풀이 자습서 > 작업 3–1: 상태-공간에서 ODE 모델링

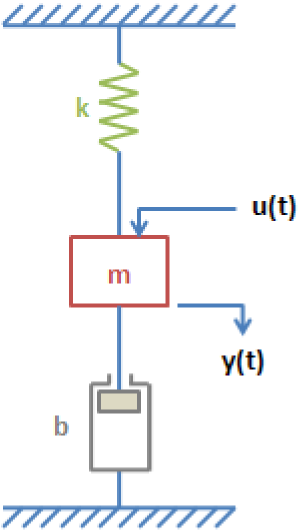
작업 3–1: 상태-공간에서 ODE 모델링

아래에 정의된 문제를 읽고 작업 3-1부터 작업 3-3까지 다음 방법을 사용하여 해를 구합니다.

- 상태-공간 ODE 풀이 시스템
- ODE 풀이 시스템
- 풀이 구간

문제 정의

전형적인 질량-스프링-댐퍼 시스템이 있다고 가정합니다.



이 시스템의 동역학 방정식은 다음과 같습니다.

$$m \cdot y''(t) + b \cdot y'(t) + k \cdot y(t) = u(t)$$

이 시스템을 상태-공간 모델로 표현하면 다음과 같은 형식이 됩니다.

$$\frac{d}{dt} x(t) = A(t) \cdot x(t) + B(t) \cdot u(t)$$

$$y(t) = C(t) \cdot x(t) + D(t) \cdot u(t)$$

여기서

- A - 상태 행렬
- B - 입력 행렬
- C - 출력 행렬
- D - 직접 전달 행렬
- x - 상태 벡터
- u - 입력

- y - 측정 또는 제어되는 출력

시스템 동역학을 모델링하는 상태 및 출력 비선형 방정식을 선형화하여 위의 선형 시스템을 얻을 수 있습니다.

이 2차 방정식 시스템에 상태 변수 두 개를 사용합니다.

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = y'(t)$$

m = 1, *b = 0.5* 및 *k = 3*인 경우 시스템 방정식은 다음과 같습니다.

$$x'_1(t) = x_2(t)$$

$$x'_2(t) = -3 \cdot x_1(t) - 0.5 \cdot x_2(t) + u(t)$$

상태-공간 행렬 형식에서 모델은 다음과 같이 작성됩니다.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

상태-공간 ODE 풀이 시스템

1. 행렬 함수 *A*, *B*, *C* 및 *D*를 정의합니다.

$A(t) := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -0.5 \end{bmatrix}$	$B(t) := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
$C(t) := \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$	$D(t) := 0$

2. 입력이 헤비사이드 계단 함수가 되도록 정의합니다. 계단 함수를 삽입하려면 F 키를 누른 다음 Ctrl+G를 누릅니다.

   $$u(t) := \Phi(t)$$

3. 두 변수의 초기 조건을 정의합니다. 문자식 아래 첨자로 *i*를 입력하려면 **수학** 탭의 **스타일** 그룹에서 **아래 첨자**를 클릭한 다음 i를 입력합니다.

   $$x_i := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. 시스템 해를 구할 시간 경계를 정의합니다.

$t_i := 0$

$t_f := 30$

5. t_i를 제외하고 해를 구할 점의 수를 정의합니다.

$npoints := 500$

6. **statespace** 함수를 호출합니다.

$sol := statespace\left(x_i, t_i, t_f, npoints, A, B, u\right)$

행렬 *sol*의 첫 번째 열에는 해를 구한 시간이 포함되고, 나머지 열에는 해당 시간에서의 상태 변수 *x1* 및 *x2*가 포함됩니다.

7. 행렬 *sol*에서 *t*, *x1* 및 *x2*를 추출합니다.

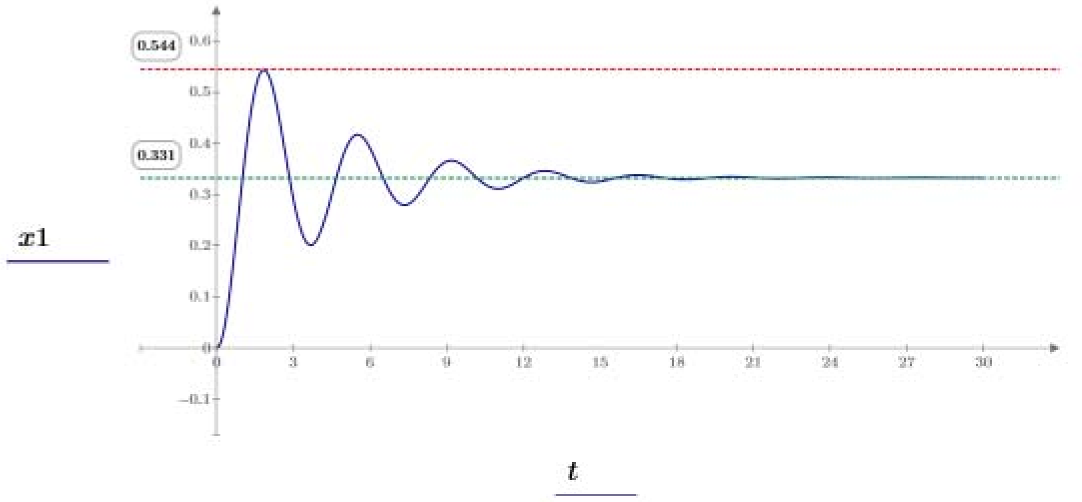
$t := sol^{\langle 0 \rangle}$	$x1 := sol^{\langle 1 \rangle}$	$x2 := sol^{\langle 2 \rangle}$
$t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.06 \\ 0.12 \\ 0.18 \\ 0.24 \\ 0.3 \\ 0.36 \\ 0.42 \\ 0.48 \\ 0.54 \\ 0.6 \\ 0.66 \\ \vdots \end{bmatrix}$	$x1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.002 \\ 0.007 \\ 0.016 \\ 0.027 \\ 0.042 \\ 0.059 \\ 0.079 \\ 0.101 \\ 0.124 \\ 0.149 \\ 0.176 \\ \vdots \end{bmatrix}$	$x2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.059 \\ 0.116 \\ 0.169 \\ 0.22 \\ 0.266 \\ 0.309 \\ 0.346 \\ 0.379 \\ 0.407 \\ 0.43 \\ 0.448 \\ \vdots \end{bmatrix}$

8. *x1*의 평균과 최대값을 계산합니다.

$mn := \mathrm{mean}\left(x1\right) = 0.331$

$mx := \max\left(x1\right) = 0.544$

9. 시간에 대해 *x1*을 도표화하고 마커를 사용하여 평균과 최대값을 표시합니다.



도표는 상승 시간, 오버슈트 및 정착 시간과 같은 과도 응답 특성을 보여줍니다.
작업 3–2로 이동합니다.