

**Экзаменационные вопросы по курсу  
линейной алгебры и аналитической геометрии  
(ПМ-21)**

1. Понятие группы, кольца, поля. Примеры. Фактор-множество.
2. Кольцо  $\mathbb{Z}$ . Построение, операции сложения и умножения.
3. Элементарные свойства делимости в  $\mathbb{Z}$ .
4. Деление с остатком в  $\mathbb{Z}$ .
5. НОД, НОК, свойства.
6. Алгоритм Евклида. Взаимно-простые числа.
7. Простые числа. Основная теорема арифметики.
8. Мультипликативные функции. Примеры.
9. Функция Эйлера.
10. Сравнения по модулю. Кольцо  $\mathbb{Z}_m$ .
11. Теорема Эйлера. Малая теорема Ферма. Теорема Вильсона.
12. Китайская теорема об остатках.
13. Линейные дифференциальные уравнения.
14. Многочлены над целостным кольцом.
15. Делимость многочленов. Деление с остатком.
16. НОД и НОК многочленов. Алгоритм Евклида для многочленов.
17. Основная теорема арифметики для многочленов.
18. Теорема Декарта-Безу.
19. Схема Горнера. Разложение многочлена по степеням  $(x-c)$ .
20. Примитивные многочлены. Лемма Гаусса.
21. Неприводимые многочлены. Признак неприводимости Эйзенштейна.
22. Алгебраическое и функциональное равенство многочленов. Формула Лагранжа.
23. Корни многочлена. Формальная производная. Кратные корни многочлена.
24. Рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами.
25. Многочлены от нескольких переменных. Лексико-графический порядок.
26. Симметрические многочлены. Основная теорема о симметрических многочленах.
27. Результант. Применение.
28. Дискриминант многочлена. Применение.
29. Расширение поля.
30. Основная теорема алгебры.
31. Неприводимые многочлены над полем действительных чисел.
32. Метод Штурма.
33. Определение моноида, полугруппы, группы. Примеры. Свойства операций.
34. Подполугруппа, подгруппа, подмоноид, признак.
35. Морфизмы. Конгруэнция.
36. Теорема о гомоморфизме для моноидов.
37. Теорема Кэли для групп.
38. Смежные классы. Теорема Лагранжа.
39. Нормальные подгруппы. Факторгруппа.
40. Циклические, симметрические группы.
41. Линейное пространство. Определение, примеры. Подпространство линейного пространства.
42. Линейная комбинация. Линейная оболочка.
43. Базис. Лемма Цорна. Существование базиса.
44. Равномощность двух базисов одного пространства. Размерность пространства.
45. Дополнение базиса подпространства до базиса пространства.
46. Сумма и пересечение пространств. Прямая сумма пространств. Свойства прямой суммы.
47. Формула Грассмана.
48. Координаты вектора. Связь координат вектора в разных базисах.
49. Линейное многообразие. Свойства. Фактор-множество. Размерность факторпространства.
50. Решение СЛУ как линейное многообразие.
51. Линейный отображение, матрица линейного отображения в разных базисах. Выражение координат образа через координаты прообраза.
52. Теорема о размерности ядра, образа. Ранг линейного оператора.
53. Двойственное пространство.
54. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора. Характеристический многочлен.
55. Жорданова нормальная форма.
56. Комплексификация и овеществление.
57. Билинейное отображение, форма. Матрица билинейной формы в разных базисах.
58. Квадратичная форма, поляризация.
59. Теорема о существовании канонического базиса для квадратичной формы.
60. Закон инерции.
61. Скалярное произведение. Ортогональные системы. Ортогональное дополнение. Свойства.
62. Евклидово и унитарное пространство. Примеры.
63. Алгоритм ортогонализации.

Практические задания.

1. Найти НОД, НОК двух чисел.
2. Китайская теорема об остатках.
3. Диофантовы уравнения.
4. Задачи на сравнения.
5. Деление с остатком двух многочленов.
6. Схема Горнера. Разложение многочлена по степеням.
7. Нахождение многочлена минимальной степени по заданным значениям.
8. Нахождение кратности корня многочлена.
9. Выражение симметрического многочлена через элементарные симметрические.
10. Нахождение результата двух многочленов, дискриминанта многочлена.
11. Нахождение количества действительных корней многочлена (метод Штурма).
12. Составление таблицы Кэли.
13. Нахождение порядка группы, элемента группы.
14. Перечисление смежных классов.
15. Дополнение системы линейно независимых векторов до базиса.
16. Нахождение базиса пересечения, суммы двух пространств.
17. Нахождение координат вектора в другом базисе.
18. Нахождение матрицы линейного оператора в разных базисах.
19. Нахождение ядра и образа линейного оператора.
20. Нахождение собственных векторов.
21. Нахождение однородной СЛУ, решением которой является данное подпространство.
22. Нахождение проекции вектора на подпространство.
23. Матрица билинейной формы в разных базисах.
24. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Формулы преобразования координат.
25. Нахождение скалярного произведения двух векторов.
26. Нахождение жордановой нормальной формы.