## Особые случаи

График 1. В этом случае есть 2 точки вероятности: a и b. Тогда q1 из (a,b)

График 2. Одна прямая, там q\* = (0;1)

# Биматричные игры

Мы рассмотрели антагонистичске игры двух лиц, т.е. те, в которых интересы сторон прямо противоположны. Однако реальные задачи принятия решения в условии конфликта характеризуются бОльшим числом участников, следовательно, неантагонистичнотью конфликтной ситуации.

Если говорить о конфликте двух лиц и его моделях, то он также не исчерпывается антагонистическим случаем. Интересы игроков могут пересекаться, но не быть абсолютно противоположными.

Это в частности может привести к взаимовыгодным обоим игрокам ситуациям. В этом случае возможно кооперирование (выбор согласованного решения).

Возможны ситуации, когда кооперации и соглашения невозможны по правилам игры. Такое поведение называется безкоалиционным. Иначе называется кооперативным.

Биматричные игры относятся к безкоалиционным. Их можно назвать играми двух лиц с произвольной суммой.

В конечной безкоалиционной игре двух лиц, каждый делает только один ход. То есть выбирает стратегию из имеющихся, их конечное число. После этого получает свой выигрыш по определённым для каждого игрока матрицам выигрыша. Таким обраом, игра полностью определяется двумя матрицами выигрыша для двух игроков.

Формула 2 . Матрицы *А* и *B* *m*X*n*.Матрицы две => игра биматричная.

У игрока A имеется *m* стратегий, а у второго *n* стратегий. В результате первый получает выигрыш *a\_ij*, а второй *b\_ij*.

***Задача*** – определить страты так, чтобы был получен наибольший выигрыш.

Для решения задачи вводим оптимальные смешанные стратегии для каждого из игроков следующим образом: смешанная стратегия *p*\* (получим из матрицы B) для первого игрока, и *q*\* для второго (Получим из матрицы A), которые удовлетворяют неравенствам:

Формула 3. Неравенства оптимальных смешанных стратегий.

Оптимальная стратегия каждого игрока находится по матрице другого игрока.

Из этого определения и определения биматричной игры следует, что если матрица   
*B*: *b\_ij* = -*a\_ij*, то получим обычную матричную игру двух лиц с нулевой суммой. Поэтому решение биматричной игры происходит аналогично решению матричных. Только стратегии игроков определяются по матрице выигрыша другого игрока.

Пример 4. Нашли, разобрались.

**Решаем игру матричную для А и для –B.**

## Цель – не максимизировать своё, а минимизировать у врага?

Рассмотрим биматричную игру Г(Х,У,F,G) Х,Y =-- стратегии игроков, F, G – функции выигрыша игроков (как матрицы).

Ситуация равновесия: пара стратегий в ситуации (x0, y0) равновесия игры, если выполняется следующее: нет ситуации, более предпочтительной при отклонении от неё. Равновесная стратегия. Каждый по отдельности не может увеличить выигрыш

Ест ситуация равновесия, где есть оптимальность по Парето. (x0, y0) оптимально по парето, если нет таких (x, y), что F(x, y0) >= F(x0, y0 ) и G(x0, y) >= G(x0, y0 ) и хоть в одной точке >. Нет ситуации, которая была бы предпочтительнее для обоих игроков. Даже совместно не могут увеличить выигрыш.

Теорема

Каждая биматричная игра имеет хотя бы одну ситуацию равновесия. Покажет, что ситацции равновесия в чистых стратегиях может не существовать. Пример: А = 2 3 1 ; 4 0 9 ; 7 6 5. B = 4 6 1 ; -1 0 3 ; 2 1 5. **Первый выбирает максимум по столбцам, а второй по строкам**. Множества не совпадают, поэтому нет решения такого. А ести такоие: А = 2 3 1 ; 4 0 5 ; 1 6 9. B = 1 7 8 ; 6 3 4; 5 2 5. Тут две равновесия. (p2,q1), (p3,q3).

А ещё тут равновесные стратегии могут быть неэквивалентны.

Пойти в кино, пойти в театр. А = 4 0 ; 0 1. B = 1 0 ; 0 4. Равновесии в чистых стратегиях в (p1, q1) , (p2, q2) выигрыш первого игрока в первом случае не равен выигрышу первого игрока во втором случае. То есть чистые стратегии не эквиваленты.

## Ситуация равеновесия не обязана быть решением игры. Задача заключённого.

Теорема ещё есть. Если в биматричной игре элементы, стоящие в одном столбце матрицы А и в одной строке матрицы B попарно различны, то ситуации равновсия могут быть либо чистыми, либо вполне смешанными. Вполне смешанные,-- в которых обе чистые применяются со вмешанными вероятностями.

Расмотрим игру 2х2. х=(х1, х2), у = (у1,у2). При каких условиях равновесие? b11 x1 + b21 x2 = b12 x1 + b2 x2, x1 > 0, x2 > 0, x1 + x2 = 1.

Такая же система про стратегии первого игрока, из условий равновесности.

И это мы уже делали. Мы решали игры 2х2 уже. Зачем????

Ситуация равновесия называется равновесие по Нэшу. Если один из игроков отклонится от равновесия, то выигрыша не получит, а если отклонится несколько игроков, то могут получить выигрыш.

А ещё рассморели оптимальные по Парето решения. Там может отклониться один и увелисить, а два изменили стратегию, и прогитрали больше.

Рассмотрели матрицу 2х2, с учётом, что все числа везде разные.

Случай 1. Есть доминирующая стратегия хоть у одного. Тогда есть единственная ситуация равновесия по нэшу. При b11 > b12 или наоборот.

Случай 2. В игре нет равновесия по Нэшу в чистой стратегии. Тогда выбраны диагональные или антидиангоналные в первой матрице элементы. Сответственно, равновесия нет, когда во второй матрице противоположная диагональ выбрана. Тогда есть в смешанной стратегии равновесная ситуация. Х\* = b22 – b21 / b11 + b12 – b12 – b21, Y\* = a22 – a21 / a11 + a22 – a12 – a21.

Случай 3. Есть две ситуации равновесия по Нэшу.

Гипотеза 1.

Никакой информации о том, какой выбор делает второй игрок. И нет никаких предположений о его поведении. То есть мы в условиях задачи полной неопределённости. Выбираем ту строчку, где получаем наименьшей гарантированный выигрыш. **Мах in rows from min in columns of A**. Да, мы первый игрок.

Пусть есть предположение о стратегии второго ирока. Например, он выбирает Столбец, в котором **Мах in col from min in row of B**. Ну и У первого тогда столбцов немного, где можно что-то выбрать.

А если пытаемся навредить второму, то решаем по матрице второго игрока.

Или решаем на BT? У первого по ней, а у второго по A.

# Позиционные игры

В матричных и биматричных играх рассматривались конфликтные ситуации игроков, т.е. двух лиц, когда было бы известно, как будут играть игроки в целом.

На практике рассматриваются конфликтные ситуации, когда решения принимаются последовательно во время игры на каждом шаге, используя информацию о всех предыдущих шагах данного процесса.

Положение игрока на каждом шаге назовём позицией. Поэтому игры называются такие позиционными.

Занимая определённую позицию и зная инфу о предыдущих действиях участников, игрок должен решить, какую стратегию выбрать из имеющихся в распоряжении.

В качестве примеров позиционных игр крестики-нолики, шашки, шахматы, домино..

Особенность позиционных игр – возможность представления множества позиций в виде древовидного упорядоченного множества.

## Графическое изображение игр

Будем каждую позицию изображать в виде вершины графа, а возможные ответы – рёбра графа.

Рисунок 5. Символы A и B – кто делает ход, а символ 0 – случайный игрок. Переход от начала к концу через промежуточные позиции. Каждая окончательная вершина определяет единственную цель или партию игры. Число различных партий = число окончательных вершин и получается очевидным образом.

Различают позиционные игры с полной информацией и с неполной. В позиционных играх с полной информацией (крестики-нолики), каждый игрок знает ту позицию дерева, в которой он находится. Если информация неполна (домино, карты), игроку при ходе неизвестна точно позиция дерева, в которой он находится. Может знать, примерно где находится (некоторое множество позиций, где может быть).

Особенность игры с полной информацией состоит в том, что соответствующая ей матрица выигрышей всегда имеет седловую точку. То есть в игре существуют оптимальные чистые стратегии. В таких играх в начальном состоянии всегда есть способ выигрыша за одну из сторон, либо приведение в ничью.

В игре с неполной информацией этого нет.

Пример 6. В первом случае B знает, в какой позиции он находится, а во втором только информационное множество того, где он находится. Ну множество вершин, в которых может быть. Обозначается по-всякому. Например, обведём пунктирной линией все позиции из одного информационного множества.

Выбор каждым из игроков какого-то решения на каждом шаге (или стратегии??) оценивается с помощью платёжной функции. В примере она была бы W(x,y), она оценивает решения игроков.

Зная эту функцию надо найти оптимальные стратегии каждого из игроков. Эта задача решается сведением игры к матричной в процессе нормализации игры.

## Нормализация позиционной игры

Рассмотрим пример приведённый выше: Как-нибудь строим матрицу по дереву.

У игрока А 2 чистые стратегии а\_1: x = 1, а\_2: x = 2. Стратегии игрока B: [y1, y2]. y\_1 – альтернатива, выбираемая B при условии, что А выбрал 1. y\_2 – альтернатива для B, при условии, что А выбрал 2. У игрока B есть 4 чистые стратегии. 4 страты: выбирать всегда 1 или всегда 2, выбирать противоположное или такое же, как у первого.

*y\_i* – то, что делаем, если первый выбрал *i*. Они выбираются до начала игры. Получили таблицу a\_i X [y\_j, y\_k].

Замечание: выбор стратегии [2,1] означает, что при a1 ответим 2, а при a2 ответим 1.

В этом примере W = 1 [x=1 && y = 1]; -1: (1,2); -2: (2,1); 2: (2,2)

Зная страты игроков, можем составить матицу игры.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1[1,1] | B2[1,2] | B3[2,1] | B4[2,2] |
| A1 | W(1,1) | W(1,1) | W(1,2) | W(1,2) |
| A2 | W(2,1) | W(2,2) | W(2,1) | W(2,2) |

Подставим числа:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1[1,1] | B2[1,2] | B3[2,1] | B4[2,2] |
| A1 | 1 | 1 | -1 | -1 |
| A2 | -2 | 2 | -2 | 2 |

Решим, и получим оптимальную стратегию для каждого из игроков. Всё вычёркивается, остаётся только (A1, B3). То есть x = 1, y = 2;

Рассмотрим второй пример, когда второй делает выбор, не зная выбор первого.

У первого 2 стратегии: такие же. У второго тоже две. Получим матрицу:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 |
| A1 | 1 | -1 |
| A2 | -2 | 2 |

Решим её: получим цену игры от -1 до 1, найдём смешанные стратегии:

P1\* = 4/6, P\* = 2/6. P\* = (2/3; 1/3). Q\* = (1/2; 1/2). V = 0;

## Нахождение стратегии трёхшаговых позиционных игр

Пример 7.W111 = -2, W112 = 4, W121 = 1, W122 = -4, W211 = 3, W212 = 0, W221 = -3, W222 = -5. W(x,y,z).

У первого 4 стратегии: A1(1,1) … A4(2,2). У второго 4 стратегии: B1[1,1]…B4[2,2]

Матрица получается такая:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 |
| A1 | W111 | W111 | W121 | W121 |
| A2 | W112 | W112 | W122 | W122 |
| A3 | W211 | W221 | W211 | W221 |
| A4 | W212 | W222 | W212 | W222 |

Подставим цифры:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 |
| A1 | -2 | -2 | 1 | 1 |
| A2 | 4 | 4 | -4 | -4 |
| A3 | 3 | -3 | 3 | -3 |
| A4 | 0 | -5 | 0 | -5 |

Не будем решать её. Дерево игры в примере 7.

Рассмотрим деревья игр из примера 8.

ДЗ: составить табличку для трёхходовой игры, когда все всё знают.

# Системы массового обслуживания

Система, в которая в некоторый момент времени случайный возникает заявка об обслуживании, и она должна быть обслужена на устройстве обслуживания. Поток заявок – последовательность заявок, которые приходят в систему.

Классы систем:

1. Однаканальная
2. Многоанальная
3. Покидает ли заявка систему сразу после того, как все каналы заняты?
   1. Да, это система с отказом
   2. Нет, она хранится в буфере, это система с конечной или неограниченной очередью.
4. Другие классы можно посмотреть. Напримр, выборка
   1. Fifo
   2. Lifo
   3. Другие
5. По характеру входных заявок.
   1. Детерминированные. Промежутки времени между заявками известны
   2. Вероятностные. Промежутки времени между заявками случайны.
6. Делим на группы. Как связаны продолжительности интервалов поступления заявок.
   1. Связаны
   2. Независимы
7. Зависит ли от состояний, в каких находилась ранее?

## Простейшие потоки

Нас интересуют простейшие входные потоки. Это совершенно случайные потоки:

1. Продолжительность интервалов между пакетами не зависит друг от друга статистически.
2. Стационарны. Количество число заявок за единицу времени константа
3. Однороден поток. В любой момент времени может поступить только одна заявка.
4. Отсутствие последействия. То есть продолжительность интервалов поступления заявок, интервалы и количество заявок не зависят от истории.

Поэтому можем решать с помощью цепей Маркова решать это.

Основные параметры системы и граф состояний должны знать.

Результат моделирования ситемы массового обсл – набор вероятностей состояний, через которые выражаются показатели эффективности этой систетмы.

Характеристики входящего потока и обрабатывающего устройства есть.

Употока есть:

1. Лямбда – интенсивность потока заявок. Обозначу ***л***.
2. Что-то ещё есть, быстро проговорила. Одинарность, что-то ещё

У обслуживания

1. Количество каналов
2. Длина очереди
3. Интенсивность обслуживания ню – количество заявок, которые обсдлужит в единицу времени в среднем. Обозначу ***н***..
4. T обслж = 1/н.

Следим за ними на основе результатво моделирования.

Итересны Qобсл – веростнотсь обслуживания

P\_отказа - вероятность отказа

А = л \* Qобсл – среднее сисло заявок, которые обслуживает в единицу времени.

Tc - среднее число занятых каналоа, r – среднее число мест, заняых в очереди. (подчёркивание сверху)

1. Одноканатьная система заказов с отказом. Постановка задачи: есть система, состоит из одного устрйства обслуживания, интенсивность потока л, интенсивность обслуживании ню, если занят, сразу покидает систему. 2 состояния: a0, a1. С вероятостями p1, p0. С интенсивонстью л переходим в а1, с ню переходим назад в а1.
   1. Можем записать слу колмогорова и все дела.
   2. 
   3. Qобсл = p0 – так как веростность попасть на свободный канал.
   4. P\_отказа – p1
   5. A = л\*ню\(л+ню)
   6. рое = л\ню , тогда перепишется так: Q = 1\(рое+1), P = рое\(рое+1), А = л\(рое+1)
2. Многоканальные системы с отказом. СМО с отказом. (задача эрланг)
   1. Есть n каналов, интенсивность л, скорость обслуж ню. Если все каналы занята, получается отказ на обслуживание. Найдём характеристики.
   2. Граф состояний = такая штука: a0 ню<->л a1 2ню<->л a2 …nню<>л an (сколько каналов занято) nню, потому что в n раз быстрее если занято n
   3. Получаем слу… Тривиальную, сам сможешь построить, хоть что-то интересное. Сумма потоков исходящих= сумме потоков входящих.
   4. Q = 1-pn, P = pn, A = (1-pn)\*л.
   5. Среднее количество занятых каналов? Найдём r = sum (i\*pi) = …трив
   6. R = (1-pn)\*рое
3. Одноканальная с конечной очередью.
   1. 1 канал, m мест в очереди, интенсивность заявок л, обслуживания ню. Система марковская, так же найдем характеристики системы.
   2. f0 ню<>л a0 ню<>л a1 ню<>л … ню<>л am. Ai = канал занят i – очередь. F0 – канал свободен.
   3. Дальше сам сможешь почитать. Да, не забудь обозначить л\н = рое. Там получишь ряд sum( i\* roe^(i-1)), его сможешь преобразовать и посчитать по формуле дифференцирования по параметру. И ВСЁ!
   4. Зная r и k = 1-p0 найдёмм среднее число заявок в системе: z = r+k.
4. Многоканальная с конечной очередью.
   1. Чем отличается? Да ничем почти.
   2. Состояния тривиальны, b0 1н<>л … nн<>л bn nн<>л a1 … am
   3. Всё слишком тривиально.
   4. Выпишем соотношения сразу. P0 = [sum(roe^k/k!, k=0..n) + roe^n/n!\*(roe/n – (roe/n)^m+1)/(1-roe/n) ]^-1.
   5. pi = roe^k/k!\*p0. P\_n+k = roe^(n+k)/n!/n^k\*p0
   6. P = p\_(n+m)
   7. Q = 1-P отказа
   8. Ну и всё остальное можно найти. A = л\*Q.
   9. k = среднее число занятых каналов = A/н = roe\*Q
   10. И всё остальное выводится достаточно просто.
   11. Среднее чисто заявок в очереди = матожидание вероятности того, что в очереди r = sum(p\_(n+i)\*i, i=1..m) = roe^(n+1)/n/n!\*p0\*(1 + 2\*roe/n + … m\*(roe/n)^(m-1)) = что-то там.
   12. Z = среднее счисло заявок в системе = k+r.
5. Одноканальная система неограниченной очередью.
   1. Там просто сумма неограниченная. Абсолютно аналогична той, что была там.
   2. Надоела эта пара. Тут не учат ничему умному. Code monkey хотите из меня сделать???
6. Многоканальная с бесконечной очередью.
   1. Ла-ла-ла, бесполезно.

Многофазная система массового обслуживания – когда заявка из одного цеха попадает в другой, мб другой по устройству, и там обрабатывается.

# Конечные игры с полной информацией

**Пример** сначала рассмотрим. На столе 25 спичек. Играющие по очереди берут 1-4. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Второй просто дополняет взятое до 5. Так выиграет он.

Если задачу обобщим, исход игры зависит от того, делится ли n на k. Если да, выиграет второй, если нет, первый перехватит инициативу, ну и всё.

**Пример**. Тут то же самое, но брать можно 1,2 или 4. Кто выиграет? Тут поможет анализ с конца. Если к нашему ходу в 0, то проиграли. Если же в позициях 1,2,4, то сразу выигрываем. 3 проигрышна. Раскручиваем так же до конца. С какой начнём позиции, таков наш и выигрыш. Если из позиции можем попасть в проигрышную, то она выигрышная. Если все ходы ведут в выигрышные, то она проигрышная.

Выигрышная стратегия – делать ходы так, чтобы протиник оставался в проигрышной позиции. Ставить его в неловкое ситуацию.

**Определение**. Конечная игра с полной информацией – игра, дерево которой содержит конечное число вершин и все информационные множества обоих игроков одноэлементны.

Сначала укажем множество, которое является позициями игры. Дерево игры. Кроооммме того, нужно разделить позиции на группы. Позиции заключительные, позиции, в которых ход делают игрок А и позиции, в которых ход делает Б. 3 множества.

Для каждой заключительной позиции нужно указать результат игры, и для каждого из игроков указать возможные ходы из каждой позиции, в которой могут оказаться. А ещё указать начальную позицию игры, чтобы определить переходы между позициями.

В наших играх бесконечных партий не бывает.

**Стратегией** называется правило, которое указывает игроку, что ему следует делать в каждой из позиций, где ход за ним.

Для описанных игр справедлива **теорема**. Для любой игры такого вида существует число С и стратегии а и б игроков А и Б, что в любой партии, где А придерживается стратегии а, результат игры будет не больше, чем С. В любой партии, где B играет стратегию б, результат игры будет не меньше, чем С.

**Доказательство**. Укажем цены для позиции игры. Для конечных уже указаны они.

Для игрока А: если из неё нет переходов, то конечная, и число написано, если есть переходы, то цену позиции А определим как максимум из цен тех позиций, куда можем перейти. Для Б задаём как минимум. Так будем записывать, пока не оценим всё. Дерево конечно, так что процесс законичтся.

**Покажем**, что существует такое число и стратегии, которые показывают результат теоремы.

Для А. Пусть С написано в начальной позиции. Из любой позиции делаем ход в позицию, в которой написано максимальное число.

Для Б. Он ходит по минимуму.

Если результат только +-1, то можем типа гарантировать одному выигрыш или проигрыш.

**Пример**. Игры в крестики-нолики, доска nxn, построить не менее k крестиков или ноликов подряд. Попробуем показать существование выигрышной стратегии, которая поможет первому выиграть или не проиграть хотя бы, не показывая её саму.

Пусть её нет. Тогда у второго она есть. Если выигрышная стратегия есть у ноликов, тогда выигрышная стратегия у крестиков тоже есть. Пусть где-то ест крестик. Если у вторых есть выигрышная стратегия, то она есть и у первого, передача хода произошла.

Выигрышной стратегией тут назвали стратегию не проигрыша. Где доказательство существования именно выигрышной стратегии хоть у одного игрока?

**Игра Ним**. На столе нежит n кучек камней. За один ход можно взять любое количество камней, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кто не может ходить. Решение. Есть закономерность. Запишем количество предметов в кучках в двоияной системе. Посчитаем в каждом разряде количество единиц, чётно оно или нет. То есть сложим их по модулю два поразрядно. Позиция выигрышная, если результат операции не равен нулю. Проигрышной, если получили ноль.

**Доказательство**. Позиция, где получается сумма 0 = чётная, а если не ноль, то нечётная. Докажем, что из какой бы чётной не выходили, попадём в нечётную. И из нечётной всегда можно попасть в нечётную. Очевидно. При ходе меняется только одно число. Из чётной переходим в нечётную. А из нечётной берём самое большое число, и уменьшаем его так, чтобы получился ноль. Ура! Типа старший бит сначала в ноль, а потом можем остальные младше его как-угодно переделать. Тогда моем ходы чередовать, и в конце-концов можем перейти в нечётный в конце. Ой, а это одна кучка с одним элементом!

**Пример**. Шоколадка есть. NxM. Клетки квадратные. За ход ломаем по прямой на 2 части. И одну часть съедаем. Но есть отравленная долька. Кто съел, тот дурак. 4 кучки вышло. Кучки строк и столбцов слева и справа от отравленной дольки.

**Игры Шпрага-Пранди**. Это такие игры, которые типа как Ним. Или похожи.

**Пример**. Ест картинка – орграф. Циклов нет. Игра состоит в том, что как-то перемещаемся по стрелкам по картинке. За 1 ход по одной стрелке. Проигрывает тот, кто –не может делать ход.

Приписываем каждой вершине какое-то неортицаьельное чило как оценку. В позицию ставиться наименьшее неотрициальное целове число, которо отсутствует в вершинах, в которые можно сделать ход. Позиции, из котоых нельзя сделать ход определим нулями.