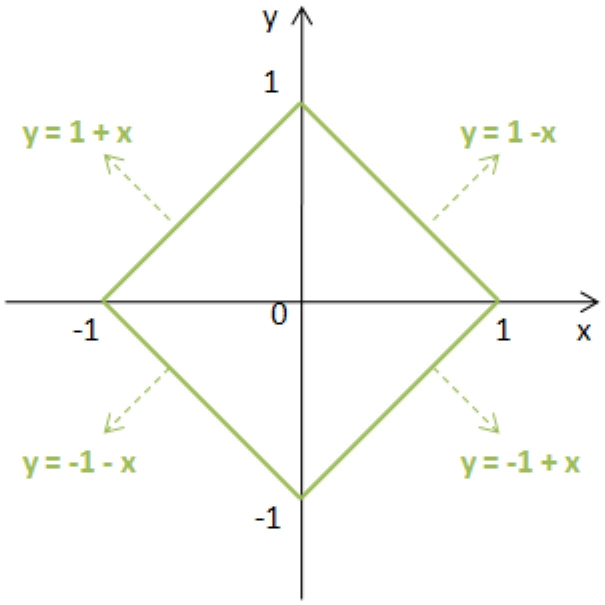
작업 3–5: 야코비 사용

PTC Mathcad의 일부 ODE 풀이 시스템에 야코비가 사용됩니다. 야코비를 사용하면 여러 적분에 대한 변수를 변환할 수 있습니다. 함수를 적분할 다음과 같은 영역을 고려합니다. 각 경계에 대한 방정식도 표시되어 있습니다.



1. 적분할 함수를 정의합니다.

   $f(x, y) := 2\,x^3 - 5\,y^2$

2. 영역에 대해 함수를 적분합니다. 적분을 두 부분으로 나누어야 합니다. 먼저 x-y 평면의 왼쪽을 적분한 다음 오른쪽을 적분합니다.

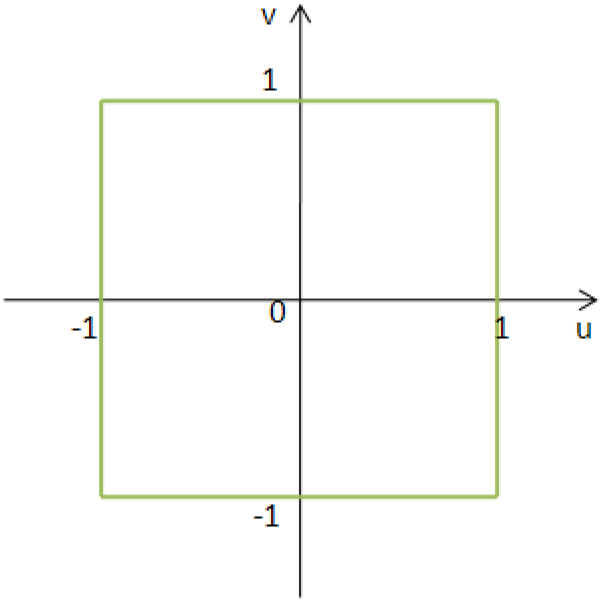
   $$\int_{-1}^{0} \int_{-1-x}^{1+x} f(x, y)\, dy\, dx + \int_{0}^{1} \int_{-1+x}^{1-x} f(x, y)\, dy\, dx = -1.667$$

   평면을 변환하는 새 변수를 도입하여 적분을 단순화할 수 있습니다.

   $u = x + y$

   $v = x - y$

   이 새 변수에 대한 적분 영역의 경계는 축과 평행합니다.



3. *u* 및 *v*를 사용하여 *x* 및 *y*를 정의합니다.

$$x(u,v) := \frac{u+v}{2}$$

$$y(u,v) := \frac{u-v}{2}$$

다중 적분에 대한 변수를 변환할 경우 야코비를 계산하여 적분의 배율을 조정해야 합니다.

4. 벡터 함수 *F(u, v)*를 정의합니다.

$$F(u,v) := \begin{bmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{bmatrix}$$

5. *a* 및 *b*에 대해 야코비 행렬을 계산합니다.

$$a := 0$$

$$b := 0$$

$$J := Jacob\left(F(a,b), \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

6. *J*의 행렬식인 야코비를 계산합니다. 행렬식 연산자를 삽입합니다.

$$D := \|J\| = -0.5$$

7. 새 좌표를 사용하여 *f* 함수를 다시 작성합니다.

$$g(u,v) := f(x(u,v), y(u,v))$$

8. 야코비의 절대값을 사용하여 적분의 배율을 조정하고 결과를 계산합니다.

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g(u,v)\cdot|D|\,du\,dv = -1.667$$

새 변수를 사용하면 적분 하나만 사용해도 함수를 적분할 수 있습니다.

실습

자습서를 마치기 전에 공중에 던진 물체가 최고점에 도달하는 시간을 구합니다. 미분 방정식 *x″ = -9.8*과 초기 조건 *x(0) = 2* 및 *x′(0) = 3*을 사용하여 풀이 구간을 설정합니다. 첫 번째 풀이 구간으로 구한 함수를 최적화하는 두 번째 풀이 구간을 설정합니다.

0 < t < 1 범위에서 첫 번째 풀이 구간으로 구한 함수를 도표화하여 해답을 확인할 수 있습니다. 계산에서 호환되는 한, 단위는 언제라도 추가할 수 있습니다.

축하합니다! 풀이 자습서를 완료했습니다.