- Raisonnement par récurrence
- Étudier la monotonie d'une suite
- Utiliser les propriétés des puissances, des sommes et des produits

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_n = 4n + 2^n \times (-2)$$

> **Rappel**
> Soit $x \in \mathbb{R}$ alors $x^a \times x^b = x^{a+b}$.

En sachant cette propriété, je peux déterminer que :

$$2^n \times (-2) = 2^n \times 2 \times (-1) = 2^{n+1} \times -1 = -2^{n+1}$$

D'où l'expression finale de ma suite est donnée par :

$$u_n = 4n - 2^{n+1}$$

Pour étudier la monotonie d'une suite il y a plusieurs méthodes possibles. Dans notre cas, nous décidons de déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$.

1. **Déterminons les expressions respectives de u_n et de u_{n+1} de manière individuelle.**
   D'après la consigne :

- $u_n = 4n - 2^{n+1}$
- Ainsi, $u_{n+1} = 4(n+1) - 2^{n+2} = 4n + 4 - 2^{n+2}$

2. **Calculons $u_{n+1} - u_n$.**

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 4n + 4 - 2^{n+2} - (4n - 2^{n+1}) \\ &= \cancel{4n} + 4 - 2^{n+2} \cancel{-4n} + 2^{n+1} \\ &= 4 - 2^{n+2} + 2^{n+1} \\ &= 4 - 2^{2+1} \times 2 + 2^{n+1} \\ &= 4 + 2^{n+1}(-2+1) \\ &= 4 - 2^{n+1} \end{aligned}$$

3. **Calculons le signe de l'expression trouvée.**
   On a donc déterminé que $u_{n+1} - u_n = 4 - 2^{n+1}$.
   Par définition, on sais que $4 > 0$.
   Il faut donc étudier le signe de $4 - 2^{n+1}$ tout entier.
   Une méthode consiste à construire un tableau avec les valeurs de $u_{n+1} - u_n$ pour quelques rangs puis d'observer ce qu'il se passe.
   Si on construit le tableau pour $n \in [0; 4]$ alors on a :

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
$u_{n+1} - u_n$	2	0	-4	-12	-28
$signe$	< 0	$= 0$	> 0	> 0	> 0

Pour compléter le tableau il suffit de déterminer la valeur de $u_{n+1} - u_n$ au rangs données.
Ainsi grâce au tableau on peut voir que :

- Pour $n \in [0; 1]$ on a $u_{n+1} - u_n \geq 0$

- Pour $n \in [1;4]$ on a $u_{n+1} - u_n \leq 0$
  On suppose alors que $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 1$.
  Attention, c'est une supposition, elle ne vaut rien dans le raisonnement si elle n'est pas prouvée.
  Ce qui sous-entends qu'il va falloir prouver cette supposition. On va alors utiliser un raisonnement par récurrence.

> **Rappel**
> *Les étapes du raisonnement par récurrence*
>
> 1. **DÉFINITION** de la propriété $\mathcal{P}(n)$ et de n.
> 2. **INITIALISATION**, montrer $\mathcal{P}(n_0)$
> 3. **HÉRÉDITÉ**, supposer vraie $\mathcal{P}(n)$ pour un n fixé, montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie elle aussi.
> 4. **CONCLUSION**

DÉFINITION
Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété "$u_{n+1} - u_n \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \mid n \geq 1$"

INITIALISATION
Puisque $n \geq 1$, alors pour l'initialisation, on va prendre $n_0 = 1$.
Alors on a :

$$\begin{aligned} u_{n_0+1} - u_n &= 4 - 2^{1+1} \\ &= 4 - 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Et $0 \leq 0$ ainsi la propriété $\mathcal{P}(n_0)$ est vérifiée.

HÉRÉDITÉ
Supposons que la propriété $\mathcal{P}$ est vraie pour un $n \geq 1$ fixé alors, montrons que la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi valide.
On a :

$$\begin{aligned} u_{n+2} - u_{n+1} &= 4 - 2^{n+2} - (4 - 2^{n+1}) \\ &= 4 - 2^{n+2} - 4 + 2^{n+1} \\ &= \cancel{4} - 2^{n+2} \cancel{-4} + 2^{n+1} \\ &= -2^{n+1} \times 2 + 2^{n+1} \\ &= 2^{n+1}(-2+1) \\ &= -2^{n+1} \end{aligned}$$

Puisque $n \geq 1$ alors : $2^{n+1} \geq 0$ d'où $-2^{n+1} \leq 0$.
On se retrouve alors avec $u_{n+2} - u_{n+1} \leq 0$.
La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vérifiée.

CONCLUSION
Puisque $u_{n+1} - u_n \leq 0, \forall n \geq 1$, alors on dit que la suit u_n est décroissante à partir du rang $n = 1$.

Exercice 2

Exercice n°4 de la fiche TD4 partie 1, disponible sur le cours Eureka du tutorat.
Pour chacune de suites suivantes, déterminer à partir de quel rang elles sont définies puis déterminer leur monotonie.

1. $u_n = \dfrac{n}{2^n}$
   Pour commencer déterminons l'ensemble de définition de la suite.
   La suite u_n est définie tant que $2^n \neq 0$.
   Et, par définition $n \in \mathbb{N}$ d'où $2^n \geq 1 > 0$. Ainsi la suite est bien définie pour tout entier n.

Afin de calculer la monotonie de cette suite, nous allons étudier le rapport à 1 de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

- Déterminons u_n et u_{n+1}.
  - $u_n = \frac{n}{2^n}$ (*Donnée dans l'énoncée*)
  - $u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$

- Calculons la quotient

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}$$

> **Rappel**
> Soit $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ alors :
>
> $$\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C}$$
>
> *Diviser deux fractions revient à multiplier la première par l'inverse de la seconde.*

D'où

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} \\
&= \frac{n+1}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n} \\
&= \frac{n+1}{2^n \times 2} \times \frac{2^n}{n} \\
&= \frac{n+1}{\cancel{2^n} \times 2} \times \frac{\cancel{2^n}}{n} \\
&= \frac{n+1}{2} \times \frac{1}{n} \\
&= \frac{n+1}{2n}
\end{aligned}$$

Nous avons obtenue la forme finale, maintenant il faut étudier son rapport à 1.
En décomposant ma fraction j'ai :

$$\begin{aligned}
\frac{n+1}{2n} &= \frac{n}{2n} + \frac{1}{2n} \\
&= \frac{1 \times n}{2 \times n} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} \\
&= \frac{1 \times \cancel{n}}{2 \times \cancel{n}} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi on a :
$\forall n \in \mathbb{N}$ on a forcément $\frac{1}{n} \leq 1$.
Et, en ajoutant / multipliant les termes restants on vas obtenir :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} &\leq 1 \\
1 + \frac{1}{n} &\leq 2 && (\text{on ajoute } 1 \mid \text{ valide pour } n \geq 1) \\
\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) &\leq 1 && (\text{on mutliplie par } \frac{1}{2})
\end{aligned}$$

Nb : Quand je dis on ajoute/multiplie pas un nombre x, cela sous entends que je fais l'opération à gauche de l'inéquation mais aussi à droite.

Ainsi on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 1 \quad \forall n \geq 1$$

Donc on en déduit que $u_{n+1} \leq u_n n$ et que la suit est décroissante à partir du rang $n = 1$.

2. $u_n = \dfrac{n!}{2^n}$
Par définition, u_n est bien définie lorsque $2^n \neq 0$ or, on sait que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $2^n \geq 1 > 0$ d'où, u_n est bien définie pour tout entier n.
Pour déterminer la monotonie de cette suite, nous allons étudier le rapport à 1 de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

> **Rappel**
> On note *factorielle* de n le réel $n!$ tel que :
> $$n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n = \prod_{k=1}^{n} k$$
> où $\prod$ représente le symbole produit.

Déterminons u_{n+1} et u_n de manière individuelles.

- $u_n = \dfrac{n!}{2^n}$
- $u_{n+1} = \dfrac{(n+1)!}{2^{n+1}}$
  Maintenant on peut calculer le rapport à 1 de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.
  On a :

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}}{\frac{n!}{2^n}} \\
&= \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n!} \\
&= \frac{(n+1)!}{2^n \times 2} \times \frac{2^n}{n!} \\
&= \frac{(n+1)!}{\cancel{2^n} \times 2} \times \frac{\cancel{2^n}}{n!} \\
&= \frac{(n+1)!}{2} \times \frac{1}{n!}
\end{aligned}$$

Par définition de la factorielle on a :

- $n! = \prod_{k=1}^{n} k$
- $(n+1)! = \prod_{k=1}^{n+1} k = \prod_{k=1}^{n} k \times (n+1) = n! \times (n+1)$
  Ainsi :

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)!}{2} \times \frac{1}{n!} \\
&= \frac{n! \times (n+1)}{2} \times \frac{1}{n!} \\
&= \frac{\cancel{n!} \times (n+1)}{2} \times \frac{1}{\cancel{n!}} \\
&= \frac{(n+1)}{2} \times \frac{1}{1} \\
&= \frac{(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

On peut alors étudier le signe de l'expression trouvée
Par définition :

$$\begin{aligned}
n &\geq 0 \\
n+1 &\geq 1 \\
\frac{n+1}{2} &\geq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Malheureusement, on voit que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{1}{2}$ mais nous on cherche le **rapport à** 1, ainsi On veut savoir à partir de quand l'expression trouvée sera supérieure à 1.

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}\frac{n+1}{2} &\geq 1 \\ n+1 &\geq 2 \\ n &\geq 1\end{aligned}$$

Ainsi on vient de montrer que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \quad \forall n \geq 1$$

La suite u_n est alors croissante à partir du rang $n = 1$.

3. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - n$
Ici, on a une somme qui vas de 1 à n ainsi, la fraction $\frac{1}{k}$ est toujours définie.
D'où u_n est bien définie $\forall n \geq 0$.
Dans note cas, nous avons une somme dans le terme général de la suite, et en réfléchissant un peu quand on étudie la monotonie, on chercher principalement à *enlever / simplifier* des termes, et, le seul moyen pour enlever des termes avec une somme c'est en les soustrayant alors, cette fois, nous calculerons le signe de $u_{n+1} - u_n$.
Déterminons u_n et u_{n+1}.

- $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - n$
- $u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - (n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - n - 1$

Commençons a calculer la soustraction :

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - n - 1 - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - n\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - n - 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + n \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \cancel{-n} - 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \cancel{n} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\end{aligned}$$

> **Rappel**
> Par définition d'une somme :
> La somme de 1 à $n+1$ est égale à la somme des 1 à n ajouté au dernier terme.
> En mathématiques :
>
> $$S_{n+1} = S_n + \alpha$$
>
> où α représente le dernier terme de la somme S_{n+1}.

Ainsi, en suivant ce raisonnement on a :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

où $\frac{1}{n+1}$ est le dernier terme de la somme.
Ainsi on se retrouve avec :

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \\
&= \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 1 - \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 1
\end{aligned}
$$

On peut alors déterminer le signe de l'expression trouvée.

$$
\begin{aligned}
n &\geq 0 \\
n+1 &\geq 1 \\
\sqrt{n+1} &\geq \sqrt{1} = 1 \\
\frac{1}{\sqrt{n+1}} &\leq 1 \\
\frac{1}{\sqrt{n+1}} - 1 &\leq 0
\end{aligned}
$$

Puisque $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors $u_{n+1} \leq u_n$ ainsi la suite u_n est décroissante pour tout entier n.

4. $u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$

   On a un produit qui vas de 1 à n alors $2k \geq 2$ pour tout n donc la suite u_n est bien définie pour tout entier.
   Déterminons u_n et u_{n+1} :

- $u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$
- $u_{n+1} = \prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k}$

  Dans notre cas, nous avons un produit dans le terme général de u_n du coup je réfléchis à comment *simplifier* des termes, et pour des produits, on peut simplifie un nombre x si il est à la fois au dénominateur et au numérateur.
  D'où on vas calculer le rapport à 1 de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.
  Ainsi on a :

$$
\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k}}{\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}} \\
&= \frac{\frac{\prod_{k=1}^{n+1} 2k-1}{\prod_{k=1}^{n+1} 2k}}{\frac{\prod_{k=1}^{n} 2k-1}{\prod_{k=1}^{n} 2k}} \\
&= \frac{\prod_{k=1}^{n+1} 2k-1}{\prod_{k=1}^{n+1} 2k} \times \frac{\prod_{k=1}^{n} 2k}{\prod_{k=1}^{n} 2k-1} \\
&= \frac{\prod_{k=1}^{n} 2k-1 \times 2(n+1)-1}{\prod_{k=1}^{n} 2k \times 2(n+1)} \times \frac{\prod_{k=1}^{n} 2k}{\prod_{k=1}^{n} 2k-1}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\cancel{\prod_{k=1}^{n} 2k-1} \times 2(n+1)-1}{\cancel{\prod_{k=1}^{n} 2k} \times 2(n+1)} \times \frac{\cancel{\prod_{k=1}^{n} 2k}}{\cancel{\prod_{k=1}^{n} 2k-1}} \\
&= \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} \\
&= \frac{2(n+1)}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+1)} \\
&= 1 - \frac{1}{2(n+1)} \\
&= 1 - \frac{1}{2n+2}
\end{aligned}$$

On peut alors étudier le signe de l'expression finale.

$$\begin{aligned}
n &\geq 0 \\
2n &\geq 0 \\
2n+2 &\geq 2 \\
\frac{1}{2n+2} &\leq \frac{1}{2} \\
1 - \frac{1}{2n+2} &\leq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1
\end{aligned}$$

Ainsi puisque $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ alors la suite u_n est strictement décroissante.