
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

KHOA KHOA HỌC MÁY TÍNH

BÀI TẬP MÔN PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN

HOMEWORK #02: PHÂN TÍCH GIẢI THUẬT ĐỆ QUY

GV hướng dẫn: Huỳnh Thị Thanh Thương

Nhóm thực hiện:

1. Nguyễn Thị Kim Anh, 20521072

2. Võ Minh Trí, 20520821

TP.HCM, ngày 10 tháng 10 năm 2021

Bài 1:
a, Trước khi gửi số tiền là 1000(USD)
Sau n năm số tiền có được $T(n) = T(n-1)(1 + 12\%)$
$T(n) = C_1 , n = 0$
$T(n) = T(n-1) + C_2, \ n > 0$

b,
$T(n) = C_1, khi\, n = 1, n = 0$
$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + C_2, n > 1$
c,
$T(n) = C_1, n = 1$
$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + C_2, n > 1$
d,
$T(n) = C_1, n = 0$
$T(n) = \sum_{i=1}^{n} T(n-i) + C_2, n > 0$
e,
$T(n) = C_1, n = 0$
$T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + \frac{n(n+1)}{2} + C_2, n > 0$
f,
$T(n) = C_1, n < 1$
$T(n) = T(n-3) + n^2 + C_2, n \geq 1$
g,
$T(n) = C_1, n = 0$
$T(n) = \sum_{i=0}^{n-1} T(i) + nC_2 + C_3, \ n \geq 1$
h,
```
void move(int n,char A,char B,char C)
 {
     if(n==1){
       cout<<A<<" ==> "<<C<<"\n";           // nếu n = 1 thì dịch chuyển từ A -> C
```

```
    }
    else {
      move(n - 1, A, C, B);                     // Dịch chuyển n-1 đĩa từ A -> B
      cout<<A<<" ==> "<<C<<"\n";           //   Dịch chuyển đĩa thứ n từ A -> C
      move(n - 1, B, A, C);                // Dịch chuyển n-1 đĩa từ B -> C
    }
}
```

$T(n) = C_1,\ n = 0$

$T(n) = 2T(n-1) + C_2,\ n \geq 0$

$Có:\ C_2 = 1, C_1$=0

$T(n) = 2T(n-1) + 1 = 2[2T(n-2) + 1] + 1 = 4T(n-2) + 3$

$= 4[2T(n-3) + 1] + 3 = 8T(n-3) + 7$

=...

$= 2^i T(n-i) + 2^i - 1$

Để điều kiện dừng xảy ra thì n-i=0 hay i=n

T(n)= $2^i T(n-i) + 2^i - 1 = 2^i T(0) + 2^n - 1 = 2^n - 1$

Bài 2:

1.

T(n) = T(n-1)+n   T(1)=1

= [T(n-2)+(n-1)] +n=T(n-2)+n+(n-1)

= [T(n-3)+(n-2)] +n+(n-1)=T(n-3)+n+(n-1)+(n-2)

= …

=T(n-i)+n+(n-1)+(n-2)+...+(n-i+1)

Quá trình kết thúc khi n-i=1 => i=n-1

Khi đó : T(n)=T(1)+n+(n-1)+(n-2)+...+2= 1+2+...+n=$\frac{n(n+1)}{2}$

2.

T(n) = T(n-1)+5   T(1)=0

= [T(n-2)+5] +5= T(n-2)+ 10

= [T(n-3)+5] +10=T(n-3)+ 15

=...

= T(n-i)+5*i

Quá trình kết thúc khi n-i=1 => i=n-1

Khi đó : T(n)=T(1)+5(n-1)=5n-5

3.

T(n) =3 T(n-1)+1   T(1)=4

= 3 [3T(n-2)+1] +1= 9T(n-2)+ 3^0+3^1

= 9 [3T(n-3)+1] +3^0+3^1=27T(n-3)+$3^0+3^1+3^2$

=...

= 3^iT(n-i)+$3^0+3^1+...+3^{i-1}$

Quá trình kết thúc khi n-i=1 => i=n-1

Khi đó : T(n)= 3^{n-1}T(1)+$3^0+3^1+...+3^{n-2}$

Ta có: S=$3^0+3^1+...+3^{n-2}$=1+3($3^0+3^1+...+3^{n-3} + 3^{n-2} - 3^{n-2}$) =1+3S$-\ 3^{n-1}$

⇔ S=$\frac{3^{n-1}-1}{2}$

Nên: T(n)=3^{n-1}.4 +$\frac{3^{n-1}-1}{2}$=$\frac{3^{n+1}-1}{2}$

4.

T(n) = T(n-1)+ T(n-2) T(1)=1,T(0)=1

= [T(n-2) + T(n-3)] + T(n-2) = 2T(n-2)+ T(n-3)

=2 [T(n-3) + T(n-4)] + T(n-3)= 3T(n-3) + 2T(n-4)

= 3[T(n-5) + T(n-4)]+ 2T(n-4) = 5T(n-4) +3T(n-5)

= 5[T(n-5) + T(n-6)]+3T(n-5) = 8T(n-5) +5T(n-6)

=...

= F(i)T(n-i-1)+F(i-1)T(n-i-2), với F(i) là số fibonacci thứ i.

Với F(i)=$\frac{\alpha^i-(1-\alpha)^i}{\sqrt{5}}$, $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Chứng minh: coi i là n

Đặt G(x) là hàm sinh cho dãy F(n), giả sử $F_0 = 0$, ta có

$$G(x) = F_0 + F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + ...$$

$$-xG(x) = -F_0x - F_1x^2 - F_2x^3 - F_3x^4 - ...$$

$$-x^2G(x) = -F_0x^2 - F_1x^3 - F_2x^4 - F_3x^5 - ...$$

Từ 3 đẳng thức trên, ta có:

$$(1 - x - x^2)G(x) = F_0 + (F_1 - F_0)x + (F_2 - F_1 - F_0)x^2 + ... = x$$

$$\Leftrightarrow G(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$$

Phân tích $G(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{A}{1-\alpha x} + \frac{B}{1-\beta x}$

Với $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ là hai nghiệm của phương trình $1 - x - x^2 = 0$

Quy đồng và đồng nhất hệ số, chúng ta được $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $B =- \frac{1}{\sqrt{5}}$

Vậy $G(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\alpha x} - \frac{1}{1-\beta x}\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{5}G(x) = \left(\frac{1}{1-\alpha x} - \frac{1}{1-\beta x}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha x)^n - \sum_{k=1}^{\infty}(\beta x)^n = \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha^n - \beta^n)x^n$

Vậy $G(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}x^n$

Hệ số trong khai triển là $F(n) = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

Vậy dãy số cần tìm có công thức tổng quát dạng

$F(n) = F(n) = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],\ n \geq 0$

Điều kiện dừng xảy ra khi n-i-2=0 hay n-i=2 ⇔ i=n-2

T(n)= $\frac{\alpha^{n-2}-(1-\alpha)^{n-2}}{\sqrt{5}}T(1) + \frac{\alpha^{n-3}-(1-\alpha)^{n-3}}{\sqrt{5}}T(0) = \frac{\alpha^{n-2}-(1-\alpha)^{n-2}+\alpha^{n-3}-(1-\alpha)^{n-3}}{\sqrt{5}}$

5.

T(n) =2 T($\frac{n}{2}$)+1 T(1)=1

= 2 [2T($\frac{n}{4}$)+1] +1=4T($\frac{n}{4}$)+3

= 4[2T($\frac{n}{8}$)+1] +3= 8T($\frac{n}{8}$)+7

= …

=2^iT($\frac{n}{2^i}$)+2^i-1

Quá trình kết thúc khi $\frac{n}{2^i}$=1 => 2^i=n

=> i=$logn$

Khi đó : T(n)=2^{logn}T($\frac{n}{2^{logn}}$)+2^i-1=nT(1)+2^{logn}-1=n+n-1=2n-1

6.

T(n) =2 T($\frac{n}{2}$)+logn T(1)=1

= 2 [2T($\frac{n}{4}$)+log$\frac{n}{2}$] + log(n)=4T($\frac{n}{4}$)+log$\frac{n^2}{4}$+log$\frac{n}{1}$

$= 4[2T(\frac{n}{8})+\log\frac{n}{4}] + \log\frac{n^2}{4} + \log\frac{n}{1} = 8T(\frac{n}{8}) + \log\frac{n^4}{4^4} + \log\frac{n^2}{2^2} + \log\frac{n^1}{1}$

$= \ldots$

$= 2^i T(\frac{n}{2^i}) + \log\frac{n^{2^{i-1}}}{2^{i-1^{2^{i-1}}}} + \ldots + \log\frac{n^4}{4^4} + \log\frac{n^2}{2^2} + \log\frac{n^1}{1}$

$S = \log\frac{n^{2^{i-1}}}{2^{i-1^{2^{i-1}}}} + \ldots + \log\frac{n^4}{4^4} + \log\frac{n^2}{2^2} + \log\frac{n^1}{1} = \log\frac{n^{2^{i-1}+\ldots+4+2+1}}{1.2^2\ldots.2^{i-1^{2^{i-1}}}.} = (2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{i-1})\log(n)-$

$\log(2^0.2^2\ldots 2^{i-1^{2^{i-1}}.})$

$p=2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{i-1} \Rightarrow 2p=2^1+2^2+\ldots+2^i \Rightarrow p=2^i-1$

$q=\log(2^0.2^2\ldots 2^{i-1^{i-1}.}) \Rightarrow q=\log(2^{0+2+\ldots+(i-1).2^{i-1}}) = 0 + 1.2 + \ldots + (i-1).2^{i-1}$

$\Rightarrow S=(2^i-1)\log(n) - q$

Quá trình kết thúc khi $\frac{n}{2^i}=1 \Rightarrow 2^i=n$

$\Rightarrow i=logn$

Khi đó : $T(n)=2^{logn}T(\frac{n}{2^{logn}})+S=nT(1)+S=n(n-1)\log(n)$

$-[0 + 1.2 + \ldots + (logn-1).2^{logn-1}]$

7.

$T(n) = 2T(\frac{n}{2})+n \qquad T(1)=1$

$= 2[2T(\frac{n}{4})+\frac{n}{2}] + n = 4T(\frac{n}{4})+2n$

$= 4[2T(\frac{n}{8})+\frac{n}{4}] + 2n = 8T(\frac{n}{8})+3n$

$= \ldots$

$= 2^i T(\frac{n}{2^i})+2^i.n$

Quá trình kết thúc khi $\frac{n}{2^i}=1 \Rightarrow 2^i=n$

$\Rightarrow i=logn$

Khi đó : $T(n)=2^{logn}T(\frac{n}{2^{logn}})+2^i n=nT(1)+2^{logn}.n=n+n.n=n^2+n$

8.

$T(n) = 2T(\frac{n}{2})+n^2 \qquad T(1)=1$

$= 2[2T(\frac{n}{4})+(\frac{n}{2})^2] + n^2 = 4T(\frac{n}{4})+\frac{n^2}{2}+n^2$

$= 4[2T(\frac{n}{8})+(\frac{n}{4})^2] + \frac{n^2}{2} + n^2 = 8T(\frac{n}{8}) + \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{2} + n^2$

$= \dots$

$= 2^i T(\frac{n}{2^i}) + \frac{n^2}{2^{i-1}} + + \dots + \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{2} + n^2 = 2^i T(\frac{n}{2^i}) + n^2(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{i-1}})$

Ta có $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \dots + \frac{1}{2^{i-1}}$ $\Rightarrow 2S = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \dots + \frac{1}{2^{i-2}}$

$\Rightarrow S = 2 - \frac{1}{2^{i-1}}$

Quá trình kết thúc khi $\frac{n}{2^i} = 1 \Rightarrow 2^i = n$

$\Rightarrow i = logn$

Khi đó : $T(n) = 2^{logn} T(\frac{n}{2^{logn}}) + (2 - \frac{1}{2^{i-1}})n^2 = nT(1) + 2n^2 - \frac{2}{n}n^2 = n + 2n^2 - 2n = 2n^2 - n$

Bài 3:

1.

$T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + n^2$ $\qquad T(1) = 1$

$= 3[3T(\frac{n}{4}) + (\frac{n}{2})^2] + n^2 = 3^2 T(\frac{n}{4}) + 3(\frac{n}{2})^2 + n^2$

$= 3^2[3T(\frac{n}{8}) + (\frac{n}{4})^2] + 3(\frac{n}{2})^2 + n^2 = 3^3 T(\frac{n}{8}) + 3^2(\frac{n}{4})^2 + 3(\frac{n}{2})^2 + n^2$

$= \dots$

$= 3^i T(\frac{n}{2^i}) + 3^{i-1}(\frac{n}{2^{i-1}})^2 + \dots + 3^2(\frac{n}{4})^2 + 3(\frac{n}{2})^2 + n^2$

Đặt $S = 3^{i-1}(\frac{n}{2^{i-1}})^2 + \dots + 3^2(\frac{n}{4})^2 + 3(\frac{n}{2})^2 + n^2$

$\frac{3}{4}S = 3^i(\frac{n}{2^i})^2 + \dots + 3^2(\frac{n}{4})^2 + 3(\frac{n}{2})^2$

$\Rightarrow \frac{1}{4}S = n^2 - 3^i(\frac{n}{2^i})^2$ $\qquad \Rightarrow \quad S = 4n^2 - 4.3^i(\frac{n}{2^i})^2$

$= 3^i T(\frac{n}{2^i}) + 4n^2 - 4.3^i(\frac{n}{2^i})^2$

Quá trình kết thúc khi $\frac{n}{2^i} = 1 \Rightarrow 2^i = n$

$\Rightarrow i = logn$

Khi đó : $T(n) = 3^i T(1) + 4n^2 - 4.3^i = 4n^2 - 3.3^i = 4n^2 - 3^{log(2n)}$

2.

$T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + n^3$ $\quad\quad$ $T(1)=1$

$= 8\,[8T(\frac{n}{4})+(\frac{n}{2})^3] + n^3 = 8^2\,T(\frac{n}{4})+8(\frac{n}{2})^3+n^3$

$= 8^2\,[8\,T(\frac{n}{8})+(\frac{n}{4})^3] + 8(\frac{n}{2})^3+n^3 = 8^3T(\frac{n}{8})+8^2\,(\frac{n}{4})^3+8(\frac{n}{2})^3+n^3$

$= \ldots$

$=8^iT(\frac{n}{2^i})+8^{i-1}(\frac{n}{2^{i-1}})^3+\ldots+8^2(\frac{n}{4})^3+8(\frac{n}{2})^3+n^3$

$=8^iT(\frac{n}{2^i})+(\frac{2^{i-1}.n}{2^{i-1}})^3+\ldots+(\frac{2^2n}{4})^3+(\frac{2n}{2})^3+n^3$

$=8^iT(\frac{n}{2^i}) + in^3$

Quá trình kết thúc khi $\frac{n}{2^i}=1 \Rightarrow 2^i=n$

$\Rightarrow i=logn$

Khi đó : $T(n)=8^iT(1)+in^3 = n^3+in^3=n^3(1+logn)=n^3.log(2n)$

3.

$T(n) = 4T(\frac{n}{3}) + n$ $\quad\quad$ $T(1)=1$

$= 4\,[4T(\frac{n}{3^2})+\frac{n}{3}] + n = 4^2\,T(\frac{n}{3^2})+4\frac{n}{3^1}+\frac{n}{3^0}$

$= \ldots$

$=4^iT(\frac{n}{3^i})+4^{i-1}(\frac{n}{3^{i-1}})+\ldots+4\frac{n}{3^1}+\frac{n}{3^0}$

Đặt $S=4^{i-1.}(\frac{n}{3^{i-1}})+\ldots+4\frac{n}{3^1}+\frac{n}{3^0}$

$\frac{4}{3}S = 4^i.(\frac{n}{3^i}) + \ldots + 4\frac{n}{3^1}$

$\Rightarrow \frac{1}{3}S = 4^i(\frac{n}{3^i}) - n \Rightarrow S=3.4^i(\frac{n}{3^i}) - 3.n$

Quá trình kết thúc khi $\frac{n}{3^i}=1 \Rightarrow 3^i=n$

$\Rightarrow i=logn$

Khi đó : $T(n)=4^iT(\frac{n}{3^i})+3.4^i.(\frac{n}{3^i}) - 3.n=4^iT(1)+3.4^i - 3.n=4.4^{logn} - 3.n=4n^2-3n$

4.

$T(n) = 9T(\frac{n}{3}) + n^2$ $\quad\quad$ $T(1)=1$

$= 9\ [9T(\frac{n}{3^2}) + (\frac{n}{3})^2\ ] + n^2 = 9^2\ T(\frac{n}{3^2}) + 9(\frac{n}{3})^2 + n^2$

$= \ldots$

$= 9^i T(\frac{n}{3^i}) + 9^{i-1}(\frac{n}{3^{i-1}})^2 + \ldots + 9(\frac{n}{3})^2 + 9^0(\frac{n}{3^0})^2$

$= 9^i T(\frac{n}{3^i}) + in^2$

Quá trình kết thúc khi $\frac{n}{3^i} = 1 \Rightarrow 3^i = n$

$\Rightarrow i = logn$

Khi đó : $T(n) = 9^i T(\frac{n}{3^i}) + in^2 = n^2 T(1) + n^2\ logn = n^2(1 + logn)$

5.

$T(n) = 2T(\sqrt{n}) + 1$ $\quad$ $T(2) = 0$

$= 2T(n^{\frac{1}{2}}) + 1$

$= 2\ [2T(n^{\frac{1}{4}}) + 1\ ] + 1 = 2^2\ T(n^{\frac{1}{4}}) + 2 + 1$

$= 2^2\ [2\ T(n^{\frac{1}{8}}) + 1\ ] + 2 + 1 = 2^3\ T(n^{\frac{1}{8}}) + 2^2 + 2 + 1$

$= \ldots$

$= 2^i T(n^{\frac{1}{2^i}}) + 2^{i-1} + 2^2 + 2^1 + 2^0$

Đặt $S = 2^{i-1} + 2^2 + 2^1 + 2^0$

$\Rightarrow 2S = 2^i + \ldots + 2^2 + 2^1 \Rightarrow S = 2^i - 1$

Quá trình kết thúc khi $n^{\frac{1}{2^i}} = 2 \quad \Rightarrow \frac{1}{2^i}\ logn = 1$

$\Rightarrow 2^i = logn \quad \Rightarrow i = log(log(n))$

Khi đó : $T(n) = 2^i T(n^{\frac{1}{2^i}}) + 2^i - 1 = logn T(2) + 2^i - 1 = 0 + logn - 1 = logn - 1$

Bài 4:

a,

T(n)=4T(n-1)-3T(n-2)

T(0)=1

T(1)=2

- Xét phương trình: T(n)=4T(n-1)-3T(n-2)

Đặt $X^n = T(n)$

Ta có: $X^n - 4X^{n-1} + 3X^{n-2} = 0$

Phương trình đặc trưng: $X^2 - 4X + 3 = 0$

$\Leftrightarrow$ (X-1)(X-3)=0

- Phương trình đặc trưng trên có 2 nghiệm đơn $X_1 = 1$ và $X_2 = 3$

T(n)=$c_1X_1^n + c_2X_2^n$

T(n)=$c_1 1^n + c_2 3^n$

-Ta có: T(0)=1 => $c_1 1^0 + c_2 3^0 = 1$

$\Leftrightarrow$ $c_1 + c_2 = 1$

T(1)=2 => $c_1 1^1 + c_2 3^1 = 2$

$\Leftrightarrow$ $c_1 + 3c_2 = 2$

Giải hệ phương trình: $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{1}{2}$

Kết luận: T(n) = $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}3^n$

b,

T(n)=4T(n-1)-5T(n-2)+2T(n-3)

T(0)=0

T(1)=1

T(2)=2

- Xét phương trình: T(n)=4T(n-1)-5T(n-2)+2T(n-3)

Đặt $X^n = T(n)$

Ta có: $X^n - 4X^{n-1} + 5X^{n-2} - 2X^{n-3} = 0$

Phương trình đặc trưng: $X^3 - 4X^2 + 5X - 2 = 0$

$\Leftrightarrow$ $(X - 1)^2$(X-2)=0

- Phương trình đặc trưng trên có 1 nghiệm đơn $X_2 = 2$ và nghiệm kép $X_2 = 1$

T(n)=$c_1X_1^n + c_2X_2^n + c_3nX_2^n$

T(n)=$c_1 2^n + c_2 1^n + c_3 n.1^n$

-Ta có: T(0)=0 => $c_1 2^0 + c_2 1^0 + c_3.0.1^0 = 0$

$\Leftrightarrow$ $c_1 + c_2 = 0$

T(1)=1 => $c_1 2^1 + c_2 1^1 + c_3 .1.1^1 = 1$

$\Leftrightarrow \quad 2c_1 + c_2 + c_3 = 1$

T(2)=2 => $c_1 2^2 + c_2 1^2 + c_3 .2.1^2 = 2$

$\Leftrightarrow \quad 4c_1 + c_2 + 2c_3 = 2$

Giải hệ phương trình: $c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 1$

Kết luận: T(n) = n

c,

T(n)=T(n-1)+T(n-2)

T(0)=1

T(1)=1

- Xét phương trình: T(n)=T(n-1)+T(n-2)

Đặt $X^n = T(n)$

Ta có: $X^n - X^{n-1} - X^{n-2} = 0$

Phương trình đặc trưng: $X^2 - X - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (X-\frac{1-\sqrt{5}}{2})(X-\frac{1+\sqrt{5}}{2})=0$

- Phương trình đặc trưng trên có 2 nghiệm đơn là $X_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ và $X_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

T(n)=$c_1 X_1^n + c_2 X_2^n$

T(n)=$c_1(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n + c_2(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$

-Ta có: T(0)=1 =>$c_1(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^0 + c_2(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^0 = 1$

$\Leftrightarrow \quad c_1 + c_2 = 1$

T(1)=1 =>$c_1(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^1 + c_2(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^1 = 1$

Giải hệ phương trình: $c_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{10}, \quad c_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$

Kết luận: T(n) = $\frac{5-\sqrt{5}}{10}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$

Bài 5:

a.

$T(n) = T(n-1) + 7$
$T(0) = 1$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n$

$\Leftrightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (T(n-1) + 7)x^n + 1$

$\Leftrightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 7x^n + 1 \quad (*)$

Xét $A = \sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^{n-1}$

Mà $\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^{n-1} = T(0) + T(1)x + T(2)x^2 + ...$

Còn có $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n = T(0) + T(1)x + T(2)x^2 + ...$

Suy ra $A = xf(x)$

Xét $B = \sum_{n=1}^{\infty} 7x^n = 7\sum_{n=0}^{\infty} x^n - 7$

$\Leftrightarrow B = \frac{7}{1-x} - 7$

Thế A và B vào (*)

$\Leftrightarrow f(x) = xf(x) + \frac{7}{1-x} - 7 + 1$

$\Leftrightarrow (1-x)f(x) = \frac{1+6x}{1-x}$

$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1+6x}{(1-x)^2}$

$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{6x}{(1-x)^2}$

$\Leftrightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 6nx^n$

$\Leftrightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (7n+1)x^n$

Vậy $T(n) = 7n + 1$

b.

$T(n) = 7T(n-1) - 12T(n-2)$
$T(0) = 1;\ T(1) = 2$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n$

$\Leftrightarrow f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} [7T(n-1) - 12T(n-2)]x^n + 1 + 2x$

$\Leftrightarrow f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} 7T(n-1)x^n - \sum_{n=2}^{\infty} 12T(n-2)x^n + 1 + 2x$ (*)

Xét $A = \sum_{n=2}^{\infty} 7T(n-1)x^n = 7x \sum_{n=2}^{\infty} T(n-1)x^{n-1}$

Mà $\sum_{n=2}^{\infty} T(n-1)x^{n-1} = T(1)x + T(2)x^2 + ...$

Còn có $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n = T(0) + T(1)x + T(2)x^2 + ...$

Suy ra $A = [f(x) - T(0)]7x = 7xf(x) - 7x$

Xét $B = \sum_{n=2}^{\infty} 12T(n-2)x^n = 12x^2 \sum_{n=2}^{\infty} T(n-2)x^{n-2}$

Mà $\sum_{n=2}^{\infty} T(n-2)x^{n-2} = T(0) + T(1)x + T(2)x^2 + ...$

Còn có $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n = T(0) + T(1)x + T(2)x^2 + ...$

Suy ra $B = 12x^2 f(x)$

Thế A và B vào (*)

$\Leftrightarrow f(x) = 7xf(x) - 7x - 12x^2 f(x) + 1 + 2x$

$\Leftrightarrow (12x^2 - 7x + 1)f(x) = 1 - 5x$

$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1-5x}{(1-4x)(1-3x)}$

$\Leftrightarrow f(x) = \frac{-1}{1-4x} + \frac{2}{1-3x}$

$\Leftrightarrow f(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n$

$\Leftrightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2.3^n - 4^n)x^n$

Vậy T(n) = $(2.3^n - 4^n)$

c.

$T(n+1) = T(n) + 2(n+2) \quad n \geq 1$

$T(0) = 3$

Thay $n = n - 1$ vào $T(n+1) = T(n) + 2(n+2)$, ta có:

$\Leftrightarrow T(n) = T(n-1) + 2(n+1)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [T(n-1) + 2(n+1)]x^n + 3$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^n + 2\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n + 3 \qquad (*)$$

Xét $A = \sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^{n-1}$

Ta có:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^{n+1} = T(0) + T(1)x + T(2)x^2 + T(3)\,x^3 + T(4)x^4 + \ldots. \qquad (1)$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n = T(0) + T(1)x + T(2)x^2 + T(3)\,x^3 + T(4)x^4 + \ldots. \qquad (2)$$

Từ $(1),\ (2) \Rightarrow A = xf(x)$

Xét $B = 2\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n = 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n - 2$

$\Leftrightarrow B = \frac{2}{(1-x)^2} - 2$

Thế A và B vào (*)

$\Leftrightarrow f(x) = xf(x) + \frac{2}{(1-x)^2} - 2 + 3$

$\Leftrightarrow (1-x)f(x) = \frac{2}{(1-x)^2} + 1$

$\Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{(1-x)^3} + \frac{1}{1-x}$

$$\Leftrightarrow f(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)(n+1)}{2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1) + 1]x^n$$

Vậy $T(n) = (n+1)(n+2) + 1$