Hipótesis de Planck

Gaytancrew

Universidad de Sonora
Introducción a la Física Moderna I
Dr. Enrique Jiménez

Mayo de 2019

"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

Sumario

Radiación de Cuerpo Negro

Un cuerpo negro es una idealización, es aquél cuerpo que emite a cualquier temperatura y a cualquier longitud de onda la máxima cantidad posible de radiación, es decir, es un absorbedor y un emisor perfecto, ya que no refleja nada de la radiación que incide sobre él.

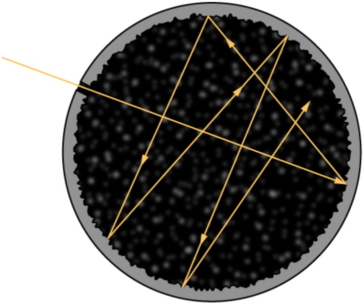

Figura 1: Modelo ideal del cuerpo negro: pequeño orificio en una cavidad absorbente a temperatura T

Radiación de Cuerpo Negro

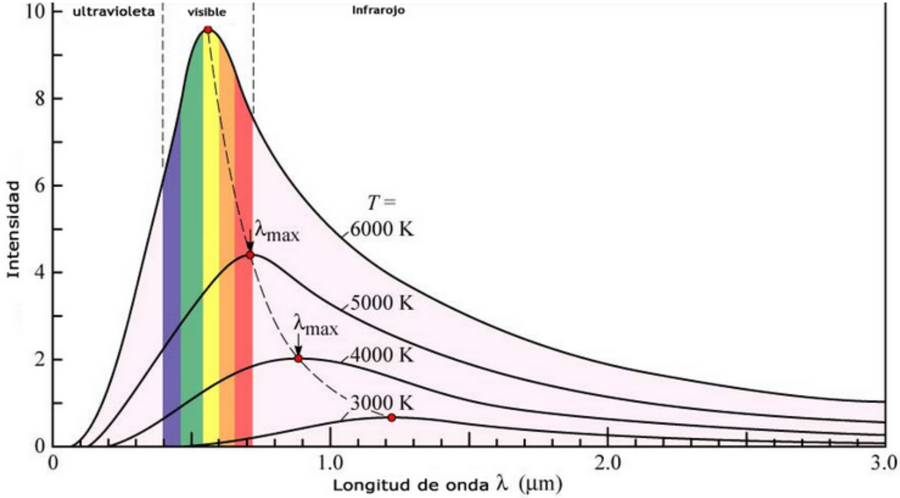

Figura 2: Espectro de radiación de cuerpo negro a diferentes temperaturas

Ley de Desplazamiento de Wien

Wien se planteó encontrar la entropía de la radiación en equilibrio. Para ello, partió de la definición de temperatura, y utilizó el mismo acercamiento termodinámico que Boltzmann sobre una cavidad perfectamente reflectora que se expande de forma adiabática.

Ley de Desplazamiento de Wien

$$TdS = dE \tag{1}$$

Donde dS es el cambio de entropía, T es la temperatura del sistema, y dE es el calor intercambiado. Dicha energía podemos escribirla como

$$dE = dU + pdV$$

Donde dU es el cambio de la energía interna, p es la presión, y dV el cambio del volúmen. Por lo tanto, tenemos que:

$$TdS = dU + pdV \tag{2}$$

Dividiendo (2) entre T:

$$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{p}{T}dV \tag{3}$$

De la ley de Stefan-Boltzmann tenemos que:

$$u = \frac{U}{V} = \sigma T^4 \tag{4}$$

Ley de Desplazamiento de Wien

Despejando T tenemos que:

$$\frac{1}{T} = \left(\sigma \frac{V}{U}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{5}$$

Y tenemos que la presión de radiación es:

$$p = \frac{1}{3}u \tag{6}$$

De (4) tenemos que:

$$p = \frac{U}{3V} \tag{7}$$

Por lo tanto:

$$\frac{p}{T} = \frac{U}{3V}\left(\sigma \frac{V}{U}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{8}$$

Sustituyendo (5) y (8) en (3):

$$dS = \left(\sigma \frac{V}{U}\right)^{\frac{1}{4}} dU + \frac{1}{3}\left(\sigma \frac{U^3}{V^3}\right)^{\frac{1}{4}} dV \tag{9}$$

Ley de Desplazamiento de Wien

$$dS = \left(\sigma \frac{V}{U}\right)^{\frac{1}{4}} dU + \frac{1}{3}\left(\sigma \frac{U^3}{V^3}\right)^{\frac{1}{4}} dV \tag{10}$$

Integrando obtenemos:

$$S = \frac{4}{3}\sigma^{\frac{1}{4}} U^{\frac{3}{4}} V^{\frac{1}{4}} \tag{11}$$

Sustituyendo (5) en (11):

$$S = \frac{4}{3}\sigma T^3 V \tag{12}$$

Como el proceso es adiabático se debe cumplir que:

$$T^3 V = constante \tag{13}$$

Si suponemos una simetría esférica, tenemos:

$$Tr = constante \tag{14}$$

Donde r es el radio de la esfera.

Ley de Desplazamiento de Wien

Como se esta trabajando sobre una cavidad en movimiento a una velocidad v, por el efecto Doppler tenemos que:

$$\delta\lambda = \frac{2\lambda\cos\theta}{c}\frac{dr}{dt} \tag{15}$$

En una cavidad esférica entre dos reflexiones, la luz recorre una distancia de $2r\cos\theta$ y el número de reflexiones por unidad de tiempo es $\frac{c}{2r\cos\theta}$. Durante el proceso de atenuación la variación de la longitud de onda con el tiempo será entonces:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\delta\lambda}{2r\cos\theta} = \frac{\lambda}{r}\frac{dr}{dt} \tag{16}$$

Integrando obtenemos:

$$d\lambda = \frac{d\lambda}{r} dr \tag{17}$$

$$\int \frac{d\lambda}{\lambda} = \int \frac{dr}{r} \tag{18}$$

$$ln(\lambda) = ln(r) + C \tag{19}$$

$$ln(\lambda) - ln(r) = ln\left(\frac{\lambda}{r}\right) = constante \tag{20}$$

$$\frac{\lambda}{r} = constante \tag{21}$$

Ley de Desplazamiento de Wien

Despejando r tenemos:

$$r = \frac{\lambda}{constante} \tag{22}$$

Sustituyendo (22) en (14) obtenemos:

$$T\frac{\lambda}{constante} = constante \tag{23}$$

$$\lambda T = constante \tag{24}$$

Ley de Desplazamiento de Wien

$$\lambda_{max} = \frac{0{,}0028976mK}{T}$$

Aproximación de Wien

Wien en 1896, propusó una forma para la función de distribución que se ajustaba de forma sencilla:

$$I(\lambda) = \frac{C_1}{\lambda^5} e^{-\frac{C_2}{\lambda T}}$$

Donde C_1 y C_2 son constantes.
Con dicha solución es posible obtener el valor de la constante de Wien:

$$\lambda T = 2{,}8976 \times 10^{-3} m \cdot K$$

Para obtener la ley de Rayleigh-Jeans es necesario contar el número de ondas estacionarias con nodos en las superficies, cuyas longitudes de onda se encuentren entre λ y $\lambda + d\lambda$. Por lo tanto, se debe cumplir la ecuación de onda.

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \tag{25}$$

También debe cumplirse que la onda tenga amplitud cero en las paredes; por lo tanto, una solución a la ecuación (25) es:

$$E = E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{n_x \pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_y \pi y}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_z \pi z}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi c t}{\lambda}\right) \tag{26}$$

Sustituyendo (26) en (25):

$$(n_x)^2 + (n_y)^2 + (n_z)^2 = \frac{4a^2}{\lambda^2} \tag{27}$$

Tenemos que el número de nodos para el intervalo ν a $\nu + d\nu$ es:

$$N^\circ = \frac{\pi}{3}[(n_x)^2 + (n_y)^2 + (n_z)^2]^{\frac{3}{2}} \tag{28}$$

Sustituyendo (27) en (28):

$$N^\circ = \frac{8\pi a^3}{3\lambda^3} \tag{29}$$

Además, se requiere que el número de nodos por unidad de volumen entre λ y $\lambda + d\lambda$, para ello derivamos (29) con respecto a λ y lo dividimos entre el volumen de la cavidad.

$$\frac{dN^\circ}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{8\pi a^3}{3\lambda^3}\right) = \frac{-8\pi a^3}{\lambda^4} \tag{30}$$

Ley de Rayleigh-Jeans

Dividiendo entre el volumen $V = a^3$:

$$\frac{\frac{dN^\circ}{d\lambda}}{a^3} = \frac{8\pi}{\lambda^4} \tag{31}$$

Es importante mencionar que en (31) se desprecia el signo, ya que solamente indica que el número de ondas decrece con la longitud de la onda.
Por lo tanto, multiplicando la energía por el número de onda podemos expresar la densidad de energía de la radiación del cuerpo negro como:

$$u_\lambda = \frac{8\pi kT}{\lambda^4} \tag{32}$$

Donde cada nodo de onda estacionaria tiene una energía medida en kT.
Donde k es la constante de Boltzmann.
A está expresión se le conoce como distribución de energía de Rayleigh-Jeans.

Ley de Rayleigh-Jeans

Si la derivamos con respecto a λ obtenemos:

$$\frac{du_\lambda}{d\lambda}\frac{d\lambda}{d\nu} = E(\nu) = \frac{8\pi\nu^2 kT}{c^3} \tag{33}$$

Expresión conocida como ley de Rayleigh-Jeans.

Ley de Rayleigh-Jeans

$$E(\nu) = \frac{8\pi\nu^2 kT}{c^3}$$

Catástrofe Ultravioleta

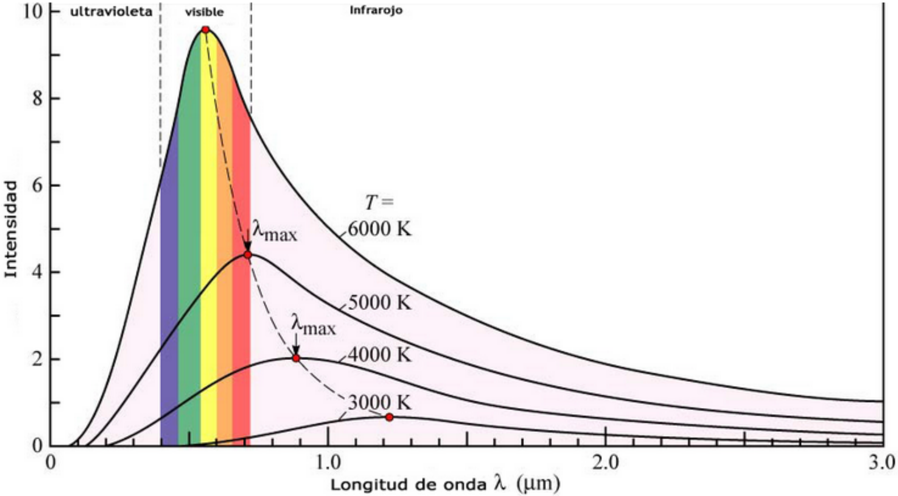

Figura 3: Espectro de radiación de cuerpo negro a diferentes temperaturas

Hipótesis de Planck

Planck postuló que los hipotéticos osciladores microscópicos de un cuerpo negro sólamente podían emitir radiación electromagnética en múltiplos enteros de una cantidad mínima a la que llamó *cuanto de acción* (wirkungsquantum). Ésta unidad de energía es proporcional a la frecuencia ν de los osciladores:

$$E = nh\nu$$

con $n = 0, 1, 2, 3...$, y donde la constante de proporcionalidad h es la llamada *constante de Planck*. Así, n es el número de cuantos en la onda electromagnética emitida por el oscilador.

Hipótesis de Planck

Al no poder explicar esta constante de proporcionalidad en términos de la física clásica, Planck la consideró como un mero truco matemático más que un verdadero cambio fundamental en la concepción del mundo.

Esperaba que la expresión final para la radiación de cuerpo negro no dependiera de esta constante, o que su valor se pudiera ajustar a cero. El valor actual de la constante en el SI es de $h = 6{,}62606876x10^{-34}Js$.

Ley de Radiación de Planck

En 1900, Planck descubrió que se podía realizar una modificación a la aproximación de Wien que encajaba con el espectro de cuerpo negro a bajas longitudes de onda, además de retomar la expresión de Rayleigh-Jeans en las longitudes de onda largas:

$$B_\lambda(T) = \frac{C_1}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1}$$

Ley de Radiación de Planck

Para determinar las constantes C_1 y C_2, Planck empleó su hipótesis de la cuantización de la energía, la cual funcionó increiblemente para ajustarse a los datos experimentales:

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k T}} - 1}$$

Límites Clásicos

La Ley de Planck se ajusta a todo el espectro electromagnético, por lo que al tomar el límite para longitudes de onda largas se debe recuperar la Ley de Rayleigh-Jeans. Al expandir en serie de Taylor el término (cuando $\lambda \approx \frac{hc}{kT}$) se obtiene:

$$e^{\frac{hc}{\lambda kT}} \approx 1 + \frac{hc}{\lambda kT}$$

y sustituyendo en la expresión de Planck:

$$B_\lambda(T) \approx \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{1 + \frac{hc}{\lambda kT} - 1}$$

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{\lambda kT}{hc}$$

$$B_\lambda(T) = \frac{2ckT}{\lambda^4}$$

que concuerda con la expresión para la Ley de Rayleigh-Jeans.

Límites Clásicos

Para longitudes de onda cortas, el término

$$e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1 \approx e^{\frac{hc}{\lambda kT}}$$

por tanto, la expresión para la Ley de Planck se convierte en:

$$B_\lambda(T) \approx \frac{2hc^2}{\lambda^5} e^{-\frac{hc}{\lambda kT}}$$

o haciendo $C_1 = 2hc^2$ y $C_2 = hc/k$, se obtiene

$$B_\lambda(T) = \frac{C_1}{\lambda^5} e^{-\frac{C_2}{\lambda T}}$$

que coincide con la aproximación de Wien.

PROBLEMA

Derive la Ley de Desplazamiento de Wien a partir de la Ley de Planck haciendo $dB_\lambda/d\lambda = 0$.

La derivada de $B_\lambda(T)$ con respecto a λ es

$$\frac{dB_\lambda(T)}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{2hc^2}{\lambda^5\left(e^{hc/\lambda kT}-1\right)}\right)$$

$$\frac{dB_\lambda(T)}{d\lambda} = -\frac{10hc^2}{\lambda^6\left(e^{hc/\lambda kT}-1\right)} + \frac{2h^2c^3e^{hc/\lambda kT}}{\lambda^7\left(e^{hc/\lambda kT}-1\right)^2 kT}$$

$$\frac{dB_\lambda(T)}{d\lambda} = \frac{2hc^2}{\lambda^7\left(e^{hc/\lambda kT}-1\right)^2 kT}\left(-5\lambda kT\left(e^{hc/\lambda kT}-1\right)+hce^{hc/\lambda kT}\right)$$

Además del caso cuando $T \longrightarrow \infty$, esta expresión solo puede ser cero cuando el numerador es cero, entonces:

$$-5\lambda_{max}kT\left(e^{hc/\lambda_{max}kT}-1\right)+hce^{hc/\lambda_{max}kT}=0$$

Haciendo $u = hc/\lambda_{max}kT$, esto se reduce a

$$5(e^u-1)=ue^u \Longrightarrow 5-5e^{-u}=u$$

la cual puede ser resuelta mediante iteraciones sucesivas:

comenzando con $u = 1$

$$5 - 5e^{-1} = 3{,}1606$$

$$5 - 5e^{-3{,}1606} = 4{,}7880$$

$$5 - 5e^{-4{,}7880} = 4{,}9583$$

$$\vdots$$

$$u = \frac{hc}{\lambda_{max} kT} \approx 4{,}9651 \Longrightarrow \lambda_{max} = \frac{hc}{4{,}9651 \cdot kT}$$

que al sustituir con los valores de h, c y k resulta en la Ley de Desplazamiento de Wien:

$$\lambda_{max} = \frac{2{,}898 \cdot 10^{-3} mK}{T} \tag{34}$$

Consecuencias: Efecto fotoeléctrico

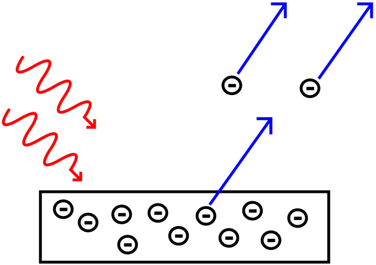

Figura 4: Efecto fotoeléctrico: haz de luz impactando una superficie metálica, liberando electrones.

Consecuencias: Efecto fotoeléctrico

Los electrones más cercanos a la superficie son liberados con una energía cinética máxima K_{max}, la cual **no** depende de la *intensidad* de la luz, sino de su *frecuencia*. ¿Cuál es la frecuencia mínima necesaria?

Cada superficie metálica tiene una *frecuencia umbral* ν_c y su correspondiente *longitud de onda umbral* λ_c; los electrones serán emitidos solo si la frecuncia ν de la luz satisface que $\nu > \nu_c$. ¿Y dónde queda Maxwell?

Consecuencias: Efecto fotoeléctrico, la explicación de Einstein

La luz que cae sobre la superficie metálica consiste en una serie de partículas sin masa llamadas *fotones*, cuya energía, de frecuencia ν y longitud de onda λ, es precisamente la energía cuántica de Planck:

$$E_{foton} = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

Consecuencias: Efecto fotoeléctrico, la explicación de Einstein

Al impactar un fotón sobre la superficie metálica, su energía puede ser absorbida por un electrón: si es mayor que la energía que lo une a la superficie metálica, puede escapar.

Si la energía de unión mínima de un metal es ϕ, entonces la energía cinética máxima de los electrones emitidos es

$$K_{max} = E_{foton} - \phi = h\nu - \phi = \frac{hc}{\lambda} - \phi$$

Quedó entonces demostrada la realidad del cuanto de Planck.

Consecuencias: Efecto Compton

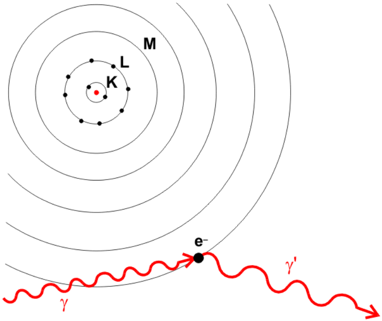

Figura 5: Diagrama que muestra el aumento de la longitud de onda del electrón, el llamado "*efecto Compton*".

Consecuencias: Efecto Compton

Al impactar un bloque de carbón con rayos X, estos se difunden en varias direcciones; a mayor ángulo de los rayos difundidos, mayor su longitud de onda.

El fenómeno sucede debido a que el *cuanto* de rayos X actúa como una partícula al chocar contra el electrón, por lo que la energía cinética que le comunica representa una perdida de su energía original.

Consecuencias: Efecto Compton

Podemos relacionar a la energía de un fotón con su momento P:

$$E_{foton} = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = pc$$

Compton consideraba la colisión entre un fotón y un electrón libre inicialmente en reposo:

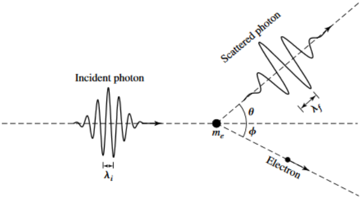

Figura 6: Diagrama de la colisión entre un fotón y un electrón.

Consecuencias: Efecto Compton

El cambio en la longitud de onda está dado por

$$\Delta\lambda = \lambda_f - \lambda_i = \frac{h}{m_e c}(1 - cos\theta)$$

donde el término

$$\frac{h}{m_e c}(1 - cos\theta)$$

es el cambio característico en la longitud de onda de un fotón disperso ($\lambda_c = 0{,}00243nm$) y se le conoce como *longtiud de onda de Compton*.

Consecuencias: Modelo atómico de Bohr

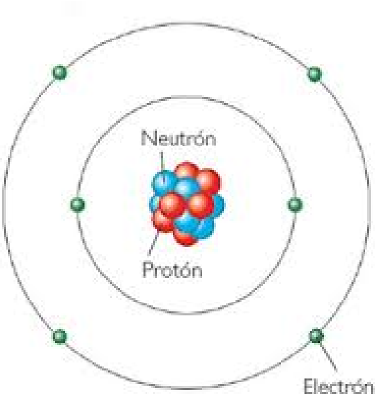

Figura 7: Modelo del átomo según Niels Bohr.

Consecuencias: Modelo atómico de Bohr

Postulados

1. *Los electrones describen órbitas circulares en torno al núcleo del átomo sin irradiar energía.*

$$r = k\frac{Ze^2}{m_e\nu^2}$$

2. *Las únicas órbitas permitidas para un electrón son aquellas para las cuales el momento angular L del electrón sea un múltiplo entero de ħ*

$$L = m_e\nu r = n\hbar$$

con $n = 1, 2, 3, ...$ y $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

3. *El electrón solo emite o absorbe energía en los saltos de una órbita permitida a otro. En dicho cambio emite o absorbe un fotón cuya energía es la diferencia de energía entre ambos niveles.*

$$E_{foton} = h\nu = E_{n_f} - E_{n_i}$$

Bibliografía

1. Bauer, Wolfgang. Westfall, Gary (2011). *Física para ingeniería y ciencias, Volumen 2*. Segunda edición. Ed. McGraw Hill Education.
2. Carrol, Bradley. Ostlie, Dale (2014). *An Introduction to Modern Astrophysics*. Pearson New International Edition. Ed. Pearson.
3. Lang, Kenneth (2013). *Essential Astrophysics*. Primera edición. Ed. Springer.
4. Gautreau, Ronald. Savin, William (1999). *Schaum's Outline of Theory and Problems of Modern Physics*. Segunda edición. Ed. McGraw-Hill.
5. Barderas, Antonio V. (2009). *Introducción a la Transferencia de Calor*. Departamento de Ingeniería Química, Universidad Nacional Autónoma de México.
6. Wikipedia, *Constante de Planck*, recuperado el 06/05/2019 de: https://es.wikipedia.org/wiki/Constante_de_Planck .

Bibliografía

1. Wikipedia, *Wien approximation*, recuperado el 10/05/2019 de: https://en.wikipedia.org/wiki/Wien_approximation
2. Wikipedia, *Planck's law*, recuperado el 10/05/2019 de: https://en.wikipedia.org/wiki/Planck%27s_law
3. Wikipedia, *Black body*, recuperado el 10/05/2019 de: https://en.wikipedia.org/wiki/Black_body
4. Wikipedia, *Planck postulate*, recuperado el 10/05/2019 de: https://en.wikipedia.org/wiki/Planck_postulate