

ПЕСОЧНАЯ МОДЕЛЬ

Никита Калинин*

5 марта 2024 г.

определение обвала

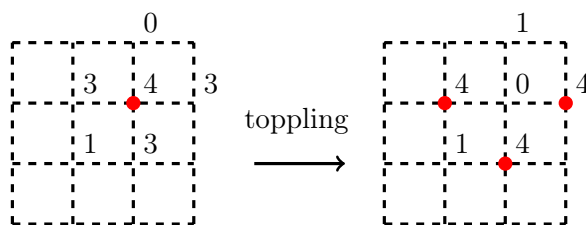


Рис. 1: Вершина на левом рисунке, помеченная жирной точкой, была нестабильной. После того, как мы сделали в ней обвал, три соседние вершины стали нестабильными.

убедитесь в этом экспериментально

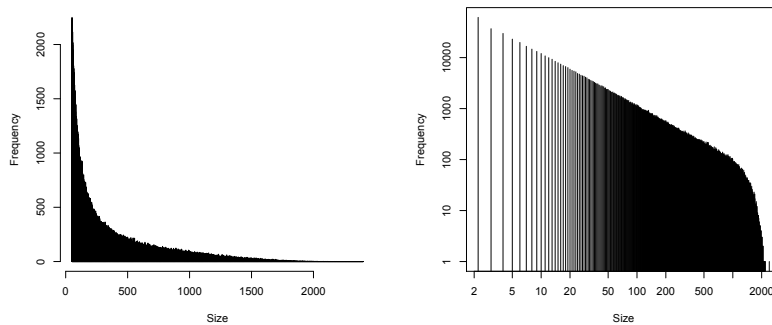


Рис. 2: Гистограмма степенного распределения на обычной шкале (слева) и на двойной логарифмической шкале (справа).

* Основано на лекциях автора на школе "Современная математика" в Дубне, июль 2017, самая актуальная версия лежит на <http://mathcenter.spb.ru/nikaan/misc/draft-rus.pdf>

”Мой вывод из всех этих примеров состоит в том, что пора вернуться к элементарным объектам экспериментальной математики в преподавании студентам трудных теорий современной математики”

В.И. Арнольд, Экспериментальная математика.

Эксперименты позволяют догадаться до правильного ответа и открыть неожиданные закономерности. В этой брошюре описывается *песочная модель*, определение которой занимает полстраницы, код, вычисляющий её динамику, занимает максимум пару экранов, но *основные гипотезы в области песочной модели до сих пор не доказаны*.

Читатель увидит упражнения (автор умеет их решать), упражнения со звёздочкой (требующие размышлений), упражнения с двумя звёздочками (зачастую самостоятельные научные результаты, опубликованные в научных журналах) и *открытые вопросы* (автор не умеет на них отвечать, возможно, это неправильные вопросы и нужно выбрать другую точку зрения). Если не получается решить задачу, поймите её условие и пользуйтесь ей как известным утверждением при решении последующих задач.

Вариант прочтения: запрограммируйте модель и получите все феномены из задач экспериментально, и лишь потом доказывайте. На полях можно встретить *комментарии* – и мы рекомендуем читателю писать на полях свои комментарии, ориентироваться на предложенные задачи и открытые вопросы, но не только – задавайте свои вопросы о песочной модели, пробуйте на них отвечать!

... logarithmic plots are a device of the devil.
Charles Francis Richter

Можно ли предсказать землетрясение или обвал валют? Очень сложно, но известно, что частота землетрясений обратно пропорциональна их силе: в середине XX века американские сейсмологи Гутенберг и Рихтер показали, что зависимость между силой (энергией) и количеством землетрясений в определенном регионе описывается степенным законом, т.е. на *двойной логарифмической шкале* эта зависимость имеет форму прямой (см. Рис. 2). Основная сложность была, конечно, в экспериментальном определении силы землетрясения – энергии, высвободившейся во время землетрясения. Степенные законы появляются в физике повсюду, например, вблизи фазовых переходов, и являются признаком нахождения системы в критическом состоянии.

Система находится в критическом состоянии, если даже небольшое возмущение может привести к глобальным изменениям. Таковы, например, любые фазовые переходы: в воде, охлажденной до нуля градусов, один центр кристаллизации быстро разрастается до большого кластера.

Существуют системы, приводящие сами себя в состояние, близкое к критическому. Показательный пример — землетрясения. Если для замерзания воды необходимо подобрать определенные температуру и давление, то в случае землетрясений никаких специальных параметров нет. Постоянное и медленное движение тектонических плит приводит к накоплению напряжения, но в какой момент произойдет землетрясение, предсказать практически невозможно. Однако частота землетрясений описывается удивительно просто – степенным законом.

Явления, которые обладают подобным признаком позднее были обнаружены в геофизике, космологии, экономике, теории управления рисками и других областях. Все они могут быть описаны в рамках теории самоорганизующейся критичности (*self-organized criticality*).

Концепцию самоорганизующейся критичности предложили Бэк, Тэнг и Висенфелд в 1987 году. В своей работе они описали систему, ставшую классической моделью самоорганизующейся критичности: представьте квадратную сетку, в каждом узле которой лежат песчинки. На сетку равномерно падают новые песчинки, в случайном узел. По определению, если в каждом узле не более трёх песчинок, система находится в стабильном состоянии. Но как только в один из узлов падает четвертая песчинка, происходит обвал (см. Рис. 1): четыре песчинки из этого узла перераспределяются на соседние узлы, это может вызвать обвалы в них, потом в их соседях... Обвалы будут лавинообразно происходить до тех пор, пока система вновь не вернется в равновесное состояние. Главное наблюдение физиков, ради

так и появилась
шкала Рихтера для
землетрясений

там ещё ренормализация и критические экспоненты

а здесь комментария нет. напишите свой! да, ручкой по бумаге. поля для этого и предназначены

определение песочной модели

до физиков похожая модель появилась в изучении вырождения дивизоров, и в комбинаторике

которого они и придумали эту модель, состояло в том, что размер обвалившейся области подчиняется степенному распределению.

С момента своего появления более 30 лет назад, идеи самоорганизующейся критичности стали популярны и оказали значительное влияние на развитие многих областей наук. Нобелевский лауреат Фил Андерсон в своей знаменитой статье “*More is different*” писал: “В XXI веке одна из происходящих революций — это конструкция обобщений, перемешивающих иерархии, и дающих инвариантность при ремасштабировании. Первое, соответственно, это спонтанное нарушение симметрии, второе — самоорганизующаяся критичность.”

указанную статью
лучше прочитать
целиком самостоятельно

Песочная модель иллюстрирует поведение критических систем исключительно на феноменологическом уровне. С её помощью нельзя ни промоделировать землетрясение, ни предсказать поведение настоящей кучи песка.

*Скажи мне, чертежник пустыни,
Арабских песков геометр,
Ужели безудержность линий
Сильнее, чем дующий ветер?
— Меня не касается трепет
Его иудейских забот —
Он опыт из лепета лепит
И лепет из опыта пьёт...
О.Э. Мандельштам, 11.1933-01.1934*

Главные открытые проблемы

Изучение раздела математики можно уподобить походу – со всеми его сложностями, плохой или хорошей погодой, удачами, потерей маршрута и красивыми видами. Полезно иметь в виду вершину, к которой мы идём – в случае математики это может быть открытая проблема, на решение которой и направлены попытки предыдущих путешественников, по чьим следам мы идём.

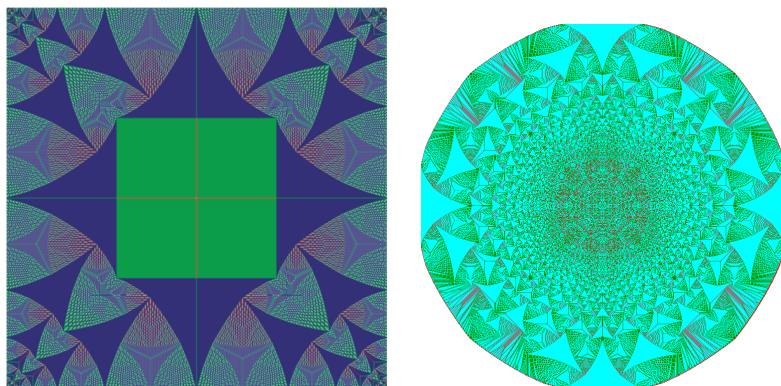


Рис. 3: Слева: так выглядит единица песочной группы для большого квадрата (и стандартной квадратной решётки). Докажите про неё хоть что-нибудь. Справа: так выглядит $(n\delta_{(0,0)})^\circ$ (тоже для квадратной решётки). Найдите форму ограничивающей кривой. Это двенадцатиугольник? Как описать паттерны на фрактального вида треугольных областях для других решёток, скажем, сделанных из треугольников или шестиугольников?

На квадратной решётке паттерны на треугольных областях описываются с помощью кругов Аполлония! Интересная задача – найти единицу для других графов, которые получаются как пересечение выпуклой области с \mathbb{Z}^2 , понять как картинка зависит от области. Вернитесь к этим картинкам после того, как освоите базовые понятия песочных моделей.

см. замечательную брошюру А.А. Кириллова "Повесть о двух фракталах"

1 Вводные понятия

Песочная модель: определения

Рассмотрим граф \mathbb{Z}^2 ; его вершины — это точки плоскости (i, j) , у которых обе координаты целочисленны, т.е. $i, j \in \mathbb{Z}$. Мы соединяем две вершины

граф на котором живёт песок

ребром, если расстояние между ними равно одному. Степень каждой вершины, тем самым, равна четырём. Все графы, рассматриваемые в этой заметке, будут подграфами \mathbb{Z}^2 , если не оговорено противное.

Пусть Γ — граф, являющийся пересечением \mathbb{Z}^2 и квадрата $[0, N] \times [0, N]$. Назовём *состоянием* функцию $\phi : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ на вершинах графа Γ . Мы интерпретируем $\phi(i, j)$ как число песчинок (или фишек) в точке $(i, j) \in \Gamma$. Если $\phi(i_0, j_0) \geq 4$, мы разрешаем сделать *обвал* в точке (i_0, j_0) и называем эту точку *нестабильной*. В результате обвала в (i_0, j_0) получается новое состояние ϕ' по следующим правилам:

$$\phi'(i, j) = \begin{cases} \phi(i, j) - 4 & \text{если } (i, j) = (i_0, j_0); \\ \phi(i, j) + 1 & \text{если } (i, j) \text{ и } (i_0, j_0) \text{ соседи}; \\ \phi(i, j) & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Обвал является перераспределением песчинок: каждая из четырёх соседних с (i_0, j_0) вершин \mathbb{Z}^2 забирает из точки (i_0, j_0) одну песчинку. Песок, выпадающий за пределы графа Γ , пропадает. Эквивалентно, можно думать, что все вершины из $\mathbb{Z}^2 \setminus \Gamma$ являются *стоками*, и в стоках мы запрещаем выполнять обвалы. Процесс выполнения обвалов, пока это возможно, называется *релаксацией*. Состояние ϕ называется *стабильным* если $\phi(i, j) \leq 3$ для всех $(i, j) \in \Gamma$, т.е. ни в одной точке обвал произойти не может. На Рис. 1 показано как один обвал может спровоцировать новые обвалы.

определение обвала

релаксация, стабильное состояние

Корректность определений

1. На Рис. 1 указаны значения ϕ в точках $(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), \dots$. Выберите произвольные натуральные значения для ϕ в остальных вершинах графа и произведите релаксацию.
2. Пусть ϕ — любое состояние на $\Gamma = [0, N]^2 \cap \mathbb{Z}^2$. Докажите, что в какой бы последовательности мы не выполняли обвалы в нестабильных вершинах графа, процесс этот будет конечным и остановится на стабильном состоянии.
3. Докажите, что любые две релаксации (как последовательности вершин где происходят обвалы) одного состояния, отличаются перестановкой порядка операций. Иными словами: для любой вершины v число обвалов в v совпадает в обеих релаксациях. Тем самым результат релаксации не зависит от выбранного порядка выполнения обвалов. Результат релаксации состояния ϕ мы обозначим ϕ° .

не решая задач, вы ничего никогда не поймёте

из-за этого свойства модель называется абелевой (abelian sandpile)

Дискретным лапласианом функции $F : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ называется функция ΔF , определяемая как

$$(\Delta F)(x, y) = F(x + 1, y) + F(x - 1, y) + F(x, y + 1) + F(x, y - 1) - 4F(x, y).$$

Для данного состояния ϕ проведём любую релаксацию, и в каждой точке $v \in \Gamma$ мы посчитаем число обвалов (как мы знаем, оно не зависит от выбранной релаксации), обозначим это число $F(v)$. Таким образом, мы получили функцию функцию обвалов $F : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

4. Докажите, что $\phi + \Delta F \leq 3$ в каждой точке.

5*. Докажите, что функция обвалов F для состояния ϕ удовлетворяет следующему свойству. Рассмотрим множество A функций $G : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ удовлетворяющих $\phi + \Delta G \leq 3$ (поточечно). Тогда для любой вершины $v \in \Gamma$ имеем

$$F(v) = \min\{G(v) | G \in A\}.$$

6. Докажите, что если для любой вершины v графа имеем $\phi(v) \geq \psi(v)$, то во всех точках, где произойдёт обвал во время релаксации ψ , произойдёт обвал и в релаксации ϕ .

7. Определите песочную модель на произвольном конечном графе. *Подсказка:* мы должны предположить, что хотя бы одна из вершин графа является *стоком*, т.е. мы запрещаем делать обвалы в этой вершине, и песок, попадающий в неё, попросту исчезает. В примере $\Gamma = [0, N]^3 \cap \mathbb{Z}^2$ мы можем считать, что мы добавили вершину s , сток, и соединили её рёбрами со всеми граничными вершинами Γ , причём с угловыми вершинами мы соединили s двумя рёбрами.

8. Докажите что на конечном связном графе с хотя бы одним стоком любая релаксация заканчивается за конечное число шагов.

непростая задача,
но очень полезная

можно ли определить модель, где будет два типа песчинок и правила обвалов будут зависеть от того, сколько в данной вершине песчинок и какого типа?

Распределения, подчиняющиеся степенным законам

Кратко напомним что такое функция распределения. Предположим, что у нас есть бесконечная последовательность вещественных чисел $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ больших 1. Рассмотрим первые n из них.

$$\text{Пусть } F_n(y) = \frac{\text{количество индексов } i \leq n, \text{ таких, что } x_i \leq y}{n}.$$

Таким образом, $F_n(x)$ это доля тех индексов, среди первых n , которые не больше y . Определим $F(y) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ — *функцию распределения* — как предел функций F_n , когда n стремится к бесконечности (если этот предел существует). Мы говорим, что X *подчиняется степенному закону* на интервале $[1, A]$, если $F(y) = \alpha y^\beta$ для некоторых вещественных констант α, β .

функция распределения

степенной закон — это $F(y) = \alpha y^\beta$

9. Докажите, что если X подчиняется степенному закону (как это определено выше) и все $x_i \in [1, A]$, то $\alpha A^\beta = 1$.

Обычно говорят, что распределение подчиняется степенному закону, если его гистограмма на двойной логарифмической шкале (Рис. 2) является прямой на достаточно большой части.

Появление степенных законов в песочной модели.

Начнём с произвольного состояния ϕ_0 на графе $\Gamma = [0, N]^2 \cap \mathbb{Z}^2$. Добавим одну песчинку в случайно выбранную вершину $p_0 \in \Gamma$ и произведём релаксацию. Полученное в результате релаксации состояние обозначим как ϕ_1 , т.е. $\phi_1 = (\phi_0 + \delta_{p_0})^\circ$ где δ_p — это функция, равная 1 в p и 0 в остальных вершинах.

все вершины имеют одинаковую вероятность быть выбранными.

Повторим операцию, добавляя песчинки в случайно выбранные вершины p_1, p_2, \dots , и производя релаксацию после каждого добавления, $\phi_{k+1} = (\phi_k + \delta_{p_k})^\circ$. Это как раз динамика, рассмотренная, рассмотренная Бэком, Тэнгом и Висенфелдом.

Обозначим за h_k размер подножия лавины, вызванной добавлением k -ой песчинки, т.е. число вершин где случился хотя бы один обвал в процессе релаксации состояния $\phi_k + \delta_{p_k}$. Оказывается, что последовательность h_k удовлетворяет степенному закону (это легко проверить на компьютере, но частичное доказательство появилось только в этом году). Объём лавины (то есть общее число обвалов во время лавины) тоже удовлетворяет степенному закону.

это не совсем правда, поэтому сделайте упражнение.

10. На любом языке программирования смоделируйте песочную модель на квадрате 50×50 . Во все вершины графа положите по три песчинки. Бросьте одну за одной $N = 2\,000\,000$ песчинок, как описано выше, получится последовательность размеров лавин

$$H = \{h_1, h_2, \dots, h_N\}.$$

Нарисуйте гистограмму для последовательности H (например, в языке R, получится Рисунок 2, слева). Нарисуйте гистограмму для последовательности

$$\ln H = \{\ln h_1, \ln h_2, \dots, \ln h_N\}$$

(предварительно выкинув нули из H), и используйте логарифмическую шкалу для y -координаты (Рисунок 2, справа). Убедитесь, что вид второй гистограммы означает что последовательность H удовлетворяет степенному закону, если из неё предварительно удалить все очень большие ($h_i \geq 1500$) и все маленькие лавины ($h_i \leq 50$), иначе гистограмма совсем вжимается в угол и ничего не видно.

Песочная группа

Во время вышеописанного процесса добавления песчинки в случайную вершину и последующей релаксации только некоторые (так называемые *возвратные*) состояния имеют вероятность (причём одинаковую!) получиться на сколь угодно большом шагу. Мы дадим основную идею доказательства этого факта.

Определим операцию $+$ на состояниях, $(\phi + \psi) = (\phi + \psi)^\circ$. Иначе говоря, мы суммируем количества песчинок обоих состояний в каждой вершине и выполняем релаксацию полученного состояния. Множество возвратных(!) состояний образуют группу (*песочную группу* графа Γ) относительно этой операции. Мы подойдём к этому вопросу с нескольких сторон. Если не получится разобраться, читайте внятное математическое введение в песочные модели в прекрасно записанных лекциях [6] или учебник [5].

лекции на английском

В направлении конечного коммутативного моноида

Конечным коммутативным моноидом называется конечное множество M с операцией $\oplus : M \times M \rightarrow M$ (мы записываем это как $(a, b) \rightarrow a \oplus b$), которая удовлетворяет следующим свойствам:

- $a \oplus b = b \oplus a$ для всех $a, b \in M$,
- $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ для всех $a, b, c \in M$,
- наличествует тождественный элемент e , то есть $a \oplus e = a$ для всех a .

бывают ли бесконечные коммутативные моноиды?

Основной пример: **песочный моноид**. Рассмотрим множество **всех** стабильных (то есть невозможно сделать обвал ни в одной вершине) состояний песочной модели. \oplus будет поточечным сложением с последующей релаксацией. e будет элементом, который тождественно равен нулю во всех вершинах графа.

Идеалом коммутативного моноида M называется любое такое непустое подмножество $I \subset M$, что $\forall x \in M, x \oplus I \subset I$, то есть $\{x + a | a \in I\} \subset I$.

11. Докажите, что пересечение а) двух, б) любого количества идеалов – идеал.

12. Докажите, что *минимальный* идеал I в M , то есть пересечение **всех** идеалов M – это группа. Подсказка: сначала докажите, что для любых $a, b \in I$ существует такие $x, y \in I$ что $ax = b, by = a$.

Состояние ϕ называется *возвратным*, если для любого состояния ψ существует такое состояние ψ' что $\phi = (\psi + \psi')^\circ$.

13*. Докажите, что множество возвратных состояний песочной модели – это минимальный идеал песочного моноида.

другими словами, мы окажемся в ϕ с ненулевой вероятностью если к любому состоянию начальному состоянию ψ будем добавлять песчинки в случайные вершины

14. Докажите, что возвратные состояния образуют группу относительно сложения.

Эта группа называется **песочной группой** графа Γ .

Возвратные состояния как не содержащие запрещённых подконфигураций

15. Докажите, что если состояние ϕ содержит две соседние вершины с нулём песчинок в каждой, то оно не возвратное.

16. Докажите, что если состояние ϕ содержит вершину с одной песчинкой, у которой есть два соседа с нулём песчинок, то оно не возвратное.

17. Докажите, что если состояние ϕ можно получить как $(3 + \psi)^\circ$ для некоторого неотрицательного ψ , то для любого состояния γ существует неотрицательное ψ такое что $\phi = (\gamma + \psi)^\circ$.

Запрещённая конфигурацией состояния ϕ мы называем подграф $D \subset \Gamma$, в котором для любой вершины v выполняется $\phi(v) < \deg_D(v)$, то есть число песчинок в v строго меньше степени v в D .

18. Две соседние вершины, в обеих ноль песчинок – это запрещённая конфигурация.

19*. Докажите, что возвратное состояние не может содержать запрещённой конфигурации.

20*. Покажите, что если к возвратному состоянию добавить одну песчинку, то подножие спровоцированной ей лавины односвязно, то есть нельзя найти такой замкнутый путь в графе, что он лежит в подножии лавины, а какая-то вершина внутри области, ограниченной этим путём – в подножии лавины не лежит.

остановитесь на миг и попробуйте описать **все** запретные (как вот эти две) конфигурации для возвратных состояний.

Единица Крёйца

Единицей Крёйца β мы назовём состояние, которое в каждой вершине равно количеству рёбер из неё в стоки.

Пример. Для графа $\Gamma = ([0, n] \times [0, m]) \cap \mathbb{Z}^2$, пусть его граница $\partial\Gamma$ (она же множество стоков) это объединение сторон прямоугольника. Таким образом, β равна 2 в углах $\Gamma \setminus \partial\Gamma$, равна 1 вдоль сторон $\Gamma \setminus \partial\Gamma$ и нулю иначе. Формулами это можно так записать:

$$\beta(1, 1) = \beta(n-1, 1) = \beta(1, m-1) = \beta(n-1, m-1) = 2, \beta(1, i) = \beta(n-1, i) = 1$$

для $1 < i < m-1$, затем

$$\beta(j, 1) = \beta(j, m-1) = 1$$

для $1 < j < n-1$ и $\beta(i, j) = 0$ иначе.

21. а) Покажите, что если ϕ стабильно, то во время релаксации $\phi + \beta$ в каждой вершине происходит не более одного обвала. б) Если во время релаксации $\phi + \beta$ в каждой вершине произошёл ровно один обвал, то результатом релаксации является изначальное состояние ϕ .

22*. Докажите, что для состояния ϕ выполнено $(\phi + \beta)^\circ = \phi$ тогда и только тогда, когда ϕ не содержит запрещённых конфигураций. Подсказка: множество вершин, где во время релаксации $\phi + \beta$ не случилось ни одного обвала – запрещённая конфигурация в ϕ .

23. Докажите, что для состояния ϕ выполнено $(\phi + \beta)^\circ = \phi$ тогда и только тогда, когда ϕ – возвратное.

Заметьте, что из последних двух упражнений следует, что состояние возвратное тогда и только тогда, когда оно не содержит запрещённых конфигураций.

24. Докажите, что $\phi = \langle 2 \rangle$ (то есть состояние, которое во всех вершинах имеет две песчинки) – возвратное состояние.

2 В направлении единицы

25*. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{Z}^2$ конечное множество. Рассмотрим песочную динамику на Γ (все вершины из $\mathbb{Z}^2 \setminus \Gamma$ будем считать стоками). Пусть ϕ будет состоянием, которое во всех точках равно 8. Докажите, что $(\phi - \phi^\circ)^\circ$ является нейтральным элементом (единицей) в песочной группе графа Γ .

Добавлению песчинки в точку и последующая релаксация соответствуют некой образующей песочной группы графа. Таким образом, шаг нашего случайного процесса заключается в том, что мы выбираем случайную образующую группы и прибавляем к текущему элементу.

Естественно, это приводит к равномерному распределению на элементах группы. Далее, оказывается, что количество элементов песочной группы равно количеству остовных деревьев графа Γ , и это осуществляется некой естественной биекцией. Но даже нейтральный элемент этой группы¹ выглядит далеко не тривиально, см. Рис. 4.

Открытая проблема. Покажите, что единица песочной группы для квадрата выглядит именно так. Или хотя бы что в центре у неё есть квадрат из двоек (и иногда вертикальная и горизонтальная линия из единиц).

Рассмотрим другой граф G , в котором вершины будут целыми точками, \mathbb{Z}^2 вида $(k + 2l, 2k + l)$ и $(k + 2l + 1, 2k + l + 1)$ для всех $k, l \in \mathbb{Z}^2$, но степень каждой вершины будет три. А именно, точку $(i, j) \in G$ вида $(k + 2l, 2k + l)$ соединим рёбрами с точками $(i - 1, j)$, $(i, j - 1)$, $(i + 1, j + 1)$, а точку (i, j)

используйте сейчас как рецепт для вычисления нейтрального элемента группы, а как доказывать – скоро станет ясно, читайте дальше

¹и это не состояние $\phi \equiv 0$ так как мы никогда не сможем его получить из ненулевого состояния, и тем самым $\phi \equiv 0$ не является возвратным состоянием.

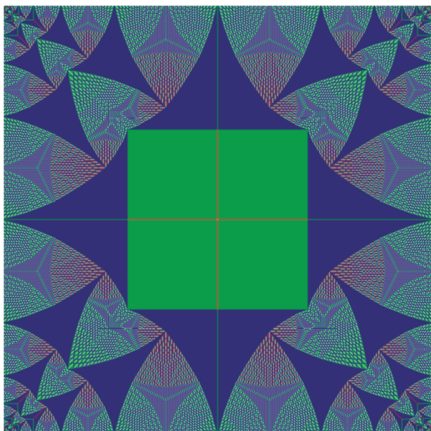
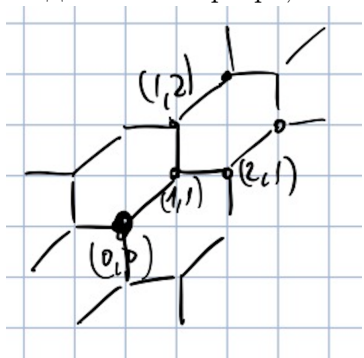


Рис. 4: *Нейтральный* элемент песочной группы для графа на квадрате 523×523 . Чёрное – это вершины графа с 3 песчинками, разные оттенки серого – точки с 2, 1 или 0 песчинок. Обратите внимание на сбалансированные планарные графы внутри треугольников – мы их встретим позже под именем **тропических кривых**

вида $(k + 2l + 1, 2k + l + 1)$ с $(i + 1, j)$, $(i, j + 1)$, $(i - 1, j - 1)$, как на рисунке (проведены не все рёбра, но паттерн понятен).



26.** Рассмотрим граф G как выше, и пусть в каждой вершине лежит ноль песчинок. Бросим 10^7 песчинок в точку $(0, 0)$.

- а) Посчитайте на компьютере результат релаксации этого состояния, и нарисуйте его. Ноль песчинок обозначайте белым цветом, одну – жёлтым, две – синим.
- б) На картинке будут видны большие области, где картинка периодична. Покажите в увеличенном размере пять примером таких областей (с разным рисунком).

27.** Рассмотрим какую-нибудь область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и пересечём её с G . Все вершины вне Ω объявим стоками. Посчитайте (и нарисуйте) нейтральный элемент (единицу) песочной группы для получившегося графа в случае когда Ω

- а) квадрат со стороной 100,

- б) круг радиуса 50,
- в) достаточно большой параллелограмм с парой сторон, параллельных вектору $(1, 0)$, и парой сторон, параллельных вектору $(1, 1)$,
- г) исследуйте как картинка зависит от отношения длин сторон параллелограмма.

Множество возвратных состояний это группа, потому что фактор по решётке

Напомним обозначения: Γ – граф, $\partial\Gamma$ – множество стоков. Рассмотрим множество **всех** целозначных (не обязательно неотрицательных) состояний, то есть все функции $\phi : \Gamma \setminus \partial\Gamma \rightarrow \mathbb{Z}$. Это множество равно \mathbb{Z}^N , где N – количество вершин в $\Gamma \setminus \partial\Gamma$.

Объявим эквивалентными состояния ϕ, ϕ' если $\phi - \phi' = \Delta F$ для какой-то функции $F : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}$.

28. Докажите, что состояния ϕ, ϕ' эквивалентны, если от ϕ к ϕ' можно перейти обвалами и обратными к ним операциями.

29. Докажите, что состояния ϕ, ϕ' (понимаемые сейчас как две точки в \mathbb{Z}^N) эквивалентны, если они отличаются на линейную комбинацию векторов $\Delta(1_v), v \in \Gamma \setminus \partial\Gamma$. Напомним, что 1_v это функция, равная 1 в v и ноль иначе. $\Delta 1_v$ это вектор, равный -4 в координате отвечающей v , равный 1 в координатах, отвечающих смежным с v вершинам, и ноль иначе.

30. Докажите, что множество классов эквивалентности \mathbb{Z}^N по такому отношению эквивалентности² это группа.

²Напомним, что если на множестве X имеется отношение эквивалентности \sim , то есть выполнены свойства

- (рефлексивность) $a \sim a$ для любого $a \in X$,
- (симметричность) если $a \sim b$, то $b \sim a$,
- (транзитивность) если $a \sim b, b \sim c$, то $a \sim c$,

то можно определить множество классов эквивалентности X/\sim , а именно: классом эквивалентности элемента $a \in X$ называется множество элементов $b \in X$, эквивалентных a , то есть

$$\{b | b \sim a\}.$$

Несложно показать, что классы эквивалентности для разных элементов либо не пересекаются, либо совпадают. Значит, X разбивается в дизъюнктное объединение классов эквивалентности. Значит, корректно определено отображение $X \rightarrow X/\sim$. Часто бывает так, что на X определена какая-нибудь структура (например, группы), которая самоочевидным образом переносится на классы эквивалентности.

Например, объявим два целых числа эквивалентными, если их остатки от деления на 5 совпадают. Легко проверить, что это отношение эквивалентности. Множество классов эквивалентности в этом случае – группа \mathbb{Z}_5 (остатки по модулю пять). Операция сло-

Чтобы показать, что получилась именно песочная группа, а не какая-то другая, достаточно показать, что в каждом классе эквивалентности есть ровно одно возвратное состояние.

Напомним, что β – состояние (единица Крёйца), в вершине v равное количеству рёбер из v в вершины-стоки. Заметим, что $\beta = \Delta F$ где $F = -1$ на $\Gamma \setminus \partial\Gamma$, $F = 0$ на $\partial\Gamma$.

31. Покажите, что любое ϕ эквивалентно $\phi + K\beta$ и что $(\phi + K\beta)^\circ$ возвратное при большом K . Значит, в каждом классе эквивалентности не менее одного возвратного состояния.

32*. В каждом классе эквивалентности есть не более одного возвратного состояния. Подсказка: если $\phi = \phi' + \Delta F$ то рассмотрим $D = \{v \in \Gamma \setminus \partial\Gamma \mid F(v) = \min(F)\}$. Тогда ϕ' на D это запрещённая конфигурация. Потому что рассмотрим любую вершину из D . В неё суммарно снаружи пришло песка хотя бы 4 – количество рёбер из v внутри D . Раз ϕ стабильно, значит ϕ' на D было запрещённым состоянием.

Значит, песочная группа – это фактор-группа \mathbb{Z}^N по решётке, порождённой $\Delta(1_v)$. Можно заметить, что как множество, такая фактор-группа – это множество точек, расположенных в многомерном параллелепипеде (порождённом векторами $\Delta(1_v)$).

33*. Докажите, что количество элементов указанной выше фактор-группы (то есть песочной группы) равно объёму этого параллелепипеда, то есть определителю некоторой матрицы. В нашем случае это окажется определитель матрицы лапласиана – это матрица смежности графа, где на диагонали минус степени вершин на диагонали.

34. Определим квадратную матрицу A лапласиана связного графа Γ с непустым множеством $\partial\Gamma$ стоков. А именно: каждой вершине $v \in \Gamma \setminus \partial\Gamma$ соответствует строка и столбец в A . Далее, в клетке (v, v) матрицы стоит $\deg(v)$, степень вершины v . В клетках (v, w) матрицы стоит количество рёбер между v и w . Пусть E единица группы. Докажите, что $A^{-1}E$ – целочисленный вектор.

Заметьте, что если бы мы построили матрицу, где всем вершинам из Γ отвечают строки и столбцы, то её определитель был бы равен нулю (потому что в каждой строчке и в каждом столбце сумма элементов была бы равна нулю).

35. Докажите, что если $(2\phi)^\circ = \phi$ для состояния $\phi \neq \langle 0 \rangle$, то ϕ – это единица группы.

рассуждение не вполне правильное, нужно воспользоваться (где?) тем, что оба ϕ, ϕ' стабильные, возвратные, и что $\min(F) \leq -1$.

заметьте, что есть рёбра, ведущие в стоки, поэтому не во всех строчках сумма элементов матрицы равна нулю
почему вообще A обратимо?

теперь можно решить и задачу 25.

жения переносится с целых чисел на остатки по модулю пять: в самом деле, остаток от деления на пять суммы чисел зависит только от остатков от деления на пять этих чисел.

Конкретные вычисления единицы песочной группы для вытянутого прямоугольника.

Рассмотрим $\Gamma = [0, m] \times [-n, n]$ где n сильно меньше чем m (то есть ширина прямоугольника намного больше высоты). Пусть $\phi_0 = (n+1)^2\beta$. Заметим, что $\phi = ((n+1)^2\beta)^\circ$ эквивалентно единице в песочной группе.

36. Докажите, что ϕ – возвратное состояние (из этого следует что оно **равно** единице E группы). Рекомендуется для этого взять ϕ_0 и сделать $F(i, j) = j^2$ обвалов во всех точках (i, j) , $0 \leq i \leq m$, $-n \leq j \leq n$. Докажите, что если сделать такое количество обвалов, то во всех точках Γ кроме правого и левого столбца³ у нас будет две песчинки, то есть $\phi_0 + \Delta F$ почти везде равно двойке.

Состояние, полученное в предыдущем упражнении симметрично. Надо доказать, что обвалы оставшегося песка со сторон не зайдут далеко в центр. Делается это так.

37. Рассмотрим состояние ψ на Γ которое на левой стороне равно

$$(n+1)^2 + 2$$

а всё остальное двойки. Докажите, что $\psi \geq \phi + \Delta F$. Пусть

$$X = [(n+1)\sqrt{2}] + 1, G(i, j) = \frac{(X-i)(X-i+1)}{2}.$$

В каждой вершине (i, j) , где $G(i, j) \geq 0$ сделаем $G(i, j)$ обвалов (при этом в каких-то вершинах число песчинок станет отрицательным, но это нестрашно). Покажите, что $\psi + \Delta G \leq 3$. Тем самым $G(i, j)$ сверху оценивает⁴ число обвалов в релаксации ψ , а значит, и в релаксации $\phi_0 + \Delta F$, которую осталось доделать после предыдущей задачи. Значит, там где $G(i, j) \leq 0$, там $\phi \equiv 2$.

Значит, $E = (\phi)^\circ = (\phi + \Delta F)^\circ$, и релаксация последнего поточечно не больше релаксации ψ , которая затрагивает только регион порядка X около левого и правого столбца.

38. Проверьте (экспериментально) для графа $\Gamma = [0, 5] \times [0, 10000] \cap \mathbb{Z}^2$ единица песочной группы Γ на $[0, 5] \times [100, 9900]$ равна тождественно 2.

39. Возьмём граф $\Gamma = [0, n] \times [0, m] \cap \mathbb{Z}^2$ и отождествим вершины $(0, k)$, (n, k) для всех k (получилось кольцо). Тогда единица песочной группы Γ равна тождественно 3 если m чётно, и везде 3 и полосу из 2 если m нечётно.

³в каждой вершине крайне левого и крайне правого столбца больше нуля песчинок

⁴... не совсем $G(i, j)$, надо ещё для самого правого столбца проверить ту же процедуру

это ведь просто доказательство из [14], разбитое на пункты!

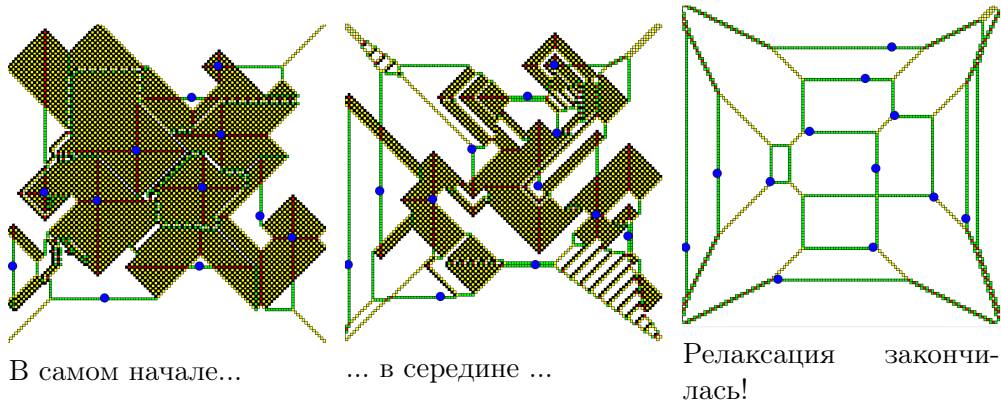


Рис. 5: Белое – 3 песчинки, зелёное – 2, жёлтое – 1, красное – 0, чёрное – более чем 3 песчинки.

3 В направлении тропических кривых

Ещё один предел: малые возмущения максимального стабильного состояния

Рассмотрим ещё одну модель, пусть Γ снова $[0, N] \times [0, N] \cap \mathbb{Z}^2$. Пусть $\phi \equiv 3$, т.е. мы имеем по три песчинки в каждой вершине графа. Если мы добавим по песчинке в выбранные вершины $p_1, p_2, \dots, p_n \in \Gamma$, это спровоцирует большую лавину, много обвалов. Но финальная картина весьма регулярна, см. Рис. 5: в состоянии $\psi = (\phi + \sum_{i=1}^n \delta_{p_i})^\circ$ мы будем иметь по три песчинки почти во всех вершинах.

Более того, видно что множество $D_N = \{v \in \Gamma | \psi(v) \neq 3\}$ образует что-то навряд тонкого графа с прямыми рёбрами рациональных наклонов, и этот граф проходит через точки p_1, p_2, \dots, p_n . Оказывается [11, 10], что когда $N \rightarrow \infty$ и мы сохраняем относительные позиции точек p_i , множество D_N сходится к *тропической кривой*.

Определение. Тропический полином — это функция вида

$$\min_{(i,j) \in A} (a_{ij} + ix + jy)$$

где A конечное подмножество \mathbb{Z}^2 , $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Тропическая кривая, определяемая тропическим полиномом f — это множество точек $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ где функция f не является линейной, иными словами это множество точек “излома” функции f .

Рассмотрим функцию h количества обвалов, т.е. $h(v)$ равно количеству обвалов в вершине v во время релаксации состояния $\phi + \sum_{i=1}^n \delta_{p_i}$.

40. Докажите что если $v \neq p_i$ и $\psi(v) = 3$, тогда

$$4h(v) = \sum_{w \sim v} h(w),$$

здесь $w \sim v$ означает что w это сосед v . *Подсказка:* подсчитайте количество входящих в v и исходящих из v песчинок в течение релаксации.

Можно доказать, что функция числа обвалов для состояния $\phi + \sum_{i=1}^n \delta_{p_i}$ почти везде совпадает с функцией типа $\min_{(i,j) \in A} (a_{ij} + ix + jy)$, и с помощью предыдущего упражнения мы получим что множество D_N близко к тропической кривой.

Следующие две секции вводят полезные технические понятия, которые пригодятся при доказательстве вышеуказанных фактов.

Дискретные гармонические функции

Этот раздел можно пропустить при первом чтении.

41. Найдите ΔF где $F : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ а) линейная,

б) $F(i, j) = \frac{1}{2}(i(i+1) + j(j+1))$,

в) $F(i, j) = \lceil \frac{1}{3}i^2 \rceil$,

г) $F(i, j) = \lceil \frac{1}{3}(i^2 + 4ij + j^2 + 4i) \rceil$,

д) $F(i, j) = \lceil \frac{1}{8}(5i^2 + 4ij + 4j^2 + 2i + 4j) \rceil$.

Функция $F : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ называется *дискретно-гармонической* если для всех точек $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ выполнено $\Delta F(x, y) = 0$. Функция F называется *ограниченной сверху*, если существует $C \in \mathbb{R}$ такое что $F(x, y) < C$ для всех $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

42. Докажите, что целочисленная ограниченная сверху дискретно-гармоническая функция является константой, т.е. $F(x, y) = c$ для некоторого c и всех $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

43. Докажите, что если F, G – супергармонические функции, то есть $\Delta F, \Delta G \leq 0$ всюду, то $\min(F, G)$ тоже супергармоническая функция.

44. Докажите, что дискретно-гармоническая функция $F : \mathbb{Z}^2 \rightarrow [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$ (то есть ограниченная функция) является константой.

Подсказка: покажите, что её дискретная частная производная $G(x, y) = F(x+1, y) - F(x, y)$ тоже дискретно-гармоническая, и ограниченная. Тогда взяв точку, достаточно близкие к максимуму G и идя от неё, можно получить значения F больше наперёд заданного числа, что является противоречием.

Помочь могут в том числе и следующие две задачи.

45. Пусть $F : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ дискретно гармоническая. Пусть

$$a_n(f) = \sup_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} (f(i+n, j) - f(i-n, j)).$$

сложно найти раздел математики, где НЕ появляются дискретно-гармонические функции

Докажите, что $a(n+1) + a(n-1) \geq 2a(n)$.

46. Принцип максимума: дискретно-гармоническая функция на Γ достигает максимума и минимума на $\partial\Gamma$.

47. Для двух положительных дискретно-гармонических функций f, g на Γ , функция f/g достигает максимума на $\partial\Gamma$.

48*. Докажите, что положительная дискретно-гармоническая функция является константой.

49.** Пусть положительная целочисленная гармоническая функция F удовлетворяет $F(x, y) < ix + jy + C$ на $[0, R] \times [0, R] \cap \mathbb{Z}^2$. Докажите, что для достаточно большого R из этого следует что F является линейной функцией на $[R/3, 2R/3] \times [R/3, 2R/3] \cap \mathbb{Z}^2$.

Полезно когда есть функция F , лапласиан ΔF которой равен нулю везде, кроме одной точки. Имея такую функцию, легко сконструировать решения $\Delta F = G$ для какой-нибудь функции G .

50.** (функция Грина) Докажите, что существует функция $F : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ такая что $\Delta F(i, j) = 0$ для всех точек $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$, кроме $(0, 0)$ где $\Delta F = 1$, кроме того, мы требуем чтобы

$$F(i, j) = -\frac{1}{\pi} \log(i^2 + j^2) + \kappa + O\left(\frac{1}{i^2 + j^2}\right).$$

Разбиение на волны

На стабильном состоянии ϕ , оператор W_v волны из точки v действует следующим образом. Добавим в v песчинку, произведём обвал в v , если это возможно, вынем из v песчинку, произведём релаксацию.

51. Пусть $\phi = \langle 3 \rangle$ на \mathbb{Z}^2 . Докажите что $W_v \phi = \phi$ для любой вершины v .

52. Рассмотрим произвольное стабильное состояние ϕ . Докажите, что в процессе $\phi \rightarrow W_v \phi$ в каждой вершине графа произошло не более одного обвала.

53. Носитель волны из любой точки в возвратном состоянии не содержит дыр внутри (односвязен). То есть если мы найдём замкнутый путь в графе, во всех вершинах которого произошёл обвал во время оператора волны, то во всех вершинах области, ограниченной этим замкнутым путём, тоже произошёл обвал.

4 Много песка в одной точке

54. Пусть D – подмножество Γ , и состояние ϕ получено релаксацией, в

секретная версия
принципа максиму-
ма

наверное, поэтому
оператор волны так
назвали

важная оценка, хо-
тя и простая

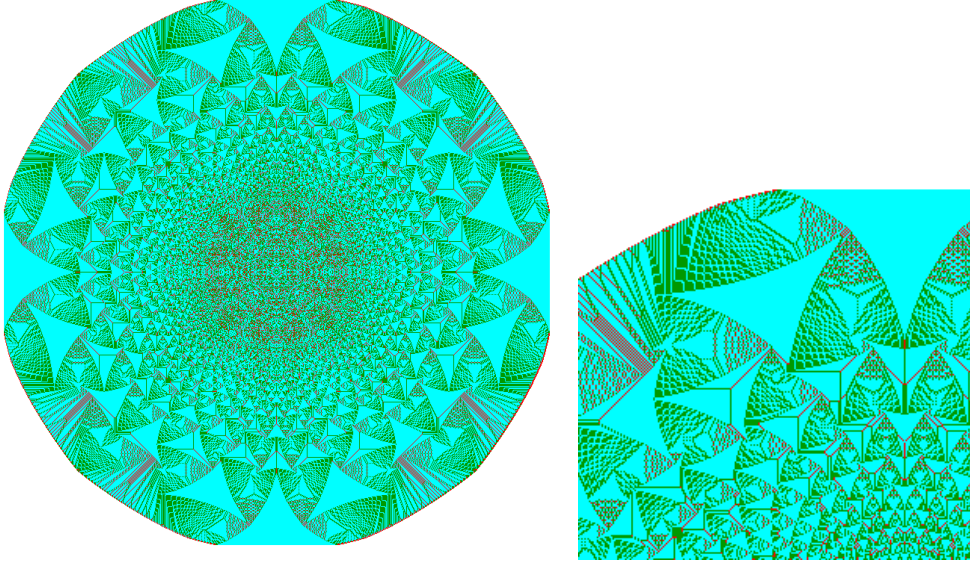
ходе которой во всех вершинах D были обвалы. тогда $\sum_{v \in D} \phi(v) \geq E$, где E – это количество рёбер между вершинами из D .

Пусть $\Gamma' = \mathbb{Z}^2$, на этот раз мы рассматриваем бесконечный граф. Начнём с состояния $\phi = \langle 0 \rangle$ на Γ' , т.е. песка нет вообще, решётка пустая. Теперь добавим много песчинок (скажем, пару миллионов) в точку $O = (0, 0)$ и выполним релаксацию. Другими словами, рассмотрим состояния $\phi_n = (n\delta_O)^\circ$ для достаточно больших n .

55. Докажите, что для вышеупомянутых состояний $n\delta_O$ любая релаксация заканчивается за конечное число шагов.

Пусть S_n – это множество вершин, в которых случался обвал во время релаксации. Оказывается, если мы сделаем гомотетию с коэффициентом $\frac{1}{\sqrt{n}}$ с S_n , то соответствующие *плотности* песка образуют сходящуюся последовательность [19], см. Рис. 4.

56. Открытая проблема. Определить граничную кривую $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}}(n\delta_{(0,0)})^\circ$, то есть мы кидаем n песчинок в точку $(0, 0)$ на пустой плоскости, производим релаксацию, и делаем гомотетию с коэффициентом $1/\sqrt{n}$. Известно, что получающиеся картинки будут иметь предел. Выглядит это как-то так:



В следующих задачах мы докажем, что S_n растёт со скоростью \sqrt{n} . Пусть $F(i, j)$ – количество обвалов в точке (i, j) во время релаксации $n\delta_O$.

детали можно посмотреть в [14]

57. По индукции докажите следующие монотонности, для точки $(i, j), i > j \geq 0$: $F(i-1, j) \geq F(i, j-1), F(i, j) \geq F(i+2, j)$.

58. Используя предыдущее упражнение, докажите, что если в точке (i, j) случался обвал, то и в $(i-1, j)$ тоже случался.

59. Используя предыдущие задачи, и то, что $\phi_n \leq 3$ найдите ромб со сторонами порядка \sqrt{n} внутри S_n и квадрат со сторонами порядка \sqrt{n} , содержащий S_n .

Это позволяет взять точку с максимальной координатой в S_n и провести от неё линии типа $x - y = \text{const}$ и получившийся ромб будет внутри S_n , которое будем внутри квадрата большего в $\sqrt{2}$ раз. Размер этого всего теперь оценивается из количества песка – оно должно быть не меньше чем количество внутренних рёбер в S_n (см. упражнения), а значит S_n растёт не быстрее \sqrt{n} . Очевидно, что S_n растёт хотя бы со скоростью \sqrt{n} – в каждой точке S_n не более 3 песчинок на окончание релаксации.

Можно и по-другому. Пусть u – функция количества обвалов, тогда $0 \leq \Delta u \leq 3$ везде кроме $(0, 0)$, где $\Delta u(0, 0) = -n$. Существует функция g (функция Грина), с условием $\Delta g(x, y) = \delta((x, y), (0, 0))$, которая растёт как $\log(x^2 + y^2)$. Тогда мы можем оценить u сверху и снизу функциями типа $g(x, y) + (x^2 + y^2)$, что даёт оценку роста множества $u \neq 0$.

Неизвестно, что за кривая является границей предельного множества (неизвестно даже, что она **не** является окружностью или двенадцатиугольником). Недавно занятая связь этого предела была найдена с *Аполлониевыми упаковками окружностей* [16].

5 История вопроса и эвристические соображения

Степенная зависимость⁵ часто появляется в естественных науках. Например, сила (по шкале Рихтера) землетрясений в сейсмически активном регионе подчиняется так называемому закону Гутенберга-Рихтера [8]: $N \sim 10^{-M}$ где N – это среднегодовое число землетрясений силы (*магнитуды*⁶) не менее M . Это означает, что для некоторой местности в год случается в среднем 10000 землетрясений силы 2 по шкале Рихтера, 1000 землетрясений силы 3, 100 землетрясений силы 4, 10 силы 5, одно – силы 6, и так далее. Константы могут меняться, но принцип остаётся тот же. Подобные зависимости можно найти повсюду: закон Хэка (Hack's law), $L \sim A^{0.6}$, где L это средняя длина длиннейшего притока в бассейне и A это площадь

⁵т.е. зависимость типа $x^a = cy^b$ между переменными x, y для некоторых констант a, b, c . На двойной логарифмической шкале такая зависимость выглядит как линейная: $a \ln x = b \ln y + \ln c$. Порешав Упражнение 1, вы поймёте, что увидеть такую зависимость в реальных данных довольно сложно, не взяв логарифма и не отбросив “хвосты”.

⁶Землетрясение может иметь магнитуду от 1 до 9.5 по шкале Рихтера.

бассейна. Среднее время, проведённое в пробке со скоростью s пропорционально $1/s$. Средняя разность высот для двух точек в горах на расстоянии r пропорциональна $1/r^\alpha$; и так далее. Другие примеры степенных законов, историю их изучения и введение в так называемую “самоорганизующуюся критичность”, “ $1/f$ -шум” и т.д., можно найти в популярной книге [2].

Эвристические аргументы и история вопроса. Так как все вышеописанные ситуации весьма различны по природе, можно предположить, что для изучения структурных вопросов достаточно выбрать любую математическую модель с нужными свойствами. Главная сложность при построении такой модели состояла в том, что системы (или их математические модели) обычно имеют параметры, и надо “настраивать” эти параметры, чтобы системы пришли в “критическое состояние”⁷. Размер лавин в песочной модели, как мы увидели ранее, подчиняется степенной зависимости. Поэтому открытие этой модели было важным шагом в понимании “самоорганизующейся критичности” — поначалу, кидая песок на пустой квадрат 100×100 мы не видим степенных законов, потом песочная модель самостоятельно, “насыщаясь”, “самоорганизуется” и достигает критического состояния, где степенные законы можно наблюдать. Сейчас мы расскажем как эта модель появилась.

Маятники. В статье [3] Бэк, Тэнг и Висенфелд определили модель, в которой маятники расположены в вершинах целочисленной решётки. Маятники соединены пружинками. Когда мы вращаем маятник, пружинки скручиваются и накопившаяся энергия может заставить соседний маятник тоже провернуться. На компьютере было показано, что эта модель показывает степенную зависимость. Чтобы прояснить связь с песочной моделью, рассмотрим одномерную модель с маятниками.

К каждой целой точке на вещественной прямой приделан маятник, который может вращаться вокруг прямой. Маятники соединены пружинками. Если мы крутанём маятник один раз, это даст $+1$ к скручиванию соседних пружин. Если мы крутанём маятник два раза, то соседние маятники прокрутятся по одному разу. Есть похожая одномерная модель с песком (см. Рис. 6). Когда песчинка перемещается в соседний столбец, разность высот между соседними столбцами кучи в двух местах увеличивается на один. Мы можем представить модель в виде последовательности разностей S_1, S_2, \dots, S_n высот столбцов (см. Рис. 6). Если $S_i \geq 2$, тогда песчинка спадает и S_i становится $S_i - 2$, а S_{i-1}, S_{i+1} оба увеличиваются на один. Отсюда уже один шаг до определения песочной модели, которое дано в начале этой заметки.

⁷ т.е. состояние, когда между характеристиками модели появляются степенные зависимости, ср. модель Изинга — в ней для наблюдения фазовых переходов нужно зафиксировать некую специальную (критическую) температуру.

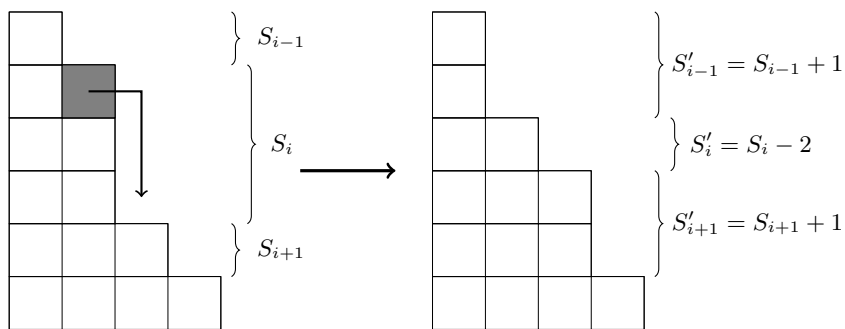


Рис. 6: Одномерная модель песочной кучи. Песчинка перемещается в соседний столбец. Представлены соответствующие изменения наклонов S_i .

6 Современное состояние и открытые задачи

[1, 9, 18, 12, 13, 4, 17, 15, 20, 7]

Список литературы

- [1] I. Alevy and S. Mkrtychyan. The limit shape of the leaky abelian sandpile model. *International Mathematics Research Notices*.
- [2] P. Bak. How nature works: the science of self-organized criticality. *Springer Science; Business Media*, 2013.
- [3] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld. Self-organized criticality: An explanation of the $1/f$ noise. *Physical review letters*, 59(4):381–384, 1987.
- [4] S. Bhupatiraju, J. Hanson, A. A. J  rai, et al. Inequalities for critical exponents in d -dimensional sandpiles. *Electronic Journal of Probability*, 22, 2017.
- [5] S. Corry and D. Perkinson. *Divisors and Sandpiles: An Introduction to Chip-Firing*, volume 114. American Mathematical Soc., 2018.
- [6] D. Dhar. Theoretical studies of self-organized criticality. *Phys. A*, 369(1):29–70, 2006.
- [7] J. Fersula, C. No  s, and K. Perrot. Sandpile toppling on penrose tilings: identity and isotropic dynamics. *arXiv preprint arXiv:2006.06254*, 2020.
- [8] B. Gutenberg and C. F. Richter. Magnitude and energy of earthquakes. *Annals of Geophysics*, 9(1):1–15, 1956.

- [9] A. A. Járai et al. Sandpile models. *Probability Surveys*, 15:243–306, 2018.
- [10] N. Kalinin and M. Shkolnikov. Tropical curves in sandpile models. *arXiv:1502.06284*, 2016.
- [11] N. Kalinin and M. Shkolnikov. Tropical curves in sandpiles. *Comptes Rendus Mathématique*, 354(2):125–130, 2016.
- [12] M. Lang and M. Shkolnikov. Harmonic dynamics of the abelian sandpile. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 116(8):2821–2830, 2019.
- [13] M. Lang and M. Shkolnikov. Sandpile monomorphisms and harmonic functions. *arXiv preprint arXiv:1904.12209*, 2019.
- [14] Y. Le Borgne and D. Rossin. On the identity of the sandpile group. *Discrete Math.*, 256(3):775–790, 2002. LaCIM 2000 Conference on Combinatorics, Computer Science and Applications (Montreal, QC).
- [15] L. Levine, W. Pegden, and C. K. Smart. Apollonian structure in the Abelian sandpile. *Geom. Funct. Anal.*, 26(1):306–336, 2016.
- [16] L. Levine, W. Pegden, and C. K. Smart. The Apollonian structure of integer superharmonic matrices. *Ann. of Math. (2)*, 186(1):1–67, 2017.
- [17] L. Levine and Y. Peres. Laplacian growth, sandpiles, and scaling limits. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 54(3):355–382, 2017.
- [18] A. Melchionna. The sandpile identity element on an ellipse. *arXiv preprint arXiv:2007.05792*, 2020.
- [19] W. Pegden and C. K. Smart. Convergence of the Abelian sandpile. *Duke Math. J.*, 162(4):627–642, 2013.
- [20] W. Pegden and C. K. Smart. Stability of patterns in the abelian sandpile. In *Annales Henri Poincaré*, volume 21, pages 1383–1399. Springer, 2020.