Normen

• Vektornorm: – pos. definit, – Homogenität, – △-Ungleichung

Ungleichung: $\big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x-y\|$

p-Norm: $\|x\|_p := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}$, $1 \le p < \infty$

$\|x\|_\infty := \max\{|x_i| : 1 \le i \le n\}$

Hölder: $1 \le p, q \le \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$\Rightarrow \left|\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \overline{y_i}\right| \le \|x\|_p \cdot \|y\|_q$

Minkowski: $1 \le p \le \infty \Rightarrow \|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$

Cauchy-Schwarz: $|\langle x, y\rangle| \le \|x\| \cdot \|y\|$

• Skalarprodukt = bilinear, pos. definit, → (hermitesch)

ist kompatibel mit $\|\cdot\|$, falls

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

kompatibel ⟺ Parallelogrammgleichung

$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2 \cdot \left[\|x\|^2 + \|y\|^2\right]$

zugehöriges Skalarprodukt def. durch:

$\langle x, y\rangle := \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right]$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$\langle x, y\rangle := \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\| - i\|x-iy\|^2\right]$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

2 Normen $\|\cdot\|_V$, $\|\cdot\|_{V'}$ sind äquivalent falls $\exists\, c, C \overset{>0}{\in} \mathbb{R}$

$c\|x\|_{V'} \le \|x\|_V \le C \cdot \|x\|_{V'}$

Für $p \le q \in [1, \infty]$, $x \in \mathbb{C}^n$

$\|x\|_q \le \|x\|_p \le n^{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \|x\|_q$

$\Rightarrow \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\, \|x\|_2$

$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\, \|x\|_\infty$

$\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n \cdot \|x\|_\infty$

• Matrixnorm – pos. def, – Homogenität, – △-Ungleichung

$\|\cdot\|_M$ auf $\mathbb{C}^{m \times n}$ heißt konsistent mit $\|\cdot\|_V$, $\|\cdot\|_W$ ($\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^m$), falls

$\|Ax\|_W \le \|A\|_M \cdot \|x\|_V$.

p-Norm: $1 \le p \le \infty$

$\|A\|_p := \max_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|_p$

Frobeniusnorm: $\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} = \sqrt{tr(AA^H)} = \sqrt{tr(A^H A)}$

$\|A\|_1 = \max_{j=1..n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$ (Spalten), $\|A\|_\infty = \max_{i=1..m} \sum_{j} |a_{ij}|$ (Zeilen)

$\|\cdot\|_M$ heißt submultiplikativ, falls $\|AB\|_M \le \|A\|_M \cdot \|B\|_M$

$\|\cdot\|_F$ ist konsistent mit $\|\cdot\|_2$

$\|\cdot\|_p$ und $\|\cdot\|_F$ sind submultiplikativ.

Es gilt $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^H A)} = \sigma_1$

$\|UAV\|_F = \|A\|_F$, $\|UAV\|_2 = \|A\|_2$

Singulärwertzerlegung $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, r: Rang(A)

$\exists\, U \in \mathcal{U}(m), V \in \mathcal{U}(n), \Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$, sodass $A = U \Sigma V^H$

$U = (u_1 \dots u_m)$, EV von AA^H, $V = (v_1, \dots, v_n)$ EV von $A^H A$.

Computerarithmetik Sei $\beta \ge 2 \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{N}_+$, $e_{min} < 0 < e_{max} \in \mathbb{Z}$

$\mathbb{F}(\beta, t, e_{min}, e_{max}) := \left\{\pm \beta^e \left(\frac{d_1}{\beta} + \frac{d_2}{\beta^2} + \dots + \frac{d_t}{\beta^t}\right)\right\} \cup \{0\}$

mit $d_1, \dots, d_t \in \{0, 1, \dots, \beta - 1\}$, $d_1 \ne 0$, $e_{min} \le e \le e_{max} \in \mathbb{Z}$

$x_{min} = \beta^{e_{min}-1}$, $x_{max} = \beta^{e_{max}}\left(1 - \beta^{-t}\right)$

$\epsilon_M(\mathbb{F}) := d(1, succ(1)) = \beta^{1-t}$, $u(\mathbb{F}) := \frac{1}{2} \beta^{1-t}$

Für $x \ne 0$ ist $d(x, neighbor(x)) \le \epsilon_M \cdot |x|$ ($\beta^{-1}\epsilon_M |x|$)

$\hat{\mathbb{F}} := \mathbb{F} \cup \left\{\pm \beta^{e_{min}} \left(\frac{d_2}{\beta^2} + \dots + \frac{d_t}{\beta^t}\right) \,\middle|\, (d_2, \dots, d_t) \ne (0, \dots, 0)\right\}$

$\hat{\mathbb{F}} \setminus \mathbb{F}$ sind denormalisiert.

$Bereich(\mathbb{F}) := \{x \in \mathbb{R} \mid x_{min} \le |x| \le x_{max}\} \cup \{0\}$

$rd: Bereich(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$, $x \mapsto rd(x)$

• $\forall x \in Bereich(\mathbb{F})\ \exists\, \delta \in \mathbb{R}$, sodass

$rd(x) = (1 + \delta) x$, $|\delta| \le u = \frac{1}{2}\beta^{1-t}$

$= \frac{x}{(1+\tilde{\delta})}$, $|\tilde{\delta}| \le u$

• Def das Standardmodell der Rundung ist die Abbildung $rd: Bereich(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$, sodass $\forall x, y \in Bereich$, mit $x \circ y \in Bereich$ gilt.

$\exists\, \delta$: $rd(x \circ y) = (1 + \delta)(x \circ y)$, $|\delta| \le u$, $\circ \in \{+, -, \cdot, \div\}$

Für $|\delta_i| \le u(\mathbb{F})$, $n < \frac{1}{u(\mathbb{F})}$ $\exists\, \theta_n \in \mathbb{R}$, sodass

$\prod_{i=1}^{n} (1 + \delta_i) = 1 + \theta_n$, mit $|\theta_n| \le \frac{n \cdot u(\mathbb{F})}{1 - n u(\mathbb{F})} = \gamma_n(\mathbb{F})$

Rückwärtsfehler: gegeben $rd(x \circ y)$, was ist Δx, für $rd(x \circ y) = (x + \Delta x) \circ y$?

Vorwärtsfehler: Was ist $|x \circ y - rd(x \circ y)|$?

$y = Ax$, RWF: $\hat{y} = (A + \Delta A) \cdot x$, $|\Delta A| \le \gamma_n |A|$,

VWF: $|\hat{y} - y| \le \gamma_n \cdot |A| \cdot |x|$ $\gamma_n = \frac{n \cdot u}{1 - n u}$

Landau. $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Schreibe

$f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ für $x \to a$: $\limsup_{x \to a} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty$

$f(x) = o(g(x))$, für $x \to a$: $\lim_{x \to a} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 0$.

Lösen von $Ly = b$: L regulär, $L = (\text{◣})$ $\boxed{n^2 \text{ Flops}}$ $-n$, falls $L(i,i) = 1$

```
for i = 1:n
  y(i,1) = (b(i,1) - L(i,1:i-1) * y(1:i-1,1)) / L(i,i)
end.
```

Lösen von $Rx = y$, R regulär, $R = (\text{◥})$ $\boxed{n^2 \text{ F(lops)}}$

```
for i = n:-1:1
  x(i,1) = (y(i,1) - R(i,i+1:n) * x(i+1:n,1)) / R(i,i)
```

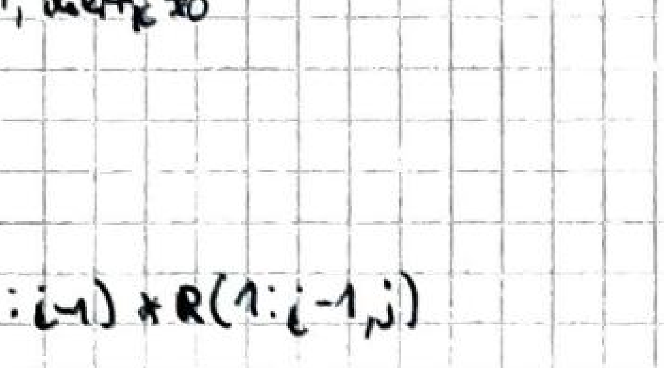
LR-Zerlegung: A hat LR-Zerlegung (ohne Pivot) ⟺ $\det(A_{kk}) \ne 0$ $\boxed{\frac{2}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n \text{ Flops}}$

```
L = eye(n)
for i = 1:n-1
  L(i+1:n,i) = A(i+1:n,i) / A(i,i)
  A(i+1:n,:) = A(i+1:n,:) - L(i+1:n,i) * A(i,:)
end
U = A,
```

LR-Zerlegung: (Doolittle), A regulär, $\det A_k \neq 0$

```
L = eye(n)
for i = 1:n
  for j = i:n
    R(i,j) = A(i,j) - L(i,1:i-1) * R(1:i-1,j)
  end
  for j = i+1:n
    L(j,i) = (A(j,i) - L(j,1:i-1) * R(1:i-1,i)) / R(i,i)
```

LR-Zerlegung von Bandmatrizen: $\boxed{\approx 2nqp \text{ Flops}}$




```
for k = 1:n-1
  for i = k+1 : min(n, k+q)
    a(i,k) = a(i,k)/a(k,k)
    for j = k+1 : min(n, k+p)
      a(i,j) = a(i,j) - a(i,k) * a(k,j)
    end
  end
end
```

LR mit pivot, A regulär $\quad Ax = b \Rightarrow P_\pi A x = LRx = P_\pi b$

Im k-ten Schritt: π_k tauscht k und imax. Setze $\pi := \pi_{n-1} \circ \dots \circ \pi_1$

$P_\pi = \left(e_{\pi(1)} | \cdots | e_{\pi(n)}\right)$, $P_\pi^{-1} = P_{\pi^{-1}} = P_\pi^T$

```
L = eye(n)
p = 1:n,
for k = 1:n-1
  ind = k
  for i = k+1:n
    if abs(A(p(i),k)) > abs(A(p(ind),k))
      ind = i
    end
  end
  tmp = p(k); p(k) = p(ind); p(ind) = tmp
  L(k+1:n,k) = A(p(k+1:n),k) / A(p(k),k)
  A(p(k+1:n),:) = A(p(k+1:n),:) - L(k+1:n,k) * A(p(k),:)
end
P = ~~zeros(n)~~ for k = 1:n
  P(k, p(k)) = 1;
end
U = P * A.
```

Vollpivot: $Ax = b \rightarrow PAQx = LRx = PbQ$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt pos. def. $\Leftrightarrow x^T A x > 0$, $x \neq 0$

(i) A invertierbar, (ii) $a_{ii} > 0$ (iii) $X^T A X$ SPD

Cholesky für SPD: $A = LDL^T$, $R := \sqrt{D} L^T$

$\boxed{\frac{n^3}{3} + O(n^2) \text{ Flops}}$

```
for j = 1:n
  for i = 1:j-1
    R(i,j) = [A(i,j) - R(1:i-1,i)' *
              R(1:i-1,j)] / R(i,i)
  end
  R(j,j) = sqrt[A(j,j) - R(1:j-1,j)' *
               R(1:j-1,j)]
end
```

Für $\hat{x}$ die Lösung aus $R^T R x = b$ gefundene Lösung ist

$(A + \Delta A)x = b$, $\|\Delta A\|_2 \leq 4n(3n+1)u(\mathbb{F}) \cdot \|A\|_2$

$\left(|\Delta A| \leq \gamma_{3n+1} |\hat{R}^T| |\hat{R}|\right)$ ← Beweis

·Kondition Funktion: $f: V \to W$ $\quad$ cond klein: gut

$$\text{cond}(f,x) := \frac{\|Df(x)\|_n}{\|f(x)\|_W} \cdot \|x\|_V$$

$$\Rightarrow \frac{\|f(x+\Delta x) - f(x)\|}{\|f(x)\|} \leq \|\Delta x\| \cdot \text{cond}(f,x)$$

·Kondition Matrix: $K(A) := \|A\|_n \cdot \|A^{-1}\|_n$, $\|\cdot\|_n$ submult.

$\Rightarrow$ Für $\|A^{-1} \Delta A\| < 1$ gilt

$$\frac{\|(A+\Delta A)^{-1} - A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leq K(A) \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

Für $Ax = b \rightarrow (A + \Delta A)\tilde{x} = b + \Delta b$ gilt

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \frac{K(A)}{1 - \|A^{-1}\Delta A\|} \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\right)$$

$\|\cdot\|$ submult., $\|B\| < 1$, dann gilt:

$\sum_{k=0}^{\infty} B^k$ konv. und $(I - B)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B^k$.

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \|\cdot\|_\varepsilon$ submult.: $\rho(B) \leq \|B\|_\varepsilon \leq \rho(B) + \varepsilon$

Polynominterpolation $\quad \mathbb{P}_n := \text{span}\{x^i \mid i = 0,\dots,n\} \subseteq K[x]$

Für $x_0, \dots, x_n$ paarweise verschieden, $\ell_0, \dots, \ell_n$ mit

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad \Big| \quad \ell_i(x_j) = \delta_{ij}$$

Interpol. Polynom zu $x_0, \dots, x_n$, $y_0, \dots, y_n$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \ell_i(x) \overset{(*)}{=} \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot x^i$$

(*): Löse

$$V(x_0 \dots x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

```
for i = 1:n+1
  V(:,i) = x.^(i-1)
end
```

$\det V = \prod_{i<j} (x_j - x_i)$

Berechnung $P_n(x)$: Horner-Schema

$$P_n(x) = (((c_n x + c_{n-1})x + c_{n-2})x + \dots c_1)x + c_0$$

```
y(1:k,1) = c(n+1)
for j = n:-1:1
  y = c(j) + y.*x
end
```

·Baryzentrische Schreibweise:

$$\lambda_i := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_j}, \quad P_n(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n} \frac{y_i \cdot \lambda_i}{x - x_i}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_i}{x - x_i}}$$

Aitken-Neville-Schema:

(i) $P_{i0}(x) := y_i \quad | i = 0, \dots, n$

(ii) $P_{ik}(x) := \dfrac{(x - x_i) P_{i+1,k-1}(x) - (x - x_{i+k}) P_{i,k-1}(x)}{x_{i+k} - x_i}$

$k = 1, \dots, n$
$i = 0, \dots, n-k$

(iii) $P_n(x) = P_{0n}(x)$

·Knotenpolynome: zu $x_0, \dots, x_n$ definiere

$\omega_0 = 1$, $\omega_1 = (x - x_0)$, $\omega_2 = (x - x_0)(x - x_1)$

$\omega_{n+1} = (x - x_0) \cdots (x - x_n)$

$\omega_i = \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k)$

- Newton-Schema Für $x_0, \dots, x_n$, $y_0, \dots, y_n$

(i) $f[x_i] = y_i$

(ii) $f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_j] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_j] - f[x_i, \dots, x_{j-1}]}{x_j - x_i}$

(iii) $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, \dots, x_k]\, \omega_k(x)$

k-te div. Differenz

- Fehlerabschätzung: $x_0 < \dots < x_n$, $x_* \in (x_0, x_n)$

$f(x_*) - p_n(x_*) = f[x_0, \dots, x_n, x_*] \cdot \omega_{n+1}(x_*)$

Für $f \in C^{n+1}[x_0, x_n]$ $\forall x_* \in [x_0, x_n]$ $\exists\, \xi \in (x_0, x_n)$ mit

$E_n[f](x_*) := f(x_*) - p_n(x_*) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \omega_{n+1}(x_*)$

- Hermite-Interpolation: $x_0 \leq \dots \leq x_n$, $\hat{x}_0 < \dots < \hat{x}_m$

Setze $d_i :=$ grad von $\hat{x}_i$

$\mu_{ij}(f) := f^{(j)}(\hat{x}_i) = \mu_{ij}(p_n) \Big|_{i=0,\dots,d_i}^{i=0,\dots,m-1}$

$\hat{\mu}: P_n \to \mathbb{R}^{n+1}$ ist linear (und bijektiv)

Für $x_i = \dots = x_j$: $f[x_i, \dots, x_j] = \frac{f^{(j-i)}(x_i)}{(j-i)!}$

- Interpolationsoperator: $I^{(n)}: C^0([a,b]) \to \mathbb{P}_n$, $f \mapsto p_n$ ist linear

$\|f\|_{\infty([a,b])} := \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$, Für $f \in C^{n+1}([a,b])$ gilt die Abschätzung

$\|f - I^{(n)}[f]\|_\infty \leq \frac{\|\omega_{n+1}\|_\infty}{(n+1)!} \cdot \|f^{(n+1)}\|_\infty$

- Lebesgue-Konstante zu $x_0 < \dots < x_n$ und ℓ_i Lagrange-Polynome

$\Lambda_n := \|\sum_{k=0}^{n} |\ell_k(x)|\|_\infty$

- Quasioptimalität für $x_0 < \dots < x_n$ beliebig gilt

$\|f - I^{(n)}[f]\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n) \cdot \inf_{q \in \mathbb{P}_n} \|f - q\|_\infty$

- Stetigkeitsmodul, $f \in C^0([a,b])$, $h > 0$

$\omega(f; h) := \max_{\substack{x, x' \in [a,b] \\ |x - x'| \leq h}} \{|f(x) - f(x')|\}$

(i) subadditiv, monoton wachsend in h (ii) $\omega(f; nh) \leq n \cdot \omega(f; h)$, $n \in \mathbb{N}$; $\omega(f; \lambda h) \leq (1+\lambda)\, \omega(f, h)$, $\lambda > 0$

(iii) $f \in C^1([a,b])$: $\omega(f, h) \leq h \cdot \|f'\|_\infty$

- Tschebyscheff Punkte: Für andere Punkte $x_0', \dots, x_n'$

$x_i^{(n)} := \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right)$, $i = 0, \dots, n$; gilt $\|\omega_{n+1}\|_\infty = 2^{-n} \leq \|\omega_{n+1}'\|_\infty$

(i) $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$

(ii) $T_k(x) = 2x\, T_{k-1}(x) - T_{k-2}(x)$

- Ganzzahlige Koeffizienten, $a_n = 2^{n-1}$ von T_n höchster Koeffizient

- T_n n gerade: gerade, n ungerade: ungerade

- $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos(x))$, $|T_n(x)| \leq 1$, $x \in [-1, 1]$

- Nullstellen sind Tschebyscheffpunkte: $T_n(x_i^{(n)}) = 0 \Big|_{i=0,\dots,n-1}$

- Extremas sind Clenshaw-Curtis Punkte: $\tilde{x}_j^{(n)} := \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right)\Big|_{j=0,\dots,n}$

- Affine Transformation:

$\Phi: [a,b] \to [-1,1]$ $\quad x \mapsto \frac{2x - (a+b)}{b-a}$

$\Phi^{-1}: [-1,1] \to [a,b]$ $\quad t \mapsto \frac{1-t}{2} a + \frac{1+t}{2} b$

$\Psi: [a,b] \to [c,a]$ $\quad x \mapsto (x-a)\frac{a-c}{b-a} + c$

$\Psi^{-1}: [c,a] \to [a,b]$ $\quad t \mapsto (t-c)\frac{(b-a)}{a-c} + a$

- Spline-Interpolation

- $s: [a,b] \to \mathbb{R}$ kubischer Spline zu $x_0 < \dots < x_n$ falls

(i) $s \in C^2([a,b])$

(ii) $s\big|_{[x_i, x_{i+1}]}$ Polynom vom Grad ≤ 3.

- s heißt interpolierender Spline zu $y_0, \dots, y_n$, falls $s(x_i) = y_i$

- Vollständiger Spline: zusätzlich $s'(a) = c_0$, $s'(b) = c_n$

(*): Bestimme $h_j := x_j - x_{j-1} \big|_{j=1,\dots,n}$

$\alpha_j := \frac{2}{h_j} + \frac{2}{h_{j+1}}$, $\beta_j := \frac{1}{h_j}$, $d_j := 3\left(\frac{y_j - y_{j-1}}{h_j^2} + \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}^2}\right)$

(i) Bestimme $h_1, \dots, h_n$, $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$, $\beta_2, \dots, \beta_{n-1}$, $d_1, \dots, d_{n-1}$

(ii) Löse nach $c_1, \dots, c_n$ mit

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ & & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 - \frac{c_0}{h_1} \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} - \frac{c_n}{h_n} \end{pmatrix}$$

- Periodischer Spline (mit Periode $b-a$)

$y_0 = y_n$, $c_0 = c_n$

- $s(x_j) = y_j$, $s(a) = s(b)$, $s'(a) = s'(b)$, $s''(a) = s''(b)$

(i) Bestimme $h_1, \dots, h_n$, $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$, $\beta_1, \dots, \beta_n$ und $d_0, \dots, d_{n-1}$ mit (*) und

$\alpha_0 = \frac{2}{h_n} + \frac{2}{h_1}$, $d_0 = 3\left(\frac{y_0 - y_{n-1}}{h_n^2} + \frac{y_1 - y_0}{h_1^2}\right)$

(Für $n = 2$: $\beta_1 \leftarrow \beta_1 + \beta_2$)

(ii) Löse für $c_0 = c_n, c_1, \dots, c_{n-1}$ auf

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_1 & & & \beta_n \\ \beta_1 & \alpha_1 & \beta_2 & & \\ & \beta_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & & \beta_{n-1} \\ \beta_n & & & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \end{pmatrix}$$

- Natürlicher Spline: $s(x_i) = y_i$, $s''(a) = s''(b) = 0$

(i) Bestimme $h_1, \dots, h_n$, $\tilde{\alpha}_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \tilde{\alpha}_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ und $\tilde{d}_0, d_1, \dots, d_{n-1}, \tilde{d}_n$ mit (*) und

$\tilde{\alpha}_0 = \frac{2}{h_1}$, $\tilde{\alpha}_n = \frac{2}{h_n}$, $\tilde{d}_0 = 3\frac{y_1 - y_0}{h_1^2}$, $\tilde{d}_n = 3\frac{y_n - y_{n-1}}{h_n^2}$

(ii) Löse für $c_0, \dots, c_n$ mit

$$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_0 & \beta_1 & & & \\ \beta_1 & \alpha_1 & \beta_2 & & \\ & \beta_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \alpha_{n-1} & \beta_n \\ & & & \beta_n & \tilde{\alpha}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{d}_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ \tilde{d}_n \end{pmatrix}$$

(iii) Berechne $b_1, \dots, b_4$ mit

$b_1(x) = \phi\left(\frac{x_j - x}{h_j}\right)$, $b_2(x) = \phi\left(\frac{x - x_{j-1}}{h_j}\right)$

$b_3(x) = -h_j \psi\left(\frac{x_j - x}{h_j}\right)$, $b_4(x) = h_j \psi\left(\frac{x - x_{j-1}}{h_j}\right)$

mit $\phi(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3$, $\psi(\xi) = \xi^3 - \xi^2$

(erfüllen $b_1(x_{j-1}) = b_2(x_j) = b_3'(x_{j-1}) = b_4'(x_j) = 1$, sonst 0.)

(iv) Setze für $j = 1, \dots, n$ für das Intervall $[x_{j-1}, x_j]$

$S_j(x) = y_{j-1} b_1(x) + y_j b_2(x) + c_{j-1} b_3(x) + c_j b_4(x)$

- Gauss'sche Quadratur formel. wähle Stützpunkte $x_0, \dots, x_n$ NST von q_{n+1}, $\alpha_j := \int_{-1}^{1} \ell_j(x)\,dx$

$\to G^{(n)}_{[-1,1]}[f] := \alpha_0 f(x_0) + \dots + \alpha_n f(x_n)$

- hat Ordnung $2n+2$
- $\alpha_j > 0, \forall j$

mit $\Phi: [-1,1] \to [a,b]$ sind die Gewichte von

$G^{(n)}_{[a,b]}[f] = \sum_{i=0}^{n} \tilde{\alpha}_i f(\tilde{x}_i)$ gegeben durch

$\tilde{\alpha}_i = \frac{b-a}{2} \cdot \alpha_i, \quad \tilde{x}_i = \frac{b-a}{2} x_i + \frac{b+a}{2}$

- **Bew** Ordnung $2n+3$ nicht möglich in $n+1$ Punkte

$0 < \int_a^b \underbrace{\omega_{n+1}^2(x)}_{P_{2n+2}} = 0$ ↯

- **Bew** Eindeutig Ordnung $2n+2$:

Setze $h_j(x) = \frac{\omega_{n+1}}{(x-x_j)} \Rightarrow h_j(x_j) \neq 0$

$\Rightarrow 0 = Q[q_{n+1}, h_j] \Rightarrow \underset{NST\text{ von } q_{n+1}}{x_0, \dots, x_n \text{ sind}}$

$\Rightarrow$ Gewichte gleich $\square$.

Abschätzung:

$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} (f \circ \Phi)(x)\,dx = \frac{b-a}{2} G^{(n)}_{[-1,1]}[f] + \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n+3} \cdot \|f^{(2n+2)}\|_\infty \cdot \frac{2^{2n+3} \cdot ((n+1)!)^4}{(2n+3)((2n+2)!)^3}$

Nichtlineare GLS $F: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Eine Funktion $\Phi: D \to D$ mit $x^{(0)} \in D$ ist ein Iterationsverfahren samt Vorschrift $x^{(k+1)} := \Phi(x^{(k)})$.

Ein Iterationsverfahren heißt

- konvergent, falls $(x^{(k)})_{k=0}^\infty$ konvergiert und $F(\lim_{n\to\infty} x^{(n)}) = 0$
- konvergiert lokal, falls $\exists$ offene Umgebung $x_* \in U \subseteq D$ gibt, sodass das Verfahren für jeden Startwert $x^{(0)} \in U$ gegen x^* konvergiert.
- konvergiert global, falls das Verfahren für jeden Startwert $x^{(0)} \in D$ gegen x^* konvergiert.

Eine Folge $(x^{(n)})_{k=0}^\infty$ konvergiert linear gegen x^*, falls $\exists L < 1, k_0 \in \mathbb{N}$, sodass $\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq L \|x^{(k)} - x^*\|, \forall k \geq k_0$ für eine $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$

- konvergiert mit p-ter Ordnung mit $p > 1$ gegen x^*, falls $\exists C > 0$ sodass $\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq C \cdot \|x^{(k)} - x^*\|^p, \forall k \in \mathbb{N}$
- Eine Fixpunktgleichung heißt konsistent mit $F: D \to \mathbb{R}^n$, falls

$F(x) = 0 \iff \Phi(x) = x$

Satz: Sei $\Phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\Phi(x^*) = x^*$. Ist Φ in einer Umgebung von x^* stetig diffbar mit $|\Phi'(x^*)| < 1$, dann $\exists \varepsilon > 0$, sodass $\forall x^{(0)} \in B(x^*, \varepsilon)$ die FPI linear konvergiert.

Satz Ist Φ $(m+1)$ mal stetig diffbar und $\Phi'(x^*) = \Phi''(x^*) = \Phi^{(m)}(x^*) = 0$, dann konv. die FPI lokal mit $(m+1)$ter Ordnung

Banach'scher FPS. Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, $\Phi: D \to D$ sodass $\exists L < 1$ mit

$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L\|x - y\|, \forall x, y \in D$, für ein $\|\cdot\|_V$

dann gilt

(i) $\exists!\, x^* \in D$ mit $\Phi(x^*) = x^*$

(ii) Die FPI konvergiert global

(iii) A-priori Fehlerabschätzung

$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{L^k}{1-L} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$

(iv) A-posteriori:

$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{L}{1-L} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$

Korollar: $\Phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, stetig diffbar in Umgebung von x^*. Und für $\|\cdot\|_M$ submult und mit $\|\cdot\|_V$ konsistente Matrixnorm gilt

$\|D\Phi(x^*)\| < 1$.

Dann ist Φ lokal eine Lipschitz-kontraktion auf $\overline{B(x^*, \varepsilon)}$, für ein $\varepsilon > 0$

Bew $\|\Phi(x) - \Phi(y)\| = \|\int_0^1 D\Phi(y + t(x-y))(x-y)\,dt\| \leq \|D\Phi\|_\infty \|x-y\|$

Newton-Verfahren $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diffbar und $f'(x^*) \neq 0$

$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ konv. lokal quadratisch $(n=1)$, falls $\Phi \in C^2$, bzw. $f \in C^3$

Gedämpft: $\Phi_\lambda(x) = x - \lambda \frac{f(x)}{f'(x)}$

mehrdimensional:

$\Phi(x) = x - DF(x)^{-1} \cdot F(x)$

Satz. $F: D \to \mathbb{R}^n$ stetig diffbar, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $x^* \in D$: $F(x^*) = 0$, gibt es L, R, sodass

$\|DF(x) - DF(y)\|_n \leq L \cdot \|x - y\| \quad \forall x, y \in \overline{B(x^*, R)}$

Setze $r := \min\{R, \frac{1}{2CL}\}$ mit $C := \|DF(x^*)^{-1}\|_n$. Dann konvergiert $\forall x^{(0)} \in B(x^*, r)$ die Newtoniteration quadratisch.

d.h.: $\exists\, \tilde{C} > 0$: $\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq \tilde{C} L \|x^{(k)} - x^*\|^2$

$\|\cdot\|_F$ konsistent mit $\|\cdot\|_2$:

$$\|Ax\|_2^2 = \langle Ax, Ax\rangle = x^H A^H A x = \sum_{i=1}^n \Big| \sum_{j=1}^n a_{ij} \Big|^2$$

C.S.

$$\leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right) = \|A\|_F^2 \cdot \|x\|_2^2$$

Neumann'sche Reihe: $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$(I-B)(I+B+B^2+\dots+B^n) = I - B^{n+1}$$

Für $\|B\|_n < 1$, $\|\cdot\|_n$ submult $\Rightarrow \|B\|^{m+1} \to 0$

<u>Bew</u> Normalengleichung $\Leftrightarrow A^T A x = A^T b$

$$\Phi_z(t) := \|b - A(x+tz)\|_2^2 =$$

$$= (x+tz)^T A^T A(x+tz) - 2(x+tz)^T A^T b + b^T b$$

$$= t^2 (z^T A^T A z) + 2t(z^T A^T A x - z^T A^T b)$$

$$+ (x^T A^T A x + b^T b - 2x^T A^T b)$$

$$\Rightarrow \Phi_z'(0) \stackrel{!}{=} 0 = 2(z^T A^T A x - z^T A^T b)$$

$$= 2z^T(A^T A x - A^T b)$$

$$\Rightarrow A^T A x = A^T b \quad \square$$

Periodic spline

$$A = \underset{\text{tridiag}}{A_0} + \begin{pmatrix} \beta_n & 0 & \cdots & 0 & \beta_n \\ & & 0 & & \\ \beta_n & & & & \beta_n \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} \sqrt{\beta_n} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sqrt{\beta_n} \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Sherman Morrison

```
A0 = diag(alpha) + diag(beta(1:end-1),1)
     + diag(beta(1:end-1),-1)

function y=phi(x)
    y = 3*x.^2 - 2*x.^3
end

function y=psi(x)
    y = x.^3 - x.^2
end
```

Cubic Spline

<u>Plot</u>

```
loglog(x-vec, y-vec, '-k')
xlabel('name'), title('title')
saveas(gcf, 'name', 'eps')
```

<u>Matrix</u>

```
B= repmat(A,m,n)
Ax=b -> x= A\b
h=diff(x)
```

Vector: find index: $t \in [x_i, x_{i+1}]$

```
ind= max( find(t-x>0))
if (isempty(ind))
    ind=1
end
```

<u>Function</u>

```
f= @(x) sin(1+x);
```