
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

KHOA KHOA HỌC MÁY TÍNH

BÀI TẬP MÔN PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN

HOMEWORK #03: Độ phức tạp và các ký hiệu tiệp cận

GV hướng dẫn: Huỳnh Thị Thanh Thương

Nhóm thực hiện:

Nguyễn Thị Kim Anh, 20521072

TP.HCM, ngày 2 tháng 11 năm 2021

Bài 199

a. Khi tiến hành *phân tích thuật toán* nghĩa là chúng ta tìm ra một đánh giá về *thời gian* và không gian cần thiết để thực hiện thuật toán. Khi nói đến độ phức tạp, chúng ta chỉ đề cập đến những đánh giá về mặt thời gian, *không phải* là xác định thời gian tuyệt đối (chạy thuật toán mất bao nhiêu giây, bao nhiêu phút,...) để thực hiện thuật toán mà là xác định *mối liên quan* giữa dữ liệu đầu vào (input) của thuật toán và chi phí (số thao tác, số phép tính,...) để thực hiện thuật toán. Điều đó được thể hiện qua 1 hàm, hàm này sẽ có các bậc khác nhau để thể hiện độ lớn khác nhau , độ lớn càng thấp thì hiệu quả càng cao.

b, Vì bậc tăng trưởng (order of growth) thể hiện các bậc khác nhau hàm T(n) để dễ dàng so sánh hơn, giống như 1 thang đo, ta có thể thấy n^n>n!>2^n>n^2>nlogn>n>n^1/2> logn>constant. Ví dụ như trẻ con, vị thành niên, trung niên người già ta sẽ dễ dàng nhận ra mà không cần phải đoán tuổi tác.

C. Phép suy ra bên dưới là đúng hay sai?

$\frac{1}{2}n^2 = O(n^2)$

$n^2 + 1 = O(n^2)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}n^2 = n^2 + 1$

$O(n^2)$ được hiểu:

$\frac{1}{2}n^2 = O(n^2)$ nghĩa là $\frac{1}{2}n^2 \in O(n^2)$ và thể hiện 1 tập hợp.

$n^2 + 1 = O(n^2)$ nghĩa là $n^2 + 1 \in O(n^2)$ và thể hiện 1 tập hợp.

Còn $\frac{1}{2}n^2 = n^2 + 1$ là 1 đẳng thức nên đẳng thức này sẽ không thể đúng trong mọi trường hợp hay phép suy ra là sai.

Bài 2. Tìm $f(n)$ sao cho $T(n) = O(f(n))$

1. $T(n) = 7n - 2$

$T(n) = 7n - 2 <= 7n$ $với\ mọi\ n \geq 1$

$\Rightarrow T(n) <= 7n = Cf(n)$, $mọi\ n >= n_0$, chọn $C = 7$, $n_0 = 1$, $f(n) = n$

Vậy $f(n) = n$ thỏa mãn $T(n) = O(f(n))$

2. $T(n) = 3n^3 + 2n^2$

$T(n) = 3n^3 + 2n^2 <= 3n^3 + 2n^3 = 5n^3$, với mọi n≥ 1

$\Rightarrow T(n) <= 5n^3 = Cf(n)$, $mọi\ n >= n_0$, chọn $C = 5$, $n_0 = 1$, $f(n) = n^3$

Vậy $f(n) = n^3$ thỏa mãn $T(n) = O(f(n))$

3. $T(n) = (n + 1)^2$

$T(n) = (n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 <= n^2 + 2n^2 + n^2 = 4n^2$, với mọi n$\geq 1$

$\Rightarrow T(n) <= 4n^2 = Cf(n)$, $mọi\ n >= n_0$, chọn $C = 4,\ n_0 = 1,\ f(n) = n^2$

Vậy $f(n) = n^2$ thỏa mãn $T(n) = O(f(n))$

4. $T(n) = 2^{100}$

$T(n) = 2^{100} = 2^{100}.1$

$\Rightarrow T(n) = Cf(n)$, $mọi\ n >= n_0$, chọn $C = 2^{100},\ n_0\ thuộc\ N,\ f(n) = 1$

Vậy $f(n) = 1$ thỏa mãn $T(n) = O(f(n))$

5. $T(n) = \frac{5}{n}$

$\Rightarrow T(n) = 5.\frac{1}{n} <= Cf(n)$, $tồn\ tại\ n_0$thuộc N, $C = 5,\ f(n) = \frac{1}{n}$

Vậy $f(n) = \frac{1}{n}$ thỏa mãn $T(n) = O(f(n))$

6. $T(n) = 10^{80}$

$T(n) = 10^{80} = 10^{80}.1$

$\Rightarrow T(n) <= Cf(n)$, $n_0$thuộc N, chọn $C = 10^{80},\ f(n) = 1$

Vậy $f(n) = 1$ thỏa mãn $T(n) = O(f(n))$

7. $T(n) = (20n)^7$

$T(n) = (20n)^7 \leq (20n)^7$, với mọi n≥ 1

$\Rightarrow T(n) <= 20^7 n^7 = Cf(n)$, $mọi\ n >= n_0$, chọn $C = 20^7,\ n_0 = 1,\ f(n) = n^7$

Vậy $f(n) = n^7$ thỏa mãn $T(n) = O(f(n))$

8. $T(n) = log_{ln5}(log^{log100} n)$

$T(n) = log100.\,log_{ln5}(log\ n)$, với mọi n≥ 1

$\Rightarrow T(n) <= Cf(n)$, $mọi\ n >= n_0$, chọn

$C = log100,\ n_0 = 1,\ f(n) = log_{ln5}(log\ n)$

Vậy $f(n) = log_{ln5}(log\ n)$ thỏa mãn $T(n) = O(f(n))$

9. $T(n) = 20n^3 - 10nlogn + 5$

$T(n) = 20n^3 - 10nlogn + 5 \le 20n^3 + 5n^3 = 25n^3$, với mọi n≥ 1 , (10nlogn >=0)

$\Rightarrow T(n) <= 25n^3 = Cf(n)$, $mọi\, n >= n_0$, chọn $C = 25,\ n_0 = 1,\ f(n) = n^3$

Vậy $f(n) = n^3$ thỏa mãn $T(n) = O(f(n))$

10. $T(n) = 3logn + log\, log\, n$

$T(n) = 3logn + log\, log\, n \le 3logn + log\, n = 4\, logn$, với mọi n≥ 1 ($log\, n \le n$)

$\Rightarrow T(n) <= 4\, logn = Cf(n)$, $mọi\, n >= n_0$, chọn $C = 4,\ n_0 = 1,\ f(n) = logn$

Vậy $f(n) = logn$ thỏa mãn $T(n) = O(f(n))$

11. $T(n) = 5^{log(3)}n^3 + 10^{80}n^2 + log(3)n^{3.1} + 6006$

$T(n) = 5^{log(3)}n^3 + 10^{80}n^2 + log(3)n^{3.1} + 6006 \le 3n^{3.1} + 10^{80}n^{3.1} + 2n^{3.1} + 6006n^{3.1}$

$= (2.10^{80})n^{3.1}$, với mọi n≥ 1

$\Rightarrow T(n) <= 2.10^{80}n^{3.1} = Cf(n)$, $mọi\, n >= n_0$, chọn

$C = 2.10^{80},\ n_0 = 1,\ f(n) = n^{3.1}$

Vậy $f(n) = n^{3.1}$ thỏa mãn $T(n) = O(f(n))$

12. $T(n) = (n^2 + 1)^{10}$

$T(n) = (n^2 + 1)^{10} \le (n^2 + n^2)^{10} = 2^{10}n^{20}$, với mọi n≥ 1

$\Rightarrow T(n) <= 2^{10}n^{20} = Cf(n)$, $mọi\, n >= n_0$, chọn $C = 2^{10},\ n_0 = 1,\ f(n) = n^{20}$

Vậy $f(n) = n^{20}$ thỏa mãn $T(n) = O(f(n))$

13. $T(n) = 2nlg(n + 2)^2 + (n + 2)^2lg\frac{n}{2}$

$T(n) \le 4n(n + 2) + (n + 2)^2lgn - (n + 2)^2 \le 12n^2lgn + (n^2 + 4n^2 + 4n^2)\ lgn \le 21n^2lg$

Do $lgn \le n$ và $lgn \ge 1,\ với\, mọi\, n \ge 2$

$\Rightarrow T(n) <= 21.n^2lgn, = Cf(n)$, $mọi\, n >= n_0$, chọn

$C = 21,\ n_0 = 2,\ f(n) = 21.n^2lgn,$

Vậy $f(n) = n^2lgn,$ thỏa mãn $T(n) = O(f(n))$

14. $T(n) = [log_2 n]$

$T(n) = [log_2 n] \leq 1.log_2 n$, với mọi n

$\Rightarrow T(n) <= Cf(n)$, $mọi\ n >= n_0$, chọn $C = 1$, $n_0 thuộc\ N$, $f(n) = log_2 n$

Vậy $f(n) = log_2 n$ thỏa mãn $T(n) = O(f(n))$

15. $T(n) = \sqrt{10n^2 + 7n + 3}$

$T(n) = \sqrt{10n^2 + 7n + 3} \leq \sqrt{10n^2 + 7n^2 + 3n^2} = \sqrt{20n^2} \leq 5|n|$, với mọi n $\geq 1 \Rightarrow T(n) <= 5|n| = Cf(n)$, $mọi\ n >= n_0$, chọn $C = 5$, $n_0 = 1$, $f(n) = |n|$

Vậy $f(n) = |n|$ thỏa mãn $T(n) = O(f(n))$

16. $T(n) = 2^{n+1} + 3^{n-1}$

$T(n) = 2^{n+1} + 3^{n-1} \leq 3^{n+1} + 3^{n-1} = \frac{10}{3}3^n$,với mọi n≥ 1

$\Rightarrow T(n) <= Cf(n)$, $mọi\ n >= n_0$, chọn $C = \frac{10}{3}$, $n_0 = 1$, $f(n) = 3^n$

Vậy $f(n) = 3^n$ thỏa mãn $T(n) = O(f(n))$

Bài 3

1. $f_1(n) = n^{0.999999} logn$, $f_2(n) = 10000000n$, $f_3(n) = 1.000001^n$,

   $f_4(n) = n^2$

   + Cm $f_2(n) < f_4(n)$

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{f_2(n)}{f_4(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{10000000n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{10000000}{n} = 0$$

   Nên $f_2(n)$=o($f_4(n)$)

   + Cm $f_4(n) < f_3(n)$

   Áp dụng Tiêu chuẩn d'Alembert cho $u_n = \frac{n^2}{1.000001^n} > 0$

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{1.000001^{n+1}}.\frac{1.000001^n}{n^2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1.000001}(1 + \frac{1}{n})^2 = \frac{1}{1.000001} < 1$$

   Vì $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1\ nên\ chuỗi\ u_n\ hội\ tụ\ hay\ \lim_{n\to\infty} u_n = 0$

$.Vậy\ f_4(n) = o(f_3(n))$

+ Cm $f_1(n)$= $f_2(n)$

Trước hết ta c/m $log\ n = o(n^c)$,c>0

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{log\ n}{n^c} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{ln2.1/n}{c.n^{c-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} ln2.\frac{1}{c.n^c} = 0$ (đã cm xong)

Chọn $c = 0.000001, n \geq 1$ thì : $n^{0.999999} log\ n \leq kn^{0.999999} n^{0.000001} = kn$ (k>0)

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{kn}{10000000n} = \frac{k}{10000000} > 0\ và\ < \infty$

$Vậy\ nên\ n^{0.999999} log\ n = \Theta(10000000n)$ (1) (2)

$f_1(n)$= $\Theta(f_2(n))$

Vậy $f_1(n)$= $f_2(n)$< $f_4(n)$< $f_3(n)$

2. $f_1(n) = 2^{2^{1000000}}$, $f_2(n) = 2^{100000n}$, $f_3(n) = (n\ \ 2), f_4(n) = n\sqrt{n}$

$f_3(n) = (n\ \ 2)$=$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ (em ko gõ được ký hiệu như đề bài)

+$f_1(n)$< $f_4(n)$:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_1(n)}{f_4(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{2^{1000000}} : (\sqrt{n})^3 = 0$

=> $2^{2^{1000000}} \in o(n(\sqrt{n})\ )$

+ $f_3(n)$>$f_4(n)$:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_3(n)}{f_4(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(n-1)}{2} : n\sqrt{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{2\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}}{2} = \infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_4(n)}{f_3(n)} = 0 \Rightarrow n\sqrt{n} \in o(\frac{n(n-1)}{2})$

+$f_2(n)$> $f_3(n)$:

Áp dụng Tiêu chuẩn d'Alembert cho $u_n = \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{2^{100000n}}$ >0

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{2^{100000(n+1)}} . \frac{2^{100000n}}{\frac{n(n-1)}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n-1} . \frac{1}{2^{100000}} = \frac{1}{2^{100000}} < 1$$ nên

chuỗi u(n) hội tụ hay $\lim_{n\to\infty} u(n)=0$

$\Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} \in o(2^{100000n})$

Vậy $f_1(n) < f_4(n) < f_3(n) < f_2(n)$

3. $f_1(n) = n^{\sqrt{n}}$, $f_2(n) = 2^n$, $f_3(n) = n^{10}.2^{\frac{n}{2}}$, $f_4(n) = \sum_{i=1}^{n}(i + 1)$

$f_4(n) = \sum_{i=1}^{n}(i + 1) = \frac{n^2+3n}{2}$

+ $f_3(n) > f_4(n)$:

Áp dụng quy tắc L'hospital 2 lần :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_3(n)}{f_4(n)} = \lim_{n\to\infty} n^{10}.2^{\frac{n}{2}} : \frac{n^2+3n}{2} = \lim_{n\to\infty} 2.\frac{2^{n/2}}{1/n^8+3.1/n^9} = \infty$$ nên

$f_3(n) = \omega(f_4(n))$ và $f_3(n) > f_4(n)$

+ $f_2(n) > f_3(n)$:

Áp dụng đinh lý chuỗi d'alembert với chuỗi số dương u(n)= $\frac{n^{10}.2^{\frac{n}{2}}}{2^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{10}.2^{\frac{(n+1)}{2}}}{2^{n+1}} . \frac{2^n}{n^{10}.2^{\frac{n}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{1/2}}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{10} = \frac{2^{1/2}}{2} < 1$$

nên chuỗi $u(n)$ *hội tụ hay* $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{10}.2^{\frac{n}{2}}}{2^n} = 0$

nên $f_3(n) = o(f_2(n))$

+ $f_1(n) > f_2(n)$:

Áp dụng tiêu chuẩn D'alembert với $\frac{f_1(n)}{f_2(n)} > 0$ và dạng 1^∞:

Đặt $\sqrt{n} = t$

$$\lim_{t\to\infty} t^{2t} : 2^{t^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{(t+1)^{2(t+1)}}{2^{t^2+1}} : \frac{t^{2t}}{2^{t^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2}.(t + 1)^2.\left(\frac{t+1}{t}\right)^{2t}$$

$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2}.(t+1)^2(1+\frac{1}{t})^{2t} = \lim_{t\to\infty} \frac{e^2}{2}.(t+1)^2 = \infty > 1$

nên $\frac{f_1(n)}{f_2(n)}$ phân kì và $\lim_{n\to\infty} \frac{f_1(n)}{f_2(n)} = \infty$ hay $f_1(n)= \omega f_2(n)$

Vậy $f_1(n)> f_2(n) > f_3(n) > f_4(n)$

4. $f_1(n) = (n-2)!$, $f_2(n) = 5lg(n+100)^{10}$, $f_3(n) = 2^{2n}$,

$f_4(n) = 0.001n^4+3n^3+1$, $f_5(n) = ln^2 n$, $f_6(n) = \sqrt[3]{n}$, $f_7(n) = 3^n$

$+f_1(n) > f_3(n)$

,Áp dụng tiêu chuẩn D'alembert với chuỗi số dương u(n)=$\frac{f_1(n)}{f_3(n)}$:

$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!}{4^{n+1}}:\frac{(n-2)!}{4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)}{4} = \infty > 1$ *nên* $f_1(n) = \omega f_3(n)$

nên $u(n)$ *phân kì hay* $\lim_{n\to\infty} \frac{f_1(n)}{f_3(n)} = \infty => f_1(n) = \omega f_3(n)$

$+f_3(n) > f_7(n)$

$f_3(n) = 2^{2n} = 4^n$,Áp dụng tiêu chuẩn D'alembert cho chuỗi số dương u(n)=$\frac{f_3(n)}{f_7(n)}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}}{3^{n+1}}:\frac{4^n}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{3} > 1$

Nên u(n) phân kì hay $\lim_{n\to\infty} \frac{f_3(n)}{f_7(n)} = \infty$ *hay* $(n) = \omega f_7(n)$

$+f_7(n) > f_4(n)$

Áp dụng liên tục quy tắc L'hospital cho dạng vô cùng trên vô cùng

$\lim_{n\to\infty} \frac{f_3(n)}{f_4(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{0.001n^4+3n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{ln3.3^n}{0.004n^3+9n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{ln3.ln3.3^n}{0.012n^2+18n}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{ln3.ln3.ln3.3^n}{0.024n+18} = \lim_{n\to\infty} \frac{ln3.ln3.ln3.ln3.3^n}{0.024} = \infty$ nên $f_7(n) = \omega f_4(n)$

$+f_4(n) > f_6(n)$

$\lim_{n\to\infty} \frac{f_4(n)}{f_6(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{0.001n^4+3n^3+1}{\sqrt[3]{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{0.001n^{11/3}+3n^{8/3}+1/\sqrt[3]{n}}{1} = \infty$ *nên* $f_4(n) = \omega f_6(n)$

$+f_6(n) > f_5(n)$

,Áp dụng L'Hospital cho dạng vô cùng trên vô cùng:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_5(n)}{f_6(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{ln^2 n}{\sqrt[3]{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}2.lnn}{\frac{1}{3}.n^{\frac{-2}{3}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{6.lnn}{n^{\frac{1}{3}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{6.\frac{1}{n}}{\frac{1}{3}.n^{1/3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{18}{n^{4/3}} = 0$$

Vì $\lim_{n\to\infty} \frac{f_5(n)}{f_6(n)} = 0$ nên $f_5(n) = o(f_6(n))$

$+f_5(n) > f_2(n)$

,Áp dụng L'Hospital cho dạng vô cùng trên vô cùng:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_2(n)}{f_5(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{5lg(n+100)^{10}}{ln^2 n} = \lim_{n\to\infty} \frac{50.ln2.\frac{1}{n+100}}{2.\frac{ln\,n}{n}} = \lim_{n\to\infty} 25.ln2.\frac{n}{n+100}.1/lnn = 0$$

Nên $f_2(n) = of_5(n)$

Vậy $f_1(n) > f_3(n) > f_7(n) > f_4(n) > f_6(n) > f_5(n) > f_2(n)$

Bài 4

1. $n^3 \notin O(n^2)$

   Giả sử tồn tại $C > 0, n_0$ *với mọi* $n \geq n_0$ sao cho

   $n^3 \leq C.(n^2) \Rightarrow f(n) = n^3 - C.(n^2) \leq 0$

   Ta có bảng:

n	0	C
f(n)	- 0 -	0 +

   Nhìn vào ta thây với n>C thì f(n) nhận giá trị dương

   Chọn $C > 0,\ n_1 = C$ *với mọi* $n \geq n_1$

   $f(n) = n^3 - C.(n^2) \geq 0$ hay $n^3 \geq C.(n^2)$ (mâu thuẫn) . Vậy $n^3 \notin O(n^2)$

2. $n^4 + n + 1 \notin O(n^2)$

   Giả sử tồn tại $C, n_0 = 1$ *với mọi* $n \geq n_0$ sao cho

   $n^4 + n + 1 \leq n^4 + n^4 + n^4 = 3n^4 \leq C.(n^2) \Rightarrow f(n) = 3n^4 - C.(n^2) \leq 0$

Ta có bảng:

n	$-\sqrt{\frac{C}{3}}$	0	$\sqrt{\frac{C}{3}}$
f	+ 0	- 0 -	0 +

Nhìn vào ta thây với n>$\sqrt{\frac{C}{3}}$ thì f nhận giá trị dương

Chọn $C > 0, n_1 = \sqrt{\frac{C}{3}}$ $với\ mọi$ n≥ n_1

$f(n)$=$3n^4$ $-$C.(n^2) ≥ 0 hay $3n^4$≥C.(n^2) (mâu thuẫn). Vậy $n^4 + n + 1 \notin$ O(n^2)

3. O(n^2) ≠ $O(n)$

Đặt $f(n) = n^2$

+ Tồn tại C, n_0 $với\ mọi$ n≥ n_0 sao cho $f(n) = n^2$≤1.(n^2)

Ta chọn $C = 1, n = n_0$ $với\ mọi$ n≥ n_0 thì $f(n)$∈ O(n^2)

(1)

+ Giả sử tồn tại $C_1, n_0 = 1$ $với\ mọi$ n≥ n_0 sao cho $f(n) = O(n)$

$f(n) = n^2$≤C_1.(n) =>$f(n)$=n^2 $-C_1$.(n)≤0

Ta có bảng:

n	0	C_1
f	+ 0 -	0 +

Nhìn vào ta thây với n>C_1 thì f nhận giá trị dương

Chọn $C_1 > 0$, $n_1 = C_1$ $với\ mọi$ n≥ n_1

$f(n)$=n^2 $-C_1$.(n)≥0 hay n^2≥C_1.(n) . mâu thuẫn hay $f(n) = n^2 \notin$ O(n)

(2)

Từ (1), (2) Vậy có O(n^2) ≠ $O(n)$.

4. n $\notin$ O($log_2 n$)

Vì $\frac{n}{log_2 n}$ có tử và mẫu đều tiến đến vô cùng khi n tiến đến vô cùng nên áp dụng L'hospital ta có:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{log_2 n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n)'}{(log_2 n)'} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{ln2.\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{ln2} = \infty$$

Suy ra n $= \omega(log_2 n)$

Vậy n $\notin$ O($log_2 n$)

Bài 5

1. $O(C) = O(1)$

+Với $f(n) \in O(C)$, ta thấy tồn tại n_0, C_0 , $mọi\ n \geq n_0\ sao\ cho$:

$f(n) \leq C_0 C = C_0 C.1$

Ta thấy tồn tại $n_0, K = C_0 C$, $mọi\ n \geq n_0\ sao\ cho$:

$\Rightarrow f(n) \in O(1)$ (1)

+Với $g(n) \in O(1)$, ta thấy tồn tại n_0, C_1 , $mọi\ n \geq n_1\ sao\ cho$:

$g(n) \leq C_1.1 \leq \frac{C_1}{C}.C$

Ta thấy tồn tại $n_0, J = \frac{C_1}{C}$, $mọi\ n \geq n_1\ sao\ cho$:

$\Rightarrow g(n) \in O(C)$ (2)

Từ (1),(2).Vậy có dpcm

2. $f(n) \in O(g(n))$ và $g(n) \in O(h(n))$ => $f(n) \in O(h(n))$

Với $f(n) \in O(g(n))$, ta thấy tồn tại n_0, C_1 , $mọi\ n \geq n_0\ sao\ cho$:

$f(n) \leq C_1 g(n)$ (1)

Với $g(n) \in O(h(n))$, ta thấy tồn tại n_1, C_2 , $mọi\ n \geq n_1\ sao\ cho$:

$g(n) \leq C_2.h(n)$ (2)

Từ (1),(2) $\Rightarrow f(n) \leq C_1 C_2.h(n)$, với mọi $n \geq max(n_0, n_1)$.

Vậy với $C = C_1 C_2$, mọi $n \geq max(n_0, n_1)$ thì $f(n) \in O(h(n))$

3. $t_1(n) \in O(f(n))$ và $t_2(n) \in O(g(n))$ => $t_1(n) + t_2(n) \in O(max\{f(n), g(n)\})$

Với $t_1(n) \in O(f(n))$, ta thấy tồn tại n_0, C_1 , $mọi\ n \geq n_0\ sao\ cho$:

$t_1(n) \leq C_1 f(n)$ (1)

Với $t_2(n) \in O(g(n))$, ta thấy tồn tại n_1, C_2, $mọi\ n \geq n_1\ sao\ cho$:

$t_2(n) \leq C_2 . g(n)$ (2)

Từ (1),(2)

$\Rightarrow t_1(n) + t_2(n) \leq$

$C_1 max(f(n), g(n)) + C_2 . max(f(n), g(n)) = (C_1 + C_2) max(f(n), g(n))$, với mọi $n \geq max(n_0, n_1)$.

Vậy với $C = (C_1 + C_2)$, mọi $n \geq n_2, n_2 = max(n_0, n_1)$ thì

$t_1(n) + t_2(n) \in O(max\{f(n), g(n)\})$

Bài 6

1. $f(n)$=$n^{\frac{3}{2}}$ và $g(n) = 2n^2$. Cm hoặc BB $f(n) = O(g(n))$

   $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}} : 2n^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0 < \infty$ nên $f(n) = O(g(n))$

2. n+n^2O(lnn)=O(n^2lnn)

   Có $n. lnn \geq 1, với\ n \geq 2$

   Ta có $h(n) \in O(lnn)\ nên\ h(n) \leq C_1 lnn,\ với\ C_1 > 0, n \geq 2$

   VT=$n + n^2 O(lnn) \leq n^2 lnn + n^2 h(n) \leq n^2 lnn + n^2 C_1 lnn = (1 + C_1) n^2 lnn$

   với $n \geq 2$

   Đặt $C_2 = (1 + C_1),\ n_0 = 2,\ với\ mọi\ n \geq n_0\ thì$

   $n + n^2 O(lnn) = O(n^2 lnn)(dpcm)$

Bài 7 .

Ta có : chọn 1 second : $f(n) = 10^6$(microseconds)

=> 1 second : $f(n) = 10^6$, 1 minute: $f(n) = 10^6 . 60$, 1 hour: $f(n) = 10^6 . 3600$, 1 day : $f(n) = 10^6 . 86400$, 1 month: $f(n) = 10^6 . 2592000$, 1 year: $f(n) = 10^6 . 31536000$,1 century: $f(n) = 10^6 . 3155673600$.

Ta sẽ tìm n dựa vào $f(n)$ để điền vào mỗi ô bên dưới: Ví dụ lg$2^{10^6} = 10^6$

	1 second	1 minute	1 hour	1 day	1 month	1 year	1 century
lgn	2^{10^6}	$2^{6.10^7}$	$2^{36.10^8}$	$2^{864.10^8}$	$2^{25920.10^8}$	$2^{315360.10^{87}}$	$2^{31556736.10}$
$\sqrt{n}$	10^{12}	36.10^{14}	1296.10^{16}	746496.10^{16}	6718464.10^{18}	994519296.10^{18}	995827586973696.10^{16}
n	10^6	6.10^7	36.10^8	864.10^8	2592.10^9	31536.10^9	31556736.10^8
nlgn	62746	2801417	133378058	2755147513	71870856404	797633893349	68654697441062
n^2	1000	7745	60000	293938	1609968	5615692	56175382
n^3	100	391	1532	4420	13736	31593	146677
2^n	19	25	31	36	41	44	51
n!	9	11	12	13	15	16	17

Bài 8. CM

1. $g(n) \in O(h(n)) \Rightarrow O(g(n)) \subseteq O(h(n))$

Ta có: $f(n) = 2g(n) \le C_1 g(n)$

$Chọn\ n_0 \in N, C_1 \ge 2\ ,\ mọi\ n \ge n_0\ thì\ f(n) \in O(g(n))$ (1)

Với $g(n) \in O(h(n))$, ta thấy tồn tại $n_1 \in N, C_2\ ,\ mọi\ n \ge n_1\ sao\ cho$:

$$g(n) \le C_2 h(n) => f(n) = 2g(n) \le 2C_2 h(n)$$

với $C = 2C_2,\ n_1 \in N\ ,\ mọi\ n \ge n_1\ thì\ \ f(n) \in O(h(n))$ (2)

Từ (1),(2) => dpcm

2. $O(f(n)) = O(g(n)) \Leftrightarrow f(n) \in O(g(n))$ và $g(n) \in O(f(n))$

+ Chứng minh từ VP=>VT

$f(n) \in O(g(n))$ => tồn tại c_1, n_0 $sao\ cho\ f(n) \le c_1 g(n),\ với\ mọi$

$n \ge n_0, n_0\ thuộc\ N$ (1)

g$(n) \in O(f(n))$ => tồn tại c_2, n_1 $sao\ cho\ g(n) \le c_2 f(n),\ với\ mọi$

$n \ge n_1, n_1 thuộc\ N$ (2)

Từ (1), (2) => $f(n) \le c_1 c_2 f(n)\ với\ mọi\ n \ge n_0$ và $g(n) \le c_2 c_1 g(n)$,với mọi $n \ge n_1$

Đặt $c_3 = c_1 c_2$ => $f(n) \in O(f(n))\ với\ mọi\ n \ge n_0$ và

$g(n) \in O(g(n))\ với\ mọi\ n \ge n_1$.

Từ $f(n) \in O(g(n))$, g$(n) \in O(f(n))$, $f(n) \in O(f(n))$ và $g(n) \in O(g(n))$ =>

$O(f(n)) = O(g(n))$

+VT=>VP:

$O(f(n)) \subseteq O(g(n))$

$Mà\ f(n) \in O(f(n))\ (dễ\ dàng\ chứng\ minh)\ nên\ f(n) \in O(g(n))$ (f(n)<=cf(n))

$O(g(n)) \subseteq O(f(n))$

$Mà\ g(n) \in O(g(n))\ (dễ\ dàng\ chứng\ minh)\ nên\ g(n) \in O(f(n))$

3. $O(f(n)) \subseteq O(g(n)) \Leftrightarrow f(n) \in O(g(n))$ và $g(n) \notin O(f(n))$

+ VP=>VT: $f(n) \in O(g(n))$ và $g(n) \notin O(f(n)) => O(f(n)) \subseteq O(g(n))$ cm như phần 1

+ $VT => VP: O(f(n)) \subseteq O(g(n)) => f(n) \in O(g(n))$ và $g(n) \notin O(f(n))$

Đầu tiên ta chứng minh $f(n) \in O(f(n))$: $f(n) \le C_1 f(n)$

$Chọn\ n_0 \in N, C_1 = 1$, $mọi\ n \ge n_0\ thì\ f(n) \in O(f(n))$ và thêm

$O(f(n)) \subseteq O(g(n))$ => $f(n) \in O(g(n))$ (1)

Tương tự có g$(n) \in O(g(n))$ và $O(f(n)) \subseteq O(g(n))$

$Giả\ sử\ tồn\ tại\ f(n) \in o(g(n))$, $\lim_{n \to \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \infty$

=> $g(n) \notin O(f(n))$ (2)

Từ (1),(2) =>dpcm

4. $f(n) \in O(n) \Rightarrow \quad 2^{f(n)} \in \ O(2^n)$…. Cm nhận định sai

Đặt $f(n) = 2n$ => $2^{f(n)} = 2^{2n}$ thỏa mãn $f(n) \in O(n)$

Vì ta thấy tồn tại $n_0, C = 2$, $mọi\ n \geq n_0\ sao\ cho$: $f(n) = 2.n \leq C.n$

Giả sử $f(n) \in O(n)$, ta thấy tồn tại n_1, C_1 , $mọi\ n \geq n_1\ sao\ cho$:

$$2^{2n} \leq C_1 2^n \Rightarrow 2^{2n} - C_1.2^n \leq 0$$

n	$log_2 C_1$
f	- 0 +

Nhìn vào ta thấy với n> $log_2 C_1$ thì f nhận giá trị dương

Chọn $C_1 > 0$, $n_1 = log_2 C_1$, $với\ mọi$ n≥ n_1

$f(n)$=$2^{2n} - C_1.2^n$≥0 hay$2^{2n}C_1.2^n$. mâu thuẫn hay $2^{f(n)} \notin O(2^n)$

Vậy có dpcm

Bài 9.

+ CM : $1/n = o(1/5)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/5} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n} = 0$$

Vì $\lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/5} = 0\ nên\ 1/n = o(1/5)\ \ và\ không\ tồn\ tại\ 1/n = \Theta(1/5)$

+ CM : $1/5 = o(10^{100}n)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/5}{10^{100}n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5.10^{100}n} = 0$$

Vì $\lim_{n\to\infty} \frac{1/5}{10^{100}n} = 0\ nên\ 1/5 = o(10^{100}n)$

$và\ không\ tồn\ tại\ 1/5 = \Theta(10^{100}n)$

+ CM : $10^{100}n = o(log(n!))$

- Với $n \geq 4\ thì\ log(n!) \geq log(2^n) = n$

Nên $10^{100}n \leq 10^{100}log(n!)\ với\ n \geq 4$

Chọn $C = 10^{100}, n_0 = 4,\ mọi\ n \geq n_0\ thì\ \ 10^{100}n = O(log(n!))$

- chứng minh là ko tồn tại $10^{100}n = \Omega(log(n!))$

Giả sử điều trên đúng thì $10^{100}n \geq Clog(n!) \Rightarrow 2^{\frac{10^{100}}{C}n} \geq n!\ \ hay\ 2^{C_1 n} = \Omega(n!)$

Áp dụng tiêu chuẩn D'alembert cho chuỗi dương u(n)= $\frac{2^{C_1 n}}{n!}$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{2^{C_1 n}}{n!} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^{C_1(n+1)}}{(n+1)!} . \frac{n!}{2^{C_1 n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^{C_1}}{n+1} = 0<1$ nên u(n) hội tụ hay

$\lim_{n \to \infty} \frac{2^{C_1 n}}{n!} = 0 \Rightarrow 2^{C_1 n} = o(n!)$

Suy ra không tồn tại $10^{100}n = \Omega(log(n!))$

+ CM : $log(n!) = o(nlog\ n)$

Áp dụng tiêu chuẩn D'alembert cho chuỗi dương $u(n) = \frac{n^n}{n!}$ và dạng 1 mũ vô cùng

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^{(n+1)}}{(n+1)!} . \frac{n!}{n^n} = \lim_{n \to \infty} (\frac{n+1}{n})^n = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e > 1$

Nên u(n) phân kì hay $\lim_{n \to \infty} \frac{n^n}{n!} = \infty$ suy ra $\lim_{n \to \infty} \frac{nlog\ n^n}{log(n!)} = \infty$

$log(n!) = o(nlog\ n)$

+ CM : $nlog\ n = o(C_n^{100})$

$C_n^{100} = \frac{n!}{100!(n-100)!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-99)}{100!}$

Chứng minh thêm $(n - 1)(n - 2) = n^2 - 3n + 2 = n + (n - 2)^2 - 2$

Với mọi $n \geq 4\ thì\ (n - 2)^2 - 2 \geq 0\ tương\ đương\ (n - 1)(n - 2) \geq n$

$\lim_{n \to \infty} \frac{nlog\ n}{\frac{n(n-1)(n-2)...(n-99)}{100!}} = \lim_{n \to \infty} \frac{log\ n}{\frac{(n-1)(n-2)...(n-99)}{100!}} < \lim_{n \to \infty} \frac{n}{\frac{n(n-3)....(n-99)}{100!}}$

$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\frac{(n-3)....(n-99)}{100!}} = 0$

$Suy\ \ ra\ nlog\ n = o(C_n^{100})$ và không tồn tại $nlog\ n = \Theta(C_n^{100})$

+ CM : $C_n^{100} = \Theta(n^{100})$

$C_n^{100} = \frac{n!}{100!(n-100)!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-99)}{100!} \leq C_1 n^{100} + C_2 n^{99} +... C_n \leq (C_1 +... + C_n)n^{100}$

$u_n = \frac{(C_1 + ... + C_n)n^{100}}{n^{100}}$, C_i *là số thực* > 0 *và* $i = (1, n)$

$\lim_{n \to \infty} u(n) = \lim_{n \to \infty} \frac{(C_1 + ... + C_n)n^{100}}{n^{100}} = \lim_{n \to \infty} (C_1 + ... + C_n) > 0$ *và* $< \infty$

Vì $0 < \lim_{n \to \infty} u(n) < \infty$ *nên* $C_n^{100} = \Theta(n^{100})$

\+ CM : $n^{100} = o(3^{\sqrt{n}})$

Đặt $\sqrt{n} = t \Rightarrow t^2 = n$

Áp dụng Tiêu chuẩn d'Alembert cho $u_t = \frac{t^{200}}{3^t} > 0$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{u_{t+1}}{u_t} = \lim_{t \to \infty} \frac{(t+1)^{200}}{3^{t+1}} . \frac{3^t}{t^{200}} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{t+1}{t}\right)^{200} . \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1$$

nên $u(t)$ *hội tụ và* $\lim_{t \to \infty} u(t) = 0$ thì $n^{100} = o(3^{\sqrt{n}})$

\+ CM : $3^{\sqrt{n}} = o(3^n)$

Áp dụng Tiêu chuẩn d'Alembert cho $u_n = \frac{3^{\sqrt{n}}}{3^n} > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{3^{\sqrt{(n+1)}}}{3^{n+1}} . \frac{3^n}{3^n} = \lim_{n \to \infty} . \frac{3^{\sqrt{(n+1)} - \sqrt{n}}}{3} = 0 < 1$$

Suy ra u(n) hội tụ và $\lim_{n \to \infty} u(n) = 0$ hay $3^{\sqrt{n}} = o(3^n)$

Vì $\lim_{n \to \infty} u(n) = 0$ thì : $3^{\sqrt{n}} = o(3^n)$ *và ko tồn tại* $3^{\sqrt{n}} = \Theta(3^n)$

\+ CM : $3^n = o(4^n)$

Áp dụng Tiêu chuẩn d'Alembert cho $u_n = \frac{3^n}{4^n} > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{3^{n+1}}{4^{n+1}} . \frac{4^n}{3^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{3}{4} = < 1 \text{ và } > 0$$

Suy ra $u(n)$ *hội tụ và* $\lim_{n \to \infty} u(n) = 0$ *nên* $3^n = o(4^n)$

+ $O(4^n)$=$O(2^{2n})$ vì $4^n = 2^{2n}$ nên $2^{2n} = \Theta(4^n)$ và $2^{2n} = O(4^n)$

g1,g2,g3,.. Theo thứ tự là

$1/n,\ 1/5,\ 10^{100}n,\ log(n!),\ nlog\,n,\ C_n^{100},\ n^{100},\ 3^{\sqrt{n}},\ 3^n,\ 2^{2n},\ 4^n$

Và những phân cấp là:

1. $1/n$
2. $1/5$
3. $10^{100}n$
4. $log(n!)$
5. $nlog\,n$
6. $C_n^{100},\ n^{100}$
7. $3^{\sqrt{n}}$
8. 3^n
9. $2^{2n},\ 4^n$

Bài 10.

a. If $f(n) \in \Theta(g(n)),\ g(n) \in \Theta(h(n))$ thì $h(n) \in \Theta(f(n))$

Với $f(n) \in \Theta(g(n))$, ta thấy tồn tại n_0, C_1, C_2 (*sao cho*:

$$C_1 g(n) \le f(n)\ \ mọi\, n \ge n_0 \text{ và } f(n) \le C_2 g(n)\ mọi\, n \ge n_0 \qquad (1)$$

Với $g(n) \in \Theta(h(n))$, ta thấy tồn tại n_2, C_3, C_4 *sao cho*:

$$C_3.h(n) \le g(n)\ \ mọi\, n \ge n_2 \text{ và } g(n) \le C_4.h(n)\ \ mọi\, n \ge n_2 \qquad (2)$$

Từ (1),(2) $\Rightarrow f(n) \le C_2C_4.h(n) \Leftrightarrow h(n) \ge \frac{1}{C_2C_4}f(n)$ (3)

Từ (1),(2) $\Rightarrow C_1C_3h(n) \le f(n) \Leftrightarrow h(n) \le \frac{1}{C_1C_3}f(n)$ (4)

Từ (3), (4) suy ra tồn tại $C = \frac{1}{C_2C_4},\ K = \frac{1}{C_1C_3},\ n_3 = max(n_0, n_2)\ mọi\, n \ge n_3$

đ

Để $h(n) \in \Theta(f(n))$.Vậy khẳng định đúng

b. If $f(n) \in O(g(n)),\ g(n) \in O(h(n))$ thì $h(n) \in \Omega(f(n))$

Với $f(n) \in O(g(n))$, ta thấy tồn tại n_0, C_1, *mọi* $n \ge n_0$ *sao cho*:

$$f(n) \le C_1 g(n) \qquad (1)$$

Với $g(n) \in O(h(n))$, ta thấy tồn tại n_1, C_2, *mọi* $n \ge n_1$ *sao cho*:

$g(n) \leq C_2 . h(n)$ (2)

Từ (1),(2) $\Rightarrow f(n) \leq C_1 C_2 . h(n) \Leftrightarrow h(n) \geq \frac{1}{C_1 C_2} f(n)$

với $C = \frac{1}{C_1 C_2}$, $n_2 = max(n_1, n_0)$ $mọi\ n \geq n_2\ thì\ có$ $h(n) \in \Omega(f(n))$

Vậy kd đúng.

c. If $f(n) \in O(g(n)),\ g(n) \in O(f(n))$ thì $f(n) = g(n)$

Với $f(n) \in O(g(n))$, ta thấy tồn tại n_0, C_1 , $mọi\ n \geq n_0\ sao\ cho$:

$f(n) \leq C_1 g(n)$ (1)

Với $g(n) \in O(f(n))$, ta thấy tồn tại n_1, C_2, $mọi\ n \geq n_1\ sao\ cho$:

$g(n) \leq C_2 . f(n)$ (2)

Chọn $f(n) = 2g(n)$ thì thay vào (1), (2) ta đều thấy thỏa mãn do:

$2g(n) \leq C_1 g(n),\ với\ C_1 \geq 2$

$g(n) \leq C_2 . 2g(n),\ với\ C_2 \geq \frac{1}{2}$

Vậy $f(n) \in O(g(n)),\ g(n) \in O(f(n))$ thì $f(n) = g(n)$ là 1 khẳng định sai do chưa có đủ cơ sở

d. $\frac{n}{100} = \Omega(n)$

$Ta\ thấy$: $\frac{n}{100} \geq \frac{1}{100} n = Cn$

Với C=$\frac{1}{100}$, tồn tại n_0, $mọi\ n \geq n_0\ thì\ \frac{n}{100} = \Omega(n)$

e. $f(n)$+O($f(n)$)=$\Theta(f(n))$

Có $n.lnn \geq 1, với\ n \geq 1$

VT= $f(n) + O(f(n)) = f(n) + C_1 f(n) = (1 + C_1)f(n)$ với$C_1 > 0$

$\lim_{n \to \infty} \frac{(1+C_1)f(n)}{f(n)} = (1 + C_1) > 0\ và\ < \infty$ nên $(1 + C_1)f(n) = \Theta(f(n))$

Hay $f(n)$+O($f(n)$)=$\Theta(f(n))$. Vậy khẳng định đúng

f. $2^{10n} = O(2^n)$

Giả sử tồn tại $C, n_0 với\ mọi$ n≥ n_0 sao cho

$2^{10n} \leq C.(2^n) \Leftrightarrow f(n) = 2^{10n} - C.(2^n) \leq 0 \Leftrightarrow$

$2^n . 2^{9n} - C.(2^n) \leq 0 \Leftrightarrow 2^n . (2^{9n} - C) \leq 0$

Ta có bảng:

n		$\frac{logC}{9}$	
f	-	0	+

Nhìn vào ta thấy với n>$\frac{logC}{9}$ thì f nhận giá trị dương

Với $C \in R$ và > 0, $n_1 = \frac{logC}{9}$ với mọi n≥ n_1

$f(n)$=2^{10n} −C.(2^n)≥0 hay $2^{10n} \geq C.(2^n)$ (mâu thuẫn) . Vậy $2^{10n} \notin O(2^n)$ hay khẳng định sai

g. $log_{10}n = \Theta(log_2 n)$

Áp dụng quy tắc L'hospital 2 lần với dạng vô cùng chia vô cùng:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{log_{10}n}{log_2 n} = \lim_{n\to\infty} \frac{ln10.1/n}{ln2.1/n} = \frac{ln10}{ln2} < \infty \text{ và } > 0$$

nên $log_{10}n = \Theta(log_2 n)$. Vậy khẳng định đúng.

Bài 11.

a. If $t(n) \in O(g(n))$, $then\ g(n) \in \Omega(t(n))$

Với $t(n) \in O(g(n))$, ta thấy tồn tại n_0, C_1 , $mọi\ n \geq n_0\ sao\ cho$:

$$t(n) \leq C_1 g(n) \qquad => g(n) \geq \frac{1}{C_1} t(n)$$

Đặt C=$\frac{1}{C_1}$, $mọi\ n \geq n_0 \Rightarrow g(n) \in \Omega(t(n))$ (dpcm)

b. $\Theta(\alpha g(n)) = \Theta(g(n))$, $where\ \alpha > 0$

+ $f(n) \in \Theta(g(n))$ => tồn tại $c_0, n_0, c_1\ sao\ cho\ c_0 g(n) \leq f(n) \leq c_1 g(n)$ $với\ mọi\ n \geq n_0$

=> $\alpha c_0 g(n) \leq \alpha f(n) \leq \alpha c_1 g(n)$

=> $\frac{c_0}{\alpha}. \alpha g(n) \leq f(n) \leq \frac{c_1}{\alpha}. \alpha g(n)$

Tồn tại $C_0 = \frac{c_0}{\alpha}, C_1 = \frac{c_1}{\alpha}, n_0$ để $f(n) \in \Theta(\alpha g(n))$ (1)

+ $h(n) \in \Theta(\alpha g(n))$ => tồn tại $c_2, n_1, c_3\ sao\ cho\ c_2 \alpha g(n) \leq h(n) \leq c_3 \alpha g(n)$ $với\ mọi\ n \geq n_1$

Tồn tại $C_2 = c_2\alpha,\ C_3 = c_3\alpha, n_0$ để $f(n) \in \Theta(g(n))$ (2)

Từ (1),(2)=>dpcm

c. $\Theta(g(n)) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$

$f(n) \in \Theta(g(n))$ nên tồn tại $c_1,\ c_2 > 0, n_0\ thuộc\ N$:

$c_1 g(n) \le f(n) \le c_2. g(n)$ (1)

$h(n) \in O(g(n))$ nên tồn tại $c_3, n_1\ thuộc\ N$:

$0 \le h(n) \le c_3. g(n)$ (2)

Từ (1),(2) => $c_1 g(n) \le f(n) + h(n) \le c_2. g(n)$

=> $f(n) + h(n) \in O(g(n))$ và $f(n) + h(n) \in \Omega(g(n))$ và

$f(n) + h(n) = \Theta(g(n))$. Ta biết rằng $\Theta(g(n)) \in O(g(n))$ và $\Theta(g(n)) \in \Omega(g(n))$

Vì vậy nên $f(n) + h(n) = \Theta(g(n))$ là giao $O(g(n))$ và $\Omega(g(n))$ (dpcm)

Bài 12

1. $f(n) = \sum_{i=1}^{n} i,\ g(n) = n^2.\ Cm\ f(n) = \Theta(g(n))$

$+\ f(n) = \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \ge \frac{n^2}{2} = C.n^2$

$với\ mọi\ n \ge 1$

Tồn tại C=$\frac{1}{2}$, $n_0 = 1,\ với\ mọi\ n \ge n_0\ sao\ cho$:

$f(n) = O(\ g(n))$ (1)

$+\ f(n) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \le \frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{2}\ với\ mọi\ n \ge 1$ hay $f(n) \le n^2 = C_1.n^2$

Tồn tại $C_1 = 1,\ n_1 = 1,\ với\ mọi\ n \ge n_1\ sao\ cho$:

$f(n) = \Omega(g(n))$ (2)

Từ (1),(2). Vậy có dpcm

2. $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$

Ta có : $\frac{1}{2}n^2 - 3n \ge \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{3}n^2$, với $n \ge 9$

Hay $\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{3}n \ge \frac{1}{6}n^2 = Cn^2$ (1)

Ta có : $\frac{1}{2}n^2 - 3n \le \frac{1}{2}n^2$, với $n \ge 1$

Hay $\frac{1}{2}n^2 - 3n \le C_1 n^2$ (2)

Từ (1), (2) => $Cn^2 \le \frac{1}{2}n^2 - 3n \le C_1 n^2$

Chọn:

$C = \frac{1}{6},\ C_1 = \frac{1}{2},\ n_0 = 9\ (max(9,1))\ với\ mọi\ n \ge n_0\ thì\ \frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)(dpcm)$

3. $n\log n - 2n + 13 = \Omega(nlogn)$

Ta có : $\log n \ge 4$ với $n \ge 16$ => $-2n \ge -\frac{1}{2}n\,logn$ với $n \ge 16$

$n\log n - 2n + 3 \ge n\log n - \frac{1}{2}n\,logn = \frac{1}{2}n\,logn$, với $n \ge 16$

Hay $n\log n - 2n + 3 \ge Cn\log n$

Chọn :

$C = 1/2,\ n_0 = 16\ với\ mọi\ n \ge n_0\ thì\ n\log n - 2n + 3 = \Omega(nlogn)(dpcm)$

4. $\log_3(n^2) = \Theta(\log_2(n^3))$

Ta có : $\log_3(n^2) = 2.\log_3(n),\ \log_2(n^3) = 3.\log_2 n$

$2.\log_3(n) = 2.\frac{\log_2(n)}{\log_2 3} = \frac{2}{3.\log_2 3}.3.\ \log_2(n)$, với $n \ge 1$

Suy ra

$2.\log_3(n) \le C.\log_2(n),\ chọn\ C = 1,\ n_0 = 1,\ mọi\ n \ge n_0\ nên\ \log_3(n^2) = O(\log_2(n^3))$

(1)

Thêm nữa

$2.\log_3(n) \ge C.\log_2(n),\ chọn\ C = 0.1,\ n_0 = 1,\ mọi\ n \ge n_0\ nên\ \log_3(n^2) = \Omega(\log_2(n^3))$

(2)

Từ (1),(2)=>dpcm

5. $n^{lg\ 4} = \omega(3^{lgn})$

Ta có : $\log n = t \Rightarrow n = 2^t \Rightarrow n^{lg\ 4} = 4^t$ và $3^{lgn} = 3^t$

$+\ Giả\ sử\ tồn\ tại\ C,\ t_0,\ mọi\ t \ge t_0: 3^t \ge C.4^t \Rightarrow C \le (\frac{3}{4})^t$, với $t > 0$

t	$\log_{3/4} C$

$(\frac{3}{4})^t$-C	+	0	-

$với\ t_1 = log_{3/4'}C > 0\ với\ mọi\ t \geq t_1\ thì\ C \geq (\frac{3}{4})^t$

Từ đó suy ra $ko\ tồn\ tại\ C \leq (\frac{3}{4})^t\ hay\ n^{lg\ 4} = O(3^{lgn})$ (1)

+ $4^t \geq C.3^t\ với\ mọi\ t > 0$

Chọn $C = 1\ với\ mọi\ t \geq t_0,\ t_0 = 0\ thì\ 4^t = \Omega(3^t)\ hay\ n^{lg\ 4} = \Omega(3^{lgn})$ (2)

Từ (1),(2) suy ra dpcm

6. $lg^2n = o(n^{1/2})$

+ Trước hết ta c/m $lg_2n \leq n$ với $n \geq 1$ hay $2^n \leq n$

$f(n) = 2^n - n \ => f(n)' = 2^n ln(2) - 1 > 0\ với\ mọi\ n \geq 1$

$nên\ hàm\ f(n)\ đồng\ biến\ với\ điều\ kiện$ n như trên

=> $2^n - n \geq 2^1 - 1 > 0$

$lg_2n \leq n => lg(lg_2n) \leq lg(n)$

Từ chứng minh trên tồn tại $C > 0,\ n_0 = 1\ với\ mọi\ n \geq n_0$:

$lg(lg^2\ n) = 2lg(lg_2\ n) \leq Clg(n)$, C>=2

Nên $lg(lg^2\ n) = O(lg(n))$ (1)

$O(lg(lg^2\ n)) = O(\frac{1}{2}lg(n))$ (cm như bài 1)

$= O(lg(n)^{\frac{1}{2}})$ (2)

Từ (1),(2) suy ra : $lg(lg^2\ n) = O(lg(n)^{\frac{1}{2}})$

Nên tồn tại $C_1 > 0,\ n_1 = 1\ với\ mọi\ n \geq n_1$:

$lg(lg^2\ n) \leq C_1 lg(n)^{\frac{1}{2}} => lg^2n \leq C_2 n^{\frac{1}{2}}$ (hàm log đồng biến)

nên tồn tại C_2>0, $n_1 = 1\ với\ mọi\ n \geq n_1 để\ lg^2n = O(n^{1/2})$ *

+ Cm k có $lg^2n = \Omega(n^{1/2})$ (để $lg^2n = o(n^{1/2})$ thì cần cm như vậy)

Giả sử $lg^2 n = \Omega(n^{1/2})$. Tồn tại C>0, $n_0 = 1$ *với mọi* $n \geq n_0$ để $lg^2 n \geq Cn^{\frac{1}{2}}$

Xét

$f(n) = lg^2 n - Cn^{\frac{1}{2}} => f(n)' = ln2.\frac{1}{n}.2.lgn - C.\frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}(\frac{2.ln2.lgn}{\sqrt{n}} - \frac{C}{2})$

$= \frac{1}{\sqrt{n}}(\frac{2.ln2.lgn - C\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}) < 0$ Theo bài 2 thì $lgn = o(\sqrt{n})$ vậy đến 1 giá trị n=x thì f'<0

Hàm trên nghịch biến với n từ đoạn[x, dương vô cùng] =>

$lg^2 n - Cn^{\frac{1}{2}} \leq lg^2 1 - C.1^{\frac{1}{2}} < 0$ *với* $n \geq k$ *nào đó mà* $f(k) = f(0)$,

Từ 0 $->$ x, f *có thể* tăng hoặc giảm nhưng sau đó thì giảm =>$lg^2 n \leq Cn^{\frac{1}{2}}$ (mâu thuẫn)

Vậy có dpcm

7. $\frac{n^2}{2} \neq \omega(n^2)$

$+ \frac{n^2}{2} \leq n^2 = Cn^2$ *với mọi* $n \geq 1$

Tồn tại $C = 1$, $n_0 = 1$, *mọi* $n \geq 1$ để $\frac{n^2}{2} = O(n^2)$ (1)

$+ \frac{n^2}{2} \geq \frac{1}{3}n^2 = K$ *với mọi* $n \geq 1$

Tồn tại $K = 1$, $n_1 = 1$, *mọi* $n \geq 1$ để $\frac{n^2}{2} = \Omega(n^2)$ (2)

Từ (1).(2) có dpcm vì $\frac{n^2}{2} = \omega(n^2)$ tức là không có $\frac{n^2}{2} = O(n^2)$

Bài 13

1. $f(n) = \sum_{i=1}^{n} i$, $g(n) = n^2$. Cm $f(n) = \Theta(g(n))$

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \geq \frac{n^2}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} (\frac{n(n+1)}{2} : n^2) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Mà $0 < \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$

Vậy có dpcm

2. $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$

Với $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$, $g(n) = n^2$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}n^2-3n}{n^2} = \frac{1}{2}$$

Mà $0 < \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = < \infty$

Vậy có dpcm

3. $n \log n - 2n + 13 = \Omega(nlogn)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\log n - 2n + 13}{nlogn} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{logn} + \frac{13}{n.logn}\right) = 1 > 0$$

Vậy có dpcm

4. $log_3(n^2) = \Theta(log_2(n^3))$

Ta có: $log_3(n^2) = 2.log_3(n\ ), log_2(n^3) = 3.log_2 n$

Áp dụng quy tắc L'hospital với 2 tử và mẫu ps dưới đều tiến tới dương vô cùng khi n tiến tới dương vô cùng:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2.log_3(n\ )}{3.log_2 n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2.ln3.1/n}{3.ln2.1/n} = \frac{2.ln\,3}{3.ln2},$$

$Vì\ 0 < \lim_{n\to\infty} \frac{2.log_3(n\ )}{3.log_2 n} < \infty\ nên\ có\ dpcm$

5. $n^{lg\ 4} = \omega(3^{lgn})$

Ta có : $log\,n = t \Rightarrow n = 2^t \Rightarrow n^{lg\ 4} = 4^t$ và $3^{lgn} = 3^t$

Áp dụng tính giới hạn cho chuỗi số dương phân kì :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{4^t}{3^t} = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^t = \infty \Rightarrow n^{lg\ 4} = \omega(3^{lgn})\ \text{ dpcm}$$

6. $lg^2 n = o(n^{1/2})$

Áp dụng quy tắc L'hospital với f(n),g(n) tiến tới vô cực khi n tiến tới vô cực.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{lg^2 n}{n^{1/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{ln2.\frac{1}{n}.2.lgn}{\frac{1}{2}n^{-1/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4.ln2lgn}{n^{1/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4.ln2.1/n}{1/2.n^{-1/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{8.ln2}{n^{1/2}} = 0$$

=>dpcm

7. $\frac{n^2}{2} \neq \omega(n^2)$

$f(n) = \frac{n^2}{2}, g(n) = n^2$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{2}: n^2\right) = \frac{1}{2}$$

Mà $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} \neq \infty\ nên\ có\ dpcm$

Note: Có chỗ em viết ∞ nghĩa là dương vô cùng ạ.