关于随机游走的几个问题

标准离散随机游走问题

1. 你有一只股票，当前价格为0，假设接下来的每一天，它以等概率上涨1元或下跌1元，假定股票价格可以为负，请问T天末预期你亏损或盈利多少钱(实际上是求$E(|P_T|)$)?同时求解$E(P_T)$。
2. 在第1问中，假定初始价格大于0，再次求解。
3. 在第1问中，假设初始价格大于0，且股票价格不能为负，也就是说，如果股票价格到达0，那么下一次它一定上涨，再次求解。

解答

1. 记$P_T=X_1+X_2+\cdots+X_T$，其中X_i为一二值变量，以0.5的概率取1或-1，由于对称性，显然$E(P_T)=0$。同时可知，$(X_1,\cdots,X_T)$的所有可能情况为2^T种，它们的和的最大或最小值为T。在T个变量中，假如其中取正值的为X^+个，取负值的有X^-个，那么$X^+ + X^- = T$，假如T为偶数，那么$X^+ - X^-$必为偶数（两者要么同奇，要么同偶，则差必为偶数），若T为奇数，那么$X^+ - X^-$也为奇数。所以需要分情况讨论，不失一般性，假定$T>0$。
   i. 假如$T=2n$，则P_T所有可能的取值为$2n+1$种，假如取值为$2k$，那么X^+,X^-必然分别为$n-k,n+k$，由于对称性我们只需考虑P_T大于0的情况，有

   $$E(|P_T|)=2\sum_{k=1}^{n}C_{2n}^{n-k}\frac{1}{2^{2n}}\cdot 2k=\frac{1}{2^{2n-2}}\frac{(2n-1)!}{((n-1!)^2)}$$

   ii. 假如$T=2n+1$，那么同理可得：

   $$E(|P_T|)=2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{2n+1}}C_{2n+1}^{n-k}(2k+1)=\frac{1}{2^{2n}}\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}$$

2.

更加真实的例子

1. 你有一支股票，当前价格为P_0，从以往的数据中进行分析之后，你发现它的每日对数收益率服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，请问T天后预期它的价格是多少?其99%置信区间又是多少?
2. 对于第一问，假如该股票价格的对数收益率服从任意分布$Dist(\theta)$，θ表示参数，请编写相应程序进行计算或模拟。

解答

1. 首先记$X_t=\ln(\frac{P_t}{P_{t-1}})\backsim N(\mu,\sigma^2)$，记$X=\sum_{k=1}^{T}X_k=\ln(\frac{P_t}{P_0})$，由于正态分布的和仍是正态分布，所以$X\backsim N(T\mu,T\sigma^2)$，即预期对数收益率为$T\mu$，同时有$T\mu=\ln\left(\frac{P_t}{P_0}\right)$，解得$P_t=P_0e^{T\mu}$。

但这种解法实际上有一个问题，我们的预期收益率

$$E(X)=E\left(\ln\left(\frac{P_t}{P_0}\right)\right)=T\mu$$

即$E(\ln(P_t))=T\mu+\ln(P_0)$，但由Jensen定理可知，由于$\ln(\cdot)$是一个Concave函数，那么有

$$E(\ln(P_t))\leq\ln(E(P_t))$$

所以使用刚开始的错误方法会低估股票价格。现在令$Y=\frac{P_T}{P_0}$，则$X=\ln(Y)$，同时

$$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(e^X\leq y)=F_X(\ln(y))$$

$$f_Y(y)=f_X(\ln(y))\frac{1}{y}$$

$$E(Y)=\int_0^\infty yf_Y(y)dy=\int_0^\infty f_X(\ln(y))dy=\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{2T\pi}\sigma}e^{-\frac{(\ln(y)-n\mu)^2}{2T\sigma^2}}dy=e^{\frac{2T\mu+T\sigma^2}{2}}$$

所以$E(P_T)=P_0e^{\frac{2T\mu+T\sigma^2}{2}}=e^{T\mu+\frac{T\sigma^2}{2}}$，可以看出它要比错误方法计算出的结果更大。

2.

对于所有以上的问题，如果认为无法给出解析解，请使用计算机编程计算。