Curvatura

Claudeth Hernández

Mayo 2019

Demostrar que $a^2 = (\frac{c^2}{c^2-v^2})^3[(\frac{dv}{dt})^2 + (1-\frac{v^2}{c^2})v^4k^2]$ **donde k es la curvatura.**

Desde el punto de vista del cálculo vectorial existe un concepto llamado *curvatura* que se define como

$$k = \frac{|\dot{T}|}{|\dot{c}(t)|} \tag{1}$$

donde c es la parametrización de la curva a la cual queremos medirle la curvatura.
La curvatura meramente en términos de la parametrización de curva es:

$$k = \frac{|\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)|}{|\dot{c}(t)|^3} \tag{2}$$

Sea V la cuadrivelocidad, $V = (\gamma c, \gamma\vec{v})$ y $\dot{V} = (c\frac{d(\gamma)}{d\tau}, \frac{d(\gamma\vec{v})}{d\tau})$ su derivada con respecto a τ. Definimos la magnitud de la aceleración como $a^2 = -g(\dot{V}, \dot{V})$.

Como $dt = \gamma d\tau$

$$\dot{V} = (c\gamma\frac{d\gamma}{dt}, \gamma\frac{d(\gamma\vec{v})}{dt})$$

Usando regla del producto

$$\dot{V} = (c\gamma\frac{d\gamma}{dt}, \gamma\frac{d(\gamma)}{dt}\vec{v} + \gamma^2\frac{\vec{v}}{dt})$$

Haciendo producto punto consigo mismo

$$g(\dot{V}, \dot{V}) = (c\gamma\frac{d\gamma}{dt})^2 - (\gamma\frac{d\gamma}{dt}\vec{v} + \gamma^2\frac{d\vec{v}}{dt}), (\gamma\frac{d\gamma}{dt}\vec{v} + \gamma^2\frac{d\vec{v}}{dt})$$

$$g(\dot{V}, \dot{V}) = (c\gamma\frac{d\gamma}{dt})^2 - [(\gamma\frac{d\gamma}{dt}\vec{v})^2 + 2\gamma^3\frac{d\gamma}{dt}(\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}) + \gamma^4(\frac{d\vec{v}}{dt})^2] \tag{3}$$

Recordemos que el factor de Lorentz está definido:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

La derivada de γ con respecto a t es

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{v}{c^2(1 - \frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}} \frac{dv}{dt}$$

Sustituyendo únicamente en el primer término de (1)

$$g(\dot{V}, \dot{V}) = (c\frac{1}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}} \frac{v}{c^2(1 - \frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}} \frac{dv}{dt})^2 - [(\gamma\frac{d\gamma}{dt}\vec{v})^2 + 2\gamma^3\frac{d\gamma}{dt}(\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}) + \gamma^4(\frac{d\vec{v}}{dt})^2]$$

$$g(\dot{V}, \dot{V}) = (\frac{v}{c(1 - \frac{v^2}{c^2})^2} \frac{dv}{dt})^2 - [(\gamma\frac{d\gamma}{dt}\vec{v})^2 + 2\gamma^3\frac{d\gamma}{dt}(\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}) + \gamma^4(\frac{d\vec{v}}{dt})^2]$$