2.2. Решение систем нелинейных уравнений

Систему нелинейных уравнений с *n* неизвестными можно записать в виде

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ .... \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases} \qquad (2.10)$$

или, более коротко, в векторной форме

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \qquad (2.11)$$

где $\mathbf{x}$ - вектор неизвестных величин, $\mathbf{f}$ - вектор-функция

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ ... \\ f_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В редких случаях для решения такой системы удается применить метод последовательного исключения неизвестных и свести решение исходной задачи к решению одного нелинейного уравнения с одним неизвестным. Значения других неизвестных величин находятся соответствующей подстановкой в конкретные выражения. Однако в подавляющем большинстве случаев для решения систем нелинейных уравнений используются итерационные методы.

В дальнейшем предполагается, что ищется изолированное решение нелинейной системы.

Как и в случае одного нелинейного уравнения, локализация решения может осуществляться на основе специфической информации по конкретной решаемой задаче (например, по физическим соображениям), и - с помощью методов математического анализа. При решении системы двух уравнений, достаточно часто удобным является графический способ, когда месторасположение корней определяется как точки пересечения кривых $f_1(x_1, x_2) = 0$, $f_2(x_1, x_2) = 0$ на плоскости (x_1, x_2).

Метод Ньютона. Если определено начальное приближение $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})^{\mathrm{T}}$, итерационный процесс нахождения решения системы (2.10) методом Ньютона можно представить в виде

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + \Delta x_1^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} + \Delta x_2^{(k)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{(k+1)} = x_n^{(k)} + \Delta x_n^{(k)} \end{cases} \qquad k = 0,1,2,... \qquad (2.12)$$

где значения приращений $\Delta x_1^{(k)}$, $\Delta x_2^{(k)}, ...,$ $\Delta x_n^{(k)}$ определяются из решения системы линейных алгебраических уравнений, все коэффициенты которой выражаются через известное предыдущее приближение $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)})$

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{x}^{(k)}) + \dfrac{\partial f_1(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_1}\Delta x_1^{(k)} + \dfrac{\partial f_1(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_2}\Delta x_2^{(k)} + \ldots + \dfrac{\partial f_1(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_n}\Delta x_n^{(k)} = 0 \\ f_2(\mathbf{x}^{(k)}) + \dfrac{\partial f_2(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_1}\Delta x_1^{(k)} + \dfrac{\partial f_2(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_2}\Delta x_2^{(k)} + \ldots + \dfrac{\partial f_2(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_n}\Delta x_n^{(k)} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(\mathbf{x}^{(k)}) + \dfrac{\partial f_n(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_1}\Delta x_1^{(k)} + \dfrac{\partial f_n(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_2}\Delta x_2^{(k)} + \ldots + \dfrac{\partial f_n(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_n}\Delta x_n^{(k)} = 0 \end{cases} \qquad (2.13)$$

В векторно-матричной форме расчетные формулы имеют вид

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{\Delta x}^{(k)} \qquad k = 0,1,2,... \qquad (2.14)$$

где вектор приращений $\mathbf{\Delta x}^{(k)} = \begin{pmatrix} \Delta x_1^{(k)} \\ \Delta x_2^{(k)} \\ \dots \\ \Delta x_n^{(k)} \end{pmatrix}$ находится из решения уравнения

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{\Delta x}^{(k)} = \mathbf{0} \qquad (2.15)$$

Здесь $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$ - матрица Якоби первых производных вектор-функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Выражая из (2.15) вектор приращений $\Delta\mathbf{x}^{(k)}$ и подставляя его в (2.14), итерационный процесс нахождения решения можно записать в виде

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) \qquad k = 0,1,2,... \qquad (2.16)$$

где $\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x})$ - матрица, обратная матрице Якоби. Формула (2.16) есть обобщение формулы (2.2) на случай систем нелинейных уравнений.

При реализации алгоритма метода Ньютона в большинстве случаев предпочтительным является не вычисление обратной матрицы $\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}^{(k)})$, а нахождение из системы (2.13) значений приращений $\Delta x_1^{(k)}$, $\Delta x_2^{(k)}$,..., $\Delta x_n^{(k)}$ и вычисление нового приближения по (2.12). Для решения таких линейных систем можно привлекать самые разные методы, как прямые, так и итерационные (см. раздел 1.1), с учетом размерности n решаемой задачи и специфики матриц Якоби $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ (например, симметрии, разреженности и т.п.).

Использование метода Ньютона предполагает дифференцируемость функций $f_1(\mathbf{x})$, $f_2(\mathbf{x})$,..., $f_n(\mathbf{x})$ и невырожденность матрицы Якоби ($\det \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) \neq 0$). В случае, если начальное приближение выбрано в достаточно малой окрестности искомого корня, итерации сходятся к точному решению, причем сходимость квадратичная.

В практических вычислениях в качестве условия окончания итераций обычно используется критерий [3,5]

$$\left\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\right\| \le \varepsilon, \qquad (2.17)$$

где ε - заданная точность.

Пример 2.2. Методом Ньютона найти положительное решение системы нелинейных уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2) = 0.1x_1^2 + x_1 + 0.2x_2^2 - 0.3 = 0 \\ f_2(x_1,x_2) = 0.2x_1^2 + x_2 - 0.1x_1x_2 - 0.7 = 0 \end{cases} \tag{2.18}$$

с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

Решение. Для выбора начального приближения применяем графический способ. Построив на плоскости (x_1, x_2) в интересующей нас области кривые $f_1(x_1,x_2)=0$ и $f_2(x_1,x_2)=0$ (рис. 2.2), определяем, что положительное решение системы уравнений находится в квадрате $0 < x_1 < 0.5$, $0.5 < x_2 < 1.0$.

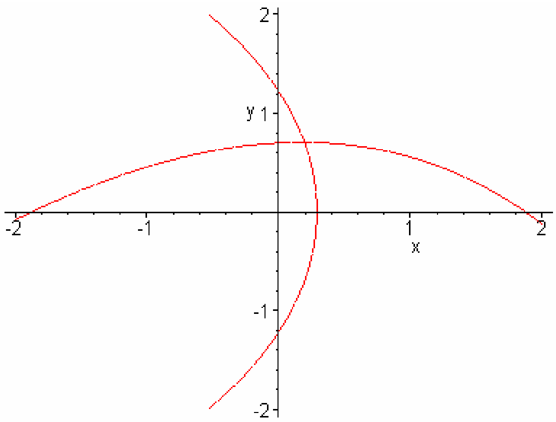

Рис. 2.2

За начальное приближение примем $x_1^{(0)} = 0.25$, $x_2^{(0)} = 0.75$.

Для системы двух уравнений расчетные формулы (2.12), (2.13) удобно записать в виде разрешенном относительно $x_1^{(k+1)}$, $x_2^{(k+1)}$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \dfrac{\det \mathbf{A}_1^{(k)}}{\det \mathbf{J}^{(k)}} \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \dfrac{\det \mathbf{A}_2^{(k)}}{\det \mathbf{J}^{(k)}} \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.19}$$

где
$$\mathbf{J}^{(k)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_1^{(k)}=\begin{bmatrix} f_1(x_1^{(k)},x_2^{(k)}) & \dfrac{\partial f_1(x_1^{(k)},x_2^{(k)})}{\partial x_2} \\ f_2(x_1^{(k)},x_2^{(k)}) & \dfrac{\partial f_2(x_1^{(k)},x_2^{(k)})}{\partial x_2} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_2^{(k)}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(x_1^{(k)},x_2^{(k)})}{\partial x_1} & f_1(x_1^{(k)},x_2^{(k)}) \\ \dfrac{\partial f_2(x_1^{(k)},x_2^{(k)})}{\partial x_1} & f_2(x_1^{(k)},x_2^{(k)}) \end{bmatrix}.$$

В рассматриваемом примере:

$$f_1(x_1^{(k)},x_2^{(k)})=0.1x_1^{(k)\,2}+x_1^{(k)}+0.2x_2^{(k)\,2}-0.3$$

$$f_2(x_1^{(k)},x_2^{(k)})=0.2x_1^{(k)\,2}+x_2^{(k)}-0.1x_1^{(k)}x_2^{(k)}-0.7$$

$$\frac{\partial f_1(x_1^{(k)},x_2^{(k)})}{\partial x_1}=0.2x_1^{(k)}+1, \qquad \frac{\partial f_1(x_1^{(k)},x_2^{(k)})}{\partial x_2}=0.4x_2^{(k)}$$

$$\frac{\partial f_2(x_1^{(k)},x_2^{(k)})}{\partial x_1}=0.4x_1^{(k)}-0.1x_2^{(k)}, \qquad \frac{\partial f_2(x_1^{(k)},x_2^{(k)})}{\partial x_1}=1-0.1x_1^{(k)}.$$

Подставляя в правые части соотношений (2.19) выбранные значения $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, получим приближение $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, используемое, в свою очередь, для нахождения $x_1^{(2)}$, $x_2^{(2)}$. Итерации продолжаются до выполнения условия (2.17), где

$$\left\|\mathbf{x}^{(k+1)}-\mathbf{x}^{(k)}\right\|=\max_i\left|x_i^{(k+1)}-x_i^{(k)}\right|.$$

Результаты вычислений содержатся в таблице 2.4.

Таблица 2.4

k	$x_1^{(k)}$ $x_2^{(k)}$	$f_1(x_1^{(k)},x_2^{(k)})$ $f_2(x_1^{(k)},x_2^{(k)})$	$\frac{\partial f_1(x_1^{(k)},x_2^{(k)})}{\partial x_1}$ $\frac{\partial f_2(x_1^{(k)},x_2^{(k)})}{\partial x_1}$	$\frac{\partial f_1(x_1^{(k)},x_2^{(k)})}{\partial x_2}$ $\frac{\partial f_2(x_1^{(k)},x_2^{(k)})}{\partial x_2}$	$\det \mathbf{A}_1^{(k)}$	$\det \mathbf{A}_2^{(k)}$	$\det \mathbf{J}^{(k)}$
0	0.25000 0.75000	0.06875 0.04375	1.01250 0.02500	0.30000 0.97500	0.05391	0.04258	0.97969
1	0.19498 0.70654	-0.00138 0.00037	1.00760 0.00734	0.28262 0.98050	- 0.00146	0.00038	0.98588
2	0.19646 0.70615	0.00005 0.00000	1.00772 0.00797	0.28246 0.98035	0.00005	0.00000	0.98567
3	0.19641 0.70615						

$x_1^{(*)}\approx 0.1964, \quad x_2^{(*)}\approx 0.7062.$

<u>Метод простой итерации.</u> При использовании метода простой итерации система уравнений (2.10) приводится к эквивалентной системе специального вида

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases} \qquad (2.20)$$

или, в векторной форме

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{x}), \qquad \varphi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\mathbf{x}) \\ \varphi_2(\mathbf{x}) \\ \ldots \\ \varphi_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \qquad (2.21)$$

где функции $\varphi_1(\mathbf{x})$, $\varphi_2(\mathbf{x})$, ..., $\varphi_n(\mathbf{x})$ - определены и непрерывны в некоторой окрестности искомого изолированного решения $\mathbf{x}^{(*)} = (x_1^{(*)}, x_2^{(*)}, \ldots, x_n^{(*)})^{\mathrm{T}}$.

Если выбрано некоторое начальное приближение $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})^{\mathrm{T}}$, последующие приближения в методе простой итерации находятся по формулам

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \varphi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \varphi_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k+1)} = \varphi_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}) \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2.22)$$

или, в векторной форме

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \varphi(\mathbf{x}^{(k)}), \; k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2.23)$$

Если последовательность векторов $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})^{\mathrm{T}}$ сходится, то она сходится к решению $\mathbf{x}^{(*)} = (x_1^{(*)}, x_2^{(*)}, \ldots, x_n^{(*)})^{\mathrm{T}}$.

Достаточное условие сходимости итерационного процесса (2.22) формулируется следующим образом [2]:

Теорема 2.4. Пусть вектор-функция $\varphi(\mathbf{x})$ непрерывна, вместе со своей производной

$$\varphi'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} \cdots & \dfrac{\partial \varphi_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial \varphi_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} \cdots & \dfrac{\partial \varphi_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \dfrac{\partial \varphi_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_n(\mathbf{x})}{\partial x_2} \cdots & \dfrac{\partial \varphi_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

в ограниченной выпуклой замкнутой области G и

$$\max_{\mathbf{x}\in G}\|\varphi'(\mathbf{x})\| \le q < 1, \qquad (2.24)$$

где q - постоянная. Если $\mathbf{x}^{(0)} \in G$ и все последовательные приближения

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \varphi(\mathbf{x}^{(k)}),\ k = 0,1,2,\ldots$$

также содержатся в G, то процесс итерации (2.22) сходится к единственному решению уравнения

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{x})$$

в области G и справедливы оценки погрешности $(\forall k \in N)$:

$$\left\|\mathbf{x}^{(*)} - \mathbf{x}^{(k+1)}\right\| \le \frac{q^{k+1}}{1-q}\left\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\right\|,$$

$$\left\|\mathbf{x}^{(*)} - \mathbf{x}^{(k+1)}\right\| \le \frac{q}{1-q}\left\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\right\| \qquad (2.25)$$

Пример 2.2. (продолжение). Найти положительное решение системы (2.18) методом простой итерации с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

Преобразуем исходную систему уравнений (2.18) к виду

$$\begin{cases} x_1 = 0.3 - 0.1x_1^2 - 0.2x_2^2 \equiv \varphi_1(x_1,x_2) \\ x_2 = 0.7 - 0.2x_1^2 + 0.1x_1x_2 \equiv \varphi_2(x_1,x_2) \end{cases}$$

Проверим выполнение условия (2.24) в области G: $|x_1 - 0.25| \le 0.25$, $|x_2 - 0.75| \le 0.25$. Для этого найдем

$$\max_{\mathbf{x}\in G}\|\varphi'(\mathbf{x})\| = \max_{\mathbf{x}\in G}\left\{\max_{(i)}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial\varphi_i(x_1,x_2)}{\partial x_j}\right|\right\} \qquad (2.26)$$

Так как $\dfrac{\partial\varphi_1(x_1,x_2)}{\partial x_1} = -0.2x_1$, $\dfrac{\partial\varphi_1(x_1,x_2)}{\partial x_2} = -0.4x_2$,

$\dfrac{\partial\varphi_2(x_1,x_2)}{\partial x_1} = -0.4x_1 + 0.1x_2$, $\dfrac{\partial\varphi_2(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 0.1x_1$,

то в области G имеем

$$\left|\frac{\partial\varphi_1(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_1(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right| = |-0.2x_1| + |-0.4x_2| \le 0.5$$

$$\left|\frac{\partial\varphi_2(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_2(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right| = \left|-0.4x_1 + 0.1x_2\right| + \left|0.1x_1\right| \le 0.2$$

$$\max_{\mathbf{x}\in G}\left\|\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{x})\right\| \le 0.5 = q < 1 .$$

Следовательно, если последовательные приближения $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$ не покинут области G (что легко обнаружить в процессе вычислений), то итерационный процесс будет сходящимся.

В качестве начального приближения примем $x_1^{(0)} = 0.25$, $x_2^{(0)} = 0.75$. Последующие приближения определяем как

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \varphi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \varphi_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \end{cases} \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

где $\varphi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) = 0.3 - 0.1x_1^{(k)\,2} - 0.2x_2^{(k)\,2}$,

$\varphi_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) = 0.7 - 0.2x_1^{(k)\,2} + 0.1x_1^{(k)}x_2^{(k)}$

В соответствии с (2.25), вычисления завершаются при выполнении условия

$$\frac{q}{1-q}\left\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\right\| \le \varepsilon ,$$

где $\left\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\right\| = \max_i\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right|$.

Результаты вычислений содержатся в таблице 2.5

Таблица 2.5

k	$x_1^{(k)}$ $x_2^{(k)}$	$\varphi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$ $\varphi_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$
0	0.25000 0.75000	0.18125 0.70702
1	0.18125 0.70702	0.19674 0.70617
2	0.19674 0.70617	0.19639 0.70615
3	0.19639 0.70615	0.19641 0.70615
4	0.19641 0.70615	

$x_1^{(*)} \approx 0.1964,\quad x_2^{(*)} \approx 0.7062$.

Замечание. В случае, когда при анализе сходимости конкретной итерационной схемы проверка условия (2.26) является затруднительной, можно определить норму «мажорирующей матрицы» [5,6] $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ с элементами $m_{ij}(\mathbf{x}) = \max\limits_{\mathbf{x}\in G}\left|\dfrac{\partial \varphi_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right|$, так что $\max\limits_{\mathbf{x}\in G}\|\varphi'(\mathbf{x})\| \le \|\mathbf{M}(\mathbf{x})\|$. Если $\|\mathrm{M}(\mathbf{x})\| \le q < 1$, то последовательные приближения сходятся к решению $\mathbf{x}^{(*)}$.