Introducción a la Física Moderna I
Ejercicio 4.5
Special Relativity. Woodhouse

Brayan Alexis Ramírez Camacho

Mayo de 2019

En el ejemplo 4.3 se muestra que

$$m\frac{dv}{dm} + u\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 0$$

que se puede reescribir como

$$\frac{dm}{m} = -\frac{dv}{u\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

integrando en ambos lados de la ecuación

$$\int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m} = -\frac{1}{u}\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

$$ln\left(\frac{m}{m_0}\right) = -\frac{c}{u}\tanh^{-1}\left(\frac{v}{c}\right)|_{v_0}^{v} \tag{1}$$

Como el cohete tiene aceleración constante, se cumple que

$$t = \frac{c}{a}\sinh\left(\frac{a}{c}\tau\right) \tag{2}$$

y

$$x = \frac{c^2}{a}\cosh\left(\frac{a}{c}\tau\right) \tag{3}$$

tomando las derivadas de (2) y (3) con respecto a τ

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{c^2}{a}\frac{a}{c}\sinh\left(\frac{a}{c}\tau\right)$$

$$\frac{dx}{d\tau} = c\sinh\left(\frac{a}{c}\tau\right) \tag{4}$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{c}{a}\frac{a}{c}\cosh\left(\frac{a}{c}\tau\right)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \cosh\left(\frac{a}{c}\tau\right) \tag{5}$$

Además, se sabe que

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{dx}{d\tau}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{-1}$$

de (4) y (5)

$$v = c\,\mathrm{senh}\left(\frac{a}{c}\tau\right)\left(\cosh\left(\frac{a}{c}\tau\right)\right)^{-1}$$

$$v = c\tanh\left(\frac{a}{c}\tau\right)$$

$$\frac{a}{c}\tau = \tanh^{-1}\left(\frac{v}{c}\right) \tag{6}$$

sustituyendo (6) en (1)

$$ln\left(\frac{m}{m_0}\right) = -\frac{c}{u}\frac{a}{c}\tau|_0^\tau$$

$$ln\left(\frac{m}{m_0}\right) = -\frac{a}{u}\tau$$

Finalmente

$$\boxed{\frac{m_0}{m} = e^{\frac{a}{u}\tau}} \tag{7}$$

que era lo que se quería mostrar.

Por otro lado, de (7)

$$\left(\frac{m_0}{m}\right)^{\frac{u}{c}} = e^{\frac{a}{c}\tau}$$

de (6)

$$\left(\frac{m_0}{m}\right)^{\frac{u}{c}} = e^{\tanh^{-1}\left(\frac{v}{c}\right)} \tag{8}$$

Usando la identidad

$$e^{\tanh^{-1}\left(\frac{v}{c}\right)} = \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}$$

$$= \left(\frac{c+v}{c-v}\right)^{\frac{1}{2}}$$

sustituyendo en (8)

$$\left(\frac{m_0}{m}\right)^{\frac{u}{c}} = \left(\frac{c+v}{c-v}\right)^{\frac{1}{2}}$$

se obtiene finalmente

$$\boxed{\frac{m_0}{m} = \left(\frac{c+v}{c-v}\right)^{\frac{c}{2u}}}$$

Es posible verificar que para un viaje interestelar de 40 años de ida y vuelta (τ = 40 años = 1261440000 s), con una aceleración constante de 9.8 m/s^2 y una velocidad para los proyectiles de $u = 0{,}5c$, la cantidad de combustible necesaria sería

$$\frac{m}{m_0} = e^{-\frac{a}{u}\tau}$$

$$\frac{m}{m_0} = e^{-\frac{9{,}8m/s^2}{0{,}5\cdot 3\cdot 10^8 m/s}\cdot 1261440000s}$$

$$\frac{m}{m_0} \approx 1{,}6144\cdot 10^{-36} \Longrightarrow m_0 \approx 6{,}1942\cdot 10^{35} m$$

Si el cohete regresara a la Tierra con 1 kg de combustible, ¡tendría que partir con una cantidad mayor a 300 000 veces la masa del Sol!.