4주차 강의 : 4.5절 최적화문제 2020. 3. 20

page 233 예제 2 $1l$의 기름을 넣을 수 있는 원기둥 모양의 깡통을 만든다고 할 때 깡통을 만드는 비용이 최소가 반지름 r의 최소값을 구하여라 (교과서 page 233 그림 3 과 4를 참고).

풀이 깡통의 비용을 최소하기 위해서 그림 4에서 보는 바와 같이 깡통의 표면적이 최소가 되는 r의 값을 정한다. h를 원기둥의 높이라 하고 $A(r)$를 원기둥의 표면적이라고 하자. 그러면

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi rh. \tag{1}$$

한편 깡통의 체적은 $\pi r^2 h$이므로 가정으로부터 다음 식을 얻는다.

$$\pi r^2 h = 1000(\because \quad 1l = 1000cm^3) \Rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2} \tag{2}$$

(1)과 (2)로부터

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}. \tag{3}$$

따라서 $A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2}$이고

$$A'(r) = 4\pi r - 2000/r^2 = 0 \Rightarrow 4\pi r^3 - 2000 = 0 \Rightarrow r = \left(\frac{500}{\pi}\right)^{1/3}$$

이다.

$$t = \left(\frac{500}{\pi}\right)^{1/3}.$$

이라고 하자. $A(r)$의 정의구역이 $(0, \infty)$이므로 $A'(r) < 0$ for all $r < t$ 이고 $A'(r) > 0$ for all $r > t$. 그러므로 증감 또는감소함수 판정법(page 217)에 의해 $A(r)$는 $(0, t)$에서 감소함수이고

(t,∞)에서 증가함수이다. 따라서 $r=t$에서 $A(r)$는 최소값을 갖는다.

page 234 예제 3 점 $(1,4)$에 가장 가까운 포물선 $y^2=2x$ 위의 점을 구하라.

풀이 (x,y)를 구하고하는 점이라고 하자. d를 주어진 두 점사이의 길이라고 하자. 그러면

$$d=\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2}=\sqrt{(\frac{y^2}{2}-1)^2+(y-4)^2}$$

이다. $f(y)=d^2$이라고 하자. 그러면

$$f(y)=\left(\frac{y^2}{2}-1\right)^2+(y-4)^2=y^4/4-8y+17.$$

따라서

$$f'(y)=y^3-8=0$$

이다. 따라서 $y=2$. 그러므로 $f'(y)<0$ for all $y\in(-\infty,2)$이고 $f'(y)>0$ for all $y\in(2,\infty)$. 예제 2에서 언급한 바와같이 $y=2$에서 $f(y)$는 최소값을 갖는다. $f(y)=d^2$이므로 $y=2$일 때 d는 최소값을 갖는다. $y^2=2x$이고 $y=2$이므로 $x=2$이다. 그러므로 $(2,2)$에서 최소값 $d=\sqrt{5}$을 갖는다.

page 235 예제 4 사람이 그림7(page 235)에서 보는 것처럼 강의 기슭인 A지점에서 반대편 기슭 D점까지는 배를타고 가고 D지점에서 B지점까지는 뛰어간다고하자. 배의 속도가 시속 6km이고 뛰는 속도가 시속 8km일 때 A에서 B까지 가능한 빨리 가는 D의 위치를 구하여라. C를 A에서 직진으로 가로질

러 반대편에 대응하는 점이라고 하자(그림 7를 보라). 단, 강의 폭의 길이는 $3m$이고 C에서 B까지의 거리는 $8m$ 이다.

풀이 x를 C에서 D까지의 거리라고 하자. A에서 D까지의 거리는 $\sqrt{x^2+9}$이다. t를 A에서 B까지 가는데 걸리는 시간이라고 하자. 그러면

$$t(x) = \frac{8-x}{8} + \frac{\sqrt{x^2+9}}{6}$$

이다. 그러면

$$\frac{dt(x)}{dx} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{6} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = 0 \Rightarrow 4x = 3\sqrt{x^2+9} \Rightarrow 7x^2 = 81$$
$$\Rightarrow x = \pm\frac{9}{\sqrt{7}}$$

x의 값의 범위는 0에서 8까지이므로 $x = \frac{9}{\sqrt{7}}$이다.

$$t(0) = \frac{3}{2},\ \ t(8) = \frac{\sqrt{73}}{6},\ \ t\left(\frac{9}{\sqrt{7}}\right) = \frac{\sqrt{\frac{81}{7}+9}}{6} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

이고

$$\frac{2}{\sqrt{7}} < \frac{\sqrt{73}}{6} < \frac{3}{2}$$

이므로 $x = \frac{9}{\sqrt{7}}$일 때 $t(x)$는 최소값 $\frac{2}{\sqrt{7}}$을 갖는다.

page 236 예제 5 반지름 r인 반원에 내접하는 사각형 중에 면적이 최대인 사각형의 면적과 두 변의 길이를 구하여라.

풀이 그림 9에서 보는 바와 같이 $P = (x, y)$를 반원 위의 점이라고 하자. 그러면

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{4}$$

이 성립한다. Q, R, S를 다음과 같이 주어지는 점이라고 하자:

$$Q = (-x, y), \quad R = (x, 0), \quad S = (-x, 0).$$

그러면 $\square PQRS$은 반원에 내접하는 사각형이다 (그림 9 참고). A를 $\square PQRS$ 의 면적이라고 하자. 그러면 (4)에 의해

$$A = 2xy = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$$

이다. x의 범위는 $0 \le x \le r$이다. $f(x) = A^2$이라고 하면

$$f(x) = 4x^2(r^2 - x^2)$$

이다. f의 임계점을 구한다.

$$f'(x) = 8x(r^2 - x^2) + 4x^2(-2x) = 0 \Rightarrow 8xr^2 - 16x^3 = 0$$
$$\Rightarrow 8x(r^2 - 2x^2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

f는 폐구간 $[0, r]$에서 연속이므로 극값정리에 의해 최대값을 갖는다.

$$f(0) = 0 = f(r) \text{ 이고 } f\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = r^4.$$

따라서 $x^2 + y^2 = r^2$이므로 $(x, y) = \left(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$ 일 때 $\square PQRS$의 면적이 최대가 되고 최대값은

$$A = 2\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 = r^2$$

이다. 이 때 사각형의 두 변의 길이는 각각 $\frac{r}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}r$이다.

.