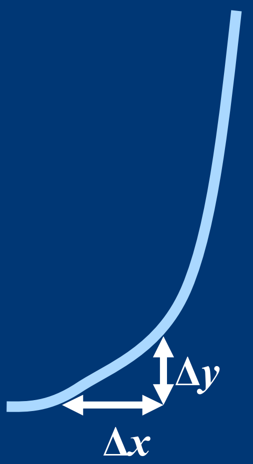
微積２　配布用

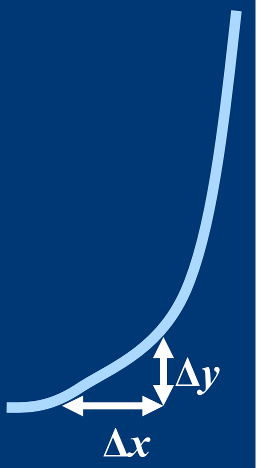
ロルの定理・平均値の定理

～接線の傾きと2点を結ぶ直線の傾きとの関係～



2年　エレクトロニクスコース
菊川　颯太

内容(Contents)



§ 1

最大値・最小値の原理

原理なので、証明する必要がない（自明である）。

最大値・最小値の原理

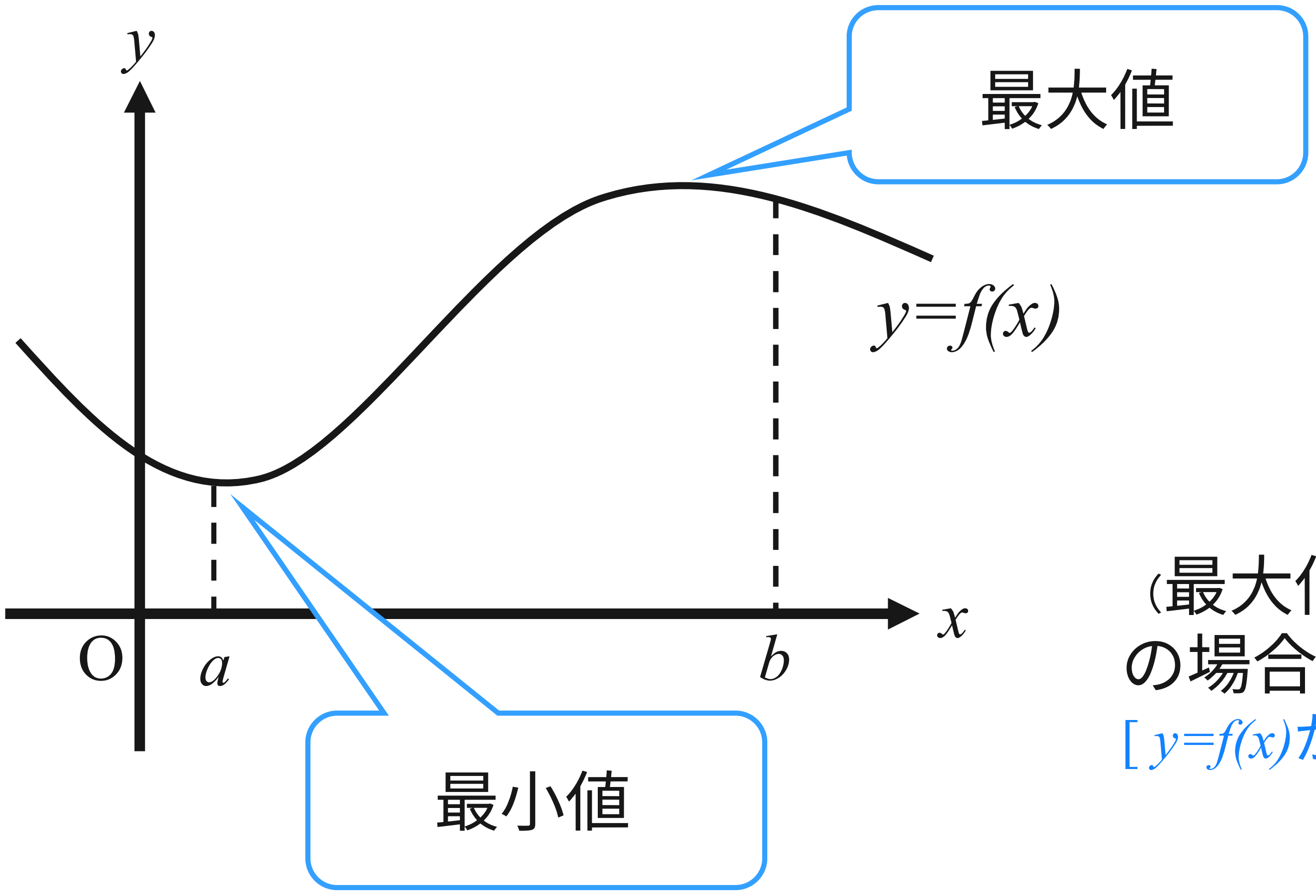
最大値・最小値の原理

閉区間$[a, b]$で連続な関数$y=f(x)$は、その区間で最大値と最小値を取る。

閉区間

両端を含む区間（連続した範囲）のこと。

最大値・最小値の原理



（最大値）＝（最小値）
の場合もある。
[$y=f(x)$ が x 軸に平行な場合]

§ 2

復習

片側極限と極限値・微分可能と連続性

極限値が存在するということ

レベル１：片側極限が存在する（発散しない）。
レベル２：片側極限が一致する。

レベル２が満たされると極限値は存在する。
逆も成立。

$\lim_{h\to+0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$
（片側極限が一致する）ならば、
$\lim_{h\to0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$は存在する。

微分可能ならば、その関数は連続である。

連続である

$\lim(x\to a)f(x)=f(a)$である極限値が存在すること

正確には、関数$f(x)$が、ある区間・地点で微分可能ならば、
$f(x)$はある区間・地点で連続である。

微分可能ならば連続である。

レベル3：関数 $f(x)$ で、x=aにおける片側極限が一致して
（極限値が存在して）、その値が $f(a)$となる。
レベル4：ある区間・地点で、微分可能である。

レベル3が成り立つとき、関数 $f(x)$は$x=a$で連続である
ことが成り立つ。逆も成立する。(定義)

【証明】
微分可能ならば、その関数は連続である。

連続であることは、$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ を満たす状態。
すなわち、$x \to a$のとき、$f(x)$と$f(a)$の差は小さくなる(0に近づく)。

仮定より、微分可能だから
$h=x-a$と置くと、

$$\lim_{x \to a}\{f(x) - f(a)\}$$
$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \cdot h$$
$$= f'(a) \cdot h$$
$$= 0$$

$h=x-a$と置くことで、無理やり、
微分の形にしている。
$x \to a$のとき、$x-a \to 0$なので$h \to 0$

微分可能なので、$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在

これを整理すると…

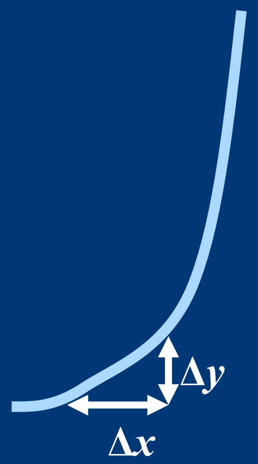
レベル１：片側極限が存在する（発散しない）。
レベル２：片側極限が一致する
レベル３：関数 $f(x)$ で、x=aにおける片側極限が一致して
（極限値が存在して）、その値が $f(a)$ となる。
レベル４：ある区間・地点で、微分可能である。

　レベルの数字が大きいものが成り立つならば、
小さいものも成り立つ。[そうなるように整理した。]
<u>逆は必ずしも成り立たない。</u>
<u>（例：レベル２が成り立ってもレベル３が成り立つとは限らない。）</u>

最難関

§ 3

ロルの定理



　まずは、2点間を結ぶ直線がx軸に平行（傾きが0）である場合の接線の傾きと2点間を結ぶ直線の傾きを考える。

ロルの定理

ロルの定理

関数$f(x)$は閉区間$[a,b]$で連続、開区間(a,b)で微分可能であるとする。

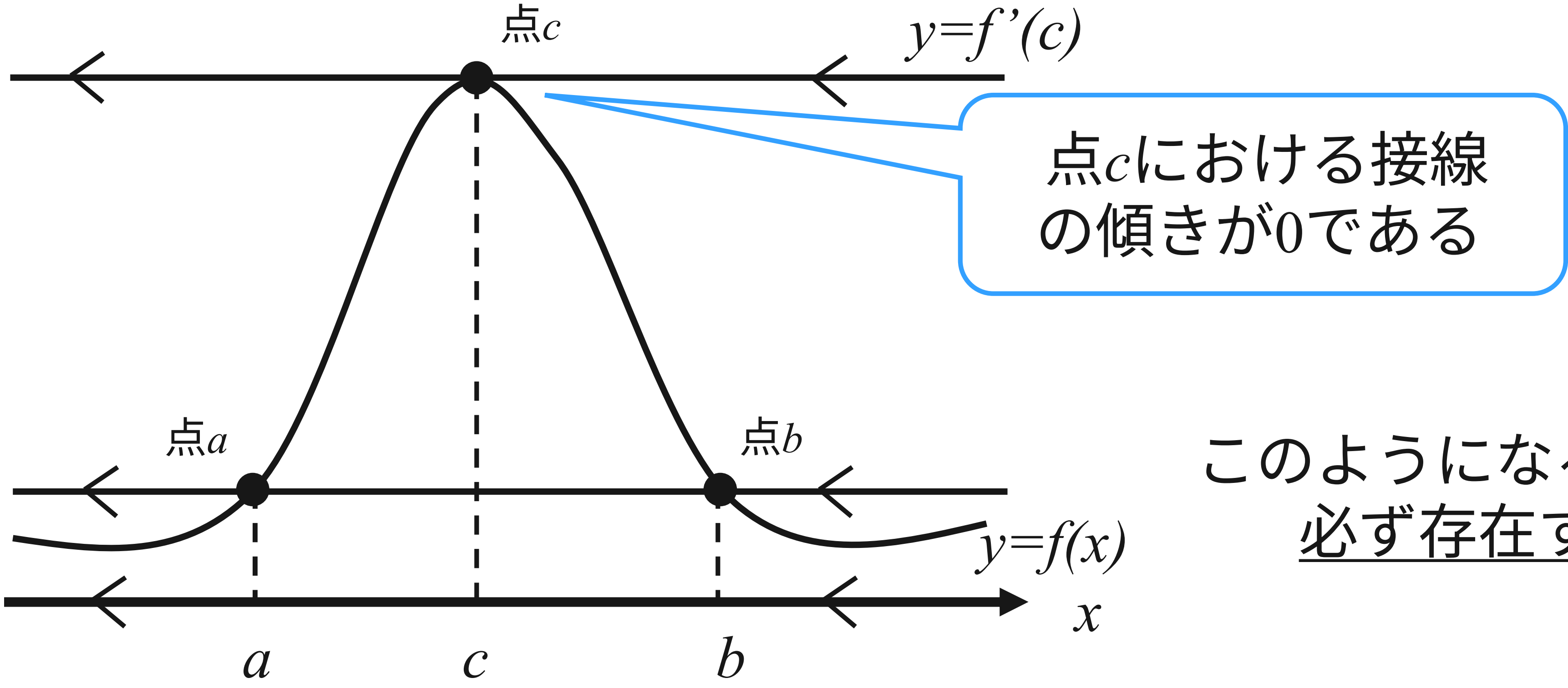
$f(a)=f(b)$ならば、

$$f'(c)=0 \quad (a<c<b)$$

を満たすcが少なくとも1つ存在する。

逆は成り立たない。 [$y=x^3$ $(-1≦x≦1)$では、$f'(0)=0$でも、$f(-1)\neq f(1)$。]

ロルの定理ってどういうこと？



このようになる点cが
<u>必ず存在する</u>

ロルの定理～定数関数の場合～

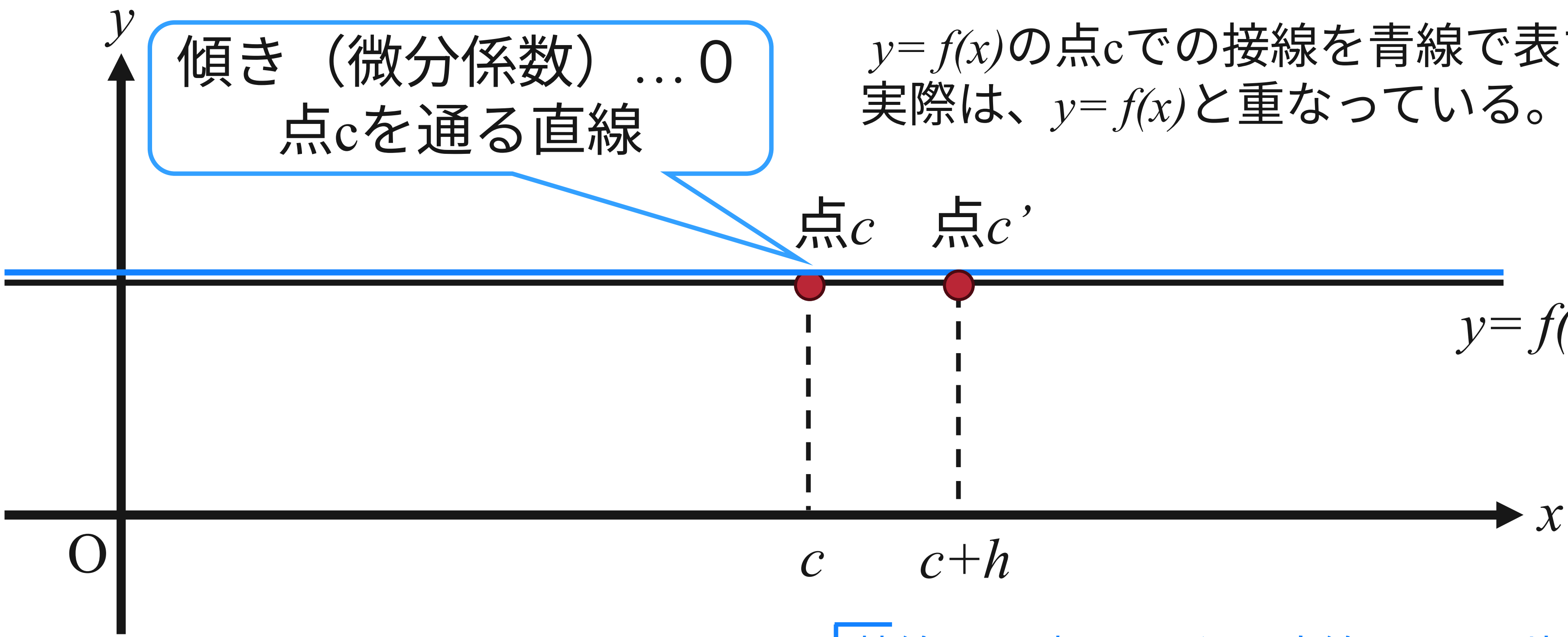
(1) 定数関数の場合

定数関数は傾きが0
（x軸に平行）である関数

　関数 $f(x)$ が定数関数ならば、閉区間 $[a,b]$ に含まれるすべての、実数 c で $f'(c)=0$ が成り立つ。

ロルの定理
～定数関数 $f(x)$ の接線を引くと～

$y=f(x)$ の点cでの接線を青線で表す。
実際は、$y=f(x)$ と重なっている。



グラフ中のある一点のみで接する
線という定義を拡張。
［今回みたいに、複数点通る場合もある。］

接線を、2点 c, c’を通る直線のうち、片方の点をもう片方の点に限りなく近づいたときにできる線であると定義する。

ロルの定理～定数関数でない場合～

(2) 定数関数でない場合

　関数 $f(x)$が定数関数でない場合、閉区間$[a,b]$において、
仮定より、$f(a)=f(b)$、$y=f(x)$は開区間(a,b)で微分可能である。

ロルの定理～定数関数でない場合～

$y = f(x)$ は微分可能であるから、閉区間 $[a,b]$で連続である。

ここで使った定理は、【おまけの証明】で証明。

よって最大値・最小値の原理より、$a<x<b$ で最大値または最小値をとる。

$a<x<b$で必ず最大値と最小値の両方をとらない理由は、$f(a)$と$f(b)$がともに最大値、もしくは最小値をとる場合があるから。

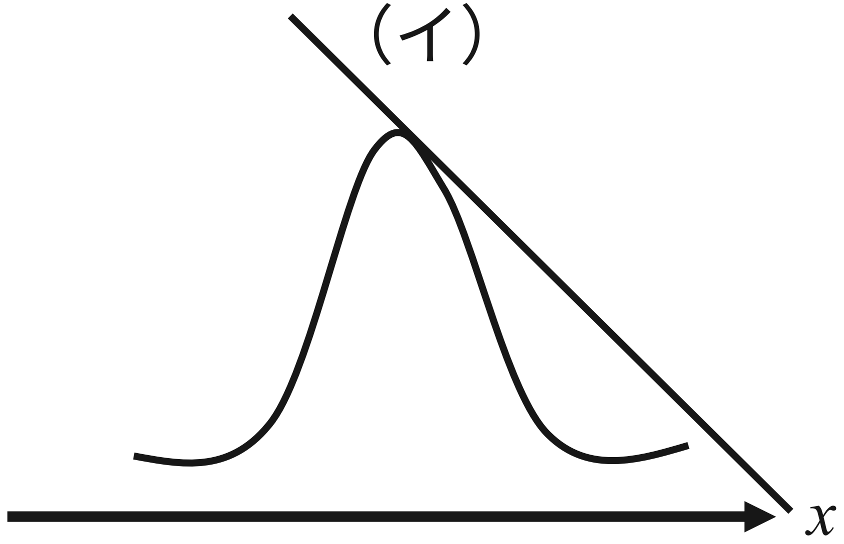
ロルの定理～定数関数でない場合～

$x=c$で最大値をとるとする。$(a<c<b)$
十分小さなhを用いると、$f(c+h) \leqq f(c)$であるから、

（イ）$h>0$のとき、[右側極限を考える]

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$$

[$f(c-h) \leqq f(c)$ であるから、$f(c-h)-f(c) \leqq 0$、
また、$h \geqq 0$であるから、全体としては
ーもしくは0になる。]



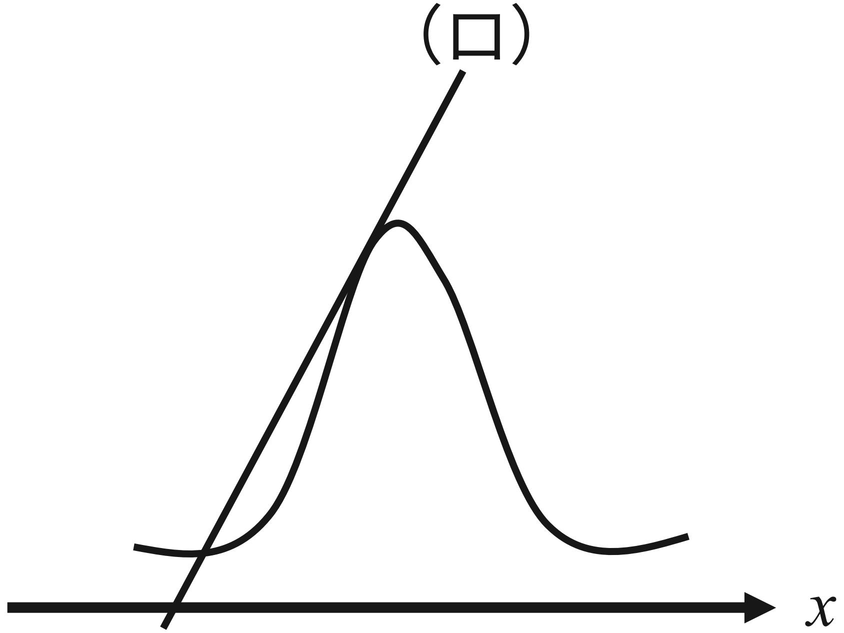
ロルの定理～定数関数でない場合～

$f(c+h) \leqq f(c)$であるから、

（ロ）$h<0$のとき、[左側極限を考える]

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$$

$h>0$として、$f(c-h) \leqq f(c)$ であるから、
$f(c-h)-f(c) \leqq 0$、また、$-h \leqq 0$であるから
全体としては+もしくは0になる。



ロルの定理～定数関数でない場合～

（イ）$h>0$のとき、

$$\frac{f(\mathrm{c}+h)-f(\mathrm{c})}{h} \leq 0$$

$h \to +0$のとき、$\frac{f(\mathrm{c}+h)-f(\mathrm{c})}{h} \leqq 0$

極限値は存在するには、片側極限が存在し、**さらに**一致する必要がある。

不等式から$\frac{f(\mathrm{c}+h)-f(\mathrm{c})}{h}$は、$h \to +0$のとき、
ある一定の値α（$0 \geqq \alpha$）に近づく。微分可能と仮定しているので、発散はありえない。
必ず何かしらの値（すなわちα）に収束する。

ロルの定理〜定数関数でない場合〜

どうでもいい豆知識

以下の対義語は以上
未満の対義語は超過

（ロ）h<0のとき、

$$\frac{f(\mathrm{c}+h)-f(\mathrm{c})}{h} \geq 0$$

h→－ 0のとき、$\frac{f(\mathrm{c}+h)-f(\mathrm{c})}{h} \geqq 0$

極限値は存在するには、片側極限が存在し、**さらに**一致する必要がある。

不等式から$\frac{f(\mathrm{c}+h)-f(\mathrm{c})}{h}$は、$h$→－ 0のとき、ある一定の値$\beta$（$0 \leqq \beta$）に近づく。微分可能と仮定しているので、発散はありえない。必ず何かしらの値（すなわちβ）に収束する。

ロルの定理～定数関数でない場合～

よって、

$h \to +0$のとき、$\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \leqq 0$

$h \to -0$のとき、$\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \geqq 0$

$f(x)$は、閉区間[a,b]で微分可能と仮定しているので、片側極限が存在して、***さらに***一致する場合を考える。
（極限が存在しないことは微分不可能であることであり、仮定に矛盾する。）

$\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \leqq 0$かつ$\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \geqq 0$を満たすとき、すなわち片側極限がともに存在してそれらが一致するときは、$\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} = 0$の場合のみ。

片側極限が一致するときのみ極限値は存在する。

ロルの定理～定数関数でない場合～

片側極限が一致するときのみ、
$f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$は存在して、

$\lim_{h\to +0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$
（片側極限が一致する）ならば、
$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$は存在する。

片側極限はともに0に収束するから、
$f'(c)=0$が成り立つ。

$f'(c)$はcにおける微分係数
すなわち接線の傾き

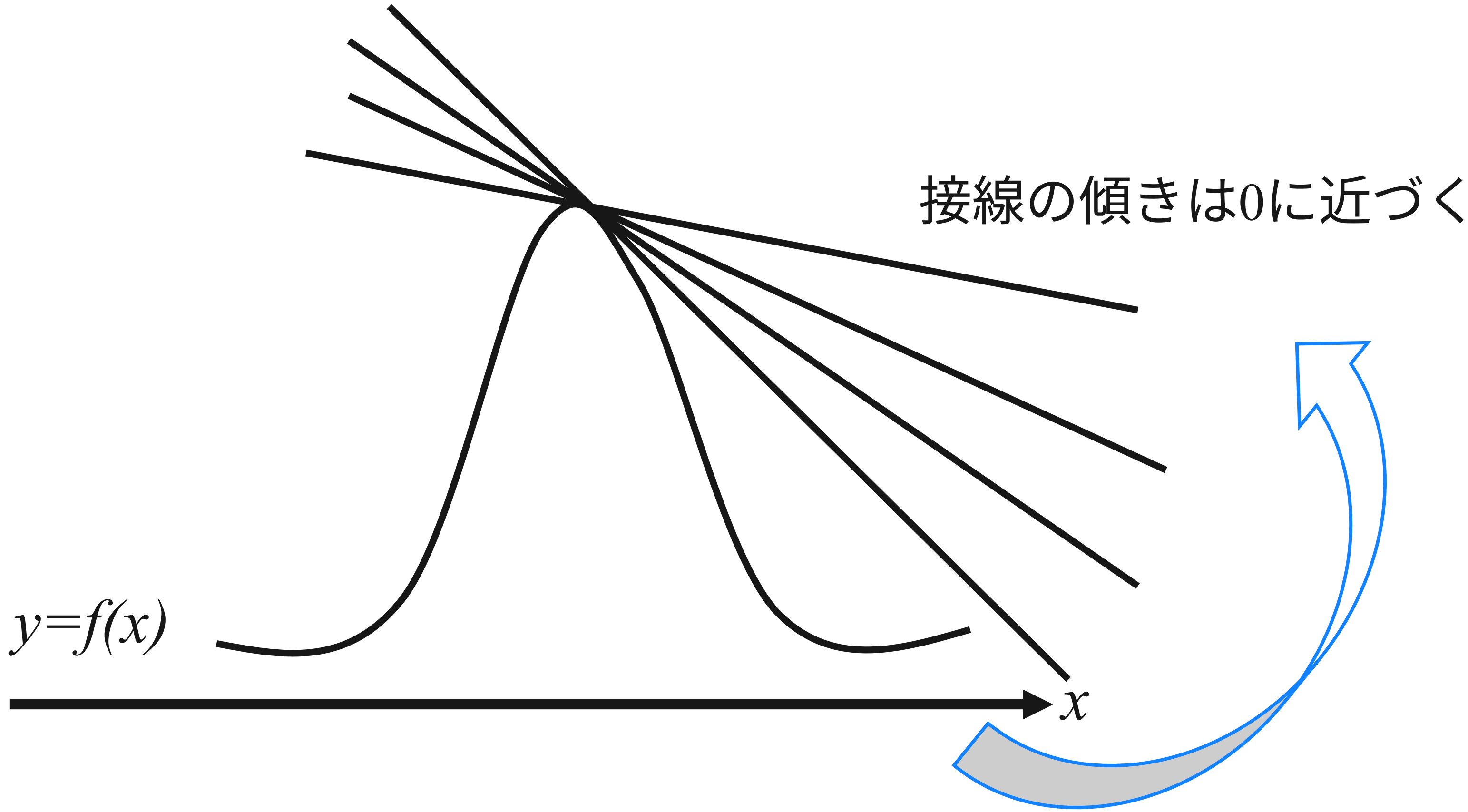
ロルの定理～定数関数でない場合～

すなわち、$f'(c)=0$となる定数cが少なくとも1つあることが示された。

最小値の場合でも、同じように$h>0$と$h<0$の場合に分けて考えれば同じ結論が得られる。

ロルの定理をグラフで表す

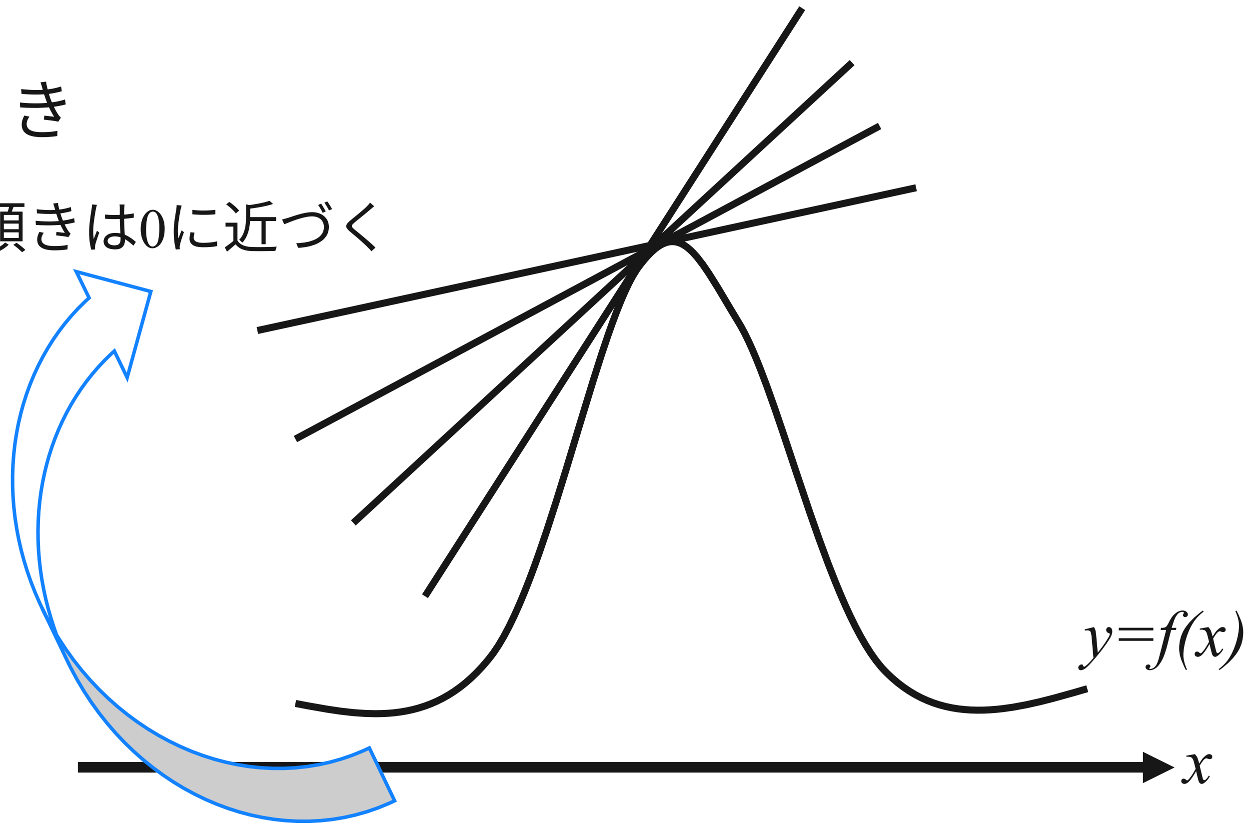
$h \to +0$のとき



ロルの定理をグラフで表す

$h \to +0$のとき

接線の傾きは0に近づく



§ 4

平均値の定理

　$f(a) \neq f(b)$の場合でも、2点を結ぶ直線の傾きと等しい接線となる接点を見つけられるよう、ロルの定理を一般化（拡張）する。

平均値の定理

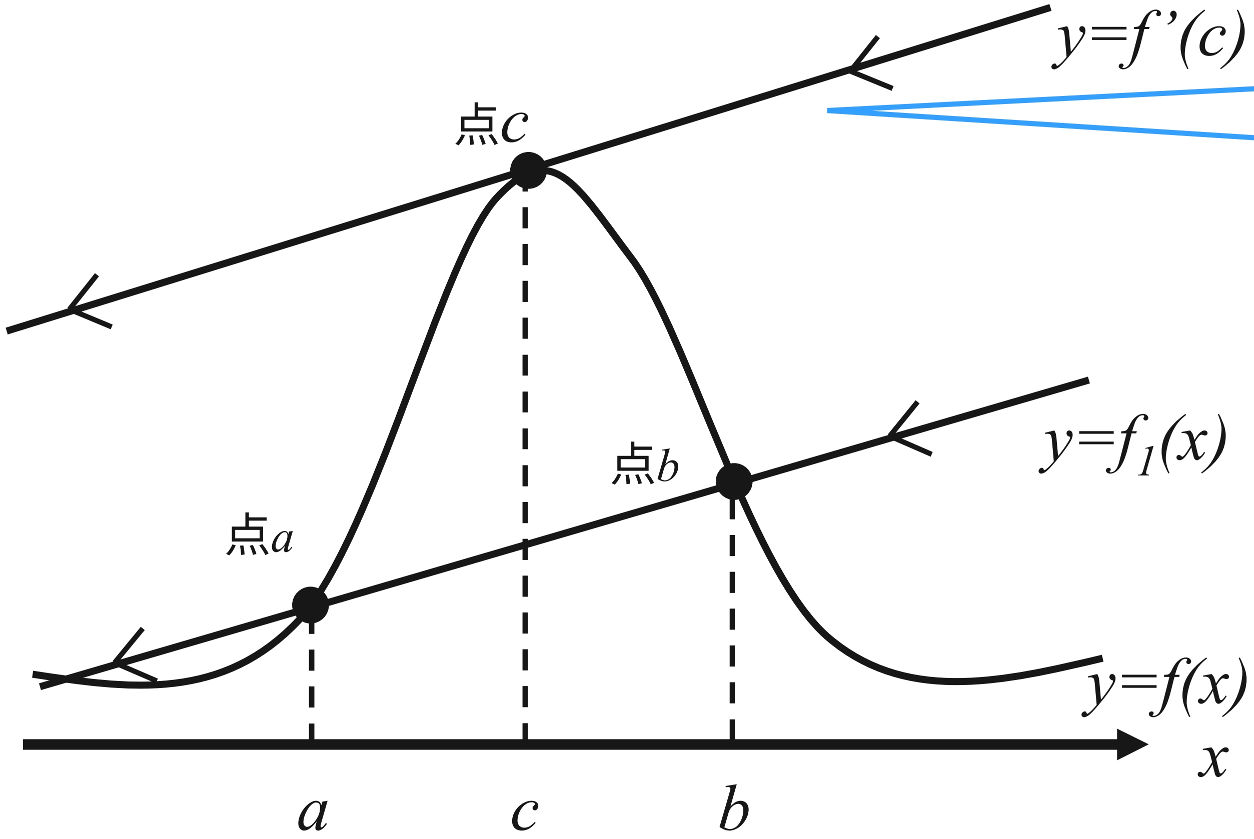
平均値の定理

　関数$f(x)$は閉区間$[a,b]$で連続、開区間(a,b)で微分可能であるとする。
　このとき、

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad (a<c<b)$$

を満たすcが少なくとも1つ存在する。

平均値の定理ってどういうこと？



線分abと点cにおける接線が平行である

このようになる点cが
<u>必ず存在する</u>

平均値の定理

$y=f(x)$のグラフを考える。

閉区間$[a,b](a<b)$において、

2点a,bを通る直線の方程式f_1は

［傾きは、$\frac{\Delta y}{\Delta x}$で求められる。］

$$f_1=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

［$y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$をx軸方向にa
y軸方向に$f(a)$だけ平行移動］

となる。

平均値の定理

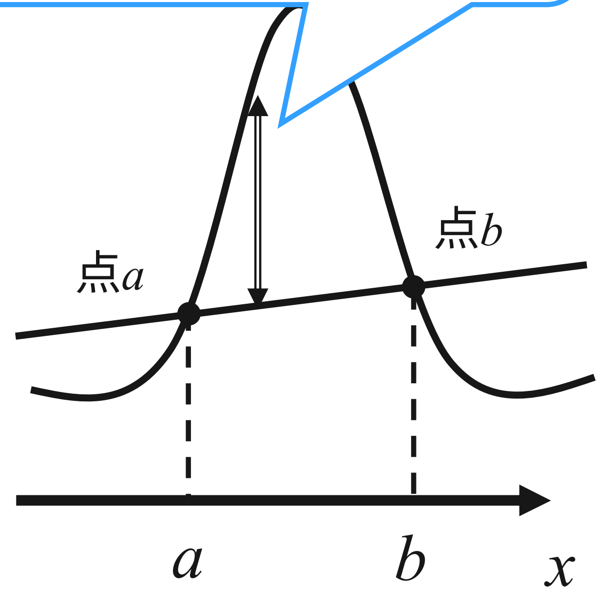
ここで、$f(x)$と$f_1(x)$の差を新たな関数$F(x)$で表す。

$F(x)$を次のように***定める。***

$$F(x) = f(x) - \underbrace{\left\{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right\}}_{f_1(x)}$$

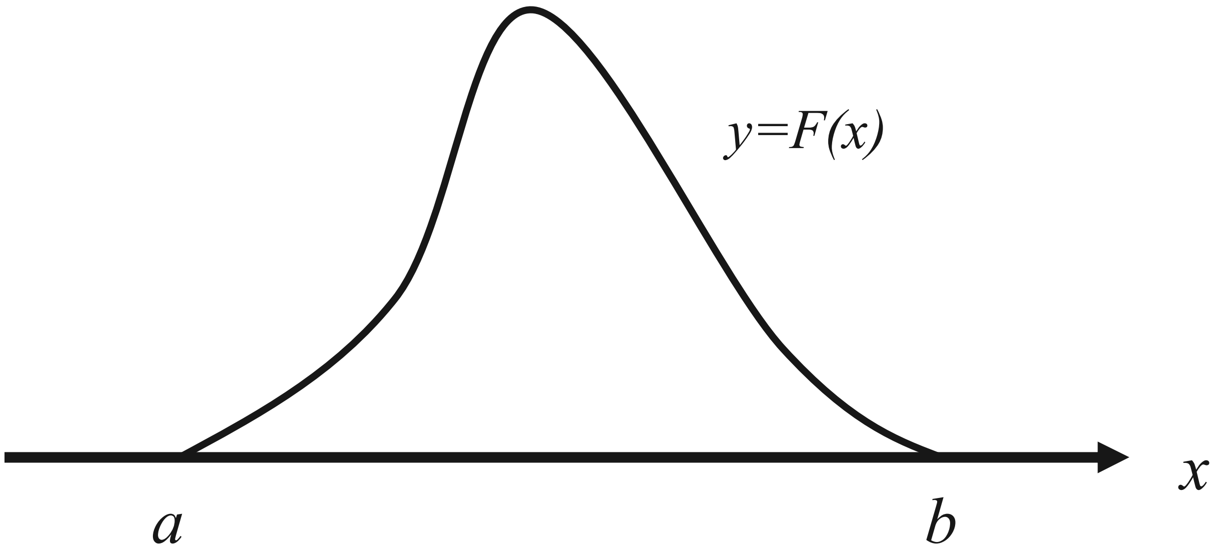
$$\leftrightarrow F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$f(x)$ 上（$a≦x≦b$）のある地点でのここの差を$F(x)$で表す



なぜ $f(x)$ と $f_1(x)$ の差を考える？

$f(x)$ と $f_1(x)$ の差である $F(x)$ をグラフにすると、



どこかで見たことがある
ようなグラフだね。
あの定理が使いたくなるね。

平均値の定理

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

$x=a$のとき、$F(x)$は

$$F(a) = \cancel{f(a)} - \cancel{f(a)} - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\underbrace{(a - a)}_{0}$$

$$= 0$$

点aは$f(x)$上かつ$f_1(x)$上の点。
$f_1(x)$上の点と$f_1(x)$の差（距離）は無論0である。

平均値の定理

$x=b$のとき、$F(x)$は

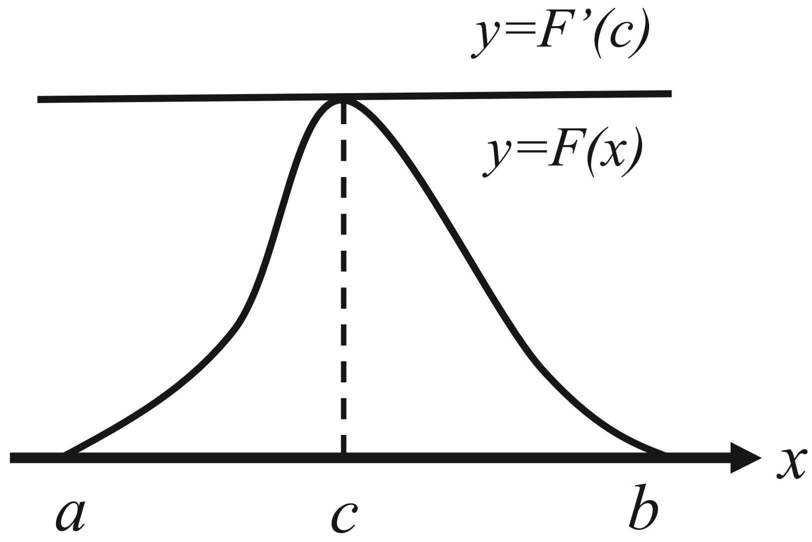
$$F(\mathrm{b}) = f(\mathrm{b}) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\cancel{b - a}}\cancel{(\mathrm{b} - a)}$$
$$= \cancel{f(\mathrm{b}) - f(a)} - \cancel{\{f(b) - f(a)\}}$$
$$= 0$$

点bも$f(x)$上かつ$f_1(x)$上の点。
$f_1(x)$上の点と$f_1(x)$の差（距離）
は無論0である。

平均値の定理

よって、$F(a)=F(b)=0$が成り立つ。

したがって、$F(a)=F(b)$であるから
ロルの定理より、$F'(c)=0(a<c<b)$となる
点cが少なくとも1つ存在する。



平均値の定理

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

より、

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

なので、

定数(ここではa)の微分は0
（係数と混同しない）
$(x)'=1$である。

平均値の定理

$F'(c)=0$のとき、

$$F'(\mathrm{c}) = f'(\mathrm{c}) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

であるから、

$$f'(\mathrm{c}) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

が成り立つ。

平均値の定理

$F'(c)=0(a<c<b)$となる点cが少なくとも1つ存在するから、

$f'(\mathrm{c}) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$が成り立つ点$c$は少なくとも1つ存在する。

ここの点cは、前者と後者ともに同じ点を指す。

さいごに

このスライドについて

作成者：菊川　颯太

作成日時：2024/10/18

不明点・疑義点等は菊川まで