ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

# ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΠΡΟΤΥΠΩΝ

*Φαναρίδου Κυριακούλα*

*9ο εξάμηνο*

*ΑΕΜ: 57830*

## Άσκηση 1

Μας δίνονται δύο ενδεχόμενα Α και Β :

- Μόνο το Α συνέβη Ν1 φορές, δηλαδή : P(A)-P(A∩B) = N1
- Μόνο το Β συνέβη Ν2 φορές, δηλαδή : P(A)-P(A∩B) = N2
- Το Α και το Β συνέβη Ν3 φορές, δηλαδή : P(A∩B) = N3
- Ούτε το Α ούτε το Β συνέβη Ν4 φορές, δηλαδή : P(A'∩B') = N4

Από κανόνα DeMorgan : $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ καταλαβαίνω πως το ενδεχόμενο να συμβεί ούτε το Α ούτε και το Β μπορεί να γραφεί ως : $(A \cup B)^C$ = N4

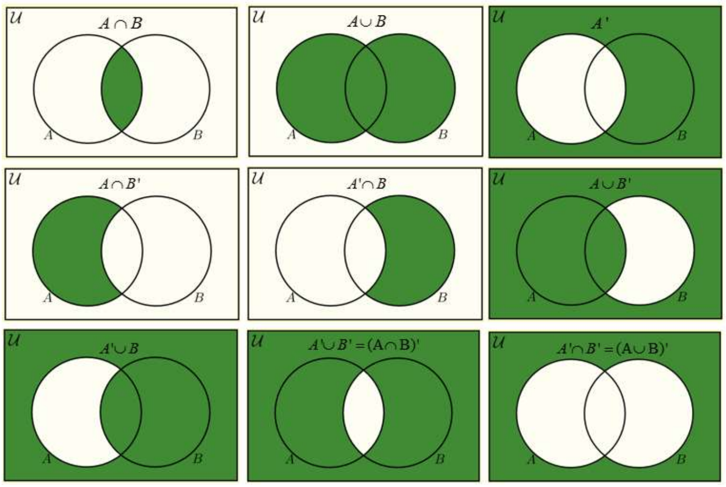
Άρα, ο δειγματοχώρος S απαρτίζεται από τα ενδεχόμενα N1,N2,N3,N4

Οπότε, οι πιθανότητες γράφονται ως εξής:

P(A) = N1+N3 / (N1+N2+N3+N4)

P(B) = N2+N3 / (N1+N2+N3+N4)

P(A∩B) = N3 / (N1+N2+N3+N4)




Άρα, η δεσμευμένη πιθανότητα P(A|B)= P(A∩B) / P(B) , δηλαδή η πιθανότητα να συμβεί το Α δεδομένου του Β υπολογίζεται:

P(A|B)= P(A∩B) / P(B) = $\frac{\frac{N3}{N1+N2+N3+N4}}{\frac{N2+N3}{N1+N2+N3+N4}} = \frac{N3}{N2+N3}$

## Άσκηση 2

Δίνεται στην εκφώνηση πως οι a priori πιθανότητες για τις κλάσεις $\omega_1$,$\omega_2$ είναι :

$P(\omega_1)=P(\omega_2)= 0.3$

Άρα, $P(\omega_3)$= 1 – 0.3 – 0.3 = 0.4

Για να υπολογίσω το ολικό σφάλμα ταξινόμησης σύμφωνα με τον κανόνα απόφασης Bayes χρησιμοποιώ τον τύπο:

$P_{e,total} = \sum_i P(Xi) * Pe(Xi) = 1 - \sum_i \max(P(\omega k, Xi))$

Συνεπώς, πρέπει να υπολογίσουμε τις δεσμευμένες πιθανότητες για κάθε κλάση.

Ο τύπος ορίζεται ως εξής: $P(\omega_j|x) = P(x|\omega_j)*P(\omega_j)$ (1)

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, από τον πίνακα που δίνεται καταλαβαίνουμε πως οι κλάσεις αντιστοιχούν για κάθε X από 1 έως 6.

- Για X=1
  Από τύπο (1)
  $P(\omega_1|x) = P(x|\omega_1)*P(\omega_1)=0.3*0.3 = 0.09$
  $P(\omega_2|x) = P(x|\omega_2)*P(\omega_2)= 0.3*0.2 = 0.06$
  $P(\omega_3|x) = P(x|\omega_3)*P(\omega_3)=0.1*0.4 = 0.04$

  H max δεσμευμένη πιθανότητα για X=1 είναι $P(\omega_1|x) = 0.09$

- Για X=2
  Από τύπο (1)
  $P(\omega_1|x) = P(x|\omega_1)*P(\omega_1)=0.2*0.3 = 0.06$
  $P(\omega_2|x) = P(x|\omega_2)*P(\omega_2)= 0.2*0.3 = 0.06$
  $P(\omega_3|x) = P(x|\omega_3)*P(\omega_3)=0.3*0.4 = 0.12$

  H max δεσμευμένη πιθανότητα για X=2 είναι $P(\omega_3|x) = 0.12$

- Για X=3
  Από τύπο (1)
  $P(\omega_1|x) = P(x|\omega_1)*P(\omega_1)=0.1*0.3 = 0.03$
  $P(\omega_2|x) = P(x|\omega_2)*P(\omega_2)= 0.4*0.3 = 0.12$
  $P(\omega_3|x) = P(x|\omega_3)*P(\omega_3)=0.15*0.4 = 0.06$

  H max δεσμευμένη πιθανότητα για X=3 είναι $P(\omega_2|x) = 0.12$

- Για X=4
  Από τύπο (1)
  $P(\omega_1|x) = P(x|\omega_1)*P(\omega_1)=0.1*0.3 = 0.03$
  $P(\omega_2|x) = P(x|\omega_2)*P(\omega_2)= 0.3*0.05 = 0.015$
  $P(\omega_3|x) = P(x|\omega_3)*P(\omega_3)=0.05*0.4 = 0.02$

  H max δεσμευμένη πιθανότητα για X=1 είναι $P(\omega_1|x) = 0.03$

- Για X=5
  Από τύπο (1)
  $P(\omega_1|x) = P(x|\omega_1)*P(\omega_1)=0.2*0.3 = 0.06$
  $P(\omega_2|x) = P(x|\omega_2)*P(\omega_2)= 0.3*0.1 = 0.03$
  $P(\omega_3|x) = P(x|\omega_3)*P(\omega_3)=0.3*0.4 = 0.12$

  Η max δεσμευμένη πιθανότητα για X=5 είναι $P(\omega_3|x) = 0.12$

- Για X=6
  Από τύπο (1)
  $P(\omega_1|x) = P(x|\omega_1)*P(\omega_1)=0.1*0.3 = 0.03$
  $P(\omega_2|x) = P(x|\omega_2)*P(\omega_2)= 0.05*0.3 = 0.015$
  $P(\omega_3|x) = P(x|\omega_3)*P(\omega_3)=0.1*0.4 = 0.04$

  Η max δεσμευμένη πιθανότητα για X=6 είναι $P(\omega_3|x) = 0.04$

Εφαρμόζοντας τον τύπο $P_{e,total} = \sum_i P(Xi) * Pe(Xi) = 1 - \sum_i \max(P(\omega k, Xi))$

Βρίσκουμε $P_{e,total} = 1 - (0.09+0.12+0.12+0.03+0.12+0.04) = 1 - 0.52 = 0.48$ ή 48% η πιθανότητα του ολικού σφάλματος.

## Άσκηση 3

Δίνεται από εκφώνηση $P(\omega_1) = 0.25$ επομένως πρέπει $P(\omega_1) + P(\omega_2) = 1$ -> $P(\omega_2) = 0.75$

Από εκφώνηση τα δεδομένα μας είναι:

$\mu 1 = \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \quad \mu 2 = \begin{matrix} -2 \\ -1 \end{matrix}$ καθώς και $\Sigma_1 = \begin{matrix} 4 & 1 \\ 1 & 9 \end{matrix} = \Sigma_2$

Οι πίνακες συνδιασποράς είναι ίσοι, αλλά όχι διαγώνιοι. Δηλαδή, οι πίνακες συνδιασποράς είναι αυθαίρετοι, αλλά ίδιοι και για τις 2 κλάσεις. Τα χαρακτηριστικά αυτά δημιουργούν υπερελλειψοειδείς ομάδες ίδιου μεγέθους και σχήματος με κέντρα τα μ.

Οι γραμμικές συναρτήσεις απόφασης δημιουργούν υπερεπίπεδα ως επιφάνειες απόφασης.

$G_i(x) = w_i^T x + w_{i0}$ με $w_i = \Sigma^{-1}\mu_i$ και $w_{i0} = -\frac{1}{2}\mu_i^T \Sigma^{-1}\mu_i + \ln(P(\omega_i))$

Ο αντίστροφος πίνακας συνδιασποράς 2x2 υπολογίζεται ως εξής:

$\Sigma^{-1} = \frac{1}{35} * \begin{matrix} 9 & -1 \\ -1 & 4 \end{matrix} = \begin{matrix} 0.26 & -0.028 \\ -0.028 & 0.114 \end{matrix}$

Πρώτο βήμα είναι να υπολογίσω το $W_1$ και το $W_2$ :

$$W_1=\Sigma^{-1}\mu_1 = \begin{matrix} 0.26 & -0.028 \\ -0.028 & 0.114 \end{matrix} * \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} = \begin{matrix} 0.2 \\ 0.2 \end{matrix}$$

$$W_2=\Sigma^{-1}\mu_2 = \begin{matrix} 0.26 & -0.028 \\ -0.028 & 0.114 \end{matrix} * \begin{matrix} -2 \\ -1 \end{matrix} = \begin{matrix} -0.5 \\ -0.06 \end{matrix}$$

Στην συνέχεια υπολογίζουμε τους ανάστροφους πίνακες των $W_1$ και $W_2$ .

Για την δημιουργία του ανάστροφου πίνακα η στήλη θα γίνει γραμμή.

$W_1^T = 0.2 \quad 0.2$ και $W_2^T = -0.5 \quad -0.05$

Το δεύτερο βήμα είναι να υπολογίσω τα $w_{10}$ και $w_{20}$

$W_{10} = -\frac{1}{2}\mu_1^T\,\Sigma^{-1}\mu_1$ +ln(P($\omega_1$)) $= -\frac{1}{2} * 1 \quad 2 * \begin{matrix} 0.26 & -0.028 \\ -0.028 & 0.114 \end{matrix} * \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$ + ln(P($\omega_1$))

= -0.5* 0.6-1.386=-1.68

Σημειώνεται, πως ο πολλπλασιασμός πινάκων γίνεται από αριστερά προς δεξία ανά δύο , δηλαδή πρώτα $\mu_1^T\,\Sigma^{-1}$ και το αποτέλεσμα αυτού του γινομένου πολλαπλασιάζεται με $\mu_1$

$W_{20} = -\frac{1}{2}\mu_2^T\,\Sigma^{-1}\mu_2$ +ln(P($\omega_2$)) $= -\frac{1}{2} * -2 \quad -1 * \begin{matrix} 0.26 & -0.028 \\ -0.028 & 0.114 \end{matrix} * \begin{matrix} -2 \\ -1 \end{matrix}$ +ln(P($\omega_2$)) = -0.5* 1.042 -0.29 =-0.811

Το τρίτο βήμα είναι να υπολογίσω τις συναρτήσεις:

Υπολογίζω την συνάρτηση $g_1(x) = (\Sigma^{-1}\mu_1)^T x - \frac{1}{2}\mu_1^T\,\Sigma^{-1}\mu_1$ +ln(P($\omega_1$)) $= 0.2 \quad 0.2 * \begin{matrix} x1 \\ x2 \end{matrix}$ -0.786

= 0.2x1 + 0.2x2 – 1.68

Ομοίως,

$g_2(x) = (\Sigma^{-1}\mu_2)^T x - \frac{1}{2}\mu_2^T\,\Sigma^{-1}\mu_2$ +ln(P($\omega_2$)) $= -0.5 \quad -0.05 * \begin{matrix} x1 \\ x2 \end{matrix}$ +0.752 = -0.5x1 -0.05x2-0.811

Η συνάρτηση απόφασης είναι η $g_1(x) - g_2(x)$ = 0.7x1 +0.25x2 -0.88

Ή αλλιώς $w^T x + w_{i0} = 0$

Θέλω από 2-D να πάω σε 1-D για να βρω το ολικό σφάλμα.

Θέτω $k = w^T$

Οι υπό συνθήκη πιθανότητες είναι :

$P(kx|\omega_1) \approx N(k\mu_1, k\Sigma_1 w)$ = N(1.2 , 2.82) και $P(kx|\omega_2) \approx N(k\mu_2, k\Sigma_2 w)$ = N(-1.63 , 2.82)

Για να βρω την πιθανότητα λάθους γνωρίζω από θεωρία:

P(error) = $\int_{-\infty}^{R1} p(x|\omega 2)P(\omega 2)dx + \int_{R2}^{\infty} p(x|\omega 1)P(\omega 1)dx$ = $P(\omega_1) \int_{-\infty}^{0.88} N(1.2, \sqrt{2{,}82})dk +$ $P(\omega_2) \int_{0.88}^{\infty} N(-1.63, \sqrt{2{,}82})dk$ = 0.25 - 0.25 $\Phi(\frac{0.88-1.2}{\sqrt{2{,}82}})$ + 0.75$\Phi(\frac{0.88+1.63}{\sqrt{2{,}82}})$ = 0.25 -0.25Φ(-0.19) +0.75Φ(1.49) =0.25 - 0.25*0.42+0.75*0.94=0.25 -0.105+0.705 = 0.85

Γενικά , για τον υπολογισμό της Φ (συνάρτηση σφάλματος ) χρησιμοποιώ τον τύπο $\frac{1}{2}(1+\mathrm{erf}(\frac{a-\mu}{\sigma\sqrt{2}}))$

Επομένως, $P_e$ = 1 -0.85 = 0.15

## Άσκηση 4

Οι συναρτήσεις πιθανοφάνειας(likelihood) ακολουθούν την πολυδιάστατη γκαουσιανή κατανομή. Ο τύπος είναι ο εξής:

$p(x|\omega_i) = \frac{1}{2\pi^{d/2}|\Sigma|^{0.5}} exp^{-0.5(x-\mu)^T * \Sigma^{-1} * (x-\mu)}$ (1)

Από εκφώνηση έχουμε $P(x|\omega_1)$ = N(2,0.5) και $P(x|\omega_2)$ = N(1.5,0.2) , $P(\omega_1)$=1/3 , $P(\omega_2)$=2/3 και λ = $\begin{matrix} \lambda 11 & \lambda 12 \\ \lambda 21 & \lambda 22 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix}$

Σύμφωνα με την θεωρία η απόφαση Bayes με βάση το δεσμευμένο ρίσκο δίνεται από :

$\frac{p(x|\omega 1)}{p(x|\omega 2)} > \frac{\lambda 12-\lambda}{\lambda 21-\lambda 11} * \frac{P(\omega 2)}{P(\omega 1)}$ (2)

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα στην σχέση (1),

$$p(x|\omega 1) = \frac{1}{2\pi^{1/2} 0.5|^{0.5}} exp^{-0.5(x-2)^T * 0.5^{-1} * (x-2)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} exp^{-(x-2)^2}$$

$$p(x|\omega 2) = \frac{1}{2\pi^{1/2} 0.2|^{0.5}} exp^{-0.5(x-1.5)^T * 0.2^{-1} * (x-1.5)} = \frac{1}{\sqrt{0.4\pi}} exp^{-2.5(x-1.5)^2}$$

Συνεπώς, από σχέση (2)

$\sqrt{0.4} * exp^{-(x-2)^2 + 2.5(x-1.5)^2}$ > 1 =>

$-(x-2)^2+2.5(x-1.5)^2 > 1.58114 \Rightarrow 1.5x^2-3.5x+1.625 >= 1.58114$

Άρα $x=0.0126$ ή $x=2.32$

Επομένως, επιλέγω $\omega_1$ και έχω βέλτιστη απόφαση όταν $x<0.0126$ ή $x>2.32$

Ενώ όταν έχω $0.0126<x<2.32$ επιλέγω την κλάση $\omega_2$

Με αυτό τον τρόπο ελαχιστοποιούμε το κόστος.