Fidel Alejandro Navarro Salazar

Two straight rods R and R' are rigidly bolted together so that, in their rest frame, the angle between them θ. Relative to a second inertial frame, the rods are moving with a velocity v. In the second frame, the angle between R and v is α, the angle between R' and v is α', and the angle between R and R' is Φ. Show that:

$$\cos\Phi = \frac{\cos\theta\sqrt{c^2 - v^2 sin^2\alpha}\sqrt{c^2 - v^2 sin^2\alpha'} - c^2\cos\alpha\cos\alpha'}{c^2 - v^2}$$

Primero resolveremos para el caso de una sola barra

Tenemos que $g(X, X) = -L_2^0$, $g(Y, Y) = 0$, y además $Y - X = \Gamma V$. Donde Γ es el tiempo propio de la barra en el segundo marco de referencia. Tenemos que $-g(X, V) = c^2\Gamma$. Por lo tanto:

$$L^2 = -g(X, X) = -g(Y - \Gamma V, Y - \Gamma V)$$

$$L^2 = L_0^2 - c^{-2} g(X, V)^2$$
$$L^2 = L_0^2 - c^2 L^2 \gamma(v)^2 (i \cdot v)^2$$

Tenemos que el angulo entre la barra y la velocidad es α, por lo tanto:

$$L = \frac{L_0\sqrt{c^2 - v^2}}{\sqrt{c^2 - v^2 sin^2\alpha}}$$

Utilizando esta generalización para ambas barras tenemos:

$$R = \frac{R_0\sqrt{c^2 - v^2}}{\sqrt{c^2 - v^2 sin^2\alpha}}$$
$$R' = \frac{R_0'\sqrt{c^2 - v^2}}{\sqrt{c^2 - v^2 sin^2\alpha'}}$$

De la ley de los cosenos tenemos que para un triangulo de lados a, b y c el coseno del angulo comprendido por los lados a y b (A) es:

$$\cos A = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Por lo tanto:

$$cos\Phi = \frac{R^2 + R'^2 - l^2}{2RR'}$$

Donde l es la distancia entre los extremos de las barras.
Sustituyendo

$$cos\Phi = \frac{(\frac{R_0\sqrt{c^2-v^2}}{\sqrt{c^2-v^2sin^2\alpha}})^2 + (\frac{R_0'\sqrt{c^2-v^2}}{\sqrt{c^2-v^2sin^2\alpha'}})^2 - l^2}{2(\frac{R_0\sqrt{c^2-v^2}}{\sqrt{c^2-v^2sin^2\alpha}})(\frac{R_0'\sqrt{c^2-v^2}}{\sqrt{c^2-v^2sin^2\alpha'}})}$$

$$cos\Phi = \frac{\frac{R_0^2(c^2-v^2)}{c^2-v^2sin^2\alpha} + \frac{R_0^{2\prime}(c^2-v^2)}{c^2-v^2sin^2\alpha} - l^2}{\frac{2R_0R_0'(c^2-v^2)}{\sqrt{c^2-v^2sin^2\alpha}\sqrt{c^2-v^2sin^2\alpha'}}}$$

Podemos expresar l en funcion del marco de referencia en reposo como:

$$l = \frac{l_0\sqrt{c^2-v^2}}{\sqrt{c^2-v^2sin^2\beta}}$$

$$l_0 = \sqrt{R_0^2 + R_0^{2\prime} - 2R_0R_0'cos\theta}$$

Por lo tanto:

$$cos\Phi = \frac{\frac{R_0^2(c^2-v^2)}{c^2-v^2sin^2\alpha} + \frac{R_0^{2\prime}(c^2-v^2)}{c^2-v^2sin^2\alpha} - \frac{l_0^2(c^2-v^2)}{c^2-v^2sin^2\beta}}{\frac{2R_0R_0'(c^2-v^2)}{\sqrt{c^2-v^2sin^2\alpha}\sqrt{c^2-v^2sin^2\alpha'}}}$$

$$cos\Phi = \frac{\frac{R_0^2}{c^2-v^2sin^2\alpha} + \frac{R_0^{2\prime}}{c^2-v^2sin^2\alpha} - \frac{R_0^2+R_0^{2\prime}-2R_0R_0'cos\theta}{c^2-v^2sin^2\beta}}{\frac{2R_0R_0'}{\sqrt{c^2-v^2sin^2\alpha}\sqrt{c^2-v^2sin^2\alpha'}}}$$

Nota: No se ha podido llegar a la solución mediante el uso de la ley de los cosenos. Debido a que no se cuenta con el valor de l_0 en el marco de referencia en reposo, ni con el ángulo entre l y v en el segundo marco de referencia, el cual denominamos como β.

Recordando la solución debería ser:

$$\cos\Phi = \frac{\cos\theta\sqrt{c^2-v^2sin^2\alpha}\sqrt{c^2-v^2sin^2\alpha'} - c^2\cos\alpha\cos\alpha'}{c^2-v^2}$$