

HEURI STIEKEN

Episode I

**In which we
will discover**

**what makes a hard
problem HARD.**

HOEVEEL MOGELIJKHEDEN?



HOEVEEL MOGELIJKHEDEN?



AANTAL MOGELIJKHEDEN



6 760 000



45 697 600



17 576 000

[illegible]

HOEVEEL MOGELIJKHEDEN?



HOEVEEL MOGELIJKHEDEN?



12 stukjes:

$12 ! =$

$12 * 11 * 10 ... =$

479 001 600

HOEVEEL MOGELIJKHEDEN?



HOEVEEL MOGELIJKHEDEN?



HOEVEEL MOGELIJKHEDEN?



5

HOEVEEL MOGELIJKHEDEN?



8

HOEVEEL MOGELIJKHEDEN?



GROOTTE TOESTANDSRUIMTE



$$2^2 = 4$$



$$2^3 = 8$$



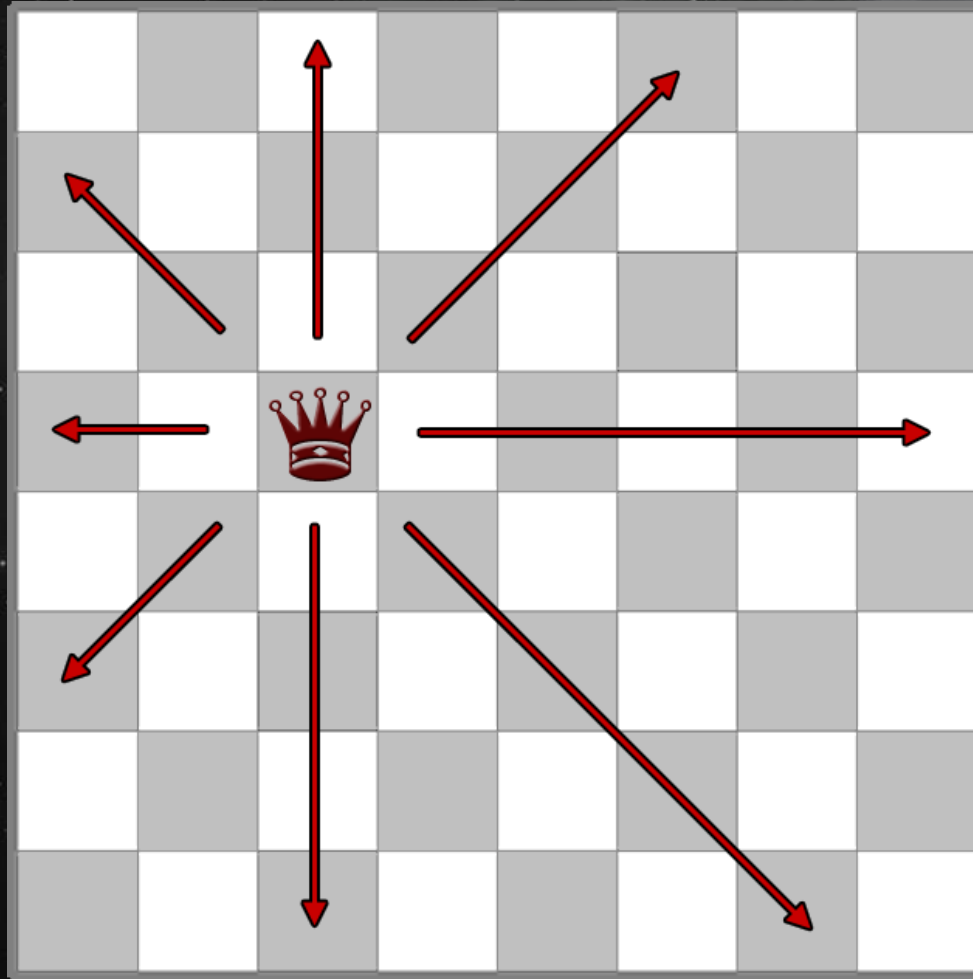
$$2^5 = 32$$



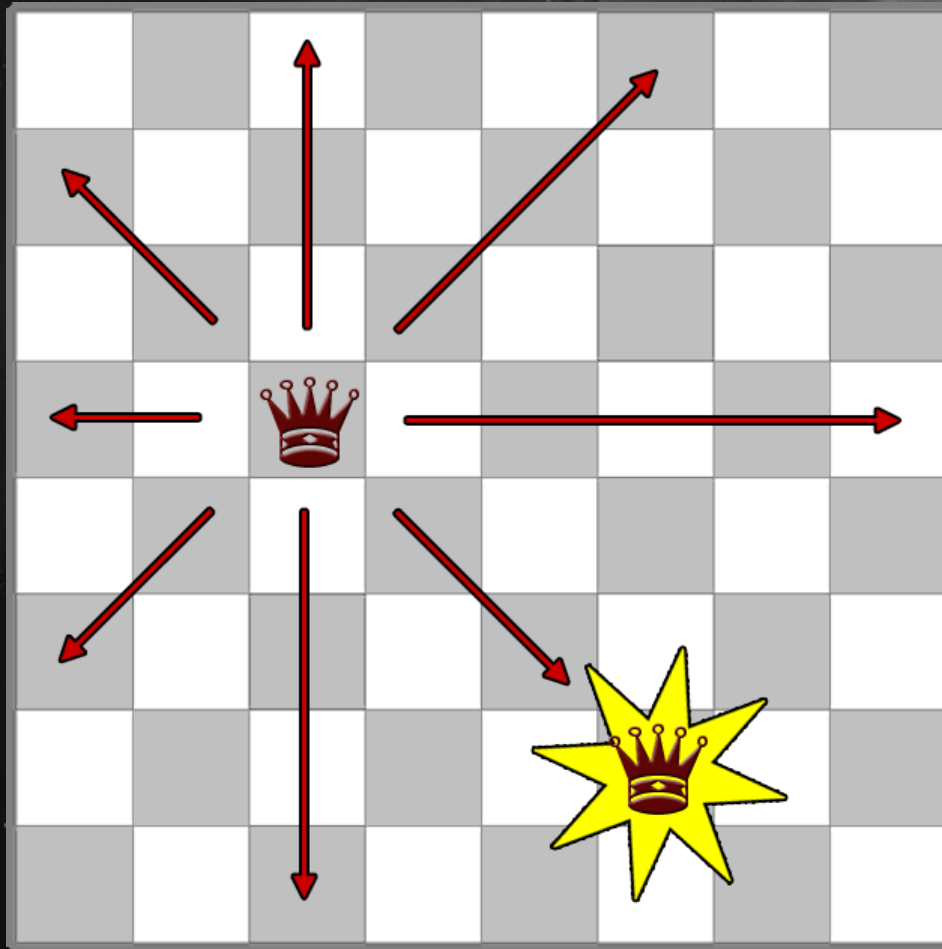
$$\rightarrow 2^n$$

Complexiteitsfunctie!

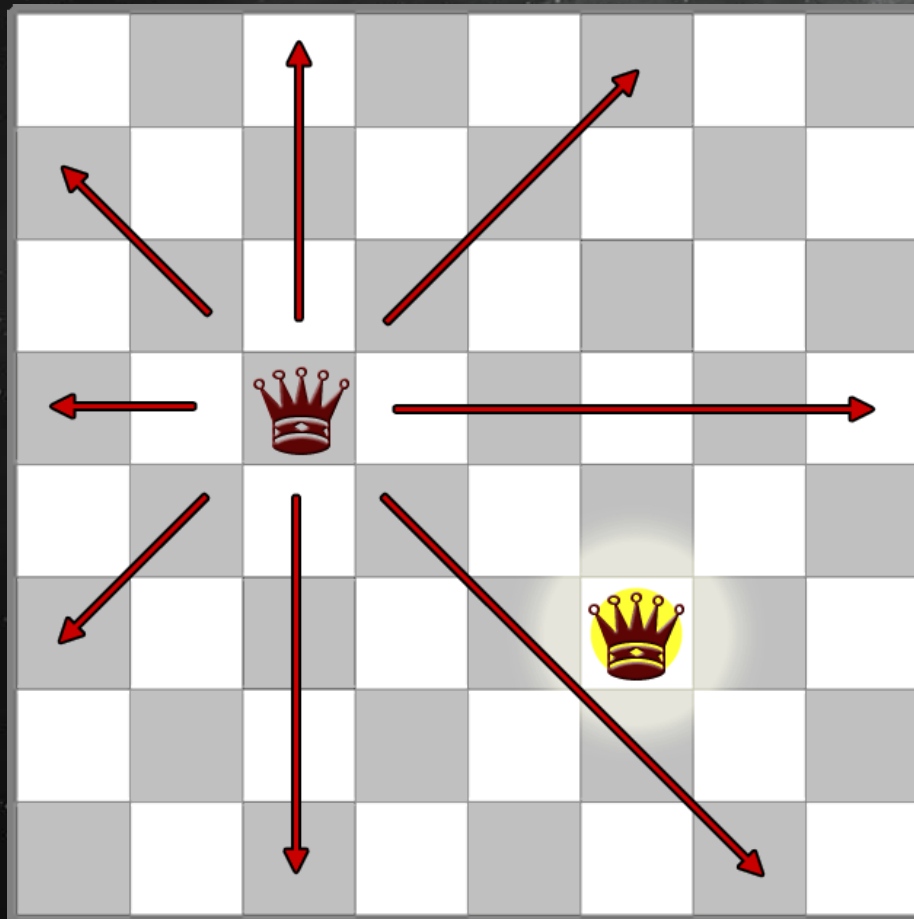
ACHT KONINGINNEN



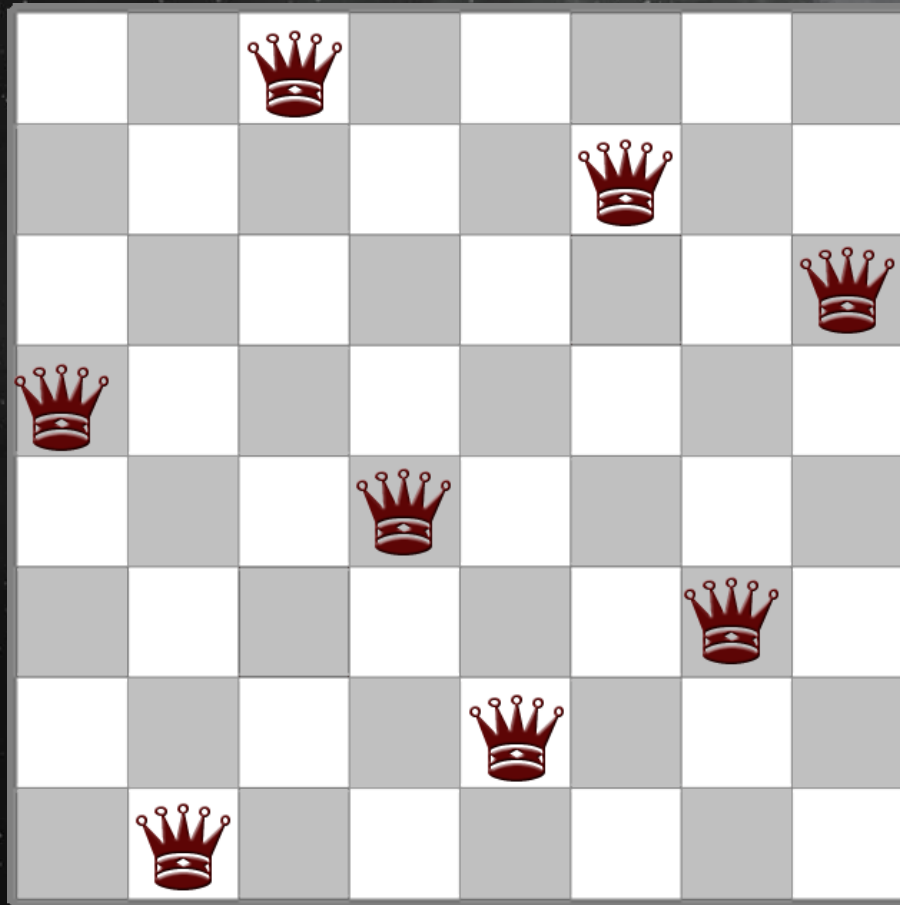
ACHT KONINGINNEN



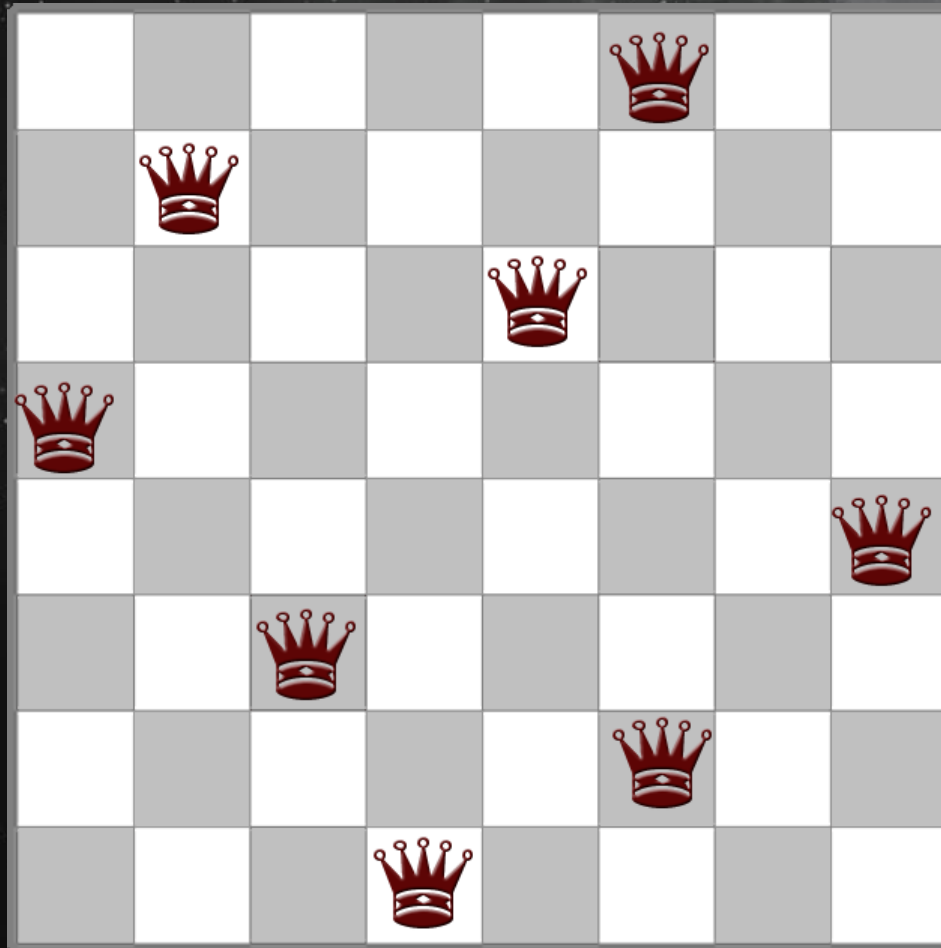
ACHT KONINGINNEN



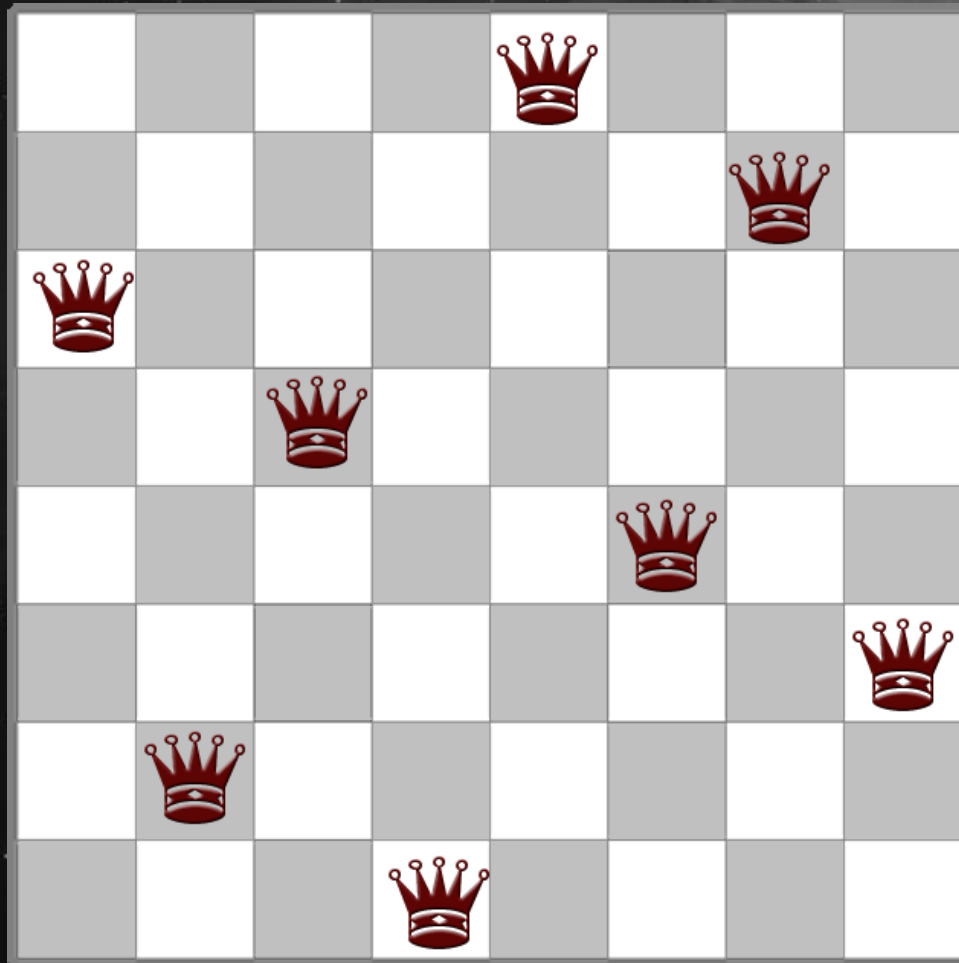
GOED OF FOUT?



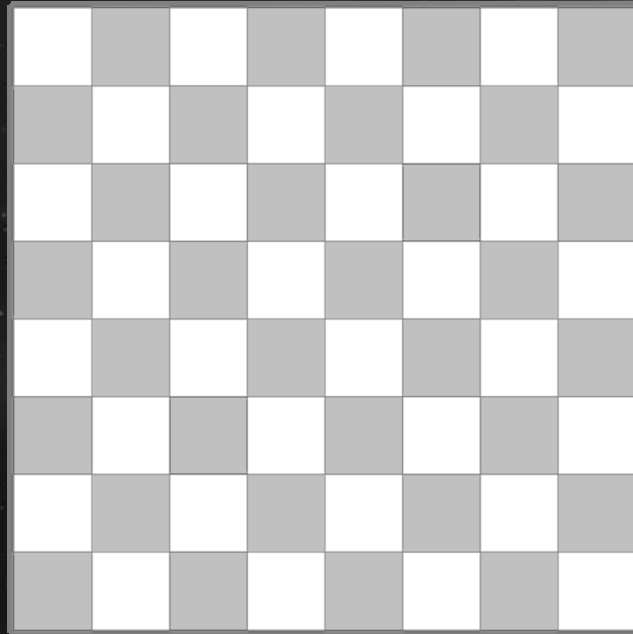
GOED OF FOUT?



GOED OF FOUT?



HOEVEEL MOGELIJKHEDEN?



n choose k (“n boven k”) :

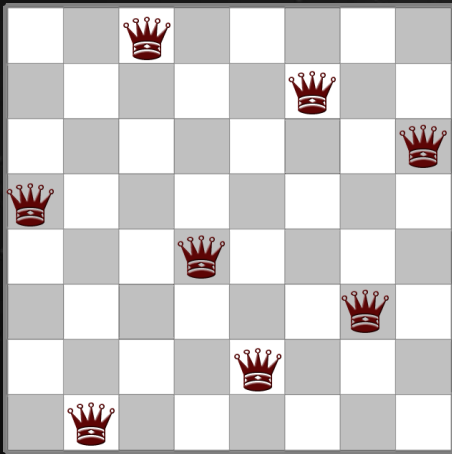
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

8 koninginnen, 64 velden:

$$\binom{64}{8} = \frac{64!}{8!(64-8)!}$$

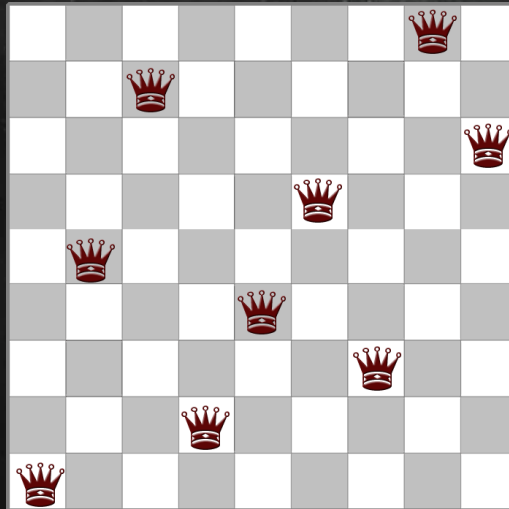
GROOTTE TOESTANDSRUIMTE

8 x 8



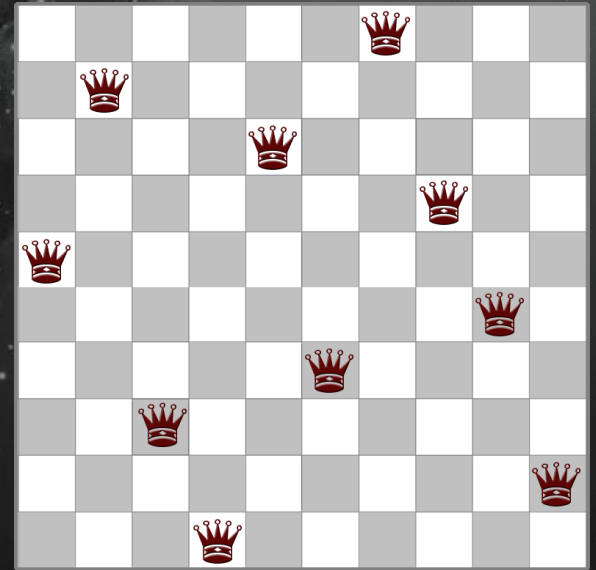
$$\binom{64}{8} = 4\,426\,165\,368$$

9 x 9



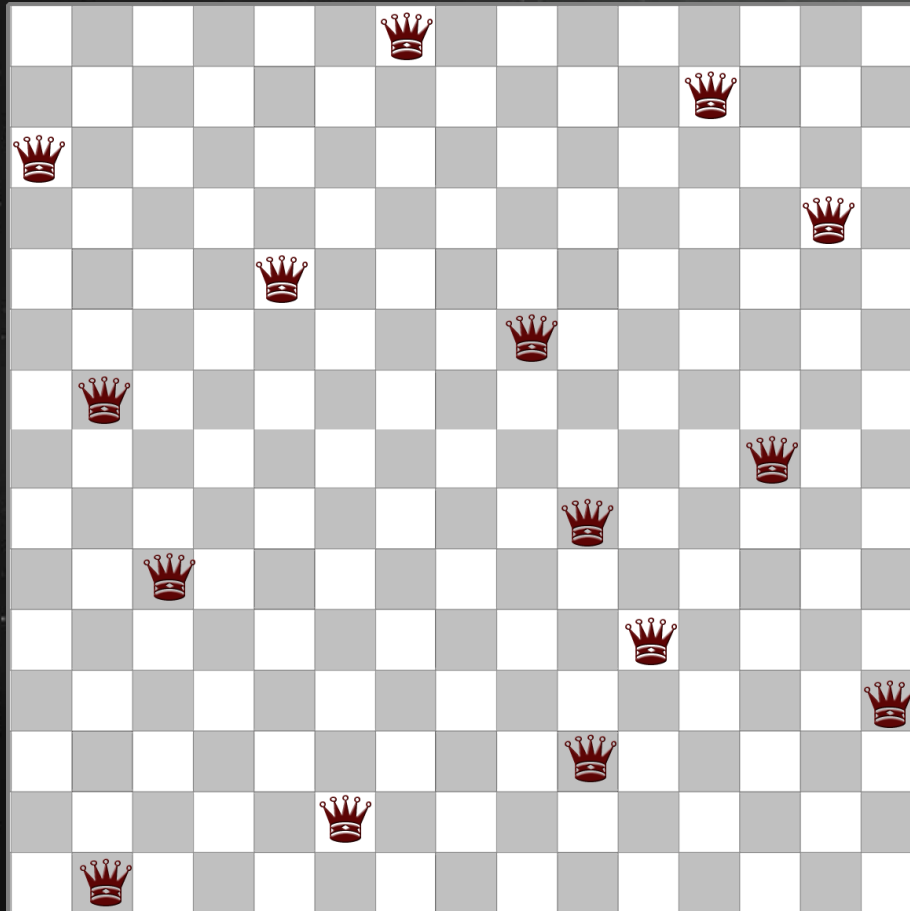
$$\binom{81}{9} = 260\,887\,834\,350$$

10 x 10



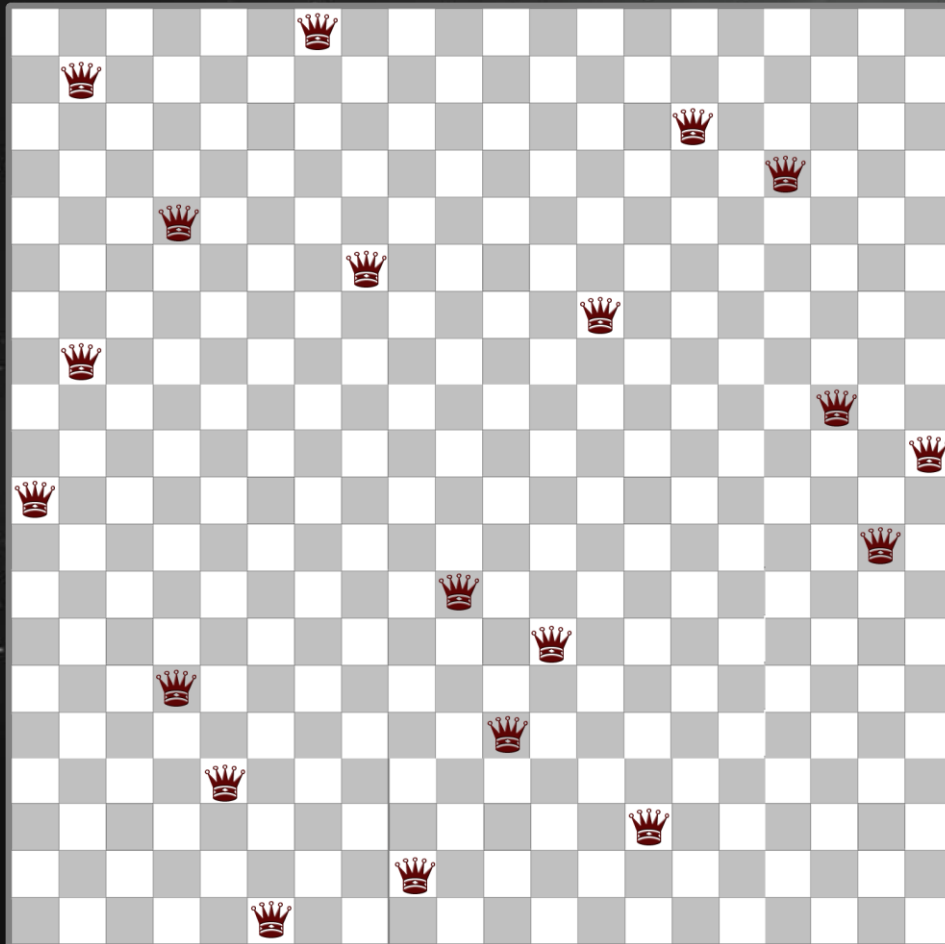
$$\binom{100}{10} = 17\,310\,309\,456\,440$$

HOEVEEL MOGELIJKHEDEN?



$$\binom{225}{15} = 9100556781177500000000 (= 9,1 * 10^{22})$$

HOEVEEL MOGELIJKHEDEN?

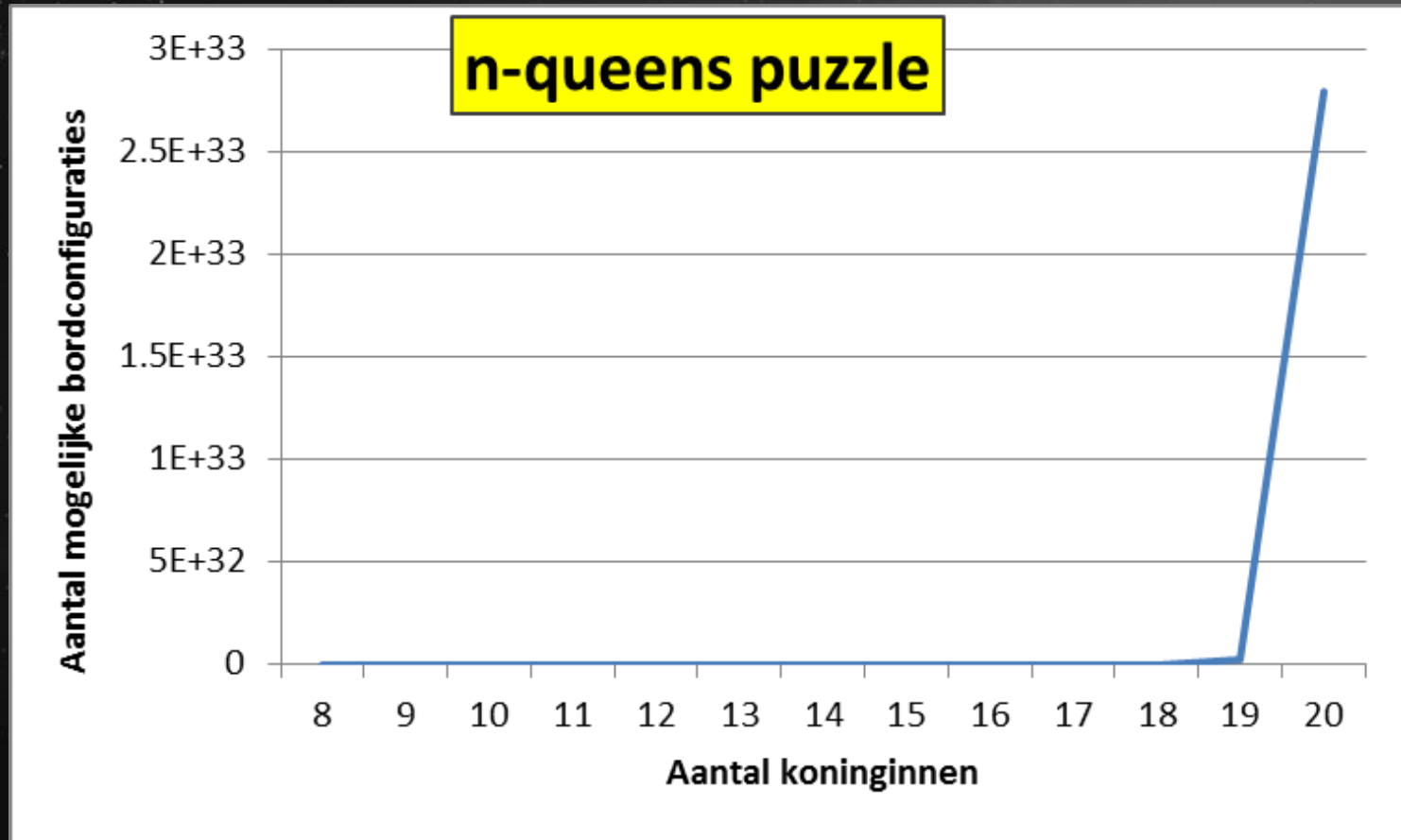


$$\binom{400}{20} = 278836098366709000 \dots 000 (= 2,7 * 10^{33})$$

HOEVEEL MOGELIJKHEDEN?

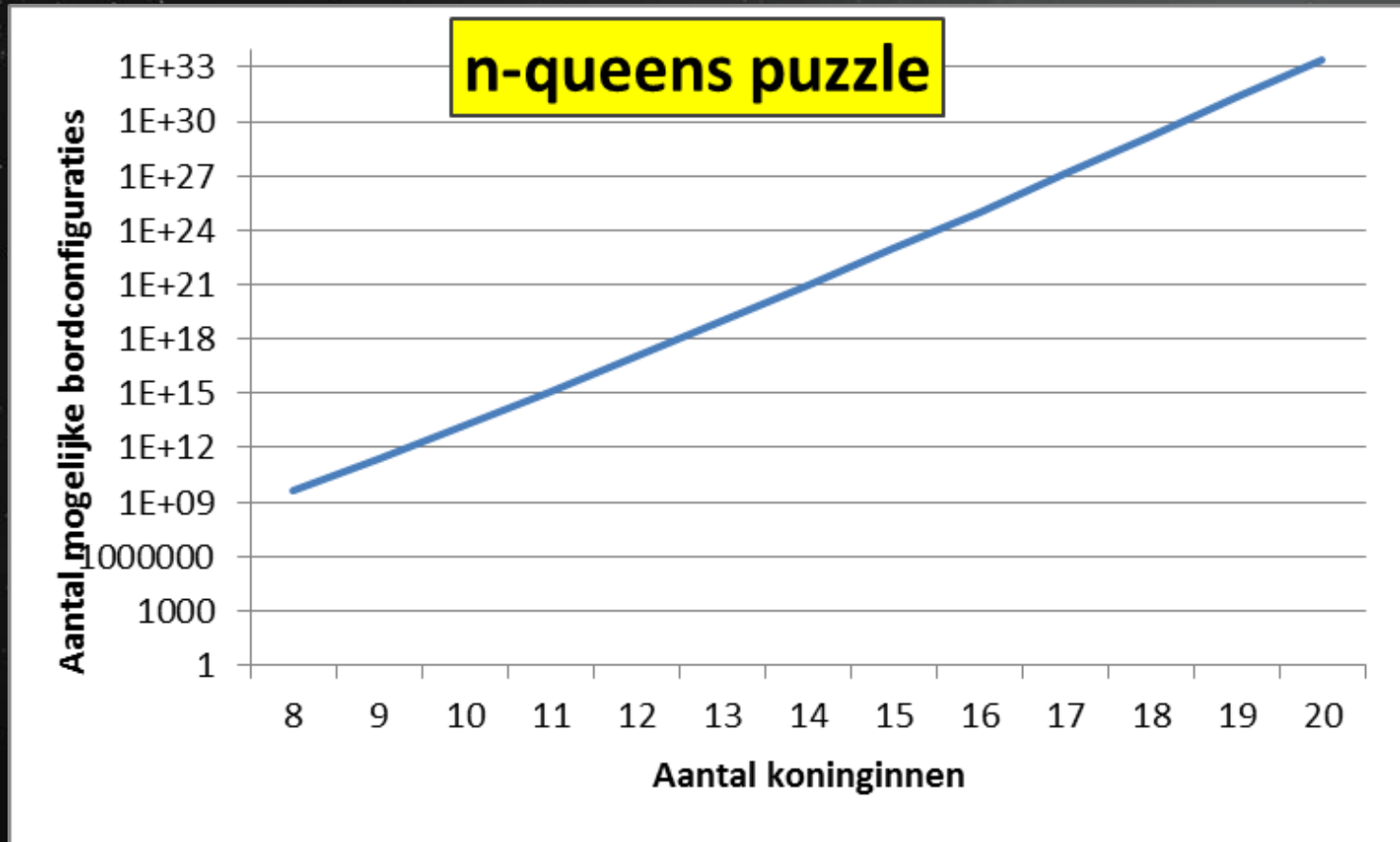
queens	velden	grootte toestandsruimte
8	64	4426165368
9	81	260887834350
10	100	17310309456440
11	121	1276749965026540
12	144	103619293824707000
13	169	9176358300744340000
14	196	880530516383349000000
15	225	91005567811177500000000
16	256	10078751602022300000000000
17	289	119073904434449000000000000
18	324	14948249233419500000000000000
19	361	198708670535438000000000000000
20	400	27883609836709000000000000000000

STATE-SPACE COMPLEXITY N-QUEENS



Complexiteitsfunctie: $C(n) = \binom{n^2}{n}$
(*n*: aantal koninginnen, *C(n)*: aantal bordconfiguraties)

STATE-SPACE COMPLEXITY N-QUEENS



Complexiteitsfunctie: $C(n) = \binom{n^2}{n}$
(*n*: aantal koninginnen, *C(n)*: aantal bordconfiguraties)

REKENSNELHEID PROCESSOR

- Intel Core i7 5960X: 238 310 MIPS
- Omgerekend: $7,51 * 10^{12}$ MIPY



REKENTIJD N-QUEENS

queens	rekentijd (jaren)	rekentijd (heelallen)
8	0.00058895	0
9	0.034714024	0
10	2.303328908	0
11	169.8857614	0
12	13787.69776	0
13	1221016.377	0
14	117164363.7	0
15	12109301434	0.877485611
16	1.34109E+12	97.18042227
17	1.58441E+14	11481.23574
18	1.98903E+16	1441326.496
19	2.64404E+18	191597067.5
20	3.71022E+20	26885680741

GROOTST BEKENDE INSTANTIE

- **Opgelost: 1 000 000 queens**
- **Grootte state-space ?**

923987212974691726397612945776193745
913749576139459948567945879834698739
687396781396826371653781654816817598
213759082710606872695087240567824056
987205679203581584871265348712654871
652834756128465182675812653481276592
387601870482304737482371327874788747
777432432408702111233312312314455691
276593746957136947676193745913757576
139459919374591374957613945999923428
537591734695719898888924324139746761
767601937459137495761394599182674637
676374112849141201000000000000000000
0000000000000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000 heelallen.

HOW WAS IT DONE?

Welkom bij Heuristieken. ☺

GROOTTE STATE-SPACE

- Moeilijkheid *instantie*: toestandsruimtegrootte
- Moeilijkheid *probleem*: toename t'grootte
- ruimtes $>10^{16}$ niet doorrekenen (Torenvliet)
- ruimtes $>10^{16}$ in 4 maanden door te rekenen
- Grote getallen zijn psychologisch lastig



RELATIES TUSSEN GETALLEN

- “De koffie is een euro duurder geworden.”
- “Mijn inkomen is 6% achteruit gegaan”
- “De rente op je hypotheek bedraagt 2% voor de komende twintig jaar.”
- Grote getallen *en hun relaties* zijn psychologisch lastig



MOEILIKHEID VAN EEN PROBLEEM (INSTANTIE)

- **Klassiek antwoord: “Probleem is moeilijk als het efficiëntste algoritme voor de moeilijkste instantie *niet* in polynomiale tijd een oplossing vindt”**
- **We kennen dat algoritme niet (en kunnen dat niet kennen).**
- **Verschillen per instantie zijn groot**



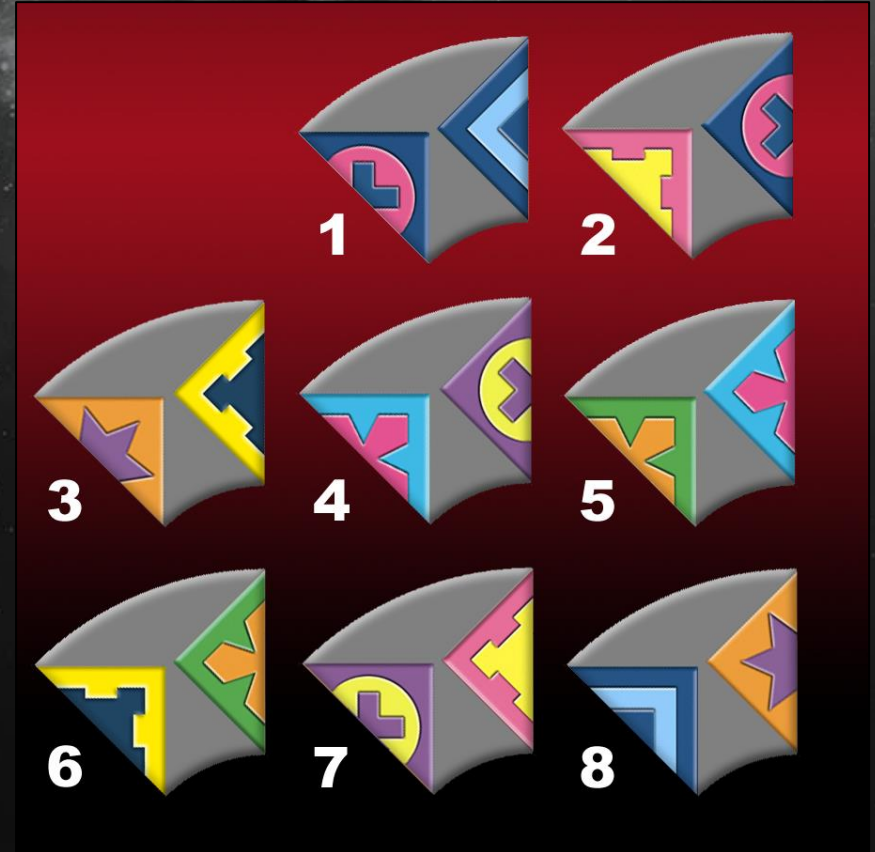
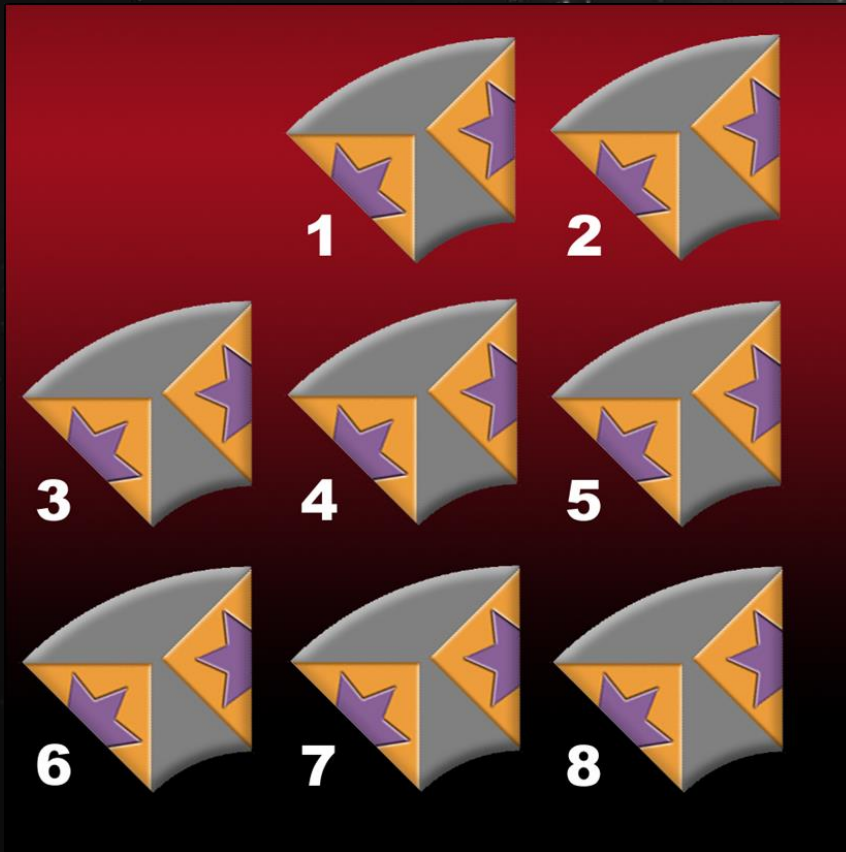
GROTE STATE-SPACE, MOEILIJK PROBLEEM?



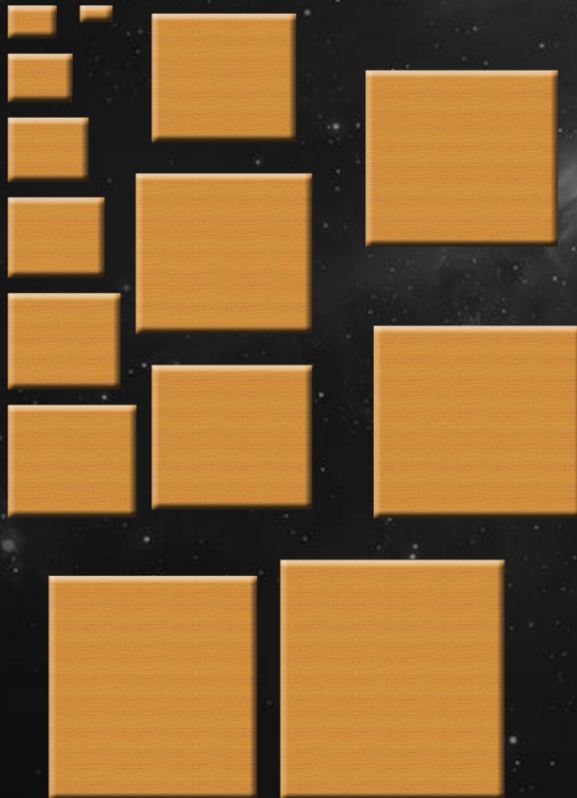
GROTE STATE-SPACE, MOEILIJK PROBLEEM?



GROTE STATE-SPACE, MOEILIJK PROBLEEM?



OPLOSSINGEN: HOE VEEL, HOE *DICHT*



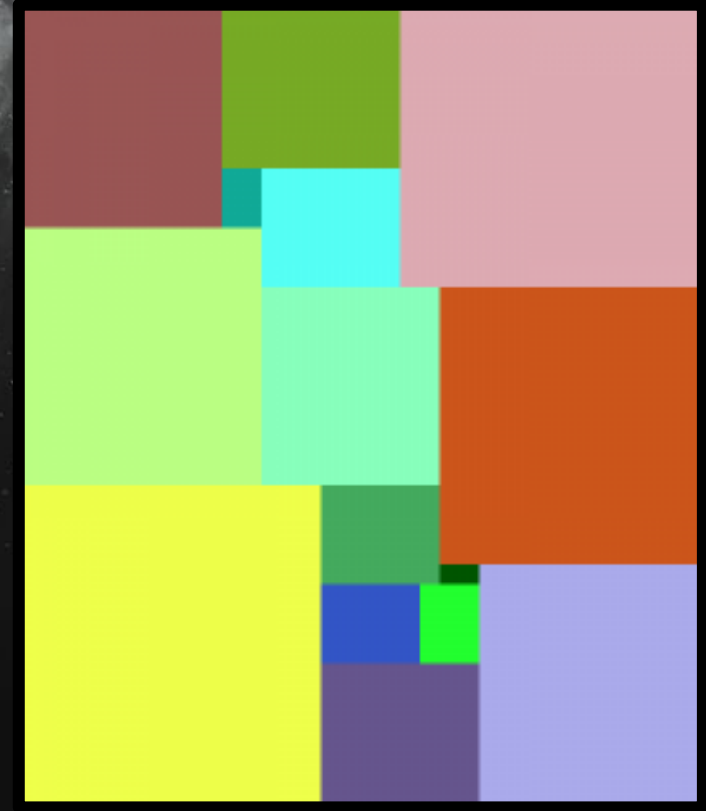
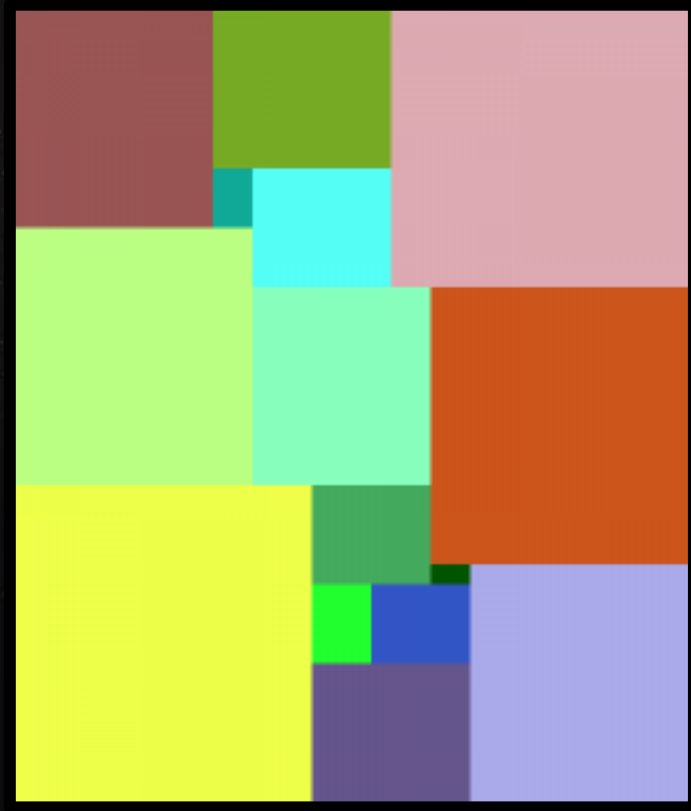
3 oplossingen

32x35

72 oplossingen

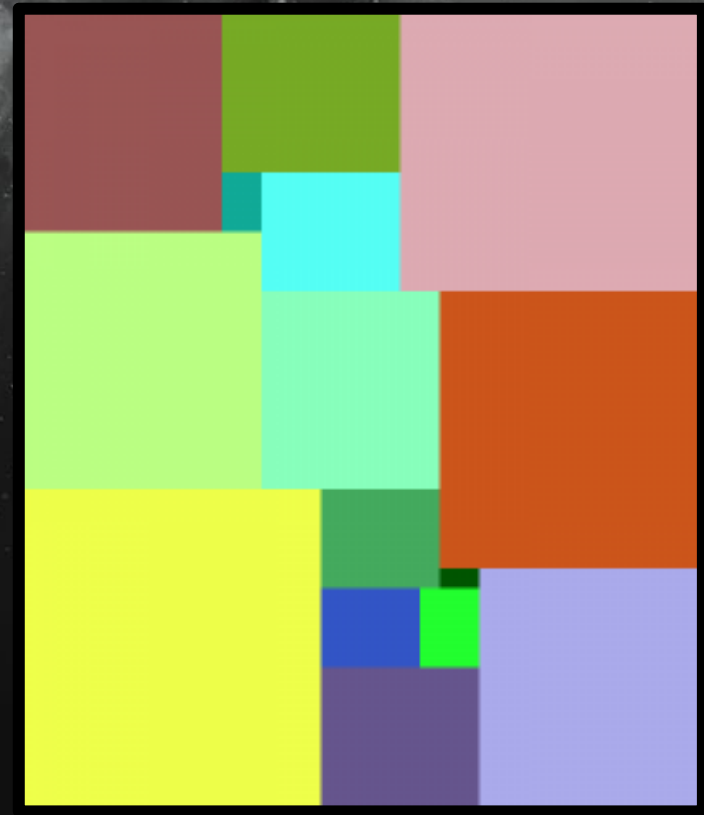
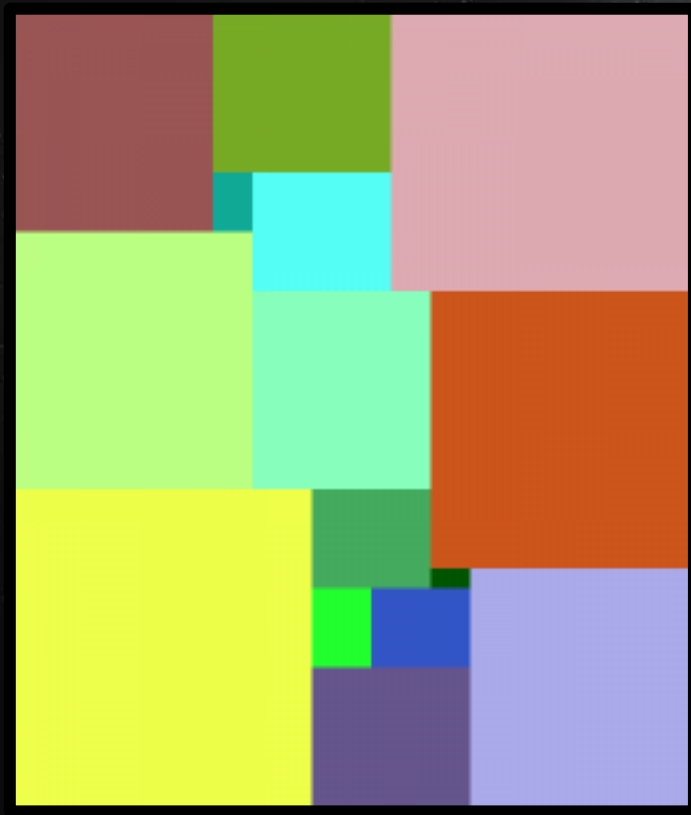
28x40

GROTE STATE-SPACE, MOEILIJK PROBLEEM?



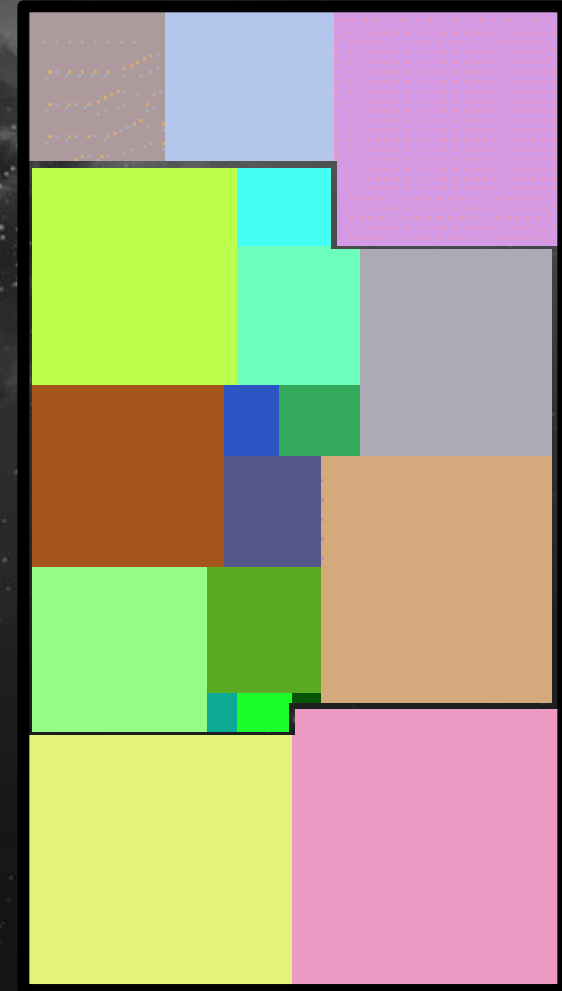
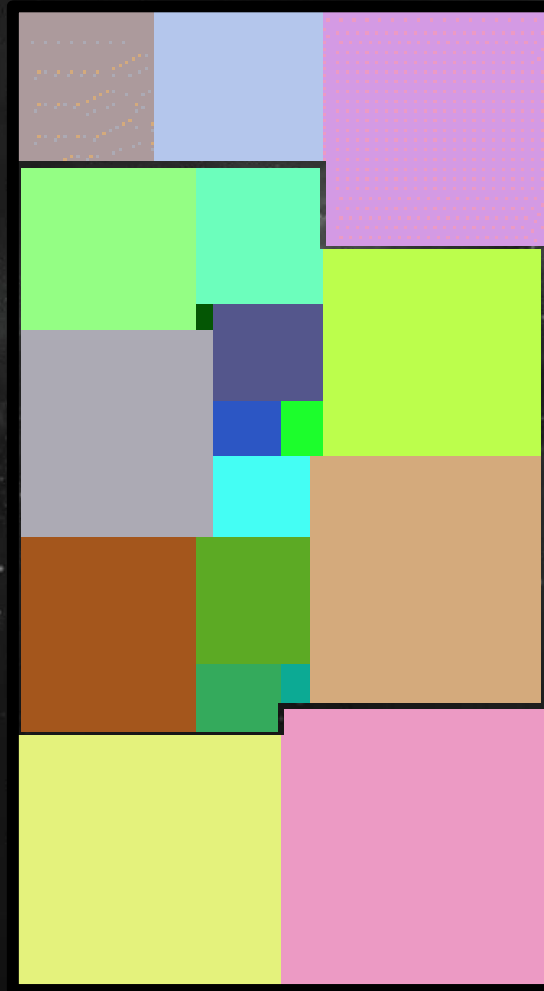
GROTE STATE-SPACE, MOEILIJK PROBLEEM?

↓ *“Perfect compound swap”* ↓



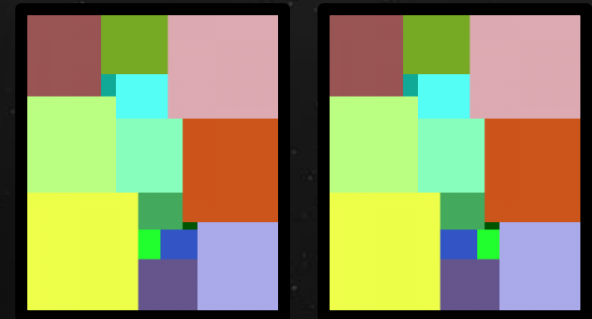
GROTE STATE-SPACE, MOEILIJK PROBLEEM?

“Partial retiling” →



GROTE STATE-SPACE, MOEILIJK PROBLEEM?

- Vind je 1 oplossing, vind je er meer?
- Relaties tussen oplossingen?
- Patronen in oplossingen?
- Patronen in distributies van oplossingen?



GROTE STATE-SPACE, MOEILIJK PROBLEEM?

6			1		8	2		3
	2			4			9	
8		3			5	4		
5		4	6		7			9
	3						5	
7			8		3	1		2
		1	7			9		6
	8			3			2	
3		2	9		4			5

GROTE STATE-SPACE, MOEILIJK PROBLEEM?

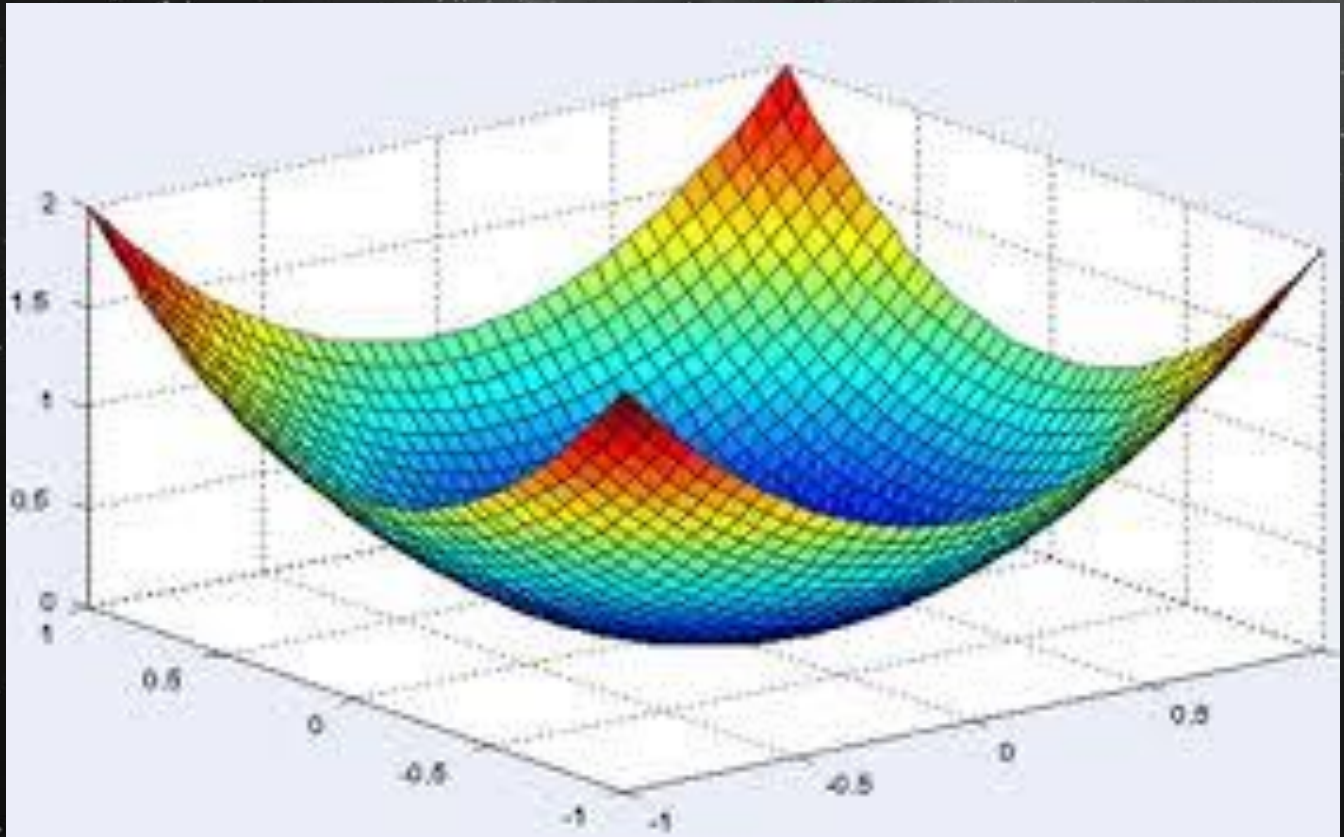
6	4		1		8	2		3
	2		3	4			9	
8		3			5	4		
5		4	6		7			9
	3	8					5	
7			8		3	1		2
		1	7			9		6
	8			3			2	
3		2	9		4			5

GROTE STATE-SPACE, MOEILIJK PROBLEEM?

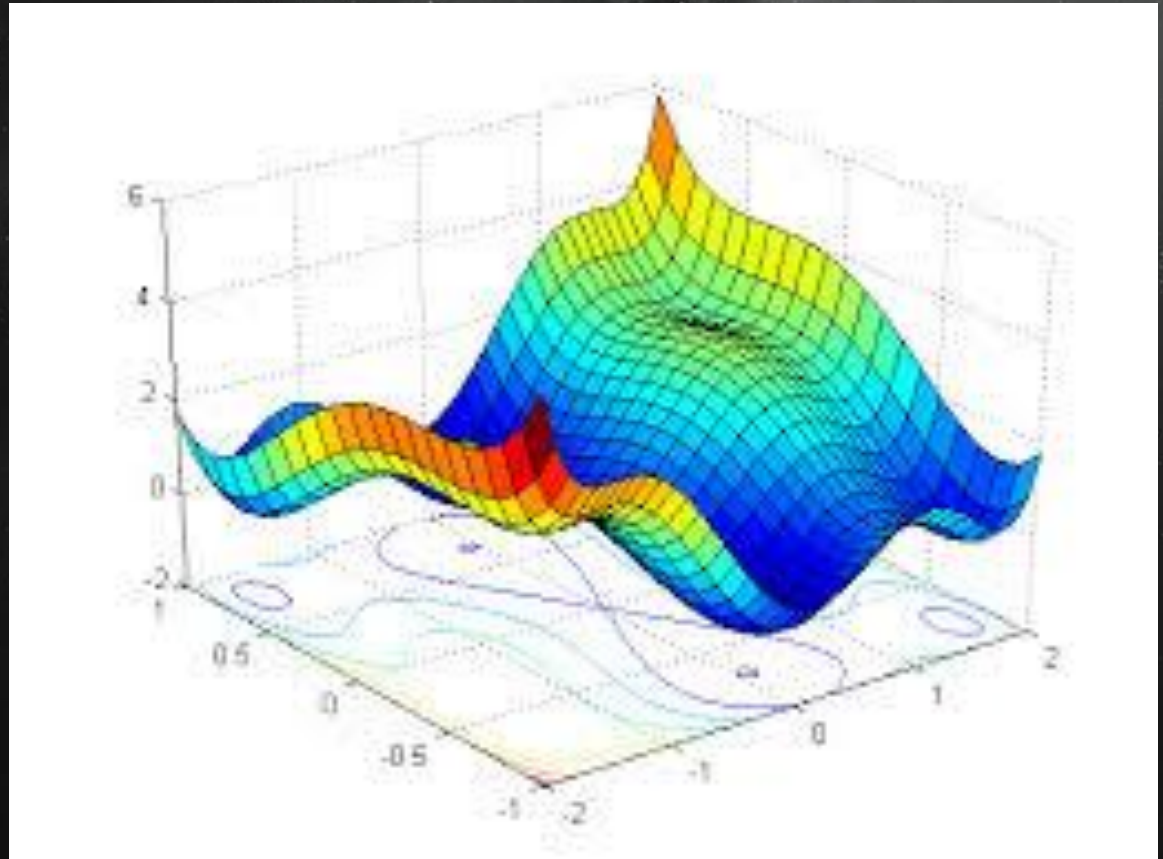
- De NS wil de reistijd van Amsterdam-Zandvoort minimaliseren.
- Objectiviteitsfunctie (scorefunctie): gemiddelde reistijd per passagier
- Variabelen: treinlengte, treinfrequentie
- Meer/langere treinen: betekent meer passagiers, maar ook meer *clogging*



GROTE STATE-SPACE, MOEILIJK PROBLEEM?



GROTE STATE-SPACE, MOEILIJK PROBLEEM?



WELKE PROBLEMEN ZIJN MOEILIJK?

- Toestandsruimte groot?
- Oplossingsdichtheid laag?
- Er zijn geen leads?
- Oplossingen zijn ongerelateerd?
- Objectiviteitsfunctie is *onglad*?



TEEN INSTANTIE IS MAKKELIJK ALS:

- De toestandsruimte klein is.
- De Oplossingsdichtheid hoog is.
- Er zijn goed bruikbare leads zijn.
- De oplossingen *patronen* vertonen.
- De Objectiviteitsfunctie *glad* is.

