少人数クラス内容報告(中間まとめ)・講義内容要約

アドバイザー： 岡田聡一教授

322301150　菊地雄大

1　少人数クラス内容報告 (中間まとめ)

M2 の春学期の少人数クラスでは, 参考文献 [1] の第 1 章から第 3 章まで読んだ.

1.1　鏡映

この節では, 鏡映について定義する. V をユークリッド空間, すなわち, 内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を伴った実ベクトル空間とする.

定義 1. $\alpha \in V$ の鏡映 $r_\alpha : V \to V$ を

$$r_\alpha(x) = x - \langle x, \alpha^\vee \rangle, \quad \left(\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \right)$$

とする.

例. $V = \mathbb{R}^2, \alpha = (1, 0)$ とする.
このとき,

$$\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = \frac{2(1,0)}{1^2 + 0^2} = (2, 0)$$

任意の $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ に対する鏡映 $r_\alpha(x)$ は次の通りである.

$$\begin{aligned} r_\alpha(x) &= x - \langle x, \alpha^\vee \rangle \alpha \\ &= (x_1, x_2) - \langle (x_1, x_2), (2, 0) \rangle (1, 0) \\ &= (x_1, x_2) - 2x_1(1, 0) \\ &= (-x_1, x_2) \end{aligned}$$

この鏡映は x を y 軸に関して反転させる操作になる.

命題 1. 鏡映 $r_\alpha : V \to V$ に対して, 次が成り立つ.

1. $r_\alpha^2 = 1$　(ただし, 1 は恒等写像)
2. $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ で, $r_\alpha(\alpha) = -\alpha$
3. V は $\ker(r_\alpha - 1) \oplus \ker(r_\alpha + 1)$ と分解でき, $\ker(r_\alpha + 1)$ は α を基底に持つ 1 次元空間である.
4. $\langle r_\alpha(x), r_\alpha(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

1.2 ルート系とワイル群

この節では, ルート系とワイル群について定義する.

定義 2. V 上のルート系 Φ を以下を満たす有限集合とする.

1. $0 \notin V, \emptyset \neq V$
2. $r_\alpha(\Phi) = \Phi \quad (\alpha \in \Phi)$
3. $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \in \mathbb{Z} \quad (\alpha, \beta \in \Phi)$
4. $\beta \in \Phi$ が $\alpha \in \Phi$ の倍数なら, $\beta = \pm\alpha$

このとき, Φ の元をルートという.
また, $\Phi^\vee = \{\alpha^\vee | \alpha \in \Phi\}$ の元をコルートという.

例.

1. $V = \mathbb{R}^3$ とする. $\Phi = \{(\pm 1, 0, 0)\}$ はルート系である.
2. $V = \mathbb{R}^2$ とする. $\Phi = \{(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})\}$ はルート系である. このとき, $\Phi^\vee = \left\{(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})\right\}$ である.

命題 2.

1. $\Phi = -\Phi$
2. $(\alpha^\vee)^\vee = \alpha$
3. $\Phi^\vee$ もルート系になる.

定義 3.

1. Φ が可約であるとは, $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ で, 任意の $x \in \Phi_1, y \in \Phi_2$ で, $\langle x, y \rangle = 0$ となるルート系 Φ_1, Φ_2 が存在するときをいう.
2. Φ が既約 (または, 単純) であるとは, Φ が可約ではないときをいう.
3. Φ が simply-laced であるとは, 全てのルートの長さが同じであるときをいう.

例.

1. $V = \mathbb{R}^2$ とする.$\Phi = \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$ は可約なルート系である. 実際, $\Phi_1 = \{(\pm 1, 0)\}$, $\Phi_2 = \{(0, \pm 1)\}$ と分けられる.

2. $V = \mathbb{R}^2$ とする. $\Phi = \{(\pm\sqrt{2}, 0), (0, \pm\sqrt{2}), (\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})\}$ は $(\sqrt{2}, 0)$ の長さが $\sqrt{2}$, $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ の長さが 2 であるから, simply-laced でないルート系になる.

定義 4. Φ と交わらない原点を通る超平面を固定する.

1. この超平面にある 1 つの側にあるルートを正ルート, もう 1 つの側にあるルートを負ルートとよぶ.

2. 正ルート全体を Φ^+, 負ルート全体を Φ^- で表す.

3. $\alpha \in \Phi^+$ が単純であるとは, α が他の正ルートの和で表せないときをいう.

例. $V = \mathbb{R}^2$ とする. $\Phi = \{(\pm\sqrt{2}, 0), (0, \pm\sqrt{2}), (\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})\}$ とする.
例えば, 正ルートは $\{(\sqrt{2}, 0), (0, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$, 負ルートは $\{(-\sqrt{2}, 0), (0, -\sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})\}$ と分けられる.
このとき, 単純な正ルート全体は, $\{(\sqrt{2}, 0), (0, \sqrt{2})\}$ や $\{(\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$ などとして, 取れる.

注意. 正ルートや単純な正ルートの定め方は, 一意に定まらない. 一つ固定して考える.

命題 3. Σ を単純な正ルートのなす集合とする.

1. Σ の元は, 線型独立.

2. $\alpha \in \Sigma, \beta \in \Phi^+$ なら, $\alpha = \beta$ または $r_\alpha(\beta) \in \Phi^+$

3. $\alpha, \beta \in \Sigma$ で, $\alpha \neq \beta$ なら, $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$

4. 任意の $\alpha \in \Phi^+$ は
$$\alpha = \sum_{\beta \in \Sigma} n_\beta \beta \quad (n_\beta \geq 0, n_\beta \in \mathbb{Z})$$

定義 5. $I = \{1, 2, \cdots, r\}$ を添字集合とし, $\Sigma = \{\alpha_i \mid i \in I\}$ とする.
$i \in I$ に対し, この鏡映を s_i で表す. これを単純鏡映という.

命題 4. $i \in I, \alpha \in \Phi^+$ とする. このとき, $\alpha = \alpha_i$ か $s_i(\alpha) \in \Phi^+$ のいずれかである.
よって, s_i は $\Phi^+ \backslash \{\alpha_i\}$ 上を置換する.

定義 6. $W = \langle r_\alpha \mid \alpha \in \Phi \rangle$ を Φ のワイル群という.

例. $V=\mathbb{R}^2, \Phi=\{(\pm 1,0),(0,\pm 1)\}$ とする.
$r_{(1,0)}=(x,y)=(-x,y), r_{(0,1)}=(x,y)=(x,-y)$ である. $r_{(1,0)}\circ r_{(0,1)}(x,y)=r_{(0,1)}\circ r_{(1,0)}(x,y)=(-x,-y)$ となる. これらの元は全て位数 2 である. よって,

$$W=\{1,r_{(1,0)},r_{(0,1)},r_{(1,0)}\circ r_{(0,1)}\}$$

であり, $C_2\times C_2$(ただし, C_2 は位数 2 の巡回群) に群同型である.

1.3 weight lattice

この節では,weight lattice について定義する.

定義 7. Φ を V におけるルート系とする.
weight lattice とは, V を生成する lattice(自由 $\mathbb{Z}$ 加群)Λ で以下を満たすときをいう.

1. $\Phi\subset\Lambda$
2. 任意の $\lambda\in\Lambda, \alpha\in\Phi$ で, $\langle\lambda,\alpha^\vee\rangle\in\mathbb{Z}$

この元を weight という.

定義 8.

1. weight lattice が半単純であるとは, Φ が V を張るときをいう.
2. root lattice Λ_{root} を Φ によって張られた空間とする.

例. $V=\mathbb{R}^3$ とする. $\Phi=\{(\pm 1,0,0)\}$ とする. $\Lambda=\mathbb{Z}^3$ は weight lattice になる. Φ は V を張らないので, 半単純ではない. また, $\Lambda_{root}=\{(x,0,0)\mid x\in\mathbb{Z}\}$ である.

定義 9.

1. Λ 上に順序 $\lambda\le\mu$ を
$$\lambda-\mu=\sum_{i\in I}c_i\alpha_i \quad (c_i\ge 0)$$
と定める.
2. $\lambda^+=\{\lambda\mid\langle\lambda,\alpha_i^\vee\rangle\ge 0 \quad (i\in I)\}$ とし, この元を dominant weight という.
3. λ が $\langle\lambda,\alpha_i^\vee\rangle>0 \quad (i\in I)$ ならば, strictly dominant weight という.

4. $\bar{\omega}_i$ が fundamental weight であるとは, $\langle \bar{\omega}_i, \alpha_j^\vee \rangle = \delta_{i,j}$ であるときをいう.

この節の最後に, 重要な crystal を紹介しよう.

例. $V = \mathbb{R}^{r+1}$ とする. ルート系を $\Phi = \{e_i - e_j \mid i \neq j\}$ とし, $\Phi^+ = \{e_i - e_j \mid i < j\}$ とする. これは既約で, simply-laced である. このとき, 単純な正ルート全体は $\Sigma = \{\alpha_i = e_i - e_{i+1} \mid 1 \leq i \leq r\}$ となる.
weight lattice は $\Lambda = \mathbb{Z}^{r+1}$ とする. これは半単純ではない.
$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{r+1})$ が dominant であることと $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_{r+1}$ が成り立つことは必要十分である. また, fundamental weight は $\omega_i = e_1 + e_2 + \cdots + e_i$ である.

1.4 Kashiwara crystals

この節では, Kashiwara crystals について定義する.
$\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ に $-\infty < n (n \in \mathbb{Z})$ と順序を入れ, $-\infty + n = -\infty (n \in \mathbb{Z})$ と定義する.

定義 10. 添字集合 I をともなったルート系 Φ と weight lattice Λ を固定する. タイプ Φ の Kashiwara crystal は次の写像をともなった空でない集合 $\mathscr{B}$ である.

1. $e_i, f_i : \mathscr{B} \to \mathscr{B} \cup \{0\}$
2. $\epsilon_i, \phi_i : \mathscr{B} \to \mathbb{Z} \sqcup \{-\infty\}$
3. $\mathrm{wt} : \mathscr{B} \to \Lambda$

で, 次の (A1), (A2) を満たす.

(A1) 任意の $x, y \in \mathscr{B}$ に対し, $e_i(x) = y$ であることと, $f_i(y) = x$ であることは必要十分条件である. このとき,

$$\mathrm{wt}(y) = \mathrm{wt}(x) + \alpha_i$$
$$\epsilon(y) = \epsilon(x) - 1$$
$$\phi_i(y) = \phi_i(x) + 1$$

が成り立つ.

(A2) $\phi_i(x) = \langle \mathrm{wt}(x), \alpha_i^\vee \rangle + \epsilon_i(x)$ が成り立つ.
特に, $\Phi_i(x) = -\infty$ なら, $\epsilon_i(x) = -\infty$ である. このとき, $e_i(x) = f_i(x) = 0$ を仮定する.

定義 11. 上記の定義において,

1. crystal$\mathscr{B}$ の元の個数を次数という.
2. 写像 wt を weight 写像という.
3. e_i, f_i を kashiwara(または, cryastal) 作用素という.
4. ϕ_i, ϵ_i は string length と呼ばれることもある.
5. ϕ_i, ϵ_i が $-\infty$ の値を取らないとき, $\mathscr{B}$ は有限なタイプであるという.
6. $\phi_i(x) = \max\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid f_i^k(x) \neq 0\}, \quad \epsilon_i(x) = \max\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid e_i^k(x) \neq 0\}$ が成り立つとき, $\mathscr{B}$ は seminomarl という.
7. ϕ_i, ϵ_i が非負の値を持つとき, $\mathscr{B}$ は upper seminomarl であるという.
8. 任意の $i \in I$ で $e_i(u) = 0$ となる元 $u \in \mathscr{B}$ を highest weight 元という. このとき, $\mathrm{wt}(u)$ を highest weight という.

命題 5. ルート系が半単純で, $\mathscr{B}$ が有限なタイプの crystal と仮定する. このとき,

$$\mathrm{wt}(x) = \sum_{i \in I} (\varphi_i(x) - \varepsilon_i(x))\bar{\omega}_i$$

が成り立つ.

命題 6. $\mathscr{B}$ を seminomaral な crystal とする. u を highest weight 元とする. このとき, $\mathrm{wt}(u)$ は dominant である.

命題 7. $\mathscr{B}$ を seminomaral な crystal とする. $\mu, \nu \in \Lambda$ をワイル群のある元 w で, $w(\mu) = \nu$ となる元とする. このとき,

$$\{u \mid \mathrm{wt}(u) = \mu\} = \{u \mid \mathrm{wt}(u) = \nu\}$$

が成り立つ.

定義 12.

1. $\mathscr{B}$ を crystal とする. このとき, $\mathscr{B}$ 上に頂点と $i \in I$ でラベル付けられた辺を持つ有向グラフを対応できる. $f_i(x) = y$ のとき, $x \xrightarrow{i} y$ と書く. これを $\mathscr{B}$ の crystal graph という.

2. $\mathscr{B}$ 上に, x と y が $y = f_i(x)$ または $x = e_i(y)$ を満たすとき, $x \sim y$ という同値関係を定める.

例. タイプ A_r には, 次の crystal graph を持つ標準的な crystal がある.

$$\boxed{1} \xrightarrow{1} \boxed{2} \xrightarrow{2} \cdots \xrightarrow{r} \boxed{r}$$

$GL(r+1)$weight lattice を使い, $\mathrm{wt}\left(\boxed{i}\right) = e_i$ と定める. さらに, seminomarl であるように φ_i, ε_i を定める. これを $\mathscr{B}_{(1)}$ や $\mathbb{B}$ で表す.

例. $\Lambda = \mathbb{Z}^n, n = r+1$ とする. $\mathscr{B}_{(k)}$ を分割 (k) の semistaandard tableau 全体とする. その元を $R = \boxed{j_1}\boxed{j_2}\boxed{\cdots}\boxed{j_k}$ (ただし, $j_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_k \in [n]$) で表す.
$\mathrm{wt}(R) = (\mu_i, \mu_2, \cdots, \mu_n)$(ただし, μ_i は R の i の数) とする. さらに, $\varphi_i(R)$ を成分 $j_1, j_2, \cdots, j_k$ 上の i の数, $\varepsilon_i(R)$ を成分 $j_1, j_2, \cdots, j_k$ 上の $i+1$ の数とする.
また, $\varphi_i(R) > 0$ なら, $f_i(R)$ を右端の i を $i+1$ に変えて得られるタブロー, そうでないなら, $f_i(R) = 0$ とする. 同様に, $\varepsilon_i(R) > 0$ なら, $f_i(R)$ を左端の $i+1$ を i に変えて得られるタブロー, そうでないなら, $f_i(R) = 0$ とする.
これにより, $\mathscr{B}_{(k)}$ は seminomarl な crystal になる.

1.5 crystal のテンソル積と準同型

この節では, Kashiwara crystals のテンソル積と準同型について定義する.

定義 13. $\mathscr{B}, \mathscr{C}$ を同じルート系 Φ の crystal とする。$\mathscr{B} \otimes \mathscr{C}$ を次のように定める.

1. $\mathrm{wt}(x \otimes y) = \mathrm{wt}(x) + \mathrm{wt}(y)$

2. $f_i(x \otimes y) = \begin{cases} f_i(x) \otimes y & \text{if } \varphi_i(y) \leq \varepsilon_i(x) \\ x \otimes f_i(y) & \text{if } \varphi_i(y) > \varepsilon_i(x) \end{cases}$

3. $e_i(x \otimes y) = \begin{cases} e_i(x) \otimes y & \text{if } \varphi_i(y) < \varepsilon_i(x) \\ x \otimes e_i(y) & \text{if } \varphi_i(y) \geq \varepsilon_i(x) \end{cases}$

4. $x \otimes 0 = 0 \otimes x = 0$

5. $\varphi_i(x \otimes y) = \varphi_i(x) + \max\{\varphi_i(x), \varphi(y) + \langle \mathrm{wt}(x), \alpha_i^\vee \rangle\}$

6. $\varepsilon_i(x \otimes y) = \varepsilon_i(y) + \max\{\varepsilon_i(y), \varepsilon(x) - \langle \mathrm{wt}(y), \alpha_i^\vee \rangle\}$

命題 8. $\mathscr{B} \otimes \mathscr{C}$ は crystal である． さらに, $\mathscr{B}, \mathscr{C}$ が seminomarl なら, $\mathscr{B} \otimes \mathscr{C}$ も seminomarl である．

定義 14. $\mathscr{B}$ と $\mathscr{C}$ をルート系 Φ, 添字集合 I を持つ crystal とする．
写像 $\psi : \mathscr{B} \to \mathscr{C} \sqcup \{0\}$ が crystal 準同型であるとは, 次を満たすときをいう．
1. $b \in B$ かつ $\psi(b) \in C$ であるとき,

a $\mathrm{wt}(\psi(b)) = \mathrm{wt}(b)$

b $\epsilon_i(\psi(b)) = \epsilon_i(b)$ for all $i \in I$

c $\phi_i(\psi(b)) = \phi_i(b)$ for all $i \in I$

2. $b, e_i b \in B$ かつ $\psi(b), \psi(e_i b) \in C$ であるとき, $\psi(e_i b) = e_i(\psi(b))$ である．
3. $b, f_i b \in B$ かつ $\psi(b), \psi(f_i b) \in C$ であるとき, $4(f_i b) = f_i(\psi(b))$ である．

定義 15. 準同型 ψ が任意の $i \in I$ に対して e_i および f_i と可換であるとき, ψ は strict であるという．また, crystal 準同型 $\psi : B \to C \sqcup \{0\}$ が crystal 同型であるとは, 誘導される写像 $\psi : B \sqcup \{0\} \to C \sqcup \{0\}$ で $\psi(0) = 0$ を満たすものが全単射である場合をいう．

命題 9. $\mathscr{B}, \mathscr{C}, \mathscr{D}$ を crystal とする．このとき, $(\mathscr{B} \otimes \mathscr{C}) \otimes \mathscr{D}$ と $\mathscr{B} \otimes (\mathscr{C} \otimes \mathscr{D})$ は同型になる．

1.6 タブローのクリスタル

この節ではタブローのクリスタルについて説明する．
$[n] = \{1, 2, \cdots, n\}$ とする．k を正整数とし, λ を k の分割とする．形 λ のヤングタブロー全体を $YD(\lambda)$ で表す．形 λ の semistaandard tableu 全体を $\mathscr{B}_\lambda$ とする．

定義 16. 写像 $RR : \mathscr{B}_{(k)} \to \mathbb{B}^{\otimes k}$ を次のように定める．

$$RR\left(\boxed{i_1 \mid i_2 \mid \cdots \mid i_k}\right) = \boxed{i_1} \otimes \boxed{i_2} \otimes \cdots \otimes \boxed{i_k}$$

命題 10. 写像 RR は $\mathscr{B}_{(k)}$ から $\mathbb{B}^{\otimes k}$ への準同型である．

定義 17. 定義した写像 $R \to RR(R)$ を、すべての形 λ の semistaandard tableu$T$ への写像に以下のように拡張する．
この写像も $T \to RR(T)$ と表し, $RR(T)$ を T の各行を順に読み出し, その順序は下から上に向かって行を取るようにする．これを *row reading* という．

例.

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 2 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 2 & 3 \\ \cline{1-3} 3 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array}$$

とする．このとき,

$$\begin{aligned} RR(T) &= RR\left(\boxed{3\ \vert\ 5}\right) \otimes RR\left(\boxed{2\ \vert\ 2\ \vert\ 3}\right) \otimes RR\left(\boxed{2\ \vert\ 2\ \vert\ 2\ \vert\ 3\ \vert\ 4}\right) \\ &= RR\left(\boxed{3}\right) \otimes RR\left(\boxed{5}\right) \otimes RR\left(\boxed{2}\right) \otimes RR\left(\boxed{2}\right) \otimes RR\left(\boxed{3}\right) \otimes RR\left(\boxed{2}\right) \\ &\quad \otimes RR\left(\boxed{2}\right) \otimes RR\left(\boxed{2}\right) \otimes RR\left(\boxed{2}\right) \otimes RR\left(\boxed{3}\right) \otimes RR\left(\boxed{4}\right) \end{aligned}$$

となる．

例. $n = 4, k = 5$ とする．5の分割は, $(5), (4,1), (3,2), (3,1,1), (2,2,1), (2,1,1,1), (1,1,1,1,1)$ である．また, $GL(4)$crystal は,

$$\boxed{1} \xrightarrow{1} \boxed{2} \xrightarrow{2} \boxed{3} \xrightarrow{3} \boxed{4} \xrightarrow{4} \boxed{5}$$

例. $n = 2, k = 3$ とする．3の分割は, $(3), (2,1), (1,1,1)$ である．また, $GL(2)$crystal は,

$$\boxed{1} \xrightarrow{1} \boxed{2}$$

$$\boxed{1} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{1} \xrightarrow{1} \boxed{1} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{2} \xrightarrow{1} \boxed{1} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{2} \xrightarrow{1} \boxed{2} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{2}$$

$$\boxed{2} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{1} \xrightarrow{1} \boxed{2} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{2}$$

$$\boxed{1} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{1} \xrightarrow{1} \boxed{2} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{1}$$

例.

参考文献

[1] Daniel Bump, Anne Schilling「CRYSTAL BASES Representations and Combinatorics」World Scientific, 2017.

2 講義内容要約

なし