Problema 3.1 Woodhouse

Muestre que si X y Y son timelike o nulos, y $X^0 > 0$, $Y^0 > 0$, entonces $g(X,Y) > 0$. (Pista: utilice la desigualdad de Cauchy-Schwarz.)

Sabemos que:

- Si $g(X,X) > 0$
- Si $g(X,X) = 0$

Entonces, de acuerdo al enunciado del problema:

$$g(X,X) \geq 0$$

$$g(Y,Y) \geq 0$$

Desarrollando $g(X,Y)$ tenemos:

$$g(X,Y) = X^0Y^0 - X^1Y^1 - X^2Y^2 - X^3Y^3$$

Podemos reescribir esto como:

$$g(X,Y) = X^0Y^0 - \vec{X} \cdot \vec{Y} \tag{1}$$

donde $\vec{X}$ y $\vec{Y}$ son vectores de 3 componentes.
De la misma forma para $g(X,X)$ y $g(Y,Y)$:

$$g(X,X) = (X^0)^2 - X^2 \tag{2}$$

$$g(Y,Y) = (Y^0)^2 - \vec{Y}^2 \tag{3}$$

Despejando X^0 y Y^0 de (2) y (3):

$$X^0 = \sqrt{g(X,X) + \vec{X}^2} \tag{4}$$

$$Y^0 = \sqrt{g(Y,Y) + \vec{Y}^2} \tag{5}$$

Sustituyendo (4) y (5) en (1):

$$g(X,Y) = \sqrt{g(X,X) + \vec{X}^2}\sqrt{g(Y,Y) + \vec{Y}^2} - \vec{X} \cdot \vec{Y} \tag{6}$$

Partiendo de que $\vec{X} \geq 0$ y $\vec{Y} \geq 0$, podemos afirmar que:

$$\sqrt{g(X,X) + \vec{X}^2}\sqrt{g(Y,Y) + \vec{Y}^2} \geq \vec{Y}\vec{X}$$

Tomando en consideración esta desigualdad, reescribimos la ecuación (6) como:

$$g(X,Y) \geq \vec{Y}\vec{X} - \vec{X} \cdot \vec{Y}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwartz, la cual establece que:

$$(\vec{X} \cdot \vec{Y})^2 \leq \vec{Y}^2\vec{X}^2$$

Aplicando raíz cuadrada en ambos lados y desarrollando esta expresión:

$$\vec{X} \cdot \vec{Y} \leq \vec{Y}\vec{X}$$

$$\vec{Y}\vec{X} - \vec{X} \cdot \vec{Y} \geq 0$$

Por lo tanto, podemos afirmar que $g(X,Y) \geq 0$.