

Organisation

Chefassistent: Andrea Nützi, andrea.nuetzi@math.ethz.ch

Für gelöste Übungen gibt es einen Notenbonus von bis zu 0.25 Noten falls mehr als 40% sinnvoll bearbeitet sind.

In der MMP I werden vorallem Analytische Methoden der mathematischen Physik behandelt. Genauer werden folgende Themen besprochen:

- Masstheorie, Lebesgue Integral (Skizzenhaft, d.h. viele Beweise werden ausgelassen)
- Fouriertheorie
- Hilberträume, Eigenwertprobleme + spezielle Funktionen
- Distributionen
- Randwertprobleme, Dirichletproblem

In der MMP II werden vorallem Algebraische Methoden betrachtet, das an Gruppen- und Darstellungstheorie anscheidet. Dort geht es darum, Symmetrien auszunutzen um nützliche Aussagen über Physikalische Probleme zu machen.

Immer wieder werden wir Beispiele aus der Physik anschauen.

Als Hautpreferenz ist der Skript von G. Felder

1 Mass- und Integrationstheorie

1.1 Masstheorie

Diese Thema befasst sich damit, Teilmengen von einer Mengen ein "Volumen". Leider ist es nicht immer möglich, jeder Teilmenge ein gescheites Volumen zuzuordnen und man muss sich darauf beschränken, nur gewisse Teilmenge anzuschauen. Dazu dient die erste Definition

Definition σ -Algebra

Sei X eine Menge. Eine Teilmenge $\mathcal{A} \neq \emptyset$ von $\mathcal{P}(X)$ heisst **σ -Algebra**, falls gilt

- $A \in \mathcal{A} \implies A^c := X \setminus A \in \mathcal{A}$
- Für jede Folge $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ in \mathcal{A} ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Bemerkung: Damit gilt auch für beliebige $A, B \in \mathcal{A}$

- $A \cup B \in \mathcal{A}$, und $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{A}$
- $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$
- $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, falls $A_n \in \mathcal{A}, \forall n$

Definition Mass

Ein Mass auf einer σ -Algebra \mathcal{A} ist eine Funktion $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$, sodass gilt

- $\mu(\emptyset) = 0$
- Für jede Folge $(A_n)_{n=1}^\infty$ mit $A_i \in \mathcal{A} \forall i$, und $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$ gilt

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Beispiel: (Zählmass). Sei $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X) = \{A | A \subseteq X\}$. Dann ist \mathcal{A} eine σ -Algebra und

$$\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1], \mu(A) = \begin{cases} |A|, & \text{falls } A \text{ endlich} \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

Ist ein Mass.

Lemma

Sei μ ein Mass auf der σ -Algebra \mathcal{A} . Dann gilt:

- (i) $A, B \in \mathcal{A}, A \subseteq B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$
- (ii) Sei $(A_i)_{i \geq 1}$ eine Folge in \mathcal{A} , dann ist $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

Für einen Quader $R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ definieren wir das **Volumen**

$$|R| := (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n)$$

Definition

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Dann heisst

$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |R_i| \mid R_i \subseteq \mathbb{R}^n \text{ Quader mit } \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \supseteq A \right\}$$

das **Lebesgue'sche äussere Mass** von A .

Achtung: μ^* ist kein Mass, sondern etwas schwächeres. Ein äussere Mass welches folgende Axiome erfüllt:

- $\mu^*(\emptyset) = 0$
- $A \subseteq B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
- $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$

Es ist möglich um von einem äusseren Mass ein Mass zu bekommen. Dazu definieren wir folgendes:

Definition Lebesgue-Nullmenge

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst **(Lebesgue-)Nullmenge**, falls $\mu^*(A) = 0$.

Wir sagen eine Eigenschaft $P(x)$ von Punkten $x \in \mathbb{R}^n$ gilt **fast überall**, (f.ü.), falls

$$\mu^* (\{x \in \mathbb{R}^n \mid \neg P(x)\}) = 0$$

Definition Lebesgue-mesbar

Eine Menge $E \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst **(Lebesgue-)messbar**, falls für alle $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

Satz

- (i) Die Lebesgue messbaren Menge bilden eine σ -Algebra \mathcal{A} .
- (ii) Die Einschränkung von μ^* auf \mathcal{A} ist ein Mass, das **Lebesgue'sche Mass** μ
- (iii) Alle offenen und alle abgeschlossenen Teilmenge von \mathbb{R}^n sind Lebesgue-messbar und $\mu(R) = |R|$ für alle Quader $R \subseteq \mathbb{R}^n$.
- (iv) Nullmengen sind messbar und haben Mass 0.
- (v) Ist $E \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar, so ist die Einschränkung von μ auf die messbaren Teilmenge von E wieder ein Mass, das Lebesgue'sche Mass auf E .

Beweis Übung!

2 Das Lebesgue'sche Integral

Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und μ das Lebesgue'sche Mass auf E .

Definition

Wir sagen eine Funktion $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ heisst **messbar**, falls für jedes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$

$$f^{-1}(I) = \{x \in E \mid f(x) \in I\} \subseteq E$$

messbar ist. Analog im komplexen heisst $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ messbar, falls $\operatorname{Re}(f)$ und $\operatorname{Im}(f)$ messbar sind.

Wie beim Riemann integral möchten wir zuerst die Treppenfunktionen anschauen und diese verallgemeinern.

Definition

Die **charakteristische Funktion** einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die Funktion $\chi_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \{0, 1\}$ gegeben durch

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Funktionen der Form $\varphi(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \chi_{E_i}(x)$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$ mit $E_i \subseteq \mathbb{R}^n$ *mesbar* heissen **einfach**.

Definition

Sei $\varphi(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \chi_{E_i}(x)$ eine einfache Funktion mit $\mu(E_i) < \infty, \forall i$, dann definieren wir mit $E := \bigcup_{i=1}^m E_i$ das **Integral** von φ als

$$\int_E \varphi(x) dx := \sum_{i=1}^m \lambda_i \mu(E_i)$$

Falls alle $\lambda_i > 0$ sind und ein $\mu(E_i) = \infty$, dann setzen wir $\int_E \varphi(x) dx := \infty$.

Hier muss man aufpassen, dass diese Definition unabhängig von der Darstellung von φ , bzw. der Zerlegung in die E_i abhängig ist.

Es sei bemerkt, dass Treppenfunktionen im Sinne von Analysis I/II einfache Funktionen sind. Sei $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion, $\varphi = \sum_{i=1}^m \lambda_i \chi_{[a_i, b_i]}$. Dann ist

$$\int_{[a, b]} \varphi(x) dx = \sum_{i=1}^m \lambda_i (b_i - a_i)$$

also gleich dem Riemann'schen Integral von φ .

Daraus folgt auch, dass alle Riemann-Integrierbare Funktionen auch Lebesgue-Integrierbar sind. Umgekehrt aber, gibt es aber Funktionen, die jetzt neu Lebesgue-Integrierbar sind.

Ein Punkt ist ein Quader mit Seitenlänge 0, also ist $\{x\} \subseteq \mathbb{R}$ messbar mit Mass 0. Insbesondere ist jede abzählbare Teilmenge von \mathbb{R} messbar.

Weil eben $\mu(\mathbb{Q}) = 0$ ist, haben wir, dass die Dirichlet-Funktion, welche gleich $\chi_{\mathbb{Q}}$ integrierbar ist (mit Integral gleich Null).

Lemma

Seind $\varphi_1, \varphi_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$ einfach mit $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x), \forall x \in E$, so ist

$$\int_E \varphi_1(x) dx \leq \int_E \varphi_2(x) dx$$

Definition

Sei $f : E \rightarrow [0, \infty]$ messbar. Dann existiert eine Folge $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ von einfachen Funktionen mit $0 \leq \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq \dots, \forall x \in E$ mit $\lim_{i \rightarrow \infty} \varphi_i(x) = f(x), \forall x \in E$.

Wegen der Monotonie des Integrals ist dann auch die Folge der Integrale monoton. In diesem Fall ist dieser Grenzwert

$$\int_E f(x) dx := \lim_{i \rightarrow \infty} \int_E \varphi_i(x) dx \in [0, \infty]$$

unabhängig von der Wahl der Folge φ_i . Falls $\int_E f(x) dx < \infty$, so heisst f **Lebesgue-integrierbar**, und wir nennen $\int_E f(x) dx$ das **Lebesgue-integral** von f .

Um auch Funktionen, die negative Werte annehmen, zu integrieren erweitern wir den Begriff wie folgt:

Definition

Sei $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ messbar und seien $f_{\pm} := \max\{0, \pm f(x)\}$, so dass $f = f_+ - f_-$. Dann heisst f **Lebesgue-integrierbar**, falls f_+ und f_- Lebesgue integrierbar sind und wir schreiben für sein Lebesgue integral:

$$\int_E f(x)dx := \int_E f_+(x)dx - \int_E f_-(x)dx$$

Komplex-wertige Funktionen $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ heissen integrierbar, falls $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ integrierbar sind und wir definieren wir das Integral als

$$\int_E f(x)dx := \int_E \operatorname{Re} f(x)dx + i \int_E \operatorname{Im} f(x)dx$$

Lemma

Sei $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ messbar. Dann ist $|f| : E \rightarrow \mathbb{R}$ messbar und f ist genau dann integrierbar, wenn $|f|$ integrierbar ist, also

$$\int_E |f(x)|dx < \infty$$

Es gibt wie immer verschiedene Arten das Integral zu schreiben. Hier sind verschiedene wege aufgelistet:

$$\int_E f(x)dx = \int_E f dx = \int_E f = \int_E f(x_1, \dots, x_n) d^n x = \int_e f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n)$$

Die Rechenregeln des Lebesgue-integrals sind ähnlich wie beim Riemann-integral:

Satz Rechenregeln Lebesgue-Integral

Seien $f, g : E \rightarrow \mathbb{C}$ integrierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann gilt

- (i) $\alpha f + \beta g$ ist integrierbar und $\int_E (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_E f + \beta \int_E g$
- (ii) $f \leq g \implies \int_E f \leq \int_E g$
- (iii) $f(x) = g(x)$ fast überall $\implies \int_E f = \int_E g$
- (iv) $\int_E |f(x)|dx = 0 \iff f(x) = 0$ fast überall.
- (v) $|\int_E f(x)dx| \leq \int_E |f(x)|dx$
- (vi) Ist $D \subseteq E$ messbar, so ist die Einschränkung $f|_D$ messbar und $\int_D f(x)dx = \int_E f(x)\chi_D(x)dx$
- (vii) Ist f Riemann-integrierbar auf einem kompakten Intervall $[a, b]$, so ist f auch Lebesgue-integrierbar und ihre Integrale sind gleich.
- (viii) Sei $x \mapsto Ax+b$ eine affin lineare Transformation des \mathbb{R}^n , mit $A \in \operatorname{Gl}(n, \mathbb{R})$. Dann ist $x \mapsto f(Ax+b)$ integrierbar und $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = |\det A| \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax+b)dx$

2.1 Konvergenzsätze

Satz der monotonen Konvergenz

Sei $(f_i)_{i=1}^\infty$ eine Folge von integrierbaren Funktionen auf E mit $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots$ und $f_i(x) \rightarrow f(x)$ konvergiert punktweise für alle $x \in E$.

Ist die Folge $\int_E f_i(x) dx$ beschränkt, so ist $f(x)$ integrierbar und es gilt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_E f_i(x) dx = \int_E \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x) dx = \int_E f(x) dx$$

Der folgende Satz, im Englischen “Dominated Convergence Theorem (DCT)” genannt, wird Lebesgue zugeschrieben.

Satz von der majorisierten Konvergenz

Sei $(f_i)_{i=1}^\infty$ eine Folge integrierbarer Funktionen auf E mit $\lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x) = f(x), \forall x \in E$ und es existiere eine integrierbare Funktion (**Majorante** genannt) g mit $|f_i(x)| \leq g(x), \forall x \in E, i \in \mathbb{N}$.

Dann ist f integrierbar und es gilt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_E f_i(x) dx = \int_E \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x) dx = \int_E f(x) dx$$

Beispiel: Berechne $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{1 + \sqrt[n]{x}}$. Hier kann man die Majorante $g(x) = 1$ benutzen und somit den Limes in das Integral reinziehen:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{1 + \sqrt[n]{x}} = \int_0^1 \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \sqrt[n]{x}} dx = \frac{1}{2}$$

2.2 Satz von Fubini

Seien $E \subseteq \mathbb{R}^n, F \subseteq \mathbb{R}^m$ messbar.

Lemma

Sei f eine messbare Funktion auf $E \times F$. Dann sind die Funktionen $f_y : x \in E \mapsto f(x, y)$, bzw. $f_x : y \mapsto f(x, y)$ für fast alle y bzw. x messbar und

Wir können also, falls $f \geq 0$ die Integrale über x bzw y betrachten

$$\varphi(y) = \int_E f(x, y) dx \quad \text{und} \quad \psi(x) = \int_F f(x, y) dy$$

zumindest für fast alle y bzw. x .

Satz Fubini

Sei f eine messbare Funktion auf $E \times F$.

- (i) Falls $f \geq 0$, so sind $\varphi(y), \psi(x)$ messbar und es gilt

$$\int_F \varphi(y) dy = \int_F \int_E f(x, y) dx dy = \int_E \int_F f(x, y) dy dx = \int_E \psi(x) dx \in [0, \infty]$$

- (ii) Ist f komplexwertig und ist

$$\int_E \left(\int_F |f(x, y)| dy \right) dx < \infty \quad \text{oder} \quad \int_F \left(\int_E |f(x, y)| dx \right) dy < \infty$$

so ist f integrierbar und

$$\int_{E \times F} |f(x, y)| dx dy < \infty$$

- (iii) Ist f komplexwertig und über $E \times F$ integrierbar, so ist f_x , bzw. f_y für fast alle x , bzw. y integrierbar und φ und ψ sind integrierbar und es gilt

$$\int_F \varphi(y) dy = \int_F \int_E f(x, y) dx dy = \int_E \int_F f(x, y) dy dx = \int_E \psi(x) dx \in [0, \infty]$$

Bemerkung: Insbesondere ist z.B.

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}} \dots \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) \dots dx_n$$

falls f auf \mathbb{R}^n integrierbar ist.

2.3 L^p Räume

Wir möchten alle integrierbaren Funktionen nehmen und sie als Vektorraum betrachten.

Definition

Zwei integrierbare Funktion $f, g : E \rightarrow \mathbb{C}$ mit $E \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar, heissen **äquivalent** (schreibe $f \sim g$, falls für fast alle $x \in E$ gilt $f(x) = g(x)$).

Dies ist eine Äquivalenzrelation und die Menge der Äquivalenzklassen heisst

$$L^1(E) = \{f \text{ messbar} \mid \int_E |f(x)| dx < \infty\} / \sim$$

Allgemeiner definieren wir für $p \geq 1$ die Menge

$$L^p(E) := \{f \text{ messbar} \mid \int_E |f(x)|^p dx < \infty\} / \sim$$

Lemma

Für $f, g \in L^p(E)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $f + \lambda g \in L^p(E)$. Also bildet $L^p(E)$ einen Vektorraum.

Der Grund wieso man die äquivalenten Funktionen herausteilen möchte, ist damit man einen gescheiten Normbegriff haben. Dieser wird für die positive Definitheit gebraucht.

Satz

Der $L^p(E)$ Raum mit der Norm

$$\|f\|_p := \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

ist ein normierter **Vektorraum**

Erinnerung Analysis:

- Eine Folge (f_i) in einem normierten Vektorraum V konvergiert gegen $f \in V$, falls $\lim_{i \rightarrow \infty} \|f_i - f\| = 0$.
- Die Folge heisst **Cauchy-Folge**, falls $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ mit $\|f_i - f_j\| < \epsilon, \forall i, j > N$
- V heisst **vollständig** oder **Banachraum**, falls jede Cauchyfolge konvergiert.

Satz Fischer-Riesz

Für alle $p \geq 1$ ist $L^p(E)$ ein Banachraum.

In der Physik ist der Fall für $p = 2$ sehr wichtig, da $L^2(E)$ ein Hilbertraum bildet, und in der Physik sehr viele Dinge durch Hilberträume beschrieben werden.

Wir möchten die integrierbaren Funktion durch stetige Funktionen anhähern. Wir werden später noch zeigen, dass die stetigen Funktionen mit kompakten Träger dicht sind in $L^p(E)$.

Da in der Physik die meisten zu betrachtenden Mengen "schön" sind, werden wir der Menge E einige Eigenschaften zuschreiben. Sei von nun $E \subseteq \mathbb{R}^n$ lokal kompakt, d.h. jeder Punkt von E hat eine kompakte Umgebung, d.h. $x \in U \subseteq K \subseteq E$ für U offen, K kompakt.

Zum Beispiel sind endliche Durchschnitte und Vereinigungen von offenen oder Abgeschlossenen Teilmenge von \mathbb{R}^n lokal kompakt. Aber zum Beispiel ist $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ nicht lokal kompakt.

Definition

Der **Träger** (engl. *support*) einer Funktion $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ ist die Menge

$$\text{supp}(f) := \overline{\{x \in E \mid f(x) \neq 0\}}$$

Wir schreiben $C_0(E)$ für die Menge aller stetigen Funktionen $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ mit kompakten Träger.

Satz

Für lokal kompakte $E \subseteq \mathbb{R}^n$ (messbar) und $1 \leq p < \infty$ ist $C_0(E)$ dicht in $L^p(E)$, d.h. $\forall \epsilon > 0 \exists g \in C_0(E)$ mit $\|f - g\| < \epsilon$

3 Fourierreihen

3.1 Definitionen, Darstellungssatz

Sei $L > 0$ fix. **Fourierreihen** sind Reihen der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{\frac{2\pi i n}{L} x}, \quad f_n \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}$$

Konvergiert die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$, so ist die Summe $f(x)$ L -periodisch, also $f(x + L) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Man kann sich sicher folgende Fragen stellen.

- Wann konvergiert diese Reihe?
- Welche L -periodischen Funktionen lassen sich durch eine Fourierreihe darstellen und wie erhält man die Fourierkoeffiziente f_n ?
- Welche Anwendungen und welche Intuition hat man über die Fourierreihe?

Satz

Sei $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ so, dass $\sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n| < \infty$. Dann konvergiert auch die Fourierreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{\frac{2\pi i n}{L} x}$ absolut und gleichmässig (in der $\|\cdot\|_{\infty}$ -Norm) gegen eine L -periodische stetige Funktion f . Weiter gilt

$$f_n = \frac{1}{L} \int_0^L e^{-\frac{2\pi i n}{L} x} f(x) dx$$

Beweis: Die Absolute konvergenz folgt, da $|e^{\frac{2\pi i n}{L} x}| = 1$. Die Gleichmässige Konvergenz folgt aus

$$|f(x) - \sum_{|n| \leq N} f_n e^{\frac{2\pi i n}{L} x}| = \left| \sum_{|n| \geq N} f_n e^{\frac{2\pi i n}{L} x} \right| \leq \sum_{|n| \geq N} |f_n| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

gleichmässig in x . Da $f(x)$ der gleichmässige Grenzwert von einer Folge von stetigen Funktionen $f_N(x)$ ist, ist f auch selber stetig.

Zuletzt berechnen wir

$$\frac{1}{L} \int_0^L e^{-\frac{2\pi i n}{L} x} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|k| \leq N} f_k e^{\frac{2\pi i k}{L} x} dx = (\dots)$$

Betrachten wir die einzelnen Glieder der Folge in N , so sieht man, dass sie majorisiert wird durch $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k| < \infty$. Also können wir den Limes und das Integral austauschen und erhalten

$$(\dots) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|k| \leq N} f_n \frac{1}{L} \int_0^L e^{\frac{2\pi i}{L} x(k-n)} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|k| \leq N} f_n \delta_{k,n} = f_n$$

Beispiel: Für $|z| < 1$ so ist die folgende Reihe absolut konvergent

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{|n|} e^{inx}$$

Die Summe ist die geometrische Reihe und wir haben

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{|n|} e^{inx} &= \sum_{n=0}^{\infty} (ze^{ix})^n + \sum_{n=-\infty}^0 \left(\frac{1}{z}e^{ix}\right)^n - 1 \\ &= \frac{1}{1 - ze^{ix}} + \frac{1}{1 - ze^{-ix}} - 1 = \frac{1 - z^2}{12z \cos x + z^2} \end{aligned}$$

Was uns den Koeffizient f_n liefert:

$$f_n = z^{|n|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - z^2)e^{inx}}{1 - 2z \cos x + z^2} dx$$

3.2 Riemann-Lebesgue Lemma (allgemeine Version)

Satz Riemann-Lebesgue Lemma

Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{ikx} dx = 0$$

Zum Beweis brauchen wir folgendes Lemma:

Lemma

Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)| dx = 0$$

Sie besagt, dass die um t verschobene Funktion gegen f konvergiert (in der $\|\cdot\|_1$).

Beweis Lemma: Wir machen das in zwei Schritten. Zuerst betrachten wir eine schwache version und nehmen an, f sei stetig und mit kompakten Träger.

Sei nun $M = \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ (wohldefiniert da stetig, kompakter träger) und $\text{supp}(f) \subseteq [-R, R]$. Dann gilt

- $|f(x+t) - f(x)| < 2M$
- $|f(x+t) - f(x)| = 0$ für $|x| > 2R$, falls $t < R$.

Dann wird also die Funktion majorisiert durch $2M\chi_{[-2R, 2R]} \in L^1(\mathbb{R})$ und nach dem Satz der majorisierten Konvergenz haben wir

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{t \rightarrow 0} |f(x+t) - f(x)| dx = 0$$

da f stetig ist.

Als nächstes zeigen wir es auch für beliebige Funktionen in $L^1(\mathbb{R})$. Sei nun $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $\epsilon > 0$ gegeben.

Da die stetigen Funktionen mit kompakten Träger dicht sind in $L^1(\mathbb{R})$, gibt es ein $g \in C_0(\mathbb{R})$ sodass $\|f - g\|_1 < \epsilon$. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)| dx = \|f_t - f\|_1 \leq \underbrace{\|f_t - g_t\|_1}_{=\|f-g\|_1 < \epsilon} + \underbrace{\|g_t - g\|_1}_{\text{Beweis für } C_0(\mathbb{R})} + \|g - f\|_1 < 3\epsilon$$

Nun kommen wir zum Beweis vom Riemann-Lebesgue Lemma. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{ikx} dx &= - \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{i(kx - \pi)} dx \\ &\stackrel{k \neq 0}{=} - \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{ik(x - \frac{\pi}{k})} dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} f(x + \frac{\pi}{k}) e^{ikx} dx \end{aligned}$$

Nun verwenden wir einmal die Form am Anfang und einmal die Form am schluss der Obigen gleichungen und erhalten.

$$|2 \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{ikx} dx| = \left| \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} \left(f(x) - f(x + \frac{\pi}{k}) \right) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f(x + \frac{\pi}{k})| dx \rightarrow 0$$

nach dem Lemma.