ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΠΡΟΤΥΠΩΝ

Φαναρίδου Κυριακούλα

9ο εξάμηνο

ΑΕΜ: 57830

Άσκηση 1

Έστω Z1 ένα ζάρι και z1 μια διακριτή τυχαία μεταβλητή που συμβολίζει το αποτέλεσμα της ρίψης του Z1.

A) Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (Probability Density Function-PDF) υπολογίζεται από την σχέση $fx(x) = \frac{dFx(x)}{dx}$ όπου Fx(x)=P[X≤x] , δηλαδή η πιθανότητα του γεγονότος {X≤x}.

Ο δειγματοχώρος περιέχει τις 6 πλευρές του ζαριού, δηλαδή S = {1,2,3,4,5,6}.

Άρα, η πιθανότητα στην ρίψη ενός ζαριού να έρθει ένα από τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανη και ίση με:

P(A) =$\frac{N(A)}{N(S)}$=1/6

Επομένως, η PDF του Z1 ορίζεται ως: $fX(x) = \begin{cases} 1/6, & 1 \leq x \leq 6 \\ 0, & αλλού \end{cases}$

B)

Η μέση τιμή E[X] ορίζεται ως :

E[X] =$\sum X\kappa * Px(k)$ = $\frac{1}{6}$*1 +$\frac{1}{6}$*2+$\frac{1}{6}$*3+$\frac{1}{6}$*4+$\frac{1}{6}$*5+$\frac{1}{6}$*6 = 3.5

Καθώς η τυχαία μεταβλητή z1 παίρνει πεπερασμένες τιμές προφανώς και η Μέση Τιμή είναι πεπερασμένο άθροισμα.

Η μεταβλητότητα Var ορίζεται ως :

Var[X] = σ^2 = E[(X- $E[X]$)^2] = E[X^2 -2*X*E[X]+$E[X]^2$ = $\frac{91}{6} - \frac{49}{4}$ = 2.92

Καθώς E[X^2] =$\sum X\text{^}2 * Px(k)$= = $\frac{1}{6}$*1^2 +$\frac{1}{6}$*2^2+$\frac{1}{6}$*3^2+$\frac{1}{6}$*4^2+$\frac{1}{6}$*5^2+$\frac{1}{6}$*6^2= $\frac{91}{6}$

Γ) Το skewness ορίζεται ως:

Skewness = $E[(\frac{x-\mu}{\sigma})^3]$ = $\frac{E[x^3]-3*\mu*\sigma^2-\mu 3}{\sigma^3}$ = -0.0012

Ομοίως με το ερώτημα β βρίσκω $E[x^3] = \frac{441}{6}$

Και η τυπική απόκλιση σ υπολογίζεται : σ = $\sqrt{Var}$ = 1.708

Το kurtosis ορίζεται ως:

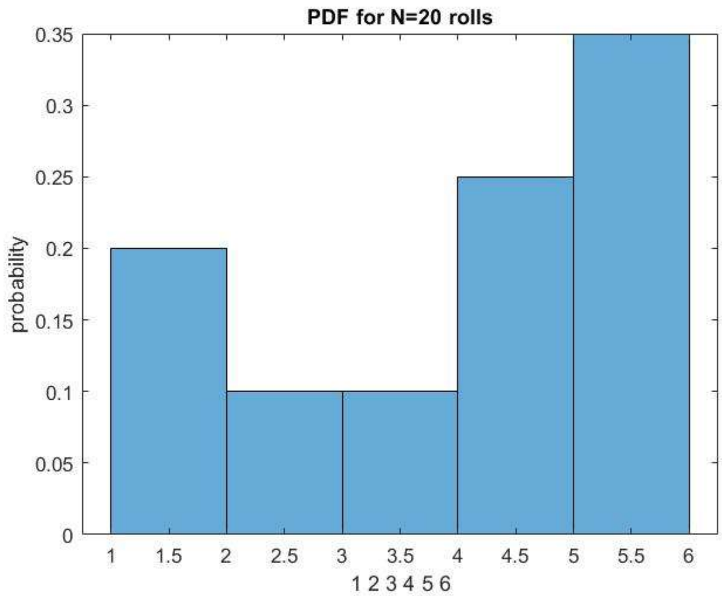
Kurtosis = $E[(\frac{x-\mu}{\sigma})^4]$ = $\frac{E[x^4]-4*\mu*E[x^3]+6*\mu\text{^}2*\sigma\text{^}2+3\mu\text{^}4}{\sigma^4}$ = 1.73

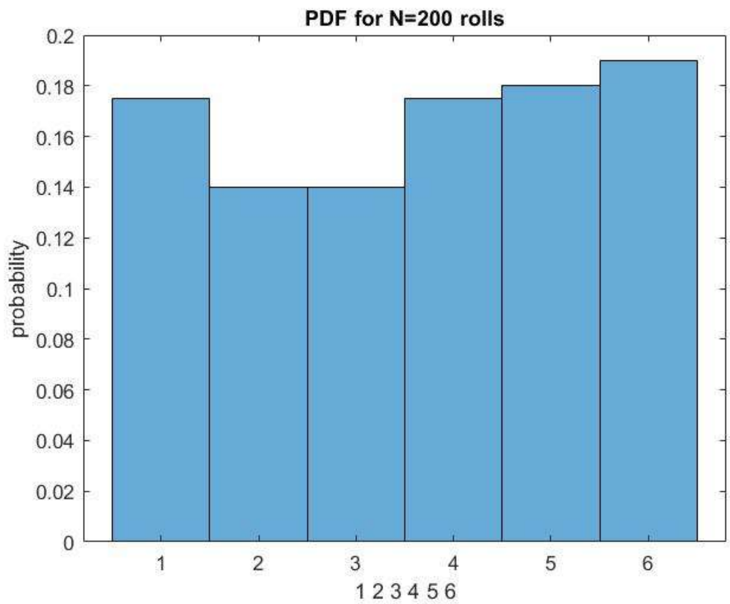
βρίσκω $E[x^4] = \frac{2275}{6}$

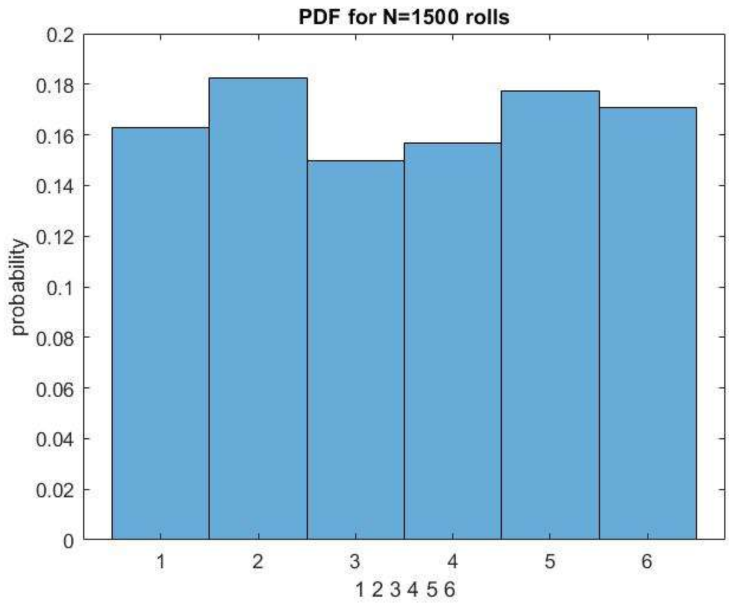
Άσκηση 2

A) Θέλω να δημιουργήσω ένα διάνυσμα 1χΝ με Ν τυχαίες ρίψεις του ζαριού με την εντολή rand(M,N) . H rand(M,N) δημιουργεί ένα διάνυσμα με τιμές από (0,1).Για να δημιουργήσω τυχαίες ρίψεις ζαριού πολλαπλασιάζω την rand(1,N) με το 6 και κάνω ceil ώστε να έχω μόνο ακεραίους.

B) Για να απεικονίσω την PDF μέσω ιστογράμματος χρησιμοποιώ την εντολή histogram με ορίσματα ‘Normalization’,’pdf’.
Τα διαγράμματα που παίρνω είναι :







Αρχικά, παρατηρούμε πως το συνολικό εμβαδό στις διάφορες Ν ρίψεις του ζαριού επιβεβαιώνει την ιδιότητα της pdf, δηλαδή είναι ίσο με τη μονάδα.

Παρατηρούμε πως όσο αυξάνονται οι ρίψεις το διάγραμμα τείνει σε ομοιόμορφη κατανομή με σχεδόν ισοπίθανα τα ενδεχόμενα, δηλαδή κάθε πλευρά του ζαριού έχει την ίδια πιθανότητα εμφάνισης ενώ όσο μικρότερος ο αριθμός των ρίψεων τόσο διαφορετικές μπορεί να είναι οι πιθανότητες εμφάνισης κάθε πλευράς του ζαριού.

C)

Με τις αντίστοιχες εντολές skewness, kurtosis, var, mean για ρίψεις N=10,25,50,100,200,500 και 1000 υπολογίζουμε τις παρακάτω τιμές:

N	10	25	50	100	200	500	1000
mean	3	4.2	3.72	3.76	3.685	3.345	3.619
var	3.6111	3.5667	3.0045	2.7378	2.8335	2.9507	3.0074
skewness	0.5241	0.4841	0.1949	0.1552	0.0843	0.112	0.0233
kurtosis	1.8575	1.2478	1.5828	1.7966	1.8331	1.7174	1.7355

D) Παρατηρούμε, πως μετά από περίπου 500 ρίψεις αλλά ειδικά στις 1000 ρίψεις τα πειραματικά δεδομένα προσεγγίζουν πολύ τις θεωρητικές τιμές που υπολογίσαμε στο ερώτημα Α). Αυτό είναι λογικό, καθώς περισσότερα πειραματικά δεδομένα σημαίνει καλύτερη προσέγγιση στο να έχουμε ισοπίθανα κάθε πλευρά του ζαριού και επακολούθως οι τιμές να προσεγγίζουν τις πραγματικές.

E) Ως Wide-Sense Stationarity (WSS) ορίζεται η στοχαστική διεργασία της οποίας η μέση τιμή και η αυτοσυσχέτιση είναι ανεξάρτητα από την αρχή του χρόνου.

$E\{x(t)\} = n_x$ (σταθερή, ανεξάρτητη από χρόνο) (1)

$E\{x(t)x(t+\tau)\} = R_x(\tau)$ (εξαρτάται μόνο από την διαφορά τ) (2)

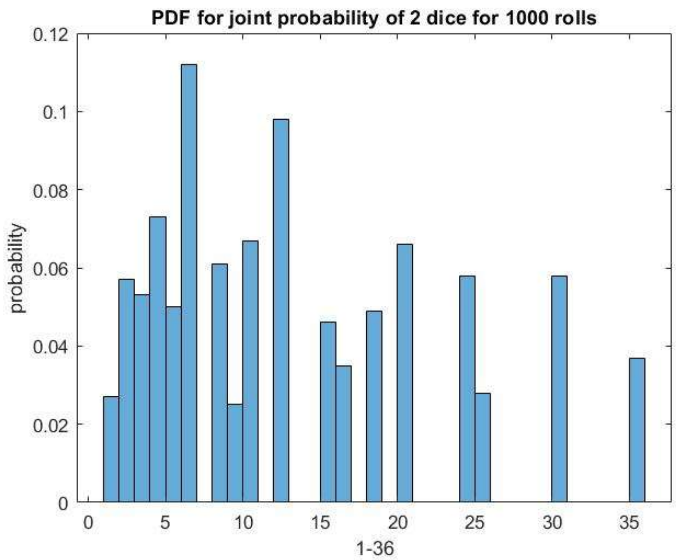
Παρατηρούμε πως όσες φορές και αν τρέξουμε τον κώδικα όταν οι ρίψεις είναι 1000 , τότε η απόκλιση στην μέση τιμή είναι πάρα πολύ μικρή, με συνέπεια να μπορούμε να υποστηρίξουμε πώς μετά τις 1000 ρίψεις ξεκινάμε να έχουμε WSS. (Παρόμοια αποτελέσματα, έχουμε και από 500 ρίψεις και έπειτα, αλλά η μέση τιμή εμφανίζει λίγο μεγαλύτερη διακύμανση στις τιμές).

Άσκηση 3

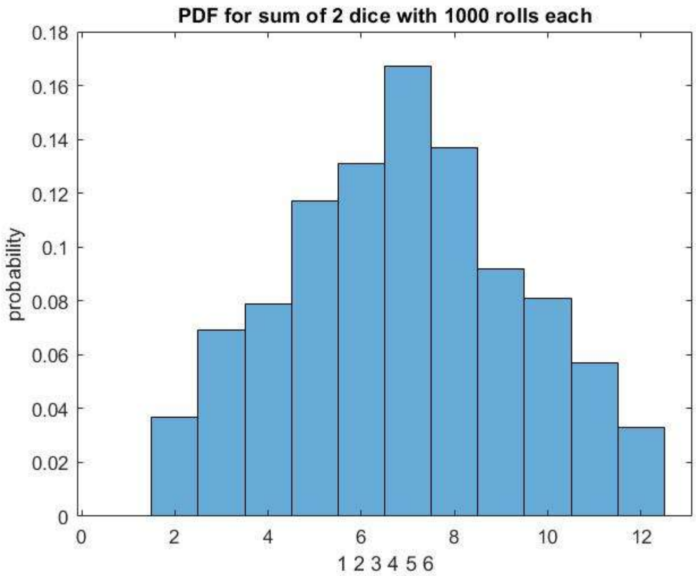
A) Η κοινή συνάρτηση κατανομής των ζαριών Z1,Z2 (joint probability distribution function) ορίζεται : $F_{XY}(x1,y1) = P[X \le x_1, Y \le y_1]$

Για 1000 ρίψεις κάθε ζαριού η κοινή συνάρτηση κατανομής θα είναι y=z1*z2 καθώς τα 2 ζάρια είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Επαναλαμβάνοντας τα βήματα της άσκησης 2 το ιστόγραμμα είναι:



B) Έστω y η νέα τυχαία μεταβλητή όπου y=z1+z2.
Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της μεταβλητής y είναι:



Παρατηρώ πως η νέα μεταβλητή y=z1+z2 έχει pdf που ακολουθεί την κανονική κατανομή Gauss. Γενικά , όσα ζάρια προστίθενται τόσο καλύτερα η pdf θα προσαρμόζεται στην Gauss καθώς πλέον αντί να έχω ίσες πιθανότητες για κάθε πλευρά του ζαριού, έχω πρόσθεση των πιθανοτήτων κάθε πλευράς και έτσι δημιουργείται ένα ιστόγραμμα μορφής κανονικής κατανομής.

Άσκηση 4

A) Έστω η συνάρτηση $f(x) = (x-5)^4 + 3x$
Η παράγωγος της είναι η $f'(x)=4(x-5)^3+3$
Για να βρούμε το ελάχιστο αρκεί να λύσουμε το $f'(x)=0 \rightarrow x = 5$

B) Με την μέθοδο Gradient Descent με την σχέση $x = x - lr*df(x_{x-1})$ βρίσκω το ελάχιστο όπου lr είναι ο ρυθμός μάθησης ή βήμα και df η παράγωγος της f.

Στον κώδικα ορίσαμε ένα τυχαίο αρχικό σημείο pnt_x = 2 και τον ρυθμό μάθησης ίσο με 0.01 μετά από δοκιμές ώστε να έχουμε τις λιγότερες επαναλήψεις μέχρι την σύγκλιση της λύσης, δηλαδή 105 επαναλήψεις.

Επίσης, ορίστηκε ένα όριο σφάλματος 10^{-6} ώστε μόλις φτάσουμε αυτό το κατώφλι να σταματάει η μέθοδος, καθώς δεν θα υπάρχει περαιτέρω βελτίωση.

Με μία while για όσο η απόλυτη διαφορά του τωρινού σημείου και του προηγούμενου είναι μεγαλύτερη του κατωφλίου τότε ακολουθείται ο αλγόριθμος του Gradient Descent.
Αν οι επαναλήψεις (iterations) ξεπεράσουν τις 10000 τότε ο αλγόριθμος σταματάει.
Διαφορετικά, εκτυπώνεται η κάθε επανάληψη με το αντίστοιχο σημείο και τελικά το ελάχιστο.

C) Με την μέθοδο Newton , ο αλγόριθμος που ακολουθείται είναι ίδιος απλώς αντί για τον ρυθμό μάθησης έχουμε την αντίστροφη δεύτερη παράγωγο.

Ο αλγόριθμος έφτασε σε σύγκλιση, ακριβώς με το ίδιο starting point με το gradient descent σε 7 επαναλήψεις.

D) Η γρηγορότερη μέθοδος για την επίλυση της συγκεκριμένης εξίσωσης είναι η μέθοδος Newton. Η μέθοδος του Newton χρησιμοποιεί την $2^{η}$ παράγωγο και όχι μόνο την $1^{η}$. Συνεπώς, όταν η δεύτερη παράγωγος είναι εύκολα υπολογίσιμη καταλαβαίνουμε πως ο αλγόριθμος απαιτεί λιγότερες επαναλήψεις για την βελτιστοποίηση του προβλήματος.
Συνεπάγεται, η καμπυλότητα φαίνεται πως υπερτερεί και βοηθάει στην επίλυση του προβλήματος πολύ γρηγορότερα, παρόλα αυτά η μέθοδος Newton δεν είναι κατάλληλη για συναρτήσεις που εμφανίζουν saddle points καθώς η καμπυλότητα δεν θα μπορέσει να φτάσει ποτέ στο βέλτιστο σημείο.