Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Stetigkeit

$$f : I \to \mathbb{R} \text{ stetig in } x_0 \in I$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

f heißt stetig auf I, falls f stetig in $\forall x \in I$.

Beispiel

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = 1 = f(x_0) \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = 2 \neq f(x_0)$$

$\rightarrow$ linksseitige Stetigkeit

$\rightarrow$ keine rechtsseitige Stetigkeit

$\rightarrow$ keine Stetigkeit

Differenzierbarkeit

Differentialquotient in x_0:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Wenn Grenzwert existiert, ist f differenzierbar in x_0 und Grenzwert ist die Ableitung in x_0.

linksseitig differenzierbar $\Leftrightarrow$ es existiert $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

rechtsseitig differenzierbar $\Leftrightarrow$ es existiert $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

rechtsseitige und linksseitige Differenzierbarkeit mit gleicher Ableitung
$\Rightarrow$ Differenzierbarkeit

Zusammenhänge

$f(x)$ differenzierbar $\Rightarrow$ $f(x)$ stetig
nicht $f(x)$ stetig $\Rightarrow$ nicht $f(x)$ differenzierbar