2022年全国硕士研究生招生考试数学一

一、选择题：1~10小题，每小题5分，共50分.在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是最符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1. 设$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\ln x}=1$，则（　　）.

A. $f(1)=0$　　B. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$　　C. $f'(1)=1$　　D. $\lim\limits_{x\to 1}f'(x)=1$

【答案】B.

【解析】由于$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\ln x}=1$，所以$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$. 故选B.

2. 设$f(u)$可导，$z=xyf(\dfrac{y}{x})$，若$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy(\ln y-\ln x)$,则(　　)

A. $f(1)=\dfrac{1}{2},f'(1)=0$　　B. $f(1)=0,f'(1)=\dfrac{1}{2}$

C. $f(1)=1,f'(1)=0$　　D. $f(1)=0,f'(1)=\dfrac{1}{2}$

【答案】D

【解析】$\dfrac{\partial z}{\partial x}=y\left[f\left(\dfrac{y}{x}\right)+xf'\left(\dfrac{y}{x}\right)\cdot -\dfrac{y}{x^2}\right]$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x\left[f\left(\dfrac{y}{x}\right)+yf'\left(\dfrac{y}{x}\right)\cdot\dfrac{1}{x}\right]$,

则$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2xyf\left(\dfrac{y}{x}\right)=xy\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$.因此$2f\left(\dfrac{y}{x}\right)=\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$, 即$f(u)=\dfrac{1}{2}\ln u$.

故$f(1)=0,f'(1)=\dfrac{1}{2}$.

3. 设$-\dfrac{\pi}{2}\le x_n\le\dfrac{\pi}{2}$，则（　　）

A. 若$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

B. 若$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

C. 若$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$存在且$\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不一定存在.

D. 若$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$存在且$\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不一定存在.

【答案】D.

【解析】

4. $I_1=\int_0^1\frac{x}{2(1+\cos x)}dx$, $I_2=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}dx$, $I_3=\int_0^1\frac{2x}{1+\sin x}dx$,则

A. $I_1<I_2<I_3$.　　　　　　B. $I_3<I_1<I_2$.

C. $I_2<I_1<I_3$.　　　　　　D. $I_2<I_1<I_3$.

【答案】

【解析】

5. 下列是 $A_{3\times3}$ 可对角化的充分而非必要条件是（　　）

A. A 有 3 个不同特征值

B. A 有 3 个无关的特征向量

C. A 有 3 个两两无关的特征向量

D. A 不同特征值对应的特征向量正交

【答案】A

【解析】A 有 3 个不同的特征值，则 A 有 3 个线性无关的特征向量，此时 A 可对角化，由于矩阵可对角化的充要条件是线性无关特征向量个数等于矩阵阶数，因此选项(A)符合题意

6. 设矩阵 A,B 均为 n 阶方阵，若 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，则（　　）.

A. $\begin{pmatrix} A & O \\ E & B \end{pmatrix}x=0$ 仅有零解

B. $\begin{pmatrix} AB & B \\ O & A \end{pmatrix}x=0$ 仅有零解

C. $\begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix}x=0$ 与 $\begin{pmatrix} B & A \\ O & A \end{pmatrix}x=0$ 同解

D. $\begin{pmatrix} AB & B \\ O & A \end{pmatrix}x=0$ 与 $\begin{pmatrix} BA & A \\ O & B \end{pmatrix}x=0$ 同解

【答案】C

【解析】设 $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix}$，这里 $\boldsymbol{x}_i(i=1,2)$ 是 n 维列向量.

若 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}\boldsymbol{y}=0$ 与 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}\boldsymbol{y}=0$ 同解即 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix}=\mathbf{0}$ 与 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix}=\mathbf{0}$ 同解.由于 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 同解，若 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ $\boldsymbol{x}_i(i=1,2)$，则 $\boldsymbol{Bx}_i=\mathbf{0}$ $(i=1,2)$，反之亦然.因

此$\begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$等价于$\begin{pmatrix} B & A \\ O & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$，所以(C)选项符合题意.

7. 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$，若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 等价，则 $\lambda \in$(　　).

A. $\{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$　　B. $\{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq -1\}$

C. $\{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq -1, \lambda \neq -2\}$　　D. $\{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq -2\}$

【答案】C

【解析】由于

$$|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2),$$

$$|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda^2 \end{vmatrix} = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2.$$

当$\lambda = 1$时，$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，此时$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$与$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$等价.

当$\lambda = -2$时，$2 = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) < r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4) = 3$，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$与$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$不等价.当$\lambda = -1$时，$3 = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) > r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4) = 1$，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$与$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$不等价.因此当$\lambda = -2$或$\lambda = -1$时，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$与$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$不等价等价，所以$\lambda$的取值范围为

$\{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq -1, \lambda \neq -2\}$.

8. 设$X \sim U(0,3), Y \sim P(2), \mathrm{Cov}(X,Y) = -1$，求$D(2X - Y + 1) =$(　　).

(A) 10　　(B) 9　　(C) 1　　(D) 0

【解析】由$X \sim U(0,3), Y \sim P(2)$知，$D(X) = \dfrac{3}{4}, D(Y) = 2$，故

$$D(2X - Y + 1) = D(2X - Y) = 4D(X) + D(Y) - 4\mathrm{Cov}(X,Y)$$

$$=4\cdot\frac{3}{4}+2+4=9.$$

9. 设 $X_1,X_2\ldots X_n$ 独立同分布，$E(X_i^k)=\mu_k$，用切比雪夫不等式估计

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-\mu_1\right|\geq\varepsilon\right\}\leq ?$$

A. $\dfrac{M_4-M_2^2}{n\varepsilon^2}$ B. $\dfrac{M_4-M_2^2}{\sqrt{n}\varepsilon^2}$

C. $\dfrac{M_2-M_1^2}{n\varepsilon^2}$ D. $\dfrac{M_2-M_1^2}{\sqrt{n}\varepsilon^2}$

【答案】

【解析】

10. 设 $X\sim N(0,1)$，在 $X=x$ 的条件下，$Y\sim N(x,1)$，则 X 与 Y 的相关系数为（ ）.

A. 1 B. $\dfrac{1}{2}$ C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】

【解析】

二、填空题：11~16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

11. $f(x,y)=x^2+2y^2$ 在 $(0,1)$ 处最大的方向导数为________.

【答案】4.

【解析】由已知可得 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=4y$，故 $\boldsymbol{grad}(0,1)=(0,4)$，综上

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{\max}=\sqrt{0^2+4^2}=4.$$

12. $\int_1^{e^2}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=$__________.

【答案】4.

【解析】$\int_1^{e^2}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=2\int_1^{e^2}\ln x d\sqrt{x}=2\left[\sqrt{x}\ln x\Big|_1^{e^2}-\int_1^{e^2}\sqrt{x}d(\ln x)\right]$

$$=2\left[\sqrt{x}\ln x\Big|_1^{e^2}-\int_1^{e^2}\sqrt{x}d(\ln x)\right]=2\left(\sqrt{e^2}\ln e^2-\int_1^{e^2}\frac{1}{\sqrt{x}}dx\right)$$

$$=2\left[\sqrt{x}\ln x\Big|_1^{e^2}-\int_1^{e^2}\sqrt{x}\mathrm{d}(\ln x)\right]=2\left(2\mathrm{e}-2\sqrt{x}\Big|_1^{e^2}\right)=4$$

13. 设 $x\ge 0,y\ge 0,$ 满足 $x^2+y^2\le ke^{x+y}$，则 k 的最小值为_________.

【分析】由已知可得 $k\ge\dfrac{x^2+y^2}{e^{x+y}}$，问题转化为计算 $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{e^{x+y}}=(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$ 在 $x\ge 0,y\ge 0$ 上得最大值.

【解】$x>0,y>0$ 时，令 $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{e^{x+y}}=(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$，则

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{-(x+y)}(2x-x^2-y^2)，\quad \frac{\partial f}{\partial y}=e^{-(x+y)}(2y-x^2-y^2)，$$

令 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=0,\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$，解得驻点为 $(0,0),(1,1)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=e^{-(x+y)}(2-4x+x^2+y^2)，$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=e^{-(x+y)}(-2x-2y+x^2+y^2)，$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=e^{-(x+y)}(2-4y+x^2+y^2)，$$

对驻点 $(0,0)$，$A=2,B=0,C=2$，$AC-B^2>0,A>0$，$(0,0)$ 为极小值点，及 $f_{极小值}=f(0,0)=0$.

对驻点 $(1,1)$，$A=0,B=-2e^{-2},C=0$，$AC-B^2<0$，$(1,1)$ 不为极值点.

当 $x=0$，$f(0,y)=y^2e^{-y}(y>0)$，则 $f'(0,y)=2ye^{-y}-y^2e^{-y}=0$，得 $y=2$ 为驻点，又 $f''(0,y)=(y^2-4y+2)e^{-y}$，$f''(0,2)=-2e^{-2}<0$，$f(0,2)=4e^{-2}$ 为最大值

同理可得 $f(2,0)=4e^{-2}$ 也为最大值.

综上可得 $k\ge f_{最大}(x,y)=\dfrac{4}{e^2}$.

14. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}e^{-n-x}$ 的收敛域为 $(a,+\infty)$，则 $a=$_________.

-1.

【解析】令 $u_n(x)=\dfrac{n!}{n^n}\mathrm{e}^{-nx}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{\dfrac{n!}{n^n}\mathrm{e}^{-nx}}\right|=\mathrm{e}^{-x}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\mathrm{e}^{-x-1}<1,$$

解得 $x>-1$，故 $a=-1$.

15. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆，若 $\boldsymbol{B}$ 满足 $(\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}=$__________。

【答案】$((\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1})^{-1}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}$

【解析】由于 $(\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$，又 $\boldsymbol{A}$ 可逆，因此

$\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，从而有 $\boldsymbol{B}$ 可逆 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}$，因此

$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}=((\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1})^{-1}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}$

16. 设 A,B,C 满足 A,B 互不相容，A,C 互不相容，B,C 相互独立，

$P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{3}$，则 $P[(B\cup C)\mid(A\cup B\cup C)]=$__________.

【答案】$\dfrac{5}{8}$

【解析】由题知，$P(AB)=0$，$P(AC)=0$，$P(BC)=P(B)P(C)=\dfrac{1}{9}$，

所求概率由条件概率公式得：

$$P[(B\cup C)\mid(A\cup B\cup C)]$$

$$=\frac{P[(B\cup C)\cap(A\cup B\cup C)]}{P(A\cup B\cup C)}$$

$$=\frac{P(\varnothing\cup B\cup C)}{P(A\cup B\cup C)}=\frac{P(B\cup C)}{P(A\cup B\cup C)}$$

$$=\frac{P(B)+P(C)-P(BC)}{P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)}$$

$$=\frac{P(B)+P(C)-P(BC)}{P(A)+P(B)+P(C)-P(BC)},$$

将 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$，$P(BC)=P(B)P(C)=\frac{1}{9}$ 代入得

$$P[(B\cup C)\mid(A\cup B\cup C)]=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{5}{8}.$$

三、解答题：17~22 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本题满分 10 分）

设 $y=y(x)$ 满足 $y'+\frac{1}{2\sqrt{x}}y=2+\sqrt{x}, y(1)=3$，求 $y(x)$ 渐近线.

【解析】由题意可得

$$y(x)=e^{-\sqrt{x}}\left(2xe^{\sqrt{x}}+C\right).$$

又 $y(1)=3$，有 $C=e$. 故

$$y(x)=e^{-\sqrt{x}}\left(2xe^{\sqrt{x}}+e\right).$$

设 $y(x)$ 的渐近线方程为 $y=kx+b$，

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2xe^{\sqrt{x}}+e}{xe^{\sqrt{x}}}=2,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}y(x)-2x=\lim_{x\to\infty}\frac{2xe^{\sqrt{x}}-e}{e^{\sqrt{x}}}-2x=0,$$

因此 $y(x)$ 的斜渐近线为 $y=2x$.

18.（本题满分 12 分）

设 $D=\left\{(x,y)\middle|-2+y\leqslant x\leqslant\sqrt{4-y^2}, 0\leqslant y\leqslant 2\right\}$，求二重积分 $I=\iint\limits_D\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}dxdy$.

【解析】$I=\iint\limits_D\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2+y^2}dxdy=\iint\limits_D\left[1-\frac{2xy}{x^2+y^2}\right]dxdy=\iint\limits_D dxdy-\iint\limits_D\frac{2xy}{x^2+y^2}dxdy$

$$=\pi+2-\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}}^{2}\frac{2\rho^2\cos\theta\sin\theta}{\rho^2}\rho d\rho$$

$$=\pi+2-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta d\theta+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta\sin\theta}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}d\theta$$

$$=\pi+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta\sin\theta}{1+2\cos\theta\sin\theta}d\theta=\pi+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan\theta}{\tan^2\theta+2\tan\theta+1}d\theta$$

$$=\pi+4\int_0^{+\infty}\frac{t}{(t+1)^2}\cdot\frac{1}{1+t^2}dt=\pi+4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{(t+1)^2}\right]dt$$

$$=\pi+2\arctan t\Big|_0^{+\infty}+2\frac{1}{1+t}\Big|_0^{+\infty}=\pi+\pi-2=2\pi-2.$$

19.（本题满分 12 分）

设Σ为$x^2+y^2+z^2=1,x\geq 0,y\geq 0,z\geq 0$的上侧，$\Sigma$的边界$L$的方向与$\Sigma$的侧符合右手法则，求$\int_L(yz^2-\cos z)dz+2xy^2dy+(2xyz+x\sin z)dz$.

20.（本题满分 12 分）

设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有二阶连续导数，证明：$f''(x)\geq 0$的充要条件是对任意的实数a,b，有$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

证明：令$F(x)=(x-a)f\left(\frac{a+x}{2}\right)-\int_a^x f(t)dt$，则$F(a)=0$.

$$F'(x)=f\left(\frac{a+x}{2}\right)+\frac{1}{2}(x-a)f'\left(\frac{a+x}{2}\right)-f(x)$$

$$=\frac{1}{2}(x-a)f'\left(\frac{a+x}{2}\right)+f\left(\frac{a+x}{2}\right)-f(x)$$

$$=\frac{1}{2}(x-a)f'\left(\frac{a+x}{2}\right)-f'(\xi)\frac{1}{2}(x-a)$$

$$=\frac{1}{2}(x-a)\left[f'\left(\frac{a+x}{2}\right)-f'(\xi)\right]$$

由于$f''(x)\geq 0$，所以$f'(x)$单增，从而$f'\left(\frac{a+x}{2}\right)<f'(\xi)$，故$F'(x)<0$，$F(x)$单调递减.

$x > a, F(x) < 0$,则 $F(b) < 0$，及 $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

21.（本题满分 12 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} ijx_ix_j$.

(1)求二次型矩阵

(2)求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得二次型经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化为标准形

(3)求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解

【解】

(1) 据题意，$f(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} ijx_ix_j = x_1{}^2+4x_2{}^2+9x_3{}^2+4x_1x_2+6x_1x_3+12x_2x_3$，

故 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$.

(2)易得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为$14,0,0$.

当 $\lambda_1=14$ 时，解 $(\boldsymbol{A}-14\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$\boldsymbol{A}-14\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-13&2&3\\2&-10&6\\3&6&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-5&3\\0&-63&42\\0&21&-14\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-5&3\\0&3&-2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得 $\lambda_1=14$ 对应的特征值为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_2=\lambda_3=0$ 时，解 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得 $\lambda_2=\lambda_3=0$ 对应的特征值为 $\boldsymbol{\alpha}_2=(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_3=(-3,0,1)^{\mathrm{T}}$.

实对称矩阵不同特征值对应的特征向量正交，故只需将 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 正交化，得

$$\xi_2=(-2,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \xi_3=(-3,-6,5)^{\mathrm{T}}.$$

将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\xi_2,\xi_3$ 单位化，得

$$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)^{\mathrm{T}}\ \gamma_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0)^{\mathrm{T}}\ \gamma_3=\frac{1}{\sqrt{70}}(-3,-6,5)^{\mathrm{T}}.$$

令 $\boldsymbol{Q}=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，将 f 化为标准形 $14y_1{}^2$.

(3)在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下，$f(x_1,x_2,x_3)$ 化为 $14y_1{}^2$. 由 $f(x_1,x_2,x_3)=0$，得 $y_1=0$，则

$$\boldsymbol{x}=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)\begin{pmatrix}0\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=y_2\gamma_2+y_3\gamma_3=k_1(-2,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-3,-6,5)^{\mathrm{T}}$$，其中 k_1,k_2 为任意常数.

22.（本题满分 12 分）

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自期望为 θ 的指数分布的简单随机样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$ 是来自期望为 2θ 的指数分布的简单随机样本，且 $X_1,X_2,\cdots,X_n,Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$ 相互独立，求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$，及 $D(\hat{\theta})$.

【解析】由已知 $E(X)=\theta=\dfrac{1}{\lambda_1}\Rightarrow\lambda_1=\dfrac{1}{\theta}$，$E(Y)=2\theta=\dfrac{1}{\lambda_2}\Rightarrow\lambda_2=\dfrac{1}{2\theta}$，

所以总体 $X\sim E\left(\dfrac{1}{\theta}\right)$，$Y\sim E\left(\dfrac{1}{2\theta}\right)$，从而可得

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2\theta}}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m$ 为样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n,Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$ 的观测值，且样本相互独立，则似然函数为

$$L(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^m}\dfrac{1}{\theta^{n+m}}\mathrm{e}^{-\frac{2\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{j=1}^{m}y_j}{2\theta}}, & x_i,y_j>0(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m),\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

当 $x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m>0$ 时，似然函数两边取对数

$$\ln L(\theta)=-m\ln 2-(n+m)\ln\theta-\frac{2\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{j=1}^{m}y_j}{2\theta},$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=-\dfrac{n+m}{\theta}+\dfrac{2\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{j=1}^{m}y_j}{2\theta^2}=0$，解得 $\theta=\dfrac{2\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{j=1}^{m}y_j}{2(n+m)}$，

故 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{2\sum_{i=1}^{n}X_i+\sum_{j=1}^{m}Y_j}{2(n+m)}$.

由 $X \sim E\left(\frac{1}{\theta}\right)$，$Y \sim E\left(\frac{1}{2\theta}\right)$，则 $D(X)=\theta^2, D(Y)=4\theta^2$，

则 $D(\hat{\theta})=\frac{1}{4(n+m)^2}D\left(2\sum_{i=1}^{n}X_i+\sum_{j=1}^{m}Y_j\right)=\frac{1}{4(n+m)^2}(4n\cdot\theta^2+m\cdot4\theta^2)=\frac{\theta^2}{n+m}$.