두 확률 변수 X외 Y가 독립일 때, 두 확률 변수의 상관계수는 0이 된다. 하지만 그에 대한 역은 성립하지 않는다. 그에 대한 반례를 들어보자.

독립이 아닌 확률변수를 잡아야 하면서도, 기댓값을 구했을 때 0이 되는 것은 어떤 게 있을까?

가장 쉽게 생각할 수 있는 것은 삼각함수이다. sin 과 cos의 제곱 합이 1 이면서 (독립이 아니면서) 기댓값을 구해주면 (범위내에서 적분하면 0) 0이 나오니 말이다. 하지만 이걸 그대로 X,Y로 생각해주면 기댓값을 구해도 0은 안나온다. 이를 어떻게 해결하는가?

이때 도입하는 것이 Uniform distribution 균등분포이다. 이는 연속확률분포 중의 하나로, 주어진 범위 내에서 전부 일정한 확률 밀도값을 가진다.

이때 아래와 같이 확률 변수를 잡으면 어찌될까?

$$Z \quad U[0, 2\pi]$$
$$X = sinZ,\ Y = cosZ$$

일단 아래의 식이 성립하니, 확률 변수 X와 Y는 독립이 아니다.

$$X^2 + Y^2 = cos^2 Z + sin^2 Z = 1$$

이제 상관계수를 계산해 보겠다. 위에서 상관계수에 대한 식이 어찌 나왔나? 공분산을 두 확률 변수의 표준편차의 곱으로 나눠준 꼴이었다.

$$Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

$$Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

공분산을 구하려면 XY의 기댓값과 X와 Y의 기댓값이 필요하다.

XY의 기댓값을 구하면

$$E[XY] = E[sinZ\ \cdot\ cosZ] = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\ sinxcosx\ dx$$

이렇게 나오기에 결국 $Cov(X, Y)$는 0이 된다.

상관계수 식에서 분자에 0을 넣으면 상관계수도 0이 되기에 결론적으로, 반례가 완성된다.