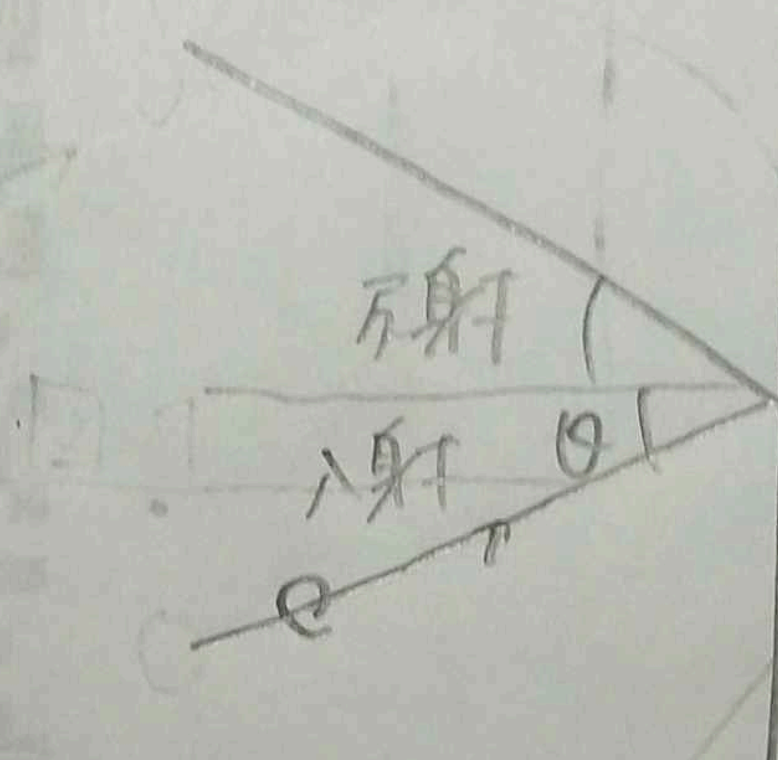
[発展] 球体の単原子分子理想気体の内部エネルギー

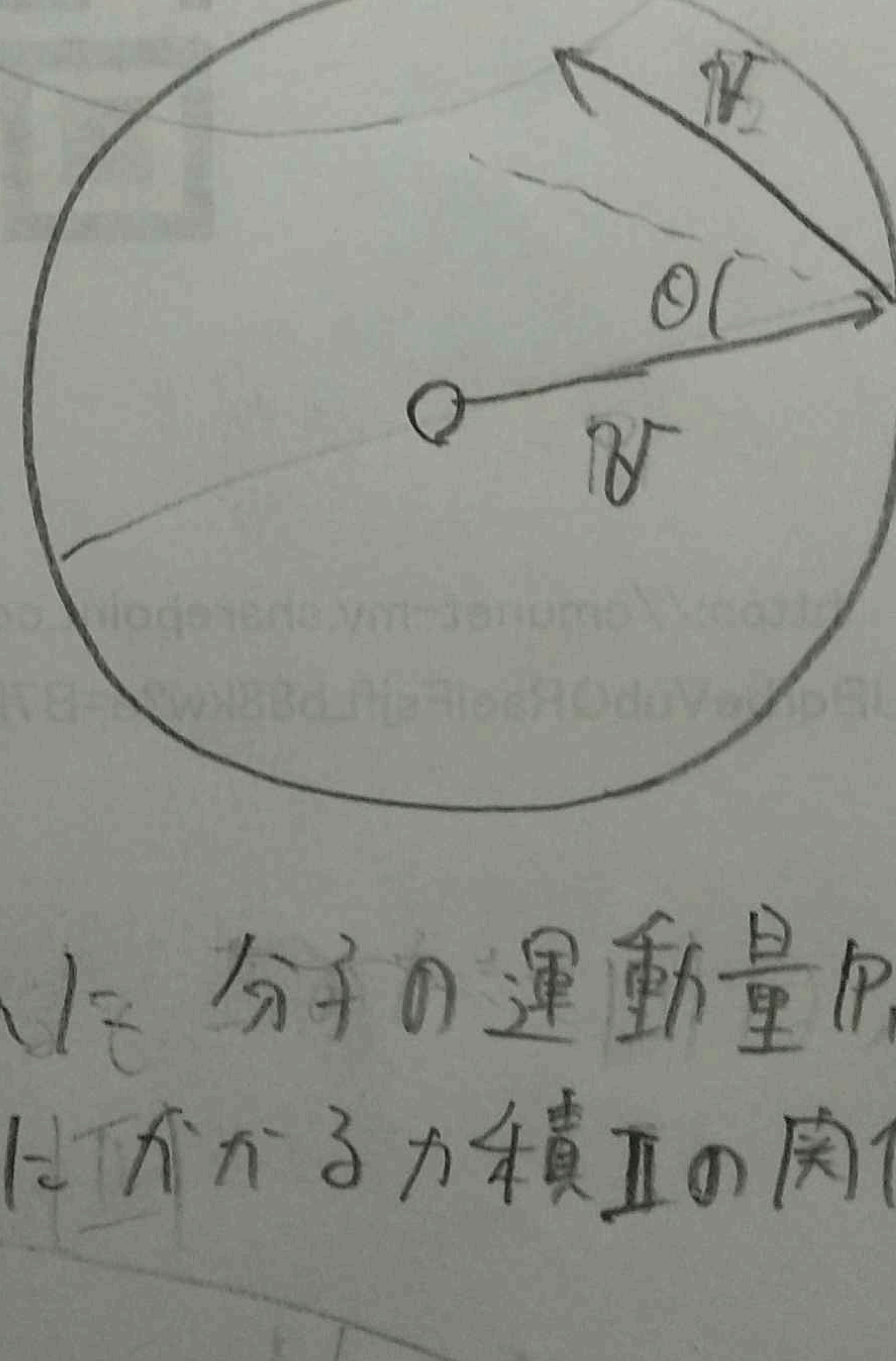
仮定
- 半径rの球体にN個の単原子分子を封入。
- 分子は質量m、つねに速さ$|v|$で運動
- 分子は完全弾性衝突(反発係数$e=1$)
- 気体は理想気体(標準状態 273K 1.013×10^5 Pa)
- 分子が球体に衝突しても、球体はうごかない。

力積を無視
∵球体は分子にくらべてとても重い。

$\frac{m}{小}\frac{v}{大}=\frac{m}{大}\frac{V}{小}$

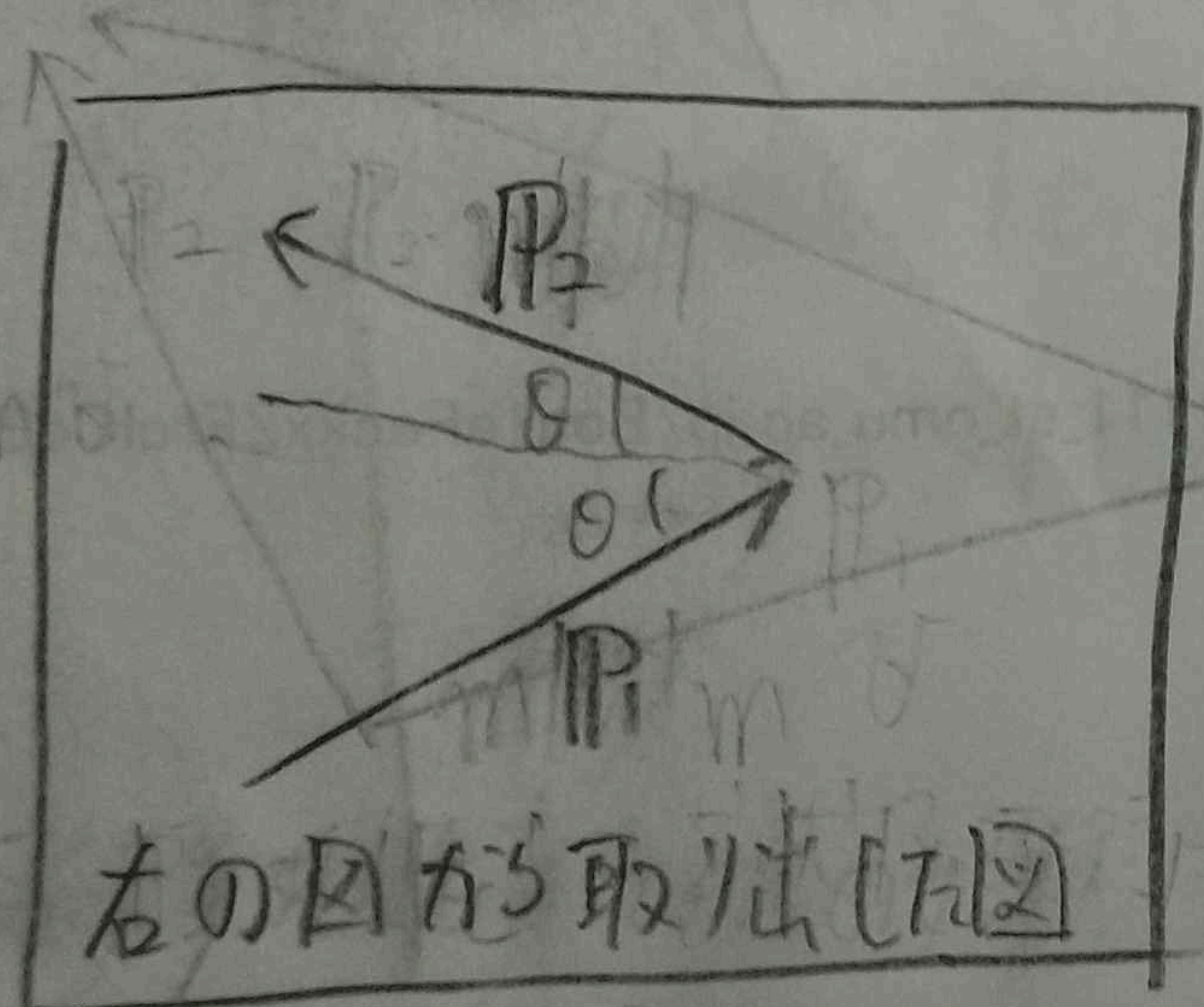
- 衝突時は、右図のように、分子は角θで入射すなわち角θで反射
∵弾性衝突



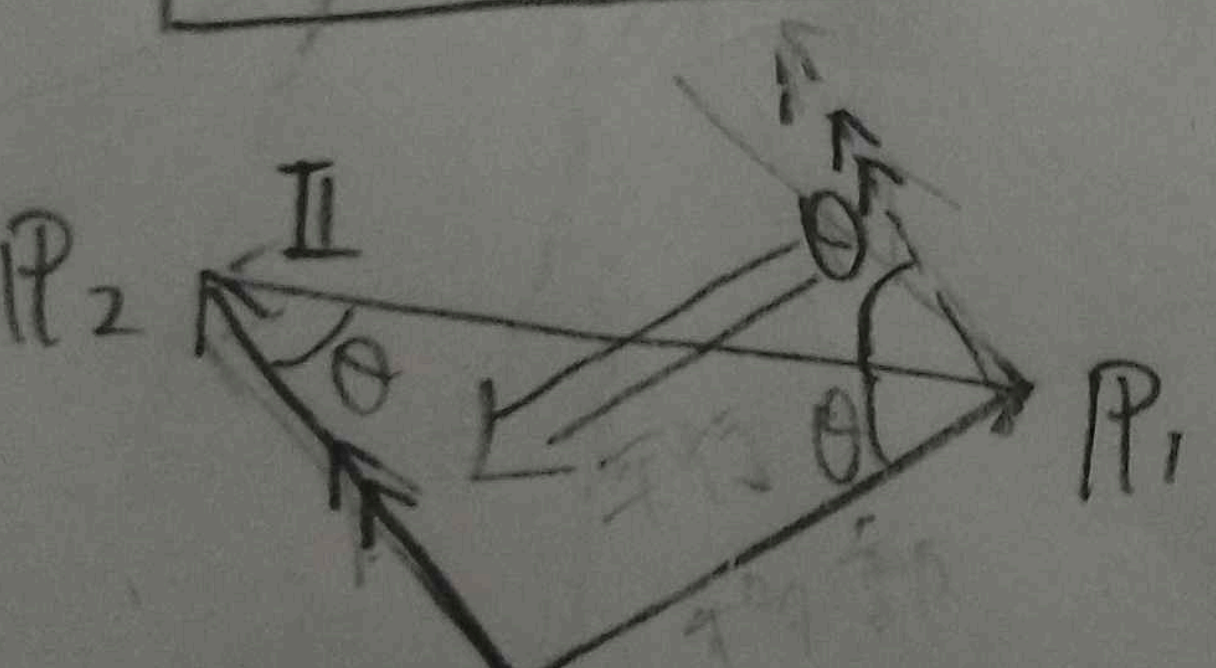


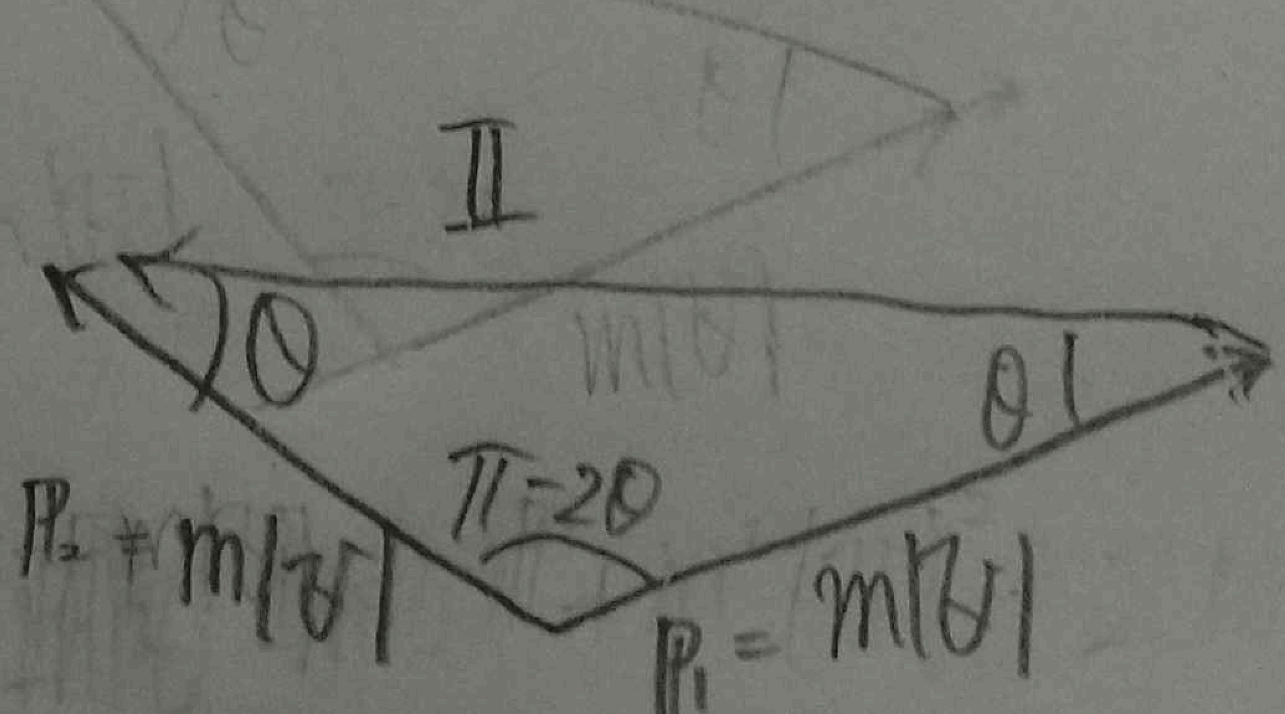
導出

一回の衝突で分子にかかる力積Iを考える。



ゆえに分子の運動量P1, P2と分子にかかる力積Iの関係は、





[P2の始点をP1の始点へ平行移動。]

① 余弦定理を用いる方法

$|I|^2 = m^2|v|^2 + m^2|v|^2 - 2m^2|v|^2\cos(\pi - 2\theta)$

$= 2m^2|v|^2\{1 - \cos(\pi - 2\theta)\}$

$= 2m^2|v|^2\{1 + \cos(-2\theta)\}$ $[\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta]$

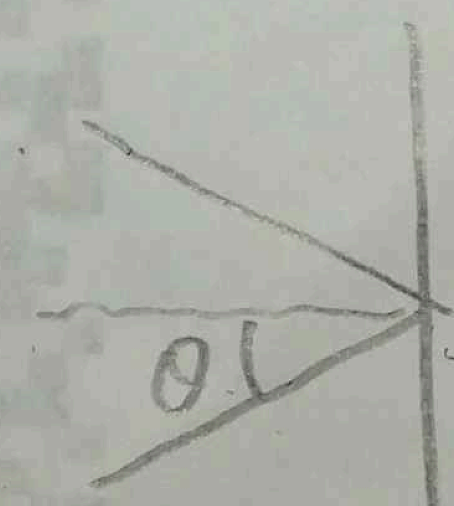
$= 2m^2|v|^2(1 + \cos 2\theta)$ $[\cos(-\theta) = \cos\theta]$

$= 2m^2|v|^2(1 + \cos^2\theta - \sin^2\theta)$

$= 2m^2|v|^2\{1 + \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta)\}$ $[\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$

$= 2m^2|v|^2 \cdot 2\cos^2\theta$

$= 4m^2|v|^2\cos^2\theta$



条件より $-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ [図以外はかべにめりこむことになる]

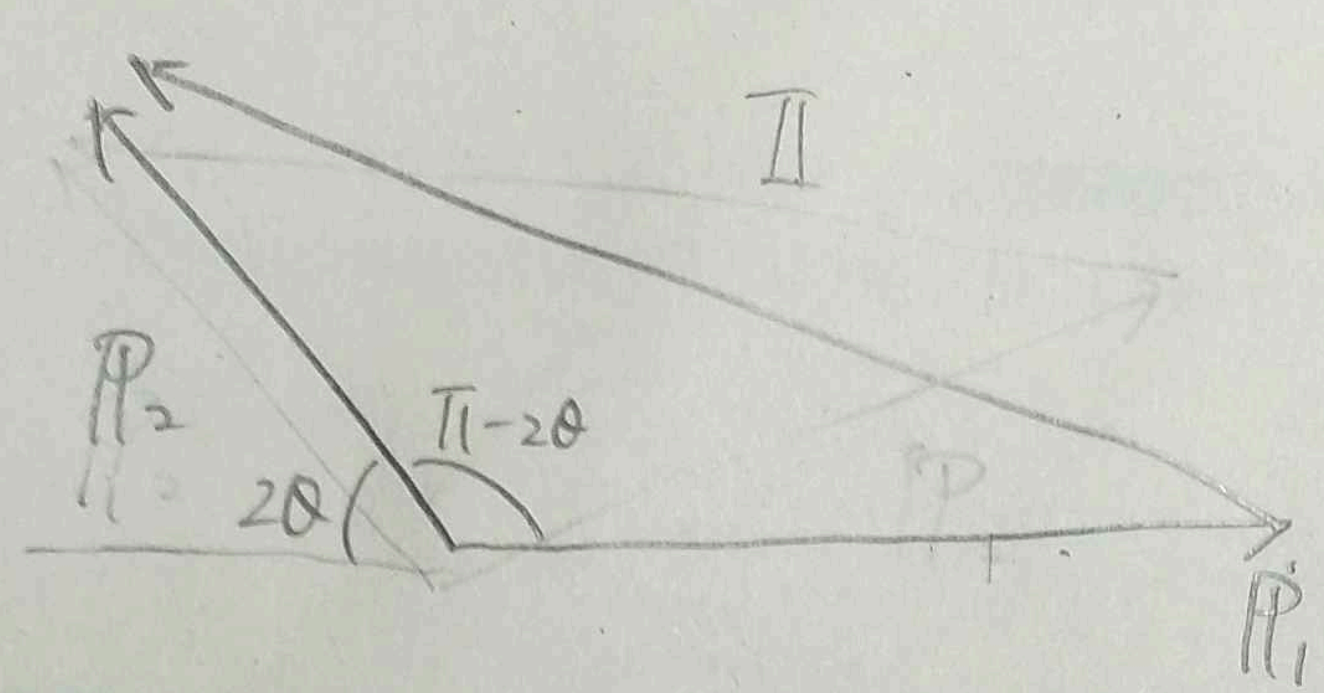
なので $\cos\theta \geqq 0$

$|I|^2 = 2^2 m^2|v|^2\cos^2\theta$

$= (2m|v|\cos\theta)^2$

$|I| = 2m|v|\cos\theta$

② ベクトルで解く方法



$$\mathbb{P}_1 = \begin{pmatrix} m|v| \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}_2 = \begin{pmatrix} -m|v|\cos 2\theta \\ m|v|\sin 2\theta \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -m|v|\cos 2\theta - m|v| \\ m|v|\sin 2\theta \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}_1 + \mathbb{I} = \mathbb{P}_2$$

$$\mathbb{I} = \mathbb{P}_2 - \mathbb{P}_1$$

$$= \begin{pmatrix} m|v|(-\cos 2\theta - 1) \\ m|v|\sin 2\theta \end{pmatrix}$$

$$= m|v| \begin{pmatrix} -\cos 2\theta - 1 \\ \sin 2\theta \end{pmatrix}$$

$$|\mathbb{I}| = \sqrt{m^2|v|^2(-\cos 2\theta - 1)^2 + \sin^2 2\theta}$$

$$= m|v|\sqrt{\cos^2 2\theta + 2\cos 2\theta + 1 + \sin^2\theta}$$

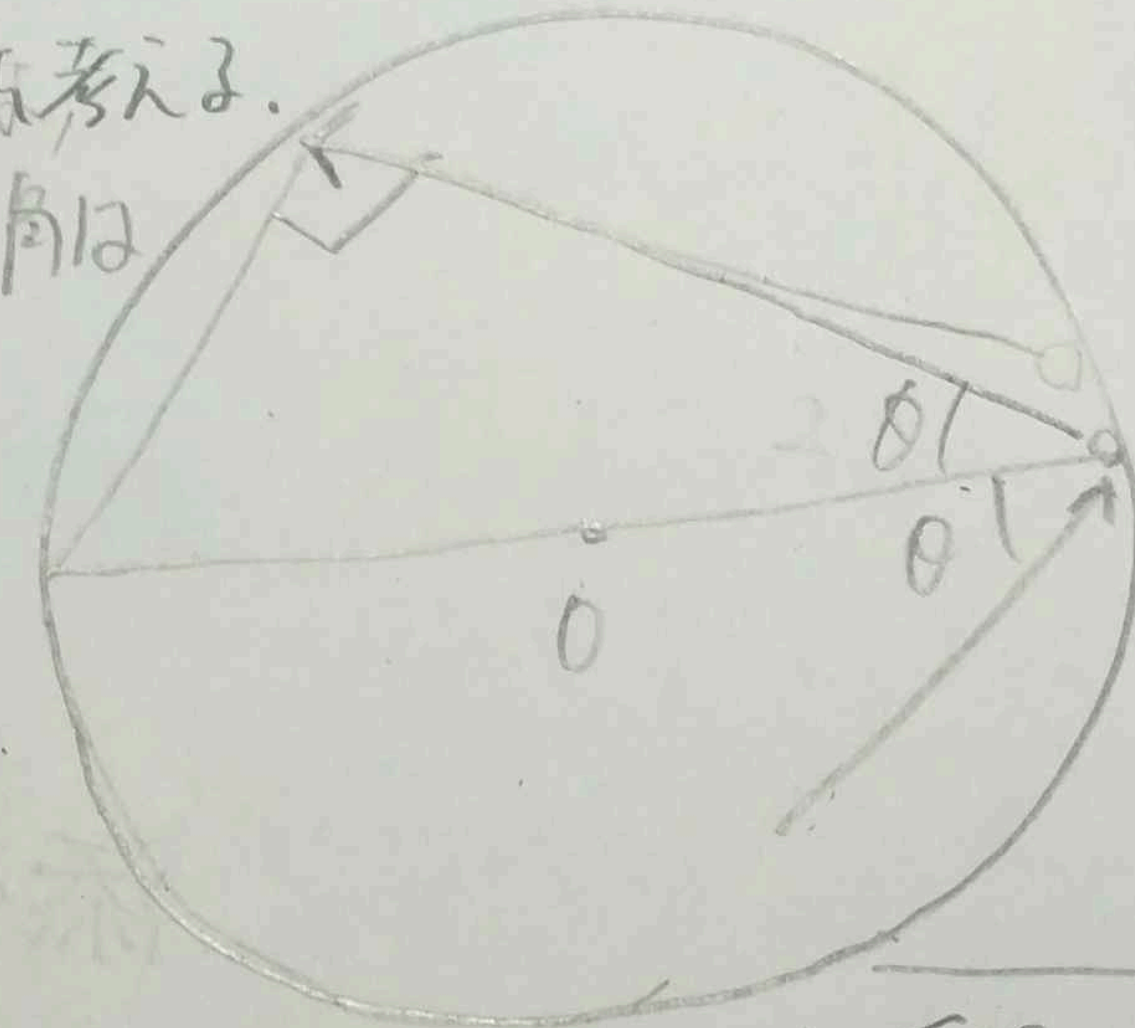
$$= m|v|\sqrt{2 + 2\cos 2\theta}$$

$$= m|v|\sqrt{2 + 2(2\cos^2\theta - 1)}$$

$$= m|v|\sqrt{4\cos^2\theta}$$

$$= m|v|\, 2\cos\theta \quad \left[-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right]$$

また，1回の衝突にかかる時間を考える。

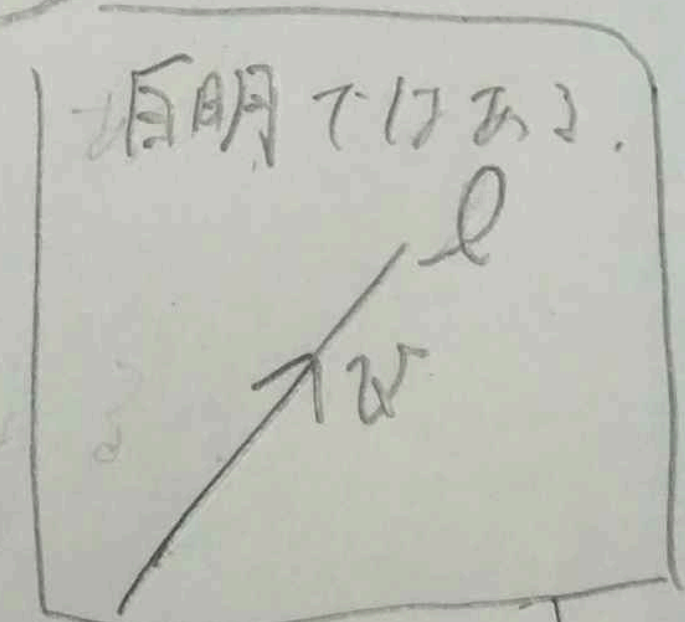


円周角の定理より，直径の円周角は $\frac{\pi}{2}$ なので，すすむキョリxは

半径r，反射角θを用いて

入射角=反射角

$x=2r\cos\theta$ となるので，



1回の衝突にかかる時間tは

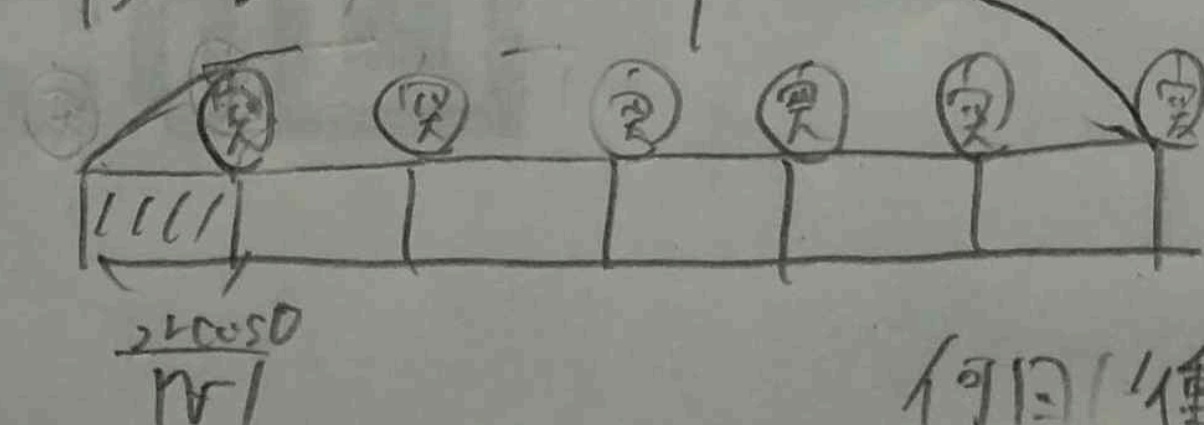
$$t=\frac{2r\cos\theta}{|\vec{v}|}$$

[$|\vec{v}|$を用いてよいのは，
・すすむ軌道で接線ℓと速度ベクトルが平行
・tがスカラーである。($\vec{v}$だとtもベクトルになる。)]

よって，T s あたりに衝突する回数は

$$\frac{T}{\frac{2r\cos\theta}{|\vec{v}|}}=\frac{|\vec{v}|}{2r\cos\theta}T$$

[イメージ



何回衝突する?]

T s 間にかべに加えられる平均の力積の大きさ $\bar{f}T$ は，

$$\bar{f}\cdot T=\underbrace{2m|\vec{v}|\cos\theta}_{1回の力積の大きさ}\cdot\underbrace{\frac{|\vec{v}|}{2r\cos\theta}\cdot T}_{衝突回数}\ \cdots ※$$

$$\bar{f}\cdot T=\frac{m|\vec{v}|^2}{r}T$$

[1回の衝突にかかる時間を用いて力積を

$$\bar{f}\cdot\frac{2r\cos\theta}{|\vec{v}|}=2m|\vec{v}|\cos\theta\cdot 1\ \cdots ♡$$

としても$\bar{f}$を求められるが，これだと任意の時間Tで成り立つかは不明。

※が成立 ⇒ ♡が成立]

任意の時間T で成立

$\boxed{\frac{2r\cos\theta}{|\vec{v}|}で成立}$

よって，かべが受ける平均の力の大きさ $\bar{f}$ は，

$$\bar{f} = \frac{m|v|^2}{r}$$

Nコの分子が入っているから，$\bar{F}$ は

$$\bar{F} = \frac{Nm|v|^2}{r}$$

また，気体によるかべの圧力 p は

$$p = \frac{\bar{F}}{S} = \frac{Nm|v|^2}{4\pi r^2 \cdot r}$$

$$= \frac{Nm|v|^2}{3 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}$$

$$p = \frac{Nm|v|^2}{3V}$$

[あとは立方体と同様に]

左辺をpVにして
気体の状態方程式で
変数をTの1つにする。
あとは，$|v|$を用いているから，
$\frac{1}{2}m|v|^2$ の形にすればよい。