1.求 $\log_{x^2} 16+\log_{2x} 64=3$ 的解集。

参考答案：4，2^{-1/3}。 2.若 $x>1$，求证 $\log_x(x+1)>\log_{x+1}(x+1)$。 3.a 为何实数时，对于区间[2，8]上任何实数 x，不等式 $\log_{2a^2-1} x>-1$ 恒成立?

参考答案：

$$a\in(-\infty,-1)\cup\left(-\frac{3}{4},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3}{4}\right)\cup(1,+\infty)$$

4.给定函数 $y=\log_a|\log_a(x-a)|(a>0,a\neq 1)$，求使 $y>0$ 的 x 的取值范围。

参考答案：

当 $a>1$ 时，解集为：

$$\boxed{\left(a,a+\frac{1}{a}\right)\cup(2a,+\infty)}$$

当 $0<a<1$ 时，解集为：

$$\boxed{(2a,a+1)\cup\left(a+1,a+\frac{1}{a}\right)}$$

5.函数 $y=\lg(a^{2x}-(ab)^x-2b^{2x}+1)(a>0,b>0)$，x 取何值时 $y>0$?

参考答案：

若 $a>b$，则 $x>\boxed{\log_{\frac{a}{b}} 2}$;

若 $a<b$，则 $x<\boxed{\log_{\frac{a}{b}} 2}$;

若 $a=b$，无解。

6.已知 $\sin^2\theta+\sin\theta=1$，求 $\cos^2\theta+\cos^6\theta$ 之值。

参考答案：

$$\cos^2\theta+\cos^6\theta=\frac{-5+3\sqrt{5}}{2}。$$

7.已知 $\tan x=-\frac{4}{3}$，求 $\frac{5\sin x+8}{5\cos x-9}$ 之值。

参考答案：

经过分析，存在两种可能性，取决于 x 所在的象限。因此，表达式的值为 $-\frac{2}{3}$ 或 -1。

8.解不等式：$\sqrt{\log_a^2 x+\log_a x-2}<2log_a x-2(a>1)$（若仅知 $a>0,a\neq 1$ 呢）

参考答案:

总结

对于 $a > 1$，不等式的解为 $x > a^2$。

如果 $a > 0, a \neq 1$

如果 $0 < a < 1$，$\log_a x$ 是减函数，我们需要重新考虑 y 的范围。但是，由于 $\log_a x$ 在 $0 < a < 1$ 时不能大于 2（因为 x 必须在 0 和 1 之间），这种情况下不等式无解。

综上所述，当 $a > 1$ 时，解为 $x > a^2$；当 $0 < a < 1$ 时，不等式无解。

9.方程 $x^2 - 5x\log_a k + 6\log_a^2 k = 0$ 的两根中仅有一个较小的根在区间 (1,2) 内，试用 a 表示 k 的取值范围。

参考答案:

1. **当** $a > 1$ **时**:
   - $\log_a k \geq \frac{2}{3}$ 转换为 $k \geq a^{2/3}$
   - $\log_a k < 1$ 转换为 $k < a$
   - 因此，k 的取值范围为 $[a^{2/3}, a)$
2. **当** $0 < a < 1$ **时**:
   - $\log_a k \geq \frac{2}{3}$ 转换为 $k \leq a^{2/3}$
   - $\log_a k < 1$ 转换为 $k > a$
   - 因此，k 的取值范围为 $(a, a^{2/3}]$

10.已知 $f(x) = (\frac{x-1}{x+1})^2 (x \geq 1)$，$f^{-1}(x)$ 为 f(x) 的反函数，又 $g(x) = \frac{1}{f^{-1}(x)} + \sqrt{x} + 2$。求 $f^{-1}(x)$ 的定义域、单调区间和 g(x) 的最小值。

参考答案:

当 $x \geq 1$ 时，$\frac{x-1}{x+1}$ 的值域为 $[0, 1)$。因此，$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$ 的值域为 $[0, 1)$。

所以，$f^{-1}(x)$ 的定义域为 $[0, 1)$。

因此，$f^{-1}(x)=\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$。

现在，我们分析 $f^{-1}(x)$ 的单调性。对于 $x\in[0,1)$，$\sqrt{x}$ 是单调递增的，所以 $1+\sqrt{x}$ 和 $1-\sqrt{x}$ 分别是单调递增和单调递减的。因此，$\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ 是单调递增的。

所以，$f^{-1}(x)$ 的单调区间为 $[0,1)$。

令 $g'(t)=0$:

$$\frac{-2}{(1+t)^2}+1=0 \implies \frac{-2}{(1+t)^2}=-1 \implies (1+t)^2=2 \implies 1+t=\sqrt{2} \implies t=\sqrt{2}$$

由于 $t=\sqrt{2}-1\in[0,1)$，我们检查 $g(t)$ 在 $t=\sqrt{2}-1$ 处的值:

$$\frac{1-(\sqrt{2}-1)}{1+(\sqrt{2}-1)}+(\sqrt{2}-1)+2=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}-1+2=\sqrt{2}-1+\sqrt{2}-1+2=2\sqrt{2}$$

因此，$g(x)$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$。