

В. Ю. Иномистов

Практикум на ЭВМ.
Математический пакет Maple 8

Учебное пособие

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ВЯТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной математики и телекоммуникаций

Кафедра «Прикладная математика и информатика»

В. Ю. Иномистов
Практикум на ЭВМ.
Математический пакет Maple 8

Рекомендовано Ученым советом
Вятского государственного университета
в качестве учебного пособия

Киров 2005

Печатается по решению редакционно-издательского совета Вятского государственного университета

УДК 531.1
И67

Рецензент: доцент кафедры информатики
Вятского государственного гуманитарного университета Н. А. Бушмелева

Иномистов В. Ю. Практикум на ЭВМ. Математический пакет Maple 8/В. Ю. Иномистов. – Киров: Издательство ВятГУ, 2005. – 36 с.

Учебное пособие «Практикум на ЭВМ. Математический пакет Maple 8» для студентов дневного отделения специальности 010200 представляет из себя первоначальное знакомство с системой Maple 8 и решение с ее помощью заданий по высшей математике. Работа состоит из трех разделов: теоретической части – описания изучаемых команд и решения с их помощью типовых примеров, индивидуальных заданий по математическому анализу и заданий по высшей алгебре и аналитической геометрии.

Редактор Е.Г. Козвонина

Подписано в печать

Усл.печ.л. 2

Бумага офсетная

Печать копир Aficio 1022

Заказ №

Тираж

Бесплатно.

Текст напечатан с оригинал-макета, представленного автором

610000, г. Киров, ул. Московская, 36.

Оформление обложки, изготовление – ПРИП ВятГУ

© В. Ю. Иномистов, 2005

© Вятский государственный университет, 2005

Введение

Настоящее пособие посвящено изложению некоторых методов применения математической системы *Maple 8*. Оно состоит из трех разделов:

- первоначальное знакомство с системой *Maple 8*;
- решение задач по математическому анализу;
- решения задач по высшей алгебре и аналитической геометрии.

Первый раздел содержит теоретическую часть – описание изучаемых команд *Maple* и практические задания. Остальные разделы содержат индивидуальные задания по соответствующему разделу математики.

Раздел 1. Первое знакомство с системой *Maple 8*

1.1. Интерфейс системы *Maple 8*

Интерфейс системы *Maple 8* построен по принципу большинства современных приложений под Windows и содержит (рис. 1.1):

- строку заголовков;
- строку главного меню;
- главную панель инструментов;
- контекстную панель инструментов, вид которой зависит от режима работы с пакетом;
- рабочий лист (окно ввода и редактирования документов);
- строку состояния.

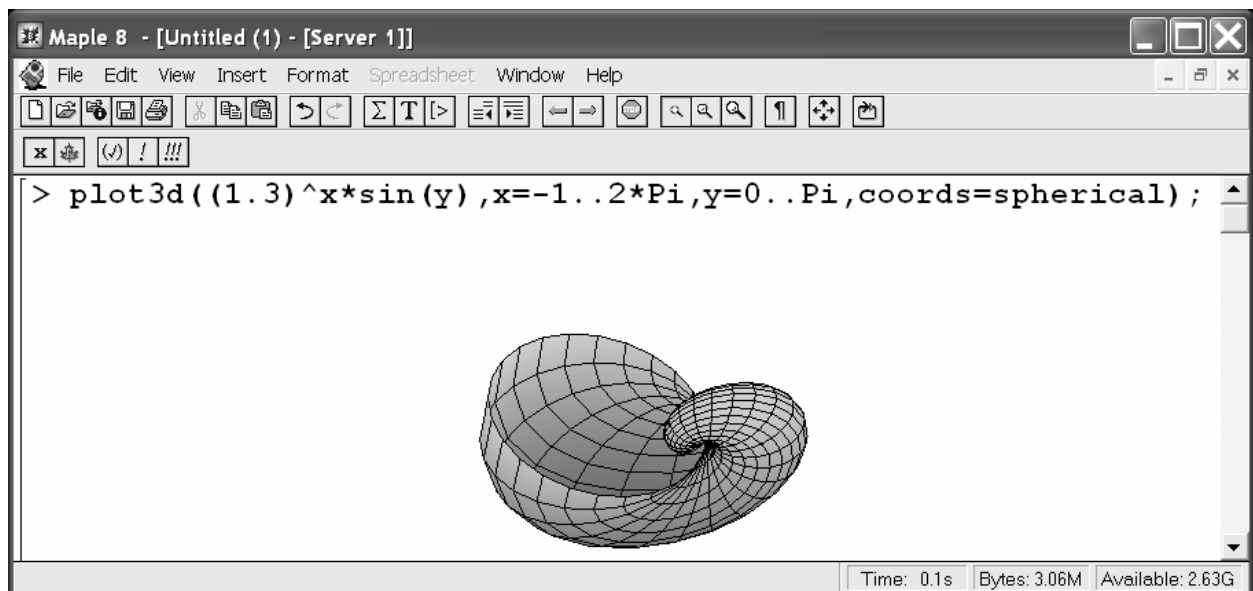


Рис. 1.1. Окно системы *Maple 8*

Большинство пунктов меню является стандартным для многих Windows-приложений, что позволяет рассмотреть отдельно те из них, которые содержат команды, присущие рассматриваемому пакету.

- *Edit* – команды редактирования документа, операции с буфером обмена. Операции с рабочим листом (разбиение/объединение секций, запуск секции/рабочего листа на выполнение).
- *Spreadsheet* – операции задания таблиц.
- *Help* – содержит подробную справочную информацию о *Maple*.

Главное меню является контекстно-зависимым. Его вид может меняться в зависимости от текущего состояния системы.

Окно справки содержит пятиступенчатый контекстный указатель, позволяющий последовательно отыскивать нужный раздел справки (рис 1.2).

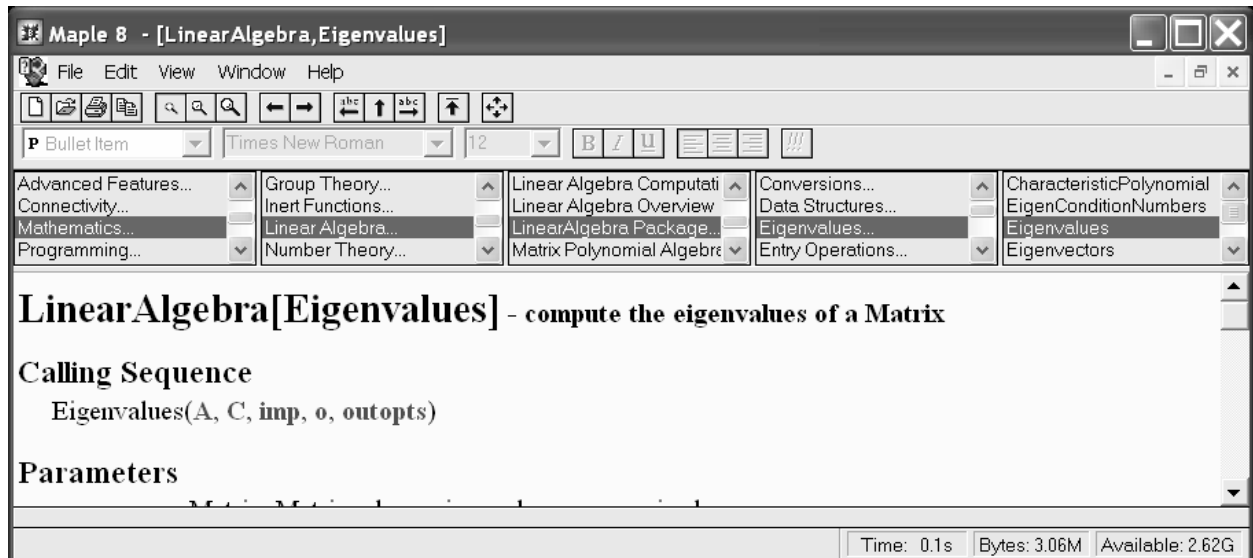


Рис. 1.2. Пример справки

При вызове справки по конкретной функции из рабочего листа, сразу появляется начало посвященного ей раздела. Наиболее простой способ вызвать справку по конкретной функции – поставить перед ее именем знак вопроса и запустить строку на выполнение.

Примеры из справочной системы можно копировать на рабочий лист для выполнения. Кроме того, в *Maple* есть специальный раздел справки, дающий доступ к примерам с описанием, комментариями и результатами выполнения.

В справочной базе данных предусмотрена возможность ее расширения путем записи текущего документа, созданного пользователем, в указанный раздел. При выполнении операции *Save to Database* (пункт меню *Help*) выводится специальное окно, в котором необходимо указать данные о модернизируемом разделе справки (рис. 1.3). Существует и обратная операция – Удаление разделов справки (*Help* → *Remove Topic*) (рис. 1.4).

Работа в *Maple* проходит в режиме сессии – пользователь вводит предложения (команды, выражения, процедуры), которые воспринимаются и обрабатываются пакетом. Каждое предложение должно заканчиваться точкой с запятой. Строки автоматически запускаются на выполнение при нажатии клавиши *Enter* в любом месте строки. Выполнить выделенную часть рабоче-

го листа или весь лист целиком можно с помощью пункта меню *Edit* → *Execute* → *Selection* (*Edit* → *Execute* → *Worksheet*).

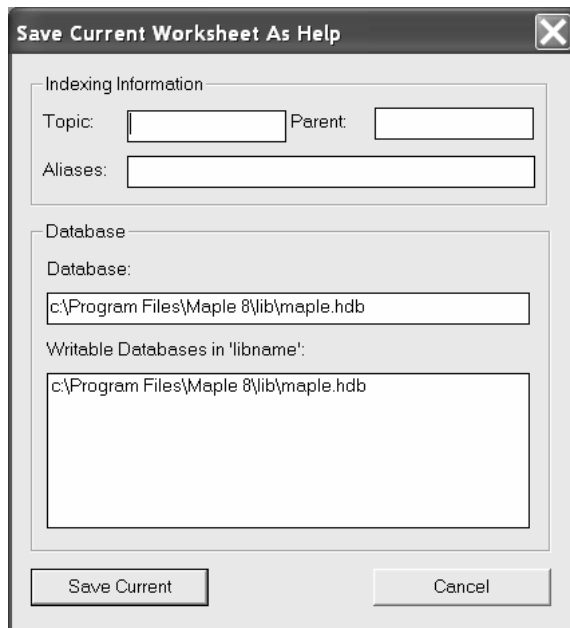


Рис. 1.3. Окно дополнения базы данных

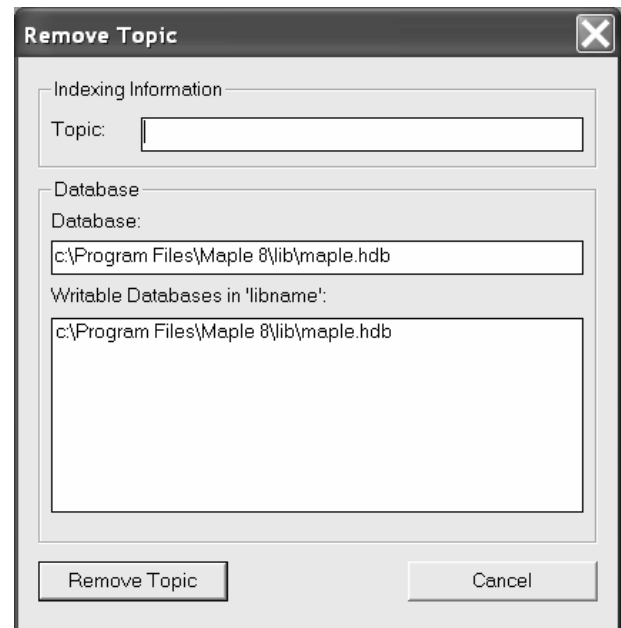


Рис. 1.4. Окно удаления разделов справочной базы данных

Рабочее поле разделяется на три части:

- Область ввода - состоит из командных строк. Каждая командная строка начинается с символа $>$.
- Область вывода - содержит результаты обработки введенных команд в виде аналитических выражений, графических объектов или сообщений об ошибке. Она располагается в конце параграфа, образованного командными строками.
- Область текстовых комментариев - содержит любую текстовую информацию, которая может пояснить выполняемые процедуры. Текстовые строки не воспринимаются *Maple* и никак не обрабатываются.

Для того чтобы переключить командную строку в текстовую, следует на *Панели инструментов* нажать мышью кнопку

Обратное переключение текстовой строки в командную осуществляется нажатием на *Панели инструментов* кнопки

При необходимости ввести неисполняемую формулу следует на *Панели инструментов* нажать мышью кнопку

1.2. Порядок выполнения лабораторных работ и их оформления

Каждая лабораторная работа должна представлять из себя отдельный рабочий лист *Maple* и содержать заголовок.

Пример заголовка:

Лабораторная работа № 1. Тема «Предел и непрерывность функции».

Выполнил студент группы ПМ-11 Иванов И.И. Дата: 01.09.2005

Рабочий лист должен содержать, где это необходимо, комментарии. Каждая лабораторная работа должна сопровождаться письменным отчетом.

1.3. Лабораторная работа № 1. Арифметические операции

Пакет *Maple* ориентирован на символьные вычисления, что иногда приводит к результатам, отличным внешне от тех, которые были получены с помощью других математических пакетов или найдены ручным способом. Для преобразования результата к нужному виду требуются зачастую определенные и не всегда простые усилия.

Самым простым способом получения численного результата является использование вместо целых чисел вещественных или функции *evalf()*.

Рекомендации к выполнению заданий 1-12

В *Maple* используются привычные символы для записи математических операций: $+$, $-$, $*$, $/$ - операции сложения, вычитания, умножения и деления; возведение в степень допускает два варианта записи: $^$, $**$. Функции *sqrt()*, *sin()*, *exp()*, *log()*, *arctan()* и *abs()* также хорошо знакомы. Для записи десятичного логарифма можно воспользоваться либо приведением к натуральному логарифму, либо функцией *log10()*, либо более общей *log[x]()*, где x - основание логарифма.

В отличие от большинства алгоритмических языков программирования, *Maple* содержит множество предопределенных констант. К ним относятся число π - *Pi*, бесконечность - *infinity*. Эти константы являются защищенными, и попытка присвоить им другое значение приведет к сообщению об ошибке. Задать точность выводимого значения можно, изменив значение системной переменной окружения *Digits* (значение по умолчанию = 10).

Задание № 1. Вычислить $\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}}}{\sqrt{3}}$.

Задание № 2. Вычислить $\sqrt{6 - \sqrt{6 - \sqrt{6}}}$.

Задание № 3. Вычислить $(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)$.

Задание № 4. Вычислить $\sqrt[3]{27}$.

Задание № 5. Вычислить $\sin \frac{\pi}{6}$.

Задание № 6. Вычислить $\sin(1)$.

Задание № 7. Вычислить e^1 .

Задание № 8. Вычислить $\lg 100$.

Задание № 9. Вычислить $\arctg \sqrt{3}$.

Задание № 10. Вычислить $20!$.

Задание № 11. Вычислить $\frac{1}{3}$ с пятью знаками после запятой.

Задание № 12. Вычислить $\frac{|-5|}{3}$.

Замечание 1. В *Maple* регистр имеет значение и две переменные *Ans* и *ans* являются разными, а *Diff()* и *diff()* – две различные функции.

Большинство функций, чья запись начинается с заглавной буквы, являются инертными, т.е. при вызове данной функции вычисления не происходит, а на экран выводится запись выражения в естественной математической форме (рис. 1.5).

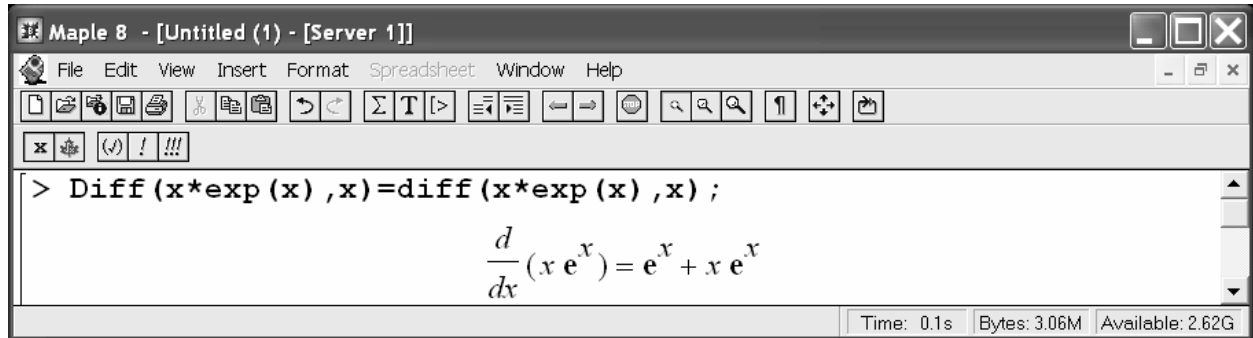


Рис. 1.5. Пример применения инертной функции

Задание № 13. Найти $(\sin(2x))'$.

Задание № 14. Найти $\left(\frac{x}{x^2-1}\right)'$.

Результат записать с использованием инертной функции (см. рис. 1.5).

Для более удобного представления результата часто требуется упростить полученное выражение. Для этого можно использовать функцию *simplify()*.

Кроме указанной функции те или иные преобразования выражений можно получить с помощью следующих функций:

- *combine()* – обеспечивает объединение показателей степенных функций и преобразование тригонометрических и некоторых иных функций;
- *convert()* – мощная функция преобразования выражений, результат зависит от использованных параметров;
- *expand()* – раскрытие скобок в выражении;
- *factor()* – разложение многочлена на множители.

Задание № 15. Упростить производную в задании № 14.

Задание № 16. Привести выражение $\cos^2 x - \sin^2 x$ к виду $\cos(2x)$.

Задание № 17. Разложить на множители выражение $a^3 - b^3$.

Задание № 18. Раскрыть скобки в выражении $(a - b)^3$.

Задание № 19. Привести выражение $\frac{x^4 + x}{x^2 - 1}$ к виду $x^2 + 1 + \frac{1}{x - 1}$.

Лишь наиболее употребительные функции находятся в основной библиотеке *Maple*. Остальные распределены по специальным библиотекам подпрограмм (пакетов) и требуют предварительной загрузки перед их использованием. В справочной системе для таких функций указаны имена тех пакетов, где они находятся. Загрузить функцию для использования можно, или загрузив весь пакет командой *with(имя пакета)* (рис. 1.6), или использовать функции с помощью команды формата *имя пакета[имя функции]()*.

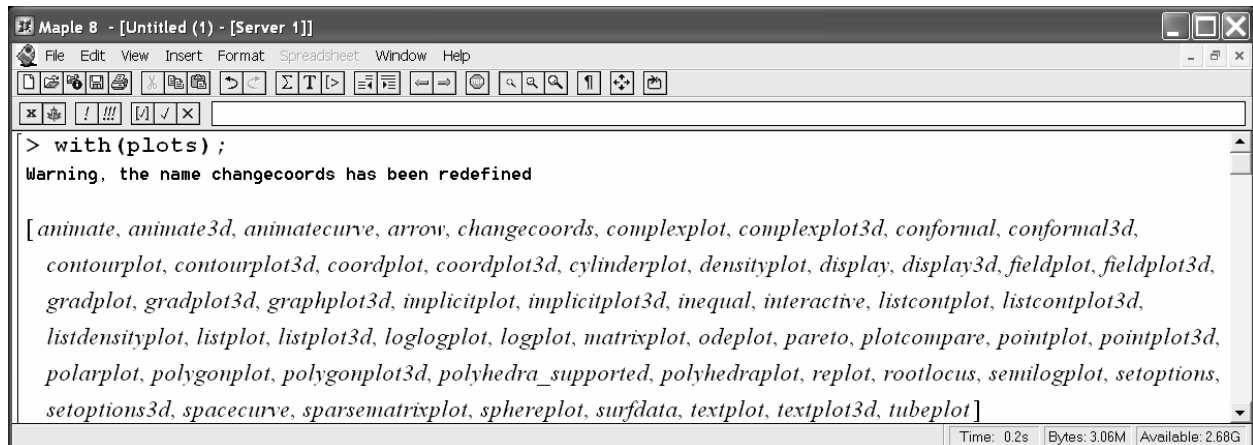


Рис. 1.6. Пример загрузки пакета

Замечание 2. При загрузке пакета в поле вывода появляется перечень всех входящих в него функций. По каждой из них можно получить справку, выбрав имя соответствующей функции и нажав клавишу F1. Может появиться сообщение о том, что та или иная функция была переопределена. Это означает, что в данный пакет входит функция, имеющая имя, совпадающее с именем уже загруженной ранее функции. Доступной становится та из них, которая была загружена последней. Эти функции могут быть совершенно различны по количеству и типу параметров, а также выполняемым действиям.

Замечание 3. Чтобы избежать ненужного вывода на экран результатов, можно в конце оператора вместо «;» ставить «:».

Задание № 20. Вычислить $\int x^2 e^{2x} dx$.

Задание № 21. Вычислить интеграл из задания № 20, используя функцию *intparts()* из пакета *student*.

1.4. Лабораторная работа № 2. Переменные и функции

При работе в Maple не требуется специального объявления новых переменных. Они объявляются автоматически в момент их первого использования. Тип их зависит от тех действий, в которых они участвуют, и может меняться на протяжении выполнения задания. Ограничения на имена переменных такие же, как и в большинстве языков программирования: имя должно начинаться с буквы и содержать только определенные символы. Особенностью Maple является возможность задать переменную с именем, содержа-

щим 524 275 символов, а также задать имя в обратных апострофах. В последнем случае снимаются многие ограничения на имя (рис. 1.7).

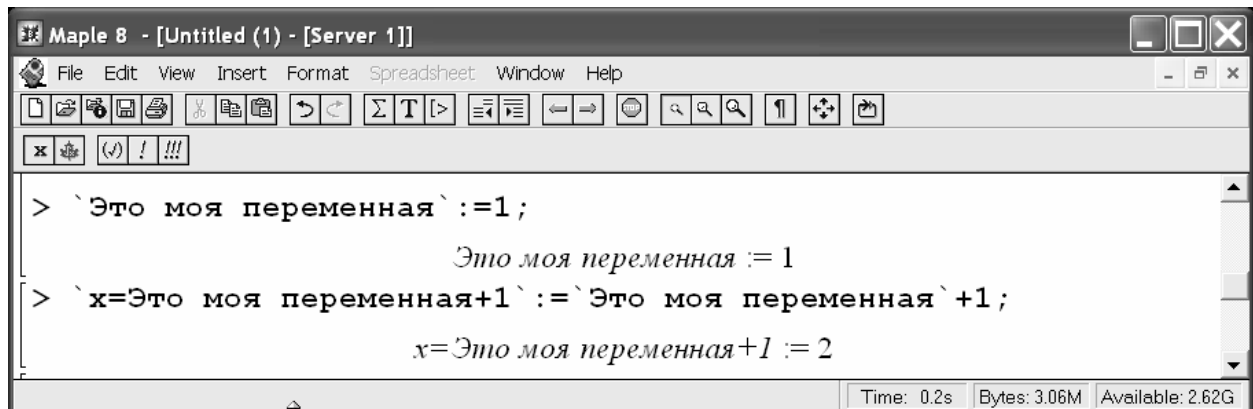


Рис. 1.7. Пример задания имени переменной

Для присваивания переменным конкретных значений используется СИМВОЛ «:=».

Примеры

- $n := 1$; - переменной n присваивается целочисленное значение 1;
- $x := 1.0$; $y := 123.456$; - переменным x и y присваиваются вещественные значения;
- $z := 1/2$; - переменной z присваивается рациональное значение $1/2$;
- $MyString := 'Эллипс'$; - переменной присваивается строковое значение «Эллипс»;
- $V := [1,2,3]$; - переменной V присваивается значение списка чисел $[1,2,3]$.

Правая часть выражения присваивания определяет тип переменной.

Замечание 1. Если переменная уже имела какой-либо тип, то операция присваивания меняет ее тип на соответствующий правой части выражения.

Замечание 2. Узнать тип переменной можно с помощью функций *what-type* и *type*. Первая возвращает тип переменной, вторая возвращает логическое значение *true* или *false* в зависимости от того, соответствует ли тип переменной второму параметру функции или нет.

Замечание 3. Иногда требуется вернуть переменной неопределенный тип. Это может понадобиться при использовании переменных в функциях *diff*, *int* и других.

Следующий пример приводит к сообщению об ошибке:

```
>x:=5:
```

```
>int(sin(x),x):
```

Error, (in int) wrong number (or type) of arguments.

Эта ошибка возникла из-за того, что ранее переменная x была определена как целочисленная переменная со значением 5, а для вычисления интеграла требуется необъявленная или строковая переменная.

Вернуть переменной неопределенный статус можно с помощью следующего выражения:

```
>x:='x';
```

Второй вариант – использование функции *evaln()*:

```
>x:=evaln(x);
```

Для придания всем переменным статуса неопределенных используется команда *restart*.

В *Maple* имеется несколько способов представления функции.

Способ 1. Определение функции с помощью оператора присваивания (*:=*): какому-то выражению присваивается имя, например:

```
> f:=sin(x)+cos(x);
```

$$f := \sin(x) + \cos(x)$$

Если задать конкретное значение переменной *x*, то получится значение функции *f* для этого *x*. Например, если продолжить предыдущий пример и вычислить значение *f* при $x = \pi/4$, то следует записать

```
> x:=Pi/4;
```

$$x := \frac{\pi}{4}$$

```
> f;
```

$$\sqrt{2}$$

После выполнения этих команд переменная *x* имеет заданное значение $\pi/4$.

Чтобы насовсем не присваивать переменной конкретного значения, удобнее использовать команду подстановки *subs*(*{x1=a1, x2=a2, ..., }, f*), где в фигурных скобках указываются переменные x_i и их новые значения a_i ($i=1,2,\dots$), которые следует подставить в функцию *f*. Например:

```
> f:=x*exp(-t);
```

$$f := xe^{(-t)}$$

```
> subs({x=2,t=1},f);
```

$$2e^{(-1)}$$

Все вычисления в *Maple* по умолчанию производятся символьно, т.е. результат будет содержать в явном виде иррациональные константы, такие, как *e*, π и др. Чтобы получить приближенное значение в виде числа с плавающей запятой, следует использовать команду *evalf()*. Например, продолжая предыдущий пример, приближенное вычисление полученного значения функции выглядит следующим образом:

```
> evalf(%);
```

$$.7357588824$$

Здесь использован символ (%) для вызова предыдущей команды.

Способ 2. Определение функции с помощью функционального оператора, который ставит в соответствие набору переменных (*x1, x2, ...*) одно или несколько выражений (*f1, f2, ...*).

Пример:

$$> f := (x, y) \rightarrow \sin(x + y);$$

$$f := \sin(x + y)$$

Обращение к этой функции осуществляется наиболее привычным в математике способом, когда в скобках вместо аргументов функции указываются конкретные значения переменных:

$$> f(\text{Pi}/2, 0);$$

1

Способ 3. С помощью команды *unapply()*:

```
> f:=unapply(x^2+y^2,x,y);
```

$$f := (x, y) \mapsto x^2 + y^2$$

$$> f(-7,5);$$

74

В *Maple* имеется возможность определения неэлементарных функций вида

[illegible]

посредством команды *piecewise()*.

Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ \sin x, & x \geq 1 \end{cases}$$

записывается следующим образом:

```
> f:=piecewise(x<0, 0, 0<=x and x<1, x, x>=1, sin(x));
```

$$f := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & -x \leq 0 \text{ and } x-1 < 0 \\ \sin x & 1 \leq x \end{cases}$$

Задание № 1. Определить функцию $f(x, y) = \left(\frac{\operatorname{arctg}(x + y)}{\operatorname{arctg}(x - y)} \right)^2$ и вычислить ее значения при $x = 1$, $y = 0$ и $x = (1 + \sqrt{3})/2$, $y = (1 - \sqrt{3})/2$.

Задание № 2. Найти значение производной функции $\frac{x^2}{x-1}$ при $x = 3$.

Задание № 3. Определить функцию $f = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ и перейти в ней к полярным координатам $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Упростить полученное выражение.

$$\text{Задание № 4. Определить функцию } f(x) = \begin{cases} x, & x < -1 \\ -x^2, & -1 \leq x < 1 \\ -x, & x \geq 1 \end{cases} \text{ и прибавить к ней } x.$$

вить к ней x .

Имеется возможность создавать собственные функции. В *Maple* нет разделения на процедуры и функции, и поэтому в дальнейшем эти конструкции будут называться процедурами. Процедура начинается с заголовка. Заголовок состоит из имени процедуры (его пользователь определяет сам), далее следует обязательный оператор присваивания `:=` и служебное слово *proc*, после которого в круглых скобках через запятую указываются формальные параметры процедуры.

Во избежание неполадок работы процедуры рекомендуется в строке заголовка процедуры описывать переменные, которые будут использоваться только внутри тела процедуры (они называются локальными переменными). Для этого используется служебное слово *local*, после которого через запятую перечисляются локальные переменные.

После заголовка следует основное тело процедуры, состоящее из составленных пользователем команд. Обычно процедура возвращает значение последнего выражения в ее теле или выражения, намеченного к возврату оператором *return*. Параметром оператора *return* может быть любое выражение. Процедура должна обязательно оканчиваться служебным словом *end[proc]* (рис. 1.8).

```
> fg:=proc(a,b)
> local c;
> c:=a^2:d:=b^2;
> return (sqrt(c+d));
> end proc;
>
Warning, `d` is implicitly declared local to procedure `fg`

fg := proc(a, b) local c, d; c := a^2; d := b^2; return sqrt(c + d) end proc
```

Рис. 1.8. Пример пользовательской процедуры

Переменные, которые указываются в списке параметров, внутри процедуры являются локальными, т.е. изменение их значений происходит лишь в теле процедуры. За пределами тела процедуры эти переменные сохраняют те значения, которые у них были до вызова процедуры.

Во избежание возможных побочных эффектов при использовании в теле процедуры ранее объявленных переменных *Maple*-язык программирования корректирует текст процедуры, вставляя в нее объявление переменных локальными с помощью ключевого слова *local*, и выдает предупреждающую надпись о подобном применении (рис. 1.8, переменная *d*). Можно самостоятельно объявить локальную переменную, как это сделано в случае с переменной *c* (рис. 1.8).

Если возникает необходимость объявить в теле процедуры переменную, которая сохраняла бы свое значение при выходе из процедуры, то следует воспользоваться ключевым словом *global*.

Задание № 5. Составить процедуру, которая меняет местами значения переменных *a* и *b* и возвращает их максимальное значение.

Maple имеет встроенный язык программирования, что дает доступ не только к созданию пользовательских процедур, но и использованию таких стандартных конструкций, как *условные предложения* и *циклы*.

Конструкция *условного предложения* достаточно стандартна, поэтому здесь приводится ее краткое формальное описание:

```
if <логическое выражение> then <операторы>
[elif <логическое выражение> then <операторы>]
[else <операторы>]
end [if].
```

Циклическое предложение объединяет в себе два варианта, присутствующих в языках программирования, как правило, порознь:

```
[for <name>][from <expr1>][to <expr2>][by <expr3>][while <expr4>]
do...od,
```

где *name* – имя переменной цикла; *expr1*, *expr2*, *expr3*, *expr4* – выражения, задающие начальное значение, конечное значение и шаг переменной цикла, а также условие выхода из цикла. Любой из блоков, заключенных в квадратные скобки, может быть опущен и минимальная конструкция цикла выглядит следующим образом: *do...od*.

Задание № 6. Написать процедуру, которая определяет, является ли заданное число положительным.

Задание № 7. Написать процедуру, которая вычисляет факториал натурального числа.

Задание № 8. Написать процедуру, которая умножает число на себя (возведение в степень), пока результат не станет по абсолютной величине больше 1 000 или меньше 0,001.

В *Maple* имеется возможность создать собственную библиотеку процедур. Для этого необходимо проделать следующее (рис. 1.9):

- определить имя своей библиотеки;
- так как процедуры в *Maple* ассоциируются с таблицами, то необходимо создать пустую таблицу;
- ввести библиотечные процедуры;

- с помощью функции *with()* можно убедиться, что библиотека содержит только что введенные в нее процедуры;
- Записать библиотеку на диск.

Замечание 4. Обратите внимание, что при полном задании имени файла использовался знак «/», а не более привычный «\». Это связано с тем, что «\» используется в *Maple* как знак продолжения строки.

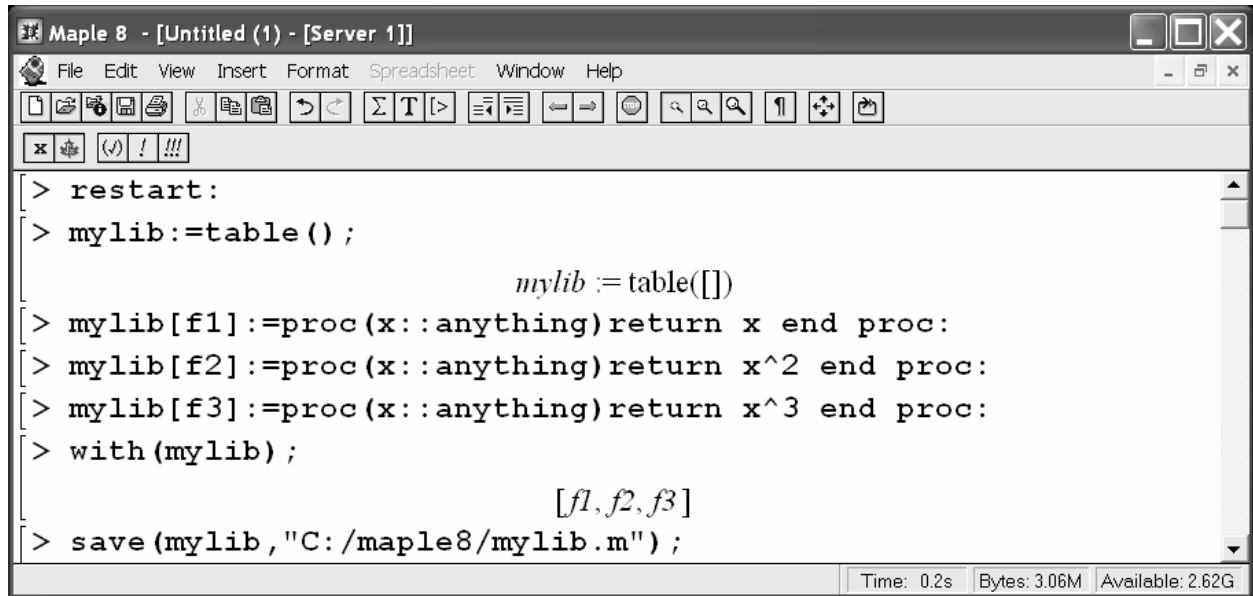


Рис. 1.9. Создание библиотеки процедур

Задание № 9. Сохранить все процедуры из заданий №№ 6-8 в свою библиотеку.

Замечание 5. Возможностью сохранения своих процедур не стоит злоупотреблять, так как это приводит к несовместимости ваших проектов со стандартной версией *Maple*.

Замечание 6. В *Maple* имеется возможность добавлять свои процедуры в стандартные библиотеки, а также создавать их справочное описание с помощью функции *makehelp()*.

Задание № 10. Составить описание процедур из своей библиотеки (см. задание № 9).

1.5. Лабораторная работа № 3. Средства для построения графиков

Графические возможности *Maple* весьма разнообразны. Здесь и построения двумерных графиков и трехмерных графиков функций, заданных явно или неявно; графические иллюстрации решений различных уравнений, включая системы дифференциальных уравнений; построение графиков векторных полей градиентов, фазовых портретов; построение дополнительных графических объектов (например, стрелок); анимация.

В ядро *Maple* входит лишь малая часть графических процедур, остальные находятся в специализированной библиотеке *plots*.

Ниже рассмотрены некоторые из перечисленных возможностей. Для построения двумерных графиков функций вида $y=f(x)$ используется процедура *plot()*, входящая в ядро *Maple*. Ее параметры весьма многочисленны. Наиболее употребительные из них:

- *axes* – вывод различных типов координат (*axes*=NORMAL – является значением по умолчанию и выводит обычные оси координат; *axes*=BOXES, *axes*=FRAME, *axes*=NONE – другие возможные значения данного параметра);
- *color* – задает цвет кривых;
- *coords* – задает тип координатной системы (*coords*=cartesian – декартова система координат, значение по умолчанию; *coords*=polar – полярная система координат; возможны еще 13 значений параметра);
- *discont* – задает построение непрерывного графика, играет роль в случае разрывных функций (*discont*=false – выводит непрерывный график, значение по умолчанию; *discont*=true – выводит график функции с разрывом);
- *legend* – задает вывод обозначения кривых;
- *linestyle* – задает стиль линии;
- *scaling* – задает масштаб графика;
- *title* – задает построение заголовка графика;
- *thickness* – задает толщину линий графиков.

При построении графика одной функции она записывается в явном виде на месте первого параметра процедуры *plot()*. Для управления отображаемой на графике области служит задание диапазона принимаемых значений для переменной и функции (рис. 1.10, первый пример). Если их не применять, то *Maple* автоматически задаст какой-то диапазон, что не всегда приводит к удовлетворительным результатам (рис. 1.10, второй пример).

Maple поддерживает возможность построения на одном рисунке нескольких графиков. Достигнуто это может быть двумя путями. Первый путь состоит в том, что параметры процедуры *plot()* задаются в виде перечислений (рис. 1.11, первый пример). Исключение составляет диапазон принимаемых значений, который задается для всех функций сразу. Второй путь состоит в построении списка графических объектов и вывода его с помощью процедуры *display()*, входящей в пакет *plots* (рис. 1.11, второй пример).

Существуют возможности построения графиков функций, заданных параметрически, процедурами, таблицей значений и заданных неявно. Построение графиков функций, заданных неявно, требует более подробного рассмотрения.

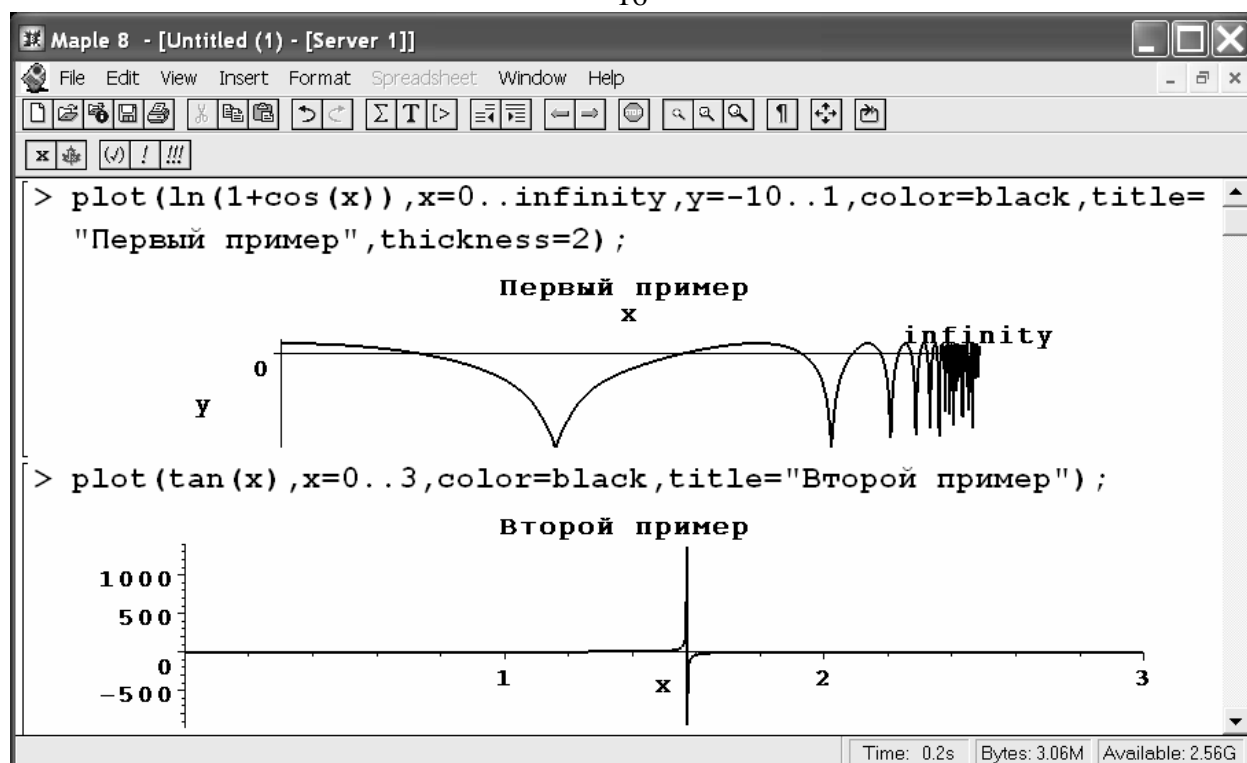


Рис. 1.10. Примеры построения графиков одной функции

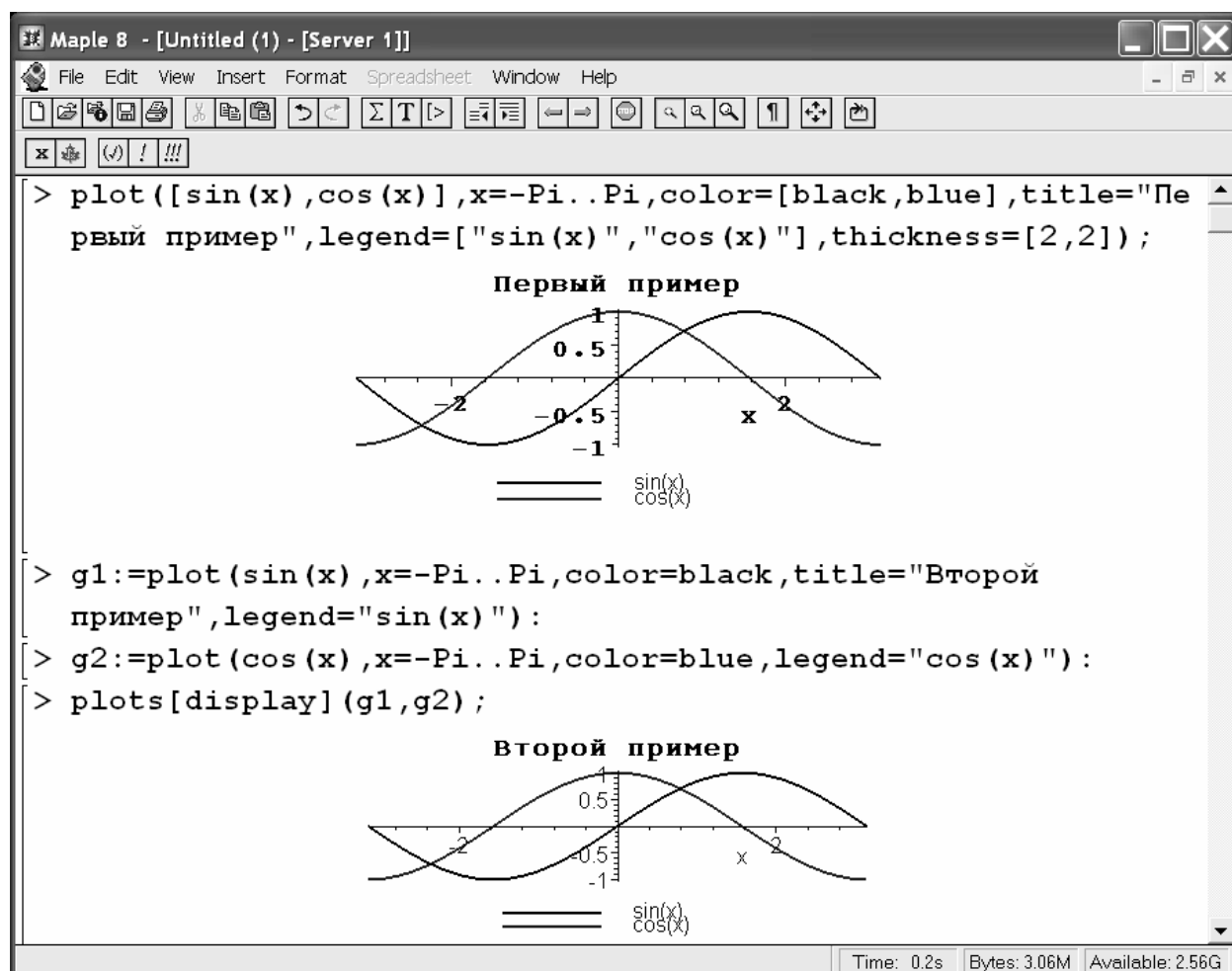


Рис. 1.11. Построение нескольких графиков на одном рисунке

Для построения таких графиков используется процедура *implicitplot()*, входящая в пакет *plots*. Ее параметры во многом повторяют параметры процедуры *plot()*. Основное отличие заключается в обязательном задании диапазона принимаемых значений и опцией *grid*, задающей количество опорных точек (по умолчанию 25x25). Задание этой опции оказывает существенное влияние на качество получаемого графика, но увлечение большим количеством точек может привести к значительным временным затратам на построение. Пример использования процедуры *implicitplot()* иллюстрирует рис. 1.12.

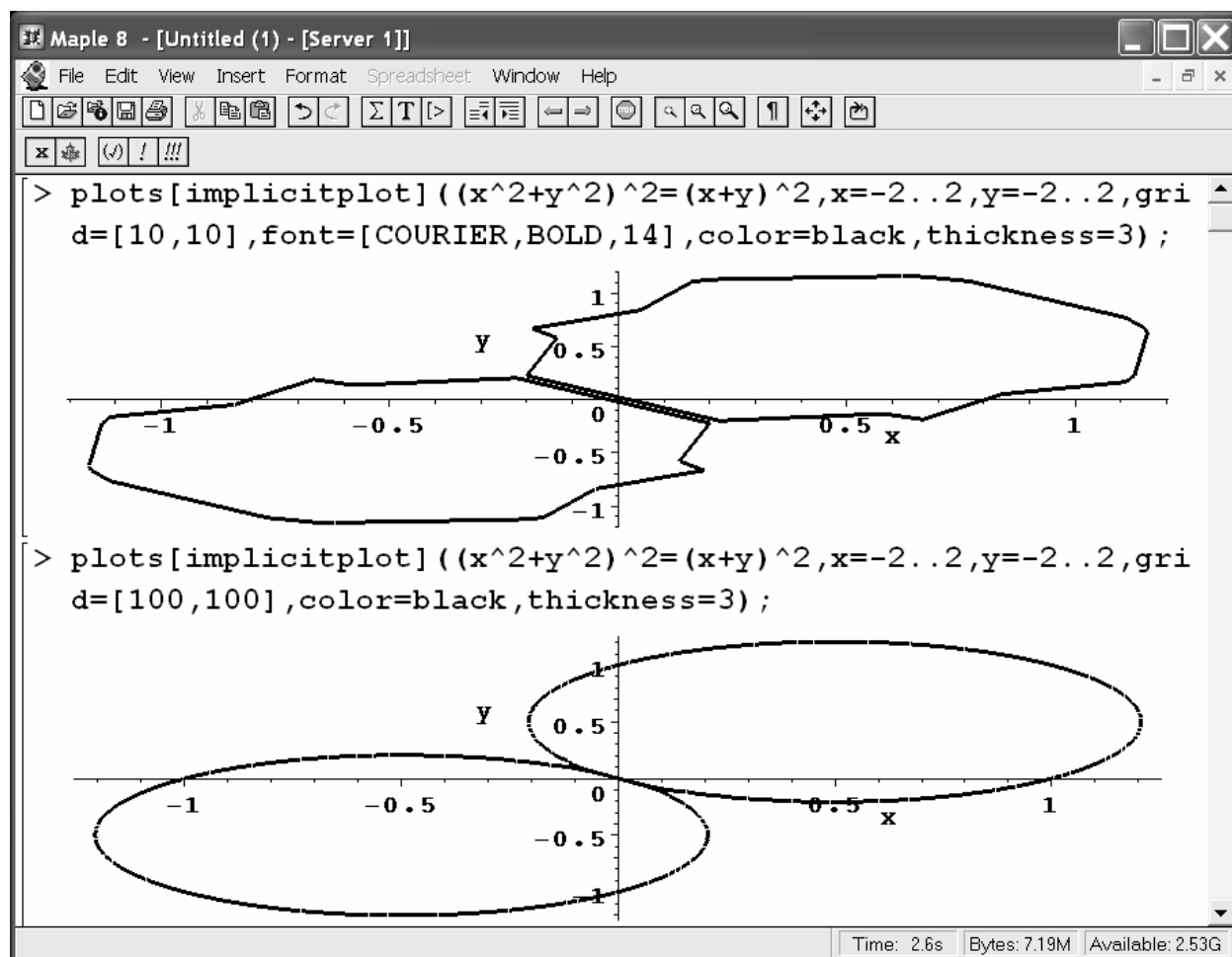


Рис. 1.12. Построение графика неявной функции

Задание № 1. Построить график функции $y = \operatorname{tg} x$ на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$.

Задание № 2. Построить график функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Задание № 3. Построить на одном рисунке графики функций

$$y_1 = \sin x \quad x \in [-\pi, \pi] \text{ и } y_2 = \ln(x) \quad x \in [1, 4].$$

Задание № 4. Построить на одном рисунке графики функции $y = x + 2\operatorname{arctg} x$ и ее асимптот $y = x$ и $y = x + 2\pi$. Установить следующие

параметры: цвет основной линии – голубой, асимптот – красный; толщина основной линии – 3, асимптоты – 1; масштаб по координатным осям – одинаковый. Сделать надписи: какая функция относится к какой линии.

Задание № 5. Построить график спирали Архимеда $r = \varphi$ $\varphi = [0, 4\pi]$.

Задание № 6. Построить график кардиоиды $(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 4(x^2 + y^2)$.

Задание № 7. Построить график улитки Паскаля

$$(x^2 + y^2 - 2x)^2 = (x^2 + y^2).$$

Задание № 8. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 3x - y \geq 9, \\ 2x + 3y \leq 50, \\ -x + 4y > 19. \end{cases}$$

Задание № 9. Построить график функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 2, \\ 6 - x, & x > 2. \end{cases}$$

Задание № 10. Построить график функции, заданной таблично:

x	0	1	2	3	5
$f(x)$	0	0,5	0,7	0,4	0,2

График представить в виде множества точек и в виде ломаной.

В *Maple* есть возможность не только строить графики различных функций, но и «оживлять» их средствами анимации. Этой цели служат следующие процедуры:

- *animatecurve()* – позволяет наблюдать медленное построение графика. При вызове данной процедуры вначале строится пустой шаблон графика. В строке главного меню появляется пункт *Animation*, который содержит команды управления анимацией.
- *animate()* – данная процедура строит серию кадров, причем каждый кадр связан со значением изменяемой переменной. Управление анимацией осуществляется аналогично предыдущему.

Пример использования данных процедур представлен на рис. 1.13.

Задание № 11. Используя возможности анимации, построить спираль Архимеда (см. задание № 5) для $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Задание № 12. Построить последовательность графиков функций

$$r = \sin(t\varphi), \varphi \in [-4, 4], t = 1..4.$$

Процедуры трехмерной графики во многом аналогичны вышерассмотренным, только имена их содержат окончание «3d»: *plot3d()*; *implicitplot3d()*; *animate3d()*.

Некоторые из них связаны с широкими возможностями выбора системы координат или особенностями визуализации, а также различными видами самих трехмерных объектов (кривая, поверхность). К ним можно отнести процедуру *spacecurve()* – построение трехмерной кривой, *tubeplot()* – по-

строение трехмерного графика типа «тор». Пример использования этой процедуры представлен на рис. 1.14.

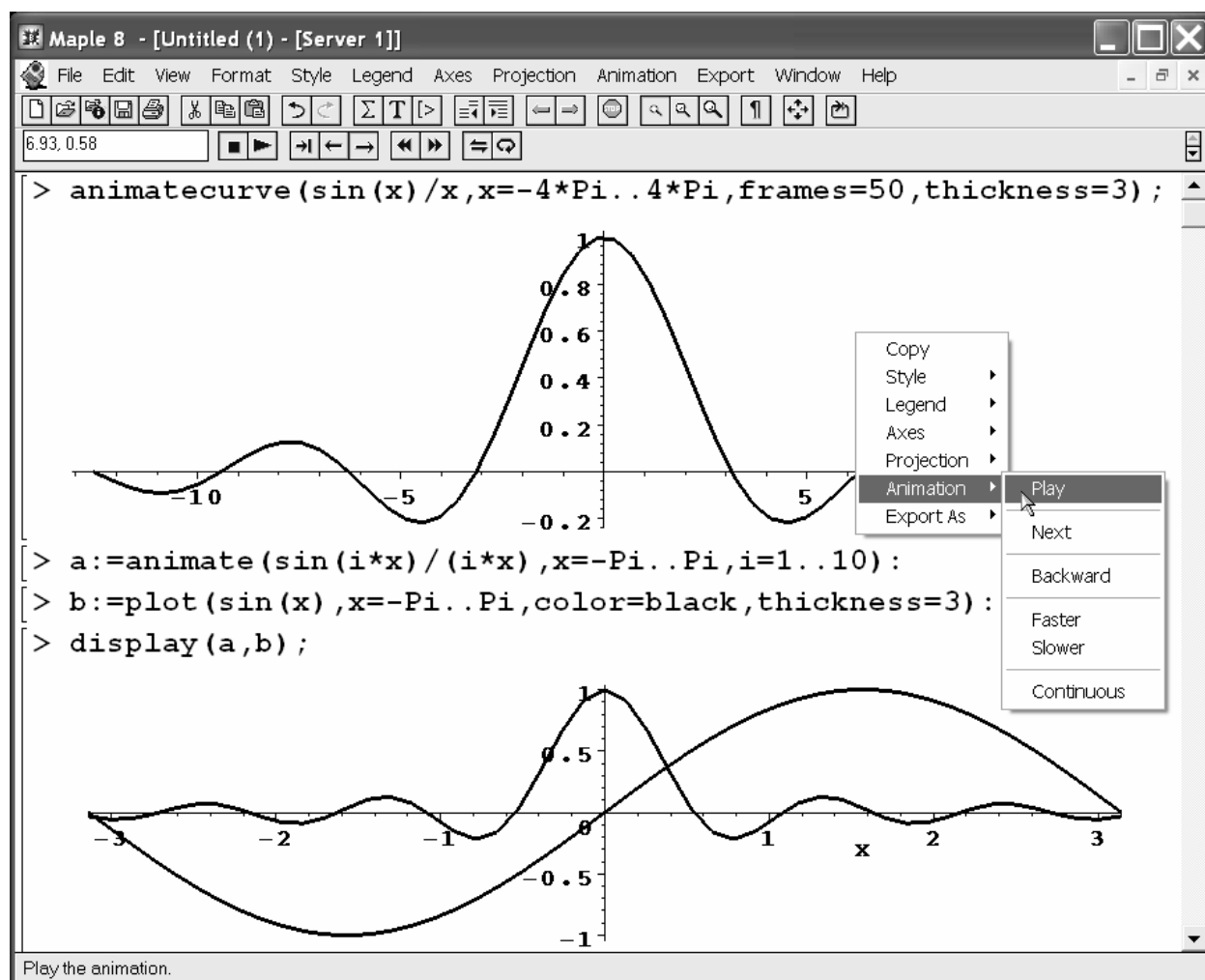


Рис. 1.13. Функции анимации

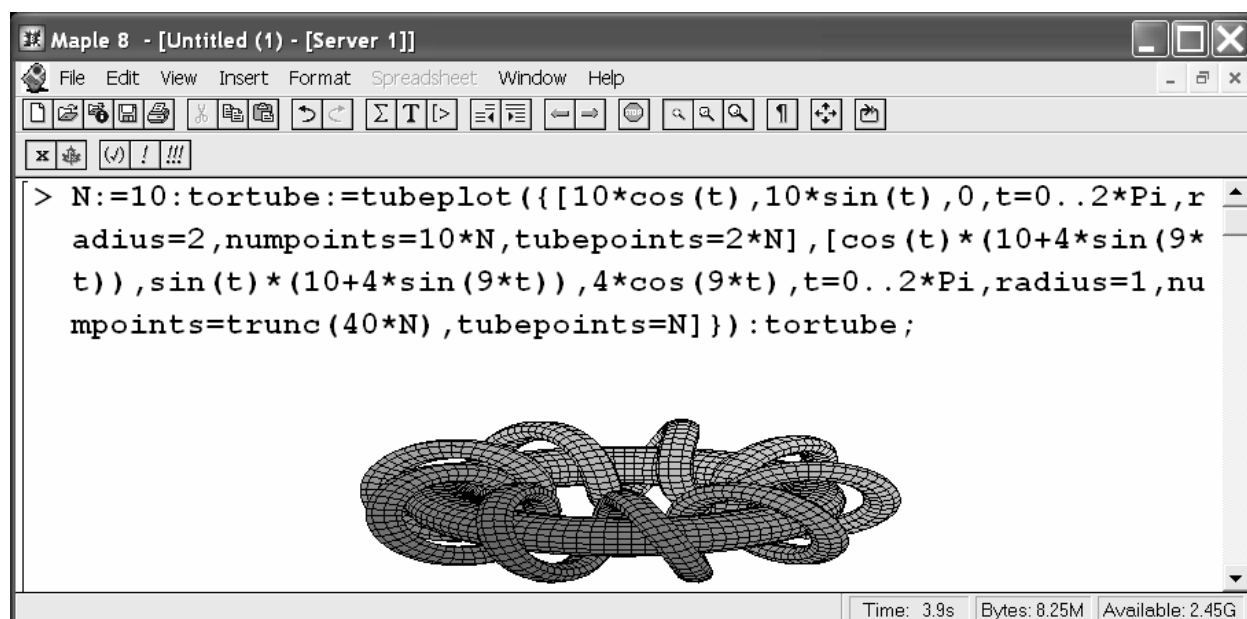


Рис. 1.14. Тор с обмоткой

Задание № 13. Выполнить построение двух поверхностей

$$z = x \sin 2y + y \cos 3x \text{ и } z = \sqrt{x^2 + y^2} - 7$$

в пределах $(x, y) \in [-\pi, \pi]$. Установить переменный цвет поверхностей как функцию $x + y$.

Задание № 14. Построить поверхность

$$z = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{0,2}{(x + 1,2)^2 + (y - 1,5)^2} + \frac{0,3}{(x - 0,9)^2 + (y + 1,1)^2}$$

вместе с линиями уровня.

Задание № 15. Построить шар $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Задание № 16. Построить поверхность $x^5 + y^5 + z^5 + 1 = (x + y + z + 1)^3$.

Задание № 17. Построить пространственную кривую:

$$x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad z = e^t.$$

Задание № 18. Нарисовать параметрически заданную поверхность (лист Мебиуса):

$$x = \left(5 + u \cos \left(\frac{v}{2} \right) \right) \cos v, \quad y = \left(5 + u \cos \left(\frac{v}{2} \right) \right) \sin v, \quad z = u \sin \left(\frac{v}{2} \right),$$

$$v \in [0, 2\pi], \quad u \in [-1, 1].$$

Задание № 19. Построить движущийся объект

$$z = \cos(tx) \cdot \sin(ty), \quad x, y \in [-\pi, \pi], \quad t = 1..2.$$

Еще один пакет *Maple* посвящен графике. Это *plottools*. Он служит для создания графических примитивов.

Примером такого примитива является процедура *arrow*, входящая в пакет *plottools*.

Пример. Точка движется в плоскости по закону

$$\begin{cases} x = 3 \cos t; \\ y = 4 \sin t. \end{cases}$$

В момент времени $t = \pi/3$ построить вектор скорости точки.

Решение. Вектор скорости точки $\vec{v}(t) = \left(\frac{dx}{dt}(t), \frac{dy}{dt}(t) \right)$. Координаты точки и координаты вектора скорости в указанный момент времени соответственно равны

$$\begin{cases} x_0 = \frac{3}{2}; \\ y_0 = 2\sqrt{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} v_x = -\frac{3\sqrt{3}}{2}; \\ v_y = 2. \end{cases}$$

Построение траектории движения точки и вектора скорости с помощью процедур *plot()* и *arrow()*:

```
>tr:=plot([x(t),y(t),t=9..2*Pi]);
```

```
>arr:=arrow([x0,y0],[x0+vx,y0+vy],0.05,0.2,0.1);
```

Задание № 20. В условиях примера построить векторы ускорений:

$$\begin{cases} \vec{a}_x(t) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}(t), 0 \right); \\ \vec{a}_y(t) = \left(0, \frac{d^2y}{dt^2}(t) \right); \\ \vec{a}(t) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}(t), \frac{d^2y}{dt^2}(t) \right). \end{cases}$$

1.6. Лабораторная работа № 4. Векторы и матрицы

Основная часть команд для решения задач линейной алгебры содержится в библиотеке *linalg*.

Для определения вектора в *Maple* используется команда *vector([x1,x2,...,xn])*, где в квадратных скобках через запятую указываются координаты вектора. Координату уже определенного вектора *x* можно получить командой *x[i]*, где *i* – номер координаты.

Вектор можно преобразовать в список и, наоборот, с помощью команд *convert(vector, list)* или *convert(list, vector)*.

Операции над векторами:

- *evalm()* – сложение векторов;
- *dotprod()* – скалярное произведение;
- *crossprod()* – векторное произведение;
- *angle()* – угол между векторами;
- *norm()* – норма (длина) вектора;
- *normalize()* – нормирование вектора;
- *basis()* – нахождение базиса системы векторов;
- *GramSchmidt()* – ортогонализация базиса;
- *vectdim()* – размерность вектора.

Задание № 1. Даны векторы $a = (1, 1, 1)$, $b = (12, 6, -3)$ и $c = (-38, 76, 19)$. Найти:

- а) вектор $d = 3a - 2b + 4c$;
- б) скалярное произведение $a \cdot b$;
- в) векторное произведение $a \times c$;
- г) смешанное произведение (a, b, c) ;
- д) угол между векторами b и c ;
- е) длины векторов a и b ;
- ж) нормировать вектор c .

Задание № 2. Для векторов из задания № 1 выяснить, составляют ли они базис. В случае положительного ответа провести процедуру ортогонализации базиса.

Задание № 3. Из системы векторов $a_1 = (1, 2, 2, -1)$, $a_2 = (1, 1, -5, 3)$, $a_3 = (3, 2, 8, 7)$, $a_4 = (0, 1, 7, -4)$, $a_5 = (2, 1, 12, -10)$ выделить базис и ортогонализировать его.

Для определения матрицы в *Maple* используется команда $matrix(n, m, [[a11, a12, \dots, a1n], [a21, a22, \dots, a2m], \dots, [an1, an2, \dots, anm]])$, где n – число строк; m – число столбцов в матрице. Эти числа задавать необязательно, а достаточно перечислить элементы матрицы построчно в квадратных скобках через запятую. При явном задании размерности матрицы ее элементы могут быть перечислены в общих квадратных скобках, без построчного разделения.

Пакет *linalg* включает также процедуры для генерации матриц специального вида (например, для диагональной матрицы используется процедуры $diag()$).

Операции над матрицами:

- $evalm()$ – позволяет производить арифметические действия над матрицами или матрицами и векторами;
- $multiply()$ – произведение матриц;
- $rowdim()$ – число строк матрицы;
- $coldim()$ – число столбцов матрицы;
- $inverse()$ – нахождение обратной матрицы;
- $transpose()$ – транспонирование матрицы;
- $eigenvalues()$ – нахождение собственных чисел матрицы;
- $eigenvectors()$ – нахождение собственных векторов матрицы;
- $charpoly()$ – характеристический многочлен матрицы;
- $minor()$ – минор матрицы;
- $det()$ – определитель матрицы.

Задание № 4. Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 8 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти:

- а) произведение матриц $A \cdot B \cdot C$;
- б) A^{-1} ;
- в) $(B \cdot C)^T$;
- г) $3A - 2B \cdot C$;
- д) собственные числа и собственные векторы матрицы $B \cdot C$;
- е) характеристический многочлен матрицы A ;
- ж) минор элемента a_{23} матрицы A ;
- з) определитель матрицы A .

Замечание 1. Number Algorithm Group (NAG) разработала быстрые алгоритмы линейной алгебры. В *Maple* включен пакет работы с линейной алгеброй, использующий данные алгоритмы. Это пакет *LinearAlgebra*.

Большинство его процедур повторяют по назначению процедуры пакета *linalg*, но выполняются быстрее и позволяют задействовать арифметический сопроцессор.

Задание № 5. Выполнить задания №№ 1-4 с использованием процедур пакета *LinearAlgebra*.

Задание № 6. Задать случайную симметричную матрицу размера 7×7 и определить все ее собственные векторы и собственные числа.

Важной задачей линейной алгебры является решение систем линейных уравнений. Разработчики *Maple* предоставили в распоряжение пользователя мощную процедуру решения системы линейных уравнений – *linsolve* из пакета *linalg* (аналог для пакета *LinearAlgebra* – *LinearSolve*). Она работает для систем, имеющих в том числе и бесконечное множество решений.

Задание № 7. Решить систему линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & -7 & 2 & 14 \end{array} \right),$$

используя функции *linsolve* и *LinearSolve*.

Задание № 8. Определить ранг матрицы системы из задания № 7.

Задание № 9. Привести матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -12 \\ 5 & 4 & -12 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

к треугольному виду.

Задание № 10. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(3;1;4)$, $A_2(-1;6;1)$, $A_3(-1;1;6)$, $A_4(0;4;-1)$. Требуется найти:

а) угол между гранями $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$;

б) площадь грани $A_1A_2A_3$;

в) уравнение плоскости $A_1A_3A_4$;

г) уравнение высоты, опущенной из вершины A_2 на грань $A_1A_3A_4$;

д) объем пирамиды.

1.7. Лабораторная работа № 5. Уравнения и неравенства

В состав *Maple* входит мощная процедура *solve()* и множество ее разновидностей, одна из которых *linsolve()* была рассмотрена в предыдущей лабораторной работе.

Процедура *solve()* позволяет найти корни различных уравнений, решения систем уравнений, неравенств одной переменной.

Задание № 1. Решить уравнение $x^3 - 11x^2 + 20x + 32 = 0$.

Задание № 2. Решить уравнение $10x = e^x$.

Задание № 3. Решить уравнение $x = \sin(x) + 1$.

Задание № 4. Решить неравенство $10x > x^2$.

Задание № 5. Решить неравенство $10x \leq x^2$.

Задание № 6. Решить уравнение $x^3 - 1 = 0$.

Задание № 7. Найти вещественные корни уравнения $x^3 - 1 = 0$.

Указание. Воспользуйтесь функцией $fsolve()$.

Задание № 8. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + z = 1, \\ 2x + 3y + 3z = 2, \\ x + 3y + 2z = 1. \end{cases}$$

Задание № 9. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y^2 = 1, \\ x^2 - y = 3. \end{cases}$$

Задание № 10. Найти все вещественные корни уравнения

$$5x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 5x - 2 = 0,$$

лежащие в интервале $[0, 2]$.

Задание № 11. Найти корень уравнения $\sin(x) = \cos(x)$, ближайший к $x = 1$.

Задание № 12. Найти вещественные корни уравнения

$$x^4 + 3x^3 - x^2 - 7x - 2 = 0,$$

лежащие в промежутке $[-3, 0]$, не совпадающие с $x = -2$.

Раздел 2. Решение задач по математическому анализу

2.1. Лабораторная работа № 6. Исследование функции и построение графика

Задание № 1. Провести полное исследование функции и построить график.

Вариант 1. а) $y = \frac{(x^3 + 4)}{x^2}$; б) $y = (2x + 3)e^{-2(x+1)}$.

Вариант 2. а) $y = \frac{(x^2 - x + 1)}{(x - 1)}$; б) $y = \frac{e^{2(x+1)}}{2(x + 1)}$.

Вариант 3. а) $y = \frac{2}{(x^2 + 2x)}$; б) $y = 3 \ln \frac{x}{x - 3} - 1$.

Вариант 4. а) $y = \frac{4x^2}{(3 + x^2)}$; б) $y = (3 - x)e^{x-2}$.

Вариант 5. а) $y = \frac{12x}{(9 + x^2)}$; б) $y = \frac{e^{2-x}}{2 - x}$.

Вариант 6. а) $y = \frac{(x^2 - 3x + 3)}{(x - 1)}$; б) $y = \ln \frac{x}{x + 2} + 1$.

Вариант 7. а) $y = \frac{(4 - x^3)}{x^2}$; б) $y = (x - 2)e^{3-x}$.

Вариант 8. а) $y = \frac{(x^2 - 4x + 1)}{(x - 4)}$; б) $y = \frac{e^{2(x-1)}}{2(x - 1)}$.

Вариант 9. а) $y = \frac{(2x^3 + 1)}{x^2}$; б) $y = 3 - 3 \ln \frac{x}{x + 4}$.

Вариант 10. а) $y = \frac{(x - 1)^2}{x^2}$; б) $y = -(2x + 1)e^{2(x+1)}$.

Вариант 11. а) $y = \frac{x^2}{(x - 1)^2}$; б) $y = \frac{e^{2(x+2)}}{2(x + 2)}$.

Вариант 12. а) $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2$; б) $y = \ln \frac{x}{x - 2} - 2$.

Указания к выполнению работы

Исследования функции должно проводиться по следующей схеме:

1. Найти точки разрыва функции. Классифицировать точки разрыва.
2. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
3. Найти асимптоты.

4. Найти точки локального максимума и локального минимума.
5. Найти точки перегиба.
6. Указать интервалы возрастания и убывания функции.
7. Указать интервалы выпуклости графика вверх и выпуклости вниз.

Исследование функции должно быть сведено в одну процедуру. В качестве параметра передается исследуемая функция. Процедура должна удовлетворять следующим условиям универсальности:

- количество точек разрыва конечно, но не задано изначально;
- количество точек экстремума конечно, но не задано изначально;
- количество точек перегиба конечно, но не задано изначально;
- масштаб графика выбирается таким образом, чтобы включать все точки разрыва, экстремума и перегиба.

2.2. Лабораторная работа № 7. Неопределенный и определенный интегралы

Задание № 1. Вычислить неопределенный интеграл.

№ варианта	С использованием замены переменной	Разложением на простейшие дроби	Методом интегрирования по частям
1	$\int \frac{x dx}{7 + x^2}$	$\int \frac{(x + 18) dx}{x^2 - 4x - 12}$	$\int (3 - x) \cos x dx$
2	$\int \frac{dx}{\sin^2 x / 5}$	$\int \frac{(x + 4) dx}{x^2 - 2x - 8}$	$\int x \ln(1 - 3x) dx$
3	$\int \frac{x dx}{\sqrt{5 - x^2}}$	$\int \frac{(x + 23) dx}{x^2 + x - 20}$	$\int x e^{-7x} dx$
4	$\int \frac{dx}{5x + 3}$	$\int \frac{(x + 12) dx}{x^2 - x - 6}$	$\int \arctg 4x dx$
5	$\int \sin(2 - 3x) dx$	$\int \frac{(x + 19) dx}{x^2 - 2x - 15}$	$\int \sqrt[3]{x} \ln x dx$
6	$\int e^{\frac{x-2}{4}} dx$	$\int \frac{(5x + 6) dx}{x^2 + 4x - 12}$	$\int x \sin 5x dx$
7	$\int \frac{dx}{7 + 4x^2}$	$\int \frac{(5x - 7) dx}{x^2 - x - 20}$	$\int (2x + 5) \sin x dx$
8	$\int \frac{dx}{\cos^2 2x}$	$\int \frac{5x dx}{x^2 + 2x - 3}$	$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$
9	$\int \cos\left(\frac{x}{3} - 4\right) dx$	$\int \frac{(5x + 2) dx}{x^2 + 2x - 8}$	$\int \arcsin \frac{x}{3} dx$
10	$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x + 1)^2}}$	$\int \frac{(5x + 1) dx}{x^2 + 2x - 15}$	$\int x e^{3x} dx$

11	$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}$	$\int \frac{(2x-3)dx}{x^2 - 5x - 6}$	$\int \frac{\ln x}{x^2} dx$
12	$\int x \cos \sqrt{x} dx$	$\int \frac{(x-9)dx}{x^2 + x - 6}$	$\int \ln^2 x dx$

Задание № 2. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной данными кривыми. Сделать чертеж области.

Вариант 1. $3x^2 - 4y = 0$, $2x - 4y + 1 = 0$.

Вариант 2. $2x + 3y^2 = 0$, $2x + 2y + 1 = 0$.

Вариант 3. $3x^2 + 4y = 0$, $2x + 4y + 1 = 0$.

Вариант 4. $3x^2 - 2y = 0$, $2x - 2y + 1 = 0$.

Вариант 5. $3x^2 - 2y = 0$, $2x + 2y - 1 = 0$.

Вариант 6. $3x^2 + 4y = 0$, $2x - 4y - 1 = 0$.

Вариант 7. $3x^2 - 4y = 0$, $2x + 4y - 1 = 0$.

Вариант 8. $2x - 3y^2 = 0$, $2x + 2y - 1 = 0$.

Вариант 9. $4x + 3y^2 = 0$, $4x + 2y + 1 = 0$.

Вариант 10. $4x - 3y^2 = 0$, $4x + 2y - 1 = 0$.

Вариант 11. $2x - x^3 - y = 0$, $x - y = 0$.

Вариант 12. $x - y^2 + 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$.

Задание № 3. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах. Сделать рисунок кривой.

Вариант 1. $\rho = 3e^{3\varphi/4}$, $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$.

Вариант 2. $\rho = 6e^{12\varphi/5}$, $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$.

Вариант 3. $\rho = 5e^{5\varphi/12}$, $0 \leq \varphi \leq \pi/3$.

Вариант 4. $\rho = 3(1 + \sin \varphi)$, $-\pi/6 \leq \varphi \leq 0$.

Вариант 5. $\rho = 2e^{4\varphi/3}$, $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$.

Вариант 6. $\rho = \sqrt{2}e^\varphi$, $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$.

Вариант 7. $\rho = 4e^{4\varphi/3}$, $0 \leq \varphi \leq \pi/3$.

Вариант 8. $\rho = 1 - \sin \varphi$, $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/6$.

Вариант 9. $\rho = 5(1 - \cos \varphi)$, $-\pi/3 \leq \varphi \leq 0$.

Вариант 10. $\rho = 5e^{5\varphi/12}, -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$.

Вариант 11. $\rho = \cos^3 \frac{\varphi}{3}, 0 \leq \varphi \leq \pi/2$.

Вариант № 12. $\rho = \varphi^2, 0 \leq \varphi \leq \pi$.

2.3. Лабораторная работа № 8. Дифференциальное исчисление функций многих переменных

Задание № 1. Найти экстремумы функции нескольких переменных.

Вариант 1. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

Вариант 2. $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$.

Вариант 3. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Вариант 4. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.

Вариант 5. $z = (2x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

Вариант 6. $z = 2 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}$.

Вариант 7. $z = -x^2 - xy - y^2 + x + y$.

Вариант 8. $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$.

Вариант 9. $z = 3x^2y + y^3 - 18x - 30y$.

Вариант 10. $z = 4 - \sqrt{(x^2 + y^2)^3}$.

Вариант 11. $z = x^4 + y^4 - 36xy$.

Вариант 12. $z = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$.

Задание № 2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции в области.

Вариант 1. $f = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

Вариант 2. $f = \frac{xy}{2} - \frac{x^2y}{6} - \frac{xy^2}{8}, x \geq 0, y \geq 0, \frac{x}{3} + \frac{y}{4} \leq 1$.

Вариант 3. $f = x^2 + y^2 - xy - x - y, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3$.

Вариант 4. $f = xy, x^2 + y^2 \leq 1$.

Вариант 5. $f = xy^2, x^2 + y^2 \leq 1$.

Вариант 6. $f = x^3 + y^3 - 3xy, 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 2$.

Вариант 7. $f = xy - x^2y - \frac{xy^2}{2}, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$.

Вариант 8. $f = x^3 + 3y^2 - 3xy, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$.

Вариант 9. $f = \cos x \cos y \cos(x + y), 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$.

Вариант 10. $f = 2 \sin x + 2 \sin y + \sin(x + y)$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

Вариант 11. $f = x^2 + y^2 - 12x + 16y$, $x^2 + y^2 \leq 25$.

Вариант 12. $f = x^2 - xy + y^2$, $|x| + |y| \leq 1$.

2.4. Лабораторная работа № 9. Интегральное исчисление функций многих переменных

Задание № 1. Вычислить двойной интеграл. Нарисовать область интегрирования.

Вариант 1. $\iint_D xy dx dy$, где D - область, ограниченная осями координат и кривой

$$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq \pi/2.$$

Вариант 2. $\iint_D x^2 dx dy$, $D = \{(x; y): |x| + |y| \leq 1\}$.

Вариант 3. $\iint_D \ln(1 + x^2 + y^2) dx dy$, $D = \{(x; y): x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Вариант 4. $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, $D = \{(x; y): x^2 + y^2 \leq y\}$.

Вариант 5. $\iint_D xy(x + y) dx dy$, $D = \{(x; y): -1 \leq x - y \leq 1, 1/x \leq y \leq 2/x\}$.

Вариант 6. $\iint_D x^2 dx dy$, $D = \{(x; y): x^3 \leq y \leq 2x^3, x \leq 2y \leq 6x\}$.

Вариант 7. $\iint_D \cos(x^2 + y^2) dx dy$, $D = \{(x; y): x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Вариант 8. $\iint_D \frac{x^2}{x^2 + y^2} dx dy$, $D = \{(x; y): x^2 + y^2 \leq x\}$.

Вариант 9. $\iint_D y^2 \sqrt{1 - x^2} dx dy$, $D = \{(x; y): x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Вариант 10. $\iint_D \cos(x^2 + y^2) dx dy$, $D = \{(x; y): x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Вариант 11. $\iint_D \frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dx dy$, $D = \{(x; y): x^2 + y^2 \leq x\}$.

Вариант 12. $\iint_D \frac{(x + y)^2}{x} dx dy$, $D = \{(x; y): 1 - x \leq y \leq 3 - x; \quad x/2 \leq y \leq 2x\}$.

Задание № 2. Найти объем тела, заданного неравенствами. Нарисовать получившееся тело.

$$\text{Вариант 1.} \begin{cases} 36 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 144 \\ z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}} \\ \sqrt{3}x \leq y \leq \frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases}.$$

$$\text{Вариант 2.} \begin{cases} 36 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 144 \\ -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}} \leq z \leq -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{15}} \\ 0 \leq y \leq -\sqrt{3}x \end{cases}.$$

$$\text{Вариант 3.} \begin{cases} 9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 81 \\ -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}} \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{35}} \\ 0 \leq y \leq -x \end{cases}.$$

$$\text{Вариант 4.} \begin{cases} 36 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 144 \\ -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{24}} \leq z \leq 0 \\ y \geq \sqrt{3}x, y \geq \frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases}.$$

$$\text{Вариант 5.} \begin{cases} 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 64 \\ 0 \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{24}} \\ y \leq \sqrt{3}x, y \leq \frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases}.$$

$$\text{Вариант 6.} \begin{cases} 36 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 121 \\ z \leq -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{99}} \\ y \geq \sqrt{3}x, y \geq 0 \end{cases}.$$

$$\text{Вариант 7.} \begin{cases} 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 49 \\ z \geq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{99}} \\ y \leq 0, y \leq \sqrt{3}x \end{cases}.$$

$$\text{Вариант 8.} \begin{cases} 16 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 64 \\ z \geq -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{63}} \\ -\frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq -\sqrt{3}x \end{cases}.$$

$$\text{Вариант 9.} \begin{cases} 16 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 100 \\ z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}} \\ -\sqrt{3}x \leq y \leq -\frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases}.$$

$$\text{Вариант 10.} \begin{cases} 16 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 100 \\ \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{15}} \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}} \\ \sqrt{3}x \leq y \leq 0 \end{cases}.$$

$$\text{Вариант 11.} \begin{cases} 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 64 \\ -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{35}} \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}} \\ x \leq y \leq 0 \end{cases}.$$

$$\text{Вариант 12.} \begin{cases} 25 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 121 \\ -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{24}} \leq z \leq 0 \\ y \geq -\frac{x}{\sqrt{3}}, y \geq -\sqrt{3}x \end{cases}.$$

Раздел 3. Решение задач по алгебре и аналитической геометрии

3.1. Лабораторная работа № 10. Определители и матрицы

Задание № 1. Написать рекурсивную процедуру, вычисляющую определитель любого порядка методом разложения по строке. Результат проверить с помощью процедуры пакета *Maple*.

$$\text{Вариант 1.} \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 7 \\ 3 & -12 & 3 & 4 & 1 \\ -5 & 1 & 3 & 7 & 4 \\ 8 & 2 & 9 & -3 & 1 \\ 9 & 3 & -1 & 13 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Вариант 2.} \begin{vmatrix} -3 & 2 & 6 & 5 & 4 \\ 1 & -7 & 8 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & -2 & 12 & 4 \\ 7 & 1 & 5 & 1 & 3 \\ 9 & 7 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Вариант 3.} \begin{vmatrix} -5 & 4 & 2 & 8 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 8 & 7 \\ 6 & 4 & -5 & 3 & 2 \\ 8 & 3 & 5 & 13 & -5 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Вариант 4.} \begin{vmatrix} 9 & 1 & 3 & -6 & 8 \\ 0 & -11 & 5 & 7 & 3 \\ 8 & 5 & 4 & 1 & -7 \\ 12 & 3 & 6 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & -6 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Вариант 5.} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 7 & 6 & 5 \\ 21 & -5 & 6 & 3 & 2 \\ 8 & 6 & -5 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 8 & -6 & 1 \\ 3 & 7 & 8 & 6 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Вариант 7.} \begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 12 & -6 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 7 & 8 & 1 \\ 2 & 5 & -3 & 1 & 7 \\ 11 & -2 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Вариант 8.} \begin{vmatrix} 9 & 1 & 3 & -5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 11 & 4 \\ 2 & 8 & 7 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 6 & 3 & -2 \\ 1 & 7 & 0 & -12 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Вариант 9.} \begin{vmatrix} 11 & 3 & 0 & -6 & 3 \\ 4 & 7 & 3 & 2 & -3 \\ 12 & 4 & 5 & 8 & 7 \\ 1 & 6 & 5 & 9 & 1 \\ 5 & 5 & 7 & -3 & 11 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Вариант 10.} \begin{vmatrix} 9 & 1 & 3 & 6 & 8 \\ 5 & 4 & -3 & 2 & 1 \\ 5 & 8 & 11 & 2 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 6 & 1 \\ 9 & 7 & 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Вариант 11.} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & -12 \\ 1 & 4 & 5 & 9 & 7 \\ 2 & 4 & -6 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 11 & 2 & -4 \\ 5 & 7 & 4 & 3 & 8 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Вариант 6. } \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & -3 & -12 & 8 \\ 6 & 5 & 3 & 9 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & -4 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Вариант 12. } \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & -8 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 11 & 5 & 4 & 3 \\ 9 & 7 & 4 & 3 & 1 \\ 8 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Задание № 2. Решить матричную систему уравнений вида $AXB = C$.

$$\text{Вариант 1. } \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 26 \\ 28 & 29 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Вариант 2. } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 15 \\ 29 & -47 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Вариант 3. } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 13 & -16 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Вариант 4. } \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 4 \\ 40 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Вариант 5. } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 11 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Вариант 6. } \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 16 \\ 43 & 52 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Вариант 7. } \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 44 \\ 3 & 34 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Вариант 8. } \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 14 & 22 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Вариант 9. } \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33 & 10 \\ -11 & -10 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Вариант 10. } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -17 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Вариант 11. } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 3 \\ 64 & 47 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Вариант 12. } \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82 & 25 \\ 50 & 33 \end{pmatrix}.$$

Задание № 3. Написать процедуры, вычисляющие обратную матрицу методом присоединенной матрицы и методом элементарных преобразований. Результат проверить с помощью процедуры пакета *Maple*.

$$\text{Вариант 1. } A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & -2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & -2 & 1 \\ 1 & 8 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Вариант 2. } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -6 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Вариант 3. } A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & -2 \\ 10 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Вариант 4. } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & 4 \\ 7 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -8 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Вариант 5. } A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -6 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & -4 \\ -5 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Вариант 6. } A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ -1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Вариант 7. } A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Вариант 8. } A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Вариант 9. } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & -1 \\ 8 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Вариант 10. } A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & -2 \\ 3 & -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Вариант 11. } A = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Вариант 12. } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 3 \\ -5 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задание № 4. Написать процедуру, реализующую алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя двух многочленов. Результат проверить с помощью процедур пакета *Maple*.

Вариант 1. $x^6 - 7x^5 + 17x^4 - 13x^3 - 10x^2 + 20x - 8$ и $x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6$.

Вариант 2. $x^6 + 2x^5 - 4x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 4x - 4$ и $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 8x - 4$.

Вариант 3. $x^6 + 5x^5 + 8x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 7x - 2$ и $x^4 - 2x^3 + 2x - 1$.

Вариант 4. $x^6 + 6x^5 + 4x^4 - 30x^3 - 41x^2 + 24x + 36$ и $x^4 - 5x^2 + 4$.

Вариант 5. $x^6 - 2x^5 - 8x^4 + 22x^3 - 5x^2 - 20x + 12$ и $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4$.

Вариант 6. $x^6 + 6x^5 - 50x^3 - 45x^2 + 108x + 108$ и $x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 28x - 24$.

Вариант 7. $x^6 + 7x^5 + 12x^4 - 14x^3 - 59x^2 - 57x - 18$ и $x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 10x + 3$.

Вариант 8. $x^6 - 4x^5 - 2x^4 + 20x^3 - 11x^2 - 16x + 12$ и $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$.

Вариант 9. $x^6 - 7x^5 + 12x^4 + 10x^3 - 31x^2 - 3x + 18$ и $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$.

Вариант 10. $x^6 + x^5 - 7x^4 - 5x^3 + 14x^2 + 4x - 8$ и $x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18$.

Вариант 11. $x^6 - 3x^5 - 7x^4 + 19x^3 + 18x^2 - 28x - 24$ и $x^4 - 13x^2 + 36$.

Вариант 12. $x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36$ и $x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18$.

3.2. Лабораторная работа № 11. Аналитическая геометрия

Задание № 1. Привести уравнение поверхности II порядка к каноническому виду. Классифицировать поверхность. Сделать чертеж.

Вариант 1. $x^2 - y^2 + 2z^2 - 5xy + 4zx - 5x + 4z - 1 = 0$.

Вариант 2. $x^2 + 3y^2 + z^2 + 4xy + 2yz + zx + 3x - 6z = 0$.

Вариант 3. $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0$.

Вариант 4. $2x^2 - 7y^2 - 4z^2 + 4xy + 20yz - 16zx + 60x - 12y + 12z - 90 = 0$.

Вариант 5. $2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0$.

Вариант 6. $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2yz + 2zx - 4x + 6y - 2z + 3 = 0$.

Вариант 7. $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 4yz - 8zx - 28x + 2y + 16z + 45 = 0$.

Вариант 8. $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz - 4zx + 2x - 10y - 2z - 1 = 0$.

Вариант 9. $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 6zx - 2x + 6y + 2z = 0$.

Вариант 10. $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 10zx + 2x + 4y - 10z - 1 = 0$.

Вариант 11. $2x^2 - z^2 - xy + 4yz - 5zx + 2x + y - 2z + 6 = 0$.

Вариант 12. $x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 4xy - yz + 2zx - 2x - 3y + z - 12 = 0$.

Оглавление

Введение.....	3
Раздел 1. Первое знакомство с системой Maple 8.....	3
1.1. Интерфейс системы Maple 8.....	3
1.2. Порядок выполнения лабораторных работ и их оформления.....	5
1.3. Лабораторная работа № 1. Арифметические операции.....	6
1.4. Лабораторная работа № 2. Переменные и функции.....	8
1.5. Лабораторная работа № 3. Средства для построения графиков.....	14
1.6. Лабораторная работа № 4. Векторы и матрицы.....	21
1.7. Лабораторная работа № 5. Уравнения и неравенства.....	23
Раздел 2. Решение задач по математическому анализу.....	25
2.1. Лабораторная работа № 6. Исследование функции и построение графика.....	25
2.2. Лабораторная работа № 7. Неопределенный и определенный интегралы.....	26
2.3. Лабораторная работа № 8. Дифференциальное исчисление функций многих переменных.....	28
2.4. Лабораторная работа № 9. Интегральное исчисление функций многих переменных.....	29
Раздел 3. Решение задач по алгебре и аналитической геометрии.....	32
3.1. Лабораторная работа № 10. Определители и матрицы.....	32
3.2. Лабораторная работа № 11. Аналитическая геометрия.....	35