



7주차 음파

1교시 가장 단순한 진동과 혼돈현상

진동과 파동 현상

우리 주위에서 진동, 파동, 음파 등 다양한 형태의 진동과 파동 현상을 목격합니다.

줄, 관의 진동을 통해서 다양한 음악을 들을 수 있으며, 공기를 통한 소리를 통해서 의사소통을 할 수 있습니다.

또한 전자기파에 의해서 먼 거리의 정보를 전달할 수 있습니다.

오늘날 정보 전달 기술은 파동의 변형에 의해서 이루어지고 있습니다.

이번 시간에는 진동과 단순조화진동에서의 주기에 대해 알아봅니다.

1. 단순조화 진동

추의 진동, 놀이동산에서 바이킹, 회전목마 등은 일정한 운동을 반복적으로 합니다. 가장 간단한 진동은 스프링에 물체를 매달아 당겼다 놓으면 물체가 진동하다가 멈추는 것입니다. **진동이 멈추는 이유는 마찰에 의한 에너지 손실 때문입니다.** 만약 마찰이 없다면 진동은 멈추지 않고 계속될 것입니다.

실에 물체를 매달고 물체를 옆으로 밀었다 놓으면 추가 진동합니다.

이러한 진동은 어떻게 표현할 수 있을까요?

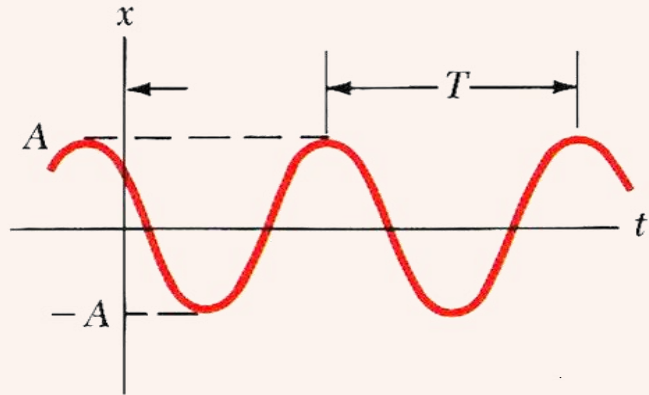
자연에서 가장 단순한 진동은 '단순조화 진동(simple harmonic oscillation)'입니다.



단순조화 진동은 일정한 방법과 일정한 간격으로 반복되는 운동을 뜻합니다. 마찰이 없는 면에서 스프링에 매달려 진동하는 물체, 작은 각도로 진동하는 진자(단진자)는 단순조화 진동에 속합니다. 이러한 단순조화 진동은 수학적으로 () **곡선** 또는 () **곡선**으로 나타낼 수 있습니다. 즉, 삼각함수로 나타낼 수 있습니다.

"단순조화 진동"은 **사인곡선(또는 코사인 곡선)**으로 표현할 수 있다.

2. 주기, 진동수, 진폭



<사인곡선-T는 주기이고, A는 진폭이다>

단순조화 진동을 과학적으로 표현하는 량으로 주기, 진동수, 진폭, 위상 등이 있습니다.

주기: 진동이 한 번 일어나는데 걸리는 시간

진동수(주파수): 단위 시간당 진동의 횟수 (1초 동안 반복된 진동의 횟수)

진폭: 평형점으로부터 최대 변위

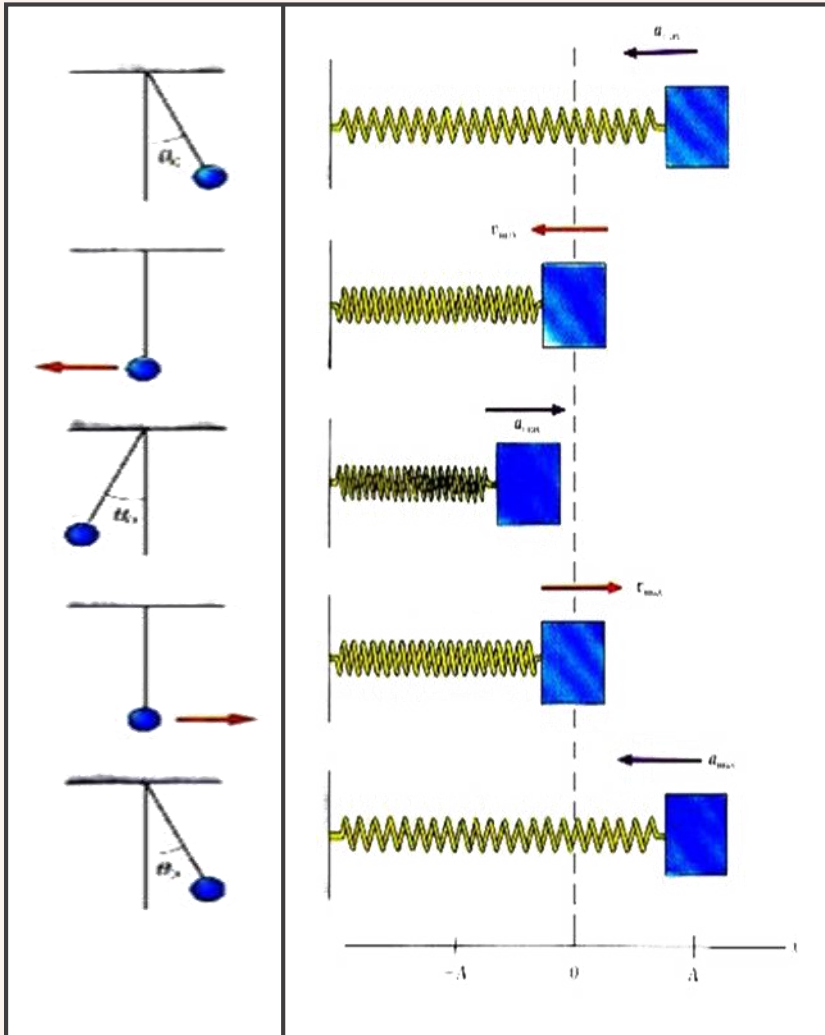
주기의 단위는 시간(초)이고, 진동수의 단위는(1/초=Hz, 헤르츠)이고, 진폭은 길이의 단위를 갖습니다.

단순조화 진동하는 물체의 진동수는 진동계를 구성하는 물리량에 의해서 결정됩니다.

단순조화 진동하는 계의 진동수를 **고유 진동수**라 합니다. 진동의 주기를 T라 할 때 진동수는 단위 시간당 진동하는 횟수이므로 진동수 f 는 ()의 역수입니다.

$$f = \frac{1}{T}$$

3. 고유진동수



<단순조화 진동의 예- 단진자와 스프링에 달린 물체의 진동은 대표적인 단순조화 진동의 예이다>

스프링-물체 단순조화 진동의 고유 진동수 f

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\text{스프링 상수}}{\text{물체의 질량}}}$$

단진자(실에 매달린 추)의 고유 진동수 f

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\text{중력 가속도}}{\text{실의 길이}}}$$

외부에서 진동계를 강제로 진동시킬 때 외부구동 진동수가 계의 고유 진동수와 같아지면 진동의 진폭이 매우 커집니다. 이러한 현상을 () (resonance, 공진, 꺼울림)이라 합니다. 그네를 밀어줄 때 그네의 주기와 밀어주는 주기가 일치하면 그네를 높이 뛸 수 있습니다.

▶ 마찰을 무시할 때 스프링-물체 또는 단진자에서 단순조화 진동을 유지하는 동력은 무엇인가?

진동

: 진동이란 똑같은 운동이 반복되는 현상을 뜻한다.

공명(resonance, 공진, 꺼울림)

- 외부에서 가해 주는 진동과 물체의 고유한 진동수가 서로 일치하여 진동이 증폭되는 현상

자동차의 진동수 - 8Hz 이하

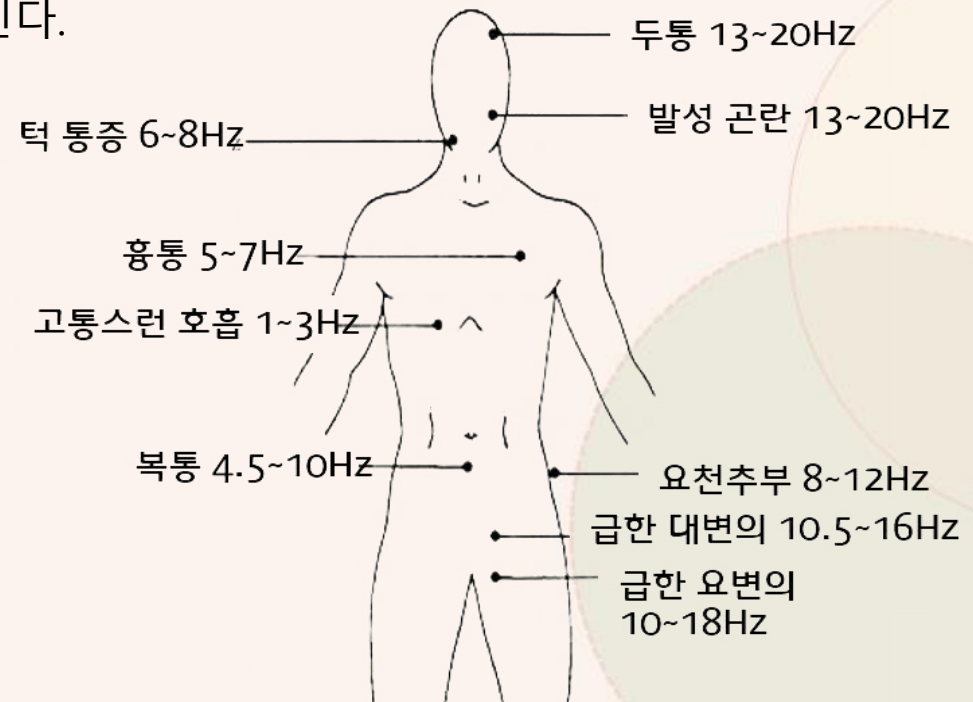
저음파 - 20Hz 이하의 음파, 인체에 피로와 불편감을 일으킨다.

멀미의 요인

- 외부 진동과 인체 부위가 공명을 일으켜 생기는 불편감

참고

시계추는 같은 운동을 반복한다. 시계추가 한 지점에서 출발하여 다시 제자리로 되돌아오는데 걸리는 시간을 주기 T라 한다. 진동수란 1초 동안에 똑같은 운동의 반복 횟수를 나타낸다. 진동수의 단위는 헤르츠(Hz) 이고, 2Hz란 1초 동안에 똑같은 운동이 2번 반복됨을 뜻한다.



[그림] 1~20Hz 의 진동수에 노출된 인체의 증상

예제 1)

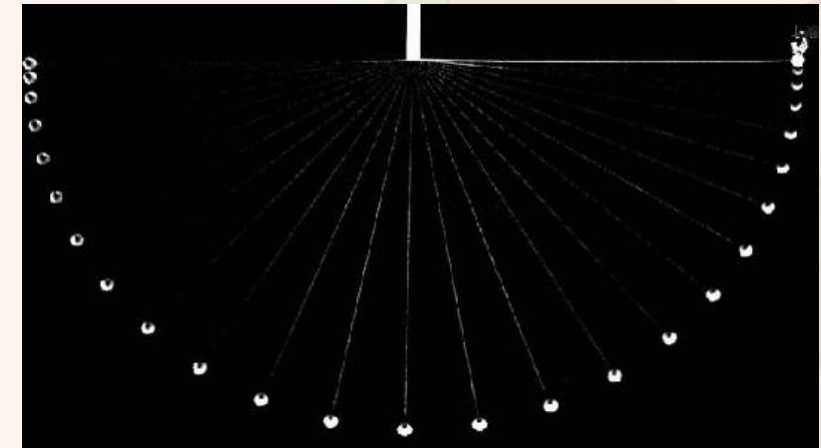
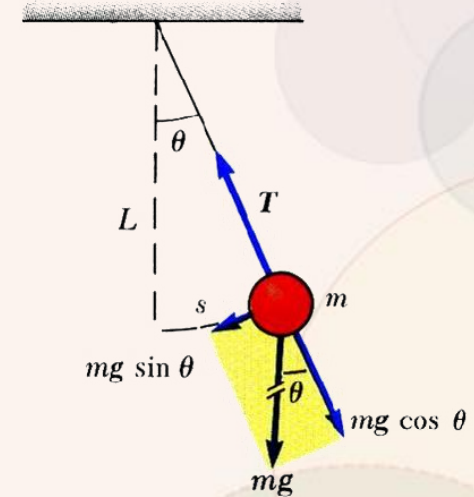
단진자는 단순조화 진자일까요?

풀이)

단순조화 진자는 진동을 조화함수(사인함수)로 나타낼 수 있는 운동입니다. 이런 종류의 운동은 계가 후크(Hooke)의 법칙(스프링의 탄성에 의한 복원력이 스프링의 늘어난 길이에 비례한다는 법칙)에 따라 입자에 작용하는 복원력이 입자의 위치에 비례할 때입니다. 단진자의 경우 힘은 엄밀한 의미에서 후크의 법칙을 따르지 않습니다.

그러나 진동 각도가 매우 작을 때는 복원력을 후크의 법칙으로 표현할 수 있습니다. 따라서 단진자는 매우 작은 각도의 진동에서는 단순조화 진동이고 매우 큰 각도로 진동할 때는 단순조화 진동이 아닙니다.

단순조화 진동인 경우 진동 주기는 진동의 ()에 무관합니다. 단순조화 진동에서 벗어나면 진동 주기가 진동 진폭의 함수로 주어집니다.



4. 비선형진동과 혼돈

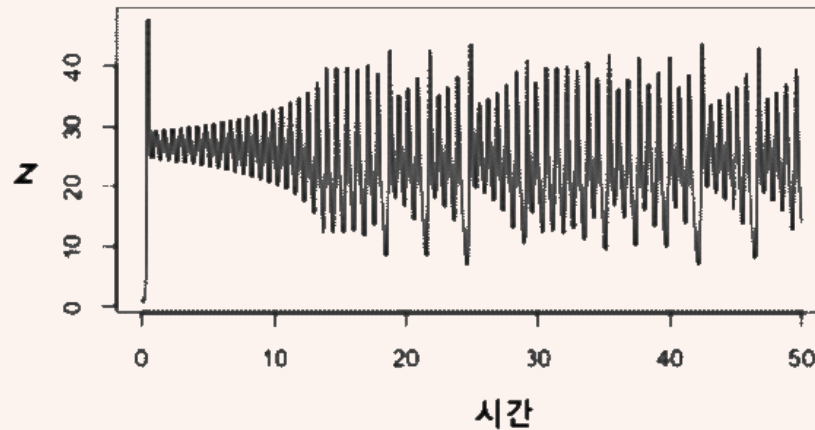
- 1963년 기상학자인 로렌츠(Edward Lorenz)가 대기의 대류현상에 대한 비선형 동역학 방정식인 로렌츠 방정식(Lorenz equation)을 유도함
- 로렌츠 방정식에서 결정론적 혼돈(deterministic chaos) 현상을 발견함
- 자유도 3개(독립좌표 3개)인 낮은 차원 시스템에서 혼돈현상이 발현됨을 발견

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$

$$\sigma = 10, \rho = 28, \beta = 8/3$$

$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y$$

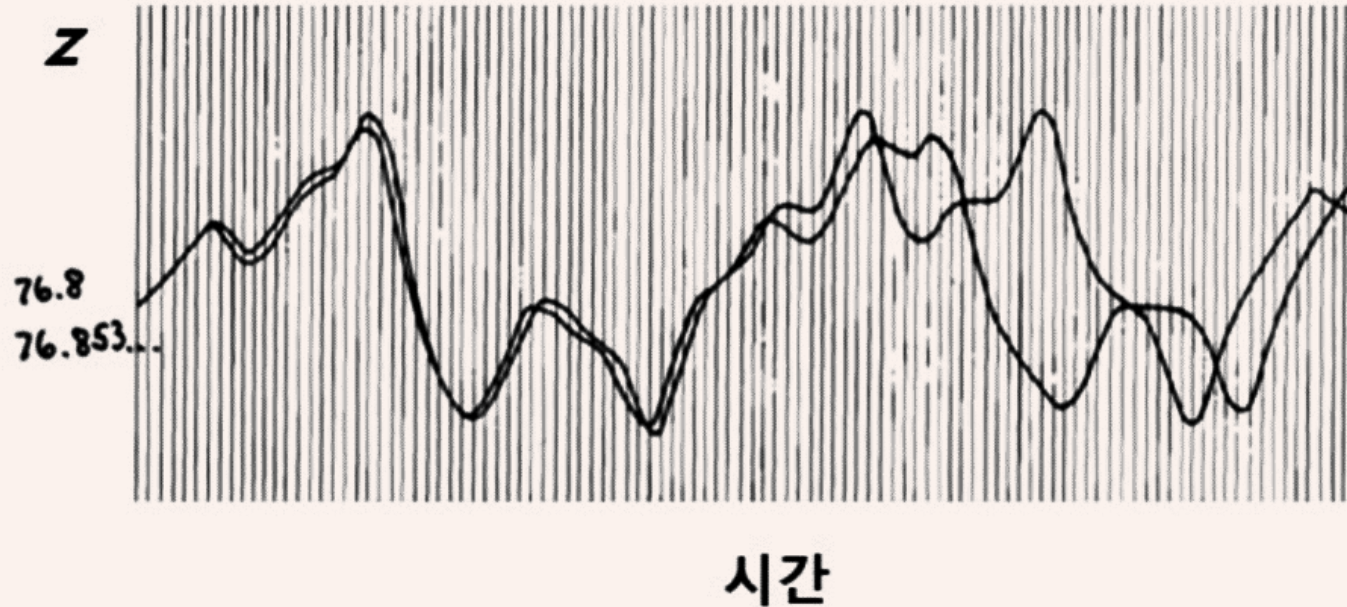
$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z.$$



혼돈영역에서 로렌츠 방정식을 컴퓨터를 이용하여 얻은 수치해

4. 비선형진동과 혼돈

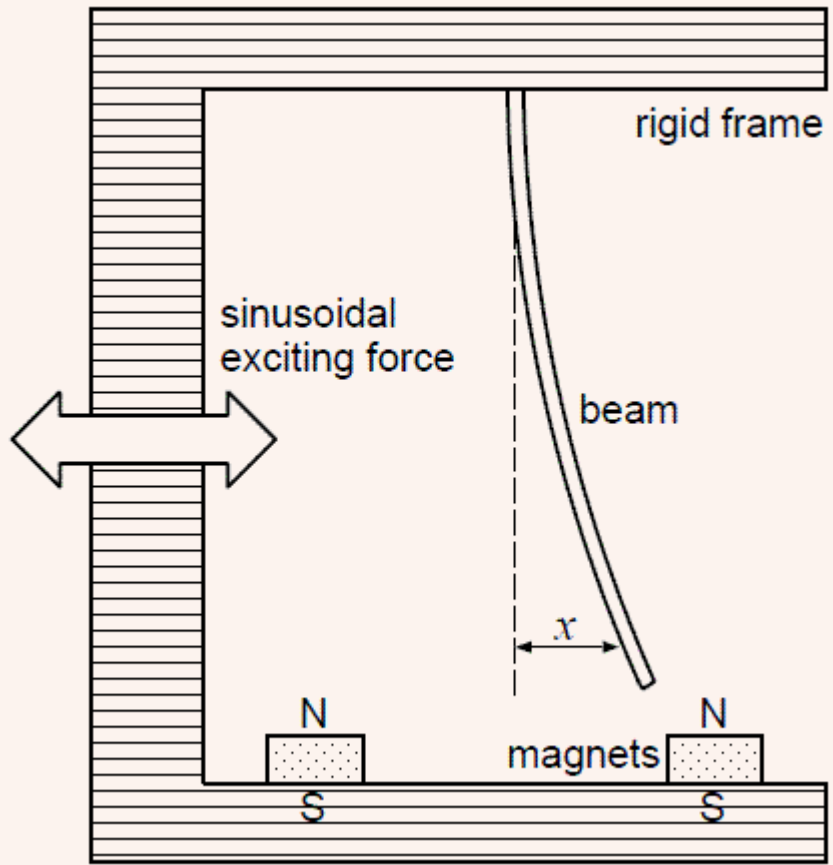
- 로렌츠 끌개(Lorenz attractor)가 혼돈영역에 있을 때 미래는 초기조건(initial condition)에 극히 민감함
- 초기값의 작은 차이는 시간이 지날 수록 크게 증폭됨. 선형 시스템에서 이러한 일은 발생하지 않음.
- 초기조건의 민감성은 () 동력학계의 특징이며 초기조건의 민감성을 나비효과(butterfly effect)라 부름



로렌츠가 컴퓨터 수치계산으로 발견한 로렌츠 방정식의 초기조건 민감성

4. 비선형 구동 진동

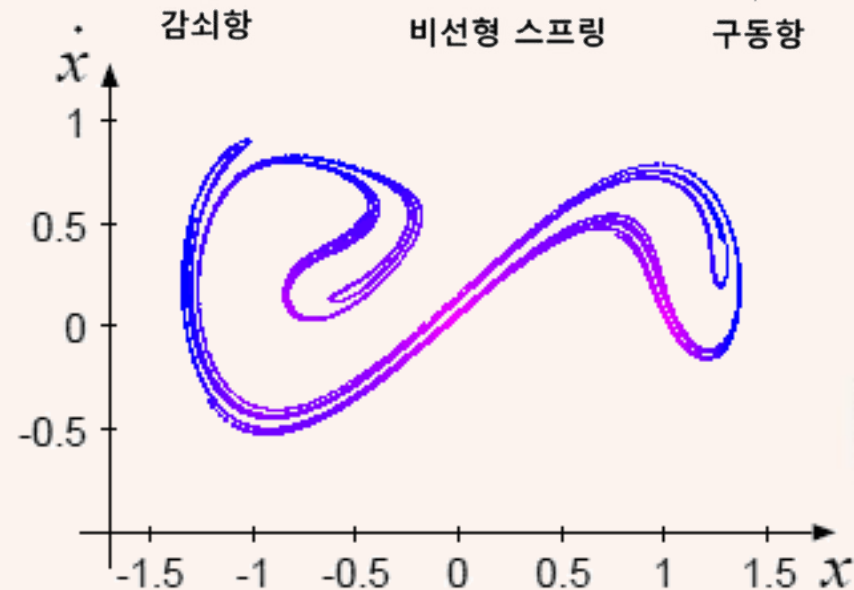
혼돈현상을 나타내는 비선형 구동 진자의 예인 더핑 진동자(Duffing oscillator)



강제 진동하는 프레임에 장착된 두 자석 사이에서 진동하는 강철빔의 진동(Scholarpedia 그림 인용)

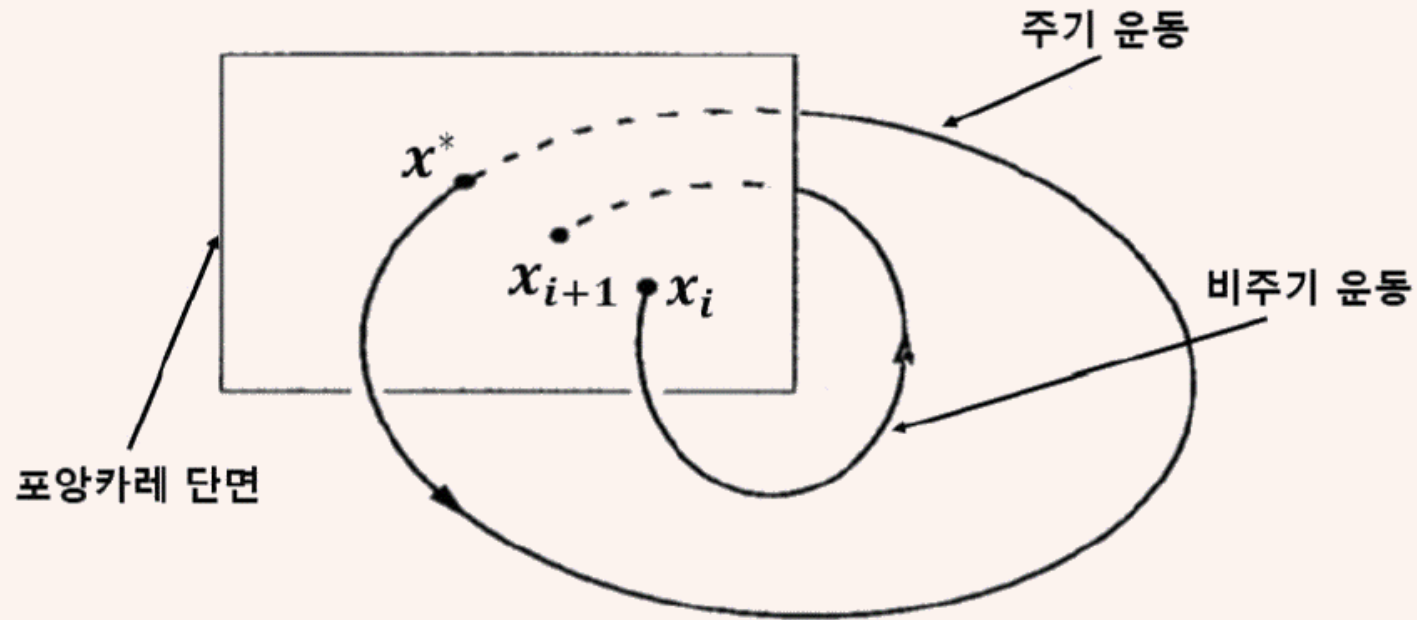
$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = A \sin(\omega t)$$

$$F = m\ddot{x} = -\delta \dot{x} - (\alpha x + \beta x^3) + A \sin(\omega t)$$



4. 혼돈현상과 포앙카레 단면

- 고차원의 동력학 운동을 한 차원 낮은 포앙카레 단면(Poincare section)에서 관찰
- 포앙카레 단면에서 운동의 주기성과 비주기성을 파악할 수 있음



고차원 동력학 궤도를 포앙카레 단면으로 사상(mapping)하여 쉽게 이해할 수 있음

5. 타코마 다리의 붕괴



출처 : <http://www.noise.pe.kr/tacoma.html>

예제 1)

1940년 Tacoma협곡의 현수교가 다리를 가로지르는 세찬 바람에 의해서 큰 진폭으로 진동한 후 무너졌다. Tacoma 다리의 붕괴 원인은 무엇인가?

Tacoma Bridge Collapse Y-Tube: <https://www.youtube.com/watch?v=XggxeuFDaDU>

풀이)

미국 워싱턴 주 타코마에 건설된 Tacoma bridge는 협곡을 가로질러 건설되었고, 1940년 3월에 완공되어 개통된 지 4개월 후인 1940년 7월에 붕괴되었습니다. 타코마 현수교는 풍압을 정하중(static load)으로 가정하였을 때 풍속 53m/s에 견딜 수 있도록 설계되었습니다. 그러나 다리가 붕괴되던 날 풍속은 19m/s로 그다지 강하지 않았습니다. 이 사고는 현수교를 설계할 때 동적하중(dynamic load)의 중요성을 부각시키고 있습니다.

타코마 다리의 붕괴를 설명할 때 종종 공명의 예로 인용됩니다. 바람이 다리를 가로질러 불면 공기의 요동이 다리를 가로질러 다리가 깃발에 나부끼듯이 펄럭거립니다. 다리가 붕괴 되던 날 바람에 의한 진동이 다리의 비틀림 고유 진동수와 일치하여 공명이 일어나고, 진동 진폭이 다리가 견딜 수 있는 한계를 넘어서자 다리가 붕괴하였다는 것입니다.

최근에는 다리가 붕괴된 원인이 공명이라는 설명은 너무 단순한 생각이며, 오히려 다리가 비선형적으로 흔들리는 혼돈적(chaotic) 운동에 의해서 붕괴되었다는 주장이 제기되고 있습니다. 실제 타코마 다리의 붕괴모형에서 다리의 진동수가 단순공명 붕괴 모형 진동수의 20%에 불과하다는 연구결과가 발표되었습니다.

현재는 타코마 다리의 붕괴 원인이 공명과 비선형적 진동의 복합적인 결과일 것으로 추정하고 있습니다.

지금까지 단순조화 진동에 대해 알아보았습니다.
다음시간에는 소리와 음악에 대해서 살펴봅시다.