Solución general al sistema de ecuaciones diferenciales en el *Espaciotiempo* para el movimiento en una sola dimensión espacial

Ángela Morales Zamudio

Introducción Suponga a constante. Las componentes de V y $\dot{V}$ son ($c\dot{t}$, $\dot{x}$, 0, 0) y ($c\ddot{t}$, $\ddot{x}$, 0, 0) respectivamente, donde $\dot{x}$ y $\dot{t}$ denota derivada con respecto a τ (Tiempo propio). Entonces:

$$c^2\dot{t}^2 - \dot{x}^2 = c^2 \tag{1}$$

$$a^2 = \ddot{x}^2 - c^2\ddot{t}^2 \tag{2}$$

A partir de este sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales, no homogéneas se llegará a la solución generl para la posición espacial en x y la temporal t. Para ello, se aplica el siguiente cambio de variables:

$$r = \dot{t}$$
$$m = \dot{x}$$

Se deriva con respecto al tiempo propio para obtener las derivadas de r y m, sabiendo la dependencia de las variables $r(\dot{t}(\tau))$ y $m(\dot{x}(\tau))$:

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\tau} = \frac{d^2t}{d\tau^2} = \ddot{t}$$
$$\dot{m} = \frac{dm}{d\tau} = \frac{d^2x}{d\tau^2} = \ddot{x}$$

Entonces se reescriben las ecuaciones (1) y (2):

$$c^2r^2 - m2 = c^2 \tag{3}$$

$$\dot{m}^2 - c^2\dot{r}^2 = a^2$$

La última ecuación se multiplica por -1:

$$c^2\dot{r}^2 - \dot{m}^2 = -a^2 \tag{4}$$

Como se puede observar, las ecuaciones (3) y (4) son diferencias de cuadrados de la siguiente manera:

$$(cr - m)(cr + m) = c^2 \tag{5}$$

$$(c\dot{r} - \dot{m})(c\dot{r} + \dot{m}) = -a^2 \tag{6}$$

Aplicando un segundo cambio de variable:

$$u = cr - m$$
$$v = cr + m$$

Y derivando, tanto u como v, con respecto al tiempo propio:

$$\dot{u} = \frac{d}{d\tau}(cr - m) = c\frac{dr}{d\tau} - \frac{dm}{d\tau} = c\dot{r} - \dot{m}$$
$$\dot{v} = \frac{d}{d\tau}(cr + m) = c\frac{dr}{d\tau} + \frac{dm}{d\tau} = c\dot{r} + \dot{m}$$

Y el sistema de ecuaciones diferenciales queda de la forma:

$$uv = c^2 \tag{7}$$

$$\dot{u}\dot{v} = -a^2 \tag{8}$$

De la ecuación (7), despejamos u:

$$u = \frac{c^2}{v} \tag{9}$$

Y derivamos u con respecto al tiempo propio τ:

$$\dot{u} = \frac{d}{d\tau}(\frac{c^2}{v}) = -\frac{c^2}{v^2}\frac{dv}{d\tau} = -\frac{c^2}{v^2}\dot{v}$$

Sustituímos $\dot{u}$ en la ecuación (8), de tal manera que se tenga una ecuación diferencial en términos de v y se pueda resolver para dicha variable:

$$-\tfrac{c^2}{v^2}\dot{v}\dot{v} = -a^2$$
$$\tfrac{c^2}{v^2}\dot{v}^2 = a^2$$

Se saca raíz cuadrada de cada lado.

$$\tfrac{c}{v}\dot{v} = a$$
$$\tfrac{c}{v}\tfrac{dv}{d\tau} = a$$

Dejamos todos los términos de v de un lado de la ecuación.

$$\tfrac{dv}{v} = \tfrac{a}{c}d\tau$$

Se integra cada lado con límites definidos.

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{a}{c}d\tau$$

$$[Ln|v|]_{v_0}^{v} = \tfrac{a}{c}[\tau]_{\tau_0}^{\tau}$$

$$Ln|v| - Ln|v_0| = \tfrac{a}{c}(\tau - \tau_0)$$

$$Ln|\tfrac{v}{v_0}| = \tfrac{a}{c}(\tau - \tau_0)$$

Y despejamos v.

$$\frac{v}{v_0} = e^{\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)}$$

$$v = v_0 e^{\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)} \quad \textbf{(10)}$$

En la ecuación (9) se definió una dependencia entre las variables u y v. Se sustituye el valor de v de la ecuación (10) en la ecuación (9) para obtener la variable u en términos de v_0 de la siguiente manera:

$$u = \frac{c^2}{v_0 e^{\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)}}$$

$$u = \frac{c^2}{v_0} e^{-\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)} \quad \textbf{(11)}$$

Tomando el cambio de variable utilizado anteriormente:

$$v = cr + m \qquad\qquad u = cr - m$$

se puede resolver dicho sistema de ecuaciones no diferenciales utilizando, en este caso, el método de suma y resta. Resolviendo para r, se sumará $v+u$ y despejará r:

$$v + u = cr + \cancel{m} + cr - \cancel{m}$$

$$v + u = 2cr$$

$$r = \frac{v+u}{2c} \quad \textbf{(12)}$$

Se utilizarán las expresiones (10) y (11) y se sustituirán en la ecuación (12):

$$r = \frac{1}{2}\left[\frac{v_0}{c} e^{\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)} + \frac{c}{v_0} e^{-\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)}\right] \quad \textbf{(13)}$$

Aplicando propiedades trigonométricas hiperbólicas:

$$cosh^2 x + sinh^2 x = e^x \qquad\qquad cosh^2 x - sinh^2 x = e^{-x}$$

la expresión (13) puede desarrollarse en base a las propiedades hiperbólicas:

$$r = \frac{1}{2}\left[\frac{v_0}{c}\cosh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right) + \frac{v_0}{c}\sinh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right) + \frac{c}{v_0}\cosh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right) - \frac{c}{v_0}\sinh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right)\right]$$

$$r = \frac{1}{2}\left[\left\{\frac{v_0}{c} + \frac{c}{v_0}\right\}\cosh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right) + \left\{\frac{v_0}{c} - \frac{c}{v_0}\right\}\sinh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right)\right]$$

$$r = \frac{1}{2cv_0}\left[(v_0^2 + c^2)\cosh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right) + (v_0^2 - c^2)\sinh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right)\right] = \dot{t} = \frac{dt}{d\tau} \quad \textbf{(14)}$$

La expresión para r, como se había definido en un inicio, es igual a $\dot{t}$, por lo tanto, se prosigue a la integración:

$$\int dt = \frac{1}{2cv_0}\int\left[(v_0^2 + c^2)\cosh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right) + (v_0^2 - c^2)\sinh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right)\right] d\tau$$

$$\int dt = \frac{1}{2cv_0}\left[(v_0^2 + c^2)\int\cosh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right)d\tau + (v_0^2 - c^2)\int\sinh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right)d\tau\right]$$

$$t = \frac{1}{2\cancel{c}v_0}\left[(v_0^2 + c^2)\frac{\cancel{c}}{a}\sinh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right) + (v_0^2 - c^2)\frac{\cancel{c}}{a}\cosh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right)\right] + M$$

$$t = \frac{1}{2av_0}\left[(v_0^2 + c^2)\sinh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right) + (v_0^2 - c^2)\cosh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right)\right] + M \quad \textbf{(15)}$$

Ahora, resolviendo para m, volviendo al sistema de ecuaciones no diferenciales, se aplica de nuevo el método de suma y resta, restando $v-u$ y despejando m:

$$v - u = \cancel{cr} + m - \cancel{cr} - (-m)$$

$$v - u = 2m$$

$$m = \frac{v-u}{2} \quad \textbf{(16)}$$

Utilizando nuevamente las expresiones (10) y (11), se sustituyen en la ecuación (16):

$$m = \frac{1}{2}\left[v_0 e^{\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)} - \frac{c^2}{v_0} e^{-\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)}\right] \quad \textbf{(17)}$$

La expresión (17) puede reescribirse y desarrollarse mediante las propiedades hiperbólicas mencionadas anteriormente:

$$m = \frac{1}{2}\left[v_0 \cosh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right) + v_0 \sinh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right) - \frac{c^2}{v_0}\cosh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right) + \frac{c^2}{v_0}\sinh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right)\right]$$

$$m = \frac{1}{2}\left[\left\{v_0 - \frac{c^2}{v_0}\right\}\cosh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right) + \left\{v_0 + \frac{c^2}{v_0}\right\}\sinh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right)\right]$$

$$m = \frac{1}{2v_0}\left[(v_0^2-c^2)\cosh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right) + (v_0^2+c^2)\sinh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right)\right] = \dot{x} = \frac{dx}{d\tau} \tag{18}$$

La expresión para m, como se había definido en un inicio, es igual a $\dot{x}$. Resolviendo para x, se integra respecto a τ:

$$\int dx = \frac{1}{2v_0}\int\left[(v_0^2-c^2)\cosh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right) + (v_0^2+c^2)\sinh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right)\right]d\tau$$

$$\int dx = \frac{1}{2v_0}\left[(v_0^2-c^2)\int\cosh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right)d\tau + (v_0^2+c^2)\int\sinh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right)d\tau\right]$$

$$x = \frac{1}{2v_0}\left[(v_0^2-c^2)\frac{c}{a}\sinh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right) + (v_0^2+c^2)\frac{c}{a}\cosh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right)\right] + N$$

$$x = \frac{c}{2av_0}\left[(v_0^2-c^2)\sinh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right) + (v_0^2+c^2)\cosh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right)\right] + N \tag{19}$$

Se tienen expresiones para x y t. Si los eventos son simultáneos, se evalúa $t(\tau_0) = t_0$ en la ecuación (15).

$$t_0 = \frac{1}{2av_0}\left[(v_0^2+c^2)\sinh\left(\frac{a}{c}(\tau_0-\tau_0)\right) + (v_0^2-c^2)\cosh\left(\frac{a}{c}(\tau_0-\tau_0)\right)\right] + M$$

Por propiedades hiperbólicas, $\sinh 0 = 0$ y $\cosh 0 = 1$.

$$t_0 = \frac{1}{2av_0}\left[\cancel{(v_0^2+c^2)\sinh(0)} + (v_0^2-c^2)\cosh(0)\right] + M$$

$$t_0 = \frac{1}{2av_0}\left[(v_0^2-c^2)\right] + M$$

Se despeja la constante M

$$M = t_0 - \frac{1}{2av_0}\left[(v_0^2-c^2)\right]$$

Y sustituyendo la constante M en la ecuación para t:

$$t = \frac{1}{2av_0}\left[(v_0^2+c^2)\sinh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right) + (v_0^2-c^2)\cosh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right)\right] + t_0 - \frac{1}{2av_0}\left[(v_0^2-c^2)\right]$$

$$t = \frac{1}{2av_0}\left[(v_0^2+c^2)\sinh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right) + (v_0^2-c^2)\left[\cosh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right) - 1\right]\right] + t_0$$

Aplicando la propiedad hiperbólica

$$\sinh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh(x) - 1}{2} \tag{20}$$

La expresión para t puede reescribirse:

$$t = \frac{1}{2av_0}\left[(v_0^2+c^2)\sinh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right)+2(v_0^2-c^2)\left[\frac{\cosh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right)-1}{2}\right]\right]+t_0$$

$$t = \frac{1}{2av_0}\left[(v_0^2+c^2)\sinh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right)+2(v_0^2-c^2)\sinh^2\left(\frac{a}{2c}(\tau-\tau_0)\right)\right]+t_0 \tag{21}$$

Resolviendo para x en la ecuación (19), evaluando $x(\tau_0)=x_0$

$$x_0 = \frac{c}{2av_0}\left[(v_0^2-c^2)\sinh\left(\frac{a}{c}(\tau_0-\tau_0)\right)+(v_0^2+c^2)\cosh\left(\frac{a}{c}(\tau_0-\tau_0)\right)\right]+N$$

Utilizando las propiedades hiperbólicas mencionadas con anterioridad.

$$x_0 = \frac{c}{2av_0}\left[\cancel{(v_0^2-c^2)\sinh(0)}+(v_0^2+c^2)\cosh(0)\right]+N$$

$$x_0 = \frac{c}{2av_0}\left[(v_0^2+c^2)\right]+N$$

Despejando la constante N:

$$N = x_0 - \frac{c}{2av_0}\left[(v_0^2+c^2)\right]$$

Y sustituyendo la constante N en la expresión para x.

$$x = \frac{c}{2av_0}\left[(v_0^2-c^2)\sinh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right)+(v_0^2+c^2)\cosh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right)\right]+x_0-\frac{c}{2av_0}\left[(v_0^2+c^2)\right]$$

$$x = \frac{c}{2av_0}\left[(v_0^2-c^2)\sinh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right)+(v_0^2+c^2)\left[\cosh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right)-1\right]\right]+x_0$$

Aplicando la propiedad hiperbólica de la expresión (20)

$$x = \frac{c}{2av_0}\left[(v_0^2-c^2)\sinh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right)+2(v_0^2+c^2)\left[\frac{\cosh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right)-1}{2}\right]\right]+x_0$$

$$x = \frac{c}{2av_0}\left[(v_0^2-c^2)\sinh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right)+2(v_0^2+c^2)\sinh^2\left(\frac{a}{2c}(\tau-\tau_0)\right)\right]+x_0 \tag{22}$$

Se tienen las soluciones generales para x y t

Solución General para x

$$x = \frac{c}{2av_0}\left[(v_0^2-c^2)\sinh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right)+2(v_0^2+c^2)\sinh^2\left(\frac{a}{2c}(\tau-\tau_0)\right)\right]+x_0$$

Solución General para t

$$t = \frac{1}{2av_0}\left[(v_0^2+c^2)\sinh\left(\frac{a}{c}(\tau-\tau_0)\right)+2(v_0^2-c^2)\sinh^2\left(\frac{a}{2c}(\tau-\tau_0)\right)\right]+t_0$$

Para llegar a una solución particular, se establece que $\tau_0=0$, y, por lo tanto, $t_0(\tau_0)=0$ por haberse definido simultáneos en un inicio, $x_0(\tau_0)=\frac{c^2}{a}$, y falta el valor de v_0.

Para encontrar v_0, se emplea la ecuación (18) de la primera derivada de x respecto al tiempo propio, evaluando la velocidad inicial $\dot{x}(\tau_0) = \dot{x}_0$.

$$\dot{x}_0 = \frac{1}{2v_0}\left[(v_0^2 - c^2)\cosh\left(\frac{a}{c}(\tau_0 - \tau_0)\right) + (v_0^2 + c^2)\sinh\left(\frac{a}{c}(\tau_0 - \tau_0)\right)\right]$$

$$\dot{x}_0 = \frac{1}{2v_0}\left[(v_0^2 - c^2)\cosh(0) + \cancel{(v_0^2 + c^2)\sinh(0)}\right]$$

$$\dot{x}_0 = \frac{(v_0^2 - c^2)}{2v_0}$$

Se iguala la ecuación anterior a cero para usar la fórmula general y obtener soluciones de v_0.

$$\dot{x}_0(2v_0) = v_0^2 - c^2$$

$$v_0^2 - 2\dot{x}_0 v_0 - c^2 = 0$$

$$v_0 = \frac{2\dot{x}_0 \pm \sqrt{4\dot{x}_0^2 + 4c^2}}{2}$$

$$v_0 = \frac{2\dot{x}_0 \pm \sqrt{4(\dot{x}_0^2 + c^2)}}{2}$$

$$v_0 = \frac{\cancel{2}\dot{x}_0 \pm \cancel{2}\sqrt{\dot{x}_0^2 + c^2}}{\cancel{2}}$$

$$v_0 = \dot{x}_0 \pm \sqrt{\dot{x}_0^2 + c^2}$$

Por condiciones iniciales, la velocidad inicial será cero, $\dot{x}_0 = 0$. Entonces:

$$v_0 = 0 \pm \sqrt{0^2 + c^2}$$

$$v_0 = c$$

Y así le damos valor a v_0 para poder llegar a una slución particular.

Verificando que se cumplan las condiciones, se tenía en la ecuación (14) una expresión para la primera derivada del tiempo con respecto al tiempo propio, que como se había definido, esto es el factor gamma γ.

$$\gamma = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{2cv_0}\left[(v_0^2 + c^2)\cosh\left(\frac{a}{c}(\tau - \tau_0)\right) + (v_0^2 - c^2)\sinh\left(\frac{a}{c}(\tau - \tau_0)\right)\right]$$

Aplicando las condiciones de $\tau 0 = 0$, $v_0 = c^2$:

$$\gamma = \frac{1}{2c^2}\left[(c^2 + c^2)\cosh(0) + \cancel{(c^2 - c^2)\sinh(0)}\right]$$

$$\gamma = \frac{2c^2}{2c^2} = 1$$

Entonces, usando el factor γ, sustituyendo por la velocidad inicial $\dot{x}_0 = 0$, se probará si se cumple la igualdad.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}_0^2}{v_0^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}_0^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{0}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1 \checkmark$$

Regresando a las ecuaciones generales, se obtiene una solución particular de $t(\tau)$ con las condiciones previamente mencionadas.

$$t = \frac{1}{2ac}\left[(c^2 + c^2)\sinh\left(\frac{a}{c}(\tau - 0)\right) + 2\cancel{(c^2 - c^2)}\sinh^2\left(\frac{a}{2c}(\tau - 0)\right)\right] + 0$$

$$t = \frac{1}{2ac}\left[(2c^2)\sinh\left(\frac{a}{c}\tau\right)\right] = \frac{c}{a}\sinh\left(\frac{a}{c}\tau\right)$$

De la misma manera, la solución particular de $x(tau)$ con las condiciones mencionadas es:

$$x = \frac{c}{2ac}\left[\cancel{(c^2 - c^2)}\sinh\left(\frac{a}{c}(\tau - 0)\right) + 2(c^2 + c^2)\sinh^2\left(\frac{a}{2c}(\tau - 0)\right)\right] + \frac{c^2}{a}$$

$$x = \frac{1}{2a}\left[2(2c^2)\sinh^2\left(\frac{a}{2c}\tau\right)\right] + \frac{c^2}{a} = \frac{2c^2}{a}\sinh^2\left(\frac{a}{2c}\tau\right) + \frac{c^2}{a}$$

Utilizando las propiedades hiperbólicas, se transforma $\sinh^2$:

$$x = \frac{\cancel{2}c^2}{a}\left[\frac{\cosh\left(\frac{a}{c}\tau\right) - 1}{\cancel{2}}\right] + \frac{c^2}{a} = \frac{c^2}{a}\cosh\left(\frac{a}{c}\tau\right) - \cancel{\frac{c^2}{a}} + \cancel{\frac{c^2}{a}} = \frac{c^2}{a}\cosh\left(\frac{a}{c}\tau\right)$$

Y así obtenemos dos soluciones particulares del sistema de ecuaciones diferenciales:

Solución Particular

$$x = \frac{c^2}{a}\cosh\left(\frac{a}{c}\tau\right)$$

Solución Particular

$$t = \frac{c}{a}\sinh\left(\frac{a}{c}\tau\right)$$