PROBLEM SET 3

Shirley Katherine Maldonado Meza

23 de mayo de 2023

1. Problema 1:

Los sistemas de satélites de los planetas gigantes son referidos a menudo como “sistemas solares en miniatura”. En este problema usted hará algunos cálculos para comparar los sistemas satelitales de Júpiter, Saturno y Urano con el sistema planetario.

1.1. Calcule la razón entre la suma de las masas de los planetas y el Sol y las correspondientes razones para los sistemas joviano, saturnino y uránico.

Para el sistema solar:

	Nombre	Masa [10^24 kg]
0	SOL	1989000.000
1	MERCURY	0.330
2	VENUS	4.870
3	EARTH	5.970
4	MARS	0.642
5	JUPITER	1898.000
6	SATURN	568.000
7	URANUS	86.800
8	NEPTUNE	102.000

Figura 1: Masas del sistema solar

La suma total de las masas de los planetas es

$$M_p = 2{,}666e^{27}kg$$

Y su razón con la masa del Sol es

$$Razón_{ss} = 1{,}34068e^{-3}$$

Para el sistema joviano:
Como las lunas del sistema joviano tienen masas mucho más pequeñas que la masa de Júpiter es inútil tomarlas todas, por lo que sólo consideré las primeras 5 lunas más masivas de Jupier. Las demás lunas tienen masas muy pequeñas comparadas con las elegidas y por esto no añadirán mucho peso a la masa total y mucho menos a la razón con la masa de Jupiter.

La masa total de las lunas de Jupiter es: $3{,}93104e^{23}$

Y su razón con la masa de Jupiter es

$$Razon_{sj} = 2{,}0711e^{-4}$$

	Nombre	Masa [10^16 kg]
0	Jupiter	1.898000e+11
1	Ganymede	1.481900e+07
2	Callisto	8.931900e+06
3	Io	4.799800e+06
4	Europa	1.075900e+07
5	Himalia	4.200000e+02
6	Amalthea	2.080000e+02

Figura 2: Masas del sistema joviano

Para el sistema saturniano:
Con Saturno sucede lo mismo, por lo que sólo tomaré las lunas que tengan una masa mayor a $1e^{20}$ kg.[1]

	Nombre	Masa [10^20 kg]
0	Saturno	5683400.000
1	Titán	1345.200
2	Rea	23.060
3	Ípetus	18.050
4	Dione	10.955
5	Tetis	6.176
6	Encélado	1.080

Figura 3: Masas del sistema saturniao

La suma total de las masas de las lunas de Saturno escogidas es

$$1{,}405034e^{23}$$

Y su razón es

$$Razon_{ssat} = 2{,}4721e^{-4}$$

Para el sistema uránico:

De igual forma para el sistema uránico, sólo se tomarán las lunas con masas mayores a $1e^{18}$ kg.
La suma total de las masas de la luna del sistema es

$$9{,}1398e^{21}$$

y su razón:

$$Razon_{su} = 1{,}053125e^{-4}$$

Las lunas no escogidas para cada uno de los sistemas sólo cambiarían aproximadamente la cuarta o quinta cifra decimal de los resultados, por lo que es inutil tomarlas.

[1] Wikipedía

	Nombre	Masa [10^20 kg]
0	Urano	868100.000
1	Titania	35.270
2	Oberon	30.140
3	Ariel	13.530
4	Umbriel	11.700
5	Miranda	0.659
6	Sycorax	0.053
7	Puck	0.029
8	Portia	0.017

Figura 4: Masas del sistema uránico

1.2. Calcule la razón entre la suma de los momentos angulares orbitales de los planetas y el momento angular rotacional del Sol. Puede suponer órbitas circulares con inclinación cero para todos los planetas e ignorar los efectos de la rotación planetaria y la presencia de satélites.

El momento angular rotacional está dado por la ecuación

$$L_{rot} = I\omega$$

Siendo I el momento de inercia cuyo valor depende de la forma del cuerpo y ω la velocidad angular.

Considerando al sol y los planetas como una esfera, su momento de inercia es $\frac{2MR^2}{5}$ y su velocidad angular de rotación se calcula por medio de $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T_{rot}}$

Así,

$$L_{rot} = \frac{4\pi M_{sol} R^2}{5T_{rot}} \tag{1}$$

Existe otra forma de hallar el momentum angular del Sol usando le ecuación que presentan en el libro Planetary Sciences [I. De Parter, 2001] usando la ecuación

$$L_{orb} = k^2 M_{sol} R_{sol} \omega$$

Siendo $k^2 = 0{,}1$ un parametro para una estrella. Pero no la usaré debido a que se debe hallar el momentum angular rotacional para los planetas también y no he encontrado tal parametro.

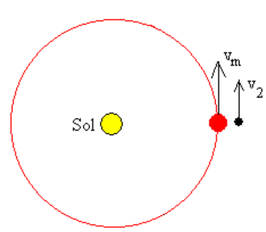

Figura 5: Diagrama del movimiento orbital de un planeta

Ahora, suponiendo que los objetos (tanto planetas como los satélites) óbitan en un plano con inclinación 0, y que la excentricidad de sus órbitas es 0 (como se ve en la figura 5), es decir, su semieje mayor es el radio de la óbirta circular, entonces, su momento orbital se puede hallar con la ecuación

$$\overrightarrow{L_{orb}} = \overrightarrow{r} x \overrightarrow{p} = \overrightarrow{r} x (m \overrightarrow{v})$$

$$L_{orb} = rmvsen(\theta)$$

Siendo θ el ángulo entre el vector posición y la velocidad tagencial a la órbita, m la masa del planeta y r su semieje mayor.

Como la órbita es una circunferencia, los vectores posición y velocidad son perpendiculares por lo que

$$L_{orb} = rmv = r^2 m\omega = \frac{2\pi m r^2}{T_{orb}} \tag{2}$$

Ahora, usando la ecuación (1) con lo siguientes datos

- $M_{sol} = 1{,}989e^{30}$ kg
- $R_{sol} = 6{,}9634e^{8}$ m.
- $T_{rot} = 27{,}2753$ días

Se obtiene que el momento angular de rotación del Sol es $1{,}02e^{42}$ $kg.m^2.s^{-1}$

Y los momentos angulares orbitales de los planetas son:

Nombre	Masa [10^24 kg]	Semieje mayor[AU]	T orbital [días]	M orbital[kgm^2s^-1]
MERCURY	0.330	0.3871	88.0	9.145489e+38
VENUS	4.870	0.7233	224.7	1.845407e+40
EARTH	5.970	1.0000	365.2	2.660559e+40
MARS	0.642	1.5240	687.0	3.532462e+39
JUPITER	1898.000	5.2030	4331.0	1.930834e+43
SATURN	568.000	9.5370	10747.0	7.823732e+42
URANUS	86.800	19.1900	30589.0	1.700723e+42
NEPTUNE	102.000	30.0700	59800.0	2.510124e+42

Figura 6: Momentos orbitales de los planeta

La suma total de los momentos orbitales son

$$L_T = 3{,}139e^{43} kg.m^2.s^{-1}$$

Y finalmente, la razón es:

$$\frac{\Sigma L_{orbP}}{L_{rot\odot}} = \frac{3{,}139e^{43}}{1{,}02e^{42}} = 27{,}974$$

1.3. Repita el cálculo en 1.2 para los sistemas joviano, saturnino y uránico.

Para cada sistemas, los satélites elegidos para hallar el momentum angular orbital son los mismos pues aunque hay algunos que tienen órbitas con semiejes mayores más grandes, sus períodos orbitales también lo son y las masas siguen siendo muy pequelas, por lo que no harán mucha diferencia.

Sistema joviano

El momento angular rotacional de Júpiter es

$$L_{rJup} = 6{,}8409e^{38} kg.m^2.s^{-1}$$

Y los datos de sus lunas son [2]

Nombre	a [km]	T orbital [días]	L orbital [kg.m^2s^-1]
Io	421800	1.762732	6.555968e+35
Europa	671100	3.525463	4.459104e+35
Ganymede	1070400	7.155588	1.725567e+36
Callisto	1882700	16.690440	1.661623e+36
Amalthea	181400	0.499918	9.956467e+30
Himalia	11440600	250.562210	2.145567e+30

Figura 7: Datos de las lunas de Júpiter

Y la suma de los momentos rotacionales es

$$L_{rot,sj} = 4{,}4887e^{36} kg.m^2.s^{-1}$$

Y la razón con el momentum de Júpiter es:

$$Razon_{sj} = 6{,}5615e^{-3}$$

Sistema saturnino
El momento angular rotacional de saturno es

$$L_{rsat} = 1{,}3461e^{38} kg.m^2 s^{-1}$$

Nombre	a [km]	T orbital [días]	L orbital [kg.m^2s^-1]
Titán	1221900	15.945448	9.159834e+35
Rea	527200	4.517503	1.031758e+34
Íapetus	3561700	79.331002	2.099013e+34
Dione	377700	2.736916	4.152331e+33
Tetis	295000	1.887802	2.070432e+33
Encélado	238400	1.370218	3.258376e+32

Figura 8: Datos de las lunas de Saturno

La suma del momento angular de sus satélites es:

$$L_{orb,ssat} = 9{,}5384e^{35}$$

Y su razón

$$Razón_{sist,sat} = 7{,}0859e^{-3}$$

Sistema uránico
El momento angular rotacional de urano es

$$L_{rU} = 2{,}3015e^{36} kg.m^2.s^{-1}$$

Y con los datos de sus satélites

[2]Los datos de todos los satélites fueron tomados de `https://ssd.jpl.nasa.gov/sats/elem/sep.html`

Nombre	a [km]	T orbital [días]	L orbital [kg.m^2s^-1]
Titania	436300	8.706444	5.607912e+33
Oberon	583400	13.463606	5.540907e+33
Ariel	190900	2.520680	1.422519e+33
Umbriel	266000	4.144548	1.452573e+33
Miranda	129900	1.413784	5.719878e+31
Sycorax	12180000	1289.230640	2.327237e+29
Puck	86000	0.761476	2.048353e+30
Portia	66100	0.513196	1.052531e+30

Figura 9: Datos de las lunas de Urano

La suma de los momentos orbitales de sus lunas es

$$L_{orb,sura} = 1{,}4084e^{34} kg.m^2.s^{-1}$$

Y su razón

$$Raz\acute{o}n_{sist,ura} = 6{,}1196e^{-3}$$

Conclusión:

Vemos que las razones del sistema solar son más grandes que las de los otros sistemas (1 orden de magnitud más grande para la razón de las masas y 4 ordenes de magnitud para los momenros angulares). Cosa que determina una gran diferencia entre el sistema planetario y los sistemas lunares.

2. Problema 2:

Por parejas de planetas consecutivos (Mercurio-Venus, Venus-Tierra, Tierra-Marte, etc) calcule cada cuánto se encuentran ellos en la mínima distancia de separación entre sí (conjunción). A este periodo también se le llama periodo sinódico.

Considerando las órbitas como circunferencias, la posición angular de los planetas es

$$\theta = \omega * t = \frac{2\pi t}{T_{orb}}$$

Mientras un planeta da una vuelta, o sea, gira un ángulo de 2π, otro planeta gira cierto ángulo si tienen diferentes períodos. Cuando el ángulo entre ambos es 0 o 2π, los planetas se encuentran en conjunción. Es decir:

$$\theta_1 - \theta_2 = 2\pi = \frac{2\pi t}{T_{orb,1}} - \frac{2\pi t}{T_{orb,2}}$$

$$2\pi = \frac{T_{orb,1} - T_{orb,2}}{T_{orb,1} T_{orb,2}} * t * 2\pi$$

$$t = \frac{T_{orb,1} T_{orb,2}}{T_{orb,1} - T_{orb,2}}$$

Así, con los datos de la tabla 6, se obtiene cada cuánto se encuentran los planetas por pares.

Pareja	t [años]
MERCURY-VENUS	0.396300
VENUS-EARTH	1.600165
EARTH-MARS	2.136036
MARS-JUPITER	2.237040
JUPITER-SATURN	19.875507
SATURN-URANUS	45.391467
URANUS-NEPTUNE	171.564399

Figura 10: Tiempo entre cada conjunción

3. Problema 3:

Saturno irradia 1,98e^{17} $km.m^2.s^{-3}$ de radiación infrarroja, mientras que sólo absorbe 11e^{17} $km.m^2.s^{-3}$ de radiación solar. Suponga que la diferencia entre estas radiaciones es debida completamente a la energía gravitacional liberada gradualmente por la contracción de Saturno. La masa de Saturno 5,7e^{26} kg y su radio es de 5,8e^{7} m. Para calcular la energía gravitacional puede asutmir que Saturno posee una densidad media uniforme.

3.1. ¿Qué tan rápido cambia el radio de Saturno? (dR/dt)

La energía gravitacional almacenada por Saturno suponiendo que es una esfera con densidad uniforme está dada por la ecuación

$$U_g = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$$

Y la energía gravitacional que se libera gradualmente es

$$\frac{dU_g}{dt} = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R^2}\frac{dR}{dt}$$

Y como se mencionó en el enunciado, la diferencia de las radiaciones se deben a este cambio de energía potencial.

$$\frac{dU_g}{dt} = \Delta P = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R^2}\frac{dR}{dt}$$

Así,

$$\frac{5}{3}\frac{R^2}{GM^2}\Delta P = \frac{dR}{dt}$$

Finalmente

$$\frac{dR}{dt} = 2{,}2677e^{-11} m/s$$

3.2. Asumiendo una contracción constante a esa tasa durante 10^9 años, ¿cual es el porcentaje del tamaño del planeta contraído?

1e^9 años son 3,1536e^{16} s y así

$$2{,}2677e^{-11} * 10^9 = 715{,}160 km$$

Lo que equivale al 1,23 % del radio del planeta Saturno.

4. Problema 4:

Un planeta que conserva el mismo hemisferio apuntando al Sol debe rotar una vez por órbita en la dirección prógrada (es decir, en la misma dirección de la órbita del planeta).

4.1. Dibuje un diagrama (gráfico de movimiento) que demuestre este hecho. El período de rotación (en un marco inercial) o día sideral de tal planeta es igual a su período orbital, mientras que la duración de un día solar en dicho planeta es infinita.

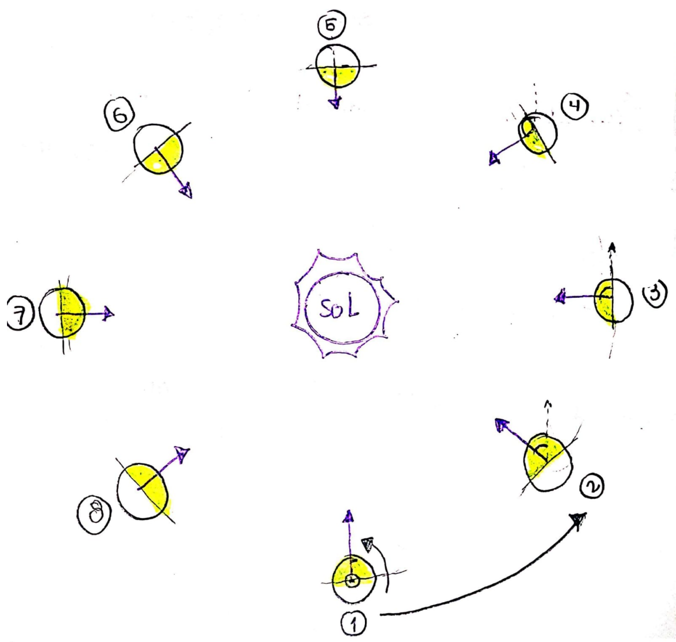

Figura 11: Esquema del movimiento de un planeta con el mismo período orbital y rotacional

En el esquema se puede ver que cuando el planeta realiza una vuelta completa alrededor del sol, también realiza un giro completo sobre su propio eje.

4.2. La Tierra rota en dirección prógrada. ¿Cuántas veces debe rotar la Tierra en cada órbita para que hayan 365.24 días solares por año? Verifique su resultado comparando la duración del período sideral en la Tierra con la duración de un día solar promedio.

El día solar se le llama al tiempo en el que el Sol vuelve a pasar por el mismo punto en el cielo. El día sideral es el tiempo que tardan las estrellas en volver al mismo punto. Ambos días no duran lo mismo pues el Sol gira más rápido que las estrellas (en la esfera celeste).

Para realizar este ejercicio me apoyaré en el siguiente gráfico.

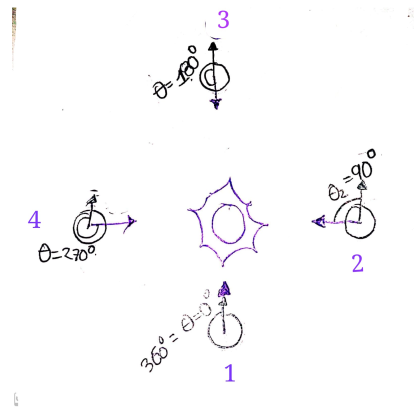

Figura 12: Esquema del movimiento de la Tierra con la diferencia entre día sideral y día solar

En el punto (1), tanto el Sol como las estrellas, se encuentran en la misma dirección, pero al pasar $\frac{1}{4}$ de año sideral (momento (2), que apunta hacía arriba), aún falta que la Tierra rote 90 más para que se complete el cuarto de año solar. Así mismo ocurre en el momento (3), ya pasa medio año sideral pero aún falta medio que pase medio día solar para que se complete el medio año solar. De esta forma, cuando se cumple un año sideral, aún falta un día solar para que se complete el año solar. Por esto,

$$(n_d + 1) * T_{sid} = n_d * T_{sol} = T$$

Siendo n_d los días solares y T el período orbital.

Usando esta ecuación, se tiene que el número de días siderales (rotaciones) que hay en un año solar es 366.5. Además, suponiendo el período rotacional solar es de 24 horas, entonces el período sideral es

$$T_{sid} = \frac{(365{,}5)24h}{366{,}5} = 23{,}9345h$$

Valor que es casi igual al presentado en el libro [I. De Parter, 2001]

4.3. Si un planeta rotó una vez por órbita en dirección retrógrada (opuesta a la dirección de su órbita), ¿cuántos días solares tendría por órbita?

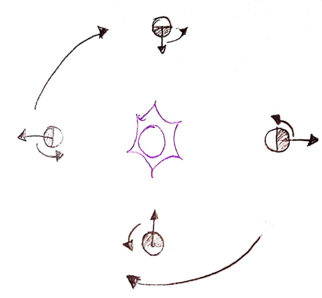

Figura 13: Esquema con una órbita retrograda

Con el esquema es posible ver que se tendrían 2 días solares en todo el año, el primero que se observa en la parte inferior y el de la parte superior.

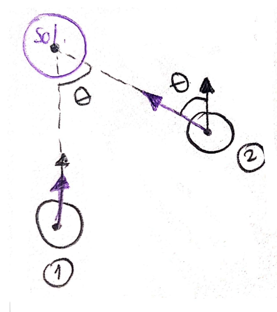

Figura 14: Esquema movimiento rotacional solar, sideral, y orbital.

4.4. Determine una fórmula general que relacione las duraciones de los días solares y siderales en un planeta. Use esa fórmula general para determinar la duración de los días solares en Mercurio, Venus, Marte y Júpiter.

En la figura 14, vemos que cuando el planeta ha dado una vuelta sobre su propio eje, aún no ha completado su día solar, por lo que debe recorrer girar un ángulo θ. La velocidad rotacional del planeta se puede expresar de 2 formas, con su período sideral o solar. Así

$$\omega = \frac{2\pi}{D_*} = \frac{2\pi + \theta}{D_\odot}$$

Este ángulo θ es igual al ángulo que se trasladó el planeta alrededor del Sol en un día solar, por lo que

$$\theta = \omega_{Tras} D_\odot$$

Así

$$\frac{2\pi}{D_*} = \frac{2\pi}{D_\odot} + \frac{\omega_{Tras} D_\odot}{D_\odot}$$

Y la velocidad angular de traslación es $\omega_{Tras} = \frac{2\pi}{T_{orb}}$
Dando como resultado

$$\frac{1}{D_*} = \frac{1}{D_\odot} + \frac{1}{T_{orb}}$$

Nombre	T orbital [h]	Día sideral [h]	Día solar [h]
MERCURY	2112.0	1407.6	4220.402044
VENUS	5392.8	-5832.5	-2802.019189
MARS	16488.0	24.6	24.636758
JUPITER	103944.0	9.9	9.900943

Figura 15: Días solares de los 4 planetas

El día solar negativo de Venus se debe a su movimiento retrogrado.

4.5. Para un planeta en una órbita excéntrica, la duración de bien sea el día solar o el sideral varía en un ciclo anual. ¿Cuál de los dos días varía y por qué? Calcule la duración del más largo de tales días en la Tierra. Este día más largo, ¿qué tan largo es comparado con el día promedio de su tipo?

Solución

El día sideral no varía pues este depende del movimiento rotacional del planeta, sin importar su órbita, mientras que el día solar sí cambia, pues como vimos en la figura 14 pues el ángulo depende de la órbita.

Ahora, en el punto anterior vimos que el día solar está relacionado con la velocidad angular orbital y por la segunda ley de Kepler, se sabe que esta velocidad es mínima cuando se encuentra en el afelio, es decir, el día será más largo.

Como la velocidad en el perigelia es mayor a la velocidad en el afelio, el planeta recorre un ángulo orbital mayor cada día sideral que el ángulo orbital que recorre en el afelio. Es decir, $\theta_{pe} > \theta_{af}$ y como la velocidad rotacional no cambia, entonces,

$$\omega_{tor} = \frac{2\pi + \theta_{pe}}{D_P} = \frac{2\pi + \theta_{af}}{D_{af}}$$

así

$$D_{af} = \frac{2\pi + \theta_{pe}}{2\pi + \theta_{af}} D_{pe}$$

Siendo $D_{af} > D_{pe}$ como antes se había mencionado.

5. Problema 5:

Tres de las lunas de Júpiter están en resonancia con los períodos orbitales de Io, Europa y Ganímedes en la razón

$$P_{Io} = P_{Eu} = P_{Ga} = 1 : 2 : 4$$

En otras palabras, Io completa cuatro órbitas y Europa completa dos en el tiempo que le toma a Ganímedes completar una. ¿Cuál es la razón de sus radios orbitales?

La razón dada significa que $P_{Ga} = 4P_{Io}$ y que $P_{Eu} = 2P_{Io}$. Entonces, por la tercera ley de Kepler la cual dice que

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G * (M_j + m_s)} a^3$$

de donde a es el semieje mayor, es decir, el radio orbital (conciderandolos como una circunferencia), y como la masa de los 3 satélites son muy pequeñas comparadas con la de Júpiter, estás no se tendrán en cuenta en la expresión. Entonces, despejando a para cada satélite

$$a_{Io} = \sqrt[3]{\frac{P_{Io}^2 G M_j}{4\pi^2}}$$

$$a_{Eu} = \sqrt[3]{\frac{4P_{Io}^2 G M_j}{4\pi^2}}$$

$$a_{Ga} = \sqrt[3]{\frac{16P_{Io}^2 G M_j}{4\pi^2}}$$

Por lo que finalmente, se encuentra la relación entre los 3 radios orbitales

$$a_{Io} : \sqrt[3]{4} a_{Io} : \sqrt[3]{16} a_{Io}$$

$$1 : \sqrt[3]{4} : \sqrt[3]{16}$$

6. Problema 6:

Antes de las imágenes enviadas por la sonda New Horizons se pensaba que Plutón debía tener una superficie muy accidentada debido a impactos con cuerpos menores. Una de los descubrimientos más sorprendentes a partir de las imágenes de esta misión es que la superficie de este planeta es muy lisa y contiene muy pocos cráteres de impacto. ¿Cómo se podría explicar este hecho?

Solución

Existen varías hipótesis para explicar la falta de cráteres en Plutón. Una de ellas es que el camino libre medio de Plutón es bastante grande, es decir, ha logrado moverse bastante antes de que choque con un objeto y debido a su çorta edad"no ha tenido el suficiente tiempo para que mucho objetos colisionen en su superficie. Pero creo que esto falla debido a que Plutón no ha terminado de barrir su órbita y esto presenta una gran probabilidad de colisiones.

Otra razón, y que me parece más acertada, es que la edad de su superficie es relativamente corta debido a los elementos que conforman su superficie y a su actividad geologica. La superficie de Plutón está formada de nitrogeno sólido, metano y dióxido de carbono, elementos que fluyen de forma facil y permite que la superficie se renueve. Además, gracias a la sonda New Horizons, se sabe que Plutón posee bastantes accidentes geograficos, así como actividad tectonica y procesos criovolcanicos que generan montañas o cadenas montañosas y que influyen en los cambios de sus superficie.

7. Problema 7:

Recuerde que el radio de Hill de un planeta es básicamente el radio en el cual el período de la órbita de un satélite alrededor del planeta es igual al período de la órbita del planeta alrededor del Sol.

7.1. ¿Cuál es el radio de Hill para la Tierra en su órbita alrededor del Sol?

Por la tercera ley de Kepler, la relación entre el período de la tierra y su radio orbital (suponiendo que su órbita es esférica) es

$$\frac{P_t^2}{R_t^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\odot}$$

Siendo P_t^2 el período orbital de la tierra, R_t^3 su radio orbital y $m_\odot$ la masa del Sol.
Y para el sistema Tierra-satélite, con el mismo período orbital que la Tierra con R_H el Radio de Hill

$$\frac{P_t^2}{R_H^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{tie}}$$

Despejando P_t^2 en ambas expresiones e igualandolas

$$R_H = \sqrt[3]{\frac{M_t}{M_\odot} R_t^3}$$

Y con los datos

- $M_t = 3{,}00273e - 6$ masas solares
- $M_\odot = 1$
- $R_t = 1AU$

Se halla el radio de Hill con un valor de

$R_H = 0{,}014416AU = 2{,}158$ millones de km

7.2. En su órbita actual, ¿está la Luna en peligro de ser robada por el Sol?

Para nada, el radio orbital medio de la Luna es 384.403 km, e incluso su distancia a la Tierra en el apoapsis es 405.500 km, que es aproximadamente una quinta parte del radio de Hill y como la Luna se aleja de nosotros uno 3.8 cm por año, estamos muy lejos de perder nuestra Luna.

7.3. Actualmente, la órbita de la Luna tiene 83 % del momento angular total en el sistema Tierra-Luna. Eventualmente, los torques de marea transferirán casi todo el 17 % restante del momento angular del sistema a la órbita de la Luna. Cuando ésto ocurra, ¿estará la Luna todavía dentro del radio de Hill de la Tierra?

Solución

La masa de la Luna es $7{,}35e22$ kg. El momento angular rotacional de los objetos es muy pequeños comparado con el momento orbital (hecho que podemos ver en el punto 1.2) por lo que $L_{orb} \approx L_l$. La ecuación 2 calula el momento angular orbital actual con un período de 27.3 días.

L_l es el 82 % del momento angular total del sistema Tierra-Luna, es decir, $0{,}82L_{total} = L_l$, pero como en el futuro el momento angular de la luna será igual al momento angular total del sistema, entonces

$$L_{total} = L_{l2} = \frac{1}{0{,}82}L_l$$

Reemplazando la ecuación 2 en la anterior

$$\frac{2\pi m r_2^2}{T_2} = \frac{1}{0{,}82}\left(\frac{2\pi m r_1^2}{T_1}\right)$$

Ahora, como el radio de la Luna actual es diferente al que tendrá cuando adquiera todo el momento angular, su período también cambiara, es decir, $T_1 \neq T_2$. $_T1 = 27{,}3$ días es el período actual de la Luna y T_2 se puede hallar con la tercera ley de Kepler

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{r_2^3}{G(M_t + m_l)}}$$

Así,

$$r_2^2\sqrt{\frac{G(M_t + m_l)}{4\pi^2 r_2^3}} = \frac{r_1^2}{0{,}82T_1}$$

Y despejando r_2

$$r_2 = \frac{r_1^4}{G(M_t + m_l)(0{,}82T_1)^2}$$

Por lo que finalmente el radio de la órbita lunar en el futuro será de 571884,15 km, a penas un 26 % del radio de Hill de la Tierra.

8. Problema 8:

Asuma que la Nube de Oort tiene una masa total $M_{oc} \simeq 100M_E \simeq 6e^{26}$ kg y contiene $N_oc \simeq 1e^{13}$ objetos con densidades de $\rho \simeq 1000$ kg m^{-3}.

8.1. Asumiendo que los objetos de la Nube de Oort son aproximadamente esféricos, ¿cuál es el radio de un objeto promedio de la Nube de Oort?

Solución

La masa promedio de cada objeto en la nube de Oort se puede determinar por medio de $\frac{M_{oc}}{N_{oc}}$ lo que da una masa de $M_o = 6e^{13}$ kg. Y su volumen se halla por la ecuación

$$V_{ob} = \frac{M_{ob}}{\rho}$$

$$\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{M_{ob}}{\rho}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{3M_{ob}}{4\pi\rho}}$$

Con un radio aproximado de

$$R = 2{,}4286km$$

8.2. Suponga que de N_c tales objetos están uniformemente distribuidos a través de un volumen esférico de radio $R_c = 1e^4$ AU. ¿Cuál es el camino libre medio de un objeto de la Nube de Oort?

El camino libre medio es la distancia que un objeto puede avanzar antes de colisionar con otro objeto. Este se puede calcular por medio de la ecuación

$$l = \frac{1}{n\sigma}$$

donde n es la densidad de objetos en la nube de Oort, que es el número de objetos por unidad de volumen y se calcula con

$$n = \frac{3N_c}{4\pi R_c^3}$$

y $\sigma = \pi(2R)^2$ la sección transversal entre la colisión de 2 objetos suponiendo que son esféricos, siendo R el radio hallado en el numeral (a). Es 2 veces el área de los objetos pues no sólo se toma en cuenta su área sino el espacio a su alrededor.

$$l = \frac{4\pi R_c^3}{3N_c\pi(2R)^2} = \frac{R_c^3}{3N_cR^2}$$

Pero debido a que los objetos se mueven con una velocidad propia, el camino libre medio no es el anterior sino

$$l' = \frac{l}{\sqrt{2}} = \frac{R_c^3}{3\sqrt{2}N_cR^2}$$

Tomando $N_c = N_{oc}$, el camino libre medio es de $8{,}943e^{13}$ AU. Este es un valor muy grande! Suponiendo que estos objetos se mueven a una velocidad orbital de $\approx 10km/s$ [Festou et al., 2004], tardaría en recorrer esta distancia en $\approx 4{,}2e^{13}$ años. Este valor es incluso mayor que la edad del universo.

Esto implica que los objetos en la nube de Oort está muy separados unos con otros. Pero no significa que nunca se encuentren, pues el camino libre medio es una distancia promedio que puede variar en la realidad.

8.3. Asuma un objeto típico de la Nube de Oort que tiene una órbita aproximadamente circular con un semieje mayor $a = 1e^4$ aU. ¿Cuántas órbitas completa en $4{,}5e^9$ años?

Primero se debe conocer el período del objeto, esto se halla por medio de la tercera ley de Kepler la cual dice que

$$P = \sqrt{\frac{4\pi^2a^3}{GM_\odot}} \approx 1e^6 años$$

Por lo que el objeto habría dado 4495 vueltas en $4{,}5e^9$ años.

8.4. Usando los resultados de los literales (b) y (c), ¿cuál es la probabilidad de que un objeto típico de la Nube de Oort haya estado involucrado en una colisión desde que se formó el Sistema Solar?

La edad del sistema solar es 4500 millones de años. La probabilidad está dada por la ecuación

$$P = \frac{\#casosfavorables}{\#casosposibles}$$

El caso favorable es toda la distancia que ha recorrido en los $4{,}5e^9$ años y los casos posibles la distancia del camino libre medio.

La distancia que ha recorrido en 4495 vueltas al Sol es

$$d = 4495(2\pi)(1e^4 AU) = 2{,}81e^8 AU$$

Así, la probabilidad de colisionar es de 3 en 1 millón. Muy poco probable.

9. Problema 9:

Plutón y Caronte tienen masas $M_p = 1{,}3e22$ kg y $M_c = 1{,}4e21$ kg y radios $R_P = 1150$ km y $R_C = 600$ km. Ellos viajan en órbitas circulares alrededor de su centro de masa mutuo, con una separación (es decir, un semieje mayor) $a = 1{,}94e7$ m.

9.1. Relativo a Plutón, ¿qué tan rápido se mueve Caronte?

Pultón y Caronte se mueven casi sobre la misma órbita pero en extremos opuestos. Usando la tercera ley de Kepler [3] el período de Plutón y Caronte es

$$P = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{G(M_p + M_c)}} = 6{,}32días$$

Finalmente, la velocidad lineal de Caronte relativa a Pluton.

$$v_{rel} = \frac{2\pi a}{P} = 223{,}38m/s$$

9.2. Suponga que estamos observando el sistema Plutón-Caronte de perfil en su plano orbital. Durante nuestra observación, Caronte pasa detrás de Plutón. Bosqueje la"curva de luz" (es decir, el brillo observado como una función del tiempo) para el sistema combinado.

Como no conozco la suma de los brillos de ambos planetas, realizaré la gráfica de I_{total}/T_act brillo total sobre brillo actual. Así el máximo valor de la gráfica será $I_act/I_{total} = 1$

El brillo depende directamente del área transversal observada, área que claramente depende del cuadrado del radio del planeta, por lo que

$$I_{total} = I_C + I_P = a(R_c^2 + R_p^2)$$

Y cuando Caronte se oculta totalmente detrás de Plutón, el brillo del sistema será el mínimo, entonces $I_{act} = aR_p^2$ Y

$$\frac{I_{act}}{I_{total}} = \frac{aR_p^2}{a(R_c^2 + R_p^2)} = \frac{R_p^2}{R_c^2 + R_p^2} = 0{,}7948$$

Ahora, como el sistema está tan lejos de nosotros, y vemos el movimiento de perfil, podemos tomar el movimiento de Caronte respecto a Plutón como un movimiento rectilinio uniforme. Caronte debe recorrer su diamétro para ocultarse, así que el tiempo que tarda Caronte en ocultarse es

[3] Tomado de: http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/kepler.html

$$t3 - t1 = \frac{2R_c}{v_{rel}} = 90{,}07min$$

Luego de que se oculta, Caronte debe recorrer el diámetro de Plutón menos su diámetro, entonces

$$t4 - t3 = \frac{2(R_p - R_c)}{v_{rel}} \approx 87{,}2min$$

La gráfica es

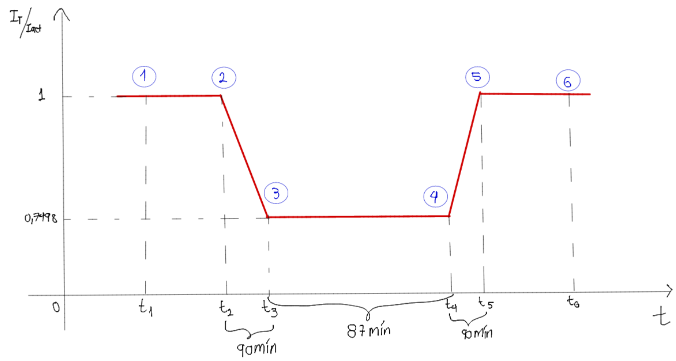

Figura 16: Gráfica Iluminosidad vs tiempo

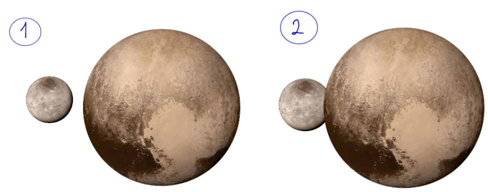

Figura 17: Vista de perfil del sistema Plutón-Caronte en los momentos 1 y 2.

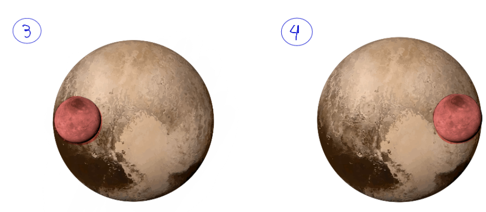

Figura 18: Vista de perfil del sistema Plutón-Caronte en los momentos 3 y 4.

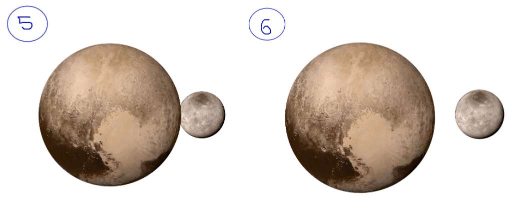

Figura 19: Vista de perfil del sistema Plutón-Caronte en los momentos 5 y 6.

9.3. Dados los radios de los dos planetas enanos y su velocidad relativa calculada en (a), calcule la duración total del eclipse (es decir, el tiempo entre los puntos (i) y (iv)), y la duración del mínimo (es decir, el tiempo entre los puntos (ii) y (iii)).

Estos tiempos fueron calculados para reaizar la gráfica.

$$t_{total} = t5 - t2 = 90 + 87 = 177{,}27 min$$
$$t_{min} = t4 - t3 = 87$$

Referencias

[Festou et al., 2004] Festou, M., Keller, H., and Weaver, H. (2004). *Comets II*. Space Science Series. University of Arizona Press.

[I. De Parter, 2001] I. De Parter, J. L. (2001). *Planetary Sciences*. Cambridge University Press, e* edition.