Introducción a la Física Moderna 1
Ejercicio 4.2
Special Relativity. Woodhouse

Antonio José López Moreno

23 de Mayo de 2019

Ejercicio

Un mesón pi se descompone en dos fotones de frecuencias w1 y w2, que viajan en direcciones opuestas. Encuentre la masa en reposo del mesón y su velocidad antes de la descomposición en términos de wi y w2.

Solución

Por cosnervación de momento tenemos

$$P_i = P_f$$

$$P_{meson} = P_{foton1} + P_{foton2} \tag{1}$$

Siendo P el 4-momento del fotón cumple:

$$g(P, P) = 0$$

$$(P^0)^2 - (P^1)^2 - (P^2)^2 - (P^3)^2 = 0$$

$$(P^0)^2 = (P^1)^2 + (P^2)^2 + (P^3)^2$$

$$P^0 = \left\|\vec{P}\right\| \tag{2}$$

Por otro lado sabemos que el 4-momento de una partícula esta dado por

$$P = (\frac{E}{c}, \vec{P}) \tag{3}$$

Definiendo la energía y momento de un mesón como:

$$E_{mesón} = mc^2\gamma(v)$$

$$\vec{P_{meson}} = m\vec{v}\gamma(v)$$

Definiendo la energía de un fotón como:

$$E_{fotón} = \hbar w$$

Sustituyendo la definición de 4-momento (3) en la ecuación de la conservación del 4-momento (1) tenemos

$$(\frac{E_{meson}}{c}, \vec{P_{meson}}) = (\frac{E_{foton1}}{c}, \vec{P_{foton1}}) + (\frac{E_{foton2}}{c}, \vec{P_{foton2}})$$

Sustituyendo las definiciones anteriores de energía y momento tenemos

$$(mc\gamma(v), \vec{v}m\gamma) = (\frac{\hbar w_1}{c}, \vec{P_{foton1}}) + (\frac{\hbar w_2}{c}, \vec{P_{foton2}})$$

De aquí tenemos que

$$mc\gamma(v) = \frac{\hbar}{c}(w_1 + w_2) \tag{4}$$

$$\vec{v}m\gamma(v) = \vec{P_{foton1}} + \vec{P_{foton2}} \tag{5}$$

De la ecuación (2) y de las indicaciones del problema, de que el mesón se descompone en dos fotones que viajan en direcciónes anteriones, podemos definir el momento del foton como las energías de los fotones multiplicados por unos vectores unitarios opuestos. De la siguiente forma

$$\vec{P_{foton1}} = \frac{\hbar}{c}w_1\hat{j}$$

$$\vec{P_{foton2}} = -\frac{\hbar}{c}w_2\hat{j}$$

Sustituyendo en la ecuación (5) tenemos

$$\vec{v}m\gamma(v) = \frac{\hbar}{c}(w_1 - w_2)\hat{j} \tag{6}$$

De la ecuación (4) podemos despejar

$$m\gamma(v) = \frac{\hbar}{c^2}(w_1 + w_2) \tag{7}$$

Sustituyendo la ecuación (7) en la (6) y haciendo un poco de algebra, podemos llegar a que

$$\vec{v} = c\frac{w_1 - w_2}{w1 + w2}\hat{\jmath}$$

Sacando la magnitud de $\vec{v}$, obtenemos la velocidad del mesón antes de la descomposición

$$v = c\frac{w_1 - w_2}{w1 + w2} \tag{8}$$

En la contración de Lorentz de la ecuación (7) podemos susitituir la velocidad anterior y tenemos que

$$m\frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v^2}{c^2})}} = \frac{\hbar}{c^2}(w_1 + w_2)$$

$$m = \frac{\hbar}{c^2}(w_1 + w_2)\sqrt{1 - (\frac{v^2}{c^2})}$$

$$m = \frac{\hbar}{c^2}(w_1 + w_2)\sqrt{1 - (\frac{w_1 - w_2}{w_1 + w_2})^2}$$

$$m = \frac{\hbar}{c^2}\sqrt{(w_1 + w_2)^2 - (w_1 - w_2)^2}$$

$$m = \frac{\hbar}{c^2}\sqrt{4w_1 w_2}$$

Entonces encontramos la masa en reposo del mesón antes de la descomposición

$$m = \frac{2\hbar}{c^2}\sqrt{w_1 w_2}$$