

少人数クラス内容報告 (中間まとめ)・ 講義内容要約

アドバイザー：岡田聡一教授

322301150 菊地雄大

1 少人数クラス内容報告 (中間まとめ)

本報告書では, 参考文献 [1] の第 1 章から第 3 章を参考に, 鏡映, ルート系, ワイル群, weight lattice, Kashiwara crystal について説明する. 鏡映, ルート系, weight lattice は Kashiwara crystal の定義において必要な役割を果たす概念である. Kashiwara crystal は, 数理物理学や組合せ論, 数論など様々な分野で使われる概念である. 本報告書では, tableau を用いた crystal を説明する. これは, リー代数に関連する crystal の一例である.

[使用記号について]

\mathbb{R} : 実数全体, \mathbb{Z} : 整数全体を表す. V をユークリッド空間とする. すなわち, 内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を備えた実ベクトル空間とする. 例で使用するユークリッド空間は, すべて標準的な内積により定義されるものとする. また, $e_i \in \mathbb{R}^r$ は第 i 成分が 1 で, それ以外の成分が 0 である標準基底ベクトルを表す.

1.1 鏡映

この節では, 鏡映について定義する. 鏡映とは, ベクトルをある超平面に対して対称に反転させる操作のことである. 鏡映は, 次の節で説明するルート系において必要な役割を果たす.

定義 1. $0 \neq \alpha \in V$ の鏡映 $r_\alpha : V \rightarrow V$ を

$$r_\alpha(x) = x - \langle x, \alpha^\vee \rangle, \quad \left(\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \right)$$

とする.

例. $V = \mathbb{R}^2, \alpha = (1, 0)$ とする.

このとき,

$$\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = \frac{2(1, 0)}{1^2 + 0^2} = (2, 0)$$

任意の $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ に対する鏡映 $r_\alpha(x)$ は次の通りである.

$$\begin{aligned} r_\alpha(x) &= x - \langle x, \alpha^\vee \rangle \alpha \\ &= (x_1, x_2) - \langle (x_1, x_2), (2, 0) \rangle (1, 0) \\ &= (x_1, x_2) - 2x_1(1, 0) \\ &= (-x_1, x_2) \end{aligned}$$

この鏡映は x を y 軸に関して反転させる操作になる.

命題 1 ([3, 5 章 2 節命題 2, 5 章 3 節]). 鏡映 $r_\alpha : V \rightarrow V$ に対して, 次が成り立つ.

1. $r_\alpha^2 = 1$ (ただし, 1 は恒等写像)
2. $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ で, $r_\alpha(\alpha) = -\alpha$
3. V は $\ker(r_\alpha - 1) \oplus \ker(r_\alpha + 1)$ と分解できる. $\ker(r_\alpha + 1)$ は α を基底に持つ 1 次元空間である. $\ker(r_\alpha - 1)$ は, α に垂直な超平面である.
4. $\langle r_\alpha(x), r_\alpha(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

1.2 ルート系とワイル群

この節では, ルート系とワイル群について定義する. ルート系は, 鏡映による対称性を持つベクトルの集合である. ルート系を構成する最も基本的なベクトルの集まりを表す概念として, 単純ルートと呼ばれるものがある. ワイル群とは, ルート系に基づく鏡映によって生成される対称性の群のことである.

定義 2. V 上のルート系 Φ を以下を満たす有限集合とする.

1. $0 \notin \Phi, \emptyset \neq \Phi$
2. $r_\alpha(\Phi) = \Phi$ ($\alpha \in \Phi$)
3. $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$ ($\alpha, \beta \in \Phi$)
4. $\beta \in \Phi$ が $\alpha \in \Phi$ の倍数なら, $\beta = \pm\alpha$

このとき, Φ の元をルートという.

また, $\Phi^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \Phi\}$ の元をコルートという.

例.

1. $V = \mathbb{R}^3$ とする. $\Phi = \{(\pm 1, 0, 0)\}$ はルート系である.

2. $V = \mathbb{R}^2$ とする. $\Phi = \{(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})\}$ はルート系である. このとき, $\Phi^\vee = \{(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})\}$ である.

命題 2 ([3, 6 章 1 節命題 2]).

1. $\Phi = -\Phi$
2. $(\alpha^\vee)^\vee = \alpha$
3. Φ^\vee もルート系になる.

定義 3.

1. Φ が可約であるとは, $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ で, 任意の $x \in \Phi_1, y \in \Phi_2$ で, $\langle x, y \rangle = 0$ となるルート系 Φ_1, Φ_2 が存在するときをいう.
2. Φ が既約 (または, 単純) であるとは, Φ が可約ではないときをいう.
3. Φ が simply-laced であるとは, 全てのルートの長さが同じであるときをいう.

例.

1. $V = \mathbb{R}^2$ とする. $\Phi = \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$ は可約なルート系である. 実際, $\Phi_1 = \{(\pm 1, 0)\}$, $\Phi_2 = \{(0, \pm 1)\}$ と分けられる.
2. $V = \mathbb{R}^2$ とする. $\Phi = \{(\pm\sqrt{2}, 0), (0, \pm\sqrt{2}), (\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})\}$ は $(\sqrt{2}, 0)$ の長さが $\sqrt{2}$, $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ の長さが 2 であるから, simply-laced でないルート系になる.

定義 4. Φ と交わらない原点を通る超平面を固定する.

1. この超平面にある 1 つの側にあるルートを正ルート, もう 1 つの側にあるルートを負ルートとよぶ.
2. 正ルート全体を Φ^+ , 負ルート全体を Φ^- で表す.
3. $\alpha \in \Phi^+$ が単純であるとは, α が他の正ルートの和で表せないときをいう.

例. $V = \mathbb{R}^2$ とする. $\Phi = \{(\pm\sqrt{2}, 0), (0, \pm\sqrt{2}), (\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})\}$ とする.

例えば, $\Phi^+ = \{(\sqrt{2}, 0), (0, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$,

$\Phi^- = \{(-\sqrt{2}, 0), (0, -\sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})\}$ と分けられる.

このとき, 単純な正ルート全体は, $\{(\sqrt{2}, 0), (0, \sqrt{2})\}$ や $\{(\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$ などとして, 取れる.

注意. 正ルートや単純な正ルートの定め方は, 一意に定まらない. 一つ固定して考える.

命題 3 ([1, 命題 2.1], [2, 命題 20.1]). Σ を単純な正ルートのなす集合とする.

1. Σ の元は, 線型独立.
2. $\alpha \in \Sigma, \beta \in \Phi^+$ なら, $\alpha = \beta$ または $r_\alpha(\beta) \in \Phi^+$
3. $\alpha, \beta \in \Sigma$ で, $\alpha \neq \beta$ なら, $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$
4. 任意の $\alpha \in \Phi^+$ は

$$\alpha = \sum_{\beta \in \Sigma} n_\beta \beta \quad (n_\beta \geq 0, n_\beta \in \mathbb{Z})$$

定義 5. $I = \{1, 2, \dots, r\}$ を添字集合とし, $\Sigma = \{\alpha_i \mid i \in I\}$ とする.

$i \in I$ に対し, この鏡映を s_i で表す. これを単純鏡映という.

命題 4 ([1, 命題 2.2]). $i \in I, \alpha \in \Phi^+$ とする. このとき, $\alpha = \alpha_i$ か $s_i(\alpha) \in \Phi^+$ のいずれかである. よって, s_i は $\Phi^+ \setminus \{\alpha_i\}$ 上を置換する.

定義 6. $W = \langle r_\alpha \mid \alpha \in \Phi \rangle$ を Φ のワイル群という.

命題 5 ([1, 命題 2.3]). $\{s_i \mid i \in I\}$ は W の生成系である.

例. $V = \mathbb{R}^2, \Phi = \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$ とする.

$r_{(1,0)}(x, y) = (-x, y), r_{(0,1)}(x, y) = (x, -y)$ である. $r_{(1,0)} \circ r_{(0,1)}(x, y) = r_{(0,1)} \circ r_{(1,0)}(x, y) = (-x, -y)$ となる. これらの元は全て位数 2 である. よって,

$$W = \{1, r_{(1,0)}, r_{(0,1)}, r_{(1,0)} \circ r_{(0,1)}\}$$

であり, $C_2 \times C_2$ (ただし, C_2 は位数 2 の巡回群) に群同型である.

1.3 weight lattice

この節では, weight lattice について定義する. lattice とは, 自由 \mathbb{Z} 加群のことである. weight lattice とは, ルート系を基にした広がりを持つ空間である.

定義 7. Φ を V におけるルート系とする.

weight lattice とは, V を生成する lattice Λ で以下を満たすときをいう.

1. $\Phi \subset \Lambda$
2. 任意の $\lambda \in \Lambda, \alpha \in \Phi$ で, $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$

この元を weight という.

定義 8.

1. weight lattice が半単純であるとは, Φ が V を張るときをいう.
2. root lattice Λ_{root} を Φ によって張られた lattice とする.

例.

1. $V = \mathbb{R}^3$, $\Phi = \{(\pm 1, 0, 0)\}$ とする. $\Lambda = \mathbb{Z}^3$ は weight lattice になる. Φ は V を張らないので, 半単純ではない. また, $\Lambda_{root} = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{Z}\}$ である.
2. $V = \mathbb{R}^2$, $\Phi = \{(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})\}$ とする. $\Lambda = \{(\alpha\sqrt{2}, \beta\sqrt{2}) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\}$ は weight lattice になる. Λ は半単純である. また, $\Lambda_{root} = \{(\alpha\sqrt{2}, \beta\sqrt{2}) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Z}, \text{かつ } \alpha, \beta \text{ は同じ偶奇性を持つ}\}$ である.

定義 9.

1. Λ 上に順序 $\lambda \geq \mu$ を

$$\lambda - \mu = \sum_{i \in I} c_i \alpha_i \quad (c_i \geq 0)$$

と定める.

2. $\lambda^+ = \{\lambda \mid \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \geq 0 \quad (i \in I)\}$ とし, この元を dominant weight という.
3. λ が $\langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle > 0 \quad (i \in I)$ ならば, strictly dominant weight という.
4. $\bar{\omega}_i$ が fundamental weight であるとは, $\langle \bar{\omega}_i, \alpha_j^\vee \rangle = \delta_{i,j}$ であるときをいう. (ただし, $\delta_{i,j}$ はクロネッカーのデルタを表す.)

例. $V = \mathbb{R}^2$, $\Phi = \{(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})\}$, $\Sigma = \{(\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\sqrt{2})\}$, $\Lambda = \{(\alpha\sqrt{2}, \beta\sqrt{2}) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\}$ とする.

1. $(12\sqrt{2}, -2\sqrt{2}) \geq (4\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ である. 実際, $(12\sqrt{2}, -2\sqrt{2}) - (4\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2}, \sqrt{2}) + 6(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ である.
2. $(\alpha\sqrt{2}, \beta\sqrt{2})$ (ただし, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$) が dominant weight となる α, β の必要十分条件を考える. まず, $(\sqrt{2}, \sqrt{2})^\vee = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})^\vee = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ であるから, $\langle (\alpha\sqrt{2}, \beta\sqrt{2}), (\sqrt{2}, \sqrt{2})^\vee \rangle = \alpha + \beta \geq 0$, $\langle (\alpha\sqrt{2}, \beta\sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\sqrt{2})^\vee \rangle = \alpha - \beta \geq 0$ である. よって, $\alpha \geq |\beta|$ であることがわかる.
3. $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$, $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$ は fundamental weight である. この例では, fundamental weight が Λ の元でない.

注意. Λ が半単純のとき, fundamental weight が生成する lattice を Λ_{sc} で表す. 上記の例では,

$$\Lambda_{sc} \supsetneq \Lambda \supsetneq \Lambda_{root}$$

である.

以下の例は, 重要である.

例. $V = \mathbb{R}^{r+1}$ とする. ルート系を $\Phi = \{e_i - e_j \mid i \neq j\}$ とし, $\Phi^+ = \{e_i - e_j \mid i < j\}$ とする. これは既約で, simply-laced である. このとき, 単純な正ルート全体は $\Sigma = \{\alpha_i = e_i - e_{i+1} \mid 1 \leq i \leq r\}$ となる.

weight lattice は $\Lambda = \mathbb{Z}^{r+1}$ とする. これは半単純ではない.

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r+1})$ が dominant であることと $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{r+1}$ が成り立つことは必要十分である. また, fundamental weight は $\bar{\omega}_i = e_1 + e_2 + \dots + e_i$ である.

この Λ, Φ を $GL(r+1)$ weight lattice, ルート系という. これらを Cartan 型 A_r の $GL(r+1)$ バージョンであるという.

1.4 Kashiwara crystal

この節では, Kashiwara crystal について定義する. Kashiwara crystal を通じて, リー代数の表現を離散的な結晶構造として扱うことができる. そのため, 表現論を視覚的かつ組合せ論的に解析するためのツールとして, Kashiwara crystal は役に立つ.

Kashiwara crystal は, crystal graph という図式的な表現を通じて, 視覚化をすることができる. 以降, 単に crystal と言えば, Kashiwara crystal を指すものとする.

$\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ に $-\infty < n$ ($n \in \mathbb{Z}$) と順序を入れ, $-\infty + n = -\infty$ ($n \in \mathbb{Z}$) と定義する. また, $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ とする.

定義 10. 添字集合 I をともなったルート系 Φ と weight lattice Λ を固定する. タイプ Φ の Kashiwara crystal は次の写像をともなった空でない集合 \mathcal{B} である.

1. $e_i, f_i : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \sqcup \{0\}$
2. $\epsilon_i, \phi_i : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{Z} \sqcup \{-\infty\}$
3. $\text{wt} : \mathcal{B} \rightarrow \Lambda$

で, 次の (A1), (A2) を満たす.

(A1) 任意の $x, y \in \mathcal{B}$ に対し, $e_i(x) = y$ であることと, $f_i(y) = x$ であることは必要十分条件である. このとき,

$$\text{wt}(y) = \text{wt}(x) + \alpha_i$$

$$\epsilon(y) = \epsilon(x) - 1$$

$$\phi_i(y) = \phi_i(x) + 1$$

が成り立つ.

(A2) $\phi_i(x) = \langle \text{wt}(x), \alpha_i^\vee \rangle + \epsilon_i(x)$ が成り立つ.

特に, $\Phi_i(x) = -\infty$ なら, $\epsilon_i(x) = -\infty$ である. このとき, $e_i(x) = f_i(x) = 0$ を仮定する.

定義 11. 上記の定義において,

1. crystal \mathcal{B} の元の個数を次数という.
2. 写像 wt を weight 写像という.
3. e_i, f_i を kashiwara(または, cryastal) 作用素という.
4. ϕ_i, ϵ_i は string length と呼ばれることもある.
5. ϕ_i, ϵ_i が $-\infty$ の値を取らないとき, \mathcal{B} は有限なタイプであるという.
6. $\phi_i(x) = \max\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid f_i^k(x) \neq 0\}$, $\epsilon_i(x) = \max\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid e_i^k(x) \neq 0\}$ が成り立つとき, \mathcal{B} は seminomarl という.
7. ϕ_i, ϵ_i が非負の値を持つとき, \mathcal{B} は upper seminomarl であるという.
8. 任意の $i \in I$ で $e_i(u) = 0$ となる元 $u \in \mathcal{B}$ を highest weight 元という. このとき, $\text{wt}(u)$ を highest weight という.

命題 6 ([1, 補題 2.14]). ルート系が半単純で, \mathcal{B} が有限なタイプの crystal と仮定する. このとき,

$$\text{wt}(x) = \sum_{i \in I} (\varphi_i(x) - \epsilon_i(x)) \bar{\omega}_i$$

が成り立つ.

命題 7 ([1, 命題 2.16]). \mathcal{B} を seminomaral な crystal とする. u を highest weight 元とする. このとき, $\text{wt}(u)$ は dominant である.

命題 8 ([1, 命題 2.17]). \mathcal{B} を seminomaral な crystal とする. $\mu, \nu \in \Lambda$ をワイル群のある元 w で, $w(\mu) = \nu$ となる元とする. このとき,

$$\{u \mid \text{wt}(u) = \mu\} = \{u \mid \text{wt}(u) = \nu\}$$

が成り立つ.

定義 12.

1. \mathcal{B} を crystal とする. このとき, \mathcal{B} 上に頂点と $i \in I$ でラベル付けられた辺を持つ有向グラフを対応できる. $f_i(x) = y$ のとき, $x \xrightarrow{i} y$ と書く. これを \mathcal{B} の crystal graph という.
2. \mathcal{B} 上に, x と y が $y = f_i(x)$ または $x = e_i(y)$ を満たすとき, $x \sim y$ という同値関係を定める.

例. タイプ A_r には, 次の crystal graph を持つ標準的な crystal がある.

$$\boxed{1} \xrightarrow{1} \boxed{2} \xrightarrow{2} \cdots \xrightarrow{r} \boxed{r}$$

$GL(r+1)$ weight lattice を使い, $\text{wt}(\boxed{i}) = e_i$ と定める. さらに, seminomarl であるように φ_i, ε_i を定める. これを $\mathcal{B}_{(1)}$ や \mathbb{B} で表す.

例. $\Lambda = \mathbb{Z}^n, n = r+1$ とする. $\mathcal{B}_{(k)}$ を形 (k) で, 各成分が n 以下の semistandard tableau 全体とする. その元を $R = \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix}$ (ただし, $j_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_k \in [n]$) で表す.

$\text{wt}(R) = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ (ただし, μ_i は R の i の数) とする. さらに, $\varphi_i(R)$ を成分 j_1, j_2, \dots, j_k 上の i の数, $\varepsilon_i(R)$ を成分 j_1, j_2, \dots, j_k 上の $i+1$ の数とする.

また, $\varphi_i(R) > 0$ なら, $f_i(R)$ を右端の i を $i+1$ に変えて得られる tableau, そうでないなら, $f_i(R) = 0$ とする. 同様に, $\varepsilon_i(R) > 0$ なら, $e_i(R)$ を左端の $i+1$ を i に変えて得られる tableau, そうでないなら, $e_i(R) = 0$ とする.

これにより, $\mathcal{B}_{(k)}$ は seminomarl な crystal になる.

例. $\Lambda = \mathbb{Z}^n, n = r+1$ とする. $\mathcal{B}_{(1^k)}$ を形 (1^k) で, 各成分が n 以下の semistandard tableau 全体とする. その元を $C = {}^t \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix}$ (ただし, $j_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_k \in [n]$, t は転置) で表す.

$\varphi_i(C)$ を C の成分に i があり, $i+1$ がないとき, 1, それ以外は 0 とする. $\varepsilon_i(C)$ を C に $i+1$ があり, i がないときに 1, それ以外は 0 とする.

wt, f_i, e_i は, 上記の行の場合と同様に定めれば, $\mathcal{B}_{(1^k)}$ は seminomarl な $GL(n)$ crystal になる.

1.5 crystal のテンソル積と準同型

この節では, Kashiwara crystal のテンソル積と準同型について定義する. テンソル積を用いると, 複数の crystal を組み合わせることで新たな crystal を作ることができる. 準同型は, 2 つの crystal の関係性を理解するために役に立つ.

定義 13. \mathcal{B}, \mathcal{C} を同じルート系 Φ の crystal とする. $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ を次のように定める.

1. $\text{wt}(x \otimes y) = \text{wt}(x) + \text{wt}(y)$
2. $f_i(x \otimes y) = \begin{cases} f_i(x) \otimes y & \text{if } \varphi_i(y) \leq \varepsilon_i(x) \\ x \otimes f_i(y) & \text{if } \varphi_i(y) > \varepsilon_i(x) \end{cases}$
3. $e_i(x \otimes y) = \begin{cases} e_i(x) \otimes y & \text{if } \varphi_i(y) < \varepsilon_i(x) \\ x \otimes e_i(y) & \text{if } \varphi_i(y) \geq \varepsilon_i(x) \end{cases}$
4. $x \otimes 0 = 0 \otimes x = 0$
5. $\varphi_i(x \otimes y) = \varphi_i(x) + \max\{\varphi_i(x), \varphi(y) + \langle \text{wt}(x), \alpha_i^\vee \rangle\}$
6. $\varepsilon_i(x \otimes y) = \varepsilon_i(y) + \max\{\varepsilon_i(y), \varepsilon(x) - \langle \text{wt}(y), \alpha_i^\vee \rangle\}$

命題 9 ([1, 命題 2.29]). $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ は crystal である. さらに, \mathcal{B}, \mathcal{C} が seminomarl なら, $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ も seminomarl である.

定義 14. \mathcal{B} と \mathcal{C} をルート系 Φ , 添字集合 I を持つ crystal とする.

写像 $\psi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C} \sqcup \{0\}$ が crystal 準同型であるとは, 次を満たすときをいう.

1. $b \in B$ かつ $\psi(b) \in C$ であるとき,

- a $\text{wt}(\psi(b)) = \text{wt}(b)$
- b $\epsilon_i(\psi(b)) = \epsilon_i(b)$ for all $i \in I$
- c $\phi_i(\psi(b)) = \phi_i(b)$ for all $i \in I$

2. $b, e_i b \in B$ かつ $\psi(b), \psi(e_i b) \in C$ であるとき, $\psi(e_i b) = e_i(\psi(b))$ である.
3. $b, f_i b \in B$ かつ $\psi(b), \psi(f_i b) \in C$ であるとき, $\psi(f_i b) = f_i(\psi(b))$ である.

定義 15. 準同型 ψ が任意の $i \in I$ に対して e_i および f_i と可換であるとき, ψ は strict であるという. また, crystal 準同型 $\psi : B \rightarrow C \sqcup \{0\}$ が crystal 同型であるとは, 誘導される写像 $\psi : B \sqcup \{0\} \rightarrow C \sqcup \{0\}$ で $\psi(0) = 0$ を満たすものが全単射である場合をいう.

命題 10 ([1, 命題 2.32]). $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ を crystal とする. このとき, $(\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}) \otimes \mathcal{D}$ と $\mathcal{B} \otimes (\mathcal{C} \otimes \mathcal{D})$ は同型になる.

1.6 tableau の crystal

この節では tableau の crystal について説明する. 形 (k) や (1^k) の semistandard tableau の crystal は 1.4 節の最後の 2 つの例で述べた. より一般に, semistandard tableau の crystal について, この節では述べる.

tableau の crystal は, 組合せ論における Young tableau と Kashiwara crystal における構造を結びつけたものである. Young tableau の組合せ論的性質を Kashiwara crystal の視点から捉えることで, リー代数の表現論と関連付けることができる.

k を正整数とし, λ を k の分割とする. 形 λ で, 各成分が n 以下の semistandard tableau 全体を \mathcal{B}_λ とする. (n は固定して考える.)

定義 16. 写像 $RR: \mathcal{B}_{(k)} \rightarrow \mathbb{B}^{\otimes k}$ を次のように定める.

$$RR\left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ \hline \end{array}\right) = \boxed{i_1} \otimes \boxed{i_2} \otimes \cdots \otimes \boxed{i_k}$$

命題 11 ([1, 命題 3.1]). 写像 RR は $\mathcal{B}_{(k)}$ から $\mathbb{B}^{\otimes k}$ への準同型である.

定義 17. 定義した写像 $R \rightarrow RR(R)$ を, すべての形 λ の semistandard tableau T への写像に以下のように拡張する.

この写像も $T \rightarrow RR(T)$ と表し, $RR(T)$ を T の各行を順に読み出し, その順序は下から上に向かって行を取るようにする. これを *row reading* という.

例. $T = {}^t \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ \hline \end{array}$ とする. このとき,

$$RR(T) = \boxed{i_k} \otimes \cdots \otimes \boxed{i_2} \otimes \boxed{i_1}$$

例.

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 2 & 3 & & \\ \hline 3 & 5 & & & \\ \hline \end{array}$$

とする。このとき,

$$\begin{aligned}
RR(T) &= RR\left(\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline \end{array}\right) \otimes RR\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}\right) \otimes RR\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}\right) \\
&= RR\left(\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array}\right) \otimes RR\left(\begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array}\right) \otimes RR\left(\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array}\right) \otimes RR\left(\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array}\right) \otimes RR\left(\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array}\right) \otimes RR\left(\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array}\right) \\
&\quad \otimes RR\left(\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array}\right) \otimes RR\left(\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array}\right) \otimes RR\left(\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array}\right) \otimes RR\left(\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array}\right) \otimes RR\left(\begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array}\right) \\
&= \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} \otimes \\
&\quad \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array}
\end{aligned}$$

となる。

定義 18. i 行に i の成分が入る形 λ の partial tableau を Yamanouchi tableau といい, u_λ で表す。

定理 12 ([1, 定理 3.2]). λ を長さは n 以下の k の分割とする。このとき, $RR(\mathcal{B}_\lambda)$ は $\mathbb{B}^{\otimes k}$ の連結成分になる, さらに, 一意的な highest weight 元 $RR(u_\lambda)$ を持つ。

例. $n = 2, k = 3$ とする。長さ 2 以下の 3 の分割は, $(3), (2, 1)$ である。また, $GL(2)$ crystal \mathbb{B} は,

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1} \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

である。 $GL(2)$ crystal $\mathbb{B}^{\otimes 3}$ は不連結で, 以下の 3 つの crystal graph を持つ。

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1} \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1} \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

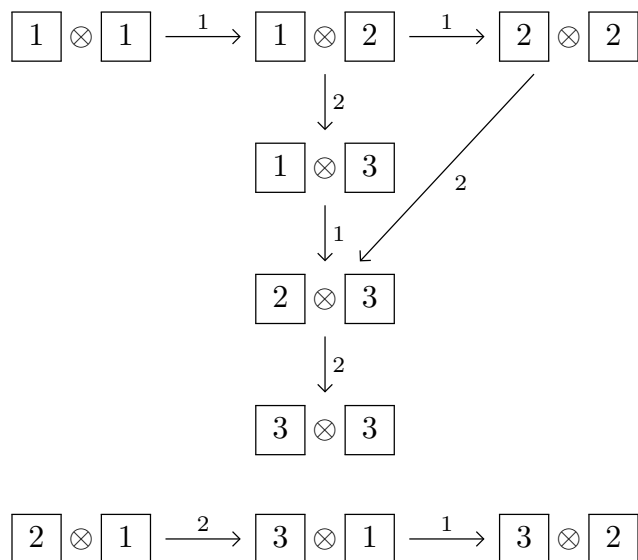
$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1} \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

1 つ目は $\mathcal{B}_{(3)}$, 2 つ目と 3 つ目は $\mathcal{B}_{(2,1)}$ に同型である。

例. $n = 3, k = 2$ とする。長さ 3 以下の 2 の分割は, $(2), (1, 1)$ である。また, $GL(3)$ crystal \mathbb{B} は,

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1} \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{2} \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array}$$

である. $GL(3)$ crystal $\mathbb{B}^{\otimes 2}$ は不連結で, 以下の 2 つの crystal graph を持つ.



1 つ目は $\mathcal{B}_{(2)}$, 2 つ目は $\mathcal{B}_{(1,1)}$ に同型である.

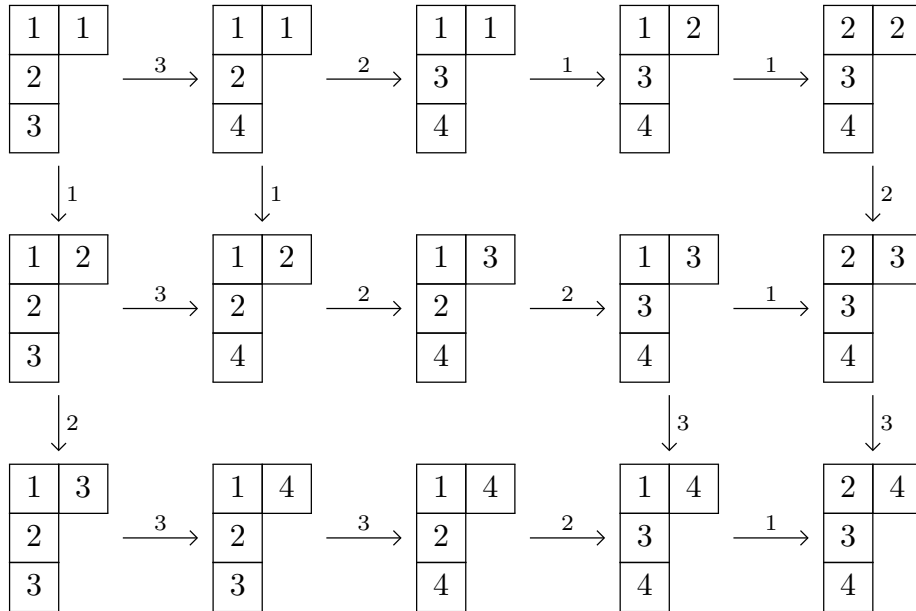
注意.

1. $\mathbb{B}^{\otimes k}$ は, \mathcal{B}_{λ} ($\lambda \vdash k$) の直和に同型であることが知られている.
2. $\mathbb{B}^{\otimes k}$ の元の f_i の値を求める道具として, signature rule がある. これを使うと, テンソル積の定義に戻らなくとも, 直感的に値を求めることができる. 参考文献 [1] の 2.4 節を参照されたい.

例. $k = 4$ とする. $(2, 1, 1)$ は 4 の分割である. $GL(3)$ crystal $\mathcal{B}_{(2,1,1)}$ は, 以下の 1 つの tableau からなる.

1	1
2	
3	

一方, $GL(4)$ crystal $\mathcal{B}_{(2,1,1)}$ は, 以下の crystal graph を持つ.



定理 12 から, \mathcal{B}_λ は連結である.

参考文献

- [1] Daniel Bump, Anne Schilling 「CRYSTAL BASES Representations and Combinatorics」 World Scientific, 2017.
- [2] Daniel Bump 「Lie Groups」 Springer, 2013.
- [3] ニコラスブルバキ, 杉浦光夫 「ブルバキ数学原論リー群とリー環 3」 東京書籍, 1986.

2 講義内容要約

なし