TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

KHOA KHOA HỌC MÁY TÍNH

BÀI TẬP MÔN PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN

HOMEWORK #01: ĐÁNH GIÁ THUẬT TOÁN DÙNG KỸ THUÂT TOÁN SƠ CẤP

Nhóm thực hiện:

1. Tôn Anh Trúc - 20520944 (1, 3, 5, 7, 9)
2. Nguyễn Thị Kim Anh – 20521072 (2, 4, 6, 8)

TP.HCM, ngày 24 tháng 9 năm 2021

Bài 1: Tính tổng hữu hạn

a) 1 + 3 + 5 + 7 + … + 999

$= \frac{(1 + 999).[(999 - 1): 2 + 1]}{2}$

= 250000

b) 2 + 4 + 8 + 16 + … + 1024

$= \sum_{i=0}^{10} 2^i$ - 2^0

$= \frac{2^{11}-1}{2-1} - 1$

= 2046

c) $\sum_{i=3}^{n+1} 1$

= n + 1 – 3 + 1

= n – 1

d) $\sum_{i=3}^{n+1} i$

$= \frac{(n+1-3+1)(n+1+3)}{2}$

$= \frac{(n-1)(n+4)}{2}$

e) $\sum_{i=0}^{n-1} i(i+1)$

$= \sum_{i=0}^{n-1}(i^2 + i)$

$= \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + \sum_{i=0}^{n-1} i$

$= \frac{n(n-1)[2(n-1)+1]}{6} + \frac{n(n-1)}{2}$

f) $\sum_{j=1}^{n} 3^{j+1}$

$= \sum_{j=0}^{n}(3^j . 3)$ - 3^{0+1}

$= 3.(\frac{3^{n+1}-1}{3-1}) - 3$

$= 3. (\frac{3^{n+1}-1}{2}) - 3$

g) $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} ij$

$= \sum_{i=1}^{n} i. \frac{n(n+1)}{2}$

$= (\frac{n(n+1)}{2})^2$

h) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$

$= \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1})$

$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1}$

$= (ln\, n + \gamma) - (ln\, n + \gamma - 1 + \frac{1}{n+1})$

$= 1 - \frac{1}{n+1}$

i) $\sum_{j \in \{2,3,5\}} (j^2 + j)$

$= 2^2 + 2 + 3^2 + 3 + 5^2 + 5$

= 48

j) $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{100} (i + j)$

$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{n} [(i + j)(101)]$

$= 101. \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{n} [(i + j)]$

$= 101.(\sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=0}^{n} i + \sum_{j=0}^{n} j))$

$= 101.(\sum_{i=1}^{m} [i.(n + 1) + \frac{n(n+1)}{2}])$

$= 101.(\sum_{i=1}^{m} [i.(n + 1)] + \sum_{i=1}^{m} \frac{n(n+1)}{2})$

$= 101.[\frac{m(m+1)}{2} (n + 1) + \frac{mn(n+1)}{2}]$

- **Đếm phép gán và so sánh**

Bài 3:

```
sum = 0;                            1g
i = 1;                              1g
while (i ≤ n)                       (n + 1)ss
{
        j = n – i*i;                ng
        while (j ≤ i*i)
        {
                sum = sum + i*j;    Pi
                j = j + 1;
        }
        i = i + 1;                  ng
}
```

- Từ những phép gán đã biết ở trên ta suy ra:
  Số phép gán = 2 + 2n + $\sum_{i=1}^{n} gán(P_i)$
  = 2 + 2n + $\sum_{i=1}^{n}(2\alpha_i)$
  = 2 + 2n +2 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$

- Nhận xét: vòng lặp P_i chỉ thực hiện khi:
  $n - i^2 \leq i^2 \Leftrightarrow i^2 \geq \frac{n}{2}$

- Từ đó suy ra:

$$\alpha_i = \begin{cases} 0 & nếu\ i^2 < \frac{n}{2} \\ i^2 - (n - i^2) + 1 & nếu\ i^2 \geq \frac{n}{2} \end{cases}$$

- Vậy:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=\sqrt{\frac{n}{2}}}^{n} (2i^2 - n + 1) = 2\sum_{i=\sqrt{\frac{n}{2}}}^{n} i^2 - \sum_{i=\sqrt{\frac{n}{2}}}^{n} (n-1)$$

$$= 2\sum_{i=\sqrt{\frac{n}{2}}}^{n} i^2 - (n - \sqrt{\frac{n}{2}} + 1)(n - 1)$$

→2 + 2n + $4\sum_{i=\sqrt{\frac{n}{2}}}^{n} i^2 - 2(n - \sqrt{\frac{n}{2}} + 1)(n - 1)$ số phép gán

- Từ những phép so sánh ở trên ta suy ra:

  Số phép so sánh = n + 1 + $\sum_{i=1}^{n} ss(P_i)$

  = n + 1 + $\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1)$

  = n + 1 + $\sum_{i=1}^{\sqrt{\frac{n}{2}}} 1 + \sum_{i=\sqrt{\frac{n}{2}}}^{n} (2i^2 - n + 2)$

  = n + 1 + $\sqrt{\frac{n}{2}} + 2\sum_{i=\sqrt{\frac{n}{2}}}^{n} i^2 - \sum_{i=\sqrt{\frac{n}{2}}}^{n}(n-2)$

  = n + 1 + $\sqrt{\frac{n}{2}} + 2\sum_{i=\sqrt{\frac{n}{2}}}^{n} i^2 - (n - \sqrt{\frac{n}{2}} + 1)(n - 2)$

Bài 5:

```
float Alpha (float x, long long n)
{
    long i = 1;                 1g
    float z = 0;                1g
    while (i ≤ n)               (n + 1)ss
    {
        long j = 1;             ng
        float t = 1;            ng
        while (j <= i)
        {
            t = t*x;                  Pi
            j = 2*j;
        }
        z = z + i*t;            ng
        i = i + 1;              ng
    }
    return z;
}
```

- Từ những phép gán biết ở trên ta suy ra:
  Số phép gán = 2 + 4n + $\sum_{i=1}^{n} gán(P_i)$
  = 2 + 4n + $\sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i$
  = 2 + 4n +2 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$

- Nhận xét while trong: bước tăng 2*j thì sau lần lặp 1: j = 2, sau lần lặp 2: j = 4, sau lần lặp 3: j = 8,…
  → i = {1, 2, 4, … ,i) = $\{2^0, 2^1, \dots, 2^{\log_2 i}\}$
- → $\alpha_i = \log_2 i + 1$

- Vậy:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} (\log_2 i + 1)$$

→ có 2 + 4n + $2\sum_{i=1}^{n}(\log_2 i + 1)$ phép gán

- Số phép so sánh = n + 1 + $\sum_{i=1}^{n} ss(P_i)$
  = n + 1 + $\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1)$
  = n + 1 + $\sum_{i=1}^{n}(\log_2 i + 2)$

Bài 7:

```
i = 1;                              1g
count = 0;                          1g
while(i ≤ 3n)                       (3n+1)ss
{
    x = 2n – i;                     3ng
    y = i – n;                      3ng
    j = 1;                          3ng
    while (j ≤ x)                   ⎫
    {                               ⎪
        if (j ≥ n)                  ⎬  Pi
            count = count – 1;      ⎪
        j = j + 1;                  ⎭
    }
    if (y > 0)                      3nss
        if (x > 0)
            count = count + 1;
    i = i + 1;                      3ng
}
```

- Ta có bảng xét dấu x và y:

i	**1**	**n**	**2n** **3n**
x	+	+	0 -
y	-	0 +	+

- Từ bảng xét dấu trên, ta có:
  - Câu lệnh if(x > 0) chỉ thực hiện khi y > 0
    → số lần thực hiện phép so sánh x > 0 = 3n – (n + 1) + 1 = 2n
  - Câu lệnh count được thực hiện khi x > 0 và y > 0
    → số lần thực hiện phép gán count = (2n – 1) – (n + 1) + 1 = n – 1

- Nhận xét:
  - Vòng lặp while trong chỉ thực hiện khi 1 ≤ x hay x > 0
    → số lần lặp của while trong α_i = số con j chạy từ 1 → x, bước tăng là 1

$$\alpha_i = \begin{cases} x \; khi \; x > 0 \\ 0 \; khi \; x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} x \; khi \; i < 2n \\ 0 \; khi \; i \geq 2n \end{cases} = \begin{cases} 2n - i \; khi \; i < 2n \\ 0 \; khi \; i \geq 2n \end{cases}$$

  - Câu lệnh if(j ≥ n) được hiện 1 lần mỗi khi while chạy
    → số lần thực hiện phép so sánh j ≥ n = 2n – i khi i < 2n
  - Câu lệnh count được thực hiện khi j ≥ n và x ≥ j
    → số lần thực hiện phép gán count = x – n + 1
    = 2n – i – n + 1
    = n – i + 1

- Số phép gán = 2 + 12n + n – 1 + $\sum_{i=1}^{3n} gán(P_i)$
  = 13n + 1 + $\sum_{i=1}^{3n} gán(P_i)$
  = 13n + 1 + $\sum_{i=1}^{2n-1}[\alpha_i + (n - i + 1)]$
  = 13n + 1 + $\sum_{i=1}^{2n-1}(2n - i + n - i + 1)$
  = 13n + 1 + $\sum_{i=1}^{2n-1}(3n - 2i + 1)$

- Số phép so sánh = 3n + 1 + 3n + 2n + $\sum_{i=1}^{3n} ss(P_i)$
  = 8n + 1 + $\sum_{i=1}^{3n} ss(P_i)$
  = 8n + 1 + $\sum_{i=1}^{2n-1}(2\alpha_i + 1)$
  = 8n + 1 + $\sum_{i=1}^{2n-1}(2(2n - i) + 1)$
  = 8n + 1 + $\sum_{i=1}^{2n-1}(4n - 2i + 1)$

Bài 9:

```
i = 1;                          1g
res = 0;                        1g
while(i ≤ n)                    (n + 1)ss
{
    j = 1;                      ng
    k = 1;                      ng
    while(j ≤ i)
    {
        res = res + i*j;
        k = k + 2;              Pi
        j = j + k;
    }
    i = i + 1;                  ng
}
```

- Nhận xét while trong:
    - Từ k = k + 2 và j = j + k ta nhận thấy sau 1 lần lặp j = i^2 (với i là số lần lặp), như lặp lần 1: j = 1, lần 2: j = 4, lần 3: j = 9, lần 4: j =16,...
    - Vậy số lần while trong chạy sẽ bằng $\sqrt{i}$

- Số phép gán = 2 + 3n + $\sum_{i=1}^{n} gán(Pi)$
  = 2 + 3n + $\sum_{i=1}^{n} 3\alpha_i$
  = 2 + 3n + 3$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$
  = 2 + 3n + 3$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}$

- Số phép so sánh = n + 1 + $\sum_{i=1}^{n} ss(Pi)$
  = n + 1 + $\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1)$

Câu 2:

```
s = 0                                   {1g}
i = 1                                   {1g}
while (i <= n) do:                      {n+1 ss}
    j = 1;                              {n}
    while (j <= i^2) do:
        s = s + 1;                      (Pi)
        j = j + 1;
    end do;
    i = i + 1;                          {ng}
end do;
```

- Số phép so sánh (n) = n + 1 + $\sum_{i=1}^{n} \text{sosánh}(Pi)$

- Số phép gán(n) = 2 + 2n + $\sum_{i=1}^{n} \text{gán}(Pi)$

Pi: $\sum_{i=1}^{n} \text{sosánh}(Pi)$ = $\sum_{i=1}^{n}(i^2 + 1)$ = $\sum_{i=1}^{n} i^2 + n$

$\sum_{i=1}^{n} \text{gán}(Pi)$ = $\sum_{i=1}^{n} 2i^2$

- Số phép so sánh (n)$\approx 2n + 1 + \frac{1}{3}n^3$
- Số phép gán(n)$\approx 2n + 2 + \frac{2}{3}n^3$

Câu 4:

```
sum = 0;                          {1g}
i = 1;                            {1g}
while (i <= n) do                 {n+1ss}
        j := i;                   {ng}
        while(j > 0) do
              sum := sum + 1      Pi
              j = j div 2:
        end w;
        i = i + 1;                {ng}
endw;
```

- Ta thấy j = { $\frac{i}{2^0}, \frac{i}{2^1}, \ldots, \frac{i}{2^k} > 0$}
- Hay i được biểu diễn là i = $a.2^k + a.2^{k-1} + \ldots + a.2^0$, a={0, 1}
- Gọi số lần xảy ra vòng while của Pi là α_i thì $\alpha_i \approx \log(i)$ (log cơ số 2) (xấp xỉ k)

- Số phép so sánh(n)= n+1+ $\sum_{i=1}^{n} \text{sosánh}(Pi)$
- Số phép gán(n)=2+2n+$\sum_{i=1}^{n} \text{gán}(Pi)$

Pi: $\sum_{i=1}^{n} \text{sosánh}(Pi) = \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1) = \sum_{i=1}^{n}(\log(i) + 1)$

$\sum_{i=1}^{n} \text{gán}(Pi) = \sum_{i=1}^{n} 2.\alpha_i = 2.\sum_{i=1}^{n} \log(i)$

- Số phép so sánh (n) $\approx 2n + 1$ + nlog(n)
- Số phép gán(n) $\approx 2n + 2$ + 2nlog(n) (với log cơ số 2)

Câu 6:

```
sum = 0;                              {1g}
i= 1;                                 {1g}
while (i <= n) do                     {n+1ss}
        j := n-i;                     {ng}
        while(j <= 2i)
        {
               sum := sum + i*j ;     Pi
               J = j + 2;
        }
        k = i ;                       {ng}
        while(k > 0)
        {
               sum = sum + 1;         Ki
               k = k / 2;
        }
        i = i + 1                     {ng}
endw;
```

- Số phép so sánh(n) = $n + 1 + \sum_{i=1}^{n} \text{sosánh}(\text{Pi}) + \sum_{i=1}^{n} \text{sosánh}(\text{Ki})$
- Số phép gán(n) = $2 + 3n + \sum_{i=1}^{n} \text{gán}(\text{Pi}) + \sum_{i=1}^{n} \text{gán}(\text{Ki})$
- Gọi số lần xảy ra vòng while của Pi là α_i

  $\alpha_i = \frac{3i-n+1}{2}$, i >= n/3

  $\alpha_i = 0$, i < n/3

  Pi: $\sum_{i=1}^{n} \text{sosánh}(\text{Pi}) = \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1) = \sum_{i=[\frac{n}{3}]}^{n} \frac{3i-n+1}{2} + \sum_{i=1}^{n} 1$

  $\sum_{i=1}^{n} \text{gán}(\text{Pi}) = \sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i = 2\sum_{i=[\frac{n}{3}]}^{n} \frac{3i-n+1}{2}$

- Tương tự câu 4:

  Ki: $\sum_{i=1}^{n} \text{sosánh}(\text{Ki}) = \sum_{i=1}^{n}(\beta_i + 1)$

  $= \sum_{i=1}^{n}(log(i) + 1)$

  $= \sum_{i=1}^{n} \log(i) + \sum_{i=1}^{n} 1$

  $\sum_{i=1}^{n} \text{gán}(\text{Ki}) = \sum_{i=1}^{n} 2.\beta_i = 2\sum_{i=1}^{n} \log(i)$

- Số phép so sánh (n) $\approx 3n + 1 + \sum_{i=[\frac{n}{3}]\text{cận trên}}^{n} \frac{3i-n+1}{2} + \sum_{i=1}^{n} \log(i)$
- Số phép gán(n) $\approx 3n + 2 + 2\sum_{i=1}^{n} \log(i) + 2.\sum_{i=[\frac{n}{3}]\text{cận trên}}^{n} \frac{3i-n+1}{2}$

Câu 8:

```
i = 1; count = 0;                   {2g}
while (i <= 4n)  {                  {4n+1ss}
        x = (n - i)(i - 3n);        {4ng}
         y = i - 2n;                {4ng}
        j = 1;                      {4ng}
        while(j <= x)
        {
                count = count - 2;  (Pi)
                j = j + 2;
        }
        if (x > 0)                  {4n}
                if (y > 0)          ( Ki)
                        count = count + 1;
        i = i + 1;                  {4ng}
}
```

- Số phép so sánh(n) = 4n + 1. + $\sum_{i=1}^{4n} \text{sosánh}(Pi) + \sum_{i=1}^{4n} \text{sosánh}(Ki)$
- Số phép gán(n) = 2 + 16n + $\sum_{i=1}^{4n} \text{gán}(Pi) + \sum_{i=1}^{4n} \text{gán}(Ki)$

- Gọi số lần xảy ra vòng while của Pi là α_i

  $\alpha_i = \frac{(n-i)(i-3n)}{2}$, (n - i)(i - 3n) >= 1 hay (n - i)(i-3n) > 0

  $\alpha_i = 0$, (n-i)(i-3n) <= 0

  (n - i)(i - 3n) > 0 khi i từ n + 1 đến 3n - 1

  Pi: $\sum_{i=1}^{n} \text{sosánh}(Pi) = \sum_{i=1}^{4n} (\alpha_i + 1) = \sum_{i=n+1}^{3n-1} \frac{(n-i)(i-3n)}{2} + \sum_{i=1}^{4n} 1$

  $\sum_{i=1}^{n} \text{gán}(Pi) = \sum_{i=1}^{4n} 2\alpha_i = 2\sum_{i=n+1}^{3n-1} \frac{(n-i)(i-3n)}{2}$

- Ta có bảng xét dấu như sau:

i		n		2n		3n		4n
x(i)	-	0	+	|	+	0	-	|
y(i)	-	|	-	0	+	|	+	|

- Từ bảng ta thấy:
+ Số lần thực hiện if(x > 0) là 2n-1 (i thuộc [n+1,3n-1])
+ Số lần thực hiện if(x > 0, y > 0là n-1 (i thuộc [2n+1,3n-1])

  Chính là số phép gán count = count + 1
  $\sum_{i=1}^{4n} \text{sosánh}(Ki) =$ 2n – 1 + 4n = 6n - 1(so sánh khi điều kiện của x, điều kiện của x và y)
  $\sum_{i=1}^{4n} \text{gán}(Ki) =$ n-1 (khi x, y > 0)

- Tổng số phép gán(n) = 2 + 16n + n - 1+ $\sum_{i=n+1}^{3n-1} \frac{(n-i)(i-3n)}{2}$ + 4n

  = 21n + 1+ $\sum_{i=n+1}^{3n-1} \frac{(n-i)(i-3n)}{2}$

- Tổng số phép so sánh(n) = 4n + 1 + 6n -1 + $2\sum_{i=n+1}^{3n-1} \frac{(n-i)(i-3n)}{2}$

  = 10n + $2\sum_{i=n+1}^{3n-1} \frac{(n-i)(i-3n)}{2}$