

PROBLEM SET 4

Shirley Katherine Maldonado Meza

14 de junio de 2023

1. Problema 1: Comparación de técnicas de detección de exoplanetas

La figura 1 resume cuatro técnicas diferentes de detección de exoplanetas que incluyen velocidad radial (azul), búsquedas de tránsito (verde), astrometría (rojo) y microlente (púrpura).

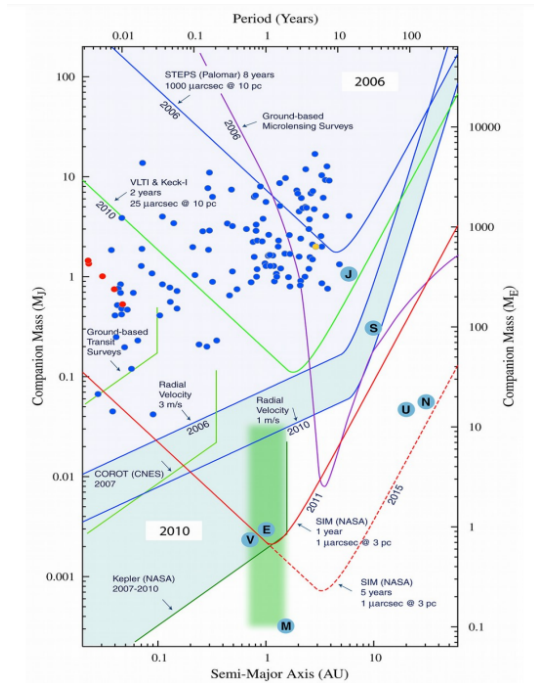


Figura 1:

Velocidad Radial

1.1. Usando la ecuación de la semiamplitud de la velocidad radial, describa cualitativamente la pendiente de las líneas de velocidad.

Solución

La semiamplitud de la velocidad radial es proporcional a la masa e inversamente proporcional al período del planeta. Se relacionan por medio de la ecuación

$$K = \frac{28,4329}{\sqrt{(1-e^2)}} \frac{m_p * \sin(i)}{M_{Jup}} \left(\frac{m_*}{M_{\odot}}\right)^{-2/3} \left(\frac{P}{1yr}\right)^{-1/3}$$

[1]

Despejando $m_p \sin(i)$

$$m_p * \sin(i) = K M_{Jup} \frac{\sqrt{(1-e^2)}}{28,4329} \left(\frac{m_*}{M_{\odot}}\right)^{2/3} \left(\frac{P}{1yr}\right)^{1/3}$$

Es decir

$$m_p * \sin(i) \propto K P^{1/3}$$

como K es constante, esto nos indica que

$$m_p * \sin(i) \propto P^{1/3}$$

Así que la gráfica tiene una forma cúbica, que al aplicarle el log se puede apreciar la función que se ve en la imagen presentada.

1.2. Aproximadamente a las 5 AU, las líneas de detección de velocidad radial cambian de pendiente. ¿Por qué?

Solución

Este cambio de pendiente se debe a la sensibilidad del espectrometro. Para planetas tan lejanos a la estrella, el instrumento debe tener una sensibilidad alta para poder detectar cambios en la velocidad muy pequeños y que no pasen como errores. Debido a esta baja sensibilidad, los errores de las mediciones son en una mayor cantidad cuando se analizan planetas lejanos.

Tránsitos vs. Velocidad Radial

1.3. Mire la curva de tránsito COROT y la curva de velocidad radial 2010. ¿Por qué el método de detección por tránsito funciona mejor en semiejes mayores más pequeños que la técnica de velocidad radial? ¿Por qué la técnica de tránsito es peor en ejes semi-mayores más grandes?

Solución

El método de tránsito funciona mejor para semiejes mayores pequeños porque al estar más cerca de la estrella, no importa qué inclinación tenga el planeta, será posible ver un tránsito en algún momento, mientras que si el planeta se encuentra muy lejos y su inclinación es bastante grande respecto a nuestro plano de observación, el planeta pasará por debajo de la estrella y no provocará ningún tránsito, o disminuirá el flujo de luz de la estrella pero en un porcentaje muy pequeño.

1.4. General

Si tuviera que iniciar un estudio planetario, ¿qué técnica elegiría y por qué?

Solución

Se deben tener en cuenta varios parametros como la facilidad del método, la precisión y el acceso a los instrumentos de medición. Personalmente elegiría el método de tránsito porque es un método realmente fácil de entender y de explicar, además proporciona información muy importante del planeta descubierto como por ejemplo, su tamaño.

Por otro lado, me parece que el método de velocidad radial es bastante importante pues con él podemos directamente hallar el semieje mayor del planeta, característica muy importante para saber si el planeta se encuentra en la zona de habitabilidad y, por lo tanto, saber si es posible la vida allí.

1.5. Pregunta extra:

¿Qué es la región sombreada en verde? Por favor describa.

Solución

Esta es la llamada 'Zona de habitabilidad' [2]. Una zona alrededor de cualquier estrella donde un planeta podría cumplir con las condiciones necesarias para que exista agua líquida en su superficie, o mejor dicho, para que sea posible la vida tal y como la conocemos.

2. Problema 2: Propiedades de los exoplanetas conocidos

En la Enciclopedia de planetas extrasolares ¹, encuentre el catálogo interactivo para candidatos a planeta detectados por velocidad radial ². Construye tres diferentes diagramas (ya sean histogramas o diagramas de correlación). Puede usar cualquier parámetro disponible para los ejes x e y (p. ej., masa del planeta, radio, semieje mayor, año del descubrimiento, etc.) Identifique cualquier tendencias que están o no están presentes.

Histograma semieje mayor

He elegido hacer un histograma del semieje mayor. En los datos de la página, a aproximadamente de los 5390 planetas confirmados se les ha calculado el semieje mayor.

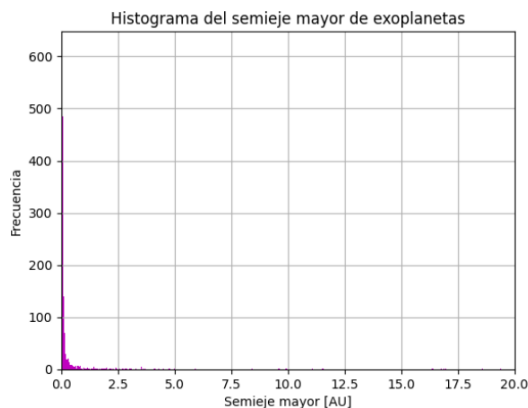


Figura 2: Histograma del semieje mayor exoplanetas confirmados.

Como vemos en el histograma, hay un gran número de planetas (≈ 500) cuyo semieje mayor se encuentran en un pequeño intervalo por lo que los intervalos usados para el histograma necesariamente debían ser muy pequeños para lograr ver una distribución.

Pero al usar intervalos es necesario hacer zoom en el eje x para poder observar bien las frecuencias y descartar aquellos semiejes que son muy grandes y tienen frecuencias muy pequeñas.

¹<http://exoplanet.eu/>

²<http://exoplanet.eu/catalog-RV.php>

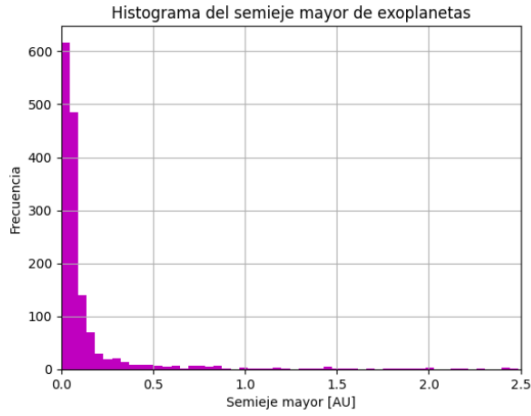


Figura 3: Histograma del semieje mayor exoplanetas confirmados.

Vemos que los planetas con semiejes mayores a 15 AU son pocos comparados con la cantidad de exoplanetas con ≤ 0.1 AU. Se puede notar que la mayoría de exoplanetas se encuentran ubicados muy cerca a su estrella, muchísimo más que la Tierra. Esto se debe a que al estar más cerca, los planetas se ven más perturbados por su estrella y así mismo, se pueden ver más cambios de la estrella por ellos, aspecto necesario para que los métodos de detección actuales los encuentren.

Por lo tanto, el que no hayamos visto tantos planetas con semieje mayor muy grandes no significa que no existan, sino que los métodos de detección actuales no pueden reconocerlos.

Nota: al terminar estas gráficas me di cuenta de que podía tomar las gráficas de la misma página :D.

Masa vs. Radio

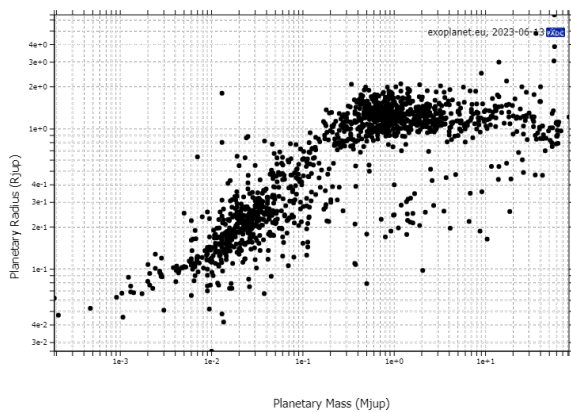


Figura 4: Masa vs. Radio de los exoplanetas

En esta gráfica se puede ver claramente una tendencia. A mayor masa del planeta, mayor es su radio, aunque luego de un determinado valor para la masa los planetas

empiezan a tener radios más pequeños. De esta forma, hay planetas muy masivos que son más pequeños que otros con menos masa.

Yo esperaría que hubiesen más puntos en la parte superior izquierda, es decir, que en la lista se encuentren planetas poco densos como lo son los gigantes gaseosos. Pero supongo que estos planetas son más difíciles de detectar por lo lejos que están de la estrella (pues los planetas rocosos suelen ser los que se encuentran cerca).

Temperatura calculada vs. Semieje mayor

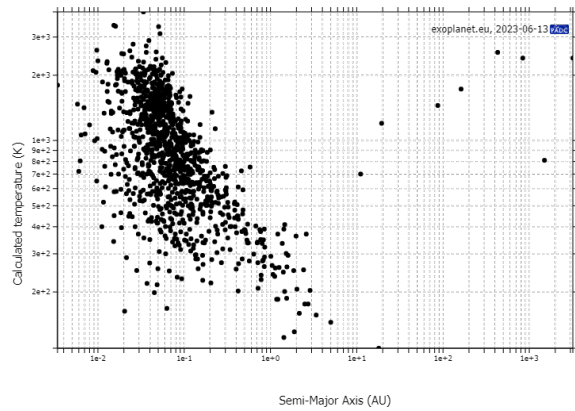


Figura 5: Temperatura calculada vs. Semieje mayor

Podemos ver que se cumple una de las tendencias (que para mí es una de las más intuitivas) es que cuando un planeta está más cerca de su estrella, su temperatura es más alta.

Aunque también podemos ver ciertos planetas (son muy pocos realmente) que estando tan lejos de su estrella tienen una temperatura bastante alta. Esto podría deberse a las condiciones atmosféricas del planeta. Un planeta con efecto invernadero o con actividad volcánica (como la Tierra) puede llegar a retener cierto porcentaje del calor que le llega de su estrella y calentar el planeta.

3. Problema 3: Curvas de luz de tránsito de exoplanetas para tránsitos no centrales

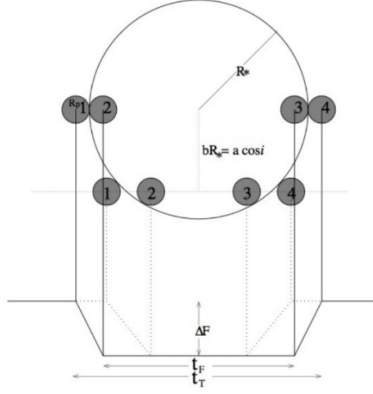


Figura 6: Definición de observables de curvas de luz de tránsito. En la curva de luz sólida se indica la profundidad del tránsito δF , la duración total del tránsito t_T y la duración del tránsito entre la entrada y la salida t_F (es decir, la "parte plana" de la curva de luz de tránsito cuando el planeta está totalmente superpuesto a la estrella madre).

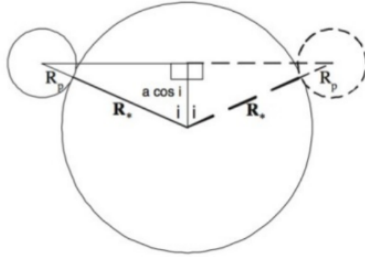


Figura 7: Esquema del planeta de tránsito para derivar parámetros de tránsitos no centrales. Nótese la definición de i para la inclinación orbital (corresponde a "edge-on"). Figura de R. Santana.

3.1. Demuestre que la duración del tránsito para un tránsito no central es

$$t_T = \frac{PR_*}{\pi a} \sqrt{\left(1 + \frac{R_p}{R_*}\right)^2 - \left(\frac{a \cos(i)}{R_*}\right)^2}$$

Donde t_T es la duración total del tránsito, R_* es el radio estelar, R_p es el radio del planeta, a es el eje semi-mayor, e i es la inclinación orbital. Aquí $i=90^\circ$ en el "borde".

Solución

Suponiendo que el planeta tiene una órbita circular y

como el sistema planetario está tan lejos de nosotros, vemos el tránsito de frente y podemos tomar el movimiento del planeta como una línea recta. Entonces, la distancia que recorre el planeta durante el tránsito será $x = v * t_T = \omega R t_T$ donde $\omega = \frac{2\pi}{P}$, t_T el tiempo que dura el tránsito y en este caso R es el semieje mayor a . Usando el teorema de Pitágoras y observando la figura 7, esta distancia se puede escribir como

$$x = vt_T = 2 \left((R_* + R_p)^2 - (a \cos(i))^2 \right)^{1/2}$$

$$\frac{2\pi a}{P} t_T = 2 \sqrt{(R_* + R_p)^2 - (a \cos(i))^2}$$

Despejando el tiempo

$$t_T = 2 \frac{P}{2\pi a} \sqrt{(R_* + R_p)^2 - (a \cos(i))^2}$$

y finalmente

$$t_T = \frac{PR_*}{\pi a} \sqrt{\left(1 + \frac{R_p}{R_*}\right)^2 - \left(\frac{a \cos(i)}{R_*}\right)^2} \quad (1)$$

3.2. Muestre que la duración de la "parte plana" de la curva de luz de tránsito, es decir, el momento en que el planeta está completamente superpuesto al disco estelar, es

$$t_T = \frac{PR_*}{\pi a} \sqrt{\left(1 - \frac{R_p}{R_*}\right)^2 - \left(\frac{a \cos(i)}{R_*}\right)^2}$$

Solución

La "parte plana" del tránsito empieza cuando el planeta ya está totalmente oculto (Como se ve en el siguiente gráfico), por lo que el brillo del sistema es el mínimo (sólo el de la estrella).

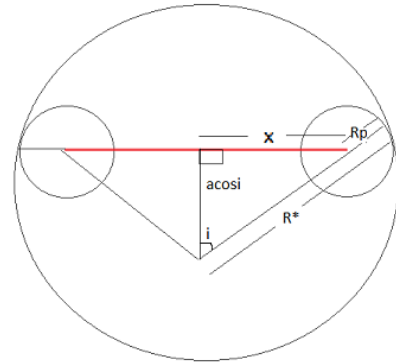


Figura 8: Tránsito durante la parte plana.

Observando la gráfica, la hipotenusa del triángulo usado para calcular el tiempo cambia, ya no es la suma de los dos radios sino el radio de la estrella menos el radio del planeta, por lo que usando la misma deducción que en el numeral (3.1) se llega a la ecuación 1 pero con los radios restandose.

$$t_T = \frac{PR_*}{\pi a} \sqrt{\left(1 - \frac{R_p}{R_*}\right)^2 - \left(\frac{a \cos(i)}{R_*}\right)^2}$$

3.3. Describa por qué el parámetro de impacto es

$$b = \frac{a}{R_*} \cos i$$

El parámetro de impacto b se define como la distancia proyectada entre el planeta y los centros estelares durante el tránsito medio en unidades de R_* .

Solución

Durante el tránsito medio, el planeta se encuentra justo en frente de la estrella, por lo que desde un punto lateral, el tránsito se vería de la siguiente forma

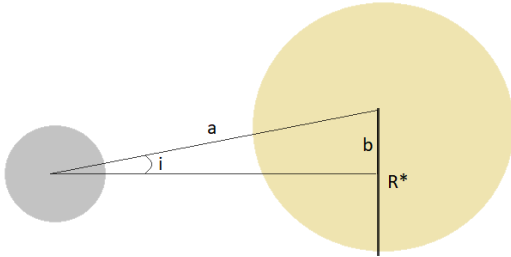


Figura 9: Tránsito durante la parte plana visto de perfil.

Como vemos, el parametro de impacto es la distancia entre el centro de la estrella y el centro del planeta que se proyecta en el plano del observador. Y se puede ver claramente que

$$b = \frac{a}{R_*} \cos(i)$$

4. Problema 4

La misión Kepler, en busca de exoplanetas en tránsito, ya ha anunciado el descubrimiento de más de dos mil exoplanetas. La estrella Kepler-9, una estrella de secuencia principal con la misma masa y radio que el Sol, tiene tres exoplanetas en tránsito.

4.1. El exoplaneta Kepler-9b, cuando transita por la estrella Kepler-9, hace que el flujo de la estrella caiga un 0,622 %. ¿Cuál es el radio de Kepler-9b, medido en unidades del radio del Sol? ¿Cuál es su radio medido en unidades del radio de Júpiter?

Solución

La profundidad del tránsito está relacionado con la geometría del mismo, y es una forma de enlazar el radio de la estrella con el radio del planeta. Esta se puede describir por medio de la siguiente ecuación

$$\Delta F = \left(\frac{R_p}{R_*}\right)^2$$

siendo F el flujo de luz de la estrella.

Ahora, sabiendo que el radio de la estrella Kepler-9b es $1,0504 R_\odot$ [3].

ΔF	0.00622
R_*	$1.0504 R_\odot$
R_p	$0.0828 R_\odot$
R_p	$0.8251 R_{jup}$

Cuadro 1: Datos Kepler-9b

4.2.

El exoplaneta Kepler-9c, cuando transita por la estrella Kepler-9, hace que el flujo de la estrella caiga un 0,594 %. ¿Cuál es el radio de Kepler-9c, medido en unidades del radio del Sol? ¿Cuál es su radio medido en unidades del radio de Júpiter?

Solución

De la misma forma que en el numeral (a)

ΔF	0.00594
R_*	$1.0504 R_\odot$
R_p	$0.0809 R_\odot$
R_p	$0.8063 R_{jup}$

Cuadro 2: Datos Kepler-9b

4.3.

¿Podrías calcular el semieje mayor de los planetas b y c a partir de los resultados anteriores? Si es así, ¡hazlo!

Solución

La única forma de calcular el semieje mayor de los planetas usando los radios sería suponer que el planeta está muy, muy cerca de la estrella.

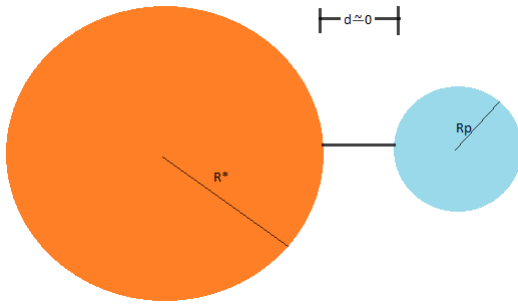


Figura 10: Planeta muy cercano a la estrella

Con esta suposición, el semieje mayor del planeta sería aproximadamente

$$a \approx R_* + R_p$$

	$[R_\odot]$	$[AU]$
$a_{kepler-9b}$	1.1332	0.0052
$a_{kepler-9c}$	1.1313	0.00526

Cuadro 3: Semieje mayor de Kepler-9b y Kepler-9c suponiendo que están muy cerca a la estrella.

5. Problema 5

Los exoplanetas que orbitan alrededor de Kepler-9 deben obedecer la Tercera Ley del Movimiento Planetario de Kepler, tal como lo hacen los planetas que orbitan alrededor del Sol. La Tercera Ley de Kepler se puede escribir de la forma:

$$P^2 = a^3$$

donde es P el período orbital del planeta, en años, y a es el semieje mayor de su órbita, en AU.

5.1.

El exoplaneta Kepler-9b tiene un período orbital de 19,24 días. ¿Cuál es el semieje mayor de su órbita? Compara con c en el problema anterior (si lo resolviste).

Solución

Con $P = 19,24/365 = 0,0527$ años. El semieje mayor del planeta es

$$a = 0,1405AU$$

5.2.

El exoplaneta Kepler-9c tiene un período orbital de 38,91 días. ¿Cuál es el semieje mayor de su órbita?.

Solución

Así como en el numeral anterior. Con $P = 38,91/365 = 0,1066$ años. El semieje mayor del planeta es

$$a = 0,224AU$$

Vemos que los resultados obtenidos en el numeral c del punto anterior es muy diferente al que se obtuvo usando la tercera ley de Kepler, por lo que suponer que el planeta está muy cerca a la estrella sin conocer otras características del planeta es algo erróneo que sólo funcionaría para casos donde esta suposición sea verdad.

6. Problema 6

Toda la evidencia disponible indica que los exoplanetas Kepler-9b y Kepler-9c son gigantes gaseosos similares a Júpiter y Saturno. Supongamos, entonces, que tanto Kepler-9b como Kepler-9c tienen un albedo $A = 0,5$, el mismo que el de Júpiter y Saturno.

6.1.

¿Cuál es la temperatura de equilibrio de Kepler-9b?

Solución

La temperatura de equilibrio de un planeta es aquella temperatura en la que el planeta es capaz de emitir la misma radiación que recibe del sol o de una estrella.

La ecuación que relaciona la temperatura de equilibrio, el albedo del planeta y su área es

$$T_{eq}^4 = \frac{I_o(1 - A)}{4\sigma\epsilon}$$

Donde:

- σ es la constante de Stefan-Boltzmann ($\approx 5,67 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \text{K}^4)$)
- ϵ la permisividad del planeta que suele tomarse como 1.
- A el albedo del planeta $A = 0,5$
- I_o es la intensidad de energía estelar que incide sobre parte superior de la atmósfera.

Como Kepler-9 tiene una masa y un radio parecido al del Sol, la luminosidad del Sol es igual a la de Kepler-9. Además, la intensidad de la estrella depende de la distancia a la que se encuentre el planeta por lo que

$$I_\odot = \frac{L_\odot}{4\pi a_p^2} = 1360 \frac{W}{m^2}$$

entonces

$$L_\odot = L_* = I_\odot 4\pi a_{tie}^2$$

siendo a_{tie} el semieje mayor de la tierra. Entonces

$$I_* = \frac{I_\odot}{4\pi a_{tie}^2} 4\pi a_p^2$$

Y así finalmente

$$T_{eq} = \left(\frac{I_{\odot} a_{Te}^2 (1 - A)}{4 \sigma a_p^2} \right)^{1/4}$$

Aplicando la ecuación para hallar la intensidad en la órbita del Kepler-9b y Kepler-9c y la T de equilibrio de ambos planetas:

I_{*b}	68810.703 W/m ²
T_{eq-b}	624.08 K
I_{*c}	27104.591 W/m ²
T_{eq-c}	494.4 K

Cuadro 4: Intensidad de la estrella Kepler-9 sobre Kepler-9b y Kepler-9c y sus temperaturas de equilibrio.

6.2.

¿Cuál es la temperatura de equilibrio de Kepler-9c?

Resuelta en el numeral anterior

6.3.

Si se encontrara una luna rocosa del tamaño de la Tierra orbitando Kepler-9b o Kepler-9c, ¿esperarías que fuera hospitalaria para la vida? Explique brevemente su respuesta.

Solución

Creería que no tendría las condiciones necesarias para la vida, al menos, para la vida que conocemos, pues la luna al estar tan cerca de su estrella, perdería muy fácilmente elementos importantes. El viento solar sería más fuerte a esa distancia, por lo que esta luna debería tener un campo magnético muy fuerte y además, su temperatura de equilibrio es demasiado alta comparada con la de la Tierra!! Toda la posible agua que pudiera haber se evaporaría muy rápido. Por lo que yo diría que no.

Referencias

- [1] D. A. Fischer, A. W. Howard, G. P. Laughlin, B. Macintosh, S. Mahadevan, J. Sahlmann, and J. C. Yee. Exoplanet detection techniques. In *Protostars and Planets VI*. University of Arizona Press, 2014.
- [2] Ravi Kumar Kopparapu, Ramses Ramirez, James F. Kasting, Vincent Eymet, Tyler D. Robinson, Suvrath Mahadevan, Ryan C. Terrien, Shawn Domagal-Goldman, Victoria Meadows, and Rohit Deshpande. Habitable zones around main-sequence stars: New estimates. *The Astrophysical Journal*, 765(2):131, feb 2013.
- [3] Keivan G. Stassun, Ryan J. Oelkers, Martin Paegert, Guillermo Torres, Joshua Pepper, Nathan De Lee, Kevin Collins, David W. Latham, Philip S. Muirhead,

Jay Chittidi, Bárbara Rojas-Ayala, Scott W. Fleming, Mark E. Rose, Peter Tenenbaum, Eric B. Ting, Stephen R. Kane, Thomas Barclay, Jacob L. Bean, C. E. Brassuer, David Charbonneau, Jian Ge, Jack J. Lissauer, Andrew W. Mann, Brian McLean, Susan Mullally, Norio Narita, Peter Plavchan, George R. Ricker, Dimitar Sasselov, S. Seager, Sanjib Sharma, Bernie Shiao, Alessandro Sozzetti, Dennis Stello, Roland Vanderspek, Geoff Wallace, and Joshua N. Winn. The Revised TESS Input Catalog and Candidate Target List. 158(4):138, October 2019.