Tema 1.1.1: Razones y Proporciones

Tutor Gemini

7 de agosto de 2025

1 El Concepto Fundamental: La Razón

Vamos a empezar con la idea central. Una **razón** es, en esencia, una forma de **comparar dos cantidades**. Nos permite entender la relación que existe entre ellas mediante una división.

Imagina que en un salón de clases hay 10 hombres y 15 mujeres. Si queremos expresar la relación entre ambos, usamos una razón. La razón de hombres a mujeres es de 10 a 15. Podemos escribirla de dos maneras:

- Como una fracción: $\frac{10}{15}$
- Usando dos puntos: $10 : 15$

Ahora, casi siempre es útil simplificar esta razón para entenderla mejor. Tanto 10 como 15 son divisibles entre 5. Si simplificamos, obtenemos:

$$\frac{10 \div 5}{15 \div 5} = \frac{2}{3}$$

Esto nos da una visión mucho más clara: **por cada 2 hombres en el salón, hay 3 mujeres**. La relación subyacente es de 2 a 3.

2 La Herramienta Clave: La Proporción

Una **proporción** es simplemente la afirmación de que dos razones son iguales. Es establecer un equilibrio entre dos comparaciones.

Siguiendo el ejemplo anterior, la razón $\frac{10}{15}$ es igual a la razón $\frac{2}{3}$. Por lo tanto, la siguiente igualdad es una proporción:

$$\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

La Propiedad de Productos Cruzados

Aquí está la parte más importante y la que usarás constantemente para resolver problemas. En toda proporción, el producto de los términos en diagonal (cruzados) es igual.

$$\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ entonces se cumple que } a \cdot d = b \cdot c$$

Esta propiedad es fundamental porque nos permite encontrar un valor desconocido (una incógnita, x) en una proporción.

Ejemplo práctico: Si sabes que 5 boletos para un concierto cuestan \$1200, ¿cuánto costarán 8 boletos?

1. **Planteamos la proporción.** La relación (o razón) entre boletos y costo debe ser constante.
$$\frac{5 \text{ boletos}}{1200 \text{ pesos}} = \frac{8 \text{ boletos}}{x \text{ pesos}}$$
(Nuestra incógnita 'x' es el costo de los 8 boletos).

2. **Aplicamos productos cruzados.**
$$5 \cdot x = 1200 \cdot 8$$
$$5x = 9600$$

3. **Despejamos la incógnita.**
$$x = \frac{9600}{5} = 1920$$

Resultado: 8 boletos costarán \$1920.

3 Un Caso Especial: Los Porcentajes

Los porcentajes son un tipo de razón que usamos todos los días. Un **porcentaje** es una razón en la que el denominador (el total) siempre es 100. La expresión "por ciento" (%) significa literalmente "de cada 100".

Por ejemplo, un 40% de descuento significa que por cada \$100 del precio original, te descuentan \$40. La razón es $\frac{40}{100}$.

Aplicándolo a tus resultados: En el diagnóstico de matemáticas, tuviste 15 aciertos de un total de 39. Para expresar esto como un porcentaje, buscamos una razón equivalente con denominador 100.

$$\frac{15 \text{ aciertos}}{39 \text{ totales}} = \frac{x}{100}$$

Usando productos cruzados:

$$15 \cdot 100 = 39 \cdot x$$
$$1500 = 39x$$
$$x = \frac{1500}{39} \approx 38.46$$

El resultado es **38.46%**. Este número es nuestro punto de partida; nos indica exactamente dónde debemos concentrar nuestro esfuerzo para mejorar.

4 Ejercicios de Práctica

Te recomiendo que intentes resolver estos problemas por tu cuenta. Es la mejor forma de comprobar si el método ha quedado claro. Las soluciones están detalladas más abajo.

1. Un automóvil gasta 9 litros de gasolina para recorrer 120 km. Si en el tanque quedan 6 litros, ¿cuántos kilómetros más podrá recorrer?

2. Para construir un muro, 8 obreros tardan 6 días. ¿Cuántos obreros se necesitarían para construir el mismo muro en tan solo 4 días? (*Nota*: Este es un caso de **proporcionalidad inversa**. Si una cantidad sube, la otra baja. La lógica es un poco distinta).

3. Una tienda ofrece un descuento del 25% en un par de zapatos que originalmente costaban \$800. ¿Cuánto pagarás por los zapatos después del descuento?

4. En un mapa, la escala indica que 2 cm representan 5 km de la realidad. Si la distancia entre dos ciudades en el mapa es de 15 cm, ¿cuál es la distancia real entre ellas?

Soluciones a los Ejercicios

1. **Solución:** Establecemos la proporción: $\frac{9\text{ litros}}{120\text{ km}} = \frac{6\text{ litros}}{x\text{ km}}$. Aplicamos productos cruzados: $9 \cdot x = 120 \cdot 6$, de donde $9x = 720$. Resolvemos para x: $x = \frac{720}{9} = 80$. **Respuesta:** Podrá recorrer 80 km.

2. **Solución (Proporcionalidad Inversa):** En este caso, la relación no es una división, sino una multiplicación constante: (obreros) $\times$ (días) = K. Calculamos el total de "trabajo": 8 obreros $\times$ 6 días = 48 obreros-día. Ahora, con el nuevo dato: x obreros $\times$ 4 días = 48. Resolvemos para x: $x = \frac{48}{4} = 12$. **Respuesta:** Se necesitarían 12 obreros.

3. **Solución:** Primero, calculamos el monto del descuento. El 25% de \$800 es $0.25 \times 800 = 200$. El precio final es el precio original menos el descuento: \$800 - \$200 = \$600 .**Respuesta:**$Pagarás$\$600.

4. **Solución:** Establecemos la proporción: $\frac{2\text{ cm}}{5\text{ km}} = \frac{15\text{ cm}}{x\text{ km}}$. Aplicamos productos cruzados: $2 \cdot x = 5 \cdot 15$, de donde $2x = 75$. Resolvemos para x: $x = \frac{75}{2} = 37.5$. **Respuesta:** La distancia real es de 37.5 km.