2025-09-23 RL

📘 Insiemi di Algebra

Insiemi numerici principali

- $\mathbb{N}$ = insieme dei numeri naturali
  $\{0, 1, 2, 3, ...\}$
  - $3 \in \mathbb{N}$ → 3 appartiene a $\mathbb{N}$
  - $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$
  - $-1 \notin \mathbb{N}$
- $\mathbb{Z}$ = insieme dei numeri interi
  $\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...\}$
- $\mathbb{Q}$ = insieme dei numeri razionali
  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$

Numeri non razionali

Esempi di numeri **non razionali**:

- $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
- $\pi \notin \mathbb{Q}$
- $e \notin \mathbb{Q}$

Nasce quindi l'insieme dei **numeri reali** $\mathbb{R}$:

- $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$
- $\pi \in \mathbb{R}$
- $e \in \mathbb{R}$

Sottoinsiemi

- Esempio: $\mathbb{N}$ come insieme di partenza.
- $A = \{0, 2, 7, 41\}$ con $7 \in A$
- $A \subseteq \mathbb{N}$ (simbolo $\subseteq$ = sottoinsieme).

Condizioni sugli insiemi

Un insieme può essere definito con una **condizione**:

- $A = \{0, 2, 7, 41\}$
- $A = \{0, 2, 7, 2, 41\}$ → le ripetizioni non contano, stesso insieme.
- $B = \{a \in \mathbb{N} : a^2 + 7 \geq 25\}$
  - Verifica: $3 \in B$?
  $3^2 + 7 = 9 + 7 = 16 \ngeq 25$ → **NO**
- $C = \{a \in \mathbb{Z} : a^2 \geq 0\}$
  Tutti i numeri interi soddisfano questa condizione → $C = \mathbb{Z}$.

Insiemi vuoti

Esempio:

- $X =$ matricole Informatica 2025/26 percorso A.
- $T = \{a \in X : a \text{ è sampdoriano e genoano}\}$
- Nessun elemento soddisfa $\rightarrow T = \varnothing$.

> $\varnothing$ = insieme vuoto.

Esercizio: sottoinsiemi

Quanti sottoinsiemi ha $X = \{0, 1\}$?

I sottoinsiemi sono:

1. $\{0, 1\}$
2. $\{0\}$
3. $\{1\}$
4. $\varnothing$

Risposta: 4 sottoinsiemi.

Inclusione tra insiemi

- $B \subseteq A$ significa che **ogni elemento di B appartiene ad A**.
- Formalmente: $\forall b \in B \Rightarrow b \in A$.

Operazioni tra insiemi

Dato un insieme X e due sottoinsiemi $A, B \subseteq X$:

- **Intersezione**:
  $A \cap B = \{x \in X : x \in A \text{ e } x \in B\}$
- **Unione**:
  $A \cup B = \{x \in X : x \in A \text{ o } x \in B\}$
- **Differenza**:
  $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$
  $B \setminus A = \{x \in B : x \notin A\}$
- **Complementare** (rispetto a X):
  $C_X(A) = \{x \in X : x \notin A\}$

👉 Le operazioni $\cap$ e $\cup$ sono **binarie**, mentre C_X è **unaria**.

🔑 Proprietà delle operazioni

Proprietà numeriche (ripasso)

Per $x, y, z \in \mathbb{N}$:

- $x + y = y + x \rightarrow$ **commutativa della somma**
- $(x + y) + z = x + (y + z) \rightarrow$ **associativa della somma**
- $x \cdot (y + z) = xy + xz \rightarrow$ **distributiva**
- $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z) \rightarrow$ **vera**

- $(x+y):z=(x:z)+(y:z) \rightarrow$ **falsa**

Proprietà insiemistiche

Per insiemi $A, B, C \subseteq X$:

- **Commutatività**
  $A \cup B = B \cup A$
  $A \cap B = B \cap A$
- **Associatività**
  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- **Distributività**
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- **Doppio complementare**
  $C_X(C_X(A)) = A$
- **Leggi di De Morgan**
  $C_X(A \cup B) = C_X(A) \cap C_X(B)$
  $C_X(A \cap B) = C_X(A) \cup C_X(B)$

Esempio con insiemi concreti

Sia:

- $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A = \{0, 1, 2, 3\}$
- $B = \{2, 3, 4\}$

Allora:

- $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
- $A \cap B = \{2, 3\}$
- $A \setminus B = \{0, 1\}$
- $B \setminus A = \{4\}$
- $C_X(A) = \{4, 5\}$

📝 Esercizi sugli appunti

I seguenti esercizi replicano i calcoli della pagina scritta a mano:

- **Calcolo di complementare e unione/intersezione**
  - $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
  - $C_X(A \cup B) = C_X(\{0, 1, 2, 3, 4\}) = \{5\}$
  - $C_X(A) = \{4, 5\}$
  - $C_X(B) = \{0, 1, 5\}$
  - $C_X(A) \cap C_X(B) = \{4, 5\} \cap \{0, 1, 5\} = \{5\}$

Indice di sommatoria (Sommatoria)

- **Definizione:** $\sum_{i=1}^{m} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$
- Dove: a_i è il termine generico, i è l'indice, m è l'estremo superiore, 1 è l'estremo inferiore (o n, se si parte da n).

- Nota a margine negli appunti: $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$

Insiemi definiti per proprietà

- Sia $X = \mathbb{N}$ e $i \in \mathbb{N}$
- $A_n = \{a \in \mathbb{N} : a^2 \geq i\}$
- $A_{20} = \{a \in \mathbb{N} : a^2 \geq 20\}$

Prodotto cartesiano

Dati due insiemi X e Y:

- $X \times Y$ è il **prodotto cartesiano di X con Y**.
- $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$
- (x, y) è una **coppia ordinata**