В данном случае задача сводится к системе уравнений вида

$$\begin{cases} m_j\ddot{u}_j = -\alpha_j(u_j - u(x_j)), & \\ m_j\ddot{w}_j = -\beta_j(w_j - w(x_j)), & j = 1, \ldots, k \\ J_j\ddot{\varphi}_j = -\gamma_j(\varphi_j - w_x(x_j)), & \\ \rho\ddot{u} = Eu_{xx} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{S}(u_j - u(x_j))\delta(x - x_j), & \\ \rho\ddot{w} = -Dw_{xxxx} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\beta_j}{S}(w_j - w(x_j))\delta(x - x_j) - & \\ \qquad - \sum_{j=1}^{k} \frac{\gamma_j}{S}(\varphi_j - w_x(x_j))\delta'(x - x_j). & \end{cases} \tag{1}$$

1 Разностная схема для уравнений присоединенных масс

Для уравнений движения присоединенных масс заменим пружину, которая соединяет массу с твердой стенкой реологической схемой вязкоупругой среды Пойнтинга-Томсона (Рис. 1.1):

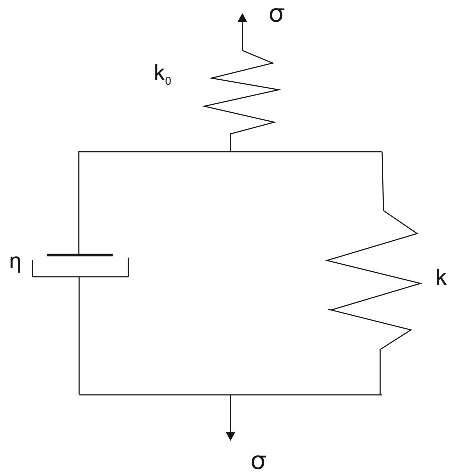

Рисунок 1.1 – Реологическая схема Пойнтинга-Томсона.

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = v - V(t) \\ m\dfrac{dv}{dt} = -F \\ \dfrac{k + k_0}{k_0}F + \dfrac{\eta}{k_0}\dfrac{dF}{dt} = kz + \eta\dfrac{dz}{dt}, \end{cases} \tag{2}$$

z – перемещение груза, v – его скорость, V – вынужденные колебания, m – масса груза, F – вектор внешних сил, k_0 и k – модули Юнга упругих пружин, η – коэффициент вязкости демпфера.

Домножим второе уравнение системы на v, а затем заменим его на значение, полученное из первого уравнения системы:

$$\frac{m}{2}\frac{dv^2}{dt} = -Fv = -F(\frac{dz}{dt} + V(t)), \tag{3}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{k_0}\frac{dF}{dt} + \frac{1}{\eta}(\frac{k+k_0}{k_0}F - kz), \quad | \cdot F \tag{4}$$

Так как $F = \frac{k+k_0}{k_0}F - kz + kz - \frac{k}{k_0}F$, то $\frac{k+k_0}{k_0}F - kz$ можно вынести за скобки:

$$F\frac{dz}{dt} = \frac{1}{2k_0}\frac{dF^2}{dt} + \frac{1}{\eta}(\frac{k+k_0}{k_0}F - kz)(\frac{k+k_0}{k_0}F - kz + kz - \frac{k}{k_0}F). \tag{5}$$

Из третьего уравнения системы (2) выражаем $\frac{k+k_0}{k_0}F - kz$ и подставляем его значение:

$$F\frac{dz}{dt} = \frac{1}{2k_0}\frac{dF^2}{dt} + \frac{1}{\eta}(\frac{k+k_0}{k_0}F - kz)^2 + (\frac{dz}{dt} - \frac{1}{k_0}\frac{dF}{dt})(kz - \frac{k}{k_0}F). \tag{6}$$

Учитывая, что

$$\frac{k}{2}\frac{d}{dt}(z - \frac{F}{k_0})^2 = (kz - \frac{k}{k_0}F)(\frac{dz}{dt} - \frac{1}{k_0}\frac{dF}{dt}), \tag{7}$$

получим систему

$$\begin{cases} F\frac{dz}{dt} = \frac{1}{2k_0}\frac{dF^2}{dt} + \frac{1}{\eta}(\frac{k+k_0}{k_0}F - kz)^2 + \frac{k}{2}\frac{d}{dt}(z - \frac{F}{k_0})^2, \\ -F\frac{dz}{dt} - FV(t) = \frac{m}{2}\frac{dv^2}{dt}. \end{cases} \tag{8}$$

Отсюда получаем

$$-FV(t) = \frac{m}{2}\frac{dv^2}{dt} + \frac{1}{2k_0}\frac{dF^2}{dt} + \frac{k}{2}\frac{d}{dt}(z - \frac{F}{k_0})^2 + \frac{1}{\eta}(\frac{k+k_0}{k_0}F - kz)^2, \tag{9}$$

$$K = \frac{mv^2}{2}, \quad W = \frac{F^2}{2k_0} + \frac{k}{2}(z - \frac{F}{k_0})^2, \quad D = \frac{1}{\eta}(\frac{k+k_0}{k_0}F - kz)^2. \tag{10}$$

Здесь K – кинетическая энергия, W – потенциальная, D – диссипация. Согласно уравнению баланса энергии

$$\frac{d}{dt}(K+W)+D=-F\cdot V(t). \tag{11}$$

Вычислим квадрат нормы вектора $U=\begin{pmatrix} z \\ v \\ F \end{pmatrix}$:

$$||U||^2=\frac{mv^2}{2}+\frac{F^2}{2k_0}+\frac{k}{2}(z-\frac{F}{k_0})^2=\frac{1}{2}\,(z\ v\ F)\cdot\ A\ \cdot\begin{pmatrix} z \\ v \\ F \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$A=\begin{pmatrix} k & 0 & -\frac{k}{k_0} \\ 0 & m & 0 \\ -\frac{k}{k_0} & 0 & \frac{1}{k_0}+\frac{k}{k_0^2} \end{pmatrix}, \tag{13}$$

$$||U||^2=\frac{1}{2}U^T\cdot A\cdot U. \tag{14}$$

Матрица A является положительно определенной по критерию Сильвестра:

$$k>0, \tag{15}$$

$$\begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & m \end{vmatrix}>0, \tag{16}$$

$$|A|=\frac{km}{k_0}(1+\frac{k}{k_0})-\frac{k}{k_0}\cdot\frac{mk}{k_0}=\frac{km}{k_0}>0. \tag{17}$$

Следовательно, можем вычислить относительную погрешность δ по формуле

$$\delta=\frac{||U^n-U(n\tau)||}{||U(n\tau)||}, \tag{18}$$

где U^n – точное решение, $U(n\tau)$ – приближенное с шагом τ.

Точное решение для системы (2) будем искать в виде $V=\hat{V}e^{i\omega t}$, $\dfrac{dz}{dt}=v-V(t)$, $m\dfrac{d^2z}{dt^2}=-F$, $z=\hat{z}e^{i\omega t}$, $v=\hat{v}e^{i\omega t}$, $F=\hat{F}e^{i\omega t}$, получим:

$$\begin{cases} i\omega\hat{z} = \hat{v} - \hat{V}(t), \\ i\omega m\hat{v} = -\hat{F}, \\ \dfrac{k+k_0}{k_0}\hat{F} + \dfrac{i\omega\eta}{k_0}\hat{F} = k\hat{z} + i\omega\eta\hat{z}. \end{cases} \tag{19}$$

Далее выразим из второго уравнения v, подставим в первое уравнение и домножим на $i\omega m$:

$$\begin{cases} \omega^2 m\hat{z} - \hat{F} = \hat{V} i\omega m, \\ -(k+i\omega\eta)\hat{z} + (\dfrac{k+k_0}{k_0} + \dfrac{i\omega\eta}{k_0})\hat{F} = 0. \end{cases} \tag{20}$$

$\hat{z}$ и $\hat{F}$ найдем методом Крамера:

$$d = \omega^2 m \cdot (\frac{k+k_0+i\omega\eta}{k_0}) - (k+i\omega\eta), \tag{21}$$

$$\hat{z} = \hat{V} i\omega m(\frac{k+k_0+i\omega\eta}{k_0})/d, \tag{22}$$

$$\hat{F} = \hat{V} i\omega m \cdot (k+i\omega\eta)/d. \tag{23}$$

Построим разностную схему для системы (2), τ – шаг по времени:

$$\begin{cases} \dfrac{\hat{z}-z}{\tau} = \dfrac{\hat{v}+v}{2} - V(t), \\ m\dfrac{\hat{v}-v}{\tau} = -\dfrac{\hat{F}+F}{2}, \\ \dfrac{\hat{z}-z}{\tau} = \dfrac{1}{k_0}\dfrac{\hat{F}-F}{\tau} + \dfrac{1}{\eta}(\dfrac{k+k_0}{k_0}\dfrac{\hat{F}+F}{2} - k\dfrac{\hat{z}+z}{2}). \end{cases} \tag{24}$$

Из первого уравнения системы (24) получаем, что

$$\hat{v} + v = 2\frac{\hat{z}-z}{\tau} + 2V(t), \tag{25}$$

$$\frac{\hat{v}-v}{\tau} = \frac{1}{\tau}(2\frac{\hat{z}-z}{\tau} - 2v + 2V(t)). \tag{26}$$

Величина $\hat{F}$ рассчитывается по формуле

$$\frac{\hat{F}+F}{2} = \frac{2m}{\tau}(v - \frac{\hat{z}-z}{\tau} - V(t)), \tag{27}$$

$$\frac{\hat{F}-F}{\tau} = \frac{1}{\tau}(2\frac{\hat{F}+F}{2} - 2F) = \frac{4m}{\tau^2}(v - \frac{\hat{z}-z}{\tau} - V(t)) - \frac{2F}{\tau}. \tag{28}$$

Далее получим уравнение для рекуррентного пересчета $\hat{z}$ через v, F, z:

$$\frac{\hat{z}-z}{\tau} = \frac{4m}{\tau^2 k_0}(v - \frac{\hat{z}-z}{\tau} - V(t)) - \frac{2F}{\tau k_0} + \frac{k+k_0}{\eta k_0} \cdot \frac{2m}{\tau}(v - \frac{\hat{z}-z}{\tau} - V(t)) - \frac{k}{\eta}\frac{\hat{z}+z}{2}, \tag{29}$$

$$\frac{\hat{z}-z}{\tau} = (\frac{4m}{\tau^2 k_0} + \frac{k+k_0}{\eta k_0}\frac{2m}{\tau})(v - \frac{\hat{z}-z}{\tau} - V(t)) - \frac{k}{\eta}\frac{\hat{z}+z}{2} - \frac{2F}{\tau k_0}. \tag{30}$$

Положим $\frac{4m}{\tau^2 k_0} + \frac{k+k_0}{\eta k_0}\frac{2m}{\tau} = a$. Тогда

$$\frac{\hat{z}-z}{\tau}(1+a) = -\frac{k}{\eta}\frac{\hat{z}+z}{2} + a(v - V(t)) - \frac{2F}{\tau k_0}, \tag{31}$$

$$\hat{z}(\frac{1+a}{\tau} + \frac{k}{2\eta}) = z(\frac{1+a}{\tau} - \frac{k}{2\eta}) + a(v - V(t)) - \frac{2F}{\tau k_0}. \tag{32}$$

Разностная схема строится на основе формул (32), (27), (25).

2 Заключение

В результате проделанной работы была построена математическая модель стержня с присоединенными массами; с использованием реологической схемы Поинтинга-Томсона получены разностные схемы уравнений, описывающих движения присоединенных масс.