



4주차 회전운동

3교시 원운동의 불변량

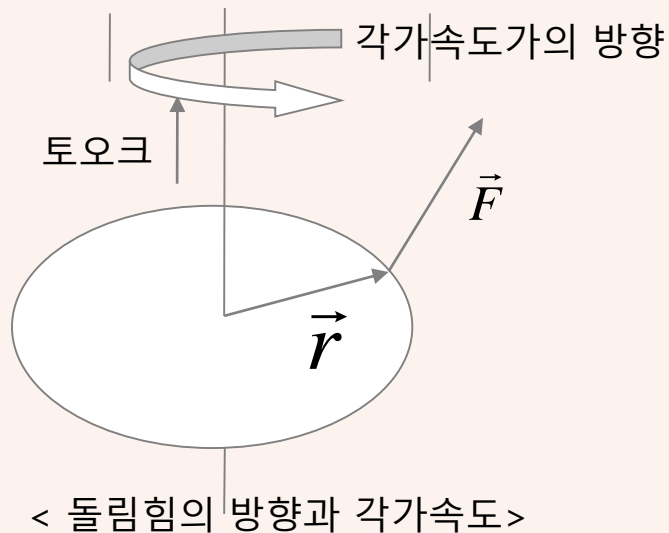
자전거는 빨리 달릴수록 안정적이다

- ✎ 훨씬 더 안정적으로 보이는 세발자전거보다 두발자전거가 더 선호되는 이유는 무엇일까요?
- ✎ 손잡이에서 손을 떼고도 자전거를 탈 수 있는 이유는 무엇일까요?
- ✎ 회전운동에서 변하지 않은 양은 무엇이 있을까요?

자전거와 회전, 각운동량, 돌림힘과의 관계를 알아봅시다.

1. 회전관성과 각운동량

✎ 병진운동(회전하지 않는 운동)을 할 때 뉴턴의 제2법칙에 의하면 힘은 질량 곱하기 가속도와 같다.



회전운동에서 돌림힘이 가해지면 물체에 각가속도가 생깁니다. 그런데 병진운동에서 질량과 유사한 관성이 회전현상에도 존재하는데 회전운동에 대한 관성을 회전() (rotational inertia)이라 합니다.

회전관성 = 회전운동의 변화에 대한 관성

회전관성은 회전하는 물체의 질량이 회전축에 대해서 어떻게 분포되어 있는가에 따라 달라집니다.

예를 들어, 무거운 쇠막대를 들어 올릴 때 쇠막대의 끝을 잡고 돌리는 경우와 쇠막대의 중심을 잡고서 돌리는 경우 중심을 잡고 돌리는 것이 더 쉽습니다. 회전관성은 회전축으로부터 물체까지의 수직거리의 제곱과 물체의 질량에 비례합니다. 물체의 질량이 회전축에 가까이 분포하면 회전관성이 작고, 반대로 회전축으로부터 질량이 멀리 분포하면 회전관성이 큼니다.

1. 회전관성과 각운동량

✎ 회전에서 뉴턴의 제2법칙과 유사하게 다음과 같은 관계가 성립합니다.

$$\text{돌림힘} = (\text{회전관성})(\text{각가속도})$$

한편 물체의 회전은 각운동량(angular momentum)을 도입하면 회전을 쉽게 설명할 수 있습니다.

$$\text{각운동량의 크기} = (\text{질량})(\text{속력})(\text{회전축으로부터 속도까지의 수직거리})$$

각운동량 역시 방향이 있는데, 돌림힘의 방향을 결정할 때와 유사하게 회전축으로부터 위치 벡터와 물체의 속도 벡터 사이에 오른손 법칙을 적용하면 됩니다.

태양 주위를 도는 지구의 각운동량은 태양에 있는 관측자(가상적인 관측자)가 측정한 지구의 운동량 (=질량곱하기 속력)에 태양과 지구 사이의 거리의 곱입니다. 각운동량의 방향으로 물체가 오른쪽과 왼쪽으로 도는 경우를 구별할 수 있습니다. 위에서 내려다 보았을 때 물체가 시계 바늘 방향으로 돌면 각운동량 방향은 바닥면을 향한 것으로 정의합니다.

병진운동에서 힘이 운동량과 관련 있는 것처럼 회전운동에서 돌림힘은 각운동량과 관련 있습니다.

$$\text{병진운동 : 힘} = \text{선운동량의 시간 변화율}$$

$$\text{회전운동 : 돌림힘} = \text{각운동량의 시간변화율}$$

1.1 각운동량 보존법칙

✎ 외력이 작용하지 않으면 물체의 운동량이 보존되어 일정한 값을 가집니다.

비슷하게 물체에 외부 돌림힘이 작용하지 않으면, 계의 () 보존됩니다. 즉 계의 각운동량은 일정한 값을 유지합니다. 이를 각운동량 보존 법칙(conservation law of angular momentum)이라 합니다.

예제 1)

북반구에서 세면대의 물이 빠질 때는 오른쪽으로 돌면서 빠지고, 남반구에서 왼쪽으로 돌면서 빠진다. 이것은 옳은 이야기 인가?

풀이)

세면대의 물이 빠질 때나 물을 채울 때 어떠한 회전력이 가해지지 않는다면, 코리올리의 힘에 의해서 북반구에서 물은 오른쪽으로 돌면서, 남반구에서는 왼쪽으로 돌면서 빠집니다. 그러나 일상생활에서 물을 빼낼 때 외부에서 회전력이 가해지게 되므로, 각운동량의 보존으로 인하여 물이 빠지는 동안 각속도가 증가하는 방향으로 회전하게 됩니다. 이 때의 회전 방향은 처음에 주어진 외부 회전력의 방향에 따라 달라집니다. 처음의 회전 방향이 코리올리 힘의 회전 방향과 반대 방향이어도, 코리올리 힘의 크기가 너무 작기 때문에 물의 회전 방향을 바꿀 수는 없습니다. 실제로 코리올리 힘에 의한 회전을 관찰하는 것은 거의 불가능합니다.

1.2 회전 운동에너지

✎ 회전하는 입자나 강체의 회전 운동에너지는 회전관성(moment of inertia)에 비례하고 각속력의 제곱에 비례한다.

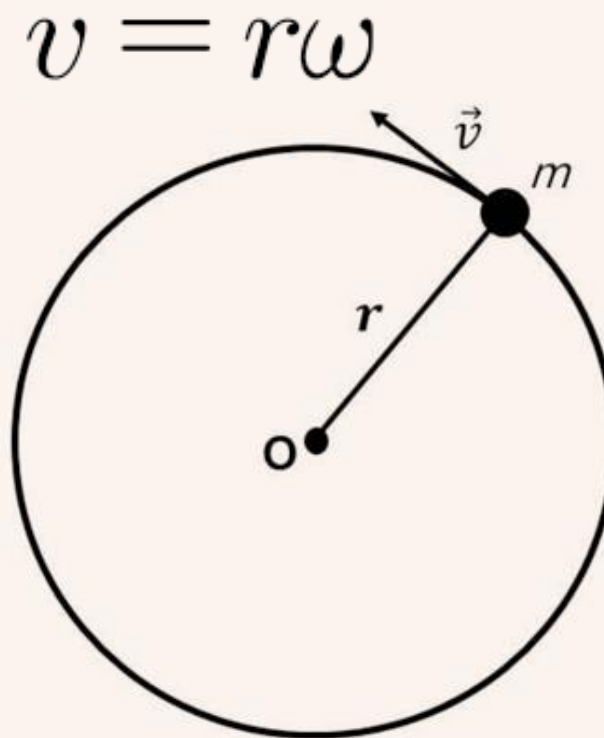
물체의 운동에너지(kinetic energy):

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(r\omega)^2 = \frac{1}{2}(mr^2)\omega^2$$

물체의 회전관성: $I = mr^2$

물체의 회전 운동에너지: $K = \frac{1}{2}I\omega^2$



1.3 회전의 불변량

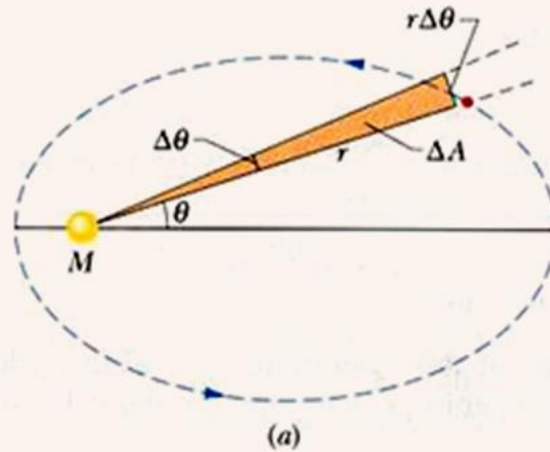
✎ 케플러의 제2법칙인 “**면적속도 일정의 법칙**”은

“행성과 태양을 잇는 직선이 일정한 시간 동안 휩쓸고 지나간 면적은 행성의 위치에 상관없이 항상 일정하다” 이다.

$$\Delta A = \left(\frac{1}{2}r\right)(r\Delta\theta) = \frac{1}{2}r^2\Delta\theta$$

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2}r^2\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1}{2}r^2\omega$$

$$L = mr^2\omega \quad \frac{\Delta A}{\Delta t} = \text{일정} = \frac{1}{2}r^2\omega = \frac{L}{2m}$$



행성이 타원궤도를 돌 때 외부 돌림힘이 없으므로 “()이 보존”된다.

따라서 각운동량은 일정하다. 케플러 제2법칙은 각운동량 보존 법칙의 다른 표현이다.

예제 2)

미식축구 시합에서 쿼터백이 왜 공을 회전시켜서 던질까?

풀이)

회전하는 공의 각운동량은 보존됩니다.

회전축이 고정되어, 공이 떨어는 것을 막고 공기의 저항을 줄여서 방향과 거리를 조절하기 쉽기 때문입니다.

예제 3)

피겨 스케이트 선수가 어떻게 빠르게 회전할 수 있는가?

풀이)

각운동량이 보존되기 때문이다. 돌기 시작한 후에 피겨 선수가 팔을 몸 쪽으로 움츠려 회전관성을 줄어들게 합니다. 각운동량은 회전관성과 각속도의 곱입니다. 그런데 각운동량이 일정하게 보존되려면 줄어든 회전관성을 각속도의 증가로 보상됩니다. (따라서 선수는 빠르게 회전합니다.)

예제 2)

서서 구르는 동전 : 동전 하나를 바람 빠진 풍선 속에 넣고 공기를 불어넣은 다음 풍선 입구를 붙잡고 돌려보아라. 동전이 풍선 안쪽을 따라 똑바로 서서 구르게 될 것이다. 왜 동전이 서서 구르는가? (실제로 집에서 실험해 보세요.)

풀이)

처음에는 동전이 풍선 안에서 튀어 다닙니다. 이 때 안쪽 벽과 충돌하면서 생긴 돌림힘 때문에 동전이 회전 운동을 하게 됩니다. 만약 동전의 회전운동에 대응하는 각운동량 벡터가 풍선 벽과 나란하지 않으면 안쪽 벽과의 충돌로 생기는 돌림힘은 회전운동을 방해할 것입니다. 따라서 각운동량 벡터의 방향이 풍선 표면과 나란한 운동이 일어나고 동전이 풍선 표면을 따라 구르게 됩니다. 이와 같이 구르는 경우에는 **벽에서 동전의 중심을 잇는 수직힘은 동전의 반지름 방향과 나란하고, 돌림힘이 0이 되어 각운동량이 보존되므로 각운동량 벡터의 방향이 일정한 상태로 구르게 됩니다.** 한편 동전이 풍선 내부를 한 바퀴 도는 시간만큼의 주기로 풍선을 돌려주면 공명이 일어나서 에너지가 공급되므로 동전이 계속해서 서서 구르게 됩니다.

각운동량이 보존되는 다른 예제들을 제시해 보세요.

2. 자전거는 왜 빨리 달릴 수록 안정한가?

Q1. 두발자전거가 훨씬 더 안정적으로 보이는 세발자전거보다 더 선호되는 이유는 무엇입니까?

Q2. 왜 자전거는 회전하는 쪽으로 기울까요?

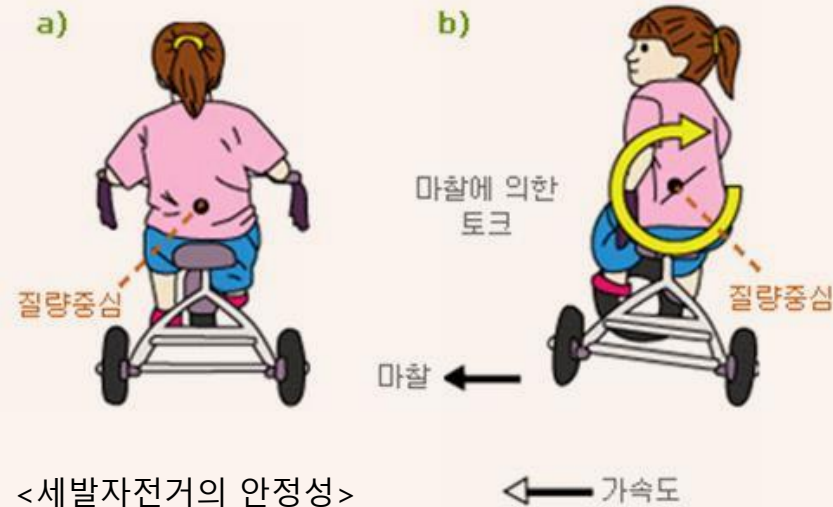
Q3. 손잡이에서 손을 떼고도 자전거를 탈 수 있는 이유는 무엇입니까?

이와 같은 질문을 생각해보면서 자전거와 회전, 각운동량, 돌림힘과의 관계를 살펴봅시다.

두발자전거를 선호하는 이유는 **안정성**에서 그 답을 찾을 수 있습니다. 물체가 정지해 있을 때의 안정성을 **정적 안정성**이라 하고, 물체가 움직이고 있는 상태에서의 안정성을 **동적 안정성**이라 합니다. 세발자전거와 두발자전거를 안정성의 관점에서 비교해 봅시다. 의자의 다리가 세 개 또는 네 개인 이유 중 하나가 안정성입니다. 세 다리 의자는 지면이 평평하지 않아도 흔들리지 않고 안정한 상태를 유지합니다. 바퀴가 달린 운반체에도 동일한 원리가 적용됩니다.

움직이지 않을 때 세발자전거는 잘 넘어지지 않기 때문에, 따라서 어린이를 위한 세발자전거가 많습니다. 그러나 세발자전거는 빠른 속도로 달리거나, 급한 언덕을 내려오다 방향을 바꾸면 쉽게 넘어지는 것을 볼 수 있습니다. 즉, 세발자전거는 급속한 가속을 하지 않으면 안정하지만, 빠른 속도로 달릴 때는 불안정합니다. 세발자전거가 방향을 바꾸려면 측면 가속도가 필요한데, 그 힘은 바퀴와 도로 사이의 마찰력에 의해서 생깁니다.

2. 자전거는 왜 빨리 달릴 수록 안정한가?

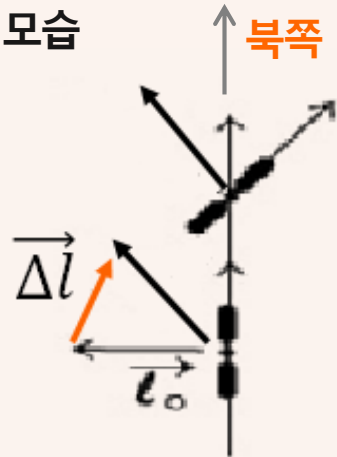


위 그림은 회전할 때 세발자전거에 작용하는 가속도와 돌림힘(토크)을 나타냅니다. **회전이 너무 갑자기 일어나면 바퀴가 회전하는 동안 사람의 운동량은 직선 방향으로 유지되어 쓰러지고 맙니다.** 즉, 세발자전거는 동적 안정상태는 좋지 못합니다. 세발자전거의 문제는 **바퀴가 방향을 트는 동안 영향을 주는 마찰력에 의한 돌림힘을 조절할 수 없습니다.** 세발자전거가 회전하는 동안 자전거를 가속시키는 수평 마찰력은 세발자전거의 아래쪽과 질량중심에 영향을 미칩니다. 마찰력은 질량중심에 대해서 돌림힘을 가하고 세발자전거는 넘어집니다.

2. 자전거는 왜 빨리 달릴 수록 안정한가?

✎ 앞에서 각운동량 보존 법칙에 따르면 "단위 시간 동안의 각운동량 변화량은 돌림힘과 같습니다". 이 사실을 이용하여 두발자전거의 안정성을 생각해 봅시다. 자전거가 북쪽 방향을 달린다고 합시다. 자전거는 회전하는 바퀴의 축 방향의 각운동량을 가집니다.

위에서 본 모습



<두발자전거의 안정성>

왼쪽 그림과 같이 자전거를 위에서 내려다 보면 각운동량은 왼쪽(서쪽) 방향입니다. 이 때 자전거가 기울어지지 않으면 사람에게 작용하는 중력과 수직힘에 의한 돌림힘은 0이며, 자전거는 직진합니다. 그러나 자전거가 오른쪽으로 기울어지면 자전거와 사람의 중심에 작용하는 중력에 의한 돌림힘은 자전거의 진행 방향(북쪽)을 향하게 됩니다.

자전거가 기울어졌으므로 각운동량의 방향은 서쪽에서 북서쪽 방향으로 이동합니다. 돌림힘은 각운동량의 변화량과 같은 방향이므로 돌림힘은 자전거의 진행방향을 향하게 됩니다. 또, 돌림힘은 각운동량의 변화량과 같은 방향이므로 각운동량 방향은 서쪽에서 북서쪽 방향으로 약간 이동합니다.

2. 자전거는 왜 빨리 달릴 수록 안정한가?

✎ 각운동량 방향이 약간 오른쪽으로 이동한 것은 자전거 진행 방향이 바뀐 것을 뜻합니다.

따라서 오른쪽으로 몸을 굽힌 사람이 탄 자전거는 오른쪽 방향으로 방향을 바꿉니다.
이런 기술은 자전거 손잡이를 놓고 진행 방향을 바꾸는 잘 알려진 기술입니다. 자전거 속도가 빨라지면 각운동량의 크기가 더 커지므로, 몸을 약간 오른쪽을 틀었을 때 토크의 작용에 의한 각운동량 변화는 상대적으로 작습니다. 따라서 빠르게 운동하는 자전거는 몸의 중심에 약간의 이동이 있어도 자전거 진행 방향이 거의 변하지 않고 안정된 상태로 자전거를 탈 수 있습니다. 반대로 느리게 운동하는 자전거의 방향은 약간의 중심만 흐트러져도 쉽게 각운동량의 변화를 초래하여 진행 방향이 불안정해져서 넘어지게 됩니다.

지금까지 각운동량에 대해 알아보았습니다.
다음시간에는 물의 행성에 대해서 살펴봅시다.