Лабораторная работа №3 Комплексные числа

(по заявкам трудящихся нумерация начата с начала ;)

Подсказки и намеки ;)

Остальное – по F1 в справке Maple.

Пример 31.2. Система Maple работает с комплексными числами столь же легко, как и с действительными. Для мнимой единицы в Maple зарезервировано обозначение I.

> z := 2 + 3 * I; w := −5 + 7 * I;

$$z := 2 + 3I$$
$$w := -5 + 7I$$

> [z + w, z − w, z * w, w/z, z^5];

$$\left[-3 + 10I,\ 7 - 4I,\ -31 - I,\ \frac{11}{13} + \frac{29}{13}I,\ 122 - 597I\right]$$

> (1 + I)^103;

$$2251799813685248 - 2251799813685248I$$

Maple знает команды вычисления действительной и мнимой части, сопряженного числа:

> [Re(z), Im(w), conjugate(w), w * conjugate(w)];

$$[2,\ 7,\ -5 - 7I,\ 74]$$

При вычислениях с символьными выражениями понадобится команда evalc (вычислить в поле $\mathbb{C}$):

> evalc((a + b * I)^5);

$$a^5 - 10a^3b^2 + 5ab^4 + (5a^4b - 10a^2b^3 + b^5)I$$

Главное значение квадратного корня

> sqrt(−32 − 126 * I), sqrt(−32 + 126 * I), sqrt(I), sqrt(−1);

$$7-9I,\ 7+9I,\ \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{2},\ I$$

Оба значения корня можно получить с помощью команды solve:

> solve(z^2 = −32 − 126I);

$$7-9I,\ -7+9I$$

Решение уравнений

> eq := (2 + I) * z^2 − (7 + I) * z + 15 + 10 * I = 0;

$$eq := (2+I)z^2-(7+I)z+15+10I=0$$

> solve(eq);

$$2-3I,\ 1+2I$$

Можно разложить левую часть (lhs) уравнения *eq* на множители:

> factor(lhs(eq));

$$(2+I)(z-2+3I)(z-1-2I)$$

Пример 32.3. В системе Maple предусмотрены команды abs и argument для вычисления модуля и главного значения аргумента комплексного числа, а также команда polar для перехода к "полярному представлению", которое, по сути, совпадает с тригонометрической формой, но выглядит иначе (см. образцы вычислений ниже).

> z := −sqrt(3) + I;

$$z := -\sqrt{3}+I$$

> zm := abs(z); za := argument(z); zp := polar(z);

$$zm := 2$$

$$za := \frac{5\pi}{6}$$

$$zp = \mathrm{polar}\left(2, \frac{5\pi}{6}\right)$$

Обратный переход от полярного представления к алгебраической форме комплексного числа осуществляется уже известной командой evalc .

Перерешаем теперь с помощью Maple пример 32.2.

```
> w := 1 + sqrt(3) / 2 + I / 2;
```

$$w := \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{1}{2} I$$

```
> wp := simplify( polar(w) );
```

$$wp := \operatorname{polar}\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \arctan\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)\right)$$

Если бы мы не применили универсальную команду simplify (упростить), то в ответе получили бы "трехэтажные" формулы. Но и полученный ответ не совсем нас удовлетворяет: вручную было найдено точное значение аргумента $\arg w = \pi/12$. К сожалению, Maple знает несколько меньше тригонометрических формул, чем требуется знать выпускнику средней школы. Но зато он легко обучаем!

Мы могли бы продолжить исследование тем же приемом, что и при ручном счете, но с использованием Maple:

```
> wa := argument(w): simplify( expand ( sin( 2 * wa) ) );
```

$$\frac{1}{2}$$

(Команда expand "раскрывает" синус двойного угла по известной формуле, затем результат упрощается.)

Получается: $2\ wa = \arcsin(1/2) = \pi/6$, и следовательно, $wa = \pi/12$.

Можно пойти по другому пути — приближенно ("с плавающей точкой") вычислить (evalf) частное π/wa и узнать, во сколько раз найденный угол меньше π:

```
> evalf( Pi / wa);
```

$$12.00000000$$

Замечание 32.13. В системе Maple предусмотрена команда

> root [n] (w);

вычисляющая главное значение корня заданной степени n из заданного комплексного числа w:

> root [3] (sqrt(2) * (1 + I)); z[0] := evalc(%);

$$((1+I)\sqrt{2})^{\left(\frac{1}{3}\right)}$$

$$z_0 := 2^{\left(\frac{1}{3}\right)}\cos\frac{\pi}{12} + 2^{\left(\frac{1}{3}\right)}\sin\frac{\pi}{12}\ I$$

Можно ли заставить Maple точно вычислить косинус (синус, тангенс) половинного угла? Можно. Например так:

1) определим для $t \in (0, \pi/2)$ *функции пользователя*, вычисляющие тригонометрические функции угла t, представляя этот угол как половинный (по отношению к углу $2t$, значения тригонометрических функций для которого Maple знает):

> coshalf := t -> sqrt((1 + cos(2 * t) / 2);
> sinhalf := t -> sqrt((1 − cos(2 * t) / 2);

$$coshalf := t \longrightarrow \sqrt{\frac{1+\cos 2t}{2}}$$

$$sinhalf := t \longrightarrow \sqrt{\frac{1-\cos 2t}{2}}$$

2) теперь можно вычислить, скажем, косинус угла $\pi/12$:

> coshalf(Pi / 12);

$$\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4},$$

что совпадает со значением, приведенным в (32.14);

3) но можно сразу применить "подстановку" subs, заменяя в выражении для z_0 функции cos и sin на coshalf и sinhalf соответственно:

> eval(subs({ cos=coshalf, sin=sinhalf }, z[0]));

$$2^{\left(\frac{1}{3}\right)}\left(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) + 2^{\left(\frac{1}{3}\right)}\left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\ I\,,$$

что совпадает с выражением для z, полученным выше вручную.

Есть возможность найти сразу все значения корня, применив команду solve. Общий ответ (в данном примере) будет опять же содержать синусы и косинусы угла $\pi/12$. Можно попытаться собрать все решения в список, применить к списку команду evalc, а затем описанную выше замену, после чего упростить ответ. (Попробуйте сделать это сами; введите приводимые ниже команды и проследите за выводимыми результатами.)

```
> sol := solve(z ^ 3 = sqrt(2) * (1+I));
> map( evalc, [ sol ] );
> eval( subs({ cos=coshalf, sin=sinhalf }, %) );
> map( simplify, % );
```

Поэкспериментируйте аналогичным образом с уравнением из следующего примера ($z^8 = -2$).

Замечание 32.14. Все рисунки к настоящему параграфу построены с помощью графических средств системы Maple. В данном пособии вряд ли уместно рассказывать о Maple-графике. (Хотя для любознательного студента-компьютерщика самостоятельное освоение этого материала, несомненно, будет и интересным, и очень полезным.)

Задания

(1) Дано комплексное число z

1. Записать z в показательной, тригонометрической и алгебраической форме, изобразить.
2. Записать $u=z^n$ (где $n=(-1)^N(N+4)$, N – номер варианта) в показательной, тригонометрической и алгебраической форме, изобразить.
3. Записать в показательной и тригонометрической форме каждое значение w_k (k=0..m-1) корня m=10, изобразить на комплексной плоскости вместе с числом z.

№	z	№	z	№	z	№	z
1	$\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{3}}$	2	$\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{3}}$	3	$\frac{2-5i}{3+7i}$	4	$\frac{1-2i\sqrt{3}}{3+7i\sqrt{3}}$
5	$\frac{-4-4i\sqrt{3}}{1-i}$	6	$\frac{-4\sqrt{3}-4i}{1-i}$	7	$\frac{\sqrt{5}+i\sqrt{15}}{\sqrt{6}-i\sqrt{18}}$	8	$\frac{\sqrt{5}+i\sqrt{20}}{\sqrt{2}-i\sqrt{18}}$
9	$\frac{3+3i\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)}$	10	$\frac{3+3i}{\sqrt{3}+i}$	13	$\frac{-1-i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$	14	$\frac{-1-i}{\sqrt{3}+i}$
11	$\frac{-3-3i}{(\sqrt{3}+1)-i(\sqrt{3}-1)}$	12	$\frac{-\sqrt{3}-3i}{1-i\sqrt{3}}$	15	$\frac{4+3i}{6-8i}$	16	$\frac{5+i\sqrt{3}}{9-i\sqrt{3}}$
17	$\frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i}$	18	$\frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i}$	19	$\frac{\sqrt{18}-i\sqrt{6}}{\sqrt{15}+i\sqrt{5}}$	20	$\frac{\sqrt{18}-i\sqrt{12}}{\sqrt{10}+i\sqrt{15}}$
21	$\frac{-3+i\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)}$	22	$\frac{-\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$	25	$\frac{-4\sqrt{3}-4i}{1+i\sqrt{3}}$	26	$\frac{-4-4i}{1+i\sqrt{3}}$
23	$\frac{\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+1)-i(\sqrt{3}-1)}$	24	$\frac{\sqrt{3}+i}{3\sqrt{3}-3i}$	27	$\frac{10+2i}{2+3i}$	28	$\frac{9+i\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}}$
29	$\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{6}}{3+3i}$	30	$\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{3+3i}$				

(2) Изобразить на комплексной

1. $D = \{z : |z - 4| \le 5, \quad |z + i| > 2\}.$
2. $D = \{z : |z - 1 - i| > \sqrt{2}, \quad |z - 2 - 2i| \le 2\sqrt{2}\}.$
3. $D = \{z : 2 \le |z + 2| < 3, \quad -\pi/2 < z \le \pi/2\}.$
4. $D = \{z : 1 < |z + 1 - 2i| \le 3, \quad \pi \le z < 2\pi\}.$
5. $D = \{z : 1 \le |z + 3 - 2i| < 4, \quad |z| \le 3\pi/4\}.$
6. $D = \{z : 2 < |z + 2 + 4i| \le 5, \quad |z| > \pi/2\}.$
7. $D = \{z : |z| > 3 + z, \quad \pi/2 \le z < 2\pi/3\}.$
8. $D = \{z : |z + 2 + 3i| < 3, \quad \pi \le z \le 3\pi/2\}.$
9. $D = \{z : |z| \le 5, \quad |3\pi/2 - z| < \pi/3\}.$
10. $D = \{z : |z| < 6 - z, \quad |z| \le 4\}.$
11. $D = \{z : |z| \ge 3 - z, \quad |z| > 4\}.$
12. $D = \{z : |z| > 3, |z - 4| \le 2, \quad -\pi/2 \le z < 0\}.$
13. $D = \{z : |z - 1| < 1, \quad z + z \le 1\}.$
14. $D = \{z : |z + i| \le 1, \quad |3\pi/2 - z| < \pi/3\}.$
15. $D = \{z : |z - 3 + 2i| \le 2, \quad 0 < (iz) \le 1\}.$
16. $D = \{z : |z| \le 4 - z, \quad 0 < z < \pi\}.$
17. $D = \{z : |z| > 1 + z, \quad |z - i| \le 2\}.$
18. $D = \{z : 1 < |z - 1| \le 2, \quad \pi/4 \le z < \pi/3\}.$
19. $D = \{z : |z| \le 4 + z, \quad |z - 0{,}5| < 4\}.$
20. $D = \{z : |z - 4 - 3i| \ge 2, \quad z + z < 1\}.$
21. $D = \{z : \pi/4 \le z \le 3\pi/4, \quad |(iz)| < 1\}.$
22. $D = \{z : |z + 1 - i| > \sqrt{2}, \quad |(iz)| \le 1\}.$
23. $D = \{z : 1 \le |z - 3 + 2i| < 3, \quad (z^2) \ge 2\}.$
24. $D = \{z : 2 < |z - 3 + 4i| \le 4, \quad z + z > 1\}.$

плоскости:

(3) Найти все значения z и изобразить на комплексной плоскости

1. а) $z^6+64=0$, б) $z^4+4z^2+3=0$
2. а) $z^5-i-\sqrt{3}=0$, б) $z^4+5z^2+6=0$
3. а) $z^5+1+\sqrt{3}i=0$, б) $z^4+5z^2+4=0$
4. а) $z=\sqrt[4]{16\left(\cos120^0+i\sin120^0\right)}$, б) $z^4+6z^2+5=0$
5. а) $z^4-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=0$, б) $z^6-z^3-12=0$
6. а) $z=\sqrt[4]{\cos80^0+i\sin80^0}$, б) $z^6+z^3-6=0$
7. а) $z^4-2+2i=0$, б) $z^6+5z^3+6=0$
8. а) $1+81z^4=0$, б) $z^6+4z^3+3=0$
9. а) $z=\sqrt[4]{625\left(\cos160^0+i\sin160^0\right)}$, б) $z^4-6z^2+5=0$
10. а) $z^4-4i+4=0$, б) $z^6+3z^3-4=0$
11. а) $625z^4+1=0$, б) $z^8+z^4-6=0$
12. а) $z^5+i-1=0$, б) $z^4-4iz^2-3=0$
13. а) $16z^4+81=0$, б) $z^4+iz^2+6=0$
14. а) $z=\sqrt[4]{16\left(\cos100^0+i\sin100^0\right)}$, б) $z^4+6z^2+8=0$
15. а) $z=\sqrt[5]{1-\sqrt{3}i}$, б) $z^4-6iz^2-8=0$
16. а) $z^4+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}=0$, б) $z^6+2z^3-15=0$
17. а) $z=\sqrt[4]{4-4i}$, б) $z^4-5z^2+4=0$
18. а) $z^4+1+\sqrt{3}i=0$, б) $z^6-iz^3+6=0$
19. а) $z=\sqrt[4]{81\left(\cos120^0+i\sin120^0\right)}$, б) $z^4-5iz^2-4=0$
20. а) $z=\sqrt[5]{-1+\sqrt{3}i}$, б) $z^4-7z^2-8=0$
21. а) $z^4+625=0$, б) $z^4-3iz^2-2=0$
22. а) $z=\sqrt[4]{16\left(\cos50^0+i\sin50^0\right)}$, б) $z^6+5z^3+4=0$
23. а) $z=\sqrt[5]{1+\sqrt{3}i}$, б) $z^4-3z^2-4=0$
24. а) $z^4+5+5i=0$, б) $z^6+iz^3+2=0$
25. а) $z^5+i+1=0$, б) $z^4+iz^2+2=0$
26. а) $z=\sqrt[4]{81\left(\cos40^0+i\sin40^0\right)}$, б) $z^6+iz^3+6=0$
27. а) $z^5+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}=0$, б) $z^4+2z^2-8=0$
28. а) $z^5+243=0$, б) $z^4-2iz^2+8=0$

ВАРИАНТЫ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ.

1. $(\alpha,\beta\in\mathbb{R};\ a,b\in\mathbb{C})$:
2. $\operatorname{Im}\{(b-\overline{b}z)/(1-z)\}=0\ (\operatorname{Im}b\neq0)$
3. $\arg(z-a)=\arg(b-a)$
4. $\arg|(z-a)/(z-b)|=\alpha$
5. $\arg(z-a)-\arg(z-b)=\beta$:
6. $\arg(z+a)=\arg z+\arg a$
7. $2\arg(z+a)=\arg z+\arg a$
8. $|z-a|=|\operatorname{Re}(\overline{B}z+C/2)|/|B|\ (a,B\in\mathbb{C},\ C\in\mathbb{R})$

Приложение

Например, как должны выглядеть рисунки для операций с комплексными числами: