Fidel Alejandro Navarro Salazar

Show that if X is a timelike or null 4-vector and if $X^0 > 0$ in one inertial frame, then $X^0 > 0$ in every inertial frame.

Considerando a Y como un 4-vector de la forma:

$$Y = (L_0^0, -L_1^0, -L_2^0, -L_3^0)$$

Es decir:

$$Y = (\gamma(v), \tfrac{v}{c}\gamma(v), 0, 0)$$

Por otro lado tenemos que:

$$Y = (L_0^0)^2 - (L_1^0)^2 - (L_2^0)^2 - (L_3^0)^2$$

Queremos demostrar que $g(Y, Y) > 0$ Para ello partiremos del caso contrario (spacelike): $g(Y, Y) < 0$ Entonces

$$Y = (L_0^0)^2 - (L_1^0)^2 - (L_2^0)^2 - (L_3^0)^2$$

Donde

$$L_0^0 = \gamma(v)$$
$$L_1^0 = \tfrac{v}{c}\gamma(v)$$
$$L_2^0 = L_3^0 = 0$$

Sustituyendo:

$$g(Y, Y) = (L_0^0)^2 - (L_1^0)^2 < 0$$

Por lo tanto

$$L_0^0 < L_1^0$$

estos es:

$$\gamma(v) < \tfrac{v}{c}\gamma(v)$$

Tenemos que esta afirmación no se cumple ya que $\frac{v}{c} < 1$, por lo tanto se debe cumplir el caso contrario, por lo que podemos concluir que :

$$g(Y, Y) \geq \text{timelike o nulo}$$
$$Y^0 = L_0^0 > 0$$

Utilizando lo demostrado en el problema 1: Si $X^0 > 0$ y $Y^0 > 0$ entonces

$$g(X, Y) > 0$$

Donde el escalar $g(X, Y)$ es definido como:

$$g(X, Y) = g_{ab} X^a Y^b$$

Por medio de una transformación inhomogenea de Lorentz tenemos que:

$$g_{ab} X^a Y^b = g_{ab} L^a_c L^b_d \overline{X}^c \overline{Y}^d = g_{ab} \overline{X}^a \overline{Y}^b$$

Por lo tanto $g(X, Y)$ es invariante y es el mismo en cada sistema de coordenadas inercial, entonces $X^0 > 0$ se cumple en cualquier marco inercial.