

Fiches de Révisions

PCSI

« *On peut tout ce qui ne dépend
que de notre volonté* »

MARCEL PROUST

Le présent ouvrage est un recueil de mes fiches de révisions conçues tout au long de l'année.

Ces fiches ont été au cours de mon année de *sup* la base de mon travail et m'ont été d'une grande aide lors de mes révisions.

Je tiens à remercier mes professeurs, listés ci-dessous, dont les cours et remarques ont été un support précieux pour la rédaction de mes fiches, ainsi que mes camarades dont les conseils et le soutien ont été grandement appréciés.

Mr Laurent Kaczmarek	Kaczmy	Maths Informatique
Mr Nicolas Schlosser	Schlossy	Physique
Mr Stéphane Mansuy	Suy	Chimie
Mr Maël Morellec	Maël	SII
Mme Florence Rougerie	Frau Rougerie	Allemand
Mr Mathias Degoute	Mister Degoute	Anglais
Mr Pascal Morin	Mr Pascal Morin	Lettres

Bonne lecture
Bon travail

Kilian Rouge

Pour signaler une erreur ou me contacter: *yomanager@icloud.com*

Notes de l'auteur

Si j'ai réalisé la majorité des illustrations et figures de cet ouvrage, une partie a été empruntée à d'autres sources qu'il convient de citer ici.

De plus certains contenus ont été inspirés de ceux de mes professeurs.

Élément	Source
Nature de la lumière	<i>Wikipedia</i>
Surfaces PVT	<i>Hyperphysics.edu</i>
Schéma bloc	Documents de cours de François Rouge
Schémas blocs équivalents	Site de l'école des Mines
Figure de changement de base	Documents de cours de François Rouge
Schéma cinématique	Documents de cours de François Rouge
Liaisons normalisées	Site de David Noël
Programme matrices	Rachel Piednoir

J'ai décidé de placer mon travail sous la licence suivante: *CC BY-NC-ND 4.0*

Creative Commons	Le présent ouvrage peut être librement partagé
Attribution	Cet ouvrage doit être crédité à son auteur
Usage non commercial	L'utilisation commerciale de cet ouvrage est interdite
Modification	Le partage de cet ouvrage modifié est interdit

Pour plus d'informations, je vous invite à consulter:

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.fr>

TABLE DES MATIÈRES

I Maths	5
1 Raisonnements et arithmétique	8
2 Calculs algébriques	11
3 Calculus	15
4 Suites numériques	20
5 Limites de fonctions	24
6 Continuité des fonctions	26
7 Dérivation	28
8 Asymptotique	31
9 Matrices	37
10 Ensembles et applications	40
11 Dénombrement	44
12 Structures algébriques	47
13 Espaces vectoriels	50
14 Applications linéaires	54
15 Polynômes	58
16 Matrices d'application linéaires	62
17 Séries numériques	66
18 Intégration	71
19 Déterminants	76
20 Espaces préhilbertiens réels	79
21 Espaces probabilisés	82
22 Variables aléatoires	85
II Physique	89
1 Sciences Physiques	92

2	Oscillateurs harmoniques	95
3	Phénomènes ondulatoires	97
4	Superposition d'ondes	99
5	Optique géométrique	103
6	Circuits électriques	110
7	Systèmes linéaires du 1 ^{er} ordre	114
8	Systèmes linéaires du 2 ^e ordre	116
9	Régime sinusoïdal forcé	118
10	Filtres linéaires	122
11	Cinématique	125
12	Mécanique Newtonienne	127
13	Systèmes à un degré de liberté	133
14	Mouvement d'une particule chargée	135
15	Monde quantique	138
16	Moment cinétique	142
17	Mouvements à forces centrales	147
18	Statique des fluides	151
19	Thermodynamique macroscopique	154
20	Cinétique des gaz	160
21	Premier principe de la thermodynamique	162
22	Second principe de la thermodynamique	168
23	Machines thermiques	171
24	Champs magnétiques	175
25	Induction	178
III	Chimie	181
1	Atomistique	184
2	Structure des molécules	187
3	Interactions de faible énergie	189

4	Équilibres physico-chimiques	191
5	Cinétique formelle	194
6	Mécanismes réactionnels	197
7	Stéréochimie organique	199
8	Spectroscopie	203
9	Halogénoalcanes	206
10	Organomagnésiens	210
11	Réactions acido-basiques	213
12	Complexes	217
13	Précipitations	219
14	Oxydo-réduction	221
15	Activation et protection de fonctions	225
16	Oxydoréduction en chimie organique	230
17	Cristallographie	233
IV	SII	237
1	Analyse de systèmes	240
2	Réponse temporelle des systèmes	243
3	Cinématique	246
V	Informatique	250
1	Éléments basiques de Python	252
2	Entiers	254
3	Algorithmique	255
4	Modules en Python	256
5	Analyse numérique	258
6	Calcul matriciel	262
7	SQL	265

VI Lettres	268
1 Méthodologie	270
2 Méthodologie de l'oral	272
3 Programme 2017-2018	274
VII Deutsch	279
1 Méthode de l'oral	282
2 Synthèse	283
VIII English	284
1 Méthode de l'oral	286

I Maths

1 La langue symbolique

\neg	Négation
\wedge	Conjonction (et)
\vee	Disjonction (ou)
\Rightarrow	Implication
\Leftrightarrow	Équivalence

2 Raisonnements

2.1 Méthodes de démonstration

- Démonstration d'une **disjonction**
 - $p \vee q$ en montrant que si p fausse, q vraie
- Démonstration d'une **implication**
 - Démonstration directe
 - **Contraposée** : $p \Rightarrow q \approx \neg q \Rightarrow \neg p$
- Démonstration d'une **équivalence**
 - Équivalences successives
 - Double implication $p \Leftrightarrow q \approx p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$
- Raisonnement par l'**absurde**
 - Supposer $\neg p$ et montrer son absurdité pour montrer p

2.2 Stratégies notables

- Disjonction de cas
- Preuves d'unicité (absurde)
- Analyse-Synthèse
 - Analyser les caractéristiques des solutions
 - Déduire de ces caractéristiques les solutions véritables

3 Arithmétique

3.1 Entiers

Parties majorées et minorées

- Définition
- A minorée_{majorée} si $\exists m_M \in \mathbb{Z}, \forall a \in A, a \geq m_a \leq M$
On dit que m_M est un minorant_{majorant} de A
 - a est un plus petit_{grand} élément de A si $a \in A$ et a minorant_{majorant} de A

Propriétés de \mathbb{N}

- Toute partie non vide et minorée de \mathbb{Z} admet un plus petit élément
- Toute partie non vide et majorée de \mathbb{N} admet un plus grand élément
- Toute suite décroissante d'entiers naturels est stationnaire
- Il n'existe pas de suite strictement décroissante d'entiers naturels

Raisonnement par récurrence

- **Simple** : $\begin{cases} Hr(n_0) \text{ vraie} \\ \forall n \geq n_0, Hr(n) \Rightarrow Hr(n+1) \end{cases}$
 - **Double** : $\begin{cases} Hr(n_0) \text{ et } Hr(n_0 + 1) \text{ vraies} \\ \forall n \geq n_0, Hr(n) \text{ et } Hr(n+1) \Rightarrow Hr(n+2) \end{cases}$
 - **Forte** : $\begin{cases} Hr(n_0) \text{ vraie} \\ \forall n \geq n_0, Hr(n_0) \dots Hr(n) \Rightarrow Hr(n+1) \end{cases}$
- Alors $\forall n \geq n_0, Hr(n)$ vraie

3.2 Divisibilité

Division euclidienne

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$

$$\exists !(q, r) \in \mathbb{Z}^2, \quad \begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < |b| \end{cases}$$

- a divise b , b est un multiple de a (noté $a|b$) si $\exists c \in \mathbb{Z}, b = ac$
- Si $b \neq 0$, $b|a \Leftrightarrow$ Le reste dans la division euclidienne de a par b est nul

3.3 Congruences

DEF: a est congru à b modulo $n_a = b[n]$ si $n|(a - b)$

- La relation de congruence est une relation d'équivalence

- Compatibilité avec les opérations : $\begin{cases} a = b[n] \\ a' = b'[n] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + a' = b + b'[n] \\ a \times a' = b \times b'[n] \end{cases}$
D'où $\begin{cases} a = b[n] \Rightarrow a^p = b^p[n] \\ a = b[n] \Rightarrow a \times c = b \times c[n] \end{cases}$
- Plus précisément : $a = b[n] \Rightarrow a \times c = b \times c[n \times c]$
- $\begin{cases} a = r[b] \\ 0 \leq r < |b| \end{cases} \Leftrightarrow r$ est le reste dans la division euclidienne de a par b
- Si $m = r[10]$ et $r \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$ alors r est le chiffre des unités de m

3.4 PGCD et PPCM

DEF: L'ensemble des diviseurs communs à $|a|$ et $|b|$ admet un plus grand élément appelé plus grand commun diviseur $PGCD$ à a et b (noté $a \wedge b$)

DEF: L'ensemble des multiples dnas \mathbb{N}^* communs à $|a|$ et $|b|$ admet un plus petit élément appelé plus petit commun multiple $PPCM$ à a et b (noté $a \vee b$)

- Par convention $0 \wedge a = |a|$ et $0 \vee a = 0$
- $a = bc + d \Rightarrow a \wedge b = b \wedge d$

```
def algo_euclide(a, b):
    if (b==0):
        return(a)
    else:
        r=a%b
        return algo_euclide(b,r)#Le PGCD est le dernier reste non nul
```



DEF: a et b sont premiers entre eux si $a \wedge b = 1$

- Soient $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, en posant $\mathfrak{P} = a \wedge b$ et $\begin{cases} a = \mathfrak{P}a' \\ b = \mathfrak{P}b' \end{cases}$, $a' \wedge b' = 1$

DEF: **Relation de Bezout** : Pour $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, $\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2$, $a \wedge b = ua + bv$

Trouver une relation de Bezout

- Isoler le PGCD dans l'avant dernière égalité de l'algorithme d'Euclide
- Remplacer le reste précédent dans cette égalité
- Développer sans jamais effectuer de calculs
- Continuer les deux étapes précédentes jusqu'à revenir sur les termes a et b

- **Lemme de Gauss** : Si $a \wedge b = 1$ alors $a|bc \Rightarrow a|b$
- μ est un multiple de a et $b \Leftrightarrow (a \vee b)|\mu$
- δ est un diviseur de a et $b \Leftrightarrow \delta|(a \wedge b)$

3.5 Nombres premiers

DEF: Un entier naturel $p \geq 2$ est **premier** si ses seuls diviseurs dans \mathbb{N} sont 1 et p

Dans le cas contraire il est **composé**

- L'ensemble des nombres premiers est infini

Méthode

Théorème fondamental de l'arithmétique

Tout entier naturel $n \geq 2$ se décompose en un produit de nombres premiers

Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près

- Si $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}$ alors les diviseurs de n sont les $p_1^{\beta_1} \dots p_m^{\beta_m}$, $\beta_i \in \llbracket 0, \alpha_i \rrbracket$

- Si $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}$ et $b = p_1^{\beta_1} \dots p_m^{\beta_m}$, $\begin{cases} a \wedge b = p_1^{\min(\alpha_1, \beta_1)} \dots p_m^{\min(\alpha_m, \beta_m)} \\ a \vee b = p_1^{\max(\alpha_1, \beta_1)} \dots p_m^{\max(\alpha_m, \beta_m)} \end{cases}$

1 Trigonométrie

1.1 Cercle Trigo

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	\emptyset

1.2 Formulaire de trigonométrie

Formules à retrouver géométriquement

y	$\cos y$	$\sin y$	$\tan y$
$-x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\tan x$
$\pi + x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\tan x$
$\pi - x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\tan x$
$\frac{\pi}{2} + x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\cot x$
$\frac{\pi}{2} - x$	$\sin x$	$\cos x$	$\cot x$

- $\cos(x + k\pi) = (-1)^k \cos(x)$
- $\sin(x + k\pi) = (-1)^k \sin(x)$

Formules à retrouver par le calcul

- Formules d'addition :
 - Pour \sin et \cos : $e^{ix} \times e^{iy} = e^{i(x+y)}$
 - Pour \tan utiliser $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

- Formules de duplication
 - $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$
 - $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

1.3 Équations trigonométriques

- $\cos(x) = \cos(x_0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 [2\pi] \text{ ou} \\ x = -x_0 [2\pi] \end{cases}$
- $\sin(x) = \sin(x_0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 [2\pi] \text{ ou} \\ x = \pi - x_0 [2\pi] \end{cases}$
- $\tan(x) = \tan(x_0) \Leftrightarrow z = z_0 [\pi]$

1.4 Equation $a \cos(t) + b \sin(t)$

- $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
- Car $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$
- On a alors par formule d'addition $a \cos(t) + b \sin(t) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(t - \varphi)$

2 Complexes

2.1 Choix de rappels

- $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$
- Inégalité triangulaire : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

2.2 Technique de l'arc moitié

- $e^{i\theta} - 1 = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}) = 2i \sin(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}} = 2 \sin(\frac{\theta}{2})e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2})}$

- $e^{i\theta} + 1 = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}) = 2 \cos(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}}$

2.3 Formules d'Euler

- $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
- $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

2.4 Formules de Moivre

- $\cos(nx) + i \sin(nx) = e^{inx} = (\cos(x) + i \sin(x))^n$

2.5 Exponentielle complexe

- $e^z = e^{\Re(z)}e^{i\Im(z)}$
- $|e^z| = e^{\Re(z)}$
- $\arg(e^z) = \Im(z) [2\pi]$

2.6 Interprétation géométrique

- $z_{\vec{AB}} = z_B - z_A$ alors $AB = |z_B - z_A|$ et $(\vec{u}, \vec{AB}) = \arg(z_B - z_A)$
- $(\vec{AB}, \vec{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$
- $m \perp n \Rightarrow z_m = i\mathbb{R}z_n$
- m colinéaire $n \Rightarrow z_m = \mathbb{R}z_n$

3 Équations algébriques

3.1 Second degré complexe

- $az^2 + bz + c = a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right)$
- Pour la résolution ramener ensuite à $A^2 = B$
- Deux nombres complexes sont de somme s et de produit p si et seulement si ce sont les solutions de l'équation : $z^2 - sz + p = 0$

Résolution d'une équation du type $A^2 = B$

- Poser $A = a + ib$ et développer
- Procéder par identification sur la partie réelle et la partie imaginaire des deux membres de l'équation
- Ajouter au système d'équations une équation liée à $|B|$
- Résoudre et remplacer A par sa valeur

3.2 Racines n^{es}

Racines n^{es} de l'unité

- $e^{\frac{i2k\pi}{n}}$ avec $k \in \mathbb{N} \in [0, n - 1]$
- n périodique et de somme nulle

Généralisation

- Solution particulière/mise sous forme polaire
- $z^n = z_0^n \Leftrightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1$
- Résolution dans le cas d'une racine n^e de l'unité

4 Sommes et produits

4.1 Sommes

Propriétés

- Les indices d'une somme sont muets
- Une suite de m à n comporte $n - m + 1$
- $\sum_{k=0}^n u_{k+1} = \sum_{l=1}^{n+1} u_l$
- $\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$
- $\sum_{k=0}^n \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^n u_k$
- $\sum_{k=0}^n \operatorname{Re}(u_k) = \operatorname{Re}(\sum_{k=0}^n u_k)$ valable pour Im
- $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \operatorname{Re}(\sum_{k=0}^n e^{i\theta})$
- $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta) = \operatorname{Im}(\sum_{k=0}^n e^{i\theta})$
- $\sum_{i=1}^n a_i \times \sum_{j=1}^p j_j = \sum_{1 \leq i \leq n / 1 \leq j \leq p} a_i b_j$

Propriétés

Sommes télescopiques

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_{n+1} - b_n$$

$$\sum_{k=0}^n a_k = b_{n+1} - b_0$$

Sommes notables

Somme arithmétique

$$\sum k = n_{termes} \times \frac{1^{\text{er}} + d^{\text{er}}}{2}$$

Somme géométrique

$$\sum a^k = 1^{\text{er}} \times \frac{a^{n_{termes}} - 1}{a - 1}$$

Factorisation de $a^n - b^n$

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

Sommes doubles

- Une somme double peut être transformée en somme simple et inversement :
 - Poser un indice fixe et déterminer l'ensemble de définitions de l'autre
- Des sommes doubles particulières peuvent être rapprochées de matrices
 - $1 \leq i, j \leq n$ des $a_{i,j}$ est la somme de tous les coefficients de la matrice
 - $1 \leq i \leq j \leq n$ est la somme des éléments en dessous de la diagonale
- Pour permuter les sommes doubles, il est préférable de passer d'abord par une somme simple

4.2 Produit

Propriétés

- Les indices sont muets
- $\prod ab = \prod a \times \prod b$
- $\prod x^a = (\prod x_i)^a$
- $\prod ax_k = a^{n_{termes}} \prod x_k$
- $\prod a^{x_k} = a^{\sum x_k}$
- $\prod_{k=1}^n k = n!$

Propriétés

Produits télescopiques

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

$$\prod_{k=1}^n a_k = \frac{b_{n+1}}{b_0}$$

5 Coefficients binomiaux

Triangle de Pascal

n/p	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

- $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
- $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$
- **Formule du binôme :** $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Application à la linéarisation de fonctions trigonométriques

$$f(x) = \sin^a(x) \cos^b(x)$$

- Écrire f avec des exponentielles à l'aide des formules d'Euler
- Développer à l'aide de la formule du binôme
- Développer et regrouper les exponentielles conjuguées pour une application des formules d'Euler

Méthode

1 Éléments relatifs aux inégalités

1.1 Inégalités

- **Inversion de sens** si multiplication par un négatif ou inverse
- Compatibilité avec la **multiplication**, la **superposition** par sommes ou par produit

1.2 Valeur absolue

- $|x - a| \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r$
- $|x - a| > r \Leftrightarrow x < a - r$ ou $x > a + r$
- $|xy| = |x||y|$

Théorème

Inégalité triangulaire

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k|$$

Égalité si les x_k sont de même signe

Théorème

Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$$

1.3 Partie entière

$\lfloor x \rfloor$ est l'unique $k \in \mathbb{Z}$ tel $k \leq x < k + 1$

- $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n, n \in \mathbb{Z}$
- $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$
- $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$

2 Fonctions

2.1 Propriétés générales

- La **restriction** d'une fonction est l'ensemble sur lequel la fonction est définie on note $f|_A$
- On dit de f qu'elle est de **classe** \mathcal{C}^n si elle est continue et dérivable n fois
- On note $f(A)$ l'intervalle des images de A par la fonction f
- Pour l'étude de fonctions complexes (dérivées, intégrations) on écrira souvent :

$$f(x) = \operatorname{Re}(f(x)) + \operatorname{Im}(f(x))$$

Relation d'ordre

- **Majoration** : $\exists M, \forall x, f(x) \leq M$
- **Minoration** : $\exists m, \forall x, m \leq f(x)$
- Fonction **bornée** : $|f|$ est majorée
- Fonction **paire** : $f(-x) = f(x)$
- Fonction **impaire** : $f(-x) = -f(x)$
- Fonction **périodique** de période T : $f(x+T) = f(x)$

Continuité

- Une fonction est continue en un point si en $a \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
- Toute fonction dérivable est continue

Théorème des valeurs intermédiaires

- Théorème**
- Si f est une fonction continue sur I et $y_1 \leq y_2$, f prend toutes les valeurs de cet intervalle
 - **Corollaire** : Si f est continue et strictement croissante sur $[a, b]$, alors elle réalise une bijection de cet intervalle sur $[f(a), f(b)]$

Fonctions composées

- On note $f \circ g$ la fonction $f(g(x))$
- $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
- $f^n = f^{n-1} \circ f$ (itérées)
- $(f \circ g)' = g(x)' \times f'(g(x))$

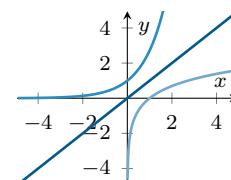
2.2 Notion de bijectivité

- Injectivité : $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ (*maximum un antécédent*)
- Surjectivité : $\forall y, \exists x, y = f(x)$ (*minimum un antécédent*)
- Bijectivité : f injective et surjective (*unique antécédent*)

La **bijection réciproque** de f est notée f^{-1} tel que $f^{-1}(y)$ soit l'unique antécédent de y par f

On a alors $(f \circ f^{-1})(y) = y$ et $(f^{-1} \circ f)(x) = x$

- f^{-1} est dérivable en $x \Leftrightarrow f'(f^{-1}(x)) \neq 0$
- $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$



2.3 Dérivation

- $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \tau_{x_0} f = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- La tangente à une droite en a est définie par $y = f(a) + f'(a)(x - a)$

Étude de fonction

- Chercher à restreindre l'intervalle d'étude (symétries, parité, périodicité)
- Étudier les variations et le signe de la fonction

2.4 Intégration

$f(x)$	k	$u'u^n$	$\frac{u'}{u}$	$\frac{u'}{u^n}$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$u'e^u$	$u(ax + b)$
$\int f$	kx	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	$\ln(u)$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$	$2\sqrt{u}$	e^u	$\frac{1}{a}U(ax + b)$

Propriétés

- $\int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f s'annulant en a
- $\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$

Techniques de calcul

Intégrations fonctions de leurs bornes

Soient $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues, I intervalle intérieur non vide, $(u, v) \in \mathcal{C}^1(I, [a, b])$
 $g : x \rightarrow \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$ est dérivable sur I et $\forall x \in I, g'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$

Preuve : $\int_{u(x)}^{v(x)} = F(v(x)) - F(u(x))$ de dérivée $v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$

Formule d'intégration par partie

Soient u et v deux fonctions définies sur un segment $[a, b]$ à valeurs réelles de classe \mathcal{C}^1

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt \quad | \quad (uv)' = u'v + uv' \text{ pour retrouver la formule}$$

Formule du changement de variables

Pour φ de classe \mathcal{C}^1 sur I , f continue sur $\varphi(I)$ et $\forall (a, b) \in I^2 \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

$$\int \frac{dt}{ax^2 + bx + c} \text{ avec arctan}$$

- Mettre le polynôme sous forme canonique
- Ramener le calcul à $\frac{1}{1+u^2}$ par changement de variable

2.5 Équations différentielles

Une équation différentielle est de la forme $u(y)dy = v(x)dx$ avec une condition initiale

Ordre 1

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$

- On trouve les solutions de l'équation homogène : $y'(x) + a(x)y(x) = 0$
 $\Rightarrow y = \lambda e^{-A(x)}$

- Solution particulière
 - Évidente
 - Si a est constante, une solution du même type que b (*polynôme, exponentielle*)
 - Variation de la constante : $y(x) = \lambda(x)y_0(x)$
On choisit une solution y_0 qui ne s'annule pas
On calcule y' :
$$\begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = \lambda(x)(y'_0(x) + a(x)y_0(x)) + \lambda'(x)y_0(x) \\ y'_0 + ay_0 = 0 \end{cases}$$

 $\Rightarrow y$ solution de $y' + ay = b \Leftrightarrow \lambda'(x)y_0(x) = b(x)$
On intègre alors pour trouver $\lambda(x)$
La solution particulière est $y_p(x) = \lambda(x)y_0(x)$
- **Solution = Solution homogène + Solution particulière**
- Puis Conditions initiales

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Il existe une unique solution f d'une équation du premier ordre qui vérifie :

- $f(t_0) = y_0$

Ordre 2

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x)$$

- On trouve les solutions de l'équation homogène : $y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$ à l'aide de l'équation caractéristique $x^2 + ax + b = 0$
 $\Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \Delta & > 0 & = 0 & < 0 \\ \hline y_0(x) & \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} & (\lambda x + \mu) e^{rx} & (\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)) e^{\alpha x} \quad r = \alpha \pm i\beta \\ \hline \end{array}$
- Solution particulière
 - Évidente
 - $f(x) = P(x)e^{\lambda x} \Rightarrow$ On cherche une solution de la forme $Q(x)e^{\lambda x}$
- **Solution = Solution homogène + Solution particulière**
- Puis Conditions initiales

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Il existe une unique solution f d'une équation du second ordre qui vérifie :

- $f(t_0) = y_0$
- $f'(t_0) = y'_0$

Dans le cas de $a(x)f(y(x)) = b(x)$ et où $a(x)$ s'annule il faut séparer les cas et vérifier le **raccord**

THÉORÈME DE SUPERPOSITION

$$\left. \begin{array}{l} y_1 \text{ solution de } y'' + by' + cy = d_1(t) \\ y_2 \text{ solution de } y'' + by' + cy = d_2(t) \end{array} \right\} y_1 + \lambda y_2 \text{ solution de } y'' + by' + cy = d_1(t) + \lambda d_2(t)$$

PASSAGE SUR \mathbb{C}

On utilisera $z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)$

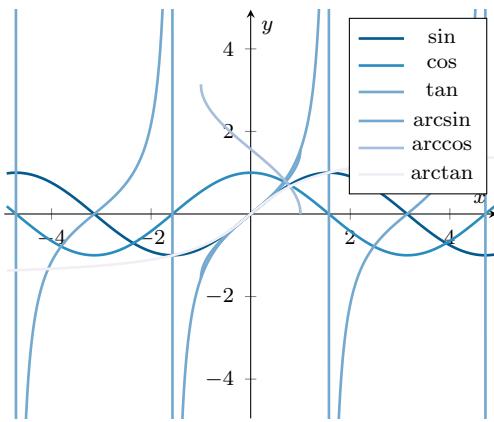
Généralités pour tout ordre

2.6 Fonctions usuelles

Fonctions puissances

- $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$

Fonctions circulaires

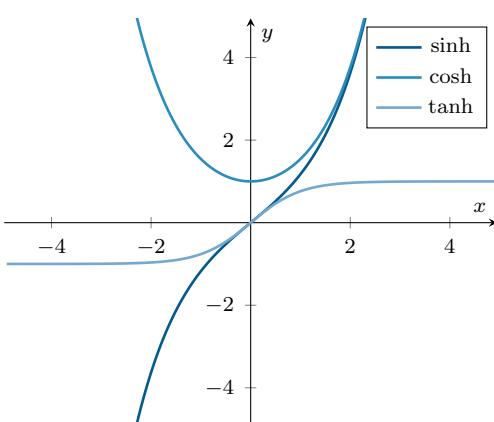


- $y = \tan x$
 - $y' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $y = \arcsin x$
 - $[-1, 1] \rightarrow \mathcal{A} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
 - $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $y = \arccos x$
 - $[-1, 1] \rightarrow \mathcal{A} : [0, \pi]$
 - $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $y = \arctan x$
 - $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
 - $y' = \frac{1}{1+x^2}$
 - $\arg(x+iy) \equiv \arctan(\frac{y}{x}) [2\pi]$

Pour toute fonction circulaire ς

- $\varsigma(\varsigma^{-1}(x)) = x$
- $\varsigma^{-1}(\varsigma(x)) = x$ sur \mathcal{A}
- $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$

Fonctions hyperboliques



- $y = \cosh x$
 - $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
 - $\cosh'(x) = \sinh(x)$
- $y = \sinh x$
 - $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
 - $\sinh'(x) = \cosh(x)$
- $y = \tanh x$
 - $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$
 - $\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$

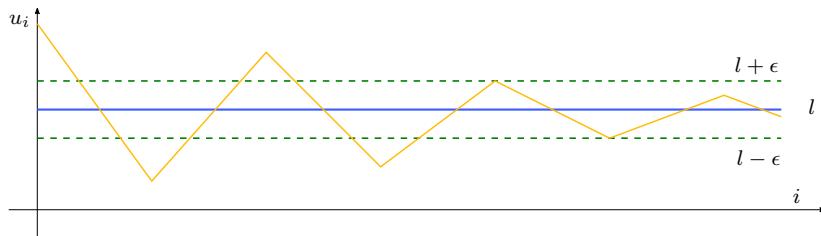
1 Notion de suite

DEF: Une suite à valeurs dans \mathbb{K} une fonction de \mathbb{N} à valeurs dans \mathbb{K}

- On note $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeur dans \mathbb{K}
- Une suite est introduite par **notation séquentielle** : $(f_n)_{n \geq 0}$

2 Convergence et divergence

- On dit que u_n converge si $\exists l \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - l| \leq \epsilon$



l est alors la limite de la suite en $+\infty$

- (u_n) diverge vers $+\infty$ si $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \geq M$
- (u_n) diverge vers $-\infty$ si $\forall m \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \leq m$

3 Opérations sur les limites

Opération	Somme				Produit				Quotient						
	a	L	L	∞	$+\infty$	L	L	∞	0	L	L	∞	L / ∞	∞	0
b	L'	∞	∞	$-\infty$		L'	∞	∞	∞	L'	∞	L	0	∞	0
=	$L + L'$	∞	∞	F.I	$L \times L'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I	$\frac{L}{L'}$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I	F.I	

- Si une suite est inférieure à une autre à partir d'un certain rang alors leurs limites seront également dans le même ordre

Théorème

Théorème d'encadrement

Si $u_n \leq v_n \leq w_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$

Théorème

Théorème des suites monotones

Si une suite est croissante alors elle admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$

- Si la suite est majorée alors la limite est finie
- Si la suite n'est pas majorée elle diverge vers $+\infty$

DEF: Deux suites monotones de sens de variation contraire sont dites **adjacentes** si leur différence admet 0 comme limite en $+\infty$

- Deux suites adjacentes convergent vers la même limite l
- On a alors $u_n \leq l \leq v_n$ si u_n croissante et v_n décroissante

Théorème de Césaro

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ ($l \in \overline{\mathbb{R}}$) alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n = l$

DEF: On appelle **suite extraite** de u_n , toute suite de la forme $u_{\phi(n)}$ avec ϕ croissante

- $\phi(n) \geq n$
- Une suite et sa suite extraite admettent la même limite sur $\overline{\mathbb{R}}$
- Une suite converge \Leftrightarrow ses suites extraites u_{2n} et u_{2n+1} convergent et ont la même limite
- Une suite est non majorée \Leftrightarrow elle admet une suite extraite divergente vers $+\infty$

Théorème de Bolzano-Weierstrass

Toute suite bornée admet une sous-suite convergente

4 Suites et topologie sur \mathbb{R}

- Un majorant_{minorant} d'une partie non vide majorée de \mathbb{R} est sa **borne supérieure**_{inférieure} \Leftrightarrow il existe une suite d'éléments de cet ensemble qui converge vers ce majorant_{minorant}

4.1 Parties denses

DEF: Une partie A est dite **dense** dans \mathbb{R} si tout intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} contient au moins un élément de A

- Une partie A de \mathbb{R} est dense dans $\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x

5 Suites remarquables

Arithmétique

$$u_{n+1} = u_n + r \quad \rightarrow \quad u_n = u_0 + nr$$

Géométrique

$$u_{n+1} = ru_n \quad \rightarrow \quad u_n = r^n u_0$$

Suites arithmético-géométriques

$$u_{n+1} = au_n + b$$

Suites récurrentes linéaires

$$u_{n+2} = au_{n+1} + b_{un}$$

Calcul d'une suite arithmético-géométrique

- Faire la différence du système $\begin{cases} u_{n+1} = au_n + b \\ l = al + b \end{cases}$
- On a alors une suite géométrique dont on peut calculer la raison et le premier terme

Calcul d'une suite récurrente linéaire d'ordre deux

- On résout l'équation caractéristique $z^2 = az + b$
 - Si l'équation admet **deux** racines, les solutions sont du type $u_n = \lambda z_1^n + \mu z_2^n$
 - Si l'équation admet **une** racine, les solutions sont du type $u_n = (\lambda n + \mu)z_1^n$
 - On calcule les constantes en utilisant les conditions initiales u_0 et u_1

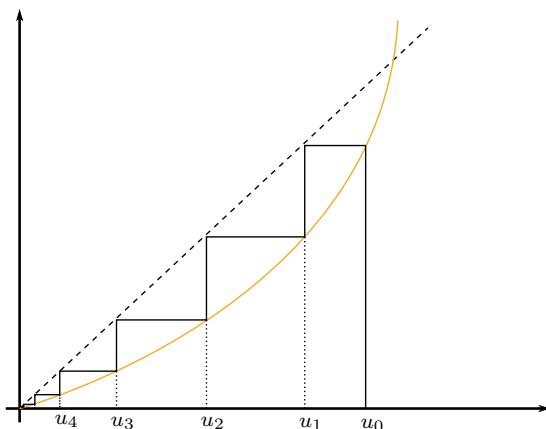
6 Étude de suites

6.1 Suites définies explicitement

- Étude de **monotonie** : si $u_n = f(n)$ étudier les variations de f
- Étude des **limites**
- Si somme ou produit encadrer pour essayer un télescopage

6.2 Suites récurrentes

- Étude **graphique**
- Déterminer si la suite est **définie** (*intervalles stables*)
- Sens de **variation**
 - Étude du **signe** de $f(x) - x$
 - **Monotonie** de f
 - f croissante sur I stable alors u_n croissante
 - f décroissante sur I stable alors u_{2n} et u_{2n+1} monotones et de sens de variation contraire
- Comportement **asymptotique** (*point fixe comme limite / théorème des suites monotones*)



6.3 Suites définies implicitement

- **Définition** de la suite (*bijection*)
- Sens de **variation, majoration, minoration** (*tableau de variation / théorème des suites monotones*)
- Encadrements pour détermination de **limites**

6.4 Suites complexes

Convergence

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}(u_n) = \operatorname{Re}(l)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}(u_n) = \operatorname{Im}(l)$
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = r$ et u_n admet un argument θ_n dont la limite est θ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = re^{i\theta}$

Limite de la suite z^n

- Si $|z| < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} z^n = 0$
- Si $|z| > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z^n| = +\infty$
- Si $|z| = 1$

- Si z est une racine de l'unité alors z^n est périodique
- Sinon z^n est dense sur \mathbb{U}

1 Notion de voisinage

1.1 Définitions

DEF: x est **intérieur** à A s'il existe $\alpha > 0$ tel que $]x - \alpha, x + \alpha[\subset A$

DEF: On appelle **voisinage** de x toute partie V de \mathbb{R} telle que x soit intérieur à V

DEF: On appelle **voisinage** de $+\infty$ ($-\infty$) tout $V \subset \mathbb{R}$ tel que $\exists M \in \mathbb{R}, [M, +\infty[\subset V$ ($]-\infty, M]$)
 — Pour $y \in \overline{\mathbb{R}}$, on note \mathcal{V}_y , l'ensemble des voisinages de y

DEF: On dit que $y \in \overline{\mathbb{R}}$ est adhérent à A si $\forall V \in \mathcal{V}_y, V \cap A \neq \emptyset$

1.2 Propriétés

DEF: **Intersection de voisinages**

L'intersection d'un nombre fini de voisinages de $x \in \overline{\mathbb{R}}$ est un voisinage de x

DEF: **Propriété vraie au voisinage de a**

Une propriété est dite vraie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$, adhérent à A s'il existe $V \in \mathcal{V}_a$ où elle est vérifiée sur $A \cap V$

2 Limite en un point adhérent à \mathcal{E} de $\overline{\mathbb{R}}$

2.1 Généralités

DEF: f a une limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à A s'il existe $l \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $\forall V \in \mathcal{V}_l, \exists U \in \mathcal{V}_a, f(U \cap A) \subset V$
 Si cette limite existe, elle est **unique**

— Limite et caractère borné

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} l \in \mathbb{R}$ alors f est bornée au voisinage de a

— Limite de fonction composée

$$\left. \begin{array}{rcl} \lim_{x \rightarrow a} f(x) & = & b \\ \lim_{x \rightarrow b} g(x) & = & c \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = c$$

Opération	Somme				Produit				Quotient						
	a	L	L	∞	$+\infty$	L	L	∞	0	L	L	∞	L / ∞	∞	0
b		L'	∞	∞	$-\infty$	L'	∞	∞	∞	L'	∞	L	0	∞	0
=		$L + L'$	∞	∞	F.I	$L \times L'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I	$\frac{L}{L'}$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I	F.I

2.2 Limite et relation d'ordre

— Passage à la limite dans une inégalité

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à A . Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de A , $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} l_1$ et $g(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} l_2$ alors $l_1 \leq l_2$

— Signe de la limite

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à A . Si $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} l \in \mathbb{R}^*$ alors $f(x)$ est du signe de l au voisinage de a

2.3 Critère séquentiel

— Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à A

$$f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} l \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a \Rightarrow f(a_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$$

Montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en un point

- On trouve (t_n) et $(t_{n'})$ de limites a telles que $f(t_n)$ et $f(t_{n'})$ aient des limites différentes
- On trouve (t_n) de limite a telle que $f(t_n)$ n'admette aucune limite

Méthode

2.4 Limites latérales

DEF: Si $a \in \mathbb{R}$ est adhérent à $A \cap]a, +\infty[$, on dit que f admet $l \in \overline{\mathbb{R}}$ pour **limite à droite** en a si $f|_{A \cap]a, +\infty[}$ admet l pour limite en a

On note $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{x > a} l$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$

DEF: Si $a \in \mathbb{R}$ est adhérent à $A \cap]-\infty, a[$, on dit que f admet $l \in \overline{\mathbb{R}}$ pour **limite à gauche** en a si $f|_{A \cap]-\infty, a[}$ admet l pour limite en a

On note $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{x < a} l$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$

Théorème

Théorème d'encadrement

Soit $(a, l) \in \overline{\mathbb{R}}^2$

Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ au voisinage de a , $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} l$ et $h(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} l$ alors $g(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} l$

Théorème

Théorème de la limite monotone

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ croissante et $a = \inf(I) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

- La fonction admet une limite réelle à droite et à gauche en tout point intérieur à I
- Si f est minorée sur I , alors elle admet une limite réelle à droite en a
- Si f est non minorée sur I , alors elle tend vers $-\infty$ en a

Théorèmes analogues en $+\infty$ ou pour f décroissante

1 Continuité locale

DEF: On dit que f est **continue** en a si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$

- Une fonction est continue sur A si elle est continue en tout point de A
- Si a est adhérent à $A \cap]-\infty, a[$, alors f est **continue à gauche** si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} f(a)$
- Si a est adhérent à $A \cap]a, +\infty[$, alors f est **continue à droite** si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} f(a)$
- Une fonction est continue en A si et seulement si elle est continue à gauche et à droite de a
- Si $f : A \setminus \{a\} \xrightarrow{x \rightarrow a} l$ alors on **prolonge** f en posant $f(a) = l$ est continue en a
- **Critère séquentiel** : f continue $\Leftrightarrow \forall (a_n) \in A^{\mathbb{N}}, a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \Rightarrow f(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a)$
- **Opérations conservant la continuité** :
 - Somme
 - Produit et quotient (*si pas d'annulation*)
 - Compostion (*si compatibilité des intervalles*)
- Fonctions dans \mathbb{C} : f continue $\Leftrightarrow \text{Re}(f)$ et $\text{Im}(f)$ continues

2 Image d'un intervalle

Théorème des valeurs intermédiaires

- Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue alors $f(I)$ est un intervalle
- **Corollaire** : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue
Si f est strictement croissante sur $[a, b]$, alors f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$
Respectivement sur $[f(b), f(a)]$ pour f strictement décroissante

Théorème de Weierstrass

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue alors $\exists (c, d) \in \mathbb{R}^2, f([a, b]) = [c, d]$
L'image d'un segment est un segment

- Une fonction continue et injective sur un intervalle est strictement monotone
- **Continuité de la bijection réciproque** : Si f réalise une bijection continue de I sur $f(I)$ alors $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ est continue

DEF: **Norme infinie** : Pour $f \in \mathcal{C}^0$, on pose $\|f\|_{\infty} = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$

Propriétés de la norme infinie

- $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$
- $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

1 Dérivation

1.1 Dérivabilité

DEF: $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est **dérivable** en x_0 si $\tau_{x_0} f = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} \kappa \in \overline{\mathbb{R}}$, on note alors $\kappa = f'(x_0)$

— Si f est dérivable $\forall x \in I$, on note $f' : x \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \rightarrow f'(x_0)$

— Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0

— **Dérivabilité à gauche_{droite}**

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable à gauche_{droite} si $\tau_{x_0} f \xrightarrow[x \rightarrow x_0^-]{x \rightarrow x_0^+} \kappa$ On note $\kappa = f'_g(x_0) f'_d(x_0)$

— Une fonction est dérivable en $x_0 \Leftrightarrow$ elle est dérivable à gauche et à droite et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$

— **Dérivabilité d'une fonction réciproque :**

— f^{-1} est dérivable en y si $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$ on a alors $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

— Si $f'(f^{-1}(y)) = 0$ alors la fonction f^{-1} admet une tangente verticale en y

Prouver la dérivabilité en un point

— On essaye d'appliquer les théorèmes sur les opérations

— On pose $x = x_0 + u$ et on étudie $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + u) - f(x_0)}{u}$

1.2 Fonctions dérivées

f	$u + v$	uv	$\frac{u}{v}$	$f \circ u$
f'	$u' + v'$	$u'v + uv'$	$\frac{u'v + uv'}{v^2}$	$u' \times f'(u)$

— f est croissante_{décroissante} $\Leftrightarrow f' \geqslant 0 \leqslant 0$

— f est strictement croissante_{décroissante} $\Leftrightarrow f' > 0 \leqslant 0$ et sur $A \neq \emptyset \subset I, f' \neq 0$

2 Accroissements finis

f définie sur I admet en a :

— Un **max_{min} global** si $\forall x \in I f(x) \leqslant f(a) \geqslant f(a)$

— Un **max_{min} local** si $\exists V \in \mathcal{V}_a, \forall x \in I \cap V, f(x) \leqslant f(a) \geqslant f(a)$

— Un **extremum** global_{local} si elle y admet un maximum ou un minimum global_{local}

Théorème

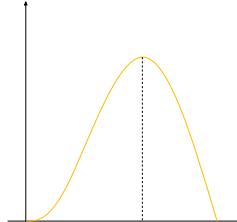
Condition nécessaire d'extremum

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable admet un extremum en c intérieur alors $f'(c) = 0$

Théorème

Théorème de Rolle

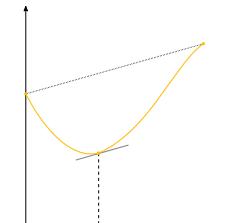
Soient $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$
 $\exists c \in]a, b[, f'(c) = 0$



Théorème

Théorème des accroissements finis

Soient $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$
 $\exists c \in]a, b[, f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$



Méthode

Passage de f à f'

- Pour transformer des hypothèses de $f' \rightarrow f$:
 - f' continue et de classe \mathcal{C}^1 , on peut utiliser $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$
 - Sinon TAF
- Pour transformer des hypothèses de $f \rightarrow f'$: taux d'accroissement

Théorème

Théorème de la limite de la dérivée

Soit I un vrai intervalle de \mathbb{R} , $a \in I$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $I \setminus \{a\}$ tel $f'(t) \xrightarrow[t \rightarrow a]{} l \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} \xrightarrow[t \rightarrow a]{} l \text{ et si } l \in \mathbb{R} \quad f'(a) = l$$

Théorème

Inégalité des accroissements finis

Soient I un vrai intervalle de \mathbb{R} , $M \in \mathbb{R}_+$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

- Si $m \leq f(x) \leq M, \forall (x, x') \in I^2, m(x - x') \leq f(x) - f(x') \leq M(x - x')$
- Si $|f'(x)| \leq M, \forall (x, x') \in I^2, |f(x) - f(x')| \leq M|x - x'|$

La fonction est alors Lipschitzienne de rapport M et contractante si $M < 1$

Méthode

Théorème du point fixe

Soit $f : I \rightarrow I$, vrai intervalle, dérivable tel $\exists k \in [0, 1[$ vérifiant $|f'| \leq k$ et admettant α comme point fixe

- On peut prouver par l'IAF que $\forall u_0 \in I, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ est définie et converge vers α
- On en déduit par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|$

3 Dérivées successives

- On définit par récurrence (sous réserve d'existence) $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$
- Une fonction est de classe \mathcal{C}^n si elle est n fois dérivable et $f^{(n)}$ est continue

f	$(u + v)$	uv	$\cos / \sin(x)$	$\frac{1}{x}$	x^m
$f^{(n)}$	$u^{(n)} + v^{(n)}$	$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}$	$\cos / \sin \left(x + n \frac{\pi}{2} \right)$	$\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$	$\begin{cases} \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n} & \text{si } m \geq n \\ 0 & \text{si } m < n \end{cases}$

4 Complexes

- La fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable en $t_0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont dérivables en t_0 on alors $f'(t_0) = \operatorname{Re}(f)'(t_0) + i\operatorname{Im}(f)'(t_0)$
- La majorité des théorèmes ne s'appliquent cependant pas

1 Notions de comparaison

1.1 Négligeabilité

Suites

DEF: u_n est **négligeable** devant v_n si $\exists (\epsilon_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \epsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ et $u_n = \epsilon_n v_n$ APCR

- On note $u_n = o(v_n)$ ou $u_n \ll v_n$
- Si $v_n \neq 0$ on note aussi $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

Fonctions

DEF: $u(x)$ est **négligeable** devant $v(x)$ si $\exists \epsilon$ au $\mathcal{V}_{x_0}, \epsilon(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} 0$ et $u(x) = \epsilon(x)v(x)$ au \mathcal{V}_{x_0}

- On note $u(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(v(x))$ ou $u(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\ll} v(x)$
- Si $v(x) \neq 0$ on note aussi $\frac{u(x)}{v(x)} \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} 0$

Compatibilité avec les opérations

- $f \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(1) \Leftrightarrow f \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} 0$
- $o(f) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(\lambda f)$
- TRANSITIVITÉ

$$\begin{cases} f \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(g) \\ g \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(h) \end{cases} \Rightarrow f \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(h)$$
- SOMME

$$\begin{cases} g \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(f) \\ h \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(f) \end{cases} \Rightarrow g + h \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(f)$$
- PRODUIT

$$\begin{cases} f \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(g) \\ h \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(i) \end{cases} \Rightarrow fh \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(gi)$$
- PRODUIT
 $f \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(g) \Rightarrow fh \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(gh)$
- PUISSANCES
 $f \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(g) \Rightarrow f^\alpha \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(g^\alpha)$ avec $(f, g, \alpha) \in \mathbb{R}_+^3$
- COMPOSITION
 $f \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(g) \Rightarrow f \circ \varphi \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(g \circ \varphi)$ avec $\varphi \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} +\infty$

1.2 Équivalence

Suites

DEF: On dit que u_n est **équivalente** à v_n si $\exists (\delta_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \delta_n \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} 1$ et $u_n = \epsilon_n v_n$ APCR

- On note $u_n \sim v_n$
- Si $v_n \neq 0$ on note aussi $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$

Fonctions

DEF: On dit que $u(x)$ est **équivalente** à $v(x)$ si $\exists \delta$ au $\mathcal{V}_{x_0}, \delta(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} 1$ et $u(x) = \epsilon(x)v(x)$ au \mathcal{V}_{x_0}

- On note $u(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} v(x)$
- Si $v(x) \neq 0$ on note aussi $\frac{u(x)}{v(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1$

Compatibilité avec les opérations

- $f \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g \Leftrightarrow f \underset{x \rightarrow x_0}{=} g + o(g)$
- $f \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g \Rightarrow h \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(f) \Leftrightarrow h \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} o(g)$
- TRANSITIVITÉ

$$\begin{cases} f \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g \\ g \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} h \end{cases} \Rightarrow f \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} h$$
- PRODUIT

$$\begin{cases} f \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g \\ h \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} i \end{cases} \Rightarrow fh \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} gi$$
- PRODUIT
 $f \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g \Rightarrow fh \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} gh$
- QUOTIENT
 $f \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g \Rightarrow \frac{f}{g} \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \frac{1}{g}$
- PRODUIT

$$\begin{cases} f \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g \\ h \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} i \end{cases} \Rightarrow \frac{f}{h} \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \frac{g}{i}$$
- PUISSANCES
 $f \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g \Rightarrow f^\alpha \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g^\alpha$ avec $(f, g) \in \mathbb{R}_+^3, \alpha \in \mathbb{R}$
- COMPOSITION
 $f \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g \Rightarrow f \circ \varphi \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g \circ \varphi$ avec $\varphi \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$



Pas de compatibilité avec l'addition et la composition à gauche

- Deux suites équivalentes sont de même signe APCR

1.3 Domination

Suites

DEF: u_n est **dominée** par v_n si $\exists (\varpi_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornée telle que $u_n = \varpi_n v_n$ APCR

- On note $u_n = O(v_n)$

Fonctions

DEF: $u(x)$ est **dominée** par $v(x)$ au \mathcal{V}_{x_0} si $\exists \varpi$ bornée au \mathcal{V}_{x_0} telle que $u(x) = v(x)\varpi(x)$ au \mathcal{V}_{x_0}

- On note $u(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} O(v(x))$

Compatibilité avec les opérations

- $f \underset{x \rightarrow x_0}{=} O(1) \Leftrightarrow f$ bornée
- TRANSITIVITÉ

$$\begin{cases} f \underset{x \rightarrow x_0}{=} O(g) \\ g \underset{x \rightarrow x_0}{=} O(h) \end{cases} \Rightarrow f \underset{x \rightarrow x_0}{=} O(h)$$
- PRODUIT

$$\begin{cases} f \underset{x \rightarrow x_0}{=} O(g) \\ h \underset{x \rightarrow x_0}{=} O(i) \end{cases} \Rightarrow fh \underset{x \rightarrow x_0}{=} O(gi)$$
- PRODUIT
 $f \underset{x \rightarrow x_0}{=} O(g) \Rightarrow fh \underset{x \rightarrow x_0}{=} O(gh)$

1.4 Utilisation dans le calcul asymptotique

- $u_n \sim v_n$ et $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$
- $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} l \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$
- Si $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$

Levée d'une forme indéterminée

- On détermine une chaîne d'équivalence jusqu'à pouvoir déterminer une limite connue
- **Produits et quotients** : rechercher des équivalents simples des termes
- **Sommes** : Essayer de trouver un élément négligeable
- **Puissances** : Passage à l'exponentielle

1.5 Équivalences usuelles

- | | |
|--|---|
| — $e^u - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ | — $\sinh(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ |
| — $\ln(1 + u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ | — $\cosh(u) - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{u^2}{2}$ |
| — $(1 + u)^\alpha - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \alpha u$ | — $\tan(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ |
| — $\sin(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ | — $\tanh(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ |
| — $\cos(u) - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} -\frac{u^2}{2}$ | — $\arcsin(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ |
| | — $\arctan(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ |

2 Développements limités

2.1 Principe et propriétés

DEF: On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admet un **développement limité d'ordre n en 0** ($DL_n(0)$) si il existe un polynôme P_n de degré au plus n tel que $f(u) \underset{u \rightarrow 0}{=} P_n(u) + o(u^n)$

- f admet un $DL_n(x_0)$ si $\tilde{f} = f(x_0 + u)$ admet un $DL_n(0)$ soit $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} P_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$



On prendra soin de ne pas développer les puissances de $(x - x_0)$

- Les DL s'écrivent toujours par ordre de prédominance **décroissant** soit pour le $DL_n(0)$ de 0 à n
- On peut **tronquer** un DL_n à un ordre $k \leq n$ en stockant les termes d'ordre supérieur dans $o(u^k)$
- Si f est paire_{impaire} et admet un $DL_n(0)$ alors sa partie principale est un polynôme pair_{impair}

Intégration de o

Soit g tel $g(u) = o(u^n)$

$$\int_0^u g(t) dt \underset{u \rightarrow 0}{=} o(u^{n+1})$$

Formule de Taylor-Young

Soit f de classe \mathcal{C}^n

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

2.2 Développements limités usuels

e^u	$\underset{u \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{u^k}{k!}$	$+o(u^n)$	$\sin(u)$	$\underset{u \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{u^{2k+1}}{(2k+1)!}$	$+o(u^{2n+1})$
$\ln(1+u)$	$\underset{u \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{u^{k+1}}{(k+1)!}$	$+o(u^{n+1})$	$\cos(u)$	$\underset{u \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{u^{2k}}{2k!}$	$+o(u^{2n})$
$(1+u)^\alpha$	$\underset{u \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{\alpha \cdots (\alpha - k + 1)}{k!} u^k$	$+o(u^n)$	$\arcsin(u)$	$\underset{u \rightarrow 0}{=} u + \frac{u^3}{6}$	$+o(u^3)$
	$\underset{u \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \prod_{l=0}^{k-1} (\alpha - l) u^k$	$+o(u^n)$	$\tan(u)$	$\underset{u \rightarrow 0}{=} u + \frac{u^3}{3}$	$+o(u^3)$
$\frac{1}{1+u}$	$\underset{u \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k u^k$	$+o(u^n)$	$\tanh(u)$	$\underset{u \rightarrow 0}{=} u - \frac{u^3}{3}$	$+o(u^3)$
			$\arctan(u)$	$\underset{u \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{u^{2k+1}}{2k+1}$	$+o(u^{2n+1})$

2.3 Opérations sur les DL

— Somme

- La somme de deux DL d'ordre n et m est un DL à l'ordre $\min(n, m)$
- Sa partie principale est la somme des troncatures à l'ordre $\min(n, m)$ des deux DL

— Produit

- On se ramène toujours par factorisation au cas de deux DL de degré nul valant 1
- On peut alors développer à l'ordre $\min(n, m)$
- Le résultat s'obtient alors par troncature du produit des parties principales

— Composée

- Ramener le calcul à une forme f connue
- Le DL de $f \circ g$ est possible si $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$
- Déterminer une équivalence de g et en déduire l'ordre d'arrêt
- Déterminer les différents termes en g du développement de f à l'ordre demandé
- Sommer les termes

— Inverse

- On se ramène à une composition de la forme $\frac{1}{1+u}$

— Puissance

- On se ramène à la forme exponentielle pour un DL de \exp puis \ln

Intégration d'un DL

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, où I vrai intervalle et $0 \in I$ et admettant un $\text{DL}_n(0) : f(u) \underset{u \rightarrow 0}{=} P_n(u) + o(u^n)$

$$\int_0^u f(t) dt \underset{u \rightarrow 0}{=} \int_0^u P_n(t) dt + o(u^{n+1})$$

Théorème

3 Applications des DL

3.1 Étude de fonctions

- Si $f(x) = a_p(x - x_0)^p + \dots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$ et $a_p \neq 0$ alors $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} a_p(x - x_0)^p$
- Une fonction $f \underset{u \rightarrow 0}{=} a + bu + o(u)$
 - Est **prolongeable** en 0 par continuité par $f(0) = a$

- Est **dérivable** en 0 avec $f'(0) = b$
 — Un développement à un ordre supérieur permet éventuellement de **positionner** le graphe par

Théorème

Condition suffisante de minimum

Si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$ alors f admet un minimum_{maximum} en x_0

- La droite $y = ax + b$ est **asymptote** à \mathcal{C}_f en $+\infty \Leftrightarrow f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} ax + b + o(1)$

3.2 Étude asymptotique

Échelles de comparaison

- En 0 : ... $\ll_{x \rightarrow 0} x^2 \ll_{x \rightarrow 0} x \ll_{x \rightarrow 0} 1 \ll_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ll_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ll_{x \rightarrow 0} \dots$
 — En $+\infty$: ... $\ll_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \ll_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ll_{x \rightarrow +\infty} 1 \ll_{x \rightarrow +\infty} x \ll_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ll_{x \rightarrow +\infty} \dots$

Méthode

Étude de sommes et produits

- On peut utiliser la méthode directe par équivalents
 — On ramènera l'étude d'un produit à celui d'une somme par le logarithme
 — On procédera par encadrement par le plus grand et le plus petit terme dans un premier temps

Théorème

Sommation des relations de comparaison

Soit $(v_n)_{n \geq 0}$ tel $\sum_{k=0}^n v_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

— Si $u_n \ll v_n$ alors $\sum_{k=0}^n u_k \ll \sum_{k=0}^n v_k$

— Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k$

Théorème

Méthode des rectangles

Pour f continue et croissante

- $\sum_{k=0}^{n-1} f(k) \leq \int_0^n f(t) dt \leq \sum_{k=0}^n f(k)$
 — $\int_0^n f(t) dt + f(0) \leq \sum_{k=0}^n f(k) \leq \int_0^{n+1} f(t) dt$

Méthode

3.3 Étude de suites

Equivalent d'une suite récurrente

En cas de convergence vers 0 ou divergence vers $\pm\infty$

- On cherche par les DL $\alpha \neq 0$, $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \neq 0$
 — Par Césaro on a $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^\alpha - u_k^\alpha) = \frac{1}{n} (u_n^\alpha - u_0^\alpha) \sim l$
 Soit $u_n^\alpha - u_0^\alpha \sim ln$

Développement asymptotique d'une suite définie par $f_n(u_n) = 0$

- On encadre u_n en utilisant les variations de f_n
- On réinjecte la relation obtenue (limite ou équivalent) dans l'expression d'origine pour trouver un terme supplémentaire

3.4 Équations différentielles

Équations différentielles de la forme $a(t)y' + b(t)y = c(t)$

- On étudie l'équation sur les différents intervalles où $a(t) = 0$ tel $y' + \frac{b(t)}{a(t)} = \frac{c(t)}{a(t)}$
- On détermine si le raccord de la fonction et de sa dérivée est possible

1 Équations et systèmes linéaires

DEF: Une équation linéaire à p inconnues est de la forme $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_px_p = b$

DEF: Un système linéaire est alors un système linéaire de n équations à p inconnues

DEF: Un système homogène est un système où les seconds membres sont nuls

2 Matrices

2.1 Généralités

DEF: L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes d'éléments de \mathbb{K} est noté $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

— On note alors $a_{i,j}$ soit $a_{\text{ligne},\text{colonne}}$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{array} \right. \quad \left(\begin{array}{cccccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,p} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,p} \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{cccccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,p} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,p} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,p} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,p} & b_n \end{array} \right)$$

▷ Système linéaire

Matrice du système

Matrice augmentée du système

Opérations élémentaires sur les lignes

Opération	Nom	Notation	Explication	Ligne	Colonne
$L_i \leftrightarrow L_j$	Permutation	$\mathcal{P}_{i,j}$	Échange	$\mathcal{P}_{i,j}A$	$A\mathcal{P}_{i,j}$
$L_i \leftarrow \lambda L_j$	Dilatation	$\mathcal{D}_{i,j}(\lambda)$	Multiplication	$\mathcal{D}_{i,j}(\lambda)A$	$A\mathcal{D}_{i,j}(\lambda)$
$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	Transposition	$\mathcal{T}_{i,j}(\lambda)$	Ajout de λ fois	$\mathcal{T}_{i,j}(\lambda)A$	$A\mathcal{T}_{i,j}(\lambda)$

Théorème

A et A' sont **équivalentes par lignes_{colonnes}** si elles se déduisent l'une de l'autre par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes_{colonnes}. On note $A \sim_L A' \sim_C A'$

2.2 Matrice échelonnée

- Une matrice est **échelonnée par lignes_{colonnes}** si :
 - Si une ligne_{colonne} est nulle alors toutes les suivantes aussi
 - À partir de la 2^e ligne_{colonne}, dans chaque ligne_{colonne} non nulle le premier coefficient non nul est situé à droite de celui de la ligne_{colonne} précédente
- On appelle **pivot** le premier coefficient non nul de chaque ligne non nulle
- Une matrice échelonnée est **échelonnée réduite** si tous ses pivots sont égaux à 1 et sont les seuls éléments non nuls de leur colonne_{ligne}
- Pour toute matrice il existe une unique matrice échelonnée réduite par lignes_{colonnes} équivalente

Définition Algorithme du pivot de Gauss

1. Pour une matrice non nulle : On se ramène au cas où $a_{1,j}$ est non nul
2. Pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ on effectue $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,j}}{a_{1,j}} L_1$
3. On se ramène à 1. pour $a_{2,j+1}$

- Un système est **incompatible** \Leftrightarrow sa matrice échelonnée réduite contient 000...1
- Un système de n équations à p inconnues admet une **infinité** de solutions si $n < p$

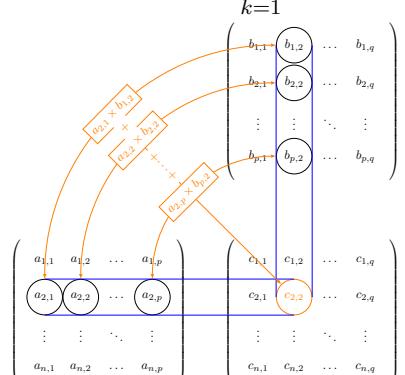
Décomposition de Gauss Jordan

Pour toute matrice A de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe une matrice E produit de matrices élémentaires et une unique matrice échelonnée réduite par lignes R telles que :

$$A = ER_{A=RE}$$

2.3 Calcul matriciel

- **Somme** : $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ pour deux matrices de même taille
- **Produit** : $ab_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k}b_{k,j}$ pour $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathfrak{M}_{p,m}(\mathbb{K})$ on a $AB \in \mathfrak{M}_{n,m}(\mathbb{K})$



- En notant $B_1 \dots B_m$ les colonnes de B , celles de AB sont $AB_1 \dots AB_m$
- En notant $A_1 \dots A_m$ les lignes de B , celles de AB sont $A_1B \dots A_mB$

- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + B = B + A$
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

- $A(BC) = (AB)C$
- $\lambda AB = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$

Propriétés

2.4 Matrices remarquables

- Matrice nulle
- Matrices carrées
 - Matrice identité
- Matrices diagonales
- Matrices triangulaires supérieures

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} ad & be & cf \\ dg & eh & fi \\ gj & hk & il \end{array} \right] \\ & \left[\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} d & e & f \\ d & e & f \\ j & k & l \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} ad & be & cf \\ ad & be & cf \\ jd & ke & lf \end{array} \right] \\ & \left[\begin{array}{ccc} a & b & c \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d & e & f \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} d & e & f \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & f \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} ad & be & cf \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & cf \end{array} \right] \end{aligned}$$

Théorème Formule du binôme

$A, B \in \mathfrak{M}_n^2(\mathbb{K})$ tel $AB = BA$ (commutation)

$$\forall n \in \mathbb{N}, (A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

Formule de factorisation

$A, B \in \mathfrak{M}_n^2(\mathbb{K})$ tel $AB = BA$ (commutation)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n - B^n = (A - B) \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-1-k} B^k$$

2.5 Transposition

On note A^T l'unique matrice C telle que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket, c_{i,j} = a_{j,i}$$

- A est symétrique si $A = A^T$
- A est antisymétrique si $A = -A^T$

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$ pour $(A, B) \in \mathfrak{M}_{n,p}^2(\mathbb{K})$
- $(\lambda A)^T = \lambda(A^T)$
- $(AB)^T = B^T A^T$ pour $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathfrak{M}_{p,m}(\mathbb{K})$
- A est échelonnée_{réduite} par lignes $\Leftrightarrow A^T$ est échelonnée_{réduite} par colonnes

2.6 Trace

Pour $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ on note $\text{tr}(A) = \sum_{k=1}^n a_{k,k}$

- $\text{tr}(A + \lambda B) = \text{tr}(A) + \lambda \text{tr}(B)$
- $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$
- $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^T)$

2.7 Inversion

- $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible si $\exists B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), AB = BA = I_n$, on note $B = A^{-1}$
- L'ensemble des matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles est noté $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ (*groupe linéaire d'ordre n*)
- Toute matrice inversible se décompose en produit de matrices élémentaires
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Équivalences liées à l'inversion

A inversible \Leftrightarrow 0 unique solution de $AX = 0 \Leftrightarrow A \underset{L}{\sim} I_n \Leftrightarrow A \underset{C}{\sim} I_n \Leftrightarrow A$ inversible à gauche_{droite}

Inversion par Pivot de Gauss

- On effectue une suite d'opérations élémentaires pour arriver à I_n
- Simultanément on effectue sur I_n les mêmes opérations pour arriver à A^{-1}

1 Ensembles

1.1 Définitions

DEF: L'ensemble ne contenant aucun élément est appelé **ensemble vide** (\emptyset)

DEF: Un ensemble d'un élément est un **singleton**

DEF: Un ensemble de deux éléments est une **paire**

1.2 Opérations

Opérations élémentaires

- **Réunion** : $A \cup B$
- **Intersection** : $A \cap B$
- **Différence** : $A \setminus B$
- **Différence symétrique** : $A \Delta B \Leftrightarrow (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

- $A \subset C$ et $B \subset C \Rightarrow (A \cup B) \subset C$
- $A \subset B \Rightarrow (A \cap C) \subset (B \cap C)$
- $A \subset B \Rightarrow (A \cup C) \subset (B \cup C)$
- $A \subset B$ et $C \subset D \Rightarrow (A \cup C) \subset (B \cup D)$
- $A \subset B$ et $C \subset D \Rightarrow (A \cap C) \subset (B \cap D)$

- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Définition et méthode

DEF: Deux ensembles sont **disjoints** si $A \cap B = \emptyset$

Prouver l'égalité de deux ensembles

On peut raisonner par **double inclusion**

Pour montrer $X \subset Y$

- On peut revenir aux éléments $x \in X \Rightarrow x \in Y$
- ou raisonner directement

Méthode

Produit cartésien

- $A \times B$ est l'ensemble des (a, b) tel $a \in A$ et $b \in B$
- On généralise par récurrence à n produits et n uplets
- $E^n = \prod_1^n E$

1.3 Familles indexées

DEF: On appelle **famille** à valeurs dans A indexée par I toute fonction $\lambda : I \rightarrow A$
 On note $(\lambda_i)_{i \in I}$

DEF: L'ensemble des familles à valeur dans A indexées par I est noté A^I

Propriétés

Soit $I \neq \emptyset$ et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles

- $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x; \exists i \in I, x \in A_i\}$
- $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x; \forall i \in I, x \in A_i\}$
- Si les A_i sont disjoints on note $\bigsqcup_{i \in I}$ la réunion

Propriétés de distributivité

- $B \cap \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$
- $B \cup \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i)$

1.4 Parties d'un ensemble

DEF: On appelle partie de E tout sous-ensemble de E

DEF: L'ensemble des parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$

DEF: Soit A une partie de E ,

On appelle **complémentaire** (noté $\mathcal{C}_E A$ ou \bar{A}) de A dans E , l'ensemble $E \setminus A$

Théorème

Relations de De Morgan

- | | |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> — $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ — $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ | <ul style="list-style-type: none"> — $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$ — $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$ |
|--|--|

DEF: On appelle partition de $E \neq \emptyset$ toute partie \mathcal{M} de $\mathcal{P}(E)$ telle

- $\forall A \in \mathcal{M}, A \neq \emptyset$
- $\forall (A, B) \in \mathcal{M}^2, (A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset)$
- $\bigsqcup_{A \in \mathcal{M}} A = E$

DEF: On appelle **fonction indicatrice** : $\mathbb{1}_A$
$$\begin{array}{rcl} E & \rightarrow & \{0, 1\} \\ x & \rightarrow & \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases} \end{array}$$

Propriétés

- $A \subset B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B$
- $A = B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$
- $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$
- $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$
- $\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$

2 Applications

2.1 Définition et propriétés

DEF: On appelle **application** tout (A, B, G) tel $G \subset (A \times B)$ et $\forall x \in A, \exists! y \in B, (x, y) \in G$

— En **notation fonctionnelle** :

- Cet unique y est noté $f(x)$ et est l'image de x par f
- x est un antécédent de y par f
- A, B, G sont les ensembles de départ et d'arrivée, G est le graphe de f
- On note $f \mid \begin{matrix} A & \rightarrow & B \\ t & \rightarrow & f(t) \end{matrix}$

- Pour tout ensemble E on a $\text{id}_E : \begin{array}{c} E \\ x \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} E \\ x \end{array}$, l'**identité** de E
- L'ensemble des applications de A dans B est noté B^A ou $\mathcal{F}(A, B)$

2.2 Opérations

Pour $f : A \rightarrow B$ et $A' \subset A, B' \subset B, A \subset A''$

- **Restriction** : (noté $f|_{A'}$) l'unique $g : \begin{array}{c} A' \\ x \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} B \\ f(x) \end{array}$
- **Co-restriction** : (noté $f|^{B'}$) l'unique $g : \begin{array}{c} A \\ x \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} B' \\ f(x) \end{array}$ si $\forall a, f(a) \in B'$
- **Prolongement** : tout $g : A'' \rightarrow B$ tel $g|_A = f$ (g coïncide avec f)

Définition

2.3 Vocabulaire relatif

Composées et itérées

DEF: Pour $f : A \rightarrow B$ et $g : C \rightarrow D$ tel $f(A) \subset C$

On appelle **composée** de g et f $g \circ f : \begin{array}{c} A \\ x \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} D \\ g(f(x)) \end{array}$

- Associativité : pour des ensembles compatibles $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
- On définit par récurrence f^n par $\begin{cases} f^0 = \text{id}_E \\ f^n = f^{n-1} \circ f \end{cases}$

Propriétés

Images directes et réciproques

Soit $f : E \rightarrow F$

DEF: **Image directe** : pour $A \subset E$, on note $f(A) = \{f(x); x \in A\}$

DEF: **Image réciproque** : pour $B \subset F$, on note $f^{-1}(B) = \{x \in E; f(x) \in B\}$

DEF: On dit que A est stable par f si $f(A) \subset A$

En particulier $(f|_A)^{n \in \mathbb{N}}$ est alors bien défini

Définition

$f : A \rightarrow B$

- **Injective** : $\forall (x, y) \in A^2, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ Tout élément de B admet au plus un antécédent
- **Surjective** : $\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x)$ Tout élément de B admet au moins un antécédent
- **Bijective** : Surjective et Injective Tout élément de B admet un unique antécédent

Propriétés

- f et g injectives_{surjectives} $\Rightarrow g \circ f$ injective_{surjective}
- f et g bijectives $\Rightarrow g \circ f$ bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
- $g \circ f$ injective_{surjective} $\Rightarrow f$ injective _{g surjective}

DEF: On appelle **bijection réciproque** de f (noté f^{-1}) l'application telle que

$\forall y, f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent de y par f

On a alors $\forall (x, y) \in A \times B, (f \circ f^{-1})(y) = y$ et $(f^{-1} \circ f)(x) = x$

- $f : A \rightarrow B$, on a f bijective $\Leftrightarrow \exists g : B \rightarrow A, f \circ g = \text{id}_B$ et $g \circ f = \text{id}_A$
- On a alors $g = f^{-1}$

Montrer injectivité et surjectivité

- **Injectivité** : On suppose $f(x) = f(x')$ et on montre $x = x'$
- **Surjectivité** : On prend y et on montre l'existence de x tel $f(x) = y$

Montrer la bijectivité de f

- Revenir aux définitions et montrer l'injectivité et la bijectivité
- Montrer $\forall y, f(x) = y$ admet une unique solution, le calcul de $x = f(y)$ donne f^{-1}
- Trouver g tel $f \circ g = \text{id}_B$ et $g \circ f = \text{id}_A$, on a $g = f^{-1}$
- Conditions suffisantes de bijectivité de l'analyse_{TVI}, ... pour une réunion d'intervalles de \mathbb{R}

3 Relations binaires

3.1 Propriétés

DEF: Une **relation binaire** sur E (*noté* $x\mathcal{R}y$) est la donnée d'une partie \mathcal{R} de E^2

On dit que x et y sont en relation

Attributs d'une relation binaire

- **Réflexive** : $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$
- **Symétrique** : $\forall (x,y) \in E^2, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$
- **Antisymétrique** : $\forall (x,y) \in E^2, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$
- **Transitive** : $\forall (x,y) \in E^2, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$

3.2 Relation d'équivalence

DEF: **Réflexive - Symétrique - Transitive**

- $E_x :=, \sim_L, \equiv [n]$
- On appelle **classe d'équivalence** le sous-ensemble $\text{cl}(x) = \{y \in E, x\mathcal{R}y\}$
Les classes d'équivalences forment une **partition** de E
- Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence \mathcal{R}
L'ensemble des classes d'équivalence de \mathcal{R} est appelé **ensemble quotient** (E/\mathcal{R}) de E par \mathcal{R}

3.3 Relations d'ordre

DEF: **Réflexive - Antisymétrique - Transitive**

- $E_x :=, |$
- On note \preccurlyeq et on dit que (E, \preccurlyeq) est un **ensemble ordonné** (soit E muni de \preccurlyeq)
- Une relation d'ordre \preccurlyeq est totale si $\forall (x,y) \in E^2, x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$. L'ensemble (E, \preccurlyeq) est alors totalement ordonné
- Soit (E, \preccurlyeq) un ensemble ordonné et $F \in P(E), x \in E$
 x est un **majorant_{minorant}** de F si $\forall f \in F, f \preccurlyeq x_{(x \preccurlyeq f)}$
- x est un plus grand_{petit} élément de F si $x \in F$ et f est un marjorant_{minorant} de F
- On dit qu'une partie non vide de (E, \preccurlyeq) admet une bordure supérieure_{inférieure} si l'ensemble de ses majorants_{minorants} admet un plus petit_{grand} élément noté alors \sup_{\inf}

1 Équipotence et cardinal

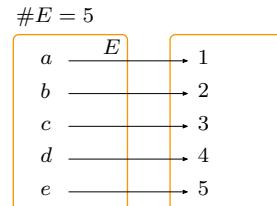
1.1 Équipotence

DEF: Deux ensembles sont **équipotents** si il existe une bijection de l'un dans l'autre

Propriétés

- E est équivalent à lui-même *Car id_E est bijective*
- E équivalent à $F \Leftrightarrow F$ équivalent à E *Car Φ bijective $\Rightarrow \Phi^{-1}$ bijective*
- E équivalent à F et F équivalent à $G \Rightarrow E$ équivalent à G *Par composition*

Méthode



Prouver $A = B$ par le cardinal

- Il suffit de montrer $A \subset B$ et $\#A = \#B$

2 Injections, surjections, bijections

Définition

DEF: **Injection** :

- Si $f : E \rightarrow F$ est une injection, $\#f(E) = \#E$ et $\#E \leq \#F$
- **Principes des tiroirs** : Si on range $n + 1$ objet dans n emplacements alors deux objets se retrouvent ensemble

DEF: **Surjection** :

- Si $f : E \rightarrow F$ est une surjection, $\#F \leq \#E$

DEF: **Bijection** : $f : E \rightarrow F$ $\#E = \#F$ bijective $\Leftrightarrow f$ injective $\Leftrightarrow f$ surjective

- Il existe une injection $E \rightarrow F \Leftrightarrow$ il existe une surjection $F \rightarrow E$

3 Sommes et produits

- Pour $A \subset E$ fini, $\#A = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x)$

Développement par distributivité

$$\prod_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{i,j} = \sum_{f \in \mathcal{F}(I, J)} \prod_{i \in I} a_{i, f(i)}$$

— On en déduit $\prod_{i=1}^n (u_i + v_i) = \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{I \subset [1, n] \\ \#I=k}} \left(\prod_{i \in I} u_i \right) \left(\prod_{j \in \bar{I}} v_j \right) = \sum_{I \in \mathcal{P}([1, n])} \left(\prod_{i \in I} u_i \right) \left(\prod_{j \in \bar{I}} v_j \right)$

— et $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{I \subset [1, n] \\ \#I=k}} a^k b^{n-k}$ d'où la formule du binôme

Théorème

4 Combinatoire

4.1 Intersections

- $\#(E \sqcup F) = \#E + \#F$
- $\#(E \cup F) = \#E + \#F - \#(E \cap F)$ dans le cas général
- $\#(E \setminus F) = \#E - \#(E \cap F)$
- $\#\overline{F} = \#E - \#F$ pour $F \subset E$

— $\# \left(\bigsqcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{i=1}^n \#A_i$ Pour des A_i disjoints

Propriétés

Lemme des bergers

Pour des A_i disjoints et de même cardinal p

$$\# \left(\bigsqcup_{i=1}^n A_i \right) = np$$

Théorème

Lemme des bergers en cascade

- On choisit l'un après l'autre les éléments parmi ceux possibles
- A chaque choix, on dénombre le nombre de possibilités
- On multiplie l'ensemble de ces possibilités entre elles pour aboutir au nombre total

Méthode

Formule du crible

$$\# \left(\bigcup_{i=1}^m A_i \right) = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subset [1, m] \\ \#I=k}} \# \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \# \left(\bigcap_{j=1}^k A_{i,j} \right)$$

Théorème

4.2 Produit cartésien

- Si E et F sont finis alors $E \times F$ est fini et $\#(E \times F) = \#E \times \#F$
- On extrapole à $\# \left(\prod_{i=1}^m A_i \right) = \prod_{i=1}^m \#A_i$

- De plus $\#E^p = (\#E)^p$

DEF: On appelle **p -uplet_{liste}** tout élément de E^p

- Si E et F sont finis alors F^E est fini et $\#F^E = \#F^{\#E}$

4.3 Arrangements

DEF: On appelle **p -arrangement** de E , tout p -uplet de E formé d'éléments distincts de E

DEF: On appelle **permutation** toute bijection $E \rightarrow E$. L'ensemble des permutations de E est noté $\mathfrak{S}(E)$

- Si $\#E = \#F = n$, le nombre de bijections de E dans F vaut $n!$, ainsi $\mathfrak{S}(E) = n!$

- Le nombre d'injections de E dans F vaut $\begin{cases} 0 & \text{si } \#F < \#E \\ \frac{\#F!}{(\#F - \#E)!} & \text{sinon} \end{cases}$

4.4 Combinaisons

DEF: On appelle **p -combinaison** de E toute partie de E de cardinal p

- Le nombre de p -combinaisons de E est égal à $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Prouver une formule par double-comptage

- On détermine le cardinal de deux manières différentes

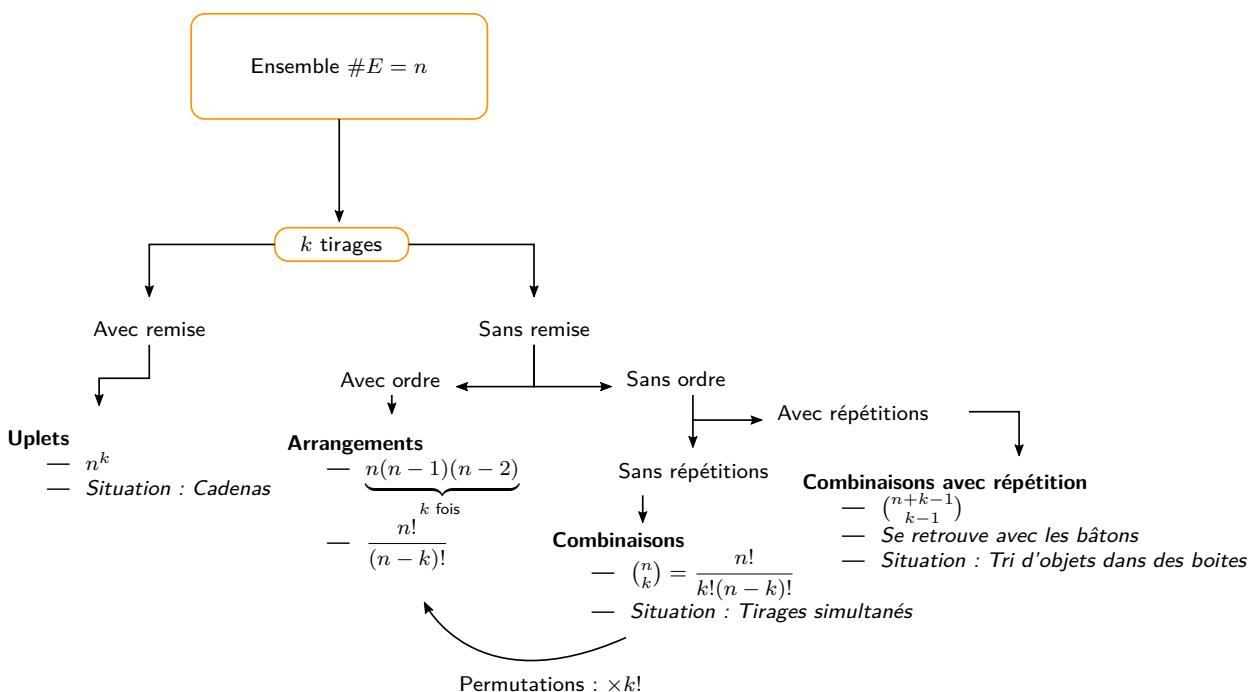
Propriétés des coefficients binomiaux

- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

- **Formule de Pascal** : $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$

- **Formule de Vandermonde** : $\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{m}{p-k} = \binom{m+n}{p}$ en particulier $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

- **Formule du binôme** : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$



1 Propriétés

1.1 Lois de composition

DEF: On appelle loi de composition interne sur E la donnée $\varsigma \mid \begin{array}{c} E^2 \\ (x,y) \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} E \\ \varsigma(x,y) \end{array}$ (on note $x \star y$)

DEF: La **table de Cayley** répertorie les combinaisons $x \star y$ de E

- A est **stable** par \star si $\forall (x,y) \in A^2, x \star y \in A$
- On a alors $\varsigma \mid \begin{array}{c} A^2 \\ (x,y) \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} A \\ x \star y \end{array}$

\star	a	b
a	$a \star a$	$a \star b$
b	$b \star a$	$b \star b$

- On dit de \star qu'elle
 - est **Commutative** si $\forall (x,y) \in E^2, x \star y = y \star x$
 - est **Associative** si $\forall (x,y,z) \in E^3, x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$
 - admet e pour **élément neutre** si $\forall x \in E, x \star e = e \star x = x$, celui-ci est alors unique

1.2 Inversibilité

Soit E un ensemble muni de \star et admettant un neutre e . x est dit :

- inversible à gauche_{droite} si $\exists y \in E, y \star x = e_{(x \star y = e)}$
Cet y est appelé inverse à gauche_{droite} de x pour \star
- inversible si $\exists y \in E, y \star x = x \star y = e$
Cet y est appelé inverse de x pour \star

2 Structures algébriques

2.1 Magma

Définition

On appelle **magma**, tout ensemble non vide

- muni d'une **loi de composition interne** \star
- On écrit (E, \star) pour dire que E est muni d'une LCI \star

2.2 Monoïde

Définition

On appelle **monoïde** tout ensemble

- muni d'une **loi de composition interne associative**
- admettant un **élément neutre**

- On peut alors définir a^{*n} ou a^n par récurrence $\begin{cases} a^0 = e \\ a^n = a \star a^{n-1} \end{cases}$
- Si $x \in E$ admet un **inverse** alors celui-ci est unique et est noté x^{-1}

- Pour $f : E \rightarrow E$
 - Injectivité_{surjectivité} de $f \Leftrightarrow$ inversibilité à gauche_{droite} de f dans (E^E, \circ)
 - Bijectivité de $f \Leftrightarrow$ inversibilité de f dans (E^E, \circ)
- $(x^{-1})^{-1} = x$
- Pour (x, y) inversibles dans (E, \star) , $(x \star y)^{-1} = y^{-1} \star x^{-1}$

2.3 Groupe

On appelle **groupe** tout ensemble

- muni d'une **loi de composition interne associative**
- admettant un **élément neutre**
- dont tout élément est **inversible pour \star**

- Si de plus \star est commutative, le groupe (G, \star) sera dit **abélien**
- On notera plutôt
 - xy au lieu de $x \star y$
 - $x + y$ si le groupe est abélien ainsi $x^{\star-1}$ devient $-x$
- $H \subset G$ est un **sous-groupe** de G si $H \neq \emptyset$ et $\forall (x, y) \in H^2, xy^{-1} \in H$
 H est alors stable par \star , passage à l'inverse et contient e et (H, \star) est donc un groupe
- Toute intersection de sous-groupes de G est un sous-groupe de G

Opérations dans les groupes

- $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$
- $(a^{-1}xa)^n = a^{-1}x^n a$ pour $n \in \mathbb{N}$
- $x^{n+m} = x^n x^m$
- $(xy)^n = x^n y^n$ si x et y commutent

Montrer qu'un ensemble est un groupe

- Revenir à la définition
- Montrer qu'il est le sous-groupe d'un groupe connu

2.4 Anneaux

On appelle **anneau** tout ensemble

- muni de deux **lois de composition interne** telles $(A, +, \times)$
 - $(A, +)$, est un groupe abélien de neutre 0_A ou 0
 - (A, \times) , est un monoïde de neutre 1_A ou 1
- dont la loi \times est distributive à gauche et à droite par rapport à la loi $+$
 $\forall (x, y, z) \in A^3, x \times (y + z) = x \times y + x \times z$ et $(y + z) \times x = y \times x + z \times x$

- On note A^* l'ensemble $A \setminus \{0_A\}$ dit des éléments non nuls de A

- On dit que $B \in \mathcal{P}(A)$ est un **sous-anneau** de A si :
 - $1_A \in B$
 - $\forall (b, b') \in B^2, b - b' \in B$ et $b \times b' \in B$

Un sous-anneau reste alors un anneau

Opérations dans les anneaux

- $a0 = 0a = 0$
- $(-1)a = -a$
- $(-1)^2 = 1$
- $(-a)a' = -(aa')$
- On peut généraliser les opérations en \sum et \prod
- **Formule du binôme :** $\forall n \in \mathbb{N}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
Si a et b commutent

2.5 Corps

On appelle **corps** tout ensemble

- muni de deux **lois de composition interne** telles $(K, +, \times)$
 - $(K, +, \times)$ est un anneau commutatif
 - $1_K \neq 0_K$
 - (K^*, \times) est un groupe

- Une partie L de $(K, +, \times)$ est appelé **sous-corps** de K si :
 - $1_K \in L$
 - $\forall (x, x') \in L^2, x - x' \in L$ et $xx' \in L$
 - $\forall x \in L^*, x^{-1} \in L$

Un sous corps reste alors un corps

3 Morphismes

DEF: On appelle **morphisme de groupes** de G dans G' tout $f : G \rightarrow G'$,

$$\text{— } \forall (x, y) \in G^2, \underbrace{f(xy)}_{\times \text{ de } G} = \underbrace{f(x)f(y)}_{\times \text{ de } G'}$$

DEF: On appelle **morphisme d'anneaux** de A dans A' tout $f : A \rightarrow A'$,

$$\begin{aligned} \text{— } f(1_A) &= 1_{A'} \\ \text{— } \forall (x, y) \in A^2, \underbrace{f(xy)}_{\times \text{ de } A} &= \underbrace{f(x)f(y)}_{\times \text{ de } A'} \\ \text{— } \forall (x, y) \in A^2, \underbrace{f(x+y)}_{+ \text{ de } A} &= \underbrace{f(x)+f(y)}_{+ \text{ de } A'} \end{aligned}$$

- Un **morphisme de corps** est un morphisme d'anneaux entre deux corps

DEF: On appelle **isomorphisme** tout morphisme bijectif

Deux structures sont alors isomorphes s'il existe une bijection de l'une sur l'autre

1 \mathbb{K} -espace vectoriel

1.1 Définition

Un \mathbb{K} -espace vectoriel est un ensemble muni de deux lois

- Une loi interne +
$$\begin{array}{ccc} E \times E & \rightarrow & E \\ (u, v) & \rightarrow & u + v \end{array}$$
- Une loi externe \cdot
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \rightarrow & E \\ (\lambda, u) & \rightarrow & \lambda \cdot u \end{array}$$

tel

- $(E, +)$ est un groupe abélien
- $1 \cdot u = u$
- $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$
- $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$
- $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$

- $\lambda u = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $u = 0$

DEF: On appelle **combinaison linéaire** de $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ tout vecteur $\sum_{k=1}^n \lambda_k u_k$ où $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$

1.2 Sous-espaces vectoriels

Une partie \mathcal{F} d'un \mathbb{K} -espace vectoriel est un **sous-espace vectoriel** E si

- $0_E \in \mathcal{F}$
- $u + \lambda v \in \mathcal{F}$

- L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs (x_1, \dots, x_n) est :

$$\text{vect}(x_1, \dots, x_n) = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k; (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}$$

DEF: On appelle **sous-espace engendré par X** l'ensemble :

$$\text{vect}(X) = \left\{ u \in E; \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists (x_1, \dots, x_n) \in X^n, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, u = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k; \right\}$$

- $\text{vect}(X)$ et $\text{vect}(x_1, \dots, x_n)$ sont alors des sous-ensembles vectoriels de E

- **L'intersection** d'un nombre quelconque de sous-espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -ev E est un sev de E

DEF: **Somme**

- Pour deux sev on note
 $F + G = \text{vect}(F \cup G) = \{v + u, (v, u) \in F \times G\}$
 On dit que $F + G$ est directe (noté \oplus) si
 Tout élément de $F + G$ s'écrit de manière unique $f + g$
 $\Leftrightarrow F \cap G = \{0\}$

- Si E est un \mathbb{K} -ev et F un sev de E alors si $u \in E \setminus F$ alors $F \oplus \text{vect}(u)$

DEF: F et G , deux sev de E sont dits **supplémentaires** dans E si $E = F \oplus G$

On appelle alors tout S tel $F \oplus S = E$ supplémentaire de F dans E

- Pour deux espaces F et G supplémentaires de E et $x \in E \exists! (x_F, x_G) \in F \times G, x = x_F + x_G$
 x_F et x_G sont les **projétés** de x sur F et G

- Si E est fini et F est un sev de E alors F admet au moins un supplémentaire de F dans E

DEF: Pour E et F des \mathbb{K} -ev on définit $E \times F$

$$\forall (x, x') \times (y, y') \in E \times F, (x, x') + (y, y') = (x + y, x' + y') \text{ et } \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

2 Familles de vecteurs

DEF: On appelle famille de vecteurs une n -liste de vecteurs (u_1, \dots, u_n)

- On note $(u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_n)$ la famille $(u_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}}$

DEF: Une famille (f_1, \dots, f_n) de E est dite **génératrice** de F si $F = \text{vect}(f_1, \dots, f_n)$

- (v_1, \dots, v_n) génératrice de $F \Rightarrow (v_1, \dots, v_{n-1})$ génératrice de F si $v_n \in \text{vect}(v_1, \dots, v_{n-1})$
- (v_1, \dots, v_n) génératrice de $F \Rightarrow (v_1, \dots, v_n, w)$ génératrice de F

DEF: u est colinéaire à $v \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}, u = \lambda v$

u et v colinéaires $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}, u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$

On dit que (v_1, \dots, v_n) est :

- **Liée** : $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k = 0$ Possibilité d'expression de vecteurs à partir d'autres
- **Libre** : $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k v_k = 0 \Rightarrow \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_j = 0 \right)$ Indépendance des vecteurs

- (v_1, \dots, v_n) libre $\Leftrightarrow v_j \notin \text{vect}(v_1, \dots, \widehat{v_j}, v_n) \Leftrightarrow$ Tout vecteur engendré est une unique combinaison linéaire des v_j
- Toute sous-famille d'une famille libre est libre
- (v_1, \dots, v_n) libre $\Rightarrow (v_1, \dots, v_n, w)$ libre si $w \notin \text{vect}(v_1, \dots, v_n)$

- $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ est une **base** de E si elle est libre et génératrice
- \mathcal{B} est une base \Leftrightarrow Tout vecteur s'écrit de manière unique sous la forme $x = \sum_{i=1}^n x_i b_i, (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$
- Les x_i sont les coordonnées de x dans \mathcal{B} : $\text{mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

- $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u + \lambda v) = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u) + \lambda \text{mat}_{\mathcal{B}}(v)$
- $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$ est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des u_i dans \mathcal{B}

DEF: Soient F et G deux sev de E tel $F \oplus G$ et (f_1, \dots, f_n) et (g_1, \dots, g_m) leurs bases
 $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m)$ est une base de $F \oplus G$ et est dite **adaptée** à $F \oplus G$

3 Dimension

DEF: Un \mathbb{K} -ev est de **dimension finie** si il admet une famille génératrice finie

Théorème de la base extraite

Soit E un \mathbb{K} -ev

On peut extraire une base de toute famille génératrice de E

Lemme de Steinitz

Soient E un \mathbb{K} -ev et (u_1, \dots, u_n) une famille génératrice de E

Pour tout $p > n$, toute famille de p vecteurs de E est liée

Définition de la dimension

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie

- E admet au moins une base
- Toutes les bases de E comportent le même nombre de vecteurs appelé dimension ($\dim(E)$)

- Dans un espace E de dimension n tel $\text{rg}(\mathcal{B}) = n$
 \mathcal{B} est une base de $E \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est génératrice de $E \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est libre

Théorème de la base incomplète

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimensions finies

On peut compléter toute famille libre de E en une base de E

Cardinaux de familles liées et génératrices

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie n

- Toute famille **libre** de E comporte un maximum de n vecteurs
- Toute famille **génératrice** de E comporte un minimum de n vecteurs

Dimension infinie d'un \mathbb{K} -ev

- E est de dimension infinie $\Leftrightarrow E$ contient (u_n) tel $\forall n (u_0, \dots, u_n)$ libre

Prouver l'égalité de deux ev finis

- On peut raisonner par double inclusion
- On peut montrer $F \subset E$ et $\dim(F) = \dim(E)$

Opérations sur les dimensions

- **Produit cartésien** : $\dim(E_1 \times E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2)$
- **Somme directe** : $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$
- **Supplémentaire** : $\dim(S_E(F)) = \dim(E) - \dim(F)$
- **Formule de Grassmann** : $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$

Dimension d'un sev

- Si E fini et F sev de E alors F fini et $\dim(F) \leq \dim(E)$
- Pour F et G deux sev de E
 $E = F \oplus G_{\text{supplémentaires}} \Leftrightarrow \begin{cases} F = F + G \\ \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \end{cases}$

DEF: Soient E un \mathbb{K} -ev et (u_1, \dots, u_n) une famille de vecteurs de E

On appelle **rang** (noté rg) de (u_1, \dots, u_n) la dimension de $\text{vect}(u_1, \dots, u_n)$

- (u_1, \dots, u_n) libre $\Leftrightarrow \text{rg}(u_1, \dots, u_n) = n$
- (u_1, \dots, u_n) génératrice de E fini $\Leftrightarrow \text{rg}(u_1, \dots, u_n) = \dim(E)$

4 Méthodes de calculs

Pivot

Un sous espace vectoriel $\text{vect}(u_1, \dots, u_p)$ est invariant par pivot sur les u_i
On utilise cette propriété dans les éléments de méthode qui suivent

Méthodes de calcul sur les matrices

- On place les vecteurs en ligne dans une matrice
- Échelonnemement de la matrice
- **Rang** d'une famille : nombre de pivots
- Famille **libre** : $n = \text{rg}(u_1, \dots, u_n)$
- Compléter en une **base** : on complète par $(0, \dots, 1, \dots, 0)$ pour obtenir une matrice échelonnée
- Montrer qu'une famille est **génératrice** : lignes \geqslant colonnes_{vecteurs \geqslant dimension}
- Extraction d'une **base**
 - On garde la trace des opérations de pivot
 - Les lignes nulles permettent d'égaliser les opérations et d'exprimer les unes en fonction des autres
- Trouver un **système d'équations**
 - Il y a nombre de pivots équations
 - On rajoute une ligne d'inconnues à la matrice
 - On échelonne celle-ci
 - Les combinaisons linéaires d'inconnues restantes sont nulles
- Calcul de $F \cap G$ et $F + G$
 - $F \cap G$: on passe par un système résultant de la concaténation des deux systèmes dont on extrait une base
 - $F + G$: Bases de F et G $\text{vect}(f_1, \dots, f_p)$ - $\text{vect}(g_1, \dots, g_p)$
 On extrait une base de $F + G = \text{vect}(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_p)$

5 \mathbb{K} -algèbre

Une \mathbb{K} -algèbre est un \mathbb{K} espace vectoriel muni de

- Une multiplication interne \times $\begin{array}{ccc} A \times A & \rightarrow & A \\ (u, v) & \rightarrow & u \times v \end{array}$ tel :
- $w \times (u \times v) = (w \times u) \times v$
- $\lambda \cdot (u \times v) = (\lambda \cdot u) \times v = u \times (\lambda \cdot v)$
- $u \times 1_A = 1_A \times u = u$
- $\begin{cases} w \times (u + v) = w \times u + w \times v \\ (u + v) \times w = u \times w + v \times w \end{cases}$

Une \mathbb{K} -algèbre est dite **commutative** si $u \times v = v \times u$

- On vérifie $v \times 0_A = 0_A \times v = 0_A$
- Une **sous-algèbre** de A est un sous espace vectoriel $B \subset A$ tel :
 - $1_A \in B$
 - Stable par la multiplication interne

1 Applications linéaires

DEF: Une application linaire $f : E \rightarrow F$, deux \mathbb{K} -ev est dite **linéaire** si

$$\forall (u, v) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$$

DEF: On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linaires de E dans F

- La restriction de $f \in \mathcal{L}(E, F)$ à E' sev de E (notée $f|_{E'}$) est linéaire

DEF: On appelle **image** de (u_1, \dots, u_n) par $f \in \mathcal{L}(E, F)$ la famille $(f(u_1), \dots, f(u_n))$

Définition d'une application linéaire

- **Sur des facteurs directs** *Une application est entièrement définie par ses restrictions à deux ensembles en somme directe*
Pour E et F deux \mathbb{K} -ev et E_1 et E_2 deux sev de E tel $E = E_1 \oplus E_2$
 $\forall f_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $f_2 \in \mathcal{L}(E_2, F) \exists! f \in \mathcal{L}(E, F), f|_{E_1} = f_1$ et $f|_{E_2} = f_2$
- **Par l'image d'une base** $f(x) = f(\sum_{k=1}^n x_k e_k) = \sum_{k=1}^n x_k f(e_k)$
Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension n et de base (e_1, \dots, e_n) et F un \mathbb{K} -ev

$$\begin{array}{ccc} \phi & | & \mathcal{L}(E, F) \\ f & \rightarrow & F^n \\ & & (f(e_1), \dots, f(e_n)) \end{array}$$
 est bijective

Définition

DEF: Une application linéaire de E dans E est appelée **endomorphisme** de E

L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$

On définit par récurrence les itérations d'un endomorphisme

Propriétés

Opérations sur les applications linéaires

Pour $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$, $h \in \mathcal{L}(F, G)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

- $f + g \in \mathcal{L}(E, F)$
- $\lambda f \in \mathcal{L}(E, F)$
- $h \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$

- $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -ev
- $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$ est une \mathbb{K} -algèbre

2 Isomorphismes

DEF: Un **isomorphisme** de E dans F , deux \mathbb{K} -ev est une application linéaire bijective de E dans F

DEF: Un **automorphisme** de E est un endomorphisme bijectif de E (ie un isomorphisme de E dans E)

On note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E

- L'application réciproque d'une application linéaire bijective est linéaire
($GL(E), \circ$) a alors une structure de groupe

Propriétés

Caractérisation des isomorphismes

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E est de dimension finie

- f injective \Leftrightarrow L'image par f de toute famille libre de E est une famille libre de F
- f surjective \Leftrightarrow L'image par f d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de F
- f bijective \Leftrightarrow L'image par f d'une base de E est une base de F

Isomorphismes entre espaces de même dimension

Soient E et F deux \mathbb{K} -ev de même dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$
 f est un isomorphisme $\Leftrightarrow f$ injective $\Leftrightarrow f$ surjective

DEF: Deux espaces vectoriels E et F sont dits **isomorphes** si il existe un isomorphisme $f : E \rightarrow F$

On note $f : E \xrightarrow{\sim} F$ pour un isomorphisme et $E \simeq F$ pour deux espaces isomorphes

— Si E et F sont deux espaces vectoriels isomorphes et E est fini alors F aussi et $\dim(E) = \dim(F)$

Calcul de la dimension d'un \mathbb{K} -ev de E

- Trouver une base de E
- Trouver un espace vectoriel isomorphe à E de dimension connue

3 Noyau, image et rang

DEF: L'**image** de $f \in \mathcal{L}(E, F)$: $\text{Im}(f) = f(E) = \{f(x); x \in E\}$

L'image de f est un sev de F

DEF: Le **noyau** de $f \in \mathcal{L}(E, F)$: $\text{Ker}(f) = f^{-1}(\{0\}) = \{x \in E; f(x) = 0\}$

Le noyau de f est un sev de E

Prouver qu'un sous-ensemble E' d'un \mathbb{K} -ev est un sev de E

- Revenir à la définition
- Trouver un \mathbb{K} -ev F et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $E' = \text{Ker}(f)$

Injectivité et surjectivité des applications linéaires

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$

- f injective $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{0\}$
- f surjective $\Leftrightarrow \text{Im}(f) = F$

- Pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$, on a $f(\text{vect}(u_1, \dots, u_n)) = \text{vect}(f(u_1), \dots, f(u_n))$
- $\text{Ker}(f|_E) = \text{Ker}(f) \cap E$

Déterminer Ker et Im

- Pour trouver une base de $\text{Ker}(f)$, on résout $f(x) = 0$

En s'aidant d'une base de E , (e_1, \dots, e_n) on a $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = 0$

\Rightarrow On est ramené à un système linéaire d'inconnue $X^T = (x_1, \dots, x_n)$

- Si (e_1, \dots, e_n) est génératrice de E , alors $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est génératrice de $\text{Im}(f)$

DEF: On dit que $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est de rang fini si $\text{Im}(f)$ est de dimension finie

On appelle **rang** de f (noté $\text{rg}(f)$) la dimension de $\text{Im}(f)$

- Si $E = \text{vect}(e_1, \dots, e_n)$ alors f est de rang fini et $\text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n))$

Théorème du rang

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$

- f induit un isomorphisme de tout supplémentaire de $\text{Ker}(f)$ dans E sur son image $\text{Im}(f)$
- Si E est de dimension finie alors f est de rang fini $\dim(E) = \text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f))$

Détermination de $\text{Im}(f \circ g)$

- On étudie $f|_{\text{Im}(g)}$
- On essaye d'appliquer le théorème du rang

4 Projections

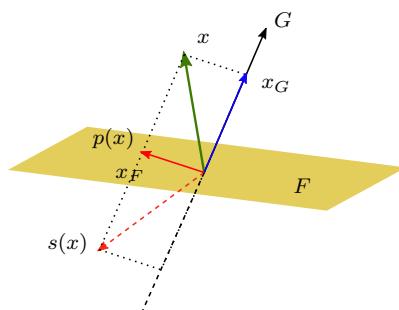
4.1 Projections et symétries

DEF: Tout vecteur x de $E = F \oplus G$ se décompose de manière unique en $x = x_F + x_G$

DEF: La **projection** sur F parallèlement à G est l'endomorphisme $p \begin{array}{rcl} E & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & x_F \end{array}$

DEF: La **symétrie** par rapport à F parallèlement à G est l'endomorphisme $s \begin{array}{rcl} E & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & x_F - x_G \end{array}$

- En notant*
- p la projection sur F parallèlement à G
 - q la projection sur G parallèlement à F
 - s la symétrie par rapport à F parallèlement à G
 - t la symétrie par rapport à G parallèlement à F



On retrouve graphiquement

$x_F = p(x)$ et $x_G = x - p(x)$	$s^2 = \text{id}_E$
$p^2 = p$	
$\text{Im}(p) = F$	$\text{Ker}(s - \text{id}_E) = F$
$\text{Ker}(p) = G$	$\text{Ker}(s + \text{id}_E) = G$
$q = \text{id}_E - p$	$t = -s$
$p + q = \text{id}_E$	
$s = 2p - \text{id}_E$	

4.2 Endomorphismes idempotents et involutifs

DEF: On dit qu'un endomorphisme f de E un \mathbb{K} -ev est :

- **Projecteur**_{idempotent} de E si $f \circ f = f$
- **Involution** de E si $f \circ f = \text{id}_E$
- Si p est un projecteur de E alors $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$
 p est alors la projection sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{Ker}(p)$
- Si s est une involution linéaire de E alors $E = \text{Ker}(s + \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s - \text{id}_E)$
 s est alors la symétrie sur $\text{Ker}(s - \text{id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(s + \text{id}_E)$

Lemme

Soit p un projecteur de E
 $y \in \text{Im}(p) \Leftrightarrow p(y) = y$

5 Équations linéaires

DEF: On appelle équation linéaire toute équation de la forme $f(x) = y_0$ où $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $y_0 \in F$ d'inconnue $x \in E$

L'équation homogène est alors $f(x) = 0$

- Pour $f(x) = 0$
 - Si $y_0 \notin \text{Im}(f)$, l'équation n'a aucune solution
 - Si $y_0 \in \text{Im}(f)$, $\exists x_0 \in E, f(x_0) = y_0$, $\mathcal{S} = \{x_0 + x; x \in \text{Ker}(f)\}$

Petit lemme des noyaux

Soient E un \mathbb{K} -ev, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda \neq \mu$ et $f \in \mathcal{L}(E)$

$$\text{Ker}((f - \lambda \text{id}_E) \circ (f - \mu \text{id}_E)) = \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f - \mu \text{id}_E)$$

1 Algèbre $\mathbb{K}[X]$

DEF: On appelle polynôme à coefficients dans \mathbb{K} toute suite $P = (p_n)_{n \geq 0}$ nulle APCR
 On note $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble de ces suites

Définition $(\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}, +, \cdot, \times)$ a une structure de \mathbb{K} algèbre associative, commutative et unitaire

- $(\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}, +, \times)$ est un anneau commutatif
- $(\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -ev
 - $(\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}, +)$ est un groupe abélien
 - $(\lambda + \mu)P = \lambda P + \mu P$
- $\lambda(P + Q) = \lambda P + \lambda Q$
- $1P = P$
- $\lambda(\mu P) = (\lambda\mu)P$
- $(\lambda P)(\mu Q) = (\lambda\mu)(PQ)$

Opérations

Pour $(P, Q) = ((p_n), (q_n)) \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})^2}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

- $P + Q = (p_n) + (q_n)$
- $\lambda P = (\lambda p_n)$
- $PQ = (c_n)$ où $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^n p_k q_{n-k}$
- **Formule du binôme** : $(P + Q)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^k Q^{n-k}$
- **Formule de factorisation** : $P^n - Q^n = (P - Q) \sum_{k=0}^{n-1} P^k Q^{n-1-k}$

DEF: On note X l'unique élément de $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ $X = (0, 1, 0, \dots)$



X n'est pas une variable mais un polynôme particulier

- On a alors $X^k = (\underbrace{0, \dots, 0}_k, 1, 0, \dots)$
- Les λX^k sont appelés **monômes**
- On note $\sum_{k \in \mathbb{N}} p_k X^k = \sum_{k=0}^{n_0} p_k X^k$ où n_0 est tel $\forall n > n_0, p_n = 0$
- On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à la place de $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$

DEF: L'algèbre $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie et (X^n) en est une base dite **canonique**

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \exists (p_n) \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}, P = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n X^n$$

Identification des coefficients

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} p_k X^k = \sum_{k \in \mathbb{N}} q_k X^k \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, p_k = q_k$$

DEF: **Degré de $P \in \mathbb{K}[X]$**

- Si $P = 0$, $\deg(P) = -\infty$
- Si $P \neq 0$, $\deg(P) = \max\{n \in \mathbb{N}, p_n \neq 0\}$

$p_{\deg(P)}$ est alors le **coefficent dominant**

Propriétés

Opérations sur les degrés

- | | |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> — $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$ — $\deg(P) \neq \deg(Q) \Rightarrow \deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$ | <ul style="list-style-type: none"> — $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$ — $\deg(\lambda P) = \deg(P)$ |
|--|---|

- L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est **intègre** ie. $PQ = 0 \Leftrightarrow P = 0$ ou $Q = 0$
- L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n noté $\mathbb{K}_n[X]$ est un sev de $\mathbb{K}[X]$ $(1, X, \dots, X^n)$ en est une base dite canonique et $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$

DEF: Une famille de polynômes (P_0, \dots, P_n) est dite de **degrés étagés** si $0 \leq \deg(P_0) < \dots < \deg(P_n)$
Toute famille de polynômes étagés est libre

2 Substitution

DEF: Pour $P = p_0 + p_1X + \dots + p_nX^n \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{A}$ on pose $P(a) = p_01_A + p_1a + \dots + p_na^n$
On note $\mathbb{K}[a] = \{P(a), P \in \mathbb{K}[X]\}$

DEF: $\tilde{P} \Big|_{\substack{\mathbb{K} \\ x}} \xrightarrow[P(x)]{} \mathbb{K}$ est appelé fonction polynomiale associée à P

Opérations sur les substitutions

- $PQ(a) = P(a)Q(a)$
- $(P \circ Q)(a)_{(P(Q))(a)} = P(Q(a))$
- $(P + \lambda Q)(a) = P(a) + \lambda Q(a)$

Propriétés

3 Dérivation sur $\mathbb{K}[X]$

DEF: $P' = p_1 + 2p_2X + \dots + np_nX^{n-1}$ est appelé **polynôme dérivé** de $P = p_0 + \dots + p_nX^n$

Propriétés de la dérivation

- | | |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> — $(P + \lambda Q)' = P' + \lambda Q'$ — $(PQ)' = P'Q + PQ'$ | <ul style="list-style-type: none"> — $(P^n)' = nP'P^{n-1}$ — $(P \circ Q)' = Q'(P' \circ Q)$ |
|---|--|

Propriétés

- La dérivation successive est bien définie et on note $P^{(k)}$ le polynôme dérivé d'ordre k de P

— Pour un monôme $P = (X - a)^n$ on a
$$\begin{cases} \forall k > n, P^{(k)} = 0 \\ \forall k \leq n, P^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}(X - a)^{n-k} \end{cases}$$

Théorème

Formule de Leibniz

$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \forall n \in \mathbb{N}$

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$$

Théorème

Formule de Taylor

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall P \in \mathbb{K}[X], \forall a \in \mathbb{K}$

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k$$

4 Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

DEF: On dit que A est **divisible** par B ou B *divise* A (noté $B|A$) si $\exists Q \in \mathbb{K}[X], A = BQ$

- Pour A et B dans $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$ $\exists!(Q, R) \in \mathbb{K}[X], \begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$
- Par unicité $B \neq 0 | A \Leftrightarrow$ Le reste dans la division euclidienne de A par B est nul

5 Racines

DEF: α est une **racine** de P lorsque $P(\alpha) = 0$ soit α est un zéro de $\tilde{P} : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$

- a est une racine de P si $X - a | P$
Pour (a_1, \dots, a_m) des racines distinctes de P $(X - a_1) \dots (X - a_m) | P$
- Tout polynôme non nul admet au plus $\deg(P)$ racines dans \mathbb{K}
 $\Rightarrow P$ nul $\Leftrightarrow P$ admet une infinité de racines dans \mathbb{K}
- $f \begin{array}{c|c} \mathbb{K}[X] & \rightarrow \mathbb{K} \\ \hline P & \rightarrow \tilde{P} \end{array}$ est injective

Théorème de D'Alembert-Gauss

Tout $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant admet une racine dans \mathbb{C}

Corollaire : $P \in \mathbb{C}[X]$ tel $\deg(P) = n, \exists(z_1, \dots, z_n, \lambda) \in \mathbb{C}^{n+1}, P = \lambda \prod_{k=1}^n (X - z_k)$

Théorème

DEF: Un polynôme est **scindé** si $\exists n \in \mathbb{N}^*, (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \lambda \in \mathbb{K}^*, P = \lambda \prod_{k=1}^n (X - x_k)$

DEF: Si a est une racine, le plus grand entier n tel $(X - a)^n | P$ est appelé **multiplicité** de a de P
Une racine de multiplicité 1 est dite simple, les autres sont multiples

- Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré n admet au plus n racines dans \mathbb{K} comptées avec multiplicité
- $a \in \mathbb{K}$ est une racine de multiplicité $n \in \mathbb{N}$ de $P \in \mathbb{K}[X] \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{K}[X], \begin{cases} P = (X - a)^n Q \\ Q(a) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$
 $\begin{cases} P^{(k)}(a) = 0 \\ P^{(n)}(a) \neq 0 \end{cases}$
- Pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{C}$ $\overline{Q(a)} = Q(\bar{a})$
 $\Rightarrow a$ est une racine de $P \in \mathbb{R}[X]$ de multiplicité $n \Leftrightarrow \bar{a}$ est une racine de P de multiplicité n

6 Polynômes irréductibles

DEF: Un polynôme est dit irréductible sur \mathbb{K} si il est non constant et ses seuls diviseurs sont $\begin{cases} \text{Polynômes constants} \\ \lambda P, \lambda \in \mathbb{K}^* \end{cases}$

L'ensemble des polynômes irréductibles sur \mathbb{K} est noté $\mathcal{I}_{\mathbb{K}}$

- $\mathcal{I}_{\mathbb{C}} = \{P \in \mathbb{C}[X], \deg(P) = 1\}$
- $P \in \mathcal{I}_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \deg(P) = 1 \text{ ou } \begin{cases} \deg(P) = 2 \\ \Delta \leqslant 0 \end{cases}$

Théorème fondamental de l'arithmétique

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$

$\exists!(m \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{K}, (P_1, \alpha_1) \dots (P_m, \alpha_m))$ où $\begin{cases} \alpha_i \in \mathbb{N}^* \\ P_i \text{ unitaires et irréductibles} \end{cases}, P = \lambda \prod_{k=1}^m P_k^{\alpha_k}$

\Rightarrow Cette décomposition est appelée décomposition en facteurs irréductibles

Théorème

Irréductibilité de \mathbb{C} à \mathbb{R}

- On factorise en facteurs irréductibles sur \mathbb{C}
- On regroupe les racines non réelles par paires de conjuguées pour obtenir un polynôme réel

7 Relation coefficients-racines

DEF: On appelle fonctions symétriques élémentaires d'ordre n les

$$\sigma_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} \dots x_{i_k}$$

La notation est ambiguë et on notera pour $n = 3$:

- $\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3$
- $\sigma_2 = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3$
- $\sigma_3 = \frac{x_1 x_2 x_3}{n}$

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $P = \lambda \prod_{k=1}^n (X - x_k)$

$$P = \sum_{k=1}^n p_k X^k \text{ où } \left\{ \begin{array}{l} p_n = \lambda \\ \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \quad p_k = (-1)^{n-k} \sigma_k \end{array} \right.. \quad \text{On retiendra}$$

Expressions polynomiales symétriques

- Toute expression $\sum a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ symétrique *invariante par permutations* peut s'exprimer au moyen des σ_i comme $\sum b_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \sigma_1^{\alpha_1} \dots \sigma_n^{\alpha_n}$
- En particulier les sommes de newton $x_1^k + \dots + x_n^k$ sont concernées

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{-\frac{2ik\pi}{n}} \right)$

MATRICES D'APPLICATION LINÉAIRES

1 Matrice d'une application linéaire

On met en relation deux aspects

Aspects géométriques		Aspects numériques
- Vecteurs	Choix Base	- Coordonnées
- \mathbb{K} -ev	\rightleftarrows	\mathbb{K}^n
- Applications linéaires	Choix \mathbb{K} -ev	Matrices

DEF: Soient E et F de bases $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ et $u \in \mathcal{L}(E, F)$

On appelle **matrice de u dans les bases** $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ la matrice de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

$$\text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u) = \text{mat}_{\mathcal{F}}(u(e_1), \dots, u(e_p))$$

— Dans le cas d'un endomorphisme $(\mathcal{E} = \mathcal{F} = \mathcal{B})$ on notera $\text{mat}_{\mathcal{B}}$

$$u(e_1) \quad \cdots \quad u(e_j) \quad \cdots \quad u(e_n)$$

$$f_1 \quad \begin{pmatrix} M_{1,1} & \cdots & M_{1,j} & \cdots & M_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_i & M_{i,1} & \cdots & M_{i,j} & \cdots & M_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_n & M_{n,1} & \cdots & M_{n,j} & \cdots & M_{n,p} \end{pmatrix}$$

La j^{e} colonne est le vecteur colonne des coordonnées de $u(e_j)$ dans \mathcal{F}

\Rightarrow L'application linéaire est entièrement définie par la matrice $\text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u)$

- $\Theta \begin{cases} \mathcal{L}(E, F) \\ u \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ \text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u) \end{cases}$ est un isomorphisme $\Rightarrow \dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E)\dim(F)$
- $\text{mat}_{\mathcal{F}}(u(x)) = \text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u)\text{mat}_{\mathcal{E}}(x)$ Permet le calcul des coordonnées d'un vecteur image

Propriétés des matrices d'applications linéaires

- $\text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(\lambda u + v) = \lambda \text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u) + \text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(v)$
- $\text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{G}}(u \circ v) = \text{mat}_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}(u)\text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(v)$
- u isomorphisme $\Leftrightarrow \text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u)$ inversible
- Pour un endomorphisme $\text{mat}_{\mathcal{E}}(u^n) = (\text{mat}_{\mathcal{E}}(u))^n$
- u est un automorphisme $\Leftrightarrow \text{mat}_{\mathcal{E}}(u)$ est inversible

$$\text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u)^{-1} = \text{mat}_{\mathcal{F}, \mathcal{E}}(u^{-1})$$

$$\text{mat}_{\mathcal{E}}(u)^{-1} = \text{mat}_{\mathcal{E}}(u^{-1})$$

2 Changement de base

DEF: On appelle **matrice de passage** de \mathcal{B} à \mathcal{B}' la matrice $P = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$

On a aussi $P = \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{id}_E)$

La j^{e} colonne de P est le vecteur colonne des coordonnées de e'_j dans \mathcal{B}

— P est inversible et son inverse est la matrice de passage de \mathcal{B}' à \mathcal{B}

Calcul de P

- Il faut exprimer les nouveaux vecteurs comme combinaison linéaire des anciens

Formules de changement de base

- Lien entre anciennes et nouvelles coordonnées**

$$\mathcal{B}' \xrightarrow[P]{\text{id}_E} \mathcal{B}$$

$$\underbrace{\text{mat}_{\mathcal{B}}(x)}_X = \underbrace{\text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')}_P \underbrace{\text{mat}_{\mathcal{B}'}(x)}_{X'}$$

- Lien entre ancienne et nouvelle matrices**

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow[M]{f} & \mathcal{F} \\ \text{id}_E \uparrow P & & P^{-1} \downarrow \text{id}_E \\ \mathcal{E}' & \xrightarrow[f]{M'} & \mathcal{F}' \end{array}$$

$$\begin{aligned} f = \text{id}_E \circ f \circ \text{id}_E &= \underbrace{\text{mat}_{\mathcal{E}', \mathcal{F}'}(f)}_{M'} = \underbrace{\text{mat}_{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}(\text{id}_E)}_{Q^{-1}} \underbrace{\text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(f)}_M \underbrace{\text{mat}_{\mathcal{E}', \mathcal{E}}(\text{id}_E)}_P \\ \text{mat}_{\mathcal{B}'}(f) &= \underbrace{\text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\text{id}_E)}_{P^{-1}} \underbrace{\text{mat}_{\mathcal{B}}(f)}_M \underbrace{\text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{id}_E)}_P \end{aligned}$$

3 Image et noyau

DEF: Pour $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $f_A \mid \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$ est l'application linéaire canoniquement associée à f

DEF: On appelle **noyau** de A l'ensemble $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(f_A) = \{X \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K}); AX = 0\}$

DEF: On appelle **image** de A l'ensemble $\text{Im}(A) = \text{Im}(f_A) = \{AX \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}); X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})\}$

Calcul de Ker et Im

- Ker :

- On résout $AX = 0$
- On peut aussi raisonner par colonnes et résoudre $\sum_{i=1}^p x_i C_i = 0$

- Im :

- On raisonne sur les colonnes *ou sur les lignes de la transposée* pour extraire une famille libre

Passage du géométrique au numérique

Pour $f \in \mathcal{L}(E_{\mathcal{E}}, F_{\mathcal{F}})$, $M = \text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(f)$, $X = \text{mat}_{\mathcal{E}}(x)$, $Y = \text{mat}_{\mathcal{F}}(y)$

- $x \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow X \in \text{Ker}(M)$
- $y \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow Y \in \text{Im}(M)$
- f injective $\Leftrightarrow \text{Ker}(M) = \{0\}$
- f surjective $\Leftrightarrow \text{Im}(M) = \mathbb{K}^n$
- f est un isomorphisme $\Leftrightarrow M$ inversible

- $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ inversible $\Leftrightarrow \text{Ker}(A) = \{0\} \Leftrightarrow \text{Im}(A) = \mathbb{K}^n$

4 Rang

DEF: On appelle **rang** de A l'entier $\text{rg}(A) = \text{rg}(f_A) = \text{rang des colonnes de } A$

- A inversible $\Leftrightarrow \text{rg}(A) = n$
- **Théorème du rang** : Nombre de colonnes de $A = \text{rg}(A) + \dim(\text{Ker}(A))$
- Pour toutes matrices P et Q inversible
 $\text{rg}(PA) = \text{rg}(AQ) = \text{rg}(PAQ) = \text{rg}(A)$ *Le rang est conservé par multiplication par une matrice inversible*

- **Passage du géométrique au numérique** : $\text{rg}(A) = \text{rg}(f)$
 - $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^T)$
 - Le rang d'une matrice est égal au rang de ses colonnes mais aussi celui de ses lignes
- $$\dim(\text{Ker}(A)) = \underbrace{p}_{\text{Nb d'inconnues}} - \underbrace{\text{rg}(A)}_{\text{Nb de pivots}} = \text{Nb de paramètres}$$
- $$\dim(\text{Ker}(A)) = \underbrace{p}_{\text{Nb d'inconnues}} - \underbrace{\text{rg}(A^T)}_{\text{Nb d'équations indépendantes}}$$

5 Matrices définies par bloc

Propriétés

- $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline C' & D' \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A+A' & B+B' \\ \hline C+C' & D+D' \end{array} \right)$
- $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline C' & D' \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} AA' + BC' & AB' + BD' \\ \hline CA' + DC' & CB' + DD' \end{array} \right)$
- $\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right)^n = \left(\begin{array}{c|c} A^n & 0 \\ \hline 0 & B^n \end{array} \right)$
- $\left(\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array} \right)$ inversible $\Leftrightarrow P$ et Q inversibles on a alors $\left(\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array} \right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} P^{-1} & 0 \\ \hline 0 & Q^{-1} \end{array} \right)$
- Plus généralement $\left(\begin{array}{c|c} P & R \\ \hline 0 & Q \end{array} \right)$ est inversible
- Les **opérations de pivot** par blocs sont possibles

Méthode

- Application à la décomposition en **somme directe**

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) \quad \begin{aligned} \text{mat}_{\mathcal{E}_1, \mathcal{B}} &= \left(\begin{array}{c} A \\ \hline C \end{array} \right) \\ \text{Si } E &= E_{1, \mathcal{E}_1} \oplus E_{2, \mathcal{E}_2} \quad \begin{aligned} E_{1, \mathcal{E}_1} \text{ stable par } f &\Leftrightarrow C = 0_B = 0 \\ \text{Si } E_1 \text{ est stable par } f \text{ alors } \text{mat}_{\mathcal{E}_1}(f|_n^{E_1}) &= A \end{aligned} \end{aligned}$$

Généralisation des matrices de projection

$$E = \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f - \mu \text{id}_E)$$

$$\text{En considérant } \mathcal{B} \text{ adaptée, } \text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_a & 0 \\ \hline 0 & \mu I_b \end{array} \right) \text{ où } \begin{cases} a = \dim(\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)) \\ b = \dim(\text{Ker}(f - \mu \text{id}_E)) \end{cases}$$

$$\text{On généralise pour } \bigoplus_{i=1}^n \text{Ker}(f - \lambda_i \text{id}_E)$$

6 Polynômes de matrices et d'endomorphismes

DEF: On appelle **polynôme annulateur** de $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ tout $P \in \mathbb{K}[X]$ tel $P(A) = 0$
L'existence d'un tel polynôme est assurée

Utilisation des polynômes annulateurs

- Pour calculer A^m connaissant un polynôme $P \neq 0$ annulateur de A on peut calculer le reste R dans la division euclidienne de X^m par P . On a alors $A^m = R$
- Si A admet un polynôme annulateur tel $P(0) \neq 0$, A est un inversible et on peut exprimer A^{-1} comme un polynôme de la matrice A

7 Nilpotence

DEF: On dit que A est **nilpotente** si $\exists p \in \mathbb{N}, A^p = 0$

Le plus petit p tel A nilpotente est l'**indice de nilpotence**

- L'indice de nilpotence est majoré par la taille de la matrice
- Si A est nilpotente alors $I_n - A$ est inversible et d'inverse $I_n + A + \dots + A^{n-1}$

DEF: On appelle **série numérique** la donnée de la suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et de la suite $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$

On note $\sum u_n$ cette série

— u_n est le **terme général**

— (S_n) est la **suite des sommes partielles** de terme général u_n

⚠️ On cherche ici à déterminer les conditions sur u_n pour que (S_n) soit convergente

1 Convergence et divergence

1.1 Nature d'une série

DEF: On appelle **nature** de $\sum u_n$, son caractère convergeant ou divergeant

DEF: On dit que $\sum u_n$ **converge** si (S_n) est convergente.

On définit alors la **somme** de la série : $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k$

DEF: Dans le cas contraire, on dit que $\sum u_n$ **diverge**

⚠️ Il faudra toujours vérifier que la somme converge avant d'écrire $\sum_{k=0}^{+\infty}$

⚠️ Certaines propriétés (*linéarité, commutativité, associativité*) ne sont plus vraies dans le cadre infini

— La suite résultante de la suppression d'un nombre fini de termes de $\sum u_n$ est de même nature que celle-ci

DEF: On appelle **reste** d'une série convergente $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ tel $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = R_n + S_n$

1.2 Séries grossièrement divergentes

Théorème

Condition nécessaire de convergence

$$\sum u_n \text{ converge} \Rightarrow u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

DEF: Si (u_n) ne converge pas vers 0, $\sum u_n$ est dite **grossièrement divergente**

1.3 Séries géométriques

DEF: On appelle **série géométrique**, les séries de la forme $\sum_{n \geq 0} x^n$ où $x \in \mathbb{R}$

- La série géométrique $\sum x^n$ converge $\Leftrightarrow |x| < 1$
- $\forall x \in]-1, 1[$, $\forall n_0 \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=n_0}^{+\infty} x^n = \frac{x^{n_0}}{1-x} = \frac{\text{1er terme}}{1-\text{raison}}$

1.4 Opérations sur les séries convergentes

- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergents alors $\sum (u_n + \lambda v_n)$ converge
On a alors $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$
- La somme d'une série convergente et d'une série divergente est divergente

2 Séries à termes positifs

- Pour une série à termes positifs on distingue deux cas :
 - (S_n) est majorée $\Rightarrow \sum u_n$ converge
 - Sinon $\sum u_n$ diverge

2.1 Comparaison de séries à termes positifs

⚠ Il faudra toujours mentionner et vérifier l'hypothèse de positivité

Propriétés

Comparaison par majoration ou minoration

Si $0 \leq u_n \leq v_n$ APCR

- $\sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge
 - $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge
- On a alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$

Propriétés

Comparaison par O ou \ll

Si $u_n = O(v_n)$ ou $u_n \ll v_n$

- $\sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge
- $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge

Propriétés

Comparaison par \sim

Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature

atat

2.2 Séries notables

On pourra ainsi comparer une série à une autre, comme ces séries notables

Séries de Riemann

DEF: On appelle série de Riemann les séries de la forme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

- $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$

Règle $n^\alpha u_n$

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs

$$\exists \alpha \leq 1, u_n \gg \frac{1}{n^\alpha} \Rightarrow \sum u_n \text{ diverge}$$

$$\exists \alpha > 1, u_n \ll \frac{1}{n^\alpha} \Rightarrow \sum u_n \text{ converge}$$

Théorème

Séries de Bertrand

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)} \text{ converge} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > 1 \text{ ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}$$

Preuve : Disjonction de cas sur α puis β

Théorème

Séries géométriques

Règle de D'Alembert

Soit (u_n) une suite à termes positifs telle $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$	> 1	< 1	$= 1$
$\sum u_n$	Diverge	Converge	\emptyset Cas douteux

Théorème

⚠ Cette règle n'est valable que si (u_n) ne s'annule pas

⚠

Conseils d'utilisation

— Pour simplifier les calculs, il faut d'abord trouver un équivalent simple de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

Méthode

3 Séries à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C}

3.1 Séries alternées

DEF: Une série à termes réels est dite **alternée** si $a_n = (-1)^n u_n$ où (u_n) est de signe constant

Critère spécial des séries alternées

Soit $(u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui décroît vers 0

— $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$ est convergente

— $\forall n \geq 0, |R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k \right| \leq u_{n+1}$

— Le signe de R_n est celui de son premier terme $(-1)^{n+1} u_{n+1}$

Théorème

3.2 Séries absolument convergentes

DEF: $\sum u_n$ est dite **absolument convergente** si $\sum |u_n|$ est convergente

- Toute série à termes réels absolument convergente est convergente et

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_n|$$

Étude de séries à termes de signe variable

- On étudie d'abord la convergence absolue
- On utilise alors toutes les méthodes exposées précédemment

Méthode

3.3 Séries semi-convergentes

DEF: Une série est **semi-convergente** si elle est convergente mais pas absolument convergente

Étude de séries semi-convergentes

- Critère spécial des séries alternées
- Développement asymptotique

Méthode

3.4 Séries à valeur complexes

DEF: La convergence de $\sum u_n$ est équivalente à la convergence de $\sum \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum \operatorname{Im}(u_n)$

Les résultats valables sur les opérations restent valables

DEF: $\sum u_n$ est dite **absolument convergente** si $\sum |u_n|$ est convergente

- Toute série à termes réels absolument convergente est convergente et

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_n|$$

4 Calcul de la somme d'une série

Pistes d'étude

- S_n ou $\lim S_n$ se calcule (formulaire, séries géométriques, exponentielles)
- S_n se simplifie par télescopage
- $u_n = f^{(n)}(x_0) \frac{u^n}{n!}$, on peut appliquer Taylor avec reste intégral

Méthode

Formulaire

- On pourra parfois utiliser $\frac{1}{n+1} = \int_0^1 t^n dt$

Propriétés

Formule de Taylor avec reste intégral

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^{n+1} sur I et $x_0 \in I$

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Théorème

5 Applications diverses

5.1 Séries et suites

- (u_n) converge $\Leftrightarrow \sum(u_{n+1} - u_n)$ converge

Théorème

Formule de Stirling

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Théorème

Développement de la série harmonique

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$$

γ est la constante d'Euler

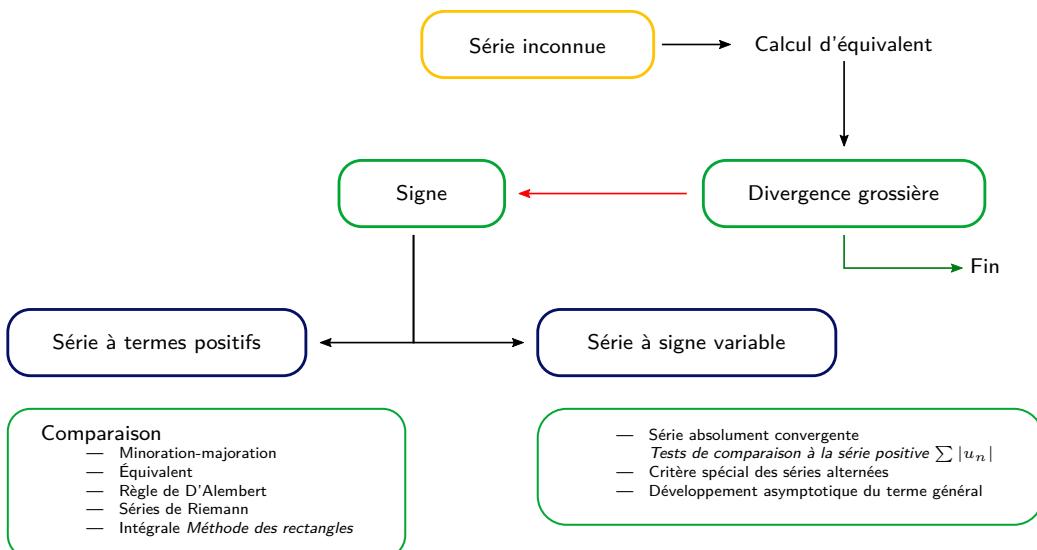
5.2 Développements décimaux

- $\forall x \in [0, 1[, \exists !(c_n) \in \llbracket 0, 9 \rrbracket^{\mathbb{N}^*}$ non stationnaire à 9, $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{10^n}$

Cette écriture est le **développement décimal propre** de x

- Un réel est rationnel \Leftrightarrow Son développement décimal est périodique APCR

6 Schéma bilan sur l'étude des séries



1 Construction de l'intégrale au sens de Cauchy

1.1 Norme infinie

DEF: On note $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$, l'ensemble des fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ bornées

DEF: Pour $f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K})$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{t \in I} |f(t)|$

Le réel $\|f\|_\infty$ est appelé **norme infinie**

Propriétés

Propriétés de la norme infinie

- $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0$
- $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$
- $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

1.2 Convergence uniforme

DEF: $(f_n) \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I si $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

On note alors $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{cvu}} f$ et f est la **limite uniforme** des (f_n)

- Si (f_n) et (g_n) convergent uniformément vers f et g alors $\lambda f_n + g_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{cvu}} \lambda f + g$

1.3 Fonctions en escalier

DEF: On appelle **subdivision** de $[a, b]$, la donnée d'un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et d'une $(n+1)$ liste $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ d'éléments de cet intervalle tels $a_0 = a < a_1 < \dots < a_k < a_{k+1} < a_n = b$

Une subdivision est dite **régulière** si $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, a_{k+1} - a_k = \frac{b-a}{n}$ Pas de la subdivision

- Une subdivision est plus **fine** qu'une autre si tous les points de l'une sont dans l'autre
- On note $\sigma \cup \sigma'$ la subdivision résultant de la fusion de σ et σ'

DEF: On dit d'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ qu'elle est en **escalier** s'il existe une subdivision de $[a, b]$ tel que $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, f|_{[a_k, a_{k+1}]} \text{ est constante}$

Cette subdivision est dite **adaptée** à la fonction en escalier f

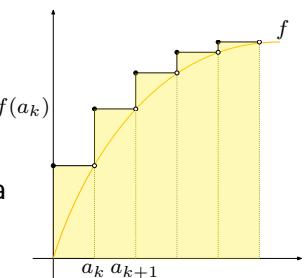
- Toute subdivision plus fine qu'une subdivision adaptée à f est adaptée à f
- L'ensemble des fonctions escaliers sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{K} est un sev de $\mathbb{K}^{[a, b]}$
Il est noté $\mathfrak{E}\text{sc}([a, b], \mathbb{K})$

1.4 Construction sur $\mathfrak{E}\text{sc}([a, b], \mathbb{K})$

On définit l'intégrale à partir des fonctions en escalier

DEF: $\int_{[a,b]} f = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) v_k$ où v_k est la valeur de f sur $[a_k, a_{k+1}]$

- L'intégrale ainsi définie vérifie la linéarité, la relation de Chasles et la positivité



1.5 Construction sur \mathcal{C}^0

- Pour $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ continue, il existe (f_n) suite de fonctions en escalier sur $[a, b]$ telle $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{cvu}} f$

DEF: $\int_{[a,b]} f_n$ converge et sa limite est indépendante de (f_n) : $\int_{[a,b]} f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a,b]} f_n$

DEF: On pose pour $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue et $(a, b) \in I^2$, $\int_a^b f(t)dt = \begin{cases} \int_{[a,b]} f & \text{si } a < b \\ 0 & \text{si } a = b \\ -\int_{[a,b]} f & \text{si } b < a \end{cases}$

La méthode utilisée découle des sommes de Riemann

Théorème

Convergence des sommes de Riemann

Pour $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ continue

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t)dt$$

⚠

Pour utiliser les sommes de Riemann il faut une subdivision régulière

Méthode

Utilisation des sommes de Riemann

- On peut utiliser les sommes de Riemann pour trouver un équivalent d'une intégrale

2 Propriétés de l'intégrale

Propriétés

Propriétés liées à la continuité

- **Linéarité**: $\int_a^b (f(t) + \lambda g(t)) dt = \int_a^b f(t)dt + \lambda \int_a^b g(t)dt$
- **Relation de Chasles**: $\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \lambda \int_b^c f(t)dt$

Propriétés

Propriétés liées à la relation d'ordre sur \mathbb{R}

- **Positivité**: $f \geq 0 \Rightarrow \int_{[a,b]} f \geq 0$
Précision: $f \geq 0$ et $\exists t_0, f(t_0) > 0 \Rightarrow \int_{[a,b]} f > 0$

- **Croissance** : $f \geq g \Rightarrow \int_{[a,b]} f \geq \int_{[a,b]} g$
Précision : $f \geq g$ et $\exists t_0, f(t_0) > g(t_0) \Rightarrow \int_{[a,b]} f > \int_{[a,b]} g$
- **Intégrale nulle** : Si $f \geq 0$ et $f \in \mathcal{C}^0$ alors $\int_{[a,b]} f = 0 \Leftrightarrow f = 0$ sur $[a, b]$
- **Inégalité triangulaire** : $\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|$

Propriétés liées aux particularités des fonctions

$$\begin{array}{ll} f \text{ paire} & \int_{-a}^a f(t)dt = 2 \int_0^a f(t)dt \\ f \text{ impaire} & \int_{-a}^a f(t)dt = 0 \\ f \text{ } T\text{-périodique} & \int_0^T f(t)dt = \int_a^{a+T} f(t)dt \end{array}$$

Inégalité de la moyenne

Si $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$

- $m \leq f \leq M \Rightarrow (b - a)m \leq \int_{[a,b]} f \leq (b - a)M$
- $\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq (b - a) \|f\|_\infty$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Si $a < b$ et $(f, g) \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})^2$

- $\left| \int_{[a,b]} f \circ g \right| \leq \sqrt{\int_{[a,b]} f^2} \sqrt{\int_{[a,b]} g^2}$
- L'inégalité est une égalité $\Leftrightarrow (f, g)$ est liée

3 Calcul intégral

3.1 Théorème fondamental

— Soient $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. $\exists c \in [a, b], \int_a^b f(t)dt = (b - a)f(c)$

Théorème fondamental du calcul intégral

Soient I un intervalle d'intérieur non vide, $a \in I$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue

$F \left| \begin{array}{rcl} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightarrow & \int_a^x f(t)dt \end{array} \right.$ est l'unique primitive de f s'annulant en a ie. $\begin{cases} F(a) = 0 \\ F'(x) = f(x) \end{cases}$

— Si f admet une primitive $\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$

3.2 Formules diverses

Intégrations fonctions de leurs bornes

Soient $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues, I intervalle intérieur non vide, $(u, v) \in C^1(I, [a, b])$

$g : x \rightarrow \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ est dérivable sur I et $\forall x \in I, g'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$

Preuve : $\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = F(v(x)) - F(u(x))$ de dérivée $v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$

Théorème

Formule d'intégration par partie

Soient u et v deux fonctions définies sur un segment $[a, b]$ à valeurs réelles de classe C^1

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt \quad | \quad (uv)' = u'v + uv' \text{ pour retrouver la formule}$$

Théorème

Formule du changement de variables

Pour φ de classe C^1 sur I , f continue sur $\varphi(I)$ et $\forall (a, b) \in I^2 \quad \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Théorème

Méthode du changement de variables

- Poser une nouvelle variable u
- Déterminer du en fonction de dx
- Remplacer x et dx par u et du et changer les bornes

Méthode

4 Formulaire

Formules générales

$$\begin{aligned} \int u'u^\alpha &= \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} \text{ pour } \alpha \neq -1 \\ \int \frac{u'}{u} &= \ln(|u|) \\ \int u'f'(u) &= f(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int e^{\alpha x}dx &= \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \text{ pour } \alpha \in \mathbb{C}^* \\ \int \ln(x)dx &= x\ln(x) - x \end{aligned}$$

Propriétés

Fonctions trigonométriques

$$\begin{aligned} \int \cos(x)dx &= \sin(x) \\ \int \sin(x)dx &= -\cos(x) \\ \int \tan(x)dx &= -\ln(|\cos(x)|) \\ \int \cot(x)dx &= \ln(|\sin(x)|) \\ \int \frac{dx}{\cos^2(x)} &= \tan(x) \\ \int \frac{dx}{\sin^2(x)} &= -\cot(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \cosh(x)dx &= \sinh(x) \\ \int \sinh(x)dx &= \cosh(x) \\ \int \tanh(x)dx &= \ln(|\cosh(x)|) \\ \int \coth(x)dx &= \ln(|\sinh(x)|) \\ \int \frac{dx}{\cosh^2(x)} &= \tanh(x) \\ \int \frac{dx}{\sinh^2(x)} &= -\coth(x) \end{aligned}$$

Propriétés

Autres primitives

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \text{ pour } a \neq 0$$

Changement de variable

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \text{ pour } a \neq 0$$

Décomposition en éléments simples

Calcul de $\frac{1}{ax^2 + bx + c}$

- On cherche à transformer l'expression en $\frac{1}{(\alpha x + \beta)^2 + \delta}$
- On applique la formule pour arctan

1 Notion de déterminant

1.1 Approche par le volume

Démo $\boxed{\text{I}} \left| \begin{array}{l} (\mathbb{R}^2)^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \rightarrow \text{Aire du parallélogramme } (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{array} \right. \text{ est}$

- Linéaire par rapport à chacune de ses variables
- Antisymétrique

$\boxed{\text{II}} \left| \begin{array}{l} (\mathbb{R}^3)^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \rightarrow \text{Volume du parallélépipède } (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \end{array} \right. \text{ vérifie les mêmes propriétés}$

On définit alors le volume comme le déterminant de la matrice des vecteurs en colonne

1.2 Définition et propriétés

Déterminant d'une matrice carrée

Définition Il existe une unique application $\det \left| \begin{array}{c} M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K} \\ M \rightarrow \det(M) \end{array} \right.$ telle

- \det est linéaire par rapport à chacune des colonnes de M
- \det est antisymétrique Permutation de deux colonnes $\Rightarrow \det$ change de signe
- $\det(I_n) = 1$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

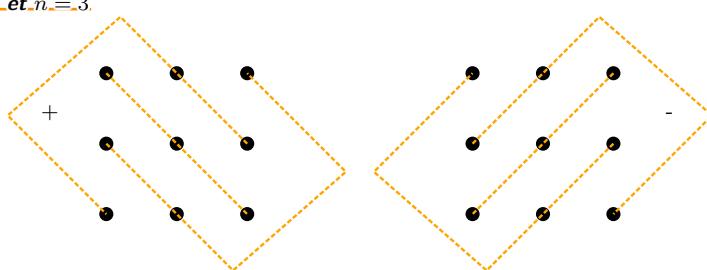
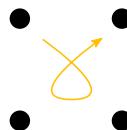
Notation de Cauchy

⚠ det n'est pas linéaire

- Propriétés
- A a deux colonnes égales $\Rightarrow \det(A) = 0$
 - $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

- $\det(A) = \det(C_1, \dots, C_n)$
- $\det(C_1, \dots, C_i + \lambda C'_i, \dots, C_n) = \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n) + \lambda \det(C_1, \dots, C'_i, \dots, C_n)$

Détermination du déterminant $n=2$ et $n=3$



Opération	Nom	Notation	\det
$C_i \leftrightarrow C_j$	Permutation	$\mathcal{P}_{i,j}$	$-\det$
$C_i \leftarrow \lambda C_i$	Dilatation	$\mathcal{D}_{i,j}(\lambda)$	$\lambda \det$
$C_i \leftarrow C_i + \lambda C_{j,i \neq j}$	Transvection	$\mathcal{T}_{i,j}(\lambda)$	\emptyset

Même conclusion pour des opérations sur les lignes

$$\det(T) = \begin{vmatrix} T_{1,1} & \cdots & T_{1,n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & T_{n,n} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n T_{i,i}$$

\Leftrightarrow Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est le produit de ses coefficients diagonaux

Règles de calcul

- A est inversible $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ on a alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ et $\det(A^m) = \det(A)^m$
- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(P^{-1}) = \det(P)^{-1} P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\det(P^{-1}AP) = \det(A)$

Déterminants par blocs

Pour des matrices carrées

$$\begin{vmatrix} A & X \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det(A)\det(B)$$

Généralisation :

$$\begin{vmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & A_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n \det A_i$$

1.3 Développement d'un déterminant

- DEF: On appelle **mineur** $\Delta_{i,j}$ de A d'indices (i, j) ,
le déterminant de la matrice A privée de la ligne i et de la colonne j
- DEF: $(-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$ est de **cofacteur** de A d'indices (i, j)
- DEF: $((-1)^{i+j} \Delta_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$ est appelée **comatrice** $\mathrm{com}(A)$ de A

Formules du développement d'un déterminant

Soit $n \geq 2$ et $A \in M_n(\mathbb{K}), \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

- $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_{i,k} \Delta_{i,k}$ Développement de $\det(A)$ selon la k^e colonne
- $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_{k,i} \Delta_{k,i}$ Développement de $\det(A)$ selon la k^e ligne

Développement du déterminant

- On raye la ligne $colonne$ en question
- Pour chaque élément de la ligne $colonne$ rayée
 - Le signe est donné par la matrice des signes
 - On multiplie par l'élément
 - La matrice carrée résultant de la rayure de la colonne $ligne$ de l'élément

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Formule de la comatrice

- $A \mathrm{com}(A)^T = \det(A) I_n$

2 Déterminants classiques

Développement n -linéaire

Si $C_i = U + X_i$

On a alors $\det(M) = \det(U + X_1, \dots, U + X_n)$

$\det(M) = \det(X_1, \dots, X_n) + \sum_{i=1}^n \det(X_1, \dots, U_{\text{position } i}, \dots, X_n)$ Par linéarité par rapport aux colonnes et annulation si deux U

Méthode

Calcul par pivot

- L'idée est de se ramener à une matrice triangulaire
- On effectue des opérations sur les colonnes *lignes* et modifie le déterminant
- On utilise finalement la propriété d'une matrice triangulaire

Méthode

Récurrence

- On réalise un développement pour se ramener à une matrice similaire de dimensions inférieures
- On procède ensuite par récurrence
- Adapté aux matrices tridiagonalisées

Méthode

Par les polynômes - Déterminant de Vandermonde

Lemme : $\forall Q \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ unitaire tel $\deg(Q) = n - 1$

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & x_1^{n-2} & Q(x_1) \\ 1 & \dots & x_2^{n-2} & Q(x_2) \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & x_n^{n-2} & Q(x_n) \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1^1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2^1 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n^1 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

En choisissant $Q(X) = \prod_{i=1}^n (X - x_i)$ on a par blocs

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} V_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) & 0 \\ * & Q(x_n) \end{vmatrix} = Q(x_n)V_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})$$

$$\text{Ainsi } V_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i) V_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) = \dots = \prod_{i=2}^n \prod_{j < i} (x_i - x_j) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

Méthode

Utilisation :

- $V(a, b, c) = (c - b)(c - a)V(a, b) = (c - b)(c - a)(b - a)$
- $V(x_1, \dots, x_n) = (x_n - x_{n-1}) \dots (x_n - x_1)V(x_1, \dots, x_{n-1})$

3 Algèbre linéaire

DEF: $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = \det \text{mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$

— (u_1, \dots, u_n) est une base $\Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0$

DEF: Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, $\det(\text{mat}_{\mathcal{B}}(f))$ est indépendant de \mathcal{B} , on note $\det(f)$

— Pour des endomorphismes, on vérifie alors

- f est un automorphisme $\Leftrightarrow \det(f) \neq 0$
- $\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$

On appelle **produit scalaire** sur $E_{\mathbb{R}-ev}$ toute application $\psi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- Symétrie : $\psi(u, v) = \psi(v, u)$
- Bilinéarité : $\begin{cases} \psi(u + \lambda v, w) = \psi(u, w) + \lambda \psi(v, w) & \text{à gauche} \\ \psi(w, u + \lambda v) = \psi(w, u) + \lambda \psi(w, v) & \text{à droite} \end{cases}$ ψ est symétrique \Rightarrow Une égalité suffit
- Positivité : $\psi(u, u) \geq 0$
- Caractère défini : $\psi(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

On note $\langle u | v \rangle$ ou $(u | v)$

Espace	\mathbb{R}^n	$\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$	$C^0([a, b], \mathbb{R})$	$\mathbb{R}_n[X]$
Produit scalaire	$\langle X Y \rangle = X^T Y = \sum_{i=1}^n X_i Y_i$	$\langle A B \rangle = \text{tr}(A^T B)$	$\langle f g \rangle = \int_{[a,b]} \omega f g$	$\langle P Q \rangle = \int_{[0,1]} PQ$

DEF: Un **espace préhilbertien** $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ réel est un \mathbb{R} -ev E muni d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$

DEF: Un **espace euclidien** est un espace préhilbertien de dimension finie

DEF: On appelle **norme** de $u \in E$ le réel $\|u\| = \sqrt{\langle u | u \rangle}$

- u est **unitaire** si $\|u\| = 1$

Propriétés de la norme euclidienne

- Séparation : $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$
- Homogénéité : $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$
- Inégalité triangulaire : $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$
Égalité $\Leftrightarrow u$ et v positivement liés

$$-\left\| \sum_{i=1}^m u_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^m u_i \mid \sum_{i=1}^m u_i \right\rangle = \sum_{1 \leq i < j \leq m} \langle u_i | u_j \rangle = \sum_{i=1}^m \|u_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq m} \langle u_i | u_j \rangle$$

Identités remarquables

- $\|u \pm v\|^2 = \|u\|^2 \pm 2 \langle u | v \rangle + \|v\|^2$
- $\langle u | v \rangle = \frac{\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2}{2} = \frac{-\|u - v\|^2 + \|u\|^2 + \|v\|^2}{2}$ *Polarisation I*
- $\langle u | v \rangle = \frac{\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2}{4}$ *Polarisation II*
- $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2 \|u\|^2 + 2 \|v\|^2$ *Parallélogramme*

Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle u | v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

Egalité $\Leftrightarrow (u, v)$ est liée *colinéaire*

2 Orthogonalité

DEF: Deux vecteurs sont **orthogonaux** $u \perp v$ si $\langle u | v \rangle = 0$

- Une famille $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs est **orthogonale** si $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow u_i \perp v_j$
- Une famille de vecteurs est dite **orthonormale** ou *orthonormée* si elle est orthogonale et si tous ses éléments sont unitaires

Soit $\forall (i, j) \in I^2, \langle u_i | u_j \rangle = \delta_{i,j}$ *Le Kronecker*

Théorème de Pythagore

- $u \perp v \Leftrightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$
- (u_1, \dots, u_n) orthogonale $\Rightarrow \left\| \sum_{i=1}^n u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|u_i\|^2$

- Si $(u_i)_{i \in I}$ est une famille orthogonale telle $\forall i \in I, u_i \neq 0$ alors $(u_i)_{i \in I}$ est libre
- Tout espace euclidien admet des bases orthonormées

Algorithme de Gram-Schmidt

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Il existe une base orthonormée (f_1, \dots, f_n) de E telle $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{vect}(f_1, \dots, f_k)$

Orthonormalisation d'une base

- On construit une famille orthogonale $(\omega_1, \dots, \omega_n)$
 - $\omega_1 = e_1$
 - $\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \omega_k = e_k + \lambda_1 \omega_1 + \dots + \lambda_{k-1} \omega_{k-1}$, où $\langle \omega_k | \omega_i \rangle_{i < k} = 0$ admet $(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1})$ pour solution
On note qu'on a $\omega_k = e_k - \pi_{k-1}(e_k)$ Projété de e_k sur $(\omega_1, \dots, \omega_{k-1})$
 - On norme les vecteurs $f_i = \frac{\omega_i}{\|\omega_i\|}$

Calculs dans une base orthonormée

Pour x et y vecteurs de E et $X = \text{mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \text{mat}_{\mathcal{B}}(y)$ et $\langle \cdot | \cdot \rangle_\star$ et $\| \cdot \|_\star$ sont sur \mathbb{R}^n

- $\langle x | y \rangle = \langle X | Y \rangle_\star = X^T Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$
- $\|x\| = \|X\|_\star = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
- $\forall x, x = \sum_{k=1}^n \langle x | e_k \rangle e_k$ où (e_1, \dots, e_k) est une base orthonormée

- Si \mathcal{B} est orthonormée on a $\varphi \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x & \rightarrow \text{mat}_{\mathcal{B}}(x) \end{cases}$ isométrie *Isomorphisme qui conserve la norme*

DEF: On appelle **orthogonal** de A_{A^\perp} l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de A
 $A^\perp = \{u \in E, \forall a \in A, u \perp a\}$

Propriétés des orthogonaux

Pour $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ préhilbertien réel et $A \subset E$

- $E^\perp = \{0\}$
- $\{0\}^\perp = E$
- A^\perp est un sev de E
- $A^\perp = \text{vect}(A)^\perp$
- $A \subset (A^\perp)^\perp$, \triangleleft Il n'y a pas toujours égalité

- $x \in \text{vect}(f_1, \dots, f_p)^\perp \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \langle x | f_k \rangle = 0$

Supplémentaire orthogonal_F

Pour $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ préhilbertien réel et F , sev fini de E

- $F \bigoplus F^\perp = E$
- $(F^\perp)^\perp = F$
- $\dim(E) < +\infty \Rightarrow \dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$

3 Projection orthogonale et approximation des moindres carrés

DEF: On appelle **projection orthogonale** sur F la projection p_F sur F parallèlement à F^\perp

- Si $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_n)$ est une base orthonormée de F alors

$$\forall x \in E, p_F(x) = \sum_{k=1}^p \langle x | f_k \rangle f_k$$

- $\forall x \in E, \|p_F(x)\| \leq \|x\|$

Calcul d'une projection orthogonale p_F

- On peut appliquer la formule précédente dans une base orthonormée de $F_{Gram-Schmidt}$

- Dans une base quelconque de F de dimension p on a

$$p_F(x) = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_p f_p = y \Leftrightarrow x - y \in F^\perp = \text{vect}(f_1, \dots, f_p)^\perp$$

$$\text{Soit } \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket \langle x - y | f_i \rangle = \langle x | f_i \rangle - \sum_{j=1}^p \lambda_j \langle f_i | f_j \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \text{Système linéaire d'inconnues } (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$$

Meilleure approximation au sens des moindres carrés

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien et F un sev de E et $x \in E$

- $\exists y \in F, \|x - y\|$ soit minimale

$y = p_F(x)$ et est dit la meilleure approximation de x par des vecteurs de F

- On appelle **distance de x à F** le réel $d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \|p_{F^\perp}(x)\| = \min_{y \in F} \|x - y\|$

Calcul de $d(x, F)$

- On peut déterminer $p_F(x)$ ou $p_{F^\perp}(x)$

- On peut utiliser Pythagore : $d(x, F) = \sqrt{\|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2} = \|p_{F^\perp}(x)\|$

1 Probabilités discrètes

Démo

$$\mathbf{P}(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n_A}{n_{tot}}$$

Ce modèle vérifie $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ et $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$

$\mathbf{P}(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n_A}{n_{tot}}$

Ce modèle vérifie $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ et $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$

Résultat possible	$\omega \in \Omega$
Événement	$A \subset \Omega$
Événement élémentaire	$\{\omega\}$
A réalisé	$\omega \in A$
A implique B	$A \subset B$
A ou B	$A \cup B$
A et B	$A \cap B$
Contraire de A	$\complement_{\Omega} A$ ou \bar{A}
Événement impossible	\emptyset
Événement certain	Ω
A et B incompatibles	$A \cap B = \emptyset$

DEF: On dit que $\{A_i, i \in I\}$ est un **système complet d'événements** de Ω si

- Les A_i sont deux à deux disjoints
- Les $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$

DEF: Une **mesure de probabilité** $\mathbf{probabilité}$ est une application

$$\mathbf{P} \begin{cases} \mathcal{P}(\Omega) & \rightarrow [0, 1] \\ x & \rightarrow \mathbf{P}(x) \end{cases} \text{ vérifiant :}$$

- Normalisation : $\mathbf{P}(\Omega) = 1$
- Additivité : $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$

DEF: Un **espace probabilisé** fini est un couple (Ω, \mathbf{P}) où Ω est un univers fini et \mathbf{P} une probabilité sur Ω

Propriétés des probabilités

Propriétés

- $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$
- $\mathbf{P}(B \setminus A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$
- $A \subset B \Rightarrow \mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$
- $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$

- $\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i)_{(A_i)}$ incompatibles
- $\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i)$
- $\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(B \cap A_i)_{(A_i)}$ un système complet

- Une probabilité est entièrement déterminée par les images des singltons

$$\exists ! \mathbf{P} \text{ sur } \Omega, \mathbf{P}(A) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{P}(\{\omega\}) \mathbb{1}_A(\omega) \text{ tel } \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{P}(\{\omega\}) = 1$$

DEF: On appelle **loi de probabilité** la donnée de $\{(\omega, \mathbf{P}(\omega)), \omega \in \Omega\}$ tel $\sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{P}(\omega) = 1$

- **Formule de Poincaré** : $\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbf{P}\left(\bigcap_{m=1}^k A_{i_m}\right)$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \mathbf{E}\left(\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i}\right) \\
&= \mathbf{E}\left(1 - \mathbb{1}_{\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}}\right) \\
&= 1 - \mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{\overline{A_i}}\right) \text{ Linéarité de } \mathbf{E} \\
&= 1 - \mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^n (1 - \mathbb{1}_{A_i})\right) \\
&= 1 - \mathbf{E}\left(\sum_{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket} (-1)^{\#I} \prod_{i \in I} \mathbb{1}_{A_i}\right) \text{ } I : \text{Ensemble des indices où } \mathbb{1}_{A_i} \text{ est choisi} \\
&= 1 - \sum_{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket} (-1)^{\#I} \mathbf{E}\left(\mathbb{1}_{\bigcap_{i \in I} A_i}\right) \text{ Linéarité de } \mathbf{E} \\
&= 1 - \sum_{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket} (-1)^{\#I} \mathbf{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \\
&= \sum_{k=0}^n (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket \\ \#I=k}} \mathbf{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \text{ } k \text{ est le choix de } \#I
\end{aligned}$$

DEF: On appelle **probabilité conditionnelle** de A sachant B ($\mathbf{P}(B) > 0$) notée $\mathbf{P}_B(A)$ ou $\mathbf{P}(A|B)$ le nombre $\frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$

Propriétés des probabilités conditionnelles

- L'application \mathbf{P}_B définit une probabilité
 - $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}_B(B)\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}_B(A)\mathbf{P}(B)$
 - $\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(A_2) \dots \mathbf{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$ où $A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} > 0$
 - **Probabilités totales** : $\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_{A_i}(B)\mathbf{P}(A_i)$ où (A_i) système complet et $\forall i \mathbf{P}(A_i) > 0$
 - **Formule de Bayes** : $\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}_A(B)\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)}$ où $\mathbf{P}(A) > 0$ et $\mathbf{P}(B) > 0$
- $$\mathbf{P}_B(A_j) = \frac{\mathbf{P}_{A_j}(B)\mathbf{P}(A_j)}{\sum_{i=1}^n \mathbf{P}_{A_i}(B)\mathbf{P}(A_i)}$$
- où (A_i) système complet et $\forall i \mathbf{P}(A_i) > 0$

DEF: Deux événements sont **indépendants** si $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$

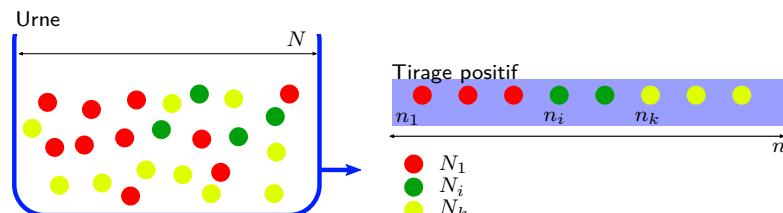
- A et B ($\mathbf{P}(B) > 0$) indépendant $\Leftrightarrow \mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A)$
- A et B indépendants $\Leftrightarrow \begin{cases} A \text{ et } \overline{B} \text{ indépendants} \\ \overline{A} \text{ et } B \text{ indépendants} \\ \overline{A} \text{ et } \overline{B} \text{ indépendants} \end{cases}$

DEF: A_1, \dots, A_n sont **mutuellement indépendants** si $\forall I \subset \llbracket i, n \rrbracket \neq \emptyset, \mathbf{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbf{P}(A_i)$

Mutuelle indépendance \Rightarrow Indépendance deux à deux

- Si (A_1, \dots, A_n) est une famille d'événements indépendants, toute famille obtenue en remplaçant A_i par $\overline{A_i}$ l'est aussi

2 Modèles d'urnes



2.1 Tirages simultanés

$$\mathbf{P}(E) = \frac{\binom{N_1}{n_1} \cdots \binom{N_k}{n_k}}{\binom{N}{n}}$$

- Tirages possibles : $\#\Omega = \binom{N}{n}$
- Tirages positifs : $\binom{N_1}{n_1} \cdots \binom{N_k}{n_k}$

2.2 Tirages successifs avec remise

$$\mathbf{P}(E) = \frac{n!}{n_1! \cdots n_k!} \times \frac{N_1^{n_1} \cdots N_k^{n_k}}{N^n}$$

$$\mathbf{P}(E) = \frac{n!}{n_1! \cdots n_k!} \times p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$$

- Tirages possibles : $\#\Omega = N^n$
- Tirages positifs :
 - Position des boules : $\binom{n}{n_1} \cdots \binom{n - \sum_{i=1}^k n_i}{n_k}$
 - Choix des boules : $N_1^{n_1} \cdots N_k^{n_k}$

2.3 Tirages successifs sans remise

$$\mathbf{P}(E) = \frac{\binom{N_1}{n_1} \cdots \binom{N_k}{n_k}}{\binom{N}{n}}$$

- Tirages possibles : $\#\Omega = \frac{N!}{(N-n)!}$
- Tirages positifs :
 - Tirage des boules : $\frac{N_1!}{(N_1 - n_1)!} \cdots \frac{N_k!}{(N_k - n_k)!}$
 - Permutations sur les boules tirées : $n_1! \cdots n_k!$

1 Variables aléatoires

DEF: On appelle variable aléatoire discrète sur (Ω, \mathbf{P}) toute application $X \mid \Omega \xrightarrow{\omega} E \xrightarrow{X(\omega)}$
 La variable est dite réelle si $E \subset \mathbb{R}$



X n'est pas une variable mais une fonction de ω

- **Utilisation** : On s'intéresse à la probabilité des valeurs de X plutôt qu'à celles de l'expérience
- On note $(X \in A)$ l'évènement $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in A\}$
C'est l'ensemble des points où X a une valeur dans A
On a ainsi $\mathbf{P}(X = x), \mathbf{P}(X < x), \dots$

2 Lois de probabilité

DEF: On appelle **loi** \mathbf{P}_X de X la probabilité $\mathbf{P}_X \mid A \xrightarrow{X(\Omega)} \xrightarrow{[0, 1]} \mathbf{P}_X(A) = \mathbf{P}(X \in A)$
Cette application est entièrement définie par $\{(x, \mathbf{P}(X = x)), x \in X(\Omega)\}$



Deux variables aléatoires peuvent avoir la même loi sans être égales

Méthode

Détermination de la loi de probabilité de X

- On détermine l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X
- Pour chaque valeur $x \in X(\Omega)$ on calcule $\mathbf{P}(X = x)$

DEF: $f \circ X$ est notée $f(X)$ pour $f \mid X(\Omega) \xrightarrow{x} F \xrightarrow{f(x)}$
 $f(X)$ est alors une variable aléatoire

Méthode

Calculer la loi de $f(X)$

Connaissant la loi de X on étudie celle de $Y = f(X)$

- On calcule d'abord $Y(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par Y
- Pour chaque valeur v prise par Y on décrit l'évènement ($f(X) = v$) au moyen de X
- On déduit $\mathbf{P}(Y = v)$

Loi	$X \hookrightarrow$	$X(\Omega)$	\mathbf{P}	Exemples
Uniforme	$\mathcal{U}(E)$	E	Équiprobabilité	Tirage au hasard
Bernoulli	$\mathcal{B}(p)$	$\{0, 1\}$	$\begin{cases} \mathbf{P}(X = 1) = p \\ \mathbf{P}(X = 0) = 1 - p \end{cases}$	Expérience à deux issues
Binomiale	$\mathcal{B}(n, p)$	$\llbracket 0, n \rrbracket$	$\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$	n expériences indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$
Hypergéométrique	$\mathcal{H}(N, M, n)$	$\llbracket n - N + M, \min(n, M) \rrbracket$	$\mathbf{P}(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	Tirages sans remise

3 Couples de variables aléatoires et vecteurs aléatoires

DEF: On appelle **couple de variables** aléatoires toute variable aléatoire à valeurs dans un produit

- Pour $Z = (X, Y)$ à valeurs dans $E \times F$
 - X et Y sont des variables aléatoires
 - \mathbf{P}_X et \mathbf{P}_Y sont appelées **lois marginales** de (X, Y)



En général $(X, Y)(\Omega) \neq X(\Omega) \times Y(\Omega)$

- Si $Y(\Omega) = \{y_k; k \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$ alors $\forall x \in X(\Omega), \mathbf{P}(X = x) = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(X = x, Y = y_k)$
La connaissance de la loi de (X, Y) permet de trouver les lois de \mathbf{P}_X et \mathbf{P}_Y



Les lois marginales ne suffisent pas à déterminer la loi conjointe_{Celle de (X, Y)}

DEF: On appelle **vecteur aléatoire** toute variable aléatoire à valeurs dans un produit

Elle admet des composantes X_1, \dots, X_n elles-mêmes variables aléatoires

- On généralise les notions des couples_{Lois marginales, ...}

DEF: La **loi conditionnelle** de Y sachant $(X = x)$ est la probabilité $\mathbf{P}_{X=x} \Big| A \xrightarrow{\mathcal{P}(Y(\Omega))} [0, 1] \xrightarrow{\mathbf{P}_{X=x}(Y \in A)}$

4 Variables indépendantes

DEF: Les variables aléatoires X et Y définies sur Ω sont dites **indépendantes** si $\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, les événements $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont indépendants

- X et Y sont indépendantes $\Leftrightarrow \forall x \in X(\Omega), \mathbf{P}_{X=x}(Y)_{\text{Loi conditionnelle}} = \mathbf{P}_Y(Y)_{\text{Loi marginale}}$
 $\Leftrightarrow \forall A \subset X(\Omega), \forall B \subset Y(\Omega), \mathbf{P}((X, Y) \in A \times B) = \mathbf{P}(X \in A)\mathbf{P}(Y \in B)$

DEF: X_1, \dots, X_n sont dites **mutuellement indépendantes**_{Indépendantes} si

$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$ les événements $(X_i = x_i)$ sont mutuellement indépendants



Mutuelle indépendance \Rightarrow indépendance deux à deux

- X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes $\Leftrightarrow \forall (A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(X_1(\Omega)) \times \dots \times \mathcal{P}(X_n(\Omega))$ les événements $(X_i \in A_i)$ sont mutuellement indépendants

DEF: Des variables indépendantes et de mêmes lois sont dites indépendantes et identiquement distribuées_{iid}

- Si X_1, \dots, X_n sont iid de loi $\mathcal{B}(p)$ alors $\sum_{k=1}^n X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

Lemme des coalitions

1. Si X et Y sont indépendantes et f et g définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$
 $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes
2. Plus généralement si $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$ sont indépendantes et f et g définies respectivement sur $X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$ et $Y_1(\Omega) \times \dots \times Y_n(\Omega)$
 $f(X_1, \dots, X_n)$ et $g(Y_1, \dots, Y_n)$ sont indépendantes

5 Espérance et variance d'une variable aléatoire

5.1 Espérance

DEF: Soit X à valeur dans $\{x_k; k \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$, on appelle **espérance** de X $\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{P}(X = x_k)$

- $\mathbf{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbf{P}(A)$
- $\mathbf{E}(a \in \mathbb{R}) = a$

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$	$\mathbf{E}(X) = p$
$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$	$\mathbf{E}(X) = np$

Propriétés de l'espérance

- **Linéarité** : $\mathbf{E}(X + \lambda Y) = \mathbf{E}(X) + \lambda \mathbf{E}(Y)$
- **Positivité** : $X \geq 0 \Rightarrow \mathbf{E}(X) \geq 0$
- **Croissance** : $X \leq Y \Rightarrow \mathbf{E}(X) \leq \mathbf{E}(Y)$
- **Inégalité triangulaire** : $|\mathbf{E}(X)| \leq \mathbf{E}(|X|)$
- X et Y indépendantes $\Rightarrow \mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$
- **Cauchy-Schwarz** : $\mathbf{E}(XY)^2 \leq \mathbf{E}(X^2)\mathbf{E}(Y^2)$

Propriétés

Théorème du transfert

Soit f définie sur l'image de $\{x_k; k \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$ de X

$$\mathbf{E}(f(X)) = \sum_{k=1}^n f(x_k) \mathbf{P}(X = x_k)$$

Théorème

5.2 Variance, écart-type et covariance

DEF: On appelle **variance** de X le réel $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^2)$

- On appelle **écart-type** de X le réel $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$	$\mathbf{V}(X) = p(1-p)$
$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$	$\mathbf{V}(X) = np(1-p)$

Propriétés

Propriétés de la variance

- **Relation de Huygens** : $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$
- $\mathbf{V}(aX + b) = a^2 \mathbf{V}(X)$
- $\mathbf{V}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n \mathbf{V}(X_i)_{(X_i) \text{ indépendants deux à deux}}$

Propriétés

Covariance

- **Relation de Huygens** : $\text{coV}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$
- **Cauchy-Schwarz** : $\text{coV}(X, Y)^2 \leq \mathbf{V}(X)\mathbf{V}(Y)$
- $\mathbf{V}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbf{V}(X_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{coV}(X_i, X_j)$
- **Coefficient de corrélation linéaire** : $\rho(X, Y) = \frac{\text{coV}(X, Y)}{\sqrt{\mathbf{V}(X)\mathbf{V}(Y)}} = \frac{\text{coV}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$

5.3 Inégalités

Théorème

Inégalité de Markow

$$\forall a > 0, \mathbf{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbf{E}(|X|)}{a}$$

Preuve à partir de $\mathbf{1}_{(|X| \geq a)} \leq |X|$

Théorème

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathbf{V}(X)}{a^2}$$

6 Résultats asymptotiques

Théorème

Loi des grands nombres

— FAIBLE

Si (X_n) est une suite de variables iid de même loi d'espérance m alors $\forall \epsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ Par application de Tchebychev}$$

— FORTE

$$\mathbf{P}\left(\left\{\omega \in \Omega; \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} m\right\}\right) = 1$$

Théorème

Théorème central-limite

Soit (X_n) une suite de variables iid tel que X_1 admette un moment d'ordre deux

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \mathbf{P}\left(a \leq \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq b\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_a^b e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{du}{\sqrt{2\pi}} \text{ où } \begin{cases} \mu = \mathbf{E}(X_1) \\ \sigma = \sigma(X_1) \\ \bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \end{cases}$$

Méthode

Étude d'une expérience aléatoire

- Modélisation *Univers-probabilité-variable(s)*
- Se ramener à des cas connus *Lois-Urnes-...*
- Sinon conditionnement

Méthode

Problèmes de comptage

- $X = \mathbf{1}_{A_1} + \dots + \mathbf{1}_{A_n}$ est la variable comptant les évènements réalisés
- \Rightarrow Calcul facile de $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$ si (A_i) indépendants

II Physique

1 Unités

Une unité est un étalon universel, précis et indestructible permettant de faire des mesures
Il est possible de décomposer toute unité en unité SI reposant sur :

- Les longueurs (m) [L]
- Les masses (kg) [M]
- Le temps (s) [T]
- L'intensité du courant électrique (A) [I]



Ne pas confondre le mètre et le coefficient dimensionnel de la masse [M]

2 Éléments mathématiques

2.1 Dérivée

$$p = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{--- } p, \text{ la pente avec } \lim_{x \rightarrow 0} p = f'(x_0) \end{array} \right.$$

2.2 Différentielles

dx est la variation infinitésimale *élémentaire* de x , cette notation contient en elle la notion de limite et on a :

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Calcul de différentielles

Méthode

- On dérive par rapport à une variable
- On multiplie par la différentielle de la variable par rapport à laquelle on a dérivé

Exemple

Soit $y = x^2$, on a
 $dy = d(x^2) = 2xdx$

Les opérations s'appliquent normalement

Pour effectuer le calcul différentiel d'une fonction composée, on effectue des calculs différentiels successifs par rapport à des variables u que l'on définit

Exemple

Soit $y = (2x^2 - 3x)^4$, on a
 $dy = d(u^4) = 4u^3du = 4(2x^2 - 3x)^3d(2x^2 - 3x) = 4(2x^2 - 3x)^3(4x - 3)dx$

2.3 Les équations différentielles

Une équation différentielle est de la forme $u(y)\mathrm{d}y = v(x)\mathrm{d}x$ avec une condition initiale

Ordre 1

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$

- On trouve les solutions de l'équation homogène : $y'(x) + a(x)y(x) = 0$
- $\Rightarrow y = \lambda e^{-A(x)}$
- Solution particulière
 - Évidente
 - Si a est constante, une solution du même type que b (*polynôme, exponentielle*)
 - Variation de la constante : $y(x) = \lambda(x)y_0(x)$
 - On calcule y' :
$$\begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = \lambda(x)(y'_0(x) + a(x)y_0(x)) + \lambda'(x)y_0(x) \\ y'_0 + ay_0 = 0 \end{cases}$$
 $\Rightarrow y$ solution de $y' + ay = b \Leftrightarrow \lambda'(x)y_0(x) = b(x)$
- **Solution = Solution homogène + Solution particulière**
- Puis Conditions initiales

Ordre 2

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x)$$

- On trouve les solutions de l'équation homogène : $y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$ à l'aide de l'équation caractéristique $x^2 + ax + b = 0$
- $\Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \Delta & > 0 & = 0 & < 0 \\ \hline y_0(x) & \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} & (\lambda x + \mu) e^{rx} & (\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)) e^{\alpha x} \quad r = \alpha \pm i\beta \\ \hline \end{array}$
- Solution particulière
 - Évidente
 - $f(x) = P(x)e^{\lambda x} \Rightarrow$ On cherche une solution de la forme $Q(x)e^{\lambda x}$
- **Solution = Solution homogène + Solution particulière**
- Puis Conditions initiales

Dans le cas de $a(x)f(y(x)) = b(x)$ et où $a(x)$ s'annule il faut séparer les cas et vérifier le **raccord**

2.4 Intégrales

Variables séparables

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}B \Rightarrow \int_{A_0}^A \mathrm{d}A = \int_{B_0}^B \mathrm{d}B$$

2.5 Développements limités

Les développements limités permettent de trouver la courbe qui éprouve le mieux une fonction en un point. L'ordre du développement limité augmente la précision

Oscillations autour d'une position d'équilibre

Pour $y = f(x)$

- On pose $x = x_{eq} + \epsilon$
- On transforme l'équation différentielle en fonction de ϵ

2.6 Fonctions à plusieurs variables

Dérivation

On utilise la dérivée partielle, soit une dérivation par rapport à l'une des variables en considérant les autres comme constantes

Propriétés

- Si $z = f(x, y)$ alors $dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$
- Si les dérivées secondes sont continues alors il y a égalité des dérivées croisées

Exemple

Soit $f(x, y) = x^2 \sin(y) - y$
 On a $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin(y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cos(y) - 1$

Propriétés

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \quad \begin{array}{l} \text{— } \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) \\ \text{— } \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \\ \text{— } \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha \times \vec{u} \cdot \vec{v} + \beta \times \vec{u} \cdot \vec{w} \end{array}$$

2.7 Produit scalaire

Propriétés

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & y_1z_2 - y_2z_1 \\ y_1 & y_2 & z_1x_2 - z_2x_1 \\ z_1 & z_2 & x_1y_2 - x_2y_1 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{— } \vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\vec{u}, \vec{v}) \times \vec{n} \\ \vec{n} \text{ le vecteur normal à } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \\ \text{— } \vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u} \\ \text{— } \vec{u} \wedge (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha \times \vec{u} \wedge \vec{v} + \beta \times \vec{u} \wedge \vec{w} \\ \text{— } \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y = \vec{u}_z \\ \vec{u}_y \wedge \vec{u}_z = \vec{u}_x \\ \vec{u}_z \wedge \vec{u}_x = \vec{u}_y \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{u}_y \wedge \vec{u}_x = -\vec{u}_z \\ \vec{u}_z \wedge \vec{u}_y = -\vec{u}_x \\ \vec{u}_x \wedge \vec{u}_z = -\vec{u}_y \end{array} \right.$$

2.9 Produit mixte

DEF: On appelle **produit mixte** de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ le déterminant de la matrice de ces trois vecteurs
 — Le produit mixte est invariant par permutations circulaires

1 Oscillateurs

$$\vec{T} = -k(l - l_0) \times \vec{u_{ext}}$$

— \vec{T} , la force de tension d'un oscillateur



$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

— ω_0 , la pulsation propre de l'oscillateur en rad.s⁻¹
— T_0 , la période propre de l'oscillateur

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + c = 0$$

— \ddot{x} , la différentielle seconde de x

2 Signaux sinusoïdaux

2.1 Équations des signaux

$$s(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

— A , l'amplitude telle $A = \sqrt{a^2 + b^2}$
— ω , la pulsation du signal en rad.s⁻¹
— φ_0 , la phase initiale du signal

$$s(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$$

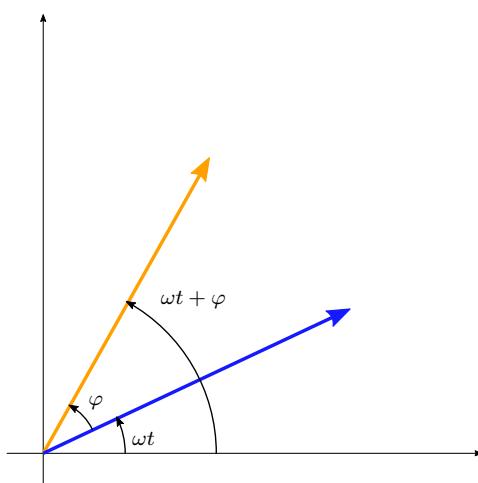
— a et b constantes à déduire des conditions initiales

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

— ω , la pulsation du signal en rad.s⁻¹

2.2 Représentation de Fresnel

- A toute fonction sinusoïdale, on associe un vecteur représentatif du complexe $Ae^{j(\omega t + \varphi)}$
- Ce vecteur tournera en fonction de t autour de O à la vitesse ω



3 Résoudre un problème de mécanique

3.1 Principe général

Résoudre un problème de mécanique

- Poser **référentiel et système**
- **Bilan des forces**
- **Équation du mouvement**
 - Principe fondamental de la dynamique $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{\gamma}$
 - Exprimer l'**accélération** en fonction des vecteurs de chaque force rentrant en jeu sous forme d'équation différentielle
 - En déduire la **forme canonique**
 - Trouver les fonctions **solution particulières** de l'équation, les solutions particulières correspondent aux positions d'équilibre du système
 - Si résolution nécessaire, essayer de trouver une fonction permettant de cerner toutes les solutions, les constantes sont à déduire des **conditions initiales**

Méthode

3.2 Particularités des oscillateurs harmoniques

- L'équation à trouver est de la forme $\ddot{x} + \omega_0^2 x + c = 0$, c est appelé second membre
- Pour résoudre cette équation, résoudre le cas général et ajouter la position d'équilibre (*solution particulière*) avant de déduire les constantes des conditions initiales

4 Énergie de l'oscillateur harmonique

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

— E_m l'énergie du système lié à l'oscillateur harmonique

1 Mise en équation des phénomènes ondulatoires

1.1 Équation d'une onde

"L'état de perturbation au point M est celui observé au point S τ temps plus tôt"

$$a(M, t) = a(S, t - \tau)$$

- S et M , deux points de l'espace
- t , l'instant où la perturbation est observée en S
- τ le temps de parcours de S à M tel $\tau = \frac{d_{SM}}{c}$

$a(S, t)$ est donc une **onde progressive** se propageant à la célérité c

1.2 Ondes progressives sinusoïdales

On peut déduire d'un signal à la source :

$$a(O, t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

- ω , la pulsation du signal en rad.s^{-1} émis par la source
- φ , la constante de déphasage
- A , l'amplitude du signal

Le signal à l'abscisse x :

$$a(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

- ω , la pulsation du signal tel $\omega = \frac{2\pi}{T}$
- k , la norme du vecteur d'onde tel $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

- A t constant on a une photographie
- A x constant on a l'évolution au cours du temps en ce point
- Le sens de propagation de $A \cos(\omega t \pm kx)$ est $\mp \vec{u}_x$

1.3 Représentation de Fresnel

DEF: A toute fonction sinusoïdale, on associe un vecteur représentatif du complexe $A e^{j(\omega t + \varphi)}$

- Ce vecteur tournera en fonction de t autour de O à la vitesse ω dans le sens trigonométrique
- Sa projection sur O_x représente $s(t)$
- Ce vecteur permet de déterminer lequel de deux signaux est en retard par rapport à l'autre
- Le retard de phase augmente proportionnellement à l'abscisse x tel $\varphi(x) = \frac{2\pi}{\lambda}x = kx$

2 Propriétés des ondes

2.1 Front d'onde

DEF: Le **front d'onde** est la surface rassemblant l'ensemble des points adjacents dans un même état de perturbation

2.2 Analyse de Fourier

Tout signal périodique peut être décomposé en une somme de signaux sinusoïdaux
Cette propriété peut être modélisée par une **décomposition en série de Fourier** :

$$s(t) = \mu + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = \mu + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

- μ , la valeur moyenne du signal tel $\mu = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} s(t) dt$
- $a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$ est l'harmonique de rang n
- Le fondamental est l'harmonique de rang 1
- Les coefficients a_n, b_n, c_n diminuent si n grand, le spectre perd donc en amplitude
- $s(t)$ pair $\Rightarrow b_n = 0$, $s(t)$ impair $\Rightarrow a_n = 0$

Propriétés

Cas d'un signal non périodique

Il est tout de même possible d'appliquer la décomposition en série de Fourier en considérant de signal comme une somme de signaux sinusoïdaux de toutes les pulsations possibles :

$$a(S, t) = \sum_{\omega} A_{\omega} \cos(\omega t + \varphi_{\omega})$$
$$s(t) = \int_0^{+\infty} \tilde{s}(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega$$

2.3 Notation complexe

Propriétés

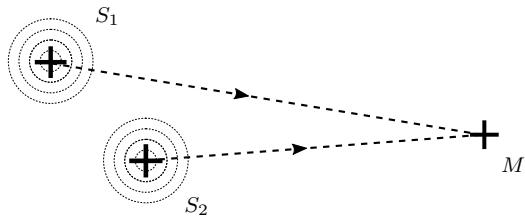
On utilise la notation complexe pour simplifier les calculs ondulatoires

$$a(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi) \rightarrow \underline{a}(x, t) = \underline{A} e^{j(\omega t - kx)} \text{ où } \underline{A} = A e^{j\varphi}$$

1 Interférences

Soient les signaux de même pulsation

- $a_1(M, t) = A_1 \cos(\omega t - kx_1 + \varphi_1)$
- $a_2(M, t) = A_2 \cos(\omega t - kx_2 + \varphi_2)$



Les ondes se superposent et le déphasage relatif des deux ondes en M s'écrit :

Simplification des phénomènes d'interférences

On pourra définir une origine des temps et des abscisses pour simplifier les déphasages

Comme les deux ondes ont la même pulsation, le déphasage relatif $\psi(M)$ ne dépend pas du temps : les ondes sont **mutuellement cohérentes**

Méthode

Démo

$$\begin{cases} a_1(x, t) = A_1 \cos(\omega t - kx + \varphi_1) \rightarrow \underline{a}_1(x, t) = \underline{A}_1 e^{j(\omega t - kx)} \\ a_2(x, t) = A_2 \cos(\omega t - kx + \varphi_2) \rightarrow \underline{a}_2(x, t) = \underline{A}_2 e^{j(\omega t - kx)} \end{cases} \text{ où } \begin{cases} \underline{A}_1 = A_1 e^{j\varphi_1} \\ \underline{A}_2 = A_2 e^{j\varphi_2} \end{cases}$$

On cherche l'onde résultante de la superposition sous la forme $\underline{a}(x, t) = \underline{A} e^{j(\omega t - kx)}$

En considérant $\underline{a}_1(x, t) + \underline{a}_2(x, t) = (\underline{A}_1 + \underline{A}_2) e^{j(\omega t - kx)} \Rightarrow$ L'onde résultante est également sinusoïdale

On a $\underline{A}_1 + \underline{A}_2 = A_1 e^{j\varphi_1} + A_2 e^{j\varphi_2}$ tel

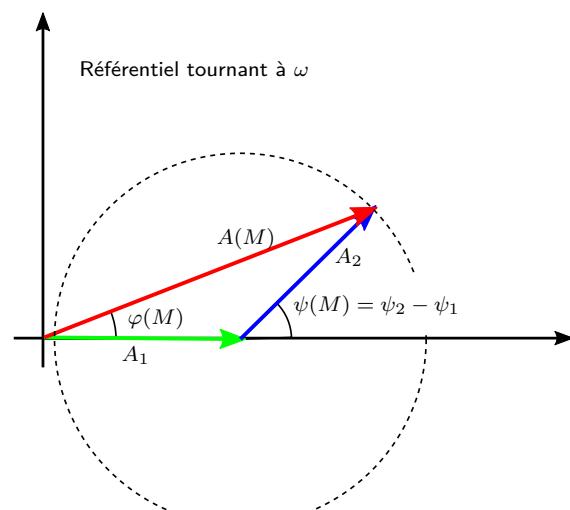
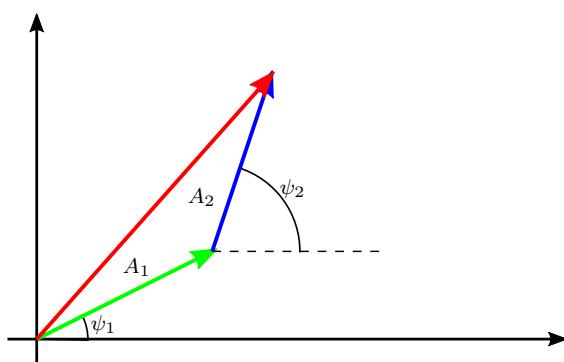
$$\left\{ \begin{array}{l} |\underline{A}|^2 = \underline{A} \times \underline{A}^* = (A_1 e^{j\varphi_1} + A_2 e^{j\varphi_2})(A_1 e^{-j\varphi_1} + A_2 e^{-j\varphi_2}) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ \tan(\varphi) = \frac{\text{Im}(\underline{A})}{\text{Re}(\underline{A})} = \frac{A_1 \sin(\varphi_1) + A_2 \sin(\varphi_2)}{A_1 \cos(\varphi_1) + A_2 \cos(\varphi_2)} \end{array} \right.$$

— Notons pour finir que le calcul explicite de l'amplitude est facile pour $A_1 = A_2$:

$$\underline{A}^2 = 2A_1^2(1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) = 4A_1^2 \cos^2\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)$$

$$\text{D'où } A = 2A_1 \left| \cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \right|$$

\Rightarrow Calcul du déphasage relatif par comparaison de l'amplitude initiale et finale



$$p = \frac{\psi(M)}{2\pi}$$

— p , l'ordre d'interférence

Deux cas sont à retenir :

- $\psi = 0 [2\pi]$ ou $p \in \mathbb{Z}$: Interférence **constructive** (*les signaux sont en phase*)
- $\psi = \pi [2\pi]$ ou $p \in \frac{\mathbb{Z}}{2}$: Interférence **destructive** (*les signaux sont en opposition de phase*)

2 Phénomène de battements

Si on a la superposition de deux signaux de même amplitude, mais de phases instantanées différentes, mais proches, on observe le **phénomène de battements**

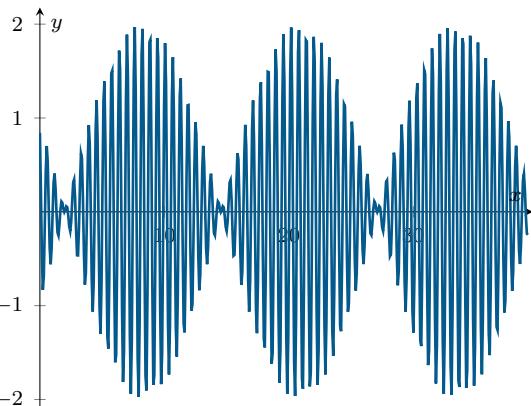
$$\underline{a}(t) = \underline{a}_1(t) + \underline{a}_2(t) = Ae^{j(\omega_1 t + \varphi_1)} + Ae^{j(\omega_2 t + \varphi_2)}$$

$$\text{D'où } \underline{a}(t) = Ae^{j((\frac{\omega_1+\omega_2}{2})+(\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}))}e^{j((\frac{\omega_2-\omega_1}{2})t+(\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}))}$$

$$\underline{a}(t) = 2Ae^{j(\omega t + \varphi)} \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t + \frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

$$\text{Ainsi } a(t) = \Re(\underline{a}(t)) = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t + \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \cos(\omega t + \varphi)$$

Démo



On observe :

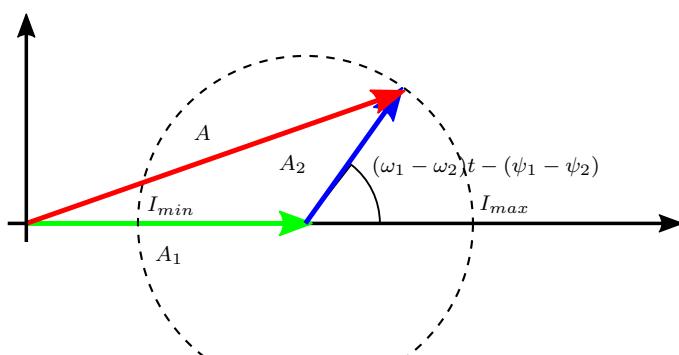
- Une enveloppe : $\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t + \frac{\Delta\varphi}{2}\right)$

$$\nu_B = |\nu_1 - \nu_2|$$

- Les sinusoïdes : $\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)$

$$\nu_O = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$$

Les battements informent sur les petites différences de fréquence



3 Ondes stationnaires

Dans le cas de deux ondes de caractéristiques identiques, mais de sens opposés, on observe des **ondes stationnaires**

$$\begin{cases} a_1(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_1) \rightarrow \underline{a}_1(x, t) = Ae^{j\varphi_1} e^{j(\omega t - kx)} \\ a_2(x, t) = A \cos(\omega t + kx + \varphi_2) \rightarrow \underline{a}_2(x, t) = Ae^{j\varphi_2} e^{j(\omega t + kx)} \end{cases}$$

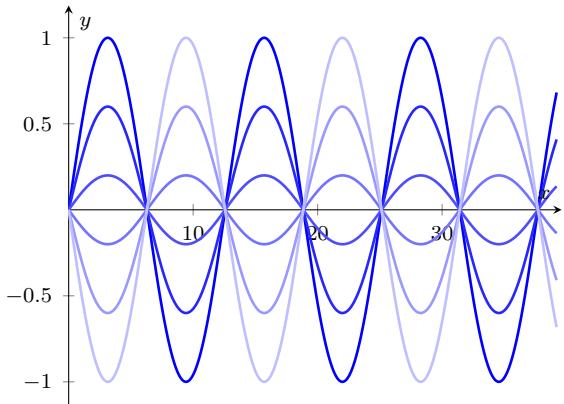
On cherche l'onde résultante de la superposition sous la forme $\underline{a}(x, t) = \underline{A}e^{j(\omega t - kx)}$

En considérant $\underline{a}(x, t) = \underline{a}_1(x, t) + \underline{a}_2(x, t) = Ae^{j\varphi_1} e^{j(\omega t - kx)} + Ae^{j\varphi_2} e^{j(\omega t + kx)}$

$$\text{On a } \underline{a}(x, t) = Ae^{j(\omega + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2})} \left(e^{j(-kx + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2})} + e^{j(kx + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2})} \right) = 2Ae^{j(\omega + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2})} \cos \left(kx + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right)$$

$$\text{Ainsi } a(x, t) = \text{Re}(\underline{a}(x, t)) = 2A \cos \left(kx + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right) \cos \left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right)$$

Démo



L'amplitude dépend de la position x

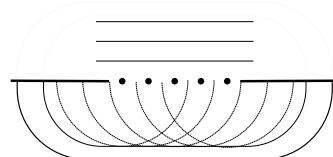
- Les **nœuds** : $A = 0$
- Les **ventres** : A maximal

Propriétés

- La distance entre deux nœuds est de $\frac{\lambda}{2}$
- Il n'y a plus de propagation
- Les ondes stationnaires sont dépendantes des **conditions aux limites** :
 - Nœud en cas d'extrémité fixée
 - Un tuyau ouvert impose un nœud
- ⇒ Dans certains cas l'existence de l'onde est dépendante de la valeur de ν : ce sont les **fréquences propres**. Les fonctions d'ondes dépendant de ces fréquences sont les **modes propres**

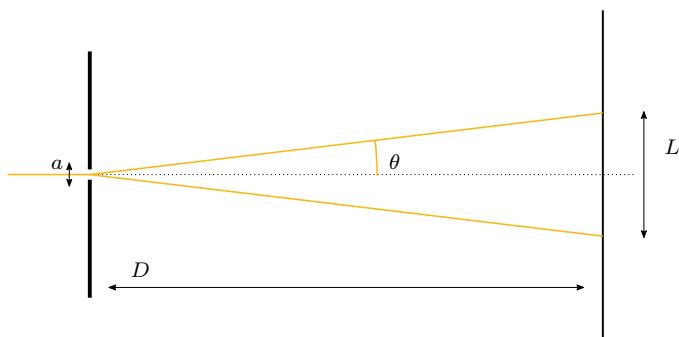
4 Diffraction

Lorsqu'une onde rencontre un obstacle, elle subit un étalement de ces directions de propagation. Ce phénomène est expliqué par le PRINCIPE D'HUYGENS-FRESNEL : lorsque l'onde rencontre un obstacle, elle se comporte ensuite comme originaire d'une infinité de sources.



$$\sin(\theta) = \frac{\lambda}{a}$$

- θ est l'écart angulaire
- a est la largeur de la fente
- On multipliera par 1.22 dans le cas d'un trou



Géométriquement on trouve $\tan(\theta) = \frac{L}{2D}$

Le phénomène de diffraction est notamment crucial dans les questions de focalisation

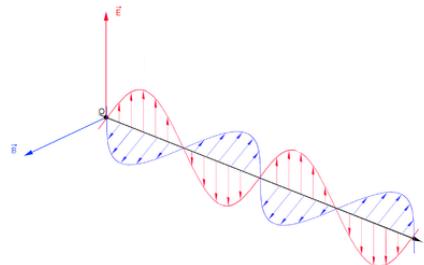
1 Structure de l'onde électromagnétique

$$v = \frac{c}{n}$$

- v la vitesse de l'onde électromagnétique dans m
- n_m l'indice du milieu
- c, v dans le vide $c = 299792458 \text{ m.s}^{-1}$

Les ondes électromagnétiques sont **transverses**, se propagent orthogonaux entre eux et à la direction de propagation :

- Un champ électrique \vec{E}
- Un champ magnétique \vec{B}



On distingue alors la lumière **polarisée** (direction privilégiée : vecteur, ellipse) et la lumière non polarisée comme la lumière blanche

2 Caractéristiques de la lumière

2.1 Sources de lumière

On distingue différentes sources de lumière :

- Lumière blanche
- Lampes spectrales : (*spectres discrets*)
- Laser

2.2 Aspects énergétiques

$$\mathcal{E}(M) = \frac{P(S)}{S}$$

- $\mathcal{E}(M)$, l'éclairement en W.m^2
- $P(S)$, la puissance reçue par S

$$\delta W = P(S)dt$$

- δW , la lumière reçue entre t et $t + dt$

$$\mathcal{E}(M) = k \|\vec{E}\|$$

- $\mathcal{E}(M)$, l'éclairement simplifié perçu dans le cas d'une onde monochromatique
- $\|\vec{E}\|$, l'amplitude du champ électrique

2.3 Polarisation

DEF: Un **polariseur** est une lame possédant une **direction propre** (\vec{v}_p)

LOI DE MALUS

$$\mathcal{E}_{out} = \mathcal{E}_{in} \cos^2(\alpha)$$

- \mathcal{E} , l'éclairement
- α , l'angle d'incidence

3 Propriétés de l'optique géométrique

3.1 Vocabulaire

DEF: **Surface d'onde** : Ensemble des points dans un même état de propagation

DEF: **Rayon lumineux** : Courbe de propagation de l'énergie lumineuse

DEF: **Faisceau lumineux** : Ensemble de rayons lumineux

DEF: **Ouverture angulaire** : Angle au sommet du cône d'un faisceau

DEF: **Pinceau lumineux** : Faisceau cylindrique de faible section

DEF: **Milieu Homogène** : Milieu où les propriétés physiques ne changent pas

DEF: **Milieu Isotrope** : Aucune direction de propagation privilégiée

DEF: **Dioptre** : Surface de contact entre deux milieux

3.2 Postulats sur la lumière

- Dans un milieu homogène et isotrope, la lumière se propage en ligne droite
- La propagation de la lumière le long d'un rayon est indépendante des autres rayons
- Le trajet suivi par la lumière est indépendant du sens de propagation

3.3 Lois de Descartes

Propriétés

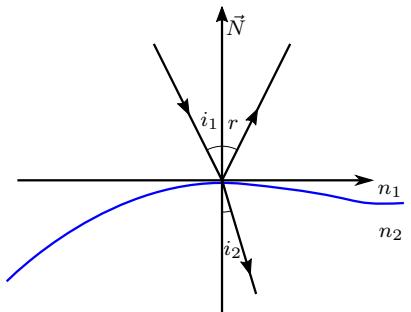
Lois de la réflexion dioptrique

1. Le rayon réfléchi, le rayon incident et la normale au dioptre sont contenus dans le plan d'incidence
2. $i_r = -r$ (*angles orientés sinon $r = i$*)

Propriétés

Lois de la réfraction dioptrique

1. Le rayon réfracté, le rayon incident et la normale (au dioptre) sont dans un même plan, le plan d'incidence
2. Le rayon incident et le rayon réfracté sont situés de part et d'autre de la normale
3. $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2) \Leftrightarrow \frac{\sin(i_1)}{v_1} = \frac{\sin(i_2)}{v_2}$



3.4 Angle de réfraction limite, phénomène de réflexion totale

- Si $n_1 < n_2$, l'angle réfracté existe, il atteint une valeur **limite** i_{2lim} en **incidence rasante** $i = \frac{\pi}{2}$
 $i_{2lim} = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right)$
- Si $n_1 > n_2$, l'angle incident doit être inférieur à i_{lim} pour que le rayon réfracté existe. Dans le cas contraire, on observe le phénomène de **réflexion totale**
 $i_{lim} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$

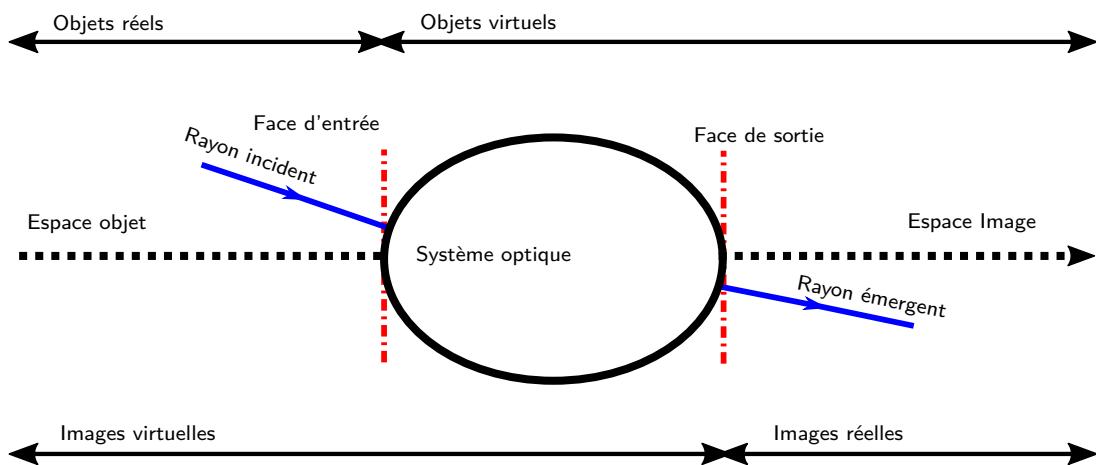
4 Utilisation de l'optique

4.1 Systèmes optiques

DEF: Un **système optique** est un ensemble de milieux transparents et homogènes séparés par des dioptres ou des miroirs. On qualifie un système optique de **centré** si il possède un axe de révolution dit **optique**

- Système **dioptrique** : que des dioptres
- Système **catoptrique** : que des miroirs
- Système **catadioptrique** : mix

4.2 Objets et images d'un système optique



DEF: A' est l'**image** de A par un système optique si tous les rayons de A convergent vers A' après avoir traversé le système optique, A est alors l'**antécédent** de A' et A et A' sont **conjugués** par le système optique

DEF: Un **foyer objet** est un point dont l'image par le système optique est à l'infini

DEF: Un **foyer image** est un point image par un système optique situé à l'infini

- Les rayons projetés de foyers par un système optique sont parallèles à l'infini
- Les foyers principaux sont ceux dont les rayons parallèles sont aussi parallèles à l'axe optique

DEF: Un système **afocal** est un système dont les foyers objet et images sont à l'infini

4.3 Conditions de Gauss pour un système centré

- Les rayons considérés sont **paraxiaux**, soit peu inclinés par rapport à l'axe optique
- Les rayons rencontrent les dioptres ou miroirs de système au voisinage de l'axe optique

Stigmatisme

DEF: Un système est **rigoureusement stigmatique** si tous les rayons issus de A convergent exactement en A' (*miroir plan/sphérique/parabolique*)

DEF: Un système est dit **approximativement stigmatique** si tous les rayons lumineux issus de A convergent approximativement autour de A'

Conditions de Gauss et système centré \Rightarrow Stigmatisme approché

Aplanétisme

DEF: Si deux points sont A et A' sont conjugués au sens du stigmatisme rigoureux, on dit qu'il y a **aplanétisme rigoureux** si pour tout point B tel que AB soit perpendiculaire à l'axe optique A'B' est également perpendiculaire à l'axe optique

DEF: L'aplanétisme est **approché** si le stigmatisme est approché

Conditions de Gauss et système centré \Rightarrow Aplanétisme approché

Dans les cas d'aplanétisme, il y a alors **correspondance plan à plan** :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

— γ , le grandissement algébrique
— Seconde égalité par Thalès

5 Lentilles sphériques minces

5.1 Propriétés

Une lentille sphérique est un système optique centré constitué de deux dioptres sphériques.

Elle est dite mince si elle vérifie :

- Épaisseur \ll Rayon des deux cercles
- Épaisseur \ll Différence de rayon des deux cercles

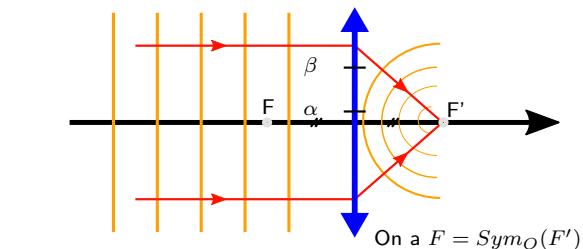
On définit dans les conditions de Gauss une lentille par son centre optique et ses foyers principaux objets et images

On définit :

- $f = \overline{OF}$, la distance focale objet
- $f' = \overline{OF'}$, la distance focale image

On a donc $f = -f'$ et

- $f' > 0$ pour une lentille convergente
- $f' < 0$ pour une lentille divergente

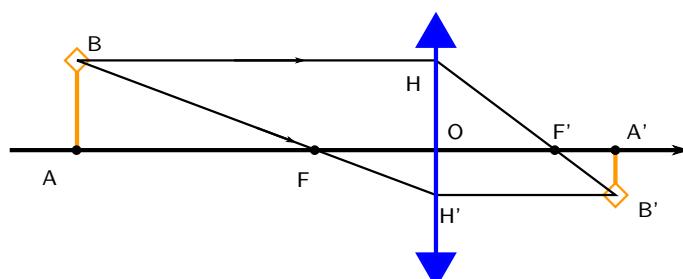


L'onde prend plus de retard en α qu'en β

Notation : $A \xrightarrow[L]{O,f'} A'$

DEF: Vergence : $\mathcal{V} = \frac{1}{f'}$ en dioptrie (δ)_{1δ = 1m⁻¹}

5.2 Relations de conjugaison



Relation de Newton - Origine aux foyers

Par Thalès

- $\frac{\overline{OH'}}{\overline{FO}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{FA}}$
- $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}}$

$$\overline{A'B'} = \overline{OH'} \text{ et } \overline{AB} = \overline{OH} \Rightarrow \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}}$$

Démo

$$\overline{FA} \times \overline{F'A'} = f f' = -f^2 = -f'^2 \quad |$$

Relation de Descartes - Origine aux centres

Par Thalès $\frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$
 D'où $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O'A'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{F'O} + \overline{OA'}}{\overline{F'O}} = 1 + \frac{\overline{O'A'}}{\overline{F'O}}$

Démo

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \quad |$$

Montage 4f

On utilise le montage 4f pour trouver l'encombrement minimum pour faire d'un objet réel une image réelle

On a $\overline{AA'}$ minimum pour $\overline{AA'} = 4f'$

6 Constructions

Tracés en optique géométrique

Pour construire une image, on s'appuie sur au moins deux des trois rayons particuliers :

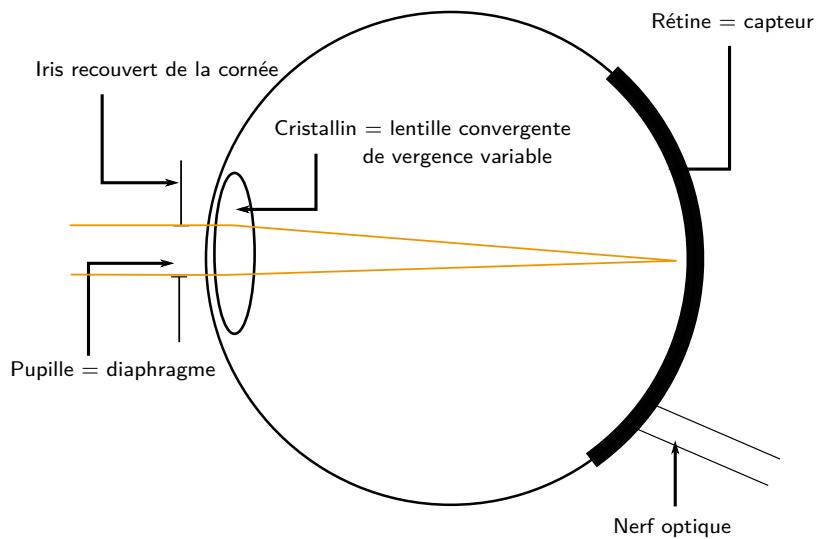
- Le rayon **passant par O** et qui n'est pas dévié
- Le rayon incident parallèle à l'axe optique (ou son prolongement) qui ressort en **passant par F'**
- Le rayon incident (ou son prolongement) qui ressort parallèle à l'axe optique en **passant par F**

On construit toujours de l'entrée du système vers sa sortie

- Les prolongements Ex : Cas des images virtuelles sont en pointillés
- Les points sur l'axe optique sont tracés par aplanétisme en utilisant un autre point perpendiculaire optique

Méthode

7 L'œil humain



7.1 Propriétés

L'œil humain se comporte comme une lentille convergente de **vergence variable**

L'**accommodation** consiste alors à adapter la distance f'

DEF: **Ponctum remotum** : point le plus éloigné que l'œil peut voir (dans le cas normal $+\infty$)

DEF: **Ponctum proximum** : Point le plus proche que l'œil peut voir net (dans le cas normal $\simeq 25\text{cm}$)

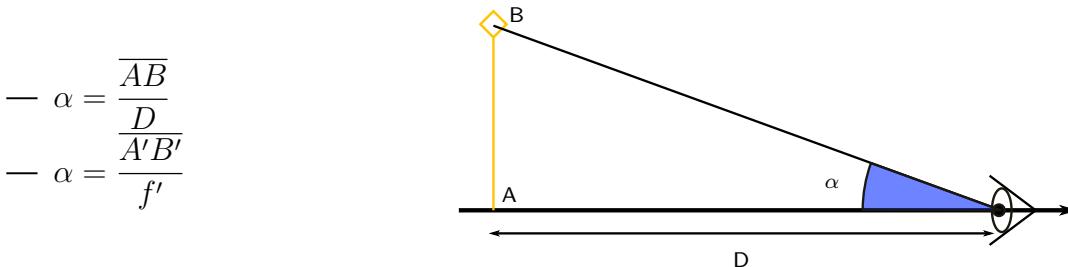
7.2 Défauts

- **Myopie** : l'œil est trop convergent
- **Hypermétropie** : l'œil n'est pas assez convergent
- **Presbytie** : l'œil a besoin d'aide pour l'accommodation
- **Astigmatisme** : l'œil s'éloigne du stigmatisme

7.3 Vision directe et loupe

La vision subit les effets de la **diffraction** et de la taille des cellules capteurs. Ces effets se compensent cependant.

L'œil détermine la taille d'un objet par l'angle formé et non de la taille de l'image mesurée



La **loupe** permet à l'œil d'accommoder plus près en plaçant une lentille convergente dans le plan focal de l'œil

PUISSEANCE INTRINSÈQUE

$$P_i = \frac{\alpha_\infty}{AB}$$

— P_i en δ
 — $\alpha_\infty = \frac{AB}{f'}$, l'angle sous lequel voit l'image avec instrument

GROSSISSEMENT

$$G = \frac{\alpha_\infty}{\alpha_{max}}$$

— $\alpha_\infty = \frac{AB}{f'}$, l'angle sous lequel voit l'image avec instrument
— $\alpha_{max} = \frac{AB}{Dpp}$, angle de vision sans instrument

1 Phénomènes électriques dans un circuit

DEF: **Courant électrique** : Résultat d'un déplacement d'ensemble ordonné de particules chargées, sous l'effet d'actions extérieures

- Différents types de courant :
 - Courant **particulaire** : Particules chargées dans le vide
 - Courant de **conduction** : Ils ont lieu dans les conducteurs et semi-conducteurs
 - Dans un conducteur métallique, les électrons libres se déplacent
 - Dans les semi-conducteurs, les porteurs sont des électrons ou des trous
 - Dans une solution électrolytique, les porteurs sont les ions de la solution
 - Courant de **convection** : Un déplacement du système entraîne un déplacement des charges

DEF: **Charge** : Elle est quantifiée dans le cas des particules élémentaires $-e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$

DEF: **Intensité** du courant : **Débit** de charges en A

$$i(t) = \frac{\delta q}{dt}$$

— δq , le débit de charges pendant dt

DEF: **Tension** du courant : **Déférence de potentiel** entre deux points du circuit électrique en V

DEF: **Masse** du circuit : Origine des potentiels

DEF: Régime **continu** : Les grandeurs électriques sont indépendantes du temps

DEF: Régime **quasistationnaire** : On approche en considérant la propagation des phénomènes électriques comme instantanée (ARQS)

Cette approximation est possible si les tensions et courants sont faibles

2 Étude de systèmes

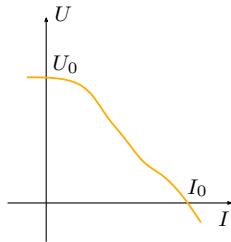
2.1 Vocabulaire

DEF: **Dipôle** : Dispositif à deux bornes permettant de le raccorder à d'autres composants dans un circuit

DEF: **Convention d'orientation**

- **Récepteur** : U et I sont de sens opposé $\Rightarrow P = UI$ est la puissance reçue
- **Générateur** : U et I sont de même sens $\Rightarrow P = UI$ est la puissance fournie

DEF: **Caractéristique statique Courant/Tension** : représentation graphique du lien entre le courant I qui circule et la tension U en régime continu



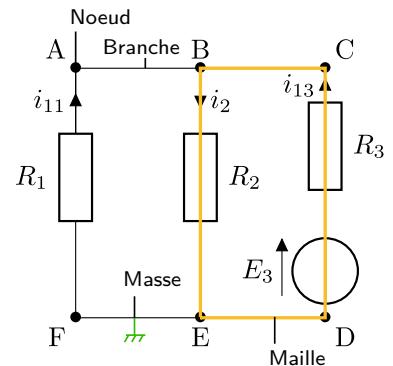
- U_0 : Tension en boucle ouverte
- I_0 : Courant de court-circuit
- Un dipôle est **passif** si sa caractéristique passe par l'origine
- Un dipôle est **linéaire** si sa caractéristique est une droite
- Un dipôle est **symétrique** si sa caractéristique est symétrique

2.2 Circuits électriques

DEF: **Réseau** électrique : Ensemble de dipôles reliés par des fils conducteurs parfaits

DEF: **Dipôles en série** : Les dipôles sont sur la même branche et donc soumis au même courant

DEF: **Dipôles en dérivation** : Les dipôles ont leurs deux bornes reliées par un même fil. Ils ont donc la même tension à leurs bornes



2.3 Lois de Kirchhoff

— Loi des **nœuds** : En un nœud $\sum_k i_k = 0$

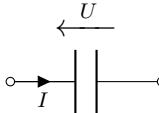
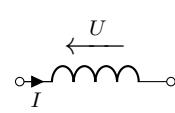
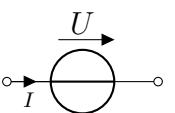
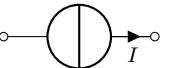
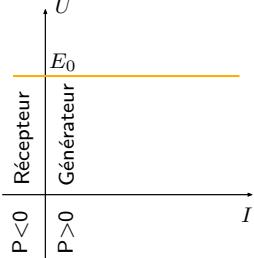
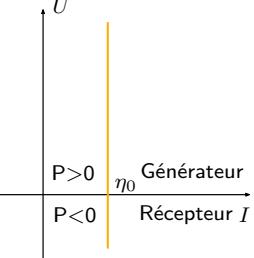
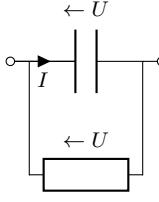
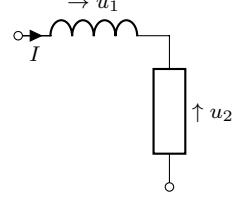
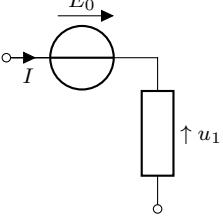
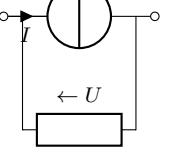
Utilisation : $\sum i_{\text{entrant}} = \sum i_{\text{sortant}}$

— Loi des **mailles** : Sur une maille orientée $\sum_k \epsilon_k u_k$ ($\epsilon_k = \pm 1$, selon l'orientation de la tension)

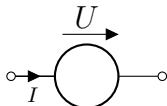
Utilisation : On utilise une relation de type Chasles dans une maille pour rejoindre les deux extrémités de la flèche de tension

2.4 Dipôles remarquables

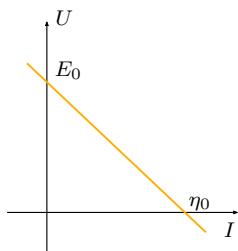
Dipôle	Fil idéal	Interrupteur ouvert	Résistance
Representation			
Relation	$U = 0$	$I = 0$	$U = RI_{\text{C.R}}$
Caractéristique			

Dipôle	Condensateur idéal	Bobine idéale	Source de tension	Source de courant
Representation				
Relation	$q = CU$ $I(t) = C \frac{dU}{dt}$	$U(t) = L \frac{dI}{dt}$	$U = E_0$ Force électromotrice	$I = \eta_0$ Courant électromoteur
Caractéristique	<i>Caractéristiques statiques de l'interrupteur et du fil</i>			
Énergie	$E = \frac{1}{2}CU^2$	$E = \frac{1}{2}LI^2$	$P = E_0I$	$P = \eta_0U$
Cas réel				

2.5 Modèle de Thévenin



⇒ Cas réel des sources de courant et de tension



2.6 Résolution de circuits

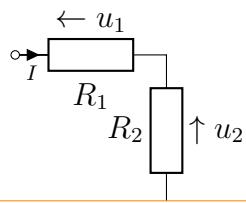
Simplification de résistances

- En **série** : $R = \sum R_i$
- En **parallèle** : $G = \frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_i}$ $G = \frac{1}{R}$, la conductance en S

Ponts diviseurs

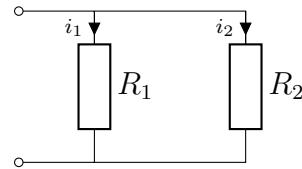
De tension

$$u_k = U \frac{R_k}{\sum R_i}$$



De courant

$$i_k = I \frac{G_k}{\sum G_i}$$



Résolution d'un système

- **Paramétrage** : Intensités, potentiels
- **Équations** :
 - $n - 1$ équations de loi des nœuds
 - Loi des mailles dans toutes les mailles élémentaires

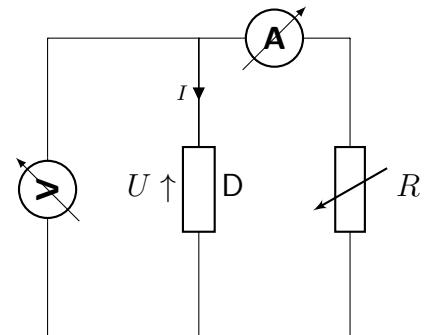
Méthode

2.7 Points de fonctionnement

Deux dipôles connectés entre eux sont à la fois en série et en parallèle et sont parcourus par le même courant et sont soumis à la même tension et ont cependant une convention différente

On appelle alors **point de fonctionnement** le point commun à leurs deux caractéristiques

Application à la détermination de la caractéristique d'un dipôle actif

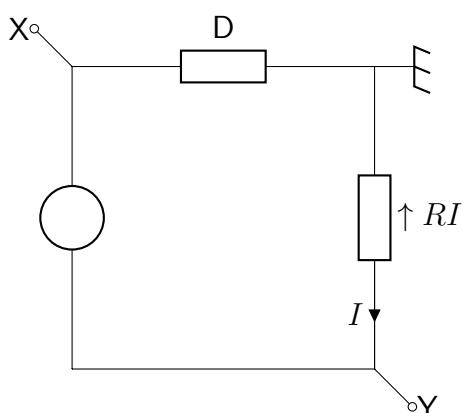


Méthode de résolution

- On fait l'hypothèse de la zone de fonctionnement (intuition ou point de fonctionnement)
- On résout en appliquant le modèle adapté à la zone de fonctionnement
- Domaine de validité et validation de l'hypothèse
- Dans le cas contraire, changer d'hypothèse

Méthode

3 Tracer la caractéristique d'un dipôle en TP



- On se met en mode XY
- On inverse la voie $-RI \rightarrow RI$

1 Équation du système

1.1 Résolution

Les systèmes linéaires du premier ordre vérifient :

$$\dot{x} + \frac{x}{\tau} = \frac{x_e(t)}{\tau}$$

- x une grandeur électrique
- τ , un temps caractéristique (de relaxation) en s
- $x_e(t)$, une fonction donnée du temps

Les solutions de l'équation homogène associée sont :

$$x(t) = \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- λ , une constante d'intégration à déterminer avec les conditions initiales

Dans le cas de la présence du second membre on aura :

$$x(t) = \lambda e^{-\frac{t}{\tau}} + x_0$$

- Avec ici $x_e(t) = x_0$ constant

- Pour déterminer les **conditions initiales** on suppose que à $x(0^-)$ le régime permanent est établi.
Par continuité on pose $x(0^+) = x(0^-)$

Résolution d'un système du premier ordre

- On cherche une équation vérifiée par la grandeur continue
- Pour déterminer les CI, on se place à $t < 0$ en régime continu et on détermine la valeur de la grandeur continue
- On résout l'équation homogène
- On ajoute la solution particulière
- On utilise les CI pour déterminer les constantes d'intégration

⚠ On détermine les constantes d'intégration après avoir ajouté la solution particulière

1.2 Exploitation

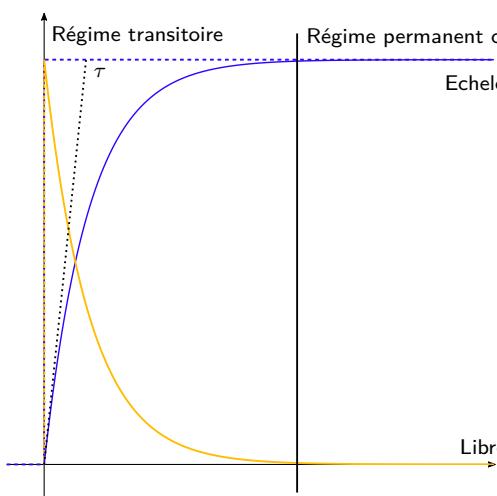
DEF: Le **temps de montée** est le temps nécessaire pour passer de 10% à 90% du transit
On a $t_M = \tau \ln(9) \simeq 2.2\tau$

DEF: Le **temps de réponse à $x\%$** est la durée au bout de laquelle l'écart au régime permanent n'est plus qu'à $x\%$ du transit
On a $t_{x\%} = -\tau \ln\left(\frac{x}{100}\right)$
— Un système du premier ordre est stable $\Leftrightarrow \tau > 0$

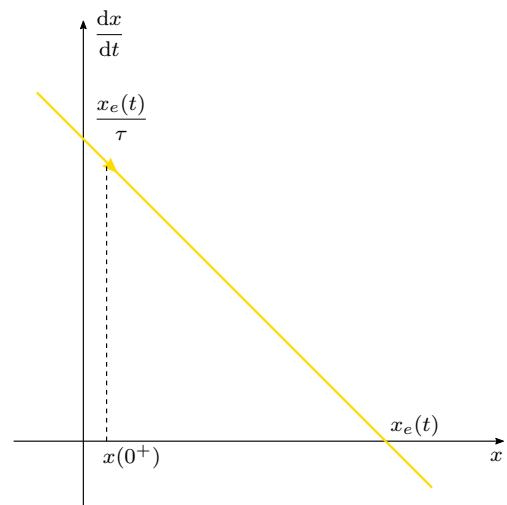
2 Utilisation concrète

	Régime libre	Réponse indicelle
$t < 0$	x_0	0
$t > 0$	0	x_0

- Concrètement on réglera le GBF en mode créneau avec des périodes grandes devant τ
- Lorsque $x_e(t) = x_0$, x_0 correspond à l'état en régime **continu**

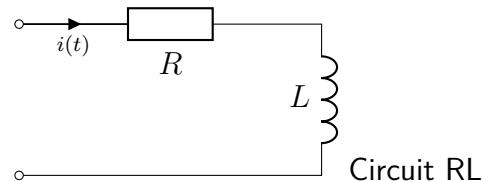
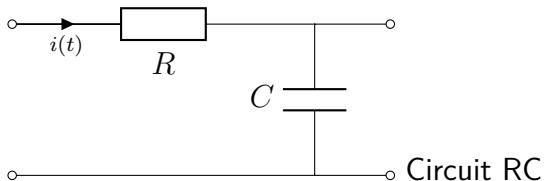


Réponse temporelle



Portrait de phase

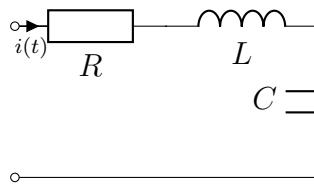
3 Circuits classiques



1 Les systèmes du 2^e ordre

On peut ici faire le rapprochement entre les systèmes électriques et les systèmes mécaniques, tous deux pouvant être régis par une équation différentielle du 2^e ordre

1.1 Circuit RLC série



Dans le cas de deux bobines/condensateurs, l'équation sera souvent du 2^e ordre

1.2 Oscillateur harmonique amorti

On applique à l'oscillateur une force supplémentaire :
 $\vec{F}_f = -\lambda \vec{v}$

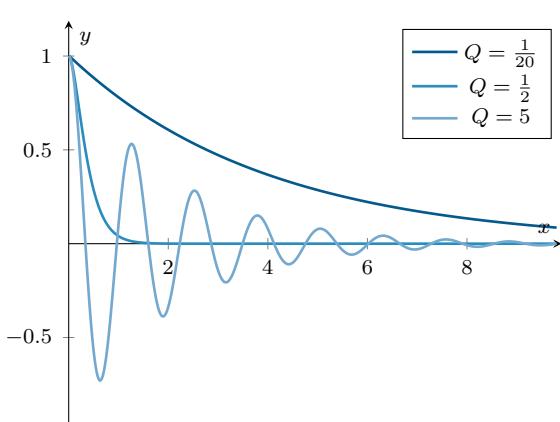
Mécanique	Électrique
z position	q charge
\dot{z} vitesse	\dot{q} intensité
Masse m	Inductance L
Raideur k	Capacité $\frac{1}{C}$
Frottements λ	Résistance R
$E_{\text{cinétique}} = \frac{1}{2}mv^2$	$E_{\text{magnétique}} = \frac{1}{2}Li^2$
$E_{\text{potentielle}} = \frac{1}{2}kz^2$	$E_{\text{électrostatique}} = \frac{1}{2C}q^2$

2 Résolution de l'équation

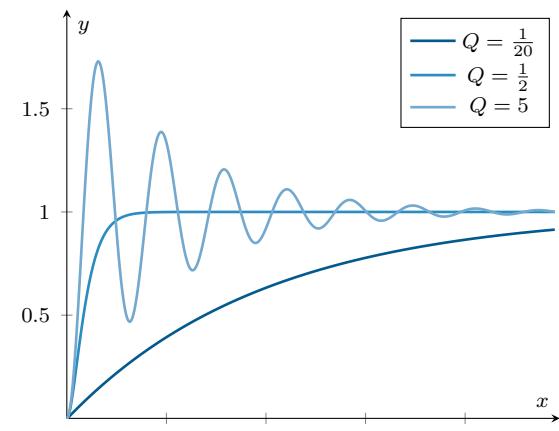
On peut mettre l'équation différentielle des systèmes du 2^e ordre sous la forme :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_e(t)$$

— ω_0 , est la pulsation propre telle $\omega_0 = 2\pi\nu_0 = \frac{2\pi}{T_0}$
 — Q , est le facteur de qualité



Régime libre



Réponse indicelle

On calcule tout d'abord le **discriminant** de l'équation caractéristique du second degré

- $\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < \frac{1}{2}$: **Régime apériodique**

$$r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \left(1 \mp \sqrt{1 - 4Q^2} \right) \Rightarrow x_h(t) = ae^{tr_+} + be^{tr_-}$$

- $\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = \frac{1}{2}$: **Régime critique**

$$r = -\frac{\omega_0}{2Q} \Rightarrow x_h(t) = (a + bt)e^{-\omega_0 t}$$

- $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > \frac{1}{2}$: **Régime pseudo-périodique**

$$r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1 - 4Q^2} \Rightarrow x_h(t) = (a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t))e^{\frac{-\omega_0 t}{2Q}} = A \cos(\omega t + \varphi)e^{\frac{-\omega_0 t}{2Q}}$$

$$\text{En posant } \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \text{ et } A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

On détermine alors la **solution particulière** (*ici constante*) ($x_e(t)$)

On a alors $x(t) = x_h(t) + x_e(t)$

On détermine finalement les constantes d'intégration à l'aide des conditions initiales

Démo



Toujours appliquer les conditions initiales à l'équation générale et non à l'équation homogène

3 Éléments caractéristiques

3.1 Système pseudo-périodique

DEF: On note Λ le **décrément logarithmique tel** : $\Lambda = \ln \left(\frac{x(t)}{x(t+T)} \right) = \frac{\omega_0 T}{2Q} = \frac{\pi T}{QT_0} = \frac{\pi}{Q \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$

On le mesure graphiquement pour obtenir la valeur de Q

- Lorsque l'amortissement est minimal, soit $Q \rightarrow \infty$, on se ramène au cas de l'oscillateur non amorti
La stabilité du système est alors impossible
- $T \simeq T_0$

3.2 Système critique

- Le régime critique correspond toujours au **temps de relaxation le plus faible**

3.3 Portrait de phase

Le portrait de phase présente toutes les trajectoires de phases possibles pour le système

On a \ddot{x} en fonction de x

RÉGIME SINUSOÏDAL FORCÉ



On note en physique j le complexe i

À tout signal complexe, $X_m \cos(\omega t + \varphi)$ on associe un signal complexe de la forme

$$\underline{x}(t) = X_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{X}_m e^{j\omega t} \quad | \quad — \underline{X}_m = X_m e^{j\varphi} \text{ est l'amplitude complexe}$$

On a alors

$$\begin{cases} X_m = |\underline{X}_m| \\ \varphi = \arg(\underline{X}_m) \end{cases} \quad \text{ou } x(t) = \operatorname{Re}(\underline{x}(t))$$

Trouver le régime permanent

- On remplace les grandeurs par leur équivalent complexe
- On fait les calculs avec les notations complexes $\frac{d}{dt} \rightarrow \times j\omega$ et simplification par $e^{j\omega t}$
- On trouve l'amplitude complexe \underline{X}_m
- On revient à la solution réelle $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$

Si les grandeurs sont **linéaires**, on peut directement exprimer les grandeurs en complexe

On pose alors

$$\begin{cases} u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) \\ i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \underline{U}_m = U_m e^{j\varphi_u} \\ \underline{I}_m = I_m e^{j\varphi_i} \end{cases}$$

Utilisation des complexes en RSF

LOI D'OHM COMPLEXE

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m}$$

- \underline{Z} , l'impédance complexe
- \underline{Y} , l'admittance complexe

$$\begin{cases} \underline{Z} = R + jX \\ \underline{Y} = G + jB \end{cases}$$

- R , la résistance
- X , la réactance
- G , la conductance
- B , la susceptance

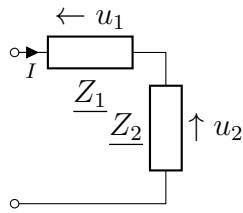
Dipôle	Résistance	Bobine	Condensateur
\underline{Z}	R	$jL\omega$	$\frac{1}{jC\omega}$

Les sources de courant et tensions sont modélisées par leurs amplitudes complexes \underline{E} et $\underline{\eta}$

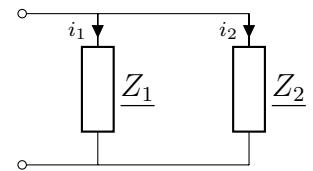
- Les lois de **Kirchhoff** restent valables
- De plus les lois d'**association de résistances** s'appliquent à tous les dipôles :
 - En série : $\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$
 - En parallèle : $\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$
- Les principes de **ponts diviseurs** sont alors valables pour tous les dipôles

De tension

$$\underline{u}_k = \underline{U} \frac{\underline{Z}_k}{\sum \underline{Z}_i}$$

**De courant**

$$\underline{i}_k = \underline{I} \frac{\underline{Y}_k}{\sum \underline{Y}_i}$$



1 Réponse fréquentielle des systèmes du second ordre

1.1 Mise en équation

L'équation d'un système du second ordre peut se mettre sous forme canonique :

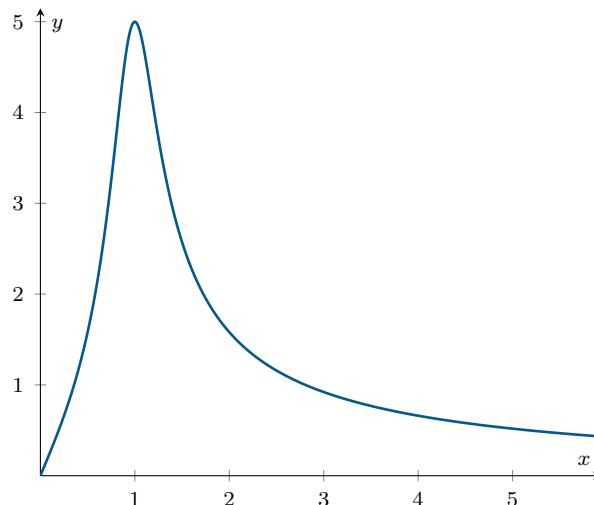
$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_e(t)$$

- ω_0 , la pulsation
- Q , le facteur de qualité
- $x_e(t) = X_e \cos(\omega t + \psi)$

Le régime sinusoïdal forcé est le régime permanent de la même forme que le second membre $X_m \cos(\omega t + \varphi)$

1.2 Phénomène de résonance

DEF: On parle de **résonance** quand une grandeur physique dépendante de la pulsation passe par un maximum en $x = \frac{\omega}{\omega_0} = 1 \Leftrightarrow \omega = \omega_0$



Trouver le type de résonance à partir de la forme canonique

$$y = \frac{H_0 A}{1 + \frac{jx}{Q} - x^2}$$

A	0	1
Signification	Ordre 0	Ordre 1
Résonance	Elongation _{position}	Intensité _{vitesse}

Résonance en intensité - vitesse

- **Résonance en intensité** : étude des variations de l'intensité au cours du temps

FORME CANONIQUE : $\underline{I_m}(\omega) = \frac{I_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} = \frac{I_0 \frac{jx}{Q}}{1 + \frac{jx}{Q} - x^2}$

RÉSOLUTION : $\left|\underline{I_m}(x)\right| = I_m(x) = \frac{I_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$

EXPLOITATION :

L'intensité est maximale pour $x = 1 \Leftrightarrow \omega = \omega_0$

On estime la largeur de la bande passante par la distance entre les points tels $I_m(\omega_{\pm}) = \frac{I_m^{(max)}}{\sqrt{2}}$

Ainsi $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$

- **Résonance en phase** : étude des variations de phase

$$\varphi(\omega) = \arg\left(\frac{I_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}\right) = -\arg\left(1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) = -\arctan\left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$$

La phase varie entre $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$ sur la bande passante et diminue donc plus vite si Q grand

Résonance en élongation - de charge

- **Résonance en élongation**

FORME CANONIQUE : $\underline{Z_m}(\omega) = \frac{Z_0}{1 - x^2 + \frac{jx}{Q}}$

RÉSOLUTION : $\left|\underline{Z_m}(x)\right| = Z_m(x) = \frac{Z_0}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$

EXPLOITATION :

— $Q \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$: décroissance de Z_m et pas de résonance

— $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$: résonance pour $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$

— On approche pour Q grand (> 3), $\omega_r \simeq \omega_0$ et $Z_m(\omega_0) = QZ_0$

- Résonance en **phase** : La réponse en phase est la même que pour la résonance en intensité décalée de $-\frac{\pi}{2}$

$$\varphi(\omega_0) = -\frac{\pi}{2}$$

1.3 Aspects énergétiques

$$\delta E = Pdt = U \times Idt$$

En convention récepteur

— δE , l'énergie algébriquement reçue pendant dt

Si le temps de réponse du dipôle est faible, on peut considérer que la puissance perçue est la puissance moyenne

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T U(t) \times I(t) \, dt \quad \Bigg| \quad \text{--- } \langle P \rangle, \text{ la puissance moyenne}$$

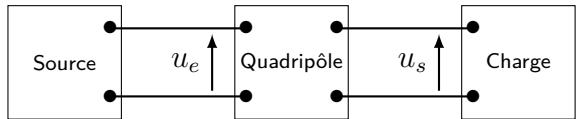
VALEUR EFFICACE

$$S_e^2 = \langle s^2(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t) \, dt \quad \Bigg| \quad \text{--- } S_e, \text{ la valeur valeur efficace/ valeur RMS}$$

Signal	S_0	$A \cos(\omega t + \varphi)$	$S_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} S_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$
S_e	S_0	$\frac{A}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{S_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{S_n^2}{2}}$

1 Généralités

1.1 Quadripôles



- On distingue quadripôles actifs et passifs
- Si $\begin{cases} u_{e1}(t) \rightarrow u_{s1}(t) \\ u_{e2}(t) \rightarrow u_{s2}(t) \end{cases}$ alors

$$\lambda u_{e1}(t) + \mu u_{e2}(t) \rightarrow \lambda u_{s1}(t) + \mu u_{s2}(t)$$

- L'impédance d'entrée Z_e est l'impédance du dispositif vu par les bornes d'entrée
- L'impédance de sortie Z_s est l'impédance du dispositif vu par les bornes de sortie

1.2 Fonction de transfert

Pour $\begin{cases} u_e(t) = U_e \cos(\omega t + \varphi_e) \rightarrow \underline{u}_e(t) = \underline{U}_e e^{j\omega t} \\ u_s(t) = U_s \cos(\omega t + \varphi_s) \rightarrow \underline{u}_s(t) = \underline{U}_s e^{j\omega t} \end{cases}$ on a :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} \quad \Bigg| \quad — \underline{H}(j\omega), \text{ la fonction de transfert complexe}$$

On définit alors l'amplification (*gain*) de tension et l'argument de $\underline{H}(j\omega)$: $\begin{cases} G = |\underline{H}(j\omega)| = H(\omega) = \frac{U_s}{U_e} \\ \arg(\underline{H}(j\omega)) = \varphi_\omega = \varphi_s - \varphi_e \end{cases}$

DEF: Un système est considéré comme **stable** si :

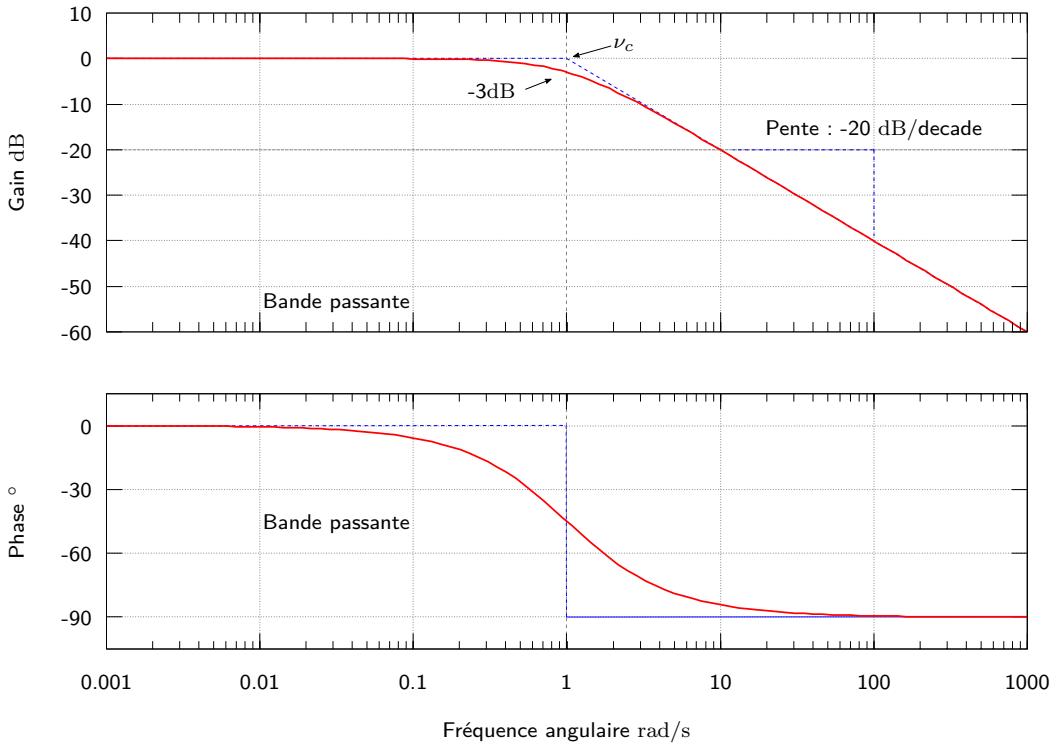
- Le dénominateur de la fonction de transfert n'admet pas de racines complexes
- La fonction de transfert reste finie même pour les hautes fréquences

1.3 Diagramme de Bode

$$X_{(B)} = \log \left(\frac{P_1}{P_2} \right) \quad \Bigg| \quad — X_B, \text{ en B} \\ X_{dB} = 10 \log \left(\frac{U_s^2}{U_e^2} \right) = 20 \log(H(\omega)) \quad \Bigg| \quad — G_{dB}, \text{ le gain de la fonction de transfert}$$

Sur un diagramme de Bode, on trace en échelle logarithmique

$$\begin{cases} G_{dB} = f \left(\log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \right) = f \left(\log \left(\frac{\nu}{\nu_0} \right) \right) \\ \arg(\underline{H}) = g \left(\log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \right) = g \left(\log \left(\frac{\nu}{\nu_0} \right) \right) \end{cases}$$



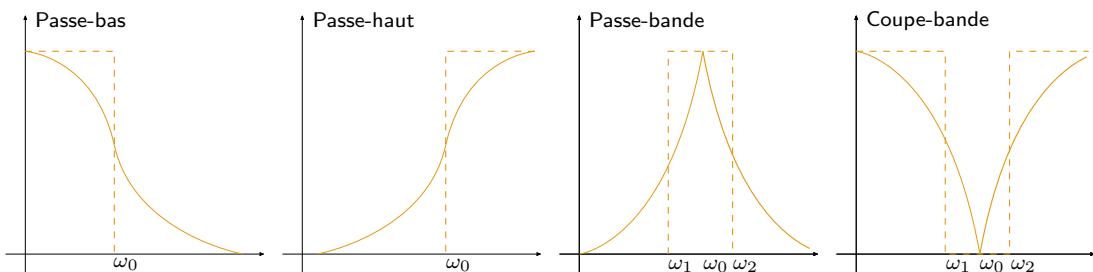
2 Filtres

2.1 Généralités

Un filtre linéaire est un quadripôle linéaire qui permet de transmettre sélectivement certaines composantes du spectre en fréquence du signal

DEF: **Bandé passante** : Domaine dans lequel les composantes du signal sont transmises

DEF: **Bandé coupée** : Domaine des fréquences coupées par le filtre



On définit la **pulsation de coupure** ω_c d'un filtre par :

$$H(\omega_c) = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} \text{ soit } G_{dB}(\omega_c) = G_{dB}^{max} - 20 \log(\sqrt{2}) \simeq G_{dB}^{max} - 3dB$$

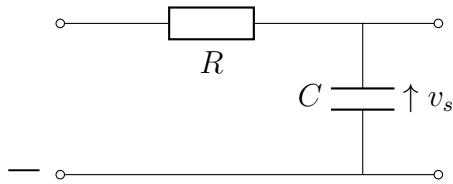
Étude d'un filtre

- Comportement asymptotique : ($\omega \ll / = / \gg \omega_0$)
- Fonction de transfert
- Mise sous forme canonique / identification
- Diagramme de Bode :
 - Courbe de gain
 - Déterminer $G_{dB} = |H(j\omega)|$

- Diagramme asymptotique (gain pour $\omega \ll / = / \gg \omega_0$)
- Si il existe, placer le maximum
- Courbe de phase
- Déterminer $\varphi(\omega) = \arg(\underline{H}(j\omega))$

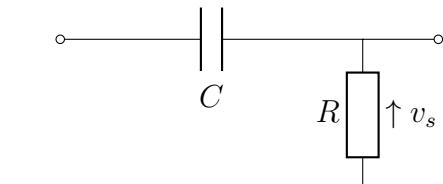
2.2 Premier ordre

Passe-bas



- $\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{H_0}{1 + jx}$
- Caractère **intégrateur** à haute fréquence

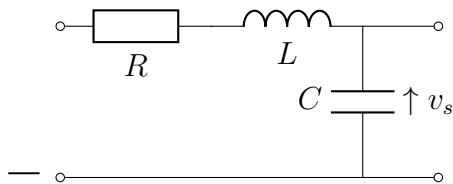
Passe-haut



- $\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0 j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{H_0 j x}{1 + jx}$
- Caractère **dérivateur** à basse fréquence

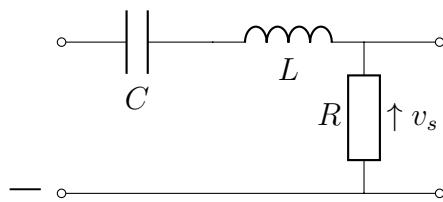
2.3 Second ordre

Passe-bas



- $\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{H_0}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2}$
- Maximum en $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

Passe-bande



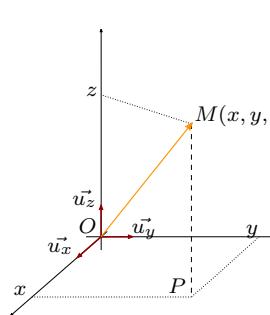
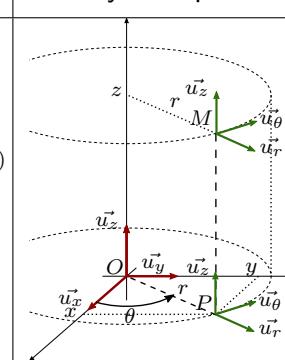
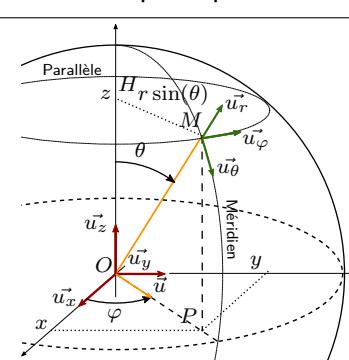
$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= \frac{H_0 j \frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{H_0 j \frac{x}{Q}}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2} \\ \underline{H}(j\omega) &= \frac{H_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \\ &\quad \frac{H_0}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)} \\ - \Delta\nu &= \frac{\nu_c}{Q} \end{aligned}$$

Trouver le type de filtre à partir de la forme canonique

$$y = \frac{H_0 A}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2}$$

A	0	1	2
Filtre	Passe-bas	Passe-bande	Passe-haut

1 Systèmes de coordonnées et bases de projection

Coordonnées	Cartésiennes	Cylindriques	Sphériques
Représentation			
Vecteur position	$\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$	$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$	$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$
Relations	\emptyset	$x = r \cos \theta; y = r \sin \theta$ $\vec{u}_r(\theta) = \cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y$ $\vec{u}_\theta(\theta) = -\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y$	$x = r \cos \theta; y = r \sin \theta; z = r \cos \theta$ $\vec{u}_r(\theta, \varphi) = \sin \theta \cos \varphi \vec{u}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{u}_y + \cos \theta \vec{u}_z$ $\vec{u}_\theta(\theta, \varphi) = \cos \theta \cos \varphi \vec{u}_x + \cos \theta \sin \varphi \vec{u}_y - \sin \theta \vec{u}_z$ $\vec{u}_\varphi(\varphi) = -\sin \varphi \vec{u}_x + \sin \varphi \vec{u}_y$ $\vec{u}_\varphi = \cos \varphi \vec{u}_x + \sin \varphi \vec{u}_y$
Dérivées	\emptyset	$-\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \vec{u}_\theta$ $-\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\vec{u}_r$	$-\frac{d\vec{u}}{d\varphi} = \vec{u}_\varphi$ $-\frac{\partial \vec{u}_r}{\partial \theta} = \vec{u}_\theta$ $-\frac{\partial \vec{u}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{u}_r$ $-\frac{\partial \vec{u}_\varphi}{\partial \varphi} = \sin \theta \vec{u}_\varphi$ $-\frac{\partial \vec{u}_\varphi}{\partial \theta} = \cos \theta \vec{u}_\varphi$
$\vec{dl} = d\overrightarrow{OM}$	$dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$	$d\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z$	$d\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi$
Expressions	$\overrightarrow{OM}(t) = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$ $\vec{v}(t) = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$ $\vec{\gamma}(t) = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z$	$\overrightarrow{OM}(t) = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$ $\vec{v}(t) = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$ $\vec{\gamma}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z$	$\overrightarrow{OM}(t) = r\vec{u}_r$ $\vec{v}(t) = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r \sin \theta \dot{\varphi} \vec{u}_\varphi$

2 Description du mouvement

2.1 Généralités

- DEF: On appelle **solide** tout système matériel indéformable (*distance fixe entre deux points*)
DEF: Un **point matériel** est un corps dont la position et le mouvement peuvent être décrits par 3 coordonnées spatiales *on néglige ainsi toujours la rotation propre*
DEF: Un **repère d'espace** est l'ensemble des systèmes de coordonnées liés à un **solide de référence**



Ne pas confondre avec le repère mathématique

- DEF: On choisit aussi un **repère de temps** et son origine sur lequel on repère les **instants t**

DEF: Un référentiel présente donc trois coordonnées d'espace et une coordonnée temporelle absolue en *mécanique classique*

DEF: On repère un point M par le **vecteur position** \overrightarrow{OM}

DEF: La courbe décrite par M au cours du temps est appelée **trajectoire**

DEF: Les **équations horaires** donnent les coordonnées de M en fonction du temps

DEF: On définit l'**abscisse curviligne** par $s(t) = \widehat{M_0 M}$ avec M_0 origine de la trajectoire

DEF: On définit de l'**hodographe** comme l'ensemble des points P tels $\overrightarrow{O'P(t)} = \vec{v}$

Théorème

Dérivation de la position

$$\overrightarrow{OM} \xleftarrow[\int dt]{\frac{d}{dt}} \vec{v} \xleftarrow[\int dt]{\frac{d}{dt}} \vec{\gamma}$$

- On dit qu'un mouvement est **accéléré** si $\|\vec{v}\|$ augmente
- On montre par dérivation de $\|\vec{v}\|^2$ que
 - $\vec{v} \cdot \vec{\gamma} > 0$ quand le mouvement est accéléré
 - $\vec{v} \cdot \vec{\gamma} < 0$ quand le mouvement est décéléré
 - $\vec{v} \cdot \vec{\gamma} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{\gamma}$ quand le mouvement est uniforme

2.2 Base de Frenet

On définit une base locale de projection $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ en un point M quelconque de la trajectoire :

- \vec{T} est tangent à la trajectoire et dans le sens de celle-ci
- \vec{N} est orthogonal à \vec{T} dans la direction et le sens du centre de courbure C
- Le cercle d'origine le centre de courbure et de rayon le rayon de courbure est appelé **cercle osculateur**
- On complète par la binormale \vec{B}

Exemple

Exemples : Mouvements rectilignes

- **Uniformément accéléré** : La vitesse est à chaque instant colinéaire à l'accélération et $\vec{\gamma} = \gamma_0 \vec{u}_x$
- **Uniforme** : Mouvement uniformément accéléré avec $\vec{\gamma}_0 = \vec{0}$
- **Sinusoidal** : Ici $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{u}_x$ avec $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$

Exemple

Exemples : Mouvements circulaires

- On travaille en coordonnées polaires planes ou cylindriques et on définit le sens \oplus par la règle de la main droite
- La vitesse angulaire instantanée $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$ caractérise la vitesse $\vec{v} = R\omega(t)\vec{u}_{\theta}$ R constant
- $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$ est le vecteur instantané de rotation
- **Mouvement uniforme** à la vitesse angulaire ω
 - La position de M est donnée par $\theta(t) = \theta_0 + \omega t$
 - $\vec{v} = v\vec{u}_{\theta} = R\omega\vec{u}_{\theta}$
 - $\vec{\gamma} = -R\omega^2\vec{u}_r = -\frac{v^2}{R}\vec{u}_r$

1 Notions fondamentales

DEF: Deux systèmes sont en **interaction** quand une modification sur l'un entraîne une modification sur l'autre : on dit qu'il subit des **actions extérieures**, représentées par des vecteurs force en un point d'application

Toutes les interactions diminuent avec la distance

DEF: Un système qui n'est soumis à aucune interaction est dit **isolé**

DEF: La répugnance d'un corps à modifier son mouvement est traduite par **la masse d'inertie**

2 Lois de Newton

Principe d'inertie

- Il existe des référentiels privilégiés dits **galiléens** d'inertie dans lesquels tout point matériel isolé est soit au repos soit animé d'un mouvement rectiligne et uniforme
- *C'est la définition des référentiels galiléens*
- *Tous les référentiels galiléens sont en translation rectiligne et uniforme les uns par rapport aux autres*

Théorème

Principe fondamental de la dynamique

- On associe à un point matériel une grandeur scalaire extensive positive la **masse d'inertie**
- Aux actions extérieures s'appliquant sur un point matériel on associe un **vecteur force**
- Dans un référentiel galiléen $\sum_i \vec{F}_i = m\vec{\gamma}$
- *Le PFD est un principe d'évolution et subit le **déterminisme classique***
- *Une variation infime des conditions initiales peut toutefois induire un comportement tout à fait différent : on parle de système **chaotique***

Théorème

Principe des actions réciproques

- À tout instant $\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1} \text{ La force de (2) sur (1) est l'opposé de celle de (1) sur (2)} \\ \vec{M}_1 \vec{M}_2 \wedge \vec{F}_{1/2} = \vec{0} \text{ Ces forces sont portées par la droite qui joint les deux points} \end{array} \right.$

Théorème

3 Classification des forces

3.1 Actions à distance

Interaction	Nucléaire forte	Nucléaire faible	Electromagnétique	Gravitationnelle
Domaine	Hadrons	Leptons et quarks	Atome et molécules	Grande échelle
Portée	10^{-15}m	$10^{-17} - 10^{-18}\text{m}$	Infinie	Infinie
Charge	Couleur	Faible	Electrique	Masse gravitationnelle
Intensité	I	$10^{-5}I$	$10^{-2}I$	$10^{-39}I$

LOI D'INTERACTION GRAVITATIONNELLE

$$\overrightarrow{F_{1/2}} = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r^2} \overrightarrow{u_{12}} = -\mathcal{G} m_1 m_2 \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{(M_1 M_2)^3}$$

— $\mathcal{G} = 6.63 \times 10^{-11} \text{N.m}^2.\text{kg}^{-2}$,
la constante de gravitation universelle

CHAMP DE FORCE GRAVITATIONNEL

$$\vec{G}(M) = -\mathcal{G} m_0 \frac{\overrightarrow{M_0 M}}{(M_0 M)^3}$$

— $\vec{F}(M) = m \vec{G}(M)$
— Principe de superposition :
 $\vec{G}(M) = -\mathcal{G} \sum_i m_i \frac{\overrightarrow{M_i M}}{(M_i M)^3}$

POIDS D'UN CORPS

$$\vec{P} = m \vec{g}$$

— \vec{g} , le champ de pesanteur

3.2 Actions de contact

TENSION D'UN FIL

$$\vec{T} = T \vec{u}$$

— Valable tant que $T > 0$ sinon $T = 0$



TENSION D'UN RESSORT

$$\vec{T} = -k(l - l_0) \vec{u}$$

— l_0 la longueur à vide



ACTIONS D'UN SUPPORT

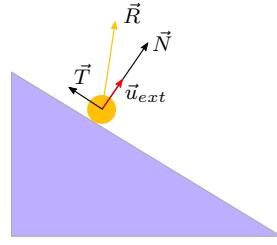
Actions d'un support

Lorsqu'un point matériel est contraint au déplacement sur une surface on distingue :

- le déplacement **bilatéral** : le point ne peut quitter la surface
- le déplacement **unilatéral** : le point peut quitter la surface

La réaction du solide \vec{R} peut se décomposer en :

- Une composante **normale** $\vec{N} = N \vec{u}_{ext}$ avec :
 - $N \leq 0$ pour une liaison bilatérale
 - Contact **tant que** $N > 0$ pour une liaison unilatérale
- Une composante **tangentielle** \vec{T}
 - $\vec{T} = 0$ **sans frottements**
 - **Avec frottements**
 - $\vec{v} = \vec{0}$ **tant que** $\|\vec{T}\| < \mu_0 \|\vec{N}\|$
 - \vec{T} est opposé au déplacement et $\|\vec{T}\| = \mu \|\vec{N}\|$ **tant que** $\vec{v} \neq \vec{0}$



POUSSÉE D'ARCHIMÈDE

$$\vec{\Pi} = -m_f \vec{g}$$

- Appliquée au centre d'inertie du fluide
- m_f la masse de fluide

Frottements visqueux

- Force de **trainée**

VITESSES FAIBLES

$$\vec{F}_T = -\lambda \vec{v}$$

VITESSES ÉLEVÉES

$$\vec{F}_T = -\frac{1}{2} \rho C_x S \|\vec{v}\| \vec{v}$$

- ρ , la masse volumique du fluide
- C_x , un coefficient lié à l'aérodynamisme
- S , le maitre couple (*surface maximale traverse orthogonale à \vec{v}*)

- Force de **portance**

Résoudre un exercice de dynamique

- Faire un beau **dessin**
- **Référentiel** d'étude et préciser si il est galiléen
- **Bilan des forces**
- Principe fondamental de la dynamique
 - Projection dans un référentiel
 - Intégration vectorielle
- Équations horaires et trajectoire

Ne pas oublier de vérifier les **hypothèses** (*Contact, ...*)

4 Quantité de mouvement

4.1 Propriétés

QUANTITÉ DE MOUVEMENT

$$\vec{p}_{\mathcal{R}} = m\vec{v}_{\mathcal{R}}$$

Théorème de la quantité de mouvement

Dans un référentiel galiléen, la quantité de mouvement d'un point M soumis à n forces obéit à :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

Théorème

4.2 Système à N points

DEF: On appelle **centre d'inertie** G d'un système de N points matériels, le barycentre des points M_i affecté des coefficients m_i

— $\sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{OM_i} = m \overrightarrow{OG} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$

— **Associativité** : Le centre d'inertie d'un système est le centre d'inertie de ses sous-systèmes

— **Symétrie** : G appartient toujours à l'axe/centre de symétrie d'un solide

— $\vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = m \vec{v}(G)$

La quantité de mouvement de l'ensemble est celle de son centre d'inertie porteur de toute la masse

Théorème du mouvement du centre d'inertie

$$\vec{F}_{int} = \vec{0} \text{ car se compensant par la 3^e loi de Newton d'où } \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{ext}$$

Cette relation est semblable au PFD appliqué à G affecté de toute la masse

Théorème

5 Aspects énergétiques

5.1 Travail

TRAVAIL D'UNE FORCE

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt$$

- W en J est moteur résistant si $\delta W > 0$ ($\delta W < 0$)
— $d\vec{l} = \overrightarrow{MM'}$

CAS D'UN DÉPLACEMENT FINI

$$W_{A \rightarrow B}^{(\Gamma)}(\vec{F}) = \int_{(\Gamma)} \delta W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t) dt$$

— Γ , le chemin suivi

PUISSEANCE D'UNE FORCE

$$\mathcal{P} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W}{\Delta t} = \frac{\delta W}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

— \mathcal{P} la puissance fournie par \vec{F} appliquée à un point animé d'une vitesse \vec{v}

5.2 Énergie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

— E_c , l'énergie cinétique d'une masse m animée de \vec{v}

Théorème de l'énergie cinétique

Dans un référentiel galiléen :

$$dE_c = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \sum_i \delta W_i \text{ d'où}$$

$$\Delta E_c = E_c(t_2) - E_c(t_1) = \sum_i W_{A \rightarrow B}^{(\Gamma)}(\vec{F}_i)$$

Par le PFD : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i$

On multiplie par $\vec{v} dt = d\vec{l}$

Théorème

THÉORÈME DE LA PUISSANCE CINÉTIQUE

$$\mathcal{P}_c = \frac{dE_c}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i)$$

— Se retrouve en divisant par dt le théorème de l'énergie cinétique

5.3 Énergie potentielle

Sachant que $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l}$ on peut écrire

$$\delta W = F_x(x, y, z)dx + F_y(x, y, z)dy + F_z(x, y, z)dz$$

On dit que le champ de force *ne dépend que de la position* \vec{F} est **conservatif** si il existe une fonction $E_p(M) = E_p(x, y, z)$ telle que $\delta W = -dE_p$

E_p étant définie par sa différentielle, elle est définie à une constante d'intégration près

$$E_p^i = W(\vec{F}) + E_p^f : \text{une partie de l'énergie potentielle est consommée par le travail}$$

Démo

DEF: On parle de **forces conservatives** pour désigner :

- Les champs de force conservatifs
- Les forces qui ne travaillent pas *ne dépendent pas du chemin parcouru*

Dans le cas de forces conservatives on a alors

- E_p ne dépend que de la position : c'est un **champ scalaire**
- Dans le cas d'un déplacement fini : $W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = -\Delta_A^B E_p = E_p(A) - E_p(B)$
⇒ Sur un contour fermé, le travail d'un champ de force conservatif est nul

5.4 Gradient d'un champ scalaire

Notion de champ

- Champ **scalaire**
 - Grandeur scalaire
- Champ **vectoriel**
 - Grandeur vectorielle

Propriétés

DEF: **Lignes** de champs *Tangentes au champ*

DEF: **Tubes** de champs *Surfaces engendrées par l'ensemble des lignes de champ s'appuyant sur une surface*

DEF: On parle de champ **uniforme** si le champ est indépendant de la position

DEF: On parle de champ **stationnaire** si le champ est indépendant du temps

$$dA = \overrightarrow{\text{grad}}(A) \cdot d\vec{l}$$

- $A(M)$ est un champ scalaire
- $\overrightarrow{\text{grad}}(A)$ l'unique champ de vecteur vérifiant la propriété

On a $dA = \frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy + \frac{\partial A}{\partial z}dz$

- Coordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{\text{grad}}(A) = \frac{\partial A}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial A}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial A}{\partial z}\vec{u}_z$
- Coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{\text{grad}}(A) = \frac{\partial A}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial A}{\partial z}\vec{u}_z$
- Coordonnées sphériques : $\overrightarrow{\text{grad}}(A) = \frac{\partial A}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)}\frac{\partial A}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$

- Le gradient est orthogonal à la surface de niveau $A(M)$ constante passant par M en tout point M et pointe vers l'augmentation de $A(M)$

Calcul d'énergies potentielles

- On exprime $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l} = F_x(x, y, z)dx + F_y(x, y, z)dy + F_z(x, y, z)dz$
- On vérifie que la forme différentielle est totale exacte en vérifiant l'égalité des dérivées croisées sauf si l'intégration est évidente
- On identifie cette expression du travail élémentaire à $-dE_p = -\frac{\partial E_p}{\partial x}dx - \frac{\partial E_p}{\partial y}dy - \frac{\partial E_p}{\partial z}dz$
- On est ramené à l'intégration des $-\frac{\partial E_p}{\partial x} = F_x(x, y, z)$

Champ	Pesanteur	Gravitation	Force élastique à 3D
E_p	$mgz + cste$	$-\mathcal{G}\frac{m_0m}{r} + cste$	$\frac{1}{2}k(l - l_0)^2$

5.5 Énergie mécanique

Théorème de l'énergie mécanique

On définit $E_m = E_c + E_p$

En appliquant dans \mathcal{R}_g le théorème de l'énergie cinétique on a

$$dE_m = d(E_c + E_p) = \delta W_{nc}$$

- δW_{nc} , le travail élémentaire des forces non conservatives

⇒ Il y a conservation de l'énergie mécanique d'un point soumis uniquement à des forces conservatives

SYSTÈMES À UN DEGRÉ DE LIBERTÉ

Méthode

1 Problèmes à un degré de liberté

- On dit qu'un mouvement est à un degré de liberté si il peut être décrit par une unique variable temporelle scalaire linéaire ou angulaire

Utilisation de l'étude énergétique

On aura tendance à utiliser l'étude énergétique dans le cas de systèmes :

- A un degré de liberté
- Indépendants du temps
- Subissant des forces conservatives

Méthode

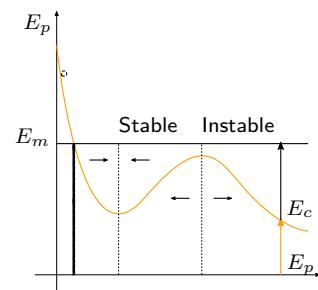
Étude de problèmes à un degré de liberté

- On détermine le **travail** des forces et on en déduit E_p
 $\delta W = \vec{F} \cdot \vec{dl} = -dE_p$ pour des forces conservatives
- On utilise la conservation de l'énergie mécanique
 $E_m^{(0)} = E_c(\dot{x}) + E_p(x) = cste$

2 Étude de l' E_p

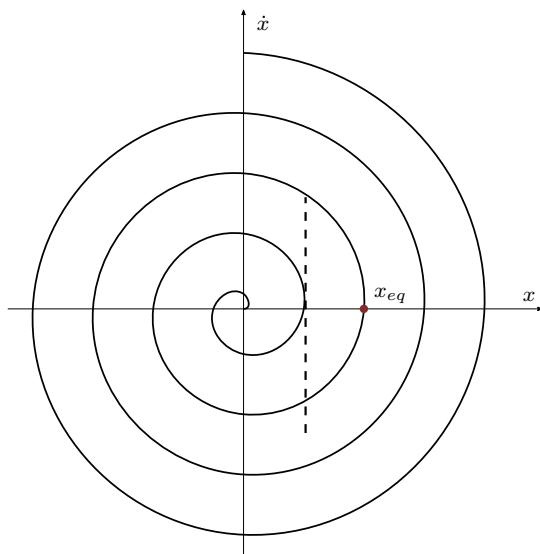
- Les positions d'équilibre correspondent aux extrema d'énergie potentielle : $\frac{dE_p}{dt} = 0$
- On distingue
 - Équilibre **stable** : si les forces tentent de ramener un point à sa position d'équilibre (minimum)
 - Équilibre **instable** : si les forces tentent d'éjecter un point de sa position d'équilibre (maximum)
- Si le système est conservatif (et donc $E_m = cste$)
Le système ne peut accéder aux positions où $E_p > E_m$
 - Si le mouvement est alors borné on parle d'**état lié**
 - Si la particule s'éloigne à l'infini on parle d'**état de diffusion**

Une partie du mouvement (corrélation vitesse position, ...) peut être analysée sur le graphe de $E_p(x)$



- Au voisinage d'une position d'équilibre, l'énergie potentielle prend la forme d'une E_p **élastique** :
Par un DL₂ : $E_p(x) = E_p(x_{eq}) + \frac{1}{2} \frac{d^2 E_p}{dx^2} \Big|_{x_0} (x - x_{eq})^2 = \frac{1}{2} k(x - x_{eq})^2 + E_p(x_{eq})$
La conservation de l'énergie mécanique permet alors d'obtenir l'équation d'un **oscillateur harmonique** oscillant à $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ autour de la position d'équilibre
- En présence de **frottements** $dE_m = \delta W_f < 0$: la zone des x autorisés diminue au cours du temps
- Par déterminisme classique le **portrait de phase** $\dot{x} = f(x)$ contient toutes les évolutions possibles d'un système donné

- Deux trajectoires de phase ne peuvent se couper
- Mouvement périodique \Rightarrow trajectoire de phase fermée
- Un système est dit réversible si l'inversion du temps ne rend pas le mouvement impossible



MOUVEMENT D'UNE PARTICULE CHARGÉE

1 Relations générales

LOI DE COULOMB

$$\vec{F}(M) = K \frac{q_0 q}{r^2} \vec{u}_r = K q_0 q \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$$

— $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \times 10^9 \text{ m.F}^{-1}$
 $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$, la permittivité du vide

CHAMP ÉLECTROSTATIQUE

$$\vec{E}(M) = K \frac{q_0}{r^2} \vec{u}_r = K q_0 \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$$

— $\vec{F}(M) = q\vec{E}(M)$

La circulation élémentaire donne :

$$\vec{E}(M) \cdot d\vec{l} = K \frac{q_0}{r^2} dr = -d \left(\frac{K q_0}{r} \right)$$

On définit alors le **potentiel électrostatique** : $V(M) = K \frac{q_0}{r} = K \frac{q_0}{OM}$ en V

$$\begin{cases} dV = -\vec{E}(M) \cdot d\vec{l} \\ dV = \overrightarrow{\text{grad}}(V) \cdot d\vec{l} \end{cases} \Rightarrow \vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$$

Démo

Propriétés

- Les lignes de champ sont orthogonales aux surfaces équipotentielles
- \vec{E} descend les potentiels
- \vec{E} est plus important dans une zone où les équipotentielles se rapprochent

$$\delta W = \vec{F}(M) \cdot d\vec{l} = q\vec{E}(M) \cdot dl = -q\overrightarrow{\text{grad}}(V) \cdot dl = -qdV = -d(qV)$$

⇒ Le champ de force est conservatif :

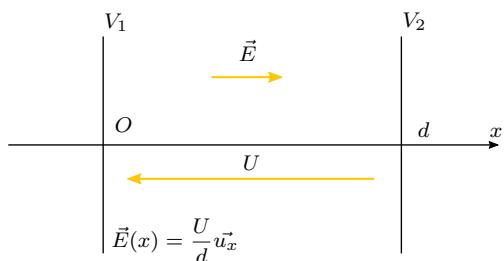
ÉNERGIE POTENTIELLE ÉLECTROSTATIQUE

Démo

$$E_p^{(e)}(M) = qV(M) = K \frac{q_0 q}{r}$$

Dans le cas d'un champ uniforme :

- $\vec{E}(M) = K \sum_{i=1}^N q_i \frac{\overrightarrow{M_i M}}{M_i M^3}$
- Par linéarité du gradient
 $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) \Leftrightarrow dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$



FORCE DE LORENTZ

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

- \vec{E} : le champ électrique
- \vec{B} : le champ magnétique
- \vec{v} , la vitesse de la particule

Démo

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q\vec{E} \cdot d\vec{l} + q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = q\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

La partie électrique est la seule à travailler :

$$\delta W = -q \overrightarrow{\text{grad}}(V) \cdot d\vec{l} = -dE_p^{(e)} = -d(qV(M))$$

$$W_{A \mapsto B}^{(\Gamma)}(\vec{F}) = -\Delta E_p^{(e)} = q(V(A) - V(B)) \text{ dans le cas d'un déplacement fini}$$



L'effet du poids sera souvent négligeable devant les interactions électromagnétiques

THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE

$$\Delta E_c = E_c^f - E_c^i = q(V_i - V_f) = qU$$

- V_i , les potentiels initiaux et finaux
- U , la tension

2 Applications

— Accélération linéaire de particules :

On accélère la particule entre deux plaques soumises à une tension U

— Déviation de particules

La particule portée par une vitesse initiale est envoyée entre les plaques d'un condensateur

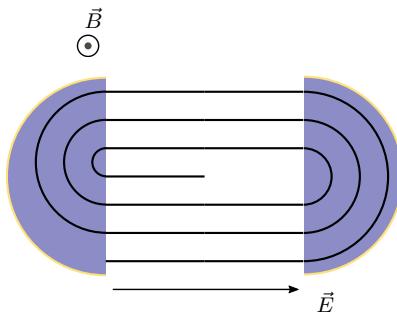
La déflexion mesurée permet de déterminer la charge massique $\frac{e}{m} \Rightarrow$ Spectromètre de masse

— Cyclotron

La particule est soumise à $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, on obtient la forme canonique

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{v}$$

- $\vec{\Omega} = \frac{-q\vec{B}}{m}$ est telle
- $\omega_c = \|\vec{\Omega}\| = \frac{qB}{m}$ est la pulsation cyclotron



Utilisation des complexes dans la résolution

— On projette dans le repère cartésien en fonction de v_x, v_y, v_z

— On simplifie le produit vectoriel et on projette sur les axes pour obtenir $\frac{dv_x}{dt}$ et $\frac{dv_y}{dt}$

— On pose $\underline{v} = v_x + iv_y$ et on exprime $\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} + i\frac{dv_y}{dt}$

— On est ramené à $\frac{d\underline{v}}{dt} = -i\omega_c \underline{v} \Rightarrow$ Équation différentielle classique

⚠ Les constantes d'intégration et CI sont complexes

— On peut alors se ramener à la position par intégration complexe

Méthode

- Pour $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$, le mouvement est circulaire de rayon $R = \frac{mv_0}{|q|B}$ par projection en coordonnées circulaires et $\omega_c = \frac{v}{R} = \frac{|q|B}{m}$ est indépendante de R
- On utilisera dans un **accélérateur à particules** un champ électrique pour accélérer les particules et un champ magnétique pour les dévier
Lorsque les vitesses sont trop importantes, les effets de la relativité ne peuvent plus être négligés.
Le phénomène de rayonnement agit de plus comme une force de frottements

1 Théories quantique

1.1 Aspects historiques

- Quantification de l'énergie selon PLANCK

Les échanges d'énergies se font sous forme de quantas $E = h\nu$

- Effet photoélectrique

Extraction d'électrons d'un métal sous l'influence d'un rayon lumineux

En dessous d'une certaine fréquence de rayonnement, l'extraction est impossible

Au-dessus du seuil l'extraction est possible et $W + E_c = h\nu_s + E_c = h\nu$

⇒ Aspect corpusculaire de la matière

- Effet Compton

Diffusion de photons sur des électrons libres

On montre que le photon possède une quantité de mouvement $p = \frac{h}{\lambda}$

- Détection de coïncidences

Expérience moderne où un photon unique passant à travers une lame réfléchissante est d'un côté ou de l'autre ⇒ Plus d'ambiguïté

1.2 Propriétés de la lumière

- La lumière est composée de **photons** de masse nulle et se déplaçant à la vitesse de la lumière

- La lumière est associée à une fréquence ν de longueur d'onde $\lambda = \frac{c}{\nu}$

- La lumière porte une énergie

RELATION DE PLANCK-EINSTEIN

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \hbar\omega$$

- E , l'énergie d'une particule

- $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ Js}$, la constante de Planck

- $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, la constante de Planck réduite

- ω , la pulsation de la lumière

- Un photon possède une quantité de matière :

RELATION DE DE BROGLIE

$$\vec{p} = \frac{E}{c}\vec{u} = \frac{h\nu}{c}\vec{u} = \frac{h}{\lambda}\vec{u}$$

- $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ Js}$, la constante de Planck

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}$$

- $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, la constante de plack réduite

- \vec{k} , le vecteur d'onde $\|\vec{k}\| = \frac{2\pi}{\lambda}$

1.3 Dualité onde corpuscule

La lumière possède deux aspects :

- **Onde** : Diffraction, interférences

- **Corpuscule** : Expériences pionnières (notion de quantas et photons, coïncidences)

$$\Phi = \frac{\delta N}{dt}$$

- Φ , le flux de particules

2 Notion d'onde de matière

D'après DE BROGLIE, toute particule est associée à une onde de matière vérifiant

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} = \frac{2\pi}{k}$$

— λ_{dB} , la longueur d'onde de DE BROGLIE

Relations fondamentales

Classiques

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

Relativistes

$$E_0 = mc^2$$

— E_0 , l'énergie de masse propre
— c , la célérité

$$\vec{p} = \gamma m\vec{v}$$

— $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, le facteur de Lorentz

$$E = E_0 + E_c = \gamma mc^2$$

— E , l'énergie totale
— On déduit $E_c = (\gamma - 1)mc^2$

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

— E , l'énergie totale
— p , la quantité de mouvement
— c , la célérité

Propriétés

$v > \frac{1}{10}c \Rightarrow$ Mécanique relativiste

$\lambda_{dB} >$ grandeur caractéristique \Rightarrow Comportement ondulatoire



ACTION

$$\mathcal{A} = p_0 \times a$$

— p_0 , la quantité de mouvement caractéristique
— a , une échelle caractéristique
— $\begin{cases} \mathcal{A} \gg \hbar \Rightarrow \text{Classique} \\ \mathcal{A} \sim \hbar \Rightarrow \text{Quantique} \end{cases}$

— Expérience de Davisson et Germer

Un canon à électron envoie des particules sur une surface qui les renvoie dans une direction privilégiée

Par les formules de diffraction on calcule λ_{dB} , on se ramène alors à une valeur de h

Par analogie avec la diffraction lumineuse et les interférences (*méthode des complexes*), la fonction d'onde de matière est **complexe**

$$\Psi(z, t) = A_0 e^{i(kz - \omega t)}$$

— ω , la pulsation
— $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi p}{h}$, le vecteur d'onde

Amplitude probabiliste : $|\Psi(M, t)|^2 d\tau$ est la probabilité de trouver la particule dans $d\tau$

⚠ L'analogie entre onde de matière et onde de lumière ne doit pas être poussée trop loin : la vitesse d'un corpuscule **ne permet pas** de calculer la pulsation ω de l'onde de matière associée

Application aux équations de propagation

On a
$$\begin{cases} E = \hbar\nu & \text{Ne pas utiliser à mauvais escient} \\ p = \hbar k \end{cases}$$

— Pour $A(x, t) = A_0 \cos(\omega t - kx)$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = -k^2 A \\ \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\omega^2 A = -c^2 k^2 A \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \quad (\text{Équation de D'ALEMBERT})$$

— Pour $\Psi(x, t) = A_0 e^{i(kx - \omega t)}$

$$\begin{cases} i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = \hbar\omega\Psi \\ -\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Psi \end{cases} \Updownarrow \Rightarrow i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = -\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \quad (\text{Équation de SCHRÖDINGER})$$

3 Inégalités de Heisenberg

Où qu'elle est la particule ?

3.1 Photon

Si on sait que le photon est dans un intervalle Δx on mesure son passage à $\Delta t = \frac{\Delta x}{c}$

Par la théorie des spectres, on mesure aussi une incertitude sur la pulsation $\Delta\omega$ telle $\Delta\omega\Delta t \gtrsim 1$
Sachant que $E = \hbar\omega \Rightarrow \Delta E = \hbar\Delta\omega$

INÉGALITÉ TEMPS ÉNERGIE DE HEISENBERG

$$\Delta E \Delta t \gtrsim \hbar \quad | \quad \begin{array}{l} \text{--- } \Delta E \text{ est l'incertitude sur l'énergie du photon} \\ \text{--- } \Delta t \text{ est l'incertitude sur la détection} \end{array}$$

$$\Delta p \Delta x \gtrsim \hbar \quad | \quad \begin{array}{l} \text{--- } \Delta p \text{ est l'incertitude sur la quantité de mouvement} \\ \text{--- } \Delta x \text{ est l'incertitude sur la position du photon} \end{array}$$

⇒ Plus on a de précision sur l'une des valeurs moins on en aura sur l'autre : **Incompatibilité** des grandeurs

3.2 Particules

La relation $\Delta p \Delta x \gtrsim \hbar$ reste valable

Application à la diffraction

- Avant la fente : p connue x inconnue
- Après la fente : Δx est restreint à, a mais l'onde diffracte ⇒ incertitude sur p

En utilisant l'angle et les relations de diffraction, on retrouve $\Delta p \Delta x \simeq h$

4 Représentation schématique

Particule	Onde	Lien	Transformation géométrique
Énergie E	Pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$	$E = \hbar\omega$	Translation temporelle
Q ^{te} de mouvement \vec{p}	Vecteur d'onde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$	$p = \hbar k$	Translation d'espace
Moment cinétique	$m \in \mathbb{N}$	$L = m\hbar$	Rotation

5 Application

5.1 Pression de radiation

Un photon possède une quantité de mouvement et exerce une force sur l'objet qui l'absorbe ou le réfléchit

Méthode

Utilisation particulière du Théorème de la quantité de mouvement

- On considère un système plus général qui ne subit pas de variation de forces
- On applique le théorème en calculant séparément $\vec{p}(t)$ et $\vec{p}(t + dt)$

$$\vec{f} = \frac{P}{c}$$

- P , la puissance
- c , la célérité
- Dans le cas d'une réflexion, on a un facteur 2

5.2 Puits de potentiel

- Vision classique :

Toutes les $E_m > 0$ sont possibles et on est dans des états liés

$$\text{On a } E_m = E_c \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_m}{m}}$$

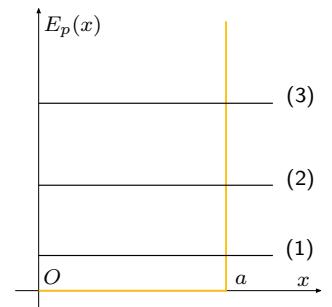
- Vision quantique :

On considère une onde de matière vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi(x < 0, t) = 0 \\ \Psi(x > a, t) = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{On a une onde stationnaire à deux nœuds tel } \lambda_{dB} = \frac{2a}{n}$$

$$\text{L'énergie et la quantité de mouvement sont quantifiés} \quad \left\{ \begin{array}{l} p = \frac{h}{\lambda_n} = \frac{2a}{n} \\ E_m = E_c = \frac{p^2}{2m} = \frac{n^2 h^2}{8ma^2} = n^2 E_1 \end{array} \right.$$



1 Cas du point

1.1 Moment d'une force

MOMENT PAR RAPPORT À UN POINT D'UNE FORCE

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{--- } \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F}) \text{ est le moment appliqué en } M \text{ en N.m} \\ \text{--- } O \text{ est le point de réduction} \end{array} \right.$$

- $d = OH$ est le **bras de levier** où H est le projeté orthogonal sur la droite d'action de \vec{F}
- $\rightarrow |\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F})| = d \times \|\vec{F}\|$
- Si la droite d'action passe par O , $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F}) = \vec{0}$

On a alors une structure de **torseur** dont $\{\vec{F}, \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F})\}$ sont les éléments de réduction
 → RELATION FONDAMENTALE DES TORSEURS : $\overrightarrow{\mathcal{M}_{O'}}(\vec{F}) = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F}) + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{F}$

MOMENT PAR RAPPORT À UN AXE D'UNE FORCE

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F}) \cdot \vec{u} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{--- } \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) \text{ est le moment appliqué en } M \\ \text{--- } \vec{u} \text{ est le vecteur unitaire orientant } (\Delta) \\ \text{--- } O \text{ est un point quelconque} \end{array} \right.$$

- Si la droite d'action et (Δ) sont sécantes, $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = 0$

Méthode du bras de levier

- On fixe la norme : $d \times \|\vec{F}\|$
- On détermine le signe par la règle des trois doigts
- On peut aussi utiliser la méthode du tire bouchon en déterminant instinctivement le sens dans lequel la force entraîne le point et en comparant avec l'axe de référence

1.2 Moment cinétique

MOMENT CINÉTIQUE PAR RAPPORT À UN POINT

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathcal{L}_O}(M, \mathcal{R}) &= \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}(M, \mathcal{R}) \\ &= \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}(M, \mathcal{R}) \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{--- } \overrightarrow{\mathcal{L}_O}(M, \mathcal{R}) \text{ est le moment cinétique en } O \text{ de } M(m) \text{ de vitesse} \\ \text{--- } \vec{v} \text{ en J.s} \end{array} \right.$$

On a alors une structure de **torseur** dont $\{\vec{p}(\mathcal{R}), \overrightarrow{\mathcal{L}_O}(M, \mathcal{R})\}$ sont les éléments de réduction
 → RELATION FONDAMENTALE DES TORSEURS : $\overrightarrow{\mathcal{L}_{O'}}(M, \mathcal{R}) = \overrightarrow{\mathcal{L}_O}(M, \mathcal{R}) + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{p}(\mathcal{R})$

MOMENT CINÉTIQUE PAR RAPPORT À UN AXE

$$\mathcal{L}_\Delta = \vec{u} \cdot \overrightarrow{\mathcal{L}_O}(M, \mathcal{R}) \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{--- } \mathcal{L}_\Delta \text{ est le moment cinétique par rapport à } (\Delta) \text{ de } M(m) \\ \text{--- } \vec{u} \text{ est le vecteur unitaire orientant } (\Delta) \\ \text{--- } O \text{ est un point quelconque} \end{array} \right.$$

1.3 Théorèmes du moment cinétique

Théorème

Théorème du moment cinétique par rapport à un point fixe

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{\mathcal{L}}_O}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_g} &= \overrightarrow{\mathcal{M}}_O \left(\sum_i \vec{F}_i \right) \\ &= \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}}_O \left(\vec{F}_i \right)\end{aligned}$$

- Pour un point $M(m)$ dans \mathcal{R}_g
- O est un point fixe dans \mathcal{R}_g

Théorème

Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{L}_\Delta}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_g} &= \mathcal{M}_\Delta \left(\sum_i \vec{F}_i \right) \\ &= \sum_i \mathcal{M}_\Delta \left(\vec{F}_i \right)\end{aligned}$$

- Pour un axe fixe dans \mathcal{R}_g



Le point O ou l'axe (Δ) doivent être fixes dans \mathcal{R}_g



On n'utilisera pas le PFD et le TMC simultanément pour un seul point matériel

1.4 Conservation du moment cinétique

Il y a conservation du moment cinétique en un point O se \mathcal{R}_g si :

- Le système est **pseudo-isolé** ou **isolé**
- La somme des **moments** en O des forces est **nulle** (*Ex : Droite d'action passant par O*)

2 Cas d'un système de points

On peut ici appliquer obtenir deux équations vectorielles (TMC et TQM) soit traiter le cas d'un maximum de deux points matériels

2.1 Moment cinétique

MOMENT CINÉTIQUE PAR RAPPORT À UN POINT

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathcal{L}}_O &= \sum_i \overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{p}_i \\ &= \sum_i m_i \overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{v}_i\end{aligned}$$

- On conserve une structure de torseur

MOMENT CINÉTIQUE PAR RAPPORT À UN AXE

$$\mathcal{L}_\Delta = \vec{u} \cdot \overrightarrow{\mathcal{L}_O} = \sum_i \mathcal{L}_\Delta(M_i)$$

— \vec{u} est le vecteur unitaire orientant (Δ)
 — O est un point quelconque

2.2 Bilan des actions sur un système de points

DEF: Une action sur (S) se traduit par un **système de forces**

Le système de forces extérieures_{intérieures} est la somme de toutes les actions extérieures_{intérieures} sur (S)

- A tout système de forces $\{\vec{f}_i$ en $M_i\}$ on associe une **résultante** $\vec{F} = \sum_i \vec{f}_i$
La résultante des forces intérieures étant nulle on a $\vec{F} = \vec{F}^{(ext)} + \vec{F}^{(int)} = \vec{F}^{(ext)}$
- On définit le **moment résultant** en O : $\overrightarrow{\mathcal{M}_O} = \sum_i \overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{f}_i$
 $\overrightarrow{\mathcal{M}_O^{(int)}} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{\mathcal{M}_O} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O^{(ext)}} + \overrightarrow{\mathcal{M}_O^{(int)}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O^{(ext)}}$

Torseur $\overrightarrow{\mathcal{M}_O} = \overrightarrow{\mathcal{M}_A} + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}$	Glisseur	Couple
Caractéristiques	$\exists A, \begin{cases} \overrightarrow{\mathcal{M}_A} = \vec{0} \\ \vec{F} \neq \vec{0} \end{cases}$	$\begin{cases} \overrightarrow{\mathcal{M}_O} \neq \vec{0} \\ \vec{F} = \vec{0} \end{cases}$
Notes	$\overrightarrow{\mathcal{M}_O} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}$ Défini par $\begin{cases} \text{Résultante} \\ \text{Point d'application} \end{cases}$	$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}$ est indépendant de O

Tout système de forces peut être caractérisé par un **torseur**

Celui-ci se décompose comme la **somme d'un glisseur et d'un couple**

MOMENT RÉSULTANT PAR RAPPORT À UN AXE ORIENTÉ

$$\mathcal{M}_\Delta = \overrightarrow{\mathcal{M}_O} \cdot \vec{u}$$

— \vec{u} le vecteur unitaire orientant (Δ)

2.3 Théorème du moment cinétique

PAR RAPPORT À UN POINT FIXE

$$\frac{d\overrightarrow{\mathcal{L}_O}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_g} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O^{(ext)}}$$

— $\overrightarrow{\mathcal{M}_O^{(ext)}}$ est la somme des moments extérieurs

PAR RAPPORT À UN AXE FIXE

$$\frac{d\mathcal{L}_\Delta}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_g} = \mathcal{M}_\Delta = \mathcal{M}_\Delta^{(ext)}$$

— Pour un axe fixe dans \mathcal{R}_g
 — $\mathcal{M}_\Delta^{(ext)}$ est la somme des moments extérieurs

Conservation du moment cinétique

Dans un référentiel galiléen on a conservation du moment cinétique d'un système (S) par rapport à un point O axe orienté (Δ) si $\overrightarrow{\mathcal{M}_O} = \vec{0}_{\mathcal{M}_\Delta = 0}$

C'est le cas pour

Un système isolé où $\forall i \vec{f}_i^{(ext)} = \vec{0}$

Un système pseudo-isolé où

$$\begin{cases} \vec{F}^{(ext)} = \vec{0} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_O} = \vec{0} \end{cases}$$

3 Cas d'un solide

3.1 Caractéristiques du solide

- On passe d'un système discret $\sum_i m_i$ à un système continu $\iiint_V \rho(M) d\tau$
On pourra cependant utiliser des sommes discrètes à la place des intégrales
- Le solide possédant six degrés de liberté, deux équations vectorielles (*TMC*, *TQM*) suffisent à la résolution

MOMENT D'INERTIE

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\Delta &= \sum_i m_i (H_i M_i)^2 \\ &= \int_V H M^2 \delta m = \int_V H M^2 \rho(M) d\tau \end{aligned}$$

- \mathcal{J}_Δ , le moment d'inertie du solide par rapport à (Δ)
- $\rho(M)$ la masse volumique au voisinage de M
- H_{iH} est le projeté orthogonal de M_{iM} sur (Δ)
- \mathcal{J}_Δ caractérise la répartition de la masse autour de (Δ)

3.2 Équilibre d'un solide

Pour qu'un solide soit en équilibre il faut :

- Un équilibre d'ensemble_{position} soit $m \frac{d\vec{v}(G)}{dt} = \vec{F}^{(ext)} \Rightarrow \begin{cases} \vec{F}^{ext} = \vec{0} \\ \vec{v}(G)^{(0)} = \vec{0} \end{cases}$
- Un équilibre relatif_{rotations} $\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{\mathcal{M}_O} = \vec{0} \\ \overrightarrow{\mathcal{L}_O}^{(0)} = \vec{0} \end{cases}$

3.3 Solide en rotation

VITESSE DE ROTATION

$$\vec{v}(M) = r\omega \vec{u}_\theta(M) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{HM} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

- $\|\vec{\omega}\| = \omega = \dot{\theta}$, la vitesse angulaire instantanée
- H est le projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation

— Théorème de la quantité de mouvement : $G \in S \Rightarrow \vec{p} = m\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{HG} = m\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OG}$

$$\mathcal{L}_\Delta = \mathcal{J}_\Delta \omega$$

- ω et \mathcal{L}_Δ sont de même signe
- \triangleq Il faut choisir les mêmes conventions d'orientation pour le signe de ω que pour celui de \mathcal{L}_Δ

$$\frac{d\mathcal{L}_\Delta}{dt} = \mathcal{M}_\Delta^{(ext)} \Leftrightarrow \mathcal{J}_\Delta \frac{d\omega}{dt} = \mathcal{J}_\Delta \frac{d^2\theta}{dt} = \mathcal{M}_\Delta^{(ext)}$$

- Théorème du moment cinétique par rapport à l'axe de rotation (Δ)

4 Dispositifs rotatifs

Résolution de problèmes

- Définition de référentiel et système *parfois composite*
- Bilan des actions *Séparer glisseurs ou couples*
Remarque : Une force unique $Ex : Ressort$ est un glisseur
- Théorème du moment cinétique par rapport à (Δ) pour avoir une équation différentielle $en \omega ou \theta$ et éliminer les actions de liaison
- Théorème de la quantité de mouvement pour déterminer \vec{R}

4.1 Liaison pivot

DEF: La **liaison pivot** impose au solide une rotation autour d'un axe physique

- Elle est caractérisée par un torseur $\begin{cases} \vec{R} : \text{Résultante} \\ \vec{M}_0^{(l)} : \text{Moment résultant en } O \in (\Delta) \end{cases}$
- $\begin{cases} \text{Pas de frottements : } M_{\Delta}^{(l)} = 0 & \text{Liaison idéale} \\ \text{Frottements solides : } M_{\Delta}^{(l)} = k & \text{Le signe traduit de l'opposition au mouvement} \\ \text{Frottements fluides : } M_{\Delta}^{(l)} = -\lambda_{>0} \omega \end{cases}$

5 Aspects énergétiques

$$E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega^2$$

— Pour un solide en rotation autour de (Δ) fixe

$$\mathcal{P}^{(ext)} = M_{\Delta}^{(ext)} \omega$$

— $\delta W = \mathcal{P} dt = M_{\Delta}^{(ext)} d\theta$

— On a un moment moteur *résistant* si $M_{\Delta}^{(ext)}$ et ω sont de même signe *signe opposé*

THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}^{(ext)}$$

— $\mathcal{P}^{(ext)}$ est la puissance du système de forces
— Le théorème de l'énergie cinétique et celui du moment cinétique sont équivalents

On retiendra comme énergies potentielles

$$\begin{cases} E_{pp}(z_G) = mgz_G \\ E_p(\theta) = \frac{1}{2} C \theta^2 \text{ Couple de torsion} \end{cases}$$

6 Systèmes déformables

Il faut aussi prendre en considération la puissance des actions intérieures

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}^{(ext)} + \mathcal{P}^{(int)}$$

— Même si $\overrightarrow{F^{(int)}} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{M_O^{(int)}} = \vec{0}$

MOUVEMENTS À FORCES CENTRALES

1 Généralités

DEF: Une force est dite **centrale** si sa droite d'action passe constamment par un point fixe dans \mathcal{R}

- Dans le cas d'un champ de force et que celui-ci est conservatif, on se place en coordonnées sphériques :

$$\vec{f}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}E_p(r) = -\frac{dE_p}{dr}\vec{u}_r = f(r)\vec{u}_r$$

— $E_p(r)$, l'énergie potentielle associée ne dépendant que de r

DEF: Une interaction est dite **newtonienne** si la force d'interaction entre les particules varie en $\frac{1}{r^2}$

$-\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{1/2}$	$\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_{1/2}$
$-\frac{K}{r^2} \vec{u}_r$	

- Le signe de K renseigne sur l'attraction ou répulsion de la force
- L'énergie potentielle qui en découle est alors $E_p(r) = \frac{-K}{r}$

2 Conséquences

2.1 En considérant une force centrale

$$\vec{\mathcal{L}}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = m\vec{\mathcal{C}}$$

- Le moment cinétique est une constante du mouvement TMC
- $\mathcal{C} = \|\vec{\mathcal{C}}\|$ est la constante des aires

— Si $\mathcal{C} = 0$, le mouvement est rectiligne

— Si $\mathcal{C} \neq 0$, le mouvement est dans un plan passant par O et orthogonal à $\vec{\mathcal{C}}$

On se place ainsi en coordonnées cylindriques et la conservation du moment cinétique conduit à :

$$r^2\dot{\theta} = \mathcal{C}$$

— \mathcal{C} est une constante du mouvement

LOI DES AIRES

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2\dot{\theta}}{2} = \frac{\mathcal{C}}{2}$$

- A , est l'aire balayée pendant dt
- $\frac{dA}{dt}$ est la vitesse aréolaire

La loi des aires est utilisée pour le calcul de durées

2.2 En considérant un champ de force conservatif

CONSERVATION DE L'ÉNERGIE MÉCANIQUE

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{m\mathcal{C}^2}{2r^2} + E_p(r) = E_0$$

— E_0 est déterminé par les conditions initiales

Par analogie avec un système à un degré de liberté où $E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_p(x)$ on définit :

$$E_p^{(eff)}(r) = \frac{m\mathcal{C}^2}{2r^2} + E_p(r)$$

- $E_p^{(eff)}$ est l'énergie potentielle effective
Ce terme découle cependant en partie de l'énergie cinétique
On pourra donc considérer que ce terme découle d'une énergie potentielle de $\vec{f} = \frac{m\mathcal{C}^2}{r^3}$

2.3 En considérant une interaction newtonienne

— Interaction attractive

L'énergie potentielle effective possède un minimum en $r_m = \frac{m\mathcal{C}^2}{K}$

Selon la valeur de E_0 on a alors

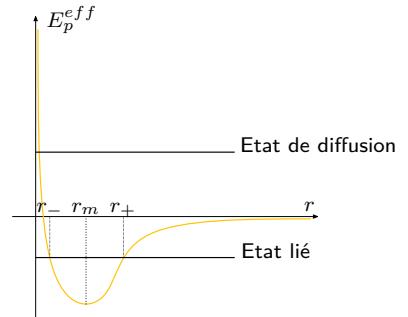
- Des états de diffusion ($E_0 \geq 0$)
- Des états liés ($E_0 < 0$)

Le rayon r est alors compris entre deux valeurs extrêmes r_+ et r_-

Dans le cas où $E_0 = E_p^{(min)}$ on a un mouvement circulaire uniforme

— Interaction répulsive

On a forcément des états de diffusion comme $E_0 > 0$



3 Détermination de la trajectoire

3.1 Cas général

A E_0 et \mathcal{C} fixé il n'y a qu'une trajectoire possible

On dispose de deux équations du mouvement :
$$\begin{cases} r^2\dot{\theta} = \mathcal{C} \\ \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + E_p^{(eff)}(r) = E_0 \end{cases}$$

On peut alors

- Intégrer les équations pour obtenir les équations horaires $r(t)$ puis $\theta(t)$
- Combiner les équations pour éliminer dt pour obtenir l'équation polaire $r(\theta)$

Remarque : Six conditions initiales \Rightarrow
$$\begin{cases} \text{Deux partent dans la conservation de } \vec{\mathcal{L}}_O \Rightarrow \text{Mouvement plan} \\ \text{Deux partent dans les valeurs de } E_0 \text{ et } \mathcal{C} \\ \text{Les deux restantes partent dans les choix arbitraires des origines temporelles et angulaires} \end{cases}$$

3.2 Cas d'une interaction newtonienne

Généralités

Dans le cas d'une force centrale newtonienne telle $\vec{f}(M) = -\frac{K}{r^2}\vec{u}_r$ où $\vec{\mathcal{L}}_O = m\mathcal{C}\vec{u}_z$ et E_0 se conservent :
 \Rightarrow La trajectoire est une **conique** de centre O vérifiant :

$$r(\theta) = \frac{p}{\epsilon + e \cos(\theta)}$$

- $p = \frac{m\mathcal{C}^2}{|K|}$
- $\epsilon = \text{sgn}(K)$
- e vérifie $E_0 = \frac{K^2}{2m\mathcal{C}^2}(e^2 - 1)$

$e = 0$	Cercle
$0 < e < 1$	Ellipse
$e = 1$	Parabole
$e > 1$	Hyperboles

Trajectoire circulaire

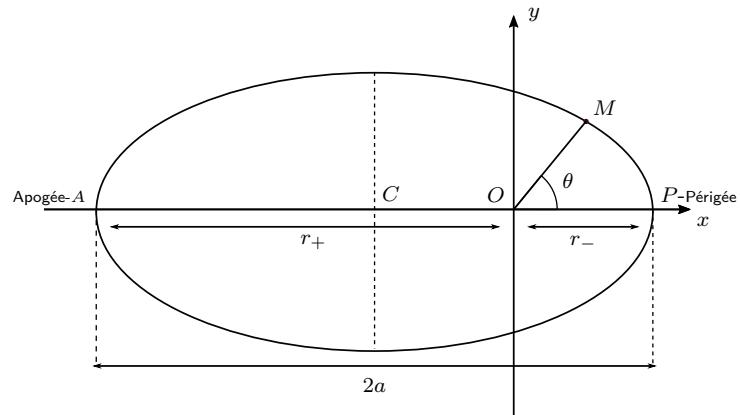
- Les trajectoires circulaires sont forcément **attractives**
- Dans le cas d'un mouvement circulaire on retrouve par le PFD

$\frac{T^2}{r_0^3}$	$\vec{v} = r_0 \omega \vec{u}_\theta$	E_c	E_p	E_m	$\vec{\mathcal{L}}_O$
$\frac{4\pi^2 m}{K}$	$\sqrt{\frac{K}{mr_0}} \vec{u}_\theta$	$\frac{K}{2r_0}$	$-\frac{K}{r_0}$	$-\frac{K}{2r_0}$	$m\sqrt{\frac{Kr_0}{m}} \vec{u}_z$

Trajectoire elliptique

- Interaction attractive $\Rightarrow K > 0$
- La trajectoire est fermée et de période 2π

E_0	$-\frac{K}{2a}$	Idem circulaire
$v(r)$	$\sqrt{\frac{2K}{m} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right)}$	Conservation de E_m
C	$r_+ v(r_+) = r_- v(r_-)$	$\vec{\mathcal{L}}_O$
$\sin(\widehat{\vec{u}_r, \vec{v}})$	$\frac{C}{r \times v(r)}$	Géométrie
$\frac{T^2}{a^3}$	$\frac{4\pi^2 m}{K}$	Idem circulaire



Autres trajectoires

- $E_0 = 0 \rightarrow e = 1 \Rightarrow$ Parabole
- $E_0 > 0 \rightarrow e > 1 \Rightarrow$ Hyperbole

4 Applications

4.1 Gravitation

- $K = \mathcal{G}Mm$

Lois de Kepler

1. Les centres d'inertie des planètes décrivent des ellipses dont le foyer est le centre d'inertie du soleil
2. L'aire balayée est proportionnelle au temps : $\frac{dA}{dt}$ est constante
3. $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_S}$

Théorème

- Les satellites géostationnaires ont une trajectoire nécessairement équatoriale
- 1^{re} vitesse cosmique $v_1 = \sqrt{gR_T}$
- Vitesse de libération $v_\infty = \sqrt{2gR_T}$

4.2 Structure de l'atome

- $K = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}$

- **Modèle de Thomson** : Électron élastiquement lié
- **Expérience de Rutherford** : Détermination du rayon d'orbite minimum \Rightarrow La matière positive est concentrée en un petit volume
- **Modèle de Bohr** : Mise en évidence de $\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$

1 État fluide

DEF: L'**état fluide** est un état déformable de la matière : sa surface s'adapte aux contraintes extérieures

- État **gazeux** : Le fluide occupe tout l'espace disponible, est peu dense et compressible
- État **liquide** : Le fluide occupe un volume limité par une surface libre, est dense et incompressible
- Un fluide est modélisé par une **particule de fluide** de volume $d\tau$ mésoscopique

Le volume est assez grand pour être considéré comme un système thermodynamique ($T, \rho, \delta U$)

DEF: Un fluide est dit continu si ses propriétés (T, ρ) varient continuellement à l'échelle macroscopique

$$\delta N = n(M)d\tau$$

— δN est le nombre de particules dans $d\tau$

— $n(M)$ est la densité particulaire

- On définit la vitesse moyenne comme vitesse du centre de masse

$$\overrightarrow{v(M)} = \frac{1}{\delta N} \sum_i \vec{v}_i = < \vec{v}_i >$$

La vitesse de $d\tau$ est la moyenne des vitesses de ses particules

2 Forces dans un fluide

2.1 Bilan des forces

FORCES VOLUMIQUES *Actions à distance*

$$d\overrightarrow{F}_v = \vec{f}_v(M)d\tau$$

— \vec{f}_v , la densité volumique de force en $N.m^{-3}$

FORCES SURFACIQUES *Actions de contact*

$$d\overrightarrow{F}_s = \vec{f}_s(M)dS$$

— \vec{f}_s , la densité surfacique de force en $N.m^{-2}$
 — $d\overrightarrow{F}_s$ est la force appliquée par dS sur V
 — $\vec{f}_s = \vec{N} + \vec{T}$ et $\vec{T} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Fluide parfait} & \text{Pas de viscosité} \\ \text{Fluide au repos} & \end{cases}$

2.2 Forces de pression

L'élément de surface $d\vec{S}$ séparant le fluide de l'autre domaine *fluide ou solide* subit :

$$d\vec{f} = P(M)\vec{dS}$$

— \vec{dS} sont les forces exercées par le fluide sur l'autre domaine
 — $d\vec{S}$ est orienté vers l'extérieur du fluide
 — En Pa = $N.m^{-2}$
 1bar = 10^5 Pa et 1atm = 1.013bar = 760mmHG

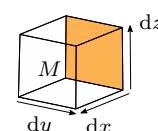
$$d\vec{F} = -\nabla P d\tau$$

— $d\vec{F}$, résultante des forces de pression appliquée à $d\tau$

$d\vec{F} = 6$ faces $\Rightarrow 6$ termes. On fait le bilan sur chaque face à l'aide de $d\vec{f} = P(M)\vec{dS}$

$$dF_x = P(x, y, z)dydz - P(x+dx, y, z)dydz = -\frac{\partial P}{\partial x}dxdydz = -\frac{\partial P}{\partial x}d\tau$$

Or $d\vec{F} = dF_x\vec{u}_x + dF_y\vec{u}_y + dF_z\vec{u}_z$ d'où $d\vec{F} = -\nabla P d\tau$



2.3 Équation fondamentale de la statique des fluides

L'équilibre des forces de pression et des forces volumiques donne par le PFD :

$$\vec{f}_v(M) = \overrightarrow{\text{grad}}P \quad | \quad \text{On notera pour le poids } \vec{f}_v = \rho \vec{g}$$

3 Application aux fluides incompressibles et homogènes

3.1 Équation barométrique

$$P(z) = P(0) - \rho g z \quad | \quad \text{Dans le cas d'un fluide soumis à } \vec{P} = -m j \vec{u}_z$$

Pour un fluide dans $\vec{g} = -g \vec{u}_z$

La relation fondamentale donne $\overrightarrow{\text{grad}}P = \rho \vec{g}$

On a alors par multiplication par $d\vec{l} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$: $\overrightarrow{\text{grad}}P \cdot d\vec{l} = dP = -\rho g dz$

D'où $\int_{P_0}^P dP = \int_{z_0}^z -\rho g dz \Rightarrow P(z) = P(0) - \rho g z$

Démo

3.2 Surfaces isobares et libres

DEF: Les surfaces **isobares** sont dans \vec{g} uniforme les surfaces $z = \text{cste}$

- La pression atmosphérique étant considérée comme uniforme et le champ de pression étant continu, la surface libre des liquides au repos est une isobare \Rightarrow Elle est plane horizontale

3.3 Applications

- Principe des vases communicants
- Mesure de pression
- Presse hydraulique
- Plongée

4 Application aux fluides compressibles

LOI DES GAZ PARFAITS

$$\frac{P}{\rho} = \frac{RT}{M} \quad | \quad \begin{aligned} &— R \text{ est la constante des gaz parfaits} \\ &— M = 29 \text{ g.mol}^{-1} \text{ est la masse molaire de l'air} \\ &— \text{Dans le cas de l'atmosphère isotherme } T = T_0 = \text{cste} \end{aligned}$$

On se place dans le cas du modèle de l'atmosphère isotherme : la température reste uniforme

Démo

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dP}{dz} = -\rho g \\ \frac{P}{\rho} = \frac{RT}{M} \Rightarrow \frac{dP}{dz} = -\frac{PM}{RT} g \Rightarrow \int_{P_0}^P \frac{dP}{P} = - \int_0^z \frac{Mg}{RT_0} dz \\ T = T_0 \end{array} \right.$$

$$P(z) = P_0 e^{-\frac{Mgz}{RT_0}} = P_0 e^{-\frac{mgz}{k_B T_0}} = P_0 e^{-\frac{z}{h}}$$

— $k_B = \frac{R}{N}$
 — $m = \frac{\dot{N}}{N}$
 — $h = 8\text{km}$ est une échelle caractéristique

- ρ et $n = \frac{N}{M} \rho$ subissent les mêmes variations que P
- Le facteur $e^{-\frac{mgz}{k_B T_0}}$ porte le nom de **Facteur de Boltzmann**
 Il traduit d'une compétition entre $E_{at} = k_B T$ et $E_p = mgz$
 \Rightarrow Plus E_{at} grand plus la probabilité $\propto_{\text{Facteur de Boltzmann}}$ de trouver une molécule à $E_p(z)$ est grande

5 Actions exercées par les fluides au repos

5.1 Actions sur une surface élémentaire

On considère un corps immergé dans un fluide au repos

L'élément de surface $\overrightarrow{d^2S}$ est soumis à la force élémentaire de pression

— $d^2f = -P(M)d^2S$

— Résultante : $\vec{F}_p = \iint_{(S)} P(M) \overrightarrow{d^2S}$

— Moment résultant : $\overrightarrow{M_O} = \iint_{(S)} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{d^2f} = - \iint_{(S)} P(M) \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{d^2S}$

— Les forces de pression sont un glisseur de point d'application A tel $\overrightarrow{M_A} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{M_O} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}_p$

Actions exercées sur une surface

- Déterminer le champ de pression dans le fluide $P(z)$
- Déterminer une surface élémentaire
 - Faire attention aux symétries Forces se compensent
 - Surface assez grande
 - La pression doit y être uniforme
 - dS doit y être de direction uniforme
- Intégrer

5.2 Théorème d'Archimède

$$\overrightarrow{\Pi_A} = - \iint_{(S)} P(M) \overrightarrow{dS}$$

— $\overrightarrow{\Pi_A}$ est la résultante des forces de pression appliquées à V par l'intermédiaire de S
 C'est la poussée d'Archimède

Théorème d'Archimède

Le système des forces de pression appliquées par un fluide au repos sur un solide immergé a une résultante $\overrightarrow{\Pi_A}$ appelée poussée d'Archimède

Elle est égale à l'opposé du poids du fluide déplacé Enlevé par la pensée appliqué au centre d'inertie des fluides déplacés

Se montre par un bilan des forces sur le fluide déplacé

THERMODYNAMIQUE MACROSCOPIQUE

1 Description d'un système thermodynamique

1.1 Système thermodynamique

DEF: Un système thermodynamique est constitué de plusieurs corps à l'intérieur d'une surface fermée *fictive ou réelle*

- **Isolé** : Le système n'échange ni matière ni énergie avec l'extérieur
- **Fermé** : Le système n'échange pas de matière mais de l'énergie avec l'extérieur
- **Ouvert** : Le système échange de la matière avec l'extérieur

1.2 États de la matière

On distingue les **corps purs** *simples et composés* et les mélanges

- **Solide** : État le plus compact
Modèle du cristal parfait : Les atomes sont rangés périodiquement et oscillent autour de leur équilibre
- **Liquide** : État compact mais désordonné
Ils n'ont pas de volume propre et prennent la forme du récipient qui les contient
- **Gaz** : État dispersé et désordonné de la matière
Ils occupent tout le volume mis à leur disposition et n'ont donc pas de volume propre
- **Condensé** *Solide-Liquide* : État compact et très peu compressible
- **Fluide** *Liquide-Gaz* : États déformables

1.3 Description de l'état d'un système

DEF: Un système thermodynamique est décrit par un certain nombre de paramètres dits d'**état** *thermodynamiques*

- Grandeur **extensives** : Grandeur additives proportionnelles à la quantité de matière du système
Ex : Quantité de matière, masse, volume, charge électrique
- Grandeur **intensives** : Grandeur non additives, définies en chaque point
Ex : Masse volumique, volume massique, pression, température
Leur définition sur un système se fait par l'intermédiaire d'une définition sur $d\tau$ mésoscopique
- On distingue
 - Les **variables d'état** : Paramètres indépendants permettant de décrire l'état macroscopique *Expérience*
 - Les **fonctions d'état** : Autres paramètres d'état dont la valeur est fixée par les variables d'état
- On définit alors pour une grandeur extensive G en M
 - Une grandeur massique $g(M) = \frac{\delta G}{\delta m}$
 - Une grandeur molaire $G_m(M) = \frac{\delta G}{\delta n}$
- Une **phase** est toute partie où les grandeurs intensives sont fonctions continues de l'espace
Si au sein d'une phase les grandeurs intensives sont homogènes, on parle de phase **homogène** *uniforme*

1.4 Notion d'équilibre

- Un système est dit à **l'équilibre thermodynamique** si
 - Il n'y a pas de variations de ses variables d'état au cours du temps
 - Il n'y a aucun transfert d'énergie



L'équilibre thermodynamique est macroscopique

Théorème

Principe zéro de la thermodynamique

Deux systèmes en équilibre thermique avec un même troisième sont en équilibre thermique entre eux
Ces systèmes ont alors la température comme paramètre commun

- Nb : La température est une grandeur intensive. $A_\theta = \lim_{P \rightarrow 0} PV_m$ ne dépend que d'elle ($A_T \propto T$) et

$$\text{on a donc } \left\{ \begin{array}{l} T_{100} - T_0 = 100 \text{ Par la pratique} \\ \frac{T_{100}}{T_0} = 1.3610 \text{ Par ce qui précède} \end{array} \right. \quad \text{on définit donc } T = 273.16 \times \frac{A_T}{A_{pH_2O}}$$

1.5 Transformations

DEF: On appelle **transformation** d'un système thermodynamique, le passage d'un état d'équilibre à un autre

Cette évolution est due à un changement des contraintes extérieures

Transformation	Définition
Quasistatique	Evolution des paramètres d'état de façon continue
Réversible	Évolution en sens inverse possible <small>Succession d'état d'équilibres pour le système et le milieu</small>
Irréversible-Spontanée	Transformation non réversible
Isochore	Volume constant <small>Enceinte rigide</small>
Isobare	Pression constante <small>Pression extérieure constante et paroi mobile</small>
Isotherme	Température constante <small>Thermostat extérieur</small>
Monotherme	Température extérieure constante

2 Approximations courantes des équations d'état

2.1 Modèle du gaz parfait

PV_m est quasi-constant aux faibles pressions, on assimile $PV_m = \lim_{P \rightarrow 0} PV_m$

ÉQUATION DES GAZ PARFAITS

$$PV = nRT$$

- Comme $V_m = \frac{V}{n}$ et $PV_m \propto T$
- $R = 8.314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$

Dans le modèle du gaz parfait, $\sum P_i = P$

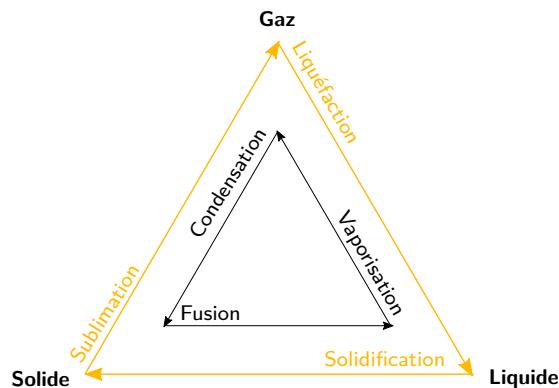
2.2 Approximation des phases condensées

On suppose que le système est incompressible et indilatable

$$V = cste$$

3 Études des états des corps purs

3.1 Changements d'état

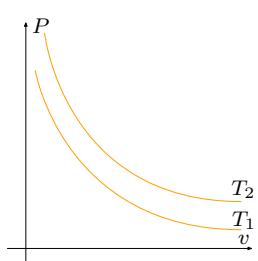
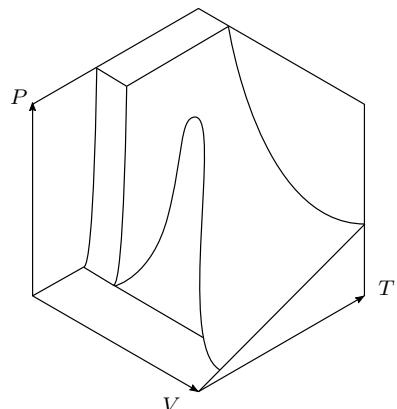
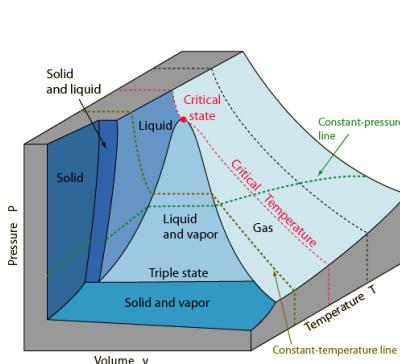


Au niveau **microscopique**, les forces de Van der Waals sont responsables de l'interaction attractive entre les particules :

- A haute température : État de diffusion du à l'agitation thermique
- A basse température : États liés par manque d'agitation thermique

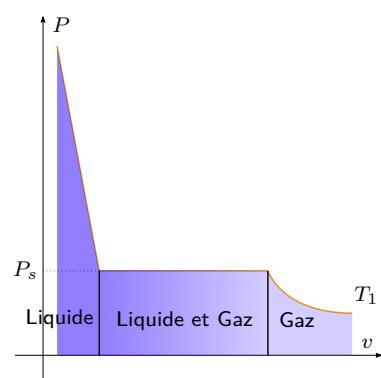
3.2 Surface PVT

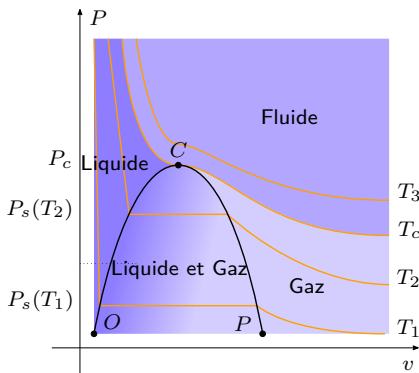
On effectue des coupes dans la surface PVT pour obtenir les courbes en 2D suivantes



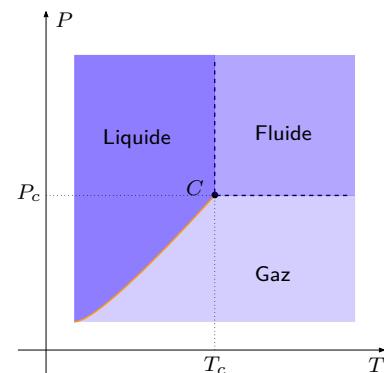
Les courbes sont des hyperboles car $P = \frac{RT}{Mv}$
Ce modèle a des limites : la compression peut entraîner la liquéfaction

- $P_s(T)$ est la **pression de vapeur saturante**
- Équilibre liquide-gaz
- Pression max d'existence de vapeur sèche _{seule}





- On représente ici les isothermes d'Andrews
- CO est la courbe d'ébullition : apparition *disparition* du gaz : **liquide saturant**
 - CP est la courbe de rosée : apparition *disparition* du liquide : **vapeur saturante**
- DEF: L'isotherme passant par C est appelé **isotherme critique**
- DEF: Pour $T > T_c$ il n'y a plus de transitions de phase : état **supercritique**

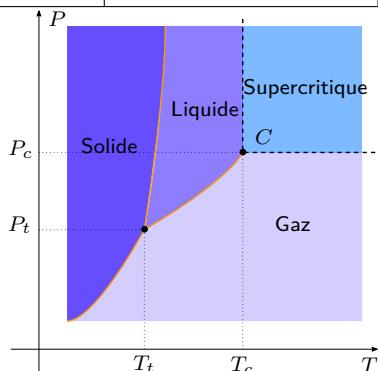


- L'ensemble des points de coexistence de liquide-vapeur forme une courbe $P = P_s(T)$

DEF: Deux systèmes sont de même nature si ils renferment les mêmes constituants et les mêmes phases

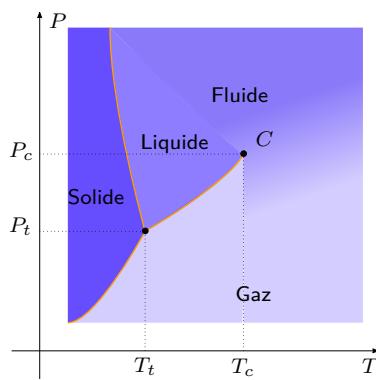
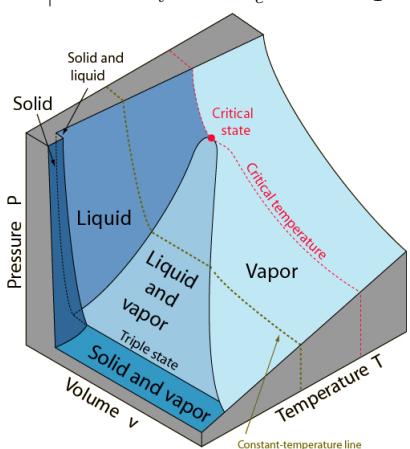
DEF: On appelle **variance** le nombre de paramètres intensifs nécessaires et suffisants pour déterminer l'équilibre d'un système sans changer sa nature

Système	Corps pur sous une phase	Équilibre liquide-vapeur	Coexistence de trois phases
Variance	$2_{P, T}$	$1_P \text{ ou } T$	$0_{\text{Point triple}}$
Nom	Divariant	Monovariant	



Apparaissent sur le diagramme d'équilibre (P, T) les positions de stabilité entre les phases
Comme $v_l \approx v_s$, la pente est très raide

Pour trouver les zones de stabilité, on se souvient :
 $P \nearrow: G \rightarrow L \rightarrow S$
 $T \nearrow: S \rightarrow L \rightarrow G$ Sauf exception



Cas de H_2O
 $v_L < v_S \Rightarrow$ pente $S \leftrightarrow L < 0$
 $P \nearrow \Rightarrow S \rightarrow L$

3.3 Retards aux transitions de phase

Sil il n'y a pas d'impuretés :

- On peut observer le liquide passé $T_{S \rightarrow T_F}$: Pas de vrai équilibre : l'état est **métastable**
- On peut observer la vapeur seule si $P > P_s(T)$: elle est **sursaturante**

La moindre perturbation ou impureté entraîne le retour à l'état prévu

- On peut observer le liquide sans ébullition si $T < T_{eb}$ car il faut lutter contre la tension superficielle pour réaliser des bulles

4 Composition d'un mélange diphasé

La coexistence de deux phases à l'équilibre donne des informations sur les variables d'état

Ex : $P = P_s(T)$ pour un équilibre liquide/vapeur

Pour conclure l'étude, il faut connaître aussi les proportions des deux phases

$$x_i = \frac{m_i}{m}$$

- x_i est le titre massique en i
- m_i est la masse de la phase i
- m est la masse totale

On choisit comme variables thermodynamiques T et $x = x_i$ pour connaître complètement la composition

du système :
$$\begin{cases} m_i = xm \\ m_j = (1 - x)m \end{cases}$$

Théorème des moments dans le cas d'un équilibre liquide-vapeur

$$\begin{cases} P \text{ et } T \text{ sont les variables d'état} \\ P = P_s(T) \text{ comme équilibre liquide-vapeur} \end{cases} \quad \text{On utilise le caractère extensif de } V(T, x)$$

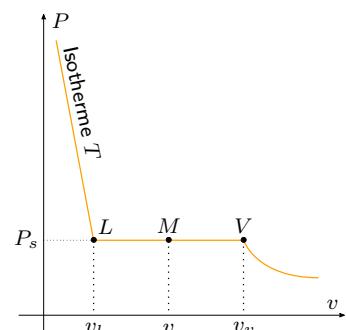
$$\begin{aligned} V(T, x) &= V_l(T, P_s(T)) + V_v(T, P_s(T)) \\ &= m_l v_l(T, P_s(T)) + m_v v_v(T, P_s(T)) \\ &= m(1 - x)v_l(T, P_s(T)) + mxv_v(T, P_s(T)) \\ &= m(v_l(T) + x(v_v(T) - v_l(T))) \end{aligned}$$

$$V(T, x) = m(v_l(T) + x\Delta_{vap}v(T))$$

$$x = \frac{v(T, x) - v_l(T)}{v_v(T) - v_l(T)}$$

$$x = x_v = \frac{LM}{LV} \text{ et } x_l = \frac{MV}{LV}$$

Les courbes à $x_i = 1 - x_j = \text{cste}$ sont appelées **isotites**



Modèle	Approximation
Phases condensées	$\rho_l = \frac{1}{v_l} = cste$
Gaz parfait	$P_s(T_0)v_v = \frac{RT_0}{M}$
Loin du point C	$v_l \ll v_v$

— Problèmes liés au stockage des fluides

Un fluide sous volume constant à un volume massique constant

Position par rapport au point critique	Gauche	Droite
Température		
Domaine	Liquide	Gaz
Augmentation de pression	Forte	Raisonnables

5 Équilibre liquide-vapeur d'eau sous atmosphère inerte

DEF: L'**évaporation** permet le passage du liquide au gaz sans ébullition

DEF: L'**atmosphère inerte** est le gaz en contact avec la surface libre de A liquide dans une enceinte

- Il faut comparer P_A à $P_s(T)$ pour savoir si la phase liquide est stable
- Il y a toujours une phase gazeuse et il n'y a que deux équilibres possibles à T donné
 - Liquide-gaz si $P_A = P_s(T)$
 - Liquide si $P_A < P_s(T)$
- Dans tous les cas le système cherche à se ramener à $P_A = P_s(T)$ par liquéfaction ou vaporisation Si assez de liquide

$$H = \frac{P_{\text{H}_2\text{O}}}{P_s(T)} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{— } H \text{ est le degré d'hygrométrie} \\ \text{Il est caractéristique de l'humidité} \\ \text{Évaporation tant que } H < 1 \end{array} \right.$$

1 Hypothèses

- Toutes les molécules sont en mouvement par l'**agitation thermique**
- La trajectoire d'une molécule est une marche au hasard dû aux chocs

DEF: Le **libre parcours moyen** l_m est la distance parcourue entre deux chocs successifs

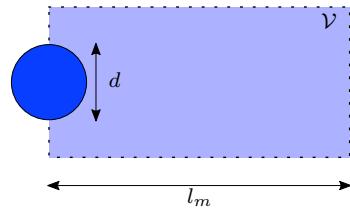
En moyenne il n'y a qu'une molécule dans $\mathcal{V} = \pi d^2 l_m$

Si $N^* = \frac{N}{V}$ où N est le nombre de molécules total on a :

$$N^* \mathcal{V} \sim 1 \Rightarrow l_m \sim \frac{1}{\pi d^2 N^*}$$

— Phase condensée : $N^* \sim \frac{1}{d^3} \Rightarrow l_m \sim \frac{d}{\pi} \sim d$

— Gaz parfait : $N^* = \frac{\mathcal{N}}{V_m} \Rightarrow l_m \sim \frac{V_m}{\pi d^2 \mathcal{N}}$



Démo

- On utilise le modèle du gaz **parfait monoatomique** Volume grand \Rightarrow Pression faible
 - Monoatomique : Molécules ponctuelles sans vibration et rotation
 - Parfait : Pas d'interactions de VW et chocs élastiques

$$N^* = \frac{N}{V} = \frac{\delta N}{d\tau}$$

— N^* est la densité moléculaire
Elle est uniforme sur $d\tau$ mésoscopique

- On vérifie en approximant une molécule à un cube la distance entre deux molécules $D = \sqrt[3]{\frac{V_m}{\mathcal{N}}}$

DEF: On utilise $N(\vec{v})$ la distribution statistique des vitesses dans le cadre de la description statistique

Propriétés de $N(\vec{v})$

- Stationnaire : A l'équilibre $N(\vec{v})$ ne dépend pas de t
- Homogène : $N(\vec{v})$ est indépendant de $d\tau$ choisi

$$\delta N(\vec{v}) = N^*(\vec{v}) d\tau = \frac{N(\vec{v})}{V} d\tau$$

— N^* est la densité moléculaire de \vec{v}

Propriétés

- Isotropie : Pas de direction de \vec{v} privilégiée : $N(\vec{v})$ ne dépend que de $\|\vec{v}\|$
- $\sum_{\vec{v}} N(\vec{v}) = N$

Valeurs moyennes

$$-\langle G \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G_i$$

$$-\langle G \rangle = \frac{1}{N} \int_{G_{min}}^{G_{max}} G \delta N(G) dG$$

$$-\langle G \rangle = \frac{1}{N} \sum_{\{G\}} G N(G) = \sum_{\{G\}} G p(G)$$

$$-\langle G \rangle = \frac{1}{N} \int_{G_{min}}^{G_{max}} G N p(G) dG = \int_{G_{min}}^{G_{max}} G p(G) dG$$

Propriétés

- Par isotropie on a $\langle \vec{v} \rangle = \vec{0}$ et $\langle v_x \rangle = \langle v_y \rangle = \langle v_z \rangle = 0$

$$u^2 = \langle \vec{v}^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2$$

- u est la vitesse quadratique moyenne
- Elle permet la mesure de l'agitation thermique
- $\langle \vec{v}^2 \rangle = \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle$
- On a $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{u^2}{3}$ par isotropie

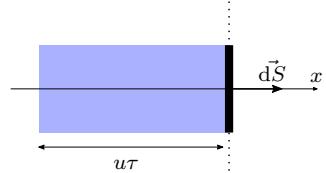
2 Du microscopique au macroscopique

2.1 Pression cinétique

Les forces de pression sur $d\vec{S}$ sont dues aux forces exercées par les particules sur la paroi

Modélisation simple :

- $\|\vec{v}\| = u$
- Six directions possibles : $\vec{u}_x, -\vec{u}_x, \vec{u}_y, -\vec{u}_y, \vec{u}_z, -\vec{u}_z$



On considère les δN molécules frappant dS , subissant $\vec{F} = -\vec{d}f$ Actions réciproques

$$\text{TQM : } \frac{d(\delta \vec{p})}{dt} = -\vec{d}f \Rightarrow \int_{\delta \vec{p}_i}^{\delta \vec{p}_f} d(\delta \vec{p}) = - \int_0^\tau \vec{d}f dt \Rightarrow \vec{d}f = \frac{1}{\tau} (\delta \vec{p}_i - \delta \vec{p}_f)$$

$$\text{Or } \begin{cases} \delta \vec{p}_i = \delta N mu \vec{u}_x \\ \delta \vec{p}_f = -\delta N mu \vec{u}_x \end{cases} \text{ et } \delta N = \frac{N^* \delta V}{6} = \frac{N^* u \tau dS}{6}$$

D'où $\vec{d}f = \frac{1}{3} mu^2 d\vec{S}$ et par identification

Démo

$$P = \frac{1}{3} N^* m u^2 = \frac{1}{3} \frac{N}{V} m u^2$$

- P est la pression du gaz
- m est la masse des particules
- u est la vitesse quadratique

$$\text{Comme les hypothèses } P \text{ faible-}V \text{ grand \ sont identiques} \quad \begin{cases} PV = nRT = Nk_B T \\ PV = \frac{1}{3} Nmu^2 \end{cases} \Rightarrow k_B T = \frac{1}{3} mu^2$$

$$E_c = \sum_{i=1}^N v m v_i^2 = \frac{1}{2} m N u^2 \text{ d'où } \langle E_c \rangle = \frac{E_c}{N} = \frac{1}{2} m u^2 = \frac{3}{2} k_B T$$

⇒ La température mesure l'énergie cinétique du mouvement d'agitation des particules

2.2 Énergie interne

Comme le gaz est au repos, l'énergie totale est définie par E_c d'origine microscopique

$$U(T) = E_c = \frac{3}{2} N k_B T = \frac{3}{2} n R T$$

- U est l'énergie interne
- u est extensif et paramètre d'état
- $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$, la constante de Boltzman
- On définit $U_m(T) = \frac{U(T)}{n} = \frac{3}{2} R T$

$$C_v = \frac{dU}{dT} = \frac{3}{2} n R = \frac{3}{2} N k_B$$

- C_v est la capacité thermique isochore en J.K^{-1}
- Cette fonction d'état décrit comment le système accumule de l'énergie si T augmente
- On définit $C_{vm} = \frac{C_v}{n} = \frac{3}{2} R$

PREMIER PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE

1 Conservation de l'énergie**1.1 Énergie interne**

$$U = E_c^{micro} + E_p^{micro}$$

— U est l'énergie interne

$$E_T = E^{macro} + U$$

— $E_T = E^{macro} + E^{micro}$ est l'énergie totale

Théorème

Premier principe de la thermodynamique

L'énergie interne U d'un système thermodynamique est fonction d'état de celui-ci
 U ne dépend donc que des variables d'état macroscopiques du système

Conséquences

- U est une grandeur extensive et on définit u et U_m
- $\Delta U = U_f - U_i$ ne dépend pas de la transformation suivie
- Dans le cas d'une transformation cyclique $\Delta U = 0$

$$\Delta u_{1 \rightarrow 2}(T_0) = u_{2 \text{ } T_0, P^*(T_0)} - u_{1 \text{ } T_0, P^*(T_0)}$$

- $\Delta u_{1 \rightarrow 2}(T_0)$ est l'énergie massique de changement d'état
- $\Delta u_{1 \rightarrow 2}(T_0) = -\Delta u_{2 \rightarrow 1}(T_0)$
- Si nom caractéristique on notera $\Delta u_{1 \rightarrow 2} = \Delta_{abc} u$

ÉNERGIE INTERNE D'UN GAZ PARFAIT

$$U_m(T) = C_{vm}T$$

- $C_{vm} = \frac{3}{2}R$ dans le cas d'un gaz monoatomique
- Sinon $C_{vm} > \frac{3}{2}R$
- $C_{vm} = \frac{5}{2}R$ dans le cas d'un gaz diatomique

ÉNERGIE INTERNE DES PHASES CONDENSÉES

$$\frac{dU}{dT} = C_v = C_p = C$$

- U ne dépend que de T
 $U \propto T$ à une constante d'intégration près

1.2 Conservation de l'énergie

- L'énergie totale est conservative, sa variation vient d'un échange avec le milieu extérieur
 $\Delta E_T = E_{reue} \gtrless 0$
 - $E_{reue} > 0 \Rightarrow$ Le système reçoit de l'énergie
 - $E_{reue} < 0 \Rightarrow$ Le système cède de l'énergie
- De plus $\Delta E_T = \Delta E^{macro} + \Delta U$ d'où $\Delta E^{macro} = 0 \Rightarrow \Delta E_T = \Delta U$

Type de transfert	Travail	Transfert thermique
Symbole	W	Q
Type	Ordonné	Désordonné
$f(G_{macro})$	Oui	Non
Signe	<ul style="list-style-type: none"> — $X > 0$: X reçu par le système — $X < 0$: $-X$ cédé par le système 	

Conservation de l'énergie	
— Dans le cas où $E^{macro} = cste$	$\Delta U = U_f - U_i = W + Q$
— Cas général	$dU = U(t + dt) - U(t) = \delta W + \delta Q$ $\Delta U + \Delta E_c^{macro} + \Delta E_p^{macro} = W + Q$

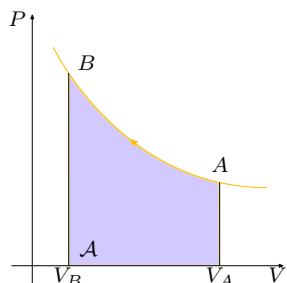
2 Transferts énergétiques

2.1 Forces de pression

Système	Piston	Volume
Force	$\vec{F} = P_e S \vec{u}_x$	$d^2 \vec{F} = P_e(M) d^2 \vec{S}$
Déplacement	$dx \vec{u}_x$	$d\vec{l}$
Travail	$\delta W = P_e S dx = P_e \delta V_b$ On a souvent $\delta V_b = -dV$ $\delta W = -P_e dV$	$\delta^3 W = P_e(M) \delta^3 V_b$ $\delta W = \oint_{(S)} P_e(M) \delta^3 V_b = P_e \delta V_b$ $\delta W = -P_e dV$ $W = - \int_{V_1}^{V_2} P_e dV$

- Transformation monobare $\Rightarrow W = -P_e \Delta V = -P_e(V_2 - V_1)$
- Transformation isochore $\Rightarrow W = 0$
- Transformation quasistatique mécaniquement réversible : $P_e = P$ et équilibre continu
On peut le représenter sur un diagramme de Clapeyron

$$W = - \int_{V_A}^{V_B} P(V) dV = -A \quad \mid \quad A \text{ est l'aire algébrique sous la courbe } P = P(V)$$



Pour un cycle

- Le travail algébriquement reçu est $W = -A$
- $W < 0$: Cycle moteur - Sens horaire
- $W > 0$: Cycle récepteur - Sens trigonométrique

2.2 Autres travaux

- Dans le cas d'un dipôle électrique on a

$$\delta W = UI dt$$

- En convention récepteur
- On a aussi $W = UI \Delta t$

- Pour une résistance chauffante, W est le travail reçu par {fluide ; résistance}

2.3 Transferts thermiques

Conduction	Convection	Rayonnement
Solides en contact	Fluides	Ondes électromagnétiques
Lent		
Amélioré par la conduction électrique	Déplacement de matière	Possible dans le vide

Calcul du transfert thermique

- Méthode
- On a $Q = \Delta U - W$
 - ΔU se calcule par la connaissance de U_f et U_i et les approximations tables-diagrammes
 - W se calcule avec les valeurs macroscopiques

DEF: On appelle **adiabatique** une transformation sans transfert thermique

En découle $\Delta U = W$

Concrètement on entoure le système d'une paroi adiabatique parfaitement calorifugée \neq diatherme ou d'effectuer la transformation rapidement



Adiabatique \neq Isotherme Possibilité de transferts thermiques

- Dans le cas d'une transformation **isochore** et seul la pression travaille $W = 0 \Rightarrow \Delta U = Q$
Dans l'approximation des phases condensées et de C_v indépendante de T $\Delta U = C_v \Delta T = Q$

2.4 Thermostat

DEF: Un **thermostat** est un système dont T ne varie pas malgré les échanges thermiques ou de travail

- Concrètement il faut C_v est grand ou un mélange en équilibre sous deux phases Glace fondante

3 Fonction enthalpie \mathcal{H}

3.1 Définition

La détermination de Q est simple dans le cas d'une transformation isochore, il s'agit de trouver un moyen simple d'exprimer Q pour les transformations monobare, plus courantes

Dans le cas d'une transformation où $P_i = P_f = P_{ext}$

On applique le premier principe $\Delta U = W + Q$ où

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta U = U_f - U_i \\ W = - \int_{V_i}^{V_f} P_{ext} dV \end{array} \right.$$

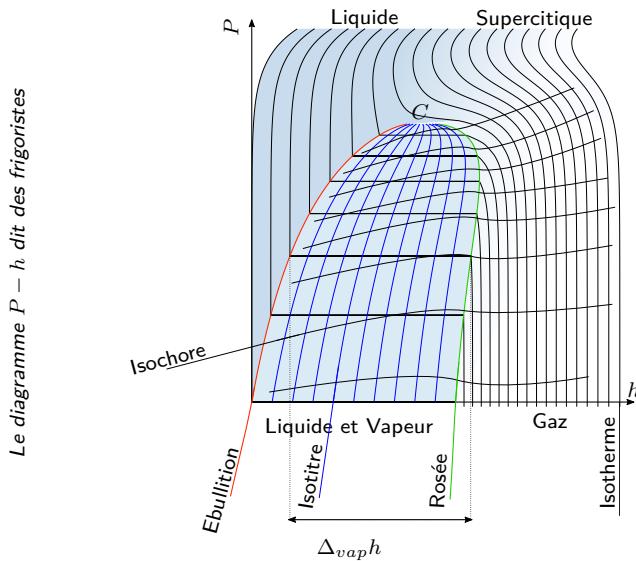
On a alors $W = -P_{ext}(V_f - V_i) = -P_f V_f + P_i V_i$ d'où $Q = (U_f + P_f V_f) - (U_i + P_i V_i)$

$$\mathcal{H} = U + PV$$

- Démo
- \mathcal{H} est l'enthalpie du système thermodynamique
 - C'est une fonction d'état extensive
 - On définit \mathcal{H}_m et h

On a alors $Q = \Delta \mathcal{H}$

- Le résultat est évidemment valable pour une transformation isobare $P_{ext} = P$
- Pour les travaux hors ceux des forces de pression on a $\Delta U = Q + W_a - P_{ext}\Delta V \Rightarrow \Delta \mathcal{H} = Q + W_a$



$$\Delta h_{1 \rightarrow 2} = h_{2, T_0, P^*(T_0)} - h_{1, T_0, P^*(T_0)}$$

— $\Delta h_{1 \rightarrow 2}$ est l'enthalpie massique de changement d'état

$$Q = \Delta \mathcal{H} = m(h_2 - h_1) = m\Delta h_{1 \rightarrow 2}$$

— Dans le cas d'une transformation monobare entre 1 et 2 et si seules les forces de pression travaillent

$$\Delta h_{1 \rightarrow 2}(T_0) = \Delta u_{1 \rightarrow 2}(T_0) + P^*(T_0)\Delta v_{1 \rightarrow 2}(T_0)$$

— Dans le cas du gaz parfait $v_l \ll v_g$ d'où
 $\Delta h_{vap}(T_0) = \Delta u_{vap}(T_0) + \frac{RT_0}{M}$

THÉORÈME DES MOMENTS

$$x = \frac{h - h_l}{h_v - h_l}$$

— x est le titre massique en vapeur
 — Démonstration identique à celle des volumes
 — Analogie géométrique sur le diagramme $P - h$

4 Capacités thermiques

$$C_v = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V$$

— C_v est la capacité thermique isochore
 — On définit de même C_{vm} et c_v

$$C_p = \left. \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial T} \right|_P$$

— C_p est la capacité thermique isobare
 — On définit de même C_{pm} et c_p

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

$$\begin{aligned} C_v &= \frac{nR}{\gamma - 1} \\ C_p &= \frac{\gamma nR}{\gamma - 1} \end{aligned}$$

Modèle	Gaz parfait	Phases condensées
Approximation	$PV = nRT$	Comme P influe peu sur U ou \mathcal{H} $dU \simeq d\mathcal{H} \simeq C(T)dT$
Relation	$\mathcal{H}(T) = U(T) + nRT$ $C_p - C_v = nR \frac{\partial}{\partial T}$	$C_p = C_v = C$ Pour H_2O , $C \simeq 4 J.K^{-1}.g^{-1}$

	C_v	C_p	γ
Gaz monoatomique	$\frac{3}{2}nR$	$\frac{5}{2}nR$	$\frac{5}{3}$
Gaz diatomique	$\frac{5}{2}nR$	$\frac{7}{2}nR$	$\frac{7}{5}$

5 Bilans dans le cas d'un gaz parfait

5.1 Lois de Joule

1. Le gaz a une énergie interne ne dépendant que de $T \Rightarrow dU = C_v(T)dT$
2. Le gaz a une enthalpie ne dépendant que de $T \Rightarrow dH = C_p(T)dT$
 - Un gaz parfait obéit aux deux lois de Joule

5.2 Généralités sur les transformations

État du système : donnée de 3 variables \Rightarrow Imposer une contrainte est restreindre l'évolution à une courbe

Analyse d'une transformation

- Définition adéquate du **système**
- Description des **fonctions d'état** du système à l'état initial et l'état final
- **Schéma bilan** de l'état de l'évolution des variables d'état
- On exprime l'**équation d'état** $PV^{\gamma-1} = cste$
- On donne l'**expression caractéristique** liée à la transformation
- **Premier principe** et expression de ΔU et W permet d'obtenir Q

Méthode

5.3 Transformation adiabatique réversible

Cette transformation est la plus courante car il suffit de procéder rapidement : Adiabatique $\Rightarrow Q = 0$

Bilan entre t et $t + dt$: $dU = \delta W + \delta Q = \delta W_{\text{Adiabatique}}$

Or $dU = C_v dT = \frac{nR}{\gamma-1} dT$ et $\delta W = -P_{ext} dV = -P dV_{\text{Réversible}}$

On a donc $\frac{nR}{\gamma-1} dT = -\frac{nRT}{V} dV$ d'où $\int_{T_0}^T \frac{dT}{T} = -(\gamma-1) \int_{V_0}^V \frac{dV}{V}$

Ainsi $\ln\left(\frac{TV^{\gamma-1}}{T_0 V_0^{\gamma-1}}\right) = 0$ et $TV^{\gamma-1} = T_0 V_0^{\gamma-1}$

$$PV^{\gamma} = cste$$

- **Conditions :**
 - Gaz parfait
 - Adiabatique
 - Réversible
- $\frac{PV}{T} = cste \Rightarrow TV^{\gamma-1} = cste$ et $T^{\gamma} P^{1-\gamma} = cste$

Démo

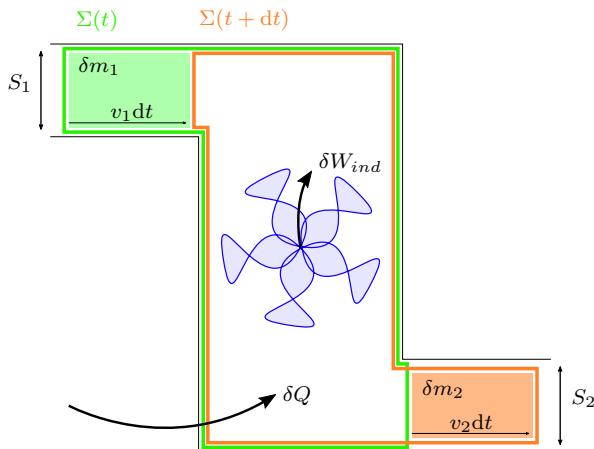
5.4 Détente de Joule/Gay-Lussac

DEF: Détente d'un gaz dans le vide

- Cette transformation est adiabatique non réversible et entraîne une faible diminution de T
- Au cours de la transformation $W = 0$ Contact avec le vide & Point d'application de la pression constante

6 Systèmes en écoulement

On fait un bilan entre t et $t + dt$



— Bilan de masse

$$m_0(t) + \delta m_1 = m_o(t + dt) + \delta m_2$$

$\delta m_1 = \delta m_2$ Stationnarité

— Débit

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta m_1 = \rho_1 S_1 v_1 dt \\ \delta m_2 = \rho_2 S_2 v_2 dt \end{array} \right. \Rightarrow D_m = \rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2$$

— Bilan énergétique

$$dE_T = \delta W + \delta Q \text{ où}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} dE_T = D_m dt \times \Delta(u + e_c + e_p) \\ \delta Q = \mathcal{P}_{th} dt \end{array} \right.$$

$$\delta W = \delta W_{ind} + \delta W_P = \mathcal{P}_{ind} dt + P_1 \frac{\delta m}{\rho_1} - P_2 \frac{\delta m}{\rho_2}$$

Démo

$$D_m \Delta(h + e_c + e_p) = \mathcal{P}_{ind} + \mathcal{P}_{th}$$

$$\Delta h = w_{ind} + q$$

$$— h = u + \frac{P}{\rho}$$

$$— D_m = \frac{\delta m}{dt}$$

$$— e_c = \frac{1}{2} v^2$$

$$— e_p = gz$$

— Simplifié en considérant $e_c = e_p = 0$

— Δh , la variation d'enthalpie massique

— w_{ind} , le travail induit massique

— q , le transfert thermique massique

Bilan des transformations

Isochore	Adiabatique	Monobare $P_i = P_f = P_{ext}$	Adiabatique réversible $Isentropique$
$W = 0$	$Q = 0$	$\Delta H = 0$	$\Delta S = 0$ $PV^\gamma = cste$

Méthode

SECOND PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE

Pour traiter tous les phénomènes relatifs à la thermodynamique, il est nécessaire d'introduire un second principe d'évolution

1 Réversibilité d'une transformation

- **Réversible** : Le sens d'évolution peut être inversé en tout point
Le système est en quasi-équilibre à chaque instant
Les équations sont invariantes par renversement du temps
- **Irréversible_{Spontanée}** : Sens d'évolution particulier

Pour être réversible, la transformation doit être **quasistatique** et le système **homogène**, de plus

$$\text{Transformation réversible} \Rightarrow \begin{cases} P = P_{ext} & \text{à chaque instant} \\ T = T_{ext} \end{cases}$$

2 Aspect statistique

DEF: **Macroétat** : État du système défini par un petit nombre de variables macroscopiques

DEF: **Microétat** : État du système défini par toutes les variables microscopiques

DEF: **Le nombre de complexion _{$\Omega(M)$}** est le nombre d'état microscopiques accessibles pour un macroétat

- **Hypothèse microcanonique** : Tous les microétats accessibles sont équiprobables

Nb de microétats	Probabilité des microétats	Probabilité du macroétat i
$Z = \sum_{i=1}^N \Omega(i)$	$p = \frac{1}{Z}$	$p(i) = \frac{\Omega(i)}{Z}$

- **Principe ergodique** : Pour t grand, le temps passé dans $M_i \propto p(M_i)$

3 Second principe

Second principe de la thermodynamique

- Tout système est caractérisé par une fonction d'état extensive : l'**entropie_S**
- Lors d'une transformation du système

$$\Delta S = S_e + S_c$$

- $S_e = \frac{Q}{T_S}$ est l'**entropie échangée**
- T_S est la température de surface
- Q est le transfert thermique algébriquement reçu
- S_c est l'**entropie créée**
- $S_c = 0 \Rightarrow$ Transformation réversible
- $S_c > 0 \Rightarrow$ Transformation irréversible

- L'entropie d'un système isolé ne peut qu'augmenter ou rester constante

- Pour une transformation adiabatique réversible $\Delta S = 0$: **isentropique**

$$S(M) = k_B \ln(\Omega(M))$$

- $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$, la constante de Boltzmann
- $\Omega(M)$ est le nombre de complexion du macroétat M
- ln témoigne de l'extensivité de S

- S mesure le manque d'information du à Ω grand
- Le désordre est dit maximum pour S maximum soit à l'équilibre
On alors un minimum d'information sur l'état macroscopique du système

Théorème

Troisième principe de la thermodynamique

$$S_{\text{phases condensées}} \xrightarrow[T \rightarrow 0]{} 0$$

Propriétés

Approximation du gaz parfait

$$S(T, V) = S_0 + C_v \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) + nR \ln \left(\frac{V}{V_0} \right)$$

- $C_v = \frac{nR}{\gamma - 1}$
- On a aussi $S(X, Y)$, $(X, Y) \in \{P, T, V, U, H\}^2$
- On pourra aussi définir S_m

Propriétés

Approximation des phases condensées

$$S(T) = S_0 + C \ln \left(\frac{T}{T_0} \right)$$

- En supposant $V = \text{cste}$, l'état du système ne dépend que de T
- $dS = C \frac{dT}{T}$

$$\Delta s_{1 \rightarrow 2} = s_{2 \text{ } T_0, P^*(T_0)} - s_{1 \text{ } T_0, P^*(T_0)}$$

- $\Delta h_{1 \rightarrow 2}$ est l'enthalpie massique de changement d'état

$$\Delta s_{1 \rightarrow 2}(T_0) = \frac{\Delta h_{1 \rightarrow 2}(T_0)}{T_0}$$

- Démo en considérant une transformation monobare réversible facile
Le résultat est valable, car S est une fonction d'état

Méthode

THÉORÈME DES MOMENTS

$$x = \frac{s - s_l}{s_v - s_l} = \frac{s - s_l}{\Delta_{\text{vap}} S}$$

- x est le titre massique en vapeur
- Démonstration identique à celle des volumes
- Analogue géométrique sur un diagramme d'abscisse s

Méthode

Etude d'une série de transformations élémentaires

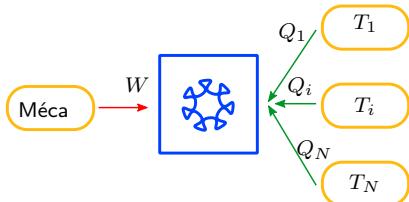
- On effectue un développement limité sur ϵ : $\epsilon + 1 = e q \frac{T_1}{T_0}$

Méthode

Ordre 1	Ordre 2
Non négligeable	Négligeable
Intrinsèquement irréversible	Transformation réversible comme suite d'irréversibles élémentaires
<i>Détente de Joule/Gay-Lussac</i>	<i>Évolution au contact d'un thermostat,...</i>

1 Aspects thermodynamiques

1.1 Description de la machine



DEF: Une **machine thermique** est un dispositif dans lequel un fluide subit des transformations (*Souvent cycliques*), il subit

- Des échanges thermiques avec des thermostats
- Des échanges de travail

1.2 Équations données par les deux principes

APPLICATION DU PREMIER PRINCIPE

$$\Delta U = W + \sum_i Q_i = 0$$

— Application sur un cycle à la limite élémentaire

APPLICATION DU SECONDE PRINCIPE

$$\sum_i \frac{Q_i}{T_i} \leqslant 0$$

— $\Delta S = \sum_i \frac{Q_i}{T_i} + S_c$
— Égalité si réversible

1.3 Énoncés équivalents du 2^e principe

Théorème

Énoncé de Clausius

Il n'existe pas de processus dont le seul effet serait de faire passer de la chaleur d'une source froide à une source chaude

Démo

En considérant une machine ditherme avec $W = 0$

$$\begin{cases} Q_c = -Q_f \\ \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} \leqslant 0 \end{cases}$$

Ainsi $Q_c \left(\frac{1}{T_c} - \frac{1}{T_f} \right) \leqslant 0$ d'où

$$\begin{cases} Q_c \geqslant 0 \\ Q_f \leqslant 0 \end{cases}$$

— Il implique que les réfrigérateurs ne peuvent fonctionner sans apport de travail

$$W_{max} = -\Delta(U - T_0 S)$$

— On considère une machine monotherme non cyclique

$$\begin{cases} \Delta U = W + Q \\ Q \leqslant T_0 \Delta S \end{cases}$$

d'où $W_{f-W} = Q - \Delta U \leqslant T_0 \Delta S - \Delta U$

— W_{max} est le travail maximum récupérable
— Il est atteint pour un fonctionnement réversible

Énoncé de Kelvin

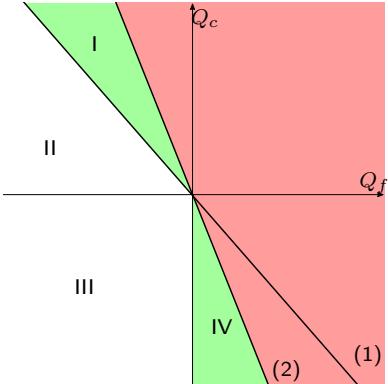
Il n'existe pas de moteur fonctionnant de manière cyclique qui produise du travail à partir d'une seule source de chaleur

Dans le cas d'une machine monotherme et pour un cycle

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta U = 0 \\ \Delta S = 0 \end{array} \right. \quad \text{d'où } W_{max} = 0$$

- Une machine monotherme ne peut servir qu'au chauffage direct

2 Machines dithermes



Q_c et Q_f définissent la machine ditherme

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_c + Q_f = 0 \quad (1) \\ \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} \leqslant 0 \quad (2) \end{array} \right.$$

I	Moteurs
II	\emptyset
III	$\Leftrightarrow 2 \times$ récepteur monotherme
IV	Réfrigérateur & Pompe à chaleur

2.1 Moteurs

Principe de Carnot

Pour qu'un système décrive un cycle moteur il doit nécessairement échanger de l'énergie thermique avec au moins deux sources de transfert thermiques de températures différentes en prélevant le l'énergie thermique à la source chaude et en restituant une partie à la source froide

RENDEMENT

$$\eta = \frac{\text{Utile}}{\text{Payé}}$$

Théorème de Carnot

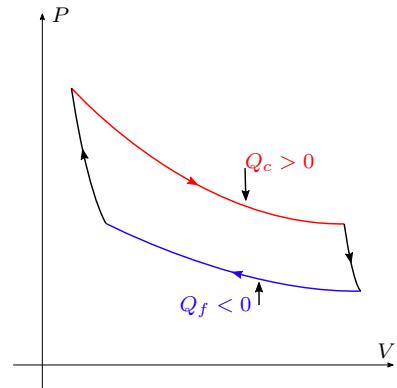
Toutes les machines fonctionnant de façon irréversible ont un rendement inférieur à celui des machines réversibles : $\eta < 1 - \frac{T_f}{T_c}$

Démo

$$\left\{ \begin{array}{l} -W = Q_c + Q_f \\ \frac{Q_f}{Q_c} \leq -\frac{T_f}{T_c} \end{array} \right. \quad \text{d'où } \eta = \frac{-W}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c} \leq 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

Un **cycle de Carnot** est un cycle ditherme réversible

- Cycle quasistatique
- $P = P_{ext}$ à chaque instant
- Échanges thermiques réversibles \Rightarrow Isothermes
- Adiabatiques réversibles $_{isentropiques}$
pour fermer $_{Pas de transferts thermiques}$



2.2 Récepteurs

- On fournit W à la machine pour lui permettre de fournir Q dans un sens contraire à la nature

Machine frigorifique

EFFICACITÉ FRIGORIFIQUE

$$e_f = \frac{\text{Utile}}{\text{Payé}} = \frac{Q_f}{W}$$

— Analogue du rendement η

EFFICACITÉ MAXIMALE

$$e_{f \ max} = \frac{T_f}{T_c - T_f}$$

— Analogue du théorème de Carnot

Démo

$$\left\{ \begin{array}{l} -W = Q_c + Q_f \\ \frac{Q_f}{Q_c} \leq -\frac{T_f}{T_c} \end{array} \right. \quad \text{d'où } e_f = \frac{Q_f}{W} = \frac{-1}{1 + \frac{Q_c}{Q_f}} \leq \frac{-1}{1 - \frac{T_c}{T_f}} = \frac{T_f}{T_c - T_f}$$

Pompes à chaleur

EFFICACITÉ THERMIQUE

$$e_t = \frac{\text{Utile}}{\text{Payé}} = \frac{-Q_c}{W}$$

— Analogue du rendement η

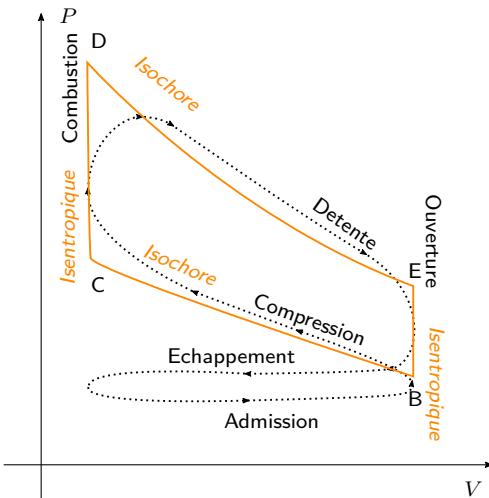
EFFICACITÉ MAXIMALE

$$e_{t \ max} = \frac{T_c}{T_c - T_f} \geq 1$$

— Démonstration analogue à la machine frigorifique
— Analogue du théorème de Carnot

3 Machines réelles

3.1 Moteur à explosion



On montre par des bilans sur le cycle

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{-W}{Q_{CD}} = 1 - \alpha^{1-\gamma} = 1 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\gamma-1} \text{ Où} \\ \alpha &= \frac{V_{max}}{V_{min}} = \frac{V_B}{V_C} = \frac{V_E}{V_D} \end{aligned}$$

est le taux de compression

1 Force de Lorentz

On postule que les aimants et les courants créent en tout point de l'espace un champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ qui décrit l'interaction magnétique

FORCE DE LORENTZ

$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

- \vec{F} est la force de Lorentz
- \vec{v} est la vitesse dans \mathcal{R}_3
- \vec{B} est le champ magnétique

Source	Terre	Bobine	Aimant	IRM
B en T	$\begin{cases} B_h = 0.2 \times 10^{-4} \\ B_v = 0.4 \times 10^{-4} \end{cases}$	1×10^{-3}	1	5

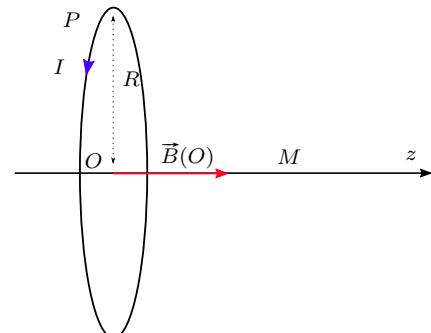
2 Propriétés

2.1 Expression

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{(\Gamma)} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$

- $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ est la perméabilité du vide
- $d\vec{l}$ est orienté dans le sens conventionnel de I

- $B(M) = \|B(M)\| \propto I$
- \vec{B} obéit au principe de **superposition**
- Force en $\frac{1}{PM^2} \Rightarrow$ champ plus fort au voisinage de la **source**



$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{u}_z$$

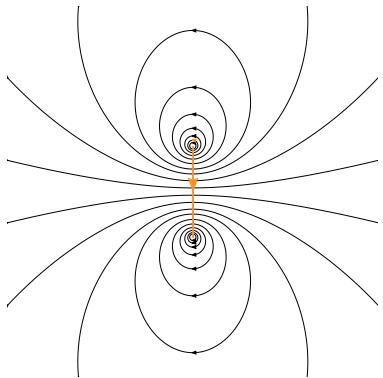
Dans le cas d'une spire de centre O en O

$$\vec{B}(M) = \vec{B}(O) \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

Dans le cas d'une spire de centre O en M

Sens de $(\Gamma) \Rightarrow$ Sens conventionnel de $I \Rightarrow$ Sens conventionnel de \vec{B}
On utilise la règle de la main droite





- Deux lignes de champ ne se coupent qu'en des points singuliers
- Les lignes de champ forment des boucles fermées
- Les lignes de champ enlacent les courants qui les ont créées

La règle de la main droite permet de retrouver

- Le sens du courant
- L'orientation de \vec{B}

2.2 Flux du champ magnétique



Il est crucial de bien savoir orienter sa surface ouverte

Orientation de (Γ) \Rightarrow Orientation de $d\vec{S}$

$$D_m = \rho \vec{v} \cdot \vec{S}$$

- D_m est le débit massique
- \vec{S} est le vecteur surface orienté
- Se montre pendant un bilan de masse sur dt

Démo

En repartant de l'expression précédente, on pose $\vec{j} = \rho \vec{v}$

En découle que $D_m = \vec{j} \cdot \vec{S}$

D_m est le flux de \vec{j} à travers \vec{S}

On a sur $d\vec{S}$ $D_m = \iint_{(S)} \rho(P) \vec{v}(P) \cdot d\vec{S}$

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$$

— Φ est le flux de \vec{V} à travers \vec{S}_T

— Le champ magnétique est à **flux conservatif**

- Ainsi le flux à travers toute section d'un tube de champ est identique
- Un resserrement des lignes de champ traduit de l'intensification de $\|\vec{B}\|$
- Lignes de champ parallèle \Rightarrow Champ uniforme

2.3 Exemples

Exemple	Bobine plate	Bobine de Helmholtz	Solénoïde infini
Description	N spires $\Rightarrow \ \vec{B}\ \nearrow$	Deux bobines de rayon R distantes de R \Rightarrow Champ magnétique uniforme	Longue bobine \Rightarrow Champ uniforme $B_0 = \frac{\mu_0 N I}{l}$

3 Moment magnétique

3.1 Définition

$$\vec{\mathcal{M}} = I \vec{S}$$

- Pour une spire orientée
- $\vec{\mathcal{M}}$ est le moment magnétique en $A.m^2$



Sens de (Γ) \Rightarrow Sens conventionnel de $\vec{S} \Rightarrow$ Sens conventionnel de I

- On peut alors projeter le champ magnétique créé par un dipôle de moment $\vec{\mathcal{M}}$

$$\vec{B}(M) \simeq \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3} (2 \cos(\theta) \vec{u}_r + \sin(\theta) \vec{u}_\theta)$$
 loin de O
- Par le **théorème de superposition** $\vec{\mathcal{M}} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_i$
 Les lignes de champ se comportent à grande distance comme résultant d'un unique moment magnétique
 A grande distance, la structure du champ magnétique est toujours identique

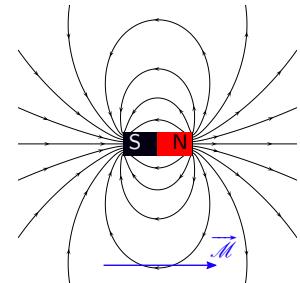
3.2 Exemples

- **Modèle de Bohr**

On montre que $\vec{\mathcal{M}} = -\frac{e}{2m} \vec{\mathcal{L}}_O$

De plus dans le cas de l'atome $\vec{\mathcal{L}}_O = n\hbar$ est quantifié et

$$\|\vec{\mathcal{M}}\| = n\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$$
 où $\mu_B \simeq 9.3 \times 10^{-24} \text{ A.m}^2$ est le magnéton de Bohr



- **Aimants**

Les matériaux ferromagnétiques ont une interaction entre dipôles

Ceux-ci s'alignent le long des lignes de champ

Ordre de grandeur : 1 mole de $\mu_B \Rightarrow N\mu_B \approx 1 \text{ A.m}^2$

- **Canalisation des lignes de champ**

Les matériaux magnétiques canalisent les lignes de champ permettant de les guider

4 Actions mécaniques du champ magnétique

Démo

On considère $d\tau$ de circuit contenant n charges mobiles de vitesse $\vec{v} = v\vec{u}$

Pendant dt , $Idt = nSvdtq = nq\vec{v} \cdot \vec{S}$ traversent S

Force subie par $d\tau$: $d\vec{F} = nd\tau q\vec{v} \wedge \vec{B}$

D'où $d\vec{F} = nqSdlv\vec{u} \wedge \vec{B} = nqSvd\vec{l} \wedge \vec{B}$

FORCE DE LAPLACE

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \wedge \vec{B}(M)$$

- $d\vec{F}$ est la force subie par un élément de courant $I d\vec{l}$
- $\triangle I$ est orienté dans le sens de $d\vec{l}$
- \vec{B} est un champ extérieur

$$\mathcal{P}_L = \vec{F} \cdot \vec{v} = IdB\dot{x}$$

- $\mathcal{P}_L \geq 0$
- Pour $\vec{F} = IdBu_x \vec{u}$

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$$

- Les actions de Laplace d'un champ uniforme = **Couple** $\vec{\Gamma}$
 En particulier dans le cas d'un circuit fermé ou d'un aimant

- Un champ magnétique tend à orienter les dipôles dans le même sens que \vec{B}

1 Généralités

Théorème

Loi de modération de Lenz

Un phénomène d'induction tend toujours, par ses conséquences, à modérer les variations de flux magnétique qui l'ont engendré

⇒ Les effets produits par un phénomène d'induction s'opposent toujours à leurs causes

Méthode

Utilisation de la loi de Lenz

- Déterminer le sens du courant induit dans un circuit
- Déetecter les erreurs de signe

Théorème

Loi de Faraday

$$e(t) = -\frac{d\phi}{dt}$$

- $e(t)$ la force électromotrice induite
- $\phi(t)$, le flux magnétique à travers le circuit



Conventions d'orientation

Sens de $e \leftrightarrow$ Sens de $\Gamma \leftrightarrow$ Sens de $d\vec{S}$ (\leftrightarrow Sens conventionnel de i)

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$$

- Dans \vec{B} uniforme
- Avec les bonnes conventions d'orientations

2 Circuit fixe dans $\vec{B}(t)$

2.1 Auto-induction

- Tout circuit électrique crée un champ magnétique proportionnel au courant i circulant dans le circuit
- Il existe donc *Les lignes de champ traversent le circuit* un flux magnétique traversant le circuit

$$\phi_p = Li$$

- ϕ_p est le flux propre du circuit
- L est l'inductance propre
- i est l'intensité circulant à travers le circuit

Exemple

Inductance d'une bobine longue

En calculant le flux ϕ_p associé, on trouve $\phi_p = \mu_0 \frac{N^2}{l} Si$ d'où

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S \text{ avec } S = \pi r^2$$

Caractéristique d'une bobine

En considérant le schéma équivalent du dipôle on a $u(t) = ri - e$

$$\text{or } e = -\frac{d\phi_p}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

On a $u = ri + L \frac{di}{dt} \stackrel{r=0}{=} 0$ dans le cas d'une bobine idéale

2.2 Interaction de deux circuits

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{1 \rightarrow 2} = Mi_1(t) \\ \phi_{2 \rightarrow 1} = Mi_2(t) \end{array} \right.$$

— $\phi_{1 \rightarrow 2}$ le flux créé par \mathcal{S}_1 à travers \mathcal{S}_2
 — M l'inductance mutuelle des deux circuits en H

- M est algébrique et dépend des orientations
- M ne dépend que de la géométrie des deux circuits et de leur position relative
- Dans le cas d'un bobinage, M est déterminé en considérant les parties bobinées des circuits

Cas de deux bobines

- Calcul de $\phi_{1 \rightarrow 2}$

$$\vec{B}_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l_1} i_1 u_z$$

$$\phi_{1 \rightarrow 2} = \frac{N_2}{l_2} h \vec{B}_1 \cdot \vec{S}_2$$

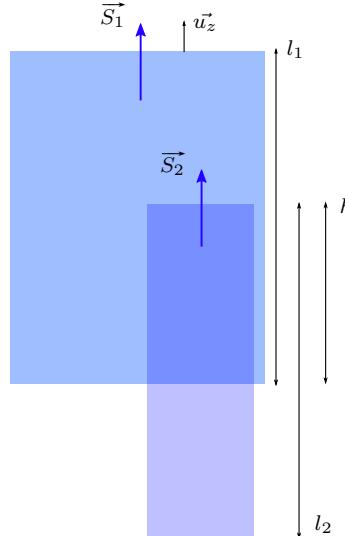
$$M_{1 \rightarrow 2} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l_1 l_2} h S_2$$

- Calcul de $\phi_{2 \rightarrow 1}$

$$\vec{B}_2 = \mu_0 \frac{N_2}{l_2} i_2 u_z$$

$$\phi_{2 \rightarrow 1} = \frac{N_1}{l_1} h \vec{B}_2 \cdot \vec{S}_1$$

$$M_{2 \rightarrow 1} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l_1 l_2} h S_1$$



On a donc $M = M_{1 \rightarrow 2} = M_{2 \rightarrow 1} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l_1 l_2} h s_s = \min(S_1, S_2)$

- Résultat valable si les bobines n'ont pas des axes confondus

— On montre $\underset{\text{Calcul de } \frac{M^2}{l_1 l_2}}{M \leq \sqrt{l_1 l_2}}$ avec égalité si $h = l_1 = l_2$ et $S_1 = S_2$

- M change de signe en changeant l'orientation d'un des deux courants

— Dans le cas de l'influence totale $\text{solénoïdes emboités où } l_1 l_2 = h$ on a $M = M_{1 \rightarrow 2} = M_{2 \rightarrow 1} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} s$

Résolution de problèmes d'induction

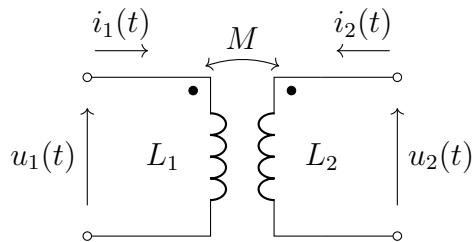
- Mise en place des conventions
- Calculs de flux \triangle Ne pas oublier les flux induits
- Loi de Faraday $f_{em \text{ induite}}$
- Schéma électrique équivalent
- Détermination des lois électriques $Possible passage en complexe pour déterminer Z_{eq}$
- Bilan énergétique

Applications

- Transformateur de tension

$$u_2 = mu_1$$

— $m = \frac{N_2}{N_1}$ est le rapport de transformation
— N_i est le nombre de spires de la bobine i



- Transformateur d'isolement
- Détecteur RFID

DEF: Courants de Foucault : Courants créés par induction dans une masse conductrice

Exemple

3 Transformations électrique ↔ mécanique

Les effets d'induction et le champ magnétique sont des intermédiaires

Méthode de résolution

- Mise en place des conventions
- Calcul du flux magnétique
- Calcul de la force électromotrice fem induite
- Schéma électrique équivalent
- Équation électrique
- Équation mécanique
- Résolution On remarque l'apparition des termes de couplage avec B à simplifier
- Bilan énergétique On multiplie par idt et vdt

Méthode

- Rail de Laplace
- Freinage par courants de Foucault
- Alternateur
- Machine à courant continu à entrefer plan
- Haut-parleur électrodynamique et micro

Exemple

III Chimie

1 Description de l'atome

1.1 Généralités

- Noyau
 - Protons
 - Neutrons
- Électrons

Un atome est défini par son nombre de protons (Z) et son nombre de masses (A) tel ${}^A_Z X$

1.2 Taille de l'atome ou de l'ion

On mesure la taille d'un atome ou d'un ion de **différentes manières** selon les situations :

- Le rayon **covalent** est la demi-distance séparant deux noyaux dans une liaison diatomique homonucléaire
- Le rayon **métallique** est la demi-distance des noyaux au contact dans un cristal métallique
- Le rayon des **ions** est déterminé à partir des distances d'un anion et d'un cation dans un cristal ionique à partir de l'oxyde comme référence

1.3 Électronique de l'atome

Définition

On distingue

- Les électrons de **valence** (n le plus grand et sous-couche partiellement remplie)
- Les électrons de **cœur**

Définition

Nombres quantiques

- **n** , le nombre quantique principal donnant la couche
- **l** , le nombre quantique secondaire, donnant la sous-couche
- **m_l** , le nombre quantique magnétique
- **m_s** , le nombre quantique de spin

$$E = \frac{-13.6}{n^2} \times Z_i^{*2}$$

— $Z_i^* = Z - \sigma$, la charge effective de l'électron liée à son environnement
 σ évalue l'écrantage

Méthode

Déterminer la configuration électronique d'un atome

$n \setminus l$	0	1	2	3	4
1	1s	↙	↙		
2	2s	2p	↙	↙	
3	3s	3p	3d	↙	↙
4	4s	4p	4d	4f	↙
5	5s	5p	5d	5f	5g

- L'ordre de remplissage des sous-couches électroniques est défini par le tableau si contre dans le sens des flèches
- Le taux maximal de remplissage est à calculer à partir de la lettre $2 \times (2k + 1)$ ($s : 0, p : 1 \dots$)

Règles de l'Aufbau

- Règle de **Pauli** : deux électrons ne peuvent avoir leurs quatre nombres quantiques identiques
- Règle de **Klechkowski** : Les orbitales se remplissent par valeur croissante de $n + l$
- Règle de **Hund** : La configuration la plus stable dans une sous-couche s'obtient en dés appareillant au maximum les électrons

Une notation est adoptée : [gaz noble]période en cours

1.4 Tableau périodique

- Les lignes représentent les valeurs de n (**périodes**)
- Les blocs rassemblent les éléments ayant une même couche électronique entamée (d : transition, f : terres rares)
- Les colonnes rassemblent les éléments ayant des propriétés similaires (18 : gaz inertes, 17 : halogènes, 16 : chalcogènes, 1 : alcalins, 2 : alcalins terreux)

2 Propriétés atomiques

2.1 Notion d'énergie

Lors d'une désexcitation de l'atome, l'électron **change de couche** atomique et libère un **photon**
L'énergie ne peut prendre que des valeurs **discrettes**

Dans le cas de l'atome d'hydrogène, on a :

LOI EMPIRIQUE DE RITZ-RYDBERG

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad \begin{array}{l} \text{--- } n, m, \text{ des couches atomiques telles } n < m \\ \text{--- } R_H, \text{ la constante de Rydberg } R_H = 1.097 \times 10^7 \end{array}$$

On associe à la lumière une nature corpusculaire (photons) portant une énergie quantifiée

FORMULE DE PLANCK

$$E = h\nu \quad \begin{array}{l} \text{--- } h, \text{ la constante de Planck } h = 6.62 \times 10^{-34} \text{ J.s}^{-1} \\ \text{--- } \nu, \text{ la fréquence de l'onde en Hz} \end{array}$$

La mécanique quantique repose sur l'aspect inverse : la nature ondulatoire des particules

2.2 Ions

- Un cation \oplus s'obtient en enlevant un électron de sa couche la plus haute



On retire d'abord les électrons de la sous-couche s d'un élément de transition

2.3 Potentiel d'énergie d'ionisation

Énergie nécessaire pour arracher un électron à un atome gazeux

- 1^{re} ionisation $A \longrightarrow A^+ + e^-$
- 2^e ionisation $A^+ \longrightarrow A^{2+} + e^-$

2.4 Affinité électronique

L'énergie associée à la transformation $A + e^- \longrightarrow A^-$ est appelée énergie de première affinité électronique

2.5 Électronégativité

L'électronégativité (χ) qualifie la capacité d'un atome à attirer des électrons

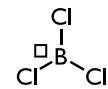
Échelles d'électronégativité

- L'échelle de MULLIKEN est basée sur la moyenne entre le potentiel d'ionisation et l'affinité électronique de l'élément
- L'échelle de PAULING est basée sur l'énergie de dissociation avec un élément de référence (Fluor)
- L'échelle de ALFRED-ROCHOW est basée sur la charge ressentie par les électrons et le rayon de l'atome

1 Représentation de Lewis

On représente les liaisons entre les électrons de la couche de valence des différents éléments

- Les doublets **liants** par une liaison (multiple selon l'**indice**)
- Les doublets **non liants** sont représentés par un trait
- Les électrons **célibataires** par un point
- Les **lacunes électroniques** (déficit par rapport à l'octet) par un carré



Méthode

Établir la représentation de Lewis d'une molécule

- **Dénombrer** le total des électrons de Valence
- ⚠ Ne pas oublier les charges
- Établir les **squelettes** possibles
- **Compléter** avec les liaisons multiples, les lacunes, les doublets non liants et les charges
- Exclure les schémas **démesurés**

2 Agencement des molécules

Les molécules tendent à se rapprocher d'un état stable et de s'entourer de 4 paires d'électrons (sauf H), c'est la **règle de l'octet**

- Les atomes déficitaires en électrons par rapport à l'octet porteront une lacune électronique
- Il est toutefois possible pour certains atomes *lourds* de dépasser la règle de l'octet
- Les molécules à nombre impair d'électrons de Valence sont appelées **radicaux** et sont de fait extrêmement réactives

Définition

Différents types de liaisons

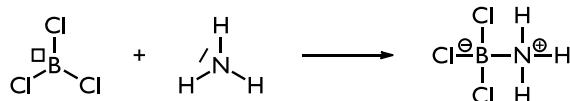
- Les électrons σ des liaisons simples et de la première liaison d'une liaison multiple
- Les électrons π des doublets non liants et des autres liaisons de la liaison multiple

Définition

Acides et bases de Lewis

- **Acide** : porteur d'une lacune électronique
- **Base** : porteur d'un doublet non liant

En s'associant les deux atomes vont se charger



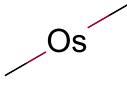
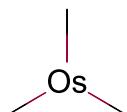
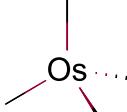
3 Géométrie des molécules

On note AX_mE_n un atome dans une molécule avec :

- m le nombre d'atomes auxquels il est lié
- n le nombre de doublets non liants qu'il porte

Géométrie VSEPR

La géométrie locale autour de A ne dépend que de $m + n$

				
2	3	4	5	6
Linéaire	Triangulaire plane	Tétrahédrique	Bipyramide	Octahédrique
180°	120°	109.5°	120° & 90°	90°

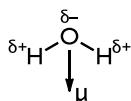
On observe cependant des divergences par rapport au modèle, elles peuvent être expliquées par :

- La non-équivalence doublet liant et non liant
- La non-équivalence des liaisons à indices différents

4 Interactions atomiques

4.1 Moment dipolaire

Si $\chi(A) > \chi(B)$, A attire plus facilement les électrons partagés de la liaison covalente :



- A a un effet **inductif** attracteur δ^+
- B a un effet **inductif** donneur δ^-

Le cas extrême de cet effet est l'ionisation où $\delta = 1$

On assimile le système à un dipôle

$$\|\vec{\mu}\| = |\delta e| d_{AB}$$

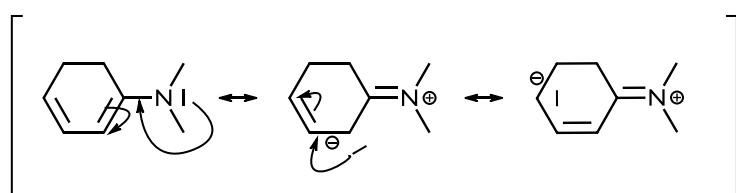
- δe , la charge en C
- d_{AB} , la distance séparant les deux dipôles

Le **moment dipolaire** d'une molécule polyatomique est la **somme vectorielle** des moments dipolaires de ses différentes liaisons

5 Liaison covalente délocalisée

Les formes **mésomères** d'une molécule sont les différentes représentations de Lewis se déduisant par redistribution des paires d'électrons π

- La molécule réelle est une **moyenne** pondérée des formes mésomères conjuguées qui lui sont associées
- Deux formes conjuguées sont équivalentes si superposables
- Les indices des liaisons et charges seront donc fractionnaires $\frac{\text{nombre}}{\text{emplacements}}$



INTERACTIONS DE FAIBLE ÉNERGIE

1 Interactions de Van der Waals

$$U_{VW} = \underbrace{-C_K \frac{\mu_1^2 \mu_2^2}{r^6}}_{U_{Keesom}} + \underbrace{-C_D \frac{\mu^2 \alpha}{r^6}}_{U_{Debye}} + \underbrace{-C_L \frac{\alpha^2}{r^6}}_{U_{London}} = -\frac{\varepsilon}{r^6}$$

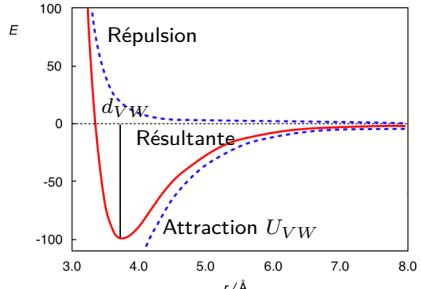
- U_x , l'énergie potentielle d'interaction de x
- r , le rayon inter éléments
- α , la polarisabilité

Différentes interactions de Van der Waals

- Interactions de **Keesom** : dipôle-dipôle
- Interactions de **Debye** : dipôle-dipôle induit
Le moment dipolaire μ crée un champ au niveau du système apolaire qui acquiert un dipôle appelé dipôle induit tel $\mu_{ind} = \alpha \vec{E}$
- Interactions de **London** entre dipôles instantanés :
Si un atome est apolaire en moyenne, il est tout de fois polarisé à un instant donné par un moment dipolaire instantané

Définition

Les interactions de Van der Walls expliquent les phénomènes d'attractions, combinés aux phénomènes de répulsions on peut expliquer le rayon de Van der Walls

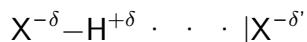


2 Les liaisons hydrogène

DEF: Une liaison H est une association entre un H porteur d'une **charge partielle positive** et lié à un atome très électronégatif porteur d'un **doublet non liant**

On distingue :

- Les liaisons H **intermoléculaires** (*les deux groupes appartiennent à deux molécules distinctes*)
- Les liaisons H **intramoléculaires** (*les deux groupes appartiennent à la même molécule*)



3 Les températures de changement d'état

Lors des transitions de phase, les distances et donc les interactions varient

Plus les températures de fusion et d'ébullition sont **élèvées**, plus les **forces** existantes à l'état condensé sont importantes

4 Solvants moléculaires

4.1 Propriétés des solvants

- **Polarité** : groupement composé de molécules polaires
- **Proticité** : groupements donneurs de liaisons H

Propriétés

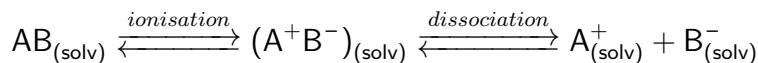
Catégories de solvants

- Solvants **apolaires** et donc aprotiques *Hydrocarbures*
- Solvants **polaires et aprotiques** *Cétones, esters*
- Solvants **polaires et protiques** *acides carboxyliques, alcools, eau*

4.2 Mise en solution d'un soluté

- La dissolution est viable si les interactions qui existent dans le mélange sont de **même ordre de grandeur énergétique** que dans chaque constituant pur
- Les molécules polaires et/ou protiques sont plus solubles dans les solvants de même nature

Les interactions entre le solvant et le soluté une fois dissous modifient ses **propriétés**



- La capacité d'**ionisation** d'un solvant est liée à son moment dipolaire qui induit un moment dipolaire du soluté
- La capacité de **dissociation** d'un solvant est liée à la permittivité ($\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$)

$$\left\| \vec{F} \right\| = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2}$$

- \vec{F} , la force coulombienne
— Plus ϵ_r grand, plus $\left\| \vec{F} \right\|$ petit

DEF: L'eau est un solvant très ionisant et forme avec le soluté des **complexes de solvatation**

1 États de la matière

1.1 Les différents états de la matière

Définition

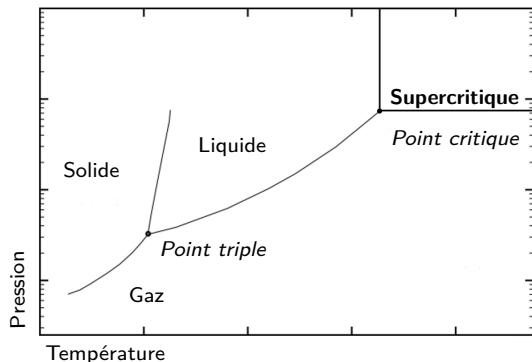
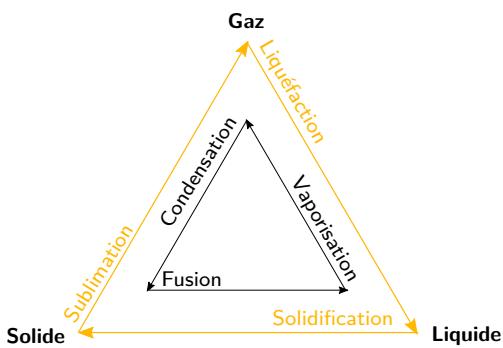
- **Solide** : Les molécules sont figées dans un **réseau** dans l'espace ($d = 1\text{\AA} \simeq 100\text{pm}$)
Elles peuvent être ordonnées (solide réel) ou présenter des imperfections (solide amorphe)
- **Liquide** : Les molécules ont une certaine liberté de mouvement par rapport à l'état solide
- **Gaz** : Les molécules sont indépendantes l'une de l'autre et les interactions bien moins fréquentes

1.2 Les phases

DEF: On appelle **phase** un système dont l'aspect macroscopique est le même en tout point

Mélange	Phases
Gaz	1
Liquide	Distinction en fonction de la miscibilité
Solide	Autant que de solides

1.3 Transformations physiques



DEF: Un même constituant peut être présent sous différentes formes à l'état solide : ce sont les variétés **allotropiques**

2 Étude d'un système physico-chimique

- La quantité de matière (*nombre de moles*) (*noté n_i*) en mol

2.1 Formulaire

- Concentrations

CONCENTRATION MOLAIRE

$$[i] = \frac{n_i}{V_{tot}}$$

— $[i]$, en mol.L⁻¹

CONCENTRATION MASSIQUE

$$C_{m_i} = \frac{m_i}{V_{tot}}$$

— C_{m_i} , en g.L⁻¹

— Fractions

FRACTION MOLAIRE

$$x_i = y_{igaz} = \frac{n_i}{n_{tot}}$$

— n_{tot} , la quantité de matière totale de la phase contenant i

FRACTION MASSIQUE

$$w_i = \frac{m_i}{m_{tot}}$$

— m_{tot} , la masse totale de la phase contenant i

— Molalité

$$mol(i) = \frac{n_i}{m_{solv}}$$

— m_{solv} , la masse de solvant

2.2 Cas des gaz

Un constituant gazeux dans un volume V exerce une pression telle :

LOI DES GAZ PARFAITS

$$PV = nRT$$

- P , la pression en Pa
- V , le volume dans lequel le gaz est contenu en m³
- n , la quantité de matière constituant le gaz en mol
- T , la température en K
- R , la constante des gaz parfaits tel
 $R = 8.314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$

On notera :

- 1Pa = 1N.m⁻²
- 1bar = 10⁵Pa
- 1atm = 1.013 × 10⁵Pa

DEF: Dans un mélange, chaque constituant exerce une contribution à la pression totale appelée **pression partielle** *pression qu'il exercerait s'il était seul dans le même volume*

LOI DE DALTON

$$P_{tot} = \sum P_i$$

— P_i , la pression partielle de i

Démo

$$\begin{cases} P_i V = n_i RT \\ P_{tot} V = n_{tot} RT \end{cases} \Rightarrow P_i = \frac{n_i}{n_{tot}} P_{tot} = x_i P_{tot} \Rightarrow \sum P_i = P_{tot} \sum x_i$$

- $P_i = [i]RT$

DEF: **Densité** : $d = \frac{m}{m_{air}} = \frac{\rho}{\rho_{air}}$

3 Transformations chimiques

ÉQUATION CHIMIQUE

$$\sum_{i=1}^m \vartheta_i A_i = \sum_{i=1}^n \vartheta'_i A'_i$$

- ϑ_i , le coefficient stœchiométrique de i
- A_i , les réactifs
- A'_i , les produits

L'AVANCEMENT CHIMIQUE

$$\xi = \frac{\Delta n_{A'_i}}{\vartheta'_i} = -\frac{\Delta n_{A_i}}{\vartheta_i}$$

- ξ , l'avancement en mol
- $\Delta n_{A_i} = n_{A_i} - n_{A_i}^0$
- ϑ_i , le coefficient stœchiométrique de i

Pour toute transformation chimique il existe une constante d'équilibre qui relie entre elles les activités des différents constituants

RELATION DE GULDBERG ET WAAGE LOI D'ACTION DES MASSES

$$K = \frac{\prod_{i=1}^n (a_{A'_i})^{\vartheta'_i}}{\prod_{i=1}^m (a_{A_i})^{\vartheta_i}}$$

- $a_{A'_i}$, l'activité des produits
- a_{A_i} , l'activité des réactifs

$a_x =$	État condensé	Gaz
Pur	1	$\frac{P}{P_0}$
Mélange	<ul style="list-style-type: none"> — Solvant : 1 — Soluté : $\frac{[A_i]}{C_0}$ 	$\frac{P_i}{P_0}$

- $P_0 = 1\text{bar}$
- $C_0 = 1\text{mol.L}^{-1}$

Quotient réactionnel

Dans le cas d'un système **hors équilibre**, on définit le quotient réactionnel du système (Q) comme la constante d'équilibre de la réaction dont les activités sont exprimées dans cet état hors équilibre :

- $K > Q$: Évolution dans le sens direct (*réactifs* \rightarrow *produits*)
- $K < Q$: Évolution dans le sens indirect (*produits* \rightarrow *réactifs*)

1 Vitesse instantanée d'une réaction

1.1 Formulation des équations de vitesse

$$v = \frac{1}{V} \frac{d\xi}{dt}$$

- v , la vitesse de la réaction en $\text{mol.L}^{-1}.\text{s}^{-1}$
- V , le volume du réacteur ou de la phase où se déroule la réaction

On en déduit :

$$v = -\frac{1}{\vartheta_i} \frac{d[A_i]}{dt} = \frac{1}{\vartheta'_i} \frac{d[A'_i]}{dt}$$

- ϑ , les coefficients stœchiométriques
- $[A_i]$, les concentrations des réactifs

On néglige ici les intermédiaires et la variation de volume

Dans certains cas on peut écrire la vitesse selon la loi empirique

LOI DE VITESSE EXPÉRIMENTALE

$$v = k \prod_{i=1}^n [A_i]^{P_i}$$

- P_i est l'**ordre partiel**
- $\sum P_i = P$ est l'**ordre global**
- k est la constante de vitesse

L'ordre et la loi de vitesse d'une réaction peuvent changer au cours du temps et on distinguera l'**ordre initial** de l'**ordre courant**

1.2 Temps de demi-réaction

DEF: Le **temps de demi-réaction** ($t_{\frac{1}{2}}$) est le temps au bout duquel $[A] = \frac{[A]_0}{2}$

- Pour un système d'ordre 1, la résolution montre que $t_{\frac{1}{2}}$ est indépendant de $[A]_0$
- Pour tout autre ordre la résolution montre que $t_{\frac{1}{2}}$ est proportionnel à $\frac{1}{[A]_0^{n-1}}$

1.3 Résolution des équations de vitesse

Équation du type $v = k[A]^n$

Ce type d'équation est obtenu pour :

- Un seul réactif
- Un mélange de réactifs dans les proportions stœchiométriques ou où l'un des réactifs est en large excès

Démo On résout : $-\frac{1}{\vartheta} \frac{d[A]}{dt} = k[A]^n$ On suppose $\vartheta = 1$

- $n = 0 \Rightarrow [A] = [A]_0 - kt$
- $n = 1 \Rightarrow -\frac{d[A]}{dt} = k[A] \Rightarrow [A] = [A]_0 e^{-kt}$
- $n \geq 2 \Rightarrow \frac{d[A]}{dt} = -k[A]^n \Leftrightarrow \frac{d[A]}{[A]^n} = -k dt \Leftrightarrow \int_{[A]_0}^{[A]} \frac{1}{[A]^n} d[A] = \int_0^t -k dt$
 $\Leftrightarrow \left[\frac{1}{(1-n)[A]^{n-1}} \right]_{[A]_0}^{[A]} = -kt \Leftrightarrow \frac{1}{[A]^{n-1}} - \frac{1}{[A]_0^{n-1}} = (n-1)kt$



Ne pas oublier les conditions initiales dans la résolution

2 Étude de la loi de vitesse d'une réaction

- Méthode **chimique** : on détermine la composition du système à différents instants par un dosage après avoir fait un blocage cinétique (trempe, dilution, inhibition)
- Méthode **physique** : on mesure une grandeur caractéristique du système au cours du temps

Détermination de la loi de vitesse

$$v = -\frac{1}{\vartheta} \frac{d[A]}{dt} = k[A]^n \longrightarrow [A] = f(t)$$

Méthode intégrale

Confrontation aux mesures :

- On formule des hypothèses sur l'ordre de la réaction et on vérifie la corrélation de la mesure avec l'expérience (*en se ramenant toujours à une étude de droite*)

Méthode différentielle

On trace $\ln(v) = f(\ln([A]))$ on obtient une droite de pente n et d'ordonnée à l'origine $\ln(k)$ si la vitesse admet un ordre

Méthode du temps de demi-réaction

On mesure le temps de demi-réaction en changeant la concentration initiale

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\theta}{[A]_0^{n-1}} \Rightarrow \ln(t_{\frac{1}{2}}) = \ln(\theta) + (1-n)[A]_0^{n-1}$$

$\ln(t_{\frac{1}{2}}) = f(\ln([A]_0))$ est une droite de pente $1-n$

Méthode des vitesses initiales

On applique la méthode différentielle à la mesure de v_0 pour différents $[A]_0$ (par tangente ou mesure de concentration à petit intervalle de temps)

On peut alors déduire les ordres partiels puis k

Méthode de la dégénérescence de l'ordre OSTWALD

Si $\frac{[A]_0}{\vartheta_A} \gg \frac{[B]_0}{\vartheta_B}$ on peut supposer la variation de $[A]$ comme négligeable et poser $k' = k[A]_0$

3 Facteurs de vitesse

3.1 Concentrations

- $P_i > 0$: réactifs, catalyseurs, amorceurs
- $P_i < 0$: produits *en général*, inhibiteurs

3.2 Température

LOI EMPIRIQUE D'ARRHÉNIUS

$$k = A e^{-\frac{E_a}{RT}}$$

ln(k) est une fonction affine de $\frac{1}{T}$

— E_a , l'énergie d'activation de la réaction J.mol $^{-1}$
— A est le facteur de fréquence

4 Réacteurs

Définition

Différents types de réacteurs

- Les réacteurs fermés
- Les réacteurs ouverts
- Les réacteurs semi-ouverts (flux sortants) / semi-fermés (flux entrants)

Dans le cas des réacteurs parfaitement agités continus (**RPAC**)

Entre t et $t + dt$, $n_A = d(n_A)_{racteur} + d(n_A)_e - d(n_A)_s$

D'où

$$\begin{cases} \frac{dn_A}{dt} = -vV\vartheta + [A]_0D_e - [A]D_s & (V_x \text{ un volume et } D_x = \frac{dV_x}{dt} \text{ un débit}) \\ \frac{dn_{A'}}{dt} = vV\vartheta'dt - [A']dV_s \end{cases}$$

1 Acte élémentaire

DEF: Un **acte élémentaire** est une réaction chimique dont le bilan aboutit à la transformation telle qu'elle se déroule à l'échelle moléculaire *Ex :* $H^+ + OH^- = H_2O$

- La loi de vitesse d'un acte élémentaire est de la forme $v = k[A]^\vartheta$

DEF: La **molécularité** est définie par $\sum_{ractifs} \vartheta_i$ et correspond à l'ordre global

- On admet qu'il n'existe pas de réactions de molécularité supérieure à 3
- Si une réaction est un acte élémentaire alors la réaction **inverse** l'est aussi

2 Mécanismes réactionnels

2.1 Définition

DEF: Une **réaction complexe** peut être expliquée par une série d'actes élémentaires expliquant le passage des réactifs aux produits, mais aussi l'implication des **intermédiaires réactionnels** (catalyseurs, inhibiteurs, amorceurs etc...)

DEF: L'ensemble des actes élémentaires impliqués est appelé **mécanisme réactionnel**

2.2 Méthodes de détermination de la loi de vitesse

Approximation de l'état quasi stationnaire AEQS

Dans un mécanisme réactionnel, si un intermédiaire réactionnel I_r :

- Est **formé lentement** : réactions de constantes de vitesse faibles
- Est **consommé rapidement** : réactions de constantes de vitesse élevées

On considère sa concentration comme faible et constante au cours du temps passé la période d'induction :

$$\Rightarrow \frac{d[I_r]}{dt} = 0$$

Approximation de l'étape cinétiquement déterminante AECD

Dans un mécanisme réactionnel (*en général par stades*) si une étape est **beaucoup plus lente** que les autres (soit de constante de vitesse beaucoup plus faible), elle est dite **cinétiquement déterminante** et impose la vitesse de la réaction

$$\Rightarrow v \simeq v_{ECD}$$

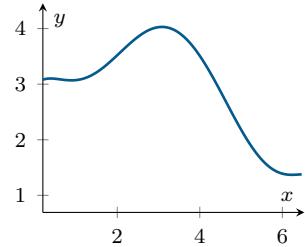
Établir une équation de vitesse

$$\frac{d[X]}{dt} = \sum_i \epsilon_i v_i$$

- $\frac{d[X]}{dt}$ est la vitesse d'apparition de X
- v_i les vitesses des réactions où X apparaît
- $\epsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{si } X \text{ est produit} \\ -1 & \text{si } X \text{ est réactif} \end{cases}$ dans la réaction associée à v_i

3 Évolution énergétique du système

- On représente dans un **profil énergétique** l'énergie potentielle moléculaire en fonction des coordonnées réactionnelles (paramètres géométriques)
- Pour réagir le système doit suivre un chemin spécifique nécessitant une montée en E_p , l'**énergie d'activation**
- Le rôle du catalyseur est alors d'**abaisser** l'énergie d'activation



Principe de micro réversibilité

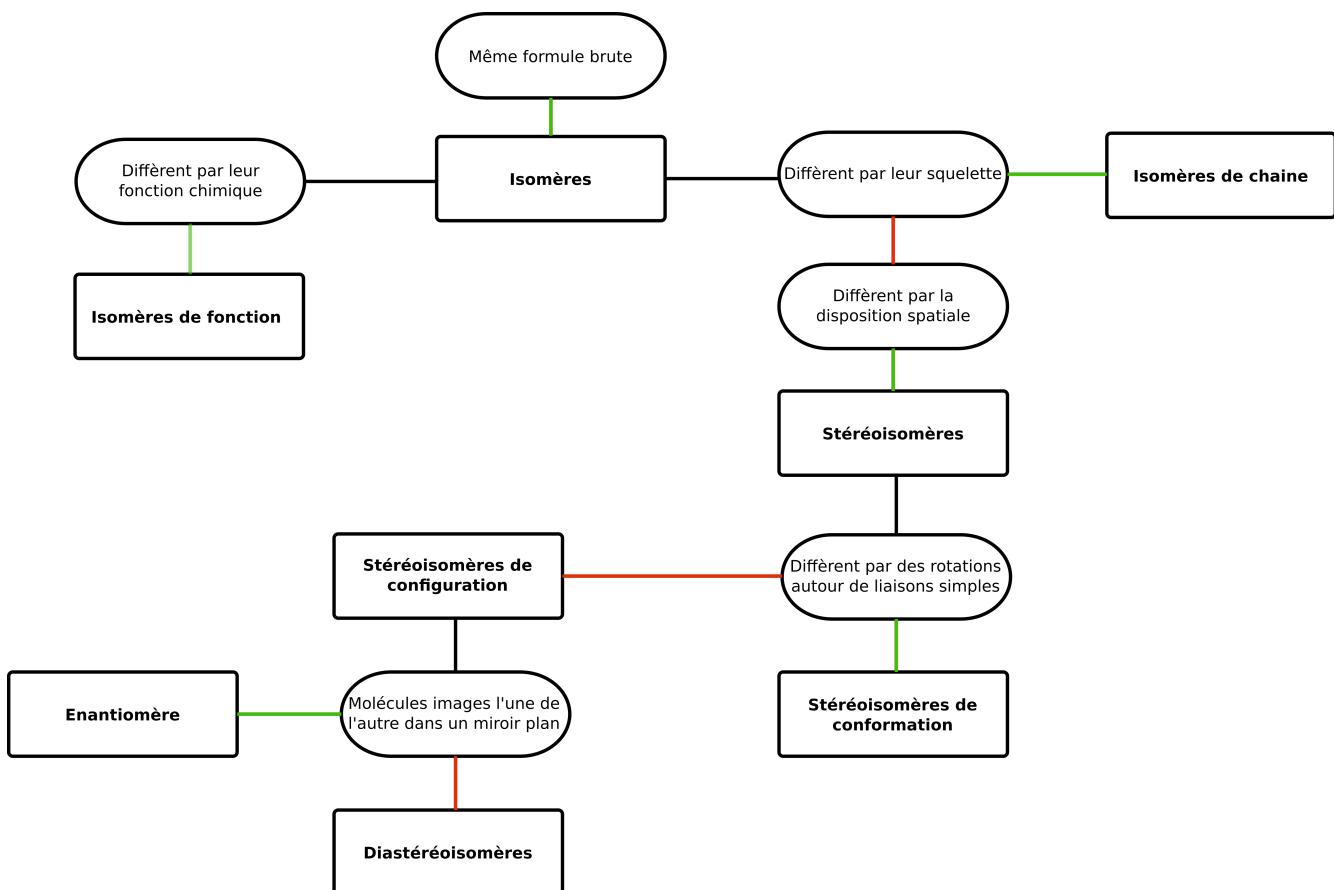
- Le système suit exactement le même chemin réactionnel pour la réaction en sens inverse

Différents types de mécanismes

- Par **stades** : Les intermédiaires réactionnels créés sont consommés sans n'être jamais reformés
- Par **chaîne** : Les intermédiaires réactionnels consommés sont reformés

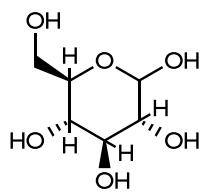
Déroulement d'un mécanisme

- Amorçage
- Propagation
 - Ramification
 - Transfert de chaîne
- Terminaison

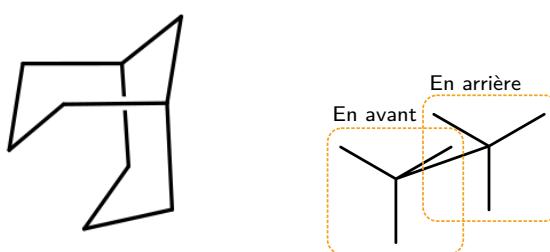


1 Représentation des molécules

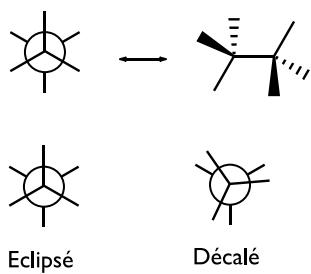
1.1 Représentation de Cram



1.2 Représentation en perspective



1.3 Représentation de Newman



2 Règle séquentielle

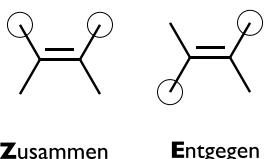
On classe à l'aide de la règle séquentielle les atomes par un ordre de priorité

- Les groupements autour d'un atome sont classés dans l'ordre décroissant de leur numéro atomique
- Si deux groupements sont égaux à un rang donné, on étudie le rang suivant
- Un doublet non liant est considéré comme un atome de numéro atomique nul
- Pour deux isotopes, celui avec le nombre de masse le plus élevé est prioritaire
- Une liaison n -ième à un C est assimilée à une liaison simple et à $n - 1$ autres liaisons à un C

3 Stéréoisomérie de configuration

3.1 Exemples de la chimie organique

Double liaison éthylénique



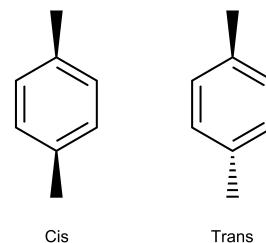
L'ordre de priorité est établi par règle séquentielle

Carbone asymétrique

Un carbone asymétrique est un carbone tétraédrique dont les 4 substituants sont différents
Il possède **deux** configurations différentes

1. On **classe** les substituants par critère séquentiel
2. Règle du **tire-bouchon**
 - On place le pouce droit sur la liaison au substituant de priorité la plus faible
 - Si la priorité est croissante avec le sens des autres doigts : **R_{ègle}**
 - Sinon **S**

Cas des cycles



Dans le cas des cycles on distingue

- La configuration **cis** : éléments prioritaires du même coté
- La configuration **trans** : éléments prioritaires de part et d'autre

3.2 Enantiomérie

Propriétés

DEF: Une molécule est **chirale** si elle est superposable à son image dans un miroir plan

DEF: Une molécule est l'**énantiomère** d'une autre si elle est son image dans un miroir plan et qu'elle ne lui est pas superposable

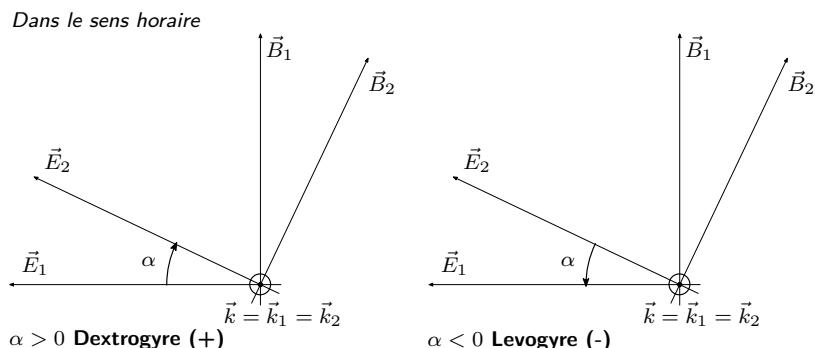
Toute molécule chirale possède un unique énantiomère

- Deux énantiomères ont les mêmes propriétés physiques (*températures de changement d'état, polarité, solubilité*)
- La réactivité (*constante de vitesse et d'équilibre*) de deux énantiomères est :
 - Identique dans une réaction avec une molécule achirale
 - Différente dans une réaction avec une molécule chirale
- On appelle mélange **racémique**_(±), un mélange équimolaire de deux énantiomères, il a une activité optique nulle

Activité optique

L'activité optique est la capacité d'une molécule à faire tourner le **plan de polarisation** d'une lumière polarisée

On associe à la lumière un triplet $(\vec{k}, \vec{B}, \vec{E})$, pour la lumière polarisée le plan (\vec{E}, \vec{k}) est fixé
La mesure de la rotation du plan de polarisation est appelée **polarimétrie**



LOI EMPIRIQUE DE BIOT

$$\alpha = [\alpha]lC$$

- $[\alpha]$, le pouvoir rotatoire spécifique dépend de température, solvant, λ en °
- Handbook : $[\alpha]_{D-Na}^T = x(solv)$
- l , la longueur traversée en dm
- C , la concentration en g.cm⁻³

ADDITIVITÉ

$$\alpha_{tot} = \sum_{\text{molécules chirales}} \alpha_i$$

— α_{tot} , l'activité optique résultante

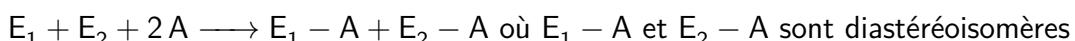
Deux énantiomères ont des pouvoirs rotatoires opposés

4 Diastéréoisomérie

Deux diastéréoisomères ont des **propriétés physiques et chimiques différentes**

Ils sont donc séparables par les méthodes habituelles

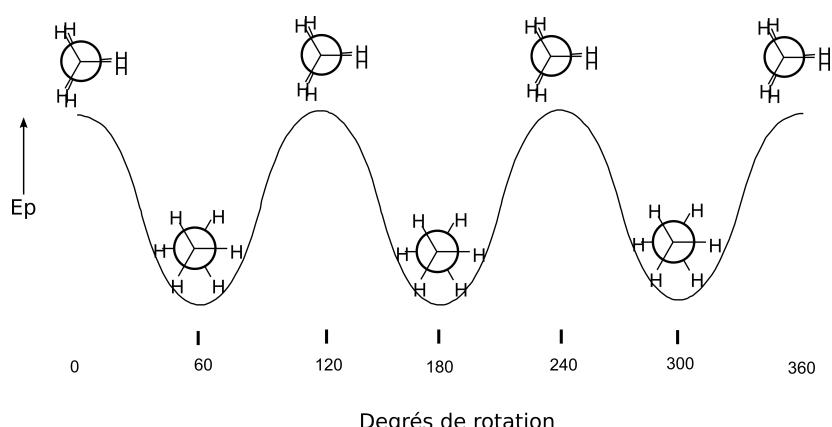
On peut, en formant un diastéréoisomère à l'aide d'un auxiliaire chiral, séparer un mélange racémique



5 Analyse conformationnelle

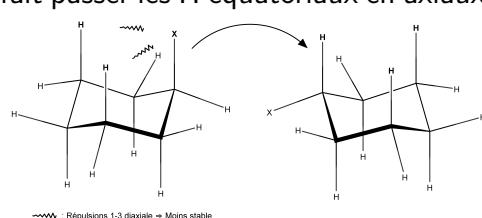
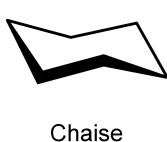
L'analyse conformationnelle permet de déterminer les énergies relatives des différents stéréoisomères de conformation pour une configuration fixée

La courbe d'analyse conformationnelle présente l'énergie potentielle de la molécule en fonction des coordonnées conformationnelles (*en général des angles dièdres*)



5.1 Cas du cyclohexane

- Les hydrogènes axiaux sont à 90° avec le plan moyen
- Les hydrogènes équatoriaux sont à 19° avec le plan moyen
- Le passage entre les deux configurations chaise fait passer les H équatoriaux en axiaux et inversement



1 Spectroscopie IR

1.1 Principe

Dans la spectroscopie IR on irradie un échantillon dans une certaine gamme de longueurs d'onde et on mesure l'intensité transmise

Le spectre est la courbe $T = f(\bar{\nu})$ où $\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda}$ est le nombre d'onde

On distingue deux zones dans le spectre IR :

- $\bar{\nu} > 1300\text{cm}^{-1}$: Spécifique à la nature de la molécule
- $\bar{\nu} < 1300\text{cm}^{-1}$: Empreinte digitale de la molécule

1.2 Interprétation

On assimile les liaisons à des ressorts qui résonne à une fréquence spécifique

LOI DE HOOK

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

— ν_0 est la fréquence de résonance
— $\mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$, la masse réduite
— k , la constante de raideur

Dans la spectroscopie IR on sonde les modes vibrationnels de la molécule, notamment

- Ceux d'**élongation**_{stretching} : Dans la direction de l'axe de liaison
- Ceux de **déformation**_{bending} : Dans la direction perpendiculaire à l'axe de liaison



Le nombre d'onde de résonance d'une liaison peut varier par existence d'une liaison H ou mésomérie

Nombre d'onde	3200 → 3700	2900 → 3100	2000 → 2800	1650 → 1800	1600 → 1650
Liaison	<ul style="list-style-type: none"> — O—H : >3300 — N—H : <3300 	<ul style="list-style-type: none"> C—H — C≡C—H : 3100 — C=C—H : 3000 — C—C—H : <3000 	<ul style="list-style-type: none"> Liaisons triples — C≡C — C≡N — C≡O 	C=O	C=C

2 Spectroscopie RMN

2.1 Principe

Certaines fois le noyau d'un atome possède un spin total non nul

$$\begin{array}{llll}
 \text{— } {}^1\text{H} \rightarrow \frac{1}{2} & \text{— } {}^{12}_6\text{C} \rightarrow 0 & \text{— } {}^{16}_8\text{O} \rightarrow 0 & \text{— } {}^{19}_9\text{F} \rightarrow \frac{1}{2} \\
 & \text{— } {}^{13}_6\text{C} \rightarrow \frac{1}{2} & \text{— } {}^{14}_7\text{N} \rightarrow 1 & \text{— } {}^{31}_{15}\text{P} \rightarrow \frac{1}{2}
 \end{array}$$

En l'absence de champ magnétique, les deux états de spin ont la même énergie
Dans un champ magnétique, \vec{B}_0 ils diffèrent

$$\Delta E = \hbar \gamma B_0$$

- $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ dérive de la constante de Planck
- γ est le rapport gyromagnétique propre au noyau
- $B_0 = \|\vec{B}_0\|$

La résonance du système se produit alors pour $\nu_0 = \frac{\Delta E}{h} = \frac{\gamma}{2\pi} B_0$ et est de l'ordre de quelques MHz

2.2 Réalisation

- On place la substance dissoute dans un solvant résonnant dans une autre gamme (*Ex : Solvants deutérés*) dans un **champ magnétique**
- On ajoute souvent une **référence** (*Ex : TMS*)
- L'**intensité** est exprimée en fonction de la fréquence et correspond au **nombre de noyaux** résonnats à la même fréquence

On utilise plutôt que la fréquence en abscisse le déplacement chimique

$$\delta = \frac{\nu - \nu_{\text{ref}}}{\nu_0}$$

- δ est indépendante de B_0
- $\nu_0 = \frac{\gamma}{2\pi} B_0$

- La courbe d'intégration traduit du **nombre de H impliqués** en représentant la surface des pics

2.3 Interprétation

Résonance

- ν_0 est la fréquence à laquelle résonne un noyau sans électrons
En raison de son environnement électronique, le noyau ressent un champ effectif $\vec{B}_{\text{eff}} = \vec{B}_0(1 - k)$ avec $(1 - k)$ la constante de blindage
 - Si k est élevé : le proton est **blindé** et résonne à δ plus faible
 - Si k est faible : le proton est **déblindé** et résonne à δ plus élevé
- Deux protons se correspondant par un **élément de symétrie** sont chimiquement **équivalents** et résonnent à la même fréquence

Facteurs influençant la valeur de δ

- L'effet inductif attracteur (électronégativité)
 - La valeur de l'électronégativité
 - Le nombre d'hydrogènes concernés
 - La distance à l'élément attracteur
- Insaturation
 - Les carbones insaturés entraînent un déblindage
 - Cycle
 - A l'intérieur du cycle : effet blindant
 - A l'extérieur du cycle : effet déblindant

Couplage

Le champ ressenti par un noyau est modifié par la présence d'un noyau à proximité :

$$\vec{B} = \vec{B}_0(1 - k) \pm B_\alpha$$

- B est le champ ressenti réellement
- $\pm B_\alpha$ est le champ créé selon l'état de **spin** de α

Le proton résonne alors à deux fréquences (ν_1 et ν_2) distinctes \Rightarrow le signal forme un **doublet**

$$\Delta\nu = \frac{\gamma}{2\pi} B_\alpha = J = \Delta\delta \times \nu_0$$

— J est la constante de couplage

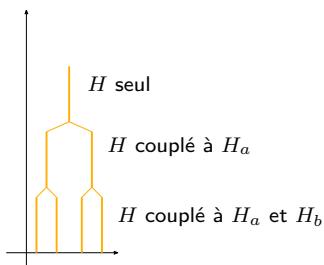
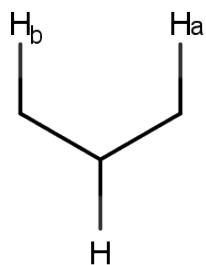
- Deux protons équivalents résonnent séparément mais un seul pic apparaît
- La valeur de J dépend du **nombre de liaisons** séparant les deux protons

On note nJ le couplage de deux protons séparés de n liaisons

2J	3J
Géminal	Vicinal

- J dépend de l'**angle dièdre** entre les deux liaisons impliquées
- Dans le cas d'un couplage avec n protons, le champ ressenti est la somme des effets des spins des différents protons
 - Pour des protons **équivalents**, on observe un signal multiple (*Intensité sur le triangle de Pascal*)
 - Sinon on observe des **composés** de signaux multiples

Dans le cas d'un couplage à deux protons non équivalents



- $H_a = \pm \frac{1}{2}$ et $H_b = \pm \frac{1}{2}$
- On observe un doublet de doubles

Exemple

- On peut également étudier la stéréoisométrie des liaisons doubles en RMN
 $\nu_Z < 15\text{Hz} < \nu_E$

Analyse structurale d'une molécule

- **Formule brute**
 - Analyse élémentaire (décomposition)
 - Spectroscopie de masse (masse molaire)
- **Insaturations** (liaisons multiples et cycles)

$$n_{ins} = \frac{2 \times n_4 + n_3 - n_1 + 2}{2}$$

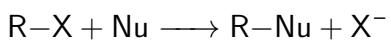
— n_k , le nombre d'atomes k -valents

- **Fonctions**
 - Spectre IR
- **Squelette**
 - Spectre RMN

Méthode

1 Substitution nucléophile

1.1 Généralités



- $R-X$ est un halogénoalcane
- Nu le nucléophile (charges $-$ ou doublets non liants)
- X^- est un halogénure (sauf F^-)

Une substitution nucléophile est dite **aliphatique** si le carbone porteur de X est tétraédrique

Une substitution nucléophile peut suivre deux lois de vitesse :

- $v = k [RX]$: **SN_1**
- $v = k [RX] [Nu]$: **SN_2**

SN_2

Mécanisme	
Notes	<ul style="list-style-type: none"> — Acte élémentaire — Le carbone central est électrophile — Le groupe sortant doit <ul style="list-style-type: none"> — Accaparer la densité électronique du C électrophile — Stabilise la charge \ominus — Attaque à l'opposé du groupe sortant <p>La SN_2 entraîne une inversion de Walden de configuration</p> <p>Si la réaction conduit à un stéréoisomère différent selon la configuration du réactif on dit qu'elle est stéréospécifique</p>

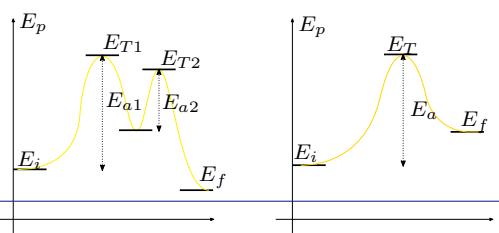
SN_1

Mécanisme	
Notes	<ul style="list-style-type: none"> — Deux attaques possibles \Rightarrow Mélange de produits

Postulat de Hammond

Deux états d' E_p proches ont des structures analogues
 $\Rightarrow E_{T1}$ ressemble à un carbocation
 \Rightarrow Ce qui stabilise le carbocation stabilise E_{T1}

La formation du C^+ est cinétiquement déterminante $k_1 \ll k_2$



1.2 Compétition SN_1 , SN_2

L'électrophile_{substrat}

- SN_2
 - Pas d'attaque si C trop encombré \Rightarrow Favorisé si électrophile primaire
- SN_1
 - Il faut favoriser la stabilité du C^+
 - \Rightarrow Favorisé si C tertiaire
 - Δ Faire attention à la résonance

Le nucléophile

Un nucléophile fort_{faible} favorise_{empêche} la SN_2

La force d'un nucléophile augmente avec

- La capacité de l'atome à céder des e^-
- La polarisabilité

DEF: Capacité à redistribuer sa densité électronique si soumis à des contraintes_{Ex : Electrophile}

- \propto Taille et nombre d' e^- éloignés du noyau

	Fort	Faible
Exemples courants	<ul style="list-style-type: none"> — Halogénures $\text{I}^- \text{Br}^- \text{Cl}^-$ — Souffrés $\text{HS}^- \text{H}_2\text{S} \text{RSH}$ — Chargés $\text{HO}^- \text{RO}^- \text{C}\equiv\text{N}^-$ 	<ul style="list-style-type: none"> — F^- — H_2O — ROH

Groupe sortant

- SN_1 et SN_2 ont besoin d'un bon groupe sortant pour fonctionner
- La SN_1 a besoin pour la formation du C^+ d'un groupe sortant particulièrement bon

Un bon groupe sortant est un groupe qui stabilise efficacement la charge \ominus

On utilise souvent la base conjuguée d'un acide fort

- OH^- est un groupe sortant particulièrement mauvais
 - On peut le protonner en H_2O^+ avec un acide fort
 - On le traite par $\text{TsCl} + \text{Py}$ pour former un très bon groupe sortant OTs

	Halogénures	Autres
Exemples courants	<ul style="list-style-type: none"> — Iodure I^- — Bromure Br^- — Chlorure Cl^- 	<ul style="list-style-type: none"> — Tosylate OTs — Mesylate OMs — Triflate

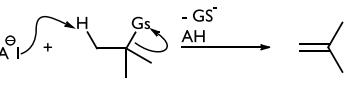
Solvant

- Toutes les substitutions nucléophiles ont besoin d'un solvant polaire

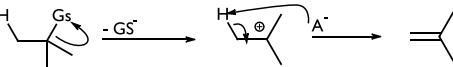
- Un solvant aprotique polaire favorise la SN_2 car il ne crée pas d'enveloppe de solvant autour du nucléophile
« *Like dissolves like* »
On utilisera alors *Ex : Acétone, DMSO, DME, DMF*
- Dans le cadre de la SN_1 , le solvant peut favoriser les réarrangements de carbocations

2 Réactions d'élimination

E_2

Mécanisme	
Notes	<ul style="list-style-type: none"> — On obtient en général le produit le plus substitué <i>Produit de Zaitsev</i> — Cette règle est concurrencée par la gène stérique Ainsi le choix d'une base stériquement encombrée entraîne la formation du produit le moins substitué <i>Produit de Hofman</i> <ul style="list-style-type: none"> — <i>tert-Butoxyde de Potassium</i> – <i>BuOK</i> — <i>Diisopropylamidurde de lithium</i> <i>LDA</i> — Le mécanisme E_2 est stéréosélectif <i>trans</i> prédomine \Rightarrow Élimination antipériplanaire

E_1

Mécanisme	
Notes	<ul style="list-style-type: none"> — La transformation en C^+ est étape cinétiquement déterminante — On obtiendra toujours le produit le plus substitué <i>Produit de Zaitsev</i> — Le produit <i>trans</i> sera majoritaire mais la réaction n'est pas stéréospécifique <i>Pas de position antipériplanaire nécessaire</i> — Un bon groupe sortant et le favoritisme de la formation du C^+ sont nécessaires

2.1 Comparaison substitution nucléophile-élimination

Rôle du réactif

- Rôle du réactif
 - Nucléophile \Rightarrow Substitution
 - Base \Rightarrow Élimination

Il convient de déterminer si le réactif est un nucléophile $base$ *fort* $faible$

- Basicité : Stabilité de la charge *Critère thermodynamique*
- Nucléophilie : Capacité à céder des $e^- \Rightarrow$ Rapidité d'attaque *Critère cinétique*

Nucléophilie	Base	Base et Nuc. faible	Base et Nuc. faible
<ul style="list-style-type: none"> — Cl^-, Br^-, I^- — HS^-, RS^-, H_2S, RSH 	<ul style="list-style-type: none"> — H^-, <i>t-BuOK</i> 	<ul style="list-style-type: none"> — HO^-, RO^-, <i>t-BuOK</i> 	<ul style="list-style-type: none"> — H_2O, ROH

t-BuOK est une base et un nucléophile fort mais elle est très encombrée \Rightarrow Favorise l' E_2

Tableau Bilan

Réactif	Susbrat	Résultat	Explication
Nucléophile	1"	SN ₂	Stabilité de C ⁺ et gène stérique
	2"	SN ₂	
	3"	SN ₁	
Base	1"	E ₂	La gène stérique n'affecte pas l'E ₂
	2"	E ₂	
	3"	E ₂	
Base et Nuc. forts	1"	SN _{2+E₂}	Gène stérique pour SN ₂
	2"	E _{2+SN₂}	
	3"	E ₂	
Base et Nuc. faibles	1"	SN _{2+E₂}	Très lent + C ⁺
	2"	SN _{2+E₂+SN₁+E₁}	Très lent <i>Voir (1)</i>
	3"	SN _{1+E₁}	C ⁺ <i>Voir (2)</i>

1. Alcool $\xrightarrow[\Delta]{H_2SO_4}$ Elimination

2. Une température élevée favorise l'E₁

Propriétés

Aspects régio et stéréochimiques

Réaction	Régiochimie	Stéréochimie
SN ₂	Attaque en α	Inversion de Walden
SN ₁	Attaque du C ⁺ ⚠ Réarrangement	2 attaques possibles
E ₂	Produit de Zaitsev Encombré ⇒ Produit de Hofman	— Formation du produit <i>trans</i> — Élimination en antipériplanaire
E ₁	Produit de Zaitsev	Formation du produit <i>trans</i>

Propriétés

1 Organométalliques

Définition

DEF: Un organométallique est une molécule comportant au moins une liaison C – Métal

- $\chi_{\text{Métal}} < \chi_{\text{C}}$: le carbone porteur du métal est **nucléophile**
On peut réguler la **réactivité** du carbone en fonction du métal choisi

2 Organomagnésiens mixtes



— R : est une chaîne carbonée sans X si mixte

— X : est un halogène

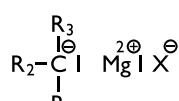
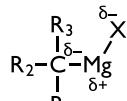
Définition

Nomenclature



— R peut être alkyle -- , alcényle $=$, alcynyle \equiv ou aryle $\text{---}\text{C}_6\text{H}_4\text{---}$

Propriétés



Ecriture covalente

Ecriture ionique

Le carbone se comporte alors comme un **carbanion**

- Nucléophile
- Basique au sens de Brønsted
- Réducteur

Réaction

Synthèse

	Groupe alkyle, alcényle, aryle	$\text{R}-\text{X} + \text{Mg} \longrightarrow \text{R}-\text{Mg}-\text{X}$
Équation	Groupes alcynyles	$\text{R}-\equiv\text{C}-\text{H} + \text{R}'-\text{Mg}-\text{X} \longrightarrow \text{R}'-\text{H} + \text{R}-\equiv\text{C}-\text{Mg}-\text{X}$
Notes	— Cette réaction est assimilable à une oxydoréduction	

Propriétés

Conditions de synthèse

- **Solvant** de réagissant pas avec les organomagnésiens
Pas d'eau, d'alcool, d'acides, d'amines \Rightarrow On choisit des éther-oxydes liaison de complexation, stabilité, solubilité
- On évite la **présence** de molécules pouvant **réagir** Acides, électrophiles
En particulier H_2O et O_2 , CO_2 éloignés par balayage
- On évite le **couplage de Würz**
 $\text{R}-\text{X} + \text{R}-\text{Mg}-\text{X} \longrightarrow \text{R}-\text{R} + \text{Mg}-\text{X}_2$
En faisant en sorte que RMgX ne soit jamais en présence d'un excès de $\text{R}-\text{X}$
Ainsi l'ajout de $\text{R}-\text{X}$ se fait lentement dans le magnésium

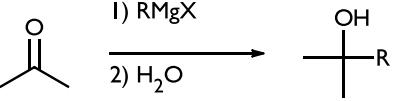
3 Addition sur les électrophiles



Les réactions acido-basiques sont prioritaires sur les additions nucléophiles

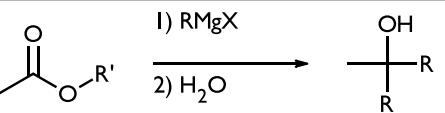
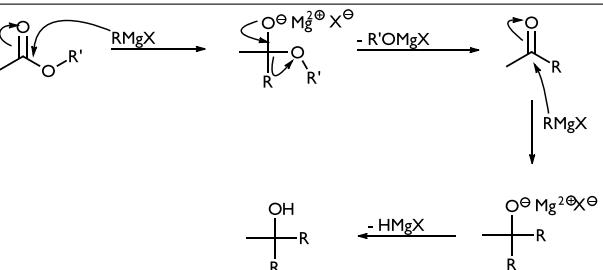
Réaction

Addition sur la fonction carbonyle

Équation	
Notes	<ul style="list-style-type: none"> — Formation d'un alcoolate de magnésium — Réactivité <ul style="list-style-type: none"> — Électronégativité — Liaison π réactive — Addition nucléophile <ul style="list-style-type: none"> \Rightarrow Attaque perpendiculaire au plan : 2 possibilitées

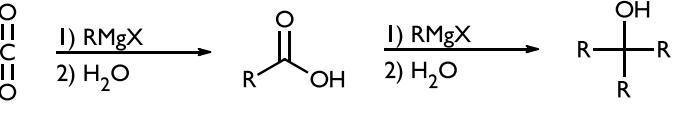
Réaction

Addition sur la fonction ester

Équation	
Mécanisme	
Notes	<ul style="list-style-type: none"> — Addition élimination

Réaction

Addition sur CO_2

Équation	
Notes	<ul style="list-style-type: none"> — Formation de carboxylate intermédiaire

Réaction

Addition sur les époxydes

Réaction

Équation	
Notes	<ul style="list-style-type: none">— Réactivité— Tension du cycle— Électronégativité— Apparenté à une SN_2 ⇒ <i>Régioselectivité</i> : Carbone le moins substitué

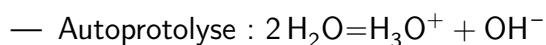
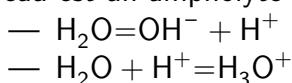
1 Théorie de Brønsted

1.1 Définitions

- Un **acide** est une espèce capable de céder un proton H^+
- Une **base** est une espèce capable de capturer un proton H^+
- Les deux espèces forment alors un **couple** $A_{\text{acide}}/B_{\text{base}}$
- Une **réaction acide base** est alors une réaction d'échange de H^+ entre deux couples
- Une espèce à la fois acide et base est un **ampholyte**
La réaction associée est l'autoprotolyse

1.2 Cas de l'eau

L'eau est un ampholyte



$$\text{Constante d'équilibre : } K_e = [H_3O^+] \times [OH^-] = 10^{-14} \text{ Produit ionique de l'eau}$$

1.3 Force des acides et bases dans l'eau

CONSTANTE D'ACIDITÉ

$$K_a = \frac{[B][H_3O^+]}{[A]C_0}$$

K_a est définie comme la constante d'équilibre de
 $A^+H_2O = B + H_3O^+$

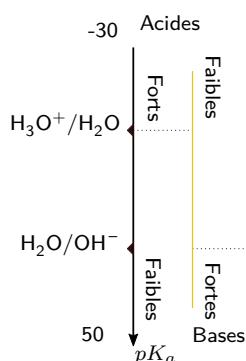
$$pK_a = -\log K_a$$

Le pK_a est propre à un couple acide-base

On peut de même définir la constante de basicité que l'on retrouve aussi par

$$K_a K_b = K_e$$

K_e est le produit ionique de l'eau



- Les acides et bases forts réagissent avec l'eau par une réaction quantitative totale
⇒ On ne peut les classer dans l'eau

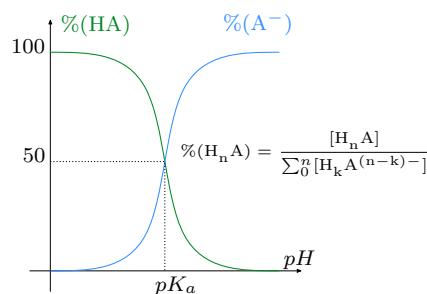
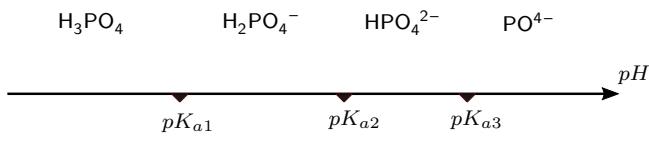
$$pH = -\log \frac{[H_3O^+]}{C_0}$$

— Concentration du proton soluté
⚠ Solution diluée

$$pH = pK_a + \log \left(\frac{[A^-]}{[AH]} \right)$$

— Se retrouve facilement en développant l'expression littérale du pK_a

Diagramme de prédominances



2 Calculs de pH à l'équilibre

On peut utiliser

- La loi d'action des masses K
- La loi de conservation de la matière $\sum_k n_k^i = \sum_k n_k^f$
- Électroneutralité $\sum_+ p[C^{p+}] = \sum_- q[A^{q-}]$

On peut cependant approcher le pH

Forts		Faibles	
Acides	Bases	Acides	Bases
Réaction quantitative : $x \simeq C_0$		$C_0 - x \simeq C_0$ si $K_{a/b} \ll 1$	
$pH = -\log C_0$	$pH = 14 + \log C_0$	$pH = \frac{1}{2}(pK_a - \log C_0)$	$pH = 7 + \frac{1}{2}(pK_a + \log C_0)$

Théorème Loi de dilution d'Ostwald

Si on dilue un acide faible, sa dissociation dans le solvant augmente

Se prouve par déplacement d'équilibre

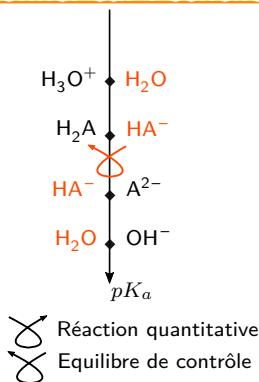
$$\begin{aligned} & \text{--- } [\text{HA}] := C_0(1 - \alpha) \quad \left| K_a = \frac{\alpha C_0 [\text{H}_3\text{O}^+]}{C_0(1 - \alpha)} \Rightarrow \alpha = \frac{K_a}{K_a + [\text{H}_3\text{O}^+]} \right. \\ & \text{--- } [\text{A}^-] := C_0\alpha \quad \left| \text{Comme } [\text{H}_3\text{O}^+] \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 10^{-7} \Rightarrow \alpha_{lim} = \frac{K_a}{K_a + 10^{-7}} \right. \end{aligned}$$

- Pour un amphytote faible, il y a 4 équilibres

On néglige les réactions avec l'eau et le produit des deux constantes K restantes donne :

$$pH = \frac{1}{2}(pK_{a1} + pK_{a2})$$

Méthode Raisonnner sur l'échelle des pK_a



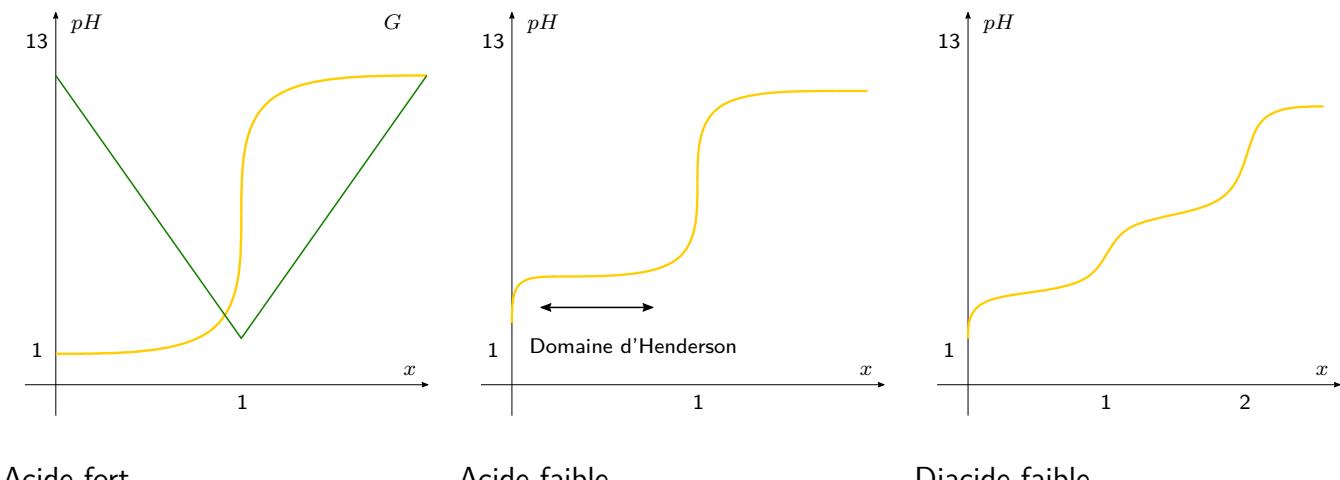
- On trace l'échelle des pK_a
- On place les couples
- On souligne ceux impliqués en tant que réactifs
- On détermine la réaction principale par la méthode du gamma

3 Étude de l'allure des courbes d'évolution du pH au cours d'un dosage

- On recherche le **point d'équivalence** soit le point où les réactifs sont introduits en proportions stœchiométriques
- Plus la constante de l'équilibre est élevée ($> 10^6$), plus le dosage est efficace

Établir les équations des courbes de dosage

- On étudie $x = \frac{n_{\text{titrant}}}{n_{\text{titré}}} = \frac{C_b V_b}{C_a V_a} = \frac{V_b}{V_{eq}}$
- On détermine f tel $pH = f(x)$ avant et après l'équivalence ($x = 1$)
- En utilisation la loi de Kohlraush on peut aussi déterminer $G = f(x)$



Acide fort

Acide faible

Diacide faible

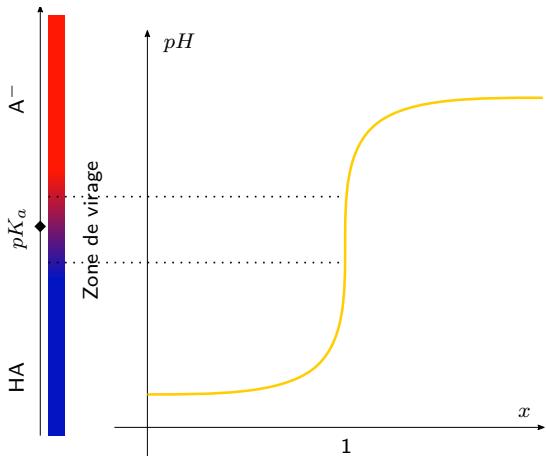
— Acide faible

- Pour un acide faible, le saut de pH est moins important
Comme l'espèce prépondérante à équivalence est A^- et non plus H_2O , le pH est supérieur à 7
- La forme de la courbe obtenue dépend du pK_a
⇒ On ne peut doser un acide trop faible dans l'eau
- On observe une inflexion initiale à cause de l'acide réagissant sur l'eau
- La dilution de l'acide initialement réduit le saut de pH et l'inflexion initiale (*Loi d'Ostwald*)

— Polyacide

- Si $pK_{a2} - pK_{a1}$ grand ($> 3 - 4$) : On considère deux réactions successives
On néglige initialement l'avancement d'une des deux réactions par rapport à l'autre ⇒ Deux sauts de pH successifs
- Si $pK_{a2} - pK_{a1}$ petit ($< 2 - 3$) : On considère deux dosages simultanés
Un saut de pH en $x = 2$
- On observera le même résultat pour un mélange d'acides

4 Indicateurs colorés



DEF: Un **indicateur coloré** est un acide dont les formes conjuguées ont des couleurs différentes

Hélianthine	Orange	3.1-4.4	Jaune
Bleu de Bromothynol	Jaune	6-7.6	Bleu
Phénolphthaleïne	Incolore	8.2-10	Rose

5 Solutions tampons

DEF: Une solution tampon est une solution dont le pH varie peu par dilution et par ajout d'une quantité modérée d'acide ou de base

- On mélange un acide et sa base conjuguée en quantités proches de l'équimolarité
On choisit un couple tel $pK_a \approx pH$

$$t = \left| \frac{dC}{dpH} \right| = 2.3 \frac{[A^-][AH]}{[A^-] + [AH]} = 2.3C\alpha(1-\alpha)$$

- t est le pouvoir tampon
- En traçant $t = f(\alpha)$ coefficient de dissociation de l'acide on a un max de t pour $\alpha = \frac{1}{2}$

1 Structure

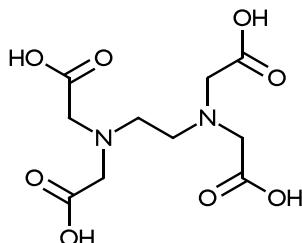
DEF: Un **complexe** est une molécule constituée d'un atome métallique auquel sont liées des molécules basiques_{Lewis} appelés **ligands**



— La liaison est une liaison de **complexation**
Elle résulte principalement d'une interaction électrostatique

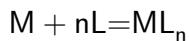
- On caractérise le ligand par le nombre de liaisons formées avec le métal (*monodentate, bidentate, hexadentate, ...*)
- **Nomenclature** : *Ligand-Métal (Charge)*

Indice _{Nb de ligands}	2	3	4	5	6
Géométrie	Linéaire	Triangulaire plane	Tétrahédrique Plane carrée	Bipyramide à base triangulaire	Octahédrique



Exemple de ligand hexadentate : **Ethylène Diamine Tétra Acétate**

2 Stabilité



— K : K_f ou β_n la constante de **formation**



— K : K_d la constante de **dissociation**

$$K_f = \frac{1}{K_d}$$

- Plus K_f est grand _{K_d est petit}, plus le complexe est stable

$$\begin{aligned}
 \text{ML}_n &= \text{ML}_{n-1} + L \quad K_{dn} \\
 \text{ML}_{n-1} &= \text{ML}_{n-2} + L \quad K_{d(n-1)} \\
 &\vdots \\
 \text{ML} &= \text{M} \quad + L \quad K_{d1}
 \end{aligned}$$

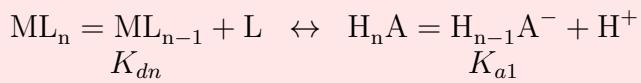
$$\text{On déduit } K_d = \prod_{i=1}^n K_{di}$$

$$\Rightarrow pK_d = \sum_{i=1}^n pK_{di}$$

- On peut alors faire l'**analogie avec les systèmes acido-basiques** en comparant les ligands à H^+

$$pL = -\log([L]) = pK_{dn} + \log\left(\frac{[ML_{n-1}]}{[ML_n]}\right) \quad | \quad — \text{ Définition analogue au } pH$$

⚠



⚠

Pour les systèmes acido-basiques, on a $pK_{a1} < \dots < pK_{an}$

Cette inégalité n'est pas vérifiée pour les complexes

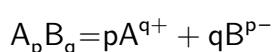
Propriétés

Facteurs influençant la stabilité des complexes

- Nature du ligand
- Nature du cation métallique
- pH : La plupart des ligands ont des propriétés basiques au sens de Brønsted

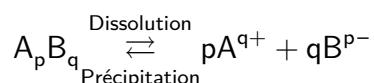
1 Mise en solution de sels peu solubles

DEF: On appelle sel un électrolyte *Espèce donnant des ions en solution*



Pour un sel binaire

$$K_S = [A^{q+}][B^{p-}]$$



$$pK_S = -\log(K_S)$$

Plus K_S grand $\Leftrightarrow pK_S$ petit plus le sel est soluble

DEF: On considère comme sel peu soluble un sel dont $pK_S = 2 - 3 \rightarrow 50$



On ne fera pas de tableau d'avancement de la concentration pour un système polyphasique

Critère de précipitation d'un sel

Lorsqu'on mélange A^{q+} à la concentration $[A^{q+}]_0$ avec B^{p-} à la concentration $[B^{p-}]_0$

$$Q = [A^{q+}]_0^p [B^{p-}]_0^q$$

- Q est le quotient réactionnel
- $Q < K_S$ Pas de précipitation
- ΔK_S non défini
- $Q > K_S$ Précipitation tq $[A^{q+}]^p [B^{p-}]^q \neq K_S$
Solution saturée

DEF: On appelle solubilité molaire d'un constituant, la quantité de matière maximale que l'on peut dissoudre dans 1L de solution

Calcul de la solubilité d'un constituant

- On passe par un tableau d'avancement
- On vérifie que la saturation est atteinte
- On a $K_S = [A^{q+}]^p [B^{p-}]^q$

2 Nomenclature

Les sels sont notés : A^- de C^+ (Charge)

Notons les principaux ions suivants

H^-	Hydrure	H^+	Hydrogène
HO^-	Hydroxyde	Na^+	Sodium
Cl^-	Chlorure	K^+	Potassium
I^-	Iodure	Ca^{2+}	Calcium
F^-	Fluorure	Cu^{2+}	Cuivrique
Br^-	Bromure	Fe^{2+}	Ferreux
O^{2-}	Oxyde	Fe^{3+}	Ferrique
S^{2-}	Sulfure	Zn^{2+}	Zinc
NO_3^-	Nitrate	Ag^+	Argent
N^{3-}	Nitrule	Mg^{2+}	Magnésium
$CH_3CO_2^{2-}$	Ethanolate	Pb^{2+}	Plomb
CO_3^{2-}	Carbonate	Al^{3+}	Aluminium
MnO_4^-	Permanganate	NH_4^+	Ammonium
$C_2O_4^{2-}$	Oxalate	H_3O^+	Oxonium <i>Hydronium</i>

3 Facteurs influençant la solubilité

3.1 Température

- Pour la plupart des sels, K_s augmente avec la température
La réaction de dissolution est endothermique

3.2 pH

Dans un sel si l'anion *le cation* a des propriétés acido-basiques, la solubilité dépend du pH
On relie l'équation de précipitation aux équations du pH

Couplage des équations de précipitation et de pH

- On réalise plusieurs tableaux d'avancement avec les équations d'une part de K_s et des K_a
On prend soin pour les espèces présentes dans différents tableaux d'avoir le même avancement
- On peut alors par exemple exprimer s de deux manières différentes à partir des expressions de K_s et des K_a et déduire sa valeur

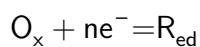
3.3 Complexation

Une des espèces du sel peut être engagée dans des relations de complexation : K_s est alors modifié
Dans certains cas c'est l'anion du sel qui joue le rôle de ligand

1 Couple oxydant réducteur

DEF: On appelle **oxydant** une espèce susceptible de capter des électrons *électrophile*

DEF: On appelle **réducteur** une espèce susceptible de céder des électrons



- Cette équation est une demi-équation d'oxydo réduction
- L'écriture est formelle car a_{e^-} n'est pas définie
- O_x et R_{ed} forme un couple redox

DEF: On appelle **réaction d'oxydoréduction** une réaction d'échange d'électrons entre deux couples

DEF: Une espèce à la fois oxydante et réductrice est un **ampholyte-rédox** Mansuy ©

La réaction de cette espèce sur elle-même est une **dismutation** Rétrodismutation

Équilibrage des réactions redox

- On repasse aux demi-équations et on équilibre
 - Sur l'élément subissant l'oxydoréduction
 - Sur O par ajout de H_2O
 - Sur H^+ (éventuellement repasser à OH^-)
 - Sur e^-
- On forme l'équation redox par élimination des e^-

Méthode

DEF: Le **degré d'oxydation** d'un élément dans un composé est

- La charge qu'il porte si c'est un ion
- La charge qu'il portera si on redistribue les e^- en fonction de χ

— On a $\sum_i do = \text{Charge de la molécule}$

Élément	H	O
do	I	- II

Déterminer les degrés d'oxydation d'un élément

- Repasser sur le schéma de Lewis de la molécule et répartir les charges
- Utiliser les approximations et la charge totale pour déterminer le do des éléments restants

Méthode

Réaction	Oxydation	Réduction
do	↗	↘

Méthode

Vérification des demi-équations

- $do = \text{cste}$ de part et d'autre de l'équation

— On représente la répartition des différentes espèces d'un même élément sur une échelle de do

2 Réactions d'oxydoréduction

2.1 Potentiel d'oxydoréduction

$$E = V_2 - V_1$$

Loi de Nernst

$$\vartheta_{ox}O_x + \sum_i \vartheta_i A_i + ne^- = \vartheta_{red}R_{ed} + \sum_i \vartheta'_i A'_i$$

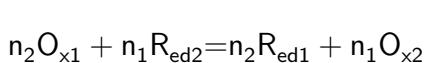
$$E = E^0 + \frac{RT}{n\mathcal{F}} \ln \left(\frac{a_{ox}^{\vartheta_{ox}} \prod_i a_{Ai}^{\vartheta_i}}{a_{red}^{\vartheta_{red}} \prod_i a_{A'i}^{\vartheta'_i}} \right)$$

- E , le potentiel d'oxydoréduction_{d'électrode} en V
- E^0 , le potentiel standart du couple en V
- n , le nombre d'électrons transférés
- $\mathcal{F} = \mathcal{N} \times |e| = 96500 \text{ C.mol}^{-1}$ la constante de Faraday
- $R = 8.314$, la constante des gaz parfaits
- T en K

$$E = E^0 + \frac{0.06}{n} \log \left(\frac{a_{ox}^{\vartheta_{ox}} \prod_i a_{Ai}^{\vartheta_i}}{a_{red}^{\vartheta_{red}} \prod_i a_{A'i}^{\vartheta'_i}} \right)$$

- E , le potentiel d'oxydo-réduction_{d'électrode} en V
- E^0 , le potentiel standart du couple en V
- n , le nombre d'électrons transférés

Analogie	pH	Rédox
Couple	AH/A ⁻	R _{ed} /O _x
Équation	A ⁻ + H ⁺ = AH	O _x + e ⁻ = R _{ed}
Formule	$pH = pK_a + \log \left(\frac{[\text{AH}]}{[\text{A}^-]} \right)$	$E = E^0 + \frac{0.06}{n} \log \left(\frac{[\text{O}_x]}{[\text{R}_{\text{ed}}]} \right)$
Variation	pK_a grand _{petit} = acide fort _{faible}	E^0 grand _{petit} = oxydant fort _{faible}
Diagramme		

2.2 Constante d'équilibre

$$K = \frac{a_{ox2}^{n_1} a_{red1}^{n_2}}{a_{red2}^{n_1} a_{ox1}^{n_2}}$$

$$\begin{cases} O_{x1} + n_1 e^- = R_{ed1} & E_1^0 \\ O_{x2} + n_2 e^- = R_{ed2} & E_2^0 \end{cases}$$

tel

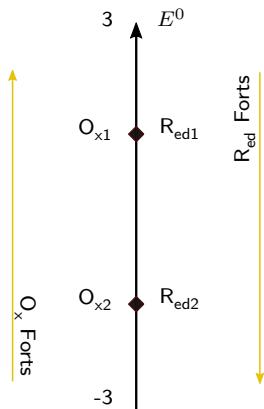
$$\begin{cases} E = E_1^0 + \frac{0.06}{n_1} \log \left(\frac{a_{ox1}}{a_{red1}} \right) & \times (n_1 n_2) \\ E = E_2^0 + \frac{0.06}{n_2} \log \left(\frac{a_{ox2}}{a_{red2}} \right) & \times (n_1 n_2) \end{cases}$$

Par égalité des deux potentiels rédox à l'équilibre on a

$$n_1 n_2 E_1^0 + 0.06 \log \left(\frac{a_{ox1}^{n_2}}{a_{red1}^{n_2}} \right) = n_1 n_2 E_2^0 + 0.06 \log \left(\frac{a_{ox2}^{n_1}}{a_{red2}^{n_1}} \right)$$

⇒ On peut alors faire apparaître K et déduire sa valeur

2.3 Classement



2.4 Influence de la complexation ou précipitation

$M^{n+} + pL \rightleftharpoons ML_p^{n+}$ fait intervenir $M^{n+}/M_{E_1^0}$ et $ML_p^{n+}/M_{E_2^0}$

$$E_2^0 = E_1^0 + \frac{0.06}{n} \log \left(\frac{[M^{n+}][L]^p}{[ML_p^{n+}]} \right) = E_1^0 - \frac{0.06}{n} pK_d$$

Lorsqu'on complexe *précipite*

- l'oxydant on abaisse E^0 de $\frac{0.06}{n} pK_{dpK_s}$

- le réducteur on augmente E^0 de $\frac{0.06}{n} pK_{dpK_s}$

3 Électrodes

Type	I	II	III
Constitution			
Rôle	<ul style="list-style-type: none"> — M : Conducteur - Réducteur — M^{n+} : Oxydant 	<ul style="list-style-type: none"> — M : Conducteur - Réducteur — MX_n : Oxydant 	<ul style="list-style-type: none"> — M : Conducteur
Représentation	$M/M_{(aq)}^{n+}$	$M/MX_{n(s)}/X_{(aq)}^-$	$M_{(s)}/O_x/R_{ed}$
Équation	$M_{(aq)}^{n+} + ne^- = M$	$MX_{n(s)} + ne^- = M_{(s)} + nX_{(aq)}^-$	$O_x + ne^- = R_{ed}$
$E =$	$E_{M^{n+}/M}^0 + \frac{0.06}{n} \log[M^{n+}]$	$E_{MX_n/M}^0 - 0.06 \log[X^-]$	$E_{O_x/R_{ed}}^0 + \frac{0.06}{n} \log \frac{[O_x]}{[R_{ed}]}$

DEF: Une électrode de référence est une électrode de l'un des trois types fonctionnant à potentiel constant
On utilise plutôt une électrode type II saturée en X^-

4 Associations d'électrodes

DEF: Une cellule électrochimique est une association de deux électrodes, siège d'une réaction redox et comportant au moins deux phases :

- Une phase à conduction électrique (porteuse de e^-)
- Une phase à conduction ionique (porteuse d'ions)
 - Solution aqueuse d'un électrolyte
 - Sels fondus
- La cellule peut fonctionner en mode générateur ou récepteur

Réaction	Oxydation	Réduction
	Borne	Anode

- On distingue les piles
 - Avec jonction *Paroi poreuse - pont salin*

- Sans jonction O_{x1} et R_{ed2} ne peuvent réagir

$$\begin{aligned}\Delta V_M &= V_{M1} - V_{M2} \\ &= V_{M1} - V_{S1} + V_{S1} - V_{S2} + V_{S2} - V_{M2} \\ &= E_1 + E_J - E_2\end{aligned}$$

— E_J est le potentiel de jonction
Il faut le minimiser

Étude d'une pile

- Identification des types
- Déterminer pour chaque électrode les couples mis en jeu
- Écrire l'équation bilan de la pile
- Identifier les bornes
- Détermination de la force électromotrice $\mathcal{F}_{em} = E_{\oplus} - E_{\ominus}$

5 Diagrammes $E - pH$

DEF: On représente sur un diagramme $E = f(pH)$ les domaines de prédominance_{aqueux} et d'existence_{solide} de diverses espèces conjuguées

- Chaque espèce à une aire délimitée par des frontières que l'on peut calculer

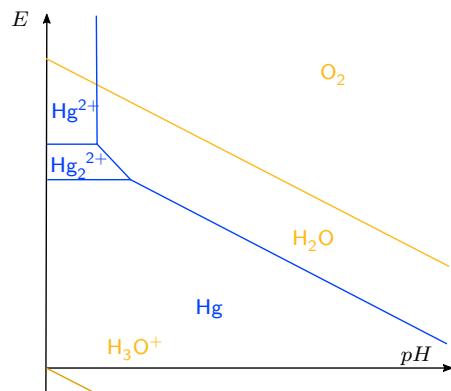
$$Ex : \begin{cases} O_x + ne^- + mH^+ = R_{ed} \\ E = E^0 + \frac{0.06}{n} \log \left(\frac{a_{O_x}[H^+]}{a_{R_{ed}}} \right) \end{cases} \Rightarrow E = E^0 - 0.06 \frac{m}{n} pH + \frac{0.06}{n} \log \left(\frac{a_{O_x}}{a_{R_{ed}}} \right)$$

- Pour poser une frontière, il faut utiliser une convention

Nature	A Gazeux	Soluté-Solide	Deux solutés
Convention	P_A	[Soluté]	Sur la frontière 1. $[A] = [B]$ et $[A] + [B] = C_{ref}$ 2. $nb_{elem}(A) = nb_{elem}(B)$ et $\sum nb_{elem} = C_{ref}$

- On observe alors trois types de frontières

$E = cste$	Droite horizontale
$pH = cste$	Droite verticale
$E = a + bpH$	Droite affine



Utilisation des diagrammes

- Deux espèces ont des domaines de prédominance disjoints \Rightarrow Réaction quantitative
- Deux espèces ont des domaines de prédominance joints \Rightarrow Cohabitation possible

Possibilité thermodynamique d'une réaction insuffisante \Rightarrow Aspects cinétiques

- On peut aussi réaliser des diagrammes $E - pL$ où L est un ligand susceptible de modifier le potentiel d'oxydoréduction

ACTIVATION ET PROTECTION DE FONCTIONS

1 Activation des alcools**1.1 Propriétés des alcools**

- Les alcools sont nucléophiles et électrophiles faibles
- Pour augmenter leur réactivité, on peut
 - Augmenter la nucléophilie de l'oxygène
 - Augmenter l'électrophilie du carbone

1.2 Activation nucléophile

Pour augmenter la nucléophilie de l'oxygène, on va transformer l'alcool en alcoolate

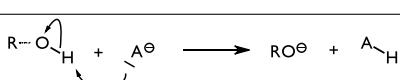
Réaction

Voie oxydo-réductrice

Équation	$\text{H}-\overset{\text{O}}{\underset{\text{R}}{\diagdown}} + \text{M} \longrightarrow \text{RO}^\ominus + \text{M}^\oplus + \frac{1}{2}\text{H}_2$
Notes	<ul style="list-style-type: none"> — M est un métal alcalin

Réaction

Voie acido-basique

Mécanisme	 $\text{R}-\overset{\text{O}}{\underset{\text{H}}{\diagdown}} + \text{A}^\ominus \longrightarrow \text{RO}^\ominus + \text{A}-\text{H}$
Notes	<ul style="list-style-type: none"> — Les alcools aliphatiques ont un pK_a compris entre 15 et 20 ⇒ Il faudra utiliser une base très forte <ul style="list-style-type: none"> — Amidures $\text{R}_1-\text{N}^\ominus-\text{R}_2$ — LDA — De la soude suffirait pour les alcools aromatiques

Réaction

On peut ensuite faire réagir l'alcoolate formé

Réaction

Synthèse de Williamson

Réaction

Mécanisme	
Notes	<ul style="list-style-type: none"> — On forme un éther-oxyde — Mécanisme de $\text{S}N_2$ — La synthèse est concurrencée par l'élimination La synthèse est particulièrement efficace avec des $\text{R}_1 - \text{X}$ non-éliminables : <ul style="list-style-type: none"> — Pas d'hydrogène en β — Groupe benzyle

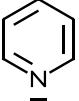
1.3 Activation électrophile

Réaction

Déshydratation des alcools	
Mécanisme	
Notes	<ul style="list-style-type: none"> — Mécanisme E_1 — On notera la possible formation d'etheroxydes symétriques par une synthèse de Williamson

Réaction

Transformation des alcools en halogénoalcanes	
Notes	<ul style="list-style-type: none"> — Peut avoir lieu selon un mécanisme SN_1 ou SN_2 — On peut réaliser cette transformation à l'aide de chlorure de thionyle SOCl_2

Réaction	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 10%;">Équation</td><td style="text-align: center; padding: 10px;"> $R-OH + \begin{array}{c} Cl-S=O \\ \\ O \end{array} - R' \xrightarrow[-HCl]{A^-} R-O-S=O-R'$ </td></tr> </table>	Équation	$R-OH + \begin{array}{c} Cl-S=O \\ \\ O \end{array} - R' \xrightarrow[-HCl]{A^-} R-O-S=O-R'$
Équation	$R-OH + \begin{array}{c} Cl-S=O \\ \\ O \end{array} - R' \xrightarrow[-HCl]{A^-} R-O-S=O-R'$		
Notes	<ul style="list-style-type: none"> — On forme un excellent groupe partant — On place une base pour la sécurité HCl et pour déplacer l'équilibre <p style="text-align: center;"><i>Ex : Pyridine</i> </p> <ul style="list-style-type: none"> — En général on utilise <ul style="list-style-type: none"> — $R' = Me \rightarrow R-OMs$ Groupe mésylate — $R' = Ph-Me \rightarrow R-OTs$ Groupe tosylate 		

2 Activation de la fonction carbonyle

2.1 Propriétés de la fonction carbonyle

- La liaison π et l'oxygène sont nucléophiles
- Le carbone est électrophile mais sa réactivité est souvent insuffisante

2.2 Acétalisation en milieu acide

Réaction	<u>Acétalisation en milieu acide</u>
----------	--------------------------------------

Réaction	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 15%;"></td><td style="text-align: center; padding: 10px;"> <p>Équation</p> </td></tr> </table>		<p>Équation</p>
	<p>Équation</p>		
Mécanisme	<p>Mécanisme</p>		
Notes	<ul style="list-style-type: none"> — Peut avoir lieu selon un mécanisme SN_1 ou SN_2 — En général la constante d'équilibre est très faible et l'équilibre non favorable On élimine l'eau pour déplacer l'équilibre \Rightarrow Montage Dean-Stark — On introduit les protons avec un acide organique Ex : TsOH — Dans certaines conditions, on peut s'arrêter à l'hémiacétal — Avec un diol, la formation d'un acétal cyclique est possible 		

3 Protection de fonctions

3.1 Protection de la fonction carbonyle

Réaction	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 15%;"></td><td style="text-align: center; padding: 10px;"> <u>Transformation en acétal cyclique</u> </td></tr> </table>		<u>Transformation en acétal cyclique</u>
	<u>Transformation en acétal cyclique</u>		
Équation	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 15%;"></td><td style="text-align: center; padding: 10px;"> </td></tr> </table>		

3.2 Protection de la fonction alcool

Réaction	<u>Synthèse de Williamson - Hydrogénolyse</u>
----------	---

Réaction

Équation	$\text{R}-\text{OH} \xrightarrow[\text{Pt}]{\text{H}_2} \text{R}-\text{O}-\text{C}_6\text{H}_4$ I) A^-M^+ 2) BrCH_2Ph
Notes	— Pour l'hydrogénolyse on étale le catalyseur métallique sur du graphite $\text{Pt}, \text{Pd}, \text{Ni}$

OXYDORÉDUCTION EN CHIMIE ORGANIQUE

1 Oxydation des alcools

Oxydation des alcools primaires en aldéhydes

Réaction	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">Équation</td><td style="text-align: center; padding: 5px;"> $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH} \xrightarrow{\text{PCC}} \text{CH}_3\text{CHO}$ </td></tr> </table>	Équation	 $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH} \xrightarrow{\text{PCC}} \text{CH}_3\text{CHO}$
Équation	 $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH} \xrightarrow{\text{PCC}} \text{CH}_3\text{CHO}$		
Notes	<ul style="list-style-type: none"> — On réalise une oxydation douce qui n'aboutit pas à l'acide carboxylique — On peut utiliser comme réactifs <ul style="list-style-type: none"> — PCC : Pyridinium chlorochromate — PCC : Pyridinium dichromate — Réactif de Collins <p>Les réactifs utilisés sont dissous dans un solvant organique <i>Ex</i> : CH_2Cl_2</p>		

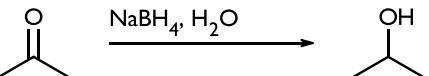
Oxydation des alcools secondaires en aldéhydes

Réaction	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">Équation</td><td style="text-align: center; padding: 5px;"> $\text{CH}_3\text{CH}(\text{OH})\text{CH}_3 \xrightarrow{\text{Réactif de Jones}} \text{CH}_3\text{C}(=\text{O})\text{CH}_3$ </td></tr> </table>	Équation	 $\text{CH}_3\text{CH}(\text{OH})\text{CH}_3 \xrightarrow{\text{Réactif de Jones}} \text{CH}_3\text{C}(=\text{O})\text{CH}_3$
Équation	 $\text{CH}_3\text{CH}(\text{OH})\text{CH}_3 \xrightarrow{\text{Réactif de Jones}} \text{CH}_3\text{C}(=\text{O})\text{CH}_3$		
Notes	<ul style="list-style-type: none"> — Ces réactifs permettent également d'oxyder un alcool primaire en acide carboxylique — On peut utiliser comme réactifs <ul style="list-style-type: none"> — Réactif de Jones — $\text{Na}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$, H_2SO_4, H_2O 		

2 Réduction du groupe carbonyle

Réduction par l'ion hydrure

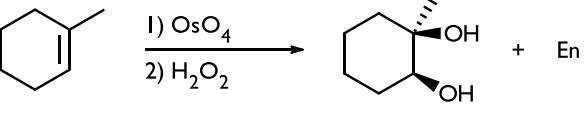
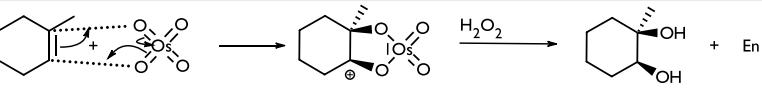
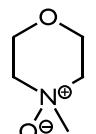
Réaction

Équation	
Notes	<ul style="list-style-type: none"> — On peut utiliser comme réactifs — NaBH_4 qui est plus chimiosélectif <i>Uniquement aldéhydes et cétones</i> — 1) LiAlH_4 2) H_2O <i>En deux étapes pour éviter une interaction entre réactifs</i>

3 Oxydation des alcènes

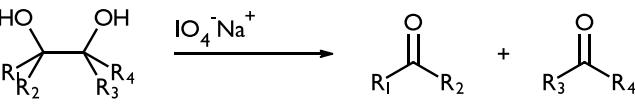
Addition en *syn* de OH et OH

Réaction

Équation	
Mécanisme	
Notes	<ul style="list-style-type: none"> — Stéréochimie : <i>syn</i> — On obtient un diol — Fonctionne aussi avec KMnO_4, NaOH à froid — On peut utiliser une quantité catalytique de OsO_4 en ajoutant du NMO 

Oxydation des diols en détones

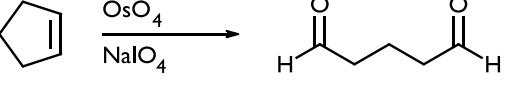
Réaction

Équation	
Notes	<ul style="list-style-type: none"> — On utilise le periodate de sodium comme agent oxydant — IO_4^- est réduit en IO_3^-

Oxydation des alcènes en cétones

Réaction

Réaction

Équation	 <p>The reaction scheme shows cyclopentene reacting with OsO_4 and NaIO_4 to produce 2,5-hexanedione. Cyclopentene is shown as a five-membered carbon ring. The reagents OsO_4 and NaIO_4 are placed above an arrow pointing to the product. The product, 2,5-hexanedione, is shown as a six-carbon chain with two carbonyl groups at the 2 and 5 positions.</p>
Notes	<ul style="list-style-type: none">— IO_4^- joue le rôle de cooxydant pour le passage au diol et d'oxydant du diol— Ce type de réaction combinant les deux précédentes est appelé <i>one pot</i>

1 Modèle du cristal parfait

DEF: Un cristal parfait est un empilement régulier de particules_{atomes, ions, molécules, ...} dans l'espace
Il forme une structure périodique dans toutes les dimensions de l'espace

Paramètres de description d'un cristal

- Définition
- Réseau :** Ensemble infini de points_{nœuds} disposés de façon régulière
 $\vec{OM} = n_1\vec{a} + n_2\vec{b} + n_3\vec{c}$ *O arbitraire et $(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N}^3$*
 - Maille :** Parallélépipède permettant le pavage de tout l'espace_{Parallélogramme si 2D}
La maille est définie par $\alpha = (\vec{b}, \vec{c})$, $\beta = (\vec{a}, \vec{c})$, $\gamma = (\vec{a}, \vec{b})$
 - Motif :** Plus petite entité discernable qui se répète à l'infini dans tout le réseau
 - Structure cristalline :** Combinaison Réseau +Motif

— Il n'existe que 14 types de réseaux se différenciant par leur symétrie : cristaux de Bravais

Propriétés du solide

- Propriétés
- Population :** Nombre d'atomes_{entités} possédés en propre
 - Coordinence :** Nombre de plus proches voisins d'un atome
 \triangle Les plus proches voisins sont obligatoirement équidistants
 - Compacité :**
$$\frac{\text{Volume occupé par les atomes de la maille}}{\text{Volume de la maille}} = \frac{\text{Population} \times \text{Volume d'un atome}}{\text{Volume de la maille}}$$

 \triangle Volume de la maille = $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}$
 - Masse volumique :**
$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\text{Population} \times \text{Masse d'un atome}}{\text{Volume de la maille}} = \frac{\text{Population} \times \frac{M}{N}}{\text{Volume de la maille}}$$

2 Cristaux métalliques

— Un cristal métallique peut être assimilé à un empilement de sphères indéformables
Les atomes métalliques conservent leur intégrité

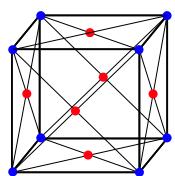
Deux types d'empilements compacts

Couches Structure

ABAB Structure hexagonale

ABCABC Structure cubique à faces centrées

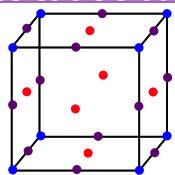
Structure cubique à faces centrées



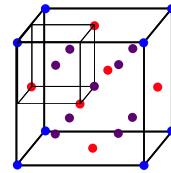
- Population : $8 \in 8 + 6 \in 2 = 4$
- Coordinence : 12
- Compacité : $\frac{4 \times \frac{4}{3} \pi r^3}{a^3} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} 2r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
- Masse volumique : $\rho = \frac{4M}{\mathcal{N}a^3}$

Démo

Sites interstitiels dans la structure cubique à faces centrées



- Sites octaédriques : 6 voisins
 - Nombre de sites : $1 \in 1 + 12 \in 4 = 3$
 - Condition d'habitabilité : $r + r_i \leq \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{r_i}{r} \leq \sqrt{2} - 1$
- Sites octaédriques : 4 voisins
 - Nombre de sites : $8 \in 1 = 8$
 - Condition d'habitabilité : $r + r_i \leq \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{r_i}{r} \leq \sqrt{\frac{3}{2}} - 1$



Définition

Cohésion des solides métalliques

Propriétés

- Plutôt denses
- Conducteurs électriques et thermiques
- **Modèle du gaz d'électron** : Métal=Cations métalliques avec circulations d' e^- libres
 $-800\text{kJ.mol}^{-1} < E_c < -100\text{kJ.mol}^{-1} \Rightarrow$ Liaison métallique \sim Liaison covalente

Définition

Alliages métalliques

DEF: Un alliage est un mélange d'au moins de types de métaux

- Différents types d'alliages
 - Alliages d'insertion : $r_i \ll r$
 - Alliages de substitution : $r_i \simeq r$ Certaines entités sont remplacées

Propriétés

3 Cristaux covalents et moléculaires

Définition

Cristaux covalents

DEF: Empilement d'atomes liés entre eux par des liaisons covalentes

Cela s'applique à des éléments pouvant engager un nombre important de liaisons avec leurs voisins

- Exemple : Diamant, graphite Couche de graphène

Propriétés physiques

- Peu ou pas conducteurs
- Forte cohésion $-800\text{kJ.mol}^{-1} < E_c < -200\text{kJ.mol}^{-1}$

Cristaux moléculaires

DEF: Empilement de molécules _{Atomes dénaturés} liés entre eux par des liaisons moléculaires _{Type H - VdW}

- Exemple : Eau solide, carboglace

Propriétés physiques

- Plus faible cohésion

4 Cristaux ioniques

DEF: Empilement de cations et d'anions dans lequel les forces d'interaction sont de type coulombienne

$$E_c = \frac{|q_1 q_2|}{4\pi\epsilon_0 r}$$

— ϵ_0 est la permivité du vide

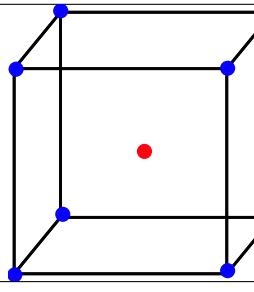
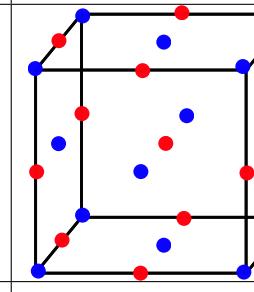
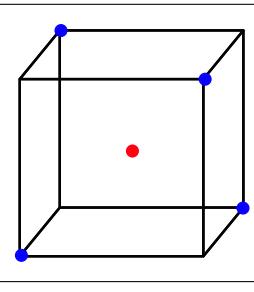
- La cohésion des solides ioniques résulte du fait que chaque ion peut s'entourer d'un maximum de voisins de charge opposée tout en restant le plus éloigné des ions de même charge

Propriétés physiques

- Isolants
- Forte cohésion $-800 \text{ kJ.mol}^{-1} < E_c < -400 \text{ kJ.mol}^{-1}$
- \Rightarrow Forte température de changement d'état

Types de cristaux

Définition

Type	CsCl	NaCl	ZnS
Schéma			
Géométrie	Cubique	Octaédrique	Tétraédrique
Coordinence	8	6	4
Condition de contact	$\begin{cases} r_+ + r_- = \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ 2r_- \leq a \end{cases}$	$\begin{cases} r_+ + r_- = \frac{a}{2} \\ 2r_- \leq \frac{a\sqrt{2}}{2} \end{cases}$	$\begin{cases} r_+ + r_- = \frac{a\sqrt{3}}{4} \\ 2r_- \leq \frac{a\sqrt{2}}{2} \end{cases}$
	$\frac{r_+}{r_-} \geq \sqrt{3} - 1$	$\frac{r_+}{r_-} \geq \sqrt{2} - 1$	$\frac{r_+}{r_-} \geq \sqrt{\frac{3}{2}} - 1$

IV SII

ANALYSE DE SYSTÈMES

1 Notion de système

Un système est un ensemble d'éléments en interaction entre eux et avec le milieu extérieur conçu pour rendre à son environnement les services correspondants à sa finalité

Un système est dit **complexe** si son fonctionnement n'est pas prévisible au vu de ses composants

2 Structure d'un système automatisé

Un système est décomposé en :

- Chaîne d'**information** (*acquérir, coder, traiter, mémoriser, restituer, communiquer*)
- Chaîne d'**énergie** (*alimenter, stocker, moduler, convertir, transmettre, agir*)

3 Particularités de certains composants

3.1 Actionneurs

Un actionneur est toujours précédé d'un **préactionneur** :

- Hacheur (CA) ou Relai (CC) pour un actionneur **électrique** (moteur)
- Distributeur pour un actionneur **hydraulique** (moteur, vérin)

4 Mesurer les performances d'un système

- **Stabilité** (convergence en $+\infty$)
- **Rapidité** (Temps de réponse à 5%)
- **Précision** (différence entre valeur atteinte et consigne)
- Limitation du **dépassement** (pourcentage de la valeur finale)

5 Étude de systèmes linéaires, continus et invariants

5.1 Définitions

- Définition
- **Mono variable** : Une entrée/sortie
 - **Invariant** : Ne dépend pas du temps
 - **Continu** : Défini à tout instant
 - **Linéaire** : Combinaison linéaire d'entrées/sorties

Tout système linéaire est régi par une équation différentielle :

$$a_0 \times e^{(0)}(t) + a_1 \times e^{(1)}(t) + \dots + a_m \times e^{(m)}(t) = b_0 \times s^{(0)}(t) + b_1 \times s^{(1)}(t) + \dots + b_n \times s^{(n)}(t)$$

5.2 Transformation de Laplace

Tout système linéaire continu et invariant peut être mis sous la forme d'une **équation différentielle**. Il est possible de transposer cette équation différentielle dans le domaine de Laplace (forme polynomiale)

On associe alors à une fonction f , une unique fonction F dans le domaine de Laplace :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \times e^{-pt} dt$$

Transformées de fonctions usuelles

Nom	$f(t)$	$F(p)$
Dirac	$+\infty$ si $t = 0$	1
Echelon	$e_0 \times \mathfrak{H}(t)$	$\frac{e_0}{p}$
Rampe	$e_0 \times t \times \mathfrak{H}(t)$	$\frac{e_0}{p^2}$
Exponentielle	$e_0 \times e^{-at} \times \mathfrak{H}(t)$	$\frac{e_0}{p + a}$

Propriétés

- Linéarité :
 - $\mathcal{L}[f + g] = \mathcal{L}[f] + \mathcal{L}[g]$
 - $\mathcal{L}[\alpha f] = \alpha \mathcal{L}[f]$
- Dérivation
 - $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = p \times F(p) - f(0^+)$
 - $\mathcal{L}\left[\frac{d^k f}{dt^k}\right] = p^k \times F(p) - \sum_{i=0}^{k-1} f^{(k-1-i)}(0^+)$
 - Si $C=0$ on a $\mathcal{L}\left[\frac{d^k f}{dt^k}\right] = p^k \times F(p)$

5.3 Fonction de transfert

Une fonction de transfert est définie par $H = \frac{S}{E}$

Dans le domaine de Laplace et en transformant l'équation différentielle, on a :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{a_0 + a_1 p + \dots + a_m p^m}{b_0 + b_1 p + \dots + b_n p^n} = \frac{K}{p^\alpha} \times \frac{1 + a'_1 p + \dots + a_m p^{m'}}{1 + b'_1 p + \dots + b'_{n'} p^{n'}}$$

- K est le **gain statique** de la fonction de transfert
- α est la **classe** de la fonction de transfert
- $n = n' - \alpha$ est l'**ordre** de la fonction de transfert
- Les **zéros** de $H(p)$ sont les valeurs de p qui annulent le numérateur
- Les **pôles** de $H(p)$ sont les valeurs de p qui annulent le dénominateur

Théorème Définition

Théorème de la valeur initiale

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \times F(p)$$

Théorème de la valeur finale

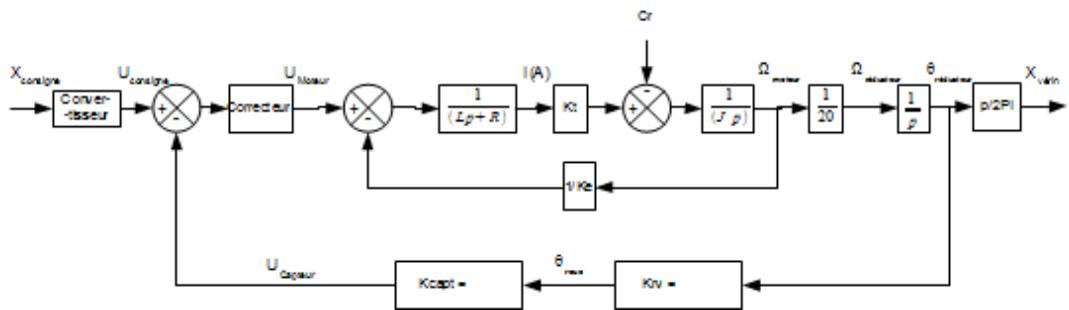
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \times F(p)$$

6 Schémas blocs

6.1 Utilisation des schémas blocs pour l'étude de systèmes

Tout système peut être modélisé par un bloc représentant ses entrées et sorties
Le système peut être :

- En chaîne directe
- En boucle fermée : **asservissement** (*système régulateur ou suiveur*)



6.2 Propriétés des schémas blocs

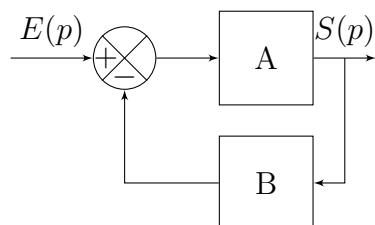
- On peut multiplier le contenu de schémas blocs adjacents
- Des schémas blocs reliés à un **sommateur** sont à additionner (*ou soustraire*)

FORMULE DE BLACK

$$FTBF = \frac{FTCD}{1 + FTBO}$$

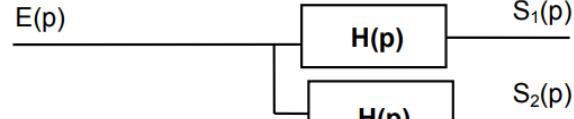
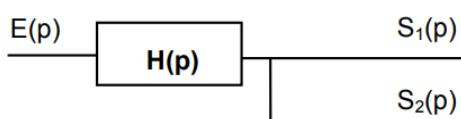
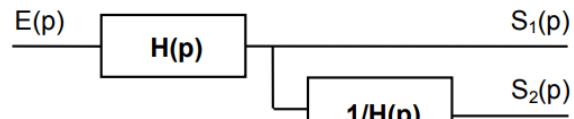
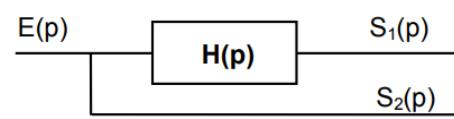
- *FTBF* la fonction de transfert en boucle **fermée**
- *FTCD* la fonction de transfert en chaîne **directe**
- *FTBO* la fonction de transfert en boucle **ouverte**

Formule de Black

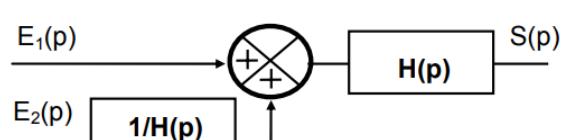
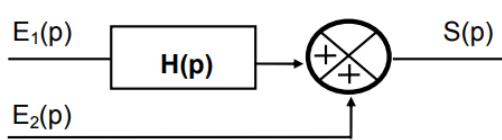
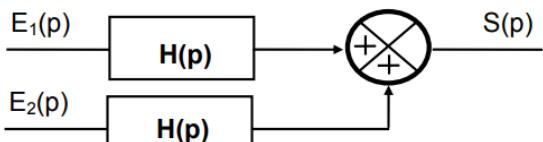
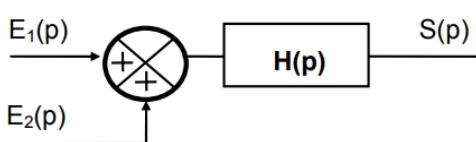


$$H(p) = \frac{A}{1 + AB}$$

Déplacements de blocs



Déplacement de sommateurs



RÉPONSE TEMPORELLE DES SYSTÈMES

- Réponse **indicielle** : réponse à un échelon
- Réponse **impulsionnelle** : réponse à un Dirac
- Régime **permanent** : État du système lorsque $t \rightarrow +\infty$
- Régime **transitoire** : État du système lorsque $t \in [0; +\infty[$

Étude d'une fonction de transfert du domaine de Laplace

- On décompose la fonction de transfert en **éléments simples** (*facilement transformables*)
- On ramène la fonction de transfert dans le **domaine temporel**
- On peut alors évaluer ses performances à l'aide des outils suivants

1 Évaluation des performances d'un système

1.1 Stabilité

Un système est stable si sa sortie reste **bornée** en réponse à un signal d'entrée borné

- Un système asservi est stable si et seulement si sa fonction de transfert en boucle fermée possède uniquement des **pôles** à partie réelle strictement **négative**

1.2 Précision

La précision du système est la valeur vers laquelle tend l'écart entre la consigne et le signal retour quand $t \rightarrow +\infty$

En régime permanent

$$\epsilon_S = \lim_{t \rightarrow +\infty} \epsilon(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (c_{\text{consigne}}(t) - r_{\text{retour}}(t))$$

Utilisation du théorème de la valeur finale

- On a $\epsilon_S = \lim_{t \rightarrow +\infty} \epsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \times \epsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \times (C_{\text{consigne}}(p) - R_{\text{retour}}(p))$
- Appliquer l'égalité précédente à la fonction de transfert du système

On distingue deux performances de précision :

- **L'erreur statique** : l'erreur statique en réponse à un échelon
- **L'erreur de traînage** : l'erreur statique en réponse à une rampe

1.3 Rapidité du système

Le temps de réponse à 5% ($t_{5\%}$) caractérise la durée nécessaire pour que la sortie reste dans un intervalle de $\pm 5\%$ autour de la valeur finale

1.4 Limitation du dépassement

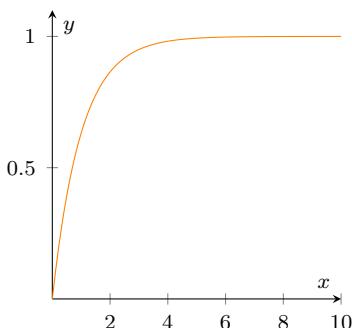
2 Réponses temporelles des systèmes linéaires du premier ordre

Un système linéaire du premier ordre est caractérisé par une fonction de transfert du type $H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$

On ramène cette fonction de transfert dans le domaine temporel et on l'étudie :

Réponse à indicelle

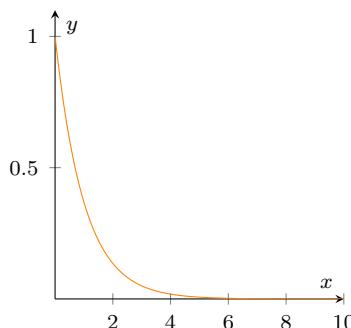
- $\frac{dS(0)}{dt} \neq 0$
- $\rightarrow K \times e_0$
- $t_{5\%} = 3\tau$



↪ Réponse indicelle

Réponse impulsionnelle

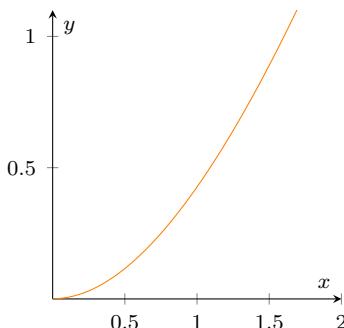
- $S(0) = \frac{K}{\tau}$
- $\rightarrow 0$
- $tang_s(0) = -\frac{K}{\tau^2}$ et coupe l'axe des x en $t = \tau$



↪ Réponse impulsionnelle

Réponse à une rampe

- $S(0) = 0$
- $\frac{dS(0)}{dt} = 0$
- $tang_s(0) = -\frac{K}{\tau^2}$ et coupe l'axe des x en $t = \tau$



↪ Réponse à une rampe

3 Réponses temporelles des systèmes linéaires du second ordre

Un système linéaire du premier ordre obéit à : $H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}$

On ramène cette fonction de transfert dans le domaine temporel et on l'étudie :

Dans le cas de la réponse **indicielle** (échelon) on a :

$$S(p) = \frac{e_0}{p} \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2} \Leftrightarrow S(p) = \frac{e_0}{p} \frac{K\omega_0^2}{\omega_0^2 + 2\xi\omega_0 p + p^2}$$

Les racines sont donc $p = 0$ et les racines du polynôme du dénominateur :

On distingue les cas :

- $\xi > 1 \Rightarrow \Delta > 0$: système apériodique **sur amorti**
- $\xi = 1 \Rightarrow \Delta = 0$: système apériodique **critique**
- $\xi < 1 \Rightarrow \Delta < 0$: système apériodique **sous-amorti**

Démo

Système sur amorti $\xi > 1$

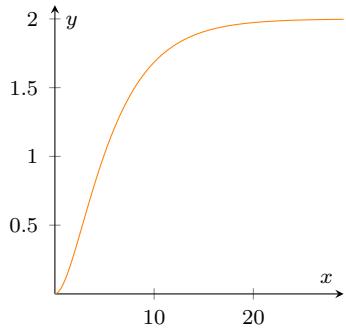
- $H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$
- $\frac{dS(0)}{dt} = 0$
- $\rightarrow K \times e_0$
- $t_{5\%}$ augmente avec ξ

Système critique $\xi = 1$

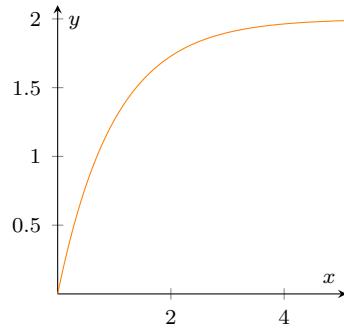
- $H(p) = \frac{K}{(1 + \tau p)^2}$
- $\frac{dS(0)}{dt} = 0$
- $\rightarrow K \times e_0$
- Pas de dépassement

Système sous-amorti $\xi < 1$

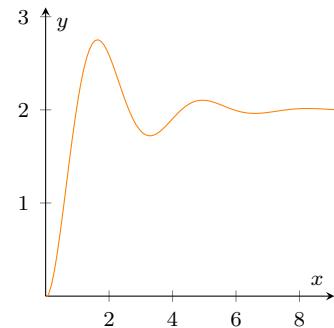
- $H(p) = \frac{K}{(p - p_1)(p - \bar{p}_1)}$
- $\frac{dS(0)}{dt} = 0$
- $\rightarrow K \times e_0$
- Oscillations amorties
 $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$



$\hookrightarrow \xi > 1$



$\hookrightarrow \xi = 1$

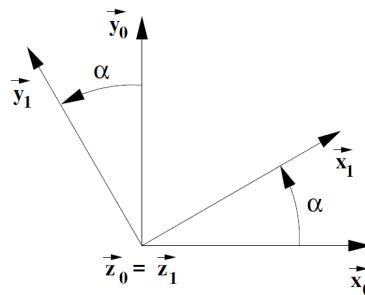


$\hookrightarrow \xi < 1$

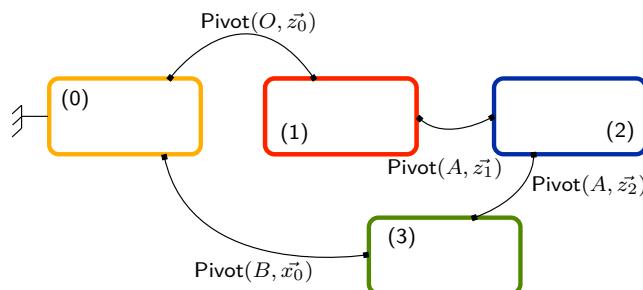
- La réponse la plus rapide est atteinte pour :
 - $\xi = 1$ sans dépassemens
 - $\xi = 0.69$ avec dépassemens
- Dans le cas d'un système du second ordre si une constante de temps est bien plus grande que l'autre, on peut parfois ramener la fonction de transfert à une fonction de transfert du 1^{er} ordre

1 Modélisation des systèmes

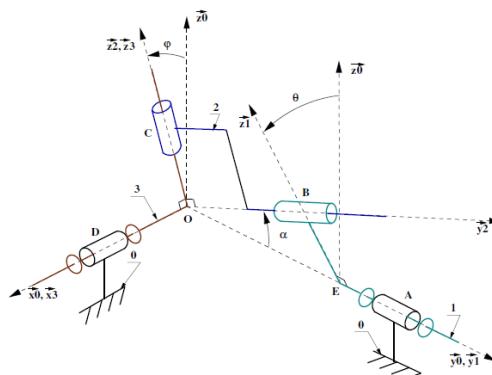
- On définit les **solides** constituants le mécanisme et on leur associe un **repère** orthonormé direct
- On trace les figures de changement de base



- Dans le **graphe de structure** on définit les mouvements des solides les uns par rapport aux autres



- On trace le schéma cinématique en 3D puis 2D



2 Cinématique

- Origine et base + Chronologie
Repère spatial
Référentiel

- La position d'un solide par rapport à un solide est définie par six paramètres : **les degrés de liberté** :
 - Les coordonnées dans le repère
 - Les trois angles de changement de base

Désignation de la liaison	Degré de liaison	Schéma (normalisation AFNOR)		Caractéristiques géométriques
		2D	3D	
Enca斯特ment	6			aucune
Pivot	5			axe (O, \vec{x})
Glissière	5			direction \vec{x}
Hélicoïdale	5			axe (O, \vec{x})
Désignation de la liaison	Degré de liaison	Schéma (normalisation AFNOR)		Caractéristiques géométriques
		2D	3D	
Pivot glissant	4			axe (O, \vec{x})
Rotule ou Sphérique à doigt	4			centre O doigt d'axe (O, \vec{z}) rainure dans un plan de normale \vec{y}
Rotule ou Sphérique	3			centre O
Appui plan	3			normale \vec{z}
Désignation de la liaison	Degré de liaison	Schéma (normalisation AFNOR)		Caractéristiques géométriques
		2D	3D	
Linéaire annulaire ou Sphère-cylindre	2			centre O direction \vec{x}
Linéaire rectiligne	2			droite de contact (O, \vec{x}) normale au plan \vec{z}
Ponctuelle ou Sphère-plan	1			point de contact O normale au plan \vec{x}

3 Outils mathématiques

3.1 Vecteurs

Bases

- $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{z} = \vec{y} \cdot \vec{z}$
- $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| = \|\vec{z}\| = 1$

— $\vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{z}$

Une base peut être représentée comme un repère et une composante rentrant \otimes ou sortant \odot du plan

Propriétés

— $v = v_x \vec{x} + v_y \vec{y} + v_z \vec{z} = 0$

— Produit scalaire

$$\begin{vmatrix} x_1 & | & x_2 \\ y_1 & \cdot & y_2 \\ \mathcal{B} & z_1 & | & z_2 \end{vmatrix} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

— $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

— $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

— $\vec{u} \cdot (\alpha \vec{v} + \beta \vec{w}) = \alpha \times \vec{u} \cdot \vec{v} + \beta \times \vec{u} \cdot \vec{w}$

— Produit vectoriel

$$\begin{vmatrix} x_1 & | & x_2 & | & y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ y_1 & \wedge & y_2 & = & z_1 x_2 - z_2 x_1 \\ \mathcal{B} & z_1 & | & z_2 & | & x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{vmatrix}$$

— $\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\vec{u}, \vec{v}) \times \vec{n}$

\vec{n} le vecteur normal à \vec{u} et \vec{v}

— $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$

— $\vec{u} \wedge (\alpha \vec{v} + \beta \vec{w}) = \alpha \times \vec{u} \wedge \vec{v} + \beta \times \vec{u} \wedge \vec{w}$

On retiendra pour les bases orthonormées directes

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{z} \\ \vec{y} \wedge \vec{z} = \vec{x} \\ \vec{z} \wedge \vec{x} = \vec{y} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{y} \wedge \vec{x} = -\vec{z} \\ \vec{z} \wedge \vec{y} = -\vec{x} \\ \vec{x} \wedge \vec{z} = -\vec{y} \end{array} \right.$$

On orientera les angles dans le sens direct (*méthode du tire-bouchon*)



Dérivations de vecteurs

Calcul de dérivées

Calcul de $\frac{d\vec{u}(t)}{dt} \Big|_{\mathcal{B}}$

— On exprime $\vec{u}(t)$ dans \mathcal{B}

— On dérive les différentes composantes par rapport au temps

Méthode

VECTEUR VITESSE DE ROTATION

$$\vec{\Omega}(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0) = \dot{\theta}_{1/0} \cdot \vec{\varrho}_0$$

— $\dot{\theta}_{1/0}$, la vitesse de rotation autour de $\vec{\varrho}_0$ de \mathcal{B}_1 par rapport à \mathcal{B}_0

$$\vec{\Omega}(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1) = -\vec{\Omega}(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_2)$$

$$\vec{\Omega}(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_0) = \vec{\Omega}(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1) + \vec{\Omega}(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)$$

— $\vec{\Omega}(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)$, le vecteur vitesse de rotation

$$\frac{d\vec{x}_1}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_0} = \vec{\Omega}(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0) \wedge \vec{x}_1$$

— $\vec{\Omega}(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)$, le vecteur vitesse de rotation

$$\frac{d\vec{u}(t)}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_0} = \frac{d\vec{u}(t)}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_1} + \vec{\Omega}(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0) \wedge \vec{u}(t)$$

$$\vec{V}(M/\mathcal{B}_k) = \frac{d\overrightarrow{O_k M(t)}}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_k} \quad \vec{\Gamma}(M/\mathcal{B}_k) = \frac{d\vec{V}(M/\mathcal{B}_k)}{dt} \Big|_{\mathcal{B}_k}$$

VECTEUR VITESSE D'ENTRAÎNEMENT

$\vec{V}(M \in \mathcal{B}_k/\mathcal{B}_i) = -\vec{V}(M \in \mathcal{B}_i/\mathcal{B}_k)$ $— \vec{V}(M \in \mathcal{B}_i/\mathcal{B}_j) = \vec{V}(M \in \mathcal{B}_i/\mathcal{B}_k) + \vec{V}(M \in \mathcal{B}_k/\mathcal{B}_j)$ $— \vec{V}(M \in \mathcal{B}_i/\mathcal{B}_j) = \vec{V}(M \notin \mathcal{B}_j) - \vec{V}(M \in \mathcal{B}_i)$	$— \vec{V}(X \in \mathcal{B}_1/\mathcal{B}_2)$, la vitesse du point X de \mathcal{B}_1 par rapport à \mathcal{B}_2
---	--

FORMULE DE VARIGNON

$— \vec{V}(M/\mathcal{B}_i) = \vec{V}(O_k/\mathcal{B}_i) + \overrightarrow{MO_k} \wedge \Omega(\mathcal{B}_k/\mathcal{B}_i) + \vec{V}(M/\mathcal{B}_k)$ $— \vec{V}(M \in \mathcal{S}_k/\mathcal{B}_i) = \vec{V}(O_k \in \mathcal{S}_k/\mathcal{B}_i) + \overrightarrow{MO_k} \wedge \Omega(\mathcal{B}_k/\mathcal{B}_i)$	
---	--

V Informatique

ÉLÉMENTS BASIQUES DE PYTHON

1 Éléments de programmation

1.1 Opérations

- Opérations usuelles
- % : modulo
- // : quotient
- ** : puissance

1.2 Type de données

La fonction `type()` permet de déterminer le **type** d'un argument

- Int
- Float
- Boolean
- String

1.3 Manipulation de variables

Affectations

- `a=b` : a prend la valeur de b
- Affectation multiple possible (`a1,a2=b1,b2`)
- `x+=a=x=x+a`

Tests

- == : égalité
- != : différence
- <= : inférieur ou égal

1.4 Fonctions usuelles

- `input("")`
- `print()`
- **Conditions**
 - `if a:`
 - `else:`
 - `elif a:`
- **Boucles**
 - `while condition:`
 - `for i in range(debut,fin+1,pas)`

1.5 Fonctions

- Fonctions prédefinies
 - `import` $x \rightarrow x.f$
 - `from x import` $f \rightarrow f$
 - `from x import` $f \rightarrow f$
- Fonctions personnalisées
 - `def` $a(arg1, arg2):$
 - `return` x
- Mini-fonctions
 - $f = \lambda x : x^{**} 2 \rightarrow f(2)$

1.6 Tableaux

Array

- Package `numpy`
- **Création d'un tableau** : $a = \text{array}([1, 2, 3, 4])$
- **Extraire une cellule** : $a[i]$
- **Slicing** : $a[i:j]$ extraction des cellules de i à $j-1$
- **Taille du tableau** : `len(a)`
- **Copie d'un tableau** : `copy(a)`

Listes

- **Création d'une liste** : $a = [1, 2, 3]$
- **Création d'une liste de n éléments** : $a = [x] * n$
- **Création d'une liste en extension** : $a = [k^{**} 2 \text{ for } k \text{ in range}(x, y, z) \text{ if } k \% 3 == 0]$
- **Extraire une cellule** : $a[i]$
- **Slicing** : $a[i:j]$ extraction des cellules de i à $j-1$
- **Taille de la liste** : `len(a)`
- **Copie d'une liste** : `copy(a)`

- **Ajout d'un élément** : `a.append(x)`
- **Insertion d'un élément x en position i** : `a.insert(i, x)`
- **Suppression du dernier terme** : `a.pop()`
- **Suppression du terme d'indice i** : `del a[i]`

Chaîne de caractères

- **Définition** : $a = "exp"$ ou $a = 'exp'$
- **Accès à un élément** : $a[i]$
- **Slicing tranche de i à $j-1$** : $a[i:j]$
- **Opérations** : addition, multiplication par un entier
- **Coupe de chaîne au niveau de x** : `a.split("x")`
- **Ajouter x entre les termes** : `'x'.join(a)`

1 Bases

- Un entier en base b noté $n = a_m \dots a_1 a_0_b$ s'écrit $n = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \dots + a_m b^m$ en base 10
- Pour coder un entier en base n on utilise des divisions euclidiennes successives

$$\begin{array}{r} 3 \ 2 \ 5 \mid 6 \\ 2 \ 5 \mid 5 \ 4 \quad \Rightarrow \quad 0 \mid 9 \\ 1 \mid \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 5 \ 4 \mid 6 \\ 3 \mid 1 \quad \Rightarrow \quad 1 \mid 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 1 \mid 6 \\ 1 \mid 0 \end{array} \Rightarrow \underline{1301}_6 = 325$$

- Le nombre de chiffres en base b de n vaut p ssi $b^{p-1} \leq n < b^p$

$$\Rightarrow \text{Le nombre de chiffres en base } b \text{ de } n \text{ vaut } 1 + \left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(b)} \right\rfloor$$

2 Binaire

```
def bin(n):
    t=[]
    while n>0:
        t=[n%2]+t
        n=n//2
    return t
```



- Dans le cas du binaire on peut additionner et multiplier en posant les opérations comme au CE2
 - Pour représenter les relatifs on code $n \in [-2^{n-1}, 2^{n-1} - 1]$:
- $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } m \geq 0 \text{ les bits de l'écriture binaire de } m \\ \text{Si } m < 0 \text{ les bits de l'écriture binaire de } 2^n - |m| \end{array} \right.$

Décodage par complément à 2

- Déterminer si l'entier est négatif (bit de poids fort égal à 1)
- On ramène le nombre en base 10
- On retranche si négatif 2^n

On se pose les questions suivantes

- **Terminaison** : Est ce que l'algorithme s'arrête Boucles while s'arrêtent
- **Correction** : Est-ce que l'algorithme est correct Valeur attendue obtenue
- **Complexité** : Est-ce que l'algorithme est efficace

1 Invariants de boucle

DEF: Un **invariant de boucle** est une propriété vérifiée à chaque itération de la boucle

Preuve d'un invariant de boucle

Méthode

- On considère l'invariant en fin d'itération
- On justifie par récurrence sur le numéro de l'itération

Méthode

Preuve de terminaison

- L'argument le plus courant est d'utiliser une suite strictement décroissante à valeur dans \mathbb{N}
⇒ Cette suite étant finie, l'algorithme s'arrête
- On pourra utiliser aussi l'invariant de boucle

Méthode

Preuve de la correction

- On utilise souvent l'invariant de boucle Propriété au sorti de la boucle
Il faudra donc choisir un invariant facile à démontrer et donnant facilement la correction

2 Complexité

DEF: On appelle **complexité temporelle** le nombre d'opérations élémentaires nécessitées par l'algorithme

- Les comparaisons
- Les opérations
- Les affectations

DEF: (u_n) est du même ordre que $(v_n)_{n \geq 0}$ si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$

Propriétés

Θ	1	$\ln(n)$	n	$n \ln(n)$	n^2	n^β $\beta > 1$	a^n $a > 1$
Complexité C_n	t constant	Logarithmique	Linéaire	Quasi-linéaire	Quadratique	Polynomiale	Exponentielle

On s'intéresse à l'ordre de grandeur de la complexité

On s'intéressera souvent à la complexité dans le meilleur pire des cas



DEF: La **complexité spatiale** est le nombre de positions mémoire nécessitées par l'algorithme

1 Utilisation de modules

```
python
import numpy #numpy.pi
import numpy as np #np.pi
from numpy import pi #pi
from numpy import * #pi
```

2 Gestion des fichiers

⚠ PYTHON réécrit sur le fichier d'origine ⇒ Sauvegarde impérative

```
python
from os import chdir
chdir("./...")
```

— Ouverture du fichier

```
python
fichier=open('donnees.txt','r')
```

Read	Write
'r'	'w'

```
python
t=fichier.readlines() #Sous forme de liste
L1=fichier.readline() #Ligne courante
```

```
python
fichier.write('chaine\n')
```

```
python
fichier.close()
```

⚠ '\n' indique la fin d'une ligne

Élimination des virgules dans des données

```
L2=L1.split(',',')
```



Il faudra toujours veiller à ouvrir le fichier dans le bon mode *Write ou Read*

3 Tracés graphiques

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

X=[k/100 for k in range(101)] #np.linspace(debut,fin,points)-> array
Y=[f(x) for x in X]
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```



Option du plot	Couleur	Épaisseur	Marqueur	Tracé	Légende
Commande	'red'	linewidth=	marker='o'	linestyle='dashed' ... pour des points	legend='f' plt.legend()

4 Matrices

- On utilise le type array du module numpy



```
plt.matshow(M,cmap='gray')
plt.colorbar() #Legende
```

5 Fichiers images

On peut utiliser le module *PIL* ou avec moins de possibilités *matplotlib*



```
tableau=plt.imread('chemin/fichier.png')#Tableau de dimension 3 pour
des images RGB et de dimension 1 en noir et blanc
plt.imshow(tableau)
plt.imsave('chemin/fichier.png',tableau)
```

1 Résolution d'équations

1.1 Zéros d'une fonction par dichotomie

On effectue une série de bisections sur le segment en restreignant l'intervalle d'étude au morceau contenant la solution

⚠ Il faudra adapter fonction à la fonction étudiée ⇒ Tableau de variation

```
def bissection (f ,a ,b ,eps):
    while b-a>eps:
        if f((a+b)/2)<0:
            a=(a+b)/2
        else:
            b=(a+b)/2
    return a
```



1.2 Zéros d'une fonction par la méthode de Newton

```
def newton(f ,df ,x0 ,eps):
    while f(x0-eps)>0:
        x0=x0-f(x0)/df(x0)
    return x0
```



On étudie la suite des points d'intersection des dérivées en $f(u_n)$: $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$
 Elle converge vers la solution de $f(x) = 0$

⚠ Il faudra adapter la condition d'arrêt à la fonction étudiée ⇒ Tableau de variation

1.3 Zéros d'une fonction par la fonction fsolve

Il faudra préciser une valeur de départ à la fonction

```
import scipy.optimize as sco
f=lambda x:np.exp(x)-1/3
sco.fsolve(f ,2)
```



```

import numpy as np
import scipy.optimize as sco
def F(v):
    return v[0]**2+v[1]**2-1, 3*v[0]+2*v[1]-1
sco.root(f,[0,0])
sol=sco.root(f,[0,0])
sol.x #Renvoie le tableau des solutions

```



On peut adapter le procédé à des fonctions vectorielles

2 Calcul intégral approché

2.1 Méthode des rectangles

On approche l'aire de la fonction par une suite de rectangles

$$\int_a^b f(t)dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

```

def rectangles(f,a,b,n):
    pas,s=(b-a)/n,0
    for i in range(n):
        s=s+f(a+k*pas)
    return (pas*s)

```



2.2 Méthode des trapèzes

On approche l'aire de la fonction par une suite de rectangles

$$\int_a^b f(t)dt - \frac{b-a}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} (f(a_k) + f(a_{k+1})) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

```

def trapezes(f,a,b,n):
    pas,s=(b-a)/n,0
    for k in range(1,n):
        s=s+f(a+k*pas)
    return (pas*s+pas*(f(a)+f(b))/2)

```



2.3 Méthode de Newton-Coates

```

import scipy as sci
sci.quad(f,inf,inf)

```



On peut aussi approximer la fonction par son polynôme interpolateur
La fonction revoit l'approximation et une majoration de l'erreur

3 Résolution approchée d'une équation différentielle

3.1 Ordre 1

On cherche à résoudre $y' = f(y, t)$

On approxime $y(t + \tau) \approx y(t) + \tau y'(t) = y(t) + \tau f(y(t), t)$

Par récurrence $y_{k+1} = y_k + \tau f(y_k, t_k)$ où $t_{k+1} = t_k + \tau$

```
python
def euler(f, t0, T0, y0, nbpoints):
    tau, T, Y = (T0 - t0) / (nbpoints - 1), np.linspace(t0, T0, nbpoints), [y0]
    for k in range(nbpoints - 1):
        Y.append(Y[k] + tau * f(T[k], Y[k]))
    plt.plot(T, Y, linewidth=2, marker='o', label=nbpoints)
    plt.legend(loc='lower right')
    plt.show()
```

Le programme précédent peut aussi être appliqué à des vecteurs mis sous forme array

```
python
def f(X):
    return np.array([-X[1], X[0]])
def euler(X0, t, n):
    res = np.zeros([2, n + 1])
    res[:, 0] = X0
    for i in range(1, n + 1):
        res[:, i] = res[:, i - 1] + (t / n) * f(res[:, i - 1])
    return res
```

3.2 Ordres supérieurs

On exprime l'équation $y^{(n)} = f(y, \dots, y^{(n-1)}, t)$ comme $Y = [y^{(0)}, \dots, y^{(n-1)}]^T = \Phi(Y, t)$

Exemple : $y'' = -\sin(y)$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. On a $\begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ -\sin(y) \end{pmatrix}$

```
python
def euler(T, n):
    Y, tau = [[1, 0]], T / (n - 1)
    for k in range(n - 1):
        [y, yp] = Y[-1]
        y, yp = y + tau * yp, yp - tau * np.sin(y)
        Y.append([y, yp])
    return Y

Y = euler(15, 10000)
t = np.linspace(0, 15, 10000)
y = [Y[k][0] for k in range(len(Y))]
```

```
plt.plot(t,y,'red ', linewidth=2)
plt.show()
```

3.3 Méthodes de Runge-Kutta

La méthode de Runge-Kutta est une méthode d'Euler affinée et est utilisée dans la fonction `odeint`

```
import numpy as np
import scipy.integrate as sci
import matplotlib.pyplot as plt

f=lambda y,t:np.sin(y**2)
T=np.linspace(0,7,1000)
Y=sci.odeint(f,0.25,T)
plt.plot(T,Y,'red ', linewidth=2)
```

1 Array

Module	<code>numpy</code>
Création d'un tableau	<code>t=array([[1,2,3],[4,5,6]],dtype=float)</code>
Accès à une case	<code>t[i1,i2]</code>
Dimensions	<code>t.shape()</code>
Remodeler	<code>t.reshape([n,p])</code>



Il est préférable de forcer le type de donnée

Opération	Code
Addition	<code>A+B</code>
Multiplication par a	<code>a*A</code>
Produit coeff par coeff	<code>A*B</code>
Produit matriciel	<code>dot(A,B)</code>
Inverse	<code>A**(-1)</code>

Nature	Code
Coeff $A_{1,2}$	<code>A[1,2]</code>
Ligne $i_{Tableau}$	<code>A[i,:]</code>
Ligne $i_{Matrice}$	<code>A[i:i+1,:]</code>
Colonne $i_{Tableau}$	<code>A[:,i]</code>
Colonne $i_{Matrice}$	<code>A[:,i:i+1]</code>
Sous matrice _{Ligne 1-2 Colonne 0-1}	<code>A[1:2,0:2]</code>



La copie traditionnelle d'un tableau ne fonctionne pas
 ⇒ On utilise `copy`

2 Outils Python de calcul matriciel

Type	Code
Matrice nulle	np.zeros([n,p])
Matrice de uns	np.ones([n,p])
Matrice identité	np.eye(n)
Matrice diagonale	np.zeros([a1, ..., an])

— On utilise np.concatenate((A,B),axis=) pour créer des matrices par blocs

Bibliothèque	numpy.linalg
Puissance	np.linalg.matrix_power(A,n)
Produit	np.dot(A,B)
Transposée	np.transpose(A)
Déterminant	np.linalg.det(A)
Rang	np.linalg.matrix_rank(A)
Inverse	np.linalg.inv(A)
Trace	np.trace(A)
Produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n	np.vdot(u,v)
Produit vectoriel	np.cross(u,v)
$AX = B$	np.linalg.solve(A,B)

3 Résolution d'un système de Cramer

On cherche à résoudre $MX = Y$ où M est la matrice augmentée de A

1. On écrit les fonctions relatives aux opérations élémentaires sur les lignes
2. On écrit une fonction échelonnant M
3. On écrit une fonction déterminant l'unique solution du système

```
import numpy as np
from numpy.polynomial import Polynomial as Poly
import matplotlib.pyplot as plt

def perm(A,i,j): #Permutation
    L=np.copy(A[i])
    A[i]=A[j]
    A[j]=L
```



```

A[j]=L

def trans(A,i,j,k):    #Transvection
    A[i]=A[i]+k*A[j]

def dilat(A,i,a):    #Dilatation
    A[i]=a*A[i]

def maxcolonne(A,i):
    ind=i
    for j in range(i+1,len(A)):
        if abs(A[j,i])>abs(A[ind,i]):
            ind=j
    return ind

def echelonner(A):
    for i in range(len(A)):
        perm(A,i,maxcolonne(A,i))
        for j in range(i+1,len(A)):
            trans(A,j,i,-A[j,i]/A[i,i])

def resolution(A):
    echelonner(A)
    for i in range(len(A)-1,-1,-1):
        dilat(A,i,1/A[i,i])
        for j in range(i-1,-1,-1):
            trans(A,j,i,-A[j,i])
    return A[:,len(A)]

```

 python

Démo

La complexité de l'algorithme est maximale si à l'étape i :

- 1 Permutation $\Rightarrow 2n$ opérations
- $n - i$ Transvections $\Rightarrow n + n(n - i)$ opérations

$$\text{D'où } \mathfrak{C} = \sum_{i=1}^{n-1} (2n + n + n(n - i)) = n \frac{(n-1)(n+6)}{2} = O(n^3)$$

1 Introduction et modèle relationnel

DEF: La gestion et l'accès à une base de données sont assurés par un ensemble de programmes qui constitue un **système de gestion de bases de données_{SGBD}**

- Architecture des serveurs

- Client-serveur : Les utilisateurs sont connectés au serveur

- Trois-tiers : Les utilisateurs sont connectés au serveur par un intermédiaire

DEF: Dans le modèle relationnel : la base de données est structurée en un nombre fini de **relations_{Tableaux}**

Relation	Tableau
Enregistrement	Ligne
Attribut	Nom des colonnes
Domaine	Type
Schéma relationnel	Ensemble de relations _{Attributs et Domaine}

DEF: On appelle **clé candidate** tout attribut ou ensemble d'attributs d'une relation permettant d'identifier chaque enregistrement de manière unique

On introduira souvent un identifiant

DEF: On appelle **clé primaire** d'une relation la clé candidate retenue

Si elle est utilisée comme attribut d'une autre relation, elle sera **extérieure** à celle-ci

2 Algèbre relationnelle

Opération	Notation	Explication
Réunion	$\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$	Réunion des enregistrements
Intersection	$\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$	Intersection des enregistrements
Privé	$\mathcal{R}_1 \setminus \mathcal{R}_2$	\mathcal{R}_1 privé des enregistrements de \mathcal{R}_2
Projection	$\pi[A_1, \dots, A_n](\mathcal{R}_1)$	Suppression des attributs absents de la liste
Sélection	$\sigma[C](\mathcal{R}_1)$	Suppression des enregistrements ne vérifiant pas C
Produit cartésien	$\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$	Toutes les combinaisons des enregistrements possibles
Jointure	$\mathcal{R}_1 \bowtie [C] \mathcal{R}_2$	Produit cartésien privé des enregistrements ne vérifiant pas C

3 SQL

Opération	Commande
Projection	<code>SELECT A1, ..., AN FROM R</code>
Ordonner	<code>ORDER BY ASC / DESC</code>
Sélection	<code>SELECT A1, ..., AN FROM R WHERE C</code>
Alias	<code>SELECT A AS A2 FROM R</code>
Jointure	<code>SELECT A1, ..., AN FROM R1 JOIN R2 ON C</code>
AutoJointure	<code>SELECT A1, ..., AN FROM R N1 JOIN R N2 ON C</code>
Appartenance à un attribut	<code>IN</code>
Union	<code>UNION</code>
Intersection	<code>INTERSECT</code>
Privation	<code>EXCEPT</code>



Lors d'une jointure, il ne faut surtout pas oublier d'attributs communs

Fonction d'agrégation <small>Calculs sur les attributs</small>	Résultat
<code>COUNT(*)</code>	Nombre de lignes de la relation
<code>COUNT(A)</code>	Nombre de lignes remplies dans A
<code>SUM(A)</code>	Somme de A
<code>AVG(A)</code>	Moyenne de A
<code>MAX(A)</code>	Maximum de A
<code>MIN(A)</code>	Minimum de A

- On les utilise en faisant des regroupements
`SELECT fonction, attribut(s) FROM relation GROUP BY attribut(s)`
- Si la condition ne porte pas sur les valeurs de la fonction, un `WHERE` peut être utilisé, sinon
`SELECT fonction, attribut(s) FROM relation GROUP BY attribut(s) HAVING condition`
- La variante `COUNT DISTINCT` renvoie le nombre d'enregistrements distincts
- On peut imbriquer plusieurs requêtes, souvent à l'aide de `WHERE` ou `HAVING`

Implémentation en Python

Librairie	<code>sqlite3</code>
Connexion à la base de données	<code>conn=sqlite3.connect('nom.db')</code>
Curseur	<code>c=conn.cursor()</code>
Exécution de la capsule	<code>c.execute('commande')</code>
Récupération du résultat	<code>print(c.fetchall())</code>

VI Lettres

1 Résumé

On se met à la place de l'auteur pour reformuler sa pensée

On place une barre « / » tout les 50 mots et on indique le nombre de mots à la fin

Travail préalable

- Identification de thèse, arguments, exemples
- Déterminer le mode de narration et la tonalité
- Repérer la structure
- Reformuler les idées importantes

Mise en forme

- On **reformule** :
 - Pas de citations
 - On ne reprend pas d'expressions
 - **Respect du mode de narration** du texte
- Mise en page :
 - On essaie de **garder la structure**
 - Alinéas
 - Titres d'œuvres soulignés

2 Dissertation

2.1 Enjeux

- Le corpus de textes représente la **doxa**
- Le sujet est en désaccord partiel avec la doxa : c'est la **para doxa**
- La problématique se pose par rapport au corpus :

« *Ne serait-ce pas paradoxalement, en considérant que c'est précisément parce qu'ils connaissent l'existence du jugement contenu par le sujet que les auteurs au programme mettent en scène une contradiction pour le combattre* »

2.2 Dialectique

- I. **Certes** : On confirme la pertinence du sujet par rapport au corpus
- II. **Mais** : On montre les limites de cette pertinence
- III. **Alors** : On corrige le sujet pour aboutir à une pertinence totale

2.3 Introduction

Marche à suivre

- Phrase d'accroche
- Citation du **sujet**
- **Analyse du sujet**
- **Enjeux** du sujet
- Confrontation aux **œuvres** (écart entre le sujet et les œuvres)
- **Problématique**
- Annonce du **plan**

1 Concours Mines-Ponts

Texte de réflexion contemporain d'une page

- Préparation : 30 min
- Passage : 30 min

1.1 Analyse ($\approx 6 \text{ min}$)

Introduction

- **Présenter** le texte (nom, ouvrage, auteur)
- Dégager le **thème**
- Formuler la **thèse**
- Dégager le **plan**

Analyse

Reformuler les **grandes idées** et expliciter les **procédés argumentatifs** sans trop citer le texte et sans donner son avis

1.2 Développement personnel ($\approx 12 \text{ min}$)

Exposer **son point de vue** sur l'un des aspects du texte digne d'intérêt

- Annoncer la **problématique** de son raisonnement
- Rapprocher la problématique du texte
- Annonce du **plan**

- Développement du type **dissertatif**
- Illustrer d'**exemples** de toute nature



Allusions aux œuvres des programmes interdites

2 Concours X

Texte de réflexion générale

- Préparation : 45 min
- Passage : 30 min

2.1 Résumé ($\approx 2 \text{ min}$)

Résumé proche de l'écrit

- **Raccourcir** le texte

- Reprise de la **structure**
- Reprise des **idées générales reformulées**
- Mise en valeur des **connecteurs**
- Respect strict de l'**énonciation**

2.2 Développement personnel ($\approx 12 \text{ min}$)

Mettre en relief le texte avec ses connaissances

- Approfondir sur des exemples issus de domaines variés



Allusions aux œuvres des programmes interdites

1 L'aventure

- L'aventure fait-elle partie de la vie ou est-elle une parenthèse dans l'existence ?
- Quel sens donner à l'aventure dans le chemin individuel ?
- Est-ce qu'on se perd ou est-ce qu'on se trouve dans l'aventure ?
- L'aventure est-elle indépendante du récit qu'on en fait ?

- Le voyage extraordinaire
 - Une parenthèse dans la vie *Décentrement psychologique et géographique*
 - Paradoxe entre **nécessité et contingence**
 - Un antidote à l'ennui
 - La rencontre
- Le merveilleux
 - La **mise en mots** *Le récit a posteriori*
 - La figure de l'aventurier *Entre singulier et universel*
 - Entremêlement d'**esthétique et éthique**
- L'aventure paradoxale
 - L'accomplissement de soi
 - L'aventure du quotidien
 - La vie entière est une aventure

2 L'aventure, l'ennui, le sérieux

2.1 Typologie de l'aventure

- La temporalisation de l'aventure
 - La durée *entre instant et intervalle*
 - Le futur *caractère amphibolique (certain/incertain), futurition, je-ne-sais-quoi*
« Ce qui est vécu et passionnément espéré dans l'aventure, c'est le surgissement de l'avenir »
 - L'instance *événement/avènement, contingence*
- Les trois types d'aventures
 - Mélange jeu-sérieux *esthétique-éthique, l'aventure dans l'entre deux (mélange)*
 - Enjeux des styles d'aventure

Aventure mortelle	Aventure esthétique	Aventure amoureuse
<ul style="list-style-type: none"> — Fin tragique — Non connaissance de l'avenir — Le risque est nécessaire à l'aventure 	<ul style="list-style-type: none"> — L'après-coup/contemplation — Le romanesque — Perception pratique et artistique 	<ul style="list-style-type: none"> — Les sentiments — Destins et destinée — Interruption du quotidien

- Pour vivre il faut être mortel et de mille manières vulnérable »
- « La mort est le précieux épice de l'aventure »
- « L'homme de l'aventure au contraire va vers les extrémités »
- L'aventure comme modernité et universalité
- L'homme devant l'aventure

- La tentation *fascination : horreur et attrait*
- L'engagement *Liée au risque*
« *Le commencement de l'aventure est donc un décret autocratique de notre liberté* »
- L'aventure comme système d'existence *aventurier* ou style de vie *aventureux*
- L'aventure dans le but d'être racontée
« *L'aventure peut être aussi au futur antérieur* »
- L'aventure comme parenthèse dans l'existence
« *L'aventure est une petite vie à l'intérieur de la grande, encastrée dans la grande vie ennuyeuse de la quotidienneté* »

2.2 Dire l'aventure

- Paradoxologie
 - Une pensée binaire *Un concept est défini par son contraire → L'aventure est dans le rapprochement des pôles*
« *style de vie* » ≠ « *système d'existence* »
 - Oscillations *Contradiction dans les volontés*
« *nolonté* »
 - Paradoxe-ambiguïté *Caractère ambigu de l'aventure*
« *L'avenir est certain et incertain* »
- Le *je-ne-sais-quoi*
 - L'amphibolie *Concepts matériels pour des phénomènes immatériels*
 - L'échec de la raison
 - L'innommable *néologismes, mots composés par traits d'union*
- Le *presque-rien*
 - L'entre deux
« *Mais cette entr'ouverture nous donne déjà l'entrevision de l'infini* »
 - La fluence *mouvement dans le texte*
 - Le devenir

2.3 Aventure et vision de l'homme

- Le miracle de la vie
 - Une coïncidence miraculeuse
« *La vie est l'ensemble des chances qui nous soustraient journallement à la mort* »
 - Le sens du pèlerinage *Il faut s'inscrire dans la temporalité*
 - Une limite absolue
« *La mort est au bout de toutes les avenues* »
- Créer sa destinée
 - Hasard et occasion
« *La liberté par laquelle l'homme modifie son propre sort* »
 - Le pari *Il est préférable de vivre l'aventure car on a rien à y perdre*
 - Différence entre destin *nécessité* et destinée *contingence*
- La lumière
 - Présence de Dieu
 - Rendre grâce
 - Le clair-obscur

L'aventure permet à chacun de saisir ce qui va advenir et de lui donner forme grâce au libre arbitre

3 L'odyssée

3.1 Une odyssée archétypale

- Une archétype de l'aventure
 - Le voyage *Mer=inconnu=danger*
 - Cicones *Encore humains*
 - Cap Malé *Départ du monde réel*
 - Lotophages *Drogues*
 - Cyclopes *Monstre, curiosité défaut d'Ulysse, ruse*
 - Eole *Incorrégibilité des hommes*
 - Lestrygones *Démésure*
 - Circé *Sorcière, femme fatale*
 - Morts *Mère, Devin Tirésias, Achille, Compagnon*
 - Circé *Conseils*
 - Sirènes *Tentation par la connaissance*
 - Charybde et Scylla *Ulysse à connaissance de la fin de certains de ses compagnons, mais assume*
 - Ile du soleil *Trouble de l'ordre divin, prévenus*
 - Calypso *7 ans*
 - Phéaciens *Ulysse arrive dépouillé, possibilité de former un nouveau foyer avec Nausicaa*
- La rencontre de l'altérité *Dieux, mortels, personnages au rôle changeant*
- La présence du merveilleux *magie, métamorphoses, prodiges, prophéties, enfers*
- Différents types d'aventures
 - L'errance *risque, douleur*
 - L'amour *Circé, Calypso, Nausicaa, et Pénélope ⇒ Ulysse vit des aventures au cours de son périple*
 - L'initiation *Mise à l'écart → Épreuves → Retour
« Il ne s'agit plus de te montrer enfant »*
- L'homme face à l'aventure
 - L'héroïsme épique *Élu des dieux, valeur guerrière, gloire*
 - Héros humain *Objectif rester en vie, plaisirs simples*
 - Le retour *Changement, reconstruction de l'homme ordinaire, anthropogenèse(fabrication de l'humain)*

3.2 Le plaisir de la parole

- Une épopée polyphonique
 - Multiples narrateurs *Narrateur cadre, récits enchâssés*
 - L'aède *Rapport au sacré, parole sociale et de plaisir*
 - Structure narrative *Télémachie-Station Phéacienne-Le retour à Ithaque*
- L'épopée en question
 - La fausse épopée d'Ulysse le Crétien
 - L'Iliade parodiée *Remise en question de modèle héroïque*
 - La parole des femmes
- Eloge de la parole
 - Les paroles ailées *Efficaces*
 - Le bon usage de la parole
 - Mensonge *Non condamné, bon et mauvais mensonges*

3.3 Aventure et vision de l'homme

- Les mortels et les dieux
 - Le sort *Tension déterminisme divin et choix (nécessité et contingence)*

- La piété *Rituels*
- Manifestations divines *Présents dans la vie des hommes*
- Le chaos et l'harmonie
 - Désordre *Dans la nature et parmi les hommes ⇒ Objectif : rétablir l'ordre*
 - Rétablir l'ordre
 - La musique
- Le sens de l'existence
 - Le bonheur domestique
 - Idéal de civilisation *Utopie*
 - Idéal grec : Ne pas dévier de son but, ne pas transgresser la mesure du monde, ne pas perdre son identité
 - La paix comme valeur suprême

4 Au cœur des ténèbres

4.1 Au cœur de l'aventure

- Vers l'intérieur
 - Le voyage *navigation, voyage finalement immobile*
 - La Tamise *Début et fin du récit*
 - Le continent *Moires-Médecin*
 - « *Je sentais que je devenais scientifiquement intéressant* »
 - Le voyage jusqu'au Congo
 - Le poste côtière *horreur coloniale, bosquet de la mort*
 - Le poste central
 - « *Peut-être était-il entièrement creux* »
 - Cabane de l'Arlequin
 - Attaque indigène
 - Poste intérieur *Kurtz*
 - « *Si la pureté absolue, sans calcul, sans côté pratique de l'esprit d'aventure avait jamais gouverné un être humain c'était ce garçon. Je lui enviais presque cette modeste et claire flamme* »
 - Voyage retour *Marlow changé*
 - La rencontre de l'altérité *Noirs-Anticolonialisme-Blancs-Arlequin-Kurtz-Multiples rencontres*
 - La déréalisation empirique *L'aventure comme apprentissage*
- Les différentes formes d'aventure
 - L'aventure mortelle *Mort omniprésente-Banalisation de la mort-Risque physique et moral*
 - L'attente paradoxale *Vérité dans l'attente*
 - L'aventure mystique *Quête de la vérité*
- L'homme face à l'aventure
 - Tentation et fascination *Serpent-Limites morales*
 - « *Fascination de l'abominable* »
 - « *Son besoin c'était d'exister, et d'aller de l'avant au plus grand risque possible* »
 - Marlow et Kurtz *Motif de l'homme remarquable-Le couple-La fidélité à Kurtz*
 - Il était écrit que je resterais fidèle au cauchemar de mon choix*
 - Le retour *Court-Transformation morale*

4.2 Les aventures du récit

- Oralité et curalité
- Les orateurs *Marlow-Récit cadre-Kurtz* « *La force folle de ses mots* »
- L'auditoire *Incarnent le fonctionnement de l'Angleterre victorienne-Captif*

- Structure *Récit cadre-Récit enchâssé-Récit spéculaire (Afrique-Angleterre)*
- Le récit en question
 - Le difficile partage *Secret professionnel-Distanciation*
« *C'est le pire d'essayer de raconter* »
 - Le dangereux plaisir du récit
« *Le dangereux pouvoir de l'éloquence* »
 - Le cri *Description meilleure-La parole ne peut définir le réel*
« *Mieux valait son cri bien mieux* »
- Axiologie de la parole
 - La haine du mensonge *Mensonge à la promise dédramatisé*
 - Le livre et la lecture *Livre marin de l'Arlequin-Équipement pour l'aventure*
« *De cesser de lire s'était comme m'arracher à une vieille et solide amitié* »
 - Le sens comme une coquille *Le sens enveloppe la vérité-Le texte ne peut qu'éclaircir*

4.3 Aventure et vision de l'homme

- Les fausses lumières de l'occident
- Imposture philanthropique *Anticolonialisme-Religion-Inversion du motif traditionnel*
« *L'imposture philanthropique de toute l'entreprise* »
- Les sphères séparées *Critique-Hommes et femmes séparées-Mensonge final*
« *C'est étrange à quel point les femmes sont sans contact avec le vrai* »
- L'aveuglement de l'Europe *Tableau de Kurtz=Lumières aveugles ≠ Rôle de Kurtz*
- Une humanité ténébreuse
 - Les démons de l'humanité
 - « *J'ai vu le démon de la violence, celui de la convoitise, celui du désir* »
 - « *Démon de la sottise rapace et sans pitié* »
 - Les hommes creux *Sans morale*
« *Peut-être étaient-ils entièrement creux* »
 - L'impossible salut *Marlow survit-Kurtz meurt*
- Échapper au pire
 - Les vertus du travail
 - « *Ce qui nous sauve c'est l'efficacité* »
 - « *Je n'aime pas le travail, personne ne l'aime, mais j'aime ce que le travail recèle, la chance de se trouver* »
 - Se connaître soi-même
 - « *Le plus q'uon puisse espérer c'est quelque connaissance de soi-même* »
 - « *C'est une drôle de chose que la vie, ce mystérieux arrangement d'une logique sans merci pour un dessein futile* »
 - La fonction de l'expérience
 - « *On reçoit parfois un tel éclair de révélation* »

5 Citations sur l'aventure

- « *Le nomadisme est la meilleure réponse à l'échappée du temps* » (TESSON)
- « *Je rentrais avec le sentiment d'avoir vécu une vie entière* » (TESSON)
- « *Il se peut que la vie dans son ensemble apparaisse comme une aventure* » (SIMMEL)

VII Deutsch

Méthode

Introduction

- Accroche *Actualité, culture générale*
- Présentation du document/source *Orientation politique*
- Thème général
- Plan de l'oral
 - « *Zuerst werde ich den Text erläutern, ihn anschließend kommentieren* »

Méthode

Résumé

- Structure du texte *Résumé bref de chaque partie*
- Résumé du texte avec reformulation

Méthode

Commentaire

- Prolonger des points de réflexion du journaliste *Causes-conséquences, évolution, exemples*
- Prendre position par rapport à l'article

Exemple

Idées pour le commentaire

- Réactions personnelles
- Contexte
- Exemples
- Citation
- Critiquer & Justifier
- Parallèles
- Format du document
- Généralisation

Méthode

Conclusion

- Résumé bref du contenu du texte *Résumé*
- Résumé bref de l'enjeu du texte *Commentaire*
- Élargissement sur un thème voisin



L'approche doit être totalement objective *faits et points de vue*

Plan de la synthèse

- Titre descriptif *doit résumer le thème*
- Introduction
 - Accroche *Actualité, contexte*
 - Présentation des documents *nature*
 - Problématique générale
 - Plan
- Développement
 - Deux ou trois parties
 - Articulé autour de liens logiques entre les idées
 - Référence au texte sans longues citations
- Conclusion *Bilan*

Idées de plans

- Avantages - Inconvénients
- Problème - Causes - Conséquences *Solutions*



Il est important de confronter les documents

- Idées qui se complètent, se renforcent, s'opposent

On articule l'argumentation autour des liens logiques entre les documents



On ne commenterà pas le style des documents

VIII English

Introduction

- **Amorce**
- **Présentation** : « *This type from source attempts to give grounds to thème* »
- **Transition** : « *Let's start off with a summary* »

Synthèse

- Points principaux du document reformulés *Exemples du document - Liens logiques*

Commentaire

- **Transition** : « *I shall now comment upon the type* »
Il faut si possible justifier le plan du commentaire qui doit suivre
- **Annonce du plan** : « *I would like to dwell on some aspects, which, I think are worth commenting on* »
Le plan est annoncé sous forme de questions
- On annonce d'abord pour chaque point idée générale puis exemples

Idées pour le commentaire

- Réactions personnelles
- Contexte
- Exemples
- Citation
- Critiquer & Justifier
- Parallèles
- Format du document
- Généralisation

Conclusion

- **Résumé du débat** *Résumé et commentaire* : « *To put in a nutshell* »
- Ouverture *Parallèle ou réflexion personnelle*
- « *Thanks for listening* »

