단위 이율 r, 최초 원금 S, 약정 기간을 n이라고 두었을 때, 원리금균등상환 방식으로 x회 상환한 후 남은 원금 R_x를 구하고,
이를 토대로 갚은 원금을 구하는 일반항을 찾을 수 있다.
이 때, 상환일은 월말 납입을 기준으로 한다(마지막 달에 상환하는 금액엔 이자가 붙지 않는다는 뜻).

우선, 매월 상환해야 하는 상환액 a는 다음과 같이 구한다.

$$a+a(1+r)+a(1+r)^2+\cdots+a(1+r)^{n-1}=S(1+r)^n \quad\rightarrow\quad \frac{a\{(1+r)^n-1\}}{r}=S(1+r)^n \quad\rightarrow\quad a=\frac{rS(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$$

이제, 상환액 a로 매월 발생하는 이자를 모두 갚고, 그 남은 금액으로 원금을 갚는다는 원리금균등상환방식의 원리를 점화식으로 표현할 수 있다.
이 때, $R_0=S$이고, 상환액은 갚은 이자와 갚은 원금의 합이 된다.

상환회차 x	상환액	해당 회차에 갚은 이자	해당 회차에 갚은 원금	남은 원금 R_x
0				R_0
1	a	rR_0	$a-rR_0$	$R_0-(a-rR_0)=R_1$
2	a	$r\{R_0-(a-rR_0)\}=rR_1$	$a-r\{R_0-(a-rR_0)\}=a-rR_1$	$R_0-(a-rR_0)-[a-r\{R_0-(a-rR_0)\}]=R_1-(a-rR_1)=R_2$
$\vdots$				
x	a	rR_{x-1}	$a-rR_{x-1}$	$R_{x-1}-(a-rR_{x-1})=R_x$
$x+1$	a	rR_x	$a-rR_x$	$R_x-(a-rR_x)=R_{x+1}$

즉, 남은 원금 R_x에 대해서는 다음의 점화식이 성립한다.

$R_{x+1}=R_x-(a-rR_x)$

위 점화식을 풀어 일반항을 구하면 임의의 x에 대해 남은 원금 R_x를 구할 수 있다.

$R_{x+1}=R_x-(a-rR_x)=(1+r)R_x-a \rightarrow$ 이 점화식은 $a_{n+1}=pa_n+q$꼴이고, 일반항은, $\alpha=p\alpha+q$로 두어 α를 구한 후 $(a_{n+1}-\alpha)=p(a_n-\alpha)$꼴로 바꾸어 $(a_n-\alpha)$수열의 일반항을 구한 후 a_n의 일반항을 구하는 방식으로 얻을 수 있음이 알려져 있다.

$$\alpha=(1+r)\alpha-a \quad\rightarrow\quad \alpha=\frac{a}{r} \quad\rightarrow\quad (R_{x+1}-\alpha)=(1+r)(R_x-\alpha) \quad\rightarrow\quad R_x-\alpha=(R_1-\alpha)(1+r)^{x-1} \quad\rightarrow\quad R_x=R_1(1+r)^{x-1}-\alpha\{(1+r)^{x-1}-1\}$$

$\alpha=\dfrac{a}{r}$, $R_1=R_0-(a-rR_0)=(1+r)S-a$이고 $a=\dfrac{rS(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$라는 사실을 이용하여 식을 최종적으로 정리하면 아래와 같다.

$$R_x=\{(1+r)S-a\}(1+r)^{x-1}-\frac{a}{r}\{(1+r)^{x-1}-1\} \quad\rightarrow\quad R_x=\frac{r(1+r)^xS-ra(1+r)^{x-1}-a(1+r)^{x-1}+a}{r}=\frac{rS(1+r)^x-a\{(1+r)^x-1\}}{r}$$

$$\rightarrow\quad R_x=\frac{rS(1+r)^x-\dfrac{rS(1+r)^n}{(1+r)^n-1}\{(1+r)^x-1\}}{r}=\frac{S(1+r)^x\{(1+r)^n-1\}-S(1+r)^n\{(1+r)^x-1\}}{(1+r)^n-1} \quad\rightarrow\quad R_x=\frac{S(1+r)^n-S(1+r)^x}{(1+r)^n-1}=\frac{S\{(1+r)^n-(1+r)^x\}}{(1+r)^n-1}$$

x회 상환 후 갚은 원금은 최초 원금 S에서 남은 원금 R_x를 빼면 된다.

$$(\text{갚은 원금})=S-\frac{S\{(1+r)^n-(1+r)^x\}}{(1+r)^n-1}=\frac{S\{(1+r)^n-1\}-S\{(1+r)^n-(1+r)^x\}}{(1+r)^n-1}=\frac{S\{(1+r)^x-1\}}{(1+r)^n-1}$$