

Analyse et comparaison de techniques d'estimation d'état sous contraintes inégalité non linéaires

Vincent SIRCOULOMB^{1 2}, Ghaleb HOBLOS¹, Houcine CHAFOUK¹, José RAGOT²

¹ Institut de Recherche en Systèmes Électroniques EMbarqués (IRSEEM)
Technopôle du Madrillet, avenue Galilée, BP 10024, 76801 Saint-Étienne-du-Rouvray Cedex, France

² Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN)
Institut National Polytechnique de Lorraine, 2 avenue de la forêt de Haye, 54516
Vandœuvre-lès-Nancy, France

(sircoulomb,hoblos,chafouk)@esigelec.fr, jose.ragot@ensem.inpl-nancy.fr

Résumé— Cet article traite de l'estimation d'état sous des contraintes de type inégalité non linéaires sur les variables d'état. Pour traiter un tel problème, une méthode générale consiste en l'utilisation de l'approche par projection, adjointe à une démarche de linéarisation itérée des équations de contraintes. Le résultat obtenu est alors théoriquement optimal au sens du minimum de variance, mais la mise en œuvre d'un tel estimateur peut parfois s'avérer compliquée. Le but de cet article est de comparer cette approche avec une technique de projection sous optimale, réservée à une certaine classe de contraintes non linéaires, mais d'implémentation aisée. La comparaison s'effectue sur une application de poursuite de cible dans l'espace, les contraintes non linéaires portant sur l'accélération de la cible.

Mots-clés— Estimation d'état sous contraintes, filtrage de Kalman, optimisation sous contraintes.

I. INTRODUCTION

Dans la théorie de l'estimation d'état, le filtre de Kalman est connu comme étant l'outil optimal pour les systèmes linéaires perturbés par des bruits d'état et de mesure additifs et blancs [1]. Son efficacité ainsi que sa facilité de mise en œuvre ont fait de cet estimateur un outil incontournable dans des domaines tels que la navigation inertielle [2], la poursuite de cibles [3], le traitement du signal [4] ou des images [5], la commande optimale [6] ou le diagnostic [7].

Cependant, lors de l'implémentation d'un filtre de Kalman sur calculateur numérique, certaines informations concernant le processus en question sont souvent ignorées car elles s'intègrent mal dans la structure de cet estimateur [8]. Par exemple, s'il est souhaité estimer l'altitude d'un avion, nous savons que cette grandeur doit être positive; s'il s'agit d'un quaternion, la norme euclidienne de ce dernier doit être égale à un [9]. Ces types d'informations peuvent être interprétés comme des contraintes sur les variables d'état.

Lorsque les variables d'état sont soumises à des contraintes de type égalité linéaires, il existe différentes manières de traiter le problème. Par exemple, il est possible de réduire l'ordre du modèle [10], mais cette approche a pour conséquence d'éliminer tout sens physique aux variables d'état [8]. Dans un autre état d'esprit, les contraintes peuvent être considérées comme des mesures parfaites [11]. Malheureusement, cela conduit à une ma-

trice de covariance de bruit de mesure singulière, ce qui risque d'engendrer des problèmes numériques lors du calcul du gain de Kalman [8]. Une troisième approche consiste à utiliser la technique des multiplicateurs de Lagrange afin de prendre en compte les contraintes lors du calcul des équations du filtre de Kalman. Les résultats obtenus sont alors différents, selon le critère d'optimalité choisi (minimum de variance ou maximum *a posteriori* [4]). Toutefois, ils s'avèrent être des cas particuliers de l'approche par projection [8], [12]. Cette théorie unificatrice présente des avantages indéniables. En effet, elle peut être traduite sous forme géométrique, ce qui la rend facile à comprendre; elle peut être utilisée avec n'importe quel type d'estimateur d'état (linéaire ou non); elle est facilement extensible au cas de contraintes inégalité linéaires [13] grâce à la méthode d'activation de limite de contrainte [14].

Le cas de contraintes inégalité non linéaires peut être traité d'une manière générale en utilisant l'approche par projection précitée et en linéarisant les équations de contraintes par une approche itérée, de manière analogue à celle du filtre de Kalman étendu itéré [12].

L'objet de cette communication est de proposer et de comparer avec l'approche précédente une autre méthode d'estimation d'état sous contraintes, réservée à une classe particulière de contraintes inégalité non linéaires sur les variables d'état. Cette méthode est sous-optimale au sens du minimum de variance, mais a pour avantage d'être de mise en œuvre plus aisée et de surcroît moins coûteuse en temps de calcul.

Dans cet article, la section 2 présente tout d'abord l'approche par projection pour estimer de manière optimale mais sous contraintes l'état d'un système. Les cas de contraintes linéaires puis non linéaires sous forme égalité et inégalité sont explorés. Cette section expose également les différents schémas de couplage entre un estimateur d'état et un dispositif d'application de contraintes. La partie suivante propose une autre approche, sous optimale mais simple, dédiée aux contraintes dont les équations matérialisent un hypercylindre. Enfin, la section 4 compare suivant différents aspects les approches optimales et sous-optimales sur une application de poursuite de cible dans

l'espace.

II. ESTIMATION D'ÉTAT SOUS CONTRAINTES : L'APPROCHE PAR PROJECTION

Soit le système non linéaire à temps discret suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k) \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) \end{cases} \quad (1)$$

où $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^{n_x}$ est le vecteur d'état, $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^{n_u}$ le vecteur d'entrée, $\mathbf{y} \in \mathcal{R}^{n_y}$ le vecteur de mesure, $\mathbf{w} \in \mathcal{R}^{n_w}$ le bruit d'état, $\mathbf{v} \in \mathcal{R}^{n_v}$ le bruit de mesure et $k \in \mathcal{N}$ le temps (discret). \mathbf{f}_k et \mathbf{h}_k sont des fonctions non linéaires connues, dont les paramètres peuvent varier avec le temps. \mathbf{x}_0 , \mathbf{w}_k et \mathbf{v}_k sont supposés gaussiens, de covariances respectives \mathbf{P}_0 , \mathbf{Q}_k et \mathbf{R}_k . Par ailleurs, \mathbf{w}_k et \mathbf{v}_k sont supposés blancs¹, décorrélés et indépendants de l'état initial \mathbf{x}_0 . Le système décrit par (1) est considéré observable.

Dans cette section, nous allons tout d'abord voir comment, à partir de l'approche par projection, estimer l'état \mathbf{x}_k tout en faisant en sorte qu'à chaque instant k , \mathbf{x}_k vérifie des contraintes égalité linéaires. Ensuite, seront abordés les cas de contraintes sous forme d'inégalité linéaires, puis non linéaires. Enfin, les différents schémas de couplage estimateur d'état/applicateur de contraintes seront présentés.

A. Contraintes égalité linéaires

Supposons qu'à chaque instant k , \mathbf{x}_k soit soumis à la contrainte suivante :

$$\mathbf{D}_k \mathbf{x}_k = \mathbf{d}_k \quad (2)$$

où $\mathbf{d}_k \in \mathcal{R}^{n_d}$ est un vecteur connu et \mathbf{D}_k une matrice connue de dimension appropriée. \mathbf{d}_k et \mathbf{D}_k sont des grandeurs pouvant potentiellement varier dans le temps. Par ailleurs, \mathbf{D}_k est supposée de rang plein (si ce n'est pas le cas, cela signifie qu'il existe des contraintes redondantes, qui peuvent être éliminées), avec $n_d < n_x$. Nous ne considérons pas le cas trivial où $n_d = n_x$ car (2) résoudrait à elle seule le problème d'estimation, puisque l'on aurait $\mathbf{x}_k = \mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{d}_k$.

Nous cherchons à estimer l'état décrit par (1) et que cette estimée satisfasse (2). Soit $\hat{\mathbf{x}}_k^{nc}$ l'état à l'instant k estimé par un filtre non contraint (c'est-à-dire ne prenant pas en compte (2)) et \mathbf{P}_k^{nc} la matrice de variance-covariance de l'erreur d'estimation associée; un tel estimateur peut être par exemple un simple filtre de Kalman si \mathbf{f} et \mathbf{h} sont linéaires, ou un filtre de Kalman Unscented [16] ou encore un filtre particulière [17] si \mathbf{f} et/ou \mathbf{h} sont non linéaires. Appelons respectivement $\hat{\mathbf{x}}_k^c$ et \mathbf{P}_k^c l'état et la matrice de variance-covariance d'erreur d'estimation du filtre contraint (c'est-à-dire prenant en compte (2)). Le principe de l'approche par projection est illustré sur la figure 1. Il consiste à résoudre le problème d'optimisation sous contrainte suivant [8], [12] :

$$\begin{aligned} \min_{\hat{\mathbf{x}}_k^c \in \mathcal{R}^{n_x}} & \left((\hat{\mathbf{x}}_k^c - \hat{\mathbf{x}}_k^{nc})^T \mathbf{W}_k^{-1} (\hat{\mathbf{x}}_k^c - \hat{\mathbf{x}}_k^{nc}) \right) \\ \text{tel que : } & \mathbf{D}_k \hat{\mathbf{x}}_k^c = \mathbf{d}_k \end{aligned} \quad (3)$$

¹A noter que l'hypothèse de blancheur de \mathbf{w}_k et \mathbf{v}_k peut être relaxée, sous réserve que ces derniers soient modélisables sous forme de processus auto-régressifs excités par des bruits blancs. Il suffit alors de considérer le modèle à ordre augmenté perturbé par ces bruits blancs [15].

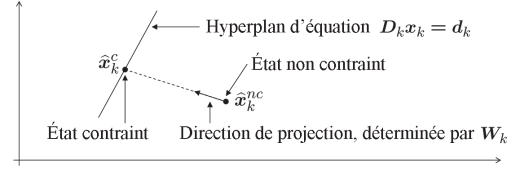


Fig. 1. Principe de l'approche par projection pour une contrainte égalité linéaire

où \mathbf{W}_k est une matrice de pondération symétrique et définie positive et T représente l'opération de transposition. La solution de (3) est résumée par les équations suivantes [8], [12] :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k^c &= \hat{\mathbf{x}}_k^{nc} + \mathbf{L}_k (\mathbf{d}_k - \mathbf{D}_k \hat{\mathbf{x}}_k^{nc}) \\ \mathbf{P}_k^c &= (\mathbf{I}_{n_x} - \mathbf{L}_k \mathbf{D}_k) \mathbf{P}_k^{nc} (\mathbf{I}_{n_x} - \mathbf{L}_k \mathbf{D}_k)^T \\ \mathbf{L}_k &= \mathbf{W}_k^{-1} \mathbf{D}_k^T (\mathbf{D}_k \mathbf{W}_k^{-1} \mathbf{D}_k^T)^{-1} \end{aligned} \quad (4)$$

La ressemblance entre (4) et les équations de correction d'un filtre de Kalman mérite d'être soulignée. Ceci s'explique par le fait que (4) peut être interprétée comme une mise à jour réalisée à partir d'une mesure parfaite (c'est-à-dire non bruitée), décrite par (2).

- L'estimée contrainte présente les propriétés suivantes :
- elle est non biaisée : $\forall k \in \mathcal{N} : \mathcal{E}(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^c) = \mathbf{0}_{n_x \times 1}$,
 - si $\mathbf{W}_k = \mathbf{P}_k^{nc}$, alors le filtre contraint est à variance minimale : $\mathcal{E}((\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^c)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^c)^T) \leq \mathcal{E}((\mathbf{x}_k - \mathbf{z})(\mathbf{x}_k - \mathbf{z})^T) \forall \mathbf{z} \in \mathcal{R}^{n_x}$
 - si $\mathbf{W}_k = \mathbf{I}_{n_x}$, alors l'estimée contrainte est plus proche de l'état réel que l'estimée non contrainte : $\|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^c\| \leq \|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^{nc}\|$.

où \mathbf{I}_\bullet et $\mathbf{0}_\bullet$ sont les matrices identité et nulle de dimensions appropriées, \mathcal{E} est l'espérance mathématique et pour des matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} quelconques mais de mêmes dimensions, $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$ signifie que $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ est définie négative. Ainsi, si $\mathbf{W}_k = \mathbf{I}_{n_x}$, le filtre contraint est sous-optimal au sens du minimum de variance. Cependant, il est aisé de voir qu'à partir de (3), cette configuration constitue une projection orthogonale sur l'hyperplan de contrainte (d'une manière générale, \mathbf{W}_k détermine la direction de projection). On en déduit que contraindre un état en le projetant orthogonalement à l'hyperplan de contrainte conduit à une estimée contrainte non optimale au sens du minimum de variance.

B. Contraintes inégalité linéaires

Supposons qu'à chaque instant k , \mathbf{x}_k soit soumis à la contrainte inégalité suivante :

$$\mathbf{D}_k \mathbf{x}_k \leq \mathbf{d}_k \quad (5)$$

où $\mathbf{d}_k \in \mathcal{R}^{n_d}$ ($n_d < n_x$) est un vecteur à temps variant connu et \mathbf{D}_k une matrice à temps variant connue, de rang plein et de dimension appropriée. Nous cherchons à estimer l'état décrit par (1) et que cette estimée satisfasse (5). Une manière de résoudre ce problème est d'utiliser une technique que nous appelons d'*activation de limite de contrainte*² [14]. Cela consiste à tester à chaque instant k

²La dénomination anglo-saxonne de cette technique est "active set method", soit "méthode d'ensemble (d'équations) actif", selon une traduction littérale.

les n_d inégalités scalaires de (5). Pour la $i^{\text{ème}}$ inégalité, deux *scenarii* sont alors envisageables :

- l'inégalité est vérifiée et n'a donc pas à être prise en compte.
- l'inégalité n'est pas vérifiée (c'est-à-dire $\mathbf{D}_{i,k}\mathbf{x}_k > \mathbf{d}_{i,k}$). On applique alors une contrainte égalité à la borne : $\mathbf{D}_{i,k}\mathbf{x}_k = \mathbf{d}_{i,k}$, où, pour une matrice \mathbf{A} quelconque à l'instant k , $\mathbf{A}_{i,k}$ représente la $i^{\text{ème}}$ ligne de \mathbf{A}_k .

En conséquent, traiter des inégalités linéaires revient à appliquer un nombre $n(k)$ (pouvant varier à chaque instant k) de contraintes égalité linéaires, avec $\forall k \in \mathcal{N} : 0 \leq n(k) \leq n_d$. La solution à un tel problème a été traitée dans la partie précédente. De ce fait, nous ne considérerons par la suite que des contraintes égalité.

C. Contraintes non linéaires

Supposons qu'à chaque instant k , \mathbf{x}_k soit soumis à la contrainte non linéaire suivante :

$$\mathbf{g}_k(\mathbf{x}_k) = \mathbf{d}_k \quad (6)$$

où $\mathbf{d}_k \in \mathcal{R}^{n_d}$ ($n_d < n_x$) est un vecteur à temps variant connu et \mathbf{g}_k une fonction non linéaire connue et continue. Nous cherchons à estimer l'état décrit par (1) et que cette estimée satisfasse (6). Comme \mathbf{g}_k est une fonction non linéaire, il n'est pas possible d'appliquer directement l'approche par projection, car la technique des multiplicateurs de Lagrange requiert la linéarité des contraintes. Une solution possible serait de linéariser \mathbf{g}_k autour de l'état estimé contraint $\hat{\mathbf{x}}_k^c$, via un développement de Taylor à l'ordre 1 [8]. Malheureusement, pour effectuer cette linéarisation, il est nécessaire de connaître $\hat{\mathbf{x}}_k^c$, lequel n'est accessible qu'une fois le jacobien de \mathbf{g}_k calculé. Nous sommes ici dans une situation délicate et nous proposons d'utiliser une approche itérée pour s'en sortir. L'idée est la même que celle d'un filtre de Kalman étendu itéré [12], où la linéarisation de l'équation de mesures s'effectue plusieurs fois, autour d'un état qui chaque fois est théoriquement plus proche de l'état estimé *a posteriori*. Cette démarche est inspirée par le parallèle entre les équations de mise à jour d'un filtre de Kalman et celles d'application de contraintes (section II.A). L'algorithme résultant est le suivant :

1. Initialiser l'opérateur appliquant les contraintes avec $\hat{\mathbf{x}}_k^{(0)} = \hat{\mathbf{x}}_k^{nc}$, $\mathbf{P}_k^{(0)} = \mathbf{P}_k^{nc}$, où $\hat{\mathbf{x}}_k^{nc}$ et \mathbf{P}_k^{nc} sont les valeurs issues du filtre non contraint.
2. Pour $i = 1, \dots, N$, calculer :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_k^{(i)} &= \left. \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial \mathbf{X}_k} \right|_{\mathbf{X}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^{(i-1)}} \\ \mathbf{d}_k^{(i)} &= \mathbf{d}_k - \mathbf{g}_k(\hat{\mathbf{x}}_k^{(i-1)}) + \mathbf{D}_k^{(i)} \hat{\mathbf{x}}_k^{(i-1)} \\ \mathbf{L}_k^{(i)} &= \mathbf{W}_k^{-1} \mathbf{D}_k^{(i)T} \left(\mathbf{D}_k^{(i)} \mathbf{W}_k^{-1} \mathbf{D}_k^{(i)T} \right)^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_k^{(i)} &= \hat{\mathbf{x}}_k^{nc} + \mathbf{L}_k^{(i)} \left(\mathbf{d}_k^{(i)} - \mathbf{D}_k^{(i)} \hat{\mathbf{x}}_k^{nc} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

3. Calculer l'état estimé contraint et sa matrice de variance-covariance d'erreur d'estimation associée :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k^c &= \hat{\mathbf{x}}_k^{(N)} \\ \mathbf{P}_k^c &= \left(\mathbf{I}_{n_x} - \mathbf{L}_k^{(N)} \mathbf{D}_k^{(N)} \right) \mathbf{P}_k^{nc} \\ &\quad \times \left(\mathbf{I}_{n_x} - \mathbf{L}_k^{(N)} \mathbf{D}_k^{(N)} \right)^T \end{aligned} \quad (8)$$

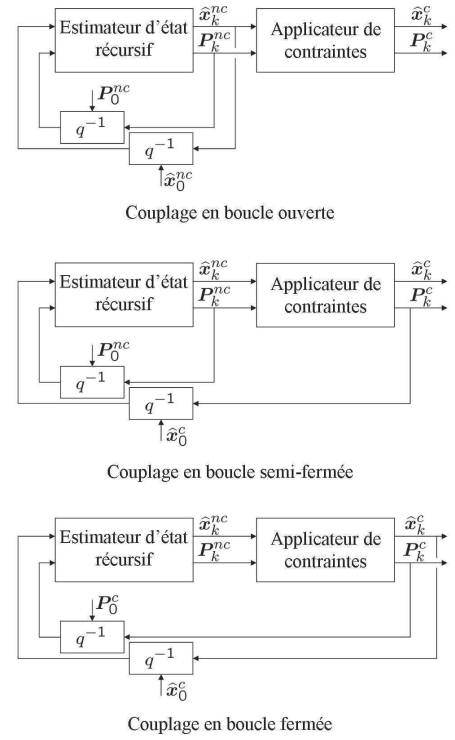


Fig. 2. Estimateurs d'état contraints en boucle ouverte, semi-fermée et fermée

D. Couplage d'un applicateur de contraintes avec un estimateur d'état

Jusqu'ici, nous avons vu comment corriger les estimées d'un filtre via l'approche par projection, afin qu'elles intègrent les connaissances issues d'équations de contraintes sur les états. Celles-ci peuvent être linéaires ou non, sous forme d'égalité ou d'inégalité. Par la suite, nous appellerons *apporteur de contraintes* un opérateur utilisant l'approche par projection afin de contraindre un état. Trois schémas de couplage entre un estimateur d'état et un applicateur de contraintes, illustrés par la figure 2, sont envisageables :

- couplage en boucle ouverte,
- couplage en boucle semi-fermée,
- couplage en boucle fermée.

Lorsque l'approche par projection fut proposée par Simon et Chia [8], le filtre de Kalman et l'apporteur de contraintes étaient couplés en boucle ouverte. A première vue, ce type de schéma paraît perfectible : en effet, il semble dommage de ne pas informer l'estimateur d'état récursif de l'amélioration apportée par l'apporteur de contraintes. Pour compenser cette relative inefficacité, la structure de couplage en boucle fermée vient tout naturellement à l'esprit. Toutefois, si ce schéma est viable dans le cas de contraintes égalité, il n'en est rien dans le cas de contraintes inégalité. En effet, dans ce cas de figure, la zone de contraintes n'est plus un hyperplan mais un hypervolume (de taille potentiellement infinie). La méthode d'activation de limite de contrainte, associée au critère (3), fait que $\hat{\mathbf{x}}_k^c$ réside en une projection de $\hat{\mathbf{x}}_k^{nc}$ sur la surface de l'hypervolume de contrainte, selon une direction déterminée par \mathbf{W}_k (figure 3). Mathématiquement, $\hat{\mathbf{x}}_k^c$ est obtenu par la mise à jour issue de la mesure fictive et non bruitée $\mathbf{g}_k(\mathbf{x}_k) = \mathbf{d}_k$ (voir section II.A). Or l'état réel \mathbf{x}_k

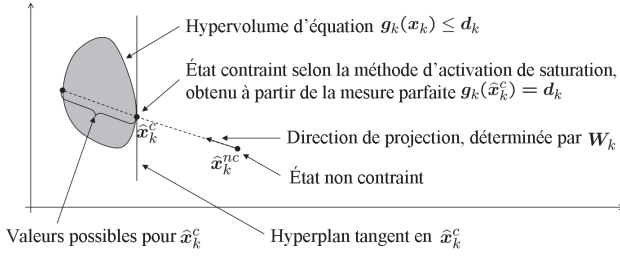


Fig. 3. L'approche par projection dans le cas de contraintes inégalité

est dans l'hypervolume de contraintes et non nécessairement à sa surface. Dès lors, la mesure fictive permettant de contraindre l'état ne peut plus être considérée comme parfaite. De ce fait, corriger la matrice de variance-covariance d'erreur d'estimation à partir de (8) est une opération illégitime, diminuant dangereusement sa valeur et menaçant par la même la robustesse du filtre. Le concept de boucle semi-fermée est issu de cette considération.

III. MÉTHODE SOUS-OPTIMALE D'APPLICATION DE CONTRAINTES

Dans la section précédente, une méthode générale d'application de contraintes inégalité non linéaires sur des variables d'état a été présentée. L'objet de cette partie est d'introduire une autre méthode adaptée à une certaine classe de contraintes inégalité non linéaires. Cette technique est sous-optimale (au sens du minimum de variance) mais de mise en œuvre nettement plus simple. Admettons que le vecteur d'état \mathbf{x}_k se décompose de la manière suivante :

$$\mathbf{x}_k = [\mathbf{x}_{1,k}^T \quad \mathbf{x}_{2,k}^T \quad \mathbf{x}_{3,k}^T]^T \quad (9)$$

avec $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{R}^{n_1}$, $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{R}^{n_2}$, $\mathbf{x}_3 \in \mathcal{R}^{n_3}$, $n_1 + n_2 + n_3 = n_x$ et qu'il soit soumis aux contraintes suivantes $\forall k \in \mathcal{N}$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_{2,k}\| &\leq A_k \\ \mathbf{B}_k &\leq \mathbf{x}_{3,k} \leq \mathbf{C}_k \end{aligned} \quad (10)$$

ce qui peut se formaliser par : $\mathbf{g}_k(\mathbf{x}_k) \leq \mathbf{d}_k$, avec :

$$\mathbf{g}_k(\mathbf{x}_k) = \begin{bmatrix} \|\mathbf{x}_{2,k}\| \\ \mathbf{x}_{3,k} \\ -\mathbf{x}_{3,k} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{d}_k = \begin{bmatrix} A_k \\ \mathbf{C}_k \\ -\mathbf{B}_k \end{bmatrix} \quad (11)$$

Il vient alors : $n_d = 2n_3 + 1$. Les valeurs des bornes matérialisées par A_k , \mathbf{B}_k et \mathbf{C}_k peuvent varier dans le temps. Par ailleurs, il est à noter que toutes les variables d'état ne sont pas sujettes aux contraintes : celles qui ne sont pas concernées sont regroupées dans le sous-vecteur \mathbf{x}_1 . Quant aux variables concernées (lesquelles sont incluses dans \mathbf{x}_2 et \mathbf{x}_3), chacune d'entre elles n'est impliquée que dans une seule contrainte, comme l'atteste (10)³. Ce découplage entre les différentes contraintes autorise un traitement séquentiel de ces dernières. Cette considération est à l'origine de l'algorithme que nous proposons.

³Rigoureusement parlant, (11) montre clairement que \mathbf{x}_3 apparaît dans deux contraintes différentes. Cependant, il est évident que chaque variable de \mathbf{x}_3 ne peut à la fois dépasser ses bornes supérieure et inférieure. Ainsi, et en vertu de la technique d'activation de limite de contrainte, il est possible de considérer que chaque variable de $\mathbf{x}_{3,k}$ n'est impliquée que dans une seule contrainte et ce quel que soit l'instant k .

Soit $\hat{\mathbf{x}}_k^{nc}$ l'état estimé par un filtre non contraint et \mathbf{P}_k^{nc} sa matrice de variance-covariance d'erreur d'estimation associée. $\hat{\mathbf{x}}_k^{nc}$ est décomposé en 3 sous vecteurs $\hat{\mathbf{x}}_{1,k}^{nc} \in \mathcal{R}^{n_1}$, $\hat{\mathbf{x}}_{2,k}^{nc} \in \mathcal{R}^{n_2}$ et $\hat{\mathbf{x}}_{3,k}^{nc} \in \mathcal{R}^{n_3}$, de manière analogue à la décomposition de \mathbf{x}_k en $\mathbf{x}_{1,k}$, $\mathbf{x}_{2,k}$ et $\mathbf{x}_{3,k}$. Par ailleurs, posons :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{3,k}^{nc} &= [\xi_{1,k}^{nc} \quad \dots \quad \xi_{n_3,k}^{nc}]^T \\ \mathbf{B}_k &= [B_{1,k} \quad \dots \quad B_{n_3,k}]^T \\ \mathbf{C}_k &= [C_{1,k} \quad \dots \quad C_{n_3,k}]^T \end{aligned} \quad (12)$$

L'algorithme proposé est le suivant :

1. Pour $i = 1, \dots, n_3$, effectuer les tests suivants :
 - si $\xi_{i,k}^{nc} > B_{i,k}$, alors $\xi_{i,k}^c = B_{i,k}$;
 - sinon, si $\xi_{i,k}^{nc} < C_{i,k}$, alors $\xi_{i,k}^c = C_{i,k}$;
 - sinon $\xi_{i,k}^c = \xi_{i,k}^{nc}$.
2. Former $\hat{\mathbf{x}}_{3,k}^c : \hat{\mathbf{x}}_{3,k}^c = [\xi_{1,k}^c \quad \dots \quad \xi_{n_3,k}^c]^T$.
3. Calculer $\hat{\mathbf{x}}_{2,k}^c$: si $\|\hat{\mathbf{x}}_{2,k}^{nc}\| > A_k$, alors $\hat{\mathbf{x}}_{2,k}^c = \frac{A_k}{\|\hat{\mathbf{x}}_{2,k}^{nc}\|} \hat{\mathbf{x}}_{2,k}^{nc}$; sinon $\hat{\mathbf{x}}_{2,k}^c = \hat{\mathbf{x}}_{2,k}^{nc}$.
4. Calculer le vecteur d'état contraint :

$$\hat{\mathbf{x}}_k^c = [(\hat{\mathbf{x}}_{1,k}^{nc})^T \quad (\hat{\mathbf{x}}_{2,k}^c)^T \quad (\hat{\mathbf{x}}_{3,k}^c)^T]^T \quad (13)$$

5. Calculer la matrice de variance-covariance associée à l'erreur d'estimation de l'état par $\hat{\mathbf{x}}_k^c$:

$$\mathbf{P}_k^c = \mathbf{P}_k^{nc} - \hat{\mathbf{x}}_k^c (\hat{\mathbf{x}}_k^c)^T + \hat{\mathbf{x}}_k^{nc} (\hat{\mathbf{x}}_k^{nc})^T \quad (14)$$

Preuve de (14) :

Par définition :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k^c &= \mathcal{E} \left((\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^c) (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^c)^T \right) \\ &= \mathcal{E} (\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T) - \hat{\mathbf{x}}_k^c (\hat{\mathbf{x}}_k^c)^T \end{aligned} \quad (15)$$

Or, il en est de même pour \mathbf{P}_k^{nc} :

$$\mathbf{P}_k^{nc} = \mathcal{E} (\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T) - \hat{\mathbf{x}}_k^{nc} (\hat{\mathbf{x}}_k^{nc})^T \quad (16)$$

En soustrayant l'expression de \mathbf{P}_k^c à celle de \mathbf{P}_k^{nc} , il vient :

$$\mathbf{P}_k^{nc} - \mathbf{P}_k^c = -\hat{\mathbf{x}}_k^c (\hat{\mathbf{x}}_k^c)^T + \hat{\mathbf{x}}_k^{nc} (\hat{\mathbf{x}}_k^{nc})^T \quad (17)$$

ce qui conduit directement à (14).

Afin d'illustrer cet algorithme, nous allons nous placer dans le cas où $n_2 = 2$ et $n_3 = 1$. Le volume de contrainte est alors de dimension 3 et représente un cylindre, comme l'atteste la figure 4. On peut alors voir que l'algorithme proposé se résume à une simple projection orthogonale et est donc sous optimal au sens du minimum de variance (section II. A). De ce fait, cet algorithme peut donc être interprété comme un cas particulier de l'approche générale par projection, mais toutefois de mise en œuvre nettement plus simple.

L'un des grands avantages de l'algorithme de projection proposé sur l'approche optimale par linéarisation itérée des contraintes est qu'il n'exige pas d'inversion de matrice, ce qui est particulièrement avantageux dans le cas où n_2 et/ou n_3 sont grands. Enfin, nous remarquerons que l'indépendance des contraintes sur les variables d'état autorise l'inversion des étapes 1-2 et 3 de l'algorithme proposé.

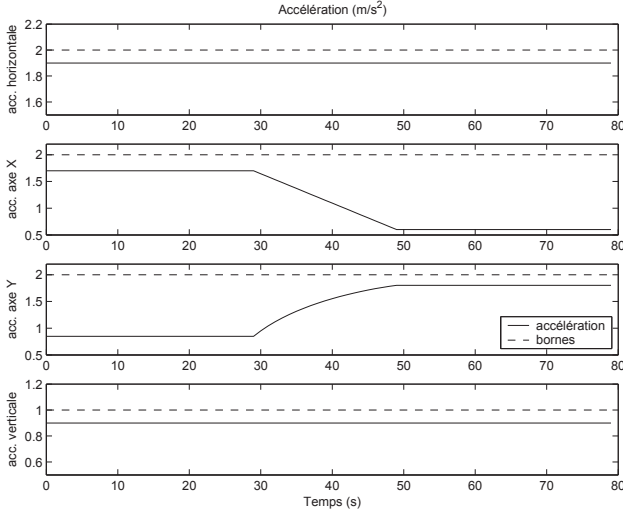


Fig. 5. Accélération subie par la particule

En notant $x_{k,i}$ la $i^{\text{ème}}$ composante de \mathbf{x}_k , cette connaissance se traduit par les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} x_{7,k}^2 + x_{8,k}^2 &\leq B_h^2 \\ B_d &\leq x_{9,k} \leq B_u \end{aligned} \quad (25)$$

L'équation (25) nécessite l'emploi d'une linéarisation itérée pour contraindre l'état via l'approche par projection optimale. Toutefois, du fait que le volume de contrainte délimité par (25) représente un cylindre, l'utilisation de la technique proposée dans la section III. est envisageable.

B. Expérience considérée

À l'instant initial, la particule présente les caractéristiques suivantes :

- position par rapport à O de 15 m selon l'axe X, 20 m selon l'axe Y et 0 m selon l'axe Z (X, Y et Z sont les trois axes de $[T]$, dans cet ordre),
- vitesse nulle.

Les limites d'accélération de la particule sont $B_h = 2$ m/s², $B_u = 1$ m/s² et $B_d = -5$ m/s². Le profil de l'accélération subie par la particule durant cette expérience est exposé sur la figure 5. Au vu de ces tracés, on constate que les accélérations horizontale et verticale sont très proches de leur valeur limite. On peut donc légitimement s'attendre à ce que les accélérations estimées par un filtre non contraint outrepassent ces bornes et par conséquent obtenir une réelle amélioration de la part de filtres contraints.

C. Comparaison entre les filtres contraints

Les équations (22) et (24) ainsi que les caractéristiques de \mathbf{v} et \mathbf{w} autorisent l'utilisation d'un filtre de Kalman. Ce dernier est paramétré comme suit : $\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0}_{9 \times 1}$, $\mathbf{P}_0 = \text{diag}(30^2, 30^2, 30^2, 30^2, 30^2, 30^2, 2^2, 2^2, 2^2)$, $\mathbf{Q}_k = 0.2^2 \mathbf{I}_3$ et $\mathbf{R}_k = 10^2 \mathbf{I}_3$, où \mathbf{Q}_k et \mathbf{R}_k sont les covariances des bruits d'état et de mesure et " $\lambda = \text{diag}(\dots)$ " signifie que λ est une matrice diagonale remplie dans l'ordre. La période d'échantillonnage du filtre est $T = 1$ s. Cinq configurations différentes sont envisagées pour le filtre de Kalman :

- filtre non contraint,
- filtre contraint en boucle ouverte avec approche par linéarisation itérée (cf. section II.),

TABLE I
AMÉLIORATION APPORTÉE PAR LES DIFFÉRENTS FILTRES
CONTRAINTS EN FONCTION DE LA LONGUEUR DE SIMULATION L .

L	80	120	150	200	250
FO BO	2.2%	2.4%	2.6%	2.5%	2.5%
FO BSF	2.9%	3.3%	3.3%	3.3%	3.2%
FSO BO	0.01%	0.02%	0.01%	0.01%	0.02%
FSO BSF	0.09%	0.14%	0.11%	0.13%	0.09%

- filtre contraint en boucle semi-fermée avec approche par linéarisation itérée,
- filtre contraint en boucle ouverte avec approche par projection orthogonale (cf. section III.),
- filtre contraint en boucle semi-fermée avec approche par projection orthogonale.

Comme on a affaire à des contraintes de type inégalité, les schémas de couplage en boucle fermée ne sont pas envisagés. Par ailleurs, en ce qui concerne le nombre d'itérations pour linéariser les contraintes (approche de la section II.), il est choisi égal à $N = 1$, ce qui constitue le meilleur ratio performance/temps de calcul. Pour ce type de filtre contraint, la matrice de pondération \mathbf{W}_k dans (7) est choisie égale à l'inverse de la matrice de variance-covariance \mathbf{P}_k^{nc} associée à l'erreur d'estimation du filtre non contraint, ce qui constitue le choix optimal au sens du minimum de variance (section II.A).

Pour évaluer l'amélioration de la qualité d'estimation d'un filtre contraint donné par rapport à un non contraint, on calcul le critère suivant :

$$\text{amélioration} = 100 \left(1 - \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^L \|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^c\|^2}{\sum_{k=1}^L \|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^{nc}\|^2}} \right) \quad (26)$$

où L est la longueur de simulation et \mathbf{x}_k , $\hat{\mathbf{x}}_k^{nc}$ et $\hat{\mathbf{x}}_k^c$ sont respectivement les états vrai, estimé par le filtre non contraint et estimé par le filtre contraint considéré. Le critère (26) ne traduit rien d'autre que la diminution en pourcents de l'erreur RMS⁵ d'estimation obtenue grâce à la prise en compte des contraintes.

Les résultats obtenus, issus d'une moyenne de 200 simulations de Monte Carlo, sont présentés dans la table I. Pour des longueurs de simulation L supérieures à 80 secondes, l'accélération subie par la particule reste constante et identique à celle subie à partir de la 50^{ème} seconde (cf. figure 5). Dans cette table, certains acronymes ont été utilisés :

- FO : Filtre (contraint) Optimal (au sens du minimum de variance) : il s'agit du filtre utilisant une linéarisation itérée des contraintes.
- FSO : Filtre (contraint) Sous-Optimal : il s'agit du filtre réalisant une projection orthogonale sur la surface de contraintes.
- BO : (filtre contraint en) Boucle Ouverte.
- BSF : (filtre contraint en) Boucle Semi-Fermée.

La table I montre clairement que les résultats obtenus sont sensiblement meilleurs lorsque l'on utilise un filtre contraint en boucle semi-fermée plutôt qu'en boucle

⁵RMS signifie "Root Mean Square", soit racine de la moyenne des carrés.

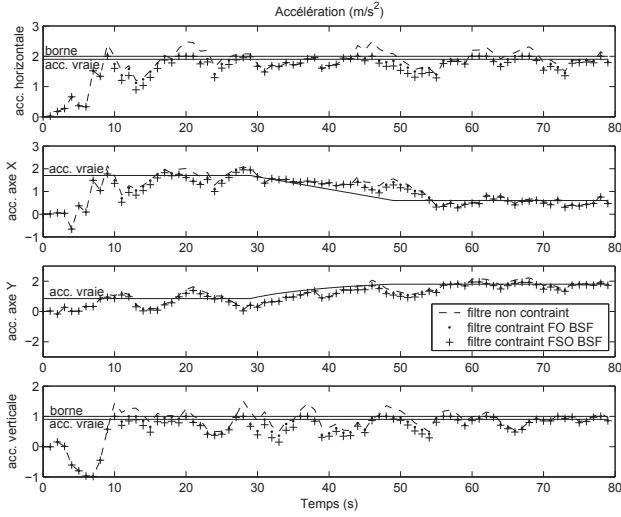


Fig. 6. Accélérations vraie et estimées

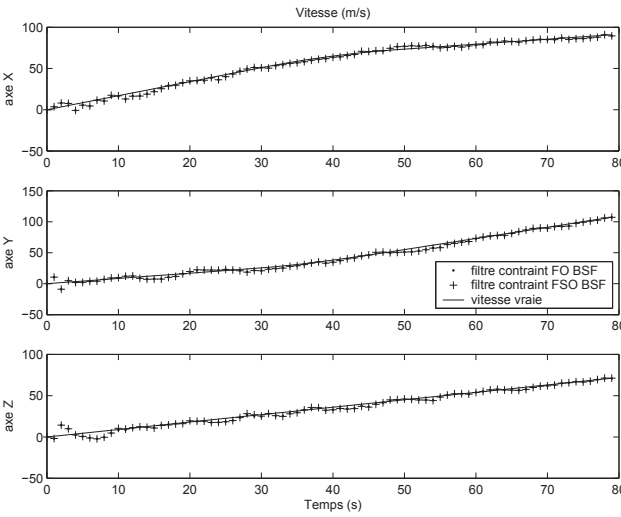


Fig. 7. Vitesses vraie et estimées

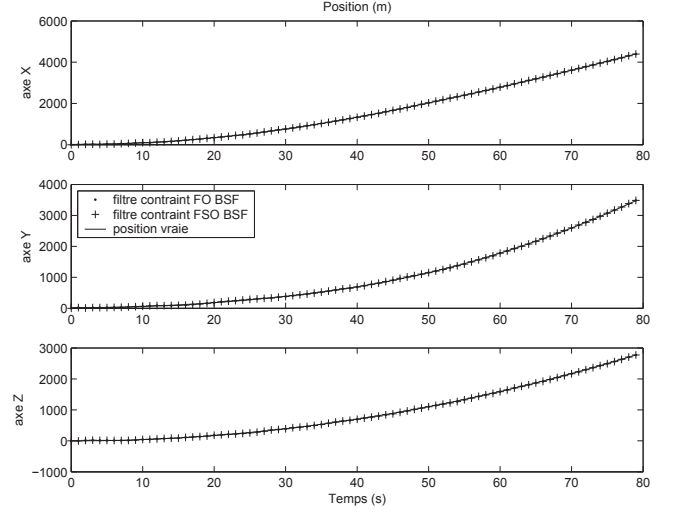


Fig. 8. Positions vraie et estimées

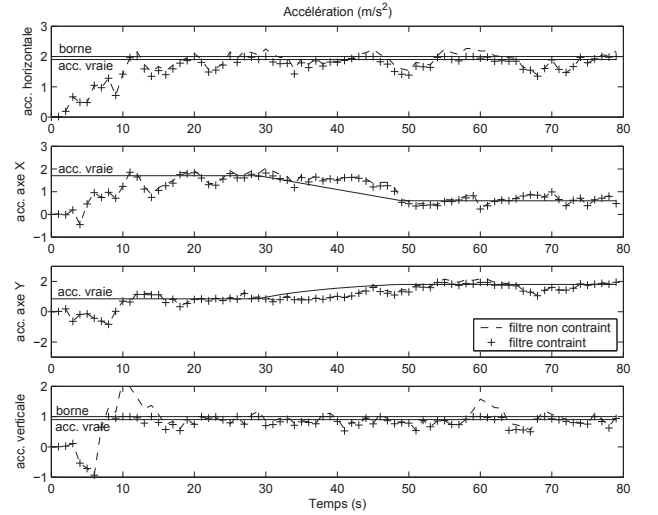


Fig. 9. Accélérations vraie et estimée par l'approche mixte

ouverte. Elle met surtout en évidence le fait que l'approche théoriquement optimale donne effectivement de bien meilleurs résultats que l'approche sous-optimale proposée. Cela se vérifie sur les figures 6, 7 et 8, lesquelles présentent les positions, vitesses et accélérations estimées par le filtre non contraint et des filtres optimal et sous-optimal contraints en boucles semi-fermée. L'apport des filtres contraints se situe essentiellement au niveau de l'estimation de l'accélération.

Maintenant, nous allons prendre l'aspect calculatoire en ligne de compte. A l'aide de la fonction *tic-toc* de Matlab, laquelle permet de mesurer le temps de calcul exigé par un algorithme, nous constatons que, dans le cas où aucune des contraintes de (25) n'est vérifiée, l'approche par linéarisation itérée des contraintes (avec $N = 1$ itération) nécessite 2,95 fois plus de temps que l'approche sous-optimale par projection orthogonale. Ce ratio est très élevé et il nous pousse à analyser plus en détail ce résultat. En effet, si l'on effectue le même test, mais en faisant en sorte que seule la contrainte $x_{7,k}^2 + x_{8,k}^2 \leq B_h^2$ ne soit pas respectée, le ratio obtenu est alors de 2,67. Si l'on regarde de plus près la courbe 6, on constate que l'apport de l'approche par linéarisation

itérée sur celle par projection orthogonale réside essentiellement dans l'estimation de l'accélération horizontale et très peu sur les composantes de l'accélération verticale. L'idée nous vient alors d'utiliser une approche mixte, laquelle consiste en l'utilisation :

- de l'approche par projection optimale (section II.A) pour la contrainte $B_d \leq x_{9,k} \leq B_u$, qui est linéaire,
- de la troisième étape de l'algorithme de la section III, qui consiste majorer par B_h la norme de $[x_{7,k} \ x_{8,k}]^T$ si la contrainte $x_{7,k}^2 + x_{8,k}^2 \leq B_h^2$ n'est pas vérifiée.

Cette démarche autorise un certain gain en temps de calcul et présente de bons résultats, comme l'attestent les estimations d'accélération de la figure 9.

V. CONCLUSION

Dans ce papier, deux techniques d'estimation d'état sous contraintes de type inégalité non linéaires sur les variables d'état ont été comparées. La première approche est une méthode générale dite "approche par projection" et utilise une démarche itérée afin de linéariser les équations de contraintes. La seconde approche est quant-à-elle réservée à une classe particulière de contraintes inégalité non linéaires.

Elle consiste en une projection orthogonale de l'état estimé par un filtre non contraint sur l'hypervolume de contrainte. Elle peut de ce fait être considérée comme un cas particulier de la première approche, cas sous-optimal au sens du minimum de variance mais de mise en œuvre nettement plus aisée. La comparaison entre ces deux techniques a été effectuée sur une application de poursuite de cible dans l'espace. Elle met en évidence que la première approche donne effectivement de meilleurs résultats que la seconde (qui est sous-optimale), mais nécessite quasiment trois fois plus de temps pour contraindre les états. Une solution mixte a alors été proposée afin de tenter d'obtenir un meilleur compromis qualité d'estimation/temps de calcul. Le choix de l'approche à implémenter va lui dépendre du contexte, à savoir la capacité des calculateurs et le niveau de performance souhaité. Les techniques proposées sont bien entendu généralisables à d'autres applications que la poursuite de cible. Nous pouvons par exemple citer le cas d'un système de navigation d'un véhicule terrestre. En effet, ce dernier présente une vitesse bornée et donc sujette à contraintes. En outre, un véhicule se situant la plupart du temps sur des routes dont les coordonnées géographiques sont connues, la position calculée par le système de navigation est également soumise à des contraintes. Il est alors envisageable d'utiliser une des techniques proposée comme alternative à la méthode de map-matching.

RÉFÉRENCES

- [1] R.E. Kalman. "A new approach to linear filtering and prediction problems". *Transactions of the ASME-Journal of Basic Engineering, Series D*, 82 :35–45, 1960.
- [2] M.S. Grewal, L.R. Weill, et A.P. Andrews. *"Global Positioning Systems, inertial navigation and intergration"*. Wiley & sons inc., 2001.
- [3] Y. Bar-Shalom. *Multitarget multisensor tracking; Applications and advances*, volume 3. Artech house, Norwood, Ma., 2001.
- [4] B.D.O. Anderson et J.B. Moore. *"Optimal filtering"*. Prentice Hall inc., 1979.
- [5] Z. Zhengyou. Parameter estimation techniques/ a tutorial with application to conic fitting. Technical report, INRIA Sophia Antipolis, 1995.
- [6] B.D.O. Anderson et J.B. Moore. *"Optimal control : linear quadratic methods"*. Prentice Hall inc., 1989.
- [7] S. Simani, C. Fantuzzi, et R.J. Patton. *Model-based fault diagnosis in dynamic systems using identification techniques*. Springer Verlag inc., 2002.
- [8] D. Simon et T. Chia. Kalman filtering with state equality constraints. *IEEE transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 38(1) :128–136, 2002.
- [9] D. Choukroun. *Novel methods for attitude determination using vector observations*. PhD thesis, Israel Institute of Technology, 2003.
- [10] W. Wen et H. Durrant-Whyte. Model-based multi-sensor data fusion. *IEEE conference on Robotics and Automation*, pages 1720–1726, 1992.
- [11] S. Hayward. Constrained kalman filter for least squares estimation of time-varying beamforming weights. *Mathematics in Signal Processing*, 4 :113–125, 1998.
- [12] D. Simon. *Optimal state estimation. Kalman, H_∞ and nonlinear approaches*. Wiley & sons inc., 2006.
- [13] D. Simon et D.L. Simon. Kalman filtering with inequality constraints for turbofan engine health estimation. *IEE proceedings on Control Theory and Applications*, 153(3) :371–378, 2006.
- [14] R. Fletcher. *Practical methods for optimization. Volume 2 : constrained optimization*. Wiley & sons inc., 1981.
- [15] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J.P. Richard, F. Rotella, et I. Zambettakis. *"Commande et optimisation des processus"*. Éditions Technip, 1990.
- [16] R. Van der Merwe et E. Wan. Sigma-Point Kalman Filters for integrated navigation. *Proceedings of the 60th Annual Meeting of The Institute of Navigation (ION)*, Dayton, OH, 2004.
- [17] A. Doucet. *"Algorithmes Monte Carlo pour l'estimation bayésienne de modèles markoviens cachés. Application au traitement de signaux de rayonnements"*. PhD thesis, Université de Paris Sud - Orsay, 1997.
- [18] Y. Bar-Shalom et K. Birmiwal. "Variable dimension filter for maneuvering target tracking". *IEEE transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 18(5) :621–629, 1982.
- [19] Y.T. Chan, A.G.C Hu, et J.B. Plant. "A Kalman filter based tracking scheme with input estimation". *IEEE transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 15(2) :237–244, 1979.
- [20] T.C. Wang et P.K. Varshney. "A tracking algorithm for maneuvering targets". *IEEE transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 29(3) :910–924, 1993.
- [21] H. Lee et M.J. Tark. Generalized input estimation technique for tracking maneuvering targets. *IEEE transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 35(4) :1388–1402, 1999.
- [22] P.L. Bogler. "Tracking maneuvering targets using input estimation". *IEEE transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol.23(3) :298–310, 1987.
- [23] H.A.P. Blom et Y. Bar-Shalom. "The Interacting Multiple Model algorithm for systems with Markovian switching coefficients". *IEEE transactions on Automatic Control*, 33(8) :780–783, 1988.
- [24] A. Hocine, M. Chadli, D. Maquin, et J. Ragot. A discrete-time sliding window observer for markovian switching system. *45th IEEE Conference on Decision and Control*, San Diego, Ca., USA, 2006.
- [25] R.A. Singer. "Estimating optimal tracking filter performance for manned maneuvering targets". *IEEE transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 6(4) :473–483, 1970.