

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МО ЭВМ

ОТЧЕТ
по лабораторной работе №3
по дисциплине «Построение и анализ алгоритмов»
Тема: Потоки в сети

Студент гр. 8383

Костарев К.В.

Преподаватель

Фирсов М.А.

Санкт-Петербург

2020

Цель работы.

Ознакомиться с принципами работы алгоритма Форда-Фалкерсона нахождения максимального потока в сети и реализовать так, как требуется в индивидуальном варианте.

Задача.

Найти максимальный поток в сети, а также фактическую величину потока, протекающего через каждое ребро, используя алгоритм Форда-Фалкерсона.

Сеть (ориентированный взвешенный граф) представляется в виде триплета из имён вершин и целого неотрицательного числа - пропускной способности (веса).

Входные данные:

N – количество ориентированных ребер графа

u_0 – исток

u_n – сток

$u_i u_j w_{ij}$ – ребро графа

$u_i u_j w_{ij}$ – ребро графа

...

Выходные данные:

P_{\max} – величина максимального потока

$u_i u_j w_{ij}$ – ребро графа с фактической величиной протекающего потока

$u_i u_j w_{ij}$ – ребро графа с фактической величиной протекающего потока

...

В ответе выходные рёбра отсортируйте в лексикографическом порядке по первой вершине, потом по второй (в ответе должны присутствовать все указанные входные рёбра, даже если поток в них равен 0).

Sample Input:

7

a

f

a b 7

a c 6
b d 6
c f 9
d e 3
d f 4
e c 2

Sample Output:

12
a b 6
a c 6
b d 6
c f 8
d e 2
d f 4
e c 2

Вариант № 4.

Поиск в глубину. Итеративная реализация.

Основные теоретические сведения.

Сеть – ориентированный взвешенный граф, имеющий один исток и один сток.

Исток – вершина, из которой рёбра только выходят.

Сток – вершина, в которую рёбра только входят.

Поток – абстрактное понятие, показывающее движение по графу.

Величина потока – числовая характеристика движения по графу (сколько всего выходит из истока = сколько всего входит в сток).

Пропускная способность – свойство ребра, показывающее, какая максимальная величина потока может пройти через это ребро.

Максимальный поток (максимальная величина потока) – максимальная величина, которая может быть выпущена из истока, которая может пройти через все рёбра графа, не вызывая переполнения ни в одном ребре.

Фактическая величина потока в ребре – значение, показывающее, сколько величины потока проходит через это ребро.

Описание алгоритма.

Изначально величине фактического потока для каждого ребра присваивается нулевое значение. Далее в графе начинается поиск увеличивающего пути (пути от истока до стока, где значение пропускной способности каждого ребра в пути больше 0). В данной лабораторной работе поиск осуществляется с помощью обхода графа в глубину итеративным методом: на каждой итерации алгоритм обходит одно ребро графа, и если оно не было пройдено и его пропускная способность больше нуля, то сравнивает его пропускную способность с минимальной в уже пройденном пути и в случае, если его пропускная способность еще меньше, то обновляет значение и следующая итерация начинается с конечной вершины ребра; если ребро уже пройдено или его пропускная способность нулевая, то следующая итерация начинается с другого ребра из соседних, если таких ребер нет, то следующая итерация начинается с предыдущего ребра в уже пройденном пути.

Если ребро ведет к стоку, то значит путь найден и значение фактического потока в каждом ребре уже пройденного пути увеличивается на величину минимальной пропускной способности, а у ребер, противоположных ребрам пути, фактический поток уменьшается на эту величину. Следующая итерация начинается с предыдущего ребра в пройденном пути.

Если список вершин пройденного пути оказался пустым, значит все пути найдены и алгоритм заканчивает работу (список вершин пустой, следовательно из списка был удален исток, следовательно все вершины из истока уже пройдены). Максимальная величина потока считается как сумма потоков в ребрах, выходящих из истока или входящих в сток.

Описание структур данных.

1. class Edge. Класс, необходимый для хранения информации об одном ребре графа. Имеет поля:
 - a. char a, b – начальная и конечная вершины ребра;
 - b. int p – фактическая величина потока;

- c. `int w` – пропускная способность (вес);
- 2. `class FordFalkerson`. Класс для хранения графа и с реализацией алгоритма:
 - a. `char s, t` – исток и сток сети;
 - b. `vector <Edge*> graph` – вектор, который хранит все ребра между вершинами (представление графа);
 - c. `vector <Edge*> path` – уже пройденный путь как стек ребер;
 - d. `string pathInChar` – уже пройденный путь как стек вершин;
 - e. `vector<string> visitedPaths` – вектор путей, которые уже были пройдены обходом в глубину;
 - f. `int wMin` – минимальная пропускная способность на пройденном пути `path`;
 - g. `int pMax` – максимальная величина потока;
 - h. `char u` – вершина, которую обходит алгоритм на каждой итерации;
 - i. `bool isVisitedV(char v)` – функция, возвращающая `true`, если вершина `v` уже была пройдена (есть в стеке `pathInChar`), и наоборот;
 - j. `bool isVisited(string p)` – функция, возвращающая `true`, если путь `p` уже был пройден (есть в стеке `visitedPaths`), и наоборот;
 - k. `bool haveInvert(Edge* e)` – функция, возвращающая `true`, если у ребра `e` есть противоположное ребро в графе `graph`, и наоборот;
 - l. `void execute()` – собственно реализация описанного выше алгоритма, который до начала цикла в качестве `u` ставит исток графа, и пушает его на стек вершин `pathInChar`, и при каждой итерации проверяет одно ребро из графа `graph`, ведущее из вершины `u`, и если оно удовлетворяет условиям, заносит ребро в `path`, `path` пушает в `visitedPaths`, а конечную вершину ребра пушает в `pathInChar` (т.е. обновляет пройденный путь). Окончание цикла – когда в `pathInChar` не останется ничего (т.е. исток был удален, а следовательно все пути из истока пройдены).

Сложность алгоритма по времени.

Так как в цикле while поиск в глубину может в худшем случае обойти все ребра и вершины, и при этом при каждом найденном пути алгоритм обходит все ребра пути, чтобы изменить фактическую величину потока, то сложность алгоритма по времени составляет:

$$O(|V||E| \times |E|) = O(|V||E|^2).$$

Сложность алгоритма по памяти.

Алгоритм хранит все ребра и вершины графа, поэтому по памяти его сложность составляет:

$$O(|V| + |E|).$$

Тестирование.

Демонстрация работы программы приведена на рис. 1. Входные данные для демонстрации:

5

a

c

a b 3

a c 6

b d 5

b c 5

a d 2

```

Начинаем с истока a
  a->b (0/3): минимальная пропускная способность теперь 3, пройденный путь ab
  b->d (0/5): пройденный путь abd
Все подвершины пройдены, поднимаемся, пройденный путь ab
  b->d (0/5): пропускная способность = 0 или уже пройденный путь, пропускаем
  b->c (0/5): пройденный путь abc
Дошли до стока, прибавляем минимальную пропускную способность 3 у ребер пути abc
Поднимаемся выше, пройденный путь ab
  b->d (0/5): пропускная способность = 0 или уже пройденный путь, пропускаем
  b->c (3/5): пропускная способность = 0 или уже пройденный путь, пропускаем
Все подвершины пройдены, поднимаемся, пройденный путь a
  a->b (3/3): пропускная способность = 0 или уже пройденный путь, пропускаем
  a->c (0/6): минимальная пропускная способность теперь 6, пройденный путь ac
Дошли до стока, прибавляем минимальную пропускную способность 6 у ребер пути ac
Поднимаемся выше, пройденный путь a
  a->b (3/3): пропускная способность = 0 или уже пройденный путь, пропускаем
  a->c (6/6): пропускная способность = 0 или уже пройденный путь, пропускаем
  a->d (0/2): минимальная пропускная способность теперь 2, пройденный путь ad
  d->b (0/0): пропускная способность = 0 или уже пройденный путь, пропускаем
Все подвершины пройдены, поднимаемся, пройденный путь a
  a->b (3/3): пропускная способность = 0 или уже пройденный путь, пропускаем
  a->c (6/6): пропускная способность = 0 или уже пройденный путь, пропускаем
  a->d (0/2): пропускная способность = 0 или уже пройденный путь, пропускаем
Весь граф пройден!
9
a b 3
a c 6
a d 0
b c 3
b d 0

```

Рисунок 1 – Демонстрация работы алгоритма

Тестирование программы приведено в табл. 1. В ходе тестирования все выходные данные оказались корректными.

Таблица 1 – Тестирование программы

Входные данные	Выходные данные
7 a c a b 3 b c 2 a c 5 b d 8 a d 6 d e 4 e c 1	8 a b 3 a c 5 a d 0 b c 2 b d 1 d e 1 e c 1
7 a f a b 7	12 a b 6 a c 6 b d 6

a c 6 b d 6 c f 9 d e 3 d f 4 e c 2	c f 8 d e 2 d f 4 e c 2
7 a e a b 5 b c 4 c d 6 d e 1 a e 3 b d 2 a d 2	4 a b 1 a d 0 a e 3 b c 1 b d 0 c d 1 d e 1
7 a e a b 7 b c 5 c d 8 d b 10 c e 9 d e 5 b e 8	7 a b 7 b c 5 b e 2 c d 5 c e 0 d b 0 d e 5
2 a c a b 4 c b 1	0 a b 0 c b 0
7 a d a b 100 b d 100 d b 60 b c 70 c b 100 c d 100 d c 50	100 a b 100 b c 0 b d 100 c b 0 c d 0 d b 0 d c 0

Выводы.

В данной лабораторной работе был изучен алгоритм Форда-Фалкерсона нахождения максимального потока в сети. Было установлено, что посредством нахождения увеличивающего пути методом обхода сети в глубину, сложность алгоритма по времени является экспоненциальной, а по памяти линейной.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

КОД ПРОГРАММЫ РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМА

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <string>
#include <windows.h>

class Edge{      //класс ребра
public:
    char a{};    //начальная вершина
    char b{};    //конечная
    int p;       //фактическая величина потока
    int w;       //пропускная способность (вес)
    Edge(){
        p = 0;
        w = 0;
    }
    Edge(char a, char b){
        this->a = a;
        this->b = b;
        p = 0;
        w = 0;
    }
};

class FordFalkerson{    //класс алгоритма
public:
    std::vector<Edge*> graph;    //граф для обработки
    std::vector<Edge*> path;     //пройденный путь в виде стека ребер
    std::string pathInChar;     //пройденный путь в виде стека вершин
    std::vector<std::string> visitedPaths; //пройденные пути
    int wMin = 1000;            //минимальная пропускная сп.
    int pMax{};                //максимальный поток
    char s{};                  //исток
    char t{};                  //сток
    char u{};                  //проходимая вершина
    FordFalkerson() = default;
    bool isVisitedV(char v){    //является ли вершина уже пройденной
        return pathInChar.find(v) != std::string::npos;
    }
    bool isVisited(std::string p){ //является ли путь уже пройденным
        for (auto & i:visitedPaths){
            if (i == p)
                return true;
        }
        return false;
    }
    bool haveInvert(Edge* e){    //есть ли в графе противоположное от e
        ребро
        for (auto &i:graph){
            if (e->a == i->b && e->b == i->a)
                return true;
        }
        return false;
    }
    void execute(){ //выполнение алгоритма
```

```

int size = graph.size();
for (int i = 0; i < size; i++){ //добавление к графу
противоположных ребер
    if (!haveInvert(graph[i])){
        auto edgeInvert = new Edge(graph[i]->b, graph[i]->a);
        graph.push_back(edgeInvert);
    }
}
u = s; //начало с истока
pathInChar.push_back(u); //пушим в стек
std::cout << "Начинаем с истока " << s << std::endl;
while (true){
    bool noChild = true;
    for(auto& i:graph){
        if (i->a == u && !isVisitedV(i->b)){
            std::cout << "    " << i->a << "->" << i->b << " (" <<
i->p << "/" << i->w << "):\t";
            pathInChar.push_back(i->b);
            if (i->p < i->w && i->b != s &&
!isVisited(pathInChar)){ //если ребро не пройдено и не с нулевой
пропускной
                if (i->w - i->p < wMin){
                    wMin = i->w - i->p;
                    std::cout << "минимальная пропускная
способность теперь " << wMin << ", ";
                } //если пропускная сп. минимальная, обновляем
значение
                u = i->b; //конечная вершина ребра становится
текущей
                path.push_back(i); //пушим ребро в стек
                visitedPaths.push_back(pathInChar); //пушим
вершину в стек
                std::cout << "пройденный путь " << pathInChar <<
std::endl;
                noChild = false;
                break;
            }
            std::cout << "пропускная способность = 0 или уже
пройденный путь, пропускаем" << std::endl;
            pathInChar.pop_back();
        }
    }
    if (noChild){ //если нет непройденных ребер, возвращаемся к
предыдущему
        pathInChar.pop_back();
        if (pathInChar.empty()){ //если непройденных не осталось,
заканчиваем цикл
            std::cout << "Весь граф пройден!" << std::endl;
            break;
        } else{
            std::cout << "Все подвершины пройдены, поднимаемся,
пройденный путь " << pathInChar << std::endl;
        }
        u = path.back()->a;
        path.pop_back();
        wMin = 1000;
    }
}

```

```

        for(auto& i:path){ //обновляем минимальную пропускную
сп. без учета удаленного ребра
            if (i->w - i->p < wMin)
                wMin = i->w - i->p;
        }
    }
    if (u == t){ //если вершина сток, возвращаемся к
предыдущей в стеке
        std::cout << "Дошли до стока, прибавляем минимальную
пропускную способность " << wMin << " у ребер пути " << pathInChar <<
std::endl;

        pathInChar.pop_back();
        std::cout << "Поднимаемся выше, пройденный путь " <<
pathInChar << std::endl;
        for(auto& i:path){ //добавляем минимальную пропускную к
ребрам пути и отнимаем у противоположных
            i->p += wMin;
            for (auto & j:graph) {
                if ((i->a == j->b) && (i->b == j->a))
                    j->p -= wMin;
            }
        }
        u = path.back()->a;
        path.pop_back();
        wMin = 1000;
        for(auto& i:path){ //обновляем минимальную пропускную сп.
без учета удаленного ребра
            if (i->w - i->p < wMin)
                wMin = i->w - i->p;
        }
    }
}
for (auto&i:graph){ //считаем максимальный поток
    if (i->a == s){
        pMax += i->p;
    }
}
}

void printAnswer(){ //печать ответа в требуемом виде
    std::cout << pMax << std::endl;
    for (auto&i:graph){
        for (auto&j:graph){
            if ((j->a > i->a) || (j->a == i->a && j->b > i->b)){
                auto k = new Edge();
                k = j;
                j = i;
                i = k;
            }
        }
    }
    for (auto&i:graph){
        if (i->w > 0) {
            if (i->p < 0)
                i->p = 0;
            std::cout << i->a << " " << i->b << " " << i->p
<<std::endl;
        }
    }
}

```

```

    }
};

int main() {
    SetConsoleOutputCP(CP_UTF8);
    auto algorithm = new FordFalkerson();    //инициализация алгоритма
    int n;
    std::cin >> n >> algorithm->s >> algorithm->t;
    for (int i = 0; i < n; i++){    //заполняем граф ребрами
        auto edge = new Edge();
        std::cin >> edge->a >> edge->b >> edge->w;
        algorithm->graph.push_back(edge);
    }
    algorithm->execute();    //алгоритм
    algorithm->printAnswer();    //печать результатов
    return 0;
}

```