PROBLEM SET 1

Shirley Katherine Maldonado Meza

14 de marzo de 2023

1. Problema 1:

1.1. (a) Calcular la energía potencial gravitacional de una nube esférica uniforme de densidad ρ y radio R.

Se tiene una nube esférica de donde se toma un diferencial de la masa (dm)a una distancia R del centro de la nube. La energía potencial gravitacional de la nube se puede calcular por medio de la ecuación:

$$Ug = \frac{-G * M * m}{r} \tag{1}$$

donde M es la masa total de la nube y m es una pequeña masa ubicada a un radio r de la nube.

$$dUg = \frac{-G * M * dm}{r} \tag{2}$$

$$M = \rho * v = \frac{\rho * 4 * \pi * r^3}{3}$$

$$dm = \rho * 4 * \pi * r^2 * dr$$

Reemplazando en la ecuación 2

$$dU = \frac{-G(\rho 4\pi r^3)(\rho 4\pi r^2 dr)}{3r} \tag{3}$$

$$U = \frac{-16G\rho^2\pi^2}{3}\int_0^R r^4 dr$$

$$U = -G\frac{16\rho^2\pi^2 R^5}{15} \tag{4}$$

1.2. (b) Determinar la masa de Jeans de una nube interestelar de composición solar, con una densidad ρ y una temperatura T. (Clave: Tome la energía potencial gravitacional igual al negativo del doble de la energía cinética y resuelva la ecuación en función del Radio R).

La energía cinética de la nube de gas monoatómico es

$$K = \frac{3NK_BT}{2}$$

Siendo N el número de partículas

$$N = \frac{M_n}{\mu m_H}$$

Además, la energía potencial es

$$U = -G\frac{3M_n^2}{5R_n}$$

Ahora, como la masa de Jeans es la masa que la nube debe superar para que colapse la nube, se puede decir que $2k < |U|$ y

$$2(\frac{3NK_BT}{2}) < G\frac{3M_n^2}{5R_n}$$

$$(NK_BT) < G\frac{M_n^2}{5R_n}$$

Y sabiendo que el radio de la nube es

$$R_n = (\frac{3M_n}{4\pi\rho})^{1/3}$$

$$(\frac{M_n}{\mu m_H}K_BT) < G\frac{M_n^2}{5(\frac{3M_n}{4\pi\rho})^{1/3}}$$

$$\frac{K_BT}{\mu m_H} = \frac{GM_n^{2/3}}{5}(\frac{4\pi\rho}{3})^{1/3}$$

Y despenjando la Masa finalmente se logra hallar la masa de Jeans. Al superarse esta masa, la nube colapsa.

$$M_n > (\frac{3}{4\pi\rho})^{1/2}(\frac{5K_BT}{G\mu m_H})^{3/2}$$

1.3. (c) Demuestre que, si la nube colapsa isotérmicamente, se hace más inestable a medida que se contrae.

Durante el colapso, se retiene la energía que este genera en forma de calor, lo que hace que incremente la temperatura, pero así como la temperatura, varían otros paramétros como la densida, por esto, el colapso es un poco estable.

Pero si se realiza un colapso isotérmico, la nube no retiene la energía en calor y su densidad va aumentando mientras la temperatura se mantiene constante, por lo que la masa de Jeans disminuye, cosa que acelera el colapso y vuelve más inestable el proceso.

1.4. (d) Demuestre que, si la nube retiene la energía del colapso en forma de calor, se hace más estable a medida que se contrae.

Si retiene la energía en forma de calor, la temperatura de la nube aumenta y por lo tanto, la masa de Jeans que debe superar la masa de la nube para su colapso es mayor, así que cuando empieza a ser muy grande la masa de Jeans y no aumenta también, la masa de la nube, la nube se estabilizará.

2. Problema 2:

Considere una molécula de H2O que colapsa desde el infinito hasta una órbita circular a 1 AU de una estrella de $1M_{\odot}$.

2.1. (a) Calcule la velocidad circular de la molécula a 1 AU y determine su energía mecánica total (U+K). Nota: Suponga la energía en el infinito igual a cero.

La partícula orbita alrededor de la estrella a una distancia de 1 AU. Por el teorema del virial, se sabe que $2K = -U_p$ por lo que:

$$2 * m_{H2o} * v^2 = \frac{G * m_{H2o} * M_{\odot}}{r}$$

Despejando v,

$$v = \sqrt{\frac{G * M_{\odot}}{r}} \tag{5}$$

Teniendo

- $G = 6{,}674e^{-}11Nm^2/kg^2$
- $M = 1M_{\odot} = 1{,}988e^{30}kg$
- $r = 1AU = 1{,}4959e^{11}m$

Y finalmente, reemplazando se obtiene la velocidad circular.

$$v = 29778{,}306m/s = 0{,}017AU/día$$

Ahora, la energía mecánica total es $E = U+K$, y usando el teorema del virial $E = \frac{-U}{2} + U$, así:

$$E = \frac{-U}{2} = \frac{G * M_{\odot} * m_{H2O}}{2r}$$

y con

- $m_{H2O} = 18uma * 1{,}66e^{-}27kg$

$$E = -1{,}325e^{-17}J$$

El signo negativo de la energía se debe a que el sistema es ligado.

2.2. (b) Calcule el incremento de la temperatura del hidrógeno asumiendo que no irradia energía (adiabático).

Por la primera ley de la termodinamica, el cambio de la energía interna de un gas monoatómico durante un proceso adiabático es

$$dU = \frac{3NK_BT}{2}$$

Al integrar a ambos lados, se tiene que

$$U = \frac{3NK_B\Delta T}{2}$$

y sabiendo que la energía cinética es $K = \frac{Nmv^2}{2}$ e igualando las 2 energías, se obtiene:

$$\frac{3NK_B\Delta T}{2} = \frac{Nmv^2}{2}$$

donde N es la cantidad de moles del gas y K_B la constante de Boltzmann. Despejando ΔT de esta ecuación, se tiene

$$\Delta T = \frac{m_H v^2}{3K_B}$$

Usando la ecuación 5 se halló $29778{,}306m/s$, y con $m = 1{,}6735575e^{-27}$

$$\Delta T = 35828{,}8K$$

3. Problema 3:

3.1. Calcule la viscosidad molecular en un disco protoplanetario de radio $10^14cm = 10^{12}m$, donde el camino libre medio $l_{fp} = 10cm = 0{,}1m$ y la velocidad de la luz $C_s = 1km/s$

En la formación de un disco planetario, las partículas orbitan alrededor de la estrella chocando unas con otras, esta colisión genera una viscosidad que depende del camino libre medio. El camino libre medio es la distancia que alcanza a recorrer una partícua del disco antes de chocar con otra partícula. La viscosidad molecular se obtiene por medio de la ecuación $v = l_{fp}C_s$, así

$$v_m = 10^2 \frac{m^2}{s}$$

3.2. ¿Cuál es el tiempo de acreción viscosa para este disco?

El tiempo de acreción viscosa es el tiempo en que se tarda en formar el disco, este se halla con

$$t_v = \frac{r^2}{v_m} = 1e^{22}s$$
$$t_v = 3{,}171e^{14}$$

Es decir, el disco tardaría en formarse $3{,}17e^{14}$ años.

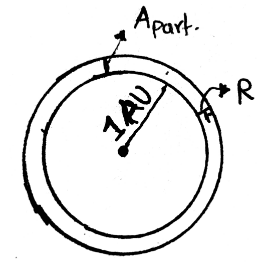
4. Problema 4:

4.1. Calcule el αv necesario para un disco turbulento con los mismos parámetro del problema 3, de tal forma que su evolución viscosa dure 10^6 años.

En el problema anterior, el tiempo de formación del disco fue de $3{,}17e^{14}$ años, un tiempo mucho mayor incluso a la edad del universo. Por esto, se usa el parámetro de Shakura–Sunyaev (α) que toma en cuenta la turbulencia del disco. Esto resulta en la ecuación

$$v_{vs} = \frac{r^2}{t_v} = \alpha * C_s * h \tag{6}$$

Donde $h = \frac{C_s}{\Omega}$ siendo Ω la velocidad angular Kepleriana igual a $\sqrt{\frac{G*M_*}{r^3}}$. Reemplazando Ω y



h en la ecuación 6 y despejando el parámetro α, se tiene que

$$\alpha = \frac{r^2}{t_v * C_s^2} * \sqrt{\frac{G * M_*}{r^3}}$$

- r = 10^{12}m
- $t_v = 10^6$ años $= 3{,}15e^{13}$ s
- $C_s = 10^3$ m/s
- $G = 6{,}674e^{-11}\ Nm^2/kg^2$
- $M_* = 1{,}989e^{30}$ kg

Finalmente, el parámetro de Shakura–Sunyaev es $\alpha = 3{,}658e^{-4}$

5. Problema 5:

5.1. Calcule la cantidad de gas (masa) con la cual una partícula de radio R cm, orbitando a 1 AU de una estrella con 1 $M_\odot$, colisiona durante un año. Puede asumir que la densidad del disco protoplanetario es $1e{-}9g/cm^3$ y que $\eta = 5e^3$

El movimiento de la partícula orbitando la estrella forma un anillo, cuya área transversal es el de la partícula y su longitud es la distancia que recorre la partícula durante el años.

La cantidad de masa con la partícula colisiona es la densidad del gas alrededor de la partícula por el volumen de este anillo, es decir

$$m = \rho_{gas} * A_{part} * L_{orb} \tag{7}$$

La longitud que recorre se puede hallar por medio de

$$L_{orb} = v * T = \omega_{rel} * r * t \tag{8}$$

donde t es el tiempo total (1 año) y ω_{rel}, la velocidad angular relativa de la partícula respecto al gas del disco. Esta velocidad es la resta entre la velocidad orbital de la partícula y la velocidad del gas. Las partículas de gas en un disco tienen una velocidad angular

$$\omega_{gas} = \Omega(1 - \eta)$$

Así

$$\omega_{rel} = \Omega - \Omega(1 - \eta) = \Omega\eta$$

Reemplazando ω_{rel} en la eq. 8, y L_{orb} en la eq. 7, finalmente se tiene que

$$m = \rho_{gas}\pi r R^2 t\Omega\eta = \rho_{gas}\pi R^2 rt\eta\sqrt{\frac{GM_*}{r^3}} \quad (9)$$

Ahora, teniendo la ecuación basta con reemplazar

- $\rho_{gas} = 1e{-}9g/cm^3 = 1e^{-6}kg/m^3$
- $r = 1AU = 1{,}4959e^{11}m$
- $t = 1$ año $= 3{,}154e^7$ s
- $C_s = 10^3$ m/s
- $G = 6{,}674e^{-11}\ Nm^2/kg^2$
- $\eta = 5e^3$
- $M_* = 1{,}989e^{30}$ kg

Y finalmente, la masa con la que choca la partícula durante un año es

$$m \approx 14756{,}58R^2 kg/m^2$$

con R en metros.

5.2. Asumiendo una partícula de densidad $3g/cm^3$, calcule el radio de la partícula que colisiona con su propia masa de gas durante una órbita completa.

Una órbita completa de la partícula se da durante un año debido a que se toman los mismo valores del Sol y la distancia de la tierra al sol. Ahora, usando la ecuación 9, se despeja el radio y se tiene

$$R^2 = \frac{m}{\rho_{gas}\pi\eta tr\sqrt{\frac{GM_*}{r^3}}}$$

En este caso, la masa sería la masa de la partícula que es $\rho_{part}V_{part}$, entonces

$$R^2 = \frac{4\rho_{part}\pi R^3}{3\rho_{gas}\pi\eta tr\sqrt{\frac{GM_*}{r^3}}}$$

$$R = \frac{3\rho_{gas}\eta tr\sqrt{\frac{GM_*}{r^3}}}{4\rho_{part}}$$

Así, el valor del radio de la partícula es

$$R = 1{,}174m$$

6. Problema 6:

Calcule la masa y el radio de los planetesimales que se forman por inestabilidad gravitacional en un disco protoplanetario no turbulento alrededor de una estrella de $1_\odot$. Asuma que la densidad superficial de material sólido de disco varía como $\sigma_p = 10r_{AU}^{-1}g/cm^2$. Realice los cálculos a 1 AU, 5 AU:

La masa de un planatesimal está dada por la ecuación

$$M_{plan} = \frac{16\pi^2 G^2\sigma_p^3}{n^4}$$

Y tomando n igual a

$$n = \omega = \sqrt{\frac{GM_*}{r^3}}$$

$$M_{plan} = \frac{16\pi^2\sigma^3 r^6}{M_*^2} \quad (10)$$

6.1. 1 AU

Para este caso:

- $G = 6{,}674e^-11Nm^2/kg^2$
- $M_* = 1M_\odot = 1{,}988e^{30}kg$
- $r = 1AU = 1{,}4959e^{11}m$
- $\sigma = \frac{10}{r_{AU}}g/cm^2 = 100kg/m^3$

Reemplazando en la ecuación 10, obtenemos

$$M_{plan} = 4{,}47e^{14}kg$$

6.2. 5 AU

En este caso, sólo cambia $r = 7{,}479e^{11}$ m, lo que da como resultado que

$$M_{plan} = 5{,}59e16kg$$

6.3. Repita sus cálculos a 5 AU con una densidad superficial el doble, con el fin de tener en cuenta la formación de hielos.

- $G = 6{,}674e^-11Nm^2/kg^2$
- $M_* = 1M_\odot = 1{,}988e^{30}kg$
- $r = 5AU = 7{,}4795e^{11}m$
- $\sigma = \frac{20}{r_{AU}}g/cm^2 = 40kg/m^3$

Reemplazando, los valores:

$$M_{plan} = 4{,}473e^{17}$$

7. Problema 7:

Calcule el tiempo de formación de Neptuno asumiendo un proceso ordenado (¡no hay Runaway!), usando $F_g = 10$ en una nube de mínima masa (nube solar). Nota: La densidad superficial puede determinarse si se supone que toda la masa de Neptuno se encontraba dispersada en un anillo entre 25 AU y 35 AU.

Suponiendo que la masa total de Neptuno se encuentra entre 2 radios, este volumen tiene forma de anillo.

La tasa de crecimiento del radio de un planeta (en un proceso ordenado) se por la ecuación

$$\frac{dR}{dt} = \sqrt{\frac{3}{\pi}}\frac{\sigma_p n G_g}{4\rho_p} \tag{11}$$

Donde n es la velocidad angular Kepleriana y σ_p es la densidad superficial igual a $\frac{M_{plan}}{A_{plan}}$. Multiplicando a ambos lados por dt e integrando:

$$R = \int_0^t \sqrt{\frac{3}{\pi}}\frac{\sigma_p n G_g}{4\rho_p}dt$$

$$R = \sqrt{\frac{3}{\pi}}\frac{\sigma_p n G_g t}{4\rho_p}$$

$$t = \sqrt{\frac{\pi}{3}}\frac{4\rho_p A_{plan} R}{M_{plan} n G_g} \tag{12}$$

El área superficial del anillo es

$$A = \pi(r_{ext}^2 - r_{int}^2)) = 4{,}218e^{25}m^2$$

y la masa de Neptuno es $1{,}024e^{26}kg$.

Además, la densidad $\rho_p = \frac{M_{plan}}{V_{plan}}$ donde el volumen del planeta se halla con su radio $R = 2{,}4622e^7m$. Con esto,

$$\rho_p = 1637{,}7kg/m^3$$

Ahora, para calcular la velocidad kepleriana n, se toma como radio, la distancia entre el centro de lo que será la esfera hasta el Sol, es decir, $r = 25AU + 5AU = 4{,}488e^12m$.

$$n = 1{,}212e^{-9}s^{-1}$$

Teniendo listos estos valores y reemplazando en la ecuación 12, se obtiene finalmente el tiempo de formación del plantea Neptuno:

$$t = 1{,}77e^{11}años$$

Este tiempo es mucho mayor a la edad del universo, esto se debe a que el modelo (la ecuación 12) toma la formación como un proceso ordenado. Lo que hace que la formación del planeta dure menos, es el Runaway o el crecimiento fuera de control.

8. Problema 8:

La razón hielo-roca en un disco protoplanetario depende de la composición química y del estado de los elementos-moléculas que lo componen. En este problema se debe calcular la razón entre hielo-roca en un disco protoplanetario típico asumiendo lo siguiente:

8.1. Asuma rocas no hidratadas hechas de SiO, MgO, FeO y FeS, haciendo uso de la totalidad del inventario de estos elementos, excepto el O, que es el más abundante. Calcule la cantidad de O disponible para formar moléculas de CO y de H2O.

El oxígeno disponible se calcula restando la cantidad total de oxígeno que hay en un principio y la cantidad de oxígeno luego de que se usó para formar las moleculas de SiO, MgO, Feo, y FeS. La abundancia de los elementos, en este

Elemento	Abundancia [por átomo de Silicio]
O	14,1
Fe	0,838
Mg	1,02
Si	1
S	0,445
C	7,08
N	1,95

Cuadro 1: Abundancia de los elementos

Elemento	Masa atómica [uma]
O	16
Fe	52
Mg	24
Si	28
S	32
C	12
N	14
H	1

Cuadro 2: Masa atómica de los elementos

caso, se da en número de átomos por átomo de Silicio, las abundancias de cada uno son las siguientes:

Para calcular la cantidad de Oxígeno que se une a los demás elementos se tiene en cuenta el reactivo limitante, este es del que menos cantidad hay. Como el Hierro se une a 2 elementos, primero se calcula el hierro que se consume con el S y el que queda para el Oxígeno, y así se halla la cantidad de Oxígeno restante luego de haberlo usado con el Hierro.

Para FeS:
Hay 0,445 de S, por lo que se consumen también 0,445, quedando de Fe sólo 0,393 átomos de O por por átomo de Si.

Para FeO:
Con 0,393 de Fe, se consumen 0,393 de O, quedando $14{,}1 - 0{,}393 = 13{,}707$ átomos de O por por átomo de Si.

Para SiO:
Hay 1 de Si, entonces queda $13{,}707 - 1 = 12{,}707$ átomos de O por átomos de Si.

Para MgO:
Hay 1,02 de Mg, entonces queda finalmente, 11,687 átomos de O por átomo de Si.

8.2. Calcule la masa de roca en amu (atom mass unit) por cada átomo de Silicio (amu/Si). Aumente su resultado en un 10 % para tener en cuenta (aproximadamente), la masa de roca formada con otros elementos menos abundantes no incluidos en el cálculo.

La roca posee las moleculas anteriormente mencionadas, por lo que la masa total de la roca es la suma del porcentaje de masa que aporta cada molecula a la roca.

Para FeS:

$$52 + 32 = 84uma$$

Para FeO:

$$52 + 16 = 68uma$$

Para MgO:

$$24 + 16 = 40uma$$

Para SiO:

$$28 + 16 = 44uma$$

La masa total de la roca es:

$$m_r = (84{*}0{,}445)+(68{*}0{,}838)+(44{*}1)+(40{*}1{,}02)$$

$$m_r = 163{,}144\frac{uma}{Si}$$

La masa total aumentada al 10 % es

$$m_{10\,\%} = 179{,}4584\frac{uma}{Si}$$

8.3. Asumiendo que todo el Carbono se encuentra en el CO, calcule la masa de hielo de H2O en (amu/Si), la razón H2O/roca, la razón (CO+H2O)/roca y la razón total de hielo (CO+H2O+N2)/roca.

Cuando el Oxígeno se une con el Carbono, se gastan 7,08 por átomo de Silicio así que sobran 4,607 átomos de Oxígeno. Además, la masa del CO es $12 + 16 = 28uma$, con lo que se puede hallar la masa del CO

$$M_{CO} = 28 * 7{,}08 = 198{,}24\frac{uma}{Si}$$

La abundancia del N es 1,95, por lo que de Oxígeno se gastan 3,9 átomos (pues son 2 átomos de N).

$$M_{N_2} = 2(14)(1{,}95) = 54{,}6\frac{uma}{Si}$$

Así, quedan sólo 0,707 átomos de O que se unen ahora con el H para formar el agua y se gasta todo el Oxígeno volviendose este, el reactivo limitante.

$$M_{H_2O} = (2*1+16)(0{,}707) = 12{,}726\frac{uma}{Si}$$

Teniendo ya las masas de las 3 moleculas, se calcula las 3 razones.

$$\frac{H_2O}{roca} = 0{,}071$$
$$\frac{H_2O + CO}{roca} = 1{,}175$$
$$\frac{H_2O + CO + N_2}{roca} = 1{,}480$$

8.4. Asumiendo que todo el Carbono se encuentra como CH4, calcule la masa de hielo de H2O, la razón H2O/roca, la razón (CH4+H2O)/roca y la razón total de hielo (CH4,+H2O+NH3)/roca.

Se realiza el mismo proceso del punto anterior. Para el CH4, el reactivo limite es el Carbono. Así

$$M_{CH_4} = (12+4*1)(7{,}08) = 113{,}28\frac{uma}{Si}$$

Para el H2O el reactivo limite es el Oxígeno:

$$M_{H_2O} = (2*1+16)(14{,}1) = 253{,}8\frac{uma}{Si}$$

Para el NH3 el reactivo limitante es N:

$$M_{NH_3} = (3*1+14)(1{,}95) = 33{,}15\frac{uma}{Si}$$

$$\frac{CH_4}{roca} = 0{,}631$$
$$\frac{CH_4 + H_2O}{roca} = 2{,}045$$
$$\frac{CH_4 + H_2O + NH_3}{roca} = 2{,}23$$

De estos resultados se puede decir que existe mayor masa de hielo (de varios moleculas unidad) que de rocas.

9. Problema 9:

9.1. Calcule la tasa de crecimiento dR/dt de un protoplaneta de $R = 4000km$ y masa $M = 10^{27}g$, en un disco de planetesimales de densidad superficial $\sigma = 10g/cm^2$ a una temperatura de $300K$ y una velocidad de dispersión $v = 1km/s$, a una distancia de $2AU$ de una estrella de $3M_\odot$.

La tasa de crecimiento del planeta se calcula con la ecuación 11 donde, en este caso,

$$Fg = 1 + (\frac{v_e}{v})^2$$

Siendo v, la velocidad de dispersión y v_e la velocidad de escape calculada por medio de

$$v_e = (\frac{2G(m1+m2)}{R1+R2})^{1/2}$$

Para este caso, como $m1 \gg m2$ se toma $m1 + m2 \approx M_{plan}$, así mismo, $R1 \gg R2$, entonces $R1 + R2 \approx R_{plan}$.

Ahora, teniendo los valores:

- $R = 4000km = 4e^6$
- $M_{plan} = 10^{27} = 1e^{24}$
- $\sigma = 10g/cm^2 = 100kg/m^2$
- $v = 1km/s = 1000m/s$
- $r = 2AU = 2{,}99e^{11}$
- $M_* = 3M_\odot = 5{,}967e^30$

Para hallar la densidad del planeta

$$\rho_p = \frac{M_{plan}}{\frac{4\pi R^3}{3}} = 3730{,}2kg/m^3$$

La velocidad de escape es

$$v_e = (\frac{2G(M_{plan})}{R})^{1/2} = 5776{,}67m/s$$

El factor F_g

$$F_g = 34{,}37$$

La velocidad kepleriana Ω es

$$\Omega = 1{,}22e^{-7}$$

Teniendo todos los factores necesarios para la ecuación 11 se tiene que

$$\frac{dR}{dt} = 2{,}745e^{-8} m/s$$

9.2. ¿Qué detiene o al menos disminuye la tasa de crecimiento del protoplaneta?. ¿Cuál es su masa en ese momento?

Lo que hace que la tasa de crecimiento disminuya es que a medida que el planeta va atrayendo a las partículas, su masa va aumentando, por lo que la densidad del planeta ρ_p va aumentando. Al mismo tiempo, como el planeta va dejando al disco sin partículas, la masa del disco disminuye, así como su densidad superficial σ. Esto concuerda con lo que se muestra en la ecuación, a medida de que σ disminuye y ρ_{plan} aumenta, $\frac{dR}{dT}$ disminuye.

9.3. La masa de aislamiento para el crecimiento desbocado de un protoplaneta alrededor de una estrella de $1M_\odot$ está dada por la ecuación 12.28. Encuentre una expresión general de esta ecuación para estrellas de cualquier masa.

La ecuación 12.28 es

$$M_{iso} = \int_{r_\odot - \Delta r_\odot}^{r_\odot + \Delta r_\odot} 2\pi r \sigma r dr \approx 4\pi r_\odot \Delta r_\odot \sigma_p r_\odot \tag{13}$$

Sabiendo que $\Delta r_\odot = 4R_H$ siendo

$$R_H = (\frac{m2}{3(m1+m2)})^{\frac{1}{3}} a$$

Siendo m2 la masa del planeta y m2 la masa de la estrella, como $m2 \gg m1$, entonces m1+m2=m2.

$$R_H = (\frac{m_p}{3(M_*)})^{\frac{1}{3}} a$$

Reemplazando este valor en la ecuación 13, queda

$$M_{iso} = 4\pi r_\odot^2 4(\frac{M_p}{3M_*})^{1/3} a\sigma_p$$

La masa iso es la misma masa del planeta así que despejando esta masa, se tiene finalmente que

$$M_{iso} = \frac{(16\pi r_\odot^2 a\sigma_p)^{3/2}}{(3M_*)^{1/2}}$$