División de ciencias exactas

Departamento de física

Curso de física moderna

Problemas de Woodhouse

Momento-energía

Problema 4.3

Autor:
Miguel Ernesto Medina León

Profesor:
Enrique Jiménez

Año académico 2019-2020

Statement

Una partícula de masa en reposo M en reposo decae en una partícula de masa en reposo m y un fotón. Encuentre la energía de los productos en términos de M y m.

La situación es que una partícula de masa en reposo M se encuentra en reposo, por tanto su 4-momento puede ser expresado como

$$P_M^{\mu} =< \frac{E_M}{c}, 0, 0, 0 > \tag{1}$$

Esta partícula decae en una partícula de masa en reposo m que se encuentra en movimiento (para más facilidad, se considerará que este movimiento es solo en el eje x) y un fotón, siendo los 4-momentos de cada uno

$$P_m^{\nu} =< \frac{E_m}{c}, P_m, 0, 0 > \tag{2}$$

$$P_{\gamma}^{\omega} =< \frac{E_{\gamma}}{c}, \frac{-E_{\gamma}}{c}, 0, 0 > \tag{3}$$

El 3-momento del fotón fue escrito de esa manera por ésto:

$$P^{\alpha} =< \frac{E}{c}, \vec{p} >=< \frac{E}{c}, m\gamma\vec{v} >=< \frac{E}{c}, \frac{m\gamma c^2\vec{v}}{c^2} >=< \frac{E}{c}, \frac{E\vec{v}}{c^2} >$$

Se eligió la última forma de expresión para el fotón porque este no tiene masa, y como la velocidad del fotón es c, y para que el 3-momento se conserve con la partícula de masa m respecto a la de masa M, por eso las velocidades están en sentidos opuestos.

Ahora, se tiene que el 4-momento se conserva

$$\frac{dP^{\nu}}{d\tau} = 0 \tag{4}$$

Usando **(4)** para conservar **(1)** a **(2)** y **(3)**

$$P_M^{\mu} = P_m^{\nu} + P_{\gamma}^{\omega}$$

$$< \frac{E_M}{c}, 0, 0, 0 >=< \frac{E_m}{c}, P_m, 0, 0 > + < \frac{E_{\gamma}}{c}, \frac{-E_{\gamma}}{c}, 0, 0 > \tag{5}$$

Separando **(5)** por las componentes que nos interesan:

$$\frac{E_M}{c} = \frac{E_m}{c} + \frac{E_\gamma}{c} \longrightarrow E_M = E_m + E_\gamma \tag{6}$$

$$0 = P_m - \frac{E_\gamma}{c} \longrightarrow P_m = \frac{E_\gamma}{c} \tag{7}$$

Se tiene que la energía y el momento están relacionadas por la expresión

$$E_m^2 = m^2c^4 + P_m^2c^2 \tag{8}$$

Sustituyendo **(7)** en **(8)** y despejando m^4c^2

$$E_m^2 - E_\gamma^2 = m^2c^4 \tag{9}$$

Y desarrollando **(6)** (sabiendo que como la partícula de masa en reposo M está en reposo)

$$E_m + E_\gamma = Mc^2 \tag{10}$$

Con **(9)** y **(10)** se construye el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} E_m + E_\gamma &= Mc^2 \\ E_m^2 - E_\gamma^2 &= m^2c^4 \end{aligned}$$

Resolviendo para E_m y E_γ se llega a

$$E_m = (\frac{M^2 + m^2}{2M})c^2$$

$$E_\gamma = (\frac{M^2 - m^2}{2M})c^2$$