UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Posgrado en Ciencias Físicas

Aspectos de la Teoría Cuántica de los supercampos

Tesis que para optar por el grado de:

DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

Presenta:

Enrique Jiménez Ramos

Dra. Myriam Mondragón Ceballos, Instituto de Física, UNAM
Dr. Jens Erler Weber, Instituto de Física, UNAM
Dr. Alfonso Mondragón Ballesteros, Instituto de Física, UNAM

MÉXICO, D.F. FEBRERO 2016

Índice general

Índice de figuras

Capítulo 1

Introducción

Existen dos conjuntos, ya con larga tradición, de fanáticos de la supersimetría. En un espectro están aquellos que su labor es proponer modelos, los llamados "hacedores de modelos" y fenomenólogos, mientras están los otros que se concentran en el método, cuya tarea es proponer nuevos formalismos para la misma o una nueva teoría. Desde luego, esta división es un tanto ilusoria y no bien delimitada. Aunque supersimetría es un adulto maduro que ronda los 40 años edad, aún existen enigmas en ambas escuelas de trabajo. Obviamente, de importancia ulterior para la Física fundamental es saber si supersimetría se realiza o no en la Naturaleza. Se espera que el Gran Colisionador de Hadrones en su segunda corrida, nos ayude a discernir esta cuestión.

Por otro lado, independientemente de si tiene algo que ver con la naturaleza o no, supersimetría llegó para quedarse. Esto por el simple he hecho que durante todo su desarrollo nos ha ofrecido *entendimiento*. Desde los teoremas de no-renormalización [1] hasta la solución de Seiberg-Witten[2], las peculiaridades de la supersimetría han fascinado a propios y extraños. Al día de hoy, la única apuesta segura de supersimetría es la de seguir ofreciéndonos compresión en varias facetas de la física teórica, la física matemática y la física en general. Supersimetría es un laboratorio teórico donde los experimentos son muy baratos [1].

En esta tesis nos concentramos primordialmente en el método, teniendo como uno de los principales objetos de estudio, el superespaciotiempo. No nos enfocamos en las conexiones que existe entre el superespacio y la geometría (o supergeometría),

[1] Este sentencia puede considerarse como un estancia particular de la aseveración más general de V.I. Arnold, *"Mathematics is the part of physics where experiments are cheap."*

de la cual muchas paginas han sido escritas[2], sino de la relaciones entre las simetrías del superespaciotiempo y las reglas de la mecánica cuántica.

Antes de expresar de manera explicita lo que se hecho en este trabajo, es pertinente ver brevemente a la supersimetría sumergidos en la visión de la época en que nació. El surgimiento de la supersimetría se da en un contexto donde la integral de caminos ya había sido popularizada por los trabajos de G. t'Hooft [5] sobre la teoria electrodébil [en contraste, tenemos que la cuantización canónica de los campos esta enraizada con los origines de la teoria cuántica misma [6]]. Dentro de la integral de caminos, los denominados métodos de campo externo [7] probaron ser de gran utilidad y generalidad(esto es, en este formalismo variamos corrientes externas que después apagamos y donde todos los efectos de los multilazos quedan codificados en la *acción cuántica efectiva*). Es en este contexto, donde la supersimetría se formula (al menos en el Oeste) por primera vez [8]. Así también, desde que A. Salam y J. Stradhee introducen la idea el superespacio [9], la teoria del campo en el superespacio ha sido desarrollada usando métodos funcionales [1, 10–12].

Aunque la generalidad del método de funcionales en teoria del campo lo hace muy conveniente (cuyo esplendor se puede apreciar en el formalismo de Batalin-Vilkovisky [13]), existen varios aspectos que se vuelven menos claros en este enfoque. En particular, con los métodos funcionales obtenemos de manera directa las funciones de correlación de n puntos de cualquier teoría del campo. Expresado en términos de diagramas de Feynman, las funciones de correlación, representan la suma de todos los diagramas con n patas externas fuera de la capa de masa. Para obtener una amplitud de un proceso físico, necesitamos reemplazar las patas fuera de la capa de masa por las correspondientes patas en la capa de masa. Como hemos dicho anteriormente, ya que en el superespacio sólo los métodos funcionales han sido explotados, se vuelve poco claro cuales son las correspondientes patas (o más propiamente, las superpatas) que debemos reemplazar para calcular una superamplitud. Entonces uno de los objetivos principales de esta tesis, es proveer de manera definitiva, al menos para las teorías más sencillas, formulas para las superpatas en la capa de masa.

Necesario es explicar porque no es directo el procedimiento usual (del espacio al superespacio) para obtener dichas patas: Identificar las patas externas con las funciones de onda que provienen de la expansión en modos de Fourier de los campos

[2] El libro por excelencia de la supergeometría, es la Ref. [3]. Un tratado más reciente es la Ref. [4].

libres. Un punto medular, que explica en parte porque los métodos funcionales son más populares en supersimetría, es que estos métodos son naturalmente Lagrangianos. En las versiones Lagrangianas, la supersimetría rígida se realiza linealmente en los campos componente, en oposición a la version Hamiltoniana, que se realiza no linealmente (simetrías no lineales no pueden ser simetrías de la matriz S). Dicho de otra manera, no es directo que se entiende por un formalismo Hamiltoniano en el superespacio. Entonces, se vuelve dudoso como generalizar la receta usual en el espacio para obtener las patas en la capa de masa para el caso del superespacio. Esta obstrucción no ha impedido el florecimiento de modelos supersimétricos realistas. En ninguna extension supersimétrica del modelo estándar, la supersimetría es una simetría exacta de la matriz $\mathcal{S}$ [14].

Para abordar el problema, recurrimos a una formulación de la teoria cuántica de los supercampos diferente a los enfoques canónicos y de suma de historias. Extendemos del espacio al superespacio, lo que hemos llamado, el enfoque de Weinberg a la teoria cuántica de los campos [15–17]. Permeado por la atmósfera de los años sesenta, donde se respiraba un “enfoque puro de la matriz S” a la física de partículas, Weinberg se pregunta ¿Qué suposiciones nos garantizan una dinámica cuántica relativista? ¿Qué consecuencias tienen tales suposiciones? Weinberg identifica una serie de principios suficientes para desarrollar una mecánica cuántica completamente relativista. Identifica que el operador de Dyson es lo suficientemente general, al menos en el régimen perturbativo, como para garantizar una matriz S covariante de Lorentz, provisto de que escribamos el potencial de la teoria en el esquema de la interacción como una densidad invariante en el espaciotiempo. Reconoce que la utilidad de los operadores de creación-aniquilación radica en que al escribir las interacciones en términos de estos operadores, automáticamente tenemos una dinámica que satisface el principio de descomposición en cúmulos: La matriz S nos da probabilidades no correlacionadas para experimentos lo suficientemente separados. Desde el punto de vista puramente epistemológico, Weinberg nos argumenta del *porqué* de la *inevitabilidad* de los campos cuánticos. Desde una mirada más pragmática y en cierto sentido de más importancia para la física, obtiene las reglas de Feynman para partículas de cualquier espín. Ya que en ningún momento hace uso del formalismo canónico ni del integral de caminos, Weinberg le llama a su enfoque 'no-canónico'. El formalismo de Weinberg es una amalgama de lo mundos puramente de matriz S y el formalismo Lagrangiano, los campos cuánticos tienen un rol protagónico pero no son construidos a partir de ninguna regla de cuantización, sino son los objetos que nos garantizan la invariancia de Lorentz de la teoria cuántica.

El pensar a la teoria cuántica de los supercampos en estos términos, nos obliga a repensar a la mecánica cuántica en el superespacio. Un punto en donde creemos haber ido más lejos de donde se encuentra la literatura estándar en el tema, es el de haber podido definir el producto interior (o producto escalar) en el espacioespacio de Hilbert para los superestados generales. Esto nos ha permitido extender una serie de resultados del espacio al superespacio de manera directa. En este trabajo, damos un tratamiento unificado para los superestados de partícula masivos y sin masa, introduciendo estados completamente covariantes supersimétricos [usualmente, el análisis del espectro supersimétrico (los llamados supermultipletes) se queda a nivel de estados componente [17, 18]]. Aquí presentamos por vez primera a los estados de superpartículas de manera completamente covariante. Explicamos en que sentido, a pesar de que la densidad Hamiltoniana de interacción no es covariante de súper Poincaré, es posible definir una superamplitud completamente covariante supersimétrica. El origen de la no covariancia de la supermatriz S es, desde el punto de vista de este formalismo, el mismo que la no covariancia de Lorentz: La no conmutatividad de la mecánica cuántica, expresada a traves de la singularidad de las relaciones de (anti)conmutación de los supercampos, en el ápice del cono de luz.

En la actualidad no existe un método general para obtener teorías del campo en el superespacio de espín arbitrario y de hecho, solo pocas teorías clásicas del campo con superespin de dimension baja se conocen [19–22]. Entonces, el formalismo de Weinberg surge como una alternativa a las formulaciones canónicas y/o de integrales de caminos para teorías cuánticas de los supercampos con superespines arbitrios, independientemente de si estas teorías del campo pueden ser formuladas en términos canónicos. Este ultimo punto, ha sido enfatizado por Weinberg a manera pregunta:

¿Si descubriéramos una teoria del campo que nos arroja una matriz S físicamente satisfactoria, nos importaría no poderla derivar de la cuantización canónica de alguna Lagrangiana? [17].

Probamos el formalismo en la teoria masiva más sencilla, la interacción cúbica del supercampo escalar. Demostramos que la corrección de menor orden al operador de orden temporal, para cuando la superpartícula de superespín cero es su propia antisuperpartícula, corresponde al potencial de interacción del modelo de Wess-Zumino. Calculamos la superamplitud de dispersión, en una colisión superpartícula-superantipartícula. Demostramos, a traves de lo compacto y sencillo de las formulas obtenidas, la conveniencia del formalismo propuesto.

En el capítulo 2, tratamos todo lo referente a la Mecánica cuántica en el superespacio, incluyendo las simetrías del superespaciotiempo, mientras que la introducción de la supermatriz S, de los operadores de creación-aniquilación y del principio de descomposición en cúmulos se desarrolla en el capítulo 3. El ingrediente principal, los supercampos cuánticos son tratados en el capítulo 4. La presentación de la matriz S totalmente covariante junto con las correspondientes reglas de súper Feynman las damos en el capítulo 5. Todo lo relacionado con las simetrías de paridad, inversión temporal, conjugación de carga y simetrías $\mathcal{R}$, se presenta en el capítulo 6. El capítulo 7 esta dedicado a la aplicación del formalismo para el caso del supercampo escalar. Finalmente, presentamos nuestras conclusiones junto con nuestras perspectivas a futuro en el capítulo 8.

Capítulo 2

Estados de superpartícula

En este capitulo establecemos las bases de la mecánica cuántica en el superespacio. Obtenemos las representaciones unitarias del grupo de súper Poincaré, cuyos vectores estado identificamos como los estados de superpartícula (o superestados de partícula). Como veremos más adelante, al igual que los estados de partícula, las superpartículas están definidas por la masa, el momento lineal y el espín, pero además poseen otro grado de libertad caracterizado por la proyección izquierda o derecha de un 4-espinor. La unión del conjunto de estos 4-espinores con los 4-vectores de momento, es lo que denominamos como *superespacio de momentos*. Para encontrar los superestados covariantes de Lorentz y supersimetría, nos valemos del *método de las representaciones inducidas de Wigner* [23], de tal manera que definimos a los superestados de momento arbitrario en términos de los superestados en el vector estándar. Extendiendo además esta idea para las etiquetas fermiónicas, definimos los estados de espinores arbitrarios en términos de los estados de espinores en el origen.

2.1. Súper Mecánica Cuántica

La palabra superespacio, se usa para denotar varias identidades matemáticas como los superespacios de configuración, los superespacios de momentos, los superespacios de Hilbert, etc., estas identidades comparten la propiedad de que la multiplicación por un supernúmero esta bien definida. Un supernúmero v se puede definir por su propiedad de poder siempre expresarse de manera única como la suma de otros dos supernúmeros v_c y v_a, llamados supernúmeros *puros*. Estos, son tales que el producto con otros supernúmeros puros v'_c y v_a conmuta o anticonmuta,

$$v'_m v_n = (-)^{(m_{v'})(n_v)} v_n v'_m, \quad m, n = \{a, c\} \ , \tag{2.1}$$

donde $c_{v'} = 0$ y $a_v = 1$, para cualquier v. A los números m_v se les conoce como la *clasificación-Z_2* de v_m. A un supernúmero que no es puro, se le dice *impuro*. Tenemos pues, que el superespacio, ya sea de funciones, de operadores o de vectores de estado, es un espacio vectorial en el sentido de que:

- Para dos elementos f y f' del superespacio, entonces $f + f'$ también lo es. La operación de adición es asociativa $f+(f' + f'') = (f + f')+f''$ y conmutativa $f + f' = f' + f$.
- Si f es un elemento del superespacio, entonces vf también lo es, donde v es cualquier supernúmero. La operación de multiplicación (por la izquierda) con cualquier supernúmero se toma como asociativa y distributiva

$$v\,(v'f) = (vv')\,f, \quad v\,(f + f') = vf + vf' \quad (v + v')\,f = vf + v'f, \tag{2.2}$$

- Existe un elemento único $\mathbf{0}$, con la propiedad de que para cualquier elemento f y cualquier supernúmero v, $\mathbf{0} + f = f$, $0f = \mathbf{0}$ y $\mathbf{0}v = \mathbf{0}$.

Para poder definir la multiplicación por derecha y por izquierda simultáneamente, dado cualquier elemento f del superespacio, siempre debe ser posible (por construcción) descomponerlo como $f = f_a + f_c$, de manera que la multiplicación con cualquier supernúmero satisfaga

$$v_i f_j = (-)^{\epsilon_i^v \epsilon_j^f} f_j v_i, \quad i = a, c \tag{2.3}$$

Notemos que la Ec. (2.3) contiene a la Ec.(2.1) en el caso $f = v$. En la literatura encontramos diversos nombres para f_a, se les conoce como de grado uno, de tipo-a, paridad impar o de tipo fermiónico. De igual forma, a f_c se le dice de grado cero, de tipo-c, paridad par o de tipo bosónico. Para el caso de los supernúmeros puros les llamamos también números bosónicos o números fermiónicos. Puesto que la mecánica cuántica se realiza sobre un espacio vectorial complejo, para cada supernúmero v existe otro v^*, tal que $(v^*)^* = v$ y además

$$(vv')^* = v'^* v^*, \quad (v + v')^* = v^* + v'^* . \tag{2.4}$$

La operación de conjugación de un supernúmero preserva la pureza de este. Un supernúmero es real si $v = v^*$. Cuando algún elemento f del superespacio posee un elemento adjunto $f^\dagger$, entonces

$$(fv)^\dagger = v^* f^\dagger . \tag{2.5}$$

El espacio de Hilbert, es un *espacio vectorial normado*, donde para dos vectores en este espacio existe un número complejo, el producto escalar (o producto interior), que es *lineal*, *simétrico* y *positivo*. Para dos vectores Ψ y Ψ' en un superespacio de Hilbert, el producto escalar $\left(\Psi^\dagger \Psi'\right)$ es un supernúmero y la propiedad de linealidad se expresa en términos de la multiplicación por la derecha como:

$$(\Psi'')^\dagger (\Psi v + \Psi' v') = \left(\Psi''^\dagger \Psi\right) v + \left(\Psi''^\dagger \Psi'\right) v' , \tag{2.6}$$

la propiedad de simetría se mantiene intacta,

$$\left(\Psi'^\dagger \Psi\right)^* = \left(\Psi^\dagger \Psi'\right) . \tag{2.7}$$

De aqui se puede apreciar que

$$(\Psi v + \Psi' v')^\dagger \Psi'' = v^* (\Psi^* \Psi'') + v'^* \left(\Psi'^* \Psi''\right) , \tag{2.8}$$

donde hemos usado que $(v\Psi)^\dagger \Psi'' = \Psi^\dagger (v^* \Psi'')$.

Debemos decidir si para dos vectores con pureza definida su producto escalar es puro o impuro . Extendemos simplemente lo que sucede para el producto de dos supernúmeros, esto es, cuando Ψ y Ψ' son vectores puros (en el sentido del superespacio no en el sentido de la mecánica cuántica) con grados ϵ_Ψ y $\epsilon_{\Psi'}$, respectivamente, el grado de $\left(\Psi'^\dagger \Psi\right)$ es $(\epsilon_\Psi + \epsilon_{\Psi'})$ módulo dos. La positividad del producto escalar no puede tomarse como en el caso de un espacio normado complejo, ya que en general, $\Psi^\dagger \Psi$ no es un número real. Tampoco es en general, invertible, porque no todos los supernúmero poseen inversos multiplicativos. Por ejemplo, consideremos un supernúmero $v \neq 0$, con $v^2 = 0$, si existiera un supernúmero v^{-1} tal que $(v^{-1})\, v = 1$, se siguiera que $v = 0$, lo cual es contradictorio. Para ver en que casos podemos definir el inverso multiplicativo de un supernúmero. Notamos que además de la descomposición $v_a + v_c$ para cualquier supernúmero, existe otra descomposición de v en términos de su *cuerpo* v_{B} y su *alma* v_{S}: [1]

$$v = v_{\mathrm{B}} + v_{\mathrm{S}} \tag{2.9}$$

donde v_{B} es un número complejo. Podemos justificar esta descomposición siguiendo la definición de un supernúmero como el álgebra de Grassmann de dimension infinita[3]. Un álgebra de Grassmann de dimension N viene definida por el conjunto de elementos τ_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, N$ que satisfacen $\tau_i \tau_j = -\tau_j \tau_i$. Un supernúmero, alternativamente, viene definido como el limite $N \to \infty$ de la relación

$$v = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \sum_{i_1=0}^{n} \sum_{i_2=0}^{n} \cdots \sum_{i_n=0}^{n} C_{i_1 i_2 \ldots i_n} \, \tau_{i_1} \tau_{i_2} \ldots \tau_{i_n} \ , \tag{2.10}$$

con $\tau_0 \equiv 1$ para $i = 0$ y donde $C_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ son números complejos. De aqui que $C_0 = v_{\mathrm{B}}$. Entonces el inverso multiplicativo de cualquier supernúmero v existe si y solo sí $v_{\mathrm{B}} \neq 0$ y viene dado de manera única por

$$v^{-1} = v_{\mathrm{B}}^{-1} + v_{\mathrm{S}}^{\mathrm{inv.}} \tag{2.11}$$

donde

$$v_{\mathrm{B}}^{-1} v_{\mathrm{B}} = 1, \quad v_{\mathrm{S}}^{\mathrm{inv.}} = v_{\mathrm{B}}^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-v_{\mathrm{B}}^{-1} v_{\mathrm{S}} \right)^n \ . \tag{2.12}$$

Es suficiente definir un supernúmero como positivo si es real y su cuerpo es positivo. Escribimos la propiedad de positividad para dos vectores en superespacio de Hilbert de la misma manera que en el espacio:

$$\Psi^{\dagger}\Psi > 0, \ \text{para } \Psi \neq \mathbf{0} \tag{2.13}$$

en el entendido que el signo 'mayor que cero' expresa el sentido positivo arriba expuesto.

[1] Esta definición de supernúmero, junto con mucha de la nomenclatura del análisis de los supernúmeros, fue introducida por primera vez en la referencia [3].

Estamos pensando al símbolo † como un símbolo de una operación binaria entre dos vectores: $(\,\cdot\,)^{\dagger}(\,\cdot\,)$. Hemos preferido usar esta nomenclatura a la notaciones

$$(\Psi', \Psi)\,, \quad \langle \Psi' \mid \Psi \rangle \ . \tag{2.14}$$

A diferencia de la mecánica cuántica en el espacio, donde etiquetamos los estados con los eigenvalores reales que provienen de los operadores hermíticos, en el superespacio, las etiquetas que usamos para caracterizar las variables fermiónicas son en general, números fermiónicos complejos. Al introducir el vector dual con la notación $\Psi^\dagger$, nos recuerda que hay un proceso de conjugación en los posibles argumentos de Ψ. Así como sabemos que $A^\dagger$, donde A es una matriz compleja, nos recuerda que esta evaluado en el conjugado de sus entradas.

Integración fermiónica. Antes de intentar establecer una base en el superespacio de Hilbert, introducimos primero la integración con variables fermiónicas (usualmente llamada *integral de Berezin*). Para ello, considérese el vector $v = (v_1, v_2, \ldots, v_N)$, donde los elementos v_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, N$, toman valores en los números fermiónicos. Escogemos una función $f(v)$ de la cual hemos hecho su dependencia explicita en v. Dada una componente v_i, debido a que $v_i^2 = 0$, podemos escribir de manera única a $f(v)$ como

$$f(v) \;=\; f_{i,0} \,+\, v_i\, f_{i,1}^{\text{izq.}} \ , \tag{2.15}$$

donde f_0 y f_1 no dependen de v_i. La integral de línea por lo izquierda, $\int dv_i f(v)$, de la variable v_i y aplicada a la función $f(v)$, se define como la función $f_{i,1}$:

$$\int dv_i\, f(v) = \; f_{i,1}^{\text{izq.}} \ . \tag{2.16}$$

La integración sobre cualquier superficie viene definida por la aplicación sucesiva de integrales en una dimensión[2],

$$\int dv_{i_1} \ldots dv_{i_\ell} \;=\; \int dv_{i_1} \ldots \int dv_{i_\ell} \tag{2.17}$$

[2] Aquí nos estamos concentrando en supervariedades lineales, para supervariedades más generales esto no necesariamente es cierto [24].

Dadas dos componentes v_i y v_j, tenemos una expansión única de la forma

$$f(v) \;=\; g^{\text{izq.}}_{ij,0} \;+\; v_i\, g^{\text{izq.}}_{i,0} \;+\; v_j\, g^{\text{izq.}}_{j,1} \;+\; v_i v_j\, g^{\text{izq.}}_{ij,1} \;, \tag{2.18}$$

donde ninguna de las funciones $g^{\text{izq.}}_{ij,0}\ldots$ depende de v_i ni de v_j. De aquí se sigue que

$$dv_i dv_j \;=\; -dv_j dv_i \;. \tag{2.19}$$

Para integrales de volumen, escribimos

$$d^N v \;=\; dv_N \cdots dv_2 dv_1 \;. \tag{2.20}$$

Debido a que $v_i v_j = -v_j v_i$, la expansión de $f(v)$ en potencias de v_i siempre termina a orden finito. Podemos escribir de manera única $f(v)$ como

$$f(v) \;=\; f_0 \;+\; \sum_i v_i f_{1,i} \;+\; +\sum_{ij} v_i v_j f_{2,ij} \;+\; \ldots \;+\; v_1 v_2 \ldots v_N f_N \;, \tag{2.21}$$

al ser este un polinomio, no tenemos problemas de convergencia en la serie polinomial. De hecho, esta última ecuación puede fungir como definición de $f(v)$. También de la Ec. (2.21), podemos ver que

$$\int dv_i f(v+v') = \int v_i f(v \;+\; v'_{\{i\}}) \;, \tag{2.22}$$

$$\int dv_i\,[\alpha f(v)] = \;(-)^{\epsilon_\alpha}\,\alpha \int dv_i f(v) \tag{2.23}$$

$$\int dv_i\, v_i\, f(v) = \;f(v_{\{i\}}) \;, \tag{2.24}$$

donde $v_{\{i\}}$ representa el vector v con la componente i igual a cero. El símbolo α representa un supernúmero puro. Aplicando iterativamente, N veces, las Ecs. (2.22)-(2.22), podemos concluir que

$$\int d^N v f(v+v') = \int d^N v f(v), \tag{2.25}$$

$$\int d^N v\,[\alpha f(v)] = \;(-)^{\epsilon_\alpha N}\alpha \int d^N v f(v), \quad \alpha \text{ fermiónico}, \tag{2.26}$$

$$\int d^N v\, \delta^N(v) f(v) = \;f(0) \;, \tag{2.27}$$

donde $\delta^N(v)$ es la función delta fermiónica definida por

$$\delta^N(v) \equiv v_1 v_2 \ldots v_N \ . \tag{2.28}$$

De las Ecs. (2.25) y (2.27) tenemos entonces que

$$\int d^N v\, \delta^N(v-v') f(v) = f(v') \tag{2.29}$$

De manera similar, escribimos $f(v) = f_0 + f_i^{\text{der.}} v_i$ para definir la integración por la derecha,

$$\int f(v) dv_i \equiv f_i^{\text{der.}} \ . \tag{2.30}$$

Para $f(v)$ puro, $f_i^{\text{izq}} = -(-)^f f_i^{\text{der}}$, entonces

$$\int f(v) dv_i = -(-)^{\epsilon_f} \int dv_i f(v) \ . \tag{2.31}$$

La integración por la derecha en un número par de variables fermiónicas es la misma que su integración por la izquierda[3],

$$\int f(v) dv_i dv_j = \int dv_i dv_j f(v) \ , \tag{2.32}$$

con f puro o impuro. Podemos conjugar consistentemente bajo el signo de integral de la manera siguiente:

$$\left(\int f(v) dv_i\right)^\dagger = \int dv_i^* f(v)^\dagger \ . \tag{2.33}$$

[3]Demostración: La integral de línea de una función f pura, tiene pureza invertida, entonces

$$\begin{aligned}\int f(v)\, dv_i dv_j &= -(-)^f \int \left(\int dv_i f(v)\right) dv_j = -\int dv_j dv_i f(v) \\ &= \int dv_i dv_j\, f(v) \ ,\end{aligned}$$

Ya que este resultado es independiente de la pureza de f, se cumple para f puro o impuro. Mediante el método de inducción matemática, podemos extender fácilmente este resultado para cualquier número par de diferenciales fermiónicos.

Notamos también que el conjugado de la función delta fermiónica evaluada en v es igual, hasta un signo, a la función delta evaluada en v^*,

$$\left[\delta^N(v)\right]^* = (-)^{g_N}\delta^N(v^*) \tag{2.34}$$

con

$$g_N = \begin{cases} +1, & N = 1, 5, 6, 9, 10, \dots \\ -1, & N = 2, 3, 4, 7, 8, \dots \end{cases} \tag{2.35}$$

Otra función importante es el mapeo mapeo exponencial de la función $g(v)$, definido por la serie finita:

$$e^{[g(v)]} = 1 + g(v) + \frac{1}{2!}g(v)^2 + \frac{1}{3!}g(v)^3 + \dots . \tag{2.36}$$

De manera muy importante para nosotros, es la integral de la exponencial con argumento igual a la suma $\sum_{i=1}^m v_i\tilde{v}_i$, donde $\tilde{v}$ es otro vector fermiónico arbitrario,

$$f_m \equiv \int \exp\left[\sum_{i=1}^m v_i\tilde{v}_i\right] d\tilde{v}_m d\tilde{v}_{m-1}\dots d\tilde{v}_1 \ . \tag{2.37}$$

Escribimos el lado derecho de esta última ecuación como[4]

$$\begin{aligned} \int \exp\left[\sum_{i=1}^{m-1} v_i\tilde{v}_i\right] \left(\int (1 + v_m\tilde{v}_m)\, d\tilde{v}_m\right) d\tilde{v}_{m-1}\dots d\tilde{v}_1 \\ = v_m \int \exp\left[\sum_{i=1}^{m-1} v_i\tilde{v}_i\right] d\tilde{v}_{m-1}\dots d\tilde{v}_1 \ . \end{aligned} \tag{2.38}$$

Vemos que la función f_m satisface la relación de recursividad $f_m = v_m f_{m-1}$, con $m = 2, 3, \dots$. Debido a que $f_1 = v_1$, se tiene que $f_m = v_m v_{m-1}\cdots v_1$, de donde se sigue que

$$\int \exp\left[\sum_i^N v_i\tilde{v}_i\right] d^N\tilde{v} = (-)^{g_N}\delta^N(v) \tag{2.39}$$

[4]Evidentemente para dos supernúmeros bosónicos a y b, se sigue que $e^a e^b = e^{a+b}$.

Entonces, el mapeo exponencial $\exp\left[\sum_i^N v_i\tilde{v}_i\right]$ nos sirve para definir la transformada Fourier fermiónica de la función $f(v)$,

$$\tilde{f}(\tilde{v}) \equiv (-)^{g_N} \int d^N v \, \exp\left[\sum_i^N v_i\tilde{v}_i\right] f(v) \; . \tag{2.40}$$

Debido a la Ec. (2.39), la transformada fermiónica de Fourier (2.40) es invertible. Se sigue que $f(v) = 0$ si y solo sí $\tilde{f}(\tilde{v}) = 0$.

Consideremos la siguiente integral de línea en las variables fermiónicas:

$$\sum_{ij}^n \int dv_i v_j C_{ij} = \sum_i C_{ii} \; , \tag{2.41}$$

las cantidades C_{ij} son constantes independientes de v. Puesto que v es solo un variable integración, podemos escribir

$$\sum_i C_{ii} = \sum_{ij}^n \int d(Dv)_i \, (Dv)_j \, C_{ij} \; , \tag{2.42}$$

donde D_{ij} es un matriz bosónica invertible. Puesto que $\sum_i C_{ii} = \sum_i (D^{-1}CD)_{ii}$, tenemos:

$$d(Dv)_i = \sum_j dv_j D^{-1}_{ji} \; . \tag{2.43}$$

Es directo demostrar que esta regla de transformación se mantiene para cualquier integral de superficie

$$\sum_{i_1 j_1 \cdots i_{N'} j_{N'}}^N \int dv_{i_1} \cdots dv_{i_{N'}} \, v_{j_1} \cdots v_{j_{N'}} \, C_{i_1 j_1 \cdots i_{N'} j_{N'}} \; , \tag{2.44}$$

donde N' es menor o igual a la dimension de v. En particular, la regla de transformación (2.43) se satisface para la integral de volumen $\int d^N v f(v)$. Puesto que $dv_i dv_i = -dv_j dv_i$, el diferencial de volumen $d^N v$ puede ser escrito como un termino proporcional a

$$\sum_{i_1 \cdots i_N} \epsilon_{i_1 \cdots i_N} dv_{i_1} \cdots dv_{i_N} \tag{2.45}$$

donde $\epsilon_{i_1 \cdots i_N}$ es el tensor totalmente antisimétrico de dimension N y $\epsilon_{12 \cdots N} \equiv +1$. Pero el tensor totalmente antisimétrico es una densidad invariante, esto es, para cualquier transformación D_{ij}:

$$\sum_{i'_1 i_1} \cdots \sum_{i'_N i_N} D^{-1}_{i'_1 i_1} \cdots D^{-1}_{i'_N i_N} \epsilon_{i'_1 \cdots i'_N} = \det D^{-1} \epsilon_{i_1 \cdots i_N}, \tag{2.46}$$

por lo que finalmente llegamos a la regla de transformación del elemento de volumen fermiónico:

$$d^N (Dv) = \det D^{-1} d^N v \tag{2.47}$$

Bases en el superespacio. Consideremos un conjunto de elementos $\{f_\xi\}$ en algún superespacio, el símbolo ξ representa un conjunto de indices que corren sobre elementos numerables y no numerables (esto es, ξ representa a varios indices continuos y discretos), entonces la suma y multiplicación con supernúmeros generaliza a

$$\int f_\xi \lambda_\xi d\xi , \tag{2.48}$$

donde λ_ξ es un función del conjunto ξ a los supernúmeros. El signo $d\xi$ representa un diferencial de volumen en el superespacio y el signo de integral suma sobre todos los indices discretos y continuos. Puesto que λ_ξ es arbitraria, implica que cualquier coeficiente en la serie de Taylor de f_ξ está en el superespacio. Decimos que el conjunto $\{f_\xi\}$ es *linealmente independiente* si la relación

$$\int f_\xi \lambda_\xi d\xi = \mathsf{0} , \tag{2.49}$$

implica que λ_ξ es cero[5]. El conjunto $\{f_\xi\}$ es *completo* si existe un función α_ξ en las variables ξ, tal que cualquier elemento Ω del superespacio en cuestión pueda ser escrito como

$$\Omega = \int f_\xi \alpha_\xi d\xi . \tag{2.50}$$

Para superespacios normados, la *ortogonalidad* entre dos vectores de estado Ψ_ξ y $\Psi_{\xi'}$ es:

$$(\Psi_\xi)^\dagger \Psi_{\xi'} = 0, \quad \xi^* \neq \xi' . \tag{2.51}$$

[5] Equivalentemente, esta ecuación se puede escribir también como $\int d\xi \; f_\xi \lambda_\xi$.

Si un conjunto es ortogonal, también es lineal independiente [25]: Al tomar el producto escalar de $\Psi_{\xi'}$ con la Ec. (2.49), tenemos que[6]

$$\left(\Psi_\xi^\dagger \Psi_\xi\right) \lambda_\xi \ = \ 0 \ , \tag{2.52}$$

provisto de que $\left(\Psi_\xi^\dagger \Psi_\xi\right)$ sea invertible, esta relación implica $\lambda_\xi = 0$.
En el espacio, lo converso también es cierto, ya que, dejando de lado cuestiones de convergencia para variables continuas, de un conjunto linealmente independiente siempre podemos formar un nuevo conjunto que es linealmente independiente y ortogonal mediante el procedimiento de Gram-Schmidt [25]. Resulta ser que la relación de ortogonalidad (2.51) en el superespacio, no se realiza en el sector fermiónico. Para indagar estas cuestiones, hacemos

$$\left(\Psi_\xi\right)^\dagger \Psi_{\xi'} \ \equiv \ \delta_{\xi^*,\xi'} \ . \tag{2.53}$$

Suponemos que las etiquetas ξ, siempre se pueden descomponer en la forma $\xi = (a, v)$, con a el conjunto de indices bosónicos y v el conjunto de indices fermiónicos[7]. Para simplificar nuestros argumentos y sin perdida de generalidad, suponemos que el conjunto $\{\Psi_\xi\}$ esta ortonormalizado con respecto a los indices bosónicos (aseguramos esto si $\delta_{\xi,\xi'}$ contiene productos deltas de Dirac y de Kronecker en las variables bosónicas), entonces al tomar el producto escalar de algún Ψ_ξ con la Ec. (2.49), tenemos

$$\int \ \delta_{\xi^*,\xi'} \, \lambda_{\xi'} \, d\xi' \ = \ \int \ \delta_{\xi^*,\tilde{\xi}} \, \lambda_{\tilde{\xi}} \, d^N v' \ = \ 0 \ , \tag{2.54}$$

donde $\tilde{\xi}$ representa las restricción de ξ' a los mismos valores bosónicos de ξ^* ¿ Qué funciones $\delta_{\xi^*,\tilde{\xi}}$ pueden forzarnos a que λ_ξ valga cero? Una función que cumple con este requerimiento es

$$\delta_{\xi^*,\tilde{\xi}} \ = \ e_{\xi^*} \delta^N \left(v^* - v'\right), \tag{2.55}$$

[6]Para el caso de variables continuas $\Psi_\xi^\dagger \Psi_\xi$ es en general infinito, en ese caso debemos introducir un *regulador*.

[7]Este tipo de descomposición define lo que se le conoce como una supervariedad compleja(real) $\mathbb{C}^{M,N}(\mathbb{R}^{M,N})$ de dimension $M + N$. Los indices M y N representan las dimensiones de las subvariedades bosónicas y fermiónicas, respectivamente [3].

donde e_{ξ^*} es un supernúmero invertible. Esta elección para $\delta_{\xi^*,\tilde{\xi}}$ tiene la peculiaridad de tener su "ortogonalidad invertida":

$$\delta_{\xi,\xi} \;=\; 0 \;. \tag{2.56}$$

En este caso, el supernúmero $\Psi^{\dagger}_{\xi'}\Psi_{\xi}$ no es invertible (no tiene cuerpo), por lo tanto su interpretación probabilística, por decir lo menos, se vuelve dudosa. Dicho de otro modo, la norma de la componente cero en la expansión fermiónica del vector de estado Ψ_ξ es cero, $\Psi^{\dagger}_{(a,0)}\Psi_{(a,0)} \;=\; 0$. Con esto, nos alejamos de la mecánica cuántica, porque esperamos que los estados $\Psi_{(a,0)}$, al ser puramente bosónicos y de parámetros reales a, satisfagan los postulados de la mecánica cuántica en el espacio. Entonces, aunque la delta fermiónica funciona como la matriz unidad para el sector de los números fermiónicos, no puede jugar el mismo rol de aparecer en el producto interior de dos vectores con índices continuos, como sí lo hace su contraparte bosónica. Por lo tanto desechamos esta propuesta.
Una función que si tiene cuerpo y que también nos asegura la independencia lineal es

$$\delta_{\xi^*,\tilde{\xi}} \;=\; e_{\xi^*}\exp\left[\sum_{i}^{N} v_i^*\, v_i\right] \;. \tag{2.57}$$

Aseguramos la independencia lineal porque de la Ec. (2.40), tenemos que $\tilde{\lambda}(\tilde{v}) = 0$ con $\tilde{v} = -v^*$ y esto a su vez implica que $\lambda_\xi = 0$. Entonces *un conjunto de vectores de estado* $\left\{\Psi_{(a,v)}\right\}$ *con normalización*

$$\Psi^{\dagger}_{(a,v)}\Psi_{(a',v')} \;=\; \delta(a^* - a')\exp\left[\sum_k v_k^* v_k'\right] \tag{2.58}$$

es linealmente independiente. Demostramos a continuación la última aseveración que lo converso también es cierto. Expandimos Ψ_ξ por la derecha en la componente v_1,

$$\Psi_\xi \;=\; \Psi^0_{1,\xi} \;+\; \Psi^1_{1,\xi}\, v_1 \;, \tag{2.59}$$

donde Ψ_ξ^0 y Ψ_ξ^1 no dependen de v_1. De nuevo expandimos Ψ_ξ^0 y Ψ_ξ^1 en términos de otros superestados que no dependen de v_2,

$$\Psi_\xi^{(0,1)} \;=\; \Psi_\xi^{(0,1),0} \;+\; \Psi_\xi^{(0,1),1}\, v_2\ . \tag{2.60}$$

Y así sucesivamente, expresamos las componentes Ψ_ξ que no dependen de $v_1, v_2, \cdots v_m$ como

$$\Psi_\xi^{\emptyset_1\emptyset_2\ldots\emptyset_m}\ , \tag{2.61}$$

con $(\emptyset_m = 0, 1)$ y $(m = 1, 2, 3, \ldots N)$. Estos estados, funciones del índice m, están relacionados con los estados del índice $m-1$, mediante la relación recursiva:

$$\Psi_\xi^{\emptyset_1\emptyset_2\ldots\emptyset_{m-1}} \;=\; \Psi_\xi^{\emptyset_1\emptyset_2\ldots\emptyset_{m-1},0} \;+\; \Psi_\xi^{\emptyset_1\emptyset_2\ldots\emptyset_{m-1},1}\, v_m\ . \tag{2.62}$$

Evidentemente, los 2^N estados

$$\Psi_a^{\emptyset_1\emptyset_2\ldots\emptyset_N} \equiv \Psi_\xi^{\emptyset_1\emptyset_2\ldots\emptyset_N}\ , \tag{2.63}$$

son independientes de v y son los estados que identificamos como las componentes de Ψ_ξ. Podemos integrar primero las variables fermiónicas v en la Ec. (2.49), para obtener una expresión de la forma

$$\sum_{\emptyset_1}\cdots\sum_{\emptyset_N}\int \lambda_a^{\emptyset_1\emptyset_2\ldots\emptyset_N}\, \Psi_a^{\emptyset_1\emptyset_2\ldots\emptyset_N}\, da \;=\; 0\ , \tag{2.64}$$

donde los números $\lambda_a^{\emptyset_1\emptyset_2\ldots\emptyset_N}$ son puramente bosónicos. Puesto que ahora estamos en el dominio de la mecánica cuántica en el espacio y estamos suponiendo que la solución a (2.64) es $\lambda_a^{\emptyset_1\emptyset_2\ldots\emptyset_N} = 0$, se sigue que siempre podemos escoger a los vectores $\Psi_{a;i_1 i_2\ldots i_N}^{\emptyset_1\emptyset_2\ldots\emptyset_N}$ de tal forma que satisfagan

$$\left(\Psi_a^{\emptyset_1\emptyset_2\ldots\emptyset_N}\right)^\dagger \left(\Psi_{a'}^{\emptyset'_1\emptyset'_2\ldots\emptyset'_N}\right) = \;\delta(a^* - a')\,\delta_{\emptyset_1\emptyset'_1}\delta_{\emptyset_2\emptyset'_2}\ldots\delta_{\emptyset_N\emptyset'_N}\ , \tag{2.65}$$

donde $\delta(a^* - a')$ representa un producto de funciones deltas de Dirac y de Kronecker. Con la ayuda de (2.62), vemos inmediatamente que

$$\left(\Psi_{\xi}^{\emptyset_1 \ldots \emptyset_{N-1}}\right)^{\dagger}\left(\Psi_{\xi'}^{\emptyset_1 \ldots \emptyset_{N-1}}\right) = \left(\Psi_{a}^{\emptyset_1 \ldots \emptyset_{N}}\right)^{\dagger}\left(\Psi_{a'}^{\emptyset'_1 \ldots \emptyset'_{N}}\right)\exp[v_N^* v'_N] \tag{2.66}$$

y mediante inducción matemática, demostramos que

$$\left(\Psi_{\xi}^{\emptyset_1 \ldots \emptyset_{m-1}}\right)^{\dagger}\left(\Psi_{\xi'}^{\emptyset'_1 \ldots \emptyset'_{m-1}}\right) = \left(\Psi_{a}^{\emptyset_1 \ldots \emptyset_{m}}\right)^{\dagger}\left(\Psi_{a'}^{\emptyset'_1 \ldots \emptyset'_{m}}\right)\exp\left[\sum_{k=1}^{m} v_k^* v'_k\right] . \tag{2.67}$$

De esta última relación, llegamos a la Ec. (2.58). Como queriamos demostrar.

Definimos el "dual fermiónico" $\tilde{\Psi}_{a,\tilde{v}}$ de $\Psi_{a,v}$, mediante la transformada de Fourier introducida en (2.40) (sin el factor $(-)g^N$),

$$\tilde{\Psi}_{a,v} \; = \; \int \exp\left[-\sum_{i}^{N} v_i \tilde{v}_i\right] \Psi_{a,\tilde{v}} d^N\tilde{v} \; , \tag{2.68}$$

o bien, la relación inversa

$$\Psi_{a,v} \; = \; (-)^N (-)^{g_N} \int \exp\left[-\sum_{i}^{N} v_i \tilde{v}_i\right] \tilde{\Psi}_{a,\tilde{v}} \, d^N\tilde{v} \tag{2.69}$$

La normalización resultante entre los estados Ψ_{ξ} y $\tilde{\Psi}_{\xi^*}$ es

$$\tilde{\Psi}_{\xi^*}^{\dagger} \Psi_{\xi'} = \delta\left(\xi' - \xi\right) \tag{2.70}$$

con

$$\delta\left(\xi' - \xi\right) \; = \; \delta(a' - a)\delta^N\left(v' - v\right) \; . \tag{2.71}$$

De aqui se sigue que *aunque no podemos normalizar los estados con la delta fermiónica, siempre podemos introducir otro estado equivalente [debido a la relaciones* (2.68) *y* (2.69)*] que si normaliza con esta función.*

Para un conjunto completo de estados $\{\Psi_\xi\}$, se cumple que cualquier vector de estado Ω se puede escribir como

$$\Omega = \int \Psi_\xi \, \alpha_\xi \, d\xi \ . \tag{2.72}$$

Tomando el producto interior de este estado con $\tilde{\Psi}_{\xi^*}$, obtenemos

$$(\alpha_\xi)_c = \left(\tilde{\Psi}_{\xi^*}^\dagger \Omega\right)_c , \quad (\alpha_\xi)_a = (-)^N \left(\tilde{\Psi}_{\xi^*}^\dagger \Omega\right)_a \tag{2.73}$$

donde $(\alpha_\xi)_c$ y $(\alpha_\xi)_a$ son las partes bosónicas y fermiónicas de α_ξ, respectivamente. De aqui, se sigue que si Ω puede ser escrito solamente con coeficientes α_ξ bosónicos, tenemos

$$\Omega = \int \Psi_\xi \left(\tilde{\Psi}_{\xi^*}^\dagger \Omega\right) d\xi \ . \tag{2.74}$$

2.2. Transformaciones Cuánticas de súper Poincaré

De acuerdo con el *teorema fundamental de las representaciones de grupos de simetría de Wigner* [26], cualquier transformación en el espacio de Hilbert de estados físicos se representa por operadores lineales y unitarios o por operadores antilineales y antiunitarios[8]. En esta sección, nos restringimos a operadores unitarios U, esto es, para dos vectores de estado Ψ y Ψ' consideramos operadores que satisfacen la propiedad

$$\Psi^\dagger \Psi' = (\mathsf{U}\Psi)^\dagger (\mathsf{U}\Psi') \ . \tag{2.75}$$

Estamos interesados en operadores unitarios que provienen de grupos de simetría con elementos $\{T\}$. Estos operadores unitarios forman una representación, en el sentido de que para los elementos T_1 y T_2 de este grupo, se cumple que[9]

$$\mathsf{U}(T_1)\,\mathsf{U}(T_2) = \mathsf{U}(T_1 T_2) \ , \tag{2.76}$$

[8]Para una derivación detallada del teorema, consúltese Ref. [17].

[9]Puesto que estamos interesados en *rayos* y no vectores en el espacio de Hilbert, las simetrías pueden formar *representaciones proyectivas*. En este trabajo no consideramos este tipo de transformaciones. Para el lector interesado en estas cuestiones, una referencia clásica es [27].

El primer asunto que nos compete, es el de discernir si $\mathsf{U}(T)$ es puro o impuro. Hasta donde sabemos, no existe un tratamiento general de esta cuestión. Aquí simplemente supondremos que $\mathsf{U}(T)$ es bosónico.

Consideramos ahora el caso de *grupos continuos conexos* [28]. Nos concentramos en los elementos T_ε, del grupo en cuestión, tales que ε varia continuamente y T_0 es la identidad. Para valores de ε lo suficientemente pequeños, podemos escribir

$$\mathsf{U}(T_\varepsilon) \;=\; \mathsf{I} \,+\, i\varepsilon_a \mathsf{T}^a \,+\, \ldots \tag{2.77}$$

donde los T^a, los generadores de la representación unitaria del grupo, son operadores Hermíticos y el índice a corre sobre todos los generadores linealmente independientes. El número máximo de estos generadores, define la dimensión del grupo (y por tanto del vector ε). Para grupos de supervariedades que admiten un conjunto de coordenadas cuyas componentes son puras, aunado a la suposición de que U es bosónico, *los generadores* T^a *son puros*. En este caso, los generadores satisfacen las relaciones de (anti)conmutación:

$$\left[\mathsf{T}^a, \mathsf{T}^b\right\} \;=\; f^{ab}_{\;\;c}\, \mathsf{T}^c \;, \tag{2.78}$$

con

$$\left[\mathsf{T}^a, \mathsf{T}^b\right\} \;\equiv\; \mathsf{T}^a\mathsf{T}^b \;-\; (-)^{\epsilon_a \epsilon_b}\, \mathsf{T}^b\mathsf{T}^a \tag{2.79}$$

y donde las cantidades $f^{ab}_{\;\;c}$ son bosónicas, llamadas *constantes de estructura*. Estas relaciones de (anti)conmutación, encarnan una *superalgebra de Lie* [29].

El superespaciotiempo[10], consiste en la unión del 4-vector bosónico x_μ con el 4-espinor fermiónico ϑ_α. El grupo de súper Poincaré, viene definido por el conjunto de transformaciones en el superespaciotiempo de la forma

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_{\;\;\nu}\, x^\nu \,+\, a^\mu \,+\, D(\Lambda)\vartheta\cdot\gamma^\nu\zeta, \quad \vartheta' \;=\; D(\Lambda)\,\vartheta \,+\, \zeta \;, \tag{2.80}$$

[10] El $\mathcal{N}$-superespaciotiempo, viene definido, por x^μ y $\mathcal{N}$ 4-espinores fermiónicos, entonces en esta nomenclatura lo que nosotros llamamos simplemente como superespaciotiempo, es el ($\mathcal{N}=1$)-superespaciotiempo.

donde $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ es una matriz del grupo homogéneo de Lorentz, a^{μ} es un 4-vector bosónico y ζ es un 4-espinor fermiónico. La matriz $D(\Lambda)$ es un elemento de la representación de Dirac[11]. Por lo pronto sera muy conveniente dejar ζ_{α} general, sin suponer ninguna condición extra de realidad (condición de Majorana). Entonces, el grupo de súper Poincaré viene definido como el conjunto de elementos

$$T(\Lambda, a, \zeta) \ , \tag{2.81}$$

cuya regla de composición

$$T\left(\Lambda_{1}, a_{1}, \zeta_{1}\right) \circ T(\Lambda_{2}, a_{2}, \zeta_{2}) = T\left(\Lambda_{12}, a_{12}, \zeta_{12}\right) \ , \tag{2.82}$$

satisface las relaciones

$$\begin{aligned} \Lambda_{12} &= \Lambda_{1}\Lambda_{2} \\ a^{\mu}_{12} &= (\Lambda_{1})^{\mu}{}_{\nu}\, a^{\nu}_{2} \ + \ a^{\mu}_{1} \ + \ D(\Lambda_{1})\zeta_{2} \cdot \gamma^{\mu}\zeta_{1} \\ \zeta_{12} &= D(\Lambda_{1})\zeta_{2} \ + \ \zeta_{1} \ . \end{aligned} \tag{2.83}$$

El elemento identidad y el elemento inverso de $T(\Lambda, a, \zeta)$ vienen dados por

$$T(I, 0, 0), \quad T\left(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a, -D(\Lambda^{-1})\zeta\right) \ , \tag{2.84}$$

respectivamente. Dos subconjuntos importantes de transformaciones de súper Poincaré son:

- Las Transformaciones de inhomegéneas Lorentz,

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\mu} \ + \ a^{\mu}, \quad \vartheta'_{\alpha} \ = \ (D(\Lambda)\, \vartheta)_{\alpha} \tag{2.85}$$

- Las transformaciones supersimétricas,

$$x'^{\mu} \ = \ x^{\mu} + \vartheta \cdot \gamma^{\mu}\zeta, \quad \vartheta'_{\alpha} \ = \ \vartheta_{\alpha} \ + \ \zeta_{\alpha} \tag{2.86}$$

[11] Estamos definiendo la contracción (denotada por $\cdot$) de dos 4-espinores usando la matriz de $\epsilon\gamma_5$ de dimensión 4×4, para ver con más detalle las nuestras convenciones y notación, consúltese el apéndice A.

Para ahorrarnos notación, escribimos

$$T(\Lambda, a) = T(\Lambda, a, 0) \ , \quad T(\zeta) = T(I, 0, \zeta) \ . \tag{2.87}$$

Evidentemente, las transformaciones de Lorentz forman grupo. Cuando el contexto lo permita, escribimos simplemente $T(a) = T(I, a)$ y $T(\Lambda) = T(\Lambda, 0)$, para los subgrupos de traslaciones y homogéneo de Lorentz, respectivamente. Debido a la regla de composición (2.82),

$$T(\Lambda, a) = T(a) \circ T(\Lambda) \ . \tag{2.88}$$

Las transformaciones supersimétricas también forman grupo, el elemento inverso de $T(\zeta)$ viene dado por $T(-\zeta)$. La composición de dos transformaciones actúa como un grupo de traslaciones fermiónicas hasta una traslación,

$$T\left(\zeta_1\right) \circ T\left(\zeta_2\right) = T\left(I, \zeta_2 \cdot \gamma^\mu \zeta_1\right) \circ T\left(\zeta_1 + \zeta_2\right) \ , \tag{2.89}$$

donde el primer elemento del lado derecho es un elemento del grupo de traslaciones. Entonces, la composición de dos transformaciones supersimétricas conmuta hasta una traslación,

$$T\left(\zeta_1\right) \circ T\left(\zeta_2\right) = T\left(2\,\zeta_2 \cdot \gamma^\mu \zeta_1\right) \circ T\left(\zeta_2\right) \circ T\left(\zeta_1\right) \ . \tag{2.90}$$

La ventaja de no suponer de entrada la condición de Majorana en la variable ζ, es que podemos descomponer al conjunto de transformaciones supersimétricas en subconjuntos que si actúan como subgrupos de traslaciones fermiónicas. Cuando ζ no esta restringido, las partes izquierda y derecha de ζ son independientes. Siendo este el caso, podemos ver de la Ec. (2.89) que las transformaciones $T\left(\zeta_+\right)$ y $T\left(\zeta_-\right)$ forman subgrupos abelianos (cada uno por separado),

$$T\left(\zeta_{1\pm}\right) \circ T\left(\zeta_{2\pm}\right) = T\left[\left(\zeta_1 + \zeta_2\right)_\pm\right] \ , \tag{2.91}$$

donde $\zeta_\pm = \frac{1}{2}\left(I \pm \gamma_5\right)$. Entonces, la transformación supersimétrica para ζ arbitrario, $T(\zeta)$, puede expresarse en términos de $T(\zeta_+)$ y $T(\zeta_-)$,

$$T\left(\zeta\right) = T\left(-\zeta_- \cdot \gamma^\mu \zeta_+\right) \circ T\left(\zeta_+\right) \circ T\left(\zeta_-\right) \ . \tag{2.92}$$

El álgebra del grupo de súper Poincaré. Es momento de analizar a los generadores de las representaciones unitarias $\mathsf{U}(\Lambda, a, \zeta)$ del grupo de súper Poincaré. Tomamos en $T(\Lambda, a, \zeta)$ los parámetros continuos que estén conectados con la unidad $T(I, 0, 0)$ (esto es, nos restringimos a la parte conexa del grupo, el cual incluye al grupo propio ortócrono de Lorentz). Para valores

$$\Lambda^{\mu}_{\ \nu} \,=\, \delta^{\mu}_{\ \nu} \,+\, \omega^{\mu}_{\ \nu}, \quad a^{\mu} \,=\, \varepsilon^{\mu}, \quad \zeta_{\alpha} \,=\, \varpi_{\alpha} \;, \tag{2.93}$$

lo suficientemente pequeños, podemos expandir $\mathsf{U}(I + \omega, \varepsilon, \varpi)$ en serie de Taylor alrededor del operador identidad I,

$$\mathsf{U}(I + \omega, \varepsilon, \varpi) \,=\, \mathsf{I} \,+\, \tfrac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathsf{J}^{\mu\nu} \,-\, i\varepsilon_{\mu}\mathsf{P}^{\mu} \,+\, i\varpi \cdot \mathcal{Q} \,+\, \ldots \tag{2.94}$$

Formamos la siguiente composición de transformaciones unitarias:

$$\mathsf{U}(\Lambda, a, \zeta)\mathsf{U}(I + \omega, \varepsilon, \varpi)\mathsf{U}^{-1}(\Lambda, a, \zeta) \;. \tag{2.95}$$

de aquí podemos ver que

$$\begin{aligned} \mathsf{U}(\Lambda, a, \zeta)\, \mathsf{J}^{\mu\nu}\, \mathsf{U}^{-1}(\Lambda, a, \zeta) =&\; \Lambda_{\rho}^{\ \mu}\Lambda_{\sigma}^{\ \nu}\left(\mathsf{J}^{\rho\sigma} \,-\, a^{\rho}\mathsf{P}^{\sigma} \,+\, a^{\sigma}\mathsf{P}^{\rho}\right. \\ &\left. \qquad\qquad -\, i\left(\mathcal{J}^{\rho\sigma}\zeta\right) \cdot \left[\mathcal{Q} \,-\, \not{\mathsf{P}}\zeta\right]\right) \;, \\ \mathsf{U}(\Lambda, a, \zeta)\, \mathsf{P}^{\mu}\, \mathsf{U}^{-1}(\Lambda, a, \zeta) =&\; \Lambda_{\rho}^{\ \mu}\mathsf{P}^{\rho} \;, \\ \mathsf{U}(\Lambda, a, \zeta)\, \mathcal{Q}_{\alpha}\, \mathsf{U}^{-1}(\Lambda, a, \zeta) =&\; \left[D\left(\Lambda^{-1}\right)\left(\mathcal{Q} \,-\, 2\not{\mathsf{P}}\zeta\right)\right]_{\alpha} \;, \end{aligned} \tag{2.96}$$

donde $\mathcal{J}^{\rho\sigma}$ son las matrices generadores de la representación de Dirac,

$$D(\Lambda) \,=\, I + (i/2)\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu} \,+\, \ldots \tag{2.97}$$

Haciendo de nuevo la identificación $(\Lambda, a, \zeta) \to (I + \omega, \varepsilon, \varpi)$ en la Ec. (2.96), obtenemos el superálgebra del los generadores del grupo de súper Poincaré,

$$\begin{aligned}
i\left[\mathsf{J}^{\mu\nu}, \mathsf{J}^{\rho\sigma}\right] &= \eta^{\mu\rho}\mathsf{J}^{\sigma\nu} - \eta^{\mu\sigma}\mathsf{J}^{\rho\nu} + \eta^{\rho\nu}\mathsf{J}^{\mu\sigma} - \eta^{\sigma\nu}\mathsf{J}^{\mu\rho}, \\
i\left[\mathsf{P}^{\mu}, \mathsf{J}^{\rho\sigma}\right] &= \eta^{\mu\rho}\mathsf{P}^{\sigma} - \eta^{\mu\sigma}\mathsf{P}^{\rho}, \\
\left[\mathsf{P}^{\mu}, \mathsf{P}^{\nu}\right] &= 0 \\
\left[\mathcal{Q}_\alpha, \mathsf{J}^{\rho\sigma}\right] &= \left(\mathcal{J}^{\rho\sigma}\mathcal{Q}\right)_\alpha \ , \\
\left\{\mathcal{Q}_\alpha, \mathcal{Q}_\beta\right\} &= +2i\left(\epsilon\gamma_5 \not{\mathsf{P}}\right)_{\alpha\beta} \ , \\
\left[\mathsf{P}^{\mu}, \mathcal{Q}_\alpha\right] &= 0 \ .
\end{aligned} \tag{2.98}$$

Debido a que las constantes de estructura asociadas a $[\mathsf{P}^\mu, \mathsf{P}^\nu]$ y $\{\mathcal{Q}_{\pm\alpha}, \mathcal{Q}_{\pm\beta}\}$ son cero, las transformaciones unitarias para a^μ y $\zeta_\pm$ finitos vienen dadas por los mapeos exponenciales

$$\mathsf{U}(a) \ = \ \exp\left[-i\, a_\mu \mathsf{P}^\mu\right], \quad \mathsf{U}(\zeta_\pm) \ = \ \exp\left[+i\, \zeta_\pm \cdot \mathcal{Q}\right] \ . \tag{2.99}$$

Más aún, la transformación supersimétrica general viene también dada por el mapeo exponencial

$$\mathsf{U}(\zeta) \ = \ \exp\left[+i\zeta \cdot \mathcal{Q}\right] \ . \tag{2.100}$$

Para ver esto, usamos la fórmula (Zassenhaus)

$$e^{t(X+Y)} = e^{tX}\, e^{tY}\, e^{-\frac{t^2}{2}[X,Y]}\, e^{\frac{t^3}{6}(2[Y,[X,Y]]+[X,[X,Y]])} \cdots \ , \tag{2.101}$$

junto con

$$\left[\left\{\mathcal{Q}_\alpha, \mathcal{Q}_\beta\right\}, \mathcal{Q}_\delta\right] \ = \ 0 \ , \tag{2.102}$$

y

$$\left[+i\zeta' \cdot \mathcal{Q}, +i\zeta \cdot \mathcal{Q}\right] = \ +2i\, \zeta' \cdot \not{\mathsf{P}}\zeta \ , \tag{2.103}$$

para ver que

$$\exp\left[+i\zeta \cdot \mathcal{Q}\right] \ = \ \mathsf{U}\left(-\zeta \cdot \gamma^\mu \zeta_-\right) \mathsf{U}(\zeta_+) \mathsf{U}(\zeta_-) \ . \tag{2.104}$$

Aunque hemos dejado ζ sin constricciones. Los operadores $\mathcal{Q}_\alpha$ satisfacen la condición de Majorana

$$\mathcal{Q}_\alpha^\dagger = (\epsilon\gamma_5\beta\mathcal{Q})_\alpha \ . \tag{2.105}$$

por lo que

$$\mathsf{U}(\zeta)^\dagger = \mathsf{U}(-\epsilon\gamma_5\beta\zeta^*) \tag{2.106}$$

2.3. Las superpartículas-$(\pm)$

Puesto que los generadores de las traslaciones conmutan: $[\mathsf{P}^\mu, \mathsf{P}^\nu] = 0$, podemos etiquetar a los estados de superpartícula con los eigenvalores p^μ de los operadores P^μ. Para cada dicho estado $\Psi_{p,\sigma}$, donde σ representa otras posibles etiquetas del estado, construimos dos estados $\Psi^\pm_{p,0,\sigma}$ que:

- Siguen siendo eigenestados de P^μ:

$$\mathsf{P}^\mu\Psi^\pm_{p,0,\sigma} = p^\mu\Psi^\pm_{p,0,\sigma} \ . \tag{2.107}$$

- Son aniquilados por $\mathcal{Q}_{\mp\alpha}$:

$$\mathcal{Q}_\mp\Psi^\pm_{p,0,\sigma} = 0 \ . \tag{2.108}$$

- Comparten con $\Psi_{p,\sigma}$ las mismas propiedades de transformación bajo la acción $\mathsf{U}(\Lambda)$ del grupo homogéneo de Lorentz.

Si $\Psi_{p,\sigma}$ ya satisface las relaciones $\mathcal{Q}_+\Psi_{p,0,\sigma} = 0$ o $\mathcal{Q}_-\Psi_{p,0,\sigma} = 0$, tomamos simplemente $\Psi^+_{p,0,\sigma} = \Psi_{p,0,\sigma}$ o $\Psi^-_{p,0,\sigma} = \Psi_{p,0,\sigma}$, respectivamente. Si no (o si solo para un signo), tomando en cuenta que $\mathcal{Q}\cdot\gamma_5\mathcal{Q}_\mp\Psi_{p,\sigma}$ no es siempre cero[12] para todo $\Psi_{p,\sigma}$, tomamos

$$\Psi^\pm_{p,0,\sigma} \equiv (\mathcal{Q}\cdot\gamma_5\mathcal{Q}_\mp)\ \Psi_{p,\sigma} \ , \tag{2.109}$$

[12]De otra manera tendríamos que $\mathcal{Q}\cdot\gamma_5\mathcal{Q}_\mp$ es un operador Casimir del supergrupo. Se puede ver de las reglas de transformación supersimétricas que actúan sobre los generadores $\mathcal{Q}_\alpha$, que este no es el caso.

El primer y el tercer punto se cumplen porque $\mathcal{Q} \cdot \gamma_5 \mathcal{Q}_\mp$ es un invariante de Lorentz. El segundo punto se sigue de $\{\mathcal{Q}_{\mp\alpha}, \mathcal{Q}_{\mp\beta}\} = 0$. Aunque la notación no lo sugiere, los estados $\Psi^+_{p,0,\sigma}$ y $\Psi^-_{p,0,\sigma}$ construidos de la manera descrita, no tienen porque provenir del mismo $\Psi_{p,\sigma}$. Puesto que estamos tomando como bosónicas a la representaciones del grupo de súper Poincaré, la pureza (supersimétrica) de un estado permanece invariante ante estas transformaciones. En suma, poniendo las cosas en términos de transformaciones finitas, tenemos que *siempre podemos construir dos tipos de estados* $\Psi^+_{p,0,\sigma}$ *y* $\Psi^-_{p,0,\sigma}$ *con pureza definida que satisfacen*

$$\mathsf{U}(a)\Psi^\pm_{p,0,\sigma} \,=\, e^{-i(a\cdot p)}\Psi^\pm_{p,0,\sigma} \ , \quad \mathsf{U}\left(\zeta_\mp\right)\Psi^\pm_{p,0,\sigma} \,=\, \Psi^\pm_{p,0,\sigma} \ . \tag{2.110}$$

Construimos $\Psi^\pm_{p,0,\sigma}$ de tal manera que transforme unitariamente bajo el grupo de Lorentz, mediante el método de *representaciones inducidas de Wigner* [23], el cual esbozamos a continuación. Para todos los vectores p^μ en la misma capa de masa, esto es, para $p^\mu p_\mu$ fijo, podemos escoger un vector estándar k^μ, tal que $p^\mu \equiv L(p)^\mu{}_\nu k^\nu$, donde $L(p)^\mu{}_\nu$ es una matriz de Lorentz. De esta manera, los estados $\Psi^\pm_{p,0,\sigma}$ quedan definidos en términos de los estados $\Psi^\pm_{k,0,\sigma}$ evaluados en el vector estándar k^μ:

$$\Psi^\pm_{p,0,\sigma} \,\equiv\, N(p)\mathsf{U}(L(p))\Psi^\pm_{k,0,\sigma} \ , \tag{2.111}$$

donde $N(p)$ es la constante de normalización. Operando estos estados con una transformación de Lorentz, obtenemos

$$\mathsf{U}(\Lambda)\Psi^\pm_{p,0,\sigma} \,=\, \frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}\left(W\left(\Lambda,p\right)\right)\Psi^\pm_{\Lambda p,0,\sigma'} \tag{2.112}$$

donde $W\left(\Lambda,p\right) \equiv L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$ es un elemento del conjunto de transformaciones $\{W^\mu{}_\nu\}$ que dejan invariante al vector k^μ,

$$k^\mu \,=\, W^\mu{}_\nu k^\nu \ . \tag{2.113}$$

Estas transformaciones forman grupo, el llamado *grupo pequeño de Wigner* [23].[13] El conjunto de matrices $D_{\sigma'\sigma}(W)$, forman una representación de este grupo pequeño,

$$D(\bar{W}W) = D(\bar{W})D(W) \ . \tag{2.114}$$

Definimos a los estados generales de superpartículas-($\pm$) mediante las relaciones

$$\Psi^{\pm}_{p,s_\pm,\sigma} \equiv \mathsf{U}(s_\pm)\Psi^{\pm}_{p,0,\sigma} \ , \tag{2.115}$$

esto es, etiquetamos a los estados de superpartículas-($\pm$), mediante el 4-momento p^μ, el espinor $s_\pm$ y el grado interno de libertad interno σ. Podemos ver que

$$\mathsf{U}(\zeta_\pm)\Psi^{\pm}_{p,s_\pm,\sigma} = \Psi^{\pm}_{p,(s+\zeta)_\pm,\sigma} \ , \quad \mathsf{U}(\zeta_\mp)\Psi^{\pm}_{p,s_\pm,\sigma} = e^{2i\left[\zeta\cdot(\not{p}s)_\mp\right]}\,\Psi^{\pm}_{p,s_\pm,\sigma} \ , \tag{2.116}$$

además, $\mathsf{U}(\Lambda)\mathsf{U}(s_\pm)\mathsf{U}(\Lambda)^{-1} = \mathsf{U}(D(\Lambda)s_\pm)$ y $\mathsf{U}(a)\mathsf{U}(s_\pm) = \mathsf{U}(s_\pm)\mathsf{U}(a)$, por lo que la acción del grupo de súper Poincaré sobre los estados de superpartícula-($\pm$) viene dada por

$$\mathsf{U}(a)\Psi^{\pm}_{p,s_\pm,\sigma} = e^{-i(a\cdot p)}\Psi^{\pm}_{p,s_\pm,\sigma} \ , \tag{2.117}$$

$$\mathsf{U}(\Lambda)\Psi^{\pm}_{p,s_\pm,\sigma} = \frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}\left(W\left(\Lambda,p\right)\right)\Psi^{\pm}_{\Lambda p,D(\Lambda)s_\pm,\sigma'} \ , \tag{2.118}$$

$$\mathsf{U}(\zeta)\Psi^{\pm}_{p,s_\pm,\sigma} = \exp\left[i\left(\zeta_\mp\right)\cdot\not{p}\left(2s + \zeta\right)\right]\Psi^{\pm}_{p,(s+\zeta)_\pm,\sigma} \ . \tag{2.119}$$

Entonces, el producto interior entre dos vectores de estado nos queda

$$\left(\Psi^{\pm}_{p',s'_\pm,\sigma'}\right)^\dagger\Psi^{\pm}_{p,s_\pm,\sigma} = \left(\Psi^{\pm}_{p',0,\sigma'}\right)^\dagger\left(\mathsf{U}\left(s'_\pm\right)^\dagger\mathsf{U}\left(s_\pm\right)\Psi^{\pm}_{p,0,\sigma}\right) \ . \tag{2.120}$$

[13]Evidentemente, la matriz unidad esta en estas transformaciones. Si W y W' dejan invariante a k, también lo hace WW'. Por lo que de hecho estas transformaciones forman grupo. En matemáticas o para grupos diferentes al de Lorentz, a los grupos pequeños se les conoce como *grupos de estabilidad*.

Con la ayuda de las Ecs. (2.90) y (2.106), pasamos $\mathsf{U}\left(s'_{\pm}\right)^{\dagger}$ a la derecha de $\mathsf{U}\left(s_{\pm}\right)$,

$$\mathsf{U}\left(s'_{\pm}\right)^{\dagger}\mathsf{U}\left(s_{\pm}\right) \;=\; \exp\left[-2i\overline{s'}\not{P}s_{\pm}\right]\mathsf{U}\left(s_{\pm}\right)\mathsf{U}\left(s'_{\pm}\right)^{\dagger} \;. \tag{2.121}$$

De esto último, y del hecho de que $\Psi^{\pm}_{p,0,\sigma}$ permanece invariante bajo la acción de $\mathsf{U}\left(s'_{\pm}\right)^{\dagger}$ [ver Ec. (2.110)], obtenemos el producto interior de dos estados generales, en términos de los estados en el origen en sus argumentos fermiónicos:

$$\left(\Psi^{\pm}_{p',s'_{\pm},\sigma'}\right)^{\dagger}\Psi^{\pm}_{p,s_{\pm},\sigma} \;=\; \exp\left[-2i\left(\overline{s'}\not{p}s_{\pm}\right)\right]\left\{\left(\Psi^{\pm}_{p',0,\sigma'}\right)^{\dagger}\Psi^{\pm}_{p,0,\sigma}\right\} \;. \tag{2.122}$$

La normalización de los estados $\Psi^{\pm}_{k,0,\sigma}$, evaluados en los momentos estándares, siempre se puede escoger como [17]:

$$\left(\Psi^{\pm}_{k',0,\sigma'}\right)^{\dagger}\Psi^{\pm}_{k,0,\sigma} \;=\; \delta^{3}\left(\mathbf{k}'-\mathbf{k}\right)\delta_{\sigma\sigma'} \;. \tag{2.123}$$

Tomando la constante normalización como

$$N(p) \;=\; \sqrt{k^{0}/p^{0}} \;, \tag{2.124}$$

obtenemos la expresión para la normalización de los estados de momento arbitrario $\Psi^{\pm}_{p,0,\sigma}$,

$$\left(\Psi^{\pm}_{p',0,\sigma'}\right)^{\dagger}\Psi^{\pm}_{p,0,\sigma} \;=\; \delta^{3}\left(\mathbf{p}'-\mathbf{p}\right)\delta_{\sigma\sigma'} \;. \tag{2.125}$$

De la Ec. (2.122) se sigue que la normalización de los vectores de superpartícula-($\pm$) viene dada por

$$\left(\Psi^{\pm}_{p',s'_{\pm},\sigma'}\right)^{\dagger}\Psi^{\pm}_{p,s_{\pm},\sigma} \;=\; \exp\left[-2i\left(\overline{s'}\not{p}s_{\pm}\right)\right]\delta^{3}\left(\mathbf{p}'-\mathbf{p}\right)\delta_{\sigma\sigma'} \;. \tag{2.126}$$

Podemos ver que la normalización de los superestados de partícula, es consistente con la Ec. (2.58), hemos visto que esta normalización de los superestados garantiza la independencia lineal en el superespacio.

¿Qué relación existe entre los estados $\Psi^{+}_{p,s_{\pm},\sigma}$ y $\Psi^{-}_{p,s_{\pm},\sigma}$? Ciertamente, si ambos estados son construidos como en la Ec. (2.109), estos son independientes. Esto porque si

$$\Psi^{+}_{p,s_\pm,\sigma} \;=\; \mathcal{Q}\cdot\gamma_5\mathcal{Q}_+\Psi_{p\sigma}, \quad \Psi^{-}_{p,0,\sigma} \;=\; \mathcal{Q}\cdot\gamma_5\mathcal{Q}_-\Psi'_{p\sigma} \;, \tag{2.127}$$

se sigue que

$$\begin{aligned}\left(\Psi^{+}_{p,0,\sigma}\right)^{\dagger}\Psi^{-}_{p',0,\sigma'} &= \left(\Psi_{p,\sigma}\right)^{\dagger}\left[\left(\mathcal{Q}\cdot\gamma_5\mathcal{Q}_+\right)^{\dagger}\mathcal{Q}\cdot\gamma_5\mathcal{Q}_-\right]\Psi'_{p',\sigma'} \\ &= 0\;. \end{aligned} \tag{2.128}$$

La última igualdad se sigue del hecho de que el 4-espinor $\mathcal{Q}$ satisface la condición de Majorana y por tanto

$$\left(\mathcal{Q}\cdot\gamma_5\mathcal{Q}_+\right)^{\dagger} \;=\; -\left(\mathcal{Q}\cdot\gamma_5\mathcal{Q}_-\right) \tag{2.129}$$

El punto clave de esta discusión, es que para cada conjunto de vectores de superestado $\Psi^{+}_{p,s_+,\sigma}(\tilde{\Psi}^{-}_{p,s_-,\sigma})$ siempre podemos construir otro conjunto de superestados $\tilde{\Psi}^{-}_{p,s_-,\sigma}(\tilde{\Psi}^{+}_{p,s_+,\sigma})$ que tienen las mismas propiedades de transformación que los superestados $\Psi^{-}_{p,s_-,\sigma}(\Psi^{+}_{p,s_+,\sigma})$. Los superestados $\tilde{\Psi}^{\pm}_{p,s_\pm,\sigma}$ vienen definidos por la transformada fermiónica

$$\tilde{\Psi}^{\pm}_{p,s_\pm,\sigma} \equiv \int \exp\left[2i\,s_\pm\cdot\not{p}s'\right]\Psi^{\mp}_{p,s'_\mp,\sigma}\,d\left[p,s'_\mp\right] \;, \tag{2.130}$$

donde $d\left[p,s'_\pm\right]$ es una integral de volumen (de la cual hablaremos un poco más adelante) en general, dependiente del momento p^μ. Bajo una transformación supersimétrica,

$$\mathsf{U}(\zeta)\tilde{\Psi}^{\pm}_{p,s_\pm,\sigma} = e^{\left[i(\zeta_\mp)\cdot\not{p}(2s+\zeta)\right]}\int e^{\left[2i\,(s+\zeta)_\pm\cdot\not{p}(s'+\zeta)\right]}\,\Psi^{\mp}_{p,(s'+\zeta)_\mp,\sigma}\,d\left[p,s'_\mp\right] \;. \tag{2.131}$$

Como cualquier otra integral de volumen, esperamos que esta sea invariante ante traslaciones, entonces

$$\mathsf{U}(\zeta)\tilde{\Psi}^{\pm}_{p,s_\pm,\sigma} = \exp\left[i\,(\zeta_\mp)\cdot\not{p}\,(2s\,+\,\zeta)\right]\tilde{\Psi}^{\pm}_{p,(s+\zeta)_\pm,\sigma}\;. \tag{2.132}$$

Cuando $\Psi^{+}_{p,s_\pm,\sigma}$ y $\Psi^{-}_{p,s_\pm,\sigma}$ son independientes, tenemos una representación reducible del grupo de súper Poincaré.

Cerramos esta sección exponiendo la clasificación de los grupos pequeños. Para $p^\mu p_\mu \leq 0$, el signo de p^0 permanece invariante ante transformaciones del grupo propio ortócrono de Lorentz. En la tabla 1, mostramos los grupos de pequeños del grupo de Poincaré.

Clase de vectores.	Vector estándar k^μ.	Grupo pequeño.
$p^\mu p_\mu < 0, \quad p^0 > 0$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & M \end{pmatrix}$, $M > 0$	$SO(3)$
$p^\mu p_\mu < 0, \quad p^0 < 0$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & M \end{pmatrix}$, $M < 0$	$SO(3)$
$p^\mu p_\mu = 0, \quad p^0 > 0$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \kappa & \kappa \end{pmatrix}$, $\kappa > 0$	$ISO(2)$
$p^\mu p_\mu = 0, \quad p^0 < 0$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \kappa & -\kappa \end{pmatrix}$, $\kappa > 0$	$ISO(2)$
$p^\mu p_\mu > 0,$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & N & 0 \end{pmatrix}$,	$SO(2,1)$

Tabla 1. Grupos pequeños del grupo propio ortócrono de Lorentz.

Obviamente, de mayor utilidad para la física son las representaciones $p^\mu p_\mu = -M^2$, $p^0 < 0$ y $p^\mu p_\mu = 0$, $p^0 < 0$, en este estudio, nos restringimos a estos casos. Usaremos los vectores estándar que aparecen en la Tabla 1.

2.4. Los estados de partícula

Puesto que $s_{\pm\alpha} s_{\pm\beta} s_{\pm\gamma} = 0$, la expansión de cualquier función de la variable $s_\pm$ termina a segundo orden. Expandimos $\Psi^\pm_{p,s_\pm,\sigma}$ en potencias de $s_\pm$ por la izquierda, con el fin de para expresar este superestado en términos de sus *estados componente* $\Psi^{0,\pm}_{p,\sigma}$, $\Psi^{0,\pm}_{p,\sigma}$ y $\Psi^{2,\pm}_{p,\sigma}$:

$$\Psi^\pm_{p,s_\pm,\sigma} \equiv \Psi^{0,\pm}_{p,\sigma} + \kappa^0_\pm \left(\Psi^{1,\pm}_{p,\sigma}\right) \cdot (s_p)_\mp + \kappa^1_\pm \, \Psi^{2,\pm}_{p,\sigma} \left(s \cdot s_\pm\right) \ . \tag{2.133}$$

El estado $\Psi^{1,\pm}_{p,\sigma}$ es un vector de cuatro componentes con los mismos índices que usamos para los cuatro espinores. El 4-espinor s_p viene definido como

$$s_p \equiv \epsilon\gamma_5\beta\, D[L(p)]^{-1} s \ . \tag{2.134}$$

Puesto que $\Psi^{1,+}_{p,\sigma}$ y $\Psi^{1,-}_{p,\sigma}$ entran siempre como proyecciones izquierdas y derechas, respectivamente, sin perdida de generalidad suponemos

$$\tfrac{1}{2}\,(I \mp \gamma_5)\ \Psi^{1,\pm}_{p,\sigma} = 0 \ . \tag{2.135}$$

A primera instancia parece criminal expandir al coeficiente lineal no como $s_{\pm\alpha}$ sino como $(\epsilon\gamma_5\beta D[L(p)]^{-1}s_{\pm})_{\alpha}$. Lo importante es que $\epsilon\gamma_5\beta D[L(p)]^{-1}$ es invertible y por tanto la expansión lineal esta bien definida. Con esta identificación, junto con la Ec. (2.117), vemos que los estados componente transforman bajo el grupo de traslaciones como

$$\mathsf{U}(a)\Psi^{(0,1,2),\pm}_{p,\sigma} = e^{-i(a\cdot p)}\ \Psi^{(0,1,2),\pm}_{p,\sigma} \tag{2.136}$$

Puesto que $s\cdot s = D(\Lambda)s\cdot D(\Lambda)s$, las transformaciones de Lorentz sobre los estados $\Psi^{0,\pm}_{p,\sigma}$ y $\Psi^{2,\pm}_{p,\sigma}$ son las mismas,

$$\mathsf{U}(\Lambda)\Psi^{(0,2),\pm}_{p,\sigma} = \frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\sum_{\sigma'} D^{(j)}_{\sigma'\sigma}\left(W\left(\Lambda,p\right)\right)\Psi^{(0,2),\pm}_{p,\sigma} \ . \tag{2.137}$$

El cuatro espinor s_p satisface la relación[14]

$$\left(D\left(\Lambda\right)s\right)_{\Lambda p} = D\left[W^{-1}(\Lambda,p)\right]^{\dagger} s_p \ . \tag{2.138}$$

Entonces, la transformación de $\left(\Psi^{1,\pm}_{p,\sigma}\right)_{\alpha}$ bajo el grupo de Lorentz es

$$\mathsf{U}(\Lambda)\left(\Psi^{1,\pm}_{p,\sigma}\right)_{\alpha} = \frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\sum_{\sigma'\,\beta}\left\{D^{(j)}_{\sigma'\sigma}\left(W\left(\Lambda,p\right)\right)\right\}_{\beta\alpha}\left(\Psi^{1,\pm}_{p,\sigma}\right)_{\beta} \ , \tag{2.139}$$

[14]Solo basta notar que

$$\epsilon\gamma_5\beta\, D[L^{-1}(\Lambda p)\Lambda]s_{\pm} = D[W(\Lambda,p)]^{-1\dagger}\,\epsilon\gamma_5\beta\, D[L^{-1}(p)]s_{\pm}$$

con

$$\left\{ D^{(j)}_{\sigma'\sigma}\left(W\left(\Lambda,p\right)\right)\right\}_{\beta\alpha} \equiv D^{(j)}_{\sigma'\sigma}\left(W\left(\Lambda,p\right)\right)\left[D\left(W\left(\Lambda,p\right)\right)^{-1\dagger}\right]_{\beta\alpha} . \tag{2.140}$$

Analizaremos más adelante las implicaciones de estas transformaciones para los casos masivos y sin masa por separado.

Para encontrar los valores de los productos escalares de los estados $\Psi^{(0,1,2),\pm}_{p,\sigma}$, comparamos termino a termino en la variables fermiónicas los dos lados de la Eq. (2.126). Para ello, desarrollamos en serie de Taylor el factor exponencial $2\left(s'\cdot \not{p}s_\pm\right)^2$,

$$\exp\left[-2i\left(\bar{s'}\not{p}s_\pm\right)\right] = 1 - 2i\left(\bar{s'}\not{p}s_\pm\right) - p^\mu p_\mu (s'^* \cdot s'^*_\pm)(s\cdot s_\pm) , \tag{2.141}$$

donde hemos usado la relación $2\left(\bar{s'}\not{p}s_\pm\right)^2 = -m^2(s'^*\cdot s'^*)(s\cdot s)$. Inmediatamente se desprende que

$$\left(\Psi^{0,\pm}_{p,\sigma}\right)^\dagger\left(\Psi^{1,\pm}_{p',\sigma'}\right) = \left(\Psi^{0,\pm}_{p,\sigma}\right)^\dagger\left(\Psi^{2,\pm}_{p',\sigma'}\right) = \left(\Psi^{1,\pm}_{p,\sigma}\right)^\dagger\left(\Psi^{2,\pm}_{p',\sigma'}\right) = 0 . \tag{2.142}$$

Dicho con palabras, las componentes de los superestados de partícula son ortogonales. Más aún:

- Los estados $\Psi^{0,\pm}_{p,\sigma}$ son ortonormales:

$$\left(\Psi^{0,\pm}_{p',\sigma'}\right)^\dagger\left(\Psi^{0,\pm}_{p,\sigma}\right) = \delta^3\left(\mathbf{p}'-\mathbf{p}\right)\delta_{\sigma\sigma'} . \tag{2.143}$$

- La normalización de los estados $\Psi^{2,\pm}_{p,\sigma}$ depende de $(p^\mu p_\mu)$ y la cantidad $|\kappa^1_\pm|^2$:

$$|\kappa^1_\pm|^2\left(\Psi^{2,\pm}_{p',\sigma'}\right)^\dagger\left(\Psi^{2,\pm}_{p,\sigma}\right) = -\left(p^\mu p_\mu\right)\delta^3\left(\mathbf{p}'-\mathbf{p}\right)\delta_{\sigma\sigma'} . \tag{2.144}$$

- La normalización de los estados $\Psi^{2,\pm}_{p,\sigma}$ depende del vector estándar k^μ y la cantidad $|\kappa^0_\pm|^2$:

$$|\kappa^0_\pm|^2\left[\left(\Psi^{1,\pm}_{p',\sigma'}\right)_{\pm\alpha}\right]^\dagger\left(\Psi^{1,\pm}_{p,\sigma}\right)_{\pm\beta} = -2i\left(\not{k}\beta\right)_{\pm\alpha,\pm\beta}\delta^3\left(\mathbf{p}'-\mathbf{p}\right)\delta_{\sigma\sigma'} . \tag{2.145}$$

Para los estados $\Psi^{0,\pm}_{p,\sigma}$ y $\Psi^{2,\pm}_{p,\sigma}$, este resultado es inmediato[15] [ver las Ecs. (2.126) y (2.128)]. Mientras que para $\Psi^{1,\pm}_{p',\sigma'}$, notamos que el termino proporcional a $s'^{*}_{\pm\alpha}s_{\pm\alpha}$ en el lado izquierdo de (2.126), se puede expresar como [ver Ecs. (2.7) y (2.8)]

$$\begin{aligned}\left(\left(\Psi^{1,\pm}_{p',\sigma'}\right)\cdot\left(s'_{p'}\right)_{\pm}\right)^{\dagger}&\left(\left(\Psi^{1,\pm}_{p,\sigma}\right)\cdot\left(s_{p}\right)_{\pm}\right)\\ &=\left\{\left[\beta\,D[L(p')]^{-1}s'_{\pm}\right]^{*}_{\alpha}\left[\beta\,D[L(p)]^{-1}s_{\pm}\right]_{\beta}\right\}\left(\Psi^{1,\pm}_{p',\sigma'}\right)^{\dagger}_{\alpha}\left(\Psi^{1,\pm}_{p,\sigma}\right)_{\beta}\ .\end{aligned} \tag{2.146}$$

Además, al comparar el lado izquierdo de (2.126), obtenemos

$$2m\left(\Psi^{1,\pm}_{p',\sigma'}\right)^{\dagger}_{\pm\alpha}\left(\Psi^{1,\pm}_{p,\sigma}\right)_{\pm\beta}\;=\;-2i\left(D[L(p)]^{-1}\not{p}\,D[L(p)]\beta\right)_{\pm\alpha,\pm\beta}\delta^{3}\left(\mathbf{p}'-\mathbf{p}\right)\delta_{\sigma\sigma'}\ . \tag{2.147}$$

Finalmente, usamos $\not{p}\;=\;D(L(p))\not{k}D(L(p))^{-1}$ para llegar al resultado deseado.

Analizamos ahora como transforman los estados componente bajo las transformaciones supersimétricas. Para esto hacemos uso de las las Ecs. (2.133) y (2.119), bajo $\mathsf{U}(\zeta_{\mp})$, los estados componente transforman como

$$\begin{aligned}\mathsf{U}(\zeta_{\mp})\Psi^{0,\pm}_{p,\sigma}&=\;\Psi^{0,\pm}_{p,\sigma}\ ,\\ \kappa^{0}_{\pm}\,\mathsf{U}(\zeta_{\mp})\Psi^{1,\pm}_{p,\sigma}&=\;\kappa^{0}_{\pm}\,\Psi^{1,\pm}_{p,\sigma}\;+\;2i\,\left(\Psi^{0,\pm}_{p,\sigma}\right)\left(\not{k}^{*}\zeta_{p}\right)_{\mp}\ ,\\ \kappa^{1}_{\pm}\,\mathsf{U}(\zeta_{\mp})\Psi^{2,\pm}_{p,\sigma}&=\;\kappa^{1}_{\pm}\Psi^{2,\pm}_{p,\sigma}\;+\;i\kappa^{0}_{\pm}\,\Psi^{1,\pm}_{p,\sigma}\cdot\left(\not{k}^{*}\zeta_{p}\right)_{\mp}\;+\;p^{2}\Psi^{0,\pm}_{p,\sigma}(\zeta\cdot\zeta_{\mp})\ .\end{aligned} \tag{2.148}$$

Mientras que, bajo la acción de $\mathsf{U}(\zeta_{\pm})$ tenemos

$$\begin{aligned}\mathsf{U}(\zeta_{\pm})\Psi^{0,\pm}_{p,\sigma}&=\;\Psi^{0,\pm}_{p,\sigma}\;+\;\kappa^{0}_{\pm}\,\Psi^{1,\pm}_{p,\sigma}\cdot\left(\zeta_{p}\right)_{\mp}\;+\;\kappa^{1}_{\pm}\Psi^{2,\pm}_{p,\sigma}(\zeta\cdot\zeta_{\mp})\\ \kappa^{0}_{\pm}\,\mathsf{U}(\zeta_{\pm})\Psi^{1,\pm}_{p,\sigma}&=\;\kappa^{0}_{\pm}\Psi^{1,\pm}_{p,\sigma}\;-\;\kappa^{1}_{\pm}\left(\Psi^{2,\pm}_{p,\sigma}\right)\left(\zeta_{p}\right)_{\mp}\\ \mathsf{U}(\zeta_{\pm})\Psi^{2,\pm}_{p,\sigma}&=\;\Psi^{2,\pm}_{p,\sigma}\end{aligned} \tag{2.149}$$

[15]Para el caso, $\Psi^{2,\pm}_{p,\sigma}$ solo hay que notar que debido a las Ecs. (2.7) y (2.8):

$$\left[\Psi^{2,\pm}_{p',\sigma'}\left(s'\cdot s'_{\pm}\right)\right]^{\dagger}\left[\Psi^{2,\pm}_{p,\sigma}\left(s\cdot s_{\pm}\right)\right]\;=\;\left(s'^{*}\cdot s'^{*}_{\pm}\right)\left(s\cdot s_{\pm}\right)$$

Tomando ζ infinitesimal, obtenemos la acción de las cargas supersimétricas $\mathcal{Q}_\alpha$ sobre los estados componente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_\alpha\,\Psi^{0,\pm}_{p,\sigma} &= i(-)^{\Psi^\pm}\kappa^0_\pm\,\left\{D(L(p))^\intercal\epsilon\gamma_5\beta\Psi^{1,\pm}_{p,\sigma}\right\}_{\pm\alpha}\ , \\
\mathcal{Q}_\alpha\,\left(\Psi^{1,\pm}_{p,\sigma}\right)_\beta &= \left(-\tfrac{2(-)^{\Psi^\pm}}{\kappa^0_\pm}\right)\left\{D(L(p))\not{k}\beta\right\}_{\mp\alpha,\beta}\left(\Psi^{0,\pm}_{p,\sigma}\right)\ , \\
&\quad+\left(\tfrac{2i(-)^{\Psi^\pm}\kappa^1_\pm}{\kappa^0_\pm}\right)\left\{D(L(p))\beta\right\}_{\pm\alpha,\beta}\left(\Psi^{2,\pm}_{p,\sigma}\right) \\
\mathcal{Q}_\alpha\Psi^{2,\pm}_{p,\sigma} &= +\left(\tfrac{(-)^{\Psi^\pm}\kappa^0_\pm}{\kappa^1_\pm}\right)\left\{D(L(p))^\intercal\epsilon\gamma_5\beta\not{k}^*\Psi^{1,\pm}_{p,\sigma}\right\}_{\mp\alpha}\ .
\end{aligned} \tag{2.150}$$

donde $(-)^{\Psi^\pm}$ es positivo o negativo, dependiendo de si $\Psi_\pm$ tiene pureza bosónica o fermiónica, respectivamente. Hasta aquí, es lo más lejos que podemos llegar sin entrar en las particularidades de los grupo pequeños específicos.

Para varios propósitos, a veces es conveniente eliminar el factor cuadrático en la fase de la transformación supersimétrica (2.119), para ello podemos redefinir $\Psi^\pm_{p,s_\pm,\sigma}$, para cualesquiera valores del 4-espinor s, mediante la relación:

$$\Psi^\pm_{p,s,\sigma} \;=\; \exp\left[\,s\cdot(-i\not{p})s_\mp\right]\Psi^\pm_{p,s_\pm,\sigma} \tag{2.151}$$

En este caso, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathsf{U}(\Lambda,a)\Psi^\pm_{p,s,\sigma} &= e^{-i\Lambda p\cdot a}\sqrt{\tfrac{(\Lambda p)^0}{p^0}}\sum_{\sigma'}U_{\sigma'\sigma}[W(\Lambda,\mathbf{p})]\Psi^\pm_{\Lambda p,D(\Lambda)s,\sigma'}\ , \\
\mathsf{U}(\zeta)\Psi^\pm_{p,s,\sigma} &= \exp\left[i\,\zeta\cdot\not{p}s\right]\Psi^\pm_{p,s+\zeta,\sigma}\ .
\end{aligned} \tag{2.152}$$

Superpartículas Masivas

Para el caso de masa positiva, el grupo pequeño es el grupo de rotaciones $SO(3)$, esto es, W es una rotación en el espacio de tres dimensiones (incrustada en el espacio de cuatro dimensiones). Las representaciones irreducibles unitarias vienen dadas por las matrices $D^{(j)}(R)_{\sigma,\sigma'}$ de dimensionalidad $2j+1$ con j semientero positivo. Ya que siempre podemos hacerlo [17, 30], escogemos:

- Al generador $[J^{(j)}_{12}]_{\sigma\sigma'}$ de las rotaciones alrededor del eje-z, como diagonal con eigenvalor σ, de tal manera que la representación de la matriz $R(\theta)$ que rota el eje-z por un ángulo θ viene dada por

$$D^{(j)}(R)_{\sigma,\sigma'} \;=\; \exp\left[i\sigma\theta\right]\delta_{\sigma\sigma'} \tag{2.153}$$

con $\sigma = -j, -j+1, \ldots, j-1, j$.

- La transformación de Lorentz $L(p)$, que manda al vector estándar $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & M \end{pmatrix}$ al vector p^μ, de tal manera que cuando la transformación de Lorentz Λ es una rotación $\mathcal{R}$, tenemos que

$$W(\mathcal{R}, p) \;=\; \mathcal{R}\;. \tag{2.154}$$

Esta última relación esta garantizada al escoger

$$\begin{aligned} L^i{}_k\,(\theta, \hat{\mathbf{p}}) &= \;\delta_{ik}\;+\;\left(\sqrt{\mathbf{p}^2/m^2\;+\;1} - 1\right)\hat{p}_i\hat{p}_k, \\ L^i{}_0\,(\theta, \hat{\mathbf{p}}) &= \;L^0_{\;i}\,(\theta, \hat{\mathbf{p}})\;=\;\hat{p}_i|\mathbf{p}|/m, \\ L^0{}_0\,(\theta, \hat{\mathbf{p}}) &= \;\sqrt{\mathbf{p}^2/m^2\;+\;1}\;. \end{aligned} \tag{2.155}$$

La representación de Dirac, restringida al grupo de rotaciones, es unitaria. Es la representación reducible del grupo de rotaciones formada por la suma directa de las representaciones unitaria de espín $\frac{1}{2}$,

$$D(\mathcal{R}) \;=\; D^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\mathcal{R}) \oplus D^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\mathcal{R})\;. \tag{2.156}$$

Se sigue que

$$D\left(W\left(\Lambda, p\right)\right)^{-1\dagger} \;=\; D\left(W\left(\Lambda, p\right)\right)\;. \tag{2.157}$$

Concluimos que *para el caso masivo, los estados $\Psi^{(0,2),\pm}_{p,\sigma}$ transforman como estados de partícula en la representación j del grupo de rotación, mientras que los estados $\Psi^{1,\pm}_{p,\sigma}$ transforman como estados de partícula en la representación tensorial $j \otimes \frac{1}{2}$ del grupo de rotación.* Para normalizar los estados componente, escogemos las constantes de la expansión fermiónica como

$$\kappa^0_\pm \;=\; \mp\sqrt{2m}, \quad \kappa^1_\pm \;=\; m\;, \tag{2.158}$$

en este caso, el estado de superpartícula se ve como

$$\Psi^{\pm}_{p,s_\pm,\sigma} \equiv \Psi^{0,\pm}_{p,\sigma} \mp \sqrt{2m}\,\left(\Psi^{1,\pm}_{p,\sigma}\right)\cdot (s_\pm)_p + m\,\Psi^{2,\pm}_{p,\sigma}\,(s\cdot s_\pm)\ . \tag{2.159}$$

En el reposo, $\not{p}$ es proporcional a la matriz β:

$$\not{k} = im\beta, \tag{2.160}$$

Con esto vemos que efectivamente, los estados componente están normalizados:

$$\begin{aligned}\left(\Psi^{(0,2),\pm}_{p',\sigma'}\right)^\dagger \left(\Psi^{(0,2),\pm}_{p,\sigma}\right) &= \delta^3\left(\mathbf{p}'-\mathbf{p}\right)\delta_{\sigma\sigma'}\ ,\\ \left[\left(\Psi^{1,\pm}_{p',\sigma'}\right)_{\pm\alpha}\right]^\dagger \left(\Psi^{1,\pm}_{p,\sigma}\right)_{\pm\beta} &= \delta^3\left(\mathbf{p}'-\mathbf{p}\right)\delta_{\sigma\sigma'}\delta_{\pm\alpha\pm\beta}\ .\end{aligned} \tag{2.161}$$

Para hacer la notación menos pesada y poder compararla con la literatura existente, denotamos a los estados componente en el reposo como

$$\Psi^{(0,2),\pm}_{k,\sigma} = |\sigma\rangle^{(0,2),\pm}\ ,\quad \Psi^{1,+}_{k,\sigma} = \begin{pmatrix} 0 \\ |\sigma,a\rangle^+ \end{pmatrix},\quad \Psi^{1,-}_{k,\sigma} = \begin{pmatrix} |\sigma,a\rangle^- \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.162}$$

con $a = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$. En esta notación, la acción de las cargas supersimétricas viene dadas:

- Para los estados $\Psi^{0,\pm}_{k,\sigma}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}^*_a\,|\sigma\rangle^{0+} &= -i\sqrt{2m}\,(-)^{\Psi^+}\,|\sigma,a\rangle^+\ ,\quad \mathcal{Q}_a\,|\sigma\rangle^{0+} = 0\\ \mathcal{Q}_a\,|\sigma\rangle^{0-} &= -i\sqrt{2m}\,(-)^{\Psi^-}\,e_{ab}\,|\sigma,b\rangle^-\ ,\quad \mathcal{Q}^*_a\,|\sigma\rangle^{0-} = 0\end{aligned} \tag{2.163}$$

- Para los estados $\Psi^{2,\pm}_{k,\sigma}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}^*_a\,|\sigma\rangle^{2-} &= -i\sqrt{2m}\,(-)^{\Psi^-}\,|\sigma,a\rangle^-\ ,\quad \mathcal{Q}_a\,|\sigma\rangle^{2-} = 0\\ \mathcal{Q}_a\,|\sigma\rangle^{2+} &= -i\sqrt{2m}\,(-)^{\Psi^+}\,e_{ab}\,|\sigma,b\rangle^+\ ,\quad \mathcal{Q}^*_a\,|\sigma\rangle^{2+} = 0\end{aligned} \tag{2.164}$$

- Para los estados $\Psi^{1,\pm}_{k,\sigma}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_a \left|\sigma, b\right\rangle^{+} &= i\sqrt{2m}(-)^{\Psi^{+}} \left|\sigma\right\rangle^{0+} \delta_{ab}, \quad \mathcal{Q}^*_a \left|\sigma, b\right\rangle^{+} = -i\sqrt{2m}(-)^{\Psi^{+}} \left|\sigma\right\rangle^{2+} e_{ab} \\
\mathcal{Q}_a \left|\sigma, b\right\rangle^{-} &= i\sqrt{2m}(-)^{\Psi^{-}} \left|\sigma\right\rangle^{2-} \delta_{ab}, \quad \mathcal{Q}^*_a \left|\sigma, b\right\rangle^{-} = -i\sqrt{2m}(-)^{\Psi^{-}} \left|\sigma\right\rangle^{0-} e_{ab}
\end{aligned} \tag{2.165}$$

Vemos explícitamente, la estructura de operadores de ascenso y descenso con pasos $\pm 1/2$ en el espín, que los generadores $\mathcal{Q}_a$ y $\mathcal{Q}^*_a$ poseen. Esta forma, es la que se presenta en los tratamientos usuales de supersimetría.

Medida invariante. La dimensión de los elementos independientes de los 4-espinores quirales, s_+ y s_-, es dos en cada caso. Entonces, los elementos fermiónicos de volumen son dos dimensionales:

$$d^2 s_+ \equiv ds_{2+} ds_{1+}, \quad d^2 s_- \equiv ds_{4+} ds_{3+} \ . \tag{2.166}$$

Estas medidas fermiónicas son invariantes de Lorentz, esto lo vemos notando que:

$$d^2 s_\pm \ = \ -\tfrac{1}{2} ds \cdot \gamma_5 ds_\pm \tag{2.167}$$

donde $ds = \begin{pmatrix} ds_1 & ds_2 & ds_3 & ds_4 \end{pmatrix}$. Tomando el diferencial fermiónico en la relación definitoria de los estados $\tilde{\Psi}^{\pm}_{p,s_\pm,\sigma}$ [Ec. (2.130)] como

$$d\left[p, s_\mp\right] \ = \ \mp(2m)^{-1} d^2 s_\mp \ , \tag{2.168}$$

llegamos a:

$$\tilde{\Psi}^{\pm}_{p,s_\pm,\sigma} = \mp(2m)^{-1} \int \exp\left[2i\, s_\pm \cdot \not{p} s'\right] \Psi^{\mp}_{p,s'_\mp,\sigma}\, d^2 s'_\mp \ . \tag{2.169}$$

El haber tomado a $(2m)^{-1}$ como constante de proporcional nos permite normalizar a estos superestados de la misma forma que los superestados $\Psi^{\pm}_{p,s_\pm,\sigma}$. También hemos elegido las relaciones (2.158) de las constantes de la expansión fermiónica del superestado general, para que la relación entre los estados componente de $\tilde{\Psi}^{\pm}_{p,s_\pm,\sigma}$ y $\Psi^{\pm}_{p,s_\pm,\sigma}$ sean de lo más simple posible,

$$\tilde{\Psi}^{0\pm}_{p,\sigma} \ = \ \Psi^{2\mp}_{p,\sigma}, \quad \tilde{\Psi}^{2\pm}_{p,\sigma} \ = \ \Psi^{0\mp}_{p,\sigma}, \quad \left(\beta \tilde{\Psi}^{1\pm}_{p,\sigma}\right)_\alpha \ = \ \left(\Psi^{1\mp}_{p,\sigma}\right)_\alpha \ . \tag{2.170}$$

La expresión del superestado $\Psi^{\pm}_{p,s_\pm,\sigma}$ en términos de $\tilde{\Psi}^{\mp}_{p,s_\mp,\sigma}$ es simétrica a la Ec. (2.169), esto es

$$\Psi^{\pm}_{p,s_\pm,\sigma} = \mp(2m)^{-1}\int \exp\left[2i\, s_\pm \cdot \not{p} s'\right] \tilde{\Psi}^{\mp}_{p,s'_\mp,\sigma}\, d^2 s'_\mp \ . \tag{2.171}$$

Tomamos el producto escalar de $\Psi^{\mp}_{p,s'_\mp,\sigma}$ con $\tilde{\Psi}^{\pm}_{p,\sigma}$:

$$\left(\Psi^{\mp}_{p',s'_\mp,\sigma'}\right)^\dagger \left(\tilde{\Psi}^{\pm}_{p,s_\pm,\sigma}\right) \;=\; \mp(2m)^{-1}\int e^{\left[2i\, s\cdot\not{p} s''_\mp\right]} e^{\left[-2i\, \bar{s}'\not{p} s''_\mp\right]} d^2 s''_\mp\, \delta^3\left(\mathbf{p}'-\mathbf{p}\right)\delta_{\sigma\sigma'} \ , \tag{2.172}$$

hacemos el cambio de variable $s'' \;\to\; (-\not{p}/m^2)s''$ e integramos en la variable fermiónica $s''_\mp$ (la ayuda de $\int e^{\left[2i\, s\cdot s'_\pm\right]}\, d^2 s'_\pm \;=\; -4\delta^2(s_\pm)$). Obtenemos

$$\left(\Psi^{\mp}_{p',s'_\mp,\sigma'}\right)^\dagger \left(\tilde{\Psi}^{\pm}_{p,s_\pm,\sigma}\right) = \;\pm 2m\, \delta^2\left[\left(s-\epsilon\gamma_5\beta s'^*\right)_\pm\right] \delta^3\left(\mathbf{p}'-\mathbf{p}\right)\delta_{\sigma\sigma'} \tag{2.173}$$

donde $\delta^2(s_\pm) \;=\; \frac{1}{2} s\cdot\gamma_5 s_\pm$. Reescribimos esta última ecuación como

$$\left(\Psi^{\mp}_{p',\epsilon\gamma_5\beta s'^*_\mp,\sigma'}\right)^\dagger \left(\tilde{\Psi}^{\pm}_{p,s_\pm,\sigma}\right) = \;\pm 2m\, \delta^2\left[(s-s')_\pm\right] \delta^3\left(\mathbf{p}'-\mathbf{p}\right)\delta_{\sigma\sigma'} \ , \tag{2.174}$$

para ver que *los superestados $\tilde{\Psi}^{\pm}_{p,s_\pm,\sigma}$, son aquellos superestados que normalizan con los superestados $\Psi^{\mp}_{p,s_\mp,\sigma}$ con la función delta fermiónica.*

Superpartículas sin Masa

Para el caso de masa cero, el grupo pequeño es el grupo $ISO(2)$, el grupo de rotaciones y traslaciones en el plano de dos dimensiones. Cualquier matriz de Lorentz que pertenezca a este grupo pequeño, puede ser parametrizada como[16]

$$W(\theta, w_1, w_2) \;=\; \mathcal{R}(\vartheta)\mathcal{S}(w_1, w_2) \ , \tag{2.175}$$

[16] Cuando W es función de (Λ, p) tenemos que

$$\theta \;=\; \theta(\Lambda, p), \quad w_1 \;=\; w_1(\Lambda, p), \quad w_2 \;=\; w_2(\Lambda, p) \ .$$

donde $\mathcal{R}(\vartheta)$ y $\mathcal{S}(w_1, w_2)$ satisfacen las siguientes reglas de composición:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\bar{\vartheta})\mathcal{R}(\vartheta) &= \mathcal{R}(\bar{\vartheta}+\vartheta) \ , \\ \mathcal{S}(w_1, w_2)\mathcal{S}(\bar{w}_1, \bar{w}_2) &= \mathcal{S}(w_1+\bar{w}_1, w_2+\bar{w}_2) \ . \end{aligned} \tag{2.176}$$

Vemos que $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ forman subgrupos *abelianos*, el de rotaciones y traslaciones en el plano, respectivamente. El número mayor de generadores que conmutan mutuamente, es el que proviene de los generadores de $\mathcal{S}$ (dos generadores). Tentativamente, identificamos a los estados de superpartícula con las etiquetas $\sigma = (a_1, a_2)$, de tal manera que la representación del grupo pequeño actúa como el mapeo exponencial,

$$D_{\sigma,\sigma'}[\mathcal{S}(\Lambda, p)] \ = \ \delta(a_1 - a_1')\delta(a_2 - a_2')\exp[ia_1\omega_1 + ia_2\omega_2] \ . \tag{2.177}$$

El grupo de traslaciones no es compacto, entonces los a_1 y a_2 pueden tomar todos los valores en el plano. La transformación $\mathcal{R}(\bar{\vartheta})\mathcal{S}(w_1, w_2)\mathcal{R}(\vartheta)^{-1}$ es un elemento de $\mathcal{S}$, es una rotación por un ángulo θ en el plano (w_1, w_2), la cual podemos escribir como $R(\theta)(w_1, w_2)$, con $R(\theta)$ un elemento de $SO(2)$.[17] Esto implica que para cada conjunto fijo de eigenvalores (a_1, a_2) de nuestros estados existe otro conjunto infinito de eigenvalores con valor $R(\theta)(a_1, a_2)$.

A la fecha no existen construcciones teóricas satisfactorias ni hay evidencias física de la existencia de partículas sin masa con grados internos de libertad continuos. Escogeremos el origen $(a_1, a_2) = (0, 0)$, donde esta infinita degeneración no ocurre y donde podemos etiquetar los estados con el generador de las rotaciones $\mathcal{R}(\theta)$. De esta forma, el elemento general de grupo pequeño para el caso sin masa, queda expresado en términos de un factor exponencial,

$$D[W(\Lambda, \sigma)]_{\sigma,\sigma'} \ = \ \exp\left[i\sigma\theta(\Lambda, p)\right]\delta_{\sigma\sigma'} \ , \tag{2.178}$$

donde σ es la *helicidad* del estado. Ya que siempre podemos hacerlo [31], escogemos al generador de la rotación del grupo pequeño, como la rotación alrededor del eje en la tercera dirección del espacio. En términos de los generadores del grupo de

[17] En la terminología de teoría grupos, se dice que $\mathcal{S}$ es un subgrupo *invariante*. Por lo tanto $ISO(2)$ no es *semi-simple*. Las representaciones de grupos continuos que no son semi-simples, tienen esta característica de tener un número infinito de eigenvalores.

Lorentz, los generadores del grupo pequenño vienen dados por

$$A_1 = -J^{13} + J^{10}, \quad A_2 = -J^{23} + J^{10}, \quad J_3 = J^{12} \,. \tag{2.179}$$

Al asociar el generador de las rotaciones alrededor del eje-z con la rotación $\mathcal{R}(\theta)$, los estados están etiquetados respecto al operador unitario $\mathsf{J}_3 = \mathsf{J}_{12}$, con $\mathsf{J}_3\Psi^{\pm}_{p,\sigma} = \sigma\Psi^{\pm}_{p,\sigma}$. Por argumentos topológicos [17], sabemos que σ tiene que ser semientero.

Aunque la restricción al grupo de rotaciones de la representación de Dirac $D[\Lambda]$ es unitaria, no es así cuando Λ se restringe al subgrupo de traslación $\mathcal{S}$ del grupo $ISO(2)$. Esto pone en riesgo la unitariedad de los estados $\left(\Psi^{1,\pm}_{p,\sigma}\right)_\alpha$ bajo la acción del grupo homogéneo de Lorentz. Para evitar esta catástrofe, condicionamos a los estados que vienen de la componente lineal en la Ec. (2.133) a que permanezcan invariantes ante la acción del subgrupo de traslaciones del grupo $ISO(2)$:

$$\left[D\left[\mathcal{S}\left(\Lambda, p\right)\right]^{-1*}\left(\Psi^{1,\pm}_{p,\sigma}\right)\right]_\alpha = \left(\Psi^{1,\pm}_{p,\sigma}\right)_\alpha \,. \tag{2.180}$$

Esta condición se satisface si y solo sí [18]

$$\left(\Psi^{1,-}_{p,\sigma}\right)_1 = \left(\Psi^{1,+}_{p,\sigma}\right)_4 = 0 \tag{2.181}$$

Entonces, ahora tenemos que demostrar que esta imposición es invariante de Lorentz y de supersimetría. Cuando (2.181) se satisface, el subgrupo de rotaciones de $ISO(2)$ actúa simplemente como una fase[19]

$$\left\{D\left[\mathcal{R}\left(\theta\right)\right]^{\intercal}\,\Psi^{1,\pm}_{p,\sigma}\right\}_{\mp\alpha} = \exp\left[\pm\,(i/2)\,\theta\right]\left(\Psi^{1,\pm}_{p,\sigma}\right)_{\mp\alpha} \,. \tag{2.182}$$

[18] Los generadores $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ de las traslaciones del subgrupo $ISO(2)$ en la representación de Dirac se ven como

$$\mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix}\sigma_+ & 0\\ 0 & \sigma_-\end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = i\begin{bmatrix}\sigma_+ & 0\\ 0 & -\sigma_-\end{bmatrix}$$

donde $\sigma_\pm \equiv \frac{1}{2}\left(\sigma_2 \pm i\sigma_1\right)$. Puesto que $\mathcal{A}^2_\pm = 0$, tenemos que $D[\mathcal{S}(w_1, w_2)] = I + iw_1\mathcal{A}_1 + iw_2\mathcal{A}_2$. Por lo que

$$D[\mathcal{S}(w_1, w_2)]^{-1*} = I + (w_1 + iw_2)\mathcal{A}_+ + (w_1 - iw_2)\mathcal{A}_- \,,$$

con $[\mathcal{A}_+]_{\alpha\beta} = 0$ excepto para el elemento $[\mathcal{A}_+]_{21}$ el cual vale 1 y $[\mathcal{A}_-]_{\alpha\beta} = 0$ excepto para el elemento $[\mathcal{A}_-]_{34}$ el cual vale -1.

[19] En la representación de Dirac el generador de las rotaciones alrededor del eje z es

$$\mathcal{J}_3 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sigma_3 & 0\\ 0 & \sigma_3\end{bmatrix} \,.$$

Entonces efectivamente la condición (2.181) se mantiene para cualquier transformación de Lorentz. Un poco más adelante, veremos que también esta condición se mantiene para el caso de transformaciones supersimétricas.

Puesto que la normalización de los estados componente $\Psi^{2,\pm}_{p,\sigma}$ llevan un factor proporcional a $p^\mu p_\mu$ [ver Ec. (2.144)], tenemos que para el caso de masa cero, su normalización es cero,

$$\left(\Psi^{2,\pm}_{p',\sigma'}\right)^\dagger \left(\Psi^{2,\pm}_{p,\sigma}\right) = 0 \tag{2.183}$$

pero en cualquier espacio vectorial normado, la norma de un estado es cero si y solo sí el estado es el vector cero, entonces

$$\Psi^{2,\pm}_{p,\sigma} = 0 \; . \tag{2.184}$$

Evidentemente, esta condición es preservada por cualquier trasnformación de Lorentz. De la forma del vector estándar $k^\mu = \kappa \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, se sigue que

$$\not{k} = \kappa \left(\gamma^3 - \gamma^0\right) , \quad \not{k}^* = -\not{k} \; , \tag{2.185}$$

esto es, $\not{k}$ es cero en todas la entradas excepto

$$\not{k}_{31} = \not{k}_{24} = 2i\kappa \; . \tag{2.186}$$

De aqui también se sigue que $\not{k}\beta$ es cero excepto por los elementos de la diagonal

$$(\not{k}\beta)_{22} = (\not{k}\beta)_{33} = 2i\kappa \; . \tag{2.187}$$

De esto último, se concluye que las restricciones (2.181) son consistentes con la normalizacion (2.145).

Para poner la notación más acorde a lo que hemos encontrado para el caso de masa cero, hacemos las redefiniciones

$$\Psi^{\pm}_{p,\sigma} = \Psi^{0,\pm}_{p,\sigma} , \quad \Psi^{+(1/2)}_{p,\sigma} \equiv \left(\Psi^{1,+}_{p,\sigma}\right)_3 , \quad \Psi^{-(1/2)}_{p,\sigma} \equiv \left(\Psi^{1,-}_{p,\sigma}\right)_2 . \tag{2.188}$$

Tomamos además

$$\kappa^0_{\pm} \;=\; \pm 2\sqrt{\kappa}\;. \tag{2.189}$$

Entonces la normalización de los estados componente sin masa queda:

$$\left(\Psi^{\pm}_{p',\sigma'}\right)^{\dagger}\Psi^{\pm}_{p,\sigma} = \;\delta^3\left(\mathbf{p}'-\mathbf{p}\right)\delta_{\sigma\sigma'}, \tag{2.190}$$

$$\left(\Psi^{\pm(1/2)}_{p',\sigma'}\right)^{\dagger}\Psi^{\pm(1/2)}_{p,\sigma} = \;\delta^3\left(\mathbf{p}'-\mathbf{p}\right)\delta_{\left(\sigma\pm\frac{1}{2}\right),\left(\sigma'\pm\frac{1}{2}\right)}\;. \tag{2.191}$$

Donde en la última ecuación, hemos usado la igualdad $\delta_{\sigma\pm\frac{1}{2},\sigma'\pm\frac{1}{2}} = \delta_{\sigma\sigma'}$. Puesto que $\not{k}^* \;=\; -\not{k}$, y en vista de (2.186), la condición (2.181) puede ser reescrita como

$$\not{k}^*\Psi^{1,\pm}_{p,\sigma} = 0\;. \tag{2.192}$$

De las Ecs. (2.148) y (2.149) se sigue que

$$\mathsf{U}(\zeta)\Psi^{2,\pm}_{p,\sigma} \;=\; 0, \quad \mathsf{U}(\zeta)\sum_{\beta}\left(\not{k}^*\right)_{\alpha\beta}\left(\Psi^{1,\pm}_{p,\sigma}\right)_{\alpha} \;=\; 0\;, \tag{2.193}$$

entonces las condiciones (2.181) y (2.184) son preservadas también por las transformaciones supersimétricas. La transformación bajo el grupo de Lorentz de los superestados de masa cero se ve como [ver Ec. (2.118)]

$$\mathsf{U}(\Lambda)\Psi^{\pm}_{p,s_{\pm},\sigma} = \;\frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\,e^{i\sigma\,\theta(\Lambda,p)}\Psi^{\pm}_{\Lambda p,D(\Lambda)s_{\pm},\sigma'}\;. \tag{2.194}$$

Podemos resumir lo encontrado diciendo que *para el caso de masa cero, los superestados $\Psi^{+}_{p,s_+,\sigma}$ tienen como componentes, a dos estados ortonormalizados $\Psi^{+}_{p,\sigma}$ y $\Psi^{+(1/2)}_{p,\sigma}$ con helicidad σ y $\sigma+\frac{1}{2}$, respectivamente. Mientras que los superestados $\Psi^{-}_{p,s_-,\sigma}$ tienen como componentes a dos estados ortonormalizados $\Psi^{-}_{p,\sigma}$ y $\Psi^{-(1/2)}_{p,\sigma}$ con helicidad σ y $\sigma-\frac{1}{2}$, respectivamente.*

Escribimos a los estados componente en el vector estándar k^{μ}:

$$|\sigma\rangle^{\pm} \;\equiv\; \Psi^{\pm}_{k,\sigma}, \quad |\sigma\pm 1/2\rangle^{\pm} \;\equiv\; \Psi^{\pm(1/2)}_{k,\sigma}\;. \tag{2.195}$$

Tomamos en cuenta las condiciones (2.181), (2.184) y (2.189), para escribir la acción de las cargas supersimétricas (2.150) en la notación de kets (2.195):

- Para los estados $|\sigma\rangle^+$:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{+\frac{1}{2}} |\sigma\rangle^+ &= -2i\sqrt{\kappa}(-)^{\Psi^+} |\sigma + 1/2\rangle^+ \,, \\ \mathcal{Q}_{-\frac{1}{2}} |\sigma\rangle^+ &= \mathcal{Q}^*_{+\frac{1}{2}} |\sigma\rangle^+ \;=\; \mathcal{Q}^*_{-\frac{1}{2}} |\sigma\rangle^+ \;=\; 0, \end{aligned} \tag{2.196}$$

- Para los estados $|\sigma\rangle^-$:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{+\frac{1}{2}} |\sigma\rangle^- &= -2i\sqrt{\kappa}(-)^{\Psi^-} |\sigma - 1/2\rangle^- \,, \\ \mathcal{Q}^*_{-\frac{1}{2}} |\sigma\rangle^- &= \mathcal{Q}_{+\frac{1}{2}} |\sigma\rangle^- \;=\; \mathcal{Q}_{-\frac{1}{2}} |\sigma\rangle^- \;=\; 0, \end{aligned} \tag{2.197}$$

- Para los estados $|\sigma + 1/2\rangle^+$:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{+\frac{1}{2}} |\sigma + 1/2\rangle^+ &= -2i\sqrt{\kappa}(-)^{\Psi^+} |\sigma\rangle^+ \,, \\ \mathcal{Q}_{-\frac{1}{2}} |\sigma + 1/2\rangle^+ &= \mathcal{Q}^*_{+\frac{1}{2}} |\sigma + 1/2\rangle^+ \;=\; \mathcal{Q}^*_{-\frac{1}{2}} |\sigma + 1/2\rangle^+ \;=\; 0, \end{aligned} \tag{2.198}$$

- Para los estados $|\sigma - 1/2\rangle^-$:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^*_{+\frac{1}{2}} |\sigma - 1/2\rangle^- &= -2i\sqrt{\kappa}(-)^{\Psi^-} |\sigma\rangle^- \,, \\ \mathcal{Q}^*_{-\frac{1}{2}} |\sigma - 1/2\rangle^- &= \mathcal{Q}_{+\frac{1}{2}} |\sigma - 1/2\rangle^- \;=\; \mathcal{Q}_{-\frac{1}{2}} |\sigma - 1/2\rangle^- \;=\; 0, \end{aligned} \tag{2.199}$$

Vemos de nuevo, para el caso sin masa, la estructura de operadores de ascenso y descenso que los generadores $\mathcal{Q}_a$ y $\mathcal{Q}^*_a$ poseen.

Antes de adentrarnos en construir integrales en el superespacio de momentos para el caso de masa cero, hacemos ver una de las conclusiones hasta aqui obtenidas: El superestado general es lineal en $s_\pm$ y por tanto, el volumen fermiónico para este caso, debe de ser una integral de línea (y no de superficie como en el caso masivo). Este diferencial debe transformar covariantemente bajo el grupo de Lorentz, entonces no puede ser solo función de $ds_{\pm\alpha}$ puesto que $s_{\pm\alpha}$ y por tanto $ds_{\pm\alpha}$ es irreducible bajo el grupo de Lorentz.

Para encontrar la forma de la integral de línea, tenemos que pasar a una notación que haga más justicia al caso sin masa. Puesto que la matriz $(-i\not{k}\beta)/\sqrt{\kappa}$ es diagonal con entradas igual a $2\sqrt{\kappa}$, es evidente que sus eigenvectores, con eigenvalores diferentes cero, se pueden expresar como las proyecciones izquierda y derecha del vector $u(k)_\alpha$, dado por

$$u(k)_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{\kappa} & 2\sqrt{\kappa} & 0 \end{bmatrix}_\alpha . \tag{2.200}$$

De la descomposición general de una matriz general en términos de los eigenvectores por la derecha y de los eigenvectores por la izquierda, tenemos que

$$2\kappa(-i\not{k}\beta) = u(k)_+ u(k)_+^\dagger + u(k)_- u(k)_-^\dagger , \tag{2.201}$$

debido a que $\not{k}\beta$ es simétrica, los eigenvectores derechos e izquierdos coinciden. Definimos el 4-spinor $u(p)$ para valores arbitrarios p en la capa de masa cero, $p^2 = 0$:

$$u(p) \equiv D(L(p))u(k) . \tag{2.202}$$

Entonces la matriz $\not{p}$, en términos de sus eigenvectores viene dada por:

$$2(-i\not{p}) = u(p)_+ \bar{u}(p)_- + u(p)_- \bar{u}(p)_+ . \tag{2.203}$$

El vector $u(p)$ satisface la condición de Majorana (con fase -1):

$$u(p)^* = -\epsilon\gamma_5\beta u(p) \tag{2.204}$$

Esto se sigue de $u(k)^* = -\epsilon\gamma_5\beta u(k)$ y del hecho de que la condición de Majorana es preservada bajo las transformaciones de Dirac.

Este espinor $u(p)$, es importante para nosotros porque $\Psi^{1,\pm}_{p,\sigma}$ puede escribirse como

$$\Psi^{1,\pm}_{p,\sigma} = \frac{1}{2\sqrt{\kappa}} \Psi^{\pm(1/2)}_{p,\sigma} \, u(k)_\mp , \tag{2.205}$$

El segundo término en (2.133), como función de $u(p)$, se expresa de la siguiente manera:

$$2\sqrt{\kappa}\left(\Psi^{1,\pm}_{p,\sigma}\right)\cdot(s_p)_{\mp} \;=\; \Psi^{\pm(1/2)}_{p,\sigma}\,u(p)\cdot s_{\pm}\ , \tag{2.206}$$

y entonces, el estado general de masa cero adquiere una forma más transparente,

$$\Psi^{\pm}_{p,s_{\pm},\sigma} \;=\; \Psi^{\pm}_{p,\sigma} \;+\; \Psi^{\pm(1/2)}_{p,\sigma}\ \left(u(p)\cdot\gamma_5 s_{\pm}\right)\ . \tag{2.207}$$

Medidas invariantes. Hemos identificado como la supersimetría se ha encargado a sí misma, en suprimir el término cuadrático en la expansión fermiónica $s_{\pm}$. La dependencia de los estados de masa cero en la variable fermiónica $s_{\pm}$ entra a traves de la proyección de $s_{\pm}$ con $u(p)$ [mediante el producto $(u(p)\cdot\gamma_5 s_{\pm})$, el cual es nilpotente[20]],

$$\left(u(p)\cdot\gamma_5 s_{\pm}\right)^2 \;=\; 0\ . \tag{2.208}$$

El elemento de volumen para el caso de masa cero es unidimensional. Escogemos este elemento de línea, que aparece en la Ec. (2.130), como

$$d\left[p,s_{\mp}\right] \;=\; d\left(u(p)\cdot\gamma_5 s_{\mp}\right)\ . \tag{2.209}$$

No es difícil comprobar que

$$D(\Lambda)u\left(p\right) \;=\; e^{-i\gamma_5\,\phi(\Lambda,p)}\,u\left(\Lambda p\right)\ , \tag{2.210}$$

por lo que el diferencial de volumen es invariante de Lorentz hasta una fase,

$$d\left(u(p)\cdot\gamma_5 s_{\pm}\right) \;=\; e^{+i\gamma_5\,\phi(\Lambda,p)}d\left(u(\Lambda p)\cdot\gamma_5 D[\Lambda]s_{\pm}\right)\ . \tag{2.211}$$

Esta última expresión, nos permite ver que los estados $\tilde{\Psi}^{\pm}_{p,s_{\pm},\sigma}$, expresados de forma explicita en términos de $\tilde{\Psi}^{\mp}_{p,s_{\mp},\sigma}$ como

$$\tilde{\Psi}^{\pm}_{p,s_{\pm},\sigma} \;=\; \int \exp\left[2i\,s_{\pm}\cdot\not{p}s'\right]\,\Psi^{\mp}_{p,s'_{\mp},\sigma}\,d\left(u(p)\cdot\gamma_5 s'_{\mp}\right)\ , \tag{2.212}$$

[20] El factor $\left(u(p)\cdot\gamma_5 s_{\pm}\right)^2$ es igual a $\frac{1}{2}\left(u(p)\cdot\gamma_5 u(p)_{\pm}\right)\left(s\cdot\gamma_5 s_{\pm}\right)$ y $u(p)\cdot\gamma_5 u(p)_{\pm}$ es cero.

transforman bajo la acción del grupo homogéneo de Lorentz de la siguiente manera:

$$\mathsf{U}(\Lambda)\Psi^{\pm}_{p,s_\pm,\sigma} = \tfrac{N(p)}{N(\Lambda p)}\, e^{i(\sigma\mp 1/2)\,\theta(\Lambda,p)}\Psi^{\pm}_{\Lambda p, D(\Lambda)s_\pm,\sigma}\ . \tag{2.213}$$

Las relaciones entre los estados componente de $\tilde{\Psi}^{\pm}_{p,s_\pm,\sigma}$ y $\Psi^{\pm}_{p,s_\pm,\sigma}$ son[21]

$$\tilde{\Psi}^{\pm}_{p,\sigma} \ = \ \Psi^{\mp(1/2)}_{p,\sigma}, \quad \tilde{\Psi}^{\pm(1/2)}_{p,\sigma} \ = \ \Psi^{\mp}_{p,\sigma}, \tag{2.215}$$

* * *

En los tratamientos usuales de supersimetría, la obtención del espectro supersimétrico se realiza a nivel de los generadores fermiónicos del álgebra de súper Poincaré actuando sobre los estados componente, evaluados en el vector estándar. Puesto que los $\mathcal{Q}_\alpha$ funcionan como operadores de ascenso y descenso en el espacio de espines (con pasos $\pm 1/2$), al requerir que la representación de los estados sea finita en el espacio de los espines, llegamos a las Ecs. (2.163)-(2.165) para el caso masivo y a (2.197)-(2.199) para el caso sin masa. Nuestro enfoque ha sido el de construir estados supersimétricos que están definidos bajo trasformaciones supersimétricas arbitrarias. Esto a rendido frutos, porque hemos dado un tratamiento unificado de los estados de superpartícula independiente de los grupos pequeños en especifico. Las particularidades de los grupos pequeños solo introducen restricciones adicionales en los estados componente de los superestados. También el trabajar con transformaciones unitarias finitas, nos ha permitido decir de manera natural que entendemos por el superespacio de momentos $(p, s_\pm)$. Su propiedad de transformación bajo el grupo de súper Poincaré es relativamente simple:

$$(p, s_\pm) \ \rightarrow \ (\Lambda p, D[\Lambda]s_\pm + \xi)\ . \tag{2.216}$$

[21] Para $p^2 = 0$, la exponencial $e^{2i\, s_\pm \cdot \not{p} s'}$ termina a primer orden en $s_\pm$,

$$\exp\left[2i\, s_\pm \cdot \not{p} s'\right] = \ I \ + \ (u(p)\cdot\gamma_5 s_\pm)\left(u(p)\cdot\gamma_5 s'_\pm\right) \tag{2.214}$$

Hemos identificado que para el caso de masa cero, el supermomento $(p, s_{\pm})$ siempre se presenta de la forma $(p, u(p) \cdot s_{\pm})$. *La dimension del superespacio de momentos del caso de masa cero es menor que la del caso masivo.*

Notemos también que la presentación natural de los estados lineales en los 4-espinores fermiónicos, vienen en estados que forman la representación tensorial $j \otimes \frac{1}{2}$ del grupo de rotación. Usando la descomposición de Clebsh-Gordan, podemos expresar equivalente el estado $j \otimes \frac{1}{2}$ en términos de los estados con momento angular $j + \frac{1}{2}$ y $j - \frac{1}{2}$, a expensas de hacer la notación un poco más engorrosa.

Capítulo 3

La supermatriz $\mathcal{S}$

En este capitulo, introducimos uno de los elementos fundamentales de este trabajo, la supermatriz $\mathcal{S}$. Las sutilezas de intentar definir una supermatriz $\mathcal{S}$ covariante de Lorentz y de supersimetría son investigadas. Aquí vemos la conveniencia de haber podido introducir productos escalares ortogonales en el superespacio de Hilbert. Empezamos definiendo los superestados asintóticos in y out, para después decir que es lo que entendemos por una supermatriz $\mathcal{S}$ covariante. Al arribar a la fórmula de Dyson, nos damos cuenta que la introduccion de la densidad local Hamiltoniana, no es suficiente para establecer una supermatriz $\mathcal{S}$ completamente covariante supersimétrica. Debemos de posponer hasta secciones futuras, para exponer cuales son las condiciones que nos permiten obtener la supermatriz $\mathcal{S}$ correcta. Al igual que el caso del espacio, introducimos a los operadores de creación y aniquilación de superpartículas como medio para satisfacer el principio de descomposición en cúmulos.

3.1. Estados In y Out

Escogemos *la forma de la Dinámica* [32] en que la interacción es llevada por la componente temporal del operador del cuatro-momento, esto es, el Hamiltoniano de interacción viene dado por

$$\mathsf{H} = \mathsf{H}_0 + \mathsf{V} \; , \tag{3.1}$$

donde H_0 es el Hamiltoniano libre y V es el potencial de interacción. Llamamos Ψ_A a los estados que son eigenvalores del operador H,

$$\Psi_A \,\mathsf{H} \;=\; E_A \Psi_A \;. \tag{3.2}$$

Las letras $A, B, \cdots$, representan al conjunto de etiquetas posibles que puedan definir al superestado, incluyendo las de su energía. A partir de estos superestados, formamos otros estados Ψ_g con energía 'difusa',

$$\Psi_g \;\equiv\; \int g_A \Psi_A \, dA, \tag{3.3}$$

donde g_A representa una función bien comportada del conjunto de variables A. Notamos que aunque Ψ_A es independiente del tiempo, depende del marco de referencia. Un observador en el pasado, a un tiempo τ anterior con respecto al presente, ve el estado como $e^{iH\tau}\Psi_A$, si el observador en el presente lo ve como Ψ_A. De la misma manera, el observador en el futuro en el tiempo τ con respecto al observador en el presente, ve al mismo estado como $e^{-i\tau H}\Psi_A$. Consideramos la situación cuando el observador del pasado, anterior al tiempo τ ve que el sistema a dejado de interaccionar, entonces esperamos que antes de este tiempo, el sistema pueda describirse como en una evolución libre. Esto es, el operador de traslación temporal para esto se ve como H_0. Si esta situación es de hecho posible, quiere decir que hemos identificado un conjunto de estados Ψ_A^{in}, que satisfacen la relación

$$e^{+i\mathsf{H}t}\Psi_g^{\text{in}} \xrightarrow{t\to\tau} e^{+i\mathsf{H}_0 t}\Psi_g^0 \;, \tag{3.4}$$

donde Ψ_g^0 es el paquete de ondas construido con la misma función peso g_A pero con los estados Ψ_A^0, los cuales son eigenestados del operador Hamiltoniano libre,

$$\mathsf{H}_0 \Psi_A^0 \;=\; E_A \Psi_A^0 \;. \tag{3.5}$$

De la misma forma, si el observador del futuro después de un tiempo τ ve al sistema como libre, quiere decir que hemos podido identificar un conjunto de estados Ψ_A^{out} tal que

$$e^{-i\mathsf{H}t}\Psi_g^{\text{out}} \xrightarrow{t\to\tau} e^{-i\mathsf{H}_0 t}\Psi_g^0 \;. \tag{3.6}$$

No esperamos que cualquier Hamiltoniano H tenga este comportamiento, de ahí que hayamos definido las etiquetas 'in' y 'out'. No nos interesa el tiempo en que el sistema deja de interaccionar, solamente que esto suceda. La puesta más conservadora es siempre mirar en el pasado y futuro lejanos, esto es, matemáticamente lo que hacemos esto es tomar el limite $t \to \mp\infty$ en las Ecs. (3.4) y (3.6). En particular

$$\lim_{t-\infty/+\infty} \int (dA)^* (g_A)^* e^{-i\tau(E_B-E_A)} \left(\tilde{\Psi}_A^{\text{in/out}}\right)^\dagger \left(\Psi_B^{\text{in/out}}\right) g'_B \, dB = \\ \lim_{t-\infty/+\infty} \int (dA)^* (g_A)^* \; e^{-i\tau(E_B-E_A)} \left(\tilde{\Psi}_A^0\right)^\dagger \left(\Psi_B^0\right) g'_B \, dB \; , \tag{3.7}$$

donde los estados que llevan una tilde son aquellos que se obtienen de tomar la transformada de Fourier de $\Psi_B^{\text{in/out}}$ en las variables fermiónicas, además, g'_A no tiene por que ser igual a g_A. Puesto que esta relación es valida para cualquier g_A, se sigue que los superestados in/out normalizan de la misma manera que los superestados libres. El producto interior $\left(\tilde{\Psi}_A^0\right)^\dagger (\Psi_B^0)$, normaliza como una suma de productos de funciones delta de Kronecker y de Dirac, incluyendo a la delta fermiónica. Denotando a esta normalización como $\delta\,(B\,-\,A)$, para cualquier cantidad f_A, función de las variables A, la propiedad definitoria de esta delta es

$$f_A = \int dB \, \delta\,(B\,-\,A)\, f_B \; . \tag{3.8}$$

Entonces, la normalización de los estados in/out nos queda como

$$\left(\tilde{\Psi}_{A^*}^{\text{in/out}}\right)^\dagger \left(\Psi_B^{\text{in/out}}\right) = \delta\,(B\,-\,A) \; . \tag{3.9}$$

La supermatriz $\mathcal{S}$ se define como la superamplitud de probabilidad de que un estado preparado con los números cuánticos A, después de un evento de dispersión, la medición del estado nos arroje los números cuánticos B,

$$\mathcal{S}_{AB} \equiv \left(\tilde{\Psi}_{B^*}^{\text{out}}\right)^\dagger \left(\Psi_A^{\text{in}}\right) \; . \tag{3.10}$$

Suponemos que los conjuntos $\left\{\Psi_A^{\text{in}}\right\}$ y $\{\Psi_A^{\text{out}}\}$ son completos, por lo que podemos expresar un superestado de un conjunto en términos de los superestados del otro conjunto. Escribimos a los superestados (in) en términos de los estados (out),

$$\Psi_A^{\text{in}} = \int \Psi_B^{\text{out}} \, \mathcal{R}_{B,A} \, dB \; , \tag{3.11}$$

la relación entre la supermatriz $\mathcal{S}_{AB}$ y la supermatriz $\mathcal{R}_{AB}$, es una posible diferencia signo entre las partes fermiónicas de estas matrices,

$$\mathcal{S}_{AB} = \int \delta\left(B' - B\right) \mathcal{R}_{B',A}\, dB' \ . \tag{3.12}$$

Definiendo

$$\Omega(t) = e^{-iHt} e^{iH_0 t} \ , \tag{3.13}$$

de manera equivalente, podemos reescribir las Ecs. (3.4) y (3.6) como

$$\Psi_A^{(\text{in/out})} \to \lim_{t\to\infty} \Omega(+t/-t)\Psi_A^0 \ . \tag{3.14}$$

Entonces, podemos escribir a la supermatriz $\mathcal{S}_{AB}$ como el elemento de matriz del operador S, definido por

$$\mathsf{S} \equiv \lim_{t\to\infty} \Omega(+t)^\dagger\, \Omega(-t) \ , \tag{3.15}$$

entre los estados de las bases libres Ψ_A^0, esto es,

$$\mathcal{S}_{AB} = (\tilde{\Psi}^0_{B^*})^\dagger\, \mathsf{S}\, \Psi^0_A \ . \tag{3.16}$$

3.2. Covariancia de la supermatriz $\mathcal{S}$

Hasta ahora hemos hablado de estados de superpartículas sin especificar sus propiedades de transformación. El estado de varias superpartículas, es considerado el estado que transforma bajo el grupo de súper Poincaré, como el producto directo de estados una superpartícula sin interacción. Etiquetamos estados de una superpartícula con el cuatro-momento p^μ, y el cuatro-espinor izquierdo o derecho $s_\pm$, la componente z del espín (o la helicidad para partículas sin masa) σ y la etiqueta discreta n para identificar las diferentes especies de partículas, la cual incluye su masa, espín, carga, etc. Hemos identificado dos tipos de superestados etiquetados con un espinor derecho (superpartícula $-$) o con un 4-espinor izquierdo (superpartícula $+$). Puesto que para cada superestado $+(-)$ podemos formar, mediante una transformada fermiónica de Fourier, otro superestado superestado $-(+)$. Sin perdida de generalidad, podemos considerar dos tipos de superestados de varias partículas, donde los 4-espinores son todos derechos o todos izquierdos. La regla general de transformación bajo el grupo inhomogéneo de Lorentz es

$$
\begin{aligned}
\mathsf{U}\left(\Lambda, a\right) \Psi^{\pm}_{\left\{\substack{p_1\ \sigma_1 \\ s_1\ n_1}\right\},\left\{\substack{p_2\ \sigma_2 \\ s_2\ n_2}\right\},\cdots} = \; & \exp\left[-i a_\mu \Lambda^\mu{}_\nu \left(p_1 \,+\, p_2 \,+\, \cdots\right)^\nu\right] \\
& \times \sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0 (\Lambda p_2)^0 \cdots}{p_1^0 p_2^0 \cdots}} \sum_{\sigma_1' \sigma_2' \cdots} U^{(j_1)}_{\sigma_1 \sigma_1'}\left[W\left(\Lambda, p_1\right)\right] U^{(j_2)}_{\sigma_2 \sigma_2'}\left[W\left(\Lambda, p_2\right)\right] \cdots \\
& \times \Psi^{\pm}_{\left\{\substack{\Lambda p_1 \quad \sigma_1 \\ D(\Lambda) s_1\ n_1}\right\},\left\{\substack{\Lambda p_2 \quad \sigma_2 \\ D(\Lambda) s_2\ n_2}\right\},\cdots} \,,
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

mientras que bajo una transformación supersimétrica,

$$
\begin{aligned}
& \mathsf{U}\left(\zeta\right) \Psi^{\pm}_{\left\{\substack{p_1\ \sigma_1 \\ s_1\ n_1}\right\},\left\{\substack{p_2\ \sigma_2 \\ s_2\ n_2}\right\},\cdots} \\
& \qquad = e^{\left[i \zeta_{\mp} \cdot \left(\not{p}_1 (s_1 + \zeta) + \not{p}_2 (s_2 + \zeta) + \cdots\right)\right]} \, \Psi^{\pm}_{\left\{\substack{p_1 \qquad \sigma_1 \\ s_1 + \zeta\ n_1}\right\},\left\{\substack{p_2 \qquad \sigma_2 \\ s_2 + \zeta\ n_2}\right\},\cdots}
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

La suposición fundamental sobre las interacciones es que estas son tales que las transformaciones unitarias del grupo de súper Poincaré son las mismas para los estados 'in' y 'out', de tal forma que[1]

$$
\mathcal{S}_{BA} \;=\; \left[\mathsf{U}\left(\Lambda, a, \zeta\right) \tilde{\Psi}^{\text{out}}_{B^*}\right]^\dagger \; \mathsf{U}\left(\Lambda, a, \zeta\right) \Psi^{\text{in}}_A \;. \tag{3.19}
$$

Implícitamente, en nuestros indices $A, B \cdots$, hemos también incluido los signos $\pm$. Debido a las propiedades de transformación de los estados de varias superpartículas, obtenemos en una notación explicita, las propiedades de covariancia de la supermatriz $\mathcal{S}$:

- Para una traslación a^μ, se tiene que

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{S}_{\left\{\substack{\tilde{p}_1\ \tilde{\sigma}_1 \\ \tilde{s}_1\ \tilde{n}_1}\right\},\left\{\substack{\tilde{p}_2\ \tilde{\sigma}_2 \\ \tilde{s}_2\ \tilde{n}_2}\right\},\ldots,\left\{\substack{p_1\ \sigma_1 \\ s_1\ n_1}\right\},\left\{\substack{p_2\ \sigma_2 \\ s_2\ n_2}\right\},\cdots} \\
& \qquad = \; e^{\left[i a_\mu \left(p_1{}^\mu + p_2{}^\mu + \cdots - \tilde{p}_1{}^\mu - \tilde{p}_2{}^\mu - \cdots\right)\right]} \\
& \qquad\qquad \times \mathcal{S}_{\left\{\substack{\tilde{p}_1\ \tilde{\sigma}_1 \\ \tilde{s}_1\ \tilde{n}_1}\right\},\left\{\substack{\tilde{p}_2\ \tilde{\sigma}_2 \\ \tilde{s}_2\ \tilde{n}_2}\right\},\ldots,\left\{\substack{p_1\ \sigma_1 \\ s_1\ n_1}\right\},\left\{\substack{p_2\ \sigma_2 \\ s_2\ n_2}\right\},\cdots}
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

[1]Notemos como la etiqueta B aparece en el lado derecho como B^*, esto porque en el superespacio las etiquetas fermiónicas son, en general, complejas.

- Para una transformación (homogénea) de Lorentz Λ, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}&_{\left\{\substack{\tilde{p}_1\,\tilde{\sigma}_1\\ \tilde{s}_1\,\tilde{n}_1}\right\},\left\{\substack{\tilde{p}_2\,\tilde{\sigma}_2\\ \tilde{s}_2\,\tilde{n}_2}\right\},\ldots,\left\{\substack{p_1\,\sigma_1\\ s_1\,n_1}\right\},\left\{\substack{p_2\,\sigma_2\\ s_2\,n_2}\right\},\cdots} \\
&= \sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0(\Lambda p_2)^0\cdots(\Lambda\tilde{p}_1)^0(\Lambda\tilde{p}_2)^0\cdots}{p_1^0p_2^0\cdots\tilde{p}_1^0\tilde{p}_2^0\cdots}} \\
&\quad\times\sum_{\sigma_1'\sigma_2'\cdots} U^{(j_1)}_{\sigma_1\sigma_1'}\left[W\left(\Lambda,p_1\right)\right]U^{(j_2)}_{\sigma_2\sigma_2'}\left[W\left(\Lambda,p_2\right)\right]\cdots \\
&\quad\times\sum_{\tilde{\sigma}_1'\tilde{\sigma}_2'\cdots} U^{(\tilde{j}_1)}_{\tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_1'}\left[W\left(\Lambda,p_1\right)\right]U^{(\tilde{j}_2)}_{\tilde{\sigma}_2\tilde{\sigma}_2'}\left[W\left(\Lambda,p_2\right)\right]\cdots \\
&\quad\times\mathcal{S}_{\left\{\substack{\Lambda\tilde{p}_1\quad\tilde{\sigma}_1\\ D(\Lambda)\tilde{s}_1\,\tilde{n}_1}\right\},\left\{\substack{\Lambda\tilde{p}_2\quad\tilde{\sigma}_2\\ D(\Lambda)\tilde{s}_2\,\tilde{n}_2}\right\},\ldots,\left\{\substack{\Lambda p_1\quad\sigma_1\\ D(\Lambda)s_1\,n_1}\right\},\left\{\substack{\Lambda p_2\quad\sigma_2\\ D(\Lambda)s_2\,n_2}\right\},\cdots}
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

- Para una transformación supersimétrica ζ, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}^{\pm}&_{\left\{\substack{\tilde{p}_1\,\tilde{\sigma}_1\\ \tilde{s}_1\,\tilde{n}_1}\right\},\left\{\substack{\tilde{p}_2\,\tilde{\sigma}_2\\ \tilde{s}_2\,\tilde{n}_2}\right\},\ldots,\left\{\substack{p_1\,\sigma_1\\ s_1\,n_1}\right\},\left\{\substack{p_2\,\sigma_2\\ s_2\,n_2}\right\},\cdots} \\
&= e^{\left[i\zeta_{\mp}\cdot\left(\not{p}_1(s_1+\zeta)+\not{p}_2(s_2+\zeta)+\cdots-\tilde{\not{p}}_1(\tilde{s}_1+\zeta)-\tilde{\not{p}}_2(\tilde{s}_2+\zeta)-\cdots\right)\right]} \\
&\quad\times\mathcal{S}_{\left\{\substack{\tilde{p}_1\quad\tilde{\sigma}_1\\ \tilde{s}_1+\zeta\,\tilde{n}_1}\right\},\left\{\substack{\tilde{p}_2\quad\tilde{\sigma}_2\\ \tilde{s}_2+\zeta\,\tilde{n}_2}\right\},\ldots,\left\{\substack{p_1\quad\sigma_1\\ s_1+\zeta\,n_1}\right\},\left\{\substack{p_2\quad\sigma_2\\ s_2+\zeta\,n_2}\right\},\cdots}\ .
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

Hemos tomado la conjugación en las etiquetas fermiónicas como $\epsilon\gamma_5\beta s^*$, en vez de s^*. La propiedad de invariancia bajo traslaciones, nos dice que la supermatriz $\mathcal{S}$ debe incluir la función delta que garantice la conservación del 4-momento total

$$
\delta^4\left(p_1+p_2+\cdots-\tilde{p}_1-\tilde{p}_2-\cdots\right)\ . \tag{3.23}
$$

Con esto, la expresión de covariancia supersimétrica se simplifica a

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}^{\pm}&_{\left\{\substack{\tilde{p}_1\,\tilde{\sigma}_1\\ \tilde{s}_1\,\tilde{n}_1}\right\},\left\{\substack{\tilde{p}_2\,\tilde{\sigma}_2\\ \tilde{s}_2\,\tilde{n}_2}\right\},\ldots,\left\{\substack{p_1\,\sigma_1\\ s_1\,n_1}\right\},\left\{\substack{p_2\,\sigma_2\\ s_2\,n_2}\right\},\cdots} \\
&= e^{\left[i\zeta_{\mp}\cdot\left(\not{p}_1s_1+\not{p}_2s_2+\cdots-\tilde{\not{p}}_1\tilde{s}_1-\tilde{\not{p}}_2\tilde{s}_2-\cdots\right)\right]} \\
&\quad\times\mathcal{S}_{\left\{\substack{\tilde{p}_1\quad\tilde{\sigma}_1\\ \tilde{s}_1+\zeta\,\tilde{n}_1}\right\},\left\{\substack{\tilde{p}_2\quad\tilde{\sigma}_2\\ \tilde{s}_2+\zeta\,\tilde{n}_2}\right\},\ldots,\left\{\substack{p_1\quad\sigma_1\\ s_1+\zeta\,n_1}\right\},\left\{\substack{p_2\quad\sigma_2\\ s_2+\zeta\,n_2}\right\},\cdots}\ .
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

Debido a la Ec. (3.19), el operador S conmuta con el operador $\mathsf{U}_0\left(\Lambda,a,\zeta\right)$,

$$
\mathsf{U}_0\left(\Lambda,a,\zeta\right)\mathsf{S}\mathsf{U}_0\left(\Lambda,a,\zeta\right)^{-1} = \mathsf{S}\ . \tag{3.25}
$$

3.3. Teoría de perturbaciones

El operador S, que aparece en (3.16), coincide con el operador unitario

$$\mathsf{U}\,(t,t_0) \equiv \exp\left[i\mathsf{H}_0 t\right]\exp\left[-i\mathsf{H}\,(t\,-\,t_0)\right]\exp\left[-i\mathsf{H}_0 t_0\right]\,, \tag{3.26}$$

cuando $t = -t_0 \to \infty$, esto es,

$$\mathsf{S}\,=\,\mathsf{U}\,(\infty,-\infty)\;. \tag{3.27}$$

Diferenciando $\mathsf{U}\,(t,t_0)$ con respecto a la primer entrada,

$$i\frac{d}{dt}\mathsf{U}\,(t,t_0)\,=\,\mathsf{V}\,(t)\,\mathsf{U}\,(t,t_0)\;\;, \tag{3.28}$$

donde

$$\mathsf{V}\,(t)\,\equiv\,\exp\left[+i\mathsf{H}_0 t\right]\mathsf{V}\exp\left[-i\mathsf{H}_0 t\right]\;. \tag{3.29}$$

Puesto que $\mathsf{U}(t_0,t_0) = \mathsf{1}$, tenemos la siguiente ecuación integral

$$\mathsf{U}\,(t,t_0)\,=\,\mathsf{1}\,-\,i\int_{t_0}^{t}dt\,\mathsf{V}\,(t)\;\mathsf{U}\,(t,t_0)\;\;. \tag{3.30}$$

Reintroduciendo iterativamente (3.30) en su lado derecho, llegamos a

$$\mathsf{S}\,=\,\mathsf{1}\,+\,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}dt_1 dt_2\ldots dt_n T\left\{\mathsf{V}(t_1)\mathsf{V}(t_2)\cdots\mathsf{V}(t_n)\right\}\;\;, \tag{3.31}$$

donde $T\left\{\mathsf{V}(t_1)\mathsf{V}(t_1)\cdots\mathsf{V}(t_n)\right\}$ representa al *producto ordenado en el tiempo*: La suma de las n permutaciones de los operadores $\mathsf{V}(t_1)\mathsf{V}(t_2)\cdots\mathsf{V}(t_n)$, multiplicadas por productos de funciones *escalón*:

$$\begin{aligned}
T\left\{\mathsf{V}(t)\right\} &= \mathsf{V}(t)\;, \\
T\left\{\mathsf{V}(t_1)\mathsf{V}(t_2)\right\} &= \omega(t_1-t_2)\mathsf{V}(t_1)\mathsf{V}(t_2)\,+\,\omega(t_2-t_1)\mathsf{V}(t_2)\mathsf{V}(t_1)\;, \\
&\;\;\vdots \qquad\qquad \vdots \\
T\left\{\mathsf{V}(t_1)\mathsf{V}(t_2)\cdots\mathsf{V}(t_n)\right\} &= \sum_{P\{i_1,i_2,\ldots,i_n\}}\omega(t_{i_1}-t_{i_2})\ldots\omega(t_{i_{n-1}}-t_{i_n}) \\
&\qquad\times\mathsf{V}(t_{i_1})\mathsf{V}(t_{i_2})\cdots\mathsf{V}(t_{i_n})\;.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

donde $P\left\{i_1,i_2,\ldots,i_n\right\}$ representa todas las permutaciones de $\{1,2,\ldots,n\}$.

Para intentar satisfacer la relación (3.26), escribimos el potencial V como la integral de una densidad potencial con valores en el superespacio:

$$\mathsf{V}(t) \;=\; \int d^3x d^4\vartheta\, \mathcal{H}\,(x,\vartheta) \;\;, \tag{3.33}$$

donde $\mathcal{H}\,(x,\vartheta)$ es una *densidad escalar*:

$$\mathsf{U}_0\,(\Lambda,a,\zeta)\,\mathcal{H}\,(x,\vartheta)\,\mathsf{U}_0\,(\Lambda,a,\zeta)^{-1} \;=\; \mathcal{H}\,(x',\vartheta') \;\;. \tag{3.34}$$

Aquí, las variables transformadas x', ϑ' vienen dadas por las transformaciones supersimétricas

$$x'^{\mu} = \;\Lambda^{\mu}_{\;\;\nu}\, x^{\nu} \,+\, a^{\mu} \,+\, D(\Lambda)\vartheta\cdot\gamma^{\nu}\zeta, \quad \vartheta' \;=\; D(\Lambda)\,\vartheta \,+\, \zeta \;. \tag{3.35}$$

Entonces, la ecuación integral para el operador S viene dada por la serie de Dyson[33]:

$$\mathsf{S} \;=\; 1 \,+\, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!} d^8z_1 d^8z_2 \ldots d^8z_n\, T\,\{\mathsf{V}(z_1)\mathsf{V}(z_2)\cdots\mathsf{V}(z_n)\} \tag{3.36}$$

Si los potenciales a diferentes tiempos siempre conmutan, tenemos simplemente que $\mathsf{S} = \exp[-i\int d^8z\mathsf{V}(z)]$, en este caso la invariancia de S bajo las transformaciones del grupo de súper Poincaré es evidente. Ya que ciertamente no es el caso que los V's a diferentes tiempos conmutan, el orden temporal pone en duda la invariancia de Lorentz y la invariancia supersimétrica. La función paso no es invariante ante las transformaciones de Lorentz para intervalos del tipo-espacial, la función $\omega(t_1 - t_2)$ puede cambiar de signo si $(x_1 \,-\, x_2)^2 \,>\, 0$. Ya que el orden temporal no tiene efecto si el potencial conmuta, recuperamos la invariancia de Lorentz si demandamos que:

$$[\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(x')] \;=\; 0, \quad (x - x')^2 \geq 0 \;. \tag{3.37}$$

Aunque al imponer la condición de causalidad (3.37) hemos podido garantizar la invariancia ante transformaciones de Lorentz, el operador S no es invariante supersimétrico. Esto se ve del hecho de que la función escalón (paso) transforma bajo una transformación supersimétrica como

$$\omega\,(t_1 \,-\, t_2) \;=\; \omega\left(t_1' \,-\, t_2' \,+\, (\vartheta_1 \,-\, \vartheta_2)\cdot\gamma^0\zeta\right) \;\;. \tag{3.38}$$

Como cualquier extension de una función del espacio al superespacio, la función paso con valores en números fermiónicos puede ser definida en términos de su serie de Taylor alrededor de estos números fermiónicos. Entonces, el ansatz de localidad del potencial en el superespacio, junto con la relación de causalidad para la solución en la serie de Dyson, no es suficiente para la invariancia de la supermatriz $\mathcal{S}$.

En el capítulo (5), daremos una prueba puramente diagramática de que siempre es posible escoger $\mathsf{V}(t)$ (más general al propuesto en (3.33)), de tal manera que la supermatriz S resultante es completamente covariante. Mientras tanto aquí solo notamos que la función paso seria invariante supersimétrica si estuviera evaluada en

$$t_1 - t_2 - \vartheta_1 \cdot \gamma^0 \vartheta_2 \tag{3.39}$$

o en

$$t_1 - t_2 - (\vartheta_1 - \vartheta_2) \cdot \gamma^0 (\vartheta_{2\mp} - \vartheta_{1\pm}) \ . \tag{3.40}$$

3.4. Superpartículas idénticas

Hemos visto que es lo que entendemos por un operador bosónico y operador fermiónico con respecto a los supernúmeros. Pero esta definición no nos dice como clasificar un operador que tenemos definido en un espacio y del cual queremos extender su definición al superespacio. Afortunadamente (y esta es la razón de la nomenclatura bosón-fermión introducida), tenemos una clasificación natural de los estados y operadores de la teoría en términos de la estadística de *Fermi-Dirac* o de *Bose-Eisntein*. Primero recordamos como llegamos a esta clasificación.

Por definición, cada especie de partícula (por ejemplo los electrones, bosónes W, etc.) es idéntica. Cualquier estado de muchas partículas que difiere por el intercambio de dos partículas idénticas es físicamente indistinguible. Estados que difieren de esta manera, pertenecen al mismo rayo en el espacio de Hilbert; estos estados difieren por una fase α_n, donde n representa el tipo de partícula en cuestión. En tres o más dimensiones espaciales, esta fase solo puede depender de la especie de partícula, dándonos por tanto $\alpha_n^2 = \pm 1$ [17]. A las partículas con el signo positivo se les conoce como *bosones*; a las partículas con el signo negativo se les conoce como *fermiones*. Es esta la definición matemática de partícula idéntica.

Todo esta discusión es en el espacio, extendemos esta definición al superespacio. Además, por definición, *los estados bosónicos(fermiónicos) con respecto a su estadística, son bosónicos(fermiónicos) con respecto a los supernúmeros con respecto a su estadística* [34].

Sea ξ el conjunto de variables que identifican a la superpartícula, esto es, el supermomento, la proyección z del espín y el tipo de superpartícula. Para dos etiquetas ξ y ξ' que representan la misma especie de superpartícula, tenemos que

$$\Psi_{\cdots,\xi,\cdots,\xi',\cdots} = \pm\Psi_{\cdots,\xi',\cdots,\xi,\cdots} \ , \tag{3.41}$$

El signo positivo define a los bosones y el signo menos a los fermiones. La normalización para los estados con un número arbitrario de superpartículas, debe hacerse en consistencia con su simetría ante permutaciones de superpartículas. Podemos escribir

$$\left[\tilde{\Psi}_{\xi_1^*\xi_2^*\dots\xi_M^*}\right]^\dagger \Psi_{\xi_1'\xi_2'\dots\xi_M'} = \delta_{MN}\sum_{\mathcal{P}}\delta_{\mathcal{P}}\prod_i \delta\left(\xi_i' - \xi_{\mathcal{P}i}\right) \ , \tag{3.42}$$

donde $\mathcal{P}$ representa la permutación de los enteros $\{1, 2, \dots, N\}$. El termino $\delta_{\mathcal{P}}$ es un signo igual a -1 si la permutación $\mathcal{P}$ realiza un número impar de permutaciones con fermiónes y $+1$ de otra manera. La función $\delta(\xi-\xi')$ es un producto de funciones delta de Kronecker y deltas de Dirac, la función que normaliza los estados de una superpartícula. Recordamos que la delta fermiónica solo puede aparecer cuando tomamos el productor interior de un estado Ψ con su correspondiente estado 'tilde' $\tilde{\Psi}$, definido por la transformada de Fourier en las variables fermiónicas del estado Ψ en cuestión (ver capítulo 2).

Operadores de creación y aniquilación

La introducción de los operadores de creación y aniquilación se hace de manera análoga al caso del espacio. El operador de creación $a_\xi^\dagger$ viene definido por la acción sobre el superestado $\Psi_{\xi_1\cdots\xi_M}$ de varias superpartículas:

$$a_\xi^\dagger\Psi_{\xi_1\cdots\xi_M} \equiv \Psi_{\xi\,\xi_1\cdots\xi_M} \ . \tag{3.43}$$

Definimos al operador de aniquilación, como el adjunto del operador de creación que proviene del estado $\tilde{\Psi}_\xi$, evaluado en la variable conjugada ξ^*:

$$\tilde{a}_\xi \equiv \left(\tilde{a}^\dagger_{\xi^*}\right)^\dagger \ , \tag{3.44}$$

este operador aniquila el estado $\Psi_{\rm VAC}$ de vacío, el estado de cero superpartículas,

$$a_\xi \Psi_{\rm VAC} = 0 \ . \tag{3.45}$$

Debido a la normalización de los estados simetrizados respecto a su estadística, los operadores de creación satisfacen

$$\tilde{a}_{\xi'} a^\dagger_\xi \pm a^\dagger_\xi \tilde{a}_{\xi'} = \delta\left(\xi - \xi'\right) \ , \tag{3.46}$$

$$\tilde{a}^\dagger_{\xi'} a^\dagger_\xi \pm a^\dagger_\xi \tilde{a}^\dagger_{\xi'} = 0 \ , \tag{3.47}$$

$$\tilde{a}_{\xi'} a_\xi \pm \tilde{a}_\xi a_{\xi'} = 0 \ . \tag{3.48}$$

La generalidad de los operadores de creación y aniquilación se expresa a través del siguiente teorema, que citamos sin demostración y el cual se extiende de manera directa para el caso del superespacio. *Cualquier operador $\mathcal{O}$ actuando en el superespacio de Hilbert puede ser escrito como la suma de productos de operadores de creación y aniquilación [17]:*

$$\begin{aligned}\mathcal{O} = \sum_{N=0}^{\infty}\sum_{N=0}^{\infty} \int & d\xi'_1 \cdots d\xi'_N \, d\xi_1 \cdots d\xi_M \\ & \times a^\dagger_{\xi'_1} \cdots a^\dagger_{\xi'_N} \, a_{\xi_1} \cdots a_{\xi_M} \\ & \times C_{NM}\left(\xi'_1 \cdots \xi'_N \, \xi_1 \cdots \xi_M\right) \ . \end{aligned} \tag{3.49}$$

Los estados generales de N superpartículas pueden escribirse como

$$\Psi_{\xi_1 \cdots \xi_N} = a^\dagger_{\xi_1} \cdots a^\dagger_{\xi_N} \Psi_{\rm VAC} \ . \tag{3.50}$$

De la Ec. (3.17), se sigue la regla de transformación de los operadores de creación bajo el grupo de Lorentz:

$$\begin{aligned}&\mathsf{U}(\Lambda,b)a^{\dagger}_{\pm}\left(\mathbf{p}\, s_{\pm}\,\sigma\, n\right)\mathsf{U}(\Lambda,b)^{-1}\\&\qquad = e^{-i\Lambda b\cdot p}\sqrt{\frac{(\Lambda p)^{0}}{p^{0}}}\sum_{\sigma'}U_{\sigma'\sigma}[W(\Lambda,\mathbf{p})]\,a^{\dagger}_{\pm}\left(\mathbf{p}_{\Lambda}\,D(\Lambda)s_{\pm}\,\sigma'\,n\right)\ .\end{aligned} \tag{3.51}$$

Para el caso masivo, $U_{\sigma'\sigma}$ es la representación j del grupo rotación, mientras que para el caso sin masa $U_{\sigma'\sigma}$ es la fase correspondiente a la superpartícula de helicidad σ. El símbolo $\mathbf{p}_{\Lambda}$ representa la parte espacial de Λp.

Las transformaciones bajo supersimetría de los operadores de creación se leen como [ver Ec. (3.18)]

$$\begin{aligned}&\mathsf{U}(\zeta)\,a^{\dagger}_{\pm}\left(\mathbf{p}\, s_{\pm}\,\sigma\, n\right)\mathsf{U}(\zeta)^{-1}\\&\qquad = \exp\left[\zeta_{\mp}\cdot(+i\not{p})\,(2s\,+\,\zeta)\right]a^{\dagger}_{\pm}\left(\mathbf{p}\,\left(s\,+\,\zeta\right)_{\pm}\,\sigma\, n\right)\ .\end{aligned} \tag{3.52}$$

Anteriormente, habíamos definido a los operadores de aniquilación como el adjunto de los operadores de creación, evaluados en el conjugado del 4-espinor s. Redefinimos a estos operadores, evaluándolos en $\epsilon\gamma_5\beta s^{*}$: [2]

$$a_{\pm}\left(\mathbf{p}\, s_{\pm}\,\sigma\, n\right)\equiv\left[a^{\dagger}_{\mp}\left(\mathbf{p}\,(\epsilon\gamma_5\beta s^{*})_{\mp}\,\sigma\, n\right)\right]^{\dagger}\ . \tag{3.53}$$

De igual manera para los operadores de aniquilación $\tilde{a}_{\pm}$. Estos nuevos operadores de creación, transforman bajo el grupo de Lorentz como

$$\begin{aligned}&\mathsf{U}(\Lambda,b)\,a_{\pm}\left(\mathbf{p}\, s_{\pm}\,\sigma\, n\right)\mathsf{U}(\Lambda,b)^{-1}\\&\qquad = e^{+i\Lambda p\cdot b}\sqrt{\frac{(\Lambda p)^{0}}{p^{0}}}\sum_{\sigma'}U^{*}_{\sigma'\sigma}[W(\Lambda,\mathbf{p})]\,a_{\pm}\left(\mathbf{p}_{\Lambda}\,D(\Lambda)s_{\pm}\,\sigma'\,n\right)\ ,\end{aligned} \tag{3.54}$$

[2] La diferencia entre las dos definiciones radica en la propiedad de transformación bajo el grupo de Lorentz de la parte fermiónica del operador.

mientras que bajo una transformación supersimétrica:

$$\begin{aligned}&\mathsf{U}(\zeta) a_{\pm}\left(\mathbf{p}\, s_{\pm}\, \sigma\, n\right) \mathsf{U}(\zeta)^{-1} \\ &\qquad = \exp\left[(2s + \zeta)\cdot(+i\not{p})\zeta_{\mp}\right] a_{\pm}\left(\mathbf{p}\ (s + \zeta)_{\pm}\ \sigma\, n\right) \ .\end{aligned} \tag{3.55}$$

En esta notación explicita de las etiquetas de los estados, las relaciones de conmutación (3.46)-(3.48) para el caso masivo, toman la forma

$$\begin{aligned}&\left[\tilde{a}_{\pm}\left(\mathbf{p}\, s_{\pm}\, \sigma\, n\right), a_{\pm}^{\dagger}\left(\mathbf{p}'\, s_{\pm}'\, \sigma'\, n'\right)\right\} = \pm 2m\, \delta^2\left[(s'-s)_{\pm}\right] \delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\, \delta_{nn'}\delta_{\sigma\sigma'} \ , \\ &\left[\tilde{a}_{\pm}^{\dagger}\left(\mathbf{p}\, s_{\pm}\, \sigma\, n\right), a_{\pm}^{\dagger}\left(\mathbf{p}'\, s_{\pm}'\, \sigma'\, n'\right)\right\} = 0 \ , \\ &\left[\tilde{a}_{\pm}\left(\mathbf{p}\, s_{\pm}\, \sigma\, n\right), a_{\pm}\left(\mathbf{p}'\, s_{\pm}'\, \sigma'\, n'\right)\right\} = 0 \ .\end{aligned} \tag{3.56}$$

El resto de las relaciones de conmutación son

$$\begin{aligned}&\left[a_{\mp}\left(\mathbf{p}\, s_{\mp}\, \sigma\, n\right), a_{\pm}^{\dagger}\left(\mathbf{p}'\, s_{\pm}'\, \sigma'\, n'\right)\right\} = \exp\left[2s\cdot(-i\not{p})\, s'_{\pm}\right] \delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\, \delta_{nn'}\delta_{\sigma\sigma'} \ , \\ &\left[a_{\mp}\left(\mathbf{p}\, s_{\mp}\, \sigma\, n\right), a_{\pm}\left(\mathbf{p}'\, s_{\pm}'\, \sigma'\, n'\right)\right\} = 0 \ , \\ &\left[a_{\mp}^{\dagger}\left(\mathbf{p}\, s_{\mp}\, \sigma\, n\right), a_{\pm}^{\dagger}\left(\mathbf{p}'\, s_{\pm}'\, \sigma'\, n'\right)\right\} = 0 \ .\end{aligned} \tag{3.57}$$

Relaciones similares aplican para los operadores con tilde. De forma explicita, la relación entre los operadores de creación $\tilde{a}_{\pm}^{\dagger}$ y $a_{\mp}^{\dagger}$ viene dada por la siguiente transformada de Fourier fermiónica [ver la Ec. (2.130)]:

$$\tilde{a}_{\pm}^{\dagger}\left(\mathbf{p}\, s_{\pm}\, \sigma\, n\right) \equiv \int \exp\left[2i\, s_{\pm}\cdot \not{p} s'\right] a_{\mp}^{\dagger}\left(\mathbf{p}\, s_{\mp}'\, \sigma\, n\right)\, d\left[p, s_{\mp}'\right] \ , \tag{3.58}$$

de aquí podemos ver que

$$\tilde{a}_{\pm}\left(\mathbf{p}\, s_{\pm}\, \sigma\, n\right) = \int d\left[p, s_{\mp}'\right] \exp\left[-2i\, s_{\pm}\cdot \not{p} s'\right] a_{\mp}\left(\mathbf{p}\, s_{\mp}'\, \sigma\, n\right) \ . \tag{3.59}$$

Es conveniente redefinir los operadores de creación como

$$a_{\pm}^{\dagger}\left(\mathbf{p}\, s\, \sigma\, n\right) \equiv \exp\left[-is\cdot \not{p} s_{\mp}\right] a_{\pm}^{\dagger}\left(\mathbf{p}\, s_{\pm}\, \sigma\, n\right) \tag{3.60}$$

y los respectivos operadores aniquilación:

$$a_{\mp}\left(\mathbf{p}\, s\, \sigma\, n\right) \equiv \left(a^{\dagger}_{\pm}\left(\mathbf{p}\ (\epsilon\gamma_5\beta s^*)_{\pm}\ \sigma\, n\right)\right)^{\dagger} \ , \tag{3.61}$$

$$= \exp\left[+is\cdot \not{p} s_{\pm}\right] a_{\mp}\left(\mathbf{p}\, s_{\mp}\, \sigma\, n\right) \tag{3.62}$$

Las transformaciones de Lorentz retienen la misma forma

$$\begin{aligned} &\mathsf{U}(\Lambda, x) a^{\dagger}_{\pm}\left(\mathbf{p}\, s\, \sigma\, n\right) \mathsf{U}(\Lambda, x)^{-1} \\ &\quad = e^{-i\Lambda p\cdot x}\sqrt{\tfrac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \sum_{\sigma'} U^{(j)}_{\sigma'\sigma}[W(\Lambda, \mathbf{p})] a^{\dagger}_{\pm}\left(\mathbf{p}_{\Lambda}\, D(\Lambda) s\, \sigma'\, n\right) \ , \end{aligned} \tag{3.63}$$

$$\begin{aligned} &\mathsf{U}(\Lambda, x) a_{\pm}\left(\mathbf{p}\, s\, \sigma\, n\right) \mathsf{U}(\Lambda, x)^{-1} \\ &\quad = e^{+i\Lambda p\cdot x}\sqrt{\tfrac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \sum_{\sigma'} U^{(j)}_{\sigma'\sigma}[W(\Lambda, \mathbf{p})]^* a_{\pm}\left(\mathbf{p}_{\Lambda}\, D(\Lambda) s\, \sigma'\, n\right) \ . \end{aligned} \tag{3.64}$$

Con la nueva fase, las transformaciones supersimétricas adquieren una forma más simple

$$\mathsf{U}(\zeta) a^{\dagger}_{\pm}\left(\mathbf{p}\, s\, \sigma\, n\right) \mathsf{U}(\zeta)^{-1} = \exp\left[+i\zeta\cdot \not{p} s\right] a^{\dagger}_{\pm}\left(\mathbf{p}\, s\, +\, \zeta\, \sigma\, n\right) \ , \tag{3.65}$$

$$\mathsf{U}(\zeta) a_{\pm}\left(\mathbf{p}\, s\, \sigma\, n\right) \mathsf{U}(\zeta)^{-1} = \exp\left[-i\zeta\cdot \not{p} s\right] a_{\pm}\left(\mathbf{p}\, s\, +\, \zeta\, \sigma\, n\right) \ . \tag{3.66}$$

Similarmente para los operadores de creación-aniquilación con tilde, definimos $\tilde{a}^{\dagger}_{\mp}\left(\mathbf{p}\, s\, \sigma\, n\right)$ y $\tilde{a}_{\pm}\left(\mathbf{p}\, s\, \sigma\, n\right)$,

$$\tilde{a}^{\dagger}_{\mp}\left(\mathbf{p}\, s\, \sigma\, n\right) \equiv \exp\left[-is\cdot \not{p} s_{\pm}\right] \tilde{a}^{\dagger}_{\mp}\left(\mathbf{p}\, s_{\mp}\, \sigma\, n\right) \ , \tag{3.67}$$

$$\tilde{a}_{\pm}\left(\mathbf{p}\, s\, \sigma\, n\right) \equiv \exp\left[+is\cdot \not{p} s_{\mp}\right] \tilde{a}_{\pm}\left(\mathbf{p}\, s_{\pm}\, \sigma\, n\right) \ . \tag{3.68}$$

Al final de la Sec. (2.3), hemos demostrado que para una representación completamente irreducible del grupo de supér Poincaré, podemos hacer la identificación

$$\tilde{a}^{\dagger}_{\pm} = a^{\dagger}_{\pm} \ . \tag{3.69}$$

Las componentes de los operadores de superpartícula.

Para el caso con masa, hemos visto que la expansiones generales de la superpartículas $\pm$ puede escribirse como

$$\Psi^{\pm}_{p,s_\pm,\sigma} \equiv \Psi^{0,\pm}_{p,\sigma} \mp \sqrt{2m}\left(\Psi^{1,\pm}_{p,\sigma}\right)\cdot (s_\pm)_p + m\,\Psi^{2,\pm}_{p,\sigma}\,(s\cdot s_\pm) \ , \tag{3.70}$$

donde $s_p = \epsilon\gamma_5\beta D(L(p))^{-1}s$. Haciendo las identificaciones

$$\Psi^{0,\pm}_{p,\sigma,n} = \left[a^{(0)}_\pm\,(p\,\sigma\,n)\right]^\dagger \Psi_{\rm VAC}, \quad \Psi^{2,\pm}_{p,\sigma} = \left[a^{(2)}_\pm\,(p\,\sigma\,n)\right]^\dagger \Psi_{\rm VAC}, \tag{3.71}$$

y

$$\left(\Psi^{0,\pm}_{p,\sigma}\right)_\alpha = \left[a^{(1)}_\pm\,(p\,\sigma\,n)\right]^\dagger_\alpha \Psi_{\rm VAC} \tag{3.72}$$

Tenemos que los operadores de creación vienen dados en componentes de la siguiente manera:

$$a^\dagger_\pm\,(\mathbf{p}\,s_\pm\,\sigma\,n) = a^{(0)}_\pm\,(p\,\sigma\,n)^\dagger + \sqrt{2m}\,a^{(1)}_\pm\,(p\,\sigma\,n)^\dagger\cdot\gamma_5\,(s_\pm)_p + m\,a^{(2)}_\pm\,(p\,\sigma\,n)^\dagger\,(s\cdot s_\pm) \ . \tag{3.73}$$

En el termino lineal en la variable fermiónica, la operación $\dagger$ es tomada como el operación de adjunto junto con el transpuesto en el índice espinorial α. Los (anti)conmutadores diferentes de cero son

$$\begin{aligned} \left[a^{(0)}_\pm\,(\mathbf{p}\,\sigma\,n)\,, a^{(0)}_\pm\,(\mathbf{p}'\,\sigma'\,n')^\dagger\right\} &= \delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\delta_{\sigma\sigma'}\delta_{nn'} \ , \\ \left[a^{(2)}_\pm\,(\mathbf{p}\,\sigma\,n)\,, a^{(2)}_\pm\,(\mathbf{p}'\,\sigma'\,n')^\dagger\right\} &= \delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\delta_{\sigma\sigma'}\delta_{nn'} \ , \end{aligned} \tag{3.74}$$

y

$$\left\{a^{(1)}_\pm\left(\mathbf{p}\,\sigma\,\sigma_{\frac{1}{2}}\,n\right), a^{(1)}_\pm\left(\mathbf{p}\,\sigma'\,\sigma'_{\frac{1}{2}}\,n'\right)^\dagger\right] = \delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\delta_{\sigma_{\frac{1}{2}}\sigma'_{\frac{1}{2}}}\delta_{\sigma\sigma'} \ , \tag{3.75}$$

donde

$$a_+^{(1)}\,(\mathbf{p}\,\sigma'\,n')^\dagger \;=\; \begin{bmatrix} 0 \\ a_+^{(1)}\left(\mathbf{p}\,\sigma'\,\sigma'_{\frac{1}{2}}\,n'\right)^\dagger \end{bmatrix}, \quad a_+^{(1)}\,(\mathbf{p}\,\sigma\,n)^\dagger \;=\; \begin{bmatrix} a_+^{(1)}\left(\mathbf{p}\,\sigma\,\sigma_{\frac{1}{2}}\,n\right)^\dagger \;. \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.76}$$

Bajo una transformación de Lorentz,

$$\begin{aligned} \mathsf{U}(\Lambda,b)a_\pm^{(0)}\,(\mathbf{p}\,\sigma\,n)^\dagger\,\mathsf{U}(\Lambda,b)^{-1} \;&=\; e^{-i\Lambda p\cdot b}\sqrt{\tfrac{(\Lambda p)^0}{p^0}}\sum_{\sigma'} U^{(j)}_{\sigma'\sigma}[W(\Lambda,\mathbf{p})]a_\pm^{(0)}\,(\mathbf{p}_\Lambda\,\sigma'\,n)^\dagger\,, \\ \mathsf{U}(\Lambda,b)a_\pm^{(2)}\,(\mathbf{p}\,\sigma\,n)^\dagger\,\mathsf{U}(\Lambda,b)^{-1} \;&=\; e^{-i\Lambda p\cdot b}\sqrt{\tfrac{(\Lambda p)^0}{p^0}}\sum_{\sigma'} U^{(j)}_{\sigma'\sigma}[W(\Lambda,\mathbf{p})]a_\pm^{(2)}\,(\mathbf{p}_\Lambda\,\sigma'\,n)^\dagger\,, \end{aligned} \tag{3.77}$$

y

$$\begin{aligned} &\mathsf{U}(\Lambda,x)\,a_\pm^{(1)}\left(\mathbf{p}\,\sigma\,\sigma_{\frac{1}{2}}\,n\right)^\dagger\,\mathsf{U}(\Lambda,x)^{-1} \\ &\quad= e^{-i\Lambda p\cdot x}\sqrt{\tfrac{(\Lambda p)^0}{p^0}}\sum_{\sigma'_{\frac{1}{2}}\sigma'} U^{(j)}_{\sigma'\sigma}[W(\Lambda,\mathbf{p})]U^{(\frac{1}{2})}_{\sigma'_{\frac{1}{2}}\sigma_{\frac{1}{2}}}\,[W(\Lambda,\mathbf{p})]\,a_\pm^{(1)}\left(\mathbf{p}\,\sigma'\,\sigma'_{\frac{1}{2}}\,n\right)^\dagger\;. \end{aligned} \tag{3.78}$$

3.5. El Principio de descomposición en Cúmulos

Una propiedad general de las ciencias naturales, es que cualesquiera dos experimentos que ocurran lo suficientemente separados en el espacio, nos tienen que arrojar experimentos no relacionados. Esta propiedad en la Física, elevada a principio, se le conoce como *El Principio de descomposición en cúmulos* [17, 35].

Para la teoría de la supermatriz $\mathcal{S}$, el principio de descomposición en cúmulos se implementa pidiendo que, para N procesos físicos $A^i \to B^i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, que se encuentran en lugares distantes, la supermatriz-$\mathcal{S}$ del proceso total, factorice:

$$\mathcal{S}_{B^1+B^2+\cdots+B^N,A^1+A^2+\cdots+A^N,} \;\to\; \mathcal{S}_{B^1,A^1}\,\mathcal{S}_{B^2,A^2}\cdots\mathcal{S}_{B^N,A^N} \tag{3.79}$$

Esta factorización de la supermatriz $\mathcal{S}$, nos garantiza probabilidades no correlacionadas. Entonces, el asunto es el de saber cual es la forma genérica de las interacciones que nos garantizan esta factorización. Para indagar un poco más sobre esto, consideremos las particiones del estado inicial de muchas superpartículas A, en cúmulos $A_1 A_2 \cdots$. Para cada partición, en general $A \neq A_1 A_2 \cdots$, en estas particiones importa el orden pero los elementos son los mismos, $\{A\} = \{A_1, A_2, \cdots\}$. De igual manera para los estados finales, consideramos todas las particiones $B \to B_1 B_2 \cdots$. Escribimos al elemento $\mathcal{S}_{BA}$ como

$$\mathcal{S}_{BA} = \sum_{\text{Part.}} (\pm)\, \mathcal{S}^{\mathrm{C}}_{B_1 A_1} \mathcal{S}^{\mathrm{C}}_{B_2 A_2} \cdots \ , \tag{3.80}$$

donde la suma se extiende sobre todas las particiones $A_1 A_2 \cdots$ y $B_1 B_2 \cdots$ de A y B, respectivamente. La suma no toma en cuenta como diferentes las combinaciones que difieren por intercambios en un mismo cúmulo ni combinaciones que permutan cúmulos completos. El signo menos se introduce cuando en la partición total de A y B se involucra un número impar de permutaciones de superpartículas con estadística de Fermi. A los elementos de matriz del lado derecho, con el superíndice C, se les conocen como los "elementos conectadas" de $\mathcal{S}_{BA}$. La suma sobre las particiones incluye al cúmulo trivial $A = A_1$ y $B = B_1$.

La introducción de la Ec. (3.80) por sí misma no impone ninguna restricción en $\mathcal{S}_{BA}$ y por sí sola es vacía. Las superamplitudes conectadas $\mathcal{S}^{\mathrm{C}}_{BA}$, se obtienen de manera recursiva; de la Ec. (3.80) tenemos que

$$\mathcal{S}^{\mathrm{C}}_{B,A} = \mathcal{S}_{B,A} - {\sum_{\text{Part.}}}' (\pm)\, \mathcal{S}^{\mathrm{C}}_{B_1 A_1} \mathcal{S}^{\mathrm{C}}_{B_2 A_2} \cdots \ , \tag{3.81}$$

donde los términos de la suma primada, la cual excluye al término $\mathcal{S}^{\mathrm{C}}_{B,A}$, se obtienen por procesos de menor número de superpartículas que las que se encuentran en el conjunto $\{B, A\}$. Para cuando el número de superpartículas iniciales y finales son uno, $A = \xi, B = \xi'$, tenemos que $\mathcal{S}^{\mathrm{C}}_{\xi,\xi'} \equiv \mathcal{S}_{\xi,\xi'}$, pero este es un proceso físico donde no pasa nada, la superpartícula no interacciona con ninguna otra. Estamos suponiendo que las superestados de una superpartícula no pueden transformarse en otra superpartícula (son estables bajo este tipo de decaimientos) y no pueden desaparecer completamente (transformase en el vacío). Entonces, sin perdida de generalidad, escribimos

$$\mathcal{S}_{\xi',\xi} = \delta\,(\xi - \xi') \ . \tag{3.82}$$

Habiendo fijado la superamplitud conectada para el proceso de menor orden, los demás términos se siguen por el procedimiento recursivo (3.81). El siguiente orden en el número de superpartículas, son las transiciones de dos superpartículas iniciales a una superpartícula final, o viceversa,

$$\mathcal{S}_{\xi'_1,\xi_1\xi_2} = \mathcal{S}^{\mathrm{C}}_{\xi'_1\xi'_2,\xi_1}, \quad \mathcal{S}_{\xi'_1\xi'_2,\xi_1} = \mathcal{S}^{\mathrm{C}}_{\xi'_1\xi'_2,\xi_1}. \tag{3.83}$$

El siguiente orden, representa la transición entre dos estados de superpartículas:

$$\mathcal{S}_{\xi'_1\xi'_2,\xi_1\xi_2} = \mathcal{S}^{\mathrm{C}}_{\xi'_1\xi'_2,\xi_1\xi_2} + \delta\left(\xi_1-\xi'_1\right)\delta\left(\xi_2-\xi'_2\right) \pm \delta\left(\xi_1-\xi'_2\right)\delta\left(\xi_2-\xi'_1\right) \ , \tag{3.84}$$

donde hemos usado (3.82). La utilidad de las supermatrices conectadas, reside en que el principio de descomposición en cúmulos se expresa de manera más clara en términos de estas superamplitudes. En la relación (3.79), hemos hecho la partición de (A, B) en términos de la suma de los subconjuntos de los N experimentos lejanos, $(A, B) = \sum_j^N (B^i, A^i)$, entonces el principio de descomposición en cúmulos se expresa requiriendo que las superamplitudes conectadas de la Ec. (3.81) sean cero:

$$S^C_{A',B'} = 0 \ , \tag{3.85}$$

para cuando los conjuntos (A', B') contienen elementos de (B^i, A^i) y (B^j, A^j) con $i \neq j$. En este caso, es evidente que la relación (3.79) se satisface. Para introducir la noción de lejanía en la supermatriz $\mathcal{S}$, escribimos $\mathcal{S}^{\mathrm{C}}_{BA}$ en el espacio de coordenadas, esto es, cada variable bosónica $\mathbf{p}$ del superespacio de momentos es reemplazada por la variable espacial $\mathbf{x}$. Esto es, tomamos la transformada de Fourier de $\mathcal{S}_{BA}$

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^{\mathrm{C}}_{\mathbf{x'}_1\mathbf{x'}_2\cdots,\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2} \equiv \int & d^3\mathbf{p}'_1 d^3\mathbf{p}'_2\cdots d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2\cdots \mathcal{S}^{\mathrm{C}}_{\mathbf{p'}_1\mathbf{p'}_2\cdots,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2} \\ & \times e^{i\mathbf{p}'_1\cdot\mathbf{x}'_1} e^{i\mathbf{p}'_2\cdot\mathbf{x}'_2}\cdots e^{-i\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{x}_1} e^{-i\mathbf{p}_2\cdot\mathbf{x}_2} \ ,\end{aligned} \tag{3.86}$$

donde en esta última expresión hemos escondido todos los índices fermiónicos y discretos. El lado izquierdo es cero para separaciones espaciales infinitas, si a lo más $\mathcal{S}^{\mathrm{C}}_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2\cdots,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}$ contiene una y solo una delta 4-dimensional, que nos asegura la conservación del momento y la energía (estamos suponiendo invariancia traslacional)[3]:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^{\mathrm{C}}_{\mathbf{p'}_1\mathbf{p'}_2\cdots,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2} = \; & \delta^3\left(\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 + \cdots - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \cdots\right) \\ & \times\delta\left(E'_1 + E'_2 + \cdots - E_1 - E_2 - \cdots\right)\mathcal{C}_{\mathbf{p'}_1\mathbf{p'}_2\cdots,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}\end{aligned} \tag{3.87}$$

donde las singularidades de $\mathcal{C}_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2\cdots,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}$ pueden incluir polos y puntos de ramificación, pero no pueden ser tan severas como las deltas de Dirac [17].

Finalmente, la importancia de los operadores de creación y aniquilación se evidencia a través del siguiente teorema (extendido de manera directa al superespacio): *La supermatriz $\mathcal{S}$ satisface el principio de descomposición en cúmulos si y solo sí el Hamiltoniano de interacción se puede escribir como*

$$\begin{aligned}\mathsf{H} = \; & \sum_{N=0}^{\infty}\sum_{N=0}^{\infty}\int d\xi'_1\cdots d\xi'_N\, d\xi_1\cdots d\xi_M \\ & \times a^{\dagger}_{\xi'_1}\cdots a^{\dagger}_{\xi'_N}\, a_{\xi_1}\cdots a_{\xi_M} \times h_{NM}\left(\xi'_1\cdots\xi'_N\,\xi_1\cdots\xi_M\right)\ ,\end{aligned} \tag{3.88}$$

con

$$\begin{aligned}h_{NM}\left(\xi'_1\cdots\xi'_N\,\xi_1\cdots\xi_M\right) = \; & \delta^3\left(\mathbf{p}'_1 + \cdots + \mathbf{p}'_N - \mathbf{p}_1 - \cdots - \mathbf{p}_M\right) \\ & \times\tilde{h}_{NM}\left(\xi'_1\cdots\xi'_N\,\xi_1\cdots\xi_M\right)\end{aligned} \tag{3.89}$$

y donde $\tilde{h}_{NM}$ no contiene factores que son funciones delta de Dirac (en la parte bosónica de los supermomentos). Para una demostración (perturbativa) de este resultado, ver la referencia [17].

[3]Fuera de la invariancia traslacional, el resultado no supone otra simetría[35].

Capítulo 4

Supercampos cuánticos

La necesidad de conjuntar la invariancia de Lorentz, los principios de la mecánica cuántica y el principio de descomposición en cúmulos, es lo que da origen a los supercampos cuánticos, esta es la esencia del *enfoque de Weinberg para la teoría del campo* [15, 16], el cual extendemos aquí para el caso del superespacio [36]. Tenemos los elementos necesarios para hacerlo, ya que hemos desarrollado la teoría de representaciones del grupo de súper Poincaré en el superespacio y hemos visto que es lo que entendemos por una supermatriz $\mathcal{S}$ completamente covariante.

4.1. Los Supercampos libres

Con el calificativo de que aún no hemos lidiado con la no-invariancia del orden temporal, hemos visto que las densidades escalares Hamiltonianas en el superespacio nos permiten escribir potenciales que nos dan una supermatriz $\mathcal{S}$ covariante:

$$\mathsf{V}(t) = \int d^3x d^4\vartheta \, \mathcal{H}(x, \vartheta) \ , \tag{4.1}$$

donde $\mathcal{H}$ satisface la condición de causalidad:

$$\left[\mathcal{H}(x,\vartheta), \mathcal{H}(x',\vartheta')\right] = 0, \quad (x - x')^2 > 0 \ . \tag{4.2}$$

Por otro lado, hemos visto que para satisfacer el principio de descomposición en cúmulos, tenemos que escribir el Hamiltoniano en términos de operadores de creación y de aniquilación. Con el fin de cumplir con estos dos requerimientos, introducimos los supercampos de aniquilación $\Xi^{\dagger}_{\pm n}(x,\vartheta)$ y los supercampos de creación $\Xi_{\pm n}(x,\vartheta)$ definidos por las relaciones

$$\Xi^{\dagger}_{\pm\ell}(x,\vartheta) \equiv \sum_{\sigma\, n} \int d\,(\mathbf{p}\,s)\; a^{\dagger}_{\pm}\,(\mathbf{p}\,s\,\sigma\,n)\, v_{\pm\ell}\,(x,\vartheta;\mathbf{p}\,s\,n) \;\; , \tag{4.3}$$

$$\Xi_{\pm\ell}(x,\vartheta) \equiv \sum_{\sigma\, n} \int d\,(\mathbf{p}\,s)\; a_{\pm}\,(\mathbf{p}\,s\,\sigma\,n)\, u_{\pm n}\,(x,\vartheta;\mathbf{p}\,s\,n) \;\; , \tag{4.4}$$

respectivamente. Esto nos da un total de cuatro tipos de supercampos. Los operadores de creación y aniquilación que aparecen en estas definiciones, son los presentados en las Ecs. (3.60) y (3.62), respectivamente. Recordamos que los símbolos σ y n presentan las proyecciones de los superspines y las especies de superpartículas, respectivamente. El elemento de volumen $d\,(\mathbf{p}\,s)$ en las Ecs. (4.3) y (4.4), depende de si la especie de superpartícula en cuestión, es masiva o no. Para el caso masivo, tenemos la medida invariante fermiónica

$$d\,(\mathbf{p}\,s) = \; d^3\mathbf{p}\, d^2 s_+\, d^2 s_- \;\; , \tag{4.5}$$

mientras que para el caso sin masa,

$$d\,(\mathbf{p}\,s) = \; d^3\mathbf{p}\;\left[d\,(u(p)\cdot\gamma_5 s_+)\right]\,\left[d\,(u(p)\cdot\gamma_5 s_-)\right] \;\; . \tag{4.6}$$

Las *superfunciones de onda*,

$$u_{\pm\ell}\,(x,\vartheta;\mathbf{p},s,\sigma)\,, \quad v_{\pm\ell}\,(x,\vartheta;\mathbf{p},s,\sigma) \;\; , \tag{4.7}$$

se escogen de manera que los supercampos bajo transformaciones:

- de Lorentz:

$$\mathsf{U}(\Lambda,a)\Xi^{\dagger}_{\pm\ell}(x,\vartheta)\mathsf{U}(\Lambda,a)^{-1} = \sum_{\pm\bar{\ell}} \left[S(\Lambda^{-1})\right]_{\pm\bar{\ell},\pm\bar{\ell}} \Xi^{\dagger}_{\pm\bar{\ell}}\,(\Lambda x + a, D(\Lambda)\vartheta) \;\; , \tag{4.8}$$

$$\mathsf{U}(\Lambda,a)\Xi_{\pm\ell}(x,\vartheta)\mathsf{U}(\Lambda,a)^{-1} = \sum_{\pm\bar{\ell}} \left[S(\Lambda^{-1})\right]_{\pm\bar{\ell},\pm\bar{\ell}} \Xi^{*}_{\pm\bar{\ell}}\,(\Lambda x + a, D(\Lambda)\vartheta) \;\; . \tag{4.9}$$

- de supersimetría:

$$\mathsf{U}(\zeta)\,\Xi^{\dagger}_{\pm\ell}(x,\vartheta)\,\mathsf{U}(\zeta)^{-1} = \Xi^{\dagger}_{\pm\ell}\left(x^{\mu} + \vartheta\cdot\gamma^{\mu}\zeta, \vartheta\,+\,\zeta\right)\ , \tag{4.10}$$

$$\mathsf{U}(\zeta)\,\Xi_{\pm\ell}(x,\vartheta)\,\mathsf{U}(\zeta)^{-1} = \Xi_{\pm\ell}\left(x^{\mu} + \vartheta\cdot\gamma^{\mu}\zeta, \vartheta\,+\,\zeta\right)\ . \tag{4.11}$$

Las matrices $[S(\Lambda^{-1})]_{\pm\bar{\ell},\pm\bar{\ell}}$ forman una representación del grupo de Lorentz:

$$S\left(\Lambda_1\right)S\left(\Lambda_2\right) \;=\; S\left(\Lambda_1\Lambda_2\right)\ . \tag{4.12}$$

Notemos que $[S(\Lambda^{-1})]_{\pm\bar{\ell},\pm\bar{\ell}}$ puede ser en principio diferente para cada tipo de supercampo, esto es, tenemos cuatro representaciones del grupo de Lorentz que pueden ser diferentes. Al igual que en todo el texto, hemos usado

$$\vartheta\cdot\gamma^{\mu}\zeta \;=\; \vartheta^{\mathsf{T}}\epsilon\gamma_5\gamma^{\mu}\zeta\ . \tag{4.13}$$

Una vez construidos estos campos, formamos interacciones invariantes tomando combinaciones

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\left(x,\vartheta\right) = \sum_{NM}\sum_{\varepsilon_1\ell_1\cdots\varepsilon_N\ell_N}\sum_{\tilde{\varepsilon}_1\tilde{\ell}_1\cdots\tilde{\varepsilon}_N\tilde{\ell}_N} & g_{\varepsilon_1\ell_1\cdots\varepsilon_N\ell_N,\tilde{\varepsilon}_1\tilde{\ell}_1\cdots\tilde{\varepsilon}_N\tilde{\ell}_M}\\ & \times\Xi^{\dagger}_{\varepsilon_1\ell_1}(x,\vartheta)\cdots\Xi^{\dagger}_{\varepsilon_N\ell_1}(x,\vartheta)\Xi_{\tilde{\varepsilon}_1\tilde{\ell}_1}(x,\vartheta)\cdots\Xi_{\tilde{\varepsilon}_M\tilde{\ell}_1}(x,\vartheta)\ ,\end{aligned} \tag{4.14}$$

donde la suma en $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_N,\tilde{\varepsilon}_1,\cdots,\tilde{\varepsilon}_M$ toma los valores de $+$ y $-$. Los índices con barra nos recuerdan que todos los índices pueden pertenecer a diferentes representaciones del grupo de Lorentz. Tendremos una densidad invariante de Lorentz si escogemos a los coeficientes $g_{L_1\cdots L_N}$ como tensores invariantes, esto es, para cualquier Λ:

$$\begin{aligned}g_{\varepsilon_1\ell_1\cdots\varepsilon_N\ell_N,\tilde{\varepsilon}_1\tilde{\ell}_1\cdots\tilde{\varepsilon}_N\tilde{\ell}_M} = \sum_{\varepsilon'_1\ell'_1\cdots\varepsilon'_N\ell'_N}\sum_{\tilde{\varepsilon}'_1\tilde{\ell}'_1\cdots\tilde{\varepsilon}'_N\tilde{\ell}'_N} & D\left(\Lambda^{-1}\right)_{\varepsilon_1\ell_1,\varepsilon'_1\ell'_1}\cdots D\left(\Lambda^{-1}\right)_{\varepsilon_N\ell_N,\varepsilon'_N\ell'_N}\\ \times\quad D\left(\Lambda^{-1}\right)_{\tilde{\varepsilon}_1\tilde{\ell}_1,\tilde{\varepsilon}'_1\ell'_1} & \cdots D\left(\Lambda^{-1}\right)_{\tilde{\varepsilon}_M\tilde{\ell}_M,\tilde{\varepsilon}'_M\ell'_M}\, g_{\varepsilon'_1\ell_1\cdots\varepsilon'_N\ell'_N,\tilde{\varepsilon}'_1\tilde{\ell}'_1\cdots\tilde{\varepsilon}'_N\tilde{\ell}'_M}\ .\end{aligned} \tag{4.15}$$

Estos tensores no pueden depender de las coordenadas x^μ, ya que esto haría que la densidad Hamiltoniana $\mathcal{H}$ no fuese invariante ante el subgrupo de traslaciones. En el próximo capítulo, veremos que bajo ciertas condiciones sobre los supercampos (condiciones de quiralidad), los tensores $g_{\varepsilon_1 \ell_1 \cdots, \tilde{\varepsilon}_1 \tilde{\ell}_1 \cdots}$ pueden incluir términos locales en las coordenadas fermiónicas ϑ de tal forma que la integral $\int d^4x d^4\vartheta\, \mathcal{H}$ siga siendo invariante supersimétrica.

El siguiente paso, es el de establecer la forma de las superfunciones de onda $u_{\pm\ell}$ y $v_{\pm\ell}$. Primero desarrollamos las consecuencias de la simetría de Lorentz. Los operadores de creación y aniquilación, bajo la acción del grupo de Lorentz transforman como ver Ecs. (3.63) y (3.64)+

$$\begin{aligned} &\mathsf{U}(\Lambda, b) a^\dagger_\pm (\mathbf{p}\, s\, \sigma\, n) \mathsf{U}(\Lambda, b)^{-1} \\ &\qquad = e^{-i\Lambda p \cdot b} \sqrt{\tfrac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \sum_{\sigma'} U^{(j_n)}_{\sigma' \sigma}[W(\Lambda, \mathbf{p})^{-1}] a^\dagger_\pm (\mathbf{p}_\Lambda\, D(\Lambda) s\, \sigma'\, n) \ , \end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned} &\mathsf{U}(\Lambda, b) a_\pm (\mathbf{p}\, s\, \sigma\, n) \mathsf{U}(\Lambda, b)^{-1} \\ &\qquad = e^{+i\Lambda p \cdot b} \sqrt{\tfrac{(\Lambda p)^0}{p^0}} \sum_{\sigma'} U^{(j_n)}_{\sigma' \sigma}[W(\Lambda, \mathbf{p})]^* a_\pm (\mathbf{p}_\Lambda\, D(\Lambda) s\, \sigma'\, n) \ . \end{aligned} \tag{4.17}$$

El elemento de volumen de momento bosónico, satisface la relación $d^3\mathbf{p}/p^0 = d^3\mathbf{p}_\Lambda/(\Lambda p)^0$, mientras que la parte fermiónica del elemento de volumen en el espacio de momentos es invariante de Lorentz, por lo que la condición de invariancia de Lorentz del elemento de volumen en el superespacio resulta ser

$$\frac{1}{p^0}\, d\,(\mathbf{p}\, s) \ = \ \frac{1}{(\Lambda p)^0}\, d\,(\mathbf{p}_\Lambda\, D(\Lambda) s) \ . \tag{4.18}$$

Con este resultado, llegamos a que

$$\begin{aligned}
&\sum_{\pm\bar{\ell}} \left[S\left(\Lambda^{-1}\right)\right]_{\pm\ell,\pm\bar{\ell}} \, v_{\pm\bar{\ell}}\left(\Lambda x + b, D(\Lambda)\vartheta; \mathbf{p}_\Lambda \, D(\Lambda) s \, \sigma \, n\right) \\
&\qquad = e^{-i(\Lambda b)\cdot p} \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} \sum_{\sigma'} U^{(j_n)}_{\sigma'\sigma}[W\left(\Lambda, p\right)] \, v_{\pm\ell}\left(x, \vartheta; \mathbf{p} \, s \, \sigma' \, n\right) \ ,
\end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{\pm\bar{\ell}} \left[S\left(\Lambda^{-1}\right)\right]_{\pm\ell,\pm\bar{\ell}} \, u_{\pm\bar{\ell}}\left(\Lambda x + b, D(\Lambda)\vartheta; \mathbf{p}_\Lambda \, D(\Lambda) s \, \sigma \, n\right) \\
&\qquad = e^{+i(\Lambda b)\cdot p} \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} \sum_{\sigma'} U^{(j_n)*}_{\sigma'\sigma}[W\left(\Lambda, p\right)] \, u_{\pm\ell}\left(x, \vartheta; \mathbf{p} \, s \, \sigma' \, n\right) \ .
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Las matrices $U^{(j_n)}_{\sigma'\sigma}$ son unitarias, por lo que estas últimas expresiones pueden ser reescritas como

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma'} U^{(j_n)*}_{\sigma'\sigma}\left[W\left(\Lambda, p\right)\right] \, v_{\pm\ell}\left(\Lambda x + b, D(\Lambda)\vartheta; \mathbf{p}_\Lambda \, D(\Lambda) s \, \sigma' \, n\right) \\
&\qquad = e^{-i(\Lambda b)\cdot p} \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} \sum_{\pm\bar{\ell}} \left[S\left(\Lambda\right)\right]_{\pm\ell,\pm\bar{\ell}} v_{\pm\bar{\ell}}\left(x, \vartheta; \mathbf{p} \, s \, \sigma \, n\right) \ ,
\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma'} U^{(j_n)}_{\sigma'\sigma}\left[W\left(\Lambda, p\right)\right] \, u_{\pm\ell}\left(\Lambda x + b, D(\Lambda)\vartheta; \mathbf{p}_\Lambda \, D(\Lambda) s \, \sigma' \, n\right) \\
&\qquad = e^{+i(\Lambda b)\cdot p} \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}} \sum_{\pm\bar{\ell}} \left[S\left(\Lambda\right)\right]_{\pm\ell,\pm\bar{\ell}} u_{\pm\bar{\ell}}\left(x, \vartheta; \mathbf{p} \, s \, \sigma \, n\right) \ .
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Restringimos este último conjunto de relaciones a valores específicos de las transformaciones de Lorentz (Λ, b), del espacio de configuración x y del espacio de momentos p.

Traslaciones en el origen espacial

Haciendo

$$x = 0, \quad \Lambda^\mu_{\ \nu} = \delta^\mu_{\ \nu} \ , \tag{4.23}$$

se sigue que

$$W(\Lambda, p)^\mu_{\ \nu} = \delta^\mu_{\ \nu} \quad U_{\sigma\sigma'}\left(I\right) = \delta_{\sigma\sigma'}, \quad S_{nm}(I) \ = \ \delta_{nm} \ . \tag{4.24}$$

Llamamos a las superfunciones de onda en el origen como:

$$v_{\pm\ell}\left(\vartheta;\mathbf{p}\,s\,\sigma'\,n\right)\equiv\ v_{\pm\ell}\left(0,\vartheta;\mathbf{p}\,s\,\sigma'\,n\right)\ \ , \tag{4.25}$$

$$v_{\pm\ell}\left(\vartheta;\mathbf{p}\,s\,\sigma'\,n\right)\equiv\ v_{\pm\ell}\left(0,\vartheta;\mathbf{p}\,s\,\sigma'\,n\right)\ \ . \tag{4.26}$$

La primera condición para las superfunciones de onda $v_{\pm\ell}$ y $u_{\pm\ell}$, que se desprende de restringir a los valores $x = 0$ y $\Lambda = I$, nos dice que la dependencia en la coordenada x viene dada por el mapeo exponencial y los coeficientes en el origen:

$$v_{\pm\ell}\left(x,\vartheta;\mathbf{p}\,s\,\sigma'\,n\right)=\ e^{-ix\cdot p}v_{\pm\ell}\left(\vartheta;\mathbf{p}\,s\,\sigma'\,n\right)\ \ , \tag{4.27}$$

$$u_{\pm\ell}\left(x,\vartheta;\mathbf{p}\,s\,\sigma'\,n\right)=\ e^{+ix\cdot p}u_{\pm\ell}\left(\vartheta;\mathbf{p}\,s\,\sigma'\,n\right)\ \ . \tag{4.28}$$

Con este último resultado, las condiciones generales (4.21) se reducen a

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma'} U^{(j_n)*}_{\sigma'\sigma}\left[W\left(\Lambda,p\right)\right]\ v_{\pm\ell}\left(D(\Lambda)\vartheta;\mathbf{p}_\Lambda\,D(\Lambda)s\,\sigma'\,n\right)&\\ =\sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}}\,\sum_{\pm\bar\ell}\left[S\left(\Lambda\right)\right]_{\pm\ell,\pm\bar\ell}v_{\pm\bar\ell}\left(\vartheta;\mathbf{p}\,s\,\sigma\,n\right)\ \ .&\end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma'} U^{(j_n)}_{\sigma'\sigma}\left[W\left(\Lambda,p\right)\right]\ u_{\pm\ell}\left(D(\Lambda)\vartheta;\mathbf{p}_\Lambda\,D(\Lambda)s\,\sigma'\,n\right)&\\ =\sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}}\,\sum_{\pm\bar\ell}\left[S\left(\Lambda\right)\right]_{\pm\ell,\pm\bar\ell}u_{\pm\bar\ell}\left(\vartheta;\mathbf{p}\,s\,\sigma\,n\right)\ \ .&\end{aligned} \tag{4.30}$$

Transformaciones desde el vector estándar

Escogemos el valor del momento en el vector estándar k y la transformación de Lorentz como la transformación del vector estándar al valor general del momento q:

$$p = k, \quad \Lambda^\mu{}_\nu = L(q)^\mu{}_\nu, \tag{4.31}$$

en este caso tenemos que

$$W\left(L(q),k\right)^\mu{}_\nu\ =\ \delta^\mu{}_\nu, \quad U^{(j_n)}_{\sigma\sigma'}\left[I\right]=\delta_{\sigma\sigma'}\ . \tag{4.32}$$

Obtenemos las superfunciones de onda generales en términos de estas mismas pero evaluadas en el vector estánda:

$$v_{\pm\ell}\left(\vartheta;\mathbf{q}\,s\,\sigma\,n\right)=\sqrt{\tfrac{k^0}{q^0}}\sum_{\pm\bar{\ell}}\left[S\left(L(q)\right)\right]_{\pm\ell,\pm\bar{\ell}}v_{\pm\bar{\ell}}\left(\mathbf{k}\,D_q^{-1}\vartheta;\;D_q^{-1}s\,\sigma\,n\right)\;, \tag{4.33}$$

$$u_{\pm\ell}\left(\vartheta;\mathbf{q}\,s\,\sigma\,n\right)=\sqrt{\tfrac{k^0}{q^0}}\sum_{\pm\bar{\ell}}\left[S\left(L(q)\right)\right]_{\pm\ell,\pm\bar{\ell}}u_{\pm\bar{\ell}}\left(\mathbf{k}\,D_q^{-1}\vartheta;\;D_q^{-1}s\,\sigma\,n\right)\;. \tag{4.34}$$

donde D_q es la representación de Dirac evaluada en $L(q)$.

Grupos Pequeños

Restringimos el cuatro-momento al vector estándar y las transformaciones de Lorentz a elementos del grupo pequeño que se genera de las transformaciones que dejan invariante a este vector estándar,

$$p^\mu=k^\mu,\quad \Lambda^\mu_{\ \nu}=W^\mu_{\ \nu}\;, \tag{4.35}$$

donde $Wk=k$. La transformación de Wigner $W(\Lambda,p)$ es simplemente W:

$$W(W,k)\;=\;W, \tag{4.36}$$

Estas restricciones nos arrojan el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\sum_{\sigma'}U^{(j_n)*}_{\sigma\sigma'}\left[W\right]\;v_{\pm\ell}\left(\vartheta;\;s\,\sigma'\,n\right)=\sum_{\bar{\ell}}\left[S\left(W\right)\right]_{\pm\ell,\pm\bar{\ell}}\;v_{\pm\bar{\ell}}\left(D^{-1}\left(W\right)\vartheta;D^{-1}\left(W\right)s\,\sigma\,n\right)\;, \tag{4.37}$$

$$\sum_{\sigma'}U^{(j_n)}_{\sigma\sigma'}\left[W\right]\;u_{\pm\ell}\left(\vartheta;\;s\,\sigma'\,n\right)=\sum_{\bar{\ell}}\left[S\left(W\right)\right]_{\pm\ell,\pm\bar{\ell}}\;u_{\pm\bar{\ell}}\left(D^{-1}\left(W\right)\vartheta;D^{-1}\left(W\right)s\,\sigma\,n\right)\;. \tag{4.38}$$

Transformaciones supersimétricas.

Llego el momento de desarrollar las consecuencias de la supersimetría para la forma de las superfunciones de onda. Bajo la acción de supersimetría, los operadores de creación y aniquilación transforman como [ver las Ecs. (3.65) y (3.66)]

$$\mathsf{U}(\zeta)\, a_{\pm}^{\dagger}\left(\mathbf{p}\, s\, \sigma\, n\right) \mathsf{U}(\zeta)^{-1} = \exp\left[+i\zeta \cdot \not{p} s\right] a_{\pm}^{\dagger}\left(\mathbf{p}\, s\, +\, \zeta\, \sigma\, n\right) \ , \tag{4.39}$$

$$\mathsf{U}(\zeta)\, a_{\pm}\left(\mathbf{p}\, s\, \sigma\, n\right) \mathsf{U}(\zeta)^{-1} = \exp\left[-i\zeta \cdot \not{p} s\right] a_{\pm}\left(\mathbf{p}\, s\, +\, \zeta\, \sigma\, n\right) \ . \tag{4.40}$$

Esto implica que las superfunciones de onda obedecen las siguientes relaciones

$$e^{\left[-i(\vartheta - s)\cdot \not{p}\zeta\right]} v_{\pm\ell}\left(\vartheta\, +\, \zeta; \mathbf{p}\, s\, +\, \zeta\, \sigma'\, n\right) = v_{\pm\ell}\left(\vartheta; \mathbf{p}\, s\, \sigma\, n\right) \ , \tag{4.41}$$

$$e^{\left[+i(\vartheta - s)\cdot \not{p}\zeta\right]} u_{\pm\ell}\left(\vartheta\, +\, \zeta; \mathbf{p}\, s\, +\, \zeta\, \sigma'\, n\right) = u_{\pm\ell}\left(\vartheta; \mathbf{p}\, s\, \sigma\, n\right) \ . \tag{4.42}$$

Al hacer ($\zeta = -s$) en estas últimas expresiones obtenemos que las superfunciones de onda vienen dadas por el mapeo exponencial fermiónico multiplicado por una función que depende de la diferencias entre los 4-espinores fermiónicos de configuración y de momentos:

$$v_{\pm\ell}\left(\vartheta; \mathbf{p}\, s\, \sigma\, n\right) = e^{i\vartheta\cdot\not{p}s}\, v_{\pm\ell}\left(\mathbf{p}\ \left(\vartheta - s\right)\ \sigma'\, n\right) \ , \tag{4.43}$$

$$u_{\pm\ell}\left(\vartheta; \mathbf{p}\, s\, \sigma\, n\right) = e^{i\vartheta\cdot\not{p}s}\, u_{\pm\ell}\left(\mathbf{p}\ \left(\vartheta - s\right)\ \sigma'\, n\right) \ . \tag{4.44}$$

Resumimos todo lo obtenido, escribiendo la forma general de los supercampos

$$\Xi_{\pm\ell}^{\dagger}(x, \vartheta) = \sum_{\sigma n} \int d\left(\mathbf{p}\, s\right)\ e^{-ix\cdot p} e^{i\vartheta\cdot\not{p}s}\, a_{\pm}^{\dagger}\left(\mathbf{p}\, s\, \sigma\, n\right)\ v_{\pm\ell}\left(\mathbf{p}, \left(-i\not{p}\right)\left(\vartheta\, -\, s\right), \sigma, n\right) \ , \tag{4.45}$$

$$\Xi_{\pm\ell}(x, \vartheta) = \sum_{\sigma n} \int d\left(\mathbf{p}\, s\right)\ e^{ix\cdot p} e^{-i\vartheta\cdot\not{p}s}\, a_{\pm}\left(\mathbf{p}\, s\, \sigma\, n\right)\ u_{\pm\ell}\left(\mathbf{p}, \left(-i\not{p}\right)\left(\vartheta\, -\, s\right), \sigma, n\right) \ . \tag{4.46}$$

Hemos hecho $(\vartheta - s) \to \left(-i\not{p}\right)(\vartheta - s)$ en el argumento fermiónico de las superfunciones de onda. Con esta identificación obtendremos las superderivadas covariantes (introducidas más adelante) en la forma de la literatura estándar.

Cualquier conjunto de coeficientes de la forma:

$$v_{\pm\ell}\left(\mathbf{p}, \left(-i\not{p}\right)\left(\vartheta\, -\, s\right), \sigma, n\right), \quad u_{\pm\ell}\left(\mathbf{p}, \left(-i\not{p}\right)\left(\vartheta\, -\, s, n\right), \sigma'\right) \ , \tag{4.47}$$

automáticamente satisfará las condiciones supersimétricas (4.41) y (4.42). Si estos coeficientes vienen dados en términos de sus valores en el vector estándar k a través de las relaciones (4.33) y (4.34) y si además, son soluciones a las ecuaciones (4.37) y (4.38), también satisfarán la condiciones más generales (4.29) y (4.30). Esto es, hemos encontrado las condiciones necesarias y suficientes de las superfunciones de onda para garantizar la covariancia de los supercampos bajo transformaciones del grupo de súper Poincaré.

Las relaciones que obtenemos de las condiciones impuestas en el grupo pequeño (4.29) y (4.30), tienen que satisfacerse para todos los valores de $(\vartheta - s)$. Entonces lo supercampos encontrados representan *una realización reducible del grupo de súper Poincaré.* Cada coeficiente de la expansión Taylor en la variable $(\vartheta - s)$ es independiente del resto.

En la notación (4.47), las condiciones (4.33) y (4.34) se ven como

$$\begin{aligned}&\sum_{\sigma'} U^{(j_n)*}_{\sigma'\sigma}[W]\; v_{\pm\ell}\left(\mathbf{k},(-i\not{k})\,(\vartheta\,-\,s)\,,\sigma',n\right)\\&\qquad\qquad= \sum_{\pm\bar{\ell}} \left[S\,(W)\right]_{\pm\ell,\pm\bar{\ell}}\; v_{\pm\ell}\left(\mathbf{k},(-i\not{k})\,D^{-1}\,(W)\,(\vartheta\,-\,s)\,,\sigma',n\right)\ ,\end{aligned} \tag{4.48}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{\sigma'} U^{(j_n)}_{\sigma'\sigma}[W]\; u_{\pm\ell}\left(\mathbf{k},(-i\not{k})\,(\vartheta\,-\,s)\,,\sigma',n\right)\\&\qquad\qquad= \sum_{\pm\bar{\ell}} \left[S\,(W)\right]_{\pm\ell,\pm\bar{\ell}}\; u_{\pm\ell}\left(\mathbf{k},(-i\not{k})\,D^{-1}\,(W)\,(\vartheta\,-\,s)\,,\sigma',n\right)\ .\end{aligned} \tag{4.49}$$

Descomposición en cúmulos. Insertando la forma general de la densidad Hamiltoniana (4.14) en (4.1), después de integrar en la parte espacial $\mathbf{x}$, obtenemos

$$\begin{aligned}\mathsf{V} = \sum_{N=0}^{\infty}\sum_{N=0}^{\infty}\int d\xi'_1\cdots d\xi'_N\, d\xi_1\cdots d\xi_M\\ \times\, a^\dagger_{\xi'_1}\cdots a^\dagger_{\xi'_N}\, a_{\xi_1}\cdots a_{\xi_M}\;\times\;\mathcal{V}_{NM}\left(\xi'_1\cdots\xi'_N\,\xi_1\cdots\xi_M\right)\ ,\end{aligned} \tag{4.50}$$

donde el índice ξ lleva el tres momento bosónico $\mathbf{p}$, el momento fermiónico s, la proyección σ del superespín y la especie de superpartícula n. Los signos $\varepsilon = +,-$ provienen de los dos tipos de supercampos introducidos. Cada símbolo de integral $\int d\xi$ representa la suma y la integración de estas variables,

$$\int d\xi\,(\cdots)\;=\;\int d\,(\mathbf{p}\,s)\sum_{\sigma}\sum_{\varepsilon}^{+,-}\sum_{n}(\cdots)\ , \tag{4.51}$$

con

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{NM}\left(\xi_1' \cdots \xi_N'\, \xi_1 \cdots \xi_M\right) & \\ &= \delta^4\left(\mathbf{p}_1' \cdots + \mathbf{p}_N' - \mathbf{p}_1 \cdots - \mathbf{p}_M\right) \tilde{\mathcal{V}}_{NM}\left(\xi_1' \cdots \xi_N'\, \xi_1 \cdots \xi_M\right)\end{aligned} \tag{4.52}$$

y

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{V}}_{NM}\left(\xi_1' \cdots \xi_N'\, \xi_1 \cdots \xi_M\right) = &\ (\pm)\,(2\pi)^{3-\frac{3N}{2}-\frac{3M}{2}} \int d^4\vartheta\, e^{\left\{i\vartheta\cdot\left[\not{p}_1'\not{s}_1'\cdots+\not{p}_N'\not{s}_N' - \not{p}_1\not{s}_1\cdots - \not{p}_M\not{s}_M\right]\right\}} \\ & \sum_{\varepsilon_1'\ell_1',\cdots,\varepsilon_N'\ell_N'} \sum_{\varepsilon_1\ell_1,\cdots,\varepsilon_M'\ell_M} g_{\varepsilon_1'\ell_1',\cdots,\varepsilon_N'\ell_N',\varepsilon_1\ell_1,\cdots,\varepsilon_M\ell_M} \\ & \times v_{\varepsilon_1'\ell_1'}\left(\mathbf{p}_1'\ (\vartheta - s_1')\ \sigma_1'\, n_1'\right) \cdots v_{\varepsilon_N'\ell_N'}\left(\mathbf{p}_N'\ (\vartheta - s_N')\ \sigma_N'\, n_N'\right) \\ & \times u_{\varepsilon_1\ell_1}\left(\mathbf{p}_1\ (\vartheta - s_1)\ \sigma_1\, n_1\right) \cdots u_{\varepsilon_M\ell_1}\left(\mathbf{p}_M\ (\vartheta - s_M)\ \sigma_M\, n_M\right)\ .\end{aligned} \tag{4.53}$$

El signo menos en esta última ecuación, surge dependiendo de si movimos un número impar de superfunciones de onda que son fermiónicas (del tipo-a). La forma (4.54), es precisamente la forma que garantiza que el principio de descomposición en cúmulos se satisface.

Cerramos esta sección notando que para formar una densidad Hamiltoniana que sea Hermítica, no necesitamos tomar en cuenta explícitamente los adjuntos

$$\left[\Xi^\dagger_{\pm\ell}\left(x, \epsilon\gamma_5\beta\vartheta^*\right)\right]^\dagger, \quad \left[\Xi_{\pm\ell}\left(x, \epsilon\gamma_5\beta\vartheta^*\right)\right]^\dagger\ , \tag{4.54}$$

ya que estos supercampos ya están considerados en $\Xi^\dagger_{\mp\ell}(x,\vartheta)$ y $\Xi_{\mp\ell}(x,\vartheta)$, respectivamente.

4.2. Supercampos quirales irreducibles

Antes de continuar con nuestras investigaciones sobre los supercampos cuánticos, introducimos la derivación fermiónica.

Diferenciación fermiónica

Considérese una función $f(\vartheta)$ en el espacio fermiónico ϑ, de dimensión arbitraria. Dada una componente ϑ_α, debido a que $\vartheta_\alpha^2 = 0$, podemos escribir de manera única $f(\vartheta)$ como

$$f(\vartheta) \;=\; f_{\alpha,0} \;+\; \vartheta_\alpha \, f_{\alpha,1} \;, \tag{4.55}$$

donde $f_{\alpha,0}$ y $f_{\alpha,1}$ no dependen de ϑ_α. La operación de diferenciación por la izquierda $\frac{\partial}{\partial\vartheta_\alpha}$, de la variable ϑ_α aplicada a la función $f(\vartheta)$, se define como la función $f_{\alpha,1}$, esto es,

$$\frac{\partial f(\vartheta)}{\partial\vartheta_\alpha} \;=\; f_{\alpha,1} \;. \tag{4.56}$$

Para dos componentes ϑ_α y ϑ_β, también tenemos una expansión única de la forma

$$f(\vartheta) \;=\; g_{\alpha\beta,0} \;+\; \vartheta_\alpha \, g_{\alpha,0} \;+\; \vartheta_\beta \, g_{\beta,1} \;+\; \vartheta_\alpha\vartheta_\beta \, g_{\alpha\beta,1} \;, \tag{4.57}$$

donde ninguna de las funciones $g_{\alpha\beta,0}\ldots$, depende de ϑ_α ni de ϑ_β. De aquí se sigue que

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta_\alpha}\frac{\partial}{\partial\vartheta_\beta} \;=\; -\frac{\partial}{\partial\vartheta_\beta}\frac{\partial}{\partial\vartheta_\alpha} \tag{4.58}$$

De la Ec. definitoria (4.56), tenemos también que para el producto de una función $f(\vartheta)$ pura y otra función $g(\vartheta)$ impura,

$$[f(\vartheta)g(\vartheta)]_{\alpha,1} = \; f_{\alpha,1}\, g_{\alpha,0} \;+\; (-)^{\epsilon_f} f_{\alpha,0}\, g_{\alpha,1} \;=\; f_{\alpha,1}\, g(\vartheta) \;+\; (-)^{\epsilon_f} f(\vartheta)\, g_{\alpha,1} \;, \tag{4.59}$$

esto es, la derivación fermiónica obedece la *Regla de Leibniz generalizada*:

$$\frac{\partial\,[f\,(\vartheta)\,g(\vartheta)]}{\partial\vartheta_\alpha} \;=\; \frac{\partial f(\vartheta)}{\partial\vartheta_\alpha}\, g(\vartheta) \;+\; (-)^{\epsilon_f} f(\vartheta)\frac{\partial g(\vartheta)}{\partial\vartheta_\alpha} \;. \tag{4.60}$$

Podemos notar que la diferenciación e integración fermiónicas son equivalentes. Para nosotros, la utilidad de la diferenciación fermiónica es la de permitirnos expresar a los supercampos reducibles de creación (4.45), como una mezcla de derivadas fermiónicas y bosónicas de supercampo de un solo tipo (lo mismo para los supercampos de aniquilación (4.46)). Para ver esto, notamos que generamos el termino lineal $\left[\left(\pm i\not{p}\right)(\vartheta \,-\, s)\right]_\alpha$ en los supercampos (4.45) y (4.46) aplicando la *superderivada covariante* definida por:

$$\mathcal{D} \equiv (\epsilon\gamma_5) \frac{\partial}{\partial\vartheta} - \gamma^\mu \vartheta \frac{\partial}{\partial x^\mu} \ , \tag{4.61}$$

esto es,

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}_\alpha \exp\left[\mp i \left(x^\mu - \vartheta \cdot \gamma^\mu s\right) p_\mu\right] \\ &\quad = \left[\left(\pm i \not{p}\right)\left(\vartheta - s\right)\right]_\alpha \exp\left[\mp i \left(x^\mu - \vartheta \cdot \gamma^\mu s\right) p_\mu\right] . \end{aligned} \tag{4.62}$$

Tomando la parte antisimétrica del resultado de aplicar dos veces la superderivada a esta exponencial, obtenemos[1]

$$\frac{1}{2}\left[\mathcal{D}_\beta, \mathcal{D}_\alpha\right] e^{[\mp i (x^\mu - \vartheta\cdot\gamma^\mu s)\, p_\mu]} = \left[\left(\pm i \not{p}\right)\left(\vartheta - s\right)\right]_\beta \left[\left(\pm i \not{p}\right)\left(\vartheta - s\right)\right]_\alpha e^{[\mp i (x^\mu - \vartheta\cdot\gamma^\mu s)\, p_\mu]} \ , \tag{4.63}$$

Y en general, cualquier potencia de $\left[\left(\pm i \not{p}\right)\left(\vartheta - s\right)\right]_\alpha$ se genera por la aplicación antisimétrica de productos de $\mathcal{D}_\alpha$ sobre $e^{[\mp i (x^\mu - \vartheta\cdot\gamma^\mu s)\, p_\mu]}$. Esto nos dice que cualesquiera términos de la expansión fermiónica en las superfunciones de onda de los supercampo reducibles (4.45) y (4.46) se pueden escribir como

$$\sum_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_N} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{\mathcal{P}} \delta_{\mathcal{P}} \left(\mathcal{D}_{\alpha_{\mathcal{P}1}} \mathcal{D}_{\alpha_{\mathcal{P}2}} \cdots \mathcal{D}_{\alpha_{\mathcal{P}N}}\right) \right\} \left[\chi^\dagger_{\pm\ell}\left(x, \vartheta\right)\right]_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_N} \ , \tag{4.64}$$

$$\sum_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_N} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{\mathcal{P}} \delta_{\mathcal{P}} \left(\mathcal{D}_{\alpha_{\mathcal{P}1}} \mathcal{D}_{\alpha_{\mathcal{P}2}} \cdots \mathcal{D}_{\alpha_{\mathcal{P}N}}\right) \right\} \left[\chi_{\pm\ell}\left(x, \vartheta\right)\right]_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_N} \ , \tag{4.65}$$

respectivamente. Aquí, la suma sobre $\mathcal{P}$ corre sobre todas las permutaciones de $1, \cdots, N$ y $\delta_{\mathcal{P}}$ es $+1(-1)$ si la permutación es par(impar) y donde $\left[\chi^\dagger_{\pm\ell}\left(x, \vartheta\right)\right]_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_N}$ y $\left[\chi_{\pm\ell}\left(x, \vartheta\right)\right]_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_N}$ son supercampos cuyas superfunciones de onda no dependen

[1] El resultado de aplicar $\mathcal{D}_\beta \mathcal{D}_\alpha$ a $e^{[\mp i (x^\mu - \vartheta\cdot\gamma^\mu s)\, p_\mu]}$ nos arroja un factor simétrico extra $\mp i \left(\epsilon\gamma_5 \not{p}\right)_{\beta\alpha}$ con respecto al resultado del caso antisimétrico.

de las coordenadas fermiónicas:

$$\left[\chi^{\dagger}_{\pm\ell}\left(x,\vartheta\right)\right]_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_N} = \sum_{\sigma n}\int d\left(\mathbf{p}\, s\right)\; e^{-ix\cdot p} e^{i\vartheta\cdot \not{p} s}\, a^{\dagger}_{\pm}\left(\mathbf{p}\, s\,\sigma\, n\right)\; \left[v_{\pm\ell}\left(\mathbf{p},\sigma,n\right)\right]_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_N} \;, \tag{4.66}$$

$$\left[\chi_{\pm\ell}\left(x,\vartheta\right)\right]_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_N} = \sum_{\sigma n}\int d\left(\mathbf{p}\, s\right)\; e^{ix\cdot p} e^{-i\vartheta\cdot \not{p} s}\, a_{\pm}\left(\mathbf{p}\, s\,\sigma\, n\right) \left[u_{\pm\ell}\left(\mathbf{p},\sigma,n\right)\right]_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_N} \;. \tag{4.67}$$

Podemos también eliminar los índices $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_N$ absorbiéndolos en ℓ, o bien considerar la representación $S(\Lambda)_{\pm\ell,\pm\bar{\ell}}$ multiplicada tensorialmente por la representación antisimétrica de N matrices de Dirac. En cualquier caso, consideramos los supercampos quirales $\chi^{\dagger}_{\pm\ell}(x,\vartheta)$ y $\chi_{\pm\ell}(x,\vartheta)$:

$$\chi^{\dagger}_{\pm\ell}(x,\vartheta) \equiv \frac{1}{m^{\sharp}_{\pm}}\sum_{\sigma n}\int d\left(\mathbf{p}\, s\right)\; e^{-ix\cdot p} e^{i\vartheta\cdot \not{p} s}\, a^{\dagger}_{\pm}\left(\mathbf{p}\, s\,\sigma\, n\right)\; v_{\pm\ell}\left(\mathbf{p},\sigma,n\right) \;, \tag{4.68}$$

$$\chi_{\pm\ell}(x,\vartheta) \equiv \frac{1}{m_{\pm}}\sum_{\sigma n}\int d\left(\mathbf{p}\, s\right)\; e^{ix\cdot p} e^{-i\vartheta\cdot \not{p} s}\, a_{\pm}\left(\mathbf{p}\, s\,\sigma\, n\right) u_{\pm\ell}\left(\mathbf{p},\sigma,n\right) \;. \tag{4.69}$$

Las cantidades $m^{\sharp}_{\pm}$ y $m_{\pm}$ son constantes de proporcionalidad que escogemos convenientemente como

$$m^{\sharp}_{\pm} \;=\; -m^2 \times (2\pi)^{2/3}, \quad m_{\pm} \;=\; -m^2 \times (2\pi)^{2/3} \;, \tag{4.70}$$

para el caso masivo. Mientras que

$$m^{\sharp}_{\pm} \;=\; (+2) \times (2\pi)^{2/3}, \quad m_{\pm} \;=\; (-2) \times (2\pi)^{2/3} \;, \tag{4.71}$$

para el caso sin masa. Ya que la dependencia de $a^{\dagger}_{\pm}\left(\mathbf{p}\, s\,\sigma\, n\right)$ y $a_{\pm}\left(\mathbf{p}\, s\,\sigma\, n\right)$ en $s_{\mp}$ viene dada a través de un factor de fase:

$$a^{\dagger}_{\pm}\left(\mathbf{p}\, s\,\sigma\, n\right) = \exp\left[-i\, s\cdot \not{p} s_{\mp}\right] a^{\dagger}_{\pm}\left(\mathbf{p}\, s_{\pm}\,\sigma\, n\right) \;, \tag{4.72}$$

$$a_{\pm}\left(\mathbf{p}\, s\,\sigma\, n\right) = \exp\left[+i\, s\cdot \not{p} s_{\pm}\right] a_{\mp}\left(\mathbf{p}\, s_{\pm}\,\sigma\, n\right) \;, \tag{4.73}$$

podemos integrar la parte que depende de $s_\mp$, vemos que

$$\int d^2 s_\mp e^{\varepsilon i(\vartheta - s)\cdot \not{p} s_\mp} = -m^2 \delta^2 \left[(\vartheta - s)_\pm \right] \ , \qquad m > 0 \ , \tag{4.74}$$

$$\int d\left(u(p)\cdot \gamma_5 s_\mp\right) e^{\varepsilon i(\vartheta - s)\cdot \not{p} s_\mp} = \tfrac{\varepsilon}{2} \left[u\left(p\right)\cdot \gamma_5 \left(s - \vartheta\right)_\pm \right], \quad m = 0 \ . \tag{4.75}$$

Lo que significa que en ambos casos la integración fermiónica nos esta dando la delta de Dirac fermiónica, por lo que las Ecs. (4.68) y (4.68) adquieren la forma

$$\chi^\dagger_{\pm\ell}(x,\vartheta) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_\sigma \int d^3\mathbf{p}\, e^{-ix_\pm \cdot p}\, a^\dagger_\pm \left(\mathbf{p}\, \vartheta_\pm\, \sigma\, n\right)\, v_{\pm\ell}\left(\mathbf{p}, \sigma, n\right) \ , \tag{4.76}$$

$$\chi_{\pm\ell}(x,\vartheta) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\sigma\, n} \int d^3\mathbf{p}\, e^{ix_\pm \cdot p}\, a_\pm \left(\mathbf{p}\, \vartheta_\pm\, \sigma\, n\right) u_{\pm\ell}\left(\mathbf{p}, \sigma, n\right) \ . \tag{4.77}$$

donde hemos introducido la variable de espaciotiempo bosónica:

$$x^\mu_\pm = x^\mu - \vartheta \cdot \gamma^\mu \vartheta_\pm \ . \tag{4.78}$$

De aquí en adelante, tomaremos como bosónicos los coeficientes $v_{\pm\ell}\left(\mathbf{p},\sigma\right)$ y $u_{\pm\ell}\left(\mathbf{p},\sigma\right)$.

Condiciones de Causalidad. No nos hemos ocupado de la condición (4.2). Usamos la relación de (anti)conmutación de los operadores de creación y aniquilación,

$$\left[a_\mp \left(\mathbf{p}\, \vartheta_\mp\, \sigma\, n\right), a^\dagger_\pm \left(\mathbf{p}'\, \vartheta'_\pm\, \sigma'\, n'\right) \right\} = e^{2\vartheta\cdot(-i\not{p})\,\vartheta'\pm} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\, \delta_{nn'} \delta_{\sigma\sigma'} \ , \tag{4.79}$$

para escribir la condición (4.2) en términos de los supercampos quirales:

$$\left[\chi_{\mp\ell}\left(x,\vartheta\right) \chi^\dagger_{\pm\ell'}\left(x',\vartheta'\right) \right\} = \sum_{\sigma n} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p}\, v_{\pm\ell}\left(\mathbf{p}, \sigma\, n\right) u_{\pm\ell}\left(\mathbf{p}, \sigma\, n\right)\, e^{i(x - x')\cdot p} e^{-i(\vartheta - \vartheta')\cdot \gamma^\mu \left(\vartheta_\mp + \vartheta'_\pm\right) p_\mu} \tag{4.80}$$

Esta relación no es cero para separaciones $x - x'$ del tipo-espacial. No podemos evitar este obstáculo usando solo supercampos de creación o de aniquilación de superpartículas por que el Hamiltoniano de interacción no sera Hermitiano. La única opción es buscar formar combinaciones lineales de supercampos de creación y aniquilación:

$$\Phi_{\pm\ell}\left(x,\vartheta\right) \;\equiv\; \kappa_{\pm\ell}\,\chi^{\dagger}_{\pm\ell}\left(x,\vartheta\right) \,+\, \lambda_{\pm\ell}\,\chi_{\pm\ell}\left(x,\vartheta\right) \;\;, \tag{4.81}$$

de tal manera que al ajustar las constantes $\kappa_{\pm\ell}$ y $\lambda_{\pm\ell}$ logremos que

$$\left[\Phi_{\pm\ell}\left(x,\vartheta\right),\Phi_{\pm\ell}\left(x',\vartheta'\right)\right] \;=\; 0 \;, \tag{4.82}$$

para separaciones $(x-x')$ del tipo-espaciales. Veremos más adelante que esto siempre es posible y se implementa esencialmente de manera única.

Antisuperpartículas (antispartículas). Desde el punto de vista de este formalismo, la razón de ser de las antispartículas, tienen que ver con la necesidad de establecer cantidades conservadas. Si los estados de superpartícula de especie n llevan las etiquetas $q(n)$ que provienen del observable Q, tenemos que $\mathsf{Q}\Psi_{\xi} \,=\, q(n)\Psi_{\xi}$. Provisto de que el vacío lleve "carga" cero, esta última igualdad se satisface si y solo sí

$$\left[\mathsf{Q},a_{\xi}\right] \;=\; -q(n)a_{\xi}, \quad \left[\mathsf{Q},a^{\dagger}_{\xi}\right] \;=\; +q(n)a^{\dagger}_{\xi} \;. \tag{4.83}$$

Aquí Q, es el generador de una simetría interna, esto es, $[\mathsf{Q},\mathsf{S}]=0$, donde S es el operador introducido en las Ecs. (3.15) y (3.16). Esto a su vez implica que Q debe conmutar con la densidad Hamiltoniana [17], para que esto sea posible, son necesarias dos cosas. Primero, que las relaciónes de conmutación de Q con $\Phi_{\pm\ell}(x,\vartheta)$ y su adjunto sean de la forma

$$\left[\mathsf{Q},\Phi^{\dagger}_{\pm\ell}(x,\vartheta)\right] \;=\; q_{\pm\ell}\Phi^{\dagger}_{\pm\ell}(x,\vartheta), \quad \left[\mathsf{Q},\Phi_{\pm\ell}(x,\vartheta)\right] \;=\; -q_{\pm\ell}\Phi_{\pm\ell}(x,\vartheta) \;, \tag{4.84}$$

donde

$$\Phi^{\dagger}_{\mp\ell}\left(x,\vartheta\right) \;\equiv\; \left[\Phi_{\pm\ell}\left(x,\epsilon\gamma_5\beta\vartheta^{*}\right)\right]^{\dagger} . \tag{4.85}$$

Segundo, que para cada termino de la serie (4.14) (con los supercampos $\Xi_{\pm\ell}$ y $\Xi^{\dagger}_{\pm\ell}$ reemplazados por los supercampos causales $\Phi_{\pm\ell}$ y $\Phi^{\dagger}_{\pm\ell}$, respectivamente):

$$(q_{\epsilon_1\ell_1} + \cdots + \bar{q}_{\epsilon_N\ell_N} - \bar{q}_{\epsilon_1\ell_1} - \cdots - \bar{q}_{\epsilon_M\ell_M}) = 0 \; . \tag{4.86}$$

Reconciliamos las propiedades de transformación (4.83) y (4.84) si $q(n) = q_{\pm\ell}$. La propiedad (4.86) se satisface si para cada especie n existe otra especie $\tilde{n}$ con la misma masa y superespín, pero con los números cuánticos asociados a cualquier simetría interna, invertidos: $q(\tilde{n}) = -q(n)$. El supercampo causal (4.81) queda formado por supercampos de aniquilación de superpartícula y supercampos de creación de santipartícula [15].

Las representaciones $S(\Lambda)_{\pm\ell,\pm\bar{\ell}}$ son, en general, reducibles. En vez de considerar un solo supercampo gigante donde se encuentran todos los operadores de superpartícula, podemos llevar $S(\Lambda)_{\pm\ell,\pm\bar{\ell}}$ a su forma diagonal por bloques, de tal forma que en cada bloque solo haya solo supercampos de una misma especia de partícula (y su respectiva santipartícula). De aquí en adelante trabajaremos con estos bloques de especie de superpartícula fija, de tal forma que omitiremos el índice n.

Ecuaciones libres del movimiento. Notamos que la dependencia de $\chi^{\dagger}_{\pm\ell}(x,\vartheta)$ y $\chi_{\pm\ell}(x,\vartheta)$ en la variable fermiónica $\vartheta_{\mp}$, viene dada solamente a través de la coordenada $x^{\mu}_{\pm}$. Además notamos que la parte derecha(izquierda) de la superderivada covariante, actuando sobre $x^{\mu}_{+}(x^{\mu}_{-})$ nos da cero,

$$\mathcal{D}_{\mp\alpha}\, x^{\mu}_{\pm} = 0 \; , \tag{4.87}$$

con $\mathcal{D}_{\mp} = \frac{1}{2}\,(I \pm \gamma_5)\,\mathcal{D}$. Por lo que llegamos a la conclusión de que los supercampos causales $\Phi_{\pm\ell}(x,\vartheta)$ son aniquilados por la superderivada $\mathcal{D}_{\mp\alpha}$:

$$\mathcal{D}_{\mp\alpha}\, \Phi_{\pm\ell}(x,\vartheta) = 0 \; . \tag{4.88}$$

A este conjunto de ecuaciones, se les conoce como las *condiciones de quiralidad.* Además, también por inspección directa, vemos que los supercampos satisfacen la ecuación de Klein-Gordon:

$$\left(\Box - m^2\right) \Phi_{\pm\ell}(x,\vartheta) = 0 \; . \tag{4.89}$$

Los supercampos quirales representan la transformada de Fourier de los operadores de creación y aniquilación, los cuales están definidos en el superespacio de momentos $(\mathbf{p}, s_\pm)$ de dimensión $(3+2(2))$. Mientras que la dimensión del superespacio de configuración (x, ϑ) es $(4+4(2))$. Por cada grado de libertad extra en el superespacio de configuración tendremos una ecuación del movimiento que la compensa. Existen más ecuaciones del movimiento que los supercampos pueden satisfacer: Si los supercampos tienen más componentes que las componentes independientes de los estados de superpartícula, habrá más ecuaciones del movimiento, esto ocurre cuando asociamos a la superpartícula un supercampo en la representación $S(\Lambda)$ que es de mayor dimensión que la representación unitaria $U^{(j)}$ del superestado en cuestión.

4.3. Supercampos quirales generales

Los términos de orden cero de la expansión $\vartheta - s$ en las Ecs. (4.48) y (4.49), nos dan el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\sum_{\sigma'} v_{\pm\ell}\left(\mathbf{k}, \sigma'\right) U^{(j)*}_{\sigma'\sigma}\left[W\right] = \sum_{\pm\bar{\ell}} \left[S\left(W\right)\right]_{\pm\ell, \pm\bar{\ell}} v_{\pm\bar{\ell}}\left(\mathbf{k}, \sigma\right) \ , \tag{4.90}$$

$$\sum_{\sigma'} u_{\pm\ell}\left(\mathbf{k}, \sigma'\right) U^{(j)}_{\sigma'\sigma}\left[W\right] = \sum_{\pm\bar{\ell}} \left[S\left(W\right)\right]_{\pm\ell, \pm\bar{\ell}} u_{\pm\bar{\ell}}\left(\mathbf{k}, \sigma\right) \ . \tag{4.91}$$

Lo que nos dice la Ec. (4.91), es que $u_{\pm\ell}\left(\mathbf{k}, \sigma\right)$ es la matriz (en los índices $\pm\ell$ y σ') que conecta las dos representaciones $U^{(j)}_{\sigma'\sigma}\left[W\right]$ y $\left[S\left(W\right)\right]_{\pm\ell,\pm\bar{\ell}}$. La representación $U^{(j)}_{\sigma'\sigma}\left[W\right]$ es irreducible. Si la presentación $\left[S\left(W\right)\right]_{\pm\ell,\pm\bar{\ell}}$ es irreducible, por el lema de Schur, tenemos una solución única no trivial para $u_{\pm\ell}\left(\mathbf{k}, \sigma\right)$ si y solo sí las representaciones $U^{(j)}_{\sigma'\sigma}\left[W\right]$ y $\left[S\left(W\right)\right]_{\pm\ell,\pm\bar{\ell}}$ son equivalentes [25, 27]. La restricción de la representación irreducible del grupo de Lorentz, a elementos del subgrupos pequeños W es, en general, reducible. Hasta donde sabemos, la única razón para excluir índices $\pm\ell$ infinitos, reside en el principio de renormalizabilidad de las interacciones[2]. Aquí no indagaremos más en esta cuestión y simplemente buscaremos soluciones para $u_{\pm\ell}\,(\mathbf{k},\sigma)$ en representaciones finitas del grupo homogéneo de Lorentz [observaciones similares aplican para $v_{\pm\ell}\,(\mathbf{k},\sigma)$].

Representaciones finitas del grupo de Lorentz

Para encontrar las presentaciones finitas del grupo propio ortócrono homogéneo de Lorentz, escribimos el álgebra que satisfacen las matrices $\mathbb{J}^{\mu\nu}$ que provienen del conjunto de transformaciones infinitesimales de $S(\Lambda)$:

$$i\,[\mathbb{J}^{\mu\nu},\mathbb{J}^{\rho\sigma}] = \eta^{\mu\rho}\mathbb{J}^{\sigma\nu} - \eta^{\mu\sigma}\mathbb{J}^{\rho\nu} + \eta^{\rho\nu}\mathbb{J}^{\mu\sigma} - \eta^{\sigma\nu}\mathbb{J}^{\mu\rho}, \tag{4.92}$$

Hacemos la partición de estos generadores $\mathbb{J}^{\mu\nu}$ en términos de los generadores de las rotaciones y los boosts:

$$\mathbb{J}_i \;=\; \epsilon_{ijk}\,\mathbb{J}^{jk}, \quad \mathbb{K}_i \;=\; \mathbb{J}_{i0}, \quad i,j,k \;=\; 1,2,3\ , \tag{4.93}$$

donde ϵ_{ijk} es el tensor totalmente antisimétrico de dimensión tres, con $\epsilon_{123} = 1$. Estas matrices satisfacen las siguientes relaciones de conmutación:

$$[\mathbb{J}_i,\mathbb{J}_j] \;=\; i\,\epsilon_{ijk}\mathbb{J}_k, \quad [\mathbb{J}_i,\mathbb{K}_j] \;=\; i\,\epsilon_{ijk}\mathbb{K}_k, \quad [\mathbb{K}_i,\mathbb{K}_j] \;=\; -i\,\epsilon_{ijk}\mathbb{J}_k, \tag{4.94}$$

Las relaciones de conmutación entre los $\mathbb{J}_i$, nos dicen que estas matrices generan una representación del grupo de rotaciones, la relación de conmutación entre $\mathbb{J}_i$ y $\mathbb{K}_i$, significa que $\mathbb{K}_i$ es un tres-vector. A su vez, es conveniente introducir un nuevo conjunto de matrices mediante las relaciones:

$$\mathbb{A} \;\equiv\; \frac{1}{2}\,(\mathbb{J} \,+\, i\mathbb{K})\,, \quad \mathbb{B} \;\equiv\; \frac{1}{2}\,(\mathbb{J} \,-\, i\mathbb{K})\ \ . \tag{4.95}$$

Las relaciones de conmutación para estos generadores son

$$[\mathbb{A}_i,\mathbb{A}_j] \;=\; i\,\epsilon_{ijk}\mathbb{A}_k, \quad [\mathbb{B}_i,\mathbb{B}_j] \;=\; i\,\epsilon_{ijk}\mathbb{B}_k, \quad [\mathbb{A}_i,\mathbb{B}_j] \;=\; 0\ . \tag{4.96}$$

[2]Una interacción es renormalizable si su grado de divergencia es menor a cierta cantidad, fijada por la dimensión del espaciotiempo. Genéricamente, el grado de divergencia de cualquier Lagrangiana de interacción, es proporcional a la dimensión de los índices $\pm\ell$ de los campos en cuestión [17].

Vemos de aquí, que el álgebra de las matrices $\mathbb{A}_i$ y $\mathbb{B}_i$, es el álgebra de la suma directa de las dos representaciones del grupo de rotación, esto es, las relaciones de conmutación de estas matrices es la misma que la de dos partículas masivas desacopladas con espines arbitrarios [37]. Las representaciones irreducibles de esta álgebra de matrices, vienen clasificadas por la pareja de números $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, donde $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ pueden tomar todos los valores semi-enteros no negativos. Los elementos de estas representaciones vienen dadas por las matrices $\mathbb{J}^{(\mathcal{A})}$ y $\mathbb{J}^{(\mathcal{B})}$:

$$(\mathbb{A}_i)_{a'b',ab} = \delta_{b'b} \left(\mathbb{J}_i^{(\mathcal{A})}\right)_{a'a} , \tag{4.97}$$

$$(\mathbb{B}_i)_{a'b',ab} = \delta_{a'a} \left(\mathbb{J}_i^{(\mathcal{B})}\right)_{b'b} , \tag{4.98}$$

con los índices (a, b) corriendo sobre los valores

$$a = -\mathcal{A}, -\mathcal{A}+1, \ldots, \mathcal{A}-1, \mathcal{A} , \tag{4.99}$$

$$b = -\mathcal{B}, -\mathcal{B}+1, \ldots, \mathcal{B}-1, \mathcal{B} , \tag{4.100}$$

y donde $\left(\mathbb{J}_i^{(\mathcal{A})}\right)_{a'a}$ y $\left(\mathbb{J}_i^{(\mathcal{B})}\right)_{b'b}$ son las matrices estándares de espín $\mathcal{C}$, igual a $\mathcal{A}$ o $\mathcal{B}$, dadas por

$$\left(\mathbb{J}_3^{(\mathcal{C})}\right)_{c'c} = c\,\delta_{c'c} , \tag{4.101}$$

$$\left(\mathbb{J}_1^{(\mathcal{C})} \pm i\mathbb{J}_2^{(\mathcal{C})}\right)_{c'c} = \delta_{c',c\pm1}\sqrt{(\mathcal{C}\mp c)\,(\mathcal{C}\pm c+1)} . \tag{4.102}$$

La dimensión de esta representación, como cualquier otra representación tensorial, viene dada por el producto de las dimensiones de las representaciones $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$: $(2\mathcal{A}+1)\,(2\mathcal{B}+1)$.

Ya que $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ son Hermíticas, $\mathbb{J}$ es Hermítica y $\mathbb{K}$ anti-Hermítica. Entonces las representaciones $S(\Lambda)$ nos son unitarias[3], lo cual no representa ningún problema, puesto que los supercampos son operadores de campo y no funciones de onda, por lo que no necesitan tener normas positivas. Invirtiendo las relaciones (4.95) en favor de $\mathbb{J}$ y $\mathbb{K}$:

$$\mathbb{J}_i = \mathbb{A}_i + \mathbb{B}_i, \quad i\mathbb{K}_i = \mathbb{A}_i - \mathbb{B}_i . \tag{4.103}$$

[3] Esta característica de no contar con representaciones unitarias finitas para el grupo de Lorentz, se debe a que este grupo es *no-compacto*. Existen representaciones unitarias del grupo de Lorentz que corren sobre índices que toman un número infinito de valores.

Los índices $\pm\ell$ de la representación arbitraria del grupo de Lorentz, para el caso de las representaciones irreducible $(\mathcal{A},\mathcal{B})$, toman la forma $\pm\ell = ab$. Ya que las matrices $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ conmutan, la representación irreducible de Lorentz

$$\left[S^{\mathcal{A}\mathcal{B}}\left(\Lambda\right)\right]_{ab,a'b'} \ , \tag{4.104}$$

queda expresada por el producto de las representaciones $(\mathcal{A},0)$ y $(0,\mathcal{B})$:

$$S^{\mathcal{A}\mathcal{B}}\left(\Lambda\right)_{ab,a'b'} \ = \ S^{\mathcal{A}0}_{aa'}\left(\Lambda\right) S^{0\mathcal{B}}_{bb'}\left(\Lambda\right) \ . \tag{4.105}$$

Aunque los generadores de $S^{\mathcal{A}0}$ y $S^{0\mathcal{B}}$ son los mismos generadores del grupo de rotaciones, estas transformaciones son generalizadas para parámetros de rotación complejos, el vector de rotación en $S^{0\mathcal{B}}$, siendo el complejo conjugado del vector en $S^{\mathcal{A}0}$. El subgrupo de rotaciones esta siendo generado por representaciones unitarias, esto es, para cualquier matriz de rotación $\mathcal{R}$, se tiene que $S^{\mathcal{A}0}_{aa'}\left(\mathcal{R}\right) \ = \ U^{(\mathcal{A})}_{aa'}\left(\mathcal{R}\right)$. De igual forma para la representación $\mathcal{B}$.

* * *

Habiendo caracterizado las representaciones irreducibles del grupo homogéneo de Lorentz, la forma explícita del supercampo causal quiral se escribe como

$$\begin{aligned}\Phi_{\pm ab}(x,\vartheta) \ &= \ (2\pi)^{-3/2}\sum_{\sigma}\int d^3\mathbf{p}\left\{\kappa\, e^{+i(x_\pm\cdot p)}a_\pm(\mathbf{p}\,\vartheta_\pm\,\sigma)u_{ab}(\mathbf{p},\sigma)\right.\\ &\qquad\qquad\left. +\,\lambda\, e^{-i(x_\pm\cdot p)}\,a^{c\,\dagger}_\pm\left(\mathbf{p}\,\vartheta_\pm\,\sigma\right)v_{ab}(\mathbf{p},\sigma)\right\} \ ,\end{aligned} \tag{4.106}$$

$$\begin{aligned}\Phi^\dagger_{\pm ab}(x,\vartheta) \ &= \ (2\pi)^{-3/2}\sum_{\sigma}\int d^3\mathbf{p}\left\{\,\lambda^* e^{+i(x_\pm\cdot p)}a^c_\pm(\mathbf{p},\vartheta_\pm,\sigma)\left(v_{ab}(\mathbf{p},\sigma)\right)^*\right.\\ &\qquad\qquad\left. +\,\kappa^*\, e^{-i(x_\pm\cdot p)}\,a^\dagger_\pm\left(\mathbf{p}\,\vartheta_\pm\,\sigma\right)\left(u_{ab}(\mathbf{p},\sigma)\right)^*\right\} \ .\end{aligned} \tag{4.107}$$

Las interacciones invariantes de Lorentz, con las que construimos la densidad Hamiltoniana, se ven como

$$\sum_n\sum_{a_1a_2\cdots} g_{a_1a_2\cdots a_nb_1b_2\cdots b_n}\Phi^{(1)}_{a_1b_1}\left(x,\theta\right)\Phi^{(2)}_{a_2b_2}\left(x,\theta\right)\cdots\Phi^{(n)}_{a_nb_n}\left(x,\theta\right) \ . \tag{4.108}$$

El tensor invariante $g_{a_1 a_2 \cdots a_n b_1 b_2 \cdots b_n}$ se obtiene usando las reglas usuales de adición de momento angular. Es el mismo coeficiente que se origina de construir un estado cuántico escalar bajo dos conjuntos de rotaciones independientes, a partir del producto tensorial de dos estados, uno en la representación $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \cdots \otimes \mathcal{A}_n$ de la primera rotación e inerte en la segunda y el otro estado en la presentación $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \cdots \otimes \mathcal{B}_n$ de la segunda rotación e inerte en la primera [16].

Ahora, estamos en condiciones de determinar la forma explícita de los coeficientes $v_{ab}(\mathbf{p}, \sigma)$ y $u_{ab}(\mathbf{p}, \sigma)$. Después de esto, debemos ver los posibles valores que pueden tomar las constantes λ y κ, de tal forma que aseguremos que los campos (anti)conmutan para separaciones del tipo espacial.

Supercampos masivos

Para el caso masivo, todo elemento del grupo pequeño viene dado por una rotación $\mathcal{R}$ en el espacio de 3 dimensiones. Analizamos la relación (4.91) para este grupo pequeño y para la representación general irreducible (4.105):

$$\sum_{\sigma'} u_{ab}\left(\mathbf{k}, \sigma'\right) U^{(j)}_{\sigma'\sigma}\left(\mathcal{R}\right) \; = \sum_{a'b'} U^{(\mathcal{A})}_{aa'}\left(\mathcal{R}\right) \, U^{(\mathcal{B})}_{bb'}\left(\mathcal{R}\right) \, u_{a'b'}\left(\mathbf{k}, \sigma\right) \; . \tag{4.109}$$

Esta relación nos demuestra que $u_{ab}\left(\mathbf{k}, \sigma\right)$ es proporcional a los coeficientes de Clebsh-Gordan $C_{\mathcal{AB}}\left(j\sigma; ab\right)$. Para ver esto, notemos que si un estado $\Psi^{(j)}_{\sigma}$, bajo el operador unitario $\mathsf{U}\left(\mathcal{R}\right)$, transforma como

$$\mathsf{U}\left(\mathcal{R}\right) \Psi^{(j)}_{\sigma} \; = U^{(j)}_{\sigma\sigma'}\left(\mathcal{R}^{-1}\right) \Psi^{(j)}_{\sigma} \; , \tag{4.110}$$

entonces, de acuerdo con (4.109), el estado Ψ_{ab} definido por

$$\Psi_{ab} \; \equiv \sum_{\sigma'} u_{ab}\left(\mathbf{k}, \sigma'\right) \Psi^{(j)}_{\sigma'} \; , \tag{4.111}$$

transforma, bajo la misma rotación, como la representación tensorial $U^{(\mathcal{A})} U^{(\mathcal{B})}$:

$$\mathsf{U}\left(\mathcal{R}\right) \Psi_{ab} \; = \sum_{a'b'} U^{(\mathcal{A})}_{aa'}\left(\mathcal{R}^{-1}\right) \, U^{(\mathcal{B})}_{bb'}\left(\mathcal{R}^{-1}\right) \Psi_{a'b'} \; . \tag{4.112}$$

Los coeficientes que conectan a las bases $\Psi_\sigma^{(j)}$ y Ψ_{ab} son, por definición, precisamente los coeficientes de Clebsh-Gordan[4]. Sabemos que los posibles valores que j puede tomar son

$$j = \mathcal{A} + \mathcal{B}, \mathcal{A} + \mathcal{B} - 1, \ldots, |\mathcal{A} + \mathcal{B}| \ . \tag{4.113}$$

Esto se sigue de las reglas de adición del momento angular, de hecho basta tomar la tercera componente de los generadores de las representación del grupo de rotación (4.106), para ver que la relación (4.111) se debe de cumplir. Entonces, un supercampo quiral en la representación irreducible $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, puede acarrear a la superpartícula de superespín j *una sola vez* si y solo sí la representación es tal que j coincide con uno de los valores $|\mathcal{A} - \mathcal{B}| < j < \mathcal{A} + \mathcal{B}$. Los coeficientes de Clebsh-Gordan son únicos hasta una constante de proporcionalidad. Escogiendo como constante de proporcionalidad el valor $(2m)^{-1}$, tenemos la solución para $u_{ab}(\mathbf{k}, \sigma)$:

$$u_{ab}(\mathbf{k}, \sigma) = (2m)^{-1/2} C_{\mathcal{A}\mathcal{B}}(j\sigma; ab) \ , \tag{4.114}$$

donde $C_{\mathcal{A}\mathcal{B}}(j\sigma; ab)$ representa a los coeficientes de Clebsh-Gordan normalizados de la manera estándar [37]. Para encontrar las soluciones a (4.90):

$$\sum_{\sigma'} v_{ab}(\mathbf{k}, \sigma') \, U_{\sigma'\sigma}^{(j)*}\left(\mathcal{R}^{-1}\right) = \sum_{a'b'} U_{aa'}^{(\mathcal{A})}\left(\mathcal{R}^{-1}\right) U_{bb'}^{(\mathcal{B})}\left(\mathcal{R}^{-1}\right) v_{a'b'}(\mathbf{k}, \sigma) \ , \tag{4.115}$$

sólo basta notar que [15][5]

$$U_{\sigma\sigma'}^{(j)*} = \left[C \, U^{(j)} \, C^{-1}\right]_{\sigma\sigma'} \ , \tag{4.116}$$

donde

$$C_{\sigma\sigma'} = (-)^{j+\sigma} \delta_{\sigma,-\sigma'} \ . \tag{4.117}$$

[4]Para ver todo la relativo a la teoría del momento angular, consúltese la Ref. [37].

[5]Esta expresión, en el lenguaje de teoría de representaciones, quiere decir que las representación $U^{(j)}(\mathcal{R})$ y su compleja conjugada, son equivalentes.

De aquí se sigue que los coeficientes $\sum_{\sigma'} v_{ab}(\mathbf{k},\sigma')\, C_{\sigma'\sigma}$ transforman igual que los coeficientes $u_{ab}(\mathbf{k},\sigma')$ y por lo tanto ambos deben de ser proporcionales. Redefiniendo la constante λ en la Ec. (4.106), podemos siempre escoger

$$v_{ab}(\mathbf{k},\sigma) \;=\; (-)^{j+\sigma} u_{ab}(\mathbf{k},-\sigma) \ . \tag{4.118}$$

Las funciones de onda $v_{ab}(\mathbf{p},\sigma)$ y $u_{ab}(\mathbf{p},\sigma)$ para valores arbitrarios de momento $\mathbf{p}$, vienen dadas en términos de las funciones de onda en el vector estándar por las ecuaciones (4.33) y (4.34),

$$v_{ab}(\mathbf{p},\sigma) = \sqrt{\tfrac{k^0}{p^0}} \sum_{\pm\bar{\ell}} \left[S\left(L(p)\right)\right]_{ab,a'b'} v_{a'b'}(\mathbf{k},\sigma) \ , \tag{4.119}$$

$$u_{ab}(\mathbf{p},\sigma) = \sqrt{\tfrac{k^0}{p^0}} \sum_{\pm\bar{\ell}} \left[S\left(L(p)\right)\right]_{ab,a'b'} u_{a'b'}(\mathbf{k},\sigma) \ . \tag{4.120}$$

Hemos escogido $L(p)^{\mu}{}_{\nu}$ como

$$\begin{aligned} L^{i}{}_{k}(\theta,\hat{\mathbf{p}}) &= \delta_{ik} \;+\; (\cosh\theta - 1)\,\hat{p}_i\hat{p}_k \ , \\ L^{i}{}_{0}(\theta,\hat{\mathbf{p}}) &= L^{0}{}_{i}(\theta,\hat{\mathbf{p}}) \;=\; \hat{p}_i \sinh\theta \ , \\ L^{0}{}_{0}(\theta,\hat{\mathbf{p}}) &= \cosh\theta \ \ , \end{aligned} \tag{4.121}$$

donde

$$\cosh\theta \;=\; \sqrt{\mathbf{p}^2 \,+\, m^2}\,/m, \quad \sinh\theta \;=\; |\mathbf{p}|/m, \ . \tag{4.122}$$

Para una dirección fija $\hat{\mathbf{p}}$ y dos parámetros θ y $\bar{\theta}$ arbitrarios, es fácil ver que $L(\theta,\hat{\mathbf{p}})$ satisface la regla de composición de un grupo abeliano:

$$L(\theta,\hat{\mathbf{p}})\, L\left(\bar{\theta},\hat{\mathbf{p}}\right) \;=\; L\left(\bar{\theta} \,+\, \theta,\hat{\mathbf{p}}\right) \ . \tag{4.123}$$

Notemos que $L(0,\hat{\mathbf{p}})^{\mu}{}_{\nu} \;=\; \delta^{\mu}{}_{\nu}$, por lo que al desarrollar $L(p)$ en serie de Taylor alrededor de θ, tenemos $L(0,\hat{\mathbf{p}})^{\mu}{}_{\nu} \;=\; \delta^{\mu}_{\nu} \,+\, [\omega(\theta)]^{\mu}{}_{\nu} \,+\, \ldots$ con

$$[\omega(\theta)]_{ij} \;=\; [\omega(\theta)]_{00} \;=\; 0, \quad [\omega(\theta)]_{i0} \;=\; \hat{p}_i\theta \ . \tag{4.124}$$

Esto también nos dice que para θ suficientemente pequeño, la representación $S^{\mathcal{AB}}\left(L(p)\right)$ viene expresada por [6]

$$S^{\mathcal{AB}}\left(L(p)\right) \,=\, \mathbb{I} \,-\, i\left(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbb{K}\right)\theta \,+\, \ldots \; . \tag{4.125}$$

Puesto que $S^{\mathcal{AB}}\left(\bar{\theta}+\theta\right) = S^{\mathcal{AB}}\left(\bar{\theta}\right) S^{\mathcal{AB}}\left(\theta\right)$, podemos sumar la serie para obtener

$$S^{\mathcal{A}0}_{aa'}\left(L(p)\right) \,=\, \left[\exp\left(-\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbb{J}^{(\mathcal{A})}\theta\right)\right]_{aa'} , \quad S^{0\mathcal{B}}_{bb'}\left(L(p)\right) \,=\, \left[\exp\left(+\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbb{J}^{(\mathcal{B})}\theta\right)\right]_{bb'} , \tag{4.126}$$

donde hemos usado $i\mathbb{K} = \mathbb{J}^{\mathcal{A}} - \mathbb{J}^{\mathcal{B}}$ y $S^{\mathcal{AB}} \,=\, S^{\mathcal{A}0}S^{0\mathcal{B}}$.

Finalmente, escribimos de forma explícita los coeficientes $u_{ab}\left(\mathbf{b},\sigma\right)$ y $v_{ab}\left(\mathbf{p},\sigma\right)$, en términos de los coeficientes de Clebsh-Gordan y de los generadores de las representaciones del grupo de rotación:

$$u_{ab}\left(\mathbf{p},\sigma\right) \,=\, \sqrt{\frac{1}{2p^0}}\sum_{a'b'}\left[\exp\left(-\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbb{J}^{(\mathcal{A})}\theta\right)\right]_{aa'}\left[\exp\left(+\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbb{J}^{(\mathcal{B})}\theta\right)\right]_{bb'} C_{\mathcal{AB}}\left(j\sigma;a'b'\right) \; . \tag{4.127}$$

y

$$v_{ab}\left(\mathbf{p},\sigma\right) \,=\, (-)^{j+\sigma}u_{ab}\left(\mathbf{p},-\sigma\right) \; . \tag{4.128}$$

Para analizar las relaciones de causalidad, las cuales son necesarias para tener una supermatriz $\mathcal{S}$ invariante de Lorentz, consideramos dos supercampos $\Phi_{\pm ab}$ y $\Phi_{\pm\tilde{a}\tilde{b}}$ en las representaciones (A,B) y $\left(\tilde{A},\tilde{B}\right)$ del grupo de Lorentz, respectivamente. Tenemos pues, cuatro constantes λ, κ, $\tilde{\lambda}$ y $\tilde{\kappa}$ que intentaremos ajustar para cumplir con las relaciones de causalidad. Tomando el (anti)conmutador de $\Phi_{\pm ab}$ con $\Phi^{\dagger}_{\mp\tilde{a}\tilde{b}}$, obtenemos

$$\begin{aligned}\left[\Phi_{\pm ab}(x_1,\vartheta_1),\Phi^{\dagger}_{\mp\tilde{a}\tilde{b}}(x_2,\vartheta_2)\right]_{\varepsilon} =\, & (2\pi)^{-3}\int d^3\mathbf{p}\,(2p^0)^{-1}\,\pi_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}\left(\mathbf{p}\right) \\ & \times\Big(\kappa\tilde{\kappa}^*\exp\left[+ix^{\pm}_{12}\cdot p\right] \,+\, \varepsilon\lambda\tilde{\lambda}^*\exp\left[-ix^{\pm}_{12}\cdot p\right]\Big) \; ,\end{aligned} \tag{4.129}$$

[6]Hay que recordar que la expansión general de $S^{\mathcal{AB}}$ alrededor de la unidad es

$$S^{\mathcal{AB}} \,=\, \mathbb{I} \,+\, \frac{i}{2}\,\omega_{\mu\nu}\,\mathbb{J}^{\mu\nu} \,+\, \ldots$$

donde

$$\left(x_{12}^{\pm}\right)^{\mu} = x_{1}^{\mu} - x_{2}^{\mu} + (\vartheta_{2} - \vartheta_{1}) \cdot \gamma^{\mu}(\vartheta_{2\mp} + \vartheta_{1\pm}) = -\left(x_{21}^{\mp}\right)^{\mu} . \tag{4.130}$$

Aquí, $\pi_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}\,(\mathbf{p})$ representa el bilineal formado por la suma de los espines de las funciones onda:

$$(2p^0)^{-1}\pi_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}\,(\mathbf{p}) = \sum_{\sigma} u_{ab}(\mathbf{p},\sigma)\,\tilde{u}^{*}_{\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p},\sigma) = \sum_{\sigma} v_{ab}(\mathbf{p},\sigma)\,\tilde{v}^{*}_{\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p},\sigma) . \tag{4.131}$$

El símbolo ε en (4.129) vale + o −, dependiendo de si las superpartículas son fermiones o bosones, respectivamente. De acuerdo con las Ecs. (4.127) y (4.127), tenemos que

$$\begin{aligned}\pi_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}\,(\mathbf{p}) = & \sum_{a'b'}\sum_{\tilde{a}'\tilde{b}'}\sum_{\sigma} C_{\mathcal{A}\mathcal{B}}\,(j\sigma;a'b')\,C_{\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathcal{B}}}\left(j\sigma;\tilde{a}'\tilde{b}'\right) \\ & \times \left[e^{-(\theta\hat{\mathbf{p}})\cdot\mathbb{J}^{(\mathcal{A})}}\right]_{aa'} \left[e^{(\theta\hat{\mathbf{p}})\cdot\mathbb{J}^{(\mathcal{B})}}\right]_{bb'} \left[e^{-(\theta\hat{\mathbf{p}})\cdot\mathbb{J}^{(\tilde{\mathcal{A}})}}\right]^{*}_{\tilde{a}\tilde{a}'} \left[e^{(\theta\hat{\mathbf{p}})\cdot\mathbb{J}^{(\tilde{\mathcal{B}})}}\right]^{*}_{\tilde{b}\tilde{b}'} .\end{aligned} \tag{4.132}$$

Enunciamos dos propiedades $\pi_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}\,(\mathbf{p})$ que son de nuestro interés inmediato, dejando para después su demostración. Escribimos a $\pi_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}$ como función de $(\mathbf{p}, p^0)$:

$$P_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}\left(\mathbf{p},p^0\right) \equiv \pi_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}\,(\mathbf{p}) , \tag{4.133}$$

con $p^0 = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$. El primer resultado que usamos [16], es el que nos dice que la función $\pi_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}$ es polinomial en la variable $\mathbf{p}$. Entonces, separando la potencias pares de las impares en la variable $|\mathbf{p}|$, siempre podemos escribir a $P_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}$ como lineal en p^0,

$$P_{a\tilde{a},b\tilde{b}}\left(\mathbf{p},p^0\right) = P_{a\tilde{a},b\tilde{b}}\,(\mathbf{p}) + p^0\,Q_{a\tilde{a},b\tilde{b}}\,(\mathbf{p}) . \tag{4.134}$$

El segundo resultado fundamental, nos dice que bajo el cambio $p \to -p$ tenemos que

$$P_{a\tilde{a},b\tilde{b}}\left(-\mathbf{p},-p^0\right) = (-)^{2(\mathcal{A}+\tilde{\mathcal{B}})} P_{a\tilde{a},b\tilde{b}}\left(\mathbf{p},p^0\right) . \tag{4.135}$$

Con esto, podemos escribir

$$\Big[\Phi_{\pm ab}(x_1,\vartheta_1),\Phi^\dagger_{\mp\tilde{a}\tilde{b}}(x_2,\vartheta_2)\Big]_\varepsilon = \\ P_{a\tilde{a},b\tilde{b}}\,(-i\partial_1)\left[\Delta_+(x^\pm_{12})\,\kappa\tilde{\kappa}^*\;+\;\epsilon(-)^{2(\mathcal{A}+\tilde{\mathcal{B}})}\,\Delta_+(-x^\pm_{12})\,\lambda\tilde{\lambda}^*\right]\;. \tag{4.136}$$

Para $x^2>0$, tenemos que $\Delta_+(x) = \Delta_+(-x)$, esto es, la función $\Delta_+(x)$ es par. Entonces, para $(x_1-x_2)^2>0$:

$$\Big[\Phi_{\pm ab}(x_1,\vartheta_1),\Phi^\dagger_{\mp\tilde{a}\tilde{b}}(x_2,\vartheta_2)\Big]_\varepsilon = \left(\kappa\tilde{\kappa}^*\;+\;\epsilon(-)^{2(\mathcal{A}+\tilde{\mathcal{B}})}\lambda\tilde{\lambda}^*\right)P_{n,\tilde{n}}\,(-i\partial_1)\,\Delta_+(x^\pm_{12})\;, \tag{4.137}$$

con

$$\Delta_+(x)\;\equiv\;(2\pi)^{-3}\int d^3\mathbf{p}\,\left(2p^0\right)^{-1}e^{ip\cdot x}\;. \tag{4.138}$$

La función $P_{n,\tilde{n}}\,(-i\partial_1)\,\Delta_+(x^\pm_{12})$ definitivamente no es cero, por lo que la condición necesaria para que anti(conmutador) sea cero es

$$\kappa\tilde{\kappa}^*\;+\;\epsilon(-)^{2(\mathcal{A}+\tilde{\mathcal{B}})}\lambda\tilde{\lambda}^*\;=\;0\;. \tag{4.139}$$

Esta relación se debe cumplir para el caso particular en que el campo $\Phi_{\pm ab}$ es el mismo $\Phi_{\pm\tilde{a}\tilde{b}}$. El adjunto de $\Phi_{\pm ab}$ tiene que aparecer en la densidad Hamiltoniana, de otro modo modo perdemos Hermiticidad en el Hamiltoniano, así que es necesario que

$$|\kappa|^2\;+\;\epsilon(-)^{2(\mathcal{A}+\mathcal{B})}|\lambda|^2\;=\;0\;. \tag{4.140}$$

De aquí se desprenden dos cosas:

$$|\kappa| = |\lambda, \quad |(-)^{2(\mathcal{A}+\mathcal{B})}\;=\;-\varepsilon\;. \tag{4.141}$$

Ya que $(-)^{2(\mathcal{A}+\mathcal{B})} = (-)^{2j}$. Concluimos que las superpartículas de superespín j impar son fermiones mientras que las partículas de superespín j par son bosones, este resultado, es el famoso *teorema de espín-estadística*. Redefiniendo $\lambda\to(-)^{2\mathcal{B}}\lambda$, la condición general (4.139) se reduce a

$$\kappa\tilde{\kappa}^*\;=\;\lambda\tilde{\lambda}^*\;. \tag{4.142}$$

Ya sabemos que las magnitudes coinciden, por lo que esta es una relación entre las fases. Explotamos la libertad que tenemos de redefinir los operadores de creación y aniquilación de tal forma que para *un* supercampo conseguimos que $\kappa = \lambda$, con esto, y de la Ec. (4.142), obtenemos que $\kappa = \lambda$ se debe de cumplir *para todo* supercampo. La constante global que resulta de esto, la podemos reabsorber en los coeficientes de acoplamiento. Llegamos finalmente a la fórmula general de los supercampos quirales para una superpartícula (únicos hasta una constante):

$$\begin{aligned}\Phi_{\pm ab}(x,\vartheta) \;=\; (2\pi)^{-3/2}\sum_{\sigma}\int d^3\mathbf{p}\,\Big\{\, e^{+i(x_\pm\cdot p)}a_\pm\left(\mathbf{p}\,\vartheta_\pm\,\sigma\right)u_{ab}(\mathbf{p},\sigma)\\ +\,(-)^{2\mathcal{B}}\; e^{-i(x_\pm\cdot p)}\;a^{c\,\dagger}_\pm\left(\mathbf{p}\,\vartheta_\pm\,\sigma\right)v_{ab}\left(\mathbf{p},\sigma\right)\Big\}\;,\end{aligned} \tag{4.143}$$

$$\begin{aligned}\Phi^\dagger_{\pm ab}(x,\vartheta) \;=\; (2\pi)^{-3/2}\sum_{\sigma}\int d^3\mathbf{p}\,\Big\{\,(-)^{2\mathcal{B}}\,e^{+i(x_\pm\cdot p)}a^{c}_\pm\left(\mathbf{p}\,\vartheta_\pm\,\sigma\right)\left(v_{ab}(\mathbf{p},\sigma)\right)^*\\ +\,e^{-i(x_\pm\cdot p)}\;a^{\dagger}_\pm\left(\mathbf{p}\,\vartheta_\pm\,\sigma\right)\left(u_{ab}(\mathbf{p},\sigma)\right)^*\Big\}\;.\end{aligned} \tag{4.144}$$

4.4. Supercampos mínimos y el polinomio general de Weinberg

Los supercampos de $(2j+1)$ ***componentes*** [15, 38]**.** Cuando $\mathcal{B} = 0$ en la representación $(\mathcal{A},\mathcal{B})$, los coeficientes $u_{a0}\left(\mathbf{k},\sigma\right)$ en (4.109) están conectando dos representaciones irreducibles del grupo de rotación. Por el lema de Schur, se sigue que $\mathcal{A} = j$ y que la correspondiente solución no trivial para los coeficientes $u_{a0}\left(\mathbf{k},\sigma\right)$ es un múltiplo de la matriz unidad. Similarmente, cuando $\mathcal{A} = 0$, tenemos que $\mathcal{B} = j$. De hecho, de las propiedades de los Clebsh-Gordan

$$C_{j0}\left(j\sigma;\tilde\sigma 0\right) \;=\; \delta_{\sigma\tilde\sigma}\,,\quad C_{0j}\left(j\sigma;0\tilde\sigma\right) \;=\; \delta_{\sigma\tilde\sigma} \tag{4.145}$$

y de la Ec. (4.114) vemos directamente que este es el caso. Escribimos los coeficientes $u_{\tilde\sigma 0}\left(\mathbf{p},\sigma\right)$ y $u_{0\tilde\sigma}\left(\mathbf{p},\sigma\right)$, correspondientes a las representaciones $(j,0)$ y $(0,j)$, de la siguiente manera:

$$u^-_{\tilde\sigma}\left(\mathbf{p},\sigma\right) \;\equiv\; u_{\tilde\sigma 0}\left(\mathbf{p},\sigma\right),\quad u^+_{\tilde\sigma}\left(\mathbf{p},\sigma\right) \;\equiv\; u_{0\tilde\sigma}\left(\mathbf{p},\sigma\right)\;. \tag{4.146}$$

Con la ayuda de (4.127), observamos que

$$u^{\varepsilon}_{\tilde{\sigma}}\left(\mathbf{p},\sigma\right) \;=\; \sqrt{\frac{1}{2p^0}}\left[\exp\left(+\varepsilon\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbb{J}^{(j)}\theta\right)\right]_{\tilde{\sigma}\sigma} \;. \tag{4.147}$$

y de la Ec. (4.128) obtenemos la forma explícita de los coeficientes $v^{+}_{\tilde{\sigma}0}\left(\mathbf{p},\sigma\right)$ y $v^{-}_{\tilde{\sigma}0}\left(\mathbf{p},\sigma\right)$

$$v^{\varepsilon}_{\tilde{\sigma}}\left(\mathbf{p},\sigma\right) \;=\; \frac{(-)^{j+\sigma}}{\sqrt{2p^0}}\left[\exp\left(+\varepsilon\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbb{J}^{(j)}\theta\right)\right]_{\tilde{\sigma},-\sigma} \;, \tag{4.148}$$

donde los coeficientes $v^{\varepsilon}_{\tilde{\sigma}}\left(\mathbf{p},\sigma\right)$ están definidos como en las Ecs. (4.146). Los correspondientes supercampos para estos casos se ven como

$$\begin{aligned}
\Phi^{\varepsilon}_{\pm\sigma}(x,\vartheta) \;&=\; (2\pi)^{-3/2}\sum_{\sigma'}\int\frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{2p^0}}\;\left[\exp\left(+\epsilon\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbb{J}^{(j)}\theta\right)\right]_{\sigma\sigma'} \\
&\qquad\times\left\{e^{+i(x_{\pm}\cdot p)}a_{\pm}(\mathbf{p},\vartheta_{\pm},\sigma') \;+\; (-)^{j+\sigma'}\;e^{-i(x_{\pm}\cdot p)}\,a^{c\,\dagger}_{\pm}(\mathbf{p},\vartheta_{\pm},-\sigma')\right\} \;, \\
\Phi^{\varepsilon\dagger}_{\pm\sigma}(x,\vartheta) \;&=\; (2\pi)^{-3/2}\sum_{\sigma'}\int\frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{2p^0}}\;\left[\exp\left(+\epsilon\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbb{J}^{(j)}\theta\right)\right]_{\sigma'\sigma} \\
&\qquad\times\left\{(-)^{j+\sigma'}\;e^{+i(x_{\pm}\cdot p)}a^{c}_{\pm}(\mathbf{p},\vartheta_{\pm},-\sigma') \;+\; e^{-i(x_{\pm}\cdot p)}\,a^{\dagger}_{\pm}(\mathbf{p},\vartheta_{\pm},\sigma')\right\} \;.
\end{aligned} \tag{4.149}$$

El polinomio de Weinberg (4.131) en este caso, toma una forma muy compacta:

$$\pi^{\varepsilon}_{\sigma,\tilde{\sigma}}\left(\mathbf{p}\right) = \;\left[\exp\left(2\varepsilon\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbb{J}^{(j)}\theta\right)\right]_{\sigma\tilde{\sigma}} \;. \tag{4.150}$$

La cantidad $\pi^{-}_{\sigma,\tilde{\sigma}}$ transforma como un tensor de Lorentz en la representación (j,j). Esta representación consiste en los tensores de Lorentz totalmente simétricos de dimensión $2j$. Entonces, debe existir un tensor $t^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2j}}_{\sigma\sigma'}$ que convierta los índices σ,σ' a los índices $\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2j}$ (totalmente simetrizados):

$$\pi^{-}_{\sigma\sigma'}\left(\mathbf{p}\right) \;=\; (-)^{2j}t^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2j}}_{\sigma\sigma'}\pi_{\,\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2j}}\left(\mathbf{p}\right) \;. \tag{4.151}$$

Además, $t^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2j}}_{\sigma\sigma'}$ es cero para cualquier contracción de índices [15]. Ya que

$$\pi^{\,\nu_1\nu_2\cdots\nu_{2j}}\left(\mathbf{p}_{\Lambda}\right) \;=\; \Lambda^{\;\nu_1}_{\mu_1}\Lambda^{\;\nu_2}_{\mu_2}\cdots\Lambda^{\;\nu_{2j}}_{\mu_{2j}}\pi^{\,\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2j}}\left(\mathbf{p}_{\Lambda}\right) \;, \tag{4.152}$$

el polinomio $\pi^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_{2j}}$ tiene que estar formado por productos tensoriales de p^μ y $\eta^{\mu\nu}$, pero cualquier dependencia en $\eta^{\mu\nu}$ no contribuye, por lo que la única contribución es la que se forma del producto totalmente simétrico de los vectores p^μ, esto es

$$\pi^-_{\sigma\sigma'}(\mathbf{p}) = (-)^{2j} t^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2j}}_{\sigma\sigma'} p_{\mu_1} p_{\mu_2} \cdots p_{\mu_{2j}}. \tag{4.153}$$

con $p^0 = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$ y donde hemos reabsorbido cualquier constante de proporcionalidad en $t^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2j}}_{\sigma\sigma'}$. Podemos obtener $\pi^+_{\sigma\sigma'}(\mathbf{p})$ en términos de $\pi^+_{\sigma\sigma'}(\mathbf{p})$:

$$\pi^+_{\sigma\sigma'}(\mathbf{p}) = (-)^{2j-\sigma-\sigma'} t^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2j}}_{-\sigma',-\sigma} p_{\mu_1} p_{\mu_2} \cdots p_{\mu_{2j}} , \tag{4.154}$$

donde hemos usado

$$\left[\exp\left(-\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbb{J}^{(j)}\theta\right)\right]_{-\sigma,-\sigma'} = (-)^{\sigma-\sigma'} \left[\exp\left(+\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbb{J}^{(j)}\theta\right)\right]_{\sigma',\sigma} . \tag{4.155}$$

Cuando $j = 1/2$, las cantidades $t^\mu_{\sigma\sigma'}$ son proporcionales a σ^μ, con σ^i siendo las matrices de Pauli y σ^0 la matriz identidad de 2×2. Entonces el caso j arbitrario representa la generalización del *cálculo con espinores* [7]. Además de las condiciones de quiralidad y la ecuación de Klein-Gordon, los supercampos (4.149) no satisfacen ninguna “ecuación del movimiento”. Por esto último, a veces a estos supercampos se les conoce como supercampos “mínimos”.

El polinomio de Weinberg en la capa de masa. La introducción de los polinomios (4.150), que construimos a partir de los supercampos mínimos, nos pone en una posición en la cual podemos demostrar que la cantidad (4.131) es un polinomio y que la propiedad de reflexión (4.135) es cierta.

Para ahorrarnos notación, en lugar de considerar el anti(conmutador) de $\Phi_{\pm a_1 b_1}$ con $\Phi^\dagger_{\mp a_2 b_2}$, consideramos el supercampo “invertido conjugado” $\Phi^{(c)}_{\mp ab}$, definido por el intercambio de $a_\mp \longleftrightarrow a^{(c)}_\mp$ en la Ec. (4.143). Con la ayuda de las relaciones

$$C_{\mathcal{AB}}(j\sigma; ab) = C_{\mathcal{BA}}(j, -\sigma; -b, -a) \tag{4.156}$$

[7]Para lo referente a las matrices de Dirac para cualquier espín consúltese y las referencias [15, 39] (una versión de libre acceso de la referencia , se encuentra en el sitio web *www-personal.umich.edu/ williams/papers/diracalg.pdf*).

y

$$\left[\exp\left(-\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbb{J}^{(\mathcal{A})}\theta\right)\right]^{*}_{aa'} = (-)^{a-a'}\left[\exp\left(+\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbb{J}^{(\mathcal{A})}\theta\right)\right]_{-a,-a'} \ , \tag{4.157}$$

$$\left[\exp\left(-\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbb{J}^{(\mathcal{A})}\theta\right)\right]_{-a,-a'} = (-)^{a-a'}\left[\exp\left(+\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbb{J}^{(\mathcal{A})}\theta\right)\right]_{a',a} \ , \tag{4.158}$$

podemos escribir los coeficientes conjugados $v^{\mathcal{AB}}_{ab}$ y $u^{\mathcal{AB}}_{ab}$ en términos de los coeficientes $u^{\mathcal{BA}*}_{ba}$ y $v^{\mathcal{BA}*}_{ba}$, respectivamente,

$$u^{\mathcal{AB}}_{ab}\left(\mathbf{p},\sigma\right) = (-)^{-j-a-b}v^{\mathcal{BA}*}_{-b-a}\left(\mathbf{p},\sigma\right) \ , \tag{4.159}$$

$$v^{\mathcal{AB}}_{ab}\left(\mathbf{p},\sigma\right) = (-)^{j-a-b}u^{\mathcal{BA}*}_{-b-a}\left(\mathbf{p},\sigma\right) \ . \tag{4.160}$$

De aquí vemos que las relaciones entre los supercampos invertidos conjugados y los supercampos adjuntos son:

$$\Phi^{\mathcal{AB},(c)}_{\mp ab} = (-)^{2\mathcal{B}+j-a-b}\Phi^{\mathcal{BA}\dagger}_{\mp -b-a} \ . \tag{4.161}$$

El polinomio de Weinberg que proviene del conmutador

$$\left[\Phi^{\mathcal{A}_1\mathcal{B}_1}_{\pm a_1 b_1}\left(z_1\right), \Phi^{\mathcal{A}_2\mathcal{B}_2,(c)}_{\mp a_2 b_2}\left(z_2\right)\right\} \ , \tag{4.162}$$

se ve como

$$\begin{aligned}\pi^{\mathcal{A}_1\mathcal{B}_1\mathcal{A}_2\mathcal{B}_2}_{a_1b_1a_2b_2}\left(\mathbf{p}\right) = &\sum_{\sigma,a_1'b_1'a_2'b_2'}(-)^{j+\sigma}C_{\mathcal{A}_1\mathcal{B}_1}\left(j\sigma;a_1'b_1'\right)C_{\mathcal{A}_2\mathcal{B}_2}\left(j-\sigma;a_2'b_2'\right)\\ &\times\left[\mathcal{S}^{(\mathcal{A}_1)}(+\theta)\right]_{a_1a_1'}\left[\mathcal{S}^{(\mathcal{B}_1)}(-\theta)\right]_{b_1b_1'}\left[\mathcal{S}^{(\mathcal{A}_2)}(+\theta)\right]_{a_2a_2'}\left[\mathcal{S}^{(\mathcal{B}_2)}(-\theta)\right]_{b_2b_2'} \ ,\end{aligned} \tag{4.163}$$

donde $\mathcal{S}^{(\mathcal{A})}(+\theta) = \exp\left(-\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbb{J}^{\mathcal{A}}\theta\right)$. El siguiente paso consiste en buscar escribir (4.163) de una manera más iluminadora, para ello buscamos expresiones equivalentes a (4.163), y en particular buscamos una expresión que nos factorize las representaciones con el mismo signo de θ. En la teoría del momento angular, productos de coeficientes de Clebsh-Gordan de la forma $C_{\mathcal{A}_1\mathcal{B}_1}(\cdots)\,C_{\mathcal{A}_2\mathcal{B}_2}(\cdots)$ aparecen cuando formamos un estado de momento angular $\mathcal{A}_2$ a partir de la suma angular de $\mathcal{B}_2$ con algún otro estado que proviene a su vez, de la suma de los momentos angulares $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{B}_1$. Aunque la base de los estados de estos acoplamientos es diferente al estado con el mismo momento angular $\mathcal{A}_2$ que se forma primero de acoplar $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ para después sumar con $\mathcal{A}_1$, son unitariamente equivalentes. Entonces existe una cantidad $W\left(\mathcal{A}_1\mathcal{B}_1\mathcal{A}_2\mathcal{B}_2; jn\right)$, llamada el *coeficiente-W de Racah*, que liga ambas bases. La expresión formal, en términos de los coeficientes de Clebsh-Gordan viene dada por [16]

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma}(-)^{j+\sigma}\,C_{\mathcal{A}_1\mathcal{B}_1}\left(j\sigma; a_1'b_1'\right)C_{\mathcal{A}_2\mathcal{B}_2}\left(j-\sigma; a_2'b_2'\right)&\\ = (2j\,+\,1)\sum_{n\lambda}(-)^{\mathcal{A}_1+\mathcal{B}_1+j-\lambda}W\left(\mathcal{A}_1\mathcal{B}_1\mathcal{A}_2\mathcal{B}_2; jn\right)&\\ \times\, C_{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}\left(n\lambda; a_1'a_2'\right)C_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}\left(n-\lambda; b_1'b_2'\right)\;.&\end{aligned} \tag{4.164}$$

Insertando esta expresión en (4.163), vemos que en efecto, las representaciones con el mismo signo en θ factorizan:

$$\begin{aligned}\pi^{\mathcal{A}_1\mathcal{B}_1\mathcal{A}_2\mathcal{B}_2}_{a_1b_1a_2b_2}(\mathbf{p}) = {}&(2j\,+\,1)\sum_{n\lambda}(-)^{\mathcal{A}_1+\mathcal{B}_1+j-\lambda}W\left(\mathcal{A}_1\mathcal{B}_1\mathcal{A}_2\mathcal{B}_2; jn\right)\\ &\times\left(\sum_{a_1'a_2'}C_{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}\left(n\lambda; a_1'a_2'\right)\left[\mathcal{S}^{(\mathcal{A}_1)}_{+\theta}\right]_{a_1a_1'}\left[\mathcal{S}^{(\mathcal{A}_2)}_{+\theta}\right]_{a_2a_2'}\right)\\ &\times\left(\sum_{b_1'b_2'}C_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}\left(n-\lambda; b_2'b_2'\right)\left[\mathcal{S}^{(\mathcal{B}_1)}_{-\theta}\right]_{b_1b_1'}\left[\mathcal{S}^{(\mathcal{B}_2)}_{-\theta}\right]_{b_2b_2'}\right)\;.\end{aligned} \tag{4.165}$$

Continuando analíticamente para valores imaginarios del vector de rotación en la Ec. (4.109), tenemos que

$$\sum_{\sigma'}C_{\mathcal{AB}}\left(j\sigma'; ab\right)S^{(j)}_{\sigma'\sigma}\left(\theta\right)\;=\;\sum_{a'b'}S^{(\mathcal{A})}_{aa'}\left(\theta\right)\,S^{(\mathcal{B})}_{bb'}\left(\theta\right)\,C_{\mathcal{AB}}\left(j\sigma; a'b'\right)\;, \tag{4.166}$$

con esto último, la Ec. (4.165) nos queda como

$$\begin{aligned}\pi^{\mathcal{A}_1\mathcal{B}_1\mathcal{A}_2\mathcal{B}_2}_{a_1b_1a_2b_2}(\mathbf{p}) = & (2j+1)\sum_{n\lambda}(-)^{\mathcal{A}_1+\mathcal{B}_2+j-\lambda}W\left(\mathcal{A}_1\mathcal{B}_1\mathcal{A}_2\mathcal{B}_2;jn\right) \\ & \times\left(\sum_{\lambda_1}C_{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}\left(n\lambda_1;a_1a_2\right)\left[\mathcal{S}^{(n)}_{+\theta}\right]_{\lambda_1\lambda}\right) \\ & \times\left(\sum_{\lambda_2}(-)^{\lambda-\lambda_2}C_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}\left(n\lambda_2;b_1b_2\right)\left[\mathcal{S}^{(n)}_{-\theta}\right]_{-\lambda_2,-\lambda}\right)\ .\end{aligned} \tag{4.167}$$

Pero además [ver Ec.(4.155)]

$$[S(-\theta)]_{-b,-a} = (-)^{a-b}[S(+\theta)]_{+a,+b}\ . \tag{4.168}$$

Entonces, llegamos a nuestra forma final del polinomio general de Weinberg (en la capa de masa) [16]:

$$\pi^{\mathcal{A}_1\mathcal{B}_1\mathcal{A}_2\mathcal{B}_2}_{a_1b_1a_2b_2}(\mathbf{p}) = \sum_n\sum_{\lambda_1\lambda_2}F\left(\begin{smallmatrix}\mathcal{A}_1 & \mathcal{B}_1 & \mathcal{A}_2 & \mathcal{B}_2\\ a_1 & b_1 & a_2 & b_2\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\\ j & n\end{smallmatrix}\right)\pi^{(n)}_{\lambda_1\lambda_2}(\mathbf{p})\ , \tag{4.169}$$

donde

$$\begin{aligned}F\left(\begin{smallmatrix}\mathcal{A}_1 & \mathcal{B}_1 & \mathcal{A}_2 & \mathcal{B}_2\\ a_1 & b_1 & a_2 & b_2\end{smallmatrix};\begin{smallmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\\ j & n\end{smallmatrix}\right) = & (2j+1)(-)^{\mathcal{A}_1+\mathcal{B}_2+j}W\left(\mathcal{A}_1\mathcal{B}_1\mathcal{A}_2\mathcal{B}_2;jn\right) \\ & \times C_{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}\left(n\lambda_1;a_1a_2\right)\times C_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}\left(n\lambda_2;b_1b_2\right)\end{aligned} \tag{4.170}$$

De la Ec. (4.153) es evidente que $\pi_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p})$ es un polinomio, por lo que, de la Ec. (4.169), se sigue que $\pi^{\mathcal{A}_1\mathcal{B}_1\mathcal{A}_2\mathcal{B}_2}_{a_1b_1a_2b_2}(\mathbf{p})$ también lo es. Más aún, de la misma ecuación (4.170), vemos que [ver la Ec. (4.133)]

$$P^{(n)}_{\lambda\lambda'}\left(-p^0,-\mathbf{p}\right) = (-)^{2n}P^{(n)}_{\lambda\lambda'}\left(p^0,\mathbf{p}\right)\ . \tag{4.171}$$

El coeficiente $C_{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}\left(n\lambda_1;a_1a_2\right)$ es cero a menos que $|\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_2|<n<\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2$, por lo que en la Ec. (4.169), $(-)^{2n} = (-)^{2\mathcal{A}_1+2\mathcal{A}_2}$. Esto último demuestra la propiedad de reflexión (4.135), como habíamos prometido.

4.5. Interacciones generales

En esta sección investigamos los tipos de interacciones más generales, las cuales se forman mediante la aplicación de derivadas covariantes y superderivadas actuando sobre los supercampos quirales.

Derivadas covariantes. Recordemos que la derivada covariante ∂_μ transforma como la representación $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, entonces el supercampo

$$\partial_\mu \Phi_\pm^{\mathcal{AB}} \ , \tag{4.172}$$

(donde hemos escrito explícitamente la representación a la que pertenece el supercampo y omitido sus componentes) transforma como la representación tensorial $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \otimes (\mathcal{A},\mathcal{B})$. Puesto que los supercampos (4.143) son únicos hasta una constante de proporcionalidad, el supercampo (4.172) puede ser expresado como una combinación lineal de los supercampos:

$$\Phi_\pm^{\left(\mathcal{A}+\frac{1}{2}\right)\left(\mathcal{B}+\frac{1}{2}\right)}, \quad \Phi_\pm^{\left(\mathcal{A}-\frac{1}{2}\right)\left(\mathcal{B}+\frac{1}{2}\right)}, \quad \Phi_\pm^{\left(\mathcal{A}+\frac{1}{2}\right)\left(\mathcal{B}-\frac{1}{2}\right)}, \quad \Phi_\pm^{\left(\mathcal{A}-\frac{1}{2}\right)\left(\mathcal{B}-\frac{1}{2}\right)} \ . \tag{4.173}$$

Por supuesto, si $\mathcal{A}$ vale cero solo los supercampos que llevan $\mathcal{A}+1/2$ son posibles, de igual forma para cuando $\mathcal{B}$ vale cero. Aplicando un procedimiento recursivo, vemos que cualquier potencia de N derivadas de la forma

$$\partial_{\mu_1}\cdots\partial_{\mu_N}\Phi_\pm^{\mathcal{AB}} \ , \tag{4.174}$$

ya esta incluida en los supercampos generales. En otro lado de la moneda, el tensor de derivadas totalmente simétrico sin traza, de dimensión N, denotado por

$$\{\partial_{\mu_1}\cdots\partial_{\mu_N}\} \ , \tag{4.175}$$

transforma como la representación $\left(\frac{N}{2},\frac{N}{2}\right)$ del grupo de Lorentz. Entonces, los supercampos de la forma

$$\{\partial_{\mu_1}\cdots\partial_{\mu_{2B}}\}\,\Phi_\pm^{j0} \ , \tag{4.176}$$

transforman bajo la representación $(\mathcal{A},\mathcal{B}) = (\mathcal{B},\mathcal{B}) \otimes (j,0)$. Debido a las reglas de adición de momento angular $|j-\mathcal{B}| < \mathcal{A} < j+\mathcal{B}$, pero esto es equivalente a $|\mathcal{A}-\mathcal{B}| \leq j \leq \mathcal{A}+\mathcal{B}$. De nuevo, invocando a la unicidad de los supercampos quirales, este supercampo es proporcional a $(\mathcal{A},\mathcal{B})$. Entonces, *perturbativamente, los supercampos* $(j,0)$ *y sus derivadas, son igualmente de generales que los supercampos* (4.143). Lo mismo aplica para los supercampos $(0,j)$.

Interacciones con superderivadas. Hemos visto con anterioridad que el supercampo general se puede expresar como la suma de términos con supercampos quirales y superderivadas $\mathcal{D}_\alpha$ [ver Ecs. (4.66) y (4.67)]:

$$\mathcal{D}_{\epsilon_1\alpha_1}\mathcal{D}_{\epsilon_2\alpha_2}\cdots\mathcal{D}_{\epsilon_N\alpha_N}\Phi_\pm^{\mathcal{A}\mathcal{B}} \,. \tag{4.177}$$

Aquí, $\epsilon_1,\cdots\epsilon_N$ representan los signos $+$ o $-$ de las quiralidades izquierda y derecha, respectivamente. Puesto que las superderivadas satisfacen las relaciones de anticonmutación

$$\{\mathcal{D}_\alpha,\mathcal{D}_\beta\} = +2\left(\gamma^\mu\epsilon\gamma_5\right)_{\alpha\beta}\partial_\mu \tag{4.178}$$

y a la condición de quiralidad $\mathcal{D}_{\mp\alpha}\Phi_\pm^{\mathcal{A}\mathcal{B}} = 0$, al mover todas las superderivadas $\mathcal{D}_{\mp\alpha}$ a la derecha, el supercampo (4.177) quedará expresado como una suma de productos de derivadas covariantes ordinarias y superderivadas $\mathcal{D}_{\pm\alpha}$, actuando sobre $\Phi_\pm^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$. Hemos visto que las derivadas ordinarias, se escriben en términos de supercampos quirales. Debido a la Ec. (4.178), productos de derivadas $\mathcal{D}_{\pm\alpha}$ anticonmutan, por lo que el polinomio más general en estas superderivadas termina a orden dos. Además

$$\mathcal{D}_{\pm\alpha}\mathcal{D}_{\pm\beta} = \frac{1}{2}\left[\left(I\pm\gamma_5\right)\epsilon\right]_{\alpha\beta}\mathcal{D}_\pm^2 \,, \tag{4.179}$$

donde

$$\mathcal{D}^2 \equiv \tfrac{1}{2}\mathcal{D}\cdot\gamma_5\mathcal{D}_\pm \,. \tag{4.180}$$

En suma, con completa generalidad, el conjunto supercampos y sus superderivadas se reduce al conjunto:

$$\Phi_{\pm ab}, \quad \mathcal{D}_\alpha\Phi_{\pm ab}, \quad \mathcal{D}_\pm^2\Phi_{\pm ab} \,. \tag{4.181}$$

Vemos que a diferencia de $\Phi_{\pm ab}$, los supercampos $\mathcal{D}_\alpha \Phi_{\pm ab}$ y $\mathcal{D}^2 \Phi_{\pm ab}$ no son aniquilados por $\mathcal{D}_{\mp\alpha}$. Pero con respecto a $\Phi_{\pm ab}$, el supercampo $\mathcal{D}^2_\pm \Phi_{\pm ab}$ tiene la condición de quiralidad invertida, $\mathcal{D}_{\pm\alpha}\mathcal{D}^2_\pm \Phi_{\pm ab} = 0$.

Hasta este punto, no ha sido necesario suponer que existe ninguna relación entre los supercampos Φ_+ y los supercampos Φ_-, cada uno de estos supercampos puede llevar una superparticula del mismo superspín pero diferente. Hemos visto que para cada estado de superparticula-$\pm$ podemos definir otro superestado que tiene las propiedades de los superestados $\mp$, en términos de los operadores de creación estos nuevos estados tilde se ven como [ver Ec. (3.58)]

$$\tilde{a}^\dagger_\pm \left(\mathbf{p}\, s_\pm\, \sigma\, n\right) = \int \exp\left[2i\, s_\pm \cdot \not{p} s'\right] a^\dagger_\mp \left(\mathbf{p}\, s'_\mp\, \sigma\, n\right)\, d\left[p, s'_\mp\right] \ . \tag{4.182}$$

Similarmente para los operadores de aniquilación. Los supercampos quirales con tilde $\tilde{\Phi}_\pm$, se definen de manera análoga que los supercampos sin tilde $\Phi_\pm$. Veamos que relación existe entre ellos, para ello, notemos que para cualquier función $f\left(x - \vartheta\cdot\gamma s\right)$ se sigue que

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta_\alpha} f\left(x - \vartheta\cdot\gamma s\right) = (-)\left(\epsilon\gamma_5\gamma^\mu s\right)_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu} f\left(x - \vartheta\cdot\gamma s\right) \ , \tag{4.183}$$

y por lo tanto

$$\mathcal{D}_\alpha f\left(x - \vartheta\cdot\gamma s\right) = \left[\gamma^\mu \left(s - \vartheta\right)\right]_\alpha \partial_\mu \ . \tag{4.184}$$

A su vez, esto último implica que

$$\mathcal{D}^\intercal \epsilon \mathcal{D}_\pm\, f\left(x - \vartheta\cdot\gamma s\right) = 2\delta^2 \left(s - \vartheta\right)_\mp \Box f\left(x - \vartheta\cdot\gamma s\right) \ . \tag{4.185}$$

Este último resultado nos compete, porque el operador de creación $\chi^\dagger_{\pm\ell}(x,\vartheta)$ es una función de $(x^\mu - \vartheta\cdot\gamma^\mu s)$:

$$\chi^\dagger_{\pm\ell}(x,\vartheta) = \frac{1}{m^\sharp_\pm} \sum_{\sigma n} \int d\left(\mathbf{p}\, s\right) \exp\left[-i\left(x^\mu - \vartheta\cdot\gamma^\mu s\right) p_\mu\right] a^\dagger_\pm \left(\mathbf{p}\, s\, \sigma\, n\right)\, v_{\pm\ell}\left(\mathbf{p},\sigma,n\right) \ . \tag{4.186}$$

Entonces, usando (4.185) en esta última relación, para después integrar con la función delta fermiónica, obtenemos

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{D}^{\intercal}\epsilon\mathcal{D}_{\pm})\ \chi^{\dagger}_{\pm\ell}(x,\vartheta) &= \frac{2m^2}{m^{\sharp}_{\pm}}\sum_{\sigma n}\int d^3\mathbf{p}\, e^{-ix_{\mp}\cdot p}\left\{\int d^2 s_{\pm}\, e^{[+i2\vartheta_{\mp}\cdot\not{p}s_{\pm}]}a^{\dagger}_{\pm}\left(\mathbf{p}\, s_{\pm}\,\sigma\, n\right)\right\}\, v_{\pm\ell}\left(\mathbf{p},\sigma,n\right)\ , \\
&= \frac{\mp 4m}{(2\pi)^{2/3}}\sum_{\sigma n}\int d^3\mathbf{p}\, e^{-ix_{\mp}\cdot p}\, \tilde{a}^{\dagger}_{\mp}\left(\mathbf{p}\,\vartheta_{\mp}\,\sigma\, n\right)\, v_{\pm\ell}\left(\mathbf{p},\sigma,n\right)\ .
\end{aligned}
\tag{4.187}
$$

esto es,

$$
(\mathcal{D}\cdot\mathcal{D}_{\pm})\,\chi^{\dagger}_{\pm\ell}(x,\vartheta)\ =\ (-4m)\ \tilde{\chi}^{\dagger}_{\mp\ell}(x,\vartheta)\ . \tag{4.188}
$$

Lo mismo para los supercampos de aniquilación, por lo tanto para los supercampos causales tenemos que

$$
(\mathcal{D}\cdot\mathcal{D}_{\pm})\,\Phi^{\dagger}_{\pm}\ =\ (-4m)\,\tilde{\Phi}^{\dagger}_{\mp}\ ,\quad (\mathcal{D}\cdot\mathcal{D}_{\pm})\,\Phi_{\pm}\ =\ (-4m)\,\tilde{\Phi}_{\mp},\quad . \tag{4.189}
$$

En una representación completamente irreducible de supersimetría (donde podemos trabajar solo con los supercampos del tipo Ψ_+ o del tipo Ψ_-), podemos hacer las identificaciones

$$
\Phi^{\dagger}_{\pm}\ =\ \tilde{\Phi}^{\dagger}_{\pm}\ ,\qquad \Phi_{\pm}\ =\ \tilde{\Phi}_{\pm}\qquad . \tag{4.190}
$$

por lo que las relaciones (4.188), para este caso son

$$
(\mathcal{D}\cdot\mathcal{D}_{\pm})\,\Phi^{\dagger}_{\pm}\ =\ (-4m)\,\tilde{\Phi}^{\dagger}_{\mp}\ ,\quad (\mathcal{D}\cdot\mathcal{D}_{\pm})\,\Phi_{\pm}\ =\ (-4m)\,\tilde{\Phi}_{\mp}\qquad . \tag{4.191}
$$

En el formalismo canónico (como veremos adelante), al menos para el caso escalar, estas ecuaciones aparecen como las ecuaciones del movimiento. Ya que $(\mathcal{D}\cdot\mathcal{D}_{\mp})\,(\mathcal{D}\cdot\mathcal{D}_{\pm})\ =\ -4\Box$, las ecuaciones (4.191), implican la ecuación de Klein-Gordon. Desde el punto de vista aqui expuesto, significa que en una representación completamente reducible de supersimetría, podemos trabajar con completa generalidad, solamente con un supercampo quiral, digamos el positivo Φ_+ y todas sus superderivadas. O bien, con los dos supercampos quirales Φ_+ y Φ_- y sus superderivadas lineales $\mathcal{D}_{+\alpha}\Phi_+$ y $\mathcal{D}_{-\alpha}\Phi_-$. Aquí nos iremos por la segunda ruta.

Capítulo 5

Las reglas de súper Feynman

El conocimiento total sobre las teorías cuánticas de los campos en el régimen perturbativo, se expresa a través de las reglas de Feynman. En el superespacio esto no es la excepción. De la fórmula de Dyson y las reglas de anti(conmutación) de los operadores, usamos el algoritmo de Wick [40] para escribir explícitamente los elementos de la supermatriz $\mathcal{S}$ en términos de cantidades que toman valores en los supernúmeros. Pero antes de escribir las fórmulas explicitas, toca dar una definición de la supermatriz $\mathcal{S}$, de tal forma que sea completamente invariante de Lorentz e invariante supersimétrica.

5.1. Reglas de apareamiento

Hemos obtenido la fórmula general para la supermatriz $\mathcal{S}$, en términos de los valores de expectación del operador de Dyson entre los estados de muchas superpartículas no interactuantes,

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\xi_1',\xi_2',\cdots\xi_1,\xi_2,\cdots} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^N}{N!} \int d^8z_1 d^8z_2 \cdots d^8z_N \Big(\Psi_0, \cdots a_{\xi_2'} a_{\xi_1'} \\ \times T\left\{\mathcal{H}(z_1)\cdots\mathcal{H}(z_N)\right\} a^\dagger_{\xi_2} a^\dagger_{\xi_1} \cdots \Psi_0\Big) \ ,\end{aligned} \tag{5.1}$$

donde ξ representa la etiqueta de supermomento $(\mathbf{p}, s_\pm)$, la especie n y el superespín σ. Los operadores a_ξ son de la forma $a_\pm(\mathbf{p}\, s_\pm\, n\, \sigma)$, similarmente, los operadores $a^\dagger_\xi$ representan a los operadores $a^\dagger_\pm(\mathbf{p}\, s_\pm\, n\, \sigma)$. La variable z representa el superespacio de configuración (x, ϑ) y $d^8z = d^4xd^4\vartheta$. T nos indica el orden temporal: Los $\mathcal{H}(z)$ van en orden decreciente con respecto a x^0 de izquierda a derecha. La densidad de interacción Hamiltoniana $\mathcal{H}(z)$, se toma como polinomial en los supercampos y sus adjuntos:

$$\mathcal{H}(z) = \sum_i g_i \mathcal{H}_i(z) \ , \tag{5.2}$$

cada término $\mathcal{H}_i$, siendo un producto definido de supercampos y adjuntos de supercampos de cada tipo. El supercampo de una spartícula de especie n, que transforma bajo una representación particular del grupo homogéneo de Lorentz, viene dado por

$$\Phi_{\pm\ell}(x, \vartheta) = \chi^+_{\pm\ell}(x, \vartheta) + \chi^-_{\pm\ell}(x, \vartheta) \ , \tag{5.3}$$

donde $\chi^+_{\pm\ell}$ y $\chi^-_{\pm\ell}$ son las partes de $\Phi_{\pm\ell}$ que destruyen spartículas y crean antispartículas, respectivamente:

$$\begin{aligned} \chi^+_{\pm\ell}(x, \vartheta) &= (2\pi)^{-3/2} \sum_\sigma \int d^3\mathbf{p}\ e^{+i(x_\pm \cdot p)} a_\pm(\mathbf{p}\, \vartheta_\pm\, \sigma\, n)\, u_\ell(\mathbf{p}, \sigma, n) \ , \\ \chi^-_{\pm\ell}(x, \vartheta) &= (2\pi)^{-3/2} \sum_\sigma \int d^3\mathbf{p}\ (-)^{2\mathcal{B}}\ e^{-i(x_\pm \cdot p)}\, a^\dagger_\pm(\mathbf{p}\, \vartheta_\pm\, \sigma\, n^c)\, v_\ell(\mathbf{p}, \sigma, n) \ . \end{aligned} \tag{5.4}$$

El respectivo supercampo adjunto se escribe como

$$\Phi^\dagger_{\pm\ell}(x, \vartheta) = \chi^{+\dagger}_{\pm\ell}(x, \vartheta) + \chi^{-\dagger}_{\pm\ell}(x, \vartheta) \ , \tag{5.5}$$

donde $\chi^{+\dagger}_{\pm\ell}$ y $\chi^{-\dagger}_{\pm\ell}$ son las partes de $\Phi^\dagger_{\pm\ell}$ que destruyen antispartículas y crean spartículas, respectivamente:

$$\begin{aligned} \chi^{+\dagger}_{\pm\ell}(x, \vartheta) &= (2\pi)^{-3/2} \sum_\sigma \int d^3\mathbf{p}\ e^{+i(x_\pm \cdot p)} a^\dagger_\pm(\mathbf{p}\, \vartheta_\pm\, \sigma\, n)\, u_\ell(\mathbf{p}, \sigma, n)^* \ , \\ \chi^{-\dagger}_{\pm\ell}(x, \vartheta) &= (2\pi)^{-3/2} \sum_\sigma \int d^3\mathbf{p}\ (-)^{2\mathcal{B}}\ e^{-i(x_\pm \cdot p)}\, a_\pm(\mathbf{p}\, \vartheta_\pm\, \sigma\, n^c)\, v_\ell(\mathbf{p}, \sigma, n)^* \ , \end{aligned} \tag{5.6}$$

Aquí, n^c denota la antispartícula asociada a la especie n, el momento p se encuentra en la capa de masa, $p^0 = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_n^2}$. Los coeficientes u_ℓ y v_ℓ dependen de las propiedades de las transformaciones de Lorentz del supercampo y del superespín de la partícula que describe. El índice ℓ en el supercampo indica el tipo de spartícula y la representación del grupo de Lorentz de la cual el supercampo transforma, además de incluir el índice que corre sobre los componentes en esta representación. Hemos aislado un conjunto de operadores que identificamos como las “spartículas” y al correspondiente conjunto de operadores que tienen los números cuánticos invertidos con respecto a estas superpartículas, sus antispartículas (Así por ejemplo, siempre podemos decir que el positrón es la partícula en cuestión y el electrón su antipartícula). Operadores de supercampos que destruyen spartículas y crean antispartículas, les llamamos simplemente supercampos, sus adjuntos, los cuales destruyen antispartículas y crean spartículas, les decimos simplemente supercampos adjuntos.

La relación entre los supercampos y sus adjuntos viene dada por la relación [ver Ecs. (3.47)]:

$$\Phi^\dagger_{\pm\ell}(x,\vartheta) \;=\; [\Phi_{\mp\ell}(x,\epsilon\gamma_5\beta\vartheta^*)]^\dagger \tag{5.7}$$

Las reglas de apareamiento de Wick. Para dar un valor numérico explícito de la supermatriz $\mathcal{S}$, pasamos todos los operadores de creación a la izquierda de los operadores de aniquilación, por lo que usamos (El signo menos en $\pm$, surge cuando las especies de spartículas son ambas fermiones)

$$\begin{aligned} a_\xi a^\dagger_{\xi'} &= \pm a^\dagger_{\xi'} a_\xi \,+\, \delta_{\xi,\xi'} \;, \\ a_\xi a_{\xi'} &= \pm a_{\xi'} a_\xi \;, \\ a^\dagger_\xi a^\dagger_{\xi'} &= \pm a^\dagger_{\xi'} a^\dagger_\xi \;, \end{aligned} \tag{5.8}$$

donde $\delta_{\xi,\xi'}$ es igual a [ver Ec. (3.57)]

$$\exp\left[2s\cdot(-i\not{p})\,s'_{\pm}\right]\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,\delta_{nn'}\delta_{\sigma\sigma'} \;. \tag{5.9}$$

para cuando $\xi = (p, s_{\mp}, \sigma, n)$ y $\xi' = \left(p', s'_{\pm}, \sigma', n'\right)$, mientras que, cuando $\xi = (p, s_{\pm}, \sigma, n)$ y $\xi' = \left(p', s'_{\pm}, \sigma', n'\right)$ la cantidad $\delta_{\xi,\xi'}$ es igual a [ver Ec. (3.56)]

$$\pm\, 2m\, \delta^2\left[(s'-s)_{\pm}\right] \delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\, \delta_{nn'}\delta_{\sigma\sigma'}\ . \tag{5.10}$$

Debido a que

$$a_{\xi}\,\Psi_0 = 0, \quad \Psi_0^{\dagger}\, a_{\xi}^{\dagger}\ =\ 0\ , \tag{5.11}$$

cada que aparezca un operador de creación a la extrema izquierda (o de aniquilación a la extrema derecha) la contribución a la supermatriz $\mathcal{S}$ es nula. Las contribuciones que no son nulas, son las que resultan de los factores $\delta_{\xi,\xi'}$ que se originan de aparear (o emparejar) todos y cada uno de los operadores de creación y aniquilación con operadores de aniquilación y creación, respectivamente, los cuales se encuentran en los estados iniciales, los estados finales y en la densidad Hamiltoniano de interacción [40].

Entonces, la tarea es buscar todos los posibles apareamientos que se forman con las interacciones $\mathcal{H}_i$ en cada término en la fórmula de Dyson. Tendremos sumas de integrales de productos de factores que se originan de los apareamientos de la siguiente manera:

(a) El apareamiento de una spartícula final con números cuánticos $\mathbf{p}'\, s'\, \sigma'\, n'$ con el supercampo adjunto $\Phi^{\dagger}_{\pm\ell}\,(x,\vartheta)$ en $\mathcal{H}_i(x,\vartheta)$ nos da un factor:

- cuando la spartícula es del tipo $(\pm)$:

$$\left[a_{\pm}\left(\mathbf{p}'\, s'_{\pm}\, \sigma'\, n'\right), \Phi^{\dagger}_{\pm\ell}(x,\vartheta)\right\} \ = \\ \pm 2m_n (2\pi)^{-3/2} e^{-i(x_{\pm}\cdot p')}\, \delta^2\left[(\vartheta - s)_{\pm}\right] \left(u_{\ell}(\mathbf{p}',\sigma',n')\right)^{*}\ , \tag{5.12}$$

- cuando la spartícula es del tipo $(\mp)$:

$$\left[a_{\mp}\left(\mathbf{p}'\, s'_{\mp}\, \sigma'\, n'\right), \Phi^{\dagger}_{\pm\ell}(x,\vartheta)\right\} \ = \\ (2\pi)^{-3/2} e^{-i(x_{\pm}\cdot p')} e^{\left[2s'\cdot(-i\not{p}')\,\vartheta_{\pm}\right]} \left(u_{\ell}(\mathbf{p}',\sigma',n')\right)^{*}\ , \tag{5.13}$$

(b) El apareamiento de una antispartícula final con números cuánticos $\mathbf{p}'\, s'\, \sigma'\, n'^c$ con el supercampo adjunto $\Phi_{\pm\ell}\,(x,\vartheta)$ en $\mathcal{H}_i(x,\vartheta)$ nos da un factor:

- cuando la antispartícula es del tipo ($\pm$):

$$\begin{aligned}&\left[a_\pm\left(\mathbf{p}'\, s'_\pm\, \sigma'\, n'^c\right), \Phi_{\pm\ell}(x,\vartheta)\right\} = \\ &\qquad \pm 2m_n(2\pi)^{-3/2}\,(-)^{2\mathcal{B}}\; e^{-i(x_\pm\cdot p')}\;\delta^2\left[(s'-\vartheta)_\pm\right] v_\ell\left(\mathbf{p}',\sigma',n'\right)\;,\end{aligned} \tag{5.14}$$

- cuando la antispartícula es del tipo ($\mp$):

$$\begin{aligned}&\left[a_\mp\left(\mathbf{p}'\, s'_\mp\, \sigma'\, n'^c\right), \Phi_{\pm\ell}(x,\vartheta)\right\} = \\ &\qquad (2\pi)^{-3/2}\,(-)^{2\mathcal{B}}\; e^{-i(x_\pm\cdot p')}\;\exp\left[2s'\cdot\,(-i\not{p}')\,\vartheta_\pm\right] v_\ell\left(\mathbf{p}',\sigma',n'\right)\;,\end{aligned} \tag{5.15}$$

(c) El apareamiento de una spartícula inicial con números cuánticos $\mathbf{p}\, s\, \sigma\, n$ con el supercampo adjunto $\Phi_{\pm\ell}\,(x,\vartheta)$ en $\mathcal{H}_i(x,\vartheta)$ nos da un factor:

- cuando la anti spartícula es del tipo ($\pm$):

$$\begin{aligned}&\left[\Phi_{\pm\ell}(x,\vartheta), a^\dagger_\pm\left(\mathbf{p}\, s_\pm\, \sigma'\, n\right)\right\} = \\ &\qquad \pm 2m_n(2\pi)^{-3/2}\, e^{+i(x_\pm\cdot p)}\;\delta^2\left[(s-\vartheta)_\pm\right] u_\ell(\mathbf{p},\sigma,n)\end{aligned} \tag{5.16}$$

- cuando la anti spartícula es del tipo ($\mp$):

$$\begin{aligned}&\left[\Phi_{\pm\ell}(x,\vartheta), a^\dagger_\mp\left(\mathbf{p}\, s_\mp\, \sigma\, n\right)\right\} = \\ &\qquad (2\pi)^{-3/2}\, e^{+i(x_\pm\cdot p)}\,\exp\left[2\vartheta\cdot\,(-i\not{p})\, s_\mp\right] u_\ell(\mathbf{p},\sigma,n)\end{aligned} \tag{5.17}$$

(d) El apareamiento de una antispartícula inicial con números cuánticos $\mathbf{p}\, s\, \sigma\, n^c$ con el supercampo adjunto $\Phi_{\pm\ell}\,(x,\vartheta)$ en $\mathcal{H}_i(x,\vartheta)$ nos da un factor:

- cuando la antispartícula es del tipo ($\pm$):

$$\begin{aligned}&\left[\Phi^\dagger_{\pm\ell}(x,\vartheta), a^\dagger_\pm\left(\mathbf{p}\, s_\pm\, \sigma\, n^c\right)\right\} = \\ &\qquad \pm 2m_n(2\pi)^{-3/2}\,(-)^{2\mathcal{B}}\, e^{+i(x_\pm\cdot p)}\;\delta^2\left[(s-\vartheta)_\pm\right] \left(v_\ell(\mathbf{p},\sigma,n)\right)^*\end{aligned} \tag{5.18}$$

- cuando la antispartícula es del tipo ($\mp$):

$$\Big[\Phi^{\dagger}_{\pm\ell}(x,\vartheta), a^{\dagger}_{\mp}\left(\mathbf{p}\, s_{\mp}\, \sigma\, n^{c}\right)\Big\} = \\ (2\pi)^{-3/2}\,(-)^{2\mathcal{B}}\, e^{+i(x_{\pm}\cdot p)} e^{\left[2\vartheta\cdot\,(-i\not{p})\, s_{\mp}\right]}\left(v_{\ell}(\mathbf{p},\sigma,n)\right)^{*} \tag{5.19}$$

(e) El apareamiento de una spartícula (o antispartícula) final que lleva números cuánticos $\mathbf{p}'\, s'\, \sigma'\, n'$ con una spartícula (o antispartícula) inicial que lleva números $\mathbf{p}\, s\, \sigma\, n$

- cuando son del tipo ($\mp$) y ($\pm$), respectivamente:

$$\Big[a_{\mp}\left(\mathbf{p}\, s_{\mp}\, \sigma\, n\right), a^{\dagger}_{\pm}\left(\mathbf{p}'\, s'_{\pm}\, \sigma'\, n'\right)\Big\} = \exp\left[2s\cdot\,(-i\not{p})\, s'_{\pm}\right]\delta^{3}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,\delta_{nn'}\delta_{\sigma\sigma'}\ , \tag{5.20}$$

- cuando son del tipo ($\pm$) y ($\pm$), respectivamente:

$$\Big[a_{\pm}\left(\mathbf{p}\, s_{\pm}\, \sigma\, n\right), a^{\dagger}_{\pm}\left(\mathbf{p}'\, s'_{\pm}\, \sigma'\, n'\right)\Big\} = \pm 2m\,\delta^{2}\left[(s'-s)_{\pm}\right]\delta^{3}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,\delta_{nn'}\delta_{\sigma\sigma'}\ , \tag{5.21}$$

(f) El apareamiento de un supercampo $\Phi_{\pm\ell}\,(x,\vartheta)$ en $\mathcal{H}_i\,(x,\vartheta)$ con el supercampo

- $\Phi_{\mp\ell}\,(x',\vartheta')$ en $\mathcal{H}_j\,(x',\vartheta')$:

$$\Delta^{\pm,\mp}_{\ell\ell'}\,(z,z') = \omega\,(x-x')\Big[\chi^{+}_{\pm\ell}\,(z)\,,\chi^{+\dagger}_{\mp\ell'}\,(z')\Big\}\,, \\ +(-)^{2j_n}\,\omega\,(x'-x)\Big[\chi^{-\dagger}_{\mp\ell'}\,(z')\,,\chi^{-}_{\pm\ell}\,(z)\Big\} \tag{5.22}$$

- $\Phi_{\pm\ell}\,(x',\vartheta')$ en $\mathcal{H}_j\,(x',\vartheta')$:

$$\Delta^{\pm,\pm}_{\ell\ell'}\,(z,z') = \omega\,(x-x')\Big[\chi^{+}_{\pm\ell}\,(z)\,,\chi^{+\dagger}_{\pm m}\,(z')\Big\}\,, \\ +(-)^{2j_n}\,\omega\,(x'-x)\Big[\chi^{-\dagger}_{\pm\ell'}\,(z')\,,\chi^{-}_{\pm\ell}\,(z)\Big\}\ , \tag{5.23}$$

donde $\omega\,(x)$ es la función paso, igual a $+1$ para $x^0 > 0$ y cero $x^0 < 0$. El símbolo j_n representa al superespín de la superpartícula en cuestión, $(-)^{2j_n}$ es positivo si los supercampos son bosónicos y negativo si son fermiónicos.

Estamos a casi nada de poder formular las reglas de súper Feynman, como veremos a continuación, lo que nos detiene es el hecho de que las cantidades (5.22) y (5.23) no son covariantes de Lorentz ni supersimétricas.

5.2. El superpropagador (no corregido)

Por inspección directa, vemos que los conmutadores con el superíndice + en las Ecs. (5.22) y (5.23) vienen dados por ($\varepsilon = +, -$):

$$\left[\chi^{+}_{\varepsilon\ell_1}(x_1, \vartheta_1), \chi^{+\dagger}_{\varepsilon\ell_2}(x_2, \vartheta_2)\right\} = \Delta_{\ell_1\ell_2}\left(x^{\varepsilon}_{12}\right) \ , \tag{5.24}$$

$$\left[\chi^{+}_{\varepsilon\ell_1}(x_1, \vartheta_1), \chi^{+\dagger}_{(-\varepsilon)\ell_2}(x_2, \vartheta_2)\right\} = \pm 2m_n\, \delta^2\left[(\vartheta_2 - \vartheta_1)_{\varepsilon}\right] \Delta_{\ell_1\ell_2}\left(x^{\varepsilon}_{12}\right) \ , \tag{5.25}$$

donde

$$\Delta_{\ell_1\ell_2}(x) \equiv (2\pi)^{-3} \int d^3\mathbf{p}\, \left(2p^0\right)^{-1} P_{\ell_1\ell_2}\left(\mathbf{p}, p^0\right) e^{ip\cdot x} \tag{5.26}$$

y

$$\left(x^{\pm}_{12}\right)^{\mu} = x^{\mu}_{1} - x^{\mu}_{2} + (\vartheta_2 - \vartheta_1)\cdot \gamma^{\mu}(\vartheta_{2\mp} + \vartheta_{1\pm}) = -\left(x^{\mp}_{21}\right)^{\mu} \ . \tag{5.27}$$

La función $P_{\ell_1\ell_2}$ viene dada por

$$P_{\ell_1\ell_2}\left(\mathbf{p}, p^0\right) = (2p^0) \sum_{\sigma} u_{\ell_1}(\mathbf{p}, \sigma)\, u^{*}_{\ell_2}(\mathbf{p}, \sigma, n) = (2p^0) \sum_{\sigma} v_{\ell_1}(\mathbf{p}, \sigma, n)\, v^{*}_{\ell_2}(\mathbf{p}, \sigma, n) \ . \tag{5.28}$$

con $p^0 = \sqrt{\mathbf{p} + m_n^2}$. Como demostrado en la sección 4.5, esta función:

- Es polinomial en $\mathbf{p}$ y p^0, por lo tanto puede ser escrita como

$$P_{\ell_1\ell_2}\left(\mathbf{p}, p^0\right) = P_{\ell_1\ell_2}(\mathbf{p}) + p^0\, Q_{\ell_1\ell_2}(\mathbf{p}) \ , \tag{5.29}$$

  donde $P_{\ell_1\ell_2}(\mathbf{p})$ y $Q_{\ell_1\ell_2}(\mathbf{p})$ son polinomios en el 3-vector $\mathbf{p}$.

- Posee la propiedad de reflexión

$$P_{\ell_1\ell_2}\left(-\mathbf{p},-p^0\right) = (-)^{2j_n} P_{\ell_1\ell_2}\left(\mathbf{p},p^0\right) \ , \tag{5.30}$$

con j_n representando el superespín de la superpartícula.

Los conmutadores con el superíndice $-$ en las Ecs. (5.22) y (5.23), pueden ser escritos como los conmutadores (5.24) y (5.24) (que tienen superíndice $+$) pero cambiando los subíndices $\ell_1 \longleftrightarrow \ell_2$:

$$\left[\chi^{-\dagger}_{\varepsilon_2\ell_2}\left(x_2,\vartheta_2\right), \chi^{-}_{\varepsilon_1\ell_1}\left(x_1,\vartheta_1\right)\right\} = \left[\chi^{+}_{\varepsilon_2\ell_1}\left(x_2,\vartheta_2\right), \chi^{+\dagger}_{\varepsilon_1\ell_2}\left(x_1,\vartheta_1\right)\right\} \ . \tag{5.31}$$

Con el fin de escribir (5.24) y (5.25) en una sola expresión, expandimos $\Delta_{\ell_1\ell_2}\left(x^{\pm}_{12}\right)$ alrededor de $x_1 - x_2$,

$$\left[\chi^{+}_{\varepsilon_1\ell_1}\left(x_1,\vartheta_1\right), \chi^{+\dagger}_{\varepsilon_2\ell_2}\left(x_2,\vartheta_2\right)\right\} = P^{\varepsilon_1\varepsilon_2}_{\ell_1,\ell_2}\left(-i\partial_1,\vartheta_1,\vartheta_2\right)\Delta_+\left(x_1-x_2\right) \ , \tag{5.32}$$

donde

$$P^{\pm\mp}_{\ell_1,\ell_2}\left(p,\vartheta_1,\vartheta_2\right) = P_{\ell_1,\ell_2}\left(p\right)\exp\left[i(\vartheta_2-\vartheta_1)\cdot \not{p}(\vartheta_{2\mp}+\vartheta_{1\pm})\right] \ , \tag{5.33}$$

$$P^{\pm\pm}_{\ell_1,\ell_2}\left(p,\vartheta_1,\vartheta_2\right) = \pm 2m\,\delta^2\left[(\vartheta_2 - \vartheta_1)_{\pm}\right] P_{\ell_1,\ell_2}\left(p\right) e^{i\vartheta_2\cdot\not{p}\vartheta_1} \ . \tag{5.34}$$

La función $\Delta_+(x)$ representa la restricción de la función $\Delta_{\ell_1\ell_2}(x)$ que aparece en la Ec. (5.26), para el caso en que $P_{\ell_1\ell_2} = 1$. De las Ecs. (5.30), (5.33) y (5.34), notamos que

$$P^{\varepsilon_1\varepsilon_2}_{\ell_1,\ell_2}\left(p,\vartheta_1,\vartheta_2\right) = (-)^{2j_n} P^{\varepsilon_2\varepsilon_1}_{\ell_1,\ell_2}\left(-p,\vartheta_2,\vartheta_1\right), \tag{5.35}$$

esto nos sirve para escribir a los *superpropagadores* (5.22) y (5.23) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}-i\Delta^{\varepsilon_1\varepsilon_2}_{\ell_1\ell_2}(x_1,\vartheta_1,x_2,\vartheta_2) = \;&\omega(x^0_{12})\,P^{\varepsilon_1\varepsilon_2}_{\ell_1\ell_2}(-i\partial_1,\vartheta_1,\vartheta_2)\,\Delta_+(x_1-x_2)\\ &+\omega(x^0_{21})P^{\varepsilon_1\varepsilon_2}_{\ell_1\ell_2}(-i\partial_1,\vartheta_1,\vartheta_2)\,\Delta_+(x_2-x_1)\;.\end{aligned} \tag{5.36}$$

La función $P^{\varepsilon_1\varepsilon_2}_{\ell_1\ell_2}(p,\vartheta_1,\vartheta_2)$ representa la generalización del Polinomio de Weinberg al caso del superespacio. Evidentemente, esta función también es polinomial en p y por lo tanto posee una expansión lineal en p^0. La acción de las derivadas (5.36) esta definida para momentos en la capa de masa. Ampliamos el dominio de definición del polinomio de Weinberg en el superespacio para valores de momento q^μ fuera de la capa de masa. Para ello, extendemos $P^{\varepsilon_1\varepsilon_2}_{\ell_1\ell_2}(p,\vartheta_1,\vartheta_2)$ linealmente en p^0 para valores q^0 arbitrarios:

$$P^{\varepsilon_1\varepsilon_2,L}_{\ell_1\ell_2}(q,\vartheta_1,\vartheta_2) \;\equiv\; P^{\varepsilon_1\varepsilon_2}_{\ell_1\ell_2}(\mathbf{q},\vartheta_1,\vartheta_2) \;+\; q^0\,Q^{\varepsilon_1\varepsilon_2}_{\ell_1\ell_2}(\mathbf{q},\vartheta_1,\vartheta_2)\;. \tag{5.37}$$

De esta manera, cuando q^μ se encuentra en la capa de masa, $P^{\varepsilon_1\varepsilon_2,L}_{\ell_1\ell_2}$ y $P^{\varepsilon_1\varepsilon_2}_{\ell_1\ell_2}$ coinciden. El operador

$$P^{\varepsilon_1\varepsilon_2,L}_{\ell_1\ell_2}\left(-i\tfrac{\partial}{\partial x},\vartheta_1,\vartheta_2\right) \;=\; P^{\varepsilon_1\varepsilon_2,L}_{\ell_1\ell_2}(-i\nabla,\vartheta_1,\vartheta_2) \;-\; i\,Q^{\varepsilon_1\varepsilon_2,L}_{\ell_1\ell_2}(-i\nabla,\vartheta_1,\vartheta_2)\,\frac{\partial}{\partial x^0}\;, \tag{5.38}$$

actúa sobre funciones arbitrarias. De la propiedad de la función paso

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\omega\left(x^0\right) \;=\; -\frac{\partial}{\partial x^0}\omega\left(-x^0\right) \;=\; \delta\left(x^0\right)\;, \tag{5.39}$$

podemos ver que los superpropagadores (5.36) adquieren la forma

$$\Delta^{\varepsilon_1\varepsilon_2}_{\ell_1\ell_2}(x_1,\vartheta_1,x_2,\vartheta_2) = \; P^{\varepsilon_1\varepsilon_2,L}_{\ell_1\ell_2}(-i\partial_1,\vartheta_1,\vartheta_2)\,\Delta_F(x_1-x_2)\;, \tag{5.40}$$

donde $\Delta_F(x)$ es el propagador de Feynman

$$-i\Delta_F(x) \;\equiv\; \omega(x)\Delta_+(x) \;+\; \omega(-x)\Delta_+(-x)\;. \tag{5.41}$$

Para llegar a la Ec. (5.40) usando la Ec. (5.37), hemos omitido el término

$$\delta\left(x^0_{12}\right) Q^{\varepsilon_1\varepsilon_2}_{\ell_1\ell_2}\left(-i\nabla_1,\vartheta_1,\vartheta_2\right)\left(\Delta_+(x_1-x_2)\,-\,\Delta_+(x_2-x_1)\right)\ , \tag{5.42}$$

ya que cuando $x^0 = 0$, la función $\Delta_+(x)$ es par y por lo tanto este término es cero. El propagador de Feynman tiene la siguiente representación integral en la variable q^μ:

$$\Delta_F(x)\;=\;(2\pi)^{-4}\int d^4q\frac{\exp\left[iq\cdot x\right]}{q^2\,+\,m^2\,-\,i\epsilon}\ , \tag{5.43}$$

con $\epsilon > 0$. Por lo tanto, el superpropagador (5.36) se escribe en el espacio de momentos como

$$\Delta^{\varepsilon_1\varepsilon_2}_{\ell_1\ell_2}\left(x_1,\vartheta_1,x_2,\vartheta_2\right) = \;(2\pi)^{-4}\int d^4q\,\frac{P^{\varepsilon_1\varepsilon_2 L}_{\ell_1\ell_2}\left(q,\vartheta_1,\vartheta_2\right)e^{iq\cdot(x_1-x_2)}}{q^2\,+\,m^2\,-\,i\epsilon}\ . \tag{5.44}$$

En toda esta discusión, hemos supuesto que las interacciones no incluyen supercampos $\mathcal{D}_{\pm\alpha}\Phi_{\pm\ell}$ y sus adjuntos. La extensión para estos casos es directa.

5.3. La supermatriz $\mathcal{S}$ covariante

En este punto debe de ser claro que la fuente de violación de Lorentz y de supersimetría proviene de los superpropagadores, porque los apareamientos (5.12)-(5.21) son explícitamente covariantes. Esperamos que un buen superpropagador, denotado por $\Delta^{\text{cov}}_{\ell_1,\ell_2}$, se comporte como una densidad covariante:

- Bajo una transformación de Lorentz inhomogénea (Λ, a):

$$\begin{aligned}&\Delta^{\text{cov}}_{\ell_1\ell_2}\left(\Lambda x_1\,+\,a,D(\Lambda)\vartheta_1,\Lambda x_2\,+\,a,D(\Lambda)\vartheta_2\right)\\&\qquad=\sum_{\ell_1'\ell_2'}S\left(\Lambda\right)_{\ell_1\ell_1'}\tilde{S}\left(\Lambda\right)^*_{\ell_2\ell_2'}\Delta^{(\text{cov})}_{\ell_1'\ell_2'}\left(x_1,\vartheta_1,x_2,\vartheta_2\right)\end{aligned} \tag{5.45}$$

- Bajo una transformación supersimétrica ξ:

$$\begin{aligned}
&\Delta^{\mathrm{cov}}_{\ell_1\ell_2}\left(x_{_1},\vartheta_{_1},x_{_2},\vartheta_{_2}\right)\\
&\quad = \Delta^{\mathrm{cov}}_{\ell_1\ell_2}\left(x_{_1}+\vartheta_{_1}\cdot\gamma^\mu\xi,\vartheta_{_1}+\xi,x_{_2}+\vartheta_{_2}\cdot\gamma^\mu\xi,\vartheta_{_2}+\xi\right)
\end{aligned} \tag{5.46}$$

La invariancia ante traslaciones, implica que este superpropagador tiene que ser función de $(x_1 - x_2)$. Al definir la transformada de Fourier

$$\Delta^{(\mathrm{cov})}_{\ell_1,\ell_2}\left(x_{_1},\vartheta_{_1},x_{_2},\vartheta_{_2}\right)= (2\pi)^{-4}\int d^4q\,\frac{Q_{\ell_1,\ell_2}\left(q,\vartheta_{_1},\vartheta_{_2}\right)e^{iq\cdot(x_1-x_2)}}{q^2+m^2-i\epsilon}\ , \tag{5.47}$$

se tiene para $Q_{\ell_1,\ell_2}\left(q,\vartheta_{_1},\vartheta_{_2}\right)$ las siguientes dos condiciones:

$$\begin{aligned}
&Q_{\ell_1\ell_2}\left(\Lambda q,D(\Lambda)\vartheta_{_1},D(\Lambda)\vartheta_{_2}\right)\\
&\qquad\qquad = \sum_{\ell_1'\ell_2'} S\left(\Lambda\right)_{\ell_1\ell_1'}\tilde{S}\left(\Lambda\right)^*_{\ell_2\ell_2'}Q_{\ell_1'\ell_2'}\left(q,\vartheta_{_1},\vartheta_{_2}\right)\\
&Q_{\ell_1,\ell_2}\left(q,\vartheta_{_1},\vartheta_{_2}\right)= Q_{\ell_1,\ell_2}\left(q,\vartheta_{_1}+\xi,\vartheta_{_2}+\xi\right)e^{i(\vartheta_1-\vartheta_2)\cdot\not{q}\xi}\ .
\end{aligned} \tag{5.48}$$

De esta última relación, se sigue que

$$Q_{\ell_1,\ell_2}\left(q,\vartheta_{_1},\vartheta_{_2}\right) = Q_{\ell_1,\ell_2}\left(q,\vartheta_{_2}-\vartheta_{_1}\right)e^{i\vartheta_2\cdot\not{q}\vartheta_1}\ . \tag{5.49}$$

Buscamos en los superpropagadores covariantes $\Delta^{(\mathrm{cov})}$, los superpropagadores $\left[\Delta^{(\mathrm{c})}\right]^{\epsilon_1\epsilon_2}$ que además satisfacen las condiciones quirales

$$\left(\epsilon\gamma_5\frac{\partial}{\partial\vartheta_1}-\not{\partial}_1\vartheta_1\right)_{-\varepsilon_1\alpha}\Delta^{(\mathrm{c})}_{\ell_1\ell_2}\left(z_{_1},z_{_2}\right)^{\varepsilon_1\varepsilon_2} = 0, \tag{5.50}$$

$$\left(\epsilon\gamma_5\frac{\partial}{\partial\vartheta_2}-\not{\partial}_2\vartheta_2\right)_{-\varepsilon_2\alpha}\Delta^{(\mathrm{c})}_{\ell_1\ell_2}\left(z_{_1},z_{_2}\right)^{\varepsilon_1\varepsilon_2} = 0\ , \tag{5.51}$$

donde $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = +, -$. Esto se traduce en las siguientes ecuaciones diferenciales para las transformadas bosónicas de Fourier $Q^{\varepsilon_1\varepsilon_2}_{\ell_1\ell_2}(q, \vartheta_2 - \vartheta_1)$ [Ec.(5.49)]:

$$\left(\epsilon\gamma_5 \frac{\partial}{\partial\vartheta_1} + i\not{q}\,(\vartheta_2 - \vartheta_1)\right)_{-\varepsilon_1} Q^{\varepsilon_1\varepsilon_2}_{\ell_1\ell_2}(q, \vartheta_2 - \vartheta_1) = 0, \tag{5.52}$$

$$\left(\epsilon\gamma_5 \frac{\partial}{\partial\vartheta_2} + i\not{q}\,(\vartheta_2 - \vartheta_1)\right)_{-\varepsilon_2} Q^{\varepsilon_1\varepsilon_2}_{\ell_1\ell_2}(q, \vartheta_2 - \vartheta_1) = 0\ . \tag{5.53}$$

Haciendo la identificación $\delta\vartheta_{21} = \vartheta_2 - \vartheta_1$, podemos ver que estas ecuaciones son de la forma

$$\left(\pm\epsilon\gamma_5 \frac{\partial}{\partial\vartheta} + i\not{q}\vartheta\right)_{-\varepsilon} f(q, \vartheta) = 0, \quad \varepsilon = +, -\ , \tag{5.54}$$

cuyas soluciones son

$$f(q, \vartheta) = g(q)\delta^2[\vartheta_\varepsilon] + h(q, \vartheta_\varepsilon)\exp\left[\mp i\vartheta \cdot (\not{q}\vartheta)_{-\varepsilon}\right]\ . \tag{5.55}$$

Cuando ε_1 es diferente a ε_2 en las Ecs. (5.52) y (5.53), las soluciones (5.58) nos dicen que

$$Q^{\pm\mp}_{\ell_1\ell_2}(q, \vartheta_2 - \vartheta_1) = Q^{\pm\mp}_{\ell_1\ell_2}(q)\, e^{i(\vartheta_2 - \vartheta_1)\cdot\not{q}(\vartheta_2 - \vartheta_1)_\mp}\ , \tag{5.56}$$

mientras que cuando ε_1 y ε_2 son iguales, obtenemos

$$Q^{\pm\pm}_{\ell_1\ell_2}(q, \vartheta_2 - \vartheta_1) = \pm 2m\, Q^{\pm\pm}_{\ell_1\ell_2}(q)\, \delta^2\left[(\vartheta_2 - \vartheta_1)_\pm\right]\ . \tag{5.57}$$

Las cantidades $Q^{\varepsilon_1\varepsilon_2}_{\ell_1\ell_2}(q)$ son densidades covariantes de Lorentz,

$$Q^{\varepsilon_1\varepsilon_2}_{\ell_1\ell_2}(\Lambda q) = \sum_{\ell_2\ell'_2} S(\Lambda)_{\ell_1\ell'_1}\, S(\Lambda)^*_{\ell_2\ell'_2}\, Q^{\varepsilon_1\varepsilon_2}_{\ell'_1\ell'_2}(q) \tag{5.58}$$

Con todo esto, los superpropagadores quirales (5.49) adquieren la forma

$$Q^{\pm\mp}_{\ell_1\ell_2}(q,\vartheta_1,\vartheta_2) = Q^{\pm\mp}_{\ell_1\ell_2}(q)\, e^{i(\vartheta_2-\vartheta_1)\cdot \not{q}(\vartheta_{1\pm}+\vartheta_{2\mp})} \ , \tag{5.59}$$

$$Q^{\pm\pm}_{\ell_1\ell_2}(q,\vartheta_1,\vartheta_2) = \pm 2m\, Q^{\pm\pm}_{\ell_1\ell_2}(q)\ \delta^2\left[(\vartheta_2 - \vartheta_1)_\pm\right] e^{i\vartheta_2\cdot\not{q}\vartheta_1} \ . \tag{5.60}$$

El punto medular de esta discusión es que $P^{\varepsilon_1\varepsilon_2,L}_{\ell_1\ell_2}(q,\vartheta_1,\vartheta_2)$ solo satisface las condiciones de covariancia bajo transformaciones de Lorentz y supersimétricas, cuando q^μ esta restringida a la capa de masa. Al ser $P^{\varepsilon_1\varepsilon_2,L}_{\ell_1\ell_2}(q,\vartheta_1,\vartheta_2)$ una extension lineal en la variable p^0, no esperamos que este sea covariante al menos que $P^{\varepsilon_1\varepsilon_2,L}_{\ell_1\ell_2}(q,\vartheta_1,\vartheta_2)$ dependa a lo más linealmente en $\mathbf{p}_i$. Esto definitivamente en general no es el caso. Dicho de otro modo, $P^{\varepsilon_1\varepsilon_2,L}_{\ell_1\ell_2}(p,\vartheta_1,\vartheta_2)$ solo es de la forma (5.59) y (5.60) cuando $p^2 = -m^2$ [ver las Ecs. (5.33) y(5.34)].

Más adelante, demostraremos que siempre existen funciones $Q^{\varepsilon_1\varepsilon_2}_{\ell_1\ell_2}(q)$ que satisfacen las Ecs.(5.58) y que en la capa de masa coinciden con el polinomio de Weinberg [Ec. (5.28)]:

$$Q^{\varepsilon_1\varepsilon_2}_{\ell_1\ell_2}(p) \ = \ P_{\ell_1\ell_2}(p)\,, \ \ \text{para} \ \ p^2 = -m^2 \ . \tag{5.61}$$

Por lo pronto, supongamos que este el caso. La diferencia entre dos funciones en la variable q^μ que coinciden en la capa de masa, debe de ser otra función multiplicada por el factor (q^2+m^2), entonces podemos escribir $P^{\varepsilon_1\varepsilon_2,L}_{\ell_1\ell_2}(q,\vartheta_1,\vartheta_2)$ en términos de $Q^{\varepsilon_1\varepsilon_2}_{\ell_1\ell_2}(q,\vartheta_1,\vartheta_2)$,

$$P^{\varepsilon_1\varepsilon_2,L}_{\ell_1\ell_2}(q,\vartheta_1,\vartheta_2) = Q^{\varepsilon_1\varepsilon_2}_{\ell_1\ell_2}(q,\vartheta_1,\vartheta_2) + \left(q^2+m^2\right) P^{\varepsilon_1\varepsilon_2(\mathrm{no})}_{\ell_1\ell_2}(q,\vartheta_1,\vartheta_2) \ . \tag{5.62}$$

Puesto que $P^{\varepsilon_1\varepsilon_2,L}_{\ell_1\ell_2}$ no es covariante, el polinomio $P^{\varepsilon_1\varepsilon_2(\mathrm{no})}_{\ell_1\ell_2}$ tampoco. Evidentemente, esta descomposición no es única, porque la redefinición

$$Q^{\varepsilon_1\varepsilon_2}_{\ell_1\ell_2}(q,\vartheta_1,\vartheta_2) \longrightarrow Q^{\varepsilon_1\varepsilon_2}_{\ell_1\ell_2}(q,\vartheta_1,\vartheta_2) + \left(q^2+m^2\right) F^{\varepsilon_1\varepsilon_2}_{\ell_1\ell_2}(q,\vartheta_1,\vartheta_2) \ , \tag{5.63}$$

$$P^{\varepsilon_1\varepsilon_2(\mathrm{no})}_{\ell_1\ell_2}(q,\vartheta_1,\vartheta_2) \longrightarrow P^{\varepsilon_1\varepsilon_2(\mathrm{no})}_{\ell_1\ell_2}(q,\vartheta_1,\vartheta_2) - F^{\varepsilon_1\varepsilon_2}_{\ell_1\ell_2}(q,\vartheta_1,\vartheta_2) \ , \tag{5.64}$$

no altera al polinomio $P^{\varepsilon_1\varepsilon_2 L}_{\ell_1\ell_2}$ y la nueva función $Q^{\varepsilon_1\varepsilon_2}_{\ell_1\ell_2}$ retiene sus propiedades, provisto de que $F^{\varepsilon_1\varepsilon_2}_{\ell_1\ell_2}(q)$ también sea una densidad tensorial de Lorentz.

Redefinición de la supermatriz $\mathcal{S}$. Entendemos por una supermatriz $\mathcal{S}$ covariante como aquella cuya forma de las interacciones en el potencial V causan que efectivamente

$$P^{\varepsilon_1\varepsilon_2(\mathrm{no})}_{\ell_1\ell_2}(q,\vartheta_1,\vartheta_2) = 0 \ , \tag{5.65}$$

de tal manera que la forma general de los superpropagadores covariantes viene dada por

$$\Delta^{\pm\mp}_{\ell_1\ell_2}(x_1,\vartheta_1,x_2,\vartheta_2) = P^{\pm}_{\ell_1\ell_2}(-i\partial_1)\,\Delta_F\left(x^{\pm}_{12}\right) \tag{5.66}$$

y

$$\begin{aligned}\Delta^{\pm\pm}_{\ell_1\ell_2}(x_1,\vartheta_1,x_2,\vartheta_2) = \delta^2\left[(\vartheta_1 - \vartheta_2)_{\pm}\right]\big\{&(\pm 2m)\,P^{\pm}_{\ell_1\ell_2}(-i\partial_1)\,\Delta_F\left(x^{\pm}_{12}\right)\\ &+ F^{\pm}_{\ell_1\ell_2}(-i\partial_1)\,\delta^4\left(x^{\pm}_{12}\right)\big\} \ .\end{aligned} \tag{5.67}$$

Aquí, hemos definido

$$P^{\pm}_{\ell_1\ell_2}(q) \equiv Q^{\pm\mp}_{\ell_1\ell_2}(q), \quad \left(q^2+m_n^2\right) F^{\pm}_{\ell_1\ell_2}(q) \equiv Q^{\pm\pm}_{\ell_1\ell_2}(q) - Q^{\pm\mp}_{\ell_1\ell_2}(q) \ . \tag{5.68}$$

También hemos usado

$$\left(\Box - m_n^2\right) \Delta_F (x) = -\delta^4 (x) \ . \tag{5.69}$$

Que los superpropagadores $P_{\ell_1 \ell_2}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2, L} (q, \vartheta_1, \vartheta_2)$ no sean completamente covariantes de Lorentz y supersimetría, no es de ninguna manera reflejo del método que hemos usado para usarlo. En vez de haber definido una extension lineal $P_{\ell_1 \ell_2}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2, L}$, podríamos a ver definido otro tipo de extension (quizás cuadrática) para llegar al mismo resultado. Los términos no covariantes en los superpropagadores (5.40), son de la forma

$$P_{\ell_1 \ell_2}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 (\mathrm{no})} (-i\partial_1, \vartheta_1, \vartheta_2) \, \delta^4 (x_1 - x_2) \ . \tag{5.70}$$

La contribución no covariante surge cuando los puntos x_1 y x_2 se encuentran, esto es, el rompimiento de la simetría de Lorentz y supersimétrica es debido a la naturaleza no conmutativo de los operadores de supercampos, cuyos conmutadores se vuelven *muy singulares* en el ápice del cono de luz[16, 31].

Nuestra hipótesis de trabajo, ha sido la de localidad en el tiempo. En particular, la existencia del sistema de la interacción a traves del operador local temporal $\mathsf{V}(t)$. Debido a la función $\delta^4 (x_1 - x_2)$ en la parte no covariante del superpropagador [Ec. (5.70)], esta contribución no solo es local en el tiempo sino también en el espaciotiempo (bosónico). Entonces puede ser cancelada por contra-términos locales pero no covariantes. Bosquejamos a continuación como podemos llegar a esta conclusión. Supongamos que integramos todos los grados de libertad fermiónicos en la serie de Dyson, entonces obtenemos algo de la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\xi_1', \xi_2', \cdots \xi_1, \xi_2, \cdots} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^N}{N!} \int d^4x_1 d^4x_2 \cdots d^4x_N \Big(\Psi_0, \cdots a_{\xi_2'} a_{\xi_1'} \\ \times T \left\{ \mathcal{H}(x_1) \cdots \mathcal{H}(x_N) \right\} a_{\xi_2}^\dagger a_{\xi_1}^\dagger \cdots \Psi_0 \Big) \ , \end{aligned} \tag{5.71}$$

donde $\mathcal{H}(x)$ representa la densidad Hamiltoniana de interacción que resulta de integrar las variables fermiónicas. Para un N dado, nos fijamos en el término no covariante que surge de aparear un supercampo en $\mathcal{H}_i$ con otro $\mathcal{H}_j$, este es de la forma (sin escribir de manera explícita todos los estados finales):

$$\frac{g_j g_i(-i)^N}{N!}\int d^4x_1\cdots d^4x_N\,\Delta_{\ell,m}\left(x_M,x_{M'}\right)\,T\left\{\cdots\,\mathcal{H}_i^{\ell}\left(x_M\right)\mathcal{H}_j^{m}\left(x_{M'}\right)\cdots\right\}\ , \tag{5.72}$$

la integral y su argumento están definidos en el volumen del espacio $(x_1,\cdots,x_N)$. Los índices M y M' están fijos, y pueden valer de uno hasta N. La cantidad $\Delta^{(n)}_{\ell,m}\left(x_M,x_{M'}\right)$ es un número-c, cuya forma específica dependerá de la interacción en cuestión, pero la cual tenemos garantía es de la forma $P_{\ell,m}\left(-i\partial_M\right)\delta^4\left(x_M-x_{M'}\right)$. Debido a esta última función delta, al hacer la integración por partes en la variable $x_{M'}$, la ecuación (5.72) se reescribe como una función en el subespacio de configuración $(x_1,\cdots,x_{N-1})$:

$$\frac{g_j g_i(-i)^N}{N!}\int d^4x_1\cdots d^4x_{N-1}P_{\ell,m}\left(i\partial_M\right)T\left\{\cdots\mathcal{H}_i^{\ell}\left(x_M\right)\mathcal{H}_j^{m}\left(x_M\right)\cdots\right\} \tag{5.73}$$

donde ahora M vale hasta $N-1$. Integramos en las coordenadas, obteniendo una función de la forma

$$\frac{g_j g_i(-i)^N}{N!}\int dt_1\cdots dt_{N-1}\,C_{\ell,m}\left(\frac{d}{dt_M}\right)T\left\{\mathsf{V}(t_1)\cdots\mathsf{V}_{ij}^{\ell,m}\left(t_M\right)\cdots\mathsf{V}(t_{N-1})\right\} \tag{5.74}$$

La formas explicitas de $C_{\ell,m}\left(\frac{d}{dt_M}\right)$ y $\mathsf{V}_{ij}^{\ell,m}$ no son fundamentales para nuestra discusión y estas dependen enteramente del tipo de interacción. Cada derivada actuando en las funciones paso del operador temporal nos dará más funciones delta que reducirán la dimensión de la integral aún más y cada pareja M y M' nos daran una contribución no covariante de esto tipo, por lo que la contribución total no covariante al diagrama en cuestión, será de la forma:

$$\frac{g_j g_i(-i)^N}{N!}\sum_{n=1}^{N-1}\int dt_1\cdots dt_n T\left\{\mathsf{V}\left(t_1\right)\ldots\mathsf{V}\left(t_{n-1}\right)\,\mathsf{A}_{n,N}^{ij}\left(t_n\right)\right\} \tag{5.75}$$

Entonces, orden a orden en teoría de perturbaciones, podemos cancelar las contribuciones no covariantes de las interacciones, redefiniendo nuestro potencial de interacción $\mathsf{V}(t)$ como

$$\mathsf{V}(t) \;\rightarrow\; \mathsf{V}(t) \,+\, \mathsf{V}^{\mathrm{n.c.}}(t) \tag{5.76}$$

donde

$$\mathsf{V}^{\mathrm{n.c.}}(t) \;=\; \sum_{N}^{\infty}\sum_{n}^{N} g_i g_j \left(\mathsf{A}^{ij}_{n,N}\,(t) \,+\, g_k \left(\mathsf{A}^{ijk}_{n,N}\,(t) \,+\, \cdots\right)\right) \;. \tag{5.77}$$

Hasta el día de hoy, nadie a realizado una investigación sistemática de la forma de los contra-términos no covariantes. Nos hemos de conformar con haber demostrado que tal procedimiento siempre es posible y suponer tácitamente que tal corrección ha sido hecha.

El polinomio de Weinberg fuera de la capa de masa. En la sección 4.4 hemos dado una expresión explícita para el polinomio general $P_{\ell_1\ell_1}\,(\mathbf{p})$ [Ec. (5.28)], en términos de los polinomios

$$\pi^{(n)}_{\lambda\,\lambda'}\,(\mathbf{p}) \;=\; t^{(n)\,\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2j}}_{\lambda\lambda'}\, p_{\mu_1}p_{\mu_2}\cdots p_{\mu_{2j}} \;, \tag{5.78}$$

donde $t^{(n)\,\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2j}}_{\lambda\lambda'}$ son tensores totalmente simétricos y sin traza en los índices de Lorentz y donde los índices $\lambda_1(n), \lambda_2(n)$ corren sobre los índices de la representación del grupo de rotación n, esto es, $\lambda_1(n), \lambda_2(n) \;=\; -2n, -2n+1, \cdots, 2n-1, 2n$. La fórmula explícita del polinomio general en términos (5.78) es:

$$P_{\ell_1\ell_1}\,(\mathbf{p}) = \sum_{n}\sum_{\lambda_1\lambda_2} F^{\lambda_1\,\lambda_2}_{n,\ell_1\ell_1}\;\pi^{(n)}_{\lambda_1\lambda_2}\,(\mathbf{p}) \;\;, \tag{5.79}$$

donde los coeficientes $F^{\lambda_1\,\lambda_2}_{n,\ell_1\ell_1}$ vienen dados por la Ec. (4.170).

Es evidente que la función (5.78) sigue siendo covariante cuando extendemos su dominio de validez para momentos q fuera de la capa de masa y por lo tanto (5.79) también es covariante fuera de la capa de masa. Entonces, hemos construido explícitamente funciones en el espacio de momentos que son completamente covariantes de Lorentz y que satisfacen la condición (5.61).

5.4. Formulación de las Reglas

Habiendo corregido el superpropagador, estamos en una posición de formular las reglas de súper Feynman. Notamos que cada vértice es identificado por el tipo de supercampo (+) o (−), el índice de Lorentz ℓ, el punto (x, ϑ) en el superespacio y posiblemente el índice α si tenemos una superderivada de campo.

Para interacciones polinomiales de la forma

$$\mathcal{H}\,(x,\vartheta) \;=\; \sum_i g_i\,\mathcal{H}_i\,(x,\vartheta)\;\; , \tag{5.80}$$

las reglas de súper Feynman nos dicen que:

(a) Para cada vértice incluir un factor $-ig_\ell$. Este factor puede depender de $\delta^2(\vartheta_\pm)$ si $\mathcal{H}_i\,(x,\vartheta)$ es quiral-(±).

(b) Para cada línea interna que va desde un vértice que tiene las etiquetas (±), ℓ_1 y (x_1, ϑ_1), a otro vértice con etiquetas (∓), ℓ_2 y (x_2, ϑ_2), incluir el superpropagador

$$(-i)\,P_{\ell_1,\ell_2}(-i\partial_1)\,\Delta_F(x_{12}^{\pm})\;. \tag{5.81}$$

(c) Para cada línea interna que va desde un vértice que tiene las etiquetas (±), ℓ_1 y (x_1, ϑ_1), a otro vértice con etiquetas (±), ℓ_2 y (x_2, ϑ_2), incluir el superpropagador

$$\pm 2(-i)\,\delta^2\,(\vartheta_1\,-\,\vartheta_2)_\pm\,\left[m\,P_{\ell_1,\ell_2}\,(-i\partial_1)\,\Delta_F(x_{12}^{\pm})\,+\,Q_{\ell_1,\ell_2}\,(-i\partial_1)\,\delta^4(x_{12}^{\pm})\right]\;. \tag{5.82}$$

(d) Para cada línea externa correspondiente a un superpartícula de superespín j, proyección z del superespín y supermomento (p, s), incluir:

- Para una (∓)-spartícula creada en el vértice (±), ℓ_1 y (x_1, ϑ_1):

$$(2\pi)^{-3/2}e^{-ix\cdot p}\,e^{(\vartheta-2s)\cdot\,(+i\not{p})\,\vartheta_\pm}u_\ell^*(\mathbf{p},\sigma)\;. \tag{5.83}$$

- Para una $(\pm)$-spartícula creada en el vértice $(\pm)$, ℓ_1 y (x_1, ϑ_1):

$$\pm 2m(2\pi)^{-3/2} e^{-ix_\pm \cdot p}\, \delta^2\left[(\vartheta - s)_\pm\right] u_\ell^*(\mathbf{p}, \sigma)\ . \tag{5.84}$$

- Para una $(\mp)$-spartícula destruida en el vértice $(\pm)$, ℓ_1 y (x_1, ϑ_1) :

$$(2\pi)^{-3/2} e^{+ix\cdot p}\, e^{-[\vartheta - 2s]\cdot(+i\not{p})\,\vartheta_\pm} u_\ell(\mathbf{p}, \sigma)\ . \tag{5.85}$$

- Para una $(\pm)$-spartícula destruida en el vértice $(\pm)$, ℓ_1 y (x_1, ϑ_1):

$$\pm 2m(2\pi)^{-3/2} e^{i\,x_\pm \cdot p}\, \delta^2\left[(s - \vartheta)_\pm\right] u_\ell(\mathbf{p}, \sigma)\ . \tag{5.86}$$

(e) Para cada línea externa correspondiente a un antispartícula de superespín j, proyección z del superespín y supermomento (p, s), incluir:

- Para una $(\mp)$-anti spartícula creada en el vértice $(\pm)$, ℓ_1 y (x_1, ϑ_1):

$$(-)^{\mathcal{B}}(2\pi)^{-3/2} e^{-ix\cdot p}\, e^{+(\vartheta - 2s)^{\mathsf{T}}\epsilon\gamma_5\,(+i\not{p})\,\vartheta_\pm}\ v_\ell(\mathbf{p}, \sigma) \tag{5.87}$$

- Para una $(\pm)$-anti spartícula creada en el vértice $(\pm)$, ℓ_1 y (x_1, ϑ_1):

$$\pm 2m(-)^{\mathcal{B}}(2\pi)^{-3/2} e^{-ix_\pm \cdot p}\, \delta^2\left[(\vartheta - s)_\pm\right]\ v_\ell(\mathbf{p}, \sigma)\ . \tag{5.88}$$

- Para una $(\mp)$-anti spartícula destruida en el vértice $(\pm)$, ℓ_1 y (x_1, ϑ_1) :

$$(-)^{\mathcal{B}}(2\pi)^{-3/2} e^{+ix\cdot p}\, e^{-(\vartheta - 2s)^{\mathsf{T}}\epsilon\gamma_5\,(+i\not{p})\,\vartheta_\pm}\ v_\ell^*(\mathbf{p}, \sigma)\ . \tag{5.89}$$

- Para una $(\pm)$-anti spartícula destruida en el vértice $(\pm)$, ℓ_1 y (x_1, ϑ_1):

$$\pm 2m(-)^{\mathcal{B}}(2\pi)^{-3/2} e^{+ix_\pm \cdot p}\, \delta^2\left[(s - \vartheta)_\pm\right]\ v_\ell^*(\mathbf{p}, \sigma)\ . \tag{5.90}$$

(f) Integra todos los índices de superespaciotiempo que provienen de los vértices (x, ϑ), etc., y suma todos los índices discretos n, n', etc. (que provienen de los productos tensoriales de Lorentz de los supercampos en $\mathcal{H}_\ell$).

(g) Suminstra los signos menos que aparecen en teorías con supercampos fermiónicos.

Superpotenciales. En el inciso (a) de las reglas, hemos incluido interacciones locales $\delta^2(\vartheta_\pm)$, para cuando alguno de los Hamiltonianos $\mathcal{H}_i\,(x, \vartheta)$ son quirales-$(\pm)$,

respectivamente. A continuación justificamos porque esto es válido.
Hemos visto que nuestros ingredientes irreducibles son supercampos $\Phi_{\pm\ell}$ que satisfacen la condición de quiralidad $\mathcal{D}_{\mp}\Phi_{\pm\ell}$. Interacciones $\mathcal{W}_{\pm}(x,\vartheta)$ formadas por supercampos de la misma quiralidad también serán quirales:

$$\mathcal{D}_{\mp\alpha}\,\mathcal{W}_{\pm}(x,\vartheta) = 0 \ , \tag{5.91}$$

A este tipo de interacciones se les conoce como *superpotenciales*. Estos operadores son funciones de los argumentos $(x_{\pm},\vartheta_{\mp})$, donde $x^{\mu}_{\pm} \ = \ x^{\mu} \ - \ \vartheta \cdot \gamma^{\mu}\vartheta_{\pm}$, esto es

$$\mathcal{W}_{\pm}(x,\vartheta) \ = \ \mathcal{W}_{\pm}(x_{\pm},\vartheta_{\pm}) \ . \tag{5.92}$$

Consideremos la siguiente interacción de la forma

$$\int d^4x d^4\vartheta \ (a \ + \ b^{\alpha}\vartheta_{\alpha})\,\mathcal{W}_{\pm}(x_{\pm},\vartheta_{\pm}), \quad a, b^{\alpha} \ = \ \text{const.} \tag{5.93}$$

Ya que el elemento de volumen d^4x es invariante bajo traslaciones, esta integral puede ser evaluada en $(x,\vartheta_{\pm})$. En estas nueva región de integración, vemos que el integrando es a lo más lineal en $\vartheta_{\pm\alpha}$ y por lo tanto la integral vale cero. Las interacciones con $\vartheta_{\pm}$ cuadrático pueden ser escritas de manera genérica como

$$\delta^2(\vartheta_{\pm})\mathcal{W}_{\pm}(x,\vartheta) \ , \tag{5.94}$$

estas no son cero bajo el signo de integral:

$$\int d^4x d^4\vartheta\delta^2(\vartheta_{\pm})\mathcal{W}_{\pm}(x,\vartheta) \ = \ \int d^4x d^2\vartheta_{\pm}\,\mathcal{W}_{\pm}(x,\vartheta_{\pm}) \ , \tag{5.95}$$

Aunque el “acoplamiento local ” $\delta^2(\vartheta_{\pm})$ es invariante de Lorentz, no es invariante supersimétrico. Las transformacion supersimétrica parametrizada por ζ es inducida por operadores unitarias actuando sobre los operadores de supercampo, por lo tanto, bajo el signo de integral, esta transformacion nos da el cambio

$$\int d^4x d^4\vartheta\delta^2(\vartheta_{\pm})\mathcal{W}_{\pm}(x,\vartheta) \to \int d^4x d^4\vartheta\delta^2\left[(\vartheta-\zeta)_{\pm}\right]\mathcal{W}_{\pm}(x,\vartheta) \ . \tag{5.96}$$

El término de la derecha en la última ecuación se puede escribir como

$$\begin{aligned} &\int d^4x\, d^4\vartheta \delta^2 \left[(\vartheta - \zeta)_\pm\right] \mathcal{W}_\pm(x, \vartheta) \\ = &\int d^4x\, d^4\vartheta \left\{\delta^2(\vartheta_\pm) \,+\, \delta^2(\zeta_\pm) \,+\, \zeta^\intercal \epsilon \vartheta_\pm\right\} \mathcal{W}_\pm(x, \vartheta)\ . \end{aligned} \tag{5.97}$$

Hemos visto que el segundo y el tercer término son cero. Entonces, las interacciones (5.94) nos dan un potencial de interacción covariante supersimétrico.

Capítulo 6

Las simetrías P, T, C y $\mathcal{R}$

En este capítulo, desarrollamos todo lo referente a las simetrías de paridad P, inversión temporal T, conjugación de carga C y simetrías $\mathcal{R}$. Empezamos primero escribiendo la acción de estas simetrías en los estados de partícula, para después generalizarlos para el caso de los superestados, dando expresiones explícitas para las correspondientes transformaciones de los estados componente. Después escribimos las fórmulas generales para las transformaciones de los supercampos quirales bajo este conjunto de simetrías. Damos la demostración perturbativa del teorema CPT en el superespacio. En el camino, vemos en la necesidad de definir por primera vez en la literatura, la acción de operadores antiunitarios sobre los supernúmeros.

6.1. Superestados simétricos

La existencia de las simetrías discretas de paridad y de inversión temporal supone que existen dos elementos $\Lambda = \mathcal{P}$ y $\Lambda = \mathcal{T}$ en el grupo general de transformaciones de Lorentz y supersimétricas, $T(\Lambda, a, \zeta)$. Introduciendo los operadores P, T en superespacio de Hilbert mediante la definición

$$\mathsf{P} \equiv \mathsf{U}(\mathcal{P}, 0)\,, \quad \mathsf{T} \equiv \mathsf{U}(\mathcal{T}, 0)\ , \tag{6.1}$$

se sigue de la regla de composición del grupo de Lorentz que

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\,\mathsf{U}\,(\Lambda,a)\,\mathsf{P}^{-1} &= \mathsf{U}\left(\mathcal{P}\Lambda\mathcal{P}^{-1},\mathcal{P}a\right) \ , \\ \mathsf{T}\,\mathsf{U}\,(\Lambda,a)\,\mathsf{T}^{-1} &= \mathsf{U}\left(\mathcal{T}\Lambda\mathcal{T}^{-1},\mathcal{T}a\right) \ . \end{aligned} \tag{6.2}$$

Puesto que las transformaciones de paridad e inversión temporal no son continuas, pueden ser unitarias o antiunitarias. Necesitamos primero extender la noción de antiunitariedad para los supernúmeros. Si A es un operador antiunitario y c un número complejo ordinario entonces

$$c\mathsf{A} = \mathsf{A}c^* \ , \tag{6.3}$$

esta es la definición usual de antiunitariedad en el espacio. La cual mantenemos para el caso bosónico en el superespacio. Entonces para dos números v y v' fermiónicos se cumple que $vv'\mathsf{A} = \mathcal{A}(vv')^*$, esto último porque vv' es bosónico. Es inconsistente extender la definición (6.3) para el caso de los números fermiónicos, ya que tendríamos que $-\mathsf{A}(vv')^* = \mathsf{A}(vv')^*$. Entonces, nos vemos obligados a definir

$$v\mathsf{A} \equiv i\mathsf{A}v^* \ , \tag{6.4}$$

con esto, la composición de dos números fermiónicos bajo cualquier operador antiunitario se vuelve consistente.

Paridad. Analizamos primero el resultado de aplicar la operación de paridad sobre estados $\Psi_{p,\sigma}$ de una misma especie. Ya que

$$\mathsf{U}\,(I,a)\ \mathsf{P} = \mathsf{P}\,\mathsf{U}\,(I,\mathcal{P}a) \ , \tag{6.5}$$

$$\mathsf{U}\,(I,a)\,\mathsf{P}\Psi_{p,\sigma} = \mathsf{P}\,e^{i\mathcal{P}p\cdot a}\Psi_{p,\sigma} \ . \tag{6.6}$$

Si P es antiunitario, entonces tenemos un estado con momento $-\mathcal{P}p$, el cual tiene energía negativa y por tanto inadmisible, de aqui que *el operador de paridad es unitario*. Escribimos el estado de momento arbitrario en términos del estado en el reposo como

$$\Psi_{p,\sigma} \;=\; N(p)\mathsf{U}(L(p))\Psi_{k,\sigma} \; . \tag{6.7}$$

Ya que $\mathsf{U}\,(I,a)\,\mathsf{P}\Psi^{\pm}_{k,0,\sigma} \;=\; e^{ik\cdot a}\mathsf{P}\Psi^{\pm}_{k,0,\sigma'}$ y puesto que no queremos extender el espectro de partículas, a lo más el operador P puede cambiar el espín de la partícula:

$$\mathsf{P}\Psi^{\pm}_{k,0,\sigma} \;=\; \sum P_{\sigma'\sigma}\Psi^{\pm}_{k,0,\sigma'} \; . \tag{6.8}$$

Restringiendo las transformaciones de Lorentz a matrices de rotación $\mathcal{R}$, se tiene que

$$\mathsf{U}\,(\mathcal{R})\,\Psi_{k,\sigma} \;=\; D^{(j)}_{\sigma'\sigma}\,(\mathcal{R})\,\Psi^{\pm}_{k\sigma'} \; , \tag{6.9}$$

donde $D^{(j)}_{\sigma'\sigma}$ son las matrices de espín j. Puesto que $\mathsf{U}\,(\mathcal{R})\,\mathsf{P} \;=\; \mathsf{P}\,\mathsf{U}\,(\mathcal{R})$, la acción del grupo de rotación sobre el estado formado por el operador de paridad resulta en la siguiente relación entre las representaciones de las matrices de rotación y paridad:

$$D^{(j)}_{\sigma\sigma'}\,(\mathcal{R})\,P_{\sigma'\tilde{\sigma}} \;=\; P_{\sigma\sigma'}D^{(j)}_{\sigma'\tilde{\sigma}}\,(\mathcal{R}) \; . \tag{6.10}$$

Donde hemos usado el hecho de que los estados $\Psi_{k,\sigma'}$ son linealmente independientes. La representación $D^{(j)}_{\sigma\sigma'}\,(\mathcal{R})$ es irreducible, por lo tanto, por el lema de Schur, $P_{\sigma\tilde{\sigma}} \;=\; \eta\delta_{\sigma\tilde{\sigma}}$, donde η es una fase conocida como *la paridad intrínseca*. Se sigue que el estado $\Psi_{k,\sigma}$ bajo la acción de P transforma como

$$\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma} \;=\; \eta\,\Psi_{k,\sigma} \; . \tag{6.11}$$

Puesto que $\mathcal{P}p \;=\; L(\mathcal{P}p)\kappa \;=\; \mathcal{P}L(p)\mathcal{P}^{-1}\kappa$, las matrices $L(\mathcal{P}p)$ y $\mathcal{P}L(p)\mathcal{P}^{-1}$ pueden diferir a lo más por una rotación $W_{\mathcal{R}}(p)$,

$$\mathcal{P}L(p)\mathcal{P}^{-1} \;=\; L\,(\mathcal{P}p)\,W_{\mathcal{R}}(p) \; . \tag{6.12}$$

En la parametrización que hemos escogido [Ec. (2.155)], $W_{\mathcal{R}}(p) \;=\; I$. Con esto, tenemos que el estado $\Psi^{\pm}_{p,0,\sigma}$ de momento arbitrario transforma como

$$\mathsf{P}\Psi_{p,\sigma} \;=\; \eta\,\Psi_{\mathcal{P}p,\sigma} \; . \tag{6.13}$$

Inversión temporal. De igual forma, consideramos una especie de partícula. Puesto que

$$\mathsf{U}(a)\mathsf{T}\Psi_{p,\sigma} = \mathsf{T}e^{i(\mathcal{T}p)\cdot a}\,\Psi_{p,\sigma} \ , \tag{6.14}$$

se sigue que *el operador de inversión temporal es antiunitario*, de otra forma tendríamos un estado H con energía negativa. En el reposo

$$\mathsf{T}\Psi^{\pm}_{k,0,\sigma} = \sum T_{\sigma'\sigma}\Psi^{\pm}_{k,0,\sigma'} \ , \tag{6.15}$$

pero ya que $\mathsf{U}\,(\mathcal{R})\,\mathsf{T} = \mathsf{T}\,\mathsf{U}\,(\mathcal{R})$, se sigue que

$$D^{(j)}_{\sigma\sigma'}\,(\mathcal{R})\,T_{\sigma'\tilde{\sigma}} = T_{\sigma\sigma'}D^{(j)*}_{\sigma'\tilde{\sigma}}\,(\mathcal{R}) \ . \tag{6.16}$$

Notemos el signo de conjugación debido a que T es antiunitario. La representación $D^{(j)*}_{\sigma'\tilde{\sigma}}$ es equivalente a $D^{(j)}_{\sigma'\tilde{\sigma}}$, esto es, existe una matriz C tal que

$$U^{(j)*}_{\sigma\sigma'} = \left[C\,U^{(j)}\,C^{-1}\right]_{\sigma\sigma'} \ , \tag{6.17}$$

de hecho, esta matriz viene dada por [15]

$$C_{\sigma\sigma'} = (-)^{j+\sigma}\delta_{\sigma',-\sigma} \ . \tag{6.18}$$

Aquí el lema de Schur aplica a la matriz $[TC]_{\sigma\tilde{\sigma}}$, esto es, $[TC]_{\sigma\tilde{\sigma}} = \xi\delta_{\sigma\tilde{\sigma}}$, o bien

$$T_{\sigma\tilde{\sigma}} = \xi\,(-)^{j-\tilde{\sigma}}\,\delta_{\sigma\tilde{\sigma}} \ . \tag{6.19}$$

Con esto, obtenemos la acción de la inversión temporal sobre los estados en el reposo,

$$\mathsf{T}\Psi_{k,\sigma} = \xi\,(-)^{j-\sigma}\;\Psi_{k,-\sigma} \ . \tag{6.20}$$

Puesto que $\mathcal{T}L(p)\mathcal{T}^{-1} = \mathcal{P}L(p)\mathcal{P}^{-1}$, la acción del operador de inversión temporal sobre el estado de momento arbitrario es

$$\mathsf{T}\Psi_{p,\sigma} = \xi\,(-)^{j-\sigma}\;\Psi_{\mathcal{P}p,-\sigma} \ . \tag{6.21}$$

Volviendo a supersimetría, puesto que supermultiplete masivo posee dos estados degenerados, la opción más general posible es

$$\mathsf{P}\Psi^{(a)\pm}_{p,\sigma} = \sum_b P^a_{\ b}\,\Psi^{(b)\pm}_{\mathcal{P}p,\sigma}\ , \quad \mathsf{T}\Psi^{(a)}_{p,\sigma} = \sum_b T^a_{\ b}\,(-)^{j-\sigma}\ \Psi^{(b)\pm}_{\mathcal{P}p,-\sigma} \tag{6.22}$$

con $a, b = 1, 2$. Para fijar estas matrices, investigamos las relaciones que existen entre las transformaciones supersimétricas y las transformaciones de paridad e inversión temporal, la existencia de estas transformaciones supone que la representación de Dirac $D(\Lambda)$ puede ser extendida para incluir las transformaciones de paridad e inversión temporal

$$\mathsf{P}\exp\left[i\zeta\cdot\mathcal{Q}\right]\mathsf{P}^{-1} = \exp\left[i\left(D_{\mathcal{P}}\zeta\right)\cdot\mathcal{Q}\right]\ , \tag{6.23}$$

$$\mathsf{T}\exp\left[i\zeta\cdot\mathcal{Q}\right]\mathsf{T}^{-1} = \exp\left[i\left(D_{\mathcal{T}}\zeta^*\right)\cdot\mathcal{Q}\right]\ . \tag{6.24}$$

donde $D_{\mathcal{P}}$ y $D_{\mathcal{T}}$ son matrices invertibles actuando sobre el espacio de 4-espinores fermiónicos. La última ecuación definitoria reconoce que la variable ζ es compleja y fermiónica, situación que no esta presente en las representaciones puramente bosónicas, ya que en estos casos el espacio de parámetros es real y bosónico. Dando su forma explícita, demostraremos que de hecho estas matrices existen[1]. De las reglas de composición (2.82) y (6.2), tenemos que las transformaciones supersimetricas, con parámetro ζ, satisfacen

$$\mathsf{U}\left[D\left(\mathcal{P}\Lambda\mathcal{P}^{-1}\right)D_{\mathcal{P}}\zeta\right] = \mathsf{U}\left[D_{\mathcal{P}}\mathcal{D}\left(\Lambda\right)\zeta\right]\ , \tag{6.25}$$

$$\mathsf{U}\left[D\left(\mathcal{T}\Lambda\mathcal{T}^{-1}\right)D_{\mathcal{T}}\zeta^*\right] = \mathsf{U}\left[D_{\mathcal{T}}\mathcal{D}\left(\Lambda\right)^*\zeta^*\right]\ . \tag{6.26}$$

[1] Este no es trivial en el sentido de que no toda representación del grupo de homogéneo propio ortócrono de Lorentz las posee. Sólo las representaciones del grupo homogéneo propio ortócrono de Lorentz de la forma $(\mathcal{A},\mathcal{A})$ y $(\mathcal{A},\mathcal{B})\oplus(\mathcal{B},\mathcal{A})$ son representaciones irreducibles del grupo homogéneo de Lorentz, incluyendo paridad e inversión temporal.

Estas relaciones se satisfacen si y solo sí

$$D_{\mathcal{P}} D(\Lambda) D_{\mathcal{P}}^{-1} = D\left(\mathcal{P}\Lambda\mathcal{P}^{-1}\right) \ , \tag{6.27}$$

$$D_{\mathcal{T}} D(\Lambda)^* D_{\mathcal{T}}^{-1} = D\left(\mathcal{P}\Lambda\mathcal{P}^{-1}\right) \ . \tag{6.28}$$

Del álgebra de las matrices γ^μ, sabemos que

$$\beta\gamma^\mu\beta^{-1} \,=\, \mathcal{P}^\mu_{\ \nu}\gamma^\nu, \quad (\epsilon\gamma_5)\gamma^\mu(\epsilon\gamma_5)^{-1} \,=\, \mathcal{P}^\mu_{\ \nu}\gamma^{\nu *} \ , \tag{6.29}$$

entonces los generadores $\mathcal{J}^{\mu\nu} = \frac{-i}{4}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right]$ de la representación de Dirac, satisfacen

$$\beta\mathcal{J}^{\mu\nu}\beta^{-1} \,=\, \mathcal{P}^\mu_{\ \rho}\mathcal{P}^\mu_{\ \sigma}\mathcal{J}^{\rho\sigma}, \quad (\epsilon\gamma_5)\mathcal{J}^{\mu\nu *}(\epsilon\gamma_5)^{-1} \,=\, -\mathcal{P}^\mu_{\ \rho}\mathcal{P}^\mu_{\ \sigma}\mathcal{J}^{\rho\sigma} \ . \tag{6.30}$$

De aqui que las matrices $D_{\mathcal{P}}$ y $D_{\mathcal{T}}$ se puedan expresar como

$$D_{\mathcal{P}} \,=\, D'_{\mathcal{P}}\beta, \quad D_{\mathcal{T}} D'_{\mathcal{T}}\epsilon\gamma_5 \ , \tag{6.31}$$

donde $D'_{\mathcal{P}}$ y $D'_{\mathcal{T}}$ son matrices de la forma

$$\kappa I \,+\, \kappa'\gamma_5, \quad \kappa \neq \pm\kappa' \ . \tag{6.32}$$

De donde vemos satisfacen

$$D'_{\mathcal{P},\mathcal{T}}\, D\left(\Lambda\right)\; D'^{-1}_{\mathcal{P},\mathcal{T}} \,=\, D\left(\Lambda\right) \ . \tag{6.33}$$

Por lo pronto hacemos $\kappa'_{\mathcal{P}} = 0$ y $\kappa'_{\mathcal{T}} = 0$, más adelante volveremos al caso arbitrario. Falta ver la consistencia grupo de traslaciones y supersimetría. Cuando el grupo de traslaciones incluye vectores a^μ complejos tenemos que $\mathsf{T}\mathsf{U}\left(a\right)\mathsf{T}^{-1} = \mathsf{U}\left(\mathcal{T}a^*\right)$, de la regla de composición

$$\mathsf{U}\left(\zeta\right) \,=\, \mathsf{U}\left(-\zeta_- \cdot \gamma^\mu\zeta_+\right)\mathsf{U}\left(\zeta_+\right)\mathsf{U}\left(\zeta_-\right) \ , \tag{6.34}$$

junto con las relaciones (6.23) y (6.24), se sigue que

$$\mathcal{P}^{\mu}{}_{\nu}\,\zeta_-^{\intercal}\cdot\gamma^{\nu}\zeta_+ = \left(D_{\mathcal{P}}\zeta\right)_+^{\intercal}\cdot\gamma^{\mu}\left(D_{\mathcal{P}}\zeta\right)_- \;, \tag{6.35}$$

$$\mathcal{P}^{\mu}{}_{\nu}\,\zeta_-^{\dagger}\cdot\gamma^{\nu *}\zeta_+^* = \left(D_{\mathcal{T}}\zeta^*\right)_-^{\intercal}\cdot\gamma^{\mu}\left(D_{\mathcal{T}}\zeta^*\right)_+ \;. \tag{6.36}$$

En esto caso, las constantes de proporcionalidad κ deben de ser iguales a $\kappa_{\mathcal{P}} = \pm i$ y $\kappa_{\mathcal{T}} = \pm 1$, para los casos de paridad e inversión temporal, respectivamente. Escogiendo el signo positivo en ambos casos, obtenemos la forma final de las transformaciones de paridad e inversión temporal del espacio de parámetros fermiónicos:

$$D_{\mathcal{P}} = i\beta, \quad D_{\mathcal{T}} = \epsilon\gamma_5 \;. \tag{6.37}$$

Las propiedades de transformación de los generadores del grupo de súper Poincaré bajo la acción de los operadores de inversión temporal y paridad son

$$\mathsf{P}\,\mathsf{J}^{\mu\nu}\,\mathsf{P}^{-1} = +\mathcal{P}_{\rho}{}^{\mu}\mathcal{P}_{\sigma}{}^{\nu}\mathsf{J}^{\rho\sigma}, \quad \mathsf{P}\,\mathsf{P}^{\mu}\,\mathsf{P}^{-1} = \mathcal{P}_{\rho}{}^{\mu}\mathsf{P}^{\rho}, \quad \mathsf{P}\,\mathcal{Q}_{\alpha}\,\mathsf{P}^{-1} = -i\left(\beta\mathcal{Q}\right)_{\alpha} \tag{6.38}$$

$$\mathsf{T}\,\mathsf{J}^{\mu\nu}\,\mathsf{T}^{-1} = -\mathcal{P}_{\rho}{}^{\mu}\mathcal{P}_{\sigma}{}^{\nu}\mathsf{J}^{\rho\sigma}, \quad \mathsf{T}\,\mathsf{P}^{\mu}\,\mathsf{T}^{-1} = \mathcal{P}_{\rho}{}^{\mu}\mathsf{T}^{\rho}, \quad \mathsf{T}\,\mathcal{Q}_{\alpha}\,\mathsf{T}^{-1} = -i\left(\epsilon\gamma_5\mathcal{Q}\right)_{\alpha} \tag{6.39}$$

Paridad en los estados de superpartícula. Los estados $\Psi^{0,\pm}_{p,\sigma}$ y $\Psi^{2,\pm}_{p,\sigma}$ permanecen invariantes ante las transformaciones $\mathsf{U}(\zeta_{\mp})$ y $\mathsf{U}(\zeta_{\pm})$, respectivamente. De aqui se sigue que estos estados, bajo la operación de paridad, también permanecen invariantes bajo estas transformaciones, pero con las proyecciones izquierdas-derechas intercambiadas, esto es,

$$\begin{aligned}\mathsf{U}(\zeta_{\pm})\mathsf{P}\Psi^{0,\pm}_{p,\sigma} &= \mathsf{P}\Psi^{0,\pm}_{p,\sigma} \;,\\ \mathsf{U}(\zeta_{\mp})\mathsf{P}\Psi^{2,\pm}_{p,\sigma} &= \mathsf{P}\Psi^{2,\pm}_{p,\sigma} \;.\end{aligned} \tag{6.40}$$

Puesto que los estados $+$ y los estados $-$ son irreducibles (cada uno por separado), a lo más, los estados $\mathsf{P}\Psi^{0,\pm}_{p,\sigma}$ y $\mathsf{P}\Psi^{2,\pm}_{p,\sigma}$ difieren por una fase de los estados $\mathsf{P}\Psi^{2,\pm}_{p,\sigma}$ y $\mathsf{P}\Psi^{0,\pm}_{p,\sigma}$, respectivamente:

$$\mathsf{P}\Psi^{0,\pm}_{p,\sigma} = \eta^{\pm}\,\Psi^{2,\pm}_{\mathcal{P}p,\sigma}, \quad \mathsf{P}\Psi^{2,\pm}_{p,\sigma} = \tilde{\eta}^{\pm}\,\Psi^{0,\pm}_{\mathcal{P}p,\sigma} \;, \tag{6.41}$$

donde $\eta^{\pm}$ y $\tilde{\eta}^{\pm}$ son fases. Con esto último, obtenemos que la forma de la matriz de transformación P^a_b que aparece en (6.21) es antidiagonal con entradas $\eta^{\pm}$ y $\tilde{\eta}^{\pm}$ en la antidiagonal superior e inferior, respectivamente. Con la ayuda de (2.115) y (6.23), vemos que que la acción del operador de paridad sobre los estados de superpartícula $\pm$, para valores arbitrarios del 4-spinor $s_{\pm}$ es

$$\mathsf{P}\Psi^{\pm}_{p,s_{\pm},\sigma} = \eta^{\pm}\, \tilde{\Psi}^{\mp}_{\mathcal{P}p,(i\beta s)_{\mp},\sigma} \;, \tag{6.42}$$

donde $\tilde{\Psi}^{\mp}_{p,s_{\mp},\sigma}$ son los superestados definidos por la transformada de Fourier fermiónica (2.169). Esta última relación junto con (6.41), implican que

$$\eta^{\pm} \;=\; \tilde{\eta}^{\pm} \;, \tag{6.43}$$

también implica que la componente lineal del superestado transforma como $\mathsf{P}\Psi^{1,\pm}_{p,\sigma} = i\eta^{\pm}\beta\tilde{\Psi}^{1,\pm}_{\mathcal{P}p,\sigma}$, o bien [con la ayuda de (2.170)]

$$\mathsf{P}\Psi^{1,\pm}_{p,\sigma} \;=\; i\eta^{\pm}\Psi^{1,\pm}_{\mathcal{P}p,\sigma} \;. \tag{6.44}$$

Inversión temporal en los estados de superpartícula. Los estados $\Psi^{0,\pm}_{p,\sigma}$ y $\Psi^{2,\pm}_{p,\sigma}$, bajo la acción del operador de inversión temporal, siguen siendo invariantes ante las transformaciones $\mathsf{U}(\zeta_{\mp})$ y $\mathsf{U}(\zeta_{\pm})$, respectivamente. Entonces la matriz T^a_b que aparece en (6.21) es diagonal, con fases sus entradas diferentes de cero. La acción del operador de inversión temporal sobre los estados de superpartícula $\pm$ resulta ser

$$\mathsf{T}\Psi^{\pm}_{p,s_{\pm},\sigma} = (-)^{j-\sigma}\xi^{\pm}\, \Psi^{\pm}_{\mathcal{P}p,(\epsilon\gamma_5 s^*)_{\pm},-\sigma} \;, \tag{6.45}$$

lo que implica que para las componentes degeneradas[2]

$$\mathsf{T}\Psi^{0,\pm}_{p,\sigma} = (-)^{j-\sigma}\xi^{\pm}\, \Psi^{0,\pm}_{\mathcal{P}p,-\sigma}, \quad \mathsf{T}\Psi^{2,\pm}_{p,\sigma} \;=\; (-)^{j-\sigma}\xi^{\pm}\, \Psi^{0,\pm}_{\mathcal{P}p,-\sigma} \;, \tag{6.46}$$

mientras que para el término lineal en la expansión del superestado, tenemos

$$\mathsf{T}\Psi^{1,\pm}_{p,\sigma} \;=\; -i(-)^{j-\sigma}\xi^{\pm}\, \left(\epsilon\gamma_5\Psi^{1,\pm}_{\mathcal{P}p,-\sigma}\right) \;. \tag{6.47}$$

Conjugación de carga. Para cada estado de partícula que tenga números

[2] Al comparar una expresión de la forma $\mathcal{T}\Psi v \;=\; v^*\Psi'$, donde v es un supernúmero Ψ y Ψ' superestados independientes de v. debemos de hacerlo por la izquierda.

cuánticos internos no triviales, debe existir otro estado (antipartícula) transformando de la misma forma con respecto a las transformaciones del espaciotiempo, pero con el negativo de sus números cuánticos internos. El operador C, definido como aquel operador que intercambia esta partícula por su antipartícula, actuando sobre los estados de partícula degenerados del multiplete supersimétrico, se expresa en su forma más general como

$$\mathsf{C}\Psi^{(a)\pm}_{p,\sigma,n} = \sum_b C^a_{\ b}\, \Psi^{(b)\pm}_{p,\sigma,n^c} \ , \quad a,b = 1,2 \ , \tag{6.48}$$

donde $\Psi^{(a)\pm}_{p,\sigma,n^c}$ es la respectiva antipartícula de $\Psi^{(a)\pm}_{p,\sigma,n}$ y $C^a_{\ b}$ una matriz unitaria de 2×2. El operador C induce una transformación lineal $D_{\mathcal{C}}$ en el espacio de parámetros de las transformaciones supersimétricas $\mathsf{C}\mathsf{U}(\zeta)\,\mathsf{C}^{-1} = \mathsf{U}(D_{\mathcal{C}}\zeta)$, la cual debe conmutar con las matrices de Dirac, entonces $D_{\mathcal{C}}$ es una combinación lineal de I y γ_5. Por lo pronto, tomamos $D_{\mathcal{C}} = I$, de esta manera la consistencia de C con el grupo de súper Poincaré esta garantizada.

Que el operador de conjugación de carga conmute con el operador de transformaciones supersimétricas, nos dice que los estados $\mathsf{C}\Psi^{0,\pm,n}_{p,\sigma,n}$ y $\mathsf{C}\Psi^{2,\pm}_{p,\sigma,n}$, son invariantes bajo $\mathsf{U}(\zeta_\mp)$ y $\mathsf{U}(\zeta_\pm)$, respectivamente. Entonces la matriz $C^a_{\ b}$ es diagonal con fases en las entradas de la diagonal y la acción de C sobre los estados de superpartícula $\pm$ es

$$\mathsf{C}\Psi^{\pm}_{p,s_\pm,\sigma,n} = \varsigma^{\pm}\, \Psi^{\pm}_{p,s_\pm,\sigma,n^c} \ , \tag{6.49}$$

siendo las cantidades $\varsigma^{\pm}$ unas fases. Todos los generadores del grupo de súper Poincaré conmutan con C, en particular los generadores de la supersimetría

$$\mathsf{C}\mathcal{Q}_\alpha\mathsf{C}^{-1} = \mathcal{Q}_\alpha \ . \tag{6.50}$$

Transformaciones $\mathcal{R}$. Investigamos ahora, el conjunto de matrices $D_{\mathcal{R}}$ actuando en el espacio de los 4-espinores fermiónicos, definidas como aquellas que transforman como una constante en los subespacios quirales $\frac{1}{2}(I-\gamma_5)$ y $\frac{1}{2}(I+\gamma_5)$:

$$D_{\mathcal{R}} = \frac{\kappa_+}{2}\,(I+\gamma_5) + \frac{\kappa_-}{2}\,(I-\gamma_5) \ . \tag{6.51}$$

Estas conmutan con las matrices de la representación de Dirac

$$D_{\mathcal{R}} D(\Lambda) = D(\Lambda) D_{\mathcal{R}} . \tag{6.52}$$

Estas matrices, surgen de las llamadas simetrías $\mathcal{R}$, definidas por el conjunto de operadores R actuando en el espacio de Hilbert, que conmutan con el grupo de Lorentz y que induce las siguientes transformaciones lineales en el espacio de parámetros

$$\mathsf{R}\mathsf{U}(\zeta)\mathsf{R}^{-1} = \mathsf{U}(D_{\mathcal{R}}\zeta) . \tag{6.53}$$

Por las propiedades de grupo, la matriz $D_{\mathcal{R}}^{-1}$ debe de existir, por lo que k_+ ni k_- no pueden ser cero. Evidentemente, R debe de ser unitario. La consistencia de R con el grupo de traslaciones y supersimetría, se obtiene de analizar la relación

$$\mathsf{U}(\zeta) = \mathsf{U}(-\zeta_-^{\mathsf{T}}\epsilon\gamma_5\gamma^\mu\zeta_+)\,\mathsf{U}(\zeta_+)\,\mathsf{U}(\zeta_-) \tag{6.54}$$

de donde se sigue que

$$\zeta_-^{\mathsf{T}} \cdot \gamma^\nu \zeta_+ = (D_{\mathcal{R}}\zeta)_+^{\mathsf{T}} \cdot \gamma^\mu (D_{\mathcal{R}}\zeta)_- \tag{6.55}$$

por lo que $k_+ = k_-^{-1}$. Pero para preservar la normalización de los estados, estas constantes tienen que ser fases. La forma general de la matriz de transformación nos queda

$$D(\theta_{\mathcal{R}}) = \frac{e^{+i\theta_R}}{2}(I+\gamma_5) + \frac{e^{-i\theta_R}}{2}(I-\gamma_5) . \tag{6.56}$$

La composición de dos matrices satisface

$$D(\theta_{\mathcal{R}}) = D(\theta_{\mathcal{R}} + \theta'_{\mathcal{R}}) , \tag{6.57}$$

por lo que las matrices $D(\theta_{\mathcal{R}})$ generan una representación del grupo $U(1)$. Los superestados $\pm$ generales transforman como

$$\mathsf{R}\Psi^{\pm}_{p,s_\pm,\sigma} = r^{\pm}\,\Psi^{\pm}_{p,D_{\mathcal{R}}s_\pm,\sigma} . \tag{6.58}$$

La única relación no trivial con las simetrías R y el súper Poincaré, es con la de los generadores de la supersimetría,

$$\mathsf{R}\mathcal{Q}_{\pm\alpha}\mathsf{R}^{-1} = e^{\mp i\vartheta_R}\mathcal{Q}_{\pm\alpha} \ . \tag{6.59}$$

* * *

El caso más general para transformaciones P sobre una superpartícula (y su respectiva anti superpartícula), consiste en una transformación RP redefinida simplemente como P. Los mismo para T y C. Si tenemos supermultipletes degenerados, pueden existir transformaciones más generales que mezclan estos multipletes[17].

6.2. Supercampos cuánticos

El conjunto de supercampos quirales encontrados [ver Ecs. (4.106) y (4.107)] son esencialmente únicos, independiente de si existe una transformación de P, T, C o $\mathcal{R}$. Entonces, la acción de estos operadores sobre un supercampo debe ser otro supercampo de los ya considerados.

Transformaciones de Paridad. Consideramos primero la acción de las simetría de paridad sobre los operadores de creación, estos transforman como estados de una superpartícula,

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\, a^{\dagger}_{\pm}\,(\mathbf{p}\, s_{\pm}\, \sigma)\ \mathsf{P}^{-1} &= \eta_{\pm}\, \tilde{a}^{\dagger}_{\mp}\,(-\mathbf{p}\, i(\beta s)_{\mp}\, \sigma) \ , \\ \mathsf{P}\, a^{c\dagger}_{\pm}\,(\mathbf{p}\, s_{\pm}\, \sigma)\ \mathsf{P}^{-1} &= \eta^{c}_{\pm}\, \tilde{a}^{c\dagger}_{\mp}\,(-\mathbf{p}\, i(\beta s)_{\mp}\, \sigma) \ , \end{aligned} \tag{6.60}$$

y por lo tanto los operadores de creación tilde transforman como [ver Ec. (3.58)]

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\, \tilde{a}^{\dagger}_{\mp}\,(\mathbf{p}\, s_{\mp}\, \sigma)\ \mathsf{P}^{-1} &= \tilde{\eta}_{\mp}\, a^{\dagger}_{\pm}\,(-\mathbf{p}\, i(\beta s)_{\pm}\, \sigma) \ , \\ \mathsf{P}\, a^{c\dagger}_{\mp}\,(\mathbf{p}\, s_{\mp}\, \sigma)\ \mathsf{P}^{-1} &= \tilde{\eta}^{c}_{\mp}\, a^{c\dagger}_{\pm}\,(-\mathbf{p}\, i(\beta s)_{\pm}\, \sigma) \ , \end{aligned} \tag{6.61}$$

con

$$\tilde{\eta}_{\mp} = -\eta_{\pm}, \quad \tilde{\eta}^{c}_{\mp} = -\eta^{c}_{\pm} \ . \tag{6.62}$$

El supercampo general (4.106), bajo la acción de P se ve como

$$\mathsf{P}\Phi^{\mathcal{AB}}_{\pm ab}(x,\vartheta)\mathsf{P}^{-1} = (2\pi)^{-3/2}\sum_{\sigma}\int d^3\mathbf{p}\,\Big\{\, e^{+i(x_\pm\cdot p)}\tilde{\eta}^*_\mp\, a_\mp\left(-\mathbf{p}\,(i\beta\vartheta)_\mp\,\sigma\right) u^{\mathcal{AB}}_{ab}(\mathbf{p},\sigma) + (-)^{2\mathcal{B}}\; e^{-i(x_\pm\cdot p)}\eta^c_\pm\,\tilde{a}^{c\dagger}_\mp\left(-\mathbf{p}\,(i\beta\vartheta)_\mp\,\sigma\right) v^{\mathcal{AB}}_{ab}(\mathbf{p},\sigma)\Big\}\ , \tag{6.63}$$

Este expresión aún no tiene la forma explícita de otro supercampo general. Los operadores de creación y aniquilación en (6.63) están evaluados en $-\mathbf{p}$, al hacer el cambio de variable $\mathbf{p}\to-\mathbf{p}$ en la integral de momentos, los coeficientes $u^{\mathcal{AB}}_{ab}$ y $v^{\mathcal{AB}}_{ab}$ quedan evaluados en $-\mathbf{p}$. De la propiedad de simetría de los coeficientes de Clebsh-Gordan [17]

$$C_{\mathcal{AB}}\left(j\sigma;ab\right) = (-)^{\mathcal{A}+\mathcal{B}-j}C_{\mathcal{BA}}\left(j\sigma;ba\right)\ , \tag{6.64}$$

y de la forma explícita de los coeficientes $u^{\mathcal{AB}}_{ab}$,

$$u^{\mathcal{AB}}_{ab}\left(\mathbf{p},\sigma\right) = \sqrt{\frac{1}{2p^0}}\sum_{a'b'}\left[\exp\left(-\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbb{J}^{(\mathcal{A})}\theta\right)\right]_{aa'}\left[\exp\left(+\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbb{J}^{(\mathcal{B})}\theta\right)\right]_{bb'}C_{\mathcal{AB}}\left(j\sigma;a'b'\right)\ , \tag{6.65}$$

obtenemos los coeficientes con el vector de momento con signo invertido:

$$\begin{aligned} u^{\mathcal{AB}}_{ab}\left(-\mathbf{p},\sigma\right) &= (-)^{\mathcal{A}+\mathcal{B}-j}u^{\mathcal{BA}}_{ab}\left(\mathbf{p},\sigma\right)\ ,\\ v^{\mathcal{AB}}_{ab}\left(-\mathbf{p},\sigma\right) &= (-)^{\mathcal{A}+\mathcal{B}-j}v^{\mathcal{BA}}_{ab}\left(\mathbf{p},\sigma\right)\ , \end{aligned} \tag{6.66}$$

donde hemos usado $v^{\mathcal{AB}}_{ab}\left(\mathbf{p},\sigma\right) = (-)^{j+\sigma}u^{\mathcal{AB}}_{ab}\left(\mathbf{p},-\sigma\right)$. Con la ayuda de $\beta\gamma^\mu\beta^{-1} = \mathcal{P}^\mu{}_\nu\gamma^\mu$, reescribimos las fases de las exponenciales como

$$x_\pm\cdot\mathcal{P}p = \left(\mathcal{P}x\right)\cdot p - \left(i\beta\vartheta\right)\cdot\not{p}\left(i\beta\vartheta\right)_\mp\ . \tag{6.67}$$

De aquí se ve que el supercampo (6.63), esta evaluado en $(\mathcal{P}x, i\beta\vartheta)$ y transforma bajo la representación $(\mathcal{B},\mathcal{A})$ del grupo de Lorentz. Es necesario que las fases $\tilde{\eta}_\pm$ y $\eta^c_\pm$ de las superpartículas y las antispartículas satisfagan la relación

$$\eta^c_\pm = (-)^{2j}\tilde{\eta}^*_\mp\ , \tag{6.68}$$

esto con el fin de poder escribir la propiedad de transformación del supercampo quiral general como

$$\mathsf{P}\Phi^{\mathcal{AB}}_{\pm ab}\left(x,\vartheta\right)\mathsf{P}^{-1} \;=\; \tilde{\eta}^{*}_{\mp}(-)^{\mathcal{A}+\mathcal{B}+j}\;\tilde{\Phi}^{\mathcal{BA}}_{\mp ba}\left(\mathcal{P}x, i\beta\vartheta\right)\;\; . \tag{6.69}$$

Inversión temporal. Los operadores de creación, bajo el operador de inversión temporal transforman como

$$\begin{aligned}\mathsf{T}\,a^{\dagger}_{\pm}\left(\mathbf{p}\,s_{\pm}\,\sigma\right)\,\mathsf{T}^{-1} &= \zeta_{\pm}(-)^{j-\sigma}\,a^{\dagger}_{\pm}\left(-\mathbf{p}\;\;(\epsilon\gamma_5 s^{*})_{\pm}\;-\sigma\right)\;\; ,\\ \mathsf{T}\,a^{c\dagger}_{\pm}\left(\mathbf{p}\,s_{\pm}\,\sigma\,\right)\,\mathsf{T}^{-1} &= \zeta^{c}_{\pm}(-)^{j-\sigma}\,a^{c\dagger}_{\pm}\left(-\mathbf{p}\;\;(\epsilon\gamma_5 s^{*})_{\pm}\;-\sigma\right)\;\; ,\end{aligned} \tag{6.70}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}\mathsf{T}\,\tilde{a}^{\dagger}_{\mp}\left(\mathbf{p}\,s_{\mp}\,\sigma\right)\,\mathsf{T}^{-1} &= \tilde{\zeta}_{\mp}(-)^{j-\sigma}\,\tilde{a}^{\dagger}_{\mp}\left(-\mathbf{p}\;\;(\epsilon\gamma_5 s^{*})_{\mp}\;-\sigma\right)\;\; ,\\ \mathsf{T}\,\tilde{a}^{c\dagger}_{\mp}\left(\mathbf{p}\,s_{\mp}\,\sigma\,\right)\,\mathsf{T}^{-1} &= \tilde{\zeta}^{c}_{\pm}(-)^{j-\sigma}\,\tilde{a}^{c\dagger}_{\mp}\left(-\mathbf{p}\;\;(\epsilon\gamma_5 s^{*})_{\mp}\;-\sigma\right)\;\; ,\end{aligned} \tag{6.71}$$

con

$$\tilde{\zeta}_{\mp} \;=\; -\zeta_{\pm}, \quad \tilde{\zeta}^{c}_{\mp} \;=\; -\zeta^{c}_{\pm}\;. \tag{6.72}$$

Después del cambio $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$ en la integral de momentos y del cambio $\sigma \to -\sigma$ en la suma sobre espines, debido a que el operador es antiunitario, tenemos a los conjugados de los coeficientes $u^{\mathcal{AB}}_{ab}$ y $v^{\mathcal{AB}}_{ab}$ quedan evaluados en $(-\mathbf{p}, -\sigma)$. Con la ayuda de la siguiente relación:

$$C_{\mathcal{AB}}\left(j\sigma; ab\right) \;=\; (-)^{\mathcal{A}+\mathcal{B}-j}C_{\mathcal{AB}}\left(j, -\sigma; -a,\, -b\right)\;\; , \tag{6.73}$$

y con

$$\left[\exp\left(-\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbb{J}^{(\mathcal{A})}\theta\right)\right]^{*}_{aa'} \;=\; (-)^{a-a'}\left[\exp\left(+\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbb{J}^{(\mathcal{A})}\theta\right)\right]_{-a,-a'}\;\; , \tag{6.74}$$

obtenemos (donde usamos también que los Clebsh-Gordan $C_{\mathcal{AB}}\left(j\sigma; ab\right)$ son cero a menos que $\sigma \;=\; a+b$)

$$\begin{aligned}u^{\mathcal{AB}}_{ab}\left(-\mathbf{p}, -\sigma\right)^{*} &= (-)^{a+b+\sigma+\mathcal{A}+\mathcal{B}-j}u^{\mathcal{AB}}_{ab}\left(\mathbf{p}, \sigma\right)\;\; ,\\ u^{\mathcal{AB}}_{ab}\left(-\mathbf{p}, -\sigma\right)^{*} &= (-)^{a+b+\sigma+\mathcal{A}+\mathcal{B}-j}u^{\mathcal{AB}}_{ab}\left(\mathbf{p}, \sigma\right)\;\; .\end{aligned} \tag{6.75}$$

Las exponenciales en los supercampos también han sido conjugadas debido al paso del operador aniunitario T. Escribimos

$$(x_{\pm} \cdot \mathcal{P}p)^{*} = -\mathcal{T}x \cdot p + \epsilon\gamma_5\vartheta^{*} \cdot \not{p}\,\epsilon\gamma_5\vartheta^{*}_{\pm} \tag{6.76}$$

e imponemos sobre las fases de los estados de superpartícula y antispartícula la relación

$$\xi^{c}_{\pm} = \tilde{\xi}^{*}_{\mp} \ , \tag{6.77}$$

lo que nos da finalmente

$$\mathsf{T}\Phi^{\mathcal{AB}}_{\pm ab}\,(x,\vartheta)\,\mathsf{T}^{-1} = \tilde{\xi}^{*}_{\mp}(-)^{a+b+\mathcal{A}+\mathcal{B}-2j}\Phi^{\mathcal{AB}}_{\pm -a-b}\,(\mathcal{T}x, \epsilon\gamma_5\vartheta^{*}) \ . \tag{6.78}$$

Conjugación de carga. Bajo el operador conjugación de carga, tenemos que

$$\begin{aligned}\mathsf{C}\,a^{\dagger}_{\pm}\,(\mathbf{p}\,s_{\pm}\,\sigma)\;\mathsf{C}^{-1} &= \varsigma_{\pm}\,a^{c\dagger}_{\pm}\,(\mathbf{p}\,s_{\pm}\,\sigma\,) \ ,\\ \mathsf{C}\,a^{c\dagger}_{\pm}\,(\mathbf{p}\,s_{\pm}\,\sigma\,)\;\mathsf{C}^{-1} &= \varsigma^{c}_{\pm}\,a^{\dagger}_{\pm}\,(\mathbf{p}\,s_{\pm}\,\sigma) \ ,\end{aligned} \tag{6.79}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathsf{C}\,\tilde{a}^{\dagger}_{\mp}\,(\mathbf{p}\,s_{\mp}\,\sigma)\;\mathsf{C}^{-1} &= \tilde{\varsigma}_{\mp}\,\tilde{a}^{c\dagger}_{\pm}\,(\mathbf{p}\,s_{\pm}\,\sigma\,) \ ,\\ \mathsf{C}\,\tilde{a}^{c\dagger}_{\mp}\,(\mathbf{p}\,s_{\mp}\,\sigma\,)\;\mathsf{C}^{-1} &= \tilde{\varsigma}^{c}_{\mp}\,a^{\dagger}_{\pm}\,(\mathbf{p}\,s_{\pm}\,\sigma) \ ,\end{aligned} \tag{6.80}$$

con

$$\tilde{\varsigma}_{\mp} = \varsigma_{\pm}, \quad \tilde{\varsigma}^{c}_{\mp} = \varsigma^{c}_{\pm} \ . \tag{6.81}$$

Entonces, la acción del operador de carga sobre el supercampo general nos da

$$\begin{aligned}\mathsf{C}\Phi^{\mathcal{AB}}_{\pm ab}(x,\vartheta)\mathsf{C}^{-1} = (2\pi)^{-3/2}\sum_{\sigma}\int d^3\mathbf{p}\,\Big\{ & e^{+i(x_{\pm}\cdot p)}\tilde{\varsigma}^{*}_{\mp}\tilde{a}^{c}_{\pm}\,(\mathbf{p}\,\vartheta_{\pm}\,\sigma)\,u^{\mathcal{AB}}_{ab}(\mathbf{p},\sigma)\\ & + (-)^{2\mathcal{B}}\,e^{-i(x_{\pm}\cdot p)}\varsigma^{c}_{\pm}\,a^{\dagger}_{\pm}\,(\mathbf{p}\,\vartheta_{\pm}\,\sigma)\,v^{\mathcal{AB}}_{ab}\,(\mathbf{p},\sigma)\Big\} \ ,\end{aligned} \tag{6.82}$$

Este tiene la forma parecida al supercampo

$$\tilde{\Phi}^{\mathcal{AB}\dagger}_{\pm ab}(x,\vartheta) \;=\; (2\pi)^{-3/2}\sum_{\sigma}\int d^3\mathbf{p}\,\Big\{\,(-)^{2\mathcal{B}}\,e^{+i(x_\pm\cdot p)}\tilde{a}^c_\pm\,(\mathbf{p}\,\vartheta_\pm\,\sigma)\,\big(v^{\mathcal{AB}}_{ab}(\mathbf{p},\sigma)\big)^* \\ +\,e^{-i(x_\pm\cdot p)}\,a^\dagger_\pm\,(\mathbf{p}\,\vartheta_\pm\,\sigma)\,\big(u^{\mathcal{AB}}_{ab}(\mathbf{p},\sigma)\big)^*\Big\}\;. \tag{6.83}$$

Debido a la relación $u^{\mathcal{AB}}_{ab}(\mathbf{p},\sigma) = (-)^{j+\sigma}v^{\mathcal{AB}}_{ab}(\mathbf{p},-\sigma)$, necesitamos una fórmula que nos invierta el signo de σ y conjugue los coeficientes $u^{\mathcal{AB}}_{ab}$. De la propiedad

$$C_{\mathcal{AB}}\,(j\sigma;ab) \;=\; C_{\mathcal{BA}}\,(j,-\sigma;-b,\,-a)\;\;, \tag{6.84}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} u^{\mathcal{AB}}_{ab}\,(\mathbf{p},\sigma) &= \;(-)^{\sigma-a-b}u^{\mathcal{BA}*}_{-b-a}\,(\mathbf{p},-\sigma)\;=\;(-)^{-j-a-b}v^{\mathcal{BA}*}_{-b-a}\,(\mathbf{p},\sigma) \\ v^{\mathcal{AB}}_{ab}\,(\mathbf{p},\sigma) &= \;(-)^{j-a-b}u^{\mathcal{BA}*}_{-b-a}\,(\mathbf{p},\sigma)\;\;. \end{aligned} \tag{6.85}$$

Entonces, haciendo

$$\varsigma^c_\pm \;=\; \tilde{\varsigma}^*_\mp\;, \tag{6.86}$$

obtenemos finalmente

$$\mathsf{C}\Phi^{\mathcal{AB}}_{\pm ab}(x,\vartheta)\mathsf{C}^{-1} \;=\; \tilde{\varsigma}^*_\mp(-)^{-2\mathcal{A}-a-b-j}\,\tilde{\Phi}^{\mathcal{BA}\dagger}_{\pm-b\,-a}(x,\vartheta)\;. \tag{6.87}$$

Simetrías $\mathcal{R}$. La última de la simetría que analizamos es la simetría $\mathcal{R}$, cuya acción sobre los operadores de creación y aniquilación viene dada por las siguientes reglas de transformación

$$\begin{aligned} \mathsf{R}\,a^\dagger_\pm\,(\mathbf{p}\,s_\pm\,\sigma)\;\mathsf{R}^{-1} &= \;r_\pm\,a^\dagger_\pm\,(\mathbf{p}\,D_{\mathcal{R}}s_\pm\,\sigma)\;\;, \\ \mathsf{R}\,a^{c\dagger}_\pm\,(\mathbf{p}\,s_\pm\,\sigma)\;\mathsf{R}^{-1} &= \;r^c_\pm\,a^{c\dagger}_\pm\,(\mathbf{p}\,D_{\mathcal{R}}s_\pm\,\sigma)\;\;, \end{aligned} \tag{6.88}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \mathsf{R}\, \tilde{a}^{\dagger}_{\mp}\,(\mathbf{p}\, s_{\mp}\, \sigma)\ \mathsf{R}^{-1} &= \tilde{r}_{\mp}\, a^{\dagger}_{\mp}\,(\mathbf{p}\, D_{\mathcal{R}} s_{\mp}\, \sigma)\ , \\ \mathsf{R}\, \tilde{a}^{c\dagger}_{\mp}\,(\mathbf{p}\, s_{\mp}\, \sigma)\ \mathsf{R}^{-1} &= \tilde{r}^{c}_{\mp}\, a^{c\dagger}_{\mp}\,(\mathbf{p}\, D_{\mathcal{R}} s_{\mp}\, \sigma)\ . \end{aligned} \tag{6.89}$$

Solo basta notar que

$$x^{\mu}_{\pm} = x^{\mu} - D_{\mathcal{R}}\vartheta \cdot \gamma^{\mu} D_{\mathcal{R}}\vartheta_{\pm}\ , \tag{6.90}$$

y hacer

$$r^{c}_{\pm} = \tilde{r}^{*}_{\mp}\ , \tag{6.91}$$

para escribir

$$\mathsf{R}\Phi^{\mathcal{AB}}_{\pm ab}(x,\vartheta)\mathsf{R}^{-1} = \tilde{r}^{*}_{\mp}\, \Phi^{\mathcal{AB}}_{\pm ab}\,(x, D_{\mathcal{R}}\vartheta)\ . \tag{6.92}$$

Transformaciones sobre los supercampos tilde. Podemos repetir el mismo argumento que usamos para encontrar las trasformaciones C, P, T y $\mathcal{R}$ sobre los supercampos $\tilde{\Phi}^{\mathcal{AB}}_{\mp ab}$, para ver que los supercampos que se construyen con los operadores de creación-aniquilación con tilde satisfacen:

$$\begin{aligned} \mathsf{C}\tilde{\Phi}^{\mathcal{AB}}_{\mp ab}(x,\vartheta)\mathsf{C}^{-1} &= \varsigma^{*}_{\pm}(-)^{-2\mathcal{A}-a-b-j}\,\Phi^{\mathcal{BA}\dagger}_{\mp -b\,-a}(x,\vartheta)\ , \\ \mathsf{P}\tilde{\Phi}^{\mathcal{AB}}_{\mp ab}\,(x,\vartheta)\,\mathsf{P}^{-1} &= \eta^{*}_{\pm}(-)^{\mathcal{A}+\mathcal{B}+j}\,\Phi^{\mathcal{BA}}_{\pm ba}\,(\mathcal{P}x, i\beta\vartheta)\ , \\ \mathsf{T}\tilde{\Phi}^{\mathcal{AB}}_{\mp ab}\,(x,\vartheta)\,\mathsf{T}^{-1} &= \xi^{*}_{\pm}(-)^{a+b+\mathcal{A}+\mathcal{B}-2j}\,\tilde{\Phi}^{\mathcal{AB}}_{\mp -a-b}\,(\mathcal{T}x, \epsilon\gamma_5\vartheta^{*})\ , \\ \mathsf{R}\tilde{\Phi}^{\mathcal{AB}}_{\mp ab}(x,\vartheta)\mathsf{R}^{-1} &= r^{*}_{\pm}\,\tilde{\Phi}^{\mathcal{AB}}_{\mp ab}\,(x, D_{\mathcal{R}}\vartheta)\ . \end{aligned} \tag{6.93}$$

Superpartículas que son iguales a sus antispartículas. El supercampo "invertido conjugado" $\Phi^{(c)}_{\mp ab}$ que viene de hacer el cambio $a_{\mp} \longleftrightarrow a^{(c)}_{\mp}$ [ver Ec.

(4.161)], se expresa en términos de los supercampos adjuntos como:

$$\Phi^{\mathcal{AB},(c)}_{\mp ab} = (-)^{2\mathcal{B}+j-a-b}\tilde{\Phi}^{\mathcal{BA}\dagger}_{\mp -b-a} \ . \tag{6.94}$$

Si una superpartícula es inerte bajo todas las simetrías internas disponibles, su antispartícula puede ser ella misma, en términos de los supercampos, esta restricción nos dice que

$$\Phi^{\mathcal{BA},(c)}_{\mp ab} = \Phi^{\mathcal{AB}}_{\mp ab} \ , \tag{6.95}$$

o bien, con la ayuda (6.94), obtenemos la siguiente condición general de realidad

$$\Phi^{\mathcal{AB}}_{\mp ab} = (-)^{2\mathcal{B}+j-a-b}\tilde{\Phi}^{\mathcal{BA}\dagger}_{\mp -b-a} \ . \tag{6.96}$$

En este caso, las fases $\eta_\pm$, $\zeta_\pm$, $\varsigma_\pm$ y $r_\pm$ valen ± 1.

El teorema CPT**.** La unión de las simetrías C , P y T, nos definen la transformación CPT:

$$\mathsf{CPT}\Phi^{\mathcal{AB}}_{\pm ab}(x,\vartheta)(\mathsf{CPT})^{-1} = (\xi_\pm\eta_\pm\varsigma_\pm)^*(-)^{2\mathcal{B}}\Phi^{\mathcal{AB}\dagger}_{\mp a\, b}(-x,-i\epsilon\gamma_5\beta\vartheta^*) \tag{6.97}$$

Las fases $\xi_\pm$ de las transformación T no tienen un carácter físico, entonces podemos usarlas para hacer $\xi_\pm\eta_\pm\varsigma_\pm = 1$. Los coeficientes de Clebsh-Gordan en la interaccion general (4.108), son iguales tienen que ser cero a menos que los acoplamientos $\Phi^{\mathcal{A}_1\mathcal{B}_1}_{\varepsilon_1 a_1 b_1}\Phi^{\mathcal{A}_2\mathcal{B}_2}_{\varepsilon_2 a_2 b_2}\cdots$ sean tales que $\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2+\cdots$ y $\mathcal{B}_1+\mathcal{B}_2+\cdots$ son enteros. Pero esto implica que en (4.108):

$$(-)^{2(\mathcal{B}_1+\mathcal{B}_2+\cdots)} = 1 \tag{6.98}$$

Con esto, vemos que la densidad Hamiltoniana $\mathcal{H}$ transforma bajo CPT como

$$(\mathsf{CPT})\,\mathcal{H}(x,\vartheta)\,(\mathsf{CPT})^{-1} = \mathcal{H}(-x,-i\epsilon\gamma_5\beta\vartheta^*) \tag{6.99}$$

Más aún, el paso del operador antiunitario T por el diferencial fermiónico de volumen $d^4\vartheta$, nos da $d^4\vartheta^* = d^4[-i\epsilon\gamma_5\beta\vartheta^*]$. Entonces, CPT conmuta con el Hamiltoniano y por tanto CPT es una simetría de la teoría.

Representaciones completamente irreducibles. Hasta este punto, no hemos supuesto que existe ninguna relación entre los supercampos Ψ_{+ab} y Ψ_{-ab} , cuando este es el caso, tenemos que $\Psi_{\pm ab} = \tilde{\Psi}_{\pm ab}$, por lo que la transformaciones de C, P, T y $\mathcal{R}$ se ven de la siguiente manera:

$$\mathsf{P}\Phi^{\mathcal{AB}}_{\pm ab}\,(x,\vartheta)\,\mathsf{P}^{-1} = \pm\eta^*(-)^{\mathcal{A}+\mathcal{B}+j}\,\Phi^{\mathcal{BA}}_{\mp ba}\,(\mathcal{P}x, i\beta\vartheta) \tag{6.100}$$

$$\mathsf{C}\Phi^{\mathcal{AB}}_{\pm ab}\,(x,\vartheta)\,\mathsf{C}^{-1} = +\varsigma^*(-)^{-2\mathcal{A}-a-b-j}\,\Phi^{\mathcal{BA}\dagger}_{\pm -a\,-b}(x,\vartheta) \tag{6.101}$$

$$\mathsf{T}\Phi^{\mathcal{AB}}_{\pm ab}\,(x,\vartheta)\,\mathsf{T}^{-1} = \pm\xi^*(-)^{a+b+\mathcal{A}+\mathcal{B}-2j}\,\Phi^{\mathcal{AB}}_{\pm -a-b}\,(\mathcal{T}x, \epsilon\gamma_5\vartheta)$$

$$\mathsf{R}\Phi^{\mathcal{AB}}_{\pm ab}(x,\vartheta)\mathsf{R}^{-1} = r^*_{\mp}\,\Phi^{\mathcal{AB}}_{\pm ab}\,(x, D_{\mathcal{R}}\vartheta)\ . \tag{6.102}$$

Capítulo 7

Aplicaciones

Uno de los objetivos de esta sección es el de poner a prueba el formalismo para el caso más sencillo, la interacción cúbica de un supercampo escalar. Para este caso tenemos, la contraparte canónica bien establecida: El modelo de Wess-Zumino. Toca demostrar la equivalencia entre este modelo y nuestro enfoque nocanónico.

7.1. El supercampo escalar

Para el caso escalar, las transformaciones C, P, T and $\mathcal{R}$ se ven como

$$\begin{aligned}
\mathsf{C}\,\Phi_{\pm}\,(x,\vartheta)\,\mathsf{C}^{-1} &= \ +\varsigma^{*}\Phi^{\dagger}_{\pm}\,(x,\vartheta)\\
\mathsf{P}\,\Phi_{\pm}\,(x,\vartheta)\,\mathsf{P}^{-1} &= \ \pm\eta^{*}\,\Phi_{\mp}\,(\mathcal{P}x,i\beta\vartheta)\ \ ,\\
\mathsf{T}\,\Phi_{\pm}\,(x,\vartheta)\,\mathsf{T}^{-1} &= \ \pm\xi^{*}\Phi_{\pm}\,(\mathcal{T}x,\epsilon\gamma_5\vartheta^{*})\ \ ,\\
\mathsf{R}\,\Phi_{\pm}\,(x,\vartheta)\,\mathsf{R}^{-1} &= \ +r^{*}\,\Phi_{\pm}\,(x,D_{\mathcal{R}}\vartheta)\ \ .
\end{aligned} \tag{7.1}$$

Cuando la spartícula es la misma que su antispartícula,

$$\Phi_{\pm}(x,\vartheta) = \ \Phi^{\dagger}_{\pm}(x,\vartheta)\ , \tag{7.2}$$

ademas ς, η, ζ y r iguales a ±1. La interacción de orden más bajo, el superpotencial cúbico, posee cuatro términos:

$$\Phi_{\pm}\Phi_{\pm}\Phi_{\pm},\quad \Phi_{\pm}\Phi_{\pm}\Phi^{\dagger}_{\pm},\quad \Phi_{\pm}\Phi^{\dagger}_{\pm}\Phi^{\dagger}_{\pm},\quad \Phi^{\dagger}_{\pm}\Phi^{\dagger}_{\pm}\Phi^{\dagger}_{\pm}\ . \tag{7.3}$$

Bajo una transformación $\mathcal{R}$, usando el hecho de que

$$\delta^2\left(\mathcal{R}^{-1}\vartheta_\pm\right) = \exp\left[\pm 2iq_0\right]\delta^2\left(\vartheta_\pm\right) \ , \tag{7.4}$$

estos términos generan las siguientes fases en el superpotencial:

$$-3q \pm q_0, \quad -q \pm q_0, \quad +q \pm q_0, \quad 3q \pm q_0 \ . \tag{7.5}$$

Entonces, para superpotenciales cúbicos que son $\mathcal{R}$-simétricos, solo uno de ellos (de los cuatro posibles) sobrevive. Para una spartícula que es su propia antispartícula (7.2), las cuatro posibilidades (7.3) se vuelven una. Para ver en acción el formalismo, consideremos el siguiente superpotencial cúbico

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_+(x,\vartheta) &= \frac{g_+}{3!}\left(\Phi_+(x,\vartheta)\right)^3 + \frac{g_-^*}{3!}\left(\Phi_+^\dagger(x,\vartheta)\right)^3 \ , \\
\mathcal{W}_-^\dagger(x,\vartheta) &= \frac{g_-}{3!}\left(\Phi_-(x,\vartheta)\right)^3 + \frac{g_+^*}{3!}\left(\Phi_-^\dagger(x,\vartheta)\right)^3 \ .
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Restringiéndonos más aun para los casos cuando $g_+ = 0$ o $g_- = 0$, calculamos la superamplitud de un proceso spartícula-antispartícula . A orden más bajo, tenemos solo un superdiagrama para este proceso (Figura 7.1). Para las patas externas escogemos las siguientes proyecciones derechas e izquierdas para los cuatro espinores fermiónicos [ver la regla de súper Feynman para las superpatas externas, Ecs. (5.83)-(5.90)]:

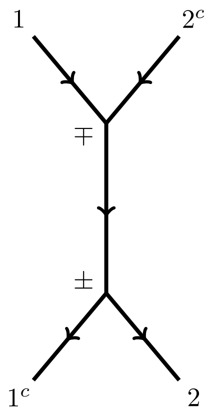

FIGURA 7.1: Superdiagrama de menor orden en una colisión spartícula-antispartícula.

$$1 \to \pm, \quad 1^c \to \mp, \quad 2 \to \mp, \quad 2^c \to \pm \ . \tag{7.7}$$

Los signos de arriba(abajo) corresponden a los casos $g_- = 0 (g_+ = 0)$. La función de onda en el espacio de momentos en el caso del supercampo escalar es simplemente [ver las Ecs. (4.119) and (4.119)]

$$u(\mathbf{p}) = v(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2p^0}}, \quad p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \,. \tag{7.8}$$

La contribución de las patas externas al superdiagrama es

$$\begin{aligned}(2\pi)^{-6}\, u(\mathbf{p}_2)u(\mathbf{p}_1^c)u(\mathbf{p}_2^c)u(\mathbf{p}_1) \,\times\, e^{+ix_1\cdot\left(p_1 - p_2^c\right)}\, e^{+ix_2\cdot\left(p_1^c - p_2\right)} \\ \times\, e^{2\left[s_1\cdot(+i\not{p}_1) - s_2^c\cdot(+i\not{p}_2^c)\right]\vartheta_{1\mp}} \times e^{2\left[s_1^c\cdot(+i\not{p}_1^c) - s_2\cdot(+i\not{p}_2)\right]\vartheta_{2\pm}} \,.\end{aligned} \tag{7.9}$$

Al escribir las exponenciales fermiónicas hemos usado el hecho de que el superpotencial $\mathcal{W}_\pm$ esta evaluado en $(x, \vartheta_\pm)$. La contribución de los vértices y la línea interna es

$$(9\times 4)\times\left[(+i)^2\,(-i)^2\,(3!)^{-2}\,|g_\pm|^2\right]\times\left[(-i)\,(2\pi)^{-4}\int d^4q\,\frac{e^{i\left(x_1 - x_2\right)\cdot q \,-\, 2\vartheta_1^\intercal\epsilon\gamma_5 i\not{q}\vartheta_{2\pm}}}{m^2 + q^2 - i\varepsilon}\right] \,. \tag{7.10}$$

El factor (9×4), surge de las posibles combinaciones de formar las lineas internas y externas. Para obtener la superamplitud debemos integrar con

$$\int d^4x_1\, d^4x_2\, d^2\vartheta_{1\mp}\, d^2\vartheta_{2\pm} \tag{7.11}$$

Notamos que las integrales de las variables bosónicas nos dan

$$\begin{aligned}\int d^4x_1 e^{+ix_1\cdot\left(p_1 - p_2^c + q\right)} &= (2\pi)^4\,\delta^4\left(p_1 - p_2^c + q\right) \,, \\ \int d^4x_2\, e^{+ix_2\cdot\left(p_1^c - p_2 - q\right)} &= (2\pi)^4\,\delta^4\left(p_1^c - p_2 - q\right) \,,\end{aligned} \tag{7.12}$$

después de integrar con d^4q, obtenemos la expresión siguiente para el superdiagrama *sin* las variables fermiónicas $\vartheta_{1\mp}$ y $\vartheta_{2\pm}$ integradas:

$$\tfrac{1}{4} f_{\text{scalar}}\left(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1^c, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_2^c\right)\, e^{-2i\vartheta_{1\mp}\cdot\left(\not{p}_1 s_1 - \not{p}_2^c s_2^c\right)} e^{-2i\vartheta_{2\pm}\cdot\left(\not{p}_1^c s_1^c - \not{p}_2 s_2\right)}\, e^{-2i\vartheta_1\cdot\left(\not{p}_1^c - \not{p}_2\right)\vartheta_{2\pm}} \,. \tag{7.13}$$

con

$$f_{\text{scalar}}\left(\mathbf{p}_{1},\mathbf{p}_{1}^{c},\mathbf{p}_{2},\mathbf{p}_{2}^{c}\right)= (-4i)\,|g_{\pm}|^{2}(2\pi)^{-2}\,\delta^{4}\left(p_{1}\,+\,p_{1}^{c}-p_{2}^{c}-p_{2}\right)$$
$$\times u(\mathbf{p}_{2})u(\mathbf{p}_{1}^{c})u(\mathbf{p}_{2}^{c})u(\mathbf{p}_{1})\;\times\left[m^{2}+(p_{1}^{c}-p_{2})^{2}-i\varepsilon\right]^{-1}\;, \tag{7.14}$$

esta última cantidad, es la expresión para el mismo diagrama pero en el espacio. Aislamos la dependencia en $\vartheta_{1\mp}$ e integramos sobre esta variable:

$$\int d^{2}\vartheta_{1\mp}\,e^{-2i\vartheta_{1\mp}\cdot\left[\not{p}_{1}s_{1}\,-\,\not{p}_{2}^{c}s_{2}^{c}\,+\left(\not{p}_{1}^{c}-\not{p}_{2}\right)\vartheta_{2}\right]}= -4\,\delta^{2}\left[\not{p}_{1}s_{1}\;-\;\not{p}_{2}^{c}s_{2}^{c}\;+\;\left(\not{p}_{1}^{c}-\not{p}_{2}\right)\vartheta_{2}\right]_{\mp}$$
$$=\;4\,(p_{1}^{c}-p_{2})^{2}\delta^{2}\left[\left(\not{p}_{1}^{c}-\not{p}_{2}\right)^{-1}\left(\not{p}_{1}s_{1}\;-\;\not{p}_{2}^{c}s_{2}^{c}\right)\;+\;\vartheta_{2}\right]_{\mp}\;. \tag{7.15}$$

Después de integrar con esta función delta en la variable $\vartheta_{2\pm}$, obtenemos la forma final de la superamplitud para la colisión spartícula-antispartícula:

$$S^{\mp}\left(\cdots\right)\;=\;f_{\text{scalar}}\;\times\;\left(p_{1}^{c}-p_{2}\right)^{2}\times\exp\left[-2i\,h^{\mp}\left(\cdots\right)\right]\;, \tag{7.16}$$

los puntos $(\cdots)$ denotan al superespacio de momentos $\left(\mathbf{p}_{1},s_{1\pm},\mathbf{p}_{1}^{c},s_{1\mp}^{c},\mathbf{p}_{2},s_{2\mp},\mathbf{p}_{2}^{c},s_{2\pm}^{c}\right)$, mientras que la funciones $h^{\mp}$ vienen dadas por

$$h^{\mp}\left(\cdots\right)\;=\;\frac{1}{\left(p_{1}^{c}\;-\;p_{2}\right)^{2}}\left(\not{p}_{1}s_{1}\;-\;\not{p}_{2}^{c}s_{2}^{c}\right)\cdot\left(\not{p}_{1}^{c}-\not{p}_{2}\right)\left(\not{p}_{1}^{c}s_{1}^{c}\;-\;\not{p}_{2}s_{2}\right)\;. \tag{7.17}$$

La posibilidad de escoger tres partículas y tres antipartículas para la dispersión partícula-antipartícula nos da un total de 3^4 combinaciones de estados iniciales y finales. Desde luego que muchos de estos son cero, por ejemplo todos los procesos que provienen expansión impar en las variables fermiónicas en la Ec. (7.17) (esto no es otra cosa que una consecuencia que la conservación de momento angular). Vemos de manera explícita la conveniencia de trabajar en una formulación completamente en el superespacio; la ecuación (7.17) representa una expresión económica para el conjunto de todos los procesos de estas partículas a orden cuadrado en la constante de acoplamiento $|g_{\pm}|$.

7.2. Equivalencia con el modelo de Wess-Zumino

Para establecer una equivalencia entre las formulación no-canónica (aqui desarrollada) y la formulación canónica, escribimos el superpropagador no corregido para el supercampo escalar como aparece en los superpotenciales quirales (por ahora, hemos omitido un factor de $-i$)

$$\begin{aligned}&\delta^2(\vartheta_{1\mp})\delta^2(\vartheta_{2\pm})\tilde{\Delta}^{\pm\mp}\,(x_1, \vartheta_1, x_2, \vartheta_2)\\ &\qquad = \delta^2(\vartheta_{1\mp})\delta^2(\vartheta_{2\pm})\left[1 \,+\, 2\vartheta_1\cdot(-\partial\!\!\!/_1)\vartheta_{2\mp} \,-\, 4m^2\,\delta^2(\vartheta_{1\pm})\delta^2(\vartheta_{2\mp})\right]\Delta_F(x_1 - x_2)\ .\end{aligned} \tag{7.18}$$

Haciendo uso de $(\Box - m^2)\,\Delta_F(x) \,=\, -\delta^4(x)$, escribimos

$$\begin{aligned}&\delta^2(\vartheta_{1\mp})\delta^2(\vartheta_{2\pm})\tilde{\Delta}^{\pm\mp}\,(x_1, \vartheta_1, x_2, \vartheta_2)\\ &\qquad = \delta^2(\vartheta_{1\mp})\delta^2(\vartheta_{2\pm})\,\Delta_F\left(x^{\pm}_{12}\right) \,-\, 4\,\delta^4(\vartheta_1)\,\delta^4(\vartheta_2)\delta^4(x_1 - x_2)\ .\end{aligned} \tag{7.19}$$

El término $+\,4i\,\delta^4(\vartheta_1)\delta^4(\vartheta_2)\delta^4(x_1 - x_2)$ es invariante de Lorentz pero no invariante supersimétrico. Puesto que esta expresión es local en el superespacio, la parte no-covariante del superpropagador induce términos no covariantes en las interacciones. Para el caso de superpotenciales de supercampos arbitrarios, para darnos una idea de su forma, recordamos que aunque la función paso es invariante de Lorentz (excepto en separación tipo-espacial donde para lograr la invariancia de Lorentz los conmutadores deben de hacerse cero) no es invariante supersimétrico. La función paso ω seria invariante supersimétrica, si estuviese evaluada en $x^{\pm\,0}_{12}$ o incluso en $x^0_{12} - \vartheta_1 \cdot \gamma^0\vartheta_2$. Tomando en cuenta que las funciones Δ_+ que aparecen en la Ec. (7.19) están evaluadas en $x^{\pm\,0}_{12}$, escribimos

$$\omega\left(x^0_{12}\right) \,=\, \omega\left(x^{\pm\,0}_{12}\right) \,+\, \varsigma_\pm\,(z_1, z_2)\,, \quad z = (x, \vartheta)\ . \tag{7.20}$$

Aquí, $\varsigma_\pm\,(z_1, z_2)$ es el negativo de los coeficientes de orden mayor que cero en la expansión en serie de Taylor de las variables fermiónicas en $\omega\left(x^{\pm\,0}_{12}\right)$. El operador unitario a segundo orden en la serie de Dyson esta1 dado por

$$U^{(2)} = \,(-i)^2\int d^8z_1 d^8z_2\,\omega\left(x^0_{12}\right)\mathcal{H}(z_1)\mathcal{H}(z_2)\ . \tag{7.21}$$

Para el caso de superpotenciales, esta última expresión queda como

$$\begin{aligned} U^{(2)} &= (-i)^2 \int d^8 z_1 d^8 z_2 \, \left[\omega\left(x^0_{12}\right) \mathcal{H}_\pm(z_1)\mathcal{H}^*_\mp(z_2) \,+\, \omega\left(x^0_{12}\right) \mathcal{H}^*_\mp(z_1)\mathcal{H}_\pm(z_1) \,+\, \ldots\right] \\ &= U^{(2)}_{\mathrm{i}} \,+\, U^{(2)}_{\mathrm{n.i}} \,+\, \ldots \,, \end{aligned} \tag{7.22}$$

con el término covariante de super Poincaré

$$U^{(2)}_{\mathrm{i}} = (-i)^2 \int d^8 z_1 d^8 z_2 \, \left(\omega\left(x^{\pm 0}_{12}\right) \mathcal{H}_\pm(z_1)\mathcal{H}^*_\mp(z_2) \,+\, \omega\left(x^{\mp 0}_{21}\right) \mathcal{H}^*_\mp(z_2)\mathcal{H}_\pm(z_1)\right) \tag{7.23}$$

y el término no covariante

$$U^{(2)}_{\mathrm{n.i}} = (-i)^2 \int d^8 z_1 d^8 z_2 \left(\varsigma_\pm(z_1, z_2) \,\mathcal{H}_\pm(z_1)\mathcal{H}^*_\mp(z_2) \,+\, \varsigma_\mp(z_2, z_1) \,\mathcal{H}^*_\mp(z_2)\mathcal{H}_\pm(z_1)\right) \,. \tag{7.24}$$

Debido a las funciones delta fermionicas en los superpotenciales, podemos evaluar las funciones paso en $\left(x^0_{12} \,-\, 2\vartheta_{1\pm} \cdot \gamma^0 \vartheta_{2\mp}\right)$, permitiendo escribir la parte no covariante de las funciones paso como

$$\varsigma_\pm(z_1, z_2) = 2\vartheta_{1\pm} \cdot \gamma^0 \vartheta_{2\mp} \, \delta\left(x^0_{12}\right) \,-\, 4\,\delta^2(\vartheta_{1\pm})\,\delta^2(\vartheta_{2\mp}) \,\frac{\partial}{\partial x^0_1}\,\delta\left(x^0_{12}\right) \,. \tag{7.25}$$

Podemos ver de esta expresión que los otros términos [expresados como $\ldots$ en (7.22)] no necesitan ser corregidos. Notando que $\varsigma_-(z_1, z_2) \,=\, -\varsigma_+(z_2, z_1)$, escribimos

$$U^{(2)}_{\mathrm{n.i}} = (-i)^2 \int d^8 z_1 d^8 z_2 \, \varsigma_\pm(z_1, z_2) \left[\mathcal{V}_\pm(z_1), \mathcal{V}^*_\mp(z_2)\right] \,. \tag{7.26}$$

Escribimos el superpotencial general en componentes:

$$\mathcal{W}_\pm(x, \vartheta) \,=\, \mathcal{C}\,(x_\pm) \,+\, \sqrt{2}\,\vartheta_\pm \cdot \gamma_5\,\Omega\,(x_\pm) \,+\, \delta^2(\vartheta_\pm)\vartheta \cdot \vartheta_\pm\,\mathcal{F}\,(x_\pm) \,, \tag{7.27}$$

e integramos sobre las variables fermiónicas en (7.26), para obtener

$$U^{(2)}_{\text{n.i}} = +4 \int d^4x_1 d^4x_2 \left(i\delta\left(x^0_{12}\right) \sum_\alpha \left\{ \left[\Omega\left(x_1\right)\right]_{\pm\alpha}, \left[\Omega^*\left(x_2\right)\right]_{\pm\alpha} \right\} \right.$$
$$\left. + \, \delta\left(x^0_{12}\right) \frac{\partial}{\partial x^0_1} \left[\mathcal{C}\left(x_1\right), \mathcal{C}^*\left(x_2\right)\right] \right) \ . \tag{7.28}$$

Cualquier (anti)conmutador generará productos de campos multiplicados por las funciones $\Delta(x) = \Delta_+(x) - \Delta_+(-x)$ y sus derivadas. Debido a las funciones delta en el tiempo y a ($\Box\Delta(x) = m^2\Delta(x)$), los únicos términos que sobreviven en el anticonmutador(conmutador) de la Ec. (7.28), son aquellos en los que un número (impar)par de derivadas temporales actúan sobre $\Delta(x)$, generando funciones delta $\delta(x^0_{12})\frac{\partial}{\partial x^0_1}\Delta\left(x_1 - x_2\right) = -i\delta^4(x_1 - x_2)$. Esto nos permite escribir

$$U^{(2)}_{\text{n.i}} = i \int d^4x_1 d^4x_2 \, \delta^4(x_1 - x_2) F\left(x_1\right) \ , \tag{7.29}$$

con $F\left(x_1\right)$ dada explicitamente por el término del factor integral en d^4x_1 en (7.28). Entonces, debemos reemplazar

$$\mathcal{V}\left(x, \vartheta\right) \to \mathcal{V}\left(x, \vartheta\right) + \delta^4\left(\vartheta\right) F\left(x\right) \ , \tag{7.30}$$

de manera que cancelemos el término no covariante a menor orden (7.28). Es evidente que este resultado se extiende para el caso de potenciales generales, puesto que el efecto de considerar la expansión completa en las variables fermiónicas, es generar derivadas de mayor orden en el tiempo. Como hemos argumentado en la sección 5.4, el punto importante es que siempre tenemos una función delta $\delta(x^0_1 - x^0_2)$, asegurándonos contratérminos locales en el tiempo, nuestra suposición principal. La función $F\left(x_1\right)$ es en general, no solo supersimetricamente no covariante sino también Lorentz no covariante. Para el caso del supercampo escalar, todos los contratérminos son covariantes de Lorentz. De las Ecs. (7.6) y (7.27), podemos ver que

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}\left(x\right) &= \frac{g_+}{3!}\left(\phi_+\right)^3 + \frac{g_-}{3!}\left(\phi^*_-\right)^3 \\
\Omega\left(x\right) &= -\frac{g_+}{2}\left(\phi_+\right)^2\psi + \frac{g_-}{2}\left(\phi^*_-\right)^2\left[\epsilon\gamma_5\beta\psi^*\right] \\
\mathcal{F}\left(x\right) &= g_+\left(-\phi_+\psi^\intercal\epsilon\psi_+ + m\left(\phi_+\right)^2\phi_-\right) \\
&\quad + g_-\left(-\phi^*_-\psi^\dagger\epsilon\psi^*_- + m\left(\phi^*_-\right)^2\phi^*_+\right) \ .
\end{aligned} \tag{7.31}$$

Para este superpotencial, las correcciones a orden menor en (7.28) son [1]

$$
\begin{aligned}
i\delta\left(x^0_{12}\right)\sum_{\alpha}\left\{\left[\Omega\left(x_1\right)\right]_{\pm\alpha},\left[\Omega^*\left(x_2\right)\right]_{\pm\alpha}\right\} &= -2\delta\left(x^0_{12}\right)\frac{\partial}{\partial x^0_1}\left[\mathcal{C}\left(x_1\right),\mathcal{C}^*\left(x_2\right)\right] \\
&= \tfrac{1}{2}\left[i\delta^4\left(x_1-x_2\right)\right]\,F\left(x_2\right)\ , \qquad (7.32)
\end{aligned}
$$

donde $F\left(x_2\right)$ es la función que aparece en (7.48) y esta dada por

$$
F\left(x_2\right) \ = \ |g_+|^2\left(\phi_+\left(x_2\right)\right)^2\left(\phi_+^*\left(x_2\right)\right)^2 + |g_-|^2\left(\phi_-\left(x_2\right)\right)^2\left(\phi_-^*\left(x_2\right)\right)^2 \ . \qquad (7.33)
$$

El potencial covariante en el espacio,

$$
-iV\left(x\right) = \mathcal{F}\left(x\right) - \mathcal{F}\left(x\right)^* \ , \qquad (7.34)
$$

adquiere la forma

$$
\begin{aligned}
-iV\left(x\right) = \ & g_+\left(-\phi_+\psi^{\intercal}\epsilon\psi_+ + m\ \left(\phi_+\right)^2\phi_-\right) + g_-\left(-\phi_-\psi^{\intercal}\epsilon\psi_- - m\left(\phi_-\right)^2\phi_+\right) \\
& + g_-^*\left(-\phi_-^*\psi^{\dagger}\epsilon\psi_-^* + m\left(\phi_-^*\right)^2\phi_+^*\right) + g_+^*\left(-\phi_+^*\psi^{\dagger}\epsilon\psi_+^* - m\left(\phi_+^*\right)^2\phi_-^*\right) \ . \qquad (7.35)
\end{aligned}
$$

Finalmente, después de integrar las variables fermiónicas en la Ec. (7.49), el potencial resultante (corregido) en el espaciotiempo es:

$$
\begin{aligned}
-\mathcal{H}_{\text{int}}\left(x\right) = & -F\left(x\right) - V\left(x\right) \\
= & -ig_+\left(-\phi_+\psi^{\intercal}\epsilon\psi_+ + m\ \left(\phi_+\right)^2\phi_-\right) - ig_-\left(-\phi_-\psi^{\intercal}\epsilon\psi_- - m\left(\phi_-\right)^2\phi_+\right) \\
& - ig_-^*\left(-\phi_-^*\psi^{\dagger}\epsilon\psi_-^* + m\left(\phi_-^*\right)^2\phi_+^*\right) - ig_+^*\left(-\phi_+^*\psi^{\dagger}\epsilon\psi_+^* - m\left(\phi_+^*\right)^2\phi_-^*\right) \\
& - \left(|g_+|^2\left(\phi_+\right)^2\left(\phi_+^*\right)^2 + |g_-|^2\left(\phi_-\right)^2\left(\phi_-^*\right)^2\right) \ . \qquad (7.36)
\end{aligned}
$$

El formalismo canónico. Antes de hacer el comparativo explícito del potencial obtenido [Ec. (7.54)] con el modelo de Wess-Zumino, es necesario primero exponer los rudimentos del formalismo canónico. Comenzamos escribiendo la acción en términos de la Lagrangiana, esta a su vez es escrita en términos de la densidad

[1]Para prepararnos para la teoría del campo, hemos ignorado los términos bilineales cuando trajimos el termiono $\left[\mathcal{C}\left(x_1\right),\mathcal{C}^*\left(x_2\right)\right]$ a la forma (7.51).

Lagrangiana en el superespacio:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int dt L \ , \\ L &= \int d^3x d^4\vartheta\, \mathcal{L}\left(\Phi, \partial_\mu \Phi\right) \ . \end{aligned} \tag{7.37}$$

Debido a la condición de quiralidad de los supercampos, hacemos

$$\Phi_{\pm\ell} \ = \ \mathcal{D}^2_{\mp} S_{\pm\ell}, \quad \Phi^\dagger_{\pm} \ = \ -\mathcal{D}^2_{\mp} S^\dagger_{\pm\ell} \ , \tag{7.38}$$

con $\mathcal{D}^2_{\mp} \ = \ \frac{1}{2}\mathcal{D}^\intercal \epsilon \mathcal{D}_\pm$ y donde $S_{\pm\ell}$ son campos generales sin restricciones (los cuales podemos variar arbitrariamente), el índice ℓ representa el tipo de supercampo (escalar, espinorial, vectorial, etc.). Variamos la acción con respecto a estos supercampos:

$$\delta\mathcal{A} \ = \ \sum_{\varepsilon,\ell} \int d^4x d^4\vartheta \left\{ \mathcal{D}^2_{-\varepsilon} \left[\frac{\delta L}{\delta \Phi_{\varepsilon\ell}} \ - \ \frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{\Phi}_{\varepsilon\ell}} \right] \right\} \delta S_{\varepsilon\ell} \ . \tag{7.39}$$

No hemos realizado las variaciones con respecto a los supercampos conjugados $S^\dagger_{\pm\ell}$,porque estamos suponiendo que la Lagrangiana es real; las ecuaciones del movimiento que surgen de las variaciones de los supercampos conjugados serán simplemente el conjugado de las ecuaciones del movimiento de los supercampos (sin conjugar). Puesto que

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi_{\varepsilon\ell}} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{\varepsilon\ell}} \ - \ \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \Phi_{\varepsilon\ell}} \ , \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\Phi}_{\varepsilon\ell}} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_{\varepsilon\ell}} \ , \end{aligned} \tag{7.40}$$

tenemos que

$$\delta\mathcal{A} \ = \ \sum_{\varepsilon,\ell} \int d^4x d^4\vartheta \left\{ \mathcal{D}^2_{-\varepsilon} \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial \Phi_{\varepsilon\ell} / \partial x^\mu\right)} \ - \ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{\varepsilon\ell}} \right] \right\} \delta S_{\varepsilon\ell} \ . \tag{7.41}$$

Hacemos la partición de la densidad Lagrangiana en términos del potencial de Kahler y el superpotencial $\mathcal{W}_\pm$,

$$\mathcal{L}\left(\Phi, \partial_\mu \Phi\right) \ = \ -\tfrac{1}{4}\mathcal{K} + \sum_{\varepsilon}^{+,-} \delta^2\left(\vartheta_{-\varepsilon}\right) \mathcal{W}_\varepsilon \ , \tag{7.42}$$

donde

$$\mathcal{D}_{-\varepsilon}\mathcal{W}_{\varepsilon} \,=\, 0, \quad \mathcal{W}^{*}_{-\varepsilon} \,=\, -\mathcal{W}_{\varepsilon} \quad \mathcal{K} \,=\, \mathcal{K}^{*} \;. \tag{7.43}$$

Podemos ver que:

$$\begin{aligned}\sum_{\varepsilon',\varepsilon}^{+,-} \mathcal{D}^{2}_{-\varepsilon} \left\{ \delta^{2}\left(\vartheta_{-\varepsilon'}\right) \left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial}{\partial\left(\partial\Phi_{\varepsilon\ell}/\partial x^{\mu}\right)} - \frac{\partial}{\partial\Phi_{\varepsilon\ell}} \right] \mathcal{W}_{\varepsilon'} \right\} \\ = -\sum_{\varepsilon}^{+,-} \left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial}{\partial\left(\partial\Phi_{\varepsilon\ell}/\partial x^{\mu}\right)} - \frac{\partial}{\partial\Phi_{\varepsilon\ell}} \right] \mathcal{W}_{\varepsilon} \;,\end{aligned} \tag{7.44}$$

para reescribir la Ec. (7.41) como

$$\delta\mathcal{A} \,=\, \sum_{\varepsilon} \int d^{4}x d^{4}\vartheta \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial}{\partial\left(\partial\Phi_{\varepsilon\ell}/\partial x^{\mu}\right)} - \frac{\partial}{\partial\Phi_{\varepsilon\ell}} \right] \left(-\frac{1}{4}\mathcal{D}^{2}_{-\varepsilon}\mathcal{K} \,-\, \mathcal{W}_{\varepsilon} \right) \right\} \delta S_{\varepsilon\ell} \;. \tag{7.45}$$

Cuando se cumple que $\delta\mathcal{A} \,=\, 0$, para variaciones arbitrarias $\delta S_{\varepsilon\ell}$, tenemos que el término entre llaves en la Ec. (7.45) tiene que ser cero, esto es,

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial}{\partial\left(\partial\Phi_{\varepsilon\ell}/\partial x^{\mu}\right)} - \frac{\partial}{\partial\Phi_{\varepsilon\ell}} \right] \left(\tfrac{1}{4}\mathcal{D}^{2}_{-\varepsilon}\mathcal{K} \,+\, \mathcal{W}_{\varepsilon} \right) \,=\, 0 \;, \tag{7.46}$$

Nos restringimos a potenciales de Kahler renormalizables y superpotenciales que no dependen de las derivadas ordinarias (covariantes), esto es,

$$\mathcal{K} = \, \Phi^{\dagger}_{-}\Phi_{+} \,+\, \Phi^{\dagger}_{+}\Phi_{-}, \tag{7.47}$$

y

$$\frac{\partial\,\mathcal{W}_{\pm}}{\partial\left(\partial\Phi_{\pm\ell}/\partial x^{\mu}\right)} \,=\, 0 \;. \tag{7.48}$$

En este caso, las ecuaciones del movimiento se ven como

$$\tfrac{1}{4}\mathcal{D}^{2}_{\mp}\Phi^{*}_{\mp\ell} \,=\, -\frac{\partial\mathcal{W}_{\pm}}{\partial\Phi_{\pm\ell}} \quad \tfrac{1}{4}\mathcal{D}^{2}_{\mp}\Phi_{\mp\ell} \,=\, -\frac{\partial\mathcal{W}_{\pm}}{\partial\Phi^{\dagger}_{\pm\ell}} \;. \tag{7.49}$$

Expandiendo los supercampos $\Phi_{\pm\ell}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\Phi_{\pm\ell} &= \phi_{\pm\ell} - \sqrt{2}\vartheta_{\pm}^{\intercal}\epsilon\,\psi_{\pm\ell} \pm \vartheta_{\pm}^{\intercal}\epsilon\vartheta_{\pm}\,\mathcal{F}_{\pm\ell} \\ \Phi_{\pm\ell}^{*} &= \phi_{\mp\ell}^{*} - \sqrt{2}\vartheta_{\pm}^{\intercal}\epsilon\left[(-)^{\Phi+1}\epsilon\gamma_5\beta\psi_{\mp\ell}^{*}\right] \pm \vartheta_{\pm}^{\intercal}\epsilon\vartheta_{\pm}\,\mathcal{F}_{\mp\ell}^{*}\ ,\end{aligned} \tag{7.50}$$

tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\mp}^{2}\Phi_{\mp\ell}(x,\vartheta) &= \pm 2\left\{\mathcal{F}_{\mp\ell}(x_{\pm}) - \sqrt{2}\vartheta_{\pm}^{\intercal}\epsilon\left[-\partial\!\!\!/\psi_{\ell}(x_{\pm})\right] \pm \vartheta^{\intercal}\epsilon\vartheta_{\mp}\,\Box\phi_{\mp\ell}(x_{\pm})\right\}\ , \\ \mathcal{D}_{\mp}^{2}\Phi_{\mp\ell}^{\dagger}(x,\vartheta) &= \pm 2\left\{\mathcal{F}_{\pm\ell}^{*}(x_{\pm}) - \sqrt{2}\vartheta_{\pm}^{\intercal}\epsilon\left[-\partial\!\!\!/(-)^{\Phi_\ell+1}\epsilon\gamma_5\beta\psi_{\ell}^{*}(x_{\pm})\right] \pm \vartheta^{\intercal}\epsilon\vartheta_{\mp}\,\Box\phi_{\pm\ell}^{*}(x_{\pm})\right\}\ .\end{aligned} \tag{7.51}$$

El término de orden cero de cualquier función $F(\Phi_{\pm}, \Phi_{\pm}^{\dagger})$ es simplemente $F(\phi_{\pm}, \phi_{\pm}^{*})$, entonces las ecuaciones del movimiento para las supercampos auxiliares son

$$\pm\frac{1}{2}\mathcal{F}_{\pm\ell}^{*} = -\frac{\partial\mathcal{W}_{\pm}(\phi_{\pm},\phi_{\mp}^{*})}{\partial\phi_{\pm\ell}}, \quad \pm\frac{1}{2}\mathcal{F}_{\mp\ell} = -\frac{\partial\mathcal{W}_{\mp}(\phi_{\mp},\phi_{\pm}^{*})}{\partial\phi_{\mp\ell}^{*}} \tag{7.52}$$

O bien, haciendo

$$\mathcal{W}_{\pm} = \pm\frac{1}{2}f\left(\Phi_{\pm},\Phi_{\pm}^{\dagger}\right)\ , \tag{7.53}$$

podemos escribir equivalentemente:

$$\mathcal{F}_{\pm\ell} = -\left(\frac{\partial f(\phi_{\pm},\phi_{\mp}^{*})}{\partial\phi_{\pm\ell}}\right)^{*}, \qquad \mathcal{F}_{\mp\ell}^{*} = -\left(\frac{\partial f(\phi_{\pm},\phi_{\mp}^{*})}{\partial\phi_{\mp\ell}^{*}}\right)^{*}\ . \tag{7.54}$$

En las convenciones que estamos usando, los términos D y $\mathcal{F}_{\pm}$ del potencial de Kahler y del superpotencial vienen dados por

$$\int d^4x[\cdots]_D = -\frac{1}{2}\int d^4x d^4\vartheta[\cdots]\ , \tag{7.55}$$

$$\int d^4x[\cdots]_{\mathcal{F}_{\pm}} = \pm\frac{1}{2}\int d^4x d^4\vartheta\,\delta(\vartheta_{\mp})[\cdots]\ , \tag{7.56}$$

respectivamente. Al integrar en las variables fermiónicas obtenemos la acción en el espacio

$$\mathcal{A}^{\text{espacio}} = \int d^4\vartheta \left[-\tfrac{1}{4}\mathcal{K} + \delta^2(\vartheta_-)\mathcal{W}_+ + \delta^2(\vartheta_+)\mathcal{W}_-\right]$$
$$= \frac{1}{2}\int d^4x \left[\sum_\ell \left(\Phi^*_{-N}\Phi_{+\ell} + \Phi^*_{+\ell}\Phi_{-\ell}\right)\right]_{\mathcal{D}} + \int d^4x \left([f_+]_{\mathcal{F}_+} + [f_-]_{\mathcal{F}_-}\right) , \tag{7.57}$$

Entonces, la Lagrangiana en el espacio viene dada por

$$\mathcal{L}^{\text{espacio}} = -\frac{1}{2}\left[\sum_\ell \left(\Phi^*_{-\ell}\Phi_{+\ell} + \Phi^*_{+\ell}\Phi_{-\ell}\right)\right]_{\mathcal{D}} + [f_+]_{\mathcal{F}_+} + [f_-]_{\mathcal{F}_-} . \tag{7.58}$$

Al evaluar los campos auxiliares (7.54) para obtener la Lagrangiana exclusivamente como función de los campos que se propagan, tenemos

$$\mathcal{L}^{\text{espacio}} = \mathcal{L}^{\text{libre}} + \mathcal{L}^{\text{int.}} , \tag{7.59}$$

donde

$$\mathcal{L}^{\text{libre}} = -\sum_\ell \left(\partial_\mu\phi^\dagger_{+\ell}\partial^\mu\phi_{+\ell} + \partial_\mu\phi^\dagger_{-\ell}\partial^\mu\phi_{-\ell} + \bar{\psi}_\ell\partial\!\!\!/\psi_\ell\right) \tag{7.60}$$

y

$$(-)\mathcal{L}^{\text{int}} = \sum_\ell \left|\frac{\partial f(\phi_+,\phi^*_-)}{\partial\phi_{+\ell}}\right|^2 + \sum_\ell \left|\frac{\partial f(\phi_+,\phi^*_-)}{\partial\phi^*_{-\ell}}\right|^2 + (-)^{\Phi_M}\mathrm{Re}\left\{\left(\psi^\dagger_{-\ell}\epsilon\psi^*_{-M}\right)\left(\frac{\partial f(\phi_+,\phi^*_-)}{\partial\phi^*_{-M}\partial\phi^*_{-\ell}}\right)\right\}$$
$$+\mathrm{Re}\left\{\frac{(-)^{\Phi_\ell}}{2}\left(\psi^\intercal_{+\ell}\epsilon\psi_{+M}\right)\frac{\partial f(\phi_+,\phi^*_-)}{\partial\phi_{+M}\partial\phi_{+\ell}}\right\} - 2\mathrm{Re}\left\{\left(\bar{\psi}_\ell\psi_{+M}\right)\frac{\partial f(\phi_+,\phi^*_-)}{\partial\phi_{+M}\partial\phi^*_{-\ell}}\right\} \tag{7.61}$$

Para el caso del superpotencial trilinear escalar, escribimos

$$(-2)\, f\left(\Phi_+,\Phi^\dagger_+\right) = 2m\Phi^\dagger_+\Phi_+ + \frac{ig}{3!}\Phi^3_+ + \frac{ig'}{3!}\Phi^{\dagger 3}_+ , \tag{7.62}$$

de aqui podemos ver que

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f\left(\phi_+,\phi_-^*\right)}{\partial\phi_+} = -m\phi_-^* - ig\phi_+^2\ , \quad \frac{\partial f\left(\phi_+,\phi_-^*\right)}{\partial\phi_-^*} = -m\phi_+ - ig'\phi_-^{*2}\ ,\\
&\frac{\partial f\left(\phi_-^*,\phi_-^*\right)}{\partial\phi_-^*\partial\phi_-^*} = -2ig'\phi_-^*, \quad \frac{\partial f\left(\phi_+,\phi_+\right)}{\partial\phi_+\partial\phi_+} = -2ig\phi_+\\
&\frac{\partial f\left(\phi_+,\phi_+\right)}{\partial\phi_+\partial\phi_-^*} = -m
\end{aligned} \tag{7.63}$$

Por lo que para este caso, las Ecs. (7.60) y (7.61) se reducen a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{\text{libre}} =& -\partial_\mu\phi_+^*\partial^\mu\phi_+ - \partial_\mu\phi_-^\dagger\partial^\mu\phi_- - \bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi - m^2\left(\phi_-^*\phi_- - \phi_+^*\phi_+\right) - m\bar{\psi}\psi\\
\mathcal{L}^{\text{int.}} =&\ im\left(g'^*\phi_+\phi_-^2 - g'\phi_+^*\phi_-^{2*}\right) + i\left(g'\psi^\dagger\epsilon\psi_-^*\phi_-^* + g'^*\psi^\intercal\epsilon\psi_-\phi_-\right)\\
&+i\left(g\psi^\intercal\epsilon\psi_+\phi_+ + g^*\psi^\dagger\epsilon\psi_+^*\phi_+^*\right) + im\left(g^*\phi_-^*\phi_+^{*2} - g\phi_-\phi_+^2\right)\\
&-|g|^2\left(\phi_+^*\phi_+\right)^2 - |g'|^2\left(\phi_-^*\phi_-\right)^2\ .
\end{aligned} \tag{7.64}$$

* * *

Haciendo la identificación $g = g_+$ y $g = g_-^*$, podemos notar que la Lagrangiana de interacción (7.64) (obtenida con los métodos canónicos) y el negativo del Hamiltoniano de interacción (7.54) (obtenido con nuestros métodos nocanónicos), coinciden:

$$\mathcal{L}^{\text{int.}} = -\mathcal{H}^{\text{int.}}\ . \tag{7.65}$$

Como hemos demostrado de manera explícita en el caso del supercampo escalar, *la corrección a orden más bajo de los términos no covariantes que surgen del orden temporal en el formalismo nocanónico, corresponde en el formalismo canónico, a los términos de interacción que surgen después de evaluar los campos auxiliares en las ecuaciones del movimiento.* Desde el punto de vista del formalismo de Weinberg en el superespacio aquí desarrollado, este es el origen de los supercampos auxiliares.

Capítulo 8

Conclusiones

En esta tesis hemos resuelto el problema de encontrar funciones de onda en el superespacio, para superpartículas masivas de cualquier superespín. El sustento de este trabajo y el desarrollo del mismo, descansan en el artículo [36].

Ha sido posible desarrollar la teoría cuántica de los campos en el superespacio, usando puramente el formalismo de operadores y sin recurrir a ninguna regla de cuantización. Nuestro punto de partida ha sido el de promover el enfoque de Weinberg a la teoría del campo, del espacio al superespacio. Hemos logrado

- Construir bases para el superespacio de Hilbert. A diferencia del caso en el espacio, los superestados encontrados normalizan con el mapeo exponencial fermiónico.

- Construir superestados completamente covariantes bajo transformaciones arbitrarias del grupo de súper Poincaré. Hemos demostrado que estos supermultipletes son equivalentes a los estados encontrados usando los métodos usuales en componentes.

- Establecer que es lo que entendemos por una supermatriz S covariante.

- Obtener superamplitudes perturbativas en forma de diagramas de súper Feynman. Esto se ha hecho introduciendo interacciones que usan dos supercampos quirales $\Phi_{+\ell}$ y $\Phi_{-\ell}$ y sus adjuntos, para cualquier representación del grupo de Lorentz.

- Dar fórmulas explícitas para las transformaciones de los supercampos bajo transformaciones de paridad, carga, inversión temporal y simetrías $\mathcal{R}$.

- Establecer una equivalencia explícita entre nuestro método y el formalismo canónico para el caso del supercampo quiral masivo (el afamado modelo de Wess-Zumino).

- Demostrar la conveniencia de nuestra formulación mediante el cálculo a orden más bajo en teoría de perturbaciones de una superpartícula escalar con su respectiva antispartícula.

Perspectivas futuras

Somos de la opinión que nuestros descubrimientos pueden abrir varias puertas para seguir avanzando en el entendimiento de las teorías supersimétricas. Nos permitimos citar algunas líneas de investigación que creemos son asequibles en el corto y mediano plazo y que además son de interés para la comunidad que trabaja en supersimetría:

- Las generalización del formalismo para supersimetrías $\mathcal{N}$-extendidas se puede realizar de manera directa, puesto que los estados generales de superpartícula en el superespacio de supermomento $\mathcal{N}$-extendido pueden ser definidos en términos de los estados en el superespacio de supermomento $(\mathcal{N}-1)$-extendido. Esto es, los superestados presentados en la sección (2.3) admiten una generalización recursiva.

- Nuestra propuesta podría encontrar aplicaciones más allá de la teorías con superespín arbitrario, por ejemplo, extendiendo resultados en formulaciones de la teoría cuántica de los campos, basadas en el formalismo de operadores, del caso del espacio al superespacio. La obtención de los superestados de muchas superpartículas, $|\mathcal{A}\rangle$, que transforman de manera completamente covariante bajo transformaciones de súper Poincaré, ha hecho posible que los elementos generales de matriz:

$$\langle \mathcal{M} \,| \mathcal{O}(z_1, \ldots, z_n) | \,\mathcal{N} \rangle \ , \tag{8.1}$$

(para operadores $\mathcal{O}$ en el superespacio, formados con supercampos en el esquema de Heisenberg, evaluados en $(z_1, \ldots, z_n)$ y posiblemente ordenados temporalmente), sean expresados como otros elementos de matriz evaluados en los puntos $z_1 - z, \ldots, z_n - z$, con z arbitrario. Estas traslaciones son usadas en elementos de matriz intermediarios que se encuentran en trabajos basados en el formalismo de operadores, como por ejemplo:

- Las representaciones espectrales [41, 42]. Hasta el momento, solamente resultados obtenidos en el contexto de los métodos funcionales y limitados al caso del supercampo escalar son conocidos [44]).
- La expansión en productos de operadores (OPE) [45]. Al igual que el caso de la representación espectral, solamente el caso escalar es conocido [43]).
- Simetrías globales rotas espontáneamente [46].

- Escribir de una manera completamente covariante resultados que normalmente son presentados en componentes, tales como las restricciones cinematicas en supergravedad [12] y las amplitudes a nivel árbol en QCD que se obtienen usando amplitudes supersimétricas [47].

- Siguiendo la misma línea que se encuentra entre las formulaciones Lagrangianas y puramente de la matriz S, podríamos extender los resultados de

  - La formulación las reglas de Feynman para particulas sin masa [31], cuya establecimiento debe ser directo, pero el comparativo con el límite de masa cero de nuestros resultados sera útil.
  - Dimensiones extra [48].
  - Teorías del campo con invariancia de escala y conforme. [49, 50].

- Extensiones para obtener superfunciones de onda para el caso de teorías de norma. Vemos como asequible investigar en las líneas de las referencias [12, 30, 51] (de las cuales evidencia de nuevos teoremas suaves y nuevas relaciones de Ward han sido recientemente encontradas [52, 53]).

- Pertubativemente, la mayoria de las teorías supersimétricas rotas (mediante algún mecanismo) preservan el número de partículas de las teorías exactas. Entonces, el formalismo aquí presentado puede en principio ser extendido para calcular amplitudes en teorías supersimétricas rotas. Esto podria realizarse extendiendo las súper reglas de Feynman para incluir términos explícitos de rompimiento de supersimétrica que se originan como constantes de acoplamiento locales en las variables fermionicas (llamados usualmente campos externos espurios). Estas ideas han sido explotadas usando métodos funcionales, en teorías rotas espontáneamente, para encontrar relaciones explícitas entre contratérminos ultravioletas de los términos de rompimiento espontaneo y teorías supersimétricas puramente rígidas (simetría global) [54, 55].

Apéndice A

Notación y convenciones

Durante todo el texto, hemos usado la notación y las convenciones de la referencia [17], las cuales escribimos en este apéndice.

Representamos los índices de Dirac por las primeras letras del alfabeto griego, $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$, etcétera. Los índices de Lorentz están siendo representados por las últimas letras del mismo alfabeto, μ, ν, μ', ν', etcétera. Tomamos la métrica de Lorentz como

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix} \,, \tag{A.1}$$

siguiendo la costumbre de denotar la última componente con el número cero. La representación de Dirac [la representación $\left(\frac{1}{2},0\right) \oplus \left(0,\frac{1}{2}\right)$]

$$D\left[\Lambda\right] = \exp\left[\tfrac{i}{2} w_{\mu\nu} \mathcal{J}^{\mu\nu}\right] , \tag{A.2}$$

es generada por las matrices

$$\mathcal{J}^{\mu\nu} = \tfrac{-i}{4}[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}] \,. \tag{A.3}$$

Aquí, los símbolos γ^{μ} son las matrices de Dirac que satisfacen las relaciones de anticonmutación con signo positivo,

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2\eta^{\mu\nu} \tag{A.4}$$

Nos apegamos al siguiente conjunto particular para las matrices γ^μ:

$$\gamma^0 = -i\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_i = -i\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} . \tag{A.5}$$

donde las matrices σ_i, son las matrices de Pauli,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{A.6}$$

La matriz $\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, viene dada por

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \tag{A.7}$$

Introducimos

$$\epsilon = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{A.8}$$

y

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} . \tag{A.9}$$

Estas matrices nos ayudan a convertir las representación transpuesta-inversa y transpuesta-conjugada de la representación de Dirac, ya que satisfacen las relaciones

$$\beta\gamma^\mu = -\gamma^{\mu\dagger}\beta, \quad \epsilon\gamma_5\gamma^\mu = -\gamma^{\mu\intercal}\epsilon\gamma_5 . \tag{A.10}$$

y por lo tanto

$$D(\Lambda^{-1})^\dagger = \beta D(\Lambda)\beta^{-1}, \quad D(\Lambda^{-1})^\intercal = \epsilon\gamma_5 D(\Lambda)\left(\epsilon\gamma_5\right)^{-1} . \tag{A.11}$$

Esto nos demuestra que las representaciones $D(\Lambda)^*$ y $D(\Lambda)^\intercal$ son representaciones equivalentes a $D(\Lambda)$ (en el sentido de la teoría de representaciones).

Apéndice B

Superfunciones, derivadas e integrales

En esta apéndice damos fórmulas para la expansión general de la superfunciones en el superespacio. Para ello, Consideremos el vector de (u, s) de dimensión $d_c + d_a$, formado por la unión del vector bosónico u^μ $(\mu = 1, 2, \ldots, d_c)$ y el vector fermiónico s_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, d_a)$[1]. Tomamos una función arbitraria en $S(u, s)$, la cual puede tomar valores en los supernúmeros o en operadores. Expandimos esta función en series de Taylor alrededor del cero en potencias de s:

$$S(u, s) = \sum_n \sum_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_n} \, [C(u)]_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \tag{B.1}$$

Debido a que $\{s_\alpha, s_\beta\} = 0$, para un superespacio cuya dimensión fermiónica es finita, la serie de Taylor en las variables fermiónicas siempre es polinomial y no tenemos problemas de convergencia, entonces la expresión (B.1) es una buena definición de $S(u, s)$.

Para el caso en que (u, s) y S transforman bajo una representación de algún grupo de simetría (entonces S debería escribirse S_ℓ donde el índice ℓ corre de uno a la dimensión de la representación bajo la cual transforma S), los coeficientes $C(u)^{\alpha_1 \cdots \alpha_n}$ transforman tensorialmente y por lo tanto en general reduciblemente. Siempre es deseable descomponer $C(u)^{\alpha_1 \cdots \alpha_n}$ en sus partes reducibles.

[1]Un supervector, es un elemento de un espacio vectorial en el campo de los supernúmeros. Los vectores bosónicos(fermiónicos) son elementos del espacio vectorial en el campo de los números bosónicos(fermiónicos).

Nuestro caso de interés, es cuando la variable fermiónica es de dimensión $d_a = 4\mathcal{N}$ con ($\mathcal{N} = 1, 2, 3, \dots$), y s_α es entonces un vector fermiónico de dimensión $4\mathcal{N}$. Podemos usar la base covariante $\{I, \gamma_5, \gamma^\mu, \gamma_5\gamma^\mu, [\gamma^\mu, \gamma^\nu]\}$, la cual es conveniente cuando s_α transforma bajo la suma directa $\mathcal{N}$ representaciones de Dirac. Tomemos primero el caso $\mathcal{N} = 1$,donde $\alpha = 1, 2, 3, 4$. Descomponemos $s_\alpha s_\beta$ en sus partes irreducibles:

$$s_\alpha s_\beta \;=\; \tfrac{1}{4}(\epsilon\gamma_5)_{\alpha\beta}(s^\intercal\epsilon\gamma_5 s) \;+\; \tfrac{1}{4}(\gamma_\mu\epsilon)_{\alpha\beta}(s^\intercal\epsilon\gamma^\mu s) \;+\; \tfrac{1}{4}\epsilon_{\alpha\beta}(s^\intercal\epsilon s) \tag{B.2}$$

con la ayuda de las relaciones

$$s_\alpha(s^\intercal\epsilon\gamma^\mu s) \;=\; -\left(\gamma_\mu s\right)_\alpha \left(s^\intercal\epsilon s\right), \quad s_\alpha\left(s^\intercal\epsilon\gamma_5 s\right) \;=\; -\left(\gamma_5 s\right)_\alpha \left(s^\intercal\epsilon s\right) \tag{B.3}$$

tenemos que

$$s_\alpha s_\beta s_\gamma \;=\; \frac{1}{4}\left(s^\intercal\epsilon\gamma_5 s\right)\Big[\epsilon_{\alpha\beta}\, s_\gamma \;-\; \left(\epsilon\gamma_5\right)_{\alpha\beta}\left(\gamma_5 s\right)_\gamma \;-\; \epsilon_{\alpha\gamma}\, s_\beta \;+\; \left(\epsilon\gamma_5\right)_{\alpha\gamma}\left(\gamma_5 s\right)_\beta \;+\; \epsilon_{\beta\gamma}\, s_\alpha \;-\; \left(\epsilon\gamma_5\right)_{\beta\gamma}\left(\gamma_5 s\right)_\alpha\Big]$$

similarmente

$$\begin{aligned} s_\alpha s_\beta s_\gamma s_\delta = \;& \tfrac{1}{16}\left(s^\intercal\epsilon s\right)^2 \Big[\epsilon_{\alpha\beta}\,\epsilon_{\gamma\delta} \;-\; \left(\epsilon\gamma_5\right)_{\alpha\beta}\left(\epsilon\gamma_5\right)_{\gamma\delta} \;-\; \epsilon_{\alpha\gamma}\,\epsilon_{\beta\delta} \\ & \;+\; \left(\epsilon\gamma_5\right)_{\alpha\gamma}\left(\epsilon\gamma_5\right)_{\beta\delta} \;+\; \epsilon_{\beta\gamma}\,\epsilon_{\alpha\delta} \;-\; \left(\epsilon\gamma_5\right)_{\beta\gamma}\left(\epsilon\gamma_5\right)_{\alpha\delta}\Big] \end{aligned} \tag{B.4}$$

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta}(u) = \;& -\frac{i}{2}\,\epsilon_{\alpha\beta}\, M(u) \;-\; \frac{1}{2}\,\left(\epsilon\gamma_5\right)_{\alpha\beta} N(u) \;+\; \frac{i}{2}\,\left(\epsilon\gamma_\mu\right)_{\alpha\beta} V^\mu(u) \\ C_{\alpha\beta\gamma}(u) = \;& \frac{1}{12}\Big[\epsilon_{\alpha\beta}\,\lambda'(u)_\gamma \;-\; \left(\epsilon\gamma_5\right)_{\alpha\beta}\left(\gamma_5\lambda'(u)\right)_\gamma \;-\; \epsilon_{\alpha\gamma}\,\lambda'(u)_\beta \\ & \;+\; \left(\epsilon\gamma_5\right)_{\alpha\gamma}\left(\gamma_5\lambda'(u)\right)_\beta \;+\; \epsilon_{\beta\gamma}\,\lambda'(u)_\alpha \;-\; \left(\epsilon\gamma_5\right)_{\beta\gamma}\left(\gamma_5\lambda'(u)\right)_\alpha\Big] \\ C_{\alpha\beta\gamma\delta}(u) = \;& -\frac{1}{24}\Big[\epsilon_{\alpha\beta}\,\epsilon_{\gamma\delta} \;-\; \left(\epsilon\gamma_5\right)_{\alpha\beta}\left(\epsilon\gamma_5\right)_{\gamma\delta} \;-\; \epsilon_{\alpha\gamma}\,\epsilon_{\beta\delta} \\ & \;+\; \left(\epsilon\gamma_5\right)_{\alpha\gamma}\left(\epsilon\gamma_5\right)_{\beta\delta} \;+\; \epsilon_{\beta\gamma}\,\epsilon_{\alpha\delta} \;-\; \left(\epsilon\gamma_5\right)_{\beta\gamma}\left(\epsilon\gamma_5\right)_{\alpha\delta}\Big]\; D(u) \end{aligned} \tag{B.5}$$

entonces la expansión general para $\mathcal{N} = 1$, queda

$$\begin{aligned} S(u,s) = \;& C(u) \;-\; i\, s^\intercal\epsilon w(u) \;-\; \frac{i}{2} s^\intercal\epsilon s\, M(u) \;-\; \frac{1}{2} s^\intercal\epsilon\gamma_5 s N(u) \\ & + \frac{i}{2}\left(s^\intercal\epsilon\gamma_\mu s\right) V^\mu(u) - i\left(s^\intercal\epsilon s\right) s^\intercal\epsilon\gamma_5\lambda(u) \\ & - \frac{1}{4}\left(s^\intercal\epsilon s\right)^2 D(u) \end{aligned} \tag{B.6}$$

donde hemos hecho $\lambda' = -i\epsilon\gamma_5\lambda$. La expansión para el caso $\mathcal{N}$ general, se realiza de manera recursiva. Sea $s_{\{\mathcal{N}\}} = (s_1, \ldots, s_{\mathcal{N}})$, donde $s_1, \ldots, s_{\mathcal{N}}$ son 4-espinores. Expandiendo $S\left(u, s_{\{\mathcal{N}\}}\right)$ en la variable $s_{\mathcal{N}}$:

$$\begin{aligned} S\left(u, s_{\{\mathcal{N}\}}\right) = {} & C\left(u, s_{\{\mathcal{N}-1\}}\right) - i\, s_{\mathcal{N}}^{\intercal}\epsilon\, w\left(u, s_{\{\mathcal{N}\}}\right) - \frac{i}{2} s_{\mathcal{N}}^{\intercal}\epsilon s_{\mathcal{N}}\, M\left(u, s_{\{\mathcal{N}-1\}}\right) \\ & - \frac{1}{2} s_{\mathcal{N}}^{\intercal}\epsilon\gamma_5 s_{\mathcal{N}-1}\, N\left(u, s_{\{\mathcal{N}-1\}}\right) + \frac{i}{2}\left(s_{\mathcal{N}}^{\intercal}\epsilon\gamma_\mu s_{\mathcal{N}}\right) V^\mu\left(u, s_{\{\mathcal{N}-1\}}\right) \\ & - i\left(s_{\mathcal{N}}^{\intercal}\epsilon s_{\mathcal{N}}\right) s_{\mathcal{N}}^{\intercal}\epsilon\gamma_5\, \lambda\left(u, s_{\{\mathcal{N}-1\}}\right) - \frac{1}{4}\left(s_{\mathcal{N}}^{\intercal}\epsilon s_{\mathcal{N}}\right)^2 D\left(u, s_{\{\mathcal{N}-1\}}\right) \end{aligned} \tag{B.7}$$

Podemos entonces expandir $C\left(u, s_{\{\mathcal{N}-1\}}\right), w\left(u, s_{\{\mathcal{N}\}}\right) \ldots, D\left(u, s_{\{\mathcal{N}-1\}}\right)$, en términos de $s_{\mathcal{N}-1}$ y así sucesivamente.

El producto S_1S_2 de dos funciones S_1 y S_2 que dependen del 4-espinor s, es de la forma :

$$\begin{aligned} S_1 S_2 = {} & C_{12} - i\, s^\intercal\epsilon w_{12} - \tfrac{i}{2}\vartheta^\intercal\epsilon\vartheta\, M_{12} - \frac{1}{2}\vartheta^\intercal\epsilon\gamma_5\vartheta N_{12} \\ & + \frac{i}{2}\left(s^\intercal\epsilon\gamma_\mu s\right) V_{12}^\mu - i\left(s^\intercal\epsilon s\right) s^\intercal\epsilon\gamma_5\lambda_{12} \\ & - \frac{1}{4}\left(s^\intercal\epsilon s\right)^2 D_{12} \end{aligned} \tag{B.8}$$

con

$$\begin{aligned} C_{12} = {} & C_1 C_2, \\ \omega_{12} = {} & (-)^{S_1} C_1\omega_2 + \omega_1 C_2, \\ M_{12} = {} & C_1 M_2 + M_1 C_2 + \tfrac{i}{2}(-)^{S_1}\left(\omega_1^\intercal\epsilon\omega_2\right), \\ N_{12} = {} & C_1 N_2 + N_1 C_2 + \tfrac{1}{2}(-)^{S_1+1}\left(\omega_1^\intercal\epsilon\gamma_5\omega_2\right), \\ V_{12}^\mu = {} & C_1 V_2^\mu + V_1^\mu C_2 + \tfrac{i}{2}(-)^{S_1+1}\left(\omega_1^\intercal\epsilon\gamma^\mu\omega_2\right), \\ \lambda_{12} = {} & (-)^{S_1} C_1\lambda_2 + \lambda_1 C_2 + \tfrac{i}{2}\gamma_\mu\gamma_5\omega_1 V_2^\mu + \tfrac{i}{2}(-)^{S_1}\not{V}_1\gamma_5\omega_2 \\ & - \tfrac{1}{2}(i\gamma_5\omega_1 M_2 - \omega_1 N_2) - (-)^{S_1}\tfrac{1}{2}(iM_1\gamma_5\omega_2 - N_1\omega_2), \\ D_{12} = {} & C_1 D_2 + D_1 C_2 + M_1 M_2 + N_1 N_2 \\ & - (-)^{S_1}(\omega_1^\intercal\epsilon\gamma_5\lambda_2 + \lambda_1^\intercal\epsilon\gamma_5\omega_2) - V_{1\mu}V_2^\mu, \end{aligned} \tag{B.9}$$

donde hemos supuesto que S_1 y S_2 tienen una graduación definida $(-)^{S_1}$ y $(-)^{S_2}$, respectivamente.

El conjugado del supercampo general. El conjugado de cualquier supercampo se define a traves de la relación

$$S^*(x,\theta) \;=\; [S(x,\epsilon\gamma_5\beta\theta^*)]^* \;\;, \tag{B.10}$$

lo que nos arroja, en términos de los campos componente, la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} S(x,\theta) = \; & C(x)^* \;-\; i\,\vartheta^{\mathsf{T}}\epsilon\left[(-)^S\,\epsilon\gamma_5\beta w(x)^*\right] \;-\; \frac{i}{2}\vartheta^{\mathsf{T}}\epsilon\vartheta\,M(x)^* \;-\; \frac{1}{2}\vartheta^{\mathsf{T}}\epsilon\gamma_5\vartheta N(x)^* \\ & + \frac{i}{2}\left(\vartheta^{\mathsf{T}}\epsilon\gamma_\mu\vartheta\right)V^\mu(x)^* \;-\; i\left(\vartheta^{\mathsf{T}}\epsilon\vartheta\right)\vartheta^{\mathsf{T}}\epsilon\gamma_5\left[(-)^S\,\epsilon\gamma_5\beta\lambda(x)^*\right] \\ & - \frac{1}{4}\left(\vartheta^{\mathsf{T}}\epsilon\vartheta\right)^2 D(x)^* \end{aligned} \tag{B.11}$$

El término D del producto del conjugado de un supercampo con otro es

$$\begin{aligned} \left[S_1^*S_2\right]_D = \; & C_1^*D_2 \;+\; D_1^*C_2 \;+\; M_1^*M_2 \;+\; N_1^*N_2 \\ & -\bar{\omega}_1\lambda_2 \;-\; \bar{\lambda}_1\omega_2 \;-\; V_{1\mu}^*V_2^\mu \;, \end{aligned} \tag{B.12}$$

Diferenciación e Integración

Considérese una función $f(v)$ en el espacio fermiónico v de dimensión arbitraria. Dada una componente v_i, debido a que $v_i^2 = 0$, podemos escribir de manera única $f(v)$ como

$$f(v) \;=\; f_{i,0} \;+\; v_i\,f_{i,1} \tag{B.13}$$

donde f_0 y f_1 que no dependen de v_i. La operación de diferenciación por lo izquierda $\frac{\partial}{\partial v_i}$, de la variable v_i aplicada a la función $f(v)$, se define como la función $f_{i,1}$, esto es

$$\frac{\partial f(v)}{\partial v_i} \;=\; f_{i,1} \;, \tag{B.14}$$

Para dos componentes v_i y v_j, también tenemos una expansión única de la forma

$$f(v) \;=\; g_{ij,0} \;+\; v_i\,g_{i,0} \;+\; v_j\,g_{j,1} \;+\; v_iv_j\,g_{ij,1} \tag{B.15}$$

donde ninguna de las funciones $g_{ij,0}\ldots$, depende de v_i ni de v_j. De aqui se sigue que

$$\frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} = -\frac{\partial^2}{\partial v_j \partial v_i} \tag{B.16}$$

De la ecuación definitoria se sigue que para dos funciones $f(v)$ y $g(v)$ con graduación definida ϵ_f y ϵ_g, respectivamente, tenemos que

$$(f(v)g(v))_{i,1} = f_{i,1}\, g_{i,0} + (-)^{\epsilon_f} f_{i,0}\, g_{i,1} = f_{i,1}\, g(v) + (-)^{\epsilon_f} f(v)\, g_{i,1} \tag{B.17}$$

esto es

$$\frac{\partial f(v)g(v)}{\partial v_i} = \frac{\partial f(v)}{\partial v_i} g(v) + (-)^{\epsilon_f} f(v) \frac{\partial g(v)}{\partial v_i} \tag{B.18}$$

Consideremos una transformación lineal homogeneizada de coordenadas

$$v' = Dv + a\ , \tag{B.19}$$

donde D es una matriz bosónica invertible y a un vector constante , puesto que $f(v(v')) = f_{i,0} + a_i\, f_{i,1} + (D^{-1}v')_i\ f_{i,1}$, tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial v'_i} = \frac{\partial v_j}{\partial v'_i} \frac{\partial}{\partial v_j} \tag{B.20}$$

La integración fermiónica esta definida de manera similar a la diferenciación, la integral sobre la variable v_i es

$$\int dv_i\, f(v) = f_{i,1} \tag{B.21}$$

al igual que la enésima derivada parcial mixta, la integración sobre cualquier superficie viene definida por la aplicación sucesiva de integrales en una dimensión

$$\int dv_{i_1} \ldots dv_{i_\ell} = \int dv_{i_1} \ldots \int dv_{i_\ell} \tag{B.22}$$

al igual que para la diferenciación, se sigue que

$$dv_i dv_j = -dv_j dv_i, \quad dv'_i = \frac{\partial v_j}{\partial v'_i} dv_j \tag{B.23}$$

Definimos el integral de volumen en orden ascendente en las componentes dv_i:

$$d^N v \;=\; dv_N \cdots dv_2 dv_1, \tag{B.24}$$

donde N es la dimensión del espacio fermiónico en cuestión. Es evidente que

$$\int dv_i \frac{\partial}{\partial v_i} f(v) \;=\; \frac{\partial}{\partial v_i} \int dv_i\, f(v) \;=\; 0 \tag{B.25}$$

Transformaciones lineales inhomogeneas. Hemos introducido ya transformaciones lineales entres para vectores fermiónicos, podemos ir más lejos y considerar para cualquier vector (u, s) las transformaciones de la forma

$$u' = \,[D_{00}]\, u \,+\, [D_{01}]\, s \,+\, t_0, \tag{B.26}$$

$$s' = \,[D_{10}]\, u \,+\, [D_{11}]\, s \,+\, t_1, \tag{B.27}$$

donde las matrices $[D_{00}]$ y $[D_{11}]$ y el vector t_0 toman valores en los números bosónicos, mientras que $[D_{10}]$ y $[D_{11}]$ y el vector t_1 toman valores en los números fermiónicos. Vemos que

$$\frac{\partial}{\partial u'^{\nu}} = \frac{\partial u^{\rho}}{\partial u'^{\nu}} \frac{\partial}{\partial u^{\rho}} \,+\, \frac{\partial s_{\beta}}{\partial u'^{\nu}} \frac{\partial}{\partial s_{\beta}}, \qquad \frac{\partial}{\partial s'_{\alpha}} \;=\; \frac{\partial u^{\rho}}{\partial s'_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial u^{\rho}} \,+\, \frac{\partial s_{\beta}}{\partial s'_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial s_{\beta}} \tag{B.28}$$

Siempre que realicemos la integración $d^{N_c}u$ sobre la variable bosónica supondremos que cualquier contribución en la hipersuperficie a distancia infinita es cero. Puesto que para cualquier función

$$f(u') = f(D_{00}u) \,+\, (D_{01}s \,+\, t_0)^{\mu} \,\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \tilde{f}(D_{00}u) \,+\, \dots\,, \tag{B.29}$$

bajo el signo de integral todas las contribuciones que tengan derivadas bosónicas totales son cero. Esto, junto con la relación entre diferenciales fermiónicos, tenemos que

$$\int d^{n_c}u\, d^{n_a}s\, f(u', s') \;=\; |\det D_{00}||\det D_{11}|^{-1} \int d^{n_c}u\, d^{n_a}s\, f(u, s) \tag{B.30}$$

Llamamos transformaciones supersimétricas al conjunto de transformaciones de coordenadas

$$u'^{\nu} \;=\; u^{\nu} + s^{\mathsf{T}}\epsilon\gamma_5\gamma^{\nu}\xi, \quad s' \;=\; s \,+\, \xi \tag{B.31}$$

donde ξ, es un 4-espinor arbitrario. Podemos ver que

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}, \quad \frac{\partial}{\partial \vartheta'_{\alpha}} = -\left(\epsilon\gamma_5\gamma^{\nu}\xi\right)_{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial}{\partial \vartheta_{\alpha}}\,. \tag{B.32}$$

Entonces la derivada covariante ordinaria (bosónica) ∂_μ es invariante supersticiosa pero la derivada fermiónica $\frac{\partial}{\partial\vartheta_\alpha}$ no lo es. La superderivada (o derivada fermiónica covariante) definida por

$$\mathcal{D}_{\alpha} \equiv \epsilon\gamma_5\frac{\partial}{\partial \vartheta_{\alpha}} - \gamma^{\mu}\vartheta\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \tag{B.33}$$

es invariante supersimetríca. Para cualquiera dos superfunciones con graduación definida:

$$\mathcal{D}_{\alpha}\left(f\,g\right) = \left(\mathcal{D}_{\alpha}f\right)\,g + (-)^{f}f\,\left(\mathcal{D}_{\alpha}g\right) \tag{B.34}$$

La integración de volumen invariante supersimétrico, esto es

$$\int d^4x\,d^4\vartheta\,S(x',\vartheta') = \int d^4x\,d^4\vartheta\,S(x,\vartheta) \tag{B.35}$$

Esto debido a que $\left[D_{oo}\right]^{\mu}_{\ \nu} = \delta^{\mu}_{\ \nu}$ y $\left[D_{11}\right]_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, y por tanto sus determinantes son la unidad.

Introducimos las proyecciones izquierdas y derechas de los 4-espinores de las formas diferenciales fermiónica $d\vartheta$:

$$d\vartheta_{-} = \frac{1}{2}\left(I - \gamma_5\right)d\vartheta, \quad d\vartheta_{+} = \frac{1}{2}\left(I + \gamma_5\right)d\vartheta, \tag{B.36}$$

para después definir $d^2\vartheta_{\pm} \equiv \frac{1}{2}d\vartheta^{\mathsf{T}}\epsilon d\vartheta_{\pm}$, entonces

$$d^4\vartheta = d^2\vartheta_{+}d^2\vartheta_{-} \tag{B.37}$$

Hemos visto que la derivación y la integración fermiónica son equivalentes, entonces

$$\begin{aligned}\int d^4x\,d^4\vartheta\,S(x,\vartheta) &= \int d^4x\,d^2\vartheta_{\pm}d^2\vartheta_{\mp}\,S(x,\vartheta)\\ &= \int d^4x\,d^2\vartheta_{\mp}\,\frac{\partial^2}{\partial\vartheta_{\pm}^2}\,S(x,\vartheta)\end{aligned} \tag{B.38}$$

con $\frac{\partial^2}{\partial\vartheta_{\pm}^2} \equiv \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\vartheta_{\pm}}^{\mathsf{T}}\epsilon\frac{\partial}{\partial\vartheta_{\pm}}$. La última relación suena inconsistente por que el lado izquierdo es invariante supersimétrico mientras que la derivada fermiónica no.

Introduciendo

$$\mathcal{D}_{\pm}^{2} = \frac{1}{2}\mathcal{D}_{\pm}^{\intercal}\epsilon\mathcal{D}_{\pm} = \frac{\partial^{2}}{\partial\vartheta_{\pm}^{2}} + \delta^{2}\left(\vartheta_{\mp}\right)\Box - \vartheta_{\mp}^{\intercal}\epsilon\gamma^{\mu}\epsilon\gamma_{5}\frac{\partial}{\partial\vartheta_{\pm}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, \tag{B.39}$$

podemos escribir

$$\int d^{4}x\, d^{4}\vartheta\, S(x,\vartheta) = \int d^{4}x\, d^{2}\vartheta_{\pm}\, \mathcal{D}_{\mp}^{2}\, S(x,\vartheta) \tag{B.40}$$

ya que la diferencia entre los dos términos es una derivada de superficie que hemos supuesto es cero. Esta última expresión es invariante supersimétrica.

Existe una clase de funciones que aparecen en las formulaciones del superespacio, son las funciones $\mathcal{W}_{\pm}$ que satisfacen la condición de quiralidad:

$$\mathcal{D}_{\mp\alpha}\, \mathcal{W}_{\pm}(x,\vartheta) = 0\ , \tag{B.41}$$

Cuando $S = \mathcal{W}_{\pm}$, la integral en el superespacio siempre es cero. La utilidad de las funciones quirales reside en que admiten una clase más general de funciones de locales, los cuales no forman densidades covariantes supersimetricas, pero bajo el signo de integral lo permanecen invariantes. Estas superfunciones son de la forma

$$\tilde{S}(x,\vartheta) = \delta^{2}(\vartheta_{\pm})\mathcal{W}_{\pm}(x,\vartheta)\ , \tag{B.42}$$

el término local $\delta^{2}(\vartheta_{\pm})$ una densidad supersimétrica invariante. Las transformaciones supersimetricas son inducidas por operadores unitarias en el caso de funciones de operadores, o por cambios de variable en el integral funcional en el caso de funciones que aparecen en la integral de caminos. En cualquier caso, bajo el signo de integral debemos no considerar $\tilde{S}(x',\vartheta')$ sino

$$\tilde{S}(x,\vartheta) \to \delta^{2}\left[(\vartheta'-\xi)_{\pm}\right]\mathcal{W}_{\pm}(x',\vartheta')\ . \tag{B.43}$$

Entonces la integral de la superfunción transformada es

$$\int d^{4}x\, d^{4}\vartheta\delta^{2}\ \left[(\vartheta'-\xi)_{\pm}\right]\mathcal{W}_{\pm}(x',\vartheta') = \int d^{4}x\, d^{4}\vartheta\left\{\tilde{S}(x,\vartheta) + \left[\delta^{2}(\xi_{\pm}) + \xi^{\intercal}\epsilon\vartheta_{\pm}\right]\mathcal{W}_{\pm}(x,\vartheta)\right\}$$

Hemos visto que el segundo término es cero y por la misma razón, el tercero también es cero. Este ultimo término se puede escribir como:

$$\int d^4x\, d^2\vartheta_{\mp}\, \frac{\partial^2}{\partial\vartheta_{\pm}^2}\, (\xi^{\mathsf{T}}\epsilon\vartheta_{\pm})\, \mathcal{W}_{\pm}(x,\vartheta) \;=\; 0 \;. \tag{B.44}$$

Bibliografía

[1] M.T. Grisaru, W. Siegel, and M. Rocek. Improved Methods for Supergraphs. *Nucl.Phys.*, B159:429, 1979. doi: 10.1016/0550-3213(79)90344-4.

[2] N. Seiberg and Edward Witten. Electric - magnetic duality, monopole condensation, and confinement in N=2 supersymmetric Yang-Mills theory. *Nucl. Phys.*, B426:19–52, 1994. doi: 10.1016/0550-3213(94)90124-4. [Erratum: Nucl. Phys.B430,485(1994)].

[3] B. DeWitt. *Supermanifolds*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1992. ISBN 9780521423779. URL https://books.google.com.mx/books?id=0NinYnTQa-gC.

[4] F.A. Rogers. *Supermanifolds: Theory and Applications*. World Scientific Publishing Company Pte Limited, 2007. ISBN 9789812708854. URL https://books.google.com.mx/books?id=itmfZTZCm_MC.

[5] Gerard 't Hooft. Renormalizable Lagrangians for Massive Yang-Mills Fields. *Nucl. Phys.*, B35:167–188, 1971. doi: 10.1016/0550-3213(71)90139-8.

[6] P.A.M. Dirac. *Lectures on Quantum Mechanics*. Belfer Graduate School of Science, monograph series. Dover Publications, 2001. ISBN 9780486417134. URL https://books.google.com.mx/books?id=GVwzb1rZW9kC.

[7] S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*. Number v. 2 in The Quantum Theory of Fields 3 Volume Hardback Set. Cambridge University Press, 1996. ISBN 9780521550024. URL https://books.google.com.mx/books?id=sn9QvU5dmBQC.

[8] J. Wess and B. Zumino. A Lagrangian Model Invariant Under Supergauge Transformations. *Phys.Lett.*, B49:52, 1974. doi: 10.1016/0370-2693(74)90578-4.

[9] A. Salam and J.A. Strathdee. On Superfields and Fermi-Bose Symmetry. *Phys.Rev.*, D11:1521–1535, 1975. doi: 10.1103/PhysRevD.11.1521.

[10] A. Salam and J.A. Strathdee. Feynman Rules for Superfields. *Nucl.Phys.*, B86:142–152, 1975. doi: 10.1016/0550-3213(75)90078-4.

[11] A. Salam and J.A. Strathdee. Supergauge Transformations. *Nucl.Phys.*, B76: 477–482, 1974. doi: 10.1016/0550-3213(74)90537-9.

[12] Marcus T. Grisaru, H. N. Pendleton, and P. van Nieuwenhuizen. Supergravity and the S Matrix. *Phys. Rev.*, D15:996, 1977. doi: 10.1103/PhysRevD.15.996.

[13] I. A. Batalin and G. A. Vilkovisky. Gauge Algebra and Quantization. *Phys. Lett.*, B102:27–31, 1981. doi: 10.1016/0370-2693(81)90205-7.

[14] S. Dimopoulos and H. Georgi. Softly Broken Supersymmetry and SU(5). *Nucl.Phys.*, B193:150, 1981. doi: 10.1016/0550-3213(81)90522-8.

[15] S. Weinberg. Feynman Rules for Any Spin. *Phys.Rev.*, 133:B1318–B1332, 1964. doi: 10.1103/PhysRev.133.B1318.

[16] S. Weinberg. Feynman Rules for Any Spin. III. *Phys.Rev.*, 181:1893–1899, 1969. doi: 10.1103/PhysRev.181.1893.

[17] S. Weinberg. The Quantum Theory of Fields. Vol. 1: Foundations. *Cambridge University Press*, 1995.

[18] Julius Wess and J. Bagger. *Supersymmetry and Supergravity*. Princeton series in physics. Princeton University Press, 1992. ISBN 9780691025308. URL https://books.google.com/books?id=4QrQZ_Rjq4UC.

[19] I.L. Buchbinder, Jr. Gates, S. James, III Linch, William Divine, and J. Phillips. New 4-D, N=1 superfield theory: Model of free massive superspin 3/2 multiplet. *Phys.Lett.*, B535:280–288, 2002. doi: 10.1016/S0370-2693(02) 01772-0.

[20] I.L. Buchbinder, Jr. Gates, S. James, III Linch, William Divine, and J. Phillips. Dynamical superfield theory of free massive superspin-1 multiplet. *Phys.Lett.*, B549:229–236, 2002. doi: 10.1016/S0370-2693(02)02860-5.

[21] Thomas Gregoire, Matthew D. Schwartz, and Yael Shadmi. Massive supergravity and deconstruction. *JHEP*, 0407:029, 2004. doi: 10.1088/1126-6708/ 2004/07/029.

[22] Jr. Gates, S. James. and Konstantinos Koutrolikos. A dynamical theory for linearized massive superspin 3/2. *JHEP*, 1403:030, 2014. doi: 10.1007/JHEP03(2014)030.

[23] Eugene P. Wigner. On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group. *Annals Math.*, 40:149–204, 1939. doi: 10.2307/1968551. [Reprint: Nucl. Phys. Proc. Suppl.6,9(1989)].

[24] Edward Witten. Notes On Supermanifolds and Integration. 2012.

[25] L.E. Ballentine. *Quantum Mechanics: A Modern Development*. World Scientific, 1998. ISBN 9789810241056. URL https://books.google.com.mx/books?id=sHJRFHz1rYsC.

[26] E. Wigner. *Group Theory: And its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra*. Pure and Applied Physics. Elsevier Science, 2012. ISBN 9780323152785. URL https://books.google.com.mx/books?id=ENZzI49uZMcC.

[27] M. Hamermesh. *Group Theory and Its Application to Physical Problems*. Addison Wesley Series in Physics. Dover Publications, 1962. ISBN 9780486661810. URL https://books.google.com.mx/books?id=c0o9_wlCzgcC.

[28] B. Hall. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2003. ISBN 9780387401225. URL https://books.google.com.mx/books?id=m1VQi8HmEwcC.

[29] I.L. Buchbinder and S.M. Kuzenko. Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity: Or a Walk Through Superspace. *CRC Press*, 1995.

[30] Steven Weinberg. Infrared photons and gravitons. *Phys. Rev.*, 140:B516–B524, 1965. doi: 10.1103/PhysRev.140.B516.

[31] S. Weinberg. Feynman Rules for Any Spin. 2. Massless Particles. *Phys.Rev.*, 134:B882–B896, 1964. doi: 10.1103/PhysRev.134.B882.

[32] P. A. M. Dirac. Forms of relativistic dynamics. *Rev. Mod. Phys.*, 21:392–399, Jul 1949. doi: 10.1103/RevModPhys.21.392. URL http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.21.392.

[33] F. J. Dyson. The S matrix in quantum electrodynamics. *Phys. Rev.*, 75: 1736–1755, 1949. doi: 10.1103/PhysRev.75.1736.

[34] Pierre Cartier, Cecile DeWitt-Morette, Matthias Ihl, and Christian Saemann. Supermanifolds: Application to supersymmetry. 2002.

[35] Eyvind H. Wichmann and James H. Crichton. Cluster decomposition properties of the s matrix. *Phys. Rev.*, 132:2788–2799, Dec 1963. doi: 10.1103/PhysRev.132.2788. URL http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.132.2788.

[36] Enrique Jiménez. $\mathcal{N} = 1$ super Feynman rules for any superspin: Noncanonical SUSY. *Phys. Rev.*, D92(8):085013, 2015. doi: 10.1103/PhysRevD.92.085013.

[37] S. Weinberg. *Lectures on Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2012. ISBN 9781107028722. URL https://books.google.com.mx/books?id=WfTq2W_LBlEC.

[38] Hans Joos. Zur darstellungstheorie der inhomogenen lorentzgruppe als grundlage quantenmechanischer kinematik. *Fortschritte der Physik*, 10(3):65–146, 1962.

[39] Asim O. Barut, Ivan Muzinich, and David N. Williams. Construction of invariant scattering amplitudes for arbitrary spins and analytic continuation in total angular momentum. *Phys. Rev.*, 130:442–457, Apr 1963. doi: 10.1103/PhysRev.130.442. URL http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.130.442.

[40] G. C. Wick. The Evaluation of the Collision Matrix. *Phys. Rev.*, 80:268–272, 1950. doi: 10.1103/PhysRev.80.268.

[41] Gunnar Kallen. On the definition of the Renormalization Constants in Quantum Electrodynamics. *Helv. Phys. Acta*, 25(4):417, 1952. doi: 10.1007/978-3-319-00627-7_90. [,509(1952)].

[42] H. Lehmann. Über eigenschaften von ausbreitungsfunktionen und renormierungskonstanten quantisierter felder. *Il Nuovo Cimento*, 11(4):342–357, 1954. ISSN 0029-6341. doi: 10.1007/BF02783624. URL http://dx.doi.org/10.1007/BF02783624.

[43] L. Leroy. OPE IN SUPERSYMMETRIC SCALAR FIELD THEORIES. *Phys. Lett.*, B187:97, 1987. doi: 10.1016/0370-2693(87)90079-7.

[44] Florin Constantinescu. Supersymmetric Kallen-Lehmann representation. *Annalen Phys.*, 15:861–867, 2006. doi: 10.1002/andp.200510213.

[45] Kenneth G. Wilson. Nonlagrangian models of current algebra. *Phys. Rev.*, 179:1499–1512, 1969. doi: 10.1103/PhysRev.179.1499.

[46] Jeffrey Goldstone, Abdus Salam, and Steven Weinberg. Broken Symmetries. *Phys. Rev.*, 127:965–970, 1962. doi: 10.1103/PhysRev.127.965.

[47] Lance J. Dixon. Calculating scattering amplitudes efficiently. In *QCD and beyond. Proceedings, Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics, TASI-95, Boulder, USA, June 4-30, 1995*, 1996. URL `http://www-public.slac.stanford.edu/sciDoc/docMeta.aspx?slacPubNumber=SLAC-PUB-7106`.

[48] Steven Weinberg. Causality, Anti-particles and the Spin Statistics Connection in Higher Dimensions. *Phys. Lett.*, B143:97, 1984. doi: 10.1016/0370-2693(84)90812-8.

[49] F. Chan and H. F. Jones. CONFORMAL INVARIANCE AND HELICITY CONSERVATION. *Phys. Rev.*, D10:1321, 1974. doi: 10.1103/PhysRevD.10.1321.

[50] Steven Weinberg. Minimal fields of canonical dimensionality are free. *Phys. Rev.*, D86:105015, 2012. doi: 10.1103/PhysRevD.86.105015.

[51] Steven Weinberg. Photons and gravitons in perturbation theory: Derivation of Maxwell's and Einstein's equations. *Phys. Rev.*, 138:B988–B1002, 1965. doi: 10.1103/PhysRev.138.B988.

[52] Freddy Cachazo and Andrew Strominger. Evidence for a New Soft Graviton Theorem. 2014.

[53] Temple He, Vyacheslav Lysov, Prahar Mitra, and Andrew Strominger. BMS supertranslations and Weinberg's soft graviton theorem. *JHEP*, 05:151, 2015. doi: 10.1007/JHEP05(2015)151.

[54] L. V. Avdeev, D. I. Kazakov, and I. N. Kondrashuk. Renormalizations in softly broken SUSY gauge theories. *Nucl. Phys.*, B510:289–312, 1998. doi: 10.1016/S0550-3213(98)81015-8,10.1016/S0550-3213(97)00706-2.

[55] Tatsuo Kobayashi, Jisuke Kubo, and George Zoupanos. Further all loop results in softly broken supersymmetric gauge theories. *Phys. Lett.*, B427:291–299, 1998. doi: 10.1016/S0370-2693(98)00343-8.