Tipos de Provas

Juliana Kaizer Vizzotto

Universidade Federal de Santa Maria

Disciplina de Teoria da Computação

Roteiro

- Prova por construção
- Prova por contradição
- Prova por indução

Prova por Construção

- Muitos teoremas enunciam que um tipo particular de objeto existe.
- Uma maneira de provar um teorema desse tipo é demonstrar como construir tal objeto.
- Exemplo: um grafo é k-regular se todo o nóno grafo tem grau k.

Prova por Construção

Theorem

Para cada número para n maior que 2, existe um grafo 3-regular com n nós.

Prova por Construção

Demonstração.

Seja n um número par maior que 2. Construa o grafo $G = (V, E)$ com n nós da seguinte maneira. O conjunto de n nós de G é $V = \{0, 1, ..., n-1\}$ e o conjunto de arestas de G é:

$$E = \{\{i, i+1\} | \ para\ 0 \leq i \leq n-2\}\{\{n-1, 0\}\} \cup$$
$$\cup \{\{i, i+n/2\} | \ para\ 0 \leq i \leq n/2 - 1\}.$$

Desenhe os nós desse grafo escritos consecutivamente ao redor da circunferência de um círculo. Nesse caso, as arestas descritas na linha superior de E ligam pares adjacentes ao longo do círculo. As arestas na linha inferior de E ligam nós em lados opostos do círculo. $\square$

Prova por Contradição

- Assumimos que o teorema é falso e em seguida mostramos que essa suposição leva a uma consequência falsa, chamada de contradição.
- Exemplo: Jack vê Jill que acaba de chegar da rua. Observando que ela está completamente seca, ele conclui que não está chovendo. Sua "prova" de que não está chovendo é que, *se estivesse chovendo* (a suposição de que o enunciado é falso), *Jill estaria molhada* (a consequência obviamente falsa). Portanto, não pode estar chovendo.
- Outro exemplo: Um número é **racional** se é uma fração m/n, onde m e n são inteiros. Em outras palavras um número racional é a *razão* de inteiros m e n. Por exemplo, $2/3$ obviamente é um número racional. Um número é **irracional** se não é racional.

Prova por Contradição

Theorem

$\sqrt{2}$ é irracional.

Prova por Contradição

Demonstração.

Primeiro supomos por contradição que $\sqrt{2}$ é racional. Assim,

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n},$$

onde ambos, m e n, são inteiros. Se ambos m e n são divisíveis pelo mesmo inteiro maior que um, divida ambos por esse inteiro. Fazer isso não muda o valor da fração. Agora, pelo menos um, dentre m e n não é um número par. Multiplicamos ambos os lados da equação por n e obtemos:

$$n\sqrt{2} = m$$

Elevamos ao quadrado ambos os lados e tempos:

$$2n^2 = m^2.$$

Prova por Contradição

Demonstração.

Em virtude de m^2 ser 2 vezes o inteiro n^2, sabemos que m^2 é par. Por conseguinte m também é par, pois o quadrado de um número ímpar também é ímpar. Portanto, podemos escrever $m = 2k$ para um inteiro k. Então, substituindo m por $2k$, obtemos:

$$\begin{aligned} 2n^2 &= (2k)^2 \\ & 4k^2. \end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados por 2 obtemos:

$$n^2 = 2k^2.$$

Mas esse resultado mostra que n^2 é par e, assim, n é par. Dessa maneira, estabelecemos que tanto m quanto n são pares. Mas tínhamos reduzido m e n de modo que eles não fossem ambos pares. Assim, temos uma contradição.

Prova por Contradição

Demonstração.

Mas esse resultado mostra que n^2 é par e, assim, n é par. Dessa maneira, estabelecemos que tanto m quanto n são pares. Mas tínhamos reduzido m e n de modo que eles não fossem ambos pares. Assim, temos uma contradição. $\square$

Prova por Indução

- A prova por indução é um método avançado usado para mostrar que todos os elementos de um conjunto infinito têm uma propriedade específica. vfill
- Exemplo: provar que uma expressão aritmética computa uma quantidade desejada para toda atribuição a suas variáveis.
- Provar que um programa funciona corretamente em todos os passos ou para todas as entradas.

Prova por Indução

- Considere o conjunto infinito dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ e vamos supor que a propriedade seja denominada P.
- O objetivo é provar que $\mathrm{P}(k)$ é verdadeiro para cada número natural k.
- Isto é, queremos provar que $\mathrm{P}(1)$é verdadeiro, assim como $\mathrm{P}(2), \mathrm{P}(3), \mathrm{P}(4)$, e assim por diante.

Prova por Indução

- Toda a prova por indução é constituída de duas partes: a **base** e o **passo da indução**.
- O passo da indução demonstra que para cada $i \geq 1$, se $\mathrm{P}(i)$ é verdadeiro, então $\mathrm{P}(i+1)$ também o é.
- A base da prova é que $\mathrm{P}(1)$ é verdadeiro.
- Pense ...pense o que signfica provar a base e o passo...
- Quem é a **hipótese indutiva**?