

Курцева Кира Петровна, Шешуков Евгений Геннадьевич.

Методы вычислений.

Часть I.

Численные методы алгебры.

Конспекты лекций и задачи.

Методы вычислений. Часть I. Численные методы алгебры. / ЗФ КГУ; Сост.: Курцева К.П., Шешуков Е.Г.; Зеленодольск, 2007. – 70с.

Учебное пособие содержит основные приемы численного решения систем линейных алгебраических уравнений, вычисление определителей, обращение матриц, нахождение собственных чисел и собственных векторов матрицы. Дополнительно рассматриваются и некоторые методы решения нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений. Приводятся примеры решения типовых задач и упражнения для самостоятельной работы.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	4
I. Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) .....	5
1. Точные (прямые) методы .....	5
Методы исключения неизвестных.....	5
Методы, основанные на разложении матрицы коэффициентов.....	13
2. Приближенные методы.....	20
Метод простой итерации .....	20
Метод Зейделя .....	27
Метод релаксации .....	31
II. Вычисление определителей, обращение матриц.....	32
1. Вычисление определителей .....	32
2. Вычисление элементов обратной матрицы. ....	34
III. Проблема собственных чисел .....	36
1. Решение полной проблемы собственных чисел. Прямые методы. ....	36
2. Частичная проблема собственных чисел .....	46
IV. Методы решения нелинейных алгебраических уравнений .....	49
1. Случай одного уравнения. Исследование уравнения .....	49
2. Итерационные методы вычисления изолированного корня уравнения $f(x) = 0$ .....	60
3. Метод простой итерации для системы двух уравнений.....	62
4. Итерационные методы для системы с n нелинейными уравнениями .....	65

## Введение.

Под численным методом понимается такая интерпретация математической модели, которая доступна для реализации на ЭВМ. В настоящее время численные методы являются мощным математическим средством решения многих научно-технических задач. Это связано как с невозможностью в большинстве случаев получить точное аналитическое решение, так и со стремительным развитием компьютерной техники.

Процесс исследования исходного объекта методом математического моделирования и вычислительного эксперимента неизбежно носит приближенный характер, так как на каждом этапе вносятся те или иные погрешности.

### 1. Источники и классификация погрешностей.

Существует четыре источника погрешностей, полученных в результате численного решения: физическая и математическая модели, исходные данные, приближенность метода и ошибки округления.

Погрешность, соответствующая первым двум источникам называется неустранимой.

Погрешность метода связана со способом решения поставленной математической задачи и появляется в результате подмены исходной математической модели другой или конечной последовательностью других моделей.

Погрешность округления возникает в связи с тем, что вычисления проводятся с конечным числом значащих цифр.

Все описанные типы погрешностей в сумме дают полную погрешность результата решения задачи.

### 2. Абсолютная и относительная погрешность приближенных значений.

Пусть  $a^*$  – приближенное значение точной величины  $a$ . *Абсолютной погрешностью* приближенного значения  $a^*$  называют такое число  $\Delta(a^*)$ , для которого справедливо неравенство

$$|a^* - a| \leq \Delta(a^*)$$

*Относительной погрешностью* приближенного значения  $a^*$  называют такое число  $\delta(a^*)$ , для которого справедливо неравенство

$$\frac{|a^* - a|}{a^*} \leq \delta(a^*)$$

Относительную погрешность часто выражают в процентах.

### 3. Значащие цифры. Верные цифры (знаки) приближенного числа.

*Значащими цифрами* числа называют все цифры в его записи, начиная с первой ненулевой слева, например, у чисел  $a^* = 0,01023$ ,  $a^* = 0,01023000$  значащими цифрами являются подчеркнутые цифры. Первое число имеет четыре значащие цифры, второе – семь значащих цифр.

Значащую цифру называют *верной*, если абсолютная погрешность числа не превосходит единицы разряда, соответствующего этой цифре. Например, при  $a^* = 0,01023$ ,  $\Delta(a^*) = 0,000004$ ;  $a^* = 0,01023000$ ,  $\Delta(a^*) = 0,0000006$ .

*Сомнительными* называют все цифры приближенного числа, расположенные правее последней верной цифры.

(CLAY).

Система  $m$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными имеет вид:

[illegible]

где  $a_{ij}, b_i$  ( $i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n$ ) – произвольные числа, называемые соответственно коэффициентами при переменных и свободными членами уравнений.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет решений.

## 1. Точные (прямые) методы.

Метод называется **точным**, если при точном выполнении всех требуемых действий мы получаем точное решение системы. При этом имеется в виду, что все коэффициенты – точные числа.

## Методы исключения неизвестных

### 1.1 Метод Гаусса.

Наиболее распространенным методом решения СЛАУ является метод Гаусса, в основе которого лежит идея последовательного исключения неизвестных. С помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

Рассмотрим решение системы (1)  $m$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными в общем виде.

Предположим, что в системе (1)  $a_{11} \neq 0$  (этого всегда можно добиться перестановкой уравнений или переменных с изменением их номеров).

*Шаг 1.* Умножая первое уравнение на подходящие числа (а именно на  $-a_{21}/a_{11}, -a_{31}/a_{11}, \dots, -a_{m1}/a_{11}$ ) и прибавляя полученные уравнения соответственно ко второму, третьему, ...,  $m$ -му уравнению системы (1), исключим переменную  $x_1$  из всех последующих уравнений, начиная со второго. Получим

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)}, \end{array} \right. \quad (2)$$

где буквами с верхним индексом (1) обозначены новые коэффициенты, полученные после первого шага.

*Шаг 2.* Предположим, что  $a_{22}^{(1)} \neq 0$ . Умножая второе уравнение из (2) на числа  $-a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)}, -a_{42}^{(1)}/a_{22}^{(1)}, \dots, -a_{m2}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$  и прибавляя полученные уравнения соответственно к третьему, четвертому, ...,  $m$ -му уравнению системы (2), исключим переменную  $x_2$  из всех последующих уравнений, начиная с третьего.

Продолжая процесс последовательного исключения переменных  $x_3, x_4, \dots, x_{r-1}$ , после  $(r-1)$  шага получим систему



*Шаг 1.* Так как  $a_{11} \neq 0$ , то ко второй, третьей и четвертой строкам матрицы прибавляем первую строку, умноженную соответственно на числа  $(-2)$ ,  $(-3)$ ,  $(-2)$  и исключаем переменную  $x_1$  из всех строк, начиная со второй. В новой матрице  $a_{22}^{(1)} = 0$ , поменяем местами вторую и третью строки:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 20 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 20 \end{array} \right).$$

*Шаг 2.* Так как теперь  $a_{22}^{(1)} = -4 \neq 0$ , то умножая вторую строку на  $(-7/4)$  и прибавляя полученную строку к четвертой, исключим переменную  $x_2$  из всех строк, начиная с третьей.

*Шаг 3.* Учитывая, что  $a_{33}^{(2)} = -8 \neq 0$ , умножаем третью строку на  $13,5/8 = 27/16$ , и прибавляя к четвертой строке, исключим из нее переменную  $x_3$ .

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 13,5 & 9 & 4,5 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{117}{16} & \frac{117}{8} \end{array} \right).$$

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ -4x_2 - 10x_3 + 8x_4 = -14, \\ -8x_3 + x_4 = 6, \\ -\frac{117}{16}x_4 = \frac{117}{8}, \end{cases}$$

откуда, используя обратный ход метода Гаусса, найдем решение системы  $(1; 2; -1; 2)$ .

## 1.2 Метод Гаусса с выбором главного элемента. ( $N = O(n^3)$ )

На каждом шаге при прямом методе Гаусса мы делили на элемент  $a_{ii}^{(i-1)} \neq 0$  – этот элемент назывался ведущим. Может получиться так, что элемент близок к 0, следовательно, коэффициенты в уравнении будут большими, что приведет к увеличению арифметической погрешности при обратном ходе. В этом случае удобнее применять *метод Гаусса с выбором главного элемента*. Основная идея метода состоит в том, что на очередном шаге исключать не следующее по номеру неизвестное, а то неизвестное, коэффициент при котором является наибольшим по модулю. Таким образом, в качестве ведущего элемента здесь *выбирается главный, т.е. наибольший по модулю элемент*.

Например, в системе

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

$|a_{12}| > |a_{11}|$ , тогда на первом шаге будем исключать переменную  $x_2$ . Такой прием эквивалентен тому, что исходная система переписывается в виде

$$\begin{cases} a_{12}x_2 + a_{11}x_1 = b_1, \\ a_{22}x_2 + a_{21}x_1 = b_2, \end{cases}$$

и к ней применяется первый шаг обычного метода Гаусса. Указанный способ исключения называется *методом Гаусса с выбором главного элемента по строке*. Он эквивалентен применению обычного метода Гаусса к системе, в которой на каждом шаге исключения проводится соответствующая перенумерация переменных.

Применяется также метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу. Предположим, что  $|a_{21}| > |a_{11}|$ . Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \end{cases}$$

и к новой системе применим на первом шаге обычный метод Гаусса. Таким образом, метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу эквивалентен применению обычного метода Гаусса к системе, в которой на каждом шаге исключения проводится соответствующая перенумерация уравнений.

Иногда применяется метод Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице, когда в качестве ведущего выбирается максимальный по модулю элемент среди всех элементов матрицы системы. Смысл выбора главного элемента состоит в том, чтобы сделать возможно меньшими новые коэффициенты системы и тем самым уменьшить погрешность вычислений.

### 1.3 Метод оптимального исключения ( $N = O(n^3)$ )

Прямой и обратный ход совмещены. Рассмотрим систему для случая  $m = n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

Положим в 1-ом уравнении  $a_{11} \neq 0$ , делим на него:

1 шаг:  $x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)},$

2 шаг: исключаем из второго уравнения системы неизвестную  $x_1$  получаем:

$$a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)},$$

Полагаем  $a_{22}^{(1)} \neq 0$ , делим на него второе уравнение, получаем

$$x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 \dots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)},$$

Затем с помощью этого уравнения исключаем  $x_2$  из первого уравнения, получаем

$$x_1 + \dots + a_{13}^{(2)} x_3 + \dots + a_{1n}^{(2)} x_n = b_1^{(2)},$$



3 шаг: в результате аналогичных операций из третьего уравнения системы получаем:

$$x_3 + a_{34}^{(3)}x_4 + \dots + a_{3n}^{(3)}x_n = y_3^{(3)},$$

Затем с помощью этого уравнения исключаем  $x_3$  из преобразованных первого и второго уравнений системы, получаем, что 3 первых уравнения системы имеют вид

$$x_1 + a_{14}^{(3)}x_4 + \dots + a_{1n}^{(3)}x_n = y_1^{(3)},$$

$$x_2 + a_{24}^{(3)}x_4 + \dots + a_{2n}^{(3)}x_n = y_2^{(3)},$$

$$x_3 + a_{34}^{(3)}x_4 + \dots + a_{3n}^{(3)}x_n = y_3^{(3)}.$$

Остальные уравнения в системе преобразуются аналогичным образом. В этом методе экономится память, т.о. можно решать системы с числом неизвестных в два раза больше метода Гаусса. В методе оптимального исключения обратный ход метода Гаусса здесь видоизменен и соединен с прямым ходом.

#### 1.4 Метод прогонки

Это частный случай метода Гаусса с ленточной матрицей вида (M1). Применяя к такой системе метод Гаусса мы приходим к системе матрицы (M2).

$$\begin{pmatrix} \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{pmatrix} \quad (M1)$$

$$\begin{pmatrix} \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{pmatrix} \quad (M2)$$

Пусть система имеет вид

$$\begin{cases} a_i x_{i-1} - b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i, & i = \overline{1, n}, \\ a_1 = c_n = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Если к этой системе применить метод Гаусса, то любое уравнение будет связывать  $x_{i-1}, x_i, x_{i+1}$  и свободный член.

В методе прогонки решение ищется в виде рекуррентного соотношения, которое следует из применимости метода Гаусса

$$x_i = \xi_{i+1} x_{i+1} + \eta_{i+1}, \quad (5)$$

где  $\xi_{i+1}, \eta_{i+1}$  – коэффициенты прогонки.

После несложных преобразований получаем рекуррентные соотношения для коэффициентов прогонки.

$$\xi_{i+1} = \frac{c_i}{b_i - a_i \xi_i}, \quad \eta_{i+1} = \frac{d_i - a_i \eta_i}{a_i \xi_i - b_i}. \quad (6)$$

Надо знать начальные значения коэффициентов прогонки и конечное значение  $x_n$ . Эти неизвестные можно взять из неполных уравнений. Подставим  $a_1 = 0$  в (4), получим

$$-b_1x_1 + c_1x_2 = d_1,$$

$$x_1 = \frac{c_1}{b_1}x_2 - \frac{d_1}{b_1},$$

$$x_1 = \xi_2x_2 + \eta_2.$$

Пользуясь начальными значениями коэффициентов прогонки можно найти последовательность всех коэффициентов прогонки

$$\xi_2 = \frac{c_1}{b_1}, \quad \eta_2 = -\frac{d_1}{b_1}.$$

Нахождение коэффициентов прогонки называется *прямым ходом метода прогонки*.

$$\begin{cases} a_nx_{n-1} - b_nx_n = d_n, \\ x_{n-1} - \xi_nx_n = \eta_n. \end{cases}$$

Отсюда найдем  $x_n$ , тогда из рекуррентного соотношения найдем сами неизвестные. *Это обратный ход метода прогонки*

Достаточным условием для устойчивости метода прогонки к накоплению арифметических ошибок является:

$$|b_i| > |c_i| + |a_i|$$

### Пример.

Даны ленточная матрица и столбец свободных членов. Требуется решить методом прогонки систему из пяти ЛАУ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 14 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix}$$

**Решение:**

$$\begin{cases} a_ix_{i-1} - b_ix_i + c_ix_{i+1} = d_i, & i=1,5 \\ a_1 = c_5 = 0. \end{cases}$$

Система, согласно условиям будет иметь вид

$$-2x_1 + 4x_2 = 8,$$

$$x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -2,$$

$$4x_2 - 1x_3 + 6x_4 = 14,$$

$$3x_3 - 2x_4 + x_5 = 12,$$

$$3x_4 - 3x_5 = -3.$$

Используем рекуррентные соотношения (5), (6).

Из первого уравнения следует

$$x_1 = 2x_2 - 4, \quad \xi_2 = 2, \quad \eta_2 = -4$$

Далее:

$$\xi_3 = \frac{c_2}{b_2 - a_2 \xi_2} = \frac{2}{4 - 1 \cdot 2} = 1, \quad \xi_4 = \frac{c_3}{b_3 - a_3 \xi_3} = \frac{6}{1 - 4 \cdot 1} = -2,$$

$$\eta_3 = \frac{d_2 - a_2 \eta_2}{a_2 \xi_2 - b_2} = \frac{-2 - 1 \cdot (-4)}{1 \cdot 2 - 4} = -1, \quad \eta_4 = \frac{d_3 - a_3 \eta_3}{a_3 \xi_3 - b_3} = \frac{14 - 4 \cdot (-1)}{4 \cdot 1 - 1} = 6,$$

$$\xi_5 = \frac{c_4}{b_4 - a_4 \xi_4} = \frac{1}{8}, \quad \xi_6 = 0,$$

$$\eta_5 = \frac{d_4 - a_4 \eta_4}{a_4 \xi_4 - b_4} = \frac{3}{4}, \quad \eta_6 = \frac{d_5 - a_5 \eta_5}{a_5 \xi_5 - b_5} = 2.$$

Тогда:

$$x_5 = \eta_6 = 2,$$

$$x_4 = \xi_5 x_5 + \eta_5 = \frac{1}{8} \cdot 2 + \frac{3}{4} = 1,$$

$$x_3 = \xi_4 x_4 + \eta_4 = -2 \cdot 1 + 6 = 4,$$

$$x_2 = \xi_3 x_3 + \eta_3 = 1 \cdot 4 - 1 = 3,$$

$$x_1 = \xi_2 x_2 + \eta_2 = 2 \cdot 3 - 4 = 2.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = 2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 4, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = 2.$$

### Упражнения

Решить системы уравнений методом Гаусса:

1.

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2, \\ 4x_1 + 11x_2 + 7x_3 = 7. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (1; -1; 2).$$

2.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (1; 1; 1).$$

3.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 9, \\ -x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 1, \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = -2. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (4; 2; 1; 3).$$

4.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6, \\ 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 1. \end{cases}$$

**Ответ:** Несовместна.

**5.**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 16. \end{cases}$$

**Ответ:** Несовместна.

**6.**

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

**Ответ:**  $(14c; 21c; c; c)$ , где  $c$  – любое число.

**7.**

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$$

**Ответ:**  $\left( x_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}c_2; x_2 = -\frac{17}{5} + c_1 - \frac{7}{5}c_2; x_3 = c_1; x_4 = c_2 \right)$ , где  $c_1, c_2$  –

любые числа.

**8.**

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 3. \end{cases}$$

**Ответ:**  $\left( -c_1 + \frac{1}{2}c_2 - \frac{1}{2}; c_1 - 2c_2 + 2; c_1; c_2 \right)$ , где  $c_1; c_2$  – любые числа.

**9.** Решить систему методом Гаусса с выбором главного элемента с точностью до четырех значащих цифр:

$$x + 592y = 437,$$

$$592x + 4308y = 2251$$

**10.** Решить методом прогонки.

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \\ -10 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Ответ: (2, 0.5, 1, 2, 3)

11. Методом прогонки решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 & = -10, \\ 2x_1 + 9x_2 + 2x_3 & = -26, \\ 4x_2 + 17x_3 - 4x_4 & = -16, \\ 4x_3 + 15x_4 - 8x_5 & = -2, \\ 2x_4 + 3x_5 & = 16. \end{cases}$$

Ответ: (-4, -2, 0, 2, 4)

### **Методы, основанные на разложении матрицы коэффициентов.**

Такие методы основаны на представлении матрицы составленной из коэффициентов СЛАУ в форме произведения треугольных матриц. Это позволяет свести решение заданной системы к последовательному решению двух систем с треугольными матрицами, что является задачей более простой, так как в них неизвестные находятся последовательно. Иногда для придания вычислениям единообразия вводят еще диагональную матрицу.

#### **1.5 Метод квадратного корня (случай эрмитовой матрицы)**

Итак, рассмотрим систему ЛАУ, где матрица  $A$  является эрмитовой

$$Ax = f. \quad (7)$$

Найдем такую правую треугольную матрицу  $S$  и диагональную матрицу  $D$ , элементы которой равны 1 или  $-1$ , чтобы  $A$  имела представление

$$A = S^* DS,$$

где матрица  $S^*$  является сопряженной по отношению к матрице  $S$ .

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ 0 & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & s_{nn} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

Если матрицы  $S$  и  $D$  найдены, то заданная система (7) может быть решена следующим путем:

$$Ax = S^* DSx = (S^* D)Sx = By = f,$$

где  $S^* D = B$  есть нижняя треугольная матрица и  $y = Sx$  – вспомогательный вектор.

Решение системы (7) равносильно решению двух треугольных систем

$$By = f \quad \text{и} \quad Sx = y$$

*Общие расчетные формулы.*

$$d_{ii} = \text{sign} \left( a_{ii} - \sum_{l=1}^{i-1} |s_{li}|^2 d_{ll} \right) \quad (8)$$

$$s_{ii} = \left( \left| a_{ii} - \sum_{l=1}^{i-1} |s_{li}|^2 d_{ll} \right| \right)^{1/2} \quad (9)$$

$$s_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{l=1}^{i-1} \bar{s}_{li} s_{lj} d_{ll}}{s_{ii} d_{ii}}, \quad \text{при } i < j \quad (10)$$

По формулам (8)–(10) находятся рекуррентно все ненулевые элементы матриц  $D$  и  $S$ .

Условием возможности нахождения  $s_{ij}$  является неравенство  $s_{ii} \neq 0$ .

**Замечание:** Алгоритм  $S^*DS$  – разложения может оказаться численно неустойчивым, гарантировать устойчивость алгоритма можно в двух случаях – для положительно определенных матриц  $A$  и матриц с диагональным преобладанием.

### 1.6 Частный случай метода квадратного корня (случай симметричной матрицы)

Рассматриваем область вещественных чисел. Пусть матрица  $A$  системы (7) – положительно определенная.

**Идея метода:**

Метод основан на разложении матрицы  $A$  на множители,

$$A = T^T T, \quad (11)$$

где

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1m} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t_{mm} \end{pmatrix}, \quad T^T = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ t_{12} & t_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{1m} & t_{2m} & \dots & t_{mm} \end{pmatrix}$$

Решение системы (7) сводится к решению двух систем с треугольными матрицами:

$$T^T y = f, \quad Tx = y \quad (12)$$

**Прямой ход:**

Перемножая матрицы  $T^T$  и  $T$ , и приравнявая матрице  $A$ , из (11) получим следующие формулы для определения  $t_{ij}$

$$\begin{aligned}
t_{11} &= \sqrt{a_{11}}, \quad t_{1j} = \frac{a_{1j}}{t_{11}} \quad (j > 1), \\
t_{ii} &= \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}^2} \quad (1 < i \leq m), \\
t_{ij} &= \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki} t_{kj}}{t_{ii}} \quad (i < j), \\
t_{ij} &= 0 \quad \text{при } i > j.
\end{aligned} \tag{13}$$

После того, как матрица  $T$  найдена, решаем задачу (12).

*Обратный ход:*

Записываем в развернутом виде системы (12):

$$\begin{aligned}
t_{11}y_1 &= f_1, \\
t_{12}y_1 + t_{22}y_2 &= f_2, \\
&\dots\dots\dots \\
t_{1m}y_1 + t_{2m}y_2 + \dots + t_{mm}y_m &= f_m, \\
t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + \dots + t_{1m}x_m &= y_1, \\
t_{22}x_2 + \dots + t_{2m}x_m &= y_2, \\
&\dots\dots\dots \\
t_{mm}x_m &= y_m
\end{aligned}$$

Отсюда последовательно находим

$$y_1 = \frac{f_1}{t_{11}}, \quad y_i = \frac{f_i - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki} y_k}{t_{ii}} \quad (i > 1) \tag{14}$$

$$x_m = \frac{y_m}{t_{mm}}, \quad x_i = \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^m t_{ik} x_k}{t_{ii}} \quad (i < m) \tag{15}$$

### Пример 1.

Методом квадратных корней решить системы уравнений. Вычисления вести с пятью знаками после запятой.

$$\begin{cases} x_1 + 0,42x_2 + 0,54x_3 + 0,66x_4 = 0,3 \\ 0,42x_1 + x_2 + 0,32x_3 + 0,44x_4 = 0,5 \\ 0,54x_1 + 0,32x_2 + x_3 + 0,22x_4 = 0,7 \\ 0,66x_1 + 0,44x_2 + 0,22x_3 + x_4 = 0,9 \end{cases}$$

**Решение.** Прямой ход.

Находим  $t_{ij}$  при  $n = 4$  из формул (13):

$$t_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{1} = 1; \quad t_{12} = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} = 0,42; \quad t_{13} = \frac{a_{13}}{\sqrt{a_{11}}} = 0,54; \quad t_{14} = \frac{a_{14}}{\sqrt{a_{11}}} = 0,66;$$

$$t_{22} = \sqrt{a_{22} - t_{12}^2} = \sqrt{1 - 0,42^2} = 0,90752;$$

$$t_{23} = \frac{a_{23} - t_{12}t_{13}}{t_{22}} = \frac{0,32 - 0,42 \cdot 0,54}{0,90752} = 0,10270;$$

$$t_{24} = \frac{a_{24} - t_{12}t_{14}}{t_{22}} = \frac{0,44 - 0,42 \cdot 0,66}{0,90752} = 0,17939;$$

$$t_{33} = \sqrt{a_{33} - t_{13}^2 - t_{23}^2} = 0,83537;$$

$$t_{34} = \frac{a_{34} - t_{13}t_{14} - t_{23}t_{24}}{t_{33}} = -0,18533;$$

$$t_{44} = \sqrt{a_{44} - t_{14}^2 - t_{24}^2 - t_{34}^2} = 0,70560.$$

Обратный ход.

Находим  $y_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) из формул (14)

$$y_1 = \frac{f_1}{t_{11}} = \frac{0,3}{1} = 0,30; \quad y_2 = \frac{f_2 - t_{12}y_1}{t_{22}} = \frac{0,5 - 0,42 \cdot 0,3}{0,90752} = 0,41211;$$

$$y_3 = \frac{f_3 - t_{13}y_1 - t_{23}y_2}{t_{33}} = \frac{0,7 - 0,54 \cdot 0,3 - 0,10270 \cdot 0,41211}{0,83537} = 0,59336;$$

$$y_4 = \frac{f_4 - t_{14}y_1 - t_{24}y_2 - t_{34}y_3}{t_{44}} = 1,04597.$$

Находим  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) из формул (15)

$$x_4 = \frac{y_4}{t_{44}} = \frac{1,04597}{0,70560} = 1,48238; \quad x_3 = \frac{y_3 - t_{34}x_4}{t_{33}} = 1,03917;$$

$$x_2 = \frac{y_2 - t_{23}x_3 - t_{24}x_4}{t_{22}} = 0,04348; \quad x_1 = \frac{y_1 - t_{12}x_2 - t_{13}x_3 - t_{14}x_4}{t_{11}} = -1,25778.$$

## Пример 2.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 & - 2x_5 = 0,5 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 - 3x_5 = 5,4 \\ -2x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 5,0 \\ x_2 - 2x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 7,5 \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 3,3 \end{cases}$$

**Решение.** Прямой ход.

Находим  $t_{ij}$  при  $n = 5$  из формул (13), при этом некоторые значения  $t_{ij}$  оказываются чисто мнимыми:



$$t_{11} = \sqrt{a_{11}} = 1; \quad t_{12} = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} = 3; \quad t_{13} = -2; \quad t_{14} = 0; \quad t_{15} = -2;$$

$$t_{22} = \sqrt{a_{22} - t_{12}^2} = \sqrt{4 - 3^2} = i\sqrt{5} = 2,2361 i;$$

$$t_{23} = \frac{a_{23} - t_{12}t_{13}}{t_{22}} = \frac{-5 - 3(-2)}{2,2361 i} = -0,4472 i;$$

$$t_{24} = \frac{a_{24} - t_{12}t_{14}}{t_{22}} = -0,4472 i; \quad t_{25} = \frac{a_{25} - t_{12}t_{15}}{t_{22}} = -1,3416 i;$$

$$t_{33} = \sqrt{a_{33} - t_{13}^2 - t_{23}^2} = 0,8944 i;$$

$$t_{34} = \frac{a_{34} - t_{13}t_{14} - t_{23}t_{24}}{t_{33}} = 2,0125 i; \quad t_{35} = \frac{a_{35} - t_{13}t_{15} - t_{23}t_{25}}{t_{33}} = 1,5653 i;$$

$$t_{44} = \sqrt{a_{44} - t_{14}^2 - t_{24}^2 - t_{34}^2} = 3,0414; \quad t_{45} = 2,2194;$$

$$t_{55} = 0,8221 i.$$

Обратный ход.

Находим  $y_i$  ( $i = \overline{1,5}$ ) из формул (14)

$$y_1 = \frac{f_1}{t_{11}} = 0,5; \quad y_2 = \frac{f_2 - t_{12}y_1}{t_{22}} = -1,7471 i;$$

$$y_3 = \frac{f_3 - t_{13}y_1 - t_{23}y_2}{t_{33}} = -7,5803 i;$$

$$y_4 = \frac{f_4 - t_{14}y_1 - t_{24}y_2 - t_{34}y_3}{t_{44}} = -2,2928;$$

$$y_5 = 0,1643 i.$$

Находим  $x_i$  ( $i = \overline{1,5}$ ) из формул (15)

$$x_5 = \frac{y_5}{t_{55}} = 0,1998; \quad x_4 = \frac{y_4 - t_{45}x_5}{t_{44}} = -0,8996;$$

$$x_3 = \frac{y_3 - t_{35}x_5 - t_{34}x_4}{t_{33}} = -6,8011;$$

$$x_2 = -2,2016; \quad x_1 = -6,0978.$$

### 1.7 Схема Холецкого

(случай матрицы с отличными от 0 главными минорами).

Рассматриваем систему уравнений (7), где матрица  $A$  размера  $n \times n$  такая, что ее главные миноры отличны от нуля.

**Теорема 1.** Если главные миноры матрицы  $A$  отличны от нуля, то матрицу  $A$  можно представить в форме

$$A = BC,$$

где

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда элементы  $b_{ij}$  и  $c_{ij}$  будут определяться по формулам

$$\begin{aligned} b_{i1} &= a_{i1}, \\ b_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik} c_{kj} \quad (i \geq j > 1) \end{aligned} \quad (16)$$

и

$$\begin{aligned} c_{1j} &= \frac{a_{1j}}{b_{11}}, \\ c_{ij} &= \frac{1}{b_{ii}} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} c_{kj} \right) \quad (1 < i < j) \end{aligned} \quad (17)$$

Отсюда искомый вектор  $x$  может быть вычислен из цепи уравнений

$$By = f, \quad Cx = y \quad (18)$$

Так как матрицы  $B$  и  $C$  треугольные, то система (18) легко решается:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1 / b_{11}, \\ y_i &= \left( f_i - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} y_k \right) / b_{ii} \quad (i > 1) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} x_n &= y_n, \\ x_i &= y_i - \sum_{k=i+1}^n c_{ik} x_k \quad (i < n). \end{aligned} \quad (20)$$

Из формулы (19) видно, что числа  $y_i$  выгодно вычислять вместе с коэффициентами  $c_{ij}$ . Эта схема вычислений называется *схемой Холецкого*.

### Упражнения

Методом квадратных корней решить системы уравнений  $Ax = f$ . Вычисления вести с пятью знаками после запятой.

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 3,1 & 1,5 & 1,0 \\ 1,5 & 2,5 & 0,5 \\ 1,0 & 0,5 & 4,2 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 10,83 \\ 9,20 \\ 17,10 \end{pmatrix}.$$

**Ответ:** указаны точные значения  $x_1 = 1,3$ ;  $x_2 = 2,2$ ;  $x_3 = 3,5$ .

$$2. \quad A = \begin{pmatrix} 3,2 & 1 & 1 \\ 1 & 3,7 & 1 \\ 1 & 1 & 4,2 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 4 \\ 4,5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

**Ответ:**  $x_1 = 0,74481$ ;  $x_2 = 0,79206$ ;  $x_3 = 0,82455$ .

$$3. \quad A = \begin{pmatrix} 2,12 & 0,42 & 1,34 & 0,88 \\ 0,42 & 3,95 & 1,87 & 0,43 \\ 1,34 & 1,87 & 2,98 & 0,46 \\ 0,88 & 0,43 & 0,46 & 4,44 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 11,172 \\ 0,115 \\ 9,009 \\ 9,349 \end{pmatrix}.$$

**Ответ:** указаны точные значения  $x_1 = 3,7$ ;  $x_2 = -1,5$ ;  $x_3 = 2,1$ ;  $x_4 = 1,3$ .

$$4. \quad A = \begin{pmatrix} 5,5 & 7 & 6 & 5,5 \\ 7 & 10,5 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10,5 & 9 \\ 5,5 & 7 & 9 & 10,5 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 23 \\ 32 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}.$$

**Ответ:**  $x_1 = 0,2927$ ;  $x_2 = 1,4196$ ;  $x_3 = 1,1799$ ;  $x_4 = 0,89104$ .

$$5. \quad A = \begin{pmatrix} 16 & -8 & -4 & 0 \\ -8 & 13 & -4 & -3 \\ -4 & -4 & 9 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Решить системы уравнений  $Ax = f$ , пользуясь схемой Холецкого.

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 2,5 & -3 & 4,6 \\ -3,5 & 2,6 & 1,5 \\ -6,5 & -3,5 & 7,3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} -1,05 \\ -14,46 \\ -17,735 \end{pmatrix}.$$

**Ответ:**  $x_1 = 1,24$ ;  $x_2 = -2,45$ ;  $x_3 = -2,5$ .

$$2. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3,25 & 1 \\ 3 & -3 & -4,3 & 8 \\ 1 & -5 & 3,3 & -20 \\ 2,5 & -4 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 4,84 \\ 8,89 \\ -14,01 \\ -20,29 \end{pmatrix}.$$

**Ответ:**  $x_1 = 2,34$ ;  $x_2 = 4,51$ ;  $x_3 = -6$ ;  $x_4 = -1,3$ .

$$3. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 11 \\ 14 \\ 4 \\ 16 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Ответ:  $x_1 = 1$ ;  $x_2 = 2$ ;  $x_3 = 1$ ;  $x_4 = -1$ ;  $x_5 = 4$ .

## 2. Приближенные методы.

Метод называется **приближенным**, если при точном выполнении всех требуемых действий и при точных коэффициентах мы получаем, как правило, лишь **приближенный результат**.

Впрочем, практически и при применении точного метода результат оказывается также приближенным по двум причинам: во-первых, коэффициенты уравнений обычно бывают приближенными числами; во-вторых, промежуточные вычисления на практике обычно невозможно выполнять с полной точностью. Значит, погрешность окончательного результата складывается из неустранимой погрешности задания исходных данных (коэффициентов) и погрешностей округления.

В случае применения приближенного метода на окончательный результат влияет всегда погрешность метода, также на практике обычно имеет место неустраняемая погрешность в задании коэффициентов и погрешность округления в промежуточных действиях.

В данном разделе рассматриваются следующие приближенные методы: метод простой итерации, метод Зейделя, метод релаксаций.

Итерационные методы дают возможность найти решение системы, как предел последовательных приближений, по предыдущим (уже найденным) приближениям к решению строятся следующие более точные приближения.

Если в точных методах ошибка в вычислениях ведет к ошибке в результате, то в случае сходящегося итерационного процесса ошибка в каком-то приближении исправляется в последующих вычислениях, и такое исправление требует, как правило, только несколько лишних шагов единообразных вычислений. Итерационный метод, для того чтобы начать по нему вычисления, требует знания одного или нескольких начальных приближений к решению.

Условия и скорость сходимости каждого итерационного процесса существенно зависят от свойств уравнений, то есть от свойств матрицы системы, и от выбора начальных приближений.

### 2.1 Метод простой итерации.

Одношаговый линейный стационарный итерационный процесс называется методом простой итерации (МПИ).

Пусть дана система ЛАУ  $Ax = f$  с неособенной матрицей. В методе простой итерации ее предварительно приводят к виду

$$x = Bx + c, \quad (1)$$

Предположим, что известно приближение  $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  к точному решению  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$  системы. Все следующие приближения определим правилом

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Если последовательность приближений  $x^{(k)}$  сходится к некоторому предельному вектору  $x^*$ , то он и будет решением системы. Действительно, если в равенстве (2) перейти к пределу  $k \rightarrow \infty$ , считая, что  $x^{(k)} \rightarrow x^*$ , то в пределе получим  $x^* = Bx^* + c$ .

Условия сходимости последовательности  $x^{(k)}$ :

**Теорема 1.** Для того чтобы последовательность приближений  $x^{(k)}$  сходилась, достаточно, чтобы все собственные значения матрицы  $B$  были по модулю меньше 1:

$$|\lambda_i| < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

**Доказательство:**

Найдем выражение любого приближения  $x^{(k)}$  через  $x^0$ :

$$\begin{aligned} x^{(k)} &= Bx^{(k-1)} + c = B[Bx^{(k-2)} + c] + c = B^2x^{(k-2)} + (E + B)c = \\ &\dots = B^kx^{(0)} + (E + B + \dots + B^{k-1})c \end{aligned} \quad (*)$$

Отсюда и из (3) следует с учетом теоремы о сходимости ряда матричной геометрической прогрессии<sup>1</sup> сразу следует, что при  $k \rightarrow \infty$   $B^k \rightarrow 0$  и

$$E + B + \dots + B^{k-1} \rightarrow E + B + B^2 + \dots = (E - B)^{-1},$$

$$\text{откуда } x^{(k)} \rightarrow (E - B)^{-1}c = x^* \quad \#$$

Что касается необходимости условия (3), то ответ на такой вопрос дает

**Теорема 2.** Если требовать, чтобы последовательность  $x^{(k)}$  сходилась к  $x^*$  при любом начальном приближении  $x^{(0)}$ , то условие (3) является и необходимым.

**Доказательство:**

Пусть для всякого начального приближения  $x^{(0)}$  будет  $x^{(k)} \rightarrow x^*$ . Имеем

$$x^* - x^{(k)} = (Bx^* + c) - (Bx^{(k-1)} + c) = B(x^* - x^{(k-1)}) = \dots = B^k(x^* - x^{(0)})$$

При  $k \rightarrow \infty$  разность  $x^* - x^{(k)} \rightarrow 0$ , поэтому последний член цепи равенства должен стремиться к нулю, каким бы ни был вектор  $x^* - x^{(0)}$ . Отсюда следует, что  $B^k \rightarrow 0$ , последнее же будет лишь в том случае, когда верно неравенство (3) (см. лемму<sup>2</sup>).  $\#$

---

<sup>1</sup> **Теорема:** Для того чтобы ряд  $E + A + A^2 + \dots + A^m + \dots$  (матричная геометрическая прогрессия) сходилась, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы  $A$  были по модулю меньше единицы. При выполнении этого условия матрица  $E - A$  имеет обратную и верно равенство

$$E = A + A^2 + \dots + A^m + \dots = (E - A)^{-1}$$

<sup>2</sup> **Лемма** Для стремления  $A^m$  к нулю при  $m \rightarrow \infty$ , необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы  $A$  по модулю были меньше единицы.

Применение теорем 1 и 2 требует знания границ собственных значений матрицы  $B$ , нахождение их часто затруднено. Укажем более простые, но только достаточные признаки сходимости.

**Теорема 3.** Для того чтобы последовательность приближений  $x^{(k)}$  в методе простой итерации сходилась, достаточно, чтобы какая-либо норма матрицы  $B$  была меньше единицы.

**Доказательство:**

При доказательстве используем **лемму:** Модули собственных значений матрицы не превосходят любой из ее норм.

Если  $\|B\| < 1$ , то по лемме все собственные значения матрицы  $B$  по модулю меньше единицы, и по теореме 1 последовательность  $x^{(k)}$  сходится. #

Непосредственным следствием теоремы 3 и равенств

$$\|B\|_I = \max_i \sum_{j=1}^n |b_{ij}|; \quad \|B\|_{II} = \max_j \sum_{i=1}^n |b_{ij}|,$$

определяющих кубическую и октаэдрическую норму матрицы, является

**Теорема 4.** Последовательность  $x^{(k)}$  в м-де простой итерации сходится, если для матрицы  $B$  выполняется одно из неравенств:

$$1) \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \leq \alpha < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4)$$

$$2) \sum_{i=1}^n |b_{ij}| \leq \beta < 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

Для многих приложений важно знать, какой является скорость сходимости  $x^{(k)} \rightarrow x^*$ , и уметь оценить погрешность  $x^* - x^{(k)}$  замены точного решения  $x^*$  системы приближением  $x^{(k)}$ .

Оценка погрешности приближенного решения  $x^{(k)}$  дается одной из следующих формул:

$$|x_i - x_i^{(k)}| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \max_{j=1,2,\dots,n} |x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}|, \quad (4')$$

если выполнено (4). И

$$|x_i - x_i^{(k)}| \leq \frac{\beta}{1 - \beta} \sum_{j=1}^n |x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}|, \quad (5')$$

если выполнено (5). Эти оценки можно еще усилить соответственно так:

$$\max |x_i - x_i^{(k)}| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \max |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| \quad (4'')$$

$$\text{или} \quad \sum_{i=1}^n |x_i - x_i^{(k)}| \leq \frac{\beta}{1 - \beta} \sum_{i=1}^n |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| \quad (5'')$$

Процесс итерации заканчивают, когда указанные оценки свидетельствуют о достижении заданной точности.

Если какая-либо норма матрицы  $B$ , согласованная с рассматриваемой нормой вектора  $x$ , меньше единицы, то верна следующая оценка погрешности приближения в методе простой итерации:

$$\|x^* - x^{(k)}\| \leq \|B\|^k \|x^{(0)}\| + \frac{1}{1 - \|B\|} \|B\|^k \|c\| \quad (6)$$

**Док-во:**

Для  $x^{(k)}$  в доказательстве теоремы (1) выше дано выражение (\*), и так как  $\|B\| < 1$ , то  $x^* = (E + B + B^2 + \dots)c$ . Поэтому

$$x^* - x^{(k)} = (B^k + B^{k+1} + \dots)c - B^k x^{(0)}$$

и, стало быть,

$$\|x^* - x^{(k)}\| \leq \left( \|B\|^k + \|B\|^{k+1} + \dots \right) \|c\| + \|B\|^k \|x^{(0)}\| = \|B\|^k \|x^{(0)}\| + \frac{1}{1 - \|B\|} \|B\|^k \|c\|. \#$$

Часто за  $x^{(0)}$  принимают вектор  $c$ . В этом случае оценка (6) немного упростится:

$$\|x^* - x^{(k)}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|} \|B\|^{k+1} \|c\|.$$

МПИ в координатной форме имеет вид:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = b_{11}x_1^{(k)} + b_{12}x_2^{(k)} + \dots + b_{1n}x_n^{(k)} + c_1 \\ x_2^{(k+1)} = b_{21}x_1^{(k)} + b_{22}x_2^{(k)} + \dots + b_{2n}x_n^{(k)} + c_2 \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = b_{n1}x_1^{(k)} + b_{n2}x_2^{(k)} + \dots + b_{nn}x_n^{(k)} + c_n \end{cases} \quad (7)$$

Покажем на примерах два способа приведения исходной системы к виду (1)

**Пример 1.** Решить систему методом простой итерации

$$\begin{cases} 20x_1 + x_2 + 2x_3 + 0,5x_4 = 14,1 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 + 2x_4 = 15 \\ x_1 + 3x_2 + 15x_3 + 3x_4 = 25,7 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 24x_4 = 38,8 \end{cases}$$

**Решение:**

В исходной системе уравнений диагональные коэффициенты заметно превосходят остальные. Чтобы привести систему к виду (1), поделим уравнения на диагональные коэффициенты и решим каждое из уравнений относительно полученных на диагонали неизвестных с коэффициентом 1.

$$x_1 = \frac{1}{20}(14,1 - x_2 - 2x_3 - 0,5x_4)$$

$$x_2 = \frac{1}{10}(15 - 2x_1 - x_3 - 2x_4)$$

$$x_3 = \frac{1}{15}(25,7 - x_1 - 3x_2 - 3x_4)$$

$$x_4 = \frac{1}{24}(38,8 - 4x_1 - 2x_2 - x_3)$$

$$\text{Здесь } B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{20} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{40} \\ -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{15} & -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{24} & 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} \frac{14,1}{20} \\ 1,5 \\ \frac{25,7}{15} \\ \frac{38,8}{24} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что коэффициенты полученной системы удовлетворяют условию  $\|B\| < 1$ .

В качестве нормы матрицы  $B$  рассмотрим первую кубическую норму  $\|B\|_I = \max_i \sum_{j=1}^n |B_{ij}|$

$$\sum_{j=1}^4 |B_{1j}| = 0,175 < 1, \quad \sum_{j=1}^4 |B_{2j}| = 0,5 < 1, \quad \sum_{j=1}^4 |B_{3j}| \approx 0,466 < 1, \quad \sum_{j=1}^4 |B_{4j}| \approx 0,125 < 1$$

Таким образом, сходимость итераций гарантирована. При этом  $\alpha = 0,5$ . Так что точность  $k$ -го приближения может быть оценена по формуле (4'') при  $\frac{\alpha}{1-\alpha} = 1$ .

В качестве  $x^{(0)}$  возьмем элементы столбца св. членов, округлив их значения до двух знаков после запятой:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,72 \\ 1,50 \\ 1,71 \\ 1,62 \end{pmatrix}$$

Вычисления будем вести до тех пор, пока величины  $|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|$  ( $i=1,2,3,4$ ) не станут меньше  $\varepsilon = 10^{-2}$  (обычно  $\varepsilon$  берется меньше, но мы задачу упростили).

Последовательно вычисляем при  $k = 1$



$$x_1^{(1)} = \frac{1}{20}(14,1 - 1,5 - 3,42 - 0,81) \approx 0,42$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{10}(15 - 1,44 - 1,71 - 3,24) \approx 0,86$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{15}(25,7 - 0,72 - 4,5 - 4,86) \approx 1,04$$

$$x_4^{(1)} = \frac{1}{24}(38,8 - 2,88 - 3 - 1,71) \approx 1,30$$

при  $k = 2$

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{20}(14,1 - x_2^{(1)} - 2x_3^{(1)} - 0,5x_4^{(1)}) = \frac{1}{20}(14,1 - 0,86 - 2,08 - 0,65) \approx 0,53$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{10}(15 - 2x_1^{(1)} - x_3^{(1)} - 2x_4^{(1)}) = \frac{1}{10}(15 - 0,84 - 1,04 - 2,6) \approx 1,05$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{15}(25,7 - x_1^{(1)} - 3x_2^{(1)} - 3x_4^{(1)}) = \frac{1}{15}(25,7 - 0,42 - 2,58 - 3,9) \approx 1,25$$

$$x_4^{(2)} = \frac{1}{24}(38,8 - 4x_1^{(1)} - 2x_2^{(1)} - x_3^{(1)}) = \frac{1}{24}(38,8 - 1,68 - 1,72 - 1,04) \approx 1,43$$

при  $k = 3$        $x_1^{(3)} \approx 0,50, \quad x_2^{(3)} \approx 1,00, \quad x_3^{(3)} \approx 1,21, \quad x_4^{(3)} \approx 1,40$

при  $k = 4$        $x_1^{(4)} \approx 0,50, \quad x_2^{(4)} \approx 1,00, \quad x_3^{(4)} \approx 1,20, \quad x_4^{(4)} \approx 1,40$

при  $k = 5$        $x_1^{(5)} \approx 0,50, \quad x_2^{(5)} \approx 1,00, \quad x_3^{(5)} \approx 1,20, \quad x_4^{(5)} \approx 1,40$

Вычисляем модули разности значений  $|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|$  между четвертым и пятым приближениями. Все они меньше  $0,01 = \varepsilon$ , поэтому их можно взять в качестве решения.

**Пример 2** Решить систему методом простой итерации, произведя три итерации. Указать погрешность полученного результата.

$$\begin{cases} 1,02x_1 - 0,05x_2 - 0,10x_3 = 0,795 \\ -0,11x_1 + 1,03x_2 - 0,05x_3 = 0,849 \\ -0,11x_1 - 0,12x_2 + 1,04x_3 = 1,398 \end{cases}$$

**Решение:**

Матрица данной системы такова, что диагональные элементы близки к единице, а все остальные значительно меньше единицы. Вычленим единицу из каждого диагонального коэффициента и выразим полученные таким образом  $x_1, x_2, x_3$  из 1, 2 и 3-го уравнений соответственно:

$$\begin{cases} x_1 = 0,795 - 0,02x_1 + 0,05x_2 + 0,10x_3 \\ x_2 = 0,849 + 0,11x_1 - 0,03x_2 + 0,05x_3 \\ x_3 = 1,398 + 0,11x_1 + 0,12x_2 - 0,04x_3 \end{cases}$$

$$\text{В этой системе } B = \begin{pmatrix} -0,02 & 0,05 & 0,1 \\ 0,11 & -0,03 & 0,05 \\ 0,11 & 0,12 & -0,04 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0,795 \\ 0,849 \\ 1,398 \end{pmatrix}.$$

Условия сходимости для полученной системы выполнены

$$\sum_{j=1}^3 |B_{1j}| = 0,17 < 1, \quad \sum_{j=1}^3 |B_{2j}| = 0,19 < 1, \quad \sum_{j=1}^3 |B_{3j}| = 0,27 < 1$$

Таким образом, сходимость итераций гарантирована. При этом  $\alpha = 0,27$ . Так что точность  $k$ -го приближения может быть оценена по формуле (4'') при  $\frac{0,27}{1-0,27} \approx 0,3699$ .

В качестве  $x^{(0)}$  возьмем элементы столбца св. членов, округлив их значения до двух знаков после запятой:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,80 \\ 0,85 \\ 1,40 \end{pmatrix}$$

Далее последовательно находим при  $k = 1$

$$x_1^{(1)} = 0,795 - 0,016 + 0,0425 + 0,140 = 0,9615 \approx 0,962$$

$$x_2^{(1)} = 0,849 + 0,088 - 0,0255 + 0,070 = 0,9815 \approx 0,982$$

$$x_3^{(1)} = 1,398 + 0,088 + 0,1020 - 0,056 = 1,532$$

при  $k = 2$

$$x_1^{(2)} = 0,97806 \approx 0,978, \quad x_2^{(2)} = 1,00196 \approx 1,002, \quad x_3^{(2)} = 1,56038 \approx 1,560$$

$$\text{при } k = 3 \quad x_1^{(3)} = 0,980, \quad x_2^{(3)} = 1,004, \quad x_3^{(3)} = 1,563$$

Значения неизвестных при  $k = 2$  и  $k = 3$  отличаются не более чем на  $3 \cdot 10^{-3}$ , поэтому если в качестве приближенных значений неизвестных взять  $x_1 \approx 0,980$ ,  $x_2 \approx 1,004$ ,  $x_3 \approx 1,563$ , то погрешность этих приближений не превзойдет  $\frac{0,27}{1-0,27} \cdot 3 \cdot 10^{-3} < 1,1 \cdot 10^{-3}$ .

**Замечание.** Если вид матрицы коэффициентов исходной системы не соответствует матрицам в рассмотренных примерах, то можно попробовать так переставить или преобразовать исходные уравнения, чтобы получить относительно большие диагональные коэффициенты.

### Упражнения.

Решить системы  $Ax = f$  методом простой итерации. Продолжать итерации до тех пор, пока  $|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|$  не станет меньше указанного  $\varepsilon$ . Сравнить ответ с данными точными значениями неизвестных.

1.



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{n\ n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n-1} & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n-1} & b_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & b_{3n-1} & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Тогда равенства для метода простой итерации (7) можно записать в форме матричного равенства

$$x^{(k+1)} = Mx^{(k+1)} + Nx^{(k)} + c,$$

откуда следует, что  $(E - M)x^{(k+1)} = Nx^{(k)} + c$ , а так как определитель матрицы

$$E - M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -b_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -b_{n1} & -b_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

равен единице и она имеет обратную, то равенство (8) равносильно

$$x^{(k+1)} = (E - M)^{-1} N x^{(k)} + (E - M)^{-1} c \quad (9)$$

Поэтому стационарный метод Зейделя равносильен методу простой итерации, примененному к системе

$$x = (E - M)^{-1} N x + (E - M)^{-1} c$$

Условия сходимости для МПИ остаются верными и для метода Зейделя. Обычно МЗ дает лучшую сходимость чем МПИ (хотя это бывает не всегда). Кроме того МЗ может оказаться более удобным при программировании, так как при вычислениях  $x_i^{(k+1)}$  нет необходимости хранить значения  $x_1^{(k)}, \dots, x_{i-1}^{(k)}$ .

## 2. Другая запись метода Зейделя.

В ней требуется предварительное преобразование системы  $Ax = f$  к виду в котором все диагональные элементы отличны от нуля и если возможно даже доминирующими в соответствующих уравнениях (т.е.  $a_{ii} \neq 0$  и по возможности  $a_{ii}$  имели наибольшее значение в соответствующей строке, делается это путем перестановки столбцов в матрице  $A$ ).

Приближение  $k+1$  находят по приближению  $k$  с помощью системы соотношений

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^{(k+1)} + a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + \dots + a_{1n}x_n^{(k)} &= f_1, \\ a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{22}x_2^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)} + \dots + a_{2n}x_n^{(k)} &= f_2, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} + a_{n3}x_3^{(k+1)} + \dots + a_{nn}x_n^{(k+1)} &= f_n. \end{aligned} \tag{10}$$

Если разложить матрицу  $A$  на сумму двух матриц

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

то равенства (10) можно записать в матричном виде

$$Bx^{(k+1)} + Cx^{(k)} = f \quad \text{или} \quad x^{(k+1)} = -B^{-1}Cx^{(k)} + B^{-1}f$$

Отсюда видно, что МЗ в форме (10) равносильен МПИ, примененному к системе в каноническом виде  $x = -B^{-1}Cx + B^{-1}f$

Для сходимости метода при любом векторе  $f$  необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы  $-B^{-1}C$ , то есть все корни уравнения  $|-B^{-1}C - \lambda E| = 0$  были по модулю меньше единицы.

### Пример.

Для системы

$$\begin{cases} 6x_1 - x_2 - x_3 = 11,33 \\ -x_1 + 6x_2 - x_3 = 32 \\ -x_1 - x_2 + 6x_3 = 42 \end{cases}$$

известны приближенные значения неизвестных, полученные методом Гаусса:

$$x_1 \approx 4,67, \quad x_2 \approx 7,62, \quad x_3 \approx 9,05.$$

Методом Зейделя уточнить решения так, чтобы значения неизвестных  $x_i^{(k)}$  и  $x_i^{(k+1)}$  отличались не более чем на  $5 \cdot 10^{-3}$ .

### Решение.

Приведем систему к виду

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{6}(11,33 + x_2 + x_3) \\ x_2 = \frac{1}{6}(32 + x_1 + x_3) \\ x_3 = \frac{1}{6}(42 + x_1 + x_2) \end{cases}$$

Условия сходимости для полученной системы выполнены

$$\sum_{j=1}^3 |B_{1j}| = \frac{1}{3} < 1, \quad \sum_{j=1}^3 |B_{2j}| = \frac{1}{3} < 1, \quad \sum_{j=1}^3 |B_{3j}| = \frac{1}{3} < 1$$

Таким образом, сходимость итераций гарантирована. При этом  $\alpha = \frac{1}{3}$ . Так что

точность  $k$ -го приближения может быть оценена по формуле (4'') при  $\frac{1/3}{1-1/3} = \frac{1}{2}$ .

Взяв в качестве начального приближения  $x_1^{(0)} = 4,67$ ,  $x_2^{(0)} = 7,62$ ,  $x_3^{(0)} = 9,05$ , получим

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{6}(11,33 + 16,67) = 4,66667$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{6}(32 + 13,71667) = 7,61944$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{6}(42 + 12,28611) = 9,04768$$

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{6}(11,33 + 16,66712) = 4,66619$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{6}(32 + 13,71387) = 7,61897$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{6}(42 + 12,28516) = 9,04752$$

Т.к. для приведенной системы выполняется условие (4) при  $\alpha = \frac{1}{3}$ , то полученное приближение с оценкой (4'') имеет погрешность не превышающую  $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 2,5 \cdot 10^{-4}$ . Таким образом, в качестве решения можем принять

$$x_1 \approx 4,666, \quad x_2 \approx 7,619, \quad x_3 \approx 9,048$$

### Упражнения.

Решить системы методом Зейделя. Продолжать итерации до тех пор, пока  $|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|$  не станет меньше указанного  $\varepsilon$ .

1.

$$\begin{cases} 20x_1 + x_2 + 2x_3 + 0,5x_4 = 14,1 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 + 2x_4 = 15 \\ x_1 + 3x_2 + 15x_3 + 3x_4 = 25,7 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 24x_4 = 38,8 \end{cases} \quad \varepsilon = 10^{-2}.$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1,02 & -0,25 & -0,30 \\ -0,41 & 1,13 & -0,15 \\ -0,25 & -0,14 & 1,21 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0,515 \\ 1,555 \\ 2,780 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 2,0 \\ 2,5 \\ 3,0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = 10^{-3}$$

3.

$$A = \begin{pmatrix} 10,9 & 1,2 & 2,1 & 0,9 \\ 1,2 & 11,2 & 1,5 & 2,5 \\ 2,1 & 1,5 & 9,8 & 1,3 \\ 0,9 & 2,5 & 1,3 & 12,1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} -7,0 \\ 5,3 \\ 10,3 \\ 24,6 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = 10^{-3}$$

4. Решить систему методом Зейделя, произведя три итерации. Указать погрешность полученного результата.

$$\begin{cases} 1,1x_1 - 0,2x_2 + 0,1x_3 = 1,6, \\ 0,1x_1 - 1,2x_2 - 0,2x_3 = 2,3, \\ 0,2x_1 - 0,1x_2 + 1,1x_3 = 1,5. \end{cases}$$

5. Решить систему методом Зейделя, произведя три итерации. Указать погрешность полученного результата, сравнить с решением МПИ, полученными ранее.

$$\begin{cases} 1,02x_1 - 0,05x_2 - 0,10x_3 = 0,795, \\ -0,11x_1 + 1,03x_2 - 0,05x_3 = 0,849, \\ -0,11x_1 - 0,12x_2 + 1,04x_3 = 1,398. \end{cases}$$

### Метод релаксации.

Любой двухслойный итерационный метод можно записать в следующей канонической форме:

$$B \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau^{(k+1)}} + Ax^{(k)} = f, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \text{для всех } x^{(0)} \in H, \quad (11)$$

где  $A: H \rightarrow H$  – оператор исходного уравнения  $Ax = f$ ,  $B: H \rightarrow H$  линейный оператор, имеющий обратный  $B^{-1}$ ,  $k$  – номер итерации,  $\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \dots, \tau^{(k+1)}, \dots$  – итерационные параметры,  $\tau^{(k+1)} > 0$ .

Чтобы ускорить итерационный процесс, запишем метод Зейделя в виде итерационной схемы (11), введя параметр  $\omega$ , так что

$$\left(D + \omega A^{-}\right) \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\omega} + Ax^{(k)} = f, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \text{для всех } x^{(0)} \in H, \quad (12)$$

где  $D = (a_{ii}\delta_{ij})$ ,  $\delta_{ii} = 1$ ,  $\delta_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ , т.е.  $D$  – диагональная матрица размера  $n \times n$ .  $A^{-} = (a_{ij}^{-})$  – нижняя треугольная (поддиагональная) матрица с нулями на главной диагонали,  $a_{ij}^{-} = 0$  при  $j \geq i$ ,  $a_{ij}^{-} = a_{ij}$  при  $j < i$ . Введем обозначение  $A^{+} = (a_{ij}^{+})$  – верхняя треугольная (наддиагональная) матрица с нулями на главной диагонали,  $a_{ij}^{+} = 0$  при  $j \leq i$ ,  $a_{ij}^{+} = a_{ij}$  при  $j > i$ . Таким образом, рассматривается аддитивное представление исходной матрицы  $A = A^{-} + D + A^{+}$ .

Сравнивая (12) с (11), видим, что

$$B = D + \omega A^{-}, \quad \tau = \omega$$

Покажем, что при  $\omega = 1$  получим формулу метода Зейделя. Преобразуем уравнение (12) к расчетному виду.

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \left(D + \omega A^{-}\right) \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\omega} + Ax^{(k)} &= \left(A^{-} + \frac{1}{\omega} D\right) x^{(k+1)} + \left(A - A^{-} - \frac{1}{\omega} D\right) x^{(k)} = \\ &= \left(A^{-} + \frac{1}{\omega} D\right) x^{(k+1)} + \left(A^{+} + \left(1 - \frac{1}{\omega}\right) D\right) x^{(k)}, \end{aligned}$$

имеем

$$\left(A^{-} + \frac{1}{\omega} D\right) x^{(k+1)} + \left(A^{+} + \left(1 - \frac{1}{\omega}\right) D\right) x^{(k)} = f.$$

Отсюда находим

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left[ f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right], \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (13)$$

т.е. при  $\omega = 1$  получили формулу Зейделя.

Скорость сходимости метода релаксации зависит от параметра  $\omega$ . Для сходимости метода надо потребовать, чтобы  $0 < \omega < 2$ . При  $0 < \omega < 1$  итерационный процесс (12) называют **методом нижней релаксации**, а при  $1 < \omega < 2$  – **методом верхней релаксации**.

Метод релаксации (и метод Зейделя) является примерами неявных схем вида

$$B \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau} + Ax^{(k)} = f, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \text{для всех } x^{(0)} \in H$$

с несамосопряженным оператором  $B$ , имеющим обратный оператор  $B^{-1}$ .

Метод (12) называется **стационарным** итерационным методом, т.к.  $B$  и  $\tau$  не зависят от номера итерации. Для существования обратного оператора  $B^{-1}$  достаточно потребовать положительности оператора  $B$ .

#### **Теорема (Островского-Рейча)**

*Для нормальной системы  $Ax = f$  метод релаксации (13) сходится при любом  $x^{(0)}$  и любом  $\omega \in (0, 2)$ .*

В общем случае задача нахождения оптимального значения параметра  $\omega$  не решена, и в практических расчетах принимают метод проб и ошибок.

## **II. Вычисление определителей, обращение матриц.**

### **1. Вычисление определителей.**

#### **1.1 Применение метода Гаусса.**

Идея способа Гаусса последовательного исключения неизвестных в системе уравнений может быть перенесена на задачу вычисления определителей, и здесь она переходит в способ последовательного понижения порядка  $n$  определителя. Рассмотрим схему единственного деления. Пусть дан определитель

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Выберем как-либо ведущий элемент первого шага преобразований. Он должен быть отличен от нуля. Иногда, чтобы избежать сильного разброса в порядках чисел, за него принимают либо наибольший по модулю элемент  $D$ , либо наибольший по модулю элемент в избранной строке или избранном столбце. Выполняя, если нужно, перестановку строк и столбцов, можно считать, что за ведущий элемент принят  $a_{11}$ . Вынося  $a_{11}$  из первой строки (первого столбца) за знак  $D$ , приведем определитель к виду



$$D = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Умножая первую строку последовательно на  $a_{21}, a_{31}, \dots, a_{n1}$  и вычитая из второй, третьей и т.д. строк, получим

$$D = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{vmatrix} \quad (1)$$

Этим мы понизим порядок определителя на единицу и можем перейти ко второму шагу преобразований, применяя к полученному определителю порядка  $n-1$  такие же преобразования. Выполняя все  $n$  шагов, найдем определитель  $D$ :

$$D = a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot a_{33}^{(2)} \cdot \dots \cdot a_{nn}^{(n-1)} \quad (2)$$

Таким образом, для вычисления определителя нужно выполнить вычисления необходимые для осуществления прямого хода в методе Гаусса для системы  $Ax = 0$ , а затем найти произведение ведущих элементов. Вычислительная схема в этом случае такая же, как для системы ЛАУ, только без столбца свободных членов. Контрольные соотношения остаются прежними.

## 1.2 Применение метода квадратных корней.

Если матрица  $A$  симметрическая, то для вычисления определителя этой матрицы целесообразно использовать метод квадратных корней.

Представим матрицу  $A$  в виде произведения двух взаимно транспонированных треугольных матриц  $A = T^T T$ , где

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{pmatrix};$$

тогда  $\det A = \det T^T \det T = (\det T)^2 = (t_{11} \cdot t_{22} \cdot \dots \cdot t_{nn})^2$ . Числа  $t_{ii}$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) находим по соответствующим формулам.

$$t_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad t_{1j} = \frac{a_{1j}}{t_{11}} \quad (j > 1); \quad t_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}^2} \quad (1 < i \leq m),$$

$$t_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki} t_{kj}}{t_{ii}} \quad (i < j); \quad t_{ij} = 0 \quad \text{при } i > j. \quad (4)$$

## 2. Вычисление элементов обратной матрицы.

## 2.1 Применение метода Гаусса

Обратной к матрице  $A$  называют такую матрицу  $A^{-1}$ , для которой

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E, \quad (1)$$

где  $E$  – единичная матрица.

Квадратная матрица  $A$  называется неособенной или невырожденной, если ее определитель отличен от нуля  $\det A \neq 0$ . Любая неособенная матрица имеет обратную.

Пусть дана неособенная матрица  $A$ . Для вычисления элементов ее обратной матрицы  $A^{-1}$  используем соотношение (1).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

Умножая матрицу  $A$  на  $A^{-1}$  и приравнивая каждый элемент произведения соответствующему элементу матрицы  $E$ , получим систему из  $n^2$  уравнений с  $n^2$  неизвестными  $x_{ij}$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ).

Так, умножая почленно каждую строку матрицы  $A$  на первый столбец матрицы  $A^{-1}$  и каждый раз приравнивая полученное произведение соответствующему элементу первого столбца матрицы  $E$ , получаем систему

[illegible]

Аналогично при почленном умножении строк матрицы  $A$  на второй столбец матрицы  $A^{-1}$  образуется еще одна система

$$\begin{cases} a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} + \dots + a_{1n}x_{n2} = 0, \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} + \dots + a_{2n}x_{n2} = 1, \\ ..... \\ a_{n1}x_{12} + a_{n2}x_{22} + \dots + a_{nn}x_{n2} = 0. \end{cases}$$

Таким образом, система из  $n^2$  уравнений с  $n^2$  неизвестными распадается на  $n$  систем с  $n$  неизвестными. Все эти системы имеют одну и ту же матрицу  $A$  и отличаются только свободными членами. Т.к. при решении системы по методу Гаусса основные вычисления приходится производить над матрицей коэффициентов, решение этих систем можно объединить в одной схеме, рассматривая одновременно  $n$  столбцов свободных членов.

*Замечание:* При вычислении обратной матрицы можно использовать также метод Гаусса с выбором главного элемента.

Элементы обратной матрицы получаются с некоторой погрешностью, которая появляется в результате округлений в процессе вычислений.

Рассмотрим метод исправления элементов приближенной обратной матрицы.

## 2.2. Применение метода итераций для уточнения элементов обратной матрицы.

Пусть для неособенной матрицы  $A$  получены приближенные значения элементов обратной матрицы. Обозначим матрицу с такими элементами через  $X_0 \approx A^{-1}$ ; для уточнения элементов обратной матрицы строим следующий итерационный процесс:

$$X_k = X_{k-1}(2E - AX_{k-1}) \quad (k=1,2,\dots) \quad (2)$$

Рассмотрим матрицу

$$G_k = E - AX_k. \quad (3)$$

Тогда (2) с учетом (3) перепишется в виде:

$$X_k = X_{k-1}(E + G_{k-1}) \quad (k=1,2,\dots) \quad (4)$$

Достаточные условия сходимости для процесса (2):

Для матрицы (3) верно получаемое ниже правило уменьшения индекса  $k$  и выражение через начальное значение  $G_0$ :

$$G_k = E - AX_k = E - AX_{k-1}(E - AX_{k-1}) = (E - AX_{k-1})^2 = G_{k-1}^2 = G_{k-2}^4 = \dots = G_0^{2^k}$$

Погрешность приближения имеет следующее выражение через  $G_0$ :

$$A^{-1} - X_k = A^{-1}(E - AX_k) = A^{-1}G_k = A^{-1}G_0^{2^k}$$

Отсюда получается оценка

$$\|A^{-1} - X_k\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|G_0\|^{2^k} \quad (5)$$

Поэтому можно сказать, что если приближенное значение  $X_0$  будет настолько близко к  $A^{-1}$ , что  $\|G_0\| = \|E - AX_0\| < 1$ , то  $X_k \rightarrow A^{-1}$ ; при этом сходимость будет весьма быстрой, т.к. показатель степени  $2^k$  в (5) с ростом  $k$  увеличивается очень быстро.

Матрица  $G_k$  на каждом шаге характеризует в некотором смысле степень близости матрицы  $X_k$  к матрице  $A^{-1}$ .

Обычно итерации продолжают до тех пор, пока элементы матрицы  $G_k$  по модулю не станут меньше заданного числа  $\varepsilon$ , и тогда приближенно полагают

$$A^{-1} \approx X_k$$

Точные методы вычисления обратной матрицы часто приводят к заметным погрешностям, вызванным неизбежными ошибками округления и большим количеством операций при расчете, т.о. указанный итерационный процесс оказывается весьма полезным.

### III. Проблема собственных чисел

Во многих задачах одновременно с матрицей  $A$  приходится рассматривать связанное с ней уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (1)$$

которое называют *характеристическим (или вековым) уравнением* матрицы  $A$ .

Определитель  $|A - \lambda E|$  есть алгебраический многочлен степени  $n$  от  $\lambda$  со старшим коэффициентом  $(-1)^n$  и его обычно записывают в виде

$$|A - \lambda E| = (-1)^n (\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - \dots - p_n) = (-1)^n P_n(\lambda) \quad (2)$$

Многочлен  $P_n(\lambda)$  называют собственным многочленом матрицы  $A$ . Корни многочлена  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  называются *собственными значениями (или характеристическими числами)* матрицы  $A$ . Они характеризуются тем, что однородная система

$$Ax = \lambda x \quad (3)$$

имеет ненулевое решение в том и только в том случае, когда  $\lambda$  есть собственное значение  $A$ . Отвечающие ему ненулевые решения системы (3) получили название *собственных векторов* матрицы, соответствующих значению  $\lambda$ .

Отыскание собственных значений матрицы  $A$  – это задача решения алгебраического уравнения степени  $n$  в форме (1) или (4)

$$P_n(\lambda) = \lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - \dots - p_n. \quad (4)$$

После того как собственные значения будут вычислены, соответствующие им собственные векторы могут быть найдены как решение однородной системы (3).

**Опр.** Задача нахождения собственных значений матрицы называется *полной проблемой собственных значений*.

Существует ряд задач, где полные сведения не являются необходимыми и можно ограничиться меньшим объемом знаний: например, достаточно указать границы, в которых лежат все собственные значения, как это бывает при изучении устойчивости или неустойчивости процессов, или найти собственное значение, близкое к известному числу, когда рассматриваются явления резонанса, и т.д. Такого рода задачи называются *частичными проблемами собственных значений* и для каждой из них создаются свои методы решения.

#### **1. Решение полной проблемы собственных чисел. Прямые методы.**

##### **1.1 Метод Данилевского** (для матриц с небольшой размерностью).

Сведение матрицы  $A$  преобразованием подобия к *канонической форме Фробениуса*  $\Phi$ :

$$\Phi = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Преобразование  $B = S^{-1}AS$  матриц  $B$  и  $A$  с помощью невырожденной матрицы  $S$  называется преобразованием подобия. Известно, что подобное преобразование матрицы  $A$  не изменяет ее собственного многочлена:

$$|B - \lambda E| = |S^{-1}AS - \lambda S^{-1}ES| = |S^{-1}| \cdot |A - \lambda E| \cdot |S| = |A - \lambda E|,$$

где  $\lambda$  – собственное значение матрицы  $B$  (и матрицы  $A$ ). Пусть  $y$  – собственный вектор матрицы  $B$ , соответствующий  $\lambda$ :  $By = \lambda y$ .

$$\begin{aligned} By &= S^{-1}AS y = \lambda y \\ A(S y) &= \lambda(S y) \end{aligned} \quad (1)$$

Таким образом, мы доказали, что у двух подобных матриц собственные значения одинаковы (т.е. при преобразовании подобия собственные значения не меняются), а собственные векторы получаются один из другого умножением на матрицу, которая осуществляет преобразования подобия.

Запишем характеристический многочлен матрицы в канонической форме Фробениуса

$$\begin{aligned} |\Phi - \lambda E| &= \begin{vmatrix} p_1 - \lambda & p_2 & p_3 & \dots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (p_1 - \lambda)(-\lambda)^{n-1} - \begin{vmatrix} p_2 & p_3 & \dots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (p_1 - \lambda)(-\lambda)^{n-1} - p_2(-\lambda)^{n-2} + \begin{vmatrix} p_3 & p_4 & \dots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \dots \\ &= (p_1 - \lambda)(-\lambda)^{n-1} - p_2(-\lambda)^{n-2} + p_3(-\lambda)^{n-3} - \dots + (-1)^{n+1} p_n = \\ &= (-1)^n (\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - p_2 \lambda^{n-2} - \dots - p_n) = (-1)^n P_n(\lambda) \end{aligned}$$

В преобразовании  $\Phi = S^{-1}AS$  матрицу  $S$  целесообразно находить путем последовательного приведения строк к каноническому виду.

**1-й шаг.** Начнем с приведения последней строки. Предположим, что элемент  $a_{nn-1} \neq 0$ . Разделим на него  $(n-1)$ -й столбец матрицы  $A$ . Вновь полученный  $(n-1)$ -й столбец умножим на  $a_{ni}$  и вычтем из столбца номера  $i$ . Проделав это для  $i = 1, 2, \dots, n-2, n$ , приведем последнюю строку к виду Фробениуса. Такое преобразование равносильно умножению матрицы  $A$  справа на матрицу

$$M_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn-1}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn-1}} & \dots & \frac{1}{a_{nn-1}} & -\frac{a_{nn}}{a_{nn-1}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Определитель  $|M_{n-1}| = \frac{1}{a_{nn-1}} \neq 0$ , следовательно, существует обратная матрица:

$$M_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Этим заканчивается 1-й шаг преобразования. В результате получим матрицу

$$A_1 = M_{n-1}^{-1} A M_{n-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & \dots & a_{1n-1}^1 & a_{1n}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-11}^1 & a_{n-12}^1 & \dots & a_{n-1n-1}^1 & a_{n-1n}^1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**2-й шаг** преобразований аналогичен первому и состоит в приведении предпоследней строки матрицы  $A_1$  к виду Фробениуса при условии неизменности последней ее строки. Предположим, что в  $A_1$  элемент  $a_{n-2\ n-1}^1 \neq 0$ . Нужное преобразование можно записать в форме

$$A_2 = M_{n-2}^{-1} A_1 M_{n-2} = M_{n-2}^{-1} M_{n-1}^{-1} A M_{n-1} M_{n-2} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 & \dots & a_{1n-2}^2 & a_{1n-1}^2 & a_{1n}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-21}^2 & \dots & a_{n-2n-2}^2 & a_{n-2n-1}^2 & a_{n-2n}^2 \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{n-2} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_{n-11}^1}{a_{n-1n-2}^1} & \dots & -\frac{a_{n-1n-3}^1}{a_{n-1n-2}^1} & \frac{1}{a_{n-1n-2}^1} & -\frac{a_{n-1n-1}^1}{a_{n-1n-2}^1} & -\frac{a_{n-1n}^1}{a_{n-1n-2}^1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{n-2}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-11}^1 & a_{n-12}^1 & \dots & a_{n-1n-1}^1 & a_{n-1n}^1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Правило построения матриц  $M_{n-2}$  и  $M_{n-2}^{-1}$  по  $A_1$  аналогично правилу построения  $M_{n-1}$  и  $M_{n-1}^{-1}$  по  $A$ . Эта аналогия сохраняется при всех следующих шагах.

Таким образом, в **регулярном случае**, когда  $a_{nn-1} \neq 0$ ,  $a_{n-1n-2}^1 \neq 0$ , ...,  $a_{21}^{n-1} \neq 0$ , после выполнения  $n-1$  шагов преобразований матрица  $A$  будет приведена к каноническому виду Фробениуса

$$A_{n-1} = M_1^{-1} M_2^{-1} \dots M_{n-1}^{-1} A M_{n-1} M_{n-2} \dots M_1 = S^{-1} A S =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}^{n-1} & a_{12}^{n-1} & \dots & a_{1n-1}^{n-1} & a_{1n}^{n-1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} = \Phi$$

По первой строке полученной матрицы  $\Phi$  составляется собственный многочлен  $A$ :  $P_n(\lambda) = \lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - \dots - p_n$ .

Требования  $a_{i+1i}^k \neq 0$  всегда можно добиться путем перестановок строк и столбцов (обычно на это место ставят наибольший элемент в строке).

Это наиболее экономичный метод, порядок операций  $n^3$ .

#### **Вычисление собственных векторов.**

Определив собственные значения  $\lambda_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) матрицы  $A$ , то ее собственные векторы могут быть найдены путем решения однородных систем  $Ax = \lambda_i x$ . Но если построена матрица  $S$ , с помощью которой  $A$  приводится к виду Фробениуса  $\Phi = S^{-1} A S$ , то нахождение собственных векторов, как было доказано выше, значительно упрощается. Так как собственные значения матриц  $\Phi$  и  $A$  совпадают (т.к. эти матрицы подобны), то найдя собственные векторы матрицы  $\Phi$ , легко найти собственные векторы матрицы  $A$  (см. (1)).

Итак, считаем  $\lambda_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) известными.  $\Phi = S^{-1} A S$ . Найдем собственные векторы матрицы  $\Phi$ , запишем систему уравнений

$$\Phi y = \lambda_i y$$

в развернутом виде

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

В составляющих вектора  $y$  система имеет вид:

$$p_1 y_1 + p_2 y_2 + \dots + p_n y_n = \lambda_i y_1,$$

$$y_1 = \lambda_i y_2,$$

$$\dots$$

$$y_{n-1} = \lambda_i y_n.$$

Так как собственный вектор находится заведомо с точностью до численного множителя, можно положить  $y_n = 1$ . Тогда все составляющие вектора  $y$  найдутся последовательно, начиная с последнего уравнения системы до первого, и для  $y$  получим

$$y = (\lambda_i^{n-1}, \lambda_i^{n-2}, \dots, \lambda_i, 1)$$

Первое уравнение системы (2) приведет к равенству

$$p_1 \lambda_i^{n-1} + p_2 \lambda_i^{n-2} + \dots + p_n = \lambda_i^n$$

и будет удовлетворяться, т.к.  $\lambda_i$  есть корень собственного многочлена  $P_n(\lambda)$  матрицы  $A$ .

В регулярном случае (см. выше) для матрицы  $S$  получается представление вида

$$S = M_{n-1} M_{n-2} \dots M_1.$$

Умножая  $S$  на собственный вектор  $y$ , получим для собственного вектора  $x$  матрицы  $A$  выражение

$$x = Sy = M_{n-1} M_{n-2} \dots M_1 y$$

Каждая матрица  $M_i$  ( $i=1, \dots, n-1$ ) отличается от единичной матрицы только одной строкой. При умножении вектора на  $M_i$  будет изменяться только одна составляющая вектора. Поэтому в полученном выражении вектора  $x$  удобно  $y$  умножать на  $M_1, M_2, \dots$  последовательно.

### Пример.

Задана матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Найти собственные числа и собственные векторы методом Данилевского.

**Решение:**

$$\Phi = S^{-1}AS, \quad \Phi = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрицу  $S$  находим путем последовательного приведения строк к каноническому виду, начиная с последней строки. Считаем, что  $a_{nn-1} \neq 0$ . Разделим на него  $(n-1)$ -й столбец матрицы  $A$ . Вновь полученный  $(n-1)$ -й столбец умножим на  $a_{ni}$  и вычтем из столбца номера  $i$ . Проделав это для  $i=1, 2, \dots, n-2, n$ , приведем последнюю строку к виду Фробениуса. Такое преобразование равносильно умножению матрицы  $A$  справа на матрицу

$$M_{n-1} = M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{31}}{a_{32}} & 1 & -\frac{a_{33}}{a_{32}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det M_2 = 0,5 \neq 0 \Rightarrow \exists M_2^{-1}$$

$$M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AM_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-0,5 & 0,5 & -1+1 \\ 3-1 & 1 & -2+1 \\ 1-1 & 1 & -2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 & 0,5 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = M_2^{-1}AM_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,5 & 0,5 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 & 0,5 & 0 \\ 1,5+4 & 0,5+2+2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1,5 & 0,5 & 0 \\ 5,5 & 4,5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & a_{13}^1 \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 & a_{23}^1 \\ a_{31}^1 & a_{32}^1 & a_{33}^1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned}
A_2 &= M_1^{-1} A_1 M_1 \\
M_1 &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{22}^1}{a_{21}^1} & -\frac{a_{23}^1}{a_{21}^1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4,5}{5,5} & \frac{2}{5,5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
M_1^{-1} &= \begin{pmatrix} a_{21}^1 & a_{22}^1 & a_{23}^1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,5 & 4,5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
A_1 M_1 &= \begin{pmatrix} 1,5 & 0,5 & 0 \\ 5,5 & 4,5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4,5}{5,5} & \frac{2}{5,5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1,5}{5,5} & -1,5 \cdot \frac{4,5}{5,5} + 0,5 & \frac{3}{5,5} \\ 1 & -4,5 + 4,5 & 2 - 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1,5}{5,5} & -\frac{4}{5,5} & \frac{3}{5,5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
A_2 = M_1^{-1} A_1 M_1 &= \begin{pmatrix} 5,5 & 4,5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1,5}{5,5} & -\frac{4}{5,5} & \frac{3}{5,5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 + 4,5 & -4 - 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \Phi
\end{aligned}$$

Т.к.  $\Phi y = \lambda_i y$

$$-6y_1 + 6y_2 - 3y_3 = \lambda_i y_1,$$

$$y_1 = \lambda_i y_2,$$

$$y_2 = \lambda_i y_3.$$

Так как собственный вектор находится заведомо с точностью до численного множителя, можно положить  $y_3 = 1$ . Тогда все составляющие вектора  $y$  найдутся последовательно, начиная с последнего уравнения системы до первого, и для  $y$  получим

$$y = (\lambda_i^2, \lambda_i, 1)$$

По первой строке полученной матрицы  $\Phi$  составляется собственный многочлен матрицы  $A$ :

$$P_n(\lambda) = \lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - \dots - p_n = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 6\lambda - 3 = 0$$

Получили нелинейное уравнение, корни которого можно найти методом Ньютона или методом простой итерации для нелинейных уравнений.

## 1.2 Итерационный метод вращений для решения полной проблемы собственных чисел.

Этот метод применим к для эрмитовым матрицам с комплексными элементами, но для простоты рассмотрим действительные симметричные матрицы.

## Идея в преобразовании матриц к диагональной форме

Любую симметричную действительную матрицу можно привести к диагональному виду **преобразованием подобия**

$$A=U\Lambda U^{-1}, \quad (2)$$

где  $U$  – ортогональная матрица ( $UU^T = E$ ) и  $\Lambda$  – диагональная, элементами которой являются собственные значения  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  матрицы  $A$ . Так как для ортогональной матрицы обратная совпадает с транспонированной ( $U^{-1} = U^T$ ), то (2) равносильно

$$U^T A U = \Lambda \quad (3)$$

Формула (3) дает возможность построить много алгоритмов для приближенного вычисления матрицы  $\Lambda$ , отличающиеся между собой способами построения матрицы  $U$ .

Для использования равенства (3) нужно построить последовательность ортогональных преобразований, позволяющих неограниченно уменьшать модули недиагональных элементов матрицы  $A$  (т.е. стремиться получить в итоге матрицу  $\Lambda$ ).

Рассмотрим один из алгоритмов, а именно **метод вращений**, т.к. он достаточно прост по вычислительной схеме и обладает быстрой сходимостью— это итерационный процесс, где на каждом шаге осуществляется такое **преобразование подобия**, что  $\left(U_1^T A U_1\right)_{ij} = 0$  – наибольший недиагональный элемент по абсолютной величине обращается в 0. В качестве  $U_1$  выбирается матрица вращения. Т.к. матрица  $A$  симметричная, то достаточно рассмотреть элементы выше главной диагонали.

$$U_1 = U_{ij}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \cos \varphi & \dots & -\sin \varphi & \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & & & \sin \varphi & \dots & \cos \varphi & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \dots(i) \\ \\ \dots(j) \\ \\ \\ \end{matrix} \quad (4)$$

**Опред.** Вещественные матрицы, отличающиеся от единичной матрицы, четырьмя элементами, расположенными на пересечении строк и столбцов с номерами  $i, j$  и имеющими вид (4) (где в общем случае определения вместо  $\cos \varphi$  может стоять  $c$  и ниже  $\pm c$ , аналогично вместо  $-\sin \varphi$  стоять  $-s$ , и т.п., где  $c^2 + s^2 = 1$ ) называются **матрицами вращения**, в которой угол  $\varphi$  определяется из условия, что наибольший недиагональный элемент после преобразования подобия  $= 0$

Обозначим

$$B_1 = AU_1, \quad B_1 = \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}$$

 $j$ -тый столбец произведения

$$\begin{aligned}
b_{1j} &= a_{1i}(-\sin \varphi) + a_{1j} \cos \varphi \\
b_{2j} &= a_{2i}(-\sin \varphi) + a_{2j} \cos \varphi \\
b_{kj} &= a_{ki}(-\sin \varphi) + a_{kj} \cos \varphi
\end{aligned} \tag{5}$$

$$U_1^{-1} = U_1^{-1}{}_{ij}(\varphi) = \begin{matrix} & i & \dots & j \\ \begin{matrix} i \\ \dots \\ j \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \cos \varphi & \dots & \sin \varphi \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & -\sin \varphi & \dots & \cos \varphi \\ & & & & & 1 \\ & 0 & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \dots(i) \\ \dots(j) \end{matrix} \end{matrix}$$

Наибольший недиагональный элемент после преобразования подобия приравняем нулю  $(A^{(1)})_{ij} = (U_1^{-1} A U_1)_{ij} = \cos \varphi \cdot b_{ij} + \sin \varphi \cdot b_{jj} = 0$

Подставляем в это выражение из (5) значение  $b_{ij}$  и получаем

$$\cos \varphi (a_{ii}(-\sin \varphi) + a_{ij} \cos \varphi) + \sin \varphi (a_{ji}(-\sin \varphi) + a_{jj} \cos \varphi) = 0$$

$$a_{ij} \cos 2\varphi = \frac{2}{2} (a_{ii} - a_{jj}) \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{ji}}{a_{ii} - a_{jj}} \Rightarrow \varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2a_{ji}}{a_{ii} - a_{jj}}$$

Таким образом  $\varphi$  – угол при котором максимальный недиагональный элемент обратился в 0. Получили новую матрицу  $A^{(1)}$ .

$A^{(1)} = U_1^{-1} A U_1$  – 1-ый шаг закончен.

**2-й шаг** – повторение предыдущего по отношению к матрице  $A^{(1)}$ .

Таким образом, по заданной матрице  $A$  будем строить последовательность матриц  $A^{(k)}$  такую, что каждая следующая матрица  $A^{(k+1)}$  получается из предыдущей  $A^{(k)}$  преобразованием подобия со следующей ортогональной матрицей вращения (или матрица поворота осей  $i, j$  на угол  $\varphi$ ):

$$A^{(k+1)} = U_k^{-1} A^{(k)} U_k$$

Для исследования сходимости введем меру отклонения матрицы  $A$  от диагональной:  $t(A) = \sum_{i,j \ i \neq j} a_{ij}^2$ .

Верно равенство (если использовать  $t(A) = \sum_{i,j \ i \neq j} a_{ij}^2$  и расписать)

$$t(A^{(k+1)}) = t(A^{(k)}) - 2(a_{ij}^{(k)})^2 \quad (6)$$

Что происходит с мерой отклонения за 1 шаг

Пусть  $|a_{ij}^{(k)}| = \max_{m,l:m \neq l} |a_{ml}^{(k)}|$  – наибольший недиагональный элемент и он

предполагается отличным от 0, верно неравенство  $t(A^{(k+1)}) < t(A^{(k)})$ , и мера  $t(A^{(k)})$  уменьшается при переходе к  $A^{(k+1)}$ . Что касается скорости стремления  $A^{(k)}$  к 0, то по выбору элемента  $a_{ij}^k$  справедливо неравенство

$$t(A^{(k)}) \leq n(n-1)(a_{ij}^{(k)})^2 \quad (n > 2) \quad (7)$$

Т.к. в сумме  $\sum_{m \neq l} a_{ml}^2$  содержится  $n(n-1)$  слагаемых  $a_{ml}^2$ ,  $(a_{ij}^{(k)})^2 = \max_{m \neq l} (a_{ml}^{(k)})^2$  Это очевидное неравенство ( $n > 2$  иначе метод вращения к матрице второго порядка нечего и применять).

Из (7) следует

$$(a_{ij}^{(k)})^2 \geq \frac{t(A^{(k)})}{n(n-1)} \quad (8)$$

С помощью этого неравенства (8) из (6) получается

$$t(A^{(k+1)}) = t(A^{(k)}) - 2(a_{ij}^{(k)})^2 \leq t(A^{(k)}) - \underbrace{\frac{2}{n(n-1)}}_{<1, \text{ т.к. } n > 2} t(A^{(k)}) = qt(A^{(k)}),$$

$$q = 1 - \frac{2}{n(n-1)}$$

при этом  $0 \leq q < 1$  ввиду  $n \geq 2$ . Отсюда возникает цепь неравенств

$$t(A^{(k)}) \leq qt(A^{(k-1)}) \leq q^2 t(A^{(k-2)}) \leq \dots \leq q^k t(A^{(0)}),$$

и т.к.  $A^{(0)} = A$ , то для  $t(A^{(k)})$  будем иметь оценку

$$t(A^{(k)}) \leq q^k t(A)$$

Отсюда вытекает, что  $t(A^{(k)}) \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$

Таким образом

$$A^{(k)} = U_k^{-1} \dots U_2^{-1} U_1^{-1} A U_1 U_2 \dots U_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \Lambda$$

Следовательно, сходимость метода вращения мы доказали. Будем считать, что при  $k \square 1 \quad A^{(k)} \approx \Lambda$ , а последовательность матриц  $U_1 U_2 \dots U_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} U$  ( $U^{-1} A U = \Lambda$ ). Итак, будем считать, что нашли матрицу  $U$ , с помощью которой матрицу  $A$  можно преобразовать к диагональной.

Как решается проблема собственных чисел у диагональной матрицы:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \Lambda e_i = \Lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_i e_i$$

Собственные числа матрицы  $A - \lambda_i$ , но мы получили приближение к диагональной матрице отсюда следует, что собственные числа матрицы  $A - a_{ii}^{(k)}$ , что собственные векторы матрицы  $A - Ue_i \Leftrightarrow a_{ii}^{(k)} \approx \lambda_i \quad a_{ii}^{(k)}$

$$Ue_i = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \\ \dots \\ u_{ni} \end{pmatrix}$$

То есть  $i$ -тому собственному числу будет соответствовать  $i$ -тый столбец матрицы  $U$  (определяющий собственный вектор).

**Пример:** Найти собственные числа и собственные векторы матрицы  $A$  методом вращения.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{i=1} \quad U_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{i=1} \quad \text{—матрица вращения осей } \mathbf{i} \mathbf{j}$$

( $i=1, j=2$ )

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{ij}}{a_{ii} - a_{jj}} = \frac{2 \cdot 2}{3 - 3} = \infty \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$U_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad U_1^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AU_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3+2}{\sqrt{2}} & \frac{-3+2}{\sqrt{2}} & 1 \\ \frac{2+3}{\sqrt{2}} & \frac{-2+3}{\sqrt{2}} & 1 \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 1 \\ \frac{5}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AU_1^T AU_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 1 \\ \frac{5}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5+5}{2} & \frac{-1+1}{2} & \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{-5+5}{2} & \frac{1+1}{2} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & 3 \end{pmatrix} = A_1$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/\sqrt{2} & 0 & 3 \end{pmatrix}^{i=1} \quad U_2 = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}^{i=1, j=3}$$

( $i=1, j=3$ )

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{ij}}{a_{ii} - a_{jj}} = \frac{2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}}}{5-3} = \frac{2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctg \sqrt{2} \approx 0,4777658 \Rightarrow 27^\circ 37'$$

$$\cos(0,4777658...) \approx 0,89 \quad \sin(0,4777658...) \approx 0,46$$

$$\sqrt{0,89^2 + 0,46^2} = \sqrt{0,7921 + 0,2116} = 1,0037 - \text{погрешность округления}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & 3 \end{pmatrix}^{i=1} \quad U_2 = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}^{i=1, j=3}$$

$$A_1 U_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1,41 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1,41 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,89 & 0 & -0,46 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,46 & 0 & 0,89 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 0,89 + 1,41 \cdot 0,46 & 0 & -5 \cdot 0,46 + 1,41 \cdot 0,89 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1,41 \cdot 0,89 + 3 \cdot 0,46 & 0 & -1,41 \cdot 0,46 + 3 \cdot 0,89 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 5,1 & 0 & -1,05 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2,63 & 0 & 2,02 \end{pmatrix}$$

$$U_2^{-1} A_1 U_2 = \begin{pmatrix} 0,89 & 0 & 0,46 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0,46 & 0 & 0,89 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5,1 & 0 & -1,05 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2,63 & 0 & 2,02 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0,89 \cdot 5,1 + 0,46 \cdot 2,63 & 0 & -0,89 \cdot 1,05 + 0,46 \cdot 2,02 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0,46 \cdot 5,1 + 0,89 \cdot 2,63 & 0 & -0,46 \cdot (-1,05) + 0,89 \cdot 2,02 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,7488 & 0 & -0,0053 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0,0053 & 0 & 2,2808 \end{pmatrix} = A_2$$

Видно, что с увеличением итераций недиагональные элементы стремятся к 0.

$\lambda_1 \approx 5,7488$   $\lambda_2 \approx 1$   $\lambda_3 \approx 2,2808$  – приближенные собственные значения

матрицы  $A$

$$\text{Мера отклонения} \quad t(A^{(2)}) = \sum_{i \neq j} [a_{ij}^{(2)}]^2 = 2 \cdot 0,0053^2 = 5,6 \cdot 10^{-5}$$

## 2. Частичная проблема собственных чисел

– это нахождение либо (чаще) максимальных по модулю значений СЧ, либо (реже) минимальных по модулю.

Все методы решения частичной проблемы собственных чисел являются итерационными.

**Определение наибольшего по модулю собственного значения.**

Предположим, что матрица  $A$  имеет  $n$ -линейно-независимых собственных векторов

Напомним, что

$$A\vec{e} = \lambda \cdot \vec{e}, \quad (*)$$

где  $\vec{e}$  – собственный вектор линейного оператора  $A$ ,  $\lambda$  – собственное число

Пусть СЧ расположены в порядке убывания:

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

$$\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \dots \quad \vec{e}_n - \text{СВ}$$

**Итерационный метод нахождения  $|\lambda_{\max}|$**

1) Возьмем  $x^{(0)}$  – произвольный вектор и образуем последовательность векторов:

$$x^{(1)} = Ax^{(0)}, \quad x^{(2)} = Ax^{(1)}, \dots, x^{(k)} = Ax^{(k-1)}$$

$$Ax^{(0)} = A(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) \underset{\text{лин}}{=} \alpha_1 A e_1 + \dots + \alpha_n A e_n \underset{\text{СЗ}}{=} \alpha_1 \lambda_1 e_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n e_n$$

Разложим по СВ (т.е. по системе линейно-независимых векторов)

$$x^{(0)} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$$

$$x^{(1)} = Ax^{(0)} = \alpha_1 \lambda_1 e_1 + \alpha_2 \lambda_2 e_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n e_n$$

$$\dots$$

$$x^{(k)} = Ax^{(k-1)} = \alpha_1 \lambda_1^k e_1 + \alpha_2 \lambda_2^k e_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n^k e_n$$

Идея основана на том, что  $\lambda_1$  – наибольшее

Отметим, что  $x^{(i)}$  и  $e_i, i = \overline{1, k}$  – векторы, но знак вектора мы опускаем.

Запишем  $s$  – тую компоненту (отличную от 0) (ограничение  $\alpha_1 \neq 0, e_{1s} \neq 0$ )

$$x_s^{(k)} = \alpha_1 \lambda_1^k e_{1s} + \alpha_2 \lambda_2^k e_{2s} + \dots + \alpha_n \lambda_n^k e_{ns}$$

$$x_s^{(k+1)} = \alpha_1 \lambda_1^{k+1} e_{1s} + \alpha_2 \lambda_2^{k+1} e_{2s} + \dots + \alpha_n \lambda_n^{k+1} e_{ns}$$

$$\frac{x_s^{(k+1)}}{x_s^{(k)}} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^{k+1} e_{is}}{\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^k e_{is}} = \left\{ \frac{1/\alpha_1 \lambda_1^k e_{1s}}{1/\alpha_1 \lambda_1^k e_{1s}} \right\} = \lambda_1 \frac{1 + \mu_2^{k+1} \gamma_{2s} + \mu_3^{k+1} \gamma_{3s} + \dots + \mu_n^{k+1} \gamma_{ns}}{1 + \mu_2^k \gamma_{2s} + \dots + \mu_n^k \gamma_{ns}}$$

где  $\mu_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1}, \quad \gamma_{is} = \frac{\alpha_i e_{is}}{\alpha_1 e_{1s}}$

**а)** Рассмотрим случай  $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ . Тогда все  $|\mu_i| < 1$  при достаточно больших  $k$  подчеркнутая дробь будет близка к 1.

Получаем приближенное максимальное СЧ:

$$\frac{x_s^{(k+1)}}{x_s^{(k)}} \approx \lambda_1 \quad (k \gg 1)$$

Замечание: независимость отношения  $\frac{x_s^{(k+1)}}{x_s^{(k)}}$  от  $s$  (т.е. координат) служит

основанием для выбора  $k \gg 1$ .

Чтобы найти СВ надо рассмотреть равенство:

$$x^{(k)} = \alpha_1 \lambda_1^k e_1 + \alpha_2 \lambda_2^k e_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n^k e_n$$

$$\frac{x^{(k)}}{\lambda_1^k} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 \mu_2^k e_2 + \dots + \alpha_n \mu_n^k e_n$$

В случае, когда  $|\mu_i| < 1$  ( $k \gg 1$ ) можно получить приближенное равенство  $e_1 \approx \frac{x^{(k)}}{\lambda_1^k}$  – СВ, множитель  $\alpha_1$  можно опустить, т.к. СВ определяются с точностью до

константы (до множителя)

$$\text{б) } \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r > |\lambda_{r+1}| \geq |\lambda_{r+2}| \dots$$

$$\frac{x_s^{(k+1)}}{x_s^{(k)}} = \frac{\alpha_1 \lambda_1^{k+1} e_{1s} + \dots + \alpha_r \lambda_r^{k+1} e_{rs} + \alpha_{r+1} \lambda_{r+1}^{k+1} e_{r+1s} + \dots}{\alpha_1 \lambda_1^k e_{1s} + \dots + \alpha_r \lambda_r^k e_{rs} + \alpha_{r+1} \lambda_{r+1}^k e_{r+1s} + \dots}$$

Разделим и числитель и знаменатель на число:  $\alpha_1 \lambda_1^{k+1} e_{1s} + \dots + \alpha_r \lambda_r^{k+1} e_{rs}$

Получим:

$$\frac{x_s^{(k+1)}}{x_s^{(k)}} = \lambda_1 \frac{1 + \mu_{r+1}^{k+1} \gamma'_{r+1s} + \dots}{1 + \mu_{r+1}^k \gamma'_{r+1s} + \dots}, \quad \mu_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1}, \quad \gamma'_{is} = \frac{\alpha_i e_{is}}{\alpha_1 e_{1s} + \dots + \alpha_r e_{rs}}$$

(NB! Выбираем  $x_s^{(k)} \neq 0$ , предполагаем  $\alpha_1 e_{1s} + \dots + \alpha_r e_{rs} \neq 0$ )

Аналогично предыдущему случаю: получаем  $\frac{x_s^{(k+1)}}{x_s^{(k)}} \approx \lambda_1$  ( $k \gg 1$ )

$$\frac{x^{(k)}}{\lambda_1^k} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_r e_r + \underbrace{\mu_{r+1}^k e_{r+1} + \dots}_{\rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty}$$

$$\frac{x^{(k)}}{\lambda_1^k} \approx \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_r e_r - \text{линейная комбинация собственных векторов}$$

В качестве начальных  $x^{(0)}$  берем  $r$  раз независимых вектора, получаем систему линейных независимых уравнений, откуда получаем  $e_1, e_2, e_3$

в) Пусть  $\lambda_1 = -\lambda_2$ .

$$x_s^{(2k)} = \alpha_1 \lambda_1^{2k} e_{1s} + \alpha_2 \lambda_2^{2k} e_{2s} + \alpha_3 \lambda_3^{2k} e_{3s} + \dots$$

(одинаковые знаки при четном номере)

$$x_s^{(2k+2)} = \alpha_1 \lambda_1^{2k+2} e_{1s} + \alpha_2 \lambda_2^{2k+2} e_{2s} + \alpha_3 \lambda_3^{2k+2} e_{3s} + \dots$$



$$\frac{x_s^{(2k+2)}}{x_s^{(2k)}} = \frac{\alpha_1 \lambda_1^{2k+2} e_{1s} + \alpha_2 \lambda_1^{2k+2} e_{2s} + \alpha_3 \lambda_3^{2k+2} e_{3s} + \dots}{\underbrace{\alpha_1 \lambda_1^{2k} e_{1s} + \alpha_2 \lambda_1^{2k} e_{2s}}_{\lambda_1^2 = \lambda_2^2} + \alpha_3 \lambda_3^{2k} e_{3s} + \dots} =$$

$$= \frac{\lambda_1^2 + \frac{\alpha_3 \lambda_3^{2k+2} e_{3s}}{\alpha_1 \lambda_1^{2k} e_{1s} + \alpha_2 \lambda_1^{2k} e_{2s}} + \dots}{1 + \frac{\alpha_3 \lambda_3^{2k} e_{3s}}{\alpha_1 \lambda_1^{2k} e_{1s} + \alpha_2 \lambda_1^{2k} e_{2s}} + \dots} = \lambda_1^2 \frac{1 + \mu_3^{2k+2} \gamma_3^{//} + \dots}{1 + \mu_3^{2k} \gamma_3^{//} + \dots}$$

$$\mu_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1}, \quad \gamma_i^{//} = \frac{\alpha_i e_{is}}{\alpha_1 e_{1s} + \alpha_2 e_{2s}}$$

$$\frac{x_s^{(2k+2)}}{x_s^{(2k)}} = \lambda_1^2 \text{ отсюда получаем два СЗ: } \lambda_1 = -\lambda_2$$

Для СВ:

$$\frac{x^{(2k)}}{\lambda_1^{2k}} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \underbrace{\alpha_3 \mu_3^{2k} e_3 + \dots}_{\rightarrow 0 \text{ } k \rightarrow \infty \text{ } \mu_3 < 1}$$

$$\frac{x^{(2k)}}{\lambda_1^{2k}} \approx \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$$

Аналогично расписываем для  $x_s^{(2k+1)}$

**Получаем:**

$$\frac{x^{(2k+1)}}{\lambda_1^{2k+1}} \approx \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2$$

Два уравнения – два неизвестных СВ

### III. Решение нелинейных уравнений.

#### **1. Случай одного уравнения. Исследование уравнения**

Пусть функция  $f(x)$  действительного переменного. Требуется найти корни уравнения

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

на заданном сегменте  $[a, b]$ . Относительно функции  $f(x)$  будем предполагать, что она есть любая кусочно-непрерывная функция действительного аргумента, которая на  $[a, b]$  непрерывна и имеет кусочно-непрерывную производную. Уравнение (1) называется *алгебраическим*, если заданная функция есть полином  $n$ -й степени:

$$f(x) = P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0 \quad (2)$$

Всякое неалгебраическое уравнение (1) называется *трансцендентным*, например,  $e^x - x^2 + 10 = 0$ ;  $x - \operatorname{tg} x = 0$ . Алгебраические и трансцендентные уравнения получили общее название *конечных уравнений*, в отличие от дифференциальных, интегральных, ур-й в частных производных и т.д.

Задача решения уравнения (1) совпадает с задачей определения корней (или нулей) функции  $f(x)$ .

Число  $x = \xi$  называется *корнем функции*  $f(x)$ , если  $f(\xi) \equiv 0$ . Число  $\xi$  *корнем  $k$ -й кратности*, если при  $x = \xi$  вместе с функцией обращаются в нуль и все производные до  $k-1$  порядка включительно. Если  $k=1$ , корень называют *простым*.

При определении приближенных значений корней уравнения (1) необходимо решить две задачи:

1) *отделение корней*, т.е. определение достаточно малых промежутков в каждом из которых заключен один и только один корень уравнения (простой или кратный).

2) *уточнение корней* с наперед заданным числом верных знаков.

При условии  $f'(\xi) \neq 0$  задача отделения корня  $x = \xi$  всегда возможна. Отделение корней можно производить графически и аналитически.

При *графическом отделении* корней уравнение (1) надо преобразовать к виду

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) \quad (3)$$

и построить графики функций

$$y_1 = \varphi_1(x); \quad y_2 = \varphi_2(x) \quad (4)$$

Корнями уравнения (1)

$$f(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x) = 0$$

являются абсциссы точек пересечения этих графиков

Если  $\varphi_2(x) = 0$ , то искомые корни уравнения (1) есть точки пересечения графика функции  $y = f(x)$  с осью абсцисс.

В общем случае при построении графиков (4) следует выявить прежде всего поведение каждой из функций  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  при  $x \rightarrow -\infty$ ,  $x \rightarrow +\infty$ , найти значения  $x$  при которых обычно проще всего вычисляются значения любой функции. Полезно также, если это не требует значительных вычислений, определить (можно грубо) точки минимума и максимума функций (4).

Из *аналитических методов отделения корней* укажем только два общих метода пригодных как для алгебраических так и для трансцендентных уравнений. Один из них – нахождение более простого уравнения, которое имеет корни, приблизительно равные искомым корням данного уравнения. Это можно сделать пренебрегая в данном уравнении малыми членами. При втором методе используются следующие теоремы, непосредственно вытекающие из свойств непрерывных функций.

**Теорема 1.** Если функция действительного аргумента  $f(x)$  непрерывна на сегменте  $[a, b]$  и на его концах значения  $f(a)$  и  $f(b)$  имеют противоположные знаки, то между точками  $a$  и  $b$  имеется хотя бы один действительный корень уравнения  $f(x) = 0$ .

Если при этом  $f(x)$  имеет первую производную, не меняющую знака на  $[a, b]$ , т.е. если  $f(x)$  на  $[a, b]$  меняется монотонно, то корень единственный.

**Теорема 2.** Пусть  $f(x)$  есть аналитическая функция переменного  $x$  на сегменте  $[a, b]$ ; если на концах  $[a, b]$  она принимает значения разных знаков, то между точками  $a$  и  $b$  имеется нечетное число корней уравнения  $f(x) = 0$ ; если же на концах  $[a, b]$  она принимает значения одинаковых знаков, то между точками  $a$  и  $b$  или нет действительных корней, или имеется четное их число (учитывая и кратность).

(Число корней у трансцендентного уравнения может быть произвольным)

Алгебраическое уравнение  $n$ -й степени (2) всегда имеет точно  $n$  корней (действительных или комплексных), что вытекает из

**Теорема Гаусса.** *Полином степени  $n$  имеет точно  $n$  действительных корней или комплексных корней, если каждый  $k$ -кратный корень считать  $k$  раз.*

**Теорема Безу.** *Остаток от деления полинома  $P(x)$  на двучлен  $(x-a)$  равен  $P(a)$ , т.е. значению этого полинома при  $x=a$ .*

(теорема Безу справедлива и в комплексной области). В частности, если все коэффициенты полинома  $P(x)$  – действительные числа, то корни уравнения  $P(x)=0$  могут быть только действительными или комплексно сопряженными. Число действительных корней алгебраического уравнения (2) с действительными коэффициентами равно или на четное число меньше степени уравнения.

**Теорема Декарта.** *Число положительных корней равно (или на четное число меньше) числу перемен знака в ряду коэффициентов уравнения..*

Если в уравнении (2)  $a_0 > 0$  (этого всегда можно достичь, поменяв при отрицательном  $a_0$  все знаки в левой части уравнения), то его действительные корни удовлетворяют неравенству Маклорена, определяющему верхнюю границу корней:

$$x < 1 + \sqrt[m]{\frac{A}{a_0}}, \quad (5)$$

где  $m$  – индекс первого отрицательного коэффициента в ряду  $a_0, a_1, \dots, a_n$ ;  $A$  – максимальный из модулей отрицательных коэффициентов.

Эта же оценка позволяет установить и нижнюю границу корней. Для этого следует сделать замену  $x = -y$  и умножить полученное уравнение на  $(-1)^n$ , для того чтобы старший коэффициент остался положительным, после чего снова воспользоваться формулой (5).

**Замечание:**

*При исследовании алгебраических уравнений следует иметь в виду следующую их особенность. Наличие на графике полинома  $Y = P(x)$  каждого минимума, при котором  $P(x)$  положительно, и каждого максимума с отрицательным значением  $P(x)$  свидетельствует о наличии у этого полинома пары комплексных корней.*

Так полином, график которого изображен на рис.1, имеет по крайней мере, три пары комплексных корней, о чем свидетельствует форма графика полинома в окрестности точек А, В, С.

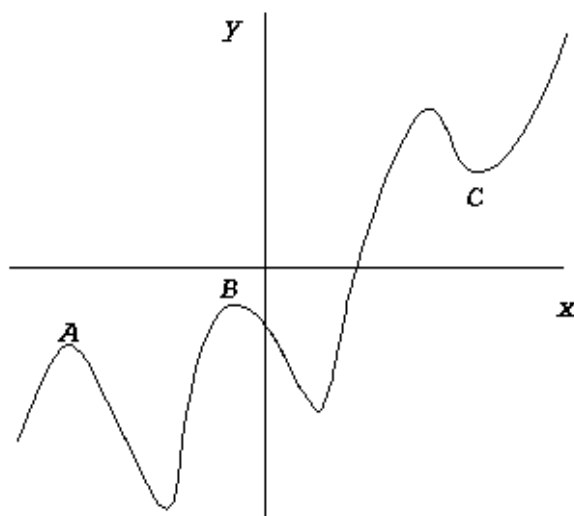


Рис. 1.

Эти особенности (или условия) не принадлежат к необходимым условиям, а являются только достаточными, т.е. график может не иметь ни одной точки из рассматриваемых типов, а уравнение может иметь несколько пар комплексных корней (см. пример 1 из практич. занятия).

После того как исследование уравнения (1) закончено и для каждого действительного корня  $\xi$  установлен интервал в котором этот корень находится, переходим к решению второй задачи – к уточнению найденных корней.

Отделение корня  $\xi$ , т.е. установление двойного неравенства  $a < \xi < b$  уже дает возможность получить его грубое приближенное значение, в качестве которого можно взять центр интервала  $(a, b)$ :

$$\xi_1 = \frac{a+b}{2}.$$

При этом абсолютная погрешность будет меньше числа

$$\varepsilon < \frac{|a-b|}{2}.$$

Подставив найденное  $\xi_1$  в уравнение (1) и убедившись, что оно не обеспечивает требуемую точность, принимаем  $f(\xi_1) = a_1$  или  $f(\xi_2) = b_1$  и в результате приходим к одному из следующих, более точных неравенств:

$$a_1 < \xi < b \quad \text{или} \quad a < \xi < b_1,$$

так что продолжая этот процесс, можем произвести уточнение корня с любой наперед заданной степенью точности. (**Метод деления отрезка пополам**).

Теория алгебраических уравнений разработана значительно полнее уравнений трансцендентных. Поэтому последние часто пытаются свести к уравнениям алгебраическим. В частности это можно сделать, разложив левую часть заданного трансцендентного уравнения  $f(x) = 0$  в степенной ряд

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n + \dots, \quad (*)$$

$$\text{где } c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0); \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Рассмотрим последовательность алгебраических уравнений, получающихся, если приравнять нулю частичные суммы ряда (\*):

$$\begin{aligned} c_0 + c_1x &= 0; \\ c_0 + c_1x + c_2x^2 &= 0; \\ &\dots\dots\dots \\ c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n &= 0. \end{aligned} \quad (**)$$

Пусть  $\xi_1$  – корень первого из этих уравнений,  $\xi_2$  – один из корней второго уравнения,  $\xi_n$  – один из корней n-го уравнения. Тогда имеет место следующая теорема

**Теорема 3.** Если последовательность  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  сходится и предел этой последовательности  $\xi$  принадлежит области, в которой ряд (\*) сходится к функции  $f(\xi)$ , то число  $\xi$  является корнем уравнения  $f(x) = 0$ .

Из этой теоремы следует, что вместо трансцендентного уравнения  $f(x) = 0$  можно попытаться решить несколько уравнений последовательности (\*\*). Если среди

найденных корней окажутся близкие, то их можно принять в качестве приближенных корней заданного трансцендентного уравнения

Однако существуют другие, более эффективные методы уточнения корней.

**Пример 1.** Исследовать уравнение

$$2x^9 + x^7 - x^4 + 19x^3 - 24x^2 + 2 = 0. \quad (*)$$

Решение: Уравнение имеет нечетное число действительных корней, но не больше девяти. Число перемен знаков в ряду его коэффициентов равно четырём, поэтому согласно теореме Декарта положительных корней может быть четыре, два или ни одного.

Выполнив замену  $x = -y$  и поменяв знаки на обратные, получаем

$$2y^9 + y^7 + y^4 + 19y^3 + 24y^2 - 2 = 0, \quad (**)$$

поэтому в исходном уравнении (\*) есть только один отрицательный корень.

Границы действительных чисел найдем, воспользовавшись неравенством (5). Для исходного уравнения (\*), утвая, что  $a_1 = a_3 = a_4 = 0$ ,  $a_5 = -1$ , имеем  $m = 5$ ;  $A = 24$ ;  $a_0 = 2$ , следовательно, все его положительные корни удовлетворяют неравенству

$$x < 1 + \sqrt[5]{\frac{24}{2}} = 1 + \sqrt[5]{12} \approx 2,6$$

Аналогично для преобразованного уравнения (\*\*), у которого знак изменяет только свободный член  $a_9 = -2$ , получаем

$$y < 1 + \sqrt[9]{\frac{2}{2}} = 2,$$

откуда  $x = -y > -2$ . Таким образом, корни исходного уравнения лежат в интервале  $-2 < x < 2,6$

Результаты проведенного исследования легко проверить непосредственно, построив график рассматриваемого полинома (\*\*) (см. рис.2).

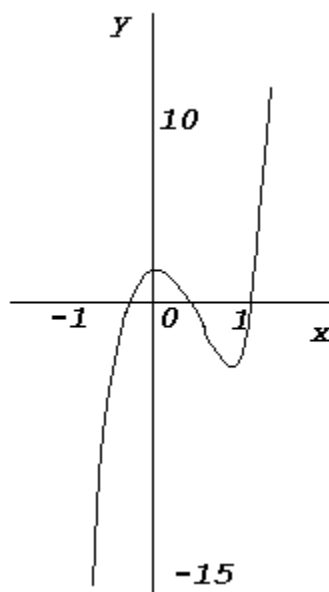


Рис. 2.

$$y = P(x) = 2x^9 + x^7 - x^4 + 19x^3 - 24x^2 + 2, \quad (***)$$

а более точные значения минимального и максимального действительных корней равны:  $x_1 = -0,262364$ ;  $x_3 = 1,029626$ . Уравнение (\*\*\*) имеет еще три пары комплексных корней, хотя на графике нет ни одной точки из рассмотренных в замечании типов.

**Пример 2.** Вычислить положительный корень уравнения.

$$f(x) \equiv x^2 - \sin 5x = 0$$

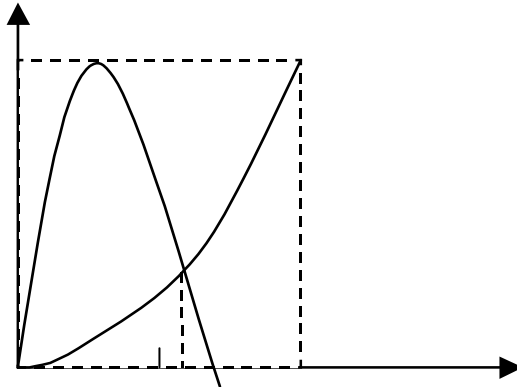
с точностью до 0,00001.

**Решение:**

1) отделение корней

Графическое отделение искомого корня.

Строим графики функций  $y = x^2$ ,  $y = \sin 5x$



Из рисунка видно, что положительный корень лежит между 0,5 и  $\frac{\pi}{5} = 0,628\dots$

В качестве исходного отрезка возьмем отрезок  $[0,5; 0,6]$ , для чего прежде всего проверяем знаки на концах отрезка

$$f(0,5) = 0,25 - \sin 2,5 = 0,25 - 0,6 < 0$$

$$f(0,6) = 0,36 - \sin 3,0 = 0,36 - 0,14 > 0$$

Т.е. по теореме 1 (занятие 15) на  $[0,5; 0,6]$  имеется хотя бы один действ. корень.

Далее проверяем сохранение знака у производных

$$f'(x) = 2x - 5 \cos 5x > 0 \quad \text{при} \quad 0,5 < x < 0,6$$

$$f''(x) = 2 + 25 \sin 5x > 0 \quad \text{при} \quad 0,5 < x < 0,6$$

Т. е. точек минимума и максимума и перегиба на этом отрезке нет

2) уточнение корней – можно применить метод деления отрезка пополам.

Отделение корня  $\xi$ , т.е. установление двойного неравенства  $a < \xi < b$  уже дает возможность получить его грубое приближенное значение, в качестве которого можно взять центр интервала  $(a, b)$ :

$$\xi_1 = \frac{a+b}{2}.$$

При этом абсолютная погрешность будет меньше числа

$$\varepsilon < \frac{|a-b|}{2}.$$

Подставив найденное  $\xi_1$  в уравнение (1) и убедившись, что оно не обеспечивает требуемую точность, принимаем  $f(\xi_1) = a_1$  или  $f(\xi_2) = b_1$  и в результате приходим к одному из следующих, более точных неравенств:

$$a_1 < \xi < b \quad \text{или} \quad a < \xi < b_1,$$

так что продолжая этот процесс, можем произвести уточнение корня с любой наперед заданной степенью точности. (Метод деления отрезка пополам).

Искомый корень лежит в интервале:  $0,56365 < \xi < 0,56366$

## 2. Итерационные методы вычисления изолированного корня уравнения $f(x) = 0$ .

### Введение

Такие методы предполагают указания какой-либо области  $D$ , содержащий этот единственный корень.

Если  $f(x)$  – непрерывна, то вещественный корень принадлежит любому отрезку, на концах которого, функция имеет значения разных знаков. Деля отрезок пополам получаем универсальный метод вычисления корня (метод бисекции). Этот подход не требует знания хорошего начального приближения. Если оно имеется, то для гладких функций используются более эффективные методы.

Пусть отыскивается единственный на  $[a, b]$  корень  $z$  уравнения  $f(x) = 0$  в предположении непрерывности функции  $f(x)$ .

Итерационный метод решения порождает последовательность приближений  $\{x_n\}$ , которая сходится к корню:  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - z| = 0$ . Величину  $e_n = x_n - z$  называют *абсолютной ошибкой* на  $n$ -й итерации. Итерационный метод имеет *порядок  $m$*  (или *скорость сходимости  $m$* ), если  $m$  есть наибольшее положительное число, для которого существует такая конечная постоянная  $q > 0$ , что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{e_{n+1}}{e_n^m} \right| \leq q < \infty.$$

Постоянную  $q$  называют константой асимптотической ошибки, она обычно оценивается через производные функции  $f(x)$  в точке  $x = z$ . При  $m = 1$  ( $q \in (0, 1)$ ) сходимость называется линейной (метод сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем  $q$ ), при  $1 < m < 2$  – сверхлинейной, при  $m = 2$  – квадратичной и т.д.

### 2.1 Метод секущих

Если имеется хорошее приближение к корню  $x = z$  уравнения

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

Простейший вариант метода: в процессе итераций фиксируется некоторая точка  $x_0$ , приближение  $x_{n+1}$  находится как абсцисса точки пересечения прямой проходящей через точки  $(x_0, f(x_0))$  и  $(x_n, f(x_n))$  с осью  $x$  (рис. 1).

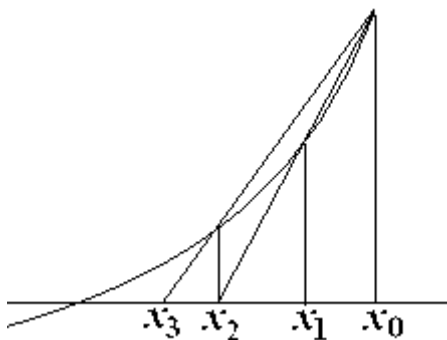


Рис. 1.

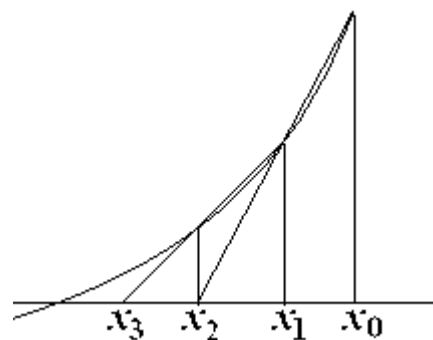


Рис. 2.

Обычно более эффективен способ, где за  $x_{n+1}$  принимается абсцисса точки пересечения с осью  $x$  прямой, проходящей через точки  $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$  и  $(x_n, f(x_n))$ . Уравнение этой прямой

$$y_n(x) = f(x_n) + (x - x_n) \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

Из условия  $y_n(x_{n+1}) = 0$  получаем расчетную формулу

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

## 2.2 Метод хорд (метод ложного положения)

Пусть  $f(a)f(b) < 0$  идея метода состоит в замене кривой  $y = f(x)$  хордами, проходящими через концы отрезков, в которых,  $f(x)$  имеет противоположные знаки. В методе хорд требуется, чтобы один конец отрезка, на котором ищется корень, был неподвижен. В качестве такого неподвижного конца  $x_0$  выбирают тот конец отрезка для которого знак  $f(x)$  совпадает со знаком  $f''(x)$ . Расчетная формула имеет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_0)}(x_n - x_0)$$

## 2.3 Метод Ньютона или метод касательных

Пусть  $PAQ$  дуга кривой  $y = f(x)$  (рис.1), которая пересекает ось  $Ox$  в точке  $A$ , так что абсцисса  $x = \xi$  точки  $A$  есть корень уравнения

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

Допустим, что дуга  $AP$  обращена выпуклостью к оси  $Ox$ . Проведем через точку  $P$  с координатами  $(x_0; y_0 = f(x_0))$  касательную к кривой  $y = f(x)$ . Угловой коэффициент касательной равняется значению производной от функции  $f(x)$  в точке касания;  $k = f'(x_0)$ ; следовательно, уравнение касательной, которая проходит через точку  $P(x_0, y_0)$  будет

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad (2)$$

Отсюда положив в (2)  $y = 0$ ,  $y_0 = f(x_0)$ , находим точку пересечения касательной с осью абсцисс ( $y=0$ ), которую обозначим через  $x_1$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$



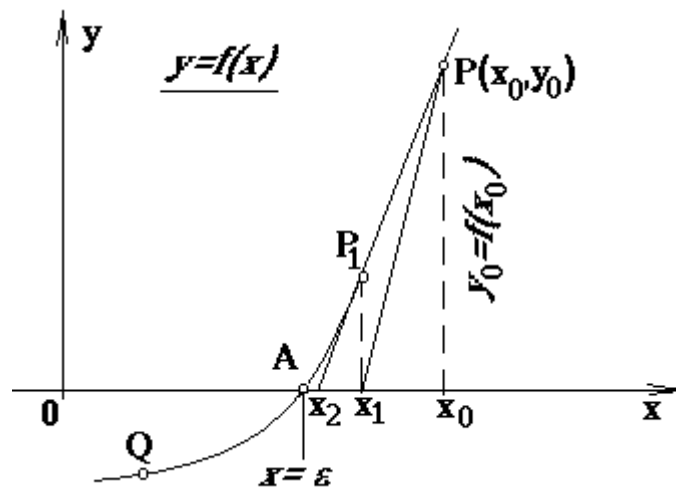


Рис. 1.

Через точку  $P_1(x_1; y_1 = f(x_1))$  снова проводим касательную и, продолжая этот процесс, приходим к формуле Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}; \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

Значения  $x_0, x_1, x_2, \dots$ , вычисленные по формуле (3), образуют последовательность, которая стремится к значению корня уравнения (1).

Если мы начнем процесс, исходя из точки  $Q$ , в которой кривая обращена к оси  $Ox$  вогнуто, то первый же шаг приведет на другую сторону от оси  $Ox$ , где кривая обращена к ней выпукло, так что в дальнейшем будем приближаться к значению корня так же, как и прежде

В тех случаях, когда вычисление второй производной для функции  $f(x)$  не ведет к существенным усложнениям, можно указать критерий, который поможет проверить правильность выбора начального значения  $x_0$ . Действительно, т.к. кривая  $y = f(x)$  обращена выпукло к оси  $Ox$  в тех случаях для которых выполняется соотношение

$$f(x) \cdot f''(x) > 0 \quad (4)$$

то этому условию и должно удовлетворять выбранное значение  $x_0$ .

Установим связь между погрешностями  $n$ -го и  $n+1$  шага. Согласно формуле Тейлора имеем

$$f(\xi) = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{1}{2}f''(c_n)(\xi - x_n)^2,$$

где точка  $c_n$  лежит между  $x_n$  и  $\xi$ .

Т.к.  $f(\xi) = 0$ , то отсюда получаем

$$\xi - x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{f''(c_n)}{f'(x_n)} (\xi - x_n)^2,$$

но согласно формуле (3)

$$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_{n+1}.$$

Следовательно,

$$\xi - x_{n+1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{f''(c_n)}{f'(x_n)} (\xi - x_n)^2,$$

откуда и находим следующую оценку

$$|\xi - x_{n+1}| \leq \frac{M}{2|f'(x_n)|} (\xi - x_n)^2, \quad (5)$$

где  $M$  – наибольшее значение  $|f''(x)|$  в рассматриваемой окрестности корня  $\xi$ .

Оценка (5) показывает, что при вычислении корня по методу Ньютона погрешность каждого нового приближения уменьшается пропорционально квадрату погрешности предыдущего приближения. Таким образом, в тех случаях когда в рассматриваемой

окрестности искомого корня величина  $\frac{M}{|f'(x_n)|}$  не слишком велика, то сходимость

метода достаточно быстрая (каждое новое приближение удваивает число верных десятичных знаков) и наоборот. Т.о. представление об истинном значении величины

$\frac{M}{|f'(x_n)|}$  в каждом конкретном примере можно получить, проанализировав рост числа

верных знаков в 2-х 3-х предыдущих шагах. Если в предыдущих шагах число верных

знаков с ростом  $n$  примерно удваивалось, то это подтверждает, что величина  $\frac{M}{|f'(x_n)|}$

мала и метод Ньютона целесообразно применять.

## 2.4 Метод простой итерации

Применение метода итераций требует предварительного приведения уравнения  $f(x) = 0$  к каноническому виду

$$x = \varphi(x) \quad (1)$$

Область изменения аргумента  $x$  на числовой оси назовем  $X$  (отрезок числовой оси). Область значений функции  $y = \varphi(x)$  обозначим  $Y$ . Функцию  $\varphi$  можно рассматривать как оператор, преобразующий  $X$  в  $Y$ .

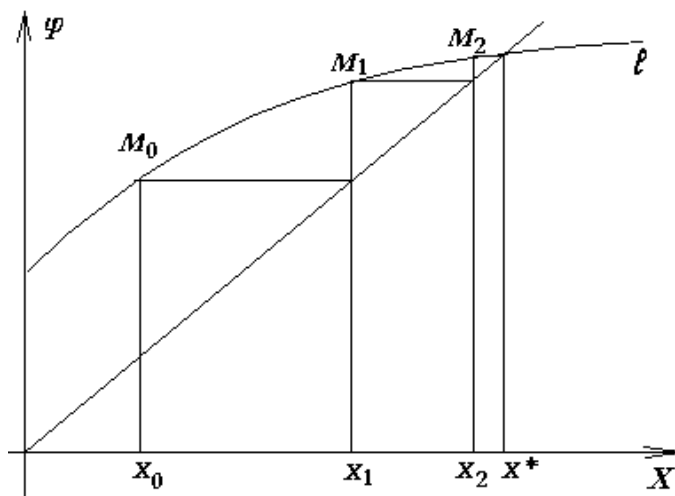


Рис.1

Построим график обеих частей уравнения (1): для левой части: прямая линия  $y = x$  – биссектриса первого координатного угла, для правой части – некоторая линия с уравнением  $y = \varphi(x)$  (обозначим буквой  $l$ ). Решением уравнения является абсцисса  $x^*$  точки  $M^*$  пересечения  $l$  и биссектрисы.

Допустим, что для  $x^*$  имеется начальное приближение  $x_0$ . В простейшем методе итерации все дальнейшие приближения строятся по формуле

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (2)$$

Этот процесс называется *одношаговой итерацией*.

Геометрическое значение процесса вычислений  $x_n$  указано на рисунке 1. По  $x_0$  находится на  $l$  точка  $M_0[x_0, \varphi(x_0)]$ , через нее проводится прямая параллельная оси  $x$  и находится точка ее пересечения с биссектрисой. Абсцисса этой точки принимается за следующее приближение  $x_1$  к  $x^*$  и т.д.

**Рассмотрим поведение приближений  $x_n$ , когда они находятся вблизи  $x^*$ .** Для этого рассмотрим их погрешности  $\varepsilon_n = x_n - x^*$ . Зависимость между  $\varepsilon_n$  и  $\varepsilon_{n+1}$  получится, если в (2) вместо  $x_n$  и  $x_{n+1}$  подставить их выражения  $x_n = x^* + \varepsilon_n$ ,  $x_{n+1} = x^* + \varepsilon_{n+1}$ :

$$x^* + \varepsilon_{n+1} = \varphi(x^* + \varepsilon_n) = \varphi(x^*) + \varepsilon_n \varphi'(x^*) + o(\varepsilon_n)$$

Если воспользоваться равенством  $x^* = \varphi(x^*)$  и пренебречь малой величиной более высокого порядка малости  $o(\varepsilon_n)$ , то зависимость между  $\varepsilon_n$  и  $\varepsilon_{n+1}$  запишется в виде приближенного равенства

**1. Когда  $|\varphi'(x^*)| > 1$ ,** погрешность  $|\varepsilon_{n+1}| > |\varepsilon_n|$  и приближение  $x_{n+1}$  будет отстоять от  $x^*$  дальше, чем  $x_n$ . Решение  $x^*$  будет “точкой отталкивания” для приближений  $x_n$ , близких к нему, и в этом случае не будет сходимости последовательности  $x_n$  к  $x^*$ .

**2. Если  $|\varphi'(x^*)| < 1$ ,** то погрешность  $|\varepsilon_{n+1}| < |\varepsilon_n|$  и можно ожидать, что последовательность  $x_n$ , если  $x_0$  взято достаточно близким к  $x^*$ , будет сходиться к  $x^*$  приблизительно со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем  $q = \varphi'(x)$ .

При  $\varphi'(x^*) > 0$   $\varepsilon_{n+1}$  и  $\varepsilon_n$  будут иметь одинаковые знаки, и сходимость  $x_n$  к  $x^*$  будет монотонной. Если  $\varphi'(x^*) < 0$ , то погрешности  $\varepsilon_{n+1}$  и  $\varepsilon_n$  имеют разные знаки, и приближение  $x_n$  будет сходиться к  $x^*$ , колеблясь около  $x^*$ .

**3. Случай  $\varphi'(x^*) = 0$**  требует специального рассмотрения, так как тогда  $\varepsilon_{n+1}$  будет малой величиной высшего порядка сравнительно с  $\varepsilon_n$ . Поэтому, если  $x_0$  взято достаточно близким к  $x^*$ , то  $x_n$  будет весьма быстро сходиться к  $x^*$ : при возрастании  $n$  погрешность  $\varepsilon_n$  будет стремиться к нулю со скоростью, превосходящей сходимость геометрической прогрессии со сколь угодно малым знаменателем. Это часто используют для ускорения сходимости последовательности  $x_n$  к  $x^*$  путем преобразования заданного уравнения (1) к новому  $x = \psi(x)$ , имеющему то же решение  $x^*$ , но такому, что  $\psi'(x^*) = 0$

Укажем порядок малости  $\varepsilon_{n+1}$  сравнительно с  $\varepsilon_n$ . Пусть  $\varphi$  имеет непрерывную производную порядка  $m$  вблизи  $x^*$ , и выполняются равенства

$$\varphi'(x^*) = \dots = \varphi^{(m-1)}(x^*) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi^{(m)}(x^*) \neq 0$$

В этом случае разложение  $\varphi(x_n) = \varphi(x^* + \varepsilon_n)$  около  $x^*$  будет иметь форму

$$\varphi(x_n) = \varphi(x^* + \varepsilon_n) = \varphi(x^*) + \frac{1}{m!} \varphi^{(m)}(x^*) \varepsilon_n^m + o(\varepsilon_n^m)$$

Подстановка его в (2) и отбрасывание  $o(\varepsilon_n^m)$  даст следующее соотношение между  $\varepsilon_{n+1}$  и  $\varepsilon_n$ :

$$\varepsilon_{n+1} \approx \frac{1}{m!} \varphi^{(m)}(x^*) \varepsilon_n^m. \quad (4)$$

Отсюда видно, что  $\varepsilon_{n+1}$  будет малой величиной порядка  $m$  относительно  $\varepsilon_n$ .

**Теорема 1. О сходимости итерационной последовательности:**

*Пусть выполняются условия:*

1) функция  $\varphi(x)$  определена на отрезке

$$|x - x_0| \leq \delta, \quad (5)$$

*непрерывна там и удовлетворяет условию Липшица с постоянным коэффициентом, меньшим единицы:*

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| \leq q|x - x'| \quad (0 \leq q < 1); \quad (6)$$

2) для исходного приближения  $x_0$  верно неравенство

$$|x_0 - \varphi(x_0)| \leq m;$$

3) числа  $\delta, q, m$  удовлетворяют условию

$$\frac{m}{1-q} \leq \delta. \quad (7)$$

Тогда

1) уравнение (1) в области (5) имеет решение;

2) последовательность  $x_n$  приближений, построенная по правилу (2), принадлежит отрезку (5), является сходящейся ( $\lim x_n = x^*$ ), и предел последовательности  $x^*$  удовлетворяет уравнению (1);

3) скорость сходимости  $x_n$  к  $x^*$

$$|x^* - x_n| \leq \frac{m}{1-q} q^n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Поясним условия теоремы:

Функция  $\varphi$  преобразует отрезок  $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$  числовой оси в некоторый отрезок той же оси. Возьмем две точки  $x, x'$  на  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ . Расстояние между ними есть  $|x - x'|$ , а  $|\varphi(x) - \varphi(x')|$  есть расстояния между их изображениями.

Отношение  $\frac{|\varphi(x) - \varphi(x')|}{|x - x'|}$  есть коэффициент увеличения этих расстояний при преобразовании. По условию (6) он не превосходит числа  $q$ , но т.к.  $q < 1$ , то при отображении оператором  $\varphi$  происходит не растяжение, а сжатие всех отрезков с коэффициентом, не большим  $q$ .

Входящая в условие величина  $m$  связана с близостью начального приближения  $x_0$  к решению  $x^*$ . Если окажется, что  $x_0 = x^*$  и, тогда,  $x_0 - \varphi(x_0) = 0$ , то можно

считать  $m=0$ . Когда  $x_0 \neq x^*$ , но  $x_0$  близко к  $x^*$ , то разность  $x_0 - \varphi(x_0)$  будет иметь малое значение, и  $m$  может быть взята малой величиной.

Неравенство (7) налагает на  $\delta, q, m$  ограничение достаточное для того, чтобы были верны утверждения теоремы 1.

## Теорема 2. О единственности решения

На всяком множестве точек, где для функции  $\varphi(x)$  выполняется условие

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < |x - y|, \quad x \neq y,$$

уравнение  $x = \varphi(x)$  может иметь не более одного решения.

## Пример.

Найдем по методу итераций с пятью значащими цифрами наименьший положительный корень уравнения

$$\cos x - \frac{1}{x} \sin x = 0 \quad (1^*)$$

## Решение

Заменим уравнение (1\*) эквивалентным ему уравнением

$$x = \operatorname{tg} x, \quad (2^*)$$

и построив графики функций  $y_1 = x$ ,  $y_2 = \operatorname{tg} x$  (сделать самостоятельно) находим, что можно взять

$$x_0 = \frac{3\pi}{2} \approx 4,7$$

Однако, к уравнению (2\*) непосредственно метод итераций применить нельзя, т.к. при любом значении  $x$

$$\varphi'(x) = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \geq 1$$

То есть условие пункта 2 не удовлетворяется. Поэтому перейдем к обратной функции, т.е. к уравнению

$$x = \operatorname{arctg} x, \quad (3^*)$$

для которого

$$\varphi'(x) = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} < 1 \quad \text{при } x \neq 0.$$

Уравнение (3\*), которое эквивалентно исходному (1\*) решаем при помощи формулы

$$x_{n+1} = \operatorname{arctg} x_n, \quad \text{где } x_0 = 4,7$$

Итерационный процесс заканчиваем тогда, когда с необходимой точностью совпадут значения  $x_n, x_{n+1}$ . Выполнив вычисления, приведенные в таблице, получаем  $x = 4,4934$ .

n	0	1	2	3
$x_n$	4,7	4,50	4,494	4,4934
$\operatorname{arctg} x_n$	4,50	4,494	4,4934	4,4934

### 3. Метод простой итерации для системы двух уравнений

Пусть дана система двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

действительные корни которых требуется найти с заданной степенью точности.

Предположим, что система (1) допускает лишь изолированные корни. Число этих корней и их приближенные значения можно установить, построив кривые  $F_1(x, y) = 0$ ,  $F_2(x, y) = 0$  и определив координаты точек их пересечения.

Для применения метода итерации система (1) приводится к виду

$$\begin{cases} x = \varphi_1(x, y), \\ y = \varphi_2(x, y). \end{cases} \quad (2)$$

Функции  $\varphi_1(x, y)$ ,  $\varphi_2(x, y)$  называются *итерирующими*. Алгоритм решения задается формулами

$$\begin{cases} x_{n+1} = \varphi_1(x_n, y_n), \\ y_{n+1} = \varphi_2(x_n, y_n) \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (3)$$

где  $x_0, y_0$  – некоторое начальное приближение.

#### Теорема

Пусть в некоторой замкнутой окрестности  $R(a \leq x \leq A, b \leq y \leq B)$  имеется одно и только одно решение  $x = \xi, y = \eta$  системы (2). Если

- 1) функции  $\varphi_1(x, y)$ ,  $\varphi_2(x, y)$  определены и непрерывно дифференцируемы в  $R$ ,
- 2) начальные приближения  $x_0, y_0$  и все последующие приближения  $x_n, y_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) принадлежат  $R$ .
- 3) в  $R$  выполнены неравенства

$$\begin{cases} \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right| \leq q_1 < 1, \\ \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right| \leq q_2 < 1, \end{cases} \quad (4)$$

то процесс последовательных приближений (3) сходится к решению  $x = \xi, y = \eta$  системы, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \eta.$$

Эта теорема остается верной, если условие (4) заменить условием (4').

$$\begin{cases} \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right| \leq q_1 < 1, \\ \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right| \leq q_2 < 1, \end{cases} \quad (4')$$

Оценка погрешности  $n$ -го приближения дается неравенством

$$|\xi - x_n| + |\eta - y_n| \leq \frac{M}{1-M} (|x_n - x_{n-1}| + |y_n - y_{n-1}|),$$

где  $M$  – наибольшее из чисел  $q_1, q_2$ , входящих в неравенства (4) или (4').

Сходимость метода итераций считается хорошей, если  $M < 1/2$ , при этом  $\frac{M}{1-M} < 1$ , так что если в двух последовательных приближениях совпадают, например, первые три десятичных знака после запятой, то ошибка последнего приближения не превосходит 0,001. (См. на практике пример 1)

#### Построение итерирующих функций для системы (1)

Для преобразования системы (1) к виду (2) с соблюдением условия (4) используем следующий прием.

Положим

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, y) &= x + \alpha F_1(x, y) + \beta F_2(x, y), \\ \varphi_2(x, y) &= y + \gamma F_1(x, y) + \delta F_2(x, y) \quad (\alpha\delta \neq \beta\gamma).\end{aligned}$$

Коэффициенты  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  найдем как приближенные решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} 1 + \alpha \frac{\partial F_1(x_0, y_0)}{\partial x} + \beta \frac{\partial F_2(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \\ \alpha \frac{\partial F_1(x_0, y_0)}{\partial y} + \beta \frac{\partial F_2(x_0, y_0)}{\partial y} = 0, \\ \gamma \frac{\partial F_1(x_0, y_0)}{\partial x} + \delta \frac{\partial F_2(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \\ 1 + \gamma \frac{\partial F_1(x_0, y_0)}{\partial y} + \delta \frac{\partial F_2(x_0, y_0)}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

При таком выборе параметров условие (4) будет соблюдено, если только частные производные функций  $F_1(x, y)$ ,  $F_2(x, y)$  изменяются не очень быстро в окрестности  $(x_0, y_0)$ . (См. пример 2)

#### **Пример 1.**

Найти положительные корни с тремя верными знаками для системы:

$$x^3 + y^3 - 6x + 3 = 0,$$

$$x^3 - y^3 - 6y + 2 = 0.$$

#### **Решение:**

Для применения метода итерации запишем данную систему в таком виде:

$$x = \frac{x^3 + y^3}{6} + \frac{1}{2} \equiv \varphi_1(x, y),$$

$$y = \frac{x^3 - y^3}{6} + \frac{1}{3} \equiv \varphi_2(x, y),$$

Рассмотрим квадрат  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ . Если точка  $(x_0, y_0)$  находится в этом квадрате, то имеем

$$0 < \varphi_1(x_0, y_0) < 1 \quad \text{и} \quad 0 < \varphi_2(x_0, y_0) < 1.$$

Так как  $0 < (x_0^3 + y_0^3)/6 < 1/3$ ,  $-1/6 < (x_0^3 - y_0^3)/6 < 1/6$ , то при любом выборе точки  $(x_0, y_0)$  последовательность  $(x_k, y_k)$  остается в квадрате. Более того, точки  $(x_k, y_k)$  остаются в прямоугольнике  $1/2 < x < 5/6$ ,  $1/6 < y < 1/2$  (т.к.  $1/3 + 1/2 = 5/6$ ,  $1/3 - 1/6 = 1/6$ ,  $1/3 + 1/6 = 1/2$ ). Для точек этого прямоугольника имеем

$$\left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right| = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} < \frac{25/36 + 1/4}{2} = \frac{34}{72} < 1$$

$$\left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right| = \frac{x^2}{2} + \left| -\frac{y^2}{2} \right| < \frac{34}{72} < 1$$

Следовательно, существует единственное решение в указанном прямоугольнике и оно может быть найдено методом итераций. Полагая  $x_0 = 1/2$ ,  $y_0 = 1/2$ , будем иметь

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1/8 + 1/8}{6} = 0,542, \quad x_2 = \frac{1}{2} + \frac{0,19615}{6} = 0,533,$$

$$y_1 = \frac{1}{3} + \frac{1/8 - 1/8}{6} = 0,333, \quad y_2 = \frac{1}{3} + \frac{0,1223}{6} = 0,354.$$

Продолжая этот процесс получим

$$x_3 = 0,533, \quad x_4 = 0,532, \quad y_3 = 0,351, \quad y_4 = 0,351.$$

Так как здесь  $q_1 = q_2 = 34/72 < 0,5$ , то совпадение первых трех десятичных знаков свидетельствует о достижении требуемой точности. Таким образом, можно принять  $\xi = 0,532$ ,  $\eta = 0,351$ .

**Замечание.** Вместо рассмотренного на лекции итерационного процесса (3) иногда удобнее пользоваться так называемым процессом Зейделя:

$$x_{n+1} = \varphi_1(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = \varphi_2(x_{n+1}, y_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

## Пример 2

Выбрать подходящие итерирующие функции  $\varphi_1(x, y)$ ,  $\varphi_2(x, y)$  при для системы уравнений  $x_0 = 0,8$ ,  $y_0 = 0,55$ :

$$x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

$$x^3 - y = 0.$$

## Решение:

Будем искать функции  $\varphi_1(x, y)$ ,  $\varphi_2(x, y)$  в виде

$$\varphi_1(x, y) = x + \alpha(x^2 + y^2 - 1) + \beta(x^3 - y),$$

$$\varphi_2(x, y) = y + \gamma(x^2 + y^2 - 1) + \delta(x^3 - y).$$

Для определения параметров  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  составим систему (5) (см. лекции). Имеем

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F_1(x_0, y_0)}{\partial x} = 1,6, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F_1(x_0, y_0)}{\partial y} = 1,1,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial F_2(x_0, y_0)}{\partial x} = 1,92, \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial F_2(x_0, y_0)}{\partial y} = -1.$$

Отсюда получаем систему

$$1 + 1,6\alpha + 1,92\beta = 0,$$

$$1,1\alpha - \beta = 0,$$

$$1,6\gamma + 1,92\delta = 0,$$

$$1 + 1,1\gamma - \delta = 0.$$

Решая, получим

$$\alpha \approx -0,3, \quad \gamma \approx -0,5, \quad \beta \approx -0,3, \quad \delta \approx 0,4$$

Таким образом,

$$\varphi_1(x, y) = x - 0,3(x^2 + y^2 - 1) - 0,3(x^3 - y)$$

$$\varphi_2(x, y) = y - 0,5(x^2 + y^2 - 1) + 0,4(x^3 - y)$$

## Упражнения:

1. Найти для системы положительные корни с тремя верными знаками



$$x + 3 \lg x - y^2 = 0$$

## 2. Найти корни системы

$$\begin{aligned} 2x^2 - xy - y^2 + 2x - 2y + 6 &= 0, \\ y - x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

**Ответ:**  $x=1,000$ ,  $y=2,000$ .

## 4.1 Метод простой итерации

[illegible]
$$\mathbf{x} = \phi(\mathbf{x}), \quad (2)$$

$$\text{где } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \varphi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\mathbf{x}) \\ \varphi_2(\mathbf{x}) \\ \dots \\ \varphi_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{x}^{(p+1)} = \phi(\mathbf{x}^{(p)}) \quad (p = 0, 1, 2, \dots) \quad (3)$$
$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0, \quad (4)$$
$$\Lambda = -\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{x}^{(0)}) .$$

65

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \quad (5)$$

Подставив  $\varphi(\mathbf{x})$  в (3), получим итерационную формулу

$$\mathbf{x}^{(p+1)} = \mathbf{x}^{(p)} + \Lambda \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(p)}) \quad (6)$$

Удобно использовать аналог метода Зейделя.

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \varphi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} = \varphi_2(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} = \varphi_n(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k)}), \end{cases}$$

#### 4.2 Метод Ньютона.

Рассматриваем нелинейную систему уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

с действительными левыми частями. Более компактная запись (1):

$$\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}) = (f_1(\bar{\mathbf{x}}), f_2(\bar{\mathbf{x}}), \dots, f_n(\bar{\mathbf{x}})) = 0 \quad (2)$$

Пусть  $\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}})$  – оператор, отображающий линейное нормированное пространство  $X$  на линейное нормированное пространство  $Y$ . Линейный оператор, действующий из пространства  $X$  в пространство  $Y$ , назовем производной оператора  $\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}})$  в точке  $\bar{\mathbf{x}}$ , если

$$\|\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{h}}) - \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{F}'(\bar{\mathbf{x}})\bar{\mathbf{h}}\|_Y = o(\|\bar{\mathbf{h}}\|_X) \quad (3)$$

при  $\|\bar{\mathbf{h}}\|_X \rightarrow 0$ ,

$$\mathbf{F}'(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \quad (*)$$

Пусть  $\bar{\mathbf{x}}^*$  – решение уравнения (2),  $\bar{\mathbf{x}}^{(k)}$  – некоторое приближение к  $\bar{\mathbf{x}}^*$ . В предположении существования производной  $\mathbf{F}'$ , согласно (3) имеем

$$\|\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}^*) - \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}^{(k)}) - \mathbf{F}'(\bar{\mathbf{x}}^{(k)})(\bar{\mathbf{x}}^* - \bar{\mathbf{x}}^{(k)})\|_Y = o(\|\bar{\mathbf{x}}^* - \bar{\mathbf{x}}^{(k)}\|_X), \quad (4)$$

Если величина  $\|\bar{x}^* - \bar{x}^{(k)}\|_X$  мала, то можно написать приближенное равенство

$$F(\bar{x}^{(k)}) + F'(\bar{x}^{(k)})(\bar{x}^* - \bar{x}^{(k)}) \approx F(\bar{x}^*)$$

Поскольку  $F(\bar{x}^*) = 0$ , то

$$F(\bar{x}^{(k)}) + F'(\bar{x}^{(k)})(\bar{x}^* - \bar{x}^{(k)}) \approx 0$$

Возьмем в качестве следующего приближения решения уравнения

$$F(\bar{x}^{(k)}) + F'(\bar{x}^{(k)})(\bar{x}^{(k+1)} - \bar{x}^{(k)}) = 0$$

В предположении, что оператор  $F'$  обратим, это решение можно записать в виде (5):

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} - \frac{F(\bar{x}^{(k)})}{F'(\bar{x}^{(k)})}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (5)$$

Такой итерационный процесс называют **методом Ньютона**.

#### **Теорема о сходимости метода Ньютона для системы:**

Пусть  $\Omega_a = \{\bar{x} : \|\bar{x} - \bar{x}^*\| \leq a\}$  – некоторое множество и в нем при некоторых  $a, a_1, a_2$ ,  $0 < a$ ,  $0 \leq a_1, a_2 < \infty$  выполнены условия:

1)  $\exists F'(\bar{x})$ , причем  $\exists [F'(\bar{x})]^{-1}$ , такая, что  $\|[F'(\bar{x})]^{-1}\| \leq a_1, \quad \forall \bar{x} \in \Omega_a$

2)  $\|F(\bar{x}_1) - F(\bar{x}_2) - F'(\bar{x}_2)(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)\|_Y \leq a_2 \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|_X^2$

при  $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \Omega_a$ . Обозначим  $c = a_1 a_2$ ,  $b = \min(a, c^{-1})$

Тогда при условиях 1), 2) и  $\bar{x}^0 \in \Omega_b$  итерационный процесс Ньютона (5) сходится с оценкой погрешности:

$$\|\bar{x}^{(k)} - \bar{x}^*\|_X \leq c^{-1} \left( c \|\bar{x}^{(0)} - \bar{x}^*\|_X \right)^{2^k}. \quad \#$$

Согласно определению  $c, b$ ,

$$c \|\bar{x}^{(0)} - \bar{x}^*\|_X < cb \leq 1$$

Принято говорить, что метод Ньютона сходится с *квадратичной скоростью*, МПИ сходится со скоростью геом. прогрессии

#### Сущность метода Ньютона

Метод применяется для уточнения найденного решения системы нелинейных уравнений, т.к. в случае систем уравнений имеются довольно жесткие условия сходимости, в силу чего МН не удастся применить, когда исходное приближенное решение обладает небольшой точностью. В случае удачного нач. приближения МН обладает высокой степенью сходимости.

Обычно, прежде чем применять МН, используют другой метод, который имеет слабые условия сходимости, вследствие чего в некоторых случаях требует большого кол-ва вычислений. Например, метод скорейшего спуска, обладающий важным преимуществом: неизбежной сходимости процесса.

#### Сравнение методов решения систем нелинейных уравнений

Для системы из 2-х уравнений первоначальное определение решений удобно производить графическим методом. Метод скорейшего спуска – наиболее общий метод решения систем уравнений в силу своей неизбежной сходимости, его целесообразно применять, когда МПИ и МН расходятся. (однако, если применять его для первоначального определения корней, взяв в качестве исходных данных произвольные

числа, то можно получить не решение системы, а значения аргумента, дающие относительный экстремум функции). МИ применяется также почти исключительно для уточнения решений. МН требует большего объема вычислений, чем МИ, но и сходится значительно быстрее при подходящем выборе нач. приближения.

### Пример 1.

Методом Ньютона приближенно найти положительное решение системы:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$2x^2 + y^2 - 4z^2 = 0$$

$$3x^2 - 4y + z^2 = 0$$

Исходя из начального приближения  $x_0 = y_0 = z_0 = 0,5$

**Решение:**

Имеем

$$F(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ 2x^2 + y^2 - 4z^2 \\ 3x^2 - 4y + z^2 \end{pmatrix},$$

$$F(\vec{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0,25 + 0,25 + 0,25 - 1 \\ 0,5 + 0,25 - 2 \\ 0,75 - 2 + 0,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,25 \\ -1,25 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Составим матрицу Якоби

$$F'(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 4x & 2y & -4z \\ 6x & -4 & 2z \end{pmatrix}$$

$$F'(\vec{x}^{(0)}) = F'(0,5; 0,5; 0,5) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det F'(\vec{x}^{(0)}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -40$$

Находим обратную матрицу

$$[F'(\vec{x}^{(0)})]^{-1} = -\frac{1}{40} \begin{pmatrix} -15 & -5 & -5 \\ -14 & -2 & 6 \\ -11 & 7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{7}{20} & \frac{1}{20} & -\frac{3}{20} \\ \frac{11}{40} & -\frac{7}{40} & \frac{1}{40} \end{pmatrix}$$

Пользуясь формулой (5) из лекции, получим первое приближение

$$\begin{aligned}\bar{x}^{(1)} &= \bar{x}^{(0)} - [F'(\bar{x}^{(0)})]^{-1} F(\bar{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{7}{20} & \frac{1}{20} & -\frac{3}{20} \\ \frac{11}{40} & -\frac{7}{40} & \frac{1}{40} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,25 \\ -1,25 \\ -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,375 \\ 0 \\ -0,125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,875 \\ 0,5 \\ 0,375 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Далее вычисляем второе приближение  $\bar{x}^{(2)}$ . Имеем

$$F(\bar{x}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0,875^2 + 0,5^2 + 0,375^2 - 1 \\ 2 \cdot 0,875^2 + 0,5^2 - 4 \cdot 0,375 \\ 3 \cdot 0,875^2 - 4 \cdot 0,5^2 + 0,375^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,15625 \\ 0,28125 \\ 0,4375 \end{pmatrix}$$

$$F'(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 4x & 2y & -4 \\ 6x & -4 & 2z \end{pmatrix}$$

$$F'(\bar{x}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0,875 & 2 \cdot 0,5 & 2 \cdot 0,375 \\ 4 \cdot 0,875 & 2 \cdot 0,5 & -4 \\ 6 \cdot 0,875 & -4 & 2 \cdot 0,375 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,75 & 1 & 0,75 \\ 3,5 & 1 & -4 \\ 5,25 & -4 & 0,75 \end{pmatrix}$$

$$\det F'(\bar{x}^{(1)}) = \begin{vmatrix} 1,75 & 1 & 0,75 \\ 3,5 & 1 & -4 \\ 5,25 & -4 & 0,75 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1,75 & 1 & 0,75 \\ 1,75 & 0 & -4,75 \\ 12,25 & 0 & 3,75 \end{vmatrix} = -64,75$$

Находим обратную матрицу

$$[F'(\bar{x}^{(1)})]^{-1} = -\frac{1}{64,75} \begin{pmatrix} -15,25 & -3,75 & -4,75 \\ -23,625 & -2,625 & 9,625 \\ -19,25 & 12,25 & -1,75 \end{pmatrix}$$

Из формулы (5) из лекции, получим второе приближение

$$\begin{aligned}\bar{x}^{(2)} &= \bar{x}^{(1)} - [F'(\bar{x}^{(1)})]^{-1} F(\bar{x}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0,875 \\ 0,5 \\ 0,375 \end{pmatrix} + \frac{1}{64,75} \begin{pmatrix} -15,25 & -3,75 & -4,75 \\ -23,625 & -2,625 & 9,625 \\ -19,25 & 12,25 & -1,75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,15625 \\ 0,28125 \\ 0,4375 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0,78981 \\ 0,49662 \\ 0,36993 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Аналогично находятся дальнейшие приближения

$$\bar{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,78521 \\ 0,49662 \\ 0,36992 \end{pmatrix}, \quad F(\bar{x}^{(3)}) = \begin{pmatrix} 0,00001 \\ 0,00004 \\ 0,00005 \end{pmatrix}$$

Ограничиваясь третьим приближением получим

**Ответ:**  $x = 0,7852, \quad y = 0,4966, \quad z = 0,3699$

**Упражнение**

Методом Ньютона приближенно найти вещественные корни системы:

Исходя из начального приближения  $x^{(0)} = 1,2$   $y^{(0)} = 1,7$

$$2x^3 - y^2 - 1 = 0$$

$$xy^3 - y - 4 = 0$$

**Решение:**

$$F(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 2x^3 - y^2 - 1 \\ xy^3 - y - 4 \end{pmatrix}$$

$$F(\bar{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1,2^3 - 1,7^2 - 1 \\ 1,2 \cdot 1,7^3 - 1,7 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,434 \\ 0,1956 \end{pmatrix}$$

$$F'(\bar{x}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x^2 & -2y \\ y^3 & 3xy^2 - 1 \end{vmatrix}$$

$$F'(1,2;1,7) = \begin{vmatrix} 6 \cdot 1,2^2 & -2 \cdot 1,7 \\ 1,7^3 & 3 \cdot 1,2 \cdot 1,7^2 - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8,64 & -3,4 \\ 4,91 & 9,4 \end{vmatrix} = 97,91$$

$$\begin{aligned} \bar{x}^{(1)} &= \bar{x}^{(0)} - [F'(\bar{x}^{(0)})]^{-1} F(\bar{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,7 \end{pmatrix} - \frac{1}{97,91} \begin{pmatrix} 9,4 & -4,91 \\ 3,4 & 8,64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,434 \\ 0,1956 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1,2349 \\ 1,6610 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс получим  $x^{(2)} = 1,2343$ ,  $y^{(2)} = 1,6615$