

# 1 Mathematische Formeln

## 1.1 Koordinatensysteme

### Kugelkoordinaten

$$\Phi \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \det D\Phi = r^2 \sin \theta$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\nabla \times \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial(\sin \theta V_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} \right] \\ \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial V_r}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r V_\varphi)}{\partial r} \right] \\ \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r V_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] \end{pmatrix}$$

### Zylinderkoordinaten

$$\Phi \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ z \end{pmatrix}, \quad \det D\Phi = r$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r V_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} \right] \end{pmatrix}$$

## 1.2 Trigonometrie

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$$

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \left( \frac{\alpha \pm \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

## 1.3 Differentialgleichungen

Ein **Harmonischer Oszillator** erfüllt die folgende Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \omega x = 0$$

und hat die Allgemeine Lösung

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)$$

der **gedämpfte** harmonische Oszillator besitzt einen Dämpfungsterm  $2\tau$

$$\ddot{x} + 2\tau \dot{x} + \omega^2 x = 0$$

mit der von  $\tau$  und  $\omega$  abhängigen Allgemeinen Lösungen

Schwache Dämpfung  $\tau < \omega$ :  $x(t) = C e^{-\tau t} \cos(\omega t + \varphi)$

Starke Dämpfung  $\tau > \omega$ :  $x(t) = C_1 e^{-k_1 t} + C_2 e^{-k_2 t}$

Kritische Dämpfung  $\tau = \omega$ :  $x(t) = (C_1 t + C_2) e^{-\tau t}$

Für  $k_1 = -\lambda_1, k_2 = -\lambda_2$  Lösungen der Gleichung  $\lambda^2 + 2\tau\lambda + \omega^2 = 0$

## 1.4 Vektoranalysis

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$$

## 2 Wellen

Die **Wellengleichung** ist die partielle Differentialgleichung der Form

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0$$

und hat die allgemeine Lösung

$$\xi(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

Die Auslenkung kann dabei entweder in Ausbreitungsrichtung (Longitudinal) sein, oder senkrecht dazu (transversal).

**Transversale Wellen**      **Longitudinale Wellen**

$$v = \sqrt{\frac{S}{\rho}} = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{P}{\rho}}$$

$S = \frac{F}{A}$ : Zugspannung,  $\rho$ : Dichte  $\mu$ : Längendichte,  $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_{\text{el}}}$ : Elastizitätsmodul.

Für  $A$ : Fläche,  $\sigma = \frac{dF_{\perp}}{da}$ : Normalspannung,  $\varepsilon_{\text{el}} = \frac{\Delta \ell}{\ell}$

**Mehrdimensionale Wellen** Für Wellen im Raum, mit Wellenvektor  $\mathbf{k}$  wird dies zu

$$\frac{\partial^2 \xi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} - v^2 \Delta \xi(\mathbf{r}, t)$$

und nimmt die folgende Form an

$$\xi(\mathbf{r}, t) = A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

**Kugelwellen** Die Kugelwellengleichung ist gegeben durch

$$\frac{\partial^2 \xi(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - v^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \xi(\mathbf{x}, t) = 0$$

### 2.1 Energietransport

Mechanische Wellen transportieren durch ein Medium mit Dichte  $\rho$  Energie in zwei Formen. Für transversale Wellen ist dies

$$\begin{aligned} \frac{dE_{\text{kin}}}{dV} &= \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 = \frac{dE_{\text{el}}}{dV} = \frac{1}{2} S \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{dW}{dV} &= \frac{dE_{\text{kin}}}{dV} + \frac{dE_{\text{el}}}{dV} = \rho v^2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \end{aligned}$$

Für Longitudinale Wellen erhält man die Formeln

$$\frac{dE_{\text{kin}}}{dV} = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 = \frac{dE_{\text{el}}}{dV} = \frac{1}{2} E \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2$$

Harmonische Wellen der Form  $\xi(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$  ist die Energiedichte

$$\frac{dW}{dV} = \rho \omega^2 A^2 \sin^2(kx - \omega t)$$

und ihre **mittlere Energiedichte** beträgt

$$\left\langle \frac{dW}{dV} \right\rangle = \rho \omega^2 A^2 \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(kx - \omega t) dt = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2$$

Der **Poynting-Vektor** misst die Energie, die durch eine Fläche pro Zeit fließt.

$$\mathbf{S} = \frac{d^2 W}{||d\mathbf{a}|| dt} \cdot d\hat{\mathbf{a}}$$

Wobei  $[S] = \frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{s}} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ . Die **Intensität** ist dann ihr Absolutbetrag:  $I = |S|$  und es gilt

$$\langle I \rangle = \frac{dW}{dV} \cdot v = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 v = \frac{1}{2} \rho \frac{\omega^3}{k} A^2$$

### 2.2 Superposition & Interferenz

Die Superposition zweier Wellen ist wieder eine Welle. Ist zum Beispiel  $\xi(x, t) = \xi_1(x, t) + \xi_2(x, t)$  die Summe zweier harmonischer Wellen in gleicher Ausbreitungsrichtung aber andere Amplitude und Phase, so erhält man

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= A \sin(kx_1 - \omega t) + B \sin(kx_2 - \omega t + \delta) \\ &= C \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

wobei die Resultierende Amplitude  $C$  und die Phasenverschiebung  $\varphi$  gegeben sind durch

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \delta} \\ \varphi &= \arccos \frac{A + B \cos \delta}{C} = \arcsin \frac{B \sin \delta}{C} \end{aligned}$$

Im Spezialfall von  $A = B$  erhält man dann

$$\xi(x, t) = 2A \cos \left[ \frac{1}{2}(\delta + k\Delta x) \right] \cos \left[ kx_1 - \omega t + \frac{1}{2}(\delta + k\Delta x) \right]$$

Im Falle von gleicher Phase und Amplitude, aber unterschiedliche Frequenzen erhält man

$$\xi(x, t) = 2A \cos \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right) \cdot \cos \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right)$$

### 2.3 Reflexion & Transmission

Tritt eine Welle von einem Medium mit Geschwindigkeit  $v_1$  in ein anderes Medium mit Geschwindigkeit  $v_2$  über, so entsteht eine reflexierte und eine transmittierte Welle. Für

$$\alpha := \frac{\kappa_2}{\kappa_1} = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{S_1 \rho_2}{S_2 \rho_1}} = \sqrt{\frac{F_1 \mu_2}{F_2 \mu_1}}$$

und eine harmonische eintretende Welle  $\xi_A(x, t)$  sind die Resultierenden Wellen

$$\begin{aligned}\xi_A(x, t) &= A \cdot e^{i(k_1 x - \omega t)} \\ \xi_R(x, t) &= R \cdot e^{i(-k_1 x - \omega t + \delta_R)} \\ \xi_T(x, t) &= T \cdot e^{i(k_2 x - \omega t)}\end{aligned}$$

$\alpha > 1$  Übertritt in härteres Medium.

$$\begin{aligned}\delta_R &= \pi, \quad R = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} A, \quad T = \frac{2A}{\alpha + 1} \\ \lim_{\alpha \rightarrow \infty} : \delta_R &= \pi \quad R = A \quad T = 0\end{aligned}$$

$\alpha < 1$  Übertritt ins weichere Medium.

$$\begin{aligned}\delta_R &= 0, \quad R = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} A, \quad T = \frac{2A}{1 + \alpha} \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} : \delta_R &= 0, R = A, \quad T = 0 \text{ Vakuum!}\end{aligned}$$

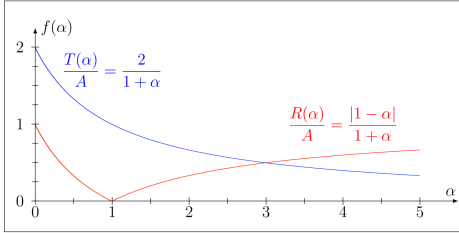


Fig. 1: Amplituden der reflektierten und transmittierten Wellen

## 2.4 Stehende Wellen

Bei der Reflexion erhalten wir durch die Superposition von Eingehender und Reflektierter Welle die Resultierende Welle in Form von

$$\xi(x, t) = \begin{cases} 2A \sin(kx) \sin(\omega t), & \text{für } \alpha \gg 1, \delta_R = \pi \text{ (hartes Ende)} \\ 2A \cos(kx) \cos(\omega t) & \text{für } \alpha = 0, \delta_R = 0 \text{ (loses Ende)} \end{cases}$$

Für *fest eingespannte Saiten* mit Länge  $\ell$  sind folgende **Eigenwerte**  $k_n$  und zugehörigen Wellenlängen  $\lambda_n$  möglich- Für  $n = 1, 2, 3, \dots$  haben wir:

$$k_n = \frac{n\pi}{\ell}, \quad \lambda_n = \frac{2\ell}{n}$$

Die **Eigenfunktionen** dieser Schwingungen und ihre **Eigenfrequenzen** sind

$$u_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right), \quad \omega_n = \frac{n\pi}{\ell} v = n\omega_1$$

Wobei hier  $\omega_1 = \frac{1}{2\ell} \sqrt{\frac{S}{\rho}}$  die **Grundfrequenz** ist. Somit ist die  $n$ -te **Normalschwingung**

$$\xi_n(x, t) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$$

Für *einseitig gespannte Saiten* haben wir für  $n = 0, 1, 2, \dots$ :

$$\begin{aligned}k_n &= \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\ell} \\ u_n(x) &= B_n \sin\left(\frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\ell} x\right) \\ \omega_n &= \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\ell} v \\ \omega_0 &= \frac{\pi}{2\ell} \sqrt{\frac{S}{\rho}}\end{aligned}$$

## 2.5 Beugung

**Huygen'sche Prinzip:** Jeder Punkt einer bestehende Wellenfläche wird das Zentrum einer neuen Kugelwelle. Die Wellenfläche besteht aus allen Punkten, für die gilt  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = \delta \stackrel{\text{o.B.d.A.}}{=} 0$ .

Liegen  $N$  Kugelwellenquellen mit Amplitude  $a$  in einer Linie mit Abstand  $\delta$  zueinander, so betrachtet man von einem Beobachtungspunkt mit Abstand  $r$  im Winkel  $\alpha$  bezüglich der Wellenfront folgende Überlagerung der Wellen:

$$\xi_{\text{res}}(\alpha, r) = \frac{a \sin\left(\frac{N\Delta\Phi}{2}\right)}{r \sin\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

$$\langle I \rangle \propto \frac{a^2 \sin^2\left(\frac{N\Delta\varphi}{2}\right)}{r^2 \sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}$$

wobei  $\Delta\varphi = k\delta \sin(\alpha)$  die Phasenverschiebung zweier benachbarten Quellen ist.

Folglich bilden sich auf der gegenüberliegenden Fläche Interferenzmuster. Das **Maximum** ist dann bei  $\alpha = 0$

und hat eine Breite, die Proportional zu  $\frac{1}{N}$  ist. Für  $\delta > \lambda$  sieht man mehrere Maxima für die Winkel

$$\sin(\alpha_n) = n \frac{\lambda}{\delta} < 1, \quad n = 0, 1, \dots$$

**Snellius Gesetz:** Lichtbrechung im Übergang zwischen zwei Medien.

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{u_2}{u_1}$$

Totalreflexion findet statt, bei  $\sin \alpha_1 \geq \sin \alpha_{1,\max} = \frac{u_2}{u_1}$   
**Beugung am Einzelspalt**

## 2.6 Dopplereffekt

Bewegt sich ein Beobachter  $B$  mit Geschwindigkeit  $v_B$  auf eine Quelle hinzu, die mit Geschwindigkeit  $v_Q$  gegen den Beobachter bewegt und eine Welle mit Frequenz  $f_Q$  ausstrahlt, so misst der Beobachter die Frequenz

$$f_B = f_Q \cdot \frac{u + v_B}{u - v_Q}$$

wobei  $u$  die Wellengeschwindigkeit im Medium ist.

Ist  $\lambda$  die Wellenlänge,  $f$  die Frequenz,  $v$  die Phasengeschwindigkeit,  $T$  die Periodendauer,  $\omega$  die Kreisfrequenz, so gilt

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f = \frac{\omega}{k}, \quad f = \frac{1}{T} = \frac{v}{\lambda}, \quad \omega = 2\pi f$$

Falls sich die Quelle schneller als die Phasengeschwindigkeit der Welle bewegt, so entstehen Schockwellen. Der halbe Öffnungswinkel  $\theta$  des **Mach'schen Kegels** ist dann

$$\theta = \arcsin \frac{u}{v_Q}$$

Schreibe  $h(x, t)$  für den Integranden und  $g := 0$ . Dann konvergiert klar für jedes  $x \in [a, b]$  der Integrand  $h$  punktweise gegen  $g$  für  $t \rightarrow \infty$  und ist für  $t > 1$  beschränkt. Angenommen, die Aussage stimmt nicht, also

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b h(x, t) dx =: r > \int_a^b g = 0$$

Dann definiere

$$A(t) = \{x \in [a, b] | h(x, t) \geq \frac{r}{2}\}$$

Da  $h$  stetig ist, ist  $A(t)$  abgeschlossen und es gibt ein Maximum, betrachte  $\lim_{t \rightarrow \infty} \max A(t)$ .

Dann muss es ein  $\xi \in [a, b]$  geben, sodass  $h(\xi, t) \geq \frac{r}{2}$  für unendlich viele  $t \in \mathbb{R}$ . Aber dann konvergiert  $h(x, t)$  nicht gegen

## 2.7 Maxwell Equations

Coulomb	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
Mag. Monopol.	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
Ampère	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$
Faraday	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
Charge cons.	$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

Integral forms

Coulomb	$\int_A \mathbf{E} d\mathbf{A} = \frac{Q_{\text{innen}}}{\epsilon_0}$
Mag. Monopol.	$\int_A \mathbf{B} d\mathbf{A} = 0$
Ampère	$\oint_{\partial A} \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{eing.}} + \mu_0 \epsilon_0 \int_A \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} d\mathbf{A}$
Faraday	$\oint_{\partial A} \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}$

## 3 SRT

### 3.1 Vierervektor

Der **Vierervektor** ist der Positionsvektor eines Ereignisses im **Minkowski-Raum**. Dazu gehören der Vektor  $\beta$  und der Skalar  $\gamma$

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}, \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Das **Viererskalarkprodukt** im Minkowski-Raum ist die symmetrische bilineare Abbildung definiert durch

$$\langle x^\mu, y^\nu \rangle = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & -1 & & \\ 0 & 0 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Sie lässt sich auch mit der gewöhnlichen Skalarprodukt notation leicht verändert aufschreiben

$$||x^\mu||^2 = x^\mu \cdot x_\mu = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$$

Das **Raumzeitintervall** ist dann unter Lorentz-Transformationen erhalten:

$$(\Delta s)^2 := (c\Delta t)^2 - (\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2) = (\Delta s')^2$$

### 3.2 Zeit & Länge

Die **Zeitdilatation** hat den Effekt, dass die Zeit für bewegende Uhren scheinbar langsamer läuft. Die Eigenzeit

$\Delta t'$  des mitbewegten Systems verläuft schneller als die gemessene Zeit  $\Delta t$  im Laborsystem.

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma}$$

Bewegte Objekte erscheinen wegen der **Längenkontraktion** kürzer im Laborsystem ( $\Delta x$ ) als die gemessene Eigenlänge im mitbewegten System ( $\Delta x'$ )

$$\Delta x' = \gamma \Delta x$$

Die Transformation der Koordinaten vom Laborsystem  $K$  zum mitbewegten System  $K'$ , das sich mit der konstanten Geschwindigkeit  $\vec{v} = \vec{\beta}c$  in  $x$ -Richtung bewegt ist gegeben durch

$$\Lambda_{K'}^K = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_K^{K'} = \begin{pmatrix} \gamma & +\beta\gamma & 0 & 0 \\ +\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bewegt sich  $K'$  mit Geschwindigkeit  $v$  relativ zu  $K$  und misst die Geschwindigkeit  $u'$  in die gleiche Richtung, so gilt

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} < c$$

### 3.3 Energie, Impuls

Die **Vierergeschwindigkeit** die von der Eigenuhr gemessene Zeit  $\tau$  berechneter Vierervektor.

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = c\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}, \quad ||u||^2 = u^\mu u_\mu = c^2$$

**Viererimpuls**

$$P^\mu = m \cdot u^\mu = \begin{pmatrix} m\gamma c \\ m\gamma c\vec{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ \vec{p} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |P|^2 = P_\mu P^\mu = \frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2 = m^2 c^2$$

$$E_{\text{tot}} = \underbrace{E_0}_{=mc^2} + E_{\text{kin}} = m\gamma c^2$$

$$E^2 = |\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4$$

Das Photon hat keine Masse. Darum gilt  $E_\nu = |\vec{p}|_\nu c$

$$m\gamma \vec{a} = \vec{F} - \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c^2} \vec{v}$$

Die Taylor-Entwicklung von  $\gamma$  ist

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \simeq 1 + \frac{1}{2}\beta^2$$

### 3.4 Doppler-Effekt

Allgemein: Setze  $\theta$  als den Winkel zwischen  $v_q$  und der Verbindungsstrecke  $B-Q$ :

$$f_B = f_Q \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta \cos \theta}$$

**Longitudinaler Doppler-Effekt:** Spezialfälle  $Q$  bewegt sich zu  $B$  ( $\theta = 0$ ) und  $Q$  bewegt sich von  $B$  weg ( $\theta = \pi$ )

$$f_B|_{\theta=0} = f_Q \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}, \quad f_B|_{\theta=\pi} = f_Q \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

**Transversaler Doppler-Effekt:** Quelle bewegt sich senkrecht zum Beobachter  $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$f_B = f_Q \sqrt{1-\beta^2}$$

Im **Minkowski-Diagramm** ist der Winkel der transformierten Raum-Zeitachsen  $\alpha$  gegeben durch  $\tan(\alpha) = \beta = \frac{ct}{x}$

### 3.5 Relativistische Transformationen

Die  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ -Felder transformieren sich mit  $\vec{E} = \vec{E}_\parallel + \vec{E}_\perp$  wie folgt:

$$\begin{aligned} \vec{E}'_\parallel &= \vec{E}_\parallel, & \vec{E}'_\perp &= \gamma (\vec{E}_\perp + c\vec{\beta} \times \vec{B}_\perp) \\ \vec{B}'_\parallel &= \vec{B}_\parallel, & \vec{B}'_\perp &= \gamma (\vec{B}_\perp - \frac{\vec{\beta}}{c} \times \vec{E}_\perp) \end{aligned}$$

## 4 Schaltkreise

**Ohmesches Gesetz** Ist  $\sigma$  die Leitfähigkeit,  $\rho$  der spezifische Widerstand, so ist die Stromfluss dichte gegeben durch

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \frac{\vec{E}}{\rho}, \quad R = \frac{\rho \cdot \ell}{A} = \frac{U}{I}$$

## 4.1 Kirchhoffschen Regeln

Für jeden Knoten gilt

$$\sum I_{\text{in}} = \sum I_{\text{out}}$$

Für jede geschlossene Schleife gilt

$$\sum V_i = 0$$

Für Parallelschaltung gilt

$$\frac{1}{R_{\text{tot}}} = \sum_i \frac{1}{R_i}, \quad C_{\text{tot}} = \sum_i C_i, \quad \frac{1}{L_{\text{tot}}} = \sum_i \frac{1}{L_i}$$

Für Serieschaltung

$$R_{\text{tot}} = \sum_i R_i, \quad \frac{1}{C_{\text{tot}}} = \sum_i \frac{1}{C_i}, \quad L_{\text{tot}} = \sum_i L_i$$

Im Spezialfall von zwei Leiterelementen gilt dann

$$\frac{1}{\text{tot}} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \implies \text{tot} = \frac{ab}{a+b}$$

## 4.2 Leistung

Die dissipierte Leistung  $P$  die durch einen Stromkreis fließt ist gegeben durch

$$P = \frac{dW}{dt} = \dot{Q}V = IV = I^2 R = \frac{V^2}{R}$$

**Vorzeichenregeln**

Resistor	$V_i = -RI$
Spannung $- \rightarrow +$	$V_i = \varepsilon$
Kondensator $- \rightarrow +$	$V_i = \frac{Q}{C}$

## 4.3 Kondensator & Spule

Die in einem geladenen Kondensator gespeicherte Energie ist gegeben durch

$$dW = \Phi dQ = \frac{Q}{C} dQ \implies W = \int_0^{Q_0} V(q) dQ = \frac{Q_0^2}{2C} = \frac{CV_0^2}{2} = \frac{Q_0 V_0}{2}$$

Für eine Spule ist dies

$$dW = P dt = LI dI \implies W = \int_0^I P(t) dt = \frac{LI^2}{2}$$

In einem Schaltkreis bestehend aus einem Widerstand und entweder einer Spule oder einem Kondensator, so kann mit den Differentialgleichungen

$$U_0 - IR - \frac{Q(t)}{C} = 0, \quad \text{bzw.} \quad U_0 - IR - L \frac{dI}{dt} = 0$$

Strom, Spannung und Ladung bei durch exponentielle Funktionen beschrieben werden.

Sind  $Q_0, I_0, U_0$  die Ladung, Stromstärke und Spannung, die der Kondensator im *Vollgeladenen* Zustand aufweist, so ist für  $\tau_C = RC$  beim **Aufladen**

$$\begin{aligned} Q_C(t) &= Q_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right) \\ U_C(t) &= U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right) \\ I_C(t) &= \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_C}} \end{aligned}$$

und beim **Entladen** des Kondensators:

$$\begin{aligned} Q_C(t) &= Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_C}} \\ U_C(t) &= U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_C}} \\ I_C(t) &= -\frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_C}} \end{aligned}$$

Für eine Spule, ist dann die Spannung über die Spule und über den Widerstand anders (mit  $U_L$  und  $U_R$  gekennzeichnet).

Beim **Einschaltvorgang** erhält man mit  $\tau_L = \frac{L}{R}$  die Gleichungen

$$\begin{aligned} U_L(t) &= U_0 e^{-\frac{t}{\tau_L}} \\ I_L(t) &= \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right) \\ U_R(t) &= U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right) \end{aligned}$$

und beim **Ausschaltvorgang**

$$\begin{aligned} U_L(t) &= -U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \\ I_L(t) &= I_0 e^{-\frac{t}{\tau_L}} \\ U_R(t) &= U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

Die Halbwertszeit  $T$  der Exponentialfunktion ist  $T_{\text{halb}} = \tau \cdot \ln 2$ . Sind beides Spule und Kondensator vorhanden, so ist bei einem Wechselstromkreis die höchste Leistung bei  $\omega_{\text{max}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  erhältlich.

## 4.4 Bio-Salat

$\vec{r}' - \vec{r}$  vom Leiter zum Beobachtungspunkt

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} I d\vec{l} \times \hat{r}$$

### Rezept Bio-Salat

- (i) Leiter parametrisieren.  $\Phi : V \rightarrow \text{Leiter}$ . (Kugel-, Zylinder- oder sonstige Koordinaten wählen)
- (ii) Leiterelement  $d\vec{l}$  in Koordinaten angeben.  $\vec{r}$  ist die Position des Betrachtungspunktes,  $\vec{r}'$  ist die Position des Leiterelements.
- (iii) Symmetrien erkennen und womöglich Komponenten wegekürzen.
- (iv)  $B = \int_{\text{Leiter}} d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} I d\vec{l} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

## 4.5 Maxwell Equations

Coulomb	$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
Mag. Monopol.	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$
Ampère	$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
Faraday	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Charge cons.	$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

Integral forms

Coulomb	$\int_A \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q_{\text{innen}}}{\epsilon_0}$
Mag. Monopol.	$\int_A \vec{B} d\vec{A} = 0$
Ampère	$\oint_{\partial A} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{eing.}} + \mu_0 \epsilon_0 \int_A \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{A}$
Faraday	$\oint_{\partial A} \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} \cdot \vec{a}$

## 5 Elektromagnetismus

### 5.1 Elektrostatik

Die **Coulomb-Kraft**, die zwischen geladenen Teilchen mit Ladungen  $q_1, q_2$  wirkt ist invers proportional zum Abstand im Quadrat und ist gegeben durch

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \cdot \hat{r}_{21}$$

Die **Lorentz-Kraft** beschreibt die Kraft, die Ladungen in einem Elektro-Magnetfeld spüren und ist gegeben durch

$$\vec{F}_L = \vec{F}_C + \vec{F}_{mag} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

Ein **Kondensator** besteht aus zwei Leiter entgegengesetzter Ladungen. Kapazität  $C$  und gespeicherte Energie

$W$  sind gegeben durch

$$C = \frac{Q}{V}, \quad W = \int_0^Q V(q) dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{QV}{2} = \frac{CV^2}{2}$$

Für eine Plattenkondensator mit Fläche  $A$  und Plattenabstand  $d$ , Zylinderkondensator mit Höhe  $h$  und Radien  $a < b$  und einen Kugelkondensator mit Radien  $a < b$  gilt:

Plattenkond.	Zylinderkond.	Kugelkond.
$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$	$C = 2\pi\epsilon_0 \frac{h}{\log \frac{b}{a}}$	$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}$
$E = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$	$E(r) = \frac{Q}{2\pi r h \epsilon_0}$	$E(r) = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}$
$V = \frac{Qd}{\epsilon_0 A}$	$V = \frac{Q}{2\pi h \epsilon_0} \log \frac{b}{a}$	$V = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$

### 5.2 Elektrodynamik

Der **Strom** ist bewegte Ladung und ist definiert durch  $I = \frac{dQ}{dt}$ . Die Stromdichte  $\vec{J}$  ist der Strom der durch eine Fläche  $A$  fließt und ist gegeben durch

$$\vec{J} = \frac{\vec{I}}{A} = \rho \vec{v}$$

### 5.3 Maxwell Gleichungen

Coulomb	$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
Mag. Monopol.	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$
Ampère	$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
Faraday	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Ladungserh.	$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

Und ihre Integral-Formen:

Coulomb	$\int_A \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q_{\text{innen}}}{\epsilon_0}$
Mag. Monopol.	$\int_A \vec{B} d\vec{A} = 0$
Ampère	$\oint_{\partial A} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{eing.}} + \mu_0 \epsilon_0 \int_A \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{A}$
Faraday	$\oint_{\partial A} \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} \cdot \vec{a}$

Der Energietransport pro Flächeneinheit entlang der Elektromagnetischen Welle ist gegeben durch den **Poynting-Vektor**

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

Mit der mechanischen, bzw. der elektromagnetischen Energiedichten  $u_{\text{mech}}$  und  $u_{\text{em}}$  gilt

$$\frac{\partial(u_{\text{mech}} + u_{\text{em}})}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = 0$$

## 5.4 Wechselstromkreise

Komponente	Admittanz	Impedanz
Resistor	$\frac{1}{R}$	$R$
Kondensator	$i\omega C$	$\frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C}$
Spule	$\frac{1}{i\omega L} = -\frac{i}{\omega L}$	$i\omega L$

Ist  $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$  und  $Y = Y_{\text{tot}}$  gegeben, so ist

$$\tilde{V}(t) = V_0 e^{i\omega t}, Y = |Y| e^{i\alpha}, \quad \tilde{I}(t) = Y \tilde{V}(t) \\ \Rightarrow I(t) = |Y| V_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Im}(Y)}{\text{Re}(Y)} = -\frac{\text{Im}(Z)}{\text{Re}(Z)}$$

Die durchschnittliche **Leistungsaufnahme** ist mit  $P = IV$  gegeben durch

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} V_0 I_0 \cos(\alpha), \quad V_{\text{eff}} = \sqrt{\langle V^2 \rangle}, \quad I_{\text{eff}} = \sqrt{\langle I^2 \rangle}$$

In einem stromdurchflossenen Leiter mit Breite  $b$ , das in einem Magnetfeld der Stärke  $B$  liegt, misst man die **Hall-Spannung**

$$V_{\text{Hall}} = E_{\text{Hall}} b = v B b$$

## 5.5 Induktion

Der **magnetische Fluss** durch eine Oberfläche  $A$  ist definiert durch das Flussintegral

$$\Phi_{\text{mag}} = \int_A \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

Ändert sich der Fluss durch eine von einem Leiter umschlossene Fläche, so induziert das eine Spannung  $V_{\text{ind}}$  nach dem **Faraday'schen Gesetz**

$$V_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_{\text{mag}}}{dt}$$

Die **Lenz'sche Regel** besagt, dass die Richtung der induzierten Spannung mit der rechten-Hand regel in die umgekehrte Richtung der Flussänderung wirkt.

Fließt ein Strom  $I$  durch eine Spule der Länge  $\ell$  mit  $N$  Windungen und Querschnittsfläche  $A$ , so erzeugt dies ein homogenes Magnetisches Feld im inneren der Spule mit Stärke  $B$ ,

$$B = \mu_0 \frac{IN}{\ell} \Rightarrow \Phi_{\text{mag}} = NBA = \mu_0 \frac{IN^2 A}{\ell}$$

Die **Selbstinduktivität**  $L$  einer Spule ist eine geometrische Eigenschaft und ist definiert durch

$$L = \frac{\Phi_{\text{mag}}}{I} = \left( \frac{U_{\text{ind}}}{\frac{dI}{dt}} \right) = \mu_0 \frac{N^2 A}{\ell}$$

Liegen zwei Spulen nebeneinander, so erzeugt das Magnetfeld von Spule 1 auch eine induzierte Spannung in der Spule 2 und umgekehrt. Die gegenseitige Induktivität ist dann definiert durch

$$M_{21} = \frac{\Phi_{\text{mag},21}}{I_1} = \frac{\Phi_{\text{mag},12}}{I_2}$$

Das Faraday'sche Gesetz wird dann zu

$$V_{\text{ind}} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} \pm L_{21} \frac{dI_2}{dt}$$

wobei das Vorzeichen vor  $L_{21}$  von der Wicklungsrichtung der zweiten Spule abhängt.

Das **Vektorpotential** ist ein Hilfsmittel zur Vereinfachung des Magnetischen Feldes und wird durch

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

definiert. Ist bis auf ein Gradientenfeld eindeutig und kann mit der Bedingung  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  geeicht werden. Sie hat die Einheit  $[\mathbf{A}] = \frac{\text{Vm}}{\text{s}}$ .

Das E-Feld kann damit auch wie folgt beschrieben werden.

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Für statische Magnetfelder erlaubt das Vektorpotential die Folgende Schreibweise:

$$\Delta \mathbf{A} = (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{A} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

Bei statischen Ladungen und Strömen kann das Vektorpotential mit

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dx dy dz$$

berechnet werden. Für zeitlich abhängige Ladungen und Ströme sind die **retardierte Potentiale** mit  $t_{\text{ret}} = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}$  gegeben durch

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{r}', t_{\text{ret}})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV$$



$$\mathbf{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{J}(\vec{r}', t_{\text{ret}})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

## 6 Felder in Materie

### 6.1 Dipole

Für zwei mit dem Vektor  $\ell$  getrennte Punktladungen  $\pm q$  ist das **elektrische Dipolmoment**  $\mathbf{p}$  in Richtung der positiven Ladung zeigend gegeben durch

$$\mathbf{p} = q\ell \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{p} = \int_{\mathbb{R}^3} \rho \vec{r} dV \quad \text{für ausgedehnte Ladungen}$$

Analog ist das **magnetische Moment**  $\mu$  einer Leiterschleife (bzw. Spule mit  $n$  Windungen) der zur Fläche  $A$  senkrecht stehende Vektor

$$\mu = (n)IA$$

Auf elektrische und magnetische Dipole wirkt in externen  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$ -Feldern ein Drehmoment  $\tau$  gegeben durch

$$\tau = \mathbf{p} \times \mathbf{E}_{\text{ext}}, \quad \tau = \mu \times \mathbf{B}_{\text{ext}}$$

### 6.2 Polarisierete Materie

Dielektrisches Material, welches sich in einem elektrischen Feld befindet wird **polarisiert**. Dabei entstehen darin elementare elektrische Dipole  $\mathbf{p}$ . Liegt eine Teilchendichte  $N$  dieser Dipole vor, so definieren wir die **Polarisationsdichte**

$$\mathbf{P} = N\mathbf{p}$$

Weiter definieren wir die dimensionslosen Konstanten **elektrische Suszeptibilität**  $\chi_{\text{el}}$  und die relative Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon$  als

$$\chi_{\text{el}} = \frac{P}{\varepsilon_0 E_{\text{res}}}, \quad \varepsilon = \frac{E_{\text{vak}}}{E_{\text{res}}} = 1 + \chi_{\text{el}}$$

Somit können wir die **Dielektrische Verschiebung**  $\mathbf{D}$  definieren durch

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \text{für} \quad \mathbf{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \mathbf{E}$$

Daraus folgen die Beziehungen

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{frei}}, \quad -\nabla \cdot \mathbf{P} = \rho_{\text{geb}}$$

### 6.3 Magnetisierte Materie

Stoffe, wie z.B. Eisen, oder Wasser können das Magnetische Feld eines Magneten verstärken oder abschwächen und dabei zum Teil selber magnetische Eigenschaften aufweisen.

Ein Magnetfeld kann also in einem Festkörper ein Magnetfeld induzieren, das aus elementaren magnetischen Dipolen  $\mu$  mit Teilchendichte  $N$  besteht. Dazu definieren wir die **Magnetisierung** als

$$\mathbf{M} = N\mu$$

Auch hier definieren wir die **magnetische Suszeptibilität**  $\chi_{\text{mag}}$  und die **relative Permeabilität**  $\mu$  durch

$$\chi_{\text{mag}} = \frac{M}{H}, \quad \mu = 1 + \chi_{\text{mag}}$$

Hier beschreibt das Magnetische **H-Feld** die effektive magnetische Feldstärke in einem magnetisierten Medium und ist gegeben durch

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu \mu_0}$$

Für para- und ferromagnetische ist  $\mu > 1$  und für diamagnetische ist  $\mu < 1$ .

Dazu gilt

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_{\text{frei}}$$

bezeichnen wir mit  $\mathbf{J}_{\text{geb}}$  die im Medium gebundenen Ströme, so gilt Beziehung

$$\nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{J}_{\text{geb}}$$

Im Vergleich zum Vakuum gelten dann folgende Beziehungen

$$\mathbf{E}_{\text{res}} = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{E}_{\text{vak}}, \quad \mathbf{D}_{\text{res}} = \mathbf{D}_{\text{vak}}$$

Wir erhalten dabei die modifizierten Maxwell Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{frei}}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{frei}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Auf Plattenkondensatoren hat dies den Effekt, dass  
 $C = \varepsilon C_{\text{vak}}$

Elektromagnetische Wellen in einem polarisierten/magnetisierten Medium breiten sich mit der Geschwindigkeit

$$c' = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

Dabei breiten sich die Wellen mit Amplituden  $|\mathbf{E}| = c|\mathbf{B}|$  und Ausbreitungsrichtung des Poynting-Vektors  $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ .