Minimização de Autômatos

Linguagens Formais A

Prof. Giovani Rubert Librelotto

Minimização de um autômato

- Objetivo: gerar um AF mínimo equivalente com o menor número de estados possível.

- O AFM é único:
  - Dois AF minimizados geram o mesmo AFM.

- O algoritmo de minimização unifica os estados equivalentes.

Autômato Mínimo

- O AFM $M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ aceita a mesma linguagem que $M' = (\Sigma', Q', \delta', q_0', F')$, sendo que $\#Q' \geq \#Q$.

Autômato Finito Mínimo

- Um Autômato Finito Mínimo (AFD) é uma quíntupla:

  $$M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$$

  onde:

  Σ - alfabeto de símbolos de entrada

  Q – conjunto de estados possíveis do autômato

  δ – funções de transições

  q_0 – estado inicial do autômato

  F – conjunto de estados finais do autômato

Pré-requisistos do Algoritmo de Minimização

- Um AF a ser minimizado deve satisfazer aos seguintes pré-requisitos:
  - Deve ser determinístico;
  - Não pode ter estados inacessíveis (não atingíveis a partir do estado inicial);
  - A função de transição deve ser total (a partir de qualquer estado são previstas transições para todos os símbolos do alfabeto).

Algoritmo de minimização

- Suponha um AFD $M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ que satisfaz aos pré-requisitos de minimização.
- Os passos do *Algoritmo de Minimização* são os seguintes:
  a) *Tabela*. Construir uma tabela relacionando os estados distintos, onde cada par de estados ocorre somente uma vez, como ilustrado na figura a seguir;

Algoritmo de minimização

q_1					
q_2					
...					
q_n					
d					
	q_0	q_1	...	q_{n-1}	q_n

Algoritmo de minimização

b) *Marcação dos estados trivialmente não-equivalentes*. Marcar todos os pares do tipo { estado final, estado não-final }, pois, obviamente, estados finais não são equivalentes a não-finais;

Algoritmo de minimização

c) *Marcação dos estados não-equivalentes*. Para cada par $\{q_u, q_v\}$ não-marcado e para cada símbolo a Σ, suponha que $\delta(q_u, a) = p_u$ e $\delta(q_v, a) = p_v$ e:

- se $p_u = p_v$, então q_u é equivalente a q_v para o símbolo a e não deve ser marcado;

Algoritmo de minimização

– se p_u != p_v e o par $\{p_u, p_v\}$ não está marcado, então $\{q_u, q_v\}$ é incluído em uma lista a partir de $\{p_u, p_v\}$ para posterior análise;

– se p_u != p_v e o par $\{p_u, p_v\}$ está marcado, então:
  - $\{q_u, q_v\}$ não é equivalente e deve ser marcado;
  - se $\{q_u, q_v\}$ encabeça uma lista de pares, então marcar todos os pares da lista (e, recursivamente, se algum par da lista encabeça outra lista);

Algoritmo de minimização

d) *Unificação dos estados equivalentes*. Os estados dos pares não-marcados são equivalentes e podem ser unificados como segue:

- a equivalência de estados é transitiva;
- pares de estados não-finais equivalentes podem ser unificados como um único estado não-final;
- pares de estados finais equivalentes podem ser unificados como um único estado final;
- se algum dos estados equivalentes é inicial, então o correspondente estado unificado é inicial;

Algoritmo de minimização

e) *Exclusão dos estados inúteis*. Por fim, os estados chamados inúteis devem ser excluídos.

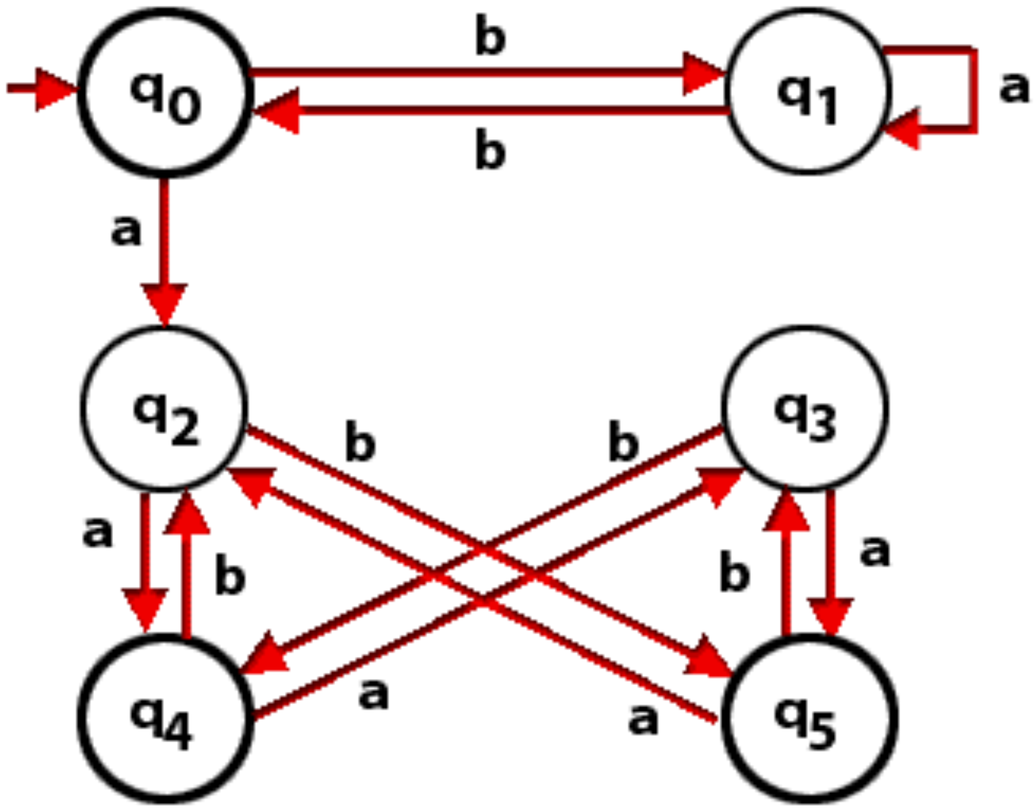
Um estado q é inútil se é não-final e a partir de q não é possível atingir um estado final.

Deve-se reparar que o estado d (se incluído) sempre é inútil (o algoritmo para excluir os estados inúteis é simples e é sugerido como *exercício*).

Exemplo de minimização

- Considere o Autômato Finito Determinístico ilustrado na figura a seguir.
- O autômato satisfaz os pré-requisitos de minimização (e, conseqüentemente, não é necessário incluir o estado d).
- Os passos do algoritmo são como segue:

Exemplo de minimização



Exemplo de minimização

a) Construção da tabela, como ilustrado na figura a seguir;

b) Marcação dos pares do tipo { estado final, estado não-final }, como ilustrado na mesma figura a seguir;

Tabela de estados e os pares do tipo {estados finais, estados não-finais} marcados

q_1	×				
q_2	×				
q_3	×				
q_4		×	×	×	
q_5		×	×	×	
	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4

Exemplo de minimização

c) Análise dos pares de estado não-marcados, onde a tabela resultante é ilustrada na figura a seguir, sendo o símbolo ⊖ é usado para representar os pares marcados neste etapa:

c.1) Análise do par {q0, q4}:

$\delta(q0, a) = q2$

$\delta(q0, b) = q1$

$\delta(q4, a) = q3$

$\delta(q4, b) = q2$

Como {q1, q2} e {q2, q3} são não-marcados, então {q0, q4} é incluído nas listas encabeçadas por {q1, q2} e {q2, q3};

c.2) Análise do par {q0, q5}:

(q0, a) = q2

(q0, b) = q1

(q5, a) = q2

(q5, b) = q3

Como {q1, q3} é não-marcado (e como {q2, q2} é trivialmente equivalente), então {q0, q5} é incluído na lista encabeçada por {q1, q3};

c.3) Análise do par {q1, q2}:

(q1, a) = q1

(q1, b) = q0

(q2, a) = q4

(q2, b) = q5

Como {q1, q4} é marcado, então {q1, q2} também é marcado.

Como {q1, q2} encabeça uma lista, o par {q0, q4} também é marcado;

c.4) Análise do par {q1, q3}:

(q1, a) = q1
(q1, b) = q0
(q3, a) = q5
(q3, b) = q4

Como {q1, q5} bem como {q0, q4} são marcados, então {q1, q3} também é marcado.

Como {q1, q3} encabeça uma lista, o par {q0, q5} também é marcado;

c.5) Análise do par {q2, q3}:

(q2, a) = q4

(q2, b) = q5

(q3, a) = q5

(q3, b) = q4

Como {q4, q5} é não-marcado, então {q2, q3} é incluído na lista encabeçada por {q4, q5};

c.6) Análise do par {q4, q5}:

(q4, a) = q3

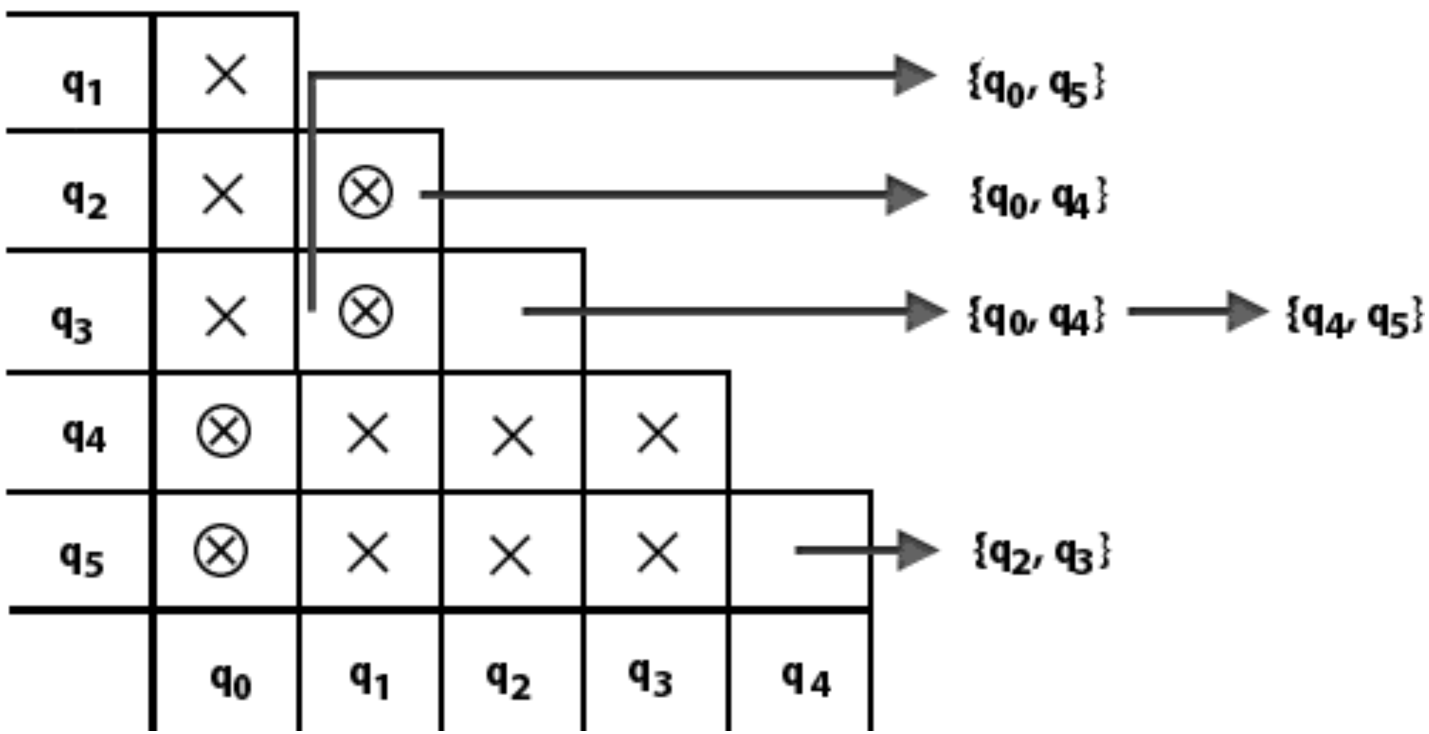
(q4, b) = q2

(q5, a) = q2

(q5, b) = q3

Como {q2, q3} é não-marcado, então {q4, q5} é incluído na lista encabeçada por {q2, q3};

Exemplo de minimização

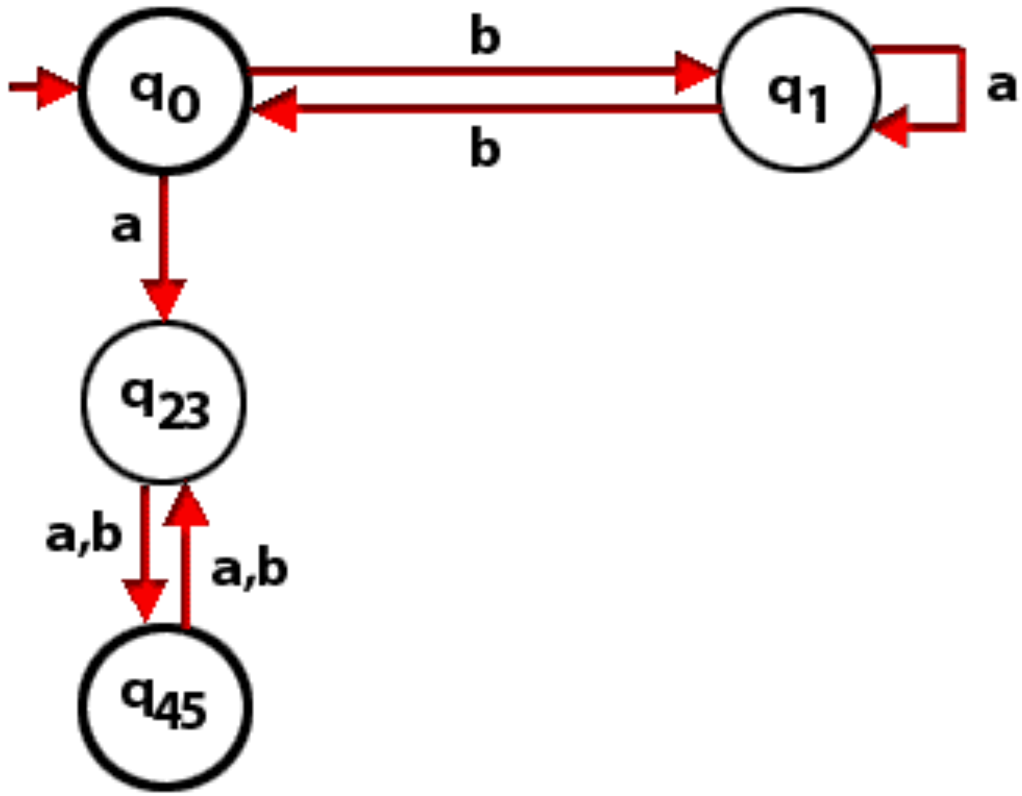


d) Como os pares {q2, q3} e {q4, q5} são não-marcados, as seguintes unificações podem ser feitas:

- q23 representa a unificação dos estados não-finais q2 e q3;
- q45 representa a unificação dos estados finais q4 e q5.

- O Autômato Mínimo resultante possui quatro estados e é ilustrado na figura a seguir.

Exemplo de minimização



Minimização de Autômatos

Linguagens Formais A

Prof. Giovani Rubert Librelotto