Exponentialfunktionen

Vereinfachte Schreibweise

$$e^x =: exp(x)$$

Ableitungsregeln

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $b : I \to (0, \infty)$ und $r : I \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen.
Durch

$$f(x) = b(x)^{r(x)} \qquad , x \in I$$

wird eine Funktion $f : I \to (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert.
Es gilt die Darstellung:

$$f(x) = exp(r(x)\ln(b(x)))$$

also folgt mit der Ketten- und Produktregel die Differenzierbarkeit und

$$f'(x) = exp(r(x)\ln(b(x)))\left(r'(x)\ln(b(x)) + r(x)\frac{b'(x)}{b(x)}\right)$$

- für r konstant und $b(x) = x$

$$f(x) = x^r = exp(r\ln(x))$$

$$f'(x) = exp(r\ln(x))\left(\frac{r}{x}\right) = x^r\frac{r}{x} = rx^{(r-1)}$$

- Für $b > 0$ und $r(x) = x$

$$f(x) = b^x = exp(x\ln(b))$$

$$f'(x) = exp(x\ln(b))\ln(b) = b^x\ln(b)$$

Regeln von de l'Hospital

Satz

Seien f, g definiert, differenzierbar und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \neq a$ in einer Umgebung von $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. In jeder der beiden Situation

1. $f(x) \to 0$ und $g(x) \to 0$ für $x \to a$
2. $f(x) \to \pm\infty$ und $g(x) \to \pm\infty$ für $x \to a$

gilt dann:

$$\exists \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

Warnungen

- Aus der Existenz von $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ darf unter der Voraussetzung „$\frac{0}{0}$“ auf die Existenz von $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ geschlossen werden.
  Umgekehrt kann aber $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ existieren, obwohl $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ nicht existiert.

  Beispiel $f(x) = x^2 \cos(\frac{1}{x}), \quad g(x) = x, \quad a = 0$

  $$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} f'(x) \qquad \text{existiert nicht}$$

  Aber $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \cos(\frac{1}{x}) = 0$

- Die Voraussetzung „$\frac{0}{0}$“ bzw. „$\frac{\infty}{\infty}$“ muss bestehen und jedes Mal geprüft werden!

  Beispiel

  $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x^2} = \underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{2x}}_{\text{nicht „}\frac{0}{0}\text{“}} = \underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{-\sin(x)}{2}}_{\text{nicht „}\frac{0}{0}\text{“}} = 0$$

  obiges ist falsch !!