

GeoGebra

정 주 희

2013 년 4 월 2 일

차 례

1	들어가기	1
1.1	소개	1
1.2	도구상자와 작업창	2
1.3	도형객체의 생성, 선택, 삭제, 이동	3
2	문서에 그림 넣기	5
3	함수와 그래프	6
4	유용한 기법들	8

1 들어가기

1.1 소개

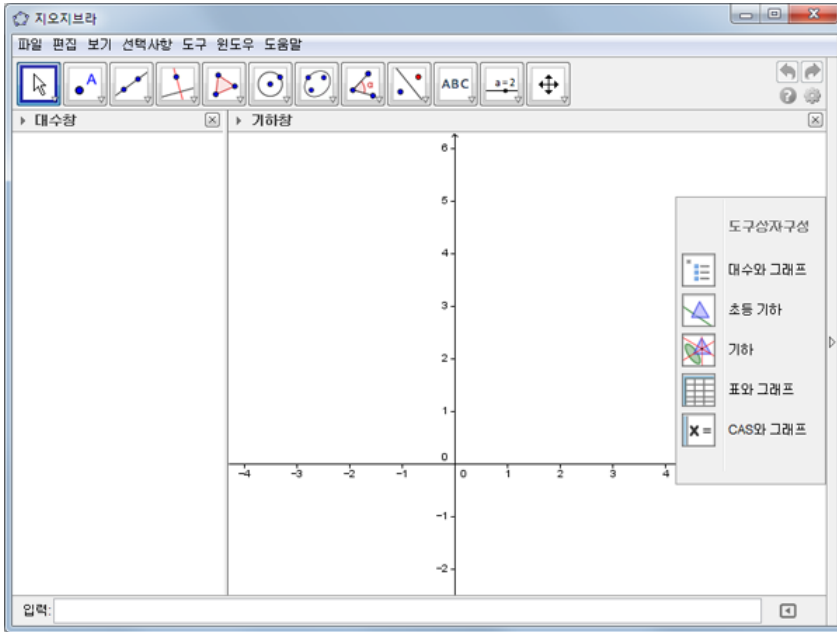
GeoGebra는 수학교육용, 혹은 수학문서 작성용으로 쓰이는 소프트웨어이다.

이것은 Geometry + Algebra를 뜻한다. 무료로 다운받아 설치·사용할 수 있다. 도형, 그래프, 다이어그램을 다 잘 그릴 수 있으며, 작성한 그림을 PSTricks 코드로 export 할 수도 있다. Java 가상머신 위에서 실행되므로 프로그램 launching 이 좀 늦다는 것이 유일한 단점이다.

설치와 사용에 대한 정보는 www.geogebra.org/book/intro-en.zip에서 얻을 수 있다. 이 매뉴얼은 버전 4.2에 대한 것이다.

1.2 도구상자와 작업창

실행하면 보이는 첫 화면은 다음과 같다.



메뉴바 바로 밑의 단추들을 도구상자라고 부른다. 대수창과 기하창이 화면의 대부분을 차지하며, 맨 아래에 입력창이 있다. 도구상자들의 오른쪽 끝에는 undo, redo, help 및 설정 버튼이 있다.

그리고 기하창의 오른쪽에 ‘도구상자구성 영역’이 있는데 여기에 보이는 5개의 모드(대수와 그래프, 초등기하, ...) 중 하나를 선택·클릭하면 도구상자의 버튼들 및 화면 구성이 선택한 모드에 맞추어 바뀌고 이 영역이 사라지게 된다. 제일 처음에 보이는 대수와 그래프 모드가 디폴트이므로 이것을 클릭하면 현재 보이는 도구상자 및 화면구성에 아무런 변화가 없을 것이다. (도구상자 구성이라는 이름은 실은 조금 잘못된 것이다. 왜냐하면 이 영역에서 하나를 선택하는 액션의 결과로 도구상자 구성과 아울러 화면 구성도 바뀌기 때문이다.)

현재 화면에는 대수창과 기하창이 보이고 있는데 스프레드시트, CAS 등 다른 종류의 작업창도 존재하며, 이들은 각각 ‘표와 그래프’ 및 ‘CAS와 그래프’ 모드를 선택하면 나타나게 된다.

선택한 모드에서 다른 모드로 바꾸려면 [파일 – 새 윈도우]하여 위에 보이는 첫 화면과 동일한 새로운 윈도우를 생성시키는 것도 하나의 방법이겠지만, 이렇게 하면 그동안 작업한 것을 적당한 방법으로 새 윈도우로 옮겨와야 하는 귀찮은

일이 발생한다.

이 문제는, 모드란 결국 도구상자와 작업창의 조합이므로 메뉴바의 [도구] 및 [보기]에서 수동으로 원하는 조합을 지정해 주는 것으로 해결할 수 있다. [보기]에서 특정한 작업창을 택하면, 현재 없는 작업창은 생성되고, 현재 있는 작업창은 사라진다. (토글)

도구상자의 버튼을 클릭하여 원하는 액션을 시작한다. 그런데 버튼마다 우하귀에 조그만 역삼각형이 있다. 이를 클릭하면 원래의 액션(디폴트 액션)과 비슷한 액션들이 나타나며 이 중에 하나를 선택할 수 있다. 일단 하나를 선택하면 이 버튼의 디폴트 액션이 이것으로 바뀐다.

1.3 도형객체의 생성, 선택, 삭제, 이동

초등 기하 모드에서 4각형을 그려 보자. (도구상자와 기하창 사이에 있는 스타일 바는 좌상귀의 작은 삼각형으로 토글할 수 있다.) 다각형 도구는 삼각형으로 보이는 버튼을 클릭하여 사용한다. 이 버튼 위에 마우스를 올리면 “모든 꼭짓점을 선택 후 처음 꼭짓점을 다시 클릭” 하라고 되어 있다. 그러므로 원하는 4개의 꼭짓점을 먼저 생성해야 할 것이다. 새로운 점 도구를 이용하여 4개의 점을 원하는 위치에 넣는다. 그 다음 다각형 도구를 이용하여 4개의 변을 넣으면 4각형이 완성된다.

이제 이 4각형을 삭제해 보자. 선택한 후 Del 키를 누르거나 [편집-삭제] 하면 되는데, 이 상태에서 4각형을 선택하기 위하여 클릭하면 4각형이 선택되는 대신 새로운 점이 찍히게 될 것이다. 일단 undo를 실행하여 원래대로 돌아온다. 원하는 객체를 선택하려면 먼저 이동 도구를 선택한 다음 클릭해야 한다. 이 도구는 가장 많이 쓰이는 도구이므로 Esc 키를 치면 선택되도록 되어 있다. 물론 맨 왼쪽에 있는 버튼을 클릭해도 된다.

이제 4각형을 클릭하여 선택한 후 Del 키를 누르면 4각형의 변과 내부는 사라지지만 꼭짓점들은 그대로 남아 있다. 4개의 꼭짓점들을 하나씩 선택하고 삭제하면 4각형은 완전히 사라진다. 하지만 이건 너무 비효율적이다. 한꺼번에 4각형 전체(변, 내부, 꼭짓점)를 삭제하려면 이동 도구 상태에서 마우스를 드래그 하여 직사각형을 4각형을 완전히 둘러싼 후 Del 키를 치면 된다.

한 편 4각형을 이동할 때는 4각형 내부를 클릭한 후에 드래그 하면 꼭짓점들을 포함한 4각형 전체가 이동한다. 이건 좀 비논리적인 듯 하지만, 실제로 사용해 보면 이러한 작동이 사용하기에는 편리한 것임을 알 수 있다.

다각형을 그릴 때, 먼저 꼭짓점들을 다 만들고, 그 다음에 이것들을 다시 하나씩 클릭할 필요는 없다. 다각형 도구를 선택한 상태에서 그냥 꼭짓점을 만들고 선택하는 작업을 동시에 할 수 있다.

다각형이 완성된 후에는 이동 도구로 가서 다각형의 특정한 꼭짓점만 이동할 수 있다.

기하창에 들어 있는 모든 객체를 한꺼번에 이동하려면 도구상자들 중 맨 오른쪽에 있는 기하창 이동 도구를 사용하면 된다. 기하창에 들어 있는 모든 객체를 한꺼번에 다 지우려면 Ctrl-A 하고 삭제 키를 치면 된다. 또는 [파일 - 새로 만들기] 해도 된다.

EXERCISE 1. 기하창에 삼각형 1개, 사각형 1개, 그리고 수직하는 두 직선을 그리고, 설정 버튼을 이용하여 이들의 색깔을 각각 다 다르게 해 보라. ─

EXERCISE 2.

(1) 매뉴얼 15-16 쪽의 설명대로 직사각형을 construct 하고 저장한다. 그리고 각 꼭지점들을 drag 해 보라.

(2) 보조선(직선)을 점선으로 가장 가늘게 바꾼다. (스타일 바 이용) 그리고 설정 버튼을 이용하여 보조선들을 완전히 사라지게 하라. (실은 스타일 바에서 보조선의 색상을 무색으로 하여 지울 수도 있다.) ─

도형을 구성하는 과정을 단계별로 보여줄 수 있다. 이른바 구성단계 네비게이션바라는 것인데 기하창에서 오른편 마우스를 클릭한 다음 체크하면 나타난다. 단계별로 클릭하면서 볼 수도 있고 실행 버튼을 눌러 자동으로 단계가 바뀌도록 할 수도 있다. 단계가 바뀌는 시간 간격도 조절할 수 있다.

EXERCISE 3. 정삼각형을 작도하라. 정다각형 도구를 사용하지 말고 직접 하나의 선분에서 출발하여 원 2개를 그려 교점을 찾는 방법으로 작도한다. 세 꼭짓점을 다 얻은 후에는 다각형 도구를 사용하여 정삼각형을 그린다. 마지막으로 설정 버튼을 클릭한 후 필요없는 객체들을 숨긴다. ─

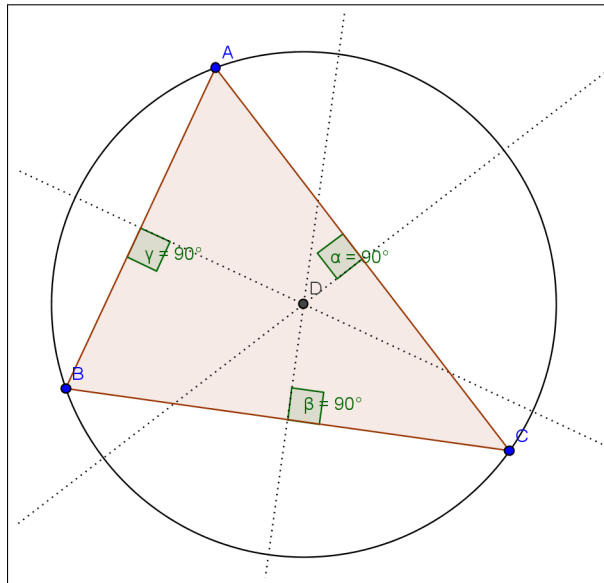
EXERCISE 4. 이등변삼각형을 작도하라. 단 밑변의 길이와 높이를 자유자재로 변경할 수 있어야 한다. 그리고 각 도구를 사용하여 3개의 꼭짓각을 나타내어 보라. (삼각형의 내부를 클릭하면 3 꼭짓점의 각도를 한꺼번에 나타낼 수 있다.) 꼭짓점의 위치를 움직이면서 각도가 변하는 것도 관찰하여라. ─

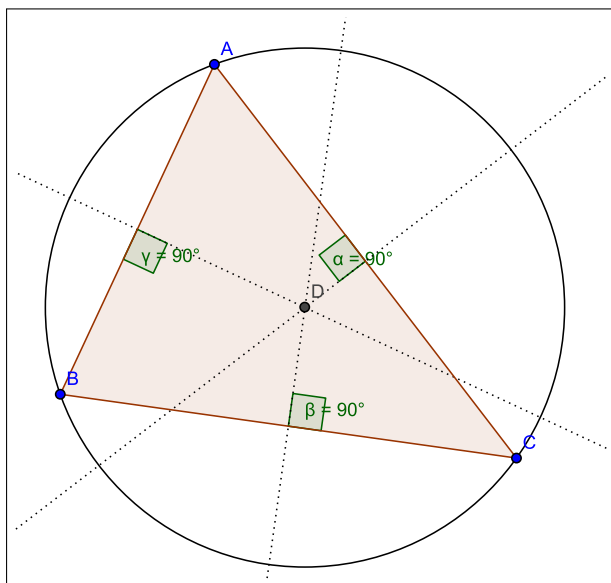
2 문서에 그림 넣기

지오지브라에서 그린 그림을 윈도우 문서 (HWP, Word, PowerPoint, Excel 등), \TeX 문서, 또는 웹페이지에 삽입할 수 있다. [파일 - 내보내기] 하면 여러 형식으로 내보낼 수 있는데, 위의 3 종류의 문서에 그림을 삽입하려면 여러 형식 중에 각각 클립보드, pdf와 png를 쓰면 된다. 클립보드로 내보낸 그림을 윈도우 문서에 넣는 것은 그냥 Ctrl-V 하면 된다.

텍 문서에 그림을 넣기 위하여 eps로 내보내는 것은 다른 형식으로 내보내는 것과 비교하여 아무런 이점도 없고, 게다가 원래 화면과 조금 (때로는 많이) 다르게 출력되므로 사용하지 않도록 한다. 그리고 PSTricks 코드로 내 보내는 방법도 있는데 이건 원본 충실도가 eps를 사용했을 때보다도 더 나쁘니 사용할 이유가 없다. (pst-pdf package 사용에 따른 약간의 불편을 감수해야 한다는 이유도 있다.)

아래의 두 그림 중 첫번째 것은 png 파일로 내보낸 것이고, 두번째 것은 pdf로 내보내어 `includegraphics` 한 것이다. 후자의 화질이 더 좋으므로 이것을 사용하면 된다. (화면을 최대한 확대해 보면 화질의 차이를 알 수 있을 것이다.) 다만 pdf로 내보내면 이상하게도 그림에 여백이 들어가므로 trim, clip을 해 주어야 하며, 크기가 줄어든 것을 보상해 주어야 한다. 아래의 예에서는 `[scale=1.27,trim=8mm 8mm 8mm,clip]`를 사용했다. `\fbox`를 이용하여 bounding box를 나타내었다.





참고로 웹페이지에 넣을 png 형식으로 내보낼 때는 dpi로 디폴트 값인 300을 그대로 사용하면 웹페이지에 너무 크게 나타나는 경향이 있다. dpi 값을 150 정도로 바꾼 다음 내보내기 하여 사용하는 것이 적당하다. 참고로 dpi는 pixel의 dot per inch를 뜻하는 것으로 이 값이 크게 설정할수록 그림파일의 pixel 수가 많게 된다.

그리고 투명(배경 옵션)은 uncheck 하는 것이 나을 것이다.

3 함수와 그래프

EXAMPLE 5. 대수창과 기하창이 다 보이는 상태에서 입력창에 $a=1$, $b=1$, $f(x) = ax+b$ 를 각각 넣고 엔터한다. 대수창에서 a 왼쪽의 작은 동그라미를 클릭하여 기하창에 슬라이더를 만든다. 같은 방법으로 b 의 슬라이더를 만든다. 그리고 이들을 움직여 본다. y 절편과 원점을 잇는 선분에 색깔과 두께를 준다. 그리고 b 슬라이더를 움직이면서 관찰한다.

기울기를 관찰하려면 $y = ax+b$ 를 사용해야 한다. ←

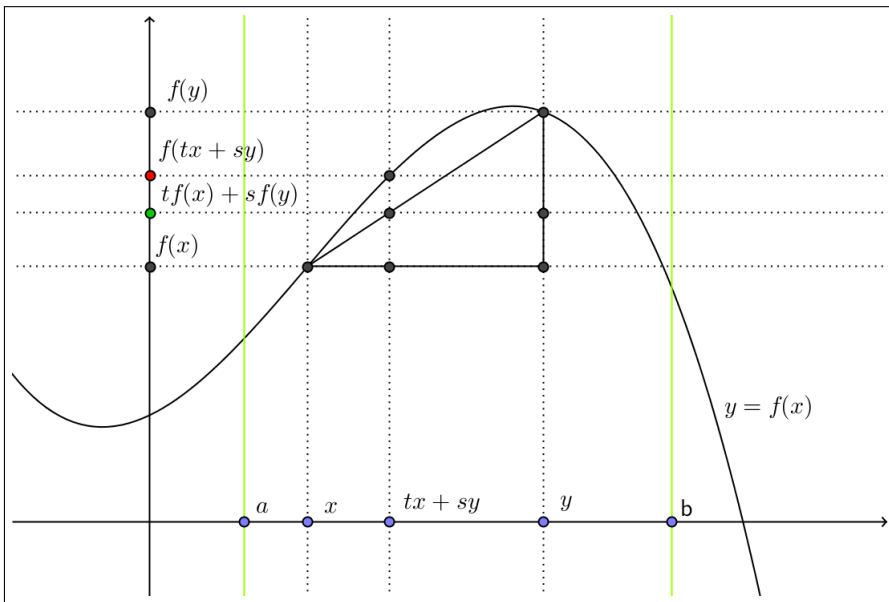
EXERCISE 6. $f(x) = x^2/2 + 1$ 의 그래프 위에 점을 더한다. 이 점에서 접선을 긋고 이 선에 기울기를 준다. 그리고 점을 이동해 본다. 점의 x 좌표와 기울기가 일치함을 관찰한다.

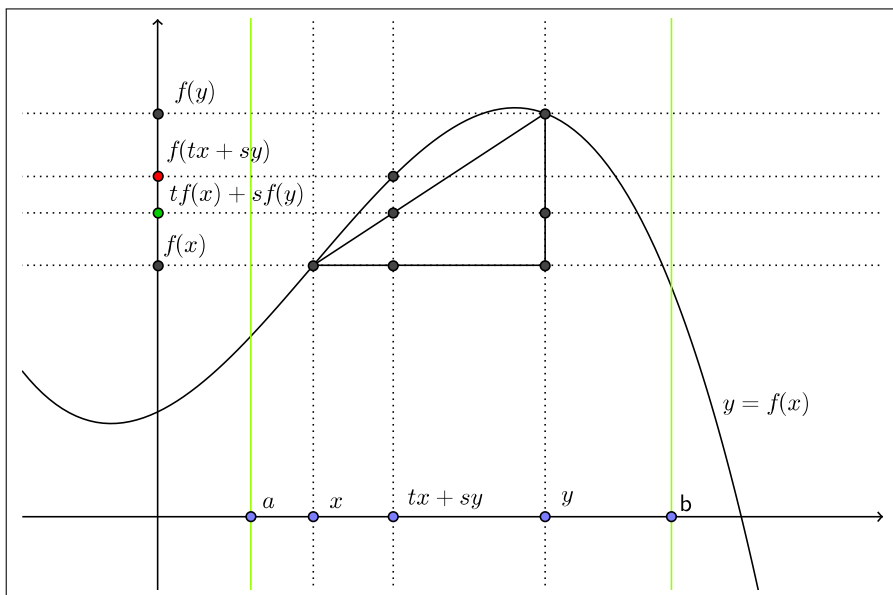
접선의 이름은 a일 것이다. 이것을 t로 바꾼다. 입력창에 slope=Slope[t]를 엔터한다. 입력창에 S = (x(A), slope)를 엔터한다. 여기서 x(A)가 무엇일까? 점 S를 우클릭하고 ‘자취 보기’를 체크한 다음 A를 움직여 본다. ─

그림의 각 객체에 캡션을 넣을 때는 텍스트 입력 도구를 쓰는 것이 좋다. \LaTeX 을 쓸 수도 있다.

아래에 그래프를 png 및 pdf 로 내보낸 것을 includegraphics 하였다. 전자는 [scale=1.25], 후자는 [scale=1.60,trim=10mm 7mm 10mm 7mm,clip] 를 사용하였다.

여기서는 그림 주변의 여백을 보여줄 목적으로 `\fbbox` 커맨드를 사용하였는데 실제로는 이 커맨드를 사용하지 않는 경우가 더 많을 것이다.





4 유용한 기법들

그래프, 혹은 도형에서 사용하는 레이블의 디폴트 글자 크기는 컴퓨터 화면에서 작업 시 본인이 보거나 혹은 강의노트에 삽입하기에는 적당하나, 프리젠테이션 용도로 사용하기에는 너무 작다. 강의실의 맨 앞에 앉은 사람 외에는 거의 읽을 수 없을 정도이다. [선택사항 - 글자 크기]로 가서 20pt를 선택하면 글자 크기가 (당연히 20pt로) 커진다. 이렇게 하면 기하창뿐만이 아니라 대수창에서의 글자와 메뉴의 글자도 다 같이 커진다. 크기를 키워 놓은 문서를 저장했다가 다시 열면 글자 크기가 크게 나온다. 그러나 새로운 문서를 작성할 때는 글자 크기가 원래 것이 사용된다. 모든 작업에서 큰 글씨를 사용하려면 [선택사항 - 선택사항 저장]을 실행하면 된다.

[텍스트 입력] 도구를 사용하여 내가 작성한 레이블은 대상 객체가 움직일 때 따라서 움직이도록 할 수 있다. 레이블을 오른쪽마우스클릭 하고 [설정사항... - 위치 - 시작점]에서 대상 객체를 지정하면 된다.

그래프의 어떤 점(혹은 임의의 객체)의 이동 범위를 지정하는 것이 좋을 때가 있다. 예를 들어 선분의 내분점 같은 경우에 이런 것이 필요하다. [convex_up3.ggb](#)에서 점 P1(좌표 $(tx+sy, 0)$)은 선분 xy 내에서만 움직인다. 원래 P1은 x 축 상의 점이었는데 이를 선분 xy , 즉 ih 상의 점으로 만들려면, 점 P1을 오른쪽마우스클릭 후 [설정사항... - 기본 - 정의]의 내용을 점[ih]로 바꾸어 주면 된다. ($ih =$

interval horizontal)

점 P1을 마우스로 드래그 하여 위치를 이리저리 바꾸어 보면 t 와 s 의 값이 위치에 따라서 바뀌게 되는데 이들의 값의 변화는 대수창에서 나타나게 만들어 두었다.

$$s = \frac{\text{선분 } xP1 \text{의 길이}}{\text{선분 } ih \text{의 길이}}$$

인데 선분 $xP1$ 의 이름이 q 이므로 화면 하단의 입력창에 $s = q/ih$ 를 넣으면 된다. s 의 정의는 대수창에서 $s = ..$ 위에 마우스를 올리거나 더블클릭하면 알 수 있다.

점 P2는 선분 iv 위에서 움직이는데, 이것의 움직임은 점 P1의 움직임에 연동되어 있다.

$$s1 = \frac{\text{선분 } AP2 \text{의 길이}}{\text{선분 } iv \text{의 길이}}$$

로 두었으며 $s = s1$ 이 항상 성립함을 대수창에서 확인할 수 있을 것이다. 여기서 iv 는 interval vertical을 뜻한다.

어떤 객체의 정의에서 사용한 다른 객체의 이름을 바꾸면 원래 객체에서도 바뀐 이름을 (자동으로) 사용하게 되어 편리하다. 예를 들어 지금 $s = q/ih$ 로 정의되어 있는데, ih 를 클릭하여 이름을 ih_{new} 로 바꾸어 주면 s 의 정의가 자동으로 q/ih_{new} 로 바뀌게 된다.

- end -