

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
ВЯТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

ИССЛЕДОВАНИЕ ГРАФОВ ПОВОРОТОВ ВТОРОГО УРОВНЯ

Пояснительная записка
Курсовая работа

ТПЖА.010541.029 ПЗ

Разработал студент группы ПМ-41 _____ / Кислицын И.К. /
(подпись)

Руководитель работы, к.т.н. _____ / Пушкарёв И.А. /
(подпись)

Проект защищен с оценкой « _____ » « ____ » _____ 2013г.

Члены комиссии _____ / _____ /
(подпись)

_____ / _____ /
(подпись)

Киров 2013

Реферат

Кислицын И.К. Исследование графов поворотов второго уровня: ТПЖА.010541.029 ПЗ: Курс. работа / ВятГУ, каф. ПМиИ; рук. И.А. Пушкарёв - Киров, 2013. Гр. ч. 0 л. ф.А2; ПЗ 13 с., 9 рис., 2 источников, 1 прил.

ПКДВК, ГРАФ ПОВОРОТОВ ВТОРОГО УРОВНЯ, ЭЙЛЕРОВ ЦИКЛ, ПРОСТОЙ ДВУКРАТНЫЙ ПОВОРОТ.

Объект исследования и разработки – графы поворотов второго уровня.

Цель работы – исследование графов поворотов второго уровня.

Проведено исследование, сделаны выводы об Эйлеровости графа.

Содержание

Введение.....	3
1. Граф поворотов второго уровня	4
1.1 Простой двукратный поворот	4
1.2 Определение графа поворотов второго уровня	5
1.3 Примеры графов поворотов уровня	6
1.4 Исследование графов поворотов второго уровня.....	9
Заключение	12
Приложение А. (обязательное) Библиографический список	13

					ТПЖА.010541.029 ПЗ						
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата	Исследование графов поворотов второго уровня			Лит.	Лист	Листов	
Разраб.		Кислицын									
Провер.		Пушкарёв							2	13	
Реценз.								Кафедра ПМИИ Группа ПМ-41			
Н. Контр.											
Утверд.											

Введение

Плоское кубическое дерево с висячим корнем (ПКДВК) – это иерархическая структура вершин. У любого ПКДВК есть одна выделенная вершина – висячий корень, имеющий одного сына, остальные вершины имеют либо ровно двух сыновей (правого и левого), либо ни одного (это листья).

Определение 1. Пусть есть ПКДВК T . a_0 – сын его корня, a_1 – его правый сын и т.д., a_n – правый сын a_{n-1} и при этом лист. T_i – Дерево, растущее из вершины a_i влево. Обозначим эту ситуацию

$$T = | T_0, T_1, \dots, T_{n-1} > \quad (1)$$

и назовём её правым разложением дерева T .

Аналогично определится левое разложение: b_0 – лист, b_1 – его отец, и т.д., b_m – сын корня. S_i – дерево, растущее из b_i вправо. Обозначим это

$$T = < S_1, S_2, \dots, S_m | \quad (2)$$

Определение 2. Пусть есть ПКДВК $T = | T_0, T_1, \dots, T_{n-1} > =$ Простой поворот дерева T – преобразование

$$\gamma T = < T_0, T_1, \dots, T_{n-1} | \quad (3)$$

Определение 3. Разложение числа $n-1$ в сумму упорядоченных натуральных слагаемых назовём композицией числа n .

Определение 4. Графом поворотов первого уровня назовём оргграф, вершины которого – всевозможные композиции числа n , а рёбра – ПКДВК с n листьями. Ребро выходит из композиции (x_0, \dots, x_{n-1}) в (y_0, \dots, y_{m-1}) , если существует дерево $T = | T_0, T_1, \dots, T_{n-1} > = < S_0, S_1, \dots, S_{m-1} |$ такое, что x_i – количество листьев в S_i , а y_i – количество листьев в T_i .

1. Граф поворотов второго уровня

1.1 Простой двукратный поворот

Определение 1.1. Пусть есть ПКДВК $T = |T_0, T_0, \dots, T_{n-1}|$, тогда его простой двукратный поворот

$$\gamma_2 T = \langle \gamma T_0, \gamma T_1, \dots, \gamma T_{n-1} \rangle \quad (4)$$

Примеры поворотов приведены на рисунках 1.2 и 1.3.

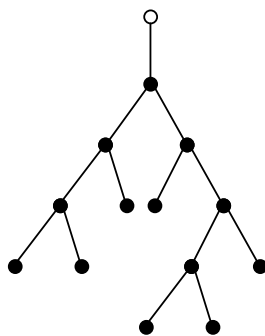


Рисунок 1.1 – Пример ПКДВК T

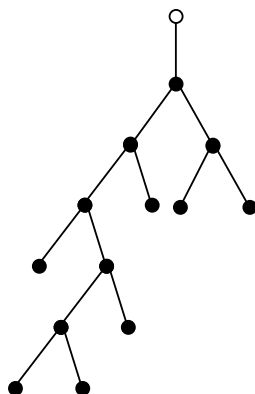


Рисунок 1.2 – Простой поворот дерева T

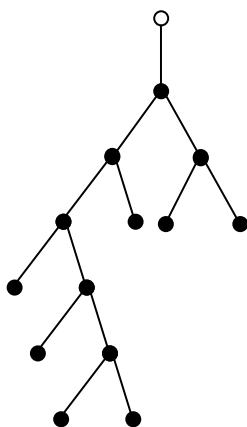


Рисунок 1.3 – Простой двукратный поворот дерева T

Видно, что есть 2 способа получения простого двукратного поворота:

- 1) Применить простой поворот ко всем правым поддеревьям исходного дерева, а затем к полученному дереву.
- 2) Применить простой поворот к исходному дереву, а затем ко всем его левым поддеревьям.

1.2 Определение графа поворотов второго уровня

Определение 1.2. Пусть есть композиция числа n (x_1, \dots, x_m) . Композицией этой композиции назовётся совокупность композиций для каждого из чисел x_1, \dots, x_m :

$$(x_{11}, \dots, x_{1k_1})(x_{21}, \dots, x_{2k_2}) \dots (x_{m1}, \dots, x_{mk_m})$$

При этом соблюдаются следующие равенства:

$$\sum_{i=1}^m x_i = n - 1 \quad (5)$$

$$\forall j = 1..m \sum_{i=1}^{k_j} x_{ij} = x_j - 1 \quad (6)$$

Рассмотрим ориентированный граф, вершины которого – всевозможные композиции композиций числа n .

Ребро из вершины $(x_{11}, \dots, x_{1k_1})(x_{21}, \dots, x_{2k_2}) \dots (x_{m1}, \dots, x_{mk_m})$ в $(y_{11}, \dots, y_{1p_1})(y_{21}, \dots, y_{2p_2}) \dots (y_{t1}, \dots, y_{tp_t})$ проведём, если существует ПКДВК T с n листьями такой, что

$$T = |T_1, T_1, \dots, T_m\rangle = \langle S_1, S_1, \dots, S_t|$$

$$T_i = |T_{i1}, T_{i2}, \dots, T_{ik_i}\rangle$$

$$S_j = \langle S_{j1}, S_{j2}, \dots, S_{jp_t}|$$

и при этом в T_{ij} ровно y_{ij} листьев, а в S_{ij} ровно x_{ij} .

1.3 Примеры графов поворотов уровня

Примеры для $n = 3$ приведены на рисунках 1.4 и 1.5.

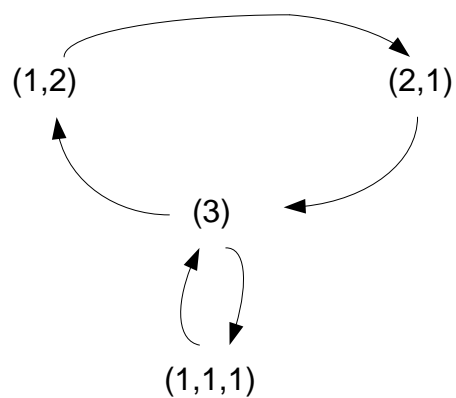


Рисунок 1.4 – Граф поворотов первого уровня для $n = 3$

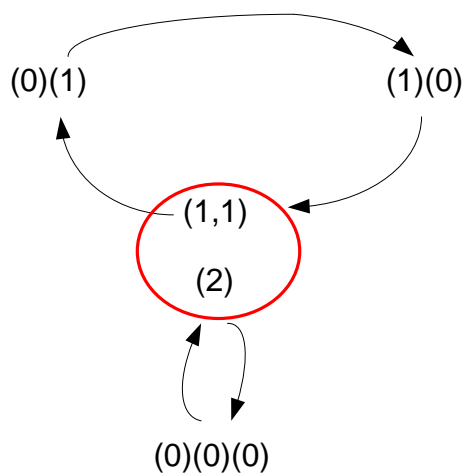


Рисунок 1.5 – Граф поворотов второго уровня для $n = 3$

Примеры для $n = 4$ приведены на рисунках 1.6 и 1.7.

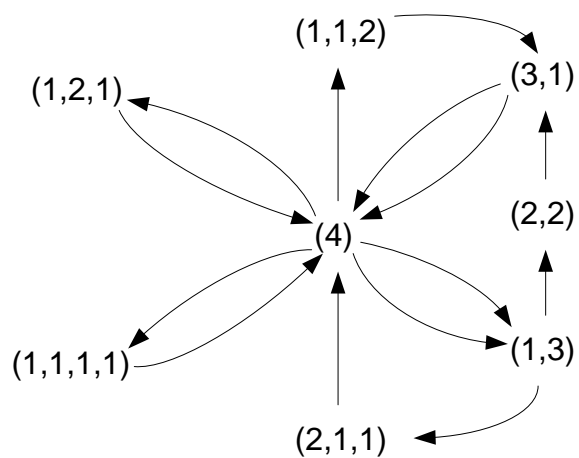


Рисунок 1.6 – Граф поворотов первого уровня для $n = 4$

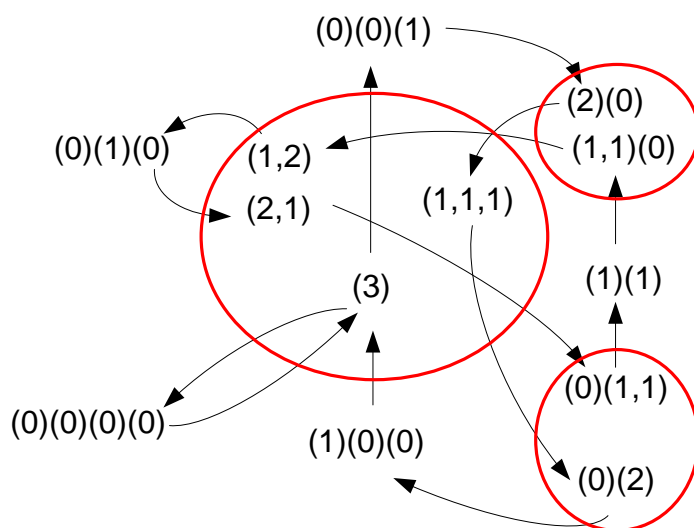


Рисунок 1.7 – Граф поворотов второго уровня для $n = 4$

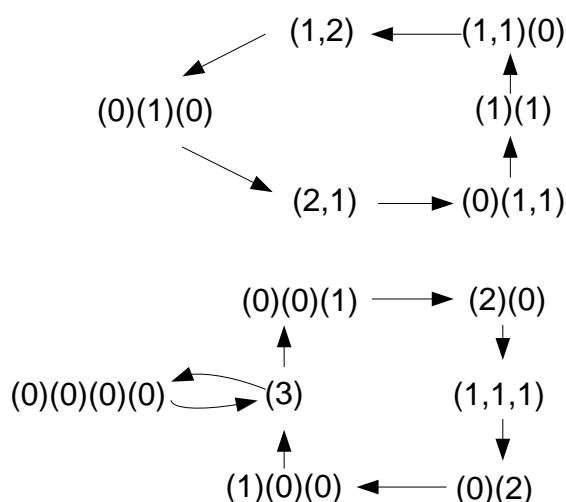


Рисунок 1.8 – Граф поворотов второго уровня для $n = 4$

Видно, что граф поворотов 2 уровня отличается от первого тем, что некоторые вершины распались на несколько. При этом в примерах видно, что компоненты, на которые распались графы, остались Эйлеровыми.

Теорема 1.1. Все компоненты графа поворотов второго уровня Эйлеровы.

Доказательство.

Рассмотрим вершину $(x_{11}, \dots, x_{1k_1})(x_{21}, \dots, x_{2k_2}) \dots (x_{m1}, \dots, x_{mk_m})$.

Для каждого дерева

$$T = |T_1, T_1, \dots, T_m >$$

$$T_i = |T_{i1}, T_{i2}, \dots, T_{ik_i} >$$

которое формирует входящее в вершину ребро существует единственное дерево

$$S = < S_1, S_1, \dots, S_m |$$

$$S_i = < T_{i1}, T_{i2}, \dots, T_{ik_i} |$$

которое образует ребро, выходящее из вершины. Аналогичное справедливо и наоборот.

Таким образом, для каждой вершины справедливо, что количество рёбер, входящих в неё равно количеству выходящих, следовательно, каждая компонента графа поворотов второго уровня Эйлера.

1.4 Исследование графов поворотов второго уровня

Определение 1.3. Поворот второго уровня – разбиение рёбер графа поворотов второго уровня на ориентированные циклы.

Теорема 1.2. Любой поворот второго уровня является поворотом первого уровня. Обратное неверно.

Доказательство.

По построению граф поворотов второго уровня определяет повороты первого уровня, отсекая некоторые. К примеру, для $n = 4$ есть поворот первого уровня $(2,1,1) \rightarrow (4) \rightarrow (1,2,1)$. Он нереализуем в поворотах второго уровня, т.к. вершины $(1)(0)(0)$ и $(0)(1)(0)$, соответствующие началу и концу пути лежат в разных компонентах.

Теорема 1.3. Простой двукратный поворот является поворотом второго уровня.

Доказательство.

Если посмотреть на определение простого двукратного поворота и на правила определения рёбер, становится видно, что исходное и повёрнутое дерево образуют два последовательных ребра в графе поворотов второго уровня, вследствие чего можно сказать, что это поворот второго уровня.

В графе поворотов первого уровня существует вершина, через которую проходят все простые циклы. Заметим, что в графе поворотов второго уровня такой нет. Сформируем другое утверждение.

Теорема 1.4. В графе поворотов второго уровня для деревьев с n листьями через вершину композиции $(n-1)$ проходят все простые циклы.

Доказательство.

Зная, что в графе поворотов первого уровня все простые циклы проходят через вершину $(n-1)$, и что вершины в графе поворотов второго уровня – разорванные вершины первого, становится очевидна справедливость утверждения.

В графе поворотов первого уровня выполняются следующие соотношения:

$$y_1 = \left(\sum_{i=1}^{m-1} x_i \right) + 1$$

$$x_m = \left(\sum_{i=2}^t y_i \right) + 1$$

Если перенести это их на граф поворотов второго уровня, получатся в дополнение следующие (видно из рисунка 1.9):

$$y_{11} = \left(\sum_{i=1}^{m-2} x_i \right) + 1$$

$$x_{m-1} = \left(\sum_{i=2}^{p_1} y_{1i} \right) + 1$$

$$y_2 = \left(\sum_{i=1}^{k_t-1} x_{mi} \right) + 1$$

$$x_{mk_m} = \left(\sum_{i=3}^t y_i \right) + 1$$

где

$$x_j = \left(\sum_{i=1}^{k_j} x_{ji} \right) + 1$$

$$y_j = \left(\sum_{i=1}^{p_j} y_{ji} \right) + 1$$

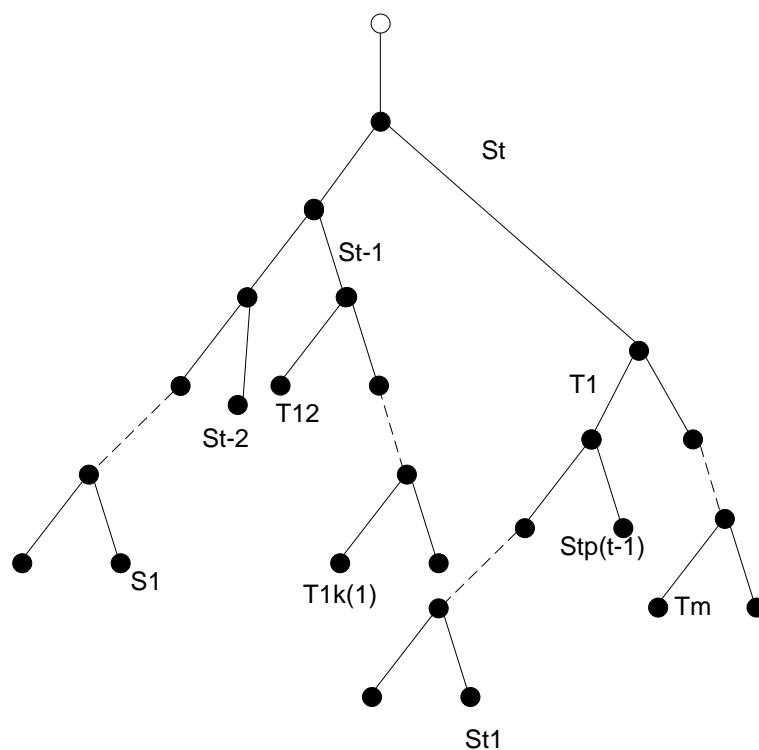


Рисунок 1.9 – ПКДВК

Заметим, что из вершины (n-2) всегда идёт ребро в вершины, начинающиеся с (0)(0).

Заключение

В работе был рассмотрен простой двукратный поворот, определён граф поворотов второго уровня, приведены примеры графа для случаев $n = 3$ и 4 .

Доказаны теоремы об Эйлеровости компонент графа поворотов второго уровня, его связи с простым двукратным поворотом.

Были выведены соотношения для вершин графа

$$y_1 = \left(\sum_{i=1}^{m-1} x_i \right) + 1$$

$$x_m = \left(\sum_{i=2}^t y_i \right) + 1$$

$$y_{11} = \left(\sum_{i=1}^{m-2} x_i \right) + 1$$

$$x_{m-1} = \left(\sum_{i=2}^{p_1} y_{1i} \right) + 1$$

$$y_2 = \left(\sum_{i=1}^{k_t-1} x_{ti} \right) + 1$$

$$x_{mk_m} = \left(\sum_{i=3}^t y_i \right) + 1$$

Приложение А.
(обязательное)
Библиографический список

1. И.А. Пушкарёв, В.А. Бызов, Повороты первого уровня на множестве плоских деревьев – ПОМИ., 2013
2. Википедия – свободная энциклопедия [Электронный ресурс] // URL: ru.wikipedia.org (дата обращения: 01.05.2013)

					ТПЖА.010541.029 ПЗ	Лист
						13
Изм.	Лист	№ докум.				