

Autômatos com Pilha

Linguagens Formais A

Prof. Giovani Rubert Librelotto

Autômato com Pilha

- São reconhecedores de Linguagens Livres de Contexto definidos através da sétupla da forma

$P = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_o, z_o, F)$ onde:

$$P = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z_0, F)$$

- K :
 - é um conjunto finito não vazio de *estados* do autômato com pilha.
- Σ :
 - é um conjunto finito não vazio de *símbolos de entrada* ou *átomos*, denominado *alfabeto de entrada* do autômato à pilha. Os símbolos de entrada são os elementos de que são formadas as cadeias de entrada submetidas ao autômato para aceitação.
- Γ :
 - é um conjunto finito não vazio de símbolos da pilha, e forma o *alfabeto da pilha*. Os símbolos da pilha são os códigos armazenados pelo autômato em sua memória auxiliar. Esta memória, no caso do autômato com pilha, é organizada na forma de uma pilha, ou seja, os últimos dados armazenados são os primeiros a serem lidos da pilha, e vice-versa.

$$P = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z_0, F)$$

- δ :
 - é a chamada *função de transição* do autômato à pilha, e é composta de um conjunto de *produções* que definem as regras de movimentação do autômato à pilha. Esta função mapeia o produto cartesiano $E \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times P$ no produto cartesiano $E \times P^*$. Em palavras, dado um estado, um símbolo de entrada e um símbolo de pilha contido no topo da memória auxiliar, esta função determina um novo estado do autômato e o novo conteúdo do topo da pilha (de comprimento qualquer).
- q_0 :
 - é denominado *estado inicial* do autômato com pilha, e é um elemento do conjunto E . É o estado em que se deve encontrar o autômato à pilha imediatamente antes do início do reconhecimento de uma cadeia de entrada ($q_0 \in E$).

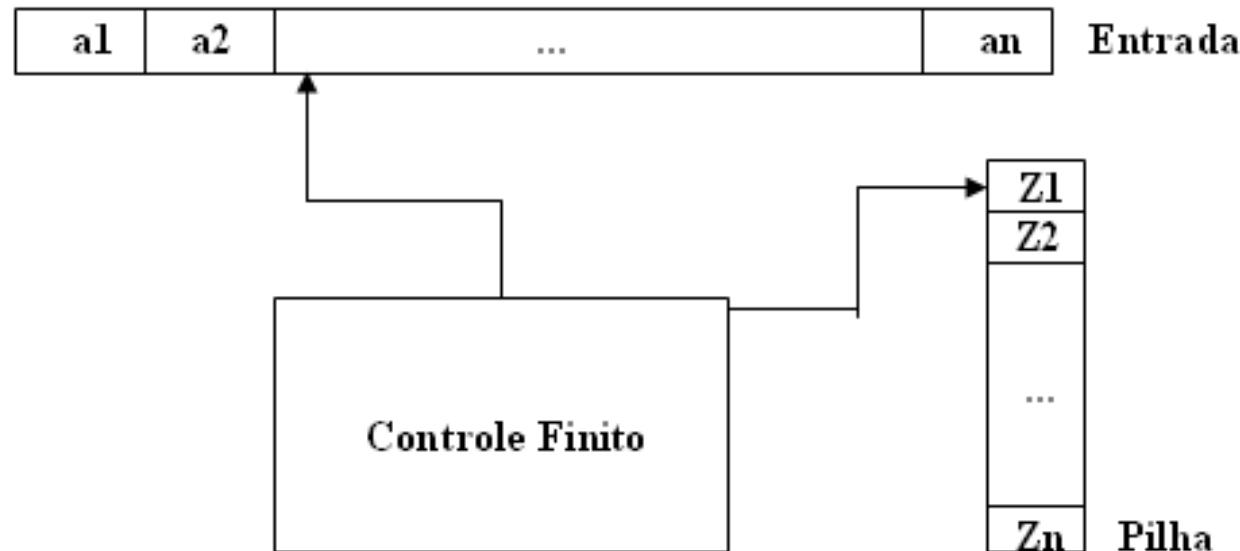
$$P = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z_0, F)$$

- z_0 :
 - é um elemento do conjunto P , distinto dos demais pela convenção de que sua presença, no topo da pilha que implementa a memória do autômato, indica a ausência de outros elementos na mesma. É um *marcador de pilha vazia* ($z_0 \in P$).
- F :
 - é um subconjunto do conjunto de estados E do autômato, que contém todos os chamados *estados finais* ou *estados de aceitação* do autômato de pilha. Tais estados correspondem àqueles nos quais o autômato com pilha deve encerrar o reconhecimento de todas as cadeias de entrada que sejam sentenças da linguagem definida pelo autômato com pilha. Nenhuma outra cadeia deve finalizar o autômato em qualquer destes estados.

Resumindo...

- $P = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, onde
 - K é um conjunto finito de **Estados**
 - Σ é o alfabeto finito de **Entrada**
 - Γ é o alfabeto finito de **Pilha**
 - δ é uma **Função De Mapeamento**
 - $q_0 \in K$, é o **Estado Inicial** de P
 - $Z_0 \in \Gamma$, é o **Símbolo Inicial da Pilha**
 - $F \subseteq K$, é o conjunto de **Estados Finais**.

Autômato com Pilha



Movimentos de um AP

- Os movimento de um AP são determinados com base nas seguintes informações:
 - próximo símbolo da entrada
 - símbolo do topo da pilha
 - estado corrente

Algoritmo

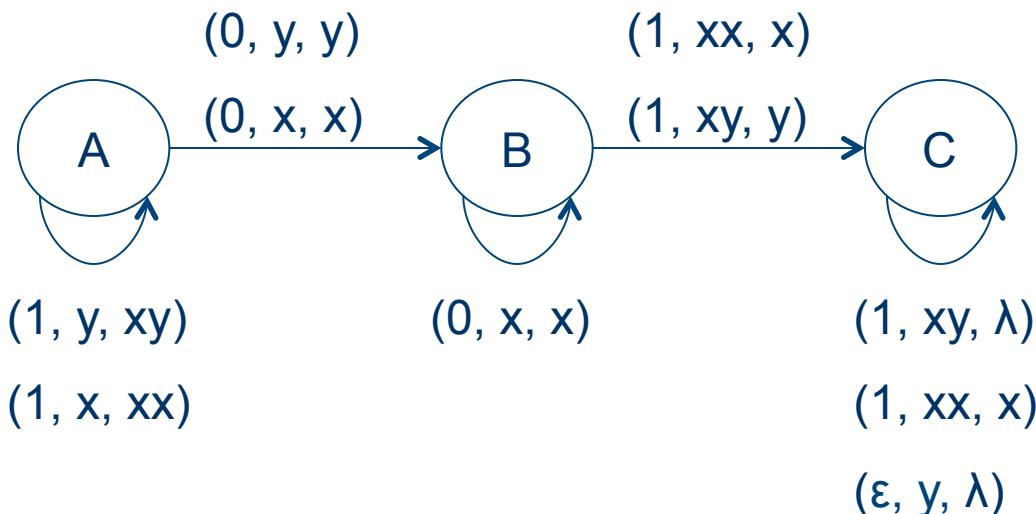
- A cada transição, uma seqüência finita de símbolos de P é inserida na pilha, substituindo o símbolo do topo.
- Se a seqüência for λ , equivale à ação "desempilhar".
- A inserção é tal que o símbolo mais à esquerda fica no topo da pilha.

Exemplo (1)

- $M = (\{A, B, C\}, \{0, 1\}, \{x, y\}, f, A, y, \{C\})$

$f \rightarrow \{ f(A, 1, y) \rightarrow (A, xy)$
 $f(A, 1, x) \rightarrow (A, xx)$
 $f(A, 0, y) \rightarrow (B, y)$
 $f(A, 0, x) \rightarrow (B, x)$
 $f(B, 0, x) \rightarrow (B, x)$
 $f(B, 1, xx) \rightarrow (C, x)$
 $f(B, 1, xy) \rightarrow (C, y)$
 $f(C, 1, xx) \rightarrow (C, x)$
 $f(C, 1, xy) \rightarrow (C, \lambda)$
 $f(C, \varepsilon, y) \rightarrow (C, \lambda) \}$

Autômato com Pilha



- Reconhecer as seguintes palavras:

- 11011
- 11100111
- 101
- 110011
- 0110

Autômatos com Pilha Determinísticos (APD)

- Um autômato com pilha é dito determinístico se, para cada $q \in E$, $a \in V$, $b \in (P \cup \{\lambda\})$, a aplicação de f oferece no máximo uma escolha.
- Para alguns $f(q,a,b)$ pode não haver movimentos possíveis.

Exemplo de APD:

- AP que reconhece $\{w c w^r\}$ e w^r denota o "inverso" de w ;
- Idéia: empilhar até encontrar "c"; desempilhar w , comparando com o lado direito da cadeia (após 'c').

$f(q_0, 0, s) = (q_0, s0)$ - empilha

$f(q_0, 1, s) = (q_0, s1)$ - empilha

$f(q_0, c, s) = (q_1, \lambda)$ - desempilha

$f(q_1, 0, 0) = (q_1, \lambda)$ - desempilha

q_0 = inicial

q_1 = final

s = símbolo inicial da pilha

Autômatos com Pilha Não-Determinísticos (APND)

- Um autômato com pilha não determinístico aceita uma cadeia w se houver pelo menos uma seqüência correta de passos.
- Se w não pertence à L , então w não pode ser aceita, quaisquer que forem as escolhas feitas.

Exemplo de APND:

- $\{w w^r\}$ só é reconhecida por um APND
- Idéia: optar por desempilhar sempre que encontrarmos dois 0 ou dois 1 consecutivos.

$$f(q_0, 0, c) = (q_0, 0c)$$

$$f(q_0, 1, c) = (q_0, 1c)$$

$$f(q_0, 0, 0) = \{(q_0, 00), (q_1, \lambda)\}$$

$$f(q_0, 0, 1) = (q_0, 01)$$

$$f(q_0, 1, 0) = (q_0, 10)$$

$$f(q_0, 1, 1) = \{(q_0, 11), (q_1, \lambda)\}$$

$$f(q_1, 0, 0) = (q_1, \lambda)$$

$$f(q_1, 1, 1) = (q_1, \lambda)$$

$$f(q_1, \varepsilon, c) = (q_1, \lambda)$$

q_0 = inicial

q_1 = final

c = símbolo inicial da pilha

Resultados dos Autômatos com Pilha

- Resultado 1: Se L é gerada por uma GLC, então L é reconhecida por algum AP.
- Resultado 2: Para cada AP, existe uma GLC que gera a linguagem reconhecida por ele.
- Resultado 3: Os APD não reconhecem as mesmas linguagens reconhecidas pelos APND.
- Resultado 4: As Linguagens Livres de Contexto são fechadas sob as operações de concatenação, união e clausura.

Resultados dos Autômatos à Pilha

- Resultado 5: A intersecção de uma Linguagem Livre de Contexto com uma Linguagem Regular é uma Linguagem Livre de Contexto.

Seja L o conjunto de todas as cadeias de a 's e b 's com igual número de a 's e b 's e que não contém como substrings "abaa" ou "babb".

Então L é LLC, pois L é a intersecção da linguagem aceita pelo APD, anteriormente visto, com a LR:

$$\{a, b\}^* - \{a, b\}^* \{abaa, babb\} \{a, b\}^*$$

- Resultado 6: Há algoritmos para responder às seguintes questões sobre Gramáticas Livres de Contexto:
 - Dada uma GLC, G , e uma cadeia w , $w \in L(G)$?
 - $L(G) = \emptyset$?

Exemplo de Autômato com Pilha

- Considere a seguinte linguagem:
 $L_1 = \{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$
- O Autômato com Pilha que representa L_1 é
 $P_1 = (\{ a, b \}, \{ q_0, q_1, q_f \}, \delta, q_0, \{ q_f \}, \lambda, \{ B \})$,
onde δ é como abaixo:
 $\delta(q_0, a, \lambda) = \{ (q_0, B) \}$
 $\delta(q_0, b, B) = \{ (q_1, \lambda) \}$
 $\delta(q_1, b, B) = \{ (q_1, \lambda) \}$