Ejercicio 4.7 - Special Relativity. Woodhouse

García Parra Pedro Antonio

Mayo 2019

Ejercicio 4.7 En el ejemplo 4.2, muestra que si α y β son, respectivamente, los angulos entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y entre $\vec{u}$ y $\vec{w}$, entonces

$$\cos^2\alpha = \frac{(\gamma(u)+1)(\gamma(v)-1)}{(\gamma(u)-1)(\gamma(v)+1)} \tag{1}$$

Con una formula similar para $\cos^2\beta$. Dedusca que $\tan\alpha\tan\beta = 2/(1+\gamma(u))$. ¿Cual es el resultado clasico correspondiente? (Hint: expresa $\gamma(w)^2\vec{w}\cdot\vec{w}$ en terminos de $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\gamma(u)$ y $\gamma(v)$.)

Solución

Para realizar este ejercicio se utilizará la siguiente igualdad:

$$\gamma(v)^2v^2 = c^2(\gamma(v)^2-1) \tag{2}$$

Por conservación de 4-momento:

$$\begin{aligned} m\langle m,c\rangle + m\gamma(u)\langle c,\vec{u}\rangle &= m\gamma(v)\langle v,\vec{v}\rangle + m\gamma(w)\langle c,\vec{w}\rangle \\ \langle 1+\gamma(u),\gamma(u)\vec{u}\rangle &= \langle\gamma(v)+\gamma(w),\gamma(v)\vec{v}+\gamma(w)\vec{w}\rangle \end{aligned}$$

De aquí, podemos obtener, igualando componentes y despejando:

$$\gamma(w) = \gamma(u)-\gamma(v)+1 \tag{3}$$

$$\gamma(w)\vec{w} = \gamma(u)\vec{u}-\gamma(v)\vec{v} \tag{4}$$

Tomando el modulo cuadrado de (4):

$$\begin{aligned} \gamma(w)^2w^2 &= \gamma(u)^2u^2+\gamma(v)^2v^2-2\gamma(u)\gamma(v)\vec{u}\cdot\vec{v} \\ 2\gamma(u)\gamma(v)\vec{u}\cdot\vec{v} &= \gamma(u)^2u^2+\gamma(v)^2v^2-\gamma(w)^2w^2 \end{aligned}$$

Utilizando (2) sobre la ecuación anterior:

$$2\gamma(u)\gamma(v)\vec{u}\cdot\vec{v} = c^2(\gamma(u)^2+\gamma(v)^2-\gamma(w)^2-1) \tag{5}$$

Por otro lado, y utilizando (3)

$$\begin{aligned} \gamma(u)^2+\gamma(v)^2-\gamma(w)^2-1 &= \gamma(u)^2+\gamma(v)^2-(\gamma(u)-\gamma(v)+1)^2-1 \\ &= \gamma(u)^2+\gamma(v)^2-\gamma(u)^2-\gamma(v)^2-1+2\gamma(u)\gamma(v)-2\gamma(u)+2\gamma(v)-1 \\ &= 2\gamma(u)\gamma(v)+2\gamma(v)-2\gamma(u)-2 \\ &= 2(\gamma(u)\gamma(v)+\gamma(v)-\gamma(u)-1) \\ &= 2(\gamma(u)+1)(\gamma(v)-1) \end{aligned}$$

Sustituyendo esto en (5) y desarrollando:

$$\begin{aligned} 2\gamma(u)\gamma(v)\vec{u}\cdot\vec{v} &= c^2[2(\gamma(u)+1)(\gamma(v)-1)] \\ \vec{u}\cdot\vec{v} &= \frac{c^2(\gamma(u)+1)(\gamma(v)-1)}{\gamma(u)\gamma(v)} \\ \cos\alpha &= \frac{c^2(\gamma(u)+1)(\gamma(v)-1)}{|u||v|\gamma(u)\gamma(v)} \\ \cos^2\alpha &= \frac{c^4(\gamma(u)+1)^2(\gamma(v)-1)^2}{u^2v^2\gamma(u)^2\gamma(v)^2} \end{aligned}$$

Utilizando (2) nuevamente:

$$\cos^2\alpha = \frac{c^4(\gamma(u)+1)^2(\gamma(v)-1)^2}{c^2(\gamma(u)^2-1)c^2(\gamma(v)^2-1)}$$
$$\cos^2\alpha = \frac{(\gamma(u)+1)^2(\gamma(v)-1)^2}{(\gamma(u)-1)(\gamma(u)+1)(\gamma(v)-1)(\gamma(v)+1)}$$

$$\boxed{\cos^2\alpha = \frac{(\gamma(u)+1)(\gamma(v)-1)}{(\gamma(u)-1)(\gamma(v)+1)}}$$

Realizando el mismo procedimiento ahora en términos de $\vec{u}$ y $\vec{w}$ obtenemos que:

$$\cos^2\beta = \frac{(\gamma(u)+1)(\gamma(w)-1)}{(\gamma(u)-1)(\gamma(w)+1)} \tag{6}$$

Para encontrar el valor de $\tan\alpha$ y $\tan\beta$ primero se deberá usar la relacion trigonométrica de $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$ para obtener $\sin^2\alpha$ y $\sin^2\beta$. Posteriormente usamos que $\tan^2\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$. Así obtenemos que:

$$\tan^2\alpha = \frac{(\gamma(u)-1)(\gamma(v)+1)-(\gamma(u)+1)(\gamma(v)-1)}{(\gamma(u)+1)(\gamma(v)-1)} \tag{7}$$

$$\tan^2\beta = \frac{(\gamma(u)-1)(\gamma(w)+1)-(\gamma(u)+1)(\gamma(w)-1)}{(\gamma(u)+1)(\gamma(w)-1)} \tag{8}$$

Multiplicando las ecuaciones (7) y (8) y simplificando un poco, tenemos que:

$$\tan^2\alpha\tan^2\beta = \frac{4(\gamma(u)-\gamma(v))\,(\gamma(u)-\gamma(w))}{(\gamma(u)-1)^2(\gamma(v)-1)(\gamma(u)-1)}$$

Utilizando la ecuación (3) podemos obtener:

$$\tan^2\alpha\tan^2\beta = \frac{4}{(\gamma(u)+1)^2}$$

Finalmente:

$$\boxed{\tan\alpha\tan\beta = \frac{2}{\gamma(u)+1}} \tag{9}$$