

# メトロポリスアルゴリズムの例題概要

- 政治家が東西、一直線の伸びる島々に住んでいるとする

政治家は政治活動のため(1),(2),(3)どれかの挙動で1日ごとにどこかの島を訪問する。

(1) 西の隣の島へ移動

(2) 東の隣の島へ移動

(3) 現在の島に滞在

- 目的

全ての島に訪問しつつ、なるべく人口の高い島に多くの時間(訪問回数)を使いたい。  
(人口と訪問回数を比例させたい)

- 前提

今の島の人口、隣の島々の人口は知ることができる

全総人口、島数は知らない

どのような方法で島々を訪問すれば目的を達成できるのか

# 政治家の例題

① 西に行くか、東に行くか確率が平等なコイントスで決める(Aの島に決まったとする)

② Aの島の人口を見る

③ 以下に従って移動するかどうかを判定

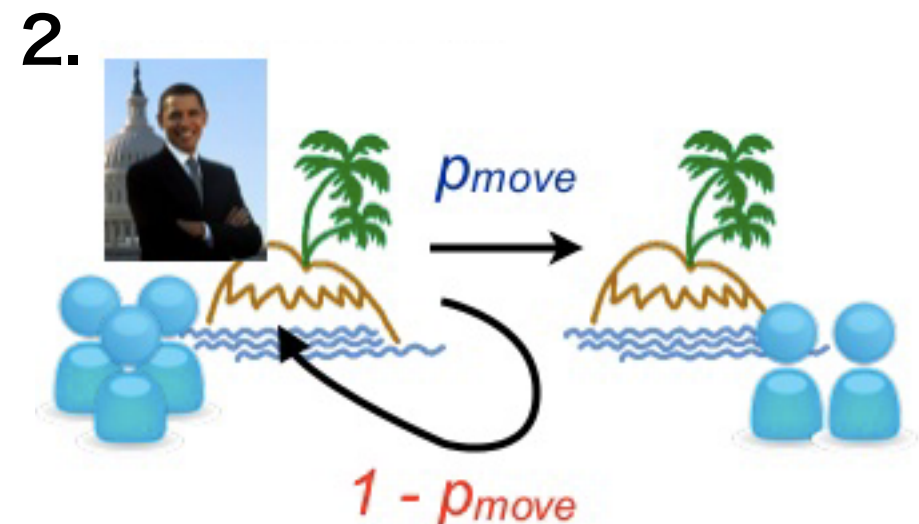
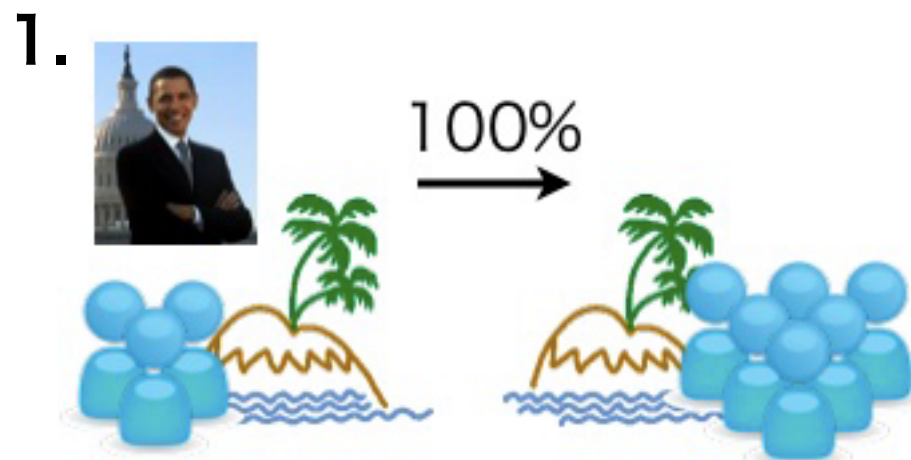
1. Aの島の人口が現在の島の人口より多い場合

Aの島に移動

2. Aの島の人口が現在の島の人口以下の場合

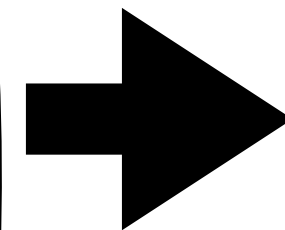
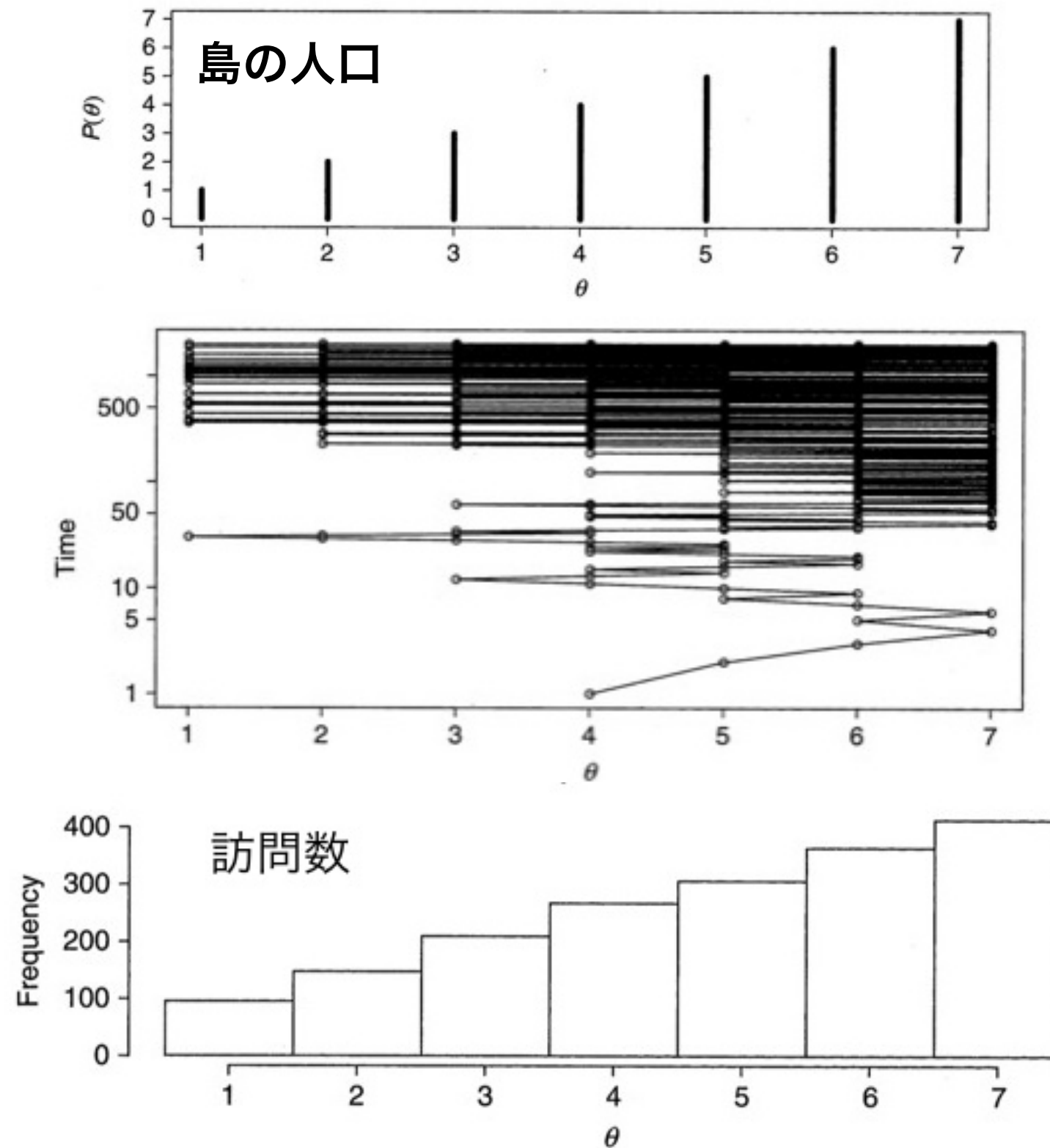
$p_{\text{move}} = [\text{A島の人口}] / [\text{現在の島の人口}]$  の確率で進む

$1 - p_{\text{move}}$  で現在の島に滞在



# 例題から得られた移動の軌跡結果

島が7つあると仮定する



島の人口と  
訪問数が似た

# ランダムウォークの一般的な特徴

提案分布: どちらに行くか決める分布

例題ではコイントス(50-50のベルヌーイ分布)

目標分布: 知りたい分布

例題では、 $P(\theta)$  (島の人口)

数式化すると

$$p_{\text{move}} = \min \left( \frac{P(\theta_{\text{proposed}})}{P(\theta_{\text{current}})}, 1 \right)$$

$\theta_{\text{current}}$  : 今の位置

$\theta_{\text{proposed}}$  : コイントスで提案された位置

# 機能する理由

もし今  $\theta$  にいるとして、 $\theta + 1$  に移動する確率

$$p(\theta \rightarrow \theta + 1) = 0.5 \times \min(P(\theta + 1)/P(\theta), 1)$$

もし今  $\theta + 1$  にいるとして、 $\theta$  に移動する確率

$$p(\theta + 1 \rightarrow \theta) = 0.5 \times \min(P(\theta)/P(\theta + 1), 1)$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{p(\theta \rightarrow \theta + 1)}{p(\theta + 1 \rightarrow \theta)} &= \frac{0.5 \min(P(\theta + 1)/P(\theta), 1)}{0.5 \min(P(\theta)/P(\theta + 1), 1)} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{P(\theta)/P(\theta + 1)} & \text{if } P(\theta + 1) > P(\theta) \\ \frac{P(\theta + 1)/P(\theta)}{1} & \text{if } P(\theta + 1) \leq P(\theta) \end{cases} \\ &= \frac{P(\theta + 1)}{P(\theta)} \end{aligned}$$

# メトロポリスアルゴリズムのベルヌーイ尤度と ベータ事前分布への適用

例題  $p_{\text{move}} = \min\left(\frac{P(\theta_{\text{proposed}})}{P(\theta_{\text{current}})}, 1\right)$

$$P_{\text{move}} = \min\left(1, \frac{P(\theta_{\text{pro}})}{P(\theta_{\text{cur}})}\right) \quad \text{generic Metropolis form}$$

$$= \min\left(1, \frac{P(D|\theta_{\text{pro}})p(\theta_{\text{pro}})}{P(D|\theta_{\text{cur}})p(\theta_{\text{cur}})}\right) \quad P \text{ is likelihood times prior}$$

$$= \min\left(1, \frac{\text{Bernoulli}(z, N|\theta_{\text{pro}})\text{beta}(\theta_{\text{pro}}|a, b)}{\text{Bernoulli}(z, N|\theta_{\text{cur}})\text{beta}(\theta_{\text{cur}}|a, b)}\right) \quad \text{Bernoulli likelihood and beta prior}$$

$$= \min\left(1, \frac{\theta_{\text{pro}}^z (1 - \theta_{\text{pro}})^{(N-z)} \theta_{\text{pro}}^{(a-1)} (1 - \theta_{\text{pro}})^{(b-1)} / B(a, b)}{\theta_{\text{cur}}^z (1 - \theta_{\text{cur}})^{(N-z)} \theta_{\text{cur}}^{(a-1)} (1 - \theta_{\text{cur}})^{(b-1)} / B(a, b)}\right)$$

メトロポリスアルゴリズムを実行するのに必要なもの

**提案分布が計算できること**

**目標分布が計算できること**

**一様分布から確率変数を生成できること**