

Kashiwara crystal と Robinson-Schensted-Knuth 対応の関係

アドバイザー：岡田聡一教授

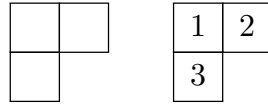
322301150 菊地雄大

目次

1	イントロダクション	2
2	Robinson-Schensted-Knuth 対応	4
2.1	分割と tableau の定義	4
2.2	insertion と Robinson-Schensted-Knuth 対応	6
2.3	Knuth 同値と P-同値	9
3	Kashiwara crystal	11
3.1	鏡映, weight lattice, ルート系	11
3.2	Kashiwara crystal の定義	14
3.3	Kashiwara crystal の準同型とテンソル積	16
3.4	signature rule	19
4	crystal と RSK 対応の関係	20
4.1	tableau の crystal と最高 weight 元	21
4.2	plactically 同値と Knuth 同値	31
4.3	plactically 同値と RSK 対応の関係	32

1 イントロダクション

本論文は, 参考文献 [3] を基に, Kashiwara crystal (以下「crystal」と略す) および Robinson-Schensted-Knuth 対応 (以下「RSK 対応」と略す) の概要とそれらの関係性についてのサーベイを行うものである. 分割とは正整数を他の正整数の和として表現する方法である. 例えば, 3 の分割を考えると, 3 という数を $3, 2+1, 1+1+1$ の 3 種類で, 他の正整数の和として表せる. これをそれぞれ $(3), (2, 1), (1^3)$ と表現するのが分割という概念である. この分割を視覚的に表現する方法として, Ferrers diagram と呼ばれる概念がある. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$ をある分割としたときに, i 行に λ_i 個の箱を左寄せで書いたものを形 λ の Ferrers diagram という. その箱の中に正整数を 1 つずつ書いたものが tableau である. 形 $(2, 1)$ の Ferrers diagram と tableau として



がある. Robinson Schensted Knuth 対応とは word(文字列) を tableau の組に写す写像である. 例えば,

$$13221 \rightarrow \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 1 & & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array} \right)$$

のようである. 第 1 成分を P-tableau, 第 2 成分を Q-tableau という.

Kashiwara crystal は, 柏原正樹によって導入されたもので, 表現論を視覚的かつ組合せ論的に解析するためのツールである. crystal は, ある集合とその上の構造で定義されたもので,

1. 各元は weight を持つ.
2. 作用素 e_i と f_i を持ち, これらは crystal の元の間での遷移を定義する.
3. 各元 b について, $\varphi_i(b)$ と $\varepsilon_i(b)$ という整数値が定義される. 通常, $\varphi_i(b)$ は f_i を適用して遷移可能な回数, $\varepsilon_i(b)$ は e_i を適用して遷移可能な回数を表す.

を満たすものである. これを視覚的に表現する方法として, crystal graph がある. A_r 型の crystal \mathbb{B} は, crystal graph として,

$$\boxed{1} \xrightarrow{1} \boxed{2} \xrightarrow{2} \dots \xrightarrow{r} \boxed{r+1}$$

を持つ. 本論文では, この k 回のテンソル積によって構成される crystal

$$\mathbb{B}^{\otimes k} = \{x_1 \otimes \cdots \otimes x_k \mid x_1, \dots, x_k \in \{1, \dots, r+1\}\}$$

に着目する. この crystal $\mathbb{B}^{\otimes k}$ を連結な crystal の直和に分解することを考える. 同じ形を持つ semistandard tableau 全体が 1 つの連結な crystal を構成し, その直和として $\mathbb{B}^{\otimes k}$ を表すことができる.

この $\mathbb{B}^{\otimes k}$ の元 $x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_k$ に対して, P-tableau $P(x)$ を考える. このとき, 以下の定理 (本文の定理 4.11) が成り立つ.

定理 1.1 ([3, 定理 8.6]). crystal $\mathbb{B}^{\otimes k}$ を tableau の crystal の直和に分解する. このとき, x は分解された crystal の中で $P(x)$ に対応している. したがって, $P(x)$ の形が λ であるとき, x は形 λ の連結な tableau の crystal の元に対応している.

一方, $\mathbb{B}^{\otimes k}$ を連結な tableau の crystal に分解すると, 直和の各成分に重複が存在する. そのため, $x, y \in \mathbb{B}^{\otimes k}$ の P-tableau の形が一致していたとしても, 必ずしも同じ連結な tableau の crystal に対応しているとは限らない. しかし, Q-tableau を考えることで, 以下の定理 (本文の定理 4.12) が導かれる.

定理 1.2 ([3, 定理 8.7]). $x, y \in \mathbb{B}^{\otimes k}$ の Q-tableau が一致するとき, x, y は $\mathbb{B}^{\otimes k}$ の同じ連結成分に属している.

このように, P-tableau と Q-tableau は, この crystal 構造において重要な役割を果たしている.

本論文では, Robinson-Schensted-Knuth 対応, Kashiwara crystal, 上記で述べたこの 2 つの関係性について, 順を追って議論していく. まず, RSK 対応に関して, 分割および tableau の基本的な定義を行い, これらを用いた insert 操作および RSK 対応のアルゴリズムを紹介する. さらに, RSK 対応における重要な概念である Knuth 同値および P-同値について論じる. Knuth 同値は, 2 つの P-tableau が一致するときの word 間の関係性を述べたものである. 次に, 鏡映, weight, ルート系といった基礎概念を定義した後, Kashiwara crystal について説明する. 続いて, crystal の準同型写像およびテンソル積の構造について詳述する. さらに, $\mathbb{B}^{\otimes k}$ の計算手法として signature rule を紹介する. 最後に, crystal と RSK 対応の関係性を考察する. その際, tableau に対応する crystal の構造とその最高 weight 元との関係を明らかにする. 上記で述べた crystal と RSK 対応の関係性を説明するために plactically 同値を定義し, 証明するときの鍵となる Knuth 同値との関連性を説明する.

[使用記号について]

\mathbb{R} : 実数全体, \mathbb{Z} : 整数全体を表す. k を正整数とし, $[k] = \{1, 2, \dots, k\}$ とする.

2 Robinson-Schensted-Knuth 対応

Robinson-Schensted-Knuth (RSK) 対応は, 組合せ論や表現論において重要なアルゴリズムである. 1938 年に Gilbert de Beauregard Robinson が最初に提案し, その後 Craige Eugene Schensted や Donald Ervin Knuth によって発展・一般化された. この功績により, このアルゴリズムは Robinson-Schensted-Knuth 対応と名付けられている. RSK 対応は, 行列や一般化置換などの構造から, tableau の組への変換を行うアルゴリズムである. 変換の対象となるものは様々であるが, ここでは word を対象とし, 説明する.

以下では, RSK 対応を定義するのに必要な概念である分割と tableau の定義を最初に説明する. その後, RSK 対応のアルゴリズムを説明し, その性質として Knuth 同値と P-同値の関係性について述べる.

2.1 分割と tableau の定義

まず分割を定義する.

定義 2.1. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$ が k の分割であるとは,

1. λ_i は正整数, $\sum_{i=1}^l \lambda_i = k$
2. $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l$

を満たすときをいう. このとき, $\lambda \vdash k$ で表す.

分割を表記する際, 同じ数が繰り返される部分については累乗記法を用いて表すことがある. 例えば, $(3, 1, 1)$ を $(3, 1^2)$ で表す.

例. 5 の分割は, $(5), (4, 1), (3, 2), (3, 1^2), (2^2, 1), (2, 1^4), (1^5)$ の 7 つである.

次に, Ferrers diagram と tableau を定義する. 分割 λ を図式的に表現する方法として, 形 λ の Ferrers diagram がある. その diagram の各箱の中に数字を入れたものが tableau である.

Ferrers diagram は数学者 Norman Macleod Ferrers に由来し, Young tableau は 1900 年に数学者 Alfred Young によって名付けられたものである.

定義 2.2. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l) \vdash k$ とする.

1. 形 λ の Ferrers diagram とは, i 行に λ_i 個の箱を左寄せに書いた並びである. i 行 j 列の箱は座標 (i, j) を持つ.
2. 形 λ の Young tableau とは Ferrers diagram の各箱内に $[k]$ 内の元を 1 回ずつ書いた並びである. この並びが各行, 各列に関して単調増加であるとき, standard tableau であるという.
3. 形 λ の generalized Young tableau とは Ferrers diagram の各箱内に正整数を繰り返しを許して書いた並びである. この並びが各行に関して広義単調増加, 各列に関して狭義単調増加であるとき, semistandard tableau であるという.

この定義から, 形 λ の standard tableau の成分は k 以下の正整数であり, その個数は有限個である. 一方, 形 λ の semistandard tableau の成分は k より大きい数も入り, 無限に存在する. そこで n を正整数とし, 成分の値が n 以下の semistandard tableau を今後は考えていく.

また, Young tableau は generalized Young tableau の特殊な場合であることに注意する.

例. $\lambda = (3, 2, 1) \vdash 6$ の Ferrers diagram は

である. standard tableau は, 例えば以下がある.

1	2	3
4	5	
6		

1	3	4
2	6	
5		

1	2	5
3	6	
4		

この standard tableau は semistandard tableau でもある. これ以外に semistandard tableau は, 例えば以下がある.

1	1	1
2	2	
3		

1	2	2
2	3	
3		

3	5	7
5	7	
7		

次の概念は, 後にある節の Knuth 同値と P-同値の関係性について証明する際や tableau の crystal を考える際に役に立つ.

定義 2.3. T を Young tableau または generalized Young tableau とする. T の行を 1 行目から順に T_1, T_2, \dots, T_l とする.

T の row word π_T を

$$\pi_T = T_l T_{l-1} \cdots T_1$$

と定める.

例. $T =$

1	2	3
4	5	
6		

とする. このとき,

$$\pi_T = 645123$$

である.

2.2 insertion と Robinson-Schensted-Knuth 対応

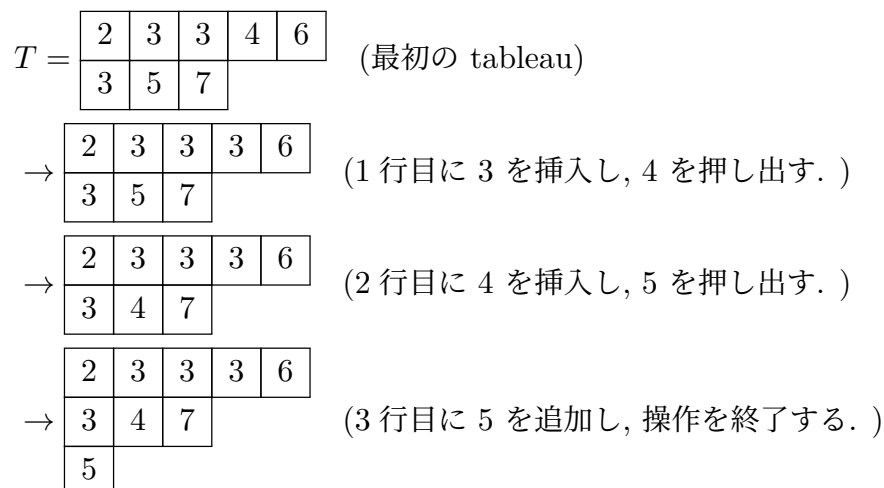
Robinson-Schensted-Knuth 対応を定義するのに必要な insertion について説明する. insertion は, tableau に数を追加することで, 新たな tableau を生成する方法である.

定義 2.4. T を semistandard tableau, i を任意の正整数とする. T に i を insert するとは以下の手順を行うことである.

1. T の 1 行目を R とする.
2. R 内の成分で i より大きい成分があるとき, 次の (2a) から (2c) の操作を繰り返す.
 - (2a) R 内の成分を左から右へ順に見ていき, i より大きい最初の成分を j とする.
 - (2b) j を i と入れ替える. (すなわち, j を取り出して i をその位置に置く).
 - (2c) i を更新して $i := j$ とし, R を次の行とする.
3. R 内に i より大きい成分が存在しない (R 内のすべての成分が i 以下) のとき, その行の最後の列に i を追加し, 操作を終了する.

この操作により得られた generalized Young tableau を $T \leftarrow i$ で表す.

例. $T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 3 & 4 & 6 \\ \hline 3 & 5 & 7 & & \\ \hline \end{array}$ に 3 を insert すると, 次の操作が行われる.



次に, Robinson-Schensted-Knuth 対応を定義する.

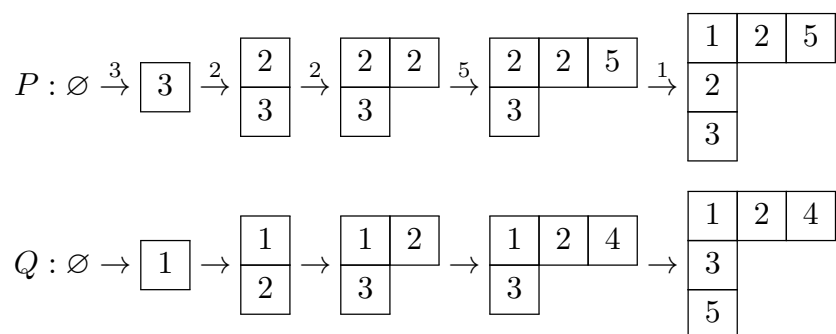
定義 2.5. n と k を正の整数とする. Robinson-Schensted-Knuth 対応とは, アルファベット $[n]$ 上の長さ k の word $w = i_1 i_2 \cdots i_k$ に対して, 以下で定まる同じ形の generalized Young tableau P と Young tableau Q の組 (P, Q) を対応させる写像である.

- P は $\emptyset \leftarrow i_1 \leftarrow i_2 \leftarrow \cdots \leftarrow i_k$
- Q は, P に i_s を insert した際に新しく追加された箱と同じ成分を持つ箱に s を書き込む. (ただし, $1 \leq s \leq k$ とする.)

このとき, P を P-tableau といい, $P(w)$ で表す. 同様に, Q を Q-tableau といい, $Q(w)$ で表す.

以下, Robinson-Schensted-Knuth 対応を RSK 対応と略す.

例. $w = 32251$ とする. このとき,



となる.

次の定理は重要である.

定理 2.1 ([4, 定理 4.8.2]).

1. P-tableau は semistandard tableau, Q-tableau は standard tableau である.
2. RSK 対応は, アルファベット $[n]$ 上の長さ k の word 全体の集合から, k の分割の形で $[n]$ 上の元を成分にもつ semistandard tableau P と standard tableau Q の組 (P, Q) 全体の集合への全単射である.
3. $P(\pi_T) = T$

証明.

1. Q-tableau が standard tableau であることは定義から明らかである. P-tableau が semistandard であることは, semistandard tableau T と任意の i に対し, $T \leftarrow i$ が semistandard であることを示せば十分である. $T \leftarrow i$ が行に関して広義単調増加であることは明らかである. 列に関して狭義単調増加であることは, ある列で $m+1$ が押し出され, m が insert されたとき, その上にある成分が m ではないことを確認すれば良い. ある列で $m+1$ が押し出され, m が insert されたと仮定する. この m が insert された座標を (i, j) とすると, それが insert する前に $i-1$ 行では, $j-1$ 列より前で m があり, それが押し出されたことで i 行目で m が insert されたことになる. したがって, $(i, j-1)$ 成分は, m より大きく, $m+1$ 以下であるから, $m+1$ となる. よって, (i, j) で m が押し出されたことに矛盾する.
2. 逆写像が存在することを示せば良い.

$$(P, Q) = (P_k, Q_k) \rightarrow (P_{k-1}, Q_{k-1}) \rightarrow \cdots \rightarrow (\emptyset, \emptyset)$$

を以下のようにして, m 番目から $m-1$ 番目を構成する.

- (1) (i, j) を Q_m 内で m の成分がある座標とし, Q_m から m を取り除いた tableau を Q_{m-1} とする. x を P_m の (i, j) 成分の値, R を P_m の $i-1$ 行とする.
- (2) R が P_m の 0 行でないとき,
 - (2a) y を x より小さい元 R の元の中で一番右側にある元とし, R 上で y を x に置き換える.
 - (2b) x の値を更新して x の値を y とし, R を 1 行上の行とする.
- (3) x を P_m の 1 行目から取り除き, これを Q_{m-1} とする. この x を i_m とする. この操作でできた $w = i_1 i_2 \cdots i_k$ を (P, Q) からの値とすると, この対応が逆写像になる.

3. 明らかである.

□

2.3 Knuth 同値と P-同値

この節では, P-tableau に着目する. 2つの word の P-tableau が一致するときの word の関係性を述べたのが Knuth 関係である.

定義 2.6. w_1, w_2 を word とする.

1. w_1 が w_2 と Knuth 関係であるとは,

$$w_1 = \dots bca\dots, \quad w_2 = \dots bac\dots \quad (a < b \leq c)$$

または

$$w_1 = \dots acb\dots, \quad w_2 = \dots cab\dots \quad (a \leq b < c)$$

であるとき (または w_1, w_2 が逆のとき) をいう.

(ただし, ... 部分は w_1 と w_2 が一致していることを意味する.)

2. w_1 が有限回の Knuth 関係による置き換えを適用することで w_2 ができるとき, w_1 と w_2 は Knuth 同値であるという. このとき, $w_1 \equiv_K w_2$ で表す.

例. $w = 2132$ とする.

$$2132 \equiv_K 2312 \equiv_K 3212 \equiv_K 3122$$

である.

定義 2.7. w_1, w_2 を word とする. $P(w_1) = P(w_2)$ であるとき, w_1, w_2 は P-同値であるといい, $w_1 \equiv_P w_2$ で表す.

例. $w_1 = 2132, w_2 = 3122$ とする.

$$P(w_1) = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array} = P(w_2)$$

であるから, $w_1 \equiv_P w_2$ である.

定理 2.2 ([4, 定理 3.4.3]). w_1, w_2 を word とする. $w_1 \equiv_K w_2$ であることと $w_1 \equiv_P w_2$ であることは必要十分条件である.

証明. $w_1 = \dots bca\dots$, $w_2 = \dots bac\dots(a < b \leq c)$ とする. T を b の手前までの元を insert してできた tableau とする. このとき,

$$T \leftarrow b \leftarrow c \leftarrow a = T \leftarrow b \leftarrow a \leftarrow c$$

を示せば良い. T の行の数に関する帰納法で示す. $T = \emptyset$ のとき, 上記の insert でできる tableau はともに

a	c
b	

である.

次に, T を 1 行以上からなる tableau する. $T \leftarrow b$ を考え, b が T の 1 行目の m 列にある b' で入れ替わるとする. $T \leftarrow b$ に a を insert することを考えると, $a < b$ であるから, a は 1 行目の m 以下の列に入る. このとき, 押し出された元を a' とすると, $a' < b'$ である. $T \leftarrow b \leftarrow a$ に c を insert すると, $c \geq b$ であるから, 1 行目の $m+1$ 以上の列に入る. このとき, 押し出された元を c' とすると, $c' \geq b'$ である. $T \leftarrow b \leftarrow c \leftarrow a$ についても考えると, 同様のことが起きる. よって, $T \leftarrow b \leftarrow c \leftarrow a$ と $T \leftarrow b \leftarrow a \leftarrow c$ の 1 行目は一致することが分かる. T' を T の 1 行目を取り除いてできる tableau とすると,

$$T' \leftarrow b' \leftarrow c' \leftarrow a' = T' \leftarrow b' \leftarrow a' \leftarrow c'$$

を示せば良いことが分かるが, T' の行が T の行より 1 つ小さいことと帰納法から従う.

また, $w_1 = \dots acb\dots$, $w_2 = \dots cab\dots(a \leq b < c)$ のときについても同様である. 以上から, $w_1 \equiv_K w_2$ ならば $w_1 \equiv_P w_2$ が成り立つことが言えた.

次に, この逆を示す. 任意の word に対して,

$$w \equiv_K \pi_{P(w)}$$

を示せば十分である. これを利用すると, $w_1 \equiv_P w_2$ であるならば,

$$w_1 \equiv_K \pi_{P(w_1)} = \pi_{P(w_2)} \equiv_K w_2$$

と示せるからである.

w の元の数に関する帰納法で示す. w の最後の元を x , w から最後の元を取り除いた word を w' とする. 即ち, $w = w'x$ である. w' の元数は w の元の数より 1 つ小さいから, 帰納法の仮定により, $w' \equiv_K \pi_{P(w')}$ である. $P(w')$ の行を R_1, \dots, R_l , $R_1 = p_1 \dots p_m$ とする. $P(w')$ に x を insert したとき, 1 行目の j 列に入るとする. こ

のとき,

$$\begin{aligned}
\pi_{P(w)} &= \pi_{P(w')}x \\
&= R_l \cdots R_2 p_1 \cdots p_m x \\
&\equiv_K R_l \cdots R_2 p_1 \cdots p_{m-1} x p_m \\
&\equiv_K \cdots \\
&\equiv_K R_l \cdots R_2 p_1 \cdots p_j x p_{j+1} \cdots p_m \\
&\equiv_K R_l \cdots R_2 p_1 \cdots p_j p_{j-1} x p_{j+1} \cdots p_m \\
&\equiv_K R_l \cdots R_2 p_j p_1 \cdots p_{j-1} x p_{j+1} \cdots p_m
\end{aligned}$$

となる. 末尾の $p_1 \cdots p_{j-1} x p_{j+1} \cdots p_m$ は $P(w') \leftarrow x$ の 1 行目に一致する. 先頭の $R_l \cdots R_2 p_j$ の部分は, $P(w') \leftarrow x$ の 1 行目で押し出された p_j が 2 行目に insert される操作に対応しており, 1 行目の時と同様の方法を考えることができる. これを 2 行目以降続けていくことで最終的に, $P(w)$ の row word が得られる. \square

3 Kashiwara crystal

Kashiwara crystal はリー群の表現を反映する組合せ的構造である. 1990 年頃に柏原正樹によって, 量子群の加群が crystal 基底という特別な基底を持つことが示された. また, RSK 対応などの tableau の組合せ論における研究も crystal の枠組みで再解釈することが可能である. 特に, A 型の crystal は semistandard tableau と密接に結びついており, crystal 上の作用素が tableau に特定の操作を施す形で定義される. このように, Kashiwara crystal は量子群の表現論と組合せ論を結びつける重要な橋渡しとなっている.

この節では, Kashiwara crystal の定義に必要な鏡映, weight lattice, ルート系を最初に紹介する. その後, crystal を定義し, tableau の crystal を考える際に必要な概念である crystal 準同型とテンソル積を定義する. 例では, semistandard tableau と密接に結びついている A 型の crystal を中心に紹介する.

以下, V をユークリッド空間とする. すなわち, 内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を備えた実ベクトル空間とする. 例で使用するユークリッド空間は, すべて標準的な内積により定義されるものとする. また, $e_i \in \mathbb{R}^r$ は第 i 成分が 1 で, それ以外の成分が 0 である標準基底ベクトルを表す.

3.1 鏡映, weight lattice, ルート系

Kashiwara crystal の定義に必要な概念である鏡映, weight lattice, ルート系について説明する.

鏡映とは、ベクトルをある超平面に対して対称に反転させる操作のことである。

定義 3.1. $0 \neq \alpha \in V$ の鏡映 $r_\alpha : V \rightarrow V$ を

$$r_\alpha(x) = x - \langle x, \alpha^\vee \rangle \quad \left(\text{ただし, } \alpha^\vee = \frac{2\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \right)$$

とする。

例. $V = \mathbb{R}^3$ とし $\alpha = (1, 0, -1)$ を考える。

このとき, α^\vee は次のように計算される。

$$\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = \frac{2(1, 0, -1)}{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = (1, 0, -1).$$

次に内積 $\langle x, \alpha^\vee \rangle$ を計算すると,

$$\langle x, \alpha^\vee \rangle = \langle (x_1, x_2, x_3), (1, 0, -1) \rangle = x_1 - x_3.$$

よって, 任意の点 $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ に対する鏡映 $r_\alpha(x)$ は次のように表される。

$$\begin{aligned} r_\alpha(x) &= x - \langle x, \alpha^\vee \rangle \alpha \\ &= (x_1, x_2, x_3) - (x_1 - x_3)(1, 0, -1) \\ &= (x_1 - (x_1 - x_3), x_2, x_3 + (x_1 - x_3)) \\ &= (x_3, x_2, x_1). \end{aligned}$$

例えば, $r_\alpha(e_1) = e_3, r_\alpha(e_2) = e_2, r_\alpha(e_3) = e_1$ である。

一般に鏡映 r_α に対し,

$$r_\alpha(\alpha) = \alpha - \langle \alpha, \alpha^\vee \rangle \alpha = -\alpha$$

となる。また, x が α に直交するとき,

$$r_\alpha(x) = x - \langle x, \alpha^\vee \rangle \alpha = x$$

となる。このような α と直交する空間のことを α に垂直な超平面という。そのため, 鏡映とはベクトルをある超平面に対して対称に反転させる操作と言えるのである。

次に, ルート系を定義する。ルート系は, 鏡映による対称性を持つベクトルの集合である。

定義 3.2. V 上のルート系 Φ を以下を満たす有限集合とする。

1. $0 \notin \Phi, \Phi \neq \emptyset$

2. $r_\alpha(\Phi) = \Phi$ ($\alpha \in \Phi$)
3. $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$ ($\alpha, \beta \in \Phi$)
4. $\beta \in \Phi$ が $\alpha \in \Phi$ のスカラー倍であるならば, $\beta = \pm\alpha$ である.

このとき, Φ の元をルートという. さらに, $\Phi^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \Phi\}$ の元をコルートという.

例.

1. $V = \mathbb{R}^3$ とする. $\Phi = \{(\pm 1, 0, 0)\}$ はルート系である.
2. $V = \mathbb{R}^2$ とする. $\Phi = \{(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})\}$ はルート系である. このとき, $\Phi^\vee = \{(\pm \sqrt{2}, \pm \sqrt{2})\}$ である.

次の A 型のルート系の例は重要である.

例. $V = \mathbb{R}^{r+1}$ とする. ルート系を $\Phi = \{e_i - e_j \mid i \neq j\}$ とし, $\Phi^+ = \{e_i - e_j \mid i < j\}$ とする. この Φ を A_r 型の $GL(r+1)$ ルート系という.

ルート系を構成する最も基本的なベクトルの集まりを表す概念として, 単純ルートと呼ばれるものがある.

定義 3.3. Φ と交わらない原点を通る超平面を固定する.

1. この超平面に関して 1 つの側にあるルートを正ルート, もう 1 つの側にあるルートを負ルートとよぶ.
2. 正ルート全体を Φ^+ , 負ルート全体を Φ^- で表す.
3. $\alpha \in \Phi^+$ が単純であるとは, α が他の正ルートの和で表せないときをいう.

例. $V = \mathbb{R}^2$ とする. ルート系を $\Phi = \{(\pm \sqrt{2}, 0), (0, \pm \sqrt{2}), (\pm \sqrt{2}, \pm \sqrt{2})\}$ と定義する. 例えば, 正ルートと負ルートに分けると以下ようになる.

$$\begin{aligned}\Phi^+ &= \{(\sqrt{2}, 0), (0, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})\}, \\ \Phi^- &= \{(-\sqrt{2}, 0), (0, -\sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})\}.\end{aligned}$$

このとき, 単純正ルート全体としては以下のように取ることができる.

$$\{(\sqrt{2}, 0), (0, \sqrt{2})\} \quad \text{または} \quad \{(\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})\} \quad \text{など.}$$

注意. 上記の例のように正ルートや単純な正ルートの定め方は, 一意に定まらない. 一つ固定して考える.

以降, ルート系 Φ の単純正ルートを α_i , その添え字集合を I で表すことにする.

例. A_r 型 $GL(r+1)$ ルート系の場合, 単純な正ルート全体は $\{\alpha_i = e_i - e_{i+1} \mid 1 \leq i \leq r\}$ となる.

最後に, weight lattice を定義する. lattice とは, 自由 \mathbb{Z} 加群のことである. weight lattice とは, ルート系を基にした広がりを持つ空間である.

定義 3.4. Φ を V におけるルート系とする.

weight lattice とは, V を生成する lattice Λ で以下を満たすときをいう.

1. $\Phi \subset \Lambda$
2. 任意の $\lambda \in \Lambda, \alpha \in \Phi$ に対して, $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$

このとき, Λ の元を weight という.

最後に A_r 型の $GL(r+1)$ ルート系に対応する weight lattice を説明する.

例. A_r 型 $GL(r+1)$ ルート系を考える. このとき weight lattice を $\Lambda = \mathbb{Z}^{r+1}$ とする. この Λ を $GL(r+1)$ weight lattice という.

3.2 Kashiwara crystal の定義

本論文では, 有限なタイプの Kashiwara crystal を考える. 一般の (有限なタイプと限らない) Kashiwara crystal は, 以下の定義において ϵ_i, ϕ_i の値に $-\infty$ を入れて考えるものであるが, これについては取り扱わない.

定義 3.5. ルート系 Φ , その単純な正ルートの添字集合 I と weight lattice Λ を固定する. すなわち, 単純な正ルートは α_i ($i \in I$) と表せるとする. タイプ Φ の Kashiwara crystal とは, 空でない集合 \mathcal{B} で, 次の (A1) から (A5) をみたす写像

1. $e_i, f_i : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \sqcup \{0\}$
2. $\epsilon_i, \phi_i : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{Z}$
3. $\text{wt} : \mathcal{B} \rightarrow \Lambda$

が与えられたものである. 任意の $x, y \in \mathcal{B}$ とする.

(A1) $f_i(x) = y$ であることと $e_i(y) = x$ であることは必要十分条件である.

(A2) $f_i(x) \neq 0$ のとき, $\text{wt}(x) = \text{wt}(f_i(x)) + \alpha_i$

(A3) $f_i(x) \neq 0$ のとき, $\phi_i(x) = \phi_i(f_i(x)) + 1$

(A4) $f_i(x) \neq 0$ のとき, $\epsilon(x) = \epsilon(f_i(x)) - 1$

(A5) $\phi_i(x) = \langle \text{wt}(x), \alpha_i^\vee \rangle + \epsilon_i(x)$

定義 3.6. 上記の定義において,

1. 写像 wt を weight 写像という.
2. e_i, f_i を Kashiwara (または crystal) 作用素という.

また, 以下が成り立つとき, \mathcal{B} は seminormal であるという.

$$\phi_i(x) = \max\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid f_i^k(x) \neq 0\}, \quad \epsilon_i(x) = \max\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid e_i^k(x) \neq 0\}.$$

このとき, 特に $\phi_i(x)$ および $\epsilon_i(x)$ は非負の値をもつことに注意する.

本論文で扱う crystal は seminormal である. seminormal な crystal は各元 $b \in \mathcal{B}$ に対して, $\varphi_i(b)$ は f_i を適用して遷移可能な回数, $\epsilon_i(b)$ は e_i を適用して遷移可能な回数であることを意味している. 以降, 単に crystal と言えば, Kashiwara crystal を指すものとする.

crystal を図式的に扱う方法として次の crystal graph がある.

定義 3.7.

1. \mathcal{B} を crystal とする. \mathcal{B} を頂点集合とし, $f_i(x) = y$ のときラベル i を持つ有向辺 $x \xrightarrow{i} y$ を引くことによって, 有向グラフを対応させることができる. これを \mathcal{B} の crystal graph という.
2. \mathcal{B} 上に, x と y が $y = f_i(x)$ または $x = e_i(y)$ によって生成される同値関係を満たすとき, $x \sim y$ と定める.

この同値関係に基づき, crystal \mathcal{B} の連結性を定義することができる. 最後に, 代表的な crystal の例を与える.

例. タイプ A_r には, 次の crystal graph を持つ crystal がある.

$$\boxed{1} \xrightarrow{1} \boxed{2} \xrightarrow{2} \cdots \xrightarrow{r} \boxed{r+1}$$

$GL(r+1)$ weight lattice を使い, $\text{wt}(\boxed{i}) = e_i$ と定める. さらに, seminormal であるように φ_i, ϵ_i を定める. これを $\mathcal{B}_{(1)}$ や \mathbb{B} で表す.

3.3 Kashiwara crystal の準同型とテンソル積

Kashiwara crystal の準同型とテンソル積について定義する．準同型は, 2 つの crystal の関係性を理解するために役に立つ．

定義 3.8. B と C をルート系 Φ , 添字集合 I を持つ crystal とする．

写像 $\psi : B \rightarrow C \sqcup \{0\}$ が crystal 準同型であるとは, 次を満たすときをいう．

(H1) $b \in B$ かつ $\psi(b) \in C$ であるとき,

$$(H1a) \text{ wt}(\psi(b)) = \text{wt}(b)$$

$$(H1b) \varphi_i(\psi(b)) = \varphi_i(b) \quad \text{for all } i \in I$$

$$(H1c) \varepsilon_i(\psi(b)) = \varepsilon_i(b) \quad \text{for all } i \in I$$

(H2) $b, f_i b \in B$ かつ $\psi(b), \psi(f_i b) \in C$ であるとき, $\psi(f_i b) = f_i(\psi(b))$ である．

(H3) $b, e_i b \in B$ かつ $\psi(b), \psi(e_i b) \in C$ であるとき, $\psi(e_i b) = e_i(\psi(b))$ である．

定義 3.9. crystal 準同型 $\psi : B \rightarrow C \sqcup \{0\}$ が crystal 同型であるとは, 誘導される写像 $\psi : B \sqcup \{0\} \rightarrow C \sqcup \{0\}$ で $\psi(0) = 0$ を満たすものが全単射である場合をいう．

次にテンソル積を定義する．テンソル積を用いると, 複数の crystal を組み合わせることによって新たな crystal を作ることができる．

定義 3.10. B, C を同じルート系 Φ の crystal とする． $B \otimes C$ を次のように定める．

1. $B \otimes C$ を B と C の直積集合 $B \times C$ とする．その元 $(x, y) \in B \times C$ を $x \otimes y$ で表す．

2. $\text{wt}(x \otimes y) = \text{wt}(x) + \text{wt}(y)$ ．

$$3. f_i(x \otimes y) = \begin{cases} f_i(x) \otimes y & (\varphi_i(y) \leq \varepsilon_i(x) \text{ かつ } f_i(x) \neq 0 \text{ のとき}), \\ x \otimes f_i(y) & (\varphi_i(y) > \varepsilon_i(x) \text{ かつ } f_i(y) \neq 0 \text{ のとき}), \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

$$4. e_i(x \otimes y) = \begin{cases} e_i(x) \otimes y & (\varphi_i(y) < \varepsilon_i(x) \text{ かつ } e_i(x) \neq 0 \text{ のとき}), \\ x \otimes e_i(y) & (\varphi_i(y) \geq \varepsilon_i(x) \text{ かつ } e_i(y) \neq 0 \text{ のとき}), \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

5. $\varphi_i(x \otimes y) = \max(\varphi_i(x), \varphi_i(y) + \langle \text{wt}(x), \alpha_i^\vee \rangle)$ ．

6. $\varepsilon_i(x \otimes y) = \max(\varepsilon_i(y), \varepsilon_i(x) - \langle \text{wt}(y), \alpha_i^\vee \rangle)$ ．

注意. crystal の定義より, $\langle \text{wt}(x), \alpha_i^\vee \rangle = \varphi_i(x) - \varepsilon_i(x)$ であるから,

$$\varphi_i(x \otimes y) = \varphi_i(x) + \max(0, \varphi_i(y) - \varepsilon_i(x))$$

と書ける. また, $\varphi_i(y) \leq \varepsilon_i(x)$ の時, \max の中で第 1 成分が最大, $\varphi_i(y) > \varepsilon_i(x)$ の時, \max の中で第 2 成分が最大である. 同様に,

$$\varepsilon_i(x \otimes y) = \varepsilon_i(y) + \max(0, \varepsilon_i(x) - \varphi_i(y))$$

と書ける.

命題 3.1 ([4, 命題 2.29]). $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ は crystal である. さらに, \mathcal{B}, \mathcal{C} が seminormal な crystal であるならば, $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ も seminormal な crystal である.

証明. $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ は crystal であることは, crystal の定義 (A1) から (A5) を満たしていることを確認すれば良い.

(A1) $e_i(f_i(x \otimes y)) = x \otimes y$ を示す. $\varphi_i(y) \leq \varepsilon_i(x)$ とする. $f_i(x \otimes y) = f_i(x) \otimes y$ となる. このとき, $\varphi(y) < \varepsilon(x) + 1 = \varepsilon(f_i(x))$ であるから, $e_i(f_i(x \otimes y)) = e_i(f_i(x) \otimes y) = e_i(f_i(x)) \otimes y = x \otimes y$ となる. 次に, $\varphi_i(y) > \varepsilon_i(x)$ とする. $f_i(x \otimes y) = x \otimes f_i(y)$ となる. このとき, $\varphi_i(f_i(y)) = \varphi_i(f_i(y)) - 1 \geq \varepsilon_i(x)$ であるから, $e_i(f_i(x \otimes y)) = e_i(x \otimes f_i(y)) = x \otimes e_i(f_i(y)) = x \otimes y$ となる. 次に, $f_i(e_i(x \otimes y)) = x \otimes y$ を示す. この場合も同様に, $\varphi_i(y) < \varepsilon_i(x)$ と $\varphi_i(y) \geq \varepsilon_i(x)$ で場合分けをして示せば良い.

(A2) 定義より明らか.

(A3) $\varphi_i(y) \leq \varepsilon_i(x)$ とする. $\varphi_i(x \otimes y) = \varphi_i(x) + \max(0, \varphi_i(y) - \varepsilon_i(x)) = \varphi_i(x)$ である. また, $\varphi_i(f_i(x \otimes y)) = \varphi_i(f_i(x) \otimes y) = \varphi_i(f_i(x)) + \max(0, \varphi_i(y) - \varepsilon_i(f_i(x))) = \varphi_i(x) - 1 + \max(0, \varphi_i(y) - \varepsilon_i(x) - 1) = \varphi_i(x) - 1$ より, $\varphi_i(x \otimes y) = \varphi_i(f_i(x \otimes y)) + 1$ が成り立つ. $\varphi_i(y) > \varepsilon_i(x)$ とする. $\varphi_i(f_i(x \otimes y)) = \varphi_i(x \otimes f_i(y)) = \varphi_i(x) + \max(0, \varphi_i(f_i(y)) - \varepsilon_i(x)) = \varphi_i(x) + \max(0, \varphi_i(y) - 1 - \varepsilon_i(x)) = \varphi_i(x) + \varphi_i(y) - \varepsilon_i(x) - 1 = \varphi_i(x \otimes y) - 1$ となる.

(A4) (A3) と同様.

(A5) $\langle \text{wt}(x \otimes y), \alpha_i^\vee \rangle + \varepsilon_i(x \otimes y) = \langle \text{wt}(x), \alpha_i^\vee \rangle + \langle \text{wt}(y), \alpha_i^\vee \rangle + \varepsilon_i(y) + \max(0, \varepsilon_i(x) - \varphi_i(y)) = \varphi_i(x) + \max(0, \varphi_i(y) - \varepsilon_i(x)) = \varphi_i(x \otimes y)$

次に, \mathcal{B}, \mathcal{C} が seminormal のとき, $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ が seminormal であることを示す.

$\varphi_i(y) \leq \varepsilon_i(x)$ とする. $\varphi_i(y) \leq \varepsilon_i(x) < \varepsilon_i(f_i(x)) < \varepsilon_i(f_i^2(x)) < \dots$ であるから,

$f_i^{\varphi_i(x)}(x \otimes y) = f_i^{\varphi_i(x)}(x) \otimes y \neq 0$, $f_i^{\varphi_i(x)+1}(x \otimes y) = f_i^{\varphi_i(x)+1}(x) \otimes y = 0 \otimes y = 0$ となる。よって, $\varphi_i(x \otimes y) = \varphi_i(x) = \max\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid f_i^k(x \otimes y) \neq 0\}$ となる。

次に, $\varphi_i(y) > \varepsilon_i(x)$ とする。 $\varphi_i(y) > \varphi_i(f_i(y)) > \dots > \varphi_i(f_i^{\varphi_i(y)-\varepsilon_i(x)-1}(y)) > \varepsilon_i(x)$ であるから, $f_i^{\varphi_i(y)-\varepsilon_i(x)}(x \otimes y) = x \otimes f_i^{\varphi_i(y)-\varepsilon_i(x)}(y)$ である。一方, $\varepsilon_i(x) = \varphi_i(f_i^{\varphi_i(y)-\varepsilon_i(x)}(y)) > \varphi_i(f_i^{\varphi_i(y)-\varepsilon_i(x)+1}(y)) > \dots$ であるから, $f_i^{\varphi_i(y)-\varepsilon_i(x)+\varphi_i(x)}(x \otimes y) = f_i^{\varphi_i(x)} \otimes \varphi_i(f_i^{\varphi_i(y)-\varepsilon_i(x)}(y)) \neq 0$, $f_i^{\varphi_i(y)-\varepsilon_i(x)+\varphi_i(x)+1}(x \otimes y) = f_i^{\varphi_i(x)+1} \otimes \varphi_i(f_i^{\varphi_i(y)-\varepsilon_i(x)}(y)) = 0$ である。よって, $\varphi_i(x \otimes y) = \varphi_i(x) + \varphi_i(y) - \varepsilon_i(x) = \max\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid f_i^k(x \otimes y) \neq 0\}$ となる。 ε_i についても同様である。

よって, $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ が seminormal である。 \square

命題 3.2 ([4, 命題 2.32]). $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ を crystal とする。このとき, $(\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}) \otimes \mathcal{D}$ と $\mathcal{B} \otimes (\mathcal{C} \otimes \mathcal{D})$ は crystal 同型である。

証明. $x \in \mathcal{B}, y \in \mathcal{C}, z \in \mathcal{D}$ とする。 $(\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}) \otimes \mathcal{D}$ から $\mathcal{B} \otimes (\mathcal{C} \otimes \mathcal{D})$ への写像を $(x \otimes y) \otimes z$ から $x \otimes (y \otimes z)$ へ写すものとする。この写像が crystal 同型写像であることを示す。全単射であることは明らかだから, crystal 構造が保たれていることを確認する。 $(x \otimes y) \otimes z, x \otimes (y \otimes z)$ の weight はともに, $\text{wt}(x) + \text{wt}(y) + \text{wt}(z)$ である。

$$\begin{aligned} \varphi_i(((x \otimes y) \otimes z)) &= \max \varphi_i(x \otimes y), \varphi_i(z) + \langle \text{wt}(x \otimes y), \alpha_i^\vee \rangle \\ &= \max(\varphi_i(x), \varphi_i(y) + \langle \text{wt}(x), \alpha_i^\vee \rangle, \varphi_i(z) + \langle \text{wt}(x), \alpha_i^\vee \rangle + \langle \text{wt}(y), \alpha_i^\vee \rangle) \\ &= \max(\varphi_i(x), \varphi_i(y \otimes z) + \langle \text{wt}(x), \alpha_i^\vee \rangle) \\ &= \varphi_i((x \otimes (y \otimes z))) \end{aligned}$$

となる。第一成分が最大の時, $\varphi_i(y \otimes z) \leq \varphi_i(x) - \langle \text{wt}(x), \alpha_i^\vee \rangle = \varepsilon_i(x)$ より, $f_i(x \otimes (y \otimes z)) = f_i(x) \otimes y \otimes z$ である。また, $\varphi_i(z) > \varphi_i(x \otimes y) - \langle \text{wt}(x \otimes y), \alpha_i^\vee \rangle = \varepsilon_i(x)$, $\varphi_i(y) \geq \varepsilon_i(x)$ より, $f_i((x \otimes y) \otimes z) = f_i(x \otimes y) \otimes z = f_i(x) \otimes y \otimes z$ である。第 2, 3 成分が最大の時にも同様に, f_i は i 番目の成分に適用すれば良いことが分かる。

ε_i についても同様に考えると,

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(((x \otimes y) \otimes z)) &= \max(\varepsilon_i(z), \varepsilon_i(y) - \langle \text{wt}(z), \alpha_i^\vee \rangle, \varepsilon_i(x) - \langle \text{wt}(y), \alpha_i^\vee \rangle - \langle \text{wt}(z), \alpha_i^\vee \rangle) \\ &= \varepsilon_i((x \otimes (y \otimes z))) \end{aligned}$$

同様に第 i 成分が最大の時, e_i は i 番目の成分に適用する。

以上から, この 2 つの crystal は同型であることが分かる。 \square

この命題から, $(\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}) \otimes \mathcal{D}$ や $\mathcal{B} \otimes (\mathcal{C} \otimes \mathcal{D})$ を単に $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C} \otimes \mathcal{D}$ と表すことができる。この命題と帰納法を用いて次が言える。

命題 3.3 ([3, 補題 2.33]). $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k$ を crystal とし, $x_i \in \mathcal{B}_i$ とする.

$$\varphi_i(x_1 \otimes \dots \otimes x_k) = \max_{1 \leq j \leq k} \left(\varphi_i(x_j) + \sum_{1 \leq h \leq j-1} \langle \text{wt}(x_h), \alpha_i^\vee \rangle \right)$$

である. j を上記の最大値を達成する j のうちで最小のものとする,

$$f_i(x_1 \otimes \dots \otimes x_k) = x_1 \otimes \dots \otimes f_i(x_j) \otimes \dots \otimes x_k,$$

が成り立つ.

また,

$$\varepsilon_i(x_1 \otimes \dots \otimes x_k) = \max_{1 \leq j \leq k} \left(\varepsilon_i(x_j) - \sum_{j < h \leq k} \langle \text{wt}(x_h), \alpha_i^\vee \rangle \right)$$

である. j を上記の最大値を達成する j のうちで最小のものとする,

$$e_i(x_1 \otimes \dots \otimes x_k) = x_1 \otimes \dots \otimes e_i(x_j) \otimes \dots \otimes x_k$$

が成り立つ.

3.4 signature rule

この節では A_r 型 $GL(r+1)$ crystal $\mathbb{B}^{\otimes k}$ の元に f_i を適用した際の変化について説明する.

$x = \boxed{x_1} \otimes \dots \otimes \boxed{x_k} \in \mathbb{B}^{\otimes k}$ とする. φ_i, ε_i は以下のように定義される.

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = \boxed{i} \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad \varepsilon_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = \boxed{i+1} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

まず, x_1, \dots, x_k の中で, すべての i が $i+1$ より左側にある場合を考える. この場合, f_i を適用すると, 右端にある i が $i+1$ に変わる.

次に, そうでない場合を考える. この場合, $\dots i+1 \dots i \dots$ を 1 つのペアとして扱う.

$$(\varphi_i - \varepsilon_i) \left(\boxed{i+1} - \boxed{i} \right) = 0$$

が成り立つから, $i+1$ はその後にある i をペアとして括弧で囲み, それらのペアを無視して簡略化する. 全てのペアを括弧で括り, 残りの括弧がついていない部分を見ると,

1. i がすべて $i+1$ より左側にある場合
2. i が 1 つも含まれない場合

のいずれかになる. 前者の場合, 括弧がついていない右端にある i が $i+1$ になる. 後者の場合, $f_i(x) = 0$ である.

例

$$x = \boxed{i} \otimes \boxed{i} \otimes \boxed{i+1} \otimes \boxed{i+2} \otimes \overbrace{\boxed{i+1} \otimes \boxed{i}} \otimes \boxed{i}$$

を考える.

この場合, $i+1$ はその後にある i をペアとして括弧で囲み, それらのペアを無視して以下のように簡略化できる.

$$\boxed{i} \otimes \boxed{i} \otimes \boxed{i+2}$$

よって,

$$f_i(x) = \boxed{i} \otimes \boxed{i+1} \otimes \boxed{i+1} \otimes \boxed{i+2} \otimes \boxed{i+1} \otimes \boxed{i} \otimes \boxed{i}$$

となる.

4 crystal と RSK 対応の関係

結びとして, この節では Kashiwara crystal と Robinson-Schensted-Knuth (RSK) 対応の関係について述べる. まず, semistandard tableau から構成される crystal を紹介する. この crystal は, A_r 型の crystal $\mathbb{B}^{\otimes k}$ の連結成分に対応している. 次に, $\mathbb{B}^{\otimes k}$ をこれら tableau の crystal を用いて直和分解できることを示す.

この議論では, weight が大きな役割を果たし, 特に最高 weight 元と呼ばれる crystal 内の元が重要である. 最高 weight 元は, それぞれの連結な crystal の特徴を決定するものである.

イントロダクションで述べたように, $x \in \mathbb{B}^{\otimes k}$ の元に対して, 対応する P-tableau $P(x)$ の形を通じて, x がどの連結な tableau の crystal に属するかを判定することが可能である. さらに, Q-tableau は同じ連結な tableau の crystal に属する元を識別するために重要な役割を果たしている.

このように, P-tableau と Q-tableau が crystal 構造の連結成分の分類および識別において重要な手段であることを紹介する.

\mathbb{B} を A_r 型の $GL(r+1)$ crystal とし, $n = r+1$ とする. λ を分割とし, \mathcal{B}_λ を $[n]$ 内の元を成分に持つ形 λ の semistandard tableau 全体とする.

4.1 tableau の crystal と最高 weight 元

1 行からなる tableau の crystal 構造をまず定義する.

例. $\mathcal{B}_{(k)}$ の元を

$$R = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline j_1 & j_2 & \cdots & j_k \\ \hline \end{array}$$

(ただし, $j_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_k$, $j_1, j_2, \dots, j_k \in [n]$) で表す.

- weight を

$$\text{wt}(R) = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$$

(ただし, μ_i は R に現れる i の個数) と定める.

- φ_i と ε_i を $\varphi_i(R)$ を j_1, j_2, \dots, j_k 上の i の個数, $\varepsilon_i(R)$ を j_1, j_2, \dots, j_k 上の $i+1$ の個数とする.
- f_i, e_i を

$$f_i(R) = \begin{cases} R \text{ の右端の } i \text{ を } i+1 \text{ に変えた tableau} & (\varphi_i(R) > 0) \\ 0 & (\varphi_i(R) = 0) \end{cases}$$

$$e_i(R) = \begin{cases} R \text{ の左端の } i+1 \text{ を } i \text{ に変えた tableau} & (\varepsilon_i(R) > 0) \\ 0 & (\varepsilon_i(R) = 0) \end{cases}$$

とする.

この定義により, $\mathcal{B}_{(k)}$ は seminormal な crystal となる.

次に \mathcal{B}_λ に crystal 構造を定める.

例. $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ とする. $T \in \mathcal{B}_\lambda$ とし, T の各行を T_1, T_2, \dots, T_l とする.

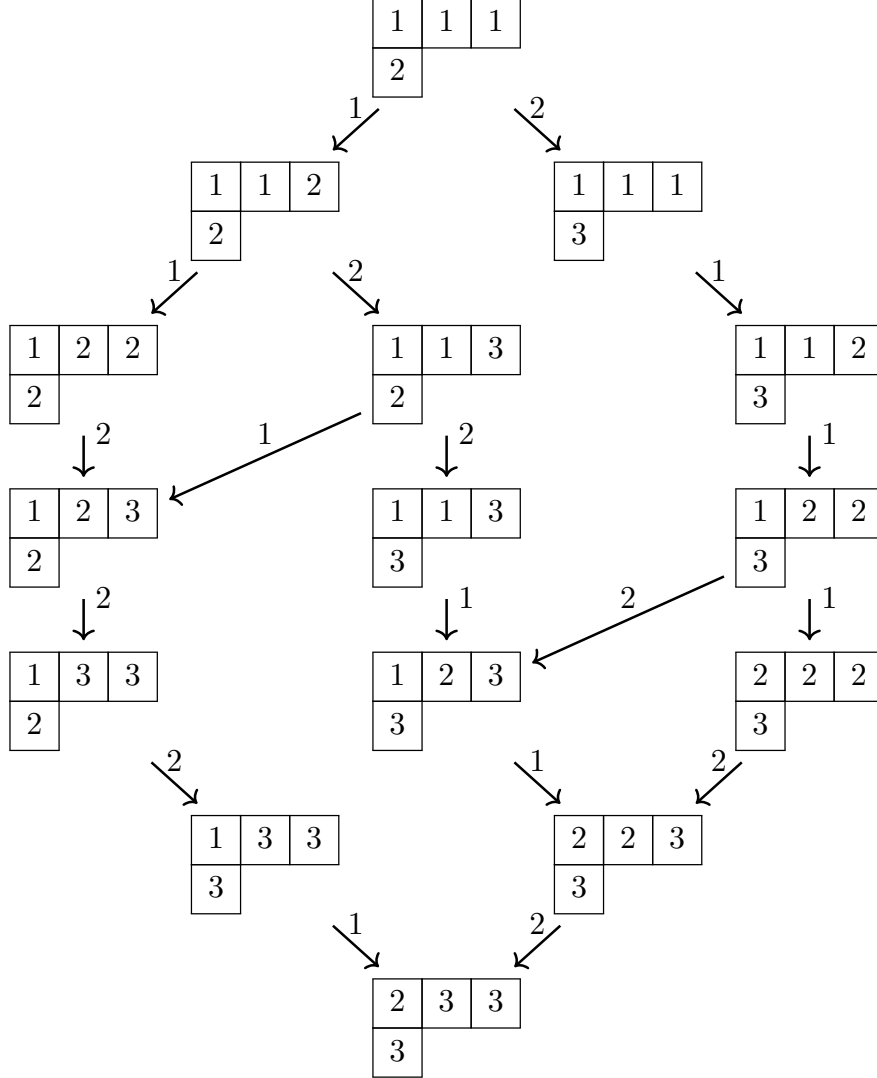
次のような写像を考える.

$$T \mapsto T_l \otimes T_{l-1} \otimes \cdots \otimes T_1 \in \mathcal{B}_{(\lambda_l)} \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}_{(\lambda_1)}.$$

この写像は単射である. したがって, \mathcal{B}_λ の元 T と対応する $\mathcal{B}_{(\lambda_l)} \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}_{(\lambda_1)}$ の元 $T_l \otimes \cdots \otimes T_1$ を同一視する.

この構造を用いることで, \mathcal{B}_λ に crystal 構造を定める. これらの crystal のことを tableau の crystal と総称する.

例. $n = 3$ とする. このとき, $\mathcal{B}_{(3,1)}$ の crystal は以下ようになる.



次に, \mathcal{B}_λ が $\mathbb{B}^{\otimes k}$ の連結成分であることを示すために以下の写像を用意する.

定義 4.1. 写像 $RR : \mathcal{B}_\lambda \rightarrow \mathbb{B}^{\otimes k}$ を次のように定める. $T \in \mathcal{B}_\lambda$ の row word が

$$\pi_T = i_1 i_2 \cdots i_k$$

であるとき

$$RR(T) = \boxed{i_1} \otimes \boxed{i_2} \otimes \cdots \otimes \boxed{i_k}$$

とする. これを row reading という.

本論文では扱わないが, \mathcal{B}_λ から $\mathbb{B}^{\otimes k}$ への写像の定め方はこの row reading 以外に column reading と呼ばれるものなどもある.

例. $T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 3 & 3 & 6 \\ \hline 3 & 4 & 7 & & \\ \hline 5 & & & & \\ \hline \end{array}$ とする. このとき, $\pi_T = 534723336$ である. よって,

$$RR(T) = \boxed{5} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{4} \otimes \boxed{7} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{6}$$

である.

命題 4.1 ([3, 命題 3.1]). 写像 RR は \mathcal{B}_λ から $\mathbb{B}^{\otimes k}$ への準同型である.

証明. 準同型の定義 (H1) から (H3) を満たすことを確認すれば良い.

(H1) (H1a) から (H1c) が成り立つことを確認する.

(H1a) 明らか.

(H1b) \mathcal{B}_λ と $\mathbb{B}^{\otimes k}$ が seminormal であることと後で示す (H2) から分かる.

(H1c) \mathcal{B}_λ と $\mathbb{B}^{\otimes k}$ が seminormal であることと後で示す (H3) から分かる.

(H2) $T \in \mathcal{B}_\lambda$ とし, T の行を T_1, T_2, \dots, T_l とする. このとき, $RR(T) = RR(T_l) \otimes RR(T_{l-1}) \otimes \dots \otimes RR(T_1)$ と表せる. f_i を適応すると,

$$f_i(RR(T)) = RR(T_l) \otimes RR(T_{l-1}) \otimes \dots \otimes f_i(RR(T_j)) \otimes \dots \otimes RR(T_1)$$

(ただし, j は, $\sum_{h \geq j} \varphi_i(RR(T_h)) - \sum_{h > j} \varepsilon_i(RR(T_h))$ を満たす l 以下の最大の正整数.) となる. T' を $T_1, T_2, \dots, f_i(T_j), \dots, T_l$ を行に持つ tableau とする. T' が semistandard であれば, $f_i(RR(T)) = RR(T') = RR(f_i(T))$ であることを導ける. T' が semistandard でないとすると, T_j で i が $i+1$ に変わった成分の下にある成分が $i+1$ である. T は seminormal であるから, j 行目の i がある成分の下にある $j+1$ 行目の成分は $i+1$ になる. よって, $\varepsilon_i(T_{j+1}) \geq \varphi_i(T_j)$ である. これは, j が $\sum_{h \geq j} \varphi_i(RR(T_h)) - \sum_{h > j} \varepsilon_i(RR(T_h))$ が最大となるときであることに矛盾する.

(H3) (H2) と同様に示せば良い.

□

連結な crystal の特徴を探るため, 次を定義する.

定義 4.2. 任意の $i \in I$ で $e_i(u) = 0$ となる元 $u \in \mathcal{B}$ を最高 weight 元という. このとき, $\text{wt}(u)$ を最高 weight という.

\mathcal{B}_λ や $\mathbb{B}^{\otimes k}$ は有限集合より, 最高 weight 元が存在することが分かる.

例. \mathbb{B} の最高 weight 元は $\boxed{1}$, 最高 weight は 1 である.

定義 4.3. i 行の成分が全て i である形 λ の semistandard tableau を u_λ で表す.

例. $\lambda = (4, 2)$ であるとき, $u_\lambda =$

1	1	1	1
2	2		

 である.

最高 weight 元概念を用いて, \mathcal{B}_λ が連結な crystal であることを示す.

最高 weight 元が一意的であればその crystal の任意の元は最高 weight 元に f_i を有限回適応することで表せることができる. しかし, 最高 weight 元が一意的でなければ, 最高 weight 元は他の最高 weight 元に Kashiwara 作用素を有限回適応することで表せることができないため, 連結ではないことが分かる. これを利用して, crystal の連結性を示していくのである.

定理 4.2 ([3, 定理 3.2]). λ を長さは n 以下の k の分割とする. このとき, $RR(\mathcal{B}_\lambda)$ は, $\mathbb{B}^{\otimes k}$ の連結成分になる. さらに, 一意的な最高 weight 元 $RR(u_\lambda)$ を持つ.

証明. 命題 3 より, $RR(u_\lambda)$ が一意的な最高 weight 元であることを示せば, $\mathbb{B}^{\otimes k}$ の連結成分であることが分かる. $T \in \mathcal{B}_\lambda$ を最高 weight 元とし, T の行を T_1, T_2, \dots, T_l とする. $e_i(RR(T)) = 0$ より, $\varepsilon_i(RR(T)) = 0$ である. よって,

$$\varepsilon_i(T_1) = 0, \quad \varepsilon_i(T_1) + \varepsilon_i(T_2) - \varphi_i(T_1) \leq 0, \quad \dots$$

である. $\varepsilon_i(T_1) = 0$ より, T_1 の成分は 1 のみであることが分かる. $\varepsilon_i(T_2) - \varphi_i(T_1) \leq 0$ より, $i > 1$ であるならば, $\varepsilon_i(T_2) = 0$ より, T_2 の成分は 1, 2 である. T は seminormal より, T_2 の成分は 2 のみである. $T_3, T_4 \dots$ も同様に考えれば, $T = u_\lambda$ であることが分かる. □

次に, $\mathbb{B}^{\otimes k}$ を連結な crystal の直和分解をすると, どうなるかを議論するために, いくつかの補題を用意する. crystal \mathcal{B} の subcrystal とは, \mathcal{B} の部分集合で crystal であるものを指す.

補題 4.3 ([3, 命題 2.16]). $\mathbb{B}^{\otimes k}$ の subcrystal の最高 weight は, 分割である.

証明. \mathcal{B} を $\mathbb{B}^{\otimes k}$ の subcrystal とする. u を \mathcal{B} の最高 weight 元とする. このとき, $\varepsilon_i(u) = 0$ より, $\langle \text{wt}(u), \alpha_i^\vee \rangle = \varphi_i(u) \geq 0$ である. $\text{wt}(u) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ とすると, $0 \leq \langle \text{wt}(u), \alpha_i^\vee \rangle = \lambda_i - \lambda_{i+1}$ である. よって, $\lambda_i \leq \lambda_{i+1}$ と i の任意性から, $\text{wt}(u)$ は分割である. □

補題 4.4. [3, 定理 4.11] $x \in \mathbb{B}^{\otimes k}, i \neq j, f_i x, f_j x \neq 0$ とする. このとき,

1. $|i - j| \neq 1$ のとき,

$$f_i f_j x = f_j f_i x \neq 0$$

が成り立つ. このとき,

$$\varphi_j(f_i x) = \varphi_j(x), \quad \varphi_i(f_j x) = \varphi_i(x)$$

が成り立つ.

2. $|i - j| = 1$ のとき,

$$f_i f_j x = f_j f_i x \neq 0$$

または

$$f_i f_j^2 f_i x = f_j f_i^2 f_j x \neq 0$$

のいずれかが成り立つ. 前者が成り立つとき,

$$\varphi_j(f_i x) = \varphi_j(x), \quad \varphi_i(f_j x) = \varphi_i(x) + 1$$

または

$$\varphi_j(f_i x) + 1 = \varphi_j(x), \quad \varphi_i(f_j x) = \varphi_i(x)$$

が成り立つ. 後者が成り立つとき,

$$\varphi_j(f_i x) + 1 = \varphi_j(x), \quad \varphi_i(f_j x) = \varphi_i(x) + 1$$

が成り立つ.

証明. signature rule を利用して考える.

$|i - j| \neq 1$ とする. $i, i+1, j, j+1$ の全ての値が異なるから, $f_i x$ と x の $j, j+1$ のあり方は変わらない. よって, $f_j f_i x$ と $f_j x$ の $j, j+1$ のあり方は変わらない. よって, $f_j f_i x$ と $f_i f_j x$ の $j, j+1$ のあり方は変わらない. 同様に, $f_j f_i x$ と $f_i f_j x$ の $i, i+1$ のあり方は変わらない. よって, $f_i f_j x = f_j f_i x$ である. また, $\varphi_j(f_i x) = \varphi_j(x), \varphi_i(f_j x) = \varphi_i(x)$ が成り立つ.

次に $j = i + 1$ とする. ($i = j - 1$ も同様に示せる.) $f_i x$ に f_{i+1} を適応すると, $f_i x$ で i が $i + 1$ に変わった場所 t_1 で $i + 1$ が $i + 2$ になる可能性がある. そうであるとき, $f_{i+1} f_i x$ に f_{i+1} を適応すると, t より前で $i + 1$ が $i + 2$ になる. この場所を t_2 とする. この $f_{i+1}^2 f_i x$ に f_i を適応すると, t_2 にあった $i + 1$ の括弧のペアだった i が括弧がなくなる. したがって, t_2 から t_1 の間に i が少なくとも 1 つはあり, その間で i が $i + 1$ にな

る. このとき, $\varphi_j(f_i x) = \varphi_j(x) + 1$ である. この状況の下, 右辺を考える. x に f_j を適応すると, t_2 で $i+1$ が $i+2$ になる. $f_j x$ に f_i を適応すると, t_1 で i が $i+1$ になる. $f_i f_j x$ に f_i を適応すると, t_2 から t_1 の間にある i が $i+1$ になる. $f_i^2 f_j x$ に f_j を適応すると, t_1 で $i+1$ が $i+2$ となる. したがって, $f_i f_j^2 f_i x = f_j f_i^2 f_j x$ となる. ($f_i f_j x$ に f_j を適応すると, t_2 にある $i+2$ と t にある $i+1$ で括弧がくくれる可能性があり, t_1 で $i+2$ にならない可能性がある.) このとき, $\varphi_i(f_j x) = \varphi_i(x) + 1$ である.

他の場合として, $f_j x$ に f_i を適応すると, x から $f_j x$ で変わった $i+1$ のペアだった i が $i+1$ になる可能性がある. この場合も同様に考えれば良い.

それ以外の場合は, $f_i f_j x = f_j f_i x$ となる. この場合, $f_j x$ で $i+1$ から $i+2$ に変わった場所は, $i+1$ と i のペアで括弧がくくっていない場所である. 実際, 括弧がくくってあるとすると, この括弧より右側に括弧がくくっていない i があるときは, 最初に述べたケースになる. 右側に括弧がくくっていない i がないときは, その次に述べたケースになるからである. よって, $\varphi_i(f_j x) = \varphi_i(x)$ である. $\varphi_j(f_i x) = \varphi_j(x) + 1$ であることは $f_i x$ で $i+1$ が一つ増えたことから言える. \square

上記と同様に考えることで, e_i についても同様のことが言える.

補題 4.5. [3, 定理 4.11] $x \in \mathbb{B}^{\otimes k}, i \neq j, e_i x, e_j x \neq 0$ とする. このとき,

1. $|i - j| \neq 1$ のとき,

$$e_i e_j x = e_j e_i x \neq 0$$

が成り立つ. このとき,

$$\varepsilon_j(e_i(x)) = \varepsilon_j(x), \quad \varepsilon_i(e_j(x)) = \varepsilon_i(x)$$

が成り立つ.

2. $|i - j| = 1$ のとき,

$$e_i e_j x = e_j e_i x \neq 0$$

または

$$e_i e_j^2 e_i x = e_j e_i^2 e_j x \neq 0$$

のいずれかが成り立つ. 前者が成り立つとき,

$$\varepsilon_j(e_i(x)) = \varepsilon_j(x), \quad \varepsilon_i(e_j(x)) = \varepsilon_i(x) + 1$$

または

$$\varepsilon_j(e_i(x)) + 1 = \varepsilon_j(x), \quad \varepsilon_i(e_j(x)) = \varepsilon_i(x)$$

が成り立つ。後者が成り立つとき,

$$\varepsilon_j(e_i(x)) + 1 = \varepsilon_j(x), \quad \varepsilon_i(e_j(x)) = \varepsilon_i(x) + 1$$

が成り立つ。

これを用いると, 以下の定理が言える。この証明では, 次の rank という概念を利用する。crystal \mathcal{B} の元 x に対して, \mathcal{B} 中にある最高 weight 元 u を用いて,

$$u = e_{i_N} \cdots e_{i_2} e_{i_1} x$$

が成り立つとする。このとき, 作用素の適用回数 N を $\text{rank}(x)$ とする。

定理 4.6 ([3, 定理 4.12, 定理 4.13, 系 6.2]).

1. 連結な $\mathbb{B}^{\otimes k}$ の subcrystal は, 一意的な最高 weight 元を持つ。
2. 2つの連結な $\mathbb{B}^{\otimes k}$ の subcrystal の最高 weight が等しいとき, この2つの subcrystal は同型である。
3. 連結な $\mathbb{B}^{\otimes k}$ の subcrystal はある $\mathcal{B}_\lambda(\lambda \vdash n)$ に同型である。

証明. $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ を連結な $\mathbb{B}^{\otimes k}$ の subcrystal とする。

1. crystal \mathcal{B} 上に順序 $x \geq y$ を次のように定める。ある列 i_1, \dots, i_m が存在して,

$$x = e_{i_1} \cdots e_{i_m} y$$

と表せるとき, $x \geq y$ とする。

\mathcal{B} は有限集合より, 極大元 x が存在する。 $\Omega = \{y \in \mathcal{B} \mid y \leq x\}$ とする。 $S \neq \emptyset$ とする。 S を $y \in \Omega, 0 \neq e_i y \notin \Omega$ なる元全体とすると, $S \neq \emptyset$ である。 y を S の極大元とする。 $e_i y \notin \Omega$ より, y は最高 weight 元でない。 $y \leq x$ より, ある j で $0 \neq e_j(y) \in \Omega$ である。 補題 4.5 より, $e_i e_j(y) = e_j e_i(y) \neq 0$ または $e_i e_j^2 e_i = e_j e_i^2 e_j \neq 0$ のいずれかが成り立つ。 まず, 前者を考える。 y の極大性より, $e_j y \notin S$ となる。 よって, $e_i e_j y \in \Omega$ である。 よって, $e_i y \leq e_j e_i y = e_i e_j y \leq x$ となり, $e_i y \notin \Omega$ に矛盾する。 次に後者を考える。 前者と同様に, $e_j y \notin S$ である。 $e_i e_j y \geq y$ より, $e_i e_j y \notin S$ であるから, $e_i^2 e_j y \in \Omega$ である。 さらに, $e_i^2 e_j y \geq y$ より, $e_i^2 e_j y \notin S$ であるから, $e_j e_i^2 e_j y \in \Omega$ である。 よって, $e_i y \leq e_i e_j^2 e_i y = e_j e_i^2 e_j y \leq x$ となり, $e_i y \notin \Omega$ に矛盾する。 以上より, $S = \emptyset$ であることが分かる。

次に, $\mathcal{B} \setminus \Omega = \emptyset$ でないと仮定する。 $z \in \mathcal{B} \setminus \Omega$ で, $z = f_i y$ または $z = e_i y$ となる元が存在する。 1 番目は, $z \leq y \leq x, z \notin \Omega$ に矛盾する。 2 番目は, $S = \emptyset$ に矛盾する。 以上より, $\mathcal{B} = \Omega$ を示せた。

2. u, u' を $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ の最高 weight 元とする. Ω を次を満たす \mathcal{B} の部分集合 S とする.

(a) $u \in S$

(b) $x \in S, e_i x \neq 0$ のとき, $e_i x \in S$.

(c) \mathcal{B}' の部分集合 S' が存在して, S から S' への全単射な写像で u が u' に値をもつものが存在する. このとき, $x \in S$ のこの写像での値を x' で表す. さらに, $e_i x \neq 0$ と $e_i x' \neq 0$ が必要十分条件となる. また, $(e_i x)' = e_i x'$ が成り立つ.

$\{u\} \in \Omega$ より, Ω は空ではない. S を包含関係に関して極大な Ω の元とする.

始めに, $\text{wt}(x) = \text{wt}(x'), \varepsilon_i(x) = \varepsilon_i(x'), \varphi_i(x) = \varphi_i(x')$ を示す. $N = \text{rank}(x)$ であるならば, $u = e_{i_N} \cdots e_{i_2} e_{i_1} x$ となるものがある. $e_{i_N} \cdots e_{i_2} e_{i_1} x' = (e_{i_N} \cdots e_{i_2} e_{i_1} x)' = u'$ である. よって, $\text{wt}(x') = \text{wt}(u') - \sum_{j=1}^N \alpha_{i_j} = \text{wt}(u) - \sum_{j=1}^N \alpha_{i_j} = \text{wt}(x)$ となる.

次に, $\varepsilon_i(x)$ を $e_i^k x \neq 0$ となる最大の数 k とする. このとき, $e_i^k x' = (e_i^k x)' \neq 0$, $e_i^{k+1} x' = (e_i^{k+1} x)' = 0$ より, $\varepsilon_i(x')$ も k になるから, $\varepsilon_i(x) = \varepsilon_i(x')$ となる. 最後に, $\varphi_i(x) = \langle \text{wt}(x), \alpha_i \rangle - \varepsilon_i(x)$ から, $\varphi_i(x) = \varphi_i(x')$ が分かる.

最後に $S = \mathcal{B}$ を示す. $S \neq \mathcal{B}$ とする. $z \in \mathcal{B} \setminus S$ を rank に関して極小な元とする. $z \neq u$ より, $e_i z \neq 0$ となる i がある. $\text{rank}(e_i z) < \text{rank}(z)$ と z の極小性より, $e_i z \in S$ である. $\varphi_i((e_i z)') = \varphi_i((e_i z)) \neq 0$ であるから, $e_i \tilde{z} = (e_i z)'$ となる $\tilde{z} \in \mathcal{B}'$ がある. この \tilde{z} が i によらないことを示す. 即ち, $e_j z \neq 0$ となる j に対し, $e_j \bar{z} = e_j z$ となる $\bar{z} \in \mathcal{B}'$ がある. このとき, $\tilde{z} = \bar{z}$ を示す. $e_i z, e_j z \neq 0$ であるから, 補題 4.5 より, $e_i e_j z = e_j e_i z \neq 0$ か $e_j e_i^2 e_j z = e_i e_j^2 e_i z \neq 0$ のいずれかが成り立つ. 1 番目の状況では $w = e_i e_j z$, 2 番目の状況では $w = e_j e_i^2 e_j z$ とする. $e_i z, e_j z \in S$ と S の定め方から, $w, f_i w, f_j w \in S$ である. よって, $\varphi_i(w') = \varphi_i(w), \varphi_i(f_j w') = \varphi_i((f_j w)') = \varphi_i(f_j w), \varphi_j(f_i w') = \varphi_j((f_i w)') = \varphi_j(f_i w)$ が成り立つ. よって, $w', f_i w', f_j w' \neq 0$ であるから, 1 番目は $f_i f_j w' = f_j f_i w'$, 2 番目は $f_i f_j^2 f_i w' = f_j f_i^2 f_j w'$ が成り立つ.

1 番目は $f_j w = e_i z$ より, $e_i \tilde{z} = (e_i z)' = (f_j w)' = f_j w'$ であるから, $w' = e_j e_i \tilde{z}$ である. 同様に, $w' = e_j e_i \bar{z}$ である. よって, $\tilde{z} = f_i f_j w' = f_j f_i w' = \bar{z}$ となる.

2 番目は $e_i e_j e_i w = z$ であるから, $e_i \tilde{z} = (e_i z)' = (f_j^2 f_i w)' = f_j^2 f_i w'$ である. 同様に, $e_i \bar{z} = f_j^2 f_i w'$ である. よって, $\tilde{z} = \bar{z}$ である.

$S \cup \{z\}$ から $S' \cup \{z'\}$ への写像を $x \in S$ を $x' \in S'$ へ, z を z' へ写すとする. これは well-defined. よって, S の極大性に矛盾する. よって, $S = \mathcal{B}$ となる. \mathcal{B}' から \mathcal{B} への逆写像も同様に存在する.

3. \mathcal{B} は一意的な最高 weight 元が存在する. その weight を λ とする. 補題 4.3 より,

λ は分割である. 定理 4.2 とこの定理の 2 より, 分かる.

□

この定理より, 連結な $\mathbb{B}^{\otimes k}$ の subcrystal とそれに対応する \mathcal{B}_λ を同一視する. また, $\mathbb{B}^{\otimes k}$ 内の連結な subcrystal の個数と最高 weight 元の個数が一致することが分かる.

具体的に $\mathbb{B}^{\otimes 3}$ を直和分解してみる. そのために, 最高 weight 元であることを判別するために Yamanouchi word を定義する. $\mathbb{B}^{\otimes 3}$ を直和分解は, 次の節の plactically 同値と RSK 対応の関係に関する定理の証明の際に利用する.

定義 4.4.

1. $x = \boxed{i_1} \otimes \boxed{i_2} \otimes \cdots \otimes \boxed{i_k} \in \mathbb{B}^{\otimes k}$ とする. x の reading word を

$$\text{word}(x) = i_1 i_2 \cdots i_k$$

とする.

2. $\text{word } i_1 i_2 \cdots i_k$ が Yamanouchi word であるとは, 任意の終端セグメント $\{i_j \cdots i_k\}$ と任意の i に対して, $i+1$ の数が i の数以下であるときをいう.

例.

$$x = \boxed{2} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{1} \in \mathbb{B}^{\otimes 5}$$

とする. このとき,

$$\text{word}(x) = 23211$$

である. この word は Yamanouchi word である.

実際, 終端セグメント $\{1\}, \{11\}, \{211\}, \{3211\}, \{23211\}$ と任意の i に対して, それぞれ $i+1$ が i 以下である.

命題 4.7 ([3, 命題 8.2]). $x = \boxed{i_1} \otimes \boxed{i_2} \otimes \cdots \otimes \boxed{i_k} \in \mathbb{B}^{\otimes k}$ が最高 weight 元であることと $\text{word}(x)$ が Yamanouchi word であることは必要十分条件である.

証明. 対偶で示す. 命題 3.3 より,

$$\varepsilon_i(x) = \max_{j=1}^k \left(\sum_{h=j}^k \varepsilon_i(i_h) - \sum_{h=j+1}^k \varphi_i(i_h) \right)$$

である. また, ε_i は, $\boxed{i+1}$ のとき 1, それ以外は 0 である. よって, \max が 0 でないなら

ば, $i_j = j + 1$ のとき, 最大になる. このとき, $\varepsilon_i(i_j) = 0$ であるから,

$$\varepsilon_i(x) = \max_{j=1}^k \left(\sum_{h=j}^k (\varepsilon_i(i_h) - \varphi_i(i_h)) \right)$$

と表せる. $\varepsilon_i - \varphi_i$ は, $\boxed{i+1}$ のとき 1, \boxed{i} のとき -1 , それ以外は 0 だから, \max が 0 でないならば, ある j で, i_j, i_{j+1}, \dots, i_k で i の数より $i+1$ の数が大きい必要がある. よって, $\text{word}(x)$ は Yamanouchi word ではない. 逆に, $\text{word}(x)$ が Yamanouchi word ではないとき, ある j で, i_j, i_{j+1}, \dots, i_k で i の数より $i+1$ の数が大きい. このとき, \max 内でこの j で 0 ではない. よって, x は最高 weight 元ではない. \square

命題 4.8 ([3, 命題 8.3]). $n \geq 3$ とする. このとき, $\mathbb{B}^{\otimes 3}$ は $\mathcal{B}_{(3)} \oplus \mathcal{B}_{(2,1)} \oplus \mathcal{B}_{(2,1)} \oplus \mathcal{B}_{(1^3)}$ に同型である.

証明. $x = \boxed{p} \otimes \boxed{q} \otimes \boxed{r} \in \mathbb{B}^{\otimes 3}$ の row word が Yamanouchi word となる时候を考える. $\text{word}(x) = pqr$ より, 終端セグメント r を考えると, $r = 1$. 終端セグメント q, r を考えると, $q = 1, 2$. 終端セグメント p, q, r を考えると, $q = 1$ ならば $r = 1, 2$, $q = 2$ ならば $r = 1, 3$. よって,

$$x = \boxed{1} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{1}, \quad \boxed{2} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{1}, \quad \boxed{1} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{1}, \quad \boxed{3} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{1}$$

である. weight を考えれば, $(3), (2, 1), (2, 1), (1^3)$ より分かる. \square

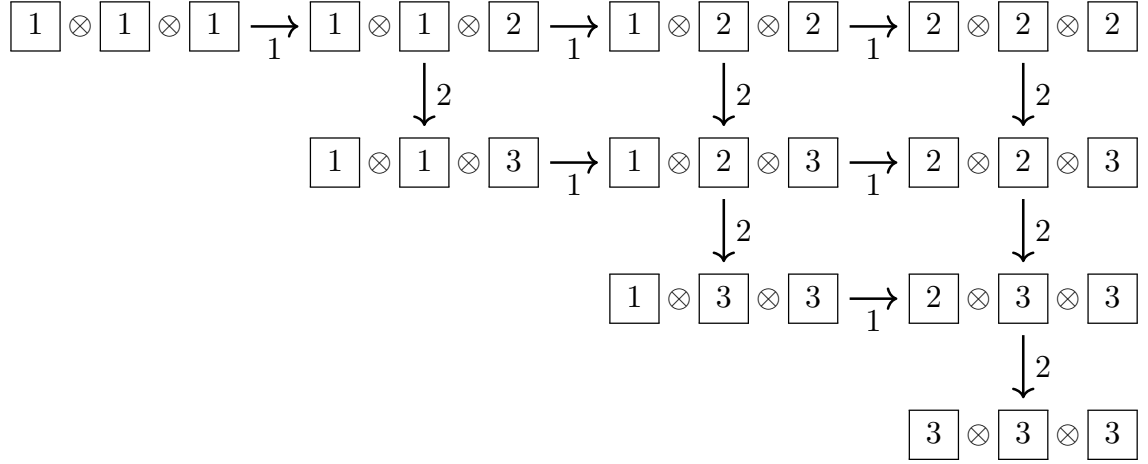
$\mathcal{B}_{(2,1)}$ に同型な 2 つの crystal を区別するために, 最高 weight 元が $\boxed{1} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{1}$ を持つ $\mathcal{B}_{(2,1)}$ に同型な crystal を $\mathcal{B}'_{(2,1)}$ で表すことにする.

また, この同型において $\boxed{1} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{1} \in \mathbb{B}^{\otimes 3}$ は $\boxed{1} \boxed{1} \boxed{1} \in \mathcal{B}_{(3)}$ に対応している.

同様に, $\boxed{2} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{1}$ および $\boxed{1} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{1}$ はそれぞれ $\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$ に, $\boxed{3} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{1}$

は $\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$ に対応している.

例. $n = 3$ とする. 例えば $\mathcal{B}_{(3)}$ に対応する $\mathbb{B}^{\otimes 3}$ の subcrystal を記述すると, 以下のようになる.



写像 RR において $RR\left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}\right) = \boxed{2} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{1}$ である. しかし, $RR(x) = \boxed{1} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{1}$ となる tableau の crystal の元 x は存在しない.

RR は tableau の crystal を $\mathbb{B}^{\otimes k}$ へ写す写像である. 逆に, $\mathbb{B}^{\otimes k}$ を tableau の crystal へ写す写像は, $\mathbb{B}^{\otimes k}$ を tableau の crystal の直和に分解した際に重複が生じるため, RR の逆写像として実現できない.

そこで, 以降の説明するように P-tableau がその役割を果たすのである.

4.2 plactically 同値と Knuth 同値

次のセクションのため, plactically 同値と Knuth 同値の関係性をここでは述べる.

定義 4.5. B_1, B_2 を A_r 型の crystal とする. $x_i \in B_i$ とする. x_1 と x_2 が plactically 同値であるとは,

1. B'_1 と B'_2 が同型となる $x_i \in B_i$ を含む連結成分 B'_i がある.
2. crystal 同型写像 $B'_1 \rightarrow B'_2$ で $x_1 \mapsto x_2$ となるものがただ 1 つ存在する.

を満たすときをいう. このとき, $x_1 \equiv x_2$ で表す.

定理 4.9 ([3, 定理 8.4]). $x, y \in \mathbb{B}^{\otimes k}$ とする. $\text{word}(x) \equiv_K \text{word}(y)$ であるならば, $x \equiv y$ である.

証明. まず $k = 3$ の場合で示す. $\mathbb{B}^{\otimes 3} = B_{(1^3)} \oplus B'_{(2,1)} \oplus B_{(2,1)} \oplus B_{(3)}$ である. $a \leq b < c$ のとき, $x = \boxed{c} \otimes \boxed{a} \otimes \boxed{b} \in \mathbb{B}^{\otimes 3}$ と $y = \boxed{a} \otimes \boxed{c} \otimes \boxed{b} \in \mathbb{B}^{\otimes 3}$ が plactically 同値であることを示す. (もう一方の Knuth 同値である状況のときも以下と同様に示せる.)

このとき, x は $\mathcal{B}_{(2,1)}$, y は $\mathcal{B}'_{(2,1)}$ と同一視できる. $\theta: \mathcal{B}_{(2,1)} \rightarrow \mathcal{B}'_{(2,1)}$ を一意的な crystal 写像とする. このとき, $\theta(x) = y$ であることを示せばよい. a を固定し, b に関する帰納法で示す.

$b = a$ のとき, x, y の weight は等しく, x, y はその weight を持つ $\mathcal{B}_{(2,1)}, \mathcal{B}'_{(2,1)}$ の一意的な元だから, $\theta(x) = y$ であることが分かる. 次に, $a < b$ とし, $x_1 = \boxed{c} \otimes \boxed{a} \otimes \boxed{b-1}$, $y_1 = \boxed{a} \otimes \boxed{c} \otimes \boxed{b-1}$ で, $\theta(x_1) = y_1$ が成り立つと仮定する. $b < c$ より, $\varepsilon_{b-1}c = 0$ である. $\varphi_{b-1}(\boxed{a} \otimes \boxed{b-1}) \geq 1$ より, $f_{b-1}x_1 = \boxed{c} \otimes f_{b-1}\boxed{a} \otimes \boxed{b-1} = \boxed{c} \otimes \boxed{a} \otimes \boxed{b} = x$ となる. 同様に, $f_{b-1}y_1 = y$ となる. よって, $\theta(x) = \theta(f_{b-1}x_1) = f_{b-1}\theta(x_1) = f_{b-1}y_1 = y$ である. これで, $k = 3$ のとき, 命題が成り立つことを示せた. $k \geq 3$ の場合, $x = u \otimes x_1 \otimes v, y = u \otimes y_1 \otimes v$ で, $x_1, y_1 \in \mathbb{B}^{\otimes 3}$ で $\text{word}(x_1) \equiv_K \text{word}(y_1)$, $u \in \mathbb{B}^{\otimes l}, v \in \mathbb{B}^{\otimes m}, l+m+3=k$ とする. このとき, 上記より, crystal $\mathcal{C}, \mathcal{D}, x_1 \in \mathcal{C}, y_1 \in \mathcal{D}$ で, \mathcal{C}, \mathcal{D} が同型となるものが存在する. このとき, $\mathbb{B}^{\otimes l} \otimes \mathcal{C} \otimes \mathbb{B}^{\otimes m}, \mathbb{B}^{\otimes l} \otimes \mathcal{D} \otimes \mathbb{B}^{\otimes m}$ は x を y にとる同型を誘導する. \square

4.3 plactically 同値と RSK 対応の関係

crystal と RSK 対応の関係について説明する. その準備として以下の命題を示す.

命題 4.10 ([3, 命題 8.5]). $\mathcal{B}_{(k)} \otimes \mathbb{B}$ と $\mathcal{B}_{(k+1)} \oplus \mathcal{B}_{(k,1)}$ は同型である. この同型で, $T \otimes \boxed{i}$ は, $T \leftarrow i$ に対応する.

証明. $T \otimes \boxed{i}$ を最高 weight 元とする.

$$0 = \varepsilon_j(T \otimes \boxed{i}) = \max(\varepsilon_j(\boxed{i}), \varepsilon_j(T) + \varepsilon_j(\boxed{i}) - \varphi_j(\boxed{i}))$$

であるから, $\boxed{i} = 0$ である. よって, $i = 1$. $j \neq 1$ のとき, $\varphi_j(\boxed{1}) = 0$ より, $\varepsilon_j(T) = 0$. $j = 1$ のとき, $\varphi_j(\boxed{1}) = 1$ より, $\varepsilon_j(T) = 0, 1$ となる. よって, $T = \boxed{1} \boxed{1} \cdots \boxed{1} \otimes \boxed{1} \boxed{1} \boxed{1} \cdots \boxed{1} \boxed{2} \otimes \boxed{1}$ のいずれかである. weight は, $(k+1), (k, 1)$ であるから, $\mathcal{B}_{(k+1)}, \mathcal{B}_{(k,1)}$ の元であることが分かる. よって, $\mathcal{B}_{(k)} \otimes \mathbb{B}^{\otimes k}$ と $\mathcal{B}_{(k+1)} \oplus \mathcal{B}_{(k,1)}$ は同型である.

次に, $T = \boxed{i_1} \cdots \boxed{i_k}$ とする. $i \geq i_k$ のとき, $T \otimes \boxed{i} = \boxed{i_1} \cdots \boxed{i_k} \boxed{i} = T \leftarrow \boxed{i}$ となる. $i < i_k$ のときを考える. 定理 4.9 より, $T \otimes \boxed{i}$ と $T \leftarrow \boxed{i}$ の reading word が Knuth 同値であることを示せば十分である.

$$\text{word}(T \leftarrow \boxed{i}) = i_s i_1 i_2 \cdots i_{s-1} i i_{s+1} \cdots i_k \quad (\text{ただし, } s \text{ は, } i_{s-1} \leq i < i_s \leq i_{s+1} \cdots \text{ を}$$

満たす添字とする.), $\text{word}(T \otimes \boxed{i}) = i_1 \cdots i_k i$ である.

$$i_1 \cdots i_k i \equiv_K i_1 \cdots i_{k-1} i i_k \equiv_K \cdots \equiv_K i_1 \cdots i_s i i_{s+1} \cdots$$

$$i_1 \cdots i_s i i_{s+1} \cdots \equiv_K i_1 \cdots i_s i_{s-1} i i_{s+1} \cdots \equiv_K \cdots \equiv_K i_s i_1 i_2 \cdots i_{s-1} i i_{s+1} \cdots i_k$$

より, 分かる. \square

$x \in \mathbb{B}^{\otimes k}$ に対して $\text{word}(x)$ の RSK 対応を考える. $P(\text{word}(x)), Q(\text{word}(x))$ をそれぞれ $P(x), Q(x)$ と略すことにする.

まず, P-tableau と plactically 同値の関係性を見る.

定理 4.11 ([3, 定理 8.6]).

1. $x \equiv P(x)$ が成り立つ.
2. λ が $P(x), Q(x)$ の形であるならば, x は \mathcal{B}_λ に同型な subcrystal の元である.
3. $P(x) = P(y)$ ならば, $x \equiv y$ である.

証明. 2つ目と3つ目は定理 4.6 と1つ目から従う. よって, 1つ目を示せば十分である. 帰納法の議論により, $T \otimes \boxed{j} \equiv T \leftarrow \boxed{j}$ を示せばよい. T の行を T_1, \dots, T_l とする. $T_1 \leftarrow \boxed{j}$ が1行であるならば, $T \leftarrow \boxed{j}$ は, T の1行目の終わりに j を付け加えた tableau になるから, $T \leftarrow \boxed{j} \equiv T_l \otimes \cdots \otimes T_1 \otimes \boxed{j} = T \otimes \boxed{j}$ である. 一方, $T_1 \leftarrow \boxed{j}$ が $\mathcal{B}_{(k_1, 1)}$ (ただし, k_1 は, T_1 の長さ) であるならば, T_1 のある元 j' が押し出されて, そこに j が入る. その後, $(2, 1)$ 成分に j' が入る. この1行目を T' とする. また, $T \otimes \boxed{j} = T_r \otimes \cdots \otimes T_1 \otimes \boxed{j} \equiv T_r \otimes \cdots \otimes T_2 \otimes \boxed{j'} \otimes T'_1$ となる. このプロセスを続ければよい. \square

この定理は, P-同値と Knuth 関係の一致性を利用しても導くことができる.

別証明. 3つ目は, 定理 4.9 と定理 2.2 から従う. 1つ目を示す. word に $\text{word}(\pi_{P(x)})$ を持つ $\mathbb{B}^{\otimes k}$ の元はただ一つだけ存在する. これを $\overline{\pi_{P(x)}}$ で表す. $P(x) = P(\pi_{P(x)})$ より, 3つ目から, $x \equiv \pi_{P(x)}$ である. $RR(P(x)) = \overline{\pi_{P(x)}}$ より, $P(x) \equiv \overline{\pi_{P(x)}}$ である. よって, $x \equiv \overline{\pi_{P(x)}} \equiv P(x)$ から分かる. 2つ目は, 同様に1つ目を利用すれば良い. \square

例. $x = \boxed{1} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{2}$ とする. $P(x) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & & \\ \hline \end{array}$ である. よって, $\mathbb{B}^{\otimes 6}$ を tableau の crystal の直和に分解したとき, x は $\mathcal{B}_{(4, 2)}$ の subcrystal の元 $P(x)$ に対応する.

また, $\text{word}(x)$ と 123132 は Knuth 関係にあるから, $y = \boxed{1} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{2}$ としたとき, $P(x) = P(y)$ となる. よって, $x \equiv y$ である.

最後に, Q-tableau と crystal の関係を述べる.

定理 4.12 ([3, 定理 8.7]). $Q(x) = Q(y)$ であることと x, y が同じ連結な subcrystal の元であることは必要十分条件である.

証明. $Q(x) = Q(y)$ のとき, x, y が同じ連結な crystal の元であることを示す. 後で示す逆の条件である連結な crystal 内の元は, Q-tableau が一致するということから, x, y を最高 weight 元であると仮定してよい. このとき, λ を x, y の Q-tableau の形とすると, $P(x), P(y)$ はともに \mathcal{B}_λ の最高 weight 元となる. よって, $P(x) = P(y)$ である. RSK 対応は全単射であることと x, y の P-tableau, Q-tableau がそれぞれ一致していることから, $x = y$. よって, x, y が同じ連結な crystal の元である.

次に, 逆を示す. x, y が同じ連結な crystal の元であると仮定する. 連結性より, $y = f_j x$ と仮定してよい.

$$x = \boxed{i_1} \otimes \cdots \otimes \boxed{i_k}$$

とする. まず $i_1 \cdots i_k$ の値が全て $j, j+1$ のいずれかである場合を考える. x に f_j を適用し, $i_m = j$ で j が $j+1$ と入れ替わるとする. signature rule を考えると, 初期セグメント $\{i_1, \dots, i_{m-1}\}$ 内では, $j+1$ はその後にある j と括弧で括ることができ. よって, $\{i_1, \dots, i_{m-1}\}$ 内の $j+1$ の数は, j の数以下より, $(\emptyset \leftarrow i_1 \cdots i_{m-1})$ でできる tableau の 1 行目は全て i である. よって, その tableau に i_m として $j, j+1$ のいずれかを insertion しても, tableau の 1 行目の最後に i_m が配置されるから, $Q(x)$ と $Q(y)$ は m までで一致する. i_{m+1} 以降を考える. このとき, i_m を j から $j+1$ に変えたことで i_{m+1} 以降にある j を insertion することで tableau の形が変わるかを考える. この場合, i_{m+1} 以降からその j の間にある $j+1$ と括弧で括られているから, j を insertion する前の insertion tableau の 1 行目には i_m 以外に $j+1$ が少なくとも 1 つはある. よって, そこに j を insertion しても, 形は変わらないことがわかる. よって, $Q(x) = Q(y)$.

最後に, $i_1 \cdots i_k$ の値が $j, j+1$ 以外にある場合で考える. $\mathbf{i} = \{i_1 \cdots i_k\}$, $\mathbf{i}_{j,j+1}$ を \mathbf{i} から $i, i+1$ 以外の値を取り除いた列とする. この場合, \mathbf{i} の元の値が $j, j+1$ だけの場合と比較して, j より小さい元で insertion したとき $j, j+1$ が 1 行目で押し出される可能性がある. しかし, これは f_j を適用し, $i_m = j$ で j が $j+1$ と入れ替わったとしてもこの insertion での押し出される場所は変わらない. よって, $Q(x)$ と $Q(y)$ の 1 行目は等しい.

$P'(x), Q'(x)$ を $P(x), Q(x)$ から 1 行目を取り除いた tableau とする. このとき,

$Q'(x) = Q'(y)$ を示せば十分である. $\mathbf{i}'(x)$ を 1 行目で押し出された元の列とする. このとき, $P'(x)$ は空の tableau に $\mathbf{i}'(x)$ の元を順に insertion してできる tableau である. $\mathbf{i}'(x)$ 内に i_m が入っていないならば, $\mathbf{i}'(x) = \mathbf{i}'(y)$ より, この証明は終了する. $\mathbf{i}'(x)$ 内に i_m が入っているとす. この i_m が $\mathbf{i}'(x)$ 内で括弧がついていない最後の j であることを示せば, 帰納法の議論により, $Q(x) = Q(y)$ が成り立つことが分かる. そこで i_t を 1 行目で押し出された最後の j とする. $i_m = j$ が 1 行目から押し出されたことから, $t \geq m$. さらに, i_t の定め方から, t までにある全ての $j, j+1$ も押し出されたことが分かる. よって, $\mathbf{i}'_{j,j+1}$ を $\mathbf{i}'(x)$ から $j, j+1$ 以外を取り除いたものとする, $\mathbf{i}'_{j,j+1}$ は $\mathbf{i}_{j,j+1}$ の i_t までの初期セグメントに幾つかの後の $j+1$ の値を付け加えたものになる. よって, $\mathbf{i}'(x)$ 内の括弧がついていない j が i_t であるから, $t = m$ である. \square

例. $x = \boxed{1} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{2}$, $y = \boxed{1} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{2}$,
 $z = \boxed{2} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{5} \otimes \boxed{5} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{3}$ とする. $Q(x), Q(z)$ はいずれも

1	2	3	4
5	6		

であるから, x と z は同じ連結な成分の subcrystal に入っている.

$Q(y) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 5 \\ \hline 4 & 6 & & \\ \hline \end{array}$ より, x と y は異なる連結な成分の subcrystal に入っている.

参考文献

- [1] Nicolas Bourbaki (杉浦光夫訳) 「ブルバキ数学原論リー群とリー環 3」 東京書籍, 1986.
- [2] Daniel Bump 「Lie Groups」 Springer, 2013.
- [3] Daniel Bump, Anne Schilling 「Crystal Bases: Representations And Combinatorics」 World Scientific, 2017.
- [4] Bruce E. Sagan 「The Symmetric Group: Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions」 Springer, 2001.