

Haskell Project

- Documentação e casos de teste

- Fibonacci

- FibRec
 - FibLista
 - FibListaInfinita

- BigNumbers

- Scanner
 - Output
 - SomaBN
 - SubBN
 - MulBN
 - DivBN
 - SafeDivBN

- Fibonacci com BigNumbers

- FibRecBN
 - FibListaBN
 - FibListaInfinitaBN

- Estratégias para BigNumbers

- 1. Tipo
 - 2. Scanner
 - 3. Output
 - 4. somaBN
 - 5. SubBN
 - 6. MulBN
 - 7. DivBN

- Resposta à alínea 4

- Considerações Finais

Nome	Número UP	Turma	Grupo
Francisco Gonçalves	201704790	7	8
Rita Silva	201806527	7	8

Documentação e casos de teste

Esta secção segue o seguinte formato:

FunctionName

```
functionName :: type -- id
```

```
testcase 1
testcase 2
testcase 3
...
```

Breve descrição do funcionamento do predicado.

FibRec

```
fibRec :: (Integral a) => a -> a -- 1.1
```

```
fibRec 5
fibRec 10
fibRec 25
```

Parte dos casos base `fibRec 0 = 0` e `fibRec 1 = 1` e recursivamente soma os pares fibonacci `(n-2)` e `(n-1)`.

FibLista

```
fibLista :: Int -> Int -- 1.2
```

```
fibLista 5
fibLista 10
fibLista 30
```

Parte dos casos base `fibRec 0 = 0` e `fibRec 1 = 1` e soma os pares fibonacci `n-2` e `(n-1)`, selecionado (usando `!!`) os elementos `n-2` e `n-1` da lista de fibonacci de `0` até `n`

FibListaInfinita

```
fibListaInfinita :: Int -> Int
```

```
fibListaInfinita 15  
fibListaInfinita 40  
fibListaInfinita 60
```

Este predicado usa uma função auxiliar `fibInfinitosAux` que cria uma lista infinita de números fibonacci, através do `zipWith (+)` recursivo de duas listas de fibonacci infinitas desfasadas por 1 casa (`lista` e `tail (lista)`). Por terem esse desfasamento, é possível criar uma lista de números fibonacci.

```
0 1 1 2 3 5 (...)
```

```
0 1 1 2 3 5 (...)
```

Scanner

```
scanner :: String -> BigNumber
```

```
scanner "1234"  
scanner "-1234"  
scanner "0000"  
scanner "0001234"  
scanner "-0001234"  
scanner "12345678901234567890"
```

Percorre todos os caracteres, e transforma-os em inteiros, resultando numa lista de inteiros entre `0` e `9`. Acrescenta o sinal negativo ao primeiro inteiro caso o primeiro char fosse `-`, após ter removido potenciais zeros à esquerda usando uma função auxiliar `removeLeftZeros`.

Output

```
output :: BigNumber -> String
```

```
output [1,2,3,4] -- or output (scanner "1234")  
output [-1,2,3,4]  
output [0,0,0,0,0]  
output [0,0,0,1,2,3,4]  
output [1,2,3,4,5,6,7,8,9,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,0]
```

Percorre todos os dígitos de um `BigNumber`, transformando-os em chars e juntando-os numa string, tendo o cuidado de remover potenciais zeros à esquerda.

SomaBN

```
somaBN :: BigNumber -> BigNumber -> BigNumber
```

```
somaBN (scanner "5") (scanner "17")      -- 22
somaBN (scanner "124") (scanner "987")   -- 1111
somaBN (scanner "43632") (scanner "83729") -- 127361
somaBN (scanner "99929834363") (scanner "98934383729") -- 198864218092
somaBN (scanner "123") (scanner "-34")    -- 89
somaBN (scanner "123") (scanner "-130")   -- -7
somaBN (scanner "23") (scanner "-124")    -- -101
somaBN (scanner "-123") (scanner "33")    -- -90
somaBN (scanner "-123") (scanner "133")   -- 10
somaBN (scanner "-123") (scanner "124")   -- 1
somaBN (scanner "-123") (scanner "-33")   -- -156
somaBN (scanner "-123") (scanner "-133")  -- -256
somaBN (scanner "-9371") (scanner "-29358") -- -38729
```

Soma dois `BigNumbers`. Caso os números não sejam ambos positivos, transforma somas de sinais opostos em subtrações e no caso de serem ambos negativos inverte o sinal dos operandos e da soma final. Antes de somar as duas listas com `zipWith (+) bn1 bn2`, acrescenta zeros à esquerda ao número menos comprido, para as listas serem correspondentes. Processa os *carry outs*, subtraindo 10 a um dígito e acrescentar um ao próximo. Mais detalhes sobre este predicado no ponto 4 na **secção de estratégias**.

SubBN

```
subBN :: BigNumber -> BigNumber -> BigNumber
```

```
subBN (scanner "123") (scanner "123")      -- 0
subBN (scanner "123") (scanner "246")      -- -123
subBN (scanner "9839289873") (scanner "983488328") -- 8855801545
subBN (scanner "123") (scanner "-33")      -- 156
subBN (scanner "123") (scanner "-133")     -- 256
subBN (scanner "-123") (scanner "44")      -- -167
subBN (scanner "-123") (scanner "144")     -- -267
subBN (scanner "-123") (scanner "-33")     -- -90
subBN (scanner "-123") (scanner "-133")    -- 10
```

Subtrai dois `BigNumbers`. Caso os números não sejam ambos positivos, transforma subtrações de sinais opostos em somas e no caso de serem ambos negativos inverte o sinal dos operandos e da subtração final. Antes de subtrair as duas listas com `zipWith (-) bn1 bn2`, acrescenta zeros à esquerda ao número menos comprido, para as listas serem correspondentes. Para além disso subtrai o maior número ao menor número. Processa os *carry outs*, acrescentando 10 ao dígito atual e decrementando um ao próximo **ou** decrementando 10 ao dígito atual e incrementando 1 ao próximo. Mais detalhes sobre este predicado no ponto 5 na **secção de estratégias**.

MulBN

```
mulBN :: BigNumber -> BigNumber -> BigNumber
```

```
mulBN (scanner "12") (scanner "24")      -- 288
mulBN (scanner "123") (scanner "246")    -- 30258
mulBN (scanner "938123") (scanner "99382246") -- 93232770764258
mulBN (scanner "123") (scanner "-33")    -- -4059
mulBN (scanner "-123") (scanner "133")   -- -16359
mulBN (scanner "-123") (scanner "-33")   -- 4059
mulBN (scanner "-123") (scanner "-133")  -- 16359
```

Multiplica 2 `BigNumbers`. Caso os operandos tenham sinais opostos, inverte-se o sinal do número negativo e também o sinal da operação final e se os operandos forem ambos negativos, trocam-se ambos os sinais dos operandos. Começa por ver qual o maior número e transforma-o acrescentando 0s de acordo com a ordem de cada dígito: `[1, 2, 3]` passa a `[100, 20, 3]`. Esse número transformado será multiplicado por cada um dos dígitos do outro número, acrescentando um 0 em cada parcela, consoante a ordem: $123 \cdot 45 = ([100, 20, 30] \cdot 5) ++ [] + ([100, 20, 30] \cdot 4) ++ [0]$. Mais detalhes sobre este predicado no ponto 6 na **secção de estratégias**.

DivBN

```
divBN :: BigNumber -> BigNumber -> (BigNumber, BigNumber)
```

```
divBN (scanner "24") (scanner "12")      -- (2,0)
divBN (scanner "30") (scanner "12")      -- (2,6)
divBN (scanner "144") (scanner "12")     -- (12,0)
divBN (scanner "28385") (scanner "4")    -- (7096,1)
divBN (scanner "333240") (scanner "212") -- (1571, 188)
divBN (scanner "898240") (scanner "92")  -- (9763, 44)
```

Divide 2 `BigNumbers`. Assume-se que os números são ambos positivos. Se $x < y$ o resultado é imediato: $(0, \text{subBN } y \ x)$. Caso contrário esta função encontra o resultado da divisão entrando num ciclo que transforma `y` num número (`y'`) mais perto de `x`, sem o exceder (i.e.: $x=355$, $y=3$, $y'=30$). Ciclicamente verifica quantas vezes 30 cabe em 255 e quando terminar coloca esse valor na lista fazendo append, valor que será sempre ≤ 10 . Próxima iteração passa por pegar no resto ($255 - 30 \cdot 8 = 15$) e usar `init y'` (`[3]`). A ultima iteração deste processo ocorre com quando $y' == y$. Para mais detalhes ver ponto 6 da **secção de estratégias**.

FibRecBN

```
fibRecBN :: BigNumber -> BigNumber
```

```
fibRecBN (scanner "5")  
fibRecBN (scanner "15")  
fibRecBN (scanner "20")
```

Parte dos casos base `fibRec 0 = 0` e `fibRec 1 = 1` e recursivamente soma os pares fibonacci `(n-2)` e `(n-1)`, usando `somaBN`.

FibListaBN

```
fibListaBN :: BigNumber -> BigNumber
```

```
fibListaBN (scanner "10")  
fibListaBN (scanner "15")  
fibListaBN (scanner "20")
```

Usa uma função nova `nthBN` para substituir o operador `!!` nos `BigNumbers` e partindo dos casos base `fibListaBN [0] = [0]` e `fibListaBN [1] = [1]`, soma os pares fibonacci `n-2` e `(n-1)`, selecionado com `nthBN` os elementos `n-2` e `n-1` da lista de fibonacci de `0` até infinito, já que para não ser infinito precisaríamos de ter o valor absoluto inteiro do BN `n`.

FibListaInfinitaBN

```
fibListaInfinitaBN :: BigNumber -> BigNumber
```

```
fibListaInfinitaBN (scanner "15")  
fibListaInfinitaBN (scanner "60")  
fibListaInfinitaBN (scanner "100")
```

Este predicado usa uma função auxiliar `fibInfinitosAuxBN` que cria uma lista infinita de `BigNumbers` fibonacci, através do `zipWith somaBN` recursivo de duas listas de fibonacci infinitas desfasadas por 1 casa (`lista` e `tail (lista)`). Por terem esse desfasamento, é possível criar uma lista de números fibonacci.

```
[0] [1] [1] [2] [3] [5] (...)
```

```
[0] [1] [1] [2] [3] [5] (...)
```

SafeDivBN

```
safeDivBN :: BigNumber -> BigNumber -> Maybe (BigNumber, BigNumber)
```

```
safeDivBN (scanner "144") (scanner "12")    -- (12,0)
safeDivBN (scanner "148") (scanner "12")    -- (12,4)
safeDivBN (scanner "148") (scanner "0")     -- Nothing
```

Executa a divisão quando o divisor não é 0, caso contrário retorna `Nothing`

Estratégias para BigNumbers

1. Tipo

Definir o novo tipo como uma lista de inteiros: `type BigNumber = [Int]`

2. Scanner

Para definir `scanner` recorreremos ao `map` e `read` para percorrer todos os caracteres, transformando-os em inteiros, tendo o cuidado de acrescentar o sinal negativo caso o primeiro char fosse `-` e removendo potenciais zeros à esquerda usando uma função auxiliar `removeLeftZeros`.

3. Output

Para definir `output` recorreremos a `concatMap show` que percorre e junta num array de chars todos os dígitos inteiros da lista passada como argumento, tendo o cuidado de remover potenciais zeros à esquerda, recorrendo à função auxiliar `removeLeftZeros`.

4. somaBN

Para definir `somaBN` começámos por criar predicados auxiliares

- `changeSign` para mudar de sinal.
- `isPositive` e `isNegative` para verificar sinal dos BNs
- `padLeftZeros` que acrescenta zeros à esquerda, já que no caso de "somarmos listas" de tamanho diferente, é preciso acrescentar zeros à esquerda num dos operandos até o comprimento ser igual.

O resultado é obtido usando `zipWith (+) n1 n2`. Tendo obtido o resultado, sem pensar nos `carry outs` das somas, pegamos nesse *BigNumber* e usamos a função `carrySum` para lidar com as casas superiores a 9 e outros casos críticos para o resultado final. A nossa implementação de `somaBN` funciona como uma espécie de "router" de resultado:

- caso `x` e `y` sejam ambos positivos é feita uma soma normal com `sumBNResult`.
- caso `x` tenha sinal diferente de `y`, a soma é transformada em subtração (`subBN`)
- caso ambos `x` e `y` sejam ambos negativos a soma é transformada em `- ((-x) + (-y))`

5. SubBN

Para definir `subBN` usámos uma abordagem semelhante à da `somaBN` com as seguintes diferenças relevantes:

- Usamos `carrySub`, que verifica dígitos do *BigNumber* resultante inferiores a 0 e mais alguns casos críticos para o resultado, como quando o último dígito é 0 removê-lo.
- É usado `zipWith (-) n1 n2` e algumas subtrações são transformadas em somas, por simplicidade.
- Criamos uma função auxiliar `bigger` que se encarrega de retornar um par dos números ordenados, sabendo assim que número é maior e tornando mais fácil a subtração.

6. MulBN

Para implementar `mulBN` seguimos os seguintes passos.

- Começamos por criar uma função auxiliar, `padMulBN`, que acrescenta aos elementos de um *BigNumber* (invertido) zeros `index` vezes. Assim `[1, 2, 3]` passa a `[100, 20, 3]`.
- O próximo passo é gerir a lógica da multiplicação, de maneira apenas pensarmos em multiplicações de números positivos:
 - caso ambos os operandos sejam positivos faz-se uma multiplicação normal.
 - caso os operandos tenham sinais opostos, inverte-se o sinal do número negativo e também o sinal da operação final.
 - caso os operandos sejam ambos negativos, trocam-se ambos os sinais.
- De seguida temos de recorrer ao predicado auxiliar `bigger` que devolve um par ordenado (a,b), isto é `a > b` (exceto se `a == b`). Assim sabemos sobre que número temos de usar `padMulBN`. `123 * 45 = [100,20,30] * 5 + ([100,20,30] * 4) * 10`.
- É necessário somar todas as operações de multiplicar e para isso usamos `somaBN` e também acrescentamos zeros à lista das multiplicações intermédias caso seja preciso. Pegando no exemplo acima: `123 * 45` seria igual a `([100,20,30] * 5) ++ [] + ([100,20,30] * 4) ++ [0]`. Ou seja, acrescentamos `i` zeros dependendo do índice do dígito operando mais pequeno (invertido) em que nos encontramos.
- No final aplicamos a função `carryMul` para concertar os casos em que um elemento da lista ficou superior a 10: resumidamente a casa com excesso fica com o `a mod 10` e o proximo elemento é `b + a div 10`.

7. DivBN

Para implementar `divBN` (assumindo números não negativos) a nossa abordagem foi a seguinte:

- Começar por fazer uma verificação dos números recebidos usando o predicado já mencionado `bigger` que retorna o par ordenado `(x,y)` :
 - se `x < y` o resultado será `(0, x - y)`
 - se `x == y` o resultado será `(1, 0)`
 - se `x == y * 10^n` para qualquer `n >= 1`, o resultado será `(n, 0)`
- Depois de feitas estas otimizações, podemos avançar e sabemos que `x > y`. Assim sendo o primeiro passo é fazer um `padding` com 0s à direita ao valor de `y` até ao último valor em que `x > y'`, obtendo um valor `y'`. Por exemplo se `x` for `345` e `y` for `3`, `y'` seria `300`, já que `3000` já excede `345`.
- Seguidamente vamos ver *quantos* `y'` cabem em `x`, usando `subBN`. Pegando no caso anterior de apenas cabe 1 (`345 - 300 = 45`). Assim o nosso quociente para já é `[1]`, uma lista que vai ficar à espera dos próximos valores.
- A próxima iteração vai usar `x = 45` (resto) `y' = init y'`, de maneira a deixar cair um `0` do fim. Caso `init y' == y` sabemos que estamos na última iteração. Para já essa igualdade é falsa: `30 /= 3`. A seguir verificamos que em `45` só cabe um `30`, pelo que o quociente passa a ser `[1,1]` e o novo `x` será `45 - 30*1 = 15`.
- A próxima iteração é a final, já que `init [3,0] == [3] == y`. Resta-nos subtrair `3` a `15` até (exclusivé) que o número seja `< 0`.
- `15 - 3*5 = 0`, logo o nosso quociente passa a ser `[1,1] ++ [5]`, com resto `0`.

Resposta à alínea 4

Compare as resoluções das alíneas 1 e 3 com tipos `(Int -> Int)`, `(Integer -> Integer)` e `(BigNumber -> BigNumber)`, comparando a sua aplicação a números grandes e verificando qual o maior número que cada uma aceita como argumento.

`Integer` define uma precisão arbitrária: não importa quão grande é o número, será representado de acordo com o limite de memória da máquina. This means you never have arithmetic overflows. Por outro lado, `Int` representa um inteiro de 64 bytes, isto é representa números no intervalo `[-263, 263 - 1]` (em algumas arquiteturas pode ser diferente).

```
9223372036854775808 :: Int -- testing 2^63 as Int
-- resultado: <interactive>:283:1: warning: [-Woverflowed-literals]
```

A sequência de fibonacci cresce a um ritmo exponencial, pelo que rapidamente o tipo `Int` perde a representação correta. Chamando o predicado de 1.3 `fibListaInfinita 93` obtemos o primeiro resultado negativo, já que esse número é superior a `(263)-1` e `Int` não é unsigned.

Se criarmos um predicado igual ao auxiliar da alínea 1.3 mas para `Integers` em vez de `Int` podemos inspecionar que `Integer` não tem limite e os números da sequência de fibonacci continuam a ser calculados corretamente, sem entrar num limite em que o sinal troca.

```
fibInfinitosInteger :: [Integer]
fibInfinitosInteger = 0 : 1 : zipWith (+) (tail fibInfinitosInteger) fibInfinitosInteger
```

O tipo `BigNumber` surge para contornar o limite do tipo `Int`, representando os números como listas de inteiros entre `0` e `9`. Tal como a função acima, `fibInfinitosAuxBN` não para de calcular os valores corretos, já que o usa memória livremente.

```
fibInfinitosAuxBN :: [BigNumber]
fibInfinitosAuxBN = [0] : [1] : zipWith somaBN fibInfinitosAuxBN (tail fibInfinitosAuxBN)
```

Concluindo, enquanto o sistema tiver memória os números continuarão a ser calculados corretamente para o tipo `BigNumber` e `Integer`, enquanto que no tipo `Int` de 64 bytes calcula valores incorretos a partir de 93, já que não consegue representar números positivos superiores a `(263)-1`

Considerações Finais

- As funções auxiliares mais genéricas estão no fim do ficheiro `BigNumber.hs` e comentadas.
- Outras funções auxiliares menos genéricas e mais específicas de uma alínea foram agrupadas na sua secção que está bem delimitada com comentários.