación de la fuerza en palanca:

$$F_s = K_R \frac{1}{2} \rho V^2 (A'_R + 2C_{he\delta_t} \delta_{t2}) - 2K_R \frac{W}{SC_{L\alpha}} \frac{C_{he\delta_e}}{C_{m\delta_e}} (C_{m\alpha} - C_{m\delta_e} \frac{C_{he\alpha}}{C_{he\delta_e}})$$

$$K_R = -G_e \eta_t \frac{S_e}{2} c_e$$

$$A'_R = 2C_{he0} + 2(C_{he\alpha} - C_{he\delta_e} \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta_e}}) \alpha_0 - 2C_{he\delta_e} \frac{C_{m0}}{C_{m\delta_e}}$$

Obsérvese que se obtiene un resultado idéntico al proporcionado en el apartado 11.6 para el caso de timón sin rotura. Por tanto:

$$F_s = A + B \frac{1}{2} \rho V^2$$

$$A = G_e \eta_t S_e c_e \frac{W}{SC_{L\alpha}} \frac{C_{he\delta_e}}{C_{m\delta_e}} (C_{m\alpha})_f$$

$$B = -G_e \eta_t S_e c_e (A' + C_{he\delta_t} \delta_t)$$

con

$$(C_{m\alpha})_f = C_{m\alpha} - C_{m\delta_e} \frac{C_{he\alpha}}{C_{he\delta_e}}$$

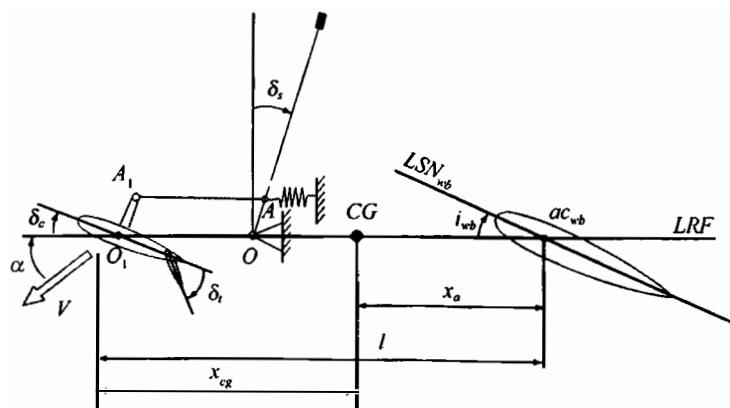
y finalmente:

$$F_s = -G_e \eta_t S_e c_e \frac{W}{SC_{L\alpha}} \frac{C_{he\delta_e}}{C_{m\delta_e}} (C_{m\alpha})_f \left[\left(\frac{V}{V_T} \right)^2 - 1 \right]$$

con $G_e = -a/(l_s b)$

PROBLEMA 11.2

Un avión tipo “canard” dispone de un sistema de mando longitudinal esquematizado en la figura adjunta. El muelle no ejerce fuerza para deflexión de palanca nula y al deflectar la palanca da una fuerza proporcional a lo que se estira o encoge, con una constante k_m conocida. El “canard” es todo móvil, está formado por perfiles planos y simétricos, gira alrededor de una charnela que coincide con su centro aerodinámico (punto O_1) y tiene un peso W_c aplicado en el punto medio de su cuerda.



Suponiendo además que:

1. Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión siguientes: S , c , S_c , c_c , l , x_{cg} , l_s , $\overline{OA} = \overline{O_1A_1} = e$, a_{wb} , C_{macwb} , i_{wb} , a_c , $C_{hc\delta_t}$, W , W_c , etc.

2. Los efectos de interferencia entre el “canard” y el conjunto ala-fuselaje son despreciables.
3. La deflexión del tab no influye sobre la sustentación ni sobre el momento de cabeceo del avión.
4. Son despreciables las contribuciones del empuje del motor a la fuerza normal a la trayectoria y al momento de cabeceo del avión completo.
5. Todos los ángulos que intervienen en el problema son pequeños.

Para vuelo simétrico, horizontal, rectilíneo, estacionario y con las alas a nivel, se pide:

1º) Determinar las deflexiones del “canard”, δ_c , y del tab, δ_t , en función de la presión dinámica de vuelo compensado, q_T .

2º) Determinar el índice de estabilidad estática longitudinal con mandos libres a $n = 1$, $(C_{m\alpha})_f$, en función de la presión dinámica a la que se ha compensado el avión, q_T .

3º) Determinar la fuerza en palanca, F_s , para volar a una presión dinámica, q , si se ha compensado el avión a la presión dinámica q_T .

4º) Determinar el gradiente de fuerza en palanca, respecto de la presión dinámica, a la velocidad de compensación, $(dF_s/dq)_{q=q_T}$. ¿Para este sistema de mando concreto son equivalentes los criterios de estabilidad con mandos libres $(C_{m\alpha})_f$ y $(dF_s/dq)_{q=q_T}$?

Solución:

1º) A partir de los resultados del problema 10.2, y suponiendo ahora que el empuje pasa por el centro de masas, puede escribirse:

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha + C_{L\delta_c}\delta_c$$

$$C_{L0} = a_{wb}i_{wb}$$

$$C_{L\alpha} = a_{wb} + a_c \frac{S_c}{S}$$

$$C_{L\delta_c} = a_c \frac{S_c}{S}$$

$$C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta_c}\delta_c$$

$$C_{m0} = C_{macwb} - a_{wb}i_{wb}(\hat{l} - \hat{x}_{cg})$$

$$C_{m\alpha} = (a_{wb} + a_c \frac{S_c}{S}) \hat{x}_{cg} - a_{wb} \hat{l} = C_{L\alpha} \hat{x}_{cg} - a_{wb} \hat{l} = C_{L\alpha} (\hat{x}_{cg} - N_0)$$

$$C_{m\delta_c} = a_c \frac{S_c}{S} \hat{x}_{cg}$$

Imponiendo ahora que la sustentación iguala al peso y que el vuelo es equilibrado queda para la deflexión del “canard” (ver problema 10.2):

$$\delta_c = A + B \frac{1}{q}$$

$$A = \frac{C_{L0}C_{m\alpha} - C_{L\alpha}C_{m0}}{C_{L\alpha}C_{m\delta_c} - C_{m\alpha}C_{L\delta_c}}$$

$$B = -\frac{C_{m\alpha}}{C_{L\alpha}C_{m\delta_c} - C_{m\alpha}C_{L\delta_c}} \frac{W}{S}$$

donde $C_{L\alpha}C_{m\delta_c} - C_{m\alpha}C_{L\delta_c} = a_{wb}a_c(Sc/S)\hat{l}$.

Planteando ahora el equilibrio del sistema de mando se obtiene para la fuerza en palanca:

$$F_s = \frac{k_m e^2}{l_s} \delta_s - \frac{H_c}{l_s} - \frac{W_c c_c}{4l_s}$$

Por la geometría del sistema de mando, resulta:

$$\delta_s = \delta_c$$

Téngase en cuenta que la única contribución al momento de charnela del “canard” es la debida a su tab, ya que el ángulo de ataque del avión y la deflexión del “canard” no contribuyen a este momento por coincidir la charnela con su centro aerodinámico. Por tanto:

$$H_c = q S_c c_c C_{hc\delta_t} \delta_t$$

Introduciendo todos los resultados obtenidos en la expresión de la fuerza en palanca queda:

$$F_s = C + Dq + E \frac{1}{q}$$

$$C = \frac{k_m e^2}{l_s} \frac{C_{L0}C_{m\alpha} - C_{L\alpha}C_{m0}}{C_{L\alpha}C_{m\delta_c} - C_{m\alpha}C_{L\delta_c}} - \frac{W_c c_c}{4l_s}$$

$$D = -\frac{S_c c_c}{l_s} C_{hc\delta_t} \delta_t$$

$$E = -\frac{k_m e^2}{l_s} \frac{W}{S} \frac{C_{m\alpha}}{C_{L\alpha} C_{m\delta_c} - C_{m\alpha} C_{L\delta_c}}$$

Para vuelo compensado (fuerza en palanca nula) las deflexiones del tab y del “canard” son:

$$D = -\frac{C}{q_T} - \frac{E}{q_T^2} \rightarrow \delta_t = \frac{l_s}{S_c c_c C_{hc\delta_t}} \left(\frac{C}{q_T} + \frac{E}{q_T^2} \right)$$

$$\delta_c = A + B \frac{1}{q_T}$$

2º) El índice de estabilidad estática longitudinal con mandos libres será:

$$\left(\frac{\partial C_m}{\partial \alpha} \right)_{F_s=0, n=1} = (C_{m\alpha})_f = C_{m\alpha} + C_{m\delta_c} \frac{\partial \delta_{cf}}{\partial \alpha}$$

El ángulo de flotación para el “canard”, δ_{cf} , se expresa mediante:

$$F_s = 0 \rightarrow \delta_{cf} = \frac{W_c c_c}{4k_m e^2} + \frac{H_c}{k_m e^2} = \frac{W_c c_c}{4k_m e^2} + \frac{S_c c_c}{k_m e^2} C_{hc\delta_t} \delta_t q$$

donde la presión dinámica es, a su vez, una función del ángulo de ataque a través de la condición de vuelo a $n = 1$ (ver la primera ecuación del sistema (10.32)):

$$\alpha = -\frac{C_{L0} C_{m\delta_c} - C_{m0} C_{L\delta_c}}{C_{L\alpha} C_{m\delta_c} - C_{m\alpha} C_{L\delta_c}} + \frac{C_{m\delta_c}}{C_{L\alpha} C_{m\delta_c} - C_{m\alpha} C_{L\delta_c}} \frac{W}{qS}$$

Por tanto el índice buscado será:

$$(C_{m\alpha})_f = C_{m\alpha} + C_{m\delta_c} \frac{S_c c_c}{k_m e^2} C_{hc\delta_t} \delta_t \frac{\partial q}{\partial \alpha} =$$

$$= C_{m\alpha} - \frac{S_c c_c}{k_m e^2 (W/S)} (C_{L\alpha} C_{m\delta_c} - C_{m\alpha} C_{L\delta_c}) C_{hc\delta_t} \delta_t q^2$$

Finalmente particularizando la expresión anterior para la velocidad de compensación (e introduciendo, por tanto, la relación existente entre la deflexión del tab y la velocidad de compensación) queda:

$$(C_{m\alpha})_f = C_{m\alpha} \left[2 - \left(C_{L0} + C_{L\delta_c} \frac{W_c c_c}{4k_m e^2} \right) \frac{q_T}{W/S} \right] +$$

$$+ C_{L\alpha} \left(C_{m0} + C_{m\delta_c} \frac{W_c c_c}{4k_m e^2} \right) \frac{q_T}{W/S}$$

La posición del centro de masas que anula este índice de estabilidad estática longitudinal con mandos libres (punto neutro con mandos libres) se podría obtener introduciendo en la expresión anterior $C_{m\alpha}$, C_{m0} , $C_{m\delta_c}$, como funciones de \hat{x}_{cg} e igualándola a cero (ver apartado 1º).

3º) Sustituyendo la deflexión del tab obtenida en el apartado 1º)

$$D = -\frac{C}{q_T} - \frac{E}{q_T^2}$$

en la expresión de la fuerza en palanca asimismo obtenida en el apartado 1º)

$$F_s = C + Dq + E \frac{1}{q}$$

queda:

$$F_s = C \left(1 - \frac{q}{q_T} \right) + E \left(\frac{1}{q} - \frac{q}{q_T^2} \right)$$

4º) Derivando ahora esta expresión con respecto a q y particularizando para la condición de compensación:

$$\begin{aligned} \frac{dF_s}{dq} &= -C \frac{1}{q_T} - E \frac{1}{q^2} - E \frac{1}{q_T^2} \rightarrow \left(\frac{dF_s}{dq} \right)_{q=q_T} = -C \frac{1}{q_T} - 2E \frac{1}{q_T^2} \\ \left(\frac{dF_s}{dq} \right)_{q=q_T} &= - \left(\frac{k_m e^2}{l_s} \frac{C_{L\alpha} C_{m\alpha} - C_{L\alpha} C_{m0}}{C_{L\alpha} C_{m\delta_c} - C_{m\alpha} C_{L\delta_c}} - \frac{W_c c_c}{4l_s} \right) \frac{1}{q_T} + \\ &\quad + 2 \frac{k_m e^2}{l_s} \frac{W}{S} \frac{C_{m\alpha}}{C_{L\alpha} C_{m\delta_c} - C_{m\alpha} C_{L\delta_c}} \frac{1}{q_T^2} \end{aligned}$$

Si se reorganiza esta expresión para introducir $(C_{m\alpha})_f$ (deducido en el apartado 2º) queda:

$$\left(\frac{dF_s}{dq} \right)_{q=q_T} = \frac{k_m e^2}{l_s} \frac{1}{C_{L\alpha} C_{m\delta_c} - C_{m\alpha} C_{L\delta_c}} \frac{W/S}{q_T^2} (C_{m\alpha})_f$$

Introduciendo finalmente $C_{L\alpha} C_{m\delta_c} - C_{m\alpha} C_{L\delta_c} = a_{wb} a_c (S_c/S) \hat{l}$ en la expresión anterior:

$$\left(\frac{dF_s}{dq} \right)_{q=q_T} = \frac{k_m e^2}{l_s \hat{l}} \frac{1}{a_{wb} a_c} \frac{W/S_c}{q_T^2} (C_{m\alpha})_f$$

Puede observarse que ambos criterios son equivalentes, ya que:

$$\operatorname{sgn}(C_{m\alpha})_f = \operatorname{sgn} \left(\frac{dF_s}{dq} \right)_{q=q_T}$$

La posición del centro de masas que anularía $(C_{m\alpha})_f$ (punto neutro con mandos libres), asimismo anularía $(dF_s/dq)_{q=q_T}$.

Estabilidad y control estáticos longitudinales en maniobra **12**

12.1. Introducción

Las discusiones sobre estabilidad y control estáticos longitudinales efectuadas en los dos capítulos anteriores han sido hechas para la condición $L = W$ (o $n = 1$), aunque también podrían haberse hecho para el caso algo más general de $n = \text{cte}$.

Ello implica que las perturbaciones en ángulo de ataque van acompañadas de cambios de velocidad: incrementar el ángulo de ataque equivale a disminuir la velocidad, para mantener la ligadura de que la sustentación es igual al peso. Además la introducción de estas perturbaciones en ángulo de ataque se efectúa situando al avión estáticamente en las distintas condiciones, sin incorporar una velocidad angular de cabeceo para pasar de una condición a otra.

Es importante, asimismo, que un avión sea estable frente a perturbaciones de ángulo de ataque que se produzcan a velocidad de vuelo constante, a partir de una condición básica de maniobra estabilizada (el vuelo rectilíneo es un caso particular de ésta). En estas condiciones, al modificarse α , manteniendo V constante, se modificará el factor de carga, n , y en general habrá que tener en cuenta la velocidad angular de cabeceo, q , la cual incrementa el ángulo de ataque de la cola y cambia el equilibrio de momentos del avión.

Existen infinitas maniobras para las que se podría analizar la estabilidad y el control estáticos longitudinales “en maniobra” o “a velocidad constante”. Tradicionalmente se han venido eligiendo como maniobras representativas entre todas las posibles el llamado tirón simétrico estacionario y el viraje simétrico horizontal estacionario.

En el apartado 12.2 del presente capítulo se introduce el concepto de amortiguamiento en cabeceo, que constituye una de las claves para esta nueva

aproximación a la estabilidad y el control; en el apartado 12.3 se deducen las relaciones entre la velocidad angular de cabeceo y el factor de carga, para las dos maniobras representativas mencionadas; en el apartado 12.4 se determinan el índice de estabilidad estática longitudinal en maniobra con mandos fijos y el llamado punto de maniobra con mandos fijos; en el apartado 12.5 se calcula la deflexión del timón de profundidad necesaria para volar en maniobra y se establece un criterio de estabilidad derivado del criterio básico; en el apartado 12.6 se determinan el índice de estabilidad estática longitudinal en maniobra con mandos libres y el llamado punto de maniobra con mandos libres; en el apartado 12.7 se calculan la fuerza en el mando longitudinal necesaria para volar en maniobra y el llamado Esfuerzo por “g”, y se establece un criterio de estabilidad con mandos libres derivado del criterio básico; y por último, en el apartado 12.8, se presenta un método para cambiar la estabilidad en maniobra con mandos libres de un avión ya diseñado mediante la colocación en la palanca de mando de un peso.

12.2. Amortiguamiento en cabeceo

La velocidad angular de cabeceo de un avión, q , genera un incremento en el ángulo de ataque de su cola horizontal, $\Delta\alpha_t$, que puede calcularse en primera aproximación mediante (Figura 12.1):

$$\Delta\alpha_t = \frac{ql_t}{V_t} = \frac{l_t}{\eta_t^{1/2} V} q \quad (12.1)$$

donde η_t es la eficiencia aerodinámica de la cola (en muchos casos prácticos puede considerarse igual a la unidad).

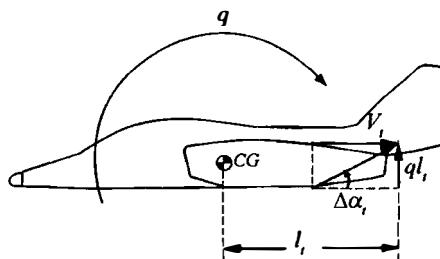


Figura 12.1. Ángulo de ataque inducido en la cola horizontal por la velocidad angular de cabeceo.

Este incremento del ángulo en la cola horizontal a su vez produce un incremento en la sustentación de la cola, ΔL_t , un incremento en el momento de cabeceo del avión completo, $(\Delta M_A)_t$, y un incremento en el coeficiente de momento de cabeceo del avión completo, $(\Delta C_{mA})_t$, dados por las expresiones:

$$\Delta L_t = \frac{1}{2} \rho V^2 \eta_t S_t a_t \Delta \alpha_t$$

$$(\Delta M_A)_t = -l_t \Delta L_t = -l_t \frac{1}{2} \rho V^2 \eta_t S_t a_t \Delta \alpha_t \quad (12.2)$$

$$(\Delta C_{mA})_t = -\hat{V}_t \eta_t^{1/2} a_t \frac{q l_t}{V} = (C_{mq})_t q$$

donde

$$(C_{mq})_t = -\hat{V}_t \eta_t^{1/2} a_t \frac{l_t}{V} \quad (12.3)$$

Por tanto la velocidad angular de cabeceo produce un cambio en el momento de cabeceo del avión completo, el cual es debido fundamentalmente a la contribución de la cola horizontal, calculada mediante el desarrollo anterior. Como la contribución del conjunto ala-fuselaje es pequeña comparada con la contribución de la cola, resulta frecuente estimar el llamado **amortiguamiento en cabeceo** del avión completo, C_{mq} , mediante una expresión del tipo:

$$C_{mq} \cong 1.10 (C_{mq})_t \quad (12.4)$$

Obsérvese que el amortiguamiento en cabeceo es una magnitud negativa ($C_{mq} < 0$).

Ahora puede reformularse el coeficiente de momento aerodinámico de cabeceo del avión completo mediante la expresión:

$$C_{mA} = C_{m0} + C_{m\alpha} \alpha_{wb} + C_{m\delta_e} \delta_e + C_{mq} q \quad (12.5)$$

Si se utiliza la velocidad angular de cabeceo adimensional, \hat{q} , definida de la forma:

$$\hat{q} = q \frac{c}{2V} \quad (12.6)$$

puede escribirse

$$C_{mA} = C_{m0} + C_{m\alpha} \alpha_{wb} + C_{m\delta_e} \delta_e + C_{m\hat{q}} \hat{q} \quad (12.7)$$

donde

$$C_{m\hat{q}} = \frac{2V}{c} C_{mq} = -\hat{V}_t \eta_t^{1/2} a_t \frac{2l_t}{c} \quad (12.8)$$

Análogamente podría determinarse una expresión para el coeficiente de sustentación del avión completo, incluyendo los efectos de la velocidad angular de cabeceo:

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha_{wb} + C_{L\delta_e}\delta_e + C_{L\hat{q}}\hat{q} \quad (12.9)$$

12.3. Relación entre la velocidad angular de cabeceo y el factor de carga

Dependiendo de la maniobra concreta a ejecutar será preciso proporcionar una velocidad angular de cabeceo, que será función del factor de carga y de la velocidad de vuelo. Es decir, se tendrá una función del tipo:

$$\hat{q} = \hat{q}(n, V) \quad (12.10)$$

A continuación de determina esta función para un tirón simétrico estacionario y para un viraje horizontal simétrico estacionario.

a) Tirón simétrico estacionario

En el punto inferior de un vuelo simétrico en un plano vertical y estacionario ($V = cte$, $\alpha = cte$ y $q = cte$), con ángulo de ataque del empuje pequeño y con las alas a nivel, se cumple:

$$L = W + \frac{W}{g} \frac{V^2}{R} \rightarrow n = 1 + \frac{V^2}{gR} \rightarrow \frac{V}{R} = \frac{g}{V}(n - 1) \quad (12.11)$$

y por tanto:

$$q = \dot{\gamma} = \frac{V}{R} = \frac{g}{V}(n - 1) \rightarrow \hat{q} = q \frac{c}{2V} = \frac{gc}{2V^2}(n - 1) \quad (12.12)$$

b) Viraje horizontal simétrico estacionario

Obsérvese que, aunque este viraje no sea una maniobra puramente longitudinal (al menos existe velocidad angular de guiñada), sí es posible determinar la velocidad angular de cabeceo y la fuerza en el mando longitudinal necesaria. Suponiendo además que el ángulo de ataque del empuje es pequeño, se cumple:

$$L \cos \mu = W \rightarrow n = 1 / \cos \mu$$

$$L \sin \mu = \frac{W}{g} \frac{V^2}{R} \rightarrow n \sin \mu = \frac{V^2}{gR} \quad (12.13)$$

y mediante estas ecuaciones:

$$\dot{\chi} = \frac{V}{R} = \frac{g}{V} \sqrt{n^2 - 1} \rightarrow q = \dot{\chi} \sin \mu = \frac{g}{V} \left(n - \frac{1}{n} \right) \rightarrow \hat{q} = \frac{gc}{2V^2} \left(n - \frac{1}{n} \right) \quad (12.14)$$

Las ecuaciones (12.12) y (12.14) se suelen resumir de la forma:

$$\hat{q} = \frac{gc}{2V^2} \varphi(n), \quad \varphi(n) = \begin{cases} n - 1 & \rightarrow \text{Tirón} \\ n - (1/n) & \rightarrow \text{Viraje} \end{cases} \quad (12.15)$$

12.4. Índice de estabilidad estática longitudinal en maniobra con mandos fijos y punto de maniobra con mandos fijos

De forma análoga a lo establecido en el apartado 10.4, puede definirse un criterio de estabilidad estática longitudinal con mandos fijos, frente a perturbaciones en ángulo de ataque y a $V = cte$ (o en maniobra) mediante:

$$\left(\frac{\partial C_m}{\partial \alpha_{wb}} \right)_{\delta_e, V} = \left(\frac{\partial C_{mA}}{\partial \alpha_{wb}} \right)_{\delta_e, V} = (C_{m\alpha})_V \quad (12.16)$$

Obsérvese que se siguen despreciando todos los efectos del grupo motopropulsor sobre el coeficiente de momentos de cabeceo. A $(C_{m\alpha})_V$ se le denomina **Índice de estabilidad estática longitudinal con mandos fijos en maniobra**. Derivando con respecto al ángulo de ataque la expresión (12.7) se obtiene:

$$(C_{m\alpha})_V = C_{m\alpha} + C_{m\hat{q}} \frac{\partial \hat{q}}{\partial \alpha_{wb}} = a_{wb}(\hat{x}_{cg} - N_0) + C_{m\hat{q}} \frac{\partial \hat{q}}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial \alpha_{wb}} \quad (12.17)$$

En la ecuación (12.9), que proporciona el coeficiente de sustentación, es posible despreciar los términos $C_{L\delta_e}\delta_e$ y $C_{L\hat{q}}\hat{q}$, y así despejar el ángulo de

ataque en función del factor de carga y de la velocidad de vuelo:

$$C_{wb} = \alpha_0 + \frac{C_L}{C_{L\alpha}} = \alpha_0 + \frac{2W}{\rho SV^2 C_{L\alpha}} n \quad (12.18)$$

donde $\alpha_0 = -C_{L0}/C_{L\alpha}$.

Finalmente introduciendo las ecuaciones (12.15) y (12.18) en la ecuación (12.17), se obtiene:

$$(C_{m\alpha})_V = a_{wb}(\hat{x}_{cg} - N_0) + C_{m\dot{\alpha}} C_{L\alpha} \frac{\rho S_{gc}}{4W} \varphi'(n) \quad (12.19)$$

donde

$$\varphi'(n) = \begin{cases} 1 & \rightarrow \text{Tirón} \\ 1 + (1/n^2) & \rightarrow \text{Viraje} \end{cases} \quad (12.20)$$

El signo de $(C_{m\alpha})_V$ dará idea de la estabilidad del avión:

$$\begin{aligned} (C_{m\alpha})_V < 0 &\rightarrow \text{Avión ESTABLE} \\ (C_{m\alpha})_V = 0 &\rightarrow \text{Avión INDIFERENTE} \\ (C_{m\alpha})_V > 0 &\rightarrow \text{Avión INESTABLE} \end{aligned} \quad (12.21)$$

Téngase en cuenta que $(C_{m\alpha})_V$ es una función lineal de la posición del centro de masas y aumenta al retrasarse éste. Se denomina **Punto de Maniobra con Mandos Fijos**, N_m , a la posición del centro de masas que anula $(C_{m\alpha})_V$:

$$N_m = (\hat{x}_{cg})_{(C_{m\alpha})_V=0} \quad (12.22)$$

Según esto:

$$N_m - N_0 = -\frac{C_{L\alpha}}{a_{wb}} C_{m\dot{\alpha}} \frac{\rho S_{gc}}{4W} \varphi'(n) \quad (12.23)$$

Entonces la ecuación (12.19) puede escribirse como:

$$(C_{m\alpha})_V = a_{wb}(\hat{x}_{cg} - N_m) \quad (12.24)$$

El punto de maniobra con mandos fijos representa un límite en la posición más retrasada del centro de masas si se desea impedir que el avión sea inestable en maniobra con mandos fijos.

Se denomina **Margen de Maniobra con Mandos Fijos**, H_m , a:

$$H_m = N_m - \hat{x}_{cg} \quad (12.25)$$

Obsérvese que, como $(C_{m\alpha})_V = -a_{wb}H_m$, un avión estable tiene un margen de maniobra con mandos fijos positivo y uno inestable, negativo.

Para un avión típico, introduciendo los signos de los distintos coeficientes en la ecuación (12.23) se obtiene $N_m - N_0 > 0$, es decir, un avión es más estable con mandos fijos en maniobra que en vuelo rectilíneo (ver Figura 12.2).

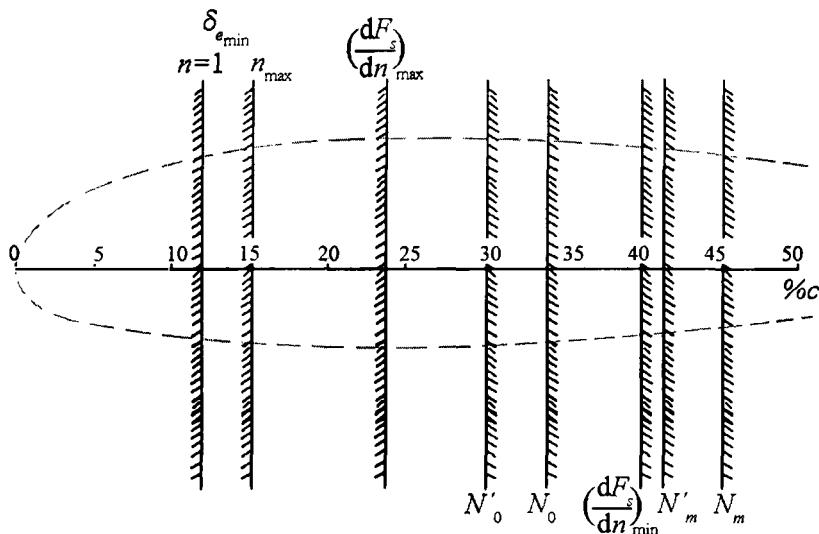


Figura 12.2. Situación relativa de las distintas fronteras a la posición del centro de masas.

12.5. Deflexión del timón de profundidad en maniobra

Suponiendo que el avión es un planeador, o que el empuje de los motores no introduce momentos de cabeceo, y que son despreciables los términos iniciales de la ecuación de momentos de cabeceo, para volar en equilibrio con cierta velocidad angular adimensional de cabeceo, \hat{q} , es necesaria una deflexión del timón de profundidad dada por:

$$C_m = C_{mA} = 0 \quad \rightarrow \quad \delta_e = -\frac{C_{m0}}{C_{m\delta_e}} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta_e}} \alpha_{wb} - \frac{C_{m\hat{q}}}{C_{m\delta_e}} \hat{q} \quad (12.26)$$

Utilizando la expresión (12.15), que proporciona la velocidad angular adimensional de cabeceo, la ecuación anterior puede escribirse como:

$$\delta_e = \delta_{e0} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta_e}} \alpha_{wb} - \frac{gc}{2V^2} \frac{C_{m\dot{\varphi}}}{C_{m\delta_e}} \varphi(n) \quad (12.27)$$

donde $\delta_{e0} = -C_{m0}/C_{m\delta_e}$.

Introduciendo ahora en esta ecuación la expresión (12.18), que proporciona el ángulo de ataque en función del factor de carga y de la velocidad, se obtiene:

$$\delta_e = \delta'_{e0} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{L\alpha} C_{m\delta_e}} \frac{2W}{\rho SV^2} n - \frac{gc}{2V^2} \frac{C_{m\dot{\varphi}}}{C_{m\delta_e}} \varphi(n) \quad (12.28)$$

$$\text{con } \delta'_{e0} = \delta_{e0} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta_e}} \alpha_0 = -\frac{1}{C_{m\delta_e}} (C_{m0} + C_{m\alpha} \alpha_0).$$

Derivando ahora la expresión anterior con respecto al factor de carga:

$$\frac{d\delta_e}{dn} = -\frac{C_{m\alpha}}{C_{L\alpha} C_{m\delta_e}} \frac{2W}{\rho SV^2} - \frac{gc}{2V^2} \frac{C_{m\dot{\varphi}}}{C_{m\delta_e}} \varphi'(n) \quad (12.29)$$

con $\varphi'(n)$ igual a 1 para tirón y a $(1 + 1/n^2)$ para viraje. Y mediante las expresiones (12.19) y (12.24) es posible escribir:

$$\frac{d\delta_e}{dn} = -\frac{1}{C_{L\alpha} C_{m\delta_e}} \frac{2W}{\rho SV^2} (C_{m\alpha})_V = -\frac{a_{wb}}{C_{L\alpha} C_{m\delta_e}} \frac{2W}{\rho SV^2} (\hat{x}_{cg} - N_m) \quad (12.30)$$

Obsérvese que el signo de $(C_{m\alpha})_V$ coincide con el de $(d\delta_e/dn)_{n=n_s}$ (gradiente de deflexión de palanca con respecto al factor de carga); es decir:

$$\operatorname{sgn}(C_{m\alpha})_V = \operatorname{sgn} \frac{d\delta_e}{dn} \quad (12.31)$$

y por tanto $(d\delta_e/dn)_{n=n_s}$ puede considerarse como un índice derivado de estabilidad estática longitudinal en maniobra con mandos fijos.

La Figura 12.3 representa $\delta_e = f(n)$ para un avión estable y otro avión inestable en maniobra con mandos fijos, en el entorno de la condición de vuelo estacionario de referencia, representada por el subíndice "s".

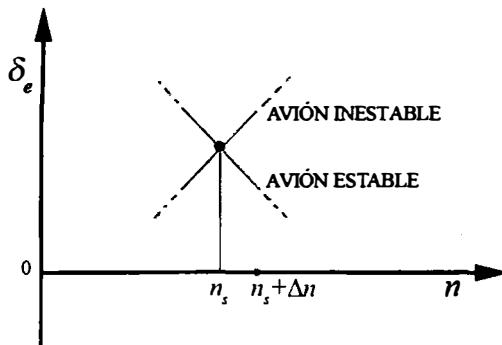


Figura 12.3. Deflexión del timón de profundidad en función del factor de carga, en el entorno de la condición de vuelo estacionario de referencia.

12.6. Índice de estabilidad estática longitudinal en maniobra con mandos libres y punto de maniobra con mandos libres

De forma análoga a lo establecido en el apartado 11.5, puede definirse un criterio de estabilidad estática longitudinal con mandos libres, frente a perturbaciones en ángulo de ataque y a $V = cte$ (o en maniobra) mediante:

$$\left(\frac{\partial C_m}{\partial \alpha_{wb}} \right)_{F_s=0,V} = \left(\frac{\partial C_{mA}}{\partial \alpha_{wb}} \right)_{F_s=0,V} = [(C_{m\alpha})_V]_f \quad (12.32)$$

A $[(C_{m\alpha})_V]_f$ se le denomina **Índice de estabilidad estática longitudinal con mandos libres en maniobra**. Derivando con respecto al ángulo de ataque la expresión (12.7) se obtiene:

$$[(C_{m\alpha})_V]_f = C_{m\alpha} + C_{m\delta_e} \frac{\partial \delta_{ef}}{\partial \alpha_{wb}} + C_{m\hat{q}} \frac{\partial \hat{q}}{\partial \alpha_{wb}} \quad (12.33)$$

donde δ_{ef} es la deflexión del timón de profundidad en condiciones de flotación obtenida a partir de la expresión (11.2):

$$C_{he} = 0 \rightarrow \delta_{ef} = -\frac{1}{C'_{he\delta_e}} (C'_{he0} + C'_{he\alpha} \alpha_t + C'_{he\delta_t} \delta_t) \quad (12.34)$$

El ángulo de ataque de la cola horizontal tendrá en maniobra una contribución adicional debida a la velocidad angular de cabeceo, dada por la expresión (12.1); por tanto:

$$\alpha_t = \alpha_{wb} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \right) - i_{wb} + i_t - \varepsilon_0 + \frac{g l_t}{\eta_t^{1/2} V^2} \varphi(n) \quad (12.35)$$

Introduciendo este ángulo de ataque de la cola horizontal en la ecuación (12.34) y derivándola respecto al ángulo de ataque del conjunto ala-fuselaje, se obtiene:

$$\frac{\partial \delta_{ef}}{\partial \alpha_{wb}} = -\frac{C'_{he\alpha}}{C'_{he\delta_e}} \frac{\partial \alpha_t}{\partial \alpha_{wb}} = -\frac{C'_{he\alpha}}{C'_{he\delta_e}} \left(\left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) + \frac{gl_t}{\eta_t^{1/2} V^2} \varphi'(n) \frac{\partial n}{\partial \alpha_{wb}} \right) \quad (12.36)$$

El ángulo de ataque del conjunto ala-fuselaje en función del factor de carga vendrá de nuevo dado por la expresión (12.18). Introduciendo todos estos desarrollos en la ecuación (12.33), se obtiene finalmente:

$$[(C_{m\alpha})_V]_f = (C_{m\alpha})_f - \frac{\rho S g l_t}{2W} \frac{C_{L\alpha} C_{m\delta_e}}{C_{he\delta_e}} \left(\frac{C'_{he\alpha}}{\eta_t^{1/2}} - C_{m\hat{q}} \frac{C_{he\delta_e}}{C_{m\delta_e}} \frac{c}{2l_t} \right) \varphi'(n) \quad (12.37)$$

El signo de $[(C_{m\alpha})_V]_f$ dará idea de la estabilidad del avión (con mandos libres) frente a perturbaciones en α a $V = \text{cte}$:

$$\begin{aligned} [(C_{m\alpha})_V]_f &< 0 &\rightarrow \text{Avión ESTABLE} \\ [(C_{m\alpha})_V]_f &= 0 &\rightarrow \text{Avión INDIFERENTE} \\ [(C_{m\alpha})_V]_f &> 0 &\rightarrow \text{Avión INESTABLE} \end{aligned} \quad (12.38)$$

Téngase en cuenta que $[(C_{m\alpha})_V]_f$ es una función lineal de la posición del centro de masas (a través de $(C_{m\alpha})_f$) y aumenta al retrasarse éste. Se denomina **Punto de Maniobra con Mandos Libres**, N'_m , a la posición del centro de masas que anula $[(C_{m\alpha})_V]_f$:

$$N'_m = (\hat{x}_{cg})_{[(C_{m\alpha})_V]_f=0} \quad (12.39)$$

Según esto:

$$N'_m - N'_0 = \frac{\rho S g l_t}{2W} \frac{C_{L\alpha} C_{m\delta_e}}{a_{wb} C_{he\delta_e}} \left(\frac{C'_{he\alpha}}{\eta_t^{1/2}} - C_{m\hat{q}} \frac{C_{he\delta_e}}{C_{m\delta_e}} \frac{c}{2l_t} \right) \varphi'(n) \quad (12.40)$$

La ecuación (12.37) se puede escribir entonces de la forma:

$$[(C_{m\alpha})_V]_f = a_{wb} (\hat{x}_{cg} - N'_m) \quad (12.41)$$

El punto de maniobra con mandos libres representa un límite en la posición más retrasada del centro de masas si se desea impedir que el avión sea inestable en maniobra con mandos libres.

Se denomina **Margen de Maniobra con Mandos Libres**, H'_m , a:

$$H'_m = N'_m - \hat{x}_{cg} \quad (12.42)$$

Obsérvese que, como $[(C_{m\alpha})_V]_f = -a_{wb}H'_m$, un avión estable tiene un margen de maniobra con mandos libres positivo y uno inestable, negativo.

Para determinar el signo $N'_m - N'_0$, es preciso introducir en la ecuación (12.40) valores cuantitativos de los distintos coeficientes (con sus correspondientes signos). Haciéndolo para un avión típico queda $N'_m - N'_0 > 0$, es decir, el avión es más estable con mandos libres en maniobra que en vuelo rectilíneo (ver Figura 12.2).

12.7. Fuerza en palanca en maniobra

Suponiendo el mismo sistema de mando longitudinal convencional reversible esquematizado en la Figura 11.2, la fuerza en palanca sigue siendo proporcional al momento de charnela del timón de profundidad, aunque ahora cambie la expresión que proporciona el coeficiente de momento de charnela; es decir:

$$F_s = -G_e H_e = -G_e \frac{1}{2} \rho V^2 \eta_t S_e c_e (C'_{he0} + C'_{he\alpha} \alpha_t + C'_{he\delta_e} \delta_e + C'_{he\delta_t} \delta_t) \quad (12.43)$$

El ángulo de ataque de la cola horizontal, el ángulo de ataque del conjunto ala-fuselaje y la deflexión del timón de profundidad en maniobra, ya han sido obtenidos en apartados anteriores (ver expresiones (12.35), (12.18) y (12.28)):

$$\begin{aligned} \alpha_t &= \alpha_{wb} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) - i_{wb} + i_t - \varepsilon_0 + \frac{g l_t}{\eta_t^{1/2} V^2} \varphi(n) \\ \alpha_{wb} &= \alpha_0 + \frac{C_L}{C_{L\alpha}} = \alpha_0 + \frac{2W}{\rho S V^2 C_{L\alpha}} n \\ \delta_e &= \delta'_{e0} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{L\alpha} C_{m\delta_e}} \frac{2W}{\rho S V^2} n - \frac{g c}{2V^2} \frac{C_{m\dot{q}}}{C_{m\delta_e}} \varphi(n) \end{aligned}$$

Introduciendo en la ecuación (12.43), para la fuerza en palanca, las tres expresiones anteriores y operando se obtiene:

$$F_s = K \frac{1}{2} \rho V^2 (A'' + C_{he\delta_t} \delta_t) - K \frac{nW}{S} \frac{C_{he\delta_e}}{C_{L\alpha} C_{m\delta_e}} (C_{m\alpha})_f +$$

$$+ K \frac{\rho g l_t}{2} \left(\frac{C'_{he\alpha}}{\eta_t^{1/2}} - C_{he\delta_e} \frac{C_{m\hat{q}}}{C_{m\delta_e}} \frac{c}{2l_t} \right) \varphi(n) \quad (12.44)$$

donde

$$\begin{aligned} K &= -G_e \eta_t S_e c_e \\ A'' &= C'_{he0} + C'_{he\alpha} \left(\alpha_0 \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \right) - i_{wb} + i_t - \varepsilon_0 \right) + C'_{he\delta_e} \delta'_{e0} \end{aligned} \quad (12.45)$$

Derivando ahora respecto del factor de carga la ecuación (12.44) se obtiene el denominado **Esfuerzo por “g”**, dF_s/dn :

$$\frac{dF_s}{dn} = -K \frac{W}{S} \frac{C_{he\delta_e}}{C_{L\alpha} C_{m\delta_e}} (C_{m\alpha})_f + K \frac{\rho g l_t}{2} \left(\frac{C'_{he\alpha}}{\eta_t^{1/2}} - C_{he\delta_e} \frac{C_{m\hat{q}}}{C_{m\delta_e}} \frac{c}{2l_t} \right) \varphi'(n) \quad (12.46)$$

con $\varphi'(n)$ igual a 1 para tirón y a $(1 + 1/n^2)$ para viraje.

Mediante las expresiones (12.37) y (12.41) es posible escribir:

$$\frac{dF_s}{dn} = -K \frac{W}{S} \frac{C_{he\delta_e}}{C_{L\alpha} C_{m\delta_e}} [(C_{m\alpha})_V]_f = G_e \eta_t S_e c_e \frac{W}{S} \frac{C_{he\delta_e} a_{wb}}{C_{m\delta_e} C_{L\alpha}} (\hat{x}_{cg} - N'_m) \quad (12.47)$$

Por tanto el signo de $[(C_{m\alpha})_V]_f$ es el contrario del de $(dF_s/dn)_{n=n_T}$ (esfuerzo por “g” a partir de una condición de vuelo compensado):

$$\operatorname{sgn} [(C_{m\alpha})_V]_f = -\operatorname{sgn} \left(\frac{dF_s}{dn} \right)_{n=n_T} \quad (12.48)$$

y $(dF_s/dn)_{n=n_T}$ puede considerarse como un índice derivado de estabilidad estática longitudinal en maniobra con mandos libres.

La Figura 12.4 representa $F_s = f(n)$ para un avión estable y otro avión inestable en maniobra con mandos libres, en el entorno del punto de compensación representado por el subíndice “T”.

Las Normas de Cualidades de Vuelo imponen valores máximos y mínimos a los esfuerzos por “g”, $(dF_s/dn)_{\max}$ y $(dF_s/dn)_{\min}$: un esfuerzo por encima de cierto valor cansaría excesivamente al piloto y un esfuerzo por debajo de otro valor sería peligroso ya que el avión alcanzaría grandes factores de carga con muy poca fuerza en palanca. Como el esfuerzo por “g” es una función lineal de la posición del centro de masas (ver expresión (12.47) y Figura

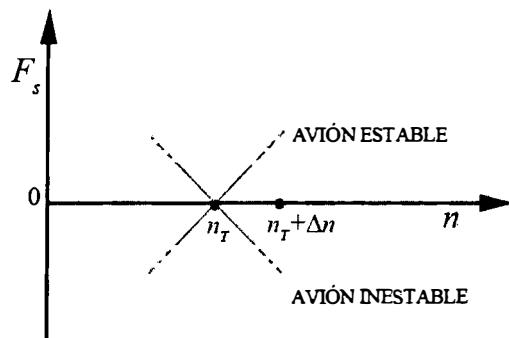


Figura 12.4. Fuerza en palanca en función del factor de carga en el entorno del punto de compensación.

12.5), $(dF_s/dn)_{\max}$ impone una nueva frontera por delante al centro de masas y $(dF_s/dn)_{\min}$ impone una nueva frontera por detrás (ver Figura 12.2):

$$\begin{aligned}
 (\hat{x}_{cg})_{(dF_s/dn)_{\max}} &= N'_m + \frac{C_{m\delta_e} C_{L\alpha}}{C_{he\delta_e} a_{wb}} \frac{1}{G_e \eta_t S_e c_e W/S} \left(\frac{dF_s}{dn} \right)_{\max} \\
 (\hat{x}_{cg})_{(dF_s/dn)_{\min}} &= N'_m + \frac{C_{m\delta_e} C_{L\alpha}}{C_{he\delta_e} a_{wb}} \frac{1}{G_e \eta_t S_e c_e W/S} \left(\frac{dF_s}{dn} \right)_{\min}
 \end{aligned} \quad (12.49)$$

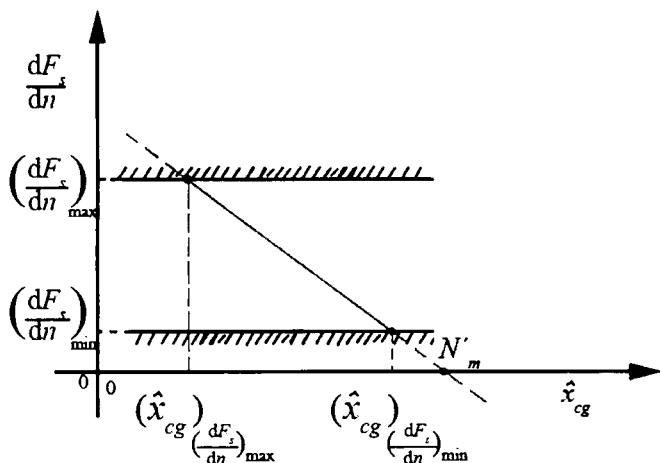


Figura 12.5. Esfuerzo por "g" en función de la posición del centro de masas.

12.8. Efecto de los pesos sobre la estabilidad en maniobra con mandos libres

De forma análoga al desarrollo efectuado en el apartado 11.7 se demuestra ahora que añadiendo un peso que tienda a desplazar la palanca hacia delante o hacia detrás del piloto, es posible modificar la estabilidad en maniobra con mandos libres de un avión completamente diseñado y, por tanto, con todas sus características geométricas, aerodinámicas y másicas ya fijadas. La adición de muelles, con peso despreciable, no introduce ningún cambio en la estabilidad en maniobra con mandos libres. Además, ni los pesos ni los muelles alteran la estabilidad en maniobra con mandos fijos.

Considérense el sistema convencional reversible con un peso por delante de la palanca (ver Figura 11.9). La fuerza en palanca en maniobra será:

$$F_s = -G_e H_e + P \quad (12.50)$$

donde P es el término adicional debido al peso, dado por:

$$P = n W_p \frac{l_p}{l_s} \quad (12.51)$$

Obsérvese que se trata de la misma expresión de partida obtenida en el apartado 11.7, pero el peso del peso, W_p , está multiplicado por el factor de carga n .

El ángulo de flotación para el equilibrio ahora será:

$$\begin{aligned} F_s = 0 &= -G_e q \eta_t S_e c_e (C'_{he0} + C'_{he\alpha} \alpha_t + C'_{he\delta_e} \delta_{ef} + C'_{he\delta_t} \delta_t) + P \\ \delta_{ef} &= -\frac{1}{C'_{he\delta_e}} (C'_{he0} + C'_{he\alpha} \alpha_t + C'_{he\delta_t} \delta_t) + \frac{2 W_p l_p / l_s}{C_{he\delta_e} G_e \eta_t S_e c_e \rho V^2} n \end{aligned} \quad (12.52)$$

Para calcular el nuevo índice de estabilidad estática longitudinal en maniobra con mandos libres es preciso hacer un desarrollo análogo al del apartado 12.6. Derivando con respecto al ángulo de ataque la expresión (12.7) que proporciona el coeficiente de momentos de cabeceo, queda:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial C_m}{\partial \alpha_{wb}} \right)_{F_s=0,V} &= \left(\frac{\partial C_{mA}}{\partial \alpha_{wb}} \right)_{F_s=0,V} = \\ &= [(C_{m\alpha})_V]_{f,P} = C_{m\alpha} + C_{m\delta_e} \frac{\partial \delta_{ef}}{\partial \alpha_{wb}} + C_{m\hat{q}} \frac{\partial \hat{q}}{\partial \alpha_{wb}} \end{aligned} \quad (12.53)$$

donde $[(C_{m\alpha})_V]_{f,P}$ es el nuevo índice de estabilidad estática longitudinal en maniobra con mandos libres y con el peso incorporado. Para calcular $\partial\delta_{ef}/\partial\alpha_{wb}$ se utiliza la expresión (12.52), teniendo en cuenta que se está estudiando la estabilidad a $V = cte$. Operando se obtiene finalmente:

$$[(C_{m\alpha})_V]_{f,P} = [(C_{m\alpha})_V]_f + \frac{C_{m\delta_e} C_{L\alpha}}{C_{he\delta_e}} \frac{S}{G_e \eta_t S_e c_e W} W_p \frac{l_p}{l_s} \quad (12.54)$$

y el nuevo Punto de Maniobra con Mandos Libres y con peso, $N'_{m,P}$, y el nuevo Índice de estabilidad estática longitudinal con mandos libres en maniobra y con peso, $[(C_{m\alpha})_V]_{f,P}$, vendrán dados por:

$$N'_{m,P} - N'_m = - \frac{C_{m\delta_e} C_{L\alpha}}{C_{he\delta_e} a_{wb}} \frac{S}{G_e \eta_t S_e c_e W} W_p \frac{l_p}{l_s} \quad (12.55)$$

$$[(C_{m\alpha})_V]_{f,P} = a_{wb} (\hat{x}_{cg} - N'_{m,P})$$

El resultado obtenido para la diferencia entre los dos puntos de maniobra con mandos libres, con peso y sin peso, es idéntico al obtenido en el apartado 11.7 para la diferencia entre los dos puntos neutros con mandos libres, con peso y sin peso (comparar las expresiones (12.55) y (11.39)).

Obsérvese también que un peso que tienda a desplazar la palanca hacia delante del piloto ($P > 0$), estabiliza el avión o, lo que es lo mismo, retrasa el punto de maniobra con mandos libres ($N'_{m,P} - N'_m > 0$, ya que $C_{m\delta_e}, C_{he\delta_e}, G_e$ son negativos). Si el peso tendiera a desplazar la palanca hacia el piloto ($P < 0$), el avión sería más inestable en maniobra con mandos libres comparado con el avión sin peso.

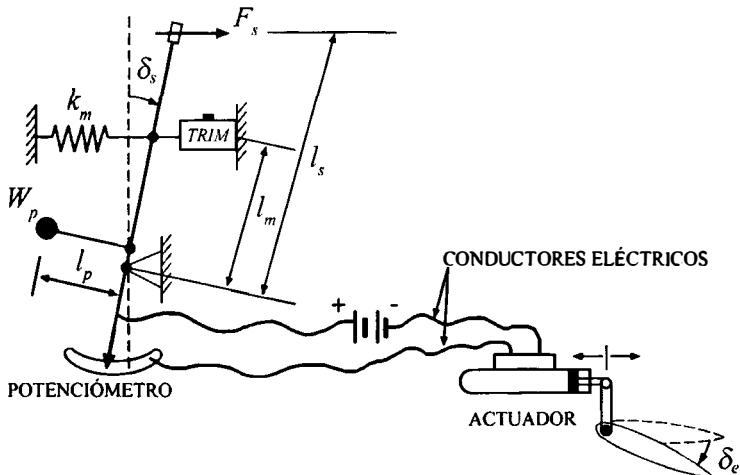
Efectuando un análisis similar al realizado en el apartado anterior se demuestra fácilmente que también puede utilizarse el esfuerzo por “g” como criterio de estabilidad derivado; es decir:

$$\operatorname{sgn} [(C_{m\alpha})_V]_{f,P} = - \operatorname{sgn} \left(\frac{dF_s}{dn} \right)_{n=n_T, P} \quad (12.56)$$

12.9. Problemas 12.1 y 12.2

PROBLEMA 12.1

Un avión está provisto de un sistema de mando longitudinal como el indicado en la figura. El piloto acciona la palanca, que a su vez actúa sobre un potenciómetro que envía una señal eléctrica a un actuador electrohidráulico, y este mueve el timón de profundidad. Para que el piloto tenga sensación de fuerzas en el mando se colocan un muelle de constante conocida, k_m (el muelle no produce fuerza cuando la palanca no está deflectada), y un peso de magnitud W_p , también conocida (l_m y l_s son constantes conocidas). El piloto únicamente siente la fuerza debida a estos dispositivos y a un dispositivo adicional de compensación que proporciona una fuerza regulable por el piloto, F_{TRIM} . El sistema de control de vuelo genera una deflexión de timón de profundidad proporcional a la deflexión de palanca (es decir, $\delta_e = -A\delta_s$, con $A > 0$, constante conocida).



Se supone además que: son conocidas todas las características geométricas, aerodinámicas (en particular, son despreciables la contribuciones de la deflexión del timón de profundidad y de la velocidad angular de cabeceo a la sustentación total) y másicas del avión; la línea de acción del empuje pasa por el centro de masas y es despreciable la componente del empuje según la dirección perpendicular a la trayectoria; todos los ángulos que intervienen en el problema son pequeños; y la densidad atmosférica, ρ , es una constante conocida.

Se pide:

1º) Determinar la fuerza en palanca para vuelo simétrico, horizontal, rectilíneo, estacionario y con las alas a nivel, en función de la velocidad, V , si se ha compensado el avión a velocidad V_T .

2º) Determinar la posición del punto neutro con mandos libres, N'_0 , con respecto al punto neutro con mandos fijos, N_0 .

3º) Determinar la fuerza en palanca en una maniobra de tirón simétrico estacionario con factor de carga n , en función de n y V .

4º) Determinar las posiciones del punto de maniobra con mandos fijos, N_m , y del punto de maniobra con mandos libres, N'_m , con respecto a N_0 .

Solución:

1º) Planteando el equilibrio del sistema de mando queda:

$$F_s = W_p \frac{l_p}{l_s} + \frac{k_m l_m^2}{l_s} \delta_s + F'_{TRIM}$$

donde $F'_{TRIM} = F_{TRIM}(l_m/l_s)$. Introduciendo la condición del sistema de mando ($\delta_e = -A\delta_s$):

$$F_s = W_p \frac{l_p}{l_s} - \frac{k_m l_m^2}{Al_s} \delta_e + F'_{TRIM}$$

Imponiendo ahora la condición de equilibrio de momentos y de fuerzas perpendiculares a la trayectoria, se obtiene:

$$C_m = 0 \rightarrow \delta_e = -\frac{C_{m0}}{C_{m\delta_e}} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta_e}} \alpha_{wb} = \delta_{e0} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta_e}} \alpha_{wb}$$

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha} \alpha_{wb} = \frac{2W}{\rho SV^2} \rightarrow \alpha_{wb} = -\frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}} + \frac{2W}{\rho SV^2 C_{L\alpha}} = \alpha_0 + \frac{2W}{\rho SV^2 C_{L\alpha}}$$

$$\delta_e = \left(\delta_{e0} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta_e}} \alpha_0 \right) - \frac{C_{m\alpha}}{C_{L\alpha} C_{m\delta_e}} \frac{2W}{\rho SV^2}$$

La fuerza en palanca en función de la velocidad y de la velocidad de compensación será:

$$F_s = W_p \frac{l_p}{l_s} - \frac{k_m l_m^2}{Al_s} \left(\delta_{e0} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta_e}} \alpha_0 \right) + \frac{k_m l_m^2}{Al_s} \frac{C_{m\alpha}}{C_{L\alpha} C_{m\delta_e}} \frac{2W}{\rho SV^2} + F'_{TRIM}$$

$$F_s = 0 \rightarrow F'_{TRIM} = -W_p \frac{l_p}{l_s} + \frac{k_m l_m^2}{Al_s} \left(\delta_{e0} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta_e}} \alpha_0 \right) - \frac{k_m l_m^2}{Al_s} \frac{C_{m\alpha}}{C_{L\alpha} C_{m\delta_e}} \frac{2W}{\rho S V_T^2}$$

$$F_s = \frac{k_m l_m^2}{Al_s} \frac{C_{m\alpha}}{C_{L\alpha} C_{m\delta_e}} \frac{2W}{\rho S} \left(\frac{1}{V^2} - \frac{1}{V_T^2} \right)$$

2º) El punto neutro con mandos libres, N'_0 , puede obtenerse, en este problema, igualando a cero cualquiera de los dos índices siguientes: $(\partial C_m / \partial \alpha_{wb})_{F_s=0, n=1}$ y $(dF_s / dV)_{V=V_T}$. Utilizando el segundo criterio:

$$\left(\frac{dF_s}{dV} \right)_{V=V_T} = -\frac{k_m l_m^2}{Al_s} \frac{C_{m\alpha}}{C_{L\alpha} C_{m\delta_e}} \frac{4W}{\rho S} \frac{1}{V_T^3}$$

En general $C_{m\alpha} = a_{wb}(\hat{x}_{cg} - N_0)$ y, por tanto, se cumple en este problema:

$$N'_0 = N_0$$

Como el ángulo de flotación del timón de profundidad, en este problema, es una constante independiente del ángulo de ataque, los puntos neutros con mandos fijos y con mandos libres coinciden.

3º) Siguiendo un esquema similar al del apartado 12.7, queda:

$$F_s = n W_p \frac{l_p}{l_s} - \frac{k_m l_m^2}{Al_s} \delta_e + F'_{TRIM}$$

$$\delta_e = \left(\delta_{e0} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta_e}} \alpha_0 \right) - \frac{C_{m\alpha}}{C_{L\alpha} C_{m\delta_e}} \frac{2W}{\rho S V^2} n - \frac{gc}{2V^2} \frac{C_{m\hat{q}}}{C_{m\delta_e}} (n-1)$$

$$F_s = \left[W_p \frac{l_p}{l_s} + \frac{k_m l_m^2}{Al_s C_{m\delta_e}} \left(\frac{C_{m\alpha}}{C_{L\alpha}} \frac{2W}{\rho S} + \frac{gc}{2} C_{m\hat{q}} \right) \frac{1}{V^2} \right] n -$$

$$- \frac{k_m l_m^2}{Al_s} \left(\delta_{e0} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta_e}} \alpha_0 + \frac{gc}{2V^2} \frac{C_{m\hat{q}}}{C_{m\delta_e}} \right) + F'_{TRIM}$$

4º) El punto de maniobra con mandos fijos es idéntico al obtenido en el apartado 12.4:

$$N_m - N_0 = -\frac{C_{L\alpha}}{a_{wb}} C_{m\hat{q}} \frac{\rho S gc}{4W}$$

El punto de maniobra con mandos libres puede obtenerse, en este problema, igualando a cero cualquiera de los dos índices siguientes:

$(\partial C_m / \partial \alpha_{wb})_{F_s=0,V}$ y $(dF_s / dn)_{n=n_T}$. Utilizando el segundo:

$$\frac{dF_s}{dn} = W_p \frac{l_p}{l_s} + \frac{k_m l_m^2}{A l_s C_{m\delta_e}} \left(\frac{C_{m\alpha}}{C_{L\alpha}} \frac{2W}{\rho S} + \frac{gc}{2} C_{m\hat{q}} \right) \frac{1}{V^2} = 0$$

$$C_{m\alpha} = -C_{L\alpha} C_{m\delta_e} \frac{AW_p l_p}{k_m l_m^2} \frac{\rho S}{2W} V^2 - C_{L\alpha} C_{m\hat{q}} \frac{\rho S g c}{4W}$$

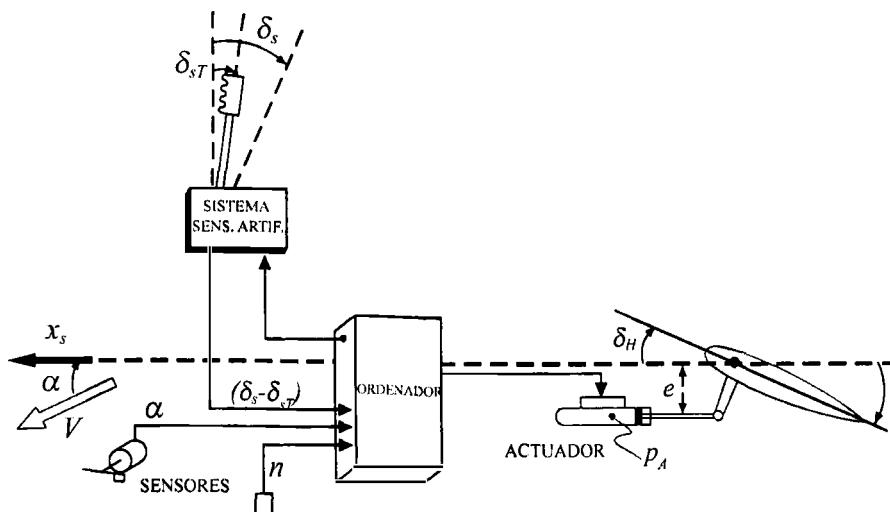
Finalmente:

$$N'_m - N_0 = -\frac{C_{L\alpha}}{a_{wb}} C_{m\delta_e} \frac{AW_p l_p}{k_m l_m^2} \frac{\rho S}{2W} V^2 - \frac{C_{L\alpha}}{a_{wb}} C_{m\hat{q}} \frac{\rho S g c}{4W}$$

$$N'_m - N_m = -\frac{C_{L\alpha}}{a_{wb}} C_{m\delta_e} \frac{AW_p l_p}{k_m l_m^2} \frac{\rho S}{2W} V^2$$

PROBLEMA 12.2

Un avión de configuración ala fija más cola horizontal toda móvil, como el indicado en la figura, está provisto de un sistema de mando longitudinal irreversible (tipo "Fly-By-Wire" de "demanda de α "), en el que las superficies de control son movidas por actuadores hidráulicos mandados por señales eléctricas a través de un ordenador (ver figura adjunta). El piloto dispone de una palanca conectada a un sistema de sensación artificial que proporciona una fuerza en palanca dada por $F_S = k_1(\delta_S - \delta_{ST}) + k_2(n - n_T)$, en donde k_1 y k_2 son constantes positivas conocidas, δ_S es la posición de palanca, δ_{ST} es la posición de palanca correspondiente a la condición de compensación, n es el factor de carga y n_T es el factor de carga en la condición de compensación.



El funcionamiento simplificado del sistema es el siguiente: para compensar el avión en una condición de vuelo el piloto aprieta el botón de compensación y entonces el ordenador entiende que n_T y δ_{ST} son las referencias, haciendo $F_S = 0$ en esas condiciones. Si el piloto mueve la palanca hasta δ_S el ordenador actúa, sobre la cola horizontal para obtener un incremento del ángulo de ataque, respecto al ángulo de ataque en las condiciones de compensación α_T , dado por $\alpha - \alpha_T = k_3 (\delta_S - \delta_{ST})$, en donde k_3 es otra constante positiva conocida, y sobre el sistema de sensación artificial para proporcionar F_S .

Se supone además que: se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas, básicas y del entorno necesarias para la resolución del problema (W , J_{xz} , $C_{L\alpha}$, $C_{L\delta_H}$, $C_{L\hat{q}} \cong 0$, C_{m0} , $C_{m\alpha}$, $C_{m\delta_H}$, $C_{m\hat{q}}$, $C'_{hH\alpha}$, ε_0 , $(\partial\varepsilon/\partial\alpha)$, $\eta_H = 1$, i_{wb} , S , S_H , S_A , c , c_H , l_t , e , g , ρ); las características anteriores están referidas a los ejes estabilidad del viraje, que no son principales de inercia; la fuerza lateral siempre es despreciable; y el motor no produce momentos alrededor del centro de masas, estando su empuje dirigido siempre según el vector velocidad.

Si el piloto compensa el avión en vuelo simétrico horizontal rectilíneo estacionario con las alas a nivel y, a partir de esa condición de vuelo compensado, el avión realiza una maniobra de viraje simétrico horizontal estacionario, a velocidad V conocida y con factor de carga n asimismo conocido, se pide:

- 1º) Determinar C_{L0} en función de los datos conocidos.
- 2º) Determinar la deflexión de la cola horizontal, δ_{HT} , y el ángulo de ataque del avión, α_T , en la condición de vuelo compensado, en función de V_T .
- 3º) Determinar la fuerza en palanca, F_S , para realizar la maniobra descrita, en función de n y V .
- 4º) Determinar el Esfuerzo por “ g ” en la maniobra descrita, $(dF_S/dn)_{n=1}$.
- 5º) Determinar la presión hidráulica del actuador, p_A , necesaria para efectuar la maniobra descrita, en función de n y V .

Solución:

- 1º) En el viraje propuesto en el enunciado los coeficientes de sustentación y momento de cabeceo vienen dados por:

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha + C_{L\delta_H}\delta_H + C_{L\hat{q}}\hat{q}$$

$$C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta_H}\delta_H + C_{m\hat{q}}\hat{q}$$

En ejes estabilidad ($\alpha = 0$) y con $C_{L\hat{q}} \cong 0$, estas ecuaciones se simplifican:

$$C_L = C_{L0} + C_{L\delta_H}\delta_H$$

$$C_m = C_{m0} + C_{m\delta_H}\delta_H + C_{m\hat{q}}\hat{q}$$

Introduciendo ahora los términos iniciales del viraje en la ecuación de fuerzas según el eje z_w y en la ecuación de momentos de cabeceo, queda:

$$C_{L0} + C_{L\delta_H}\delta_H = n \frac{2W}{\rho SV^2}$$

$$\frac{1}{2}\rho V^2 Sc(C_{m0} + C_{m\delta_H}\delta_H + C_{m\hat{q}}\hat{q}) = -(I_z - I_x)pr + J_{xz}(p^2 - r^2)$$

Las tres componentes de la velocidad angular en ejes estabilidad son:

$$p = 0$$

$$q = \dot{\chi} \sin \mu = \frac{g}{V}(n - \frac{1}{n}) \rightarrow \hat{q} = \frac{gc}{2V^2}(n - \frac{1}{n})$$

$$r = \dot{\chi} \cos \mu = \frac{g}{V} \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}$$

y del sistema anterior se despejan δ_H y C_{L0} :

$$\begin{aligned} \delta_H &= -\frac{1}{C_{m\delta_H}} \left(C_{m0} + C_{m\hat{q}}\hat{q} + \frac{2J_{xz}}{\rho V^2 Sc} r^2 \right) = \\ &= -\frac{1}{C_{m\delta_H}} \left[C_{m0} + C_{m\hat{q}} \frac{gc}{2V^2} \left(n - \frac{1}{n} \right) + \frac{2J_{xz}g^2}{\rho ScV^4} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \right] \end{aligned}$$

$$C_{L0} = \frac{2W}{\rho SV^2} n + \frac{C_{L\delta_H}}{C_{m\delta_H}} \left[C_{m0} + C_{m\hat{q}} \frac{gc}{2V^2} \left(n - \frac{1}{n} \right) + \frac{2J_{xz}g^2}{\rho ScV^4} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \right]$$

2º) En la condición de compensación se cumple:

$$C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha_T + C_{L\delta_H}\delta_{HT} = \frac{2W}{\rho SV_T^2}$$

$$C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha_T + C_{m\delta_H}\delta_{HT} = 0$$

y operando se obtiene:

$$\alpha_T = \frac{C_{m0}C_{L\delta_H} - C_{L0}C_{m\delta_H} + C_{m\delta_H} \frac{2W}{\rho SV_T^2}}{C_{L\alpha}C_{m\delta_H} - C_{m\alpha}C_{L\delta_H}}$$

$$\delta_{HT} = \frac{C_{L0}C_{m\alpha} - C_{L\alpha}C_{m0} - C_{m\alpha} \frac{2W}{\rho SV_T^2}}{C_{L\alpha}C_{m\delta_H} - C_{m\alpha}C_{L\delta_H}}$$

3º) Teniendo en cuenta que $\alpha = 0$, $(\alpha - \alpha_T)$ vale:

$$\alpha - \alpha_T = -\frac{C_{m0}C_{L\delta_H} + C_{m\delta_H} \frac{2W}{\rho SV_T^2}}{C_{L\alpha}C_{m\delta_H} - C_{m\alpha}C_{L\delta_H}} + \frac{C_{L0}C_{m\delta_H}}{C_{L\alpha}C_{m\delta_H} - C_{m\alpha}C_{L\delta_H}}$$

donde C_{L0} ha sido calculado en el apartado 1º. Introduciéndolo en la última expresión:

$$\begin{aligned} \alpha - \alpha_T &= \frac{1}{C_{L\alpha}C_{m\delta_H} - C_{m\alpha}C_{L\delta_H}} \left[C_{m\delta_H} \frac{2W}{\rho S} \left(\frac{n}{V^2} - \frac{1}{V_T^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + C_{L\delta_H} C_{m\hat{q}} \frac{gc}{2V^2} \left(n - \frac{1}{n} \right) + C_{L\delta_H} \frac{2J_{xz}g^2}{\rho ScV^4} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \right] \end{aligned}$$

Para el sistema de mando del enunciado, la fuerza en palanca viene dada por:

$$F_S = k_1 (\delta_S - \delta_{ST}) + k_2 (n - n_T) = \frac{k_1}{k_3} (\alpha - \alpha_T) + k_2 (n - 1)$$

y por tanto:

$$\begin{aligned} F_S &= k_2 (n - 1) + \frac{k_1}{k_3} \frac{1}{C_{L\alpha}C_{m\delta_H} - C_{m\alpha}C_{L\delta_H}} \left[C_{m\delta_H} \frac{2W}{\rho S} \left(\frac{n}{V^2} - \frac{1}{V_T^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + C_{L\delta_H} C_{m\hat{q}} \frac{gc}{2V^2} \left(n - \frac{1}{n} \right) + C_{L\delta_H} \frac{2J_{xz}g^2}{\rho ScV^4} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \right] \end{aligned}$$

4º) Derivando la expresión de la fuerza en palanca obtenida en el apartado anterior:

$$\frac{dF_S}{dn} = k_2 + \frac{k_1}{k_3} \frac{d(\alpha - \alpha_T)}{dn}$$

y por tanto:

$$\begin{aligned}\frac{dF_S}{dn} &= k_2 + \frac{k_1}{k_3} \frac{1}{C_{L\alpha} C_{m\delta_H} - C_{m\alpha} C_{L\delta_H}} \left[C_{m\delta_H} \frac{2W}{\rho SV^2} + \right. \\ &\quad \left. + C_{L\delta_H} C_{m\hat{q}} \frac{gc}{2V^2} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) + C_{L\delta_H} \frac{4J_{xz}g^2}{\rho ScV^4} \frac{1}{n^3} \right] \\ \left(\frac{dF_S}{dn} \right)_{n=1} &= k_2 + \frac{k_1}{k_3} \frac{1}{C_{L\alpha} C_{m\delta_H} - C_{m\alpha} C_{L\delta_H}} \times \\ &\quad \times \left(C_{m\delta_H} \frac{2W}{\rho SV^2} + C_{L\delta_H} C_{m\hat{q}} \frac{gc}{V^2} + C_{L\delta_H} \frac{4J_{xz}g^2}{\rho ScV^4} \right)\end{aligned}$$

Obsérvese que, si los ejes estabilidad fueran principales de inercia ($J_{xz} = 0$) y si fuera despreciable la contribución de la deflexión de la cola horizontal a la sustentación total del avión ($C_{L\delta_H} \cong 0$), el Esfuerzo por “g” sería:

$$\left(\frac{dF_S}{dn} \right)_{n=1} = k_2 + \frac{k_1}{k_3} \frac{2W}{C_{L\alpha} \rho SV^2}$$

5º) Planteando el momento alrededor de la charnela de una cola horizontal toda móvil, sin tab y formada por perfiles simétricos:

$$H_H = q\eta_H S_H c_H C_{hH} = qS_H c_H C'_{hH\alpha}(\alpha_H + \delta_H)$$

en donde α_H representa el ángulo de ataque de la cola, dado por:

$$\alpha_H = \alpha - \varepsilon + \frac{2l_t}{c} \hat{q}$$

La deflexión de estela se puede expresar mediante:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \alpha_{wb} = \varepsilon_0 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} (\alpha + i_{wb}) = \varepsilon'_0 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \alpha$$

donde se ha denotado $\varepsilon'_0 = \varepsilon_0 + (\partial \varepsilon / \partial \alpha) i_{wb}$. Por tanto el ángulo de ataque de la cola vendrá dado por:

$$\alpha_H = (1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}) \alpha - \varepsilon'_0 + \frac{gl_t}{V^2} (n - \frac{1}{n})$$

y el momento de charnela quedará como:

$$H_H = qS_H c_H C'_{hH\alpha} \left((1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}) \alpha + \delta_H + \frac{gl_t}{V^2} (n - \frac{1}{n}) - \varepsilon'_0 \right)$$

Planteando el equilibrio alrededor de la charnela de la cola se obtiene la presión del actuador, p_A :

$$p_A S_A e = H_H \rightarrow p_A = \frac{1}{2} \rho V^2 \frac{S_H c_H}{S_A e} C'_{hH\alpha} \left((1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}) \alpha + \delta_H + \frac{g l_t}{V^2} (n - \frac{1}{n}) - \varepsilon'_0 \right)$$

donde S_A es la superficie del émbolo del actuador.

Finalmente, se introducen los valores de α y δ_H obtenidos en el apartado 1º) para la maniobra considerada, quedando:

$$\begin{aligned} p_A &= K \left[- \left(\varepsilon'_0 + \frac{C_{m0}}{C_{m\delta_H}} \right) V^2 + \right. \\ &\quad \left. + g \left(l_t - \frac{C_{m\hat{q}}}{C_{m\delta_H}} \frac{c}{2} \right) \left(n - \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{C_{m\delta_H}} \frac{2 J_{xz} g^2}{\rho S c V^2} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \right] \\ K &= \frac{\rho S_H c_H}{2 S_A e} C'_{hH\alpha} \end{aligned}$$

Estabilidad y control estáticos lateral-direccionales

13

13.1. Introducción

Hasta ahora se han estudiado la estabilidad y la controlabilidad estática longitudinales del avión. En este capítulo se analizan los conceptos lateral-direccionales equivalentes a los longitudinales.

Existen tres grandes diferencias entre los casos lateral-direccional y longitudinal:

- Aunque en el caso longitudinal sólo interviene una rotación alrededor del eje y , en el caso lateral-direccional hay que considerar dos rotaciones alrededor de los ejes x y z . Además los momentos aerodinámicos asociados con dichas rotaciones resultan estar acoplados: la velocidad angular de balance, p , genera un momento aerodinámico en su eje (momento de balance, L_A), pero también un momento aerodinámico en el eje z (momento de guiñada, N_A); y, viceversa, la velocidad angular de guiñada, r , genera un momento aerodinámico en su eje (momento de guiñada, N_A), pero también un momento aerodinámico en el eje x (momento de balance, L_A).
- En la condición de vuelo rectilíneo, estacionario y simétrico, todas las variables lateral-direccionales son idénticamente cero, por lo que no existe ningún problema primario de equilibrado. Las superficies de mando lateral-direccional (alerones y timón de dirección) cumplen una misión de equilibrado secundario cuando aparecen asimetrías (propulsivas, aerodinámicas o másicas) o cuando conviene volar en condiciones de vuelo no simétrico (por ejemplo, en un aterrizaje con viento cruzado).

- En condiciones nominales el centro de masas se encuentra en el plano de simetría, por lo que su posición no afecta sensiblemente al comportamiento lateral-direccional del avión.

En el apartado 13.2 se plantean una serie de consideraciones generales sobre los coeficientes de fuerza y momentos lateral-direccionales en vuelo rectilíneo, estacionario y no simétrico. Los apartados 13.3, 13.4 y 13.5 estudian las contribuciones del ángulo de resbalamiento y de las deflexiones de ailerones y timón de dirección a los coeficientes de fuerza lateral, momento de balance y momento de guiñada, e introducen conceptos tan importantes como el efecto diedro, la estabilidad direccional o la guiñada adversa.

En el apartado 13.6 se obtienen la fuerza en el pedal que debe efectuarse en el mando direccional para deflectar el timón de dirección y la fuerza lateral en la palanca necesaria para deflectar los ailerones.

En el apartado 13.7 se estudia la denominada estabilidad estática direccional con mandos libres, concepto completamente análogo a la estabilidad estática longitudinal con mandos libres desarrollado en el capítulo 11. Por último, en el apartado 13.8, se generalizan las expresiones propuestas en apartados anteriores para el caso de que el vuelo estacionario no sea rectilíneo y tenga velocidades angulares de balance o de guiñada apreciables.

13.2. Coeficientes de fuerza y momentos lateral-direccionales en vuelo rectilíneo estacionario

Las variables y mandos a considerar en los movimientos lateral-direccionales son los siguientes:

- Velocidad lateral, v (o ángulo de resbalamiento, β)
- Ángulo de balance, ϕ
- Ángulo de guiñada, ψ
- Deflexiones de ailerones y timón de dirección, δ_a y δ_r
- Velocidades angulares de balance y guiñada, p y r

Cuando estas variables no son idénticamente nulas aparecen las fuerzas y momentos aerodinámicos siguientes:

- Fuerza aerodinámica lateral, Y_A o F_{Ay}
- Momento aerodinámico de balance, L_A
- Momento aerodinámico de guiñada, N_A

A partir de las tres magnitudes dimensionales anteriores se definen los siguientes coeficientes aerodinámicos de fuerza lateral, momento de balance y momento de guiñada:

$$\begin{aligned} C_Y &= \frac{Y_A}{qS} \\ C_l &= \frac{L_A}{qSb} \\ C_n &= \frac{N_A}{qSb} \end{aligned} \tag{13.1}$$

donde q es la presión dinámica de la corriente libre, S es la superficie alar y b es la envergadura del ala.

Téngase en cuenta que, además de estos términos aerodinámicos, es preciso introducir en el sistema dinámico de ecuaciones (2.12) los correspondientes términos propulsivos (F_{Ty} , L_T y N_T). Como en la práctica totalidad de los vuelos de aviones estos términos propulsivos lateral-direccionales son nulos, los coeficientes de fuerza y momentos aerodinámicos lateral-direccionales dados por las expresiones (13.1) coinciden con los coeficientes totales aerodinámicos más propulsivos.

Por análisis dimensional, en vuelo estacionario, rectilíneo, no simétrico puede escribirse:

$$C_Y, C_l, C_n = f(\alpha, \beta, M, Re, \delta_a, \delta_r) \tag{13.2}$$

donde M representa el número de Mach y Re el número de Reynolds. Las variaciones de los coeficientes aerodinámicos lateral-direccionales con el número de Reynolds se supondrán despreciables.

Las fuerzas y momentos lateral-direccionales pueden proyectarse en el sistema de ejes cuerpo que se considere oportuno, aunque normalmente es habitual hacerlo en los llamados ejes estabilidad (ver apartado 1.2.5).

13.3. Fuerza lateral total

El coeficiente de fuerza aerodinámica lateral total de un avión puede expresarse utilizando una teoría linealizada mediante:

$$C_Y = C_{Y0} + C_{Y\beta}\beta + C_{Y\delta_a}\delta_a + C_{Y\delta_r}\delta_r \quad (\alpha = cte, M = cte) \quad (13.3)$$

donde

$$C_{Y0} = (C_Y)_{\beta=\delta_a=\delta_r=0} \quad (\text{en aviones simétricos respecto al plano } x_s-z_s, \\ C_{Y0} = 0)$$

$C_{Y\beta}$: Derivada del coeficiente de fuerza lateral respecto a β

$C_{Y\delta_a}$: Derivada del coeficiente de fuerza lateral respecto a δ_a

$C_{Y\delta_r}$: Derivada del coeficiente de fuerza lateral respecto a δ_r

A continuación se desarrollan brevemente las tres derivadas de estabilidad anteriores.

13.3.1. Derivada del coeficiente de fuerza lateral respecto a β

La derivada del coeficiente de fuerza lateral respecto del ángulo de resbalamiento, $C_{Y\beta}$, suele modelizarse como:

$$C_{Y\beta} = (C_{Y\beta})_{wb} + (C_{Y\beta})_v + (C_{Y\beta})_T + \dots \quad (13.4)$$

donde $(C_{Y\beta})_{wb}$ representa la contribución del conjunto ala-fuselaje a $C_{Y\beta}$, $(C_{Y\beta})_v$ la contribución de la cola vertical y, en el caso de que el avión esté propulsado por hélices, $(C_{Y\beta})_T$ representa la contribución de las mismas.

La contribución del conjunto ala-fuselaje es, en general, difícil de calcular. En la mayor parte de los casos prácticos puede suponerse $(C_{Y\beta})_{wb} \ll (C_{Y\beta})_v$.

La contribución de la cola vertical, $(C_{Y\beta})_v$, puede estimarse a partir del ángulo de ataque sobre la cola vertical, α_v , generado por el ángulo de resbalamiento β (ver Figura 13.1). Obsérvese que la corriente sobre la cola vertical cambia en magnitud y dirección respecto a los valores de la corriente libre, debido a la estela de la hélice y a la interferencia del ala-fuselaje sobre la cola. Estos dos efectos se tienen en cuenta mediante una eficiencia aerodinámica de la cola vertical, η_v (análoga a la eficiencia aerodinámica de la cola horizontal, η_t , introducida en el apartado 10.2) y una deflexión de estela

lateral-direccional, σ (análoga a la deflexión de estela, ε , introducida asimismo en el apartado 10.2). Según esto puede escribirse:

$$\alpha_v = \beta + \sigma = \beta \left(1 + \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} \right) \quad (13.5)$$

donde $\partial \sigma / \partial \beta$ es un parámetro aerodinámico de signo positivo, completamente análogo a $\partial \varepsilon / \partial \alpha$.

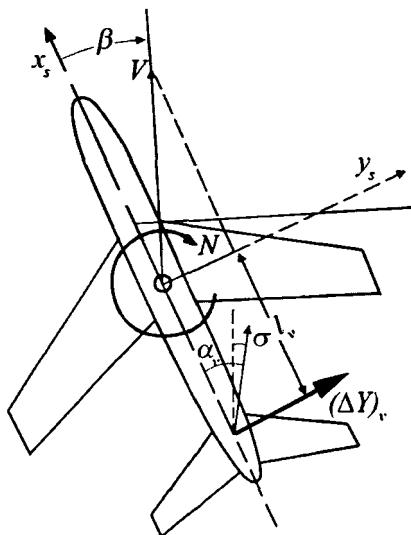


Figura 13.1. Ángulo de ataque en la cola vertical.

Ahora, el incremento del coeficiente de sustentación de la cola vertical, $(\Delta C_L)_v$, el incremento de la sustentación de la cola vertical, $(\Delta L)_v$, y el incremento del coeficiente de fuerza lateral, $(\Delta C_Y)_v$, generados por este efecto físico, vendrán dados por:

$$(\Delta C_L)_v = a_v (\beta + \sigma) = a_v \left(1 + \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} \right) \beta$$

$$(\Delta L)_v = q_v S_v a_v (\beta + \sigma) = q_v S_v a_v \left(1 + \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} \right) \beta \cong -(\Delta Y)_v \quad (13.6)$$

$$(\Delta C_Y)_v = \frac{(\Delta Y)_v}{qS} = -\frac{q_v S_v}{qS} a_v \left(1 + \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} \right) \beta$$

donde a_v es la pendiente de la curva de sustentación de la cola vertical, S_v es la superficie de la cola vertical y q_v es la presión dinámica en la cola vertical.

Finalmente se obtiene para la contribución de la cola vertical a $C_{Y\beta}$, la siguiente expresión:

$$(C_{Y\beta})_v = -a_v \eta_v \frac{S_v}{S} \left(1 + \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} \right) \quad (13.7)$$

El último término de la ecuación (13.4), $(C_{Y\beta})_T$, representa la contribución de las hélices de un avión a la derivada del coeficiente de fuerza lateral respecto del ángulo de resbalamiento. Este término aparece debido a que una hélice acelera la corriente fluida hacia atrás del avión (con lo que se produce una tracción hacia delante), pero también frena la corriente lateralmente cuando llega con cierto resbalamiento, “rectificando” el tubo de corriente incidente (con lo que se produce un fuerza lateral sobre la hélice hacia la izquierda, si el resbalamiento es positivo).

13.3.2. Derivada del coeficiente de fuerza lateral respecto a δ_a

La derivada del coeficiente de fuerza lateral con respecto de la deflexión de alerones, $C_{Y\delta_a}$, se considera despreciable en casi la totalidad de los casos prácticos de controles laterales. Sólo puede tener un valor apreciable cuando las superficies aerodinámicas utilizadas para el control lateral, que se deflectan de forma antisimétrica, están próximas a una superficie vertical.

13.3.3. Derivada del coeficiente de fuerza lateral respecto a δ_r

Al igual que ocurría con el timón de profundidad (ver apartado 10.2), una deflexión del timón de dirección da lugar a un incremento equivalente del ángulo de ataque del estabilizador vertical, $\Delta\alpha_v$, de valor:

$$\Delta\alpha_v = \tau_r \delta_r \quad (13.8)$$

donde τ_r representa la efectividad del timón de dirección, que puede variar entre 0 y 1.

Operando análogamente al apartado anterior se obtiene la contribución de esta deflexión al coeficiente de fuerza lateral, $(\Delta C_Y)_v$, de la forma siguiente

(ver Figura 13.2):

$$(\Delta C_L)_v = a_v \tau_r \delta_r$$

$$(\Delta L)_v = q_v S_v a_v \tau_r \delta_r = -(\Delta Y)_v \quad (13.9)$$

$$(\Delta C_Y)_v = \frac{(\Delta Y)_v}{qS} = -\frac{q_v S_v a_v \tau_r \delta_r}{qS}$$

y por tanto:

$$C_{Y\delta_r} = -a_v \eta_v \frac{S_v}{S} \tau_r \quad (13.10)$$

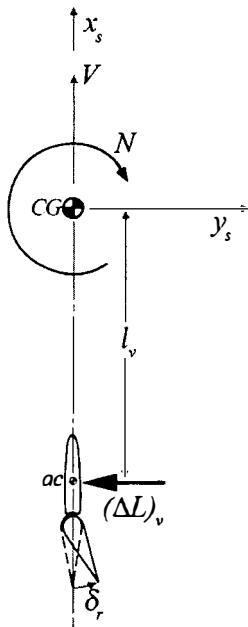


Figura 13.2. Contribución de la deflexión del timón de dirección a la fuerza lateral y al momento de guiñada.

13.4. Momento de balance total

El coeficiente de momento de balance aerodinámico total de un avión puede expresarse utilizando una teoría linealizada mediante:

$$C_l = C_{l0} + C_{l\beta} \beta + C_{l\delta_a} \delta_a + C_{l\delta_r} \delta_r \quad (\alpha = cte, M = cte) \quad (13.11)$$

donde dos de las derivadas de estabilidad que aparecen en la expresión anterior tienen nombre propio:

$$C_{l0} = (C_l)_{\beta=\delta_a=\delta_r=0} \text{ (en aviones simétricos respecto a } x_s-z_s, C_{l0} = 0)$$

$C_{l\beta}$: Efecto diedro

$C_{l\delta_a}$: Potencia de control lateral

$C_{l\delta_r}$: Derivada del coeficiente de momento de balance respecto a δ_r

A continuación se desarrollan brevemente las tres derivadas de estabilidad anteriores.

13.4.1. Efecto Diedro

La razón por la que se denomina “efecto diedro” a la derivada del coeficiente de momento de balance respecto del ángulo de resbalamiento, $C_{l\beta}$, se debe a que el diedro geométrico del ala constituye la contribución más importante a la misma.

Considérese un avión, diseñado con $C_{l\beta} < 0$, en vuelo horizontal simétrico rectilíneo estacionario con las alas a nivel. Si por algún motivo aparece una perturbación en forma de resbalamiento positivo, el avión generará un momento aerodinámico de balance negativo, se inclinará hacia la izquierda y la componente en el plano horizontal de la sustentación tenderá a sacarle de la perturbación en resbalamiento.

Por ello se dice que un avión tiene un efecto diedro estable, o que la contribución de $C_{l\beta}$ es estabilizante, cuando se cumple:

$$C_{l\beta} < 0 \quad (13.12)$$

Las contribuciones más importantes a $C_{l\beta}$ son las siguientes:

$$C_{l\beta} = (C_{l\beta})_{wb} + (C_{l\beta})_t + (C_{l\beta})_v + \dots \quad (13.13)$$

donde $(C_{l\beta})_{wb}$ representa la contribución al efecto diedro del conjunto ala-fuselaje, $(C_{l\beta})_t$ la de la cola horizontal y $(C_{l\beta})_v$ la de la cola vertical.

A su vez, las tres contribuciones más importantes al efecto diedro del conjunto ala-fuselaje, $(C_{l\beta})_{wb}$, son el diedro geométrico de ala, la flecha del ala y la posición relativa ala-fuselaje:

a) Diedro geométrico del ala

La Figura 13.3 representa un ala con diedro geométrico positivo ($\Gamma > 0$) sometida a un resbalamiento positivo ($\beta < 0$), ambos ángulos supuestos pequeños. Proyectando la velocidad del aire respecto del avión (velocidad aerodinámica cambiada de signo) sobre los ejes estabilidad se obtiene:

$$\begin{aligned} V_{x_s} &= -V \cos \beta \cong -V \\ V_{y_s} &= -V \sin \beta \cong -V\beta \end{aligned} \quad (13.14)$$

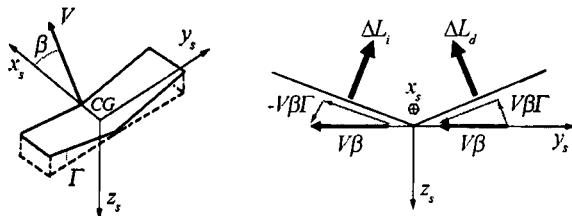


Figura 13.3. Contribución al efecto diedro del diedro geométrico del ala.

La velocidad según el eje y_s se puede descomponer ahora en una componente “de barrido”, según la envergadura del ala, y en una componente normal a la misma. La semiala derecha, por lo tanto, ve una velocidad normal del aire, V_{nd} , mayor que la de la semiala izquierda, V_{ni} , lo cual genera, respectivamente, incrementos positivo y negativo del ángulo de ataque dados por:

$$\begin{aligned} V_{nd} &= V\beta\Gamma \rightarrow \Delta\alpha_d = \beta\Gamma \\ V_{ni} &= -V\beta\Gamma \rightarrow \Delta\alpha_i = -\beta\Gamma \end{aligned} \quad (13.15)$$

Así pues existe una distribución antisimétrica de ángulos de ataque que hace que la semiala derecha tenga más sustentación que la izquierda. Utilizando una teoría aerodinámica bidimensional, donde todos los perfiles del ala tienen la misma pendiente de la curva de sustentación, a_w , puede escribirse para los incrementos de las sustentaciones de las semialas derecha e izquierda, ΔL_d e ΔL_i :

$$\Delta L_d = \frac{1}{2}\rho V^2 \frac{S}{2} a_w \beta \Gamma = -\Delta L_i \quad (13.16)$$

y si ambos incrementos de las sustentaciones se suponen aplicados en el punto medio de cada semiala (para un ala con forma en planta rectangular), se obtiene finalmente la contribución del diedro geométrico del ala a $C_{l\beta}$:

$$(C_{l\beta})_\Gamma = -\frac{a_w \Gamma}{4} < 0 \quad (13.17)$$

Obsérvese que, según lo establecido por la expresión (13.12), un ángulo de diedro positivo ($\Gamma > 0$) estabiliza y uno negativo ($\Gamma < 0$) desestabiliza.

b) Flecha del ala

La Figura 13.4 representa de forma esquemática el ala de un avión con flecha progresiva ($\Lambda > 0$). Según esta figura, la semiala izquierda ve una velocidad del aire perpendicular a la línea de puntos $\frac{V}{4}$, V_{pi} , distinta de la que ve la semiala derecha, V_{pd} ; ambas velocidades vienen dadas por:

$$\begin{aligned} V_{pi} &= V \cos(\Lambda + \beta) \\ V_{pd} &= V \cos(\Lambda - \beta) \end{aligned} \quad (13.18)$$

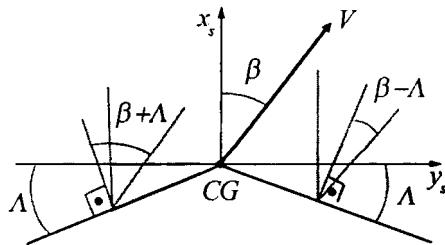


Figura 13.4. Contribución al efecto diedro de la flecha del ala.

La diferencia entre la sustentación de la semiala derecha respecto de la semiala izquierda viene dada por:

$$\Delta L = \frac{1}{2} \rho V^2 \frac{S}{2} [\cos^2(\Lambda - \beta) - \cos^2(\Lambda + \beta)] C_L \quad (13.19)$$

y considerando ángulos de resbalamiento pequeños ($|\beta| \ll 1$), esta diferencia queda como:

$$\Delta L = \frac{\rho V^2 S}{2} C_L \beta \sin 2\Lambda \quad (13.20)$$

Se impone ahora que, según una teoría aerodinámica bidimensional, la diferencia de sustentaciones esté situada en el punto medio del semiala derecha (semialas con flecha pero sin estrechamiento), generando un momento de balance negativo. Es decir, el coeficiente de momento de balance debido a este efecto vendrá dado por:

$$C_l = -\frac{C_L}{4} \beta \sin 2\Lambda \quad (13.21)$$

y por tanto la contribución de la flecha del ala a $C_{l\beta}$ será:

$$(C_{l\beta})_\Lambda = -\frac{C_L}{4} \sin 2\Lambda \quad (13.22)$$

La aproximación obtenida es correcta en C_L pero no lo es en Λ . Para mejorarla, sería preciso utilizar teoría linealizada de alas.

Obsérvese que, según lo establecido por la expresión (13.12), una flecha progresiva ($\Lambda > 0$) estabiliza y una regresiva ($\Lambda < 0$) desestabiliza.

c) Posición relativa del ala respecto del fuselaje

Este efecto depende de la longitud del fuselaje delante del ala, de la forma de la sección del fuselaje y de la forma en planta del ala. Como puede apreciarse en la Figura 13.5, el ala alta proporciona una contribución estabilizante al efecto diedro, el ala media indiferente y el ala baja desestabilizante.

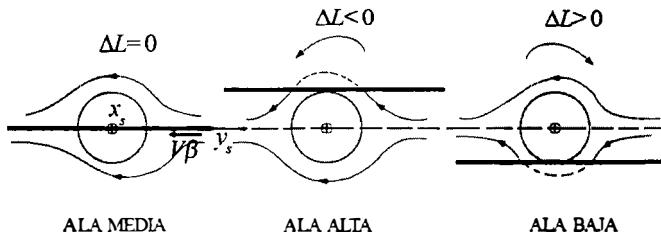


Figura 13.5. Contribución al efecto diedro de la posición relativa ala-fuselaje.

La contribución de la cola horizontal al efecto diedro, $(C_{l\beta})_t$ (segundo sumando del segundo miembro de la expresión (13.13)), se obtiene de forma completamente análoga a $(C_{l\beta})_{wb}$, aunque es preciso tener en cuenta los distintos adimensionalizadores de la cola y del conjunto ala-fuselaje. Es decir:

$$(C_{l\beta})_t = (C'_{l\beta})_t \eta_t \frac{S_t b_t}{S_b} \quad (13.23)$$

donde b_t es la envergadura de la cola horizontal y $(C'_{l\beta})_t$ representa el efecto diedro de la cola horizontal, referido a sus magnitudes características, siendo las contribuciones más importantes su diedro geométrico y su flecha. Obsérvese que $(C'_{l\beta})_t$ tiene el mismo orden de magnitud que $(C_{l\beta})_{wb}$, pero al estar multiplicado por una cantidad claramente menor que la unidad, la

contribución de la cola horizontal al efecto diedro del avión completo es más pequeña que la del conjunto ala-fuselaje.

Por último para determinar la contribución de la cola vertical al efecto diedro, $(C_{l\beta})_v$, se utiliza la ya determinada contribución de la cola vertical al coeficiente de fuerza lateral, $(C_{Y\beta})_v$ (ver ecuación (13.7)), quedando:

$$(C_{l\beta})_v = (C_{Y\beta})_v \frac{h_v}{b} \quad (13.24)$$

donde h_v es la distancia existente entre el centro aerodinámico del estabilizador vertical y el eje x_s , tomada con signo positivo si este centro aerodinámico está por encima del eje x_s .

Introduciendo en esta última ecuación la expresión (13.7), se obtiene:

$$(C_{l\beta})_v = -a_v \eta_v \frac{S_v h_v}{Sb} \left(1 + \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} \right) \quad (13.25)$$

Obsérvese que si h_v cambia de signo (avión volando con ángulo de ataque grande) cambia asimismo el signo de $(C_{l\beta})_v$.

13.4.2. Potencia de Control Lateral

Según el criterio de signos establecido en el presente libro (ver Figura 2.1), $C_{l\delta_a} > 0$. La deflexión de alerones cambia la distribución de ángulos de ataque del ala, y mediante la teoría del ala larga de Prandtl es posible determinar la nueva distribución de sustentación y con ella el coeficiente de momento de balance (Figura 13.6).

13.4.3. Derivada del coeficiente de momento de balance respecto a δ_r

Por último, para determinar la contribución del timón de dirección al coeficiente de momento de balance, se utiliza la ya determinada contribución del timón de dirección al coeficiente de fuerza lateral, $C_{Y\delta_r}$ (ver ecuación (13.10)), quedando:

$$C_{l\delta_r} = C_{Y\delta_r} \frac{h_v}{b} = -a_v \eta_v \frac{S_v h_v}{Sb} \tau_r \quad (13.26)$$

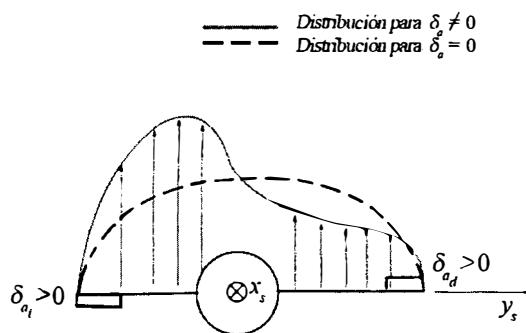


Figura 13.6. Distribución de sustentación a lo largo de la envergadura generada por la deflexión de ailerones.

13.5. Momento de guiñada total

El coeficiente de momento de guiñada aerodinámico total de un avión puede expresarse utilizando una teoría linealizada mediante:

$$C_n = C_{n0} + C_{n\beta}\beta + C_{n\delta_a}\delta_a + C_{n\delta_r}\delta_r \quad (\alpha = cte, M = cte) \quad (13.27)$$

donde todas las derivadas de estabilidad que aparecen en la expresión anterior tienen nombre propio:

$$C_{n0} = (C_n)_{\beta=\delta_a=\delta_r=0} \quad (\text{en aviones simétricos respecto a } x_s-z_s, C_{n0} = 0)$$

$C_{n\beta}$: Índice de estabilidad estática direccional con mandos fijos, frente a perturbaciones en ángulo de resbalamiento (de forma abreviada suele llamársele estabilidad direccional)

$C_{n\delta_a}$: Derivada del coeficiente de momento de guiñada respecto de δ_a (de forma abreviada suele llamársele guiñada adversa)

$C_{n\delta_r}$: Potencia de control direccional

A continuación se desarrollan brevemente las tres derivadas de estabilidad anteriores.

13.5.1. Estabilidad Direccional

En este apartado se efectúa un desarrollo completamente análogo al realizado en el apartado 10.4 para la estabilidad longitudinal.

Por defecto, en Mecánica del Vuelo, cuando se habla de estabilidad estática direccional se sobreentiende que la perturbación se produce en ángulo de resbalamiento y la reacción del avión en momento de guiñada. Así pues un avión será estable frente a perturbaciones en resbalamiento cuando para un incremento positivo del ángulo aparece un momento de guiñada también positivo (ver Figura 13.1).

De forma matemática, el criterio de estabilidad estática direccional con mandos fijos, frente a perturbaciones en resbalamiento, vendrá dado simplemente por el signo de la derivada parcial del coeficiente de momento de guiñada total del avión con respecto del ángulo de resbalamiento. Es decir, derivando la expresión (13.27), se obtiene:

$$\left(\frac{\partial C_n}{\partial \beta} \right)_{\delta_r} = C_{n\beta} \begin{cases} > 0 & \rightarrow \text{Avión ESTABLE} \\ = 0 & \rightarrow \text{Avión INDIFERENTE} \\ < 0 & \rightarrow \text{Avión INESTABLE} \end{cases} \quad (13.28)$$

Por tanto a $C_{n\beta}$ se le denomina “Índice de estabilidad estática direccional con mandos fijos”, frente a perturbaciones en ángulo de resbalamiento (de forma abreviada suele llamársele estabilidad direccional).

Los aviones, en general, tienen $C_{n\beta} > 0$, es decir, son direccionalmente estables. Las contribuciones más importantes a $C_{n\beta}$ son:

$$C_{n\beta} = (C_{n\beta})_{wb} + (C_{n\beta})_v + (C_{n\beta})_T + \dots \quad (13.29)$$

donde $(C_{n\beta})_{wb}$ representa la contribución a la estabilidad direccional del conjunto ala-fuselaje, $(C_{n\beta})_v$ la de la cola vertical y, en el caso de que el avión esté propulsado por hélices, $(C_{n\beta})_T$ representa la contribución de las mismas.

Las tres contribuciones más importantes a la estabilidad direccional del conjunto ala-fuselaje, $(C_{n\beta})_{wb}$, son la flecha del ala (la flecha progresiva es estabilizante), el fuselaje (el fuselaje normalmente es desestabilizante) y la posición relativa ala-fuselaje (el ala alta es estabilizante).

Para determinar la contribución de la cola vertical a la estabilidad direccional, $(C_{n\beta})_v$ se utiliza la ya determinada contribución de la cola vertical al coeficiente de fuerza lateral, $(C_{Y\beta})_v$, de la forma siguiente:

$$(C_{n\beta})_v = - (C_{Y\beta})_v \frac{l_v}{b} \quad (13.30)$$

donde l_v es la distancia existente entre el centro aerodinámico del estabilizador vertical y el eje z_s . Introduciendo aquí la expresión (13.7), se obtiene:

$$(C_{n\beta})_v = a_v \eta_v \frac{S_v l_v}{S_b} \left(1 + \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} \right) = a_v \eta_v \hat{V}_v \left(1 + \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} \right) \quad (13.31)$$

donde $\hat{V}_v = S_v l_v / S_b$ es el llamado coeficiente de volumen de la cola vertical.

Y como ya se comentó en el apartado 13.3.1, para un avión dotado de hélices, puede aparecer un término $(C_{n\beta})_T$ debido a la fuerza aerodinámica lateral generada por la hélice al rectificar el tubo de corriente que le llega con cierto ángulo de resbalamiento. Las hélices tractoras (situadas por delante del centro de masas) son por tanto desestabilizantes y las hélices impulsoras (situadas por detrás del centro de masas) estabilizantes.

13.5.2. Guiñada Adversa

Si en un avión se introduce una deflexión de alerones positiva con el fin de generar un momento de balance positivo, la sustentación de la semiala izquierda es mayor que la de la semiala derecha. Asimismo la resistencia de la semiala izquierda es mayor que la de la derecha, debido fundamentalmente a la resistencia inducida (ver la Figura 13.6). Por ello, si no se ha diseñado cuidadosamente el mando lateral, la derivada del coeficiente de momento de guiñada respecto de la deflexión de alerones tiene signo negativo; es decir:

$$C_{n\delta_a} < 0 \quad (13.32)$$

El signo negativo de esta derivada de estabilidad implica que cuando un piloto quiere efectuar, por ejemplo, un viraje hacia la derecha, acciona el mando lateral hacia la derecha, los alerones se deflectan positivamente, y se genera un momento de balance positivo y un momento de guiñada negativo, que se opone a realizar el giro deseado. Por ello a $C_{n\delta_a}$ suele denominársele guiñada adversa.

Para evitar guiñada adversa (conseguir $C_{n\delta_a} \cong 0$ o incluso un valor ligeramente positivo que sea favorable al giro), sin necesidad de deflectar el timón de dirección para neutralizar este efecto, se utilizan los siguientes sistemas:

- Alerón “Frise”: Al subir un alerón, su borde de ataque asoma por debajo del ala e incrementa mucho la resistencia parásita. Este método se utiliza poco hoy día.

- Spoilers: Rompen la sustentación e incrementan la resistencia en una misma semiala.

- Alerones con deflexión diferencial: El alerón que sube, sube más de lo que baja el alerón que baja, con lo que se produce un incremento de resistencia (parásita más inducida) aproximadamente igual en las dos semialas. Se define la deflexión total de alerones, δ_a , como:

$$\delta_a = \frac{\delta_{ai} + \delta_{ad}}{2} \quad (13.33)$$

donde δ_{ai} y δ_{ad} son las deflexiones del alerón izquierdo y derecho respectivamente. Téngase en cuenta que cuando el alerón izquierdo baja y el derecho sube (el derecho sube más de lo que baja el izquierdo), ambas deflexiones son positivas y la deflexión total de alerones es positiva; y cuando el alerón izquierdo sube y el derecho baja (el izquierdo sube más de lo que baja el derecho), ambas deflexiones son negativas y la deflexión total de alerones es negativa.

13.5.3. Potencia de Control Direccional

Por último, para calcular la potencia de control direccional, se utiliza la ya determinada contribución del timón de dirección al coeficiente de fuerza lateral, $C_{Y\delta_r}$ (ver ecuación (13.10)):

$$C_{n\delta_r} = -C_{Y\delta_r} \frac{l_v}{b} = a_v \eta_v \hat{V}_v \tau_r \quad (13.34)$$

Obviamente se cumple que $C_{n\delta_r} > 0$, según el criterio de signos establecido en el presente libro (ver Figura 2.1).

13.6. Fuerzas en los mandos lateral y direccional

Mediante un desarrollo análogo al efectuado en el apartado 11.6 pueden obtenerse la fuerza en el pedal, F_r , que debe efectuarse en el mando direccional para deflectar el timón de dirección y la fuerza en palanca, F_a , que tendría que efectuarse en el mando lateral para deflectar los alerones.

Para un avión dotado de mando direccional reversible y equilibrado básicamente (los pesos de los distintos elementos están situados en el eje

de giro o charnela del sistema), puede aplicarse el principio de los trabajos virtuales para obtener expresiones análogas a las del apartado 11.6 (ver Figura 13.7); es decir:

$$\begin{aligned} F_r &= -G_r H_r = -G_r q \eta_v S_r c_r (C_{hr\beta}\beta + C_{hr\delta_r}\delta_r + C_{hr\delta_{tr}}\delta_{tr}) \\ G_r &= \frac{d\delta_r}{dl_r} > 0 \end{aligned} \quad (13.35)$$

donde se ha representado mediante δ_{tr} la deflexión del tab del timón de dirección y mediante G_r la llamada relación de mecanismos del timón de dirección.

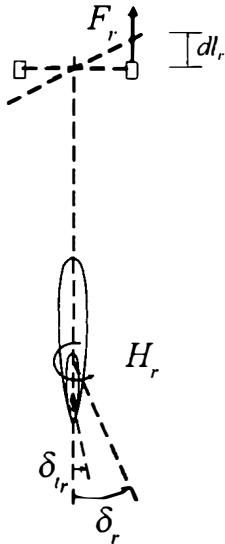


Figura 13.7. Criterios de signos para deflexiones y momentos del mando direccional.

Téngase en cuenta que el desarrollo de las dos expresiones anteriores lleva implícito el criterio de signos de la Figura 13.7 (por ejemplo: la relación de mecanismos del timón de dirección, G_r , es positiva, mientras que la del timón de profundidad era negativa; y $C_{hr\beta} < 0$, $C_{hr\delta_r} < 0$, $C_{hr\delta_{tr}} < 0$) y que se ha supuesto que la cola vertical es simétrica ($C_{hr0} = 0$).

Para un avión dotado de mando lateral reversible y equilibrado básicamente (los pesos de los distintos elementos están situados en los ejes de giro o charnelas del sistema), asimismo puede aplicarse el principio de los trabajos virtuales (ver Figura 13.8), aunque ahora es preciso considerar que el

piloto deflecta dos superficies sustentadoras (los alerones izquierdo y derecho):

$$F_a l_s d\delta_{sa} + H_{ai} d\delta_{ai} - H_{ad} d\delta_{ad} = 0 \quad (13.36)$$

Suponiendo ahora que no existe deflexión diferencial de alerones, es decir:

$$\delta_{ai} = \delta_{ad} \rightarrow \delta_a = \frac{\delta_{ai} + \delta_{ad}}{2} = \delta_{ai} = \delta_{ad} \quad (13.37)$$

la fuerza lateral en palanca queda:

$$F_a = -G_a (H_{ai} - H_{ad})$$

$$G_a = \frac{d\delta_{ai}}{l_s d\delta_{sa}} > 0 \quad (13.38)$$

donde G_a es la llamada relación de mecanismos de los alerones.

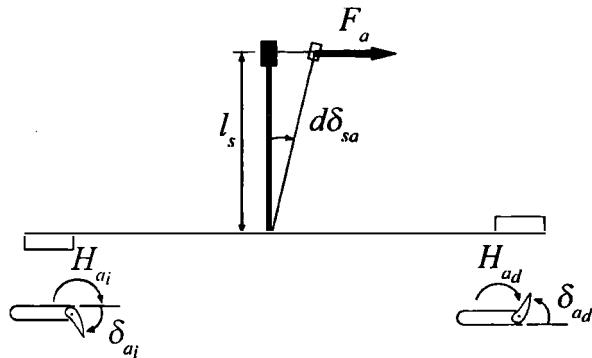


Figura 13.8. Criterios de signos para deflexiones y momentos del mando lateral.

Desarrollando ahora los dos momentos de charnela de los alerones izquierdo y derecho (se supone que la superficie total de alerones es S_a y que por tanto cada alerón tiene una superficie $S_a/2$), se obtiene:

$$H_{ai} = q \frac{S_a}{2} c_a (C_{ha0} + C_{ha\alpha} \alpha_{wb} + C_{ha\delta_a} \delta_{ai})$$

$$H_{ad} = q \frac{S_a}{2} c_a (C_{ha0} + C_{ha\alpha} \alpha_{wb} - C_{ha\delta_a} \delta_{ad}) \quad (13.39)$$

e introduciéndolos en la expresión de la fuerza lateral en palanca, queda:

$$F_a = -G_a q S_a c_a C_{ha\delta_a} \delta_a \quad (13.40)$$

Como puede observarse, para deflectar el mando lateral sólo es preciso vencer las contribuciones antisimétricas en los dos alerones, ya que se cancelan todas las contribuciones que son idénticas en las partes izquierda y derecha del ala. Además, con el criterio de signos propuesto, $C_{h\alpha\delta_a} < 0$.

13.7. Estabilidad direccional con mandos libres

Al dejar el piloto libre el mando direccional reversible (es decir, al hacerse nula la fuerza, F_r , en los pedales), el timón de dirección queda en equilibrio “flotando” a un ángulo δ_{rf} (ángulo de flotación del timón de dirección), que puede determinarse haciendo $H_r = 0$ en la ecuación (13.35); es decir:

$$H_r = 0 \rightarrow \delta_{rf} = -\frac{1}{C_{hr\delta_r}}(C_{hr\beta}\beta + C_{hr\delta_r}\delta_{tr}) \quad (13.41)$$

De forma análoga a lo establecido en el apartado 13.5.1, puede definirse un criterio de estabilidad estática direccional con mandos libres, frente a perturbaciones en ángulo de resbalamiento mediante:

$$\left(\frac{\partial C_n}{\partial \beta}\right)_{F_r=0} = (C_{n\beta})_f \begin{cases} > 0 & \rightarrow \text{Avión ESTABLE} \\ = 0 & \rightarrow \text{Avión INDIFERENTE} \\ < 0 & \rightarrow \text{Avión INESTABLE} \end{cases} \quad (13.42)$$

Por tanto a $(C_{n\beta})_f$ se le denomina “Índice de estabilidad estática direccional con mandos libres” (frente a perturbaciones en ángulo de resbalamiento).

Introduciendo el ángulo de flotación del timón de dirección dado por la expresión (13.41) en la ecuación (13.27) que proporciona el momento de guíñada, y derivándola con respecto al ángulo de resbalamiento se obtiene:

$$(C_{n\beta})_f = C_{n\beta} - C_{n\delta_r} \frac{C_{hr\beta}}{C_{hr\delta_r}} \quad (13.43)$$

Puede observarse que, como $C_{n\delta_r} > 0$, $C_{hr\beta} < 0$, $C_{hr\delta_r} < 0$, se satisface la relación $(C_{n\beta})_f < C_{n\beta}$ y por tanto los aviones son más estables direccional y estáticamente con mandos fijos que con mandos libres.

13.8. Fuerza y momentos lateral-direccionales en vuelo curvilíneo estacionario

Cuando un avión tiene una velocidad angular no nula (por ejemplo, en un vuelo curvilíneo como el viraje estacionario), es preciso añadir en los coeficientes aerodinámicos ya desarrollados para la fuerza lateral, el momento de balance y el momento de guiñada, dos nuevos términos para las dos componentes lateral-direccionales de esta velocidad angular (p y r); es decir:

$$\begin{aligned} C_Y &= C_{Y0} + C_{Y\beta}\beta + C_{Y\delta_a}\delta_a + C_{Y\delta_r}\delta_r + C_{Y\hat{p}}\hat{p} + C_{Y\hat{r}}\hat{r} \\ C_l &= C_{l0} + C_{l\beta}\beta + C_{l\delta_a}\delta_a + C_{l\delta_r}\delta_r + C_{l\hat{p}}\hat{p} + C_{l\hat{r}}\hat{r} \quad (13.44) \\ C_n &= C_{n0} + C_{n\beta}\beta + C_{n\delta_a}\delta_a + C_{n\delta_r}\delta_r + C_{n\hat{p}}\hat{p} + C_{n\hat{r}}\hat{r} \end{aligned}$$

donde las componentes adimensionales de la velocidad angular, \hat{p} y \hat{r} , se definen mediante:

$$\hat{p} = \frac{pb}{2V} , \quad \hat{r} = \frac{rb}{2V} \quad (13.45)$$

Asimismo, para estos vuelos curvilíneos en donde las velocidades angulares lateral-direccionales no son despreciables, es preciso modificar los modelos propuestos para las fuerzas en los mandos direccional y lateral (expresiones (13.35) y (13.40)), de la forma siguiente:

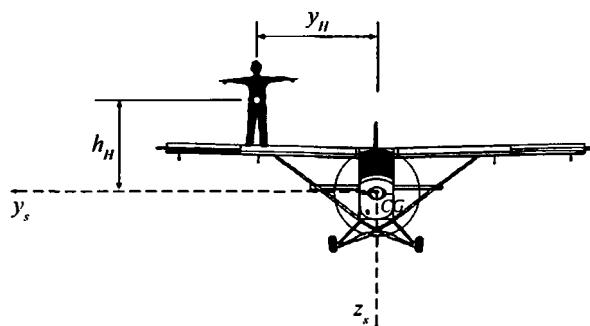
$$\begin{aligned} F_r &= -G_rq\eta_vS_rc_r(C_{hr\beta}\beta + C_{hr\delta_r}\delta_r + C_{hr\hat{p}}\hat{p} + C_{hr\hat{r}}\hat{r} + C_{hr\delta_{tr}}\delta_{tr}) \\ F_a &= -G_aqS_ac_a(C_{ha\delta_a}\delta_a + C_{ha\hat{p}}\hat{p} + C_{ha\hat{r}}\hat{r}) \quad (13.46) \end{aligned}$$

Las nuevas derivadas de estabilidad lateral-direccionales que aparecen en las dos expresiones anteriores se estudiarán con más detalle en el capítulo 15.

13.9. Problemas 13.1 y 13.2

PROBLEMA 13.1

Un avión de ala alta, simétrico másica y geométricamente, pretende realizar un vuelo de exhibición horizontal, rectilíneo y estacionario con un hombre encima de su ala. El acróbata puede desplazarse lateralmente por encima del ala siguiendo una línea contenida en el plano $y_s - z_s$, de forma que su centro de masas se sitúe a una distancia y_H del plano de simetría del avión.



Se supone además que:

1. Las acciones exteriores introducidas por el acróbata se reducen a las generadas por su peso y por su resistencia aerodinámica.
2. Se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión sin acróbatas (en concreto, el peso W , la superficie alar S y $C_{Y\delta_a} = C_{n\delta_a} = 0$), así como el peso del hombre, W_H , la distancia vertical representada en la figura adjunta, h_H , el coeficiente de resistencia del hombre, C_{DH} (referido a una superficie de referencia, S_H) y la densidad atmosférica, ρ .
3. El empuje del avión pasa por su centro de masas y su componente perpendicular a la trayectoria es despreciable; y todos los ángulos que intervienen en el problema son pequeños.

Se pide:

- 1º) Determinar las incógnitas lateral-direccionales del problema en función de y_H y de la velocidad de vuelo V , para las dos situaciones siguientes:

- a) Alas a nivel.
- b) Resbalamiento nulo.

2º) Determinar, para las dos situaciones del apartado anterior, el máximo desplazamiento posible del acróbata, y_H máx, suponiendo conocidas las deflexiones máximas y mínimas permitidas para los alerones, δ_a máx y δ_a mín, y el timón de dirección, δ_r máx y δ_r mín.

Solución:

1º-a) Alas a nivel ($\phi = 0$): Para esta situación el avión necesariamente volará con ángulo de resbalamiento distinto de cero. Las dos ecuaciones de momentos alrededor de los ejes x_s y z_s , y la ecuación de fuerzas según el eje y_s , quedan como:

$$qSb(C_{l\beta}\beta + C_{l\delta_a}\delta_a + C_{l\delta_r}\delta_r) + W_H y_H - D_H h_H \beta = 0$$

$$qSb(C_{n\beta}\beta + C_{n\delta_r}\delta_r) + D_H y_H = 0$$

$$qS(C_{Y\beta}\beta + C_{Y\delta_r}\delta_r) - D_H \beta = 0$$

Las tres incógnitas lateral-direccionales del problema son β , δ_a , δ_r .

Reorganizando las expresiones anteriores:

$$C'_{l\beta}\beta + C_{l\delta_a}\delta_a + C_{l\delta_r}\delta_r = -\frac{W_H}{qS} \hat{y}_H$$

$$C_{n\beta}\beta + C_{n\delta_r}\delta_r = -\frac{C_{DH} S_H}{S} \hat{y}_H$$

$$C'_{Y\beta}\beta + C_{Y\delta_r}\delta_r = 0$$

donde:

$$C'_{l\beta} = C_{l\beta} - C_{DH} \frac{S_H h_H}{Sb}; \quad \hat{y}_H = \frac{y_H}{b}$$

$$C'_{Y\beta} = C_{Y\beta} - C_{DH} \frac{S_H}{S}$$

y despejando las tres incógnitas:

$$\beta = \frac{C_{DH} S_H}{S} \frac{C_{Y\delta_r}}{C_{n\delta_r} C'_{Y\beta} - C_{n\beta} C_{Y\delta_r}} \hat{y}_H$$

$$\delta_a = -\frac{1}{C_{l\delta_a}} \left(\frac{W_H}{qS} + \frac{C_{DH} S_H}{S} \frac{C'_{l\beta} C_{Y\delta_r} - C'_{Y\beta} C_{l\delta_r}}{C_{n\delta_r} C'_{Y\beta} - C_{n\beta} C_{Y\delta_r}} \right) \hat{y}_H$$

$$\delta_r = -\frac{C_{DH}S_H}{S} \frac{C'_{Y\beta}}{C_{n\delta_r}C'_{Y\beta} - C_{n\beta}C_{Y\delta_r}} \hat{y}_H$$

1º-b) Resbalamiento nulo ($\beta = 0$): Para esta situación el avión necesariamente volará con ángulo de balance distinto de cero. Las dos ecuaciones de momentos alrededor de los ejes x_s y z_s , y la ecuación de fuerzas según el eje y_s , quedan como:

$$qSb(C_{l\delta_a}\delta_a + C_{l\delta_r}\delta_r) + W_H y_H + W_H h_H \phi = 0$$

$$qSbC_{n\delta_r}\delta_r + D_H y_H = 0$$

$$qSC_{Y\delta_r}\delta_r + (W + W_H)\phi = 0$$

Las tres incógnitas lateral-direccionales del problema son ϕ , δ_a , δ_r . Reorganizando las expresiones anteriores:

$$C_{l\delta_a}\delta_a + C_{l\delta_r}\delta_r + \frac{W_H h_H}{qSb}\phi = -\frac{W_H}{qS}\hat{y}_H$$

$$C_{n\delta_r}\delta_r = -\frac{C_{DH}S_H}{S}\hat{y}_H$$

$$C_{Y\delta_r}\delta_r + \frac{W + W_H}{qS}\phi = 0$$

y despejando las tres incógnitas:

$$\begin{aligned} \delta_a &= -\frac{1}{C_{l\delta_a}} \left(\frac{W_H}{qS} + \frac{C_{DH}S_H}{C_{n\delta_r}S} \left(C_{Y\delta_r} \frac{W_H h_H}{(W + W_H)b} - C_{l\delta_r} \right) \right) \hat{y}_H \\ \delta_r &= -\frac{C_{DH}S_H}{C_{n\delta_r}S} \hat{y}_H \\ \phi &= \frac{qS_H}{W + W_H} \frac{C_{Y\delta_r}C_{DH}}{C_{n\delta_r}} \hat{y}_H \end{aligned}$$

2º-a) Las deflexiones de alerones y timón de dirección son funciones lineales de \hat{y}_H y serán positivas o negativas dependiendo del signo de los distintos parámetros. Introduciendo valores típicos de las derivadas de estabilidad se supone que $\delta_a < 0$ y $\delta_r < 0$ (para $\hat{y}_H > 0$). Por tanto:

$$\delta_a = -\frac{1}{C_{l\delta_a}} \left(\frac{W_H}{qS} + \frac{C_{DH}S_H}{S} \frac{C'_{l\beta}C_{Y\delta_r} - C'_{Y\beta}C_{l\delta_r}}{C_{n\delta_r}C'_{Y\beta} - C_{n\beta}C_{Y\delta_r}} \right) \hat{y}_H = -k_1 \hat{y}_H$$

$$\delta_r = -\frac{C_{DH}S_H}{C_{n\delta_r}S} \frac{1}{1 - \frac{C_{n\beta}C_{Y\delta_r}}{C_{n\delta_r}C'_{Y\beta}}} \hat{y}_H = -k_2 \hat{y}_H$$

donde k_1 y k_2 tienen signos positivos. Entonces:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{y}_H \text{ máx } 1 = -\frac{1}{k_1} \delta_a \text{ mín} \\ \hat{y}_H \text{ máx } 2 = -\frac{1}{k_2} \delta_r \text{ mín} \end{array} \right\} \rightarrow \hat{y}_H \text{ máx} = \min(\hat{y}_H \text{ máx } 1, \hat{y}_H \text{ máx } 2)$$

2º-b) Las deflexiones de ailerones y timón de dirección son funciones lineales de \hat{y}_H y serán positivas o negativas dependiendo del signo de los distintos parámetros. Para $\hat{y}_H > 0$, se observa que $\delta_r < 0$, e introduciendo valores típicos de las derivadas de estabilidad, se supone que $\delta_a < 0$. Por tanto:

$$\delta_a = -\frac{1}{C_{l\delta_a}} \left(\frac{W_H}{qS} + \frac{C_{DH}S_H}{C_{n\delta_r}S} \left(C_{Y\delta_r} \frac{W_H h_H}{(W + W_H)b} - C_{l\delta_r} \right) \right) \hat{y}_H = -k_3 \hat{y}_H$$

$$\delta_r = -\frac{C_{DH}S_H}{C_{n\delta_r}S} \hat{y}_H = -k_4 \hat{y}_H$$

donde k_3 y k_4 tienen signos positivos. Entonces:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{y}_H \text{ máx } 3 = -\frac{1}{k_3} \delta_a \text{ mín} \\ \hat{y}_H \text{ máx } 4 = -\frac{1}{k_4} \delta_r \text{ mín} \end{array} \right\} \rightarrow \hat{y}_H \text{ máx} = \min(\hat{y}_H \text{ máx } 3, \hat{y}_H \text{ máx } 4)$$

PROBLEMA 13.2

Un avión simétrico másica y geométricamente está provisto de un grupo motopropulsor motor alternativo-hélice y efectúa, durante cierto intervalo de tiempo, un vuelo en el plano vertical con resbalamiento nulo y alas a nivel, a velocidad V y factor de carga $n > 1$, ambos constantes y conocidos.

Suponiendo además que:

1. Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (en concreto su peso es constante, la polar es parabólica de coeficientes constantes, $C_{n\delta_a} = 0$, el coeficiente de sustentación solo es función del ángulo de ataque, la fuerza aerodinámica lateral es despreciable, etc.).

2. El empuje del grupo motopropulsor tiene la misma dirección y sentido del eje x_b , pasa por el centro de masas del avión, su ángulo de ataque es pequeño y su componente normal a la trayectoria es despreciable.
3. El momento cinético de las partes giratorias del grupo motopropulsor está dirigido según el eje x_b y no es despreciable (la velocidad angular de la hélice y de las partes móviles respecto del avión, ω_m , y el momento de inercia de todas esas partes respecto del eje de giro, I_m , son constantes conocidas).
4. El rendimiento propulsivo de la hélice, η_P , es una constante conocida; no es despreciable el efecto del par motor sobre el equilibrio de momentos del avión.
5. ρ y g son constantes conocidas.

Se pide:

1º) Determinar el ángulo de asiento de velocidad, γ , en función del tiempo, suponiendo que en $t = 0$, $\gamma = 0$.

2º) Determinar las deflexiones del timón de profundidad, δ_e , de los ailerones, δ_a , y del timón de dirección, δ_r , en función del tiempo.

Solución:

1º) Las ecuaciones de fuerzas según los ejes x_w y z_w para el movimiento en un plano vertical son (ver sistema de ecuaciones (3.15)):

$$T \cos \varepsilon - D - W \sin \gamma = \frac{W}{g} \dot{V}$$

$$T \sin \varepsilon + L - W \cos \gamma = \frac{W}{g} V \dot{\gamma}$$

Introduciendo en este sistema la hipótesis 2 del enunciado y la condición de velocidad de vuelo constante, queda:

$$T - D - W \sin \gamma = 0$$

$$L - W \cos \gamma = \frac{W}{g} V \dot{\gamma}$$

De la segunda ecuación se obtiene la siguiente expresión para la derivada del ángulo de asiento de velocidad:

$$n - \cos \gamma = \frac{V}{g} \frac{d\gamma}{dt} \rightarrow \frac{g}{V} dt = \frac{d\gamma}{n - \cos \gamma}$$

Integrando directamente queda:

$$\tan \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \tan \left(\frac{g}{2V} \sqrt{n^2-1} \right) t$$

2º) El teorema del momento cinético, cuando existen partes giratorias respecto del avión con un momento cinético, \vec{h}_m , no despreciable, se formula como sigue:

$$\vec{G} = \frac{d\vec{h}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega} + \vec{h}_m)}{dt}$$

donde $\vec{\omega} = (p, q, r)^T = (0, q, 0)^T$ y $\vec{h}_m = I_m \omega_m \vec{i}_b = cte$. Así pues el teorema del momento cinético queda:

$$\vec{G} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{h}_m = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} - I_m \omega_m q \vec{k}_b$$

Por tanto es preciso añadir el término $-I_m \omega_m q \vec{k}_b$ a las ecuaciones generales deducidas en el capítulo 2 (ver sistema (2.12)), resultando:

$$L_T + L_A = 0$$

$$M_T + M_A = I_y \dot{q}$$

$$N_T + N_A = -I_m \omega_m q$$

Como el empuje del avión pasa por su centro de masas y está dirigido según el eje x_b , la única contribución del grupo motopropulsor a los momentos exteriores es un momento de balance dado por:

$$L_T = -\frac{P_m}{\omega_m}$$

Por tanto las ecuaciones de momento quedan:

$$L_A = \frac{P_m}{\omega_m}$$

$$M_A = I_y \dot{q}$$

$$N_A = -I_m \omega_m q$$

Si se introducen en las tres ecuaciones anteriores los desarrollos de los momentos aerodinámicos, se obtiene:

$$\frac{1}{2} \rho V^2 S b (C_{l\delta_a} \delta_a + C_{l\delta_r} \delta_r) = \frac{P_m}{\omega_m}$$

$$\frac{1}{2} \rho V^2 S c (C_{m0} + C_{m\alpha} \alpha + C_{m\delta_e} \delta_e + C_{mq} q) = I_y \dot{q}$$

$$\frac{1}{2} \rho V^2 S b C_{n\delta_r} \delta_r = -I_m \omega_m q$$

Las deflexiones del timón de profundidad, de los alerones y del timón de dirección son:

$$\delta_e = \frac{1}{C_{m\delta_e}} \left(-C_{m0} - C_{m\alpha} \alpha - C_{mq} q + \frac{2I_y}{\rho V^2 S c} \dot{q} \right)$$

$$\delta_a = \frac{2}{C_{l\delta_a} \rho V^2 S b} \left(\frac{P_m}{\omega_m} + \frac{C_{l\delta_r}}{C_{n\delta_r}} I_m \omega_m q \right)$$

$$\delta_r = -\frac{2I_m \omega_m}{C_{n\delta_r} \rho V^2 S b} q$$

En estas expresiones intervienen el ángulo de ataque, la velocidad angular de cabeceo y su derivada con respecto del tiempo, y la potencia del motor alternativo. Todas estas variables se obtienen a partir de los resultados del apartado 1º:

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha} \alpha = \frac{n}{V^2} \frac{2W}{\rho S} = cte \rightarrow \alpha = -\frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}} + \frac{n}{V^2} \frac{2W}{\rho S C_{L\alpha}} = cte$$

$$q = \dot{\theta} = \dot{\alpha} + \dot{\gamma} = \dot{\gamma} \rightarrow q = \frac{g}{V} (n - \cos \gamma)$$

$$\dot{q} = \ddot{\gamma} = \frac{g^2}{V^2} \sin \gamma (n - \cos \gamma)$$

$$\eta_P P_m = DV + WV \sin \gamma \rightarrow P_m = \frac{\rho S V^3}{2\eta_P} C_{D0} + \frac{2kW^2}{\rho S \eta_P} \frac{n^2}{V} + \frac{WV \sin \gamma}{\eta_P}$$

quedando todo expresado en función del ángulo de asiento de velocidad, que a su vez fue calculado en función del tiempo en el apartado 1º). Obsérvese

que los senos y cosenos del ángulo de asiento de velocidad que aparecen en las expresiones anteriores pueden calcularse en función del resultado del apartado 1º) mediante las siguientes relaciones trigonométricas:

$$\sin \gamma = \frac{2 \tan \frac{\gamma}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\gamma}{2}}; \quad \cos \gamma = \frac{1 - \tan^2 \frac{\gamma}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\gamma}{2}}$$

Estabilidad y control dinámicos. Linealización de las ecuaciones del movimiento

14.1. Introducción

Se inicia aquí el estudio de la estabilidad y controlabilidad dinámicas del avión, es decir, el estudio del movimiento que sigue a cierta condición de vuelo de referencia, como consecuencia de una perturbación exterior (estabilidad) o de un accionamiento de los mandos según una ley dada (controlabilidad).

El análisis mencionado se realiza efectuando la hipótesis de pequeñas perturbaciones a partir de una situación de vuelo estacionario, lo cual permite linealizar las ecuaciones del movimiento (apartado 14.2). La condición de vuelo estacionario que presenta mayor interés y para la que se desarrollan las correspondientes ecuaciones es la de vuelo simétrico, rectilíneo y con las alas a nivel.

En el apartado 14.3 se presenta el concepto de derivadas de estabilidad a través del denominado desarrollo de Bryan y en el apartado 14.4 se introducen estas derivadas en los sistemas de ecuaciones y se formulan de forma desacoplada los problemas longitudinal y lateral-direccional.

Por último, en los apartados 14.5 y 14.6 se presenta una formulación adimensional estándar para los movimientos longitudinal y lateral-direccional.

14.2. Linealización de las ecuaciones del movimiento

En el capítulo 2 se han desarrollado las ecuaciones dinámicas, las relaciones cinemáticas angulares y las relaciones cinemáticas lineales que conforman el modelo físico-matemático básico para el estudio del vuelo de los aviones (sistemas (2.12), (2.17) y (2.20)).

Estos sistemas de ecuaciones constituyen una base suficiente para analizar la estabilidad dinámica con mandos fijos (las deflexiones de los mandos se mantienen constantes e iguales a las de la condición de referencia) o la respuesta del avión a una entrada determinada de los mandos. Sin embargo, si se quiere analizar la estabilidad dinámica con mandos libres o los problemas relacionados con el diseño de los sistemas de mando, es preciso formular las ecuaciones dinámicas del movimiento alrededor de las líneas de charnela de las tres superficies aerodinámicas primarias.

Se supone que para el timón de profundidad, el timón de dirección y los alerones son despreciables todos los efectos iniciales de giro alrededor de sus charnelas, con excepción de los momentos de inercia de las superficies multiplicados por las derivadas segundas respecto del tiempo de los ángulos de deflexión de las mismas. Así se puede establecer que:

$$\begin{aligned} I_a \ddot{\delta}_a &= H_a + F'_a e_a \\ I_e \ddot{\delta}_e &= H_e + F'_e e_e \\ I_r \ddot{\delta}_r &= H_r + F'_r e_r \end{aligned} \quad (14.1)$$

donde, según la Figura 14.1, I_e e I_r son los momentos de inercia del timón de profundidad y del timón de dirección alrededor de sus charnelas, I_a es el momento de inercia de los dos alerones (izquierdo más derecho) alrededor de su charnela, H_e y H_r son los momentos aerodinámicos de charnela del timón de profundidad y del timón de dirección, H_a es el momento aerodinámico de charnela total de los dos alerones ($H_a = H_{ai} - H_{ad}$), F'_e y F'_r son las fuerzas directamente ejercidas sobre el timón de profundidad y el timón de dirección por los sistemas de mando longitudinal y direccional, y F'_a es la fuerza total directamente ejercida sobre los alerones por el sistema de mando lateral ($F'_a = F'_{ai} + F'_{ad}$). Téngase en cuenta que para deducir la ecuación dinámica alrededor de la charnela de los alerones se ha supuesto que no existe deflexión diferencial de los mismos ($\delta_a = \delta_{ai} = \delta_{ad}$).

A continuación se linealizan los sistemas (2.12), (2.17), (2.20) y (14.1) a partir de una condición de referencia de vuelo estacionario (considerando siempre pequeñas perturbaciones a partir del movimiento de referencia) y se presentan los sistemas linealizados válidos para el vuelo perturbado (entendiendo por vuelo perturbado cualquier situación de vuelo no estacionario).

Utilizando el subíndice “s” para el movimiento estacionario de referencia, las velocidades lineales y angulares y los ángulos de orientación

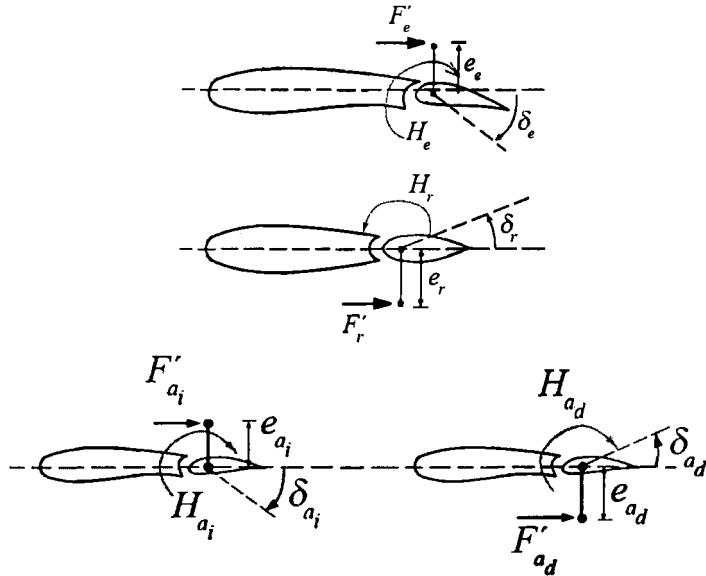


Figura 14.1. Acciones exteriores sobre las tres superficies aerodinámicas primarias de mando: timón de profundidad (esquema superior); timón de dirección (esquema intermedio); ailerones izquierdo y derecho (esquemas de la zona inferior).

del avión se expresan como sigue:

$$\begin{aligned}
 u &= u_s + \Delta u & x_e &= \dot{x}_{es} + \Delta \dot{x}_e & p &= p_s + \Delta p & \psi &= \psi_s + \Delta \psi \\
 v &= v_s + \Delta v & \dot{y}_e &= \dot{y}_{es} + \Delta \dot{y}_e & q &= q_s + \Delta q & \theta &= \theta_s + \Delta \theta \\
 w &= w_s + \Delta w & \dot{z}_e &= \dot{z}_{es} + \Delta \dot{z}_e & r &= r_s + \Delta r & \phi &= \phi_s + \Delta \phi
 \end{aligned} \tag{14.2}$$

Las componentes de todas las fuerzas y momentos que intervienen en el problema pueden escribirse como:

$$F_{Tx} = F_{Txs} + \Delta F_{Tx} \quad F_{Ax} = F_{Axs} + \Delta F_{Ax}$$

$$F_{Ty} = F_{Tys} + \Delta F_{Ty} \quad F_{Ay} = F_{Ays} + \Delta F_{Ay}$$

$$F_{Tz} = F_{Tzs} + \Delta F_{Tz} \quad F_{Az} = F_{Azs} + \Delta F_{Az}$$

$$L_T = L_{Ts} + \Delta L_T \quad L_A = L_{As} + \Delta L_A$$

... ...

$$\begin{aligned}
 M_T &= M_{Ts} + \Delta M_T & M_A &= M_{As} + \Delta M_A \\
 N_T &= N_{Ts} + \Delta N_T & N_A &= N_{As} + \Delta N_A \\
 H_a &= H_{as} + \Delta H_a & F'_a &= F'_{as} + \Delta F'_a \\
 H_e &= H_{es} + \Delta H_e & F'_e &= F'_{es} + \Delta F'_e \\
 H_r &= H_{rs} + \Delta H_r & F'_r &= F'_{rs} + \Delta F'_r
 \end{aligned} \tag{14.3}$$

Por último, perturbando las deflexiones de las superficies de mando queda:

$$\begin{aligned}
 \delta_a &= \delta_{as} + \Delta \delta_a \\
 \delta_e &= \delta_{es} + \Delta \delta_e \\
 \delta_r &= \delta_{rs} + \Delta \delta_r
 \end{aligned} \tag{14.4}$$

Por definición, en un vuelo estacionario las tres componentes de la velocidad lineal absoluta y las tres componentes de la velocidad angular absoluta, proyectadas en el sistema de ejes cuerpo, permanecen constantes con el tiempo (ver apartado 2.7). Por tanto en una condición de referencia de vuelo estacionario se cumple (ver sistemas (2.21), (2.17), (2.20) y (14.1)):

$$\begin{aligned}
 -mg \sin \theta_s + F_{Tx}s + F_{Ax}s &= m(-r_s v_s + q_s w_s) \\
 mg \cos \theta_s \sin \phi_s + F_{Ty}s + F_{Ay}s &= m(r_s u_s - p_s w_s) \\
 mg \cos \theta_s \cos \phi_s + F_{Tz}s + F_{Az}s &= m(-q_s u_s + p_s v_s) \\
 L_{Ts} + L_{As} &= (I_z - I_y)q_s r_s - J_{xz} p_s q_s \\
 M_{Ts} + M_{As} &= -(I_z - I_x)p_s r_s + J_{xz}(p_s^2 - r_s^2) \\
 N_{Ts} + N_{As} &= -(I_x - I_y)p_s q_s + J_{xz} q_s r_s
 \end{aligned} \tag{14.5}$$

$$H_{as} + F'_{as}e_a = 0$$

$$H_{es} + F'_{es}e_e = 0 \quad (14.6)$$

$$H_{rs} + F'_{rs}e_r = 0$$

$$p_s = \dot{\phi}_s - \dot{\psi}_s \sin \theta_s$$

$$q_s = \dot{\theta}_s \cos \phi_s + \dot{\psi}_s \cos \theta_s \sin \phi_s \quad (14.7)$$

$$r_s = -\dot{\theta}_s \sin \phi_s + \dot{\psi}_s \cos \theta_s \cos \phi_s$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{es} &= \cos \theta_s \cos \psi_s u_s + (\sin \phi_s \sin \theta_s \cos \psi_s - \cos \phi_s \sin \psi_s) v_s \\ &\quad + (\cos \phi_s \sin \theta_s \cos \psi_s + \sin \phi_s \sin \psi_s) w_s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_{es} &= \cos \theta_s \sin \psi_s u_s + (\sin \phi_s \sin \theta_s \sin \psi_s + \cos \phi_s \cos \psi_s) v_s \\ &\quad + (\cos \phi_s \sin \theta_s \sin \psi_s - \sin \phi_s \cos \psi_s) w_s \end{aligned} \quad (14.8)$$

$$\dot{z}_{es} = -\sin \theta_s u_s + \sin \phi_s \cos \theta_s v_s + \cos \phi_s \cos \theta_s w_s$$

Sustituyendo todas las variables perturbadas del movimiento, además de todas las componentes de fuerzas y momentos, en los sistemas dinámicos de fuerzas, momentos exteriores y momentos de charnela, y en las relaciones cinemáticas angulares y lineales (sistemas (2.12), (2.17), (2.20) y (14.1)), considerando la condición de vuelo estacionario de referencia y despreciando términos de orden superior al primero en las variables de perturbación, se obtiene:

$$-mg \cos \theta_s \Delta \theta + \Delta F_{Tx} + \Delta F_{Ax} = m(\Delta \dot{u} - v_s \Delta r - r_s \Delta v + w_s \Delta q + q_s \Delta w)$$

$$\begin{aligned} -mg \sin \theta_s \sin \phi_s \Delta \theta + mg \cos \theta_s \cos \phi_s \Delta \phi + \Delta F_{Ty} + \Delta F_{Ay} &= \\ = m(\Delta \dot{v} + u_s \Delta r + r_s \Delta u - w_s \Delta p - p_s \Delta w) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -mg \sin \theta_s \cos \phi_s \Delta \theta - mg \cos \theta_s \sin \phi_s \Delta \phi + \Delta F_{Tz} + \Delta F_{Az} &= \\ = m(\Delta \dot{w} - u_s \Delta q - q_s \Delta u + v_s \Delta p + p_s \Delta v) \end{aligned}$$

$$\Delta L_T + \Delta L_A = I_x \Delta \dot{p} - J_{xz} \Delta \dot{r} + (I_z - I_y)(q_s \Delta r + r_s \Delta q) - J_{xz}(p_s \Delta q + q_s \Delta p)$$

...

$$\begin{aligned} \Delta M_T + \Delta M_A &= I_y \Delta \dot{q} - (I_z - I_x)(p_s \Delta r + r_s \Delta p) + J_{xz}(2p_s \Delta p - 2r_s \Delta r) \\ \Delta N_T + \Delta N_A &= -J_{xz} \Delta \dot{p} + I_z \Delta \dot{r} - (I_x - I_y)(p_s \Delta q + q_s \Delta p) + J_{xz}(q_s \Delta r + r_s \Delta q) \end{aligned} \quad (14.9)$$

$$I_a \Delta \ddot{\delta}_a = \Delta H_a + \Delta F'_a e_a$$

$$I_e \Delta \ddot{\delta}_e = \Delta H_e + \Delta F'_e e_e \quad (14.10)$$

$$I_r \Delta \ddot{\delta}_r = \Delta H_r + \Delta F'_r e_r$$

$$\Delta p = \Delta \dot{\phi} - \sin \theta_s \Delta \dot{\psi} - \dot{\psi}_s \cos \theta_s \Delta \theta$$

$$\begin{aligned} \Delta q &= \cos \phi_s \Delta \dot{\theta} + \sin \phi_s \cos \theta_s \Delta \dot{\psi} - (\dot{\theta}_s \sin \phi_s - \dot{\psi}_s \cos \phi_s \cos \theta_s) \Delta \phi - \\ &\quad - \dot{\psi}_s \sin \phi_s \sin \theta_s \Delta \theta \\ \Delta r &= \cos \phi_s \cos \theta_s \Delta \dot{\psi} - \sin \phi_s \Delta \dot{\theta} - (\dot{\psi}_s \sin \phi_s \cos \theta_s + \dot{\theta}_s \cos \phi_s) \Delta \phi - \\ &\quad - \dot{\psi}_s \cos \phi_s \sin \theta_s \Delta \theta \end{aligned} \quad . \quad (14.11)$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}_e &= \cos \theta_s \cos \psi_s \Delta u + (\sin \phi_s \sin \theta_s \cos \psi_s - \cos \phi_s \sin \psi_s) \Delta v + \\ &\quad + (\cos \phi_s \sin \theta_s \cos \psi_s + \sin \phi_s \sin \psi_s) \Delta w - \\ &\quad - [\cos \theta_s \sin \psi_s u_s + (\sin \phi_s \sin \theta_s \sin \psi_s + \cos \phi_s \cos \psi_s) v_s + \\ &\quad + (\cos \phi_s \sin \theta_s \sin \psi_s - \sin \phi_s \cos \psi_s) w_s] \Delta \psi + \\ &\quad + (-\sin \theta_s u_s + \sin \phi_s \cos \theta_s v_s + \cos \phi_s \cos \theta_s w_s) \cos \psi_s \Delta \theta + \\ &\quad + [(\cos \phi_s \sin \theta_s \cos \psi_s + \sin \phi_s \sin \psi_s) v_s - \\ &\quad - (\sin \phi_s \sin \theta_s \cos \psi_s - \cos \phi_s \sin \psi_s) w_s] \Delta \phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{y}_e &= \cos \theta_s \sin \psi_s \Delta u + (\sin \phi_s \sin \theta_s \sin \psi_s + \cos \phi_s \cos \psi_s) \Delta v + \\ &\quad + (\cos \phi_s \sin \theta_s \sin \psi_s - \sin \phi_s \cos \psi_s) \Delta w + \\ &\quad + [\cos \theta_s \cos \psi_s u_s + (\sin \phi_s \sin \theta_s \cos \psi_s - \cos \phi_s \sin \psi_s) v_s + \\ &\quad + (\cos \phi_s \sin \theta_s \cos \psi_s + \sin \phi_s \sin \psi_s) w_s] \Delta \psi + \\ &\quad + (-\sin \theta_s u_s + \sin \phi_s \cos \theta_s v_s + \cos \phi_s \cos \theta_s w_s) \sin \psi_s \Delta \theta + \\ &\quad + [(\cos \phi_s \sin \theta_s \sin \psi_s - \sin \phi_s \cos \psi_s) v_s - \\ &\quad - (\sin \phi_s \sin \theta_s \sin \psi_s + \cos \phi_s \cos \psi_s) w_s] \Delta \phi \end{aligned} \quad (14.12)$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{z}_e &= -\sin \theta_s \Delta u + \sin \phi_s \cos \theta_s \Delta v + \cos \phi_s \cos \theta_s \Delta w - \\ &\quad - (\cos \theta_s u_s + \sin \phi_s \sin \theta_s v_s + \cos \phi_s \sin \theta_s w_s) \Delta \theta + \\ &\quad + (\cos \phi_s \cos \theta_s v_s - \sin \phi_s \cos \theta_s w_s) \Delta \phi \end{aligned}$$

14.2.1. Particularización para una condición de referencia de vuelo estacionario rectilíneo simétrico con las alas a nivel

Para esta condición de referencia particular se cumple:

- Velocidad inicial en el plano de simetría: $v_s = \beta_s = 0$
- Ángulo de balance inicial nulo: $\phi_s = 0$
- Velocidad angular inicial nula: $p_s = q_s = r_s = \dot{\psi}_s = \dot{\theta}_s = \dot{\phi}_s = 0$

Introduciendo estos valores en los sistemas (14.9), (14.10), (14.11) y (14.12), queda:

$$\begin{aligned} -mg \cos \theta_s \Delta \theta + \Delta F_{Tx} + \Delta F_{Ax} &= m(\Delta \dot{u} + w_s \Delta q) \\ mg \cos \theta_s \Delta \phi + \Delta F_{Ty} + \Delta F_{Ay} &= m(\Delta \dot{v} + u_s \Delta r - w_s \Delta p) \\ -mg \sin \theta_s \Delta \theta + \Delta F_{Tz} + \Delta F_{Az} &= m(\Delta \dot{w} - u_s \Delta q) \\ \Delta L_T + \Delta L_A &= I_x \Delta \dot{p} - J_{xz} \Delta \dot{r} \\ \Delta M_T + \Delta M_A &= I_y \Delta \dot{q} \\ \Delta N_T + \Delta N_A &= -J_{xz} \Delta \dot{p} + I_z \Delta \dot{r} \end{aligned} \tag{14.13}$$

$$\begin{aligned} I_a \Delta \ddot{\delta}_a &= \Delta H_a + \Delta F'_a e_a \\ I_e \Delta \ddot{\delta}_e &= \Delta H_e + \Delta F'_e e_e \\ I_r \Delta \ddot{\delta}_r &= \Delta H_r + \Delta F'_r e_r \end{aligned} \tag{14.14}$$

$$\Delta p = \Delta \dot{\phi} - \sin \theta_s \Delta \dot{\psi}$$

$$\begin{aligned} \Delta q &= \Delta \dot{\theta} \\ \Delta r &= \cos \theta_s \Delta \dot{\psi} \end{aligned} \tag{14.15}$$

$$\begin{aligned}
\Delta \dot{x}_e &= \cos \theta_s \cos \psi_s \Delta u - \sin \psi_s \Delta v + \sin \theta_s \cos \psi_s \Delta w - \\
&\quad - (\cos \theta_s \sin \psi_s u_s + \sin \theta_s \sin \psi_s w_s) \Delta \psi + \\
&\quad + (- \sin \theta_s u_s + \cos \theta_s w_s) \cos \psi_s \Delta \theta + \sin \psi_s w_s \Delta \phi \\
\Delta \dot{y}_e &= \cos \theta_s \sin \psi_s \Delta u + \cos \psi_s \Delta v + \sin \theta_s \sin \psi_s \Delta w + \quad (14.16) \\
&\quad + (\cos \theta_s \cos \psi_s u_s + \sin \theta_s \cos \psi_s w_s) \Delta \psi + \\
&\quad + (- \sin \theta_s u_s + \cos \theta_s w_s) \sin \psi_s \Delta \theta - \cos \psi_s w_s \Delta \phi \\
\Delta \dot{z}_e &= - \sin \theta_s \Delta u + \cos \theta_s \Delta w - (\cos \theta_s u_s + \sin \theta_s w_s) \Delta \theta
\end{aligned}$$

Si los teoremas de la cantidad de movimiento y del momento cinético se proyectan en unos ejes cuerpo particulares llamados **ejes estabilidad** (ver apartado 1.2.5) se cumple que:

$$w_s = \alpha_s = 0 \quad (14.17)$$

Utilizando esta igualdad, las ecuaciones dinámicas y las relaciones cinemáticas angulares inversas quedan como:

$$\begin{aligned}
-mg \cos \theta_s \Delta \theta + \Delta X &= m \Delta \dot{u} \\
mg \cos \theta_s \Delta \phi + \Delta Y &= m(\Delta \dot{v} + u_s \Delta r) \\
-mg \sin \theta_s \Delta \theta + \Delta Z &= m(\Delta \dot{w} - u_s \Delta q) \\
\Delta L &= I_x \Delta \dot{p} - J_{xz} \Delta \dot{r} \quad (14.18) \\
\Delta M &= I_y \Delta \dot{q} \\
\Delta N &= -J_{xz} \Delta \dot{p} + I_z \Delta \dot{r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_a \Delta \ddot{\delta}_a &= \Delta H_a + \Delta F'_a e_a \\
I_e \Delta \ddot{\delta}_e &= \Delta H_e + \Delta F'_e e_e \quad (14.19) \\
I_r \Delta \ddot{\delta}_r &= \Delta H_r + \Delta F'_r e_r
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta \dot{\phi} &= \Delta p + \tan \theta_s \Delta r \\ \Delta \dot{\theta} &= \Delta q \\ \Delta \dot{\psi} &= \sec \theta_s \Delta r\end{aligned}\tag{14.20}$$

donde se han agrupado las componentes propulsivas y aerodinámicas de las fuerzas y momentos totales bajo los símbolos ΔX , ΔY , ΔZ , ΔL , ΔM y ΔN .

Utilizando ejes estabilidad, las relaciones cinemáticas lineales quedan como:

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x}_e &= \cos \theta_s \cos \psi_s \Delta u - \sin \psi_s \Delta v + \sin \theta_s \cos \psi_s \Delta w - \\ &\quad - \cos \theta_s \sin \psi_s u_s \Delta \psi - \sin \theta_s \cos \psi_s u_s \Delta \theta \\ \Delta \dot{y}_e &= \cos \theta_s \sin \psi_s \Delta u + \cos \psi_s \Delta v + \sin \theta_s \sin \psi_s \Delta w + \\ &\quad + \cos \theta_s \cos \psi_s u_s \Delta \psi - \sin \theta_s \sin \psi_s u_s \Delta \theta \\ \Delta \dot{z}_e &= - \sin \theta_s \Delta u + \cos \theta_s \Delta w - \cos \theta_s u_s \Delta \theta\end{aligned}\tag{14.21}$$

Para la determinación de leyes horarias y trayectorias de aviones es habitual situar el origen de ángulos de guiñada en el plano vertical dentro del cual se efectúa el vuelo rectilíneo estacionario de referencia; es decir, se toma por convenio $\psi_s = 0$. Según esto las relaciones cinemáticas lineales se simplifican aún más:

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x}_e &= \cos \theta_s \Delta u + \sin \theta_s \Delta w - \sin \theta_s u_s \Delta \theta \\ \Delta \dot{y}_e &= \Delta v + \cos \theta_s u_s \Delta \psi \\ \Delta \dot{z}_e &= - \sin \theta_s \Delta u + \cos \theta_s \Delta w - \cos \theta_s u_s \Delta \theta\end{aligned}\tag{14.22}$$

14.3. Derivadas de estabilidad y linealización de los términos aerodinámicos y propulsivos

Para concluir el proceso de linealización es preciso expresar las componentes de perturbación de las fuerzas y momentos que aparecen en los sistemas (14.18) y (4.19), en función de las variables del movimiento de perturbación.

El problema de la linealización de los términos aerodinámicos y propulsivos es el más crítico en todo el desarrollo para la obtención de las

ecuaciones linealizadas finales. Por ser el movimiento de perturbación del avión no estacionario en general, la corriente es asimismo no estacionaria. En estas condiciones, la aerodinámica no estacionaria enseña que cada una de las coordenadas generalizadas del movimiento depende no solamente del valor actual de cada coordenada, sino también de su historia.

En forma simbólica, una expresión lineal para la contribución de, por ejemplo, $\Delta u(t)$ a $\Delta X(t)$ sería:

$$\Delta X(t) = \int_{\tau_i}^t \Delta u(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (14.23)$$

donde

$\tau \equiv$ Variable de integración.

$h(t - \tau) \equiv$ Admitancia impulsional, que representa la respuesta ΔX en el instante t correspondiente a un impulso unitario en u en el instante τ .

$\tau_i \equiv$ Valor de τ para el que se considera que comienza el movimiento perturbado.

Si $\Delta u(\tau)$ es desarrollable en serie de Taylor alrededor de t , se cumple:

$$\begin{aligned} \Delta u(\tau) &= \Delta u(t) + (\tau - t)\Delta \dot{u}(t) + \dots \\ \Delta X(t) &= \Delta u(t) \int_{\tau_i}^t h(t - \tau) d\tau + \Delta \dot{u}(t) \int_{\tau_i}^t (\tau - t)h(t - \tau) d\tau + \dots \end{aligned} \quad (14.24)$$

Reteniendo los dos primeros términos del desarrollo queda:

$$\Delta X = X_u \Delta u + X_{\dot{u}} \Delta \dot{u} \quad (14.25)$$

donde se denominan **Derivadas de Estabilidad a:**

$$X_u = \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right)_s, \quad X_{\dot{u}} = \left(\frac{\partial X}{\partial \dot{u}} \right)_s \quad (14.26)$$

Obsérvese que las derivadas de estabilidad anteriores pueden calcularse en condiciones de perturbación nula. Por tanto, se considera de ahora en adelante que las fuerzas y momentos aerodinámicos y propulsivos son una función lineal de los valores instantáneos de las variables de perturbación y de sus derivadas primeras.

Dos observaciones a este desarrollo (denominado **Desarrollo de Bryan** en honor al matemático británico George H. Bryan, quién lo introdujo en 1911) son las siguientes:

- Las fuerzas y momentos lateral-direccionales son idénticamente nulos en el movimiento longitudinal. Por ello, las derivadas de estabilidad de las fuerzas y momentos lateral-direccionales con respecto a las variables longitudinales son cero (ver Figura 14.2, esquema superior) y puede escribirse:

$$\begin{aligned}\Delta Y, \Delta L, \Delta N, \Delta H_a, \Delta H_r = \\ = f(\Delta v, \Delta p, \Delta r, \Delta \dot{v}, \Delta \dot{p}, \Delta \dot{r}, \Delta \delta_a, \Delta \delta_r, \Delta \dot{\delta}_a, \Delta \dot{\delta}_r)\end{aligned}$$

- Las fuerzas y momentos longitudinales son funciones par de las variables lateral-direccionales. Por ello, las derivadas de estabilidad de las fuerzas y momentos longitudinales con respecto a las variables lateral-direccionales, calculadas en la condición de referencia, son cero (ver Figura 14.2, esquema inferior) y puede escribirse:

$$\Delta X, \Delta Z, \Delta M, \Delta H_e = f(\Delta u, \Delta w, \Delta q, \Delta \dot{u}, \Delta \dot{w}, \Delta \dot{q}, \Delta \delta_e, \Delta \dot{\delta}_e)$$

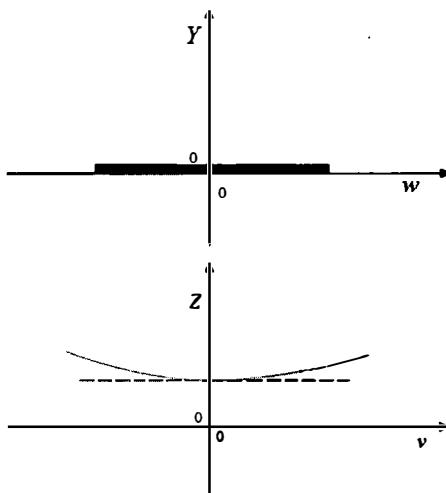


Figura 14.2. Representación esquemática de las fuerzas y momentos aerodinámicos y propulsivos: lateral-direccionales (esquema superior), longitudinales (esquema inferior).

Introduciendo estos desarrollos en las 12 ecuaciones de los sistemas (14.18), (14.19) y (14.20), se observa que existe desacoplamiento entre el movimiento longitudinal y el lateral-direccional, ya que:

- Si $\Delta v = \Delta p = \Delta r = \Delta \psi = \Delta \phi = \Delta \delta_a = \Delta \delta_r = 0$, sólo quedan las ecuaciones 1^a, 3^a, 5^a, 8^ay 11^a (el resto de ecuaciones son idénticamente nulas), que dan lugar a los **modos longitudinales o simétricos**.
- Si $\Delta u = \Delta w = \Delta q = \Delta \theta = \Delta \delta_e = 0$, sólo quedan las ecuaciones 2^a, 4^a, 6^a, 7^a, 9^a, 10^ay 12^a (el resto de ecuaciones son idénticamente nulas), que proporcionan los **modos lateral-direccionales o no simétricos**.

Con objeto de simplificar aún más el cálculo de las fuerzas y momentos aerodinámicos y propulsivos de perturbación, pueden realizarse las hipótesis siguientes:

- De todos los términos que contienen aceleraciones lineales o angulares del avión solamente son apreciables, en algunos casos, los correspondientes a \dot{w} .
- Además, son despreciables las siguientes derivadas de estabilidad:

$$X_q, X_{\dot{w}}, X_{\dot{\delta}_e}, Z_{\dot{\delta}_e}, Y_{\dot{\delta}_a}, Y_{\dot{\delta}_r}, L_{\dot{\delta}_r}, N_{\dot{\delta}_a}, H_{a\delta_r}, H_{a\dot{\delta}_r}, H_{r\delta_a}, H_{r\dot{\delta}_a}$$

Según todo lo anterior, se obtiene finalmente:

$$\Delta X = X_u \Delta u + X_w \Delta w + X_{\delta_e} \Delta \delta_e$$

$$\Delta Y = Y_v \Delta v + Y_p \Delta p + Y_r \Delta r + Y_{\delta_r} \Delta \delta_r$$

$$\Delta Z = Z_u \Delta u + Z_w \Delta w + Z_q \Delta q + Z_{\dot{w}} \Delta \dot{w} + Z_{\delta_e} \Delta \delta_e$$

$$\Delta L = L_v \Delta v + L_p \Delta p + L_r \Delta r + L_{\delta_a} \Delta \delta_a + L_{\dot{\delta}_a} \Delta \dot{\delta}_a + L_{\delta_r} \Delta \delta_r$$

$$\Delta M = M_u \Delta u + M_w \Delta w + M_q \Delta q + M_{\dot{w}} \Delta \dot{w} + M_{\delta_e} \Delta \delta_e + M_{\dot{\delta}_e} \Delta \dot{\delta}_e$$

$$\Delta N = N_v \Delta v + N_p \Delta p + N_r \Delta r + N_{\delta_a} \Delta \delta_a + N_{\dot{\delta}_r} \Delta \dot{\delta}_r + N_{\dot{\delta}_r} \Delta \dot{\delta}_r$$

$$\Delta H_a = H_{ap} \Delta p + H_{ar} \Delta r + H_{a\delta_a} \Delta \delta_a + H_{a\dot{\delta}_a} \Delta \dot{\delta}_a$$

$$\Delta H_e = H_{eu} \Delta u + H_{ew} \Delta w + H_{eq} \Delta q + H_{e\dot{w}} \Delta \dot{w} + H_{e\delta_e} \Delta \delta_e + H_{e\dot{\delta}_e} \Delta \dot{\delta}_e$$

$$\Delta H_r = H_{rv} \Delta v + H_{rp} \Delta p + H_{rr} \Delta r + H_{r\delta_r} \Delta \delta_r + H_{r\dot{\delta}_r} \Delta \dot{\delta}_r$$

(14.27)

14.4. Ecuaciones linealizadas dimensionales

Sustituyendo las expresiones (14.27) en los sistemas (14.18), (14.19) y (14.20), se obtienen los dos sistemas desacoplados siguientes:

Ecuaciones longitudinales:

$$\begin{aligned}
 & \left(X_u - m \frac{d}{dt} \right) \Delta u + X_w \Delta w - mg \cos \theta_s \Delta \theta = -X_{\delta_e} \Delta \delta_e \\
 Z_u \Delta u + \left(Z_w + (Z_{\dot{w}} - m) \frac{d}{dt} \right) \Delta w + \left[(Z_q + mu_s) \frac{d}{dt} - mg \sin \theta_s \right] \Delta \theta = & -Z_{\delta_e} \Delta \delta_e \\
 M_u \Delta u + \left(M_w + M_{\dot{w}} \frac{d}{dt} \right) \Delta w + \left(M_q \frac{d}{dt} - I_y \frac{d^2}{dt^2} \right) \Delta \theta = & - \left(M_{\delta_e} + M_{\dot{\delta}_e} \frac{d}{dt} \right) \Delta \delta_e \\
 H_{eu} \Delta u + \left(H_{ew} + H_{e\dot{w}} \frac{d}{dt} \right) \Delta w + H_{eq} \frac{d \Delta \theta}{dt} = & -H_{e\delta_e} - H_{e\dot{\delta}_e} \frac{d}{dt} + I_e \frac{d^2}{dt^2} \Delta \delta_e - \Delta F'_e e_e \\
 \frac{d \Delta \theta}{dt} = \Delta q &
 \end{aligned} \tag{14.28}$$

Ecuaciones lateral-direccionales:

$$\begin{aligned}
 & \left(Y_v - m \frac{d}{dt} \right) \Delta v + Y_p \Delta p + (Y_r - mu_s) \Delta r + mg \cos \theta_s \Delta \phi = -Y_{\delta_r} \Delta \delta_r \\
 L_v \Delta v + \left(L_p - I_x \frac{d}{dt} \right) \Delta p + \left(L_r + J_{xz} \frac{d}{dt} \right) \Delta r = & - \left(L_{\delta_a} + L_{\dot{\delta}_a} \frac{d}{dt} \right) \Delta \delta_a - L_{\delta_r} \Delta \delta_r \\
 N_v \Delta v + \left(N_p + J_{xz} \frac{d}{dt} \right) \Delta p + \left(N_r - I_z \frac{d}{dt} \right) \Delta r = & -N_{\delta_a} \Delta \delta_a - \left(N_{\delta_r} + N_{\dot{\delta}_r} \frac{d}{dt} \right) \Delta \delta_r \\
 & \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_{ap}\Delta p + H_{ar}\Delta r &= \left(-H_{a\delta_a} - H_{a\dot{\delta}_a} \frac{d}{dt} + I_a \frac{d^2}{dt^2} \right) \Delta \delta_a - \Delta F'_a e_a \\
 H_{rv}\Delta v + H_{rp}\Delta p + H_{rr}\Delta r &= \left(-H_{r\delta_r} - H_{r\dot{\delta}_r} \frac{d}{dt} + I_r \frac{d^2}{dt^2} \right) \Delta \delta_r - \Delta F'_r e_r \\
 \frac{d\Delta\phi}{dt} &= \Delta p + \tan \theta_s \Delta r \\
 \frac{d\Delta\psi}{dt} &= \sec \theta_s \Delta r
 \end{aligned} \tag{14.29}$$

14.5. Ecuaciones linealizadas adimensionales del movimiento longitudinal

A continuación se adimensionaliza el sistema de ecuaciones válido para el movimiento longitudinal, lo que resulta de interés porque en forma adimensional las soluciones de las ecuaciones del movimiento presentan el máximo de información en la forma más resumida.

En primer lugar se introducen las magnitudes características siguientes:

Longitud: $c/2$	Presión: $(1/2)\rho V^2$
Superficie: S	Fuerzas exteriores: $(1/2)\rho V^2 S$
Velocidad: u_s	Momento exterior: $(1/2)\rho V^2 S c$
Masa: $\rho S c / 2$	Momento charnela timón: $(1/2)\rho V^2 \eta_t S_e c_e$
Tiempo: $c/2u_s$	Momento inercia avión: $\rho S (c/2)^3$
	Momento inercia timón: $\rho \eta_t S_e (c_e/2)(c/2)^2$

A partir de las variables que intervienen en el problema y de las magnitudes de referencia anteriores, se definen las variables adimensionales que se recogen en la Tabla 14.1. Además se introduce el operador “D” (derivada respecto del tiempo adimensional) de la forma siguiente:

$$\frac{d}{dt} = \frac{2u_s}{c} \frac{d}{d\hat{t}} = \frac{2u_s}{c} D \tag{14.30}$$

Variable dimensional	Magnitud de referencia	Variable adimensional
X, Z	$\frac{1}{2}\rho V^2 S$	$C_X = \frac{X}{(1/2)\rho V^2 S}$ $C_Z = \frac{Z}{(1/2)\rho V^2 S}$
M	$\frac{1}{2}\rho V^2 Sc$	$C_m = \frac{M}{(1/2)\rho V^2 Sc}$
H_e	$\frac{1}{2}\rho\eta_t V^2 S_e c_e$	$C_{he} = \frac{H_e}{(1/2)\rho V^2 \eta_t S_e c_e}$
u, w	u_s	$\hat{u} = \frac{u}{u_s}, \hat{w} = \frac{w}{u_s}$
q	$\frac{2u_s}{c}$	$\hat{q} = \frac{qc}{2u_s}$
t	$\frac{c}{2u_s}$	$\hat{t} = \frac{t2u_s}{c}$
m	$\rho S \frac{c}{2}$	$\mu = \frac{m}{\rho Sc/2}$
I_y	$\rho S \left(\frac{c}{2}\right)^3$	$\hat{I}_y = \frac{I_y}{\rho S(c/2)^3}$
I_e	$\rho\eta_t S_e \left(\frac{c_e}{2}\right) \left(\frac{c}{2}\right)^2$	$\hat{I}_e = \frac{I_e}{\rho\eta_t S_e (c_e/2)(c/2)^2}$

Tabla 14.1. Variables dimensionales, magnitudes de referencia y variables adimensionales en el movimiento longitudinal.

En el sistema de ecuaciones (14.28) intervienen las siguientes derivadas de estabilidad:

$$\begin{array}{cccccc}
 X_u & X_w & & X_{\delta_e} & \\
 Z_u & Z_w & Z_{\dot{w}} & Z_q & Z_{\delta_e} & \\
 M_u & M_w & M_{\dot{w}} & M_q & M_{\delta_e} & M_{\dot{\delta}_e} \\
 H_{eu} & H_{ew} & H_{e\dot{w}} & H_{eq} & H_{e\delta_e} & H_{e\dot{\delta}_e}
 \end{array}$$

A continuación se deducen, a título de ejemplo, las expresiones de tres derivadas de estabilidad longitudinales ($X_u, Z_{\dot{w}}, M_{\dot{\delta}_e}$) en función de las variables adimensionales y de las magnitudes de referencia introducidas anteriormente. Para estas deducciones ha de tenerse en cuenta que, en el

sistema de ejes estabilidad, la velocidad instantánea del avión, V , viene dada por:

$$V^2 = (u_s + \Delta u)^2 + \Delta w^2 \quad (14.31)$$

- $X_u = \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right)_s = \left[\frac{\partial}{\partial u} (1/2\rho V^2 S C_X) \right]_s =$

$$= \left[\frac{1}{2} \rho 2(u_s + \Delta u) S C_X + \frac{1}{2} \rho V^2 S \frac{1}{u_s} C_{X\hat{u}} \right]_s$$

$$X_u = \rho u_s S C_{Xs} + \frac{\rho u_s S}{2} C_{X\hat{u}}$$

- $Z_{\dot{w}} = \left(\frac{\partial Z}{\partial \dot{w}} \right)_s$

$$\dot{w} = \frac{dw}{dt} = \frac{2u_s}{c} u_s D\alpha = \frac{2u_s^2}{c} \hat{\alpha}$$

$$Z_{\dot{w}} = \left(\frac{\partial Z}{\partial \dot{w}} \right)_s = \frac{c}{2u_s^2} \left[\frac{\partial}{\partial \hat{\alpha}} (1/2\rho V^2 S C_Z) \right]_s = \frac{c}{2u_s^2} \left[1/2\rho V^2 S C_{Z\hat{\alpha}} \right]_s$$

$$Z_{\dot{w}} = \frac{\rho Sc}{4} C_{Z\hat{\alpha}}$$

- $M_{\dot{\delta}_e} = \left(\frac{\partial M}{\partial \dot{\delta}_e} \right)_s$

$$\dot{\delta}_e = \frac{d\delta_e}{dt} = \frac{2u_s}{c} D\delta_e = \frac{2u_s}{c} \hat{\delta}_e$$

$$M_{\dot{\delta}_e} = \left(\frac{\partial M}{\partial \dot{\delta}_e} \right)_s = \frac{c}{2u_s} \left[\frac{\partial}{\partial \hat{\delta}_e} (1/2\rho V^2 S c C_m) \right]_s = \frac{c}{2u_s} \left[1/2\rho V^2 S c C_{m\hat{\delta}_e} \right]_s$$

$$M_{\dot{\delta}_e} = \frac{\rho u_s S c^2}{4} C_{m\hat{\delta}_e}$$

La Tabla 14.2 recoge los resultados que se obtienen para todas las derivadas de estabilidad longitudinales.

Introduciendo en las ecuaciones (14.28) las derivadas de estabilidad adimensionales recogidas en la Tabla 14.2 y el operador D , estas ecuaciones

	X	Z	M	H_e
$\frac{\partial}{\partial u}$	$\frac{\rho u_s S C_{Xs} + \rho u_s S}{2} C_{X\hat{u}}$	$\frac{\rho u_s S C_{Zs} + \rho u_s S}{2} C_{Z\hat{u}}$	$\frac{\rho u_s S c}{2} C_{m\hat{u}}$	$\frac{\rho u_s \eta_t S_e C_e C_{hes} + \rho u_s \eta_t S_e C_e C_{he\hat{u}}}{2}$
$\frac{\partial}{\partial w}$	$\frac{\rho u_s S}{2} C_{X\alpha}$	$\frac{\rho u_s S}{2} C_{Z\alpha}$	$\frac{\rho u_s S c}{2} C_{m\alpha}$	$\frac{\rho u_s \eta_t S_e C_e C_{he\alpha}}{2}$
$\frac{\partial}{\partial \dot{w}}$		$\frac{\rho S c}{4} C_{Z\hat{\alpha}}$	$\frac{\rho S c^2}{4} C_{m\hat{\alpha}}$	$\frac{\rho \eta_t S_e C_e C}{4} C_{he\hat{\alpha}}$
$\frac{\partial}{\partial q}$		$\frac{\rho u_s S c}{4} C_{Z\hat{q}}$	$\frac{\rho u_s S c^2}{4} C_{m\hat{q}}$	$\frac{\rho u_s \eta_t S_e C_e C}{4} C_{he\hat{q}}$
$\frac{\partial}{\partial \delta_e}$	$\frac{\rho u_s^2 S}{2} C_{X\delta_e}$	$\frac{\rho u_s^2 S}{2} C_{Z\delta_e}$	$\frac{\rho u_s^2 S c}{2} C_{m\delta_e}$	$\frac{\rho u_s^2 \eta_t S_e C_e C}{2} C_{he\delta_e}$
$\frac{\partial}{\partial \dot{\delta}_e}$			$\frac{\rho u_s S c^2}{4} C_{m\hat{\delta}_e}$	$\frac{\rho u_s \eta_t S_e C_e C}{4} C_{he\hat{\delta}_e}$

Tabla 14.2. Derivadas de estabilidad longitudinales.

se transforman en:

$$\begin{aligned}
 & (2\mu D - C_{X\hat{u}} + 2C_{Zs} \tan \theta_s) \Delta \hat{u} - C_{X\alpha} \Delta \alpha - C_{Zs} \Delta \theta = C_{X\delta_e} \Delta \delta_e \\
 & -(C_{Z\hat{u}} + 2C_{Zs}) \Delta \hat{u} + ((2\mu - C_{Z\hat{\alpha}}) D - C_{Z\alpha}) \Delta \alpha - ((2\mu + C_{Z\hat{q}}) D + \\
 & \quad + C_{Zs} \tan \theta_s) \Delta \theta = C_{Z\delta_e} \Delta \delta_e \\
 & -C_{m\hat{u}} \Delta \hat{u} - (C_{m\hat{\alpha}} D + C_{m\alpha}) \Delta \alpha + (\hat{I}_y D^2 - C_{m\hat{q}} D) \Delta \theta = \\
 & \quad = (C_{m\hat{\delta}_e} D + C_{m\delta_e}) \Delta \delta_e \tag{14.32}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (2C_{hes} + C_{he\hat{u}}) \Delta \hat{u} + (C_{he\hat{\alpha}} D + C_{he\alpha}) \Delta \alpha + C_{he\hat{q}} D \Delta \theta = \\
 & \quad = (\hat{I}_e D^2 - C_{he\hat{\delta}_e} D - C_{he\delta_e}) \Delta \delta_e - \Delta C_{fe}
 \end{aligned}$$

$$D \Delta \theta = \Delta \hat{q}$$

En la cuarta ecuación del sistema anterior, C_{hes} representa el coeficiente de momento de charnela del timón de profundidad en la condición de referencia (será nulo si el sistema de mando longitudinal es convencional reversible y el piloto vuela con mandos libres en esta condición de referencia) y ΔC_{fe} vendrá dado por:

$$\Delta C_{fe} = \frac{\Delta F'_e e_e}{1/2 \rho u_s^2 \eta_t S_e C_e} \tag{14.33}$$

Además, se ha tenido en cuenta que en la condición de referencia de vuelo rectilíneo simétrico estacionario, se cumple:

$$\begin{aligned} Z_s + mg \cos \theta_s &= 0 \rightarrow C_{Zs} = -\frac{mg \cos \theta_s}{1/2\rho u_s^2 S} \\ X_s - mg \sin \theta_s &= 0 \rightarrow C_{Xs} = \frac{mg \sin \theta_s}{1/2\rho u_s^2 S} = -C_{Zs} \tan \theta_s \end{aligned} \quad (14.34)$$

Para el estudio de la estabilidad dinámica longitudinal con mandos fijos ($\Delta\delta_e = 0$) o el estudio de la controlabilidad dinámica (respuesta al mando longitudinal), no es preciso considerar la ecuación de momentos de charnela (4^a ecuación del sistema (14.32)), y entonces es habitual reorganizar el sistema dinámico restante (ecuaciones 1^a, 2^a, 3^a y 5^a) en la forma:

$$\dot{\vec{X}} = F\vec{X} + B\vec{u} \quad (14.35)$$

donde se denomina **vector de estado** (en este caso con dimensión 4) a:

$$\vec{X} = \{\Delta\hat{u}, \Delta\alpha, \Delta\hat{q}, \Delta\theta\}^T \quad (14.36)$$

y vector de control (en este caso con dimensión 1) a:

$$\vec{u} = \Delta\delta_e \quad (14.37)$$

La derivada del vector de estado con respecto del tiempo adimensional será, por tanto, $\dot{\vec{X}} = D\vec{X} = \{D\Delta\hat{u}, D\Delta\alpha, D\Delta\hat{q}, D\Delta\theta\}^T$. Además F y B son las llamadas matriz del sistema y matriz de control, respectivamente, y vienen dadas por:

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ B_{31} \\ B_{41} \end{bmatrix} \quad (14.38)$$

$$\begin{aligned} \text{con } F_{11} &= \frac{C_{X\hat{u}} - 2C_{Zs}\tan\theta_s}{2\mu}, \quad F_{12} = \frac{C_{X\alpha}}{2\mu}, \quad F_{13} = 0, \quad F_{14} = \frac{C_{Zs}}{2\mu}, \\ F_{21} &= \frac{C_{Z\hat{u}} + 2C_{Zs}}{2\mu - C_{Z\hat{\alpha}}}, \quad F_{22} = \frac{C_{Z\alpha}}{2\mu - C_{Z\hat{\alpha}}}, \quad F_{23} = \frac{2\mu + C_{Z\hat{q}}}{2\mu - C_{Z\hat{\alpha}}}, \quad F_{24} = \frac{C_{Zs}\tan\theta_s}{2\mu - C_{Z\hat{\alpha}}}, \\ F_{31} &= \frac{C_{m\hat{u}}}{\hat{I}_y} + C_{m\hat{\alpha}} \frac{C_{Z\hat{u}} + 2C_{Zs}}{2\mu - C_{Z\hat{\alpha}}}, \quad F_{32} = \frac{C_{m\alpha}}{\hat{I}_y} + C_{m\hat{\alpha}} \frac{C_{Z\alpha}}{2\mu - C_{Z\hat{\alpha}}}, \quad F_{33} = \frac{C_{m\hat{q}}}{\hat{I}_y} + \end{aligned}$$

$$C_{m\hat{\alpha}} \frac{2\mu + C_{Z\dot{q}}}{2\mu - C_{Z\hat{\alpha}}}, F_{34} = C_{m\hat{\alpha}} \frac{C_{Zs} \tan \theta_s}{2\mu - C_{Z\hat{\alpha}}}, F_{41} = 0, F_{42} = 0, F_{43} = 1, F_{44} = 0,$$

$$B_{11} = \frac{C_{X\delta_e}}{2\mu}, B_{21} = \frac{C_{Z\delta_e}}{2\mu - C_{Z\hat{\alpha}}}, B_{31} = \frac{C_{m\delta_e}}{\hat{I}_y} + C_{m\hat{\alpha}} \frac{C_{Z\delta_e}}{2\mu - C_{Z\hat{\alpha}}}, B_{41} = 0.$$

Para efectuar el desarrollo anterior se ha supuesto $C_{m\hat{\delta}_e} = 0$.

14.6. Ecuaciones linealizadas adimensionales del movimiento lateral-direccional

A continuación se adimensionaliza el sistema de ecuaciones válido para el movimiento lateral-direccional, lo que resulta de interés porque en forma adimensional las soluciones de las ecuaciones del movimiento presentan el máximo de información en la forma más resumida.

En primer lugar se introducen las magnitudes características siguientes:

Longitud: $b/2$	Presión: $(1/2)\rho V^2$
Superficie: S	Fuerzas exteriores: $(1/2)\rho V^2 S$
Velocidad: u_s	Momentos exteriores: $(1/2)\rho V^2 S b$
Masa: $\rho S b/2$	Momentos charnela alerones: $(1/2)\rho V^2 S_a c_a$
Tiempo: $b/2u_s$	Momento charnela timón dirección: $(1/2)\rho V^2 \eta_v S_r c_r$
	Momentos inercia avión: $\rho S(b/2)^3$
	Momento inercia alerones: $\rho S_a(c_a/2)(b/2)^2$
	Momento inercia timón dirección: $\rho \eta_v S_r(c_r/2)(b/2)^2$

A partir de las magnitudes que intervienen en el problema y de las magnitudes de referencia anteriores, se definen las magnitudes adimensionales que se recogen en la Tabla 14.3. Además se define el operador “D” (derivada respecto del tiempo adimensional) de la forma siguiente:

$$\frac{d}{dt} = \frac{2u_s}{b} \frac{d}{d\hat{t}} = \frac{2u_s}{b} D \quad (14.39)$$

En el sistema de ecuaciones (14.29), intervienen las siguientes derivadas

Variable dimensional	Magnitud de referencia	Variable adimensional
Y	$\frac{1}{2}\rho V^2 S$	$C_Y = \frac{Y}{(1/2)\rho V^2 S}$
L, N	$\frac{1}{2}\rho V^2 Sb$	$C_l = \frac{L}{(1/2)\rho V^2 Sb}$ $C_n = \frac{N}{(1/2)\rho V^2 Sb}$
H_a	$\frac{1}{2}\rho V^2 S_a c_a$	$C_{ha} = \frac{H_a}{(1/2)\rho V^2 S_a c_a}$
H_r	$\frac{1}{2}\rho V^2 S_r c_r$	$C_{hr} = \frac{H_r}{(1/2)\rho V^2 \eta_v S_r c_r}$
v	u_s	$\hat{v} = \frac{v}{u_s} = \beta$
p, r	$\frac{2u_s}{b}$	$\hat{p} = \frac{pb}{2u_s}$ $\hat{r} = \frac{rb}{2u_s}$
t	$\frac{b}{2u_s}$	$\hat{t} = \frac{t2u_s}{b}$
m	$\rho S \frac{b}{2}$	$\mu = \frac{m}{\rho S b / 2}$
I_x, I_z, J_{xz}	$\rho S \left(\frac{b}{2}\right)^3$	$\hat{I}_x = \frac{I_x}{\rho S (b/2)^3}$ $\hat{I}_z = \frac{I_z}{\rho S (b/2)^3}$ $\hat{J}_{xz} = \frac{J_{xz}}{\rho S (b/2)^3}$
I_a	$\rho S_a \left(\frac{c_a}{2}\right) \left(\frac{b}{2}\right)^2$	$\hat{I}_a = \frac{I_a}{\rho S_a (c_a/2) (b/2)^2}$
I_r	$\rho \eta_v S_r \left(\frac{c_r}{2}\right) \left(\frac{b}{2}\right)^2$	$\hat{I}_r = \frac{I_r}{\rho \eta_v S_r (c_r/2) (b/2)^2}$

Tabla 14.3. Variables dimensionales, magnitudes de referencia y variables adimensionales en el movimiento lateral-direccional.

de estabilidad:

$$\begin{array}{cccccc}
 Y_v & Y_p & Y_r & & & Y_{\delta_r} \\
 L_v & L_p & L_r & L_{\delta_a} & L_{\dot{\delta}_a} & L_{\delta_r} \\
 N_v & N_p & N_r & N_{\delta_a} & & N_{\delta_r} & N_{\dot{\delta}_r} \\
 H_{ap} & H_{ar} & H_{a\delta_a} & & H_{a\dot{\delta}_a} & \\
 H_{rv} & H_{rp} & H_{rr} & & & H_{r\delta_r} & H_{r\dot{\delta}_r}
 \end{array}$$

A continuación se deducen, a título de ejemplo, las expresiones de tres derivadas de estabilidad lateral-direccionales ($Y_v, L_{\delta_a}, N_{\dot{\delta}_r}$) en función de las variables adimensionales y de las magnitudes de referencia introducidas anteriormente. Para estas deducciones ha de tenerse en cuenta que, en el sistema de ejes estabilidad, la velocidad instantánea del avión, V , ahora viene dada por:

$$V^2 = u_s^2 + \Delta v^2 \quad (14.40)$$

- $Y_v = \left(\frac{\partial Y}{\partial v} \right)_s = \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 S C_Y \right) \right]_s = \left[\rho S C_Y v + \frac{1}{2} \rho V^2 S \frac{1}{u_s} C_{Y\hat{v}} \right]_s$
- $Y_v = \frac{\rho u_s S}{2} C_{Y\beta}$
- $L_{\delta_a} = \left(\frac{\partial L}{\partial \delta_a} \right)_s = \left[\frac{\partial}{\partial \delta_a} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 S b C_l \right) \right]_s = \left[\frac{1}{2} \rho V^2 S b C_{l\delta_a} \right]_s$
- $L_{\delta_a} = \frac{\rho u_s^2 S b}{2} C_{l\delta_a}$
- $N_{\dot{\delta}_r} = \left(\frac{\partial N}{\partial \dot{\delta}_r} \right)_s$
- $$\dot{\delta}_r = \frac{d\delta_r}{dt} = \frac{2u_s}{b} D\delta_r = \frac{2u_s}{b} \hat{\delta}_r$$
- $$N_{\dot{\delta}_r} = \frac{b}{2u_s} \frac{\partial}{\partial \hat{\delta}_r} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 S b C_n \right)_s = \frac{b}{2u_s} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 S b C_{n\dot{\delta}_r} \right)_s$$
- $$N_{\dot{\delta}_r} = \frac{\rho u_s S b^2}{4} C_{n\dot{\delta}_r}$$

Las Tablas 14.4 y 14.5 recogen los resultados que se obtienen para todas las derivadas de estabilidad lateral-direccionales.

	Y	L	N
$\frac{\partial}{\partial v}$	$\frac{\rho u_s S}{2} C_{Y\beta}$	$\frac{\rho u_s S b}{2} C_{l\beta}$	$\frac{\rho u_s S b}{2} C_{n\beta}$
$\frac{\partial}{\partial p}$	$\frac{\rho u_s S b}{4} C_{Y\hat{p}}$	$\frac{\rho u_s S b^2}{4} C_{l\hat{p}}$	$\frac{\rho u_s S b^2}{4} C_{n\hat{p}}$
$\frac{\partial}{\partial r}$	$\frac{\rho u_s S b}{4} C_{Y\hat{r}}$	$\frac{\rho u_s S b^2}{4} C_{l\hat{r}}$	$\frac{\rho u_s S b^2}{4} C_{n\hat{r}}$
$\frac{\partial}{\partial \delta_a}$		$\frac{\rho u_s^2 S b}{2} C_{l\delta_a}$	$\frac{\rho u_s^2 S b}{2} C_{n\delta_a}$
$\frac{\partial}{\partial \dot{\delta}_a}$		$\frac{\rho u_s S b^2}{4} C_{l\hat{\delta}_a}$	
$\frac{\partial}{\partial \delta_r}$	$\frac{\rho u_s^2 S}{2} C_{Y\delta_r}$	$\frac{\rho u_s^2 S b}{2} C_{l\delta_r}$	$\frac{\rho u_s^2 S b}{2} C_{n\delta_r}$
$\frac{\partial}{\partial \dot{\delta}_r}$			$\frac{\rho u_s S b^2}{4} C_{n\hat{\delta}_r}$

Tabla 14.4. Derivadas de estabilidad lateral-direccionales (Y, L, N).

Introduciendo en las ecuaciones (14.29) las derivadas de estabilidad adimensionales recogidas en las Tablas 14.4 y 14.5 y el operador D, estas ecuaciones se transforman en:

$$(2\mu D - C_{Y\beta})\Delta\beta - C_{Y\hat{p}}\Delta\hat{p} + (2\mu - C_{Y\hat{r}})\Delta\hat{r} + C_{zs}\Delta\phi = C_{Y\delta_r}\Delta\delta_r$$

$$\begin{aligned} & -C_{l\beta}\Delta\beta + (\hat{I}_x D - C_{l\hat{p}})\Delta\hat{p} - (\hat{J}_{xz} D + C_{l\hat{r}})\Delta\hat{r} = \\ & = (C_{l\hat{\delta}_a} D + C_{l\delta_a})\Delta\delta_a + C_{l\delta_r}\Delta\delta_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -C_{n\beta}\Delta\beta - (\hat{J}_{xz} D + C_{n\hat{p}})\Delta\hat{p} + (\hat{I}_z D - C_{n\hat{r}})\Delta\hat{r} = \\ & = C_{n\delta_a}\Delta\delta_a + (C_{n\hat{\delta}_r} D + C_{n\delta_r})\Delta\delta_r \end{aligned}$$

$$C_{ha\hat{p}}\Delta\hat{p} + C_{ha\hat{r}}\Delta\hat{r} = (\hat{I}_a D^2 - C_{ha\hat{\delta}_a} D - C_{ha\delta_a})\Delta\delta_a - \Delta C_{fa}$$

$$C_{hr\beta}\Delta\beta + C_{hr\hat{p}}\Delta\hat{p} + C_{hr\hat{r}}\Delta\hat{r} = (\hat{I}_r D^2 - C_{hr\hat{\delta}_r} D - C_{hr\delta_r})\Delta\delta_r - \Delta C_{fr}$$

...

$$\begin{aligned} D\Delta\phi &= \Delta\hat{p} + \tan\theta_s\Delta\hat{r} \\ (14.41) \end{aligned}$$

$$D\Delta\psi = \sec\theta_s\Delta\hat{r}$$

	H_a	H_r
$\frac{\partial}{\partial v}$		$\frac{\rho u_s \eta_v S_r c_r}{2} C_{hr\beta}$
$\frac{\partial}{\partial p}$	$\frac{\rho u_s S_a c_a b}{4} C_{ha\hat{p}}$	$\frac{\rho u_s \eta_v S_r c_r b}{4} C_{hr\hat{p}}$
$\frac{\partial}{\partial r}$	$\frac{\rho u_s S_a c_a b}{4} C_{ha\hat{r}}$	$\frac{\rho u_s \eta_v S_r c_r b}{4} C_{hr\hat{r}}$
$\frac{\partial}{\partial \delta_a}$	$\frac{\rho u_s^2 S_a c_a}{2} C_{ha\delta_a}$	
$\frac{\partial}{\partial \dot{\delta}_a}$	$\frac{\rho u_s S_a c_a b}{4} C_{ha\dot{\delta}_a}$	
$\frac{\partial}{\partial \delta_r}$		$\frac{\rho u_s^2 \eta_v S_r c_r}{2} C_{hr\delta_r}$
$\frac{\partial}{\partial \dot{\delta}_r}$		$\frac{\rho u_s \eta_v S_r c_r b}{4} C_{hr\dot{\delta}_r}$

Tabla 14.5. Derivadas de estabilidad lateral-direccionales (H_a , H_r).

En las ecuaciones cuarta y quinta del sistema anterior ΔC_{fa} y ΔC_{fr} vienen dados por:

$$\Delta C_{fa} = \frac{\Delta F'_a e_a}{\frac{1}{2} \rho u_s^2 S_a c_a}, \quad \Delta C_{fr} = \frac{\Delta F'_r e_r}{\frac{1}{2} \rho u_s^2 \eta_v S_r c_r} \quad (14.42)$$

Para el estudio de la estabilidad dinámica lateral-direccional con mandos fijos ($\Delta\delta_a = \Delta\delta_r = 0$) o el estudio de la controlabilidad dinámica (respuesta a los mandos lateral-direccionales), no es preciso considerar las dos ecuaciones de momentos de charnela (4^a y 5^a ecuaciones del sistema (14.41)), y entonces es habitual reorganizar el sistema dinámico restante (ecuaciones 1^a, 2^a, 3^a y 6^a) en la forma:

$$\dot{\vec{X}} = F\vec{X} + B\vec{u} \quad (14.43)$$

donde se denomina vector de estado (en este caso con dimensión 4) a:

$$\vec{X} = \{\Delta\hat{v}, \Delta\hat{p}, \Delta\hat{r}, \Delta\phi\}^T \quad (14.44)$$

y vector de control (en este caso con dimensión 2) a:

$$\vec{u} = \{\Delta\delta_a, \Delta\delta_r\}^T \quad (14.45)$$

La derivada del vector de estado con respecto del tiempo adimensional será, por tanto, $\dot{\vec{X}} = D\vec{X} = \{D\Delta\hat{v}, D\Delta\hat{p}, D\Delta\hat{r}, D\Delta\phi\}^T$. Además F y B son las matrices del sistema y de control, respectivamente, y vienen dadas por:

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \\ B_{41} & B_{42} \end{bmatrix} \quad (14.46)$$

$$\text{con } F_{11} = \frac{C_{Y\beta}}{2\mu}, \quad F_{12} = \frac{C_{X\alpha}}{2\mu}, \quad F_{13} = -\frac{2\mu - C_{Y\hat{r}}}{2\mu}, \quad F_{14} = -\frac{C_{Zs}}{2\mu}, \quad F_{21} = \frac{C_{l\beta}\hat{I}_z + C_{n\beta}\hat{J}_{xz}}{\hat{I}_x\hat{I}_z - \hat{J}_{xz}^2}, \quad F_{22} = \frac{C_{l\hat{p}}\hat{I}_z + C_{n\hat{p}}\hat{J}_{xz}}{\hat{I}_x\hat{I}_z - \hat{J}_{xz}^2}, \quad F_{23} = \frac{C_{l\hat{r}}\hat{I}_z + C_{n\hat{r}}\hat{J}_{xz}}{\hat{I}_x\hat{I}_z - \hat{J}_{xz}^2}, \quad F_{24} = 0, \\ F_{31} = \frac{C_{n\beta}\hat{I}_x + C_{l\beta}\hat{J}_{xz}}{\hat{I}_x\hat{I}_z - \hat{J}_{xz}^2}, \quad F_{32} = \frac{C_{n\hat{p}}\hat{I}_x + C_{l\hat{p}}\hat{J}_{xz}}{\hat{I}_x\hat{I}_z - \hat{J}_{xz}^2}, \quad F_{33} = \frac{C_{n\hat{r}}\hat{I}_x + C_{l\hat{r}}\hat{J}_{xz}}{\hat{I}_x\hat{I}_z - \hat{J}_{xz}^2}, \\ F_{34} = 0, \quad F_{41} = 0, \quad F_{42} = 1, \quad F_{43} = \tan\theta_s, \quad F_{44} = 0, \quad B_{11} = 0, \quad B_{12} = \frac{C_{Y\delta_r}}{2\mu}, \\ B_{21} = \frac{C_{l\delta_a}\hat{I}_z + C_{n\delta_a}\hat{J}_{xz}}{\hat{I}_x\hat{I}_z - \hat{J}_{xz}^2}, \quad B_{22} = \frac{C_{l\delta_r}\hat{I}_z + C_{n\delta_r}\hat{J}_{xz}}{\hat{I}_x\hat{I}_z - \hat{J}_{xz}^2}, \quad B_{31} = \frac{C_{n\delta_a}\hat{I}_x + C_{l\delta_a}\hat{J}_{xz}}{\hat{I}_x\hat{I}_z - \hat{J}_{xz}^2}, \\ B_{32} = \frac{C_{n\delta_r}\hat{I}_x + C_{l\delta_r}\hat{J}_{xz}}{\hat{I}_x\hat{I}_z - \hat{J}_{xz}^2}, \quad B_{41} = 0, \quad B_{42} = 0.$$

Para efectuar el desarrollo anterior se ha supuesto $C_{l\hat{\delta}_a} = C_{n\hat{\delta}_r} = 0$. Obsérvese que la 2^a relación cinemática que proporciona la derivada con respecto del tiempo adimensional del ángulo de guiñada (7^a ecuación del sistema (14.41)) está desacoplada del resto.

14.7. Problemas 14.1 y 14.2

PROBLEMA 14.1

Un avión de características geométricas aerodinámicas y másicas conocidas vuela contra un viento de frente siempre horizontal, pero cuyo módulo varía con la altura h según la ley $V_w = V_{ws}(1+k_w(h-h_s))$, donde V_{ws} , k_w y h_s son constantes positivas conocidas. Inicialmente el avión se encuentra en vuelo simétrico, horizontal, rectilíneo, estacionario y con las alas a nivel, a altura h_s y con velocidad respecto a tierra V_{gs} conocida, y se pretende estudiar el movimiento longitudinal que sigue a unas pequeñas perturbaciones a partir de la condición de referencia.

Suponiendo además que ρ y g son constantes conocidas en el intervalo de alturas considerado, se pide:

1º) Relacionar en ejes estabilidad las dos componentes de la velocidad aerodinámica de perturbación, Δu y Δw , con las dos componentes de la velocidad respecto a tierra de perturbación, Δu_g y Δw_g .

2º) Plantear en ejes estabilidad las tres ecuaciones dinámicas dimensionales linealizadas para el movimiento de perturbación mencionado (fuerzas según los ejes x_s y z_s , y momento según el eje y_s), en las variables Δu , Δw , $\Delta \theta$.

3º) Adimensionalizar usualmente el sistema de ecuaciones obtenido en el apartado anterior.

Solución:

1º) La ecuación cinemática de composición de velocidades establece la siguiente relación entre las velocidades aerodinámica, \vec{V} , respecto de tierra, \vec{V}_g , y del viento, \vec{V}_w :

$$\vec{V}_g = \vec{V} + \vec{V}_w, \text{ donde } V_w = V_{ws}(1 + k_w \Delta h).$$

Para el instante inicial (condición de referencia) se cumple:

$$\begin{aligned} t = 0 \rightarrow V_{gs} &= u_s - V_{ws} \\ u_s &= V_{gs} + V_{ws} \\ w_s &= 0 \\ \alpha_s &= \gamma_s = \theta_s = 0 \end{aligned}$$

En un instante genérico del movimiento perturbado, proyectando las

componentes de las velocidades en los ejes estabilidad se obtiene:

$$\vec{V} = \vec{V}_g - \vec{V}_w \rightarrow \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_s + \Delta u \\ \Delta w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (V_{gs} + \Delta u_g) + V_w \cos \Delta \theta \\ \Delta w_g + V_w \sin \Delta \theta \end{Bmatrix}$$

y linealizando las expresiones anteriores queda:

$$\begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta u_g + V_{ws} k_w \Delta h \\ \Delta w_g + V_{ws} \Delta \theta \end{Bmatrix}$$

2º) El sistema de ecuaciones dinámicas dimensionales longitudinales (14.18) puede aplicarse a este problema, sustituyendo las velocidades aerodinámicas por velocidades respecto de tierra y haciendo $\theta_s = 0$; es decir:

$$\Delta X - mg \Delta \theta = m \Delta \dot{u}_g$$

$$\Delta Z = m(\Delta \dot{w}_g - V_{gs} \Delta \dot{\theta})$$

$$\Delta M = I_y \Delta \ddot{\theta}$$

Introduciendo aquí los resultados del apartado anterior queda:

$$\Delta X - mg \Delta \theta = m(\Delta \dot{u} - V_{ws} k_w \Delta \dot{h})$$

$$\Delta Z = m(\Delta \dot{w} - V_{ws} \Delta \dot{\theta} - V_{gs} \Delta \dot{\theta}) = m(\Delta \dot{w} - u_s \Delta \dot{\theta})$$

$$\Delta M = I_y \Delta \ddot{\theta}$$

La velocidad ascensional de perturbación será ahora (ver la última ecuación del sistema (14.22)):

$$\Delta \dot{h} = -\Delta \dot{z}_e = -\Delta w_g + V_{gs} \Delta \theta = -(\Delta w - V_{ws} \Delta \theta) + V_{gs} \Delta \theta = -\Delta w + u_s \Delta \theta$$

Por tanto las relaciones dinámicas quedan:

$$\Delta X - mg \Delta \theta = m(\Delta \dot{u} + V_{ws} k_w (\Delta w - u_s \Delta \theta))$$

$$\Delta Z = m(\Delta \dot{w} - u_s \Delta \dot{\theta})$$

$$\Delta M = I_y \Delta \ddot{\theta}$$

El desarrollo de Bryan, efectuado en el apartado 14.3 para $\Delta X, \Delta Z, \Delta M$, sigue siendo válido:

$$\Delta X = X_u \Delta u + X_w \Delta w + X_{\delta e} \Delta \delta_e$$

$$\Delta Z = Z_u \Delta u + Z_w \Delta w + Z_q \Delta q + Z_{\dot{w}} \Delta \dot{w} + Z_{\delta_e} \Delta \delta_e$$

$$\Delta M = M_u \Delta u + M_w \Delta w + M_q \Delta q + M_{\dot{w}} \Delta \dot{w} + M_{\delta_e} \Delta \delta_e + M_{\dot{\delta}_e} \Delta \dot{\delta}_e$$

Introduciendo este desarrollo en el sistema dinámico:

$$\left(X_u - m \frac{d}{dt} \right) \Delta u + (X_w - m V_{ws} k_w) \Delta w - m(g - u_s V_{ws} k_w) \Delta \theta = -X_{\delta_e} \Delta \delta_e$$

$$Z_u \Delta u + \left(Z_w + (Z_{\dot{w}} - m) \frac{d}{dt} \right) \Delta w + (Z_q + m u_s) \frac{d}{dt} \Delta \theta = -Z_{\delta_e} \Delta \delta_e$$

$$M_u \Delta u + \left(M_w + M_{\dot{w}} \frac{d}{dt} \right) \Delta w + \left(M_q \frac{d}{dt} - I_y \frac{d^2}{dt^2} \right) \Delta \theta = - \left(M_{\delta_e} + M_{\dot{\delta}_e} \frac{d}{dt} \right) \Delta \delta_e$$

Obsérvese que, respecto al caso de la atmósfera en calma, sólo cambia la ecuación de fuerzas según el eje x_s .

3º) Adimensionalizando el sistema usualmente:

$$(2\mu D - C_{X\dot{u}}) \Delta \hat{u} - (C_{X\alpha} - C_w) \Delta \alpha - (C_{Zs} + C_w) \Delta \theta = C_{X\delta_e} \Delta \delta_e$$

$$-(C_{Z\hat{u}} + 2C_{Zs}) \Delta \hat{u} + ((2\mu - C_{Z\hat{\alpha}})D - C_{Z\alpha}) \Delta \alpha - (2\mu + C_{Z\hat{q}})D \Delta \theta = C_{Z\delta_e} \Delta \delta_e$$

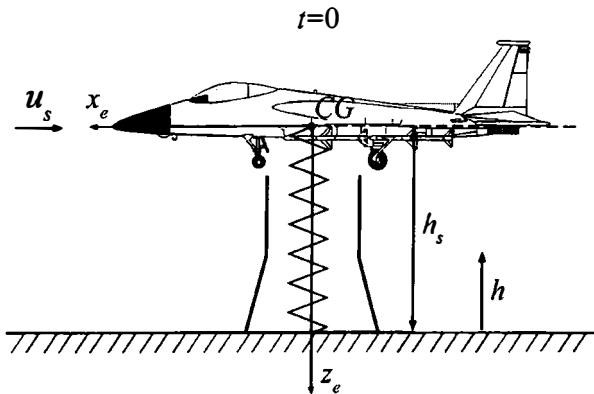
$$-C_{m\hat{u}} \Delta \hat{u} - (C_{m\hat{\alpha}} D + C_{m\alpha}) \Delta \alpha + (\hat{I}_y D^2 - C_{m\hat{q}} D) \Delta \theta = (C_{m\hat{\delta}_e} D + C_{m\delta_e}) \Delta \delta_e$$

En la primera ecuación aparece un nuevo parámetro debido a la velocidad del viento:

$$C_w = \frac{2mV_{ws}k_w}{\rho u_s S} = \frac{2mk_w}{\rho S(1 + V_{gs}/V_{ws})}$$

PROBLEMA 14.2

La figura adjunta representa un modelo de avión no motorizado y sin timón de profundidad, montado en un túnel aerodinámico. El modelo puede girar libremente en cabeceo alrededor de su centro de masas y puede desplazarse verticalmente según el eje z_e ligado al túnel, estando su movimiento vertical restringido por un muelle de constante k_m . La velocidad de la corriente del túnel, u_s , es una constante conocida y en el instante inicial el modelo se encuentra en reposo.



Suponiendo además que se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del modelo necesarias para la resolución del problema, y que la densidad de la corriente ρ es una constante conocida, se pide:

1º) Plantear las ecuaciones dinámicas longitudinales linealizadas dimensionales del movimiento del modelo en los grados de libertad de ángulo de asiento, θ , y de altura respecto del suelo del túnel, h .

2º) Adimensionalizar este sistema en la forma usual y particularizarlo para $k_m = 0$.

Solución:

1º) El sistema dinámico de este modelo está constituido por la ecuación de fuerzas según la vertical y por la ecuación de momentos de cabeceo. En la condición estacionaria de referencia estas dos ecuaciones son:

$$W - L_s - k_m(h_0 - h_s) = 0$$

$$M_s = 0$$

donde h_0 y h_s son, respectivamente, las longitudes del muelle para fuerza nula y en la condición de referencia (para modelos de avión construidos con madera maciza, obviamente $h_0 > h_s$). En el movimiento perturbado las dos ecuaciones serán:

$$F_{ze} = m\dot{w}_e$$

$$M = I_y \ddot{\theta}$$

donde w_e es la velocidad vertical según el eje z_e . Desarrollando la ecuación de fuerzas:

$$W - L \cos \gamma + D \sin \gamma - k_m(h_0 - h) = m\dot{w}_e$$

donde γ es el ángulo de asiento de velocidad.

Teniendo ahora en cuenta la condición de referencia y las relaciones:

$$L = L_s + \Delta L; \quad D = D_s + \Delta D; \quad M = M_s + \Delta M = \Delta M$$

$$\gamma = \gamma_s + \Delta\gamma = \Delta\gamma = -w_e/u_s = \dot{h}/u_s; \quad \dot{w}_e = -\ddot{h}; \quad \theta = \theta_s + \Delta\theta = \Delta\theta$$

las dos ecuaciones dinámicas quedan:

$$-\Delta L + D_s \frac{\Delta \dot{h}}{u_s} + k_m \Delta h = -m \Delta \ddot{h}$$

$$\Delta M = I_y \Delta \ddot{\theta}$$

A continuación, mediante el desarrollo de Bryan, se puede escribir para ΔL y ΔM :

$$\Delta L = L_u \Delta u + L_w \Delta w + L_q \Delta q + L_{\dot{w}} \Delta \dot{w}$$

$$\Delta M = M_u \Delta u + M_w \Delta w + M_q \Delta q + M_{\dot{w}} \Delta \dot{w}$$

Téngase en cuenta que las velocidades de perturbación, Δu y Δw , están expresadas en los ejes estabilidad y no en los ejes ligados al túnel ($\Delta w \neq \Delta w_e$). Operando se obtiene:

$$\Delta u = 0$$

$$\Delta w = u_s \Delta \alpha = u_s (\Delta \theta - \Delta \gamma) = u_s \Delta \theta - \Delta \dot{h}$$

$$\Delta q = \Delta \dot{\theta}$$

Por tanto:

$$\Delta L = L_w \Delta w + L_q \Delta q + L_{\dot{w}} \Delta \dot{w}$$

$$\Delta M = M_w \Delta w + M_q \Delta q + M_{\dot{w}} \Delta \dot{w}$$

Introduciendo estos desarrollos en el sistema linealizado, finalmente queda:

$$(m + L_{\dot{w}}) \Delta \ddot{h} + \left(\frac{D_s}{u_s} + L_w \right) \Delta \dot{h} + k_m \Delta h - (L_q + L_w u_s) \Delta \dot{\theta} - L_w u_s \Delta \theta = 0$$

$$I_y \Delta \ddot{\theta} - (M_q + M_{\dot{w}} u_s) \Delta \dot{\theta} - M_w u_s \Delta \theta + M_{\dot{w}} \Delta \ddot{h} + M_w \Delta \dot{h} = 0$$

2º) Para adimensionalizar el sistema se introducen las siguientes derivadas de estabilidad:

$$\begin{aligned} L_w &= \frac{\rho u_s S}{2} C_{L\alpha}; & L_q &= \frac{\rho u_s S c}{4} C_{L\dot{q}}; & L_{\dot{w}} &= \frac{\rho S c}{4} C_{L\dot{\alpha}} \\ M_w &= \frac{\rho u_s S c}{2} C_{m\alpha}; & M_q &= \frac{\rho u_s S c^2}{4} C_{m\dot{q}}; & M_{\dot{w}} &= \frac{\rho S c^2}{4} C_{m\dot{\alpha}} \end{aligned}$$

quedando:

$$\begin{aligned} ((2\mu + C_{L\dot{\alpha}})D^2 + (C_{L\alpha} + C_{Ds})D + \hat{k}_m)\Delta\hat{h} - ((C_{L\dot{q}} + C_{L\dot{\alpha}})D + C_{L\alpha})\Delta\theta &= 0 \\ (C_{m\dot{\alpha}}D^2 + C_{m\alpha}D)\Delta\hat{h} + (\hat{I}_y D^2 - (C_{m\dot{q}} + C_{m\dot{\alpha}})D - C_{m\alpha})\Delta\theta &= 0 \end{aligned}$$

donde

$$\Delta\hat{h} = \frac{\Delta h}{c/2}, \quad \hat{k}_m = \frac{k_m c}{\rho u_s^2 S}$$

Obsérvese que si $\hat{k}_m = 0$, el sistema puede plantearse con w_e como grado de libertad en lugar de h , mediante la transformación:

$$\dot{h} = -w_e \rightarrow D\Delta\hat{h} = -\frac{\Delta w_e}{u_s} = -\Delta\hat{w}_e$$

obteniéndose:

$$\begin{aligned} ((2\mu + C_{L\dot{\alpha}})D + (C_{L\alpha} + C_{Ds}))\Delta\hat{w}_e + ((C_{L\dot{q}} + C_{L\dot{\alpha}})D + C_{L\alpha})\Delta\theta &= 0 \\ (C_{m\dot{\alpha}}D + C_{m\alpha}D)\Delta\hat{w}_e - (\hat{I}_y D^2 - (C_{m\dot{q}} + C_{m\dot{\alpha}})D - C_{m\alpha})\Delta\theta &= 0 \end{aligned}$$

Derivadas de estabilidad longitudinales y lateral-direccionales

15

15.1. Introducción

El sistema de ecuaciones que permite estudiar la estabilidad dinámica longitudinal del avión con respecto a pequeñas perturbaciones iniciales a partir de una condición de referencia de vuelo simétrico rectilíneo y estacionario con las alas a nivel, está constituido por las expresiones (14.32). Análogamente, las expresiones (14.41) constituyen un sistema de ecuaciones que permite estudiar la estabilidad dinámica lateral-direccional del avión con respecto a pequeñas perturbaciones iniciales a partir de la misma condición de referencia.

Según esto, si se quiere estudiar la estabilidad dinámica longitudinal, se dispone de un sistema de 5 ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas de coeficientes constantes. Estos coeficientes están constituidos por cuatro tipos de parámetros:

- Parámetros relativos a la condición de referencia (C_{zs} y θ_s).
- Parámetros inerciales (μ , \hat{I}_y e \hat{I}_e).
- Parámetros relativos al sistema de mando longitudinal (ΔC_{fe}).
- **Derivadas de estabilidad longitudinales:** Derivadas de los coeficientes de fuerzas y momentos longitudinales con respecto a las variables del movimiento longitudinal (ver Tabla 15.1).

Análogamente, para estudiar la estabilidad dinámica lateral-direccional, se dispone de un sistema de 7 ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas de coeficientes constantes. Estos coeficientes están constituidos por cuatro tipos de parámetros:

- Parámetros relativos a la condición de referencia (C_{zs} y θ_s).

	C_X	C_Z	C_m	C_{he}
\hat{u}	$C_{X\hat{u}}$	$C_{Z\hat{u}}$	$C_{m\hat{u}}$	$C_{he\hat{u}}$
α	$C_{X\alpha}$	$C_{Z\alpha}$	$C_{m\alpha}$	$C_{he\alpha}$
$\hat{\alpha}$		$C_{Z\hat{\alpha}}$	$C_{m\hat{\alpha}}$	$C_{he\hat{\alpha}}$
\hat{q}		$C_{Z\hat{q}}$	$C_{m\hat{q}}$	$C_{he\hat{q}}$
δ_e	$C_{X\delta_e}$	$C_{Z\delta_e}$	$C_{m\delta_e}$	$C_{he\delta_e}$
$\hat{\delta}_e$			$C_{m\hat{\delta}_e}$	$C_{he\hat{\delta}_e}$

Tabla 15.1. Derivadas de estabilidad longitudinales más importantes.

- Parámetros inerciales (μ , \hat{I}_x , \hat{I}_z , \hat{J}_{xz} , \hat{I}_a e \hat{I}_r).
- Parámetros relativos a los sistemas de mando lateral y direccional (ΔC_{fa} y ΔC_{fr}).
- **Derivadas de estabilidad lateral-direccionales:** Derivadas de los coeficientes de fuerza y momentos lateral-direccionales con respecto a las variables del movimiento lateral-direccional (ver Tabla 15.2).

	C_Y	C_l	C_n	C_{ha}	C_{hr}
β	$C_{Y\beta}$	$C_{l\beta}$	$C_{n\beta}$		$C_{hr\beta}$
\hat{p}	$C_{Y\hat{p}}$	$C_{l\hat{p}}$	$C_{n\hat{p}}$	$C_{ha\hat{p}}$	$C_{hr\hat{p}}$
\hat{r}	$C_{Y\hat{r}}$	$C_{l\hat{r}}$	$C_{n\hat{r}}$	$C_{ha\hat{r}}$	$C_{hr\hat{r}}$
δ_a		$C_{l\delta_a}$	$C_{n\delta_a}$	$C_{ha\delta_a}$	
$\hat{\delta}_a$		$C_{l\hat{\delta}_a}$		$C_{ha\hat{\delta}_a}$	
δ_r	$C_{Y\delta_r}$	$C_{l\delta_r}$	$C_{n\delta_r}$		$C_{hr\delta_r}$
$\hat{\delta}_r$			$C_{n\hat{\delta}_r}$		$C_{hr\hat{\delta}_r}$

Tabla 15.2. Derivadas de estabilidad lateral-direccionales más importantes.

A continuación se proporciona una interpretación física de las derivadas de estabilidad longitudinales y lateral-direccionales y se estiman de forma simple algunas de ellas utilizando el método casi-estacionario (apartados 15.2 a 15.7 para la estabilidad longitudinal y apartados 15.8 a 15.11 para la estabilidad lateral-direccional).

15.2. Expresiones de C_X , C_Z , C_m

Las fuerzas aerodinámicas y propulsivas según los ejes x_s y z_s , X y Z , y el momento de cabeceo alrededor de y_s , M , en el vuelo perturbado, pueden expresarse como (ver Figura 15.1):

$$\begin{aligned} X &= T \cos \varepsilon_s + L \sin \alpha - D \cos \alpha \\ Z &= -T \sin \varepsilon_s - L \cos \alpha - D \sin \alpha \\ M &= M_A - T(z_T \cos \varepsilon_s - x_T \sin \varepsilon_s) \end{aligned} \quad (15.1)$$

donde ε_s es el ángulo de ataque del empuje en la condición de referencia (habitualmente pequeño), M_A es el momento aerodinámico de cabeceo, y x_T, z_T son las distancias desde el punto de aplicación del empuje al centro de masas del avión (con el criterio de signos positivo recogido en la Figura 15.1).

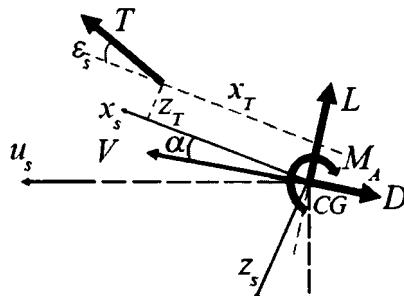


Figura 15.1. Fuerzas y momentos en el movimiento longitudinal de perturbación.

Adimensionalizando las fuerzas con $\rho V^2 S / 2$ y el momento con $\rho V^2 S c / 2$, se obtienen las siguientes expresiones para los coeficientes de fuerzas y de momento de cabeceo:

$$\begin{aligned} C_X &= C_T \cos \varepsilon_s + C_L \sin \alpha - C_D \cos \alpha \\ C_Z &= -C_T \sin \varepsilon_s - C_L \cos \alpha - C_D \sin \alpha \\ C_m &= C_{mA} - C_T(\hat{z}_T \cos \varepsilon_s - \hat{x}_T \sin \varepsilon_s) \end{aligned} \quad (15.2)$$

donde C_T representa el coeficiente de empuje ($C_T = 2T/\rho V^2 S$), y \hat{x}_T, \hat{z}_T las distancias x_T, z_T adimensionalizadas con la cuerda media aerodinámica, c ($\hat{x}_T = x_T/c$, $\hat{z}_T = z_T/c$).

Suponiendo finalmente que el ángulo de ataque del avión es pequeño se obtiene:

$$\begin{aligned} C_X &= C_T \cos \varepsilon_s + C_L \alpha - C_D \\ C_Z &= -C_T \sin \varepsilon_s - C_L - C_D \alpha \\ C_m &= C_{mA} - C_T (\hat{z}_T \cos \varepsilon_s - \hat{x}_T \sin \varepsilon_s) \end{aligned} \quad (15.3)$$

15.3. Las derivadas respecto de \hat{u}

A continuación se esquematizan los cálculos necesarios para obtener las cuatro derivadas de estabilidad respecto de la velocidad, recogidas en la primera fila de la Tabla 15.1. Para ello se utilizan las expresiones (15.3) y la definición de derivadas de estabilidad (ver expresión (14.26)):

- $C_{X\hat{u}} = C_{T\hat{u}} \cos \varepsilon_s + (C_{L\hat{u}} \alpha)_s - C_{D\hat{u}} = C_{T\hat{u}} \cos \varepsilon_s - C_{D\hat{u}}$

Como la velocidad puede expresarse mediante $V^2 = (u_s + \Delta u)^2 + \Delta w^2$ y el número de Mach mediante $M = V/a$, para $C_{T\hat{u}}$ y $C_{D\hat{u}}$ se obtiene:

$$\begin{aligned} C_{T\hat{u}} &= u_s \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{T}{1/2\rho V^2 S} \right) \right]_s = \frac{1}{1/2\rho u_s S} \left(\frac{\partial T}{\partial u} \right)_s - 2C_{Ts} \\ C_{D\hat{u}} &= u_s \left(\frac{\partial C_D}{\partial u} \right)_s = u_s \left(\frac{\partial C_D}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial u} \right)_s = M_s \left(\frac{\partial C_D}{\partial M} \right)_s \end{aligned}$$

Finalmente queda:

$$C_{X\hat{u}} = \left(\frac{1}{1/2\rho u_s S} \left(\frac{\partial T}{\partial u} \right)_s - 2C_{Ts} \right) \cos \varepsilon_s - M_s \left(\frac{\partial C_D}{\partial M} \right)_s \quad (15.4)$$

- $C_{Z\hat{u}} = -C_{T\hat{u}} \sin \varepsilon_s - C_{L\hat{u}} - (C_{D\hat{u}} \alpha)_s = -C_{T\hat{u}} \sin \varepsilon_s - C_{L\hat{u}}$

Como ya se ha determinado $C_{T\hat{u}}$, ahora sólo es preciso calcular $C_{L\hat{u}}$:

$$C_{L\hat{u}} = u_s \left(\frac{\partial C_L}{\partial u} \right)_s = u_s \left(\frac{\partial C_L}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial u} \right)_s = M_s \left(\frac{\partial C_L}{\partial M} \right)_s$$

Finalmente se obtiene:

$$C_{Z\hat{u}} = - \left(\frac{1}{1/2\rho u_s S} \left(\frac{\partial T}{\partial u} \right)_s - 2C_{Ts} \right) \sin \varepsilon_s - M_s \left(\frac{\partial C_L}{\partial M} \right)_s \quad (15.5)$$

- $C_{m\hat{u}} = C_{m\hat{u}A} - C_{T\hat{u}} (\hat{z}_T \cos \varepsilon_s - \hat{x}_T \sin \varepsilon_s)$

Como ya se ha determinado $C_{T\hat{u}}$, ahora sólo es preciso calcular $C_{m\hat{u}A}$:

$$C_{m\hat{u}A} = u_s \left(\frac{\partial C_{mA}}{\partial u} \right)_s = u_s \left(\frac{\partial C_{mA}}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial u} \right)_s = M_s \left(\frac{\partial C_{mA}}{\partial M} \right)_s$$

Finalmente queda:

$$\begin{aligned} C_{m\hat{u}} &= M_s \left(\frac{\partial C_{mA}}{\partial M} \right)_s - \left(\frac{1}{1/2\rho u_s S} \left(\frac{\partial T}{\partial u} \right)_s - 2C_{Ts} \right) (\hat{z}_T \cos \varepsilon_s - \hat{x}_T \sin \varepsilon_s) \\ &\bullet C_{he\hat{u}} = u_s \left(\frac{\partial C_{he}}{\partial u} \right)_s = u_s \left(\frac{\partial C_{he}}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial u} \right)_s \end{aligned} \quad (15.6)$$

$$C_{he\hat{u}} = M_s \left(\frac{\partial C_{he}}{\partial M} \right)_s \quad (15.7)$$

Obsérvese que, en los cuatro desarrollos anteriores, $(\partial C_D / \partial M)_s$, $(\partial C_L / \partial M)_s$, $(\partial C_{mA} / \partial M)_s$, $(\partial C_{he} / \partial M)_s$, representan la influencia de la compresibilidad del aire en los coeficientes aerodinámicos. Obviamente, si el régimen de vuelo es subsónico incompresible, estas cuatro derivadas son nulas.

15.4. Las derivadas respecto de α

A continuación se esquematizan los cálculos necesarios para obtener las cuatro derivadas de estabilidad respecto del ángulo de ataque, recogidas en la segunda fila de la Tabla 15.1. Para ello se utilizan de nuevo las expresiones (15.3) y la definición de derivadas de estabilidad (ver expresión (14.26)):

$$\bullet C_{X\alpha} = C_{T\alpha} \cos \varepsilon_s + C_{Ls} + (C_{L\alpha}\alpha)_s - C_{D\alpha} = C_{T\alpha} \cos \varepsilon_s + C_{Ls} - C_{D\alpha}$$

Como la velocidad puede expresarse ahora mediante $V^2 = (u_s + \Delta u)^2 + u_s^2 \Delta \alpha^2$, para $C_{T\alpha}$ y $C_{D\alpha}$ se obtiene:

$$C_{T\alpha} = \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{T}{\frac{1}{2} \rho V^2 S} \right) \right]_s = \frac{1}{\frac{1}{2} \rho u_s^2 S} \left(\frac{\partial T}{\partial \alpha} \right)_s \cong 0$$

$$C_{D\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} (C_{D0} + k C_L^2) \right)_s = 2k_s C_{Ls} C_{L\alpha}$$

Para efectuar los desarrollos anteriores se ha supuesto que el empuje, T , no depende del ángulo de ataque, α , y que la polar es parabólica, con coeficientes también independientes de α .

La pendiente de la curva de sustentación del avión completo, $C_{L\alpha}$, viene dada por la segunda ecuación del sistema (10.6):

$$C_{L\alpha} = a_{wb} + a_t \eta_t \frac{S_t}{S} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right)$$

Finalmente se obtiene:

$$\begin{aligned} C_{X\alpha} &\cong C_{Ls} - C_{D\alpha} = C_{Ls} \left(1 - 2k_s C_{L\alpha}\right) = \\ &= C_{Ls} \left\{1 - 2k_s \left[a_{wb} + a_t \eta_t \frac{S_t}{S} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right)\right]\right\} \end{aligned} \quad (15.8)$$

- $C_{Z\alpha} = -C_{T\alpha} \sin \varepsilon_s - C_{L\alpha} - C_{Ds} - (C_{D\alpha} \alpha)_s = -C_{T\alpha} \sin \varepsilon_s - C_{L\alpha} - C_{Ds}$

Como ya se ha determinado $C_{T\alpha}$ y $C_{L\alpha}$, se obtiene:

$$C_{Z\alpha} \cong -C_{L\alpha} - C_{Ds} = -a_{wb} - a_t \eta_t \frac{S_t}{S} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) - C_{Ds} \quad (15.9)$$

- $C_{m\alpha} = C_{m\alpha A} - C_{T\alpha} (\hat{z}_T \cos \varepsilon_s - \hat{x}_T \sin \varepsilon_s)$

$C_{T\alpha}$ ya se ha determinado y $C_{m\alpha A}$ viene dada por la segunda ecuación del sistema (10.23); por tanto:

$$C_{m\alpha} \cong C_{m\alpha A} = a_{wb} (\hat{x}_{cg} - N_0) \quad (15.10)$$

- $C_{he\alpha} = \left(\frac{\partial C_{he}}{\partial \alpha}\right)_s$

$C_{he\alpha}$ es una característica aerodinámica elemental, dada por la segunda ecuación del sistema (11.5):

$$C_{he\alpha} = C'_{he\alpha} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) \quad (15.11)$$

15.5. Las derivadas respecto de $\hat{\alpha}$

La influencia de la derivada del ángulo de ataque respecto al tiempo en las fuerzas y momentos longitudinales es, claramente, un problema que ha de estudiarse mediante aerodinámica no estacionaria.

Sin embargo existe una teoría aproximada para estimar la contribución de la cola horizontal a las derivadas respecto de $\hat{\alpha}$, conocida como **Teoría del Retardo de Estela**, que desprecia el carácter no estacionario del movimiento y supone que la deflexión de estela que ve la cola en cada instante es la generada por los torbellinos desprendidos del ala t_R segundos antes:

$$t_R = \frac{l_t}{u_s} \quad (15.12)$$

donde l_t es la distancia existente entre los centros aerodinámicos del ala y de la cola horizontal, la cual, en primera aproximación, coincide con la distancia existente entre el centro de masas del avión y el centro aerodinámico de la cola horizontal.

Según esto, la deflexión de estela en cierto instante t vendrá dada por:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \alpha_{wb}(t - t_R) \quad (15.13)$$

El ángulo de ataque del conjunto ala-fuselaje puede desarrollarse en serie como:

$$\alpha_{wb}(t - t_R) = \alpha_{wb}(t) - \dot{\alpha}_{wb}(t)t_R \quad (15.14)$$

por lo que la deflexión de estela quedará en la forma:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \alpha_{wb}(t) - t_R \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \dot{\alpha}_{wb}(t) \quad (15.15)$$

Finalmente, mediante la expresión anterior y la Figura 10.1, se determina el ángulo de ataque de la cola horizontal, α_t , el incremento de ángulo de ataque de la cola horizontal generado por este efecto, $\Delta\alpha_t$, el incremento del coeficiente de sustentación del avión completo generado por este efecto, ΔC_L , y la contribución de la cola horizontal a la derivada del coeficiente de sustentación del avión completo con respecto al ángulo de ataque derivado a su vez respecto del tiempo adimensional, $(C_{L\hat{\alpha}})_t$:

$$\begin{aligned} \alpha_t &= \alpha_{wb}(t) \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) - i_{wb} + i_t - \varepsilon_0 + t_R \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \dot{\alpha}_{wb}(t) \\ \Delta\alpha_t &= t_R \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \dot{\alpha}_{wb}(t) \\ \Delta C_L &= a_t \eta_t \frac{S_t}{S} \Delta\alpha_t = a_t \eta_t \frac{S_t}{S} t_R \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \dot{\alpha}_{wb} \\ (C_{L\hat{\alpha}})_t &= a_t \eta_t \frac{S_t}{S} t_R \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \left(\frac{2u_s}{c}\right) = 2\eta_t a_t \frac{S_t l_t}{Sc} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} = 2\eta_t a_t \hat{V}_t \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \end{aligned} \quad (15.16)$$

La última expresión del sistema anterior y las expresiones (15.3), permiten calcular las contribuciones de la cola horizontal a $C_{Z\hat{\alpha}}$, $C_{m\hat{\alpha}}$ y $C_{he\hat{\alpha}}$, utilizando esta Teoría del Retardo de Estela:

$$\bullet \quad (C_{Z\hat{\alpha}})_t = -(C_{L\hat{\alpha}})_t$$

$$(C_{Z\hat{\alpha}})_t = -2\eta_t a_t \hat{V}_t \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \quad (15.17)$$

$$\bullet \quad (C_{m\hat{\alpha}})_t = -\frac{l_t}{c} (C_{L\hat{\alpha}})_t$$

$$(C_{m\hat{\alpha}})_t = -2\eta_t a_t \hat{V}_t \frac{l_t}{c} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \quad (15.18)$$

$$\bullet \quad C_{he\hat{\alpha}} = C'_{he\alpha} \frac{\partial \alpha_t}{\partial \hat{\alpha}}$$

$$C_{he\hat{\alpha}} = 2 \frac{l_t}{c} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} C'_{he\alpha} \quad (15.19)$$

15.6. Las derivadas respecto de \hat{q}

Como se vio en el apartado 12.2, una velocidad angular de cabeceo genera un incremento en el ángulo de ataque de la cola horizontal dado por:

$$\Delta \alpha_t = \frac{q l_t}{V_t} = \frac{2 l_t}{c \eta_t^{1/2}} \hat{q} \quad (15.20)$$

El incremento del coeficiente de sustentación del avión completo generado por este efecto, ΔC_L , y la contribución de la cola horizontal a la derivada del coeficiente de sustentación del avión completo con respecto a la velocidad angular de cabeceo adimensional, $(C_{L\hat{q}})_t$, son:

$$\Delta C_L = a_t \eta_t \frac{S_t}{S} \Delta \alpha_t = a_t \eta_t \frac{S_t}{S} \frac{2 l_t}{c \eta_t^{1/2}} \hat{q} \quad (15.21)$$

$$(C_{L\hat{q}})_t = \eta_t^{1/2} \frac{S_t}{S} a_t \frac{2 l_t}{c} = 2 \eta_t^{1/2} a_t \hat{V}_t$$

La última expresión del sistema anterior y las expresiones (15.3), permiten calcular las contribuciones de la cola horizontal a $C_{Z\hat{q}}$, $C_{m\hat{q}}$ y $C_{he\hat{q}}$:

$$\bullet \quad (C_{Z\hat{q}})_t = -(C_{L\hat{q}})_t$$

$$(C_{Z\hat{q}})_t = -2\eta_t^{1/2} a_t \hat{V}_t \quad (15.22)$$

$$\bullet \quad (C_{m\hat{q}})_t = -\frac{l_t}{c} (C_{L\hat{q}})_t$$

$$(C_{m\hat{q}})_t = -2\eta_t^{1/2} a_t \hat{V}_t \frac{l_t}{c} \quad (15.23)$$

$$\bullet \quad C_{he\hat{q}} = C'_{he\alpha} \frac{\partial \alpha_t}{\partial \hat{q}}$$

$$C_{he\hat{q}} = C'_{he\alpha} \frac{2l_t}{c\eta_t^{1/2}} \quad (15.24)$$

15.7. Las derivadas respecto de δ_e y $\dot{\hat{\delta}}_e$

Utilizando los resultados obtenidos en los apartados 10.2 y 10.3, y las expresiones (15.3), puede escribirse para las derivadas de estabilidad respecto de la deflexión del timón de profundidad:

$$C_{X\delta_e} = -C_{D\delta_e} = -2k_s C_{Ls} C_{L\delta_e} = -2k_s C_{Ls} a_t \eta_t \frac{S_t}{S} \tau_e \quad (15.25)$$

$$C_{Z\delta_e} = -C_{L\delta_e} = -a_t \eta_t \frac{S_t}{S} \tau_e \quad (15.26)$$

$$C_{m\delta_e} = -a_t \eta_t \hat{V}_t \tau_e \quad (15.27)$$

$$C_{he\delta_e} = \left(\frac{\partial C_{he}}{\partial \delta_e} \right)_s \quad (15.28)$$

Téngase en cuenta que para determinar $C_{D\delta_e}$ en la expresión (15.25) se ha supuesto que la deflexión del timón de profundidad no influye en los coeficientes de la polar parabólica.

En cuanto a las derivadas de estabilidad longitudinales respecto de la derivada con respecto del tiempo adimensional de la deflexión del timón de profundidad ($C_{m\dot{\hat{\delta}}_e}$ y $C_{he\dot{\hat{\delta}}_e}$) hay que decir que se estiman utilizando aerodinámica no estacionaria o, directamente, mediante ensayos en vuelo. Además $C_{m\dot{\hat{\delta}}_e}$ puede suponerse nula en muchos casos prácticos, pero $C_{he\dot{\hat{\delta}}_e}$ normalmente no es nula ya que constituye la principal contribución al amortiguamiento del sistema de mando longitudinal.

15.8. Las derivadas respecto de β

Las cuatro derivadas de estabilidad respecto del ángulo de resbalamiento, recogidas en la primera fila de la Tabla 15.2, ya han sido obtenidas en el capítulo 13 (apartados 13.3.1, 13.4.1 y 13.5.1). Como resumen de estos apartados, puede escribirse:

$$C_{Y\beta} = (C_{Y\beta})_{wb} + (C_{Y\beta})_v + (C_{Y\beta})_T + \dots \quad (15.29)$$

$$C_{l\beta} = (C_{l\beta})_{wb} + (C_{l\beta})_t + (C_{l\beta})_v + \dots \quad (15.30)$$

$$C_{n\beta} = (C_{n\beta})_{wb} + (C_{n\beta})_v + (C_{n\beta})_T + \dots \quad (15.31)$$

$$C_{hr\beta} = \left(\frac{\partial C_{hr}}{\partial \beta} \right)_s = \left(\frac{\partial C_{hr}}{\partial \alpha_v} \frac{\partial \alpha_v}{\partial \beta} \right)_s = C'_{hr\alpha_v} (1 + \frac{\partial \sigma}{\partial \beta}) \quad (15.32)$$

15.9. Las derivadas respecto de \hat{p}

A continuación se esquematizan los cálculos necesarios para obtener las cinco derivadas de estabilidad respecto de la velocidad angular de balance, recogidas en la segunda fila de la Tabla 15.2. Para ello se utilizan la definición de derivadas de estabilidad (ver expresión (14.26)) y la Figura 15.2:

- $C_{Y\hat{p}} \cong (C_{Y\hat{p}})_{wb} + (C_{Y\hat{p}})_v + \dots \cong (C_{Y\hat{p}})_v$ (15.33)

donde $(C_{Y\hat{p}})_v$ es la contribución de la cola vertical a $C_{Y\hat{p}}$ y $(C_{Y\hat{p}})_{wb}$ es la contribución del conjunto ala-fuselaje (normalmente despreciable frente a la de la cola vertical).

Para estimar $(C_{Y\hat{p}})_v$ téngase en cuenta que la velocidad angular de balance, p , genera un incremento de ángulo de ataque en la cola vertical, $\Delta\alpha_v$, dado por (ver Figura 15.2):

$$\Delta\alpha_v = \frac{ph_v}{\eta_v^{1/2} u_s} + \hat{p} \frac{\partial \sigma}{\partial \hat{p}} = \left(\frac{2h_v}{b\eta_v^{1/2}} + \frac{\partial \sigma}{\partial \hat{p}} \right) \hat{p} \quad (15.34)$$

El primer sumando de la expresión anterior proviene del ángulo de ataque en la cola vertical directamente generado por la velocidad angular de balance y el segundo sumando recoge la contribución de la deflexión de estela (existe un ángulo de ataque inducido por la asimetría entre los torbellinos desprendidos por las semialas izquierda y derecha). En esta expresión η_v

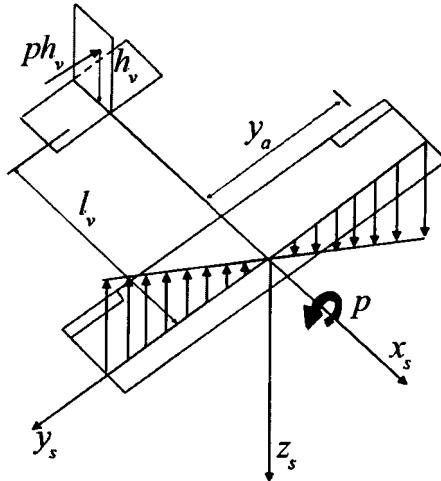


Figura 15.2. Velocidades inducidas por la velocidad angular de balance p .

representa la eficiencia aerodinámica de la cola vertical y σ la deflexión de estela lateral-direccional. Obsérvese que $\partial\sigma/\partial\hat{p}$ es un parámetro aerodinámico de signo positivo, completamente análogo a $\partial\sigma/\partial\beta$.

Este incremento de ángulo de ataque produce un incremento de sustentación en la cola vertical y por tanto una fuerza lateral. Operando se obtiene la contribución de la cola vertical a $C_{Y\hat{p}}$:

$$(C_{Y\hat{p}})_v = -a_v \eta_v \frac{S_v}{S} \left(\frac{2h_v}{b\eta_v^{1/2}} + \frac{\partial\sigma}{\partial\hat{p}} \right) \quad (15.35)$$

$$\bullet \quad C_{l\hat{p}} = (C_{l\hat{p}})_{wb} + (C_{l\hat{p}})_t + (C_{l\hat{p}})_v + \dots \quad (15.36)$$

donde $(C_{l\hat{p}})_{wb}$ representa la contribución del conjunto ala-fuselaje a $C_{l\hat{p}}$, $(C_{l\hat{p}})_t$ la contribución de la cola horizontal y $(C_{l\hat{p}})_v$ la de la cola vertical.

A la derivada de estabilidad $C_{l\hat{p}}$ se le denomina **amortiguamiento en balance** y normalmente tiene signo negativo.

La contribución del ala al amortiguamiento en balance, $(C_{l\hat{p}})_w$, es la contribución más relevante, ya que la velocidad angular de balance genera sobre la envergadura del ala una distribución antisimétrica de incrementos de sustentación, la cual a su vez produce un momento de balance negativo muy importante (ver Figura 15.2).

La contribución de la cola horizontal al amortiguamiento en balance, $(C_{l\hat{p}})_t$, se obtiene de forma completamente análoga a $(C_{l\hat{p}})_w$, aunque es preciso tener en cuenta los distintos adimensionalizadores de la cola y del ala.

La contribución de la cola vertical a $C_{l\hat{p}}$ se estima mediante la siguiente expresión (ver ecuación (15.35)):

$$(C_{l\hat{p}})_v = (C_{Y\hat{p}})_v \frac{h_v}{b} = -a_v \eta_v \frac{S_v h_v}{Sb} \left(\frac{2h_v}{b\eta_v^{1/2}} + \frac{\partial\sigma}{\partial\hat{p}} \right) \quad (15.37)$$

- $C_{n\hat{p}} = (C_{n\hat{p}})_{wb} + (C_{n\hat{p}})_t + (C_{n\hat{p}})_v + \dots \cong (C_{n\hat{p}})_w + (C_{n\hat{p}})_t + (C_{n\hat{p}})_v \quad (15.38)$

donde $(C_{n\hat{p}})_{wb}$ representa la contribución del conjunto ala-fuselaje a $C_{n\hat{p}}$, $(C_{n\hat{p}})_t$ la contribución de la cola horizontal y $(C_{n\hat{p}})_v$ la de la cola vertical.

La contribución del fuselaje a esta derivada de estabilidad es normalmente despreciable, por lo que puede escribirse $(C_{n\hat{p}})_{wb} \cong (C_{n\hat{p}})_w$. En cuanto a la contribución del ala, $(C_{n\hat{p}})_w$, puede decirse que la distribución antisimétrica de incrementos de sustentación, generada por la velocidad angular de balance, genera a su vez diferencias entre las resistencias inducidas de las semialas derecha y e izquierda y por tanto produce un momento de guiñada (ver Figura 15.2).

La contribución de la cola horizontal, $(C_{n\hat{p}})_t$, se obtiene de forma completamente análoga a la del ala, aunque es preciso tener en cuenta los distintos adimensionalizadores de la cola y del ala. Normalmente esta contribución suele ser despreciable frente a los otros dos términos de la ecuación (15.38).

Por último, la contribución de la cola vertical a $C_{n\hat{p}}$ se estima mediante la siguiente expresión (ver ecuación (15.35)):

$$(C_{n\hat{p}})_v = -(C_{Y\hat{p}})_v \frac{l_v}{b} = a_v \eta_v \hat{V}_v \left(\frac{2h_v}{b\eta_v^{1/2}} + \frac{\partial\sigma}{\partial\hat{p}} \right) \quad (15.39)$$

donde $\hat{V}_v = S_v l_v / Sb$ es el llamado coeficiente de volumen de la cola vertical.

- Para determinar $C_{ha\hat{p}}$ es preciso tener en cuenta que la distribución antisimétrica de velocidades normales sobre la envergadura del ala, generada por la velocidad angular de balance, hace que los alerones derecho e izquierdo estén sometidos a incrementos del ángulo de ataque, $\Delta\alpha_{ad}$ y $\Delta\alpha_{ai}$, iguales en módulo y de signo contrario dados por (ver Figura 15.2):

$$\begin{aligned}\Delta\alpha_{ad} &= \frac{py_a}{u_s} = \frac{2y_a}{b}\hat{p} \\ \Delta\alpha_{ai} &= -\frac{py_a}{u_s} = -\frac{2y_a}{b}\hat{p}\end{aligned}\tag{15.40}$$

Operando con la fuerza lateral en palanca de forma análoga a la efectuada en los apartados 13.6 y 13.8 (ver expresiones (13.38), (13.39) y (13.46)) se obtiene:

$$C_{ha\hat{p}} = -C_{ha\alpha} \frac{2y_a}{b}\tag{15.41}$$

$$\bullet \quad C_{hr\hat{p}} = \left(\frac{\partial C_{hr}}{\partial \hat{p}} \right)_s$$

Para obtener esta derivada de estabilidad se utiliza la relación existente entre la velocidad angular de balance, p , y el incremento de ángulo de ataque en la cola vertical, $\Delta\alpha_v$, dado por la ecuación (15.34), quedando:

$$C_{hr\hat{p}} = \left(\frac{\partial C_{hr}}{\partial \alpha_v} \frac{\partial \alpha_v}{\partial \hat{p}} \right)_s = C'_{hr\alpha_v} \left(\frac{2h_v}{b\eta_v^{1/2}} + \frac{\partial \sigma}{\partial \hat{p}} \right)\tag{15.42}$$

15.10. Las derivadas respecto de \hat{r}

A continuación se esquematizan los cálculos necesarios para obtener las cinco derivadas de estabilidad respecto de la velocidad angular de guiñada, recogidas en la tercera fila de la Tabla 15.2. Para ello se utilizan la definición de derivadas de estabilidad (ver expresión (14.26)) y la Figura 15.3:

$$\bullet \quad C_{Y\hat{r}} = (C_{Y\hat{r}})_{wb} + (C_{Y\hat{r}})_v + \dots \cong (C_{Y\hat{r}})_v\tag{15.43}$$

donde $(C_{Y\hat{r}})_v$ es la contribución de la cola vertical a $C_{Y\hat{r}}$ y $(C_{Y\hat{r}})_{wb}$ es la contribución del conjunto ala-fuselaje (normalmente despreciable frente a la de la cola vertical).

Para estimar $(C_{Y\hat{r}})_v$ téngase en cuenta que la velocidad angular de guiñada, r , genera un incremento de ángulo de ataque en la cola vertical, $\Delta\alpha_v$, dado por (ver Figura 15.3):

$$\Delta\alpha_v = -\frac{rl_v}{\eta_v^{1/2} u_s} - \hat{r} \frac{\partial \sigma}{\partial \hat{r}} = -\left(\frac{2l_v}{b\eta_v^{1/2}} + \frac{\partial \sigma}{\partial \hat{r}} \right) \hat{r}\tag{15.44}$$

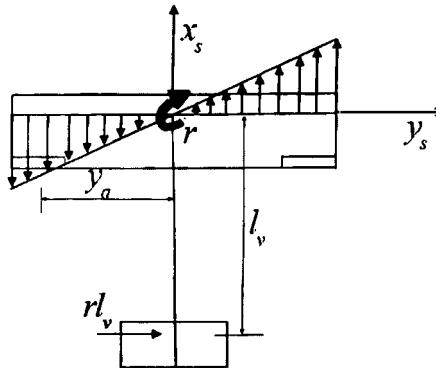


Figura 15.3. Velocidades inducidas por la velocidad angular de guiñada r .

El primer sumando de la expresión anterior proviene del ángulo de ataque en la cola vertical directamente generado por la velocidad angular de guiñada y el segundo sumando recoge la contribución de la deflexión de estela (existe un ángulo de ataque inducido por la asimetría entre los torbellinos desprendidos por las semialas izquierda y derecha). En esta expresión η_v representa la eficiencia aerodinámica de la cola vertical y σ la deflexión de estela lateral-direccional. Obsérvese que $\partial\sigma/\partial\hat{r}$ es un parámetro aerodinámico de signo positivo, completamente análogo a $\partial\sigma/\partial\beta$ o $\partial\sigma/\partial\hat{p}$.

Este incremento de ángulo de ataque produce un incremento de sustentación en la cola vertical y por tanto una fuerza lateral. Operando se obtiene la contribución de la cola vertical a $C_{Y\hat{r}}$:

$$(C_{Y\hat{r}})_v = a_v \eta_v \frac{S_v}{S} \left(\frac{2l_v}{b\eta_v^{1/2}} + \frac{\partial\sigma}{\partial\hat{r}} \right) \quad (15.45)$$

$$\bullet \quad C_{l\hat{r}} = (C_{l\hat{r}})_{wb} + (C_{l\hat{r}})_v + \dots \cong (C_{l\hat{r}})_w + (C_{l\hat{r}})_v \quad (15.46)$$

donde $(C_{l\hat{r}})_{wb}$ representa la contribución del conjunto ala-fuselaje a $C_{l\hat{r}}$ y $(C_{l\hat{r}})_v$ la de la cola vertical.

La contribución del fuselaje a esta derivada de estabilidad es normalmente despreciable, por lo que puede escribirse $(C_{l\hat{r}})_{wb} \cong (C_{l\hat{r}})_w$. En cuanto a la contribución del ala, $(C_{l\hat{r}})_w$, se debe a que aparece sobre su envergadura una distribución antisimétrica de los incrementos de velocidad aerodinámica, que produce una sustentación en la semiala izquierda superior a la de la semiala derecha (ver Figura 15.3). Obsérvese que $(C_{l\hat{r}})_w > 0$.

La contribución de la cola vertical a $C_{l\hat{r}}$ se estima mediante la siguiente expresión (ver ecuación (15.45)):

$$(C_{l\hat{r}})_v = (C_{Y\hat{r}})_v \frac{h_v}{b} = a_v \eta_v \frac{S_v h_v}{Sb} \left(\frac{2l_v}{b\eta_v^{1/2}} + \frac{\partial \sigma}{\partial \hat{r}} \right) \quad (15.47)$$

- $C_{n\hat{r}} = (C_{n\hat{r}})_{wb} + (C_{n\hat{r}})_t + (C_{n\hat{r}})_v + \dots \cong (C_{n\hat{r}})_{wb} + (C_{n\hat{r}})_v \quad (15.48)$

donde $(C_{n\hat{r}})_{wb}$ representa la contribución del conjunto ala-fuselaje a $C_{n\hat{r}}$, $(C_{n\hat{r}})_t$ la contribución de la cola horizontal (normalmente despreciable frente a los otros términos de la ecuación) y $(C_{n\hat{r}})_v$ la de la cola vertical.

A la derivada de estabilidad $C_{n\hat{r}}$ se le denomina **amortiguamiento en guiñada** y normalmente tiene signo negativo.

La contribución del ala al amortiguamiento en guiñada, $(C_{n\hat{r}})_w$, se debe a la distribución antisimétrica de los incrementos de velocidad aerodinámica sobre su envergadura generados por la velocidad angular de guiñada (ver Figura 15.3), que a su vez genera una resistencia en la semiala izquierda superior a la de la semiala derecha, y por tanto produce un momento de guiñada negativo.

La contribución de la cola vertical a $C_{n\hat{r}}$ se estima mediante la siguiente expresión (ver ecuación (15.45)):

$$(C_{n\hat{r}})_v = -(C_{Y\hat{r}})_v \frac{l_v}{b} = -a_v \eta_v \hat{V}_v \left(\frac{2l_v}{b\eta_v^{1/2}} + \frac{\partial \sigma}{\partial \hat{r}} \right) \quad (15.49)$$

- Para determinar $C_{h\hat{r}}$ es preciso tener en cuenta que la distribución antisimétrica de los incrementos de velocidad sobre la envergadura del ala, generados por la velocidad angular de guiñada, hace que los alerones derecho e izquierdo estén sometidos a velocidades distintas, V_{ad} y V_{ai} , dadas por (ver Figura 15.3):

$$\begin{aligned} V_{ad} &= u_s - r y_a \\ V_{ai} &= u_s + r y_a \end{aligned} \quad (15.50)$$

Operando con la fuerza lateral en palanca de forma análoga a la efectuada en los apartados 13.6 y 13.8 (ver expresiones (13.38), (13.39) y

(13.46)) se obtiene:

$$C_{ha\hat{r}} = \frac{4y_a}{b} C_{has} = \frac{4y_a}{b} (C_{ha0s} + C_{ha\alpha} \alpha_{wbs}) \quad (15.51)$$

donde C_{has} es el coeficiente de momento de charnela de un alerón (el derecho o el izquierdo) en la condición de referencia y para $\delta_a = 0$, y α_{wbs} es el ángulo de ataque del conjunto ala-fuselaje en la condición de referencia.

$$\bullet \quad C_{hr\hat{r}} = \left(\frac{\partial C_{hr}}{\partial \hat{r}} \right)_s$$

Para obtener esta derivada de estabilidad se utiliza la relación existente entre la velocidad angular de guiñada, r , y el incremento de ángulo de ataque en la cola vertical, $\Delta\alpha_v$, dado por la ecuación (15.44), quedando:

$$C_{hr\hat{r}} = \left(\frac{\partial C_{hr}}{\partial \alpha_v} \frac{\partial \alpha_v}{\partial \hat{r}} \right)_s = -C'_{hr\alpha_v} \left(\frac{2l_v}{b\eta_v^{1/2}} + \frac{\partial \sigma}{\partial \hat{r}} \right) \quad (15.52)$$

15.11. Las derivadas respecto de δ_a , $\hat{\delta}_a$, δ_r y $\hat{\delta}_r$

Las tres derivadas de estabilidad respecto de δ_a , recogidas en la cuarta fila de la Tabla 15.2, se estiman mediante teorías aerodinámicas adecuadas o mediante ensayos en túnel (ver capítulo 13, apartados 13.4.2 y 13.5.2):

$$C_{l\delta_a} = \left(\frac{\partial C_l}{\partial \delta_a} \right)_s ; \quad C_{n\delta_a} = \left(\frac{\partial C_n}{\partial \delta_a} \right)_s ; \quad C_{ha\delta_a} = \left(\frac{\partial C_{ha}}{\partial \delta_a} \right)_s \quad (15.53)$$

En cuanto a las derivadas de estabilidad lateral-direccionales respecto de la derivada con respecto del tiempo adimensional de la deflexión de alerones ($C_{l\hat{\delta}_a}$ y $C_{ha\hat{\delta}_a}$) hay que decir que se estiman utilizando aerodinámica no estacionaria o, directamente, mediante ensayos en vuelo. Además $C_{l\hat{\delta}_a}$ puede suponerse nula en muchos casos prácticos, pero $C_{ha\hat{\delta}_a}$ normalmente no es nula ya que constituye la principal contribución al amortiguamiento del sistema de mando lateral.

Utilizando los resultados obtenidos en el capítulo 13 (apartados 13.3.3, 13.4.3 y 13.5.3), a continuación se recopilan las expresiones para las derivadas de estabilidad lateral-direccionales $C_{Y\delta_r}$, $C_{l\delta_r}$, $C_{n\delta_r}$ y $C_{hr\delta_r}$; obsérvese que la

última derivada representa simplemente el cambio en el momento de charnela del timón de dirección producido por una deflexión de éste:

$$C_{Y\delta_r} = -a_v \eta_v \frac{S_v}{S} \tau_r \quad (15.54)$$

$$C_{l\delta_r} = -a_v \eta_v \frac{S_v h_v}{Sb} \tau_r \quad (15.55)$$

$$C_{n\delta_r} = a_v \eta_v \hat{V}_v \tau_r \quad (15.56)$$

$$C_{hr\delta_r} = \left(\frac{\partial C_{hr}}{\partial \delta_r} \right)_s \quad (15.57)$$

En cuanto a las derivadas de estabilidad lateral-direccionales respecto de la derivada con respecto del tiempo adimensional de la deflexión del timón de dirección ($C_{n\hat{\delta}_r}$ y $C_{hr\hat{\delta}_r}$) hay que decir que se estiman utilizando aerodinámica no estacionaria o, directamente, mediante ensayos en vuelo. Además $C_{n\hat{\delta}_r}$ puede suponerse nula en muchos casos prácticos, pero $C_{hr\hat{\delta}_r}$ normalmente no es nula ya que constituye la principal contribución al amortiguamiento del sistema de mando direccional.

15.12. Problemas 15.1 y 15.2

PROBLEMA 15.1

Determinar la derivada de estabilidad $C_{X\hat{u}}$ para los tres casos siguientes:

1º) Planeador volando en los regímenes compresible e incompresible.

2º) Avión dotado de un grupo motopropulsor motor alternativo-hélice (con potencia del motor, P_m , y rendimiento propulsivo de la hélice, η_P , constantes) y volando en régimen subsónico incompresible con $\varepsilon_s = 0$.

3º) Avión dotado de un grupo motopropulsor turborreactor, con una ley de empuje en función de la velocidad dada por $T = KV^n$, donde K , n son constantes conocidas, y volando en régimen subsónico incompresible con $\varepsilon_s = 0$.

Solución:

1º) La expresión más general de la derivada $C_{X\hat{u}}$ es (ver expresión (15.4)):

$$C_{X\hat{u}} = \left(\frac{1}{\frac{1}{2}\rho u_s S} \left(\frac{\partial T}{\partial u} \right)_s - 2C_{Ts} \right) \cos \varepsilon_s - M_s \left(\frac{\partial C_D}{\partial M} \right)_s$$

Para un planeador ($T = 0$) en régimen incompresible ($(\partial C_D / \partial M)_s = 0$):

$$C_{X\hat{u}} = 0$$

Para un planeador ($T = 0$), en régimen compresible ($(\partial C_D / \partial M)_s \neq 0$):

$$C_{X\hat{u}} = -M_s \left(\frac{\partial C_D}{\partial M} \right)_s$$

2º) Para un avión motorizado, suponiendo régimen subsónico incompresible y $\varepsilon_s = 0$, queda:

$$C_{X\hat{u}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho u_s S} \left(\frac{\partial T}{\partial u} \right)_s - 2C_{Ts}$$

Como para el grupo motopropulsor motor alternativo-hélice se satisface:

$$\eta_P P_m = TV$$

la condición impuesta en el enunciado proporciona:

$$TV = T(u^2 + w^2)^{1/2} = T_s u_s = cte \rightarrow T = \frac{T_s u_s}{(u^2 + w^2)^{1/2}}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)_s = T_s u_s \left(-u(u^2 + w^2)^{-3/2}\right)_s = -\frac{T_s}{u_s}$$

Finalmente $C_{X\hat{u}}$ queda:

$$C_{X\hat{u}} = -3C_{Ts}$$

Téngase en cuenta que en la condición de referencia:

$$C_{Ts} = C_{Ds} + \frac{2W}{\rho u_s^2 S} \sin \theta_s$$

y sólo para el caso de vuelo de referencia horizontal se cumple $C_{Ts} = C_{Ds}$ y $C_{X\hat{u}} = -3C_{Ds}$.

3º) Para un avión motorizado, suponiendo régimen subsónico incompresible y $\varepsilon_s = 0$, queda:

$$C_{X\hat{u}} = \frac{1}{\frac{1}{2} \rho u_s S} \left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)_s - 2C_{Ts}$$

Para calcular la derivada del empuje respecto de la velocidad:

$$T = KV^n = K(u^2 + w^2)^{n/2} \rightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)_s = \left(Kun(u^2 + w^2)^{n/2-1}\right)_s = Kunu_s^{n-1} = n \frac{T_s}{u_s}$$

y operando se obtiene:

$$C_{X\hat{u}} = (n - 2)C_{Ts}$$

Obsérvese que el caso desarrollado en el apartado 2º) podría haberse obtenido como un caso particular de éste haciendo $n = -1$.

PROBLEMA 15.2

Se considera un ala plana recta y de gran alargamiento, forma en planta trapezoidal, características geométricas y aerodinámicas conocidas (envergadura, b , cuerda en la raíz, c_r , cuerda en la punta, c_t , pendiente de la curva de sustentación de los perfiles, a_w , etc.), volando con un coeficiente de sustentación en la condición de referencia, C_{Ls} . Suponiendo que puede

aplicarse teoría bidimensional y que, para este problema, son despreciables las contribuciones de las resistencias de los perfiles, se pide:

1º) Calcular $C_{l\hat{p}}$, en función de a_w y $\lambda = c_t/c_r$.

2º) Calcular $C_{l\hat{r}}$, en función de C_{Ls} y $\lambda = c_t/c_r$.

3º) Simplificar los resultados obtenidos en los dos apartados anteriores para dos alas, una de forma en planta rectangular y otra de forma en planta triangular.

Solución:

1º) La velocidad angular de balance, p , genera una distribución de ángulos de ataque antisimétrica según la envergadura (incremento del ángulo de ataque positivo en el semiala derecha y negativo en la izquierda) dada por:

$$\Delta\alpha = \frac{py}{u_s}$$

Esta distribución conduce a un incremento de sustentación en cada rebanada de ala:

$$dl = \frac{1}{2} \rho u_s^2 (cdy) a_w \Delta\alpha = \frac{1}{2} \rho u_s a_w p y c(y) dy$$

que a su vez genera un momento de balance dado por:

$$dL = -y dl = -\frac{1}{2} \rho u_s a_w p y^2 c(y) dy$$

El momento de balance total será:

$$L = - \int_{-b/2}^{b/2} \frac{1}{2} \rho u_s a_w p y^2 c(y) dy = -\frac{1}{2} \rho u_s a_w p \int_{-b/2}^{b/2} y^2 c(y) dy$$

Para un ala trapezoidal la distribución de cuerdas y la superficie total son:

$$c(y) = \frac{c_t - c_r}{b/2} |y| + c_r; \quad S = \frac{c_t + c_r}{2} b$$

Integrando la expresión del momento de balance:

$$L = -\rho u_s a_w p \left(\frac{b}{2}\right)^3 \frac{3c_t + c_r}{12}$$

El coeficiente de momento de balance será:

$$C_l = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho u_s^2 S b} = -\frac{a_w b}{24 u_s} \frac{3c_t + c_r}{c_t + c_r} p$$

Y finalmente el amortiguamiento en balance queda:

$$\begin{aligned} C_{lp} &= -\frac{a_w b}{24 u_s} \frac{3c_t + c_r}{c_t + c_r} \\ C_{l\dot{p}} &= -\frac{a_w}{12} \frac{3c_t + c_r}{c_t + c_r} = -\frac{a_w}{12} \frac{3\lambda + 1}{\lambda + 1} \end{aligned}$$

2º) La velocidad angular de guiñada, r , genera una distribución antisimétrica de velocidades aerodinámicas de perturbación según la envergadura (incremento de velocidad en el semiala izquierda y disminución de velocidad en la derecha) dada por:

$$V = u_s - ry$$

Esta distribución conduce a una sustentación en cada rebanada de ala:

$$dl = \frac{1}{2} \rho (u_s - ry)^2 (cdy) C_{Ls} = \frac{1}{2} \rho (u_s^2 + r^2 y^2 - 2u_s r y) C_{Ls} c(y) dy$$

Como la contribución simétrica de la sustentación en las dos semialas se equilibra para no generar momento de balance, el momento de balance resultante es debido a la contribución antisimétrica:

$$L = -2 \int_0^{b/2} \frac{1}{2} \rho (-2u_s r y) C_{Ls} c(y) y dy = 2\rho u_s C_{Ls} r \int_0^{b/2} y^2 c(y) dy$$

Integrando esta expresión para un ala trapezoidal:

$$L = \rho u_s C_{Ls} r \left(\frac{b}{2}\right)^3 \frac{3c_t + c_r}{6}$$

El coeficiente de momento de balance será:

$$C_l = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho u_s^2 S b} = \frac{C_{Ls} b}{12 u_s} \frac{3c_t + c_r}{c_t + c_r} r$$

Y finalmente la contribución de la velocidad angular de guiñada al coeficiente de momento de balance es:

$$C_{lr} = \frac{C_{Ls}b}{12u_s} \frac{3c_t + c_r}{c_t + c_r}$$

$$C_{l\hat{r}} = \frac{C_{Ls}}{6} \frac{3c_t + c_r}{c_t + c_r} = \frac{C_{Ls}}{6} \frac{3\lambda + 1}{\lambda + 1}$$

3º) Para un ala rectangular ($c_t = c_r \rightarrow \lambda = 1$):

$$C_{lp} = -\frac{a_w b}{12u_s} \rightarrow C_{l\hat{p}} = -\frac{a_w}{6}$$

$$C_{lr} = \frac{C_{Ls}b}{6u_s} \rightarrow C_{l\hat{r}} = \frac{C_{Ls}}{3}$$

y para un ala triangular ($c_t = 0 \rightarrow \lambda = 0$):

$$C_{lp} = -\frac{a_w b}{24u_s} \rightarrow C_{l\hat{p}} = -\frac{a_w}{12}$$

$$C_{lr} = \frac{C_{Ls}b}{12u_s} \rightarrow C_{l\hat{r}} = \frac{C_{Ls}}{6}$$

Estabilidad y control dinámicos longitudinales en cadena abierta

16

16.1. Introducción

En los dos capítulos anteriores se ha demostrado que, efectuando una serie de hipótesis simplificativas, es posible desacoplar entre sí los movimientos dinámicos longitudinales y lateral-direccionales de un avión, y se han determinado las derivadas de estabilidad longitudinales y lateral-direccionales.

En este capítulo se analiza la estabilidad dinámica longitudinal intrínseca del avión con respecto a pequeñas perturbaciones iniciales a partir de una situación de referencia que será la de vuelo simétrico, horizontal, rectilíneo y estacionario, y se determina la respuesta dinámica del avión en cadena abierta (controlabilidad dinámica) a una entrada en deflexión del timón de profundidad.

En el apartado 16.2 se obtiene la llamada cuártica de estabilidad longitudinal, que permite determinar los autovalores del sistema. Estos autovalores son, habitualmente, dos parejas de complejos conjugados, por lo que en el apartado 16.3 se introducirán dos modos dinámicos oscilatorios denominados fugoide y corto periodo.

Los dos modos propios del avión corresponden con gran aproximación a dos movimientos en dos grados de libertad cada uno: en el fugoide el ángulo de ataque de perturbación es prácticamente nulo y en el corto periodo la velocidad de perturbación es prácticamente nula. Haciendo uso de estas propiedades, en los apartados 16.4 y 16.5 se obtendrán soluciones aproximadas que proporcionan información sobre el efecto de los parámetros del vuelo en las características de los modos.

Para terminar el capítulo, en el apartado 16.6 se analiza la controlabilidad dinámica longitudinal en lazo abierto, es decir, la respuesta del avión a una entrada en deflexión del timón de profundidad. A partir de las

funciones de transferencia del sistema se determinarán las llamadas admitancia índice, admitancia impulsional y respuesta en frecuencias. Además se utilizará el modelo simplificado del modo de corto periodo para calcular explícitamente la admitancia índice en ángulo de ataque.

16.2. Cuártica de estabilidad

En el sistema adimensional de ecuaciones linealizadas longitudinales del movimiento del avión (sistema (14.32)), se introduce ahora la condición de mandos fijos ($\Delta\delta_e = 0$) y la particularización adicional de que el vuelo de referencia sea horizontal ($\theta_s = 0$), quedando:

$$\begin{aligned} (2\mu D - C_{X\dot{u}})\Delta\dot{u} - C_{X\alpha}\Delta\alpha - C_{Zs}\Delta\theta &= 0 \\ -(C_{Z\dot{u}} + 2C_{Zs})\Delta\dot{u} + ((2\mu - C_{Z\dot{\alpha}})D - C_{Z\alpha})\Delta\alpha - (2\mu + C_{Z\dot{q}})D\Delta\theta &= 0 \\ -C_{m\dot{u}}\Delta\dot{u} - (C_{m\dot{\alpha}}D + C_{m\alpha})\Delta\alpha + (\hat{I}_y D^2 - C_{m\dot{q}}D)\Delta\theta &= 0 \end{aligned} \quad (16.1)$$

Téngase en cuenta que la ecuación de momentos alrededor de la charnela del timón de profundidad (cuarta ecuación del sistema (14.32)) se satisface idénticamente y no aporta información adicional sobre la dinámica global del avión.

El sistema anterior constituye un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias de coeficientes constantes, con tres incógnitas ($\Delta\dot{u}, \Delta\alpha, \Delta\theta$). Para determinar la velocidad angular de cabeceo es preciso recurrir a la ecuación cinemática angular:

$$D\Delta\theta = \Delta\dot{q} \quad (16.2)$$

Se supone que el sistema (16.1) admite soluciones de la forma:

$$\Delta\dot{u} = \dot{u}_0 e^{\hat{\lambda}\hat{t}}, \quad \Delta\alpha = \alpha_0 e^{\hat{\lambda}\hat{t}}, \quad \Delta\theta = \theta_0 e^{\hat{\lambda}\hat{t}} \quad (16.3)$$

donde $\hat{\lambda}$ es un autovalor (adimensional) del sistema. Introduciendo estas soluciones en el sistema, y no considerando el caso trivial ($e^{\hat{\lambda}\hat{t}} = 0$), se obtiene otro sistema completamente similar, pero sustituyendo $\Delta\dot{u}, \Delta\alpha, \Delta\theta$ por

$\hat{u}_0, \alpha_0, \theta_0$, respectivamente, y D por $\hat{\lambda}$:

$$\begin{bmatrix} 2\mu\hat{\lambda} - C_{X\hat{u}} & -C_{X\alpha} & -C_{Zs} \\ -(C_{Z\hat{u}} + 2C_{Zs}) & (2\mu - C_{Z\hat{\alpha}})\hat{\lambda} - C_{Z\alpha} & -(2\mu + C_{Z\hat{q}})\hat{\lambda} \\ -C_{m\hat{u}} & -(C_{m\hat{\alpha}}\hat{\lambda} + C_{m\alpha}) & \hat{I}_y\hat{\lambda}^2 - C_{m\hat{q}}\hat{\lambda} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_0 \\ \alpha_0 \\ \theta_0 \end{Bmatrix} = 0 \quad (16.4)$$

La condición necesaria y suficiente para que dicho sistema admita soluciones distintas de la trivial ($\hat{u}_0 = \alpha_0 = \theta_0 = 0$) es que su determinante valga cero, es decir:

$$\begin{vmatrix} 2\mu\hat{\lambda} - C_{X\hat{u}} & -C_{X\alpha} & -C_{Zs} \\ -(C_{Z\hat{u}} + 2C_{Zs}) & (2\mu - C_{Z\hat{\alpha}})\hat{\lambda} - C_{Z\alpha} & -(2\mu + C_{Z\hat{q}})\hat{\lambda} \\ -C_{m\hat{u}} & -(C_{m\hat{\alpha}}\hat{\lambda} + C_{m\alpha}) & \hat{I}_y\hat{\lambda}^2 - C_{m\hat{q}}\hat{\lambda} \end{vmatrix} = 0 \quad (16.5)$$

Desarrollando este determinante se obtiene:

$$A\hat{\lambda}^4 + B\hat{\lambda}^3 + C\hat{\lambda}^2 + D\hat{\lambda} + E = 0 \quad (16.6)$$

donde:

$$\begin{aligned} A &= 2\mu\hat{I}_y(2\mu - C_{Z\hat{\alpha}}) \\ B &= -2\mu\hat{I}_y(C_{Z\alpha} + C_{X\hat{u}}) + \hat{I}_yC_{X\hat{u}}C_{Z\hat{\alpha}} - 2\mu(C_{Z\hat{q}}C_{m\hat{\alpha}} - C_{m\hat{q}}C_{Z\hat{\alpha}}) - \\ &\quad -4\mu^2(C_{m\hat{\alpha}} + C_{m\hat{q}}) \\ C &= \hat{I}_y(C_{X\hat{u}}C_{Z\alpha} - C_{X\alpha}C_{Z\hat{u}}) + \\ &\quad +2\mu(C_{Z\alpha}C_{m\hat{q}} - C_{m\alpha}C_{Z\hat{q}} + C_{X\hat{u}}C_{m\hat{q}} + C_{X\hat{u}}C_{m\hat{\alpha}}) - \\ &\quad -4\mu^2C_{m\alpha} - C_{X\hat{u}}(C_{m\hat{q}}C_{Z\hat{\alpha}} - C_{Z\hat{q}}C_{m\hat{\alpha}}) - 2\hat{I}_yC_{Zs}C_{X\alpha} \end{aligned} \quad (16.7)$$

$$\begin{aligned} D &= -2C_{Zs}^2C_{m\hat{\alpha}} + 2\mu(C_{X\hat{u}}C_{m\alpha} - C_{X\alpha}C_{m\hat{u}} - C_{Zs}C_{m\hat{u}}) + \\ &\quad + C_{X\hat{u}}(C_{m\alpha}C_{Z\hat{q}} - C_{m\hat{q}}C_{Z\alpha}) - \\ &\quad - C_{X\alpha}(C_{m\hat{u}}C_{Z\hat{q}} - C_{m\hat{q}}C_{Z\hat{u}}) + \\ &\quad + C_{Zs}(C_{m\hat{u}}C_{Z\hat{\alpha}} - C_{Z\hat{u}}C_{m\hat{\alpha}}) + 2C_{Zs}C_{m\hat{q}}C_{X\alpha} \end{aligned}$$

$$E = C_{Zs}(-C_{m\alpha}(2C_{Zs} + C_{Z\hat{u}}) + C_{m\hat{u}}C_{Z\alpha})$$

El determinante (16.5) recibe el nombre de determinante característico y la ecuación (16.6) el de ecuación característica o **cuártica de estabilidad (longitudinal)**.

Analizando los signos de los coeficientes de la cuártica de estabilidad, y de algunas combinaciones entre ellos, puede conocerse el número de raíces de la ecuación (autovalores del sistema) que tienen parte real positiva, es decir, que conducen a inestabilidades dinámicas (Criterio de Estabilidad de Routh-Hurwitz). Este criterio cualitativo establece que la condición necesaria y suficiente para que todas las raíces de la cuártica de estabilidad tengan parte real negativa es:

$$A > 0, \ B > 0, \ C > 0, \ D > 0, \ E > 0, \ R = D(BC - AD) - B^2E > 0 \quad (16.8)$$

donde R recibe el nombre de Discriminante de Routh.

16.3. Modos longitudinales. Determinación de autovalores, autovectores y formas de los modos

Resolver la cuártica de estabilidad longitudinal para un avión genérico se antoja muy complicado. Cuando se introducen valores reales de las derivadas de estabilidad para aviones modernos concretos bien diseñados, se observa que las raíces de la cuártica de estabilidad son, casi siempre, dos pares de raíces complejas conjugadas:

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_{1,2} &= \hat{n}_1 \pm i\hat{\omega}_1 \\ \hat{\lambda}_{3,4} &= \hat{n}_3 \pm i\hat{\omega}_3 \end{aligned} \quad (16.9)$$

Por tanto los modos propios longitudinales se reducen a dos modos oscilatorios.

Para caracterizar un par de autovalores complejos conjugados se utilizan dos parámetros, como son su parte real, \hat{n} , y la parte imaginaria de uno de ellos, $\hat{\omega}$ (suele utilizarse la de signo positivo). Otros dos parámetros alternativos a \hat{n} y $\hat{\omega}$ son el tiempo para que una perturbación inicial se reduzca

a la mitad, $\hat{t}_{1/2}$, y el periodo del modo oscilatorio, \hat{T} :

$$\begin{aligned}\hat{t}_{1/2} &= -\frac{0.693}{\hat{n}} \quad (\text{donde } \hat{n} < 0) \\ \hat{T} &= \frac{2\pi}{\hat{\omega}}\end{aligned}\tag{16.10}$$

Cuando $\hat{n} > 0$, suele utilizarse, en lugar del tiempo para que la perturbación inicial se reduzca a la mitad, $\hat{t}_{1/2}$, el tiempo para que la perturbación inicial se duplique, \hat{T}_2 ; es decir:

$$\hat{T}_2 = \frac{0.693}{\hat{n}} \quad (\text{donde } \hat{n} > 0)\tag{16.11}$$

El tercer conjunto alternativo de dos parámetros que caracterizan un par de autovalores complejos conjugados son la frecuencia natural, o frecuencia del modo no amortiguado, $\hat{\omega}_n$, y el coeficiente de amortiguamiento, o simplemente amortiguamiento, ζ . Ambos se definen mediante:

$$\hat{\lambda} = -\zeta\hat{\omega}_n \pm i\hat{\omega}_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{n} = -\zeta\hat{\omega}_n \\ \hat{\omega} = \hat{\omega}_n\sqrt{1-\zeta^2} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{\omega}_n = \sqrt{\hat{n}^2 + \hat{\omega}^2} \\ \zeta = -\hat{n}/\sqrt{\hat{n}^2 + \hat{\omega}^2} \end{array} \right.\tag{16.12}$$

Téngase en cuenta que \hat{n} , $\hat{\omega}$, $\hat{t}_{1/2}$, \hat{T}_2 , \hat{T} y $\hat{\omega}_n$ son parámetros adimensionales. Si se quiere recuperar las dimensiones de tiempo, habrá que multiplicarlos o dividirlos por el adimensionalizador de tiempos, $c/2u_s$.

Tanto la parte real como la parte imaginaria de uno de los dos pares de las raíces obtenidas como solución de la cuártica de estabilidad (por ejemplo, el primero), son mucho menores que los correspondientes valores del otro par. Por tanto el primer par corresponde a un movimiento de largo período y tiempo 1/2 grande, al cual Frederick W. Lanchester, allá por 1908, denominó **Modo Fugoide**, y el segundo par corresponde a un movimiento de corto período y de pequeño tiempo 1/2, denominado, por razones obvias, **Modo de Corto Período**.

Una vez calculados los autovalores del sistema resolviendo la ecuación característica, es preciso calcular sus autovectores correspondientes. El autovalor $\hat{\lambda}_1$ proporciona, para $\Delta\hat{u}, \Delta\alpha, \Delta\theta$, soluciones de la forma:

$$\hat{u}_1 e^{\hat{\lambda}_1 \hat{t}}, \quad \alpha_1 e^{\hat{\lambda}_1 \hat{t}}, \quad \theta_1 e^{\hat{\lambda}_1 \hat{t}}\tag{16.13}$$

El vector de componentes $\hat{u}_1, \alpha_1, \theta_1$ es el autovector correspondiente al autovalor $\hat{\lambda}_1$ (conocido). Para calcular su valor se sustituye (16.13) en (16.1), obteniéndose:

$$\begin{bmatrix} 2\mu\hat{\lambda}_1 - C_{X\hat{u}} & -C_{X\alpha} & -C_{Zs} \\ -(C_{Z\hat{u}} + 2C_{Zs}) & (2\mu - C_{Z\hat{\alpha}})\hat{\lambda}_1 - C_{Z\alpha} & -(2\mu + C_{Z\hat{q}})\hat{\lambda}_1 \\ -C_{m\hat{u}} & -(C_{m\hat{\alpha}}\hat{\lambda}_1 + C_{m\alpha}) & \hat{I}_y\hat{\lambda}_1^2 - C_{m\hat{q}}\hat{\lambda}_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \alpha_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = 0 \quad (16.14)$$

Este sistema homogéneo en $\hat{u}_1, \alpha_1, \theta_1$ permite determinar dos de las componentes, dando un valor arbitrario a la tercera. Se tomará como variable de referencia θ_1 a la cual se le asigna un valor real positivo. Según esto se obtiene:

$$\hat{u}_1 = |\hat{u}_1| e^{i\varphi_{\hat{u}1}}, \quad \alpha_1 = |\alpha_1| e^{i\varphi_{\alpha 1}}, \quad \theta_1 = \theta_1 \quad (16.15)$$

donde $|\hat{u}_1|$ y $|\alpha_1|$ son los módulos de las dos primeras componentes del autovector, y $\varphi_{\hat{u}1}$ y $\varphi_{\alpha 1}$ sus ángulos de fase respecto de la tercera componente.

Para el autovalor $\hat{\lambda}_2$ no es preciso calcular el autovector correspondiente, ya que se sabe que es conjugado del autovector asociado a $\hat{\lambda}_1$; es decir:

$$\hat{u}_2 = \bar{\hat{u}}_1 = |\hat{u}_1| e^{-i\varphi_{\hat{u}1}}, \quad \alpha_2 = \bar{\hat{\alpha}}_1 = |\alpha_1| e^{-i\varphi_{\alpha 1}}, \quad \theta_2 = \theta_1 \quad (16.16)$$

La variable $\Delta\hat{u}_1$ en el modo oscilatorio correspondiente a los dos autovalores complejos conjugados $\hat{\lambda}_1$ y $\hat{\lambda}_2$ se expresa de la forma:

$$\begin{aligned} \Delta\hat{u}_1 &= \hat{u}_1 e^{(\hat{n}_1+i\hat{\omega}_1)\hat{t}} + \bar{\hat{u}}_1 e^{(\hat{n}_1-i\hat{\omega}_1)\hat{t}} = |\hat{u}_1| e^{i\varphi_{\hat{u}1}} e^{(\hat{n}_1+i\hat{\omega}_1)\hat{t}} + |\hat{u}_1| e^{-i\varphi_{\hat{u}1}} e^{(\hat{n}_1-i\hat{\omega}_1)\hat{t}} \\ &= |\hat{u}_1| e^{\hat{n}_1\hat{t}} (e^{i(\varphi_{\hat{u}1}+\hat{\omega}_1\hat{t})} + e^{-i(\varphi_{\hat{u}1}+\hat{\omega}_1\hat{t})}) = 2Re \left(|\hat{u}_1| e^{\hat{n}_1\hat{t}} e^{i(\varphi_{\hat{u}1}+\hat{\omega}_1\hat{t})} \right) \end{aligned} \quad (16.17)$$

Análogamente, se pueden obtener $\Delta\alpha_1$ y $\Delta\theta_1$. Resumiendo:

$$\begin{aligned} \Delta\hat{u}_1 &= 2Re \left(|\hat{u}_1| e^{\hat{n}_1\hat{t}} e^{i(\varphi_{\hat{u}1}+\hat{\omega}_1\hat{t})} \right) \\ \Delta\alpha_1 &= 2Re \left(|\alpha_1| e^{\hat{n}_1\hat{t}} e^{i(\varphi_{\alpha 1}+\hat{\omega}_1\hat{t})} \right) \\ \Delta\theta_1 &= 2Re \left(\theta_1 e^{\hat{n}_1\hat{t}} e^{i\hat{\omega}_1\hat{t}} \right) \end{aligned} \quad (16.18)$$

Si se representan en el plano complejo las tres componentes del autovector asociado al autovalor $\hat{\lambda}_1$ (expresiones (16.15)) y se supone que

el conjunto de estos tres vectores gira con velocidad angular $\hat{\omega}_1$ alrededor del origen, manteniendo los desfases, y que los módulos se acortan o alargan de forma exponencial (con $e^{\hat{n}_1 t}$), pero todos por igual, las proyecciones sobre el eje real multiplicadas por dos proporcionan los valores de las variables correspondientes.

Por tanto, se denomina **forma del modo** a las amplitudes relativas entre las distintas componentes del vector de estado y a los ángulos de fase entre ellas; es decir:

$$\frac{|\hat{u}_1|}{\theta_1}, \frac{|\alpha_1|}{\theta_1}, \varphi_{\hat{u}1}, \varphi_{\alpha 1} \quad (16.19)$$

Todo el proceso anterior puede repetirse para los dos autovalores complejos conjugados $\hat{\lambda}_3$ y $\hat{\lambda}_4$ y obtener las características del modo de corto periodo. En concreto se obtendrían las tres variables del movimiento y la forma del modo; es decir:

$$\Delta \hat{u}_3 = 2Re \left(|\hat{u}_3| e^{\hat{n}_3 \hat{t}} e^{i(\varphi_{\hat{u}3} + \hat{\omega}_3 \hat{t})} \right) \quad (16.20)$$

$$\Delta \alpha_3 = 2Re \left(|\alpha_3| e^{\hat{n}_3 \hat{t}} e^{i(\varphi_{\alpha 3} + \hat{\omega}_3 \hat{t})} \right) \quad (16.20)$$

$$\Delta \theta_3 = 2Re \left(\theta_3 e^{\hat{n}_3 \hat{t}} e^{i\hat{\omega}_3 \hat{t}} \right)$$

$$\frac{|\hat{u}_3|}{\theta_3}, \frac{|\alpha_3|}{\theta_3}, \varphi_{\hat{u}3}, \varphi_{\alpha 3} \quad (16.21)$$

Para obtener información adicional acerca de los autovalores, autovectores y formas de los modos es preciso introducir en la formulación anterior los datos concretos de cierto avión. En la Ref. 8 se ofrecen las características aerodinámicas, geométricas y másicas de un hipotético avión comercial de transporte subsónico volando a gran altitud, entre las que pueden destacarse:

$$W = 444800 \text{ N}; u_s = 223.5 \text{ m/s}; c = 4.69 \text{ m}$$

$$b = 32.92 \text{ m}; h = 9144 \text{ m} (\text{FL} = 300)$$

El adimensionalizador de tiempos para este avión es $t^* = c/2u_s = 0.0105 \text{ s}$. Los autovalores, tiempos característicos y autovectores de los modos fugoide y corto periodo se recogen en la Tabla 16.1. La Figura 16.1 representa la variación con respecto al tiempo de unas variables típicas del movimiento en ambos modos y la Figura 16.2 muestra los diagramas vectoriales de los dos modos longitudinales.

	Modo 1 (Modo Fugoide)	Modo 2 (Modo de Corto Período)
A	$100\hat{\lambda}_{1,2} = -0.00302 \pm 0.0545i$ $\lambda_{1,2}(s^{-1}) = -0.00288 \pm 0.0519i$	$100\hat{\lambda}_{3,4} = -1.162 \pm 1.515i$ $\lambda_{3,4}(s^{-1}) = -1.107 \pm 1.443i$
T	$t_{1/2} = 240 s; T = 121 s$	$t_{1/2} = 0.624 s; T = 4.37 s$
E	$\frac{ \hat{u}_1 }{\theta_1} = 0.841; \frac{ \alpha_1 }{\theta_1} = 0.0256$ $\varphi_{\hat{u}1} = 94.9^\circ; \varphi_{\alpha 1} = -84.5^\circ$	$\frac{ \hat{u}_3 }{\theta_3} = 0.012; \frac{ \alpha_3 }{\theta_3} = 1.24$ $\varphi_{\hat{u}3} = 12.8^\circ; \varphi_{\alpha 3} = 27.6^\circ$

Tabla 16.1. Autovalores (A), tiempos característicos (T) y autovectores (E) de los modos longitudinales para un avión comercial de transporte volando a gran altitud (Ref. 8).

16.4. Ecuaciones simplificadas del modo fugoide

Como se observa en la Tabla 16.1 y en la Figura 16.2, para el modo fugoide $\Delta\alpha \cong 0$, por lo que puede suponerse que el avión vuela siempre con ángulo de ataque constante y sólo son apreciables las perturbaciones de velocidad y de ángulo de asiento. Además la ecuación de momentos no proporciona información relevante ya que la velocidad angular de cabeceo del movimiento es siempre muy pequeña. Por tanto, prescindiendo de la tercera ecuación del sistema (16.1) y haciendo $\Delta\alpha \cong 0$ en las dos restantes, se tiene:

$$\begin{aligned} (2\mu D - C_{X\dot{u}})\Delta\hat{u} - C_{Zs}\Delta\theta &= 0 \\ (C_{Z\dot{u}} + 2C_{Zs})\Delta\hat{u} + (2\mu + C_{Z\dot{q}})D\Delta\theta &= 0 \end{aligned} \quad (16.22)$$

La ecuación característica se puede escribir en la forma:

$$\hat{\lambda}^2 + 2\zeta\hat{\omega}_n\hat{\lambda} + \hat{\omega}_n^2 = 0 \quad (16.23)$$

donde las dos raíces se expresan como $\hat{\lambda}_{1,2} = \hat{n} \pm i\hat{\omega}$ (con $\hat{n} = -\zeta\hat{\omega}_n$ y $\hat{\omega} = \hat{\omega}_n\sqrt{1 - \zeta^2}$).

La frecuencia natural, $\hat{\omega}_n$, y el amortiguamiento, ζ , para este modelo simplificado del modo fugoide son:

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_n &= \sqrt{\frac{C_{Zs}(2C_{Zs} + C_{Z\dot{u}})}{2\mu(2\mu + C_{Z\dot{q}})}} \\ \zeta &= -\frac{C_{X\dot{u}}(2\mu + C_{Z\dot{q}})}{2\sqrt{C_{Zs}(2C_{Zs} + C_{Z\dot{u}})2\mu(2\mu + C_{Z\dot{q}})}} \end{aligned} \quad (16.24)$$

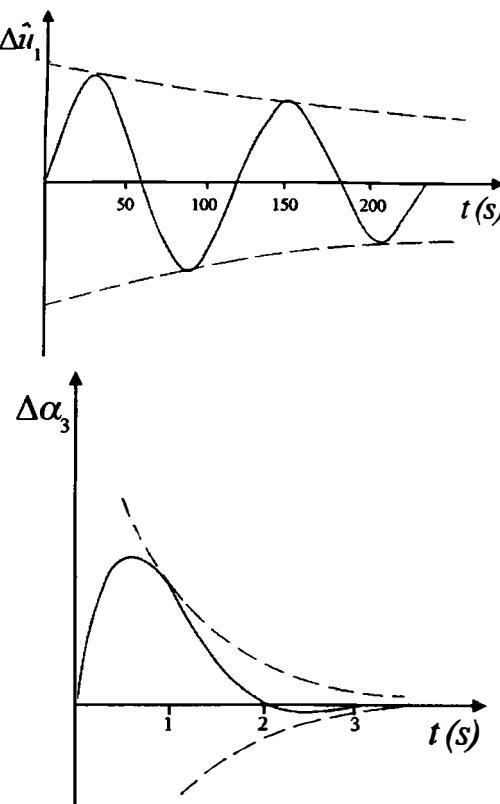


Figura 16.1. Evolución con el tiempo de variables típicas del movimiento para un avión comercial: Modo fugoide (esquema superior), Modo de corto periodo (esquema inferior).

En la mayor parte de las situaciones prácticas puede suponerse además que $C_{Z\dot{u}}$ es despreciable frente a $2C_{Zs}$ y que $C_{Z\dot{g}}$ es despreciable frente a 2μ . Además los coeficientes de fuerzas en la condición de referencia de vuelo horizontal pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} C_{Xs} &= C_{Ts} \cos \varepsilon_s - C_{Ds} = 0 \\ C_{Zs} &= -C_{Ts} \sin \varepsilon_s - C_{Ls} = -\frac{2mg}{\rho u_s^2 S} \end{aligned} \tag{16.25}$$

Si la componente del empuje sobre z_s en la condición de referencia es despreciable, se cumple que $C_{Zs} \cong -C_{Ls}$. Introduciendo estas simplificaciones adicionales en las expresiones de la frecuencia natural y el amortiguamiento

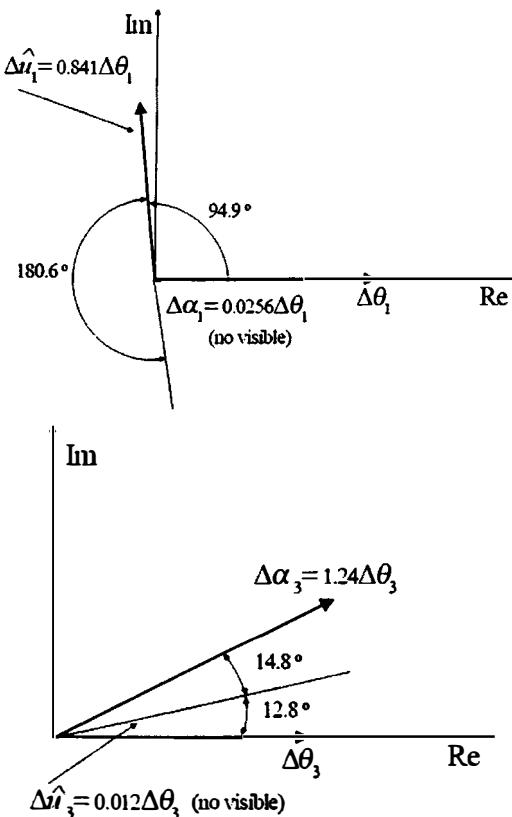


Figura 16.2. Diagramas vectoriales de los modos para un avión comercial:
Modo fugoide (esquema superior), Modo de corto periodo (esquema inferior).

se obtiene:

$$\hat{\omega}_n = \frac{C_{Ls}}{\mu\sqrt{2}}, \quad \zeta = -\frac{C_{X\hat{u}}}{2\sqrt{2}C_{Ls}} \quad (16.26)$$

Obsérvese que la frecuencia natural así obtenida no tiene dimensiones. Para obtener una frecuencia natural en el plano del tiempo (con dimensiones de rad/s) habría que dividir la frecuencia anteriormente calculada por el adimensionalizador de tiempos:

$$\omega_n = \frac{\hat{\omega}_n}{t^*} = \frac{C_{Ls}}{\mu\sqrt{2}} \frac{2u_s}{c} = \sqrt{2} \frac{g}{u_s} \quad (16.27)$$

En el capítulo 15 se obtuvo la derivada de estabilidad $C_{X\hat{u}}$ (expresión (15.4)). Obsérvese que, para $T = cte$ y en ausencia de efectos de

compresibilidad, esta expresión proporciona:

$$C_{X\hat{u}} = -2C_{Ts} \cos \varepsilon_s = -2C_{Ds} \quad (16.28)$$

y por tanto el amortiguamiento del modo queda finalmente:

$$\zeta = \frac{C_{Ds}}{\sqrt{2} C_{Ls}} = \frac{1}{\sqrt{2} E_s} \quad (16.29)$$

Mediante el análisis de las expresiones (16.29), (15.4) y (16.27) pueden extraerse las siguientes conclusiones:

- En ausencia de efectos de compresibilidad y a $T = cte$, el amortiguamiento sólo depende de la eficiencia aerodinámica en la condición de referencia (es decir, del ángulo de ataque en la condición de referencia) y es mínimo para la eficiencia máxima E_m .
- Si el régimen de vuelo es compresible, el amortiguamiento es función el número de Mach, M (debido a que $(\partial C_D / \partial M)_s \neq 0$). Como en régimen supersónico bajo $(\partial C_D / \partial M)_s < 0$ (ver Figura 9.1), podría darse el caso de que $C_{X\hat{u}} > 0$ y $\zeta < 0$, es decir, el modo fugoide sería divergente.
- La frecuencia natural dimensional del fugoide sólo depende de la velocidad de vuelo en la condición de referencia y es inversamente proporcional a la misma.

La Figura 16.3 esquematiza la trayectoria aproximada y la actitud de un avión con el modo fugoide excitado. Téngase en cuenta que la velocidad ascensional de perturbación, a partir de una condición de referencia de vuelo simétrico, estacionario, rectilíneo y horizontal, viene dada por (ver la tercera ecuación del sistema (14.22)):

$$\Delta \dot{h} = -\Delta \dot{z}_e = u_s \Delta \theta - \Delta w = u_s (\Delta \theta - \Delta \alpha) \quad (16.30)$$

y para el caso de la aproximación al modo fugoide ($\Delta \alpha \cong 0$):

$$\Delta \dot{h} \cong u_s \Delta \theta \quad (16.31)$$

Por tanto el avión subirá cuando tenga el morro hacia arriba, disminuyendo su velocidad, y descenderá cuando lo tenga hacia abajo, aumentando su velocidad.

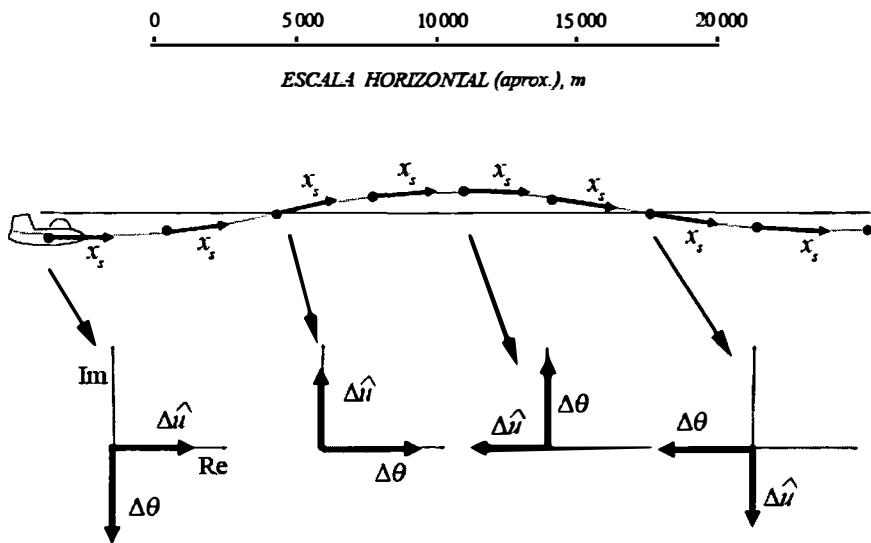


Figura 16.3. Trayectoria de un avión comercial con el modo fugoide excitado.

16.5. Ecuaciones simplificadas del modo de corto período

Como se observa en la Tabla 16.1 y en la Figura 16.2, para el modo de corto período $\Delta\hat{u} \cong 0$, por lo que puede suponerse que el avión vuela siempre con velocidad constante y sólo son apreciables las perturbaciones de ángulo de ataque y de ángulo de asiento. Además la ecuación de fuerzas según el eje x_s no proporciona información relevante ya que el tiempo característico del problema es muy pequeño. Por tanto, prescindiendo de la primera ecuación del sistema (16.1) y haciendo $\Delta\hat{u} \cong 0$ en las dos restantes, se tiene:

$$\begin{aligned} [(2\mu - C_{Z\hat{\alpha}})D - C_{Z\alpha}] \Delta\alpha - (2\mu + C_{Z\hat{q}}) \Delta\hat{q} &= 0 \\ (C_{m\hat{\alpha}}D + C_{m\alpha}) \Delta\alpha - (\hat{I}_y D - C_{m\hat{q}}) \Delta\hat{q} &= 0 \end{aligned} \quad (16.32)$$

La ecuación característica se puede escribir en la forma:

$$\hat{\lambda}^2 + 2\zeta\hat{\omega}_n\hat{\lambda} + \hat{\omega}_n^2 = 0 \quad (16.33)$$

donde las dos raíces se expresan como $\hat{\lambda}_{3,4} = \hat{n} \pm i\hat{\omega}$ (con $\hat{n} = -\zeta\hat{\omega}_n$ y $\hat{\omega} = \hat{\omega}_n\sqrt{1 - \zeta^2}$).

La frecuencia natural, $\hat{\omega}_n$, y el amortiguamiento, ζ , para este modelo simplificado del modo de corto período son:

$$\begin{aligned}\hat{\omega}_n &= \sqrt{\frac{C_{Z\alpha}C_{m\hat{q}} - (2\mu + C_{Z\hat{q}})C_{m\alpha}}{(2\mu - C_{Z\hat{\alpha}})\hat{I}_y}} \\ \zeta &= -\frac{(2\mu - C_{Z\hat{\alpha}})C_{m\hat{q}} + C_{Z\alpha}\hat{I}_y + (2\mu + C_{Z\hat{q}})C_{m\hat{\alpha}}}{2\sqrt{(2\mu - C_{Z\hat{\alpha}})\hat{I}_y(C_{Z\alpha}C_{m\hat{q}} - (2\mu + C_{Z\hat{q}})C_{m\alpha})}}\end{aligned}\quad (16.34)$$

En la mayor parte de las situaciones prácticas puede suponerse además que $C_{Z\hat{q}}$ y $C_{Z\hat{\alpha}}$ son despreciables frente a 2μ . Introduciendo esta hipótesis adicional se obtiene:

$$\begin{aligned}\hat{\omega}_n &= \sqrt{\frac{C_{Z\alpha}C_{m\hat{q}} - 2\mu C_{m\alpha}}{2\mu \hat{I}_y}} \\ \zeta &= -\frac{2\mu(C_{m\hat{q}} + C_{m\hat{\alpha}}) + C_{Z\alpha}\hat{I}_y}{2\sqrt{2\mu \hat{I}_y(C_{Z\alpha}C_{m\hat{q}} - 2\mu C_{m\alpha})}}\end{aligned}\quad (16.35)$$

La posición del centro de masas del avión es el parámetro más influyente en las características del modo de corto periodo. En las dos expresiones anteriores aparecen varias derivadas de estabilidad que pueden descomponerse en características geométricas aerodinámicas y másicas más simples:

$$\begin{aligned}C_{m\alpha} &= a_{wb}(\hat{x}_{cg} - N_0) \\ C_{Z\alpha} &= -C_{L\alpha} - C_{Ds} \cong -C_{L\alpha} \\ C_{m\hat{q}} &< 0 ; C_{m\hat{\alpha}} < 0\end{aligned}$$

Por tanto, para variaciones de la posición del centro de masas, \hat{x}_{cg} , puede dibujarse el llamado lugar de las raíces (ver la Figura 16.4). Obsérvese que la posición del centro de masas para la cual la frecuencia natural del modo es nula (y el amortiguamiento tiende a infinito) es:

$$(\hat{x}_{cg})_{\hat{\omega}_n=0} - N_0 = -\frac{C_{L\alpha}C_{m\hat{q}}}{2\mu a_{wb}} = -\frac{C_{L\alpha}}{a_{wb}} C_{m\hat{q}} \frac{\rho Sgc}{4W} \quad (16.36)$$

Si se compara esta expresión con la expresión (12.23), obtenida en el capítulo 12 para el punto de maniobra con mandos fijos, N_m , se observa que es

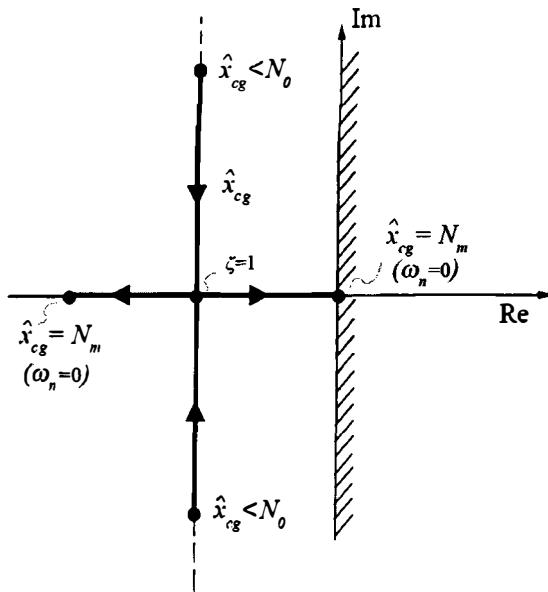


Figura 16.4. Evolución de las raíces de la ecuación característica para el modo de corto periodo, variando la posición del centro de masas.

idéntica (recuérdese que, en el caso de tirón simétrico estacionario, $\varphi'(n) = 1$). Por tanto el punto de maniobra con mandos fijos también puede interpretarse como el límite más retrasado para el centro de masas, superado el cual aparece una divergencia pura en el modo de corto período.

Otro camino alternativo para llegar a la misma conclusión consiste en introducir en la expresión de la frecuencia natural del modo de corto período, la definición del margen de maniobra con mandos fijos, H_m (ver expresiones (12.19) y (12.25)):

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_n^2 &= \frac{C_{Z\alpha}C_{m\dot{\alpha}} - 2\mu C_{m\alpha}}{2\mu\hat{I}_y} = -\frac{1}{\hat{I}_y}(C_{m\alpha} + \frac{\rho Sc}{4m}C_{L\alpha}C_{m\dot{\alpha}}) = \\ &= -\frac{(C_{m\alpha})_V}{\hat{I}_y} = \frac{a_{wb}H_m}{\hat{I}_y} \end{aligned} \quad (16.37)$$

es decir, la frecuencia natural del modo de corto período elevada al cuadrado, es proporcional al margen de maniobra con mandos fijos.

La Figura 16.5 esquematiza la trayectoria aproximada y la actitud de un avión con el modo de corto período excitado. Al igual que ocurría para el modo fugoide, la velocidad ascensional de perturbación a partir

de una condición de referencia de vuelo simétrico, estacionario rectilíneo y horizontal, vendrá dada por la expresión (16.30) y el avión subirá o descenderá dependiendo de la diferencia entre las perturbaciones de los ángulos de asiento y de ataque.

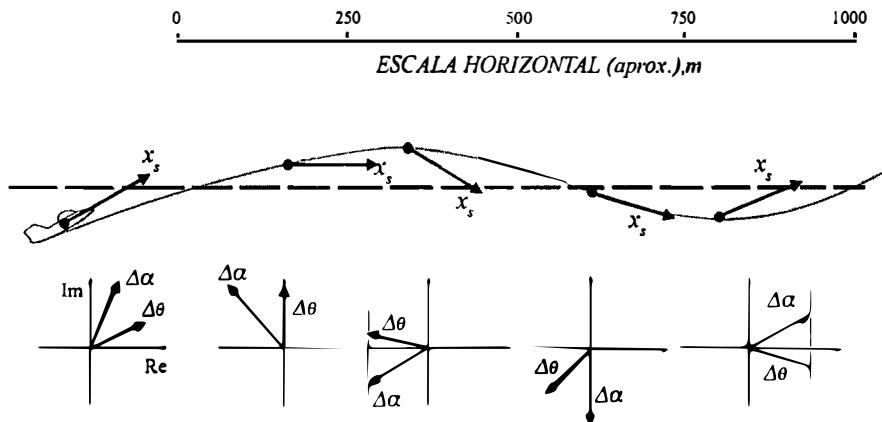


Figura 16.5. Trayectoria de un avión comercial con el modo de corto periodo excitado.

16.6. Respuesta al control longitudinal

En este apartado se determina la respuesta del avión al accionamiento del control longitudinal siguiendo una ley prefijada e independiente de la respuesta del sistema (cadena abierta).

Según esto se considera el avión como un sistema no autónomo lineal e invariante, con una entrada univariable dada por $\Delta\delta_e(\hat{t})$ y con una salida multivariante que se pretende calcular, representada por $\Delta\hat{u}(\hat{t}), \Delta\alpha(\hat{t}), \Delta\theta(\hat{t})$.

La función de transferencia (cociente entre las transformadas de Laplace de la salida y la entrada) es el elemento fundamental para la formulación analítica de problemas de respuesta.

Para determinar las funciones de transferencia del sistema se retoman las ecuaciones linealizadas del movimiento de perturbación del avión a partir de una condición de referencia de vuelo simétrico rectilíneo y estacionario, adimensionalizadas usualmente (sistema (14.32) del capítulo 14), en las que se

ha impuesto la condición adicional de vuelo de referencia horizontal ($\theta_s = 0$):

$$\begin{aligned} (2\mu D - C_{X\hat{u}})\Delta\hat{u} - C_{X\alpha}\Delta\alpha - C_{Zs}\Delta\theta &= C_{X\delta_e}\Delta\delta_e \\ -(C_{Z\hat{u}} + 2C_{Zs})\Delta\hat{u} + ((2\mu - C_{Z\hat{\alpha}})D - C_{Z\alpha})\Delta\alpha - (2\mu + C_{Z\hat{q}})D\Delta\theta &= C_{Z\delta_e}\Delta\delta_e \\ -C_{m\hat{u}}\Delta\hat{u} - (C_{m\hat{\alpha}}D + C_{m\alpha})\Delta\alpha + (\hat{I}_y D^2 - C_{m\hat{q}}D)\Delta\theta &= (C_{m\hat{\delta}_e}D + C_{m\delta_e})\Delta\delta_e \end{aligned} \quad (16.38)$$

Tomando en este sistema la transformada de Laplace (con condiciones iniciales nulas) y denotando:

$$\begin{aligned} \Delta\hat{u}(s) &= L(\Delta\hat{u}(\hat{t})) \\ \Delta\alpha(s) &= L(\Delta\alpha(\hat{t})) \\ \Delta\theta(s) &= L(\Delta\theta(\hat{t})) \\ \Delta\delta_e(s) &= L(\Delta\delta_e(\hat{t})) \end{aligned} \quad (16.39)$$

queda

$$\begin{aligned} (2\mu s - C_{X\hat{u}})\Delta\hat{u}(s) - C_{X\alpha}\Delta\alpha(s) - C_{Zs}\Delta\theta(s) &= C_{X\delta_e}\Delta\delta_e(s) \\ -(C_{Z\hat{u}} + 2C_{Zs})\Delta\hat{u}(s) + ((2\mu - C_{Z\hat{\alpha}})s - C_{Z\alpha})\Delta\alpha(s) - (2\mu + C_{Z\hat{q}})s\Delta\theta(s) &= \\ &= C_{Z\delta_e}\Delta\delta_e(s) \\ -C_{m\hat{u}}\Delta\hat{u}(s) - (C_{m\hat{\alpha}}s + C_{m\alpha})\Delta\alpha(s) + (\hat{I}_y s^2 - C_{m\hat{q}}s)\Delta\theta(s) &= \\ &= (C_{m\hat{\delta}_e}s + C_{m\delta_e})\Delta\delta_e(s) \end{aligned} \quad (16.40)$$

que es un sistema lineal no homogéneo de ecuaciones algebraicas en $\Delta\hat{u}(s)$, $\Delta\alpha(s)$, $\Delta\theta(s)$ y que puede escribirse en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} 2\mu s - C_{X\hat{u}} & -C_{X\alpha} & -C_{Zs} \\ -(C_{Z\hat{u}} + 2C_{Zs}) & (2\mu - C_{Z\hat{\alpha}})s - C_{Z\alpha} & -(2\mu + C_{Z\hat{q}})s \\ -C_{m\hat{u}} & -(C_{m\hat{\alpha}}s + C_{m\alpha}) & \hat{I}_y s^2 - C_{m\hat{q}}s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\hat{u}(s) \\ \Delta\alpha(s) \\ \Delta\theta(s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{X\delta_e} \\ C_{Z\delta_e} \\ C_{m\hat{\delta}_e}s + C_{m\delta_e} \end{Bmatrix} \Delta\delta_e(s) \quad (16.41)$$

Además, si fuera preciso determinar la velocidad angular de cabeceo de perturbación, podrían utilizarse las expresiones:

$$\Delta\hat{q} = D\Delta\theta \rightarrow \Delta\hat{q}(s) = s\Delta\theta(s) \quad (16.42)$$

La solución del sistema con las tres ecuaciones dinámicas es:

$$\begin{aligned}\Delta\hat{u}(s) &= \frac{N_{\hat{u}\delta_e}(s)}{D(s)}\Delta\delta_e(s), \quad G_{\hat{u}\delta_e} = \frac{\Delta\hat{u}(s)}{\Delta\delta_e(s)} = \frac{N_{\hat{u}\delta_e}(s)}{D(s)} \\ \Delta\alpha(s) &= \frac{N_{\alpha\delta_e}(s)}{D(s)}\Delta\delta_e(s), \quad G_{\alpha\delta_e} = \frac{\Delta\alpha(s)}{\Delta\delta_e(s)} = \frac{N_{\alpha\delta_e}(s)}{D(s)} \\ \Delta\theta(s) &= \frac{N_{\theta\delta_e}(s)}{D(s)}\Delta\delta_e(s), \quad G_{\theta\delta_e} = \frac{\Delta\theta(s)}{\Delta\delta_e(s)} = \frac{N_{\theta\delta_e}(s)}{D(s)}\end{aligned} \quad (16.43)$$

donde $G_{\hat{u}\delta_e}(s)$, $G_{\alpha\delta_e}(s)$, $G_{\theta\delta_e}(s)$ son las tres funciones de transferencia buscadas, $N_{\hat{u}\delta_e}(s)$, $N_{\alpha\delta_e}(s)$, $N_{\theta\delta_e}(s)$ son los numeradores que aparecen en las tres funciones de transferencia y $D(s)$ es el determinante característico del sistema. Este determinante viene dado por:

$$D(s) = As^4 + Bs^3 + Cs^2 +Ds + E \quad (16.44)$$

donde los coeficientes A , B , C , D y E son los mismos que aparecen en la cuártica de estabilidad longitudinal (expresiones (16.7)). Por tanto el determinante característico podrá escribirse en la forma:

$$D(s) = A(s^2 + 2\zeta_1\hat{\omega}_{n1}s + \hat{\omega}_{n1}^2)(s^2 + 2\zeta_3\hat{\omega}_{n3}s + \hat{\omega}_{n3}^2) \quad (16.45)$$

donde el subíndice 1 se refiere al modo fugoide (con sus correspondientes amortiguamiento y frecuencia natural) y el subíndice 3 al modo de corto periodo. Las relaciones entre estos amortiguamientos y frecuencias naturales y las partes reales e imaginarias de los dos pares de raíces complejas conjugadas obtenidas como solución de la cuártica de estabilidad (expresiones (16.9)) vienen dadas por:

$$\begin{aligned}\hat{\omega}_{n1} &= \sqrt{\hat{n}_1^2 + \hat{\omega}_1^2}; \quad \zeta_1 = -\hat{n}_1/\sqrt{\hat{n}_1^2 + \hat{\omega}_1^2} \\ \hat{\omega}_{n3} &= \sqrt{\hat{n}_3^2 + \hat{\omega}_3^2}; \quad \zeta_3 = -\hat{n}_3/\sqrt{\hat{n}_3^2 + \hat{\omega}_3^2}\end{aligned} \quad (16.46)$$

Además $N_{\hat{u}\delta_e}(s)$, $N_{\alpha\delta_e}(s)$, $N_{\theta\delta_e}(s)$ responden a las expresiones:

$$\begin{aligned} N_{\hat{u}\delta_e}(s) &= C_{X\delta_e} A_{11}(s) + C_{Z\delta_e} A_{21}(s) + (C_{m\hat{\delta}_e} s + C_{m\delta_e}) A_{31}(s) \\ N_{\alpha\delta_e}(s) &= C_{X\delta_e} A_{12}(s) + C_{Z\delta_e} A_{22}(s) + (C_{m\hat{\delta}_e} s + C_{m\delta_e}) A_{32}(s) \quad (16.47) \\ N_{\theta\delta_e}(s) &= C_{X\delta_e} A_{13}(s) + C_{Z\delta_e} A_{23}(s) + (C_{m\hat{\delta}_e} s + C_{m\delta_e}) A_{33}(s) \end{aligned}$$

siendo $A_{ij}(s)$ el adjunto del elemento ij en la matriz del primer miembro de la expresión (16.41).

A partir de las tres funciones de transferencia básicas (expresiones (16.43)), es posible determinar otras funciones de transferencia muy útiles para diversos problemas relacionados con la estabilidad y controlabilidad dinámicas de los aviones, como son:

$$\begin{aligned} G_{\hat{q}\delta_e} &= \frac{\Delta\hat{q}(s)}{\Delta\delta_e(s)} = sG_{\theta\delta_e} = \\ &= \frac{sN_{\theta\delta_e}(s)}{A(s^2 + 2\zeta_1\hat{\omega}_{n1}s + \hat{\omega}_{n1}^2)(s^2 + 2\zeta_3\hat{\omega}_{n3}s + \hat{\omega}_{n3}^2)} \\ G_{\hat{q}\delta_e} &= \frac{\Delta\hat{q}(s)}{\Delta\delta_e(s)} = sG_{\hat{q}\delta_e} = \\ &= s^2G_{\theta\delta_e} = \frac{s^2N_{\theta\delta_e}(s)}{A(s^2 + 2\zeta_1\hat{\omega}_{n1}s + \hat{\omega}_{n1}^2)(s^2 + 2\zeta_3\hat{\omega}_{n3}s + \hat{\omega}_{n3}^2)} \quad (16.48) \\ G_{\hat{a}_z\delta_e} &= \frac{\Delta\hat{a}_z(s)}{\Delta\delta_e(s)} = G_{\dot{\alpha}\delta_e} - G_{\dot{\theta}\delta_e} = \\ &= s(G_{\alpha\delta_e} - G_{\theta\delta_e}) = \frac{sN_{\alpha\delta_e}(s) - sN_{\theta\delta_e}(s)}{A(s^2 + 2\zeta_1\hat{\omega}_{n1}s + \hat{\omega}_{n1}^2)(s^2 + 2\zeta_3\hat{\omega}_{n3}s + \hat{\omega}_{n3}^2)} \\ G_{n_z\delta_e} &= \frac{\Delta n_z(s)}{\Delta\delta_e(s)} = \frac{2u_s^2}{gc} s(G_{\theta\delta_e} - G_{\alpha\delta_e}) = \\ &= \frac{2u_s^2}{gc} \frac{sN_{\theta\delta_e}(s) - sN_{\alpha\delta_e}(s)}{A(s^2 + 2\zeta_1\hat{\omega}_{n1}s + \hat{\omega}_{n1}^2)(s^2 + 2\zeta_3\hat{\omega}_{n3}s + \hat{\omega}_{n3}^2)} \end{aligned}$$

En las expresiones anteriores a_z representa la aceleración normal del avión (aceleración según el eje z_s) y n_z el factor de carga normal del avión, dados por:

$$a_z = \dot{w} - u_s q = u_s(\dot{\alpha} - \dot{\theta}) = \frac{2u_s^2}{c}(\hat{\alpha} - \hat{\theta}) \rightarrow \hat{a}_z = \hat{\alpha} - \hat{\theta}, \text{ con } \hat{a}_z = a_z \frac{c}{2u_s^2}$$

$$n_z = -\frac{a_z}{g} = -\frac{2u_s^2}{gc}\hat{a}_z \quad (16.49)$$

Una vez calculadas las funciones de transferencia, a partir de ellas pueden deducirse la admitancia impulsional, la admitancia índice y la respuesta en frecuencias.

La admitancia impulsional, $h(\hat{t})$, es la respuesta de un sistema a una entrada en impulso unitario. Denotando por $\delta(\hat{t})$ la función impulso unitario, las deflexiones del timón de profundidad en los planos del tiempo y de Laplace serán:

$$\Delta\delta_e(\hat{t}) = \delta(\hat{t}) \rightarrow \Delta\delta_e(s) = 1 \quad (16.50)$$

y por tanto las admitancias impulsionales son idénticas a las funciones de transferencia:

$$h_{\hat{u}\delta_e}(s) = G_{\hat{u}\delta_e}(s); \quad h_{\alpha\delta_e}(s) = G_{\alpha\delta_e}(s); \quad h_{\theta\delta_e}(s) = G_{\theta\delta_e}(s) \quad (16.51)$$

Efectuando ahora la transformada inversa de Laplace se obtienen finalmente las admitancias impulsionales en el plano el tiempo ($h_{\hat{u}\delta_e}(\hat{t}), h_{\alpha\delta_e}(\hat{t}), h_{\theta\delta_e}(\hat{t})$).

La admitancia índice, $A(\hat{t})$, es la respuesta del sistema a una entrada en escalón unitario. Denotando por $1(\hat{t})$ la función escalón unitario:

$$1(\hat{t}) = \begin{cases} 0 & \hat{t} \leq 0 \\ 1 & \hat{t} > 0 \end{cases} \quad (16.52)$$

las deflexiones del timón de profundidad en los planos del tiempo y de Laplace serán:

$$\Delta\delta_e(\hat{t}) = 1(\hat{t}) \rightarrow \Delta\delta_e(s) = 1/s \quad (16.53)$$

y por tanto:

$$A_{\hat{u}\delta_e}(s) = G_{\hat{u}\delta_e}(s)/s, \quad A_{\alpha\delta_e}(s) = G_{\alpha\delta_e}(s)/s, \quad A_{\theta\delta_e}(s) = G_{\theta\delta_e}(s)/s \quad (16.54)$$

Efectuando la transformada inversa de Laplace se obtienen finalmente las admitancias índices en el plano el tiempo ($A_{\hat{u}\delta_e}(\hat{t}), A_{\alpha\delta_e}(\hat{t}), A_{\theta\delta_e}(\hat{t})$).

Se recuerda que la definición de ganancia estática de un sistema, K , es:

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \quad (16.55)$$

y que los teoremas de los valores inicial y final establecen, respectivamente:

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{\hat{t} \rightarrow 0^+} f(\hat{t}) = \lim_{s \rightarrow \infty} s f(s) \\ f(\infty) &= \lim_{\hat{t} \rightarrow \infty} f(\hat{t}) = \lim_{s \rightarrow 0} s f(s) \end{aligned} \quad (16.56)$$

donde f es una función cualquiera del tiempo.

Como una admitancia índice genérica viene dada por $A(s) = G(s)/s$, por el teorema del valor final se deduce que:

$$A(\infty) = \lim_{\hat{t} \rightarrow \infty} A(\hat{t}) = \lim_{s \rightarrow 0} s A(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = K \quad (16.57)$$

Por tanto, la ganancia estática de un sistema es su respuesta asintótica para una entrada en escalón unidad, es decir, el valor en el infinito de la admitancia índice.

Cuando a un sistema lineal, invariante y estable se le somete a una entrada sinusoidal, tras un cierto tiempo desaparecen los transitorios asociados a las condiciones iniciales y queda únicamente una respuesta sinusoidal estacionaria de la misma frecuencia, $\hat{\omega}$, que la entrada, pero, en general, de distinta amplitud y fase. Se define **respuesta en frecuencias** como la variación de la amplitud y de la fase de la salida sinusoidal estacionaria con la frecuencia de la señal de entrada ($0 \leq \hat{\omega} < \infty$), cuando esta entrada es una función sinusoidal de amplitud constante. Si una entrada sinusoidal cualquiera se denota por $e(\hat{t})$ y la salida del sistema tras un cierto tiempo por $y(\hat{t})$ (con amplitudes respectivas a_1 y a_2) puede escribirse:

$$\begin{aligned} e(\hat{t}) &= a_1 e^{i\hat{\omega}\hat{t}} \\ y(\hat{t}) &= a_2 e^{i\hat{\omega}\hat{t}} \end{aligned} \quad (16.58)$$

$$G(i\hat{\omega}) = \frac{a_2}{a_1} = |G(i\hat{\omega})| e^{i\phi(\hat{\omega})} = KM(\hat{\omega})e^{i\phi(\hat{\omega})}$$

donde $G(i\hat{\omega})$ es la llamada función de respuesta en frecuencias, y K y M son dos magnitudes reales, llamadas respectivamente ganancia estática y ganancia

dinámica o factor de magnificación. El producto $KM(\hat{\omega})$ se denomina ganancia total y el desfase $\phi(\hat{\omega})$ representa el avance de la salida respecto a la entrada.

Las representaciones gráficas de la respuesta en frecuencias son de tres tipos: el diagrama de Bode (dos diagramas cartesianos con $|G(i\hat{\omega})|$ y $\phi(\hat{\omega})$ en ordenadas y $\hat{\omega}$ en abcisas, esta última en escala logarítmica), el diagrama de Nyquist (diagrama polar de $|G(i\hat{\omega})| - \phi(\hat{\omega})$, para $0 \leq \hat{\omega} < \infty$) y el diagrama de Nichols (diagrama cartesiano de $|G(i\hat{\omega})|$ en ordenadas y $\phi(\hat{\omega})$ en abcisas, para $0 \leq \hat{\omega} < \infty$).

En el caso estudiado de la dinámica longitudinal del avión, las funciones de respuestas en frecuencia vendrán dadas por $G_{\hat{u}\delta_e}(i\hat{\omega})$, $G_{\alpha\delta_e}(i\hat{\omega})$, $G_{\theta\delta_e}(i\hat{\omega})$.

Para el trabajo analítico relacionado con el diseño de sistemas de control pueden resultar muy útiles funciones de transferencia aproximadas. Algunas de estas se pueden obtener a partir de los modelos aproximados para los modos fugoide y corto período (ver apartados 16.4 y 16.5). Dichas funciones son útiles para entradas cuya representación espectral se limita a ciertas bandas de frecuencias adecuadas al modo en cuestión.

16.6.1. Respuesta válida para tiempos pequeños

Uno de los problemas principales asociados con la respuesta longitudinal es el movimiento del avión durante los primeros segundos tras la aplicación del control. Como las condiciones son similares a las del modo corto período (es decir, la variación de la velocidad es muy pequeña), puede utilizarse la aproximación que se ha desarrollado para este modo en el apartado 16.5.

A partir de una condición de referencia de vuelo simétrico rectilíneo horizontal ($\theta_s = 0$) y estacionario, sin considerar la ecuación de fuerzas según el eje x_s , y despreciando las perturbaciones en velocidad ($\Delta\hat{u}(t) \cong 0$), se obtiene el sistema dinámico siguiente:

$$\begin{aligned} ((2\mu - C_{Z\hat{\alpha}})D - C_{Z\alpha})\Delta\alpha - (2\mu + C_{Z\hat{q}})D\Delta\theta &= C_{Z\delta_e}\Delta\delta_e \\ -(C_{m\hat{\alpha}}D + C_{m\alpha})\Delta\alpha + (\hat{I}_y D^2 - C_{m\hat{q}}D)\Delta\theta &= (C_{m\hat{\delta}_e}D + C_{m\delta_e})\Delta\delta_e \end{aligned} \quad (16.59)$$

Si además se desprecian las derivadas de estabilidad $C_{Z\hat{\alpha}}$, $C_{Z\hat{q}}$, $C_{Z\delta_e}$, $C_{m\hat{\delta}_e}$ (normalmente pequeñas), se toma la transformada de Laplace (con

condiciones iniciales nulas) y se introduce $\Delta\hat{q} = D\Delta\theta$, el sistema anterior queda:

$$\begin{bmatrix} 2\mu s - C_{Z\alpha} & -2\mu \\ -(C_{m\hat{\alpha}}s + C_{m\alpha}) & \hat{I}_y s - C_{m\hat{q}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\alpha(s) \\ \Delta\hat{q}(s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ C_{m\delta_e} \end{Bmatrix} \Delta\delta_e(s) \quad (16.60)$$

Operando se obtiene:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\delta_e} &= \frac{\Delta\alpha(s)}{\Delta\delta_e(s)} = \frac{C_{m\delta_e}}{\hat{I}_y} \frac{1}{s^2 + 2\zeta\hat{\omega}_n s + \hat{\omega}_n^2} \\ G_{\hat{q}\delta_e} &= \frac{\Delta\hat{q}(s)}{\Delta\delta_e(s)} = \frac{C_{m\delta_e}}{\hat{I}_y} \frac{s - (C_{Z\alpha}/2\mu)}{s^2 + 2\zeta\hat{\omega}_n s + \hat{\omega}_n^2} \\ G_{\theta\delta_e} &= \frac{\Delta\theta(s)}{\Delta\delta_e(s)} = \frac{G_{\hat{q}\delta_e}}{s} = \frac{C_{m\delta_e}}{\hat{I}_y} \frac{s - (C_{Z\alpha}/2\mu)}{s(s^2 + 2\zeta\hat{\omega}_n s + \hat{\omega}_n^2)} \end{aligned} \quad (16.61)$$

con

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_n &= \sqrt{\frac{C_{Z\alpha}C_{m\hat{q}} - 2\mu C_{m\alpha}}{2\mu\hat{I}_y}} \\ \zeta &= -\frac{2\mu(C_{m\hat{q}} + C_{m\hat{\alpha}}) + C_{Z\alpha}\hat{I}_y}{2\sqrt{2\mu\hat{I}_y(C_{Z\alpha}C_{m\hat{q}} - 2\mu C_{m\alpha})}} \end{aligned} \quad (16.62)$$

A partir de las funciones de transferencia anteriores puede determinarse, por ejemplo, la respuesta del avión en ángulo de ataque a una deflexión del timón de profundidad en escalón unitario, válida para tiempos cortos (admitancia índice a velocidad constante). Como las deflexiones del timón de profundidad en los planos del tiempo y de Laplace son, respectivamente, $\Delta\delta_e(\hat{t}) = 1(\hat{t})$ y $\Delta\delta_e(s) = 1/s$, para el ángulo de ataque queda:

$$\Delta\alpha(s) = G_{\alpha\delta_e} \frac{1}{s} = \frac{C_{m\delta_e}}{\hat{I}_y} \frac{1}{s(s^2 + 2\zeta\hat{\omega}_n s + \hat{\omega}_n^2)} \quad (16.63)$$

Por tanto, la admitancia índice en el plano de Laplace quedará:

$$A_{\alpha\delta_e}(s) = \frac{C_{m\delta_e}}{\hat{I}_y} \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)s} = \frac{C_{m\delta_e}}{\hat{I}_y} \left(\frac{A_1}{(s - s_1)} + \frac{A_2}{(s - s_2)} + \frac{A_3}{(s - s_3)} \right) \quad (16.64)$$

donde s_1, s_2 y $s_3 = 0$ son las tres raíces del denominador. Para pasar al plano del tiempo se utiliza el teorema de expansión de Heaviside, que proporciona la transformada inversa de Laplace:

$$A_{\alpha \delta_e}(\hat{t}) = \frac{C_{m \delta_e}}{\hat{I}_y} \left[A_1 e^{s_1 \hat{t}} + A_2 e^{s_2 \hat{t}} + A_3 \right] \quad (16.65)$$

donde

$$\begin{aligned} A_1 &= \left. \frac{s - s_1}{(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)} \right|_{s=s_1} = \frac{1}{s_1(s_1 - s_2)} \\ A_2 &= \left. \frac{s - s_2}{(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)} \right|_{s=s_2} = \frac{1}{s_2(s_1 - s_2)} \\ A_3 &= \left. \frac{s - s_3}{(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)} \right|_{s=s_3} = \frac{1}{s_1 s_2} \end{aligned} \quad (16.66)$$

Supóngase ahora $\zeta \leq 1$ (se trata del caso habitual en la práctica). Las raíces del denominador de la admitancia índice son:

$$s_1 = \hat{n} + i\hat{\omega}, \quad s_2 = \hat{n} - i\hat{\omega}, \quad s_3 = 0 \quad (\hat{n} = -\zeta \hat{\omega}_n, \quad \hat{\omega} = \hat{\omega}_n \sqrt{1 - \zeta^2}) \quad (16.67)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{s_1(s_1 - s_2)} = \frac{1}{(\hat{n} + i\hat{\omega})2i\hat{\omega}} \\ A_2 &= -\frac{1}{s_2(s_1 - s_2)} = -\frac{1}{(\hat{n} - i\hat{\omega})2i\hat{\omega}} \\ A_3 &= \frac{1}{s_1 s_2} = \frac{1}{\hat{n}^2 + \hat{\omega}^2} = \frac{1}{\hat{\omega}_n^2} \end{aligned} \quad (16.68)$$

Tras operar, la expresión (16.65) queda en la forma:

$$A_{\alpha \delta_e}(\hat{t}) = \frac{C_{m \delta_e}}{\hat{I}_y} \frac{1}{\hat{\omega}_n^2} \left[1 - e^{-\zeta \hat{\omega}_n \hat{t}} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \hat{\omega}_n \sqrt{1 - \zeta^2} \hat{t} + \cos \hat{\omega}_n \sqrt{1 - \zeta^2} \hat{t} \right) \right] \quad (16.69)$$

Si fuera $\zeta \geq 1$, se obtendría análogamente:

$$s_1 = \hat{n} + \hat{\omega}', \quad s_2 = \hat{n} - \hat{\omega}', \quad s_3 = 0 \quad (\hat{n} = -\zeta \hat{\omega}_n, \quad \hat{\omega}' = \hat{\omega}_n \sqrt{\zeta^2 - 1}) \quad (16.70)$$

Entonces.

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{s_1(s_1 - s_2)} = \frac{1}{(\hat{n} + \hat{\omega}')2\hat{\omega}'} \\ A_2 &= -\frac{1}{s_2(s_1 - s_2)} = -\frac{1}{(\hat{n} - \hat{\omega}')2\hat{\omega}'} \\ A_3 &= \frac{1}{s_1 s_2} = \frac{1}{\hat{n}^2 - \hat{\omega}'^2} = \frac{1}{\hat{\omega}_n^2} \end{aligned} \quad (16.71)$$

Tras operar, la expresión (16.65) queda en la forma:

$$A_{\alpha\delta_e}(\hat{t}) = \frac{C_{m\delta_e}}{\hat{I}_y} \frac{1}{\hat{\omega}_n^2} \left[1 + \frac{\hat{n} - \hat{\omega}'}{2\hat{\omega}'} e^{(\hat{n} + \hat{\omega}')\hat{t}} - \frac{\hat{n} + \hat{\omega}'}{2\hat{\omega}'} e^{(\hat{n} - \hat{\omega}')\hat{t}} \right] \quad (16.72)$$

La Figura 16.6 representa la admitancia índice, para cualesquiera valores del coeficiente de amortiguamiento y la frecuencia natural (expresiones (16.69) y (16.72)).

La ganancia estática, $K_{\alpha\delta_e}$, puede calcularse haciendo $\hat{t} \rightarrow \infty$ en las expresiones anteriores de la admitancia índice, o haciendo $s = 0$ en la función de transferencia correspondiente (primera de las expresiones (16.61)), quedando:

$$K_{\alpha\delta_e} = A_{\alpha\delta_e}(\infty) = \frac{C_{m\delta_e}}{\hat{I}_y} \frac{1}{\hat{\omega}_n^2} = \frac{2\mu C_{m\delta_e}}{C_{Z\alpha} C_{m\hat{q}} - 2\mu C_{m\alpha}} \quad (16.73)$$

Obsérvese que la ganancia estática tiende a infinito cuando se anula la frecuencia natural del modo, es decir, cuando el centro de masas está situado en el punto de maniobra con mandos fijos (ver expresión (16.36)). Además, mediante este modelo simplificado, se concluye que existe una velocidad angular de cabeceo en el infinito distinta de cero dada por (ver segunda de las expresiones (16.61)):

$$\hat{q}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} G_{\hat{q}\delta_e} = -\frac{C_{m\delta_e} C_{Z\alpha}}{2\mu \hat{I}_y} \frac{1}{\hat{\omega}_n^2} = -\frac{C_{m\delta_e} C_{Z\alpha}}{C_{Z\alpha} C_{m\hat{q}} - 2\mu C_{m\alpha}} \quad (16.74)$$

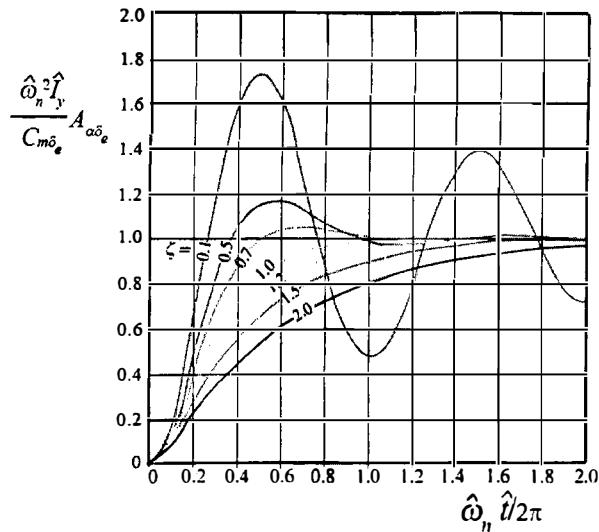


Figura 16.6. Respuesta en ángulo de ataque a una entrada escalón unidad en deflexión de timón de profundidad, válida para tiempos pequeños.

Obviamente estos resultados no son realistas ya que, para tiempos grandes, no es aplicable la hipótesis de que la velocidad de perturbación es nula. Para obtener resultados más realistas se han de utilizar las funciones de transferencia del modelo completo (segunda expresión del sistema (16.43) y primera expresión del sistema (16.48)), obteniéndose finalmente:

$$\begin{aligned}
 K_{\alpha\delta_e} &= A_{\alpha\delta_e}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{N_{\alpha\delta_e}(s)}{D(s)} = -\frac{C_{m\delta_e}}{C_{m\alpha}} \quad (\text{suponiendo } C_{m\dot{u}} \cong 0) \\
 \hat{q}(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{N_{\theta\delta_e}(s)}{D(s)} = 0
 \end{aligned} \tag{16.75}$$

16.7. Problemas 16.1 y 16.2

PROBLEMA 16.1

Para efectuar un análisis más detallado del modo fugoide, se plantean los dos modelos simplificados siguientes:

En primer lugar, la denominada “Aproximación de Lanchester” (o “Aproximación Energética”) supone que el avión efectúa un vuelo simétrico, horizontal, rectilíneo y estacionario con velocidad u_s , a partir del cual se plantean las ecuaciones dinámicas perturbadas de fuerzas. Se supone además que se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y máscicas del avión, que $\varepsilon = 0$ y que el movimiento perturbado tiene siempre lugar con coeficiente de sustentación constante, con $T = D$ y con $|\gamma| \ll 1$.

Se pide:

- 1º) Determinar la energía específica del avión, e .
- 2º) Plantear una ecuación dinámica linealizada en el grado de libertad de desplazamiento vertical, h .
- 3º) Determinar el período y el amortiguamiento del movimiento perturbado, discutiendo la influencia de la velocidad u_s .

El segundo modelo simplificado utiliza el sistema de ecuaciones dinámicas linealizadas a partir de una condición de referencia de vuelo simétrico, horizontal, rectilíneo y estacionario, considerando que el avión está provisto de un sistema motopropulsor tal que su empuje varía con la velocidad según la ley $T = KV^n$, donde K, n son constantes conocidas. Se supone ahora que se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y máscicas del avión, que $\varepsilon_s = 0$ y que el régimen de vuelo es subsónico incompresible.

Se pide:

- 4º) Utilizando la aproximación estándar para el modo fugoide, discutir la convergencia o divergencia del mismo en función del valor de n . Razonar físicamente el resultado obtenido.

Solución:

- 1º) La ecuación de fuerzas tangente a la trayectoria es:

$$T - D - W \sin \gamma = \frac{W}{g} \frac{dV}{dt}$$

y la ecuación cinemática de la velocidad ascensional:

$$\dot{h} = V \sin \gamma$$

Si $T = D$, ambas relaciones conducen a:

$$\begin{aligned} -W \sin \gamma &= \frac{W}{g} \frac{dV}{dt} \rightarrow V \sin \gamma + \frac{1}{g} V \frac{dV}{dt} = 0 \rightarrow \frac{dh}{dt} + \frac{1}{g} \frac{d(V^2/2)}{dt} = 0 \\ e &= \frac{V^2}{2g} + h = cte = \frac{u_s^2}{2g} \end{aligned}$$

en donde se ha tomado el origen de altitudes en el vuelo horizontal de referencia. Este mismo resultado podría haberse obtenido mediante los desarrollos efectuados en el capítulo 9, apartado 9.5.

2º) Utilizando ahora una segunda ecuación dinámica de fuerzas según el eje vertical ligado al suelo:

$$L \cos \gamma - W = \frac{W}{g} \frac{d^2h}{dt^2}$$

y como el módulo ángulo de asiento de velocidad es pequeño y el coeficiente de sustentación es constante:

$$\begin{aligned} L - W &= \frac{W}{g} \frac{d^2h}{dt^2} \rightarrow \frac{1}{2} \rho V^2 S C_{Ls} - W = \frac{W}{g} \frac{d^2h}{dt^2} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{2} \rho (u_s^2 - 2gh) S C_{Ls} - W = \frac{W}{g} \frac{d^2h}{dt^2} \end{aligned}$$

La condición de referencia establece que:

$$L_s - W = 0 \rightarrow \frac{1}{2} \rho u_s^2 S C_{Ls} - W = 0$$

y por tanto, la ecuación buscada será:

$$\frac{d^2h}{dt^2} + \frac{\rho g^2 S C_{Ls}}{W} h = 0 \rightarrow \frac{d^2h}{dt^2} + \frac{2g^2}{u_s^2} h = 0$$

3º) El periodo (dimensional) y el amortiguamiento del movimiento perturbado se obtienen a partir de la expresión anterior:

$$\lambda = \pm i \sqrt{2} \frac{g}{u_s} \rightarrow \begin{cases} T = \frac{2\pi}{\lambda} = \pi \sqrt{2} \frac{u_s}{g} \\ \zeta = 0 \end{cases}$$

Puede apreciarse que la Aproximación de Lanchester no permite modelizar el amortiguamiento del modo fugoide. Sin embargo, la frecuencia de la oscilación obtenida coincide exactamente con la calculada en el apartado 16.4, para el caso de amortiguamiento nulo (ver expresión (16.27)). Además se observa que el periodo de la oscilación es directamente proporcional a la velocidad del vuelo no perturbado.

4º) La derivada de estabilidad $C_{X\hat{u}}$ responde a la expresión (ver apartado 3º) del problema 15.1):

$$C_{X\hat{u}} = (n - 2)C_{Ts}$$

y como ahora se impone que el vuelo de referencia sea horizontal:

$$C_{Ts} = C_{Ds} \rightarrow C_{X\hat{u}} = (n - 2)C_{Ds}$$

En el apartado 16.4 se obtuvieron las siguientes ecuaciones simplificadas para el modo fugoide (se supuso $C_{Z\hat{u}}$ y $C_{Z\hat{\theta}}$ despreciables):

$$(2\mu D - C_{X\hat{u}})\Delta\hat{u} + C_{Ls}\Delta\theta = 0$$

$$-2C_{Ls}\Delta\hat{u} + 2\mu D\Delta\theta = 0$$

La frecuencia natural adimensional, $\hat{\omega}_n$, y el amortiguamiento, ζ , del modo fugoide serán:

$$\hat{\omega}_n = \frac{C_{Ls}}{\mu\sqrt{2}} , \quad \zeta = -\frac{(n - 2)C_{Ds}}{2\sqrt{2}C_{Ls}}$$

Obsérvese que la expresión de la frecuencia natural adimensional es idéntica a la ya obtenida y que para $n = 0$ se obtiene asimismo idéntico amortiguamiento. Para $n \neq 0$ pueden distinguirse tres casos:

- $n < 2 \rightarrow \zeta > 0$: Modo fugoide convergente
- $n = 2 \rightarrow \zeta = 0$: Modo fugoide indiferente
- $n > 2 \rightarrow \zeta < 0$: Modo fugoide divergente

Como la resistencia varía con el cuadrado de la velocidad, si el empuje varía con la velocidad con un exponente mayor que dos, el grupo motopropulsor está introduciendo en el sistema más energía que la que se

disipa por resistencia y el vuelo será divergente. La situación se invierte para exponentes del empuje menores que dos. Por último, si el exponente es justamente dos, se vuelve a la aproximación de Lanchester en donde el avión se mueve en un campo de fuerzas conservativo.

PROBLEMA 16.2

Un avión que se encuentra en una condición de referencia de vuelo simétrico horizontal rectilíneo estacionario con las alas a nivel y con empuje T_s dado, procede a lanzar una carga puntual de peso W_c conocido y situada en su centro de masas.

Suponiendo además que se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas necesarias para la resolución del problema (por ejemplo, $W_c \ll W_s$, donde W_s es el peso del avión antes del lanzamiento de la carga, la polar es parabólica de coeficientes constantes, etc.), que el régimen de vuelo es subsónico incompresible, que el piloto no actúa sobre los mandos tras el lanzamiento de la carga, que el empuje no varía con la velocidad ni con la altura, pasa por el centro de masas, y $\varepsilon_s = 0$, y que la densidad ρ es una constante conocida.

Se pide:

1º) Determinar los valores iniciales de las variables $\alpha_s, \theta_s, \gamma_s, u_s, \delta_{es}$, correspondientes al movimiento no perturbado de referencia.

2º) Plantear el sistema linealizado de ecuaciones que permiten estudiar el movimiento longitudinal de perturbación del avión tras el lanzamiento, expresando las derivadas de estabilidad en la forma más desarrollada posible.

3º) Suponiendo que el avión sea dinámicamente estable, determinar $\alpha(\infty), \theta(\infty), \gamma(\infty), u(\infty)$, es decir, los valores asintóticos a los que tienden las variables $\alpha, \theta, \gamma, u$. Comentar físicamente los resultados obtenidos.

Solución:

1º) Planteando el equilibrio de fuerzas y momentos en la condición de referencia:

$$X_s = 0 \rightarrow T_s - D_s = 0$$

$$Z_s + W_s = 0 \rightarrow -L_s + W_s = 0$$

$$M_{As} = 0$$

Según el enunciado $\gamma_s = \theta_s = \alpha_s = 0$. Por tanto:

$$C_{Ls} = \frac{2W_s}{\rho S u_s^2}$$

$$T_s = \frac{1}{2} \rho u_s^2 S (C_{D0} + k C_{Ls}^2) \rightarrow u_s = \sqrt{\frac{T_s}{\rho S C_{D0}} \pm \sqrt{\left(\frac{T_s}{\rho S C_{D0}}\right)^2 - \frac{4W_s^2 k}{\rho^2 S^2 C_{D0}}}}$$

$$C_{m0} + C_{m\alpha} \alpha_s + C_{m\delta_e} \delta_{es} = 0 \rightarrow \delta_{es} = -\frac{C_{m0}}{C_{m\delta_e}}$$

2º) Planteando el equilibrio de fuerzas y momentos en el movimiento perturbado:

$$\begin{aligned} -W \sin \theta + X &= \frac{W}{g} (\dot{u} + qw) \\ W \cos \theta + Z &= \frac{W}{g} (\dot{w} - qu) \\ M_A &= I_y \dot{q} \end{aligned}$$

donde $W = W_s + \Delta W$, con $\Delta W = -W_c$.

Perturbando a partir de la condición de referencia y linealizando el sistema anterior:

$$\begin{aligned} -W_s \Delta \theta + X_s + \Delta X &= \frac{W_s}{g} \Delta \dot{u} \\ W_s + \Delta W + Z_s + \Delta Z &= \frac{W_s}{g} (\Delta \dot{w} - u_s \Delta q) \\ M_{As} + \Delta M_A &= I_y \Delta \dot{q} \end{aligned}$$

Considerando el equilibrio de fuerzas y momentos en la condición de referencia, el sistema dinámico perturbado y linealizado queda como:

$$-W_s \Delta \theta + \Delta X = \frac{W_s}{g} \Delta \dot{u}$$

$$\begin{aligned} \Delta W + \Delta Z &= \frac{W_s}{g} (\Delta \dot{w} - u_s \Delta q) \\ \Delta M_A &= I_y \Delta \dot{q} \end{aligned}$$

Introduciendo el desarrollo de Bryan en las expresiones anteriores y teniendo en cuenta que tras el lanzamiento el piloto no acciona los mandos ($\Delta \delta_e = 0$, $T = T_s = cte$) queda:

$$(2\mu D - C_{X\dot{u}}) \Delta \dot{u} - C_{X\alpha} \Delta \alpha - C_{Zs} \Delta \theta = 0$$

$$-(C_{Z\hat{u}} + 2C_{Zs})\Delta\hat{u} + ((2\mu - C_{Z\hat{\alpha}})D - C_{Z\alpha})\Delta\alpha - (2\mu + C_{Z\hat{q}})D\Delta\theta = \Delta\hat{W}$$

$$-C_{m\hat{u}}\Delta\hat{u} - (C_{m\hat{\alpha}}D + C_{m\alpha})\Delta\alpha + (\hat{I}_y D^2 - C_{m\hat{q}}D)\Delta\theta = 0$$

dónde se denota $\Delta\hat{W} = \frac{2\Delta W}{\rho S u_s^2} = -\frac{2W_c}{\rho S u_s^2}$.

Las derivadas de estabilidad que aparecen en el sistema adimensional anterior pueden expresarse en forma más desarrollada. Teniendo en cuenta las hipótesis del enunciado:

$$C_{X\hat{u}} = -2C_{Ds}; \quad C_{X\alpha} = C_{Ls} - C_{D\alpha}; \quad C_{Zs} = -C_{Ls}$$

$$C_{Z\hat{u}} = 0; \quad C_{Z\alpha} = -C_{L\alpha} - C_{Ds}$$

$$C_{m\hat{u}} = 0$$

e introduciéndolas en el sistema queda finalmente:

$$(2\mu D + 2C_{Ds})\Delta\hat{u} - (C_{Ls} - C_{D\alpha})\Delta\alpha + C_{Ls}\Delta\theta = 0$$

$$2C_{Ls}\Delta\hat{u} + ((2\mu - C_{Z\hat{\alpha}})D + (C_{L\alpha} + C_{Ds}))\Delta\alpha - (2\mu + C_{Z\hat{q}})D\Delta\theta = \Delta\hat{W}$$

$$-(C_{m\hat{\alpha}}D + C_{m\alpha})\Delta\alpha + (\hat{I}_y D^2 - C_{m\hat{q}}D)\Delta\theta = 0$$

Obsérvese que el lanzamiento de la carga puede considerarse como una entrada en escalón de módulo $\Delta\hat{W}$ en la ecuación de fuerzas según el eje z_s .

3º) Para tiempos muy grandes puede imponerse $D = 0$ en el sistema obtenido en el apartado 2º, suponiendo que el sistema es dinámicamente estable:

$$2C_{Ds}\Delta\hat{u} - (C_{Ls} - C_{D\alpha})\Delta\alpha + C_{Ls}\Delta\theta = 0$$

$$2C_{Ls}\Delta\hat{u} + (C_{L\alpha} + C_{Ds})\Delta\alpha = \Delta\hat{W}$$

$$-C_{m\alpha}\Delta\alpha = 0$$

es decir

$$\Delta\alpha = 0 \rightarrow \alpha(\infty) = 0$$

e introduciendo esta condición en las otras dos ecuaciones:

$$2C_{Ds}\Delta\hat{u} + C_{Ls}\Delta\theta = 0$$

$$2C_{Ls}\Delta\hat{u} = \Delta\hat{W}$$

Por tanto se obtiene:

$$\Delta \hat{u} = \frac{\Delta \hat{W}}{2C_{Ls}} = -\frac{W_c}{2W_s} \rightarrow u(\infty) = u_s(1 - \frac{W_c}{2W_s})$$

$$\Delta \theta = \theta(\infty) = \gamma(\infty) = -\frac{2C_{Ds}}{C_{Ls}} \Delta \hat{u} = \frac{C_{Ds}}{C_{Ls}} \frac{W_c}{W_s} = \frac{C_{D0} + kC_{Ls}^2}{C_{Ls}} \frac{W_c}{W_s}$$

Como el piloto no acciona el timón de profundidad, para tiempos muy grandes se mantiene el ángulo de ataque y por tanto los coeficientes de sustentación y de resistencia; al disminuir el peso del avión (por lanzar la carga), debe disminuir la velocidad de vuelo; al disminuir la velocidad de vuelo, disminuye la resistencia del avión y, como el empuje se mantiene constante, el avión ascenderá.

Estabilidad y control dinámicos lateral-direccionales en cadena abierta

17

17.1. Introducción

En este capítulo se analiza la estabilidad dinámica lateral-direccional intrínseca del avión con respecto a pequeñas perturbaciones iniciales a partir de una situación de referencia que será la de vuelo simétrico, horizontal, rectilíneo y estacionario, y se determina la respuesta dinámica del avión en cadena abierta (controlabilidad dinámica) a entradas en deflexiones de alerones y timón de dirección.

En el apartado 17.2 se calcula la llamada cuártica de estabilidad lateral-direccional, que permite determinar los autovalores del sistema. Estos autovalores son, habitualmente, dos números reales y una pareja de complejos conjugados, por lo que en el apartado 17.3 se introducirán tres modos dinámicos llamados convergencia en balance, modo espiral y balanceo holandés.

Los tres modos propios lateral-direccionales del avión son susceptibles de tratarse de manera simplificada, de forma análoga a los tratamientos propuestos para los modos longitudinales fugoide y corto periodo. El modo de convergencia en balance corresponde, con gran aproximación, al movimiento de un avión en un túnel con el único grado de libertad de balanceo (apartado 17.4). Asimismo, en los apartados 17.5 y 17.6 se obtendrán soluciones aproximadas para los modos espiral y balanceo holandés, las cuales proporcionan información muy importante sobre el efecto de las derivadas de estabilidad en las características de los modos.

Para terminar el capítulo, en el apartado 17.7 se analiza la controlabilidad dinámica lateral-direccional en lazo abierto, es decir, la respuesta del avión a entradas en deflexiones de alerones y de timón de dirección. Como ejemplos ilustrativos se utilizan los modelos simplificados de los modos de convergencia en balance y balanceo holandés para determinar,

respectivamente, la admitancia índice en velocidad angular de balance para una entrada en deflexión de alerones y la admitancia índice en ángulo de resbalamiento para una entrada en deflexión de timón de dirección.

17.2. Cuártica de estabilidad

En el sistema adimensional de ecuaciones linealizadas lateraldireccionales del movimiento del avión (sistema (14.41)), se introduce ahora la condición de mandos fijos ($\Delta\delta_a = \Delta\delta_r = 0$) y la particularización adicional de que el vuelo de referencia sea horizontal ($\theta_s = 0$), quedando:

$$\begin{aligned} (2\mu D - C_{Y\beta})\Delta\beta - (C_{Y\hat{p}}D - C_{Zs})\Delta\phi + (2\mu - C_{Y\hat{r}})\Delta\hat{r} &= 0 \\ -C_{l\beta}\Delta\beta + (\hat{I}_x D^2 - C_{l\hat{p}}D)\Delta\phi - (\hat{J}_{xz}D + C_{l\hat{r}})\Delta\hat{r} &= 0 \\ -C_{n\beta}\Delta\beta - (\hat{J}_{xz}D^2 + C_{n\hat{p}}D)\Delta\phi + (\hat{I}_z D - C_{n\hat{r}})\Delta\hat{r} &= 0 \end{aligned} \quad (17.1)$$

Para la deducción de estas expresiones se ha utilizado la relación cinemática:

$$\Delta\hat{p} = D\Delta\phi \quad (17.2)$$

Si se quiere relacionar la velocidad angular de guiñada con el ángulo de guiñada, es preciso recurrir a la segunda ecuación cinemática angular:

$$\Delta\hat{r} = D\Delta\psi \quad (17.3)$$

Téngase en cuenta que las ecuaciones de momentos alrededor de las charnelas de los alerones y del timón de dirección (cuarta y quinta ecuaciones del sistema (14.41)) se satisfacen idénticamente y no aportan información adicional sobre la dinámica global del avión.

El sistema (17.1) constituye un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias de coeficientes constantes, con tres incógnitas ($\Delta\beta, \Delta\phi, \Delta\hat{r}$). Se supone que admite soluciones de la forma:

$$\Delta\beta = \beta_0 e^{\hat{\lambda}\hat{t}}, \quad \Delta\phi = \phi_0 e^{\hat{\lambda}\hat{t}}, \quad \Delta\hat{r} = \hat{r}_0 e^{\hat{\lambda}\hat{t}} \quad (17.4)$$

donde $\hat{\lambda}$ es un autovalor (adimensional) del sistema. Introduciendo estas soluciones en el sistema (17.1), y no considerando el caso trivial ($e^{\hat{\lambda}\hat{t}} = 0$),

se obtiene otro sistema completamente similar, pero sustituyendo $\Delta\beta, \Delta\phi, \Delta\hat{r}$ por $\beta_0, \phi_0, \hat{r}_0$, respectivamente, y D por $\hat{\lambda}$:

$$\begin{vmatrix} 2\mu\hat{\lambda} - C_{Y\beta} & -(C_{Y\hat{p}}\hat{\lambda} - C_{Zs}) & 2\mu - C_{Y\hat{r}} \\ -C_{l\beta} & \hat{I}_x\hat{\lambda}^2 - C_{l\hat{p}}\hat{\lambda} & -(\hat{J}_{xz}\hat{\lambda} + C_{l\hat{r}}) \\ -C_{n\beta} & -(\hat{J}_{xz}\hat{\lambda}^2 + C_{n\hat{p}}\hat{\lambda}) & \hat{I}_z\hat{\lambda} - C_{n\hat{r}} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_0 \\ \phi_0 \\ \hat{r}_0 \end{Bmatrix} = 0 \quad (17.5)$$

La condición necesaria y suficiente para que dicho sistema admita soluciones distintas de la trivial ($\beta_0 = \phi_0 = \hat{r}_0 = 0$) es que su determinante valga cero, es decir:

$$\begin{vmatrix} 2\mu\hat{\lambda} - C_{Y\beta} & -(C_{Y\hat{p}}\hat{\lambda} - C_{Zs}) & 2\mu - C_{Y\hat{r}} \\ -C_{l\beta} & \hat{I}_x\hat{\lambda}^2 - C_{l\hat{p}}\hat{\lambda} & -(\hat{J}_{xz}\hat{\lambda} + C_{l\hat{r}}) \\ -C_{n\beta} & -(\hat{J}_{xz}\hat{\lambda}^2 + C_{n\hat{p}}\hat{\lambda}) & \hat{I}_z\hat{\lambda} - C_{n\hat{r}} \end{vmatrix} = 0 \quad (17.6)$$

Desarrollando este determinante se obtiene:

$$A\hat{\lambda}^4 + B\hat{\lambda}^3 + C\hat{\lambda}^2 + D\hat{\lambda} + E = 0 \quad (17.7)$$

donde:

$$\begin{aligned} A &= 2\mu(\hat{I}_x\hat{I}_z - \hat{J}_{xz}^2) \\ B &= C_{Y\beta}(\hat{J}_{xz}^2 - \hat{I}_x\hat{I}_z) - 2\mu \left(\hat{I}_z C_{l\hat{p}} + \hat{I}_x C_{n\hat{r}} + \hat{J}_{xz}(C_{l\hat{r}} + C_{n\hat{p}}) \right) \\ C &= 2\mu(C_{n\hat{r}}C_{l\hat{p}} - C_{n\hat{p}}C_{l\hat{r}} + \hat{I}_x C_{n\beta} + \hat{J}_{xz} C_{l\beta}) + \hat{I}_x(C_{Y\beta}C_{n\hat{r}} - C_{n\beta}C_{Y\hat{r}}) + \\ &\quad + \hat{I}_z(C_{Y\beta}C_{l\hat{p}} - C_{l\beta}C_{Y\hat{p}}) + \hat{J}_{xz}(C_{Y\beta}C_{n\hat{p}} - C_{n\beta}C_{Y\hat{p}} + C_{l\hat{r}}C_{Y\beta} - C_{Y\hat{r}}C_{l\beta}) \\ D &= C_{Y\beta}(C_{l\hat{r}}C_{n\hat{p}} - C_{n\hat{r}}C_{l\hat{p}}) + C_{Y\hat{p}}(C_{l\beta}C_{n\hat{r}} - C_{n\beta}C_{l\hat{r}}) + \\ &\quad + (2\mu - C_{Y\hat{r}})(C_{l\beta}C_{n\hat{p}} - C_{n\beta}C_{l\hat{p}}) + C_{Zs}(\hat{I}_z C_{l\beta} + \hat{J}_{xz} C_{n\beta}) \\ E &= -C_{Zs}(C_{l\beta}C_{n\hat{r}} - C_{n\beta}C_{l\hat{r}}) \end{aligned} \quad (17.8)$$

El determinante (17.6) recibe el nombre de determinante característico y la ecuación (17.1) el de ecuación característica o **cuártica de estabilidad (lateral-direccional)**.

El Criterio de Estabilidad de Routh-Hurwitz proporciona la condición necesaria y suficiente que deben cumplir los coeficientes de la cuártica de estabilidad para que todas sus raíces tengan parte real negativa y por tanto el sistema sea estable (ver expresiones (16.8) en el apartado 16.2).

17.3. Modos lateral-direccionales. Determinación de autovalores, autovectores y formas de los modos

Resolver la cuártica de estabilidad lateral-direccional para un avión genérico se antoja muy complicado. Cuando se introducen valores reales de las derivadas de estabilidad para aviones modernos concretos bien diseñados, se observa que las raíces de la cuártica de estabilidad (autovalores del sistema) son, casi siempre, una raíz real negativa con módulo grande, otra raíz real negativa con módulo pequeño (a veces puede ser positiva, pero siempre su módulo es pequeño) y un par de raíces complejas conjugadas (habitualmente con su parte real negativa); es decir:

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_1 &= -|\hat{\lambda}_1| \\ \hat{\lambda}_2 &= -|\hat{\lambda}_2| \\ \hat{\lambda}_{3,4} &= \hat{n}_3 \pm i\hat{\omega}_3\end{aligned}\tag{17.9}$$

Por razones que resultarán evidentes con posterioridad al estudiar las formas simplificadas de los modos, a estos tres modos se les denomina, respectivamente, **Convergencia en Balance**, **Modo Espiral** y **Balanceo Holandés**.

Una vez calculados los autovalores del sistema resolviendo la ecuación característica, es preciso calcular sus autovectores correspondientes.

El autovalor $\hat{\lambda}_1$ (convergencia en balance) proporciona, para $\Delta\beta, \Delta\phi, \Delta\hat{r}$, soluciones de la forma:

$$\beta_1 e^{\hat{\lambda}_1 \hat{t}}, \quad \phi_1 e^{\hat{\lambda}_1 \hat{t}}, \quad \hat{r}_1 e^{\hat{\lambda}_1 \hat{t}}\tag{17.10}$$

El vector de componentes $\beta_1, \phi_1, \hat{r}_1$ es el autovector correspondiente al autovalor $\hat{\lambda}_1$ (número real negativo conocido). Para calcular su valor se

sustituyen las expresiones (17.10) en el sistema (17.1), obteniéndose:

$$\begin{bmatrix} 2\mu\hat{\lambda}_1 - C_{Y\beta} & -(C_{Y\hat{p}}\hat{\lambda}_1 - C_{Zs}) & 2\mu - C_{Y\hat{r}} \\ -C_{l\beta} & \hat{I}_x\hat{\lambda}_1^2 - C_{l\hat{p}}\hat{\lambda}_1 & -(\hat{J}_{xz}\hat{\lambda}_1 + C_{l\hat{r}}) \\ -C_{n\beta} & -(\hat{J}_{xz}\hat{\lambda}_1^2 + C_{n\hat{p}}\hat{\lambda}_1) & \hat{I}_z\hat{\lambda}_1 - C_{n\hat{r}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \phi_1 \\ \hat{r}_1 \end{Bmatrix} = 0 \quad (17.11)$$

Este sistema homogéneo en β_1 , ϕ_1 , \hat{r}_1 permite determinar dos de las componentes del autovector, dando un valor arbitrario a la tercera. Tomando como variable de referencia ϕ_1 se obtienen los otros dos números reales β_1 , \hat{r}_1 .

Para el autovalor $\hat{\lambda}_2$ (modo espiral) se repite el proceso recogido en los párrafos anteriores, obteniéndose el autovector correspondiente β_2 , ϕ_2 , \hat{r}_2 .

Para los autovalores $\hat{\lambda}_3$ y $\hat{\lambda}_4$ (balanceo holandés) se opera de forma análoga a los modos longitudinales (ver apartado 16.3), obteniéndose las tres variables del movimiento y la forma del modo (amplitudes relativas de las distintas componentes del autovector y ángulos de fase entre ellas); es decir:

$$\begin{aligned} \beta_3 &= |\beta_3| e^{i\varphi_{\beta 3}}, \hat{r}_3 = |\hat{r}_3| e^{i\varphi_{\hat{r}3}}, \phi_3 = \phi_3 \\ \Delta\beta_3 &= 2Re \left(|\beta_3| e^{\hat{n}_3\hat{t}} e^{i(\varphi_{\beta 3} + \hat{\omega}_3\hat{t})} \right) \\ \Delta\hat{r}_3 &= 2Re \left(|\hat{r}_3| e^{\hat{n}_3\hat{t}} e^{i(\varphi_{\hat{r}3} + \hat{\omega}_3\hat{t})} \right) \\ \Delta\phi_3 &= 2Re \left(\phi_3 e^{\hat{n}_3\hat{t}} e^{i\hat{\omega}_3\hat{t}} \right) \\ \frac{|\beta_3|}{\phi_3}, \quad \frac{|\hat{r}_3|}{\phi_3}, \quad \varphi_{\beta 3}, \quad \varphi_{\hat{r}3} \end{aligned} \quad (17.12)$$

Introduciendo en la formulación anterior los datos del avión utilizado como ejemplo en el apartado 16.3 (avión comercial de transporte volando a gran altitud), se obtienen resultados concretos para los modos lateral-direccionales. En este caso el adimensionalizador de tiempos vale $t^* = b/2u_s = 0.0736$ s, y los autovalores, tiempos característicos y autovectores de los tres modos se recogen en la Tabla 17.1. La Figura 17.1 muestra el diagrama vectorial del modo de balanceo holandés.

		Modo 1 Convergencia de Balance	Modo 2 Modo Espiral	Modo 3 Balanceo Holandés
A		$\hat{\lambda}_1 = -0.1178$ $\lambda_1(s^{-1}) = -1.601$	$\hat{\lambda}_2 = -0.000479$ $\lambda_2(s^{-1}) = -0.006508$	$\hat{\lambda}_{3,4} = -0.00723 \pm \pm 0.0682i$ $\lambda_{3,4}(s^{-1}) = -0.09823 \pm \pm 0.9266i$
T		$t_{1/2} = 0.43\text{ s}$	$t_{1/2} = 106\text{ s}$	$t_{1/2} = 7.03\text{ s}$ $T = 6.79\text{ s}$
E		$\frac{ \beta_1 }{\phi_1} = -0.0017$ $\frac{ \hat{r}_1 }{\phi_1} = 0.0036$ $\frac{ \beta_1 }{\phi_1} = -0.0017$ $\frac{ \psi_1 }{\phi_1} = -0.0305$ $\frac{ \beta_1 }{\hat{p}_1} = 0.0144$ $\frac{ \hat{r}_1 }{\hat{p}_1} = -0.0305$ $\varphi_{\beta_1} = \varphi_{\hat{r}_1} = 0$ $\varphi_{\psi_1} = \varphi_{\hat{p}_1} = 0$	$\frac{ \beta_2 }{\phi_2} = 0.0091$ $\frac{ \hat{r}_2 }{\phi_2} = 0.0032$ $\frac{ \beta_2 }{\phi_2} = 0.0091$ $\frac{ \psi_2 }{\phi_2} = -6.63$ $\frac{ \hat{p}_2 }{\beta_2} = -0.052$ $\frac{ \hat{r}_2 }{\beta_2} = 0.35$ $\varphi_{\beta_2} = \varphi_{\hat{r}_2} = 0$ $\varphi_{\psi_2} = \varphi_{\hat{p}_2} = 0$	$\frac{ \beta_3 }{\phi_3} = 0.681$ $\frac{ \hat{r}_3 }{\phi_3} = 0.0479$ $\varphi_{\beta_3} = -58.5^\circ$ $\varphi_{\hat{r}_3} = -135.3^\circ$ $\frac{ \beta_3 }{\phi_3} = 0.681$ $\frac{ \psi_3 }{\phi_3} = 0.699$ $\varphi_{\beta_3} = -58.5^\circ$ $\varphi_{\psi_3} = 128.6^\circ$

Tabla 17.1. Autovalores (A), tiempos característicos (T) y autovectores (E) de los modos lateral-direccionales para un avión comercial de transporte volando a gran altitud (Ref. 8).

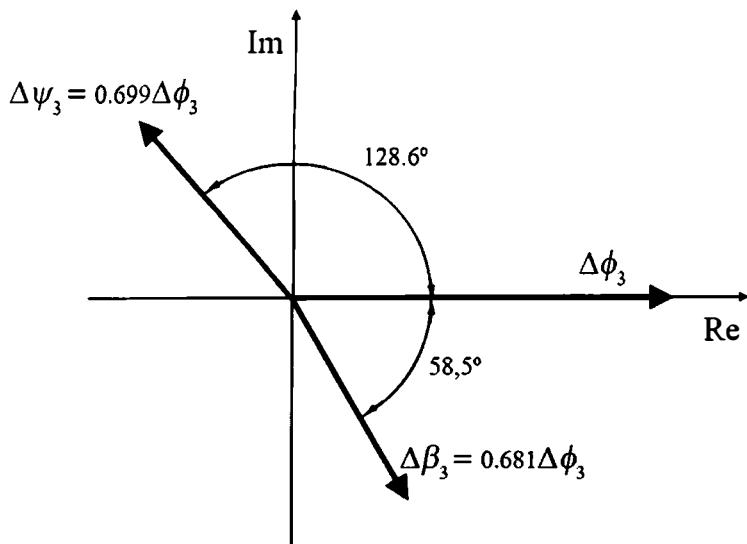


Figura 17.1. Diagrama vectorial del modo balanceo holandés para un avión comercial.

17.4. Ecuaciones simplificadas del modo de convergencia en balance

Observando la forma del modo de convergencia en balance (ver Tabla 17.1), se hace la hipótesis de que el avión sólo tiene el grado de libertad de balanceo. Esta hipótesis es equivalente a situar el avión en un túnel alineado con la corriente y con el único grado de libertad en ángulo de balance.

Por tanto la única ecuación que juega un papel destacado en este modo es la de momento de balance (segunda ecuación del sistema (17.1)) e introduciendo en ella $\Delta\beta = \Delta\hat{r} = 0$ y $\Delta\hat{p} = D\Delta\phi$, queda:

$$(\hat{I}_x D - C_{l\hat{p}}) \Delta\hat{p} = 0 \quad (17.13)$$

El autovalor correspondiente a este modo será:

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{C_{l\hat{p}}}{\hat{I}_x} < 0 \quad (17.14)$$

lo cual constituye una magnífica aproximación al modo de convergencia en balance.

17.5. Ecuaciones simplificadas del modo espiral

Observando la forma del modo espiral (ver Tabla 17.1) y teniendo en cuenta que el tiempo característico para la variación de $\Delta\beta$, $\Delta\hat{p}$ y $\Delta\hat{r}$ es grande, se hace la hipótesis de que pueden despreciarse sus derivadas con respecto del tiempo. El sistema de ecuaciones lateral-direccional (17.1) quedaría en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} -C_{Y\beta}\Delta\beta - (C_{Y\hat{p}}D - C_{Zs})\Delta\phi + (2\mu - C_{Y\hat{r}})\Delta\hat{r} &= 0 \\ -C_{l\beta}\Delta\beta - C_{l\hat{p}}D\Delta\phi - C_{l\hat{r}}\Delta\hat{r} &= 0 \\ -C_{n\beta}\Delta\beta - C_{n\hat{p}}D\Delta\phi - C_{n\hat{r}}\Delta\hat{r} &= 0 \end{aligned} \quad (17.15)$$

Si además se supone que $C_{Y\hat{p}} \cong 0$, la primera ecuación del sistema anterior se reduce a:

$$-C_{Y\beta}\Delta\beta + C_{Zs}\Delta\phi + (2\mu - C_{Y\hat{r}})\Delta\hat{r} = 0 \quad (17.16)$$

por lo que los autovalores del sistema vendrán dados por la anulación del siguiente determinante característico:

$$\begin{vmatrix} -C_{Y\beta} & C_{Zs} & 2\mu - C_{Y\hat{r}} \\ -C_{l\beta} & -C_{l\hat{p}}\hat{\lambda}_2 & -C_{l\hat{r}} \\ -C_{n\beta} & -C_{n\hat{p}}\hat{\lambda}_2 & -C_{n\hat{r}} \end{vmatrix} = 0 \quad (17.17)$$

Operando se obtiene:

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{-C_{Zs}(C_{l\beta}C_{n\hat{r}} - C_{n\beta}C_{l\hat{r}})}{(2\mu - C_{Y\hat{r}})(C_{n\beta}C_{l\hat{p}} - C_{l\beta}C_{n\hat{p}}) + C_{Y\beta}(C_{l\hat{p}}C_{n\hat{r}} - C_{n\hat{p}}C_{l\hat{r}})} \quad (17.18)$$

Por último, puede simplificarse la expresión sabiendo que $2\mu \gg C_{Y\hat{r}}$ y que el primer sumando del denominador es mucho mayor que el segundo, quedando:

$$\hat{\lambda}_2 = -\frac{C_{Zs}(C_{l\beta}C_{n\hat{r}} - C_{n\beta}C_{l\hat{r}})}{2\mu(C_{n\beta}C_{l\hat{p}} - C_{l\beta}C_{n\hat{p}})} \quad (17.19)$$

Como el denominador de la anterior expresión es usualmente negativo, el signo del autovalor y por tanto la estabilidad o inestabilidad del modo vendrá dado por el signo del numerador.

Obsérvese que, introduciendo en la anterior expresión el coeficiente E de la cuártica de estabilidad lateral-direccional dado por la última ecuación del sistema (17.8), queda:

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{E}{2\mu(C_{n\beta}C_{l\hat{r}} - C_{l\beta}C_{n\hat{r}})} \quad (17.20)$$

La anulación de E en la cuártica de estabilidad conduce a un modo indiferente, lo cual concuerda exactamente con el resultado obtenido con este modelo simplificado.

Por tanto, suponiendo que se cumplen el resto de condiciones del Criterio de Estabilidad de Routh-Hurwitz (ver apartado 16.2), para $E > 0$ ($\hat{\lambda}_2 < 0$) el modo espiral será estable, para $E < 0$ ($\hat{\lambda}_2 > 0$) será inestable y para $E = 0$ ($\hat{\lambda}_2 = 0$) será indiferente. Además, para valores típicos de las derivadas de estabilidad, el módulo de $\hat{\lambda}_2$ es pequeño, por lo que los aviones suelen tener un modo espiral lentamente convergente o divergente.

Una interpretación física del resultado matemático comentado en el párrafo anterior puede ser la siguiente. Supóngase un avión efectuando un viraJE horizontal no simétrico estacionario muy suave (con un ángulo de balance muy pequeño), como se esquematiza en la Figura 17.2. Despreciando la ecuación de fuerzas según el eje y_s y teniendo en cuenta que la velocidad angular de balance es muy pequeña (el eje x_s estaría ligerísimamente levantado sobre el plano horizontal), las ecuaciones de momentos de balance y de guiñada quedarían para esta condición de “indiferencia” en la forma:

$$\begin{aligned} -C_{l\beta}\Delta\beta - C_{l\hat{r}}\Delta\hat{r} &= 0 \\ -C_{n\beta}\Delta\beta - C_{n\hat{r}}\Delta\hat{r} &= 0 \end{aligned} \quad (17.21)$$

y operando con ellas se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\beta}{\Delta\hat{r}} &= -\frac{C_{l\hat{r}}}{C_{l\beta}} = -\frac{C_{n\hat{r}}}{C_{n\beta}} \rightarrow C_{l\beta}C_{n\hat{r}} - C_{n\beta}C_{l\hat{r}} = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow E = -C_{Zs}(C_{l\beta}C_{n\hat{r}} - C_{n\beta}C_{l\hat{r}}) = 0 \end{aligned} \quad (17.22)$$

Téngase en cuenta que, en la expresión que proporciona E , puede considerarse $C_{Zs} = -C_{Ts}\sin\varepsilon_s - C_{Ls} \cong -C_{Ls} < 0$, $C_{l\beta} < 0$, $C_{n\hat{r}} < 0$, $C_{n\beta} > 0$ y $C_{l\hat{r}} > 0$.

Si a partir de la condición de “indiferencia” se aumenta el módulo de $C_{l\beta}$ (se hace más negativa $C_{l\beta}$, por ejemplo aumentando el diedro geométrico

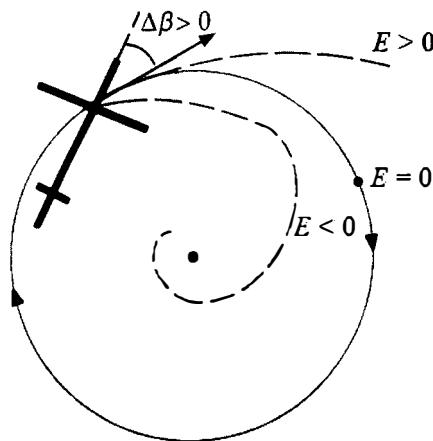


Figura 17.2. Viraje horizontal estacionario no simétrico (modo espiral indiferente).

de las alas) o se aumenta el módulo de $C_{n\hat{r}}$ (se hace más negativa $C_{n\hat{r}}$, aumentando el amortiguamiento en guiñada), el avión tenderá a salir del viraje estacionario (será estable el modo espiral).

Por contra, si se aumenta el módulo de $C_{n\beta}$ (se hace más positiva $C_{n\beta}$, por ejemplo aumentando la superficie de la cola vertical) o se aumenta el módulo de $C_{l\hat{r}}$ (se hace más positiva $C_{l\hat{r}}$), el avión tenderá a meterse más en el viraje describiendo una espiral cada vez más cerrada (será inestable el modo espiral).

17.6. Ecuaciones simplificadas del modo balanceo holandés

Para efectuar una aproximación preliminar grosera al modo de balanceo holandés se hace la hipótesis de considerar el avión en un túnel aerodinámico con las alas a nivel y con el único grado de libertad de guiñada. Así se desprecian las ecuaciones de fuerza lateral y de momento de balanceo, lo cual es claramente incorrecto (véase la forma del modo en la Tabla 17.1 y en la Figura 17.1). Las únicas justificaciones para este modelo son que sin duda la ecuación de momento de guiñada es la más importante del problema y que el resultado obtenido con esta aproximación es razonablemente similar al que proporcionaría la solución de la cuártica de estabilidad lateral-direccional. Introduciendo en la tercera ecuación del sistema (17.1) las condiciones $\Delta\phi = 0$,

$\Delta\beta = -\Delta\psi$, $\Delta\hat{r} = D\Delta\psi = -D\Delta\beta$, queda:

$$(\hat{I}_z D^2 - C_{n\hat{r}} D + C_{n\beta})\Delta\psi = 0 \quad (17.23)$$

El polinomio característico es:

$$\hat{I}_z \hat{\lambda}^2 - C_{n\hat{r}} \hat{\lambda} + C_{n\beta} = 0 \quad (17.24)$$

y las dos raíces complejas conjugadas que se obtienen como solución del polinomio, tienen una frecuencia natural y un amortiguamiento dados por:

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_n &= \sqrt{\frac{C_{n\beta}}{\hat{I}_z}} \\ \zeta &= -\frac{C_{n\hat{r}}}{2\sqrt{\hat{I}_z C_{n\beta}}} \end{aligned} \quad (17.25)$$

Como puede apreciarse la frecuencia natural elevada al cuadrado es directamente proporcional al índice de estabilidad estática direccional y el amortiguamiento es directamente proporcional al amortiguamiento en guíñada. Estas conclusiones, a pesar de haberse obtenido mediante un modelo simplificado muy discutible, son básicamente correctas.

Para efectuar una segunda aproximación al modo de balanceo holandés se hace la hipótesis de despreciar la ecuación de momento de balance y suponer que el movimiento tiene lugar con ángulo de balance nulo, lo cual también es incorrecto. Alguna justificación para esta hipótesis puede encontrarse en el hecho de que este modo se inicia como una perturbación en guíñada y posteriormente el avión balancea debido al acoplamiento aerodinámico. Además el resultado obtenido con esta aproximación también es aceptable. Introduciendo, por tanto, $\Delta\phi = 0$ en el sistema (17.1) y despreciando la segunda ecuación, queda:

$$\begin{aligned} (2\mu D - C_{Y\beta})\Delta\beta + (2\mu - C_{Y\hat{r}})\Delta\hat{r} &= 0 \\ -C_{n\beta}\Delta\beta + (\hat{I}_z D - C_{n\hat{r}})\Delta\hat{r} &= 0 \end{aligned} \quad (17.26)$$

Los autovalores del sistema vendrán dados por la anulación del siguiente determinante característico:

$$\begin{vmatrix} 2\mu\hat{\lambda} - C_{Y\beta} & 2\mu - C_{Y\hat{r}} \\ -C_{n\beta} & \hat{I}_z \hat{\lambda} - C_{n\hat{r}} \end{vmatrix} = 0 \quad (17.27)$$

Operando se obtiene el siguiente polinomio característico:

$$2\mu\hat{I}_z\hat{\lambda}^2 - (2\mu C_{n\hat{r}} + \hat{I}_z C_{Y\beta})\hat{\lambda} + (C_{n\beta}(2\mu - C_{Y\hat{r}}) + C_{Y\beta}C_{n\hat{r}}) = 0 \quad (17.28)$$

y las dos raíces complejas conjugadas que se obtienen como solución del polinomio, tienen una frecuencia natural y un amortiguamiento dados por:

$$\begin{aligned}\hat{\omega}_n &= \sqrt{\frac{C_{n\beta}(2\mu - C_{Y\hat{r}}) + C_{Y\beta}C_{n\hat{r}}}{2\mu\hat{I}_z}} \\ \zeta &= -\frac{2\mu C_{n\hat{r}} + \hat{I}_z C_{Y\beta}}{2\sqrt{2\mu\hat{I}_z(C_{n\beta}(2\mu - C_{Y\hat{r}}) + C_{Y\beta}C_{n\hat{r}})}}\end{aligned}\quad (17.29)$$

Si en las expresiones anteriores se introducen las aproximaciones $2\mu \gg C_{Y\hat{r}}$ y $2\mu C_{n\beta} \gg C_{Y\beta}C_{n\hat{r}}$, queda:

$$\begin{aligned}\hat{\omega}_n &= \sqrt{\frac{C_{n\beta}}{\hat{I}_z}} \\ \zeta &= -\frac{2\mu C_{n\hat{r}} + \hat{I}_z C_{Y\beta}}{4\mu\sqrt{\hat{I}_z C_{n\beta}}}\end{aligned}\quad (17.30)$$

Como puede apreciarse se obtienen unos resultados similares a los de la primera aproximación.

Una tercera aproximación al modo de balanceo holandés puede efectuarse suponiendo que el avión está situado en un túnel aerodinámico con los grados de libertad de guiñada y balance (ambos ángulos pequeños). Se desprecia por tanto la ecuación de la fuerza lateral y se impone $\Delta\beta = -\Delta\psi$, $\Delta\hat{r} = D\Delta\psi = -D\Delta\beta$, lo cual es básicamente correcto según la Figura 17.1. Las dos ecuaciones de momentos de balance y de guiñada quedarán ahora como:

$$(\hat{J}_{xz}D^2 + C_{l\hat{r}}D - C_{l\beta})\Delta\beta + (\hat{I}_x D - C_{l\hat{p}})\Delta\hat{p} = 0 \quad (17.31)$$

$$(\hat{I}_z D^2 - C_{n\hat{r}}D + C_{n\beta})\Delta\beta + (\hat{J}_{xz}D + C_{n\hat{p}})\Delta\hat{p} = 0$$

La ecuación característica es la cúbica siguiente:

$$\begin{aligned}(\hat{I}_x\hat{I}_z - \hat{J}_{xz}^2)\hat{\lambda}^3 - [\hat{I}_x C_{n\hat{r}} + \hat{I}_z C_{l\hat{p}} + \hat{J}_{xz}(C_{n\hat{p}} + C_{l\hat{r}})]\hat{\lambda}^2 + \\ + (\hat{I}_x C_{n\beta} + C_{n\hat{r}}C_{l\hat{p}} - C_{l\hat{r}}C_{n\hat{p}} + \hat{J}_{xz}C_{l\beta})\hat{\lambda} - (C_{n\beta}C_{l\hat{p}} - C_{l\beta}C_{n\hat{p}}) = 0\end{aligned}\quad (17.32)$$

Si en el polinomio anterior se desprecian el segundo sumando del coeficiente de $\hat{\lambda}^3$ y el tercer sumando del coeficiente de $\hat{\lambda}^2$ queda:

$$\begin{aligned} & \hat{I}_x \hat{I}_z \hat{\lambda}^3 - (\hat{I}_x C_{n\hat{r}} + \hat{I}_z C_{l\hat{p}}) \hat{\lambda}^2 + \\ & + (\hat{I}_x C_{n\beta} + C_{n\hat{r}} C_{l\hat{p}} - C_{l\hat{r}} C_{n\hat{p}} + \hat{J}_{xz} C_{l\beta}) \hat{\lambda} - (C_{n\beta} C_{l\hat{p}} - C_{l\beta} C_{n\hat{p}}) = 0 \end{aligned} \quad (17.33)$$

Al resolver esta cónica se obtendrán tres raíces: la primera es una raíz real negativa y constituye una buena aproximación al modo de convergencia en balance; y las dos restantes son dos raíces complejas conjugadas, que constituyen una aproximación aceptable para el modo de balanceo holandés y que también recogen el hecho de que la frecuencia natural elevada al cuadrado sea directamente proporcional al índice de estabilidad estática direccional y el amortiguamiento directamente proporcional al amortiguamiento en guiñada.

Finalmente, en la Figura 17.3 se esquematiza el movimiento aproximado que efectúa un avión con el modo de balanceo holandés excitado.

17.7. Respuesta a los controles lateral y direccional

En este apartado se determina la respuesta del avión al accionamiento de los alerones y del timón de dirección (controles lateral y direccional) siguiendo una ley prefijada e independiente de la respuesta del sistema (cadena abierta).

Según esto se considera el avión como un sistema no autónomo lineal e invariante, con una entrada multivariable dada por la deflexión de alerones, $\Delta\delta_a(\hat{t})$, y la deflexión del timón de dirección, $\Delta\delta_r(\hat{t})$, y con una salida asimismo multivariable que se pretende calcular, representada por $\Delta\beta(\hat{t}), \Delta\phi(\hat{t}), \Delta\hat{r}(\hat{t})$.

Para determinar las funciones de transferencia del sistema se retoman las ecuaciones linealizadas del movimiento de perturbación del avión a partir de una condición de referencia de vuelo simétrico rectilíneo y estacionario, adimensionalizadas usualmente (sistema (14.41) del capítulo 14), en las que se

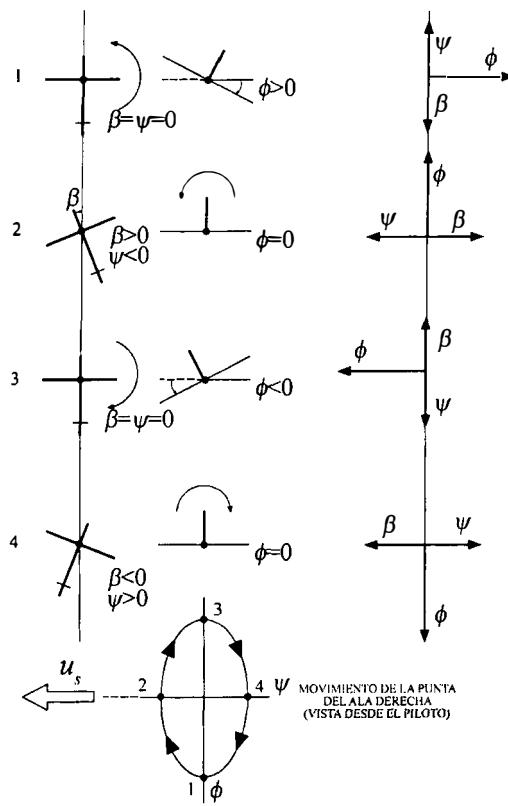


Figura 17.3. Movimiento de un avión con el modo de balanceo holandés excitado.

ha impuesto la condición adicional de vuelo de referencia horizontal ($\theta_s = 0$):

$$(2\mu D - C_{Y\beta})\Delta\beta - C_{Y\hat{p}}\Delta\hat{p} + (2\mu - C_{Y\hat{r}})\Delta\hat{r} + C_{Zs}\Delta\phi = C_{Y\delta_r}\Delta\delta_r$$

$$\begin{aligned} -C_{l\beta}\Delta\beta + (\hat{I}_x D - C_{l\hat{p}})\Delta\hat{p} - (\hat{J}_{xz} D + C_{l\hat{r}})\Delta\hat{r} = \\ = (C_{l\hat{\delta}_a} D + C_{l\delta_a})\Delta\delta_a + C_{l\delta_r}\Delta\delta_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -C_{n\beta}\Delta\beta - (\hat{J}_{xz} D + C_{n\hat{p}})\Delta\hat{p} + (\hat{I}_z D - C_{n\hat{r}})\Delta\hat{r} = \\ = C_{n\delta_a}\Delta\delta_a + (C_{n\hat{\delta}_r} D + C_{n\delta_r})\Delta\delta_r \end{aligned} \quad (17.34)$$

$$D\Delta\phi = \Delta\hat{p}$$

$$D\Delta\psi = \Delta\hat{r}$$

Introduciendo la cuarta ecuación del sistema anterior en las tres primeras y tomando en estas la transformada de Laplace (con condiciones iniciales nulas) queda:

$$(2\mu s - C_{Y\beta})\Delta\beta(s) - (C_{Y\hat{p}}s - C_{Zs})\Delta\phi(s) + \\ + (2\mu - C_{Y\hat{r}})\Delta\hat{r}(s) = C_{Y\delta_r}\Delta\delta_r(s)$$

$$-C_{l\beta}\Delta\beta(s) + (\hat{I}_x s^2 - C_{l\hat{p}}s)\Delta\phi(s) - (\hat{J}_{xz}s + C_{l\hat{r}})\Delta\hat{r}(s) = \\ = (C_{l\hat{\delta}_a}s + C_{l\delta_a})\Delta\delta_a(s) + C_{l\delta_r}\Delta\delta_r(s) \quad (17.35)$$

$$-C_{n\beta}\Delta\beta(s) - (\hat{J}_{xz}s^2 + C_{n\hat{p}}s)\Delta\phi(s) + (\hat{I}_z s - C_{n\hat{r}})\Delta\hat{r}(s) = \\ = C_{n\delta_a}\Delta\delta_a(s) + (C_{n\hat{\delta}_r}s + C_{n\delta_r})\Delta\delta_r(s)$$

donde se ha denotado:

$$\Delta\beta(s) = L(\Delta\beta(\hat{t}))$$

$$\Delta\phi(s) = L(\Delta\phi(\hat{t}))$$

$$\Delta\hat{r}(s) = L(\Delta\hat{r}(\hat{t})) \quad (17.36)$$

$$\Delta\delta_a(s) = L(\Delta\delta_a(\hat{t}))$$

$$\Delta\delta_r(s) = L(\Delta\delta_r(\hat{t}))$$

El sistema (17.35) es un sistema lineal no homogéneo de ecuaciones algebraicas en $\Delta\beta(s)$, $\Delta\phi(s)$, $\Delta\hat{r}(s)$ y que puede escribirse en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} 2\mu s - C_{Y\beta} & -(C_{Y\hat{p}}s - C_{Zs}) & 2\mu - C_{Y\hat{r}} \\ -C_{l\beta} & \hat{I}_x s^2 - C_{l\hat{p}}s & -(\hat{J}_{xz}s + C_{l\hat{r}}) \\ -C_{n\beta} & -(\hat{J}_{xz}s^2 + C_{n\hat{p}}s) & \hat{I}_z s - C_{n\hat{r}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\beta(s) \\ \Delta\phi(s) \\ \Delta\hat{r}(s) \end{Bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 0 & C_{Y\delta_r} \\ C_{l\hat{\delta}_a}s + C_{l\delta_a} & C_{l\delta_r} \\ C_{n\delta_a} & C_{n\hat{\delta}_r}s + C_{n\delta_r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\delta_a(s) \\ \Delta\delta_r(s) \end{Bmatrix} \quad (17.37)$$

Además, si fuera preciso determinar la velocidad angular de balance y el ángulo de guiñada, podrían utilizarse las expresiones:

$$\begin{aligned}\Delta\hat{p}(s) &= s\Delta\phi(s) \\ \Delta\psi(s) &= \Delta\hat{r}(s)/s\end{aligned}\tag{17.38}$$

con $\Delta\psi(s) = L(\Delta\psi(\hat{t}))$ y $\Delta\hat{p}(s) = L(\Delta\hat{p}(\hat{t}))$.

Observando el sistema (17.37) puede observarse que el movimiento lateral y el direccional están acoplados y, por lo tanto, existen las seis funciones de transferencia siguientes:

$$\begin{aligned}G_{\beta\delta_a} &= \frac{\Delta\beta(s)}{\Delta\delta_a(s)} = \frac{N_{\beta\delta_a}(s)}{D(s)}; & G_{\phi\delta_a} &= \frac{\Delta\phi(s)}{\Delta\delta_a(s)} = \frac{N_{\phi\delta_a}(s)}{D(s)} \\ G_{\hat{r}\delta_a} &= \frac{\Delta\hat{r}(s)}{\Delta\delta_a(s)} = \frac{N_{\hat{r}\delta_a}(s)}{D(s)} \\ G_{\beta\delta_r} &= \frac{\Delta\beta(s)}{\Delta\delta_r(s)} = \frac{N_{\beta\delta_r}(s)}{D(s)}; & G_{\phi\delta_r} &= \frac{\Delta\phi(s)}{\Delta\delta_r(s)} = \frac{N_{\phi\delta_r}(s)}{D(s)} \\ G_{\hat{r}\delta_r} &= \frac{\Delta\hat{r}(s)}{\Delta\delta_r(s)} = \frac{N_{\hat{r}\delta_r}(s)}{D(s)}\end{aligned}\tag{17.39}$$

donde $D(s)$ es el determinante característico del sistema. Este determinante viene dado por:

$$D(s) = As^4 + Bs^3 + Cs^2 + Ds + E\tag{17.40}$$

donde los coeficientes A, B, C, D y E son los mismos que aparecen en la cuártica de estabilidad lateral-direccional (expresiones (17.8)). Por tanto el determinante característico podrá escribirse en la forma:

$$D(s) = A(s - \hat{\lambda}_1)(s - \hat{\lambda}_2)(s^2 + 2\zeta_3\hat{\omega}_{n3}s + \hat{\omega}_{n3}^2)\tag{17.41}$$

donde el subíndice 1 se refiere al modo de convergencia en balance, el subíndice 2 al modo espiral y el subíndice 3 al modo de balanceo holandés (con sus correspondientes amortiguamiento y frecuencia natural). Las relaciones entre el amortiguamiento y la frecuencia natural del modo de balanceo holandés y las partes real e imaginaria del par de raíces complejas conjugadas obtenidas en la solución de la cuártica de estabilidad vienen dadas por:

$$\hat{\omega}_{n3} = \sqrt{\hat{n}_3^2 + \hat{\omega}_3^2}; \quad \zeta_3 = -\hat{n}_3/\sqrt{\hat{n}_3^2 + \hat{\omega}_3^2}\tag{17.42}$$

Además $N_{\beta\delta_a}(s)$, $N_{\phi\delta_a}(s)$, $N_{\hat{r}\delta_a}(s)$, $N_{\beta\delta_r}(s)$, $N_{\phi\delta_r}(s)$ y $N_{\hat{r}\delta_r}(s)$ responden a las expresiones:

$$\begin{aligned}
 N_{\beta\delta_a}(s) &= (C_{l\hat{\delta}_a} s + C_{l\delta_a})A_{21}(s) + C_{n\delta_a}A_{31}(s) \\
 N_{\phi\delta_a}(s) &= (C_{l\hat{\delta}_a} s + C_{l\delta_a})A_{22}(s) + C_{n\delta_a}A_{32}(s) \\
 N_{\hat{r}\delta_a}(s) &= (C_{l\hat{\delta}_a} s + C_{l\delta_a})A_{23}(s) + C_{n\delta_a}A_{33}(s) \\
 N_{\beta\delta_r}(s) &= C_{Y\delta_r}A_{11}(s) + C_{l\delta_r}A_{21}(s) + (C_{n\hat{\delta}_r} s + C_{n\delta_r})A_{31}(s) \\
 N_{\phi\delta_r}(s) &= C_{Y\delta_r}A_{12}(s) + C_{l\delta_r}A_{22}(s) + (C_{n\hat{\delta}_r} s + C_{n\delta_r})A_{32}(s) \\
 N_{\hat{r}\delta_r}(s) &= C_{Y\delta_r}A_{13}(s) + C_{l\delta_r}A_{23}(s) + (C_{n\hat{\delta}_r} s + C_{n\delta_r})A_{33}(s)
 \end{aligned} \tag{17.43}$$

siendo $A_{ij}(s)$ el adjunto del elemento ij en la matriz del primer miembro de la expresión (17.37).

Una vez calculadas las funciones de transferencia, pueden deducirse de forma inmediata las admitancias impulsionales, las admitancias índices, las ganancias estáticas y las respuestas en frecuencias, de forma completamente análoga a la efectuada en el apartado 16.6.

Para el trabajo analítico relacionado con el diseño de sistemas de control pueden resultar muy útiles funciones de transferencia aproximadas. Algunas de estas se pueden obtener a partir de las ecuaciones aproximadas para los modos lateral-direccionales (ver apartados 17.4, 17.5 y 17.6). Dichas funciones son útiles para entradas cuya representación espectral se limita a ciertas bandas de frecuencias adecuadas al modo en cuestión.

17.7.1. Respuesta al mando lateral válida para tiempos pequeños

El autovalor asociado al modo de convergencia en balance es negativo y tiene un módulo mucho mayor que los otros autovalores del sistema. Por ello, para tiempos cortos, es dominante este modo y puede utilizarse la aproximación efectuada en el apartado 17.4 como una primera aproximación a la respuesta inicial del avión a una entrada en deflexión de alerones.

Si en la ecuación de momentos de balance del sistema (14.41) se introduce $\Delta\beta = \Delta\hat{r} = \Delta\delta_r = 0$ y $C_{l\hat{\delta}_a} \cong 0$, queda:

$$(\hat{I}_x D - C_{l\hat{p}})\Delta\hat{p} = C_{l\delta_a}\Delta\delta_a \quad (17.44)$$

Tomando en esta expresión la transformada de Laplace se obtienen las correspondientes funciones de transferencia simplificadas en velocidad angular de balance y ángulo de balance:

$$\begin{aligned} G_{\hat{p}\delta_a} &= \frac{\Delta\hat{p}(s)}{\Delta\delta_a(s)} = \frac{C_{l\delta_a}}{\hat{I}_x} \frac{1}{s - (C_{l\hat{p}}/\hat{I}_x)} \\ G_{\phi\delta_a} &= \frac{\Delta\phi(s)}{\Delta\delta_a(s)} = \frac{G_{\hat{p}\delta_a}}{s} = \frac{C_{l\delta_a}}{\hat{I}_x} \frac{1}{s(s - (C_{l\hat{p}}/\hat{I}_x))} \end{aligned} \quad (17.45)$$

A partir de las funciones de transferencia anteriores puede determinarse, por ejemplo, la respuesta del avión en velocidad angular de balance a una deflexión de alerones en escalón unitario, válida para tiempos cortos. Como las deflexiones de los alerones en los planos del tiempo y de Laplace son:

$$\Delta\delta_a(\hat{t}) = 1(\hat{t}) \rightarrow \Delta\delta_a(s) = 1/s \quad (17.46)$$

para la velocidad angular de balance, o admitancia índice en el plano de Laplace, queda:

$$A_{\hat{p}\delta_a}(s) = G_{\hat{p}\delta_a} \frac{1}{s} = \frac{C_{l\delta_a}}{\hat{I}_x} \frac{1}{s(s - (C_{l\hat{p}}/\hat{I}_x))} \quad (17.47)$$

Pasando finalmente esta admitancia al plano del tiempo (adimensional) se obtiene:

$$A_{\hat{p}\delta_a}(\hat{t}) = -\frac{C_{l\delta_a}}{C_{l\hat{p}}} (1 - e^{-\hat{t}/\hat{\tau}_R}) \quad (17.48)$$

donde

$$\hat{\tau}_R = -\hat{I}_x/C_{l\hat{p}} \quad (17.49)$$

es una constante adimensional llamada constante de tiempos del sistema. En la Figura 17.4 se representa la admitancia índice en función del tiempo.

Obsérvese que la ganancia estática viene dada por:

$$K_{\hat{p}\delta_a} = \lim_{s \rightarrow 0} G_{\hat{p}\delta_a}(s) = A_{\hat{p}\delta_a}(\infty) = -\frac{C_{l\delta_a}}{C_{l\hat{p}}} \quad (17.50)$$

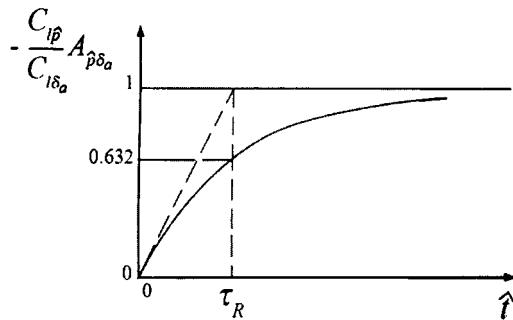


Figura 17.4. Respuesta del avión en velocidad angular de balance a una entrada escalón unidad en deflexión de ailerones.

17.7.2. Respuesta al mando direccional para un modelo con el grado de libertad de guiñada

En el apartado 17.6 se analizó una primera aproximación al modo de balanceo holandés consistente en suponer que el avión está montado en un túnel aerodinámico con las alas a nivel y con el único grado de libertad de guiñada. La ecuación que permite estudiar la respuesta de este modelo al control direccional es (ver la tercera ecuación del sistema (14.41)):

$$(\hat{I}_z D^2 - C_{n\hat{r}} D + C_{n\beta}) \Delta\beta = -(C_{n\hat{\delta}_r} D + C_{n\delta_r}) \Delta\delta_r \quad (17.51)$$

y si se considera $C_{n\hat{\delta}_r} \cong 0$, resulta:

$$(\hat{I}_z D^2 - C_{n\hat{r}} D + C_{n\beta}) \Delta\beta = -C_{n\delta_r} \Delta\delta_r \quad (17.52)$$

Efectuando ahora un desarrollo análogo al del apartado 16.6.1, se obtiene:

$$G_{\beta\delta_r} = \frac{\Delta\beta(s)}{\Delta\delta_r(s)} = -\frac{C_{n\delta_r}}{\hat{I}_z} \frac{1}{s^2 + 2\zeta\hat{\omega}_n s + \hat{\omega}_n^2} \quad (17.53)$$

$$G_{\hat{r}\delta_r} = \frac{\Delta\hat{r}(s)}{\Delta\delta_r(s)} = -s G_{\beta\delta_r} = \frac{C_{n\delta_r}}{\hat{I}_z} \frac{s}{s^2 + 2\zeta\hat{\omega}_n s + \hat{\omega}_n^2}$$

con

$$\hat{\omega}_n = \sqrt{\frac{C_{n\beta}}{\hat{I}_z}} \quad ; \quad \zeta = -\frac{C_{n\hat{r}}}{2\sqrt{\hat{I}_z C_{n\beta}}} \quad (17.54)$$

A partir de las funciones de transferencia anteriores puede determinarse, por ejemplo, la respuesta del avión en ángulo de resbalamiento a una

deflexión del timón de dirección en escalón unitario (admitancia índice):

$$\begin{aligned}\Delta\delta_r(\hat{t}) &= 1(\hat{t}) \rightarrow \Delta\delta_r(s) = \frac{1}{s} \\ \Delta\beta(s) &= G_{\beta\delta_r} \frac{1}{s} = -\frac{C_{n\delta_r}}{\hat{I}_z} \frac{1}{s(s^2 + 2\zeta\hat{\omega}_n s + \hat{\omega}_n^2)}\end{aligned}\quad (17.55)$$

Para $\zeta \leq 1$ queda:

$$A_{\beta\delta_r}(\hat{t}) = -\frac{C_{n\delta_r}}{\hat{I}_z} \frac{1}{\hat{\omega}_n^2} \left[1 - e^{-\zeta\hat{\omega}_n\hat{t}} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \hat{\omega}_n \sqrt{1-\zeta^2} \hat{t} + \cos \hat{\omega}_n \sqrt{1-\zeta^2} \hat{t} \right) \right] \quad (17.56)$$

y para $\zeta \geq 1$:

$$A_{\beta\delta_r}(\hat{t}) = -\frac{C_{n\delta_r}}{\hat{I}_z} \frac{1}{\hat{\omega}_n^2} \left[1 + \frac{\hat{n} - \hat{\omega}'}{2\hat{\omega}'} e^{(\hat{n} + \hat{\omega}')\hat{t}} - \frac{\hat{n} + \hat{\omega}'}{2\hat{\omega}'} e^{(\hat{n} - \hat{\omega}')\hat{t}} \right] \quad (17.57)$$

donde $\hat{\omega}' = \hat{\omega}_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$.

La representación de esta admitancia índice en función del tiempo es idéntica a la Figura 16.6, cambiando en ordenadas ($A_{\alpha\delta_e}(\hat{t})\hat{\omega}_n^2\hat{I}_y/C_{m\delta_e}$) por $(-A_{\beta\delta_r}(\hat{t})\hat{\omega}_n^2\hat{I}_z/C_{n\delta_r})$.

La ganancia estática, $K_{\beta\delta_r}$, puede calcularse haciendo $\hat{t} \rightarrow \infty$ en las expresiones anteriores de la admitancia índice, o haciendo $s = 0$ en la función de transferencia correspondiente, quedando:

$$K_{\beta\delta_r} = A_{\beta\delta_r}(\infty) = -\frac{C_{n\delta_r}}{\hat{I}_z} \frac{1}{\hat{\omega}_n^2} = -\frac{C_{n\delta_r}}{C_{n\beta}} \quad (17.58)$$

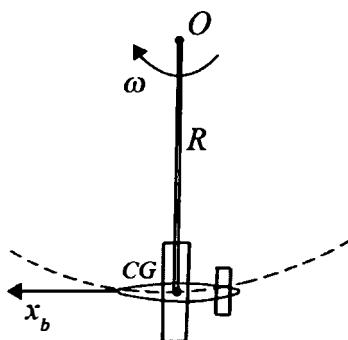
Obviamente este resultado concuerda con el que se obtendría utilizando el modelo lateral-direccional estacionario del capítulo 13. La velocidad angular de guiñada en el infinito es:

$$\hat{r}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} G_{\hat{r}\delta_r} = 0 \quad (17.59)$$

17.8. Problemas 17.1 y 17.2

PROBLEMA 17.1

Se considera un juguete infantil consistente en un modelo de avión no motorizado, montado en el extremo de un palo de longitud R conocida. El palo está situado en un plano horizontal y siempre gira en ese plano con velocidad angular ω , constante y conocida, alrededor del punto O centro de una circunferencia (ver figura).



Suponiendo además que se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del modelo, que su eje x_b también está contenido en el plano horizontal y siempre es perpendicular al palo, y que el modelo está unido al palo por su centro de masas CG a través de una articulación que solamente le permite el grado de libertad de balance alrededor de x_b , se pide:

- 1º) Determinar el ángulo (o ángulos) de balance de equilibrio.
- 2º) Plantear una ecuación dinámica linealizada a partir de la(s) posición(es) de referencia determinada(s) en el apartado 1º), considerando como grado de libertad el ángulo de balance, ϕ .
- 3º) Suponiendo que $I_z > I_y$, analizar la estabilidad dinámica a partir de la(s) condición(es) de equilibrio determinada(s) en el apartado 1º).

Solución:

- 1º) La ecuación general de momentos alrededor del eje x_b es (ver la cuarta ecuación del sistema (2.12) del capítulo 2):

$$L_A = I_x \dot{p} - J_{xz} \dot{r} + (I_z - I_y) qr - J_{xz} pq$$

donde el momento aerodinámico de balance puede formularse mediante:

$$L_A = \frac{1}{2} \rho \omega^2 R^2 S b (C_{lp} p + C_{lr} r)$$

debido a que siempre $\beta = 0$.

Por las condiciones impuestas en el enunciado, las tres componentes de la velocidad angular en el equilibrio vienen dadas por:

$$p_s = 0$$

$$q_s = \omega \sin \phi_s$$

$$r_s = \omega \cos \phi_s$$

La ecuación de momentos de balance queda:

$$\frac{1}{2} \rho \omega^2 R^2 S b C_{lr} r_s = (I_z - I_y) q_s r_s$$

Esta expresión presenta las cuatro soluciones siguientes:

$$r_s = \omega \cos \phi_s = 0 \rightarrow \phi_s = \pi/2, 3\pi/2$$

$$\sin \phi_s = \frac{\rho \omega R^2 S b C_{lr}}{2(I_z - I_y)}$$

Obsérvese que las primeras dos soluciones calculadas siempre existen, mientras que las dos segundas sólo existirán si los parámetros del sistema cumplen $|\rho \omega R^2 S b C_{lr}| \leq 2 |I_z - I_y|$.

2º) Las ecuaciones cinemáticas angulares linealizadas son (ver sistema (14.11)):

$$p = \Delta p = \Delta \dot{\phi}$$

$$q = q_s + \Delta q = \omega \sin \phi_s + \omega \cos \phi_s \Delta \phi$$

$$r = r_s + \Delta r = \omega \cos \phi_s - \omega \sin \phi_s \Delta \phi$$

Linealizando la ecuación dinámica:

$$\frac{1}{2} \rho \omega^2 R^2 S b (C_{lp}(p_s + \Delta p) + C_{lr}(r_s + \Delta r)) =$$

$$= I_x \Delta \dot{p} - J_{xz} \Delta \dot{r} + (I_z - I_y)(q_s + \Delta q)(r_s + \Delta r) - J_{xz}(p_s + \Delta p)(q_s + \Delta q)$$

e introduciendo la condición de referencia:

$$\frac{1}{2}\rho\omega^2R^2Sb(C_{lp}\Delta p+C_{lr}\Delta r)=I_x\Delta\ddot{\phi}-J_{xz}\Delta\dot{r}+(I_z-I_y)(q_s\Delta r+r_s\Delta q)-q_sJ_{xz}\Delta p$$

Finalmente, introduciendo las relaciones cinemáticas angulares se obtiene:

$$I_x\Delta\ddot{\phi}-L_p\Delta\dot{\phi}+\omega(L_r\sin\phi_s+(I_z-I_y)\omega\cos 2\phi_s)\Delta\phi=0$$

donde $L_p=\frac{1}{2}\rho\omega^2R^2SbC_{lp}$ y $L_r=\frac{1}{2}\rho\omega^2R^2SbC_{lr}$.

3º) Como $L_p < 0$ y $L_r > 0$, y según el enunciado $I_z > I_y$, para las cuatro posiciones de equilibrio del apartado 1º) se cumple:

- $\phi_s = \pi/2 \rightarrow I_x\Delta\ddot{\phi}-L_p\Delta\dot{\phi}+\omega(L_r-(I_z-I_y)\omega)\Delta\phi=0$

- Si $L_r > (I_z-I_y)\omega$, existen dos raíces reales negativas o dos raíces complejas conjugadas con su parte real negativa (dependiendo del signo del discriminante), es decir, el equilibrio es dinámicamente estable; si ocurre esto, no existirían las posiciones de equilibrio 3ª y 4ª.

- Si $L_r = (I_z-I_y)\omega$, una raíz es negativa y la otra nula, es decir, aparecen una convergencia pura y una indiferencia.

- Si $L_r < (I_z-I_y)\omega$, las dos raíces son reales, una positiva y otra negativa, es decir, el equilibrio es dinámicamente inestable.

- $\phi_s = 3\pi/2 \rightarrow I_x\Delta\ddot{\phi}-L_p\Delta\dot{\phi}+\omega(-L_r-(I_z-I_y)\omega)\Delta\phi=0$

Las dos raíces son reales, una positiva y otra negativa, es decir, el equilibrio es siempre inestable dinámicamente.

- $\sin\phi_s = \frac{L_r}{\omega(I_z-I_y)} \rightarrow I_x\Delta\ddot{\phi}-L_p\Delta\dot{\phi}+\omega^2(I_z-I_y)\cos^2\phi_s\Delta\phi=0$

Existen dos raíces reales negativas o dos raíces complejas conjugadas con su parte real negativa (dependiendo del signo del discriminante), es decir, el equilibrio es siempre estable dinámicamente y tiene idénticas características en las dos posiciones de equilibrio (si estas existen).

PROBLEMA 17.2

Un avión cuyas características geométricas, aerodinámicas y másicas se consideran conocidas, se encuentra inicialmente en condiciones de vuelo simétrico, horizontal, rectilíneo, estacionario y con las alas a nivel. En dichas condiciones el piloto genera una deflexión del timón de dirección en escalón unitario, manteniendo sin deflectar los alerones.

Suponiendo además que:

1. $C_{Y\hat{p}} = C_{Y\hat{r}} = C_{Y\delta_r} = C_{l\delta_r} = C_{n\hat{p}} = C_{n\hat{\delta}_r} = 0$.
2. Los ejes estabilidad son principales de inercia.
3. Los autovalores del sistema tienen todos parte real negativa.

Se pide:

- 1º) Determinar $\beta(s), \phi(s), \hat{p}(s)$ y $\hat{r}(s)$.
- 2º) Determinar los valores asintóticos de β, ϕ, \hat{p} y \hat{r} para tiempos muy grandes.
- 3º) Comentar el tipo de movimiento obtenido en el apartado anterior.

Solución:

1º) A este problema puede aplicarse el sistema (17.34). Introduciendo en él las condiciones particulares del enunciado, queda:

$$\begin{aligned} (2\mu D - C_{Y\beta})\Delta\beta + 2\mu\Delta\hat{r} + C_{Zs}\Delta\phi &= 0 \\ -C_{l\beta}\Delta\beta + (\hat{I}_x D - C_{l\hat{p}})\Delta\hat{p} - C_{l\hat{r}}\Delta\hat{r} &= 0 \\ -C_{n\beta}\Delta\beta + (\hat{I}_z D - C_{n\hat{r}})\Delta\hat{r} &= C_{n\delta_r}\Delta\delta_r \\ D\Delta\phi &= \Delta\hat{p} \\ D\Delta\psi &= \Delta\hat{r} \end{aligned}$$

Transformando al plano de Laplace:

$$\begin{bmatrix} 2\mu s - C_{Y\beta} & C_{Zs} & 2\mu \\ -C_{l\beta} & \hat{I}_x s^2 - C_{l\hat{p}} s & -C_{l\hat{r}} \\ -C_{n\beta} & 0 & \hat{I}_z s - C_{n\hat{r}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\beta(s) \\ \Delta\phi(s) \\ \Delta\hat{r}(s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_{n\delta_r} \end{Bmatrix} \Delta\delta_r(s)$$

Las funciones de transferencia del sistema son:

$$G_{\beta\delta_r} = \frac{N_{\beta\delta_r}(s)}{D(s)}; \quad G_{\phi\delta_r} = \frac{N_{\phi\delta_r}(s)}{D(s)}; \quad G_{\hat{r}\delta_r} = \frac{N_{\hat{r}\delta_r}(s)}{D(s)}$$

donde:

$$N_{\beta\delta_r}(s) = -C_{n\delta_r}(2\mu\hat{I}_x s^2 - 2\mu C_{l\hat{p}} s + C_{Zs} C_{l\hat{r}})$$

$$\begin{aligned}
N_{\phi\delta_r}(s) &= C_{n\delta_r}(2\mu C_{l\hat{r}}s - (2\mu C_{l\beta} + C_{Y\beta}C_{l\hat{r}})) \\
N_{\hat{r}\delta_r}(s) &= C_{n\delta_r}(2\mu\hat{I}_x s^3 - (2\mu C_{l\hat{p}} + \hat{I}_x C_{Y\beta})s^2 + C_{Y\beta}C_{l\hat{p}}s + C_{l\beta}C_{Zs}) \\
D(s) &= 2\mu\hat{I}_x\hat{I}_z s^4 - (2\mu\hat{I}_z C_{l\hat{p}} + \hat{I}_x\hat{I}_z C_{Y\beta} + 2\mu\hat{I}_x C_{n\hat{r}})s^3 + \\
&\quad + (\hat{I}_z C_{Y\beta} C_{l\hat{p}} + C_{n\hat{r}}(2\mu C_{l\hat{p}} + \hat{I}_x C_{Y\beta}) + 2\mu\hat{I}_x C_{n\beta})s^2 + \\
&\quad + (\hat{I}_z C_{l\beta} C_{Zs} - C_{n\hat{r}} C_{Y\beta} C_{l\hat{p}} - 2\mu C_{l\beta} C_{n\beta})s - C_{Zs}(C_{l\beta} C_{n\hat{r}} - C_{n\beta} C_{l\hat{r}})
\end{aligned}$$

Finalmente las respuestas a una entrada en escalón unitario de timón de dirección son:

$$\begin{aligned}
\beta(s) &= \frac{G_{\beta\delta_r}}{s} = \frac{N_{\beta\delta_r}(s)}{sD(s)}; \quad \phi(s) = \frac{G_{\phi\delta_r}}{s} = \frac{N_{\phi\delta_r}(s)}{sD(s)}; \quad \hat{r}(s) = \frac{G_{\hat{r}\delta_r}}{s} = \frac{N_{\hat{r}\delta_r}(s)}{sD(s)} \\
\hat{p}(s) &= s\phi(s) \rightarrow \hat{p}(s) = \frac{N_{\phi\delta_r}(s)}{D(s)}
\end{aligned}$$

2º) Aplicando el teorema del valor final queda:

$$\begin{aligned}
\beta(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} G_{\beta\delta_r} = \frac{C_{n\delta_r} C_{l\hat{r}}}{C_{l\beta} C_{n\hat{r}} - C_{n\beta} C_{l\hat{r}}} \\
\phi(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} G_{\phi\delta_r} = \frac{C_{n\delta_r}(2\mu C_{l\beta} + C_{Y\beta}C_{l\hat{r}})}{C_{Zs}(C_{l\beta} C_{n\hat{r}} - C_{n\beta} C_{l\hat{r}})} \\
\hat{p}(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} G_{\hat{p}\delta_r} = 0 \\
\hat{r}(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} G_{\hat{r}\delta_r} = -\frac{C_{n\delta_r} C_{l\beta}}{C_{l\beta} C_{n\hat{r}} - C_{n\beta} C_{l\hat{r}}}
\end{aligned}$$

Como todos los autovalores tienen parte real negativa, se cumple $C_{l\beta} C_{n\hat{r}} - C_{n\beta} C_{l\hat{r}} > 0$, y los valores finales anteriores tienen los siguientes signos:

$$\beta(\infty) > 0, \quad \phi(\infty) > 0, \quad \hat{r}(\infty) > 0$$

3º) La condición de vuelo final es un viraje muy lento (hacia la derecha), estacionario, horizontal, no simétrico (con ángulo de resbalamiento pequeño y positivo) y con ángulo de balance pequeño y también positivo. Este resultado podría haberse obtenido directamente planteando el viraje estacionario final mediante las ecuaciones de momento de balance y de guiñada:

$$\begin{aligned}
C_{l\beta}\beta(\infty) + C_{l\hat{r}}\hat{r}(\infty) &= 0 \\
C_{n\beta}\beta(\infty) + C_{n\hat{r}}\hat{r}(\infty) &= -C_{n\delta_r}
\end{aligned}$$

De aquí se deduce $\beta(\infty)$ y $\hat{r}(\infty)$. Planteando ahora que la resultante de las fuerzas según la normal a la trayectoria sea igual a la fuerza centrípeta, se obtiene:

$$C_{Y\beta}\beta(\infty) - C_{Zs}\phi(\infty) = 2\mu\hat{r}(\infty)$$

y de aquí se determina fácilmente $\phi(\infty)$.

Cualidades de vuelo y sistemas de control de vuelo 18

18.1. Introducción

En los dos capítulos anteriores se han analizado los cinco modos dinámicos longitudinales y lateral-direccionales. Estos modos dinámicos pueden clasificarse en dos grandes categorías:

- **Modos “rápidos”** (tiempos característicos bajos): son el Corto Período, la Convergencia en Balance y el Balanceo Holandés, y están relacionados con los tres grados de libertad rotacionales.
- **Modos “lentos”** (tiempos característicos altos): son el Fugoide y el Modo Espiral, y están relacionados con cambios en la trayectoria.

En general, los modos lentos no representan ningún peligro para la operación del avión. Sin embargo es imprescindible que los modos rápidos estén adecuadamente amortiguados.

Las Normas de Cualidades de Vuelo imponen una serie de requerimientos que ha de cumplir obligatoriamente el avión en estudio con el fin de garantizar su operación segura. En el apartado 18.2 se efectúa una revisión de su evolución histórica, se analizan los factores de los que dependen y se presenta la llamada Escala de Cooper-Harper.

En el apartado 18.3 se analizan los requisitos particulares impuestos sobre las características de los modos dinámicos longitudinales y lateral-direccionales por la norma MIL-F-8785C “*Flying Qualities of Piloted Airplanes*” de 1980 (Ref. 1).

En los aviones modernos cada vez es más frecuente la incorporación de los Sistemas de Control de Vuelo (en inglés, “Flight Control Systems” o FCS), bien para mejorar las características de algunos modos dinámicos que

no cumplen los requerimientos de la normativa sobre cualidades de vuelo, bien para permitir al piloto establecer y mantener determinadas condiciones de vuelo. En el apartado 18.4 se efectúa una breve revisión sobre los aspectos más destacados de estos FCS.

18.2. Normas de cualidades de vuelo

Las **Normas Aeronáuticas** pueden definirse como un conjunto de requisitos, de naturaleza técnica, promulgados por las autoridades o los organismos que tienen competencia sobre las aeronaves y su operación.

En general todas las Normas Aeronáuticas tienen un doble objetivo: obtener un nivel adecuado de seguridad de la aeronave durante su operación y garantizar que no hay limitaciones en la capacidad para llevar a cabo satisfactoriamente la misión para la cual la aeronave ha sido diseñada. El primer objetivo tiene más peso en el caso de aeronaves civiles y el segundo en el de aeronaves militares.

Las Normas Aeronáuticas engloban requerimientos relativos a Aeronavegabilidad, Operaciones, Mantenimiento y Tripulación. Se entiende por Aeronavegabilidad el conjunto de cualidades y características de una aeronave que la hacen apta para el vuelo seguro.

Concretando aún más, las **Normas de Aeronavegabilidad** influyen en el proyecto, fabricación y ensayos de la aeronave a través de requerimientos sobre:

- Actuaciones
- Cualidades de Vuelo
- Manejo en tierra
- Estructuras
- Motores
- Sistemas
- Instalaciones y Equipos

Se entiende por **Cualidades de Vuelo** (en inglés “*Flying Qualities*” o FQ), aquel conjunto de características que determinan la opinión del piloto sobre la facilidad para controlar la aeronave y llevar a cabo la misión pretendida en condiciones adecuadas.

El concepto de Cualidades de Vuelo engloba tres aspectos:

- Cualidades de Manejo (en inglés “*Handling Qualities*”): están relacionadas con los desplazamientos y fuerzas que el piloto tiene que ejercer sobre los mandos de la aeronave, con los movimientos de respuesta de ésta (ya sea al accionamiento de los mandos o a las perturbaciones atmosféricas), y con la psicología, fisiología y ergonomía del piloto.
- Capacidad de Mando (en inglés “*Control Capabilities*”): está relacionada con la capacidad para efectuar cambios en el equilibrio de momentos alrededor del centro de masas de la aeronave, con el fin de alterar la trayectoria o la actitud de vuelo a voluntad del piloto.
- Cualidades de Confort (en inglés “*Riding Qualities*”): están relacionadas con las magnitudes y frecuencias de las aceleraciones lineales y angulares, y con las velocidades angulares a las que está sometido el piloto; con la presión, temperatura y humedad en cabina; con la visibilidad interior y exterior; con la cantidad y presentación de datos y referencias; con los niveles de ruido; con el diseño del asiento; y con el resto de aspectos de la psicología, fisiología y ergonomía humanas.

Obsérvese que las Cualidades de Vuelo están relacionadas, fundamentalmente, con la estabilidad y controlabilidad dinámicas de una aeronave, y en menor medida con su estabilidad y controlabilidad estáticas.

18.2.1. Evolución histórica de las Normas de Cualidades de Vuelo

Los ensayos en vuelo para correlacionar las características de estabilidad y control de la aeronave con la opinión del piloto se desarrollaron, fundamentalmente, entre las dos guerras mundiales del siglo pasado y alcanzaron su apogeo durante la segunda. La mayor parte de estos ensayos se realizó en Inglaterra (por el Royal Aeronautical Establishment, RAE) y en los Estados Unidos (por el National Advisory Committee for Aeronautics, NACA).

Los resultados de todas las investigaciones acerca de las cualidades de vuelo se recogen en distintos informes, hoy clásicos, que fueron publicándose desde 1919 hasta 1945. Uno de los más conocidos, que sirvió de culminación a todo el trabajo realizado hasta la fecha y que introdujo el término Cualidades de Vuelo, fue el publicado por R.R. Gilruth en 1943 con el título NACA TR-755 "*Requirements for Satisfactory Flying Qualities of Airplanes*".

Desde la Segunda Guerra Mundial hasta nuestros días los requisitos y especificaciones de estabilidad y control se han ido elaborando y puliendo continuamente conforme las aeronaves alcanzaban regímenes de vuelo más y más complicados.

En la actualidad se dispone de distintas Normas de Cualidades de Vuelo que recopilan, detrás de cada requerimiento, todo el caudal de conocimientos obtenidos durante décadas de estudios teóricos y de experimentación en tierra, en vuelo y con simuladores. Entre ellas deben destacarse la norma militar norteamericana MIL-STD-1797A "*Flying Qualities of Piloted Aircraft*" de 1990 (Ref. 2), que es la última evolución de la denominada MIL-F-8785C "*Flying Qualities of Piloted Airplanes*" de 1980 (Ref. 1), y la norma inglesa Av.P.970 de 1958, muy influenciada por la norma americana.

18.2.2. Factores de los que dependen las Normas de Cualidades de Vuelo

En el caso de los aviones, los requerimientos de las Normas de Cualidades de Vuelo dependen de los tres factores siguientes:

- Del tipo de avión o **Clase**.
- De la Fase de Vuelo o **Categoría**.
- De lo bien que haya que realizar la tarea o **Nivel de Aceptabilidad**.

Resulta obvio que un avión muy maniobrable debe comportarse de forma distinta a uno de transporte. Las normas lo tienen en cuenta definiendo las Clases de aviones siguientes:

- Clase I: Aviones pequeños ligeros.
- Clase II: Aviones de peso medio de maniobrabilidad pequeña o media.

- Clase III: Aviones grandes y pesados de maniobrabilidad pequeña o media.
- Clase IV: Aviones de gran maniobrabilidad.

Además se ha visto que los requerimientos de cualidades de vuelo deben depender, asimismo, de la Fase de Vuelo considerada. Por ejemplo, durante el crucero el piloto puede tolerar un modo de balanceo holandés pobremente amortiguado, y sin embargo durante una maniobra precisa, tal como el lanzamiento de cargas, no es admisible que las características inadecuadas del modo de balanceo holandés dificulten el proceso. Por ello las normas clasifican las Fases de Vuelo en las categorías siguientes:

- Categoría A: Fases de vuelo no terminales que requieren maniobras rápidas, seguimiento de precisión o control de trayectoria preciso.
- Categoría B: Fases de vuelo no terminales que se realizan con maniobras graduales y sin seguimiento preciso.
- Categoría C: Fases terminales que se realizan con maniobras graduales y suelen requerir control de trayectoria preciso.

Por último, los Niveles de Aceptabilidad se emplean para tener en cuenta la posibilidad de que el avión tenga la necesidad de operar en condiciones anormales como consecuencia, bien de volar fuera del dominio operacional del avión, bien del fallo de componentes del avión, o bien de ambas cosas. Los Niveles de Aceptabilidad son los siguientes:

- Nivel 1: Cualidades de vuelo claramente adecuadas a la fase de vuelo de la misión.
- Nivel 2: Cualidades de vuelo adecuadas para llevar a cabo la fase de vuelo de la misión, pero existe un incremento de actividad del piloto, o una degradación de la efectividad de la misión, o ambas cosas.
- Nivel 3: Cualidades de vuelo tales que el avión puede ser controlado con seguridad, pero el trabajo del piloto es excesivo, o la efectividad de la misión inadecuada, o ambas cosas. Las fases de vuelo de categoría A pueden interrumpirse con seguridad y las de Categorías B y C pueden completarse.

Los requisitos que establecen las normas para los Niveles de Aceptabilidad en estados normales del avión son:

- Dentro del dominio de vuelo operacional: Nivel 1.
- Dentro del dominio de vuelo de servicio: Nivel 2.

Los requisitos de las normas para los llamados estados de fallo del avión establecen que la degradación de las cualidades de vuelo sólo se permite si la probabilidad de encontrar un nivel inferior al exigido para los estados normales es inferior a ciertos valores fijados. Por tanto, el Nivel de Aceptabilidad 3 únicamente está permitido en los estados de fallo.

Téngase en cuenta que, con las tres clasificaciones antes descritas, podrían fijarse 36 valores diferentes de un parámetro concreto relacionado con las cualidades de vuelo.

18.2.3. La escala de Cooper-Harper

Los niveles de aceptabilidad definidos anteriormente están directamente relacionados con la opinión del piloto, cuantificada mediante la calificación obtenida usando la denominada Escala de Cooper-Harper (Figura 18.1). Dicha escala discreta permite relacionar, mediante un proceso de decisión lógica, los comentarios del piloto respecto a la facilidad o dificultad con que puede controlarse el avión en la situación considerada, con una calificación numérica de 1 (lo mejor) a 10 (lo peor).

Para la utilización de esta escala es necesario definir cuatro términos básicos:

- Incontrolable: el piloto puede perder el control del aparato y, por supuesto, la tarea no es realizable. Las mejoras son absolutamente obligatorias.
- Inaceptable: el avión puede controlarse, pero la tarea no puede realizarse. Las mejoras son necesarias.
- Insatisfactorio: la tarea puede realizarse, pero los defectos descubiertos justifican una mejora (este término debe precederse de la expresión “*acceptable pero ... debe mejorarse*”).

- **Satisfactorio:** las características del avión son lo suficientemente buenas para permitir el cumplimiento de la tarea sin mejoras.

Las calificaciones de Cooper-Harper recogidas en la Figura 18.1 (puntuaciones cualitativas dadas por el piloto), están relacionadas con los niveles de aceptabilidad (criterios cuantitativos que emanan de la Mecánica del Vuelo) mediante la siguiente correspondencia: Calificaciones 1, 2, 3: Nivel 1; Calificaciones 4, 5, 6: Nivel 2; Calificaciones 7, 8, 9: Nivel 3. La Calificación 10 se reserva para aviones absolutamente incontrolables.

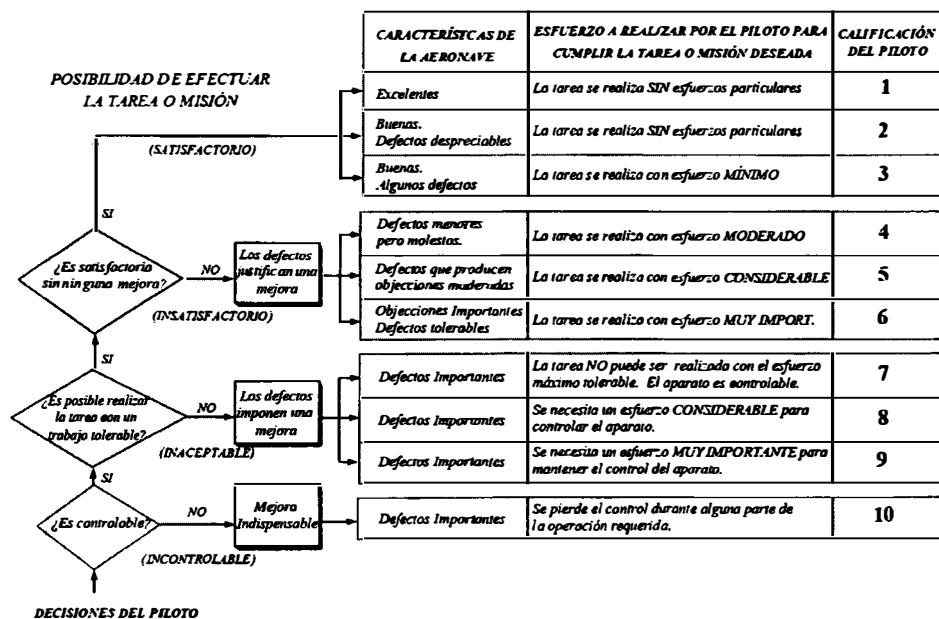


Figura 18.1. La Escala de Cooper-Harper.

18.3. Requerimientos de las normas de cualidades de vuelo

Las Normas de Cualidades de Vuelo establecen requerimientos relacionados con los cinco modos dinámicos que se han estudiado en los capítulos 16 y 17, dos de ellos longitudinales (fugoide y corto periodo) y tres lateral-direccionales (convergencia en balance, espiral y balanceo holandés).

En este apartado se ofrecen los requerimientos más relevantes relativos a estos cinco modos impuestos por la norma MIL-F-8785C (Ref. 1). Esta norma coincide básicamente con una evolución posterior suya denominada MIL-STD-1797A (Ref. 2) y es mucho más clara y concisa desde el punto de vista didáctico.

18.3.1. Modo fugoide

Para el modo fugoide las normas son muy poco restrictivas y sólo establecen que el valor del amortiguamiento esté por encima de un valor mínimo, ζ_{\min} .

La Tabla 18.1 recoge los valores de este amortiguamiento mínimo, válidos para cualesquiera Clases de aviones y Categorías, y únicamente dependientes del Nivel de Aceptabilidad. Obsérvese que para un Nivel 3, incluso se permite que el modo fugoide sea ligeramente divergente, estableciendo un tiempo mínimo para que se duplique la perturbación inicial, $T_{2\min}$.

	ζ_{\min}
Nivel 1	0.04
Nivel 2	0
Nivel 3	$T_{2\min} = 55 \text{ s}$

Tabla 18.1. Requerimientos para el modo fugoide.

Recuérdese que, según la expresión (16.11), el tiempo necesario para duplicar una perturbación inicial viene dado por:

$$T_2 = \frac{0.693}{\hat{n}} \frac{c}{2u_s} \quad (18.1)$$

siempre que el autovalor (o la parte real de los dos autovalores complejos conjugados, en el caso un modo oscilatorio) sea positivo ($\hat{n} > 0$).

18.3.2. Modo de corto periodo

Las Normas de Cualidades de Vuelo imponen fuertes restricciones al modo de corto período.

En primer lugar, el amortiguamiento del modo debe ser superior a un valor mínimo, ζ_{\min} , e inferior a uno máximo, ζ_{\max} . La Tabla 18.2 recoge los valores de estos amortiguamientos, válidos para todas las Clases de aviones y dependientes de las Categorías y Niveles de Aceptabilidad. Téngase en cuenta que, por ser mayor que la unidad el valor máximo permisible del amortiguamiento, el modo de corto período puede ser no oscilatorio.

	Categorías A y C		Categoría B	
	ζ_{\min}	ζ_{\max}	ζ_{\min}	ζ_{\max}
Nivel 1	0.35	1.30	0.30	2.00
Nivel 2	0.25	2.00	0.20	2.00
Nivel 3	0.15	-	0.15	-

Tabla 18.2. Requerimientos para el amortiguamiento en el modo de corto período.

En cuanto a la frecuencia natural del modo de corto período, las normas también establecen un rango permisible de valores $\omega_{n,\min} - \omega_{n,\max}$, en la forma siguiente: modulan la frecuencia natural con el parámetro n/α (incremento del factor de carga que se produce por unidad de incremento del ángulo de ataque, a velocidad constante), e imponen que la frecuencia natural elevada al cuadrado, y dividida por n/α , esté comprendida dentro del rango $(\omega_n^2/(n/\alpha))_{\min} - (\omega_n^2/(n/\alpha))_{\max}$.

La razón para ésto se explica a continuación. En los años 60 del siglo pasado se introdujo el denominado, en inglés, “Control Anticipation Parameter” o CAP, definido como:

$$\text{CAP} = \frac{\partial \dot{q}_0}{\partial n} \quad (18.2)$$

donde \dot{q}_0 es la aceleración angular de cabeceo en el instante inicial de una

maniobra. Este parámetro se puede escribir alternativamente en la forma:

$$\text{CAP} = \frac{\partial \dot{q}_0}{\partial n} = \frac{\partial \dot{q}_0}{\partial F_s} \frac{\partial F_s}{\partial n} \quad (18.3)$$

siendo F_s la fuerza en palanca en el mando longitudinal.

Al primero de los dos factores del último término de esta expresión se le puede llamar sensibilidad del avión y el segundo es el ya conocido Esfuerzo por “g” (ver apartado 12.7). Los pilotos mostraban su rechazo ante valores muy grandes del CAP (implican demasiada sensibilidad o demasiado Esfuerzo por “g”), pero también ante valores muy pequeños (poca sensibilidad o poco esfuerzo por “g”), y por ello se estableció un rango de variación del CAP entre un valor mínimo y otro máximo.

El sistema dinámico a partir del cual se está estudiando la controlabilidad del avión es un sistema lineal, y por ello alternativamente es posible definir el CAP como:

$$\text{CAP} = \frac{\dot{q}(0)}{n_z(\infty)} \quad (18.4)$$

donde $\dot{q}(0)$ es la aceleración angular de cabeceo inicial generada por una entrada en escalón unitario del timón de profundidad y $n_z(\infty)$ es el factor de carga estacionario producido por esa deflexión de timón.

Para determinar $\dot{q}(0)$ se utiliza la función de transferencia $G_{\dot{q}\delta_e}$ obtenida en el apartado 16.6 (ver la segunda ecuación del sistema (16.48)), suponiendo además que $C_{X\delta_e} \cong 0$ y $C_{m\hat{\delta}_e} \cong 0$:

$$G_{\dot{q}\delta_e} = \frac{s^2(C_{Z\delta_e}A_{23}(s) + C_{m\delta_e}A_{33}(s))}{A(s^2 + 2\zeta_1\hat{\omega}_{n1}s + \hat{\omega}_{n1}^2)(s^2 + 2\zeta_3\hat{\omega}_{n3}s + \hat{\omega}_{n3}^2)} \quad (18.5)$$

donde $A = 2\mu\hat{I}_y(2\mu - C_{Z\hat{\alpha}})$. Desarrollando ahora el numerador y aplicando el teorema del valor inicial, se obtiene:

$$\dot{q}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} G_{\dot{q}\delta_e} = \frac{C_{m\delta_e}}{\hat{I}_y} + \frac{C_{Z\delta_e}C_{m\hat{\alpha}}}{\hat{I}_y(2\mu - C_{Z\hat{\alpha}})} \cong \frac{C_{m\delta_e}}{\hat{I}_y} \quad (18.6)$$

Para determinar $n_z(\infty)$ se utiliza la correspondiente función de transferencia $G_{n_z\delta_e}$ obtenida en el apartado 16.6 (ver la cuarta ecuación del sistema (16.48)) y la aproximación del modo de corto período desarrollada en

el apartado 16.6.1 (ver la segunda y tercera ecuaciones del sistema (16.61)). Aplicando el teorema del valor final, queda:

$$n_z(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} G_{n_z \delta_e} = \frac{2u_s^2}{gc} \lim_{s \rightarrow 0} (G_{\dot{q} \delta_e} - sG_{\alpha \delta_e}) = -\frac{u_s^2}{gc} \frac{C_{m \delta_e}}{\mu \hat{f}_y} \frac{C_{Z\alpha}}{\hat{\omega}_n^2} \quad (18.7)$$

Introduciendo estos dos últimos resultados en la definición del CAP (expresión (18.4)) queda:

$$\text{CAP} = \frac{\dot{q}(0)}{n_z(\infty)} = -\frac{gc\mu}{u_s^2} \frac{\omega_n^2}{C_{Z\alpha}} = -\frac{\omega_n^2}{C_{Z\alpha}/C_{Ls}} = \frac{\omega_n^2}{C_{L\alpha}/C_{Ls}} \quad (18.8)$$

en donde se ha considerado $C_{Z\alpha} = -C_{L\alpha} - C_{Ds} \cong -C_{L\alpha}$.

Operando ahora con la definición de factor de carga queda:

$$n = \frac{L}{W} = \frac{\rho V^2 S}{2W} C_L \rightarrow \frac{\partial n}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} = \frac{\rho V^2 S}{2W} C_{L\alpha} = \frac{C_{L\alpha}}{C_{Ls}} \quad (18.9)$$

donde se ha supuesto que $C_{Zs} = -C_{Ts} \sin \varepsilon_s - C_{Ls} \cong -C_{Ls}$.

Finalmente se concluye que:

$$\text{CAP} = \frac{\omega_n^2}{n/\alpha} \quad (18.10)$$

Obsérvese que si se introduce en esta expresión la frecuencia natural del modo de corto período, obtenida en el apartado 16.5, como función del margen de maniobra con mandos fijos, H_m (ver expresión (16.37)), queda:

$$\text{CAP} = \frac{\omega_n^2}{n/\alpha} = \frac{a_{wb}}{C_{L\alpha}} \frac{gc}{K_y^2} H_m \quad (18.11)$$

donde a K_y se le denomina **radio de giro longitudinal**. Se trata de un parámetro másico-geométrico de gran importancia para el diseño preliminar de aviones, con dimensiones de longitud, que responde a la expresión:

$$K_y = \sqrt{I_y/m} \quad (18.12)$$

Por tanto queda demostrado que el CAP es proporcional al margen de maniobra con mandos fijos y que imponer una limitación del tipo $\text{CAP}_{\min} \leq \text{CAP} \leq \text{CAP}_{\max}$, es equivalente a establecer $(\omega_n^2/(n/\alpha))_{\min} \leq \omega_n^2/(n/\alpha) \leq (\omega_n^2/(n/\alpha))_{\max}$.

La Tabla 18.3 recoge los valores de $(\omega_n^2/(n/\alpha))_{\min}$ y $(\omega_n^2/(n/\alpha))_{\max}$, válidos para todas las Clases de aviones y dependientes de las Categorías y Niveles de Aceptabilidad.

Categoría	A		B		C	
	CAP	Min	Max	Min	Max	Min
Nivel 1	0.28	3.6	0.085	3.6	0.16	3.6
Nivel 2	0.16	10.0	0.038	10.0	0.096	10.0
Nivel 3	0.16	-	0.038	-	0.096	-

Tabla 18.3. Requerimientos para el $CAP = \omega_n^2/(n/\alpha)$ [s^{-2}] en el modo de corto periodo.

18.3.3. Modo de convergencia en balance

Para el modo de convergencia en balance las normas establecen que la constante de tiempos del modo sea inferior a un valor máximo, $\tau_{R\max}$. Recuérdese que, según el modelo simplificado del modo de convergencia en balance, la constante de tiempos adimensional del sistema viene dada por (ver expresión (17.49)):

$$\hat{\tau}_R = -\frac{\hat{I}_x}{C_{l\hat{p}}} = -\frac{8I_x}{\rho S b^3 C_{l\hat{p}}} \quad (18.13)$$

Esta constante, con dimensiones de tiempo, vale:

$$\tau_R = \hat{\tau}_R \frac{b}{2u_s} = -\frac{4I_x}{\rho S b^2 u_s C_{l\hat{p}}} \quad (18.14)$$

La Tabla 18.4 recoge los valores de la constante de tiempos máxima, en las distintas Clases de aviones (la Clase II-L significa aviones operados desde tierra y la II-C aviones operados desde portaaeronaves), Categorías y Niveles de Aceptabilidad.

Categoría	A		Todas	C	
	Clases	I, IV	II, III	I, II-C, IV	II-L, III
Nivel 1	1.0	1.4	1.4	1.0	1.4
Nivel 2	1.4	3.0	3.0	1.4	3.0
Nivel 3	10	10	10	10	10

Tabla 18.4. Requerimientos para la constante de tiempos en el modo de convergencia en balance. En la tabla se indican los valores de la constante de tiempos $\tau_{R\max}$ [s] para las categorías, clases y niveles indicados.

Además del requisito anterior, las normas tratan de garantizar un mando lateral suficiente en las maniobras de balanceo, y para ello exigen que

a partir de una condición de referencia con las alas a nivel y velocidad angular de balance nula, se alcance como mínimo un ángulo de balance ϕ_1 dado en un tiempo t_1 dado, después de una entrada en escalón de la deflexión máxima de alerones. Suponiendo que son válidas de nuevo las hipótesis del apartado 17.7.1 (el avión sólo tiene el grado de libertad de balance, el resbalamiento siempre es nulo, no se deflecta el timón de dirección y $C_{l\hat{\delta}_a} = 0$), puede obtenerse la siguiente expresión para la velocidad angular de balance adimensional:

$$\hat{p}(\hat{t}) = -\frac{C_{l\delta_a} \delta_{a \text{ máx}}}{C_{l\hat{p}}} (1 - e^{-\hat{t}/\hat{\tau}_R}) = \hat{p}_s (1 - e^{-\hat{t}/\hat{\tau}_R}) \quad (18.15)$$

donde $\hat{\tau}_R$ es la constante de tiempos adimensional del sistema y \hat{p}_s es la velocidad angular de balance adimensional estacionaria (para tiempo infinito) que se alcanzaría con una entrada en deflexión máxima de alerones, dada por:

$$\hat{p}_s = -\frac{C_{l\delta_a} \delta_{a \text{ máx}}}{C_{l\hat{p}}} \quad (18.16)$$

Integrando esta expresión se obtiene el ángulo de balance:

$$\phi(\hat{t}) = \hat{p}_s [\hat{t} - \hat{\tau}_R (1 - e^{-\hat{t}/\hat{\tau}_R})] \quad (18.17)$$

Por tanto, imponer un valor mínimo al ángulo de balance en cierto tiempo (ϕ_1 en t_1), es equivalente a imponer un valor mínimo a la potencia de control lateral máxima; es decir:

$$(C_{l\delta_a} \delta_{a \text{ máx}})_{\min} = -C_{l\hat{p}} \frac{b}{2u_s} \frac{\phi_1}{t_1 - \tau_R (1 - e^{-t_1/\tau_R})} \quad (18.18)$$

Las Tablas 18.5, 18.6 y 18.7 recogen los valores establecidos en las normas para ϕ_1 y t_1 , en las distintas Clases de aviones, Categorías y Niveles de Aceptabilidad. Obsérvese que para las Clases I y II (Tabla 18.5) los valores de ángulos y tiempos no dependen de las velocidades de vuelo, y sin embargo para las Clases III y IV se establecen distintos valores dependiendo de ciertos rangos de velocidad aerodinámica equivalente, V_e , que, básicamente, son los siguientes:

Clase III (Tabla 18.6):

$$L: V_{e \text{ min}} \leq V_e < 1.8V_{e \text{ min}}$$

$$M: 1.8V_{e \text{ min}} \leq V_e < 0.7V_{e \text{ máx}}$$

$$H: 0.7V_{e \text{ máx}} \leq V_e \leq V_{e \text{ máx}}$$

Clase IV (Tabla 18.7):

$$VL: V_{e \text{ mín}} \leq V_e < V_{e \text{ mín}} + 20 \text{ knots}$$

$$L: V_{e \text{ mín}} + 20 \text{ knots} \leq V_e < 1.4V_{e \text{ mín}}$$

$$M: 1.4V_{e \text{ mín}} \leq V_e < 0.7V_{e \text{ máx}}$$

$$H: 0.7V_{e \text{ máx}} \leq V_e \leq V_{e \text{ máx}}$$

Clase	Categoría	Nivel 1		Nivel 2		Nivel 3	
		$\phi_1 (\circ)$	t_1 (s)	$\phi_1 (\circ)$	t_1 (s)	$\phi_1 (\circ)$	t_1 (s)
I	A	60	1.3	60	1.7	60	2.6
	B	60	1.7	60	2.5	60	3.4
	C	30	1.3	30	1.8	30	2.6
II-L	A	45	1.4	45	1.9	45	2.8
	B	45	1.9	45	2.8	45	3.8
	C	30	1.8	30	2.5	30	3.6
II-C	A	45	1.4	45	1.9	45	2.8
	B	45	1.9	45	2.8	45	3.8
	C	25	1.0	25	1.5	25	2.0

Tabla 18.5. Requerimientos para el ángulo de balance mínimo (ϕ_1) alcanzable en cierto tiempo (t_1) con deflexión máxima de alerones, para aviones de Clases I y II.

Nivel	RVE	A	B	C
1	L	1.8	2.3	2.5
	M	1.5	2.0	2.5
	H	2.0	2.3	2.5
2	L	2.4	3.9	4.0
	M	2.0	3.3	4.0
	H	2.5	3.9	4.0
3	Todos	3.0	5.0	6.0

Tabla 18.6. Requerimientos para el ángulo de balance mínimo ($\phi_1 = 30^\circ$) alcanzable en cierto tiempo (t_1) con deflexión máxima de alerones, para aviones de Clase III. En la tabla se indican los valores de t_1 [s] para $\phi_1 = 30^\circ$. RVE es el rango de velocidad equivalente, y A, B, y C indican las categorías

Nivel	RVE ↓\(\phi_1 \rightarrow\)	A			B	C
		30°	50°	90°	90°	30°
1	VL	1.1			2.0	1.1
	L	1.1			1.7	1.1
	M			1.3	1.7	1.1
	H		1.1		1.7	1.1
2	VL	1.6			2.8	1.3
	L	1.5			2.5	1.3
	M			1.7	2.5	1.3
	H		1.3		2.5	1.3
3	VL	2.6			3.7	2.0
	L	2.0			3.4	2.0
	M			2.6	3.4	2.0
	H		2.6		3.4	2.0

Tabla 18.7. Requerimientos para el ángulo de balance mínimo (ϕ_1) alcanzable en cierto tiempo (t_1) con deflexión máxima de alerones, para aviones de Clase IV. En la tabla se indican los valores de t_1 [s] para los diferentes valores de ϕ_1 . RVE es el rango de velocidad equivalente, y A, B, y C indican las categorías

18.3.4. Modo espiral

Para el modo espiral las normas son muy poco restrictivas, hasta el extremo de que permiten que el modo espiral sea divergente. Eso sí, imponen que el tiempo para el cual la perturbación inicial se duplica sea superior a un tiempo mínimo, $T_{2\text{mín}}$.

La Tabla 18.8 recoge los tiempos mínimos permitidos para duplicar la perturbación inicial, válidos para cualesquiera Clases de aviones, pero dependientes de las distintas Categorías y Niveles de Aceptabilidad.

	$T_{2\text{mín}}$ [s]	
	Categorías A y C	Categoría B
Nivel 1	12	20
Nivel 2	8	8
Nivel 3	4	4

Tabla 18.8. Requerimientos para el tiempo necesario para duplicar la perturbación inicial en el modo espiral.

18.3.5. Modo de balanceo holandés

Para el modo de balanceo holandés las normas establecen que el amortiguamiento sea mayor que un valor mínimo, ζ_{\min} , que la frecuencia natural sea mayor que otro valor mínimo, $\omega_{n\min}$, y que, adicionalmente, el producto del amortiguamiento por la frecuencia natural sea también mayor que otro valor mínimo, $(\zeta\omega_n)_{\min}$.

Téngase en cuenta que:

$$t_{1/2} = -\frac{0.693}{n} = \frac{0.693}{\zeta\omega_n}$$

$$N_{1/2} = \frac{t_{1/2}}{T} = 0.110 \sqrt{\frac{1}{\zeta^2} - 1} \quad (18.19)$$

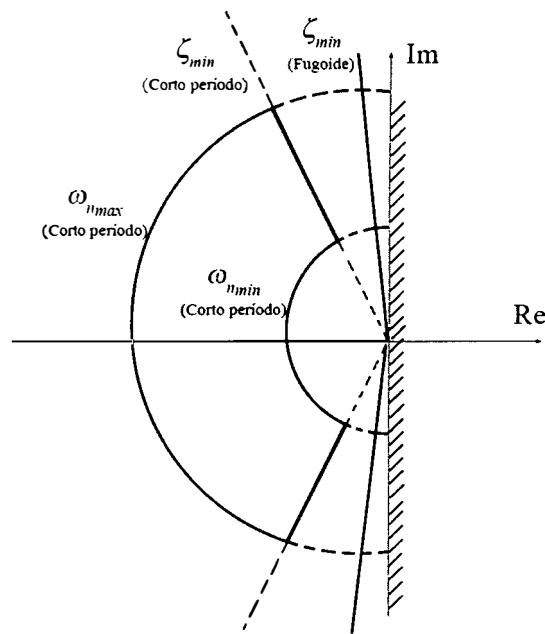
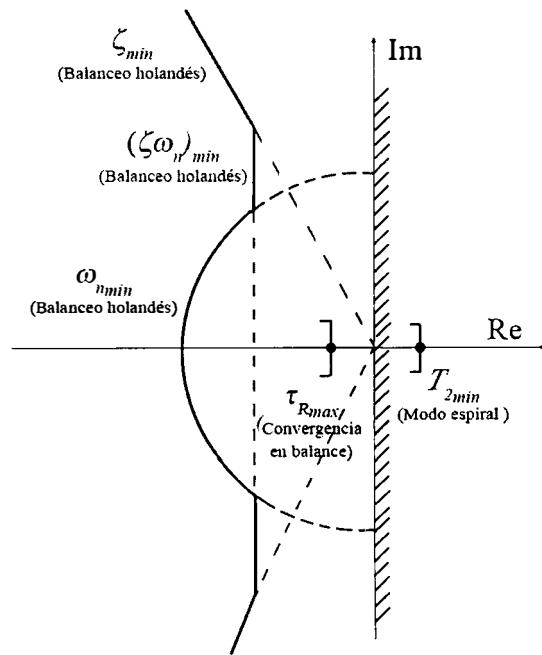
donde $N_{1/2}$ es el número de ciclos (en un modo oscilatorio) necesarios para que la perturbación inicial se reduzca a la mitad. Por tanto, imponer $(\zeta\omega_n)_{\min}$ es equivalente a imponer $t_{1/2\max}$, e imponer ζ_{\min} a $N_{1/2\max}$.

La Tabla 18.9 recoge los valores de ζ_{\min} , $\omega_{n\min}$ y $(\zeta\omega_n)_{\min}$, en las distintas Clases de aviones, Categorías y Niveles de Aceptabilidad. Obsérvese que $(\zeta\omega_n)_{\min} > \zeta_{\min}\omega_{n\min}$.

Las Figuras 18.2 y 18.3 representan, en el plano s , un resumen de los límites establecidos por las normas de cualidades de vuelo para los modos longitudinales y lateral-direccionales, en una Clase, Categoría y Nivel de Aceptabilidad prefijados (por ejemplo, Clase II, Categoría B y Nivel de Aceptabilidad 1).

Nivel	Categoría	Clase	ζ_{\min}	$(\zeta\omega_n)_{\min}$ [s ⁻¹]	$\omega_{n\min}$ [s ⁻¹]
1	A	I, IV	0.19	0.35	1.0
		II, III	0.19	0.35	0.4
	B	Todas	0.08	0.15	0.4
	C	I, IV, II-C	0.08	0.15	1.0
		II-L, III	0.08	0.10	0.4
2	Todas	Todas	0.02	0.05	0.4
3	Todas	Todas	0.00	—	0.4

Tabla 18.9. Requerimientos para el amortiguamiento, la frecuencia natural y el producto de ambos en el modo balanceo holandés.

Figura 18.2. Limitaciones en el plano s para los modos longitudinales.Figura 18.3. Limitaciones en el plano s para los modos lateral-direccionales.

18.4. Sistemas de control de vuelo (FCS)

Los requerimientos de las normas de cualidades de vuelo han sido resumidos en el apartado anterior.

En el caso de que un avión incumpla alguno de los requerimientos de la normativa (Tablas 18.1 a 18.9), pueden introducirse cambios en el diseño geométrico, aerodinámico y/o másico, lo cual, salvo excepciones muy evidentes, no siempre es posible. Por ello se suele recurrir a los llamados Sistemas de Control de Vuelo (en inglés, “Flight Control Systems” o FCS).

Los FCS utilizan de forma generalizada el concepto de realimentación en lazo cerrado, por el cual las deflexiones de las superficies aerodinámicas primarias y el empuje se hacen depender de una o varias de las variables de salida, sin acción directa por parte del piloto. La Figura 18.4 presenta un diagrama general de un Sistema de Control de Vuelo.

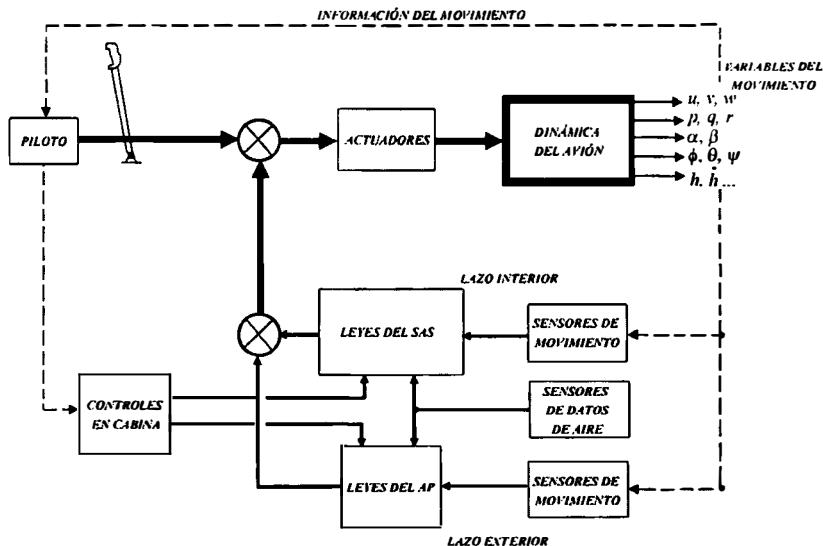


Figura 18.4. Esquema general de un Sistema de Control de Vuelo (FCS).

Los FCS pueden clasificarse en dos grandes grupos:

- **Sistemas de Aumento de Estabilidad:** Conocidos en inglés como “Stability Augmentation Systems” o SAS, mejoran las características de los modos dinámicos. Dos SAS muy utilizados son los llamados Sistema de

Estabilización en Cabeceo (en inglés “Pitch Stabilization System”) y Amortiguador en Guiñada (en inglés “Yaw Damper”).

- Autopilotos: Conocidos en inglés como Autopilots” o AP, permiten establecer y mantener condiciones de vuelo. Existen multitud de autopilotos como, por ejemplo, de actitud (en ángulo de asiento, θ , o en ángulo de balance, ϕ), de altitud, de senda de planeo, etc.

En el apartado 18.4.1 se estudian de forma simplificada dos ejemplos representativos de los SAS. Como puede observarse más adelante, mediante estos SAS no se conoce a priori y con total exactitud donde se situarán los polos de la función de transferencia en lazo cerrado. Para resolver este problema puede recurrirse al llamado Método de Colocación de los Polos (apartado 18.4.2), el cual permite elegir con total exactitud los autovalores de un sistema dinámico, siempre que se realmente el vector de estado de forma adecuada. Finalmente, en el apartado 18.4.3 se presenta un ejemplo simple de autopiloto lateral.

18.4.1. Sistemas de Aumento de Estabilidad (SAS)

Entre los sistemas de aumento de estabilidad tal vez los dos más usuales son los llamados Sistema de Estabilización en Cabeceo y Amortiguador en Guiñada.

El **Sistema de Estabilización en Cabeceo** (en inglés “**Pitch Stabilization System**”) se introduce en los aviones fundamentalmente con objeto de mejorar las características de su modo de corto período. Mediante este sistema se deflecta el timón de profundidad realimentando proporcionalmente al ángulo de ataque y con ello se consigue que un avión inestable con mandos fijos, en lazo abierto, pase a ser estable en lazo cerrado. Además, si se realimenta la velocidad angular de cabeceo puede aumentarse el amortiguamiento en cabeceo en lazo cerrado y así mejorar las características de amortiguamiento del modo de corto período.

En la Figura 18.5 se representa un diagrama de bloques simplificado para este sistema. En esta figura, la dinámica del avión viene dada por la función de transferencia, $G_{\alpha\delta_e}$, y la realimentación en velocidad angular de cabeceo se obtiene a través de las funciones, $G_{\dot{q}\delta_e}$ y $G_{\alpha\delta_e}$ (ver apartado 16.6);

es decir:

$$G_{\alpha\delta_e} = \frac{\Delta\alpha(s)}{\Delta\delta_e(s)} = \frac{N_{\alpha\delta_e}(s)}{D(s)}$$

$$G_{\hat{q}\delta_e} = \frac{\Delta\hat{q}(s)}{\Delta\delta_e(s)} = sG_{\theta\delta_e} = \frac{sN_{\theta\delta_e}(s)}{D(s)} \quad (18.20)$$

$$\frac{G_{\hat{q}\delta_e}}{G_{\alpha\delta_e}} = \frac{sN_{\theta\delta_e}(s)}{N_{\alpha\delta_e}(s)}$$

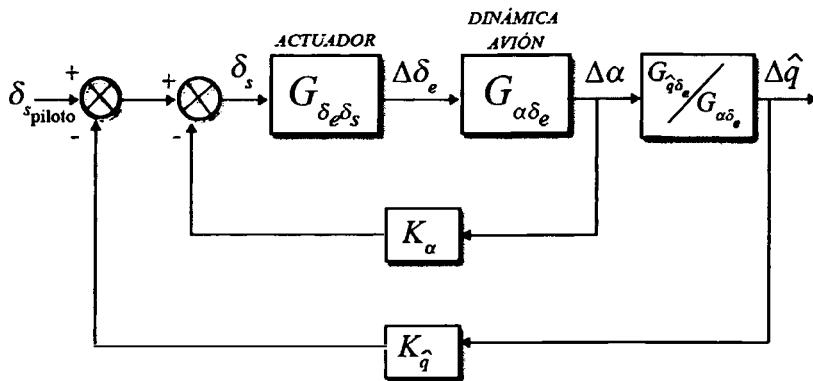


Figura 18.5. Diagrama de bloques para un Sistema de Estabilización en Cabeceo.

Además de la dinámica del avión es necesario tener en cuenta la dinámica del actuador del timón de profundidad, que viene representada por un sistema de primer orden con su correspondiente función de transferencia:

$$G_{\delta_e \delta_s} = \frac{\Delta\delta_e(s)}{\Delta\delta_s(s)} = -\frac{1}{\hat{\tau}_e s + 1} \quad (18.21)$$

en donde el signo negativo proviene del convenio de signos utilizado (para una deflexión de palanca positiva igual a $+1^\circ$, la deflexión del timón de profundidad estacionaria es igual a -1°) y $\hat{\tau}_e$ es la constante de tiempos adimensional del actuador del timón de profundidad (τ_e vale del orden de 0.1 s para actuadores típicos).

Finalmente se miden el ángulo de ataque y la velocidad angular de cabeceo mediante dos detectores ideales (veleta y giróscopo de velocidad) y se realimentan amplificando las señales K_α y $K_{\hat{q}}$, respectivamente, a la entrada del actuador del timón de profundidad, junto con la demanda directa por

parte del piloto. Es decir, si se denota por δ_s piloto la posición de la palanca demandada directamente por el piloto y $\Delta\delta_s$ SAS los valores introducidos por el SAS, a la entrada del actuador llegará una demanda total de ángulo, δ_s , dada por:

$$\begin{aligned}\delta_s &= \delta_s \text{ piloto} - \Delta\delta_s \text{ SAS} \\ \Delta\delta_s \text{ SAS} &= K_\alpha \Delta\alpha + K_{\hat{q}} \Delta\hat{q} \quad (K_\alpha > 0, K_{\hat{q}} > 0)\end{aligned}\tag{18.22}$$

donde se ha supuesto que si se demanda a la entrada del actuador $+1^\circ$, en su salida se alcanza -1° (en el estacionario).

El **Amortiguador en Guiñada** (en inglés “Yaw Damper”) se introduce en los aviones fundamentalmente con objeto de mejorar las características del modo de balanceo holandés. Mediante este sistema se deflecta el timón de dirección realimentando proporcionalmente a la velocidad angular de guiñada para de esta forma aumentar el amortiguamiento en guiñada en lazo cerrado y así mejorar las características de amortiguamiento del modo de balanceo holandés. Adicionalmente también podría realimentarse el ángulo de resbalamiento a través del timón de dirección.

En la Figura 18.6 se representa un diagrama de bloques simplificado para este sistema. En esta figura, la dinámica del avión viene dada por la función de transferencia, $G_{\beta\delta_r}$, y la realimentación en velocidad angular de guiñada se obtiene a través de las funciones, $G_{\hat{r}\delta_r}$ y $G_{\beta\delta_r}$ (ver apartado 17.7); es decir:

$$\begin{aligned}G_{\beta\delta_r} &= \frac{\Delta\beta(s)}{\Delta\delta_r(s)} = \frac{N_{\beta\delta_r}(s)}{D(s)} \\ G_{\hat{r}\delta_r} &= \frac{\Delta\hat{r}(s)}{\Delta\delta_r(s)} = \frac{N_{\hat{r}\delta_r}(s)}{D(s)} \\ \frac{G_{\hat{r}\delta_r}}{G_{\beta\delta_r}} &= \frac{N_{\hat{r}\delta_r}(s)}{N_{\beta\delta_r}(s)}\end{aligned}\tag{18.23}$$

La dinámica del actuador del timón de dirección viene representada por:

$$G_{\delta_r\delta_s} = \frac{\Delta\delta_r(s)}{\Delta\delta_s(s)} = \frac{1}{\hat{\tau}_r s + 1}\tag{18.24}$$

en donde el signo positivo proviene del convenio de signos utilizado (para una deflexión de pedal positiva la deflexión del timón de dirección es positiva) y $\hat{\tau}_r$

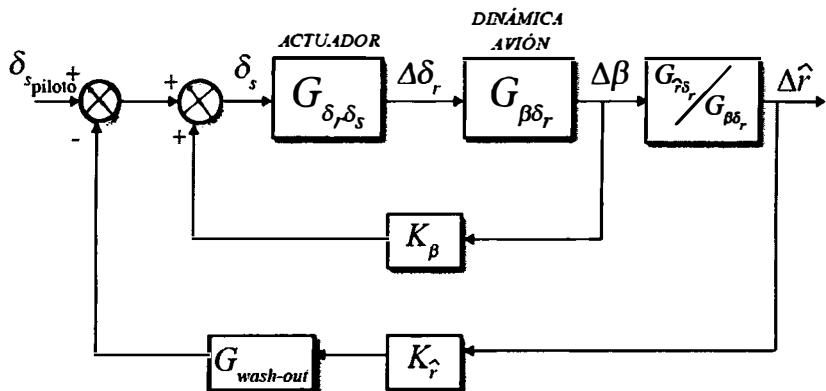


Figura 18.6. Diagrama de bloques para un Amortiguador en Guiñada.

representa ahora la constante de tiempos adimensional del actuador del timón de dirección.

Finalmente se miden el ángulo de resbalamiento y la velocidad angular de guiñada mediante dos detectores ideales (veleta y giróscopo de velocidad) y se realimentan amplificando las señales K_β y $K_{\hat{r}}$, respectivamente, a la entrada del actuador el timón de dirección, junto con la demanda directa por parte del piloto. Es decir, si se denota por δ_s la posición de pedal demandada directamente por el piloto y $\Delta\delta_s$ los valores introducidos por el SAS, a la entrada del actuador llegará una demanda total de ángulo, δ_s , dada por:

$$\begin{aligned} \delta_s &= \delta_{s\text{piloto}} + \Delta\delta_s \\ \Delta\delta_s &= K_\beta \Delta\beta - K_{\hat{r}} \Delta\hat{r} \quad (K_\beta > 0, K_{\hat{r}} > 0) \end{aligned} \tag{18.25}$$

donde se ha supuesto que si se demanda a la entrada del actuador $+1^\circ$, en su salida se alcanza $+1^\circ$ (en el estacionario).

El amortiguador en guiñada aquí esquematizado tiene un defecto: cuando el piloto quiere virar (por ejemplo, hacia la derecha) necesita una velocidad angular de guiñada estacionaria (en este caso positiva) y el SAS tenderá a ir contra ella generando una deflexión negativa del timón de dirección. El método habitual para evitar este efecto indeseado consiste en introducir un filtro pasa altos (en inglés, "wash-out filter"), que no deja pasar la componente estacionaria de la velocidad angular de guiñada y sí actúa contra las velocidades angulares transitorias. La función de transferencia de este filtro es:

$$G_{\text{wash-out}} = \frac{s}{\hat{r}s + 1} \tag{18.26}$$

donde la constante de tiempos del sistema, τ , vale del orden de 2.0-3.0 s para filtros típicos.

18.4.2. Método de colocación de los polos (Pole-Placement Method)

En un sistema dinámico, determinístico, lineal, invariante y no autónomo, la ecuación de estado relaciona el vector de estado con el vector de control en la forma siguiente:

$$\dot{\vec{X}}(\hat{t}) = F\vec{X}(\hat{t}) + B\vec{u}(\hat{t}) \quad (18.27)$$

donde

$\vec{X}(\hat{t})$: Vector de estado ($n \times 1$)

$\vec{u}(\hat{t})$: Vector de control ($q \times 1$)

F : Matriz del sistema ($n \times n$)

B : Matriz de control ($n \times q$)

La ecuación de observación relaciona el vector de salida con el vector de estado y el vector de control de la forma:

$$\vec{y}(\hat{t}) = H\vec{X}(\hat{t}) + D\vec{u}(\hat{t}) \quad (18.28)$$

donde

$\vec{y}(\hat{t})$: Vector de salida, de observación o de medidas ($m \times 1$)

H : Matriz de observación ($m \times n$)

D : Matriz de control en las medidas ($m \times q$), habitualmente nula.

En el estudio de la dinámica longitudinal y lateral-direccional de los aviones no se utiliza, en general, la ecuación de observación. En cuanto a la ecuación de estado, ha sido formulada en el apartado 14.5, para el caso longitudinal (ver expresiones (14.35) a (14.38)), y en el apartado 14.6, para el caso lateral-direccional (ver expresiones (14.43) a (14.46)). Obsérvese que en esta formulación se sigue utilizado el tiempo adimensional, aunque quizás sea más usual utilizar el tiempo con dimensiones.

Los autovalores de un sistema también pueden determinarse mediante la matriz del sistema haciendo:

$$|sI - F| = \begin{vmatrix} s - F_{11} & -F_{12} & \cdots & -F_{1n} \\ -F_{21} & s - F_{22} & \cdots & -F_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -F_{n1} & -F_{n2} & \cdots & s - F_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (18.29)$$

El polinomio característico queda como:

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = 0 \quad (18.30)$$

y sus raíces son los autovalores del sistema.

Supóngase ahora que estos autovalores son inadecuados para conseguir unas buenas cualidades de vuelo y que se desea que los mismos valgan exactamente $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_n$. El nuevo polinomio característico será:

$$(s - \hat{\lambda}_1)(s - \hat{\lambda}_2) \dots (s - \hat{\lambda}_n) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \dots + d_1s + d_0 = 0 \quad (18.31)$$

siendo, por tanto, conocidos los coeficientes del nuevo polinomio, d_{n-1}, \dots, d_1, d_0 .

Los autovalores pueden colocarse en la posición exacta deseada del plano- s , efectuando una realimentación completa del vector de estado. En primer lugar se establece (ver Figura 18.7):

$$\vec{u}(\hat{t}) = \vec{r}(\hat{t}) - K\vec{X}(\hat{t}) \quad (18.32)$$

donde K es la matriz de realimentación a determinar (con dimensiones $q \times n$) y $\vec{r}(t)$ es la nueva entrada de referencia sin realimentar. Introduciendo esta expresión en la ecuación (18.27) queda:

$$\dot{\vec{X}}(\hat{t}) = (F - BK)\vec{X}(\hat{t}) + B\vec{r}(\hat{t}) \quad (18.33)$$

Los autovalores del nuevo sistema realimentado se obtendrán anulando el nuevo polinomio característico:

$$|sI - F + BK| = 0 \quad (18.34)$$

Finalmente, imponiendo

$$|sI - F + BK| = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \dots + d_1s + d_0 \quad (18.35)$$

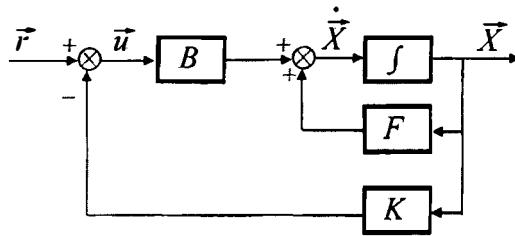


Figura 18.7. Representación esquemática del Método de Colocación de los Polos.

puede determinarse la matriz de realimentación K para que esto suceda.

Si el vector de control tiene dimensión 1 ($q = 1$), la matriz de realimentación es única ($1 \times n$) y tiene la forma:

$$K = [k_1, k_2, \dots, k_n] \quad (18.36)$$

Este método presupone que cada componente del vector de estado puede realimentarse mediante su correspondiente ganancia, k_i , lo cual no siempre es posible en los casos prácticos que aparecen en la dinámica longitudinal y lateral-direccional de los aviones.

18.4.3. Autopilotos (AP)

A título de ejemplo a continuación se propone un **Autopiloto Lateral** que pretende mantener el ángulo de balance requerido por el piloto, ϕ_r , realimentando el ángulo de balance instantáneo existente, ϕ .

En la Figura 18.8 se representa un diagrama de bloques simplificado para este autopiloto lateral. La dinámica del avión viene dada por la función de transferencia, $G_{\phi\delta_a}$ (ver la segunda ecuación de las expresiones (17.39)):

$$G_{\phi\delta_a} = \frac{\Delta\phi(s)}{\Delta\delta_a(s)} = \frac{N_{\phi\delta_a}(s)}{D(s)} \quad (18.37)$$

La dinámica del actuador de los alerones puede representarse mediante:

$$G_{\delta_a\delta_s} = \frac{\Delta\delta_a(s)}{\Delta\delta_s(s)} = \frac{1}{\hat{\tau}_a s + 1} \quad (18.38)$$

en donde el signo positivo proviene del convenio de signos utilizado (para una deflexión de palanca positiva la deflexión de alerones es positiva) y $\hat{\tau}_a$ es la constante de tiempos adimensional del actuador de los alerones.

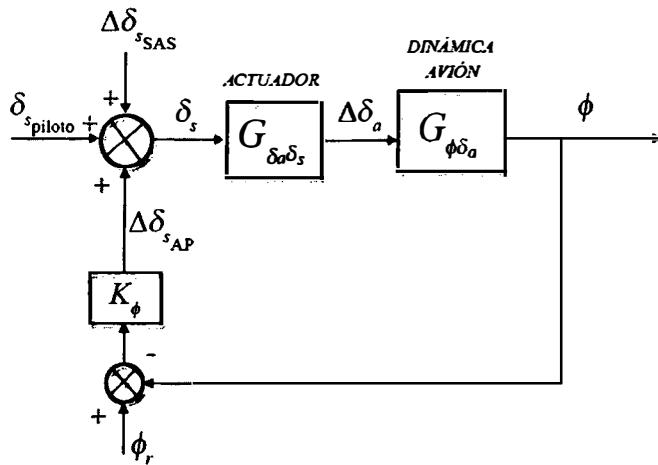


Figura 18.8. Diagrama de bloques para un autopiloto lateral.

Ahora se mide el ángulo de balance mediante un detector ideal (giróscopo de posición), se realimenta y se amplifica la diferencia entre el ángulo de balance requerido por el piloto, ϕ_r , y el ángulo de balance instantáneo existente, ϕ , mediante K_ϕ . Esta señal, $\Delta\delta_{sAP}$, se introduce como demanda a la entrada del actuador de los alerones, junto con la demanda directa por parte del piloto, $\delta_{s\text{piloto}}$, y junto con la señal requerida por el SAS, $\Delta\delta_{sSAS}$; es decir:

$$\begin{aligned} \delta_s &= \delta_{s\text{piloto}} + \Delta\delta_{sSAS} + \Delta\delta_{sAP} \\ \Delta\delta_{sAP} &= K_\phi(\phi_r - \phi) \end{aligned} \quad (18.39)$$

donde se ha supuesto que si se demanda a la entrada del actuador $+1^\circ$, en su salida se alcanza $+1^\circ$ (en el estacionario).

La función de transferencia en lazo cerrado, $G_{\phi\phi_r}$, viene dada por:

$$G_{\phi\phi_r} = \frac{\phi(s)}{\phi_r(s)} = \frac{K_\phi G_{\phi\delta_s}}{1 + K_\phi G_{\phi\delta_s}} \quad (18.40)$$

donde

$$G_{\phi\delta_s} = G_{\delta_a\delta_s} G_{\phi\delta_a} = \frac{1}{\hat{\tau}_a s + 1} \frac{N_{\phi\delta_a}(s)}{D(s)} \quad (18.41)$$

Con objeto de efectuar un análisis aún más simplificado de este autopiloto, puede introducirse el modelo con el único grado de libertad de balance considerado en el apartado 17.7.1. Las funciones de transferencia $G_{\phi\delta_a}$

y $G_{\phi\delta_s}$ son ahora (ver segunda ecuación (17.45)):

$$\begin{aligned} G_{\phi\delta_a} &= \frac{C_{l\delta_a}}{\hat{I}_x} \frac{1}{s(s - (C_{l\hat{p}}/\hat{I}_x))} \\ G_{\phi\delta_s} &= \frac{C_{l\delta_a}}{\hat{I}_x} \frac{1}{(\hat{\tau}_a s + 1)s(s - (C_{l\hat{p}}/\hat{I}_x))} \end{aligned} \quad (18.42)$$

y la función de transferencia en lazo cerrado es:

$$G_{\phi\phi_r} = \frac{K}{s(s + 1/\hat{\tau}_a)(s - (C_{l\hat{p}}/\hat{I}_x)) + K} \quad (18.43)$$

donde se han agrupado distintos parámetros del sistema en la constante K , dada por:

$$K = K_\phi \frac{C_{l\delta_a}}{\hat{\tau}_a \hat{I}_x} \quad (18.44)$$

La ganancia estática de este sistema es:

$$K_{\phi\phi_r} = \lim_{s \rightarrow 0} G_{\phi\phi_r}(s) = A_{\phi\phi_r}(\infty) = 1 \quad (18.45)$$

y mediante la utilización del llamado lugar de las raíces de Evans puede seleccionarse K (o, lo que es lo mismo, K_ϕ) con el fin de ajustar la respuesta transitoria.

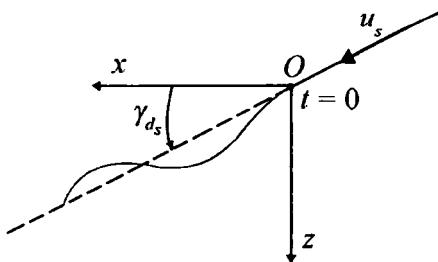
18.5. Problemas 18.1 y 18.2

PROBLEMA 18.1

Un avión dispone de un piloto automático con un modo de “Descenso”, el cual trata de mantener constante el ángulo de descenso seleccionado por el piloto. Para ello el piloto automático deflecta únicamente el timón de profundidad un valor $\Delta\delta_{eAP}$ dado por:

$$\Delta\delta_{eAP} = \delta_e - \delta_{es} = K_1(z - z_s) + K_2(\dot{z} - \dot{z}_s)$$

donde $\delta_{es}, z_s, \dot{z}_s$ representan la deflexión del timón, la posición vertical y la velocidad de descenso que corresponderían a la situación de referencia estacionaria (vuelo simétrico, rectilíneo, con alas a nivel, con velocidad u_s conocida y con ángulo de descenso, γ_{ds} , conocido y no necesariamente pequeño), y δ_e, z, \dot{z} son los valores reales que aparecen en el movimiento perturbado (ver figura).



Suponiendo además que:

1. Se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión (en concreto, el peso del avión, W , la superficie alar, S , la cuerda media aerodinámica, c , los coeficientes constantes de la polar parabólica, C_{D0}, k , $C_{X\delta_e} = C_{Z\dot{\alpha}} = C_{Z\dot{q}} = C_{Z\delta_e} = C_{m\dot{\alpha}} = C_{m\dot{\delta}_e} = 0$, etc.).
2. El empuje de los motores pasa por el centro de masas del avión, no depende de la velocidad y $\varepsilon_s = 0$.
3. El régimen de vuelo es subsónico incompresible.
4. El ángulo de descenso en la situación de referencia, γ_{ds} , es igual al ángulo de descenso demandado por el piloto.

5. Para el rango de altitudes considerado, ρ y g son constantes conocidas.

Se pide:

1º) Plantear el sistema de ecuaciones linealizadas (adimensionalizadas de la forma usual) del movimiento longitudinal que sigue a una pequeña perturbación a partir de la situación de referencia.

2º) Escribir el sistema del apartado anterior en la forma matricial estándar (en función del vector de estado y de su derivada), e identificar las componentes del vector de estado.

Solución:

1º) El sistema de ecuaciones aplicable a este problema es (ver sistema (14.32)):

$$(2\mu D - C_{X\hat{u}} + 2C_{Zs} \tan \theta_s) \Delta \hat{u} - C_{X\alpha} \Delta \alpha - C_{Zs} \Delta \theta = C_{X\delta_e} \Delta \delta_e$$

$$-(C_{Z\hat{u}} + 2C_{Zs}) \Delta \hat{u} + [(2\mu - C_{Z\alpha}) D - C_{Z\alpha}] \Delta \alpha - [(2\mu + C_{Z\dot{\alpha}}) D + C_{Zs} \tan \theta_s] \Delta \theta = C_{Z\delta_e} \Delta \delta_e$$

$$-C_{m\hat{u}} \Delta \hat{u} - (C_{m\hat{\alpha}} D + C_{m\alpha}) \Delta \alpha + (\hat{I}_y D^2 - C_{m\dot{\alpha}} D) \Delta \theta = (C_{m\hat{\delta}_e} D + C_{m\delta_e}) \Delta \delta_e$$

$$D \Delta \theta = \Delta \hat{q}$$

Introduciendo las derivadas de estabilidad nulas que propone el enunciado y el ángulo de asiento de la condición de referencia ($\theta_s = -\gamma_{ds}$) queda:

$$(2\mu D - C_{X\hat{u}} - 2C_{Zs} \tan \gamma_{ds}) \Delta \hat{u} - C_{X\alpha} \Delta \alpha - C_{Zs} \Delta \theta = 0$$

$$-(C_{Z\hat{u}} + 2C_{Zs}) \Delta \hat{u} + (2\mu D - C_{Z\alpha}) \Delta \alpha - (2\mu D - C_{Zs} \tan \gamma_{ds}) \Delta \theta = 0$$

$$-C_{m\hat{u}} \Delta \hat{u} - C_{m\alpha} \Delta \alpha + (\hat{I}_y D^2 - C_{m\dot{\alpha}} D) \Delta \theta = C_{m\delta_e} \Delta \delta_e$$

$$D \Delta \theta = \Delta \hat{q}$$

Como $\varepsilon_s = 0$, el empuje del motor pasa por el centro de masas y es independiente de la velocidad, y el régimen de vuelo es subsónico incompresible:

$$C_{X\hat{u}} = -2C_{Ts}$$

$$C_{Zs} = -C_{Ls} = -\frac{2W}{\rho Su_s^2} \cos \gamma_{ds}$$

$$C_{Ts} = C_{Ds} - \frac{2W}{\rho Su_s^2} \sin \gamma_{ds}; \quad C_{Ds} = C_{D0} + kC_{Ls}^2$$

$$C_{Z\hat{u}} = 0; \quad C_{m\hat{u}} = 0; \quad C_{X\alpha} = C_{Ls} - C_{D\alpha}; \quad C_{Z\alpha} = -C_{L\alpha} - C_{D\alpha}$$

y el sistema dinámico puede simplificarse aún más:

$$(2\mu D + 2C_{Ds})\Delta\hat{u} - (C_{Ls} - C_{D\alpha})\Delta\alpha + C_{Ls}\Delta\theta = 0$$

$$2C_{Ls}\Delta\hat{u} + (2\mu D + C_{L\alpha} + C_{Ds})\Delta\alpha - (2\mu D + C_{Ls} \tan \gamma_{ds})\Delta\theta = 0$$

$$-C_{m\alpha}\Delta\alpha + (\hat{I}_y D^2 - C_{m\hat{q}}D)\Delta\theta = C_{m\delta_e}\Delta\delta_e$$

$$D\Delta\theta = \Delta\hat{q}$$

La ecuación del autopiloto es:

$$\Delta\delta_e = \Delta\delta_{eAP} = K_1(z - z_s) + K_2(\dot{z} - \dot{z}_s) = K_1\Delta z + K_2\Delta\dot{z}$$

En el apartado 14.2.1 se obtuvo, para la relación cinemática lineal (tercera ecuación del sistema (14.22)), la siguiente expresión:

$$\Delta\dot{z}_e = -\sin \theta_s \Delta u + \cos \theta_s \Delta w - \cos \theta_s u_s \Delta \theta$$

que particularizada para este problema queda:

$$\Delta\dot{z} = u_s \sin \gamma_{ds} \Delta\hat{u} + u_s \cos \gamma_{ds} \Delta\alpha - u_s \cos \gamma_{ds} \Delta\theta$$

$$\Delta\hat{z} = \sin \gamma_{ds} \Delta\hat{u} + \cos \gamma_{ds} \Delta\alpha - \cos \gamma_{ds} \Delta\theta$$

$$\text{donde: } \Delta\hat{z} = \frac{\Delta z}{c/2}; \quad D\Delta\hat{z} = \Delta\hat{z} = \frac{d\Delta\hat{z}}{dt} = \frac{d\Delta z}{dt} \frac{c/2}{c/2} = \frac{1}{u_s} \frac{d\Delta z}{dt} = \frac{\Delta\dot{z}}{u_s}$$

Por tanto las dos ecuaciones que completan el sistema de ecuaciones dinámicas y cinemática angular son:

$$\Delta\delta_e = K_1 \frac{c}{2} \Delta\hat{z} + K_2 u_s \Delta\hat{z} = K_1 \frac{c}{2} \Delta\hat{z} + K_2 u_s D\Delta\hat{z}$$

$$D\Delta\hat{z} = \sin \gamma_{ds} \Delta\hat{u} + \cos \gamma_{ds} \Delta\alpha - \cos \gamma_{ds} \Delta\theta$$

2º) El sistema de ecuaciones del apartado anterior puede expresarse en función de un vector de estado \vec{X} de dimensión cinco cuyas componentes son:

$$\vec{X} = \{\Delta\hat{u}, \Delta\alpha, \Delta\hat{q}, \Delta\theta, \Delta z\}^T$$

La ecuación de estado de este sistema adopta la forma:

$$\dot{\vec{X}} = F\vec{X}$$

donde F es las matriz del sistema. Desarrollando la expresión anterior:

$$\begin{Bmatrix} D\Delta\hat{u} \\ D\Delta\alpha \\ D\Delta\hat{q} \\ D\Delta\theta \\ D\Delta z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} & F_{15} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} & F_{25} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} & F_{35} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} & F_{45} \\ F_{51} & F_{52} & F_{53} & F_{54} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\hat{u} \\ \Delta\alpha \\ \Delta\hat{q} \\ \Delta\theta \\ \Delta z \end{Bmatrix}$$

$$F_{11} = \frac{-C_{Ds}}{\mu}; F_{12} = \frac{C_{Ls} - C_{D\alpha}}{2\mu}; F_{13} = 0; F_{14} = -\frac{C_{Ls}}{2\mu}; F_{15} = 0$$

$$F_{21} = -\frac{C_{Ls}}{\mu}; F_{22} = -\frac{C_{L\alpha} + C_{Ds}}{2\mu}; F_{23} = 1; F_{24} = \frac{C_{Ls} \tan \gamma_{ds}}{2\mu}; F_{25} = 0$$

$$F_{31} = K_2 \frac{C_{m\delta_e}}{\hat{I}_y} u_s \sin \gamma_{ds}; F_{32} = \frac{C_{m\alpha}}{\hat{I}_y} + K_2 \frac{C_{m\delta_e}}{\hat{I}_y} u_s \cos \gamma_{ds}; F_{33} = \frac{C_{m\hat{q}}}{\hat{I}_y};$$

$$F_{34} = -K_2 \frac{C_{m\delta_e}}{\hat{I}_y} u_s \cos \gamma_{ds}; F_{35} = K_1 \frac{C_{m\delta_e}}{\hat{I}_y} \frac{c}{2}$$

$$F_{41} = 0; F_{42} = 0; F_{43} = 1; F_{44} = 0; F_{45} = 0$$

$$F_{51} = \sin \gamma_{ds}; F_{52} = \cos \gamma_{ds}; F_{53} = 0; F_{54} = -\cos \gamma_{ds}; F_{55} = 0$$

PROBLEMA 18.2

Un avión está provisto de un sistema de mandos de vuelo de los denominados “Fly By Wire” (FBW), que incorpora funciones de piloto automático (AP) en el mando lateral y de aumento de estabilidad (SAS) en el mando direccional. El piloto automático actúa a través de los alerones de forma que la deflexión de los mismos es:

$$\delta_a = \delta_{a\text{ piloto}} + \Delta\delta_{a\text{ AP}}$$

donde $\delta_{a\text{ piloto}}$ y $\Delta\delta_{a\text{ AP}}$ son las deflexiones de alerones mandadas por el piloto y por el piloto automático respectivamente. El sistema de aumento de estabilidad actúa a través del timón de dirección según las leyes:

$$\delta_r = \delta_{r\text{ piloto}} + \Delta\delta_{r\text{ SAS}}$$

$$\Delta\delta_{r\text{ SAS}} = K_\beta \Delta\beta - K_f \Delta\hat{r}$$

donde δ_r piloto y $\Delta\delta_r$ SAS son las deflexiones de timón de dirección mandadas por el piloto y por el sistema de aumento de estabilidad respectivamente, y K_β y $K_{\hat{r}}$ son constantes de realimentación positivas.

Suponiendo además que:

1. Se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y básicas del avión (en concreto, $C_{l\hat{\delta}_a} = C_{n\delta_a} = C_{n\hat{\delta}_r} = 0$).
2. Los ejes estabilidad son principales de inercia y $\varepsilon_s = 0$.

Se pide:

1º) Plantear el sistema de ecuaciones adimensionales que describen el movimiento de perturbación lateral-direccional del avión, a partir de una condición de vuelo horizontal rectilíneo estacionario sin resbalamiento con las alas a nivel, escribiendo dicho sistema en la forma matricial estándar, es decir, en función del vector de estado, su derivada y los controles.

2º) Suponiendo que son nulas las deflexiones de alerones y timón de dirección demandadas por el piloto, que el SAS está conectado y que el piloto automático opera con los alerones en un hipotético modo ideal tal que en todo momento mantiene las alas a nivel, obtener un sistema de ecuaciones que permita determinar las constantes K_β y $K_{\hat{r}}$, en función de características del avión conocidas, para que la frecuencia natural adimensional y el amortiguamiento del modo resultante tuvieran unos valores $\hat{\omega}_n$ y ζ dados.

3º) Obtener las funciones de transferencia del piloto automático, $\Delta\delta_a$ AP(s)/ $\Delta\hat{r}$ (s), y del sistema de aumento de estabilidad, $\Delta\delta_r$ SAS(s)/ $\Delta\hat{r}$ (s), manteniendo las condiciones del apartado 2º).

Solución:

1º) El sistema de ecuaciones aplicable a este problema, con la condición de vuelo de referencia horizontal ($\theta_s = 0$), es (ver sistema (14.41)):

$$\begin{aligned}
 & (2\mu D - C_{Y\beta})\Delta\beta - C_{Y\hat{p}}\Delta\hat{p} + (2\mu - C_{Y\hat{r}})\Delta\hat{r} + C_{zs}\Delta\phi = C_{Y\delta_r}\Delta\delta_r \\
 & -C_{l\beta}\Delta\beta + (\hat{I}_x D - C_{l\hat{p}})\Delta\hat{p} - (\hat{J}_{xz} D + C_{l\hat{r}})\Delta\hat{r} = (C_{l\hat{\delta}_a} D + C_{l\delta_a})\Delta\delta_a + C_{l\delta_r}\Delta\delta_r \\
 & -C_{n\beta}\Delta\beta - (\hat{J}_{xz} D + C_{n\hat{p}})\Delta\hat{p} + (\hat{I}_z D - C_{n\hat{r}})\Delta\hat{r} = C_{n\delta_a}\Delta\delta_a + (C_{n\hat{\delta}_r} D + C_{n\delta_r})\Delta\delta_r \\
 & D\Delta\phi = \Delta\hat{p} \\
 & D\Delta\psi = \Delta\hat{r}
 \end{aligned}$$

Introduciendo ahora los parámetros nulos que propone el enunciado queda:

$$\begin{aligned}
 (2\mu D - C_{Y\beta})\Delta\beta - C_{Y\hat{p}}\Delta\hat{p} + (2\mu - C_{Y\hat{r}})\Delta\hat{r} - C_{Ls}\Delta\phi &= C_{Y\delta_r}\Delta\delta_r \\
 -C_{l\beta}\Delta\beta + (\hat{I}_x D - C_{l\hat{p}})\Delta\hat{p} - C_{l\hat{r}}\Delta\hat{r} &= C_{l\delta_a}\Delta\delta_a + C_{l\delta_r}\Delta\delta_r \\
 -C_{n\beta}\Delta\beta - C_{n\hat{p}}\Delta\hat{p} + (\hat{I}_z D - C_{n\hat{r}})\Delta\hat{r} &= C_{n\delta_r}\Delta\delta_r \\
 D\Delta\phi &= \Delta\hat{p} \\
 D\Delta\psi &= \Delta\hat{r}
 \end{aligned}$$

Formulando este sistema en función del vector de estado (ver apartado 14.6):

$$\dot{\vec{X}} = F\vec{X} + B\vec{u}$$

donde $\vec{X} = \{\Delta\hat{v}, \Delta\hat{p}, \Delta\hat{r}, \Delta\phi\}^T$ es el vector de estado, $\vec{u} = \{\Delta\delta_a, \Delta\delta_r\}^T$ es el vector de control, y F y B son las matrices del sistema y de control, respectivamente, dadas por:

$$\begin{aligned}
 F &= \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \\ B_{41} & B_{42} \end{bmatrix} \\
 F_{11} &= \frac{C_{Y\beta}}{2\mu} ; \quad F_{12} = \frac{C_{Y\hat{p}}}{2\mu} ; \quad F_{13} = -\frac{2\mu - C_{Y\hat{r}}}{2\mu} ; \quad F_{14} = \frac{C_{Ls}}{2\mu} \\
 F_{21} &= \frac{C_{l\beta}}{\hat{I}_x} ; \quad F_{22} = \frac{C_{l\hat{p}}}{\hat{I}_x} ; \quad F_{23} = \frac{C_{l\hat{r}}}{\hat{I}_x} ; \quad F_{24} = 0 \\
 F_{31} &= \frac{C_{n\beta}}{\hat{I}_z} ; \quad F_{32} = \frac{C_{n\hat{p}}}{\hat{I}_z} ; \quad F_{33} = \frac{C_{n\hat{r}}}{\hat{I}_z} ; \quad F_{34} = 0 \\
 F_{41} &= 0 ; \quad F_{42} = 1 ; \quad F_{43} = 0 ; \quad F_{44} = 0 \\
 B_{11} &= 0 ; \quad B_{12} = \frac{C_{Y\delta_r}}{2\mu} \\
 B_{21} &= \frac{C_{l\delta_a}}{\hat{I}_x} ; \quad B_{22} = \frac{C_{l\delta_r}}{\hat{I}_x} \\
 B_{31} &= 0 ; \quad B_{32} = \frac{C_{n\delta_r}}{\hat{I}_z} \\
 B_{41} &= 0 ; \quad B_{42} = 0
 \end{aligned}$$

Obsérvese que la segunda relación cinemática angular que proporciona la derivada del ángulo de guiñada está desacoplada del resto.

2º) La deflexión de alerones que impone el piloto automático consigue hacer siempre $\Delta\phi = \Delta\hat{p} = 0$, por lo que la ecuación de momentos de balance se satisface idénticamente. Operando con las ecuaciones de fuerza lateral y de momento de guiñada:

$$\begin{aligned} D\Delta\beta &= \frac{C_{Y\beta}}{2\mu}\Delta\beta - \frac{2\mu - C_{Y\hat{r}}}{2\mu}\Delta\hat{r} + \frac{C_{Y\delta_r}}{2\mu}\Delta\delta_r \text{ SAS} = \\ &= \frac{C_{Y\beta} + K_\beta C_{Y\delta_r}}{2\mu}\Delta\beta - \frac{2\mu - C_{Y\hat{r}} + K_{\hat{r}} C_{Y\delta_r}}{2\mu}\Delta\hat{r} \\ D\Delta\hat{r} &= \frac{C_{n\beta}}{\hat{I}_z}\Delta\beta + \frac{C_{n\hat{r}}}{\hat{I}_z}\Delta\hat{r} + \frac{C_{n\delta_r}}{\hat{I}_z}\Delta\delta_r \text{ SAS} = \\ &= \frac{C_{n\beta} + K_\beta C_{n\delta_r}}{\hat{I}_z}\Delta\beta + \frac{C_{n\hat{r}} - K_{\hat{r}} C_{n\delta_r}}{\hat{I}_z}\Delta\hat{r} \end{aligned}$$

Obsérvese que este avión, con el SAS activado, tiene un nuevo índice de estabilidad direccional y un nuevo amortiguamiento en guiñada dados por:

$$C_{n\beta} \text{ SAS} = C_{n\beta} + K_\beta C_{n\delta_r}, \quad C_{n\hat{r}} \text{ SAS} = C_{n\hat{r}} - K_{\hat{r}} C_{n\delta_r}$$

Los autovalores de este sistema viene dados por:

$$\left| \begin{array}{cc} \hat{\lambda} - \frac{C_{Y\beta} + K_\beta C_{Y\delta_r}}{2\mu} & \frac{2\mu - C_{Y\hat{r}} + K_{\hat{r}} C_{Y\delta_r}}{2\mu} \\ \frac{C_{n\beta} + K_\beta C_{n\delta_r}}{\hat{I}_z} & \hat{\lambda} - \frac{C_{n\hat{r}} - K_{\hat{r}} C_{n\delta_r}}{\hat{I}_z} \end{array} \right| = 0$$

que puede expresarse en la forma:

$$\hat{\lambda}^2 + 2\zeta\hat{\omega}_n\hat{\lambda} + \hat{\omega}_n^2 = 0$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_n^2 &= \frac{(C_{n\beta} + K_\beta C_{n\delta_r})(2\mu - C_{Y\hat{r}} + K_{\hat{r}} C_{Y\delta_r})}{2\mu\hat{I}_z} + \\ &+ \frac{(C_{n\hat{r}} - K_{\hat{r}} C_{n\delta_r})(C_{Y\beta} + K_\beta C_{Y\delta_r})}{2\mu\hat{I}_z} \end{aligned}$$

$$\zeta = -\frac{1}{2\hat{\omega}_n} \left(\frac{C_{n\hat{r}} - K_{\hat{r}} C_{n\delta_r}}{\hat{I}_z} + \frac{C_{Y\beta} + K_\beta C_{Y\delta_r}}{2\mu} \right)$$

Para unos valores prefijados de $\hat{\omega}_n$ y ζ , este sistema de dos ecuaciones tiene sólo dos incógnitas: K_β y $K_{\hat{r}}$.

3º) Transformando a Laplace la ecuación de momentos de guiñada se obtiene:

$$\frac{\Delta\beta(s)}{\Delta\hat{r}(s)} = \frac{\hat{I}_z s - (C_{n\hat{r}} - K_{\hat{r}} C_{n\delta_r})}{C_{n\beta} + K_\beta C_{n\delta_r}}$$

Introduciendo en la ecuación de momento de balance la condición $\Delta\phi = \Delta\hat{p} = 0$, queda:

$$-C_{l\beta}\Delta\beta - C_{l\hat{r}}\Delta\hat{r} = C_{l\delta_a}\Delta\delta_{a\text{ AP}} + C_{l\delta_r}\Delta\delta_{r\text{ SAS}}$$

es decir:

$$C_{l\delta_a}\Delta\delta_{a\text{ AP}} = -(C_{l\beta} + K_\beta C_{l\delta_r})\Delta\beta - (C_{l\hat{r}} - K_{\hat{r}} C_{l\delta_r})\Delta\hat{r}$$

y aplicando Laplace:

$$\frac{\Delta\delta_{a\text{ AP}}(s)}{\Delta\hat{r}(s)} = -\frac{C_{l\beta} + K_\beta C_{l\delta_r}}{C_{l\delta_a}} \frac{\Delta\beta(s)}{\Delta\hat{r}(s)} - \frac{C_{l\hat{r}} - K_{\hat{r}} C_{l\delta_r}}{C_{l\delta_a}}$$

e introduciendo ahora la función de transferencia de $\Delta\hat{r}$ a $\Delta\beta$, ya calculada:

$$\frac{\Delta\delta_{a\text{ AP}}(s)}{\Delta\hat{r}(s)} = -\frac{\hat{I}_z}{C_{l\delta_a}} \left[\frac{C_{l\beta} + K_\beta C_{l\delta_r}}{C_{n\beta} + K_\beta C_{n\delta_r}} \left(s - \frac{C_{n\hat{r}} - K_{\hat{r}} C_{n\delta_r}}{\hat{I}_z} \right) + \frac{C_{l\hat{r}} - K_{\hat{r}} C_{l\delta_r}}{\hat{I}_z} \right]$$

Finalmente aplicando Laplace a la ecuación del SAS:

$$\frac{\Delta\delta_{r\text{ SAS}}(s)}{\Delta\hat{r}(s)} = K_\beta \frac{\Delta\beta}{\Delta\hat{r}} - K_{\hat{r}} = K_\beta \frac{\hat{I}_z s - (C_{n\hat{r}} - K_{\hat{r}} C_{n\delta_r})}{C_{n\beta} + K_\beta C_{n\delta_r}} - K_{\hat{r}}$$

Bibliografía

1. Anónimo, Military Specification. Flying Qualities of Piloted Airplanes, MIL-F-8785C, Department of Defense, USA, 1980.
2. Anónimo, Military Standard. Flying Qualities of Piloted Aircraft, MIL-STD-1797A, Department of Defense, USA, 1990.
3. Ashley, H., Engineering Analysis of Flight Vehicles, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., USA, 1974.
4. Asselin, M., An Introduction to Aircraft Performance, AIAA Education Series, USA, 1997.
5. Cook, M.V., Flight Dynamics Principles, Arnold, Great Britain, 1997.
6. Cuerno Rejado, C., Elices Concha, T., Gómez Tierno, M.A. y otros, Apuntes de Aeronaves y Vehículos Espaciales, Publicaciones de la ETSIA, Madrid, 1998.
7. Etkin, B., Dynamics of Atmospheric Flight, John Wiley & Sons, Inc., USA, 1972.
8. Etkin, B., Dynamics of Flight. Stability and Control, 2nd ed., John Wiley & Sons, Inc., USA, 1982.
9. Etkin, B. & Reid, Ll. D., Dynamics of Flight. Stability and Control, 3rd ed., John Wiley & Sons, Inc., USA, 1996.
10. Goldstein, H., Classical Mechanics, 2nd ed., Addison-Wesley Publishing Company, Inc., USA, 1980.
11. Hale, F.J., Introduction to Aircraft Performance, Selection and Design, John Wiley & Sons, Inc., USA, 1984.
12. Isidoro Carmona, A, Aerodinámica y Actuaciones del Avión, 12^a ed., Thomson/Paraninfo, Madrid, 2004.

13. Kermode, A.C., Mechanics of Flight, 9th ed., Longman Scientific & Technical, Great Britain, 1987.
14. Martínez García, J.J. y Gómez Tierno, M.A., Apuntes de Mecánica del Vuelo 1, Publicaciones de la ETSIA, Madrid, 2000.
15. Martínez García, J.J. y Gómez Tierno, M.A., Apuntes de Mecánica del Vuelo II, Publicaciones de la ETSIA, Madrid, 2001.
16. McCormick, B.W., Aerodynamics, Aeronautics and Flight Mechanics, 2nd ed., John Wiley & Sons, Inc., USA, 1994.
17. Miele, A., Flight Mechanics-Vol. 1: Theory of Flight Paths, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., USA, 1962.
18. Nelson, R.C., Flight Stability and Automatic Control, McGraw-Hill, Inc., USA, 1989.
19. Nelson, W.C., Elementos de la Hélice del Avión, Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial, Madrid, 1950.
20. Ojha, S.K., Flight Performance of Aircraft, AIAA Education Series, USA, 1995.
21. Pamadi, B.N., Performance, Stability, Dynamics and Control of Airplanes, 2nd ed., AIAA Education Series, USA, 2004.
22. Perkins, C.D. & Hage, R.E., Airplane Performance, Stability and Control, John Wiley & Sons, Inc., USA, 1949.
23. Raymer, Aircraft Design: A Conceptual Approach, 4th ed., AIAA Education Series, USA, 2006.
24. Roskam, J., Airplane Flight Dynamics and Automatic Flight Controls, Parts I & II, Roskam Aviation and Engineering Corporation, USA, 1982.
25. Torenbeek, E., Synthesis of Subsonic Airplane Design, Delft University Press/Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1982.
26. Vinh, N.X., Flight Mechanics of High-Performance Aircraft, Cambridge Aerospace Series No. 4, Cambridge University Press, Great Britain, 1993.

ÍNDICE ALFABÉTICO

A

- Actuaciones
de despegue y aterrizaje, 151
de punto, 61, 129
del planeador, 51
en aterrizaje, 165
integrales, 64, 132
relaciones básicas, 33
- Actuaciones de aviones de alta velocidad, 175
diagramas $M-h$, 183
envolvente del dominio de vuelo, 180
limitación aerodinámica, 180
limitación estructural, 181
limitación térmica, 182
resistencia aerodinámica y factor de empuje, 177
- Actuaciones de aviones propulsados por hélices, 121
actuaciones de punto, 129
actuaciones de punto en subida y descenso, 132
actuaciones de punto en viraje casi-estacionario, 141
actuaciones integrales, 132
hipótesis sobre el grupo propulsor, 125
potencia disipada adimensional, 121
vuelo a ángulo de ataque constante, 135
- vuelo a potencia del motor constante, 137
vuelo a velocidad constante, 136
vuelo horizontal rectilíneo, 129
- Actuaciones de turborreactores
actuaciones de punto, 77
actuaciones integrales, 83
características del motor, 73
corrección para vuelo acelerado, 103
de punto en subida y descenso, 97
de punto en viraje casi-estacionario, 104
de punto en viraje instantáneo, 111
ecuaciones adimensionales, 75
otros vuelos, 97
velocidades de vuelo horizontal, 78
vuelo a ángulo de ataque constante, 86
vuelo a empuje constante, 88
vuelo a velocidad constante, 87
vuelo horizontal rectilíneo, 73
- Admitancia
índice, 377
impulsional, 377
- Alcance, 64, 83, 132
específico, 84, 133
- Alerones, 22, 230
- Amortiguador en guiñada, 437
- Amortiguamiento
en balance, 347

- en cabeceo, 256
- en guiñada, 351
- Ángulo**
 - de asiento de velocidad, 10, 100
 - de asiento del avión, 9
 - de ataque, 11, 35
 - de balance de velocidad, 10
 - de balance del avión, 9
 - de descenso mínimo, 62
 - de guarda longitudinal, 159
 - de guiñada de velocidad, 10
 - de guiñada del avión, 9
 - de resbalamiento, 11, 35
- Autonomía, 64, 83, 132
 - específica, 84, 133
- Autopilotos (AP), 441
- Autovalores
 - modos lateral-direccionales, 394
 - modos longitudinales, 362
- Autovectores
 - modos lateral-direccionales, 394
 - modos longitudinales, 362
- B**
 - Balanceo holandés, 400, 432
 - Breguet, fórmulas de, 87, 135
 - Bryan, desarrollo de, 316
- C**
 - Características
 - aerodinámicas y propulsivas, 37
 - del motor, turborreactores, 73
 - Coeficiente
 - de fuerza lateral, 281
 - de fuerza lateral total, 282
 - de momento de balance, 281
 - de momento de guiñada, 281
 - de momento de guiñada total, 291
 - de resistencia aerodinámica, 52
 - de sustentación, 52
 - de sustentación óptimo, 55
 - Comparación entre las distintas leyes
 - de pilotaje, turborreactores, 90
 - Compensador o tab, 233
- Consumo específico, 74
- Control Anticipation Parameter (CAP), 425
- Control de vuelo, 417
- Control longitudinal, métodos, 214
- Convergencia en balance, 397, 428
- Cooper-Harper, escala de, 422
- Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz, 362
- Cuártica de estabilidad, 360, 392
- Cualidades de vuelo, 417
 - capacidad de mando, 419
 - confort, 419
 - manejo, 419
- D**
 - Deflexión de estela, 205
 - Deflexión del timón de profundidad necesaria para el equilibrio, 215
 - Derivadas de estabilidad, 315, 340, 341
 - coeficiente de fuerza lateral total, 282
 - coeficiente de momento de balance total, 285
 - lateral-direccionales, 338
 - longitudinales, 337
 - Despegue
 - del avión, 157
 - distancia total recorrida, 164
 - rodadura en el suelo, 152
 - subida rectilínea estabilizada, 162
 - tiempo total empleado, 164
 - transición, 162
 - Determinación del punto neutro con mandos fijos mediante ensayos en vuelo, 217
 - Diagrama M-h
 - de la aceleración tangencial, 184
 - de la velocidad ascensional, 185
 - del factor de empuje, 183
 - del radio de viraje, 187
 - Diedro, 286
 - Distancia recorrida
 - en el aire, 163

- en el despegue, 164
en la rodadura, 161
- E**
- Ecuaciones adimensionales, vuelo simétrico, 58
Ecuaciones de Euler del movimiento del avión, 20
Ecuaciones del vuelo estacionario, 25
Ecuaciones generales, 17
acciones exteriores y términos gravitatorios, 20
determinación de la trayectoria, 25
Ecuaciones de Euler, 20
hipótesis de Tierra plana, 23
relaciones cinemáticas angulares, 23
relaciones cinemáticas lineales, 25
relaciones dinámicas, 18
Efecto de pesos y muelles sobre la estabilidad con mandos libres, 241
Efecto diedro, 286
Eficiencia aerodinámica, 54
de la cola, 205
máxima, 55
Ejes
cuerpo, 3
de estabilidad, 4
geocéntrico giratorio, 2
horizonte local, 3
tierra, 2
viento, 4
Empuje, 35
base, 76
Energía específica, derivada respecto del tiempo, 188
Energía, estado de, 191
Escala de Cooper-Harper, 422
Esfuerzo por “*g*”, 266
Estabilidad con mandos libres, efecto de pesos y muelles, 241
Estabilidad direccional, 291
con mandos libres, 297
- Estabilidad en maniobra con mandos libres
efecto de los pesos, 268
Estabilidad y control dinámicos, 307
lateral-direccionales en cadena abierta, 391
longitudinales en cadena abierta, 359
- Estabilidad y control estáticos
lateral-direccionales, 279
longitudinales, 203
longitudinales en maniobra, 255
longitudinales, momento de cabeceo total, 208
longitudinales, sustentación total, 204
- Estado de energía, 191
Exceso de Potencia Específico, 104
- F**
- Fórmulas de Breguet, 87, 135
Factor
de carga, 56, 258
de empuje, 177, 179
Flecha del ala, 288
Fuerza en el mando longitudinal, 229
tipos de sistemas de mando, 230
Fuerza en palanca, 238
en maniobra, 265
Fuerza y momentos lateraldireccionales en vuelo curvilíneo estacionario, 298
Fuerzas aerodinámicas, 51
Fuerzas en los mandos lateral y direccional, 294
Función de transferencia, 373
- G**
- Gasto máscico de combustible del motor, 36
Gradiente de fuerza en palanca, 238
Grados de libertad, sólido rígido, 17
Guñada adversa, 293
- H**
- Hélices, 126

- Hipótesis de Tierra plana, 23
- I**
- Índice de estabilidad estática direccional
- con mandos fijos, 292
 - con mandos libres, 297
- Índice de estabilidad estática longitudinal
- con mandos fijos, 211
 - con mandos fijos en maniobra, 259
 - con mandos libres, 236
 - en maniobra con mandos libres, 263
- L**
- Ley de pilotaje, 65, 86, 135
- Linealización
- de las ecuaciones del movimiento, 307
 - de los términos aerodinámicos y propulsivos, 315
- M**
- Método de colocación de los polos, 439
- Margen de maniobra
- con mandos fijos, 260
 - con mandos libres, 265
- Margen estático
- con mandos fijos, 213
 - con mandos libres, 238
- Métodos de control longitudinal, 214
- Modo
- balanceo holandés, 400, 432
 - de convergencia en balance, 397, 428
 - de corto periodo, 363, 370, 425
 - espiral, 398, 431
 - fugode, 363, 366, 424
- Modos lateral-direccionales, autovalores, autovectores y formas de los modos, 394
- Modos longitudinales, autovalores, autovectores y formas de los modos, 362
- Momento de charnela del timón de profundidad, 233
- Motor fijo con respecto al avión, 39
- Motores alternativos, 125
- Movimiento lateral-direccional, ecuaciones linealizadas adimensionales, 325
- Movimiento longitudinal
- ecuaciones linealizadas adimensionales, 320
 - ecuaciones linealizadas dimensionales, 319
- N**
- Número de grados de libertad, 39
- Normas de aeronavegabilidad, 418
- Normas de cualidades de vuelo, 418
- evolución histórica, 419
 - factores de los que dependen, 420
 - requerimientos, 424
- O**
- Orientación
- ejes cuerpo respecto a ejes horizonte local, 8
 - ejes cuerpo respecto a ejes viento, 11
 - ejes viento respecto a ejes horizonte local, 10
 - entre dos sistemas de referencia con origen común, 5
- P**
- Parámetro de control del empuje, 38
- Planeo con
- ángulo de ataque constante, 65
 - velocidad constante, 66
- Polar del avión, 53
- Polar parabólica, 51, 53
- Posición más adelantada del centro de masas por mando longitudinal, 219
- Posición relativa del ala respecto del fuselaje, 289
- Potencia

- de control direccional, 294
- de control lateral, 290
- de control longitudinal, 211
- Potencia base, 122
- Punto de maniobra
 - con mandos fijos, 260
 - con mandos libres, 264
- Punto neutro
 - con mandos fijos, 211, 213
 - con mandos fijos, ensayos en vuelo, 217
 - con mandos libres, 236
- R**
- Radio de giro longitudinal, 427
- Radio del viraje, 109
- Recorrido en el aire en el despegue, 161
- Relaciones básicas, actuaciones, 33
- Relaciones cinemáticas lineales, 37
- Relaciones dinámicas de fuerza y relación másica, 34
- Resistencia aerodinámica, 35, 52, 177
 - inducida, 55
 - parásita, 55
- Respuesta
 - a los controles lateral y direccional, 403
 - al control longitudinal, 373
 - al control longitudinal, tiempos pequeños, 379
 - al mando direccional, 409
 - al mando lateral, tiempos pequeños, 407
 - en frecuencias, 378
- Retardo de estela, 343
- Rodadura
 - con el tren principal en el suelo, 156
 - con todas las ruedas en el suelo, 153
 - distancia recorrida, 161
 - en el suelo en el despegue, 152
 - tiempo invertido, 161
- Rotación del avión, 155
- Routh-Hurwitz, criterio de estabilidad de, 362
- S**
- Sólido rígido, grados de libertad, 17
- Sistema
 - de estabilización en cabeceo, 435
 - de mando con potencia auxiliar, 232
 - de mando irreversible, 232
 - de mando reversible, 231, 242
- Sistemas
 - de aumento de estabilidad (SAS), 435
 - de control de vuelo, 417, 434
 - de mando longitudinal, de mando lateral y de mando direccional, 231
- Sistemas de referencia, 1
 - básicos, 1
 - cuerpo, 3
 - de estabilidad, 4
 - geocéntrico giratorio, 2
 - horizonte local, 3
 - inercial, 2
 - tierra, 2
 - viento, 4
- Sustentación, 35, 52
- T**
- Tab o compensador, 233
- Techo
 - de crucero, 83
 - de servicio, 83
 - dinámico, 190
 - operacional, 83
 - teórico, 82
- Teoría del retardo de estela, 343
- Tiempo invertido
 - en el despegue, 164
 - en el recorrido en el aire, 163
 - en la rodadura, 161
- Timón de dirección, 22, 231
- Timón de profundidad, 22, 230
 - deflexión en maniobra, 261

deflexión necesaria para el equilibrio, 215
efecto de liberarlo en el momento de cabeceo, 235
efecto de liberarlo en la suspensión, 235
momento de charnela, 233

V

Velocidad

ascensional, 37
base, 56
de descenso mínima, 62
de despegue, 157
de pérdida, 80
de rotación del avión, 155
horizontal máxima de las máximas, 80
mínima de despegue, 158

Velocidad angular

de cabeceo, 258
de viraje, 108

Viraje, 258

Vuelo estacionario rectilíneo simétrico

con las alas a nivel, 313

Vuelo simétrico, 38, 258

ecuaciones adimensionales, 58
en un plano horizontal, 43
en un plano vertical, 40