

密级 _____



中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

博士学位论文

多自主体系统的分布式优化及应用

作者姓名: 张艳琼

指导教师: 洪奕光 研究员, 贾英民 教授

中国科学院数学与系统科学研究院

学位类别: 理学博士

学科专业: 运筹学与控制论

研究所: 中国科学院数学与系统科学研究院

2015年4月

Distributed Optimization and Applications of Multi-agent Systems

By
Yanqiong Zhang

A thesis submitted to
The University of Chinese Academy of Sciences
In partial fulfillment of the requirement
For the degree of
Doctor of Operations Research and Control Theory

Academy of Mathematics and Systems Science

April, 2015

摘 要

多自主体系统的分布式优化与控制由于在自然科学、工程技术、和社会科学等领域的广泛应用而受到研究人员的极大关注. 本文的主要研究集中在: 多自主体系统的分布式优化算法设计, 及其在无线传感器网络定位和目标保护问题中的应用. 具体的工作包括:

1. 研究了多自主体系统的分布式优化问题, 即假设每个自主体都有自己的代价函数, 各自主体之间可以进行局部的信息交流, 设计分布式优化算法使得每个自主体在优化自己的代价函数的同时还能保证系统的状态同步收敛到整体代价函数的最优解. 针对这类问题, 考察了三种不同类型的优化问题的分布式算法设计, 包括分布式受限约束优化问题、二阶系统分布式在线优化和高阶系统的分布式优化. 首先, 对于受限的分布式约束优化问题, 针对现实中由于某些计算或量测误差的存在而使精确梯度难以获取的事实, 提出了一个分布式近似梯度算法, 同时给出了所有自主体渐近同步收敛到约束优化问题最优解的充分条件以及严格的收敛性证明. 其次, 在现有的大部分分布式优化文献中, 其算法设计所依托的多自主体系统通常都是一阶的, 且未考虑到每个自主体本身的动力学特性, 因而没有很好地将算法设计与实际物理系统有效地结合起来. 针对这一现状, 提出了二阶多自主体系统的分布式优化问题并进行研究. 基于积分反馈和次梯度算法的思想, 提出了一种连续时间的分布式优化算法, 且证明了该算法的指数收敛性. 此外还考虑了不确定性干扰下的分布式在线优化问题. 最后, 将二阶的分布式优化内容推广到高阶多自主体系统, 并给出了相应的分布式算法设计及其收敛性分析.

2. 研究了分布式优化在无线传感器网络的源点定位问题中的应用. 首先基于信号接收强度的量测方法, 将源点定位问题转化为一个求解极大似然估计的非凸非线性优化问题, 经过一定的放松进一步将其转化为求解一系列圆环的交集计算问题. 针对圆环的交集是空与非空两种不同的情形, 分别给出相应的凸近似分布式优化建模; 同时对于圆环交集类型未知的情形, 提出了一种统一的分布式优化算法, 并且给出了该定位算法在传感器通信拓扑是有向时变且一致联合强连通条件下的收敛性证明. 仿真实验表明, 该定位算法与现有的一些分布式或集中式的定位算法相比, 在估计精度和计算速度上有很好的提升.

3. 研究了分布式优化在目标保护问题中的应用. 在考虑个体间相互合作的同时引入适当的竞争模式, 从而实现了多自主体对某一动态目标的分组保护, 即同组的个体状态实现同步, 不同组的个体对称分布在目标周围. 针对给定的保护计划表, 提出了一种基于邻居信息的分布式反馈控制器设计策略. 并且对于通信拓扑是有向固定和无向时变的不同情形, 分别证明了该控制器能够使多自主体系统实现对动态移动目标的分组保护任务. 此外, 还研究了当计划表存在变动或噪声影响时的分布式控制器设计问题, 给出了相应的在线优化算法, 使系统通过动态估计计划表能够实现对移动目标的分组保护.

关键词: 多自主体系统, 分布式优化, 在线优化, 无线传感器网络, 源点定位, 分布式目标保护

Abstract

Due to the wide applications in various fields such as natural science, engineering technology, and social science, distributed optimization and control of multi-agent systems(MAS) have drawn increasing research attention in recent years. In this thesis, we mainly discuss the following three problems: distributed optimization algorithm(DOA) design of MAS, the applications of DOA to the source localization problem in wireless sensor network, and the applications of DOA to the leader escort problem. The main contributions of this thesis are summarized as follows:

1. Distributed optimization problem(DOP) is considered, where a group of agents cooperatively solve a global optimization problem with the objective function as the sum of privately known local objective functions of the agents. We investigate the DOAs design for three different types of DOPs, including distributed constrained optimization problem, the distributed online optimization problem for second-order MAS, and the DOP for high-order MAS. Since the exact gradient may be hard to obtain in practice, we propose an approximate gradient algorithm to solve the distributed constrained optimization problem. Instead of the assumption that each agent can get its exact gradient, we only use approximate gradient with some computation or measurement errors. The gradient accuracy conditions are presented to ensure the convergence of the approximate gradient algorithm. Moreover, most of the existing DOAs are designed for the first-order system without considering the agents' dynamics. Then we consider the DOP for MAS with agents in the form of double integrators. Based on the idea of integral feedback and subgradient method, we propose a continuous-time DPA and show its exponential convergence to the optimization solution. Moreover, we also investigate the distributed online optimization problem for the second-order MAS with some uncertainties. In addition, we extend the DOP for second-order system to the more general high-order system, and give the corresponding DPA design and its convergence analysis.

2. Distributed optimization for the source localization in the wireless sensor network is considered. Based on the received signal strength, we first formulate the source localization problem as a nonconvex nonlinear maximum likelihood estimation problem, and then transform it into the intersection computation of a group of sensing rings. In view of the two different cases about the ring intersection(empty or nonempty), we approximately convert this non-convex problem into two weighted convex optimization problems. We next propose a unified distributed alternating projection algorithm to solve the resulting DOPs, where sensor nodes can communicate only locally with their neighbors over a time-varying jointly-connected topology. We also show that the estimates of all the sensor nodes can achieve consensus on a possible minimizer. Both theoretical analysis and comparative simulations reveal that the proposed approach provides good estimation performance in the two cases.

3. Distributed optimization for the leader escort problem is considered. In this problem, the agent system needs to be divided into two groups to escort the moving target such that the agents in the same group achieve consensus and the agents in different groups keep the same bounded distance from the moving target but symmetric to it on its opposite sides. To solve this problem, we investigate the communication for MAS consisting of cooperation and antagonism relationship. We propose two distributed controls for two different escort schedules: known and unknown time-varying parameter rotation-schedule, respectively. The leader escort task can be achieved by the distributed protocols if the topology graph is fixed and connected or if it is switched and uniformly jointly connected.

Keywords: Multi-agent systems, distributed optimization, online optimization, wireless sensor network, source localization, distributed leader escort

本文的主要记号

\otimes	Kronecker 积
I_m	$m \times m$ 维单位矩阵
$\mathbb{R}^{n \times n}$	$n \times n$ 维实矩阵空间
$\mathbb{R}_{\geq 0}$	非负实数
$Re(x)$	复数 x 的实部
X^T	向量或矩阵 X 的转置
X^{-1}	矩阵 X 的逆矩阵
$P_K(x)$	x 到闭凸集 K 上的投影
$\ X\ $	向量或矩阵 X 的欧式范数
$ x _K$	x 到闭凸集 K 的距离
$(A)_{ij}$	矩阵 A 的第 i 行第 j 列元素
$\text{rank}(A)$	矩阵 A 的秩
$\lambda_{\min}(A)$	实对称矩阵 A 的最小特征根
$\lambda_{\max}(A)$	实对称矩阵 A 的最大特征根
$\min\{S\}$	集合 S 的最小值
$\max\{S\}$	集合 S 的最大值
$\text{diag}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$	对角元素依次为 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 的 $n \times n$ 维对角矩阵
$\partial f(x)$	函数 f 在 x 处的次梯度
$\nabla f(x)$	可微函数 f 在 x 处的梯度

目 录

摘要	i
Abstract	iii
本文的主要记号	v
目录	vii
第一章 引言	1
1.1 分布式优化的研究现状	3
1.1.1 分布式无约束优化	3
1.1.2 分布式约束优化	9
1.2 本文的结构和研究工作	13
第二章 基础知识	17
2.1 图论	17
2.2 随机矩阵	17
2.3 凸分析	18
2.3.1 凸集	18
2.3.2 凸函数	19
2.4 序列引理	20
2.5 Riccati 方程	20
第三章 多自主体系统的分布式优化	21
3.1 分布式受限约束优化的近似梯度算法	21
3.1.1 问题描述	21
3.1.2 近似梯度算法	23

3.1.3	主要结论	25
3.2	二阶多自主体系统的分布式优化设计	33
3.2.1	问题描述	34
3.2.2	分布式在线优化算法	35
3.2.3	主要结论	37
3.3	高阶多自主体系统的分布式优化设计	44
3.3.1	问题描述	44
3.3.2	算法设计	45
3.3.3	主要结论	46
3.4	小结	53
第四章	无线传感器网络的分布式定位	55
4.1	问题描述	55
4.1.1	传感器网络	55
4.1.2	源点定位	56
4.2	分布式算法设计	59
4.2.1	分布式交替投影算法	59
4.2.2	主要结论	60
4.3	数值仿真	68
4.4	小结	73
第五章	分布式目标保护	75
5.1	问题描述	76
5.2	主要结论	79
5.2.1	基于常参数 ERS 的保护控制设计	79
5.2.2	基于变参数 ERS 的保护控制设计	83
5.3	数值仿真	85
5.4	小结	87

第六章 工作总结与展望	89
6.1 全文总结	89
6.2 进一步工作展望	90
参考文献	93
发表文章目录	103
简历	105
致谢	107

插图

3.1	函数 h 在点 z 处带逼近角度 θ 的近似梯度.	23
3.2	近似梯度算法的收敛性.	33
3.3	无不确定性影响时算法(3.34)的收敛性.	43
3.4	不确定性影响为 $\delta_i(t) = \sin(\frac{\pi}{4} + t)$ 时算法(3.15)的收敛性.	43
4.1	(a) 相容; (b) 不相容.	58
4.2	不相容情形下的圆环.	69
4.3	DAPA 算法(左)和 DPA 算法(右)在不相容情形下的估计误差.	69
4.4	相容情形下的圆环.	70
4.5	DAPA 算法(左)和 DPA 算法(右)在相容情形下的估计误差.	70
4.6	RMSE 随信赖参数 ξ 的变化.	71
4.7	RMSE 随加权参数 b 的变化.	72
4.8	RMSE 随噪声标准差的变化比较: (a) 固定传感器配置下 5000 次仿真, (b) 8000 次随机的传感器配置仿真.	73
4.9	DAPA 算法在四种不同网络规模下的估计误差.	74
5.1	跟随者-领导者网络的通信拓扑图.	77
5.2	领导者保护问题.	79
5.3	跟随者的状态演化: (a) 常参数 ERS, (b) 变参数 ERS.	87

第一章 引言

大自然仿佛有一双神奇的大手,不停地变换着手中的幕布,让我们有欣赏不完的秀丽风光,让我们无限眷恋于它的神秘与深邃,还有那蕴育着无穷的真理和力量.许多的发明创造离不开大自然给予人类的灵感与启发,尤其是那些跟我们的生活息息相关的研究,比如电话、电脑、汽车、飞机等.当然,大自然的馈赠远远不止这些基于生物个体灵感的发明创造,很早以前人们就观察到自然界中的鱼群、蚁群、鸟群等通过简单的局部交流及合作来觅食和抵御侵略,进而产生比单个个体的行为更为有效和复杂的群体行为,并且能够实现单个个体所不能实现的目标.受到这些自然现象的启发,越来越多的学者们开始投入到群体行为的研究中,并试图将群体行为背后的思想应用于那些无法用单个个体解决的实际问题,例如:森林火灾控制、机器人搜救、传感器定位、区域的监控与侦查、队形控制等^[1-7].近三十年来,随着现代科学技术的深入发展,科技界涌现出很多关于群体行为的建模和仿真研究^[8-14],进而推动了多自主体系统(Multi-agent Systems)的研究与发展,吸引了越来越多的来自生物、物理、计算机、工程、社会科学等众多学科的研究人员投身到该领域^[4, 15-23],使得多自主体系统成为目前系统控制领域的研究热点.

虽说目前多自主体系统还没有统一的、严格的定义,但是,人们的共识为多自主体系统是由一群具有相互作用,相互影响的个体组成,且每个个体具有一定的感知、计算、通信和执行能力.这些个体可以是人、机器人、计算机程序、飞行器、生命组织和经济实体等.近年来,由于计算、通信、传感器、微电子等技术的快速发展,使用由机器人、飞行器等构成的多自主体系统来解决大规模复杂的实际问题变得可行,从而促使多自主体系统的协调控制成为当前系统控制领域的一个热点研究方向.相比于传统的控制系统,多自主体控制系统没有类似于中央处理器的部件来负责采集所有个体的信息,并进行集中的计算、分析和综合,最后再把相关信息传输给所有个体.在多自主体系统中,每个个体通过传感器或通信模块来获取自己邻居的信息,然后基于这些局部信息来决策自己的行为.多自主体控制系统之所以备受青睐,源于它具备以下的优点: (i) 高效性.多自主体系统的任务往往分解为多个子任务,而这些子任务由此系统中的个体(子系统)分别来完成,这样的分解方式提高了任务完成的速度从而提高效

率; (ii) 鲁棒性. 传统的控制系统中, 如果某一子系统不能工作, 可能导致整个系统崩溃而不能完成整个任务. 但在多自主体系统中, 由于任务被分解为多个子任务, 所以即使某一子系统不能工作, 整体任务仍有可能完成或即使不能完成, 其损坏造成的影响也不至于太大; (iii) 可移植性. 多自主体系统中的个体(系统)往往具有模块化功能, 具有自主的计算、执行和决策能力, 这使其具有很灵活的移植性.

优化与博弈是运筹学和控制论理论研究中的核心问题之一, 同时还在包括系统科学、人工智能、生物生态、压缩感知、计算机通讯等很多领域有着广泛的应用. 已有的优化与博弈算法大多是集中式的^[24, 25], 但是随着现代科学的发展, 在生物、物理、社会 and 工程等众多学科中出现了许多集中式算法无法解决的新问题, 比如如何有效处理大数据、进行云计算等. 另外, 通信和微电子技术也在迅猛发展, 为此提供了大量的高效、廉价且性能稳定的传感器、处理器以及各种执行器件, 这极大地支持和拓展了各种分布式算法的应用范围, 促进分布式优化的理论研究不断取得新的成果.

现在随着多自主体系统理论和协调控制技术的发展, 许多分布式优化算法可以通过借助多自主体网络的方式来实现^[26-29]. 从某种意义上说, 分布式技术与多自主体网络是一对孪生兄弟或者说是一个事物的两个不同的侧面: 分布式强调技术实现的方法而多自主体强调技术实现的主体. 对复杂大规模系统, 分布式方法比传统集中式方法更为灵活、操作起来更为方便, 这也使得分布式优化与控制的研究得到了迅速发展, 而且已被越来越多的工业和国防应用领域包括智能电网、传感器网络、社会网络、信息物理系统等所关注^[29-33]. 分布式优化理论和应用已经成为当代系统和控制科学的重要发展方向之一. 在优化理论研究过程中, 优化算法的提出、收敛性的证明、复杂性(包括分析复杂性和算术复杂性)的分析是其中几个关键性的研究问题. 在分布式优化中, 相应的问题正在吸引着来自诸多领域的科技工作者的巨大研究兴趣. 近年来相关的研究人员在分布式优化上已经取得了一系列重要成果(特别是对一些典型分布式算法收敛性等的分析), 并在不同科研领域中多种期刊和会议上发表^[26, 34-47].

本文研究多自主体系统的分布式优化与控制问题. 下面我们将首先介绍分布式优化的研究现状, 主要介绍与本文工作密切相关的几个方面, 然后介绍本文研究的主要工作.

1.1 分布式优化的研究现状

目前, 分布式优化有两大类研究问题: 一类是对性能指标函数的优化, 另一类是对系统动态过程的优化. 由于分布式优化刚刚兴起, 主要的突出理论研究成果还是属于第一类优化中. 在一些重要的现实问题中, 比如资源分配、传感器网络中的定位等, 每个个体有自己的代价函数, 且整个网络的代价由这些个体的代价函数和来表示. 此网络的目的是通过个体间的局部信息交流来实现对整个网络代价函数的优化. 另一类是对系统动态过程的优化, 此类分布式优化问题一般涉及到(随机)动态规划, 现在虽然存在一些研究, 但大多数结果还是初步的或者条件较强. 因此在本文中提到的分布式优化主要是指第一类的优化.

在优化理论发展过程中, 凸优化因其基本且分析相对简单一直引起广泛地关注, 而且很多实际的优化问题都可以转化或近似成凸优化问题来求解, 本文所提到的分布式优化主要是指分布式凸优化. 分布式优化的研究领域非常广, 近年来越来越多的优化算法由集中式发展延伸到分布式实现. 现有的分布式优化算法大体可以从以下几个不同的视角进行分类: (i) 从优化问题本身的受限条件而言, 可以分为分布式无约束优化和带约束优化两大类; (ii) 从优化算法更新执行的方式, 可以分为分布式离散时间优化算法和连续时间优化算法两大类; (iii) 从优化算法执行载体(多自主体系统)的自身动力学特性, 可以分为一阶和高阶多自主体系统的分布式优化两类; (iv) 根据代价函数是否是动态变化, 可以分为离线(off-line)和在线(on-line)分布式优化算法两大类. 当然除此之外还有其他的一些分类标准, 比如确定性和随机分布式优化等. 下面仅对近年来得到广泛研究, 且和本文工作密切相关的几类问题进行简单介绍和阐述.

1.1.1 分布式无约束优化

作为优化理论中最基本的问题, 无约束优化是分布式优化研究方向的出发点, 这几年越来越得到研究人员的重视. 一类得到广泛研究的分布式优化问题是整个网络的代价函数是所有个体代价函数的和函数^[34]:

$$\min_x f(x), \quad f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \quad (1.1)$$

其中 f_i 是个体 i 的代价函数, f 为整个网络的代价函数. 不同于集中式优化, 在这里作为个体 i 的代价(凸)函数, f_i 只能被个体 i 观测到. 此网络的目的地是设计

分布式算法使得个体之间通过局部的信息交流来协作实现问题(1.1)的全局优化.

在无约束优化问题中一个典型而简单的分布式优化问题是分布式凸交计算(Distributed convex intersection computation), 为此在下一子节中我们先讨论它. 对于该问题, 我们通常可以用梯度方法对它进行研究.

1.1.1.1 分布式凸交计算

近几年, 分布式凸交计算越来越得到研究人员的重视, 并在包括图像重构中原像的恢复、凸投射的最佳逼近和目标定位等实际问题中有大量的应用^[26, 29, 32, 47]. 如在目标定位问题中, 目标源以一定的功率发射某一信号, 网络中的多个传感器会接收到随着传输距离变大而衰减的带量测噪声的信号, 目标定位的目的是通过网络中传感器接收到的信号以找到目标源的位置. 对应于接收到的信号, 每个传感器都会计算产生一个球形凸区域. 当这些球具有非空交时, 目标定位问题可以转化为一个凸交计算问题^[29].

下面给出凸交计算问题的精确数学描述. 令 X_1, \dots, X_n 是 Hilbert 空间中的闭凸集, 其交集非空, 即 $x_0 \triangleq \bigcap_{i=1}^n X_i \neq \emptyset$. 凸交计算问题的目的是找到非空交集中的一个点 x^* ,

$$x^* \in \bigcap_{i=1}^n X_i. \quad (1.2)$$

在文献中得到广泛研究的求解凸交计算问题的方法是对于任意给定的初始点, 依次向这 n 个凸集做凸投射而生成一个循环投射估计序列, 进而考虑此估计序列的收敛性^[48]. 当所有的凸集 X_i 是闭子空间时, 文[49] 证明了此序列依范数收敛到其凸交 X_0 中的一个点, 且此收敛点是初始点到凸集 X_0 上的投射点. 文[50]从凸集的正则性角度出发, 充分讨论了此循环投射序列的收敛速率问题. 前面提到的文献讨论的都是集中式算法.

近几年来, 设计分布式算法求解凸交计算问题也得到广泛研究^[26, 47]. 分布式凸交计算问题的具体描述是: 考虑一个由 n 个个体组成的网络, 每个个体 i 仅能获取凸集合 X_i 的信息, 而不知道对应于其它个体的集合 $X_j, j \neq i$. 此网络的目的是通过个体之间的相互合作找到非空交集中的一个点. 文[35]首先给出如下的离散时间分布式投射同步算法:

$$x_i(k+1) = P_{X_i} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(k) x_j(k) \right), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.3)$$

其中 $x_i(k)$ 是个体 i 在时刻 k 的状态估计, $a_{ij}(k)$ 表示边 (j, i) 在时刻 k 的权重值, 并且 $P_{X_i}(y)$ 表示 y 到集合 X_i 的投影点. 并且文[35]证明了在双随机和一致联合强连通假设下, 该算法将同步收敛到 X_0 中的某一个点.

另外, 虽然大多数优化问题是从离散时间角度研究的, 但是用连续时间动力学研究优化的收敛性也是值得注意的一个方向. 文[26]研究了连续时间的非线性多智能体系统在最一般的 $[t, \infty)$ 联合连通拓扑假设下的优化趋同, 提出如下的连续时间分布式投射同步算法:

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)(x_j(t) - x_i(t)) + P_{X_i}(x_i(t)) - x_i(t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.4)$$

并且该文首次给出了在无向图时, $[t, \infty)$ 联合连通是该算法收敛的充分必要条件.

以上关于分布式凸交计算问题都是基于能够获得精确投射点, 然而在实际应用中, 投射点的计算都不可避免存在一定的误差, 实际得到的往往只是精确投射点的一个近似. 文[47]首先引入近似投影(approximate projection)的概念, 将点 v 投射到集合 K 带近似角度 θ 的近似投影集定义为下面集合:

$$P_K^a(v, \theta) = \begin{cases} C_K(v, \theta) \cap H_K^+(v), & \text{if } v \notin K \\ \{v\}, & \text{if } v \in K \end{cases} \quad (1.5)$$

其中 $C_K(v, \theta) = v + \{z | \langle z, P_K(v) - v \rangle \geq |z||v|_K \cos \theta\}$, $H_K^+(v) = \{z | \langle P_K(v) - z, P_K(v) - v \rangle \geq 0\}$. 在此基础上给出了如下的近似投影同步算法:

$$x_i(k+1) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(k) P_j^a(k), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.6)$$

这里 $P_j^a(k) \in P_{X_i}^a(x_i(k), \theta_{ik})$ 是状态 $x_i(k)$ 向凸集 X_i 带近似角度 θ_{ik} 的近似投影. 与文[35]提出的算法相比, 上述的近似投影算法在不要求邻接矩阵的双随机性情情形下给出了系统达到全局最优同步关于近似投影程度的鲁棒性条件.

上面所提到的都是基于投影算子的一些确定性分布式优化算法, 而具有随机性的算法也得到广泛研究. 考虑到在现实的机器网络中, 每个机器人携带的能量有限且代价高, 文[51]从节省能量的角度提出一种随机休眠算法来计算凸交问题. 其算法的主要思想是个体在对非空交集集中的点进行估计时, 所有的个体独立

地以一定的概率 p 向自己的集合做凸投射, 以概率 $1 - p$ 保持上一步的状态不变, 具体算法如下:

$$\begin{aligned} x_i(k+1) &= \sum_{j=1}^n a_{ij}(k)y_j(k), \\ d_j(k) &= P_{X_j}(x_j(k)) - x_j(k), \\ y_j(k) &= \begin{cases} x_j(k) + \alpha_k d_j(k), & \text{以概率 } p; \\ x_j(k), & \text{以概率 } 1 - p. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.7)$$

然后他们给出了所有个体几乎处处渐进收敛到非空集合中某一个点的充分条件.

上面谈到的凸交问题主要强调计算, 所以其中的多自主体是虚拟的进程, 因而其动力学取成最简单的形式. 实际上, 实现分布式凸交过程的自主体还可以具有复杂的物理动态模型. 比如文[29]讨论了一群机器人如何合作解决凸交优化问题, 每个机器人作为自主体只知道自己的对目标的感知区域(通常被描述成一个凸集), 而它们的目的是找到它们感知集合中的目标. 为此, 该文研究了在固定和切换拓扑下这些机器人如何寻找寻找凸交并且避开碰撞, 并且能抵抗一定的不确定性因素的影响.

上面讨论的是一个特殊的优化问题, 下面我们将开始考虑一般的分布式凸优化问题, 它们有着更为广泛或潜在的实际应用背景. 现有文献中, 对于求解一般的无约束问题(1.1)的分布式优化算法大致可以分为两类: 基于次梯度(sub-gradient)和非次梯度的方法.

1.1.1.2 次梯度方法

由于基于次梯度的分布式优化算法形式简单容易执行, 受到很多研究者的关注, 并在此基础上衍生和发展出很多性能更好的变形算法. 次梯度算法最早是由 Nedić 和 Ozdaglar 在 2009 年提出^[34], 其离散时间的算法形式如下:

$$x_i(k+1) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(k)x_j(k) - \alpha d_i(k), \quad i = 1, \dots, n,$$

这里 α 是常步长, $d_i(k) \in \partial f_i(x_i(k))$ 是 f_i 在 $x_i(k)$ 处的次梯度. 然后在权重平衡图和次梯度有界的假设下, 该文给出了系统达到和代价函数最优值逼近的一个估计. 对于此类基于次梯度的常步长算法往往是不能保证算法的收敛性, 或者说

即使能够保证收敛性但不能保证一定能收敛到最优解集上. 为了保证算法收敛的最优性, 步长渐进收敛到 0 的条件是必要的, 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$; 但是该条件又会带来收敛速度慢的弊端, 为了克服这个缺点, 文[52]提出下面一种基于连续时间的动态系统优化算法来解决问题(1.1):

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)(x_j(t) - x_i(t)) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)(y_j(t) - y_i(t)) - d_i(t), \\ \dot{y}_i(t) &= \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)(x_i(t) - x_j(t)),\end{aligned}$$

其中 $d_i(t) \in \partial f_i(x_i(t))$. 并且证明了上述算法在固定拓扑和连通性假设下渐进同步收敛到问题(1.1)的最优解.

随着分布式优化的深入发展, 近些年来, 涌现出很多基于以上这两种不同形式的次梯度方法的改进算法和研究成果. 文[42] 提出一种基于量化信息的分布式优化算法, 采用了编码解码器和量化器尺度变化的技术, 通过编码解码去除每个个体与其邻居个体之间交换信息的误差以实现算法的收敛性, 而且利用尺度变换得到精确的最优解, 同时还研究了多少比特能保证实现优化的目的. 在一些现实问题中, 比如从社会观点动力学的角度而言, 个体在做决策时往往会相互独立地以一定的概率坚持自己的观点, 以一定概率会受到邻居个体观点的影响. 文[38]受此启发提出一种随机优化算法来求解优化问题(1.1):

$$x_i(k+1) = \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}(k)x_j(k), & \text{以概率 } p \\ P_{X_i}(x_i(k)), & \text{以概率 } 1-p \end{cases} \quad (1.8)$$

其中 X_i 是局部目标函数 f_i 的最优解集, 其信息只能被个体 i 所得到. 然后给出了算法几乎处处渐进同步收敛到问题(1.1)最优解的充分条件, 并且给出数值试验验证了在一定条件下, 差不多 5% 算例中随机算法的收敛效果比确定性的还要好. 除此之外, 文[53]利用了次梯度和一致性算法来解决固定无向拓扑下多自主体的解耦优化问题; 增量次梯度法^[43], 以及包括信息交换过程中存在量测噪声和计算次梯度带来的误差^[40], 切换拓扑是独立同分布的随机过程^[54]等优化问题也得到广泛研究与发展.

1.1.1.3 非传统梯度方法

对于一般基于次梯度的分布式优化算法, 其收敛速度只能达到 $O(1/\sqrt{k})$. 为了提高优化问题的分布式求解速度, 近几年也涌现了一些更为高效但是形

式也更为复杂的分布式优化算法. 这些算法大都可以看成是次梯度算法的变形与改良, 主要分为两大类, 一类是基于优化项的改进, 如分布式牛顿法^[55, 56]; 另一类是基于同步项的改进, 如分布式快速梯度算法^[57]、分布式 push-sum 算法^[58, 59]等. 其中分布式快速梯度算法主要是通过对同步项的加速来提高算法的收敛速度, 其具体形式如下:

$$\begin{aligned} x_i(k) &= \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j(k-1) - \alpha_{k-1} \nabla f_i(y_i(k-1)) \\ y_i(k) &= x_i(k) + \beta_{k-1} (x_i(k) - x_i(k-1)), \end{aligned} \quad (1.9)$$

文[57]证明了当目标函数满足一定的光滑性条件并且邻接矩阵的谱半径全局已知时, 该算法的收敛速度能够达到 $O(1/k^2)$.

另外, 还有很多分布式优化问题可以用非基于梯度的算法来解决. 其中之一是现在比较常用的基于原始对偶思想的交替方向乘子法(alternating direction method of multipliers), 简称 ADMM 法. 标准 ADMM 算法的主要思想就是将原来的优化问题分解成两个子问题, 序列的求解它们并更新相应的对偶变量, 但其主要缺点在于分解后的两个子问题不能完全分布式求解, 因为对偶变量的更新需要全局状态信息, 这样的话就必须得有一个中心来负责. 为了克服这个缺点, 针对优化问题(1.1), 文[36]提出一种分布式 ADMM 法. 系统连接图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 中的每一条边 $e_{ij} \in \mathcal{E}$ 对应一个对偶变量 λ_{ij} , 而对于个体 i 除了要负责更新自己的状态 x_i 外, 还要负责一些对偶变量更新, 然后根据事先给定的次序, 个体依次进行更新, 算法具体执行如下:

$$\begin{aligned} x_i(k) &= \arg \min_x \frac{\beta}{2} \sum_{j \in P(i)} \|x_j(k+1) - x - \frac{1}{\beta} \lambda_{ji}(k)\|^2 \\ &\quad + f_i(x) + \frac{\beta}{2} \sum_{j \in S(i)} \|x - x_j(k) - \frac{1}{\beta} \lambda_{ij}(k)\|^2 \\ \lambda_{ri}(k+1) &= \lambda_{ri}(k) - \beta(x_r(k+1) - x_i(k+1)), \end{aligned} \quad (1.10)$$

其中常数 $\beta > 0$, $r \in P(i)$, 且 $P(i) = \{j | e_{ji} \in \mathcal{E}, j < i\}$, $S(i) = \{j | e_{ij} \in \mathcal{E}, i < j\}$. ADMM 法较之一般的次梯度算法, 优势在于其收敛速度有很大的提高, 能够达到 $O(1/k)$, 但是其不足在于需要提前规定好个体进行状态更新的次序. 除此之外, 还有其他一些非梯度算法也在文献中出现, 比如逐对补偿算法^[60, 61], 增广 Lagrange 算法^[62]等.

从上面的分析可以看出, 次梯度方法相比于其他优化方法的优势在于其算法形式简单且对于代价函数的要求低(一般只需满足凸性即可), 对于一般的凸优化问题都适用, 其不足在于对步长渐进收敛到 0 的要求导致了收敛速度慢的弊端. 而对于一般的非传统梯度方法, 其出发点大都是从提高算法收敛速度的角度, 但往往可能会伴随着算法形式的复杂化、维数的增加, 代价函数光滑性的高要求, 或者要提前已知个体间通信拓扑图的一些信息, 这就使得非传统梯度方法具有一定的局限性, 它们所适用的优化问题较之次梯度方法更为特定一些. 如, ADMM 算法的维数会随着网络边的增加而增加, 由此导致在解决大规模非稀疏的网络优化问题时, 其对计算机的存储能力要求加大.

1.1.2 分布式约束优化

现实中的很多优化问题是带有约束的, 其约束形式包括受限集、等式及不等式约束^[35, 41]. 同样, 在解决分布式优化问题中, 我们也会碰到类似约束问题, 其一般形式如下所示:

$$\begin{aligned} \min_x f(x), \quad f(x) &= \sum_{i=1}^n f_i(x) \\ \text{s.t. } x &\in X_0, \\ g(x) &< 0, \\ h(x) &= 0, \end{aligned} \tag{1.11}$$

其中代价函数 f_i 只能被个体 i 观测到, 而约束条件可以是全局共享也可以是局部已知, 这取决于所求的具体问题. 在现有的分布式带约束优化算法中, 主要涉及两种类型的约束. 一类是优化问题中不得不考虑的外在给定约束, 另一类是优化问题中自身隐含的约束. 前一类约束我们不得不去处理, 不好处理时想办法取代或逼近这些约束条件. 而后一类约束是所研究的优化问题中必须满足的, 我们有时可以主动加入这些辅助约束以提高算法的效率.

1.1.2.1 给定约束

一般的带受限集的约束优化问题如下:

$$\begin{aligned} \min_x f(x), \quad f(x) &= \sum_{i=1}^n f_i(x) \\ \text{s.t. } x &\in \bigcap_{i=1}^n X_i, \end{aligned} \quad (1.12)$$

其中代价函数 f_i 和约束集 X_i 只能被个体 i 观测到. 对于求解这类问题, 文[35]提出下面的分布式投影次梯度算法:

$$x_i(k+1) = P_{X_i} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(k)x_j(k) - \alpha d_i(k) \right), \quad i = 1, \dots, n \quad (1.13)$$

其中 $d_i(k) \in \partial f_i(\sum_{j=1}^n a_{ij}(k)x_j(k))$. 但是只给出了在两种特殊情形下, 所有个体渐进同步收敛到问题(1.12)最优解的充分条件: (a) 系统连接图是完全连通图; (b) 所有个体的受限集都相同, 即 $X_i = X_j, \forall i, j$. 情形(b) 相当于约束集信息是全局共享, 还没有将约束集做到完全的分布式. 之后文[63]将上面结果推广到更一般的情形, 即各个受限集不同且连接图是一致联合强连通. 基于对偶理论的思想, 文[41]考虑了带等式和不等式约束的受限优化问题, 并且提出了一种分布式原始对偶次梯度算法(distributed prime-dual subgradient algorithm). 实际上, 文[41, 63]并没有在理论上给出严谨的数学证明, 关于离散时间的基于次梯度的受限优化算法仍然存在很多未解的问题, 虽然 Lee 和 Nedić 之后在文[64]中基于一定的随机假设, 给出其在随机意义下的收敛性证明.

1.1.2.2 辅助约束

这种辅助约束方法是将一些“显然”的知识加到算法中去以提高算法的效率, 研究该类问题的文献资料相对比较新.

其中一类是加入图(同步)的条件: 回顾上面提到的分布式 ADMM 法^[36], 针对连接图中的每条边 $e_{ij} \in \mathcal{E}$ 都相应的引入一个约束条件 $x_i = x_j$, 使得原无约束问题(1.1)等价于下面带约束问题:

$$\begin{aligned} \min \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \\ \text{s.t. } x_i = x_j, \quad \forall e_{ij} \in \mathcal{E}. \end{aligned}$$

注意到此类约束条件具有一定的解耦性, 才使得对偶变量的更新能够分布式进行. 不同于文[36], 文[65]从 Laplace 矩阵角度, 引入同步约束条件 $Lx = 0$. 因为当系统连接图是固定强连通时, 条件 $Lx = 0$ 与 $x_i = x_j, i, j \in \{1, \dots, n\}$ 是等价的, 所以无约束问题(1.1)等价于下面带约束问题:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \\ \text{s.t.} \quad & Lx = 0, \end{aligned} \quad (1.14)$$

其中 $x = (x_1^T, \dots, x_n^T)^T$. 然后用类似文[52]提出的用动态系统求解优化问题的思想. 在讨论有向图时, 文[65] 给出了下面连续时间优化算法:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\alpha Lx - Lz - \nabla \tilde{f}(x) \\ \dot{z} = Lx \end{cases} \quad (1.15)$$

其中 $z = (z_1^T, \dots, z_n^T)^T$, $\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i)$, $\alpha > 0$ 是控制参数. 他们证明了当系统连接图是双随机强连通且 α 满足一定条件时, 算法(1.15)将收敛到问题(1.14)的一个最优解. 对于这类加入有关图信息约束的算法在分布式研究中还是有一定的局限性, 因为它不能直接处理切换图的情况.

另一类利用了最优点的零梯度和性质. 对于无约束问题(1.1)而言, 其最优解 x^* 满足零梯度和性质, 即 $\sum_{i=1}^N \nabla f_i(x^*) = 0$. 文[39] 将零梯度和条件作为约束引入到问题中, 提出一种 gossip 算法, 并且在算法中一直保持该约束条件成立, 即将算法的更新限制在零梯度和构成的流形上. 其算法的大体思想是在第 k 步迭代时任选一对个体 (i, j) 进行通信进而更新各自的状态, 而对于其他没被选中的个体其状态保持不变. 个体 (i, j) 在更新状态时必须满足梯度和为零的性质不变, 即

$$\begin{cases} \nabla f_i(x_i(k)) + \nabla f_j(x_j(k)) = \nabla f_i(x_i(k+1)) + \nabla f_j(x_j(k+1)), \\ x_s(k+1) = x_s(k), \forall s \notin \{i, j\}. \end{cases}$$

定义图 $G_\infty = (V, E_\infty)$, 如果一对个体 (i, j) 被无限次重复选取进行通信, 则令其边 $e_{ij} \in E_\infty$. 文[39]给出当图 G_∞ 是连通图时, 上述的 gossip 算法同步收敛到无约束问题(1.1)的一个最优解.

虽说目前关于分布式带约束优化的研究已经取得某些突破与成果, 但是总体上还处于发展阶段, 其理论研究往往局限于约束集和目标函数的凸性假设条

件下. 对于一般的非凸优化问题, 现有的工作大都是进行凸放松或者凸近似, 将其转化为凸优化问题来求解以避免非凸带来的问题求解难度, 由此使得如何选择一种有效的凸近似方法变得尤其重要. 其次, 对于上面两小节介绍的一些分布式的优化算法来求解约束问题时, 大多数算法只能给出收敛性保证, 收敛速率的估计还不能得到. 总的来说分布式带约束优化的研究还有很多的问题亟需解决.

1.1.2.3 分布式博弈

分布式优化是指通过个体间局部信息的交流而达到全局最优, 一般情形下这里所有的个体具有共同的利益目标, 个体间表现出的是合作关系. 但在许多现实问题中, 个体间表现的不止是合作关系, 有时还有对抗关系, 即个体间的目标利益不一致, 如通讯网络中的功率分配^[66]、社会网络中的观点动力学演化^[33]等问题. 在对抗网络中, 很多优化问题常常可以在博弈论的框架下进行建模和分析. 近年来得到广泛研究的是如何设计分布式算法使得网络中互相对抗的个体渐近达到对抗优化问题的最优值, 此最优值通常为博弈的 Nash 均衡点.

非合作博弈理论已经被广泛用来描述各种网络中利己个体的决策行为^[67]. 且这类博弈理论在许多领域中都有现实应用, 比如追踪逃逸问题^[68]、各种经济与管理科学问题^[69]、智能电网自律调度^[70]等. 文[71]对如何设计博弈策略求解分布式优化问题进行了充分讨论. 事实上, 许多的理论问题, 如分布式带约束优化、最大最小优化、鞍点计算等问题都可以转化为“分布式博弈”(Distributed Game)问题. 近年来, 该类问题得到了广泛关注, 即在博弈中, 个体仅基于自己邻居个体的信息进行决策^[33, 72-75]. 文[75]提出了一个基于非模型的方法求解非合作博弈的 Nash 均衡点问题. 文[72]提出了一个基于两个子网络的对抗和连续时间动力学的寻求 Nash 均衡点的算法, 他们的结果主要是对固定权重平衡图得出的. 随后[33]提出一个在切换拓扑下寻求 Nash 均衡点的离散算法, 并且对权重非平衡图也进行了研究. 在随机测量噪声下, 文[73]提出了一个 Nash 均衡点计算问题的分布式算法, 得到了算法的几乎处处收敛性, 并对其结果在机器人网络中的队形控制、覆盖控制等问题中的应用进行了讨论.

现有的文献中, 大多数的分布式优化算法都是离散时间情形下的. 近年来, 随着多自主体系统控制理论知识的发展与完善, 推动了利用控制理论的优势将控制方法与分布式优化进行密切结合研究的新问题的发展. 文[76]就将分布式优化与 PI 控制设计相结合提出一种连续时间的比例积分分布式优化算法, 并基于 Lyapunov 稳定性理论得到算法收敛性分析. 除此之外, 文[46]和[65]也从类似的

角度出发, 在充分采用 Lyapunov 方法的基础上提出了不同的设计分布式优化算法的新思路. 当然在控制与优化的有效结合方面仍然还有许多问题需要探索和认识, 现有的绝大多数分布式优化算法还只是停留在算法设计的层面, 而没有过多的考虑多自主体的动力学特性, 如何有效地将分布式优化算法嵌入到实体的物理系统中的问题还亟待解决.

1.2 本文的结构和研究工作

本文首先在第二章详细介绍后续章节所需要的基本概念和基本结论, 内容涉及部分图论、凸分析、随机矩阵、序列分析和 Riccati 方程的内容. 然后在第三章到第五章详细介绍本文的研究工作: 多自主体系统的分布式优化及其在传感器定位、目标保护问题中的应用. 本文的三部分工作密切相关, 都与多自主体系统和分布式优化有关, 设计的控制器或算法都是分布式的且都能实现在某一指标函数意义下最优. 第一部分是关于分布式优化算法设计的理论分析和研究, 第二和第三部分主要涉及以实际应用问题为背景的分布式优化的建模分析和算法设计. 下面详细介绍本文的工作.

第三章 多自主体系统的分布式优化

本章研究了三个分布式优化问题.

首先针对现实中由于某些计算或量测误差的存在而使精确梯度难以获取的事实, 本文提出了一个分布式近似梯度算法求解一般的带约束优化问题. 文中首先给出了近似梯度的定义, 然后基于此定义以及对偶理论给出了一个近似梯度算法. 一个近似梯度的逼近程度可以由投射精度和逼近误差角度来刻画. 基于这两个逼近投射量, 给出了所有个体渐近同步收敛到优化问题最优解的充分条件以及严格的收敛性证明.

其次, 在大部分分布式优化的文献中, 其算法设计所依托的多自主体系统通常都是一阶的, 并没有考虑到每个自主体本身的动力学特性, 没有很好地将算法设计与实体物理系统有效地结合起来. 针对这一现状, 本文考虑了二阶多自主体系统的分布式优化设计问题, 首先基于积分反馈和次梯度算法的思想, 提出一种连续时间的分布式优化算法. 其算法的主要思想就是利用积分反馈通过增加一个辅助变量来抵消各个个体的局部代价函数的梯度不同所引起的误差. 然后基于 Lyapunov 稳定性理论分析, 证明了该算法的指数收敛性并得到其收敛速率. 同时还考虑了当系统中存在不确定性时, 如何设计相应的抗干扰算法来处理

代价函数动态变化的情形. 这里有关代价函数动态变化的情形就是常见的分布式在线优化问题, 目前在公开文献中尚未见到关于高阶的多自主体系统的在线优化分析.

最后我们将上面的内容推广到高阶多自主体系统, 并给出相应的分布式算法设计及其收敛性分析.

第四章 无线传感器网路的分布式定位

本章主要研究了分布式优化在无线传感器网络的源点定位问题中的实际应用. 首先基于信号接收强度的量测方法, 将源点定位问题转化为一个求解极大似然估计的非凸非线性优化问题, 稍后经过一定的放松将此问题进一步近似转化为求解一系列非凸圆环的交集计算问题. 由于源点只是以一定的概率位于这些非凸圆环中, 这就会导致两种不同情形出现: 相容(即所有圆环的交集非空)和不相容(所有圆环的交集为空集). 本文针对这两种不同的情形, 分别给出相应的凸近似的分布式优化建模, 并且给出一种统一的分布式优化算法, 而不需要提前获知问题属于哪种情形. 不同于一般集中式或者分散式的定位算法, 本文所提算法是完全分布式, 不需要一个统一的融合中心进行信息的采纳、计算和通信. 此外, 传感器间的通信拓扑图是有向时变且一致联合强连通, 在此通信条件下本文分别给出了该定位算法在相容和不相容这两种情形下的收敛性证明. 最后, 通过大量的仿真实验证实, 该定位算法较之现有的分布式凸交定位算法以及一些现有的集中式或分散式的算法, 如网格搜索法、线性锥规划等, 在估计精度和计算速度上都有很好的提升.

第五章 分布式目标保护

本章研究了分布式目标保护问题, 不同于一般的多自主体协作控制的研究, 本文在考虑个体之间相互协作的同时通过引入适当的竞争(对抗)模式, 进而实现了多自主体对某一动态目标的分组保护, 即同组的个体状态实现同步, 不同组的个体对称分布在被保护者周围. 针对给定的保护计划表, 通过对每个个体设计分布式降阶观测器来预估移动目标的不可量测的状态, 进而给出一种基于邻居信息的反馈控制器设计策略, 并且分别证明了当通信拓扑是有向固定的连通图和无向时变的一致联合强连通图时, 该多自主体系统都能够实现对移动目标的分组保护任务. 此外, 本文还研究了当计划表存在变动或者噪声影响时如何设计相应的分布式控制器, 并且给出相应的收敛性分析. 最后, 通过仿真实验验证了本章提出的两种控制算法都能使得多自主体系统以指数速率完成保护移动目标

的任务.

第二章 基础知识

本章主要介绍本文后续章节所需要的基本概念和基本结论. 内容涉及图论^[77]、凸分析^[25, 78, 79]、随机矩阵^[80]、序列分析和 Riccati 方程^[81, 82].

2.1 图论

多自主体系统各自主体之间的连接关系可以用一个有向图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 来表示, 其中 $\mathcal{V} = \{1, \dots, n\}$ 是节点集合, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 是所有的弧(边)集合. 在这里, 每一个自主体对应于 \mathcal{V} 中的一个节点, 弧 $(j, i) \in \mathcal{E}$ 表示节点 i 可以接收到节点 j 的信息, 并称 j 是 i 的邻居节点. 用 $\mathcal{N}_i = \{j \in \mathcal{V} | (j, i) \in \mathcal{E}\}$ 表示节点 i 的所有邻居节点集合. 另外, 存在一个非负邻接矩阵 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 与图 \mathcal{G} 对应, 其中 $a_{ij} > 0$ 当且仅当 $(j, i) \in \mathcal{E}$, 称 a_{ij} 为弧 (j, i) 的权重.

称由节点和弧组成的首尾相接的序列 $i_1 e_1 i_2 e_2 \dots i_{p-1} e_{p-1} i_p$ 为从节点 i 到节点 j 的一条有向路径(通常简称路径), 其中 $e_r = (i_r, i_{r+1}) \in \mathcal{E}$, $r = 1, \dots, p-1$, $i_1 = i, i_p = j$. 此路径有时也用依次相连的节点序列 i_1, \dots, i_{p-1}, i_p 来表示. 如果图 \mathcal{G} 中任意的一对节点 i, j , 都存在从 i 到 j 的一条路径, 则称 \mathcal{G} 是强联通的. 如果对任意的一对节点 i, j , 都有 $(i, j) \in \mathcal{E}$, 则称 \mathcal{G} 为完全图. 如果对所有的 $(i, j) \in \mathcal{E}$, 均有 $a_{ij} = a_{ji}$, 则称图 \mathcal{G} 是无向图. 如果对所有的 i, j , $(i, j) \in \mathcal{E}$ 当且仅当 $(j, i) \in \mathcal{E}$, 则称有向图 \mathcal{G} 是双向图. 注意无向图一定是双向图, 但双向图未必是无向图, 因为在双向图中, 弧 (i, j) 权重 a_{ji} 和弧 (j, i) 权重 a_{ij} 未必相等.

如果一个矩阵的所有主对角元是非负数, 所有非主对角元是非正数, 且其每一个行向量的和为零, 则称此矩阵是一个 Laplace 矩阵. 图 \mathcal{G} 的 Laplace 矩阵 $L = (l_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 定义为:

$$l_{ij} = \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} & \text{如果 } i = j, \\ -a_{ij} & \text{否则} \end{cases}$$

易知 Laplace 矩阵 L 有一个特征值为零, 且相应的特征向量是 $\mathbf{1}$.

2.2 随机矩阵

在研究多自主体系统的同步、优化等问题中, 设计的离散型算法的系统矩

阵往往是随机矩阵. 如果一个向量的所有分量都是非负的, 且所有分量的和是1, 则称此向量为随机向量. 如果一个矩阵的所有行向量均为随机向量, 则称此矩阵为随机矩阵. 如果一个随机矩阵的转置也是随机矩阵, 则称此随机矩阵为双随机矩阵.

令 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是一个随机矩阵. 定义基于 A 的有向图为 $\mathcal{G}_A = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}_A\}$: 其中 $\mathcal{V} = \{1, \dots, n\}$, $(j, i) \in \mathcal{E}_A$ 当且仅当 $a_{ij} > 0$, 且图 \mathcal{G}_A 的邻接矩阵是 A . 在研究时变拓扑多自主体系统时, 往往要涉及随机矩阵序列 $A(k)$, $k \geq 0$, 其中 $A(k) = (a_{ij}(k)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. 定义对应于此随机矩阵序列的有向图序列 $\mathcal{G}(k)$, $k \geq 0$, 其中 $\mathcal{G}(k) = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}_{A(k)}\}$.

定义转移矩阵如下: 对所有的 $k \geq s$,

$$\Phi(k, s) = A(k) \cdots A(s+1)A(s).$$

下面的引理给出了转移矩阵元素的上界估计^[34].

引理 2.1. 如果存在 $0 < \eta < 1$ 使得对所有的 i, j, k , $a_{ij}(k) \in \{0\} \cup [\eta, 1]$, 且存在正整数 T 使得对所有的 $k \geq 0$, 图 $\mathcal{G}([k, k+T])$ 是强联通的, 则对所有的 i, j, s 和 $k \geq s + (n-1)T - 1$, 有

$$\left| [\Phi(k, s)]_{ij} - \frac{1}{n} \right| \leq \lambda \gamma^{k-s}$$

其中 $\mathcal{G}([k, k+T])$ 表示具有节点集 \mathcal{V} 和弧集 $\bigcup_{k \leq s < k+T} \mathcal{E}_{A(s)}$ 的并图, $[\Phi(k, s)]_{ij}$ 表示转移矩阵第 (i, j) 元素, $\lambda = 2(1 + \eta^{(1-n)T})/(1 - \eta^{(n-1)T})$ 且 $\gamma = (1 - \eta^{(n-1)T})^{1/((n-1)T)}$.

2.3 凸分析

2.3.1 凸集

设集合 K 是 \mathbb{R}^m 中的一个集合. 如果对任意的 $x, y \in K$ 和 $0 < \lambda < 1$, 均有 $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$, 则称 K 为凸集. 称由集合 K_1, \dots, K_n 中所有元素的有限凸组合组成的集合为由集合 K_1, \dots, K_n 生成的凸包, 记为 $\text{co}\{K_1, \dots, K_n\}$. 令 K 是 \mathbb{R}^m 中的一个闭凸集, 对任意的 $x \in \mathbb{R}^m$, 我们总可以找到 K 中的唯一元素 $P_K(x)$ 使得 $|x - P_K(x)| = \inf_{y \in K} |x - y|$ 成立, 其中称 P_K 为到闭凸集 K 的凸投射算子. 下面列出几个与凸投射有关的不等式^[35, 78, 83, 84].

引理 2.2. 令 K 是 \mathbb{R}^m 中的一个闭凸集. 则

- (i) $|P_K(x) - P_K(y)| \leq |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}^m;$
- (ii) $||x|_K - |y|_K| \leq |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}^m;$
- (iii) $|P_K(x) - y| \leq |x - y|, \forall x \in \mathbb{R}^m, \forall y \in K;$
- (iv) $\|P_K(x) - y\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|P_K(x) - x\|^2, \forall y \in K, \forall x \in \mathbb{R}^m.$

2.3.2 凸函数

令 $f(\cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ 为一个实函数, 如果对任意的 $x, y \in \mathbb{R}^m$ 和 $0 < \lambda < 1$, 均有 $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$, 则称 f 为凸函数. 如果进一步还有 $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ 当且仅当 $x = y$, 则称 f 为严格凸函数. 如果 $-f$ 是(严格)凸函数, 称 f 为(严格)凹函数. 如果对任意的 $x, y \in \mathbb{R}^m$ 和 $\omega_i > 0$, 有

$$(x - y)^T (\nabla f(x) - \nabla f(y)) \geq \omega_i \|x - y\|^2,$$

则称 f 为 ω_i -强凸函数.

引理 2.3. ^[25, 84] 令 K 是 \mathbb{R}^m 中的一个闭凸集, 则

- (i) $f(z) = |z|_K$ 是一个凸函数;
- (ii) $|x|_K^2$ 是连续可微的, 且 $\nabla |x|_K^2 = 2(x - P_K(x))$.

令 $f(\cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个凸函数. 如果 $v(\hat{x}) \in \mathbb{R}^m$ 满足

$$f(x) \geq f(\hat{x}) + \langle x - \hat{x}, v(\hat{x}) \rangle, \forall x,$$

则称 $v(\hat{x})$ 为 f 在点 \hat{x} 处的一个次梯度. 将 f 在点 \hat{x} 的所有次梯度集合记为 $\partial\varphi(\hat{z})$, 并称其为 f 在点 \hat{x} 处的次微分. 点 \hat{z} 是凸函数 f 的全局最小点当且仅当 $0 \in \partial f(\hat{z})$. 如果 f 在点 \hat{x} 是可微的, 则 $\partial f(\hat{x}) = \nabla f(\hat{x})$.

令 $\phi(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个实函数. 如果它可以写为 $\phi(x, y) = \phi_1(x) + \phi_2(y)$, 则称 ϕ 是叠加可分的. 如果 ϕ 对于第一个变量是凸函数, 对于第二个变量是凹函数, 则称 ϕ 是一个凸凹函数. 对于给定的点对 (\hat{x}, \hat{y}) , $\partial_x \phi(\hat{x}, \hat{y})$ 表示凸函数 $\phi(\cdot, \hat{y})$ 在 \hat{x} 处的次微分, $\partial_y \phi(\hat{x}, \hat{y})$ 表示凹函数 $\phi(\hat{x}, \cdot)$ 在 \hat{y} 处的次微分. 令 $X_1 \subseteq \mathbb{R}^{m_1}$, $X_2 \subseteq \mathbb{R}^{m_2}$ 是两个闭凸集, 如果点 $(x_1^*, x_2^*) \in X_1 \times X_2$ 满足

$$\mathcal{L}(x_1^*, x_2) \leq \mathcal{L}(x_1^*, x_2^*) \leq \mathcal{L}(x_1, x_2^*), \forall x_1 \in X_1, \forall x_2 \in X_2,$$

则称 (x_1^*, x_2^*) 为 \mathcal{L} 在 $X_1 \times X_2$ 上的鞍点.

2.4 序列引理

下面列出几个有关序列的引理^[35, 78].

引理 2.4. 令 $\{a_k\}$ 是一个非负序列, 其中 $0 \leq a_k < 1, \forall k$, 则 $\prod_{k=0}^{\infty} (1 - a_k) = 0$ 当且仅当 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$.

引理 2.5. 令 $\{a_k\}, \{b_k\}$ 和 $\{c_k\}$ 是三个非负序列. 如果 $\sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$, 且

$$a_{k+1} \leq a_k + b_k - c_k, \forall k$$

则极限 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k$ 是一个有限数.

引理 2.6. 令 $0 < \lambda < 1, \{a_k\}$ 是一个正序列. 如果 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$, 则

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^k \lambda^{k-r} a_r < \infty.$$

2.5 Riccati 方程

考虑线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^r$ 和 $y \in \mathbb{R}^m$ 分别为状态变量, 控制变量和输出向量, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ 和 $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 分别为常数矩阵.

如果存在矩阵 $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$, 使得 $A + GC$ 的特征根全在左半开平面内, 那么称 (A, C) 是能检测的. 并且可以得到如下熟知的引理^[82]:

引理 2.7. 设 (A, C) 能检测, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为对称正定矩阵, 则代数 Riccati 方程

$$PA^T + AP - PC^T C P + Q = 0 \quad (2.2)$$

关于 P 具有唯一正定解, 且该解使得矩阵 $A^T - C^T C P$ 为稳定矩阵, 即它的特征根全在左半开平面内.

引理 2.8. 设 (A, C) 能检测, P 是代数 Riccati 方程(2.2)的正定解, 则对任意的 $\sigma \geq 1$ 及 $\omega \in \mathbb{R}$, 矩阵 $A^T - (\sigma + j\omega)C^T C P(j^2 = -1)$ 的特征根全在左半开平面内.

第三章 多自主体系统的分布式优化

本章研究了三类不同的分布式优化问题: 分布式受限约束优化、二阶系统分布式在线优化和高阶系统的分布式优化. 并分别提出相应的分布式优化算法, 同时给出其收敛性分析和证明.

3.1 分布式受限约束优化的近似梯度算法

本节考察受限的分布式优化问题. 注意到在求解一般优化问题时经常使用到梯度信息, 而现实中由于计算或量测误差的存在使得很难得到精确的梯度, 针对这个事实, 我们提出了一个分布式近似梯度算法来求解一般带约束优化问题. 首先我们给出了近似梯度的定义, 然后基于此定义和对偶理论提出一个近似梯度算法, 最后给出了所有个体渐近同步收敛到优化问题最优解的充分条件以及严格的收敛性证明.

3.1.1 问题描述

考虑由 N 个个体所组成的多自主体系统, 其网络的拓扑通信图可以用有向图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 来表示. \mathcal{G} 中每个个体 i 有一个代价函数 $f_i(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 且整个网络的代价函数 $f(x)$ 由这些个体的代价函数和来表示, 即 $f(x) := \sum_{i=1}^N f_i(x)$. 此网络的目标是通过个体之间的局部相互交流与合作而实现对整个网络代价函数 $f(x)$ 的优化. 这里假设每个个体只知道自己的代价函数, 基于隐私保护的考虑, 个体之间的代价函数是不能共享的, 只能进行局部的状态信息交流. 在很多的实际应用问题中, 人们不得不考虑一些客观存在的约束. 本节我们考虑带不等式约束的受限优化问题, 其数学描述如下:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^N f_i(x), \quad \text{s. t. } g(x) \leq 0, \quad x \in X, \quad (3.1)$$

其中个体 i 的代价函数 f_i 是凸可微的, x 是全局决策变量. 这里假设 f_i 只能被第 i 个个体观测到, 约束函数 $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是凸的, 受限集 X 是紧凸集, 且 g 和 X 是全局已知的. 假设问题(3.1)的可行域 $Y = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) \leq 0\} \cap X$ 是非空

的, 因为 Y 是紧集, 由 Weierstrass 定理可知问题(3.1)的最优解集 X^* 是非空且有界的.

假设系统的通信拓扑图是时变有向图, 并记 $\mathcal{G}_k = (\mathcal{V}, \mathcal{E}(k))$ 为系统在时刻 $k \geq 0$ 的拓扑图, 其中节点集 $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, N\}$ 表示系统中所有的个体的全体, 边集 $\mathcal{E}(k) \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 表示 k 时刻个体间通信链接. 对于任意两个个体 $i, j \in \mathcal{V}$, 如果个体 j 在 k 时刻可以获得个体 i 的信息当且仅当 $(j, i) \in \mathcal{E}(k)$. 用 $A(k) = [a_{ij}(k)] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 表示图 $\mathcal{G}(k)$ 的邻接矩阵, 其中 $a_{ij} > 0$ 当且仅当 $(j, i) \in \mathcal{E}$, 称 a_{ij} 为边 (j, i) 的权重. 这里假设对任意 $i \in \mathcal{V}$ 和 $k \geq 0$, 有 $(i, i) \in \mathcal{E}(k)$. 用 $\mathcal{N}_i(k)$ 表示 k 时刻个体 i 在图 \mathcal{G}_k 中的邻居节点构成的集合. 下面给出 Slater 条件假设 (A3.1), 以及引出两个关于通信拓扑图的假设 (A3.2) 和 (A3.3).

(A3.1) 存在一个向量 $\bar{x} \in X$ 使得不等式 $g(\bar{x}) < 0$ 成立.

(A3.2) (权重规则) 存在 $0 < \eta < 1$ 使得对任意的 $(i, j) \in \mathcal{E}(k)$ 和 $k \geq 0$, $a_{ij} \geq \eta$. 并且对任意的 $i, j \in \mathcal{V}, k \geq 0$, $\sum_{i=1}^N a_{ij}(k) = \sum_{j=1}^N a_{ij}(k) = 1$ 成立.

(A3.3) (连通性) 通信拓扑图 $\mathcal{G}(k)$ 是一致联合强连通, 即存在一个正整数 T 使得对任意的 $k \geq 0$, 图 $\mathcal{G}([k, k+T)) = (\mathcal{V}, \cup_{t=1}^T \mathcal{E}(k+t))$ 是强连通.

近年来次梯度方法被广泛用于解决各种优化问题, 但是在大多数的文献中, 为了得到最优解往往需要精确知道梯度信息. 然而在一些现实问题中, 精确的梯度很难得到, 通常只能近似计算. 由优化理论知识可知, 若向量 d 满足 $\langle d, \nabla h(x) \rangle < 0$, 则它是可微函数 h 在 x 处的一个可行下降方向, 由此为非精确梯度提供一个理论支持. 下面给出近似梯度的定义.

定义 3.1. 记 $\nabla h(z)$ 为可微函数 h 在点 z 处的精确梯度, 以及集合

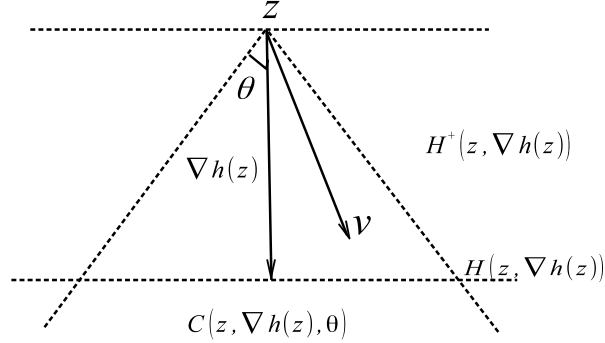
$$C(z, \nabla h(z), \theta) = z + \{v \mid \langle v, \nabla h(z) \rangle \geq \|v\| \|\nabla h(z)\| \cos \theta\};$$

$$H^+(z, \nabla h(z)) = \{v \mid \langle -\nabla h(z), v - z - \nabla h(z) \rangle \geq 0\},$$

则函数 h 在点 z 处带逼近角度 θ 的近似梯度定义为下面的集合:

$$\nabla h^a(z, \theta) = C(z, \nabla h(z), \theta) \cap H^+(z, \nabla h(z)) - z.$$

事实上, $C(z, \nabla h(z), \theta) - z$ 是所有与梯度 $\nabla h(z)$ 的角度相差 θ 的向量生成的凸锥. $H^+(z, \nabla h(z))$ 是包含 $\nabla h(z)$ 的闭半空间. 如图3.1所示.

图 3.1: 函数 h 在点 z 处带逼近角度 θ 的近似梯度.

函数 h 在点 z 处带逼近角度 θ 的支撑近似梯度 $\nabla h^{sa}(z, \theta)$ 定义为下面的集合:

$$\nabla h^{sa}(z, \theta) = C(z, \nabla h(z), \theta) \cap H(z, \nabla h(z)) - z,$$

其中

$$H(z, \nabla h(z)) = \{v \mid \langle \nabla h(z), v - z - \nabla h(z) \rangle = 0\}.$$

根据定义 3.1, 对任意 $d^a \in \nabla h^a(z, \theta)$, 存在 $d^{sa} \in \nabla h^{sa}(z, \theta)$ 使得对任意的 $0 \leq \zeta \leq 1$, 有 $d^a = \zeta d^{sa}$, 其中 ζ 可以看作是模放松参数.

3.1.2 近似梯度算法

本节给出分布式约束优化的近似梯度算法. 首先优化问题(3.1)等价于下述优化问题:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^N f_i(x), \quad \text{s.t. } Ng(x) \leq 0, \quad x \in X, \quad (3.2)$$

其对偶优化问题定义为

$$\max_{\lambda \in \mathbb{R}^m} q(\lambda) = \inf_{x \in X} \mathcal{L}(x, \lambda) \quad \text{s.t. } \lambda \geq 0, \quad (3.3)$$

其中 x 为原始变量, λ 为对偶变量, Lagrange 罚函数 $\mathcal{L}(x, \lambda) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\geq 0}^m \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + N \langle \lambda, [g(x)]^+ \rangle, \quad [g(x)]^+ = P_{\mathbb{R}_{\geq 0}^m}[g(x)],$$

其中 $P_K(\cdot)$ 表示 (\cdot) 到集合 K 的投影. 记 X^* 和 D^* 分别为原始问题(3.2)和对偶问题(3.3)的最优解集, p^* 和 q^* 分别为这两个问题的代价函数的最优值.

Slater 条件可以保证原始-对偶问题的零对偶间隙 (i.e., $p^* = q^*$) 以及对偶问题(3.3)的最优解的存在性 (i.e., $D^* \neq \emptyset$). 除此之外, $(x^*, \lambda^*) \in X^* \times D^*$ 当且仅当在 Slater 条件 (A3.1) 下, 它是 Lagrange 罚函数 $\mathcal{L}(x, \lambda)$ 的鞍点^[41, 79]. 令 $\mathcal{L}_i(x, \lambda) = f_i(x) + \langle \lambda, [g(x)]^+ \rangle$, 它可以看作个体 i 的 Lagrange 罚函数. 于是可得到 $\mathcal{L}_i(x, \lambda)$ 关于 x 是凸的和关于 λ 是凹 (线性) 的结论, 且 $\mathcal{L}(x, \lambda) = \sum_{i=1}^N \mathcal{L}_i(x, \lambda)$.

近似梯度算法的描述如下:

$$\begin{aligned} v_x^i(k) &= \sum_{j=1}^N a_{ij}(k)x_j(k), \\ v_\lambda^i(k) &= \sum_{j=1}^N a_{ij}(k)\lambda_j(k), \\ x_i(k+1) &= P_X[v_x^i(k) - \alpha_k \mathcal{D}_x^i(k)], \\ \lambda_i(k+1) &= v_\lambda^i(k) + \alpha_k \nabla_\lambda \mathcal{L}_i(v_x^i(k), v_\lambda^i(k)), \end{aligned} \quad (3.4)$$

其中 α_k 是步长,

$$\nabla_\lambda \mathcal{L}_i(v_x^i(k), v_\lambda^i(k)) = [g(v_x^i(k))]^+, \quad \mathcal{D}_x^i(k) = \nabla \tilde{f}_i(v_x^i(k)) + \langle v_\lambda^i(k), \mathcal{D}[g(v_x^i(k))]^+ \rangle.$$

这里 $\nabla \tilde{f}_i(v_x^i(k)) \in \nabla f_i^a(v_x^i(k), \theta_{ik})$ 是 $\nabla f_i(v_x^i(k))$ 的近似梯度, θ_{ik} 是逼近角度, $\mathcal{D}[g(v_x^i(k))]^+ \in \partial[g(v_x^i(k))]^+$ 是 $[g(\cdot)]^+$ 在 $v_x^i(k)$ 处的次梯度.

由支撑近似梯度的定义知, 存在 $\delta_{ik} \in [0, 1]$ 和 $\nabla \tilde{f}_i(v_x^i(k)) \in \nabla f_i^{sa}(v_x^i(k), \theta_{ik})$ 使得

$$\nabla \tilde{f}_i(v_x^i(k)) = \delta_{ik} \nabla \tilde{f}_i(v_x^i(k)).$$

令 $\theta_k^+ = \max_{i \in \mathcal{V}} \theta_{ik}$, $\delta_k^- = \min_{i \in \mathcal{V}} \delta_{ik}$ 以及 $s(k) = \sum_{r=0}^k \alpha_r$, $k \geq 0$. 下面给出关于逼近角度 θ_{ik} , 步长 α_k 和模放松参数 δ_{ik} 的假设.

(A3.4) (逼近角度) $0 \leq \theta_{ik} \leq \theta^* < \pi/2$, $\forall i, k \in \mathcal{V}$, 其中 θ^* 为常数.

(A3.5) (步长) $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty$, $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty$, $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \tan \theta_k^+ < \infty$, $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{k+1}^2 s^2(k) < \infty$, $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (1 - \delta_k^-) < \infty$.

注 3.1. 事实上, 有关步长、逼近角度和模放松参数的条件很容易满足, 比如取 $\alpha_k = \frac{1}{k+2}$, $\theta_{ik} = \frac{1}{k+2}$ 以及 $\delta_{ik} = 1 - \frac{1}{k+2}$, $i \in \mathcal{V}, k \geq 0$.

3.1.3 主要结论

下面将给出近似梯度算法(3.4)的最优收敛性结果.

对于任意的 $x \in X$, 根据凸函数的标准非延展性 (引理 2.2(i)), 由(3.4) 可知,

$$\begin{aligned}\|x_i(k+1) - x\|^2 &= \|P_X[v_x^i(k) - \alpha_k \mathcal{D}_x^i(k)] - P_X[x]\|^2 \\ &\leq \|v_x^i(k) - \alpha_k \mathcal{D}_x^i(k) - x\|^2.\end{aligned}$$

令 $d_x^i(k) = \nabla f_i(v_x^i(k)) + \langle v_\lambda^i(k), \mathcal{D}[g(v_x^i(k))]^+ \rangle$ 和 $d_\lambda^i(k) = \nabla_\lambda \mathcal{L}_i(v_x^i(k), v_\lambda^i(k))$. 由集合 X 的紧性可得,

$$c_0 = \sup_{x, y \in X} \|x - y\| < \infty.$$

又由 f_i 和 $[g(x)]^+$ 的连续性可知, 对任意的 $x \in X$, 存在 $l_0 > 0$ 使得

$$\|[g(x)]^+\| \leq l_0, \|\mathcal{D}[g(x)]^+\| \leq l_0, \|\nabla f_i(x)\| \leq l_0, i = 1, \dots, N.$$

由(3.4)知, $x_i(k) \in X$, 于是可得 $v_x^i(k) \in X$, 意味着

$$\|d_\lambda^i(k)\| = \|[g(v_x^i(k))]^+\| \leq l_0, \|\mathcal{D}[g(v_x^i(k))]^+\| \leq l_0, \|\nabla f_i(v_x^i(k))\| \leq l_0.$$

记 $M_\lambda(k) = \max_{i \in \mathcal{V}} \|\lambda_i(k)\|$, 则有

$$\|d_x^i(k)\| \leq l_0(1 + M_\lambda(k)), \|\mathcal{D}_x^i(k)\| \leq l_0(1 + M_\lambda(k) + \tan \theta^*).$$

同时可得

$$\|d_x^i(k) - \mathcal{D}_x^i(k)\| \leq l_0(\tan \theta_k^+ + (1 - \delta_k^-)).$$

从上述式子可以推导下式成立

$$\begin{aligned}\|x_i(k+1) - x\|^2 &\leq \left\| \sum_{j=1}^N a_{ij}(k)x_j(k) - x - \alpha_k \mathcal{D}_x^i(k) \right\|^2 \\ &= \left\| \sum_{j=1}^N a_{ij}(k)x_j(k) - x \right\|^2 + \alpha_k^2 \|\mathcal{D}_x^i(k)\|^2 - 2\alpha_k \langle \mathcal{D}_x^i(k), v_x^i(k) - x \rangle \\ &\leq \sum_{j=1}^N a_{ij}(k) \|x_j(k) - x\|^2 + 2c_0 l_0 \alpha_k (1 - \delta_k^-) + 2c_0 l_0 \alpha_k \tan \theta_k^+ \\ &\quad + 2l_0^2 \alpha_k^2 ((1 + \tan \theta^*)^2 + M_\lambda^2(k)) - \alpha_k \langle d_x^i(k), v_x^i(k) - x \rangle.\end{aligned}$$

对于对偶变量运用类似于上面的分析可得, 对任意的 $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m$, 有

$$\begin{aligned} \|\lambda_i(k+1) - \lambda\|^2 &= \left\| \sum_{j=1}^N a_{ij}(k) \lambda_j(k) - \lambda + \alpha_k d_\lambda^i(k) \right\|^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^N a_{ij}(k) \|\lambda_j(k) - \lambda\|^2 + l_0^2 \alpha_k^2 + 2\alpha_k \langle d_\lambda^i(k), v_\lambda^i(k) - \lambda \rangle \end{aligned}$$

由一阶凸性条件知

$$-\langle d_x^i(k), v_x^i(k) - x \rangle \leq \mathcal{L}_i(x, v_\lambda^i(k)) - \mathcal{L}_i(v_x^i(k), v_\lambda^i(k))$$

且

$$\langle d_\lambda^i(k), v_\lambda^i(k) - \lambda \rangle \leq \mathcal{L}_i(v_x^i(k), v_\lambda^i(k)) - \mathcal{L}_i(v_x^i(k), \lambda).$$

由此不难得到下列的两个引理 3.1 和 3.2.

引理 3.1. 对任意的 $(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R}_{\geq 0}^m$, 下述不等式成立:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \|x_i(k+1) - x\|^2 &\leq \sum_{i=1}^N \|x_i(k) - x\|^2 + 2Nl_0^2 \alpha_k^2 ((1 + \tan \theta^*)^2 + M_\lambda^2(k)) \\ &\quad + 2Nc_0 l_0 \alpha_k \tan \theta_k^+ + 2Nc_0 l_0 \alpha_k (1 - \delta_k^-) \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^N \alpha_k (\mathcal{L}_i(x, v_\lambda^i(k)) - \mathcal{L}_i(v_x^i(k), v_\lambda^i(k))), \end{aligned} \quad (3.5)$$

且

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \|\lambda_i(k+1) - \lambda\|^2 &\leq \sum_{i=1}^N \|\lambda_i(k) - \lambda\|^2 + Nl_0^2 \alpha_k^2 \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^N \alpha_k (\mathcal{L}_i(v_x^i(k), v_\lambda^i(k)) - \mathcal{L}_i(v_x^i(k), \lambda)). \end{aligned} \quad (3.6)$$

引理 3.2. 令 $\hat{x}(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(k)$ 和 $\hat{\lambda}(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_i(k)$. 假设 (A3.2)-(A3.5) 成立, 则有

$$1) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 M_\lambda^2(k) < \infty.$$

$$2) \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_i(k) - \hat{x}(k)\| = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \|\lambda_i(k) - \hat{\lambda}(k)\| = 0, i = 1, \dots, N.$$

$$\begin{aligned} 3) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \|\hat{\lambda}(k) - v_{\lambda}^i(k)\| &< \infty, \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \|\hat{x}(k) - v_x^i(k)\| < \infty, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k M_{\lambda}(k) \|\hat{x}(k) - v_x^i(k)\| &< \infty. \end{aligned}$$

证明: 因为

$$\|\lambda_i(k+1)\| = \|v_{\lambda}^i(k) + \alpha_k d_{\lambda}^i(k)\| \leq \|v_{\lambda}^i(k)\| + l_0 \alpha_k \leq M_{\lambda}(k) + l_0 \alpha_k,$$

和

$$M_{\lambda}(k+1) \leq M_{\lambda}(k) + l_0 \alpha_k \leq M_{\lambda}(0) + l_0 s(k),$$

那么由假设 (A3.5) 可得

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 M_{\lambda}^2(k) \leq \alpha_0^2 M_{\lambda}^2(0) + \sum_{k=0}^{\infty} 2\alpha_{k+1}^2 (M_{\lambda}^2(0) + l_0^2 s^2(k)) < \infty,$$

且 $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k M_{\lambda}(k) = 0$. 于是 1) 得证.

令 $\Phi(k, s) = A(k)A(k-1) \cdots A(s)$, 其中 $A(k) = (a_{ij}(k))$, $k \geq s$. 由引理 2.1 可得, 转移矩阵 $\Phi(k, s)$ 满足:

$$|[\Phi(k, s)]_j^i - 1/N| \leq \rho \beta^{k-s} \text{ for all } i, j \in \mathcal{V}, k > s, \quad (3.7)$$

其中 $\rho = 2(1 + \eta^{-B_0})/(1 - \eta^{B_0})$, $B_0 = (N-1)T$, $\beta = (1 - \eta^{B_0})^{1/B_0}$, 这里 $[\Phi(k, s)]_j^i$ 表示矩阵 $\Phi(k, s)$ 第 i 行第 j 列的元素. 记 $e_x^i(k) = P_X[v_x^i(k) - \alpha_k \mathcal{D}_x^i(k)] - v_x^i(k)$, 由(3.7)和算法(3.4)可得,

$$\begin{aligned} x_i(k+1) &= \sum_{j=1}^N [\Phi(k, 0)]_j^i x_j(0) + e_x^i(k) + \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{j=1}^N [\Phi(k, s+1)]_j^i e_x^j(s), \\ \hat{x}(k+1) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(k+1) = \hat{x}(0) + \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{j=1}^N e_x^j(s) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e_x^i(k). \end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned} \|x_i(k+1) - \hat{x}(k+1)\| &\leq \sum_{j=1}^N \left| [\Phi(k, 0)]_j^i - \frac{1}{N} \right| \|x_j(0)\| + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|e_x^i(k)\| \\ &\quad + \|e_x^i(k)\| + \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{j=1}^N \left| [\Phi(k, s+1)]_j^i - \frac{1}{N} \right| \|e_x^j(s)\|. \end{aligned}$$

因为 $v_x^i(k) \in X$, 由投影算子的标准非延展性知

$$\|e_x^i(k)\| \leq \alpha_k \|\mathcal{D}_x^i(k)\|.$$

又 $\|\mathcal{D}_x^i(k)\| \leq l_0(1 + M_\lambda(k) + \tan \theta_k^+)$. 由(3.7)可得:

$$\begin{aligned} & \|x_i(k+1) - \hat{x}(k+1)\| \\ & \leq \rho \beta^k \sum_{j=1}^N \|x_j(0)\| + 2l_0 \alpha_k (1 + M_\lambda(k)) + N \rho l_0 \sum_{s=0}^{k-1} \beta^{k-1-s} \alpha_s (1 + M_\lambda(s)) \\ & \quad + 2l_0 \alpha_k \tan \theta_k^+ + N \rho l_0 \sum_{s=0}^{k-1} \beta^{k-1-s} \alpha_s \tan \theta_s^+. \end{aligned} \quad (3.8)$$

注意到 $0 < \beta < 1$, 有 $\beta^k \rightarrow 0$. 由文献[35]中的引理 7 可得,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_i(k) - \hat{x}(k)\| = 0.$$

用类似推理可以证明

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\lambda_i(k) - \hat{\lambda}(k)\| = 0,$$

于是 2) 得证.

又在不等式(3.8)两侧同乘以 α_{k+1} , 可得

$$\begin{aligned} & \alpha_{k+1} \|x_i(k+1) - \hat{x}(k+1)\| \\ & \leq \rho(\alpha_{k+1}^2 + \beta^{2k}) \sum_{j=1}^N \|x_j(0)\| + 2l_0 \alpha_{k+1}^2 + 2l_0 \alpha_k^2 (1 + M_\lambda^2(k)) \\ & \quad + 2N \rho l_0 \alpha_{k+1}^2 \sum_{s=0}^{k-1} \beta^{k-1-s} + N \rho l_0 \tan^2 \theta^* \sum_{s=0}^{k-1} \beta^{k-1-s} \alpha_s^2 \\ & \quad + 2N \rho l_0 \sum_{s=0}^{k-1} \beta^{k-1-s} \alpha_s^2 (1 + M_\lambda^2(s)) + l_0 \alpha_k^2 \tan^2 \theta^*. \end{aligned}$$

再次利用文[35]中的引理 7 得 $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \|x_i(k) - \hat{x}(k)\| < \infty$. 因为

$$\|\hat{x}(k) - v_x^i(k)\| \leq \max_{i \in \mathcal{V}} \|x_i(k) - \hat{x}(k)\|,$$

有

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \|\hat{x}(k) - v_x^i(k)\| < \infty.$$

用类似推理可以证明

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k M_{\lambda}(k) \|\hat{x}(k) - v_x^i(k)\| < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \|\hat{\lambda}(k) - v_{\lambda}^i(k)\| < \infty.$$

于是 3) 得证. □

引理 3.3. 假设 (A3.1)-(A3.5) 成立. 则对于任意的 $(x^*, \lambda^*) \in X^* \times D^*$, 有

1) $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_i(k) - x^*\|$ 和 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\lambda_i(k) - \lambda^*\|$ 有限, $\forall i \in \mathcal{V}$;

2) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{s(k)} \sum_{r=0}^k \alpha_r \mathcal{L}(\hat{x}(r), \hat{\lambda}(r)) = p^*$.

证明: 注意到

$$\mathcal{L}_i(v_x^i(k), v_{\lambda}^i(k)) - \mathcal{L}_i(x, v_{\lambda}^i(k)) = E(k) + (\mathcal{L}_i(\hat{x}(k), \hat{\lambda}(k)) - \mathcal{L}_i(x, \hat{\lambda}(k))),$$

其中

$$\begin{aligned} E(k) = & (\mathcal{L}_i(v_x^i(k), v_{\lambda}^i(k)) - \mathcal{L}_i(\hat{x}(k), v_{\lambda}^i(k))) + (\mathcal{L}_i(\hat{x}(k), v_{\lambda}^i(k)) - \mathcal{L}_i(\hat{x}(k), \hat{\lambda}(k))) \\ & + (\mathcal{L}_i(x, \hat{\lambda}(k)) - \mathcal{L}_i(x, v_{\lambda}^i(k))). \end{aligned}$$

又因为

$$\|E(k)\| \leq l_0(1 + M_{\lambda}(k))\|v_x^i(k) - \hat{x}(k)\| + 2l_0\|v_{\lambda}^i(k) - \hat{\lambda}(k)\|.$$

于是对任意的 $x^* \in X^*$, 由(3.5)知

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \|x_i(k+1) - x^*\|^2 & \leq \sum_{i=1}^N \|x_i(k) - x^*\|^2 + F(k) \\ & \quad - 2\alpha_k \sum_{i=1}^N (\mathcal{L}_i(\hat{x}(k), \hat{\lambda}(k)) - \mathcal{L}_i(x^*, \hat{\lambda}(k))), \end{aligned} \quad (3.9)$$

其中

$$F(k) = 2Nc_0l_0\alpha_k \tan \theta_k^+ + 2Nl_0^2\alpha_k^2((1 + \tan \theta^*)^2 + M_\lambda^2(k)) + 2Nc_0l_0\alpha_k(1 - \delta_k^-) \\ + 2l_0 \sum_{i=1}^N \alpha_k(1 + M_\lambda(k))\|v_x^i(k) - \hat{x}(k)\| + 4l_0 \sum_{i=1}^N \alpha_k\|v_\lambda^i(k) - \hat{\lambda}(k)\|.$$

类似地, 对任意的 $\lambda^* \in D^*$, 由(3.6)可得

$$\sum_{i=1}^N \|\lambda_i(k+1) - \lambda^*\|^2 \leq \sum_{i=1}^N \|\lambda_i(k) - \lambda^*\|^2 + G(k) \\ + 2 \sum_{i=1}^N \alpha_k(\mathcal{L}_i(\hat{x}(k), \hat{\lambda}(k)) - \mathcal{L}_i(\hat{x}(k), \lambda^*)), \quad (3.10)$$

其中

$$G(k) = Nl_0^2\alpha_k^2 + 4l_0 \sum_{i=1}^N \alpha_k(1 + M_\lambda(k))\|v_x^i(k) - \hat{x}(k)\| + 2l_0 \sum_{i=1}^N \alpha_k\|v_\lambda^i(k) - \hat{\lambda}(k)\|.$$

根据引理 3.2 和假设 (A3.5) 知

$$\sum_{k=0}^{\infty} F(k) < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} G(k) < \infty.$$

联合(3.9)和(3.10)可以得到

$$\sum_{i=1}^N (\|x_i(k+1) - x^*\|^2 + \|\lambda_i(k+1) - \lambda^*\|^2) \\ \leq \sum_{i=1}^N (\|x_i(k) - x^*\|^2 + \|\lambda_i(k) - \lambda^*\|^2) + F(k) + G(k) \\ + 2\alpha_k(\mathcal{L}(x^*, \hat{\lambda}(k)) - \mathcal{L}(\hat{x}(k), \lambda^*)). \quad (3.11)$$

又对任意的 $(x^*, \lambda^*) \in X^* \times D^*$, 由假设 (A3.1) 可知, (x^*, λ^*) 是 \mathcal{L} 在 $X \times \mathbb{R}_{\lambda \geq 0}^m$ 上的鞍点, 即 $\mathcal{L}(x^*, \hat{\lambda}(k)) \leq \mathcal{L}(x^*, \lambda^*)$ 和 $\mathcal{L}(\hat{x}(k), \lambda^*) \geq \mathcal{L}(x^*, \lambda^*)$. 由此得到

$$\mathcal{L}(x^*, \hat{\lambda}(k)) - \mathcal{L}(\hat{x}(k), \lambda^*) \leq 0.$$

根据引理 2.5, 从(3.11)知极限

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N (\|x_i(k) - x^*\|^2 + \|\lambda_i(k) - \lambda^*\|^2) \text{ 存在.}$$

因此, 对任意的 $i \in \mathcal{V}$, 极限 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_i(k) - x^*\|$ 和 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\lambda_i(k) - \lambda^*\|$ 也存在, 于是 1) 得证.

在不等式(3.11)两边对 k 求和得到,

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{r=0}^k \alpha_r (\mathcal{L}(\hat{x}(r), \lambda^*) - \mathcal{L}(x^*, \hat{\lambda}(r))) \\ & \leq \sum_{i=1}^N (\|x_i(0) - x^*\|^2 + \|\lambda_i(0) - \lambda^*\|^2) + \sum_{r=0}^k (F(r) + G(r)) \\ & \quad - \sum_{i=1}^N (\|x_i(k+1) - x^*\|^2 + \|\lambda_i(k+1) - \lambda^*\|^2). \end{aligned}$$

于是有

$$\sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r (\mathcal{L}(\hat{x}(r), \lambda^*) - \mathcal{L}(x^*, \hat{\lambda}(r))) < \infty.$$

由于 $\mathcal{L}(x^*, \hat{\lambda}(k)) \leq \mathcal{L}(x^*, \lambda^*)$ 和 $\mathcal{L}(\hat{x}(k), \lambda^*) \geq \mathcal{L}(x^*, \lambda^*)$, 故有

$$\sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r (\mathcal{L}(\hat{x}(r), \lambda^*) - \mathcal{L}(x^*, \lambda^*)) < \infty, \quad \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r (\mathcal{L}(x^*, \lambda^*) - \mathcal{L}(x^*, \hat{\lambda}(r))) < \infty.$$

从(3.9)知

$$\begin{aligned} & \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{s(k)} \sum_{r=0}^k \alpha_r (\mathcal{L}(\hat{x}(r), \hat{\lambda}(r)) - p^*) \\ & \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{s(k)} \sum_{r=0}^k \alpha_r (\mathcal{L}(\hat{x}(r), \hat{\lambda}(r)) - \mathcal{L}(x^*, \hat{\lambda}(r))) \\ & \quad + \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{s(k)} \sum_{r=0}^k \alpha_r (\mathcal{L}(x^*, \hat{\lambda}(r)) - p^*) \\ & \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{s(k)} \left(\sum_{i=1}^N \|x_i(0) - x^*\|^2 + \sum_{r=0}^k F(r) \right) \\ & \quad + \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{s(k)} \sum_{r=0}^k \alpha_r (\mathcal{L}(x^*, \hat{\lambda}(r)) - p^*) \\ & \leq 0. \end{aligned}$$

由此可得

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{s(k)} \sum_{r=0}^k \alpha_r \mathcal{L}(\hat{x}(r), \hat{\lambda}(r)) \leq p^*.$$

类似地可以证明

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{s(k)} \sum_{r=0}^k \alpha_r \mathcal{L}(\hat{x}(r), \hat{\lambda}(r)) \geq p^*.$$

故有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{s(k)} \sum_{r=0}^k \alpha_r \mathcal{L}(\hat{x}(r), \hat{\lambda}(r)) = p^*$, 于是 2) 得证. \square

定理 3.4. 假设 (A3.1)-(A3.5) 成立, 如果优化问题(3.1)的最优解集 X^* 存在一个内点, 则近似梯度算法(3.4)将同步收敛到 X^* 的某一个点, 即存在 $\tilde{x} \in X^*$ 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i(k) = \tilde{x}$, $i \in \mathcal{V}$.

证明: 注意到, 对任意的内点 $\bar{x} \in X^*$, 存在一个以 \bar{x} 为中心的开球 S_1 使得 $S_1 \subseteq X^*$. 对任意的 $x \in S_1$, 由引理3.3可知极限 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_i(k) - x\|$ 存在. 由此可知, 存在 $\tilde{x} \in X$ 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i(k) = \tilde{x}$, $i \in \mathcal{V}$. 根据文献[41]中的 Claim 4, 能够证明 $\tilde{x} \in X^*$. 此定理得证. \square

注 3.2. 与文[41]相比, 本节所提出的近似梯度算法在设计中将梯度计算所造成的误差考虑进去, 并且给出更为严格的算法收敛性证明.

下面给出一个数值仿真实验来验证本节所提的近似梯度算法的有效性.

例 3.1. 考虑三个多自主体相互协作求解优化问题(3.1), 取 $g(x, y) = (x - y)^2 - 4$, $X = [-2, 2] \times [-2, 2] \subseteq \mathbb{R}^2$, 和 $f_i(x, y) = f_i(x) + f_i(y)$, $i = 1, 2, 3$, 其中

$$f_1(x) = \begin{cases} (x-2)^2, & x \geq 2 \\ 0, & -2 < x < 2 \\ (x+2)^2, & x \leq -2 \end{cases}, \quad f_1(y) = \begin{cases} (y-2)^2, & y \geq 2 \\ 0, & -2 < y < 2 \\ (y+2)^2, & y \leq -2 \end{cases},$$

$$f_2(x) = \begin{cases} x^3 - 3x, & x \geq 1 \\ -2, & -1 < x < 1 \\ x^3 - 3x - 4, & x \leq -1 \end{cases}, \quad f_2(y) = \begin{cases} (y-1)^2, & y \geq 1 \\ 0, & -1 < y < 1 \\ (y+1)^2, & y \leq -1 \end{cases},$$

$$f_3(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2, & x \geq 2 \\ -4, & x < 2 \end{cases}, \quad f_3(y) = \begin{cases} y^2, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}.$$

那么该问题的最优解集为 $X^* = [-1, 1] \times [-1, 0]$. 个体间的通信拓扑图 \mathcal{G} 是在 $\mathcal{G}_i, i = 1, 2$ 间切换变化的, 其中对任意的 $k \geq 0, \mathcal{G}(2k) = \mathcal{G}_1, \mathcal{G}(2k+1) = \mathcal{G}_2$. 这两个图的邻接矩阵分别用 A_1 和 A_2 来表示:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

令 $\alpha_k = \frac{1}{k+2}, \delta_{ik} = \frac{k+1}{k+2}$, 以及 $\nu_{ik} = \frac{1}{k+2}$, 图3.2 给出了近似梯度算法的收敛过程, 从中可以看出所有的个体将同步收敛到问题(3.1)的最优解.

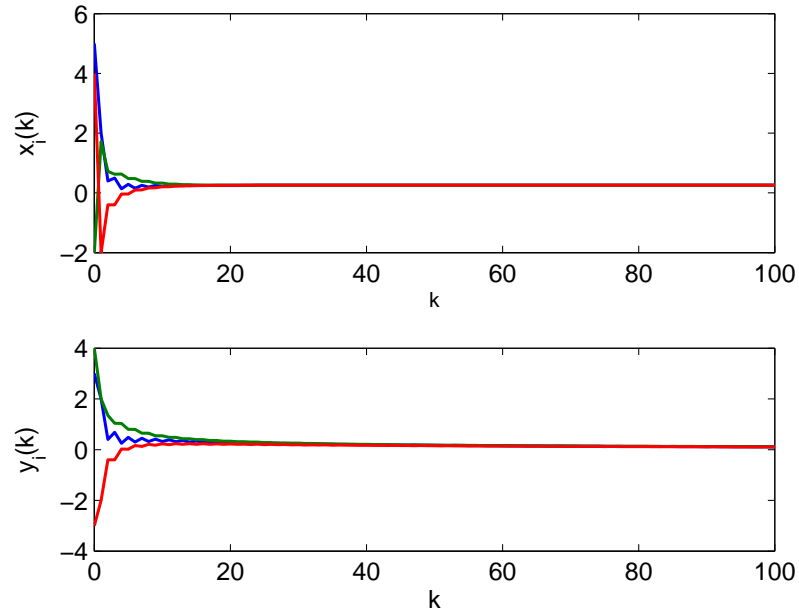


图 3.2: 近似梯度算法的收敛性.

3.2 二阶多自主体系统的分布式优化设计

近年来, 连续时间的分布式优化算法在控制领域引起越来越多的关注^[26, 29, 45, 46, 52, 65, 85], 尤其是随着物理信息系统的快速发展, 如何能有效地将计算、通信、控制结合起来是非常重要的. 在实际应用中, 仅仅只满足被控对象的稳定性是不够的, 如何能达到最经济、最高效的控制策略逐渐成为人们的关

注目标. 尤其是如何能让实体的物理系统在稳定运行的同时还能实现预定的优化指标. 本节研究了二阶多自主体系统的分布式动态优化问题, 提出了一种基于积分反馈的连续时间的分布式优化算法. 同时讨论了当系统存在一定的不确定性时, 分布式在线优化的设计策略.

3.2.1 问题描述

考虑由 n 个运动个体所组成的多自主体系统, 个体之间的通信拓扑可以用无向图 $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}\}$ 表示, 每个个体的动态用如下的二阶积分器表示:

$$\dot{x}_i = y_i, \quad \dot{y}_i = u_i \in \mathbb{R}^m, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.12)$$

其中 x_i 和 y_i 分别表示第 i 个个体的位置和速度, u_i 表示它的控制输入.

一般标准的分布式优化问题是用 n 个个体相互协作来求解下述的优化问题:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^m} f(x), \quad f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x), \quad (3.13)$$

其中 $f_i: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ 是个体 i 的代价函数, 它是凸的并且只能被第 i 个个体观测到. 然而, 在一些实际应用中, 各个目标函数及其梯度的获取有时候是通过求解其它的一些辅助优化问题而得到的, 由此可能产生一些计算的不确定性. 除此之外, 运行环境中也存在很多的不确定性因素. 而这些计算或者环境的不确定性可能会导致个体的代价函数随时间而发生变化. 这里考虑一类不确定性在线优化问题来代替问题(3.13):

$$\min_{x \in \mathbb{R}^m} \int_0^T f^t(x) dt, \quad f^t(x) = \sum_{i=1}^n f_i^t(x), \quad (3.14)$$

其中 $T > 0$ 是一个正常数.

通常情况下, 用 regret 函数来衡量一个在线优化算法的好坏, 其定义如下:

$$R(T) = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=1}^n f_i^s(x_i(s)) ds - \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=1}^n f_i^s(x^*) ds,$$

这里 $R(T)$ 表示在时间区间 $[0, T]$ 内的平均 regret 函数, x^* 表示动态优化问题(3.14)的最优解.

注 3.3. 由于目标函数的时变性, 很难设计算法使得系统在每个时刻 t 的代价函数 $\sum_{i=1}^n f_i^t(x_i)$ 最小, 尤其是当目标函数的变化规律无法获知时. 故一般情形下, 只需考虑在某一段固定时间内整个系统的平均代价最小即可, 此类模型广泛应用于很多的在线优化问题^[37, 86, 87]. 除此之外, 与文[45, 46, 85, 88]中所考虑的一阶系统的分布式优化不同, 这里结合多自主体自身的动力学特性, 考虑了二阶多自主体系统的分布式在线优化问题.

下面将分别给出关于通信拓扑图和目标函数的两个假设条件:

(A3.6) 通信拓扑图 \mathcal{G} 是连通的.

(A3.7) 对任意的个体 $i \in \mathcal{V}$, 其局部代价函数 $f_i^t(x)$, $t > 0$, 关于 x 在 \mathbb{R}^m 上是 ω_i -强凸, 其中 $\omega_i > 0$.

由假设 (A3.7) 可知, $F_T(x) = \int_0^T f^s(x)ds$ 是严格凸, 因此问题(3.14)存在唯一的最优解 $x^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^m} F_T(x)$. 这里假设 x^* 和 $\nabla_x f_i^s(x^*) (i \in \mathcal{V}, s \in [0, T])$ 都是有界的.

3.2.2 分布式在线优化算法

为使系统(3.12)尽可能精确地找到动态优化问题(3.14)的最优解, 对系统(3.12)中个体 $i \in \mathcal{V}$ 设计如下的分布式控制器:

$$\begin{cases} u_i(t) = -ky_i(t) - \beta \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_i(t) - x_j(t)) - \alpha(\nabla_{x_i} f_i^t(x_i(t)) + \delta_i(t)) - v_i(t), \\ \dot{v}_i(t) = \alpha\beta \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}((x_i(t) - x_j(t)) + (y_i(t) - y_j(t))), \quad i \in \mathcal{V}, \end{cases} \quad (3.15)$$

其中 $\delta_i(t)$ 表示个体 i 由梯度计算所带来的计算误差或者外界环境的扰动, $k, \alpha, \beta > 0$ 是控制参数.

多自主体系统(3.12)在控制协议(3.15)作用下的闭环系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = y_i(t) \\ \dot{y}_i(t) = -ky_i(t) - \beta \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_i(t) - x_j(t)) - v_i(t) - \alpha \nabla_{x_i} f_i^t(x_i(t)) - \alpha \delta_i(t) \\ \dot{v}_i(t) = \alpha\beta \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}((x_i(t) - x_j(t)) + (y_i(t) - y_j(t))), \end{cases} \quad (3.16)$$

令

$$X^* = \mathbf{1}_n \otimes x^*, \quad W^* = -\frac{\alpha}{T} \int_0^T \nabla_X \tilde{f}^t(X^*) dt, \quad \eta(t) = X(t) - X^*,$$

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \tau(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{pmatrix} - W^*, \tilde{\delta}(t) = -\alpha\delta(t), \delta(t) = \begin{pmatrix} \delta_1(t) \\ \vdots \\ \delta_n(t) \end{pmatrix},$$

其中 $X = (x_1^T, \dots, x_n^T)^T$, $\tilde{f}^t(X) = \sum_{i=1}^n f_i^t(x_i)$. 这时闭环系统(3.16)可以写成如下的紧形式:

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t) = \xi(t) \\ \dot{\xi}(t) = -k\xi(t) - \beta L\eta(t) - \tau(t) - \alpha\tilde{h}(t) + \tilde{\delta}(t) \\ \dot{\tau}(t) = \alpha\beta L(\eta(t) + \xi(t)) \end{cases} \quad (3.17)$$

这里 $\tilde{h}(t) = h(t) + h_0(t)$, 其中

$$h(t) = \nabla_X \tilde{f}^t(X(t)) - \nabla_X \tilde{f}^t(X^*), h_0(t) = \nabla_X \tilde{f}^t(X^*) - \frac{1}{T} \int_0^T \nabla_X \tilde{f}^t(X^*) dt.$$

为了记号的简单起见, 用 ∇ 代替 ∇_X (或 ∇_x), 在不引起混淆的情形下将略去下标 X (或 x).

用 L 表示图 \mathcal{G} 的 Laplacian 矩阵, 则有 $\mathbf{1}_n^T L = \mathbf{0}_n^T$, 结合式(3.16)可知, $\sum_{i=1}^n \dot{v}_i = \mathbf{0}_m$, 即有

$$\sum_{i=1}^n v_i(t) = \sum_{i=1}^n v_i(0) = \mathbf{0}_m, \forall t \geq 0. \quad (3.18)$$

令 $Q = (r, R) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 其中 $r = \frac{\mathbf{1}_n}{\sqrt{n}}$, $R \in \mathbb{R}^{n \times (n-1)}$ 且满足 $\mathbf{1}_n^T R = \mathbf{0}_{n-1}^T$, $R^T R = I_{n-1}$. 于是 $Q^T Q = I_n$, 这表明 Q 是正交矩阵. 在坐标变换

$$\hat{\eta} = (Q^T \otimes I_m)\eta, \hat{\xi} = (Q^T \otimes I_m)\xi, \hat{\tau} = (Q^T \otimes I_m)\tau,$$

下, 考虑到(3.18), 系统(3.17)可以转换成如下形式:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\eta}}_1 = \hat{\xi}_1 \\ \dot{\hat{\xi}}_1 = -k\hat{\xi}_1 - \alpha(r^T \otimes I_m)\tilde{h} + \hat{\delta}_1 \\ \dot{\hat{\eta}}_{2:n} = \hat{\xi}_{2:n} \\ \dot{\hat{\xi}}_{2:n} = -k\hat{\xi}_{2:n} - \beta(R^T L R \otimes I_m)\hat{\eta}_{2:n} - \hat{\tau}_{2:n} - \alpha(R^T \otimes I_m)\tilde{h} + \hat{\delta}_{2:n} \\ \dot{\hat{\tau}}_1 = \mathbf{0}_m \\ \dot{\hat{\tau}}_{2:n} = \alpha\beta(R^T L R \otimes I_m)(\hat{\eta}_{2:n} + \hat{\xi}_{2:n}) \end{cases} \quad (3.19)$$

其中 $\hat{\delta} = (Q^T \otimes I_m)\tilde{\delta}$, $\hat{\eta}_1, \hat{\xi}_1, \hat{\tau}_1, \hat{\delta}_1 \in \mathbb{R}^m$, $\hat{\eta}_{2:n}, \hat{\xi}_{2:n}, \hat{\tau}_{2:n}, \hat{\delta}_{2:n} \in \mathbb{R}^{(n-1)m}$, 且

$$\hat{\eta} = \begin{pmatrix} \hat{\eta}_1 \\ \hat{\eta}_{2:n} \end{pmatrix}, \quad \hat{\xi} = \begin{pmatrix} \hat{\xi}_1 \\ \hat{\xi}_{2:n} \end{pmatrix}, \quad \hat{\tau} = \begin{pmatrix} \hat{\tau}_1 \\ \hat{\tau}_{2:n} \end{pmatrix}, \quad \hat{\delta} = \begin{pmatrix} \hat{\delta}_1 \\ \hat{\delta}_{2:n} \end{pmatrix}.$$

3.2.3 主要结论

令矩阵

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I_n + \frac{\sigma\alpha}{2} \begin{pmatrix} 0 & \\ & I_{n-1} \end{pmatrix} & \frac{1}{2}I_n & \frac{\sigma}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n-1}^T \\ I_{n-1} \end{pmatrix} \\ \frac{1}{2}I_n & \frac{k}{2}I_n & \mathbf{0} \\ \frac{\sigma}{2}(\mathbf{0}_{n-1}, I_{n-1}) & \mathbf{0} & \frac{1}{2\alpha\beta}(R^T L R)^{-1} + \frac{\sigma}{2\alpha}I_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(3n-1) \times (3n-1)}, \quad (3.20)$$

其中 $0 < \sigma < 1$.

下面的定理 3.5 给出了分布式在线优化算法(3.15)的平均 regret 界的分析.

定理 3.5. 假设 (A3.6)-(A3.7) 成立, 如果对任意的 $i \in \mathcal{V}$, $f_i^t(x)$ 是可微的并且它关于 x 的梯度是全局 Lipschitz, 当初始条件 $x_i(0), \dot{x}_i(0), v_i(0) \in \mathbb{R}^m$ 满足 $\sum_{i=1}^n v_i(0) = \mathbf{0}_m$ 时, 那么在分布式在线优化算法(3.15)下, 存在常数 $\tilde{l}, M, \hat{\rho} > 0$ 以及 $0 < \sigma < 1$ 使得二阶系统(3.12)在时间区间 $[0, T]$ 内的平均 regret 界满足

$$\begin{aligned} R(T) \leq & \tilde{l}\sqrt{n}\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\Phi)}{\lambda_{\min}(\Phi)}} \left(\frac{4\lambda_{\max}(\Phi)}{T\hat{\rho}} (1 - e^{-\frac{\hat{\rho}}{4\lambda_{\max}(\Phi)}T}) \|q(0)\| \right. \\ & \left. + \frac{2\alpha(2+\alpha)}{\hat{\rho}} \left(2\sqrt{n}M + \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{0 \leq s \leq t} \|\delta(s)\| dt \right) \right), \end{aligned} \quad (3.21)$$

其中 $\lambda_{\max}(\cdot)$ 和 $\lambda_{\min}(\cdot)$ 分别表示矩阵 (\cdot) 的最大、最小特征根. 算法(3.15)中的控制参数满足 $\alpha, \beta > 0$ 且 $k \geq 2 + \alpha\theta(1 + \frac{\theta}{4\omega}) + \frac{\beta}{4}\lambda_{\max}(L)$.

证明: 记

$$\begin{cases} V_1 = \frac{1}{2}\hat{\xi}_1^2 + \hat{\xi}_1^T \hat{\eta}_1 + \frac{k}{2}\hat{\eta}_1^2 \\ V_2 = \frac{1}{2}\hat{\xi}_{2:n}^2 + \hat{\xi}_{2:n}^T \hat{\eta}_{2:n} + \frac{k}{2}\hat{\eta}_{2:n}^2 \\ V_3 = \frac{1}{2\alpha\beta}\hat{\tau}_{2:n}^T ((R^T L R)^{-1} \otimes I_m) \hat{\tau}_{2:n} \\ V_4 = \frac{1}{2\alpha}(\alpha\hat{\xi}_{2:n} + \hat{\tau}_{2:n})^2, \end{cases}$$

将上面函数分别对时间求导可得

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = -(k-1)\hat{\xi}_1^2 - \alpha(\hat{\xi}_1 + \hat{\eta}_1)^T(r^T \otimes I_m)\tilde{h} + (\hat{\xi}_1 + \hat{\eta}_1)^T\hat{\delta}_1, \\ \dot{V}_2 = -(k-1)\hat{\xi}_{2:n}^2 - \beta\hat{\xi}_{2:n}^T(R^T LR \otimes I_m)\hat{\eta}_{2:n} - \beta\hat{\eta}_{2:n}^T(R^T LR \otimes I_m)\hat{\eta}_{2:n} \\ \quad - (\hat{\xi}_{2:n} + \hat{\eta}_{2:n})^T\hat{\tau}_{2:n} - \alpha(\hat{\xi}_{2:n} + \hat{\eta}_{2:n})^T(R^T \otimes I_m)\tilde{h} + (\hat{\xi}_{2:n} + \hat{\eta}_{2:n})^T\hat{\delta}_{2:n}, \\ \dot{V}_3 = (\hat{\xi}_{2:n} + \hat{\eta}_{2:n})^T\hat{\tau}_{2:n}, \\ \dot{V}_4 = -\hat{\tau}_{2:n}^2 - \alpha k\hat{\xi}_{2:n}^2 - (k+\alpha)\hat{\tau}_{2:n}^T\hat{\xi}_{2:n} - \alpha^2\hat{\xi}_{2:n}^T(R^T \otimes I_m)\tilde{h} - \alpha\hat{\tau}_{2:n}^T(R^T \otimes I_m)\tilde{h} \\ \quad + \alpha\beta\hat{\xi}_{2:n}^T(R^T LR \otimes I_m)\hat{\xi}_{2:n} + \beta\hat{\tau}_{2:n}^T(R^T LR \otimes I_m)\hat{\xi}_{2:n} + (\alpha\hat{\xi}_{2:n} + \hat{\tau}_{2:n})^T\hat{\delta}_{2:n}. \end{cases} \quad (3.22)$$

因为局部代价函数 $f_i^t(x)$, $i \in \mathcal{V}$ 关于 x 的梯度是全局 Lipschitz, 所以存在 $\theta > 0$ 使得

$$\|\nabla f_i^t(x) - \nabla f_i^t(y)\| \leq \theta\|x - y\|, \quad i \in \mathcal{V}, \forall x, y \in \mathbb{R}^m. \quad (3.23)$$

于是可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_4 &\leq (\alpha\beta\gamma_0 - \alpha k)\hat{\xi}_{2:n}^2 + (k + \alpha + \beta\gamma_0)\|\hat{\xi}_{2:n}\|\|\hat{\tau}_{2:n}\| + \theta\alpha^2\|\hat{\xi}_{2:n}\|\|\eta\| + \alpha\theta\|\hat{\tau}_{2:n}\|\|\eta\| \\ &\quad - \hat{\tau}_{2:n}^2 + (\alpha\hat{\xi}_{2:n} + \hat{\tau}_{2:n})^T\hat{\delta}_{2:n} - \alpha^2\hat{\xi}_{2:n}^T(R^T \otimes I_m)h_0 - \alpha\hat{\tau}_{2:n}^T(R^T \otimes I_m)h_0 \\ &\leq -\frac{1}{4}\hat{\tau}_{2:n}^2 + \left(k^2 + \alpha k + \frac{5}{4}\alpha^2 + \beta^2\gamma_0^2 + \alpha\beta\gamma_0\right)\hat{\xi}_{2:n}^2 + (\alpha\hat{\xi}_{2:n} + \hat{\tau}_{2:n})^T\hat{\delta}_{2:n} \\ &\quad - \alpha^2\hat{\xi}_{2:n}^T(R^T \otimes I_m)h_0 - \alpha\hat{\tau}_{2:n}^T(R^T \otimes I_m)h_0 + 2\alpha^2\theta^2\hat{\eta}^2 \end{aligned} \quad (3.24)$$

其中 $\gamma_0 = \lambda_{\max}(L)$.

定义

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \sigma V_4 = q^T(\Phi \otimes I_m)q, \quad (3.25)$$

其中 $q^T = (\hat{\xi}^T, \hat{\eta}^T, \hat{\tau}_{2:n}^T)$, $0 < \sigma < 1$. 易知当控制参数 $k > 1$ 时可以保证 V 的正定性. 由式(3.22)可得, $V_0 := V_1 + V_2 + V_3$ 沿着式(3.19)对时间的导数满足下式:

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 &= -(k-1)\hat{\xi}_{2:n}^2 - \beta\hat{\xi}_{2:n}^T(R^T LR \otimes I_m)\hat{\eta}_{2:n} - \beta\hat{\eta}_{2:n}^T(R^T LR \otimes I_m)\hat{\eta}_{2:n} - (k-1)\hat{\xi}_1^2 \\ &\quad - \alpha(\hat{\xi} + \hat{\eta})^T\tilde{h} + (\hat{\xi} + \hat{\eta})^T\hat{\delta} \\ &= -\beta(\hat{\eta}_{2:n}^T, \hat{\xi}_{2:n}^T)(F \otimes I_m) \begin{pmatrix} \hat{\eta}_{2:n} \\ \hat{\xi}_{2:n} \end{pmatrix} - (k_1 + 1)\hat{\xi}_{2:n}^2 - (k-1)\hat{\xi}_1^2 - \alpha(\hat{\xi} + \hat{\eta})^T h \\ &\quad - \alpha(\hat{\xi} + \hat{\eta})^T h_0 + (\hat{\xi} + \hat{\eta})^T\hat{\delta} \end{aligned} \quad (3.26)$$

其中 $F = \begin{pmatrix} R^T L R & \frac{1}{2} R^T L R \\ \frac{1}{2} R^T L R & \frac{k-k_1-2}{\beta} I_{n-1} \end{pmatrix}$, 正参数 k_1 的取值将在下面给出.

由于图 \mathcal{G} 是连通的, 所以 $R^T L R$ 是正定的. 由此可知, 当

$$k \geq k_1 + 2 + \frac{\beta}{4} \gamma_0, \quad (3.27)$$

成立时, F 是半正定的. 因为 f_i^t 是 ω_i -强凸, 则

$$\eta_i^T (\nabla f_i^t(\eta_i + x^*) - \nabla f_i^t(x^*)) \geq \omega_i \|\eta_i\|^2, \forall i \in \mathcal{V}.$$

令 $\omega = \min\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, 则有

$$\eta^T h = \sum_{i=1}^n \eta_i^T (\nabla f_i^t(\eta_i + x^*) - \nabla f_i^t(x^*)) \geq \omega \sum_{i=1}^n \|\eta_i\|^2 = \omega \|\eta\|^2. \quad (3.28)$$

同时由于 ∇f_i^t 满足式(3.23), 所以

$$\begin{aligned} -\alpha \xi^T h &= -\alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^T (\nabla f_i^t(\eta_i + x^*) - \nabla f_i^t(x^*)) \leq \alpha \theta \sum_{i=1}^n |\xi_i| \|\eta_i\| \\ &\leq \alpha \theta \left(\frac{\theta}{4\omega} + 1 \right) \|\hat{\xi}\|^2 + \alpha \theta \frac{\omega}{\theta + 4\omega} \|\hat{\eta}\|^2. \end{aligned} \quad (3.29)$$

令 $k_1 = \alpha \theta (1 + \frac{\theta}{4\omega})$, 结合式(3.26), (3.27), (3.28)和(3.29)可得,

$$\dot{V}_0 \leq -\hat{\xi}_{2:n}^2 - (k - 1 - k_1) \hat{\xi}_1^2 - \frac{4\alpha\omega^2}{\theta + 4\omega} \|\hat{\eta}\|^2 - \alpha(\xi + \eta)^T h_0 + (\hat{\xi} + \hat{\eta})^T \hat{\delta}. \quad (3.30)$$

再由式(3.30)和(3.24)可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq - (1 - \sigma\sigma_0) \hat{\xi}_{2:n}^2 - (k - 1 - k_1) \hat{\xi}_1^2 - \left(\frac{4\alpha\omega^2}{\theta + 4\omega} - 2\sigma\alpha^2\theta^2 \right) \|\hat{\eta}\|^2 + (\hat{\xi} + \hat{\eta})^T \hat{\delta} \\ &\quad - \frac{\sigma}{4} \hat{\tau}_{2:n}^2 + (\alpha \hat{\xi}_{2:n} + \hat{\tau}_{2:n})^T \hat{\delta}_{2:n} - \alpha(\xi + \eta)^T h_0 - \sigma\alpha^2 \hat{\xi}_{2:n}^T (R^T \otimes I_m) h_0 \\ &\quad - \sigma\alpha \hat{\tau}_{2:n}^T (R^T \otimes I_m) h_0, \end{aligned} \quad (3.31)$$

其中 $\sigma_0 = k^2 + \alpha k + \frac{5}{4}\alpha^2 + \beta^2\gamma_0^2 + \alpha\beta\gamma_0$, k 的取值满足式(3.27). 令

$$0 < \sigma < \min \left\{ \frac{2\omega^2}{\alpha\theta^2(\theta + 4\omega)}, \frac{1}{\sigma_0} \right\},$$

由式(3.31)和(3.25)可得

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leq -(1 - \sigma\sigma_0)\hat{\xi}_{2:n}^2 - (k - 1 - k_1)\hat{\xi}_1^2 - \left(\frac{4\alpha\omega^2}{\theta + 4\omega} - 2\sigma\alpha^2\theta^2\right)\hat{\eta}^2 - \frac{\sigma}{4}\hat{\tau}_{2:n}^2 \\
&\quad + (2 + \alpha)\|q\|(\|\hat{\delta}\| + \alpha\|h_0\|) \\
&\leq -\hat{\rho}\|q\|^2 + \alpha(2 + \alpha)\|q\|(\|\delta\| + \|h_0\|) \\
&\leq -\frac{\hat{\rho}}{2}\|q\|^2 - \frac{\hat{\rho}}{2}\|q\|^2 + \alpha(2 + \alpha)\|q\|(\|\delta\| + \|h_0\|)
\end{aligned} \tag{3.32}$$

其中

$$\hat{\rho} \triangleq \min \left\{ 1 - \sigma\sigma_0, k - 1 - k_1, \frac{4\alpha\omega^2}{\theta + 4\omega} - 2\sigma\alpha^2\theta^2, \frac{\sigma}{4} \right\} > 0.$$

由 $\nabla f_i^t(x^*)$, $i \in \mathcal{V}$, $t \in [0, T]$ 的有界性可知, 存在一个正常数 M 使得 $\|\nabla f_i^t(x^*)\| \leq M$, 那么易知 $\|h_0\| \leq 2\sqrt{n}M$. 于是再由式(3.32)可知

$$\dot{V}(t) \leq -\frac{\hat{\rho}}{2}\|q(t)\|^2, \quad \forall \|q(t)\| \geq \frac{2\alpha(2 + \alpha)}{\hat{\rho}}(\|\delta(t)\| + 2\sqrt{n}M) > 0, t \in [0, T].$$

根据文[81]中的定理 4.19 可以得到: 对任意的 $t \in [0, T]$ 成立,

$$\|q(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\Phi)}{\lambda_{\min}(\Phi)}} \left(\|q(0)\| e^{-\frac{\hat{\rho}}{4\lambda_{\max}(\Phi)}t} + \frac{2\alpha(2 + \alpha)}{\hat{\rho}} \left(2\sqrt{n}M + \sup_{0 \leq s \leq t} \|\delta(s)\| \right) \right). \tag{3.33}$$

由于 f_i^t , $i \in \mathcal{V}$ 是可微的, 故其也是局部 Lipschitz, 于是存在正常数 \tilde{l} 使得

$$\|f_i^s(x_i(s)) - f_i^s(x^*)\| \leq \tilde{l}\|x_i(s) - x^*\|, i \in \mathcal{V}, s \in [0, T].$$

从而可得,

$$R(T) \leq \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=1}^n \tilde{l}\|x_i(s) - x^*\| ds \leq \frac{\tilde{l}\sqrt{n}}{T} \int_0^T \|q(s)\| ds,$$

由此可以得到不等式(3.21), 定理得证. \square

事实上, 当系统处于没有不确定性影响的理想状态下, 即代价函数是时不变的 (i.e., $f_i^t(x) = f_i(x)$) 以及算法(3.15)中 $\delta_i(t) = 0$, i.e.,

$$\begin{cases} u_i(t) = -ky_i(t) - \beta \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_i(t) - x_j(t)) - \alpha \nabla_{x_i} f_i(x_i(t)) - v_i(t), \\ \dot{v}_i(t) = \alpha \beta \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}((x_i(t) - x_j(t)) + (y_i(t) - y_j(t))), \quad i \in \mathcal{V}. \end{cases} \tag{3.34}$$

这时运用与定理 3.5 类似的分析技巧, 可以证明在此分布式控制协议下, 二阶多自主体系统 (3.12) 同步收敛到标准分布式优化问题 (3.13) 的最优解. 此外, 关于梯度 ∇f_i , $i \in \mathcal{V}$ 的全局 Lipschitz 的假设条件可以放松到局部 Lipschitz.

定理 3.6. 假设 (A3.6)-(A3.7) 成立, 如果对任意的 $i \in \mathcal{V}$, $f_i^t(x)$ 可微并且它关于 x 的梯度是局部 Lipschitz, 当初始条件 $x_i(0), \dot{x}_i(0), v_i(0) \in \mathbb{R}^m$ 满足 $\sum_{i=1}^n v_i(0) = \mathbf{0}_m$ 时, 那么存在控制常数 $k, \alpha, \beta > 0$ 使得二阶系统 (3.12) 在分布式优化算法 (3.34) 下将指数同步收敛到优化问题 (3.13) 的最优解.

证明: 取式 (3.25) 中的 Lyapunov 函数, 其中 $k \geq k_1 + 2 + \frac{\beta}{4}\gamma_0$, $0 < \sigma < 1$, $k_1 > 0$. 令

$$\varrho_* = \frac{1}{2}(\hat{\eta}(0) + \hat{\xi}(0))^2 + \frac{k-1}{2}\hat{\eta}^2(0) + \alpha\hat{\xi}_{2:n}^2(0) + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha\beta\lambda_{\min}(R^T L R)}\right)\hat{\tau}_{2:n}^2(0),$$

定义如下两个紧集:

$$K_0 = \left\{ (\hat{\eta}^T, \hat{\xi}^T, \hat{\tau}_{2:n}^T)^T | V(\hat{\eta}, \hat{\xi}, \hat{\tau}_{2:n}) \leq V(\hat{\eta}(0), \hat{\xi}(0), \hat{\tau}_{2:n}(0)) \right\},$$

和

$$K_1 = \left\{ (\hat{\eta}^T, \hat{\xi}^T)^T | \frac{1}{8}\hat{\xi}_1^2 + \frac{\alpha}{5}\hat{\xi}_{2:n}^2 + \frac{\beta\gamma_0}{8}\hat{\eta}^2 \leq \varrho_* \right\}.$$

于是当 $(\hat{\eta}^T, \hat{\xi}^T, \hat{\tau}_{2:n}^T)^T \in K_0$ 成立时, 有 $(\hat{\eta}^T, \hat{\xi}^T)^T \in K_1$, 且 η 也属于某一个紧集. 由于 ∇f_i 是局部 Lipschitz, 故存在 $\theta > 0$ 使得 $-\alpha\xi^T h \leq \alpha\theta \sum_{i=1}^n |\xi_i| |\eta_i|$. 令 $k_1 = \alpha\theta(1 + \frac{\theta}{4\omega})$, $\sigma_0 = k^2 + \alpha k + \frac{5}{4}\alpha^2 + \beta^2\gamma_0^2 + \alpha\beta\gamma_0$ 且 $0 < \sigma < \min \left\{ \frac{2\omega^2}{\alpha\theta^2(\theta + 4\omega)}, \frac{1}{\sigma_0} \right\}$, 运用类似于定理 3.5 的分析技巧, 可以证明

$$\dot{V} \leq -\min \left\{ 1 - \sigma\sigma_0, k - 1 - k_1, \frac{4\alpha\omega^2}{\theta + 4\omega} - 2\sigma\alpha^2\theta^2, \frac{\sigma}{4} \right\} \|q\|^2.$$

由此可以推导出系统 (3.12) 的指数收敛性. \square

注 3.4. 定理 3.6 的结论也可以推广到一些非线性系统, 如具有 Lagrange 形式的机器系统:

$$M_i(x_i)\ddot{x}_i + C_i(x_i, \dot{x}_i)\dot{x}_i = u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.35)$$

其中 x_i 表示系统的广义坐标向量, u_i 是控制输入, 其具体的形式如下:

$$\begin{aligned} u_i &= C_i(x_i, \dot{x}_i)\dot{x}_i - kM_i(x_i)\dot{x}_i - \alpha M_i(x_i)\nabla f_i(x_i) - \beta M_i(x_i) \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_i - x_j) \\ &\quad - M_i(x_i)v_i, \\ \dot{v}_i &= \alpha\beta \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}((x_i - x_j) + (\dot{x}_i - \dot{x}_j)), \quad i \in \mathcal{V}. \end{aligned}$$

虽然文[29]考虑了二阶 Lagrange 系统的分布式凸交优化问题, 但是他们的方法不能直接推广到一般的分布式优化问题(3.13), 而且只适用于集合的交集非空这种特殊的相容情形, 对集合的交集是空集这种情形是失效的. 其主要原因在于对于一般的分布式优化, 当局部代价函数不同时, 条件 $\bigcap_{i=1}^n \arg \min f_i(x) \neq \emptyset$ 无法满足. 而本文通过引入一项积分反馈 v_i 来消除由于局部函数的梯度不同所造成的误差, 将其推广到一般的分布式优化问题, 同时将分布式优化与控制理论有效地结合起来. 除此之外, 本文所提的算法是指数收敛的, 并且可以得到其收敛速度, 而文[29]只是给出一种渐近收敛的算法, 得不到其收敛速度.

下面给出一个数值仿真来验证分布式优化算法(3.34)的有效性.

例 3.2. 考虑由 5 个具有二阶积分器动力学的自主体构成的系统, 假设系统的通信拓扑图所对应的赋权邻接矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

个体的局部代价函数如下:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{x^2}{\ln(2+x^2)} + \frac{x^2}{2}, & f_2(x) &= x^2 + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}, & f_3(x) &= x^2 + 1, \\ f_4(x) &= x^2 + \frac{x^2}{\ln(2+x^2)}, & f_5(x) &= 2(x-1)^2 - 2x. \end{aligned}$$

显然, 这 5 个函数满足强凸和梯度全局 Lipschitz 的假设. 取控制参数 $\alpha = \beta = 1$, $k = 43$, 辅助变量 $v_i(0) = 0$, $i = 1, \dots, 5$, 随机选取系统的初始状态 $x_i(0), \dot{x}_i(0)$,

$i = 1, \dots, 5$. 图3.3 表示系统在无不确定性扰动的情形下, 所有个体的状态在算法(3.34)下将同步收敛到问题 $\min_x \sum_{i=1}^5 f_i(x)$ 的最优解 $x^* = 0.338$ 且速度趋于 0. 当系统中存在一些不确定性干扰时, 如取 $\delta_i(t) = \sin(\frac{\pi}{4} + t)$, $i = 1, \dots, 5$, 从图3.4可以看出在算法(3.15) 下所有个体的状态和速度最终将同步, 但是却在最优解的一个有界区域里面波动.

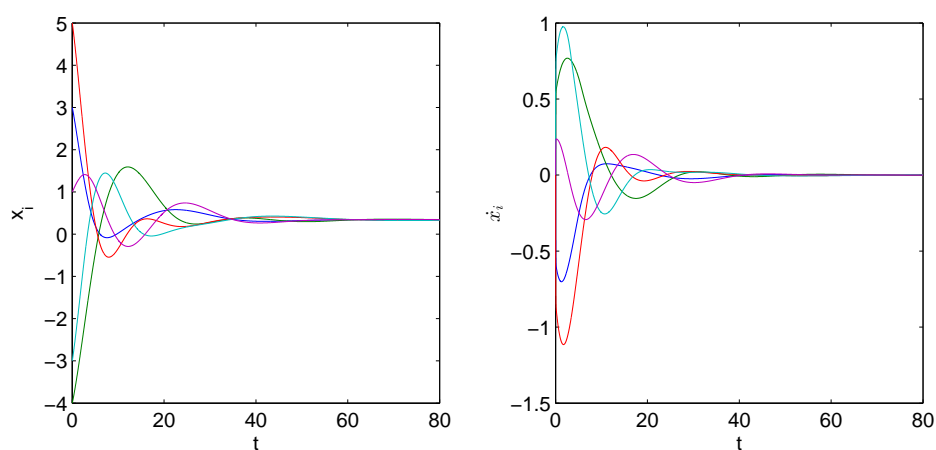


图 3.3: 无不确定性影响时算法(3.34)的收敛性.

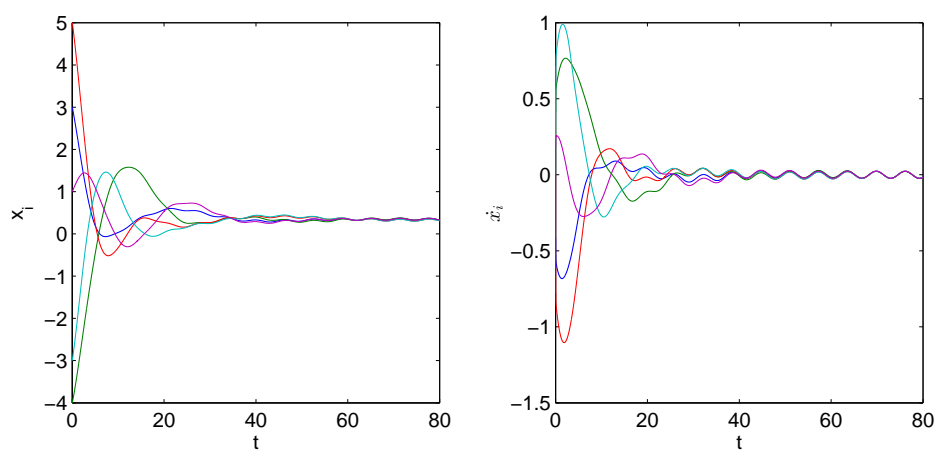


图 3.4: 不确定性影响为 $\delta_i(t) = \sin(\frac{\pi}{4} + t)$ 时算法(3.15)的收敛性.

3.3 高阶多主体系统的分布式优化设计

本节研究了高阶多主体系统的分布式优化, 提出一种基于积分反馈的连续时间的分布式优化算法, 将 3.2 节中有关二阶系统的分布式优化结果推广到高阶系统中.

3.3.1 问题描述

不失一般性, 我们先考察具有高阶积分器动态的多主体系统的分布式优化. 考虑由 n 个个体所组成的多主体系统, 个体之间的通信拓扑可以用无向图 $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}\}$ 表示, 第 i 个个体的动态模型用如下的 N -阶积分器表示 ($N \geq 2$):

$$x_i^{(N)} = u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.36)$$

其中 $x_i \in \mathbb{R}^m$ 表示广义的坐标向量, $u_i \in \mathbb{R}^m$ 是控制输入, $x_i^{(N)}$ 表示 x_i 的 N -阶导数.

这 n 个个体通过相互协作来求解下列优化问题

$$\min_x f(x), \quad f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x), \quad (3.37)$$

其中 $f_i: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ 是个体 i 的代价函数, 它是凸的并且只能被第 i 个个体观测到.

下面分别给出关于目标函数结构性质的两个假设条件:

(A3.8) 对任意的个体 $i \in \mathcal{V}$, 其局部代价函数 $f_i(x)$ 是可微的并且其导数在 \mathbb{R}^m 上是 θ_i -Lipschitz.

(A3.9) 对任意的个体 $i \in \mathcal{V}$, 其局部代价函数 $f_i(x)$ 关于 x 在 \mathbb{R}^m 上是 ω_i -强凸, 其中 $\omega_i > 0$.

由假设 (A3.9) 可知, $f(x)$ 是严格凸, 因此优化问题(3.37)存在唯一的最优解 $x^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^m} f(x)$. 这里假设 x^* 是有界的. 系统(3.36)的目标是对于每个个体设计相应的分布式控制协议使得所有个体的状态同步收敛到问题(3.37)的最优解 x^* 且其高阶导数 $x_i^{(s)}$, $s = 1, \dots, N-1$ 趋于 0, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = x^*, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_i^{(s)}(t) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, N-1, \forall i \in \mathcal{V}.$$

3.3.2 算法设计

对第 i 个个体设计如下的分布式控制协议:

$$u_i = -y_i^{(N-1)}k^T - \beta \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_i - x_j) - \alpha \nabla f_i(x_i) - w_i \quad (3.38a)$$

$$\dot{w}_i = \alpha \beta \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \left(\varepsilon_N(x_i - x_j) + (y_i^{(N-1)} - y_j^{(N-1)})\varepsilon^T \right) \quad (3.38b)$$

其中 $y_i^{(N-1)} = (x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(N-1)})$, $k = (k_{N-1}, \dots, k_2, k_1) \in \mathbb{R}^{N-1}$, $\alpha, \beta > 0$, $\varepsilon = (\varepsilon_{N-1}, \varepsilon_{N-2}, \dots, \varepsilon_1)$ 是控制参数. $w_i \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, \dots, n$ 是辅助变量, 可以将其看作是一个积分反馈项用来消除局部函数梯度不同所引起的误差.

记

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}, X^{(s)} = \begin{pmatrix} x_1^{(s)} \\ x_2^{(s)} \\ \vdots \\ x_n^{(s)} \end{pmatrix}, s = 1, 2, \dots, N-1.$$

那么系统(3.36)在控制协议(3.38)下的闭环系统为

$$\begin{cases} \dot{X} &= X^{(1)}, \\ \dot{X}^{(1)} &= X^{(2)}, \\ &\dots \\ \dot{X}^{(N-1)} &= -Y^{(N-1)}k^T - \beta LX - W - \alpha \nabla \tilde{f}(X) \\ \dot{W} &= \alpha \beta L(\varepsilon_N X + Y^{(N-1)}\varepsilon^T), \end{cases} \quad (3.39)$$

其中 $Y^{(N-1)} = (X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(N-1)})$, $\tilde{f}(X) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i)$.

定义一个对称的参数矩阵 $B^N = [b_{ij}^N] \in \mathbb{R}^{N \times N}$, 其中

$$\begin{cases} b_{j1}^N = \frac{\varepsilon_j}{2}, j = 1, \dots, N, \\ b_{Ni}^N = \frac{k_{i-1}\varepsilon_N}{2}, i = 2, \dots, N, \\ b_{ji}^N = \frac{1}{2}(k_j\varepsilon_{i-1} + k_{i-1}\varepsilon_j) - b_{(j+1)(i-1)}^N, i \leq j, j = 2, \dots, N-1. \end{cases} \quad (3.40)$$

且 $k_0 = 1$. 记 $\omega := \min\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, $\theta := \max\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$. 用 λ_1, λ_2 分别表示 Laplace 矩阵 L 的最大、最小正特征根.

3.3.3 主要结论

下面给出分布式算法(3.38)的收敛性分析.

定理 3.7. 假设 (A3.8)-(A3.9) 成立且通信拓扑图 \mathcal{G} 是连通的. 当控制参数 $\alpha, \beta > 0$, $\{k_i\}_{i=1}^{N-1}, \{\varepsilon_i\}_{i=1}^N$ 满足如下条件时:

(i) B^N 是正定矩阵,

$$(ii) \begin{cases} \varepsilon_N > 0, \\ \varepsilon_i k_i > 2b_{(i+1)(i)}^N + (N-1)\alpha\theta\left(\frac{\theta}{4\varepsilon_N\omega} + 1\right)\varepsilon_i^2 + \frac{\beta\lambda_1^2(N-1)}{4\lambda_2}\varepsilon_i^2, \quad i = 1, \dots, N-1, \end{cases}$$

和初始条件 $x_i(0), y_i^{(N-1)}(0), w_i(0) \in \mathbb{R}^m$ 满足 $\sum_{i=1}^n w_i(0) = \mathbf{0}_m$ 时, 那么 N -阶系统(3.36)在分布式优化算法(3.38)下将同步收敛到优化问题(3.37)的最优解, i.e.,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = x^*, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_i^{(N-1)}(t) = \mathbf{0}_{m \times (N-1)}, \quad i \in \mathcal{V}.$$

证明: 记 L 为图 \mathcal{G} 的 Laplace 矩阵, 则有 $\mathbf{1}_n^T L = \mathbf{0}_n^T$, 结合式(3.38)可知 $\sum_{i=1}^n \dot{w}_i = \mathbf{0}_m$, 所以

$$\sum_{i=1}^n w_i(t) = \sum_{i=1}^n w_i(0) = \mathbf{0}_m, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.41)$$

易知闭环系统(3.39)的平衡点 $(X^*, Y^{(N-1)*}, W^*)$ 满足

$$Y^{(N-1)*} = \mathbf{0}, \quad LX^* = \mathbf{0}, \quad W^* + \alpha \nabla \tilde{f}(X^*) = \mathbf{0}, \quad (3.42)$$

其中 $Y^{(N-1)*} := Y^{(N-1)}|_{X=X^*}$. 由于图 \mathcal{G} 是连通的, 结合式(3.41)和(3.42)可得

$$X^* = \mathbf{1}_n \otimes x^*.$$

经过坐标变换

$$\eta = X - X^*, \quad \tau = W - W^*, \quad \xi^{(s)} = X^{(s)} - X^{*(s)}, \quad s = 1, \dots, N-1,$$

闭环系统(3.39)的平衡点移到零点, 而变换后的系统为

$$\begin{cases} \dot{\eta} = \xi^{(1)} \\ \dot{\xi}^{(1)} = \xi^{(2)} \\ \dots \\ \dot{\xi}^{(N-2)} = \xi^{(N-1)} \\ \dot{\xi}^{(N-1)} = -\xi k^T - \beta L \eta - \tau - \alpha h \\ \dot{\tau} = \alpha \beta L (\varepsilon_N \eta + \xi \varepsilon^T) \end{cases} \quad (3.43)$$

其中 $h = \nabla \tilde{f}(\eta + X^*) - \nabla \tilde{f}(X^*)$, $\xi = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(N-1)})$.

定义正交矩阵 $Q = (r, R) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 其中 $r = \frac{1_n}{\sqrt{n}}$, $R \in \mathbb{R}^{n \times (n-1)}$ 且满足 $\mathbf{1}_n^T R = \mathbf{0}_{n-1}^T$, $R^T R = I_{n-1}$. 为了简单起见, 不失一般性, 取 $m = 1$. 经过正交变换

$$\hat{\eta} = Q^T \eta, \quad \hat{\tau} = Q^T \tau, \quad \hat{\xi}^{(s)} = Q^T \xi^{(s)}, \quad s = 1, \dots, N-1,$$

系统(3.43)可被解耦为以下两个子系统:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\eta}}_1 = \hat{\xi}_1^{(1)} \\ \dot{\hat{\xi}}_1^{(s)} = \hat{\xi}_1^{(s+1)}, \quad s = 1, \dots, N-2 \\ \dot{\hat{\xi}}_1^{(N-1)} = -\hat{\xi}_1 k - \alpha r^T h \\ \dot{\hat{\tau}}_1 = 0 \end{cases} \quad (3.44)$$

和

$$\begin{cases} \dot{\hat{\eta}}_{2:n} = \hat{\xi}_{2:n}^{(1)} \\ \dot{\hat{\xi}}_{2:n}^{(s)} = \hat{\xi}_{2:n}^{(s+1)}, \quad s = 1, \dots, N-2 \\ \dot{\hat{\xi}}_{2:n}^{(N-1)} = -\hat{\xi}_{2:n} k - \beta(R^T L R) \hat{\eta}_{2:n} - \hat{\tau}_{2:n} - \alpha R^T h \\ \dot{\hat{\tau}}_{2:n} = \alpha \beta (R^T L R) (\varepsilon_N \hat{\eta}_{2:n} + \hat{\xi}_{2:n} \varepsilon^T) \end{cases} \quad (3.45)$$

其中方程(3.44), (3.45)中的下标 $[]_1$ 和 $[]_{2:n}$ 分别表示向量 $[]$ 的第一个和剩余的元素. 为了记号方便, 令

$$\begin{cases} Z_1 = \hat{\xi}_1^{(N-1)} \\ Z_2 = \hat{\xi}_1^{(N-2)} \\ \dots \\ Z_{N-1} = \hat{\xi}_1^{(1)} \\ Z_N = \hat{\eta}_1 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} M_1 = \hat{\xi}_{2:n}^{(N-1)} \\ M_2 = \hat{\xi}_{2:n}^{(N-2)} \\ \dots \\ M_{N-1} = \hat{\xi}_{2:n}^{(1)} \\ M_N = \hat{\eta}_{2:n} \end{cases}, \quad (3.46)$$

由此可得

$$\begin{cases} \dot{Z}_N = Z_{N-1} \\ \dot{Z}_{N-1} = Z_{N-2} \\ \dots \\ \dot{Z}_2 = Z_1 \\ \dot{Z}_1 = -k_1 Z_1 - k_2 Z_2 - \dots - k_{N-1} Z_{N-1} - \alpha r^T h \\ \dot{\hat{\tau}}_1 = 0 \end{cases} \quad (3.47)$$

和

$$\begin{cases} \dot{M}_N = M_{N-1} \\ \dot{M}_{N-1} = M_{N-2} \\ \dots \\ \dot{M}_2 = M_1 \\ \dot{M}_1 = -k_1 M_1 - \dots - k_{N-1} M_{N-1} - \hat{\tau}_{2:n} - \alpha R^T h - \beta(R^T L R) M_N \\ \dot{\hat{\tau}}_{2:n} = \alpha \beta (R^T L R) \sum_{i=1}^N \varepsilon_i M_i \end{cases} \quad (3.48)$$

记 $\tilde{Z}_N = (Z_1^T, \dots, Z_N^T)^T$, $\tilde{M}_N = (M_1^T, \dots, M_N^T)^T$.

选取一个候选的 Lyapunov 函数如下:

$$V_N = \tilde{Z}_N^T B^N \tilde{Z}_N + \tilde{M}_N^T B^N \tilde{M}_N + \frac{1}{2\alpha\beta} \hat{\tau}_{2:n}^T (R^T L R)^{-1} \hat{\tau}_{2:n}, \quad (3.49)$$

它沿系统(3.47)和(3.48)的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_N = & - \sum_{i=1}^{N-1} (\varepsilon_i k_i - 2b_{(i+1)(i)}^N) (Z_i^2 + M_i^2) - \alpha(\varepsilon_N \eta + \xi \varepsilon^T)^T h \\ & - \beta \left(\sum_{i=1}^N \varepsilon_i M_i \right)^T (R^T L R) M_N, \end{aligned} \quad (3.50)$$

下面证明当控制参数 $\{k_i\}_{i=1}^{N-1}, \{\varepsilon_i\}_{i=1}^N$ 满足条件 (i) 和 (ii) 时, V_N 确实是 N -阶系统(3.44)和(3.45)的 Lyapunov 函数.

首先利用数学归纳法证明式(3.49)中 V_N 沿系统(3.47)和(3.48)的导数具有(3.50)的形式且 $\dot{V}_N \leq 0$:

步骤 1: 当 $N = 2$ 时, 令 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$. 这时(3.49)中 Lyapunov 函数为

$$V_2 = \frac{1}{2} (\hat{\xi}^{(1)})^2 + \hat{\eta}^T \hat{\xi}^{(1)} + \frac{k_1}{2} \hat{\eta}^2 + \frac{1}{2\alpha\beta} \hat{\tau}_{2:n}^T (R^T L R)^{-1} \hat{\tau}_{2:n}, \quad (3.51)$$

容易得到 \dot{V}_2 为

$$\dot{V}_2 = -(k_1 - 1)(\hat{\xi}^{(1)})^2 - \beta(\hat{\xi}_{2:n}^{(1)} + \hat{\eta}_{2:n})^T (R^T L R) \hat{\eta}_{2:n} - \alpha(\xi^{(1)} + \eta)^T h, \quad (3.52)$$

且它满足(3.50)的形式. 当参数 k_1 满足条件 (i) 和 (ii) 时, 下列不等式成立

$$k_1 > 1 + \alpha\theta \left(1 + \frac{\theta}{4\omega} \right) + \frac{\beta\lambda_1^2}{4\lambda_2}. \quad (3.53)$$

因为 f_i 是 ω_i -强凸, 所以有

$$\begin{aligned}\eta^T h &= \sum_{i=1}^n \eta_i^T (\nabla f_i(\eta_i + x^*) - \nabla f_i(x^*)) \\ &\geq \omega \sum_{i=1}^n \|\eta_i\|^2 \\ &= \omega \eta^2.\end{aligned}\tag{3.54}$$

又因为 ∇f_i 是 θ_i -Lipschitz 的, 则有

$$\begin{aligned}-\alpha(\xi^{(1)})^T h &= -\alpha \sum_{i=1}^n (\xi_i^{(1)})^T (\nabla f_i(\eta_i + x^*) - \nabla f_i(x^*)) \\ &\leq \alpha \theta \sum_{i=1}^n \|\xi_i^{(1)}\| \|\eta_i\| \\ &\leq \alpha \theta \left(1 + \frac{\theta}{4\omega}\right) \|\hat{\xi}^{(1)}\|^2 + \frac{\alpha \theta \omega}{\theta + 4\omega} \eta^2.\end{aligned}\tag{3.55}$$

于是

$$\dot{V}_2 \leq -(k_1 - 1)(\hat{\xi}^{(1)})^2 + \frac{\beta \lambda_1^2}{4\lambda_2} (\hat{\xi}_{2:n}^{(1)})^2 + \alpha \theta \left(1 + \frac{\theta}{4\omega}\right) \|\hat{\xi}^{(1)}\|^2 - \frac{4\alpha\omega^2}{\theta + 4\omega} \eta^2, \tag{3.56}$$

故当(3.53)成立, $\dot{V}_2 \leq 0$.

步骤 2: 假设对于任意的 $(N-1)$ -阶系统(3.44)和(3.45), 式(3.49)中 V_{N-1} 的导数具有式(3.50)的形式. 这时对于 N -阶系统, 有

$$\begin{aligned}V_N &= V_{N-1} + \tilde{Z}_{N-1}^T \Phi \tilde{Z}_{N-1} + \tilde{M}_{N-1}^T \Phi \tilde{M}_{N-1} + \sum_{i=1}^{N-1} k_{i-1} \varepsilon_N M_N^T M_i + \frac{1}{2} k_{N-1} \varepsilon_N M_N^2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N-1} k_{i-1} \varepsilon_N Z_N^T Z_i + \frac{1}{2} k_{N-1} \varepsilon_N Z_N^2,\end{aligned}\tag{3.57}$$

其中对称矩阵 $\Phi = B^N(1 : N-1, 1 : N-1) - B^{N-1} := [\phi_{ij}] \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$ 满足

$$\begin{cases} |\phi_{(N+i-j)j}| = \frac{1}{2}(k_{N-1}\varepsilon_{j-1} - k_{j-2}\varepsilon_N), \text{ sign}(\phi_{ij}) = (-1)^{N-1-i}, \\ \quad j = 1+i, \dots, N-i, \ i = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{N-2}{2} \rfloor; \\ \phi_{ij} = 0, \quad \text{否则.} \end{cases}$$

由式(3.47)和(3.48)可得

$$\dot{V}_{N-1}|_N = \dot{V}_{N-1}|_{N-1} - k_{N-1} Z_{N-1}^T \sum_{i=1}^{N-1} \varepsilon_i Z_i - k_{N-1} M_{N-1}^T \sum_{i=1}^{N-1} \varepsilon_i M_i,$$

其中 $(\cdot)|_s$ 表示 (\cdot) 沿 s -阶系统(3.47)和(3.48)的导数. 于是由(3.49)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_N &= - \sum_{i=1}^{N-2} (\varepsilon_i k_i - 2b_{(i+1)(i)}^{N-1})(Z_i^2 + M_i^2) - (\varepsilon_{N-1} k_{N-1} - \varepsilon_N k_{N-2})(Z_{N-1}^2 + M_{N-1}^2) \\ &\quad + \left((\varepsilon_{N-3} k_{N-1} - \varepsilon_N k_{N-4})(Z_{N-2}^2 + M_{N-2}^2) - (\varepsilon_{N-5} k_{N-1} - \varepsilon_N k_{N-6})(Z_{N-3}^2 + M_{N-3}^2) \right. \\ &\quad \left. + \dots + (-1)^{N-1-\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \tilde{k}(Z_{1+\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}^2 + M_{1+\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}^2) \right) \\ &\quad - \alpha(\varepsilon_N \eta + \xi \varepsilon^T)^T h - \beta \left(\sum_{i=1}^N \varepsilon_i M_i \right)^T (R^T L R) M_N \\ &= - \sum_{i=1}^{N-1} (\varepsilon_i k_i - 2b_{(i+1)(i)}^N)(Z_i^2 + M_i^2) - \beta \left(\sum_{i=1}^N \varepsilon_i M_i \right)^T (R^T L R) M_N \\ &\quad - \alpha(\varepsilon_N \eta + \xi \varepsilon^T)^T h \end{aligned} \quad (3.58)$$

其中 $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ 表示不超过 $\frac{N}{2}$ 的最大整数, 且

$$\tilde{k} = \begin{cases} \varepsilon_1 k_{N-1} - \varepsilon_N, & N \text{ 为奇数,} \\ \varepsilon_2 k_{N-1} - \varepsilon_N k_1, & N \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

另外, 利用类似于 \dot{V}_2 的分析方法, 由式(3.58)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_N &\leq - \sum_{i=1}^{N-1} (\varepsilon_i k_i - 2b_{(i+1)(i)}^N)(Z_i^2 + M_i^2) - \alpha \varepsilon_N \omega \|\eta\|^2 + \frac{\beta \lambda_1^2 (N-1)}{4\lambda_2} \sum_{i=1}^{N-1} \varepsilon_i^2 M_i^2 \\ &\quad + (N-1) \alpha \theta \left(\frac{\theta}{4\varepsilon_N \omega} + 1 \right) (\varepsilon_{N-1}^2 \|\hat{\xi}^{(1)}\|^2 + \dots + \varepsilon_1^2 \|\hat{\xi}^{(N-1)}\|^2) + \frac{\alpha \theta \omega \varepsilon_N}{\theta + 4\varepsilon_N \omega} \|\eta\|^2 \\ &\leq - \sum_{i=1}^{N-1} (\varepsilon_i k_i - 2b_{(i+1)(i)}^N)(Z_i^2 + M_i^2) + \frac{\beta \lambda_1^2 (N-1)}{4\lambda_2} \sum_{i=1}^{N-1} \varepsilon_i^2 M_i^2 \\ &\quad + (N-1) \alpha \theta \left(\frac{\theta}{4\varepsilon_N \omega} + 1 \right) (\varepsilon_{N-1}^2 \|\hat{\xi}^{(1)}\|^2 + \dots + \varepsilon_1^2 \|\hat{\xi}^{(N-1)}\|^2) - \frac{4\omega \varepsilon_N}{\theta + 4\varepsilon_N \omega} \|\eta\|^2, \end{aligned}$$

由此可知

$$\begin{aligned} \dot{V}_N \leq & - \sum_{i=1}^{N-1} \left(\varepsilon_i k_i - 2b_{(i+1)(i)}^N - \frac{\beta \lambda_1^2 (N-1)}{4\lambda_2} \varepsilon_i^2 - (N-1)\alpha\theta \left(\frac{\theta}{4\varepsilon_N \omega} + 1 \right) \varepsilon_i^2 \right) M_i^2 \\ & - \sum_{i=1}^{N-1} \left(\varepsilon_i k_i - 2b_{(i+1)(i)}^N - (N-1)\alpha\theta \left(\frac{\theta}{4\varepsilon_N \omega} + 1 \right) \varepsilon_i^2 \right) Z_i^2 - \frac{4\omega \varepsilon_N}{\theta + 4\varepsilon_N \omega} \|\eta\|^2. \end{aligned} \quad (3.59)$$

当条件 (ii) 成立时, 那么

$$\dot{V}_N \leq 0.$$

又由条件 (i) B^N 的正定性容易证明 V_N 的正定性. 因此, V_N 确实是 N -阶系统(3.44)和(3.45)的 Lyapunov 函数.

根据 LaSalle 不变集原理^[81]可知, N -阶系统(3.43)将收敛到 \mathcal{M} 的最大不变集上, 其中

$$\mathcal{M} = \left\{ \eta, \{\xi^{(s)}\}_{s=1}^{N-1}, \tau \mid \eta = \xi^{(1)} = \dots = \xi^{(N-1)} = \tau = \mathbf{0} \right\},$$

于是可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi^{(s)}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t) = 0, s = 1, \dots, N-1.$$

定理得证. □

考虑一般的高阶线性系统

$$\dot{X}(t) = AX(t) + bu(t), \quad (3.60)$$

其中 $X \in \mathbb{R}^N$, $u \in \mathbb{R}$ 分别表示第 i 个个体的状态和控制输入, $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $b \in \mathbb{R}^N$ 分别为常数矩阵. 记 A 的特征多项式为

$$\det(sI_N - A) = s^N + \alpha_{N-1}s^{N-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0.$$

如果 (A, b) 能控, 则存在一个非奇异矩阵 $P \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 使得系统(3.60)在坐标变换 $\bar{X} = PX$ 下变成如下的 Brunovsky 标准形式:

$$\dot{\bar{X}}(t) = \tilde{A}\bar{X}(t) + \tilde{b}u(t), \quad (3.61)$$

其中

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{N-2} & -\alpha_{N-1} \end{pmatrix}, \tilde{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

注 3.5. 如果每个自主体的动态具有 Brunovsky 标准形:

$$\begin{cases} \dot{\bar{X}}_i(t) = \tilde{A}\bar{X}_i(t) + \tilde{b}u_i(t), \\ x_i(t) = C\bar{X}_i(t), \quad C = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^N, \quad i = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (3.62)$$

那么利用类似于高阶积分器的控制器设计策略(3.38)和分析技巧, 可以证明系统(3.62)的输出 x_i 将在分布式控制协议

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha_0 x_i - y_i^{(N-1)}(k - \varpi)^T - \beta \sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_i - x_j) - \alpha \nabla f_i(x_i) - w_i \\ \dot{w}_i &= \alpha \beta \sum_{j \in N_i} a_{ij} \left(\varepsilon_N(x_i - x_j) + (y_i^{(N-1)} - y_j^{(N-1)})\varepsilon^T \right) \end{aligned}$$

下同步收敛到优化问题(3.37)的最优解, i.e.,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = x^*, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_i^{(N-1)}(t) = \mathbf{0}_{N-1}, \quad i \in \mathcal{V},$$

其中 $\varpi = (\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1})$, $y_i^{(N-1)}$ 表示变量 \bar{X}_i 除去第一个元素 x_i 外剩余的元素构成的向量, 控制参数 $\alpha, \beta > 0$, $\{k_i\}_{i=1}^{N-1}, \{\varepsilon_i\}_{i=1}^N$ 满足定理 3.7 的条件.

例 3.3. 下面将以三阶积分器系统为例来说明分布式算法(3.38)中控制参数 $k_1, k_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 的存在性. 取 $\varepsilon_1 = 3, \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$, 那么条件 (i) 和 (ii) 等价于下列两个条件:

- $B^3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{k_1+3k_2-1}{2} & \frac{k_1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{k_1}{2} & \frac{k_2}{2} \end{pmatrix}$ 是正定矩阵,
- $\begin{cases} k_1 > \frac{1}{3} + 6\alpha\theta\left(1 + \frac{\theta}{4\omega}\right) + \frac{3\beta\lambda_1^2}{2\lambda_2} \\ k_2 > k_1 + 2\alpha\theta\left(1 + \frac{\theta}{4\omega}\right) + \frac{\beta\lambda_1^2}{2\lambda_2} \end{cases}$

取

$$\begin{cases} k_1 = 2 + 2\alpha\theta\left(1 + \frac{\theta}{4\omega}\right) + \frac{2\beta\lambda_1^2}{4\lambda_2} \\ k_2 = 2k_1 \end{cases}$$

则易知 B^3 是严格对角占优. 于是由 Gerschgorin 圆盘定理可得 B^3 是正定的.

3.4 小结

本章考察了三个分布式优化问题: 分布式受限约束优化、二阶系统分布式在线优化和高阶线性系统的分布式优化. 首先, 对于受限的分布式优化问题, 针对现实中由于某些计算或量测误差的存在而使精确梯度难以获取的事实, 提出了一个分布式近似梯度算法来求解一般约束优化问题. 同时给出了所有个体渐近同步收敛到优化问题最优解的充分条件以及严格的收敛性证明. 其次, 注意到在大部分分布式优化的文献中, 其算法设计所依托的多自主体系统通常都是一阶的, 并未考虑到每个自主体本身的动力学特性, 没有很好的将算法设计与实体物理系统有效的结合起来. 针对这一现状, 本章考虑了二阶多自主体系统的分布式优化设计问题, 基于积分反馈和次梯度算法的思想, 提出了一种连续时间的分布式优化算法, 并证明了该算法的指数收敛性, 同时还得到其收敛速率. 特别, 还考虑了当系统中存在一些不确定性时, 如何设计相应的在线优化算法, 之前的文献还没有关于高阶的多自主体系统的在线优化分析. 最后我们将二阶的分布式优化内容推广到高阶多自主体系统, 并给出相应的分布式算法设计及其收敛性分析.

第四章 无线传感器网络的分布式定位

本章主要研究分布式优化在无线传感器网络的源点定位问题中的实际应用. 首先基于信号接收强度(RSS)的量测方法, 将源点定位问题转化为一个求解极大似然估计的非凸非线性优化问题, 然后经过一定的放松将此问题进一步转化为求解一系列圆环的交集计算问题. 由于源点只是以一定的概率位于这些非凸圆环中, 从而导致相容和不相容两种不同情形出现. 针对这两种不同的情形, 分别给出相应的凸近似分布式优化建模, 同时设计了统一的分布式优化算法, 而不需要预先获知问题为哪种类型. 此外, 当传感器之间的通信拓扑图是有向时变且一致联合强连通时, 分别给出了该定位算法在相容和不相容两种情形下严格的收敛性证明. 最后大量的仿真实验证实与现有的分布式定位算法相比, 本文所提的算法在估计精度和计算速度上都更有优势.

4.1 问题描述

在一个监测区域 $S \subseteq \mathbb{R}^2$ 内, 有一个位置未知的源节点和 n 个位置已知的传感器(节点), 其中每个传感器具有一定的感知、计算和通信能力. 人们关注的问题是如何设计相应的定位算法通过利用这 n 个位置已知的传感器来估计源点的位置. 注意到在实际的应用中, 一方面由于一些环境因素的影响或者网络拥塞等一些意外事件的发生可能会造成传感器之间的通信时而中断, 另一方面由于每个传感器节点的电池能量是有限的, 各传感器之间的频繁通信可能会造成能量的巨大消耗. 这样使得设计对于通信网络拓扑具有良好的鲁棒性同时又低功耗的定位算法十分必要. 以上两个因素促使我们考虑具有时变通信拓扑结构的传感器网络, 而此类问题是定位问题中的一个重要的研究方向.

4.1.1 传感器网络

考虑由 n 个传感器构成的传感器网络, 它在 k ($k \geq 0$) 时刻的通信拓扑图可以用时变的有向图 $\mathcal{G}_k = (\mathcal{V}, \mathcal{E}(k))$ 来表示, 其中 $\mathcal{V} = \{1, \dots, n\}$ 表示这 n 个传感器, $\mathcal{E}(k)$ 表示网络在 k 时刻通信链接构成的集合. 对于任意的传感器 $i, j \in \mathcal{V}$, 第 j 个传感器在 k 时刻可以获得第 i 个传感器的状态信息当且仅当 $(i, j) \in \mathcal{E}(k)$.

记 $\mathcal{N}_i(k) = \{j \in \mathcal{V} | (j, i) \in \mathcal{E}(k)\}$, 它表示第 i 个传感器在 k 时刻的所有邻居传感器节点的集合, 这里假设 $i \in \mathcal{N}_i$. 用 $a_{ij}(k)$ 表示通信链接 (j, i) 在 k 时刻的权重值, 如果 $(j, i) \in \mathcal{E}(k)$, 那么 $a_{ij}(k) > 0$; 否则, $a_{ij}(k) = 0$. $A(k) = [a_{ij}(k)]$ 为相应的赋权邻接矩阵. 定义转移矩阵 $\Phi(k, s) = A(k)A(k-1) \cdots A(s)$, $k \geq s \geq 0$.

下面给出关于传感器网络通信拓扑图的两个假设.

(A4.1) (权重规则) 存在 $0 < \eta < 1$ 使得对任意的 $(i, j) \in \mathcal{E}(k)$ 和 $k \geq 0$, $a_{ij} \geq \eta$. 并且对任意的 $i, j \in \mathcal{V}, k \geq 0$, $\sum_{i=1}^n a_{ij}(k) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(k) = 1$ 成立.

(A4.2) (连通性) 通信拓扑图 $\mathcal{G}(k)$ 是一致联合强连通, 即存在一个正整数 T 使得对任意的 $k \geq 0$, 图 $\mathcal{G}([k, k+T)) = (\mathcal{V}, \cup_{t=1}^T \mathcal{E}(k+t))$ 是强连通.

注 4.1. 假设 (A4.1) 被广泛的用于很多的分布式优化文献中^[34, 35, 47]. 在无向图情形下, 此假设条件很容易满足, 比如采用 Metropolis 权重规则^[89]:

$$a_{ij}(k) = \begin{cases} 1/(\max\{|N_i(k)|, |N_j(k)|\} + 1), & (i, j) \in \mathcal{E}(k); \\ 1 - \sum_{p \neq i} a_{ip}(k), & j = i; \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

而在有向图情形下, 可以通过调用一些分布式非平衡修正算法^[90] 将任意一个邻接矩阵转化成满足假设 (A4.1) 中的权重条件的双随机矩阵.

4.1.2 源点定位

用 ρ 表示源点在监测区域 $S \subseteq \mathbb{R}^2$ 内的位置坐标, 用 s_i 表示第 i 个传感器的位置坐标. 源信号的发射功率为 P , 由于信号在传播过程中随距离而衰减, 每个传感器可以根据接收功率来计算传播损耗, 并使用信号传播模型将损耗转化为距离^[91-93]. 该传播模型的具体形式如下:

$$P_{s_i} = g_i \frac{P}{D_{is}^\nu} + \epsilon_i, \quad (4.1)$$

其中 P_{s_i} 是第 i 个传感器接收到的信号功率, g_i 表示增益系数, $D_{is} := \|\rho - s_i\|$, ν 表示功率损耗系数, 它的取值会受传播环境的影响, 一般位于 $2 \sim 5$ 范围内, ϵ_i 表示第 i 个传感器接收到的噪声.

简单起见, 假设噪声序列 $\{\epsilon_i\}_{i=1}^n$ 是相互独立的高斯白噪声, i.e., $\epsilon_i \sim N(0, \sigma_i^2)$. 源信号的发射功率 P 已知, 这里唯一需要估计的参数是源点的位置向

量 ρ . 通过求解如下的非线性最小二乘问题可以得到 ρ 的极大似然估计(MLE):

$$\rho_{ML}^* = \arg \min_{\rho} \sum_{i=1}^n \frac{\left(P_{s_i} - \frac{g_i P}{D_{is}^\nu}\right)^2}{\sigma_i^2} = \arg \min_{\rho} \sum_{i=1}^n \phi_i(\rho), \quad (4.2)$$

其中 $\phi_i(\rho) := \frac{\left(P_{s_i} - \frac{g_i P}{D_{is}^\nu}\right)^2}{\sigma_i^2}$. 由此可以看出, $\phi_i(\rho)$ 将在如下的圆圈上取得最小值 0:

$$\mathcal{C}_i = \left\{ \rho \in \mathbb{R}^2 : \|\rho - s_i\| = \left(\frac{g_i P}{P_{s_i}}\right)^{1/\nu} \right\}.$$

然而, 由于量测噪声的存在, 源点可能不会精确位于圆圈 $\{\mathcal{C}_i\}_{i=1}^n$ 上, 但是会以高概率落于圆环中:

$$R_i = \left\{ \rho : \left(\frac{g_i P}{P_{s_i} + \xi_i \sigma_i}\right)^{\frac{1}{\nu}} < \|\rho - s_i\| < \left(\frac{g_i P}{P_{s_i} - \xi_i \sigma_i}\right)^{\frac{1}{\nu}} \right\}$$

其中 $\xi_i \sigma_i$ 表示第 i 个传感器所受到的噪声的影响, 这里信赖参数 ξ_i 满足 $0 < \xi_i < \frac{P_{s_i}}{\sigma_i}$. 显然, 随着参数 ξ_i 的增加, 源点落于圆环 R_i 的概率也会随着增加, 当 $\xi_i = 3$ 时, 此概率会增至 99.7%. 本章我们令信赖参数取值为 $\xi_i = \min\{3, \frac{P_{s_i}}{\sigma_i}\}$.

定义圆环 R_i 的外部开圆盘为

$$X_i^0 = \left\{ \rho \in \mathbb{R}^2 : \|\rho - s_i\| < \left(\frac{g_i P}{P_{s_i} - \xi_i \sigma_i}\right)^{1/\nu} \right\},$$

以及内部开圆盘为

$$Y_i^0 = \left\{ \rho \in \mathbb{R}^2 : \|\rho - s_i\| < \left(\frac{g_i P}{P_{s_i} + \xi_i \sigma_i}\right)^{1/\nu} \right\}.$$

用 X_i, Y_i 分别表示 X_i^0 和 Y_i^0 的闭包. 那么对任意的 $i \in \mathcal{V}$, 圆环 $R_i = X_i^0 \setminus Y_i = \{x : x \in X_i^0, x \notin Y_i\}$ 是开集. 由于圆环 R_i 是第 i 个传感器的感知区域, 一个自然的假设就是 i 可以获取集合 X_i 和 Y_i 的信息, 但是他们不能获知其它传感器的感知区域 $\{R_j\}_{j \neq i}$. 在此假设下, 原来的定位问题可以转换为一系列圆环的交集计算问题, 即通过求解交集的某一个点, 并将该点作为对于源点位置的估计.

事实上, 对任意给定的信赖参数 ξ_i , 源点仍然会以一定的概率落于圆环 R_i 的外面. 因此圆环的交集计算问题会出现两种不同的情形: i) 相容情形: $R_0 := \bigcap_{i=1}^n R_i \neq \emptyset$; ii) 不相容情形: $R_0 = \emptyset$ (如图4.1所示, 其中黑点和小方块分别表示源节点和传感器节点).

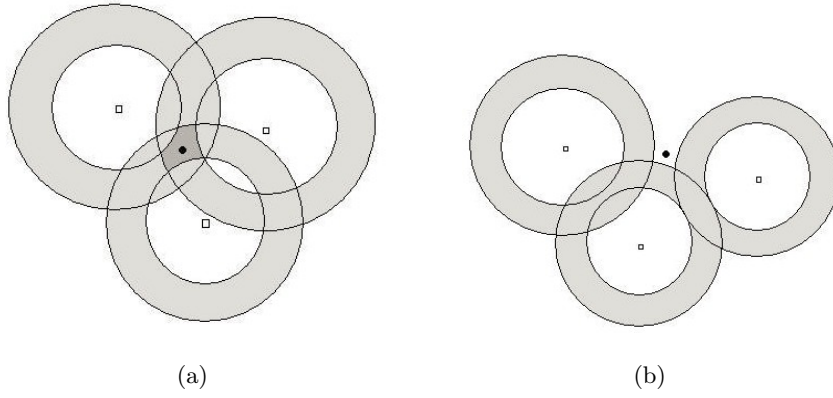


图 4.1: (a) 相容; (b) 不相容.

注 4.2. 在相容情形下, 由于 $\bigcap_{i=1}^n X_i^0 \subseteq X_0 := \bigcap_{i=1}^n X_i$ 是开集和非空集, 所以交集 X_0 至少存在一个内点.

由于圆环的非凸性, 使得圆环的凸交计算也是一个非凸优化问题, 与直接求解非线性最小二乘问题(4.2)相比, 并不能降低计算难度, 这里我们采用如下的凸近似方法:

- i) 不相容情形: 由于源点不可能同时属于所有的圆环 $\{R_i\}_{i=1}^n$, 那么此时可以通过求解下述的赋权优化问题:

$$\min \sum_{i=1}^n (|x|_{X_i}^2 + b_i |x|_{Y_i}^2), \quad (4.3)$$

将其解作为对源点位置的估计值, 即寻找点 $x^* \in \mathbb{R}^2$ 使得它到所有外部圆盘 $\{X_i\}_{i=1}^n$ 和所有内部圆盘 $\{Y_i\}_{i=1}^n$ 的距离加权和最小的.

- ii) 相容情形: 由于源点属于内部圆盘的交集 X_0 , 那么可以通过在 X_0 内寻找一点 $x^* \in X_0$ 来最小化式(4.3)中的加权函数, 即

$$\min \sum_{i=1}^n (|x|_{X_i}^2 + b_i |x|_{Y_i}^2), \quad \text{s.t. } x \in X_0, \quad (4.4)$$

等价于,

$$\min \sum_{i=1}^n b_i |x|_{Y_i}^2, \quad \text{s.t. } x \in X_0, \quad (4.5)$$

其中 b_1, \dots, b_n 是正的标量参数, 它们可以被看作是一组加权参数将原来的非凸圆环交集计算问题转变成一组“虚拟”的凸集的交集计算问题, 其中凸集 $\{Q_i\}_{i=1}^n$ 满足 $Y_i \subseteq Q_i \subseteq X_i$.

记 Z^* , X^* 分别为无约束优化问题(4.3)和约束优化问题(4.4)的最优解集. 下面给出源点定位问题在此种建模下的具体描述:

定义 4.1. 如果能设计出一个分布式算法, 对于任意的初始值 $x_i(0) \in \mathbb{R}^2$, $i \in \mathcal{V}$, 在不相容情形下它能收敛到无约束优化问题(4.3)的某个最优解 $x^* \in Z^*$ 上; 在相容情形下它能收敛到约束优化问题(4.4)的某个最优解 $x^* \in X^*$ 上, 那么就说该定位问题得到解决, 并将最优解 x^* 作为对源点位置的估计.

注 4.3. 本章对于源点定位问题的建模不同于以往的大多数文献^[32, 94, 95], 或者说对于其中的一些适用面更为广泛. 首先, 论文中考虑了一致联合强连通下切换的通信拓扑, 而文献[32, 94, 95]只考虑固定拓扑情形. 其次, 较之现有的文献[32]将定位问题转化成易解的无约束凸交计算问题, 我们这里考虑的受限的约束优化问题, 从分析上带来很大的难度与挑战. 除此之外, 与一些现有的处理圆环交集问题的凸放松文献^[94, 95]不同, 在我们的建模中每个传感器只能获取自己的感知区域, 而不知道别的传感器的感知区域, 不存在一个融合中心来统一收集信息并计算处理. 同时传感器之间的信息交流只局限于跟自己的邻居节点, 传递的信息也只局限于当前每个传感器对于源点位置的估计值. 当然, 如果感知区域的信息可以共享的话, 那么半定规划(SDP)和线性锥规划(LCP)的方法就可以直接运用过来.

4.2 分布式算法设计

针对相容和不相容两种不同的情形, 我们给出一种统一的分布式交替投影算法(DAPA), 而不需要事先获知问题隶属于哪一类情形. 同时还给出算法在切换拓扑下的收敛性分析.

4.2.1 分布式交替投影算法

DAPA 的主要思想是对于任意给定的初始估计值 $x_i(0) \in \mathbb{R}^2$, $i \in \mathcal{V}$, 传感器 i 先根据它从邻居节点获取的信息更新自己的估计值, 然后在此基础上分别对自己的内外圆盘 Y_i 和 X_i 做投影, 即估计值向自己的圆环靠近. DAPA 算法的精确

数学描述如下:

$$\begin{cases} v_i(k) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(k)x_j(k), \\ w_i(k) = v_i(k) - \alpha_k \nabla f_i(v_i(k)), \\ x_i(k+1) = w_i(k) - \beta_k \nabla g_i(w_i(k)), \end{cases} \quad (4.6)$$

其中权重 $a_{ij}(k) \geq 0$, $f_i(x) = \frac{b_i}{2}|x|_{Y_i}^2$, $g_i(x) = \frac{1}{2}|x|_{X_i}^2$. 步长满足

$$\beta_k \in [0, 1], \alpha_k \in [0, \min\{1, 1/b_0\}], b_0 = \max\{b_1, \dots, b_n\}, k = 0, 1, \dots.$$

因为

$$\nabla f_i(v_i(k)) = b_i(v_i(k) - P_{Y_i}(v_i(k))), \nabla g_i(w_i(k)) = w_i(k) - P_{X_i}(w_i(k)),$$

DAPA 可称为分布式交替梯度算法. 由于 $w_i(k) = (1 - \alpha_k b_i)v_i(k) + \alpha_k b_i P_{Y_i}(v_i(k))$ 是点 $v_i(k)$ 到集合 Y_i 的近似投影, 同时 $x_i(k+1) = (1 - \beta_k)w_i(k) + \beta_k P_{X_i}(w_i(k))$ 是点 $w_i(k)$ 到集合 X_i 的近似投影, 这里步长 α_k, β_k 也可以看作是投影的精确度.

注 4.4. 为了能得到一个精度更高的位置估计, 我们将定位问题转化为一个受限的分布式优化问题. 实际上, 如果将约束去掉($Y_i = \emptyset, i = 1, \dots, n$), 问题的难度会大大降低, 该定位问题直接放松成常见的凸交计算问题^[26, 32, 35, 47]:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^n |x|_{X_i}^2 \quad (4.7)$$

在这种情形下, 相当于算法(4.6)中 $w_i(k) = v_i(k)$. 那么问题(4.7)所对应的分布式算法为:

$$\begin{cases} v_i(k) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(k)x_j(k), \\ x_i(k+1) = v_i(k) - \beta_k(v_i(k) - P_{X_i}(v_i(k))). \end{cases} \quad (4.8)$$

于是文[32]所讨论的凸交计算问题变为我们的一个特例, 下面的所有理论结果可以直接应用于文[32]所讨论的相容($\bigcap_{i=1}^n X_i \neq \emptyset$)和不相容($\bigcap_{i=1}^n X_i = \emptyset$)两种不同情形.

4.2.2 主要结论

用 $X_{co} = co\{X_1, \dots, X_n\}$ 表示集合 $\{X_i\}_{i=1}^n$ 的凸包. 由 X_i ($1 \leq i \leq n$) 的有界性可知, X_{co} 是有界的且 $d_0 := \sup_{x, y \in X_{co}} \|x - y\| < \infty$. 记 $d_i(k) = b_i(v_i(k) - P_{Y_i}(v_i(k)))$, $\delta_i(k) = w_i(k) - P_{X_i}(w_i(k))$. 容易证明如下关于序列 $\{d_i(k)\}$ 和 $\{\delta_i(k)\}$ 有界性的引理.

引理 4.1. 假设 (A4.1) 成立, 那么对任意的 $i = 1, \dots, n$ 和 $k = 0, 1, \dots$, 存在正常数 l_0 使得

$$\|d_i(k)\| \leq l_0 \quad \text{和} \quad \|\delta_i(k)\| \leq l_0 \quad (4.9)$$

记 $e_i(k) = x_i(k+1) - w_i(k)$, 由式(4.9)可得

$$\|e_i(k)\| \leq l_0 \beta_k. \quad (4.10)$$

由转移矩阵 $\Phi(k, s)$ 的定义可知

$$\begin{aligned} x_i(k+1) = & \sum_{j=1}^n [\Phi(k, 0)]_{ij} x_j(0) - \alpha_k d_i(k) + e_i(k) + \sum_{r=1}^k \left(\sum_{j=1}^n [\Phi(k, r)]_{ij} e_j(r-1) \right) \\ & - \sum_{r=1}^k \left(\sum_{j=1}^n [\Phi(k, r)]_{ij} \alpha_{r-1} d_j(r-1) \right). \end{aligned}$$

记 $\hat{x}(k) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j(k)$, 由(4.9), (4.10)和引理 2.1 可得,

$$\begin{aligned} \|x_i(k+1) - \hat{x}(k+1)\| \leq & \lambda \gamma^k \sum_{j=1}^n \|x_j(0)\| + n l_0 \lambda \sum_{r=1}^k \gamma^{k-r} \alpha_{r-1} + 2 l_0 \alpha_k \\ & + 2 l_0 \beta_k + n l_0 \lambda \sum_{r=1}^k \gamma^{k-r} \beta_{r-1}. \end{aligned}$$

再由引理 2.6 容易证明下面引理.

引理 4.2. 假设 (A4.1)-(A4.2) 成立, 当步长 $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_k\}$ 满足 $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty$ 和 $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^2 < \infty$, 那么对任意的 $i \in \mathcal{V}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_i(k) - \hat{x}(k)\| = 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \|x_i(k) - \hat{x}(k)\| < \infty$, $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \|x_i(k) - \hat{x}(k)\| < \infty$.

下面将给出算法 DAPA 的收敛性分析. 首先考虑不相容的情形, 由引理 2.3 可知 $\sum_{i=1}^n b_i |x|_{Y_i}^2 + |x|_{X_i}^2$ 是凸函数. 又因为 $\{X_i, Y_i\}_{i=1}^n$ 是有界的, 所以 $\sum_{i=1}^n b_i |x|_{Y_i}^2 + |x|_{X_i}^2$ 是强制的 (i.e., $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n b_i |x|_{Y_i}^2 + |x|_{X_i}^2 = \infty$). 由文[79]的性质 2.1.1 可知, 问题(4.3)的最优解集 Z^* 是非空的.

定理 4.3. 假设 (A4.1)-(A4.2) 成立, 如果步长满足条件 $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty$, $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k = \infty$, $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty$, $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^2 < \infty$, 且 $\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k - \beta_k| < \infty$, 那么 DAPA 算法(4.6)同步收敛到问题(4.3)的某一最优解, i.e., 存在 $p^* \in Z^*$, 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i(k) = p^*, \forall i \in \mathcal{V}.$$

证明: 对任意的 $q^* \in Z^*$, 由引理 2.3 知

$$\begin{aligned} \|x_i(k+1) - q^*\|^2 &\leq \|w_i(k) - q^*\|^2 + l_0^2 \beta_k^2 - 2\beta_k \delta_i^T(k)(w_i(k) - q^*) \\ &\leq \beta_k(|q^*|_{X_i}^2 - |w_i(k)|_{X_i}^2) + \|w_i(k) - q^*\|^2 + l_0^2 \beta_k^2. \end{aligned}$$

因为 $\{x_i(k)\}$, $\{v_i(k)\}$ 和 $\{w_i(k)\}$ 有界, 所以

$$M := \max_{i,k} \{|w_i(k)|_{X_i}, |v_i(k)|_{Y_i}, |q^*|_{X_i}, \|\hat{x}(k) - q^*\|, |\hat{x}(k)|_{X_i}\}$$

也是有界的. 由引理 2.2 可得

$$\beta_k(|q^*|_{X_i}^2 - |w_i(k)|_{X_i}^2) \leq \beta_k(|q^*|_{X_i}^2 - |\hat{x}(k)|_{X_i}^2) + 2M\beta_k\|\hat{x}(k) - w_i(k)\|.$$

由于

$$\begin{aligned} \|\hat{x}(k) - w_i(k)\| &\leq \|\hat{x}(k) - v_i(k)\| + \|v_i(k) - w_i(k)\| \\ &\leq \sum_{j=1}^n a_{ij}(k)\|\hat{x}(k) - x_j(k)\| + l_0\alpha_k, \end{aligned}$$

从而知

$$\begin{aligned} \|x_i(k+1) - q^*\|^2 &\leq \|w_i(k) - q^*\|^2 + \beta_k(|q^*|_{X_i}^2 - |\hat{x}(k)|_{X_i}^2) + 2Ml_0\alpha_k\beta_k \\ &\quad + 2M \sum_{j=1}^n a_{ij}(k)\beta_k\|\hat{x}(k) - x_j(k)\| + l_0^2\beta_k^2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

类似地可得

$$\begin{aligned} \|w_i(k) - q^*\|^2 &\leq \sum_{j=1}^n a_{ij}(k)\|x_j(k) - q^*\|^2 + \alpha_k b_i(|q^*|_{Y_i}^2 - |\hat{x}(k)|_{Y_i}^2) \\ &\quad + l_0^2\alpha_k^2 + b_0(d_0 + 2M) \sum_{j=1}^n a_{ij}(k)\alpha_k\|\hat{x}(k) - x_j(k)\|. \end{aligned} \quad (4.12)$$

鉴于

$$\begin{aligned} &\alpha_k \sum_{i=1}^n b_i(|q^*|_{Y_i}^2 - |\hat{x}(k)|_{Y_i}^2) + \beta_k \sum_{i=1}^n (|q^*|_{X_i}^2 - |\hat{x}(k)|_{X_i}^2) \\ &\leq \alpha_k \sum_{i=1}^n ((b_i|q^*|_{Y_i}^2 + |q^*|_{X_i}^2) - (b_i|\hat{x}(k)|_{Y_i}^2 + |\hat{x}(k)|_{X_i}^2)) + 2nM^2|\beta_k - \alpha_k|, \end{aligned}$$

结合式(4.11)和(4.12)可知

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \|x_i(k+1) - q^*\|^2 &\leq \sum_{i=1}^n \|x_i(k) - q^*\|^2 + b_0(d_0 + 2M) \sum_{j=1}^n \alpha_k \|\hat{x}(k) - x_j(k)\| \\
&\quad + \alpha_k \sum_{i=1}^n ((b_i |q^*|_{Y_i}^2 + |q^*|_{X_i}^2) - (b_i |\hat{x}(k)|_{Y_i}^2 + |\hat{x}(k)|_{X_i}^2)) \\
&\quad + nMl_0(\alpha_k^2 + \beta_k^2) + nl_0^2\beta_k^2 + nl_0^2\alpha_k^2 \\
&\quad + 2M \sum_{j=1}^n \beta_k \|\hat{x}(k) - x_j(k)\| + 2nM^2|\beta_k - \alpha_k|. \quad (4.13)
\end{aligned}$$

因为 $q^* \in Z^*$, 于是有

$$\sum_{i=1}^n ((b_i |q^*|_{Y_i}^2 + |q^*|_{X_i}^2) - (b_i |\hat{x}(k)|_{Y_i}^2 + |\hat{x}(k)|_{X_i}^2)) \leq 0.$$

由步长条件 $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty$, $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^2 < \infty$, $\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k - \beta_k| < \infty$ 和引理 4.2, 2.5 可知, 对任意的 $q^* \in Z^*$, 序列 $\{\sum_{i=1}^n \|x_i(k) - q^*\|^2\}$ 是收敛的, 于是可得 $\{\|x_i(k) - q^*\|\}$, $\forall i$ 也是收敛的. 由于对任意的 $i \in \mathcal{V}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_i(k) - \hat{x}(k)\| = 0$, 这意味着对任意的 $q^* \in Z^*$, $\{\|\hat{x}(k) - q^*\|\}$ 是收敛序列.

对式(4.13)两边关于 k 求和可得:

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=0}^k \alpha_r \sum_{i=1}^n ((b_i |\hat{x}(r)|_{Y_i}^2 + |\hat{x}(r)|_{X_i}^2) - (b_i |q^*|_{Y_i}^2 + |q^*|_{X_i}^2)) \\
&\leq \sum_{i=1}^n \|x_i(0) - q^*\|^2 + (nMl_0 + nl_0^2) \sum_{r=0}^k (\alpha_r^2 + \beta_r^2) + 2nM^2 \sum_{r=0}^k |\beta_r - \alpha_r| \\
&\quad + 2M \sum_{j=1}^n \sum_{r=0}^k \beta_r \|\hat{x}(r) - x_j(r)\| + b_0(d_0 + 2M) \sum_{j=1}^n \sum_{r=0}^k \alpha_r \|\hat{x}(r) - x_j(r)\| \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

由步长条件 $\sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r = \infty$ 知,

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n ((b_i |\hat{x}(r)|_{Y_i}^2 + |\hat{x}(r)|_{X_i}^2) - (b_i |q^*|_{Y_i}^2 + |q^*|_{X_i}^2)) = 0.$$

那么存在序列 $\{\hat{x}(k)\}$ 的一个极限点 p^* , 使得 $p^* \in Z^*$. 类似地可以证明序列 $\{\|\hat{x}(k) - p^*\|\}$ 是收敛的. 因此, 对任意的 $i \in \mathcal{V}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_i(k) - p^*\| = 0$, i.e.,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i(k) = p^*, \quad i = 1, \dots, n.$$

定理得证. \square

定理4.3表明分布式算法(4.6)收敛到无约束问题(4.3)的某个最优解 p^* , 该解可以作为在不相容情形下对源点位置的一个估计. 同时此定理中的步长条件很容易满足, 例如取 $\alpha_k = \frac{1}{k+2}$, $\beta_k = \frac{1}{k+1}$, $k = 0, 1, \dots$.

在相容情形下, 还需证明最优估计属于交集 $X_0 = \bigcap_{i=1}^n X_i$. 此时, 根据引理2.3可知 $|\cdot|_{Y_i}^2, i = 1, \dots, n$ 是凸连续可微函数. 由 X_0 的紧性和 Weierstrass 定理知, 受限约束优化问题(4.5)的最优解集 X^* 是非空的.

由注释 4.2 可得如下的引理^[35].

引理 4.4. 如果对任意的 $x_i \in X_i, i = 1, \dots, n$ 和 $\bar{x} \in \bigcap_{i=1}^n X_i^0$, 记 $\hat{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$. 则有 $s = \frac{\epsilon}{\epsilon+\delta} \bar{x} + \frac{\delta}{\epsilon+\delta} \hat{x} \in X_0$, 且

$$\|\hat{x} - s\| \leq \frac{1}{\delta n} \left(\sum_{j=1}^n \|x_j - \bar{x}\| \right) \left(\sum_{j=1}^n |\hat{x}|_{X_j} \right),$$

其中 $\epsilon = \sum_{j=1}^n |\hat{x}|_{X_j}$, $\delta > 0$ 满足 $\{y \mid \|y - \bar{x}\| \leq \delta\} \subseteq X_0$.

事实上, 当 $v_i(k) \in X_i$, 则 $w_i(k) \in X_i$, 于是 $|w_i(k)|_{X_i} = 0$. 而当 $v_i(k) \notin X_i$, 如果 $w_i(k) \in X_i$, 则 $|w_i(k)|_{X_i} = 0$; 否则,

$$|w_i(k)|_{X_i} = |v_i(k)|_{X_i} - \alpha_k b_i |v_i(k)|_{Y_i}.$$

对任意的 $k \geq 0$ 和 $i \in \mathcal{N}_{out} := \{i \mid v_i(k) \notin X_i\}$, α_k 的取值必须满足下面两个条件中的一个:

- $|v_i(k)|_{X_i} - \alpha_k b_i |v_i(k)|_{Y_i} \leq \alpha_k \tilde{l}$;
- $v_i(k) - \alpha_k d_i(k) \in X_i$,

其中 \tilde{l} 是一个充分大的正数. 我们把这个性质称为“择一性”. 由择一性可知,

$$|w_i(k)|_{X_i} \leq \alpha_k \tilde{l}, \forall i \in \mathcal{V}. \quad (4.14)$$

注 4.5. 对传感器 i 而言, 当 $v_i(k) \in X_i$ 时, 式(4.14)恒成立, 它不会受步长 α_k 的影响, 故在确定 α_k 时只需考虑属于集合 $\mathcal{N}_{out}(k)$ 的传感器. 在这种情形下, 择一性意味着 α_k 应该使 $v_i(k)$ 在向内部圆盘 Y_i 做近似投影时尽可能接近外部圆盘

X_i . 由于我们算法的目的就是在约束集合 $X_0 = \bigcap_{i=1}^n X_i$ 内找一点到使得和函数 $\sum_{i=1}^n b_i | \cdot |_{Y_i}^2$ 最小. 所以对传感器 i 来说, 一个自然的假设是让它在优化自己的代价函数 $b_i | \cdot |_{Y_i}^2$ 时, 尽可能使其状态接近它的约束集 X_i . 即是说, 择一性的假设是合理的. 换言之, 先通过择一性假设使得所有传感器的估计值收敛到交集 X_0 , 稍后再考虑优化 $\sum_{i=1}^n b_i | \cdot |_{Y_i}^2$.

下面给出 DAPA 算法(4.6)在相容情形下的收敛性分析.

定理 4.5. 假设 (A4.1)-(A4.2) 成立, 如果步长满足 $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty$, $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k = \infty$, $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty$, $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^2 < \infty$, 及择一性条件, 那么 DAPA 算法(4.6)将同步收敛到约束优化问题(4.5)的某个最优解, i.e., 存在 $x^* \in X^*$ 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i(k) = x^*, \forall i \in \mathcal{V}.$$

证明: 对任意的 $z^* \in X^*$, 由 $X^* \subseteq X_0 \subseteq X_i$ 和引理 2.2 知

$$\begin{aligned} \|x_i(k+1) - z^*\|^2 &\leq (1 - \beta_k) \|w_i(k) - z^*\|^2 + \beta_k \|P_{X_i}(w_i(k)) - z^*\|^2 \\ &\leq (1 - \beta_k) \|w_i(k) - z^*\|^2 + \beta_k \|w_i(k) - z^*\|^2 - \beta_k |w_i(k)|_{X_i}^2 \\ &\leq \|v_i(k) - z^*\|^2 + l_0^2 \alpha_k^2 + 2\alpha_k d_i^T(k)(z^* - v_i(k)) \\ &\leq \sum_{j=1}^n a_{ij}(k) \|x_j(k) - z^*\|^2 + \alpha_k b_i(|z^*|_{Y_i}^2 - |v_i(k)|_{Y_i}^2) \\ &\quad + l_0^2 \alpha_k^2. \end{aligned} \quad (4.15)$$

由注释 4.2 可得, 存在向量 $\bar{x} \in \bigcap_{i=1}^n X_i^0$ 和常数 $\delta > 0$ 使得

$$\{y \mid \|y - \bar{x}\| \leq \delta\} \subseteq X_0.$$

记 $s(k) = \frac{\epsilon}{\epsilon+\delta} \bar{x} + \frac{\delta}{\epsilon+\delta} \hat{x}(k)$, 其中 $\epsilon = \sum_{j=1}^n |\hat{x}(k)|_{X_j}$. 根据引理 4.4, 知 $s(k) \in X_0$. 注意到

$$\begin{aligned} \alpha_k b_i(|z^*|_{Y_i}^2 - |v_i(k)|_{Y_i}^2) &= \alpha_k b_i(|s(k)|_{Y_i} + |v_i(k)|_{Y_i})(|s(k)|_{Y_i} - |v_i(k)|_{Y_i}) \\ &\quad + \alpha_k b_i(|z^*|_{Y_i}^2 - |s(k)|_{Y_i}^2). \end{aligned}$$

由 $\{x_i(k)\}$, $\{v_i(k)\}$, $\{w_i(k)\}$ 的有界性可得,

$$W := \max_{i,k} \{|w_i(k)|_{X_i}, |v_i(k)|_{Y_i}, \|z^* - v_i(k)\|\} < \infty.$$

因为 $|s(k)|_{Y_i} \leq d_0$, 由引理 2.2 知

$$\begin{aligned} \alpha_k b_i(|z^*|_{Y_i}^2 - |v_i(k)|_{Y_i}^2) &= \alpha_k b_i(|z^*|_{Y_i}^2 - |s(k)|_{Y_i}^2) + \alpha_k b_i(d_0 + W)\|s(k) - v_i(k)\| \\ &\leq \alpha_k b_i(|z^*|_{Y_i}^2 - |s(k)|_{Y_i}^2) + \alpha_k b_0(d_0 + W)\|s(k) - \hat{x}(k)\| \\ &\quad + \alpha_k b_0(d_0 + W)\|\hat{x}(k) - v_i(k)\|. \end{aligned}$$

由(4.15)可得,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \|x_i(k+1) - z^*\|^2 &\leq \sum_{i=1}^n \|x_i(k) - z^*\|^2 + \sum_{i=1}^n \alpha_k b_i(|z^*|_{Y_i}^2 - |s(k)|_{Y_i}^2) \\ &\quad + b_0(d_0 + W) \sum_{j=1}^n \alpha_k \|\hat{x}(k) - x_j(k)\| + nl_0^2 \alpha_k^2 \\ &\quad + nb_0(d_0 + W) \alpha_k \|s(k) - \hat{x}(k)\|. \end{aligned} \quad (4.16)$$

又因为 $\{x_i(k)\}$ 是有界的且 $\bar{x} \in X_0$, 所以 $\forall i \in \mathcal{V}$, $\{x_i(k) - \bar{x}\}$ 是有界的. 不失一般性, 假设 $\|x_i(k) - \bar{x}\| \leq W$. 由引理 4.4 可得,

$$\begin{aligned} \|\hat{x}(k) - s(k)\| &\leq \frac{1}{\delta n} \left(\sum_{j=1}^n \|x_j(k) - \bar{x}\| \right) \left(\sum_{j=1}^n |\hat{x}(k)|_{X_j} \right) \\ &\leq \frac{W}{\delta} \sum_{j=1}^n \|\hat{x}(k) - P_{X_j}(w_j(k))\|. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} \|\hat{x}(k) - s(k)\| &\leq \frac{W}{\delta} \sum_{j=1}^n \|\hat{x}(k) - x_j(k)\| + \frac{W}{\delta} (1 - \beta_k) \sum_{j=1}^n |w_j(k)|_{X_j} \\ &\quad + \frac{nl_0 W}{\delta} \beta_k + \frac{nl_0 W}{\delta} \alpha_k. \end{aligned} \quad (4.17)$$

结合式(4.14), (4.17), 引理 4.2, 和步长条件 $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty$, 以及 $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^2 < \infty$, 容易得到

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \|\hat{x}(k) - s(k)\| &\leq \frac{W}{\delta} \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \|\hat{x}(k) - x_j(k)\| + \frac{nl_0 W}{\delta} \sum_{k=0}^{\infty} (2\alpha_k^2 + \beta_k^2) \\ &\quad + \frac{nW}{\delta} \tilde{l} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 \\ &< \infty. \end{aligned}$$

因为 $s(k) \in X_0$ 和 $z^* \in X^*$, 故有 $\sum_{i=1}^n b_i(|z^*|_{Y_i}^2 - |s(k)|_{Y_i}^2) \leq 0$. 由引理 2.5 和式(4.16)可得, 对任意的 $z^* \in X^*$, $\{\sum_{i=1}^n \|x_i(k) - z^*\|^2\}$ 收敛. 由此可知, $\{\|x_i(k) - z^*\|\}$, $i \in \mathcal{V}$ 也是收敛的.

再根据引理 4.2 可得, 对任意的 $i \in \mathcal{V}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_i(k) - \hat{x}(k)\| = 0$. 结合式(4.14)和(4.17), 有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\hat{x}(k) - s(k)\| = 0$. 因此, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_i(k) - s(k)\| = 0$, 从而可证对任意的 $z^* \in X^*$, $\{\|s(k) - z^*\|\}$ 收敛.

在式(4.16)两边同时对 k 求和后得到,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \|x_i(k+1) - z^*\|^2 + \sum_{r=0}^k \sum_{i=1}^n \alpha_r b_i(|s(r)|_{Y_i}^2 - |z^*|_{Y_i}^2) \\ & \leq \sum_{i=1}^n \|x_i(0) - z^*\|^2 + nb_0(d_0 + W) \sum_{r=0}^k \alpha_r \|s(r) - \hat{x}(r)\| \\ & \quad + nl_0^2 \sum_{r=0}^k \alpha_r^2 + b_0(d_0 + W) \sum_{j=1}^n \sum_{r=0}^k \alpha_r \|\hat{x}(r) - x_j(r)\|. \end{aligned}$$

于是可证,

$$\sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r \sum_{i=1}^n b_i(|s(r)|_{Y_i}^2 - |z^*|_{Y_i}^2) < \infty.$$

又因为 $\sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r = \infty$, 故有 $\liminf_{r \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n b_i(|s(r)|_{Y_i}^2 - |z^*|_{Y_i}^2) = 0$. 于是存在 $\{s(k)\}$ 的一个极限点 x^* 使得 $x^* \in X^*$. 类似地可证 $\{\|s(k) - x^*\|\}$ 收敛, 于是有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|s(k) - x^*\| = 0$. 因此, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_i(k) - x^*\| = 0, \forall i \in \mathcal{V}$. 定理得证. \square

注 4.6. 定理4.5中的步长条件很容易满足, 如取 $\alpha_k = \frac{1}{k+2}$ 和 $\beta_k = \frac{1}{k+1}$. 同时当常数 $\tilde{l} > 0$ 取得足够大时, 择一性条件也容易满足. 从下面的仿真试验中可以看出 \tilde{l} 取值没必要太大也能满足要求. 此外, 当步长满足 $\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k - \beta_k| < \infty$ 时, 约束优化问题(4.5)的最优解也是无约束优化问题(4.3)的全局最优解.

注 4.7. 文[32, 34]考虑了分布式无约束的凸优化问题, 而我们这里考虑了分布式受限约束优化问题(相容情形). 显然, 特别是当每个个体只知道自己的约束集合时, 受限约束问题的难度和挑战性更大. 文[35]虽然也考虑了此种受限约束问题, 但是只给出所有约束集合都相等或者通信拓扑图是固定全连通 ($a_{ij} = \frac{1}{n}, \forall i, j$) 这两种特殊情形下算法的收敛性分析. 而定理 4.5 给出了约束集合不同且切换通信拓扑下算法的收敛性分析.

4.3 数值仿真

本小节给出一些数值仿真来验证本章所提出的 DAPA 算法在相容和不相容两种情形下的有效性. 同时通过一系列 Monte Carlo 实验, 将本文所提的 DAPA 算法的估计效果与 Cramer-Rao 下界(CRLB), 以及现有的一些定位算法进行比较, 比如分布式投影算法(DPA)^[32], 网格搜索算法^[93], 以及凸放松方法中的线性锥规划算法(LCP)^[94].

考虑由 5 个传感器组成的网络, 传感器随机布置在一个 $10m \times 10m$ 的区域内. 假设网络的通信拓扑图在 \mathcal{G}_i , $i = 1, 2$ 之间周期切换, 满足 $\mathcal{G}(2k) = \mathcal{G}_1$ 和 $\mathcal{G}(2k+1) = \mathcal{G}_2$, $k = 0, 1, \dots$. 其对应的赋权邻接矩阵分别为

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.2 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0.2 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

源信号能量的传播模型用式(4.1)表示, 设功率损耗系数为 $\nu = 2$, 增益系数 $g_i = 1$, $i = 1, \dots, 5$. 源点的位置坐标 $\rho = [5.5, 5.5]^T$ 未知, 信号发射功率 $P = 20mW$. 噪声 $\epsilon_i \sim N(0, \sigma_i^2)$, 其中 $0 \leq \sigma_i \leq 0.3$, $i = 1, \dots, 5$. 对不同的传感器, 其信噪比(SNR)依赖于它跟源点的距离. 例如, 如果噪声的方差为 $0.01mW$, 那么离源点 $5m$ 远的传感器的 SNR 为 $10 \times \log_{10} \frac{(20/5^2)}{0.01} = 19 \text{ dB}$. 为简单起见, 设所有的内部圆盘约束具有相同的重要性, 令 $b_1 = \dots = b_5 = b$. 每个传感器所受的噪声的标准差相同, 都用 σ 表示, 同时他们的信赖参数也相同, 即 $\xi_1 = \dots = \xi_5 = \xi$.

当令 $b = 1$, $\sigma = 0.1$, 以及 $\xi = 1 < 3$ 时, 通过大量的仿真实验发现, 大多数情况下圆环的交集是空的, i.e., $R_0 = \bigcap_{i=1}^5 R_i = \emptyset$, 即属于不相容情形. 图4.2 给出一种传感器分布以及相应的感知区域范围划分, 其中点 \cdot 表示传感器, \star 表示源点.

取步长 $\alpha_k = \frac{1}{k+2}$, $\beta_k = \frac{1}{k+1}$. 图4.3分别给出了算法 DAPA(4.6) 与 DPA 算法在对数意义下的估计误差 (i.e., $\log_{10} \|x_i - \rho\|$, $i = 1, \dots, 5$). 仿真实验表明经过 10000 迭代步, DPA 算法中平均估计 $\hat{x} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i$ 趋于点 $[5.518, 5.245]^T$ (图4.2中用 \square 表示), 而我们算法的平均估计 \hat{x} 趋于 $[5.508, 5.551]^T$

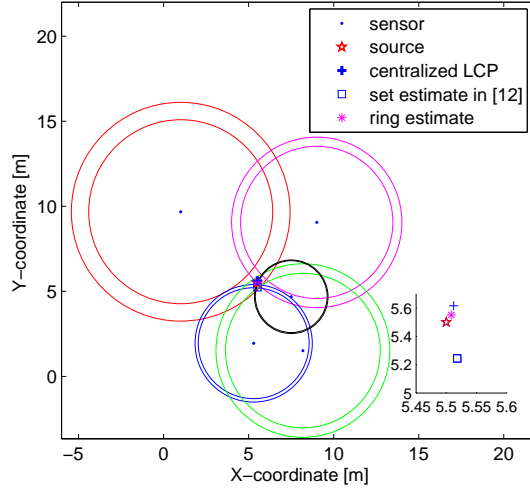


图 4.2: 不相容情形下的圆环.

(图4.2中用 * 表示), 它离用集中式算法所求得解 $[5.512, 5.554]^T$ 更近. 除此之外, 用集中式的 LCP 方法所求的估计值为 $[5.512, 5.616]^T$ (图4.2中用 + 表示), 这三种定位方法的估计误差分别为 0.2558, 0.0515, 0.1166, 由此可以看出我们的算法比另外两种的估计精度更高.

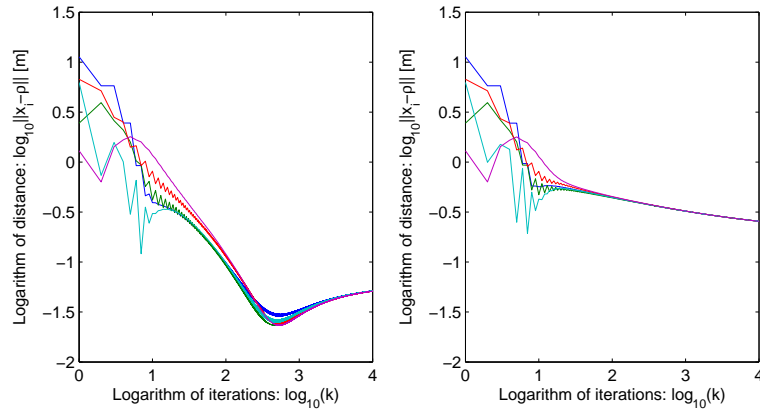


图 4.3: DAPA 算法(左)和 DPA 算法(右)在不相容情形下的估计误差.

接着, 其它的参数取值不变, 当 $\xi = 3$ 时, 大量的仿真表明圆环交集问题将以高概率变为相容情形. 图4.4 给出一种传感器分布以及相应的感知区域范围划分, 其中 \cdot 和 \star 分别表示传感器和源点. 从图4.4可以看出, 圆

环的交集是非空的 (i.e., $R_0 \neq \emptyset$). 令 $\tilde{l} = 30$, 步长 $\alpha_k = \frac{1}{k+2}$, $\beta_k = \frac{1}{k+1}$.

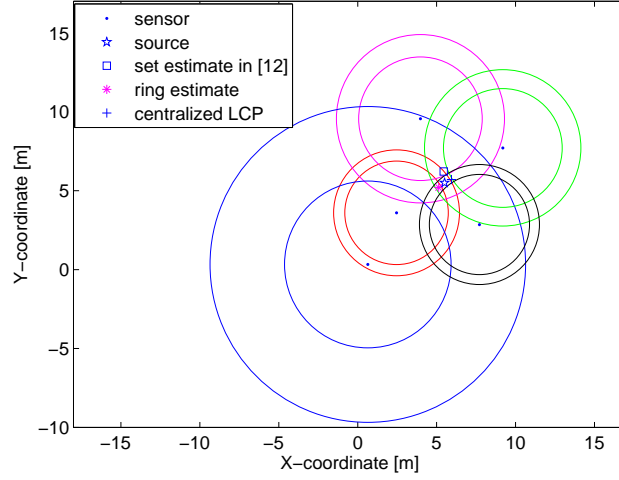


图 4.4: 相容情形下的圆环.

图4.5分别给出了我们算法 DAPA 与 DPA 算法在对数意义下的估计误差. 从

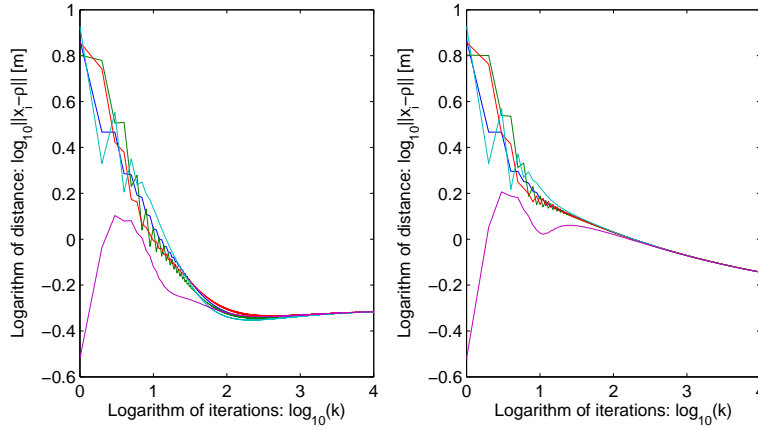


图 4.5: DAPA 算法(左)和 DPA 算法(右)在相容情形下的估计误差.

中可以看出, 经过 10000 步, DPA 算法还不能收敛到 X_0 , 其平均估计 $\hat{x} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i = [5.447, 6.216]^T \notin X_0$ (图4.4中用 \square 表示). 我们的算法经过 10000 步, 平均估计收敛到 $\hat{x} = [5.123, 5.198]^T \in X_0$ (图4.4中用 \star 表示), 它离集中式求解的值 $[5.133, 5.187]^T$ 更近. 除此之外, 用集中式的 LCP 方法所求的估

计值为 $[5.937, 5.708]^T$ (图4.4中用 + 表示), 这三种定位方法的估计误差分别为 0.7184, 0.4830, 0.4845. 由此可以看出我们的算法比另外两种的估计精度更高.

尽管信赖参数 ξ 的选取会影响定位问题是相容还是不相容的发生, 但是上面的仿真结果表明我们所提的算法(4.6)无论是对相容情形还是不相容情形较之 DPA 和 LCP 算法都有很好的收敛效果以及很高的估计精度, 而且并不需要事先知道问题是否相容.

下面我们研究信赖参数 ξ 对于所提算法的估计效果的影响. 在每次仿真中, 取 $\sigma = 0.1$, $b = 1$, 而传感器的位置分布是随机的. 图4.6分别给出了 DAPA, DPA, LCP 三种算法在 1000 次仿真下的根均方误差(RMSE)随 ξ 的变化情况. 这里 RMSE 的定义如下:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{T_r} \sum_{i=1}^{T_r} \|\rho_i^* - \rho\|^2},$$

其中 T_r 表示仿真次数, ρ_i^* 表示第 i 次仿真实验对源点位置的估计值, $i \in \{1, \dots, T_r\}$. 从图4.6可以看出, DPA 和 LCP 算法的 RMSE 大体上会随着 ξ 的

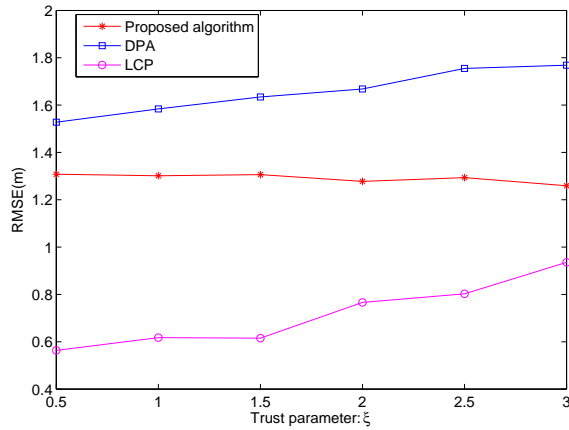


图 4.6: RMSE 随信赖参数 ξ 的变化.

增加而增大. 事实上, 虽然 ξ 的增加会加大源点位于圆环 R_i 的概率, 但同时也会加大圆环交集的面积, 由此会导致 DPA 和 LCP 算法估计误差的增大. 然而, 我们的算法实际上解决的是如下的“受限”问题:

$$\min \sum_{i=1}^n (|x|_{X_i}^2 + |x|_{Y_i}^2), \quad s.t., \quad x \in \mathbb{R}^2 \text{ (不相容) 或 } x \in X_0 \text{ (相容)}$$

此时 ξ 对目标函数 $\sum_{i=1}^n (|x|_{X_i}^2 + |x|_{Y_i}^2)$ 的影响要比对 DPA 算法中的目标函数 $\sum_{i=1}^n |x|_{X_i}^2$ 的影响要小一些, 所有在统计意义下 DAPA 的估计效果会好一些.

接下来, 我们讨论增广项 $\sum_{i=1}^n b_i |x|_{Y_i}^2$ 的有效性. 取 $\sigma = 0.1$, $\xi = \min\{3, \frac{P_{s_i}}{\sigma}, i = 1, \dots, 5\}$, 图4.7给出 DAPA 算法(4.6)在 1000 次仿真实验下的 RMSE 随加权系数 b 的变化情况, 这里每次实验中传感器的位置分布和初始值的预设都是随机选取的. 从图4.7中可以发现, 当 $0 < b \leq 1$ 时, 估计效果要好于 $b = 0$ 的情形, 即 DPA 算法.

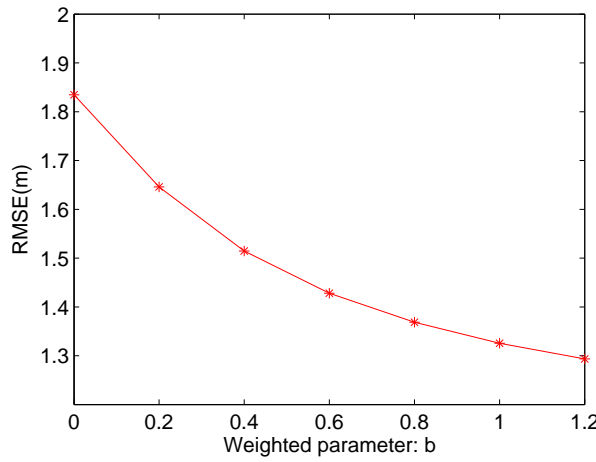


图 4.7: RMSE 随加权参数 b 的变化.

Cramer-Rao 下界(CRLB)的定义如下:

$$CRLB = \sqrt{\frac{1}{T_r} \sum_{i=1}^{T_r} CRLB_i},$$

其中 $CRLB_i$ 表示第 i 次实验的 CRLB. 取 $b = 1$, $\xi = \min\{3, \frac{P_{s_i}}{\sigma}, i = 1, \dots, 5\}$, 图4.8分别给出了四种不同的定位算法(DAPA, DPA, LCP, 网格搜索)在两种不同情形(固定传感器位置配置 [7, 9; 3, 5; 5, 2; 7, 2; 9, 3] 5000 次实验, 8000 次随机传感器位置配置实验)下的 RMSE 随噪声标准差 σ 的变化情况. 这里网格搜索算法的网格分辨率设为 $1m \times 1m$, LCP 算法是用 SeDuMi 工具包^[96]来求解的. 同时需要注意的是网格搜索算法和 LCP 算法都是集中式算法. 图4.8的仿真结果表明, DAPA 算法的估计效果要比网格搜索算法和 DPA 算法要好. 随着噪声标准差的增加, DAPA 的估计精度甚至比集中式的凸放松方法 LCP 还要高.

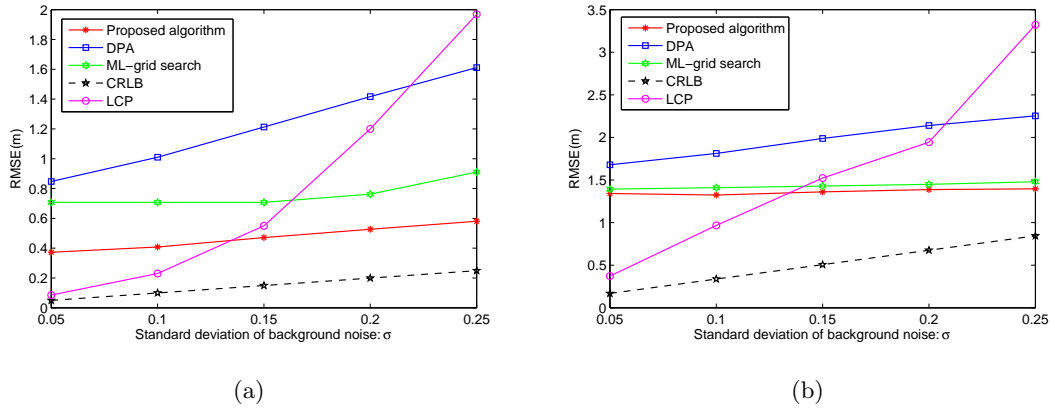


图 4.8: RMSE 随噪声标准差的变化比较: (a) 固定传感器配置下 5000 次仿真, (b) 8000 次随机的传感器配置仿真.

最后, 我们还研究了 DAPA 算法对于传感器数目的可扩展性. 为简单起见, 考虑通信拓扑图在两种不同的 3-正则无向图之间切换的网络, 其权重按照 Metropolis 规则设计. 取 $\sigma = 0.1$, $b = 1$, $\xi = \min\{3, \frac{p_{s_i}}{\sigma}, i = 1, \dots, 5\}$, 图4.9 给出了在 1000 次随机传感器位置配置的仿真实验下, DAPA 算法的定位精度 RMSE 随传感器数目的变化情况. 从中可以看出, DAPA 算法的收敛速度在这四种不同的网络规模下基本上保持不变. 同时仿真结果表明, 该算法的估计精度会随着传感器密度的增加而提高, 但是当传感器的密度达到一定程度后, 精度提高的效果就不会很显著.

4.4 小结

本章主要研究了分布式优化在无线传感器网络的源点定位问题中的实际应用. 首先基于 RSS 的量测方法, 将源点定位问题转化为一个求解极大似然估计的非凸非线性优化问题, 稍后又进一步将其近似转化为求解一系列非凸圆环的交集计算问题. 由于源点只是以一定的概率位于这些非凸圆环中, 这就会导致两种不同情形出现: 相容 (即所有圆环的交集非空) 和不相容 (所有圆环的交集为空集). 本文针对这两种不同的情形, 分别给出了相应的凸近似的分布式优化建模, 并且在此基础上提出了一种统一的分布式优化算法, 而且不需要提前获知问题所属的类型. 不同于一般集中式或者分散式的定位算法, 本文所提算法是完全分布式, 不需要统一的融合中心进行信息的采纳、计算和通信. 除此之外, 传

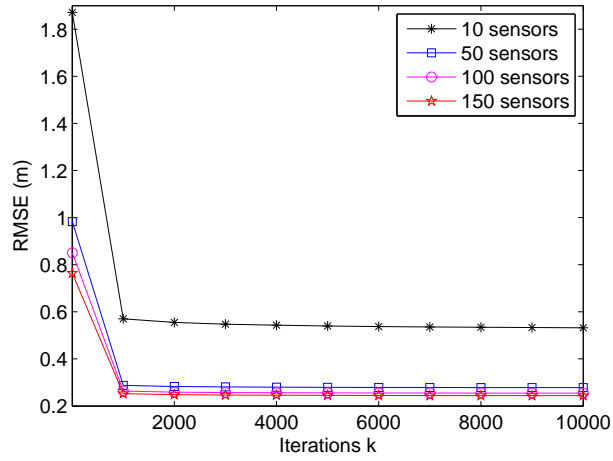


图 4.9: DAPA 算法在四种不同网络规模下的估计误差.

传感器之间的通信拓扑图是有向时变且一致联合强连通, 在此通信条件下本文分别给出了该定位算法在相容和不相容这两种情形下的收敛性证明. 最后, 通过大量的仿真实验证实, 该定位算法较之现有的分布式凸交定位算法以及一些现有的集中式或分散式的算法, 如网格搜索法、线性锥规划等, 在估计精度和计算速度上有很好的提升.

第五章 分布式目标保护

本章主要研究分布式目标保护问题. 针对常参数和变参数两种不同性质的保护计划表, 分别给出了两种不同的基于邻居信息的反馈控制器设计策略, 并分别证明了这两种算法在不同拓扑下(有向固定或无向切换)的指数收敛性.

近年来, 关于具有领导者的多自主体系统的趋同性研究受到极大的关注^[15, 23, 28, 97-99], 此类问题具有广泛的实际应用背景, 如导弹拦截、多机器人搜救、目标跟踪保护等. 一般情形下, 跟随者的动力学为

$$\dot{x}_i = u_i \in \mathbb{R}^m, i = 1, \dots, n,$$

其中 u_i 为第 i 个跟随者的控制输入. 在具有领导者的多自主体系统中, 领导者的行为通常具有独立性, 它不受其它自主体的影响, 其动力学为

$$\begin{cases} \dot{w} = Aw, & w = (w_1^T, \dots, w_m^T)^T \in \mathbb{R}^{m^2}, \\ x_0 = Cw \in \mathbb{R}^m, \end{cases}$$

其中 $A \in \mathbb{R}^{m^2 \times m^2}$, $C = (I_m, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}) \in \mathbb{R}^{m \times m^2}$, x_0 为唯一可量测的状态信息. 所谓的跟随者-领导者趋同性问题就是为多自主体系统中每个跟随者分别设计相应的控制协议使得这些跟随者通过局部的信息交流能够跟踪上一个只有部分状态信息可量测的动态移动的目标(领导者), i.e.,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) - x_0(t) = \mathbf{0}, i = 1, \dots, n.$$

此问题可等价于下述一类特殊的分布式优化问题:

$$\min_x \sum_{i=1}^n (x_i(t) - x_0(t))^2, \text{ s.t., } Lx = 0, x = (x_1^T, \dots, x_n^T)^T \in \mathbb{R}^{nm}.$$

其中 L 表示系统的 Laplace 矩阵.

关于这类跟随者-领导者趋同性问题, 现有的大部分文献都是在基于多自主体(个体)之间的相互协作给出控制器的设计方案^[23, 97, 99]. 然而在一些自然现象中可以发现, 个体间不光存在着协作互助的关系, 也会存在一定的竞争或者对抗

行为^[33, 100, 101], 于是可能导致系统的分组情况的产生, 如二分同步、观点动力学中多观点存在等. 那么这就产生了一个问题, 在跟随者-领导者系统中, 如果个体之间同时存在合作和竞争这两种相互作用时, 将会给整个跟随者-领导者系统带来怎样的影响? 会不会影响系统的趋同性, 进而导致跟随者系统分组情况的出现? 本章将对这些问题进行深入的研究, 并将其应用到分布式目标保护问题中, 即利用多自主体系统来跟踪或监测某一移动目标, 使得多自主体系统能够分组对称分布于目标的周围并且与目标保持一个期望的安全距离. 下面我们将结合二分同步的思想, 考虑在二维空间中如何对跟随者进行分组以实现对其一动态移动的目标进行跟踪保护, 其中个体之间对抗关系的引入将给控制器设计以及其收敛性分析带来新的困难和挑战.

5.1 问题描述

考虑由 n 个跟随者和 1 个领导者构成的多自主体系统, 其中跟随者被分为两组, 第 l ($l = 1, 2$) 组的跟随者数目为 n_l 满足 $n_1 + n_2 = n$. 第 l 组的第 i 个跟随者的状态记为 $x_i^l \in \mathbb{R}^2$, $i \in \{1, \dots, n_l\}$, 其动力学为:

$$\dot{x}_i^l = u_i^l, \quad i = 1, \dots, n_l, \quad l = 1, 2, \quad (5.1)$$

其中 u_i^l 是第 l 组的第 i 个跟随者的控制输入. 领导者的动力学为:

$$\begin{cases} \dot{w} = \hat{A}w, & w = (w_1^T, \dots, w_m^T)^T \in \mathbb{R}^{2m}, \\ x_0 = \hat{C}w \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (5.2)$$

其中 $\hat{A} = \bar{A} \otimes I_2 \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$, $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{m \times m}$. 不失一般性, 令 $\hat{C} = C \otimes I_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2m}$, 其中 $C = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$, 等价于 $x_0 = w_1$. 假设领导者的状态矩阵 \bar{A} 是全局已知, 但是其初始状态值 $w(0)$ 是未知的, 位置 x_0 是唯一可量测的信息.

跟随者网络的通信拓扑用有向图 $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}\}$ 表示, 这里 \mathcal{G} 可以分解为三个有向子图: $\mathcal{G}_l = (\mathcal{V}_l, \mathcal{E}_l)$, $\mathcal{V}_l = \{1, \dots, n_l\}$, $\mathcal{E}_l \subseteq \mathcal{V}_l \times \mathcal{V}_l$, $l = 1, 2$, 和二部图 $\mathcal{G}_3 = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_3)$, $\mathcal{E}_3 \subseteq \bigcup_{l=1}^2 \mathcal{V}_l \times \mathcal{V}_{3-l}$, 其中 $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$ 和 $\mathcal{E} = \bigcup_{k=1}^3 \mathcal{E}_k$. 图 \mathcal{G}_l , $l = 1, 2$, 用来描述第 l 组的 n_l 个跟随者构成的子网络 Ξ_l 的内部通信拓扑连接关系, 而 \mathcal{G}_3 用来描述子网络 Ξ_1 和 Ξ_2 之间的连接关系. 对任意的跟随者 $i \in \mathcal{V}$, 它的邻居节点分为两个部分, 用 N_i^l 记它在第 l 组的邻居节点的集合, $l = 1, 2$. 子图 \mathcal{G}_l 的赋权邻接矩阵用 $A_l = [a_{ij}^l] \in \mathbb{R}^{n_l \times n_l}$ 表示, 其中 $a_{ii}^l = 0$, 如果 $(j, i) \in \mathcal{E}_l$

则 $a_{ij}^l > 0$; 否则 $a_{ij}^l = 0$, $l = 1, 2$. \mathcal{G}_l 的度矩阵记为 $D_l = \text{diag}\{d_1^l, \dots, d_{n_l}^l\} \in \mathbb{R}^{n_l \times n_l}$, 其中 $d_i^l = \sum_{j=1}^{n_l} a_{ij}^l$, $\forall i \in \mathcal{V}_l$, \mathcal{G}_l 的 Laplace 矩阵为 $L_l = D_l - A_l$, $l = 1, 2$. 二部图 \mathcal{G}_3 的赋权邻接矩阵为 $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & A_3 \\ A_4 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)}$, 其中 $A_3 = [a_{ij}^3] \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$, $A_4 = [a_{ij}^4] \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}$. 如果 $(j, i) \in (\mathcal{V}_2 \times \mathcal{V}_1) \cap \mathcal{E}_3$, 则 $a_{ij}^3 < 0$; 否则 $a_{ij}^3 = 0$. 如果 $(j, i) \in (\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2) \cap \mathcal{E}_3$, 则 $a_{ij}^4 < 0$; 否则 $a_{ij}^4 = 0$. 记 $D_l = \text{diag}\{d_1^l, \dots, d_{n_{l-2}}^l\} \in \mathbb{R}^{n_{l-2} \times n_{l-2}}$, $l = 3, 4$, 其中 $d_i^3 = -\sum_{j=1}^{n_2} a_{ij}^3$, $i = 1, \dots, n_1$, 且 $d_s^4 = -\sum_{j=1}^{n_1} a_{sj}^4$, $s = 1, \dots, n_2$.

整个跟随者-领导者网络的通信拓扑用有向图 $\bar{\mathcal{G}}$ 表示, 它是由跟随者网络 \mathcal{G} 以及领导者和跟随者之间的通信连接边构成的. 用 b_i^l ($i = 1, \dots, n_l$, $l = 1, 2$) 表示领导者与第 l 组的第 i 个跟随者的通信连接权重,

$$b_i^l(t) = \begin{cases} 1, & \text{如果第 } l \text{ 组的第 } i \text{ 个跟随者在 } t \text{ 时刻与领导者相连,} \\ 0, & \text{否则.} \end{cases} \quad (5.3)$$

记 $B_l = \text{diag}(b_1^l, \dots, b_{n_l}^l)$, $l = 1, 2$.

图5.1给出一个例子来解释 $\bar{\mathcal{G}}$ 的通信拓扑连接关系, 其中跟随者 1, 2, 3 (用点●标注) 构成一组, 跟随者 4, 5, 6, 7 (用菱形◇标注) 构成另外一组. 同组个体之间的合作关系用“+”标记, 不同组之间的对抗(竞争)关系用“-”标记.

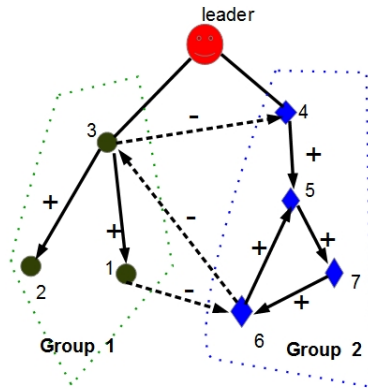


图 5.1: 跟随者-领导者网络的通信拓扑图.

假设整个系统的通信拓扑图是时变的, 并记为 $\bar{\mathcal{G}}^p$, $p \in \mathcal{P} = \{1, 2, \dots, N\}$ 为所有可能的拓扑图. 记系统拓扑图的切换函数为 $\sigma: [0, \infty) \rightarrow \mathcal{P}$, 那么 $\bar{\mathcal{G}}^{\sigma(t)}$ 表示

t 时刻的整个系统的通信拓扑图. 记增时间序列 $\{\tau_s\}_{s=0}^\infty$ 为系统拓扑图的所有切换时刻, 其中 $\tau_0 = 0$. 定义停留时间 τ_b 为系统拓扑图切换时间间隔的下确界, 即

$$\tau_b = \inf_s (\tau_{s+1} - \tau_s).$$

假设切换函数 $\sigma(t)$ 右连续, 停留时间 $\tau_b > 0$.

定义 $h \in \mathbb{R}^2$ 为理想的保护方位向量, 不妨设第 l 组的跟随者与领导者的理想相对位移为 $(-1)^{l-1}h$, $l = 1, 2$. 在一些实际应用中, 虽然理想的保护距离 $d = \|h\|$ 是固定的, 但为了更全方位的保护目标, h 可能是时变的, 假设其具有如下的旋转动力学:

$$\begin{cases} h = (d \sin \theta, d \cos \theta)^T, \\ \dot{\theta}(t) = \bar{\omega}, \end{cases} \quad (5.4)$$

其中方程(5.4)等价于:

$$\dot{h}(t) = \bar{\omega} E h(t), \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

简单起见, 称方程(5.5)为参数化的旋转保护计划表(escort rotation-schedule), 简称 ERS.

考虑如下优化问题

$$\min_X f(X, t), \quad f(X, t) = \sum_{l=1}^2 \sum_{i=1}^{n_l} (x_i^l - x_0(t) + (-1)^{l-1}h(t))^2, \quad (5.6)$$

其中 $X = (X_1^T, X_2^T)^T$, $X_l = ((x_1^l)^T, \dots, (x_{n_l}^l)^T)^T$, $l = 1, 2$. 记 X^* 为问题(5.6)在 $t \rightarrow \infty$ 时的最优解, 那么

$$X^* := \left\{ X \mid \lim_{t \rightarrow \infty} x_i^l(t) - x_0(t) + (-1)^{l-1}h(t) = 0, i = 1, \dots, n_l, l = 1, 2 \right\}, \quad (5.7)$$

即同组跟随者状态达到同步, 不同组的跟随者状态对称分布在领导者的两侧(称其为**二分同步**), 且最终将按照给定的 ERS 保持与领导者的相对保护位移分别为 h 和 $-h$, 如图5.2 所示.

下面基于 ERS 给出本章所研究的目标保护问题的严格数学定义.

定义 5.1. 如果对任意的初始条件 $x_i^l(0)$, $i = 1, \dots, n_l$, $l = 1, 2$, 所有的跟随者二分同步收敛到优化问题(5.6)的最优解 X^* , 则称系统(5.1)在控制输入 u_i^l 下完成了对领导者(5.2)的基于 ERS(5.5) 的保护任务.

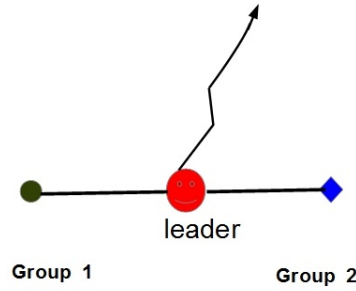


图 5.2: 领导者保护问题.

接下来分别介绍关于领导者及通信拓扑的两个假设.

(A5.1) (C, \bar{A}) 是能检测的.

(A5.2) 与领导者直接连接的跟随者, 它在另一组中至少存在一个邻居节点.

假设 (A5.2) 保证了不同组的跟随者之间信息的交流, 致使它们能分组完成保护任务.

5.2 主要结论

本节分别对常参数和时变参数的旋转保护计划表给出相应的分布式控制协议设计策略, 以及其收敛性分析.

5.2.1 基于常参数 ERS 的保护控制设计

当旋转保护计划表的参数 $\bar{\omega}$ 是常数时, 假设该计划表(5.5)是全局已知的, 即 h 和 $\bar{\omega}$ 的信息是所有跟随者都能获知的. 为分布式求解目标保护问题(5.1), 我们采取如下的分布式控制协议:

- 基于邻居信息的反馈控制律:

$$u_i^l = \bar{a}_{11}(x_i^l + (-1)^l h) + \sum_{j=2}^m \bar{a}_{1j}(v_{i,j-1}^l + (-1)^l \bar{\omega}^{j-1} E^{j-1} h) - \bar{l}_1 z_i^l - (-1)^l \bar{\omega} E h, \quad (5.8)$$

• 分布式估计律:

$$\begin{aligned} \dot{v}_{i,k-1}^l = & \bar{a}_{k1}(x_i^l + (-1)^l h) + \sum_{j=2}^m \bar{a}_{kj}(v_{i,j-1}^l + (-1)^l \bar{\omega}^{j-1} E^{j-1} h) - \bar{l}_k z_i^l \\ & - (-1)^l \bar{\omega}^k E^k h, \quad k = 2, \dots, m \end{aligned} \quad (5.9)$$

其中 $\bar{L}^T = (\bar{l}_1, \bar{l}_2, \dots, \bar{l}_m)$ 为控制参数, 相对测量误差 z_i^l 为

$$\begin{aligned} z_i^l = & \sum_{j \in N_i^l(t)} a_{ij}^l(t)(x_i^l - x_j^l) - b_i^l \sum_{j \in N_i^{3-l}(t)} a_{ij}^{l+2}(t)(x_i^l + x_j^{3-l} - 2x_0) \\ & + b_i^l(x_i^l - x_0 + (-1)^l h), \quad i = 1, \dots, n_l, \quad l = 1, 2. \end{aligned} \quad (5.10)$$

对任意的 $i = 1, \dots, n_l, \quad l = 1, 2$, 记

$$\xi_i^l = \begin{pmatrix} x_i^l \\ v_{i,1}^l \\ \vdots \\ v_{i,m-1}^l \end{pmatrix}, \quad \eta_i^l = \xi_i^l - w + (-1)^l \begin{pmatrix} h \\ \bar{\omega} E h \\ \vdots \\ \bar{\omega}^{m-1} E^{m-1} h \end{pmatrix}, \quad \eta^l = \begin{pmatrix} \eta_1^l \\ \vdots \\ \eta_{n_l}^l \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

结合式(5.1), (5.2), (5.8), (5.9)和(5.10)可得,

$$\dot{\eta}_i^l = (\bar{A} \otimes I_2) \eta_i^l - (\bar{L} \otimes I_2) z_i^l, \quad i = 1, \dots, n_l, \quad l = 1, 2,$$

其紧形式如下

$$\dot{\eta} = \left[\begin{pmatrix} I_{n_1} \otimes \bar{A} - H_1^\sigma \otimes (\bar{L}C) & B_1^\sigma A_3^\sigma \otimes (\bar{L}C) \\ B_2^\sigma A_4^\sigma \otimes (\bar{L}C) & I_{n_2} \otimes \bar{A} - H_2^\sigma \otimes (\bar{L}C) \end{pmatrix} \otimes I_2 \right] \eta, \quad (5.12)$$

其中 $H_1^\sigma = B_1^\sigma + L_1^\sigma + B_1^\sigma D_3^\sigma$, $H_2^\sigma = B_2^\sigma + L_2^\sigma + B_2^\sigma D_4^\sigma$.

经过坐标变换 $\zeta^T = (\zeta_1^T, \dots, \zeta_n^T)$, 其中 $\zeta_i = \eta_i^1, i = 1, \dots, n_1$, 和 $\zeta_{n_1+j} = -\eta_j^2, j = 1, \dots, n_2$, 动态方程(5.12)变换为

$$\dot{\zeta} = [(I_n \otimes \bar{A} - H_F^\sigma \otimes (\bar{L}C)) \otimes I_2] \zeta, \quad (5.13)$$

其中 $H_F^\sigma = L_F^\sigma + B^\sigma$ 满足

$$B^\sigma = \begin{pmatrix} B_1^\sigma & \\ & B_2^\sigma \end{pmatrix}, \quad L_F^\sigma = \begin{pmatrix} L_1^\sigma + B_1^\sigma D_3^\sigma & B_1^\sigma A_3^\sigma \\ B_2^\sigma A_4^\sigma & L_2^\sigma + B_2^\sigma D_4^\sigma \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

下面我们首先考虑上述分布式控制器在无向切换拓扑下的收敛性分析.

(A5.3) 跟随者-领导者网络拓扑图在有限个连通图 $\bar{\mathcal{G}}^p$, $p \in \mathcal{P}$ 中切换; 且对任意的 $(i, j) \in \mathcal{E}^3$, 有 $i, j \in \mathcal{V}_d$, 其中 $\mathcal{V}_d = \{v \in \mathcal{V} | v \text{ 与领导者连接}\}$.

注 5.1. 假设 (A5.3) 蕴含着不同组之间的跟随者可以相互交流信息当且仅当它们都与领导者直接相连, 即它们都能获取领导者的位置信息 x_0 . 此外, 该假设还能保证跟随者网络图 \mathcal{G}^p ($p \in \mathcal{P}$) 的 Laplace 矩阵 L_F^p 的对称性, 此对称性在下述定理的证明中起着重要的作用.

定理 5.1. 假设 (A5.1) – (A5.3) 成立, 则系统 (5.1) 在分布式控制协议 (5.8), (5.9) 和 (5.10) 下完成了对领导者 (5.2) 基于常参数 ERS (5.5) 的保护任务, 即对任意的 $i = 1, \dots, n_1$ 和 $j = 1, \dots, n_2$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i^1(t) - x_0(t) - h(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_0(t) - x_j^2(t) - h(t) = 0.$$

证明: 由假设 (A5.3) 可知 \mathcal{G}^p 是连通的, 故能推出 H_F^p 是正定的^[97]. 记

$$\bar{\lambda} = \min \left\{ \lambda(H_F^p), \forall \mathcal{G}^p \text{ 连通}, p \in \mathcal{P} \right\}, \quad (5.15)$$

于是有 $\bar{\lambda} > 0$. 由于 (C, \bar{A}) 是能检测的, 对任意的正定矩阵 Q , 由引理 2.7 知, 下列的 Riccati 方程存在唯一的正定解 P

$$\bar{A}P + P\bar{A}^T - PC^T C P + Q = 0. \quad (5.16)$$

令

$$\bar{L}^T = \max \left\{ 1, \frac{1}{\bar{\lambda}} \right\} C P,$$

再根据引理 2.8 知, 矩阵 $\bar{A} - \lambda(H_F^p)\bar{L}C$, $p \in \mathcal{P}$ 的所有特征根具有负实部. 于是

$$\bar{P}(\bar{A} - \lambda(H_F^p)\bar{L}C)^T + (\bar{A} - \lambda(H_F^p)\bar{L}C)\bar{P} \leq -\bar{Q}$$

其中 $\bar{P} = P^{-1}$ 和 $\bar{Q} = \bar{P}Q\bar{P}$ 都是正定矩阵.

选取

$$V(\zeta) = \zeta^T (I_n \otimes \bar{P} \otimes I_2) \zeta. \quad (5.17)$$

为系统(5.13)的共同 Lyapunov 函数, 不难得到

$$\dot{V} \leq -\hat{\lambda}V/\tilde{\lambda}, \quad t \geq 0, \quad (5.18)$$

其中 $\hat{\lambda} = \min\{\lambda(\bar{Q})\}$, $\tilde{\lambda} = \max\{\lambda(\bar{P})\}$. 由此可知系统(5.13)是指数稳定的. 因此, $\lim_{t \rightarrow \infty} \zeta(t) = \mathbf{0}$, 即对任意的 $i = 1, \dots, n_1$ 和 $j = 1, \dots, n_2$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i^1(t) - x_0(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_0(t) - x_j^2(t) = h.$$

定理得证. \square

接下来我们考虑所提的分布式控制器在有向固定拓扑下的收敛性分析. 在此种情形下, 记 $\mathcal{G}_* = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_*)$ 为矩阵 $B_1 A_3$ 和 $B_2 A_4$ 诱导生成的 \mathcal{G}_3 的一个子图. 对任意的 $i \in \{1, \dots, n_1\}$, $j \in \{1, \dots, n_2\}$, 当且仅当矩阵 $B_2 A_4$ 的第 (j, i) 个元素是负数时, $(i, j) \in \mathcal{E}_*$, 同时当且仅当矩阵 $B_1 A_3$ 第 (i, j) 个元素是负数时 $(j, i) \in \mathcal{E}_*$ 成立. 定义 $\mathcal{G}_s = (\mathcal{V}, \mathcal{E}_s)$ 为跟随者网络图 \mathcal{G} 的一个生成子图, 其中 $\mathcal{E}_s = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_*$.

(A5.4) 固定图 \mathcal{G}_s 中含有一棵有向生成树.

定理 5.2. 假设 (A5.1), (A5.2), (A5.4) 成立, 则系统(5.1)在分布式控制协议(5.8), (5.9)和(5.10)下完成了对领导者(5.2)基于常参数 ERS(5.5)的保护任务.

证明: 由假设 (A5.4) 可得, 方程(5.13)中矩阵 H_F 的特征根 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 全在右半开平面内, 即 $-H_F$ 为稳定矩阵, 记 $\mu \triangleq \min_{1 \leq i \leq n} \{Re \lambda_i\} > 0$. 那么存在可逆矩阵 T 使得 H_F 相似于 Jordan 形矩阵 $J = diag(J_1, \dots, J_k)$. 其中 J_i , $i = 1, \dots, k$ 是主对角元素由 $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ 所组成的上三角形 Jordan 块. 于是

$$(T^{-1} \otimes I_m)[I_{n-1} \otimes \bar{A} - H_F \otimes (\bar{L}C)](T \otimes I_m) = I_{n-1} \otimes \bar{A} - J \otimes (\bar{L}C). \quad (5.19)$$

令

$$\bar{L}^T = \max \left\{ 1, \frac{1}{\mu} \right\} CP,$$

由引理 2.7 和引理 2.8 可得矩阵 $\bar{A} - \lambda_i \bar{L}C$ 的特征根皆具有负实部. 再由式(5.19)可得, 矩阵 $I_{n-1} \otimes \bar{A} - L_\delta \otimes (\bar{L}C)$ 是稳定的. 于是 $\lim_{t \rightarrow \infty} \zeta(t) = 0$, 那么对任意的 $i = 1, \dots, n_1$ 和 $j = 1, \dots, n_2$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i^1(t) - x_0(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_0(t) - x_j^2(t) = h.$$

定理得证. \square

5.2.2 基于变参数 ERS 的保护控制设计

本小节考察了时变参数的旋转保护计划表, 假设参数 $\bar{\omega}(t)$ 是指数收敛于一个未知的常数 ω , 其具体形式如下:

$$\begin{cases} \dot{h}(t) = \bar{\omega} E h(t), \\ \bar{\omega}(t) = \omega + \delta(t), \end{cases} \quad (5.20)$$

其中 $\delta(t)$ 指数趋于 0, 它可以看成是一个时变趋于 0 的外部干扰或者噪声, E 由式(5.4)给出. 在这种情形下, 假设对每个跟随者而言, 能够获取的计划表的信息只限于 h 和 θ , 故还需要对每个跟随者设计相应的观测器去在线估计未知的时变参数 $\bar{\omega}(t)$, 具体的分布式控制协议如下:

- 基于邻居信息的反馈控制律:

$$u_i^l = \bar{a}_{11}(x_i^l + (-1)^l h) + \sum_{j=2}^m \bar{a}_{1j}(v_{i,j-1}^l + (-1)^l \hat{\omega}_{i,l}^{j-1} E^{j-1} h) - \bar{l}_1 z_i^l - (-1)^l \hat{\omega}_{i,l} E h, \quad (5.21)$$

- 分布式估计律:

$$\begin{aligned} \dot{v}_{i,k-1}^l &= \bar{a}_{k1}(x_i^l + (-1)^l h) + \sum_{j=2}^m \bar{a}_{kj}(v_{i,j-1}^l + (-1)^l \hat{\omega}_{i,l}^{j-1} E^{j-1} h) - \bar{l}_k z_i^l \\ &\quad - (-1)^l \hat{\omega}_{i,l}^k E^k h, \quad k = 2, \dots, m, \\ \hat{\omega}_{i,l}(t) &= \phi_{i,l}(t) + \theta(t) \\ \dot{\phi}_{i,l}(t) &= -\phi_{i,l}(t) - \theta(t), \end{aligned} \quad (5.22)$$

其中量测误差 z_i^l 由式(5.10)给出, $\hat{\omega}_{i,l}(t)$ 表示第 l 组的第 i 个跟随者对未知变量 $\bar{\omega}$ 的估计, $i = 1, 2, \dots, n_l$, $l = 1, 2$. 由式(5.22)知

$$\dot{\hat{\omega}}_{i,l}(t) = -\hat{\omega}_{i,l}(t) + \omega + \delta(t), \quad i = 1, 2, \dots, n_l, \quad l = 1, 2. \quad (5.23)$$

下面首先给出上述分布式控制器在无向切换拓扑下的收敛性分析.

定理 5.3. 假设 (A5.1)-(A5.3) 成立, 则系统(5.1)在分布式控制协议(5.21), (5.22)和(5.10)下完成了对领导者(5.2)的基于时变参数 ERS(5.20)的保护任务.

证明: 令

$$\xi_i^l = \begin{pmatrix} x_i^l \\ v_{i,1}^l \\ \vdots \\ v_{i,m-1}^l \end{pmatrix}, \quad \eta_i^l = \xi_i^l - w + (-1)^l \begin{pmatrix} h \\ \omega E h \\ \vdots \\ \omega^{m-1} E^{m-1} h \end{pmatrix},$$

结合式(5.10), (5.21), (5.22)和(5.23)能够得到

$$\dot{\eta}_i^l = (\bar{A} \otimes I_2) \eta_i^l - (\bar{L} \otimes I_2) z_i^l + (-1)^l [(\bar{A} M_2 - I_m) \otimes I_2] y_{i,l}(t) + (-1)^l M_3 \delta(t), \quad (5.24)$$

其中 $M_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 0 \\ I_{m-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}$,

$$M_3 = \begin{pmatrix} E h \\ \omega E^2 h \\ \vdots \\ \omega^{m-1} E^m h \end{pmatrix}, \quad y_{i,l}(t) = \begin{pmatrix} (\hat{\omega}_{i,l}(t) - \omega) E h \\ (\hat{\omega}_{i,l}^2(t) - \omega^2) E^2 h \\ \vdots \\ (\hat{\omega}_{i,l}^m(t) - \omega^m) E^m h \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n_l, \quad l = 1, 2.$$

令

$$\eta^l = \begin{pmatrix} \eta_1^l \\ \vdots \\ \eta_{n_l}^l \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} \eta^1 \\ -\eta^2 \end{pmatrix}, \quad y^l = \begin{pmatrix} y_{1,l} \\ \vdots \\ y_{n_l,l} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix},$$

这时式(5.24)等价于

$$\dot{\xi} = ([I_n \otimes \bar{A} - H_F^\sigma \otimes (\bar{L} C)] \otimes I_2) \xi - (I_n \otimes [(\bar{A} M_2 - I_m) \otimes I_2]) y(t) - (\mathbf{1}_n \otimes M_3) \delta(t), \quad (5.25)$$

其中 H_F^σ 由式(5.14)给出. 由(5.23)可得, $(\hat{\omega}_{i,l}(t) - \omega)' = -(\hat{\omega}_{i,l}(t) - \omega) + \delta(t)$. 于是可以证明当 $t \rightarrow \infty$ 时, $(\hat{\omega}_{i,l}(t) - \omega) E h$ 指数趋于 0. 又因为

$$\begin{aligned} ((\hat{\omega}_{i,l}^k - \omega^k) E^k h)' &= ((\omega + \delta(t)) E - k I_2) (\hat{\omega}_{i,l}^k - \omega^k) E^k h + k \omega^{k-1} E^k h \delta(t) \\ &\quad + (\omega + \delta(t)) k E (\hat{\omega}_{i,l}^{k-1} - \omega^{k-1}) E^{k-1} h, \quad k = 2, \dots, m, \end{aligned}$$

通过数学归纳法类似可以证明对任意的 $k = 2, \dots, m$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $(\hat{\omega}_{i,l}^k - \omega^k) E^k h$ 是指数趋于 0, 从而可得当 $t \rightarrow \infty$ 时, $y(t)$ 也是指数趋于 0. 令

$$\bar{L}^T = \max \left\{ 1, \frac{1}{\lambda} \right\} C P,$$

其中 P 是 Riccati 方程(5.16)的正定解, $\bar{\lambda}$ 由式(5.15)给出. 选取系统(5.25)的共同 Lyapunov 函数为

$$V = \xi^T (I_n \otimes P_1 \otimes I_2) \xi, \quad P_1 = P^{-1}.$$

记 $\delta_1 = \lambda_{\min}(P_1 Q P_1)$, $\delta_2 = \|P_1\|$, $\delta_3 = \|\bar{A}M_2 - I_m\|$, 以及 $\delta_4 = \|M_3\|$. 这时可得

$$\begin{aligned} \dot{V}|_{(5.25)} &\leq -\delta_1 \|\xi\|^2 + 2\|\xi\| \|P_1 \otimes I_2\| \|(\bar{A}M_2 - I_m) \otimes I_2\| \|y(t)\| \\ &\quad + 2\sqrt{n} \|\xi\| \|P_1 \otimes I_2\| \|M_3\| \|\delta(t)\| \\ &\leq -\frac{\delta_1}{2} \|\xi\|^2 + \frac{4\delta_2^2 \delta_3^2}{\delta_1} \|y(t)\|^2 + \frac{4n\delta_2^2 \delta_4^2}{\delta_1} \|\delta(t)\|^2 \\ &\leq -\frac{\delta_1}{2\delta_2} V + \frac{4\delta_2^2 \delta_3^2}{\delta_1} \|y(t)\|^2 + \frac{4n\delta_2^2 \delta_4^2}{\delta_1} \|\delta(t)\|^2. \end{aligned} \quad (5.26)$$

又因为 $y(t)$ 和 $\delta(t)$ 都是指数趋于 0, 故由 Barbalat 引理^[81]可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0,$$

于是对任意的 $i = 1, \dots, n_1$ 和 $j = 1, \dots, n_2$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i^1(t) - x_0(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_0(t) - x_j^2(t) = h.$$

因此定理得证. □

接下来给出所提的分布式控制器在有向固定拓扑下的收敛性分析. 类似于定理 5.3, 我们可以得到如下的结论.

定理 5.4. 假设 (A5.1), (A5.2), (A5.4) 成立, 则系统(5.1)在分布式控制协议(5.21), (5.22)和(5.10)下完成了对领导者(5.2)的基于时变参数 ERS(5.20)的保护任务.

注 5.2. 如果跟随者不存在分组情况以及保护距离 $\|h\| = 0$, 那么目标保护问题(5.1)就退化为一般形式的跟随者-领导者趋同性问题.

5.3 数值仿真

本小节给出一个数值仿真的例子来验证本章中提出的分布式控制协议的有效性.

考虑由 7 个跟随者和 1 个领导者构成的多自主体网络, 系统的通信拓扑图在 $\mathcal{G}_p, p = 1, 2$ 间周期切换, 其中跟随者子网络所对应的赋权邻接矩阵分别为:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

领导者和跟随者之间连接关系所对应的邻接矩阵分别为 $B^1 = \text{diag}(0, 1, 0, 1, 0, 0, 0)$ 和 $B^2 = \text{diag}(0, 0, 1, 1, 1, 0, 0)$. 由邻接矩阵可以看出, 跟随者 v_1, v_2, v_3 属于一组, 剩余的 v_4, v_5, v_6, v_7 属于另外一组.

领导者的动力学为

$$\ddot{x}_0(t) = c_0 + a \sin(t + \theta) \in \mathbb{R}^2, \quad x_0(0) = (2, 1)^T,$$

其中参数 c_0, a, θ 都是全局未知的. 令 $w_1 = x_0, w_2 = \dot{x}_0, w_3 = \ddot{x}_0, w_4 = \dot{w}_3 = a \cos(t + \theta), w_5 = \dot{w}_4 + w_3 = c_0, w = (w_1^T, w_2^T, w_3^T, w_4^T, w_5^T)^T$. 那么领导者的动力学等价于

$$\dot{w} = (\bar{A} \otimes I_2)w, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 x_0 是唯一可量测的变量.

首先, 当相对保护位移向量 $h = (-3, 4)^T$ 是常数, 即 $\bar{\omega} = 0$ 时, 图5.3(a) 给出了在控制协议(5.8)下所有跟随者状态轨迹 $x_i, i = 1, \dots, 7$ 的演化. 从中可以看出, 所有跟随者分成两组对称分布在领导者的两侧, 并且保护距离趋于预定的值. 其次, 我们考虑了时变参数的旋转保护计划表: $h = (5 \sin \bar{\omega} t, 5 \cos \bar{\omega} t)^T, \bar{\omega} = 1 + e^{-t}$, 其中参变量 $\bar{\omega}$ 是全局未知的. 图5.3(b) 给出了在控制协议(5.21)下所有跟随者状态轨迹 $x_i, i = 1, \dots, 7$ 的演化情况. 由此图可以看出, 最终所有跟随者分为两组匀速绕着领导者进行保护.

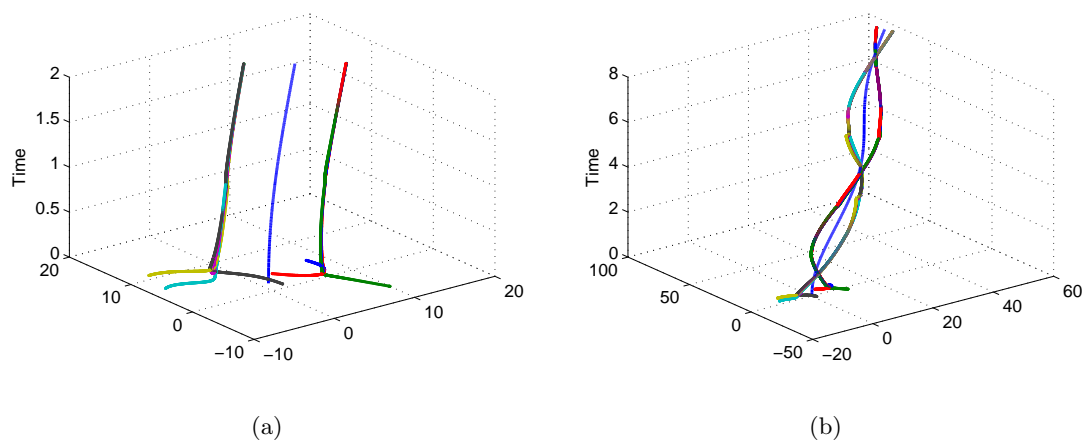


图 5.3: 跟随者的状态演化: (a) 常参数 ERS, (b) 变参数 ERS.

5.4 小结

本章考虑了一类特殊的分布式优化问题, 即代价函数为二次函数的分布式目标保护问题. 不同于前面几章, 这里的代价函数是动态变化的, 而且我们还考虑了当代价函数受到一些未知参量的影响时, 如何在线设计相应的观测器, 使得在估计未知参量的同时还能保证对整体代价函数的优化. 此外, 本章还利用二分同步的思想, 考虑了多自主体之间合作与对抗(竞争)同时存在时给整个跟随者-领导者网络带来怎样影响的问题. 并且利用这种影响实现对于一个动态移动的目标进行分组对称保护.

第六章 工作总结与展望

6.1 全文总结

本文主要研究多自主体系统的分布式优化与控制问题, 以及在传感器定位问题和目标保护问题中的应用. 针对不同类型的分布式优化问题, 分别设计了基于邻居规则的分布式优化算法, 分析了相关系统的性质以及给出了算法收敛性分析. 主要成果概括如下:

1. 从节省能量和精确梯度信息很难获取的现实情况考虑, 对于受限的约束优化问题提出了一个分布式近似梯度算法. 首先我们给出了近似梯度的定义, 然后基于此定义和对偶理论提出一个近似梯度算法, 并给出了所有个体渐近同步收敛到优化问题最优解的充分条件. 与文[41]相比, 我们考虑了更为一般的情形, 并且给出了算法的严格收敛性证明.

2. 研究了高阶多自主体系统的分布式优化问题, 将分布式优化算法与现实的物理系统有效地结合起来. 关于分布式优化的研究, 现有的大部分文献主要停留在算法设计的层面, 没有考虑到自主体本身的动力学特性. 而实际应用中, 仅仅只满足被控对象的稳定性是不够的, 如何能让实体的物理系统在稳定运行的同时还能实现某一期望的优化指标成为人们重点关注的目标并亟待解决的难题. 为此, 我们首次研究了高阶多自主体系统的分布式优化问题, 基于积分反馈和次梯度算法的思想, 提出一种连续时间的分布式优化算法, 并证明了该算法的指数收敛性. 特别还研究了, 当系统中存在不确定性和量测噪声时的分布式在线优化算法, 给出相应的分布式动态优化算法设计及其收敛性分析. 与现有的研究此类动态优化问题的文献[29]相比, 我们的算法不仅适用于 Lagrange 非线性系统, 还能推广到高阶线性系统, 用来求解一般的分布式凸优化问题. 而文[29]中的算法只适用于相容情形下的凸交计算这类特殊的分布式优化问题, 而且还得不到其算法的收敛速度.

3. 将分布式优化应用于无线传感器网络的源点定位问题中, 给出了该定位问题的分布式建模与分析. 首先基于信号接收强度的量测方法, 将源点定位问题转化为一个求解极大似然估计的非凸非线性优化问题, 然后经过一定的放松将此问题进一步转化为求解一系列圆环的交集计算问题. 由于源点只是以一定的

概率位于这些非凸圆环中,从而导致相容和不相容两种不同情形出现.针对这两种不同的情形,分别给出了相应的凸近似的分布式优化建模,为了避免区分问题是否相容所带来的麻烦,本文提出了一个统一的分布式优化算法,而不需要事先获知问题所属的类型.同时,在通信拓扑是有向时变情况下,分别给出了该定位算法在相容和不相容两种情形下严格的收敛性证明.在理论上,与现有的分布式优化算法[35]相比,我们将受限集不同情形下的连通性条件放弱到“一致联合强连通”.通过大量的仿真实验表明本文所设计的定位算法与现有的一些分布式优化算法[32]或集中式定位算法[93, 94]相比,在定位精度和计算速度上有很大的优势.

4. 研究了分布式目标保护问题.首先我们给予该问题在分布式优化框架下的建模,即模型等价于一个代价函数为含有未知参量的二次函数且动态变化的分布式优化问题.其次针对给定的保护计划表,通过对每个个体设计分布式降阶观测器来预估移动目标的不可量测的状态,进而给出一种基于邻居信息的反馈控制器设计,并且分别证明了在不同拓扑下(有向固定和无向切换),该多自主体系统都能够实现对动态移动目标的目标保护任务.最后,我们还给出了当计划表存在不确定或噪声影响时的分布式控制器的设计及其收敛性分析.与现有的大多数关于带有领导者的多自主体系统的文献相比,我们在考虑个体间相互合作的关系的同时还引入了竞争模式,在合作与对抗并存的情形下研究了多自主体系统如何实现分组来保护动态移动的目标.

6.2 进一步工作展望

多自主体系统的诸多课题研究正处于快速发展和进一步完善阶段当中,尚有许多有意义的问题值得研究.下面就多自主体系统的分布式优化方面的研究课题,阐述今后需要研究的工作.

- 进一步研究一般非线性多自主体系统的分布式优化,目前对非线性系统的分布式优化研究比较少,我们希望能够结合现有的高阶线性系统的分布式优化已经取得的研究结果以及非线性控制的理论知识给出该问题的控制器设计策略.
- 关于分布式在线优化问题,本文只是给出了二阶多自主体系统关于 regret 界的初步分析结果.如果当系统存在不确定性影响时,如何设计相应的抗干扰分布式在线优化是值得进一步考虑的,尤其是关于 regret 界的优化.

- 本文研究的高阶多自主体系统的分布式优化都是无约束的, 并没有考虑约束条件. 而现实应用中, 许多实际问题都要受很多条件的限制, 所以关于分布式约束优化的研究是非常必要的. 能否将现有的一些动态优化的结果推广到一般的约束优化问题也是值得进一步研究.
- 随着物理信息系统的发展, 混杂系统的优化控制是我们下一步关注的重点. 希望能够为实体系统设计出连续时间的控制器, 使得它们在离散时间的通信下实现在线优化某一指标的任务.
- 分布式优化的一个比较大的潜在应用是智能电网. 如何能有效地将分布式优化与智能电网中的经济调度、资源分配、最优潮流以及频率负载控制等问题结合起来是非常值得进一步研究的课题.

参考文献

- [1] Aguilar-Ponce G, Kumar A, TecpanecatI-Xihuitl J, et al. A network of sensor-based framework for automated visual surveillance[J]. *Journal of Network and Computer Applications*, 2007, 30(3): 1244-1271.
- [2] Cortés J, Martinez S, Karatas T, et al. Coverage control for mobile sensing networks[J]. *IEEE Transaction on Robotics and Automation*, 2004, 20(2): 243-255.
- [3] Earl M G, D Andrea R. A study in cooperative control: the RoboFlag drill[C]. *In Proceedings of the IEEE American Control Conference*, 2002, 3: 1811-1812.
- [4] Egerstedt M, Hu X. Formation constrained multi-agent control[J]. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2001, 17(6): 947-951.
- [5] Leonard N, Friorelli E. Virtual leaders, artificial potentials and coordinated control of groups[C]. *In Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, Orlando, 2001. 2968-2973.
- [6] Lin Z, Broucke M, Francis B. Local control strategies for groups of mobile autonomous agents[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(4): 622-629.
- [7] Lin Z, Francis B, Maggiore M. Necessary and sufficient graphical conditions for formation control of unicycles[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(1): 121-127.
- [8] Okubo A. Dynamic aspects of animal grouping: swarms, schools, flocks and herds[J]. *Advances in Biophysics*, 1986, 22: 1-94.
- [9] Reynolds C W. Flocks, herds, and schools: A distributed behavioral model[J]. *Computer Graphics*, 1987, 21: 25-34.

- [10] Low D J. Statistical physics: Following the crowd[J]. *Nature*, 2000, 407(6803): 465-466.
- [11] Couzin I D, Krause J, Franks N R, et al. Effective leadership and decision making in animal groups on the move[J]. *Nature*, 2005, 433(7025): 513-516.
- [12] Cucker F, Smale S. Emergent behavior in flocks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(5): 852-862.
- [13] Toner J, Tu Y. Flocks, herds, and schools: A quantitative theory of flocking[J]. *Physical Review E*, 1998, 58(4): 4828-4858.
- [14] Vicsek T, Czirok A, Ben-Jacob E, et al. Novel type of phase transitions in a system of self-driven particles[J]. *Physical Review Letters*, 1995, 75(6): 1226-1229.
- [15] Jadbabaie A, Lin J, Morse A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbour rules[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(6): 988-1001.
- [16] Bertsekas D P, Tsitsiklis J. *Parallel and Distributed Computation: Numerical Methods*[M]. Princeton Hall, 1989.
- [17] Acemoglu D, Dahleh M, Lobel I, et al. Bayesian learning in social networks[J]. *Review of Economic Studies*, 2011, 78(4): 1201-1236.
- [18] Tsitsiklis J, Bertsekas D P, Athans M. Distributed asynchronous deterministic and stochastic gradient optimization algorithms[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1986, 31(9): 803-812.
- [19] Choi J, Oh S, Horowitz R. Distributed learning and cooperative control for multi-agent systems[J]. *Automatica*, 2009, 45(12): 2802-2814.
- [20] Shamma J. *Cooperative Control of Distributed Multi-Agent Systems*[M]. Hoboken, NJ: Wiley-Interscience, 2008.
- [21] Lynch N A. *Distributed Algorithms*[M]. San Francisco, CA: Morgan Kaufmann, 1996.

- [22] Olfati-Saber R. Flocking for multi-agent dynamic systems: Algorithms and theory[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(3): 401-420.
- [23] Ren W, Beard R. *Distributed Consensus in Multi-vehicle Cooperative Control*[M]. London: Springer-Verlag, 2008.
- [24] Osborne M J. *A Course in Game Theory*[M]. Cambridge, MA: MIT Press, 1994.
- [25] Boyd S P, Vandenberghe L. *Convex Optimization*[M]. New York: Cambridge university press, 2004.
- [26] Shi G, Johansson K H, Hong Y. Reaching an optimal consensus: dynamical systems that compute intersections of convex sets[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(3): 610-622.
- [27] Zhu M, Martínez S. Distributed coverage games for energy-aware mobile sensor networks[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2013, 51(1): 1-27.
- [28] 洪奕光, 翟超. 多智能体系统动态协调与分布式控制设计[J]. *控制理论与应用*, 2011, 28(10): 1506-1512.
- [29] Meng Z, Yang T, Shi G, et al. Cooperative set aggregation for multiple Lagrangian systems[J]. *arXiv preprint arXiv:1402.2634*.
- [30] Sayed A H, Tu S Y, Chen J, et al. Diffusion strategies for adaptation and learning over networks: an examination of distributed strategies and network behavior[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2013, 30(3): 155-171.
- [31] Yang S, Tan S, Xu J. Consensus based approach for economic dispatch problem in a smart grid[J]. *IEEE Transaction on Power Systems*, 2013, 28(4): 4416-4426.
- [32] Meng W, Xiao W, Xie L, et al. Diffusion based projection method for distributed source localization in wireless sensor networks[C]. *In Proceedings of the IEEE Computer Communications Workshops*, Shanghai, 2011. 537-542.

- [33] Lou Y, Hong Y. Distributed convergence to Nash equilibrium of antagonistic optimization networks[M]. In *Proceedings of the 32nd Chinese Control Conference*, Xi'an, 2013. 6976-6980.
- [34] Nedić A, Ozdaglar A. Distributed subgradient methods for multi-agent optimization[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(1): 48-61.
- [35] Nedić A, Ozdaglar A, Parrilo P A. Constrained consensus and optimization in multi-agent networks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(4): 922-938.
- [36] Wei E, Ozdaglar A. Distributed Alternating Direction Method of Multipliers[C]. In *Proceedings of the 51st IEEE Conference on Decision and Control*, Maui, 2012. 5445-5450.
- [37] Yan F, Sundaram S, Vishwanathan S V N, et al. Distributed autonomous online learning: regrets and intrinsic privacy-preserving properties[J]. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 2013, 25(11): 2483-2493.
- [38] Shi G, Johansson K H. Randomized optimal consensus of multi-agent systems[J]. *Automatica*, 2012, 48(12): 3018-3030.
- [39] Lu J, Tang C Y. Zero-gradient-sum algorithms for distributed convex optimization: the continuous-time case[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(9): 2348-2354.
- [40] Srivastava K, Nedić A. Distributed asynchronous constrained stochastic optimization[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2011, 5(4): 772-790.
- [41] Zhu M, Martínez S. On distributed convex optimization under inequality and equality constraints via primal-dual subgradient methods[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(1): 151-164.
- [42] Yi P, Hong Y. Quantized sub-gradient algorithm and data rate analysis for distributed optimization[J]. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2014, 1(4): 380-392.

- [43] Ram S S, Nedić A, Veeravalli V V. Incremental stochastic subgradient algorithms for convex optimization[J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2009, 20(2): 691-717.
- [44] Boyd S, Parikh N, Chu E, et al. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers[J]. *Foundations and Trends in Machine Learning*, 2011, 3(1): 1-122.
- [45] Kia S, Cortés J, Martínez S. Distributed convex optimization via continuous-time coordinate algorithms with discrete-time communication[J]. *arXiv preprint arXiv: 1401.4432*.
- [46] Wang X, Yi P, Hong Y. Dynamic optimization for multi-agent systems with external disturbances[J]. *Control Theory and Technology*, 2014, 12(2): 132-138.
- [47] Lou Y, Shi G, Johansson K H, et al. Approximate projected consensus for convex intersection computation: convergence analysis and critical error angle[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 59(7): 1722-1736.
- [48] Aronszajn N. Theory of reproducing kernels[J]. *Transactions of the American mathematical society*, 1950, 68(3): 337-404.
- [49] Halperin I. The product of projection operators[J]. *Acta Scientiarum Mathematicarum*, 1962, 23: 96-99.
- [50] Deutsch F, Hundal H. The rate of convergence for the cyclic projections algorithm III: Regularity of convex sets[J]. *Journal of Approximation Theory*, 2008, 155(2): 155-184.
- [51] Lou Y, Shi G, Johansson K H, et al. Convergence of random sleep algorithms for optimal consensus[J]. *Systems & Control Letters*, 2013, 62(12): 1196-1202.
- [52] Wang J, Elia N. Control approach to distributed optimization[C]. *In Proceedings of the 48th Allerton Conference on Communications, Control and Computing*, Allerton, 2010. 557-561.

- [53] Johansson B, Keviczky T, Johansson M, et al. Subgradient methods and consensus algorithms for solving convex optimization problems[C]. *In Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*, Cancun, 2008. 4185-4190.
- [54] Lobel I, Ozdaglar A. Distributed subgradient methods for convex optimization over random networks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(6): 1291-1306.
- [55] Wei E, Ozdaglar A, Jadbabaie A. A distributed Newton method for network utility maximization - I: algorithm[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(9): 2162-2175.
- [56] Zanella F, Varagnolo D, Cenedese A, et al. Newton-Raphson consensus for distributed convex optimization[C]. *In Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC)*, Orlando, 2011. 5917-5922.
- [57] Jakovatic D, Xavier J, Moura J M. Fast distributed gradient methods[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 59(5): 1131-1146.
- [58] Nedić A, Olshevsky A. Distributed optimization over time-varying directed graphs[C]. *In Proceedings of the 52nd IEEE Annual Conference on Decision and Control*, Firenze, 2013. 6855-6860.
- [59] Tsianos K I, Lawlor S, Rabbat M G. Push-sum distributed dual averaging for convex optimization[C]. *In Proceedings of the 51st IEEE Conference on Decision and Control*, Maui, 2012. 5453-5458.
- [60] Lu J, Regier P R, Tang C Y. Control of distributed convex optimization[C]. *In Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control*, Atlanta, 2010. 489-495.
- [61] Lu J, Tang C Y, Regier P R, et al. Gossip algorithms for convex consensus optimization over networks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(12): 2917-2923.

- [62] Jakovatic D, Xavier J, Moura J M. Cooperative convex optimization in networked systems: Augmented lagrangian algorithms with directed gossip communication[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(8): 3889-3902.
- [63] Lin P, Ren W. Distributed subgradient projection algorithm for multi-agent optimization with nonidentical constraints and switching topologies[C]. In *Proceedings of the 51st IEEE Conference on Decision and Control*, Maui, 2012. 6813-6818.
- [64] Lee S, Nedić A. Distributed random projection algorithm for convex optimization[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2013, 7(2): 221-229.
- [65] Gharesifard B, Cortés J. Distributed continuous-time convex optimization on weight-balanced digraphs[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 59(3): 781-786.
- [66] Liebrand W, Nowak A, Hegselmann R. *Computer Modeling of Social Processes*[M]. London: Springer-Verlag, 1998.
- [67] Basar T, Olsder G J, Clsder G J. *Dynamic Noncooperative Game Theory*[M]. London: Academic Press, 1995.
- [68] Chung T H, Hollinger G A, Isler V. Search and pursuit-evasion in mobile robotics[J]. *Autonomous Robots*, 2011, 31(4): 299-316.
- [69] Dockner E, Jorgensen S, Long N V, et al. *Differential Games in Economics and Management Science*[M]. Cambridge University Press, 2006.
- [70] 卢强, 盛成玉, 陈颖. 巨型风电并网系统的协同自律控制[J]. *控制理论与应用*, 2011, 28(10): 1491-1495.
- [71] Li N, Marden J. Designing games for distributed optimization[C]. In *Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control*, Orlando, 2011. 2434-2440.

- [72] Gharesifard B, Cortés J. Distributed convergence to Nash equilibria in two-network zero-sum games[J]. *Automatica*, 2013, 49(6): 1683-1692.
- [73] Stankovic M S, Johansson K H, Stipanović D M. Distributed seeking of Nash equilibria with applications to mobile sensor networks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(4): 904-919.
- [74] Zhu M, Martínez S. Distributed coverage games for mobile visual sensor networks[J]. *arXiv preprint arXiv: 1002.0367*.
- [75] Frihauf P, Krstic M, Basar T. Nash equilibrium seeking in noncooperative games[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(5): 1192-1207.
- [76] Droge G, Kawashima H, Egerstedt M B. Continuous-time proportional-integral distributed optimisation for networked systems[J]. *Journal of Control and Decision*, 2014, 1(3): 191-213.
- [77] Godsil C, Royle G. *Algebraic Graph Theory*[M]. New York: Springer-Verlag, 2001.
- [78] Poljak B T. *Introduction to Optimization*[M]. New York: Optimization Software, 1987.
- [79] Bertsekas D P, Nedic A, Ozdaglar A. *Convex Analysis and Optimization*[M]. Belmont, MA: Athena Science, 2003.
- [80] Horn R, Johnson C R. *Matrix Analysis*[M]. New York: Cambridge University Press, 1985.
- [81] Khalil H K. *Nonlinear Systems*[M]. New Jersey: Prentice-Hall, 2002.
- [82] Wonham W M. *Linear Multivariable Control*[M]. New York: Springer-Verlag, 1985.
- [83] Clarke F, Ledyaev Y S, Stern R, et al. *Nonsmooth Analysis and Control Theory*[M]. Springer Science & Business Media, 1998.
- [84] Aubin J, Cellina A. *Differential Inclusions*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1984.

-
- [85] Kvaternik K, Pavel L. A continuous-time decentralized optimization scheme with positivity constraints[C]. *In Proceedings of the 51th IEEE Conference on Decision and Control*, Maui, 2012. 6801-6807.
- [86] Duchi J, Hazan E, Singer Y. Adaptive subgradient methods for online learning and stochastic optimization[J]. *Journal of Machine Learning Research*, 2011, 12: 2121-2159.
- [87] Cesa-Bianchi N, Conconi A, Gentile C. On the generalization ability of online learning algorithms[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2004, 50(9): 2050-2057.
- [88] Wang J, Elia N. A control perspective for centralized and distributed convex optimization[C]. *In Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control*, Orlando, USA, 2011. 3800-3805.
- [89] Xiao L, Boyd S. A scheme for robust distributed sensor fusion based on average consensus[C]. *In Proceedings of the 4th International Symposium on Information Processing in Sensor Networks*, 2005. 63-70.
- [90] Gharesifard B, Cortes J. Distributed strategies for generating weight-balanced and doubly stochastic digraph[J]. *European Journal of Control*, 2012, 6: 539-557.
- [91] Ho K C, Sun M. An accurate algebraic closed-form solution for energy-based source localization[J]. *IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, 2007, 15(8): 2542-2550.
- [92] Meng W, Xiao W, Xie L. An efficient EM algorithm for energy-based sensor network multi-source localization in wireless sensor networks[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2011, 60(3): 1017-1027.
- [93] Sheng X, Hu Y H. Maximum likelihood multiple-source localization using acoustic energy measurements with wireless sensor network[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 53(1): 44-53.

- [94] Chen H, Shi Q, Tan R, et al. Mobile element assisted cooperative localization for wireless sensor networks with obstacles[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communication*, 2010, 9(3): 956-963.
- [95] Biswas P, Lian T C, Wang T C, Ye Y. Semidefinite programming based algorithms for sensor network localization[J]. *ACM Transactions on Sensor Networks*, 2006, 2(2): 188-220.
- [96] Sturm J F. Using SeDuMi 1.02 a Matlab toolbox for optimization over symmetric cone[J]. *Optimization Methods and Software*, 1999, 11-12: 625-653.
- [97] Hong Y, Hu J, Gao L. Tracking control for multi-agent consensus with an active leader and variable topology[J]. *Automatica*, 2006, 42(7): 1177-1182.
- [98] Lou Y, Hong Y. Distributed surrounding design of target region with complex adjacency matrices[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 60(1): 283-288.
- [99] Hong Y, Wang X. Multi-agent tracking of high-dimensional active leader with switching topology[J]. *Journal of Systems Science and Complexity*, 2009, 22(4): 722-731.
- [100] Altafini C. Consensus problems on networks with antagonistic interactions[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(4): 935-946.
- [101] Valcher M E, Misra P. On the consensus and bipartite consensus in high-order multi-agent dynamical systems with antagonistic interactions[J]. *Systems & Control Letters*, 2014, 66: 94-103.

发表文章目录

- [1] **Zhang Y**, Hong Y. Distributed control design for leader escort of multi-agent systems. *International Journal of Control*, 2015, 88(5): 935-945.
- [2] **Zhang Y**, Lou Y, Hong Y, Xie L. Distributed projection-based algorithms for source localization in wireless sensor networks. *IEEE Transactions on Wireless Communication*, DOI:10.1109/TWC.2015.2402672, 2015.
- [3] **Zhang Y**, Lou Y, Hong Y. An approximate gradient algorithm for constrained distributed convex Optimization. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2014, 1(1): 61-67.
- [4] 洪奕光, 张艳琼. 分布式优化: 算法设计和收敛性分析. *控制理论与应用*, 2014, 31(7): 850-857.
- [5] Yi P, **Zhang Y**, Hong Y. Potential game design for a class of distributed optimization problems. *Journal of Control and Decision*, 2014, 1(2): 166-179.
- [6] **Zhang Y**, Hong Y. Distributed leader-escort control of multi-agent systems with variable topologies. *In Proceedings of the 13th International conference on Control, Automation, Robotics and Vision*, Singapore, 2014. 699-704.
- [7] **Zhang Y**, Hong Y. Distributed event-triggered tracking control of multi-agent systems with active leader. *In Proceedings of the 10th World Congress on Intelligent Control and Automation*, Beijing, 2012. 1453-1458.
- [8] **Zhang Y**, Hong Y. Multi-agent consensus convergence analysis with infinitely jointly connected and directed communication graph. *In Proceedings of the 11th World Congress on Intelligent Control and Automation*, Shengyang, 2014. 2091-2096.

- [9] Xu X, **Zhang Y**, Hong Y. Matrix approach to stabilizability of deterministic finite automata. *In Proceedings of IEEE American Control Conference*, Washington DC, 2013. 3242-3247.
- [10] **Zhang Y**, Xu X, Hong Y. Bi-decomposition analysis and algorithm of automata based on semi-tensor product. *In Proceedings of the 31st Chinese Control Conference*, Hefei, 2012. 2151-2156.
- [11] **Zhang Y**, Lou Y, Hong Y. An approximate projection algorithm for distributed set intersection computation. *In Proceedings of the 32nd Chinese Control Conference*, Xi'an, 2013. 7216-7221.
- [12] Yi P, **Zhang Y**, Hong Y. Design games to solve distributed optimization problem with application in electric vehicle charge management. *In Proceedings of the 32nd Chinese Control Conference*, Xi'an, 2013. 6873-6878.
- [13] **Zhang Y**, Hong Y. Distributed optimization design for second-order multi-agent systems. *In Proceedings of the 33rd Chinese Control Conference*, Nanjing, 2014. 1755-1760.
- [14] **Zhang Y**, Hong Y. Distributed optimization for second-order multi-agent systems with uncertainties. *Automatica*, (under review), 2014.
- [15] **Zhang Y**, Hong Y. Distributed optimization design for high-order multi-agent systems, *In Proceedings of the 34th Chinese Control Conference*, (accepted), 2015.

简 历

基本情况

张艳琼, 女, 湖北省随州市人, 1987 年 7 月出生, 未婚, 中国科学院数学与系统科学研究院在读博士研究生.

教育状况

2006 年 9 月至 2010 年 7 月, 武汉大学数学与统计学院, 本科, 专业: 数学与应用数学.

2010 年 9 月至 2015 年 7 月, 中国科学院数学与系统科学研究院, 硕博连续研究生, 专业: 运筹学与控制论.

研究兴趣

多自主体系统, 分布式优化, 无线传感器网络

联系方式

通讯地址: 北京市中关村东路 55 号, 中国科学院数学与系统科学研究院系统科学研究所

邮编: 100190

E-mail: yanqiongzh@amss.ac.cn

致 谢

值此论文完成之际,我想首先对我的第一指导老师洪奕光研究员致以最诚挚的谢意.非常感谢他一步步把我带到科研的最前沿,感谢他用一个个生动幽默的小故事或一些寓意深远的佛说禅意教会我如何以一个乐观豁达的心态对待科研、对待生活.这五年的学习生活伴随着洪老师孜孜不倦的教导和无微不至的关怀,他毫无保留地与我分享学术科研经验,悉心指导我如何做有意义的科学研究、如何发现问题、如何撰写论文、如何制作幻灯片、如何做好学术报告,他尽可能多的给我提供与国内外优秀学者面对面交流的机会,并时常言传身教地告诫我虚心的态度和端正的学术品质对于一个科研工作者的的重要性.跟随洪老师学习的五年是我成长最快的五年,这段经历是我人生的一笔宝贵财富,相信它会使我受益终生.

特别感谢我的第二指导老师贾英民教授,在他的热情帮助和引领下,我才有幸加入数学院这个科研氛围浓郁的学术殿堂.感谢秦化淑老师对本文写作过程中的倾心指导.秦老师仔细地审阅了本文的初稿,并提出很多宝贵的修改意见.秦老师对学术的热情和对科研精益求精的态度让我无比的佩服与赞叹.感谢系统控制实验室的全体老师和学生!感谢陈翰馥院士、郭雷院士、程代展老师、张纪峰老师、黄一老师等在历次的学术活动上给予的指导和帮助.感谢姚鹏飞老师、方海涛老师、席在荣老师、韩靖老师、齐洪胜老师、赵文虢老师等,他们开设的课程为我的研究奠定了基础.感谢常金玲老师、沈源老师、孟安琪老师在学习和生活方面所给予的关心和帮助.感谢研究生部和图书馆的各位老师给我的学习生活提供的便利和帮助.

特别感谢胡江平、石国栋、陈士剑、娄有成、翟超、王兴虎、徐相如、宋文俊、唐于涛、张江波、李睿、衣鹏、邓镇华、周宏斌、胡琛、王颖慧、王燕等同门兄弟姐妹对我的诸多帮助.他们不但在科研上给予我很多的启发与帮助,生活上也带来很多的快乐与乐趣.特别感谢娄有成师兄对我科研的巨大帮助,他亦师亦友,从不吝啬对我的提携与帮助,并乐于分享他的人生经验,其对待学术精益求精的态度和严谨扎实的数学功底令我十分的钦佩.特别感谢宋文俊师姐一直以来对我的关心和帮助,在我眼里如百度百科一般存在的女神,每次和她讨论问题都会给我带来很多新的体会和想法,其在编程方面的深厚功底令

我深深的折服. 特别感谢衣鹏师弟在讨论班学习中带给我很多新的想法与启发, 在他的积极组织下我学习了很多新知识, 他渊博的知识视野、对学术敏锐的洞察力和对生活幽默豁达的态度令我十分的崇拜与佩服.

特别感谢一起从武大来科苑学习的小伙伴: 刘田香、雷浩、马仕超、朱锋. 在他们的陪伴下, 我度过了求学生涯中最无忧无虑的美好时光, 这九年来的相知相伴必将给我的记忆留下最华美的篇章. 感谢实验室一起学习和玩耍的小伙伴们: 毕文健、刘玉香、苏伟、杨晓龙、韩华伟、刘丽君、周华成、雷金龙、蒋衍光、白文艳等, 我们在一起经历了科研的酸甜苦辣, 与他们的交往使我感受到学习的乐趣和生活的充实, 感谢小伙伴们和我共同度过的这段美好宝贵的时光, 衷心祝福兄弟姐妹们都能梦想照进现实. 特别感谢刘玉香同学, 谢谢她一直包容我的任性与唠叨以及偶尔一些无理的要求, 谢谢她一直以来的陪伴和照顾, 她的真诚善良永远铭记我心.

感谢我的家人对我的信任和关爱, 理解与支持, 是她们用爱心和包容使我有勇气朝着自己的目标继续前进. 她们从来都没有干涉过我的意愿, 也从来没有要求过我为家里回馈什么, 无论我做出什么决定她们都义无反顾的支持我, 谢谢我的家人这么多年来默默付出的爱!

谨以此文献给我深爱的父亲母亲!

张艳琼

2015年4月20日