

# Fiches de Révisions

# PC

*« Les portes de l'avenir sont ouvertes  
à ceux qui savent les pousser »*

COLUCHE

Vous tenez entre vos mains mes fiches de révisions, réalisées et utilisées au cours de mon année de spé pour préparer mes concours.

Permettant à la fois une synthèse et donc mémorisation plus efficace du cours et des révisions plus rapides, cette méthode de travail adoptée depuis maintenant 3 ans a permis d'augmenter grandement ma productivité.

Ayant terminé mes deux années de classe préparatoire, je mets cet outil à disposition des futurs préparationnaires en espérant qu'une autre vision de leur cours leur permettra d'améliorer leur apprentissage.

Il convient de remercier de tout coeur l'ensemble de l'équipe pédagogique, listée ci-dessous, qui m'a encadré cette année et dont les éléments de cours, les astuces et méthodes se retrouvent en partie dans le présent ouvrage, ainsi que mes camarades dont le soutien et les conseils ont été d'une aide précieuse.

---

Mr Alexis Fagebeaume	Maths
Mr François Vandebruck	Physique
Mr Pascal Frajman	Chimie
Mr Laurent Kaczmarek	Informatique
Mme Florence Rougerie	Allemand
Mr Mathias Degoute	Anglais
Mme Anne Malaprade	Lettres

---

En souhaitant du courage et de la persévérance aux futurs préparationnaires

Kilian Rouge

Pour signaler une erreur ou me contacter: [yomanager@icloud.com](mailto:yomanager@icloud.com)

## Notes de l'auteur

Si j'ai réalisé la majorité des illustrations et figures de cet ouvrage, une partie a été empruntée à d'autres sources qu'il convient de citer ici.

De nombreux contenus ainsi qu'une partie des illustrations ont de plus été inspirés par ceux de mes professeurs de classe préparatoire.

Élément	Source
Spectre électromagnétique	Kartable
Cercle chromatique	Kartable
Fusée de Tintin	<i>On a marché sur la Lune</i> - HERGÉ aux éditions Casterman

J'ai décidé de placer mon travail sous la licence suivante: *CC BY-NC-ND 4.0*

Creative Commons	Le présent ouvrage peut être librement partagé
Attribution	Cet ouvrage doit être crédité à son auteur
Usage non commercial	L'utilisation commerciale de cet ouvrage est interdite
Modification	Le partage de cet ouvrage modifié est interdit

Pour plus d'informations, je vous invite à consulter:

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.fr>

# TABLE DES MATIÈRES

<b>I</b>	<b>Résumés</b>	<b>9</b>
0	<b>Formulaire</b>	12
1	<b>Maths</b>	15
2	<b>Physique</b>	20
3	<b>Chimie</b>	26
<b>II</b>	<b>Maths</b>	<b>32</b>
1	<b>Suites</b>	34
2	<b>Séries numériques</b>	42
3	<b>Algèbre linéaire</b>	47
4	<b>Matrices</b>	55
5	<b>Déterminants</b>	60
6	<b>Réduction</b>	65
7	<b>Espaces vectoriels euclidiens</b>	71
8	<b>Espaces probabilisés</b>	78
9	<b>Variables aléatoires</b>	82
10	<b>Espaces vectoriels normés</b>	90
11	<b>Analyse</b>	99
12	<b>Intégrales généralisées</b>	108
13	<b>Suites et séries de fonctions</b>	113
14	<b>Intégrales à paramètres</b>	118
15	<b>Séries entières</b>	120
16	<b>Courbes paramétrées</b>	128
17	<b>Équations différentielles</b>	130
18	<b>Calcul différentiel</b>	136
19	<b>Géométrie</b>	142

<b>III Physique</b>	<b>144</b>
1 Analyse dimensionnelle	146
2 Thermodynamique théorique	148
3 Thermodynamique pratique	154
4 Optique ondulatoire	158
5 Interférences	162
6 Division du front d'onde	164
7 Interféromètre de Michelson	168
8 Interférences à ondes multiples	171
9 Changements de référentiels	173
10 Dynamique en référentiel non galiléen	176
11 Véhicules à roues	179
12 Ondes unidimensionnelles	180
13 Dispersion et absorption	187
14 Diffusion de particules	191
15 Diffusion thermique	196
16 Rayonnement thermique	200
17 Cinématique des fluides	201
18 Actions mécaniques sur les fluides	207
19 Tension superficielle	213
20 Dynamique des fluides	215
21 Ondes acoustiques	219
22 Bilans macroscopiques	224
23 Electrostatique	227
24 Magnétostatique	234
25 Conduction	240
26 Équations de Maxwell	243
27 Plasma	247

28	Induction	252
29	Propagation d'ondes dans un conducteur	255
30	Mécanique quantique	259
31	Particule libre quantique	263
32	Particule dans un potentiel	266
<b>IV</b>	<b>Chimie</b>	<b>273</b>
0	Livre de recettes	276
1	Équilibre des systèmes	280
2	Transformations physico-chimiques	282
3	Premier principe	286
4	Second principe	291
5	Potentiel chimique	295
6	Evolution et équilibres	298
7	Corps pur	301
8	Chimie des solutions	303
9	Oxydo-réduction	306
10	Diagrammes binaires liquide-vapeur	311
11	Orbitales atomiques	315
12	Interaction de 2 orbitales sur 2 centres	321
13	Interaction de 3 orbitales sur 2 centres	325
14	édifices diatomiques	326
15	Méthode des fragments	328
16	Résonance	329
17	Effets électroniques	332
18	Réactivité	334
19	Dérivés d'acides	338
20	Oxydoréduction en chimie organique	345
21	Enolates	349

<b>22</b>	<b>Création de liaisons C=C</b>	<b>357</b>
<b>23</b>	<b>Complexes</b>	<b>359</b>
<b>24</b>	<b>OM des complexes</b>	<b>363</b>
<b>25</b>	<b>Organomagnésiens</b>	<b>366</b>
<b>24</b>	<b>Alcènes</b>	<b>369</b>
<b>27</b>	<b>Diels-Alder</b>	<b>374</b>
<b>28</b>	<b>Métathèse des alcènes</b>	<b>377</b>
<b>29</b>	<b>Fonctions tétravalentes</b>	<b>379</b>
<b>30</b>	<b>Cinétique formelle</b>	<b>381</b>
<b>31</b>	<b>Courbes courant-potentiel</b>	<b>385</b>
<b>32</b>	<b>Convertisseurs électrochimiques</b>	<b>390</b>
<b>33</b>	<b>Systèmes à plusieurs équilibres</b>	<b>392</b>
<b>34</b>	<b>Optimisation</b>	<b>394</b>
<b>35</b>	<b>Binaires Solide-Liquide</b>	<b>398</b>
<b>36</b>	<b>Stratégies de synthèse</b>	<b>402</b>
<b>37</b>	<b>Polymères</b>	<b>405</b>
<b>38</b>	<b>Spectroscopie</b>	<b>410</b>
<b>39</b>	<b>Cristallographie</b>	<b>414</b>
<b>V</b>	<b>TP de Physique</b>	<b>417</b>
<b>1</b>	<b>Electricité</b>	<b>420</b>
<b>2</b>	<b>Optique</b>	<b>423</b>
<b>VI</b>	<b>TP de Chimie</b>	<b>428</b>
<b>1</b>	<b>Chimie Inorganique</b>	<b>430</b>
<b>3</b>	<b>Chimie Orga</b>	<b>431</b>
<b>VII</b>	<b>Informatique</b>	<b>435</b>
<b>1</b>	<b>Structures de données</b>	<b>438</b>
<b>2</b>	<b>Récursivité</b>	<b>440</b>

3	Algorithmes de tri	441
4	Analyse numérique	445
5	SQL	449
<b>VIII</b>	<b>Lettres</b>	<b>451</b>
1	Programme 2018-2019	454
2	Citations	456
3	Oral	458
4	Dissertation	460
<b>IX</b>	<b>Deutsch</b>	<b>461</b>
1	Méthode de l'oral	464
2	Synthèse	465
<b>X</b>	<b>English</b>	<b>466</b>
1	Méthode de l'oral	468





# I Résumés

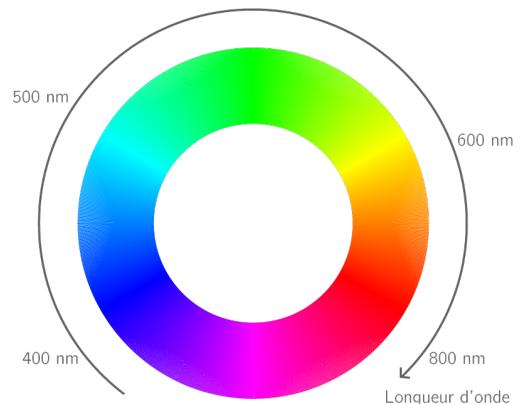
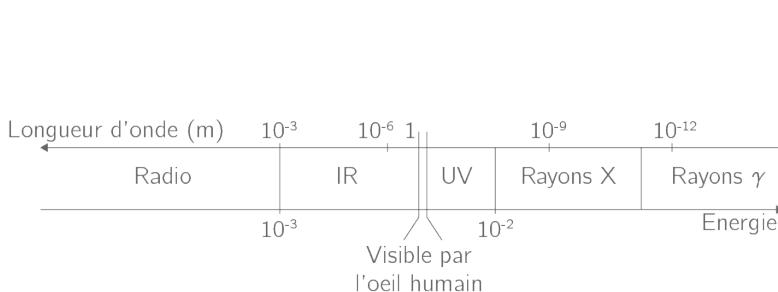
# RÉSUMÉS 0

## FORMULAIRE

### 1 Ordres de grandeur

	Grandeur	Valeur	Unité	
<b>Constantes</b>	Constante de gravitation	$G = 6.67 \times 10^{-11}$	$\text{m}^2.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$	
	Constante de Planck	$h = 6.63 \times 10^{-34}$	$\text{J.s}^{-1}$	
	Perméabilité du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$	$\text{H.m}^{-1}$	
	Permittivité du vide	$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$	$\text{F.m}^{-1}$	$\mu\epsilon_0 c^2 = 1$
	Nombre d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6.022 \times 10^{23}$	mol	
	Constante de Boltzmann	$k_B = 1.3 \times 10^{-23}$	$\text{J.K}^{-1}$	$\frac{R}{\mathcal{N}_A}$
<b>Atomistique</b>	Masse de l'électron	$m_e = 9 \times 10^{-31}$	kg	
	Masse du nucléon			$1800m_e$
	Taille du noyau	$d = 10^{-15}$	m	
	Rayon atomique	$r = 10^{-10}$	m	
<b>Liaisons</b>	Energie d'ionisation de H	$E = 13.6$	eV	
	Liaison covalente	$E = 1000$	$\text{kJ.mol}^{-1}$	
	Liaison H	$E = 10$	$\text{kJ.mol}^{-1}$	
	Interraction VdW	$E = 1$	$\text{kJ.mol}^{-1}$	
<b>Electrostatique</b>	Constante de Faraday	$\mathcal{F} = 96500$	C	$\mathcal{N}_A e$
	Champ à la surface de la Terre	$E = 100$	$\text{V.m}^{-1}$	
<b>Magnétostatique</b>	Champ de la terre	$B = 5 \times 10^{-5}$	T	
	Magnéton de Bohr	$\mu_B = 9.3 \times 10^{-24}$	$\text{A.m}^2$	$\frac{e\hbar}{2m_e}$
	Champ crée par un aimant	$B = 1$	T	
<b>Thermodynamique</b>	Masse molaire de l'air	$M = 29$	$\text{g.mol}^{-1}$	
	Masse volumique	$\rho = 1.3$	$\text{kg.m}^{-3}$	
	Capacité thermique de l'eau	$c_l = 4.18$	$\text{kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$	
	Capacité thermique de la glace	$c_g = 2.1$	$\text{kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$	
	Enthalpie de fusion de l'eau	$\ell_f = 330$	$\text{kJ.kg}^{-1}$	
	Enthalpie de vaporisation de l'eau	$\ell_v = 2500$	$\text{kJ.kg}^{-1}$	
<b>Diffusion</b>	Conductivité d'un métal	$\gamma = 100$	$\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$	
	Conductivité d'un liquide	$\gamma = 10^{-1}$	$\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$	
	Conductivité d'un gaz	$\gamma = 10^{-2}$	$\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$	
	Diffusion dans un solide	$D = 10^{-20}$	$\text{m}^2.\text{s}^{-1}$	
	Diffusion dans un liquide	$D = 10^{-9}$	$\text{m}^2.\text{s}^{-1}$	
	Diffusion dans un gaz	$D = 10^{-5}$	$\text{m}^2.\text{s}^{-1}$	
<b>Fluides</b>	Viscosité de l'air	$\eta = 1.8 \times 10^{-5}$	Pl	
	Viscosité de l'eau	$\eta = 10^{-3}$	Pl	
	Viscosité de la glycérine	$\eta = 1$	Pl	
<b>Acoustique</b>	Vitesse du son dans l'eau	$c = 1400$	$\text{m.s}^{-1}$	
	Seuil de douleur	$I = 120$	dB	
<b>Optique</b>	Punctum proximum	$d = 25$	cm	

	Punctum remotum	$\epsilon = 4 \times 10^{-4}$	$+ \infty$	rad
	Pouvoir séparateur		$n = 1.25$	
	Indice optique de l'eau		$n = 1.4$	
	Indice optique du verre		$\mathcal{P} = 0.1$	W
	Puissance du laser		$\nu_P = 3$	MHz
	Fréquence plasma ionosphère		$\delta = 1$	cm
	Épaisseur de peau dans le cuivre			
<b>Puissances</b>	Marche humaine	$\mathcal{P} = 100$	W	
	Cheval-vapeur	$\mathcal{P} = 736$	W	
	Centrale nucléaire	$\mathcal{P} = 1$	GW	
	Puissance du soleil interceptée	$\mathcal{P} = 10^8$	GW	
<b>Système solaire</b>	Rayon de la terre	$R_T = 6400$	kg	
	Masse de la terre	$m_T = 6 \times 10^{24}$	kg	$\frac{g R_T^2}{G}$
	Altitude géostationnaire	$h = 36000$	km	
	Vitesse de libération	$v = 11.2$	$\text{km.s}^{-1}$	$\sqrt{\frac{2Gm_T}{R_T}}$
	Distance terre-soleil	$d = 150 \times 10^6$	m	8 min
	Masse du soleil	$m_S = 2 \times 10^{30}$	kg	
	Rayon du soleil	$R_S = 700000$	km	
	Diamètre angulaire apparent	$\alpha = 10^{-2}$	rad	
	Distance terre-lune	$d = 380000$	km	1 min
	Masse de la lune	$m_L = 7.3 \times 10^{22}$	kg	
	Rayon de la lune	$R_L = 1700$	km	
	Diamètre angulaire apparent	$\alpha = 10^{-2}$	rad	
<b>Electronique</b>	Resistances	$R = 1$	$\Omega - M\Omega$	
	Inductances	$L = 10$	$\text{mH} - \text{H}$	
	Capacités	$C = 1$	$\text{pF} - \text{mF}$	
	Resistance GBF	$R = 50$	$\Omega$	
	Resistance Oscilloscope	$R = 1$	$M\Omega$	



## 2 Incertitudes

Définition

- $\delta x$  est l'incertitude type
- $\Delta x \simeq 2\delta x_{\text{Taux de confiance de } 95\% \text{ pour une gaussienne}}$  est l'incertitude élargie

## Incertitudes de type A

Traitement statistique d'une série de mesures

- La valeur moyenne donne une estimation de la valeur mesurée

$$\text{Incertitude type : } \delta x = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_i (x_i - \bar{x}_i)^2}}{\sqrt{N}}$$

- Incertitude élargie tient compte du nombre fini de mesures :  $\Delta x = t_N \delta x \simeq 3\sigma_{t_N} \simeq 2$  si  $N \geq 20$

 Utiliser le mode TInterval du menu Stat en ayant rentré les données dans une liste sur TI

## Incertitudes de type B

1. On choisit une loi de probabilité pour chaque source d'erreur
2. Estimer l'écart type = *Incertitude type*

$$\text{Pour une distribution rectangulaire } \pm \Delta \text{ on a } \delta x = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} \simeq \frac{\Delta}{2}$$

$$\text{Pour une distribution triangulaire } \pm \Delta \text{ on a } \delta x = \frac{\Delta}{\sqrt{6}} \simeq \frac{\Delta}{2.5}$$

3. Incertitude élargie :  $\Delta x = t_N \delta x$   
Pour un intervalle à 95%, on choisit  $t_N = 2$

## Somme d'incertitudes

1. Erreurs indépendantes : *La mesure est faite avec plusieurs sources d'erreurs*

$$\delta x = \sqrt{(\delta x_1)^2 + (\delta x_2)^2 + \dots}$$

2. Erreurs liées : *Une grandeur dont l'expression dépend de plusieurs paramètres est mesurée une erreur sur chacun d'eux*

$$(a) \text{ Méthode avec surestimation de l'erreur : } dg = \left| \frac{\partial g}{\partial x} \right| dx + \left| \frac{\partial g}{\partial y} \right| dy \Rightarrow \delta g = \left| \frac{\partial g}{\partial x} \right| \delta x + \left| \frac{\partial g}{\partial y} \right| \delta y$$

$$(b) \text{ Combination quadratique : } \delta g = \sqrt{\left( \frac{\partial g}{\partial x} \delta x \right)^2 + \left( \frac{\partial g}{\partial y} \delta y \right)^2}$$

$$\text{Pour produits et quotients : } \frac{\delta g}{g} = \sqrt{\left( \frac{\delta x}{x} \right)^2 + \left( \frac{\delta y}{y} \right)^2} \text{ Formule de propagation des incertitudes}$$

## Présentation du résultat

$x = (x_m \pm \Delta x)$  unité

$\Delta x$  est l'incertitude élargie

Mesure	Balance	Balance de précision	Verrerie jaugée
Incertitude type $\delta x$	0.22 mg	0.012mg	$\frac{3}{4} T_{ol}$

- ⌚ : A la limite du programme  $A$  redémontrer
- ☒ : Hors-programme
- ⚠ : Sujet à des difficultés de mémorisation

## Algèbre linéaire

### Généralités

- Théorème noyau image  
 $u|_{G^{\text{Im}(u)}}$  est un isomorphisme <sub>$G$  supplémentaire de  $\text{Ker}(u)$</sub>
- Définition d'une application linéaire par
  - L'image d'une base
  - Restrictions à des sev en somme directe
- Théorèmes des bases extraites et incomplètes
- Décomposition adaptée et recollement
- Théorème du rang :
 
$$\dim(E) = \text{rg}(u) + \dim(\text{Ker}(u))$$
- $\dim E = \dim F \Rightarrow u$  injective  $\Leftrightarrow$  surjective  $\Leftrightarrow$  bijective

⚠ Interpolation de Lagrange :  $P(X) = \sum_{i=1}^{n+1} b_i L_i(X)$

$$\text{où } L_i(X) = \prod_{j=1, j \neq i}^{n+1} \left( \frac{X - a_j}{a_i - a_j} \right)$$

- Formes linéaires  $H = \text{Ker} \varphi$

### Matrices

- $\forall A \in \mathfrak{M}_{n,p}, \exists! u \in \mathcal{L}(E, F), \text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u) = A$
- $A \times B = I_n \Leftrightarrow B \times A = I_n$
- ⌚  $\exists P, P(A) = 0$
- ⌚  $\text{rg}(A) = r \Leftrightarrow A = Q J_r P$

- Changement de base

$$\begin{aligned} X &= \underbrace{\text{mat}_{\mathcal{B}}(x)}_{\text{mat}_{\mathcal{E}', \mathcal{F}'}(f)} &= \underbrace{\text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')}_{\text{mat}_{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}(\text{id}_E)} &= \underbrace{\text{mat}_{\mathcal{B}'}(x)}_{\text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(f)} \\ M' &= \underbrace{\text{mat}_{\mathcal{E}', \mathcal{F}'}(f)}_{\text{mat}_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}'}(\text{id}_E)} &= \underbrace{\text{mat}_{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}(\text{id}_E)}_{Q^{-1}} &= \underbrace{\text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(f)}_{\text{mat}_{\mathcal{B}}(f)} \\ M' &= \underbrace{\text{mat}_{\mathcal{B}'}(f)}_{\text{mat}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}(\text{id}_E)} &= \underbrace{\text{mat}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}(\text{id}_E)}_{P^{-1}} &= \underbrace{\text{mat}_{\mathcal{B}'}(f)}_{\text{mat}_{\mathcal{B}'}(\text{id}_E)} \end{aligned}$$

### Déterminants

- Forme linéaire, antisymétrique telle  $\det I_n = 1$
- $(x_1 - x_n)$  base de  $E \Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}}(x_1 - x_n) \neq 0$

- $u \in GL(E) \Leftrightarrow \det(u) \neq 0 \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$
- $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_{i,k} \Delta_{i,k} : k^{\text{e colonne}}$
- ☒  $A \text{ com}(A)^T = \text{com}(A)^T A = \det(A) I_n$
- $\begin{vmatrix} 1 & x_1^1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2^1 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n^1 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$
- Applications à la géométrie

### Réduction

- $E_{\lambda}(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$
- Une famille de vecteurs propres associés à des vp  $\neq$  est libre
- Une famille de sep associés à des vp  $\neq$  est  $\oplus$
- $\lambda \in \text{sp}(u) \Leftrightarrow u - \lambda \text{id}_E \notin GL(E) \Leftrightarrow \det(u - \lambda \text{id}_E) = 0 \Leftrightarrow \chi_A(x) = 0$
- $A$  et  $B$  semblables  $\Rightarrow \chi_A = \chi_B$
- $\chi_A(x) = x^n - \text{tr}(A)x^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A) \Rightarrow \sum_{k=1}^p x_k = \text{tr}(A)$  et  $\prod_{k=1}^p x_k = \det(A)$
- Si  $F$  est stable par  $u$ ,  $\chi_u|_F \mid \chi_u$
- $1 \leq \dim(E_{\lambda}(u)) \leq \alpha$  Ordre de la vp
- $u$  diagonalisable  $\Leftrightarrow \exists \mathcal{B}', \text{mat}_{\mathcal{B}'}(u) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow E = \bigoplus_{k=1}^p E_{\lambda_k}(u) \Leftrightarrow \begin{cases} \chi_u \text{ scindé sur } \mathbb{K} \\ \forall \lambda_i, \dim(E_{\lambda_i}(u)) = \alpha_i \text{ Ordre} \end{cases}$
- $A$  nilpotente  $\Leftrightarrow A$  semblable à une matrice de  $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \chi_A(x) = x^n$
- $\chi_u$  scindé  $\Rightarrow$  Trigonalisable
- $\chi_u$  scindé à racines simples  $\Rightarrow$  Diagonalisable
- ⌚  $\exists P$  annulateur de  $u$  scindé racines simples  $\Leftrightarrow$  diagonalisable
- ☒ Cayley Hamilton :  $\chi_u = 0$
- ⌚  $\begin{cases} u \circ v = v \circ u \\ u, v \text{ diagonalisables} \end{cases} \Rightarrow \text{Codiagonalisables}_{\text{Base}} =$

$\begin{cases} u \circ v = v \circ u \\ u, v \text{ trigonalisables} \end{cases} \Rightarrow \text{Codiagonalisables}$

## Espaces euclidiens

- Produit scalaire :  
Symétrique, bilinéaire, positive, définie
- Cauchy-Schwarz :  $|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$  *Égalité si  $x \propto y$*
- $(x|y) = \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$
- Orthogonalité :  $(x|y) = 0$
- Pythagore :  $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow x \perp y$
- Tout espace euclidien admet des BON
- $E = F \oplus F^\perp$  *E euclidien*
- Théorème de la BON incomplète
- Dans  $E$  *eulidien*  $(F^\perp)^\perp = F$
- $\exists! a \in E, \forall x \in E, \varphi(x) = (a|x)$  *Formes linéaires*
- $p$  projecteur orthogonal  $\Leftrightarrow p$  symétrique
- $p$  projecteur orthogonal  $\Leftrightarrow \forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$
- $p_F(x) = \sum_{i=1}^p (x|f_i) f_i$  dans  $E$  euclidien  
 $\Rightarrow \text{mat}_{BC}(p_F) = \sum_{i=1}^n F_i F_i^T$  *F<sub>i</sub> vecteur coordonnée de f<sub>i</sub>*
- $d(x, F) = \inf\{\|x - y\|, y \in F\} = \|x - p_F(x)\|$

### Gram-Schmidt

On construit par récurrence en "redressant" les vecteurs

- Expression de  $e_k$  en fonction des  $(a_k, -e_1, e_2, \dots, e_{k-1})$
- On redresse :  $b_k = a_k - \sum_{j=1}^{k-1} (a_k|e_j)e_j$
- On norme
- Signe  $(a_k|e_k) > 0$

- $u$  automorphisme orthogonal  $\Leftrightarrow$  conserve la norme ou le produit scalaire
- $u \in \mathcal{O}(E) \Leftrightarrow u$  transforme une *toute* BON en BON
- $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow AA^T = I_n$
- $\mathcal{S}_O(E) = \{u \in \mathcal{O}(E), \det(u) = 1\}$
- $u \in \mathcal{S}(E)$  si  $\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|y) = (x|u(y))$
- $u \in \mathcal{S}(E) \Leftrightarrow \text{mat}_{BON}(u) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$
- Théorème spectral  
 $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  est diagonalisable en BON

- $f$  est symétrique positive  
 $\Leftrightarrow \forall x \in E \setminus \{0_E\}, (f(x)|x) \geq 0 \Leftrightarrow \text{sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$
- $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), A = B^T B$
- $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), \exists! B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), A = B^2$

## Espaces normés

- Norme  $\Leftrightarrow$  Positive, définie, Ineg trig,  $\mathbf{N}(\lambda x)$
- $\mathbf{N}$  euclidienne  $\Leftrightarrow \frac{1}{4}(\mathbf{N}^2(x+y) - \mathbf{N}^2(x-y)) (|)$
- En dim toutes les normes sont équivalentes  
 $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in E, \alpha \mathbf{N}_1(x) \leq \mathbf{N}_2(x) \leq \beta \mathbf{N}_1(x)$
- $u_n = O(v_n) \Leftrightarrow \|u_n\| = O(v_n)$
- Limite :  $\forall \epsilon > 0; \exists \alpha > 0, \forall x \in A, \|x - a\| \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - l\| \leq \epsilon$   
CS :  $\forall (u_n), u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \Rightarrow f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$
- Continuité :  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$   
CS :  $\forall (u_n), u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \Rightarrow f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a)$
- $f$  continue  $\Rightarrow f_1 - f_n$  continue
- $k$ -lipschitzien :  $\|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|$   
Lipschitzien  $\Rightarrow$  Continu
- $\Rightarrow$  Applications linéaires continues
- $\Rightarrow$  Applications bilinéaires continues

## Topologie

- $\mathbf{B}_o(a, r) = \{x \in E, \|a - x\| < r\}$
- Ouvert :  $\forall x \in A, \exists r > 0, \mathbf{B}_o(x, r) \subset A$
- CS Fermé :  $\forall (u_n) \in F^{\mathbb{N}}, u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \Rightarrow l \in F$
- $x \in \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow \exists r > 0, \mathbf{B}_o(x, r) \subset A$
- Adhérence :  $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall r > 0, \mathbf{B}_o(x, r) \cap A \neq \emptyset$   
CS  $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$
- $A$  est dense dans  $E \Leftrightarrow$  Tout élément de  $E$  est limite d'une suite valeurs dans  $A$
- L'image réciproque par une application continue d'un ouvert *fermé* est un ouvert *fermé*
- L'image d'un compact par une fonction continue est un compact

---

## Analyse

### Suites

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, alors ses sous-suites aussi
- $\mathbb{Q}$  dense dans  $\mathbb{R}$
- Césaro :  $u_n \rightarrow l \Rightarrow \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k \rightarrow l$   
Généralisation :  $u_n \rightarrow l$  et  $\sum a_n$  diverge  
 $\Rightarrow \frac{\sum_{k=0}^n a_k u_k}{\sum_{k=0}^n a_k} \rightarrow l$
- Référence :  $\ln(n)^\beta \ll n^\alpha \ll a^n \ll n!$   $\ll n^n$

### Bolzano-Weierstrass

Toute suite admet des sous-suites convergentes

- Riemann :
- $$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \rightarrow \int_a^b f(t) dt$$

### Séries

- $\sum a_{n+1} - a_n$  convergente  $\Leftrightarrow \sum a_n$  convergente

- Test de Riemann :  $\sum_1^\infty \frac{1}{n^\alpha}$  converge  $\Leftrightarrow \alpha > 1$
- D'Alembert  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \Delta \rightarrow 1$
- Bertrand  $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$  converge  $\Leftrightarrow \alpha > 1$  ou  $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta > 1 \end{cases}$
- CSSA  $|u_n| \searrow 0$
- Produit de Cauchy  $\sum a_k b_{n-k}$
- $\bowtie$  Regroupement par paquets  $\sum_{\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1}$

## Fonctions

- Une fonction  $\mathcal{C}_M$  sur un segment est bornée
- $\bowtie \exists \varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}), \max_{x \in [a, b]} |f(x) - \varphi(x)| \leq \epsilon$
- $\bowtie$  Weierstraß :  $\exists P \in \mathbb{R}[X], \max_{x \in [a, b]} |f(x) - P(x)| \leq \epsilon$
- TAF :  $\exists c \in ]a, b[, f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
- Leibniz :  $(fg)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)}$
- $\mathcal{C}^k$  difféomorphisme : bijective et  $f, f^{-1} \in \mathcal{C}^k$
- $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$   
 $f$  continue sur  $[a, b]$
- TLD :  $\begin{cases} f \text{ dérivable sur } ]a, b] \\ f'(x) \xrightarrow[x \rightarrow a^+]{} l \end{cases} \Rightarrow f'_d(a) = l$
- $f \in \mathcal{C}_M \Rightarrow \int f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt$
- TFI  $\left( \int_a^x f(t)dt \right)' = f(x)$
- Concave :  $\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1]$   
 $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$
- Convexe :  $-f$  est concave
- $A$  est convexe si  $\forall (M, N) \in A^2, [MN] \in A$
- $f$  convexe  $\Leftrightarrow f' \nearrow \Leftrightarrow f$  au-dessus de sa tangente
- $f$  dérivable  $\Leftrightarrow f_1, -, f_n$  dérivables
- $\int f = \sum \int f_i$
- $\left( \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt \right)' = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$

## Intégrales généralisées

- Comparaison  $\leq$  et  $O$  pour les intégrales impropre
- Riemann :  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$  cv  $\Leftrightarrow \alpha > 1$   
 $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$  cv  $\Leftrightarrow \alpha < 1$   
 $\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$  cv  $\Leftrightarrow \alpha < 1$

- $f$  intégrable si  $\int_a^b f$  converge absolument  
cv mais non cva = semi-convergente
- Euler :  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$   
 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  et  $\Gamma(n+1) = n!$
- $\bowtie \int_x^b f \sim \int_x^b g$  si  $\int f$  cv ou  $\int g$  dv  $\sum_{n \geq a} f(n)$  et  $\int_a^{+\infty} f$  sont de même nature
- $\bowtie$  Euler :  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)dt = -\frac{\pi}{2} \ln(2)$
- $\bowtie$  Dirichlet :  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$
- $\bowtie$  Gauss :  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

## Suites et séries de fonctions

- Continuité
- Double limite
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) \right)$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^n f_n(t)dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t)dt$  fcvu f
- Convergence dominée
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$  cvs + Domination
- $\left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n$  cvu,  $f'_n$  cvs
- CvN  $\Rightarrow \begin{cases} \text{CvA} \\ \text{CvU} \end{cases} \Rightarrow \text{CvS}$  et c'est tout
- Continuité d'une série de fonctions VL
- $\bowtie$  Double limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x) \right)$
- $\bowtie$  Squeeze  $> 0$ , intégrable
- $\lim_{h \rightarrow 0^+} \sum_{n=0}^{+\infty} h f(nh) = \int_0^{+\infty} f$
- Dérivation  $u_n$  cvs,  $u'_n$  cvu, VL
- TITATSUS :  $\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t)dt$
- TITATSUIQ :  $\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n$   $\sum f$  cv
- $\bowtie$  Fubini :  $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,k}$   
Acv de  $\sum$ , cv de  $\sum \sum$

## Intégrales à paramètres

- Continuité  $\mathcal{C}^0$  à  $t$  et  $x$  fixé, domination, VL
- Dérivation Existence,  $\mathcal{C}^0$  à  $x$  et  $t$  fixés,  
intégrable à  $x$  fixé, domination VL

- TRf :  $f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$
- ITL :  $\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) \right| \leq \sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}| \frac{|(b-a)^{n+1}|}{(n+1)!}$
- ETL :  $\exists c \in [a,b], f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$
- TY :  $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + o((x-a)^n)$



## Séries entières

- $\frac{e^{zx}}{\frac{1}{1-z}}$
- $\frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}}{\sum_{n=0}^{+\infty} z^n}$
- Rayon de convergence  $|a_n|r^n$  bornée,  $a_n r^n \rightarrow 0$ ,  $\sum a_n r^n$  cv
- D'Alembert  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l \Rightarrow R = \frac{1}{l}$

- $\sum a_n z^n$  cvn sur  $\overline{D(O,r)}$  pour  $r < R$
- $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  continue pour  $|z| < R$
- Produit de Cauchy  $\sum_{n=0}^{\infty} \sum a_k b_{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n$
- Intégration et dérivation
- Unicité du DSE
- DSE  $\Leftrightarrow$  DST  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

## Probabilités

### Espaces probabilisés

- Dénombrable  $\Leftrightarrow$  Bijection de  $E$  dans  $\mathbb{N}$
- Cible :  

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 \leq n} \mathbf{P}\left(\bigcap_{m=1}^k A_{i_m}\right)$$
- $\sigma$ -additivité :  $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(A_n)$  Incompatibles
- $A_n \subset A_{n+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right)$
- $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}_B(A)\mathbf{P}(B)$
- Probas totales :  $\mathbf{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}_{A_n}(B)\mathbf{P}(A_n)$   $A_n$  est un sce
- Indépendants  $\Leftrightarrow \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$

### Variables aléatoires

$X \hookrightarrow$	$\mathbf{P}$
$\mathcal{U}(E)$	$\mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{\text{card}(E)}$
$\mathcal{B}(p)$	$\begin{cases} \mathbf{P}(X = 1) = p \\ \mathbf{P}(X = 0) = 1 - p \end{cases}$
$\mathcal{B}(n, p)$	$\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
$\mathcal{H}(n, N, p)$	$\mathbf{P}(X = k) = \frac{\binom{N_1}{k} \binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{Np}{k} \binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

$X \hookrightarrow$	$\mathbf{P}$
$\mathcal{G}(E)$	$\begin{cases} \mathbf{P}(X = 0) = 0 \\ \mathbf{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1} \end{cases}$
$\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbf{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$
$\mathcal{B}_-(n, p)$	$\mathbf{P}(T_n = m) = \binom{m-1}{n-1} p^k (1-p)^{m-n}$
Fonction de répartition : $F_X$	$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & [0, 1] \\ x & \rightarrow & \mathbf{P}(X \leq x) \end{array}$
Loi conjointe et lois marginales	$Autres fixes$
Coalitions : $Y = \varphi(X_1 - X_k)$	
et $Z = \psi(X_{k+1} - X_n)$	sont indépendantes
Transfert :	
$\mathbf{E}(f(X)) = \sum_{x_n \in X(\Omega)} f(x_n) \mathbf{P}(X = x_n)$	
$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^2)$	
Huygens :	$= \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$

$X \hookrightarrow$	$\mathbf{E}(X)$	$\mathbf{V}(X)$
$\mathcal{U}(a_1 - a_n)$	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i\right)^2$
$\mathcal{B}(p)$	$p$	$p(1-p)$
$\mathcal{B}(n, p)$	$np$	$np(1-p)$
$\mathcal{G}(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$\mathcal{P}(\lambda)$	$\lambda$	$\lambda$

Markov :  $\mathbf{P}(|X| \geq t) \leq \frac{\mathbf{E}(|X|)}{t}$

$$\mathbf{P}(|X| \geq t) \leq \frac{\mathbf{E}(X^2)}{t^2}$$

- $\blacksquare$  Tchebychev :  $\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbf{V}(|X|)}{\epsilon^2}$
- $\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| < \epsilon) \geq 1 - \frac{\mathbf{V}(|X|)}{\epsilon^2}$
- $\blacksquare$   $\text{coV}(X, Y) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y))) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$
- $\bullet \mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + 2\text{coV}(X, Y) + \mathbf{V}(Y)$
- $\bullet$  Coeff de corrélation :  $\rho(X, Y) = \frac{\text{coV}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$
- $\bullet$   $\begin{cases} X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n) \\ np_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \lambda \end{cases}$   
 $\Rightarrow \mathbf{P}(X_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$
- $\bullet \forall \epsilon > 0, \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| > \epsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$

## Séries génératrices

- $\bullet \mathbf{G}_X(t) = \mathbf{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n)t^n$
- $\bullet \mathbf{G}_{X+Y}(t) = \mathbf{G}_X(t)\mathbf{G}_Y(t)$
- $\bullet \mathbf{G}'_X(1) = \mathbf{E}(X)$
- $\bullet \frac{\mathbf{V}(X) = \mathbf{G}''_X(1) + \mathbf{G}'_X(1) - \mathbf{G}'_X(1)^2}{X \hookrightarrow \mathcal{B}(P) \quad \mathcal{B}(n, p) \quad \mathcal{G}(p) \quad \mathcal{P}(\lambda)}$
- $\bullet \mathbf{G}_X(t) = 1 - p + pt \quad (1 - p + pt)^n \quad \frac{p^t}{1 - (1 - p)t} \quad e^{\lambda(t-1)}$
- $\bullet \mathbf{G}_{X_1+X_2+...+X_N}(t) = \mathbf{G}_N \circ \mathbf{G}_X(t)$

## Calcul différentiel

### Équations différentielles

- $\begin{cases} (E) : X'(t) = A'(t)X(t) + B(t) \\ (CI) : X(t_0) = X_0 \end{cases}$  admet une unique solution finie
  - $\bullet \dim \mathcal{S}_H = n$
  - $\bullet$  Théorème de superposition
  - $\bullet \mathcal{S}_E = \mathcal{S}_H + X_0$
  - $\bullet$  Ordre 1  $e^{-A(t)}$ , Variation de la constante
  - $\bullet$  Ordre 2  $2^{\text{e membre}} P(t)e^{mt}$
- | $\Delta$ | $\mathbb{C}$                            | $\mathbb{R}$  |
|----------|---|---|
| $> 0$    | $\{\lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}\}$ | $\{\lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}\}$                                   |
| $< 0$    | $\{\lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}\}$ | $\{\lambda e^{\alpha t} \cos(\beta t) + \mu e^{\alpha t} \sin(\beta t)\}$ |
| $= 0$    | $\{(\lambda + \mu t)e^{r_0 t}\}$        | $\{A e^{\alpha t} \cos(\beta t + \varphi)\}$                              |
|          |   | $\{e^{\alpha t} (\lambda \cosh(\beta t) + \rho \sinh(\beta t))\}$         |
- $\bullet$  Ordre  $n$  Solutions sous la forme  $e^{rt}$
  - $\bullet z = \frac{y}{y_0}$ , DSE, Changement de variable

### Calcul différentiel

- $f(a + \vec{h}) = f(a) + \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + o(\|\vec{h}\|)$   
 $\mathcal{D}_{\vec{h}} f = \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = \text{df} \cdot \vec{h} = (\overrightarrow{\text{grad}} f | \vec{h})$
- $\bullet$  Notation différentielle :  $\text{df} = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$
- $\bullet$  Chaîne 1 :  $(f \circ \varphi)'(t) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(\varphi(t))\varphi'_j(t)$
- $\bullet$  Chaîne 2 :  $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$
- $\blacksquare$  Matrice Jacobienne  $\text{mat}_{BC}(\text{df})$
- $\bullet$  Théorème de Schwarz
- $\bullet$  Extremum local  $\Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}} f(a) = 0$

## Géométrie

### Courbes paramétrées

- 1. Restreindre le domaine d'étude *Périodique, parité*
- 2. Tableau de variations
- 3. Branches infinies
- 4. Tracé
- 5. Points multiples  $\begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases}$

### Géométrie

- $\overrightarrow{\text{grad}} f(M_0) \perp$  tangente en  $\mathcal{C}$  à  $M_0$
- Si point régulier  $\overrightarrow{\text{grad}} \neq 0$   $\overrightarrow{\text{grad}} \perp$  Plan tangent
- $\overrightarrow{\text{grad}} \perp$  Lignes de niveau et  $\nearrow$

# RÉSUMÉS 2

## PHYSIQUE

### Notations

- ⌚ : A la limite du programme *A redémontrer*
- ☒ : Hors-programme
- ⚠ : Sujet à des difficultés de mémorisation

## Bilans

- Bilan de masse  $d(\delta m) = m_e$
- Bilans de quantité de mouvement  $d(\delta \vec{p}) = \sum \vec{F}$
- Bilans d'énergie  $\Delta E = \delta W_{nc} = \mathcal{P}_{nc} dt$

## Thermodynamique

### Théorique

- Variables primitives  $U, V, N$
- $S(U, V, N) = k_B \ln(\Omega)$
- $dU = TdS - PdV + \mu dN$
- GP :  $u^* = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$
- ☒  $C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$  et  $C_P = \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial T} \right)_P$

---

$C_V = \frac{nR}{\gamma-1}$	$C_P = \frac{\gamma nR}{\gamma-1}$	$\gamma$
Gaz monoatomique	$\frac{3}{2}nR$	$\frac{5}{2}nR$
Gaz diatomique	$\frac{5}{2}nR$	$\frac{7}{2}nR$

---

- $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \frac{nR}{\gamma-1} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + nR \ln\left(\frac{V}{V_0}\right)$
- GP :  $PV = TV \left( \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial V} \right)_{U,N} = Nk_B T = nRT$

$$\text{GVdW} : \left( P + \frac{aN^2}{V^2} \right) (V - V_i) = Nk_B T$$

$$\bullet \text{ PC} : \mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + C \ln\left(\frac{T}{T_0}\right)$$

### Pratique

- 1<sup>er</sup> principe :  $\Delta E = W + Q$   
ES :  $D_m \Delta(h + e_c + e_p) = \mathcal{P}_{ind} + \mathcal{P}_{th}$
- 2<sup>e</sup> principe :  $\Delta \mathcal{S} = \mathcal{S}_e + \mathcal{S}_c$   
ES :  $\Delta s = \frac{q}{T_{frontire}} + s_c$

Isochore	Adiabatique	Monobare	Adiabatique réversible
		$P_i = P_f = P_{ext}$	<i>Isentropique</i>

$$\bullet \quad W = 0 \quad Q = 0 \quad \Delta \mathcal{H} = 0 \quad \Delta \mathcal{S} = 0 \quad PV^\gamma = \text{cste}$$

$$\bullet \text{ Moments} : x = \frac{a - a_1}{a_2 - a_1}$$

## Optique

### Optique géométrique

- ☒ Newton :  $\overline{FO} \times \overline{F'O'} = ff' = -f'^2$
- ☒ Descartes :  $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \Leftrightarrow \frac{f'}{\overline{OA'}} + \frac{f}{\overline{OA}} = 1$

### Optique ondulatoire

- $n(M) = \frac{c}{v(M)}$
- $\mathcal{E} = K \langle s(M, t) \rangle^2$  Harmonique :  $\mathcal{E} = \frac{1}{2} K s_0^2$
- $[AB] = c \times t_{AB}$
- Sphérique :  $\varphi(M) = \varphi_0 + \frac{2\pi n}{\lambda_0} z + \frac{\pi n}{\lambda_0} \frac{x^2 + y^2}{R}$

## Michelson

Configuration	Localisation	Nature	Différence de marche	Conditions d'éclairage	Conditions d'observation
Lame d'air	$\infty$	Égale inclinaison	$2n_{aire} \cos(\theta)$	Convergent	Lentille de projection
Coin d'air	Voisinage des miroirs	Égale épaisseur	$2n_{aire}(M) = 2n_{air} \sin(\alpha)x$	Plus de $i$ Parallèle	Miroir dans plan focal

- Diffraction du faisceau gaussien :  $\theta = \frac{\lambda}{\pi w}$

- Longueur de cohérence temporelle :  $\delta(M) \leq \frac{\lambda_0^2}{\Delta \lambda}$

## Interférences

- Cohérence :  $\omega_1 = \omega_2$  et  $\vec{E}_{0_1} \cdot \vec{E}_{0_2} \neq 0$
- Fresnel :  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \cos(\Delta\varphi)$
- $\delta(M) = [S_2 M] - [S_1 M]$
- $\Delta\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M)$
- $p = \frac{\delta(M)}{\lambda_0}$
- Contraste :  $C = \frac{\mathcal{E}_{max} - \mathcal{E}_{min}}{\mathcal{E}_{max} + \mathcal{E}_{min}}$
- $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{max} \left( 1 + C \cos \left( 2\pi \frac{x}{i} + \varphi_0 \right) \right)$

## Fentes d'Young

- $\delta(M) = n \frac{ax}{D}$
- Critère de visibilité :  $|\Delta p_{S \rightarrow S'}| \leq \frac{1}{2}$

## Interférences multiples

- $\delta(M) = n(\vec{u}_0 - \vec{u}) \overrightarrow{A_{m+1} A_m}$
- Formule des réseaux :  $\sin(\theta_p) - \sin(\theta_0) = p \frac{\lambda_0}{a}$

## Mécanique

### Référentiels non galiléens

- $\vec{v}_{\mathcal{R}}(M) = \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M) + \vec{v}_e(M, t)$
- $\vec{a}_{\mathcal{R}}(M, t) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(M, t) + \vec{a}_e(M, t) + \vec{a}_C(M, t)$
- $\vec{a}_c(M, t) = 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M)$

### Dynamique non galiléenne

- Principe d'inertie *Un corps isolé persévère dans son état*
- Principe de relativité *Invariance de la physique*
- PFD :  $m \vec{a}_{\mathcal{R}_{ng}}(M, t) = \vec{F} - m \vec{e}_e - m \vec{a}_C$
- $\left( \frac{d\vec{\mathcal{L}}_{\mathcal{R}_{ng}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_{ng}} = \vec{\mathcal{M}}_F + \vec{\mathcal{M}}_{F_{ie}} + \vec{\mathcal{M}}_{F_{iC}}$
- $\frac{d(E_c, \mathcal{R}_{ng})}{dt} = \mathcal{P}_{F, \mathcal{R}_{ng}} + \mathcal{P}_{F_{ie}, \mathcal{R}_{ng}} + \mathcal{P}_{F_{iC}, \mathcal{R}_{ng}}$

### Véhicules à roue

- $\vec{v}_{g,r/s}(t) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(I \in \text{Roue}, t) - \vec{v}_{\mathcal{R}}(I \in \text{Sol}, t)$
- $\vec{v}_g \neq 0 \Rightarrow \left\| \vec{R}_T \right\| = f \left\| \vec{R}_N \right\|$
- $\vec{v}_g = 0 \text{ tq } \left\| \vec{R}_T \right\| \leq f_s \left\| \vec{R}_N \right\|$

### Forces centrales

- Force centrale *Mouvement dans un plan  $\perp \vec{C}$*   
 $\vec{\mathcal{L}}_O = \vec{OM} \wedge \vec{p} = m\vec{C}, r^2\dot{\theta} = \mathcal{C}, \frac{dA}{dt} = \frac{r^2\dot{\theta}}{2} = \frac{\mathcal{C}}{2}$
- Champ conservatif  
 $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{m\mathcal{C}^2}{2r^2} + E_p(r) = E_0$
- Newtonien *PFD*

$$\begin{array}{cccccc} \frac{T^2}{r_0^3} & \vec{v} = r_0 \omega \vec{u}_\theta & E_c & E_p & E_m & \vec{\mathcal{L}}_O \\ \frac{4\pi^2 m}{K} & \sqrt{\frac{K}{mr_0}} \vec{u}_\theta & \frac{K}{2r_0} & -\frac{K}{r_0} & -\frac{K}{2r_0} & m \sqrt{\frac{Kr_0}{m}} \vec{u}_z \end{array}$$

# Ondes

## Ondes unidimensionnelles

- Hooke :  $\sigma = \frac{f}{S} = E\varepsilon \frac{\Delta l}{l_0}$
- D'Alembert :  $\Delta y = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$
- Grandeurs couplés  $A \times B = \mathcal{P}$
- Impédance caractéristique :  $Z_c = \frac{Cause}{Consequence}$
- OPPH :  $y(M, t) = y_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM})$
- Onde stationnaire :  $y(x, t) = f(x)g(t)$
- $R = \left| \frac{\mathcal{P}_r(x=0)}{\mathcal{P}_i(x=0)} \right|$

## Dispersion

- $v_\varphi = \frac{\omega}{\text{Re}(\underline{k})(\omega)}$
- $v_\varphi(\omega \text{ ou } \text{Re}(\underline{k})) \Rightarrow \text{Dispersion}$
- $\text{Im}(\underline{k}) \neq 0 \Rightarrow \text{Absorption}$
- $v_g = \left( \frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_{k_0}$
- $v_g(\omega \text{ ou } \text{Re}(\underline{k})) \Rightarrow \text{Étalement du paquet d'ondes}$

## Diffraction

- $\underline{t}(P) = \frac{\underline{E}(P_+)}{\underline{E}_0(P_+)} \text{ Fonction de transparence}$

# Diffusion

## Diffusion de particules

- Flux :  $d\phi = \frac{\delta N^2}{dt} = \vec{j}(P, t) \cdot \vec{n} dS$
- Green-Ostrogradsky :  $d\phi_s = \iiint_{M \in V} \text{div} \vec{j}(M, t) d\tau = \iint_{P \in S} \vec{j}(P, t) \cdot \vec{n}_{ext} dS$
- Loi de Fick :  $\vec{j}(M, t) = -D \overrightarrow{\text{grad}} n(M, t)$
- Équation de diffusion :  $\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n$

## Diffusion thermique

- $\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$

- Plan de Fourier  $\underline{t}(x) = \sum_n t_n e^{-2i\pi\sigma x}$  Tache à  $x_n = \lambda_0 f' \sigma_n$
- Onde propagative :  $\lambda_0 \leq \frac{1}{\sigma_0}$

## Ondes dans les fluides

- Équations fondamentales
  1. Euler
  2. Conservation de la matière  $\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\mu \vec{v}) = 0$
  3. Eq thermodynamique  $\mu = \mu_0 \chi s p_1$
- $d\mathcal{P} = \vec{\Pi}(M, t) \cdot \vec{n} dS_{\vec{\Pi} = p_1 \vec{v}}$
- $I = 10 \log \left( \frac{\langle \vec{\Pi} \rangle_t}{I_{ref}} \right)$

## Propagation dans les conducteurs

- $\frac{\partial^2 n_1}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial n_1}{\partial t} + \frac{e^2 n_{e0}}{m \epsilon_0} n_1 = 0$   
*Maxwell Gauss, Charge, Mouvement*
- $\vec{j}_1 = \frac{\gamma_0}{1 + i\omega\tau} \vec{E}_1$
- Effet de peau  $\omega\tau \ll 1$  :  $\Delta \vec{E}_1 = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t}$   
→ Onde evanescente

- Chaleur :  $\frac{\partial T}{\partial t}(M, t) = D_{th} \Delta T(M, t)$
- Loi de Newton :  $\phi_{th} = kS(T_S - T_F)$
- Résistance :  $R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\phi_{th1 \rightarrow 2}}$

## Rayonnement

- Planck :  $u(\nu) = \frac{8\pi h\nu^2}{c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}$
- Botzmann :  $\mathcal{P} = \frac{dE}{dt} = \sigma S T^4$
- Wien :  $\lambda_m T = 2,898 \times 10^{-3} \text{ m.K}$

# Mécanique des fluides

## Cinématique des fluides

- d particulaire :  $\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$
- $D_m = \iint_S \vec{j}_m \cdot \vec{n} dS$
- $D_V = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS$
- Conservation de la masse  $\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_m = 0$  ou  $\frac{D\mu}{Dt} + \mu \text{div} \vec{v} = 0$
- Écoulement stationnaire  $\text{div}(\mu \vec{v}) = 0 \Rightarrow D_m = 0$
- Écoulement incompressible  $\text{div}(\vec{v}) = 0 \Rightarrow D_v = 0$
- CL :  $(\vec{v}(P, t) - \vec{v}_{\text{Paroi}}) \cdot \vec{n} = 0$
- Écoulement tourbillonnaire  $\text{div} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = 0$   
 $d\mathcal{C} = \vec{v} \cdot d\vec{l} = (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}) \cdot \vec{n} dS$   
 $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \vec{\omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}$  est la vitesse de rotation
- Stokes :  $\iint_{P \in S} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}) \cdot \vec{n} dS = \oint_{M \in \Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{l}$
- Écoulement irrotationnel  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0} : \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi$

## Forces dans les fluides

- Forces volumiques :  $d\vec{F} = \vec{f} d\tau \mu \vec{g} d\tau$ ,
- Forces surfaciques :  $d\vec{F}_{ext \rightarrow int} = (\vec{\tau}_n + \vec{\tau}_t) dS_M$
- $d\vec{F}_p = \vec{\tau}_n = -p \vec{n} dS$   
 $\sim \text{volumique} : \vec{f}_p = -\overrightarrow{\text{grad}} p$
- Loi de Newton :  $d\vec{F}_t(y, t) = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} dS \vec{u}_x$   
 $\sim \text{volumique} : \vec{f}_{visc} = \eta \Delta \vec{v}$
- $\mathcal{R}_e = \frac{\text{Convection}}{\text{Diffusion}} = \frac{\mu U L}{\eta}$
- Couche limite :  $\delta = \frac{L}{\sqrt{\mathcal{R}_e}}$

# Electromagnétisme

## Électrostatique

- $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$
- Gauss :  $\phi_{\vec{E}} = \iint_{P \in S} \vec{E}(P) \cdot \vec{n}_{ext} dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$
- $V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{cste}$  et  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$
- Maxwell-Gauss :  $\text{div} \vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$
- Maxwell-Faraday :  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$
- Poisson :  $\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$

- CL Dynamique :  $\eta_1 \frac{\partial v_{1x}}{\partial y} = \eta_2 \frac{\partial v_{2x}}{\partial y}$
- Frottements :  $\vec{F} = -\frac{1}{2} C_x(\mathcal{R}_e) \mu S V \vec{V}$   
 $\mathcal{R}_e < 1 : \vec{F} = -\alpha \eta L \vec{V}$   
 $\mathcal{R}_e \geq 10^3 \Rightarrow C_x$  indépendant de  $\mathcal{R}_e$
- Écoulements laminaires  $\mathcal{R}_e \leq \mathcal{R}_{ec}$  et turbulents  $\mathcal{R}_e \geq \mathcal{R}_{ec}$

## Tension superficielle

- $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \gamma_{12} L \vec{n}$
- $\delta W = \gamma_{12} dS$
- Laplace :  $p_{int} - p_{ext} = \gamma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$
- Jurin :  $h_J = \frac{2(\gamma_{SV} - \gamma_{SL})}{\mu g r} = \frac{2\gamma_{LV} \cos \theta}{\mu g r}$
- $l_c = \sqrt{\frac{\gamma_{LV}}{\mu g}}$

## Dynamique des fluides

- Navier-Stokes  
 $\mu \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = \vec{f}_{vol} - \overrightarrow{\text{grad}} p + \eta \Delta \vec{v}$
- Euler *Fluides parfaits*  
 $\mu \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}} p + \vec{f}_{vol}$

## Statique des fluides

- $\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}} p + \vec{f}_{vol}$
- Bernoulli :  $\frac{p}{\mu} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{cste}$

- Laplace *Vide de charges* :  $\Delta V = 0$
- $U_{elec} = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} \epsilon_0 \left\| \vec{E}(M) \right\|^2 d\tau$
- $\vec{P} = \sum_i q_i \vec{OA}_i$  et  $V(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\vec{P} \cdot \overrightarrow{OM}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$
- $\vec{F} = (\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{E}$  et  $\mathcal{M}(O) = \vec{p} \wedge \vec{E}(M)$
- $E_{pint} = -\vec{p} \cdot \vec{E}(M)$

Équation	Statique	Dynamique	Forme intégrale
Maxwell-Faraday	*	$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$	$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Maxwell-Gauss		$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{d\phi_B}{dt}$
Maxwell-Thomson		$\text{div} \vec{B} = 0$	$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n}_{ext} dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$
Maxwell-Ampère	*	$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$	$\iint_S \vec{B} \cdot \vec{n}_{ext} dS = 0$
		$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I_{enlace}^{alg} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_B}{dt}$

## Magnétostatique

- Conservation de la charge  
 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}) = 0$
- $\vec{F} = q (\vec{E}(M) + \vec{v} \wedge \vec{B}(M))$
- Maxwell-Ampère :  $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}(M)$
- Maxwell-Thomson :  $\text{div} \vec{B} = 0$
- Ampère :  $\oint_{\Gamma} \vec{B}(M) \cdot \vec{dl} = \mu_0 I_{enlace}^{alg}$
- $\vec{\mu} = IS \vec{n} = \gamma \mathcal{L}_{Rapport\ gyromagnétique}$
- $\vec{F} = (\mu \cdot \text{grad } ) \vec{B}_{ext}(M)$  et  $\vec{M} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}_{ext}(M)$
- $E_{point} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_{ext}(M)$

Symétrie	Antisymétrie
$\vec{E}$	$\epsilon$
$\vec{B}$	$\perp$

## Conduction

- $\vec{j} = \gamma \vec{E}$   
ou  $\vec{j} = \gamma \vec{E} + \frac{q\tau}{m} \vec{j} \wedge \vec{B}_0 = \gamma \left( \vec{E} + \frac{1}{nq} \vec{j} \wedge \vec{B}_0 \right)$
- $\vec{F}_{col} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$
- $d\vec{F}_{Laplace} = (\vec{j} \wedge \vec{B}) d\tau = Idl \wedge \vec{B}$

## Équations de Maxwell

- $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$
- $c \vec{B} = \vec{e}_x \wedge \vec{E}$  Ondes planes

- $\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \text{div} \vec{\Pi}(M, t) = 0$   $\vec{\Pi}(M, t) = \vec{E} \wedge \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$
- ARQS :  $\tau \gg \frac{L}{c}$

## Plasma

- $\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{2 n_{e0} e^2}}$
- $\omega_P = \sqrt{\frac{n_{e0} e^2}{m \epsilon_0}}$
- Propagation d'ondes dans un plasma
  - Maxwell
  - Conservation de la charge
  - Équation du mouvement des  $e^-$
- $\frac{\partial \vec{j}_1}{\partial t} = \frac{n_{e0} e^2}{m} \vec{E}_1 = \epsilon_0 \omega_P^2 \vec{E}_1$   
Maxwell-Gauss, Charge, Mouvement
- Zone de transparence d'opacité  $\omega > \omega_P$   $\omega < \omega_P$

## Induction

Induction	Champ magnétique	Conducteur
Neumann	Variable dans le temps	Immobile
Lorentz	Stationnaire	Mobile

- Lenz Conséquences opposées aux causes
- $e_{ind} = \oint_C \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{d\phi_B}{dt}$
- $\phi_{propre} = Li(t)$  et  $\phi_{1 \rightarrow 2} = Mi_1(t)$
- Couplage électromécanique :  $\mathcal{P}_L + e_{ind} i_{AB} = 0$

## Mécanique quantique

### Généralités

- $E = h\nu = \hbar\omega$
- $\vec{p} = \hbar k = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda_{dB}}$
- $d\mathbf{P} = |\psi|^2 d\tau$
- $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V\psi$

- $\frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} + \text{div}(\vec{J}) = 0$
- Etat stationnaire :  $\psi(x, t) = \varphi(x)f(t)$   $\varphi(x)$  et  $f(t)$  de  $\mathbb{C}$
- $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x)$  Indépendant de  $t$
- Heisenberg :  $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$  et  $\Delta t \cdot \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$
- Action  $\mathcal{S}$  Homogène à des J.s

## Particule libre

- $v_\varphi = \frac{\hbar k}{2m}$
- $v_g = \frac{\hbar k_0}{m}$

Etat	Particule	$E$
Diffusion	Délocalisée	Non quantifiée
Lié	Confinée	Quantifiée

- Effet Tunnel  $\Delta E$  pendant  $\Delta t \Rightarrow$  Accès aux zones interdites

## Particule dans un potentiel

- Marche, puits et barrières

## Laser

- Absorption, émissions spontanées et induites
- Pompage optique  $N_2 > N_1$  en passant par  $E_3$
- Non évolution d'un oscillateur  $HF = 1$

# RÉSUMÉ 3

CHIMIE

Notations

- : A la limite du programme *A redémontrer*
- : Hors-programme
- : Sujet à des difficultés de mémorisation

## Thermodynamique

### Transformations

- $Z_m = \frac{Z(T, P, n_j)}{\sum_j n_j}$
- $\overline{Z}_i = \left( \frac{\partial Z}{\partial n_i} \right)_{T, P, n_j \neq i}$
- Euler :  $Z = \sum_i n_i \overline{Z}_i$
- $\Delta_r Z = \left( \frac{\partial Z}{\partial \xi} \right)_{T, P}$
- $\Delta_r Z = \sum_i \vartheta_i \overline{Z}_i$
- Loi de Hess  
 $(R) = \sum_i \lambda_i (R_i) \Rightarrow \Delta_r Z^\circ_R = \sum_i \lambda_i \Delta_r Z^\circ_{R_i}$

### Premier principe

- $\Delta U = W + Q$
- $C_P = \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial T} \right)_P$  et  $C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$
- $\Delta \mathcal{H} = Q_p = n \Delta_{transf} \mathcal{H}^\circ_i$
- GP :  $\overline{\mathcal{H}}_{mi} = \mathcal{H}^\circ_{mi}(T)$
- Mélange idéal :  $\overline{\mathcal{H}}_{mi} = \mathcal{H}_{mi}^*(T, P) \simeq \mathcal{H}^\circ_{mi}(T)$
- $\Delta_r \mathcal{H}^\circ = \Delta_r U^\circ + \left( \sum_i \vartheta_i \right) R T_0 \text{GP}$
- Etat de référence  
Etat d'agrégation standard le plus stable à  $T$
- $\Delta_r \mathcal{H}^\circ(T_0) = \sum_i \vartheta_i \Delta_f \mathcal{H}_i(T_0)$
- Loi de Kirchhoff  
 $\frac{d \Delta_r \mathcal{H}^\circ(T)}{dT} = \sum_i \vartheta_i C^\circ_{Pmi}(T) = \Delta_r C^\circ_P(T)$
- Ellingham : Pas d'influence de  $T$
- Van't Hoff :  $\frac{d \ln(K^\circ(T))}{dT} = \frac{\Delta_r \mathcal{H}^\circ}{RT^2}$

### Second principe

- $\Delta \mathcal{S} = \mathcal{S}_e + \mathcal{S}_c$
- $\mathcal{S} = k_B \ln(\Omega)$
- Nernst :  $\mathcal{S} \xrightarrow{T \rightarrow 0K} 0$
- $\mathcal{G} = \mathcal{H} - T \mathcal{S}$
- $dU = T d\mathcal{S} - P dV$   
 $d\mathcal{G} = V dP - \mathcal{S} dT$
- Corps pur :  $\left( \frac{\partial \mathcal{S}_m}{\partial T} \right)_P = \frac{C_{Pm}}{T}$
- Changement d'état d'un corps pur  
 $\Delta \mathcal{S} = \frac{\xi \Delta_{1 \rightarrow 2} \mathcal{H}^\circ}{T^\circ_{1 \rightarrow 2}}$
- $\Delta_r \mathcal{S}^\circ$  augmente avec  $\sum_{gaz} \vartheta_i$   
 $\frac{d \left( \frac{\Delta_r \mathcal{G}^\circ(T)}{T} \right)}{dT} = - \frac{\Delta_r \mathcal{H}^\circ(T)}{T^2}$
- $K^\circ(T) = \exp \left( - \frac{\Delta_r \mathcal{G}^\circ(T)}{RT} \right)$

### Potentiel chimique

- $\mu_{i(\varphi)} = \overline{\mathcal{G}_{i(\varphi)}} = \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n_{i(\varphi)}} \right)_{T, P, n_j \neq i(\varphi)}$
- $d\mathcal{G} = -\mathcal{S} dT + V dP + \sum_i \mu_i d n_i$
- $\left( \frac{\partial \mu_i}{\partial T} \right)_{P, n_i} = -\overline{\mathcal{S}_i}$  et  $\left( \frac{\partial \mu_i}{\partial P} \right)_{T, n_i} = \overline{V_i}$
- Gibbs-Duhem :  
 $T \text{ et } P \text{ cste} \sum_i n_i d\mu_i = 0 \Rightarrow \sum_i x_i d\mu_i = 0$
- Gibbs-Helmholtz :  $\left( \frac{d \left( \frac{\partial \mu_i}{T} \right)}{dT} \right)_{P, n_i} = -\frac{\mathcal{H}_i}{T^2}$
- $\mu_{i(\varphi)} = \mu_{i(\varphi)}^\circ + RT \ln(a_{i(\varphi)}^\circ)$
- $a_{i, rel} = \gamma_i \times a_{i, idal}$

## Evolution de systèmes

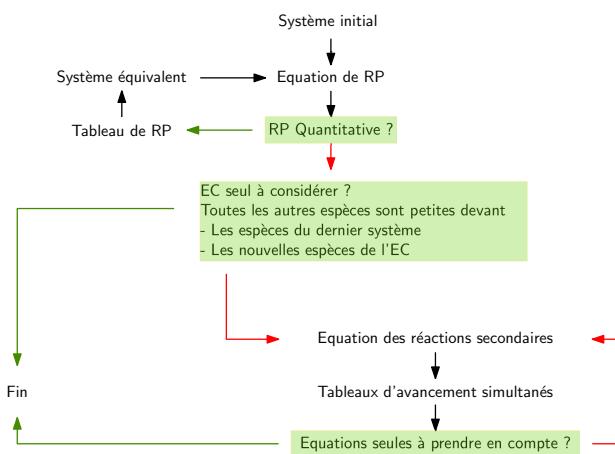
- $\delta\mathcal{S}_c = \frac{\mathcal{A}d\xi}{T}$
- $\mathcal{A} = -\Delta_r\mathcal{G}$
- $\mathcal{A} = \mathcal{A}^\circ(T) - RT \ln(Q_r) = RT \ln \left( \frac{K^\circ(T)}{Q_r} \right)$   
 $\Rightarrow \mathcal{A} = 0 \Leftrightarrow K^\circ(T) = Q_r = \prod_i a_i^{\vartheta_i}$
- $\mathcal{V} = X_{T, P, x_i} - R_{indRGW, \sum_\varphi}$

## Changement d'état du corps pur

- $n\mathcal{L}_{1 \rightarrow 2} = \Delta\mathcal{H}$
  - $\Delta\mathcal{S} = \frac{n\mathcal{L}_{1 \rightarrow 2}}{T_{1 \rightarrow 2}} \Rightarrow \Delta\mathcal{G} = 0$
  - $\mu_1^*(T_{1 \rightarrow 2}, P) = \mu_2^*(T_{1 \rightarrow 2}, P)$
- ☞ Clapeyron :  $\mathcal{L}_{1 \rightarrow 2} = T(V_{m2} - V_{m1}) \frac{dP}{dT}$

## Chimie inorganique

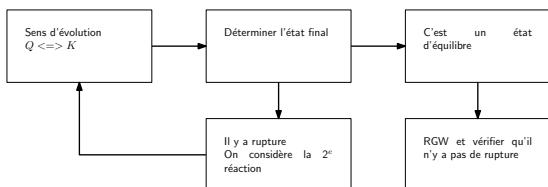
### Chimie des solutions



### Plusieurs équilibres

#### Réactions simultanées

Homogène	Hétérogène	$\begin{cases} Q_{r1} = Q_{r2} \\ K_1^\circ(T) \neq K_2^\circ(T) \end{cases}$	Autre
Simultanés	Successifs	$Q_i = K_i$ pour deux $i$	$\emptyset$



## Electrochimie

### Oxydoréduction

- $O_x + \vartheta_e e^- \rightleftharpoons R_{ed}$
- $e = e^\circ(T) - \frac{RT}{\vartheta_e \mathcal{F}} \ln(Q_r)$
- $\Delta_{\frac{1}{2}} \mathcal{G}^\circ = \sum_i \vartheta_i \Delta_f \mathcal{G}^\circ_i = -\vartheta_e \mathcal{F} E^\circ_{Ox/Red}$

### Déplacement d'équilibre

- On exprime  $Q_{rEP}$ , quotient réactionnel dans l'état perturbé, et on le compare à  $K^\circ(T)$

### Cinétique

- $r = \frac{1}{V} \frac{d\xi}{dt} = -\frac{1}{\vartheta_i} \frac{d[A_i]}{dt} = \frac{1}{\vartheta'_i} \frac{d[A'_i]}{dt}$
- $v = \epsilon \frac{d[A_i]}{dt} \Rightarrow r = \frac{1}{\vartheta'_i} v_f(B'_i) = \frac{1}{\vartheta_i} v_d(B_i)$
- $v = k \prod_{i=1}^n (A_i)^{\alpha_i}$  Loi de vitesse

☞ Arrhénius :  $k = A e^{-\frac{E_a}{RT}}$

- AEQS, AECD  $\frac{d[I]}{dt} \approx 0$

☞ Réacteurs ouverts

$$\frac{dn_i}{dt} = F_{ei} + \vartheta_i V r - F_{si}$$

$$\Rightarrow r = -\frac{1}{\vartheta_i V} (Q_{ei} \times [i]_e - Q_{si} \times [i]_s)$$

Forts		Faibles		Ampholyte
Acides	Bases	Acides	Bases	
Réaction quantitative : $x \simeq C_0$		$C_0 - x \simeq C_0$ si $K_{a/b} \ll 1$		$\text{pH} = \frac{1}{2} (pK_a + \log C_0)$
$\text{pH} = -\log C_0$	$\text{pH} = 14 + \log C_0$	$\text{pH} = 7 + \frac{1}{2} (pK_a + \log C_0)$		$\text{pH} = \frac{1}{2} (pK_{a1} + pK_{a2})$

## Diagrammes courant-potentiel

- $v_{O_x} = \frac{1}{\vartheta_e \mathcal{F} S} i_a j_c = \frac{i_c}{S}$  et  $dq = \mathcal{F} d n_e$
- Surtension :  $\eta(i) = E(i) - E_{th}$
- Limitation par la diffusion Fick  
⇒ Mur du solvant Pas de limite
- Potentiel mixte  $\begin{cases} E_m = E_c = E_a \\ i_c = -i_a \end{cases}$  A l'abandon
- $v_{cor} = \frac{de}{dt} = \frac{i_{cor} M(M)}{\vartheta_e \mathcal{F} S \rho(M)}$

- Aération différentielle
- Passivation

## Convertisseurs

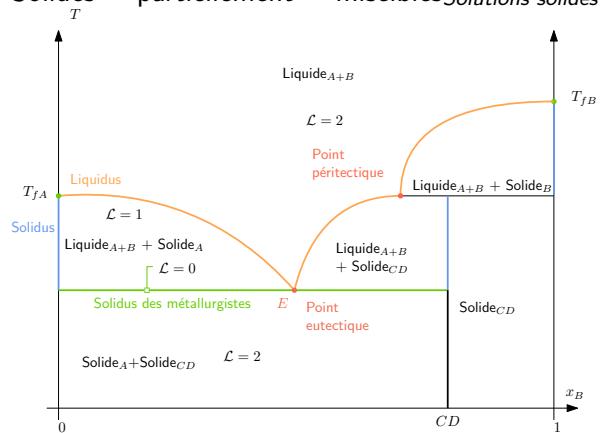
- |   | Anode     | Cathode   |
|---|-----------|-----------|
| Pile  | $\ominus$ | $\oplus$  |
| Électrolyseur   | $\oplus$  | $\ominus$ |
| $U = (E_{tha} - E_{thc}) + (\eta_{a(i)} - \eta_{c(i)}) + Ri$  |           |           |
| $\rho_F = \frac{i_{utile}}{i} = \frac{n_{rel}}{n_{thorique}}$ |           |           |

## Binaires

### Liquide vapeur

- On trace  $T \left( X_B = \frac{n_B}{n_{tot}} \right)$
- $(X_B - x_b^g)n^g = (x_b^l - X_B)n^l$  Ou graphique
- Liquides miscibles
  - Idéal : 1 fuseau
  - Non idéal : 2 fuseaux Homoazéotrope
- Liquides non miscibles Hétéroazéotrope
- Liquides partiellement miscibles Lapin - Démixtion

- Composé à fusion congruente Composé défini de A et de B
- Solides partiellement miscibles Solutions solides



### Solide-Liquide

- Solidus et Liquidus

## Chimie quantique

### Orbitales atomiques

- Dégénérés ⇒ Même  $E$
- Énergie quantifiée :  $E_n = -\frac{R_y}{n^2} H$
- On recherche  $\psi = R(r)Y(\theta, \varphi)$
- On caractérise  $\psi$  par  $(n, l, m_l)$
- Spin quantifié de l'e<sup>-</sup> :  $m_s = \pm \frac{1}{2}$
- Polyélectronique ⇒  $\psi = \sum c_i \chi_i$
- Pauli ( $n, l, m_l, m_s$ ) ≠
- Klechkowsky Remplissage par  $n + l \nearrow$
- Hund Spins opposés
- Spin total ≠ 0 ⇒ Paramagnétique

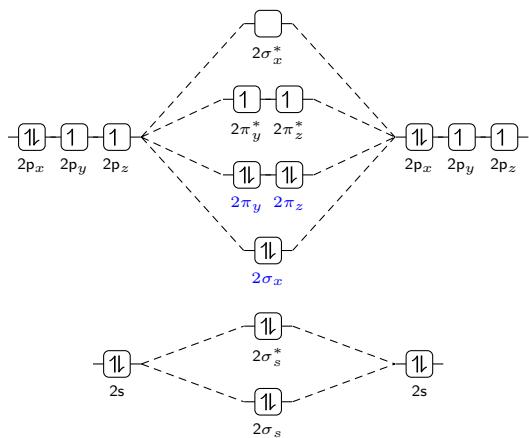
### Interaction de 2 orbitales

- Orbitale liante Stabilisée
- Orbitale antiliante Destabilisée
- $i = \frac{n' - n^*}{2}$  Indice de liaison
- Interaction des OA de symétries compatibles Recouvrement axial<sub>σ</sub> ou latéral<sub>π</sub>

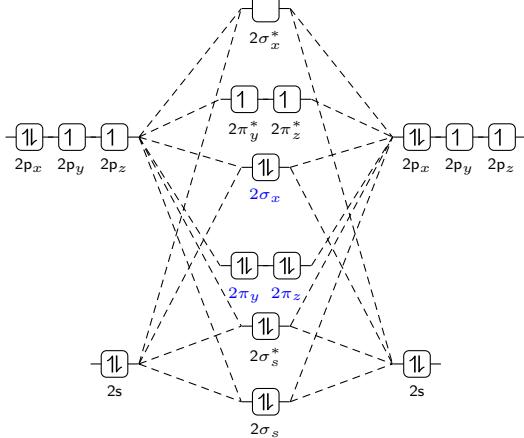
### Méthode des fragments

- On découpe la molécule en fragments
- Interaction : Symétries compatibles et  $E$  proche
- Règle de la HO Géométrie adoptée pour  $E_{HO}$  minimale

Non corréllé Grand  $\Delta E$ ,  $\chi$



Corréllé Petit  $\Delta E$ ,  $\chi$



## Chimie organique

### Résonance

- Système conjugué Plan et OA de recouvrement latéral
  - $\pi\sigma\pi$ ,  $\pi\sigma\eta$ ,  $\pi\sigma\nu$ ,  $\eta\sigma\nu$
  - Batochrome
- Conjugaison  $\Rightarrow E_{BV} - E_{HO} \searrow \Rightarrow \lambda_{max} \nearrow$

### Effets électroniques

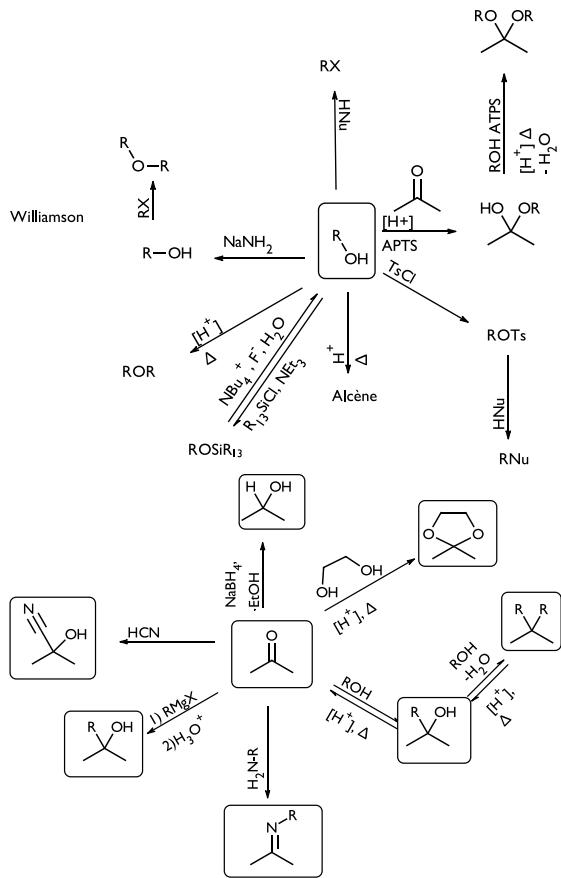
- $\Delta\chi \Rightarrow$  Effet inductif
- Effet mésomère
- Hyperconjugaison  $\text{Interaction } \pi \Rightarrow \text{Alcane} = \text{Effet donneur}$
- Base conjuguée stabilisée  $\Rightarrow$  Acide fort

### Réactivité

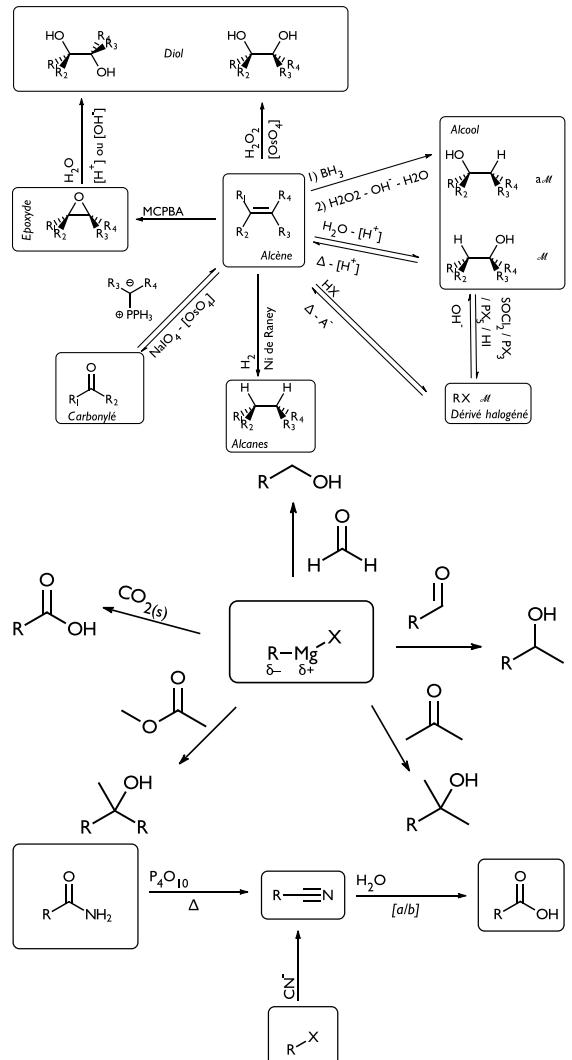
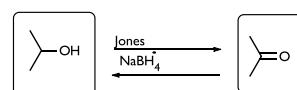
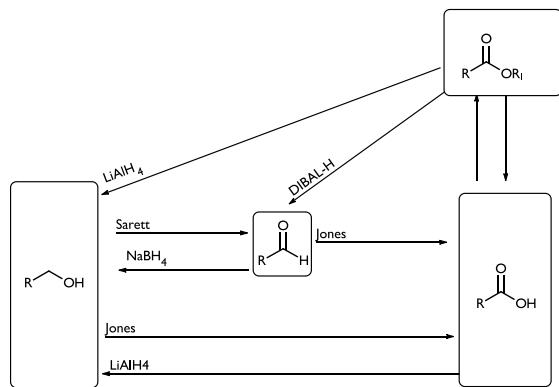
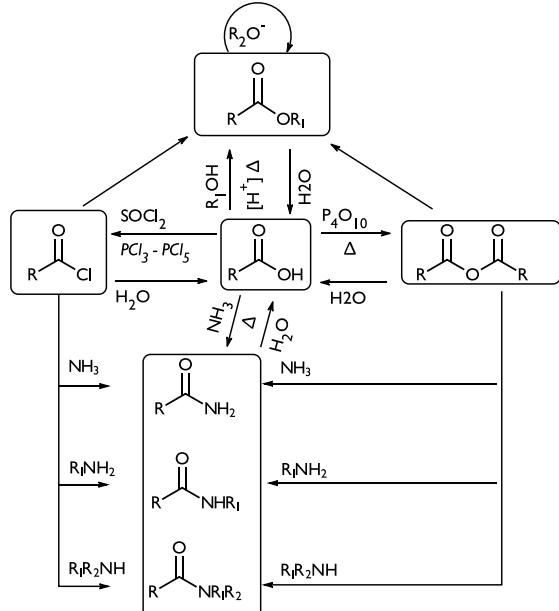
- Énergie d'activation
- Postulat de Hammond  $E \Rightarrow \text{Structure} =$
- Contrôle cinétique  $\prod [A_i]^{\alpha_i} = \prod k_{A_i}^{\alpha_i}$ , Stabilité max  
Contrôle thermodynamique  $\prod [A_i]^{\alpha_i} = \prod K_{A_i}^{\alpha_i}$ ,  $E_{pa}$  min

Fukui  
 $\text{Stabilité} \propto \frac{S^2}{\Delta E}$

$\Rightarrow$  Interaction principale HO-BV de  $\Delta E$  min



	Lewis	Dur	Mou
Acide	Accepteur $\nwarrow$ , $\neq$ polarisable, $\oplus \nearrow$ BV Contractée d'énergie élevée	Accepteur $\nearrow$ , polarisable, $\oplus \nwarrow$ BV Diffuse de basse énergie	
Base	Donneur $\nwarrow$ , $\neq$ polarisable, $\times \nearrow$ HO Contractée de basse énergie	Donneur $\nearrow$ , polarisable, $\times \nwarrow$ HO Diffuse d'énergie élevée	

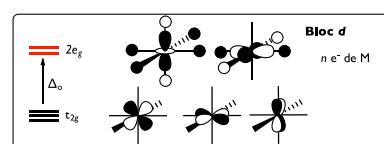


# Chimie organométallique

## Complexes

- Coordinence  $Liaisons Carbone-Ligand$
  - Hapticité  $Liaisons possibles$
  - DO  $Charge de fragmentation$
  - ☞  $n = e_V^-(M) - DO = C_{ol} - DO_{Dans d^n}$
  - NEV  $e^-$  de  $M$  et  $L$
  - Règle des 18 $e^-$
  - Coordination, Dissociation, Substitution, Addition oxydante, élimination réductrice, Insertion, Désinsertion

## Orbitales des complexes



- Plus forte contribution des OM métalliques
  - $\Delta_o < P_{Appareillement}$  : Remplissage max  $\uparrow$
  - $\Delta_o = \frac{hc}{\lambda_{max}}$
  - Ligand  $\pi$  donneur Accepteur Orbitales d'antillantes jantes

## Polymères

- Unité de répétition  $\neq$  Unité monomère

- #### • Fonctionnalité sites réactifs

- Copolymères *Différentes unités*
- $\overline{DP}_n = \sum_i^{\infty} ix_i$
- $I = \frac{\overline{M}_w}{\overline{M}_n} = \frac{\overline{DP}_w}{\overline{DP}_n}$  *Poly molécularité*

- Cristallins, amorphes, semi-cristallins
- Thermoplastiques, Thermodurs, Élastomères
- Transition vitreuse
- Diagramme de traction

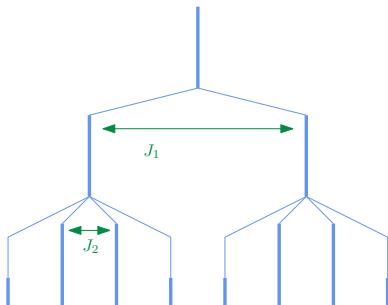
## Cristallographie

Population Coordinence	$Z$ [x]	Motifs en propre Voisins
Compacité	$C$	Taux d'occupation
Masse volumique	$\rho$	$C = \frac{Z \times \frac{4}{3} \pi r^3}{a^3}$ $\rho = \frac{Z \times \frac{a_M}{N_A}}{a^3}$

- Cristal *Covalent, ionique, métallique, moléculaire*
- Sites interstitiel *Tétraédriques, octaédriques*
- Alliages *Insertion ou substitution*

## Spectroscopie

- $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}}$
- $\delta = \frac{\nu - \nu_{ref}}{\nu_0}$
- Ecrantage *Blindage - Densité  $e^-$*   $\nearrow \Rightarrow \delta \searrow$
- Équivalence chimique et magnétique  $\neq$  *Même  $J$*
- $J_{cis} = 6 - 12 \text{ Hz}$   $J_{trans} = 12 - 18 \text{ Hz}$





## II Maths

# 1 Généralités

## 1.1 Généralités

DEF: Une **suite** est une application de  $\mathbb{N}$  dans  $E$

On note  $u \begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow E \\ n & \rightarrow u(n) \end{cases}$  et  $u_n = u(n)$ . La suite obtenue est  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$u_n$  est le terme d'indice  $n$  de la suite

Ne pas confondre avec  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$



- On note  $E^{\mathbb{N}}$  l'ensemble des suites à valeurs dans  $E$

## 1.2 Caractère borné et limite

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **bornée** si  $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **tend** vers  $l \in E$  si  $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - l| \leq \epsilon$   
On note  $u_n \rightarrow l$  ou  $\lim u_n = l$   
 $\triangleleft n_0$  dépend de  $\epsilon$

## 1.3 Propriétés

- Si une suite converge, elle est bornée
  - ─  $\triangleleft$  Inégalité triangulaire appliquée à la définition de convergence
- Si une limite existe, elle est unique
  - ─  $\triangleleft$  On suppose l'existence de deux limites et on montre  $|l - l'| \leq \epsilon, \forall \epsilon > 0$
- Opérations sur les limites
  - Somme
  - Produit
    - ─  $\triangleleft$  On montre  $u_n v_n - ll' \rightarrow 0$  en appliquant l'inégalité triangulaire avec  $\pm u_n l'$
  - Inverse

$\triangleleft$  On montre que  $u_n$  ne s'annule pas puis qu'une suite à partir de  $n_0$  admet  $\frac{1}{l}$  comme limite

— Quotient

⚠ Corollaire de ce qui précède

- $u_n \rightarrow l \Rightarrow f(u_n) \rightarrow f(l)$

⚠ On combine les définitions de la continuité en  $l$  et de la convergence de  $u_n$

## 1.4 Suites extraites

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$  est une suite et  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est une fonction strictement croissante  
 $v = u \circ \varphi : \mathbb{N} \rightarrow E$  est une suite dite **extraite**<sub>Sous-suite</sub> de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  notée  $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$

- Si  $u_n \rightarrow l$  alors ses suites extraites aussi
 

⚠ Récurrence sur  $\varphi(n) \geq n \Rightarrow \varphi(n) \geq n \geq n_0$  puis définition
- Si il existe deux suites extraites convergeant vers des limites différentes alors la suite diverge
 

⚠ Corollaire
- Si  $u_{2n}$  et  $u_{2n+1}$  convergent vers la même limite alors  $u_n$  aussi
 

⚠ On considère  $n_0 = \max\{2n_1, 2n_2 + 1\}$
- Une sous-sous-suite est une sous-suite
 

⚠ On revient la définition en considérant  $\varphi \circ \psi$  strictement croissante

## 2 Suites réelles

### 2.1 Généralités

- Une suite est **croissante** si  $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, n \leq p, u_n \leq u_p \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$
- Une suite tend vers l'infini si  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \geq A$ 

⚠ On dit que la suite admet l'infini comme limite mais elle est **divergente**
- Une suite réelle croissante
  - Est majorée et converge
  - Diverge vers l'infini

⚠ Disjonction de cas sur le caractère majoré de l'ensemble  $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$

### Théorème de Bolzano-Weierstrass

Toute suite bornée admet une sous-suite convergente

Se retient avec les bons hommes au cinéma

On passe par un lemme : Toute suite réelle admet une suite réelle extraite monotone

- On fait une disjonction de cas sur le caractère infini de  $\{n \in \mathbb{N}, \forall p \geq n, u_p \geq u_n\}$ 
  - On choisit des indices ordonnés vérifiant la monotonie

**Théorème des gendarmes**

Si  $u_n \leq v_n \leq g_n$  :  $\begin{cases} u_n \rightarrow l \\ w_n \rightarrow l \end{cases} \Rightarrow v_n \rightarrow l$

On repasse aux définitions de convergence et on travaille pour  $n \geq \max(n_1, n_2)$

**2.2 Suites adjacentes**

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  croissante
- $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  décroissante
- $u_n - v_n \rightarrow 0$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont **adjacentes** et tendent vers la même limite tel  $u_n \leq l \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}$

On étudie  $v_n - u_n$  et on montre sa décroissance, limite et positivité

**2.3 Densité**

- On dit que  $A$ , partie de  $\mathbb{R}$  est dense dans  $\mathbb{R}$  si  
 $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha < \beta \Rightarrow [\alpha, \beta] \cap A \neq \emptyset$

- $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ 
  - En choisissant deux éléments de  $\mathbb{R}$ 
    - On élimine le cas où 0 est dans l'intervalle pour se restreindre à  $\mathbb{R}_+$
    - On divise les réels en petits segments de taille inférieure à la différence des deux éléments et on montre qu'un rationnel s'y trouve
- $A$  dense dans  $\mathbb{R} \Leftrightarrow$  Tout réel est limite d'une suite à valeurs dans  $A$ 
  - Par double implication
    - $\Rightarrow$  On construit la suite en choisissant des valeurs tendant vers  $x$  avec  $\epsilon = \frac{1}{n}$
    - $\Leftarrow$  On choisit la définition de convergence pour placer la suite dans l'intervalle
- Autres ensembles denses dans  $\mathbb{R}$ 
  - $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
  - Les décimaux
  - Les diadiques de la forme  $\frac{p}{2^n}$

**3 Suites complexes**

- $z_n = x_n + iy_n \rightarrow l = a + ib \Leftrightarrow \begin{cases} x_n \rightarrow a \\ y_n \rightarrow b \end{cases}$

On l'infériorité des modules de la partie réelle *imaginaires* au complexe permet de résoudre un sens par inégalités dans la définition de convergence

**Bolzano-Weierstrass complexe**

Toute suite complexe bornée admet une sous-suite convergente

- On applique Bolzano-Weierstrass à la suite des parties réelles
- B.W à la suite extraite avec la même fonction de la suite des parties imaginaires

## 4 Relations de comparaison

Définition

- $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **dominée** par  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  si  $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée. On note  $v_n = O(u_n)$
- $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **négligeable** devant  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  si  $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$ . On note  $v_n = o(u_n)$
- $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **équivalente** à  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  si  $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 1$ . On note  $v_n \sim u_n$

Propriétés

- $u_n = O(1) \Leftrightarrow u_n$  bornée
- $u_n = o(1) \Leftrightarrow u_n \rightarrow 0$
- $u_n \sim 1 \Leftrightarrow u_n \rightarrow 1$
- $u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n = v_n + o(v_n)$
- $v_n = o(u_n) \Rightarrow v_n = O(u_n)$
- $v_n = o(u_n)$  et  $w_n = o(v_n) \Rightarrow w_n = o(u_n)$
- $v_n = O(u_n)$  et  $w_n = O(v_n) \Rightarrow w_n = O(u_n)$
- $v_n = o(u_n)$  et  $w_n = O(v_n) \Rightarrow w_n = o(u_n)$
- $\begin{cases} v_n = o(u_n) \\ t_n = o(w_n) \end{cases} \Rightarrow v_n t_n = o(u_n w_n)$
- $\begin{cases} v_n = O(u_n) \\ t_n = O(w_n) \end{cases} \Rightarrow v_n t_n = O(u_n w_n)$
- $\begin{cases} v_n \sim u_n \\ t_n \sim w_n \end{cases} \Rightarrow v_n t_n \sim u_n w_n$

⚠

On ne peut pas additionner les  $\sim, o, O$   
Sauf si les quatre suites sont de même signe

Propriétés

- $\begin{cases} u_n = o(w_n) \\ v_n = o(w_n) \end{cases} \Rightarrow u_n + v_n = o(w_n)$
- $\begin{cases} u_n = O(w_n) \\ v_n = O(w_n) \end{cases} \Rightarrow u_n + v_n = O(w_n)$
- $\begin{cases} u_n = o(v_n) \\ v_n \rightarrow l \end{cases} \Rightarrow u_n \rightarrow l$
- $\begin{cases} u_n \rightarrow l \\ v_n \rightarrow l \end{cases} \Rightarrow u_n \sim v_n$  si  $l \neq 0$  et  $l \neq \pm\infty$
- $u_n \sim v_n \Rightarrow u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$  où  $\alpha > 0$

⚠

Les équivalents ne passent pas aux exponentielles  
 $u^n \sim v^n \not\Rightarrow e^{u_n} \sim e^{v_n}$  Et réciproquement

Propriétés

- $u_n \sim v_n \Rightarrow u_n$  et  $v_n$  sont de même signe APCR
- $\sim$  est une relation d'équivalence
- $u_n \sim v_n \Rightarrow \ln(u_n) \sim \ln(v_n)$  Pour des suites positives ne tendant pas toutes deux vers 1

## Suites de références

$$\ln(n)^\beta \ll n^\alpha \ll a^n \ll n! \ll n^n$$

- Théorème
- On démontre le critère de comparaison logarithmique  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq k \Rightarrow a_n \rightarrow 0$  si  $k \in ]0, 1[$
  - On utilise le lemme pour montrer les trois dernières négligeabilités
  - La dernière est obtenue par une étude de fonctions

## Théorème de Cesàro

$$u_n \rightarrow l \Rightarrow \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k \rightarrow l$$

- Théorème
- On se ramène toujours au cas  $u_n \rightarrow 0$
  - On revient à la définition en séparant à l'indice utilisé pour la limite la somme et en majorant

- Le théorème est aussi valable pour  $l = \pm\infty$  avec une démonstration similaire à définition près

## Théorème de Cesàro généralisé

- Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{*\mathbb{N}}$  telle que  $\sum_n a_n$  diverge et une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$   
$$\sum_{k=0}^n a_k u_k$$
On pose  $v_n = \frac{\sum_{k=0}^n a_k u_k}{\sum_{k=0}^n a_k}$ , la moyenne pondérée des termes de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$   
$$u_n \rightarrow l \Rightarrow v_n \rightarrow l$$

Théorème

La démonstration est analogue à Cesàro simple

- Propriétés
- Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , positives sont équivalentes  
 $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature et les sommes partielles sont équivalentes en cas de divergence

Application de Cesàro généralisé

## Lemme de l'escalier

$$u_{n+1} - u_n \rightarrow l \Rightarrow u_n \rightarrow nl$$

Théorème

Cesàro puis télescopage

## Sommes de Riemann

Soit  $f$  continue sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \rightarrow \int_a^b f(t) dt$$

C'est la méthode des rectangles

Théorème

On utilise fréquemment le cas  $a = 0$  et  $b = 1$

# 5 Méthodes d'analyse

## 5.1 Suites définies implicitement

Définition

On considère une suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies sur  $I$

On forme la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à partir des solutions de  $f_n(x) = 0$

Méthode

### Étudier une suite implicite

- On montre l'existence et l'unicité de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par une étude de fonction puis TVI
- On étudie la monotonie de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- On détermine la convergence *Convergence monotone* ou la divergence en  $\infty$
- On détermine la limite dans le cas de convergence
- On essaye de déterminer un équivalent en passant à la limite dans l'équation
- Un développement asymptotique peut être obtenu en réinjectant les équivalents successifs  $u_n - \text{termes précédents} \sim ?$  et en développant

## 5.2 Suites récurrentes

Définition

Une suite récurrente est définie par  $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$  où  $f$  est continue sur  $I$  et stabilise  $I$

Propriétés

- Si  $f$  est continue sur  $I$  et  $f$  stable et  $u_n$  :  $\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$  convergeant vers  $l$   
 $l$  est un point fixe de  $f_{f(l)} = l$

Méthode

### Construire une suite définie par récurrence

On relie successivement

1. La courbe de  $f$
2. La bissectrice,  $\text{id}_{\mathbb{R}}$

## Fonctions contractantes

Définition

### $f$ contractante

DEF: On dit que  $f$  est contractante si  $\exists k \in ]0, 1[$  tq  $f$  soit lipschitzienne

Soit  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$

- C'est le cas pour une fonction  $\mathcal{C}^1$  tq  $\exists k \in ]0, 1[, |f'(x)| \leq k$

IAF

Propriétés

### Utilisation des fonctions contractantes

On suppose  $I = [a, b]$ ,  $f$  est une fonction définie sur et stabilisant  $I$  contractante

- Il existe un point fixe  $c$  de  $f$  sur  $I$
- La suite récurrente définie par  $f$  converge vers  $c$

On étudie  $f(x) - x$  pour montrer l'existence puis on montre l'unicité et on revient à la définition des fonctions lipschitziennes pour montrer la limite de  $u_n$

## Fonctions monotones

### Fonction croissante

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $f$  croissante définie sur et stabilisant  $I$

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone et sa monotonie dépend du signe de  $u_1 - u_0$
- Si  $I$  est borné alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un point fixe

### Fonction décroissante

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $f$  décroissante définie sur et stabilisant  $I$

- $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont monotones, de monotonies opposées et leurs monotonies dépend du signe de  $u_2 - u_0$
- Si  $I$  est borné alors  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers un point fixe de  $f \circ f$



Les points fixes de  $f$  sont **inclus** dans ceux de  $f \circ f$

### Étude d'une suite récurrente

- Étude graphique de la fonction associée  $f$
- Étude de  $g(x) = f(x) - x$ 
  - Recherche de points fixes
  - Recherche d'intervalles où  $f(x) \geq x$
  - Recherches d'intervalles stables
- Sur un intervalle stable
  - $f \nearrow \Rightarrow (u_n)$  monotone
  - $f \searrow \Rightarrow (u_{2n})$  et  $(u_{(2n+1)})$  monotones
  - $f$  contractante sur  $[a, b] \Rightarrow (u_n) \rightarrow$  Unique point fixe de  $f$  sur l'intervalle
  - Présentation des résultats en distinguant des cas selon la valeur de  $u_0$

## Points fixes attractifs et répulsifs

- Si  $c$  est un point fixe de  $f : I \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1$ 
  - Si  $|f'(c)| < 1$  on dit que c'est un point fixe attractif
  - Si  $|f'(c)| > 1$  on dit que c'est un point fixe répulsif
- Si  $c$  est un point fixe attractif  $\exists \alpha > 0$  tel que la suite  $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$  converge vers  $c$ 
  - ⚠ On montre que  $f$  est contractante sur  $[c - \alpha, c + \alpha]$
- Si  $c$  est un point fixe répulsif et  $\begin{cases} u_0 = a \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$  converge vers  $c$  alors elle est stationnaire APCR
  - ⚠ On utilise le TAF pour montrer que la convergence n'est compatible qu'avec la stationnarité

### Calcul d'un équivalent d'une suite définie par récurrence

On définit la suite par  $\begin{cases} u_0 = I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$  tel  $u_n \rightarrow 0$  et avec  $f(x) = x + ax^p + o(x^p)$

- On pose  $v_n = u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$  et on remplace  $u_{n+1}$  par son DL
- On choisit  $\alpha$  tel  $v_n \rightarrow l$  ie  $v_n = l + o(1)$
- Par le lemme de l'escalier on a alors  $u_n^\alpha - u_0^\alpha \sim nl$

## 5.3 Récurrence linéaire multiple

### Cas $n = 2$ : récurrence linéaire double

Dans  $\mathbb{R}$

Dans  $\mathbb{C}$

- $\Delta = 0$   
 $u_n = (\lambda + n\mu)r_0^n, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$
- $\Delta \neq 0$   
 $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$

- $\Delta > 0$   
 $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$
- $\Delta = 0$   
 $u_n = (\lambda + n\mu)r_0^n, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$
- $\Delta < 0$ , On pose  $r = \rho e^{\pm i\theta}$   
 $u_n = \rho^n(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

Propriétés

### Généralisation

$$\begin{cases} (u_0, \dots, u_p) \\ u_{n+p} = \sum_{i=0}^{n+p-1} \lambda_i u_{n+i} \end{cases}$$

- L'ensemble des suites solutions est de dimension  $p$

On montre  $\varphi : u_n \rightarrow (u_0, \dots, u_p)$  est un isomorphisme

- On cherche les suites géométriques de raison non nulle solution
- On se ramène alors à l'équation caractéristique  $r_p = \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i r_i$
- Le polynôme admet  $q$  racines dans  $\mathbb{C}$  dont la somme des multiplicités est  $p$
- On trouve une base de l'ensemble des solutions comme combinaison linéaire des  $(n^{j_q} r_q^n)_{0 \leq j \leq m_q-1}$   
Il y a bien  $p$  éléments

Démo

## 5.4 Suites homographiques

$$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$$

- $c \neq 0$
- $ad - bc \neq 0$  sinon  $f$  constante

$$u_n \rightarrow l \Rightarrow f(l) = l \Leftrightarrow cl^2 + (d-a)l - b = 0$$

- $\Delta < 0 \Rightarrow$  Pas de convergence
- $\Delta > 0 \Rightarrow$  La suite  $v_n = \frac{u_n - r_1}{u_n - r_2}_{r_1 < r_2}$  est géométrique de raison  $r$ 
  - $|r| < 1 \rightarrow v_n \rightarrow 0 \Rightarrow u_n \rightarrow r_1$
  - $|r| > 1 \rightarrow v_n \rightarrow +\infty \Rightarrow u_n \rightarrow r_2$
  - $|r| = 1 \rightarrow v_n$  et  $u_n$  oscillent entre les deux racines
- $\Delta = 0 \Rightarrow v_n = \frac{1}{u_n - r}$  est arithmétique  $\Rightarrow v_n \rightarrow \pm\infty \Rightarrow u_n \rightarrow r$

Définition

## 1 Généralités

- Définition
- La série de terme général  $u_n$  est la suite  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$  dite suite des sommes partielles
  - Si  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$  on dit que la série de terme général  $u_n$  converge
  - Sinon on dit que  $\sum u_n$  diverge
  - Si  $\sum u_n$  converge alors on définit  $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ , le reste d'ordre  $n$  de la série

### Condition nécessaire de convergence

$$\sum u_n \text{ converge} \Rightarrow u_n \rightarrow 0$$

On passe à la limite sur  $u_n = S_n - S_{n-1}$

Par contraposée on a alors

$$u_n \neq 0 \Rightarrow \sum u_n \text{ diverge}$$

⚠ C'est une condition nécessaire et non suffisante

Propriétés

- $\sum u_n$  converge  $\Rightarrow R_n \rightarrow 0$

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge  $\Leftrightarrow \sum u_{n+1} - u_n$  converge

### Opérations sur les séries

$$\sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ convergent} \Rightarrow \sum u_n + \lambda v_n \text{ converge}$$

$$\text{De plus } \sum^{\infty} u_n + \lambda v_n = \sum^{\infty} u_n + \lambda \sum^{\infty} v_n$$

$$\Rightarrow \sum cv + \sum dv = \sum dv$$

## 2 Série à termes positifs

⚠ Il faut toujours vérifier la positivité avant d'utiliser les propriétés suivantes

- $\sum u_n$  converge  $\Leftrightarrow (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  majorée

### Comparaison par majoration ou minoration

Si  $0 \leq u_n \leq v_n$  APCR

- $\sum u_n$  diverge  $\Rightarrow \sum v_n$  diverge

- $\sum v_n$  converge  $\Rightarrow \sum u_n$  converge

On a alors  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$

### Comparaison par $O$ ou $\ll$

Si  $u_n = O(v_n)$  ou  $u_n \ll v_n$

- $\sum u_n$  diverge  $\Rightarrow \sum v_n$  diverge

- $\sum v_n$  converge  $\Rightarrow \sum u_n$  converge

**Comparaison par  $\sim$** 

Si  $u_n \sim v_n$  alors  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature  
 $\triangleleft$  Les natures sont les mêmes mais pas les sommes

**Séries de Riemann**

DEF: Ce sont les séries de terme général  $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$

- $\sum_1^\infty \frac{1}{n^\alpha}$  converge  $\Leftrightarrow \alpha > 1$

$\triangleleft$  Disjonction de cas sur le signe de  $\alpha$  pour la monotonie de la fonction puis sur la position par rapport à 1 et méthode des rectangles

- Comparaison aux séries de Riemann

$$\text{Si } \exists \alpha > 1, A \in \mathbb{R}^+, \begin{cases} u_n \sim \frac{A}{n^\alpha} \\ u_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \\ u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \end{cases}$$

alors  $\sum u_n$  converge

$$-\text{ Si } \exists \alpha \leq 1, A \in \mathbb{R}^+, \begin{cases} u_n \sim \frac{A}{n^\alpha} \\ \frac{1}{n^\alpha} = O(u_n) \\ \frac{1}{n^\alpha} = o(u_n) \end{cases}$$

alors  $\sum u_n$  diverge

Soit  $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$

- Si  $\alpha > 1$  alors  $R_n$  existe et  $R_n \sim \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$
- Si  $\alpha < 1$  alors  $S_n \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1 - \alpha}$

$\triangleleft$  Encadrement de  $S_n$  et  $R_n$  par méthode des rectangles

**Séries de Bertrand**

$\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$  converge  $\Leftrightarrow \alpha > 1$  ou  $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta > 1 \end{cases}$

$\triangleleft$  Disjonction de cas sur  $\alpha$  puis  $\beta$

**Règle de D'Alembert**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (R_+^*)^{\mathbb{N}}$

- Si  $\exists k \in ]0, 1[$  tq  $\exists n_0, \forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k$  alors  $\sum u_n$  converge
- Si  $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$  alors  $\sum u_n$  diverge

$\triangleleft$  Critère de comparaison logarithmique  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k \Rightarrow u_n = O(k^n)$

- **Corollaire :** Si  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow l$ 
  - Si  $l \in [0, 1[$  alors  $\sum u_n$  converge
  - Si  $l > 1$  alors  $\sum u_n$  diverge

$\triangleleft$  Si  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow 1$  on ne peut rien dire

**Critère de Duhamel**

Pour  $u_n > 0$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$   
 $\exists A, u_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$

**Critère d'Abel**

Soit  $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ,  $V_n = \sum_{k=0}^n v_k$

- $\sum_{k=0}^n u_k v_k = u_n V_n + \sum_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) V_k$
- $\begin{cases} (V_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ bornée} \\ u_n \geq 0 \\ u_n \searrow 0 \end{cases} \Rightarrow \sum u_n v_n \text{ converge}$

💡 Utilisation pour  $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$  ou  $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$

**Sommation des relations de comparaison**

Pour  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à termes positifs

- $u_n \sim v_n \Rightarrow \sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature
  - Si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  divergent alors  $\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k$
  - Si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  divergent alors  $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$
- Si  $u_n = o(v_n)$ 
  - $\sum u_n$  diverge  $\Rightarrow \sum v_n$  diverge et  $\sum_{k=0}^n u_k = o(\sum_{k=0}^n v_k)$
  - $\sum v_n$  converge  $\Rightarrow \sum u_n$  converge et  $\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k = o(\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k)$
- Idem avec  $u_n = O(v_n)$

⚠ Cesàro généralisé ou définition de la convergence

**Série absolument convergente**

On dit que  $\sum u_n$  est absolument convergente si  $\sum |u_n|$  converge

$\sum u_n$  est absolument convergente  $\Rightarrow \sum u_n$  est convergente

⚠ La réciproque est fausse

⚠ Propriétés du module ou de la valeur absolue Disjonction de cas R-C

**Série semi-convergente**

$\sum u_n$  est semi-convergente si  $\sum u_n$  converge et  $\sum |u_n|$  diverge

**Série alternée**

On dit que  $\sum u^n$  est une série alternée si  $\exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  de signe constant tel  $u_n = (-1)^n a_n$

**Critère spécial des séries alternées**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  une série alternée telle

- $|u_n|$  est le terme général d'une suite décroissante
- $|u_n| \rightarrow 0$

- $\sum u_n$  converge
- $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$  est du signe de  $u_{n+1}$  Premier terme
- $|R_n| \leq |u_{n+1}|$

 On montre que  $S_{2n}$  et  $S_{2n+1}$  sont adjacentes

La sommation des relations de comparaison est impossible pour des séries de termes de signes quelconques

**Méthode d'éclatement des termes**

- On effectue un DL
- On étudie les différents termes formés en temps que suite

 Utiliser plutôt  $O$  à la place de  $o$

 On montre  $\sum O(X)$  converge absolument donc converge si  $X$  converge

 Ne pas oublier de considérer le  $O$

**Produit de Cauchy**

Soient  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites à termes dans  $\mathbb{K}$

Soit  $c_n = \sum_{k=0}^n a_n b_{n-k}$ . Si  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  convergent absolument

- $\sum c_n$  converge absolument
- $\sum_{k=0}^{\infty} c_n = \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k \right)$

 On se ramène au cas où les suites sont positives et on résonne sur le triangle formé dans le plan

**4 Comparaison série intégrale**

- Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  continue, positive et décroissante
- $\sum_{k=0}^n f(k)$  et  $\int_0^\infty f$  sont de même nature

⚠ Méthode des rectangles

### Équivalent de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

- DL de  $\frac{v_{n+1}}{v_n}$  où  $v_n = \frac{n!}{n^n e^{-n}}$ , on montre l'existence d'une constante  $n! \sim K\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$
- Intégrales de Wallis pour déterminer la constante

## 5 Compléments

### Regroupement par paquets

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  et  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle  $\varphi(0) = 0$

On pose  $v_n = \sum_{k=\varphi(n)}^n u_k$

- $\sum u_n$  converge  $\Rightarrow \sum v_n$  converge et  $\sum_0^\infty u_k = \sum_0^n v_k$
- $\sum v_n$  diverge  $\Rightarrow \sum u_n$  diverge

⚠ On étudie les sommes partielles de  $v_n$  en sommant les paquets

⚠ La réciproque est fausse sauf dans deux cas

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$
- $u_n \rightarrow 0$  et les paquets sont bornés *sur leur longueur* (ie.  $\exists M \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n+1) - \varphi(n) \leq M$ )

### Modification de l'ordre des termes d'une série

- Modifier l'ordre des termes peut modifier sa nature ou sa limite
- Aucune modification si la série est absolument convergente

### Critère de Duhamel

Si  $u_n > 0, \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Alors  $\exists A, u_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$

### Critère d'Abel

Soient  $(u_n), (v_n) \in \mathbb{C}^{2\mathbb{N}}$  et  $V_n = \sum_{k=0}^n v_k$

1.  $\sum_{k=0}^n u_k v_k = u_n V_n + \sum_{k=0}^{n-1} (u_n - u_{k+1}) V_k$
2.  $\begin{cases} (V_n) \text{ bornée} \\ u_n \geq 0 \text{ et } v_n \searrow 0 \end{cases} \Rightarrow \sum u_n v_n \text{ converge}$

💡 Utiliser pour  $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$  et  $\sum \frac{\exp(in\theta)}{n^\alpha}$

## 1 Structures élémentaires

DEF: Une **loi de composition interne** est une application  $E \times E \rightarrow E$

### Groupe

Un groupe est un ensemble  $G$  muni d'une loi de composition interne  $\star$  tel :

- $\star$  est associative  $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$
- $G$  admet un élément neutre  $a \star e = e \star a = e$
- Tout élément admet un inverse  $a \star b = b \star a = e$

Si  $\star$  est commutative  $a \star b = b \star a$  alors le groupe est dit **abélien**

  $(\mathbb{R}, +), (\mathbb{Z}, +), (\mathbb{R}^*, +), (GL_n(\mathbb{R}), +)$

- $e$  est unique
- L'inverse est unique
- Simplifications  $a \star b = a \star c \Rightarrow b = c$

Définition

### Anneau

Un anneau est un ensemble muni de deux lois de composition internes  $+$  et  $\times$  tel :

- $(A, +)$  est un groupe abélien
- $\times$  est associative
- $\times$  admet un élément neutre
- $+$  est distributive par rapport à  $\times$   $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$

Un anneau est **intègre** si  $\forall (a, b) \in A, a \times b = 0 \Rightarrow a = 0$  ou  $b = 0$

  $(\mathbb{Z}, +, \times), (\mathbb{Q}, +, \times), (\mathbb{R}, +, \times), (\mathbb{C}, +, \times), (\mathbb{K}[X], +, \times), (\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$

- $a \in A$  est nilpotent si  $\begin{cases} a \neq 0 \\ \exists p \in \mathbb{N}, a^p = 0 \end{cases}$ . Il n'y a pas de nilpotent dans  $A$  intègre

Définition

### Corps

Un corps est un ensemble  $K$  tel

- $(K, +, \times)$  est un anneau
- $(K \setminus \{0\})$  est un groupe

  $(\mathbb{Q}, +, \times), (\mathbb{R}, +, \times), (\mathbb{C}, +, \times)$

Définition

### $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

Un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel est un ensemble muni de deux lois

- Une loi interne  $+$   $\begin{array}{ccc} E \times E & \rightarrow & E \\ (u, v) & \rightarrow & u + v \end{array}$
- Une loi externe  $\cdot$   $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \rightarrow & E \\ (\lambda, u) & \rightarrow & \lambda \cdot u \end{array}$

tel

- $(E, +)$  est un groupe abélien
- $1 \cdot u = u$
- $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$
- $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$
- $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$

Définition

$E$	Vecteurs
$\mathbb{K}$	Scalaires

▪  $\mathbb{K}, \mathbb{K}^n, \mathbb{K}[X], \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \mathfrak{M}_{n,p}$

**K-algèbre**

Une  $K$ -algèbre est un ensemble muni de deux LCI  $+$ ,  $\times$  et d'une loi externe  $\cdot$  tel

- $A(+, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -ev
- $A(+, \times)$  est un anneau

▪  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}[X], \mathcal{L}(E)$

**Sous-structures**

Sous groupe  
 –  $e \in S$   
 –  $\forall (a, b) \in S^2, a \cdot b \in S$   
 –  $\forall a \in S, a^{-1} \in S$

Sous-anneau  
 –  $(S, +)$  sg de  $A$   
 –  $\forall (a, b) \in S^2, a \times b \in S$

Sous-corps  
 –  $(S, +)$  sg de  $(A, +)$   
 –  $(S^*, \times)$  sg de  $(A^*, \times)$

Sev  
 –  $0 \in S$   
 –  $\forall (a, b, \lambda) \in S^2 \times \mathbb{K}, a + \lambda b \in S$

Sous-algèbre  
 –  $(S, +, \times)$  sous-anneau de  $(A, +, \times)$   
 –  $(S, +, \cdot)$  sev de  $(A, +, \cdot)$

Une sous structure de  $X$  est une structure  $X$

**Morphismes**

$\varphi : A \rightarrow B$  Modulo les bonnes lois

Groupe  
 –  $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) * \varphi(b)$

Anneau  
 –  $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$   
 –  $\varphi(a \times b) = \varphi(a) \times \varphi(b)$   
 – Idem pour les corps

Ev  
 –  $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$   
 –  $\varphi(\lambda a) = \lambda \varphi(a)$   
 –  $\varphi = \text{Applications linéaires}$   
 $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$

Algèbre  
 – Morphisme d'anneau  
 – Application linéaire

**2 Espaces vectoriels**

- $\lambda x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \text{ ou} \\ x = 0 \end{cases}$
- $F$  et  $G$  sev  $\Rightarrow F \cap G$  sev  
 Soit une famille  $(F_i)$  de sev  $\bigcap_i F_i$  est un sev
- $\triangle F$  et  $G$  sev  $\not\Rightarrow F \cup G$  sev  
 Sauf si  $F \subset G$  ou  $G \subset F$

⚠ Par l'absurde en prenant des éléments de  $A \setminus B$  et  $B \setminus A$

DEF: Une combinaison linéaire de  $(x_1 - x_n)$  est tout vecteur de la forme  $\gamma = \sum_i \lambda_i x_i$

- On note  $\text{vect}(x_1 - x_n)$  l'ensemble des combinaisons linéaires de  $(x_1 - x_n)$
- On dit que  $x$  est combinaison linéaire de vecteurs de  $A$  si  $\exists (x_1 - x_n) \in A, x = \sum_i \lambda_i x_i$

**Combinaisons linéaires**

- L'ensemble des combinaisons linéaires de  $A$  est noté  $\text{vect}(A)$
- $\text{vect}(A)$  est un sev est appelé sous-espace engendré par  $A$
- $A = \{x_0\} \Rightarrow \text{vect}(A)$  est la droite vectorielle dirigée par  $x_0$  *Idem pour un plan vectoriel*

- $A$  est un sev  $\Leftrightarrow A = \text{vect}(A)$
- $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -ev

### Applications linéaires

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$

- $E = F \Rightarrow u$  est un endomorphisme
- $u$  bijective  $\Rightarrow u$  est un isomorphisme
- $E = F$  et  $u$  bijective  $\Rightarrow u$  est un automorphisme

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$

- $\text{Ker}(u) = \{x \in E, u(x) = \{0\}\}$
- $\text{Im}(u) = \{y \in F, \exists x \in E, u(x) = y\}$
- Ker et Im sont des sev respectivement de  $E$  et  $F$

- $u$  injective  $\Leftrightarrow \text{Ker}(u) = \{0\}$
- $u$  surjective  $\Leftrightarrow \text{Im}(u) = F$

- **Restriction** : Pour  $E'$  sev de  $E$   $u|_{E'} \begin{array}{ccc} E' & \rightarrow & F \\ x & \rightarrow & u(x) \end{array}$
- **Corestriction** : Pour  $F'$  sev de  $F$  tel  $\text{Im}(u) \subset F'$   $u|^{F'} \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & F' \\ x & \rightarrow & u(x) \end{array}$
- Pour  $E'$  sev de  $E$  et  $F'$  sev de  $F$  tel  $u(E') \subset F'$   $u|^{F'}_{E'} \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & F' \\ x & \rightarrow & u(x) \end{array}$
- Ces applications sont linéaires
- La restriction et correstriction d'un endomorphisme est un endomorphisme
- $\text{Ker}(u|_{E'}) = \text{Ker}(u) \cap E'$
- $\text{Im}(u|_{E'}) = u(E')$
- $\text{Ker}(u|^{F'}) = \text{Ker}(u) \cap E'$
- $\text{Im}(u|^{F'}) = \text{Im}(u)$
- $\text{Ker}(u|^{F'}_{E'}) = \text{Ker}(u) \cap E'$
- $\text{Im}(u|^{F'}_{E'}) = u(E')$

### Somme directe

On définit  $\varphi \begin{array}{ccc} F_1 \times \dots \times F_p & \rightarrow & F_1 + \dots + F_p \\ (x_1 \times \dots \times x_p) & \rightarrow & x_1 + \dots + x_p \end{array}$

- $\varphi$  est surjective et linéaire par définition
- Si  $\varphi$  est injective alors  $(F_1, \dots, F_p)$  sont dits en somme directe  $F_1 \oplus \dots \oplus F_p$   
ie  $\sum_i x_i = 0 \Rightarrow \forall i, x_i = 0, (x_1 - x_p) \in (F_1 \times \dots \times F_p)$
- Si  $(F_1 - F_p)$  sont en somme directe alors  $y \in (F_1 + \dots + F_p)$  se décompose de manière unique dans ces ensembles
- Pour 2 ensembles :  $F \oplus G \Leftrightarrow F \cap G = \{0\}$   $\Delta$  Faux pour plus d'ensembles

### Ensembles supplémentaires

$F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$  si

- $F \oplus G$

- $F + G = E$

$$F \text{ et } G \text{ supplémentaires} \Leftrightarrow \begin{cases} F + G = E \\ F \cap G = \{0\} \end{cases} \Leftrightarrow \forall x \in E, \exists! (x_F, x_G) \in F \times G, x = x_F + x_G$$



Ne pas confondre supplémentaires et complémentaires *Si  $E = F \oplus G$  alors  $x \notin F \nrightarrow x \in G$*

### Définition d'une application linéaire par ses restrictions à des supplémentaires

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $G$  et  $H$  tel  $E = G \oplus H$

$u$  est entièrement définie par ses restrictions à  $G$  et  $H$

Soit pour  $v \in \mathcal{L}(G, F)$ ,  $w \in \mathcal{L}(H, F)$ ,  $\exists u \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $u|_G = v$ ,  $u|_H = w$

On montre l'existence par analyse synthèse puis l'unicité

*On généralise pour plus de deux supplémentaires*

### Théorème noyau image

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $G$  un supplémentaire de  $\text{Ker}(u)$  dans  $E$

$\Leftrightarrow u$  induit un isomorphisme de  $G$  dans  $\text{Im}(u)$   $u|_G^{\text{Im}(u)}$  est un isomorphisme

On montre injectivité et surjectivité

## 3 Projections et symétries

### Projecteurs

DEF:  $p$  est un projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$  si  $\begin{cases} p|_F = \text{id}_{\mathcal{L}(F, E)} \\ p|_G = 0_{\mathcal{L}(G, E)} \end{cases}$

- $p \circ p = p \Leftrightarrow p$  est le projecteur de  $\text{Im}(p)$  parallèlement à  $\text{Ker}(p)$
- Si  $E = F \oplus G$  alors on définit les projecteurs de  $\begin{cases} p_{F \parallel G} \\ q_{G \parallel F} \end{cases}$  où  $q$  est le projecteur associé à  $p$
- $q = \text{id} - p$
- $\begin{cases} \text{Im}(p) = \text{Ker}(q) \\ \text{Im}(q) = \text{Ker}(p) \end{cases}$

### Symétries

DEF:  $s$  est la symétrie sur  $F$  parallèlement à  $G$  si  $\begin{cases} s|_F = \text{id}_{\mathcal{L}(F, E)} \\ s|_G = -\text{id}_{\mathcal{L}(G, E)} \end{cases}$

- $s$  est une symétrie  $\Rightarrow s \circ s = \text{id}_E$
- $s \circ s = \text{id} \Rightarrow s$  est une symétrie
- Décomposition sur  $\text{Ker}(s - \text{id}_E)$  et  $\text{Ker}(s + \text{id}_E)$
- Si  $E = F \oplus G$  alors  $s_{F \parallel G} = 2p_{F \parallel G} - \text{id}$

## 4 Familles

## Famille libre

DEF:  $(x_1 - x_n)$  est **libre** si  $\forall (\lambda_1 - \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \sum_i \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_n) = (0 - 0)$

- Une famille infinie indexée par un ensemble est libre si toutes ses sous-familles le sont
- Si une famille est libre, elle a ses vecteurs linéairement indépendants

DEF: Une famille qui n'est pas libre est **liée**

- On appelle relation de dépendance linéaire une relation tel  $x = \sum_i \lambda_i x_i$

Définition

## Famille génératrice

DEF:  $(x_1 - x_n)_{de E}$  est génératrice si  $\text{vect}((x_1 - x_n)) = E$

$$\text{i.e. } \forall y \in E, \exists n \in \mathbb{N}, \exists (x_1 - x_n) \in (x_i)_{i \in I}, \exists (\lambda_1 - \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, y = \sum_i^n \lambda_i x_i$$

Définition

## Base

DEF:  $(x_1 - x_n) \in E^n$  est une base de  $E$  si elle est libre et génératrice

- Cadre Fini : Si  $(e_1 - e_n)$  est une base de  $E$  alors  $\forall x \in E, \exists! (\lambda_1 - \lambda_n) \in K^n, x = \sum_i^n \lambda_i e_i$   
 $(\lambda_1 - \lambda_n)$  sont alors les coordonnées de  $x$  dans la base  $(e_1 - e_n)$

⚠️ | On sépare existence et unicité

### — Cadre infini

DEF:  $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^n$  est dite presque nulle si  $\exists J_{fini} \subset I, \forall i \in I \setminus J, \lambda_i = 0$ , on note  $\mathbb{K}^{(I)}$  ces familles

- Soit  $x \in E, \exists! (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}, x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$   
 $(\lambda_i)_{i \in I}$  sont les coordonnées de  $x$  dans la base  $(e_i)_{i \in I}$

⚠️ | On sépare existence et unicité et on se ramène au cadre fini

- Base canonique de  $\mathbb{K}^n : e_i = (0 - 010 - \dots - 0)$
- Base canonique de  $\mathbb{K}(X) : e_i = X^i$

Définition

- Une famille comprenant  $0_E$  est liée'
- Deux vecteurs sont colinéaires  $\Leftrightarrow$  La famille est liée  
 $\triangleleft$  Faux pour plus de deux vecteurs
- Une famille est liée  $\Leftrightarrow$  Un vecteur est combinaison des autres
- Toute sous-famille d'une famille libre est libre
- Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice
- Une famille libre maximale est une base
- Une famille génératrice minimale est une base
- L'image d'une famille libre par  $u$  injective est injective
- L'image d'une famille génératrice par  $u$  surjective est surjective

Propriétés

- L'image d'une base par un isomorphisme  $u$  est une base
- L'image d'une famille génératrice par  $u$  est une famille génératrice de  $\text{Im}(u)$
- L'image d'une famille liée par  $u$  est une famille liée

**Caractérisation d'un isomorphisme**

Si  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  transforme une base de  $E$  en une base de  $F$  c'est un isomorphisme

⚠️ On montre injectivité puis surjectivité

**Caractérisation d'une application linéaire**

- Une application linéaire est entièrement caractérisée par l'image d'une base
- $\exists! u \in \mathcal{L}(E, F), \forall i \in I, u(e_i) = f_i$

⚠️ Analyse synthèse pour montrer l'unicité puis l'existence

## 5 Dimension finie

- $E$  est un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie si il existe une famille génératrice de  $E$  finie

- Lemme de Steinitz : Si  $F = \text{vect}(x_1 - x_n)$  toute famille de  $n + 1$  vecteurs de  $F$  est liée
 

⚠️ Récurrence et RDL
- Les bases de  $E$  de dimension finie sont de cardinal fini et ont toutes le même cardinal :  $\dim(E)$ 

⚠️ On suppose par l'absurde que de bases n'ont pas le même cardinal  $\Rightarrow$  Steinitz

**Théorème de la base extraite**

- Il existe une sous famille de toute famille génératrice qui est une base
- Corollaire : Tout  $K$ -ev fini admet une base

⚠️ On montre que l'ensemble des familles libres de  $E$  est non vide et la plus grande est une base

**Théorème de la base incomplète**

Soit  $(x_1 - x_p)$  une famille libre de  $E$ , on peut compléter cette famille en une base de  $E$

- Entre une famille libre et une de ses surfamilles génératrice on peut trouver une base
- Toute famille libre génératrice de cardinal  $\dim(E)$  est une base
- Tout sev de  $E$  admet un supplémentaire

─ On forme une base de  $E$  par le TBI à partir d'une base de  $F \subset E$

### Théorème de la décomposition adaptée

Soit  $J, K$  une partition de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  et  $\begin{cases} F = \text{vect}((e_i)_{i \in J}) \\ G = \text{vect}((e_i)_{i \in K}) \end{cases}, F \oplus G = E$

On généralise pour  $p$  sev

### Théorème de recollement

Soient  $F$  et  $G$  deux supplémentaires de  $E$  de bases  $(f_1 - f_p)$  et  $(g_1 - g_q)$   
 $(f_1 - f_p, g_1 - g_q)$  est une base de  $E$

─ On montre la liberté et la génération

─ On généralise pour  $n$  supplémentaires

- $(e_1 - e_n)$  est une base adaptée à  $F_{\dim F = p}$  si  $(e_1 - e_p)$  est une base de  $F$
- $E$  et  $F$  sont isomorphes  $\Leftrightarrow \dim(E) = \dim(F)$

─ On passe par une application linéaire de  $E$  dans  $F$

### Opérations sur les dimensions

- $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$

─ On montre que  $((e_1, 0_F) - (e_n, 0_F)(0_E, f_1) - (0_E, f_n)$

- $\dim(E^n) = n \dim(E)$

- $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$

─ On montre l'isomorphisme de  $\varphi \mid_u \mathcal{L}(E, F) \rightarrow F_p(u(e_1) - u(e_p))$

- $\dim(\mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = E^*) = \dim(E)$  ces éléments sont appelés formes linéaires

- $\begin{cases} F \subset G \\ \dim(F) = \dim(G) \end{cases} \Rightarrow F = G$

- Formule de Grassmann :  $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$

─ On part du théorème du rang,  $f \mid_{(x, y)} F \times G \rightarrow F + G$  est surjective et  $\varphi \mid_x F \cap G \rightarrow \text{Ker}(f)$  est un isomorphisme

- $\bigoplus_{i=1}^n F_i \Leftrightarrow \dim(F_1 + \dots + F_n) = \sum_{i=1}^n \dim(F_i)$

## 6 Rang d'une application linéaire

DEF:  $\text{rg}(u) = \dim(\text{Im}(u))$

- $\text{rg}(u) \leq \max(\dim(E), \dim(F))$
- Corollaire de la formule de Grassmann :  $F \oplus G = E \Leftrightarrow \begin{cases} F + G = E \\ F \cap G = \{0\} \end{cases}$
- $\text{rg}(v \circ u) \leq \min(\text{rg}(u), \text{rg}(v))$   
Si  $u_v$  est un isomorphisme  $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(v)_{\text{rg}(u)}$

### Théorème du rang

- Pour  $E$  fini et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$   
 $\dim(E) = \text{rg}(u) + \dim(\text{Ker}(u))$   
⚠ Théorème noyau image :  $u|_{E'}^{\text{Im}(u)}$  est un isomorphisme
- Corollaire : Si  $E$  est fini  $\triangleq$  Faux en dimension infinie  
 $u$  injective  $\Leftrightarrow u$  surjective  $\Leftrightarrow u$  isomorphisme

- Soient  $(a_1 - a_{n+1}), (b_1 - b_{n+1}) \in \mathbb{K}^{2(n+1)}$   
 $\exists! P \in \mathbb{K}_n[X], \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, P(a_i) = b_i$ , on l'appelle polynôme d'interpolation de Lagrange  
⚠  $\varphi \mid \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \rightarrow & (P(a_1) - P(a_n)) \end{array}$  est un isomorphisme
- $P(X) = \sum_{i=1}^{n+1} b_i L_i(X)$  où  $L_i(X) = \prod_{j=1, j \neq i}^{n+1} \left( \frac{X - a_j}{a_i - a_j} \right)$   
⚠ Comme  $L_i$  est du bon degré il suffit de vérifier que ça marche

## 8 Formes linéaires et hyperplans

DEF:  $H$  est un hyperplan  $\Leftrightarrow \dim(H) = \dim(E) - 1$

- Soit  $\varphi \in E^*$ ,  $\text{Ker}(\varphi)$  est un hyperplan
- $\exists \varphi \in E^*, H = \text{Ker}(\varphi)$   
⚠  $x = \sum \lambda_i e_i$  on montre  $\text{Ker}(\varphi) = H$  pour  $\varphi \mid \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \lambda_n \end{array}$
- $H$  hyperplan  $\Leftrightarrow \exists \varphi \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}, H = \text{Ker}(\varphi)$
- $\exists (\varphi, \psi) \in E^{2*}, \text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\psi) \Rightarrow \varphi \propto \psi$
- Tout sev de dimension  $p < n = \dim(E)$  est l'intersection de  $n - p$  hyperplans

### Équation cartésienne d'un hyperplan

- On complète les vecteurs de l'hyperplan en une base  $\mathcal{B}$  de  $E$
- On résout le système lié à  $(x_1 - x_n) = \sum_{b \in \mathcal{B}} \lambda_i b_i$  pour exprimer les  $\lambda_i$  en fonction des  $(x_i)$

- Une matrice est une application  $A \mid \begin{matrix} \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket \\ (i, j) \end{matrix} \rightarrow \mathbb{K}^{np}$
- On représente la matrice sous forme d'un tableau de  $n$  lignes et  $p$  colonnes
- On note  $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices de dimensions  $n \times p$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$

**Matrice d'une application linéaire**

$$\begin{array}{cccccc} u(e_1) & \cdots & u(e_j) & \cdots & u(e_n) \\ f_1 & \left( \begin{array}{cccc} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_i & a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_n & a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{array} \right) \end{array}$$

On décompose  $u(e_j)$  dans la base  $\mathcal{F}$

$$u(e_j) = \sum_i a_{ij} f_i$$

On forme la matrice des  $a_{ij}$

$$\text{On note } A = \text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u)$$

- $\forall A \in \mathfrak{M}_{n,p}, \exists! u \in \mathscr{L}(E, F), \text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u) = A$
- $\blacksquare$  | Une application linéaire est entièrement définie par l'image d'une base
- On appelle matrice canoniquement associée la matrice  $\text{mat}_{BC_1, BC_2}(u)$

**Opérations**

- Somme :  $(a + b)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
- Produit :  $(\lambda a)_{ij} = \lambda a_{ij}$
- Produit matriciel :  $(ab)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$

- $\text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(v \circ u) = \text{mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(v) \times \text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$
- $\blacksquare$  | Calcul de  $v \circ u(e_j)$
- $\varphi \mid \begin{matrix} \mathscr{L}(E, F) \\ u \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ \text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u) \end{matrix}$  est un isomorphisme
- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
- $E_{i,j} \times E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}$
- $A \times B = I_n \Leftrightarrow B \times A = I_n$
- $\blacksquare$  |  $\psi \mid \begin{matrix} \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \\ M \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \mathfrak{M}_n(K) \\ M \times A \end{matrix}$  est un automorphisme puis utilisation de la surjectivité

## Algèbre des matrices carrées

- $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot, \times)$  est une algèbre **non commutative**

## Matrices inversibles

DEF:  $A$  est inversible  $\Leftrightarrow \exists B, A \times B = I_n$

- On appelle groupe linéaire  $GL_n(\mathbb{K})$  de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices inversibles  
C'est un groupe pour la loi  $\times$
- Si l'inverse existe, il est unique
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$
- On note  $GL(E)$  l'ensemble des automorphismes de  $E$ 
  - $u \in GL(E) \Leftrightarrow \text{mat}_{\mathcal{B}}(u) \in GL_n(\mathbb{K})$
  - $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u^{-1}) = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u)^{-1}$

## Matrices triangulaires et diagonales

Matrice	Triangulaire supérieure		Triangulaire inférieure		Diagonale
	Normale	Stricte	Normale	Stricte	
Définition	$i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$	$i \geq j \Rightarrow a_{ij} = 0$	$i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$	$i \leq j \Rightarrow a_{ij} = 0$	$i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$
Ensemble	$\mathcal{T}_n^+$	$\mathcal{T}_n^{++}$	$\mathcal{T}_n^-$	$\mathcal{T}_n^{--}$	$\mathcal{D}_n$
Dimension	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$n$
$u \in X \Leftrightarrow u(e_k) \in$	$\text{vect}(e_1 - e_k)$	$\text{vect}(e_1 - e_{k-1})$	$\text{vect}(e_k - e_n)$	$\text{vect}(e_{k+1} - e_n)$	$\text{vect}(e_k)$

- Ces ensembles sont stables par le produit
- Les matrices triangulaires strictes sont nilpotentes

## Polynômes annulateurs

- Toute matrice admet un polynôme annulateur ie  $\forall A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \exists P \in \mathbb{K}[X] \neq 0, P(A) = 0$
- Par Steinitz,  $(I_n, A, -, A^n)$  est lié  $\Rightarrow \exists$  RDL
- Corollaire :  $\forall A \in GL_n(\mathbb{K}) \exists Q \in \mathbb{K}[X], A^{-1} = Q(A)$
- Corollaire : Soit  $F$  stable par  $\times$  contenant  $I_n$ ,  $A \in F \cap GL_n(K) \Rightarrow A^{-1} \in F$

- En considérant  $\mathcal{B}$  la base de  $E$  adaptée à  $F$   
 $u$  stabilise  $F \Leftrightarrow \text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$
- Généralisation : Si  $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$   
 $u$  stabilise  $F_i \Leftrightarrow \text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$  est diagonale par blocs où chaque bloc est de taille  $\dim(F_i)$

## 2 Rang d'une matrice

DEF:  $\text{rg}(A) = \dim(\text{vect}(C_1 - C_n))$   
 –  $\text{rg}(\text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u)) = \text{rg}(u \in \mathcal{L}(E, F))$   
 $\Delta | \varphi | \begin{array}{ccc} F & \rightarrow & \mathbb{K}^n \\ x & \rightarrow & \text{mat}_{\mathcal{F}}(x) \end{array}$  est un isomorphisme

- $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \Rightarrow \text{rg}(A) \leq \min(n, p)$
- $\text{rg}(AB) \leq \text{rg}(A)\text{rg}(B)$
- Si  $B$  inversible,  $\text{rg}(AB) = \text{rg}(A)$
- $A \in GL_n(K) \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n$

### 3 Changement de base

DEF: On appelle matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ , la matrice  $\mathcal{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{id}_E)$   
*On exprime les vecteurs de la nouvelle base dans l'ancienne*  
 –  $\mathcal{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$  est inversible et d'inverse  $\mathcal{P}_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}$

#### Formules de changement de base

- Lien entre anciennes et nouvelles coordonnées

$$\mathcal{B}' \xrightarrow[\mathcal{P}]{} \mathcal{B}$$

- Lien entre ancienne et nouvelle matrices

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow[M]{f} & \mathcal{F} \\ \text{id}_E \uparrow \mathcal{P} & & \mathcal{Q}^{-1} \downarrow \text{id}_E \\ \mathcal{E}' & \xrightarrow[f]{M'} & \mathcal{F}' \end{array} \quad \begin{array}{c} f = \text{id}_E \circ f \circ \text{id}_E \\ \underbrace{\text{mat}_{\mathcal{E}', \mathcal{F}'}(f)}_{M'} = \underbrace{\text{mat}_{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}(\text{id}_E)}_{\mathcal{Q}^{-1}} \underbrace{\text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(f)}_M \underbrace{\text{mat}_{\mathcal{E}', \mathcal{E}}(\text{id}_E)}_{\mathcal{P}} \\ \underbrace{\text{mat}_{\mathcal{B}'}(f)}_{M'} = \underbrace{\text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\text{id}_E)}_{\mathcal{P}^{-1}} \underbrace{\text{mat}_{\mathcal{B}}(f)}_M \underbrace{\text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{id}_E)}_{\mathcal{P}} \end{array}$$

$\Delta$  Décomposition d'un vecteur de l'ancienne base dans la nouvelle

#### Matrices équivalentes

DEF:  $A$  et  $B$  sont équivalentes  $\Leftrightarrow \exists (P, Q) \in (GL_p(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K})), B = Q^{-1}AP$

- C'est une relation d'équivalence
- $A$  et  $B$  sont équivalentes  $\Leftrightarrow$  Elles représentent la même AL dans deux bases différentes
- $\text{rg}(A) = r \Leftrightarrow A$  est équivalente à  $J_r$  Diagonale de 1 sur le premier bloc  
 $\Delta$  On applique le TNI à un supplémentaire de  $\text{Ker}(u)$  dans  $E$  et on forme la matrice  $J_r$  à partir d'une base complétée adaptée à la décomposition
- Corollaire :  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^T)$

## Matrices semblables

DEF:  $A$  et  $B$  sont semblables  $\Leftrightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{K}), B = P^{-1}AP$

- La relation de similitude est une relation d'équivalence
- $A$  et  $B$  sont équivalentes  $\Leftrightarrow$  Elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes

On montre que  $P$  est une matrice de passage et on applique le changement de base pour montrer  $A = \text{mat}_{\mathcal{B}_1}(u)$  et  $B = \text{mat}_{\mathcal{B}_2}(u)$

- La relation de similitude n'est pas équivalente à la relation d'équivalence
- Deux matrices semblables ont la même trace

Définition

Montrer que deux matrices sont semblables revient à montrer qu'elles sont l'image d'un même endomorphisme dans deux bases différentes

## 4 Éléments de calcul

Pour des endomorphismes faisant intervenir la transposée on décompose sur  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$

### Trace d'une matrice carrée

DEF:  $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$

- $\text{tr}$  est une forme linéaire
- $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$
- $\text{tr}(ABC) \neq \text{tr}(ACB)$  : Vrai uniquement pour des permutations cycliques
- $H = \text{Ker}(\text{tr})$  forme un hyperplan de dimension  $n^2 - 1$  de base  $(E_{ij})_{i \neq j} \cup (E_{ii} - E_{nn})_{i \in [1, n-1]}$
- $\text{tr}(u) = \text{tr}(\text{mat}_{\mathcal{B}}(u))$  Justifié car la trace ne dépend pas de la base car matrices semblables
- Pour  $p$  projecteur  $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$  Notons  $\text{tr}(p) \in \mathbb{N}$

Expression de la matrice d'un projecteur adaptée à la décomposition  $\text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u) = E$

Définition

### Matrices définies par blocs

- $\left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline C' & D' \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} A + A' & B + B' \\ \hline C + C' & D + D' \end{array} \right)$
- $\left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline C' & D' \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} AA' + BC' & AB' + BD' \\ \hline CA' + DC' & CB' + DD' \end{array} \right)$
- $\left( \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right)^n = \left( \begin{array}{c|c} A^n & 0 \\ \hline 0 & B^n \end{array} \right)$
- $\left( \begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array} \right)$  inversible  $\Leftrightarrow P$  et  $Q$  inversibles on a alors  $\left( \begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array} \right)^{-1} = \left( \begin{array}{c|c} P^{-1} & 0 \\ \hline 0 & Q^{-1} \end{array} \right)$
- Plus généralement  $\left( \begin{array}{c|c} P & R \\ \hline 0 & Q \end{array} \right)$  est inversible

Propriétés

- Les **opérations de pivot** par blocs sont possibles
- Généralisable avec plus de blocs

### Inversion de matrices

- Chercher un polynôme annulateur
- Interpréter la matrice comme une matrice de passage et trouver l'expression inverse des bases
- Interpréter  $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$
- Si  $A$  est diagonalisable  $A = PDP^{-1} \Rightarrow A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$
- Formule  $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{com}(A)^T$
- Résoudre  $A \times B = I_n$

## 1 Formes n-linéaires alternées

Définition

DEF:  $f \mid E^n \rightarrow \mathbb{K}$  est n-linéaire si  $f$  est linéaire par rapport à chaque vecteur

DEF:  $f$  est une forme  $n$ -linéaire alternée si

$$\forall (x_1 - x_n) \in E^n, \exists (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j, x_i = x_j \Rightarrow f(x_1 - x_n) = 0$$

– On note  $\mathcal{L}_n(E, \mathbb{K})$  l'ensemble des formes linéaires n-alternées

⚠

Une forme  $n$ -linéaire n'est pas linéaire

Propriétés

- $\mathcal{L}_n(E, \mathbb{K})$  est un  $\mathbb{K}$ -ev, sev de  $\mathcal{F}(E^n, \mathbb{K})$
- $f$  est une forme  $n$ -linéaire alternée  $\Leftrightarrow \forall (x_1 - x_n) \in E^n, \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j, f(x_1 - x_i - x_j - x_n) = -f(x_1 - x_j - x_i - x_n)$
- Si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$  alors  $\dim(\mathcal{L}(E, \mathbb{K})) = 1$   
Cet ensemble est donc une droite vectorielle

Définition

### Déterminants

DEF:  $\exists ! f \in \mathcal{L}_n(E, \mathbb{K})$  tel  $f(e_1 - e_n) = 1$

$f$  est alors le déterminant de la base  $\mathcal{B} = (e_1 - e_n)$  et se note  $\det_{\mathcal{B}}$

⚠ Unicité : On suppose l'existence de  $f$  et  $g$ , comme  $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  est une droite  $f \propto g$  et on applique  $f(e_1 - e_n) = g(e_1 - e_n) = 1$

–  $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}$

⚠ On a proportionnalité des deux déterminants car éléments de  $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  et on détermine la valeur du coefficient de proportionnalité

–  $(x_1 - x_n)$  base de  $E \Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}}(x_1 - x_n) \neq 0$

⚠  $\Leftarrow$  par contraposée,  $\Rightarrow$  par ce qui précède

## 2 Déterminant d'une matrice carrée

Définition

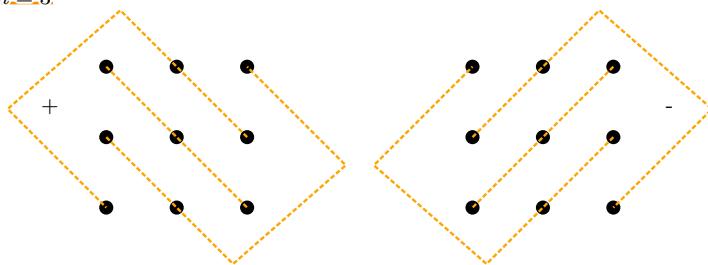
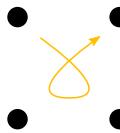
### Déterminant d'une matrice carrée

Il existe une unique application  $\det \mid \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  telle que  $\det(M) = \det(M^T)$

- $\det$  est linéaire par rapport à chacune des colonnes de  $M$
- $\det$  est antisymétrique Permutation de deux colonnes  $\Rightarrow \det$  change de signe
- $\det(I_n) = 1$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Notation de Cauchy

Détermination du déterminant  $n=2$  et  $n=3$ 

Opération	Nom	Notation	$\det$
$C_i \leftrightarrow C_j$	Permutation	$\mathcal{P}_{i,j}$	$-\det$
$C_i \leftarrow \lambda C_i$	Dilatation	$\mathcal{D}_{i,j}(\lambda)$	$\lambda \det$
$C_i \leftarrow C_i + \lambda C_{ji} \neq j$	Transvection	$\mathcal{T}_{i,j}(\lambda)$	$\emptyset$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & A_{n,n} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n A_{i,i}$$

Pour  $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}) \cup \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cup \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$

Même conclusion pour des opérations sur les lignes

Pour la matrice triangulaire, on fait une récurrence sur  $n$  et un développement sur la première colonne

Règles de calcul

⚠ Pas de sommes  $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$

- $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
- $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 : \text{On a alors } \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

⚠ On utilise  $\text{rg}(A) = n$  donc  $(C_1 - C_n)$  est une base de  $E$  d'où  $\det \neq 0$

- $\det(A^T) = \det(A)$

⚠ Série de transformations élémentaires pour se ramener à une triangulaire inférieure et transposition du produit de matrices élémentaires

- $\det(u) = \det(\text{mat}_{\mathcal{B}}(u))$  Ne dépend pas de la base choisie

Déterminants par blocs

Pour des matrices carrées

$$\begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det(A) \det(B)$$

Généralisation :

$$\begin{vmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & A_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n \det A_i$$

Formules du développement d'un déterminant

DEF: On appelle **mineur**  $\Delta_{i,j}$  de  $A$  d'indices  $(i, j)$ , le déterminant de la matrice  $A$  privée de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$

DEF:  $(-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$  est de **cofacteur** de  $A$  d'indices  $(i, j)$

DEF:  $((-1)^{i+j} \Delta_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  est appelée **comatrice**  $\text{com}(A)$  de  $A$

Soit  $n \geq 2$  et  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

- $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_{i,k} \Delta_{i,k}$  Développement de  $\det(A)$  selon la  $k^e$  colonne
  - $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_{k,i} \Delta_{k,i}$  Développement de  $\det(A)$  selon la  $k^e$  ligne
- ⚠ Utilisation de la  $n$  linéarité et opérations sur les colonnes puis les lignes

### Formule de la comatrice

- $A \text{com}(A)^T = \text{com}(A)^T A = \det(A) I_n$
- ⚠ On montre  $C_{jj} = \det(A)$  et  $C_{jk} = 0$  pour  $C = \text{com}(A)^T A$  par développement
  - On a alors une expression de  $A^{-1}$  pour  $A \in GL_n(\mathbb{K})$
  - On peut montrer que  $\det(A)$  est **polynomial** par rapport aux coefficients de  $A$
  - $\det(A + xB)$  est un polynôme de degré  $\leq n$

### Développement du déterminant

- On raye la ligne<sub>colonne</sub> en question
- Pour chaque élément de la ligne<sub>colonne</sub> rayée
  - Le signe est donné par la matrice des signes
  - On multiplie par l'élément
  - La matrice carrée résultant de la rayure de la colonne<sub>ligne</sub> de l'élément

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

### Méthodes de calcul

- Opérations élémentaires  $\leftrightarrow$  Pivot
- Développement suivant lignes ou colonne
- Utilisation de polynômes
- Développement par  $n$ -linéarité
- Dérivation
- Calcul de valeurs propres

### Déterminant de Vandermonde

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1^1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2^1 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n^1 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

⚠ Récurrence en utilisant des opérations élémentaires puis un développement par rapport à la première colonne

- 💡
- $V(a, b, c) = (c - b)(c - a)V(a, b) = (c - b)(c - a)(b - a)$
  - $V(x_1, \dots, x_n) = (x_n - x_{n-1}) \dots (x_n - x_1)V(x_1, \dots, x_{n-1})$

## 3 Systèmes linéaires

DEF: On appelle équation linéaire une équation du type  $(E)$ :  $f(x) = b$  où  $f \in \mathcal{L}(E, F)$

- On note  $\mathcal{S}_E$  l'ensemble des solutions : l'équation est compatible si  $\mathcal{S}_E \neq \emptyset$
- $f(x) = 0$  est l'équation homogène associée à  $(E)$

- $(E)$  est compatible  $\Leftrightarrow b \in \text{Im}(f)$
- $\mathcal{S}_E = \mathcal{S}_H + x_0$  où  $x_0$  est une solution particulière

- Superposition : Si  $\begin{cases} f(x_1) = b_1 \\ f(x_2) = b_2 \end{cases}$  alors  $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$

Cas	$f$	$(E)$
$\text{rg}(f) = \dim(F)$	Surjective	Compatible
$\text{rg}(f) < \dim(F)$	Non surjective	Pas toujours compatible
$\text{rg}(f) = \dim(E)$	Injective	Compatible $\Rightarrow$ Unicité
$\text{rg}(f) < \dim(E)$	Non injective	Compatible $\not\Rightarrow$ Unicité
$\text{rg}(f) = \dim(E) = \dim(F)$	Bijective	Existence et unicité

- Un système linéaire se traduit matriciellement

$$AX = B$$

- $A = \text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(f)$  est la matrice de  $\mathcal{S}_E$
- $X$  est le vecteur colonne des coordonnées de  $x$  dans  $\mathcal{E}$
- $B$  est le vecteur colonne des coordonnées de  $b$  dans  $\mathcal{F}$

- $\mathcal{S}_E$  est compatible  $\Leftrightarrow B \in \text{vect}(C_1 - C_{\dim(E)})$

### Systèmes de Cramer

- $\mathcal{S}_E$  est un système de Cramer si  $A$  est inversible  
Soit  $\dim(E) = \dim(F)$  et  $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow f$  bijective

- Il existe une unique solution  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$  où  $x_i = \frac{\det(C_1 - C_{i-1}BC_{i+1} - C_n)}{\det(A)}$

⚠️ |  $n$  linéarité en exprimant  $B$

## 4 Géométrie

### Orientation d'un espace vectoriel

- On fixe  $\mathcal{B}$  une base
- Pour  $\mathcal{B}'$  on définit l'orientation comme
  - Directe si  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$
  - Indirecte si  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') < 0$
- $(E, \mathcal{B})$  est alors un  $\mathbb{K}$ -ev orienté

### Points alignés

- $(M_1, M_2, M_3)$  alignés  $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0$

⚠️ |  $\Rightarrow$  On part du système et on inclut  $ax + by = c$   
 $\Leftrightarrow$  Existence d'une RDL entre les lignes

- Équation d'une droite passant par deux points

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x \\ y_1 & y_2 & y \end{vmatrix} = 0$$

## Points coplanaires

- $(M_1, M_2, M_3, M_4)$  coplanaires  $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} = 0$
- Équation d'un plan passant par trois points :  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x \\ y_1 & y_2 & y_3 & y \\ z_1 & z_2 & z_3 & z \end{vmatrix} = 0$

## Points cocycliques

- $(M_1, M_2, M_3, M_4)$  cocycliques  $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_2^2 + y_2^2 & x_3^2 + y_3^2 & x_4^2 + y_4^2 \end{vmatrix} = 0$
- ⇒ Les points appartiennent à  $x_i^2 + y_i^2 + ax + by_i + c = 0$  RDL entre les lignes  
⇐ Il existe un cercle passant par 3 points on montre que le quatrième y est aussi
- Équation du cercle *circonscrit* passant par trois points *non aplatis* :  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x \\ y_1 & y_2 & y_3 & y \\ x_1^2 + y_1^2 & x_2^2 + y_2^2 & x_3^2 + y_3^2 & x^2 + y^2 \end{vmatrix} = 0$

## Points cosphériques

- $(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5)$  cosphériques  $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 & x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 & x_5^2 + y_5^2 + z_5^2 \end{vmatrix} = 0$
- ⇒ Équation d'une sphère passant par 4 points non coplanaires

## Concurrence

- $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$  concourantes ou parallèles  $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$  où  $\mathcal{D}_i : a_i x + b_i y = c_i$   
⇒ On distingue les cas concurrence et parallèles  
⇐ On distingue  $\text{rg}(A) = 1$  et  $\text{rg}(A) = 2$  pour lequel on prend un point dans l'intersection de deux droites, on applique les formules de Cramer et un développement pour montrer qu'il appartient à la troisième
- $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4$  concourants ou parallèles  $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = 0$  où  $\mathcal{P}_i : a_i x + b_i y + c_i z = d_i$

## 1 Éléments propres

Définition

### Vecteur propre

- On dit que  $x \in E$  est une vecteur propre de  $u \in \mathcal{L}(E)$  associé à  $\lambda \in \mathbb{K}$  si
  - $x \neq 0_E$
  - $u(x) = \lambda x$
- On note  $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$
- $x$  est vecteur propre de  $u \Leftrightarrow x \in E_\lambda(u) \setminus \{0_E\}$

Définition

### Valeurs propres

- On dit que  $\lambda$  est valeur propre de  $u$  si  $E_\lambda(u) \neq \{0\}$
- On appelle **spectre** de  $u$  l'ensemble de ses valeurs propres  
D'où  $\lambda \in \text{sp}(u) \Leftrightarrow E_\lambda(u) \neq \{0_E\}$
- Si  $\lambda \in \text{sp}(u)$  on dit que  $E_\lambda(u)$  est le sous-espace propre de  $u$  associé à  $\lambda$

Propriétés

- Tous les vecteurs de  $E_\lambda(u)$  sont des vecteurs propres sauf  $0_E$
- $E_0(u) = \text{Ker}(u)$   
Corollaire :  $0 \in \text{sp}(u) \Leftrightarrow u$  n'est pas injective
- Si  $\lambda \neq 0$ ,  $E_\lambda(u) \subset \text{Im}(u)$
- $\left\{ \begin{array}{l} \lambda \in \text{sp}(u - \alpha \text{id}_E) \Leftrightarrow \lambda + \alpha \in \text{sp}(u) \\ E_\lambda(u - \alpha \text{id}_E) = E_{\lambda+\alpha}(u) \end{array} \right.$
- Une famille de vecteurs propres associés des valeurs propres distinctes est libre
  - ▲ Recurrence sur la liberté de la famille

Théorème

### Sous-espace propre et somme directe

Une somme de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe

▲ On montre que  $\varphi \mid \begin{matrix} E_{\lambda_1}(u) + \dots + E_{\lambda_p}(u) \\ (x_1 - x_p) \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} E_{\lambda_1}(u) \times \dots \times E_{\lambda_p}(u) \\ x_1 + \dots + x_p \end{matrix}$  est injective  $\Leftrightarrow \text{Ker}(\varphi) = 0$

Définition

### Lien avec les matrices

- $\lambda$  est valeur propre de  $A$  si  $\exists X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}, AX = \lambda X$   
 $X$  est un vecteur propre de  $A$

- On définit  $\text{sp}(A)$  comme l'ensemble des valeurs propres de  $A$
- $\lambda \in \text{sp}(\text{mat}_{\mathcal{B}}(u)) \Leftrightarrow \lambda \in \text{sp}(u)$
- On appelle sous-espace propre de  $A$  associé à  $\lambda$  noté  $E_{\lambda}(A)$ ,  $\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$  où  $u$  est l'ECA  
Par abus de notation  $\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E) = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$

- $\lambda \in \text{sp}(u) \Leftrightarrow u - \lambda \text{id}_E \notin GL(E) \Leftrightarrow \det(u - \lambda \text{id}_E) = 0$
- $\lambda \in \text{sp}(A) \Leftrightarrow A - \lambda I_n \notin GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$

### Polynôme caractéristique

- Matrice :  $\chi_A(x) = \det(xI_n - A)$
- Endomorphisme :  $\chi_u(x) = \det(\text{id}_E x - u)$

### Lien avec le spectre

- $\lambda \in \text{sp}(A) \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$
- $\lambda \in \text{sp}(u) \Leftrightarrow \chi_u(\lambda) = 0$

- $\chi_A = \chi_{A^T}$  : On en déduit  $\text{sp}(A) = \text{sp}(A^T)$
- $A$  et  $B$  semblables  $\Rightarrow \chi_A = \chi_B$  : On en déduit  $\text{sp}(A) = \text{sp}(B)$
- $\chi_u(x) = \chi_{\text{mat}_{\mathcal{B}}(u)}(x)$
- $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

### Forme du polynôme

- $\deg(\chi_A) = n$
- $\chi_A$  est unitaire
- Le coefficient de  $x^{n-1}$  est  $-\text{tr}(A)$
- Le coefficient constant est  $(-1)^n \det(A)$

$$\chi_A(x) = x^n - \text{tr}(A)x^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$$

*Idem pour un endomorphisme*

On se ramène aux colonnes et à la définition du polynôme

### Polynôme caractéristique scindé

Si  $\chi_A$  est scindé et en considérant  $(x_1 - x_n)$  les racines comptées avec leur multiplicité

$$-\sum_{k=1}^n x_k = \text{tr}(A) \quad -\prod_{k=1}^n x_k = \det(A)$$

Relations coefficients-racines

### Aspects polynomiaux

- $\lambda \in \text{sp}(A) \Leftrightarrow \lambda$  racine de  $\chi_A$  Multiplicité de la valeur propre = Multiplicité de la racine
- $\chi_A(x) \in \mathbb{R}_n[X]$   
 $\Rightarrow$  Si  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  est racine d'ordre  $\alpha \Rightarrow \bar{\lambda}$  est racine d'ordre  $\alpha$

AX =  $\lambda X \Rightarrow \overline{AX} = \overline{\lambda X} \Rightarrow \overline{AX} = \bar{\lambda} \times \overline{X}$

- $\chi_{u|_F} | \chi_u$  si  $u$  stabilise  $F$
- Si  $\lambda$  est valeur propre d'ordre  $\alpha$  alors  $1 \leq \dim(E_\lambda(u)) \leq \alpha$  Ordre de la racine dans  $\chi$ 
  - ─  $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$ , on considère une décomposition adaptée et on applique la proposition précédente en considérant  $\lambda \text{id}_E$
- Si  $\lambda$  est valeur propre simple de  $u_A$  alors  $E_\lambda(u)_{E_\lambda(A)}$  est une droite vectorielle

### 3 Diagonalisation

- $u$  est diagonalisable si il existe une base de vecteurs de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $u$
- $A$  est diagonalisable si  $A$  est semblable à une matrice diagonale  $A = P^{-1}DP$
- $u$  est diagonalisable  $\Leftrightarrow \text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$  est diagonalisable

- $u$  diagonalisable  $\Leftrightarrow \exists \mathcal{B}', \text{mat}_{\mathcal{B}'}(u) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow E = \bigoplus_{k=1}^p E_{\lambda_k}(u)$ 
  - ─  $(3) \Rightarrow (2)$  : Théorème de recollement sur les bases des  $E_{\lambda_i}$
  - ─  $(2) \Rightarrow (3)$  : On passe par le polynôme caractéristique de racines simples les coefs diagonaux et on regarde la dimension

- $u$  est diagonalisable  $\Leftrightarrow \begin{cases} \chi_u \text{ scindé sur } \mathbb{K} \\ \forall \lambda_i \in \text{sp}(A), \dim(E_{\lambda_i}(u)) = \alpha_i \text{ Ordre de } \lambda_i \end{cases}$

Corollaire :  $\chi_u \chi_A$  scindé à racines simples  $\Rightarrow u_A$  diagonalisable

─ On regroupe les valeurs propres dans la matrice par multiplicité et on étudie la dimension de chacun des espaces propres

#### Diagonaliser une matrice

1. Essayer de trouver assez de solutions évidentes pour pouvoir finir avec  $\det$  et  $\text{tr}$
2. Résoudre  $\det(xI_n - A)$ 
  - On calcule  $\det(xI_n - A)$  sous forme factorisée
  - On détermine le spectre et une base des sous-espaces propres  $E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda_i I_n)$
  - On écrit  $A = P^{-1}DP$  où
    - $P$  est la matrice de passage dans la base des vecteurs propres
    - $D$  est la matrice diagonale des valeurs propres associées

💡 Un déterminant est défini comme un produit de valeurs propres

💡  $0 \in \text{sp}(A) \Leftrightarrow A$  non inversible

💡  $\text{rg}(J) = 1 \Rightarrow 0$  valeur propre d'ordre  $= n - 1$  car  $\dim_{E_0}(J) \leq \alpha$  et  $n \in \text{sp}(A)$

💡 Pour trouver les  $E_\lambda(A)$  ou chercher les relations entre les colonnes de  $\lambda I_n - A$

### 4 Trigonalisation

- $u$  est trigonalisable si  $\exists \mathcal{B}', \text{mat}_{\mathcal{B}'}(u) \in \mathcal{T}_n^+$
- $A$  est trigonalisable si  $A$  est semblable à une matrice triangulaire supérieure  $A = P^{-1}\mathcal{T}P$

- Une matrice triangulaire supérieure est semblable à une matrice triangulaire inférieure
  - $\chi_{u\chi_A}$  scindé  $\Rightarrow u_A$  trigonalisable
- Corollaire : Dans  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$  toute matrice donc tout endomorphisme est trigonalisable*

⚠ Recurrence en complétant la base précédente en nouvelle base

- $A$  nilpotente  $\Leftrightarrow A$  semblable à une matrice de  $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \chi_A(x) = x^n$
- $A$  nilpotente non nulle  $\Rightarrow A$  non diagonalisable

*Corollaire :  $A$  de la forme  $\alpha I_n + N_N$  est nilpotente  $\Rightarrow A$  non diagonalisable*

### Classification des matrices

Toute matrice est semblable à l'une de celles ci

$\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$	$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$		
$\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$	$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$	
$\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$	$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$	
$\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$	$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda & -\mu & 0 \\ \mu & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$

## 5 Polynôme annulateur

### Propriétés des polynômes

DEF: On définit le polynôme annulateur comme  $\begin{cases} P(A) = a_0 I_n + \dots + a_p A_p \\ P(u) = a_0 \text{id}_E + \dots + a_p u^p \end{cases}$

⚠  $P(u)(x) \neq P(u(x)) \Rightarrow$  Ne pas écrire  $(u(x))^p$

- $P(u)$  et  $Q(u)$  commutent  $\Rightarrow P(u) \circ Q(u) = (PQ)(u)$  *Idem pour les matrices*
- $A$  et  $B$  semblables  $\Rightarrow P(A)$  et  $P(B)$  semblables
- $\lambda \in \text{sp}(A) \Rightarrow P(\lambda) \in \text{sp}(P(A))$

### Polynôme annulateur

DEF:  $P$  est un polynôme annulateur de  $A_u$  si  $P(A) = 0_{P(u)=0}$

- L'existence d'un tel polynôme a été démontrée mais il n'y a pas unicité
- $\lambda \in \text{sp}(A) \Rightarrow \lambda$  racine de  $P$  *Annulateur*  
*La réciproque est fausse*
- On peut trouver un polynôme annulateur de  $A$  dont les racines sont les valeurs propres de  $A$

⚠ On décompose un polynôme annulateur produit d'irréductibles et on considère les racines n'étant pas valeurs propres

**Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité**

$u_A$  est diagonalisable  $\Leftrightarrow u_A$  annule un polynôme scindé à racines simples

⇒ : On pose un polynôme annulant toutes les valeurs de la diagonale

⇒ : Polynôme d'interpolation de Lagrange et caractérisation par la somme directe

- $\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$  diagonalisable  $\Rightarrow A$  et  $B$  diagonalisables  
On passe par le polynôme annulateur

- Corollaire :  $u$  diagonalisable  $\Rightarrow u|_F^F$  diagonalisable
- Si  $u$  diagonalisable et  $F$  stable par  $u$  alors il existe une base de vecteurs propres de  $F$

**Théorème de Cayley Hamilton**

- $\chi_A \chi_u(A_u) = 0$

On forme une base de  $E$  à partir d'une base  $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$  et l'on forme la matrice par blocs  
Le polynôme du bloc adapté divise celui de la matrice

## 6 Codiagonnalisation

- $u \circ v = v \circ u \Rightarrow \begin{cases} \text{Ker} \\ \text{Im} \quad \text{de l'un stable par l'autre} \\ E_\lambda \end{cases}$
- $\begin{cases} u \circ v = v \circ u \\ u, v \text{ diagonalisables} \end{cases} \Rightarrow$  Ils sont diagonalisables dans une même base *Codiagonalisables*  
On étudie pour  $\lambda_i \in \text{sp}(u)$ ,  $v|_{E_{\lambda_i}}^{E_{\lambda_i}(u)}(u)$  et on recolle
- $\begin{cases} u \circ v = v \circ u \\ v \text{ diagonalisable} \end{cases} \Rightarrow$  Ils sont diagonalisables dans une même base *Codiagonalisables*
- $\begin{cases} u \text{ à spectre simple} \\ u \circ v = v \circ u \end{cases} \Rightarrow$  Ils sont trigonalisables dans une même base *Cotrigonalisables*
- $\begin{cases} u \circ v = v \circ u \\ u, v \text{ trigonalisables} \end{cases}$   
Récurrence sur la dimension : On étudie pour  $\lambda_i \in \text{sp}(u)$ ,  $v|_{E_{\lambda_i}}^{E_{\lambda_i}(u)}(u)$  et on complète  $x$  vp de  $u$  et  $v$  dont on a montré l'existence en une base avant d'appliquer à la sous-matrice la propriété au rang précédent

**Équations matricielles**  $P(M) = A_M$  diagonalisable.

- On montre que  $A$  est diagonalisable scindé racines simples
- On montre que  $A$  et  $M$  commutent  $\Rightarrow$  Codiagonalisable
- On remplace l'équation par des matrices diagonales
- On résout le système

Calcul de  $A^n$ 

- On diagonalise ou à défaut trigonalise pour simplifier les calculs de puissance

Suites mutlirécurentes

- On remplace le système de suite par une équation matricielle  $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$
- On calcule  $X_n = A^n X_0$  avec la méthode précédente

Récurrence linéaire d'ordre  $n$ 

- On remplace le système de suite par une équation matricielle  $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$
  - On calcule  $X_n = A^n X_0$  avec la méthode précédente
- $\chi_A(x)$  est l'équation caractéristique de l'équation

Systèmes différentiels

- On remplace le système par  $X' = AX$  où  $X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$
- On diagonalise puis on effectue le changement  $Y = P^{-1}X$  pour se ramener à  $Y' = DY$
- On revient au système associé dont on résout les équations différentielles
- Dans le cas d'une trigonalisation il faudra résoudre les équations différentielles dans un ordre bien défini

## 8 Compléments de cours

- Si  $\text{rg}(A) = 1$ ,  $A$  diagonalisable  $\Leftrightarrow \text{tr}(A) \neq 0$ 
  - $\Leftrightarrow : \text{rg}(A) = 1 \Rightarrow A = CL \Rightarrow A^2 = \text{tr}(A)A$  et on passe par  $P$  annulateur et on montre qu'il est scindé racines simples CH
  - $\Rightarrow : \text{Contraposée en repassant par } A^2 = \text{tr}(A)A \text{ pour montrer la nilpotence}$
- $A$  et  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  diagonalisable  $\Rightarrow \begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix}$  diagonalisable
  - On montre que pour  $Y$  et  $Z$  vecteurs propres de  $M$  et  $X_i$  base de vecteurs propres de  $A$   $(Y^T X_i \cup Z^T X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  forme une base de vecteurs propres
- Se généralise pour  $M$  de toutes dimensions
- $f$  nilpotente  $\Leftrightarrow \text{tr}(f^k) = 0 \forall k$ 
  - $\Rightarrow : \text{Polynôme caractéristique et expression}$
  - $\Leftrightarrow : \text{On part de la trigonalisation que l'on passe à la puissance avant de ramener l'équation à un système de Vandermonde}$

## 1 Généralités

On appelle **produit scalaire** sur  $E_{\mathbb{R}-ev}$  toute application  $\psi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :

- Symétrie :  $\psi(u, v) = \psi(v, u)$
- Bilinéarité :  $\begin{cases} \psi(u + \lambda v, w) = \psi(u, w) + \lambda\psi(v, w) & \text{A gauche} \\ \psi(w, u + \lambda v) = \psi(w, u) + \lambda\psi(w, v) & \text{A droite} \end{cases}$   $\psi$  est symétrique  $\Rightarrow$  Une égalité suffit
- Positivité :  $\psi(u, u) \geqslant 0$
- Caractère défini :  $\psi(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

On note  $\langle u | v \rangle$  ou  $(u|v)$

Définition

Exemple

Définition

Espace	$\mathbb{R}^n$	$\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$	$C^0([a, b], \mathbb{R})$	$\mathbb{R}_n[X]$	$u_n, \sum u_n^2$ cv
Produit scalaire	$X^T Y = \sum_{i=1}^n X_i Y_i$	$\text{tr}(A^T B)$	$\int_{[a,b]} f g$	$\int_{[0,1]} P Q$	$\sum_0^\infty u_n v_n$

DEF: Un **espace préhilbertien**  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  réel est un  $\mathbb{R}$ -ev  $E$  muni d'un produit scalaire  
 DEF: Un **espace euclidien** est un espace préhilbertien de dimension finie

### Norme

DEF: On définit la norme euclidienne :  $N \left| \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightarrow & \sqrt{(x|x)} \end{array} \right. \text{ Notée } \|x\|$

- $\|x\| \geq 0$
- $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- Inégalité triangulaire :  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- $x$  est unitaire si  $\|x\| = 1$
- $\frac{x}{\|x\|}$  est le vecteur unitaire où  $x$  a été normé
- **Cauchy-Schwarz** :  $|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$  avec égalité  $\Leftrightarrow x \propto y$

¶ On passe par  $P(\lambda) = (\lambda x + y | \lambda x + y)$  et on s'intéresse aux différents cas de  $\Delta$

- Identité de polarisation :  $(x|y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$

### Orthogonalité

DEF:  $x$  et  $y$  sont orthogonaux si  $(x|y) = 0$  Noté  $x \perp y$

Définition

- $F \perp G$  si  $\forall (x, y) \in F \times G, x \perp y$
- DEF: On appelle orthogonal de  $F$ :  $F^\perp = \{y \in E, \forall x \in F, x \perp y\}$   
C'est un sous-espace vectoriel

- $F \subset (F^\perp)^\perp$  L'inclusion peut être stricte en dimension infinie
- $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$
- $F \cap F^\perp = \{0\}$
- $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$
- Une somme de sev 2 à 2 orthogonaux est directe *On note  $F_1 \oplus \dots \oplus F_p$* 
  - ─ On montre l'injectivité de  $f \mid \begin{matrix} F_1 \times \dots \times F_p \\ (x_1, \dots, x_p) \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} F_1 + \dots + F_p \\ x_1 + \dots + x_p \end{matrix}$
- **Théorème de Pythagore**:  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow x \perp y$ 
  - ─ Développement de  $\|x + y\|^2$  et identification

- Une famille de vecteurs non nuls orthogonaux deux à deux est libre

DEF: Une famille est **orthogonale** si ces vecteurs sont orthogonaux deux à deux

DEF: Une famille est **orthonormale** si ses vecteurs sont unitaires et orthogonaux deux à deux

## 2 Bases orthonomées

- Une famille  $(x_i)_{i \in I}$  est orthonormée si  $\forall (i, j) \in I, (x_i | x_j) = \delta_{ij}$
- Cette famille étant libre, si elle est génératrice on dit que c'est une base orthonormée

On décompose  $x$  et  $y$  dans une base orthonormée :  $x = \sum_i x_i e_i$ ,  $y = \sum_i y_i e_i$

- $(x | y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$
- $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
- $x_i = (x | e_i) \Rightarrow x = \sum_i (x | e_i) e_i$

- Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée,  $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u) : A_{ij} = (e_i | u(e_j))$
- Tout espace euclidien admet une base orthonormée
  - ─ Récurrence en s'intéressant à  $\varphi \mid \begin{matrix} E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightarrow & (e_i | x) \end{matrix}$ , forme linéaire dont le noyau forme une base avec  $e_i$
- $E = F \oplus F^\perp$   
 $F^\perp$  est le seul supplémentaire  $F$  dont tous les vecteurs sont orthogonaux à ceux de  $F$   
On l'appelle **supplémentaire orthogonal** et on note  $F \oplus F^\perp$ 
  - ─ On montre la somme directe puis la décomposition de tout vecteur de  $E$  à l'aide d'une base orthonormée
- **TBON Incomplète**: On peut compléter une famille orthonormale en base orthonormée
- $(F^\perp)^\perp = F$

**Caractérisation des formes linéaires dans  $E$  euclidien**

$\exists ! a \in E, \forall x \in E, \varphi(x) = (a|x)$

On montre que  $\theta \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E^* \\ a & \rightarrow & \theta(a) \end{array}$  est un isomorphisme où  $\theta(a) \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightarrow & (a|x) \end{array}$

Pour  $H$  hyperplan  $H = \{x \in E, (a|x) = 0\} \Rightarrow$  L'équation cartésienne de  $H$  est  $(a|x) = 0$  est  $a$  est un vecteur normal

DEF: Le projecteur de  $F$  parallèlement à  $F^\perp$  Noté  $p_F$  s'appelle le projecteur orthogonal sur  $F$

- $p$  projecteur est dit orthogonal si  $\exists F, p = p_F$   
ie  $p$  projecteur orthogonal  $\Leftrightarrow E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$

- $p$  est projecteur orthogonal  $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in E^2, (x|p(y)) = (p(x)|y)$

⇒ : On décompose  $x$  et  $y$  sur  $\text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$   
⇐ : On montre  $E = \text{Ker}(p) \perp \text{Im}(p)$

- $p$  est un projecteur orthogonal  $\Leftrightarrow \forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$

⇒ : On décompose  $x$  et  $y$  sur  $\text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$   
⇐ : On montre que pour  $x \in \text{Ker}(p)$  et  $y \in \text{Im}(p)$ ,  $(x|y) = 0$

- Soit  $F$  un sev de  $E$  euclidien de base orthonormée  $(f_1, \dots, f_p)$ ,  $p_F(x) = \sum_{i=1}^p (x|f_i) f_i$

⇒ : On décompose  $x \in E$  sur  $F \oplus F^\perp$  et on se ramène à montrer que  $x - \sum_{i=1}^p (x|f_i) f_i \in F^\perp$

- Corollaire :  $\text{mat}_{BC}(p_F) = \sum_{i=1}^n F_i F_i^T$  où  $F_i$  est le vecteur des coordonnées de  $f_i$  orthonormé dans  $BC$

**Distance à un sev**

DEF: On appelle distance de  $x$  à  $F$  :  $d(x, F) = \inf\{\|x - y\|, y \in F\}$

- $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$

⇒ : On décompose  $x$  sur  $F \oplus F^\perp$  et on exprime la distance avec Pythagore

- $d(x, F)^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 = (x|x - p_F(x))$

**Projection sur une droite ou un hyperplan**

- **Droite**  $y = \text{vect}(a) : p_D(x) = \frac{(x|a)}{\|a\|^2} a$

- **Hyperplan**  $a$  vecteur normal :  $p_H(x) = x - \frac{(x|a)}{\|a\|^2} a$

**Symétrie orthogonale**

DEF:  $s$  est une symétrie de  $E \Rightarrow E = \text{Ker}(s - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}_E)$

DEF: On dit que  $s$  est une **symétrie orthogonale** sur  $\text{Ker}(s - \text{id}_E)$  si  $\text{Ker}(s - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}_E)$

- $s_F = 2p_F - \text{id}$

DEF: Une **réflexion** est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan

- Pour  $a$  et  $b$  distincts tel  $\|a\| = \|b\|$  il existe une unique réflexion telle  $s(a) = b$

⚠ Analyse synthèse avec les propriétés des symétries et passant par un hyperplan  $H = (a - b)^\perp$

### Gram Schmidt Transformation en famille orthonormée.

Soient  $(a_1 - a_p)$ , il existe une unique famille orthonormée  $(e_1 - e_p)$  tel

- $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \text{vect}(a_1 - a_k) = \text{vect}(e_1 - e_k)$
- $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, (a_k | e_k) > 0$

On construit de proche en proche par récurrence en "redressant" les vecteurs

- $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \text{vect}(a_1 - a_k) = \text{vect}(e_1 - e_k) \Rightarrow$  Expression de  $e_k$  en fonction des  $(a_k, -, e_1, e_{k-1})$
- $(e_k | e_1) = \dots = (e_k | e_{k-1}) = 0 \Rightarrow$  On redresse :  $b_k = a_k - \sum_{j=1}^{k-1} (a_k | e_j) e_j$
- $\|e_k\| = 1 \Rightarrow$  On norme
- $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, (a_k | e_k) > 0 \Rightarrow$  Signe

- On peut obtenir une BON d'un espace euclidien en Gram-Schmidtant sa base tel  $P \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R}^+)$  et  $p_{kk} = \frac{1}{\|e_k\|}$
- Pour  $E = \mathbb{R}[X]$  il existe une BON échelonnée en degré

## 4 Automorphismes orthogonaux

- Dans  $E$  euclidien  $u$  conserve la norme  $\Leftrightarrow u$  conserve le produit scalaire

⚠ Identité de polarisation

DEF: Dans les deux cas on dit que  $u$  est **automorphisme orthogonal**

L'ensemble des automorphismes orthogonaux est noté  $\mathcal{O}(E)$

- $\mathcal{O}(E) \subset GL(E)$
- Symétries orthogonales  $\in \mathcal{O}(E)$

⚠ On décompose sur  $F \oplus F^\perp$  et on applique Pythagore pour montrer la conservation de la norme

- $\mathcal{O}(E)$  est un groupe pour la loi  $\circ$  appelé groupe orthogonal de  $Z$

- $u \in \mathcal{O}(E) \Leftrightarrow u$  transforme une  $\text{toute}$  BON en BON

- Pour  $u \in \mathcal{O}(E), u$  stabilise  $F \Rightarrow u$  stabilise  $F^\perp$

$$\begin{cases} u \in \mathcal{O}(E) \\ \lambda \in \text{sp}(u) \cap \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \lambda \in \{-1, 1\}$$

⚠  $u$  peut avoir des valeurs propres non réelles

⚠  $u$  Réciproque fausse :  $\text{sp}(u) \subset \{-1, 1\} \not\Rightarrow u \in \mathcal{O}(E)$

### Matrices orthogonales

DEF:  $A$  est une matrice orthogonale si son Eca  $\in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$  *Produit scalaire canonique*

On note  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices orthogonales de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$

- $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow A^T A = I_n$
- $\Leftrightarrow A A^T = I_n$
- $\Leftrightarrow$  Les lignes *colonnes* forment une BON de  $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})_{\mathfrak{M}_{1,n}(\mathbb{R})}$
- $\mathcal{P}_{\mathcal{B}_{ON} \rightarrow \mathcal{B}_{ON}} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$
- $u \in \mathcal{O}(E) \Leftrightarrow \text{mat}_{\mathcal{B}_{ON}}(u) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$
- $A \in \mathcal{O}_n(E) \Leftrightarrow \det(A)_{\det(u)} = \pm 1$
- $\Delta$  Réciproque fausse :  $\det(A) = \pm 1 \not\Rightarrow A \in \mathcal{O}(E)$

### Groupe spécial orthogonal

- DEF: Groupe **spécial orthogonal** :  $\mathcal{S}_O(E) = \{u \in \mathcal{O}(E), \det(u) = 1\}$   
 Matrices spéciales orthogonales :  $\mathcal{S}_{On}(E) = \{A \in \mathcal{O}_n(E), \det(A) = 1\}$
- Ce sont des sous-groupes de  $\mathcal{O}(E)$  et  $\mathcal{O}_n(E)$
  - $u \in \mathcal{S}_O(E) \Leftrightarrow \text{mat}_{\mathcal{B}_{ON}}(u) \in \mathcal{S}_{On}(\mathbb{R})$

- DEF: Soit  $(E, \mathcal{B}_0)$  un espace euclidien orienté,  $\mathcal{B}$  est une BON directe si
- $$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B} \text{ est une BON} \\ \det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) > 0 \end{array} \right.$$
- $\mathcal{P}_{\mathcal{B}_{OND} \rightarrow \mathcal{B}'_{OND}} \in \mathcal{S}_{On}(E)$

## 5 Endomorphismes symétriques et antisymétriques

Le caractère symétrique *antisymétrique* dépend du produit scalaire choisi

- $u \in \mathcal{S}(E) \Leftrightarrow \text{mat}_{\mathcal{B}_{ON}}(u) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$
- $u \in \mathcal{A}(E) \Leftrightarrow \text{mat}_{\mathcal{B}_{ON}}(u) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$
- $u \in \mathcal{A}(E) \Leftrightarrow \forall x \in E, (u(x)|x) = 0$
- $u \in \mathcal{S}(E)_{\mathcal{A}(E)}, u \text{ stabilise } F \Rightarrow u \text{ stabilise } F^\perp$
- $u \in \mathcal{S}(E) \cap \mathcal{O}(E) \Leftrightarrow u \text{ est une symétrie orthogonale}$

$\Rightarrow$  : On montre le caractère symétrique  $A^2 = I_n$  puis le caractère orthogonal  $\text{Ker}(u - \text{id}_E) \perp \text{Ker}(u + \text{id}_E)$

$\Leftarrow$  : On considère une décomposition sur  $\text{Ker}(u - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(u + \text{id}_E)$

⚠ Symétrie  $\neq$  Symétrique

- $u \in \mathcal{S}(E)_{\mathcal{A}(E)} \Rightarrow \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$
- $u \in \mathcal{S}(E) \Rightarrow$  Ses sep sont orthogonaux deux à deux

## Théorème spectral

- $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow u$  diagonalisable dans une BON
- $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow u$  diagonalisable dans une BON  
ie  $\exists D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}), \exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), A = PDP^{-1} = PDP^T$

$\triangle A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C}) \not\Rightarrow A$  diagonalisable

Th complexe :  $\bar{A}^T = A \Leftrightarrow A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$

Lemme :  $\chi_u$  est scindé sur  $\mathbb{R}$ . On montre que toutes ses valeurs propres sont réelles

Réurrence sur la dimension : On forme par  $Hr(n)$  une BON de l'hyperplan :  $\text{vect}\left(\frac{x}{\|x\|}\right)^\perp$   $x$  vecteur propre

Théorème

## 6 Étude de $\mathcal{O}(E)$ et $\mathcal{S}_O(E)$ en dimension 2

### Notations

DEF: Les éléments de  $\mathcal{S}_O(E)$  sont appelés **notations**

- $\exists \theta \in \mathbb{R}, \text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$  qui ne dépend pas de la base  $OND$  choisie
- On dit que  $u$  est la notation d'angle  $\theta$  Noté  $R(\theta)$

On repasse aux éléments en établissant les équations

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ ad - bc = 1 \end{cases}$$

du fait de la BOND et on en déduit les cos et sin

- $R : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{S}_O(E)$  est un morphisme de groupe

Définition

### Écriture complexe

$$Y = AX \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

D'où en posant

$$\begin{cases} z = x_1 + ix_2 \\ z' = y_1 + iy_2 \end{cases} \rightarrow z' = e^{i\theta}z$$

Propriétés

### Calcul de $\theta$ à partir de l'image d'un vecteur

$$\cos(\theta) = \frac{(x|u(x))}{\|x\|^2} \quad \sin(\theta) = \frac{\det(x, u(x))}{\|x\|^2}$$

Méthode

Soit  $u \in \mathcal{O}(E) \setminus \mathcal{S}_O(E)$ ,  $\mathcal{B}$  une BOND et  $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$

- $\exists \theta \in \mathbb{R}, A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ ,  $\triangle \theta$  dépend de la BOND
- $u$  est la réflexion par rapport à la droite dirigée par le vecteur  $\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e_1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e_2\right)$  où  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$
- est la BOND choisie  $\Leftrightarrow (\widehat{e_1, a}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

1. On établit des équations analogues que dans démo de la notation  
2.  $A$  est la matrice d'une symétrie orthogonale  $\rightarrow \text{Ker}(A - I_n)$

Propriétés

### Décomposition d'un automorphisme orthogonal

$u \in \mathcal{O}(E)$  est une réflexion ou le produit de deux réflexions

Disjonction de cas sur le déterminant

Théorème

## 7 Compléments de cours

- Soit  $f$  symétrique :  $\forall x \in E, f(x)|x) \geq 0 \Leftrightarrow \text{sp}(f) \subset \mathbb{R}^+$

 —  $\Rightarrow : f(x) = \lambda x$   
 —  $\Leftarrow : \text{Théorème spectral et décomposition sur une BON}$

On dit que  $f \in \mathcal{S}^+(E)$  est **symétrique positive**

Matriciellement pour  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  :  $\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T A X \geq 0 \Leftrightarrow \text{sp}(f) \subset \mathbb{R}^+$

- Soit  $f$  symétrique :  $\forall x \in E \setminus \{0_E\}, (f(x)|x) \geq 0 \Leftrightarrow \text{sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$

On dit que  $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$  est **symétrique définie positive**

Matriciellement pour  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  :  $\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_E\}, X^T A X \geq 0 \Leftrightarrow \text{sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$

Soit  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

- $\sup_{X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}} \frac{X^T A X}{X^T X} = \max \text{sp}(A)$
- $\inf_{X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}} \frac{X^T A X}{X^T X} = \min \text{sp}(A)$

Soit  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

- $\sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{(f(x)|x)}{\|x\|^2} = \max \text{sp}(f)$
- $\inf_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{(f(x)|x)}{\|x\|^2} = \min \text{sp}(f)$

 Théorème spectral  $\rightarrow$  Décomposition sur la base de vecteurs propres  $\rightarrow$  Produit scalaire  $\rightarrow$  Inégalités  $\rightarrow$  Valeurs atteintes

- $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), A = B^T B$

 —  $\Rightarrow : \text{Théorème spectral} \rightarrow \text{Existence d'une matrice diagonale de valeurs propres} \rightarrow A = P D P^T = P \Delta \Delta P^T = B^T B_D = \Delta^2$   
 —  $\Leftarrow : \text{On montre la symétrie puis la positivité}$

Corollaire :  $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists B \in GL_n(\mathbb{R}), A = B^T B$

- Soit  $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), \exists ! B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), A = B^2$

 — Existence : Théorème spectral  $\rightarrow$  Matrice diagonale de valeurs propres  $\rightarrow A = P D P^T = P \Delta \Delta P^T = B^T B_D = \Delta^2$   
 — Unicité *Difficile*

- Soient  $(A, B) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \exists C \subset GL_n(\mathbb{R}), \exists D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}), \begin{cases} A = C^T C \\ B = C^T D C \end{cases}$

  $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists M, A = M^T M \Leftrightarrow (M^T)^{-1} A M^{-1} = I_n$  et on considère  $B' = (M^T)^{-1} D M^{-1}$  *Théorème spectral*

## 1 Dénombrement

<ul style="list-style-type: none"> <li>– Applications de <math>\llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket</math></li> <li>– <math>p</math> uplets</li> </ul>	$n^p$
<ul style="list-style-type: none"> <li>– Tirages ordonnés de <math>p</math> boules parmi <math>n</math></li> <li>– Répartition de <math>p</math> boules numérotées dans <math>n</math> boîtes</li> </ul>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>– Parties d'un ensemble à <math>n</math> éléments</li> <li>– Applications de <math>\llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \{0, 1\}</math></li> </ul>	$2^n$
<ul style="list-style-type: none"> <li>– Issues de <math>n</math> Pile ou Face</li> <li>– Tirage simultané de boules parmi <math>n</math></li> </ul>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>– Applications injectives de <math>\llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket</math></li> </ul>	$\frac{n!}{(n-p)!}$
<ul style="list-style-type: none"> <li>– Tirages ordonnés sans remise de <math>p</math> boules parmi <math>n</math></li> <li>– <math>p</math> boules numérotées dans <math>n</math> boîtes <small><i>0 ou 1 boule par boîte</i></small></li> </ul>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>– Parties à <math>p</math> éléments de <math>\llbracket 1, n \rrbracket</math></li> <li>– Tirages simultanés de <math>p</math> boules parmi <math>n</math></li> </ul>	$\binom{n}{p}$
<ul style="list-style-type: none"> <li>– Applications strictement croissantes de <math>\llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket</math></li> <li>– Solutions de <math>\sum_{k=1}^n x_i = p</math>, <math>x_i \in \{0, 1\}</math></li> </ul>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>– Partitions de <math>\llbracket 1, n \rrbracket</math> en <math>r</math> ensembles de cardinaux <math>p_1 - p_r</math></li> <li>– Anagrammes</li> </ul>	$\binom{n-p_1}{p_1} - \binom{p_r}{p_r} = \frac{n!}{p_1! - p_r!}$
<ul style="list-style-type: none"> <li>– Solutions de <math>\sum_{k=1}^n x_i = p</math></li> <li>– Applications croissantes de <math>\llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket</math></li> </ul>	$\binom{n+p-1}{p}$ <i>Bâtons</i>
<ul style="list-style-type: none"> <li>– Tirages non ordonnés avec remise de <math>p</math> boules parmi <math>n</math></li> <li>– Répartition de <math>p</math> boules indiscernables dans <math>n</math> boîtes</li> </ul>	

## 2 Ensembles dénombrables

- Définition
- DEF:  $E$  est **fini** si il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel qu'il existe une injection de  $E$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$   
 On dit alors que le cardinal de  $E$  est  $n_{\text{card}(E)} = n$
- DEF: On dit que  $E$  est **dénombrable** si  $\exists$  une bijection de  $E$  dans  $\mathbb{N}$   
 On a alors  $\text{card}(E) = +\infty$   
 On peut alors numérotter ses éléments *Écriture en extension*
- DEF: On dit que  $E$  est **au plus dénombrable** si il est fini ou dénombrable
- Si  $E$  dénombrable alors toute partie de  $E$  est au plus dénombrable
  - On suppose  $E$  dénombrable et  $f : E \rightarrow F$  surjective alors  $F$  est au plus dénombrable
  - L'image d'un ensemble dénombrable par une application est un ensemble au plus dénombrable

### 3 Espaces probabilisés

Définition

#### Tribu

- DEF:  $\mathcal{A}$  est une tribu si
- $\Omega \in \mathcal{A}$
  - $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \setminus A = \bar{A} \in \mathcal{A}$
  - $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathcal{A}$ ,  $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$



Tribu pleine, vide, engendrée par  $A_{\{\Omega, \emptyset, A, \bar{A}\}}$

Résultat possible	$\omega \in \Omega$
Événement	$A \subset \Omega$
Événement élémentaire	$\{\omega\}$
$A$ réalisé	$\omega \in A$
$A$ implique $B$	$A \subset B$
$A$ ou $B$	$A \cup B$
$A$ et $B$	$A \cap B$
Contraire de $A$	$C_{\Omega} A$ ou $\bar{A}$
Événement impossible	$\emptyset$
Événement certain	$\Omega$
$A$ et $B$ incompatibles	$A \cap B = \emptyset$

DEF: On dit que  $\mathbf{P}$  est une probabilité sur  $\Omega$  si

- $\mathbf{P}(\Omega) = 1$
- $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$   
 $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$

Propriétés

- $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathbf{P}\left(\bigcup_k A_k\right) = \sum_k \mathbf{P}(A_k)$  *Évènements incompatibles*
- Une probabilité est définie par la probabilité de ses évènements élémentaires  
 $\Rightarrow$  Il existe une unique probabilité telle  $\mathbf{P}(\{\omega_i\}) = p_i$  Pour  $(\omega_1 - \omega_n)$  et  $(p_1 - p_n) \in \llbracket 0, 1 \rrbracket^2$ ,  $\sum p_i = 1$

Définition

#### Probabilité uniforme

- DEF: Il existe une unique probabilité tq  $\forall \omega \in \Omega$ ,  $\mathbf{P}(\{\omega\}) = a$ ,  $a$  probabilité de ses évènements élémentaires  
 $\Rightarrow$  Il existe une unique probabilité tel  $\mathbf{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}$
- $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$ ,  $\mathbf{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$

Propriétés

- $\mathbf{P}(A \setminus B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B)$
- $A \subset B \Rightarrow \mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$

- $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$
- Crible :  $\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbf{P}\left(\bigcap_{m=1}^k A_{i_m}\right)$

### Probabilités sur un espace dénombrable

DEF: On appelle probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  une application  $\mathbf{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  telle

- $\mathbf{P}(\Omega) = 1$
- $\mathbf{P}$   $\sigma$ - additive :  $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(A_n)$  *Évènements incompatibles*
- $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$
- $\sigma$ -additivité pour un ensemble fini d'évènements incompatibles :  $\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(A_k)$

- Les évènements élémentaires ne peuvent être équiprobables sur  $\mathcal{P}(\Omega)$  *Infini dénombrable*
  - ─ Par  $\sigma$ -additivité en faisant la disjonction  $p = 0$  et  $p > 0$
- Pour  $\Omega = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$  dénombrable et  $p_n$  suite telle  $\sum p_i = 1$   
Il existe une unique probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$  tel  $\mathbf{P}(\{x_k\}) = p_k \forall k$ 
  - ─ Analyse : On montre  $\mathbf{P}(A) = \sum_{x_n \in A} p_n$  - Synthèse : On montre  $\mathbf{P}(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(A_n)$
- $\mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$
- $A \subset B \Rightarrow \mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$
- $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A \cup B) + \mathbf{P}(A \cap B)$
- $\Rightarrow \mathbf{P}(A \cup B) \leq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$

### Continuité croissante/décroissante.

- Si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  est telle  $A_n \subset A_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right)$
  - Si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  est telle  $A_{n+1} \subset A_n \forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right)$
- $\Rightarrow$  Sous additivité :  $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)$



## 4 Conditionnement et indépendance

### Probabilité conditionnelle

DEF: On appelle probabilité conditionnelle sachant  $B : \mathbf{P}_B \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{A} & \rightarrow & [0, 1] \\ A & \rightarrow & \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} \end{array} \right.$

### Probabilités composées

- $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}_B(A)$
- $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}_A(B)\mathbf{P}_{A \cap B}(C)$

- $\mathbf{P} \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(A_2)\mathbf{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) - \mathbf{P}_{\cap_{k=1}^{n-1} A_k}(A_n)$  Se simplifie si continuité décroissante
- **Bayes** :  $\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)} \mathbf{P}_A(B)$  Formule de révision des croyances

### Formule des probabilités totales

DEF: On dit qu'une famille d'évènements d'un espace est un système complet d'évènements si

- $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$
- $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$  Un seul évènement se réalise à chaque fois
- $\mathbf{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}_{A_n}(B) \mathbf{P}(A_n)$  Où  $(A_n)$  est une famille dénombrable

Valable également en cadre fini ou si  $(A_n)$  est une famille d'évènements tel

$$\begin{cases} 2 \text{ à } 2 \text{ incompatibles} \\ \mathbf{P} \left( \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \right) = 1 \end{cases}$$

### Évènements indépendants

DEF:  $A$  et  $B$  sont indépendants si  $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$

- Si  $\mathbf{P}(B) > 0$  cette définition est équivalente à  $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A)$

△ Incompatible  $\neq$  Indépendants

- $A$  et  $B$  indépendants  $\Leftrightarrow \bar{A}$  et  $\bar{B}$  indépendants

DEF:  $(A_i)_{i \in I}$  est une famille d'évènements 2 à 2 indépendants si  $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow A_i$  et  $A_j$  indépendants

DEF:  $(A_i)_{i \in I}$  est une famille d'évènements matriciellement indépendants si

$$\forall J \subset I \neq \emptyset, \mathbf{P} \left( \bigcap_{j \in J} A_j \right) = \prod_{j \in J} \mathbf{P}(A_j)$$

- Indépendance matricielle  $\Rightarrow$  Indépendance 2 à 2

## 1 Variable aléatoire

Définition

### Variable aléatoire

DEF: Une variable aléatoire  $X$  est une application  $X \mid \Omega \xrightarrow{\omega} E \xrightarrow{x} X(\omega)$

Si  $E = \mathbb{R}$  la variable est dite réelle

- Soit  $A \subset E$ ,  $X^{-1}(A)$  est noté  $\{X \in A\}$ . En particulier on définit  $\{X = x\}$  et  $\{X \leq x\}$
- Les événements  $\{X = x\}$  pour  $x \in X(\Omega)$  forment un système complet d'événements. Dit associé à  $X$

Définition

### Loi de probabilité

DEF: On appelle loi de  $X$  l'application  $\mathbf{P}_X \mid X(\Omega) \xrightarrow{x} [0, 1] \xrightarrow{} \mathbf{P}(X = x)$

- $\mathbf{P}_X$  est une probabilité sur  $X(\Omega)$

¶ On montre  $\mathbf{P}_X(\emptyset) = 0$ ,  $\forall (A, B) \in X(\Omega)^2, A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbf{P}_X(A \cup B) = \mathbf{P}_X(A) + \mathbf{P}_X(B)$  et on admet le cas  $\Omega$  dénombrable

- La loi de  $X$  est entièrement déterminée par la connaissance des  $\mathbf{P}(X = x), x \in X(\Omega)$

Définition

### Loi conditionnelle

- Pour  $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$ , on appelle loi conditionnelle de  $X$  sachant  $A$ :  $\mathbf{P}_{X|A} \mid X(\Omega) \xrightarrow{x} [0, 1] \xrightarrow{} \mathbf{P}_A(X = x)$
- C'est une probabilité sur  $X(\Omega)$

Exemple

Loi	$X \hookrightarrow$	$X(\Omega)$	$\mathbf{P}$	Exemples
Uniforme	$\mathcal{U}(E)$	$E$	$\mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{\text{card}(E)}$	Tirage au hasard
Bernoulli	$\mathcal{B}(p)$	$\{0, 1\}$	$\begin{cases} \mathbf{P}(X = 1) = p \\ \mathbf{P}(X = 0) = 1 - p \end{cases}$	Expérience à deux issues
Binomiale	$\mathcal{B}(n, p)$	$\llbracket 0, n \rrbracket$	$\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$n$ expériences indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$
Hypergéométrique	$\mathcal{H}(n, N, p)$	$\llbracket 0, n \rrbracket$	$\mathbf{P}(X = k) = \frac{\binom{N_1}{k} \binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{Np}{k} \binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	Tirages sans remise

Définition

## 2 Variables aléatoires discrètes

DEF: Une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  est appelée variable aléatoire discrète  
 C'est une application de  $\Omega \rightarrow E$  : l'image réciproque des éléments de  $X(\Omega) \subset \mathcal{A}$

- $X(\Omega)$  est une énumération tel  $\mathbf{P}(X = x_n) \in [0, 1], \sum^\infty \mathbf{P}(X = x_n) = 1$

- *Réciprocement* : Il existe une unique probabilité tel
 
$$\begin{cases} \mathbf{P}(X = x_n) = p_n \\ \sum^\infty p_n = 1 \end{cases}$$

### Fonction de répartition

DEF: On définit  $F_X \mid \Omega \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \rightarrow \mathbf{P}(X \leq x)$  qui s'appelle fonction de répartition de  $X$

- $F_X$  est croissante
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$

### Couples de variables discrètes

DEF:  $(X, Y) \mid \Omega \rightarrow X(\Omega) \times Y(\Omega) \rightarrow (X(\omega), Y(\omega))$  est une variable aléatoire discrète

Sa loi de probabilité est appelée loi conjointe de  $X$  et  $Y$

Elle est déterminée par  $\mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j), (x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$

DEF: Les lois de probabilités de  $X$  et  $Y$  sont appelées lois marginales de  $(X, Y)$

- La loi conjointe permet de déterminer les lois marginales :  $\mathbf{P}(X = i) = \sum_{j \in Y(\Omega)} \mathbf{P}(X = i, Y = j)$

⚠ Les lois marginales ne permettent pas de déterminer la loi conjointe

- Si  $X(\Omega)$  et  $Y(\Omega)$  finis, on représente la loi conjointe par une matrice
 
$$\begin{cases} a_{ij} = \mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j) \\ \mathbf{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^p a_{ij} \\ \mathbf{P}(Y = y_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \end{cases}$$

### Loi conditionnelle

DEF: Loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $X = x$  :  $\mathbf{P}_{X=x}(Y = y) = \frac{\mathbf{P}(X = x, Y = y)}{\mathbf{P}(X = x)}$

- On peut déterminer la loi conjointe à partir des lois marginales et des lois conditionnelles

$$\blacksquare \quad \mathbf{P}(X = x, Y = y) = \mathbf{P}(X = x) \times \mathbf{P}_{X=x}(Y = y)$$

### Variables indépendantes

DEF:  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si  $\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ ,  $(X = x)$  et  $(Y = y)$  sont indépendants

Soit  $\mathbf{P}(X = x, Y = y) = \mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y)$

- Si  $X$  et  $Y$  indépendants,  $\begin{cases} A \subset X(\Omega) \\ B \subset Y(\Omega) \end{cases} \Rightarrow \mathbf{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbf{P}(X \in A)\mathbf{P}(Y \in B)$
- $X$  et  $Y$  indépendants  $\Rightarrow f(X)$  et  $g(Y)$  indépendants

DEF: On dit que  $(X_1 - X_n)$  sont mutuellement indépendants si

$$\forall (x_1 - x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega), \mathbf{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mathbf{P}(X_1 = x_1) \dots \mathbf{P}(X_n = x_n)$$

- Toute sous-famille de variables mutuellement indépendantes l'est aussi

- $(X_1 - X_n)$  mutuellement indépendants  $\Rightarrow (f_1(X_1) - f_n(X_n))$  mutuellement indépendants

Lemme des coalitions

Soient  $(X_1 - X_n)$  mutuellement indépendantes et  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$   $\begin{cases} \varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R} \\ \psi : \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$   
 $Y = \varphi(X_1 - X_k)$  et  $Z = \psi(X_{k+1} - X_n)$  sont indépendantes

Lois usuelles sur  $\mathbb{N}$ 

Loi	$X \hookrightarrow$	$X(\Omega)$	$\mathbf{P}$	Exemples
Géométrique	$\mathcal{G}(E)$	$\mathbb{N}$	$\begin{cases} \mathbf{P}(X = 0) = 0 \\ \mathbf{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1} \end{cases}$	Premier succès
Poisson	$\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$\mathbf{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	Loi des événements rares
Binomiale négative	$\mathcal{B}_-(n, p)$	$\mathbb{N}$	$\mathbf{P}(T_n = m) = \binom{m-1}{n-1} p^n (1-p)^{m-n}$	$n^e$ succès = $m^e$ tentative

### 3 Espérance

- $X$  est d'espérance finie si la série  $\sum_{n \in I} x_n \mathbf{P}(X = x_n)$  est absolument convergente

DEF:  $\mathbf{E}(X) = \sum_{n \in I} x_n \mathbf{P}(X = x_n)$  Moyenne pondérée des valeurs de  $X$

- Si  $X$  est d'espérance finie  $\mathbf{E}(X)$  ne dépend pas de l'ordre d'énumération
- Si  $X(\Omega)$  est fini alors  $X$  est d'espérance finie
- Si  $X(\Omega) \in [a, b]$  alors  $\mathbf{E}(X) \in [a, b]$

DEF:  $X$  est centrée si  $\mathbf{E}(X) = 0$

- Si  $X$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$  alors  $\mathbf{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(X \geq n)$

On considère  $\mathbf{P}(X = n) = \mathbf{P}(X \geq n) - \mathbf{P}(X \geq n+1)$  et on injecte dans l'espérance étudiée jusqu'à  $N$   
 ↗ On se ramène à mq  $\mathbf{NP}(X \geq n+1) \xrightarrow[N \rightarrow 0]{} 0$ : on considère l'union des  $(X = k)$  et on se ramène au reste d'une série convergente

- Si  $X$  est constante on dit qu'elle est déterministe. On a alors  $\mathbf{E}(X) = cste$

Théorème de transfert

Pour  $f : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$

- $f(X)$  est d'espérance finie  $\Leftrightarrow \sum_{x_n \in X(\Omega)} f(x_n) \mathbf{P}(X = x_n)$  converge
- $\mathbf{E}(f(X)) = \sum_{x_n \in X(\Omega)} f(x_n) \mathbf{P}(X = x_n)$

- Linéarité :  $\mathbf{E}(X + \lambda Y) = \mathbf{E}(X) + \lambda \mathbf{E}(Y)$
- Positivité :  $X \geq 0 \Rightarrow \mathbf{E}(X) \geq 0$
- Croissance :  $X \leq Y \Rightarrow \mathbf{E}(X) \leq \mathbf{E}(Y)$
- Corollaire :  $\mathbf{E}(X) \leq \mathbf{E}(|X|)$
- $\mathbf{E}(X) = m \Rightarrow X - m$  est centrée
- $X$  et  $Y$  indépendantes  $\Rightarrow \mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$
- ⚠ La réciproque est fausse

## Fonction indicatrice

Définition: La fonction indicatrice est la variable aléatoire  $\mathbb{1}_A$

$\Omega \rightarrow \{0, 1\}$ $\omega \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$ <ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A</math></li> <li>- <math>\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B</math></li> <li>- <math>\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbf{P}(A)</math></li> </ul>	$\mathbb{1}_{\cap A_i} = \prod A_i$ $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$
--	--

Définition

## Formule du crible

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \mathbf{E}\left(\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i}\right) \\
 &= \mathbf{E}\left(1 - \mathbb{1}_{\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i}\right) \\
 &= 1 - \mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{\bar{A}_i}\right) \quad \text{Linéarité de } \mathbf{E} \\
 &= 1 - \mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^n (1 - \mathbb{1}_{A_i})\right) \\
 &= 1 - \mathbf{E}\left(\sum_{k=0}^n (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket \\ \#I=k}} \mathbf{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)\right) \quad k \text{ est le choix de } \#I
 \end{aligned}$$

Démonstration

## 4 Variance

### Moment

Définition:  $X$  admet un moment d'ordre  $k$  si  $X^k$  est d'espérance finie

- $X$  admet un moment d'ordre  $k \Rightarrow X$  admet un moment d'ordre  $j, \forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket$
- Si  $X$  admet un moment d'ordre 2,  $X$  est d'espérance finie
- Si  $X$  admet un moment d'ordre 2 alors  $X - \mathbf{E}(X)$  aussi

Définition

### Variance

Définition:  $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^2)$  Si  $X$  admet un moment d'ordre 2

Définition:  $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$  est l'écart type de  $X$

- $\mathbf{E}(X)$  mesure la valeur moyenne alors que  $\mathbf{V}(X)$  mesure l'écart à la moyenne

Propriétés

- **Huygens**:  $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$
- $\mathbf{V}(aX + b) = a^2 \mathbf{V}(X)$
- $X$  déterministe  $\Rightarrow X$  nulle
- $\mathbf{V}(X) = 0 \Rightarrow X$  est constante presque sûrement  $\exists m \in \mathbb{R}, \mathbf{P}(X = m) = 1$

Définition

### Variable aléatoire centrée réduite

Définition: Une variable aléatoire est dite centrée réduite si  $\mathbf{E}(X) = 0$  et  $\sigma(X) = 1$

- Pour tout  $X$ ,  $\frac{X - \mathbf{E}(X)}{\sigma(X)}$  est centrée réduite

## Espérance et variance de lois usuelles

Loi	$X \hookrightarrow$	$\mathbf{E}(X)$	$\mathbf{V}(X)$
Uniforme	$\mathcal{U}(a_1 - a_n)$	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2 - \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \right)^2$
Bernoulli	$\mathcal{B}(p)$	$p$	$p(1-p)$
Binomiale	$\mathcal{B}(n, p)$	$np$	$np(1-p)$
Géométrique	$\mathcal{G}(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Poisson	$\mathcal{P}(\lambda)$	$\lambda$	$\lambda$

Exemple

## Inégalités de Markov

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète réelle admettant un moment d'ordre 2

$$-\mathbf{P}(|X| \geq t) \leq \frac{\mathbf{E}(|X|)}{t}$$

$$-\mathbf{P}(|X| \geq t) \leq \frac{\mathbf{E}(X^2)}{t^2}$$

▀ On partitionne en deux ensembles  $|x_i| \geq t$  et  $|x_i| < t$  et on calcule  $\mathbf{E}(|X|)$

▀ On peut affiner l'inégalité avec un transfert pour arriver à quelque chose en  $\epsilon^n$

Théorème

## Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète réelle admettant un moment d'ordre 2 et  $\epsilon > 0$

$$-\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbf{V}(|X|)}{\epsilon^2}$$

▀ Markov à  $X - \mathbf{E}(X)$

$$-\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| < \epsilon) \geq 1 - \frac{\mathbf{V}(|X|)}{\epsilon^2}$$

▀ Probabilité que  $X$  s'écarte de la moyenne Assez grossière

Théorème

$$-\mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{V}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\mathbf{E}(X_i X_j) - \mathbf{E}(X_i) \mathbf{E}(X_j))$$

$$-\text{En particulier : } \mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2(\mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y))$$

$$-\mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n X_i \text{ dans le cas de variables deux à deux indépendantes Indépendance mutuelle non nécessaire}$$

⚠ La réciproque est fausse :  $\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) \nRightarrow X, Y$  indépendantes

Propriétés

## Covariance

DEF:  $\mathbf{coV}(X, Y) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y)))$  est d'espérance finie

DEF:  $\rho(X, Y) = \frac{\mathbf{coV}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$  est le coefficient de corrélation de  $X$  et  $Y$  Si  $\sigma(X)\sigma(Y)$  est finie

$$-\mathbf{coV}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$$

$$-\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + 2\mathbf{coV}(X, Y) + \mathbf{V}(Y)$$

$$-X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \Rightarrow \mathbf{coV}(X, Y) = 0$$

⚠ Réciproque fausse

Définition

- **Cauchy-Schwartz** :  $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$   
Égalité :  $|\rho(X, Y)| = 1 \Leftrightarrow \exists(a, \lambda) \in \mathbb{R}^2, \mathbf{P}(X + \lambda Y = a) = 1$

## 5 Complément sur les loi usuelles

### Loi binomiale

- $\begin{cases} X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p) \\ Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p) \\ X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \end{cases} \Rightarrow X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n + m, p)$
- ⚠  $X_Y$  nombre de succès de  $n_m$  épreuves de Bernoulli indépendantes

### Loi géométrique

- $\mathbf{P}_{X > n}(X > n + k) = P(X > k)$  *Loi sans mémoire*
  - $X$  suit une loi sans mémoire  $\Leftrightarrow X$  suit une loi géométrique
  - $Y = \min(X_1 - X_n)_{X_i \hookrightarrow \mathcal{G}(p_i)} \hookrightarrow \mathcal{G}(A - (1 - p_1) - (1 - p_n))$
- ⚠  $\mathbf{P}(\min(X_1, X_2) > n) = \mathbf{P}(X_1 > n)\mathbf{P}(X_2 > n) = (1 - p_1)^n(1 - p_2)^n$

### Loi de Poisson

- $\begin{cases} X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \\ Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu) \\ X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \end{cases} \Rightarrow X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$
  - Généralisation  $X_1 - X_n \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_i)$  mutuellement indépendantes  $\Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$
  - Lien avec la loi binomiale :  $\begin{cases} X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n) \\ np_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda \end{cases} \Rightarrow \mathbf{P}(X_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$
- ⚠  $\mathbf{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \Rightarrow \begin{cases} \binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!} \\ p_n^k \sim \frac{\lambda^k}{n^k} \\ (1 - p_n)^{n-k} \sim e^{-\lambda} \end{cases}$

### Approximation par la loi de poisson

- Conditions  
 $n$  grand  $\geq 30$        $p_n$  petit  $\leq 0.1$        $np_n$  assez petit  $\leq 15$
- On calcule  $e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$  pour  $\lambda = np_n$

## Modélisation d'événements rares par la loi de Poisson

Soit un événement vérifiant

- Nombre de réalisation par intervalles de temps disjoints sont des vad indépendantes
- Probabilité de réalisation  $\propto$  Temps
- Unité de temps suffisamment petite pour qu'il ne se produise presque sûrement qu'une fois par intervalle

On note

- $t$  l'unité de temps
- $\alpha$  la probabilité de réalisation pendant  $t$
- $T$  un intervalle quelconque
- $X$  la vad du nombre de réalisations pendant  $T$
- $\tau = \frac{T}{t}$  où  $\tau \leq t$
- $\Rightarrow \alpha \frac{\tau}{t}$  est la probabilité de réalisation pendant  $\tau$

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\alpha\tau}{t}\right) = \mathcal{B}\left(n, \frac{\alpha T}{nt}\right)$$

On peut approximer par  $\mathcal{P}\left(\frac{\alpha T}{t}\right)$

Exemple

## 6 Loi faible des grands nombres

Définition

On dit que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont identiquement distribués si

- $(X_n)$  sont mutuellement indépendants
- $(X_n)$  sont de mêmes lois

Théorème

### Loi faible des grands nombres

Pour  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de vad iid qui admettent un moment d'ordre 2

$$\forall \epsilon > 0, \mathbf{P} \left( \left| \frac{S_n}{n} - m \right| > \epsilon \right) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

$$\begin{aligned} & - S_n = \sum_{k=1}^n X_k \\ & - m = \mathbf{E}(X_i) \\ & - \sigma = \sqrt{\mathbf{V}(X_i)} \end{aligned}$$

■ Tschebichev à  $Y = \frac{S_n}{n}$

- “
- Corollaire :  $\forall \epsilon > 0, \mathbf{P} \left( \left| \frac{S_n}{n} - m \right| > \epsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
  - Loi forte  $\mathbf{P} \left( \frac{S_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} m \right) = 1$

## 7 Chaîne de Markov

DEF: Une chaîne de Markov est un système de  $n$  états : Le système change d'état à chaque itération

- A l'itération  $k$ ,  $X_k$  décrit l'état dans lequel se trouve le système  
 $\mathbf{P}_{X_0=y_0-X_k=y_k}(X_{k+1}=y_{k+1}) = \mathbf{P}_{X_k=y_k}(X_{k+1}=y_{k+1}) \Rightarrow$  L'état  $k$  ne dépend que de l'état précédent
- On représente sous forme matricielle avec  $p_{ij} = \mathbf{P}_{X_k=i}(X_{k+1}=j) \Rightarrow$  Matrice de transition  
“ La matrice de transition est stochastique  $\sum \text{Lignes} = 1$
- $X_k$  s'écrit comme un vecteur ligne  $X_k = [x_1 \dots x_n]_{x_i} = \mathbf{P}(X_k = x_i)$   
On a alors  $X_{k+1} = X_k A$

Définition

$$\blacksquare \quad \mathbf{P}(X_{k+1} = j) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_{X_k=i}(X_{k+2} = j) \mathbf{P}(X_i = x_i) = \sum_{i=1}^n p_{ij} x_i$$

## État absorbant

DEF: Un état est dit absorbant si  $p_{i_0 i_0} = 1$

DEF: L'ensemble des états absorbants est appelé le bord

DEF: Une chaîne de Markov est dite absorbante si son bord est non vide et qu'on peut toujours le rejoindre

## Règles de la moyenne

- Soit  $T$  une partie du bord d'une chaîne absorbante

$$m_i = \sum_{k=1}^n m_k p_{ik}$$

–  $m_j$  est la probabilité d'atteindre  $T$  à partir de l'état  $j$   
 $\blacksquare \quad$  FPT en considérant l'état suivant

$$d_i = 1 + \sum_{k=1}^n p_{ik} d_k$$

–  $d_j$  est la durée moyenne depuis  $j$  jusqu'à l'absorption

$$\blacksquare \quad \begin{aligned} &\text{Soit } X_i \text{ le nombre d'étapes jusqu'à absorption depuis } i \\ &\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{i \rightarrow k} (1 + Y_k) \text{ Nb sachant que la première est } i \rightarrow k \end{aligned}$$

## 1 Normes

### 1.1 Définitions

#### Norme

DEF: On dit que  $\mathbf{N} : E \rightarrow \mathbb{R}$  est une **norme** si

- Axiome de séparation :  $\forall x \in E, \mathbf{N}(x) \geq 0$  et  $\mathbf{N}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$
- Homogénéité :  $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \mathbf{N}(\lambda x) = |\lambda| \mathbf{N}(x)$
- Inégalité triangulaire :  $\forall (x, y) \in E^2, \mathbf{N}(x + y) \leq \mathbf{N}(x) + \mathbf{N}(y)$

DEF: Un espace muni d'une norme est dit **normé** Noté  $(E, \mathbf{N})$

DEF: Soit  $E$  muni d'une loi multiplicatrice *i.e Algèbre*,

$\mathbf{N}$  est **multiplicatrice** si  $\exists c \in \mathbb{R}_+, \forall (x, y) \in E^2, \mathbf{N}(xy) \leq c\mathbf{N}(x)\mathbf{N}(y)$

Définition

Propriétés

Exemple

#### $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{C}^*$

- $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$
- $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$
- $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$

“  $\|z\|_2 = \|\tilde{z}\|_{2\tilde{z}} = (\|z_1\| + \dots + \|z_n\|) \in \mathbb{R}^n$

DEF:  $\|x\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$  avec  $p \in \mathbb{N}$

–  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$

Dans  $E = \mathbb{R}^n$ ,  $\|\cdot\|_2$  est une norme euclidienne alors que  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_\infty$  ne sont pas euclidiennes

⚠ "Égalité dans l'inégalité triangulaire  $\Leftrightarrow x$  et  $y$  colinéaires et de même sens" n'est vrai que pour une norme euclidienne

$\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  ou  $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{C})$

- $\|A\|_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{ij}|$
- $\|A\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{ij}^2| \right)^{\frac{1}{2}}$
- $\|A\|_\infty = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} |a_{ij}|$

– Ce sont des normes mutlitplicatives *Ou normes d'algèbre*

¶ Pour  $\|\cdot\|_\infty$  on majore  $|a_{ik}|$  par  $\|A\|_\infty$

¶ Pour  $\|\cdot\|_1$ , On utilise  $\|A\|_\infty \leq \|A\|_1 \leq n^2 \|A\|_\infty$

Exemple

$\mathbb{K}[X]$

Soit  $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$

- $\|P\|_1 = |a_0| + \dots + |a_n| = \sum_{i \in \mathbb{N}} |a_i|$
- $\|P\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$
- $\|P\|_\infty = \max_{i \in \mathbb{N}} |a_i|$

“ Si  $E = \mathbb{R}[X]$ ,  $\mathbf{N}_2$  est la norme associée au produit scalaire  $(P|Q) = \int_a^b P(t)Q(t)dt$

$$- \mathbf{N}_1(P) = \int_a^b |P(t)| dt$$

$$- \mathbf{N}_2(P) = \left( \int_a^b |P^2(t)| dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$- \mathbf{N}_\infty(P) = \sup_{[a,b]} |P(t)|$$

$$\int_a^b P(t)Q(t)dt$$

Exemple

$\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$  ou  $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{C})$

- $\mathbf{N}_1(f) = \int_a^b |f(t)| dt$
- $\mathbf{N}_2(f) = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$
- $\mathbf{N}_\infty(f) = \max_{[a,b]} |f|$

$$- \mathbf{N}_p = \left( \int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$- \mathbf{N}_p(f) \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} \mathbf{N}_\infty(f)$$

“ Si  $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$  est la norme associée au produit scalaire  $(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$

Exemple

## Normes équivalentes

DEF:  $\mathbf{N}_1$  et  $\mathbf{N}_2$  sont équivalentes si  $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in E, \alpha \mathbf{N}_1(x) \leq \mathbf{N}_2(x) \leq \beta \mathbf{N}_1(x)$

- L'équivalence des normes est une relation d'équivalence
- Pour deux normes équivalentes :  $\mathbf{N}_1$  bornée  $\Leftrightarrow \mathbf{N}_2$  bornée
- Pour deux normes équivalentes :  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$  pour  $\mathbf{N}_1 \Leftrightarrow u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$  pour  $\mathbf{N}_2$
- En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes

Consequences

- Une partie bornée en dimension finie l'est pour toutes les normes
- Une suite qui converge vers  $l$  en dimension finie le fait pour toutes les normes

Définition

“  $\mathbf{N}_1$  et  $\mathbf{N}_2$  équivalents :  $\forall r > 0, \exists r' > 0, \forall x \in E, \mathbf{B}_{o_1}(x, r') \subset \mathbf{B}_{o_2}(x, r)$

## 1.2 Suites

## Caractère borné

DEF: On dit que  $A \subset E$  est bornée si  $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in A, \|x\| \leq M$

DEF: On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée si  $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\| \leq M$

DEF: On dit que  $f : A \subset E \rightarrow F$  est normée si  $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in A, \|f(x)\| \leq M$

“ Le caractère borné dépend a priori de la norme choisie

## Convergence des suites

DEF:  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $l$  si  $\|u_n - l\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

- Unicité de la limite
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge  $\Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bornée
- $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \Rightarrow$  Ses sous-suites aussi
- $\begin{cases} u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \\ v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l' \end{cases} \Rightarrow u_n + v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l + l'$
- $\lambda u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda l$
- Si  $\|\cdot\|$  est multiplicatif alors  $u_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} ll'$

“ Le caractère convergent dépend a priori de la norme choisie

## Relations de comparaisons

- $u_n = O(v_n) \Leftrightarrow \|u_n\| = O(v_n)_{(u_n)}$  est dominée par  $(v_n)$
- $u_n = o(v_n) \Leftrightarrow \|u_n\| = o(v_n)_{(u_n)}$  est négligeable devant  $(v_n)$

## Convergence de la décomposition

- Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  que l'on décompose dans  $\mathcal{B}$ :  $u_n = \sum_{i=1}^p u_{n_i} e_i \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l_i$
- Soit  $l \in E$  décomposé dans  $\mathcal{B}$ :  $l = l_1 e_1 + \dots + l_p e_p$
- $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket u_{n_i} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l_i$
- ⇒ On utilise  $\|\cdot\|_\infty$  - ⇐ On utilise  $\|\cdot\|_1$

## 1.3 Limite et continuité

### Limite

DEF:  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a \in \overline{A}} l$  si  $\forall \epsilon > 0; \exists \alpha > 0, \forall x \in A, \|x - a\| \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - l\| \leq \epsilon$

- Il y a alors unicité de la limite

⚠️ On considère  $\alpha'' = \min(\alpha, \alpha')$  et  $x \in \mathbf{B}(a, \alpha'') \cap A$  ie  $a \in \overline{A}$  et on calcule  $\|l - l'\|$

- $\begin{cases} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l \\ a \in A \end{cases} \Rightarrow l = f(a)$
- Pour  $I = [a, +\infty[$ ,  $]a, +\infty[$  ou  $]-\infty, +\infty[$   
 $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} l$  si  $\forall \epsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in I, x \geq M \Rightarrow \|f(x) - l\| \leq \epsilon$
- $f : A \subset E \rightarrow \mathbb{R} \xrightarrow[x \rightarrow a \in \bar{A}]{} +\infty$  si  $\forall M \in \mathbb{R}^+, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, \|x - a\| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \geq M$
- **C caractérisation S séquentielle** :  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l \Leftrightarrow \forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \Rightarrow f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$

—  $\Rightarrow$  : Définition de la limite : Pour  $u_n \rightarrow a, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \|u_n - a\| \leq \alpha \Rightarrow \|f(u_n) - l\| \leq \epsilon$   
▲ —  $\Leftarrow$  : Par contraposée : On construit la bonne suite en faisant varier  $\alpha = \frac{1}{n+1}$  telle  $u_n \rightarrow a$  et  $f(u_n) \nrightarrow l$   $\nparallel \|f(u_n) - l\| > \epsilon$

—  $f \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty \Leftrightarrow \forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \Rightarrow f(u_n) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$   
■ —  $f \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l \Leftrightarrow \forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \Rightarrow f(u_n) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l$

## Continuité

DEF:  $f$  est continue en  $a \Leftrightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$

- **Prolongement** : Si  $a \in \bar{A} \setminus A$  et  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$  on peut prolonger  $f$  sur  $A \cup \{a\}$  en définissant  $\tilde{f} \Big|_x : A \cup \{a\} \subset E \rightarrow$   
■  $f = \tilde{f}|_A$
- **C caractérisation S séquentielle** :  $f$  continue en  $a \Leftrightarrow \forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \Rightarrow f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a)$

💡 La caractérisation séquentielle est la méthode la plus simple pour montrer qu'une fonction n'est pas continue ou n'a pas de limite

## Limite à gauche et à droite

DEF:  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow F$  admet une limite à gauche<sub>droite</sub> en  $a \in \bar{A}$  si  $f|_{I \cap ]-\infty, a[} \xrightarrow{f|_{I \cap ]-\infty, a[} a}$  a une limite en  $a$

DEF:  $f$  est continue à gauche<sub>droite</sub> en  $a$  si  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a > a}} f(x) = f(a)$

- $f$  admet une limite en  $a \Leftrightarrow f$  admet deux limites à gauche et à droite égales en  $a$   
▲  $\Leftarrow : \alpha'' = \min(\alpha, \alpha'), \forall x \in [a - \alpha'', a + \alpha''], \|f(x) - l\| \leq \epsilon$
- $f$  est continue en  $a \Leftrightarrow f$  continue à gauche et à droite en  $a$

## Opérations sur les limites

- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f = l \\ \lim_{x \rightarrow a} g = l' \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \lambda f + \mu g = \lambda l + \mu l'$
- $\lim_{x \rightarrow a} fg = ll'$  Si  $F$  est une algèbre<sub>Norme multiplicative</sub>
- $\lim_{x \rightarrow a} f : A \subset E \rightarrow \mathbb{R} = l \in \mathbb{R}^*$  alors  $f$  ne s'annule pas sur un voisinage de  $a$  et  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f} = \frac{1}{l}$

- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f = b \\ \lim_{x \rightarrow b} g = a \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g \circ f = c$  *Composition de limites infinies possible*  
 $\blacktriangleleft$  On combine les deux définitions de convergence en se donnant  $\epsilon_g$  donnant  $\alpha_g$  que l'on pose égal à  $\epsilon_f$  donnant alors  $\alpha_f$

### Relations de comparaison

- DEF:  $f$  est dominée par  $g$  au voisinage de  $a$  si  
 $\exists \alpha > 0, \exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in A, \|x - a\| \leq \alpha \Rightarrow \|f(x)\| \leq M \|g(x)\|$
- DEF:  $f$  est négligeable devant  $g$  au voisinage de  $a$  si  
 $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, \|x - a\| \leq \alpha \Rightarrow \|f(x)\| \leq \epsilon \|g(x)\|$

### Continuité d'une partie $A \subset E$

- DEF: On dit que  $f \in \mathcal{C}^0(A, F)$  si  $f$  est continue en  $a, \forall a \in A$
- $(f, g) \in \mathcal{C}^0(A, F)^2 \Rightarrow \begin{cases} f + g \in \mathcal{C}^0(A, F) \\ \lambda f \in \mathcal{C}^0(A, F) \\ f \times g \in \mathcal{C}^0(A, F) \end{cases}$

### Fonctions coordonnées

- $\forall x \in A$  on décompose  $f(x)$  dans  $\mathcal{B}$ :  $f(x) = f_1(x)e_1 + \dots + f_n(x)e_n$
- DEF:  $(f_1 - f_n)$  sont appelées fonctions coordonnées de  $f$  dans  $\mathcal{B}$   
 Ce sont des fonctions de  $A \subset E$  dans  $\mathbb{K}$
- $f$  continue  $\Rightarrow f_1 - f_n$  continue  
 $\blacktriangleleft$  Continuité des applications partielles  $\not\Rightarrow$  Continuité de  $f$   
 $\blacktriangleleft$  On se ramène à la continuité de la décomposition

Ne pas confondre les fonctions coordonnées et les applications partielles

## 1.4 Applications lipschitziennes

- DEF:  $f$  est  $k$ -lipschitzienne si  $\exists k \in \mathbb{R}^+, \forall (x, y) \in A^2, \|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|$
- $f$  lipschitzienne  $\Rightarrow f$  continue  
 $\blacktriangleleft$  On pose  $\alpha = \frac{\epsilon}{k}$  et  $\|x - a\| \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| \leq \epsilon$
  - $f + g, \lambda f$  et  $f \circ g$  sont lipschitziennes
  - $f$  et  $g$  lipschitziennes et bornées  $\Rightarrow fg$  est lipschitziennes  
 $\blacktriangleleft$  Utilisation de la définition du caractère borné et de la norme multiplicative  
 $\blacktriangleleft$  On simplifie  $\|f(x)g(x) - f(x')g(x')\|$  en faisant apparaître  $\pm f(x)g(x')$  pour majorer et montrer la lipschitziannité
  - $u \in \mathcal{L}(E, F)$  continue  $\Leftrightarrow u$  continue en 0  $\Leftrightarrow u$  bornée sur  $S(0, 1) \Leftrightarrow u$  lipschitzienne

## 1.5 Applications linéaires et bilinéaires

**Continuité des applications linéaires**

En dimension finie, une application linéaire est continue

⚠ Décomposition sur une base et majoration à l'aide de  $\|\cdot\|_\infty$

DEF: On dit que  $B : E \times F \rightarrow G$  est bilinéaire si elle est linéaire par rapport à chacune des variables

- En dimension finie
  - $\exists k \in \mathbb{R}_+, \forall (x, y) \in E \times F, \|B(x, y)\| \leq k \|x\| \|y\|$
  - $B$  est continue
- Généralisation : Une fonction  $p$ -linéaire en dimension finie est continue

▪ Le déterminant :  $A_k \rightarrow A \Rightarrow \det(A_k) \rightarrow \det(A)$

**1.6 Norme subordonnée**

DEF:  $\|x\| = \sup_{x \in S(0,1)} \|u(x)\|$

- $\|x\| = \sup_{x \in E \setminus \{0_E\}} \frac{\|u(x)\|}{j \|x\|}$
- $\forall x \in E \|u(x)\| \leq \|u\| \|x\|$
- $\|u \circ v\| \leq \|u\| \times \|v\|$
- $\|u\| = \sqrt{\max \text{sp} A^T A}$

⚠ On pose  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \end{pmatrix}$   $\|u(x)\|^2 = \|AX\|^2 = X^T A^T A X$  or  $A^T A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$   
 $\min(\text{sp}(A^T A)) \leq \frac{X^T A^T A X}{X^T X} \leq \max(\text{sp}(A^T A))$  puis passage à la borne sup

**2 Topologie****2.1 Définitions****Boules et sphères**

- $\mathbf{B}_o(a, r) = \{x \in E, \|a - x\| < r\}$  est la boule ouverte de centre  $a$  et de rayon  $r$
- $\mathbf{B}_f(a, r) = \{x \in E, \|a - x\| \leq r\}$  est la boule fermée de centre  $a$  et de rayon  $r$
- $\mathbf{S}(a, r) = \{x \in E, \|a - x\| = r\}$  est la sphère de centre  $a$  et de rayon  $r$

Une boule n'est pas forcément ronde

DEF: La boule unité est  $\mathbf{B}_o(0, 1)$  ou  $\mathbf{B}_f(0, 1)$

- $\mathbf{S}(a, r) = \mathbf{B}_f(a, r) \setminus \mathbf{B}_o(a, r)$

**Ouverts**

DEF: On dit que  $A$  est un ouvert de  $E$  si  $\forall x \in A, \exists r > 0, \mathbf{B}_o(x, r) \subset A$

- *Interprétation : Un ouvert ne contient pas son bord*
- Une boule ouverte est un ouvert

 Dans  $E = \mathbb{R}$  un intervalle ouvert est un ouvert

- Le caractère ouvert ne dépend pas de la norme équivalente choisie
- Une union d'ouverts est un ouvert
- Une intersection finie d'ouverts est un ouvert

## Fermés

- On dit que  $F \subset E$  est un fermé de  $E$  si  $\overline{F}$  est un ouvert de  $E$
- Une union finie de fermés est un fermé
- Une intersection finie de fermés est un fermé

 –  $E$  et  $\emptyset$  sont les seules parties de  $E$  à la fois ouvertes et fermées  
– Il ya des parties qui sont ni ouvertes ni fermées

- Une boule fermée est un fermé
- Une sphère est un fermé
- **Caractérisation Séquentielle** :  $F$  est un fermé  $\Leftrightarrow \forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}, u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l \Rightarrow l \in F$   
*i.e Toute suite convergente converge dans  $F$*

 —  $\Rightarrow$  : On suppose  $l \in F$  et on montre  $u_n \notin F$   
—  $\Leftarrow$  : Par l'absurde on suppose  $A$  non ouvert  $\Leftrightarrow \exists x \in A, \forall r > 0, \mathbf{B}_o(x, r) \not\subset A$   
On choisit  $r = \frac{1}{n}$  pour construire une suite de  $F$  convergeant en  $x \in F$

- Un sev d'un  $\mathbb{K}$  evn fini est un fermé

 Caractérisation séquentielle en décomposant  $l$  et  $u_n$  dans  $B$  adaptée

## Intérieur

DEF:  $x \in A$  appartient à l'intérieur de  $A$  si  $\exists r > 0, \mathbf{B}_o(x, r) \subset A$

On note  $\overset{\circ}{A}$  l'intérieur de  $A$

- $A$  ouvert  $\Leftrightarrow A = \overset{\circ}{A}$

## Adhérence

DEF:  $x \in E$  est un point adhérent de  $A$  si  $\forall r > 0, \mathbf{B}_o(x, r) \cap A \neq \emptyset$

On note  $\overline{A}$  l'adhérence de  $A$

- $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}$
- **Caractérisation Séquentielle** :  $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$   
 —  $\Rightarrow$  : A partir de la définition on forme une suite en faisant varier  $r$   
—  $\Leftarrow$  : La définition de la limite donne  $u_n \in \mathbf{B}_o(x, r) \cap A$
- $A$  fermé  $\Leftrightarrow A = \overline{A}$

  $\overline{\mathbf{B}_o(a, r)} = \mathbf{B}_f(a, r)$

## Frontière

DEF:  $\text{fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$

Définition

fr( $\mathbf{B}_o(a, r)$ ) =  $\mathbf{S}(a, r)$

## Densité

DEF:  $A$  est dense dans  $E$  si  $\overline{A} = E$

DEF:  $A$  est dense dans  $E \Leftrightarrow$  Tout élément de  $E$  est limite d'une suite valeurs dans  $A$

- $GL_n(\mathbb{K})$  est dense dans  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$

 On considère  $(M_k)$  où  $M_k = A - \frac{1}{k} I_n \notin GL_n(\mathbb{K})$  si  $\frac{1}{k} \in \text{sp}(A)_{\text{Max } n \text{ valeurs}}$

- L'ensemble des matrices diagonalisables de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$  est dense dans  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$   Pas vrai dans  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$

 A peut se trigonaliser  $A = PTP^{-1}$ ,  $T_k = T + \text{diag}\left(\frac{1}{k^2}, \dots, \frac{n}{k^2}\right)$

 On triture les pour avoir des coeffs diagonaux différents  $T$  diagonalisable si  $\neq \text{APCR}$  et on considère  $(M_k)$  où  $M_k = PT_k P^{-1}$

Définition

## Compacts

DEF: Un compact de  $E$  est une partie fermée et bornée

Définition

## 2.2 Image directe et image réciproque

### Image réciproque des ouverts et fermés

- L'image réciproque par une application continue d'un ouvert fermé est un ouvert fermé
    - Par continuité du déterminant et caractère ouvert de  $\mathbb{K}^*$ ,  $\det^{-1}(\mathbb{K}^*) = GL_n(\mathbb{K})$  est un ouvert
    - $f \circ f^{-1} = f$  est continue, comme  $\{0_{\mathcal{L}(E,F)}\}$  est un fermé  $\Rightarrow$  L'ensemble des projecteurs est un fermé
    - $A \times A^T$  est continue, comme  $\{I_n\}$  est un fermé,  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  est un fermé
- De plus pour  $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ ,  $|A_{ij}| < 1$  d'où  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  est borné  $\Rightarrow$  Compact

 Montrer  $A$  fermé ouvert : Trouver une fonction continue par l'image réciproque de laquelle un ensemble fermé ouvert donne  $A$

-  2 Caractérisation séquentielle pour  $u_n \in A$ ,  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \Rightarrow f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(l) \in B_B$  fermé d'où  $l \in A$
- 1 On se ramène au cas précédent en montrant  $f^{-1}(\mathcal{C}_F(B)) = \mathcal{C}_F(f^{-1}(B))$

Théorème

- L'image d'un compact par une fonction continue est un compact
  - L'image d'un segment est un segment
- Corollaire : Si  $A$  est un compact alors  $f(A)_{\text{Et } \|f(A)\|}$  est un compact de  $\mathbb{R}$ 
  - $f$  est continu  $\Rightarrow f(A)$  donc  $f$  bornés. On prend alpha  $- \frac{1}{n}$  qui n'est pas majorant et  $x_n$  tel  $\alpha - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq \alpha$
  - Or  $f(x_n) \in f(A)$  est fermé donc  $\alpha \in f(A)$

Propriétés

- Pour  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle  $\|f(x)\| \xrightarrow[\|x\| \rightarrow +\infty]{} +\infty$ ,  $f$  admet un minimum

⚠ On considère  $B_f(0_E, R)$  où  $R$  est tel  $\forall M, \|x\| \geq R \Rightarrow \|f(x)\| \geq M$  qui est un compact donc borné

### Théorème de D'Alembert Gauss Tout polynôme complexe admet une racine

⚠ Par l'absurde on suppose  $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) \neq 0 \Rightarrow |P(z)| \neq 0$ , on montre  $\lim_{\|z\| \rightarrow +\infty} P(z) = +\infty$  d'où  $|P(z)|$  admet un minimum sur  $\mathbb{C}$

⚠ On contredit avec un autre minimum

- Image réciproque d'un ouvert fermé est un ouvert fermé
- Image directe d'un compact est un compact

## 1 Fonctions continues par morceaux

Définition

### Subdivision d'un segment

DEF: On dit que  $\sigma$  est une subdivision de  $[a, b]$  si  $a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n = b$

DEF: La subdivision est dite régulière si  $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, a_{i+1} - a_i = cste$

- On a alors  $a_{i+1} - a_i = \frac{b-a}{n}$  et  $a_i = a_0 + i \frac{b-a}{n}$

DEF:  $\delta = \max_{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket} (a_{i+1} - a_i)$

DEF:  $\sigma_2$  est plus fine que  $\sigma_1$  si  $\sigma_1 \subset \sigma_2$

C'est une relation d'ordre

- $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$  est plus fine que  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$

Définition

### Fonctions en escalier

DEF:  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction en escalier si  $\exists \sigma = \{a_0, \dots, a_n\}$  de  $[a, b]$  telle  $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, f|_{[a_i, a_{i+1})} = cste$   
On dit que  $\sigma$  est adaptée à  $f$

- Si  $\sigma_2$  est plus fine que  $\sigma_1$  adaptée à  $f$  alors  $\sigma_2$  est aussi adaptée à  $f$
- $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$  est une  $\mathbb{R}$ -algèbre<sub>R-ev et anneau</sub>

⚠ Pour montrer que  $f + g$  est en escalier, on considère  $\sigma'' = \sigma \cup \sigma'$

Définition

### Fonctions affines par morceaux

DEF:  $f$  est affine par morceaux si  $\exists \sigma = \{a_0, \dots, a_n\}, f|_{[a_i, a_{i+1})}(x) = \lambda_i x + \mu_i$

- $\mathcal{A}([a, b], \mathbb{R})$  est un  $\mathbb{R}$ -ev

Définition

### Fonctions continues par morceaux

DEF:  $f$  est continue par morceaux si  $\exists \sigma = \{a_0, \dots, a_n\}, f|_{[a_i, a_{i+1})}$  est continue et admet une limite à gauche et à droite en tout point de  $\sigma$

- $\mathcal{C}_M$  est une  $\mathbb{R}$  algèbre
- $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) \subset \mathcal{A}([a, b], \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_M([a, b], \mathbb{R})$

DEF: Sur un intervalle quelconque, on dit que  $f \in \mathcal{C}_M(I, \mathbb{R})$  si  $\forall J_{segment} \subset I, f \in \mathcal{C}_M(J, \mathbb{R})$  Idem pour  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{E}$

- Une fonction  $\mathcal{C}_M$  sur un segment est bornée

⚠ On borne tous les segments prolongés par continuité en les points de la subdivision

Définition

### Théorème d'approximation uniforme

Soit  $f \in \mathcal{C}_M([a, b], \mathbb{R})$  et  $\epsilon > 0$ ,  $\exists \varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}), \max_{x \in [a, b]} |f(x) - \varphi(x)| \leq \epsilon$

$\Leftrightarrow$  Toute fonction  $\mathcal{C}_M$  est limite pour  $\|\cdot\|_\infty$  d'une fonction en escalier

Théorème

On approche par une fonction en escalier avec un pas assez petit

**Théorème de Weierstrass**

Soit  $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$  et  $\epsilon > 0$ ,  $\exists P \in \mathbb{R}[X]$ ,  $\max_{x \in [a, b]} |f(x) - P(x)| \leq \epsilon$

$\Leftrightarrow$  Toute fonction continue sur un segment est limite d'une suite de polynômes pour  $\|\cdot\|_\infty$

DEF:  $f$  est dérivable en  $a \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  admet une limite en  $a$  notée  $f'(a)$

- $f$  est dérivable en  $a \Leftrightarrow \exists l \in \mathbb{R}, \exists \epsilon : I \rightarrow \mathbb{R}, \begin{cases} \epsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \\ \forall x \in I, f(x) = f(a) + l(x - a) + (x - a)\epsilon(x) \end{cases}$

- $f$  dérivable en  $a \Rightarrow f$  continue en  $a$
- $f + g$ ,  $fg$  et  $\lambda f$  dérivables en  $a$   
 $g \circ f$  dérivable en  $a$  et  $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$

DEF:  $f$  est dérivable sur  $I$  si  $f$  est dérivable en  $a \in I, \forall a \in I$

- $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$  est stable par CL, multiplication, composition

**Théorème de Rolle**

$f$  est continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$  et  $f(a) = f(b)$   
 $\exists c \in ]a, b[, f'(c) = 0$

**Théorème des accroissements finis**

$f$  est continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$   
 $\exists c \in ]a, b[, f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

**Dérivation d'ordre supérieur**

- Par récurrence  $\begin{cases} f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x) \\ f^{(0)} = f \text{ Par convention} \end{cases}$

DEF: On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$  si  $f$  est  $k$ -dérivable et si  $f^{(k)}$  est continue sur  $I$

- $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  si  $f$  est  $\mathcal{C}^k, \forall k \in \mathbb{N}$
- $\mathcal{C}^0 \supsetneq \mathcal{D}^1 \supsetneq \mathcal{C}^1 \supsetneq \mathcal{D}^2 \supsetneq \dots$

$$- f, g \in \mathcal{C}^k \Rightarrow \begin{cases} \lambda f \in \mathcal{C}^k \\ f + g \in \mathcal{C}^k \\ f \circ g \in \mathcal{C}^k \\ fg \in \mathcal{C}^k \text{ et } (fg)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)} \end{cases}$$

 Analogue à Newton-Leibniz  $\Rightarrow$  Newton-exp

## $\mathcal{C}^k$ difféomorphisme

DEF:  $f$  est un  $\mathcal{C}^k$  difféomorphisme si

- $f$  bijective
- $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$
- $f^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^k$
- Si  $f$  est bijective de classe  $\mathcal{C}^k$  et si  $f'(x) \neq 0 \forall x \in I$  alors  $f$  est un  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme

☞ Lemme  $a \in I$  et  $b = f(a) \Rightarrow f^{-1}$  dérivable en  $b$  et  $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} \Rightarrow$  Taux d'accroissement  $\Rightarrow$  Récurrence

$$\text{» } (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

- Corollaire :  $f : I \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^k_{k \geq 1}$  tq  $f'$  ne s'annule pas induit un  $\mathcal{C}^k$  difféomorphisme de  $I$  dans  $f(I)$

☞ Stricte monotonie par non annulation de  $f'$

Définition

## Théorème de la limite de la dérivée

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

- $f$  continue sur  $[a, b]$
- $f$  dérivable sur  $]a, b]$
- $f'(x) \xrightarrow[x \rightarrow a^+]{} l$

☞ TAF sur le taux d'accroissement sur  $]a, x]$  puis  $x \rightarrow a^+$

$f$  est dérivable à droite en  $a$  et  $f'_d(a) = l$

- Corollaire : Alors  $f \in \mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$
- Généralisation :  $f \in \mathcal{C}^k$  sur  $]a, b]$  et  $f^{(i)}$  admettent des limites en  $a^+ \Rightarrow f \in \mathcal{C}^k$  sur  $[a, b]$

Théorème

💡 Montrer  $f \in \mathcal{C}^k$  : Règles de calcul *Composition ...* puis TLD pour les points particuliers

## 3 Intégration

### Intégration d'une fonction en escalier

Soit  $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$  et  $\sigma = \{a_0, \dots, a_n\}$  une subdivision adaptée

Soit  $\lambda_i \in \mathbb{R}, \forall x \in ]a_i, a_{i+1}[$ ,  $f(x) = \lambda_i$  alors  $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (a_{i+1} - a_i)$  est l'intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$

Propriétés

### Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Soit  $f \in \mathcal{C}_M([a, b], \mathbb{R})$  et  $\sigma = \{a_0, \dots, a_n\}$  une subdivision adaptée

$$\int f(t) dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t) dt$$

Propriétés

- Linéarité
- Relation de Chasles

- $f(x) = g(x), \forall x \in [a, b]$  sauf en un nombre fini de points  $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$

☞  $f - g$  est une fonction en escalier

Propriétés

## Théorème fondamental de l'intégration

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue et  $a \in I$  :  $F \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \rightarrow \int_a^x f(t)dt \end{cases}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $F'(x) = f(x)$

Taux d'accroissement puis intégration de la définition avec  $\epsilon$  de la limite

- Corollaire : Intégration d'une fonction  $\mathcal{C}_M$

Soit  $\sigma = \{a_0 - a_n\}$  adaptée,  $c \in [a, b]$  et  $F \begin{cases} [a, b] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \rightarrow \int_a^x f(t)dt \end{cases}$

$F$  est lipschitzienne donc continue et est  $\mathcal{C}^1$

— Sur  $[a, b] \setminus \sigma$ ,  $F$  est dérivable et a pour dérivée  $f$

— En  $a_i$ ,  $F$  est dérivable à droite et à gauche et  $\begin{cases} F_g(a_i) = f(a_i^-) \\ F_d(a_i) = f(a_i^+) \end{cases}$

$F'(x) \neq f(x) - f(a)$

Théorème

## Intégration par parties

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt$$

Théorème

## Changement de variables

Soit  $f$  continue sur  $I$  et  $\varphi : [a, b] \rightarrow I$  de classe  $\mathcal{C}^1$  :  $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)du$

Théorème fondamental à  $(F \circ \varphi)'$

Théorème

## Changement de variable

- On pose  $t = \varphi(u)$
- On vérifie que  $\varphi$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme

On remplace

$$\begin{array}{c|c||c|c} a & \varphi^{-1}(\alpha) & f(t) & f(\varphi(u)) \\ b & \varphi^{-1}(\beta) & dt & \varphi'(u)du \end{array}$$

Méthode

- Soit  $f$  continue et positive sur  $[a, b] : \int_a^b f(t)dt = 0 \Rightarrow f(t) = 0 \forall t \in [a, b]$

Par l'absurde on construit une fonction en escalier  $\leq f$  d'intégrale non nulle

Propriétés

Ca ne marche pas pour  $f \in \mathcal{C}_M$

## Valeur moyenne

DEF:  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$  est la valeur moyenne de  $f$  sur  $[a, b]$

Elle peut être définie pour  $f \in \mathcal{C}_M$

- Si  $f$  est continue  $\exists c \in [a, b], f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$

$f$  bornée  $\Rightarrow \mu$  bornée  $\Rightarrow$  TVI

Définition

- Théorème généralisé : Pour  $g \geq 0$ ,  $\exists c \in [a, b]$ ,  $\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g$
- ¶** 
$$\begin{cases} m = \min f \\ M = \max f \end{cases} \quad mg(t) \leq f(t)g(t) \leq Mg(t) \Rightarrow m \leq \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g} \leq M \Rightarrow \text{TVI}$$

**Formules générales**

$$\begin{aligned}\int u' u^\alpha &= \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} \text{ pour } \alpha \neq -1 \\ \int \frac{u'}{u} &= \ln(|u|) \\ \int u' f'(u) &= f(u)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int e^{\alpha x} dx &= \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \text{ pour } \alpha \in \mathbb{C}^* \\ \int \ln(x) dx &= x \ln(x) - x\end{aligned}$$

**Fonctions trigonométriques**

$$\begin{aligned}\int \cos(x) dx &= \sin(x) \\ \int \sin(x) dx &= -\cos(x) \\ \int \tan(x) dx &= -\ln(|\cos(x)|) \\ \int \cot(x) dx &= \ln(|\sin(x)|) \\ \int \frac{dx}{\cos^2(x)} &= \tan(x) \\ \int \frac{dx}{\sin^2(x)} &= -\cot(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \cosh(x) dx &= \sinh(x) \\ \int \sinh(x) dx &= \cosh(x) \\ \int \tanh(x) dx &= \ln(|\cosh(x)|) \\ \int \coth(x) dx &= \ln(|\sinh(x)|) \\ \int \frac{dx}{\cosh^2(x)} &= \tanh(x) \\ \int \frac{dx}{\sinh^2(x)} &= -\coth(x)\end{aligned}$$

**Autres primitives**

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \text{ pour } a \neq 0$$

Changement de variable  $x = au$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \text{ pour } a \neq 0 \quad \text{Décomposition en éléments simples}$$

**Calcul de**  $\frac{1}{ax^2 + bx + c}$ 

- On cherche à transformer l'expression en  $\frac{1}{(\alpha x + \beta)^2 + \delta}$
- On applique la formule pour arctan

**💡** Pour une fraction rationnelle, on décompose en éléments simples et on est ramené au type précédent

**Intégration de polynômes de fonction trigonométriques**

$$\int \cos^p(t) \sin^q(t)$$

- $p$  impair  $\rightarrow u = \sin(t)$
- $q$  impair  $\rightarrow u = \cos(t)$
- $q$  et  $p$  pairs  $\rightarrow$  Linéarisation Formules cos et sin avec les exponentielles

**Règles de Bioche pour les fractions trigonométriques** Valable en hyperbolique.

- $t \rightarrow -t$  laisse  $f$  invariante  $\Rightarrow u = \cos(t)$
- $t \rightarrow \pi - t$  laisse  $f$  invariante  $\Rightarrow u = \sin(t)$
- $t \rightarrow \pi + t$  laisse  $f$  invariante  $\Rightarrow u = \tan(t)$
- $2$  des trois propositions  $\Rightarrow u = \cos(2t)$
- Aucune des trois propositions  $\Rightarrow u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$



- $\sqrt{1-t^2} \rightarrow t = \cos(u)$
- $\sqrt{t^2-1} \rightarrow \begin{cases} t = \cosh(u) \text{ si } t \geq 1 \\ t = \cosh(-u) \text{ si } t \leq -1 \end{cases}$
- $\sqrt{t^2+1} \rightarrow t = \sinh(u)$

**Méthodes des rectangles**

Soit  $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$  et  $\sigma = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  une subdivision de  $[a, b]$

Soit  $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \forall n \in \mathbb{N}^*, c_{i,n} \in [a_i, a_{i+1}]$

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(c_{i,n})(a_{i+1} - a_i) \xrightarrow[\delta_{\text{Pas de la subdivision}} \rightarrow 0]{} \int_a^b f(t) dt \quad \text{La somme de Riemann converge vers l'intégrale}$$

Dans le cas de  $f$  lipschitzienne, on majore  $|S_n - f|$  par un facteur tendant vers 0 par la méthode des rectangles

Cas particuliers utiles

- Subdivision régulière  $\Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_a^b f(t) dt$
- $c_{i,n} = a_i a_{i+1}$
- $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^1 f(t) dt$

$M_1 = \max_{[a,b]} |f'| \Rightarrow f$  est  $M_1$  lipschitzien  $\Rightarrow |S_n - f| \leq \frac{M_1(b-a)^2}{n} \Rightarrow$  Convergence en  $\frac{1}{n}$

Méthode des trapèzes :  $\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \frac{f(a_i) + f(a_{i+1})}{2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_a^b f(t) dt$  En  $\frac{1}{n^2}$

**4 Formules de Taylor****Taylor avec reste intégral**

Soit  $f \in C^{n+1}$  sur  $[a, b]$

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$$

IPP successives à partir du théorème fondamental

**Taylor Lagrange****Inégalité**

Soit  $f \in C^{n+1}$  sur  $[a, b]$ ,  $\Rightarrow f^{(n+1)}$  est continue sur  $[a, b]$  donc bornée, on note  $M_{n+1} = \sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}|$

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M_{n+1} \frac{|(b-a)^{n+1}|}{(n+1)!}$$

Majoration de Taylor avec reste intégral

**Égalité**

Soit  $f \in C^{n+1}$  sur  $[a, b]$ ,  $\exists c \in [a, b]$ ,  $f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$

On part de Taylor reste intégral  $\rightarrow f^{(n+1)}$  bornée  $\Rightarrow (f(b) - \sum) \frac{(n+1)!}{|(b-a)^{n+1}|}$  aussi  $\Rightarrow$  TVI

TAF = Égalité de Taylor Lagrange pour  $n = 0$

**Taylor Young**

Soit  $f$  de classe  $C^{n+1}$  sur  $I$  et  $a \in I$

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + o((x-a)^n)$$

Réurrence en posant une fonction s'annulant en 0 donnant le résultat à laquelle on applique le lemme

Lemme :  $g \in C^1$ ,  $g'(x) = o(x^n)$  au  $\mathcal{V}_0$  alors  $g(x) - g(0) = o(x^{n+1})$

**»**  $o((x-a)^n) = \underset{a}{(x-a)^n} \epsilon(x)$  où  $\epsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$

- 💡** –  $T_R f$  et  $T_L$  : Propriétés globales Ex : Sur un segment
- $T_Y$  : Propriétés locales : Limite, DL, Tangente en un point, Asymptote au  $\mathcal{V}_a$

## 5 Fonctions convexes

DEF:  $f$  est **convexe** si v

**»** En tout point  $y + \lambda(x-y)$  de  $[x, y]$ , l'image par  $f$  du point est au-dessus de la corde entre  $y$  et  $x$

DEF:  $f$  est **concave** si  $-f$  est convexe

DEF: On dit que  $A \subset E$  est convexe si  $\forall (M, N) \in A^2, [MN] \in A$

DEF: Épigraphe :  $E(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in I, y \geq f(x)\}$

- 💡** — Convexe : En dessous de ses cordes
- Concave : Au dessus de ses cordes

–  $f$  convexe  $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in I^2$  en posant  $\begin{cases} M = (x, f(x)) \\ N = (y, f(y)) \end{cases}$  la corde  $[MN]$  est au-dessus de l'arc  $MN$

**»**  $z \in [xy], \exists \lambda \in [0, 1], z = \lambda x + (1-\lambda)y$

–  $f$  convexe  $\Leftrightarrow E(f)$  est une partie convexe du plan

– On définit pour  $a \in I$   $\varphi_a \left| \begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightarrow & \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array} \right.$

$f$  convexe  $\Leftrightarrow \forall a \in I, \varphi_a$  est croissante sur  $I \setminus \{a\}$

**»** Mq  $\forall (x_1, x_2) \in (I \setminus \{a\})^2, x_1 < x_2 \varphi_a(x_2) - \varphi_a(x_1) \geq 0 \Rightarrow$  Disjonction de cas sur la position de  $a$  par rapport à  $x_1$  et  $x_2$

**»** On utilise  $x_1 = \lambda a + (1-\lambda)x_2$  et la convexité

- $f$  convexe  $\Leftrightarrow f'$  est croissante  $\Leftrightarrow f'' \geq 0$   
 $\blacktriangleleft \Rightarrow$  : Pour  $z \in [xy]$  on utilise  $\begin{cases} \varphi_x(z) \leq \varphi_x(y) & \text{Pour } z \rightarrow x^+ \\ \varphi_y(z) \leq \varphi_y(x) & \text{Pour } z \rightarrow x^- \end{cases}$  et le taux d'accroissement
- $f$  convexe  $\Leftrightarrow f$  au-dessus de sa tangente en tout point  
 $\blacktriangleleft \Rightarrow$  Équation de la tangente en  $(a, f(a))$  et étude de fonction
- $f$  convexe  $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (\lambda_1 - \lambda_n) \in [0, 1]^n, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \forall (x_1 - x_n) \in I^n$   
 $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$   
 $\blacktriangleleft \Rightarrow$  Réurrence  
 $\quad \Leftarrow$  Cas  $n = 2$  = Définition de la convexité

Cas particulier :  $\forall i \lambda_i = \frac{1}{n}$  appliqué à la fonction ln concave  $f'' < 0$

“ Inégalité arithmético-géométrique :  $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

Fonction	Inégalité
$\ln(1+x)$	$\ln(1+x) \leq x$
$\exp(x)$	$e^x \geq 1+x$
$\sin(x)_{[0, \frac{\pi}{2}]}$	$\frac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x$ Corde Tangente en 0

## 6 Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé

- Soit  $\mathcal{B} = \{e_1 - e_n\}$  Base de l'arrivée :  $f(t) = f_1(t)e_1 + \dots + f_n(t)e_n$  Fonctions coordonnées
- $f$  continue  $\Leftrightarrow f_1, \dots, f_n$  continues

### Dérivation

- $f$  dérivable  $\Leftrightarrow f_1, \dots, f_n$  dérivables  
 $f' = f'_1 e_1 + \dots + f'_n e_n$
- $f$  dérivable  $\Rightarrow u \circ f$  est dérivable et  $(u \circ f)' = u \circ f'$   
 $\blacktriangleleft \frac{u(f(x)) - u(f(a))}{x - a} = u\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right) \xrightarrow{x \rightarrow a} u(f'(a))$  par continuité
- $\begin{cases} f \text{ et } g \text{ dérivables} \\ B \text{ bilinéaire} \end{cases} \Rightarrow \varphi(t) = B(f(t), g(t))$  dérivable et  $\varphi'(t) = B(f'(t), g(t)) + B(f(t), g'(t))$   
 $\blacktriangleleft \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} = B\left(f(a), \frac{g(x) - g(a)}{x - a}\right) + B\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}, g(a)\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$  bilinéaire de dim finie = continue
- $\begin{cases} f \text{ et } g \in \mathcal{C}^k \\ B \text{ bilinéaire} \end{cases} \Rightarrow \varphi(t) = B(f(t), g(t)) \in \mathcal{C}^k$  et  $\varphi(t) = B(f(t), g(t))^{(k)} = \sum_{i=0}^n \binom{k}{i} B(f^{(k)}, g^{(k-i)})$

- $\begin{cases} \varphi \text{ } n\text{-linéaire} \\ f_1, \dots, f_n \text{ dérivables} \end{cases} \Rightarrow \varphi(f_1(t), \dots, f_n(t)) \text{ dérivable et } \varphi(f_1 - f_n)' = \varphi(f'_1 - f_n) + \dots + \varphi(f_1, \dots, f'_n)$

## Intégration

- Pour  $f$  continue par morceaux,  $\int_a^b f(t)dt = \left( \int_a^b f_1(t)dt \right) e_1 + \dots + \left( \int_a^b f_n(t)dt \right) e_n$
- $\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$  Si  $a \leq b$   
⚠ On se ramène au cas continu et on passe à la limite sur la norme de l'expression des sommes de Riemann
- $\left\| \int_a^b f \right\| \leq (b-a) \sup_{[a,b]} \|f\|$
- Le théorème fondamental reste valable
  - Si  $f \in \mathcal{C}^1([a,b], F)$ ,  $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a) \Rightarrow \|f(b) - f(a)\| \leq (b-a) \sup_{[a,b]} \|f'\|$
  - Si  $\|f'\|$  est bornée sur  $I$ , alors  $f$  est lipschitzienne sur  $I$
- ⚡ Formules de Taylor
  - Restent valables :  $T_R f, IT_L, T_Y$
  - Non valables : Rolle, TAF, ET<sub>L</sub>

## 7 Compléments de cours

### Fonctions définies par une intégrale

- $g \begin{cases} J & \rightarrow F \\ x & \rightarrow \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt \end{cases}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $g'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$   
⚠  $g(x) = F(v(x)) - F(u(x))$

### Lemme de Lebesgue

- Soit  $f \in \mathcal{C}_M([a,b], F)$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) dt$  idem pour  $\cos$   
⚠ On s'intéresse successivement à  $f \in \mathcal{C}^1$ ,  $f$  constante,  $f$  en escalier et on finit par  $f \in \mathcal{C}_M$  avec l'approximation uniforme

## 1 Définition

Définition

### Intégrales généralisées sur une borne

DEF: Soit  $f \in \mathcal{C}_M([a, b[, \mathbb{R})$  avec  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

On dit que  $\int_a^b f(t)dt$  est convergente si  $F : x \rightarrow \int_a^x f(t)dt$  admet une limite quand  $x \rightarrow b$

On pose alors  $\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t)dt$

- Soit  $c \in [a, b[, \int_a^b f(t)dt$  converge  $\Leftrightarrow \int_c^b f(t)dt$  converge

On a alors  $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$

⚠  $\int_a^c f(t)dt = cste$

⚠

$\int_{-\infty}^{+\infty} f \text{ cv} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x f(t)dt$  existe

Propriétés

- Linéarité :  $\int_a^b f \text{ cv et } \int_a^b g \text{ cv} \Rightarrow \int_a^b f + \lambda g \text{ cv}$

On a alors  $\int_a^b f(t) + \lambda g(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \lambda \int_a^b g(t)dt$

- Faux problème de convergence

Si  $f$  admet une limite  $l \in \mathbb{R}_{\Delta \neq +\infty}$  en  $b$  alors  $\int_a^b f(t)dt$  cv

On dit qu'en  $b$  il y a un faux problème de convergence

⚠ On prolonge par continuité en posant  $f(b) = l$

## 2 Fonctions à valeurs positives

- $\int_a^b f(t)dt$  converge  $\Leftrightarrow F(x) = \int_a^x f(t)dt$  est bornée sur  $[a, b]$   
 $\blacksquare | f(t) \geq 0 \Rightarrow F$  croissante et  $F$  admet une limite en  $b \Leftrightarrow F$  est bornée sur  $[a, b]$
  - Théorème de comparaison : Si  $\forall t \in [a, b], f(t) \leq g(t)$ 
    - $\int_a^b g \text{ cv} \Rightarrow \int_a^b f \text{ cv}$
    - $\int_a^b f \text{ dv} \Rightarrow \int_a^b g \text{ dv}$
    - $\blacksquare |$ 
      - $G$  bornée  $\Rightarrow F$  bornée
      - $F \xrightarrow[x \rightarrow b]{} +\infty \Rightarrow G \xrightarrow[x \rightarrow b]{} +\infty$
  - Relations d'asymptotique  
 $f \underset{b}{=} O(g)$ 
    - $\int_a^b g \text{ cv} \Rightarrow \int_a^b f \text{ cv}$
    - $\int_a^b f \text{ dv} \Rightarrow \int_a^b g \text{ dv}$
- Idem avec o*

### Intégrales de Riemann

- $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \text{ cv} \Leftrightarrow \alpha > 1$
- $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \text{ cv} \Leftrightarrow \alpha < 1$
- $\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha} \text{ cv} \Leftrightarrow \alpha < 1$

Corollaire :  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$  diverge  $\forall \alpha$

### Test de Riemann

En  $+\infty$

- $\begin{cases} \exists k \in \mathbb{R}_+, \\ \exists \alpha > 1 \end{cases}, f(x) \sim \frac{k}{x^\alpha} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f \text{ cv} \Leftrightarrow \alpha > 1$
- $\exists \alpha > 1, f(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right) \Rightarrow \int_a^{+\infty} f \text{ cv}$
- $\exists \alpha \leq 1, \frac{1}{t^\alpha} \underset{+\infty}{=} O(f(t)) \Rightarrow \int_a^{+\infty} f \text{ dv}$

En  $a$

- $f(t) \underset{a}{\sim} \frac{t}{(t-a)^\alpha} \Rightarrow \int_a^b f \text{ cv} \Leftrightarrow \alpha < 1$
- $\exists \alpha < 1, f(t) \underset{a}{=} O\left(\frac{1}{(t-a)^\alpha}\right) \Rightarrow \int_a^b f \text{ cv}$
- $\exists \alpha \leq 1, \frac{1}{(t-a)^\alpha} \underset{a}{=} O(f) \Rightarrow \int_a^b f \text{ dv}$

## 3 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

DEF: Pour  $f \in \mathcal{C}_M$  avec  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ,  $\int_a^b f$  est absolument convergente si  $\int_a^b |f|$  converge

DEF:  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$  si  $\int_a^b f$  converge absolument

DEF: Si  $\int_a^b f$  est convergente mais pas absolument convergente elle est semi-convergente

- $\int_a^b f$  Absolument convergente  $\Rightarrow$  Convergente
- $\int_a^b f$  absolument convergente  $\Rightarrow \int_a^b f$  convergente

⚠ La réciproque est fausse

⚠ On considère :  $\mathbb{R} : \frac{f + |f|}{2}$ ,  $\mathbb{C} : \operatorname{Re}(f) + i\operatorname{Im}(f)$

### Intégrale de Dirichlet

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$  est semi-convergente

- $f$  : On sépare  $\int_0^1$  Faux problème et  $\int_1^{+\infty}$  IPP
- $|f|$  : Pour  $\int_1^{x \rightarrow +\infty}$  on remarque  $|\sin(t)| \geq \sin^2(t)$  Intégration après linéarisation

- Pour  $f$  continue et intégrable,  $\int_a^b |f(t)| dt = 0 \Rightarrow f(t) = 0, \forall t \in [a, b]$

### Intégration par parties

$fg$  admet une limite finie en  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

- $\int_a^b f'g$  et  $\int_a^b fg'$  sont de même nature
- Si elles convergent :  $\int_a^b f'g = \lim_{x \rightarrow b} [fg]_a^x - \int_a^b fg'$

IPP d'une  $\int$  convergente peut donner deux termes divergents

- ⚠ 1. IPP en gardant  $\epsilon$  sur une borne problématique et  $\epsilon \rightarrow a$  après calcul
- ⚠ 2. Choisir astucieusement une constante d'intégration rendant les deux bouts convergents

⚠ Pour les concours faire des IPP avec  $A$  et  $B$  puis  $\begin{cases} A \rightarrow a \\ B \rightarrow b \end{cases}$

### Fonction $\Gamma$ d'Euler

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

- Domaine de définition :  $\mathbb{R}_+^*$
- $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \forall x \in \mathbb{R}_+^*$
- $\Gamma(n+1) = n!$

- On sépare  $\int_0^1$  Riemann et  $\int_1^{x \rightarrow +\infty}$  comparée
- IPP
- Récurrence

### Changement de variable

Soit  $f \in \mathcal{C}_M$  sur  $[a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}]$  et  $\varphi$  bijection  $\mathcal{C}^1$  de  $[\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  tel

$$\begin{cases} \varphi(\alpha) = a \\ \lim_{x \rightarrow \beta} \varphi(x) = b \end{cases}$$

- $\int_\alpha^\beta \varphi'(u)f(\varphi(u))du$  et  $\int_a^b f(t)dt$  sont de même nature
- Si elles convergent, elles sont égales

- Si  $f$  intégrable sur  $[a, +\infty[$  admet une limite  $l$  en  $+\infty$  alors  $l = 0$

Par l'absurde on suppose  $l > 0$

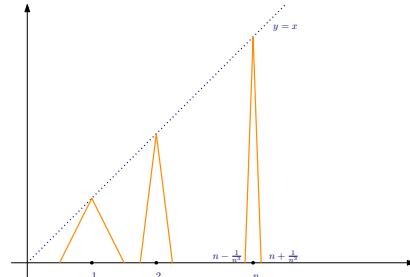
- $\mathbb{R} : \exists A, x \geq A \Rightarrow f(x) \geq \frac{l}{2}$  puis intégration
- $\mathbb{C}$  : On sépare  $\mathbb{R}e$  et  $\mathbb{I}m$  avec une limite chacune

$\triangleleft$  La réciproque est fausse :  $f \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \nRightarrow \int_a^{+\infty} f \text{ converge}$

$\triangleleft$  Différent des séries  $\int_a^{+\infty} f \text{ converge} \nRightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0$

Contre-exemple :  $f$  intégrable bien que  $f \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

$\triangleleft$  On montre en sommant l'aire des triangles que  $\int_0^x f$  est bornée  $\Rightarrow f$  intégrable car  $\geq 0$



- Si  $f$  est  $\mathcal{C}_M$  sur  $[a, b] \subset \mathbb{R} \neq [a, +\infty[$  et est bornée alors  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$

$\triangleleft$   $|f|$  est bornée donc intégrable  $\Rightarrow f$  intégrable

## 5 Intégration des relations de comparaison

On suppose  $f$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$  et  $g$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$

Si  $\int_a^b f$  converge

– Si  $f \underset{b}{=} o(g)$  alors  $\int_a^x f \underset{b}{=} o\left(\int_x^b g\right)$

– Idem  $O$

–  $f \underset{b}{\sim} g$  alors  $\int_a^x f \underset{b}{\sim} \int_a^x g$

1 Convergence :  $f \underset{b}{=} o(g) \Leftrightarrow b - \alpha \leq x < b \Rightarrow |f(x)| \leq \epsilon g(x) \Rightarrow \left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq \epsilon \int_x^y g(t) dt$  et  $y \rightarrow b$

1 Divergence :  $\left| \frac{\int_a^{b-\alpha} f}{\int_a^x g} \right| = \left| \frac{\int_a^x f}{\int_a^x g} \right| \xrightarrow{cste} +\infty + \left| \frac{\int_{b-\alpha}^x f}{\int_a^x g} \right| |f| \leq \epsilon g$

3  $f \sim g \Leftrightarrow f - g = o(g) \Rightarrow$  Cas 1

Si  $\int_a^b g$  diverge

– Si  $f \underset{b}{=} o(g)$  alors  $\int_a^x f \underset{b}{=} o\left(\int_x^b g\right)$

– Idem  $O$

–  $f \underset{b}{\sim} g$  alors  $\int_a^x f \underset{b}{\sim} \int_a^x g$

## 6 Comparaison série intégrale

- $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$   $\begin{cases} f \text{ positive} \\ f \text{ décroissante}, \sum_{n \geq a} f(n) \text{ et } \int_a^{+\infty} f \text{ sont de même nature} \\ f \text{ continue} \end{cases}$

$\triangleleft$  On part de  $\int_a^x f(t) dt = \int_a^{\lfloor a \rfloor + 1} f + \sum_{k=\lfloor a \rfloor + 1}^{\lfloor x \rfloor - 1} \int_k^{k+1} f + \int_{\lfloor x \rfloor}^x f$  alors  $\begin{cases} \int_a^x f \leq \alpha + S, \forall x \in [a, +\infty[ \\ f \text{ est positive} \end{cases}$  d'où  $\int_a^{+\infty} f$  converge

- Séries alternées :  $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$  est  $\begin{cases} Acv \text{ si } \alpha > 1 \\ Scv \text{ si } 0 < \alpha < 1 \\ Dv \text{ si } \alpha \leq 0 \end{cases}$

## 7 Espaces vectoriels

- L'ensemble des fonctions de  $E \rightarrow \mathbb{K}$  continues et intégrables sur  $I$  est un  $\mathbb{K}$ -ev
- L'ensemble des fonctions de  $E \rightarrow \mathbb{K}$  continues et de carrés intégrables sur  $I$  est un  $\mathbb{K}$ -ev
- Cauchy-Schwartz :  $\left| \int_I fg \right| \leq \sqrt{\int_I |f|^2} \sqrt{\int_I |g|^2}$

## 8 Intégrales célèbres

### Intégrales de Bertrand

$$1. \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha \ln^\beta(t)} \text{ converge} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > 1 \text{ ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}$$

- ☞
  - Pour  $\alpha \geq 1$  comparaison aux séries de Riemann en considérant  $\gamma \in [1, \alpha]$
  - Pour  $\alpha = 1$  changement de variables

$$2. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^\alpha |\ln^\beta(t)|} \text{ converge} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < 1 \text{ ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}$$

### Intégrale d'Euler

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt = -\frac{\pi}{2} \ln(2)$$

- ☞ Calcul de  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t)) dt$  égales par changement de variable en utilisant des formules trigonométriques

### Intégrale de Dirichlet

$$-\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - 1 \right) \text{ si } t \not\equiv 0[2\pi] \text{ et } n \text{ sinon}$$

☞  $\cos(kt) = \operatorname{Re}(e^{ikt})$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)u}{\sin(u)} du = \frac{\pi}{2}$$

$$-f(x) = \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} = \frac{x}{6} + o(x)$$

– Lemme de Lebesgue à  $f : \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)u}{u} du \rightarrow \frac{\pi}{2}$

– Changement de variable  $t = (2n+1)u \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$

### Intégrale de Poisson

$$-\int_0^{2\pi} \ln(1 - 2a \cos(t) + a^2) = 4\pi \ln(\max|a|, 1) \text{ si } a \neq 1$$

## 1 Suites de fonctions

### 1.1 Convergences

Définition

#### Convergence simple

DEF:  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers  $f$  si  $\forall x \in I, f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$   
 Soit  $\forall x \in I, \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |f_n - f| \leq \epsilon$

Définition

#### Convergence uniforme

DEF:  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  si  $\forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$   
 — Convergence simple :  $N(x)$   
 — Convergence uniforme :  $N(\mathcal{X}) \Rightarrow$  Convergence plus forte

DEF: Autre énoncé :  $f_n \xrightarrow{\text{cvu}} f \Leftrightarrow \|f_n - f\|_\infty^I \rightarrow 0$   
 —  $f_n \xrightarrow{\text{cvu}} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{cvs}} f$

Théorème

#### Théorèmes d'approximation uniforme

- Soit  $f \in \mathcal{C}_M([a, b], \mathbb{K})$   
 $\exists (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K}), \varphi_n \xrightarrow{\text{cvu}} f$
- Weierstrass : Soit  $f \in \mathcal{C}_M([a, b], \mathbb{K})$   
 $\exists (P_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X], P_n \xrightarrow{\text{cvu}} f$

Propriétés

- $\left\{ \begin{array}{l} f_n \xrightarrow{\text{cvu}} f \\ g_n \xrightarrow{\text{cvu}} g \end{array} \right. \Rightarrow \lambda f_n + g_n \xrightarrow{\text{cvu}} \lambda f + g$
- $\triangle \left\{ \begin{array}{l} f_n \xrightarrow{\text{cvu}} f \\ g_n \xrightarrow{\text{cvu}} g \end{array} \right. \not\Rightarrow f_n g_n \xrightarrow{\text{cvu}} fg \text{ mais } \Rightarrow f_n g_n \xrightarrow{\text{cvs}} fg$
- $\left\{ \begin{array}{l} f_n \xrightarrow{\text{cvu}} f \\ g_n \xrightarrow{\text{cvu}} g \end{array} \right. \Rightarrow f_n g_n \xrightarrow{\text{cvu}} fg$   
 $f_n \text{ et } g_n \text{ sont uniformément majorées sur } I \exists M, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_n(x)| \leq M$

### 1.2 Théorèmes

**Théorème de continuité**

Si  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  continue et  $f_n \xrightarrow{\text{cvu}} f$  sur  $I$  alors  $f$  continue

 On montre que  $\forall \epsilon, \|f(x) - f(a)\| \leq \epsilon$  en faisant  $\pm f_N(x)$  et  $\pm f_N(a)$  et en majorant les trois normes

 L'absence de continuité de  $f$  permet de montrer l'absence de convergence uniforme

**Théorème de la double limite**

Soit  $I$  de la forme  $[a, +\infty[$  ou  $]a, +\infty[$

- $f_n \xrightarrow{\text{cvu}} f$  sur  $I$
  - $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l_n, \forall n \in \mathbb{N}$
  - $l_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$
- $$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l$$

**Théorème d'interversion :**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) \right)$

 On découpe  $|f(x) - l|$  en 2 et on majore chaque bout  $\pm f_n(x) \pm l_n$

**Théorème d'interversion limite intégrale d'une suite de fonctions cvu sur un segment**

$f_n \xrightarrow{\text{cvu}} f$  sur  $[a, b]$  alors  $(f_n, f) \in \mathcal{C}_M$  sur  $[a, b]$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt$$

**Théorème interverson :**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^n f_n(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$

 Ne marche pas sur  $I$  qui n'est pas un segment

**Théorème de la convergence dominée**

Soit  $f_n \in \mathcal{C}_M(I, \mathbb{K})$  et  $\varphi \in \mathcal{C}_M(I, \mathbb{R}_+)$  intégrable

- $f_n \xrightarrow{\text{cvs}} f$  avec  $f \in \mathcal{C}_M(I, \mathbb{K})$
  - $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, |f_n(t)| \leq \varphi(t)$  Domination
- $$-\quad f \text{ intégrable}$$
- $$-\quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n = \int_I f$$

**Théorème d'interversion :**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$

**Comparaison des théorèmes d'interversion limite intégrale**

Théorème	Interversion $\lim / \int$ sur un segment pour $f$ cvu	Convergence dominée
Convergence	Uniforme	Simple
Domaine d'intégration	Segment	$I$ quelconque

### 1.3 Théorèmes de dérivation



$f_n \xrightarrow{\text{cvu}} f$  de classe  $\mathcal{C}^1 \not\Rightarrow f'_n \xrightarrow{\text{cvu}} f'$

### Théorème de la dérivabilité

$$\left\{ \begin{array}{l} f_n \in \mathcal{C}^\infty \\ f_n \xrightarrow{\text{cvs}} f \Rightarrow f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ et } g = f' \\ f'_n \xrightarrow{\text{cvu}} g \end{array} \right.$$

**Théorème d'interversion :**  $\left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n$

$\Delta | f_n \xrightarrow{\text{cvu}} g \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^x f_n = \int_a^x g \Rightarrow \text{TFI puis cv puis on montre que } g \in \mathcal{C}^0$

**Généralisation :**  $\left\{ \begin{array}{l} f \in \mathcal{C}^k \\ f_n \xrightarrow{\text{cvs}} f \Rightarrow f \text{ est } \mathcal{C}^k \text{ et } f^{(j)} = g_j \\ \forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, f_n^{(j)} \xrightarrow{\text{cvu}} g_j \end{array} \right.$

**Théorème d'interversion :**  $\left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)^{(j)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{(j)}$

**Version Light :** Fonctionne aussi avec  $f'_n \xrightarrow{\text{cvu}} g$  sur tout segment de  $I$  *Idem pour la généralisation*

Théorème

## 2 Séries de fonctions

### 2.1 Convergences

#### Convergences

DEF: **Simple** :  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$  converge,  $\forall x \in I$  et vaut  $S(x)$

C'est la convergence à  $x$  fixé

Le domaine de définition de  $\sum u_n(x)$ , c'est le domaine de cvs

DEF: **Absolue** :  $\sum |u_n(x)|$  converge  $\forall x \in I$

DEF: **Uniforme** :  $S_n \xrightarrow{\text{cvu}} S$  sur  $I$

DEF: **Normale** :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  est bornée sur  $I$  et  $\|u_n\|_\infty^I$  est le terme général d'une série convergente

Majoration par quelque chose d'indépendant de  $x$

– CvN  $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{CvA} \\ \text{CvU} \end{array} \right. \Rightarrow \text{CvS et c'est tout}$

Définition

Propriétés

- $\sum u_n \xrightarrow{\text{cvu}} S \Leftrightarrow R_n \rightarrow 0$
- $\sum u_n \xrightarrow{\text{cvu}} S \Rightarrow u_n \xrightarrow{\text{cvu}} 0$

$\Delta$  Réciproque fausse

### 2.2 Théorèmes

### Théorème de la continuité

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n \text{ continue sur } I, \forall n \in \mathbb{N} \\ \sum u_n \xrightarrow{\text{cvu ou cvn}} S \text{ sur } I \end{array} \right. \Rightarrow S \text{ continue sur } I$$

**Version Light :** On peut remplacer  $\sum u_n \xrightarrow{\text{cvu ou cvn}} S \text{ sur } I$  par  $\sum u_n \xrightarrow{\text{cvn}} S \text{ sur tout segment de } I$

Théorème

💡 On s'intéresse prioritairement à la cvn

### Théorème de la double limite

Soit  $I$  de la forme  $[a, +\infty[$  ou  $]a, +\infty[$

- $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  cvn sur  $I$
- $u_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} b_n, \forall n \in \mathbb{N}$
- $\sum b_n$  converge

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_0^{\infty} b_n$$

**Théorème d'interversion :**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x) \right)$

⚠ Pas de version light pour la double limite : CvN sur tout segment de  $I$  ne suffit pas

Théorème

### Théorème du Squeeze

Comparaison série-intégrale.

- $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  positive
- $f$  décroissante
- $f$  intégrable sur  $\mathbb{R}_+$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \sum_{n=0}^{+\infty} h f(nh) = \int_0^{+\infty} f$$

⚠ Décompositions en rectangles  $[nh, (n+1)h] \Rightarrow \int_{nh}^{(n+1)h} f \leq f(nh)h \leq \int_{(n-1)h}^{nh} f$  puis somme et  $h \rightarrow 0^+$

- Autre énoncé :  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f$  Similaire à Riemann

Théorème

### Théorème de dérivation terme à terme

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n \in \mathcal{C}^1 \forall n \in \mathbb{N} \\ \sum u_n \xrightarrow{\text{cvs}} S \text{ sur } I \\ \sum u'_n \text{ cvn ou cvu sur } I \end{array} \right. \Rightarrow S \in \mathcal{C}^1 \quad S'(x) = \sum u'_n(x)$$

**Généralisation :**  $\left\{ \begin{array}{l} u_n \in \mathcal{C}^k \\ \sum u_n \xrightarrow{\text{cvs}} S \text{ sur } I \\ \forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, \sum u_n^{(j)} \text{ cvn ou cvu sur } I \end{array} \right. \Rightarrow S \text{ est } \mathcal{C}^k \text{ et } S^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} i^{+\infty} u_n^{(j)}$

**Version Light :** Fonctionne aussi avec la convergence normale sur tout segment de  $I$  de  $\sum u'_n$

Théorème

### Fonction zéta de Riemann

$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]1, +\infty[$

Exemple

⚠ On applique la version light du théorème de dérivabilité et on vérifie  $\sum u_n^{(k)}$  cvn par comparaison à une série de Bertrand

## 2.3 Théorèmes d'intégration

### Théorème d'intégration terme à terme sur un segment

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \xrightarrow{\text{cvu ou cvn}} S \text{ sur } [a, b] \Rightarrow \int_a^b S(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t) dt$$

$$\text{Théorème d'interversion : } \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t) dt$$

Théorème

### Théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque

- $u_n \in \mathcal{C}_M$  et intégrable sur  $I \forall n \in \mathbb{N}$
- $\sum u_n \xrightarrow{\text{cvs}} S$  sur  $I$
- $\sum_I |u_n|$  converge

- Alors
- $S$  intégrable sur  $I$
  - $\int_I S = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n$

$$\text{Théorème d'interversion : } \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n$$

Théorème

⚠  $\sum \int_I |u_n|$  cv ne peut être pas remplacée par  $\sum \int_I u_n$  converge

⚠

### Comparaison des théorèmes d'intégration terme à terme

Intervalle	Segment	Quelconque
Convergence	Normale ou uniforme	Simple
Hypothèses	$\emptyset$	$\int_I  u_n $ converge

Propriétés

💡 Si les hypothèses ne sont pas vérifiées, on peut essayer de revenir aux sommes partielles que l'on peut alors intervertir

## 3 Intégrales célèbres

### Intégrale de Gauss

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Exemple

## 1 Théorèmes

### Théorème de continuité

1.  $\forall t \in I_t$  fixé,  $x : f(x, t)$  est continue sur  $J$

2.  $\forall x \in J_x$  fixé,  $t : f(x, t)$  est  $\mathcal{C}_M$  sur  $I$

3. Domination :  $\exists \varphi \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \rightarrow \varphi(t) \end{cases}$  continue par morceaux et intégrable,  $\forall (x, t) \in I \times J, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$

$f \begin{cases} J & \rightarrow \mathbb{K} \\ x & \rightarrow \int_I f(x, t) dt \end{cases}$  est continue

Caractérisation séquentielle et TCD

– **Version Light** : L'hypothèse de domination peut être remplacée par  $\forall [a, b] \subset J, \exists \varphi_{a,b} : I \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{C}_M$  intégrable sur  $I$ ,  $\forall (x, t) \in [a, b] \times I, |f(x, t)| \leq \varphi_{a,b}(t)$

Si  $I$  est un segment  $[c, d]$ , et  $f \begin{cases} J \times I & \rightarrow \mathbb{K} \\ (x, t) & \rightarrow f(x, t) \end{cases}$  st continue alors l'hypothèse de domination de la version light est automatiquement vérifiée

“  $[a, b] \times [c, d]$  est un compact donc  $f$  bornée  $\Rightarrow \varphi_{a,b} = M$

Théorème

### Théorème de dérivabilité

Soit  $f \begin{cases} J \times I & \rightarrow \mathbb{K} \\ (x, t) & \rightarrow f(x, t) \end{cases}$

1.  $\frac{\partial f}{\partial x}$  existe  $\forall (x, t) \in J \times I$

2.  $\forall t \in I$  fixé,  $x : \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  est continue sur  $J$

3.  $\forall x \in J_x$  fixé  $\begin{cases} t : f(x, t) \\ t : \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \end{cases}$  continues par morceaux et intégrables sur  $I$

4. Domination :  $\exists \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{C}_M$  et intégrable sur  $I$ ,  $\forall (x, t) \in J \times I, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$

Alors  $- g \begin{cases} J & \rightarrow \mathbb{K} \\ x & \rightarrow \int_I f(x, t) dt \end{cases}$  est  $\mathcal{C}^1$

$- g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$

Caractérisation séquentielle et TCD

– **Version Light** : L'hypothèse de domination affaiblie :  $\forall [a, b] \subset J, \exists \varphi_{a,b}, \mathcal{C}_M$  et intégrable,

$\forall (x, t) \in [a, b] \times I, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi_{a,b}(t)$  suffit

Théorème

Si  $I$  est un segment  $[c, d]$ , et  $\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x,t)} : J \times [c, d] \rightarrow \mathbb{K}$  est continue alors l'hypothèse de domination de la version light est automatiquement vérifiée

$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$

### Théorème de dérivabilité - Généralisation

Soit  $f \Big|_{(x,t)} : J \times I \rightarrow \mathbb{K}$

1.  $\forall t \in I, x : f(x, t)$  est  $C^k$

2.  $\forall x \in J, t : \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t)$  est  $C_M$  et intégrable sur  $I$ ,  $\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket$

3. Domination :  $\exists \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $C_M$  et intégrable sur  $I$ ,  $\forall (x, t) \in J \times I$ ,  $\left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$

Alors  $- g \Big|_{x} : J \rightarrow \mathbb{K}$  est  $C^k$

$$- \forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket, g^{(j)}(x) = \int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t) dt$$

Récurrence sur  $k$  : On applique l'IAF à  $\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}$  entre  $a$  et  $x$  pour vérifier les hypothèses du théorème à l'ordre  $k-1$

– Version Light : L'hypothèse de domination affaiblie :  $\forall [a, b] \subset J, \exists \varphi_{a,b}, C_M$  et intégrable,

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times I, \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi_{a,b}(t)$$

Interversion  $\lim / \int$  : On peut calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_I f(x, t) dt$  en appliquant la caractérisation séquentielle et le TCD

### Intégrales de Fresnel

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt = \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

On montre l'existence puis on se ramène à  $\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt = \frac{1+i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

On étudie alors  $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{x^2(t^2-i^2)}}{t^2-i^2} dt$ , on montre qu'elle est  $C^1$  en utilisant le théorème de dérivation et le TLD en 0

$F(A) - F(0) = \int_0^A F'(x) dx$  on montre  $F(A \rightarrow +\infty) = 0$  par CS et TCD

Le calcul de  $F(0)$  donne la réponse

### 1 Définition

Définition

DEF: On appelle série entière la série de fonction  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$

### 2 Rayon de convergence

Définition

DEF: On note  $X = \{r \geq 0, (|a_n| r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ bornée}\}$  :  $\begin{cases} R = \sup X \text{ si } X \text{ majoré} \\ R = +\infty \text{ sinon} \end{cases}$

-  $r \in X \Rightarrow \forall r' \in [0, r], r' \in X$

$$\blacksquare |a_n|r'^n = |a_n|r^n \left(\frac{r'}{r}\right)^n$$

DEF: Autre définition :  $\begin{cases} Y = \{r \geq 0, a_n r^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0\} \\ Z = \{r \geq 0, \sum a_n r^n \text{ converge}\} \end{cases}, R = \sup Y = \sup Z$

$$\blacksquare |\sum a_n \text{ cv} \Rightarrow a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow a_n \text{ bornée}$$

$$\blacksquare |Z \subset Y \subset X \Rightarrow R_Z \leq R_Y \leq R_X \text{ on suppose par l'absurde que } R_Z < R_X$$

#### Disque ouvert de convergence

Définition

DEF:  $\begin{cases} D(O, R) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\} \text{ si } R \text{ est fini} \\ D(O, R) = \mathbb{C} \text{ sinon} \end{cases}$

-  $\begin{cases} |z| < R \Leftrightarrow z \in D(O, R) \Leftrightarrow \sum a_n z^n \text{ acv} \\ |z| > R \Leftrightarrow \sum a_n z^n \text{ dvg} \end{cases}$

$\blacksquare |z| = R \Leftrightarrow$  On ne peut rien dire

Par définition de la borne sup on considère  $r$  tel  $|z| < r \Rightarrow |a_n z^n| = |a_n| r^n \times \left(\frac{|z|}{r}\right)^n \leq M + \left(\frac{|z|}{r}\right)^n$  Converge  $\Rightarrow$  Majorée

#### Comparaison de séries

Théorème

- $a_n = O_{ou o}(b_n) \Rightarrow R_a \geq R_b$
- $a_n \sim b_n \Rightarrow R_a = R_b$

$\blacktriangleleft$   $a_n = O(b_n) : b_n r^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \Rightarrow a_n r^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \Rightarrow \{b_n r^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0\} \subset \{a_n r^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0\} \Rightarrow R_b \leq R_a$

### Règle de d'Alembert

Si  $a_n \neq 0$  APCR et si  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  alors  $R = \frac{1}{l}$

D'Alembert pour les séries appliqué à  $u_n = a_n z^n$

- $l |z| < 1 \Rightarrow R \geq \frac{1}{l}$
- $l |z| > 1 \Rightarrow R \leq \frac{1}{l}$

$\blacktriangleleft$  La réciproque est fausse :  $\sum a_n z^n$  a pour RCV  $R \not> \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow \frac{1}{R}$

$\blacktriangleleft$  On ne peut pas appliquer la règle pour des séries lacunaires  $a_n = 0$  pour un nombre fini de valeurs

$\blacktriangleleft$  On revient à la règle de d'Alembert pour les séries numériques

$\blacktriangleleft$  Le rayon de convergence d'une fonction rationnelle de polynômes  $\frac{P(n)}{Q(n)} z^n$  est 1

- $a_n$  bornée  $\Rightarrow R \geq 1$
- $a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \Rightarrow R \leq 1$

### Régularité de la somme

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de RCV  $> 0$

1.  $\sum a_n z^n$  acv sur  $\mathbf{D}(O, \mathbb{R})$
  2.  $\sum a_n z^n$  cvn sur  $\overline{\mathbf{D}(O, \mathbb{R})}$  Disque fermé de convergence pour  $r < R$
  3.  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  continue sur le segment ouvert de convergence
- $\blacktriangleleft$
2.  $\|u_n\|_{\infty}^{\overline{\mathbf{D}(O, r)}}$
  3. Continuité de  $u_n$  polynomiale

- Corollaire :  $\sum a_n z^n$  cvn sur tout compact inclus dans  $\mathbf{D}(O, r)$

$\blacktriangleleft$   $|z|$  bornée et atteint ses bornes  $\Rightarrow K \subset \overline{\mathbf{D}(O, r)} \subset \mathbf{D}(O, r)$  et cvn sur  $\overline{\mathbf{D}(O, |z_0|)}$

## 3 Opérations sur les séries entières

### 3.1 Opérations élémentaires

#### Addition

- $\sum (a_n + b_n) z^n$  a pour RCV  $R_c \geq \min(R_a, R_b)$
- $R_c = \min(R_a, R_b)$  si  $R_a \neq R_b$

**Théorème**  $|z| < \min(R_a, R_b) \Rightarrow \begin{cases} |z| < R_a \Rightarrow \sum a_n z^n acv \\ |z| < R_b \Rightarrow \sum b_n z^n acv \end{cases} \Rightarrow \sum (a_n + b_n) z^n acv$

### Produit de Cauchy

On pose  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$

1.  $\sum c_n z^n$  a pour RCV  $R_c \geq \min(R_a, R_b)$
2.  $\forall z \in \mathbf{D}(O, R_c), C(z) = A(z) \times B(z)$

**Théorème**  $|z| < \min(R_a, R_b) \Rightarrow \begin{cases} |z| < R_a \Rightarrow \sum a_n z^n acv \\ |z| < R_b \Rightarrow \sum b_n z^n acv \end{cases} \Rightarrow \sum c_n z^n acv$  Cf début d'année et  $C(z) = A(z) \times B(z)$

## 3.2 Intégration et dérivation

–  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$  et  $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$  ont le même RCV

DEF: Séries entières à valeurs réelles :  $\sum a_n x^n$  avec  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  et  $x \in \mathbb{R}$

### Intégration terme à terme

On pose pour  $x \in ]-R, R[$  Intervalle de convergence,  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

1.  $\sum a_n x^n$  cvn sur tout segment de  $] -R, R [$
2.  $f$  est continue sur  $] -R, R [$
3.  $\forall x \in ] -R, R [, \int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$

- $\|u_n\|_{\infty}^{[a,b]} \leq |a_n| r^n$
- Version Light du théorème de continuité
- Intégration sur un segment

### Dérivation terme à terme

1.  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -R, R [$

2.  $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$

**Théorème** – Théorème d'intégration à  $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$

– Généralisation :  $f$  est  $\mathcal{C}^{+\infty}$  sur  $] -R, R [$  et  $f^{(n)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \dots (n-k+1) a_n x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+k)(n+k-1) \dots (n+1) a_{n+k} x^n$

**Théorème**  $\frac{1}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} x^n, \forall x \in ]-1, 1[$

### Unicité du développement

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ de RCV } R > 0$$

–  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -R, R[$

$$- a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

– **Corollaire** :  $\sum a_n x^n = \sum b_n x^n, \forall x \in ] -R, R[$  alors  $a_n = b_n, \forall n \in \mathbb{N}$

– **Corollaire du corollaire**

—  $f(x) = \sum a_n x^n$  est paire sur  $] -R, R[$  alors  $a_n = 0 \forall n$  impair Si  $f$  impaire non

⚠  $\sum a_n x^n = \sum (-1)^n a_n x^n, \forall x \in ] -R, R[ \Rightarrow a_n = (-1)^n a_n, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n \text{ impair} \Rightarrow n = 0)$

Théorème

### Unicité des coefficients d'une série entière de la variable complexe

$$\exists r > 0, \forall z \in D(O, r), \sum a_n z^n = \sum b_n z^n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Définition

### Développement en séries entières

On dit que  $f$  est développable en série entière si

$$\exists r > 0, \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \forall x \in ] -r, r[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Définition

### Développement en série de Taylor

On dit que  $f$  est développable en séries de Taylor sur  $] -r, r[$  si

$$\forall x \in ] -r, r[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Propriétés

–  $f$  DSE sur  $] -r, r[ \Leftrightarrow f$  développable en séries de Taylor sur  $] -r, r[$

⚠  $f$  développable en série entière sur  $] -r, r[ \Rightarrow f \in \mathcal{C}^\infty$  mais la réciproque est fausse

–  $f$  DSE sur  $I \Leftrightarrow \forall x \in I, \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$  où  $R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$

⚠ Taylor avec reste intégral

Méthode

### Méthodes de calcul du DSE d'une fonction

- Opérations élémentaires et produit de Cauchy
- Intégration et dérivation
- Équation différentielle + Analyse-Synthèse
- Équation fonctionnelle + Analyse-Synthèse
- Majoration de  $R_n$
- Interversion  $\sum, \int$  ou  $\sum / \sum$

Fonction	Développement	R
$e^z$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$	$\forall z \in \mathbb{C}$
$\frac{1}{1-z}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$	$\forall z \in \mathbb{C},  z  < 1$
$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$
$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$
$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$
$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$
$\ln(1+x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$	1
$\arctan(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$\forall x \in ]-1, 1[$
$\arcsin(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1

### Théorème de Fubini pour les doubles séries

Soit  $(a_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$  suite double à valeurs dans  $\mathbb{K}$

1.  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n$  fixé,  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k}$  acv

2.  $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} |a_{n,k}|$  cv

Alors  $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,k}$

À partir du théorème de la double limite pour les séries

### Fraction rationnelle

Soit  $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  une fraction rationnelle telle que 0 n'est pas racine de  $Q$

Alors  $F$  est DSE et RCV :  $R = \min\{|a_i|, a_i \text{ racine de } Q\}$

On décompose  $F$  en éléments simples comme somme des  $\frac{1}{(z-a_i)^k}$

### Développement en séries entières ailleurs qu'en 0

DEF:  $f$  est DSE en  $a$  si  $\exists r > 0, \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \forall z \in \mathbf{D}(a, r), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$

-  $f(z)$  DSE en  $a \Leftrightarrow g(z) = f(z+a)$  DSE en 0

💡 On se ramène toujours au DSE en 0

## 5 Retrouver la fonction égale à la série entière

### Séries entières de la forme $\sum P(n)x^n$

- $RCV = 1$
- On décompose  $P$  dans la base des polynômes de Hilbert
- On reconnaît des expressions de la forme  $\frac{1}{1-x}$

### Séries entières de la forme $\sum \frac{P(n)}{Q(n)}x^n$

- On fait apparaître des développements de la forme
  - $\arctan(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{2n+1}$
  - $\operatorname{arctanh} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{2n+1}}{2n+1}$

### Séries entières de la forme $\sum \frac{P(n)}{n!}x^n$

- On décompose  $P$  dans la base des polynômes de Hilbert et on se ramène au type exponentiel
- $RCV : \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{P(n+1)}{P(n)} \xrightarrow[1]{n+1} +\infty \Rightarrow RCV = +\infty$

### Séries entières vérifiant une relation de récurrence

- On isole les premiers termes connus et on réindexe la somme pour faire apparaître la relation de récurrence
- On développe et on dérive si besoin les termes pour faire apparaître des dérivées de  $f$  dans chacun d'eux
- En dérivant l'expression suffisamment on fait apparaître une équation différentielle de  $f$

### Séries entières où $a_n$ est une intégrale

- Interversion somme intégrale avec le TITATSUS ou le TITATSUIQ

## 6 Étude au bord du disque ou de l'intervalle de convergence

### Prolongement au bord pour des séries alternées

- CSSA
- $\|R_n\|_\infty^I \leq f(n) \xrightarrow[n \rightarrow 0]{} 0$  D'où  $R_n \xrightarrow{\text{cvu}} 0$
- $u_n$  converge uniformément et est continue  $\Rightarrow \sum u_n$  continue on peut donc passer à la limite

- $\ln 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$
- $\arctan 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

### Logarithme complexe

DEF: Pour  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ , on définit  $\ln z : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_1 \rightarrow \mathbb{C}$

- Le logarithme complexe est continu
- $\forall z \in \mathbf{D}(0, 1), \ln(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$

DEF:  $\mathbf{G}_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X=n)t^n$  est une série génératrice

- $R_{cvX} \geq 1$
- $\blacksquare | a_n$  est une suite bornée
- $\mathbf{G}_X(t) = \mathbf{E}(t^X)$
- $\blacksquare |$  Théorème de transfert

- $\mathbf{G}_X(1) = 1$
- $\mathbf{G}_X(t)$  est définie sur  $[-1, 1]$
- $\blacksquare | R_{cv} \geq 1 \Rightarrow \mathbf{G}_X(t)$  est définie sur  $[-1, 1[$  et on vérifie les cas  $-1$  et  $1$
- $\mathbf{G}_X(t) = \mathbf{G}_Y(t) \Rightarrow X = Y$
- $\blacksquare |$  Par unicité du développement en séries entières
- $\mathbf{G}_{X+Y}(t) = \mathbf{G}_X(t)\mathbf{G}_Y(t)$
- $\blacksquare | \mathbf{G}_{X+Y} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X=k)\mathbf{P}(Y=n-k) \right) t^n \rightarrow$  Produit de Cauchy de  $\mathbf{G}_X$  et  $\mathbf{G}_Y$

- $X$  admet une espérance finie  $\Leftrightarrow \mathbf{G}_X$  est dérivable en 1 et  $\mathbf{G}'_X(1) = \mathbf{E}(X)$ 
  - $\Rightarrow$ : Application du théorème de dérivation à  $\mathbf{G}_X$
  - $\Leftarrow$ : Par l'absurde on suppose  $\sum n a_n$  divergente et on montre qu'alors  $\mathbf{G}_X$  n'est pas dérivable en 1
- $X$  admet une racine Ou un moment d'ordre 2  $\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{G}_X \text{ est dérivable deux fois en 1} \\ \mathbf{V}(X) = \mathbf{G}''_X(1) + \mathbf{G}'_X(1) - \mathbf{G}'_X(1)^2 \end{cases}$

## Lois usuelles

Exemple

$X \hookrightarrow$	$\mathcal{B}(P)$	$\mathcal{B}(n, p)$	$\mathcal{G}(p)$	$\mathcal{P}(\lambda)$
$\mathbf{G}_X(t) =$	$1 - p + pt$	$(1 - p + pt)^n$	$\frac{p^t}{1 - (1 - p)t}$	$e^{\lambda(t-1)}$
$R =$	$+\infty$	$+\infty$	$\frac{1}{1-p}$	$+\infty$

Propriétés

## Convolution

- Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de vadr iid qui suivent une même loi  
Soit  $N$  vad indépendantes des  $X_i$  à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$   
Soit  $S_N = X_1 + \dots + X_N$
- $\mathbf{G}_{S_N}(t) = \mathbf{G}_N \circ \mathbf{G}_X(t)$

  $(S_N = n) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} (S_N = n, N = k)$  Incompatibles puis simplification puis Fubini

## 1 Définitions

DEF: On appelle courbe paramétrée *Arc paramétré* de classe  $\mathcal{C}^k$  un couple  $(I, f)$  où

- $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$
- $f \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t & \rightarrow (x(t), y(t)) \end{cases}$  de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$

Interprétation	Position	Vitesse	Accélération
Expression	$M(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$	$\frac{dM}{dt}x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}$	$\frac{d^2M}{dt^2}x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j}$

$$\text{DEF: Le support}_{\text{trajectoire}} \text{ est } f(I) = \{M(t), t \in I\}$$

Définition

### Régularité

DEF: On dit que  $M_0$  est un point régulier si  $\overrightarrow{f'(t_0)} \neq (0, 0) \Leftrightarrow (x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0, 0)$

DEF: On dit que  $M_0$  est birégulier si de plus  $(\overrightarrow{f'(t_0)}, \overrightarrow{f''(t_0)})$  ne sont pas colinéaires

DEF: On dit que l'arc  $(I, f)$  est régulier si tous ses points le sont

DEF: Un point qui n'est pas régulier est dit stationnaire  $\Leftrightarrow x'(t_0) = y'(t_0) = 0$

Définition

- $M_0$  est un point double de l'arc si  $\exists (t_1, t_2) \in I^2, t_1 \neq t_2$  et  $M_0 = M(t_1) = M(t_2)$   
*Idem pour un point multiple*

Définition

“ Un même support peut avoir plusieurs paramétrages

■ Une fonction réelle  $y = \varphi(x)$  peut être paramétrée par  $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \varphi(t) \end{cases}$

### Tangente

DEF: Si  $\vec{u}(t) = \frac{\overrightarrow{M(t_0)M(t)}}{\|\overrightarrow{M(t_0)M(t)}\|}$  admet une limite  $\pm \vec{u}$  en  $t_0^+$  et  $t_0^-$

On dit que l'arc admet une tangente en  $M_0$  en  $M_0$  qui est la droite  $M_0 + \text{vect}(\vec{u})$

- Limite opposée : Tangente normale
- Limite égale : Point de rebroussement
- $\triangle$  Limite différente : Point anguleux

- Si  $M_0$  est régulier, l'arc  $(I, f)$  admet une tangente dirigée par  $\frac{\overrightarrow{f'(t_0)}}{\|\overrightarrow{f'(t_0)}\|}$

■ On fait un DL sur  $x$  et  $y$  pour exprimer  $\frac{\overrightarrow{M(t_0)M(t)}}{\|\overrightarrow{M(t_0)M(t)}\|}$

Propriétés

- **Équation de la tangente** :  $(x - x_0)y'(t_0) - (y - y_0)x'(t_0) = 0$   
 $\blacksquare T = \{\text{Points } M \text{ du plan, } \overrightarrow{M_0M} \text{ continu à } \overrightarrow{f'(t_0)}\} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & x'(t_0) \\ y - y_0 & y'(t_0) \end{vmatrix} = 0$
- **Équation de la normale en un point régulier** :  $(x - x_0)y'(t_0) + (y - y_0)x'(t_0) = 0$   
 $\blacksquare N = \{M, \overrightarrow{M_0M} \perp \overrightarrow{f'(t_0)}\}$

## Plan d'étude

### 1. Domaine d'étude

Caractéristique	Domaine d'étude	Prolongement
$T$ périodique	Intervalle de longueur $T$	Rien ou symétrie(s) axiale
Parité	$t \geq 0$	Symétrie axiale
$a(t+T) = b(t)$	Intervalle de longueur $T$	Symétrie selon la bissectrice
$a(t+T) = \alpha + a(t)$	Intervalle de longueur $T$	Translation de vecteur $\vec{\alpha}$

### 2. Tableau de variation

$t$
$x'$
$x$
$y'$
$y$
$m = \frac{y'}{x'} \text{ Pente de la tangente en } M(t)$

### 3. Branches infinies Si il y en a

Caractéristique	$\begin{cases} x \rightarrow \pm\infty \\ y \rightarrow b \end{cases}$	$\begin{cases} x \rightarrow a \\ y \rightarrow \pm\infty \end{cases}$	$\begin{cases} x \rightarrow \pm\infty \\ y \rightarrow \pm\infty \end{cases}$
Branche infinie	$y = b$	$x = a$	On regarde $\lim \frac{y(t)}{x(t)}$

$\frac{y}{x} \rightarrow 0$       Branche parabolique d'axe  $Ox$   
 $\frac{y}{x} \rightarrow +\infty$       Branche parabolique d'axe  $Oy$   
 $\begin{cases} \frac{y}{x} \rightarrow a \\ y - ax \rightarrow b \end{cases}$        $y = ax + b$

### 4. Tracé

### 5. Recherche de points multiples Éventuellement

On résout  $\begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases}$  avec  $t_1 \neq t_2$

## 1 Systèmes linéaires

DEF: On appelle système linéaire différentiel, une équation de la forme

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \quad (E)$$

DEF: On appelle système différentiel homogène associé à (E)

$$X'(t) = A(t)X(t) \quad (H)$$

–  $\mathcal{S}_E = \mathcal{S}_H + X_0$

$\blacksquare | X' = AX + B \Leftrightarrow (X - X_0)' = A(X - X_0)$

Définition

### Théorème de Cauchy linéaire

Théorème  
Un problème de Cauchy  $\begin{cases} (E) : X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ (CI) : X(t_0) = X_0 \end{cases}$  admet une unique solution finie sur  $I$

–  $\mathcal{S}_H$  et  $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  sont isomorphes  
 $\Rightarrow \dim \mathcal{S}_H = n$

$\blacksquare |$  On considère  $\varphi \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_H & \rightarrow & \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \rightarrow & X(t_0) \end{array}$

Propriétés

### Systèmes différentiels à coefficients constants

DEF: C'est un système  $X'(t) = AX(t) + B(t)$  où  $A$  est indépendant du temps

–  $X$  est une solution réelle de (H)  $\Leftrightarrow X$  est la partie réelle d'une solution complexe de (H)

Propriétés

### Résolution de (H) quand (A) est diagonalisable

–  $A$  diagonalisable  $\Leftrightarrow \begin{cases} \exists P \in GL_n(\mathbb{K}) \\ \exists D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}) \end{cases}, A = PDP^{-1}$   
 $(H) : X' = PDP^{-1}X$

– On pose  $Y = P^{-1}X \Rightarrow (H) : Y' = DY \Leftrightarrow \begin{cases} y'_1 = \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ y'_n = \lambda_n y_n \end{cases}$  et résolution des équations individuelles

Méthode

- ”
- On a pas besoin de calculer  $P^{-1}$
  - $X = PY = C_1 e^{\lambda_1 t} A_1 + \dots + C_n e^{\lambda_n t} A_n$  or  $\dim \mathcal{S}_H = n \Rightarrow (X_1 - X_n)$  base de  $\mathcal{S}_H$
  - Si  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  seulement, on résout sur  $\mathbb{C}$  puis on prend les parties réelles

**Résolution avec 2<sup>e</sup> membre**

- En posant  $Y = P^{-1}X$ , (E) devient  $Y' = DY + P^{-1}B(t) = DY + C(t)$
  - On résout  $n$  EDL du premier ordre avec second membre pour obtenir une solution particulière
- ”
- Il faut alors calculer  $P^{-1}$

**Résolution dans le cas  $A$  trigonalisable**

- $(H) : X' = AX \Leftrightarrow Y' = TY \Leftrightarrow \begin{cases} y'_1 = t_{11}y_1 + \dots + t_{1,n}y_n \\ \vdots \\ y'_n = t_{nn}y_n \end{cases}$
- On résout en remontant et en réinjectant les solutions obtenues

DEF:  $a_0 y^{(n)} + \dots + a_n y = b$  est une équation différentielle linéaire d'ordre  $n$

$a_i(t)$  sont des fonctions continues de  $I$  dans  $\mathbb{K}$

- Soit  $\mathcal{S}_E(J)$  l'ensemble des solutions de l'équation définies sur  $J$ 
  1.  $\mathcal{S}_E(J)$  est un sev
  2.  $\mathcal{S}_E(J) = \mathcal{S}_H(J) + y_0$  solution particulière

**Superposition des solutions particulières**

Soit  $b = \sum_{i=1}^p b_i$

$y_i$  solution particulière de  $a_0 y^{(n)} + \dots + a_n y = b_i \Rightarrow y_0 = \sum_{i=1}^p y_i$  est une solution particulière de (E)

**Forme résolue**

DEF:  $y^{(n)} + \dots + a_n y = b$

⚠ Les théorèmes de Cauchy ne s'appliquent qu'aux EDL pouvant se mettre sous forme résolue

**3 Résolution d'équations différentielles****3.1 Ordre 1**

## Méthode de résolution

- Résolution de l'équation homogène associée
- Détermination d'une solution particulière
- Conditions initiales pour déterminer les constantes

- Soit  $a$  continue de primitive  $A$ ,
- $y' + a(t)y = 0$  admet la droite vectorielle dirigée par  $\varphi \begin{vmatrix} I & \rightarrow & \mathbb{K} \\ t & \rightarrow & e^{-A(t)} \end{vmatrix}$  comme solution
- ⚠ On montre que  $Z \begin{vmatrix} I & \rightarrow & \mathbb{K} \\ t & \rightarrow & y(t)e^{A(t)} \end{vmatrix}$  est  $C^1$  car  $y$  l'est et que  $Z'(t) = 0$
- 💡 Pour des fonctions complexes, on décompose sur  $\mathbb{R}\text{e}$  et  $\mathbb{I}\text{m}$
- Le problème de Cauchy  $\begin{cases} (E) y' + ay = b \\ (CI) y(t_0) = y_0 \end{cases}$  admet une unique solution
- ⚠ La condition initiale fixe la valeur de la constante  $\lambda$

## Variation de la constante

- On injecte une solution de la forme  $\lambda(t)e^{-A(t)}$  dans  $(E)$
- $\lambda'(t)e^{-A(t)} - \lambda(t)a(t)e^{-A(t)} + \lambda(t)a(t)e^{-A(t)} = b(t) \Leftrightarrow \lambda'(t) = b(t)e^{A(t)}$
- On primitive  $\lambda'$  ainsi obtenue pour obtenir une solution particulière

## Cas d'une équation non résolue

1. Si  $a_0 \neq 0$  il suffit de diviser par  $a_0$
  2. Sinon il faut faire une étude séparée sur les différents intervalles
- Raccord** : On fixe ensuite les constantes  $\lambda$  pour assurer la continuité des fonctions et des dérivées

## Équations de Bernoulli

- $(E) : ay' + by + cy^\alpha = 0$
- On pose  $z = \frac{1}{y^{\alpha-1}}$
  - On est ramené à  $(F) : \frac{a}{1-\alpha}z' + bz + c = 0$

## 3.2 Ordre 2

- Soient  $(E) : y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$  et  $(S) : X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix}X + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$
- $\mathcal{S}_E$  et  $\mathcal{S}_S$  sont isomorphes
- ⚠ On montre que  $\varphi \begin{vmatrix} \mathcal{S}_E & \rightarrow & \mathcal{S}_S \\ y & \rightarrow & \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \end{vmatrix}$  est un bijette

- Le problème de Cauchy  $\begin{cases} (E) : y'' + ay' + by = c(t) \\ (CI) : \begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases} \end{cases}$  admet une unique solution
- $\mathcal{S}_H(I)$  est un sev de dim 2  
 $\boxed{\psi} \left| \begin{array}{l} \mathcal{S}_H \\ y \end{array} \right. \rightarrow \begin{array}{l} \mathbb{K}^2 \\ (y(t_0), y'(t_0)) \end{array}$  est un isomorphisme
- Pour une EDL à coefficients constants,  $\mathcal{S}_H \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$

**Résolution de  $(H)$ .**

- On recherche des solutions sous la forme  $y(t) = e^{rt}$
- On injecte dans  $(H) \Rightarrow r^2 + ar + b = 0$

$\Delta$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{R}$
$\Delta > 0$	$\begin{cases} y_1(t) = e^{r_1 t} \\ y_2(t) = e^{r_2 t} \end{cases}$ non colinéaires $\Rightarrow$ Base $\mathcal{S}_H = \{\lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}\}$	$\begin{cases} y_1(t) = e^{r_1 t} \\ y_2(t) = e^{r_2 t} \end{cases}$ non colinéaires $\Rightarrow$ Base $\mathcal{S}_H = \{\lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}\}$
$\Delta < 0$		$y = \nu e^{(\alpha+i\beta)t} + \rho e^{(\alpha-i\beta)t}$ <i>Choix de <math>\nu = \rho = \frac{1}{2}</math> et <math>\frac{1}{2i}</math> pour solutions réelles</i> $\begin{cases} y_1(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t) \\ y_2(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t) \end{cases}$ non colinéaires $\Rightarrow$ Base $\mathcal{S}_H = \{\lambda e^{\alpha t} \cos(\beta t) + \mu e^{\alpha t} \sin(\beta t)\}$ $= \{A e^{\alpha t} \cos(\beta t + \varphi)\}$ $= \{e^{\alpha t} (\lambda \cosh(\beta t) + \rho \sinh(\beta t))\}$
$\Delta = 0$	$\begin{cases} y_1(t) = e^{r_0 t} \\ y_2(t) = t e^{r_0 t} \end{cases}$ non colinéaires $\Rightarrow$ Base $\mathcal{S}_H = \{(\lambda + \mu t) e^{r_0 t}\}$	$\begin{cases} y_1(t) = e^{r_0 t} \\ y_2(t) = t e^{r_0 t} \end{cases}$ non colinéaires $\Rightarrow$ Base $\mathcal{S}_H = \{(\lambda + \mu t) e^{r_0 t}\}$

**Résolution avec second membre**

Second membre Recherche de solution particulière sous la forme

$P(t)$	$Q(t)$ avec $\deg Q = \deg P$
$P(t)e^{mt}$	$Q(t)e^{mt}$ <ul style="list-style-type: none"> <li>– <math>\deg Q = \deg P</math> si <math>m</math> n'est pas racine de l'EC</li> <li>– <math>\deg Q = \deg P + 1</math> si <math>m</math> est racine simple de l'EC</li> <li>– <math>\deg Q = \deg P + 2</math> si <math>m</math> est racine double de l'EC</li> </ul>

Autre	Cas principal
-------	---------------

### Lien avec les systèmes différentiels linéaires

- (H) est équivalente à  $X' = AX$  où  $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$  et  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$
- $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ b & \lambda + a \end{vmatrix} = \lambda^2 + a\lambda + b$  d'où  $\chi_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + a\lambda + b = 0$  (EC)
- $\begin{cases} \Delta \neq 0 \Rightarrow A \text{ diagonalisable} \\ \Delta = 0 \Rightarrow A \text{ trigonalisable} \end{cases}$ , on retrouve les cas précédents en se ramenant au nouveau système simplifié

### Cas général : Coefficients non constants

⚠ Pas d'équation caractéristique

1. On connaît une solution particulière  $u$  ne s'annulant pas

- On passe en forme résolue
- On pose  $z = \frac{y}{u}$  est  $\mathcal{C}^2$  et on injecte dans (E)
- On pose  $Z = z'$  pour se ramener à  $(2u' + au)Z + uZ' = c(t)$
- On obtient  $Z$  puis  $z$  par intégration puis  $y = uz$

2. On cherche une solution sous forme d'un DSE

- Analyse : On pose  $y = \sum a_n t^n$  et on injecte dans (E) pour trouver une relation de récurrence
- Synthèse : On vérifie  $RCV > 0$  et on ramène éventuellement  $y$  à des fonctions usuelles

3. Changement de variable

- On pose  $t = \varphi(x)$  où  $\varphi$  est un  $\mathcal{C}^2$ -difféomorphisme et  $z(x) = y(t) = y(\varphi(x))$
- $\begin{cases} z'(x) = y'(t) \times \varphi'(x) \\ z''(x) = y''(t) \times \varphi'(x)^2 + y'(t)\varphi''(x) \end{cases}$  et on peut inverser ce système pour déterminer  $y'$  et  $y''$   
d'où une EDL d'ordre 2 en  $z$

⚠ Ces méthodes servent aussi à résoudre un DL à coefficients constants  $y'' + ay' + by = c(t)$  où  $c(t)$  est de forme quelconque

### Équation d'Euler

$t^2y'' + aty' + by = c(t)$  où  $a$  et  $b$  sont constants

- On résout séparément sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\mathbb{R}_-^*$
- Changement de variable :  $y(t) = y(e^x) = z(x)$

### 3.3 Ordre $n$

#### Résolution d'une équation différentielle à coefficients constants d'ordre $n$

$$(E) : y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = b(t)$$

- $\mathcal{S}_E = \mathcal{S}_H + SP$
- On cherche  $y$  sous la forme  $e^{rt}$  et on injecte dans l'EC  $\Rightarrow r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_0 = 0$
- $P$  est scindé dans  $\mathbb{C}$  de racines  $\left\{ \begin{array}{l} r_1 - r_p \\ \text{Multiplicités : } \alpha_1 + \dots + \alpha_p = n \end{array} \right.$
- $\left\{ \begin{array}{l} e^{r_1 t} - t^{\alpha_1-1} e^{r_1 t} \\ \vdots \\ e^{r_p t} - t^{\alpha_p-1} e^{r_p t} \end{array} \right.$  forme une base de  $\mathcal{S}_H$

Méthode

## 4 Compléments

### Wronskien

DEF: Soient  $y_1$  et  $y_2$  deux solutions de  $(H)$

$$\text{On appelle Wronskien de } y_1 \text{ et } y_2 : W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y'_1(t) & y'_2(t) \end{vmatrix}$$

DEF: On dit que  $(y_1, y_2)$  est un système fondamental de solutions de  $(H)$  si  $(y_1, y_2)$  est une base de  $\mathcal{S}_H$

$(y_1, y_2)$  est un système fondamental de solutions  $\Leftrightarrow \exists t_0 \in I, W(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$

$\Leftrightarrow \forall t_0 \in I, W(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$

¶ Lemme :  $W(y_1, y_2)$  est solution de  $y' + a(t)y = 0$

Propriétés

## 1 Dérivées partielles

- Soit  $a \in U$ ,  $U$  ouvert  $\Rightarrow \exists \mathbf{B}_o(a, r) \subset U$
- Soit  $h$  vecteur de  $E$ ,  $\exists \delta > 0, \forall t \in [-\delta, \delta], a + th \in U$
- A** On montre que pour  $\delta = \frac{r}{2\|h\|} > 0, \forall t \in [-\delta, \delta], a + th \in \mathbf{B}_o(a, r) \subset U$

DEF: On pose alors  $\varphi_h \Big| \begin{matrix} [-\delta, \delta] \\ t \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} F \\ f(a + th) \end{matrix}$

Si  $\varphi_h$  est dérivable en 0 on dit que  $f$  admet une dérivée en  $a$  selon le vecteur  $h$ :  $\mathcal{D}_h f(a) = \varphi'_h(a)$

$$\mathcal{D}_h f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t}$$

**»** Si  $h = 0$  alors  $\varphi_h(t) = f(a) = cste, \forall t \in [-\delta, \delta]$  donc  $\mathcal{D}_{0_E} f(a) = 0_F$

$$\text{» } \mathcal{D}_{\lambda h} f(a) = \lambda \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t\lambda h) - f(a)}{\lambda t} = \lambda \mathcal{D}_h f(a)$$

Définition

### Dérivées partielles

DEF: Soit  $h = e_j$  Vecteur de la base canonique  
Si  $\mathcal{D}_{e_j} f(a)$  existe on l'appelle dérivée partielle de  $f$  par rapport à  $e_j$

On note  $\mathcal{D}_{e_j} f(a), \mathcal{D}_j f(a)$  ou  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$

– Si  $E = \mathbb{R}^2$  on note  $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \mathcal{D}_{e_1} f(a)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \mathcal{D}_{e_2} f(a)$

– On a donc :  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$

— La dérivée en 0 de  $t \rightarrow f(a_1, -, a_j + t, -, a_p)$

— La dérivée en  $a_j$  de  $x \rightarrow f(a_1, -, x, -a_p)$  fonction partielle de  $f$  en  $a$  d'ordre  $j$

Définition

**A** Existence de dérivées partielles  $\not\Rightarrow$  Continuité

- Soit  $f \Big| \begin{matrix} U \subset E \\ a \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} F = \mathbb{R}^n \\ f_1(a), -, f_n(a) \end{matrix}$
- $\mathcal{D}_h f(a)$  existe  $\Leftrightarrow \mathcal{D}_h f_i(a)$  existe  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$
- Dans ce cas  $\mathcal{D}_h f(a) = (\mathcal{D}_h f_1(a), -, \mathcal{D}_h f_n(a))$

## 2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

- On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  si  $f$  admet des dérivées partielles en tout point  $a \in U$  et si ces dérivées partielles sont continues ie.  $\frac{\partial f}{\partial x_j} \Big| \begin{matrix} U \\ a \end{matrix} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$  est continue

Définition

## Théorème fondamental

- Si  $f : U \rightarrow F$  est de classe  $C^1$  et soit  $a \in U, \vec{h} \in E, a + \vec{h} \in U$

$$f(a + \vec{h}) = f(a) + \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + o(\|\vec{h}\|)$$

“ Pour  $\begin{cases} F = \mathbb{R}^n \\ U \subset E = \mathbb{R}^p \end{cases}$  c'est le  $DL_1(a)$  de  $f$

Pour  $n = 1$  et  $p = 2 : f(a + h) - f(a) = f(a_1 + h_1, a_2 + h_2)$

On applique le TAF :  $f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) = f(a_1, a_2) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) + A(h_1, h_2)$  et on montre  $A(h_1, h_2) = o(\|\vec{h}\|)$

- Corollaire** :  $f \in C^1 \Rightarrow f \in C^0$

On montre  $\|f(a + \vec{h}) - f(a)\| \leq \|\vec{h}\| \sum_{j=1}^p \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\| + o(\|\vec{h}\|) \xrightarrow[\vec{h} \rightarrow 0_E]{} 0$

- $f \in C^1 \Rightarrow f$  admet des dérivées suivant tout vecteur en  $a, \forall a \in U$

Si on note  $\vec{h} = (h_1, \dots, h_p)$  alors  $D_{\vec{h}} f(a) = \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$

## Différentielle

DEF:  $\kappa \left| \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & F \\ \vec{h} & \rightarrow & D_{\vec{h}} f(a) \end{array} \right.$  est linéaire

On l'appelle la différentielle de  $f$  en  $a$  et on la note  $df(a)$  ou  $df(a)(\vec{h})$  ou  $df(a) \cdot \vec{h}$

$$- df(a) \cdot \vec{h} = \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

“  $DL_1(a)$  de  $f : f(a + \vec{h}) = f(a) + df(a) \cdot \vec{h} + o(\|\vec{h}\|)$

## Notation différentielle

- $dx_j \left| \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \vec{h} = (h_1, \dots, h_p) & \rightarrow & h_j \end{array} \right.$  est une forme linéaire

$$- df(a) \cdot \vec{h} = \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \Rightarrow df(a) \cdot \vec{h} = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) dx_j(\vec{h}) \text{ soit } df = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$$

- Soient  $(f_1, \dots, f_n)$  les fonctions coordonnées de  $f \Leftrightarrow f(a) = (f_1(a), \dots, f_n(a))$

$$f \in C^1 \Leftrightarrow f_i \in C^1 \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$$

$$\text{Dans ce cas } df(a) \cdot \vec{h} = (df_1(a) \cdot \vec{h}, \dots, df_n(a) \cdot \vec{h})$$

## Matrice Jacobienne

DEF: On appelle matrice Jacobienne de  $f$  en  $a$

$$J_f(a) = \left( \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

$$J_f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \overrightarrow{\text{grad}} f_1 & \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overrightarrow{\text{grad}} f_p & \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p}(a) \end{bmatrix}$$

- $\mathrm{d}f(a) \in \mathcal{L}(E, F)$ . De plus  $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_C, \mathcal{B}_C}(\mathrm{d}f(a)) = J_f(a)$

Définition

## Opérations sur les fonctions $\mathcal{C}^1$

- $\mathrm{d}(\lambda f + g) = \lambda \mathrm{d}f + \mathrm{d}g$
- Soit  $B$  bilinéaire,  $h \Big| \begin{matrix} U \\ a \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} H \\ B(f(a), g(a)) \end{matrix}$  est  $\mathcal{C}^1$  et  $\mathrm{d}h(a) = B(\mathrm{d}f(a), g(a)) + B(f(a), \mathrm{d}g(a))$

¶ On montre que  $\varphi_{\vec{k}}(t) = h(a + t\vec{k})$  est  $\mathcal{C}^1$  et on évalue  $\varphi'_{\vec{k}}(0)$

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{f}\right)(a) \cdot \vec{h} = -\frac{\mathrm{d}f(a)\vec{h}}{f^2(a)}$$

¶ On montre que  $\varphi_{\vec{k}}(t) = \frac{1}{f(a + t\vec{k})}$  est  $\mathcal{C}^1$  et on évalue  $\varphi'_{\vec{k}}(0)$

Propriétés

## 3 Règle de la chaîne

### Première règle de la chaîne

Soit  $\varphi$  fonction d'une variable de classe  $\mathcal{C}^1$  telle  $\varphi(I) \subset U$   
 $f \circ \varphi$  est aussi une fonction  $\mathcal{C}^1$  d'une variable

$$(f \circ \varphi)'(t) = \mathrm{d}f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(\varphi(t)) \varphi'_j(t)$$

$$\begin{aligned} \text{¶} \quad & \begin{cases} f(a + \vec{k}) = f(a) + \mathrm{d}f(a) \cdot \vec{k} + o(\|\vec{k}\|) \\ \varphi(t_0 + \vec{k}) = \varphi(t_0) + k\varphi'(t_0) + o(k) \end{cases} \quad f \circ \varphi(t_0 + k) = f(\varphi(t_0)) + k \left( \mathrm{d}f \left( \varphi(t_0) \cdot \varphi'(t_0) \right) + o(\|\vec{k}\|) \right) + \mathrm{d}f(\varphi(t_0)) \cdot o(k) \end{aligned}$$

$$\text{¶ Soient } f \Big| \begin{matrix} \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \end{matrix} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y) \quad \text{et} \quad \varphi \Big| \begin{matrix} \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \end{matrix} \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \quad : \quad \begin{cases} f \circ \varphi(t) = f(x(t), y(t)) \\ (f \circ \varphi)'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)y'(t) \end{cases}$$

- Corollaire :  $f$  constante sur  $U$  Ouvert convexe ou connexe  $\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$  sur  $U$ ,  $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket$

¶ On montre que  $f(M) = f(N)$  en posant  $\varphi \Big| \begin{matrix} [0, 1] \\ t \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} U \\ (1-t)M + tN \end{matrix}$

Théorème

### Deuxième règle de la chaîne

Soit  $f \Big| \begin{matrix} U \subset \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \end{matrix} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y)$  et  $\varphi \Big| \begin{matrix} V \subset \mathbb{R}^2 \\ (u, v) \end{matrix} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (x(u, v), y(u, v))$  de classes  $\mathcal{C}^1$  tel  $\varphi(V) \subset U$

On définit  $g = f \circ \varphi : g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$

$$g \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ et } \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \end{cases}$$

¶ On applique la première règle de la chaîne à  $h_1(t) = g(u + t, v)$  et on considère  $h'_1(0)$

Théorème

Par la 2<sup>e</sup> règle de la chaîne,  $J_g(u, v) = J_f(x, y) \times J_\varphi(u, v)$

En posant  $\begin{cases} a = (u, v) \\ b = \varphi(u, v) = (x, y) \end{cases}$  on a  $dg(a) = df(b) \circ d\varphi(a)$

#### Cas particulier des coordonnées polaires

$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) & \rightarrow & (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \end{array} \right.$  est  $\mathcal{C}^1$ , en posant  $g = f \circ \varphi : g(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$

En appliquant la deuxième règle de la chaîne  $\begin{cases} r \frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} r \cos(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y} r \sin(\theta) = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial x} r \sin(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y} r \cos(\theta) = -y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$

## 4 Dérivées d'ordre supérieur

Définition

DEF: Si  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  admet des dérivées partielles, on note  $\frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \text{ si } k \neq j \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} \text{ si } k = j \end{cases}$

Théorème

#### Théorème de Schwarz

Si  $f$  est  $\mathcal{C}^2$   $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}, \forall (j, k) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$

“ Généralisation si  $f$  est  $\mathcal{C}^p$

Propriétés

#### Opérations conservant la classe

$$\lambda f + \mu g \quad f \times g \quad B(f, g) \quad g \circ f \quad \frac{1}{f}$$

Exemple

#### Calcul du Laplacien en coordonnées polaires

Soit  $\varphi \left| \begin{array}{ccc} V \subset \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) & \rightarrow & (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \end{array} \right.$  telle  $\varphi(V) \subset U$  et  $g = f \circ \varphi \left| \begin{array}{ccc} V \subset \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (r, \theta) & \rightarrow & f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \end{array} \right.$

On veut  $\Delta f$  en fonction des dérivées partielles de  $g$

On calcule  $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}$  et  $\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$  d'où  $\Delta f = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r}$

## 5 Gradient

Définition

DEF:  $\overrightarrow{\text{grad}} f(a) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), -\frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \right)$

$$- \text{df}(a) \cdot \vec{h} = \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = (\overrightarrow{\text{grad}} f(a) | \vec{h})$$

Le  $DL_1(a)$  de  $f$  s'écrit  $f(a + \vec{h}) = f(a) + (\overrightarrow{\text{grad}} f(a) | \vec{h}) + o(\|\vec{h}\|)$

## Opération sur le gradient

- $\overrightarrow{\text{grad}}(\lambda f + g)(a) = \lambda \overrightarrow{\text{grad}}f(a) + \overrightarrow{\text{grad}}g(a)$
- $\overrightarrow{\text{grad}}(fg)(a) = \overrightarrow{\text{grad}}f(a) \times g(a) + f(a) \times \overrightarrow{\text{grad}}g(a)$
- $\overrightarrow{\text{grad}}\frac{1}{f}(a) = -\frac{\overrightarrow{\text{grad}}f(a)}{f(a)^2}$

## Calcul du gradient en polaire

$f \mid \begin{array}{l} U \subset \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \mathbb{R} \\ f(x, y) \end{array}$  on pose  $f(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$

Alors  $\overrightarrow{\text{grad}}f = \frac{\partial g}{\partial r}\vec{u} + \frac{1}{r}\vec{v}$  où  $\begin{cases} (O, \vec{u}, \vec{v}) \text{ est le repère polaire} \\ (O, \vec{i}, \vec{j}) \text{ est le repère cartésien} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \\ \vec{v} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} \end{cases}$

Maximum global  $\forall x \in U, f(x) \leq f(a)$

Maximum local  $\exists r > 0, \forall x \in U \cap \mathbf{B}_o(a, r), f(x) \leq f(a)$

DEF: Si  $f$  est  $\mathcal{C}^1$ , on appelle point critique de  $f$  un point  $a \in U$  où  $\overrightarrow{\text{grad}}f(a) = 0_E$

- Soit  $a \in U$ , un **ouvert**

$f$  admet un extremum local en  $a \Rightarrow a$  point critique

¶  $\exists r > 0, \forall x \in \mathbf{B}_o(a, r), f(x) \leq f(a)_{\text{maximum}}$   
Par hypothèse  $\varphi_j \mid \begin{array}{l} ]-r, r[ \\ t \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \mathbb{R} \\ f(a_1, \dots, a_j + t, \dots, a_p) \end{array}$  a un max en 0  $\Rightarrow \varphi'_j(a) = 0$

- ⚠ 1. La réciproque est fausse  
2. Si  $a$  appartient à la frontière de  $D$ ,  $f$  admet un extremum local sur  $D$  en  $a \not\Rightarrow a$  point critique

## Rechercher les extrema d'une fonction

- Recherche des points critiques
- Nature de chacun des points critiques

Signe de  $f(a+k, b+j) - f(a, b)$  pour  $(k, j) \rightarrow (0, 0)$  :  $\begin{cases} \leq 0 \Rightarrow \max \\ \geq 0 \Rightarrow \min \end{cases}$

- Examiner ce qui se passe à la frontière

Si  $f$  continue et  $f(x) \xrightarrow[\|x\| \rightarrow +\infty]{} +\infty$  alors  $f$  admet un minimum global

- ¶
- $\forall A \in \mathbb{R}, \exists r > 0, \forall x \in E, \|x\| > r \Rightarrow f(x) \geq A$
  - On choisit  $A = f(0_E)$  et on considère  $\mathbf{B}_f(0, r)$  fermé borné  $\Rightarrow$  Compact
  - $f$  continue sur un compact  $\Rightarrow$  Bornée et atteint ses bornes
  - En particulier  $\exists a \in \mathbf{B}_f(0, r), f(a) = \min_{\mathbf{B}_f(0, r)} f$  et  $\forall x \in E \setminus \mathbf{B}_f(0, r), f(x) \geq f(0_E) \geq f(a) \Rightarrow f(a) = \inf_E f$

“ On appelle **point selle** un point étant un maximum pour une variable et un minimum pour l'autre

$D L_2 f(a)$

- $f(a+h) = f(a) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a) + \frac{1}{2} \left( h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \right) + o(\|h\|^2)$
- Si  $a$  est un point critique  $f(a+h) - f(a)$  est du signe de  $H^T B H$ ;  $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$

On la diagonalise en  $BON$ :  $B = P D P^T$   $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$   $\begin{cases} (\lambda_1, \lambda_2) \geq 0 \Rightarrow \text{Minimum local en } a \\ (\lambda_1, \lambda_2) \leq 0 \Rightarrow \text{Maximum local en } a \\ \text{Signes différents} \Rightarrow \text{Point selle en } a \end{cases}$

“ On utilise avantageusement  $\begin{cases} \det B \geq 0 \text{ et } \text{tr}B \geq 0 \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2) \geq 0 \\ \det B \geq 0 \text{ et } \text{tr}B \leq 0 \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2) \leq 0 \\ \det B \leq 0 \Rightarrow \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ de signes différents} \end{cases}$

Soit  $f \in \mathcal{C}^1$ ,  $\begin{cases} u \in \mathcal{C}^1, u(I) \subset J \\ v \in \mathcal{C}^1, v(I) \subset J \end{cases}$

$G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, t) dt$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et  $G'(x) = v'(x)f(x, v(x)) - u'(x)f(x, u(x)) + \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$

On pose  $F \begin{cases} x, y, z \\ I \times J \times J \end{cases} \rightarrow \mathbb{R} \quad \begin{cases} \int_y^z f(x, t) dt \\ \text{et montre que } F \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ soit } \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \text{ sont continues puis règle de la chaîne} \end{cases}$

■  $\int_a^x \sin(x-t)f(t)dt$  est une solution particulière de  $y'' + y' = f(x)$

## 1 Courbes définies par $f(x, y) = 0, f \in \mathcal{C}^1$

Définition

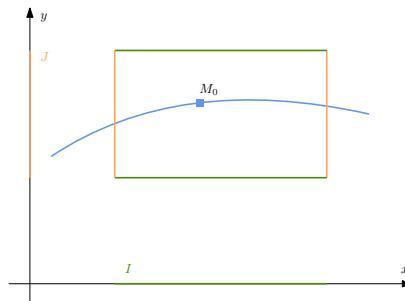
DEF:  $\mathcal{C} = \{(x, y) \in U, f(x, y) = 0\}$ DEF:  $M_0$  est régulier si  $\text{grad } f(M_0) \neq (0, 0)$ 

Théorème

### Théorèmes des fonctions implicites

Soit  $\mathcal{C} : f(x, y) = 0, f \in \mathcal{C}^1$ Soit  $M_0 \in \mathcal{C}, \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \neq 0$ 

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists I, x_0 \in I \\ \exists J, y_0 \in J \\ \exists \varphi : I \rightarrow J \in \mathcal{C}^1, \mathcal{C} \text{ soit paramétrée par } \varphi \end{array} \right.$$



Propriétés

- $\overrightarrow{\text{grad } f(M_0)}$  est orthogonal à la tangente en  $\mathcal{C}$  à  $M_0$ 
  - ─  $\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \neq 0$  : Théorème des fonctions implicites :  $f(x, \varphi(x)) = 0$  puis règle de la chaîne d'où  $(\overrightarrow{\text{grad } f(M_0)} | (1, \varphi'(x_0)))$
  - ─  $\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 0$  : On inverse les coordonnées de paramétrage

Propriétés

### Équations de courbes particulières

#### - Tangente

- :  $M \in T \Leftrightarrow (\overrightarrow{MM_0} | \overrightarrow{\text{grad } f(M_0)})$
- $T : (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0$

#### - Normale

- $M \in N \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_0}$  colinéaire à  $\overrightarrow{\text{grad } f(M_0)} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \\ y - y_0 & \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \end{vmatrix} = 0$
- $N : (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) - (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 0$

Définition

### Courbes de niveau

DEF:  $f(x, y) = \lambda$ 

- Le gradient est orthogonal aux lignes de niveau et est orienté dans le sens des valeurs croissantes

## 2 Surfaces définies par $f(x, y, z) = 0, f \in \mathcal{C}^1$

DEF:  $M_0$  est régulier si  $\overrightarrow{\text{grad}} f(M_0) \neq (0, 0)$

- $\mathcal{C} : f(x, y, z) = 0$  est une courbe tracée sur  $\mathcal{S}$  si

$$\exists \varphi \mid \begin{array}{ccc} I & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \rightarrow & (x(t), y(t), z(t)) \end{array}, f(x(t), y(t), z(t)) = 0$$

### Plan tangent

DEF: C'est le plan passant par  $M_0$ , orthogonal à  $\overrightarrow{\text{grad}}$

- Si  $\mathcal{C}$  est une courbe tracée sur  $\mathcal{S}$ , alors la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $M_0 \in \mathcal{C}$  appartient au plan tangent

¶ On dérive  $f(x(t), y(t), z(t)) = 0$  avec la règle de la chaîne d'où  $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$  Vecteur tangent à  $\mathcal{C}$  en  $M_0 \perp \overrightarrow{\text{grad}} f(M_0)$



# III Physique

## 1 Unités

$$X = xU_X$$

- $X$  est une grandeur physique
- $x$  est la valeur numérique
- $U_X$  est l'unité utilisée

DEF: On appelle **dimension** de la grandeur  $X$  la fonction qui indique comment la valeur numérique est affectée par un changement d'échelle de l'unité

On la note  $[X] = [X]_{U_X \rightarrow U'_X} = \frac{x'}{x}$

- Le système international d'unité correspond au choix d'un certain nombre d'unités de base

Seconde	Fréquence de transition entre deux niveaux d'énergie hyperfins de $^{133}\text{Cs}$
Mètre	Défini à partir de $c$
Kilogramme	Défini à partir de $h$
Ampère	Défini à partir de $e$
Kelvin	Défini à partir de $k_B$
Mole	Définie à partir de $\mathcal{N}_A$
Candela	Définie à partir de l'efficacité lumineuse à une certaine fréquence

## 2 Analyse dimensionnelle

- Exprimer une dimension en fonction d'autres plus observables est l'utilisation **d'équation aux dimensions**
- On utilise communément

Distance	Temps	Masse	Température
L	T	M	K

### Principe fondamental

Tout résultat non homogène est faux

### Règles d'homogénéité

- On ne peut additionner que des termes homogènes
- L'argument d'une fonction mathématique transcendante  $\text{Trigo, exp, ln}$  est adimensionné
- On ne remplace pas le symbole d'une grandeur par sa valeur  
⚠ Même si elle est égale à 1
- Un vecteur ne peut être ajouté à un scalaire

### Retrouver la dimension d'une grandeur

- On réalise une analyse dimensionnelle à partir de lois physiques élémentaires
- Il est souvent intéressant d'utiliser des lois énergétiques

### Trouver une loi physique

- On recense les paramètres du problème *Ce qu'on veut trouver et les dépendances*
- On donne leurs dimensions
- On forme  $\frac{Voulu}{f(param)} = C_{Addimensionnée}$   
 $f$  met en puissance les paramètres

### Théorème $\pi$

Une loi avec  $n$  grandeurs physiques et  $k$  dimensions indépendantes peut être exprimée de  $n-k$  manières différentes en fonction des grandeurs du problème



Si trop de constantes adimensionnées, il faut poser des dépendances

## 1 Description des systèmes

### 1.1 Généralités

#### Notion de système

Un **système thermodynamique** est un ensemble de particules délimité par une frontière, le séparant du **milieu extérieur**, le tout formant **l'univers**

- Un système **fermé** est délimité par une frontière imperméable aux échanges de matière  
⇒ Masse constante
- Une frontière **adiabatique** est imperméable aux transferts thermiques  
Une frontière **diathermique** est perméable aux échanges thermiques
- Une frontière indéformable empêche les échanges de volume avec le milieu

Définition

#### Notion d'équilibre thermodynamique

- Un système est dit à **l'équilibre** si il atteint un régime stationnaire où toutes les grandeurs sont invariables dans le temps et uniformes à l'échelle du système
- On parle d'équilibre local si les grandeurs sont uniformes à l'échelle d'une région seulement

Définition

### 1.2 Différentes échelles

#### Échelle microscopique

- Diamètre des particules
- Distance entre elles

$$\bar{d} \approx \left( \frac{V}{N} \right)^{\frac{1}{3}}$$

- $\bar{d}$  est la distance moyenne
- $N$  est le nombre de molécules
-  Dans un cercle de distance  $\bar{d}$  il y a une molécule

- Libre parcours moyen

$$\bar{l} \approx \frac{1}{na^2}$$

- $\bar{l}$  est le libre parcours moyen
- $n$  est la quantité de matière
-  Dans un cylindre de longueur  $\bar{l}$  il y a une molécule

#### Échelle macroscopique

- Elle caractérise la taille du système

#### Échelle mésoscopique

- Elle est définie telle  $l_{micro} \ll l_{meso} \ll l_{macro}$
- Le volume est composé de suffisamment d'entités pour être étudié mais assez peu pour être lié à un point

## 1.3 Énergie d'un système

Définition

### Differentes énergies

- Énergie interne  $U$  est l'énergie à l'échelle des particules
  - Énergie cinétique d'agitation thermique
  - Énergie potentielle d'agitation de paires
- Énergie cinétique macroscopique
- Énergie potentielle d'interaction avec le milieu

Démo

### Énergies cinétiques macroscopiques et d'agitation thermique

On décompose  $\vec{v}_R^{(i)} = \vec{v}_R(M, t) + \vec{v}_i$

On calcule alors la vitesse dans  $R$  de la particule de fluide et on calcule l'énergie cinétique moyenne

$$dE_c = \frac{1}{2}m\vec{v}_R^2(M, t)n(M, t)d\tau + \frac{1}{2}mu^{*2}n(M, t)d\tau$$

$$E_{c,macro} = \iiint_{M \in V} \frac{1}{2}m\vec{v}_R^2(M, t)n(M, t)d\tau$$

–  $\vec{v}_R(M, t)$  est la vitesse macroscopique par rapport au référentiel

$$E_{c,micro} = \iiint_{M \in V} \frac{1}{2}mu^{*2}n(M, t)d\tau$$

–  $u^{*2}$  est la vitesse quadratique moyenne de la particule  
Elle est directement liée à la température

- L'énergie est une grandeur additive

## 2 Postulats de la thermodynamique

Théorème

### 2.1 Premier postulat

DEF: Un système est **isolé** si tout échange énergétique ou de matière avec le milieu lui est interdit

#### Premier postulat de la thermodynamique

L'état d'équilibre d'un système isolé macroscopiquement au repos est régi par les **variables primitives**

- Énergie interne  $U$
- Volume
- Nombre de particules

Ces variables sont des variables d'état qui permettent de définir complètement un état d'équilibre

Les variables primitives sont définies en toutes circonstances

Théorème

### 2.2 Second postulat

#### Second postulat de la thermodynamique

Il existe pour tout système une fonction appelée **entropie**  $S$  vérifiant

- Fonction dérivable, continue, positive et croissante des variables primitives
- Permettant de prédire l'évolution du système car renfermant toutes ses propriétés
- Augmentant si une contrainte appliquée au système est modifiée et atteignant donc une nouvelle valeur maximale

### Aspects statistiques

Remarque

$$S(U, V, N) = k_B \ln(\Omega)$$

- $k_B$  est la constante de Boltzmann
- $\Omega(U, V, N)$  est le nombre d'état microscopiques associés à un état macroscopique

L'entropie mesure le désordre en quantifiant le manque d'information

Ex: Nombre de questions pour deviner une carte tirée

## 2.3 Identité thermodynamique

On a  $dS = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,N} dU + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{U,N} dV + \left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{U,V} dN$ , on pose :

- Température :  $\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,N}$
- Pression :  $P = T \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{U,N}$
- Potentiel chimique :  $\mu = -T \left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{U,V}$

$$dU = TdS - PdV + \mu dN$$

- Cette équation contient toutes les propriétés du système étudié

Définition

## 2.4 Variables et fonctions d'état

DEF: Variables **extensives** : Relatives à la globalité du système

- Proportionnelles à  $n$  et additives
- Définies hors équilibre
- Les variables thermodynamiques extensives peuvent être calculées sans connaître l'état de chaque particule *Et son vécu* ⇒ Ce sont des **fonctions d'état**

DEF: Variables **intensives** : Varient dans l'espace et le temps

- Non additives
- Uniformes et constantes à l'équilibre

## 2.5 Enthalpie

### Transformation de Legendre

On cherche à remplacer la dépendance en  $V$  *Difficile à maîtriser* par une dépendance en  $P$ , son **conjugué** dans l'identité fondamentale

Pour décrire un état on utilise

- Initialement les coordonnées  $(U, V)$  à  $N$  fixé
- Ensuite l'ensemble des tangentes à la courbe formée  $(O_U, \text{pente})$

Soit  $\left( U_0 + P_0 V_0, \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S,N} = -P_0 \right)$

Le système peut être représenté par les couples  $(U + PV, P)$

Démo

On appelle **enthalpie** la fonction d'état extensive définie comme

$$\mathcal{H} = U + PV$$

- $\mathcal{H}$  est homogène à une énergie

Définition

On définit de même

- L'énergie libre  $F(T, V, N)$
- L'enthalpie libre  $G(T, P, N)$

### 3 Exemples de systèmes thermodynamiques

#### 3.1 Gaz parfait

- Particules de dimensions négligeables par rapport à celles de l'enceinte
- Particules n'interagissant pas entre elles sauf lors de collisions
- Collisions élastiques sur les parois de l'enceinte

$$dP(v) = A \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) 4\pi v^2 dv$$

- $dP(v)$  est la probabilité que  $v \leq v^{(i)} < v + dv$
- Le facteur de Boltzmann compare  $E_c$  est  $E_{\text{agitation}}$

$$\text{On doit calculer } A \text{ pour normaliser la loi } P_{\text{tot}} = 1 \Rightarrow A = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$u^* = \sqrt{\int_0^{+\infty} v^2 dP(v)} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

- $u^*$  est la vitesse quadratique moyenne
- Elle est utilisée car la vitesse est nulle

L'énergie associée au mouvement de translation est donc  $\frac{1}{2}mu^{*2} = \frac{3}{2}k_B T$  soit  $\frac{1}{2}k_B T$  par degré de liberté

- Gaz Monoatomique : Translation  $\Rightarrow U = \frac{3}{2}Nk_B T = \frac{3}{2}nRT$
- Gaz Diatomique : Translation + 2DI de rotation  $Torsion$  et étirement négligeables  $\Rightarrow U = \frac{5}{2}Nk_B T = \frac{5}{2}nRT$

#### Capacités thermiques

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$

- $C_V$  est la capacité thermique à  $V$  constant

$$C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P$$

- $C_P$  est la capacité thermique à  $P$  constante

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V}$$

- $\gamma$  est le coefficient isentropique
- Notons  $C_P - C_V = nR$

	$C_V = \frac{nR}{\gamma - 1}$	$C_P = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}$	$\gamma$
Gaz monoatomique	$\frac{3}{2}nR$	$\frac{5}{2}nR$	$\frac{5}{3}$
Gaz diatomique	$\frac{5}{2}nR$	$\frac{7}{2}nR$	$\frac{7}{5}$

## Entropie du gaz parfait

Chaque particule est localisée par le principe de Heisenberg sur un volume  $\tau \simeq \left(\frac{\hbar}{2m\Delta v_x}\right)^3 = \left(\frac{\hbar}{2mu^*}\right)^3$

On a donc  $\Omega = \left(6\frac{V}{\tau}\right)^N$  d'où en appliquant la formule de Boltzmann

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \frac{nR}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + nR \ln\left(\frac{V}{V_0}\right)$$

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \frac{\gamma nR}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - nR \ln\left(\frac{P}{P_0}\right)$$

Démo

## Equation d'état des gaz parfaits

$$\mathcal{S}_{(U,V,N)} = \mathcal{S}_0 + \frac{Nk_B}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{U}{U_0}\right) + Nk_B \ln\left(\frac{V}{V_0}\right)$$

– Obtenu en éliminant la température

Comme  $P = T \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial V}\right)_{U,N}$  on trouve

$$PV = Nk_B T = nRT$$

– Cette équation est bien d'état

Démo

  $nR = n\mathcal{N}_A = Nk_B$

## 3.2 Gaz de Van der Waals

On tient ici compte des interactions entre toutes les paires de molécules

Elles subissent une attraction sous forme d'énergie potentielle en  $\frac{1}{r^6}$

Définition

$$dE_p = \frac{N}{V} 4\pi r^2 E_p^{int}(r)$$

–  $dE_p$  est l'énergie d'interaction entre une molécule et celles entre  $r$  et  $r + dr$

$$E_p^{int} = \int_0^{+\infty} \frac{N}{V} 4\pi r^2 E_p^{int}(r) dr$$

–  $E_p^{int}$  est l'énergie d'interaction entre une molécule et toutes les autres

$$E_p^{tot} = \frac{N}{2} E_p^{int} = -\frac{aN^2}{V}$$

–  $E_p^{tot}$  est l'énergie potentielle d'interaction entre toutes les paires  
–  $a(T) = -\int_0^{+\infty} 2\pi r^2 E_p^{int}(r) dr < 0$

$$U_{VdW}(T, V, N) = U_{Gp}(T, V, N) - a(T) \frac{N^2}{V}$$

– Ceci n'est pas une fonction d'état

Démo

## Equation du gaz de Van der Waals

$$\left( P + \frac{aN^2}{V^2} \right) (V - V_i) = Nk_B T$$

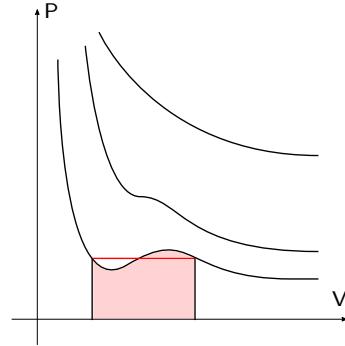
–  $V_i$  est le volume d'une molécule

## Isothermes des gaz de Van der Waals

Une phase est stable si les coefficients de compressibilité isentropique et isothermes sont positifs

$$\text{On a } \chi_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

⇒ La pente des isothermes d'Andrews ne peut être positive ⇒ Palier



### 3.3 Phases condensées

- Le coefficient de compressibilité  $\chi_{Isentropique \text{ et } thermique}$  est nul :  $\chi = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_{TouS} = 0$
- Le coefficient de dilatation isobare est nul  $\alpha = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = 0$

$$\Delta U \approx \Delta H = C \Delta T$$

Comme  $\Delta H = \Delta U + V \Delta P$

Et  $V |\Delta P| \ll C |\Delta T|$

$$S = S_0 + C \ln \left( \frac{T}{T_0} \right)$$

─ S'obtient avec l'approximation précédente et l'identité thermodynamique en ne considérant pas le terme  $\mu dN$

### 3.4 Solide Cristallin

On considère une maille où les atomes possèdent une énergie cinétique et une énergie de rappel élastique  
 $E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2y^2 + \frac{1}{2}m\omega^2z^2$

A l'aide du facteur de Boltzmann on déduit que

$$\begin{cases} \langle \dot{x}^2 \rangle = \langle \dot{y}^2 \rangle = \langle \dot{z}^2 \rangle = \frac{k_B T}{m} \\ \langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle = \frac{k_B T}{m\omega^2} \end{cases}$$

D'où six termes d'énergie moyenne  $\frac{1}{2}k_B T$  soit une énergie totale de  $U = 3Nk_B T$

$$C_m = 3R$$

$$- C_m = \frac{C_v}{n} = \frac{1}{n} \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$

– Valable à haute température ⇒ Pas d'effets thermiques

On a la même entropie que pour les phases condensées

### 1 Principes de la thermodynamique

#### Premier principe

L'énergie d'un système fermé est une fonction d'état extensive

$$\Delta E = \Delta U + \Delta E_c^{(macro)} + \Delta E_p^{(ext)} = W + Q$$

- $W$  est le travail algébriquement reçu
- $Q$  est le transfert thermique algébriquement reçu
- On a aussi  $dU + dE_c^{(macro)} + dE_p^{(ext)} = \delta W + \delta Q$

Théorème

#### Second principe

Il existe une fonction d'état extensive appelée entropie  $S$  telle

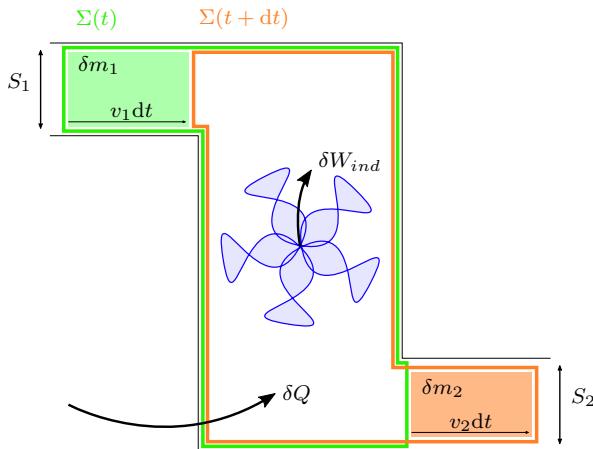
$$\Delta S = S_e + S_c$$

- $S_e = \frac{Q}{T_{frontière}} = \int \frac{\delta Q}{dT_f}$  est l'entropie échangée
- $S_c$  est l'entropie créée, elle est positive
- $S_c = 0$  définit une transformation réversible
- $dS = \delta S_e + dS_c$

Théorème

### 2 Systèmes en écoulement

On fait un bilan entre  $t$  et  $t + dt$



#### Bilan de masse

$$m_0(t) + \delta m_1 = m_0(t+dt) + \delta m_2 \Rightarrow \delta m_1 = \delta m_2 \text{ Stationnarité}$$

#### Débit

$$\begin{cases} \delta m_1 = \mu_1 S_1 v_1 dt \\ \delta m_2 = \mu_2 S_2 v_2 dt \end{cases} \Rightarrow D_m = \mu_1 S_1 v_1 = \mu_2 S_2 v_2$$

#### Bilan énergétique

$$\begin{cases} dE_T = \delta W + \delta Q \text{ où} \\ \begin{aligned} dE_T &= D_m dt \times \Delta(u + e_c + e_p) \\ \delta Q &= \mathcal{P}_{th} dt \\ \delta W &= \delta W_{ind} + \delta W_P = \mathcal{P}_{ind} dt + P_1 \frac{\delta m}{\mu_1} - P_2 \frac{\delta m}{\mu_2} \end{aligned} \end{cases}$$

Démonstration

#### Premier principe en écoulement stationnaire

$$D_m \Delta(h + e_c + e_p) = \mathcal{P}_{ind} + \mathcal{P}_{th}$$

- $h = u + \frac{P}{\mu}$
- $D_m = \frac{\delta m}{dt}$
- $e_c = \frac{1}{2}v^2$
- $e_p = gz$

Théorème

$$\Delta(h + e_c + e_p) = w_{ind} + q$$

- Simplifié en considérant  $e_c = e_p = 0$
- $\Delta h$ , la variation d'enthalpie massique
- $w_{ind}$ , le travail induit massique
- $q$ , le transfert thermique massique

### Deuxième principe en écoulement stationnaire

$$\Delta s = \frac{q}{T_{frontière}} + s_c$$

$$-\quad s_c \geq 0 \\ \blacksquare \boxed{dS = D_m dt \Delta s}$$

### Bilan des transformations

Isochore	Adiabatique	Monobare $P_i = P_f = P_{ext}$	Adiabatique réversible $I_{sentropique}$
$W = 0$	$Q = 0$	$\Delta H = 0$	$\Delta S = 0$ $PV^\gamma = cste$

### Analyse d'une transformation

- Définition adéquate du **système**
- Description des **fonctions d'état** du système à l'état initial et l'état final
- **Schéma bilan** de l'état de l'évolution des variables d'état
- On exprime l'**équation d'état**  $Approximation$
- On donne l'**expression caractéristique** liée à la transformation
- **Premier principe** et expression de  $\Delta U$  et  $W$  permet d'obtenir  $Q$



Prendre toujours le système le plus grand

## 4 Cas du gaz parfait

## 5 Bilans dans le cas d'un gaz parfait

### 5.1 Lois de Joule

1. Le gaz a une énergie interne ne dépendant que de  $T \Rightarrow dU = C_v(T)dT$
2. Le gaz a une enthalpie ne dépendant que de  $T \Rightarrow dH = C_p(T)dT$
- Un gaz parfait obéit aux deux lois de Joule

### 5.2 Transformation adiabatique réversible

Cette transformation est la plus courante car il suffit de procéder rapidement : Adiabatique  $\Rightarrow Q = 0$

Bilan entre  $t$  et  $t + dt$  :  $dU = \delta W + \delta Q = \delta W_{Adiabatique}$

Or  $dU = C_v dT = \frac{nR}{\gamma - 1} dT$  et  $\delta W = -P_{ext} dV = -P dV_{Réversible}$

On a donc  $\frac{nR}{\gamma - 1} dT = -\frac{nRT}{V} dV$  d'où  $\int_{T_0}^T \frac{dT}{T} = -(\gamma - 1) \int_{V_0}^V \frac{dV}{V}$

Ainsi  $\ln\left(\frac{TV^{\gamma-1}}{T_0 V_0^{\gamma-1}}\right) = 0$  et  $TV^{\gamma-1} = T_0 V_0^{\gamma-1}$

$$PV^\gamma = cste$$

- **Conditions :**
  - Gaz parfait
  - Adiabatique
  - Réversible
- $\frac{PV}{T} = cste \Rightarrow TV^{\gamma-1} = cste$  et  $T^\gamma P^{1-\gamma} = cste$

Démo

## 6 Outils techniques

Pour une source de température variable, faire un bilan énergétique pour la source

Dans le cas d'une pression très lente d'un opérateur il faudra appliquer le PFD au piston en prenant en compte toutes les forces de pression

### Théorème des moments

$$x = \frac{a - a_1}{a_2 - a_1}$$

- $x$  est le titre massique en 2
- $a = xa_2 + (1 - x)a_1$
- Utile pour lectures graphiques quand  $a$  est en abscisse

Théorème

Dans le cas d'un changement d'état il faudra utiliser l'extensivité des fonctions d'état pour séparer les étapes de changement d'état des autres étapes

$$\Delta h_{1 \rightarrow 2}(T_0) = \Delta u_{1 \rightarrow 2}(T_0) + P^*(T_0) \Delta v_{1 \rightarrow 2}(T_0)$$

- Dans le cas du gaz parfait  $v_l \ll v_g$  d'où
- $\Delta h_{vap}(T_0) = \Delta u_{vap}(T_0) + \frac{RT_0}{M}$

$$\Delta s_{1 \rightarrow 2}(T_0) = \frac{\Delta h_{1 \rightarrow 2}(T_0)}{T_0}$$

On considère une transformation monobare réversible  
Le résultat est valable, car  $S$  est une fonction d'état

### Développement de petites quantités

- $x_f = x_i + \delta x$
- DL des  $\frac{\delta x}{x_i} \rightarrow 0$  à l'ordre le plus petit possible pour conserver les  $\delta$

Méthode

**Différentielle logarithmique**

$$X(x) = A(x)B(x) \Rightarrow \ln(X(x)) = \ln(A(x)) + \ln(B(x))$$

$$\text{On différencie } \frac{dA(x)}{A(x)dx} + \frac{dB(x)}{B(x)dx} = \frac{dX}{dx} = 0$$

$$\text{D'où } \frac{dA(x)}{A(x)} = \frac{dB(x)}{B(x)}$$

	$c_p$ Capacité massique de l'eau	$4.18 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
---	----------------------------------	---

 Pour une source de température variable, on fait un bilan énergétique pour la source

### 1 Modèle scalaire de l'onde lumineuse

- Onde électromagnétique
- Les charges électriques créent un champ magnétique et un champ électrique couplés
- Bande passante de l'oeil : [390, 770]nm

#### Indice optique

$$n(M) = \frac{c}{v(M)}$$

- $c$  est la célérité dans le vide
- D'où  $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$

- Lorsque l'indice est uniforme, le milieu est **homogène**
- L'indice optique dépend de la longueur d'onde *dispersion*

Milieu	Air	Eau	Verre
$n$	1.0003	1.25	1.5

⚠ La fréquence est inchangée aux changements de milieu

#### Vecteur d'onde

$$\vec{k}_0 = \frac{\omega}{c} \vec{u} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \vec{u}$$

- Dans le vide
- Dans  $n$   $\vec{k} = n \vec{k}_0$

#### Vibration lumineuse

DEF: Une composante quelconque du champ électrique orthogonale à la direction de propagation sera appelée **vibration lumineuse**  $s(M, t)$

- Une vibration lumineuse peut se décomposer en ondes harmoniques :  $s(M, t) = s_0(M) \cos(\omega t - \varphi_M)$
- $\varphi_M$  est appelé **retard de phase**

#### Éclairement

$$d\mathcal{P} = K s(M, t)^2 dS$$

⚠ Approximation des angles faibles d'une expression établie en électromagnétisme

$$\mathcal{E} = \left\langle \frac{\mathcal{P}}{S} \right\rangle$$

- $\mathcal{P}$  est la puissance de la source
- $S$  la surface sur laquelle l'éclairement est mesuré

$$\mathcal{E} = K \langle s(M, t) \rangle^2$$

- L'**éclairement** de l'onde est la puissance moyenne surfacique reçue par une surface orthogonale à  $\vec{k}$
- On définit aussi  $I = 2\langle s(M, t)^2 \rangle$ , l'intensité vibratoire

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} K s_0^2$$

- Pour une onde harmonique
- Comme  $\langle s(M, t)^2 \rangle = \frac{1}{2} s_0^2$

💡  $\mathcal{E} = \frac{1}{2} K \underline{s} \times \underline{s}^*$

## 2 Chemin optique

$$[AB] = c \times t_{AB}$$

- Le chemin optique représente la distance parcourue dans le vide pendant la durée effective de son parcours
- On note aussi  $L_{AB}$  ou  $(AB)$
- $[AB] = n \times AB$  pour la lumière

$$[AB] = \int_A^B dS$$

- Pour un milieu inhomogène où l'indice varie continûment

### Retard lié à la propagation

Pour  $\begin{cases} s(A, t) = S_0 \cos(\omega t - \varphi_A) \\ s(B, t) = S_0 \cos(\omega t - \varphi_B) \end{cases}$  On a  $s(B, t) = s(A, t - t_{AB}) = S_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}[AB] - \varphi(B) - \varphi_A\right)$

Il faudra ajouter  $\pi$  au retard de phase dans les cas suivants

- Réflexion sur une surface parfaitement réfléchissante
- Réflexion sur une surface plus réfringente
- Passage par un point de convergence

### Surfaces d'onde

- Lorsque  $\lambda$  est petite devant les dimensions caractéristiques, la propagation est rectiligne
- Un **rayon lumineux** est une courbe tangente en tout point à  $k(M)$   
Il représente la trajectoire géométrique des photons
- Une **surface d'onde** est une surface de fonction de phase uniforme  
C'est une surface relative à  $O$  composée de tous les  $M$  de même  $[OM]$

### Théorème de Malus

Les surfaces d'ondes relatives à un point source sont orthogonales aux rayons lumineux qui en sont issus  
Valable si l'onde n'a pas subi de déviation et que la surface est continue

### Condition de stigmatisme

Pour un couple de points conjugués  $(S, S')$ ,  $[SS']$  ne dépend pas du rayon considéré

## 3 Quelques ondes

## Ondes sphériques

DEF: Onde émise par une source ponctuelle dans toutes les directions de l'espace

$$-\mathcal{E}(M) = Ks_0^2 \langle \cos^2 \left( \omega t - nr \frac{\omega}{c} \right) \rangle = \frac{1}{2} Ks_0^2$$

Le milieu est non-absorbant  $\Rightarrow$  **Conservation de  $\mathcal{P}$**   $\Rightarrow \mathcal{P} = \mathcal{E}(M)4\pi r^2 \Rightarrow s_0$  décroît en  $\frac{1}{r}$

– Approximation paraxiale : On considère que les faisceaux restent au voisinage de l'axe optique

$$s(M) = \frac{A}{SM} \cos \left( \omega t - n \frac{\omega}{c} SM \right) \text{ or } SM^2 = x^2 + y^2 + z^2 = z^2 \left( 1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2} \right)$$

**⚠️** Or  $z \gg x$  et  $y \Rightarrow$  DL  $\Rightarrow SM \simeq z + \frac{x^2 + y^2}{2z}$

$$\varphi(M) = \varphi_0 + \frac{2\pi n}{\lambda_0} z + \frac{\pi n}{\lambda_0} \frac{x^2 + y^2}{R}$$

- $\frac{2\pi n}{\lambda_0} z$  est le retard de phase lié à la propagation selon  $z$
- $\frac{\pi n}{\lambda_0} \frac{x^2 + y^2}{R}$  est le terme de courbure correspondant au retard dans le plan orthogonal à  $O_z$

## Ondes planes

DEF: Onde sphérique à l'infini  $\Rightarrow$  On confond les portions de sphères à leurs tangentes

- $s(M, t) = s_0 \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} nz \right) = s_0 \cos \left( \omega t - n \vec{k}_0 \cdot \overrightarrow{OM} \right)$
- L'onde électromagnétique est localement assimilable à une onde plane  
 $\Rightarrow$  Approximation de l'optique géométrique

## Faisceau gaussien

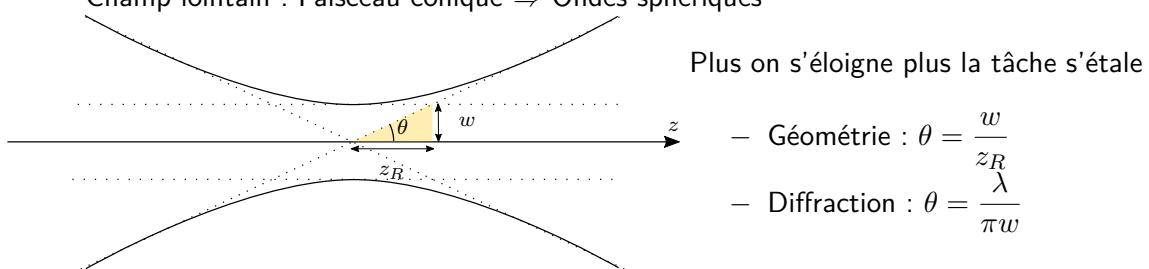
DEF: Le faisceau gaussien est un modèle palliant aux deux modèles précédents *Singularité et extension illimitée*



- Le faisceau gaussien est entièrement défini par  $\lambda$  et le rayon  $w$  ou la longueur  $z_R$  de Rayleigh

On distingue deux modèles

- Champ proche : Faisceau cylindrique  $\Rightarrow$  Ondes planes
- Champ lointain : Faisceau conique  $\Rightarrow$  Ondes sphériques



- Géométrie :  $\theta = \frac{w}{z_R}$
- Diffraction :  $\theta = \frac{\lambda}{\pi w}$

## 4 Lentilles minces et optique géométrique

### Conditions de Gauss

- Rayons lumineux peu inclinés par rapport à l'axe optique
- Les points d'intersections avec les dioptrres sont proches de l'axe optique

Les rayons des conditions de Gauss sont dits **paraxiaux**

**Lois de Snell-Descartes**

$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$$

Se démontre avec l'égalité des chemins optiques à la frontière du dioptre  $\Rightarrow$  Calcul de différence de marche

**Relation de Newton aux foyers**

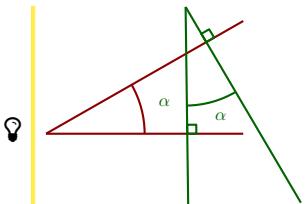
$$\overline{FO} \times \overline{F'O'} = f f' = -f'^2$$

Trigonométrie Thalès

**Relation de Conjugaison de Descartes**

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \Leftrightarrow \frac{f'}{\overline{OA'}} + \frac{f}{\overline{OA}} = 1$$

On pose l'égalité des chemins  $[AOO'A']$  et  $[AP_1P_2A']$  où  $P$  sont des points de part et d'autre de la lentille au-dessus de l'axe

**Méthode du stylo**

- On définit un sens  $\oplus$
- On prend le stylo pour passer d'un côté à l'autre et reformer l'angle de deux manières différentes en comptant algébriquement les angles parcourus



- $n_2 > n_1 \Rightarrow i_2 > i_1$
- $n_2 < n_1 \Rightarrow i_2 < i_1$



La réflexion totale ne se produit que sur un milieu moins réfringent

**FONCTION DE TRANSPARENCE**

$$t(P) = \frac{s_{avec}(P_+)}{s_{sans}(P_+)}$$

–  $s$  est aussi appelé transmittance

**Focalisation d'un faisceau gaussien**

- Une lentille de courte distance focale  $f' \ll z_R$  permet de focaliser un faisceau gaussien au voisinage du foyer image sur une tache dont le rayon est voisin de  $\lambda$
- L'utilisation d'un système afocal permet de réduire la divergence d'un faisceau gaussien  $\Rightarrow$  Le faisceau émergent est collimaté

# PHYSIQUE 5

## INTERFÉRENCES

Définition

Il y a interférence à chaque fois que  $\mathcal{E}_{1+2+3} \neq \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3$

⚠ On a bien toujours  $\underline{s}_{1+2+3} = \underline{s}_1 + \underline{s}_2 + \underline{s}_3$  mais par pour  $\mathcal{E}_{\text{Quadratique}}$

Démonstration

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = \vec{E}_{0_1} \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M)) \\ \vec{E}_2 = \vec{E}_{0_2} \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M)) \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \varphi_1(M) = \varphi_{0_1} + \frac{\omega_1}{c}[S_1 M] \\ \varphi_2(M) = \varphi_{0_2} + \frac{\omega_2}{c}[S_2 M] \end{cases} \quad \text{D'où}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(M) &= K \langle \|\vec{E}_1 + \vec{E}_2\|^2 \rangle \\ &= K \left( \langle \vec{E}_{0_1}^2 \cos^2(\omega_1 t - \varphi_1) \rangle + \langle \vec{E}_{0_2}^2 \cos^2(\omega_2 t - \varphi_2) \rangle + 2 \langle \vec{E}_{0_1} \cdot \vec{E}_{0_2} \cos(\omega_1 t - \varphi_1) \cos(\omega_2 t - \varphi_2) \rangle \right) \\ &= \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_I \end{aligned}$$

$\mathcal{E}_I$  est appelé **terme d'interférences**, par linéarisation

$$\mathcal{E}_I = K \langle \vec{E}_{0_1} \cdot \vec{E}_{0_2} \cos((\omega_1 + \omega_2)t - (\varphi_1 + \varphi_2)) \rangle + K \langle \vec{E}_{0_1} \cdot \vec{E}_{0_2} \cos((\omega_2 - \omega_1)t - (\varphi_2 - \varphi_1)) \rangle$$

Définition

- Si  $\mathcal{E}_I \neq 0$  est non nul, les ondes sont **cohérentes**
- Si  $\mathcal{E}_I = 0$  elles sont **incohérentes**  $\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$

Théorème

### Conditions de cohérence

Pour observer des interférences  $\mathcal{E}_I \neq 0$

- $\omega_1 = \omega_2$  Car le signal est sinon moyené à 0 même avec d'excellents détecteurs
- $\vec{E}_{0_1} \cdot \vec{E}_{0_2} \neq 0$  Les ondes ont une polarisation non-orthogonale

Remarque

- Pour deux sources distinctes  $\varphi_{0_2} - \varphi_{0_1}$  et  $\vec{E}_{0_1} \cdot \vec{E}_{0_2}$  prennent un grand nombre de valeurs aléatoires  
⇒ Valeur moyenne nulle ⇒ On ne peut utiliser deux sources distinctes
- Pour deux sources mutuellement cohérentes  $\mathcal{E}_{\text{clones}}$  : Il faut  $\delta(M) < l_c = c\tau$  pour que les trains d'ondes arrivent à se superposer

Théorème

### Formule de Fresnel

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \cos(\Delta\varphi)$$

- $\mathcal{E}$  sont définis en  $M$
- $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} ([S_2 M] - [S_1 M])$  est le retard de phase

Démonstration complexe *On suppose les conditions remplies  $\omega = \omega_1 = \omega_2$*

⚠  $\begin{cases} \underline{s}_1 = \underline{s}_{0_1} e^{i(\omega t - \varphi_1)} \\ \underline{s}_2 = \underline{s}_{0_2} e^{i(\omega t - \varphi_2)} \end{cases}$  d'où  $\underline{s} = \underline{s}_1 + \underline{s}_2$  et  $\mathcal{E} = \frac{K}{2} (\underline{s}_1 + \underline{s}_2)(\underline{s}_1^* + \underline{s}_2^*)$  puis en développant  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + K \underline{s}_{0_1} \underline{s}_{0_2} \cos(\Delta\varphi)$

En utilisant la formule  $\mathcal{E}_i = \frac{K}{2} |\underline{s}_i|^2$  d'où le résultat

- Interférence constructive :  $\mathcal{E} > \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow \cos(\Delta\varphi) > 0$
- Interférence destructive :  $\mathcal{E} < \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow \cos(\Delta\varphi) < 0$

$$\Delta\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta(M)$$

- $\Delta\varphi$  est le déphasage
- $\delta(M)$  est la différence de marche

$$\delta(M) = [S_2 M] - [S_1 M]$$

- $\delta(M)$  est la différence de marche
- △ Signe ! Elle exprime un retard
- $\delta(M) = c(t_{S_2 M} - t_{S_1 M})$

$$p = \frac{\delta(M)}{\lambda_0}$$

- $p$  est l'ordre d'interférences

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0(1 + \cos(\Delta\varphi(M)))$$

- Dans le cas d'un même éclairement issus des deux rayons

💡 Retard de 1 par rapport à 2  $\Leftrightarrow [2] - [1] \Rightarrow s_1 = s_2 e^{-i\delta_2/1}$

### Figures d'interférences

On distingue les franges brillantes et sombres où l'éclairement est respectivement maximal et minimal

Interférences	$\Delta\varphi$	$p$
Constructives totales	$2k\pi$	$k$
Destructives totales	$2(k+1)\pi$	$k + \frac{1}{2}$

$$C = \frac{\mathcal{E}_{max} - \mathcal{E}_{min}}{\mathcal{E}_{max} + \mathcal{E}_{min}}$$

- $C$  est le contraste ou la visibilité de la figure d'interférence
- $C$  est maximal si  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 \Rightarrow \mathcal{E} = 2\mathcal{E}_0(1 + \cos(\Delta\varphi))$

💡 Pour des ondes planes on se rappellera que  $\underline{s}(M) = \underline{s}_0 e^{i(\omega t - n \vec{k}_0 \cdot \vec{OM})}$

### Interfrange

DEF: L'interfrange est la période spatiale

💡  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{max} \left(1 + C \cos\left(2\pi \frac{x}{i} + \varphi_0\right)\right)$  et on peut identifier les différents paramètres dans l'expression

💡 Pour des ondes planes  $i = \frac{\lambda_0}{2 \sin(\alpha)}$

Plage de vision | [20cm :  $\infty$ ]

$\lambda_{Soleil}$  | 550nm

$lc_{Soleil}$  | 3μm

## 1 Dispositif interférentiel à division du front d'onde

Définition

### Division du front d'onde

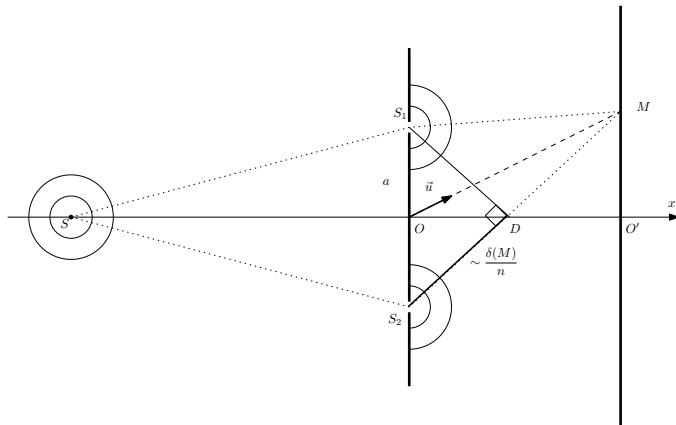
DEF: Un dispositif interférentiel est configuré en division du front d'onde si deux rayons interférant en un point donné sont différents mais issus de la même source

- ⚠ Le fonctionnement par division du front d'onde dépend du point d'observation
- Les interférences produites sont non localisées et sont observables en tout point

## 2 Dispositif des fentes d'Young

### 2.1 Présentation

Démonstration



- $\delta(M) = [S_2M] - [S_1M] = n(S_2M - S_1M)$
- $(S_2M - S_1M)(S_2M + S_1M) = S_2M^2 - S_1M^2$
- $$\begin{aligned} S_2M - S_1M &= \frac{2((\overrightarrow{S_2O} - \overrightarrow{S_1O}) \cdot \overrightarrow{OM})}{S_2M + S_1M} \\ &= \frac{2\overrightarrow{S_2S_1} \cdot \overrightarrow{OM}}{2r + O(a)} \\ &\simeq \overrightarrow{S_2S_1} \cdot \frac{\overrightarrow{OM}}{r} \end{aligned}$$
- On exprime  $\overrightarrow{S_2S_1} \cdot \overrightarrow{OM}$

💡  $\delta(M) = \vec{u} \cdot \overrightarrow{S_2S_1}$

Propriétés

$$\delta(M) = n \frac{ax}{D}$$

- $\delta(M)$  est la différence de marche
- $a = S_1S_2$
- $x$  est l'abscisse comptée à partir de O
- $D = OO'$
- On a aussi  $p = n \frac{ax}{D\lambda_0}$  et  $\Delta\varphi = \frac{2\pi n ax}{D\lambda_0}$
- L'interfrange est alors donnée par  $i = \frac{\lambda_0 D}{na}$

Méthode

### Utilisation des fentes d'Young

- On choisit un point M

- On recherche les sources secondaires
- On trace les rayons qui vont interférer en  $M$  et on vérifie qu'ils sont distincts
- On peut alors utiliser les résultats des trous d'Young

### Généralisation pour d'autres dispositifs

- On se place dans le cas de la division du front d'onde
- On détermine la différence de marche
- On peut alors calculer l'éclairement et les interfranges

## 2.2 Influence du déplacement de la source

### Déplacement de la source

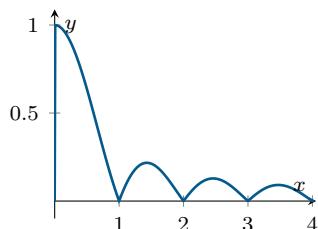
- Si  $\vec{\delta S} = \vec{SS'} \Rightarrow$  Les chemins optiques aux deux trous sont changés  
 $\Rightarrow$  Différence de marche supplémentaire
  - ⚠ Même calcul avec  $M = S'$
- $\Delta\delta(M) = n \frac{\vec{\Delta S} \cdot \vec{S_2S_1}}{D}$
- On a donc  $\delta(M) = \delta_{trous} + \delta_{deplac} = \frac{nax}{D} + \frac{nab}{D_0}$  Où  $b$  est le déplacement vertical  
 On peut alors additionner les éclairements des deux sources et déduire le contraste
- Si  $\vec{\Delta S} \cdot \vec{S_2S_1} = \vec{0}$  alors l'éclairement est inchangé  
 La présence de deux sources en  $S$  et  $S'$  va juste renforcer l'éclairement mais ne rien changer d'autre
  - ⚠ Pas d'interférences pour deux sources incohérentes
  - $\Rightarrow$  Idée des fentes d'Young , on remplace la source par une fente allongée

💡  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{max} \left( 1 + C \cos \left( 2\pi \frac{x}{i} + \varphi_0 \right) \right)$  et on peut identifier les différents paramètres dans l'expression

### Source étendue

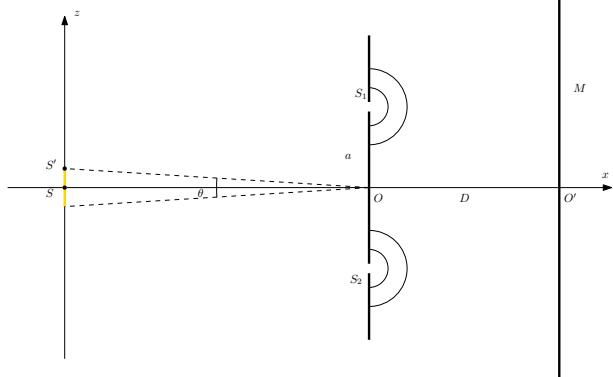
On détermine l'éclairement  $d\mathcal{E}$  produit par un point de la source étendue entre  $z$  et  $z + dz$  en calculant  $\delta(M)$  pour cette source et on intègre sur le segment et on le met sous la forme astucieuse permettant de faire apparaître le contraste qui prendra souvent la forme d'un sinus cardinal

- $C = \text{sinc} \left( 2\pi \frac{na2b}{\lambda_0 D_0} \right)$
- $d\mathcal{E} = \frac{2\mathcal{E}_0}{2b} \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi na}{\lambda_0} \left( \frac{x}{D} + \frac{z}{D_0} \right) \right) \right)$
- $\mathcal{E} = \int d\mathcal{E}$
- On utilise les formules d'addition :  $\sin(a + b) - \sin(a - b) = 2 \sin(b) \cos(a)$



### Critère de visibilité spatial

Pour le déplacement d'une source ponctuelle



- Les franges d'interférences sont visibles en  $M$  si  $|\Delta p_{S \rightarrow S'}| = |p_{S'}(M) - p_S(M)| \leq \frac{1}{2}$
- Bonne visibilité tant que  $\frac{na2b}{\lambda_0 D_0} < 1$   
Soit  $a \leq \frac{\lambda_0 D_0}{n2b} = \frac{\lambda_0}{n\theta}$  Longueur de cohérence spatiale
- On calcule  $p_S(M)$   
– On calcule  $p_{S'}(M)$   
– On applique le critère

## 2.3 Faible largeur spectrale

On s'intéresse ici à des sources de plusieurs longueurs d'onde interagissant simultanément

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow d\sigma = -\frac{d\lambda}{\lambda^2}$$

💡 Si  $\begin{cases} \lambda_m \ll \Delta\lambda \\ \sigma_m \ll \Delta\sigma \end{cases}$  alors  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_m} = \frac{\Delta\sigma}{\sigma_m}$

### Critère de visibilité spectrale

- Les franges d'interférences sont visibles en  $M$  si
- $|\Delta p| = \left| p_{\sigma_m} + \frac{\Delta\sigma}{2} - p_{\sigma_m} \right| = \delta(M) \frac{\Delta\sigma}{2} \leq \frac{1}{2}$   
D'où  $\Delta p \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \delta(M) \leq \frac{1}{\Delta\sigma} \Leftrightarrow \delta(M) \leq \frac{\lambda_m^2}{\Delta\lambda} = l_c$  Longueur de cohérence temporelle  
⚠ Il faut pour cette dernière condition  $\Delta\lambda \gg \lambda_m$

- 💡
- On calcule  $p_S(M)$
  - On calcule  $p_{S'}(M)$
  - On applique le critère

On considère une répartition spectrale rectangulaire L'éclairement est réparti sur une gamme de nombres d'ondes

- On exprime  $dE = 2 \frac{\mathcal{E}_0}{\Delta\sigma} d\sigma (1 + \cos(2\pi\delta(M)\sigma))$
- On intègre sur  $[\sigma_m - \frac{\Delta\sigma}{2}, \sigma_m + \frac{\Delta\sigma}{2}]$
- On fait apparaître sin

### Cas de la lumière blanche

- On peut assimiler le spectre de la lumière à une très longue raie  $\Rightarrow$  Longueur de cohérence associée
- Les éclairements associés à chaque longueur d'onde vont s'annuler l'un après l'autre  $D'abord par \lambda petit$
- On observe non plus des raies mais des irisations
- Si la différence de marche est trop grande devant  $l_c$ , on observe un blanc dit d'ordre supérieur  
Le spectre est cannelé  $\Rightarrow$  Certaines longueurs d'onde s'annulent :  $p = \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$  à plusieurs endroits

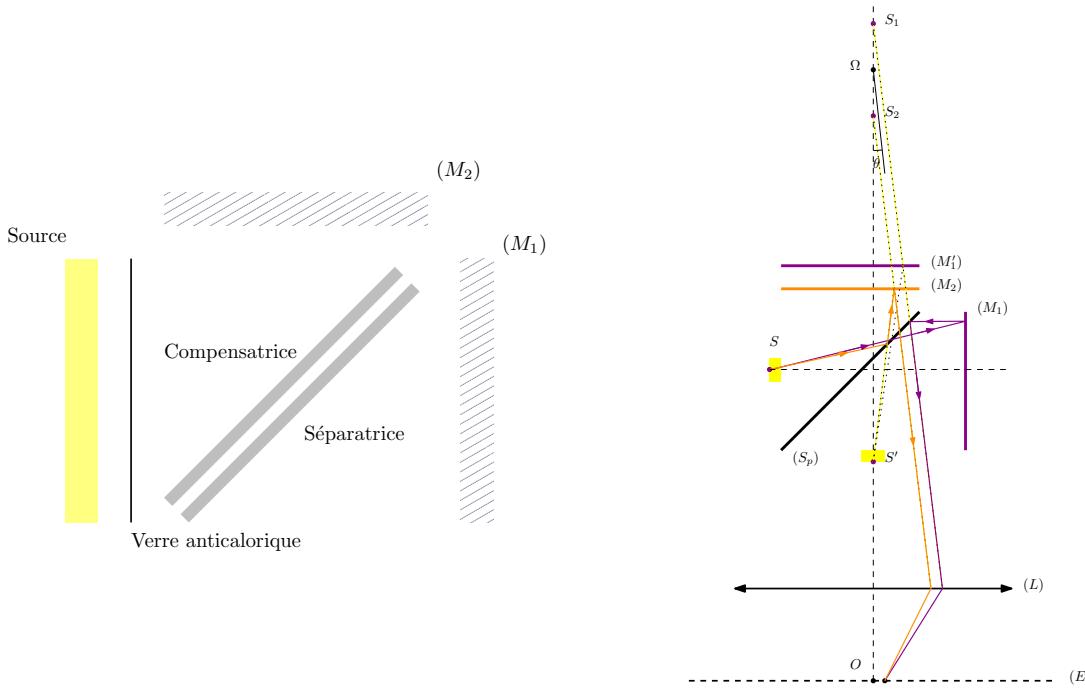


$l_c$ Lumière blanche | 3mm

Source	Critère de visibilité	Condition sur	Longueur de cohérence
Déplacement ou élargissement	Spatial	$a$ ou $b$	Spatiale
Elargissement du spectre	Spectral	$\delta(M)$	Temporelle

## INTERFÉROMÈTRE DE MICHELSON

### 1 Description



- Propriétés**
- Pour que la traversée de la séparatrice soit identique pour les deux voies on ajoute une lame compensatrice
  - On considère que le dispositif avec compensateur est identique à une unique séparatrice n'induisant pas de différence de marche

### 2 Configuration de la lame d'air

**DEF:** La lame d'air est la configuration où les deux miroirs sont orthogonaux

- On simplifie le dispositif en considérant
- Une source  $S'$  symétrique à  $S$  par la séparatrice
  - Le miroir  $(M'_1)$  symétrique à  $(M_1)$  par la séparatrice
  - $S \xrightarrow{(M_1)} S'_1 \xrightarrow{(S_p)} S_1$

$$S \xrightarrow{(S_p)} S'_2 \xrightarrow{(M_2)} S_2$$

Définition

$$\delta(M) = [SM]_{V_1} - [SM]_{V_2} = n(SI_1 + I_1J_1 + J_1M) - n(SJ_2 + J_2I_2 + I_2M) = n(S_1M - S_2M)$$

–  $e = 0 : S_1$  et  $S_2$  sont confondus  $\Rightarrow \delta(M) = 0$

–  $e \neq 0 : e \ll \Omega O = D$  d'où  $\delta(M) = 0 + O(e)$  on cherche  $O(e)$  à l'ordre 1

$$S_1M - S_2M = \frac{S_1M^2 - S_2M^2}{S_1M + S_2M} \text{ d'où } \begin{cases} S_1M^2 = (\overrightarrow{S_1\Omega} + \overrightarrow{\Omega M})^2 = e^2 + \Omega M^2 + 2e\Omega M \cos(\theta) \\ S_2M^2 = (\overrightarrow{S_2\Omega} + \overrightarrow{\Omega M})^2 = e^2 + \Omega M^2 - 2e\Omega M \cos(\theta) \end{cases}$$

D'où  $S_1M^2 - S_2M^2 = 4e\Omega M \cos(\theta) = O(e)$  et on approche à l'ordre 0 :  $S_1M + S_2M \simeq 2\Omega M$

Démo

$$\delta(M) = 2ne \cos(\theta)$$

– On déduit  $p(M) = 2n \frac{e}{\lambda_0} \cos(\theta)$

On peut élargir la source  $\Rightarrow$  Critère de visibilité spatiale

### Élargissement de la source

$$r \leq \frac{\lambda_0 D}{4neb}$$

- $D = O\Omega = O'\Omega'$
- $r$  est la distance entre  $M$  et l'axe des sources
- $b$  est la distance entre les sources
- $|p_{\text{centre}} - p_{\text{bord}}| \leq \frac{1}{2}$  en exprimant  $\theta$  dans les 2 cas

– Les franges d'interférence sont visibles quelle que soit la largeur si  $D \rightarrow \infty$

Les franges d'interférence sont alors localisées à l'infini

Les deux rayons se confondent  $\Rightarrow$  **Division d'amplitude** et non plus du front d'onde

DEF: Un dispositif interférentiel fonctionnant en division d'amplitude voit ses franges d'interférence localisées sur une surface où la visibilité est maximale

### DIFFÉRENCE DE MARCHE À L'INFINI

$$\delta(M) = 2ne \cos(i)$$

$$\Delta | \delta(M) = [S_1 H] + [HM] - [S_2 M] = [S_1 H]_{\text{Stigmatisme}}$$

### Rayon des anneaux

- On exprime  $p$  au centre  $p_0 + \epsilon$
- On détermine le sens de variation de  $p$  en fonction de  $i$
- On exprime  $p$  au premier anneau brillant en fonction de  $p(i_1) = p_0 \pm 1$
- DL en  $i_1$  puis détermination de  $r_1$  Déduit de  $i_1$  en utilisant de la trigonométrie
- Sur le  $k^{\text{e}}$  anneau  $p(i_k) = p_0 \pm k + 1$  et analogie à ce qui précède pour déterminer  $r_k$

- Lorsqu'on augmente diminue l'épaisseur de  $e$  de la lame d'air, les anneaux rentrent sont sortent
- $e = 0 \Rightarrow$  Contact optique  $\Rightarrow$  Éclairement uniforme Tinté plate

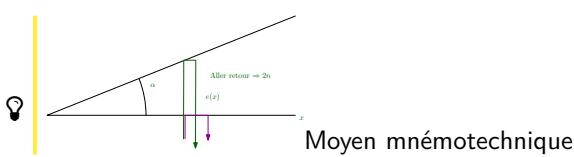
## 3 Configuration du coin d'air

DEF: Dans la configuration du coin d'air,  $(M_2)$  et  $(M'_1)$  ne sont plus parallèles et forment un angle  $\alpha$

–  $x$  compté à partir de l'intersection de  $M_2$  et  $M'_1$

$$\delta(M) = 2n \sin(\alpha)x$$

– En considérant le déphasage des deux ondes exprimé en coordonnées cartésiennes



$$y \leq \frac{\lambda_0}{4n\beta \sin(\alpha)}$$

- Pour une source étendue
- $y$  définit l'endroit où l'on place le bout de papier
- $\beta$  est la largeur de la source

 Critère de visibilité et DL à l'ordre 1 en supposant  $\beta \ll 1$   
Source peu étendue

- $\Rightarrow$  La surface de localisation se situe au voisinage des miroirs  
L'interféromètre fonctionne alors en division d'amplitude  $\Rightarrow$  Utilisation d'une source étendue possible

## INTERFRANGE

$$i = \frac{\lambda_0}{2n \sin(\alpha)}$$

- Les franges d'égale épaisseur passent par tous les points où l'épaisseur est la même
- $\mathcal{E} = 2 \frac{\mathcal{E}_0}{4} \left( 1 + \cos \left( \frac{4\pi n}{\lambda_0} e(M) \right) \right)$

## 4 Bilan

Configuration	Localisation	Nature	Différence de marche	Conditions d'éclairage	Conditions d'observation
Lame d'air	$\infty$	Égale inclinaison	$2n_{air}e \cos(\theta)$	Convergent <small>Plus de <math>i</math></small>	Lentille de projection
Coin d'air	Voisinage des miroirs	Égale épaisseur	$2n_{air}e(M) = 2n_{air} \sin(\alpha)x$	Parallèle	Miroir dans plan focal



## 1 Trous d'Young multiples

$$\begin{aligned}\delta(M) &= [SA_mM] - [SA_{m+1}M] \\ &= n_{air}a(\sin(\theta) - \sin(\theta_0))\end{aligned}$$

On détermine la vibration lumineuse résultante

$$\underline{s}(M) = \sum_i \underline{s}_i(M) = \underline{s}_1(M) \sum_{k=0}^{N-1} e^{-ik\varphi}$$

$$\underline{s}(M) = \underline{s}_1(M) \frac{1 - e^{-iN\varphi}}{1 - e^{-i\varphi}}$$

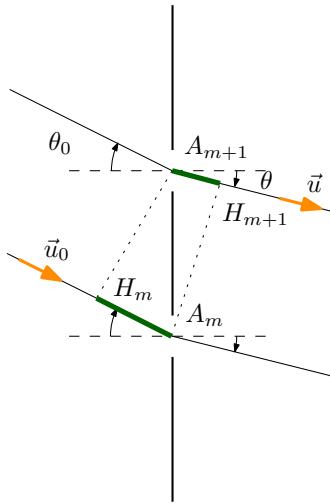
D'où

$$= \underline{s}_1 e^{-i(N-1)\varphi} \frac{\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

On calcule alors  $\mathcal{E}(M) = \frac{1}{2}K\underline{s}(M)\underline{s}^*(M)$

$$\mathcal{E}(M) = N^2 \mathcal{E}_0 \mathcal{R}_N$$

$$\mathcal{F}_N = \frac{N}{2}$$



$$- \quad \mathcal{R}_N = \frac{\sin^2\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{N^2 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

- Entre deux annulations du pic central  $\delta\varphi = \frac{k\pi}{N}$
- On définit  $\mathcal{F}_N = \frac{2\pi}{\delta\varphi}$

Démo

### Formule des réseaux

$$\sin(\theta_p) - \sin(\theta_0) = p \frac{\lambda_0}{a}$$

À partir de  $\delta(M)$ ,  $\Delta\varphi(M) = 2\pi p, p \in \mathbb{Z}$

Théorème

💡 On peut aussi raisonner sur la représentation de Fresnel de  $\underline{s}$  pour trouver les angles d'interférences totalement destructives ou constructives

## 2 Autres modèles à ondes multiples

DEF: On appelle réseau plan de diffraction une structure diffractante plane

## Établir les formules d'éclairement

- La formule des réseaux reste toujours valable
- Pour déterminer la différence de marche, on utilisera Pluto

$$\delta(M) = n(\vec{u}_0 - \vec{u}) \overrightarrow{A_{m+1} A_m}$$

- $A$  sont les trous
- $\vec{u}_0$  est le vecteur porté par l'onde incidente
- $\vec{u}$  est le vecteur porté par l'onde sortante

## Interféromètre de Fabry-Pérot

- L'onde émise par une source large est emprisonnée entre deux lames parallèles à forts coefficients réfléchissants
- À chaque "rebond" une infime partie est transmise et ces infinies parties interfèrent à l'infini en supposant l'éclairement identique pour chaque onde résultante

 La démonstration est analogue à la précédente et on retrouve une série géométrique

- La finesse des raies  $\mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$  tend vers 0 avec le coefficient de réflexion tendant vers 1
- Ce montage permet d'avoir une transmission sélective à certaines longueurs d'onde  
En s'arrangeant pour n'avoir qu'un seul pic fin dans le visible on crée un filtre interférentiel

## CHANGEMENTS DE RÉFÉRENTIELS

### Référentiel

DEF: Un référentiel s'identifie à un solide de référence

- Ensemble des points dont les distances relatives restent invariables
- Ensemble d'horloges synchronisées

### Transformation de galilée

-  — La mécanique classique admet que le temps s'écoule de la même manière dans  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$   
 — La structure euclidienne de l'espace temps donne  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$

Pour une translation rectiligne et uniforme à la vitesse  $\vec{u}$  :

$$\begin{cases} x = ut + x' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

### Loi de composition des vitesses

$$\overrightarrow{v_{\mathcal{R}}}(M) = \overrightarrow{v_{\mathcal{R}'}(M)} + \overrightarrow{v_e}(M, t)$$

-  —  $\vec{v}_e$  est la vitesse d'entrainement de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$   
 —  $\overrightarrow{v_{\mathcal{R}'}(O')}$  Translation  
 —  $x' \left( \frac{d\vec{i}'}{dt} \right)_{\mathcal{R}} + y' \left( \frac{d\vec{j}'}{dt} \right)_{\mathcal{R}} + z' \left( \frac{d\vec{k}'}{dt} \right)_{\mathcal{R}}$  Rotation

 Le tapis roulant de la station de métro Châtelet

 Dérivation de :  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$  et identification

### Point coïncidant

DEF: On appelle **point coïncidant**, le point fixe de  $\mathcal{R}'$  confondu à  $M$  à l'instant  $t$

- On a  $\overrightarrow{v_{\mathcal{R}}}(P) = \overrightarrow{v_e}(M, t)$

### Loi de composition des accélérations

$$\overrightarrow{a_{\mathcal{R}}}(M, t) = \overrightarrow{a_{\mathcal{R}'}(M, t)} + \overrightarrow{a_e}(M, t) + \overrightarrow{a_C}(M, t)$$

-  —  $\vec{a}_e$  est l'accélération d'entrainement de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$   
 —  $\overrightarrow{a_C}(M, t)$  est l'accélération de Coriolis  
 — Elle dépend de la vitesse de  $M$  dans  $\mathcal{R}'$   
 — Elle dépend de la rotation des deux référentiels  
 ⇒ Sinon elle est nulle

## Référentiels en translation

- Référentiels en translations  $\Leftrightarrow$  Axes parallèles à tout instant

Translation rectiligne et uniforme

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v_{\mathcal{R}}}(M) &= \overrightarrow{v_{\mathcal{R}'}}(M) + \overrightarrow{v_e}(M, t) \\ &= \overrightarrow{v_{\mathcal{R}'}}(M, t) + \overrightarrow{u} \\ \overrightarrow{a_{\mathcal{R}}}(M, t) &= \overrightarrow{a_{\mathcal{R}'}}(M, t) + \overrightarrow{a_e}(M, t) + \overrightarrow{a_C}(M, t) \\ &= \overrightarrow{a_{\mathcal{R}'}}(M, t) + \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0}\end{aligned}$$

Translation quelconque

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v_{\mathcal{R}}}(M) &= \overrightarrow{v_{\mathcal{R}'}}(M) + \overrightarrow{v_e}(M, t) \\ \overrightarrow{a_{\mathcal{R}}}(M, t) &= \overrightarrow{a_{\mathcal{R}'}}(M, t) + \overrightarrow{a_e}(M, t) + \overrightarrow{a_C}(M, t) \\ &= \overrightarrow{a_{\mathcal{R}'}}(M, t) + \left(\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + \overrightarrow{0}\end{aligned}$$

Exemple

## Référentiels en rotation

- Les deux bases ont un axe commun, ici  $\vec{k} = \vec{k}'$
- On peut exprimer les vecteurs  $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  à l'aide de l'angle de rotation  $\varphi$

$$\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} = \dot{\varphi} \vec{k}$$

- $\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}$  est le vecteur rotation de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$
- $\varphi$  est l'angle de rotation
- $\vec{k}$  est l'axe de rotation, il est colinéaire à  $\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}$

$$\overrightarrow{v_e}(M, t) = \overrightarrow{v_{\mathcal{R}}}(P, t) = \left(\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = x' \frac{d\vec{i}'}{dt} + y' \frac{d\vec{j}'}{dt} + z' \frac{d\vec{k}'}{dt}$$

¶ En remplaçant les dérivées par leur valeur avec  $\varphi$  on a  $\left(\frac{d\vec{\varrho}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \wedge \vec{\varrho}$ ,  $\varrho \in \{i, j, k\}$

### Formule de Bour

Théorème

$$\left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

¶ On dérive  $\overrightarrow{AB} = x'(t)\vec{i}' + y'(t)\vec{j}' + z'(t)\vec{k}'$

### Formule de Varignon

Pour deux points  $A$  et  $B$  d'un même solide

Théorème

$$\overrightarrow{v_{\mathcal{R}}}(A, t) = \overrightarrow{v_{\mathcal{R}}}(B, t) + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

¶  $\left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} = \overrightarrow{0}$  et on décompose  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$

$$\overrightarrow{v_e}(M, t) = \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{HM}$$

¶ En sommant les dérivées de chaque comosante

- $H$  est sur l'axe de rotation

- De même pour les accélérations  $\overrightarrow{a_e}(M, t) = \overrightarrow{a_{\mathcal{R}}}(O, t) + \left(\frac{d\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \wedge (\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{OM})$
- Dans le cas de la rotation uniforme autour d'un point fixe  $\overrightarrow{a_e}(M, t) = \overrightarrow{a_{\mathcal{R}}}(P, t) = -\Omega^2 \overrightarrow{HM}$

### Accélération de Coriolis

Théorème

$$\overrightarrow{a_c}(M, t) = 2\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{v_{\mathcal{R}'}(M)}$$

¶ On explicite les dérivées dans l'expression

Dans tous les cas sauf l'accélération de Coriolis on utilisera le point coïncidant au lieu d'expressions toutes faites

?

$G$	$6.67 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{km}^{-1} \text{s}^{-1}$
$R_T$	6400km
$m_T$	$6 \times 10^{24} \text{kg}$

?

$d_{TS}$	$c \times 8 \text{min} = 1.5 \times 10^{11} \text{m}$
$m_S$	$2 \times 10^{30} \text{kg}$
$d_{TL}$	$c \times 1 \text{s} = 380000 \text{km}$

## 1 Invariance galiléenne du mouvement

### Principe d'inertie

Tout corps persévere dans son état de repos ou de mouvement rectiligne et uniforme dans lequel il se trouve à moins qu'une action mécanique n'agisse sur lui et ne le contraine à changer d'état

Cet énoncé définit deux notions

- Le moment inertiel comme le repos ou un mouvement de translation rectiligne uniforme
- Les forces comme actions mécaniques modifiant le mouvement

### Référentiel galiléen

Un référentiel galiléen *référentiel d'inertie* est tel qu'un mobile soumis à une force idéalement nulle est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme

C'est un référentiel où le principe d'inertie est vérifié

### Principe de relativité

Les lois de la mécanique sont les mêmes dans les référentiels en translation rectiligne et uniforme les uns par rapport aux autres

Conséquences

- Aucune expérience ne peut montrer à un observateur qu'il est en mouvement rectiligne et uniforme par rapport à un autre
  - La force est invariable par changement de référentiel
- ⚠ Par l'absurde on applique 2 fois le PFD puis la loi de composition des accélérations où  $\vec{v}_e = \vec{v}_C = \vec{0}$

## 2 Référentiels non galiléens

$$m\vec{a}_{\mathcal{R}}(M, t) = \vec{F} = m\vec{a}_{\mathcal{R}_{ng}}(M, t) + m\vec{a}_e(M, t) + m\vec{a}_C(M, t)$$

On définit

- $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e(M, t)$ , la pseudo-force d'inertie d'entraînement
- $\vec{F}_{iC} = -m\vec{a}_C(M, t) = -2m\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_{ng}} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}_{ng}}(M, t)$ , la pseudo-force d'inertie de Coriolis

$$m\vec{a}_{\mathcal{R}_{ng}}(M, t) = \vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{iC}$$

– Deuxième loi de Newton dans un référentiel non galiléen

## 3 Lois de la dynamique en référentiel non galiléen

Loi de la quantité de mouvement PFD.

$$m\overrightarrow{a_{\mathcal{R}_{ng}}}(M, t) = \vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{iC}$$

- $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e(M, t)$ , la pseudo-force d'inertie d'entraînement
- $\vec{F}_{iC} = -m\vec{a}_C(M, t) = -2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_{ng}} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}_{ng}}(M, t)$ , la pseudo-force d'inertie de Coriolis

Théorème du moment cinétique

$$\left( \frac{d\overrightarrow{L}_{\mathcal{R}_{ng}}(O', t)}{dt} \right)_{\mathcal{R}_{ng}} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{F}}(O') + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{F}_{ie}}(O') + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{F}_{iC}}(O')$$

¶ Par dérivation du moment cinétique

Théorème de l'énergie cinétique

$$\frac{d(E_{c, \mathcal{R}_{ng}})}{dt} = \mathcal{P}_{\vec{F}, \mathcal{R}_{ng}} + \mathcal{P}_{\vec{F}_{ie}, \mathcal{R}_{ng}} + \mathcal{P}_{\vec{F}_{iC}, \mathcal{R}_{ng}}$$

- $\frac{1}{2}m\vec{v}_{\mathcal{R}_{ng}}(M, t)$
- Pour les forces conservatives :  $\mathcal{P}_{\vec{F}, \mathcal{R}_{ng}} = -\frac{dE_p}{dt}$   
On pourra alors faire intervenir l'énergie mécanique  
Forme infinitésimale :  $dE_{m, \mathcal{R}_{ng}} = \delta W_{nc, \mathcal{R}_{ng}} + \delta W_{\vec{F}_{ie}, \mathcal{R}_{ng}}$

¶ Par multiplication du PFD par  $\vec{v}_{\mathcal{R}_{ng}}$

- $\mathcal{P}_{iC} = 0$  : la force de Coriolis ne travaille jamais
- Il faut étudier au cas par cas si  $\mathcal{P}_{ie}$  concerne une force conservative

Cas de forces dérivant d'énergies potentielles

- Cas de  $\mathcal{R}_{ng}$  en translation rectiligne et uniforme par rapport à  $\mathcal{R}$   
 $\vec{a}_e(M, t) = \vec{a}_{\mathcal{R}}(P \in \mathcal{R}_{ng}, t) = cste$

$$E_{p, ie} = m\vec{a} \cdot \overrightarrow{OM} + cste$$

- La force dérive bien d'une  $E_p$

- Cas de  $\mathcal{R}_{ng}$  en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à  $\mathcal{R}$   
 $\vec{a}_e(M, t) = \vec{a}_{\mathcal{R}}(P \in \mathcal{R}_{ng}, t) = -r\omega^2\vec{e}_r$

$$E_{p, ie} = -\frac{1}{2}m\omega^2r^2 + cste$$

- Cette force éjecte vers l'**extérieur** à cause de la rotation  
△ Signe -



Toujours placer les points en coordonnées positives



Pour des petites oscillations

- Oscillateur harmonique  $\ddot{\epsilon} + \Omega^2\epsilon = 0 \Rightarrow$  Stable Les dérivées sont toutes du premier ordre en  $\epsilon$
- Autre  $\ddot{\epsilon} - \frac{1}{\tau}\epsilon = 0 \Rightarrow$  Instable Une exponentielle diverge

## 4 Effets de la rotation propre de la terre

## Poids d'un corps

DEF: Le poids est l'opposé de la force qu'un opérateur doit exercer pour maintenir un objet en équilibre

**¶** En ne considérant que l'attraction de la terre,  $m\vec{a}_{\mathcal{R}_T}(M) = \vec{R} + m\vec{g}(M) - m\vec{a}_e(M, t)$

Comme  $\vec{P} = -\vec{R}$ ,  $\vec{g}(M) = \vec{G}_T(M) - \text{vecsae}(M, t)$

**⚠** Le champ de pesanteur comprend le champ d'accélération de la force d'inertie d'entraînement

## Méthode perturbative

- On injecte le résultat à l'ordre  $n - 1$  dans l'expression pour obtenir le résultat à l'ordre  $n$
- En commençant par une approximation brutale on détermine le résultat à l'ordre voulu de proche en proche

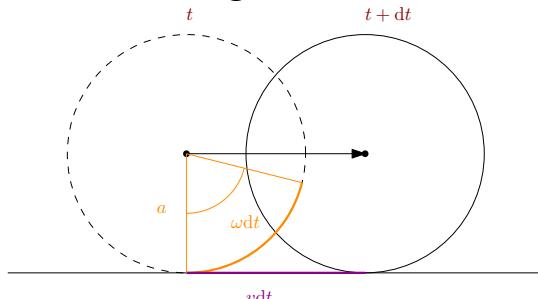
## Phénomène de marées

- Les marées tirent leur origine d'une différence entre la force de gravitation qu'un astre exerce et la force d'inertie qu'il entraîne dans le référentiel géocentrique
- Force d'inertie d'entraînement dans  $\mathcal{R}_G$  non galiléen :  $\vec{a}_e(M) = \vec{a}_{\mathcal{R}_H}(P) = \vec{a}_{\mathcal{R}_H}(T)$
- PFD à  $T$  dans  $\mathcal{R}_H$  :  $\vec{a}_{\mathcal{R}_H}(T) = \vec{g}_S(T)$
- PFD à  $M$  dans  $\mathcal{R}_G$  :  $m\vec{a}_{\mathcal{R}_G}(M) = m\vec{g}_T(M) + m\vec{g}_S(M) - m\vec{a}_e(M) + \vec{F} = m\vec{g}_T(M) + m(\vec{g}_S(M) - \vec{g}_S(T)) + \vec{F}$
- On définit le champ de marée comme :  $\vec{C}_S(M) = \vec{g}_S(M) - \vec{g}_S(T) = -Gm_S \left( \frac{\overrightarrow{SM}}{SM^3} - \frac{\overrightarrow{ST}}{ST^3} \right)$
- On exprime  $\overrightarrow{SM}$  en coordonnées cylindriques de la terre :  $\overrightarrow{SM} = -d_S \vec{e}_x + r \vec{e}_r$   
 $\frac{1}{SM^3} \simeq \frac{1}{d^3} \left( 1 + \frac{3r}{d} \cos(\theta) \right) \simeq \frac{Gmr}{d^3} (3 \cos^2(\theta) \vec{e}_x - \vec{e}_r) = \vec{C}_S(M)$
- S'applique à tous les astres

## 1 Mouvement de la roue

Propriétés

### Roulement sans glissement



DEF: La roue roule sans glisser  $\Leftrightarrow a\omega dt = vdt$

- $\vec{v}_R(i \in Roue, t) = \vec{0}$  Au niveau du point de contact  
La vitesse s'annule quand  $I$  touche le sol  
On a  $\vec{v}_R(i \in Sol, t) = \vec{v}_R(i \in Roue, t) = \vec{0}$

Définition

### Vitesse de glissement

DEF:  $\vec{v}_{g,roue/sol}(t) = \vec{v}_R(I \in Roue, t) - \vec{v}_R(I \in Sol, t)$

⚠ Le point  $I$  est celui du contact entre la roue et le sol

- La vitesse de glissement ne dépend pas du référentiel dans lequel on la calcule
- La vitesse de glissement est dans le plan de contact entre la roue et le sol

Propriétés

### Frottements

#### Glissement

- Si  $\vec{v}_g \neq \vec{0}$
- $\|\vec{R}_T\| = f \|\vec{R}_N\|$
- Tant que  $\vec{v}_g \cdot \vec{R}_T \leq 0$
- $f$  ne dépend pas de l'aire de la surface
- Généralement  $f \leq f_s$

#### Non-Glissement

- $\vec{v}_g = \vec{0}$
- Tant que  $\|\vec{R}_T\| \leq f_s \|\vec{R}_N\|$

Méthode

### Schéma d'étude des véhicules à roues

- Relation barycentrique concernant l'ensemble du système
- Bilan des actions *Poids, contact, frottements aérodynamiques, ...*
- Énoncé de la condition de roulement sans glissement
- Théorème de la résultante cinétique à tout le système
- Théorème du moment cinétique aux différentes parties mobiles puis à tout le système
- Expression des réactions, de la vitesse de déplacement
- Expression des conditions de roulement sans glissement *Possibilité de rupture de contact ?*
- Théorème de l'énergie mécanique pour déterminer la puissance motrice



Les frottements permettent au véhicule d'avancer  $\Rightarrow$  Prendre l'exemple des starting-blocks

## ONDES UNIDIMENSIONNELLES

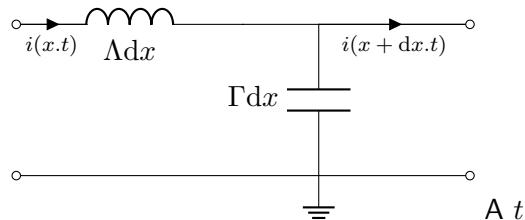
### 1 Exemples et mise en équation

#### Câble coaxial

- On se place dans l'ARQS
- Les conducteurs et isolants sont parfaits
- Il existe des effets capacitifs et inductifs
- $u$  et  $i$  sont  $\mathcal{C}^2$

$$\begin{array}{ll} \text{Loi des noeuds} & \frac{\partial i}{\partial x}(x, t) = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \quad \left| \quad \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}(x, t) = -\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \right. \\ \text{Loi des mailles} & \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}(x, t) \quad \left| \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = -\Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}(x, t) \right. \end{array}$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial x^2}(x, t) = \Lambda \Gamma \frac{\partial u^2}{\partial t^2}(x, t)$$



- Équation d'onde ou de d'Alembert pour une onde unidimensionnelle
- $\frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}}$  est homogène à une vitesse
- On a ici éliminé  $i$  mais on a le même résultat pour  $u$

Exemple

#### Déformation transversale d'une corde

- La tension  $T_0$  est suffisamment importante pour considérer la corde au repos comme horizontale
- L'amplitude du déplacement transversal est faible  $\Rightarrow \alpha$  est infiniment petit
- La corde est sans raideur  $\Rightarrow$  En  $x$  l'action d'un bout sur l'autre se traduit par une force : la tension  $T(x, t) = T_0 + T_1(x, t)$  avec  $T_1(x, t) \ll T_0$
- $T_y = (T_0 + T_1(x, t)) \sin(\alpha(x, t)) \simeq T_0 \alpha$

$$\text{PFD}_y : \mu_0 dx \frac{\partial^2 y \left( x + \frac{dx}{2} \right)}{\partial t^2} \vec{e}_y = \vec{T}(x + dx, t) - \vec{T}(x, t)_{\text{Pas de poids}} \Rightarrow \mu_0 \frac{\partial^2 y \left( x + \frac{dx}{2} \right)}{\partial t^2} \simeq T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x, t)$$

$$-\tan(\alpha) = \frac{y(x + dx, t) - y(x, t)}{dx} \Rightarrow \alpha(x, t) \simeq \frac{\partial y}{\partial x}(x, t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu_0}{T_0} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

- Équation d'onde ou de d'Alembert pour une onde unidimensionnelle
- En remplaçant dans la projection du PFD sur  $y$

Exemple

#### Slinky

- Raideur équivalente de deux ressorts :  $\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$
- Force de 2 sur  $M$
- PFD sur le point  $A$  Lie les deux ressorts, de masse nulle

Exemple

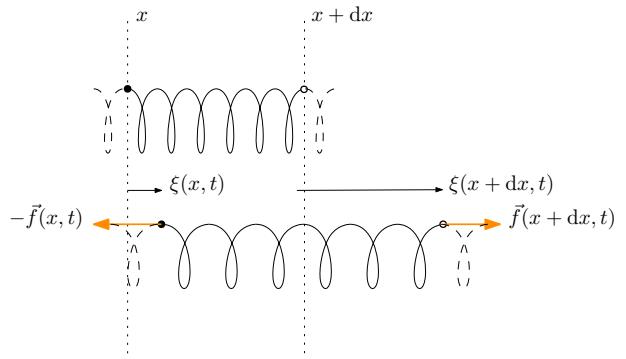
$$\begin{aligned}\vec{f}(x, t) &= k_{dx} (\xi(x + dx, t) - \xi(x, t)) \vec{e}_x \\ &\simeq k_{dx} dx \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t) \vec{e}_x\end{aligned}$$

Or  $\frac{1}{k} = \sum \frac{1}{k_{dx}} \Rightarrow kL = k_{dx} dx$

$$\vec{f}(x, t) = kL \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t) \vec{e}_x$$

$$\text{PFD : } \mu_0 dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \left( x + \frac{dx}{2}, t \right) = \vec{f}(x + dx, t) - \vec{f}(x, t) \simeq dx \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \simeq dx kL \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}(x, t)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{m}{kL^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$



— Équation d'onde ou de d'Alembert pour une onde unidimensionnelle

Exemple

### Loi de Hooke

$$\sigma = E\varepsilon$$

- $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$  est l'allongement relatif
- $\sigma = \frac{f}{S}$  est la contrainte normale
- $\sigma \propto \varepsilon$  dans le cas d'une déformation élastique
- $E$  est le module d'Young, en Pa
- $f = \frac{ES}{l_0} \Delta l \leftrightarrow f = k \Delta l$

$$\vec{f} = -\frac{ES}{l_0} (l - l_0) \vec{u}_{ext}$$

- Sous forme vectorielle

Théorème

### Modèle cristallin

$$K = \frac{S}{a^2} k_c$$

- $K$  est la raideur équivalente de toutes les chaînes
- Il y a  $\frac{l_0}{a}$  ressorts sur chacune des  $\frac{S}{a^2}$  chaînes
- $\Rightarrow k_c = \frac{ka}{l_0}$

$$E = \frac{l_0 K}{S} = \frac{L}{a}$$

⚠ Loi de Hooke

Exemple

### Établir l'équation d'onde

- On se place à l'échelle infinitésimale
- On détermine la force exercée par la partie précédente sur celle considérée
- PFD

Méthode

## 2 Ondes progressives

## Ondes planes

DEF: Onde pour laquelle les surfaces d'ondes sont des plans parallèles

- On peut alors écrire  $y$  en fonction d'une seule coordonnée cartésienne

## Équation d'onde ou de d'Alembert pour une onde unidimensionnelle

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

–  $c$  est homogène à une vitesse

$$y(x,t) = \frac{1}{2}(g(x+ct) + g(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(z) dz$$

- Pour  $g \in C^2$  et  $h \in C^1$  la solution est unique
- $g$  et  $h$  sont positions et vitesses initiales

- La solution en  $x - ct$  translate sans se déformer dans le sens des  $x$  croissants  $\Rightarrow$  Onde progressive  $\nearrow$
- La solution en  $x + ct$  translate sans se déformer dans le sens des  $x$  décroissants  $\Rightarrow$  Onde régressive  $\Delta$

$$y(x,t) = f(x-ct) - f(x+ct)$$

- Forme la plus générale : Progressive + Régressive
- On peut aussi utiliser *Pour les limites*  $i(t \pm \frac{x}{c})$

## Déterminer les grandeurs couplées



Le produit est une puissance

- Tension + Intensité
- Force + Vitesse
- Vitesse de rotation + Moments
- Pression + Débit

– Signal dans le cas général *Progressif + Réflexif*

– Passage en complexe

– Injection du signal dans l'expression des grandeurs couplées

$$\mathbb{Q} \quad \frac{\partial f\left(t - \frac{x}{c}\right)}{\partial t} = \frac{\partial f(\xi)}{\partial t} = f'(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

## Impédance

$\Delta$  N'est définie que pour les ondes progressives

DEF: L'impédance est le rapport de la grandeur couplée intensive sur la grandeur dont la dérivée temporelle est une grandeur extensive

- L'origine de la propagation est associée à : Inertie  $Résistance$  + Raideur  $Rappel$ , les deux paramètres
- L'impédance d'une onde régressive est  $-Z_c$

## Déterminer $Z_c$

- Expression du signal sans reflexion
- Expression des grandeurs couplées
- Expression de  $Z_c = \frac{Cause}{Consequence}$

## Onde plane progressive sinusoidale

- L'équation d'onde est linéaire

⇒ On priviliege les solutions sinusoïdales qui permettent de reproduire n'importe quel signal

DEF: On appelle onde plane progressive sinusoïdale *harmonique* toute onde d'expression

$$y(x, t) = y_0 \cos \left( \omega \left( t \pm \frac{x}{c} \right) - \varphi_0 \right)$$

- $= f(t \pm \frac{x}{c}) \Rightarrow$  Est bien solution
- $y_0$  est l'amplitude maximale *Amplitude*
- $\omega$  est la pulsation temporelle de l'onde
- $\varphi_0$  est le retard de phase à l'origine  $x$  et  $t$
- $\omega \left( t \pm \frac{x}{c} \right) - \varphi_0$  est appelé phase de l'onde

$$y(M, t) = y_0 \cos \left( \omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} \right)$$

- Expression intrinsèque *Ne dépend pas des coordonnées*
- En choisissant l'origine des temps on élimine  $\varphi_0$

DEF: On appelle relation de dispersion toute relation qui lie la périodicité temporelle  $\omega$  à la périodicité spatiale  $k$

- Dans le cas d'une propagation libre décrite par l'équation d'onde

$$k = \frac{\omega}{c}$$

- △ Seulement dans le cas d'une propagation libre
- Espace homogène et isotrope
- Sans obstacle

- Une onde sinusoïdale présente une périodicité spatiale et temporelle

	Temporelle	Spatiale
Période	$T = \frac{2\pi}{\omega}$ en s	$\lambda = \frac{2\pi}{k}$ en m
Pulsation	$\omega$ en rad.s <sup>-1</sup>	$k$ en rad.m <sup>-1</sup>
Fréquence	$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ en Hz	$\sigma = \frac{1}{\lambda} = \frac{k}{2\pi}$ en m <sup>-1</sup>

DEF: Au signal  $y(x, t) = \cos(\omega t - kx - \varphi_0)$  on associe

$$\underline{y}(x, t) = y_0 e^{i(\omega t - kx - \varphi_0)} = \underline{y}_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

- $\underline{y}(x, t)$  est appelée représentation complexe du signal
- $\underline{y}_0 = y_0 e^{-i\varphi_0}$  est l'amplitude complexe
- $\underline{y}(x, t) = \Re(\underline{y}(x, t))$
- △ Uniquement opération linéaires  $_{d, f, \times \lambda} : \cancel{x}$

Définition

### 3 Propagation en milieu limité

Propriétés

Afin de propager une onde purement progressive dans un milieu, il est nécessaire que celui-ci soit :

- Illimité
- Fermé sur son impédance caractéristique

 Pour exprimer les conditions aux limites il faut s'intéresser aux deux grandeurs couplées qui décrivent la propagation

Propriétés

- La donnée des conditions aux limites *début et bout* donne une solution de l'équation d'onde
- Elle est unique en donnant les conditions initiales

Définition

#### Onde stationnaire

**DEF:** Une onde stationnaire est une onde telle que la fonction d'onde  $y(x, t) = f(x)g(t)$

- Une onde stationnaire ne se propage pas

- On injecte la solution  $y(x, t) = f(x)g(x)$  dans l'équation d'onde  $\Rightarrow g(t)f''(x) = \frac{1}{c^2}f(x)g''(t)$
- En considérant  $x_0 \neq 0$  fixé et  $\omega^2 = -c^2 \frac{f''(x_0)}{f(x_0)} > 0$  on est ramené à une équation type oscillateur en  $g$
- En partant de l'expression de  $\omega^2$  on a la même chose en  $f$
- En les points d'annulation on prolonge par continuité

- Les solutions en ondes stationnaires de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle sont :

$$y(x, t) = y_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi)$$

- Ou encore  $y(x, t) = (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))(C \cos(kx) + D \sin(kx))$

- Conditions aux limites

- $y(0, t) = 0 \Rightarrow \cos(\psi) = 0$  On choisit  $\psi = -\frac{\pi}{2}$
- $y(L, t) = 0 \Rightarrow \sin(kL) = 0 \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L}$

$$y_n(x, t) = y_{0n} \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

- Cette solution est appelée **mode propre** de vibration de la corde
- Les modes propres forment une base orthonormée des solutions

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_{0n} \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

- De même

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_{0n} \sin(k_n x) (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t))$$

**💡 Si une des grandeurs couplées s'annule aux limites  $\Rightarrow$  Onde stationnaire**

- On appelle noeuds *ventres* de vibrations les points où l'elongation est toujours nulle *maximale*
- Les noeuds *ventres* consécutifs sont séparés de  $\frac{\lambda_n}{2}$
- Un mode est de rang d'autant plus élevé qu'il contient plus de noeuds

Définition

### Corde de Melde

Conditions aux limites

- $y(x = 0, t) = a \sin(\omega t)$
- $y(x = L, t) = 0$

appliquant les conditions aux limites on obtient une solution de l'équation

Une solution est de la forme

$$y(x, t) = \sin(\omega t) (A \cos(kx) + B \sin(kx))$$

En

Exemple

**💡 Souvent pour exprimer les conditions aux limites on applique le PFD à la terminaison ou la jonction**

## 4 Transport d'énergie par onde

### Cas du câble coaxial

Sur une portion entre  $x$  et  $x + dx$  on exprime l'énergie contenue

- $\delta E_{mag} = \frac{1}{2} \Lambda dx i^2(x, t)$
- $\delta E_{elec} = \frac{1}{2} \Gamma dx u^2(x + dx, t) \simeq \frac{1}{2} \Gamma dx u^2(x, t)$
- $\delta E_{em} = \delta E_{mag} + \delta E_{elec} = \frac{1}{2} \Lambda dx i^2 + \frac{1}{2} \Gamma dx u^2$

Exemple

On exprime la puissance transférée de la droite vers la gauche à  $x$  :  $\mathcal{P}(x, t) = u(x, t) \times i(x, t)$

- Bilan énergétique :  $d(\delta E_{em}) = \mathcal{P}(x, t)dt - \mathcal{P}(x + dx, t)dt$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \Lambda i^2 + \frac{1}{2} \Gamma u^2 \right) + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} = 0$$

– Équation locale de conservation d'énergie

Exemple

### Établir l'équation locale de conservation de l'énergie

1. – Exprimer les énergies mises en jeu puis l'énergie totale par unité de longueur *linéique*  
– Exprimer la puissance transférée de gauche à droite *selon  $\vec{u}_x$*   
– Bilan local d'énergie :  $\sum E = \mathcal{P}(x, t)dt - \mathcal{P}(x + dx, t)dt_{\mathcal{P}} = \prod$  *Grandeurs couplées*
2. – À partir des équations aux dérivées partielles coupler multiplier chaque expression par la grandeur couplée puis sommer  
⚠ Il faut disposer des équations au dérivées partielles

Méthode

Propriétés

- En moyenne temporelle, une onde stationnaire ne transporte pas d'énergie

⚠ On détermine la valeur moyenne de la puissance à partir de l'expression du signal d'une onde stationnaire

💡  $\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (G_{c1} G_{c2}^*)$

## 5 Réflexion et transmission

### Câble coaxial

Comme  $Z \neq Z_c$ , une seule onde progressive ne peut se propager le long du câble

On cherche la solution sous la forme de la somme d'une onde progressive et d'une onde régressive

$$\begin{aligned} \underline{i}(x, t) &= I_0 \left( e^{j(\omega t - kx)} + \underline{r} e^{j(\omega t + kx)} \right) \\ \underline{u}(x, t) &= Z_c I_0 \left( e^{j(\omega t - kx)} - \underline{r} e^{j(\omega t + kx)} \right) \end{aligned}$$

- $\underline{r}$  Même  $\omega$  pour incident et réfléchie ⇒ Signe
- $\underline{r}$  Grandeurs couplées non indépendantes
- $\underline{r}$  ⇒ On exprime  $\underline{r}$  avec  $Z_c$

est le coefficient de réflexion en amplitude pour le courant

⚠ Changement de signe pour l'amplitude de l'onde régressive

Exemple

La résolution permet d'exprimer les inconnues  $I_0$  et  $\underline{r}$

Le coefficient de réflexion s'annule pour  $R = Z_c \Rightarrow$  Plus de réflexion

⚠

Si le système n'est pas infini ou fermé sur  $Z_c$  il y a réflexion et transmission

Remarque

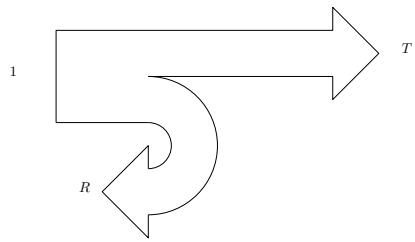
### Coefficients de réflexion

- $r \neq 0$  dès qu'il ya une discontinuité d'impédance
- $\underline{r}$  peut être négatif ⇒ On écrit dans ce cas  $\underline{r} = |r| e^{i\pi}$

### Coefficient de réflexion

$$\begin{aligned} - R &= \left| \frac{\mathcal{P}_r(x=0)}{\mathcal{P}_i(x=0)} \right| = \left( \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 = C_Z^2 \\ - R + T &= 1 \end{aligned}$$

⚠ Ne pas confondre  $r_t$  et  $R_T$



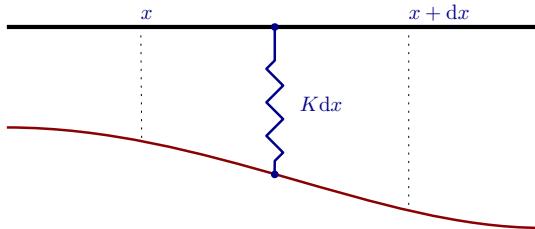
### Étude d'un système couplé

⚠ Les parties sont considérées indépendamment

- On écrit les signaux pour chaque partie *A l'aide de r et t*
- Expression des grandeurs couplées en injectant les signaux dans l'expression
- Conditions aux limites

### 1 Introduction

#### Caténaire de TGV



- Câble sans raideur :  $\|\vec{T}(x, t)\| = T_0 + T_1(x, t)$
- Poids négligé
- Force de rappel :  $d\vec{f} = -Kdxy(x, t)\vec{e}_y$
- Force de frottement :  $d\vec{f}_v = -\beta dx \frac{\partial y}{\partial t} \vec{e}_y$

On applique la 2<sup>e</sup> loi de Newton à un tronçon au repos entre  $x$  et  $x + dx$

- $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) - Kdxy(x, t) - \beta dx \frac{\partial y}{\partial t}(x, t)$
- On pose :  $\frac{K}{\mu_0} = \Omega^2$ ,  $\frac{\beta}{\mu_0} = \frac{1}{\tau}$  et  $\frac{T_0}{\mu_0} = c^2$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\Omega^2}{c^2} y + \frac{1}{\tau c^2} \frac{\partial y}{\partial t}$$

– Ce n'est pas l'équation de d'Alembert

- "We will now Fourier transform the expression"  $\Rightarrow$  Chercher les solutions en complexe  $Ev des solutions$

$$\underline{y}(x, t) = y_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$$

–  $y_0 \in \mathbb{R}$  car on choisit l'origine des temps

$$\underline{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\Omega^2}{c^2} + \frac{j\omega}{\tau c^2} = 0$$

– En supposant  $\underline{y} \neq 0$  *Solution évidente*  
– Relation de dispersion

- On pose  $\underline{k} = k' + jk''$  *Résolution théoriquement possible* :  $\underline{y}(x, t) = y_0 e^{-k''x} e^{j(\omega t - k'x)}$

$$y(x, t) = y_0 e^{-k''x} \cos(\omega t - k'x)$$

–  $y_0 e^{-k''x}$  est l'amplitude  
–  $\omega t - k'x$  est la phase  
– Identification :  $v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \frac{\omega}{\text{Re}(\underline{k})}$

Exemple

DEF: On appelle relation de dispersion une relation liant  $\underline{k}$  à  $\omega$  et d'autres paramètres

DEF: La vitesse de phase  $v_\varphi$  est la vitesse qu'un observateur doit avoir pour observer une phase constante

$$v_\varphi = \frac{\omega}{\text{Re}(\underline{k})(\omega)}$$

–  $v_\varphi$  est la vitesse de phase

- Si  $v_\varphi$  dépend explicitement de  $\omega$  ou de  $\text{Re}(\underline{k})$ , on dit qu'il ya dispersion

DEF: Absorption en amplification

$$y(x, t) = y_0 e^{-\text{Im}(\underline{k})x} \cos(\omega t - \text{Re}(\underline{k})x)$$

–  $\delta = \frac{1}{|k|}$  est une grandeur caractéristique  
– L'intensité de l'onde est proportionnelle à  $\langle y^2(x, t) \rangle$

Définition

## 2 Propagation dans un milieu dispersif

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\Omega^2}{c^2} y$$

– Équation de propagation de Klein-Gordon

### Relation de dispersion

- On recherche la solution sous forme d'une onde progressive :  $\underline{y}(x, t) = y_0 \exp(j(\omega t - kx))$
- $\Rightarrow (-jk)^2 \underline{y} = \frac{1}{c^2} (j\omega)^2 \underline{y} + \frac{\Omega^2}{c^2} \underline{y}$
- Comme  $\underline{y} \neq 0$  il vient  $k^2 = \frac{\omega^2 - \Omega^2}{c^2}$  **Relation de dispersion de Klein Gordon**
  - $\omega > \Omega$  : Deux solutions réelles *Deux sens de propagation* :  $k = \pm \frac{\sqrt{\omega^2 - \Omega^2}}{c}$   $\Rightarrow v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \frac{\omega c}{\sqrt{\omega^2 - \Omega^2}}$  Cas + Chaque signal sinusoïdal se propage à sa propre vitesse et  $\text{Im}(k) = 0 \Rightarrow$  Pas d'atténuation
  - $\omega < \Omega$  : Deux solutions imaginaires pures :  $k = \pm j \frac{\sqrt{\omega^2 - \Omega^2}}{c} = \pm \frac{1}{\delta}$   $\Rightarrow y(x, t) = y_0 e^{\mp \frac{x}{\delta}} \cos(\omega t)$   
Onde stationnaire et amortie  $\Rightarrow$  **Onde évanescante** -  $\Delta$  On ne pas définir  $v_\varphi$

Démo

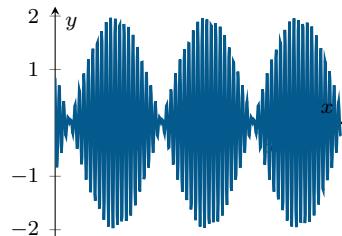
$\Rightarrow$  L'onde se propage  $\Leftrightarrow |\text{Re}(|k|)| > 0$

Un seul signal n'a pas d'existence réelle *Extension spatiale et temporelle infinie*  
 $\Rightarrow$  Un signal est représenté par une superposition d'ondes sinusoïdales

### Propagation de deux ondes de fréquence proche

- $\begin{cases} y_1(x, t) = y_0 \cos(\omega_1 t - k_1 x) \\ y_2(x, t) = y_0 \cos(\omega_2 t - k_2 x) \end{cases} \quad \begin{cases} \omega_1 = \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \\ \omega_2 = \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} k_1 = k_0 - \frac{\Delta k}{2} \\ k_2 = k_0 + \frac{\Delta k}{2} \end{cases} \quad \frac{\Delta k}{\Delta\omega} = \left( \frac{\partial k}{\partial \omega} \right)_{k_0}$
- On suppose la relation de dispersion  $k = f(\omega)$  suffisamment régulière pour que  $k_1 - k_2 = O(\omega_1 - \omega_2)$

$$\begin{aligned} y(x, t) &= y_1(x, t) + y_2(x, t) \\ &= 2y_0 \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{k_1 + k_2}{2}x\right) \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t - \frac{k_2 - k_1}{2}x\right) \\ &= 2y_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} \left(t - \frac{x}{\left(\frac{\partial \omega}{\partial k}\right)_{k_0}}\right)\right) \cos\left(\omega \left(t - \frac{x}{k_0}\right)\right) \end{aligned}$$



On observe :

- Une enveloppe :  $\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right)$  : translatent à  $v_g = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k}\right)_{k_0}$
- Les sinusoïdes :  $\cos(\omega_0 t - k_0 x)$  : translatent à  $v_\varphi = \frac{\omega_0}{k_0}$

Démo

Propriétés

- La vitesse de **phase** est la vitesse propagation de signal sinusoïdal  $\omega_0, k_0$   
Il n'est pas mesurable expérimentalement
- La vitesse de **groupe** représente la vitesse de déplacement du signal réel
- $\Delta$  La vitesse de groupe peut ne pas être définie si  $\text{Im}(k) \neq 0$  et dépend de  $\omega$

## Paquets d'ondes quasi monochromatiques

- On superpose une infinité d'ondes sinusoïdales dont les vecteurs d'ondes suivent une distribution rectangulaire

$$A = \int y(k) dk \Rightarrow y(x, t) = \int_{k_0 - \frac{\Delta k}{2}}^{k_0 + \frac{\Delta k}{2}} y_0 \cos(\omega(k)t - kx) \frac{dk}{\Delta k}$$

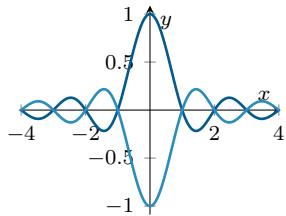
$$\omega(k) = \omega_0 + (k - k_0) \left( \frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_{k_0} + o((k - k_0)^2) \text{ - On pose } \delta k = k - k_0$$

$$\underline{y}(x, t) = \int_{k_0 - \frac{\Delta k}{2}}^{k_0 + \frac{\Delta k}{2}} y_0 \exp \left( j \left( \omega_0 t + \delta k \left( \frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_{k_0} - kx \right) \right) \frac{dk}{\Delta k}$$

- Passage en complexes :

$$= y_0 \exp(j(\omega_0 t - k_0 x)) \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta k}{2}(x - v_g t)\right)$$

$$y(x, t) = y_0 \cos(\omega_0 t - k_0 x) \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta k}{2}(x - v_g t)\right)$$



On observe :

- Enveloppe :  $\operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta k}{2}(x - v_g t)\right)$  : translatent à  $v_g = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k}\right)_{k_0}$
- Les sinusoïdes :  $\triangle$  Aucun sens ici Infinités

- On définit la largeur  $\Delta x$  du paquet d'ondes arbitrairement comme l'intervalle du lobe principal

$$\Delta x \Delta k \simeq 1$$

En considérant l'annulation de l'enveloppe

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_g} \Rightarrow \Delta t \Delta \omega \simeq 1_{\Delta \omega} = v_g \Delta k$$

- Termes supplémentaires du DL :  $\omega(k) = \omega_0 + (k - k_0) \left( \frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_{k_0} + \sum_n \frac{1}{n!} (\delta k)^n \left( \frac{\partial^n \omega}{\partial k^n} \right)_{k_0}$

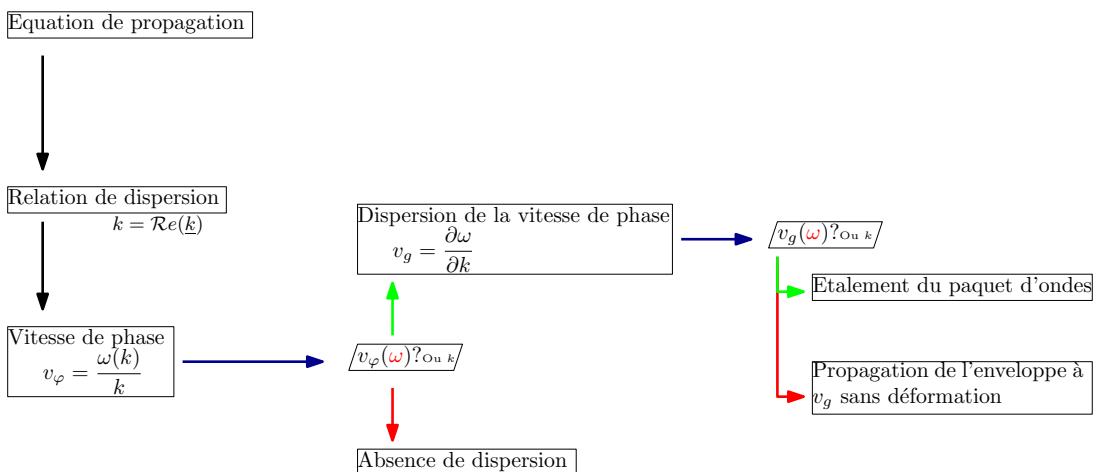
$$Env(x, t) = \int_{-\frac{\Delta k}{2}}^{\frac{\Delta k}{2}} e^{j(\delta k(v_g t - x))} e^{j \left( \sum_n \frac{(\delta k)^n}{n!} \left( \frac{\partial^n \omega}{\partial k^n} \right)_{k_0} \right) t} d(\delta k)$$

$v_g$  dépend de  $k$  ou de  $\omega \Rightarrow$  L'enveloppe dépend du temps et se déforme au cours de son déplacement  
Il y a **dispersion de groupe**

$$\Delta v_g \simeq \frac{\partial v_g}{\partial t}$$

- On peut en déduire que  $\Delta x(t) = \Delta x_{init} + \Delta v_g t$

### Raisonnez à partir de l'équation d'onde



## 1 Description de la diffusion à l'échelle microscopique

Démo

- Probabilité de présence à  $t$  entre  $x$  et  $x + dx$  :  $dP = p(x, t)dx$
- $P(x, t + dt) = dP(x, t) \left(1 - \frac{dt}{\tau}\right) + dP(x - dx, t) \frac{dt}{2\tau} + dP(x + dx, t)$  *x sans saut & x + dx ou x - dx et saut*
- DL  $\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{(dx)^2}{\tau} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$   $\rightarrow dx$  est une longueur caractéristique de l'échelle moléculaire :  $l_m$

Démo

- On pose  $u = \frac{x}{2\sqrt{DT}} \rightarrow p(x, t) = f(u)$
- On injecte dans l'équation  $\Rightarrow f''(u) + 2uf'(u) = 0 \Rightarrow f'(u) = Ae^{-u^2} \Rightarrow f(u) = A \int_0^u e^{-v^2} dv + B$

Propriétés

- On peut montrer que  $p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} \exp\left(\frac{-x^2}{4Dt}\right)$  est solution
- Le calcul des espérances  $\int xp(x, t)dx$  donne :  $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{2\sqrt{2}\sqrt{DT}}$

## 2 Description de la diffusion à l'échelle macroscopique

Définition

### Flux de particules

- DEF: Le flux de particules est égal au nombre de particules qui traverse la surface orientée  $S$  par unité de temps dans le sens de la normal  $\vec{n}$
- C'est donc un débit en  $\text{particules.s}^{-1}$
  - △ Le flux de particules est une grandeur algébrique

Définition

### Vecteur densité de particules

$$\delta^2 N = \vec{j}(P, t) \cdot \vec{n} dS dt$$

- $\delta^2 N$  est le nombre de particules traversant  $dS$  en  $dt$
- $\vec{j}(P, t)$  est le vecteur densité de particules en  $\text{pt.m}^{-2}.s^{-1}$
- L'orientation de  $\vec{j}$  renseigne sur le sens effectif de transfert  
Sa norme est lié au flux  $Débit$  de particules

$$d\phi = \frac{\delta N^2}{dt} = \vec{j}(P, t) \cdot \vec{n} dS$$

- $d\phi$  est le débit élémentaire à travers  $dS$

$$\phi = \iint_S d\phi = \iint_{P \in S} \vec{j}(P, t) \cdot \vec{n} dS$$

- $\phi$  est le flux global à travers la surface

## Cas d'une surface fermée

DEF: Une surface est fermée si il est nécessaire de la traverser pour arriver de l'autre côté

△ Par convention la normale est orienté vers l'extérieur de la surface fermée

$$\phi_s = \iint_{P \in S} \vec{j}(P, t) \cdot \vec{n}_{ext} dS$$

–  $\phi_s$  est le flux sortant de la surface

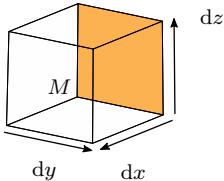
Définition

En supposant la répartition uniforme sur la surface

Surface	Plan	Cylindre	Sphère
$\phi =$	$j(x, t)S$	$j(r, t)2\pi rh$	$j(r, t)4\pi r^2$

Exemple

## Opérateur divergence



- $\vec{j}(M, t) = j_x(x, y, z, t)\vec{e}_x + j_y(x, y, z, t)\vec{e}_y + j_z(x, y, z, t)\vec{e}_z$
- $d\phi_s = \sum_{faces} \vec{j} \cdot \vec{n} dS = (j_x(x+dx, y, z, t) - j_x(x, y, z, t))dydz + \dots$
- $d\phi_s = \left( \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \right) dx dy dz$

$$\text{div}(\vec{j}) = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}$$

- $\text{div}(\vec{j})$  est l'opérateur différentiel divergent
- C'est un opérateur linéaire de  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
- C'est un flux par unité de volume :  $\text{pt.m}^{-3}.\text{s}^{-1}$
- C'est une grandeur locale qui renseigne sur la tendance d'un champ de vecteur à converger en  $M$

$$d\phi_s = \text{div}(\vec{j}) dV$$

Démonstration

## Théorème de Green-Ostrogradski

$$d\phi_s = \iiint_{M \in V} \text{div} \vec{j}(M, t) dV = \iint_{P \in S} \vec{j}(P, t) \cdot \vec{n}_{ext} dS$$

Théorème

## Bilan local de particules

- Exprimer  $N(t)$  et sa variation  $N(t + dt) - N(t)$
- Exprimer les termes d'échange en définissant le flux  $\phi(t)$  de particules
- Exprimer les termes de création et de destruction
- Bilan : "Variation temporelle = Échange + Création"

Méthode

## Bilan de particules à une dimension

- $\delta N(x, t) = n(x, t)Sdx_n$  est la densité de particules
- $d(\delta N) = \delta N(t + dt) - \delta N(t) = \frac{\partial n(x, t)}{\partial t} Sdx dt$
- $\delta N_e = \phi(x, t)dt - \phi(x + dx)dt = -\frac{\partial \phi}{\partial x} dx dt$
- $\delta N_c = \sigma(x, t)Sdx dt$  est le nombre de particules créées par unité de temps et de volume

Démonstration

- $d(\delta N) = \delta N_e + \delta N_c \Rightarrow S dx dt \left( \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{S} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \sigma \right) = 0$   
Or  $\phi = S j_x(x, t)$  Calcul de flux

$$\frac{\partial n}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}(\vec{j})(x, t) = \sigma(x, t)$$

- Si  $\sigma(x, t) = 0$  le flux se conserve  
 $\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{j}) = 0$  Équation locale de conservation de la matière

Faire intervenir  $\phi$  plutôt que  $jS$

### Régime stationnaire

- On dit qu'on est en régime stationnaire lorsque la densité de particules  $n(M, t)$  et le vecteur densité de courant de particules  $\vec{j}(M, t)$  ne varient pas dans le temps en tout point de  $M$
- Conséquences :  $d(\delta N) = 0 \Rightarrow \triangleleft$  Inutile de l'exprimer

$$\operatorname{div}(\vec{j})(M, t) = 0$$

- $\vec{j}(M, t)$  est à flux conservatif

$$\triangleleft \quad \iiint_{M \in V} \operatorname{div}(\vec{j})(M, t) d\tau = \iint_{P \in S} \vec{j}(P, t) \cdot \overrightarrow{n_{ext}} dS = 0$$



Régime stationnaire  $\Rightarrow$  Flux conservatif  $\Rightarrow$  Calculs de  $\vec{j}$  simplifiés

## 3 Équation de la diffusion

La diffusion est souvent en compétition avec les phénomènes de convection *Bien plus importants*

A l'équilibre thermodynamique  $n(M, t)$  est uniforme et stationnaire

Le système réagit aux disparités locales en transportant les particules pour rétablir l'uniformité

On suppose que cette réponse est linéaire  $\text{Excitation} \leftrightarrow \text{Réponse par une équation différentielle}$  :

$$\begin{cases} \text{Excitation : } \overrightarrow{\operatorname{grad}} n \\ \text{Réponse : } \vec{j}(M, t) \end{cases}$$

### Loi empirique de Fick

$$\vec{j}(M, t) = -D \overrightarrow{\operatorname{grad}} n(M, t)$$

- $D$ , le coefficient de diffusion est toujours en  $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
- On suppose la réponse instantanée
- Signe : Loi de modération  $\vec{j}(M, t)$  rétablit l'équilibre

### Coefficient de diffusion

## Remarque

- Par identification avec l'approche statistique :  $D \simeq \frac{1}{3} u^* l$
- ⚠ On définit le nombre de particules dans un tronçon  $[x - l, x + l]$  comme celle de deux cases  $\rightarrow$  DL

Gaz Parfait	$10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Soluté dans l'eau liquide	$10^{-9} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Impureté dans un solide	$10^{-20} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

## Théorème

Equation de la diffusion Cas unidimensionnel.

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial n^2}{\partial x^2}$$

⚠  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} = 0_{\text{Bilan}} \\ j_x = -D \frac{\partial n}{\partial x} \text{ Fick} \end{array} \right.$

## Théorème

Équation de la diffusion

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n$$

- $\Delta n = \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial z^2}$  le laplacien
  - ⚡ Valable uniquement en cartésien
  - Équation linéaire Superposition & Fourier
  - Équation invariante par renversement de temps Irréversibilité
- ⚠  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{j}) = 0_{\text{Bilan}} \\ \vec{j} = -D \overrightarrow{\operatorname{grad}} n_{\text{Fick}} \end{array} \right.$

## Remarque

Unicité de la solution de l'équation de diffusion

En fixant toutes les conditions et aux limites, la solution du problème de Cauchy est **unique**

Différentes conditions aux limites

- ”
- Dirichlet :  $n(M, t)$  fixé en tout point de la frontière
  - Neumann :  $\vec{j}(M, t) \cdot \vec{n}$  fixé en tout point de la frontière

Frontière imperméable :  $\vec{j}(M, t) \cdot \vec{n} = 0$

## Propriétés

ARQS

## CONDITION D'ARQS

$$\tau \gg \frac{L^2}{D}$$

- Dans l'ARQS la dépendance spatiale de  $n(x, t)$  est la même qu'en régime stationnaire  
 $\Rightarrow \Delta n = 0_{\text{Laplacien}}$

- $L$  est une longueur caractéristique
- $\tau$  est un temps caractéristique de  $n_1$  et  $n_2$

### Établir l'équation différentielle

- Calcul de flux
- Bilan de particules
- Combinaison avec la loi de Fick  $\Rightarrow$  Equation différentielle

### Conservation du flux en régime permanent

- Calcul du flux
- Loi de Fick  $\Rightarrow$  Equation différentielle  $\Rightarrow$  Intégration



Ne pas décomposer le Laplacien  $\Rightarrow$  Intégrer étape par étape

## 1 Différents modes de transferts thermiques

- **Conduction**
  - Transfert dans un milieu matériel thermiquement inhomogène
  - S'effectue de proche en proche au gré des collisions *D'agitation thermique différente*
  - S'effectue dans le sens opposé au gradient de température
- **Convection**
  - Transport d'énergie lié à un transfert de masse observable à l'échelle macroscopique
- **Rayonnement**
  - Transport d'énergie associé à la propagation d'une onde électromagnétique
  - Ne nécessite pas de support matériel

## 2 Bilan d'énergie interne

$$\delta^2 Q = d\phi_{th} dt$$

–  $d\phi_{th}$ , le flux thermique à travers  $dS$  orientée selon  $\vec{n}$  en W

–  $\delta^2 Q$  le transfert thermique en J

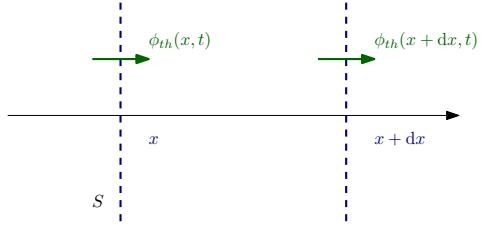
$$d\phi_{th} = \vec{j}_{th}(P, t) \vec{n} dS$$

–  $\vec{j}_{th}$  est le vecteur densité de courant d'énergie *Algébrique*

– D'où  $\phi_{th} = \iint_{P \in S} \vec{j}_{th}(P, t) \vec{n} dS$

### Bilan d'énergie unidimensionnel

On considère une tranche matérielle entre  $x$  et  $x + dx$



- Expression de la variation d'énergie interne

—  $\delta U(t) = u(x, t) S dx \rho$

—  $\delta U(t + dt) = u(x, t + dt) S dx \rho$

—  $d(\delta U) = dt \frac{\partial u}{\partial t} S dx \rho$

—  $c_V = \frac{\partial u}{\partial T} \Rightarrow d(\delta U) = c_V \frac{\partial T}{\partial t} \rho S dx dt$

- Calcul du flux :  $\phi_{th}(x, t) = \iint_{P \in S} \vec{j}_{th}(P, t) \vec{e}_x dS = j_{thx}(x, t) S$

- Expression du transfert thermique reçu :  $\delta Q = \phi(x, t) dt - \phi(x + dx, t) dt = -\frac{\partial \phi_{th}}{\partial x} dx dt \triangleq$  Garder  $\phi_{th}$

- Expression de l'énergie interne produite :  $\delta U_c = p_{vol}(x, t) S dx dt$

- Bilan  $d(\delta U) = \delta Q + \delta W + \delta U_c$

$\rho c_V \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) = -\frac{1}{S} \frac{\partial \phi_{th}}{\partial x} + p_{vol}(x, t)$

Puis remplacer  $\phi_{th}$  par sa valeur

## Bilan sur un volume Indéformable fixe délimité par une surface fermée

- Expression de la variation d'énergie interne

$$-\delta U(t) = \iiint_{M \in V} u(M, t) \rho d\tau$$

$$-\delta U(t + dt) = \iiint_{M \in V} u(M, t + dt) \rho d\tau$$

$$-d(\delta U) = dt \iiint_{M \in V} \frac{\partial U}{\partial t} \rho d\tau = dt \iiint_{M \in V} \rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} d\tau$$

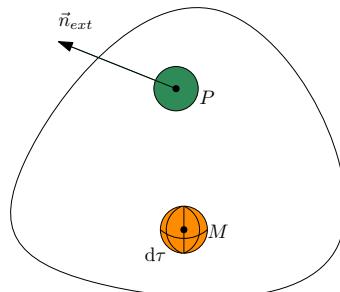
- Calcul du flux :  $\phi_{th} = \iint_{P \in S} \vec{j}_{th}(P, t) \cdot \vec{n}_{ext} dS$

- Expression du transfert thermique reçu :

$$\delta Q = -\phi_{th} dt = -dt \iint_{P \in S} \vec{j}_{th} \cdot \vec{n}_{ext} dS = -dt \iiint_{M \in V} \operatorname{div} \vec{j}_{th}(P, t) d\tau G.O$$

- Expression de l'énergie interne produite :  $\delta U_c = dt \iiint_{M \in V} p_{vol}(M, t) d\tau$

- Bilan  $d(\delta U) = \delta Q + \delta W + \delta U_c$



Démo

## 3 Équation de la diffusion

### Loi de Fourier

Théorème

$$\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\operatorname{grad}} T$$

- Analogue à la loi de Fick
- $\lambda$  la conductivité thermique en  $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$

Cuivre	$\lambda = 390 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
Verre	$\lambda = 0.8 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
Eau liquide	$\lambda = 0.6 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
Air	$\lambda = 2 \times 10^{-2} \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$

### Équation de la chaleur

Théorème

$$\frac{\partial T}{\partial t}(M, t) = D_{th} \Delta T(M, t)$$

- $D_{th} = \frac{\lambda}{\rho C_V}$
- À une dimension  $\frac{\partial T}{\partial t}(M, t) = D_{th} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t)$
- Équation linéaire  $\Rightarrow$  Superposition et Décomposition de Fourier
- Invariante par renversement du temps Phénomène irréversible
- Conditions initiales et aux limites  $\Rightarrow$  Solution unique

$$\Delta \left\{ \begin{array}{l} \rho c_V \frac{\partial T}{\partial t}(M, t) + \operatorname{div} \vec{j}_{th}(M, t) = p_{vol}(M, t) = 0 \\ \vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\operatorname{grad}} T(M, t) \end{array} \right. \Rightarrow \rho c_V \frac{\partial T}{\partial t}(M, t) = \lambda \operatorname{div} (\overrightarrow{\operatorname{grad}} T(M, t)) = \lambda \Delta T(M, t)$$

Propriétés

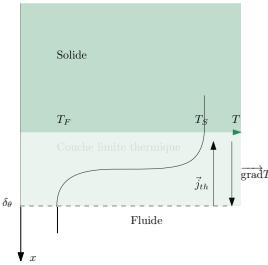
### Conditions aux limites

- Continuité du champ de température
- Continuité du flux thermique
  - Milieu 2 isolant  $\lambda_2 \rightarrow 0 \Rightarrow$  Interface adiabatique  $\Rightarrow \vec{j}_{th}(P, t) \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = 0$
  - Milieu 2 conducteur parfait  $\lambda_2 \rightarrow +\infty \Rightarrow T_2$  uniforme  $\Rightarrow T_1(P, t) = T_{2P}$  sur la frontière

## Flux conducto-convection à une paroi

- Dans le solide, l'énergie est transférée par conduction
- Dans le fluide les transports conductifs et convectifs sont couplés
- À la frontière il existe une mince couche de fluide : la couche limite thermique d'épaisseur  $\delta_\theta$  où la température varie rapidement

$$\begin{aligned} - \vec{j}_{th} &= -\lambda_F \frac{T_F - T_S}{\delta_\theta} \vec{e}_x \text{ Approché} \\ - \phi_{th} &= -\frac{\lambda_F S}{\delta_\theta} (T_F - T_S) \end{aligned}$$



## LOI PHÉNOMÉNOLOGIQUE DE NEWTON

$$\phi_{th} = kS(T_S - T_F)$$

- $k$  est le coefficient d'échange en  $\text{W}^{-2}\text{m.K}^{-1}$
- 💡 Utiliser le cas "Solide plus chaud" pour trouver le signe

- On peut alors écrire la continuité du flux à l'interface

## Solution dans le cas de l'ARQS

- $\operatorname{div} \vec{j}_{th} = 0 \Leftrightarrow \vec{j}_{th}$  est à flux conservatif

$$\blacksquare \iint_{P \in S} \vec{j}_{th}(P, t) \vec{n}_{ext} dS = 0$$

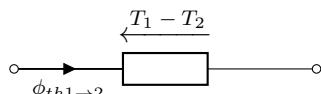
## Bilan entropique local

- Calcul de la variation temporelle de l'entropie sur la tranche
- Calcul de l'entropie échangée par la tranche avec son milieu extérieur
- Expression de l'entropie créée par la tranche Bilan

“ Un état d'équilibre thermodynamique est un état stationnaire où l'entropie créée par unité de temps est nulle dans le système considéré ”

## Notion de résistance thermique

$$R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\phi_{th1 \rightarrow 2}}$$



$$\blacksquare \vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\operatorname{grad}} T \Leftrightarrow \vec{i} = -\gamma \overrightarrow{\operatorname{grad}} V$$

- Série : Même flux
- Parallèle : Même différence de température

### Condition d'ARQS

En régime quasistationnaire, le champ de température garde la même dépendance vis-à-vis des variables spatiales qu'en régime quasistationnaire si :

$$\tau \gg \frac{L^2}{D_{th}}$$

- $\tau$  est le temps d'évolution caractéristique du champ de température
- $L$  est un échelle spatiale caractéristique

Théorème

### Loi du rayonnement de Planck

$$u(\nu) = \frac{8\pi h\nu^2}{c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}$$

- $u(\nu)$  est la densité spectrale d'énergie en  $\text{Jm}^{-3}$
- L'énergie rayonnée dans  $[\nu, \nu + d\nu]$  :  $dE = u(\nu)Vd\nu$

Théorème

### Loi de Stefan-Boltzmann

$$\mathcal{P} = \frac{dE}{dt} = \sigma ST^4$$

- $\mathcal{P}$  est la puissance émise par unité de surface par un corps en équilibre thermodynamique
- $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$  la constante de Stefan Boltzmann

- ⚠
- Nombre moyen de photons par unité de volume :  $dn = \frac{u(\nu)}{h\nu} d\nu$
  - On en déduit le nombre moyen de photons dans la cavité par intégration
  - On en déduit l'énergie moyenne de chaque photon
  - L'énergie traversant l'orifice pendant  $dt$  est donc  $dE = \frac{1}{6} \frac{N}{V} S c dt \langle E \rangle_{\frac{1}{4}}$  en réalité

Théorème

### Loi du déplacement de Wien

$$\lambda_m T = 2,898 \times 10^{-3} \text{ m.K}$$

⚠ On change de variable :  $\lambda = \frac{c}{\nu}$  en conservant l'énergie par unité de volume entre  $\nu$  et  $\nu + d\nu$  et  $\lambda$  et  $\lambda + d\lambda$   
On a donc  $u_\nu |d\nu| = u_\lambda |d\lambda|$

Photosphère	$T = 5800\text{K} \Rightarrow \lambda_m = 500\text{nm}_{\text{Vert}}$
Homme	$T = 37^\circ \Rightarrow \lambda_m = 9.4\mu\text{m}_{\text{IR}}$

“ Bilan radiatif : Premier principe pour établir une relation entre  $\mathcal{P}_{\text{reçue}}$  et  $\mathcal{P}_{\text{émise}}$

## 1 Différentes échelles d'études

Définition

### Échelle microscopique

- Taille des molécules ou atomes
- Distance moyenne :  $\frac{4}{3}\pi\bar{d}^3 n = 1 \Rightarrow \bar{d} \simeq n^{-\frac{1}{3}}$
- Libre parcours moyen :  $\bar{l} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi n a^2}$

Définition

### Échelle macroscopique

Taille du système étudié

Définition

### Échelle mésoscopique

- $l \ll d \ll L$

$$\text{Masse } m = \sum_{i=1}^N m_i$$

$$\text{Vitesse } \vec{v}_{\mathcal{R}}(M, t) = \frac{\vec{p}_{\mathcal{R}}(M, t)}{m} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_{i\mathcal{R}}}{m}$$

DEF: Le volume mésoscopique est appelé particule de fluide et garde une masse constante

- **Approximation des milieux continus** : Possibilité de définir une échelle mésoscopique  
Le milieu est alors qualifié de continu

## 2 Champ de vitesse dans un fluide en écoulement

Définition

### Description eulerienne

- Toutes les grandeurs physiques sont données en un **point fixe** de l'espace
- On s'intéresse alors à la **succession de particules** coïncidentes en un point aux différents instants
- Le champ de vitesse eulerien est noté  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  Les coordonnées et  $t$  sont **indépendantes**

Définition

### Lignes et tubes de courant

DEF: Les lignes de champ sont les lignes du champ de vitesse eulérien

Elles sont tangentes au vecteur vitesse local en chaque point à un instant  $t$

- Mathématiquement on a donc  $d\vec{l} \wedge \vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{0}$

⚠ Trajectoires des particules de fluides  $\neq$  Lignes de courant Sauf si écoulement indépendant de  $t$

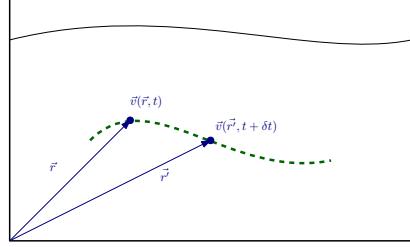
- Deux lignes de courant ne peuvent se croiser qu'en un point où la vitesse est nulle : **point d'arrêt**
- Les lignes de courant ne sont pas invariantes par changement de référentiel

DEF: Les tubes de courant sont l'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé

### Dérivée particulière

- $d\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} dz$
- $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt}$
- $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} v_z$

Démo



### Formule de la dérivation particulière

$$\vec{a}(M, t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$$

- $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$  est l'accélération locale
- $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$  est l'accélération convective *Exploration du champ*
- On note  $\frac{D\vec{v}}{Dt}$

Théorème

- On peut transformer en  $\vec{a}(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{v^2}{2} \right) + (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v})$
- L'accélération convective est un terme non linéaire valable en tout système de coordonnées

⚠

Dans l'écriture de  $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$  toujours garder les vecteurs unitaires pour ne pas se tromper

## 3 Conservation de la masse

### Débit de masse

$$D_m = \iint_{P \in S} \vec{j}_m(P, t) \cdot \vec{n} dS$$

- Où  $\vec{j}_m(M, t) = \mu(M, t) \vec{v}(M, t) S dt$   
est le vecteur densité de courant de masse en  $\text{kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$

Propriétés

⚠  $d^2m = \mu(M, t) \vec{v}(M, t) \cdot \vec{n} @ dt dS$  Masse traversant la surface :  $\mu \times$  Volume

Propriétés

### Débit de volume

$$D_V = \iint_{P \in S} \vec{v}(P, t) \cdot \vec{n} dS$$

⚠  $d^2V = \vec{v}(M, t) \cdot \overrightarrow{dS_M dt}$

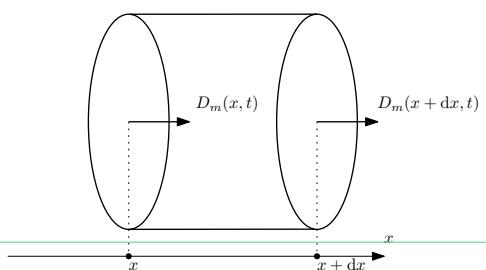
⚠

Aucune relation entre débit de volume et de masse sauf si  $\mu$  uniforme sur la surface  $D_m = \mu D_V$

### Conservation de la masse : cas unidimensionnel

On considère une tranche matérielle entre  $x$  et  $x + dx$

Démo



- Expression de la variation de masse
  - $\delta m(x, t) = \mu(x, t)Sdx$
  - $\delta m(x, t + dt) = \mu(x, t + dt)Sdx$
  - $d(\delta m) = dxdtS\frac{\partial \mu}{\partial t}$
- Calcul de la masse échangée :  $\delta m_e = D_m(x, t)dt - D_m(x + dx, t)dt = -\frac{\partial D_m}{\partial x}dxdt$
- Calcul du débit de masse  $D_m = \iint_{P \in S} \vec{j}_m(x, t) \cdot \vec{e}_x dS = j_m(x, t)S$
- Bilan  $d(\delta m) = \delta m_e$ 

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{1}{S} \frac{\partial D_m}{\partial x} = 0$$

Puis remplacer  $D_m$  par sa valeur

## Équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_m = 0$$

- Ou  $\frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div}(\mu \vec{v}) = 0$
- Cas unidimensionnel :  $\frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} = 0$

$$\frac{D\mu}{Dt} + \mu \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

¶  $\operatorname{div}(\mu \vec{v}) = \mu \operatorname{div}(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \mu$  Mémo :  $(uv)' = u'v + uv'$   
 D'où  $\frac{\partial \mu}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \mu) + \mu \operatorname{div} \vec{v} = 0$



$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{dV}{V} \Rightarrow -\frac{1}{\mu} \frac{D\mu}{Dt} dt = \frac{dV}{V} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{V} \frac{dV}{dt}$$

La divergence du champ de vitesse est égale au taux de variation du volume d'une particule mesurée par un observateur à bord de la particule

## Écoulement stationnaire

DEF: Un écoulement est stationnaire si tous les champs  $v, P, \mu, T$  sont indépendants du temps

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0 \Rightarrow \operatorname{div}(\mu \vec{v}) = 0$$

- $D_m = \iint_{P \in S} \vec{j}_m(P, t) \cdot \vec{n} dS = 0 \Rightarrow$  Il ya conservation du débit de masse
- $\triangle$  Le caractère stationnaire dépend du référentiel choisi. *Sillage d'un bateau*

## Écoulement incompressible

DEF: Toute particule de fluide garde un volume invariable au cours de son mouvement

$$\frac{D\mu}{Dt} = 0 \Rightarrow \operatorname{div}(\vec{v}) = 0$$

- Dans un écoulement incompressible il ya conservation du débit volumique

¶  $\iiint_V \operatorname{div} \vec{v} d\tau = \iint_S \vec{v} \cdot \overrightarrow{n}_{ext} dS = 0$  et  $\operatorname{div} \vec{v} = \vec{0}$  car  $\frac{D\mu}{Dt} = 0$

- $\triangle$  Ecoulement incompressible  $\neq$  Fluide incompressible  
 Mais Fluide incompressible  $\Rightarrow$  Écoulement incompressible
- Le caractère incompressible ne dépend pas du référentiel
- Condition pour considérer un fluide comme incompressible

$$\frac{U^2}{c^2} \ll 1$$

- $U$  est la vitesse d'écoulement
- $c$  est la vitesse de propagation des ondes sonores dans le fluide



Une surface fermée limite un volume d'un fluide et non un volume de mélange



$\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$  sont indépendants du temps en description eulerienne

## 4 Conditions aux limites cinématiques

Propriétés

### Paroi fixe

- $\vec{j}_m(P \in Paroi, t) \cdot \overrightarrow{dS_M} = 0$  en tout point de la paroi
- On a alors aussi  $\vec{v}(P, t) \cdot \vec{n} = 0$

Propriétés

### Paroi mobile ou déformable

- $(\vec{v}(P, t) - \vec{v}_{Paroi}) \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \vec{v}(P, t) \cdot \vec{n} = \vec{v}_{paroi} \cdot \vec{n}$

⚠ En se plaçant dans le référentiel lié à la paroi

Propriétés

### Fluides non miscibles

- $\vec{v}_1(P, t) \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \vec{v}_2(P, t) \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \vec{v}_{interface}(P, t) \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$

Propriétés

### Loin d'un obstacle

- Un obstacle de taille  $L$  ne perturbe l'écoulement que sur une distance finie  $\approx L$

## 5 Écoulement tourbillonnaire

Propriétés

### Écoulement tourbillonnaire

$$d\mathcal{C} = \vec{v}(M, t) \cdot \vec{dl}$$

- $\mathcal{C}$  est la circulation du champ de vitesse le long de  $\Gamma_{AB}$
- On cumule les vitesses tangentielles parcourues

$$d\mathcal{C} = (\vec{\text{rot}} \vec{v}) \cdot \vec{n} dS$$

⚠ On considère un contour élémentaire autour duquel on calcule la circulation

$$\vec{\text{rot}} \vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$$

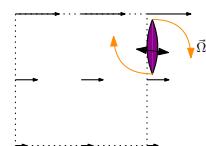
$$-\vec{\text{rot}} \vec{v} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & v_x \\ \frac{\partial}{\partial y} & v_y \\ \frac{\partial}{\partial z} & v_z \end{vmatrix}$$

⚠ N'utiliser qu'en coordonnées cartésiennes

- L'écoulement est alors de cisaillement  $\Rightarrow$  Caractère tourbillonnaire

- $\vec{\Omega}$  est la vitesse de rotation

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \vec{\text{rot}} \vec{v}$$



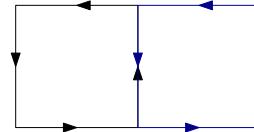
$$\vec{\omega} = \operatorname{rot} \vec{v}$$

- $\vec{\omega}$  est appelé vorticité
- $\vec{\omega}$  comme  $\vec{\Omega}$  traduisent la tendance de l'écoulement à tourner

–  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v}) = 0$

- $\operatorname{rot} \vec{v}$  est à flux conservatif
- D'où  $\iint_S (\operatorname{rot} \vec{v}) \cdot \vec{n}_{ext} dS = 0$
- Par Green-Ostrogradski  $\iiint_V \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v}) d\tau = 0, \forall V$

$$\iint_{P \in S} (\operatorname{rot} \vec{v}) \cdot \vec{n} dS = \oint_{M \in \Gamma} \vec{v}(M, t) \cdot \vec{dl}$$



### Écoulement tourbillonnaire et incompressible

- Un plan de symétrie est un plan laissant  $\vec{\Omega}$  inchangé  $\Rightarrow \vec{v}$  est  $\perp$  à ce plan
- Un plan d'antisymétrie transforme  $\vec{\Omega}$  en son opposé  $\Rightarrow \vec{v}$  est contenu dans ce plan



- Symétries des sources d'écoulement  $\Rightarrow$  Plans contenant la vitesse
- Invariance des sources d'écoulement  $\Rightarrow$  Variables dont ne dépend pas la vitesse

### Étude d'un écoulement tourbillonnaire

- Analyse des symétries et des invariances pour simplifier l'expression de  $\vec{v}$
- Détermination de la circulation du champ de vitesse le long d'un contour choisi s'appuyant sur les lignes de courant
- Détermination du flux du vecteur tourbillon en choisissant une surface *s'appuyant sur le contour*  
 $\Rightarrow$  La normale à la surface  $\vec{n}$  est alors fixée
- Application du théorème de Stokes

### Écoulement irrotationnel

DEF: Un écoulement est irrotationnel  $\Leftrightarrow \forall M, \operatorname{rot} \vec{v}(M, t) = \vec{0}$

$$\vec{v} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \phi$$

- $\phi$  est appelée potentiel des vitesses en  $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
- $\vec{v}$  est alors orienté dans le sens des  $\phi$  croissants
- $\phi$  est défini à une fonction du temps près

Défini car  $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$

- Le caractère irrotationnel dépend du référentiel

Écoulement incompressible, stationnaire et irrotationnel  $\Rightarrow$  Écoulement de viscosité négligeable

## Étude d'un écoulement irrotationnel

- Analyse des symétries et invariances pour simplifier l'expression de  $\vec{v}$
- $\begin{cases} \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi(M) \\ \text{div } \vec{v}(M) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} \phi(M)) = 0 \Leftrightarrow \Delta \phi = 0$
- Détermination des conditions aux limites
- Résolution
  - Combinaison de solutions de l'équation connues Cf Électromagnétisme
  - On pose une forme de solution adéquate Cf Découplement des variables - Parité - Périodicité
- Détermination des variables d'intégration avec les conditions aux limites



Au dénominateur du gradient il y a les déplacements élémentaires  $dr - rd\theta - r \sin(\theta)d\phi$

## ACTIONS MÉCANIQUES SUR LES FLUIDES

### 1 Catalogue

Définition

#### Actions à distance - Forces volumiques

DEF: Les actions à distance agissent identiquement sur tous les constituants  $\Rightarrow \propto V$

$$d\vec{F}(M, t) = \vec{f}(M, t)d\tau$$

–  $\vec{f}$  est le champ de force volumique  
–  $d\tau$  est le volume élémentaire de la particule

Exemple

Force	Expression
Attraction gravitationnelle	$\vec{f}(M, t) = \mu(M, t)\vec{\mathcal{G}}(M)$
Poids	$\vec{f}(M, t) = \mu(M, t)\vec{g}(M, t)$
Inertie d'entrainement	$\vec{f}(M, t) = -\mu(M, t)\vec{a}_e(M, t)$
Inertie de Coriolis	$\vec{f}(M, t) = -2\mu(M, t)\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}$
Électromagnétique	$\vec{f}(M, t) = \rho(\vec{E}(M, t) + \vec{v}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t))$

Définition

#### Actions de contact - Forces surfaciques

DEF: Interactions se manifestant à la surface de deux particules  $\Rightarrow \propto dS_{Surface de contact}$

$$d\vec{F}_{ext \rightarrow int}(M, t) = \vec{\tau}_n(M, t) + \vec{\tau}_t(M, t)dS_n$$

–  $\vec{\tau}_n$  est appelée contrainte normale  
–  $\vec{\tau}_t$  est appelée contrainte tangentielle

Définition

#### Forces de pression

$$d\vec{F}_p = \vec{\tau}_n(M, t)dS = -p(M, t)\vec{n}dS$$

–  $d\vec{F}_p$  est orthogonale à la surface, orientée vers l'extérieur  
–  $p(M, t)$  s'exprime en Pa=N.m<sup>-2</sup>

$$\vec{F}_p = - \iint_{M \in S} p(M, t)\vec{n}dS$$

–  $\vec{F}_p$  est la résultante des forces de pression  
–  $\vec{F}_p = - \iint_{M \in S} p(M, t)\vec{n}_{ext}dS$  pour une surface fermée

– Dans le cas d'une pression uniforme s'exerçant sur une surface fermée,  $\vec{F}_p = \vec{0}$

$$\vec{F}_p \cdot \vec{e}_x = -\vec{e}_x \iint_S p_0 \vec{n}_{ext}dS = \iiint_{M \in V} \text{div}(p_0 \vec{e}_x)d\tau = - \iiint_{M \in V} \frac{\partial p_0}{\partial x} d\tau = 0$$

$$d\vec{F}_p(M, t) = -\overrightarrow{\text{grad}} p(M, t)d\tau$$

Bilan des pressions qui s'exercent sur un cube de fluide  
 $\vec{F}_p = \sum_{faces} dF_i$

## ÉQUIVALENT VOLUMIQUE DES FORCES DE PRESSION

$$\vec{f}_p(M, t) = \frac{d\vec{F}_p}{d\tau} = -\overrightarrow{\text{grad}} p(M, t)$$



Car la résultante précédente est proportionnelle au volume

### Loi de Newton

Dans un écoulement de cisaillement  $\vec{v}(M, t) = v_x(y, t)\vec{u}_x$  d'un fluide newtonien

$$d\vec{F}_t(y, t) = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} dS \vec{u}_x$$

- $d\vec{F}_t$  est la force de viscosité de cisaillement
- △ Cisaillement : Couche supérieure → Couche inférieure
- $\eta$  est la viscosité dynamique en Pl Poiseuille

- Le cisaillement est orthogonal à sa vitesse



Air	$\eta = 1,8 \times 10^{-5} \text{ Pl}$
Eau	$\eta = 1,0 \times 10^{-3} \text{ Pl}$
Huile d'olive extra vierge	$\eta = 0,1 \text{ Pl}$
Glycérol	$\eta = 1,5 \text{ Pl}$
Miel	$\eta = 10 \text{ Pl}$

### Forces de cisaillement

- La viscosité d'un fluide newtonien est une constante △ Ce n'est pas le cas de tous les fluides

$$d\vec{F}_t = \eta \Delta \vec{v}(M, t) d\tau$$

- $d\vec{F}_t$  est la résultante des forces de viscosité de cisaillement dans un écoulement **incompressible** d'un fluide **newtonien**

▀ Bilan des forces de cisaillements sur un cube  

$$d\vec{F}_t = \sum_{faces} dF_i$$

## ÉQUIVALENT VOLUMIQUE DES FORCES DE CISAILLEMENT

$$\vec{f}_{visc}(M, t) = \eta \Delta \vec{v}(M, t)$$

- $\vec{f}_{visc}$  est l'équivalent volumique des forces de cisaillement

” L'hypothèse de l'écoulement incompressible est nécessaire pour exprimer la force tangentielle

### Équation du mouvement

- $\mu d\tau a_x(x, y, z, t) = -\frac{\partial p}{\partial x} d\tau + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} d\tau$
- On utilise la dérivée particulière :  $\mu d\tau \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} d\tau$  *Pression ne dépend pas de x*

$$\frac{\partial p_x(y, t)}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 p_x}{\partial y^2}$$

- $p_x = \mu v_x(y, t)$  est la quantité de mouvement par unité de volume en projection sur  $\vec{e}_x$
- $\nu = \frac{\eta}{\mu}$  est la viscosité cinématique
- Analogie avec les phénomènes diffusifs

Démo

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \vec{\omega}}{\partial y^2}$$

- La vorticité vérifie la même équation aux dérivées partielles que  $p_x$

$$\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v}(M, t) = -\frac{\partial v_x(y, t)}{\partial y} \vec{e}_z$$

- La viscosité de cisaillement engendre un transport diffusif de la quantité de mouvement dans la direction transverse à l'écoulement

Démo

- On applique le PFD à une particule de fluide dans le cas d'un écoulement incompressible

$$(\mu(M, t)d\tau) \frac{D\vec{v}(M, t)}{Dt} = -\overrightarrow{\text{grad}} p(M, t)d\tau + \eta \Delta \vec{v}(M, t)d\tau + \vec{f}_{vol}(M, t)d\tau$$

Théorème

### Équation de Navier Stokes

$$\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \mu (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \vec{f}_{vol} - \overrightarrow{\text{grad}} p + \eta \Delta \vec{v}$$

$$\begin{aligned} & - \vec{f}_{vol} \text{ est la densité volumique des autres forces} \\ & - \text{On a aussi} \\ & \mu \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \frac{v^2}{2} + (\text{rot } \vec{v} \wedge \vec{v}) \right) = -\overrightarrow{\text{grad}} p + \vec{f}_{vol} + \eta \Delta \vec{v} \end{aligned}$$

- Une particule contribue au déplacement de quantité de mouvement par un transport convectif

Propriétés

### Nombre de Reynolds

On cherche à évaluer l'importance relative de la convection et de la diffusion dans le transport de  $p_x$

$$\mathcal{R}_e = \frac{\text{Convection}}{\text{Diffusion}} = \frac{\mu U L}{\eta} = \frac{U L}{\nu}$$

- $U$  est une vitesse caractéristique
- $L$  est une longueur caractéristique

$$\begin{aligned} j_{p_x \text{diff}} &= \nu \frac{\partial p_x}{\partial y} \sim \nu \frac{\mu V}{L} \\ j_{p_x} &= \mu v_x v_x \sim \mu \vec{v}^2 \end{aligned}$$

Se retrouve avec des ordres de grandeur sur l'équivalent

- $\mathcal{R}_e \ll 1$  : La diffusion visqueuse joue un rôle prépondérant
- $\mathcal{R}_e \gg 1$  : Le transport convectif joue un rôle prépondérant

$$\blacksquare \quad \text{On transforme Navier Stokes sous forme adimensionnée} \\ \frac{\mu U L}{\eta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\mu U L}{\eta} (\tilde{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \cdot \tilde{v} = -\overrightarrow{\text{grad}} \frac{L p}{q U} + \tilde{\Delta} \tilde{v}$$

$$\mathcal{R}_e = \frac{\text{Convection}}{\text{Diffusion}} \sim \frac{\|\mu (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}\|}{\|\eta \Delta \vec{v}\|}$$

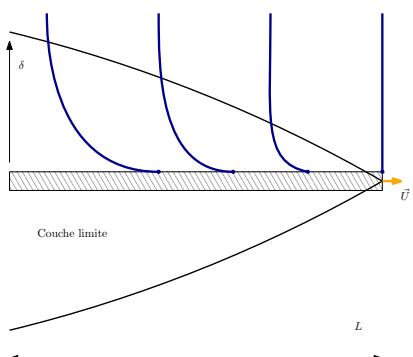
- $\mathcal{R}_e$  détermine l'ordre de grandeur relatif des termes de diffusion et de convection

Définition

### Couche limite

DEF: La couche limite est la région de l'écoulement au voisinage d'une paroi où la viscosité de cisaillement a une influence notable sur l'écoulement

$$\blacksquare \quad \text{La couche limite se développe à } t - \frac{L}{U} \\ \text{Or } \delta(t) = \sqrt{\nu t}$$



$$\delta = \frac{L}{\sqrt{\mathcal{R}_e}}$$

- $U$  est une vitesse caractéristique
- $\delta$  est l'épaisseur de la couche limite
- $L$  est la taille caractéristique de l'objet

- $\mathcal{R}_e \ll 1 \Rightarrow \delta \gg L$  : La couche limite s'étend à tout l'écoulement
- $\mathcal{R}_e \gg 1 \Rightarrow \delta \ll L$  : La vorticité est confinée à la surface de l'obstacle  
La couche limite joue le rôle de zone d'adaptation où  $\vec{v} : \vec{0} \rightarrow \vec{U}$

### Écoulement parfait

DEF: Un écoulement est parfait si tous les phénomènes diffusifs  $\text{Ex: Viscosité}$  sont négligeables

- On néglige alors les transferts thermiques  $\text{On néglige aussi l'irréversibilité} \Rightarrow \text{Caractère isentropique}$
- Le modèle de l'écoulement parfait correspond à  $\mathcal{R}_e \rightarrow +\infty$   
Si un écoulement est irrotationnel à un instant initial, il le restera  $\text{Vorticité que générée dans les couches visqueuses}$

## 3 Conditions aux limites

### 3.1 Conditions aux limites cinématiques

#### Paroi fixe

$$\vec{v}(M \in \text{Paroi}, t) = \vec{0}$$

- Imperméabilité :  $\vec{v}(M \in P, t) \cdot \vec{n} = 0$
- Fluide réel  $\Rightarrow$  Adhérence :  $\vec{v}(M \in P, t) \cdot \vec{t}_M = 0$

⚠ Si l'écoulement est parfait, le fluide glisse sur la paroi  $\Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$  seulement

#### Paroi mobile

⚠ On se place dans le référentiel lié à la paroi

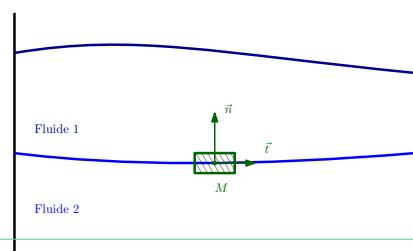
- Imperméabilité :  $\vec{v}_{flu}(M \in Par, t) \cdot \vec{n} = \vec{v}_{Par}(M \in Par, t) \cdot \vec{n}$
- Fluide réel  $\Rightarrow$  Adhérence :  $\vec{v}_{flu}(M \in Par, t) = \vec{v}_{Par}(M \in Par, t)$

#### Interface de deux fluides non miscibles

- Imperméabilité :  $\vec{v}_1(M \in Inter, t) \cdot \vec{n} = \vec{v}_2(M \in Inter, t) \cdot \vec{n}$
- Fluides réels  $\Rightarrow$  Adhérence :  $\vec{v}_1(M \in Inter, t) = \vec{v}_2(M \in Inter, t)$

#### Interface de deux fluides non miscibles

- On considère un volume  $d\tau = \pi \epsilon^4 r^2 h$  Rayon  $\epsilon$  - Hauteur  $\epsilon^2 h$
- PFD :  $dm \vec{a} = \overrightarrow{dF_1} + \overrightarrow{dF_2}$   
D'où  $\mu \pi \epsilon^4 r^2 h \vec{a}(M, t) = \pi \epsilon^4 r^2 h \vec{f}_{vol}(M, t) + \pi \epsilon^2 r^2 \vec{f}_s(M, t)$
- On prend  $\epsilon \rightarrow 0$  on décompose  $\vec{f}_s$  selon  $\vec{n}$  et  $\vec{t}$
- $\begin{cases} p_1(M, t) = p_2(M, t) & \text{Contrainte normale} \\ \tau_1(M, t) = \tau_2(M, t) & \text{Contrainte tangentielle} \end{cases}$



$$\eta_1 \frac{\partial v_{1x}}{\partial y} = \eta_2 \frac{\partial v_{2x}}{\partial y}$$

- Si  $\eta_1 \ll \eta_2 : \eta_2 \frac{\partial v_{2x}}{\partial y} \simeq 0$
- Pour normal  $\vec{u}_x$ , tangentiel  $\vec{u}_y$

⚠ On ne tient pas compte ici de la tension superficielle  
 ⇒ Discontinuité des pressions liées à la courbure de l'interface

## 4 Écoulements autour d'objets

### Forces de traînée et de portance

DEF: La force de traînée est orientée dans le sens opposé à la vitesse de déplacement

$$F = -\frac{1}{2} C_x(\mathcal{R}_e) \mu S V \vec{V}$$

- ⇒  $C_x(\mathcal{R}_e)$  le coefficient de traînée

$\mathcal{R}_e < 1 \Rightarrow$  DÉPENDANCE LINÉAIRE

$$\vec{F} = -\alpha \eta L \vec{V}$$

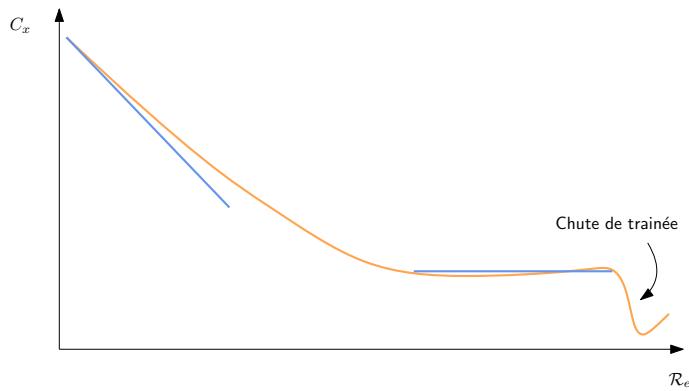
- $\alpha$  est une constante numérique
- Loi de Stokes
- $C_x \propto \frac{1}{\mathcal{R}_e}$

$10^3 < \mathcal{R}_e < 10^5 \Rightarrow$  INDÉPENDANCE

$$\vec{F} = -\frac{1}{2} C_x \mu S V \vec{V}$$

- $C_x$  est indépendant du nombre de Reynolds  $\approx 0,4$  pour la sphère
- $S$  est le maître couple  $Surface au vent$
- La force de traînée varie ici comme le carré de la vitesse

DEF: La force de portance est orientée dans la direction orthogonale à la vitesse de déplacement



### Différents écoulements

- Écoulement **laminaire**: Les couches de fluides glissent les unes sur les autres  
 Les lignes de courant restent bien identifiées
- Écoulement **turbulent**: Mélange important des couches de fluide et apparition de tourbillons  
 La vitesse en un point fluctue de manière aléatoire

$\mathcal{R}_e$  gouverne la transition du laminaire  $\mathcal{R}_e < \mathcal{R}_{eC}$  au turbulent  $\mathcal{R}_e > \mathcal{R}_{eC}$

- $\mathcal{R}_e$  détermine l'importance de la diffusion par rapport à la convection
- $\mathcal{R}_e$  détermine le passage du lamininaire au turbulent

## TENSION SUPERFICIELLE

- La tension superficielle à l'interface de fluides résulte de l'anisotropie des forces d'interaction mutuelle entre molécules résultant de la présence de l'interface

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \gamma_{12} L \vec{t}$$

- $\vec{t}$  est unitaire et tangent à l'interface et orthogonal à la ligne de contact
- $\gamma_{12}$  est le coefficient de tension superficielle de l'interface  
Il est positif et ne dépend que de la nature des fluides

$$\delta W = \gamma_{12} dS$$

$\delta W$  est le travail à fournir pour accroître l'interface de  $dS$

- ”
- La tension superficielle provient de la réticence des molécules à être à la surface
  - La présence de molécules tensioactives à l'interface eau/vapeur diminue la tension superficielle
  - En l'absence de gravité un volume de liquide adopte une configuration sphérique par laquelle il minimise son aire et donc l'énergie de surface

Octane  $\gamma_{LV} = 0.022 \text{ N.m}^{-1}$

Eau  $\gamma_{LV} = 0.072 \text{ N.m}^{-1}$

Mercure  $\gamma_{LV} = 0.49 \text{ N.m}^{-1}$

### Loi de Laplace

La pression à l'intérieur du volume est supérieure à celle à l'extérieur

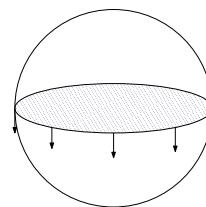
$$p_{int} - p_{ext} = \gamma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

- Pour une sphère  $p_{int} - p_{ext} = \frac{2\gamma_{LV}}{R}$
- $\Delta$  Pour une bulle de savon il y a deux interfaces

—  $\vec{F}_{tension} = -\gamma 2\pi R \vec{e}_z$

—  $\iint_{Disque + \frac{1}{2} sphère} -p_0 \vec{n}_{ext} dS = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{F}_{pression} = \iint_{\frac{1}{2} sphère} -p_0 (\vec{e}_z) dS = - \iint_{Disque} p_0 \vec{e}_z dS = -p_0 \pi R^2 \vec{e}_z$

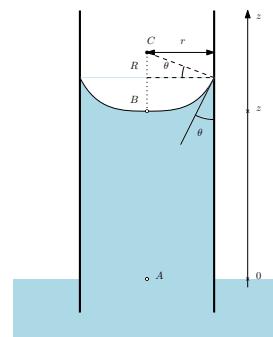


### Loi de Jurin

Lorsque le liquide monte, l'interface solide/vapeur est remplacée par une interface solide liquide sur une hauteur  $z$

$$E(z) = \Delta E_{pp} + \Delta E_{ps} = \frac{1}{2} \pi r^2 \mu g z^2 + 2\pi r z (\gamma_{SL} - \gamma_{SV})$$

On obtient un minimum d'énergie pour  $\frac{dE}{dz} = 0$  correspondant à une valeur de  $h$



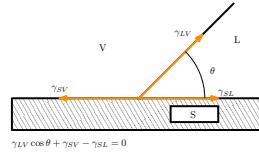
$$h_J = \frac{2(\gamma_{SV} - \gamma_{SL})}{\mu gr}$$

$$h_J > 0 \Leftrightarrow \gamma_{SV} > \gamma_{SL}$$

### Loi de Young-Dupré

⚠  $p_{B+} = p_A = p_0$  et  $p_A + \mu g z_A = p_{B-} + \mu g z_{B-} \Rightarrow p_{B-} = p_0 - \mu g h \Rightarrow p_{B+} - p_{B-} = \mu g h = \frac{2\gamma_{LV}}{R}$

$$h_J = \frac{2\gamma_{LV} \cos \theta}{\mu gr}$$



$$\gamma_{LV} \cos \theta = \gamma_{SV} - \gamma_{SL}$$

⚠ Identification dans la loi de Jurin

💡 La relation de Young-Dupré donne l'angle de contact  $\theta$  d'une goutte déposée

- $|\gamma_{SV} - \gamma_{SL}| < \gamma_{LV}$  : Mouillage partiel
- $\gamma_{LV} \leq \gamma_{SV} - \gamma_{SL}$  : Mouillage total Plus d'interface solide-vapeur
- $\gamma_{LV} \geq \gamma_{SV} - \gamma_{SL}$  : Mouillage nul Plus d'interface solide-liquide

”

### Longueur capillaire

- On compare  $\Delta p_{gravité} = \mu g h = \frac{1}{2} \mu g r \sin \theta$  et  $\Delta p_{capillaire} = \frac{2\gamma_{LV}}{R} = \frac{2\gamma_{LV} \sin \theta}{r}$

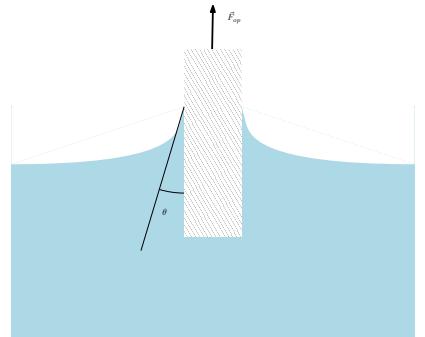
$$r \ll l_c$$

- Si les effets de la gravité sont négligeables devant les effets de la capillarité
- $l_c = \sqrt{\frac{\gamma_{LV}}{\mu g}}$
- $l_c$  est la longueur capillaire

💡 Eau | 3mm

### Méthode d'arrachement

- $\delta W_{op} = F dz = \gamma_{SV} p_{périmètre} dz - \gamma_{SL} p dz \Rightarrow F = \gamma_{LV} p \cos \theta$
- À l'arrachement  $F \xrightarrow[\theta \rightarrow 0]{} \gamma_{LV} p$



## 1 Écoulement de fluides réels

### Équation de Navier Stokes

Pour un écoulement incompressible d'un fluide newtonien

$$\mu \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = \vec{f}_{vol} - \overrightarrow{\text{grad}} p + \eta \Delta \vec{v}$$

–  $\vec{f}_{vol}$  est la densité volumique des autres forces  
– On a aussi

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \vec{f}_m - \frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{grad}} p + \nu \Delta \vec{v}$$

- Cette équation est locale non linéaire et sa résolution est complexe *Ou impossible*  
 $\Rightarrow$  Résolution approchée *Ordres de grandeurs*

Théorème

Définition

### Écoulements parallèles

DEF: Champ de vitesse unidirectionnel variant seulement dans le plan transverse à l'écoulement

- $\Rightarrow$  L'accélération convective  $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \vec{0}$
- Le nombre de Reynolds ne peut alors être défini que comme  $\mathcal{R}_e = \frac{\mu U L}{\eta}$
- Il permet de caractériser le caractère turbulent ou laminaire de l'écoulement

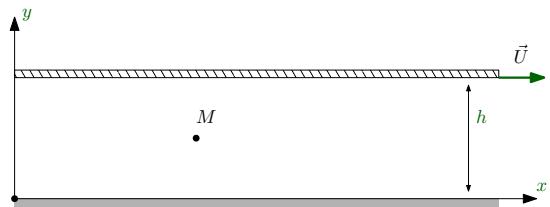
Exemple

### Écoulement de Couette Plan

- Stationnaire  $\Rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$
- Projection de NS :  $\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}} p + \mu \vec{g} + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \vec{e}_x$
- Champ de pression  $0_y : 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} - \mu g$   
 $p(y=0) = p_{sol} \Rightarrow p = p_{sol} - \mu gy$
- Champ de vitesse  $0_x : 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$   

$$\begin{cases} v_x(y=0) = 0 \\ v_x(y=h) = U \end{cases} \Rightarrow v_x(y) = \frac{Uy}{h}$$
  
 $\Rightarrow \vec{v}(M) = \frac{U}{h} y \vec{e}_x$
- $d\vec{F}_{fluide \rightarrow plaque} = -\eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) (y=h) dS \vec{e}_x = -\eta \frac{U}{h} dS \vec{e}_x$   
 $\vec{F}_{fluide \rightarrow plaque} = -\eta \frac{S}{h} U \vec{e}_x = -\eta \frac{S}{h} \vec{U}$

$\triangle$  Fluide en dessous et plaque au dessus  $\Rightarrow \ominus$



## Écoulement de Poiseuille

- Incompressible  $\text{div } \vec{v} = 0$  et stationnaire  $\Rightarrow \vec{v}(M, t) = v(r)\vec{e}_x$   
NS se réduit à  $\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}} p + \eta \Delta \vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}} p + \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \vec{e}_x$

- Projection : 
$$\begin{cases} \vec{e}_r : \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \\ \vec{e}_\theta : \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \\ \vec{e}_x : -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = 0 \end{cases}$$

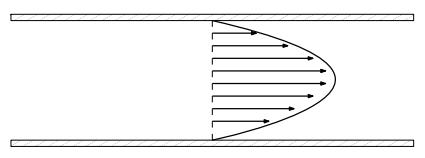
- Champ de pression

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = K$$

$$\Rightarrow \text{Intégration : } p(x) = p_e + (p_s - p_e) \frac{x}{L}$$

- $\vec{v}(M, t) = \frac{p_e - p_s}{4\eta L} (R^2 - r^2) \vec{e}_x$

$$D_v = \frac{\pi R^4}{\eta n L} (p_e - p_s)$$



- Champ de vitesse

$$r \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{r^2}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} + A$$

Or pour  $r \rightarrow 0$ ,  $\left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|$  reste finie  $\Rightarrow A = 0$

$$v(r) = \frac{r^2}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial x} + B$$

$$v(r = R) = 0 \Rightarrow B = -\frac{R^2}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$\vec{v}$  dépend de  $r \Rightarrow$  Débit élémentaire à travers  $dS$   
 $dD_{vol} = \vec{v}(r) \cdot \vec{e}_x 2\pi dr \rightarrow$  Intégration

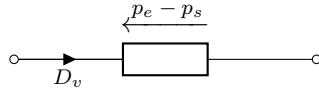
Exemple

Propriétés

## Résistance hydraulique

$$R_{th} = \frac{8\eta L}{\pi R'}$$

$\Delta V = Ri$



Propriétés

## Nombre de Reynolds de l'écoulement de Poiseuille

- On définit une vitesse moyenne  $\bar{v} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi r v(r) dr = \frac{D_v}{\pi R^2}$
- On l'utilise pour définir le nombre de Reynolds :  $\mathcal{R}_e = \frac{\mu \bar{v} 2R}{\eta} = \frac{\mu R^2 (p_e - p_s)}{\eta^2 L}$

L'écoulement reste lamininaire tant que  $\mathcal{R}_e < \mathcal{R}_{ec}$  ( $\mathcal{R}_{ec} = 2040$ )

Le profil de vitesse parabolique ne s'établit pas dès l'entrée du tube

De manière empirique  $l \approx R \frac{\mathcal{R}_e}{15} l$  est la longueur d'entrée

L'hypothèse Newtonien  $\text{div}(\vec{v}) = \vec{0}$  et incompressible  $\frac{\partial v}{\partial x}$  Sens de propagation

Exemple

## Écoulement de cisaillement induit par les oscillations d'une plaque

- Symétrie et invariances :  $\vec{v}(M, t) = x(\mathcal{X}, y, z, t) \vec{e}_z$
- NS :  $\mu \frac{\partial v}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} p + \mu \vec{g} + \eta \Delta \vec{v}$

Exemple

- Projection :  $\begin{cases} \vec{e}_x : \mu \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ \vec{e}_y : \frac{\partial p}{\partial y} - \mu g = 0 \\ \vec{e}_z : -\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases}$
- Champ de pression  
 $\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \Rightarrow p(M, t) = p(x, y, t)$   
 $\frac{\partial p}{\partial y} = -\mu g \Rightarrow p(x, y, t) = \mu gy + A(x, t)$   
CL :  $A(x, t) = p_0 \Rightarrow p = p_0 - \mu gy$
- Champ de vitesse  
La première se réécrit  $\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$  Diffusion  
 $v(y, t) = v_0 f(y) e^{i\omega t}$   
⇒ CL pour l'expression de  $f$  puis  $\vec{v}$   
Épaisseur caractéristique : l'épaisseur de peau

## 2 Équation d'Euler

Théorème

### Équation d'Euler

On étudie le mouvement de fluides parfaits

Equation du mouvement d'une particule de fluide :  $\mu(M, t) d\tau = \frac{D\vec{v}(M, t)}{Dt} = -\overrightarrow{\text{grad}} p(M, t) d\tau + \vec{f}_{vol}(M, t) d\tau$

$$\mu \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}} p + \vec{f}_{vol}$$

Valable que l'écoulement soit incompressible ou non

Exemple

### Jet rectiligne

Equation :  $\vec{v}(M, t) = v(x, t) \vec{e}_x \rightarrow$  Euler en projection  $\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} = \vec{f}_{vol} \cdot \vec{e}_y$  et  $\frac{\partial p}{\partial z} = \vec{f}_{vol} \cdot \vec{e}_z$

- On retrouve les équations de la statique des fluides ⇒ Distribution de pression hydrostatique
- La pression est uniforme dans une section d'un jet soumis aux seules forces de pression

Exemple

### Cas de courbure des lignes de courant

- Accélération convective :  $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = -\frac{v^2(r, t)}{r} \vec{e}_r$
- Projection de l'équation d'Euler sur  $\vec{e}_r$  :  $\mu \frac{v^2(r, t)}{r} = \frac{\partial p}{\partial r} > 0$   
La pression est croissante du rayon, elle **augmente du centre de courbure vers la périphérie**

## 3 Statique des fluides

Théorème

### Équation fondamentale de la statique des fluides

$$\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}} p + \vec{f}_{vol}$$

Equations de NS<sub>Réel</sub> ou d'Euler<sub>Parfait</sub>

## Relation de Bernoulli

**A** Écoulement parfait et stationnaire, incompressible et de masse volumique uniforme

$$\vec{\text{grad}} \left( \frac{v^2}{2} \right) + (\vec{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v} = -\frac{1}{\mu} \vec{\text{grad}} p + \vec{g} \Rightarrow \vec{\text{grad}} \left( \frac{p}{\mu} + \frac{v^2}{2} + gz \right) + (\vec{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v} = \vec{0}$$

- Cas d'un écoulement irrotationnel  $\vec{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$
- Cas d'un écoulement tourbillonnaire

**Q** Penser à faire circuler l'équation d'Euler d'un point de départ à un point d'arrivée

**A** On considère une ligne de courant joignant  $A$  et  $B$

$$\vec{dl} \cdot \vec{\text{grad}} \left( \frac{p}{\mu} + \frac{v^2}{2} + gz \right) + \vec{dl} \cdot ((\vec{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v})_0 \text{ car colinéaires} = 0 \text{ puis intégration}$$

$$\frac{p}{\mu} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{cste}$$

**A**  $-gz$  si  $z \downarrow$

**A** Toujours s'assurer des conditions d'application du théorème de Bernoulli

**I** On écrit les termes sous la forme de gradients ou à défaut faire circuler l'équation d'Euler sur une ligne de courant

## Effet Venturi

- $\frac{p_A}{\mu} + \frac{v_A^2}{2} = \frac{p_B}{\mu} + \frac{v_B^2}{2}$
- Incompressible  $\Rightarrow$  Conservation du débit volumique :  $s_A v_A = s_B v_B$
- Comparaison des pressions :  $p_B = p_A + \frac{1}{2} \mu v_A^2 \left( 1 - \frac{s_A^2}{s_B^2} \right)$

## Formule de Toricelli

- L'écoulement n'est pas stationnaire  $\Rightarrow$  Comparer convection et terme local
  - Conservation du débit volumique :  $s_A v_A = s_B v_B$  et  $v_A = \left| \frac{dh}{dt} \right|$
  - Ordre de grandeur  $\frac{\left\| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right\|}{\left\| \vec{v} \cdot \vec{\text{grad}} \vec{v} \right\|} \sim \frac{v_0}{v_0^2} = \frac{h_0}{\tau} = \frac{h_0}{\tau} \cdot \frac{1}{v_0} \sim \frac{s_B}{s_A} \Rightarrow$  Accélération locale négligeable
  - Théorème de Bernoulli le long d'une ligne de courant *pas partout car tourbillonnaire*
- $$v_B = \sqrt{2gh} \text{ et } v_A = \frac{s_B}{s_A} \sqrt{2gh} = -\frac{dh}{dt}$$

- La propagation d'une onde sonore est la propagation dans le fluide d'une surpression
- $\Delta p \Rightarrow$  Mouvement  $\Rightarrow \Delta \mu \Rightarrow \Delta p$

**Approximation acoustique**

On étudie les petites variations autour d'un état de repos

Repos	$\Rightarrow$	Légère surpression
$\vec{v}(M, t) = \vec{0}$	$\Rightarrow$	$\vec{v}(M, t) = \vec{0} + \vec{v}_1(M, t)$
$p(M, t) = p_0$	$\Rightarrow$	$p(M, t) = p_0 + p_1(M, t)$
$\mu(M, t) = \mu_0$	$\Rightarrow$	$\mu(M, t) = \mu_0 + \mu_1(M, t)$
$T(M, t) = T_0$	$\Rightarrow$	$T(M, t) = T_0 + T_1(M, t)$

**Approche Bilan**

On note  $\xi(x, t)$  le déplacement par rapport au repos

- Conservation de la masse  $\mu_0 S dx = (\mu_0 + \mu_1(x, t)) S(x + dx + \xi(x + dx, t) - (x + \xi(x, t)))$
- $\mu_1(x, t) = -\mu_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t)$
- Équation d'évolution thermodynamique

— On linéarise à  $S = cste$  :  $\mu(p_0 + p_1) = \mu(p_0) + p_1 \left( \frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_{S_0, p_0} \Leftrightarrow \mu_0 + \mu_1 = \mu_0 + p_1 \left( \frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_{S_0, p_0}$

—  $m = \mu V = cste \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} + \frac{dV}{V} = 0 \Rightarrow \chi_S = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_S \rightarrow \mu_1 = \mu_0 \chi_S p_1$

Étem Équation du mouvement

—  $\mu_0 S dx \left( \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \dot{\xi}(x, t) \right) = (p(x, t) - p(x + dx, t)) S$

—  $\mu_0 S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -S dx \frac{\partial p}{\partial x} = -S dx \frac{\partial p_1}{\partial x} \Rightarrow \mu_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p_1}{\partial x}$

Étem Équation de propagation :  $\mu_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu_1}{\mu_0 \chi_S} \right) = -\frac{1}{\mu_0 \chi_S} \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{1}{\chi_S} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$- c = \sqrt{\frac{\chi_S^{-1}}{\mu_0 \chi_S}} = \sqrt{\frac{\chi_S^{-1}}{\mu_0}} = \sqrt{\frac{Raideur}{Inertie}}$$

## Approche dynamique des fluides

Equation	Expression	$\Rightarrow$	Linéarisation
Equation d'Euler	$\mu \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v} \right) = -\vec{\text{grad}} p$	$\Rightarrow$	$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\vec{\text{grad}} p_1$
Conservation de la matière	$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\mu \vec{v}) = 0$	$\Rightarrow$	$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \text{div}(\vec{v}_1) = 0$
Évolution thermodynamique	$P = P(\mu, \mathcal{S}) \text{ ou } T$	$\Rightarrow$	$\mu = \mu_0 \chi_S p_1$

– Equations couplées  $\begin{cases} \mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\vec{\text{grad}} p_1 \\ \chi_S \frac{\partial p_1}{\partial t} = -\text{div}(\vec{v}_1) \end{cases}$

– Équation de propagation :  $\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\text{grad}} p_1) = \frac{1}{\chi_S} \vec{\text{grad}}(\text{div}(\vec{v}_1))$

Or  $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{v}) = \vec{\text{grad}}(\text{div}(\vec{v})) - \Delta \vec{v}$  d'où  $\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} = \frac{1}{\chi_S} \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{v}_1)) + \frac{1}{\chi_S} \Delta \vec{v}_1$

$\triangle \quad \text{Or } \mu_0 \frac{\partial \vec{\text{rot}} \vec{v}_1}{\partial t} = -\vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}} p_1) = \vec{0}$

$\triangle \quad \Rightarrow \vec{\text{rot}} \text{ indépendant du temps or le champ de vitesse dépend forcément du temps} \Rightarrow \vec{\text{rot}} \vec{v}_1 = \vec{0}$

$$\Delta \vec{v}_1 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2}$$

– Équation d'onde à trois dimensions

$$- c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_S}} = \sqrt{\frac{\chi_S^{-1}}{\mu_0}} = \sqrt{\frac{\text{Raideur}}{\text{Inertie}}}$$

– Idem pour  $p_1$  et  $\mu_1$

Démo

L'expérience montre que c'est bien le modèle **adiabatique et réversible** à retenir

“

$$c = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}}$$

Loi de Laplace

– A un facteur près c'est la vitesse quadratique moyenne

$\triangle$

$S$  non uniforme  $\Rightarrow$  Expression différente de la conservation de la masse

Propriétés

Propriétés

## 2 Aspects énergétiques

### Bilan local d'énergie

- Equations couplées  $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mu_0 \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2} \chi_S p_1^2 \right) + \text{div}(p_1 \vec{v}_1) = 0$
- Densité volumique d'énergie cinétique :  $e_c(M, t) = \frac{1}{2} \mu_0 \| \vec{v}_1(M, t) \|^2$
- Densité volumique d'énergie potentielle acoustique :  $e_p(M, t) = \frac{1}{2} \chi_S p_1(M, t)^2$
- Vecteur densité de courant d'énergie acoustique :  $\vec{\Pi}(M, t) = p_1(M, t) \vec{v}(M, t)$

### Puissance acoustique

$$dP = \vec{\Pi}(M, t) \cdot \vec{n} dS$$

–  $P$  est la puissance acoustique

$$- \Rightarrow P = \iint_{P \in S} \vec{\Pi}(P, t) \cdot \vec{n} dS$$

$$I = \langle \vec{\Pi} \rangle_t$$

–  $I$  est la puissance acoustique en  $\text{W.m}^{-2}$

$$I_{\text{dB}} = 10 \log \left( \frac{I}{I_{\text{ref}}} \right)$$

–  $I_{\text{ref}} = 10^{-12} \text{W.m}^{-2}$  est le seuil de douleur

### 3 Ondes planes progressives

**DEF:** Une onde acoustique est plane si  $p_1(M, t) = \text{cste}_{ou \parallel \vec{v}_1 \parallel, \mu_1}$  à  $t$  fixé définit des plans parallèles  
Les surfaces d'onde sont alors planes

- La solution générale de l'équation de d'Alembert est  $p_1(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$

#### Impédance acoustique

- Eqs couplées avec  $\begin{cases} p_1 = u\left(t - \frac{x}{c}\right) = u(\alpha) \\ v_1 = v\left(t - \frac{x}{c}\right) = v(\alpha) \end{cases} \Rightarrow u(\alpha) = \mu_0 c v(\alpha) + \text{cste} \Rightarrow p_1(x, t) = \mu_0 c v_1(x, t)$

$$Z_c = \frac{p_1(x, t)}{v_1(x, t)} = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\chi_s}}$$

- $\triangleq$  L'impédance change de signe pour une onde régressive
- $= \frac{\text{Cause}}{\text{Consequence}}$
- $Z_c$  en  $\text{kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$

“ En toute rigueur les grandeurs couplées sont homogènes à des puissances :  $p_1$  et  $v_1 S$

#### Onde acoustique plane progressive harmonique

$$- p_1(M, t) = p_m \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x + \varphi\right) \Leftrightarrow p_1 = p_m e^{i(\omega t - \frac{\omega}{c}x + \varphi)} = p_m = e^{i(\omega t - \frac{\omega}{c}x)}$$

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{e}_x$$

- Caractère longitudinal :  $\vec{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \nabla \wedge \vec{v} = 0 \Leftrightarrow -i \frac{\omega}{c} \vec{e}_x \wedge \vec{v} = \vec{0}$

#### Aspects énergétiques

- Densité volumique d' $e_c$  :  $e_c(M, t) = \frac{1}{2} \mu_0 \|\vec{v}_1(M, t)\|^2 \Rightarrow \langle e_c \rangle = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{1}{2} \Re(\vec{v}_1 \vec{v}_1^*) = \frac{1}{4} \mu_0 v_m^2$
- Densité volumique d' $e_p$  :  $e_p(M, t) = \frac{1}{2} \chi_s p_1(M, t)^2 \Rightarrow \langle e_p \rangle = \frac{1}{4} \chi_s p_m^2$
- Densité de courant d'énergie acoustique :  $\vec{\Pi}(M, t) = p_1(M, t) \vec{v}(M, t) \Rightarrow \langle \vec{\Pi} \rangle = \langle e_{\text{tot}} \rangle \vec{e}_x = I \vec{e}_x$

### 4 Ondes acoustiques sphériques

#### Mise en équations

- On résout l'équation de D'Alembert  $\Delta p_1 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$  en coordonnées sphériques en supposant l'émission isotrope

$$\begin{aligned} - \triangle \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rp_1)}{\partial r^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} \quad \text{Divergente} \\ - \Rightarrow p_1(r, t) &= \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r} g\left(t + \frac{r}{c}\right) \quad \text{Convergente} \end{aligned}$$

### Onde harmonique divergente

- Champ de pression :  $p_1(M, t) = \frac{a_0}{r} \cos\left(\omega t - \omega \frac{r}{c} + \varphi_0\right) \leftrightarrow \underline{p}_1(M, t) = \frac{a_0}{r} e^{i(\omega t - \omega \frac{r}{c})}$
- Ne pas utiliser  $Z_c$  ici : valable uniquement pour les ondes planes
- Champ de vitesse : Euler linéarisée en complexes  
 $\mu_0 i \omega \underline{v}_1 = \left( \frac{a_0}{r^2} - \frac{a_0}{r} \left( -i \frac{\omega}{c} \right) \right) e^{i(\omega t - \omega \frac{r}{c})} \Rightarrow \underline{v}_1 = \frac{a_0}{\mu_0 c r} \left( 1 - i \frac{c}{r \omega} \right) e^{i(\omega t - \omega \frac{r}{c})} \Rightarrow$  Passage en réel

On est amené à faire des approximations

### Champ proche : $r \ll \lambda$

- Champ de pression *Inchangé* :  $\underline{p}_1(M, t) = \frac{a_0}{r} e^{i(\omega t - \omega \frac{r}{c})}$
- Champ de vitesse :  $\underline{v}_1 = \frac{-i a_0}{\mu_0 r^2 \omega} e^{i(\omega t - \omega \frac{r}{c})}$
- Densité volumique d'énergie cinétique :  $\langle e_c \rangle = \frac{1}{2} \mu_0 \langle \underline{v}_1^2 \rangle = \frac{1}{4} \mu_0 \frac{a_0^2}{\mu_0^2 r^4 \omega^2}$
- Densité volumique d'énergie potentielle :  $\langle e_p \rangle = \frac{1}{2} \chi_S \langle p_1^2 \rangle = \frac{1}{4} \chi_S \frac{a_0^2}{r^2}$
- $\frac{\langle e_c \rangle}{\langle e_p \rangle} \gg 1 \Rightarrow$  L'énergie est principalement cinétique et les effets de compressibilité sont négligeables  
 ⇒ Déplacement "en bloc"
- L'approximation est non satisfaisante pour  $\langle \vec{\Pi} \rangle = 0 \Rightarrow$  On repasse à l'expression générale
- Un calcul de puissance permet d'exprimer  $a_0$  en fonction de la puissance moyenne

### Champ lointain $r \gg \lambda$ - Zone de rayonnement

- Champ de pression *Inchangé* :  $\underline{p}_1(M, t) = \frac{a_0}{r} e^{i(\omega t - \omega \frac{r}{c})}$
- Champ de vitesse :  $\underline{v}_1 = \frac{a_0}{\mu_0 c r} e^{i(\omega t - \omega \frac{r}{c})}$
- On retrouve comme pour les ondes planes :  $\langle e_p \rangle = \langle e_c \rangle = \frac{1}{2} \chi_S \langle p_1^2 \rangle = \frac{1}{4} \chi_S \frac{a_0^2}{r^2}$
- Même expression de  $\langle \vec{\Pi} \rangle(\mathcal{P})$  qu'en champ proche

### Sphère oscillante - Monopole acoustique

- $R(t) = R_0 + a \cos(\omega t) \leftrightarrow \underline{R} = a e^{i \omega t}$
- Champ de vitesse au premier ordre en  $\frac{a}{R_0}$  : A la surface  $v_1 = \dot{R}$   
 $\frac{a_0}{\mu_0 c R_0} \left( \frac{-ic}{\omega R_0} + 1 \right) e^{i(\omega t - \omega \frac{R_0}{c})} = i \omega a e^{i \omega t}$
- Expression de  $a_0$
- Champ de pression et de vitesse acoustique
- Vecteur densité de courant d'énergie acoustique et puissance moyenne rayonnée

# 5 Tuyau acoustique

## 5.1 Conditions aux limites

Propriétés

### Tuyau de section constante

- Continuité du débit volumique :  $v(x = 0^-, t)S = v(x = 0^+, t)S$
- Loi de la quantité de mouvement à la paroi  $S$  cste

$$m \frac{dv_p}{dt} = (p_0 + p_1(x = 0^-, t))S - (p_0 + p_1(x = 0^+, t))S + F_{autre}$$
$$= p_1(x = 0^-, t)S - p(x = 0^+, t)S + F_{autre}$$

Propriétés

### Tuyau à deux sections différentes

- Continuité du débit volumique :  $v_1(x = 0^-, t)S_1 = v_2(x = 0^+, t)S_2$
- Loi de la quantité de mouvement à la jonction  
 $p_1(x = 0^-, t) = p_2(x = 0^+, t)$  Admis

Méthode

### Etude d'un tube

- On pose l'expression de la pression *ou vitesse* solution de d'Alembert *Progressif + Regressive* en complexes
- Conditions aux limites pour déterminer les constantes

Méthode

### Etude simplifiée d'un tube

- Conditions aux limites
- Dessin
- Hypothèses sur l'expression des  $\lambda$  ou  $\nu$
- On pose l'expression du champ de pression *vitesse* qui va marcher *Ex : Stationnaire*
- On injecte dans Euler linéarisé pour avoir l'autre variable

## 1 Bilans de masse

### Bilan de masse sur un système fermé

On considère un écoulement unidirectionnel d'un fluide dans tuyau

- $\delta m(t) = \mu(x, t)Sdx$
- $$\begin{aligned} \delta m(t + dt) &= \mu(x, t + dt)S(x + dx - (x + v(x, t)dt)) + \mu(x + dx, t + dt)Sv(x + dx, t)dt \\ &= \mu(x, t + dt)SdxS(\mu(x + dx, t)v(x + dx, t) - \mu(x, t)v(x, t))dt \end{aligned}$$
- $\delta m(t + dt) - \delta m(t) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial(\mu v)}{\partial x} = 0$

Démo

### Bilan de masse sur un système ouvert

On considère le fluide contenu entre  $x$  et  $x + dx$

- $\delta m(t) = \mu(x, t)dxS$
- $\delta m(t + dt) = \mu(x, t + dt)Sdx$
- $\delta m_e = (D_m(x, t) - D_m(x + dx, t))dt$
- $d(\delta m) = \delta m_e \Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial(\mu v)}{\partial x} = 0$

Démo

## 2 Bilans de quantité de mouvement

- Bilan de masse, volume ou énergie Facile de définir  $\vec{j}$   $\Rightarrow$  Système ouvert
- Autre grandeur En particulier vectoriel  $\Rightarrow$  Système fermé

Méthode

### Schéma d'étude d'un bilan de quantité de mouvement

- Conservation du débit de matière
- Définir un système fermé et faire un schéma
- Calculer les quantités de mouvement à  $t$  et  $t + dt$
- BDA et 2<sup>e</sup> loi de Newton

Théorème

### Théorème de la quantité de mouvement

$$\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = \sum \vec{F}_{ext}dt \text{ au premier ordre en } dt$$

 On sépare en entrée, sortie, partie commune l'état du système entre  $t$  et  $t + dt$

 Forces de pression sur un système compliqué

- On combine à une surface simple pour faire un système fermé soumis à une pression uniforme

 Introduire les obstacles dans les systèmes étudiés

### Écoulement de Poiseuille

On considère un système initialement contenu dans le cylindre de rayon  $r < R$

- $\vec{p}(t) = \delta \vec{p}_e + \vec{p}_{com}(t)$   $\Rightarrow$  Par stationnarité Partie commune idem et Entrée=Sortie  $d\delta \vec{p}) = \vec{0}$
- $\vec{p}(t + dt) = \delta \vec{p}_s + \vec{p}_{com}(t + dt)$
- $\vec{F}_p = (p_e \pi r^2 - p_s \pi r^2) \vec{e}_x$
- $\vec{F}_{visc} = \sigma(r) \text{Contrainte surfacique} 2\pi r L \vec{e}_x$
- TQM :  $\sigma(r) = \frac{(p_s - p_e)V}{2L}$
- Pour un fluide newtonien  $\sigma(r) = \eta \frac{dv}{dr} \Rightarrow v(r) = \frac{p_e - p_s}{4\eta L} (R^2 - r^2) \vec{e}_x$  Intégration

Démo

## 3 Bilans énergétiques

Théorème

### Théorème de l'énergie cinétique

$$(E_c(t + dt) + E_p(t + dt)) - (E_c(t) + E_p(t)) = \delta W_{nc} = \mathcal{P}_{nc} dt$$

💡 Parfait et incompressible  $\Rightarrow$  Pas de travail des forces intérieures

Démo

### Travail dans un conduit

- $E_m(t) = \delta E_{me}(t) + E_{mcom}(t) = \frac{1}{2} D_m dt v_A^2 + D_m dt g z_A + E_{mcom}(t)$
- $E_m(t + dt) = \delta E_{ms} + E_{mcom}(t + dt) = \frac{1}{2} D_m dt v_B^2 + D_m dt g z_B + E_{mcom}(t + dt)$
- $dE_m = \frac{1}{2} D_m dt (v_B^2 - v_A^2) + D_m dt g (z_B - z_A)$  Stationnarité
- $\delta W_p = p_A S_A \vec{v}_A dt - p_B S_B \vec{v}_B dt = \left( \frac{P_A}{\mu} - \frac{P_B}{\mu} \right) D_m dt$
- TEM :  $dE_m = \delta W_p + \delta W_{int} \Rightarrow \delta W_{int} = 0$  Bernoulli

Dans un écoulement parfait et incompressible,  $\mathcal{P}_{in} = 0$

Le théorème de Bernoulli traduit de la conservation de l'énergie

⚠

Avec des gaz de température variable donc compressibles, un bilan énergétique est impossible, on remplace par un premier principe industriel

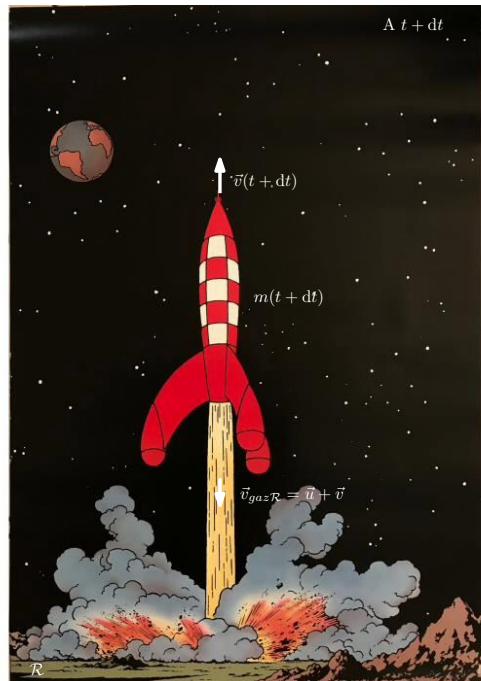
## 4 Écoulement non stationnaire

### Fusée du professeur Tournesol

- $\vec{p}_{\mathcal{R}}(t) = m(t) \vec{v}(t)$
- $\vec{p}_{\mathcal{R}}(t + dt) = m(t + dt) \vec{v}(t + dt) + D_m dt (\vec{u} - \vec{v}(t))$
- $m(t + dt) = m(t) - D_m dt$
- $$\begin{aligned} \vec{p}_{\mathcal{R}}(t + dt) - \vec{p}_{\mathcal{R}}(t) &= \frac{dm}{dt} dt \vec{v} + m \frac{d\vec{v}}{dt} dt + D_m dt (\vec{u} - \vec{v}(t)) \\ &= m(t) \frac{d\vec{v}}{dt} dt + D_m \vec{u} dt \end{aligned}$$

Démo

$$\begin{aligned}
 - \text{TQM} : \frac{d\vec{p}}{dt} &= m(t)\vec{A} = m(t)\frac{d\vec{v}}{dt} + D_m\vec{u} \\
 \Leftrightarrow m(t)\frac{d\vec{v}}{dt} &= m(t)\vec{A} - D_m\vec{u} \text{ Force de poussée}
 \end{aligned}$$



### 1 Notion de charge

Définition

- DEF: La charge électrique existe sous forme positive ou négative et est quantifiée
- La charge élémentaire est  $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$

Propriétés

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$$

- $\epsilon_0$  est la permittivité du vide :  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ F}^{-1} \cdot \text{m}$
- La force de Coulomb suit le principe de superposition
- Elle est validée pour des échelles spatiales de  $10^{-16}$  à  $10^8 \text{ m}$

 En augmentant les échelles de validité de la théorie de l'électromagnétisme on peut majorer la masse du photon de manière de plus en plus précise

Propriétés

#### Distributions de charge

- Modélisation **discrète** : La distribution est une collection de charges ponctuelles
- Modélisation **continue en volume**  
On définit la densité volumique de charges  $\rho(M) = \frac{dq}{d\tau}$  en  $\text{C.m}^{-3}$
- Modélisation continue en surface :  $dq = \rho(M)d\tau = \rho(P)e(P)dS$   
Pour  $e \rightarrow 0$  :  $dq = \lim_{e \rightarrow 0} (\rho(P)e(P))dS = \sigma(P)dS_\sigma$  est la densité surfacique de charges
- Modélisation continue linéique :  $dq = \rho(M)d\tau = \rho(M)S(M)dl$   
Pour  $S \rightarrow 0$  :  $dq = \lim_{S \rightarrow 0} (\rho(M)e(M))dS = \lambda(M)dS_\lambda$  est la densité surfacique de charges

### 2 Notion de champ

Définition

#### Champ électrostatique

$$\vec{F}_{D \rightarrow q_0} = q_0 \left( \sum_i \frac{q_i \vec{A}_i M}{4\pi\epsilon_0 A_i M^3} \right) = q_0 \vec{E}$$

- $\vec{E}$  est en  $\text{V.m}^{-1}$
- $\vec{E} = \iiint_{A \in D} \frac{\rho(P)d\tau}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P}M}{PM^3}$

Définition

#### Symétries et invariances

- Symétrie :  $D = S_\pi(D)$
- $$\begin{cases} \vec{E}_\perp(M') = -\vec{E}_\perp(M) \\ \vec{E}_\parallel(M') = \vec{E}_\parallel(M) \end{cases}$$
- D'où si  $\mathbf{M} \in (\pi) \Rightarrow \vec{E}(\mathbf{M}) \in (\pi)$

- Antisymétrie :  $D = S_\pi^*(D) = S_\pi \circ C(D) = C \circ S_\pi(D)$

$$\begin{cases} \vec{E}_\perp(M') = \vec{E}_\perp(M) \\ \vec{E}_\parallel(M') = -\vec{E}_\parallel(M) \end{cases} \quad \text{D'où si } \mathbf{M} \in (\pi) \Rightarrow \vec{E}(\mathbf{M}) \perp (\pi)$$

- Invariance : Invariance de la distribution par une transformation géométrique *Rotation, Translation*  
**Si  $D$  reste invariante par  $\mathcal{O}$ , alors  $\|\vec{E}\|$  ne dépend pas de la coordonnée relative à  $\mathcal{O}$**

💡 Pas de symétries ?  $\Rightarrow$  Décomposition de la distribution en systèmes  $\pm$  Ex : Trous présentant des symétries

### Théorème de Gauss

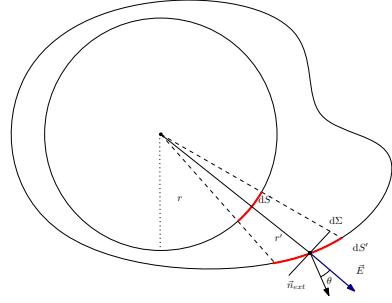
$$\phi_{\vec{E}} = \iint_{P \in S} \vec{E}(P) \cdot \vec{n}_{ext} dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

- Fonctionne car le champ décroît en  $\frac{1}{r^2}$
- $Q_{int} = \iint_{D \cup S} \rho d\tau$  pour une distribution continue

- ⚠ Pour  $q$  appartenant à la surface
- $$\phi_{\vec{E}} = \iint \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \cos\theta dS' \text{ or } \cos\theta dS' = d\Sigma = \frac{r'^2}{r^2} dS$$

$$\text{D'où } \phi_{\vec{E}} = \iint_{P \in S} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

- Pour  $q$  n'appartenant pas à la surface on prend l'union avec une sphère contenant  $q \Rightarrow \phi_{\vec{E}} = 0$



- “ Calcul de champ si les charges sont connues  $\Rightarrow$  Coulomb  
Calcul de charge si le champ est connu  $\Rightarrow$  Gauss

### Première équation de l'électrostatique - Équation de Maxwell Gauss

$$\operatorname{div} \vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$$

⚠ Calcul de  $\phi_{\vec{E}}$  avec le cube

💡 Green-Ostrogradsky à partir de Gauss

## 3 Notion de potentiel

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + cste$$

- Par le théorème de superposition  $V_{tot} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 O_i M}$
- Pour une distribution continue  $V(M) = \iiint_V \frac{\rho d\tau}{4\pi\epsilon_0 PM}$

⚠  $W = \int_{\Gamma} q_0 \vec{E}(M) \cdot d\vec{l} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$   
 $W_{AB}$  ne dépend pas du chemin suivi  $\Rightarrow$

## Définition

$$V(B) - V(A) = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

- On fait circuler le champ entre  $A$  et  $B$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

 À partir de l'expression de la circulation

  $V$  est défini à une constante additive près  $\Rightarrow$  On peut choisir  $\lim_{\infty} V = 0$  que si la distribution de charge ne s'étend pas jusqu'à l'infini

## Théorème

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$$

 Stokes

  $\vec{E}$  est un champ de gradient  $\Rightarrow$  Rotationnel est nul

## 4 Autres équations

## Théorème

### Équation de Poisson

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \end{array} \right.$$

## Théorème

### Équation de Laplace

Dans un région vide de charges

$$\Delta V = 0$$

## Méthode

### Calculs de champs électrostatiques

- Symétries et invariance Au besoin modifier le système

- Gauss
  - Choix d'une surface de Gauss contenant  $M$
  - Calcul du flux sortant
  - Calcul de  $Q_{int}$  Disjonction de cas possible
- Poisson  $V(M)$  puis  $\vec{E}(M)$

 Diminue la dimension : On écrase le volume en écrivant  $dq = \rho dV = \sigma dS = \lambda dl$

- Il y a discontinuité de  $\vec{E}$  de part et d'autre  $E_n$  traversant d'une surface chargée  
On a  $\pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

## 5 Topographie du champ

### Lignes de champ

DEF: Courbe tangente en tout point au champ électrique local :  $\vec{E}(M)d\vec{l} = \vec{0}$

- Les lignes de champ sont des courbes ouvertes Relient les charges ou l'infini

$$\blacksquare \quad \text{rot } \vec{v} = \vec{0}$$

$$-\operatorname{div}\vec{E}(M) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \begin{cases} \text{Sortent de } \oplus \\ \text{Rentrent dans } \ominus \end{cases}$$

- Les points d'intersection des lignes de champ sont des endroits de champ nul

### Tubes de champ

- L'intensité augmente quand les lignes de champ se rapprochent

$$\blacksquare \quad \iint_T \vec{E} \cdot \vec{n}_{ext} dS = 0 \Rightarrow \iint_{\Sigma_1} \vec{E}_1 \cdot \vec{n}_1 = \iint_{\Sigma_2} \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2 \Rightarrow \frac{\|\vec{E}_1\|}{\|\vec{E}_2\|} = \frac{\Sigma_2}{\Sigma_1}$$

### Surfaces équipotentielles

- Les lignes de champ sont orthogonales

$$\blacksquare \quad \text{Pour } M, N \in \text{quipotentielle}, \vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{l} = -dV = V(M) - V(N) = 0$$

## 6 Énergie électrostatique

### Énergie de constitution

DEF: Énergie que doit fournir un opérateur pour former la distribution à partir de charges à l'infini

$$U_{elec} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=2 \\ i \neq j}}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

$\blacksquare$  Somme des interactions entre paires

$$U_{elec} = \frac{1}{2} \iiint_D \rho(M) V(M) d\tau$$

$$U_{elec} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \|\vec{E}(M)\|^2$$

- $u_{elec}$  est la densité volumique d'énergie électrostatique
- $u_{elec} = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} \epsilon_0 \|\vec{E}(M)\|^2 d\tau$

## Boule chargée

On ramène des couches depuis l'infini

- $\delta W_{op} = d(\delta E_p) = \delta(E_p(r)) - \delta(E_p(+\infty)) = dqV(r)$
- Or  $V(r) = \frac{q(r)}{4\pi\epsilon_0} = \frac{r^2}{3\epsilon_0}\rho$  d'où  $\delta W_{op} = 4\pi r^2 \rho dr \times \frac{r^2}{3\epsilon_0}\rho = \frac{4\pi\rho^2}{3\epsilon_0}r^4 dr$  puis intégration pour obtenir  $W_{op} = U_{elec}$

$$U_{elec} = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

 Les noyaux d'énergie d'interaction électrostatique proche de l'interaction forte ont tendance à se décomposer par le mécanisme de radioactivité  $\alpha$

Exemple

## Condensateur plan

$$Q = \frac{\epsilon_0 S}{d} U \Rightarrow C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

- $C$  est la capacité du condensateur

 On considère le champ de deux plans parallèles et on en déduit  $V(z)$

 Dans un circuit RC

- $i = \frac{du}{dt} = C \frac{du_c}{dt}$
- $dE_{cond} = \delta W_{gen} - Ri^2 dt = (u_c - Ri)idt = u_c idt = C u_c du_c$

$$\Rightarrow E_{cond} = \frac{1}{2} C U^2$$

$$u_{elec} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \|\vec{E}(M)\|^2$$

- $u_{elec}$  est la densité volumique d'énergie électrostatique
- $U_{elec} = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} \epsilon_0 \|\vec{E}(M)\|^2 d\tau$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{cond} = \frac{1}{2} C U^2 \\ U = Ed \end{array} \right.$$

Exemple

## 7 Dipôle électrostatique

### Moment dipolaire

On se place dans l'approximation dipolaire  $\Rightarrow M$  très loin de la distribution de charges

$$\begin{aligned} - r_i^2 &= \overrightarrow{A_i M}^2 = (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA_i})^2 = r^2 - 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OA_i} + \rho_i^2 \\ - \frac{1}{r_i} &= \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OA_i}}{r^2} \right) + O\left(\frac{a^2}{r^2}\right) \text{ DL car } r \gg a_{Distance} \gg Distance \text{ caractéristique} \\ \Rightarrow V(M) &= \frac{\sum_i q_i}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\left( \sum_i q_i \overrightarrow{OA_i} \right) \overrightarrow{OM}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \leftrightarrow V(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\vec{p} \cdot \overrightarrow{OM}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \end{aligned}$$

$$Q = \sum_i q_i$$

- $Q$  est la charge totale
- Elle apparaît dans le terme monopolaire Peut être nul

$$\vec{p} = \sum_i q_i \overrightarrow{OA_i}$$

- $\vec{p}$  est le moment dipolaire
- Il apparaît dans le terme dipolaire

Démonstration

## Modèle du doublet de charges

- $\vec{p}$  est indépendant du choix de l'origine dans le cas d'une distribution globalement neutre
- On définit le barycentre des charges positives  $q\overrightarrow{OP} = \sum_{q_i > 0} q_i \overrightarrow{OA_i}$  et négatives  $-q\overrightarrow{ON} = \sum_{q_i < 0} q_i \overrightarrow{OA_i}$
- $\vec{p} = q\overrightarrow{OP} - q\overrightarrow{ON}$

$$\vec{p} = q\overrightarrow{NP}$$

–  $\|\vec{p}\|$  s'exprime en C.m  
 1D =  $\frac{1}{3} \times 10^{-29}$  C.m

- $V(M) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^-} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^+}$
- Approximation dipolaire  $r \gg a : r_-^2 = \|\overrightarrow{NM}\|^2 = (\overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OM})^2 = r^2 \left(1 - 2\frac{\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OM}}{r^2} + \frac{a^2}{4r^2}\right)$
- D'où  $\frac{1}{r^-} \simeq \frac{1}{r} \left(1 + \overrightarrow{ON} \cdot \frac{\overrightarrow{OM}}{r^2} + o\left(\frac{a}{r}\right)\right)$
- $V(M) = \frac{q\overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{OM}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{\vec{p} \cdot \overrightarrow{OM}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

Démo

## Champ électrostatique dipolaire

- $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}\right) = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_r + \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_\theta$
- Expression intrinsèque :  $\vec{E} = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{e}_r)\vec{e}_r - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{3(\vec{p} \cdot \overrightarrow{OM})\overrightarrow{OM}}{4\pi\epsilon_0 \|\overrightarrow{OM}\|^5} - \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 \|\overrightarrow{OM}\|^3}$

Démo

## Forces subies par un dipôle rigide

DEF: Un dipôle est rigide si  $\|\vec{p}\|$  peut être considérée constante

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{E}$$

Modèle du doublet de charge  $\Rightarrow \vec{F} = q\vec{E}(P) - q\vec{E}(N)$   
 $\vec{F} \cdot \vec{e}_x = q(E_x(P) - E_x(N))$   
 $\blacksquare = E_x(x + \frac{\delta x}{2}, \dots) - E_x(x - \frac{\delta x}{2}, \dots) = q \frac{\partial E_x}{\partial x} \delta x + \dots$

$$\vec{M}(O) = \vec{p} \wedge \vec{E}(M)$$

$\blacksquare \quad \vec{M}(O) = q\overrightarrow{OP} \wedge \vec{E}(P) - q\overrightarrow{ON} \wedge \vec{E}(N) : \vec{E}(N \text{ et } P) \approx \vec{E}(M)$

Propriétés

$\triangle$  Le moment résultant est la somme des moments et non le moment de la résultante

Pour un champ uniforme

- $\vec{E} = \vec{0}$
- $\vec{M}(O) = \vec{p} \wedge \vec{E}(M)$

Propriétés

## Énergie potentielle d'un dipôle rigide

- Interaction entre paires de charges :  $E_{\text{pair}} = qV(P) - qV(N)$
- Même raisonnement que pour la force :  $E_{\text{pair}} = q \left( \frac{\partial V}{\partial x} \delta x + \frac{\partial V}{\partial y} \delta y + \frac{\partial V}{\partial z} \delta z \right)$

- Energie fournie par l'opérateur pour amener un dipôle depuis l'infini

$$E_{\text{point}} = -\vec{p} \cdot \vec{E}(M)$$

 Autre démo :  $\vec{p}$  constant<sub>rigide</sub>  $\Rightarrow \vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{E} \overrightarrow{\text{grad}} (\vec{p} \cdot \vec{E})$

Moment à partir de l' $E_p$

  $\delta W = \mathcal{M}\omega dt = \mathcal{M}d\theta = -dE_p \Rightarrow \mathcal{M} = -\frac{\partial E_p}{\partial \theta}$

- Un dipôle électrostatique a tendance à s'aligner dans le même sens que le champ  $\vec{E}$  qu'il subit

## Interactions moléculaires

DEF: Certaines molécules neutres présentent une charge totale nulle mais un moment dipolaire permanent  
Elles s'orientent alors dans ce champ électrique et se rapprochent de l'ion  $\Rightarrow$  Solvatation

- Interaction de Keesom : Dipôle/Dipôle

$$— U_{d/d} = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1(O_2) = -p_1 \cdot \vec{E}_2(O_1) = \frac{-3(\vec{p}_1 \cdot \vec{r})(\vec{p}_2 \cdot \vec{r})}{4\pi\epsilon_0 r^5} + \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{4\pi\epsilon r^3} \simeq \frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon r^3}$$

 On considère un modèle à deux niveaux Aligné même sens ou aligné sens opposé  $\Rightarrow U = \pm \frac{p^2}{2\pi\epsilon_0 r^3} \Rightarrow \mathbf{P} = \frac{1}{Z} \exp\left(\frac{\pm U}{k_B T}\right)$   
Or  $\mathbf{P}_{\uparrow\uparrow} + \mathbf{P}_{\uparrow\downarrow} = 1 \Rightarrow Z = 2 \cosh(\beta U)$   
 $\langle U_{d/d} \rangle = -U\mathbf{P}_{\uparrow\uparrow} + U\mathbf{P}_{\uparrow\downarrow} \simeq -\frac{U^2}{k_B T} = -\frac{p^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 k_B T} \frac{1}{r^6}$

- Interaction de Debye - Dipôle/Dipôle induit

- Un atome<sub>molécule</sub> peut acquérir un moment dipolaire sous l'effet d'un champ extérieur

Séparation des barycentres positifs et négatifs  $\Rightarrow$  Polarisation

- $\vec{p} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}$  Réponse instantanée où  $\alpha$  est le coefficient de polarisabilité

  $\vec{F} = (\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{E}(M) = \epsilon_0 \alpha (\vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{E}(M) : \begin{cases} (\vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{E} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} (\|\vec{E}\|^2) + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \wedge \vec{E} \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = 0 \end{cases}$   
 $\Rightarrow \vec{F} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \alpha \overrightarrow{\text{grad}} (\|\vec{E}\|^2) = \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{1}{2} \epsilon_0 \alpha \|\vec{E}\|^2 \right) \text{ et } E_p = \frac{1}{2} \epsilon_0 \alpha \|\vec{E}\|^2 = -\frac{\alpha p^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^6}$

  $U_{VdW} = -\frac{K}{r^6}$   
 $U_{VdW} \Big| k_B T$

$$\vec{F}_{VdW} = -\frac{K'}{r^7} \vec{e}_r$$

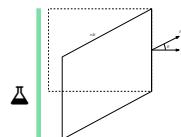
### 1 Courant électrique

$$i = \frac{dq}{dt}$$

–  $A = C.s^{-1}$

- $\vec{j} = nq\vec{v}$  en  $A.m^{-2}$  Chimie
- $\vec{j} = \sum_i n_i(P, t) q_i \vec{v}_i(P, t)$
- $i = \iint_{P \in S} \vec{j} \cdot \vec{n} dS$

$$\delta i = \vec{j} \cdot \vec{n} dS$$



$$\delta^2 q = nvdt \cos(\theta) dS$$

$$\Rightarrow \delta i = nq\vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

Définition

 Pour des distributions en volume on utilise le vecteur densité de courant  $\vec{j}$

Propriétés

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{j}) = 0$$

 Bilan de charges sur une tranche

– En régime stationnaire

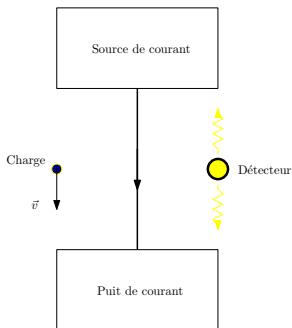
- $\operatorname{div}(\vec{j}) = 0$
- Conservation du flux
- Loi des noeuds

 Passage de la distribution volumique à surfacique

- Épaisseur  $\rightarrow 0$
- Conservation de la charge :  $dI = j\delta dl = j_s dl \Rightarrow \vec{j}_s = \lim_{\delta \rightarrow 0} \vec{j} S$

## 2 Champ magnétique

Démo



- Dans le référentiel d'une charge immobile, le puit fonctionne avant la source  
Le fil se charge et la charge interagit avec lui

$$\begin{aligned}
 & - \left\{ \begin{array}{l} ct_1 = L - vt_1 \\ ct_2 = L + vt_2 \end{array} \right. \Rightarrow \Delta t = \frac{2L}{c} \frac{V}{c} \\
 & - q = -i\Delta t \Rightarrow \lambda = \frac{q}{2L} = -\frac{i}{c} \frac{V}{c} \\
 & - 2\pi rhE_r(r) = \frac{\lambda j}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r \\
 & - \vec{F} = q\vec{E} = \frac{-qir}{2\pi\epsilon_0 c^2 r} \vec{e}_r \text{ or } \epsilon_0\mu_0 c^2 = 1 \\
 & - \Rightarrow \vec{F} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} qr \vec{e}_r = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} qr \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\theta = q \vec{v} \wedge \left( \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{e}_\theta \right) \\
 & \vec{F} = q \left( \vec{E}(M) + \vec{v} \wedge \vec{B}(M) \right) \quad \mid \quad - \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{e}_\theta \\
 & - \triangle \vec{B} \text{ est un pseudo-vecteur} \Rightarrow \text{Symétries} \neq
 \end{aligned}$$

### Symétries et invariances

- Symétrie :  $D = S_\pi(D)$

$$\begin{cases} \vec{B}_\perp(M') = \vec{B}_\perp(M) \\ \vec{B}_\parallel(M') = -\vec{B}_\parallel(M) \end{cases} \quad \text{D'où si } \mathbf{M} \in (\pi) \Rightarrow \vec{B}(\mathbf{M}) \perp (\pi)$$

- Antisymétrie :  $D = S_\pi^*(D) = S_\pi \circ C(D) = C \circ S_\pi(D)$

$$\begin{cases} \vec{B}_\perp(M') = -\vec{B}_\perp(M) \\ \vec{B}_\parallel(M') = \vec{B}_\parallel(M) \end{cases} \quad \text{D'où si } \mathbf{M} \in (\pi) \Rightarrow \vec{B}(\mathbf{M}) \in (\pi)$$



Symétrie est l'opposé à la symétrie usuelle

Définition

## 3 Équations de la magnétostatique

Théorème

### Équation locale de Maxwell-Ampère pour la magnétostatique

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}(M)$$

$\triangle$  Modifiée si courant variable

Théorème

### Équation locale de Maxwell-Thomson

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

“ Traduit de l'absence de charges magnétiques isolées ”

## Conservation du flux magnétique

Propriétés

⚠ L'orientation de la normale fixe l'orientation de la surface

1. Le flux magnétique à travers une surface fermée est nul
2. Le flux magnétique à travers deux surfaces s'appuyant sur un même contour est identique

1.  $\text{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \iint \vec{B} \cdot \vec{n}_{ext} dS = 0$

2.  $\Rightarrow \iint_{S_1} \vec{B} \cdot \vec{n}_1 dS + \iint_{S_2} \vec{B} \cdot (-\vec{n}_1) dS = 0$

“ Le flux magnétique s'exprime en webers :  $\text{Wb} = \text{T} \cdot \text{m}^2$

## Théorème d'Ampère

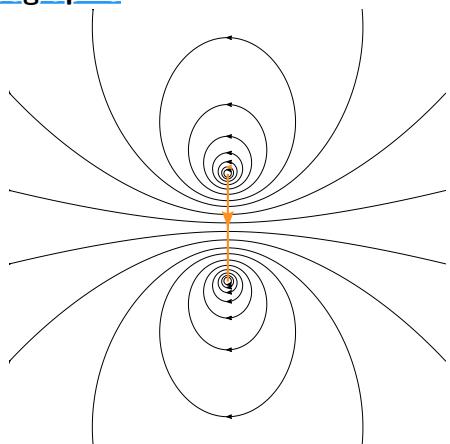
$$\oint_{\Gamma} \vec{B}(M) \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enlace}^{alg}$$

–  $I_{enlace}^{alg} = \iint_{\text{Maxwell-Ampère + Stokes}} \vec{j}(P) \cdot \vec{n} dS$

Théorème

💡 Toujours mentionner l'orientation du contour  
⚠ On en tient compte dans le sens des bornes d'intégration

## Topographie



- Les lignes de champ sont fermées
- Elles s'enroulent autour des lignes de courant
- Norme plus intense que les lignes de champ se resserrent

Propriétés

Méthode

## Champ magnétique créé par une distribution

- Symétries et invariances Superposition si besoin
- Choix d'un contour orienté et calcul de la circulation
- Calcul du courant enlacé algébrique
- Application du théorème

💡 On peut relier  $I$  et  $j$  :  $I = \iint \vec{j} \cdot \vec{e}_z dS$

💡 Pour l'écriture sous forme intrinsèque, on exprime le vecteur unitaire sous forme du produit vectoriel des deux autres

Fil rectiligne infini	$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$
Solénoïde rectiligne	$\begin{cases} \vec{B}_{ext} = \vec{0} \\ \vec{B}_{int} = \mu_0 \frac{N}{L} I \vec{e}_z \end{cases}$

»

**Discontinuité de  $\vec{B}$  au passage d'une surface**

- $\vec{B}(r = a^+) - \vec{B}(r = a^-) = -\mu_0 j_S \wedge \vec{n}$
- $I_{tot} = \frac{N}{L} l I = j_S l \Leftrightarrow j_S = \frac{N}{L} I$

**Énergie magnétique**

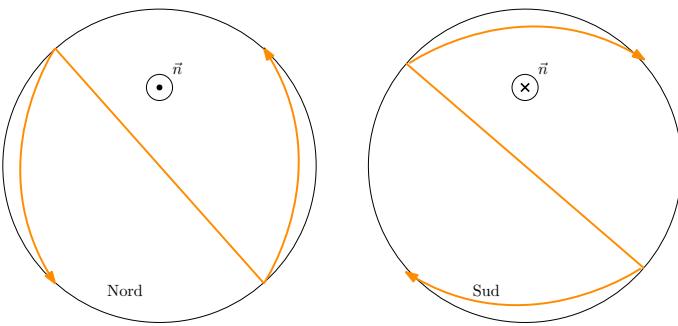
$$E_{vol} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

- $E_{vol}$  est l'énergie magnétique par unité de volume

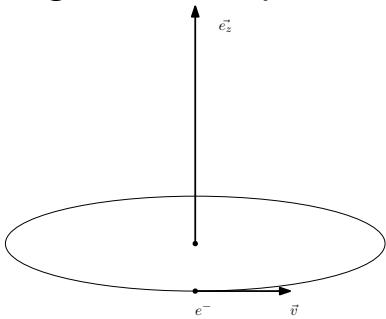
**4 Dipôle magnétique**

$$\vec{\mu} = IS\vec{n}$$

- $\vec{n}$  est orientée conformément au sens du courant



- On peut assimiler un aimant à une boucle de courant et le représenter par un moment magnétique  $\vec{\mu}$

**Magnétisme atomique**

$$\vec{\mu} = \gamma \vec{L}$$

- $\vec{L} = m \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}_R(M) = mr^2\omega \vec{n} = mr v \vec{n}$
- $\vec{\mu} = \frac{-e}{T} \pi R^2 \vec{n} = \frac{-e}{2m} \vec{L}$

- $\gamma$  est le rapport gyromagnétique
- Pour l'électron  $\gamma = \frac{-e}{2m}$

## Moment magnétique orbital

- $L_z = m_l \hbar$
- $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \Rightarrow \langle L^2 \rangle = 3\langle L_z^2 \rangle \Rightarrow \langle L^2 \rangle = 3 \frac{1}{2l+1} \sum_{m_l=-l}^{m_l=l} m_l^2 \hbar^2 \Rightarrow \|\vec{L}\| = \hbar \sqrt{l(l+1)}$
- $\mu_z = \frac{-e}{2m} m_l \hbar$

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 9.274 \times 10^{-24} \text{ A.m}^2$$

-  $\mu_B$  est le magnéton de Bohr

- Le nombre magnétique de spin  $m_s = \pm 1$  est également associé à un moment magnétique de spin :  $\vec{\mu}_s = -\frac{e}{m} \vec{S} = -2\mu_B \frac{\vec{S}}{\hbar}$ . En projection  $\mu_{s,z} = \mathbf{P} \mu_B$

Exemple

## Actions mécaniques subies par un moment magnétique

$$\vec{F} = (\mu \cdot \overrightarrow{\text{grad }}) \overrightarrow{B_{ext}}(M)$$

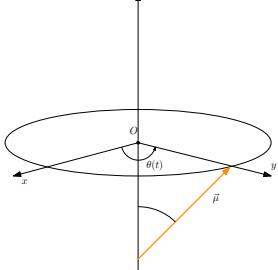
⚠ Pour un dipôle magnétique rigide

$$\vec{M} = \vec{\mu} \wedge \overrightarrow{B_{ext}}(M)$$

$$E_{pint} = -\vec{\mu} \cdot \overrightarrow{B_{ext}}(M)$$

Propriétés

## Mouvement de précession



- $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mu} \wedge \vec{B} \Rightarrow \frac{d\vec{\mu}}{dt} = (-\gamma \vec{B}) \wedge \vec{\mu}$  Précession à  $\vec{\Omega} = -\gamma \vec{B}$
  - $(\vec{\mu}, \vec{B})$  constant :  $\frac{d(\vec{\mu} \cdot \vec{B})}{dt} = \vec{B} \frac{d\vec{\mu}}{dt} \vec{B}$  constant  $= \vec{B} \cdot (-\gamma \vec{B} \wedge \vec{\mu}) = 0$
  - $\|\mu\| = \text{cste} : \frac{d\|\vec{\mu}\|}{dt} = 2\vec{\mu} \frac{d\vec{\mu}}{dt} = 2\vec{\mu}(-\gamma \vec{B} \wedge \vec{\mu}) = 0$
  - $\vec{\mu}$  tourne autour de  $\vec{B}$  :  $\vec{\mu} = \mu_x \vec{e}_x + \mu_y \vec{e}_y$
- $$\begin{cases} \frac{d\mu_x}{dt} = \gamma B \mu_y \\ \frac{d\mu_y}{dt} = -\gamma B \mu_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2 \mu_x}{dt^2} + \Omega^2 \mu_x = 0 \\ \frac{d^2 \mu_y}{dt^2} + \Omega^2 \mu_y = 0 \end{cases}$$

Propriétés

## 5 Magnétisme

- **Diamagnétisme** : Tous les matériaux acquièrent un moment magnétique *faible* induit de sens opposé au champ magnétique auquel ils sont soumis
- **Paramagnétisme** : Certaines molécules ont un moment magnétique permanent non nul
  - Absence de  $\vec{B}$  : L'agitation thermique rend toutes les orientations équiprobables  
⇒ Moment magnétique moyen nul
  - Présence de  $\vec{B}$  : Les différents moments magnétiques ont un mouvement de précession  
⇒ Il existe une orientation moyenne dans le champ privilégiée
- **Ferromagnétisme** : Certains matériaux ont un  $\vec{\mu} \neq \vec{0}$  en l'absence de champ extérieur  
Il est nécessaire qu'ils possèdent des électrons célibataires

Définition

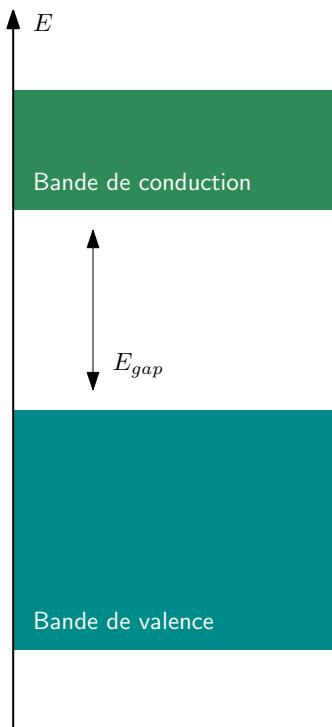
## Force d'adhérence

DEF: Force nécessaire pour séparer deux aimants identiques

⚠ Par analyse dimensionnelle  $\vec{F} = \frac{B^2 S}{\mu_0}$

## 1 Conduction

Définition



- Le milieu conducteur est constitué de charges mobiles en interaction permanente avec un ensemble de charges fixes dans le référentiel lié au conducteur
- La conductivité électrique est un phénomène quantique  
Ce sont les collisions avec les défauts qui sont à l'origine de la résistance électrique

Propriétés

### Modèle de Drude

- Le comportement du milieu résulte de la somme des comportements individuels des électrons
- Les électrons subissent des collisions instantanées  
Après collision, la vitesse d'un électron donné est aléatoire
- Les électrons sont en équilibre thermodynamique avec leur milieu environnant par le biais de collision

Théorème

### Loi d'Ohm locale

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

–  $\gamma = \frac{nq^2\tau}{m}$  est la conductivité en  $\text{S.m}^{-1} = \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$

- 
- $\vec{v}(t_{i+1})_{\text{Avant collision}} - \vec{v}(t_i)_{\text{Après collision}} = \frac{q\vec{E}}{m}(t_{i+1} - t_i)$
  - $\langle \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}_i \rangle \simeq 0 + \frac{q\vec{E}}{m\tau} \text{ Durée moyenne entre deux collisions}$
  - $\langle \vec{j} \rangle = nq\langle \vec{v} \rangle = \frac{nq^2\tau}{m}\vec{E}$

## Équation du mouvement moyen des électrons

- La probabilité  $dp$  qu'un électron subisse une collision entre  $t$  et  $t + dt$  est  $dp = \frac{dt}{\tau}$
- $\vec{p}_i(t + dt) = \left(1 - \frac{dt}{\tau}\right) (\vec{p}_i(t) + q\vec{E}dt) + \frac{dt}{\tau} (\vec{p}_{i0} + q\vec{E}dt)$
- En moyennant pour  $N \gg 1$  :  $m \frac{d\vec{v}}{dt}(M, t) = m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla M, t) = q\vec{E}(M, t) - \frac{m}{\tau} \vec{v}(M, t)$

$$\vec{F}_{col} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$$

–  $\vec{F}_{col}$  est la force d'interaction avec le réseau cristallin

Démo



$$n \text{ Nombre d'électrons libres par unité de volume dans le cuivre} = 2 \frac{\mu_{Cu}}{M_{Cu}} \mathcal{N}_A \quad | \quad 10^{29} \text{ m}^{-3}$$

Méthode

## Utilisation de la loi d'Ohm locale pour le calcul de résistances

- Calcul de  $\vec{j}$  à partir de l'intensité
- Application de la loi d'Ohm locale
- Circulation du potentiel

Démo

## Conduction unidimensionnelle

- $\vec{j} = \frac{I}{\pi R^2} \vec{e}_z$
- $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma} = \frac{I}{\gamma \pi R^2} \vec{e}_z$
- $U = V_1 - V_2 = \int_{1 \rightarrow 2} \vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow R_{elec} = \frac{l}{\gamma \pi R^2}$

Théorème

## Loi d'Ohm locale en présence d'un champ magnétique

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} + \frac{q\tau}{m} \vec{j} \wedge \vec{B}_0 = \gamma \left( \vec{E} + \frac{1}{nq} \vec{j} \wedge \vec{B}_0 \right)$$

- $R_H = \frac{1}{nq}$ , la constante de Hall
- En présence du champ magnétique, les propriétés de conduction ne sont plus isotropes

$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B} - \frac{m}{\tau} \vec{v} \Rightarrow \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{q}{m} \vec{j} \wedge \vec{B}_0 - \frac{\vec{j}}{\tau}$  puis évaluation en régime stationnaire

Propriétés

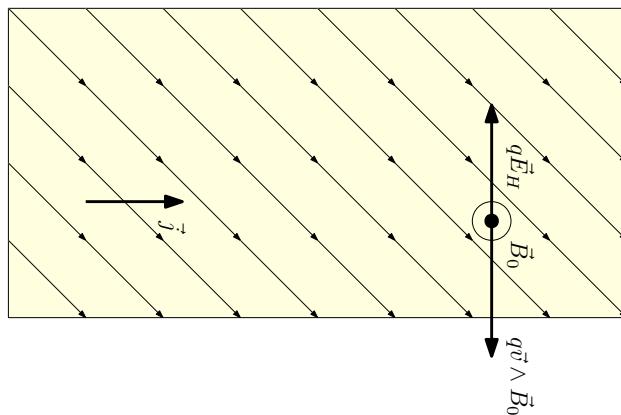
## Effet Hall

- On étudie un conducteur de la forme d'un ruban très peu épais, peu large et très allongé  
La géométrie impose un courant  $\vec{j} = j_x \vec{e}_x$

$$-\vec{j} = \frac{I}{L_x L_y} \rightarrow \begin{cases} E_x = \frac{j_x}{\gamma} \\ E_y = R_H j_x B_0 \end{cases}$$

– Le champ transverse est le champ de Hall :  $\vec{E}_H = -R_H \vec{j} \wedge \vec{B}_0$

$$- U_H = V_A - V_B = \int_A^B E_H L_y = \frac{R_H}{L_z} B_0 I$$



### 3 Forces de Laplace

Charge	Densité volumique	Charge électrique	Vitesse	PFD
Fixe = Ions	$n$	$q$	$\vec{V}$	$M\vec{a} = q\vec{E} + q\vec{V} \wedge \vec{B} + \frac{m}{\tau} \vec{v}$
Mobile = $e^-$	$n$	$-q$	$\vec{V} + \vec{v}$	$m\vec{a} = -q\vec{E} - q(\vec{v} + \vec{V}) \wedge \vec{B} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$
– $\sum$ PFD : $dN(m+M)\vec{a} = -dNq\vec{v} \wedge \vec{B} = -(nq\vec{v} \wedge \vec{B})d\tau = \vec{j} \wedge \vec{B}d\tau$ où $\vec{j} = -nq\vec{v}$ – PFD : $\vec{v} + \vec{V})nd\tau \times (1) + \vec{v}nd\tau(2)$ $\Rightarrow nd\tau \frac{dE_{tot}}{dt} = -nq\vec{V} \cdot \vec{E}d\tau - nd\tau \frac{m}{\tau} \vec{v}^2 = \vec{j} \cdot \vec{E}d\tau - \frac{nm}{\tau} v^2 d\tau$				

$$d\vec{F}_{Laplace} = (\vec{j} \wedge \vec{B})d\tau$$

– Pour une distribution en volume

$$d\vec{F}_{Laplace} = I\vec{l} \wedge \vec{B}$$

– Pour une distribution linéique

$$d\mathcal{P}_{Champ \rightarrow Matière} = \vec{j} \cdot \vec{E}d\tau$$

▲ En régime stationnaire :  $\vec{j} \cdot \vec{E}d\tau + d\mathcal{P}_{col}$

La puissance cédée par le champ à la matière est dissipée par effet Joule lors des collisions

## ÉQUATIONS DE MAXWELL

### 1 Équations de Maxwell

#### Équations de Maxwell

Équation	Statique	Dynamique	Forme intégrale
<b>Maxwell-Faraday</b>	$\star \quad \text{rot} \vec{E} = \vec{0}$	$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	Loi de Faraday $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_{\vec{B}}}{dt}$
<b>Maxwell-Gauss</b>		$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	Théorème de Gauss $\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n}_{ext} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$
<b>Maxwell-Thomson</b>		$\text{div} \vec{B} = 0$	Conservation du flux de $\vec{B}$ $\iint_S \vec{B} \cdot \vec{n}_{ext} dS = 0$
<b>Maxwell-Ampère</b>	$\star \quad \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$	$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	Théorème d'Ampère généralisé $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enclace}^{alg} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_{\vec{E}}}{dt}$

Théorème

“ Dans Maxwell-Ampère  $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  est le courant de déplacement

⚠

$\text{rot} \vec{E} \neq \vec{0} \Rightarrow$  Pas de potentiel tel  $\vec{E} = -\nabla V$

Théorème

#### Phénomène de propagation

$$\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$$

- Permittivité du vide :  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$
- Perméabilité magnétique du vide :  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ F.m}^{-1}$

“  $\rho(M, t) = \epsilon_0 \text{div} \vec{E} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = \text{div} \left( \text{rot} \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{j} \right) = -\text{div} \vec{j}$   
 On retrouve l'équation locale de conservation de la charge

### 2 Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide



Équation de propagation pour  $\vec{A} \Rightarrow$  Calcul de  $\text{rot}(\text{rot} \vec{A})$

Démo

$$-\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = \text{rot} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \Rightarrow \text{grad} (\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot} \vec{B})$$

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

- Equation d'onde
- $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$
- De même  $\Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

💡 Pour relier une variable à l'autre on injecte dans l'équation de Maxwell faisant apparaître l'inconnue dérivée du temps

### Onde plane progressive

- La solution générale est :  $\vec{E}(M, t) = \vec{E}_+ \left( t - \frac{x}{c} \right) + \vec{E}_- \left( t + \frac{x}{c} \right)$
- $\vec{E} \left( t - \frac{x}{c} \right) = E_0 (f_x(\alpha) \vec{e}_x + f_y(\alpha) \vec{e}_y + f_z(\alpha) \vec{e}_z)$
- $\text{div} \vec{E} = E_0 \frac{d f_x}{d \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0 \Rightarrow f_x(\alpha) = \text{cste} = 0$
- $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \\ \frac{E_0}{c} f'_z(\alpha) \\ -\frac{E_0}{c} f'_y(\alpha) \end{cases} = \begin{cases} -\frac{\partial B_x}{\partial t} = -\frac{dB_x}{d\alpha} \\ -\frac{\partial B_y}{\partial t} = -\frac{dB_y}{d\alpha} \\ \frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{dB_z}{d\alpha} \end{cases}$
- Finalement  $\vec{E} = E_0 \begin{cases} 0 \\ f_y \left( t - \frac{x}{c} \right) \\ -f_z \left( t - \frac{x}{c} \right) \end{cases}$  et  $\vec{B} = \frac{E_0}{c} \begin{cases} 0 \\ -f_z \left( t - \frac{x}{c} \right) \\ f_y \left( t - \frac{x}{c} \right) \end{cases}$

Démo

- $\begin{cases} \vec{E} \cdot \vec{e}_x = 0 \\ \vec{B} \cdot \vec{e}_x = 0 \end{cases} \Rightarrow$  Onde transverse
- $\vec{E} = \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont orthogonaux
- $\|\vec{E}\| = c$

### Relation de structure

$$c \vec{B} = \vec{e}_x \wedge \vec{E}$$

⚠ N'utiliser que pour les ondes planes

Démo

### Relation de dispersion

- $\begin{cases} \vec{E}(x, t) = E_0 \exp(i(\omega t - kx)) \vec{e}_y \\ \vec{B}(x, t) = \frac{E_0}{c} \exp(i(\omega t - kx)) \vec{e}_z \end{cases} \Rightarrow k = \pm \frac{\omega}{c}$
- $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c \Rightarrow$  Propagation libre non dispersive

⚠ Un changement de milieu ou de conditions aux limites peut modifier la relation de dispersion

## Transfert d'énergie électromagnétique

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\Pi}(M, t) = 0$$

–  $\vec{\Pi}(M, t) = \vec{E} \wedge \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$  est le vecteur de Poynting en  $\text{W.m}^{-2}$   
*Vecteur densité de courant d'énergie électromagnétique*

“ Dans un milieu où il existe des courants, l'équation se réécrit :  $\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\Pi}(M, t) = - \vec{j} \cdot \vec{E}$

- Maxwell-Ampère  $\Rightarrow \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \frac{1}{\mu_0} \vec{B} = \epsilon_0 \vec{E} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \epsilon_0 \|\vec{E}\|^2 \right)$
- Formule d'analyse vectorielle  $\Rightarrow \operatorname{div} \left( \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \wedge \vec{E} \right) = \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \frac{\vec{B}}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \epsilon_0 \|\vec{E}\|^2 + \frac{1}{2} \frac{\|\vec{B}\|^2}{\mu_0} \right)$  *On identifie  $u_{em}$*

$$\mathcal{P} = \iint_S \vec{\Pi}(M, t) \cdot \vec{n} dS$$

–  $\mathcal{P}$  est la puissance électromagnétique transférée à travers la surface  $S$

Dans le cas d'onde plane progressive harmonique  $\langle u_{em} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{1}{2} |\underline{E}_0|^2 + \frac{1}{2\mu_0} \frac{1}{2} |\underline{B}|^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$

“  $\langle \vec{\Pi} \rangle = \langle \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}^*}{\mu_0} \right) = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \vec{e}_x$

**Interprétation corpusculaire** :  $\langle u_{em} \rangle = \langle n \rangle \hbar \omega \Rightarrow \langle n \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2\hbar\omega}$

“ On peut définir une quantité de mouvement par unité de volume :  $\langle \vec{g} \rangle = \langle n \rangle \hbar k \vec{e}_x = \frac{\langle u_{em} \rangle}{c} \vec{e}_x = \frac{\langle \vec{\Pi} \rangle}{c^2} \vec{e}_x = \langle \epsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B} \rangle$

## Etats de polarisation

DEF: Définition

Polarisation	Expression
Elliptique	$\vec{E} = E_{0x} \cos \left( \omega t - \frac{\omega}{c} x \right) \vec{e}_x + E_{0y} \cos \left( \omega t - \frac{\omega}{c} x + \varphi \right) \vec{e}_y$
Circulaire	$\vec{E} = E_0 \cos \left( \omega t - \frac{\omega}{c} x \right) \vec{e}_x + E_0 \cos \left( \omega t - \frac{\omega}{c} x + \varphi \right) \vec{e}_y$
Rectiligne	$\vec{E} = E_{0x} \cos \left( \omega t - \frac{\omega}{c} x \right) \vec{e}_x + E_{0y} \cos \left( \omega t - \frac{\omega}{c} x \right) \vec{e}_y$

“ Une polarisation rectiligne peut s'exprimer comme somme de polarisations circulaires et inversement

## Déterminer le sens de polarisation

- On se place par exemple en  $z = 0$
- On représente  $\vec{E}(z = 0, t)$  pour  $\omega t = 0$  et  $\omega t = \frac{\pi}{2}$  et on constate dans quel sens tourne l'ellipse

Sens	Direct	Indirect
Polarisation	Gauche	Droite

### 3 ARQS

Définition

DEF: Situation où les effets de propagation sont négligeables

$$\tau \gg \frac{L}{c}$$

- Extension spatiale :  $L$
- Temps caractéristique :  $\tau$

#### Approximations

 On adimensionne les équations de Maxwell

$$\vec{\text{rot}}' \vec{E}' = -\frac{L}{c\tau} \frac{cB_0}{E_0} \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'}$$

$$\vec{\text{rot}}' \vec{B}' = \frac{L}{B_0} \mu_0 \vec{j} + \frac{L}{c\tau} \frac{cE_0}{B_0} \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t'}$$

Propriétés

Approximation	Electroquasistatique	Magnétoquasistatique <i>Très courant</i>
Expression	$E_0 \gg cB_0$	$cB_0 \gg E_0$
Équations de Maxwell	$\begin{cases} \vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0} \\ \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{div} \vec{B} = 0 \\ \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{div} \vec{B} = 0 \\ \vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{0} \end{cases}$

 Au lieu d'utiliser l'expression locale avec  $\vec{\text{rot}}$  ou  $\text{div}$  on peut avantageusement revenir aux formes intégrales

## 1 Propriétés

DEF: Un plasma est un gaz où tout ou partie des atomes sont totalement ionisés

- On le caractérise par
  1. Sa densité électronique
  2. Sa température

Définie à partir de la vitesse quadratique moyenne  $u_e^* = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_e}}$

### Longueur d'écran de Debye

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{2n_{e0} e^2}}$$



- Densité électronique avec Maxwell-Boltzmann
- Densité volumique de charge linéarisée
- Équation de poisson en faisant apparaître une longueur caractéristique

A une échelle spatiale supérieure à la longueur de Debye, on peut considérer le plasma comme électriquement neutre

### Pulsation plasma

Bilan de charges dans une petite tranche en déplacement

- Conservation de la charge :  $n_e = n_{e0} \left( 1 - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)$
- Densité volumique de charge :  $\rho(x, t) = n_{e0} e_{ions} + n_e(x, t)(-e)_{e^-} = n_{e0} e \frac{\partial \xi}{\partial x}$
- Champ électrique résultant :  $\begin{cases} \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{E}(M) = E(x, t) \vec{e}_x \end{cases} \Rightarrow E(x, t) = \frac{n_{e0} e}{\epsilon_0} \xi(x, t) + cste = 0$
- Équation du mouvement :  $n_{e0} S dx m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = n_{e0} S dx (-e) E(x, t) \Rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{n_{e0} e^2}{m \epsilon_0} \xi(x, t)$

$$\omega_P = \sqrt{\frac{n_{e0} e^2}{m \epsilon_0}}$$

- $\omega_P$  est la pulsation plasma
- Seul  $\omega \approx \omega_P$  peut exciter des oscillations de  $\rho$

### Paramètre plasma

$$\langle e_c \rangle = \frac{1}{2} m u_e^{*2} = \frac{3}{2} k_B T$$

$$-\Lambda \propto \left( \frac{\langle e_c \rangle}{\langle e_p \rangle} \right)^3$$

$$4\pi \bar{d}^3 n_{e0} = 1 \Rightarrow \bar{n}_{e0} \Rightarrow \langle e_p \rangle \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 n_{e0}^{-\frac{1}{3}}}$$

“ Un plasma dilué est à  $n_{e0}$  faible soit  $\Lambda \gg 1$

## 2 Propagation d'une onde électromagnétique

### Hypothèses

Propriété	Repos	Perturbation
Densité électronique	$n_{e0}$	$n(M, t) = n_{e0} + n_1(M, t)$
Champ électrique	$\vec{E}_0(M) = \vec{0}_{\text{Neutralité}}$	$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_1(M, t)$
Champ magnétique	$\vec{B}_0 = \vec{0}_{\text{Non magnétisé}}$	$\vec{B}(M, t) = \vec{B}_1(M, t)$
Courants électriques	$\vec{j}_0(M) = \vec{0}_{\text{Charges immobiles}}$	$\vec{j}(M, t) = \vec{j}_1(M, t) = -n_e(M, t)e\vec{v}(M, t)$
Pression	$P_0$	$P(M, t) = P_0 + p_1(M, t)$

Propriétés

### Équations fondamentales linéarisées

- Equations de Maxwell
 
$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E}_1 = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{E}_1 = -e \frac{n_1}{\epsilon_0} \\ \text{div } \vec{B}_1 = 0 \\ \text{rot } \vec{B}_1 = -\mu_0 n_e e \vec{v}_1 + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} \end{cases}$$
- Equation locale de conservation de la charge :  $\frac{\partial(-en_1)}{\partial t} + \text{div}(-en_e \vec{e}_1) = 0 \Rightarrow \frac{\partial n_1}{\partial t} + \text{div}(n_e \vec{v}_1) = 0$   
 $\rightarrow$  Linéarisation :  $\frac{\partial n_1}{\partial t} + n_{e0} \text{div}(\vec{v}_1) = 0$
- Equation du mouvement des électrons 2 approches

Mécanique des fluides	$n_e m \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + n_e m (\vec{v}_1 \cdot \text{grad } ) \vec{v}_1 = -\text{grad } p_1 - n_e e \vec{E}_1 - n_e e \vec{v}_1 \wedge \vec{B}$
PFD à 1 e <sup>-</sup>	$\rightarrow$ Linéarisation $n_{e0} m \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\text{grad } p_1 - n_{e0} e \vec{E}_1$
	$m \frac{d \vec{v}_1}{dt} = -e \vec{E} - e \vec{v}_1 \wedge \vec{B}_1$

“ Justification de la simplification de  $\vec{B}$  :  $\frac{\|n_e e \vec{v}_1 \wedge \vec{B}_1\|}{\|n_e e \vec{E}_1\|} = \frac{v_1 B_1}{E_1} \sim \frac{v_1}{c} \ll 1$

Propriétés

### Cas d'une onde transverse électrique

On choisit  $\vec{E}$  de la forme  $\vec{E}_1(M, t) = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y$

- Maxwell-Gauss  $\Rightarrow \text{div } \vec{E}_1 = \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0_{\text{Transverse}} = \frac{n_1(x, t)e}{\epsilon_0} \Rightarrow n_1(x, t) = 0$
- Conservation de la charge :  $\text{div } \vec{v}_1 = 0$
- Divergence de l'équation du mouvement :  $n_{e0} m \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{v}_1) = -\Delta p_1 - n_{e0} \text{div } \vec{E}_1 \Rightarrow \Delta p_1 = 0$   
 $p_1(M, t) = p_{10} e^{i(\omega t - kx)} \Rightarrow p_1 = 0$
- Densité de courant :  $\vec{j}_1 = -n_{e0} e \vec{v}_1(M, t) \Rightarrow m \frac{\partial \vec{j}_1}{\partial t} = n_{e0} e^2$

$$\frac{\partial \vec{j}_1}{\partial t} = \frac{n_{e0} e^2}{m} \vec{E}_1 = \epsilon_0 \omega_P^2 \vec{E}_1 \quad \mid \quad - \omega_P = \sqrt{\frac{n_{e0} e^2}{m \epsilon_0}}$$

Démo

**Démo**

$$\mathcal{P}_{champ \rightarrow Matière} = \langle \vec{j}_1 \cdot \vec{E}_1 \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{j}_1 \cdot \vec{E}_1^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{\gamma} |\vec{E}_1|^2) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{\gamma}) |\vec{E}_1|^2 = 0 \Rightarrow \text{Aucun transfert d'énergie}$$

### Equation de propagation du champ électrique

- Maxwell-Ampère dérivé :  $\operatorname{rot} \left( \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \right) = \mu_0 \epsilon_0 \omega_P^2 \vec{E}_1 + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}_1}{\partial t^2}$

- $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}_1) = -\operatorname{rot} \left( \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \right) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E}_1 - \Delta \vec{E}_1$

$$\Delta \vec{E}_1 = \frac{\omega_P^2}{c^2} \vec{E}_1 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_1}{\partial t^2}$$

- Relation de dispersion :  $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_P^2}{c^2}$

$$\underline{n}(\omega) = \frac{\underline{k}(\omega)}{\omega} = \sqrt{1 - \left( \frac{\omega_P}{\omega} \right)^2}$$

- $\underline{n}$  est l'indice complexe du plasma
- $\operatorname{Re}(\underline{n})$  est l'indice de réfraction
- $\operatorname{Im}(\underline{n})$  est l'indice d'extinction

Démo

### Zone de transparence $\omega > \omega_P$

- $\underline{k} = \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}} = \pm \frac{\omega n}{c}$

- $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}$

- $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{kc^2}{\omega} = \frac{c^2}{v_\varphi} = nc$

$$\vec{B}_1 = \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}_1}{v_\varphi}$$

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = E_0 \exp \left( \left( \omega t - \frac{n \omega x}{c} \right) \right) \vec{e}_y \\ \vec{B}_1 = E_0 \frac{n}{c} \exp \left( \left( \omega t - \frac{n \omega x}{c} \right) \right) \vec{e}_y_{Maxwell} \end{cases}$$

- Relation de structure
- $(\vec{u}, \vec{E}_1, \vec{B}_1)$  est un trièdre direct
- $\|\vec{B}_1\| = \frac{\|\vec{E}_1\|}{v_\varphi}$

- $\langle \vec{\Pi}(M, t) \rangle = \langle \vec{E}_1 \wedge \frac{\vec{B}_1}{\mu_0} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c n E_0^2 \vec{e}_x$

Propriétés

### Zone d'opacité $\omega < \omega_P$

- $\underline{k} = -ik''$  où  $k'' = \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}} = \pm \frac{\omega n}{c}$

- $\underline{n} = -in''$  où  $n'' = \pm \sqrt{\frac{\omega_P^2}{\omega^2} - 1}$

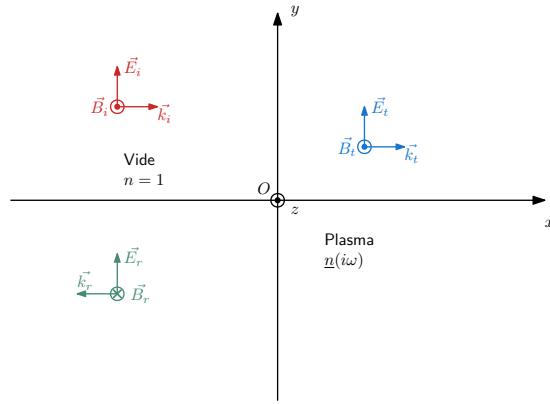
- $\langle \vec{\Pi}(M, t) \rangle = \langle \vec{E}_1 \wedge \frac{\vec{B}_1}{\mu_0} \rangle = 0 \Rightarrow \text{Onde stationnaire Pas de vitesse de groupe ou de phase}$

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = E_0 \exp \left( \left( \omega t + i n'' \frac{\omega x}{c} \right) \right) \vec{e}_y \\ \vec{E}_1(M, t) = E_0 e^{\left( -\frac{x}{\delta} \right)} \cos(\omega t) \vec{e}_y_\delta = \frac{c}{n'' \omega} \text{ Evanescente} \\ \vec{B}_1 = \vec{E}_1(M, t) = \frac{E_0}{\delta \omega} e^{\left( -\frac{x}{\delta} \right)} \sin(\omega t) \vec{e}_y_{Maxwell} \end{cases}$$

Propriétés

### Réflexion sur un plasma en incidence normale

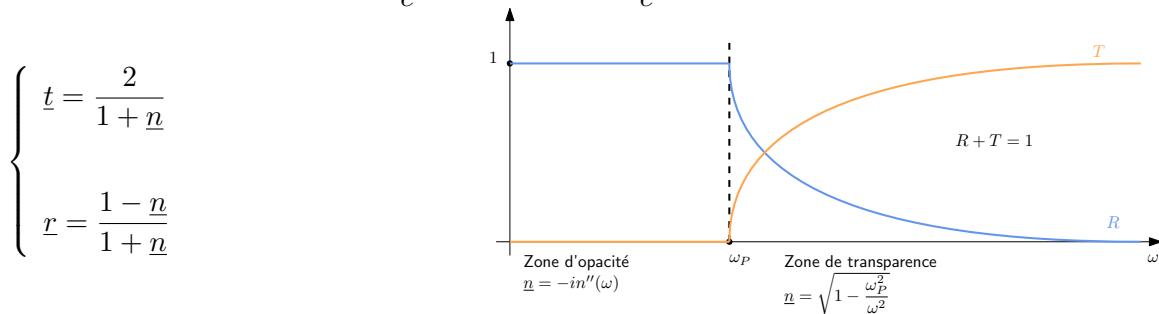
Démo



$$\begin{aligned} x \geq 0 & \quad x \leq 0 \\ - \vec{E}(x \leq 0, t) &= E_0 e^{i(\omega t - \frac{\omega x}{c})} \vec{e}_y + \underline{r} e^{i(\omega t + \frac{\omega x}{c})} \vec{e}_y \\ - \vec{B}(x \leq 0, t) &= \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - \frac{\omega x}{c})} \vec{e}_z - \underline{r} \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t + \frac{\omega x}{c})} \vec{e}_z \\ - \vec{E}(x \geq 0, t) &= \underline{t} E_0 e^{i(\omega t - \frac{\omega x}{c})} \vec{e}_y \\ - \vec{B}(x \geq 0, t) &= \frac{\underline{n}}{c} \underline{t} E_0 e^{i(\omega t - \frac{\omega x}{c})} \vec{e}_z \end{aligned}$$

⚠ S'aider d'un schéma pour le changement de signe de  $\vec{B}$  et de l'onde réfléchie

- Continuité de la **composante tangentielle du champ électrique** en  $x = 0$   
 $E_y(x = 0^-) = E_y(x = 0^+) \Rightarrow E_0(1 + \underline{r}) e^{i\omega t} = \underline{t} E_0 e^{i\omega t} \Rightarrow (1 + \underline{r}) = \underline{t}$
- Continuité de la **composante normale du champ magnétique** en  $x = 0$   
 $B_z(x = 0^-) = B_z(x = 0^+) \Rightarrow \frac{E_0}{c}(1 - \underline{r}) e^{i\omega t} = \underline{n} t \frac{E_0}{c} e^{i\omega t} \forall t \Rightarrow 1 - \underline{r} = \underline{n} t$



$$\begin{cases} \underline{t} = \frac{2}{1 + \underline{n}} \\ \underline{r} = \frac{1 - \underline{n}}{1 + \underline{n}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} - \langle \vec{\Pi}_i \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \vec{E}_i \wedge \frac{\vec{B}_i^\star}{\mu_0} \right) = \frac{1}{2\mu_0} \frac{E_0^2}{c} \vec{e}_x = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \vec{e}_z \\ - \langle \vec{\Pi}_r \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \vec{E}_r \wedge \frac{\vec{B}_r^\star}{\mu_0} \right) = -\frac{1}{2} \epsilon_0 c |\underline{r}|^2 E_0^2 \vec{e}_x \\ - \langle \vec{\Pi}_t \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \vec{E}_t \wedge \frac{\vec{B}_t^\star}{\mu_0} \right) = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\mu_0 c} |\underline{t}|^2 \operatorname{Re}(\underline{n}) \vec{e}_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - R &= \frac{\|\langle \vec{\Pi}_r \rangle\|}{\|\langle \vec{\Pi}_r \rangle\|} = |\underline{r}|^2 = \left| \frac{1 - \underline{r}}{1 + \underline{r}} \right|^2 \\ - T &= \frac{\|\langle \vec{\Pi}_t \rangle\|}{\|\langle \vec{\Pi}_i \rangle\|} = \operatorname{Re}(\underline{n}) |\underline{t}|^2 = \frac{4 \operatorname{Re}(\underline{n})^2}{|1 + \underline{r}|^2} \end{aligned}$$

Démo

### Onde électromagnétique plane longitudinale

$$\vec{E}(M, t) = E_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)} \vec{e}_x$$

- Équation du mouvement des électrons :  $nm \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + nm(\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v} = -ne\vec{E} - ne(\vec{v} \wedge \vec{B})$

$$\text{Linéarisation} \rightarrow n_{e0} m \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -n_{e0} e \vec{E}_1 \Rightarrow \frac{\partial \vec{j}_1}{\partial t} = \epsilon_0 \omega_P^2 \vec{E}_1$$

- Champ magnétique :  $\vec{\text{rot}} \vec{E}_1 = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \vec{0}$

$\vec{B}$  est indépendant du temps  $\Rightarrow$  Or c'est un phénomène ondulatoire  $\Rightarrow \vec{B}_1 = \vec{0}$

- Équation différentielle vérifiée par  $\rho$ , la densité électronique

💡 On utilise **toujours** :  $\operatorname{div} \vec{E}_1 = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_1 = 0, \frac{\partial \vec{j}_1}{\partial t} = \epsilon_0 \omega_P^2 \vec{E}_1$

Démo

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \omega_P^2 \rho_1 = 0 \Rightarrow \text{En complexes } \underline{\rho}_1 (\omega_P^2 - \omega^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \omega = \omega_P \Rightarrow \underline{\rho}_1 \neq 0 \\ \omega \neq \omega_P \Rightarrow \underline{\rho}_1 = 0 \end{cases}$$

– Pulsation :  $\operatorname{div} \vec{E}_1 = -ik\underline{E}_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)} = \frac{\underline{\rho}_1}{\epsilon_0} \Rightarrow \underline{\rho}_1 = -ik\epsilon_0 \underline{E}_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega = \omega_P : \underline{\rho}_1 = -ik e^{i(\omega t - \underline{k}x)} \\ \omega \neq \omega_P : \underline{E}_0 = 0 \Rightarrow \vec{E}_1 = \vec{0} \text{ et } \vec{j}_1 = \vec{0} \end{cases}$$

L'onde est électrostatique  $\Rightarrow \forall k, \omega = \omega_P$ . La vitesse de groupe est nulle  $\Rightarrow$  Pas de vraie propagation

### Induction Champ magnétique Conducteur

<b>Neumann</b>	Variable dans le temps	Immobile
<b>Lorentz</b>	Stationnaire	Mobile

- On se place dans le cadre de la magnétostatique

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{div} \vec{B} = 0 \\ \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{array} \right.$$

### Loi de Lenz

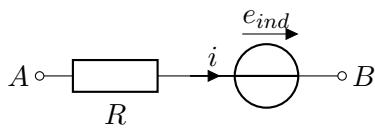
Les effets magnétiques, électrocinétiques et mécaniques de l'induction sont orientés de façon à s'opposer à ses causes

## 1 Induction de Neumann

### Loi de Faraday

$$e_{ind} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\phi_B}{dt}$$

–  $e_{ind}$  est la force électromotrice induite  
Maxwell-Faraday sous forme intégrale



⚠  $i$  et  $e_{ind}$  sont dans le même sens

### Courants de Foucault

On peut utiliser une description locale Non modélisable par un circuit

- Calcul de  $\vec{E}$  avec Maxwell-Faraday
- Loi d'Ohm locale :  $\vec{j}(M, t) = \gamma \vec{E}(M, t)$

Les courants induits sont appelés courants de Foucault

### Inductance propre

Un circuit parcouru par un courant crée un champ magnétique auquel il est alors soumis

- On définit  $\phi_{propre} = \iint_S \vec{B}(t) \cdot \vec{n} dS$
- Maxwell-Ampère impose une relation linéaire entre  $\phi_B$  et  $i$

$$\phi_{propre} = L i(t)$$

- $L$  est le coefficient d'inductance propre  
“ $i$  change de signe  $\Rightarrow \phi$  aussi  
”  $\Leftrightarrow L$  ne dépend pas des orientations

### Inductance mutuelle

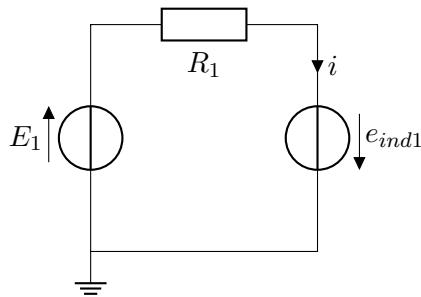
En considérant deux circuits en interaction

$$\begin{cases} \phi_{1 \rightarrow 2} = M i_1 \\ \phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2 \end{cases}$$

- $M$  est le coefficient d'inductance mutuelle  
Il dépend de la géométrie et de l'orientation des circuits  
Son signe dépend des orientations  
On calcule de flux de  $\vec{B}_1$  induit par  $C_1$  à travers  $C_2$ 
  - $\phi_{1 \rightarrow 2} = M_{12} i_1(t)$
  - $\phi_{2 \rightarrow 1} = M_{21} i_2(t)$  De même
Le théorème de Neumann donne  $M_{12} = M_{21}$

### Aspects énergétiques pour deux circuits couplés

- Lois de Faraday :  $\begin{cases} e_{ind1} = -\frac{d(\phi_{propre1} + \phi_{2 \rightarrow 1})}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ e_{ind2} = -\frac{d(\phi_{propre2} + \phi_{1 \rightarrow 2})}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$
- Circuits



$$\begin{aligned} - E_1 &= R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ - E_2 &= R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{aligned}$$

- Bilan de puissance instantanée On forme  $E_j i_j$  puis on somme les deux équations

$$E_1 i_1 + E_2 i_2 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right)$$

$\mathcal{P}$  fournie par les générateurs       $\mathcal{P}$  dissipée par effet Joule      Énergie magnétique stockée

$$U_{mag}(t) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2$$

- $U_{mag}(t)$  est l'énergie magnétique stockée dans les deux circuits à  $t$

“ On écrit la puissance dissipée par effet Joule :  $d\mathcal{P}_J = \vec{j} \cdot \vec{E} dt$

## 2 Induction de Lorentz

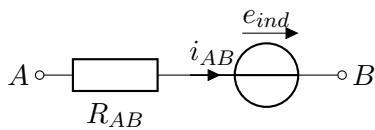
On considère le volume formé par le déplacement du circuit pendant  $dt$

- $\phi_{sortant} = \phi(t + dt) - \phi(t) + d\phi_{lat} = 0$
- $\Rightarrow \frac{d\phi}{dt} dt + d\phi_{lat} = 0 \Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = -\frac{d\phi_{lat}}{dt}$
- $\vec{n}_{lat} dS_{lat} = \vec{dl} \wedge \vec{v} dt \Rightarrow$  Calcul de  $\phi_{lat}$

$$e_{ind} = -\frac{d\phi}{dt} = \oint_C (\vec{v}(t) \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

- On définit  $\vec{E}_m(M, t) = \vec{v}(M, t) \wedge \vec{B}(M)$   
Le champ électromagnétique de Lorentz  $\triangle_{HP}$

### Loi d'Ohm généralisée



$$u_{AB} = R_{AB}i_{AB} - e_{ind}$$

$\triangle$  |  $i$  et  $e_{ind}$  sont dans le même sens

### Couplage électromécanique parfait

- Le courant parcouru par un conducteur est un mouvement  $\Rightarrow$  Forces de Laplace

$$\mathcal{P}_L = \int_{AB} (i_{AB} d\vec{l} \wedge \vec{B}(M)) \cdot \vec{v}(M, t) = -e_{ind} i_{AB}$$

$$\mathcal{P}_L + e_{ind} i_{AB} = 0$$

- Cette relation traduit du caractère parfait de la conversion de puissance mécanique en puissance électromagnétique

### Méthode de résolution

- Identification de l'origine du phénomène d'induction et loi de Lenz
- Calcul de  $e_{ind}$ 
  - Loi de Faraday
  - Relation du couplage électromécanique parfait Faraday ne marche pas : Circuit à contacts glissants
- Etude électrique à partir du circuit électrique équivalent
- Etude mécanique TQM ou TMC aux portions mobiles
- Découplage des équations électriques et mécaniques

### Cas général

Pour un conducteur mobile dans  $\vec{B}$  variable,  $e_{ind}$  est composé de deux contributions Neumann et Lorentz  
 $\triangle$  La condition de couplage électromécanique parfait n'est plus valable

## PROPAGATION D'ONDES DANS UN CONDUCTEUR

Hypothèses

Propriété	Repos	Perturbation
Densité électronique	$n_{e0}$	$n(M, t) = n_{e0} + n_1(M, t)$
Champ électrique	$\vec{E}_0(M) = \vec{0}_{\text{Neutralité}}$	$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_1(M, t)$
Champ magnétique	$\vec{B}_0 = \vec{0}_{\text{Non magnétisé}}$	$\vec{B}(M, t) = \vec{B}_1(M, t)$
Courants électriques	$\vec{j}_0(M) = \vec{0}_{\text{Charges immobiles}}$	$\vec{j}(M, t) = \vec{j}_1(M, t) = -n_e(M, t)e\vec{v}(M, t)$

On néglige le couplage entre les ondes électromagnétiques et les ondes acoustiques  $\Rightarrow$  Pas de pression

Hypothèses

### Équations fondamentales linéarisées

- Equations de Maxwell
 
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{E}_1 = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{E}_1 = -e \frac{n_1}{\epsilon_0} \\ \text{div } \vec{B}_1 = 0 \\ \text{rot } \vec{B}_1 = -\mu_0 n_e e \vec{v}_1 + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} \end{array} \right.$$
- Équation locale de conservation de la charge :  $\frac{\partial(-en_1)}{\partial t} + \text{div}(-en_e \vec{e}_1) = 0 \Rightarrow \frac{\partial n_1}{\partial t} + \text{div}(n_e \vec{v}_1) = 0$   
 $\rightarrow$  Linéarisation :  $\frac{\partial n_1}{\partial t} + n_{e0} \text{div}(\vec{v}_1) = 0$
- Équation du mouvement :  $n_e m \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + n_e m (\vec{v}_1 \cdot \text{grad}) \vec{v}_1 = -n_e e \vec{E}_1 - n_e e \vec{v}_1 \wedge \vec{B} - n_{e0} \frac{m}{\tau} \vec{v}_1$   
 $\rightarrow$  Linéarisation  $n_{e0} m \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -n_{e0} e \vec{E}_1 - n_{e0} \frac{m}{\tau} \vec{v}_1$

Propriétés

### Relaxation de la densité électronique

- #
- Maxwell Gauss
  - Équation de conservation de la charge
  - Équation du mouvement

$$\frac{\partial^2 n_1}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial n_1}{\partial t} + \frac{e^2 n_{e0}}{m \epsilon_0} n_1 = 0$$

- La densité volumique de charges est amortie avec un temps caractéristique  $\tau \approx 10^{-14} \text{s}$

Propriétés

### Modèle de conductivité complexe du conducteur

- Équation du mouvement :  $m \frac{\partial \vec{j}_1}{\partial t} = n_{0e} e^2 \vec{E}_1 - \frac{m}{\tau} \vec{j}_1$  et passage en complexes

$$\underline{\vec{j}_1} = \frac{\gamma_0}{1 + i\omega\tau} \vec{E}_1$$

- $\underline{\gamma}(i\omega) = \frac{\gamma_0}{1 + i\omega\tau}$  est la **conductivité complexe**
- $\gamma_0 = \frac{n_{e0} e^2 \tau}{m}$

“ A haute fréquence  $\omega \gg \frac{1}{\tau}$  on retrouve  $\underline{\gamma} = -i \frac{\gamma_0}{\omega \tau} = -i \epsilon_0 \frac{\omega_P^2}{\omega} \rightarrow$  Plasma dilué

## Propagation d'une onde électromagnétique dans un conducteur

“ Onde plane progressive harmonique transverse électrique polarisée rectilignement :  $\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y$

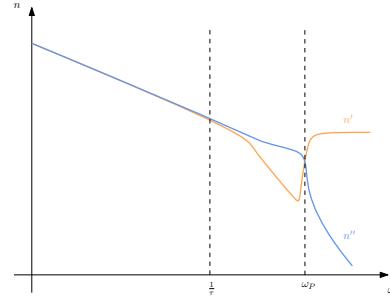
- $\operatorname{div} \vec{E}_1 = \frac{\partial E_{1x}}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial E_{1y}}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial E_{1z}}{\partial z} \vec{e}_z = 0 \Rightarrow n_1(M, t) = 0$  Maxwell Gauss  
⇒ Aucune modification de la densité électronique
- Équation de conservation de la charge  $\Rightarrow \operatorname{div} \vec{v}_1 = 0$  Mouvement transverse des  $e^-$
- Équation de propagation et relation de dispersion

- ≠
1. rotrot puis dérivation par rapport au temps
  2. Travailler en mi-complexe, mi-opérateurs différentiels avec  $\underline{\gamma}$

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \vec{E}_1) = \mu_0 \frac{n_0 e^2}{m} \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} - \frac{1}{\tau} \Delta \vec{E}_1 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_1}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^3 \vec{E}_1}{\partial t^3} \\ & - \underline{k}^2 = \frac{i \omega \tau}{1 + i \omega \tau} \left( \frac{\omega^2 - \omega_P^2}{c^2} - \frac{i \omega}{c^2 \tau} \right) \Rightarrow \underline{n}^2 = \frac{i \omega \tau}{1 + i \omega \tau} \left( 1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2} - \frac{i}{\omega \tau} \right) \end{aligned}$$

“ Trois régimes

1.  $\omega \ll \frac{1}{\tau}$  :  $n' = n''$  et doivent tous deux être pris en compte
2.  $\omega \gg \omega_P$  :  $n' \approx 0 \Rightarrow$  On néglige l'absorption  
Conducteur transparent Transparence ultraviolette
3. Régime intermédiaire :  $\frac{1}{\tau} \leq \omega \leq \omega_P$  :  $n'' \geq n'$



## Effet de peau

On se place dans le cas  $\omega \tau \ll 1$  et donc  $\omega \ll \omega_P$

“  $\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 + i \omega \tau} \approx \gamma_0 \Rightarrow \vec{j}_1 = \gamma_0 \vec{E}_1$

- Équation de propagation rotrot :  $\Delta \vec{E}_1 = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_1}{\partial t^2}$

On peut négliger le terme provenant du courant de déplacement devant celui du courant de conduction ARQS magnétique

$$\Delta \vec{E}_1 = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t}$$

- Équation de diffusion  
–  $\frac{1}{\mu_0 \gamma_0}$  est le coefficient de diffusion

- Relation de dispersion

“  $\underline{k}^2 = -\mu_0 \gamma_0 i \omega = \mu_0 \gamma_0 \omega e^{-i \frac{\pi}{2}} \Rightarrow \underline{k} = \pm \sqrt{\mu_0 \gamma_0 \omega} e^{-i \frac{\pi}{4}} = \pm \frac{1-i}{\delta}$   
 $\underline{n} = \frac{\underline{k} c}{\omega} = \frac{c}{\delta \omega} - i \frac{c}{\delta \omega}$  On a bien  $n' = n''$

$$\vec{E}_1 = E_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta})} \vec{e}_y$$

–  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$  est l'épaisseur de peau

Les champs sont atténués sur une distance caractéristique  $\delta$

“  $\underline{k} = \frac{n' \omega}{c} - i \frac{n'' \omega}{c}$

– Même type de relation pour  $\vec{B}$  et  $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$

$\gamma_{0\text{Cu}}$	$4\pi \times 10^{-7} \text{ S.m}^{-1}$
$\mu_{0\text{Cu}}$	$6 \times 10^7 \text{ kg.m}^{-3}$
$\delta_{\text{Cu}}(\nu = 50\text{Hz})$	$10^{-2} \text{ m}$

### Conducteur parfait

DEF: Un milieu conducteur ohmique est considéré comme parfait lorsque l'épaisseur de peau est négligeable devant toutes les autres caractéristiques géométriques du conducteur

- $\vec{E}_1 = \vec{B}_1 = \vec{j}_1 = \vec{0}$

⚠️ Discontinuité des grandeurs à la frontière

Définition

### Vitesse de déplacement d'énergie

- $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{E}^* \wedge \vec{B}) = \frac{E_0^2}{2\delta\omega} \epsilon_0 c^2 e^{-\frac{2x}{\delta}} \vec{e}_x$
- $\langle u_{em} \rangle = \langle \frac{1}{2} \epsilon_0 \|\vec{E}\|^2 \rangle + \langle \frac{1}{2} \frac{\|\vec{B}\|^2}{\mu_0} \rangle \simeq \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \frac{c^2}{\delta^2 \omega^2} e^{-\frac{2x}{\delta}}$  ARQS magnétique
- On exprime l'énergie électromagnétique qui va traverser  $dS$  pendant  $dt$  dans le sens de la normale à la vitesse  $V \vec{e}_x$  de deux façons différentes
 
$$\begin{cases} dE = \langle u_{em} \rangle V dt dS \\ dE = \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \vec{e}_x dS dt \end{cases} \Rightarrow \langle \vec{\Pi} \rangle = V \langle u_{em} \rangle \vec{e}_x \Rightarrow V = \delta\omega = v_\varphi$$

Propriétés

### Pression de radiation

- Maxwell-Ampère où l'on néglige le courant de déplacement :  $\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B}{\partial x} \vec{e}_y$
  - Champ magnétique dans le milieu conducteur  $\Rightarrow$  Forces de Laplace  

$$d\vec{F}_L = \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau = -\frac{1}{\mu_0} SB(x, t) \frac{\partial B}{\partial x} d\tau \vec{e}_x$$
- On intègre et on passe à la valeur moyenne :  $\langle \vec{F}_L \rangle = \frac{\langle B^2(x=0, t) \rangle}{2\mu_0} S \vec{e}_x$

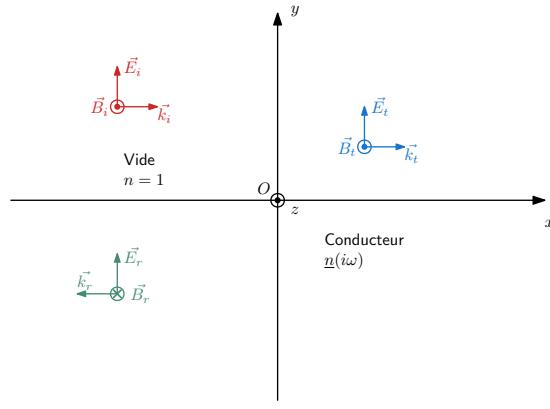
$$p_{rad} = \frac{\langle B^2(x=0, t) \rangle}{2\mu_0}$$

-  $p_{rad}$  est la pression de radiation

Propriétés

Démo

### Réflexion sur un conducteur en incidence normale



$$\begin{aligned} x \geq 0 \\ - \vec{E}(x \leq 0, t) &= E_0 e^{i(\omega t - \frac{\omega x}{c})} \vec{e}_y + \underline{r} e^{i(\omega t + \frac{\omega x}{c})} \vec{e}_y \\ - \vec{B}(x \leq 0, t) &= \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - \frac{\omega x}{c})} \vec{e}_z - \underline{r} \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t + \frac{\omega x}{c})} \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \leq 0 \\ - \vec{E}(x \geq 0, t) &= \underline{t} E_0 e^{i(\omega t - \frac{\omega x}{c})} \vec{e}_y \\ - \vec{B}(x \geq 0, t) &= \frac{\underline{n}}{\underline{t}} E_0 e^{i(\omega t - \frac{\omega x}{c})} \vec{e}_y \end{aligned}$$

⚠ S'aider d'un schéma pour le changement de signe de  $\vec{B}$  et de l'onde réfléchie

- Continuité de la **composante tangentielle du champ électrique** en  $x = 0$

$$E_y(x = 0^-) = E_y(x = 0^+) \Rightarrow E_0(1 + \underline{r}) e^{i\omega t} = \underline{t} E_0 e^{i\omega t} \Rightarrow (1 + \underline{r}) = \underline{t}$$

- Continuité de la **composante normale du champ magnétique** en  $x = 0$  Pas de courant de surface

$$B_z(x = 0^-) = B_z(x = 0^+) \Rightarrow \frac{E_0}{c}(1 - \underline{r}) e^{i\omega t} = \underline{n} t \frac{E_0}{c} e^{i\omega t} \forall t \Rightarrow 1 - \underline{r} = \underline{n} t$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{t} = \frac{2}{1 + \underline{n}} \\ \underline{r} = \frac{1 - \underline{n}}{1 + \underline{n}} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} - \langle \vec{\Pi}_i \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \vec{E}_i \wedge \frac{\vec{B}_i}{\mu_0} \right) = \frac{1}{2\mu_0} \frac{E_0^2}{c} \vec{e}_x = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \vec{e}_z \\ - \langle \vec{\Pi}_r \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \vec{E}_r \wedge \frac{\vec{B}_r}{\mu_0} \right) = -\frac{1}{2} \epsilon_0 c |\underline{r}|^2 E_0^2 \vec{e}_x \\ - \langle \vec{\Pi}_t \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \vec{E}_t \wedge \frac{\vec{B}_t}{\mu_0} \right) = \frac{1}{2} \epsilon_0 c \operatorname{Re}(\underline{n}) |t|^2 E_0^2 e^{-\frac{x}{\delta}} \vec{e}_x \end{aligned}$$

$$- R = \frac{\|\langle \vec{\Pi}_r \rangle\|}{\|\langle \vec{\Pi}_t \rangle\|} = |\underline{r}|^2 = \left| \frac{1 - \underline{n}}{1 + \underline{n}} \right|^2$$

AN : Pour le visible  $R \simeq 0.99_{\text{Miroir}}$

## 1 Dualité onde-corpuscule

### Relations fondamentales

RELATION DE PLANCK-EINSTEIN

$$E = h\nu = \hbar\omega$$

– C'est une relation de dispersion

“ Dans le cas général, on a la relation de dispersion de Klein Gordon :  $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$

⚠ Les relations de dispersion ne sont pas valables que pour une masse nulle

RELATION DE DE BROGLIE

$$p = \hbar k = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda_{dB}}$$

–  $\lambda_{dB}$  est la longueur de De Broglie

### Principe de complémentarité de Bohr

Selon l'expérience réalisée, la lumière et la matière présentent un comportement ondulatoire ou particulaire  
Il n'existe pas de description classique cohérente en termes d'onde ou de particule, permettant d'interpréter les différents phénomènes observés

## 2 Équation de Schrödinger

### Fonction d'onde

$$\begin{aligned} d\mathbf{P}(M, t) &= \psi(M, t)\psi^*(M, t)d\tau \\ &= |\psi(M, t)|^2 d\tau \end{aligned}$$

–  $\psi(M, t)$  est la fonction d'onde à valeurs dans  $\mathbb{C}$   
– Elle traduit de la probabilité de présence de la particule à l'instant  $t$  dans  $d\tau$

“ –  $\psi(x, t)$  est appelée amplitude de probabilité  
–  $|\psi(x, t)|^2$  est appelée densité de probabilité de présence

“  $\psi(x, t)$  est définie à un facteur de phase près  $\Rightarrow \psi$  et  $\psi e^{i\phi}$  représentent le même état physique

- La fonction d'onde est normalisée  $\Rightarrow \int_{\Omega} |\psi(x, t)|^2 d\tau = 1$
- La particule est à priori délocalisée dans tout l'espace

Connaissant la fonction d'onde on peut caractériser la distribution des positions accessibles

$$\begin{aligned} - \langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} x d\mathbf{P}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x |\psi(x, t)|^2 dx \\ - \langle x^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 d\mathbf{P}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |\psi(x, t)|^2 dx \Rightarrow \Delta x_{Ecart\ type} = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \end{aligned}$$

## Équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V \psi$$

–  $V$  est l'énergie potentielle = *Potentiel* de la particule

–  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  est la constante de Plank réduite

– ☀ L'équation de Schrödinger est un PFD quantique

L'énergie potentielle peut être définie à une constante additive près

“ ⇒  $\psi$  et  $\psi e^{-\frac{iV_0 t}{\hbar}}$  décrivent la même probabilité de présence

– L'équation de Schrödinger est linéaire ⇒  $\alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2$  est aussi solution si normalisée

## Vecteur densité de courant de probabilité

La probabilité de présence dans tout l'espace est une grandeur conservée

$$\blacksquare \quad \frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} = \frac{\partial \psi \psi^*}{\partial t} = \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \left( \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \right) = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} + \text{div}(\vec{J}) = 0$$

$$- J(x, t) = \frac{i\hbar}{2m} \left( \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \vec{e}_x$$

## État stationnaire

DEF: On appelle état stationnaire, un état du système caractérisé par une fonction d'onde factorisée sous la forme  $\psi(x, t) = \varphi(x)f(t)_{\varphi(x)}$  et  $f(t)$  sont à valeurs complexes

⚠ Etat stationnaire en mécanique ondulatoire ≠ Onde stationnaire *Produit de deux fonctions réelles*

–  $|\psi(x, t)|^2$  est indépendante du temps

$$\blacksquare \quad 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = |f(t)|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2 dx \quad \text{On choisit } |f(t)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2 dx = 1 \\ \Rightarrow \exists \alpha(t), f(t) e^{i\alpha(t)} \Rightarrow \psi(x, t) = e^{i\alpha(t)} \varphi(x) \Rightarrow |\psi(x, t)|^2 = |\varphi(x)|^2 \text{ Indépendant du temps}$$

## Équation de Schrödinger indépendante du temps

On injecte  $\psi(x, t) = e^{i\alpha(t)} \varphi(x)$  dans l'équation de Schrödinger

$$\blacksquare \quad \text{En un point } x \text{ où } \varphi(x) \neq 0 : -\frac{\hbar^2}{2m} \underbrace{\frac{1}{\varphi} \frac{d^2 \varphi}{dx^2}}_{\text{Indépendant de } t} + v(x) = \underbrace{-\hbar \dot{\alpha}}_{\text{Indépendant de } x} \Rightarrow cste = E$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + V(x) \varphi(x) = E \varphi(x)$$

“ En introduisant l'opérateur différentiel Hamiltonien :  $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$  on se ramène à  $\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$   
 ⇒ Les solutions  $\varphi$  sont les fonctions propres de l'opérateur  $\hat{H}$  associées aux valeurs propres de  $E$

## Conditions imposées à la fonction d'onde propre

1.  $\varphi(x)$  ne prend qu'une valeur à l'abscisse  $x$
2.  $\varphi(x)$  est normalisée  $\int_{\Omega} |\varphi(x)|^2 dx = 1 \Rightarrow$  Elle ne peut diverger
3.  $\varphi(x)$  est continue
4.  $\frac{d\varphi}{dx}(x)$  est continue en tout point où
  - (a) L'énergie potentielle  $V(x)$  est continue
  - (b) Ne présente pas de discontinuité d'amplitude infinie

**»**  $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$  est bornée pourvu que  $E$  et  $V(x)$  le soient  
**»** Réciproquement il faut  $\frac{d\varphi(x)}{dx}$  continue pour que  $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$  soit continue

*Les solutions physiquement acceptables qui vérifient toutes ces conditions ne correspondent qu'à certaines valeurs discrètes de  $E$*

## 3 Inégalités de Heisenberg

“ On définit l'indétermination quantique sur  $a$  comme un écart-type :  $\Delta a = \sqrt{\langle a^2 \rangle - \langle a \rangle^2}$

### Inégalité de Heisenberg spatiale

On ne peut pas attribuer simultanément à une particule quantique une position rigoureusement précise et une quantité de mouvement rigoureusement précise

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

### Inégalité de Heisenberg temps-énergie

$$\Delta t \cdot \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$$

**»**  $\Delta t \cdot \Delta \omega \geq \frac{1}{2}$  et Planck-Einstein

### Énergie d'un état stationnaire

L'énergie associée à un état stationnaire est parfaitement définie

**»** Un état stationnaire est caractérisé par une densité de probabilité indépendante du temps  
**»** Elle peut être caractérisée par un temps caractéristique d'évolution infini :  $\Delta t \rightarrow +\infty \Rightarrow \Delta E \rightarrow 0$

## 4 Limite entre classique et quantique

“ On discrétise le portrait de phase en cellule d'aires  $\frac{\hbar}{2}$  et on évalue le nombre de cellules contenues dans  $S$ 

- $N \gg 1 \rightarrow$  Classique
- $N \simeq 1 \rightarrow$  Quantique

**Action**

DEF: L'action est homogène à  $\hbar$  soit des J.s

$$\underline{\underline{S = E \times t - p \times d = \sqrt{E \times m \times l^2}}}$$

**≠** On compare  $\frac{S}{\hbar}$  à 1 : 
$$\begin{cases} \gg 1 \rightarrow \text{Classique} \\ \simeq 1 \rightarrow \text{Quantique} \end{cases}$$

“ Les effets quantiques sont négligeables devant  $\lambda_{dB} \ll$  Distances caractéristiques

**Principe de correspondance de Bohr**

Dans les conditions où les résultats classiques et quantiques doivent concorder, la théorie quantique doit se ramener au résultat classique

💡 A utiliser pour vérifier la pertinence des résultats

DEF: Une particule libre est une particule

- Évoluant dans le vide
- Soumise à aucune interaction  $V = 0$

## 1 Modélisation

### 1.1 États stationnaires

#### Onde plane progressive harmonique

On cherche une solution de la forme  $\psi(x, t) = \varphi(x) \exp(-i\omega t) = \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$

— On injecte dans Schrödinger :  $\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \frac{2m\omega}{\hbar}\varphi(x) = 0$

— On envisage uniquement le cas  $\omega > 0$  *sinon solution nulle* :  $\varphi(x) = Ae^{ikx} + B^{-ikx}$  avec  $k = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}$

D'où  $\psi(x, t) = Ae^{i(kx-\omega t)} + Be^{-i(kx+\omega t)}$

⚠ L'équation de Schrödinger impose une dépendance temporelle sous la forme  $\exp(-i\omega t)\omega \geq 0$

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

— Relation de dispersion

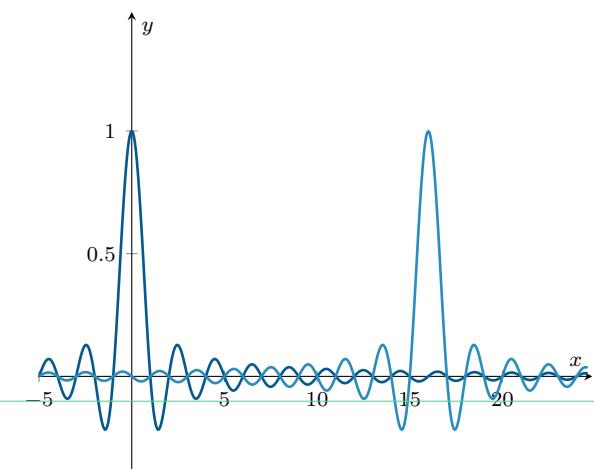
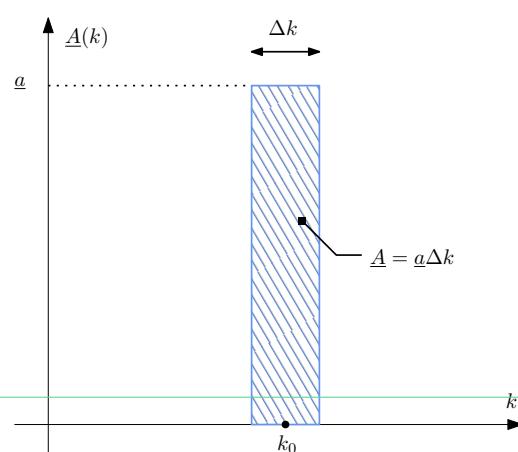
$$v_\varphi = \frac{\hbar k}{2m}$$

— La propagation est dispersive

Une OPPH ne peut pas être normalisée et n'a donc pas de réalité physique

“ En tant que solution élémentaire, on les superpose pour obtenir un paquet d'ondes pouvant être normalisé

### 1.2 Paquet d'ondes



$$\begin{aligned}
 - DL : \omega(k) &= \omega(k_0) + \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{k_0} (k - k_0) + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2\omega}{dk^2} \right)_{k_0} (k - k_0)^2 + o((k - k_0)^2) \\
 \psi(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{A}(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk \\
 &\simeq \underline{a} \int_{k_0 - \frac{\Delta k}{2}}^{k_0 + \frac{\Delta k}{2}} e^{i(kx - \omega_0 t - v_g t(k - k_0))} dk \\
 K = k - k_0 &= \underline{a} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{-\frac{\Delta k}{2}}^{\frac{\Delta k}{2}} e^{iK(x - v_g t)} dK \\
 &= \underline{A} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \text{sinc}\left(\frac{\Delta k}{2}(x - v_g t)\right)
 \end{aligned}$$

“ On peut déterminer  $\underline{A}$  en normalisant  $|\psi(x, t)|^2$

$$v_g = \left( \frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_{k=k_0} = \frac{\hbar k_0}{m}$$

–  $v_g$  est la vitesse de groupe

- On a  $\Delta x = \frac{4\pi}{\Delta k} \rightarrow$  Compatible avec Heisenberg  $\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2}$
- Le paquet d'ondes se déplace à  $v_g$  sans déformation
 

“ Si l'on ne néglige pas la dispersion de la vitesse de groupe 2<sup>e</sup> terme du DL on constate que le paquet d'ondes s'étale au cours de sa propagation
- $v = \frac{p}{m} = \frac{\hbar k}{m} = v_g$   
On est amené à identifier la vitesse de déplacement de la particule quantique à la vitesse de groupe du paquet d'ondes
- $E = \hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2}mv^2$  Schrödinger traduit de la conservation de l'énergie

$\omega = ck$  ne s'applique qu'au photon et surtout pas à une particule matérielle

### Vecteur densité de courant de probabilité

⚠ Uniquement pour des ondes progressives

- La fonction d'onde peut être écrite sous la forme  $\psi(x, t) = A(x, t)e^{i(kx - \omega t)}$   $A = \underline{A} \times \text{sinc}$

$$\begin{aligned}
 J(x, t) &= \frac{i\hbar}{2m} \left( \psi \frac{d\psi^*}{dx} - \psi^* \frac{d\psi}{dx} \right) \\
 &= \frac{i\hbar}{2m} \left( A e^{i(kx - \omega t)} \left( \frac{dA^*}{dx} e^{-i(kx - \omega t)} - ik A^* e^{i(kx - \omega t)} \right) - A^* e^{-i(kx - \omega t)} \left( \frac{dA}{dx} e^{i(kx - \omega t)} + ik A e^{i(kx - \omega t)} \right) \right) \\
 &\simeq \frac{\hbar k}{m} |A|^2
 \end{aligned}$$

Approximation de l'enveloppe lentement variable :  $\frac{dA^{(*)}}{dx}$  négligeable

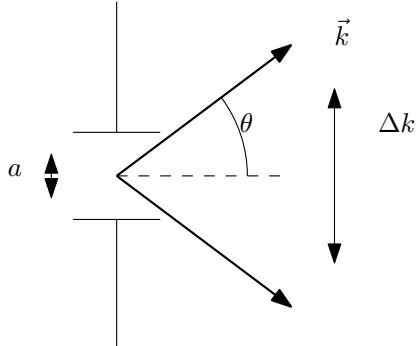
💡  $J = \rho \times v = |\psi|^2 \times v_g$

## 2 Interférences et diffraction d'ondes de matière

## Diffraction par une fente

L'onde émise par l'ouverture est sphérique :  $\psi(M, t) = \frac{\psi_0}{r} e^{i(kr - \omega t)}$  avec  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + D^2}$

- Dans l'approximation paraxiale *Au voisinage de la normale* :  $DL-$   $\psi(M, t) = \frac{\psi_0}{D} e^{i(kD - \omega t)} e^{ik\frac{x^2 + y^2}{2D}}$
- L'inégalité d'Heisenberg donne  $\Delta k_x \geq \frac{1}{2d}$  or  $\sin \theta \sim \frac{k}{\|k\|} = \frac{1}{d} \frac{\lambda_{dB}}{2\pi} \sim \frac{\lambda_{dB}}{d}$



Démo

## Diffraction par deux fentes

- $\mathbf{P}(\text{Passage}) = \mathbf{P}(\text{Passage}_1) + \mathbf{P}(\text{Passage}_2)$  *Principe de superposition*  $\Rightarrow \psi(M, t) = \psi_1(M, t) + \psi_2(M, t)$

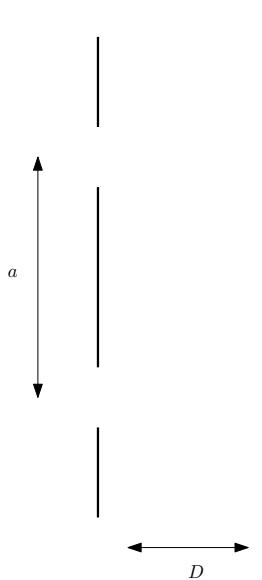
$$\begin{aligned} \psi(M, t) &= A_1 \exp \left( i \left( k \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{2D} - \omega t \right) \right) + A_2 \exp \left( i \left( k \frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{2D} - \omega t \right) \right) \\ &= \exp \left( ik \frac{x^2 + \frac{a^2}{4} + y^2}{2D} + i\omega t \right) \left( A_1 \exp \left( -ik \frac{ax}{2D} \right) + A_2 \exp \left( ik \frac{ax}{2D} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dx} = |\psi(M, t)|^2 = |A_1|^2 + |A_2|^2 + 2\Re(A_1 A_2^* \exp(-i\Delta\varphi)) \text{ où } \Delta\varphi = \frac{kax}{D} = \frac{2\pi\delta}{\lambda_{dB}} \text{ et } A_1 = A_2$$

$$|\psi(M, t)|^2 = 2|A|^2 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_{dB}} \delta \right) \right)$$

–  $i = \frac{\lambda_{dB} D}{a}$ , l'interfrange

–  $\Delta x = \frac{2\lambda_{dB} D}{d}$ , la largeur de la tache centrale de diffraction



Démo

## PARTICULE DANS UN POTENTIEL

Hypothèses

On cherche les solutions de l'équation de Schrödinger sous la forme d'état stationnaire  $\psi(x, t) = \varphi(x)e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$   
 $\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + V_x\varphi(x) = E\varphi(x)$  Unidimensionnel

Méthode

### Méthode de résolution

- Expression de l'équation de Schrödinger dans les différents domaines de potentiel
- Expression des solutions sur chaque domaine
  - | Pour  $y'' + ay = 0$
  - | Intervalle fini : cosh et sinh
  - | Intervalle infini :  $\exp(-)$  et  $\exp(+)$  Pour en éliminer une
- Raccord des solutions aux discontinuités de potentiel
- Détermination des solutions par méthode graphique

## 1 Marche de potentiel

$E > V_0$

x	Schrödinger	Solution
$x < 0$	$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\varphi = 0$	$\varphi_1(x) = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x}$ $k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$
$x > 0$	$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}\varphi = 0$	$\varphi_2(x) = A_2 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x}$ $k_2 = \sqrt{\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}}$

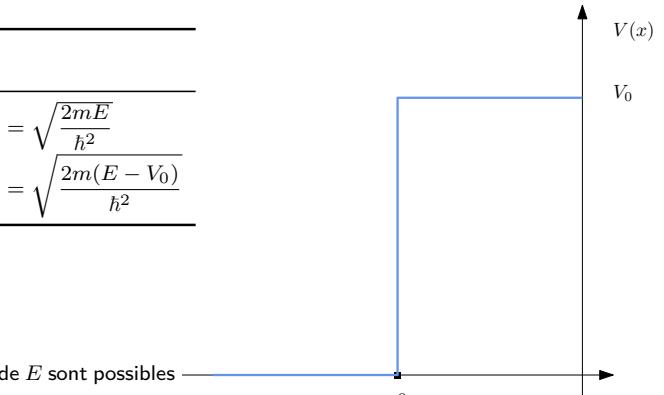
- $B_2$  est une onde régressive pour  $x > 0$   
 $\Rightarrow$  Aucune réalité physique d'où  $B_2 = 0$
- Continuité de  $\varphi$  en  $x = 0$  :  $A_1 + B_1 = A_2$
- Continuité de  $\varphi'$  en  $x = 0$  :  $k_1(A_1 - B_1) = k_2 A_2$

Pour  $A_1$  fixé : 2 équations et 3 inconnues  $A_2, B_2, E \Rightarrow$  Toutes les valeurs de  $E$  sont possibles

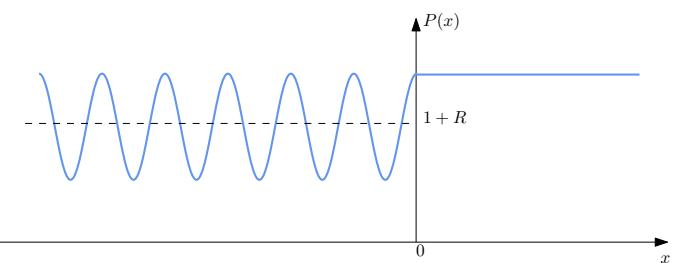
$$\begin{aligned} - \vec{j}_i &= |A_1|^2 \frac{\hbar k_1}{m} \vec{e}_x \\ - \vec{j}_r &= |B_1|^2 \frac{\hbar k_1}{m} \vec{e}_x \\ - \vec{j}_t &= |A_2|^2 \frac{\hbar k_2}{m} \vec{e}_x \end{aligned}$$

La probabilité de réflexion  $R$  n'est jamais nulle

$$|\varphi_1(x)|^2 = (A + R)|A_1| \left( 1 + \frac{2\sqrt{R}}{1+R} \cos \left( 4\pi \frac{x}{\lambda_{dB}} \right) \right)$$



$$\begin{aligned} - R &= \frac{\|\vec{j}_r(x=0, t)\|}{\|\vec{j}_i(x=0, t)\|} = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2} = \left( \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 \\ - T &= \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} \\ - R + T &= 1 \text{ Conservation de la probabilité de présence} \end{aligned}$$



Démo

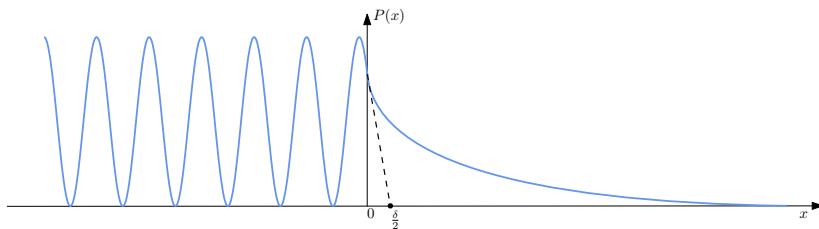
## $E < V_0$

$x$	Schrödinger	Solution	
$x < 0$	$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\varphi = 0$	$\varphi_1(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}$	$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$
$x > 0$	$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}\varphi = 0$	$\varphi_2(x) = A_2 e^{-qx} + B_2 e^{qx}$	$q = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$

Pour  $A_1$  fixé : 2 équations et 3 inconnues  $\Rightarrow$  Toutes les valeurs de  $E$  sont possibles

$$\begin{aligned}\psi_1(x, t) &= e^{-i\frac{Et}{\hbar}} (A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}) \\ &= A_1 e^{-i\frac{Et}{\hbar}} \left( e^{ikx} + \frac{k - iq}{k + iq} e^{-ikx} \right) \\ &= A_1 e^{-i\frac{Et}{\hbar}} \left( e^{ikx} + e^{-i(kx + \theta)} \right) \\ &= A_1 e^{-i\frac{Et}{\hbar}} e^{-i\frac{\theta}{2}} 2 \cos \left( kx + \frac{\theta}{2} \right) \\ |\psi_1(x, t)|^2 &= 2 |A_1|^2 \left( 1 + \cos \left( 4\pi \frac{x}{\lambda_{dB}} + \theta \right) \right)\end{aligned}$$

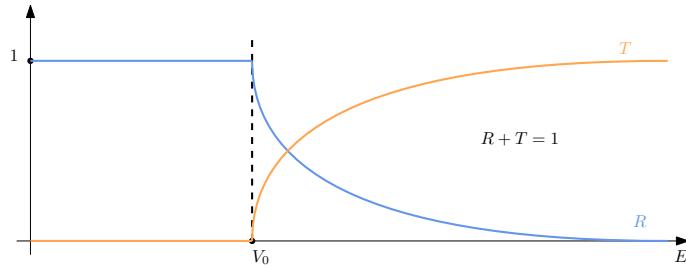
$$\begin{aligned}\psi_2(x, t) &= A_2 e^{-i\frac{Et}{\hbar}} e^{-qx} \\ &= A_2 \frac{2k}{k + iq} e^{-i\frac{Et}{\hbar}} e^{-qx} \\ |\psi_2(x, t)|^2 &= |A_2|^2 \frac{4k^2}{k^2 + q^2} e^{-2qx} \\ &- \text{Avec } \exp(i\theta) = \frac{k - iq}{k + iq}\end{aligned}$$



$$\delta = \frac{1}{q} = \frac{\hbar}{2m(V_0 - E)}$$

- $\delta$  est la profondeur de pénétration  
Elle diminue avec  $m$
- 💡 Elle fait intervenir  $V_0 - E$  la barrière vue par la particule

“  $R = \frac{\|\vec{j}_r(x=0, t)\|}{\|\vec{j}_i(x=0, t)\|} = \left| \frac{k - iq}{k + iq} \right|^2 = A$  et  $T = 0$



Démo

## 2 Puit de potentiel

### 2.1 Puit de potentiel infini

- Pour  $V(x) \rightarrow +\infty$  Schrödinger impose  $\varphi(x) \rightarrow 0$

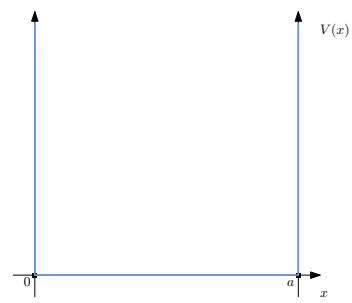
Les régions de l'espace où le potentiel est infiniment élevé sont interdites à la particule

- Pour  $0 \leq x \leq a : \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\varphi = 0$

$$E \leq 0$$

$$\varphi(x) = A \exp\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}x\right) + B \exp\left(\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}x\right)$$

- Continuité de  $\varphi$  en  $x = 0 \Rightarrow A + B = 0$
- Continuité de  $\varphi$  en  $x = a \Rightarrow A = B = 0$



$$E \geq 0$$

$$\varphi(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) \quad k = \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}$$

- Continuité de  $\varphi$  en  $x = 0 \Rightarrow B = 0$
- Continuité de  $\varphi$  en  $x = a \Rightarrow 0 = \sin(ka)$

$$\text{D'où } k_n = n \frac{\pi}{a} \Rightarrow E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} n^2$$

$$\text{On normalise d'où } A_n = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

- $E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} n^2$  est quantifiée

“  $\left| \frac{d\varphi_n}{dx} \right|$  non continues autorisée car discontinuité infinie

$$\psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{a}} e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t} \sin\left(n\pi \frac{x}{a}\right)$$

$$- P_n(x) = |\psi_n(x)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2\left(n\pi \frac{x}{a}\right)$$

Démo

- $(E_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  forme le **spectre d'énergie**. Chaque valeur définit un **niveau d'énergie**
- $n$  est un **nombre quantique**
- Une particule classique peut avoir une énergie arbitrairement petite alors que l'énergie d'une particule quantique ne peut pas être inférieure à  $E_1$



- $\Delta x = a \Rightarrow \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2a}$  or  $\Delta p_x = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2} = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle}$
- $E = \frac{\langle p_x^2 \rangle}{2m} = \frac{\Delta p_x^2}{2m} \geq \frac{\hbar^2}{8ma^2}$

$$E \sim \frac{\hbar^2}{ma^2}$$

- $E$  est l'énergie de localisation *de confinement*

- $|\psi_n(x)|^2$  est symétrique par rapport à  $x = \frac{a}{2}$  du fait de la symétrie du potentiel  $V(x)$

Propriétés

### Limite classique

- Mécanique classique : La particule peut se trouver n'importe où  $\Rightarrow |\psi(x)|^2 = \frac{1}{a}$
- Mécanique quantique : Pour  $n$  grand,  $P_n(x)$  présente de nombreuses oscillations

$$|\psi_n(x)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2\left(n\pi \frac{x}{a}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a}$$

Remarque

### Superposition d'états stationnaires

La solution la plus générale de l'équation de Schrödinger peut s'écrire comme superposition normalisée d'états stationnaires

Propriétés

$$-\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n e^{-i \frac{E_n t}{\hbar}} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(2\pi \frac{x}{a}\right) \text{ avec } \sum |A_n|^2 = 1$$

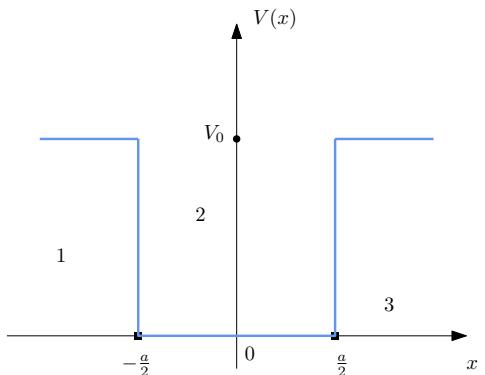
- On écrit  $\psi = \psi_a + \psi_b$
- On calcule  $|\psi|^2 = \psi\psi^*$  et on développe
- On normalise la solution
- On reconnaît souvent une variation temporelle sous la forme d'une période d'oscillation

## 2.2 Puit de potentiel fini

**A**  $|\varphi(x)| = |\varphi(-x)| \Rightarrow \exists \theta, \begin{cases} \varphi(x) = e^{i\theta} \varphi(-x) \\ \varphi(-x) = e^{i\theta} \varphi(x) \end{cases}$   
 $\Rightarrow e^{2i\theta} = 1 \Rightarrow e^{i\theta} = \pm 1 \Rightarrow \varphi(x) = \pm \varphi(-x)$

Un problème invariant par  $x \rightarrow -x$  on recherche des solutions sous forme d'ondes propres paires ou impaires

$E$	État	Particule	$E$
$\geq V_0$	Diffusion	Délocalisée	Non quantifiée
$\leq V_0$	Lié	Confinée	Quantifiée



### Fonctions d'ondes propres des états liés

- Fonction d'onde propre symétrique - On pose  $q^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$  et  $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ 
  - $\varphi_1(x) = A_1 e^{qx} + B_1 e^{-qx}$   $B_1 = 0$  pour éviter la divergence
  - $\varphi_2(x) = A_2 \cos(kx)$
  - $\varphi_3(x) = \varphi_1(-x)$ $\Rightarrow k \tan\left(\frac{ka}{2}\right) = q$
- De même pour la fonction d'onde propre antisymétrique :  $k \cotan\left(\frac{ka}{2}\right) = -q$

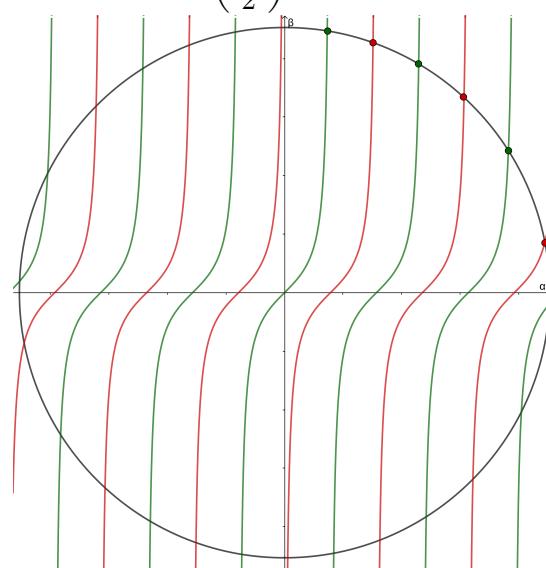
$$\begin{cases} \alpha = \frac{ka}{2} \\ \beta = \frac{qa}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \tan(\alpha) = \beta_{Pair} \\ \alpha \cotan(\alpha) = -\beta_{Impair} \end{cases}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{mV_0a^2}{2\hbar^2}$$

$$- E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{2\hbar^2}{ma^2} \alpha_n^2$$

$$- \text{Nombre de solutions } \frac{\sqrt{\frac{mV_0a^2}{2\hbar^2}}}{2}$$

Plus le puit est grand plus l'énergie est faible



$$\delta = \frac{1}{q} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}}$$

- $\delta$  fait intervenir la hauteur  $V_0 - E$  vue par la particule

On peut approcher les valeurs d'énergie du puit infini en considérant un puit infini de largeur  $a + 2\delta$  pour  $E \ll V_0$

### 3 Barrière de potentiel

Zone	Schrödinger	Solution
1	$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\varphi = 0$	$\varphi_1(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}$ $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$
2	$\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}\varphi = 0$	$\varphi_2(x) = A_2 e^{iqx} + B_2 e^{iqx}$ $q = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$
3	$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\varphi = 0$	$\varphi_3(x) = A_3 e^{ikx}$ $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$

On assure ensuite ensuite la continuité de  $\varphi$  et  $\varphi'$  en  $\pm \frac{a}{2}$

Onde	Fonction d'onde	Courants de probabilité	
Incidente	$\psi_i(x, t) = A_1 e^{-i\omega t} e^{ikx}$	$\vec{j}_i =  A_1 ^2 \frac{\hbar k}{m} \vec{e}_x$	$- R = \frac{\ \vec{j}_r\ }{\ \vec{j}_i\ } = \left  \frac{B_1}{A_1} \right ^2$
Réfléchie	$\psi_r(x, t) = B_1 e^{-i\omega t} e^{-ikx}$	$\vec{j}_r = - B_1 ^2 \frac{\hbar k}{m} \vec{e}_x$	$- T = \frac{\ \vec{j}_t\ }{\ \vec{j}_i\ } = \left  \frac{A_3}{A_1} \right ^2$
Transmise	$\psi_t(x, t) = A_3 e^{-i\omega t} e^{-ikx}$	$\vec{j}_t =  A_3 ^2 \frac{\hbar k}{m} \vec{e}_x$	$- R + T = 1$ Conservation de la probabilité de présence

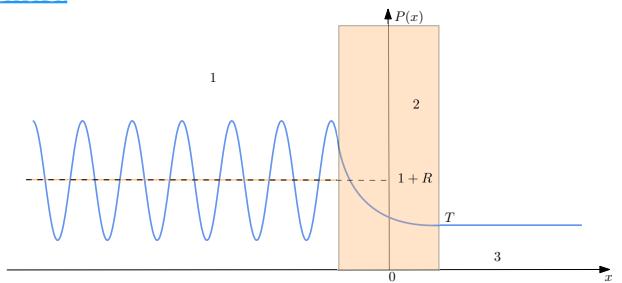
#### Effet Tunnel

DEF: L'effet tunnel représente la possibilité de transmission d'une particule à travers une zone interdite par la mécanique classique

- La particule peut gagner en énergie et s'échapper du puit pendant une durée que lui autorise Heisenberg
- L'effet tunnel à chaque fois qu'il y a interférence de deux ondes évanescentes dans la barrière

#### Densité de probabilité de présence de la barrière de potentiel

- Région 1 :  $\psi(x, t) = A_1 e^{-i\omega t} \left( e^{ikx} + \frac{B_1}{A_1} e^{-ikx} \right)$
- $|\psi(x, t)|^2 = \frac{|A_1|^2}{1+R} \left( 1 + \frac{2\sqrt{R}}{1+R} \cos \left( \frac{4\pi x}{\lambda_{dB}} - \varphi \right) \right)$
- Région 2 : Décroissance exponentielle sur  $\delta = \frac{1}{q} = \frac{\hbar}{2m(V_0 - E)}$
- Région 3 : Densité de probabilité de présence uniforme et non nulle  
 $T \simeq 3 \exp \left( -\frac{2a}{\delta} \right)$  dans l'approximation de la barrière épaisse  $a \gg \delta$



### 4 Double puit de potentiel symétrique

#### Puits infinis

- Les états stationnaires correspondent à la réunion des états stationnaires de chacun des deux trous

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{sur } ]-\infty, -\frac{D}{2} - a] \cup [\frac{D}{2} + a, +\infty[ \cup ]-\frac{D}{2}, \frac{D}{2}[ \\ \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \left( n\pi \frac{x+a+\frac{D}{2}}{a} \right) & \text{sur } ]-\frac{D}{2} + a, -\frac{D}{2}] \\ \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \left( n\pi \frac{x-a-\frac{D}{2}}{a} \right) & \text{sur } ]\frac{D}{2}, \frac{D}{2} + a] \end{cases}$$

- Chaque état stationnaire d'énergie est double  
Lui correspondent deux fonctions d'ondes linéairement indépendantes  
**État doublement dégénéré**
- $\begin{cases} \varphi_{n,s} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_n^D(x) + \varphi_n^G(x)) \\ \varphi_{n,a} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_n^D(x) - \varphi_n^G(x)) \end{cases}$
- Une particule localisée dans un des deux puits ne peut en sortir

## Puits finis symétriques

Zone	Schrödinger	Solution
1	$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\varphi = 0$	$\varphi_1(x) = A_1 \left( kx + \frac{kD}{2} + ka \right)$ $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$
2	$\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}\varphi = 0$	$\varphi_2(x) = A_2 \cosh(qx)$ $q = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} \simeq \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}$
3	$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\varphi = 0$	$\varphi_3(x) = \varphi_1(-x)$ $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$

- Continuité de  $\varphi$  en  $x = \frac{D}{2}$  :  $A_2 \cosh\left(\frac{qD}{2}\right) = A_1 ka$
- Continuité de  $\varphi'$  en  $x = \frac{D}{2}$  :  $qA_2 \sinh\left(\frac{qD}{2}\right) = -A_1 \cos(ka)$

$$\begin{aligned} - \frac{1}{q} \frac{e^{\frac{qD}{2}} + e^{-\frac{qD}{2}}}{e^{\frac{qD}{2}} - e^{-\frac{qD}{2}}} &\simeq \frac{1}{q} (1 + 2e^{-qD}) = -\frac{1}{k} \tan(ka) \\ \tan(ka) &= -(ka) \left( \frac{1 + 2e^{-qD}}{qa} \right) = -ka\epsilon_S \\ - \text{De même pour les états propres antisymétriques} \\ \tan(ka) &= -(ka) \left( \frac{1 - 2e^{-qD}}{qa} \right) = -ka\epsilon_A \end{aligned}$$

$$k_i \simeq \frac{\pi}{a} (1 + \epsilon_i)$$

$$\Delta | k_i = \pi - \kappa \text{ avec } \kappa \ll 1$$

$$E_i = \frac{\hbar^2 k_i^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} (A - 2\epsilon_i)$$

- L'énergie moyenne des deux premiers niveaux est plus faible que l'énergie du niveau fondamental

⚠ Élargissement effectif du puit

- Séparation des deux niveaux d'énergie des états symétriques et antisymétriques

Le couplage par effet tunnel lève la dégénérescence des niveaux d'énergie

### Liaison chimique

- Lorsque deux noyaux sont suffisamment proches, la probabilité de transmission par effet tunnel de l'électron devient non négligeable
- Le couplage provoque le dédoublement de  $E_1$  en deux niveaux
  - $E_S$  d'énergie inférieure de fonction symétrique
  - $E_A$  d'énergie supérieure de fonction antisymétrique
- Il existe une distance d'équilibre permettant de minimiser l'énergie de l'état symétrique

## Évolution temporelle de la superposition de deux états

- Par superposition de deux fonctions d'ondes symétriques et antisymétriques, on forme

$$\begin{cases} \psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi^D(x) + \psi^G(x)) \\ \psi_- = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi^D(x) - \psi^G(x)) \end{cases}$$

- Ces fonctions représentent un état non stationnaire *CL de fonctions d'ondes d'énergie différentes*



On somme et on développe la densité de probabilité de présence avec

$$\left\{ \begin{array}{l} E_m = \frac{E_S + E_A}{2} \\ 2A = E_A - E_S \\ \Omega = \frac{2A}{\hbar} = \frac{E_A - E_S}{\hbar} \end{array} \right.$$

$$\nu = \frac{E_A - E_S}{\hbar}$$

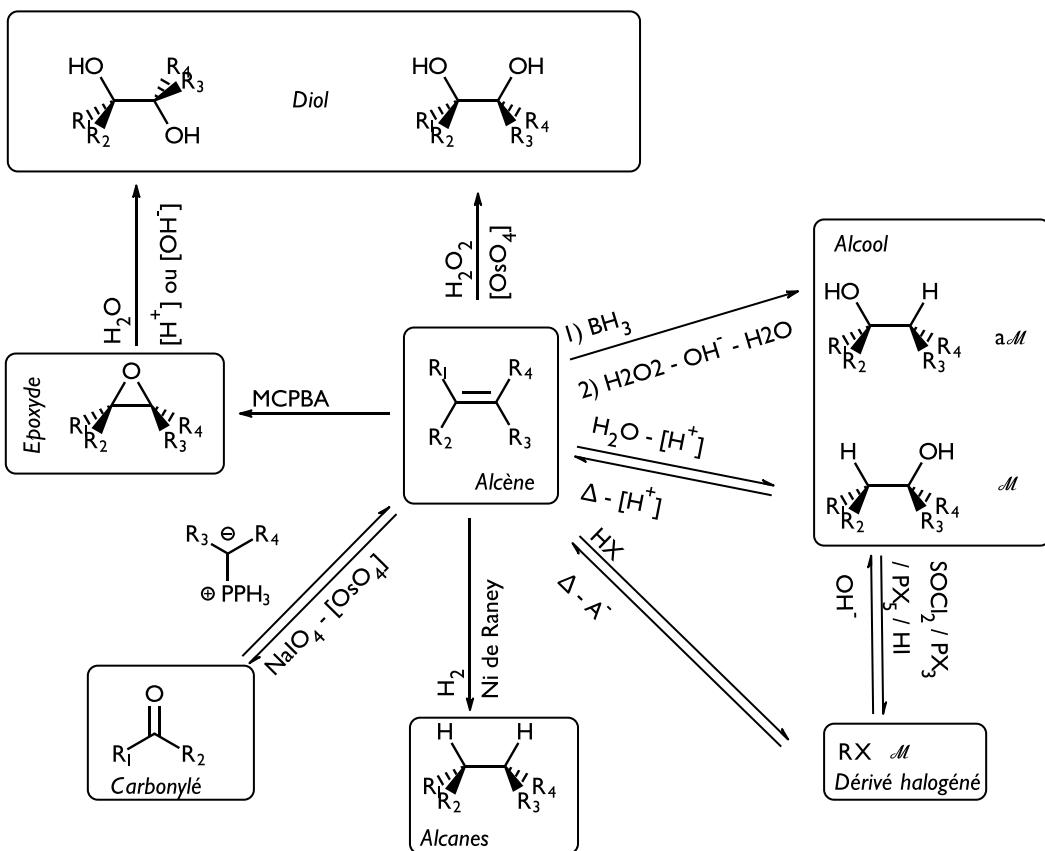
- $\nu$  est la fréquence de Bohr
- Battement quantique de NH<sub>3</sub>



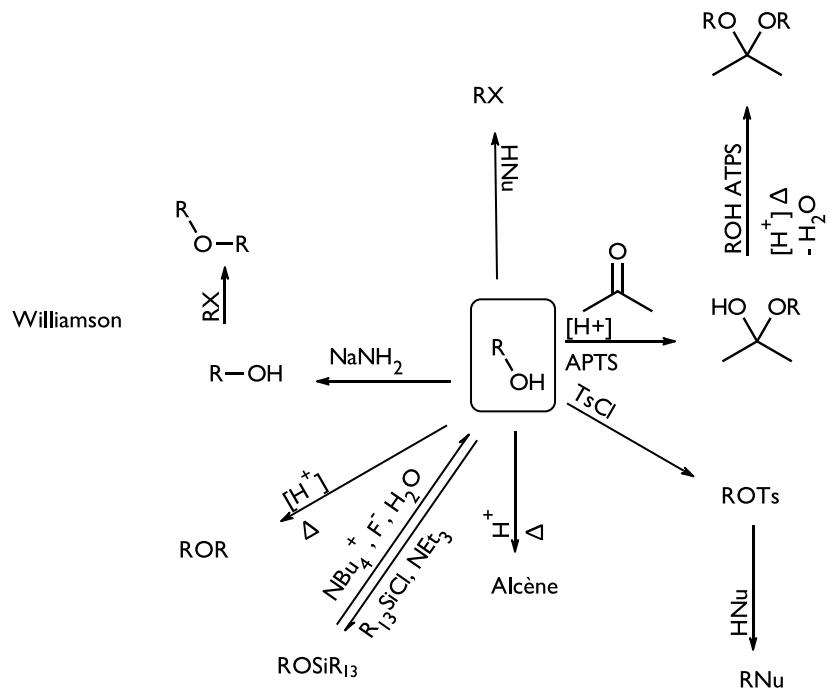


# IV Chimie

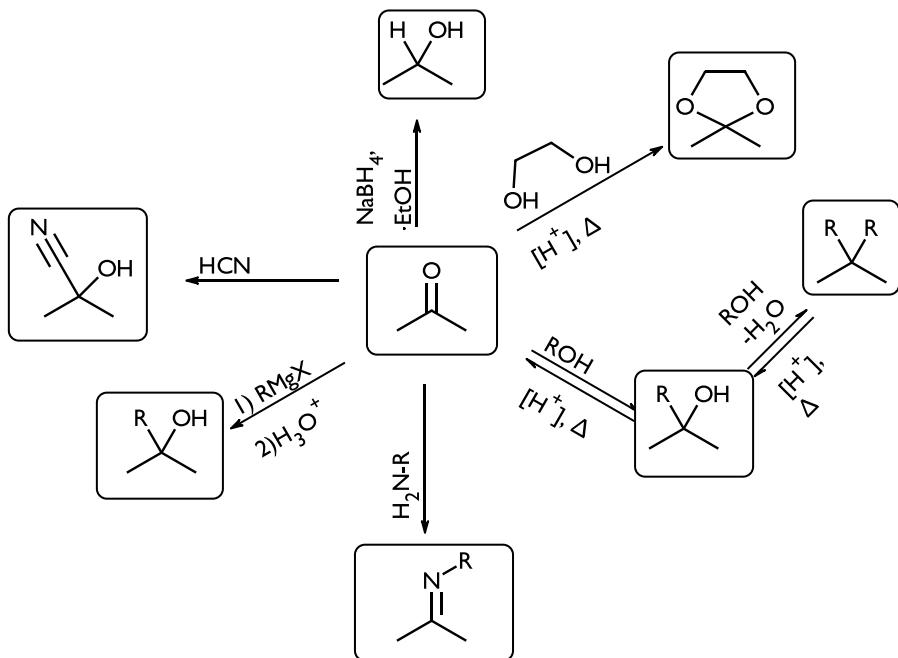
## 1 Alcènes



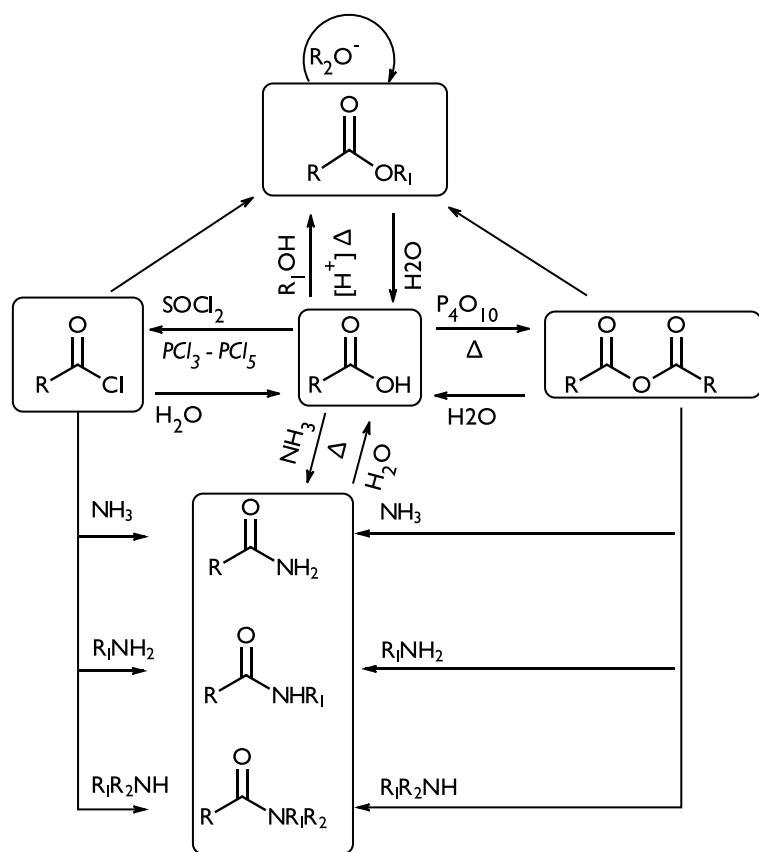
## 2 Alcools



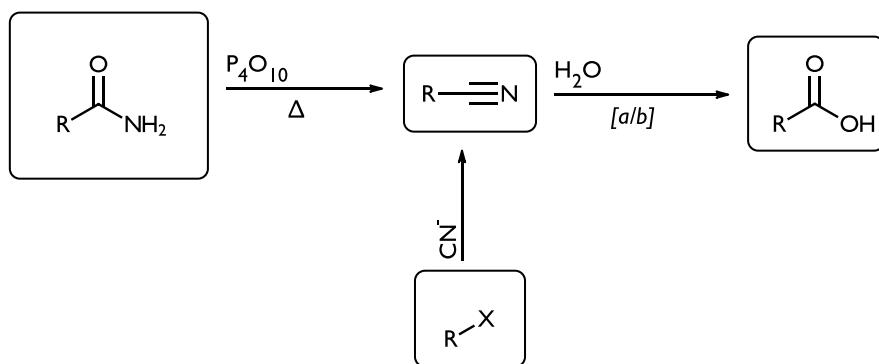
## 3 Aldéhydes et cétones



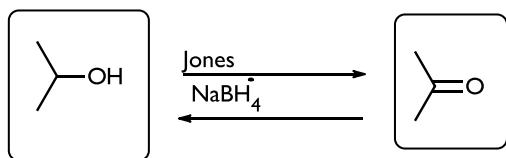
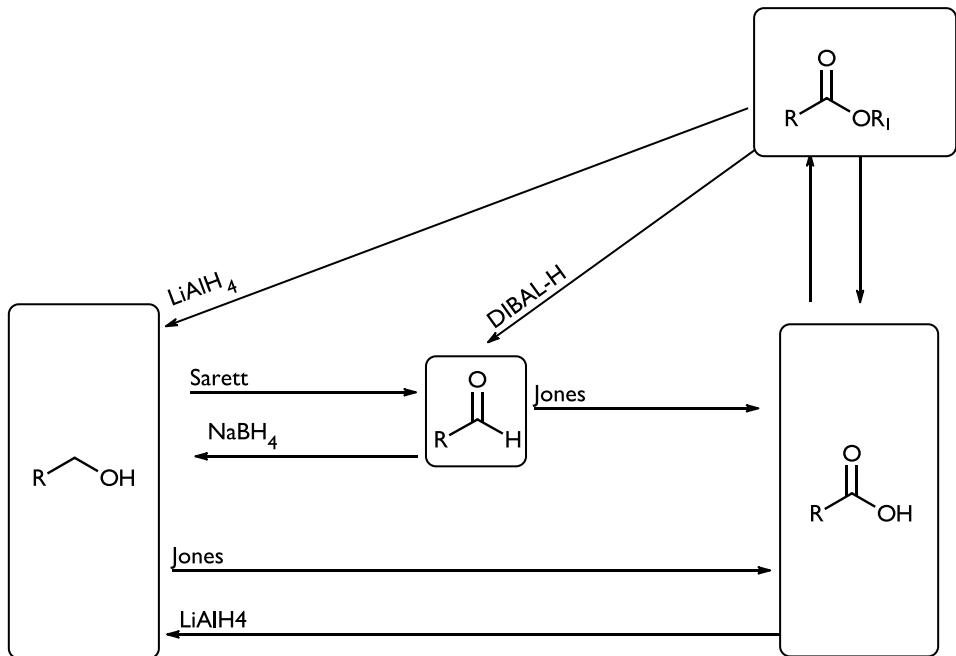
## 4 Dérivés d'acides



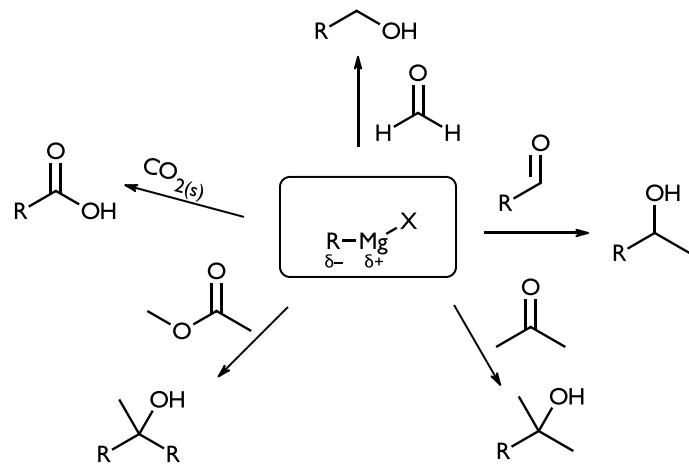
## 5 Nitriles



## 6 Oxydo-réduction



## 7 Organomagnésiens



## 1 Réactions

$$0 = \sum_i \vartheta_i X_i$$

- $\vartheta_i$  est le coefficient stœchiométrique de  $X_i$
- $\vartheta_i$  est positif/négatif pour un produit/réactif
- L'équation est caractérisée par sa constante d'équilibre  $K$

### Activité d'un constituant

Solide pur	1
Liquide pur	1
Solvant	1

Soluté dilué	$\frac{[X_i]}{C}$ où $C = 1\text{mol.L}^{-1}$
Gaz parfait	$\frac{P_i}{P}$ où $P = 1\text{bar}$

Définition

$$Q_r = \prod_i a_i^{\vartheta_i}$$

- $Q_r$  est le quotient réactionnel



### Relation de Guldberg et Waage

À l'équilibre chimique on a

$$K = Q_r = \prod_i a_i^{\vartheta_i}$$

- Les activités sont exprimées à l'équilibre
- Cette relation permet de déterminer la composition à l'équilibre

Théorème

### Expression rapide d'une constante d'équilibre

$$(R) = \sum_j \lambda_j (R)_j \Rightarrow K_R = \prod_i (K_j)^{\lambda_j}$$

Méthode

## 2 Tableau d'avancement

Si le système est fermé, les variations de quantités de matière de tous les réactants et produits sont liées

$$d\xi = \frac{dn_i}{\vartheta_i}$$

- $d\xi > 0$  : Évolution dans le sens direct
- $d\xi < 0$  : Évolution dans le sens indirect
- En intégrant on a  $n_i = n_{i0} + \vartheta_i \xi$

- Le réactif limitant est le réactif pour lequel  $\frac{n_i}{\vartheta_i}$  est le plus petit
- L'avancement est défini sur  $[\xi_{min}, \xi_{max}]$ 
  - $\xi_{max} = \min_{\text{réactifs}} \frac{n_{i,0}}{|\vartheta_i|}$  est la disparition du réactif limitant
  - $\xi_{min} = -\min_{\text{produits}} \frac{n_{i,0}}{|\vartheta_i|}$  est la disparition du produit limitant
- Deux réactifs sont introduits en proportion stœchiométriques si  $\frac{n_{1,0}}{\vartheta_1} = \frac{n_{2,0}}{\vartheta_2}$   
Ils restent alors en proportion stœchiométriques dans l'état final

Définition

$$\alpha = \frac{\xi - \xi_{min}}{\xi_{max} - \xi_{min}}$$

- $\alpha$  est le taux d'avancement de la réaction
- En présence de réactifs uniquement  $\alpha = \frac{\xi}{\xi_{max}}$

Cela revient à considérer la part de quantité de matière maximale atteinte  
 On utilisera le taux d'avancement en particulier dans le cas de réactifs en proportions stoechiométriques

$$\tau = \frac{\text{Quantité de réactif limitant consommée}}{\text{Quantité initiale de réactif limitant}}$$

- $\tau$  est le taux de conversion

$$\eta = \frac{\xi}{\xi_{max}} = \frac{\text{Quantité de produit obtenue}}{\text{Quantité obtenue si } \xi_{max} \text{ atteint}}$$

- $\eta$  est le rendement

### 3 Titrages

L'équation de titrage est  $\alpha A + \beta B = \text{Produits}$

L'équivalence est définie par la relation  $\frac{n_A^{\text{titré}}}{\alpha} = \frac{n_B^{\text{titrant}}}{\beta}$

On distingue deux phases de titrage

$$V < V_{eq} \quad \text{Tout le titrant est consommé} \quad \xi \approx \frac{C_B V}{\beta}$$

$$V > V_{eq} \quad \text{Tout le titré est consommé} \quad \xi \approx \frac{C_A V_A}{\alpha}$$

Au cours d'un titrage quantitatif  $\gg 10^4$  puis vérification, les quantités de matière des réactifs et des produits sont des **fonctions affines** du volume de réactif titrant versé

## 1 Systèmes physico-chimiques

Système + Milieu extérieur = Univers

Définition

### Différents systèmes

- Système **fermé** : Pas d'échanges de matière
- Système **ouvert** : Échanges de matière
- Système **isolé** : Pas d'échanges de matière et d'énergie

⚠

Constituant **chimique**  $\neq$  Constituant **physico-chimique** Etat physique précisé

Définition

### Différents corps

- Corps **pur** : Système à un seul constituant chimique
- Corps **simple** : Constituant chimique formé d'un seul élément
- Corps **composé** : Constituant chimique formé de plusieurs éléments
- État d'agrégation : Précise la formule chimique du corps simple Atomicité et l'état physique

## 2 État d'un système

On décrit l'état d'un système à l'aide de grandeurs mesurables paramètres d'état ( $P, V, T, n, \dots$ )

Définition

### Differentes grandeurs

- Grandeur **extensive** : Définie pour une partie ou tout du système  $\propto n$
- Grandeur **intensive** : Définie en tout point du système indépendante de n

Définition

### Composition du système

- Phase : Région où les grandeurs intensives sont fonctions continues de l'espace
- Phase uniforme : Phase dans laquelle les grandeurs intensives sont indépendantes de la position
- Système **homogène** : Une seule phase uniforme
- Système **hétérogène** Polyphasé : Plusieurs phases

Définition

### Variables physico-chimiques

- **Variables** d'état : Grandeurs indépendantes dont la donnée décrit l'état du système
- **Fonctions** d'état : Grandeurs d'état extensives se déduisant des équations d'état à partir des variables d'état

- Les variations d'une fonction d'état ne dépendent pas de la nature de la transformation *Du chemin suivi*
- $\Delta Z = Z_2 - Z_1 = Z_e + Z_c$  et pour une variation infinitésimale  $dZ = \delta Z_e + \delta Z_c$

### Nature des transformations

- **Quasistatique** : Constituée d'une série d'états d'équilibre
- **Réversible** : Quasistatique repassant par les mêmes états en sens inverse
- **Isochore** : Volume constant
- **Isotherme** : Température constante
- **Monotherme** :  $T_i = T_f = T_{ext}$
- **Isobare** : Pression constante
- **Monobare** :  $P_i = P_f = P_{ext}$
- **Adiabatique** : Pas de transferts thermiques  $Q = 0$

### Caractérisation de l'équilibre

Un système est à l'état d'équilibre thermodynamique si on observe

- Équilibre **thermique**  $T$  identique en tout point
- Équilibre **mécanique**  $P$  identique en tout point
- **Composition identique** en tout point

- Deux états d'un même système présentent les mêmes espèces avec variation de grandeurs intensives

## 3 Exemples de systèmes

### Mélange

DEF: Un mélange est une phase contenant plusieurs constituants chimiques, qui sont identiquement considérés

- Un mélange est dit idéal si les interactions dans le mélange sont de même nature et de même intensité

### Solution

- Une solution est une phase liquide ou solide contenant plusieurs constituants dont l'un d'eux *Majoritaire, le solvant* est traité différemment
- Une solution est dite idéale si les interactions soluté-soluté sont très faibles

## 4 Grandeurs

### Propriétés liées aux grandeurs intensives

$$x_i = \frac{n_i}{n_\varphi}$$

- $x_i$  est la fraction *titre* molaire de  $i$  dans la phase  $\varphi$
- On notera  $y_i$  pour un gaz

$$w_i = \frac{m_i}{m_\varphi}$$

- $w_i$  est la fraction *titre* massique de  $i$  dans la phase  $\varphi$

$$[i] = \frac{n_i}{V_\varphi}$$

- $[i]$  est la concentration molaire de  $i$  dans la phase  $\varphi$

$$P_i = x_i P$$

- $P_i$  est la pression partielle de  $i$
- Loi de Dalton :  $P = \sum_i P_i$

## Propriétés liées aux grandeurs extensives

$$Z_m = \frac{Z(T, P, n_j)}{\sum_j n_j}$$

- $Z_m$  est la grandeur  $Z$  molaire du mélange  
C'est une grandeur intensive en  $Z \cdot \text{mol}^{-1}$
- Dans le cas d'un corps pur on note  $Z_m^*$

$$\overline{Z}_i = \left( \frac{\partial Z}{\partial n_i} \right)_{T, P, n_j \neq i}$$

- $\overline{Z}_i$  est la grandeur  $Z$  molaire partielle du constituant  $i$   
C'est une grandeur intensive en  $Z \cdot \text{mol}^{-1}$
- Pour un système à grande extension  $\overline{Z}_i = \left( \frac{\delta Z}{\delta n_i} \right)_{T, P, n_j \neq i}$
- On a  $Z(T, P, n_j) = \sum_i n_i \overline{Z}_i$

⚠ Ne pas confondre  $\overline{Z}_i$  et  $Z_{m,i}^*$  à deux exceptions près

- Le volume molaire d'un gaz parfait
- Un corps pur monophasé



### Relation d'Euler

$$Z = \sum_i n_i \overline{Z}_i$$

## 5 État standard

### État standard

Pour construire les tables thermodynamiques il faut définir un état de référence appelé état standard  
Par définition  $P^\circ = 1 \times 10^5 \text{ Pa}$

DEF: La grandeur standard d'un mélange  $Z^\circ$  est la valeur de  $Z$  lorsque tous les constituants sont dans leur état standard

$$Z^\circ(T, n_j) = \sum_i n_i Z^\circ_{m,i}(T)$$

- $Z^\circ$  ne dépend pas de  $P$  car  $P = P^\circ$

### État standard des constituants

A T	Pur	Mélange	Solution
Solide	Pur à $P^\circ$ et $T$	Pur à $P^\circ$ et $T$	$\emptyset$
Liquide	Liquide pur à $P^\circ$ et $T$	Liquide pur à $P^\circ$ et $T$	$\emptyset$
Gaz	Gaz parfait pur à $P^\circ$ et $T$	Gaz parfait pur à $P^\circ$ et $T$	$\emptyset$
Solvant	$\emptyset$	$\emptyset$	Liquide pur à $P^\circ$ et $T$
Soluté	$\emptyset$	$\emptyset$	Pur à $P^\circ$ et $T$ et se comportant comme en infinie dilution

## 6 Grandeurs de réaction

Au lieu d'utiliser les variables de Gibbs ( $T, P, n_j$ ), le système étant fermé on a  $n_i = n_{i0} + \vartheta_i \xi$ , on utilise les variables de Donder ( $T, P, \xi$ )

$$\Delta_r Z = \left( \frac{\partial Z}{\partial \xi} \right)_{T,P}$$

- $\Delta_r Z$  est la grandeur de réaction  
C'est une grandeur intensive en  $Z \text{ mol}^{-1}$

$$\Delta_r Z = \sum_i \vartheta_i \overline{Z}_i$$

$$\Delta_r Z = \left( \frac{\partial Z}{\partial T} \right)_{P,n_j} dT + \left( \frac{\partial Z}{\partial P} \right)_{T,n_j} dP + \sum_i \left( \frac{\partial Z}{\partial n_i} \right)_{T,P} dn_i$$

- S'obtient par identification dans l'expression de

⚠ Il ne faut pas confondre les relations  $\Delta_r Z(T) = \sum_i \vartheta_i \overline{Z}_i$  et  $Z = \sum_i n_i \overline{Z}_i$

$$\Delta_r Z^\circ = \sum_i \vartheta_i Z^\circ_{m,i}$$

- $\Delta_r Z^\circ(T)$  est la grandeur  $Z$  standard de réaction  
Cette grandeur est intensive et en  $Z \cdot \text{mol}^{-1}$

## 1 Principe de conservation de l'énergie

### Premier principe de la thermodynamique

Pour tout système il existe une forme d'énergie appelée énergie interne  $U$ , fonction d'état extensive du système

$$\Delta U = W + Q$$

- $W$  le travail algébriquement reçu par le système
- $Q$  le transfert thermique algébriquement reçu par le système
- Sous forme infinitésimale on a  $dU = \delta W + \delta Q$

$$\delta W_p = -P_{ext}dV$$

- On distingue le travail des forces de pression
- Si la transformation est réversible on a de plus  $P = P_{ext}$

DEF: Une transformation sans travail utile *Uniaulement*  $W_p$  est dite **thermomécanique**

### Transformation isochore

- $W_p = 0$
- On note alors  $Q = Q_V$

### Transformation monobare

- On considère  $P_i = P_f = P_{ext}$
- On pose alors  $\mathcal{H} = U + PV$
- $\Delta\mathcal{H} = Q_P$
- On note  $Q = Q_P$

## 2 Systèmes formés d'un corps pur

L'état du système ne dépend que de deux variables indépendantes

- Corps pur monphasé  $\Rightarrow$  2 variables nécessaires
- 2 phases : Courbe d'équilibre  $\Rightarrow$  Une variable nécessaire
- 3 phases  $\Rightarrow$  Point triple

### 2.1 Capacités thermiques

$$C_P = \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial T} \right)_P$$

- $C_P$  est la capacité à pression constante
- $C_{Pm} = \frac{C_P}{n}$

$$C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$

- $C_V$  est la capacité à volume constant
- $C_{Vm} = \frac{C_V}{n}$

### Cas du gaz parfait

- Les premières et deuxièmes lois de Joule donnent  $U_m$  et  $\mathcal{H}$  uniquement fonctions de  $T$
- $C_{Pm} = C^\circ_{Pm}$
- $dU = nC_{Vm}(T)dT$
- $d\mathcal{H} = nC_{Pm}(T)dT$
- $\mathcal{H}_m = U_m + RT$  d'où  $C_{Pm} = C_{Vm} + R$

	$C_{Vm} = \frac{R}{\gamma - 1}$	$C_{Pm} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$	$\gamma = \frac{C_{Pm}}{C_{Vm}}$
Gaz monoatomique	$\frac{3}{2}R$	$\frac{5}{2}R$	$\frac{5}{3}$
Gaz diatomique	$\frac{5}{2}R$	$\frac{7}{2}R$	$\frac{7}{5}$

### Cas des phases condensées

- Les phases condensées sont incompressibles  $\Rightarrow U$  indépendant de  $V$
- $C_{Pm} \simeq C_{Vm} \Rightarrow$  On note  $C_m$
- $d\mathcal{H}_m \simeq dU_m \simeq C_m dT$
- $\mathcal{H}_{mi}(T, P) \simeq \mathcal{H}_{mi}(T, P^\circ) = \mathcal{H}^\circ_{mi}(T)$  d'où  $C_m \simeq C^\circ_m$

$$\Delta\mathcal{H} = Q_p = n\Delta_{vap}\mathcal{H}^\circ_i$$

- Vaporisation de  $n$  mol de  $i$  sous la pression standard
- $\Delta_{vap}\mathcal{H}^\circ_i$  est l'enthalpie standard de vaporisation

En traçant  $\mathcal{H}^\circ_{mi} = f(T)$  et comme  $\frac{d\mathcal{H}^\circ_i}{dT} = C^\circ_{Pm} > 0$

- On a en considérant  $C^\circ_{Pm}$  indépendantes de la température des morceaux de fonctions affines
- Approximation d'Ellingham  $\Rightarrow$  On néglige l'influence de la température  $\Rightarrow$  Portions de droites

### Transformations avec changements d'états

On décompose en utilisant l'extensivité en

- Etapes dans un même état
- Etapes de changement d'état

- Pour un mélange de gaz parfaits  $\bar{\mathcal{H}}_{mi} = \mathcal{H}^\circ_{mi}(T)$
- Pour un mélange liquide<sub>solide</sub> idéal  $\bar{\mathcal{H}}_{mi} = \mathcal{H}_{mi}^*(T, P) \simeq \mathcal{H}^\circ_{mi}(T)$

## 4 Système en réaction

### 4.1 Enthalpie et enthalpie standard de réaction

$$\Delta_r \mathcal{H} = \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi} \right)_{T,P} = \sum_i \vartheta_i \overline{\mathcal{H}_i} \text{ or } \overline{\mathcal{H}_i} \simeq_{\text{si } GP} \mathcal{H}_m^\circ(T) \text{ d'où } \Delta_r \mathcal{H} \simeq \sum_i \vartheta_i \mathcal{H}_{mi}^\circ(T) = \Delta_r \mathcal{H}^\circ(T)$$

- $\Delta_r \mathcal{H} > 0 \Rightarrow$  Réaction endothermique
- $\Delta_r \mathcal{H} < 0 \Rightarrow$  Réaction exothermique
- Système de gaz parfaits :  $\Delta_r \mathcal{H} = \Delta_r \mathcal{H}^\circ(T)$
- Autres cas :  $\Delta_r \mathcal{H} \simeq \Delta_r \mathcal{H}^\circ(T)$
- On a la même chose avec  $\Delta_r U = \Delta_r U^\circ$

### Lien entre $\Delta_r U^\circ$ et $\Delta_r \mathcal{H}^\circ$

En dérivant par rapport à  $\xi$  à  $P$  et  $T$  constant  $\mathcal{H} = U + PV$  on a

$$\Delta_r \mathcal{H}^\circ = \Delta_r U^\circ + \left( \sum_i \vartheta_i \right) RT_0 \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} &- \text{En passant à l'état standard et car } \Delta_r V^\circ = \sum_i \vartheta_i V_{mi}^\circ \\ &\text{En présence de gaz on suppose } V_{mi(cd)}^\circ \ll V_{mi(g)}^\circ \text{ ce qui revient à ne considérer que les gaz dans la formule} \end{aligned}$$

### Loi de Hess

$$(R) = \sum_i \lambda_i (R_i) \Rightarrow \Delta_r \mathcal{H}^\circ_R(T) = \sum_i \lambda_i \Delta_r \mathcal{H}^\circ_{R_i}(T)$$

La loi peut être écrite avec toutes les grandeurs extensives

## 4.2 Enthalpie standard de formation

### Etat standard de référence

- L'état standard de référence d'un élément est en général l'état standard de son état d'agrégation le plus stable à  $T$
- Exceptions
  - L'état standard de référence du carbone et l'état standard du carbone graphite à  $T$
  - Pour X=H,N,O,F,Cl l'état standard de référence est celui de  $X_2$

Ne pas confondre état standard de référence d'un élément et état standard d'un constituant physico-chimique

- L'enthalpie standard de formation d'un constituant physico-chimique est par définition l'enthalpie standard de réaction de la réaction de formation
- ⚠ Il faut préciser les états physiques car leurs enthalpies de formation diffèrent
- Par convention  $\Delta_f \mathcal{H}^\circ_{H^+} = 0$
- L'enthalpie standard de solvatation d'un ion à 298K est l'enthalpie standard de réaction à 298 K de  $i_{(g)} = i_{(\text{solv})}$

$$\Delta_r \mathcal{H}^\circ(T_0) = \sum_i \vartheta_i \Delta_f \mathcal{H}_i(T_0)$$

- Pour 0 =  $\sum_i \vartheta_i X_i$
- Cette relation est une conséquence de la loi de Hess



Ne pas confondre  $\mathcal{H}^\circ_{mi}$  et  $\Delta_f \mathcal{H}^\circ_i$

## 4.3 Enthalpies standard caractéristiques

Définition

### Enthalpie standard de dissociation de liaison

DEF:  $D_{AB}$  est l'enthalpie standard associée à la réaction  $AB_{(g)} = A_{(g)} + B_{(g)}$  à 298 K

⚠ On considère une rupture homolytique de la liaison AB en atomes A et B

- $D_{AB}$  est finalement **énergie de liaison**
- Dans le cas d'une réaction où toutes les espèces sont gazeuses on a

$$\Delta_r \mathcal{H}^\circ = \sum_i \epsilon_i D_i$$

–  $\epsilon_i$  vaut  $\pm 1$  selon si la liaison est cassée ou formée

Définition

### Enthalpie standard de combustion

DEF:  $\Delta_{comb} \mathcal{H}^\circ(i_{(\varphi)})$  est l'enthalpie standard de réaction entre 1  $i_{(\varphi)}$  et  $O_{2(g)}$  pour former  $CO_{2(g)}$  et  $H_2O_{(l)}$  à 298 K

- La réaction de combustion est exothermique et quantitative

Définition

### Enthalpie standard de d'atomisation

DEF:  $\Delta_{atom} \mathcal{H}^\circ(i_g)$  est l'enthalpie standard de la réaction à 298 K de  $i_g$  donnant les atomes la constituant sous forme gazeuse

Définition

### Enthalpie standard réticulaire d'un cristal ionique

DEF:  $\Delta_{ret} \mathcal{H}^\circ = E_R$  est l'enthalpie standard de réaction ayant pour produit 1 cristal ionique et comme réactifs les ions le constituant à l'état gazeux à 298 K

⚠ Ne pas confondre cette réaction avec celle de formation du solide  $Pas\ d'ions$

- Cette enthalpie traduit de l'énergie de cohésion du cristal

Définition

### Enthalpie standard de première ionisation

DEF:  $\Delta_{ion} \mathcal{H}^\circ = EI_1$  est l'enthalpie standard de la réaction  $A_{(g)} = A_g^+ + e^-_{(g)}$  à l'état gazeux à 298 K

- On définit de même l'enthalpie standard de deuxième ionisation de la réaction  $A_{(g)}^+ = A_g^{2+} + e^-_{(g)}$  à l'état gazeux à 298 K

Définition

### Enthalpie standard d'attachement électronique

DEF:  $\Delta_{att} \mathcal{H}^\circ$  est l'enthalpie standard de la réaction  $A_{(g)} + e^-_{(g)} = A^-_{(g)}$  à l'état gazeux à 298 K

- On définit l'affinité électronique comme  $-\Delta_{att} \mathcal{H}^\circ$

## 4.4 Influence de la température sur $\Delta_r \mathcal{H}^\circ$

## Formule de Kirchhoff

$$\frac{d\Delta_r \mathcal{H}^\circ(T)}{dT} = \sum_i \vartheta_i C^\circ_{Pmi}(T) = \Delta_r C^\circ_P(T)$$

D'où  $\Delta_r \mathcal{H}^\circ(T) - \Delta_r \mathcal{H}^\circ(T_0) = \int_{T_0}^T \left( \sum_i \vartheta_i C^\circ_{Pmi}(T) \right) dT$   
 Et simplification si  $C^\circ_P$  indépendant de  $T$   
 Expression analogue avec  $U$  et  $C^\circ_V$

Théorème

Dans l'**approximation d'Ellingham** on néglige l'influence de  $T$  sur  $\Delta_r C^\circ_P$   
 $\Rightarrow \Delta_r \mathcal{H}^\circ(T) \approx \Delta_r \mathcal{H}^\circ(T_0)$

 Pour une réaction à une température quelconque on décompose la réaction en plusieurs étapes fictives par extensivité de  $\mathcal{H}$  : une réaction à  $T_0$  et un changement de température

## Relation de Van't Hoff

$$\frac{d \ln(K^\circ(T))}{dT} = \frac{\Delta_r \mathcal{H}^\circ}{RT^2} \quad \Rightarrow K^\circ \text{ augmente} \underset{\text{diminue}}{\text{diminue}} \text{ avec } T \text{ si } \Delta_r \mathcal{H}^\circ > 0 < 0$$

Théorème

En intégrant la relation et en se plaçant dans l'approximation d'Ellingham on peut déduire  
 $\Delta_r \mathcal{H}^\circ = R \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1} \ln \left( \frac{K^\circ_{T_2}}{K^\circ_{T_1}} \right)$

Méthode

## Calculs d'enthalpies standard de réaction

- On combine les  $\Delta_{R_i} \mathcal{H}^\circ$
- On utilise les enthalpies de formation standard des tables
- On combine les enthalpies standard de réaction caractéristiques décrites ci-dessus

Démonstration

## Transformation isotherme, isobare

$$d\mathcal{H} = \Delta_r \mathcal{H} d\xi \text{ d'où en intégrant } \Delta\mathcal{H} = \int_0^\xi \Delta_r \mathcal{H}(T) d\xi$$

$$\Delta\mathcal{H} = \xi \Delta_r \mathcal{H} \approx \xi \Delta_r \mathcal{H}^\circ(T)$$

Pour une transformation à  $P$  et  $T$  constantes

 Il est nécessaire de définir précisément le système dans ses états initiaux et finaux

## 1 Principe d'évolution des systèmes

### Second principe

Il existe une fonction d'état extensive appelée entropie  $S$  telle

$$\Delta S = S_e + S_c$$

- $S_e = \frac{Q}{T_{frontière}} = \int \frac{\delta Q}{dT_f}$  est l'entropie échangée
- $S_c$  est l'entropie créée, elle est positive
- $S_c = 0$  définit une transformation réversible
- $dS = dS_e + dS_c$

Théorème

- Transformation monotherme  $\Rightarrow Q_{rev} > Q_{irrev}$
- L'entropie d'un système isolé ne peut que croître dans un processus réel
- L'entropie mesure le désordre à l'échelle moléculaire

$$S = k_B \ln(\Omega)$$

- Équation de la thermodynamique statistique
- $k_B = \frac{R}{N_A}$  est la constante de Boltzmann

Remarque

### Principe de Nernst Troisième principe.

L'entropie de tout corps cristallisé tend vers 0 quand  $T$  vers 0K

 A 0K l'ordre est maximal

Théorème

## 2 Fonction enthalpie libre

Définition

$$G = H - TS$$

- $G$  est homogène à une énergie

### Transformation monotherme et monobare

- Premier principe :  $\Delta U = -P_{ext}(V_2 - V_1) + W' + Q \Rightarrow \Delta H = W' + Q$
- Second principe :  $\Delta S = \frac{Q}{T_{ext}} + S_c$
- Variation d'enthalpie libre :  $\Delta G = W' - T_{ext}S_c \leq W'$
- Cas thermomécanique  $\Delta G = -T_{ext}\Delta S_c$  et  $\Delta H = Q$

$\Rightarrow$  Au cours d'une évolution thermomécanique spontanée monotherme, monobare isotherme, isobare  $H$  doit diminuer pour atteindre un état d'équilibre thermodynamique où  $G$  est minimal

Démonstration

## Identités thermodynamiques

Propriétés

$$dU = -PdV + TdS$$

A composition constante

$$dG = VdP - SdT$$

- A composition constante
- Se démontre à partir de l'autre identité
- On a également  $dH = VdP + TdS$

💡 On inverse  $AdB$  et  $-BdA$  par rapport à  $dU$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_P = -S$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_T = V$$

$$\left(\frac{\partial \frac{G}{T}}{\partial T}\right)_P = -\frac{H}{T^2} \Leftrightarrow H = G - T \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_P$$

*Relation de Gibbs-Helmholtz*

## 3 Analyse d'entropies de systèmes

### 3.1 Corps purs

Démo

$$\begin{cases} dH_m = C_{Pm}dT + \left(\frac{\partial H_m}{\partial P}\right)_T dP \\ dH_m = TdS_m + V_m dP = T\left(\frac{\partial S_m}{\partial T}\right)_P dT + \left(T\left(\frac{\partial S_m}{\partial P}\right)_T + V_m\right) dP \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial S_m}{\partial T}\right)_P = \frac{C_{Pm}}{T}$$

- En identifiant  $dT$  dans les deux expressions
- De manière analogue on identifie  $dP$  et on remplace  $dS_m = \frac{C_{Pm}}{T}dT - \frac{R}{P}dP$  ce qu'on intègre pour retrouver une formule bien connue du cours de physique

### 3.2 Changement de température isobare

$$dS = \frac{nC_{Pm}}{T}dT$$

- Par ce qui précède
- Cette expression peut alors être intégrée
- Si on néglige les effets de température sur  $C_{Pm}$  on a  $\Delta S = nC_{Pm} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$

### 3.3 Changement d'état d'un corps pur

💡 Le changement d'état d'un corps pur est une transformation réversible  $\Rightarrow S_c = 0$

$$\Delta S = \frac{\xi \Delta_{1 \rightarrow 2} H^\circ}{T^\circ_{1 \rightarrow 2}}$$



Par une application des 1<sup>er</sup> et 2<sup>e</sup> principes

## 4 Propriétés de l'entropie en réaction

Définition

$$\Delta_r S = \left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)_{T,P} = \sum_i \vartheta_i \bar{S}_i$$

⚠  $\Delta_r S$  dépend de  $T, P, \xi$

## Définition

$$\Delta_r \mathcal{S}^\circ(T) = \sum_i \vartheta_i \mathcal{S}_i^\circ(T)$$

- $\Delta_r \mathcal{S}$  ne dépend que de  $T$
- On note souvent  $\mathcal{S}_i$  à la place de  $\mathcal{S}_{mi}$   
💡 L'attribut molaire se retrouve dans les unités

## Propriétés

Influence de la température

$$\frac{d\Delta_r \mathcal{S}^\circ}{dT} = \frac{\sum_i \vartheta_i C^\circ P_i}{T} = \frac{\Delta_r C^\circ P(T)}{T}$$

- S'intègre puis se simplifie si  $C^\circ P_i$  ne dépendent pas de  $T$

**Approximation d'Ellingham** : On néglige l'influence de  $T$  sur  $\Delta_r \mathcal{S}^\circ$  si il n'y a pas de changements d'état  
 $\Delta_r \mathcal{S}^\circ(T) \approx \Delta_r \mathcal{S}^\circ(T_0)$

## Méthode

Prévision du signe de  $\Delta_r \mathcal{S}^\circ$ 

L'entropie étant grande en présence de gaz  $\Rightarrow$  Désordre,  $\Delta_r \mathcal{S}^\circ$  augmente avec  $\sum_{gaz} \vartheta_i$

## Théorème

Loi de Hess

$$(R) = \sum_i \lambda_i (R_i) \Rightarrow \Delta_r \mathcal{S}^\circ_R(T) = \sum_i \lambda_i \Delta_r \mathcal{S}^\circ_{R_i}(T)$$

## 5 Propriétés de l'enthalpie libre en réaction

## Définition

$$\mu_i = \overline{\mathcal{G}}_i$$

- $\mu_i$  est le potentiel chimique du constituant physico-chimique

$$\Delta_r \mathcal{G} = \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \xi} \right)_{T,P} = \sum_i \vartheta_i \overline{\mathcal{G}}_i = \sum_i \vartheta_i \mu_i$$

⚠  $\Delta_r \mathcal{G}$  dépend de  $T, P, \xi$

$$\Delta_r \mathcal{G}^\circ(T) = \sum_i \vartheta_i \mathcal{G}_i^\circ(T) = \sum_i \vartheta_i \mu_i^\circ(T)$$

- $\Delta_r \mathcal{G}$  ne dépend que de  $T$
- $\Delta_r \mathcal{G}^\circ(T) = \Delta_r \mathcal{H}^\circ(T) - T \Delta_r \mathcal{S}^\circ(T)$   
Fonction affine de  $T$  dans l'approximation d'Ellingham

Influence de la température

$$\frac{d\Delta_r \mathcal{G}^\circ(T)}{dT} = -\Delta_r \mathcal{S}^\circ(T)$$

- Si le constituant ne change pas d'état

## RELATION DE GIBBS-HELMHOLTZ

$$\frac{d \left( \frac{\Delta_r \mathcal{G}^\circ(T)}{T} \right)}{dT} = -\frac{\Delta_r \mathcal{H}^\circ(T)}{T^2}$$

- On utilise l'expression précédente

## Propriétés

Loi de Hess

$$(R) = \sum_i \lambda_i (R_i) \Rightarrow \Delta_r \mathcal{G}^\circ_R(T) = \sum_i \lambda_i \Delta_r \mathcal{G}^\circ_{R_i}(T)$$

$$\Delta_r \mathcal{G}^\circ(T_0) = \sum_i \vartheta_i \Delta_f \mathcal{G}^\circ_i(T_0)$$

- L'enthalpie libre standard de formation est l'enthalpie libre standard de la réaction de formation

**💡** Au cours d'une transformation réversible, isobare, isotherme  $\Delta \mathcal{G} = 0$

**⚠️** Par définition toute grandeur standard relative à  $H_{(aq)}^+$  est nulle à toute température

## 6 Constante d'équilibre thermodynamique

Définition

$$K^\circ(T) = \exp\left(-\frac{\Delta_r \mathcal{G}^\circ(T)}{RT}\right)$$

- Ou de manière équivalente  $\Delta_r \mathcal{G}^\circ(T) = -RT \ln(K^\circ(T))$

- Par la loi de Hess :  $(R) = \sum_i \lambda_i (R_i) \Rightarrow K^\circ(T) = \prod_i (K^\circ R_i(T))^{\lambda_i}$

RELATION DE VAN'T HOFF

Propriétés

$$\frac{d \ln(K^\circ(T))}{dT} = \frac{\Delta_r \mathcal{H}^\circ(T)}{RT^2}$$

**⚠️** On dérive la définition de  $K^\circ$

- $K^\circ$  augmente diminue avec  $T$  quand  $\Delta_r \mathcal{H}^\circ > 0 < 0$
  - Dans l'approximation d'Ellingham
- $$\ln(K^\circ(T)) = -\frac{\Delta_r \mathcal{H}^\circ}{RT} + \frac{\Delta_r \mathcal{S}^\circ}{R}$$

Définition

### Température d'inversion

La température d'inversion est la température pour laquelle  $K^\circ(T_i) = 1 \Leftrightarrow \Delta_r \mathcal{G}^\circ(T_i) = 0$

$$\text{On a alors } T_i = \frac{\Delta_r \mathcal{H}^\circ}{\Delta_r \mathcal{S}^\circ}$$

$$\text{On n'a généralement pas } \Delta_r \mathcal{S}^\circ = \frac{\Delta_r \mathcal{H}^\circ}{T}$$

**⚠️** Cela impliquerait  $\Delta_r \mathcal{G}^\circ = 0$  ce qui n'est vrai que dans certaines situations Changements d'états

## 1 Potentiels chimiques

$$\mu_{i(\varphi)} = \overline{\mathcal{G}_{i(\varphi)}} = \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n_{i(\varphi)}} \right)_{T, P, n_j \neq i(\varphi)}$$

- Le potentiel chimique est une grandeur intensive en  $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1}$

$\triangle$  Dans le cas d'un système polyphasé il faudra préciser le nom du constituant et sa phase

- Un système plus stable à  $\mu$  plus petit

### IDENTITÉS THERMODYNAMIQUES

$$d\mathcal{G} = -SdT + VdP + \sum_i^N \mu_i dn_i$$

- Par identification dans l'expression de  $d\mathcal{G}$
- Ces définitions sont aussi valables pour  $i(\varphi)$
- $dU = TdS + PdV + \sum_{i=1}^N \mu_i dn_i$
- $dH = TdS + VdP + \sum_{i=1}^N \mu_i dn_i$

### RELATION D'EULER

$$\mathcal{G} = \sum_i n_i \mu_i$$

Cette relation permettra de calculer  $\Delta G = \mathcal{G}_f - \mathcal{G}_i$

### INFLUENCE DE LA TEMPÉRATURE

$$\left( \frac{\partial \mu_i}{\partial T} \right)_{P, n_i} = -\overline{S}_i$$

- Cette relation s'obtient par le théorème de Schwartz
- Corps pur monophasé :  $\left( \frac{\partial \mu_{i(\varphi)}^*}{\partial T} \right)_P = -\overline{S}_{mi(\varphi)}^* < 0$

### INFLUENCE DE LA PRESSION

$$\left( \frac{\partial \mu_i}{\partial P} \right)_{T, n_i} = \overline{V}_i$$

- Cette relation s'obtient par le théorème de Schwartz
- Corps pur monophasé :  $\left( \frac{\partial \mu_{i(\varphi)}^*}{\partial P} \right)_T = \overline{V}_{mi(\varphi)}^* > 0$
- L'influence de la pression sur  $\mu$  est grande pour des gaz et négligeable pour des phases condensées

### RELATION DE GIBBS-DUHEM

$$\text{A } T \text{ et } P \text{ constantes} \quad \sum_i n_i d\mu_i = 0 \Rightarrow \sum_i x_i d\mu_i = 0$$

$$\triangle \quad \left\{ \begin{array}{l} d\mathcal{G} = \sum_i n_i d\mu_i + \sum_i \mu_i dn_i \\ d\mathcal{G} = -SdT + VdP + \sum_i^N \mu_i dn_i \end{array} \right.$$

### RELATION DE GIBBS-HELMHOLTZ

$$\left( \frac{d \left( \frac{\partial \mu_i}{T} \right)}{\partial T} \right)_{P, n_j} = -\frac{\overline{H}_i}{T^2}$$

De manière analogue aux grandeurs non partielles

## 2 Expressions de potentiels chimiques

Propriétés

### Corps pur

$$\mu_{i(\varphi)}^*(T, P) = \mu_{i(\varphi)}^\circ(T) + \int_{P^\circ}^P V_{mi\varphi}(T, P) dP \quad \left| \quad \Delta \left( \frac{\partial \mu_{i(\varphi)}^*}{\partial P} \right)_T = V_{mi(v\varphi)}^* \right.$$

CAS DU GAZ PARFAIT PUR

$$\mu_{i(g)}^*(T, P) = \mu_{i(g)}^\circ(T) + RT \ln \left( \frac{P}{P^\circ} \right)$$

CAS DES PHASES CONDENSÉES PURES

$$\mu_{i(pc)}^*(T, P) = \mu_{i(pc)}^\circ(T) + V_{mi(s)}^*(P - P^\circ)$$

- $\mu_{i(pc)}^*(T, P) \approx \mu_{i(pc)}^\circ(T)$

💡 On négligera si on n'a pas de données sur  $V_{mi(s)}^*$

### Mélange

Propriétés

CAS DU GAZ PARFAIT PUR

$$\mu_{i(g)}(T, P, n_j) = \mu_{i(g)}^\circ(T) + RT \ln \left( \frac{P_i}{P^\circ} \right)$$

- $P_i = x_i P = \frac{n_i RT}{V}$

- On retrouve également l'expression suivante  $\Rightarrow$  Mélange idéal

CAS DU MÉLANGE IDÉAL

$$\mu_{i(\varphi)}(T, P) = \mu_{i(\varphi)}^*(T, P) + RT \ln(x_{i(\varphi)})$$

- $\mu_{i(\varphi)}^*(T, P)$  est le potentiel chimique de  $i$  pur dans le même état physique Etat de référence du corps pur ERCP

CAS D'UN MÉLANGE SOLIDE OU LIQUIDE IDÉAL

$$\mu_{i(\varphi)}(T, n_j) \approx \mu_{i(\varphi)}^*(T, P) + RT \ln(x_{i(\varphi)})$$

- On néglige l'influence de la pression

### Solution infiniment diluée

Propriétés

SOLUTÉ

$$\mu_i(T, C_i) = \mu_{i,C,\infty}^*(T) + RT \ln \left( \frac{C_i}{C^\circ} \right)$$

- On néglige l'influence de la pression
- L'état de référence est l'état infiniment dilué à  $C^\circ$ ,  $P^\circ$  et  $T$
- Il est hypothétique Extrapolation
- On a aussi  $\mu_i(T, x_i) = \mu_{i,x,\infty}^*(T) + RT \ln(x_i)$

SOLVANT

$$\mu_{solv}(T, x_j) = \mu_{solv}^\circ(T)$$

- L'état standard est celui du solvant pur
- On a  $x_{solv} \approx 1$

## 3 Activité

$$\mu_{i(\varphi)} = \mu_{i(\varphi)}^\circ + RT \ln(a_{i(\varphi)}^\circ)$$

- L'état de référence est l'état standard
- $a_i^\circ$  est l'activité du constituant relative à l'état standard  
Elle est sans dimension

Dans l'état standard, l'activité du constituant  $i(\varphi)$  est égale à 1

Composant	Expression de $a$	État de référence
Gaz parfait pur	$a = \frac{P}{P^\circ}$	Standard
Phase condensée pure	$a = 1$	Standard
Gaz parfait dans un mélange	$a_{i(g)} = \frac{P_i}{P^\circ}$	Standard
Constituant d'un mélange idéal $l$ ou $s$	$a_{i(\varphi)} = x_{i(\varphi)}$	ERPC <i>Corps pur</i>
Soluté	$a_{i,C} = \frac{C_i}{C^\circ}$ ou $a_{i,x} = x_i$	ERID <i>Infiniment dilué</i>
Solvant	$a_{solv} = 1$	Standard

### Systèmes non idéaux

$$a_{i,réel} = \gamma_i \times a_{i,idéal}$$

- Les coefficients d'activité  $\gamma_i$  dépendent de  $T$  et de la composition
- $\gamma_i = 1$  si idéalité

Si les solutions ne sont pas assez diluées on ne peut assimiler  $K^\circ$  à sa valeur dans la relation de Guldberg et Waage  $\Rightarrow$  Écart aux valeurs théoriques obtenues expérimentalement

### Mélanges idéaux

$$\Delta_{mix}Z = Z_{fin} - Z_{ini} = \sum_i (\bar{Z}_i - Z_{mi}^*)$$

- Pour un mélange réalisé à  $T$  et  $P$  constantes

$$\begin{aligned} \Delta_{mix}\mathcal{G} &= \sum_i n_i (\mu_i(T, P, n_j) - \mu_i^*(T, P)) \\ &= RT \sum_i n_i \ln(x_i) < 0 \end{aligned}$$

Pour un mélange idéal

$$\mu_i(T, P, n_j) = \mu_i^*(T, P) + RT \ln(x_i) < 0$$

$$\begin{aligned} \Delta_{mix}\mathcal{S} &= -\left(\frac{\partial \Delta_{mix}\mathcal{G}}{\partial T}\right)_{P, n_j} \\ &= -R \sum_i n_i \ln(x_i) > 0 \end{aligned}$$

On augmente le désordre dans le mélange

$$\Delta_{mix}\mathcal{H} = \Delta_{mix}\mathcal{G} + T\Delta_{mix}\mathcal{S} = 0$$

- On a alors  $\forall i \bar{\mathcal{H}}_i = \mathcal{H}_{mi}^*$
- De même  $\Delta_{mix}V = -\left(\frac{\partial \Delta_{mix}\mathcal{G}}{\partial P}\right)_{T, n_j} = 0$
- $\forall i \bar{V}_i = V_{mi}^*$
- De même  $\Delta_{mix}U = \Delta_{mix}\mathcal{H} - P\Delta_{mix}V = 0$
- $\forall i \bar{U}_i = U_{mi}^*$

## 1 Evolution spontannée

### Affinité chimique

$$\delta\mathcal{S}_c = \frac{\mathcal{A}d\xi}{T}$$

- Définition de de Donder
- $\mathcal{A}$  est une grandeur intensive de  $T, P, n_j$  en  $\text{J.mol}^{-1}$

$$\mathcal{A} = - \sum_i \vartheta_i \mu_i = - \left( \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \xi} \right) = -\Delta_r \mathcal{G}$$

D'une transformation thermomécanique et de l'identité

$$\Delta \left\{ \begin{array}{l} d\mathcal{G} = -\mathcal{S}dT + VdP - \mathcal{A}d\xi \\ d\mathcal{G} = -\mathcal{S}dT + VdP + \left( \sum_i \vartheta_i \mu_i \right) d\xi \end{array} \right.$$

En appliquant le Théorème de Schwartz

$$\left( \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial T} \right)_{P,\xi} = \Delta_r \mathcal{S} = - \left( \frac{\partial \Delta_r \mathcal{G}}{\partial P} \right)_{T,\xi}$$

$$\left( \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial P} \right)_{T,\xi} = -\Delta_r V = - \left( \frac{\partial \Delta_r \mathcal{G}}{\partial T} \right)_{P,\xi}$$

Définition

### Condition d'équilibre

Pour un système fermé en équilibre thermique et mécanique avec l'extérieur, siège d'une réaction

- Condition d'évolution spontanée :  $\mathcal{A}d\xi > 0$ 
  - $\mathcal{A} > 0 \Rightarrow d\xi > 0$  : Evolution dans le sens direct
  - $\mathcal{A} < 0 \Rightarrow d\xi < 0$  : Evolution dans le sens indirect
- Condition d'équilibre :  $\mathcal{A} = 0$

Théorème

Démonstration

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} = - \sum_i \vartheta_i \mu_i \\ \mu_i = \mu^\circ_i(T) + RT \ln(a_i) \end{array} \right. \Rightarrow \mathcal{A} = - \left( \sum_i \vartheta_i \mu^\circ_i(T) \right) - RT \ln \left( \prod_i a_i^{\vartheta_i} \right) \text{ et on identifie}$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^\circ(T) - RT \ln(Q_r) = RT \ln \left( \frac{K^\circ(T)}{Q_r} \right)$$

- On pose  $\mathcal{A}^\circ(T) = - \left( \sum_i \vartheta_i \mu^\circ_i(T) \right) = -\Delta_r \mathcal{G}^\circ(T)$
- On pose  $Q_r = \prod_i a_i^{\vartheta_i}$
- $K^\circ(T) = \exp \left( \frac{\mathcal{A}^\circ}{RT} \right)$  à partir de sa définition

## 2 Equilibre chimique

### RELATION DE GULDBERG-WAAGE

$$\mathcal{A} = 0 \Leftrightarrow K^\circ(T) = Q_r = \prod_i a_i^{\vartheta_i}$$

- $\Delta K^\circ(T)$  ne dépend que de  $T$

## Equilibres avec gaz

On peut utiliser

- La loi de Dalton  $\text{Si } P \text{ constante}$
- La loi des gaz parfaits  $\text{Si } T, V \text{ constants}$

- On réalisera un tableau d'avancement où on intégrera une colonne  $n_{gaz,tot}$
- Si  $\sum_{gaz} \vartheta_i = 0$  alors la pression n'est pas facteur d'équilibre  $\xi_{eq}$  indépendant de  $P$



Unités :  $T$  en K,  $V$  en  $\text{m}^3$ ,  $P$  et  $P^\circ$  en Pa,  $n$  en mol

## Systèmes hétérogènes

- A partir de l'état initial il faut déterminer le sens d'évolution spontané  $\triangle \text{ Possible repos chimique}$
- Dans l'état final deux situations sont envisageables
  - Equilibre atteint  $\Rightarrow$  RGW
  - Rupture d'équilibre  $\text{Disparition d'un constituant} \Rightarrow \xi = \xi_{max} \triangle \text{ Pas de RGW}$

On suppose l'équilibre et on calcule  $\xi_{eq,RGW}$  et on vérifie  $\xi_{eq} < \xi_{max}$

## 3 Variation des fonctions d'état

### Passage par $\Delta_r Z$ Utile pour $\mathcal{H}$

- $dZ = \left(\frac{\partial Z}{\partial T}\right)_{P,n_j} dT + \left(\frac{\partial Z}{\partial P}\right)_{T,n_j} dP + \Delta_r Z d\xi$  et simplification à  $P$  et  $T$  constants puis intégration
- Pour  $\mathcal{H}$  on utilisera  $\Delta_r \mathcal{H} \approx \Delta_r \mathcal{H}^\circ$

### Utilisation de la relation d'Euler Utile pour les autres fonctions d'état.

- $\Delta Z = Z(\xi) - Z(0)$  puis expressions des deux  $Z$  avec la relation d'Euler
- $n_i(\xi) = n_i(0) + \vartheta_i \xi$
- On regroupe les termes en  $\xi$
- On identifie  $\Delta_r Z(\xi)$ 
  - $\triangle$  Pour  $\mathcal{G}$  on remplacera ici à la place les  $\mu_i(\xi)$  par leur valeur



Pour  $\mathcal{S}$  il sera plus astucieux d'utiliser  $\Delta \mathcal{G} = \Delta \mathcal{H} - T \Delta \mathcal{S}$

## 4 Variance

$$\mathcal{V} = X - R_{ind}$$

- $\mathcal{V}$  est la variance du système
- $X$  est le nombre de variables **intensives**
  - $T, P, x_i$
- $R_{dep}$  est le nombre de relations indépendantes
  - Phase :  $\sum_{phase} x_i = 1$ , RGW indépendantes, électronutralité

$\triangle$  On ne compte pas la relation  $x = 1$  pour un corps pur

$$\mathcal{L} = X - R_{ind} - C = \mathcal{V} - C$$

- $\mathcal{L}$  est le nombre de degrés de liberté  
C'est le nombre de variables à fixer pour que les autres soient uniques
- $C$  est le nombre de contraintes fixées par l'examinateur  
  $T, P$

### Calculs de variance

- Nombre de variables intensives
- Nombre de relations indépendantes
  - ⚠ Ne pas oublier comme relation les avancements identiques de deux composés d'une même phase
- Variance
- Degrés de liberté

 On suppose les solides non miscibles généralement Sauf si métaux de même structure et rayons proches

 – La pression n'est pas facteur d'équilibre sans gaz ou si  $\sum_{gaz} \vartheta_i = 0$

– La température n'est pas facteur d'équilibre pour une réaction athermique  $K^\circ$  indépendant de  $T$  - Cf. Van't Hoff

## 1 Changement d'état

On considère un changement d'état monobare

- $P$  fixé  $\Rightarrow T$  reste la même tout au long du changement d'état  
 $\Rightarrow$  Transformation réversible

$$n\mathcal{L}_{1 \rightarrow 2} = \Delta\mathcal{H}$$

- $\mathcal{L}_{1 \rightarrow 2}$  est la chaleur latente molaire de changement d'état
- En pratique  $n\mathcal{L}_{1 \rightarrow 2} = \Delta_{1 \rightarrow 2}\mathcal{H}$

$$\Delta\mathcal{S} = \frac{n\mathcal{L}_{1 \rightarrow 2}}{T_{1 \rightarrow 2}}$$

- Réversible  $\Rightarrow$  Pas d'entropie créée

$$\Delta\mathcal{G} = \Delta\mathcal{H} - T_{1 \rightarrow 2}\Delta\mathcal{S} = 0$$

$$\mu_1^*(T_{1 \rightarrow 2}, P) = \mu_2^*(T_{1 \rightarrow 2}, P)$$

  $\Delta\mathcal{G} = \mathcal{G}_{m2}^* - \mathcal{G}_{m1}^*$  et l'enthalpie molaire d'un corps pur est son potentiel chimique

Propriétés

### Influence de la température

Élément	Expression	Approximation d'Ellingham $Si P = P^\circ$
$\mathcal{H}$	$\frac{d\mathcal{H}_{m\varphi}}{dT} = C_{Pm\varphi}$	$\mathcal{H}_{m\varphi}^*(T, P^\circ) = \mathcal{H}^\circ_{m\varphi}(T)$
$\mathcal{S}$	$\frac{d\mathcal{S}_{m\varphi}}{dT} = \frac{C_{Pm\varphi}}{T}$	$\mathcal{S}_{m\varphi}^*(T, P^\circ) = \mathcal{S}^\circ_{m\varphi}(T)$
$\mu$	$\frac{d\mu_{m\varphi}}{dT} = -\mathcal{S}_{m\varphi}^* < 0$	$\mu_{m\varphi}^*(T, P^\circ) = \mu^\circ_{m\varphi}(T)$

Dans l'approximation d'Ellingham la courbe  $f(T)$  est dans les trois cas constituée de portions de droites  
Contrairement à  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{S}$  la courbe est continue pour  $\mu$

Propriétés

### Transfert de corps entre deux phases

On étudie  $B_{(1)}=B_{(2)}$ , on a  $\mathcal{A} = \mu_{B_{(1)}} - \mu_{B_{(2)}} = 0 \Leftrightarrow \mu_{B_{(1)}} = \mu_{B_{(2)}}$  à l'équilibre

De plus  $\mu_{B_{(1)}} > \mu_{B_{(2)}} \Rightarrow \mathcal{A} > 0 \Rightarrow$  Évolution dans le sens direct

La matière descend donc les potentiels  $\Rightarrow$  Phase au plus petit  $\mu(T, P)$  la plus stable

Exemple

### Équilibre liquide vapeur

$B_l = B_g$  à un équilibre où  $\mu_l^*(T) = \mu_g^*(T) = \mu_g^\circ + RT \ln \left( \frac{P_B^*}{P^\circ} \right)$

$P_B^*$  est la pression de vapeur saturante

- $P < P_B^* \Rightarrow$  Monophasé vapeur
- $P > P_B^* \Rightarrow$  Monophasé liquide
- $P = P_B^* \Rightarrow$  Equilibre liquide vapeur

Exemple

## RELATION DE CLAUSIUS-CLAPEYRON

Exemple

$$\frac{d \ln \frac{P_B^*}{P^\circ}}{dT} = \frac{\Delta_{vap} \mathcal{H}_B^\circ}{RT^2}$$

Comme  $K^\circ = \frac{P_B^*}{P^\circ}$  et par la relation de Van't Hoff

– Peut alors s'intégrer en

$$\ln \left( \frac{P_B^*(T)}{P_1^*} \right) = -\frac{\Delta_{vap} \mathcal{H}_B^\circ}{R} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_1} \right)$$

## Formule de Clapeyron

Théorème

$$\mathcal{L}_{1 \rightarrow 2} = T (V_{m2} - V_{m1}) \frac{dP}{dT}$$

– Cette formule permet de déterminer les équations des courbes de changement d'état sur un diagramme de Clapeyron

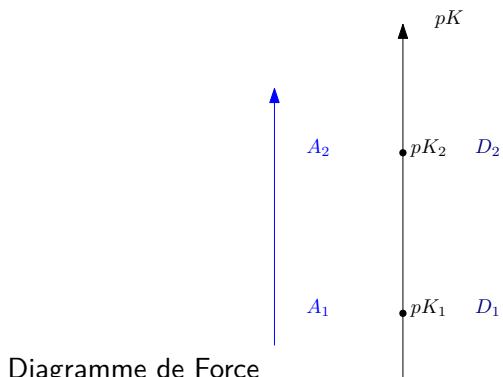
## 1 Généralités

### Équation générale

Donneur = Accepteur + Particule échangée  $\Leftrightarrow D = A + P$

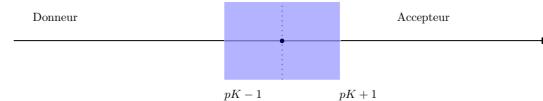
Réaction	Équation	Constante de réaction	Relation
<b>Acido-basique</b>	$AH = A^- + H^+$	$K_a$	Guldberg-Waage
<b>Complexation</b>	$ML = M + L$	$K_d$ ou $\beta = K_f$	Guldberg-Waage
<b>Précipitation</b>	$M_\alpha L_\beta = \alpha M + \beta L$	$K_s$	Guldberg-Waage
<b>Oxydoréduction</b>	$\beta R_{ed} = \alpha O_x + \vartheta_e e^-$	$E_{O_x/R_{ed}}$	Nernst $E = E_0 + \frac{0.06}{\vartheta_e^-} \ln \left( \frac{a_{O_x}^\alpha}{a_{R_{ed}}^\beta} \right)$

### Étude générale



On considère  $D = A + 1 P$   
 Par la Relation de Guldberg-Waage  

$$K = \frac{(A)(P)}{(D)} \Leftrightarrow pP = pK + \log \left( \frac{(A)}{(D)} \right)$$



💡 Une espèce est négligeable devant l'autre si  $[a] < \frac{[A]}{10}$  soit  $pP < pK - 1$

Pour comparer des réactions d'échange il faut que le nombre de particules échangées soit égal à 1

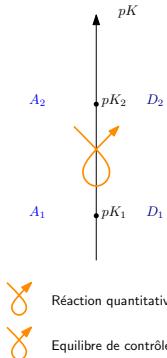
### Réaction prépondérante

DEF: La réaction prépondérante est celle qui possède l'avancement le plus grand

- On peut la déterminer graphiquement
  - Diagramme de force : Règle du gamma
  - Diagramme de prédominance : Deux espèces aux domaines disjoints réagissent ensemble

## Méthode

## Règle du gamma

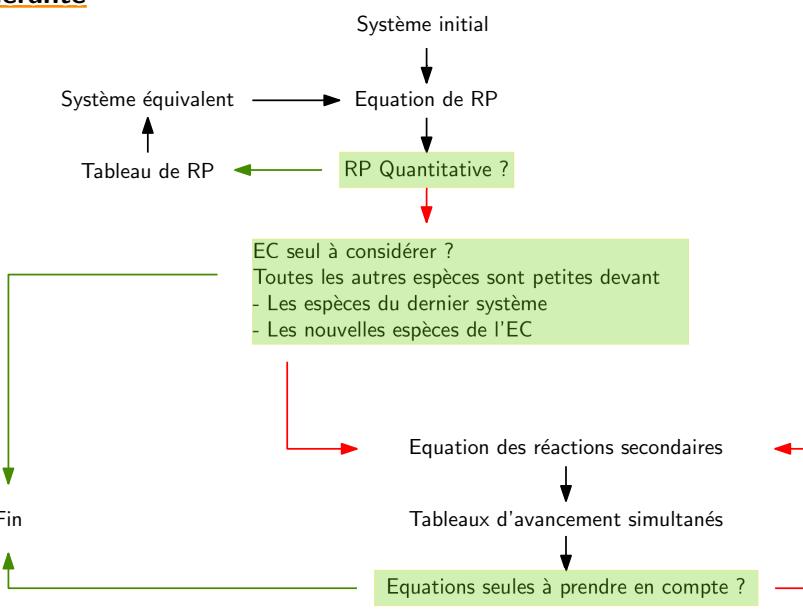


- On trace l'échelle des  $pK$
  - On place les couples
  - On souligne ceux impliqués en tant que réactifs
  - On détermine la réaction principale par la méthode du gamma

On ne peut former de produit incompatible<sub>Domaines disjoints</sub> avec un réactif

## Méthode

## Méthode de la réaction prépondérante



On envisage une réaction à la fois

Toujours commencer par tracer diagramme de force et de prédominance

## 2 Acides Bases

Forts		Faibles	
Acides	Bases	Acides	Bases

Réaction quantitative :  $x \simeq C_0$        $C_0 - x \simeq C_0$  si  $K_{a/b} \ll 1$

$$pH = -\log C_0 \quad pH = 14 + \log C_0 \quad pH = \frac{1}{2} (pK_a - \log C_0) \quad pH = 7 + \frac{1}{2} (pK_a + \log C_0)$$

- Ampholyte :  $pH = \frac{1}{2} (pK_{a1} + pK_{a2})$

 Se retrouve en calculant  $K_{a1}K_{a2}$

## Solution tampon

DEF: Solution dont le  $pH$  est peu influencé par le milieu extérieur

- On la réalise en formant un mélange contenant majoritairement AH et  $A^-$   
 $\Rightarrow pH \in [pK_a - 1, pK_a + 1]$

“ Première acidité forte  $\Leftrightarrow$  Dissociation totale immédiate dans l'eau en la base conjuguée

“ Pour les polyacides

$$- V_{eqn} = nV_{eq1}$$

“ On utilise parfois la conservation de la matière  $C_0 = [\text{HA}] + [\text{H}_2\text{A}^+] + [\text{A}^-] = [\text{HA}] \left(1 + \frac{h}{K_{a1}} + \frac{K_{a2}}{h}\right)$

## 3 Titrages

- A l'équivalence il y a changement de la prédominance  
L'espèce consommée a totalement disparue

- Commencer par tracer les diagrammes de prédominance des espèces superposés aux zones de virages
- Vérifier que la réaction de titrage est quantitative
- Attention aux réactions de titrage simultanées  $\Delta K \leq 10^4$

⚠️ On ne sommera pas les réactions simultanées



💡 On peut vérifier la faisabilité d'un suivi  $pH$  métrique en approchant la hauteur du saut

💡 On détermine le  $pH$  à l'équivalence et 2ml après

“ A la demi-équivalence pour une réaction quantitative d'un acide faible non initialement partiellement dissocié  $pH = pK_a$

“ La quantité consommée est égale à la quantité formée de base conjuguée

## 4 Conductimétrie

- On obtient des portions de droite si la dilution est négligeable et les réactions successives

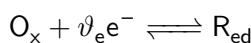
$$\sigma = \sum_i \lambda_i^\circ \frac{n_i}{V_0 + V} \text{ varie de manière affine si réaction quantitative}$$

- $V \ll V_0$  Grand volume d'eau
- On trace  $\sigma_{cor} = \frac{V_0 + V}{V_0}$

⚠️ Ne pas oublier les ions spectateurs

	$\lambda^\circ_{\text{H}_3\text{O}^+}$	350 $\mu\text{a}$
	$\lambda^\circ_{\text{OH}^-}$	200 $\mu\text{a}$
	$\lambda^\circ_{\text{autres}}$	50 $\mu\text{a}$

- Les réactions d'oxydo-réduction consistent en un échange d' $e^-$  entre
  - L'oxydant *Accepteur*
  - Le réducteur *Donneur*



—  $\rightarrow$  : Réduction  
 —  $\leftarrow$  : Oxydation

## 1 Electrochimie

### Cellule électrochimique

DEF: Une **électrode** est un ensemble composé d'un conducteur et d'un électrolyte

DEF: Une cellule électrochimique est une association de deux électrolytes souvent reliées par une jonction  
 La cellule électrochimique peut transférer de l'énergie électrique par suite de réactions aux interfaces

Mode de fonctionnement	Type	Énergie chimique	Énergie électrique
Générateur	Pile		$\rightarrow$
Récepteur	Électrolyseur		$\leftarrow$

### Force électromotrice

- Sens conventionnel d'orientation : Courant de la droite vers la gauche  $e^-$  de gauche à droite

$$e = \phi_D - \phi_G$$

- En court circuit soit à  $i = 0$
- $e$  est la force électromotrice
- $\phi_i$  est le potentiel de  $i$
- D'où  $e = (\phi_D - \phi_{S_D}) + (\phi_{S_D} - \phi_{S_G}) - (\phi_{S_G} - \phi_G)$   
 $e = \psi_{DS_D} - \psi_{GS_G} + \psi_J \approx \psi_{DS_D} - \psi_{GS_G}$ ,  
 La différence de potentiel interfaciale On définit  
 $e^\circ$  Tout en état standard

OxydAtion *Anode*

RéduCtion *Cathode*

Pour une pile : Anode  $\xrightarrow{e^-}$  Cathode

$$\ominus \quad \xleftarrow[i]{\leftarrow} \quad \oplus$$

Le pôle  $\oplus$  est celui de  $E$  le plus grand :  $e = E_+ - E_-$

## 2 Éléments thermodynamiques

DEF: Électrode standard à Hydrogène :  $\text{Pt}|\text{H}_{2(\text{g})} : P_{\text{H}_2} = 1 \text{b} |\text{H}_{(\text{aq})}^+ : a_{\text{H}^+} = 1$   $e_{\text{pH}} = 0$

DEF: On appelle potentiel redox du système  $\text{M}|\text{O}_x\text{R}_{\text{ed}}$  la fem de la pile constituée de

- Une ESH à gauche
- La cellule considérée à droite

$$e = E_{O_x, R_{\text{ed}}} = \phi_M - \phi_{\text{Pt}, \text{ESH}}$$

- A courant nul
- $\triangleq$  Potentiel redox  $\neq$  Potentiel électrique de la solution
- On définit  $E^\circ_{O_x, R_{\text{ed}}}$  Tout en état standard

## ÉQUATION PRATIQUE DANS UNE PILE

$$e = E_{O_xD, R_{\text{edD}}} - E_{O_xG, R_{\text{edG}}}$$

- Le terme de jonction est ici négligé
- $e = E_{O_xD, R_{\text{edD}}} - E_{O_xG, R_{\text{edG}}} + U_J$
- $|e| = E_+ - E_-$



Sens conventionnel d'écriture  $\text{O}_x + \vartheta_e \text{e}^- \rightleftharpoons \text{R}_{\text{ed}}$  et couple Oxydant/Réducteur

## Étude thermodynamique d'une pile

— On étudie la pile *Solutions - Conducteurs*, un système fermé

— On définit  $\vartheta_D \text{O}_{xD} + \vartheta_G \text{R}_{\text{edG}} = \vartheta_D \text{R}_{\text{edD}} + \vartheta_G \text{R}_{\text{edD}}$

— On applique les deux principes de la thermodynamique

$$dU = -P_{\text{ext}} dV + \delta W' + \delta Q \text{ et } T dS = T \delta S_c + \frac{T}{T_{\text{ext}}} \delta Q$$

— D'où  $dG = dU - TdS - \delta dT + PdV + VdP = \delta W' - T\delta S_c - \delta dT + VdP$

DEF: On définit l'affinité électrochimique  $\delta S_c = \frac{\overline{A}d\xi}{T}$  d'où  $dG = \delta W' - \overline{A}d\xi - \delta dT + VdP$

— Or comme  $dG = -\delta dT + VdP + \sum_i \mu_i dn_i = -\delta dT + VdP + (\sum_i \vartheta_i \mu_i) d\xi$

On identifie  $(\sum_i \vartheta_i \mu_i) d\xi = \delta W' - \overline{A}d\xi$

$$\overline{A}d\xi = \delta W'$$

- $\overline{A}d\xi$  traduit de la partie chimique
- $\delta W'$  traduit de la partie électrique

— La charge électrique échangée à chaque électrode est donc  $dq = \mathcal{N}_A e dn_e = \mathcal{F} dn_e = \mathcal{F}(\vartheta_e d\xi)$

$$\delta W' = -\delta W_{\text{elec}} = -uidt = -udq = -\vartheta_e \mathcal{F} u (\phi_D - \phi_G) d\xi = -\vartheta_e \mathcal{F} e d\xi$$

$$\mathcal{A} = \vartheta_e \mathcal{F} e$$

- En fonctionnement quasi-réversible  $i = 0 \Rightarrow \delta S_c = \overline{A} = 0$
- Comme  $\overline{A} = \mathcal{A} + \vartheta_e \mathcal{F} (\phi_G - \phi_D)$
- Dans les conditions standard on a  $\mathcal{A}^\circ = \vartheta_e \mathcal{F} e^\circ$

## Expressions des grandeurs de réaction

Propriétés

Grandeurs de réaction	Grandeurs standard
$\Delta_r \mathcal{G} = -\mathcal{A} = -\vartheta_e \mathcal{F} e$	$\Delta_r \mathcal{G}^\circ = -\mathcal{A}^\circ = -\vartheta_e \mathcal{F} e^\circ$
$\Delta_r \mathcal{S} = -\left(\frac{\partial \Delta_r \mathcal{G}}{\partial T}\right)_{P,\xi} = \vartheta_e \mathcal{F} \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_{P,\xi}$	$\Delta_r \mathcal{S}^\circ = \vartheta_e \mathcal{F} \frac{de^\circ}{dT}$
$\Delta_r \mathcal{H} = \Delta_r \mathcal{G} + T \Delta_r \mathcal{S} = \vartheta_e \mathcal{F} \left(-e + T \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_{P,\xi}\right)$	$\Delta_r \mathcal{H}^\circ = \vartheta_e \mathcal{F} \left(-e^\circ + T \frac{de^\circ}{dT}\right)$

$\frac{de^\circ}{dT}$  est le coefficient de température

$$e = e^\circ(T) - \frac{RT}{\vartheta_e \mathcal{F}} \ln(Q_r)$$

|   $\mathcal{A} = \mathcal{A}^\circ(T) - RT \ln(Q_r)$  et  $\mathcal{A} = \vartheta_e \mathcal{F} e$

## Cas d'une transformation irréversible

Remarque

- On a ici  $\Delta_r \mathcal{G} = W' - T_{ext} \mathcal{S}_c < W' < 0$   
⇒ Le travail utile cédé à l'extérieur est strictement inférieur à la diminution d'enthalpie libre du système
- Les causes d'irréversibilité sont l'effet Joule et les surtensions

Remarque

Une pile peut rendre l'âme pour deux raisons

- Atteinte de l'équilibre ⇒  $q = \vartheta_e \mathcal{F} \xi_{eq}$
- Rupture d'équilibre ⇒  $\xi = \xi_{max}$

Définition

## Électrolyseur

- L'énergie électrique apportée par une génératrice est transformée en énergie chimique
- Cette énergie apportée permet de forcer la réaction à évoluer à l'inverse du sens spontané

## 3 Réactions d'oxydo-réduction

### Utilisation

DEF: On associe à une demi-équation écrite dans le sens conventionnel  $E_{Red}$

$$\Delta_{\frac{1}{2}} \mathcal{G}^\circ = \sum_i \vartheta_i \Delta_f \mathcal{G}^\circ_i$$

- $\vartheta > 0 < 0$  si  $i$  est du côté réducteur  $oxydant$
- $\Delta_{\frac{1}{2}} \mathcal{G}^\circ$  est l'enthalpie standard conventionnelle

- $\Delta_r \mathcal{G}^\circ_{Pile} = \Delta_{\frac{1}{2}} \mathcal{G}^\circ_{Couple rédox associé}$  d'où

$$\Delta_{\frac{1}{2}} \mathcal{G}^\circ = -\vartheta_e \mathcal{F} E^\circ_{Ox/Red}$$

- Comme  $\Delta_r \mathcal{G}^\circ = -\vartheta_e \mathcal{F} e^\circ$   
Et  $e^\circ = E^\circ_{Ox/Red}$

On peut alors calculer  $E^\circ_{Red/Ox}$

- De plus, à 298 K, on a  $\Delta_{\frac{1}{2}} \mathcal{G}^\circ = \sum_i \vartheta_i \mu^\circ_i$

Méthode

### Loi de Nernst

$$\vartheta_{ox}O_x + \sum_i \vartheta_i A_i + \vartheta_e e^- = \vartheta_{red}R_{ed} + \sum_i \vartheta'_i A'_i$$

$$E = E^\circ + \frac{RT}{\vartheta_e \mathcal{F}} \ln \left( \frac{a_{ox}^{\vartheta_{ox}} \prod_i a_{Ai}^{\vartheta_i}}{a_{red}^{\vartheta_{red}} \prod_i a_{A'i}^{\vartheta'_i}} \right)$$

$$E = E^\circ + \frac{0.06}{\vartheta_e} \log \left( \frac{a_{ox}^{\vartheta_{ox}} \prod_i a_{Ai}^{\vartheta_i}}{a_{red}^{\vartheta_{red}} \prod_i a_{A'i}^{\vartheta'_i}} \right)$$

- $E$ , le potentiel d'oxydoréduction d'électrode en V
- $E^\circ$ , le potentiel standard du couple en V
- $\vartheta_e$ , le nombre d'électrons transférés
- $\mathcal{F} = N_A \times |e| = 96500 \text{ C.mol}^{-1}$  la constante de Faraday
- $R = 8.314$ , la constante des gaz parfaits
- $T$  en K
- $\Delta \triangleq \ln \left( \frac{O_x}{R_{ed}} \right)$

-  $\Delta \approx 298 \text{ K}$

$$\Delta \triangleq \frac{RT}{\mathcal{F}} \ln 10 \approx 0.06 \text{ V}$$

Théorème

$$\Delta \triangleq \begin{cases} \mathcal{A} = \mathcal{A}^\circ(T) - RT \ln(Q_r) \\ \mathcal{A} = \vartheta_e \mathcal{F} E_{Ox/Red} \\ \mathcal{A}^\circ = \vartheta_e \mathcal{F} E^\circ_{Ox/Red} \end{cases}$$

Et comparaison par rapport à ESH où  $a_{H^+} = a_{H_2} = 1$

- ⚠ - Cette formule ne dépend pas du sens d'écriture de la demi-équation

Théorème

### Loi de Hess

$$(R)_{(R_{\frac{1}{2}})} = \sum_i \lambda_i (R_i) + \sum_j \mu_j (R_{\frac{1}{2}}) \Rightarrow \Delta_r \mathcal{G}^\circ_{\Delta_{\frac{1}{2}} \mathcal{G}^\circ} = \sum_i \lambda_i \Delta_r \mathcal{G}^\circ_i + \sum_j \mu_j \Delta_{\frac{1}{2}} \mathcal{G}^\circ_i$$

⚠ Toujours équilibrer avec  $H^+$  et non  $OH^-$ .  $E^\circ$  serait le potentiel standard apparent

Méthode

### Utilisation astucieuse de la loi de Hess

- Calcul d'une constante d'équilibre de réaction redox

On utilise  $\Delta_r \mathcal{G}^\circ = -RT \ln(K^\circ)$  en combinant les demi-équations

$$K^\circ = 10^{\frac{\vartheta}{0.06} \Delta E^\circ}$$

- A utiliser aussi pour combiner les demi-équations avec les équations autre que l'oxydo-réduction

- pH-métrie
- Précipitation
- Complexation

Méthode

### Comparaison de $E$ et $E^\circ$

Sur un axe en  $E^\circ$

Gamma à l'endroit  $\Rightarrow K^\circ > 1$

$$\ln K^\circ = \frac{\vartheta \mathcal{F}}{RT} \Delta E^\circ > 0$$

Sur un axe en  $E$

Gamma à l'endroit  $\Rightarrow$  Evolution spontanée

$$\Delta \triangleq \mathcal{A} = -\Delta_r \mathcal{G} = \vartheta_e \mathcal{F} \Delta E > 0$$

💡 Une réaction est quantitative si  $K^\circ(T) > 10^4 \Leftrightarrow \Delta E^\circ > \frac{0.24}{\vartheta_e}$

## 4 Diagrammes $E - pH$

Méthode

### Construction

- Classer toutes les espèces par degré d'oxydation croissant et par  $pH$  croissant dans un tableau
- Étudier les frontières à DO constant *Réactions acido-basiques*
- Étudier les frontières entre DO successifs à l'aide de la formule de Nernst et des conventions
- Étudier le diagramme
  - Si un domaine est disjoint, l'espèce est instable  $\Rightarrow$  Dismutation *Effacer les domaines dans cette zone de pH*
  - Il faut alors étudier la relation entre les espèces aux DO supérieurs et inférieurs

 Les éléments aqueux seront toujours présents à faible concentration dans leur domaine de DO

$\Rightarrow$  Partir de l'équation de  $E^\circ$  connu et remplacer la concentration<sub>RGW</sub> par celle des éléments voulus

 Les frontières sont continues  $\Rightarrow$  La connaissance d'un point supplémentaire ou de la pente suffit

## DIAGRAMMES BINAIRES LIQUIDE-VAPEUR

Définition

## 1 Mélanges binaires

DEF: Un mélange binaire contient deux constituants chimiques notés  $A$  et  $B$

- Le système peut être caractérisé de deux manières :
  - Les fractions molaires  $x_A^l, x_A^g, x_B^l, x_B^g$
  - Les fractions massiques  $w_A^l, w_A^g, w_B^l, w_B^g$
- On définit aussi
  - La composition molaire globale en constituant  $B$   $X_B = \frac{n_B}{n_{tot}}$
  - La composition massique globale en constituant  $B$   $W_B = \frac{m_B}{m_{tot}}$



$X_B \neq x_B$  sauf si le système est monophasé

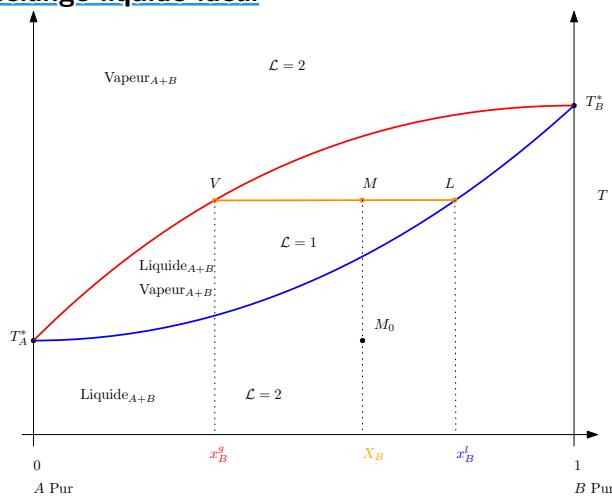
Définition

## 2 Cas des liquides miscibles

- La variance d'un système binaire biphasé est  $\mathcal{V} = 2$
- On peut effectuer la température ou la pression et étudier l'évolution de  $x_B$
- Dans l'étude isobare, on trace sur un même graphe
  - La courbe d'ébullition :  $T = f(x_B^l)$
  - La courbe de rosée :  $T = f(x_B^g)$

Propriétés

## Mélange liquide idéal



- On suppose  $A$  plus volatil  $\Rightarrow T_A^* < T_B^*$
- Si le système est fermé,  $X_B = cste \Rightarrow$  Déplacement sur une verticale
- On appelle **trajet du liquide<sub>vapeur</sub>** le déplacement de  $M_0$

Théorème

## Théorème des moments

$$(X_B - x_B^g)n^g = (x_B^l - X_B)n^l$$

- Ou géométriquement  $MGn_g = LMn_l$
- Existe aussi avec les fractions massiques et les masses

 
$$\begin{cases} n_B = X_B n_t \\ n_B = n_B^l + n_B^g \end{cases}$$
 d'où  $X_B(n_l + n_g) = x_B^l n_l + x_B^g n_g$

- Connaissant  $n_t = n_{Ai} + n_{Bi}$  on peut alors calculer  $n_l$  et  $n_g$
- Le théorème se généralise pour n'importe quelles deux phases en équilibre

### Construction du diagramme

- On porte un système fermé de composition  $x_{B0}^l = X_B$  connue à ébullition par transfert constant de chaleur
- Le tracé de  $T(t)$  fait apparaître des points anguleux du passage du liquide à la vapeur que l'on repère  
⇒ Ces points feront partie des courbes d'ébullition et de rosées du diagramme binaire

### Cas d'un mélange non idéal

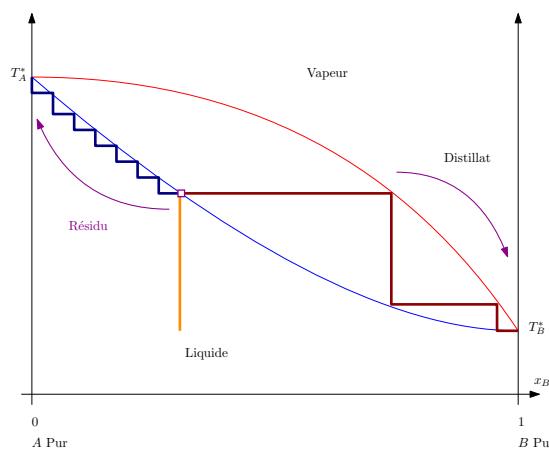
- Faible écart à l'idéalité  
⇒ Le fuseau est élargi
- Écart important à l'idéalité
  - Les deux courbes présentent un extrémum commun : le point **homoazéotrope**
  - Si les interactions dans le liquide sont plus/moins fortes au sein d'une espèce qu'entre les deux, il est plus facile/difficile de vaporiser le mélange ⇒ Minimum/Maximum
  - On parle d'homoazéotrope positif/négatif
  - $\Delta$  À  $T$  fixé, la vapeur n'est pas toujours plus riche en constituant le plus volatil



Pour montrer l'existence d'un palier il faut montrer que  $\mathcal{L} = 0 \Rightarrow T$  et  $x_i$  fixés

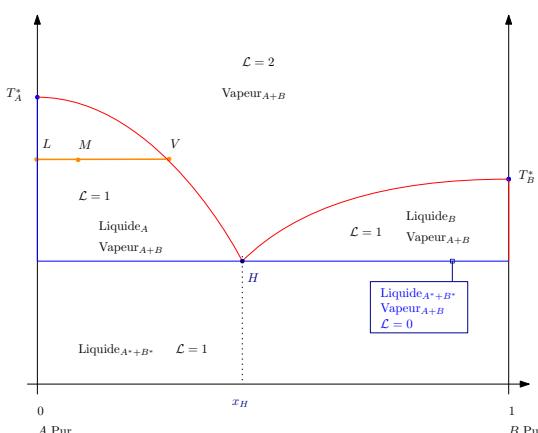
### Application aux distillations

- Distillation simple
  - Ébullition puis condensation de la vapeur formée
  - À partir du point initial, on monte à la verticale à titre constant jusqu'à la courbe d'ébullition sur laquelle on se déplace jusqu'à l'arrêt de la manip
  - On ne peut séparer complètement les deux constituants
  - Intéressant si les deux températures d'ébullition sont très différentes
- Distillation fractionnée
  - On sépare ici totalement les deux constituants
  - On effectue plusieurs distillations simples successives qui forment des plateaux théoriques
  - Dans le cas d'un diagramme avec azéotrope
    - Positif : Le résidu est récupéré pur, le distillat sous forme de mélange azéotrope
    - Négatif : Le distillat est récupéré pur, le résidu sous forme d'un mélange azéotrope
  - Distillation réactive : On déplace l'équilibre en éliminant le produit le plus volatil



### 3 Cas des liquides non miscibles

Eau et molécule organique apolaire-aprotique



- La courbe est composée de deux portions se coupant en un point anguleux : le point hétéroazéotrope
- La courbe d'ébullition est l'ensemble des points d'apparitions de la première bulle de vapeur

La connaissance des lois de variations de  $P_A^*$  et  $P_B^*$  permet de déterminer les coordonnées du point hétéroazéotrope

- $P(T) = P_A^*(T) + P_B^*(T)$
- A pression fixe on lit la valeur de  $T$
- On en déduit  $P_B^* = P x_B$

#### Applications

- Montage d'hydrodistillation
  - On chauffe deux liquides non miscibles : l'eau et un composé organique Avec d'autres composés volatils, la vapeur formée est recueillie
  - Dans un montage **in situ** on ajoute une grande quantité d'eau dans le ballon  
Le mélange doit être plus riche en eau que le mélange hétéroazéotrope  
⇒ Le distillat est un mélange de *B* pur - eau et il ne reste plus de *B* dans le ballon
  - Dans un montage **ex situ**, on fait circuler de la vapeur d'eau dans le ballon contenant *B*
- Distillation hétéroazéotropique
  - Le but est de déplacer l'équilibre en éliminant l'eau formée par une réaction  
On ajoute pour cela un solvant organique non miscible à l'eau et on utilise un **Dean-Stark**

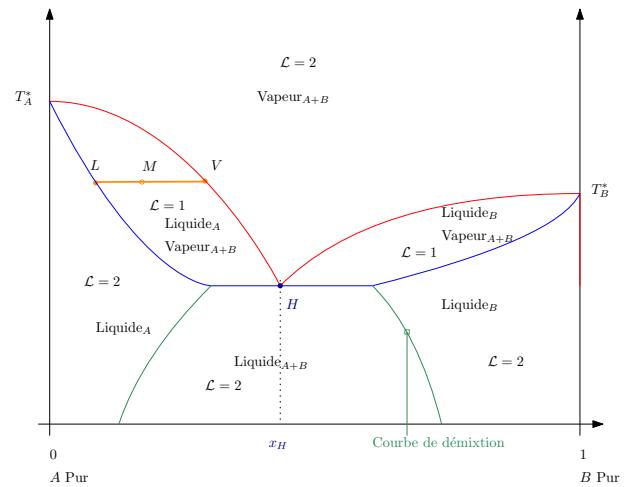
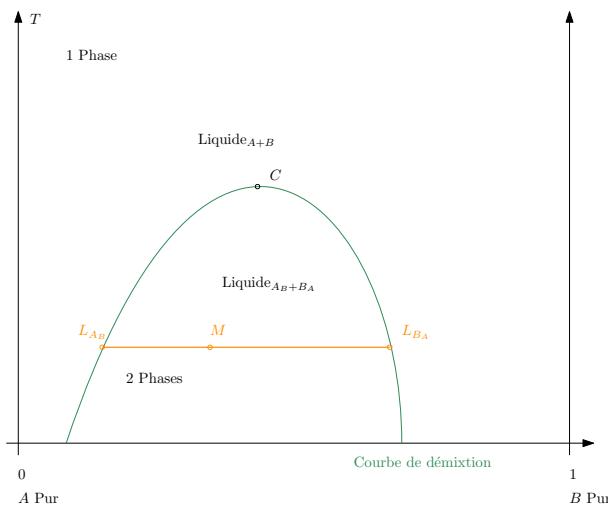
## 4 Liquides partiellement miscibles

Définition

### Phénomène de démixtion

- À partir d'un certain pourcentage des composés, il se mélangeent partiellement  
Chaque phase est saturée de l'autre composé
- En réalisant les expériences à différentes températures on peut tracer les courbes de démixtion

Propriétés



## 1 Mécanique quantique

### Postulats généraux

- Dualité onde-corpuscule : Toute particule doit être considérée comme une onde tel  $p = \frac{h}{\lambda}$
- Principe d'incertitude : Toutes les grandeurs ne sont pas observables en même temps  
 $\Delta E \Delta t \geq \hbar$  et  $\Delta p \Delta x \geq \hbar$   
 On ne peut connaître avec précision la position et la vitesse d'une particule

### Équation de Schrödinger

- On associe une fonction d'onde  $\psi(x, y, z, t)$  étudié en chimie à  $t$  fixé à toute onde de matière
- $dP = \psi^* \psi d\tau$  est la densité de probabilité de présence de la particule dans  $d\tau$   
 On normalise alors la fonction tel  $\iiint_{\Omega} \psi^* \psi d\tau = 1$
- On introduit un opérateur appelé l'hamiltonien :  $\hat{H}$  dépendant de la nature des interactions

$$\hat{H}\psi = E \cdot \psi$$

- C'est l'équation de Schrödinger
- Les fonctions  $\psi$  solutions sont appelées **fonctions propres**  
 Les valeurs associées sont les **valeurs propres**

### Propriétés de $\hat{H}$

- L'hamiltonien est un opérateur linéaire
- Deux fonctions distinctes solutions sont orthogonales  
 $\Rightarrow$  L'intégrale de recouvrement est nulle :  $\iiint_{\Omega} \psi_i^* \psi_j d\tau = 0$

### Brakets

- On introduit la notation  $\langle \psi_i | \psi_j \rangle = \iiint_{\Omega} \psi_i^* \psi_j d\tau$
- $\psi \rightarrow |\psi\rangle$  et  $\psi^* \rightarrow \langle\psi|$
- L'ensemble des kets est un C-ev sur lequel le braket est un produit scalaire
- On associe à chaque grandeur  $a$  un opérateur linéaire dit **observable**  $\hat{A}$   
 Le résultat d'une mesure est une valeur propre de  $\hat{A}$  :  $\hat{A}|\psi\rangle = a|\psi\rangle$   
 Ces opérateurs vérifient  $\langle\psi_1|\hat{A}|\psi_2\rangle = \langle\psi_2|\hat{A}|\psi_1\rangle^*$   
 Les fonctions propres forment une base orthonormable de l'espace des kets
- La **valeur moyenne** d'une grandeur  $a$  est définie comme  $\langle a \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \iiint_{\Omega} \psi^* \hat{A} \psi d\tau$

### Fonctions d'ondes dégénérées

DEF: Les fonctions d'ondes dégénérées sont les fonctions d'ondes associées à une même valeur de  $E$

- Toute combinaison linéaire de fonctions dégénérées associées à  $E$  en est une aussi
  - 💡 On pourra remplacer deux fonctions d'ondes dégénérées par deux de leurs combinaisons linéaires
  - 👉 On pourra confondre  $\psi$  et  $-\psi$  car seul  $\psi^*\psi$  a une réalité physique

- L'atome est constitué d'un noyau formé d'un proton et d'un électron  
Ils sont en interaction coulombienne
- Approximation de Born-Hoppenheimer : On considère le noyau comme fixe *plus lourd*

### Mise en équations

- On se place en coordonnées sphériques en plaçant l'origine sur le noyau
- On exprime alors le laplacien  $\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$
- L'équation de Schrödinger devient  $-\frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta \psi - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \psi = E\psi$

### Énergies

- L'énergie de l'atome d'hydrogène est quantifiée

$$E_n = -\frac{R_y}{n^2}$$

- $R_y = 13.6 \text{ eV}$  est la constante de Rydberg
- $n$  est le nombre quantique principal
- De la résolution de l'équation de Schrödinger

- En se désexcitant, l'atome émet une quantité d'énergie quantifiée

$$\Delta E = R_y \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)$$

- L'atome émet un photon de fréquence  $\Delta E = h\nu$
- En s'ionisant  $E_\infty - E_1 = 13.6 \text{ eV}$

### Fonctions propres : Orbitales

- On recherche les solutions de l'équation de Schrödinger sous la forme
  - Une partie radiale  $R(r)$  Dépend de  $n$  et  $l$
  - Une partie angulaire  $Y(\theta, \varphi)$  Dépend de  $l$  et  $m_l$
- Chaque fonction d'onde solution est donc caractérisée par un triplet  $(n, l, m_l)$
- A  $n$  fixé,  $n$  valeurs possibles de  $l$   
A  $l$  fixé,  $2l+1$  valeurs possibles de  $m_l \Rightarrow n^2$  valeurs possibles au total

$l$	0	1	2	3
Symbole X de l'OA	s	p	d	f

Nombre	$n$	$l$	$m_l$
Signification	Niveau d'énergie	Quantifie $\ \vec{L}\ $	Quantifie $L_z$

## Forme des orbitales

- $-e\psi^*\psi$  représente la densité de charges
- $R(r)$  donc  $\psi(r)$  s'annule en changeant de signe pour certaines valeurs de  $r$   
Les **sphères nodaless** sont donc les sphères de rayon tel que  $\psi$  s'annule

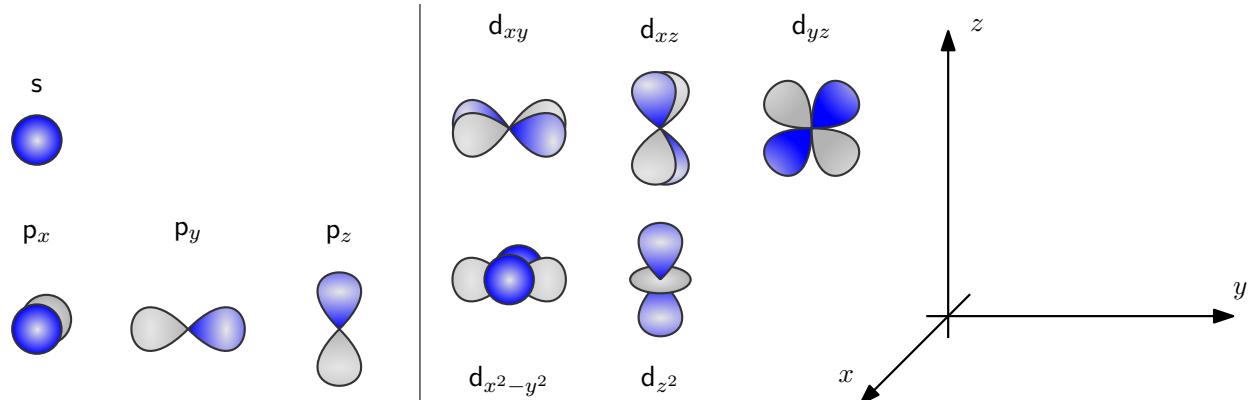
$$D_r(r) = \frac{dP(r)}{dr} = R^2(r)r^2$$

$D(r)$  est la densité radiale de probabilité

- Le rayon orbital atomique comme la valeur de  $r$  pour laquelle  $D(r)$  est maximale  
 $\Rightarrow$  Distance au noyau la plus probable  
 $\Delta$  A ne pas confondre avec la distance moyenne au noyau
- Le rayon des orbitales augmente avec  $n$  et ne dépend que peu de  $l$
- La forme des orbitales dépend de la partie angulaire et de la partie radiale

Propriétés

## Types d'orbitales



- Les orbitales s ont une symétrie sphérique
- Les orbitales p ont une symétrie de révolution et un plan de symétrie
- Les orbitales d ont  $O$  comme centre de symétrie

Propriétés

## Autre type de représentation

- Surfaces d'isodensité  $D(M) = cste$
- Densité de points

Définition

## Ions hydrogénoides

- Un hydrogénidoïde est une espèce ne comportant qu'un seul électron
- Dans l'équation de Schrödinger on remplace  $e \rightarrow Z \times e \Rightarrow E_n = -\frac{R_y Z^2}{n^2}$   
 $\Rightarrow$  Attraction Electron-Noyau plus forte
- Les fonctions propres des hydrogénoides possèdent la même forme que celles de H  
 $\Rightarrow$  Expansion spatiale plus faible *Plus contractées*

Définition

## Spin de l'électron

DEF: L'électron possède un moment cinétique intrinsèque  $\vec{S}$

- L'électron se comporte dans un champ magnétique comme un aimant

Définition

- Propriétés
  - Norme quantifiée :  $\|\vec{S}\| = \sqrt{s(s+1)}\hbar$
  - $s = \frac{1}{2}$  est le nombre quantique de spin
  - Sa composante sur  $z$  est quantifiée :  $S_z = m_s = \pm \frac{1}{2}$
- On appelle spin-orbitale une fonction d'onde décrivant les coordonnées et le spin d'un électron

On doit prendre en compte l'attraction du noyau avec chaque électron et les interactions interélectroniques

$\Rightarrow$  On ne peut plus résoudre l'équation de Schrödinger  $\Rightarrow$  Approximation polyélectronique  
DEF: Une fonction d'onde polyélectronique est produit de fonctions monoélectroniques

- Les fonctions d'ondes monoélectroniques sont appelées **orbitales atomiques**
- $\hat{h}\chi_i(e_i) = \varepsilon_i\chi_i(e_i)$  et  $E = \sum \varepsilon_i$

### Expression des orbitales atomiques

- On décrit toujours une orbitale atomique comme le produit d'une partie radiale et d'une partie angulaire
- La partie angulaire est analogue à celle obtenue pour l'atome d'hydrogène
- L'expression analytique de la partie radiale est analogue à celle des hydrogénoides en remplaçant  $Z$  par  $Z^* = Z - \sigma_i$  Ou  $\sigma_i$  est la constante d'écrantage qui dépend de  $n$  et  $l$

$$\varepsilon_i(n, l) = -R_y \frac{Z_i^{*2}}{n^2}$$

- $R_y = 13.6$  eV est la constante de Ritz-Rydberg
- $\varepsilon_i$  dépend de  $n$  et de  $l \Rightarrow$  Levée partielle de dégénérescence

- Chaque groupe d'OA dégénérée définit une sous-couche *Caractérisée par n et l*

### Classement énergétique des OA

- Pour une même valeur de  $l$ , l'énergie augmente avec  $n$
- Pour une même valeur de  $n$ , l'énergie augmente avec  $l$
- Cela ne suffit pas pour classer les OA *Cela dépend de l'atome*

### Principe d'exclusion de Pauli

Dans un atome, deux électrons ne peuvent avoir leurs quatre nombres quantiques identiques

- Deux électrons par OA maximum *De spins opposés*
- $2(2l+1)$  électrons par sous-couche

### Règle de Klechkowsky

Dans les atomes polyélectroniques les atomes se remplissent par valeurs croissantes de  $n + l$  *Plus petit n en premier*

## Théorème

- $\triangle$  Uniquement pour les atomes et non pour les cations
- Exceptions : Cr, Cu

$n \setminus l$	0	1	2	3	4
1	1s	↙	↙		
2	2s	2p	↙	↙	
3	3s	3p	3d	↙	↙
4	4s	4p	4d	4f	↙
5	5s	5p	5d	5f	5g

## Théorème

### Règle de Hund

Lorsque plusieurs électrons occupent des orbitales atomiques dégénérées *sous-couche*, la configuration la plus stable est obtenue lorsque le nombre d'électrons de spins identiques est maximal

## Définition

### Magnétisme

- Un atome pour lequel tous les électrons sont appariés à l'état fondamental possède un spin total nul  
⇒ Diamagnétique
- Un atome qui possède des électrons célibataires à l'état fondamental possède un spin total non nul  
⇒ Paramagnétique

## Définition

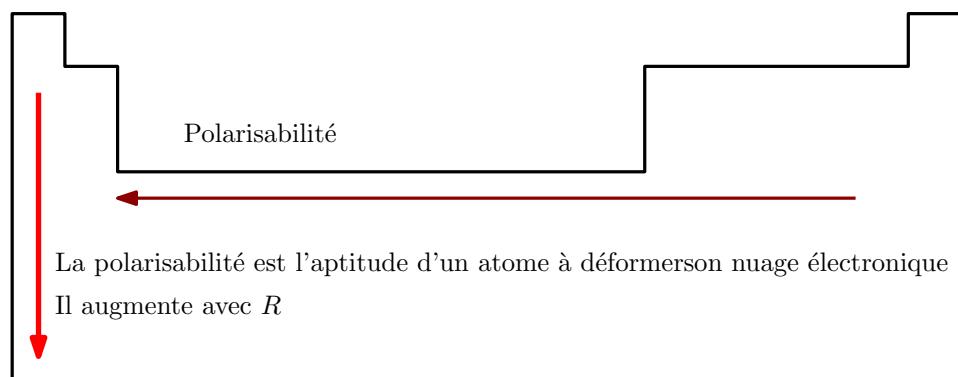
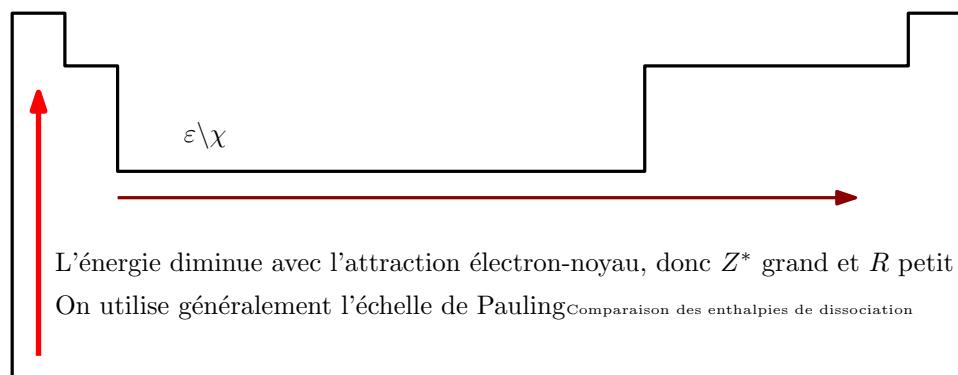
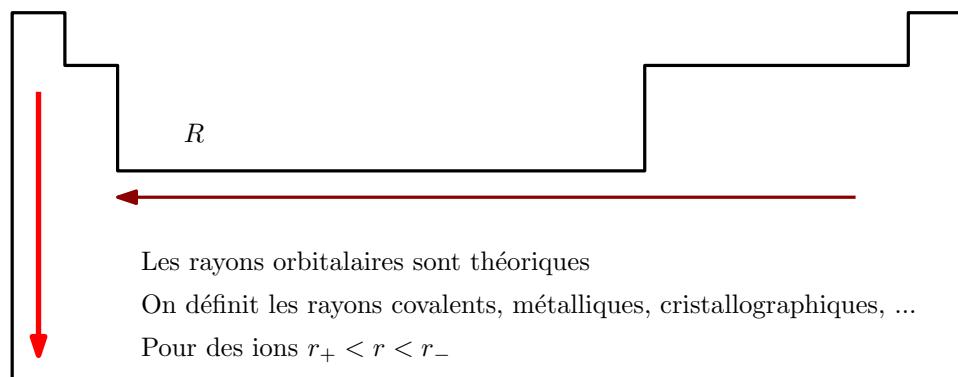
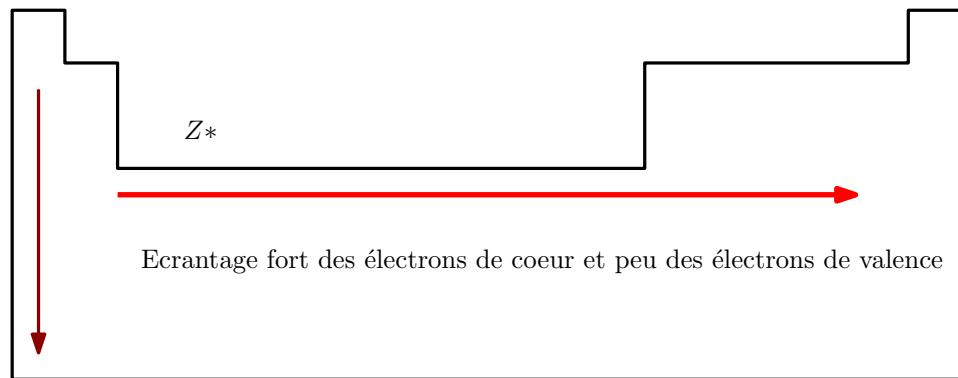
- Les électrons de valence sont les électrons
  - De la couche de  $n$  la plus élevée
  - Des sous-couches incomplètes
- Les électrons de coeur sont les autres *Aussi appelés électrons internes*

## Méthode

### Configuration électronique des ions

- On part de celle de l'atome
- Anion : On rajoute des électrons en appliquant les règles
- Cation : On enlève les électrons les moins solidaire du noyau *Valeur décroissante de  $n$*

## Propriétés atomiques



## INTERACTION DE 2 ORBITALES SUR 2 CENTRES

**1 Mise en place****Approximations**

- Approximation de Born-Oppenheimer
  - Les noyaux sont considérés immobiles
  - La fonction d'onde totale est produit de deux fonctions d'onde *L'une relative aux noyaux, l'autre aux électrons*
- Approximation orbitalaire
  - On cherche une solution approchée sous la forme de produit de fonctions monoélectroniques, appelées **orbitales atomiques**

Remarque

**Modèle utilisé : Théorie LCAO**

- On exprime chaque orbitale moléculaire comme combinaison linéaire des orbitales atomiques des différents atomes

$$\varphi_i = \sum_j c_{ij} \chi_j$$

–  $c_{ij}$  est le coefficient de l'orbitale atomique  $j$  dans l'orbitale moléculaire  $i$   
 C'est l'inconnue

Propriétés

- On ne considère que les électrons de valence pour décrire les liaisons chimiques
- Pour chaque atome on retient les OA occupées et éventuellement les OA vides de même  $n$
- L'objectif est de résoudre l'équation de Schrödinger monoélectronique associée

**2 Interactions de deux orbitales atomiques**

La densité électronique est donnée par  $\varphi^2 = c_1^2 \chi_1^2 + c_2^2 \chi_2^2 + 2c_1 c_2 \chi_1 \chi_2$

- Le premier terme prend des valeurs élevées au voisinage de  $A$
- Le deuxième terme prend des valeurs élevées au voisinage de  $B$
- Le dernier terme prend des valeurs élevées autour du segment internucléaire

Il faut normer la fonction d'onde :  $\langle \varphi | \varphi \rangle = 1 \Leftrightarrow 1 = c_1^2 + c_2^2 + 2c_1 c_2 \langle \chi_1 | \chi_2 \rangle$

On définit l'intégrale de recouvrement  $S = \iiint_{\Omega} \chi_1^* \chi_2 d\tau = \langle \chi_1 | \chi_2 \rangle$  d'où

$$c_1^2 + c_2^2 + 2c_1 c_2 S = 1$$

–  $c_1^2$  est la probabilité de trouver l'électron au voisinage de  $A$   
 –  $c_2^2$  est la probabilité de trouver l'électron au voisinage de  $B$   
 –  $2c_1 c_2 S$  est la probabilité de trouver l'électron au voisinage du segment internucléaire

- On part de l'équation de Schrödinger :  $\hat{h}|\varphi\rangle = \varepsilon|\varphi\rangle$
- On la projette sur  $\chi_1$  et  $\chi_2$  :  $\hat{h}\langle \chi_i | \varphi \rangle = \varepsilon \langle \chi_i | \varphi \rangle$

$$\alpha_i = \langle \chi_i | \hat{h} | \chi_i \rangle$$

–  $\alpha_i$  est l'intégrale coulombienne relative à  $\chi_i$   
 – Elle représente l'énergie de l'orbitale  $\chi_i$  seule

$$\beta = \langle \chi_1 | \hat{h} | \chi_2 \rangle$$

–  $\beta$  est l'intégrale d'échange ou de résonance  
 – Elle représente l'énergie d'interaction entre les deux OA  
 – C'est une fonction croissante de  $S$

Démo

D'où en appliquant les opérations sur les brackets

$$\begin{cases} c_1(\alpha_1 - \varepsilon) + c_2(\beta - \varepsilon S) = 0 \\ c_1(\beta - \varepsilon S) + c_2(\alpha_2 - \varepsilon) = 0 \end{cases}$$

- Le calcul du déterminant de Cramer *Appelé déterminant séculaire* donne une solution non triviale
- On obtient une équation du second degré en  $\varepsilon$  qui donne toujours deux solutions  $\omega_{OM}$
- La probabilité de trouver l'électron est identique au voisinage de  $A$  et au voisinage de  $B \Rightarrow c_1^2 = c_2^2$
- On peut construire  $\varphi_{\pm} = c_{\pm}(\chi_1 \mp \chi_2)$  et il ne reste qu'à déterminer les coefficients de normalisation
- On trouve  $c_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2(1 \pm S)}}$  d'où  $\varphi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2(1 \pm S)}}(\chi_1 \mp \chi_2)$

*Autre méthode de résolution : Calcul des énergies à partir de l'équation de Schrödinger*

Démo

Propriétés

- Par interaction de  $n$  orbitales atomiques on obtient  $n$  orbitales moléculaires
- Les solutions de l'équation de Schrödinger sont toujours orthogonales

Propriétés

### Forme des solutions

- $\varphi_+$ , les amplitudes des OA s'ajoutent *Interférences constructives*  $\Rightarrow$  Les OA sont en phase  
 $\Rightarrow$  **Orbitale moléculaire liante**
- $\varphi_-$ , les amplitudes des OA se soustraient *Interférences destructives*  $\Rightarrow$  Les OA sont en opposition de phase  
 $\Rightarrow$  **Orbitale moléculaire antiliante**

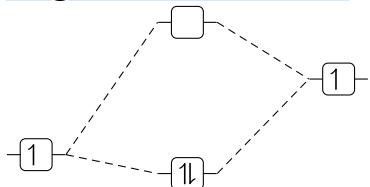
Propriétés

### Stabilisation

- L'OM liante est stabilisée par rapport au niveau initial des deux OA
- L'OM antiliante est déstabilisée par rapport au niveau initial des deux OA
- La déstabilisation de l'OM antiliante est toujours plus importante que la stabilisation de l'OM liante  
 $\Delta E_- = E_- - \varepsilon_{\chi_1} > \Delta E_+ = \varepsilon_{\chi_1} - E_+$
- La force d'interaction est mesurée par la stabilisation  $\Delta E_+$  de l'OM liante
- Plus  $S$  est grande plus les écarts d'énergie sont importants

Propriétés

### Diagramme d'interraction



- Les OA sont classées par énergie croissante
- Chaque OM est reliée aux OA dont elle est combinaison

Propriétés

### OA Différentes

- L'OM liante a pour coefficient le plus gros celui de l'OA la plus basse en énergie
- L'OM antiliante a pour coefficient le plus gros celui de l'OA la plus haute en énergie
- L'OM liante *antiliante* est plus *moins* stable que chacun des deux niveaux initiaux
- On a toujours  $\Delta E_- > \Delta E_+$  et ces deux termes  $\propto \frac{S^2}{\Delta \varepsilon}$
- Plus la différence d'énergie entre les 2 OA augmente plus la stabilisation *déstabilisation* de l'OM liante *antiliante* diminue et la dysymétrie des coefficients augmente  
 $\Rightarrow$  On néglige les interactions entre des OA d'énergies très différentes  $\approx 12 - 13 \text{ eV}$
- Deux OA de recouvrement nul n'interagissent pas

## Règles de remplissage

- Les OM se remplissent par ordre croissant d'énergie
- Chaque OM peut recevoir au plus 2 e<sup>-</sup> de spin opposé
- Pour plusieurs OM dégénérées, la règle de Hund s'applique

## Interaction à faible nombre d'électrons

Nombre d'e <sup>-</sup>	Explication	Stabilité
2	e <sup>-</sup> sur orbitale liante	Stabilisante
4	e <sup>-</sup> répartis sur OM liante et antiliante et $\Delta E_- > \Delta E_+$	Déstabilisante
1	Énergie totale affaiblie	Peu être stabilisante
3	On ne peut pas prévoir	∅

Dans des cas simples on peut faire le lien avec les schémas de Lewis

Ex : Le doublet liant est la double occupation d'une OM liante L'OM antiliante étant vacante

$$i = \frac{n' - n^*}{2}$$

- $i$  est l'indice de liaison
- $n'$  est le nombre d'e<sup>-</sup> liants
- $n^*$  est le nombre d'e<sup>-</sup> antiliants

## Énergie totale

- Le recouvrement  $Distance R$  n'est pas le seul facteur intervenant dans l'énergie totale
- Il faut prendre en compte la répulsion électrostatique
- La somme de ces deux facteurs donne la distance internucléaire

## Différents recouvrements

- Recouvrements **axiaux** : Type  $\sigma$
- Recouvrements **latéraux** : Type  $\pi$
- Les OM possèdent un plan de symétrie

## Éléments de symétrie

- Réflexion par rapport à un plan ( $\sigma$ )
- Inversion par rapport à un point ( $i$ )
- Rotation d'un angle  $\frac{2\pi}{N}$  autour d'un axe  $\alpha$  :  $C_n(\alpha)$  L'axe est  $C_n$
- Rotation d'un angle  $\frac{2\pi}{N}$  autour d'un axe  $\alpha$  suivi d'une réflexion par rapport à un plan orthogonal :  $S_n$

## Symétries

DEF: L'orbitale est dite **symétrique** **antisymétrique** si elle est transformée en elle même *son opposé* par réflexion par rapport à un plan de symétrie

- Si par rapport à un même élément de symétrie
  - Une OA <sub>$\chi_i$</sub>  est symétrique
  - Une OA <sub>$\chi_j$</sub>  est antisymétrique
- le recouvrement  $\langle \chi_i | \chi_j \rangle = 0 \Rightarrow$  Les OA ne peuvent pas interagir

**Principe de symétrie**

Seules les OA possédant les mêmes propriétés de symétrie par rapport à l'ensemble des éléments de symétrie peuvent interagir

*Trouver un élément de symétrie différent pour deux OA  $\Rightarrow$  Pas d'interaction*

⚠ On note  $g_{gerade}$  si l'OM est symétrique par rapport au centre d'inversion et  $u_{ungerade}$  sinon

**Édifices plans**

On distingue deux groupes d'OA qui ne peuvent interagir entre elles

- Symétriques par rapport au plan  $\Rightarrow$  Squelette  $\sigma$
- Antisymétriques par rapport au plan  $\Rightarrow$  Système  $\pi$

**Étude de systèmes**

⚠ Bien définir les axes

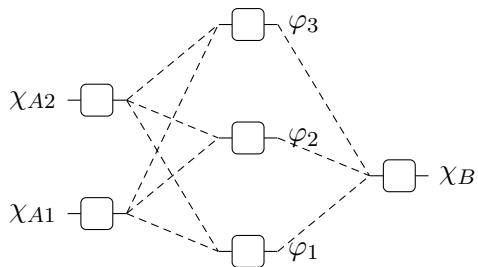
- Théorie OM-LCAO  $\Rightarrow$  On ne prend en compte que les OA de valence de chaque atome
- Propriétés de symétrie pour déterminer les interactions

**Liaisons multiples**

- Une liaison double est toujours constituée d'une liaison  $\pi$  et d'une liaison  $\sigma$
- Une liaison triple est toujours constituée de deux liaisons  $\pi$  et d'une liaison  $\sigma$

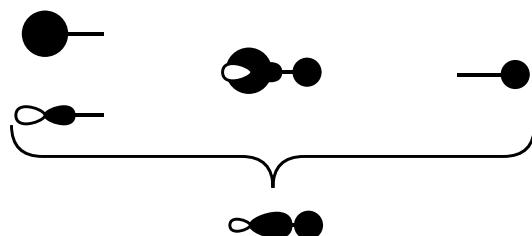
## INTERACTION DE 3 ORBITALES SUR 2 CENTRES

Par interaction de trois orbitales atomiques, on forme trois orbitales moléculaires



- Dans  $\varphi_1$  :  $\chi_{A1} \leftrightarrow \chi_B$  et  $\chi_{A2} \leftrightarrow \chi_B$  liantes
- Dans  $\varphi_3$  :  $\chi_{A1} \leftrightarrow \chi_B$  et  $\chi_{A2} \leftrightarrow \chi_B$  antiliantes
- Dans  $\varphi_2$  :  $\chi_{A1} \leftrightarrow \chi_B$  antiliante et  $\chi_{A2} \leftrightarrow \chi_B$  liante

- $\varphi_1$  est plus basse que  $\chi_{A1}$  et  $\chi_B$  car toutes les interactions sont liantes
- $\varphi_2$  est plus haute que  $\chi_{A2}$  et  $\chi_B$  car toutes les interactions sont antiliantes
- La position de  $\varphi_2$  dépend de l'électronégativité des deux centres
- La forme des orbitales dépend du recouvrement des deux atomes



**Interactions de  $N$  OA**

- On recherche les orbitales moléculaires comme CL des  $N$  OA
- Le système d'équations séculaires est un système de  $N$  équations à  $N$  inconnues  
Une solution non triviale est obtenue si  $\det = 0$
- Le terme générique du déterminant est  $H_{ij} - \varepsilon S_{ij}$  avec  $H_{ij} = \langle \chi_i | H | \chi_j \rangle$  et  $S_{ij} = \langle \chi_i | \chi_j \rangle$ 
  - Pour  $i \neq j$ ,  $H_{ij}$  est l'intégrale d'échange et  $S_{ij}$  l'intégrale de recouvrement
  - Pour  $i = j$ ,  $H_{ii}$  est l'intégrale coulombienne de  $i$  et  $S_{ii} = 1$  Normé
- Par interaction de  $N$  OA il ya  $N$  solutions  $\Rightarrow N$  OM

Les interactions à prendre en compte sont celle entre orbitales d'énergies proches et de recouvrement non nul Même propriétés de symétrie par rapport à l'édifice

Démo

**Etude de système**

- Référencer les orbitales de chacun des deux centres à prendre en compte
- Trouver des éléments de symétrie et étudier si chaque orbitale est A, S ou NS  $\Rightarrow$  Tableau
- Les orbitales de mêmes propriétés de symétrie interagissent ensemble et forment un système
- Pour chaque système on élimine les interactions de trop grands écarts énergétiques 12-13 eV
- Les orbitales n'interagissant pas sont conservées telles quelles
- On fait interagir les orbitales restantes par couple ou triplet Cf Chapitres spécifiques

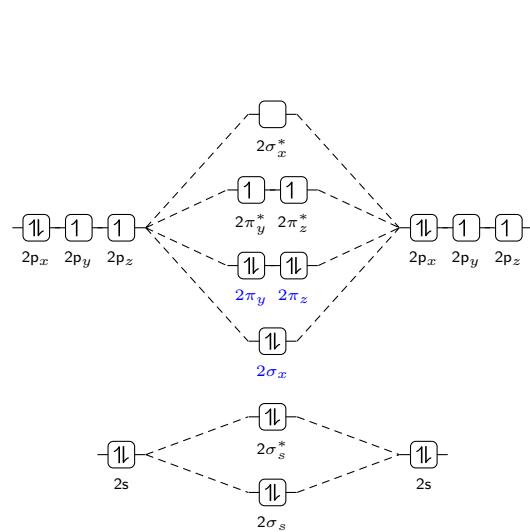
Méthode

**Edifice A–A**

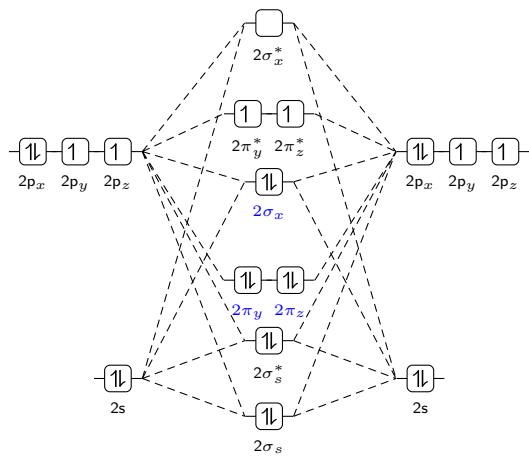
- On a un système  $\sigma$  et un système  $\pi$
- Système  $\pi$  : Recouvrement latéral d'OA d'axes parallèles  $\Rightarrow$  2 OM  $\pi_{Lante}$  et  $antiLante$
- Système  $\sigma$  :
  - Grand écart énergétique O, F, Ne  $\Rightarrow$  Diagramme non corréllé 2 interactions à 2 OA identiques  
Recouvrement latéral > Recouvrement axial  $\Rightarrow E_\sigma > E_\pi$
  - Petit écart énergétique Li, Be, B, C, N  $\Rightarrow$  Diagramme corréllé Interactions des 4 OA  
Recouvrement latéral < Recouvrement axial  $\Rightarrow E_\sigma < E_\pi$
- Plus l'indice de la liaison est important plus la liaison est forte Longueur petite

Propriétés

## Diagramme non corréllé



## Diagramme corréllé

**Etats singulets et triplets**

Dans un édifice de spin total  $S = \sum m_{si}$  il ya  $2S + 1$  état possibles

- $S = 0$  : Etat singulet : Souvent diamagnétique *sauf O<sub>2</sub>, radicaux,...*
- $S = 1$  : Etat triplet

**Edifices A – B**

- Chaque atome met en jeu ses OA de valence  $s, p_x, p_y, p_z$
- Le système  $\pi$  forme des OM  $\pi_{\pi^*}$  localisées sur l'atome le moins *plus* électronégatif
- Système  $\sigma$ 
  - Electronégativité *Energies des OA de valence* proches  $\Rightarrow$  **Corrélé**
  - Electronégativité *Energies des OA de valence* éloignés  $\Rightarrow$  **Non corrélé** *On néglige*

**Orbitales frontalières**

- HO : Orbital complètement occupée de plus haute énergie *Cède e<sup>-</sup>*
- BV : Orbital vacante de plus basse énergie *Capte e<sup>-</sup>*

*Elles sont responsables de la réactivité des molécules*

## MÉTHODE DES FRAGMENTS

Méthode

Méthode des fragments

- On **découpe** un édifice complexe en deux fragments plus simples *OM ou OA connu*
- Les OM de l'édifice étudié sont obtenues en faisant interagir les orbitales de fragment d'**énergies voisines** et de **symétries compatibles**
- On peut alors déterminer la forme et les énergies relatives des OM

Exemple

Cas d'application

- $H_3$  linéaire ou triangulaire
- $H_4$  tétraédrique, linéaire ou carré
- $H_6$  octaédrique
- $AH_2$  linéaire ou coudée
- $AH_3$  plan ou pyramidal
- $AH_4$  plan carré<sub>complexes</sub> ou tétraédrique
- $AH_6$  octaédrique<sub>complexes</sub>
- Éthylène, Acétylène, Formaldéhyde
- ...

Définition

Notations des OM**Lettres**

- *a* : OM non dégénérée symétrique<sub>*C<sub>n</sub> principal*</sub>
- *b* : OM non dégénérée antisymétrique<sub>*C<sub>n</sub> principal*</sub>
- *e* : OM dans un groupe de 2 dégénérées
- *f* : OM dans un groupe de 3 dégénérées

**Indices**

- 1 : Symétrique<sub>*C<sub>2</sub> orthogonal à l'axe principal*</sub>
- 2 : Antisymétrique<sub>*C<sub>2</sub> orthogonal à l'axe principal*</sub>
- ' : Symétrique<sub>*Plan horizontal*</sub>
- " : Antisymétrique<sub>*Plan horizontal*</sub>
- *g* : Symétrique<sub>*Centre principal*</sub>
- *u* : Antisymétrique<sub>*Centre principal*</sub>

Méthode

Diagramme de Walsh<sub>Corrélation</sub>

On étudie l'évolution énergétique de la déformation

- On étiquette les OM en fonction de leurs propriétés de symétrie communes
  - On relie par un trait les OM de même symétrie dans les deux géométries
  - La géométrie de la molécule est celle d'énergie minimale  
⇒ **Règle de la HO** :
- Une molécule adopte la géométrie pour laquelle l'énergie de la HO est la plus basse<sub>*A défaut HO-1*</sub>
- Exception : HO radicalaire ⇒ Un seul électron*

## 1 Systèmes conjugués

Définition

DEF: Un **système conjugué** est un édifice **localement plan** comprenant plus de deux atomes dont les OA de valences perpendiculaires au plan peuvent se recouvrir latéralement

La planéité locale entraîne un recouvrement maximal de ces orbitales  $\Rightarrow$  Stabilité

- Les électrons concernés occuperont des OM  $\pi$  délocalisées sur ces  $N$  atomes  
On les appelle **électrons  $\pi$**  délocalisés



La géométrie peut être en désaccord avec celle prévue par la théorie VSEPR

Propriétés

### Motifs typiques

Liaison multiple	<i>Unique liaison simple</i>	Liaison multiple	$\pi\sigma\pi$
Liaison multiple	<i>Unique liaison simple</i>	Doublet non liant	$\pi\sigma n$
Liaison multiple	<i>Unique liaison simple</i>	Lacune électronique	$\pi\sigma v$
Doublet non liant	<i>Unique liaison simple</i>	Lacune électronique	$n\sigma v$

Méthode

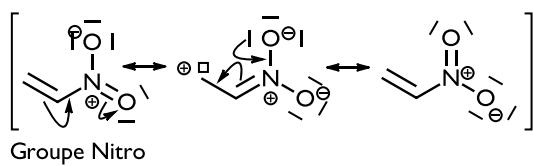
### Étude de structures électroniques conjuguées

- On définit le plan de symétrie comme le plan des atomes délocalisés
- On sépare les OM en deux groupes
  - Squelette  $\sigma$  : Interaction d'OA symétriques par rapport au plan
  - Système  $\pi$  : Interaction d'OA antisymétriques par rapport au plan

Définition

## 2 Théorie de la résonance

- Pour décrire correctement l'édifice, il faut écrire plusieurs schémas de Lewis appelés **formules de résonance** ou **formules mésomères**
- On ne prend en compte que les formules les plus représentatives  
 $\Rightarrow$  L'édifice est un **hybride** de résonance de ces formules mésomères *Moyenne*



### Écrire les formules de résonance

- On déplace les électrons  $\pi$  ou  $n$  sans modifier la position ou numérotation des noyaux
- On déplace les électrons l'un après l'autre en représentant le déplacement par une flèche  
⚠ Ne pas dépasser l'octet pour la deuxième période

### Formules les plus représentatives

1. Règle de l'octet respectée
2. Nombre de charges formelles *Préférer l'hypervalence aux charges pour la 3<sup>e</sup> période*
3. Éloignement des charges
4. Charges en accord avec l'électronégativité  $\ominus$  sur  $\chi$

*Deux formules de résonance sans charges  $\Rightarrow$  Les autres négligeables*

Ne pas confondre charge  $\oplus$  et lacune

Pour les espèces radicalaires, on déplace les électrons un par un

- La stabilité des systèmes conjugués se mesure par l'énergie de délocalisation  
Elle correspond à la différence d'énergie entre la formule la plus représentative et l'édifice réel
- La stabilité est d'autant plus grande que le nombre d' $e^-$  délocalisés est élevé

### Décompter les $e^- \pi$ délocalisés dans un édifice

- On complète les doublets et les lacunes non représentées
- Les doubles liaisons apportent  $2 e^-$
- ⚠ Un doublet sur un atome engagé dans une liaison multiple n'est pas délocalisé *Pas plus de 2  $e^-$*
- Doublet conjugué avec une liaison multiple ou une lacune  $\Rightarrow$  Délocalisé

### Composés aromatiques

DEF: Grande stabilité, additions difficiles, substitution facile, fort déblindage des  $H^+$  en RMN  $_{7-9 ppm}$

DEF: Est plan, totalement conjugué et possède  $2(2i + 1) e^- \pi$  délocalisés sur le(s) cycles

- Les composés aromatiques possèdent une énergie de délocalisation très importante  
Ceci explique leur réactivité particulière vis à vis de l'addition *Difficile* et de la substitution

## 3 Spectroscopie

### Énergie d'une molécule

- Énergie électronique *Énergie des  $e^-$  des OM* : UV-visible
- Énergie de vibration *Mouvement autour de la position d'équilibre* : Infrarouge
- Énergie de rotation *Rotation autour du centre d'inertie* : Micro-onde

## Spectroscopie

- L'absorption d'une onde UV-Visible de fréquence  $\nu$  correspond à une transition d'un niveau fondamental vers un état excité<sub>1 ou 2</sub> si l'énergie est suffisante
- Chaque transition se traduit par une large bande car il peut y avoir des changements de niveau vibrationnels et rotationnels
- Les Spectros UV explorent le domaine  $>180$  nm  
Or les transitions  $\sigma \rightarrow \sigma^*$  et  $n \rightarrow \sigma^*$  sont dans l'UV lointain  
 $\Rightarrow$  On ne repère que les molécules possédant des e<sup>-</sup>  $\pi$
- **Effet Batachrome** : La conjugaison diminue l'écart énergétique HO-BV  $\Rightarrow \lambda_{max} \nearrow$   
 $\Rightarrow$  Une molécule ayant beaucoup d'e<sup>-</sup> délocalisés<sub>>14</sub> devient visible à l'oeil

## 1 Effets inductifs

- $\triangle$  Ne concerne que les  $e^- \sigma$
- La différence d'électronégativité entre les atomes entraîne une **polarisation** des liaisons covalentes  
⇒ Apparition de **charges partielles**  $+\delta e$  et  $-\delta e$
- Chaque groupe  $Z$  est comparé à l'atome d'hydrogène
  - $\chi_Z > \chi_H \Rightarrow Z$  exerce un effet **inductif attracteur**<sub>+I</sub>
  - $\chi_Z < \chi_H \Rightarrow Z$  exerce un effet **inductif donneur**<sub>-I</sub>
- Cet effet s'atténue avec la distance et ne ressent plus au-delà de 3 liaisons

## 2 Effet mésomère

- $\triangle$  Concerne les  $e^- \pi$
- Pour un groupe d'atome  $Z$  impliqué dans la délocalisation des  $e^-$  avec le reste de la molécule
  - Si  $Z$  est capable de donner un doublet, il exerce un effet **mésomère donneur**<sub>+M</sub>  
*À chaque fois que le premier 1<sup>er</sup> atome de Z possède un doublet conjugué à l'édifice*
  - Si  $Z$  est capable de capter un doublet, il exerce un effet **mésomère attracteur**<sub>-M</sub>  
*À chaque fois que le 1<sup>er</sup> atome de Z est lié par une liaison multiple au 2<sup>e</sup> moins électronégatif*

## 3 Hyperconjugaison

### Cas du carbocation éthyle

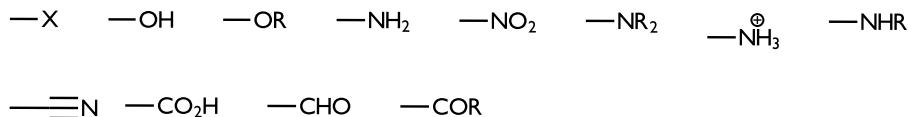
- Etude par fragmentation : On dénombre 2 interactions stabilisantes  $2 e^-$ 
  - L'OM liante ⇒ Formation de la liaison  $\sigma$
  - Interaction de type  $\pi_{recouvrement latéral entre lobes d'axe parallèle}$  : ⇒ Effet d'hyperconjugaison
- $\text{CH}_3$  se comporte comme un groupe donneur de  $2 e^-$  *Partagés entre les deux fragments*
- On explique le classement des stabilités des carbocations en replaçant les H restants par des  $\text{CH}_3$

- Les groupes alkyles exercent sur un système conjugué & carbocation ou carbanion un **faible effet donneur**
- Tout se passe comme si le groupe alkyle apportait  $2 e^-$  au système  $\pi$
- **Pour ne pas se mouiller, ne pas prononcer le mot hyperconjugaison**
- **Généralisation** ⇒ Le remplacement d'un atome d'hydrogène par un groupe donneur *Attracteur* au pied d'un système  $\pi$  augmente *Diminue* l'énergie de sa HO et de sa BV

## 4 Conséquence des effets électroniques

## Exemple

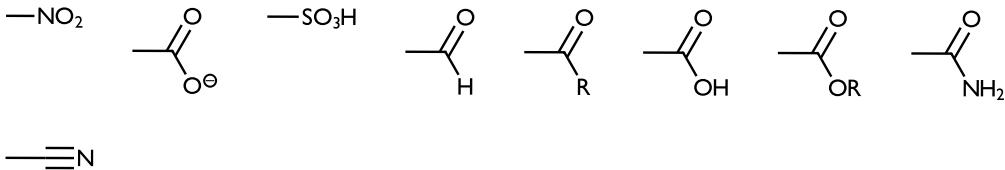
### Effets -I



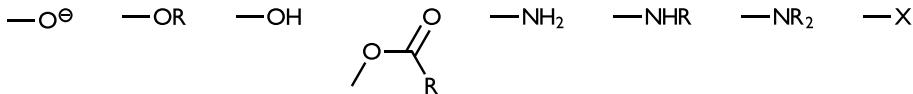
### Effets +I



### Effets -M



### Effets +M



## Propriétés

### Composés ioniques

- Plus la charge est répartie concrètement plus le composé est stabilisé.
- Un groupe à effet inductif attracteur donneur stabilise les anions et déstabilise les cations.

## Propriétés

### Molécules

- Une molécule est d'autant plus stable qu'elle a un grand nombre d' $e^-$  délocalisés.
- Si les effets inductifs et mésomères sont antagonistes, l'effet mésomère l'emporte en général.  
Exception : Atomes halogénés  $-I > +M \Rightarrow$  Halogènes attracteurs

## Propriétés

### Autres effets

- Gène stérique.
- Solvatation.

## Propriétés

### Comparaison de $pK_a$

- Acides moléculaires : Plus la base conjuguée est stable plus l'acide est fort.
- Bases moléculaires : Plus l'acide conjugué est stable plus la base est forte.

Les effets électroniques sont plus importants pour les ions que pour les molécules  
 $\Delta_r G^\circ_1 > \Delta_r G^\circ_2$  ie 2 plus stable que 1  $\Rightarrow$  On montre  $\Delta_r G^\circ \propto pK_a \Rightarrow pK_{a1} > pK_{a2}$

Substrat + Réactif  $\longrightarrow$  Produits

## 1 Aspects thermodynamiques

- Si  $\Delta_r \mathcal{G}^\circ < 0$  alors  $K^\circ$  est en faveur des produits
- $\Delta_r \mathcal{G}^\circ = \Delta_r \mathcal{H}^\circ + T \Delta_r \mathcal{S}^\circ$ 
  - $\Delta_r \mathcal{H}^\circ$  prend en compte les énergies des liaisons formées et rompues, la conjugaison, la tension de cycle, les effets de solvatation, les liaisons hydrogène
  - $\Delta_r \mathcal{S}^\circ$  prend en compte les modifications de désordre

Propriétés

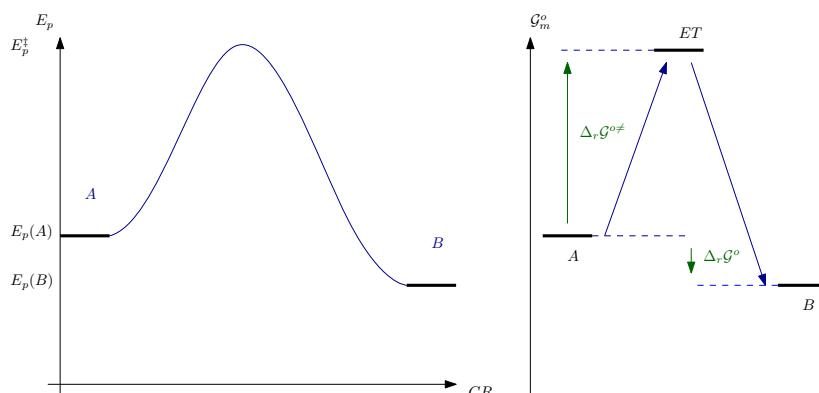
- ?** Dans les raisonnements qualitatifs  $\Delta_r \mathcal{S}^\circ \ll \Delta_r \mathcal{H}^\circ \Rightarrow \Delta_r \mathcal{G}^\circ \approx \Delta_r \mathcal{H}^\circ$  *Très grossier*
- Une réaction très endothermique est thermodynamiquement défavorisée  $K^\circ \ll 1$
  - Une réaction très exothermique est thermodynamiquement favorisée  $K^\circ \gg 1$

## 2 Aspects cinétiques

### 2.1 Généralités

- La plupart des réactions requièrent plusieurs actes élémentaires qui constituent le mécanisme réactionnel
- **Principe de moindre changement de structure** : Au cours de chaque acte élémentaire il y a un nombre limité de formations ou ruptures
- L'accomplissement de chaque acte élémentaire microscopique nécessite le franchissement d'une barrière énergétique appelée **énergie potentielle d'activation**  
Plus elle est élevée plus l'étalement est difficile  $k_{\text{plus faible}}$

Définition



- Une étape beaucoup plus difficile est dite **déterminante** et impose sa vitesse à la réaction

Théorème

### Principe de microréversibilité

Pour réobtenir les réactants à partir des produits, le système empruntera strictement le même chemin réactionnel en sens contraire

**Postulat de Hammond**

Au cours d'un acte élémentaire, si deux états successifs ont une énergie proche alors leur structure est également proche

**Théorie d'Eyring**

- Enthalpie standard d'activation  $\Delta_r \mathcal{G}^\circ \neq$

$$k = \frac{k_B T}{h} \exp\left(\frac{-\Delta_r \mathcal{G}^\circ \neq}{RT}\right)$$

- **Formule d'Eyring**

$$\Delta_r \mathcal{H}^\circ \neq \approx E_a \Rightarrow k = A \exp\left(\frac{-E_a}{RT}\right) \text{Arrhénius}$$

**Contrôle thermodynamique et cinétique**

DEF:  $\prod [A_i]^{\alpha_i} = \prod k_{A_i}^{\alpha_i} \Rightarrow$  Contrôle cinétique

DEF:  $\prod [A_i]^{\alpha_i} = \prod K_{A_i}^{\alpha_i} \Rightarrow$  Contrôle thermodynamique

- Pour obtenir le produit cinétique *Formation facile-rapide* : Durée faible + Température basse

- Pour obtenir le produit thermodynamique *Stable* : Durée longue + Température élevée

⚠ Si la réaction n'est pas renversable  $\Rightarrow$  Contrôle cinétique *Pas d'équilibre*

**Prévision de la sélectivité**

- **Contrôle thermodynamique**

1. Trouver le produit le plus stable *Conjugaisons - Liaisons H intermoléculaires*  $\neq$  *Gène stérique, - Tension de cycle*

- **Contrôle cinétique**

1. Déterminer l'étape clé *Profils énergétiques se séparent*  $\neq$  *ECD*

2. Déterminer le chemin réactionnel le plus favorable *E<sub>pa</sub> la plus faible*

**Facteurs d'influence de E<sub>pa</sub>**

- Interactions stériques *Encombrement dû aux substitutions - Interaction des nuages électroniques trop répulsifs*
- Interactions électrostatiques *Charges opposées*
- Interactions orbitalaires *Recouvrement des OM du substrat et du réactif*
- Contrôle de charge : Réactifs durs *Fortement chargés - Peu de recouvrement des OM*
- Contrôle frontalier : Réactifs mous *Faiblement chargés - Fort recouvrement*

💡 Si les deux profils ne se croisent pas, on peut déterminer la constante d'équilibre la plus grande *E<sub>pa</sub> faible* en considérant les pentes initiales

**Raisonnements en contrôle cinétique de charge**

- **Réactif nucléophile** *Électrophile* : Attaque la charge partielle  $\oplus \ominus$  la plus grande

## 2.2 Raisonnements en contrôle cinétique orbitalaire

- Lors de l'approche l'ensemble des OM des réactifs A et B vont interagir, on distingue
  - Les interactions entre deux OM occupées  $\Rightarrow$  Déstabilisante<sub>4 e<sup>-</sup></sub>
  - Les interactions entre une OM occupée et une OM vacante  $\Rightarrow$  Stabilisante<sub>2 e<sup>-</sup></sub>

### Théorème de Fukui

- La déstabilisation due aux interactions à 4 électrons est comparable  $\Rightarrow$  On compare les différentes stabilisations<sub>2 e<sup>-</sup></sub>
- Or Stabilisation  $\propto \frac{S^2}{\Delta E}$  : elle augmente donc si
  1.  $\Delta E$  est petit  $\Rightarrow$  Les OM sont d'énergies proches
  2. L'intégrale de recouvrement S est grande

$\rightarrow$  On peut se limiter à considérer les interactions HO  $\leftrightarrow$  BV<sub>Interactions des orbitales frontalières</sub>

Condition : HO-1 et BV+1 sont suffisamment éloignées en énergie des OF

$\rightarrow$  Pour évaluer la stabilisation on se limite à l'interaction HO  $\leftrightarrow$  BV des OF les plus proches en énergie

Cette interaction est appelée **interaction principale**

 On admet que toutes les BV sont d'énergie supérieures à toutes les HO

Toujours placer les e<sup>-</sup> dans les HO

### Électrophile et nucléophile

- Dans l'interaction principale un **nucléophile** met en jeu sa **HO** et un **électrophile** sa **BV**
- $\Rightarrow$  Un électrophile<sub>nucléophile</sub> est d'autant plus fort qu'il capte<sub>cède</sub> facilement un doublet donc que sa **BV<sub>HO</sub>** est **basse<sub>haute</sub>** en énergie

Nucléophile	Charge négative importante localisée - Doublet peu encombré - Polarisable
Electrophile	Charge positive élevée et localisée

Electrophilie & Nucléophilie = Notion cinétique<sub>Acide & Base de Lewis notion thermodynamique</sub>

### Orbitales frontalières et sélectivité

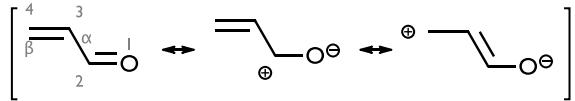
1. Plus la différence d'énergie entre les OF est faible plus la réaction est facile<sub>k grand</sub>  
 $\rightarrow$  Éléments de chimiosélectivité<sub>Compétition des groupes fonctionnels des réactifs</sub>
2. Plus le recouvrement entre les OF est grand plus la réaction est facile  
 $\rightarrow$  Éléments de régio- et stéréosélectivité

 Si le recouvrement entre les OF est nul la réaction est interdite

### Justifier des éléments de régiosélectivité

- Rechercher le couple d'OF de l'interaction principale
- Le réactif attaque le site de plus gros coefficient<sub>valeur absolue</sub> soit de lobe le plus gros

## 2.3 Exemples

**α-énones**

- Liaison C=C conjuguée avec une liaison C=O  $\Rightarrow$  Géométrie plane
- 2 sites électrophiles  $\Rightarrow$  2 additions nucléophiles possibles<sub>1,2 et 1,4</sub>
- BV la plus importante sur C<sub>4</sub>Site mou  $\rightarrow$  Contrôle frontalier<sub>Et thermodynamique Admis</sub>  $\Rightarrow$  A<sub>1,4</sub>
- Charge  $\oplus$  la plus importante sur C<sub>2</sub>Site dur  $\rightarrow$  Contrôle de charge  $\Rightarrow$  A<sub>1,2</sub>

**Organométalliques**

- Liaison carbone métal très polarisée
- RLi>RMgX>R<sub>2</sub>CuLi

**Amines**

- Nucléophilie : RNH<sub>2</sub>>R<sub>1</sub>R<sub>2</sub>NH<sub>2</sub>>R<sub>1</sub>R<sub>2</sub>R<sub>3</sub>N<sub>Gène stérique</sub>
- Le battement quantique rend l'azote encore moins accessibles

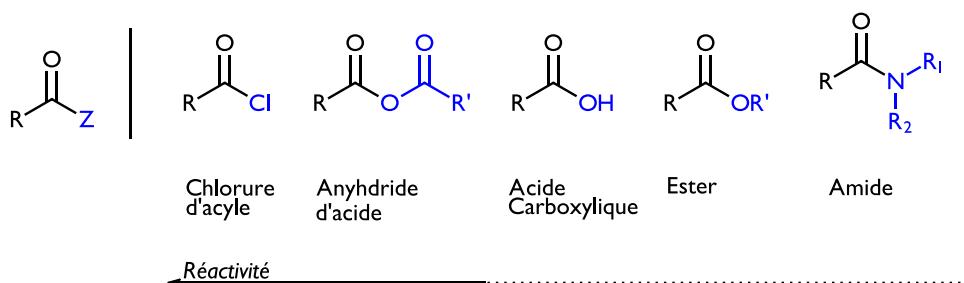
### 3 Classification HSAB de Pearson

	Dur	Mou
Acide de Lewis <sub>Electrophile</sub>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Accepteur petit, peu polarisable, fort <math>\oplus</math></li> <li>– BV contractée d'énergie élevée</li> <li>– H<sup>+</sup>, Li<sup>+</sup>, Na<sup>+</sup>, AlCl<sub>3</sub></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Accepteur grand, polarisable, faible <math>\oplus</math></li> <li>– BV diffuse de basse énergie</li> <li>– I<sub>2</sub>, I<sup>+</sup>, Br<sub>2</sub>, Br<sup>+</sup></li> </ul>
Base de Lewis <sub>Nucléophile</sub>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Donneur petit, peu polarisable, grand <math>\chi</math></li> <li>– HO contractée de basse énergie</li> <li>– F<sup>-</sup>, HO<sup>-</sup>, H<sub>2</sub>O, RO<sup>-</sup>, ROH</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Donneur grand, polarisable, faible <math>\chi</math></li> <li>– HO diffuse d'énergie élevée</li> <li>– H<sup>-</sup>, R<sup>-</sup>, I<sup>-</sup>, Ph<sub>3</sub>P, CH<sub>2</sub>=CH<sub>2</sub></li> </ul>

Les acides durs<sub>mous</sub> ont tendance à s'associer aux bases dures<sub>molles</sub> : Contrôle de charge<sub>frontalier</sub>

## 1 Dérivés d'acides carboxyliques

Définition

-CO<sub>2</sub>H : Groupe carboxyle

### Nomenclature

Propriétés

Dérivé	Nom
Acide carboxylique	Acide alcanoïque
Chlorure d'acyle	Chlorure d'alcanoyle
Anhydrides d'acide	Anydride alcanoïque
Esters	Alcanoate d'alkyle
Amide	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Non substitué : Alcanamide</li> <li>– Monosubstitué : N-alkyl<sub>1</sub>alcanamide</li> <li>– Disubstitué : N-alkyl<sub>1</sub>-N-alkyl<sub>2</sub>alcanamide <i>Ou N,N-dialkyl<sub>1</sub> alcanamide</i></li> </ul>

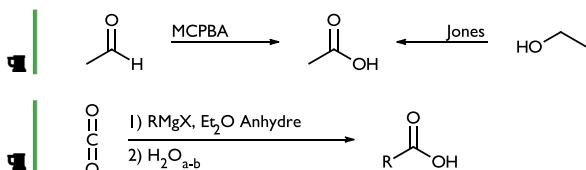
Propriétés

### Propriétés spectroscopiques

Dérivé	IR	RMN
Acide carboxylique	<ul style="list-style-type: none"> <li>– 1700-1725 cm<sup>-1</sup> : Élongation C=O</li> <li>– 2500-3000 cm<sup>-1</sup> : Élongation –OH<sub>Large</sub></li> </ul>	– 11-12 ppm
Chlorure d'acyle	– 1718-1815 cm <sup>-1</sup> : Élongation C=O	
Anhydrides d'acide	– 1735-1750 cm <sup>-1</sup> : Élongation C=O	
Esters	– 1735-1750 cm <sup>-1</sup> : Élongation C=O	
Amides	<ul style="list-style-type: none"> <li>– 1630-1690 cm<sup>-1</sup> : Élongation C=O</li> <li>– 3100-3500 cm<sup>-1</sup> : Elongation N–H</li> </ul>	

Propriétés

### Obtention des acides carboxyliques



– Hydrolyse des dérivés d'acide

## Propriétés physico-chimiques des acides carboxyliques

- Formation de liaisons H  $\Rightarrow T^*$  élevée
- Solubilité importante dans l'eau  $Chaine < 5$  - Formation de dimères dans un solvant apolaire
- Acide faible dans l'eau

■ Réaction avec  $HCO_3^-$  comme test de présence *Déplacement d'équilibre*

- Uniquement une réaction acido-basique avec les organomagnésiens

DEF: Acide Gras : Acide à longue chaîne carbonée  $> 12 \Rightarrow$  Propriétés tensioactives

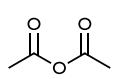
Propriétés

⚠

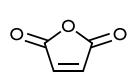
Alcanoate *Acide Carboxylique*  $\neq$  Alcanolate *Alcool*

Exemple

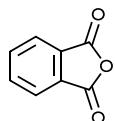
### Anhydrides d'acide



Anhydride acétique



Anhydride maléique



Anhydride phthalique

## 2 Réactivité des dérivés d'acide lors de l'attaque nucléophile

Réaction

### Mécanisme d'addition élimination

Équation	$Nu^- + R-C(=O)Z \xrightarrow{A_N E} R-C(Nu)(Z) + Z^-$
Mécanisme	
Notes	<ul style="list-style-type: none"><li>Substitution nucléophile avec mécanisme d'addition élimination</li><li>⚠ Acide carboxylique : Nucléophile est une base <math>\Rightarrow</math> Réaction acido-basique</li><li>C=O est polarisée : Charge est importante <math>\Rightarrow</math> Dérivé plus nucléophile</li><li>La réactivité est plus importante si <math>-I</math> est fort et <math>+M</math> est faible</li><li>L'étape d'élimination est d'autant plus facile que <math>Z^-</math> est bon nucléfuge <i>GP</i></li></ul>

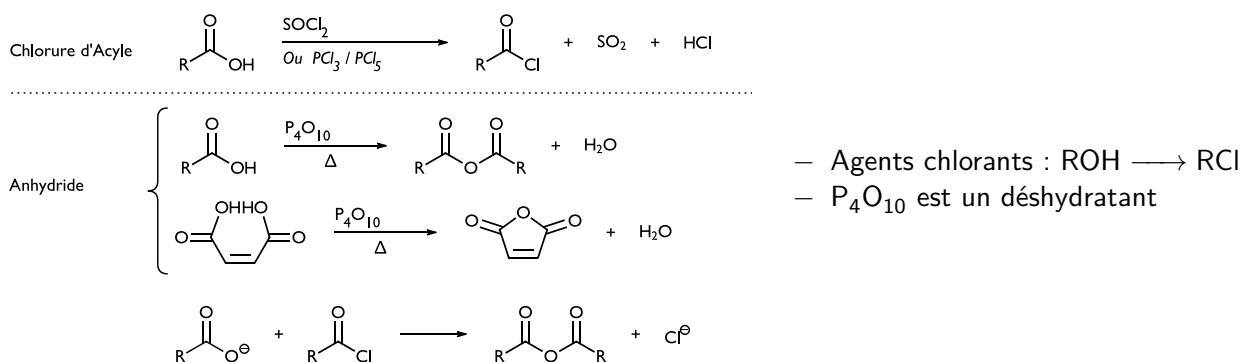
## 3 Activation du groupe carboxyle

Propriétés

### Activation ex-situ

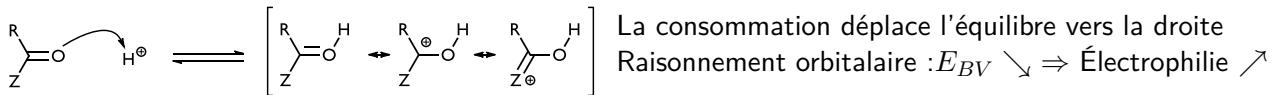
On active un dérivé d'acide carboxylique en le transformant en chlorure d'acyle ou anhydride

## Propriétés



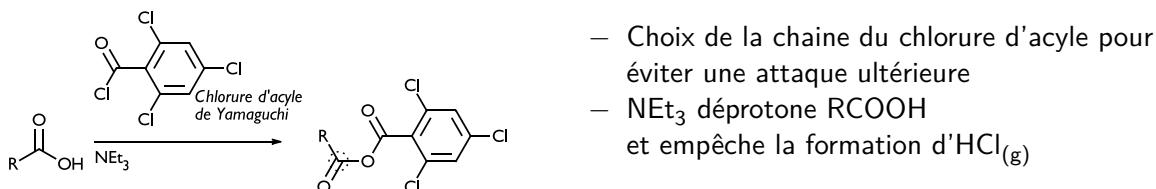
## Propriétés

### Activation in-situ par protonation



## Propriétés

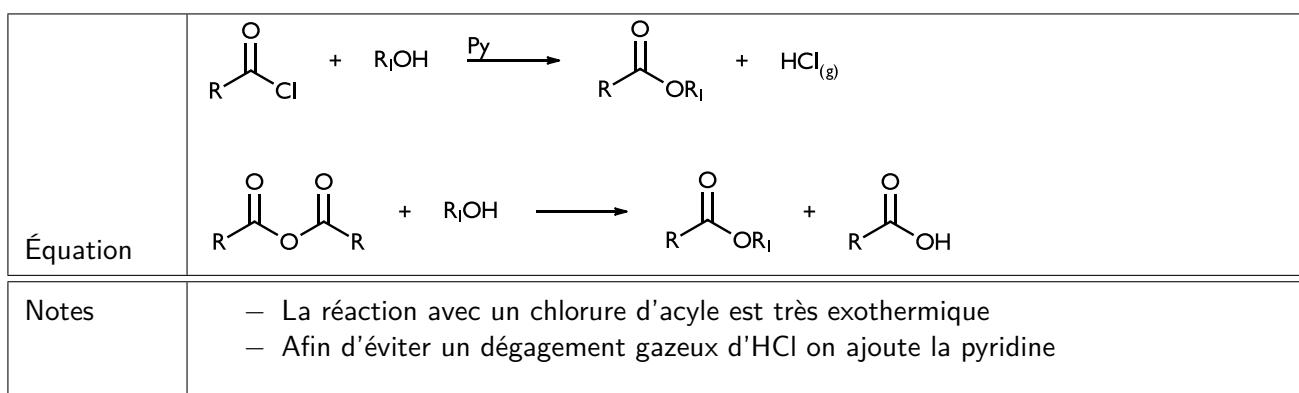
### Activation in-situ par formation d'un anhydride mixte



## 4 Synthèse des esters

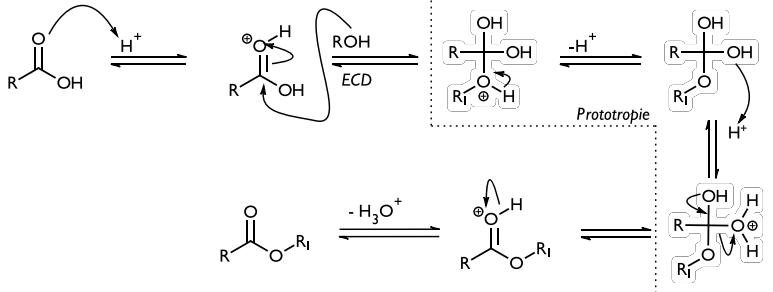
## Réaction

### Estérification d'un chlorure d'acyle ou d'un anhydride



## Réaction

### Estérification des acides carboxyliques

Réaction	Équation	$\text{R}-\text{C}(=\text{O})-\text{OH} + \text{R}_1\text{OH} \xrightleftharpoons[\text{Hydrolyse}]{\text{Estérification}} \text{R}-\text{C}(=\text{O})-\text{OR}_1 + \text{H}_2\text{O}$
	Mécanisme	
	Notes	<ul style="list-style-type: none"> <li>Réaction athermique <math>\Rightarrow K(\mathcal{I})</math> et <math>\eta(\mathcal{I})</math></li> <li>Réaction non quantitative <i>Surtout ROH tertiaire</i> <math>\Rightarrow</math> Distillation hétéroazéotropique <i>Dean-Stark</i></li> <li>Réaction lente <math>\Rightarrow</math> Catalyse acide <i>APTS en faible quantité sinon OH protoné</i></li> <li><math>v = k_2[R_1\text{OH}][\text{C}^+] = k_2K_1[R_1\text{OH}][\text{RCO}_2\text{H}][\text{H}^+]</math> <i>Etape 1 rapide</i></li> <li>Estérification intramoléculaire si le cycle formé est non tendu</li> </ul>

Réaction	<u>Trans-estérification</u>	
	Équation	$\text{R}-\text{C}(=\text{O})-\text{OR}_1 + \text{O}^\ominus-\text{R}_2 \longrightarrow \text{R}-\text{C}(=\text{O})-\text{OR}_2 + \text{O}^\ominus-\text{R}_1$
	Notes	<ul style="list-style-type: none"> <li>Pour placer l'ester en milieu basique avec un alcoolate <math>\Rightarrow \text{RO}^-</math> de même chaîne</li> </ul>

Réaction	<u>Synthèse d'esters méthyliques</u>	
	Équation	$\text{R}-\text{C}(=\text{O})-\text{OH} + \text{H}_2\text{C}^\ominus-\text{N}^\oplus=\text{N} \longrightarrow \text{R}-\text{C}(=\text{O})-\text{OCH}_3 + \text{N}_2$
	Notes	Utile si le substrat possède une fonction carbonyle <i>Réaction parasite</i>

Réaction	<u>Amidification</u>	
	Équation	$\text{R}-\text{C}(=\text{O})-\text{OH} + \text{R}'_\text{I}-\text{NH}-\text{R}_2 \xrightarrow{\Delta} \text{R}-\text{C}(=\text{O})-\text{NR}'_\text{I}-\text{R}_2 + \text{H}_2\text{O}$
	Notes	A température ordinaire réaction acido-basique

## Acylation d'Hofmann

Réaction

Équation	$\text{R}-\text{C}(=\text{O})-\text{Z} + 2 \text{R}'_1-\text{NH}-\text{R}'_2 \longrightarrow \text{R}-\text{C}(=\text{O})-\text{N}(\text{R}'_1)-\text{R}'_2 + \text{R}'_2-\text{NH}_2^+ + \text{Z}^-$
Notes	<ul style="list-style-type: none"> <li>Mécanisme d'addition élimination</li> <li>Chlorure d'Acyle ou anhydride Esters : très lent<math>\Delta</math> et un seul équivalent</li> <li>En présence d'amines tertiaires <math>\text{Ou Py}</math> basiques <math>\Rightarrow</math> Un équivalent</li> <li>Amines aromatiques : l'acide carboxylique <math>pK_a &gt;</math> déprotone <math>\Rightarrow</math> Un équivalent</li> <li>Est utilisé pour protéger les amines primaires et secondaires moins nucléophiles et basiques</li> </ul>

## 6 Retour à l'acide carboxylique

### Hydrolyse des dérivés réactifs

Réaction

Équation	$\text{R}-\text{C}(=\text{O})-\text{Cl} + \text{H}_2\text{O} \longrightarrow \text{R}-\text{C}(=\text{O})-\text{OH} + \text{HCl}$
Équation	$\text{R}-\text{C}(=\text{O})-\text{O}-\text{C}(=\text{O})-\text{R} + \text{H}_2\text{O} \longrightarrow 2 \text{R}-\text{C}(=\text{O})-\text{OH}$

Notes Réaction très violente  $\Rightarrow$  Manipuler en milieu anhydre

### Hydrolyse des esters en milieu alcalin Basique - Saponification

Réaction

Équation	$\text{R}-\text{C}(=\text{O})-\text{OR}'_1 + \text{OH}^- \xrightleftharpoons[\Delta]{\quad} \text{R}-\text{C}(=\text{O})-\text{O}^- + \text{R}'_1\text{OH}$
Notes	<ul style="list-style-type: none"> <li>On utilise de la soude ou de la potasse</li> <li>Réaction quantitative mais lente Dernière étape <math>a/b</math> déplace l'équilibre</li> <li>Première étape ECD <math>\Rightarrow v = k[\text{RCO}_2\text{R}'_1][\text{HO}^-]</math></li> </ul>

### Savons

Exemple

- Les savons sont obtenus par saponification Hydrolyse de triglycérides en milieu basique
- La formation de micelles dans l'eau résulte de l'effet hydrophobe Queue si la concentration en tensio-actifs est supérieure à la concentration micellaire critique

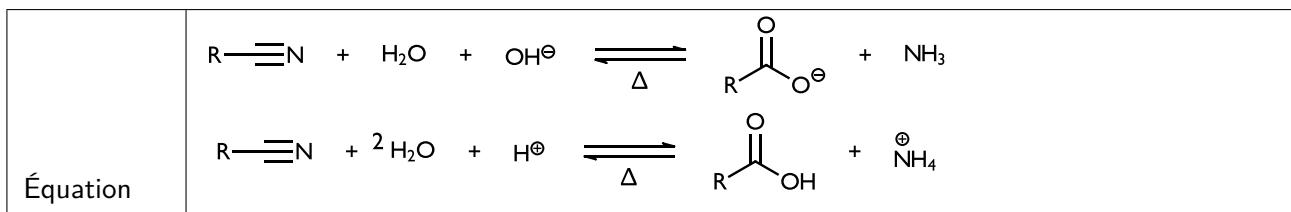
### Hydrolyse en milieu acide

Réaction

Équation	$\text{R}-\text{C}(=\text{O})-\text{OR}'_1 + \text{H}_2\text{O} \xrightleftharpoons[\Delta]{\text{[H}^{\text{+}}\text{]}} \text{R}-\text{C}(=\text{O})-\text{OH} + \text{R}'_1\text{OH}$
----------	--

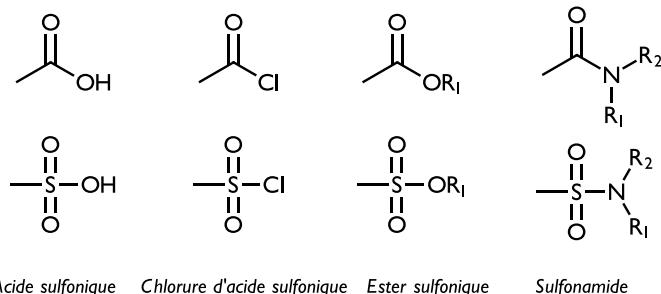
## Hydrolyse des nitriles

Réaction



## 7 Dérivés d'acide sulfoniques

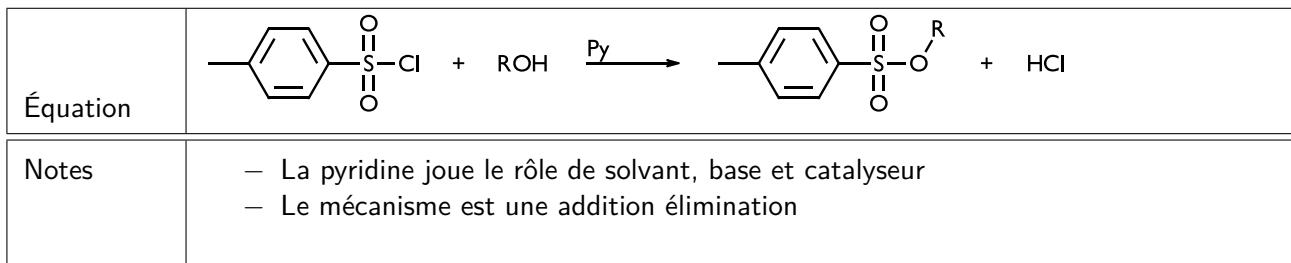
Définition



Les réactions sont analogues à celles des dérivés d'acide carboxylique

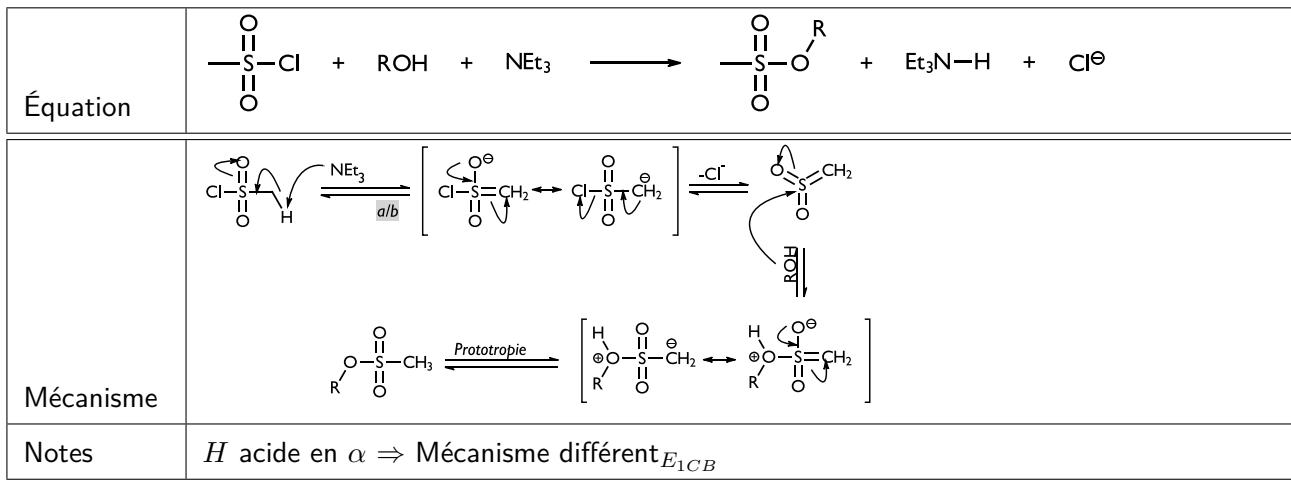
## Synthèse d'un tosylate

Réaction



## Synthèse d'un mésylate

Réaction



## Réactivité des tosylates et mésylates

- Substitutions nucléophiles  $\Rightarrow$  Excellents nucléofuges  $GP$  en présence de nucléophiles non basique
- Eliminations en présence de bases fortes peu nucléophiles  $E_2$  ou  $E_{1CB}$  si  $H$  acide en  $\alpha$
- DBU, DBN, NEt<sub>3</sub>, tBuOK

## 8 Action des amines sur les carbonyles

- “
- Amine primaire  $\Rightarrow$  Immine
  - Amine secondaire  $\Rightarrow$  Enamine

### Condensation en immine

Équation	$\begin{array}{c} \text{R}_1 \\   \\ \text{C=O} \\   \\ \text{R}_2 \end{array} + \text{H}_2\text{N}-\text{R} \rightleftharpoons \begin{array}{c} \text{R}_1 \\   \\ \text{C}=\text{N}-\text{R} \\   \\ \text{R}_2 \end{array} + \text{H}_2\text{O}$
Mécanisme	
Notes	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Milieu pas trop acide <i>Éviter la protonation de l'azote</i></li> <li>– Reformation du composé carbonylé par hydrolyse en catalyse acide</li> </ul>

### Condensation des énamines

Équation	$\begin{array}{c} \text{R}_1 \\   \\ \text{C=O} \\   \\ \text{R}_2-\text{C}-\text{R}_3 \end{array} + \begin{array}{c} \text{R} \\   \\ \text{N}-\text{H} \\   \\ \text{R}' \end{array} \xrightleftharpoons{\text{H}^+} \begin{array}{c} \text{R}_1 \\   \\ \text{C}=\text{N}-\text{R}' \\   \\ \text{R}_2-\text{C}-\text{R}_3 \end{array} + \text{H}_2\text{O}$
Notes	Le carbonyle doit posséder un $H$ sur $C_\alpha \Rightarrow$ Enolisable

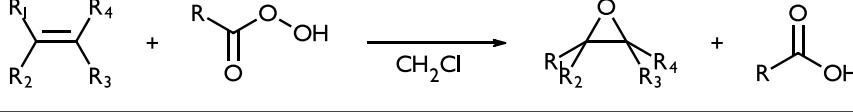
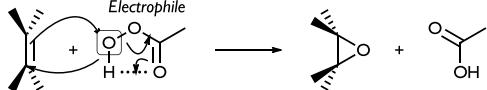
### Réactivité

- Immine : Analogue à celle des composés carbonylés  $C=N$  analogue à  $C=O$
- Enamine : Bons nucléophiles  $\Delta$  Sur  $C$ 
  - Dérivés halogénés  $\Rightarrow$  C-alkylation
  - Dérivés d'acide  $\Rightarrow$  Acylation
  - $\alpha$ -énones  $\Rightarrow$  A<sub>N-1,4</sub>

## OXYDORÉDUCTION EN CHIMIE ORGANIQUE

## 1 Époxydes

Epoxydation

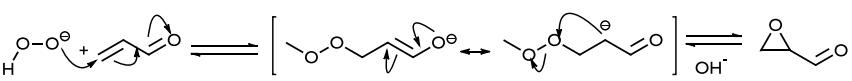
Équation	
Mécanisme	
Notes	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>S_{t\acute{e}r\acute{o}}</math>: Addition Syn</li> <li>D'autant plus facile que C=C est substitué par des groupes donneurs <math>E_{HO}</math> ↗</li> <li>Pour détruire l'excès de peroxyacide on ajoute un réducteur en fin de réaction</li> <li>L'acide carboxylique est extrait par une solution basique <math>NaHCO_3</math></li> <li>On utilise souvent le MCPBA <math>Acide m\acute{e}tachloroperoxybenzo\acute{e}que</math></li> </ul>

Réaction

■ Obtention des peroxyacides :  $\text{C}_2\text{H}_4 + \text{H}_2\text{O}_2 \rightarrow \text{C}_2\text{H}_4\text{OOH} + \text{H}_2\text{O}$

💡 Pour montrer qu'il y a oxydation ou réduction, on écrit les demi-équations

💡  $2 \text{C}^* \Rightarrow 4$  stéréoisomères si substituants différents, trois sinon

■ Epoxydation d'une C=C appauvrie en  $e^-$  : 

Epoxydation énantiométrique de Sharpless

- Epoxydation d'alcools allyliques primaires par tBuOOH catalysé par DET
- L'utilisation d'un catalyseur chiral permet une énantiométrie

$$ee = \frac{|n_d - n_l|}{n_d + n_l} \times 100 = |\%_d - \%_l|$$

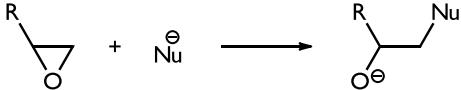
- $ee$  est l'excès énantiomérique
- $ee = 0\% \Rightarrow$  Mélange racémique
- $ee = 100\% \Rightarrow$  Un seul énantiomère

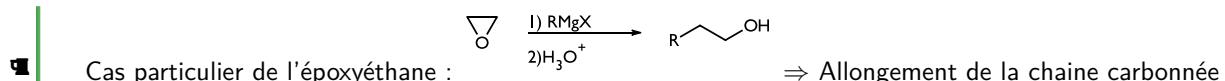
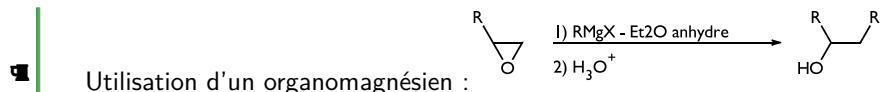
Propriétés

Réaction

Action d'un nucléophile

## Réaction

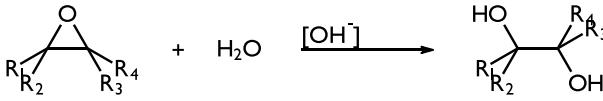
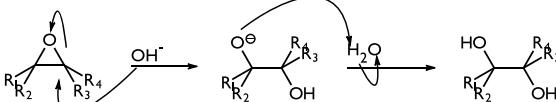
Équation	
Notes	<ul style="list-style-type: none"> <li>– <math>\mathcal{R}_{\text{égeo}}</math>: Le nucléophile attaque C le moins encombré selon <math>\text{SN}_2</math> : Attaque dorsale</li> <li>– Réaction sous contrôle stérique</li> </ul>



L'éther est non dissociant ⇒ Les ions restent associés  
L'eau est dissociant

Hydrolyse des époxydes

## Réaction

Équation	
Mécanisme	
Notes	<ul style="list-style-type: none"> <li>– <math>\mathcal{S}_{\text{téreo}}</math>: OH se fixe en anti par rapport à l'autre OH ⇒ Stéréospécifique</li> <li>– <math>\mathcal{R}_{\text{égeo}}</math>: Attaque sur le C le moins encombré</li> <li>– <math>\Delta</math> Exception : En milieu acide <math>\text{Protonation} \rightarrow \text{H}_2\text{O}</math> attaque le C le plus substitué</li> </ul>

Dihydroxylation de C=C

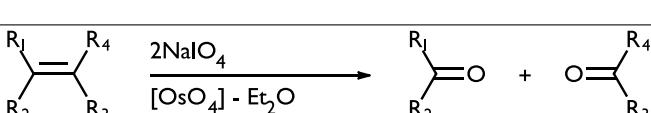
## Propriétés

DEF:  $\text{C}=\text{C} \rightarrow \text{Diol}$ 

- $\mathcal{R}_{\text{égeo}}$ : **Syn** :  $\text{H}_2\text{O}_2 + [\text{OsO}_4]$
- $\mathcal{R}_{\text{égeo}}$ : **Anti** : Epoxydation → Hydrolyse

## 2 Coupe oxydante

## Réaction

Lemieux-Johnson	
Notes	<ul style="list-style-type: none"> <li>– <math>\text{OsO}_4</math> est le co-ocydant en quantité catalytique</li> </ul>

## Ozonolyse

Réaction

Équation	
Notes	<ul style="list-style-type: none"> <li>DMS : <math>(\text{CH}_3)_2\text{S}</math></li> <li>Ozonolyse non réductrice : </li> </ul> <p>Même chose avec <math>\text{KMnO}_4</math> concentré en milieu acide à chaud</p>

## 3 Réduction des esters et acides carboxyliques

⚠

On ne peut pas oxyder des cétones

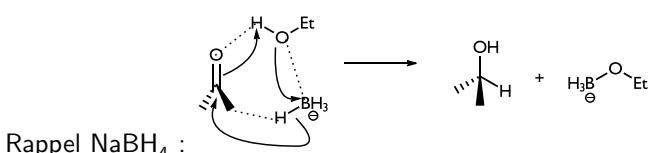
Propriétés

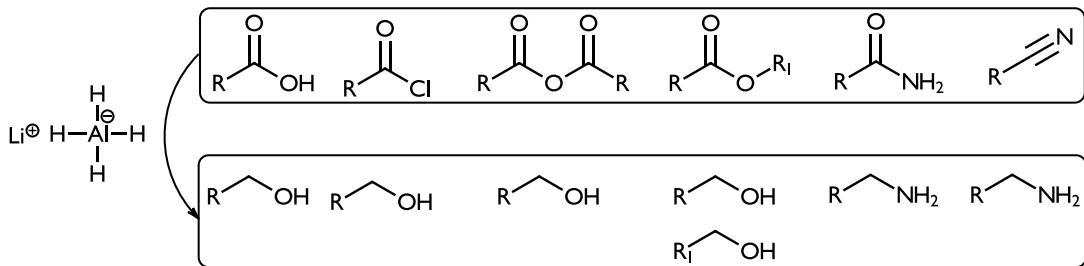
- $\text{AlH}_4^-$  est beaucoup plus réactif que  $\text{BH}_4^-$   
 $\Delta$  Il réagit violemment avec l'eau  $\Rightarrow$  Solvant aprotique anhydre  $\text{Et}_2\text{O}$
- $\text{Li}^+$  permet une activation électrophile plus efficace que  $\text{Na}^+$

## Action des aldéhydes et cétones

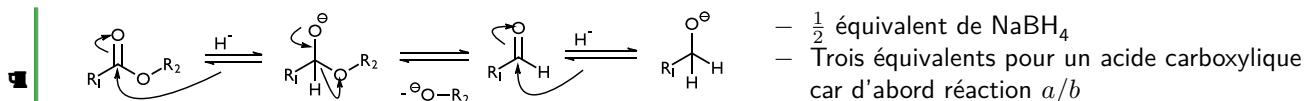
Réaction

Équation	
Mécanisme	
Notes	<ul style="list-style-type: none"> <li>Hydrolyse en milieu acide pour éviter la formation de <math>\text{Al}(\text{OH})_3(s)</math></li> <li>L'hydrolyse détruit l'excès de <math>\text{LiAlH}_4</math></li> </ul>





Les hydrures ne réduisent pas les liaisons C=C  
Peut aussi réduire les liaisons C=N des imines en amines



### Réduction des esters avec des hydrures modifiés

Équation	$\text{R}_1\text{C}(=\text{O})\text{O}-\text{R}_2 \xrightarrow[\text{2) } \text{H}_3\text{O}^+]{\substack{\text{I) DIBAL-H} \\ \text{Et}_2\text{O Anhydre} \quad -78^\circ}} \text{R}_1\text{C}(=\text{O})\text{H} + \text{R}_2\text{OH}$
Mécanisme	
Notes	HAl(iBu) : Hydrure de diisobutylaluminium

### Réactivité comparée des hydrures

Réduction	$\text{NaBH}_4$	$\text{LiBH}_4$	$\text{LiAlH}_4$	$\text{BH}_3$
Aldéhydes	💣💣*	💣💣*	💣💣*	💣*
Cétones	💣💣*	💣💣*	💣💣*	💣*
Ester		💣💣*	💣💣*	💣*
Amide			💣💣*	💣💣*
Acide carboxylique			💣	💣💣*

Propriétés

- Un H lié à un carbone **tétragonal** possède des propriétés acides à condition que la base conjuguée associée soit stabilisée<sub>Ex : Résonance</sub>
- C'est en particulier le cas pour un H porté par un C en  $\alpha$  d'un groupe mésomère attracteur
- **Mésomère attracteur fort  $\oplus$  Base stabilisée  $\Rightarrow$  Acidité forte**

⚠

Un autre H sur le même C ne possède aucune propriété acide notable

Exemple

Groupe	$pK_a$ : 1 groupe	$pK_a$ : 2 groupes
Nitro	10	4
Aldéhyde	16	
Cétone	20	9
Nitrile	25	11
Ester	25	13

En comparaison avec les alcanes  $pK_a \approx 50$

⚠

Le H de la fonction aldéhyde n'a pas de propriété acide

Définition

- DEF: Un équilibre de **tautomérie** est un équilibre chimique entre 2 isomères de constitution qui ne diffèrent que par la position d'un hydrogène et par la répartition des  $e^- \pi$
- Les composés carbonylés possédant un H en  $\alpha$  du groupe carbonyle sont dits **énolisables**

Réaction

### Équilibre de tautomérie céto-énolique

	<b>Équation</b> <i>Carbonyle</i> <i>Enol</i>
<p><b>Catalyse acide</b></p> <p><b>Catalyse basique</b></p>	
<b>Mécanisme</b>	<i>Enolate</i>
<b>Notes</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Equilibre très peu favorable à la formation de l'énol <i>Sauf délocalisation et chélation</i></li> </ul>

### 3 Réactivité des énolates

Formation

- On déprotonne avec une base plus forte que l'énolate mais non nucléophile *Addition sur le carbonyle*
  - Exemple : NaH *Dans THF ou LDA*  *Amidure très encombré*
  - ¶  $(iPr)_2 + Li_{(s)} \longrightarrow (iPr)_2N^- + Li^+ + \frac{1}{2}H_2(g)$

Si la planéité de l'énolate ne peut être respectée *Gènes ou tensions*, Délocalisation impossible  $\Rightarrow$  Pas d'acidité

L'acidité d'un H en  $\alpha$  entraîne l'isomérisation en milieu acide ou basique d'un carbonyle énolisable de  $C_\alpha$  asymétrique

### Enolate cinétique

- Obtenu le plus rapidement  $\Rightarrow$  H sur le carbone le **moins encombré** arraché
  - Basse température, temps de réaction court, base très encombrée *LDA* en excès

## Enolate thermodynamique

- Le plus stable  $\Rightarrow$  Possède la C=C la plus conjuguée ou substituée
  - Température élevée, temps long, milieu donneur de H<sup>+</sup> *Équilibres peuvent s'instaurer*, cétone en excès

## Réactivité des énolates

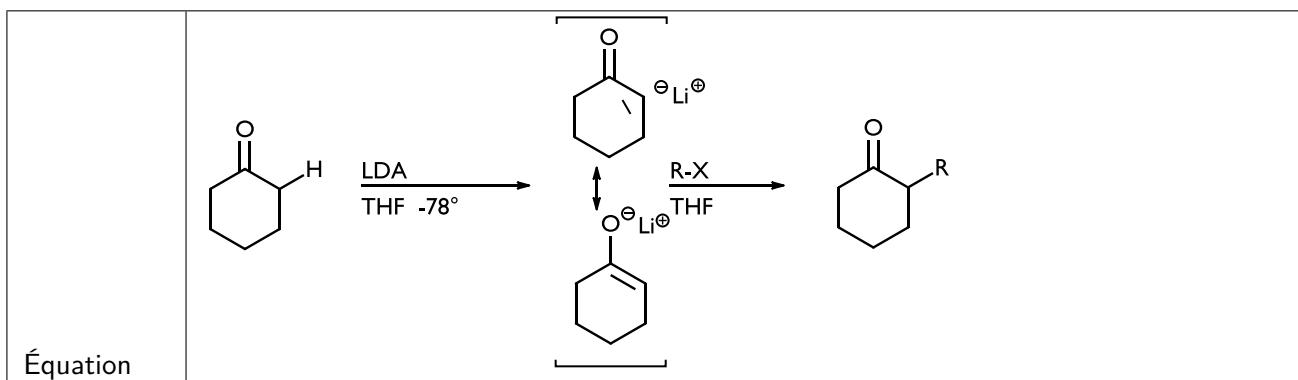
DEF: Nucléophiles très réactifs possédants **deux sites** Bidentes nucléophiles Oxygène et carbone

- **Carbone  $\alpha$** : Site **mou** Plus gros coeff sur l'orbitale frontalière attaque si contrôle **frontalier** Ou thermodynamique
- **Oxygène** : Site **dur** Charge partielle la plus importante attaque si contrôle de **charge**
- Le contre ion et le solvant ont aussi une influence Protique polaire  $\Rightarrow$  Site O moins réactif

Propriétés

“  $\mathcal{R}_{\text{égio}}$ : Une C alkylation ou une aldolisation ne sont pas stéréosélectives  $2$  configurations équiprobables

### C-Alkylation



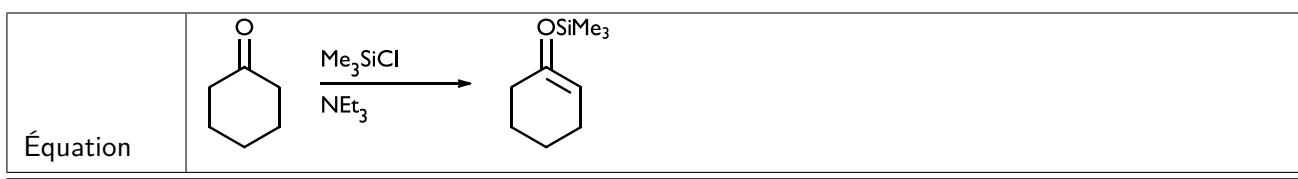
Réaction

- Notes
- $\Delta$  La cétone énolisable doit d'abord être transformée en énolate
  - L'atome de carbone nucleophile *Mou* attaque préférentiellement
  - Compétition avec l'élimination : Rendement horrible avec des dérivés tertiaires
  - Polyalkylation : Si il reste de la base et des protons il peut y avoir polyalkylation
  - Compétition avec la O-alkylation
    - Solvant protique *Inhibe O*
    - Contre-ion dur *S'associe au O*
    - RZ-mou *Interragit avec C*

⚠

C-alkylation d'un aldéhyde impossible car l'aldolisation est plus rapide Aldéhyde meilleur électrophile que la cétone

### O-silylation



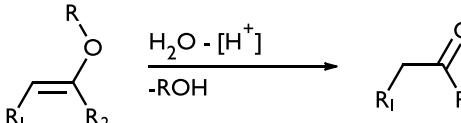
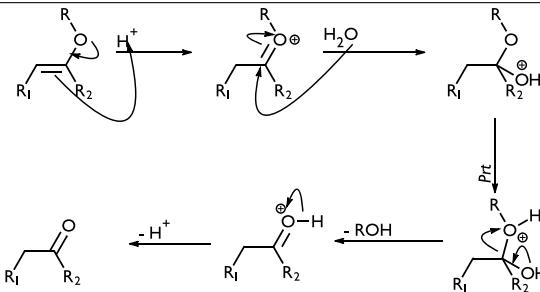
Réaction

- Notes
- On utilise un chlorosilane
  - Le silicium a plus d'affinité pour O que pour H La liaison formée est d'énergie supérieure

Réaction

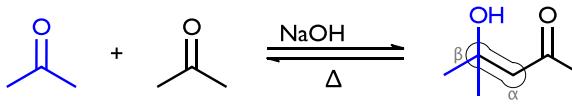
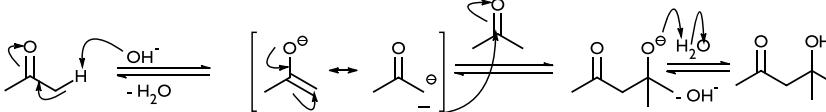
### Hydrolyse des éthers d'énol

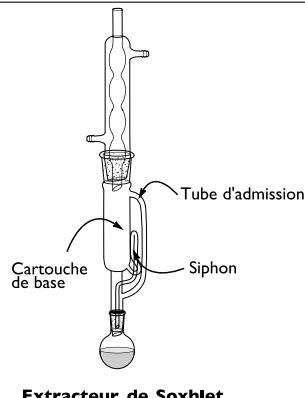
## Réaction

Équation	
Mécanisme	
Notes	<ul style="list-style-type: none"> <li>Un éther d'énol est obtenu par O-alkylation d'un carbonylé énolisable</li> <li>O-alkylation <i>Solvant aprotique, cation mou et R-Z dur</i></li> </ul>

## Aldolisation

## Réaction

Équation	
Mécanisme	
Notes	<ul style="list-style-type: none"> <li>La consommation de l'aldolate déplace l'équilibre</li> <li>On utilise une base pas trop forte <i>Pas besoin d'acidification</i></li> <li>Le terme cétolisation n'est pas employé</li> <li>Réactions renversables</li> <li>Réactions sous contrôle thermodynamique <i>Très long</i></li> <li>Rendement satisfaisant avec les aldéhydes <i>Cétone →</i></li> <li>Le mécanisme de la rétroaldolisation est l'inverse</li> </ul>



L'aldolisation peut se faire en milieu acide *Moins employé* : Addition de la forme énol sur le carbonyle protoné

## Définition

### Crotonisation

- Si le milieu réactionnel est chauffé on observe une déshydratation appelée **crotonisation**
- La séquence "Aldolisation → Crotonisation" est appelée **condensation aldolique**

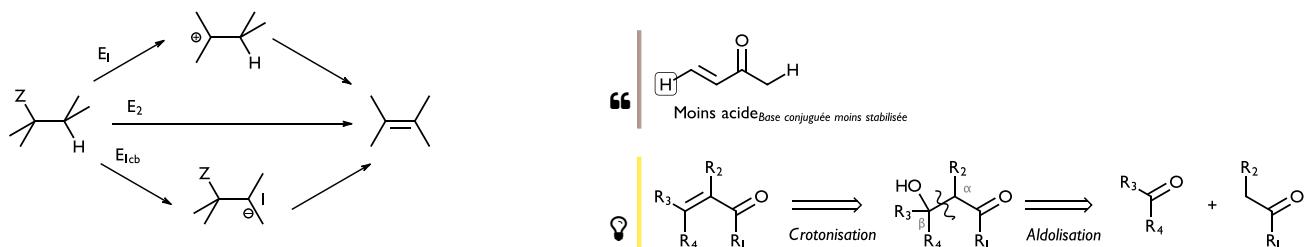
## Réaction

### Crotonisation en milieu basique

Réaction	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 10%;">Équation</td><td style="text-align: center; padding: 10px;"> </td></tr> </table>	Équation	
Équation			
Notes	<ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>\Delta</math> S'il reste un H en <math>\alpha</math></li> <li>- On forme une <math>\alpha</math>-énone</li> <li>- Force motrice : Conjugaison <i>Produit stabilisé</i> <math>\Rightarrow</math> Moins de chauffage</li> <li>- Mécanisme E<sub>1cb</sub></li> </ul>		

⚠ Pas de déshydratation classique des alcools en milieu basique

Réaction	<h3>Crotonisation en milieu acide</h3> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 10%;">Équation</td><td style="text-align: center; padding: 10px;"> </td></tr> </table>	Équation	
Équation			
Notes	<ul style="list-style-type: none"> <li>- C'est une élimination classique <i>Protonation puis mécanisme E<sub>1</sub></i></li> <li>- <math>\mathcal{R}_{\text{égio}}</math>: Règle de Zaitsev : Produit majoritaire est le plus stable <i>Le plus conjugué</i></li> </ul>		



### Aldolisation croisée

- **Aldolisation non dirigée**  
Se fait avec un bon rendement si
  - Un seul des carbonyles est énolisable *Un seul énol*
  - L'autre est plus réactif *Une seule attaque*
- **Aldolisation dirigée**
  - Réaction entre **deux composés carbonylés, dont un aldéhyde**
    1. L'énolate du premier composé est formé à l'aide d'un base forte
    2. On additionne lentement l'aldéhyde pour former rapidement l'aldol *Idée : Ne pas déprotonner l'aldéhyde*
    3. On acidifie pour transformer l'aldolate en aldol
  - Pour un aldéhyde et d'une cétone énolisable moins de restrictions  
*Enolate de la cétone plus stable et addition plus facile sur l'aldéhyde*

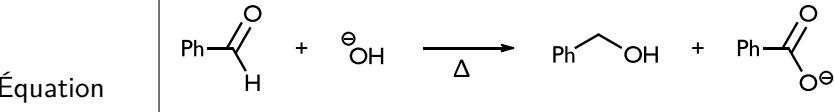
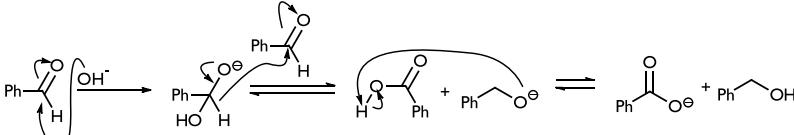
Propriétés

Propriétés

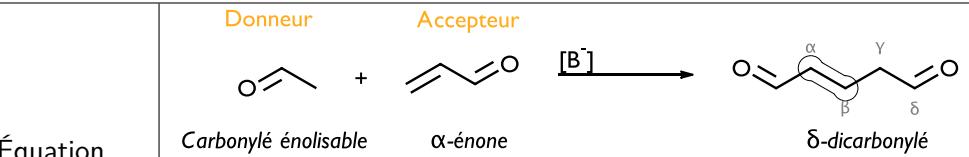
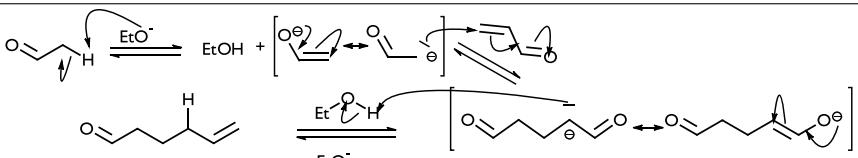
### Aldolisation intramoléculaire

- Si un substrat possède deux groupes carbonyles dont l'un au moins est énolisable
  - L'aldolisation intramoléculaire est favorisée si le cycle est non tendu
- Même nombre de liaisons formées et rompues et cycle non tendu  $\Rightarrow \Delta_r H^\circ_{inter} = \Delta_r H^\circ_{intra}$**
- $\Delta_r S^\circ_{inter} < 0$  2 réactifs  $\rightarrow 1$  produit et  $\Delta_r S^\circ_{intra} \approx 0 \Rightarrow K_{inter} < K_{intra}$**

### Réaction de Cannizzaro *Dismutation des aldéhydes non énolisables.*

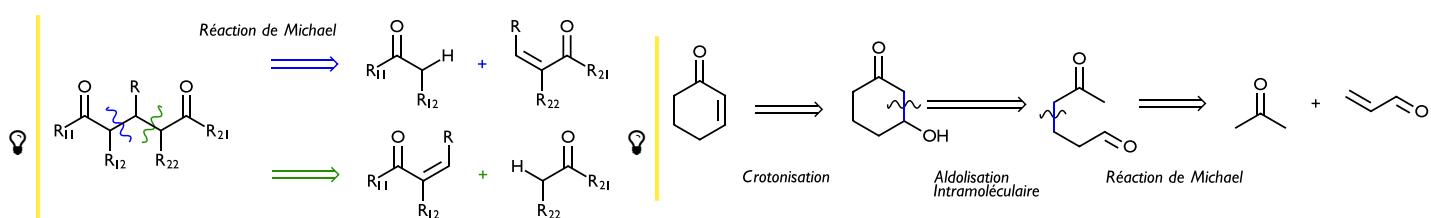
Équation	
Mécanisme	
Notes	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Le chauffage est la concentration importante de la base augmentent la vitesse</li> <li>– Ne se produit pas avec les aldéhydes énolisables <i>Aldolisation plus rapide</i></li> </ul>

### Réaction de Michael

Équation	
Mécanisme	
Notes	<ul style="list-style-type: none"> <li>– La base comme <math>\text{EtO}^-</math> est utilisée en quantité catalytique</li> <li>– Interaction principale : HO énolate / BV <math>\alpha</math>-énone</li> <li>– <math>\mathcal{R}_{\text{égio}}</math>: Recouvrement maximal <math>\Rightarrow A_N</math> 1,4 du site C<sup>-</sup> de l'énolate sur l'<math>\alpha</math>-énone</li> </ul>

### Annelation de Robinson

DEF: Séquence : Réaction de Michael + Condensation aldolique intramoléculaire

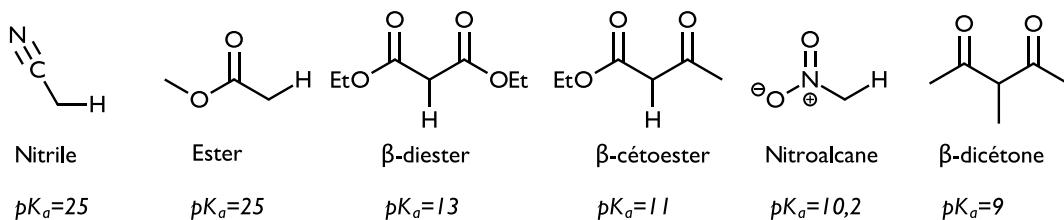




Toujours vérifier qu'on arrive bien à la forme carbonyle la plus stable à la fin des mécanismes

## 4 Généralisation pour d'autres groupes avec des H en $\alpha$

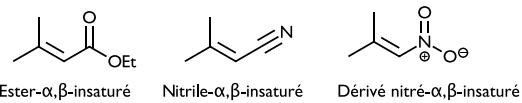
Exemple



Propriétés

### Réactions envisageables

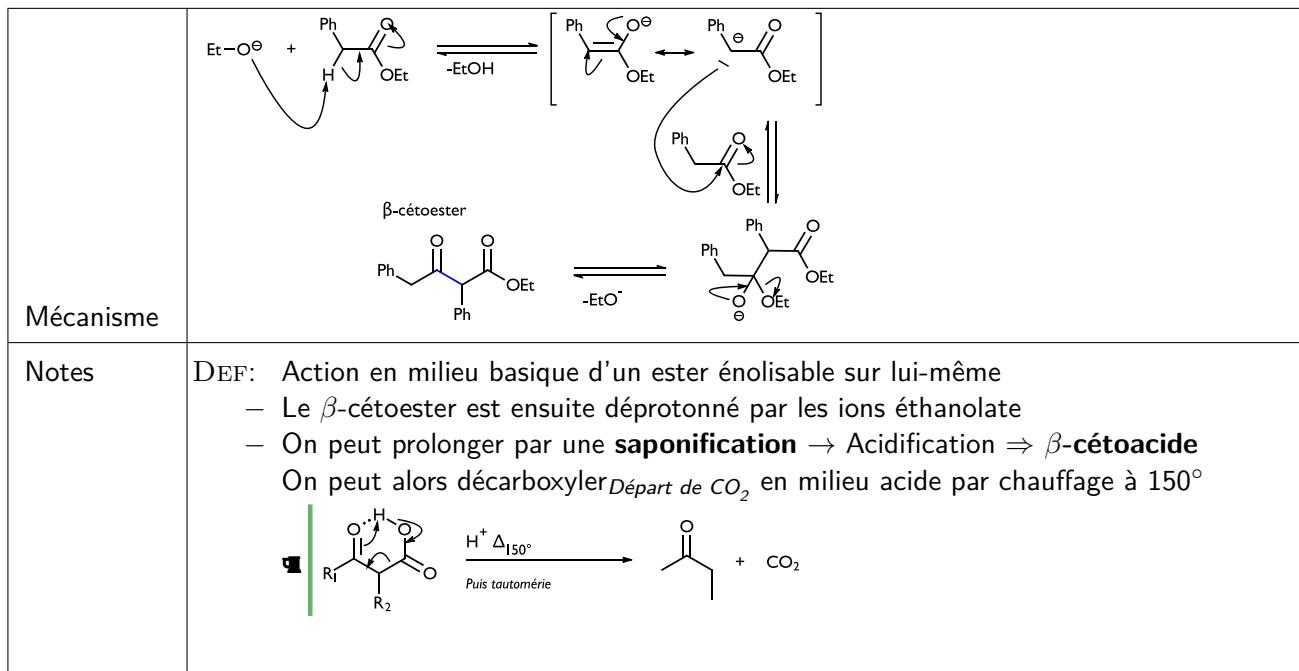
- C-alkylation Réaction sur les dérivés halogénés
- Analogue à l'aldolisation Réaction sur des composés carbonylés par  $A_N$
- Réaction sur des  $\alpha$ -énones Analogue à Michael
  - Analogue d'ion énolate : Donneur de Michael
  - $\alpha$ -énone ou analogue d' $\alpha$ -énone : Accepteur de Michael
  - Permet la polymérisation des accepteurs
- Réactions sur des dérivés d'acides Addition élimination



Propriétés

### Condensation de Claisen Addition-élimination

Réaction

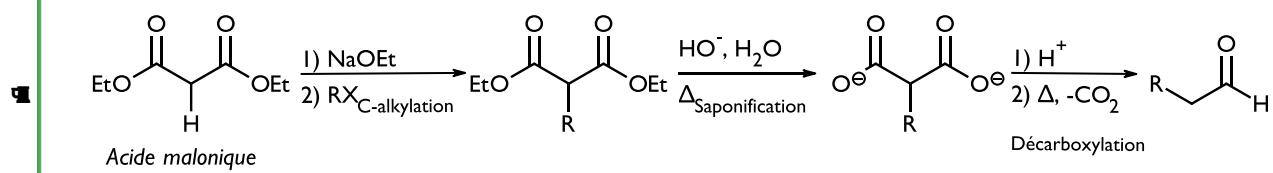


Propriétés

### Condensation de Dickmann

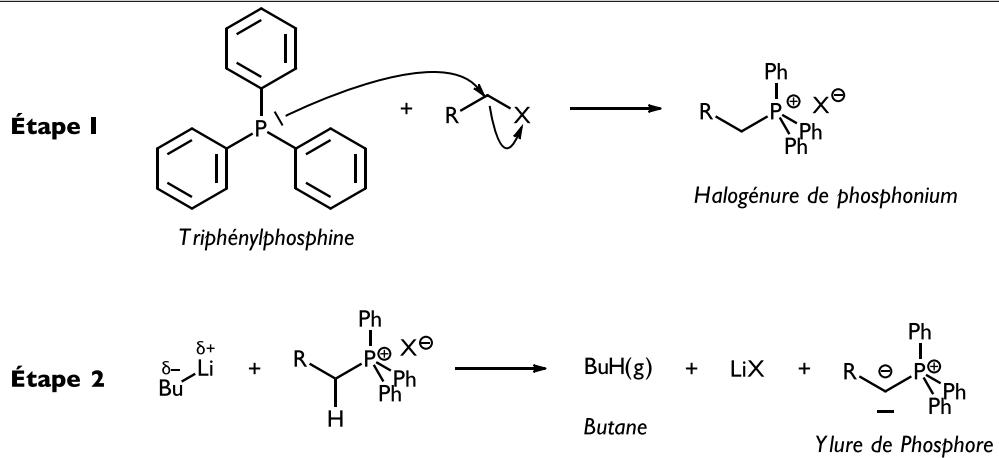
- DEF: Équivalent d'une condensation de Claisen intramoléculaire
- On utilise un diester énolisable pouvant former un cycle non-tendu
  - On peut de même prolonger par : Saponification → Acidification → Décarboxylation

### Synthèse malonique



## CRÉATION DE LIAISONS C=C

- “
- Éliminations par chauffage en milieu basique  $E_2$
  - Déshydratation des alcools : Chauffage en milieu acide  $\text{Protonation} \rightarrow \text{Elimination}_{E_1}$  ou  $E_2$

Préparation des ylures de phosphore

## Notes

1. Étape 1
    - Le sel de phosphonium précipite en solvant apolaire
    - $\text{PPH}_3$  est un bon nucléophile car P est polarisable
  2. Étape 2
    - Il faut une base très forte  $\text{BuLi}, \text{NaNH}_2, \text{NaH}$  car  $pK_a \approx 22$
    - Si R est un mésomère attracteur, l'hydrogène est plus acide
      - Semi-stabilisé :  $\text{R}=\text{Ph}$   $pK_a \approx 17$
      - Stabilisé :  $\text{R}=\text{CO}_2\text{Et}$   $pK_a \approx 8,5$
- On peut déprotonner avec des bases moins fortes  $\text{EtO}^-, \text{OH}^-$

## Réaction

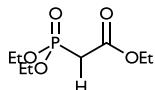
Réaction de Wittig

## Réaction

<p><b>Équation</b></p>	<p>Formule "ylure"</p> <p>Ylure de Phosphore</p> <p>Oxyde de triphénylphosphine</p>								
<p><b>Mécanisme</b></p>	<p>Cycloaddition</p>								
<p><b>Notes</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Forces motrices           <ul style="list-style-type: none"> <li>— La liaison P=O est très forte <math>\Rightarrow</math> OPPh<sub>3</sub> très stable <math>\Rightarrow K</math> élevée</li> <li>— Facilité de casser le cycle à 4</li> </ul> </li> <li>– <math>S_{\text{téreo}}</math>:           <table border="1" style="margin-left: 20px; border-collapse: collapse;"> <tr> <td>Ylure</td> <td>Non stabilisé <math>pK_a = 22</math></td> <td>Stabilisé <math>\text{CO}_2\text{Et} : pK_a = 8,5</math></td> <td>Semi-stabilisé <math>\text{Ph} : pK_a = 17</math></td> </tr> <tr> <td>Configuration</td> <td>Z</td> <td>E</td> <td>Mélange</td> </tr> </table> </li> <li>– <math>\Delta</math> La formule mésomère ylure est bien plus représentative</li> </ul>	Ylure	Non stabilisé $pK_a = 22$	Stabilisé $\text{CO}_2\text{Et} : pK_a = 8,5$	Semi-stabilisé $\text{Ph} : pK_a = 17$	Configuration	Z	E	Mélange
Ylure	Non stabilisé $pK_a = 22$	Stabilisé $\text{CO}_2\text{Et} : pK_a = 8,5$	Semi-stabilisé $\text{Ph} : pK_a = 17$						
Configuration	Z	E	Mélange						

## Propriétés

### Réaction similaire : Réaction de HWE



DEF: On utilise *Triéthylphosphonacétate* en milieu NaOEt

- Le réactif est déprotonné et réagit avec les carbonylés  
On forme des dérivés éthyléniques conjugués à CO<sub>2</sub>Et
- $\Delta$  Contrairement à la réaction de Wittig le mécanisme est en 3 étapes  
Addition nucléophile  $\rightarrow$  Cyclisation  $\rightarrow$  Elimination

## 1 Complexes des éléments de transition

Définition

**DEF:** Un élément de transition est un élément du bloc *d* dont l'atome<sub>ou certains cations</sub> ont une sous-couche *d* partiellement occupée

**DEF:** Un complexe est un édifice polyatomique formé d'un centre métallique<sub>Atome ou cation</sub> autour duquel sont liés des anions ou molécules appelés ligands

- Un complexe organométallique possède au moins une liaison métal-carbone<sub>Ou inorganique</sub>
- Les liaisons Métal-Ligand sont assurées par des doublets électroniques du ligand
- On parle de ligand monodente<sub>polydente</sub> si le ligand se fixe par un seul<sub>plusieurs</sub> sites sur le centre  
Dans le cas des polydentés on parle aussi de ligands chélatants<sub>forme un cycle</sub>
- On appelle coordinence le nombre de liaisons métal-ligand

Propriétés

### Nature de l'interaction Métal-Ligand

- Donation : Transfert d'électrons du ligand vers le métal
- Rétrodonation : Transfert d'électrons du métal vers le ligand

“ La réactivité des ligands est modifiée si complexés<sub>Ex : Alcènes pouvant être attaqué par des nucléophiles</sub>

Définition

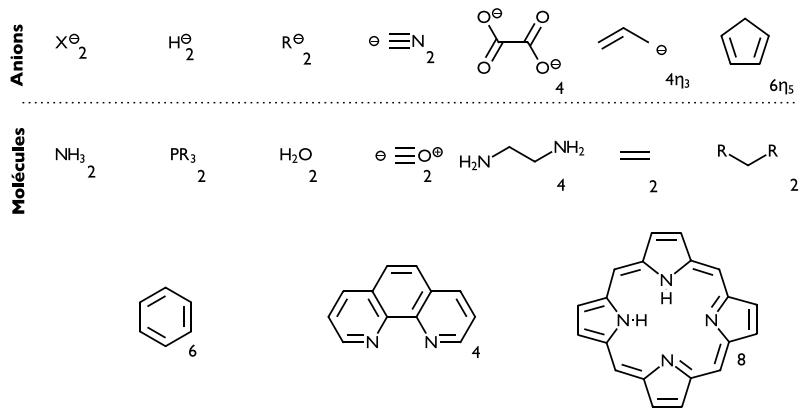
### Hapticité d'un ligand

**DEF:** Nombre d'atomes voisins du ligand qui se trouvent à une distance de liaison du centre métallique

Propriétés

### Géométrie

Coordinence	4	5	6
Géométrie	Tétrédrique ou plane carrée	Bipyramide <sub>base triangle</sub> ou pyramide <sub>base carrée</sub>	Octaédrique



### Décompte électronique

- DO du métal : Charge de fragmentation *Modèle ionique*
  - 💡 On fragmente le complexe et on attribue le double au ligand  $\Rightarrow$  Charge restante = DO
- Configuration  $d^n$  :  $n$  est le nombre de  $e^-$  de valence apporté par le centre

*D*

|

- $N_{\text{nombre}} E_{\text{lectrons}} V_{\text{alence}}$  : Somme du nombre d' $e^-$  apportés par le complexe et les ligands
- **Règle des 18  $e^-$**  : Un centre métallique cherche à avoir la configuration du gaz noble qui le suit  $18 e^-$ 
  - Complexe stables *saturés* :  $18 e^-$
  - Complexes réactifs : Moins ou plus de  $18 e^-$



Pour déterminer la charge du ligand on fragmente et on regarde si les atomes du ligand sont dans l'état habituel

*Définition*

## 2 Cycles catalytiques

### Catalyse homogène

*Propriétés*

DEF: Catalyse en phase liquide dans un solvant

- Avantages : Sélectivité et possibilité de suivi *Spectro, électrochimie*
- Inconvénients : *Difficile à séparer*

*Définition*

- Les complexes organométalliques sont souvent utilisés en catalyse homogène pour accélérer la vitesse des réactions thermodynamiquement possibles
- Le cycle catalytique rend compte des transformations subies par le catalyseur
- L'efficacité d'un catalyseur est déterminée par
  - TON *Turnover number* ; Cycles de vie
  - TOF *Turnover frequency* : Fréquence de rotation  $\frac{TON}{T}$
- ⚡ Souvent on introduit un précurseur qui donne dans une première étape le catalyseur *Hors cycle*
- Les réactifs se fixent sur le centre métallique du catalyseur = *Ligands* ce qui modifie la réactivité
  - ⚠ Pour pouvoir se fixer le catalyseur doit être insaturé  $< 18 e^-$

- Le catalyseur est l'espèce présente avant l'entrée des réactifs et après la sortie des produits
- Equation de réaction : Entrant → Sortant

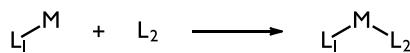
### 3 Processus élémentaires

DEF: Types de réactions ayant lieu dans la sphère de coordination

⚠ Processus élémentaires ≠ Actes élémentaires

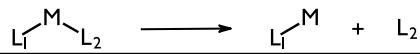
- En dehors des processus élémentaires certaines réactions se produisent uniquement sur les ligands *Modification de la réactivité*

#### Coordination Complexation



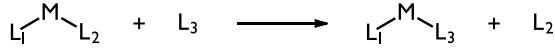
DO → ○ Nev ↑

#### Dissociation



DO → ○ Nev ↓

#### Substitution



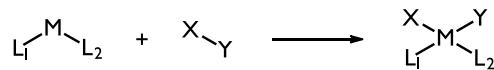
DO → ○ Nev →

↳ Mécanisme dissociatif *Dissociation - Coordination* :  $v=k[\text{L}_1\text{L}_2\text{M}]$

↳ Mécanisme associatif *Coordination - Dissociation* :  $v=k[\text{L}_1\text{L}_2\text{M}][\text{L}_3]$

#### Addition oxydante

*HH - RH - HX - RX - OO - SiH*



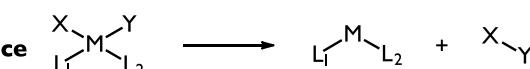
DO ↑ ○ Nev ↑

↳ Mécanisme radicalaire

↳ Mécanisme ionique 2 étapes: *SN2 - Fixation à l'opposé* : *Trans*

↳ Mécanisme concerté 3 centres : *Cis*

#### Elimination réductrice



DO ↓ ○ Nev ↓

↳ Mécanisme concerté 3 centres : *Cis*

Couplage oxydant *Découplage réducteur*



#### Insertion

Ligand insaturé

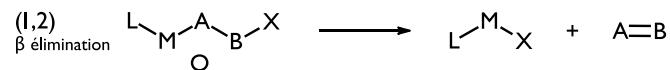


DO → ○ Nev →

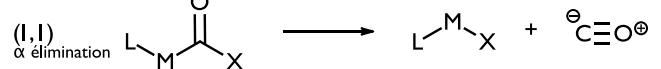


↳ Mécanisme en 2 étapes *Coordination du ligand - Insertion-migration (+ Souvent coordination solvant)*

#### Désinsertion



DO → ○ Nev →



↳ Mécanisme en 2 étapes *Migration - Dissociation*

## Réactions de couplage

DEF: Une réaction de couplage permet la formation d'une liaison C–C à partir de réactifs qui ne réagiraient pas entre eux sans catalyseur

- L'un des réactifs est un dérivé halogéné RX ou un triflate ROTf

DEF: Dans une étape de **trans-métallation** un groupe carboné lié à un métal se fixe à un autre centre métallique du complexe du cycle catalytique

## Polymérisation

- Le dérivé éthylénique est le **monomère**
- On utilise un **amorceur** pour lancer la réaction  
On distingue la polymérisation en chaîne radicalaire, anionique, cationique ou par coordination selon l'amorceur
- Mécanisme de la réaction : Amorçage *Création du centre actif* → Propagation → Terminaison *Désactivation du centre actif*  
– Les chaînes obtenues sont linéaires d'où un caractère cristallin *Cohésion et densité* important

- Les OM des complexes sont obtenues par interaction des OA du centre métallique avec les OM des ligands.  
N'interagissent que les orbitales d'énergie proches et de recouvrement non nul
- Pour le centre métallique :  $(n - 1)d$ ,  $ns$ ,  $np$   
 « Sauf rares exceptions  $\varepsilon_{(n-1)d} < \varepsilon_{ns} < \varepsilon_{np}$
- Pour les ligands : Orbitales frontalières et éventuellement HO-1 ou BV+1

**Ligands  $\sigma$ -donneurs**

- Tous les ligands possèdent une OM **occupée** pouvant se recouvrir axialement avec une OA  $d$  du centre métallique  $\Rightarrow$  Le ligand est  $\sigma$ -donneur
- La position du métal par rapport aux atomes du ligand est obtenue en recherchant le recouvrement maximal pour cette interaction
- Les ligands sont généralement plus électronégatifs que les métaux, donc les OA  $d$  du centre métallique sont d'énergies plus élevées que les orbitales occupées des ligands

**Ligands  $\pi$ -donneurs**

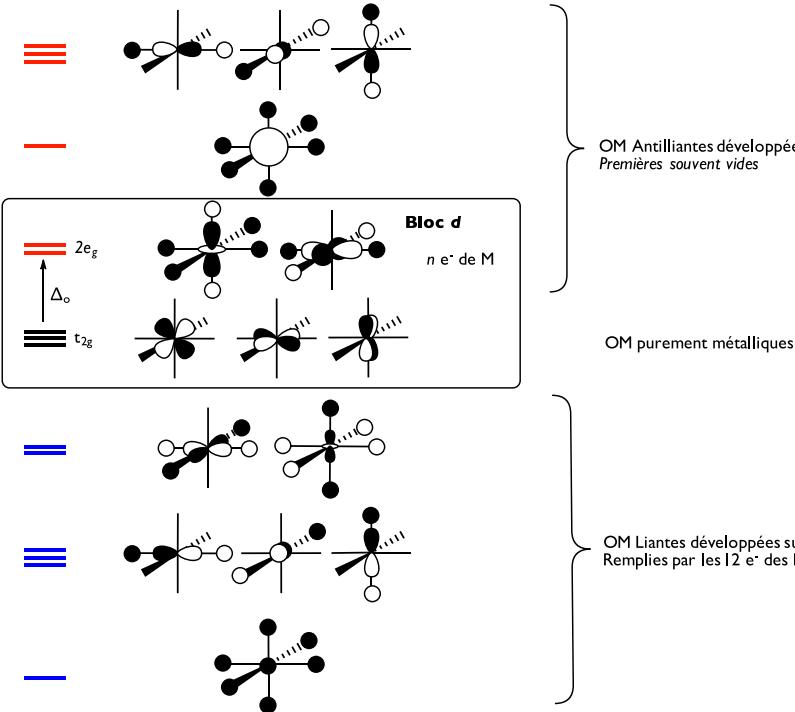
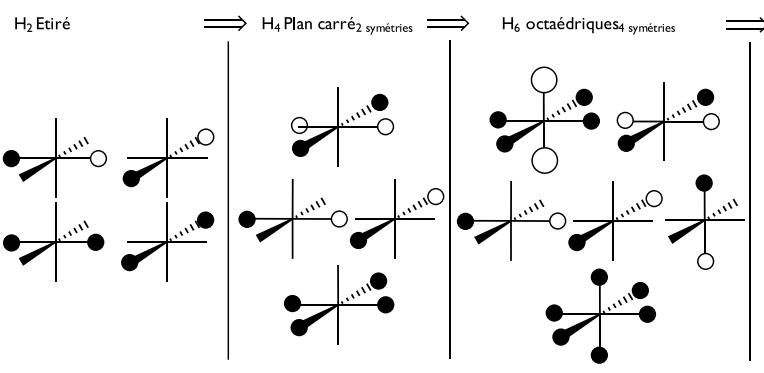
DEF: Ligand possédant une orbitale **occupée** pouvant se recouvrir latéralement avec une OA  $d$  du centre métallique plus haute en énergie

**Ligands  $\pi$ -accepteurs**

DEF: Ligands possédant une orbitale **vacante** plus haute en énergie que les OA  $d$  du métal pouvant se recouvrir latéralement avec une OA  $d$  du centre métallique

**Complexes octaédriques  $ML_6$** 

- On utilise la méthode des fragments



Règle des 18 e<sup>-</sup>  $\Rightarrow$  Pas de stabilité si antiliante occupée  $\Rightarrow$  Maximum 9e<sup>-</sup>

### Le bloc *d*

DEF: L'ensemble des 5 OM dont la plus forte contribution provient des OA *d* du centre métallique

- Les  $n$  e<sup>-</sup> de la configuration  $d^n$  occupent toujours uniquement les OM du bloc *d*
- $\Delta_o$  est l'intensité du champ de ligands  
Effet  $\sigma$ -donneur fort  $\Rightarrow$  Interactions *d* fortes  $\Rightarrow$  OM antillantes déstabilisées  $\Rightarrow \Delta_o$  grand  
 $\Delta_o$  augmente avec la charge de l'ion et quand la période augmente
- $P$  est l'énergie d'appariement : énergie à fournir pour que 2 e<sup>-</sup> occupent la même orbitale  
 $P$  ne dépend que de la nature du centre métallique et de son DO

### Remplissage du bloc *d*

- $\Delta_o > P$  Complexe à champ fort  $\Rightarrow$  Règles habituelles de remplissage
- $\Delta_o < P$  Complexe à champ faible  $\Rightarrow$  Maximum d'orbitales de tout le bloc en spins parallèles

– Magnétique

$$\mu = \sqrt{N(N+2)}\mu_B$$

- $\mu_B$  est le magnéton de Bohr
- $N$  est le nombre d'électrons célibataires du complexe

- Champ fort  $\leftrightarrow$  Bas spin
- Champ faible  $\leftrightarrow$  Haut spin
- Optiques : La couleur de nombreux complexes s'explique par les transitions  $d - d$   
 $\triangleleft$  Le spin de l'électron doit rester inchangé

$$\Delta_o = \frac{hc}{\lambda_{max}}$$

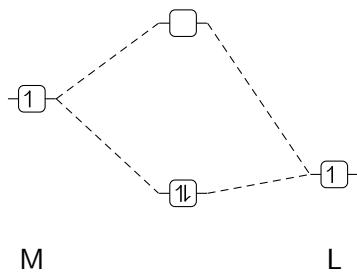
- $\lambda_{max}$  est la longueur d'onde du maximum d'absorption
- $\triangleleft$  Couleur apparente = Complémentaire

“ Pour un complexe à champ faible, on peut envisager une stabilité avec plus de  $18 e^-$  car les antiliantes sont occupées avant la fin du remplissage du niveau précédent

 Passage du  $ML_4$  en éloigne 2 H à  $\infty$

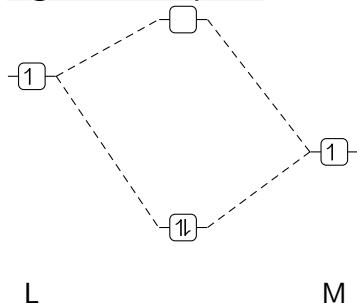
“ Pour  $ML_4$  tétraédrique les énergies des niveaux du bloc  $d$  sont inversées par rapport aux complexes octaédriques

### Ligand $\pi$ donneur



Les nouvelles orbitales du bloc  $d$  sont **antiliantes**  
 Augmentation de l'énergie  $\Rightarrow \Delta_o$  diminue

### Ligand $\pi$ accepteur



Les nouvelles orbitales du bloc  $d$  sont **liantes**  
 Diminution de l'énergie  $\Rightarrow \Delta_o$  augmente

“ La rétrodonation peut être mise en évidence sur les spectres IR  $Liaison affaiblie \Rightarrow \sigma \searrow$

“ Série spectrochimique :  $\Delta_o$  :  $\pi$ - donneurs <  $\sigma$ -donneurs <  $\pi$ -accepteurs

## 1 Organométalliques

Définition

DEF: Un organométallique est une molécule comportant au moins une liaison C – Métal

- $\chi_{\text{Métal}} < \chi_C$  : le carbone porteur du métal est **nucléophile**

On peut réguler la **réactivité** du carbone en fonction du métal choisi :  $\text{C-Li} > \text{C-Mg} > \text{C-Cu}$

Définition



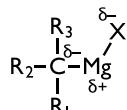
- R : est une chaîne carbonée *sans X si mixte*
- X : est un halogène

### Nomenclature

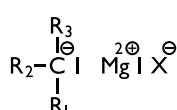


- R peut être alkyle, alcényle, alcynyle ou aryle

Propriétés



Ecriture covalente



Ecriture ionique

Le carbone se comporte alors comme un **carbanion**

- Nucléophile
- Basique au sens de Brønsted  $pK_a \approx 50$
- Réducteur

Réaction

### Synthèse

Équation	Groupe alkyle, alcényle, aryle $\text{R-X} + \text{Mg} \longrightarrow \text{R-Mg-X}$ Groupes alcynyles $\text{R}-\text{C}\equiv\text{CH} + \text{R'-Mg-X} \longrightarrow \text{R'-H} + \text{R}-\text{C}\equiv\text{C-MgX}$
Notes	<ul style="list-style-type: none"> <li>– <math>\Delta</math> Synthèse différente pour les alcynyles</li> <li>– Pour démarrer la réaction, on ajoute un peu de RX et on chauffe avec les mains ou on ajoute un cristal de diiode</li> </ul>

Propriétés

### Conditions de synthèse

- **Solvant** de réagissant pas avec les organomagnésiens : Polaire aprotique  
 $\Rightarrow$  On choisit des éther-oxydes *liaison de complexation, stabilité, solubilité* ou du THF anhydre
- On évite la **présence** de molécules pouvant **réagir** *Acides, électrophiles*  
 En particulier  $\text{H}_2\text{O}$  et  $\text{O}_2, \text{CO}_2$  éloignés par balayage

- On évite le **couplage de Würz**  
 $R-X + R-Mg-X \longrightarrow R-R + Mg-X_2$   
 En faisant en sorte que RMgX ne soit jamais en présence d'un excès de R-X  
 Ainsi l'ajout de R-X se fait lentement dans le magnésium

### 3 Addition sur les électrophiles

**⚠️ Les réactions acido-basiques sont prioritaires sur les additions nucléophiles**

## Addition sur la fonction carbonyle

<p>Équation</p>	
<p>Notes</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Formation d'un alcoolate de magnésium</li> <li>– Réactivité           <ul style="list-style-type: none"> <li>— Électronégativité</li> <li>— Liaison <math>\pi</math> réactive</li> </ul> </li> <li>– Addition nucléophile           <ul style="list-style-type: none"> <li>⇒ Attaque perpendiculaire au plan : 2 possibilitées</li> </ul> </li> <li>– Pour éviter une élimination lors de l'hydrolyse acideAlcool 3<sup>e</sup> on utilise NH<sub>4</sub><sup>+</sup></li> </ul>

## Addition sur la fonction ester

Équation	$\begin{array}{ccc} \text{O} & & \\    & & \\ \text{C}-\text{O}-\text{R}' & \xrightarrow[2) \text{H}_2\text{O}]{1) \text{RMgX}} & \begin{array}{c} \text{OH} \\   \\ \text{C}-\text{R} \\   \\ \text{R} \end{array} \end{array}$
Mécanisme	<p>Detailed description: The mechanism shows the reaction of a ketone ester (R-C(=O)-O-R') with RMgX. Step 1: Curved arrows show the C=O double bond attacking the MgX2- cation and the O-R' bond breaking. Step 2: A curved arrow shows the C-O bond breaking to form a ketone intermediate (R-C(=O)-R'). Step 3: A curved arrow shows the ketone attacking the MgX2- cation. Step 4: A curved arrow shows the C-H bond breaking to form the final alcohol product (R-C(OH)-R').</p>
Notes	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Addition élimination</li> <li>– Il est possible de s'arrêter à la cétone à <math>-78^\circ</math> et sans excès d'organomagnésien</li> <li>– Pas de réaction des <math>\text{RZnX}</math> sur les esters → Puis élimination de l'alcool</li> </ul>

## Addition sur CO<sub>2</sub>

## Réaction

Équation	
Notes	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Formation de carboxylate intermédiaire</li> </ul>

Action sur les epoxydes

## Réaction

Équation	
Notes	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Réactivité           <ul style="list-style-type: none"> <li>— Tension du cycle</li> <li>— Électronégativité</li> </ul> </li> <li>– Apparenté à une SN2 ⇒ <i>Régioselectivité</i> : Carbone le moins substitué</li> </ul>

Action sur un chlorure d'acyle

## Réaction

Équation	
Notes	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Les chlorures d'acyles sont plus réactifs que les cétones</li> <li>– Arrêt à la cétone si introduits en quantités équimolaires</li> </ul>

Action sur l'orthoformiate d'éthyle

## Réaction

Équation	
Notes	<ul style="list-style-type: none"> <li>– L'hydrolyse acide permet de transformer l'acétal en aldéhyde <i>Rétroacétalisation</i></li> </ul>

Hydrocarbures insaturés

DEF: Les alcènes  $\approx$  *Oléphine* sont des hydrocarbures aliphatiques *non cycliques* contenant une liaison C=C

- Les dérivés éthyéniques sont des composés contenant des C=C et des hétéroatomes
- les polyènes possèdent plusieurs liaisons C=C
- Les alcènes sont généralement préparés par vapocraquage



Les composés aromatiques présentent une réactivité très différente des alcènes ou alcynes

Réactivité des alcènes

- Liaisons multiples de forte densité électronique  $\Rightarrow$  Nucléophile
- $\Rightarrow$  Subissent des additions électrophiles sur la liaison  $\pi$  *Moins forte*

“ Les alcynes terminaux ont des propriétés acides

**1 Addition d'eau****1.1 Hydratation**

<u>Hydratation</u>	
Équation	$\text{CH}_2 = \text{CH}_2 + [\text{H}_2\text{SO}_4] \rightarrow \text{CH}_3\text{OH}$
Mécanisme	
Notes	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Acide fort de base non nucléophile <i>Charge diluée</i> (APTS, <math>\text{H}_2\text{SO}_4</math>, <math>\text{H}_3\text{PO}_4</math>) Le catalyseur est utilisé en quantité stoechiométrique <i>Vitesse</i></li> <li>– Mécanisme d'addition électrophile</li> <li>– <math>\mathcal{R}_{\text{égio}}</math>: Markovnikov</li> <li>– C=C porte un groupe donneur <i>attracteur</i> la réactivité augmente <i>diminue</i></li> </ul>

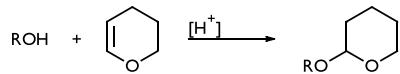
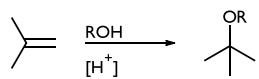
Régio: Règle de Markovnikov

Lors d'une addition électrophile d'un composé HZ sur un alcène, le produit majoritaire est celui qui est issu du carbocation le plus stable formé lors de la 1<sup>re</sup> étape

$C_3^+$  est moins stable que  $C_1^+$  d'où  $ET_{3e}$  est moins stable que  $ET_{1e}$  d'où  $E_{pa3e} < E_{pa1e}$  d'où  $k_{3e} > k_1$

Hydrohalogénéation

Équation	
Notes	<ul style="list-style-type: none"> <li>- HCl et HBr s'additionnent en milieu polaire</li> <li>- <math>\mathcal{R}_{\text{égio}}</math>: Markovnikov</li> </ul>



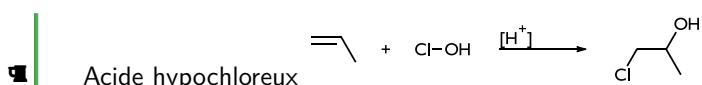
Déprotection par action du méthanol à chaud ou par hydrolyse acide



Parfois il y a migration d'un ion hydrure ou d'un anion alkyle  $\Rightarrow$  Transposition de Wagner-Meerwein

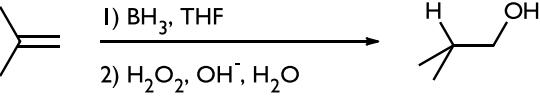
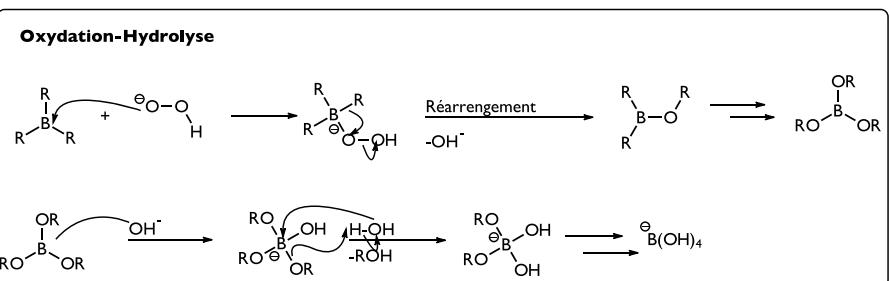
Halogénéation

Équation	
Mécanisme	
Notes	<ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>S_{\text{téreo}}</math>: Anti</li> <li>- <math>Cl_2</math>, <math>Br_2</math>, <math>ICl</math></li> </ul> <p>“ Ainsi avec ICl la réaction est régiosélective <math>Markovnikov</math>”</p>

**1.2 Hydroboration-oxydation**

## Hydroboration-oxydation

Réaction

Équation	
Mécanisme	<p><b>A) Hydroboration:</b> <math>3 \text{R}_1\text{R}_2\text{CH}_2 + \text{BH}_3 \rightarrow \left( \begin{array}{c} \text{H} \\   \\ \text{R}_1\text{R}_2\text{CH}_2\text{B} \\   \\ \text{H} \end{array} \right)_3</math></p> <p><b>B)</b> <math>\left( \begin{array}{c} \text{H} \\   \\ \text{R}_1\text{R}_2\text{CH}_2\text{B} \\   \\ \text{H} \end{array} \right)_3 + 3 \text{O}^{\ominus} + 3 \text{H}_2\text{O} \rightarrow 3 \text{R}_1\text{R}_2\text{CH}_2\text{OH} + \text{B(OH)}_4^{\ominus} + 2 \text{OH}^{\ominus}</math></p> <p><b>Oxydation-Hydrolyse</b></p> 
Notes	<ul style="list-style-type: none"> <li>– <math>\mathcal{R}_{\text{égio}}</math>: <b>Anti-Markovnikov</b> : L'atome de bore <i>gros</i> se lie au C le moins encombré</li> <li>– <math>\mathcal{S}_{\text{téreo}}</math>: Addition concertée en <b>syn</b></li> <li>– <math>\mathcal{S}_{\text{téreo}}</math>: L'oxydation-hydrolyse se déroule avec <b>rétention de configuration</b></li> <li>– <math>pK_a(\text{H}_2\text{O}_2/\text{HOO}^{\ominus})=11.6</math></li> </ul>

Autres réactifs

- Encombrés  $\Rightarrow$  Régiosélectivité *Ex* : 9-BBN
- Chiraux  $\Rightarrow$  Stéreosélectivité

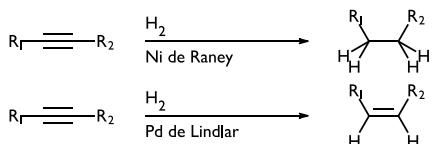
## 2 Réductions des alcènes

Réaction

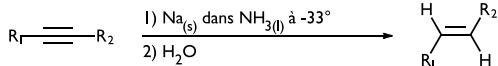
### Hydrogénéation des dérivés éthyléniques

Réaction	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">Équation</td><td style="text-align: center; padding: 5px;"> </td></tr> <tr> <td style="padding: 5px;">Mécanisme</td><td style="text-align: center; padding: 5px;"> <p style="font-size: small; margin-top: 5px;">         1 - Diffusion des réactifs          2 - Adsorption Dissociative pour H          3 - Réactions entre espèces adsorbées          4 - Déorption des produits          5 - Diffusion       </p> </td></tr> <tr> <td style="padding: 5px;">Notes</td><td style="padding: 5px;"> <ul style="list-style-type: none"> <li>– <math>S_{\text{téreo}}</math>: Syn</li> <li>– Plus la double liaison est encombrée moins l'alcène est réactif</li> <li>– Réaction très exothermique <math>\Rightarrow</math> Favorisée à température basse</li> <li>– Blocage cinétique à <math>T</math> ordinaire mais mauvais rendement à <math>T</math> élevée <math>\Rightarrow</math> Catalyse</li> <li>– Catalyse hétérogène :           <ul style="list-style-type: none"> <li>— Nickel de Raney <i>Alliage NiAl traité par la soude pour éliminer Al</i></li> <li>— Nickel de Sabatier <i>Chaufrage de NiCO<sub>3</sub></i> : Monohydrogénéation</li> <li>— Métaux de transition Pt, Pd</li> </ul> </li> </ul> </td></tr> </table>	Équation		Mécanisme	<p style="font-size: small; margin-top: 5px;">         1 - Diffusion des réactifs          2 - Adsorption Dissociative pour H          3 - Réactions entre espèces adsorbées          4 - Déorption des produits          5 - Diffusion       </p>	Notes	<ul style="list-style-type: none"> <li>– <math>S_{\text{téreo}}</math>: Syn</li> <li>– Plus la double liaison est encombrée moins l'alcène est réactif</li> <li>– Réaction très exothermique <math>\Rightarrow</math> Favorisée à température basse</li> <li>– Blocage cinétique à <math>T</math> ordinaire mais mauvais rendement à <math>T</math> élevée <math>\Rightarrow</math> Catalyse</li> <li>– Catalyse hétérogène :           <ul style="list-style-type: none"> <li>— Nickel de Raney <i>Alliage NiAl traité par la soude pour éliminer Al</i></li> <li>— Nickel de Sabatier <i>Chaufrage de NiCO<sub>3</sub></i> : Monohydrogénéation</li> <li>— Métaux de transition Pt, Pd</li> </ul> </li> </ul>
Équation							
Mécanisme	<p style="font-size: small; margin-top: 5px;">         1 - Diffusion des réactifs          2 - Adsorption Dissociative pour H          3 - Réactions entre espèces adsorbées          4 - Déorption des produits          5 - Diffusion       </p>						
Notes	<ul style="list-style-type: none"> <li>– <math>S_{\text{téreo}}</math>: Syn</li> <li>– Plus la double liaison est encombrée moins l'alcène est réactif</li> <li>– Réaction très exothermique <math>\Rightarrow</math> Favorisée à température basse</li> <li>– Blocage cinétique à <math>T</math> ordinaire mais mauvais rendement à <math>T</math> élevée <math>\Rightarrow</math> Catalyse</li> <li>– Catalyse hétérogène :           <ul style="list-style-type: none"> <li>— Nickel de Raney <i>Alliage NiAl traité par la soude pour éliminer Al</i></li> <li>— Nickel de Sabatier <i>Chaufrage de NiCO<sub>3</sub></i> : Monohydrogénéation</li> <li>— Métaux de transition Pt, Pd</li> </ul> </li> </ul>						

La réaction se produit à la surface des sites actifs, le catalyseur doit être finement divisé et poreux pour avoir une surface massique élevée



Pd de Lindlar est un catalyseur de Pd désactivé, empoisonné par de l'acétate de plomb



### Hydrogénéation des autres liaisons multiples

Réaction

Équation	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;"> <math>\text{R}_1-\text{C}(=\text{O})-\text{R}_2 \xrightarrow[\text{Ni de Raney - } 100^\circ \text{ 5-30bar}]{\text{H}_2} \text{R}_1-\text{CH(OH)}-\text{R}_2</math> </td></tr> </table>	$\text{R}_1-\text{C}(=\text{O})-\text{R}_2 \xrightarrow[\text{Ni de Raney - } 100^\circ \text{ 5-30bar}]{\text{H}_2} \text{R}_1-\text{CH(OH)}-\text{R}_2$
$\text{R}_1-\text{C}(=\text{O})-\text{R}_2 \xrightarrow[\text{Ni de Raney - } 100^\circ \text{ 5-30bar}]{\text{H}_2} \text{R}_1-\text{CH(OH)}-\text{R}_2$		
Notes	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Le choix de la température et de la pression permettent de rendre la réaction chimiosélective <math>C=C, C=O</math></li> </ul>	

Les dérivés benzéniques peuvent être réduits à 100bar avec Ni de Raney

### Catalyse homogène

Propriétés

- Catalyse réalisée à  $25^\circ\text{C}$  sous 1bar en solvant organique
- On utilise le complexe de Wilkinson :  $\text{RhCl}(\text{PPh}_3)_3$
- Réaction chimiosélective : Pas de réaction sur  $\text{C=O}$ ,  $\text{C=N}$  et les cycles
- Sélectivité :  $\text{C=C}$  la moins encombrée *polyènes*, alcynes en alcènes
- $S_{\text{téreo}}$ : Addition en syn

## Stabilité des alcènes

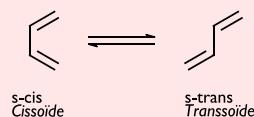
 La mesure d'enthalpies de formation de la réaction d'hydrogénéation permet de classer la stabilité des alcènes

- Un alcène est d'autant plus stable que la liaison C=C est plus substituée
- On obtient préférentiellement l'isomère dont les groupes volumineux sont éloignés
- Un composé éthylénique est d'autant plus stable qu'il est plus conjugué

## Réaction de Diels-Alder

Équation	Diène                  Diénophile                  Cycloadduit
Mécanisme	
Notes	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Peut être effectué en solvant peu ou apolaire  <b>»</b> Solvant eau et réactants peu solubles <math>\Rightarrow</math> Accélération <i>Regroupement</i></li> <li>– <math>\Delta</math> Le diène doit pouvoir être en conformation s-cis            La barrière de passage de l'une à l'autre est faible <math>30 \text{ kJ.mol}^{-1}</math>            Une configuration s-trans<sub>s-cis</sub> ne réagit pas <i>réagit beaucoup</i></li> <li>– Mécanisme concerté en une étape <math>\Rightarrow v = k[\text{dienophile}][\text{diene}]</math> <i>Acte élémentaire</i></li> <li>– <math>S_{\text{téréo}}</math>: Addition supra-supra<sub>[4s+2s]</sub> <math>\Rightarrow</math> <b>Syn-addition</b></li> </ul>

s-cis<sub>s</sub> comme simple est une conformation  $\neq$  configuration cis



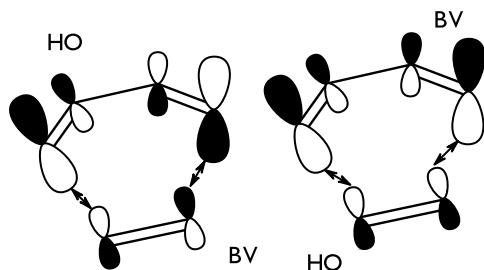
Ne pas oublier que  $s-trans \rightarrow s-cis$  et réagit aussi par Diels-Alder

## Caractère renversable

- Réaction exothermique diminuant le désordre  $\Rightarrow \Delta_r \mathcal{H}^\circ < 0$  et  $\Delta_r \mathcal{S}^\circ < 0 \Rightarrow \exists T_i, \Delta_r \mathcal{G}^\circ = 0$   
 $\Rightarrow$  La **rétro Diels-Alder** est favorisée à **haute** température *Van't Hoff*

## Interprétation orbitalaire

- Souvent sous contrôle cinétique  $\Rightarrow$  Contrôle frontalier
- L'interaction principale dépend des réactifs
- Recouvrement maximal  $\Rightarrow$  En phase = supra-supra



“ Ici en réalité la réaction du buta-1,3-diène sur lui-même est la plus favorable HO plus haute et BV plus basse ”

Propriétés

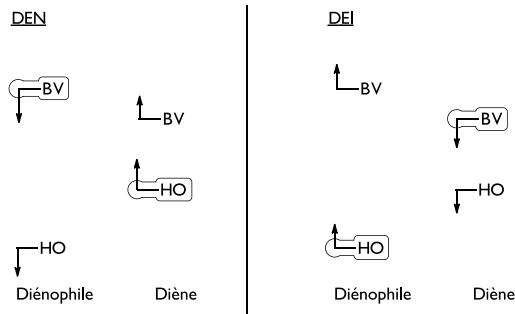
## Règle d'Alder

La constante de vitesse d'une réaction de Diels-Alder croît si

	Demande électronique <b>normale</b>	Demande électronique <b>indirecte</b> <sub>rare</sub>
L'un est <b>enrichi</b> en électrons	Diène	Diénophile
L'autre est <b>appauvri</b> en électrons	Diénophile	Diène

Théorème

Enrichir en électrons c'est rehausser les niveaux d'énergie



## Catalyse

- Avec les diénophiles contenant une conjugaison  $\text{C}=\text{O} \leftrightarrow \text{C}=\text{C}$   
Il est possible de catalyser avec des acides de Lewis tel  $\text{AlCl}_3$  ou  $\text{TiCl}_4$
- Ils se fixent sur l'oxygène et permettent une activation électrophile du diénophile

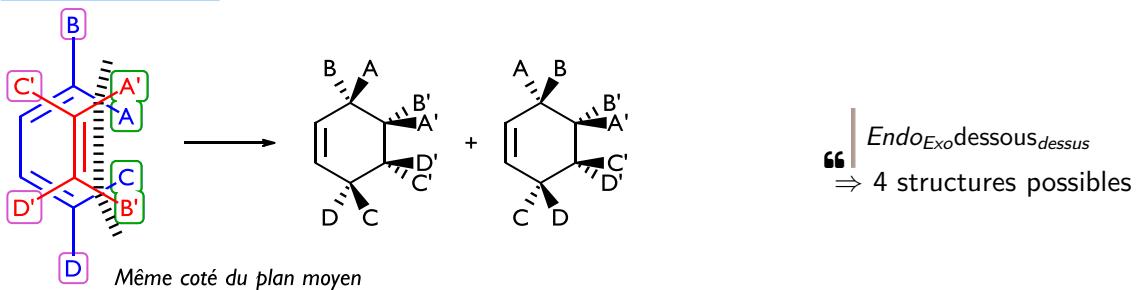
Propriétés

## Régiosélectivité

- Mécanisme concerté mais réaction non synchronie *Une liaison se forme avant l'autre*
- La liaison qui se forme le plus facilement et impose sa régiosélectivité relie les atomes ayant les coefficients dans les OF de l'interaction principale les plus gros
- Détermination du couple d'OF *Plus proches en énergie*
- Détermination de la première liaison formée *Plus gros coefficients en valeur absolue*

Propriétés

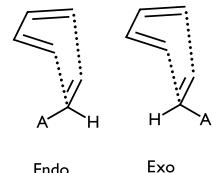
## Stéréoselectivité



- Pour déterminer la position du diénophile on utilise la règle **endo**

Sous contrôle cinétique les réactions de Diels-Alder conduisent au produit *endo*

Sous contrôle thermodynamique elles conduisent au produit *exo*



Si A possède des  $e^- \pi$  conjugués avec C=C

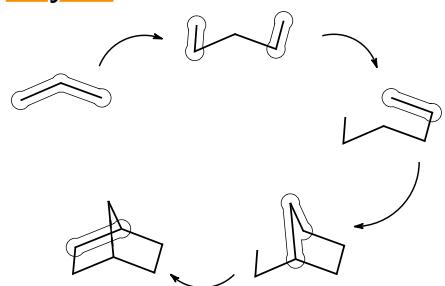
L'interaction principale est  $\text{HO}_{\text{Diène conjugué enrichi en } e^-} \leftrightarrow \text{BV}_{\text{Diénophile appauvri en } e^-}$

⚠️ Lors de l'approche *endo*, il existe une interaction secondaire en phase stabilisante  $\Rightarrow$  Énergie d'activation plus faible

Si le diène ou le diénophile présente un C\*, l'un des deux diastéréoisomères *endo* est obtenu préférentiellement car les deux faces ne sont plus équivalentes  $\xrightarrow{\text{Approche favorisée}}$

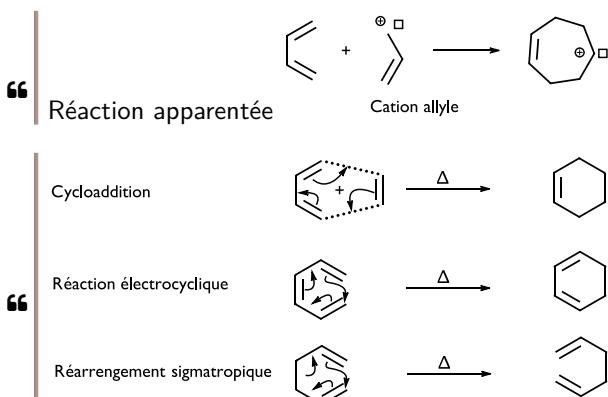
En solvant  $\text{H}_2\text{O}$ , le rapport  $\%_{\text{endo}}/\%_{\text{exo}}$  est augmenté à cause de la proximité des réactants  $\xrightarrow{\text{Plus d'interactions secondaires}}$

## Bicycles



### Nomenclature

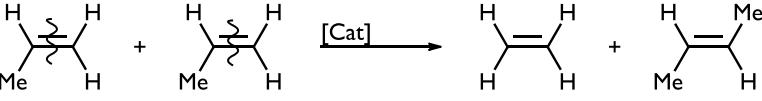
- "*bicyclo[ponts]nC-ane*"
- La numérotation s'effectue d'une tête de pont à l'autre en passant toujours par le pont le plus long



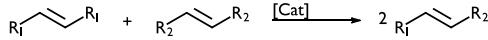
## MÉTATHÈSE DES ALCÈNES

Métathèse

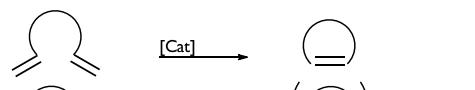
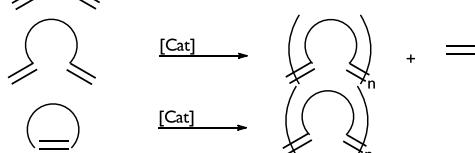
Réaction

Équation	
Notes	<ul style="list-style-type: none"> <li>Réaction renversable réalisée sous contrôle thermodynamique</li> <li>Réaction déplacée si l'un des produits est gazeux</li> <li>On utilise des complexes du ruthénium avec un ligand carbène <math>[\text{Ru}]=\text{CHR}</math></li> </ul>

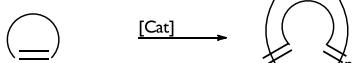
Métathèse croisée



Fermeture de cycle

Polymérisation  
Diènes acycliques

Ouverture de cycle



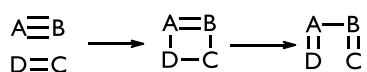
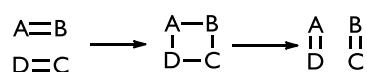
La métathèse est un outil puissant pour la synthèse de macrocycles

Propriétés

Mécanisme

Succession de

- Cycloadditions  $[2+2]$  Coordination  $\rightarrow$  Couplage oxydant
- Cycloréversion Découplage réducteur  $\rightarrow$  dissociation

Le catalyseur  $[\text{Rh}]=\text{CH}_2$  est obtenu à partir du précurseur en faisant une boucleEn l'absence de métal, les cycloadditions d'alcènes sont interdites par symétrie  
L'interaction alcène/carbène est permiseMétathèse entre un alcène et un alcène possible  
 $\Rightarrow$  Formation d'un diène conjugué Diels-Alder

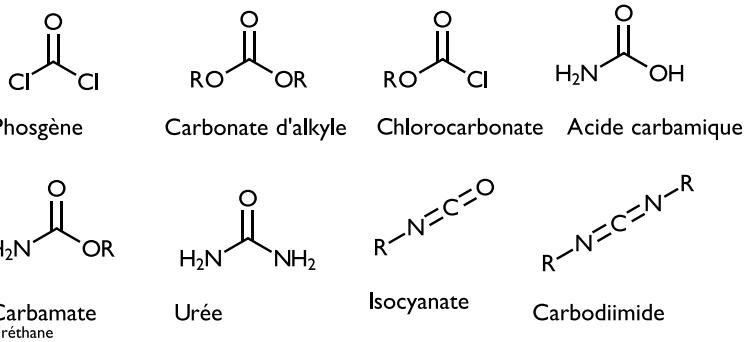
“ La métathèse entre 2 alcènes est possible avec un complexe métal-carbyne

### Décompte électronique carbène

- Singulet : Neutre  $\Rightarrow$  Donne  $2e^-$
- Triplet : Chargé  $2^- \Rightarrow$  Donne  $4 e^-$



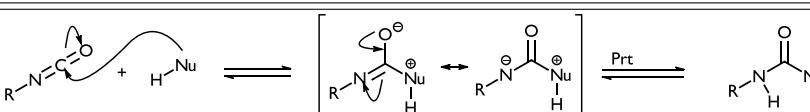
Propriétés



## 1 Isocyanates

Préparation par action de  $\text{N}_3^-$  sur un chlorure d'acyle avec départ de  $\text{N}_2(g)$  et transposition

### Action des nucléophiles

Équation	$\begin{array}{c} \text{R}-\text{N}=\text{C}=\text{O} \\   \\ \text{H}-\text{Nu} \end{array} \rightleftharpoons \begin{array}{c} \text{O} \\    \\ \text{R}-\text{N}-\text{C}-\text{Nu} \\   \\ \text{H} \end{array}$
Mécanisme	
Notes	<ul style="list-style-type: none"> <li>– <math>E_{BV}(\text{C}=\text{O}) &lt; E_{BV}(\text{C}=\text{N})</math> donc C=O plus électrophile que C=N</li> <li>– Ex : <math>\text{OR}^-, \text{OH}^-, \text{NHR}^-</math> ou <math>\text{R}-\text{M}</math> puis hydrolyse</li> </ul>

Diisocyanate + Diol  $\rightarrow$  Polyuréthane

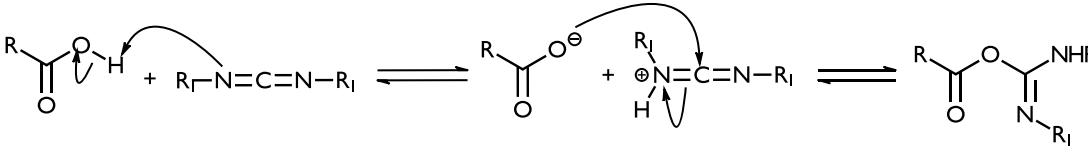
## 2 Urée

Action sur les dérivés d'acides

## 3 Carbodiimides

## Activation d'un acide carboxylique

Réaction

Équation	
Notes	– Réactivité analogue à celle d'un anhydride

Action de H–Nu

## 1 Vitesse instantanée d'une réaction

### 1.1 Formulation des équations de vitesse

$$r = \frac{1}{V} \frac{d\xi}{dt}$$

- $r$ , **rate** la vitesse de la réaction en  $\text{mol.L}^{-1}\text{s}^{-1}$
- $V$ , le volume du réacteur ou de la phase où se déroule la réaction

On en déduit :

$$r = -\frac{1}{\vartheta_i} \frac{d[A_i]}{dt} = \frac{1}{\vartheta'_i} \frac{d[A'_i]}{dt}$$

- $\vartheta_i$ , les coefficients stœchiométriques
- $[A_i]$ , les concentrations des réactifs

*On néglige ici les intermédiaires et la variation de volume*

#### Vitesses d'apparition et de disparition

$$v = \epsilon \frac{d[A_i]}{dt}$$

- $\epsilon = -1$  : Vitesse de **disparition**
- $\epsilon = 1$  : Vitesse d'**apparition**
- On notera  $v_d$  ou  $v_f$

$$r = \frac{1}{\vartheta'_i} v_f(B'_i) = \frac{1}{\vartheta_i} v_d(B_i)$$

## 2 Facteurs d'influence

### Loi de vitesse expérimentale

#### LOI DE VITESSE EXPÉRIMENTALE

$$v = k \prod_{i=1}^n (A_i)^{\alpha_i}$$

- $\alpha_i$  est l'**ordre partiel**
- $\sum \alpha_i = \alpha$  est l'**ordre global**
- $k$  est la constante de vitesse

L'ordre et la loi de vitesse d'une réaction peuvent changer au cours du temps

On distingue l'ordre **initial** de l'ordre **courant**

Si une telle réaction existe on dit que la réaction admet un ordre

Ordre	0	1	2
Unité	$\text{molL}^{-1}\text{s}^{-1}$	$\text{s}^{-1}$	$\text{mol}^{-1}\text{Ls}^{-1}$

DEF: On appelle **molécularité** le nombre de molécules devant collisionner pour initier la réaction

- Une réaction obéit à la loi de Van't Hoff si pour les réactants  $\alpha_i = \vartheta_i$
- Dans un acte élémentaire *L'équation reflète le déroulement microscopique*  $\Rightarrow$  Ordre partiel =  $\vartheta$
- ⇒ Un acte élémentaire obéit à la loi de Van't Hoff

- $\alpha_i > 0$  : réactifs, catalyseurs, amorceurs
- $\alpha_i < 0$  : produits *en général*, inhibiteurs

### Influence de la température

Dans la majorité des cas  $k$  augmente avec la température

LOI EMPIRIQUE D'ARRHÉNIUS

$$k = A e^{-\frac{E_a}{RT}}$$

$\ln(k)$  est une fonction affine de  $\frac{1}{T}$

- $E_a$  , l'énergie d'activation de la réaction  $\text{J.mol}^{-1}$
- $A$  est le facteur de fréquence

### Catalyseur

DEF: Un catalyseur augmente la vitesse de la réaction et est entièrement régénéré

- Il peut être homogène *Mélangé aux réactifs*, hétérogène ou enzymatique

## 2.1 Résolution des équations de vitesse

Équation du type  $v = k[A]^\alpha$

On résout :  $-\frac{1}{\vartheta} \frac{d[A]}{dt} = k[A]^\alpha$  On suppose  $\vartheta = 1$

$$\begin{aligned} -\alpha = 0 &\Rightarrow [A] = [A]_0 - kt \\ -\alpha = 1 &\Rightarrow -\frac{d[A]}{dt} = k[A] \Rightarrow [A] = [A]_0 e^{-kt} \\ -\alpha \geq 2 &\Rightarrow \frac{d[A]}{dt} = -k[A]^\alpha \Leftrightarrow \frac{d[A]}{[A]^\alpha} = -k dt \Leftrightarrow \int_{[A]_0}^{[A]} \frac{1}{[A]^\alpha} d[A] = \int_0^t -k dt \\ &\Leftrightarrow \left[ \frac{1}{(1-\alpha)[A]^{\alpha-1}} \right]_{[A]_0}^{[A]} = -kt \Leftrightarrow \frac{1}{[A]^{\alpha-1}} - \frac{1}{[A]_0^{\alpha-1}} = (\alpha-1)kt \end{aligned}$$

⚠ Ne pas oublier les conditions initiales dans la résolution

## 3 Étude de la loi de vitesse d'une réaction

### Temps de demi-réaction

DEF: Le temps de demi-réaction ( $t_{\frac{1}{2}}$ ) est le temps au bout duquel  $[A] = \frac{[A]_0}{2}$

- Pour un système d'ordre 1, la résolution montre que  $t_{\frac{1}{2}}$  est indépendant de  $[A]_0$
- Pour tout autre ordre la résolution montre que  $t_{\frac{1}{2}}$  est proportionnel à  $\frac{1}{[A]_0^{n-1}}$

### Détermination de la loi de vitesse

$$r = -\frac{1}{\vartheta} \frac{d[A]}{dt} = k[A]^\alpha \rightarrow [A] = f(t)$$

#### – Méthode intégrale

Confrontation aux mesures :

- On formule des hypothèses sur l'ordre de la réaction et on vérifie la corrélation de la mesure avec l'expérience (*en se ramenant toujours à une étude de droite*)

#### – Méthode différentielle

On trace  $\ln(r) = \ln(k) + \alpha \ln([A])$  on obtient une droite de pente  $n$  et d'ordonnée à l'origine  $\ln(k)$  si la vitesse admet un ordre  $\Rightarrow$  Utiliser Ordinateur

#### – Méthode du temps de demi-réaction

On mesure le temps de demi-réaction en changeant la concentration initiale

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\psi}{[A]_0^{\alpha-1}} \Rightarrow \ln(t_{\frac{1}{2}}) = \ln(\psi) + (1-\alpha)[A]_0^{\alpha-1}$$

$\ln(t_{\frac{1}{2}}) = f(\ln([A]_0))$  est une droite de pente  $1-\alpha$

#### – Méthode des vitesses initiales

On applique la méthode différentielle à la mesure de  $v_0$  pour différents  $[A]_0$  (par tangente ou mesure de concentration à petit intervalle de temps)

On peut alors déduire les ordres partiels puis  $k$

#### – Méthode de la dégénérescence de l'ordre OSTWALD

Si  $\frac{[A]_0}{\vartheta_A} \gg \frac{[B]_0}{\vartheta_B}$  on peut supposer la variation de  $[A]$  comme négligeable et poser  $k'_{app} = k[A]_0$

Méthode

## 4 Cinétique formelle

### Étude de A+B → Produits

$$r = -\frac{d[A]}{dt} = k[A][B] \text{ ne peut être intégré facilement}$$

- En introduisant l'avancement, l'équation devient  $\frac{d\xi}{dt} = k(a-\xi)(b-\xi)$
- On intègre alors cette équation à variables  $t$  et  $\xi$  séparables

Démo

### Réaction réversible $A \rightleftharpoons B$

$$v_d(A) = -\frac{d[A]}{dt} = r_1 - r_{-1} = k_1[A] - k_{-1}[B]$$

– On introduit l'avancement et on intègre

– Pour  $t \rightarrow +\infty$  *Équilibre*  $r_1 = r_{-1}$

$$\frac{k_1}{k_{-1}} = \frac{[B]_{eq}}{[A]_{eq}} = K_C$$

–  $K_C$  est la constante d'équilibre relative aux concentrations

Démo

### Déterminer une loi de vitesse à partir du mécanisme

– **AECD** : L'étape cinétiquement déterminante impose sa vitesse

– **AEQS** :  $\frac{d[I]}{dt} \approx 0$  pour les intermédiaires réactionnels

⚠ Étapes où

- $I$  se consomme facilement  $k_{grand}$
- $I$  se forme plus difficilement  $k_{négligeable}$

Méthode

## 5 Réacteurs

- Comme  $dn_i = \vartheta_i d\xi_i$  on a  $r = \frac{1}{V} \frac{d\xi}{dt} = -\frac{1}{\vartheta_i V} \frac{dn_i}{dt}$
- Dans le RPAC, la composition est uniforme à tout instant

$$\frac{dn_i}{dt} = F_{ei} + \vartheta_i V r - F_{si}$$

$$\begin{aligned} r &= -\frac{1}{\vartheta_i V} (F_{ei} - F_{si}) \\ &= -\frac{1}{\vartheta_i V} (Q_{ei} \times [i]_e - Q_{si} \times [i]_s) \end{aligned}$$

- On définit le temps de passage comme  $\tau = \frac{V}{Q_e}$

–  $F$  est le débit molaire

|| Contenu à  $t$  : Ce qui rentre - Ce qui sort + Ce qui est formé  
 ↳  $dn_i = F_{ei} dt + \vartheta_i V r dt - F_{si} dt$

– En régime permanent  $\frac{dn_i}{dt} = 0$

–  $Q$  est le débit volumique

– La relation se factorise par  $Q_i$  si  $Q_{ei} = Q_{si}$

## 1 Courbes courant-potentiel

Définition

DEF: Une réaction électrochimique est la réaction d'échange d'électrons entre le conducteur électronique et un couple rédox de l'électrode

Démo

Soit une solution électrolytique contenant  $O_x$  uniquement  
**Réduction**:  $\alpha O_x + \vartheta_e e^- \longrightarrow \beta R_{ed} \Rightarrow$  Electrode = Cathode

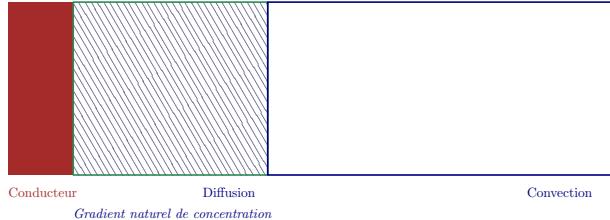
- $v_{R_{ed}} = \frac{1}{S} \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{\beta S} \frac{dn_{R_{ed}}}{dt} = -\frac{1}{\alpha S} \frac{dn_{O_x}}{dt} = -\frac{1}{\vartheta_e S} \frac{dn_{e^-}}{dt}$
- Or  $dq = \mathcal{F} dn_{e^-}$
- D'où  $v_{R_{ed}} = -\frac{1}{\vartheta_e \mathcal{F} S} \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{\vartheta_e \mathcal{F} S} i_c = -\frac{1}{\vartheta_e \mathcal{F}} j_c$   
 $i_c$  et  $j_c$  sont des grandeurs négatives

Vitesse d'oxydation ou de réduction  $\propto j_i$

Soit une solution électrolytique contenant  $R_{ed}$  uniquement  
**Oxydation**:  $\beta R_{ed} \longrightarrow \alpha O_x + \vartheta_e e^- \Rightarrow$  Électrode = Anode

- $v_{O_x} = \frac{1}{S} \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{\beta S} \frac{dn_{O_x}}{dt} = -\frac{1}{\alpha S} \frac{dn_{R_{ed}}}{dt} = \frac{1}{\vartheta_e S} \frac{dn_{e^-}}{dt}$
- Or  $dq = \mathcal{F} dn_{e^-}$
- D'où  $v_{O_x} = \frac{1}{\vartheta_e \mathcal{F} S} \frac{dq}{dt} = \frac{1}{\vartheta_e \mathcal{F} S} i_a = \frac{1}{\vartheta_e \mathcal{F}} j_a$   
 $i_a$  et  $j_a$  sont des grandeurs positives

Propriétés



### Mécanisme des réactions chimiques

1. Transport vers le conducteur
  - Migration *Champ électrique*
  - Convection *Gradient de pression*
  - Diffusion *Gradient de concentration*
2. Adsorption
3. Transfert électronique
4. Désorption
5. Diffusion vers le cœur

On ajoute souvent un électrolyte support  $\Rightarrow$  Migration négligeable *Convection nulle au voisinage de la surface : Diffusion pure*

- “
- Si la vitesse d'échange est très grande devant la vitesse de diffusion  $\Rightarrow$  Régime pur de diffusion

### Polarisation d'une électrode

- À l'équilibre, la formule de Nernst donne le potentiel thermodynamique  $E_{th}$
- En présence d'un courant, l'électrode se polarise

$$\eta(i) = E(i) - E_{th}$$

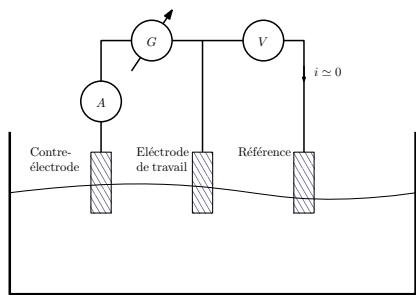
-  $\eta(i)$  est la surtension

Transformation	Electrode	$i_j$	$\eta$	
Oxydation	Anode	Positif	Positif	Surtension anodique
Réduction	Cathode	Négatif	Négative	Surtension cathodique

- Le tracé des courbes  $i = f(E)$ ,  $j = f(E)$  *Intensité-Densité de courant potentiel* ou  $E = f(i)$  *Polarisation* permet d'étudier l'influence du potentiel sur la vitesse de la réaction

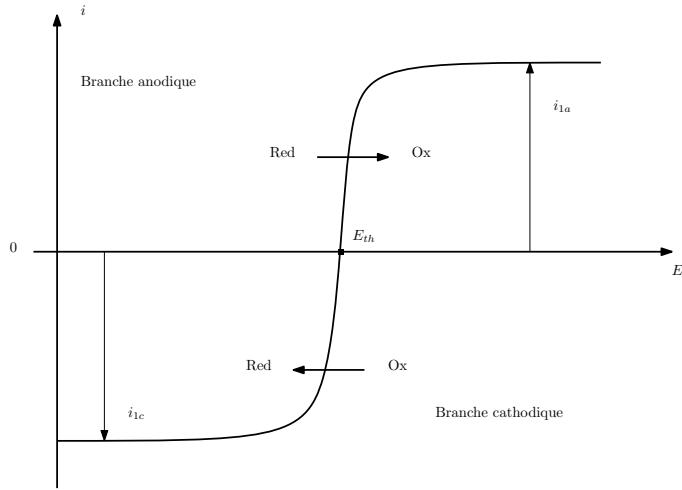
💡 Les courbes "densité potentiel" permettent d'être indépendant de la surface

Propriétés

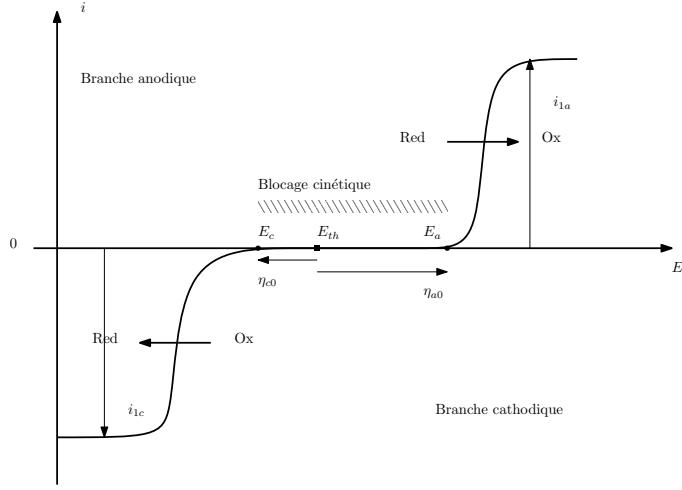
**Potentiostat** Montage à trois électrodes

- Le voltmètre est de grande impédance

$\Delta$  |  $E$  est parfois donné par rapport à l'ECS

**Systèmes rapides**

DEF: Valeurs importantes de  $E$  dès que  $i \neq 0$   
La pente est grande  
– Structure de  $O_x$  et  $R_{ed}$  proches

**Systèmes lents**

DEF:  $\eta_{a0}$  surtension à vide anodique  
DEF:  $E_a$  potentiel de décharge anodique  
– Structure de  $O_x$  et  $R_{ed}$  éloignées Ruptures

$\Delta$  | Si aucune valeur de  $i$  est donnée  $\eta$  sont données à vide



Intersection des asymptotes sur un diagramme  $\eta = f(\log(i))$  donne  $i^0$  Courant d'échange

**Limitation par la diffusion**

- Loi de Fick :  $J_{R_{ed}}(x) = -D_{R_{ed}} \frac{dC_{R_{ed}}(x)}{dx} = -D_{R_{ed}} \frac{[R_{ed}]_S}{\delta_{R_{ed}}} = \frac{i}{\vartheta_e \mathcal{F} S}$
- ⇒ A une distance  $> \delta_{R_{ed}}$ , le courant est constant = Courant limite de diffusion
- On note  $i_{1a} = k_{R_{ed}} [R_{ed}]_S$
- De même  $i_{1c} = -k_{O_x} [O_x]_S$

- ⚠ Pas de limitation du courant par diffusion si**
- L'espèce consommée est le métal
  - L'espèce consommée est le solvant
  - L'espèce consommée est un soluté en concentration très élevée *Palier jamais atteint*

**💡 Si seule l'une des deux espèces est présente, le potentiel de Nernst n'est pas défini**  
On considérera qu'il est proche de  $E^\circ$

**💡 Si le couple met en jeu des échanges de protons  $\Rightarrow$  Potentiel standard apparent**

### Mur du solvant

- La diffusion de l'eau vers le solvant n'est jamais l'ECD, le courant peut atteindre des valeurs très importantes
  - “ Les courbes de l'eau définissent le domaine d'inertie électrochimique où le solvant peut être utilisé sans être oxydé ou réduit
    - $O_2/H_2O$  est toujours un couple lent
    - $H_2O/H_2$  peut être un couple rapide avec du platine *En fonction du métal et du pH*
- On ne peut observer l'oxydation *réduction* d'une espèce dont la courbe intensité potentiel se situerait à des potentiels plus élevés *faibles* que ceux de la partie anodique *cathodique* de l'eau  
 $\Rightarrow$  Ces courbes sont derrière le mur du solvant
  - ✚  $SO_4^{2-}$  est souvent utilisé comme contre-ion car il est électro-inactif dans l'eau

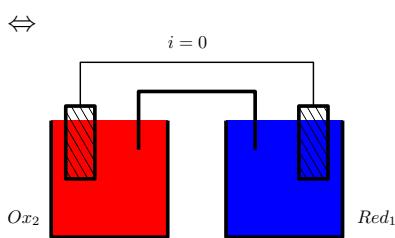
### Diagramme réel

- **Additivité** : L'intensité globale est la somme des intensités des différents couples
  - ⚠ La quantité d'électrons libérés est la somme des quantités libérées par chaque réaction
- **Cinétiquement** le réducteur *l'oxydant* le plus fort est celui qui possède le potentiel de décharge anodique *cathodique* le plus bas *élévé*
- **Thermodynamiquement** le réducteur *l'oxydant* le plus fort est celui qui possède le potentiel de Nernst anodique *cathodique* le plus bas *élévé*

## 2 Potentiel mixte

### Potentiel mixte

- Si la thermodynamique conclut que la réaction n'est pas spontanée elle ne se fera pas  
 Si elle est possible l'étude des courbes courant potentiel donne des informations sur la cinétique
- On laisse le conducteur métallique à l'abandon dans une solution



— Le point de fonctionnement vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} E_m = E_c = E_a \\ i_c = -i_a \end{array} \right.$$

—  $v = \frac{i}{\vartheta_e \mathcal{F} S} \Rightarrow$

1.  $i_a$  grand  $\Rightarrow$  Grande vitesse

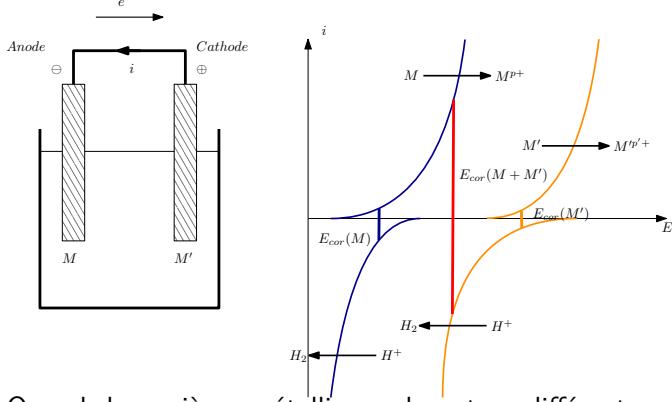
2.  $i_a$  petit  $\Rightarrow$  Petite vitesse

3.  $i_a = 0 \Rightarrow$  Blocage cinétique

DEF: Un métal est d'autant plus **noble** que son potentiel de corrosion dans un milieu est élevé

💡 En l'absence d'indications  $E_{cor} \approx E^\circ(M^{x+}/M_{(s)})$

### Protection cathodique par anode sacrificielle



- $M'$  est plus noble que  $M$
- En présence de  $M$ , la réaction se produisant est la corrosion de  $M'$
- En  $M'$  il n'y a que la réduction de  $H^+$  ⇒  $M'$  est protégé

- Même couple de part et d'autre d'une vague ⇒  $E_{th}$
- Couple différent de part et d'autre d'une vague ⇒  $E_m$

### Tracé approximatif des diagrammes intensité potentiel

- On classe les espèces présentes sur un axe en  $E^\circ$
- On trace les courbes individuelles d'oxydation et de réduction
- On somme ces courbes ⚠ En faisant attention aux murs

## 3 Corrosion

- Corrosion uniforme : Un métal seul est en contact avec une solution corrosive
- Corrosion galvanique : Deux métaux sont en contact avec le milieu ⇒ Le moins noble est corrodé

### Vitesse d'usure dans le cas de la corrosion uniforme

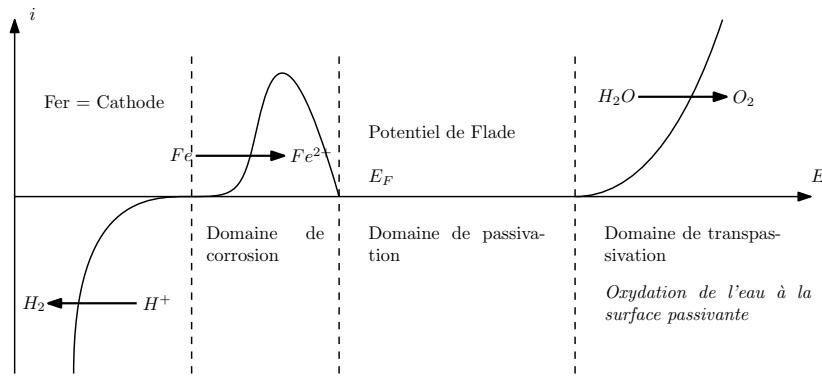
$$\begin{aligned} - dq &= i_{cor} dt = dn_e \mathcal{F} \\ - dn &= \frac{dn_e}{\vartheta_e} = \frac{i_{cor} dt}{\vartheta_e \mathcal{F}} \\ - dV &= \frac{dn M(M)}{\rho(M)} = S de \\ - \Rightarrow v_{cor} &= \frac{de}{dt} = \frac{i_{cor} M(M)}{\vartheta_e \mathcal{F} S \rho(M)} \end{aligned}$$

### Aération différentielle

Lorsqu'un métal plonge dans une solution présentant des différences de concentration d'une espèce oxydante  $Ex : O_2$ , il y a corrosion du métal dans la zone en contact avec la solution la moins riche en oxydant

⚠  $E_{O_2/H_2O}(T) = E^\circ_{O_2/H_2O}(T) + \frac{RT}{\mathcal{F}} \ln \left( \frac{[O_2]}{C^\circ} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{RT \ln 10}{\mathcal{F}} pH \Rightarrow \oplus$  du côté où  $[O_2]$  est la plus grande

## Phénomène de passivation



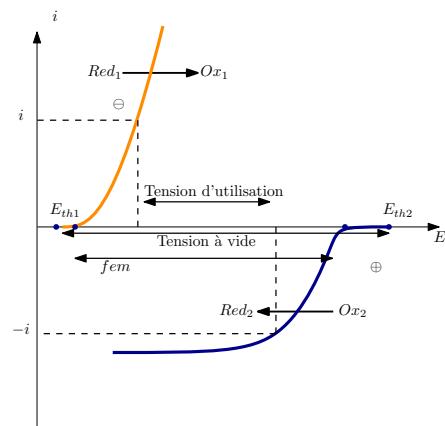
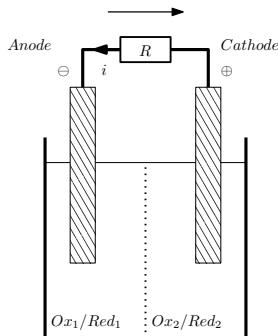
## CONVERTISSEURS ÉLECTROCHIMIQUES

Oxydant	$A^{DO+}$	Oxydation	$A^{DO\uparrow}$
Réducteur	$A^{DO-}$	Réduction	$A^{DO\downarrow}$

	Anode	Cathode
Pile	$\ominus$	$\oplus$
Électrolyseur	$\oplus$	$\ominus$

## 1 Pile

DEF: La réaction de fonctionnement est la réaction spontanée entre les deux couples en présence



- $U = \Delta E_{utilisation} - ri$
- $\Delta$  Courbes instantanées  
⇒ Se déplacent avec le temps
- $\Delta$   $E_{th}$  varie au cours du temps

Propriétés

Il faut raisonner sur les intensités et pas sur les densités de courant car a priori les surfaces de l'anode et de la cathode sont différentes

→ On fait l'hypothèse que les surfaces sont identiques

 $\Delta$ Bon générateur

- $fem$  élevée Oxydant et réducteur fort
- Limiter les surtensions seuil Systèmes rapides ou catalyseurs
- Concentrations élevées
- Résistance interne faible

Propriétés

## 2 Électrolyses

Définition

DEF: En imposant un courant opposé à celui de la pile, on force le système à évoluer dans le sens opposé au sens spontané

- $\begin{cases} O_{x1} + \vartheta_e e^- = R_{ed1} \\ O_{x2} + \vartheta_e e^- = R_{ed2} \end{cases} \Rightarrow O_{x1} + R_{ed2} = R_{ed1} + O_{x2}$
- $\Delta_r G_R = \vartheta_e \mathcal{F}(E_{th2} - E_{th1}) > 0 \Rightarrow dG_{T,P} = \vartheta_e \mathcal{F}(E_{th2} - E_{th1}) d\xi$
- Le travail mis en jeu est  $\delta W' = U idt = U \vartheta_e \mathcal{F} d\xi$
- Second principe  $\Rightarrow dG_{T,P} \leq \delta W'$  soit  $E_{th2} - E_{th1} > U$  Condition nécessaire de réaction

“  $E_{th} \approx E^\circ \approx E_{app}^\circ$  Mieux

$\Delta$  Pour les systèmes lents, les prévisions thermodynamiques peuvent être remises en question par la cinétique

L'électrolyse peut être effectuée de deux manières

1. Intensité imposée :  $i = i_a = -i_c$
  2. Différence de potentiel imposée :  $\begin{cases} i_a = -i_c \\ E_{a(i)} - E_{c(i)} = U \end{cases}$
- $U_{min} = (E_{tha} - E_{thc}) + (\eta_{a(0)} - \eta_{c(0)})$
  - $U = E_{a(i)} - E_{c(i)} + Ri = (E_{tha} - E_{thc}) + (\eta_{a(i)} - \eta_{c(i)}) + Ri$

### Facteurs diminuant la résistance interne

- Concentration élevée des ions *Plus conducteur*
- Température élevée *Conductivité élevée*
- Distance anode-cathode faible
- Choix particulier du matériau et des dimensions du diaphragme

### Rendement faradique

- En augmentant progressivement la tension aux bornes de l'électrolyseur à partir de la tension seuil, on lit qu'elle est l'oxydation la plus facile et la réduction la plus facile

$\Delta$  Il se peut que plusieurs réactions d'oxydation de réduction puissent se produire simultanément *Génant*

$$\rho_F = \frac{i_{utile}}{i_{total}}$$

-  $\rho_F$  est le rendement faradique

“ Les réactions parasites sont souvent l'un des couples de l'eau

- $n_{e^- utile} = \frac{q_{utile}}{\mathcal{F}} = \frac{i_{utile} t}{\mathcal{F}} = \rho_F \frac{it}{\mathcal{F}}$
- Or  $\frac{n_{produit}}{\vartheta_{produit}} = \frac{n_{e^- utile}}{\vartheta_{e^-}} \Rightarrow n_{produit} = \frac{\vartheta_{produit}}{\vartheta_{e^-}} \rho_F \frac{it}{\mathcal{F}}$

L'énergie électrique dépensée est alors  $W' = U it$

$$\rho_F = \frac{i_{utile}}{i} = \frac{n_{réel}}{n_{théorique}}$$

$\Delta$  Théoriquement  $\rho_F = 1$

## SYSTÈMES À PLUSIEURS ÉQUILIBRES

## 1 Théorie

$$d\mathcal{G} = -SdT + VdP - \sum_{reac} \mathcal{A}_i d\xi_i$$

$$T\delta S_c = \sum_{reac} \mathcal{A}_i d\xi_i$$

$$\sum_{reac} \mathcal{A}_i d\xi_i = 0, \forall d\xi_i$$

$\Delta$   $d\mathcal{G} = -SdT + VdP - \sum_j \mu_j dn_j$   
Or  $\sum_j \mu_j dn_j = \sum_{reac} \mu_j (\sum_i \vartheta_{j,i} d\xi_i)$   $= \sum_{reac} (\sum_i \vartheta_{j,i} \mu_j) d\xi_i = -\sum_{reac} \mathcal{A}_i d\xi_i$

–  $\Rightarrow \delta S_c > 0 \Leftrightarrow \sum_{reac} \mathcal{A}_i d\xi_i > 0$

Condition d'évolution spontanée

$\Delta$  On n'impose pas d'avoir  $\mathcal{A}_1 d\xi_1 > 0$  et  $\mathcal{A}_2 d\xi_2 > 0$

– A l'équilibre  $\mathcal{A}_i = 0, \forall i$   
 $\Rightarrow$  On peut écrire la RGW pour chaque équilibre

– A l'équilibre, le potentiel de tout constituant  $i$  à la même valeur dans toutes les phases en équilibre

$\Delta$   $i_{(k)} \rightleftharpoons i_{(k')} : \mathcal{A}_i = \mu_{i_{(k)}} - \mu_{i_{(k')}} = 0 \Leftrightarrow \mu_{i_{(k)}} = \mu_{i_{(k')}}$

## 2 Équilibres chimiques

Raisonnement à plusieurs équilibres

1. Les équilibres sont ils simultanés

Équilibre	Homogène	Hétérogène	$\left\{ \begin{array}{l} Q_{r1} = Q_{r2} \\ K_1^\circ(T) \neq K_2^\circ(T) \end{array} \right.$	Autre cas
	Simultanés	Successifs	<i>Impossible d'avoir <math>Q_i = K_i</math> pour deux <math>i</math></i>	On ne sait pas

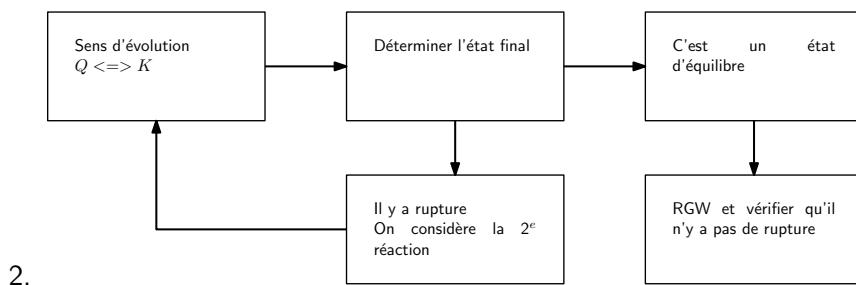
– Équilibres simultanés

$\Delta$  Un seul tableau d'avancement avec toutes les espèces

Écrire les RGW et déterminer les  $\xi_i$

– Équilibres successifs

1. Analyser l'état initial pour déterminer le premier équilibre



2.  
– Cas où on ne sait pas

1. Faire une hypothèse *Équilibres simultanés - Un seul équilibre - Aucun équilibre*
2. Vérifier que le résultat ne donne pas d'incohérences

## 1 Choix de la température et de la pression

### Influence de la température

On utilise la formule de Van't Hoff

		Favorisée thermodynamiquement	Favorisée cinétiquement
Athermique	$\Delta_r \mathcal{H}^\circ = 0$	$K = f(\mathcal{X})$ $\emptyset$	$T$ élevée
Endothermique	$\Delta_r \mathcal{H}^\circ > 0$	$K = f \uparrow (T)$ $T$ élevée	$T$ élevée
Exothermique	$\Delta_r \mathcal{H}^\circ < 0$	$K = f \downarrow (T)$ $T$ faible	$T$ élevée $\Rightarrow$ Compromis ou catalyseur

Propriétés

### Influence de la pression

$K^\circ = \left( \frac{P}{P^\circ} \right)^{-\sum \vartheta_{gaz}} f(n_{i0}, \xi_{eq})$	$\frac{\sum \vartheta_{gaz} \left( \frac{P}{P^\circ} \right)^{-\sum \vartheta_{gaz}} \xi_{eq}}{= 0} \quad$	Favorisée
	$< 0 \quad \uparrow (P) \quad$	Indépendant de $P \quad \emptyset$
	$> 0 \quad \downarrow (P) \quad$	Pression élevée
		Pression faible

Propriétés

## 2 Choix des proportions initiales

### Gaz

Il faut partir de réactifs en proportions stoechiométriques

- $\alpha A + \beta B = \gamma C$  avec  $K^\circ = \frac{x_c^\gamma}{x_a^\gamma x_b^\gamma} \left( \frac{P}{P^\circ} \right)^{\alpha+\beta-\gamma}$
- Différentielle logarithmique :  $0 = \gamma \frac{dx_c}{x_c} - \alpha \frac{dx_a}{x_a} - \beta \frac{dx_b}{x_b}$  or  $\begin{cases} x_a + x_b + x_c = 1 \\ x_c \text{ maximale} \Rightarrow dx_c = 0 \end{cases}$  d'où  $\frac{x_a}{\alpha} = \frac{x_b}{\beta}$
- $\frac{n_a - \alpha \xi}{\alpha n_{gaz}} = \frac{n_b - \beta \xi}{\beta n_{gaz}}$  d'où  $\frac{n_a}{\alpha} = \frac{n_b}{\beta} \Rightarrow$  Proportions stoechiométriques

Propriétés

### Mélange liquide idéal

1. Il faut introduire un réactif en grand excès

RGW en introduisant  $\lambda$  fois plus d'un réactif que de l'autre  
On détermine  $\alpha_{eq} = f(\lambda)$

2. On peut aussi éliminer un produit formé du milieu  $Ex : Distillation$

Propriétés

### 3 Déplacement d'équilibre

“ État initial → État perturbé juste avant évolution → Etat final ”

💡 On exprime  $Q_{rEP}$ , quotient réactionnel dans l'état perturbé, et on le compare à  $K^\circ(T)$

Propriétés

Introduction	$T$	$P$	Composition	$V$	Évolution dans le sens
Van't Hoff	↗	→	→		Endothermique
Le Chatelier	→	↗	→		↘ gaz
Composé pur	→		↗		∅
Actif gazeux	→		↗	→	↘ gaz
	→	→	↗		Pas d'information
Inerte gazeux	→		↗	→	∅
	→	→	↗		↗ gaz
Soluté actif	→		↗	→	↘ soluté
Soluté inerte	→		↗	→	∅
Solvant	→				↗ soluté

Théorème

#### Loi de Van't Hoff

Une augmentation de température à pression et composition constantes à partir d'un état d'équilibre entraîne une évolution de la réaction dans le sens endothermique

Dans l'état perturbé  $Q_{rEP} = Q_{rEI} = K^\circ(T)$  et  $T' > T$ , on applique la formule de Van't Hoff

- $\Delta_r H^\circ > 0$  Endothermique dans le sens  $\rightarrow : K^\circ(T') > K^\circ(T) = Q_{rEP} \Rightarrow$  Évolution dans le sens  $\rightarrow$  Endothermique
- $\Delta_r H^\circ < 0$  Exothermique dans le sens  $\rightarrow : K^\circ(T') < K^\circ(T) = Q_{rEP} \Rightarrow$  Évolution dans le sens  $\leftarrow$  Endothermique
- $\Delta_r H^\circ = 0$  Athermique :  $K^\circ(T') = K^\circ(T) = Q_{rEP} \Rightarrow$  Pas d'évolution

Théorème

#### Loi de Le Châtelier

Une augmentation de pression à température et composition constantes, à partir d'un état d'équilibre entraîne une évolution de la réaction dans le sens de diminution de la quantité de matière gazeuse  $\sum \vartheta_i < 0$

“ On néglige l'influence de la pression sur les réactions ne faisant pas intervenir de gaz ”

$K^\circ = \left( \prod_{gaz} x_i^{\vartheta_i} \right) \left( \frac{P}{P^\circ} \right)^{\sum \vartheta_i}$  Dans l'état perturbé  $P' > P$ ,  $\left( \prod_{gaz} x_i^{\vartheta_i} \right) \left( \frac{P'}{P^\circ} \right)^{\sum \vartheta_i}$

- $\sum_{gaz} \vartheta > 0 \Rightarrow Q_{rEP} > K^\circ \Rightarrow$  Évolution spontanée dans le sens  $\leftarrow$
- $\sum_{gaz} \vartheta < 0 \Rightarrow Q_{rEP} < K^\circ \Rightarrow$  Évolution spontanée dans le sens  $\rightarrow$
- $\sum_{gaz} \vartheta = 0 \Rightarrow Q_{rEP} = K^\circ \Rightarrow$  La pression n'est pas facteur d'équilibre

Théorème

#### Introduction d'un constituant pur

L'introduction d'un solide<sub>liquide</sub> pur à partir d'un état d'équilibre à température constante n'entraîne aucune évolution du système

Dans l'état perturbé, l'activité du constituant pur est égale à 1  $\Rightarrow Q_{rEP} = Q_{rEI} = K^\circ \Rightarrow$  Pas d'évolution

### Introduction d'un composé actif gazeux à $T$ et $V$ constants

L'introduction d'un constituant actif gazeux à température et volume constants à partir d'un état d'équilibre entraîne une évolution de la réaction dans le sens de la consommation du composé gazeux introduit

Théorème

Seule activité modifiée  $a_g = \frac{(n_g + n)RT}{VP^\circ} > a_{k0}$

$\blacksquare K^\circ(T) = \left( \prod_{gaz} n_i^{\vartheta_i} \right) \left( \frac{RT}{VP^\circ} \right)$

$\sum_{gaz} \vartheta_i \text{ et } Q_{rEP} = \left( \frac{n_g + n}{n_g} \right) K^\circ(T)$

$\blacksquare - g \text{ est un produit } \Rightarrow \vartheta_g > 0 \Rightarrow Q_{rEP} > K^\circ(T) \Rightarrow \text{Évolution dans le sens } \leftarrow$

$\blacksquare - g \text{ est un réactif } \Rightarrow \vartheta_g < 0 \Rightarrow Q_{rEP} < K^\circ(T) \Rightarrow \text{Évolution dans le sens } \rightarrow$

$\triangle \text{ Si } V \text{ n'est pas constant, la loi n'est pas générale}$

“ A  $T$  et  $P$  constants on ne peut rien dire pour un composé actif gazeux

### Introduction d'un gaz inerte à $T$ et $V$ constants

L'introduction d'un gaz inerte à température et volume constants à partir d'un état d'équilibre n'entraîne aucune évolution du système

$\blacksquare$  L'activité du gaz inerte n'apparaît pas dans  $Q_{rEP} \Rightarrow Q_{rEP} = Q_{rEI} = K^\circ(T) \Rightarrow \text{Pas d'évolution}$

### Introduction d'un gaz inerte à $T$ et $P$ constants

L'introduction d'un gaz inerte à température et pression constantes à partir d'un état d'équilibre entraîne une évolution de la réaction dans le sens d'une augmentation de la quantité de matière gazeuse

Théorème

$K^\circ(T) = \left( \prod_{gaz} n_i^{\vartheta_i} \right) \left( \frac{P}{n_{tgaz} P^\circ} \right)^{\sum_{gaz} \vartheta_i}$  Seule la quantité totale de gaz est modifiée :  $\frac{Q_{rEP}}{Q_{rEI}} = \left( \frac{n_{tgaz}}{(n_{tgaz} + n) P^\circ} \right)^{\sum_{gaz} \vartheta_i}$

$\blacksquare - \sum_{gaz} > 0 \Rightarrow Q_{rEP} < K^\circ(T) \Rightarrow \text{Évolution spontanée dans le sens } \rightarrow$

$\blacksquare - \sum_{gaz} < 0 \Rightarrow Q_{rEP} > K^\circ(T) \Rightarrow \text{Évolution spontanée dans le sens } \leftarrow$

### Loi de modération - Introduction d'un soluté actif à $T$ et $V$ constants

L'introduction d'un soluté actif à  $T$  et  $V$  constants à partir d'un équilibre entraîne une évolution de la réaction dans le sens de la consommation du soluté introduit

Théorème

$K^\circ(T) = \left( \prod_{solute} n_i^{\vartheta_i} \right) \frac{1}{(VC^\circ)^{\sum_{solute} \vartheta_i}} \text{ et } \frac{Q_{rEP}}{K^\circ(T)} = \left( \frac{n_k + n}{n_k} \right)^{\vartheta_k}$

$\blacksquare - k \text{ est produit } \Rightarrow \vartheta_k > 0 \text{ d'où } Q_{rEP} > K^\circ(T) \Rightarrow \text{Évolution dans le sens } \leftarrow$

$\blacksquare - k \text{ est réactif } \Rightarrow \vartheta_k < 0 \text{ d'où } Q_{rEP} < K^\circ(T) \Rightarrow \text{Évolution dans le sens } \rightarrow$

$\triangle \text{ Si } V \text{ n'est pas constant, la loi n'est pas générale}$

### Introduction d'un soluté inerte à $T$ et $V$ constants

L'introduction d'un soluté inerte à température et volume constants à partir d'un état d'équilibre n'entraîne aucune évolution du système

$\blacksquare$  Activités inchangées  $\Rightarrow Q_{rEP} = Q_{rEO} = K^\circ(T) \Rightarrow \text{Pas d'évolution}$

**Introduction de solvant à  $T$  constante**

L'introduction de solvant à température constante à partir d'un état d'équilibre entraîne une évolution de la réaction dans le sens d'une augmentation de la quantité de matière des solutés

$$\sum_{\text{solute}} \vartheta_i > 0$$

$$K^\circ(T) = \left( \prod_{\text{solute}} n_i^{\vartheta_i} \right) \frac{1}{(VC^\circ)^{\sum_{\text{solute}} \vartheta_i}} \text{ et } \frac{Q_{rEP}}{K^\circ(T)} = \left( \frac{V}{V'} \right)^{\sum_{\text{solute}} \vartheta_i}$$

- $\sum_{\text{solute}} \vartheta_i > 0 \Rightarrow Q_{rEP} < K^\circ(T) \Rightarrow$  Évolution spontanée dans le sens  $\rightarrow$
- $\sum_{\text{solute}} \vartheta_i < 0 \Rightarrow Q_{rEP} > K^\circ(T) \Rightarrow$  Évolution spontanée dans le sens  $\leftarrow$
- $\sum_{\text{solute}} \vartheta_i = 0 \Rightarrow Q_{rEP} = K^\circ(T) \Rightarrow$  Pas d'évolution

**4 Optimisation industrielle****Étude d'un procédé**

- $\Delta_r \mathcal{H}^\circ \Rightarrow$  Endo/Exothermique
- $\Delta_r \mathcal{S}^\circ$  S'intuit avec le signe  $\sum_{\text{gaz}} \vartheta_i$
- $\Delta_r \mathcal{G}^\circ$  Approximation d'Ellingham
- Température d'inversion  $\Delta_r \mathcal{G} = 0 \Leftrightarrow T_i = \frac{\Delta_r \mathcal{H}^\circ}{\Delta_r \mathcal{S}^\circ}$
- $K^\circ(T)$  et influence de  $P$  et  $T$  sur sa valeur

**Minimiser une réaction parasite**

- Choix de  $P$  et  $T$  *Contrôle thermodynamique*
- Catalyseur augmentant fortement la vitesse d'une seule réaction *Contrôle cinétique*

## 1 Généralités

### Outils

- Fractions molaires *massiques* de chaque constituant dans chaque phase  $x_i^{(\varphi)} / w_i^{(\varphi)}$
  - Composition molaire *massique* globale en constituant  $A : X_A = \frac{n_A}{n_{tot}}$
-  Dans le cas d'un système monophasé  $X_B = x_B$

Définition

 Relations indépendantes : RGW et  $\sum_{\varphi} x_i = 1$  dans chaque phase

Propriétés

- Les diagrammes binaires sont obtenus grâce à l'étude de réseaux de courbes d'analyse
  -  La solidification est exothermique  $\Rightarrow$  La diminution de température est atténuée
  -  Apparition du solide  $\Rightarrow$  Rupture de pente
-  Calcul : RGW de l'équilibre d'un constituant dans les deux phases et on applique Van't Hoff dans l'approximation d'Ellingham
- **Courbes**
  1. **Liquidus** : Composition de la phase liquide à une température pour un équilibre solide-liquide  
*Métallurgistes : Ensemble des points de début de solidification*
  2. **Solidus** : Composition de la phase solide à une température pour un équilibre solide-liquide  
*Métallurgistes : Ensemble des points de fin de solidification*

 Pour déterminer la composition d'un domaine on regarde les espèces et domaines au bout d'une horizontale traversant le domaine

 Déterminer les quantités de matières  $\Rightarrow$  Théorème des moments

Théorème

### Théorème des moments

$$(X_B - x_B^s)n^s + (X_B - x_B^l)n^l$$

- Ou géométriquement  $MSn_s = MLn_l$
- Existe aussi avec les fractions massiques et les masses

 
$$\begin{cases} n_B = X_B n_t \\ n_B = n_B^l + n_B^g \end{cases}$$
 d'où  $X_B(n_l + n_s) = x_B^l n_l + x_B^s n_s$

- Connaissant  $n_t = n_{Ai} + n_{Bi}$  on peut alors calculer  $n_l$  et  $n_s$
- Le théorème se généralise pour n'importe quelles deux phases en équilibre



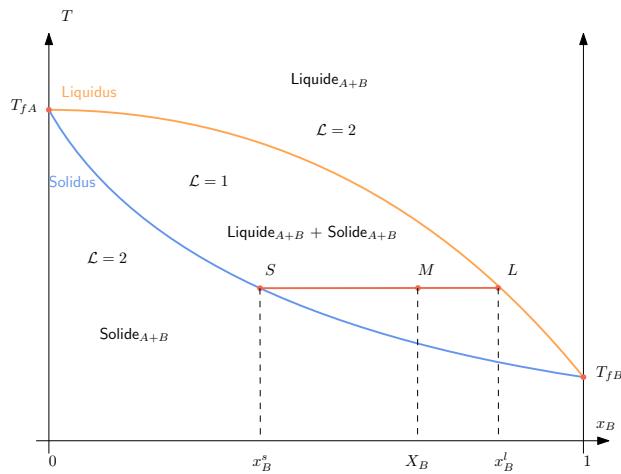
Sur une horizontale il y a quasi-systématiquement 0 degrés de liberté

## 2 Solides miscibles en toutes proportions

C'est le cas d'alliages métalliques de substitution qui cristallisent dans le même type de structure et qu'ils possèdent des rayons atomiques proches

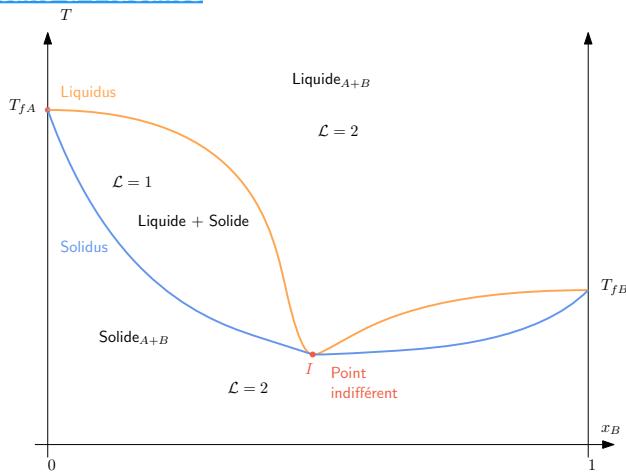
Propriétés

### Faible écart à l'idéalité



Propriétés

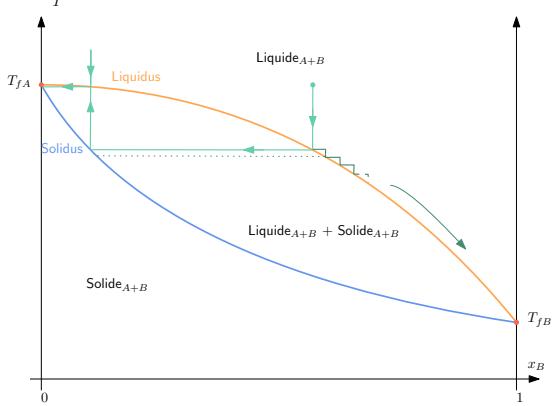
### Écart important à l'idéalité



Au point  $I$   
 $x_B(l) = x_B(s)$   
Un degré de liberté en moins

## Cristallisation fractionnée

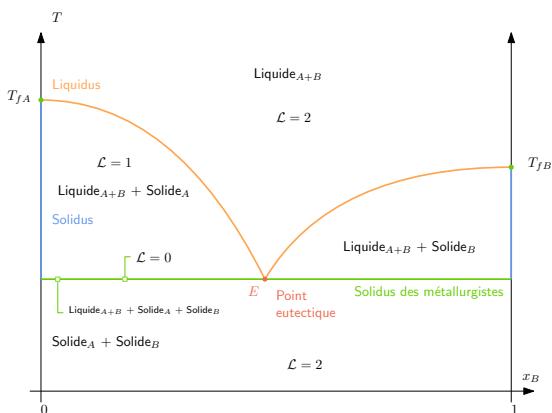
Exemple



- On refroidit
- Les cristaux du constituant le moins fusible sont recueillis et fondus → On recommence
- Le liquide refroidit en s'enrichissant en l'autre constituant

## 3 Solides non miscibles

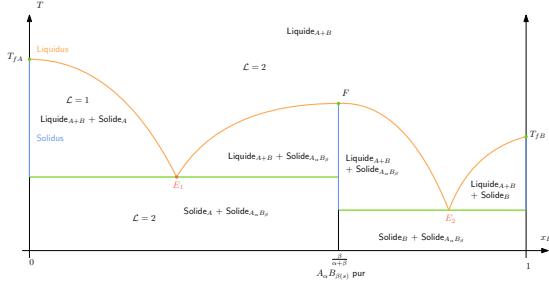
Propriétés



- Dans le cas de variétés allotropiques  
⇒ Les domaines "Liquide + Solide" sont séparés

## Composé à fusion congruente

Propriétés



- Il se forme parfois une phase composé défini  $A_\alpha B_\beta$
- Les composé est dit à fusion congruente si il se transforme par chauffage en une phase liquide de même fraction molaire en B
- $x_B(CD) = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$  et  $w_B(CD) = \frac{\beta M_B}{\alpha M_A + \beta M_B}$

## Détermination des quantités de matière

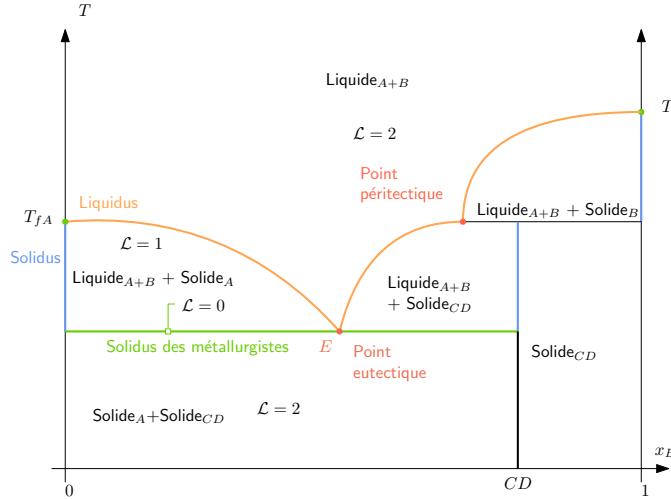
Méthode

- $\left\{ \begin{array}{l} \text{Conservation de } A : n_{A0} = n_{A(l)} + \alpha n_{A_\alpha B_\beta} \\ \text{Conservation de } B : n_{B0} = n_{B(l)} + \beta n_{A_\alpha B_\beta} \end{array} \right. \rightarrow \text{Système de trois équations à trois inconnues}$
- Lecture sur le diagramme :  $x_{B1}^{(l)} = \frac{n_B^{(l)}}{n_A^{(l)} + n_B^{(l)}}$
- Théorème des moments :  $n_l \overline{L_1 M_1} = n_{CD} \overline{M_1 S_1}$  avec
  - $n_l = n_A^{(l)} + n_B^{(l)}$
  - $\Delta n_{CD} = n_{A(CD)} + n_{B(CD)}$  et non la quantité du composé défini
 Avec de plus : Conservation de  $(A + B)$  :  $n_l + n_{CD} = n_{A0} + n_{B0}$

Dans le cas de fractions massiques on peut utiliser le théorème des moments sans difficulté

$$\text{m}_{CD} = m_{A(CD)} + m_{B(CD)} = m_{A_\alpha B_\beta}$$

### Cas d'un composé défini à fusion non congruente

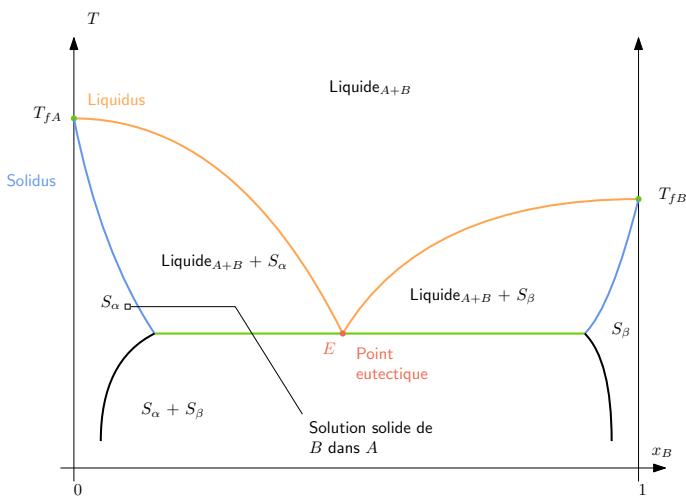


**DEF:** Un tel composé n'est jamais en équilibre avec un liquide de même composition

- Le composé défini se décompose en un autre solide et en un liquide mélange de  $A$  et  $B$  de composition différente de celle du composé défini

Une mélange racémique peut ou non former un composé défini *sinon il est le mélange eutectique*  
**»** Le mélange racémique fond toujours à température constante

## 4 Solides partiellement miscibles



## 1 Rétrosynthèse

### Analyse rétrosynthétique

- On part de la molécule cible et on cherche une cible secondaire  
*Même chaîne carbonée mais fonction différente plus facile à utiliser*
- On cherche la meilleure méthode de déconnexion  
On peut former les synthons *Espèces ioniques fictives* et on leur attribue des espèces pouvant les générer

## 2 Synthèse asymétrique

- Un substrat prochiral est un substrat achiral qui, au cours d'une réaction est transformé en un ou plusieurs produits chiraux
- Pour rendre une réaction stéréosélective, il faut créer temporairement l'asymétrie afin de passer par deux états de transition diastéréoisomère  $E_p \neq E_p'$   
Plus  $\Delta E_p$  est grande, plus la stéréosélectivité est forte

$$ee = \frac{|n_+ - n_-|}{n_+ + n_-}$$

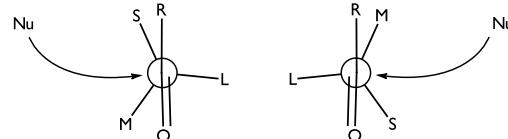
- L'excès énantiométrique est nul pour un mélange racémique
- L'excès énantiomérique vaut 1 pour un énantiomère seul

$$\alpha = [\alpha_+]lC_+ + [\alpha_-]lC_- = [\alpha_+]l(C_+ - C_-)$$

On définit le pouvoir rotatoire spécifique du mélange  $\alpha = [\alpha]l(C_+ + C_-)$  d'où  $ee = \frac{|\alpha|}{\alpha_+}$

### Méthodes

- Utilisation d'un auxiliaire chiral *Crée de la gêne stérique pour rendre le substrat ou le réactif chiral*
- Utilisation d'un catalyseur chiral *Se fixe plus facilement sur une face que sur l'autre*
- Dédoubllement classique  $E_1 + E_2 + 2A \rightleftharpoons E_1-A + E_2-A$  *diastéréoisomères*
- Dédoubllement cinétique *Un énantiomère réagit beaucoup plus facilement avec un auxiliaire chiral*



- Induction asymétrique

## 3 Protection de fonction

## Composé carbonylé

Réaction

Réaction	Équation	Déprotection	Remarques
Acétalisation		Hydrolyse acide	<ul style="list-style-type: none"> <li>On utilise l'APTS</li> <li>On peut aussi utiliser un dithiol</li> <li>On peut aussi faire une transacétalisation</li> </ul>

## Alcool

Réaction

Réaction	Équation	Déprotection	Remarques
DHP		MeOH Milieu acide chaud ou Hydrolyse acide	Action de l'alcool sur le DHP protonné
Éther-oxyde Williamson		$\text{BF}_3 - \Delta$ $\text{BnCl} \rightarrow \text{H}_2\text{Pd/C}$	Déprotection très facile pour les éthers benzyliques par hydrogénolyse
Éther-oxyde Alcène		$\text{BF}_3 - \Delta$	Déprotection difficile
Ether silylé		$\text{Bu}_4\text{N}^+ + \text{F}^- + \text{H}_2\text{O}$ Longue chaîne carbonée	<ul style="list-style-type: none"> <li>Force motrice <i>protection et déprotection</i> : formation de liaisons plus fortes</li> <li>Attaque de ROH puis départ de Cl- puis Captage du proton car base pas assez forte pour déprotonner OH</li> </ul>

## Phénol

Réaction

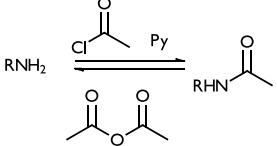
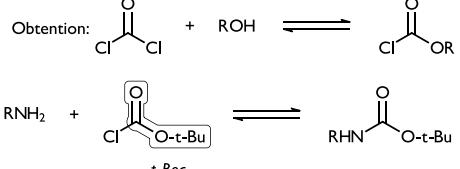
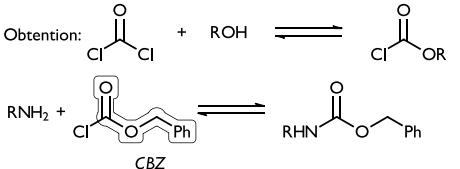
Réaction	Équation	Déprotection	Remarques
Éther-oxyde		$\text{HI} - \Delta$	On peut utiliser $\text{CO}_3^{2-}$ comme base
Ester		Hydrolyse	

## Acide carboxylique

Réaction

Réaction	Équation	Déprotection	Remarques
Esterification		Hydrolyse	

## Amine primaire ou secondaire

Réaction	Équation	Déprotection	Remarques
Acylation d'Hofmann			Hydrolyse basique
Groupe <i>t</i> -Boc	Obtention: 		Milieu acide fort anhydre
Groupe CBZ	Obtention: 		Hydrogénolyse H2PD/C

Réaction

## 4 Index de réactions

### Création de liaisons C–C

- Addition
  - Sur C=O
    - **Organomagnésien** Cétone, Chlorure d'acyle, Ester, CO<sub>2</sub>
    - **Aldolisation**
    - **Wittig**
    - Sur  $\alpha$ -énone **Michael**
    - **Diels-Alder**
    - **Métathèse**
  - Substitution
    - **SN<sub>2</sub> sur époxyde** Alcynure ou magnésien
    - **SN sur dérivé halogéné** Magnésien, alcynure, ion cyanure, énolate

Propriétés

### Création de cycles

- Cycles carbonés
  - **Diels Alder**
  - **Aldolisation intramoléculaire**
  - **Annelation de Robinson**
  - **Métathèse cyclisante**
- Hétérocycles
  - **Williamson intramoléculaire**
  - **Époxydes**
  - **Estérfication intramoléculaire** → Lactones
  - **Acylation d'Hoffmann ou amidification intramoléculaires** → Lactames

Propriétés

### Coupure de liaison C=C

- **Lemieux-Johnson**

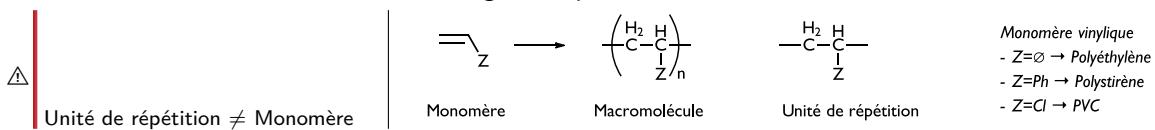
## 1 Définitions

DEF: Une **macromolécule** est une molécule de masse molaire élevée constituée de la répétition d'un grand nombre d'**unités de répétitions** reliées par des liaisons covalentes

DEF: Un **polymère** est un matériau mélange de macromolécules ne possédant pas toutes le même nombre d'unités de répétition

- La polymérisation est la réaction qui conduit à un polymère

DEF: Les **monomères** sont les molécules réagissant pour constituer la macromolécule



Définition

### Dimensionnalité des macromolécules

- Macromolécules **monodimensionnelles**

- Linéaires : Les unités de répétition s'enchainent les unes à la suite des autres
- Ramifiées

- Macromolécules **tridimensionnelles** *Les macromolécules sont reliées par des liaisons covalentes et forment un réseau*

DEF: Fonctionnalité : Nombre de sites réactifs

*On définit la fonctionnalité moyenne d'un mélange :*  $f = \frac{\sum_i N_i f_i}{\sum_i f_i}$

- Si la fonctionnalité moyenne est supérieure à 2 les structures sont d'abord ramifiées puis réticulées → Réseaux tridimensionnels

Propriétés

### Isomérie et stéréochimie

- Isomérie de position tête queue *Sens d'assemblage des monomères*
- Stéréorégularité
  - **Isotactiques** : Tous les  $Z$  sont du même côté
  - **Syndiotactiques** : Positions des  $Z$  alternée
  - **Atactique** : Position des  $Z$  hasardeuse
- Isomérie de chaîne *Cis-Trans*

Propriétés

### Copolymères

DEF: **Homopolymère** : Macromolécule formée à partir d'un seul monomère

DEF: **Copolymère** : Polymère constitué différentes unités de répétitions ou monomères

Matériaux **homogènes**      Matériaux **hétérogènes**

Copolymères statistiques      Copolymères à blocs

Copolymères alternés      Copolymères greffés

Définition

## 2 Polymolécularité

Définition

### Degré de polymérisation

DEF: Une **unité monomère** est le groupe d'atomes qui se lie à une chaîne macromoléculaire lorsqu'un monomère vient s'ajouter à la chaîne en croissance

- Masse molaire moyenne de l'unité monomère :  $M_0 = \sum_i x_i M_i$

⚠ Unité monomère ≠ Unité de répétition pour un copolymère

DEF: Le degré de polymérisation est le nombre d'unités monomères constituant la macromolécule

$$x_i = \frac{N_i}{N} = \frac{N_i}{\sum_i^\infty N_i}$$

- $x_i$  est la fraction massique en macromolécules de degré de polymérisation  $i$   
= Probabilité de trouver une macromolécule de degré  $i$
- $N_i$  est le nombre de macromolécules de masse  $M_i$
- $N$  est le nombre total de macromolécules

$$w_i = \frac{m_i}{m} = \frac{m_i}{\sum_i^\infty m_i} = \frac{N_i M_i}{\sum_i^\infty N_i M_i} = \frac{i N_i}{\sum_i^\infty i N_i}$$

- $w_i$  est la fraction massique n macromolécules de degré  $i$

$$\overline{DP_n} = \sum_i^\infty i x_i$$

- $\overline{DP_n}$  est le degré de polymérisation moyen en nombre
- De même  $\overline{DP_w} = \sum_i^\infty i w_i$

$$\overline{M_w} = \sum_i^\infty w_i M_i = \frac{\sum_i^\infty N_i n_i}{\sum_i^\infty N_i} = \frac{\sum_i^\infty N_i M_i^2}{\sum_i^\infty N_i M_i}$$

- $\overline{M_w}$  est la masse molaire moyenne en masse
- $\overline{M_w} = \overline{DP_w} M_0$
- $\overline{M_w}$  influence la viscosité des polymères fondus
- Sa valeur est très sensible à la présence de longues chaînes longues dans l'échantillon
- $\overline{M_w} \geq \overline{M_n}$

$$I = \frac{\overline{M_w}}{\overline{M_n}} = \frac{\overline{DP_w}}{\overline{DP_n}}$$

- $I$  est l'indice polymolécularité
- Il caractérise la largeur à mi hauteur de la distribution de masse

Définition

## 3 Description des polymères

Propriétés

### Conformation des chaînes

Les conformations peuvent être gauche  $\phi = \pm 60^\circ$  ou anti  $\phi = 180^\circ$

Conformation	Type
Au hasard	Pelotes statistiques <i>Entropie maximale</i>
Succession de anti	Zig-zag plan
Succession de gauches	Hélice

Propriétés

### Interactions entre chaînes

- **Van der Waals**

Chaine ramifiée → Plus grande distance entre chaînes → Plus faible cohésion

- **Liaison H** Cohésion très élevée

## Familles de polymères

### – Thermoplastiques

- DEF: Ramollissent en présence de chaleur
- Chaines monodimensionnelles linéaires ou ramifiées
  - Sont solubles dans certains solvants

### – Thermodurs

- DEF: Durcissent en présence de chaleur
- Macromolécules tridimensionnelles avec de nombreux points de réticulations

### – Élastomères

- DEF: Propriétés élastiques réversibles
- Macromolécules tridimensionnelles en réseau lâche

## 4 États physiques des thermoplastiques

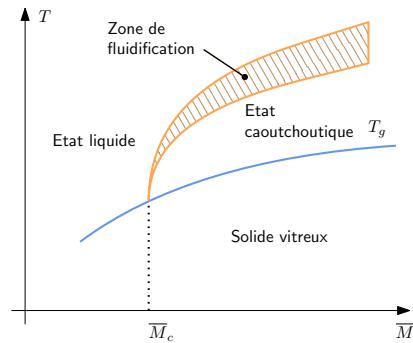
### Polymères cristallins

- Très grande régularité des macromolécules *Chaines linéaires, peu de ramifications, liaisons H*
- Fusion au voisinage de  $T_{fus}$

### Polymères amorphes

- Repliées sous forme de pelotes statistiques enchevêtrées les unes avec les autres
- Changement d'état autour de la température de transition vitreuse  $T_g$ 
  - $T < T_g$  : État solide vitreux *Dur et cassant*
  - $T > T_g$  : État caoutchoutique *Mou et flexible*  
*Possibilité de mouvement de reptation* *Mouvements conformationnels de long bouts de chaînes*

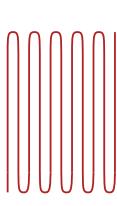
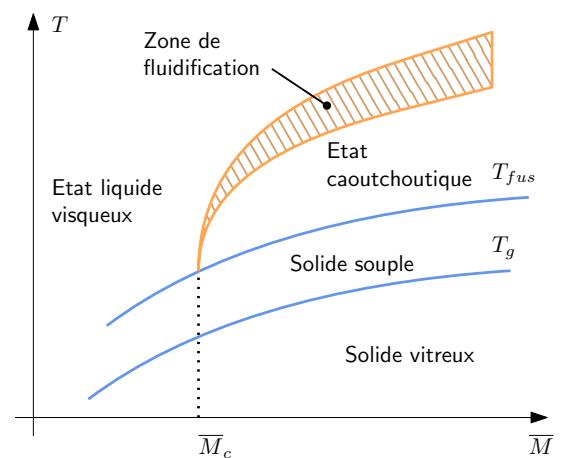
$\Delta$   Pas de température de fusion	
$T_g$	État
$> T_{ambiante}$	Thermoplastique
$< T_{ambiante}$	Élastomère



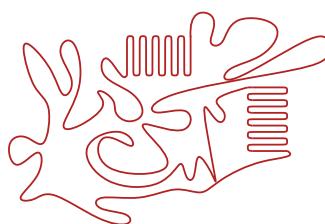
### Polymères semi-cristallins

- Zones amorphes et zones cristallines *cristallites*
- L'arrangement peut donner naissance à des sphérolites

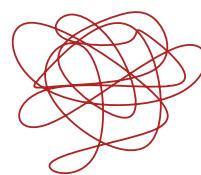
$T$	État
$T < T_g$	Solide vitreux
$T_g < T < T_{fus}$	Solide souple
$T_{fus} < T$	Caoutchoutique puis liquide visqueux



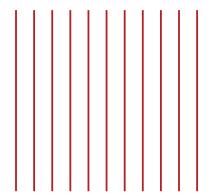
Polymère cristallin



Polymère semi-cristallin



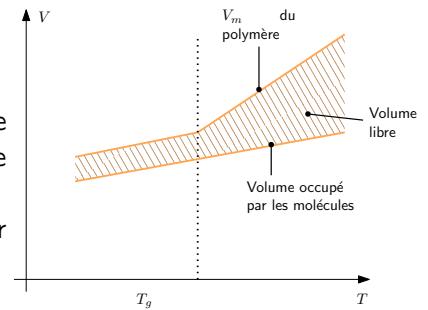
Polymère amorphe



Fibres étirées

### Transition vitreuse

- $T_g$  dépend de la vitesse de refroidissement *Grandeur cinétique*
- L'état vitreux est un état métastable
- **Théorie du volume libre** : Le volume libre est la différence entre le volume molaire réellement occupé par le polymère et le volume molaire hypothétique occupé par les molécules seules  
Le matériau devient vitreux lorsque le volume libre ne suffit plus pour permettre les mouvements de reptation



#### Facteur

 $T_g$ 

- Liaisons doubles
- Atomes électronégatifs
- Substituant rigides
- Polarité des substituants
- Ponts covalents et réticulations

Augmente

#### Facteurs influençant $T_g$ :

“

#### Crée du volume libre

- Absence de liaisons H
- Diminution de  $\overline{M}$
- Ajout de plastifiant

Abaisse

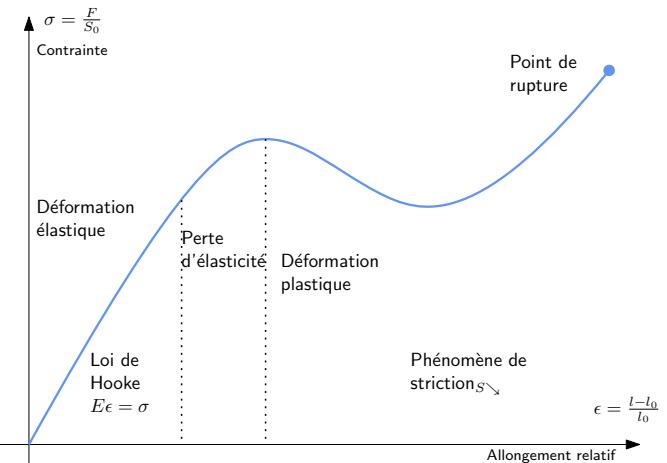
- Les copolymères statistiques possèdent une seule  $T_g$  intermédiaire entre celle des deux homopolymères  
– Un copolymère dibloc possède deux  $T_g$  voisines de celles des deux homopolymères

## 5 Propriétés mécaniques des polymères

## Diagramme de traction

“ E traduit de la rigidité du matériau Résistance à la déformation ”

$E_{metal}$	100GPa
$E_{polymere vitreux}$	1GPa
$E_{polymere caoutchoutique}$	1MPa



### Polymère Déformation

- |                 |  |
|-----------------|--|
| Semi-cristallin | <ul style="list-style-type: none"> <li>– Alignement des chaînes amorphes</li> <li>– Alignement des lamelles cristallines</li> <li>– Rupture des lamelles imparfaites ⇒ Réorganisation totale</li> <li>– Structure fibrillaire</li> </ul> |
| Amorphe         | <ul style="list-style-type: none"> <li>– Réorganisation des pelotes</li> <li>– Alignement des chaînes</li> <li>– Déformation plastique</li> <li>– Structure quasi cristalline</li> </ul>   |

DEF: Rupture dans le domaine élastique après une faible déformation mais une contrainte élevée ⇒ Fragile  
DEF: Rupture précédée d'une déformation plastique ⇒ Ductile

Caractéristique	Exemple
Mou et peu résistant	Gel
Mou et résistant	Élastomères
Dur et fragile	Polystyrène, PMMA, Thermoudurs
Dur et ductile	Polyamides, polyesters

Propriétés

## Évolution du module d'Young avec $T$

- **Polymère amorphe**  
Chute de  $E$  d'un facteur 1000 autour de  $T_g$
- **Polymère semi-cristallin**
  - $T_g$  concernant la partie amorphe et  $T_{fus}$  concernant la partie cristalline
  - Chute de  $E$  plus faible que pour un polynôme amorphe autour de  $T_g$  et  $T_{fus}$

“ Les chutes de module dépendent du taux de cristallinité Taux important ⇒ Chute faible à  $T_g$  et forte à  $T_f$  ”

“ En ajustant les proportions on peut ajuster  $T_g$  d'un copolymère donc ses propriétés ”

Propriétés

## 1 Infrarouge

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

- $k$  caractérise la force de la liaison
- $\mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$  caractérise la force de la liaison
- On utilise généralement le nombre d'onde  $\bar{\nu} = \sigma = \frac{\nu}{c}$

### Effets sur la fréquence de résonance

Caractéristique	Effet
Masse ↗	$\nu$ ↘
Multiplicité ↗	$\nu$ ↗
Liaison très polarisée	Bande intense

Propriétés

### Analyse d'un spectre

Il suffit d'analyser les signaux de la région diagnostic  $> 1500$ , l'empreinte digitale donne peu d'informations

- Liaisons X-H  $_{2700-4000}$ 
  - $> 3000$  OH, NH<sub>2</sub>, ≡CH, =CH –
  - $< 3000$  CH<sub>3</sub>
- Liaisons triples  $_{2000-2300}$
- Liaisons doubles  $_{1500-1800}$

Méthode

### Tableau récapitulatif

- Liaisons X – H

Alcool	3200-3600	Alcène	3000-3100
Acide carboxylique	2200-3600	Alcool	2850-3000
Amine	3350-3500	Aldéhyde	2750-2850
Alcyne	3300		

- Liaisons triples

Alcyne	2100-2200	Nitrile $C \equiv N$	2200-2300
--------	-----------	----------------------	-----------

- Liaisons doubles

Chlorure d'acyle $CClO$	1750-1850	Amide	1650-1700
Ester	1700-1750	Alcène	1600-1700
Cétone	1680-1750	Aryle	1450-1600 1650-2000

Propriétés

## 2 RMN

Définition

- Lorsqu'un champ magnétique est appliqué à un échantillon, il y a levée de dégénérescence des  $2S + 1$  orientations du spin nucléaire.
- L'énergie des différents moments magnétiques nucléaires dépend de leur orientation vis-à-vis du champ

$$E = -m_s \gamma \hbar B_0$$

–  $\gamma$  est le rapport gyromagnétique  $\vec{\mu} = \gamma \vec{S}$   
■  $E = -\vec{\mu} \vec{B}_0 = -\gamma S B_0$

- On observe une transition  $m_s = -\frac{1}{2} \rightarrow m_s + \frac{1}{2}$  si  $\Delta E = \gamma \hbar B_0 = h\nu_0 \Leftrightarrow \nu_0 = \frac{\gamma B_0}{2\pi}$

Définition

### Ecrantage

- Un proton ressent en fait  $\vec{B} = (1 - \sigma) \vec{B}_0 \Rightarrow \nu = (1 - \sigma) \nu_0$

Définition

### Protons équivalents

DEF: Deux protons sont isochrones si ils ont la même fréquence de résonance Hasard ou équivalence chimique

DEF: Deux protons sont chimiquement équivalents si ils sont interchangeables par une opération de symétrie ou s'ils deviennent identiques dans le temps Ex : Battement quantique

On remplace tour à tour les deux protons par un deutérium

- Homotopiques Identiques ⇒ Chimiquement équivalents
- Enantiotopiques Enantiomères ⇒ Chimiquement équivalents
- Diastéréotopiques Diastéréoisomères ⇒ Non chimiquement équivalents

- Autant de signaux que de groupes de protons chimiquement équivalents

Propriétés

### Intensité des signaux

- L'aire des différents signaux est proportionnelle au nombre de protons isochrones

Propriétés

### Déplacement chimique

- Le composé de référence est le TMS  $\delta_{ref} = 0 ppm$

$$\delta = \frac{\nu - \nu_{ref}}{\nu_0}$$

–  $\delta$  le déplacement chimique en ppm  
■  $\nu_0$  en MHz △

- Une augmentation de l'écrantage Blindage conduit à une diminution de  $\delta$

Propriété	Effet	$\delta$
Atomes électronégatifs à proximité	Déblindant <small>Densité e<sup>-</sup> ↘</small>	↗
Groupes attracteurs à proximité	Déblindant <small>Densité e<sup>-</sup> ↘</small>	↗
Protons à l'extérieur du cycle	Déblindant <small>Champ magnétique induit par circulation</small>	↗
Protons à l'intérieur ou en dessous/dessus du cycle	Blindant <small>Champ magnétique induit par circulation</small>	↘
Appauvri en e <sup>-</sup> à cause de la mésomérie	Déblindant	↗
Protons liés à un hétéronome	Liaison H	Élargi

## Multiplicité

DEF: La multiplicité est due à des interactions entre le proton dont on étudie le signal et les autres protons de son voisinage

- La force de cette interaction est mesurée par la constante de couplage  $J$   
Elle est l'écart de fréquence entre deux pics et est indépendante de  $\vec{B}_0$

DEF: Deux protons sont magnétiquement équivalents si

1. Ils sont chimiquement équivalents
2. Ils sont couplés identiquement *Même J*

- Des protons magnétiquement équivalents ne sont pas couplés entre eux
- Les couplages entre protons séparés par plus de trois liaisons ne sont pas visibles *Sauf liaison multiple*
- Le couplage d'un proton porté par un hétéroatome est rarement observé
- Les intensités relatives des pics sont proportionnelles aux coefficients binomiaux

## Règle des $n+1$ uplets

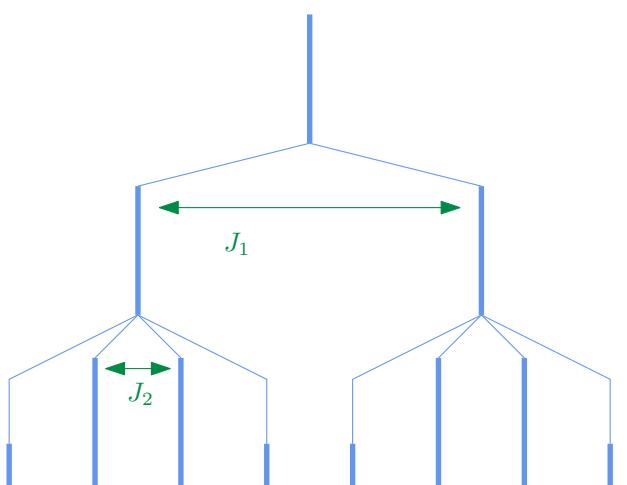
Si un groupe de protons est couplé avec une constante  $J$  à  $n$  protons équivalents, alors le signal des protons est un multiplet de  $n+1$  pics

Chaque proton peut prendre deux orientations possibles.  
La composante de  $\vec{B}$  due à l'interaction peut s'additionner ou se soustraire

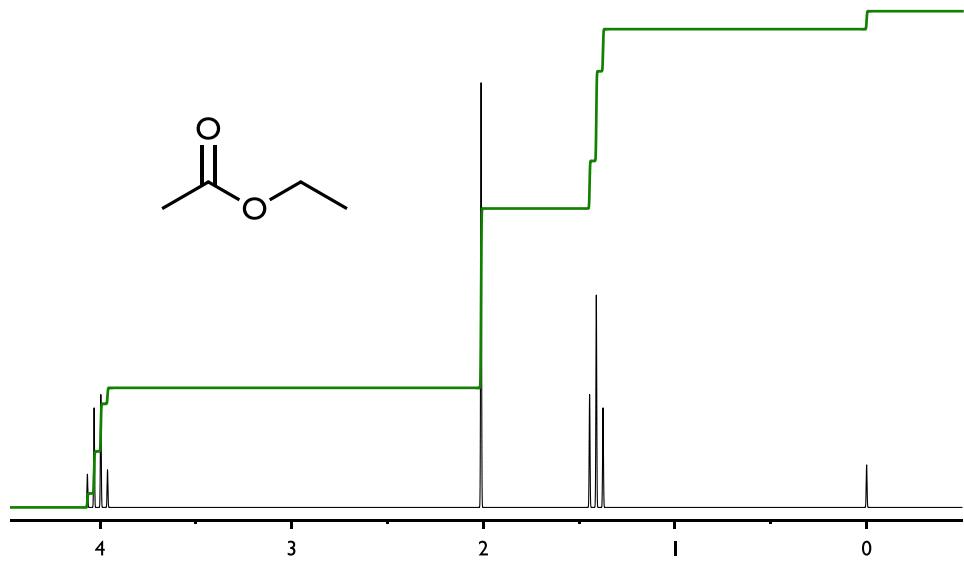
## Cas de plusieurs couplages

On applique successivement chacun des couplages par ordre décroissant d'intensité

Un groupe de protons est couplé à  $n$  et  $p$  protons équivalents  
on a un  $(n+1)$  uplet de  $(p+1)$  uplets



- $J_{cis} = 6 - 12\text{Hz}$
- $J_{trans} = 12 - 18\text{Hz}$



## 1 Modèle cristallin

### 1.1 Définitions

Définition

- Le cristal est un modèle et n'existe pas dans la réalité
- Un solide possède des défauts *Schottky, anti-Schottky, déplacement d'entités, solide polycristallin*

Définition

- Le cristal est la répétition périodique d'un motif
- Un réseau est constitué d'une infinité de noeuds
- Une maille est un parallélépipède défini par  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$
- La structure cristalline est l'ensemble Maille + Motif  
*Elle peut être déterminée expérimentalement par diffraction des rayons X*

### 1.2 Modèle de Bravaix

Propriétés

#### Modes de répartitions

- |                    |  |
|--------------------|--|
| Simple ou primitif | – Un noeud par sommet  |
| Centré             | – Un noeud par sommet<br>– Un noeud au centre                        |
| Bases centrées     | – Un noeud par sommet<br>– Un noeud au centre de deux faces opposées |
| Faces centrées     | – Un noeud par sommet<br>– Un noeud au centre des six faces          |

Propriétés

#### Mailles

- Cubique<sub>p,i,f</sub>
- Exagonale<sub>p</sub>
- Quadratique<sub>p,i</sub>
- Rhomboédrique<sub>p</sub>
- Orthorhombique<sub>p,i,s,f</sub>
- Monoclinique<sub>pas</sub>
- Triclinique<sub>p</sub>

### 1.3 Différents cristaux

Cristal	Liaison	Énergie de liaison $\text{kJ.mol}^{-1}$
Covalent	Covalente	200-500
Moléculaire	VdW	5-40
Ionique	Ionique <i>Non dirigée</i>	600-3000
Métallique	Métallique <i>Non dirigée</i>	200-500

## 2 Calculs de cristallographie

- Q | – Longueur d'une diagonale de face :  $a\sqrt{2}$   
– Longueur d'une diagonale de cube :  $a\sqrt{3}$

Nom	Notation	Définition	Calcul
Population	$Z$	Nombre de motifs en propre	
Coordinence	$[x]$	Nombre de plus proches voisins	
Compacité	$C$	Taux d'occupation réel	$C = \frac{Z \times \frac{4}{3}\pi r^3}{a^3}$
Masse volumique	$\rho$		$\rho = \frac{Z \times \frac{M}{N_A}}{a^3}$

### 2.1 Sites interstitiels en cfc

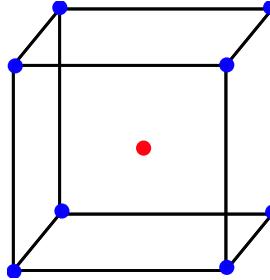
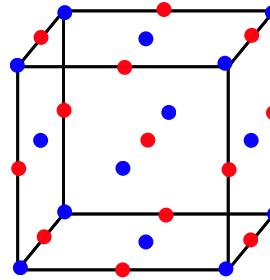
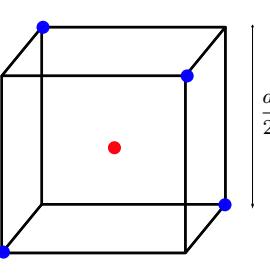
Site	Placement
Octaédrique	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Centre du cube</li> <li>– Au milieu de chaque arête</li> </ul>
Tétraédrique	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Centre des cubes d'arête <math>\frac{a}{2}</math></li> </ul>

### 2.2 Alliages

Alliage	Condition
Substitution	Cristallisent dans le même type de structure Rayons atomiques voisins
Insertion	Rayon suffisamment petit sinon déformation

## Types de cristaux ioniques

Définition

Type	CsCl	NaCl	ZnS
Schéma			
Géométrie	Cubique	Octaédrique	Tétraédrique
Coordinence	8	6	4
Condition de contact	$\begin{cases} r_+ + r_- = \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ 2r_- \leq a \\ \frac{r_+}{r_-} \geq \sqrt{3} - 1 \end{cases}$	$\begin{cases} r_+ + r_- = \frac{a}{2} \\ 2r_- \leq \frac{a\sqrt{2}}{2} \\ \frac{r_+}{r_-} \geq \sqrt{2} - 1 \end{cases}$	$\begin{cases} r_+ + r_- = \frac{a\sqrt{3}}{4} \\ 2r_- \leq \frac{a\sqrt{2}}{2} \\ \frac{r_+}{r_-} \geq \sqrt{\frac{3}{2}} - 1 \end{cases}$





# V TP de Physique

## 1 Exercices

### Résolution d'un exercice d'électricité

1. Placer le minimum de noeuds inconnus  $n_i$  et le minimum de courants  $n_v$

(a)  $n_i > n_v \Rightarrow$  Résolution avec la loi des noeuds en potentiel

– Aux noeuds on exprime  $\sum i = 0$  avec  $i = \frac{V_{fin} - V_{deb}}{Z}$

(b)  $n_i < n_v \Rightarrow$  Résolution classique avec loi des noeuds - loi des mailles

 On utilise des grandeurs adimensionnées adaptées comme inconnues :  $jC\omega$

### Diagramme de Bode asymptotique

1. On regarde les basses fréquences, hautes fréquences et la fréquence de résonance
2. On forme la courbe tangente aux asymptotes passant par la résonance

 –  $G_{dB} = 20 \log H$   
–  $\varphi = \arg(H)$

## 2 Généralités

Le multimètre est un bon voltmètre mais un mauvais ampèremètre

### Utilisation de l'oscilloscope

 Critère de Shannon : Fréquence d'échantillonnage  $\geq 2 \times$  Fréquence maximale

- Synchronisation  $Source-Level-Slope \pm$
- Utilisation en mode DC *Avec valeur moyenne* 

### Caractérisation d'un filtre grossière

1. Faire varier la fréquence sur plusieurs décades *Nature, ordre de grandeur de la zone de variation*

2.  $\Delta$  Si l'impédance d'entrée est inférieure à  $R_{GBF}$ ,  $E_m$  s'écroule  
 ⇒ Il faut déterminer les tensions de sorties **et** d'entrées  
 ⇒ Vérifier au départ si la tension d'entrée est identique
3. Rotation importante en mode XY pour les fréquences des changements asymptotiques
4. Dans la zone de gain maximal vérifier que le filtre ne sature pas lorsque l'amplitude d'entrée augmente  
 Sinon se placer toujours en régime linéaire *Ellipse en mode XY* → Baisser  $E_m$

### Caractérisation fine d'un filtre

- On peut mesurer la fréquence de résonance ou les fréquences de coupure  $H = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$   
 Méthode de 2.8 carreaux
  1. On se place à la résonance et on ajuste le signal sur 4 carreaux
  2. Les fréquences de coupures sont les fréquences pour lesquelles le signal a une amplitude de 2.8 carreaux
  3. On calcule  $Q = \frac{f_0}{\Delta f}$
- Si à la résonance les tensions sont en phase ou en opposition de phase on se place en mode XY

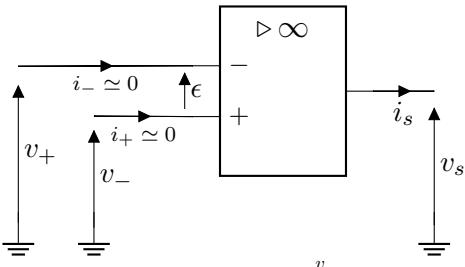
### Diagramme de Bode

1. Gain
  - On trace  $G_{dB} = 20 \log(H)$  en fonction de  $\log f$
  - L'idée est de démarrer à 10 Hz puis de monter en décade en utilisant le  $\times 10$  puis de rajouter des points là où il faut
  - $\Delta$  Ne pas prendre les mesures si le signal est trop bruité
2. Phase
  - L'oscilloscope numérique affiche la valeur de phase entre -360 et 360 à ramener entre -180 et 180
    - △ Se poser la question du signal en avance
  - On peut aussi placer une demi-période sur 9 carreaux ⇒ Un carreau correspond à  $20^\circ$

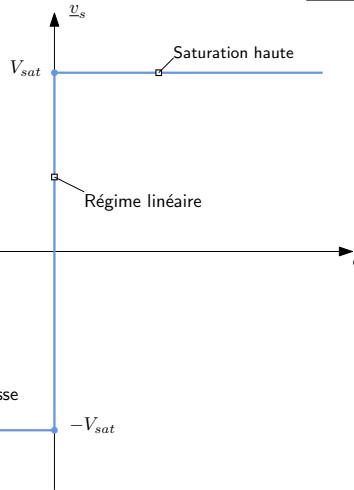
### Détermination de la résistance d'entrée et de sortie d'un quadripôle

1. Résistance d'entrée
  - On place une résistance variable entre le GBF et l'entrée en série
  - Lorsque  $U_{entree} = \frac{U_{GBF}}{2}$  on a  $R_e = R$
2. Résistance de sortie
  - On place une résistance variable en sortie
  - Lorsque  $U = \frac{U_{R \rightarrow \infty}}{2}$  on a  $R_s = R$

## 4 Amplificateur opérationnel



Mode de fonctionnement	Eq de Fonctionnement	Condition
Saturation basse	$v_s = -v_{sat}$	$\epsilon < 0$
Saturation haute	$v_s = v_{sat}$	$\epsilon > 0$
Régime linéaire	$\epsilon = 0$	$ v_s  = v_{sat}$



Le régime linéaire est observé ssi il existe une boucle de rétroaction

Entrée ↔ Sortie

- On écrit la loi des noeuds en termes de potentiel aux entrées
- Diviseur de tension

En saturation il y a fonctionnement non linéaire

⇒ Apparition d'harmoniques

*Pulsation dépend de l'amplitude*

Lentilles minces

- Pour avoir une image nette, il faut  $f' < \frac{D}{4}$

Autocollimation

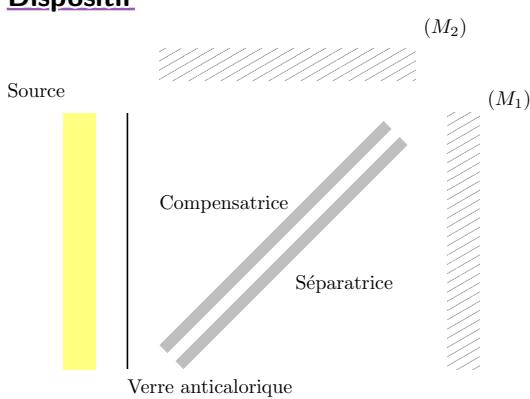
Permet de placer un objet dans le plan focal objet d'une lentille

1. Coller un miroir contre la lentille
2. Dans le plan focal objet l'ensemble lentille-miroir-lentille donne une image nette dans le plan de l'objet
3. Si l'autocollimation est bien réalisée, l'image doit avoir la même taille que l'objet

Viseur à frontale fixe

Permet de repérer un plan de front à une distance fixe du viseur surtout pour les objets virtuels

1. Régler l'oculaire
  - (a) Placer le réticule au plus près de l'oculaire
  - (b) Le reculer jusqu'à se mettre à la limite de perte de netteté Réticule dans le foyer objet de l'oculaire
2. Réglage de l'objectif
  - (a) Viser un objet rapproché à distance finie du viseur
  - (b) Jouer sur le tirage de l'objectif pour voir le réticule et l'objet nets
3. Utilisation : On repère la distance entre la netteté de l'objet 1 puis de l'objet 2

Dispositif

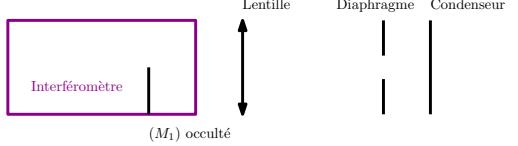
- Miroir ( $M_1$ ) mobile
- Miroir ( $M_2$ ) fixe
- Séparatrice + Compensatrice  
= Dispositif séparateur

On règle

- Orientation grossière de ( $M_1$ )
- Position de ( $M_1$ ) Chariotage
- Orientation fine de ( $M_2$ )
- Orientation de la compensatrice Parallélisme

**2.1 Réglage**

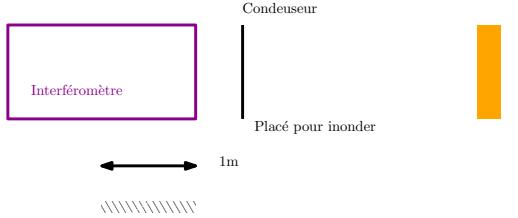
- Zoom et contraste : Chariotter
- Étirer : Compensatrice
- Centrer : Réglage fin et grossier

**Réglage de la compensatrice**

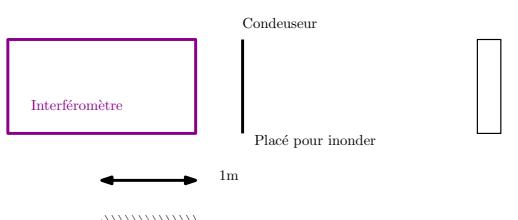
- Régler la compensatrice pour superposer les tâches
- Miroir désoculté  
⇒ Réglage fin pour superposer les tâches

**Réglage du parallélisme**

- On forme l'image de l'ampoule sur le miroir
- On voit des franges sinon charioter
- Dessiner  $\oplus$  et jouer sur les réglages *fin et grossier*
  - Superposer les cercles *Même en bougeant*  
⇒ Proche du contact
  - Superposer les croix ⇒ Parallélisme
- Arrêter la respiration + *Mouvements de tête* au centre en jouant sur les vis de réglage  
⚠ Plus aucune variation d'ordre d'interférence

**Projeter**

- Modification des conditions d'éclairage
- Charioter jusqu'à ne conserver qu'une frange  
Si les cercles sont elliptiques ⇒ Ajuster la compensatrice
- Passer en lumière blanche *Image de l'ampoule*
- Charioter légèrement pour vérifier l'apparition de couleurs

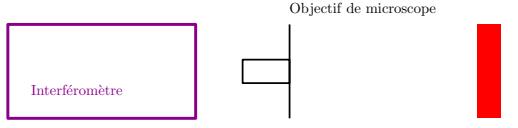
**Passage en coin d'air**

- Modification des conditions d'éclairage
  1. Inonder en rapprochant la lampe
  2. Lentille de courte focale en projection pour assurer la netteté
  3. Introduire un angle avec le réglage fin
- Charioter pour trouver les franges avec un bon contraste
- Centrer *Symétrie bordée par les irisations*
- Charioter très légèrement et zoomer pour ne voir que la frange centrale

## 2.2 Réglage au laser

**Réglage de la compensatrice**

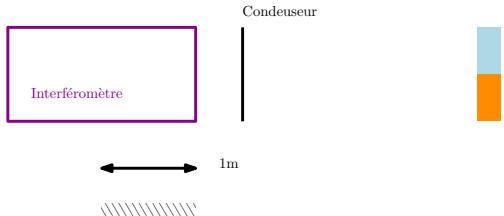
- Cacher  $M_1$  et régler la compensatrice pour superposer les tâches
- Décacher et réglage fin pour superposer les tâches

**Réglage du parallélisme**

- Centrer les cercles
- Charioter pour s'approcher du contact

### Projeter

Méthode



- Recentrer et contraste
- Charioter pour s'approcher du contact optique
- Passer sur sodium ou lumière blanche *Si proche*

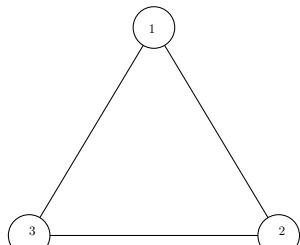
### Réaliser une mesure d'épaisseur

Méthode

- Se placer en coin d'air pour voir un certain nombre de franges
- On place l'objet devant un miroir
- On mesure la distance à charioter pour retrouver les franges qui vaut  $2e$

### Fabry-Pérot

Méthode



1. Jouer sur une vis de réglage pour ramener tous les points au centre
2. Enlever la respiration
  - Régler les vis dans l'ordre 1-2-3
  - Toujours bouger la tête dans le sens de la vis
  - Convergence



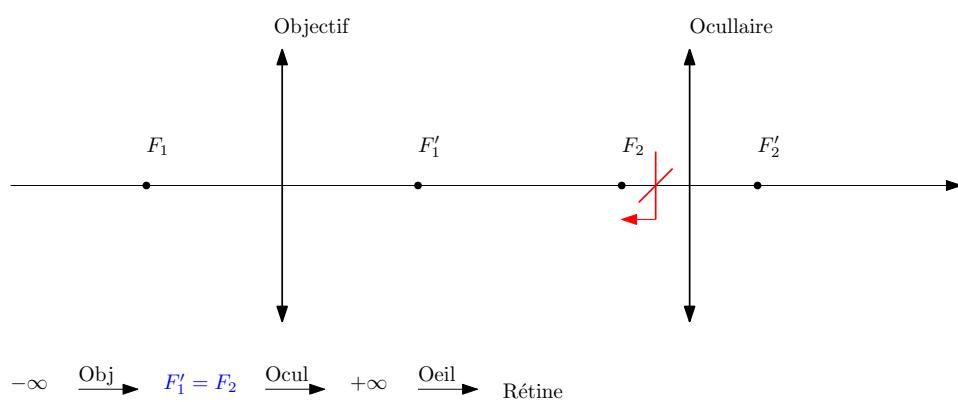
Etape 1   Condenseur Diaphragme  
Etape 2   ...   Verre teinté

## 3 Goniomètre

### Réglage

- Régler l'oculaire pour voir la croix nette
- Régler l'objectif *Mettre la lame semi, miroir superposer les deux réticules Puis bouger l'oeil*
  - $\Delta$  Ne plus toucher
- Régler le collimateur *Placer l'entrée du collimateur au foyer objet*
  1. Placer une source lumineuse devant la fente du collimateur
  2. Aligner le collimateur et la lunette
  3. Jouer sur le tirage du collimateur pour placer la fente d'entrée dans le plan focal de la lentille du collimateur
  4. L'image de la fente formée par le collimateur est à l'infini et est donc vue nette

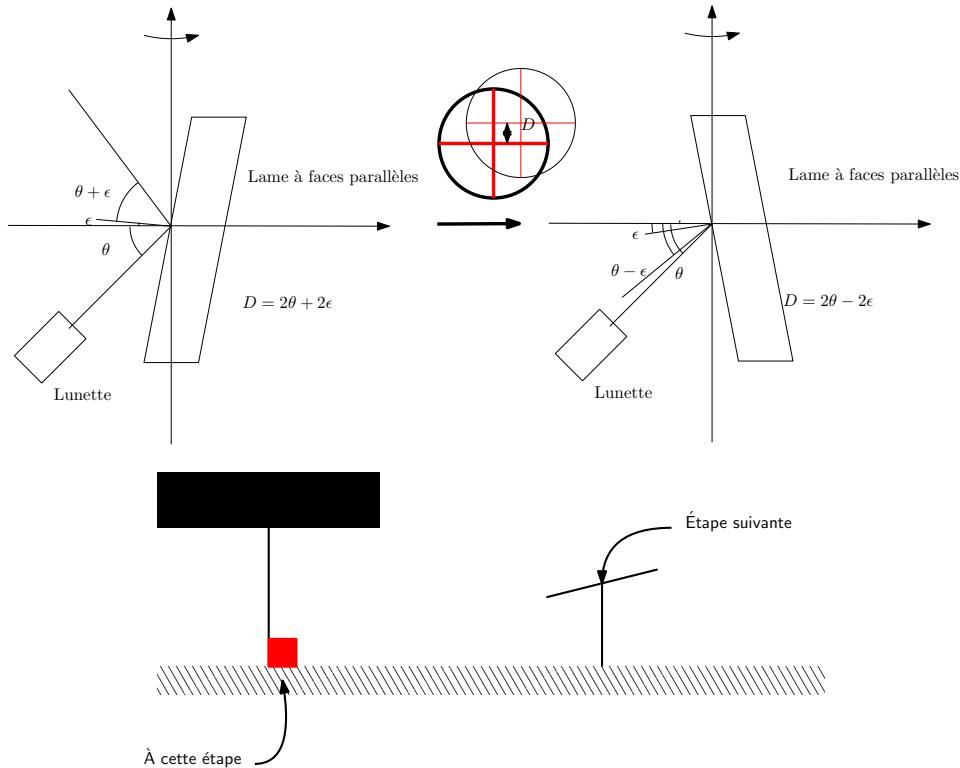
Méthode



## Régler l'horizontalité du goniomètre

Ce réglage règle la vis au niveau de la lunette

1. Enclever la lame-semi
2. On place la lame à faces parallèles *Aligné avec une vis*
3. On cherche à superposer les deux réticules pour  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$ 
  - Moitié de réglage sur vis lunette et autre moitié pour vis la plus proche
  - On tourne la plateforme de  $\pi$  et on recommence
  - Réglage terminé si superposés pour les deux angles



4. Pour chaque objet, on réalise une autocollimation
  - Mettre la lame-semi et la lampe
  - Superposer les réticules
  - On joue seulement sur les vis de la plateforme *plus proche* pour avoir une orthogonalité spécifique à chaque objet

## Incertitudes

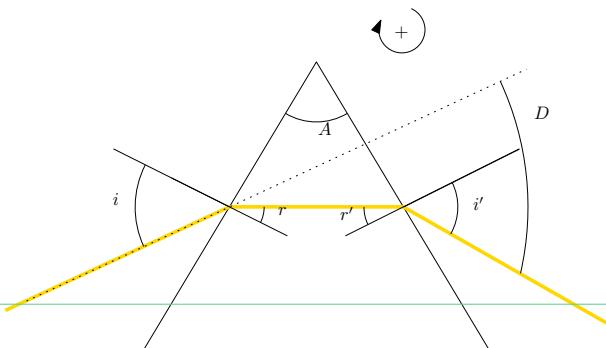
- Incertitude de pointé *Largeur de la fente*
- Incertitude de lecture *Plus petite graduation*

On règle la largeur de la fente pour que les deux incertitudes soient du même ordre

On a  $u(\alpha) \approx$  Quelques  $\frac{1}{60}$  de degrés

## Prisme

- $n \sin r = \sin i$
- $n \sin r' = \sin i'$
- $A = r + r'$
- $D = i + i' - A$



## Angle minimal de déviation

- Incidence rasante
- On suit la raie en bougeant la plateforme
- On détermine l'angle pour laquelle la raie fait demi tour

$$D_M \text{ pour } i = i' = \frac{A + D_M}{2}$$

Retour inverse de la lumière

$$n = \frac{\sin\left(\frac{A + D_M}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$$

## Méthode Centrale Express

- On place la lunette en face de la lampe Mesuré sans prisme
- Placer le prisme orthogonalement à la lunette Autocolimation
- Mesurer les différents angles

## Émergence rasante

- Incidence rasante
- On suit la raie en bougeant la plateforme
- On continue après  $D_M$  pour trouver l'angle pour lequel la raie disparaît

– Repérer la normale à la face éclairée

$$n = \sqrt{\frac{1 + 2 \sin i_0 \cos(A) + \sin^2(i_0)}{\sin^2(A)}}$$

Démo

💡 En passant en mode autocollimation Lame semi + Lumière de la lunette et en superposant les croix on peut repérer la normale



D'abord regarder à l'oeil avant de pointer à la lunette



Pour observer le spectre, il faut se placer en incidence rasante



# VI TP de Chimie

## 1 Verrerie

Propriétés

### Verrerie

- Imprécis *Becher, Erlenmeyer, Verre à Pied*
- Honnête *Eprouvette graduée, pipette jaugée*
- Très précis *Pipette-Burette graduée*

Méthode

### Repérer un beau ménisque

- Intersection des deux pointes de la bande colorée
- Bas du ménisque pour une solution transparente
- Haut du ménisque pour une solution non transparente



On rincera toujours trois fois à l'eau distillée puis trois fois avec la solution

## 1 Filtration

- Essorage : On souhaite récupérer la phase solide
- Filtration : On souhaite récupérer la phase liquide

### Filtration sur Büchner

- Fixer la fiole à vide à l'aide d'une pince et poser le Büchner
- Humidifier le filtre avec du solvant et le poser en le faisant adhérer aux parois
- Verser le liquide puis ouvrir le robinet  
⚠ Ne plus y toucher
- Casser le vide en déconnectant le tuyau puis ajouter du solvant et procéder à la trituration
- Raccorder le vide puis attendre quelques minutes puis le casser à nouveau

Méthode

### Couche de Célite

*Si des impuretés sont susceptibles de boucher les trous, il faut former un gâteau de cérite*

- Mélanger de la cérite au solvant et l'appliquer sur le Büchner sous vide sur quelques cm
- Couper le vide rapidement

Méthode

## 2 Chauffage à reflux

### Mise en place

- Fixer d'abord le ballon sur une barre verticale
- Placer les tuyaux sur le réfrigérant puis le réfrigérant
- Poser la chauffe-ballon placé sur un boy en dernier

Méthode

### Type de chauffage

- Chauffe-ballon + Pierreponce
- Chauffe-ballon + Olive
- Plaque + Bain-Marie ( $<80^\circ$ ) ou bain d'huile

Définition

- ⚠ Une ampoule coulée est chirale
- En milieu anhydre, il faut utiliser une garde à  $\text{CaCl}_2$
- ⚠ Ne pas porter de gants

Propriétés

### Piège à gaz

*Il faut neutraliser les gaz toxiques avec un piège à gaz ou un entonnoir retourné*

- Gaz acide  $\text{HCISO}_2 \Rightarrow$  Solution basique
- Gaz basique  $\text{NH}_3 \Rightarrow$  Solution acide
- Gaz oxydant  $\text{Cl}_2 \Rightarrow$  Solution réductrice

### 3 Recristallisation

DEF: Technique basée sur la différence de solubilité entre le composé et les impuretés

Propriétés

#### Choix du solvant

- Composé peu soluble à froid et très soluble à chaud
- Impuretés très solubles à chaud et froid *Ou insolubles à chaud*

Méthode

#### Réalisation

- Dissoudre à chaud le solide pur le solide impur dans un minimum de solvant
  - Couvrir le solide de solvant dans un ballon ou un erlenmeyer et chauffer en ajoutant du solvant jusqu'à dissolution
  - Montage avec réfrigérant à air
  - Montage de chauffage à reflux *Facile de rajouter du solvant par le haut du réfrigérant*
- Refroidir à l'air puis dans la glace *Si la recristallisation ne démarre pas, gratter avec une baguette de verre*
- Essorer su Büchner ou sur verre frité *Transvaser avec une spatule*
- Sécher à l'étuve  $\Delta T < T_{fus}$

 Utilisation de deux solvants : un peu de bon jusqu'à dissolution puis du mauvais *eau* jusqu'à précipitation

Définition

DEF: Méthode de séparation d'un mélange liquide

- Liquides miscibles  $\Rightarrow$  Distillation simple ou fractionnée
- Liquides non ou partiellement  $\Rightarrow$  Distillation hétéroazotropique

Méthode

#### Distillation simple

- $\Delta$  Placer une olive ou des grains de pierre ponce dans le ballon *Éviter les retards*
- Possible si  $\Delta T^* > 80^\circ$

Méthode

#### Distillation fractionnée

- Succession de distillations simples
- $\Delta$  Olive ou pierre ponce
- Chauffer doucement au début
- Le débit de sortie doit être lent *2 gouttes par seconde*
- Augmenter la température après avoir récupéré A
- Ne pas chauffer le ballon à sec



- Tracer la **courbe de distillation**  $T(t)$  *Dès que la vapeur monte*
- Bien identifier les paliers pour changer de récipient

La pression peut être réduite à l'aide d'une trompe d'eau  $\Rightarrow$  Utilisation du pis de vache

### Hydrodistillation

- Même dispositif que la distillation simple en rajoutant un excès d'eau *Ou Bicol + Ampoule d'eau*
- Le mélange hétéroazotrope récupéré est décanté puis séché

### Montage Dean Stark

- ⚠ Solvant non *Ou partiellement* miscible et moins dense que l'eau
- On remplit d'abord le Dean-Stark à ras bord de solvant
  - ⚠ Le calcul du volume d'eau permet le calcul du rendement de la synthèse

## 5 Vérifications de pureté

### 5.1 Banc Kofler

#### Banc Kofler

- Étalonner le banc
  - $T_{fus}$  connue *Handbook* : Étalonner  $T_{fus}$  de l'étalon
  - $T_{fus}$  inconnue : Trouver grossièrement sa valeur pour choisir l'étalon
- Procéder à la mesure *Incertitude à 95% de 2°*

### 5.2 Indice de réfraction

#### Mesure de l'indice de réfraction

- Déposer quelques gouttes sur le prisme pour recouvrir la surface
- Rabattre le prisme d'éclairage
- Ouvrir l'obturateur et augmenter la luminosité
- Faire la mise au point sur les deux réticules croisés
- Ramener la croix sur la ligne de séparation

#### Correction de température

$$n^{20} = n^\theta + 4.5 \times 10^{-4}(\theta - 20)$$

$$n = n_A x_A + n_B x_B = n_A(1 - x_B) + n_B x_B$$

- Pour les mélanges binaires idéaux
- Permet de remonter à la composition

### 5.3 Chromatographies

DEF: On sépare deux substances grâce à leurs différences d'affinités pour deux phases *L'une mobile*

#### Types de chromatographies

- Absorptions-désabsorptions sur la phase stationnaire ⇒ Chromatographie d'absorption
- Différence de solubilité dans les deux phases ⇒ Chromatographie de partage
- Différence de coefficient de distribution ionique ⇒ Chromatographie ionique
- Différence de taille ⇒ Chromatographie d'exclusion

**Type de phase**

Phase mobile

- Gaz vecteur
- Éluant

Phase fixe

- Liquide imprégnant un support solide
- Solide *Absorption*

**CCM**

DEF: Les composants de l'échantillon montent par capillarité derrière le front du solvant

- Plus un soluté est donneur de liaisons  $H$  plus il s'accroche à l'absorbant et est retenu
- Plus un soluté est polaire plus il s'adsorbe facilement à la surface et est retenu
- Plus les interactions soluté-éluant sont fortes plus celui ci entraîne le soluté
- Plus un éluant est polaire plus il chasse les solutés de la phase fixe et les entraîne

$$R_f = \frac{d_i}{d_{\text{eluant}}}$$

- $R_f$  est le rapport frontal et ne dépend que de la température
- Il est identique pur et en mélange
- Il est indépendant des conditions expérimentales

Éluant	→			
Apolaire-aprotique	Éther de pétrole	Cyclohexane	\chem{CCl4}	Toluène
Polaire-aprotique	Dichlorométhane	Éther	Ethanoate d'éthyle	Acétone
Polaire-protique	Éthanol	Méthanol	Eau	Acide acétique

On choisit un éluant pour qu'aucun composé ne reste sur la ligne de dépôt

**CCM**

- Introduire l'éluant dans la cuve et la placer en fond de paillasse fermée
- Tracer un trait léger à environ 1cm du bas
- Préparer les solutions diluées (1-2%) dans un solvant volatil
- Placer des taches fines au capillaire
- Introduire la plaque et attendre que le solvant monte à 1cm du bord
- Retirer la plaque et pointer la hauteur de solvant
- Révélation à l'aide d'un révélateur ou d'une lampe UV *Plaque fluorescente*
- Entourer les taches et leur centre





# VII Informatique

Array

⚠ Module numpy

Créer un tableau	<code>a=array([1,2,3],[4,5,6])</code>
Accès à une case	<code>a[1_1,1_2]</code>
Dimension	<code>a.shape()</code>
Création d'une copie indépendante	<code>A1=copy(A)</code>

⚠ Tous les éléments du tableau doivent être du même type

Listes

Accès à l'élément <i>i</i>	<code>l[i]</code>
Ajout d'un élément en tête de liste	<code>l.append(x)</code>
Renvoi et suppression de la tête de liste	<code>l.pop()</code>
Renvoi et suppression du terme d'indice <i>i</i>	<code>l.pop(i)</code>
Longueur de la liste	<code>len(l)</code>
Création d'une copie indépendante	<code>l1=l.copy()</code> <small>Module copy ou l1=l[:]</small>

Tuple⚠ Structure non modifiable ⇔ *Ne sert à rien*

Créer un tuple	<code>t=1,2,3</code>
Accéder à l'élément <i>i</i>	<code>t[i]</code>

Dictionnaire

Création d'un dictionnaire vide	<code>dico= {}</code>
Ajout d'une valeur	<code>dico[cle]=valeur</code>
Suppression	<code>del dico[cle]</code>
Rechercher l'existence	<code>cle in dico</code>
Nombre de clés	<code>len(dico)</code>

La recherche dans un dictionnaire se fait en cout constant

## Chaînes de caractère

Création d'une chaîne	<code>ch="texte"</code>
Nombre de caractères	<code>len(ch)</code>
Accès au caractère $i$	<code>ch[i]</code>
Modification d'un caractère	$\Delta$ Impossible
Slicing	<code>ch[i:j]</code> <small>ch[i:j] : De i à la fin</small>
Concaténation	<code>ch1+ch2</code>
Répétition	<code>ch * n</code>
Découpage selon un séparateur $s$	<code>ch.split(x)</code>
Fusion selon un séparateur $s$	<code>ch.join(s)</code>

## Piles

### Opérations

- Création
- Empilement
- Dépilement
- Longueur
- Test si vide

PYTHON n'est pas adapté aux piles

⇒ On utilise les listes

*Une file est une pile renvoyant le premier introduit*

## Arbres

- Un arbre est modélisé par une liste de listes donnant pour chaque élément ses voisins
  - Un graphe est un ensemble de liens pouvant être orientés
- On le modélise souvent par une matrice<sub>liste</sub> adjacente donnant les liens aux voisins

DEF: Les algorithmes récursifs sont des algorithmes basés sur un principe de récurrence  
 La fonction s'appelle elle-même sous certaines conditions

- Les appels s'accumulent jusqu'à ce que l'un d'eux renvoie une valeur ce qui résoudra d'autres
  - ⚠ Il est important de s'assurer de la terminaison
  - ⇒ A une certaine condition l'appel renvoie une valeur *Souvent les conditions initiales*
- Le nombre d'appels est limité à 1000 par Python, on peut l'augmenter  
 Module sys : setrecursionlimit

 Pour montrer la terminaison ou la complexité on utilisera souvent des suites et des récurrences

### Inconvénients du récursif

- Couts cachés *De complexité importante (non O(1))*
- Appels identiques  
*On peut mémoiser* *Garder les résultats en mémoire, souvent à l'aide d'un dictionnaire*

### Diviser pour mieux régner

- **Diviser** : On découpe le problème en problèmes indépendants
- **Régner** : On résout les sous-problèmes
- **Combiner** : On combine les solutions du sous-problème

```
def hanoi(n,o,i,d): #On cherche à amener les éléments de o à d
    if n==1:
        print("De",o,"à",d)
    else:
        hanoi(n-1,o,d,i)
        print("De",o,"à",d)
        hanoi(n-1,i,o,d)
```

## 1 Vocabulaire

Définition

DEF: **Tri en place** : La liste est triée par le seul effet de permutations de ses termes

DEF: **La complexité moyenne** est l'espérance de la complexité de l'algorithme  
Par défaut on choisira une loi uniforme

⚠

Le tri en place ne renvoie rien et ne fait que modifier la liste

Propriétés

### Complexité des algorithmes étudiés

Algorithme	Pire des cas	En moyenne	Meilleur des cas	Coût spatial
Tri par sélection	$n^2$	$n^2$	$n^2$	1
Tri par insertion	$n^2$	$n^2$	$n$	1
Tri rapide	$n^2$	$n \ln n$	$n \ln n$	$n Pire des cas$
Tri fusion	$n \ln n$	$n \ln n$	$n \ln n$	$n$

“ Dans des cas particuliers, certains algorithmes de tris sont bien plus efficaces ”

▪ **Tri postal** pour une liste à valeurs dans un intervalle d'entiers

▪ On forme un dictionnaire des fréquences d'apparition

Propriétés

## 2 Tri par sélection *Selection sort*

– On recherche les plus petits éléments dans l'ordre pour les placer au début de la liste

– **Complexité**

$$-\sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} O(1) = O(n^2) \text{ dans tous les cas}$$

python

```
def triSelection(t):
    n=len(t)
    for i in range(n-1):
        ind = i
        #Recherche de la position
        for k in range(i+1,n):
```

```

if t[k]<t[ind]:
    ind=k
t[i],t[ind]=t[ind],t[i]

```

### 3 Tri par insertion *Insertion sort*

- En parcourant la liste on place les éléments à leurs positions relatives respectives
  - Tri naturel des cartes
- **Complexité**
  - Dans le meilleur des cas, la boucle tourne à vide :  $O(n)$
  - Dans le pire des cas :  $O(n^2)$  cf *Tri sélection*

```

def triInsertion(t):
    n=len(t)
    for i in range(1,n):
        ind=i
        #On positionne l'element parmi les precedents
        while ind>0 and t[ind-1]>t[ind]:
            t[ind-1],t[ind]=t[ind],t[ind-1]
            ind-=1

def triInsertionDecalage(t):
    n=len(t)
    for i in range(1,n):
        ind = i
        a=t[i]
        #Decalage vers la droite
        while ind>0 and t[ind-1]>t[i]:
            t[ind]=t[ind-1]
            ind-=1
        #Insertion a sa place
        t[ind]=a

```

 Toujours mettre la condition sur l'indice en premier dans le cas de plusieurs conditions

### 4 Tri rapide *Quick sort*

- On choisit le premier élément comme pivot
- On place tous les éléments inférieurs à sa gauche dans la liste *On le met à sa place réelle*
- On applique récursivement aux listes de gauche et de droite
- **Complexité**

- $O(n \ln n)$  dans le meilleur des cas

**A**

- On considère  $u_k = C_{2^k} \Rightarrow u_k = O(2^k) + 2u_{k-1}$
- $\frac{u_k}{2^k} = \frac{u_{k-1}}{2^{k-1}} + O(1) \Rightarrow u_k = O(k2^k)$  *Télescopage*
- Par croissance de  $C_n$ , on encadre entre deux puissances de 2  $C_n = O(n \log_2 n) = O(n \ln n)$

```
python"
def triRapide(t):
    n=len(t)
    if n<=1:
        return t
    else:
        tinf,tsup=[], []
        #Separation par rapport au pivot t[0]
        for i in range(1,n):
            if t[i]<t[0]:
                tinf.append(t[i])
            else:
                tsup.append(t[i])
        #Concaténation des sous-listes
        return triRapide(tinf)+[t[0]]+triRapide(tsup)
```



## 5 Tri fusion *Merge sort*

- On coupe la liste à la moitié
- On trie chaque sous liste récursivement
- On fusionne les listes triées
- **Complexité**
  - $O(n \ln n)$  dans tous les cas *Cf Tri rapide*

```
python"
def fusion(t1,t2):
    n1,n2=len(t1),len(t2)
    fus=[]
    i1,i2=0,0
    for i in range(n1+n2):
        #On pioche dans t1 si t2 vide ou l'element de t1< l'element de t2
        if (i1<n1 and i2<n2 and t1[i1]<=t2[i2]) or i2==n2:
            fus.append(t1[i1])
            i1+=1
        else:
            fus.append(t2[i2])
            i2+=1
    return fus

def triFusion(t):
    n=len(t)
    if n<=1:
        return t
```



```
    else:  
        tinf,tsup=triFusion(t[:n//2]),triFusion(t[n//2:])  
        return fusion(tinf,tsup)
```

## 1 Résolution d'équations

### 1.1 Zéros d'une fonction par dichotomie

On effectue une série de bisections sur le segment en restreignant l'intervalle d'étude au morceau contenant la solution

⚠ Il faudra adapter fonction à la fonction étudiée ⇒ Tableau de variation

```
def bisection (f ,a ,b ,eps):
    while b-a>eps:
        if f((a+b)/2)<0:
            a=(a+b)/2
        else:
            b=(a+b)/2
    return a
```



### 1.2 Zéros d'une fonction par la méthode de Newton

```
def newton(f ,df ,x0 ,eps):
    while f(x0-eps)>0:
        x0=x0-f(x0)/df(x0)
    return x0
```



On étudie la suite des points d'intersection des dérivées en  $f(u_n)$  :  $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$

Elle converge vers la solution de  $f(x) = 0$

⚠ Il faudra adapter la condition d'arrêt à la fonction étudiée ⇒ Tableau de variation

### 1.3 Zéros d'une fonction par la fonction fsolve

Il faudra préciser une valeur de départ à la fonction

```
import scipy.optimize as sco
f=lambda x:np.exp(x)-1/3
sco.fsolve(f ,2)
```



```
import numpy as np
import scipy.optimize as sco
def F(v):
```



```

    return v[0]**2+v[1]**2-1,3*v[0]+2*v[1]-1
sco.root(f,[0,0])
sol=sco.root(f,[0,0])
sol.x #Renvoie le tableau des solutions

```



On peut adapter le procédé à des fonctions vectorielles

## 2 Calcul intégral approché

### 2.1 Méthode des rectangles

On approche l'aire de la fonction par une suite de rectangles

$$\int_a^b f(t)dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

```

def rectangles(f,a,b,n):
    pas,s=(b-a)/n,0
    for i in range(n):
        s=s+f(a+i*pas)
    return (pas*s)

```



### 2.2 Méthode des trapèzes

On approche l'aire de la fonction par une suite de rectangles

$$\int_a^b f(t)dt - \frac{b-a}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} (f(a_k) + f(a_{k+1})) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

```

def trapezes(f,a,b,n):
    pas,s=(b-a)/n,0
    for k in range(1,n):
        s=s+f(a+k*pas)
    return (pas*s+pas*(f(a)+f(b))/2)

```



### 2.3 Méthode de Newton-Coates

```

import scipy as sci
sci.quad(f,inf,sup)

```



On peut aussi approximer la fonction par son polynôme interpolateur  
La fonction revoit l'approximation et une majoration de l'erreur

## 3 Résolution approchée d'une équation différentielle

### 3.1 Ordre 1

On cherche à résoudre  $y' = f(y, t)$

On approxime  $y(t + \tau) \approx y(t) + \tau y'(t) = y(t) + \tau f(y(t), t)$

Par récurrence  $y_{k+1} = y_k + \tau f(y_k, t_k)$  où  $t_{k+1} = t_k + \tau$

```
python
def euler (f,t0,T0,y0,nbpoints):
    tau,T,Y=(T0-t0)/(nbpoints-1),np.linspace(t0,T0,nbpoints),[y0]
    for k in range (nbpoints-1):
        Y.append (Y[k]+ tau*f(T[k],Y[k]))
    plt.plot(T,Y,linewidth=2,marker = 'o',label=nbpoints)
    plt.legend(loc='lower right')
    plt.show()
```

Le programme précédent peut aussi être appliqué à des vecteurs mis sous forme array

```
python
def f(X):
    return np.array([-X[1],X [0]])
def euler(X0,t,n):
    res=np.zeros([2,n +1])
    res[:,0]=X0
    for i in range(1,n+1):
        res [:,i]=res [:,i-1]+(t/n)*f(res [:,i-1])
    return res
```

## 3.2 Ordres supérieurs

On exprime l'équation  $y^{(n)} = f(y, \dots, y^{(n-1)}, t)$  comme  $Y = [y^{(0)}, \dots, y^{(n-1)}]^T = \Phi(Y, t)$

Exemple :  $y'' = -\sin(y)$  avec  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 0$ . On a  $\begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ \sin(y) \end{pmatrix}$

```
python
def euler(T,n):
    Y, tau=[[1 ,0]],T/(n-1)
    for k in range(n-1):
        [y ,yp]=Y[-1]
        y,yp=y+tau*yp,yp-tau*np.sin(y)
        Y.append([y ,yp])
    return Y

Y=euler(15,10000)
t=np.linspace(0,15,10000)
y=[Y[k][0] for k in range(len(Y))]
plt.plot(t,y,'red ',linewidth=2)
plt.show()
```

## 3.3 Méthodes de Runge-Kutta

La méthode de Runge-Kutta est une méthode d'Euler affinée et est utilisée dans la fonction odeint

```
import numpy as np
import scipy.integrate as sci
import matplotlib.pyplot as plt

f=lambda y,t:np.sin(y**2)
T=np.linspace(0,7,1000)
Y=sci.odeint(f,0.25,T)
plt.plot(T,Y, 'red ', linewidth=2)
```



## 1 Introduction et modèle relationnel

DEF: La gestion et l'accès à une base de données sont assurés par un ensemble de programmes qui constitue un **système de gestion de bases de données**<sub>SGBD</sub>

- Architecture des serveurs
  - Client-serveur : Les utilisateurs sont connectés au serveur
  - Trois-tiers : Les utilisateurs sont connectés au serveur par un intermédiaire

DEF: Dans le modèle relationnel : la base de données est structurée en un nombre fini de **relations**<sub>Tableaux</sub>

---

### Dénomination en SQL Définition

---

Relation	Tableau
Enregistrement	Ligne
Attribut	Nom des colonnes
Domaine	Type
Schéma relationnel	Ensemble de relations <sub>Attributs et Domaine</sub>

---

DEF: On appelle **clé candidate** tout attribut ou ensemble d'attributs d'une relation permettant d'identifier chaque enregistrement de manière unique

*On introduira souvent un identifiant*

DEF: On appelle **clé primaire** d'une relation la clé candidate retenue

Si elle est utilisée comme attribut d'une autre relation, elle sera **extérieure** à celle-ci

## 2 Algèbre relationnelle

---

Opération	Notation	Explication
Réunion	$\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$	Réunion des enregistrements
Intersection	$\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$	Intersection des enregistrements
Privé	$\mathcal{R}_1 \setminus \mathcal{R}_2$	$\mathcal{R}_1$ privé des enregistrements de $\mathcal{R}_2$
Projection	$\pi[A_1, \dots, A_2](\mathcal{R}_1)$	Suppression des attributs absents de la liste
Sélection	$\sigma[C](\mathcal{R}_1)$	Suppression des enregistrements ne vérifiant pas $C$
Produit cartésien	$\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$	Toutes les combinaisons des enregistrements possibles
Jointure	$\mathcal{R}_1 \bowtie [C] \mathcal{R}_2$	Produit cartésien privé des enregistrements ne vérifiant pas $C$

---

### 3 SQL

Opération	Commande
Projection	<code>SELECT A1, ..., AN FROM R</code>
Ordonner	<code>ORDER BY ASC / DESC</code>
Sélection	<code>SELECT A1, ..., AN FROM R WHERE C</code>
Alias	<code>SELECT A AS A2 FROM R</code>
Jointure	<code>SELECT A1, ..., AN FROM R1 JOIN R2 ON C</code>
AutoJointure	<code>SELECT A1, ..., AN FROM R N1 JOIN R N2 ON C</code>
Appartenance à un attribut	<code>IN</code>
Union	<code>UNION</code>
Intersection	<code>INTERSECT</code>
Privation	<code>EXCEPT</code>

⚠️ Lors d'une jointure, il ne faut surtout pas oublier d'attributs communs

Fonction d'agrégation <small>Calculs sur les attributs</small>	Résultat
<code>COUNT(*)</code>	Nombre de lignes de la relation
<code>COUNT(A)</code>	Nombre de lignes remplies dans $A$
<code>SUM(A)</code>	Somme de $A$
<code>AVG(A)</code>	Moyenne de $A$
<code>MAX(A)</code>	Maximum de $A$
<code>MIN(A)</code>	Minimum de $A$

– On les utilise en faisant des regroupements  
`SELECT fonction, attribut(s) FROM relation GROUP BY attribut(s)`

– Si la condition ne porte pas sur les valeurs de la fonction, un `WHERE` peut être utilisé, sinon  
`SELECT fonction, attribut(s) FROM relation GROUP BY attribut(s) HAVING condition`

– La variante `COUNT DISTINCT` renvoie le nombre d'enregistrements distincts

– On peut imbriquer plusieurs requêtes, souvent à l'aide de `WHERE` ou `HAVING`

#### Implémentation en Python

Méthode

Librairie	<code>sqlite3</code>
Connexion à la base de données	<code>conn=sqlite3.connect('nom.db')</code>
Curseur	<code>c=conn.cursor()</code>
Exécution de la capsule	<code>c.execute('commande')</code>
Récupération du résultat	<code>print(c.fetchall())</code>





## VIII Lettres

## 1 Le Banquet

### Discours de Phèdre

- Eros est avant tout un « *Dieu vénérable* »
- Eros articule son discours autour de trois points pour expliquer cet adjectif
  - Noble *Le plus ancien*
  - Grand *Sa présence rend les choses merveilleuses*
  - Utile *Effets positifs sur le comportement moral des hommes : Recherche du beau ⇒ Bien*
- Eros donne aux amants un esprit de Sacrifice *Exemple d'Alceste et Achille ≠ Orphée*

### Discours de Pausanias

- Eros est un dieu intrinsèquement neutre *Pas de valeur morale intrinsèque - Tout dépend de l'intention*
- Chaque relation entre aimé et amant est unique et il est difficile de lui affubler une valeur morale
- Il n'y a pas un Eros mais deux associés à chaque Aphrodite :
  - Eros vulgaire *Hétérosexuel, Corps, Réalisation > Intention ⇒ Traduit d'un « Appétit » Epithumia*
  - Eros céleste *Masculin, Âme, Beauté de l'intention*
- Pédérastie : Tout dépend de la manière dont on pratique la pédérastie *L'un ou l'autre Eros*  
Position d'Athènes *L'aimé doit s'améliorer par l'amant Double émulation à la vertu*

### Discours d'Eryximaque

- Universalise la part de l'amour dans le cosmos
- Discours imprégné de science et méthodique du bon médecin *Favorise le bon Eros*
- Trois arguments
  - Amour présent chez tous les êtres vivant *Humains, animaux et plantes* pour réunir les contraires
  - L'amour est associé à la paix et l'harmonie *En unifiant les contraires trouvables partout Santé-Arts*
  - L'amour surplombe tous les arts et toutes les disciplines *Médecine-Arts-Sciences-Sport-Agriculture*
- Vision pragmatique de la religion *Pieu = Reconnaître le bon Eros Celui qui assure l'équilibre*

### Discours d'Aristophane

- Introduction du rire et du mythe dans le discours
- Mythe d'Aristophane
  - À l'origine l'homme était une boule *3 types : Homme, Femme, Androgyne*
  - Les hommes boules entreprennent d'escalader les cieux et sont punis en étant coupés en deux
  - Les hommes passent leur temps à rechercher leur moitié *Arrêtent de se nourrir et de travailler*
  - Zeus déplace les organes sexuels, permettant l'assouvissement du désir par l'union sexuelle
- Deux **guérisons** par l'amour
  - L'amour guérit un manque par la reconstitution provisoire de **l'unité**
  - L'amour garantit le fonctionnement de la **cité**

- La dimension morale de son discours est affirmée : Il faut respecter les dieux
- L'amour permet de retrouver une unité originale et n'a rien à voir avec une altérité
- Le Discours fonctionne comme un intermède

### Discours d'Agathon

- Reproche aux autres de s'attarder sur les effets de l'amour au lieu de s'intéresser à sa nature
- Discours très bien construit *Parties-Arguments-Exemples*
- Trois arguments
  - Beautés extérieures d'Eros *Jeune Car instaure la paix parmi les Dieux-Délicat-Ondoyant Changeant et imperceptible*
  - Vertus d'Eros *Justice-Modération-Courage-Sagesse*  
Monde gouverné par la nécessité → Monde gouverné par l'amour
  - Eros comme dieu enchanteur et guide des hommes

### Discours de Socrate

- Point culminant du dialogue traduisant des idées de Platon
- Diotime est une prêtresse ⇒ Eros s'exprime lui-même par sa bouche *Malgré longue chaîne de transmission*
- Diotime ne profère pas un discours car Socrate synthétise divers moments de dialogue
- **Plan** du dialogue
  - Nature démonique et généalogie d'Eros *Fils de Poros et Penia*
  - L'amour veut la possession éternelle des belles et bonnes choses
  - La besogne de l'amour est la réalisation de ce désir d'immortalité et d'éternité par la fécondité *Corps et âme Poètes, inventeurs*  
⇒ Définir l'immortalité par des termes féminins *Se réalise dans l'accouchement*
  - L'amour comme initiation *Étapes initiatiques : Corps → Occupations → Connaissance → Beauté en soi Science suprême*  
L'initié est celui qui est aimé des dieux
- **Thèses** principales
  - Eros est un *Daimon Intermédiaire* et non un Dieu *Ni Bon ni beau ni laid ni mauvais*
  - Recours au mythe : Généalogie et conception d'Eros *Caractéristiques issues des deux parents*
  - Parenté indirecte entre l'amour et la philosophie *Philosophe ni ignorant ni sage mais désir de savoir*
  - Eros n'est pas désir de beau et de bon mais d'immortalité  
→ Amour = Désir de possession éternelle
  - Immortalité s'incarne pour le humain dans la procréation *Par le corps et par l'âme*
  - Diotime propose une révélation *Ascension érotique* du monde sensible au monde des idées  
L'amour est une expérience à la fois érotique et religieuse par laquelle on devient l'aimé des dieux

### Discours d'Alcibiade

- Alcibiade propose un règlement de compte et un discours qui est dicté par l'ivresse  
Son discours qui ne devrait être réservé qu'aux dieux
- Socrate apparaît comme celui qui suscite la honte *Socrate est l'incarnation de la conscience d'Alcibiade*
- Alcibiade dresse un portrait ambivalent de Socrate
  - Compare Socrate aux silènes *Sculpture cachant derrière une laideur des figurines divines*
  - Comparaison avec le satyre Marsyas *Socrate a sa voix comme instrument de musique ⇒ Charme*
  - Alcibiade insiste sur les effets de Socrate sur lui *Transport et honte*
  - Tentatives d'Alcibiade pour capturer Socrate
  - Le marché de dupe qu'Alcibiade lui propose
  - Les qualités physiques de Socrate

## 1 La Chartreuse de Parme<sub>1839 - Roman d'aventures</sub>

- « *Il sourit, elle rougit profondément* »
- « *Ainsi, sans conséquence et pour une soirée permettez-moi de jouer auprès de vous le rôle d'amoureux* »
- ▷ « *Songe qu'une proclamation, qu'un caprice du cœur précipite l'homme enthousiaste dans le parti contraire à celui qu'il a servi toute sa vie* »
- « *Elle me demandera des transports, de la folie, et je n'aurais toujours à lui offrir que l'amitié la plus vive, mais sans amour* »
- « *Il suffit de proférer un mensonge, il suffit de dire à une femme charmante et peut-être unique au monde, et pour laquelle j'ai l'amitié la plus passionnée : Je t'aime, moi qui ne sais pas ce que c'est que d'aimer d'amour* »
- ▷ « *Si Fabrice ne l'eut pas tant aimée, il eût bien vu qu'il était aimé, mais il avait des doutes mortels à cet égard* »
- ▷ « *L'amour observe des nuances invisibles à l'oeil indifférent, et en tire des conclusions infinies* »
- ▷ « *J'étais amoureux de l'amour [...] mais il paraît que la nature m'a refusé un cœur pour aimer* »
- ▷ « *Plus convaincu que jamais que sa destinée le condamnait à ne jamais connaître la partie noble et intellectuelle de l'amour* »
- ▷ Prince « *Avec un peu de bonne politique il ne serait pas impossible d'en faire un jour ma maîtresse* »  
*Pour les utilitaires la politique est un moyen d'accéder à l'amour*
- ▷ « *La nature m'a privé de cette sorte de folie sublime* »
- « *Il avait cette joie suprême désespérée d'être aimé par l'être divin qui occupait toutes ses pensées* »
- « *Tous ces menteurs du monde en parlent comme une source de bonheur* »
- ▷ « *Ce qu'on appelle amour, [...], serait-ce encore un mensonge* »
- ▷ « *Elle était si belle, à demi vêtue et dans cet état d'extrême passion, que Fabrice ne put résister à un mouvement presque involontaire. Aucune résistance ne fut opposée.* » *Rapport sexuel avec pudeur*
- « *C'est moi, lui dit une voix chérie, qui suis venue ici pour te dire que je t'aime, et pour te demander si tu veux m'obéir* »
- « *Entre ici, ami de mon cœur* » *Le rapprochement physique a toujours lieu*

## 2 Le Banquet<sub>-380 - Dialogue philosophique</sub>

- ▷ SOCRATE : « *Je vais souper chez Agathon. [...] Voilà pourquoi je me suis fait beau, car je désire être beau pour aller chez un beau garçon* »
- ▷ SOCRATE : « *Ce serait une aubaine, Agathon, si le savoir était de nature à couler du plus plein vers le plus vide, pour peu que nous nous touchions les uns les autres, comme c'est le cas de l'eau qui par l'intermédiaire d'un brin de laine, coule de la coupe la plus plein vers la plus vide* »
- ▷ SOCRATE : « *Moi, qui déclare ne rien savoir sauf sur les sujets qui relèvent d'Eros* »
- ▷ PHÈDRE : « *Car le principe qui doit inspirer pendant toute leur vie les hommes qui cherchent à vivre comme il faut, cela ne peut être ni les relations de famille, ni les honneurs, ni la richesse, ni rien d'autre qui les produise, mais cela doit être au plus haut point l'amour* »
- ERYXIMAQUE : « *La médecine est donc toute entière gouvernée par ce dieu et il en va de même pour la gymnastique et pour l'agriculture* »
- ▷ PHÈDRE : « *L'amant est une chose plus divine que l'aimé puisqu'un dieu l'inspire* »
- PAUSANIAS : « *Si l'on accepte d'être au service de quelqu'un en pensant que par son intermédiaire on deviendra meilleur dans une forme de savoir quelconque ou dans un autre domaine, cet esclavage accepté* »

*n'a rien de honteux et ne relève pas de la flatterie »*

- ▷ ARISTOPHANE : « *Aussi est-ce au souhait de retrouver cette totalité, à sa recherche, que nous donnons le nom amour* »
- SOCRATE : « *Ce qui attire l'amour, c'est ce qui est réellement beau, délicat, paraît, c'est à dire ce qui dispense le bonheur le plus grand* »
- ▷ SOCRATE : « *L'objet de l'amour c'est, en somme, d'avoir à soi ce qui est bon toujours* »
- SOCRATE : « *Voilà donc quelle est la droite voie qu'il faut suivre dans le domaine des choses de l'amour ou sur laquelle il faut se laisser conduire par un autre : c'est en prenant son point de départ dans les beautés d'ici-bas pour aller vers cette beauté-là, de s'élever toujours, comme au moyen d'échelons, en passant d'un seul beau corps à deux, de deux beaux corps à tous les beaux corps, et des beaux corps aux belles occupations, et des occupations vers les belles connaissances qui sont certaines, puis des belles connaissances qui sont certaines vers cette connaissance qui constitue le terme, celle qui n'est autre que la science du beau lui-même, dans le but finalement de connaître la beauté en soi* »
- ▷ SOCRATE : « *Tous les êtres humains sont gros dans leur corps et dans leur âme, et, quand nous avons atteint le terme, notre nature éprouve le désir d'enfanter* »
- ▷ SOCRATE : « *Ce que tu me demandes Alcibiade, c'est comme troquer l'or contre le cuivre* » *Amour des idées > Amour des corps*
- ▷ SOCRATE : « *C'est pour assurer leur immortalité que cette activité sérieuse qu'est l'amour ressentit à tous les êtres* »
- ▷ ALCIBIADE : « *C'est au cœur [...] que j'ai été frappé et mordu par les discours de la philosophie* »

### 3 Le Songe d'une nuit d'été<sub>1594</sub> - Pièce baroque

- ▷ THÉSÉE : « *Je t'ai courtisé avec mon épée et conquis ton amour en te faisant violence* »
- ▷ HERMIA : « *Je ne sais quelle puissance me rend téméraire* »
- ▷ HÉLÉNA : « *L'amour ne voit pas avec les yeux, mais avec la pensée ; ainsi on peint aveugle Cupidon ailé* »
- LYSANDRE : « *Mais aujourd'hui où je touche la cime de l'humaine lucidité. La raison devient le guide de ma volonté et me conduit vers vos yeux* »
- ▷ BOTTOM : « *Il me semble madame que vous ayez peu de raison pour cela. Et d'ailleurs à dire la vérité, la raison et l'amour ne vont guère de compagnie de nos jours* »
- OBÉRON : « *Ce qu'à ton réveil tu verras, pour amour vrai tu le prendras* »
- ▷ LYSANDRE : « *Quand parlent des amoureux c'est à l'amour d'interpréter le sens* »
- OBÉRON : « *Quand ils se réveilleront, toute cette dérision leur paraîtra un songe, une vaine vision* »
- ▷ THÉSÉE : « *Les amoureux et les fous ont des cerveaux bouillants, des fantaisies visionnaires, qui conçoivent plus de choses que la froide raison n'en perçoit* »
- ▷ THÉSÉE : « *Le fou, l'amoureux et le poète sont d'imagination tout entiers pétris* »



Pas de renvoi aux œuvres du programme des deux années

Méthode

## 1 Mines Ponts

### Introduction

- *Le texte sur lequel j'ai travaillé est un extrait de ... écrit par ... et publié en ... . Je commencerai par présenter ce texte avant d'en faire une analyse de détail*
- Présentation de la thèse défendue et de son enjeu
- Présentation de la structure argumentative *Fournir numéros de lignes et de paragraphes*
- *Je vais maintenant passer à l'analyse de détail*

Méthode

### Analyse de détail

- On utilise la troisième personne *L'auteur pense que*
- Analyse méthodique de l'argumentation en suivant l'ordre du texte
- Ne pas multiplier les remarques d'ordre stylistique
- Conclusion
- *Ce texte dont je viens de faire l'analyse, défend dans le n<sup>e</sup> paragraphe l'idée que ... . Cette idée qui a retenu mon attention et fera l'objet de mon commentaire*

Exemple

### Vocabulaire de l'argumentation

- Thèse
- Thèse adverse
- Argument
- Exemple
- Lieu commun
- Paradoxe
- Démarche déductive
- Démarche inductive
- Polémique
- Invective
- Raisonnement par l'absurde
- Syllogisme
- Argument d'autorité
- Argument à contrario
- Elargissement ou restriction du propos
- Bilan partiel
- Relance de réflexion
- Transition
- Liens et relations logiques
- Satire et ironie

Méthode

### Commentaire

- Introduction *Questions de problématique - Annonce de plan*
- Développement *Deux ou trois parties de chacune 2-3 arguments, exemples pas trop connus, Transitions entre chaque partie*
- Conclusion *Résumé et position personnelle ferme*

## 2 Polytechnique

## Résumé

- *Le texte qui m'a été proposé a été écrit par ... Il est extrait de ... paru en ...  
Je ferai tout d'abord le résumé de ce texte*



Même système d'énonciation que le texte

## Commentaire d'ensemble

- Présenter les enjeux du texte
- Dégager une idée du texte et en justifier le choix
- Proposer une problématique et un plan
- Développement *Exemples précis et développés*
- Conclusion *Bilan et position personnelle*

### Introduction de la dissertation

#### ⚠ Deux paragraphes

- Accroche *Introduit le sujet*
- Présentation du sujet *Auteur - Citation - Source - Blabla sur l'auteur*
  - Citation courte : reprise entièrement
  - Citation longue : choix de certains éléments du sujet
- Analyse de la citation *Repérer et définir les mots clés- Expliciter les implicites - Repérerer paradoxes*
  - Figures de style, jeux de mots, temps des verbes, registre*
- Reformuler de manière synthétique la thèse brièvement *Distance critique*
- Problématique sous la forme d'une question *Trouver le paradoxe - Ce qui n'est pas évident*
- Présentation du Corpus *Souligner les titres - Manière chronologique*
  - Platon Banquet (-380) Dialogue philosophie
  - Shakespeare Songe d'une nuit d'été (1594) Pièce baroque
  - Stendhal La Chartreuse de Parme (1839) Roman d'aventure et d'amour sublime
- Annonce du plan *Différents verbes d'introduction -*

### Construire un raisonnement - Méthode 3D

- Construire un raisonnement en trois points
  - Décrire *Certes* : Aller dans le sens du sujet
  - Discuter *Cependant* : Prendre ses distances avec le sujet
  - Dépasser *Finalement* : Proposer une synthèse
    - ⚠ Ne pas oublier le sujet

### Méthode pour le plan

- Le plan doit contenir trois parties illustrées par trois arguments *paragraphes*
- Un argument est lui-même illustré par au moins deux des trois œuvres du programme

### Conclusion

#### – Bilan

*Essayer de réfléchir laquelle des œuvres se rapproche le plus de l'énoncé du sujet*

On reformule le sujet pour chacune des œuvres au programme

#### – Ouverture *Référence hors programme*





# IX Deutsch

### Introduction

- Accroche *Actualité, culture générale*
- Présentation du document/source *Orientation politique*
- Thème général
- Plan de l'oral
  - « *Zuerst werde ich den Text erläutern, ihn anschließend kommentieren* »

### Résumé

- Structure du texte *Résumé bref de chaque partie*
- Résumé du texte avec reformulation

### Commentaire

- Prolonger des points de réflexion du journaliste *Causes-conséquences, évolution, exemples*
- Prendre position par rapport à l'article

### Idées pour le commentaire

- Réactions personnelles
- Contexte
- Exemples
- Citation
- Critiquer & Justifier
- Parallèles
- Format du document
- Généralisation

### Conclusion

- Résumé bref du contenu du texte *Résumé*
- Résumé bref de l'enjeu du texte *Commentaire*
- Élargissement sur un thème voisin



L'approche doit être totalement objective *faits et points de vue*

### Plan de la synthèse

- Titre descriptif *doit résumer le thème*
- Introduction
  - Accroche *Actualité, contexte*
  - Présentation des documents *nature*
  - Problématique générale
  - Plan
- Développement
  - Deux ou trois parties
  - Articulé autour de liens logiques entre les idées
  - Référence au texte sans longues citations
- Conclusion *Bilan*

### Idées de plans

- Avantages - Inconvénients
- Problème - Causes - Conséquences *Solutions*



Il est important de confronter les documents

- Idées qui se complètent, se renforcent, s'opposent

On articule l'argumentation autour des liens logiques entre les documents



On ne commenterà pas le style des documents



X English

**Introduction**

- **Amorce**
- **Présentation** : « *This type from source attempts to give grounds to thème* »
- **Transition** : « *Let's start off with a summary* »

**Synthèse**

- Points principaux du document reformulés *Exemples du document - Liens logiques*

**Commentaire**

- **Transition** : « *I shall now comment upon the type* »  
*Il faut si possible justifier le plan du commentaire qui doit suivre*
- **Annonce du plan** : « *I would like to dwell on some aspects, which, I think are worth commenting on* »  
*Le plan est annoncé sous forme de questions*
- On annonce d'abord pour chaque point idée générale puis exemples

**Idées pour le commentaire**

- Réactions personnelles
- Contexte
- Exemples
- Citation
- Critiquer & Justifier
- Parallèles
- Format du document
- Généralisation

**Conclusion**

- **Résumé du débat** *Résumé et commentaire* : « *To put in a nutshell* »
- Ouverture *Parallèle ou réflexion personnelle*
- « *Thanks for listening* »

