1. **目的**

C言語で離散フーリエ変換のプログラムを作成し、正弦波のスペクトルが

どのような形状をしているかを確認してその性質を理解する。

1. **実験概要**

C言語を用いて以下のプログラムを作成し、正弦波信号のスペクトルの性質を理解する。

* 時系列データを作成するプログラム

離散フーリエ変換を行う対象となる信号のデータを生成する。詳細は項4.1の通り

* 離散フーリエ変換のプログラム

離散フーリエ変換を実際に行う。詳細は項4.2, 4.3の通り

今回、用いた原理は以下の通り。

* 標本化

時間的に連続なアナログ信号をコンピュータで扱うためには、これを一定間隔毎で信号値を取り出し時間的に離散した値にしなくてはならない。この操作を標本化、又はサンプリングという。

このとき、標本化を行う時間間隔 をサンプリング周期といい、その逆数 をサンプリング周波数という。このパラメータは標本化を行う際重要な値となる。

* 離散化信号

例えば、周波数の正弦波を標本化周期で標本化したものを式で表すと次のようになる。

* 離散フーリエ変換

有限なM個の信号 がの範囲に存在すると仮定すると、このとき離散フーリエ変換の式は次式で与えられる。

この式より、信号の非零値の範囲が有限であれば、フーリエ変換における無限の総和の問題を避けることができることがわかる。

1. **使用機器**

Windows 10 64 bit

Cpad for Borland C++ Compiler

Borland C++ Compiler 5.5

1. **実験内容**
   1. **時系列データの作成**

(1) ~ (6)に示す信号の時系列データをテキスト形式でファイルに出力するプログラムを作成する。出力データはExcelを用いてグラフ化するものとする。データは二列で構成され、一列目を時刻、二列目をその時刻での振幅値とし、データ点数は512点、時間長は1秒とする。

1. 周波数が整数値の正弦波信号
2. (1)と同じ周波数で初期位相が45度の正弦波信号
3. (1)と同じ周波数の余弦波信号
4. 周波数が非整数値の正弦波信号（整数部は(1)と同じ）
5. 周波数が(4)より5Hz程度高い非整数値の正弦波信号
6. (4)と(5)を合成（加算）した信号
   1. **離散フーリエ変換プログラムの作成**

4.1で出力した信号の時系列データそれぞれに対し、離散フーリエ変換を行った結果をテキスト形式でファイルに出力するプログラムを作成し実行する。出力データはExcelを用いてグラフ化するものとする。データは三列で構成され、一列目を周波数、二列目と三列目をその周波数でのスペクトルの実部と虚部とする。

* 1. **離散フーリエ変換プログラムの改良**

4.2で作成したプログラムを、振幅スペクトルと位相スペクトルが出力されるよう改良し、同様に4.1(1)~(6)の時系列データへ適用する。

1. **実験結果**
   1. **時系列データの作成**

作成した時系列データの波形を図5.1(a) ~(f)に示す。

図5.1 (a) (1):10Hzの正弦波

図5.1 (b) (2):10Hz, 初期位相45度の正弦波

図5.1 (c) (3):10Hzの余弦波

図5.1 (d) (4):10.913Hzの正弦波

図5.1 (e) (5):15.913Hzの正弦波

図5.1 (f) (6):(4)と(5)の合成波

* 1. **離散フーリエ変換プログラムの作成**

離散フーリエ変換を行った結果を、実部と虚部に分けて図5.2(a)~(f)に示す。

図5.2(a) (1) 10Hzの正弦波の離散フーリエ変換

n=10, 502において虚部のスペクトルが立つ

図5.2(b) (2)10Hz, 初期位相45度の正弦波の離散フーリエ変換

n=10, 502において各部のスペクトルが立つ

図5.2(c) (3)10Hzの余弦波の離散フーリエ変換

n=10, 502において実部のスペクトルが立つ

図5.2(d) (4)10.913Hzの正弦波の離散フーリエ変換

n=10, 502をピークとして、その周辺にもスペクトルが現れる

図5.2(e) (5)15.913Hzの正弦波の離散フーリエ変換

n=15, 497をピークとして、その周辺にもスペクトルが現れる

図5.2(f) (6) (4)と(5)の合成波の離散フーリエ変換

n=10, 15, 502, 497においてスペクトルが立つ

* 1. **離散フーリエ変換プログラムの改良**

離散フーリエ変換を行った結果を、利得と位相に分けて図5.3(a)~(f)に示す。

図5.3(a) (1) 10Hzの正弦波の離散フーリエ変換

n=10, 502においてゲインのスペクトルが立ち、

-1.57, +1.57[rad]の位相差スペクトルが立つ

図5.3(b) (2) 10Hz, 初期位相45度の正弦波の離散フーリエ変換

n=10, 502においてゲインのスペクトルが立ち、

-2.36, +2.36[rad]の位相差スペクトルが立つ

図5.3(c) (3) 10Hzの余弦波の離散フーリエ変換

n=10, 502においてゲインのスペクトルが立つ

図5.3(d) (4) 10.913Hzの正弦波の離散フーリエ変換

n=10, 502においてゲインのスペクトルが立ち、

-1.57, +1.57[rad]の位相差スペクトルが立つ

図5.3(e) (5) 15.913Hzの正弦波の離散フーリエ変換

n=15, 497においてゲインのスペクトルが立ち、

-1.57, +1.57[rad]の位相差スペクトルが立つ

図5.3(f) (6) (4)と(5)の合成波の離散フーリエ変換

n=10, 15, 497, 502においてゲインのスペクトルが立ち、

-1.57, -1.57, +1.57, +1.57[rad]の位相差スペクトルが立つ

* 1. **作成したプログラムについて**

今回作成したプログラムを、本レポート末尾に付する。

1. **考察**
   1. **離散信号の生成について**

今回作成した信号のファイルをExcelを用いてグラフ化した結果、連続系として考えた場合の信号波形と合致するため、妥当な離散波形を生成できたと考えられる。

* 1. **各波形の離散フーリエ変換について**
* 実部／虚部について表した場合

(1)~(3)のいずれについても、対象とした離散信号の周波数に対応した正規化周波数においてスペクトルが立っている。対象が正弦波の場合には虚部に、余弦波の場合には実部にスペクトルが立っているが、オイラーの公式を用いて複素平面を表現した際、虚部にsin関数が、実部にcos関数が現れることを考えるとこの結果は妥当であると考えられる。

(4), (5)については、対象とした離散信号の周波数をピークとするスペクトルが立ち、その周辺にも若干ではあるがスペクトルがある。これは、周波数が非整数であることで、1秒という離散フーリエ変換の対象区間の始点と終点が不連続な値になり、これが基本調波以外の周波数成分となって表れたものと考えられる。仮に1秒分の区間の後ろに、もう一つ同じ波形を重ねたとき、継ぎ目の部分は連続にはならず、極めて高い周波数成分を持つことになる。

(6)の結果は、(4)と(5)のスペクトルグラフを重ね合わせたものになっている。(6)は異なる二つの周波数の正弦波を加算したものであるので、二つの周波数についてスペクトルが観測されるのは妥当な結果であると考えられる。

* 利得／位相差で表した場合

(1)~(3)のいずれについても、対象とした離散信号の周波数に対応した正規化周波数においてスペクトルが立っている。(1)について考えると、複素平面上では虚部にスペクトルが立っていたものが、±1.57[rad]、即ち約±90[deg]の位相差として表れており、妥当な結果であると言える。(2)では初期位相45度が反映され、±2.36[rad]、即ち±135[deg]の位相差がみられる。(3), (4)についても同様である。尚、スペクトルの実数／虚数成分のコンマ5桁以下の部分は計算の際に切り捨てているため、僅かのずれが見受けられるが実用上は問題ないレベルであることを添えておく。

(4)~(6)についても、上記の「実部／虚部で表した場合」での考察と同じことが言えるため、妥当であると考えられる。

1. **結論**

今回の実験を通して、以下の事項を達成した。

* C言語を用いた離散波形データの作成
* C言語を用いた離散フーリエ変換プログラムの作成
* 正弦波、及びその派生波形のスペクトル形状とその理解

1. **調査課題**

**サンプリング定理とエイリアシングについて調査しまとめる。**

連続信号を時間的に離散化する際はある間隔でサンプリングを行うが、この間隔を短くすれば時間的な離散化を細かく行えるため高周波に対しても忠実にサンプリングが行える。かと言ってむやみにこれを短くすればデータ量は増大し扱いは困難になる。このときサンプリング間隔を定める基準となるのが以下のサンプリング定理である。

サンプリング定理

元信号に含まれる最も高い周波数成分をとすれば以下の間隔でサンプリングを行えば元信号の情報がすべて含まれる。

このことは離散化信号のスペクトルから説明できる。

サンプリングを行うと、元信号のスペクトルが、の周期で並ぶ。この周期より短い周期の成分が元信号に含まれている場合、これらは互いに重なることとなる。これを折り返しひずみ、又はエイリアシングと呼ぶ。スペクトルが互いに重なっている領域は、元信号の振幅が再現できないためその情報は復元されない。言い換えれば、この重なりをなくすようサンプリングを行えば、全ての情報が復元されるということである。

このとき、スペクトルが重なる限界をナイキスト周波数、その逆数をナイキスト間隔とも呼ぶ。

以上を端的に表したのが以下の図8.1である。

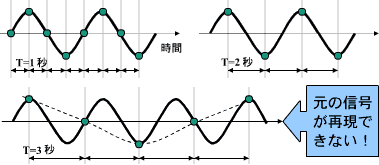


図8.1　サンプリング定理とエイリアシング

TEXAS INSTRUMENTS サンプリング定理　のページより

**参考文献**

* オーム社　ディジタル信号処理　著：貴家仁志　第1版4刷
* TEXAS INSTRUMENTS

デジタル信号処理入門（サンプリング定理／エイリアシング） http://www.tij.co.jp/dsp/jp/docs/dspcontent.tsp?contentId=53936