Lineare Algebra I
Zusammenfassung

Definitionen, Sätze, Formeln und Beispiele

LaTeX by

Han-Miru Kim

Für Basisprüfungsblock I - ETH Zürich

30. Januar 2020

1 Gruppen, Ringe, Körper, Polynome, Matrizen

Eine **Gruppe** ist ein Tupel $(G, *, e)$ bestehend aus einer Menge G, einer Verknüpfung $*$ und einem neutralem Element $e \in G$ sodass gilt:

G1) Assoziativität: $a * (b * c) = (a * b) * c = a * b * c, \forall a, b, c \in G$

G2) Neutrales Element: $e * a = a, \forall a \in G$

G3) Inverses Element: $\exists a' \in G : a' * a = e, \forall a \in G$

Eine Gruppe heisst **abelsch** falls

G4) Kommutativität: $\forall a, b \in G : a * b = b * a$

Bemerkung:

(a) e ist eindeutig und rechts-neutral

(b) Das Inverse ist eindeutig und auch rechts-inverse

(c) Es gelten die Kürzungsregeln:
$a * \tilde{x} = a * x \implies \tilde{x} = x$
$\tilde{x} * a = x * a \implies \tilde{x} = x$

Sei $(G, \cdot, e)$ eine Gruppe. Eine nichtleere Teilmenge $H \subseteq G$ heisst **Untergruppe**, falls gilt

- $\forall a, b \in H : a \cdot b \in H$
- $\forall a \in H : a^{-1} \in H$

Seien $(G, \cdot_G, e_G), (H, \cdot_H, e_H)$ Gruppen. Eine Abbildung $\phi : G \to H$ heisst Gruppenhomomorphismus, wenn gilt

$$\forall a, b \in G : \phi(a \cdot_G b) = \phi(a) \cdot_H \phi(b)$$

Bemerkung:

- $\phi(e_G) = e_H$
- $\phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}$
- falls ϕ bijektiv ist, ist $\phi^{-1} : H \to G$ auch ein Gruppenhomomorphismus

Ein **Ring** ist ein Tupel $(R, +, \cdot, 0)$ bestehend aus einer Menge R, zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, und einem ausgezeichnetem Element $0 \in R$, sodass gilt:

R1) $(R, +, 0)$ ist eine abelsche Gruppe

R2) die Multiplikation $\cdot$ ist assoziativ.

R3) Distributivität $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Ist die Multiplikation kommutativ, so heisst $(R, +, \cdot, 0)$ **kommutativer Ring**. Hat ein Ring dazu noch ein Einselement $1 \in R$, sodass gilt $\forall a \in R : 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, so heisst es **Ring mit Eins**
Ein Ring heisst **Ringteilerfrei**, wenn

$$\forall a, b \in R : a \cdot b = 0 \implies a = 0 \vee b = 0$$

Eine Teilmenge $R' \subseteq R$ heisst **Unterring**, falls $(R', +, 0)$ eine Untergruppe ist: $(a, b \in R' \implies a + b \in R' \wedge -a \in R')$

Ein **Körper** ist ein Tupel $(K, +, \cdot, 0, 1)$ mit einer Menge, zwei Verknüpfungen, $+$, $\cdot$ und zwei ausgezeichneten Elementen $0, 1 \in R$, sodass gilt:

K1) $(K, +, 0)$ ist eine abelsche Gruppe

K2) $(K^*, \cdot, 1)$ ist eine abelsche Gruppe

K3) Distribivgesetz

Rechenregeln

(a) $1 \neq 0$

(b) $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$

(c) Nullteilerfreiheit

(d) $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b) \quad (-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

(e) $x \cdot a = \tilde{x} \cdot a \wedge a \neq 0 \implies x = \tilde{x}$

Ist R ein Ring mit 1, so ist seine **Charakteristik** die Zahl

$$\operatorname{char}(R) := \begin{cases} 0, & \text{falls } n \cdot 1 \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \min\{n \in \mathbb{N}^* : n \cdot 1 = 0\}, & \text{sonst} \end{cases}$$

$\mathbb{Z}_{/p\mathbb{Z}}$ ist genau dann ein Körper, wenn p Prim ist. **Lemma**: ist K ein Körper, so ist $\operatorname{char}(K)$ entweder 0 oder Prim.

Sei K ein Körper. Ein **Polynom** f in einer Variable T und Koeffizienten in K ist ein Ausdruck der Form

$$f(T) = \sum_{k=0}^{n} a_k T^k = a_0 \cdot T^0 + a_1 \cdot T + a_2 \cdot T^2 + \ldots + a_n \cdot T^n$$

$a_n \neq 0$ heisst Leikoeffizient.

Der Grad von f ist $\deg(f) := \begin{cases} -\infty, & \text{falls } f = 0 \\ \max\{k \in N, a_k \neq 0\}, & \text{sonst} \end{cases}$ Man schreibt $K[T]$ für die Menge aller Polynome über K. $K[T]$ ist mit der Polynommultiplikation und der Polynomaddition ein Kommutativer Ring (mit Eins) und es gilt $\deg(p \cdot q) = \deg(p) + \deg(q)$

Satz (Polynomdivision): Sind $f, g \in K[T], g \neq 0$ So gibt es eindeutige Polynome, q(Quotient),r(Rest) $\in K[T]$, sodass $f = q \cdot g + r$ und $\deg(r) < \deg(g)$

Nullstellen von Polynomen Sei K ein Körper, $f \in K[T]$

(1.) Ist $\lambda \in K$ eine Nullstelle von f, so gibt es ein eindeutiges Polynom $g \in K[T]$ mit $f = (T - \lambda) \cdot g$ und $\deg(g) = \deg(f) - 1$

(2.) Sei k die Anzahl Nullstellen von f. Ist $f \neq 0$, so ist $k \leq \deg(f)$. Ist k unendlich, so ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \tilde{\cdot} : K(T) &\to \operatorname{Abb}(K, K) \\ f &\mapsto \tilde{f} \end{aligned}$$

injektiv. Ist $f \neq 0$ und $\lambda \in K$, so ist $\mu(f; \lambda)$ die Vielfachheit der Nullstelle λ in f.

$$\mu(f; \lambda) := \max\{r \in \mathbb{N} \big| f(\lambda) = f^2(\lambda) = \ldots = f^{r-1}(\lambda) = 0\}$$

(3.) Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ die verschiedenen Nullstellen von f und $r_i = \mu(f, \lambda_i)$ ihre Vielfachheiten, so ist

$$f = (T - \lambda)^{r_1} \cdots (T - \lambda_k)^{r_k} \cdot g \quad \text{mit } \deg(g) = \deg(f) - (r_1 + \ldots + r_k) \text{und } g \text{ ohne Nullstellen}$$

Falls $\deg(g) = 0$, zerfällt f in Linearfaktoren.

(4.) **Fundamentalsatz der Algebra**: Jedes Polynom $f \in \mathbb{C}[t]$ mit $\deg(f) > 0$ hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$

(5.) Jedes Polynom über $\mathbb{C}$ zerfällt in Linearfaktoren.

(6.) Ist $f \in \mathbb{R}[t]$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f, so ist $\overline{\lambda}$ auch eine Nullstelle von f und es gilt $\mu(\lambda) = \mu(\overline{\lambda})$

(7.) Jedes Polynom $f \in \mathbb{R}[t]$ mit $\deg(f) = n \geq 1$ besitzt eine Zerlegung

$$f = a \cdot (T - \lambda_1) \cdots (T - \lambda_r) \cdot g_1 \cdots g_m$$

mit $a, \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}, a \neq 0, g_1, \ldots, g_m \in \mathbb{R}[t]$ normierte Polynome mit Grad 2 ohne relle Nullstellen.

(8.) Jedes Polynom $f \in \mathbb{R}[t]$ von ungeradem Grad hat mindestens eine Nullstelle

2 Vektorräume

Sei K ein Körper. Eine Menge V zusammen mit einer inneren Verknüpfung $+ : V \times V \to V$ und einer äusseren Verknüfung $\cdot : K \times V \to V$ heisst **K-Vektorraum**, wenn gilt

V1) $(V, +, 0)$ ist eine abelsche Gruppe.

V2) $\forall \lambda, \mu \in K, v, w \in V$ gilt:

$$(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v \quad \lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w \quad \lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v \quad 1 \cdot v = v$$

Rechenregeln

(a) $0 \cdot v = 0_V$

(b) $\lambda \cdot 0_V = 0_V$

(c) $\lambda \cdot v = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee v = 0$

(d) $(-1) \cdot v = -v$ (Additives Inverse)

Sei V ein K-Vektorraum, Eine Teilmenge $W \subseteq V$ heisst Untervektorraum, falls gilt

UV1) W ist nicht-leer

UV2) $\forall u, v \in W : u + v \in W$

UV3) $\forall v \in W, \forall \lambda \in K : \lambda \cdot v \in W$

, wobei $+$ und $\cdot$ von V auf W induziert werden.

Satz: Ein Untervektorraum ist wieder ein Vektorraum mit $+$ und $\cdot$
Lemma Seien $W_i \subseteq V, i \in I$ Untervektorräume. Dann ist der Durchschnitt $W = \bigcap_{i \in I} W_i$ wieder ein Untervektorraum.
(Dasselbe gilt nicht für Vereinigungen)
Seien, $v_1, \ldots, v_n \in V$. Ein Vektor $v \in V$ heisst **Linearkombination** von $v_1, \ldots, v_n$, falls Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ exisiteren, sodass $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$

Sei V ein K-Vektorraum, (v_i) eine Familie von Vektoren. Der **span** der Familie (v_i) ist definiert durch

$$\text{span}_K(v_i)_{i\in I} := \{v \in V \big| \exists \text{ endliche Teilfamilie } J \subseteq I, \lambda_j \in K, j \in J, \quad \text{sodass } v = \sum_{j\in J} \lambda_j v_j\}$$

Ist $I = ø$, so ist $\text{span}_K(v_i) = \{0\}$

Eine endliche Familie von Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ heisst **linear unabhängig** wenn, falls es $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ gibt, sodass $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$ es folgen muss, dass $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$

Lemma Für $(v_i)_{i\in I}$ sind äquivalent:

(i) (v_i) ist linear unabhängig.

(ii) $\forall v \in \text{span}(v_i)$ gibt es eine eindeutige Linearkombination, welche v darstellt.

Sei V ein K-Vektorraum. Eine Familie $\mathcal{B} = (v_i)_{i\in I}$ heisst **Erzeugendensystem** von V, wenn $V = \text{span}_K(\mathcal{B})$
Sie heisst **Basis** von V, falls sie ein linear unabhängiges Erzeugendensystem ist.
V heisst **endlich erzeugt**, falls es ein endliches Erzeugendensystem gibt.

Sei $V \neq \{0\}$ und $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n) \subseteq V$. So sind äquivalent:

(i) $\mathcal{B}$ ist eine Basis

(ii) $\mathcal{B}$ ist ein *unverkürzbares* Erzeugendensystem. d.h. $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ ist $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ kein Erzeugendensystem mehr.

(iii) $\forall v \in V$ gibt es eine eindeutige Linearkombination $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$

(iv) $\mathcal{B}$ ist ein *unverlängerbares* Erzeugendensystem. $\forall v \in V$ ist $\tilde{\mathcal{B}} = (v_1, \ldots, v_n, v)$ nicht mehr linear unabhängig.

- **Basisauswahlsatz** Aus jedem endlichem Erzeugendensystem ist eine Basis auswählbar. Insbesondere hat jeder endlich erzeugte Vektorraum eine Basis.
- **Austauschlemma** Sei V ein K-Vektorraum, $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $w = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \in V$. Ist $k \in \{1, \ldots, r\}$ mit $\lambda_k \neq 0$, so ist $\tilde{\mathcal{B}} = (v_1, \ldots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, v_n)$ wieder eine Basis von V.
- **Austauschsatz** Sei V ein K-Vektorraum, $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis. Ist $(w_1, \ldots, w_r)$ linear unabhängig, so ist $r \leq n$ und nach umnummerieren der Vektoren ist dann $(w_1, \ldots, w_r, v_{r+1}, \ldots v_n)$ eine Basis von V
- Hat V eine endliche Basis, so ist jede andere Basis endlich. Und alle Basen sind gleich lang.

Sei V ein K-Vektorraum, dann ist die **Dimension**:

$$\dim_K(V) := \begin{cases} n, & \text{falls } V \text{ eine Basis mit Länge } n \text{ besitzt} \\ \infty, & \text{falls } V \text{ keine endliche Basis besitzt} \end{cases}$$

Ist $W \subseteq V$ ein Untervektorraum und ist V endlich erzeugt, so ist W auch endlich erzeugt und es gilt $\dim W \leq \dim V$.
Falls $\dim W = \dim V \implies W = V$

Basisergänzungssatz: Sei V endlich Erzeugt und seien $w_1, \ldots, w_r \in V$ linear unabhängig. Dann können wir $w_{r+1}, \ldots, w_n \in V$ finden, sodass $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_r, \ldots, w_n)$ eine Basis von V ist.

Sind $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig? Löse $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$, bzw. finde Lös$(A, 0)$ mit

$$A = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \ldots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

Fall es nur die Lösung $\lambda = 0$, dann sind sie linear unabhängig.

Sei $A \in M(m \times n, K)$ mit Zeilenvektoren $\begin{pmatrix} -- a_1 -- \\ \vdots \\ -- a_m -- \end{pmatrix}$. Der **Zeilenraum** von A ist

$$\begin{aligned} \text{ZR}(A) &:= \text{span}(a_1, \ldots, a_m) \subseteq \mathbb{R}^n \\ \textbf{Zeilenrang}(A) &:= \dim \text{ZR}(A) \end{aligned}$$

Analog: Sind $a_1, \ldots, a_n$ die Spalten von A, so ist der **Spaltenraum** $\text{SR}(A) = \text{ZR}(A^T) \subseteq K^m$ mit Spaltenrang $:= \dim \text{SR}(A)$
Es gilt Zeilenrang = Spaltenrang

Lemma Ist B aus A durch elementare Zeilenumformungen entstanden, so ist $\text{ZR}(A) = \text{ZR}(B)$
Satz Jede Matrix $A \in M(m \times n, K)$ kann durch elementare Zeilenumformgen auf Zeilen-Stufen-Form gebracht werden. Sind $b_1, \ldots, b_m$ die Zeilen von B, so bilden die nicht-Null Zeilen von B eine Basis von $W \subseteq K^m$.
Satz Zeilenrang(A) = Spaltenrang(A) =: rang(A)

Sei $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, K) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Dann ist die zu A transponierte Matrix $A^T \in M(n \times m, K)$ die Matrix mit Einträgen $a^T_{ij} = a_{ji} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$

Rechenregeln: Seien $A, B \in M(m \times n, K), \lambda \in K$, dann gilt

- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$
- $(A^T)^T = A$

Sei V ein K-Vektorraum, $W_1, \ldots, W_n$ Untervektorräume von V. Die **Summe** der Untervektorraume ist

$$W_1 + \ldots + W_n := \{v \in V \,|\, \exists w_i \in W_i \text{ mit } v = w_1 + \ldots + w_n\}$$

Bemerkung Die Summe ist wieder ein Untervektorraum von V.
$W_1 + \ldots + W_n = \text{span}(W_1 \cup \ldots, \cup W_n)$

Falls $\dim W_1, \dim W_2 < \infty$ gilt die **Dimensionsformel**

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$$

Lemma Ist $V = W_1 + W_2$, so sind äquivalent

(a) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

(b) Jedes $v \in V$ ist eindeutig darstellbar als Linearkombination von $w_1 + w_2$

(c) Zwei von Null verschiedene Vektoren w_1, w_2 sind linear unabhängig.

> Ein Vektorraum V heisst **direkte Summe** von zwei Untervektorräumen W_1, W_2 geschreiben $W_1 \oplus W_2$, falls $V = W_1 + W_2$ und $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

Satz Sei V endlich dimensional und mit Untervektorräume W_1, W_2. So sind äquivalent:

(a) $V = W_1 \oplus W_2$

(b) Es gibt Basen $(w_1, \ldots, w_k)$ von W_1 und $(w'_1, \ldots, w'_l)$ von W_2, sodass $(w_1, \ldots, w_k, w'_1, \ldots, w'_l)$ eine Basis von V ist

(c) $V = W_1 + W_2$ und $\dim V = \dim W_1 + \dim W_2$

Ist V endlich dimensionsional, W ein Untervektorraum von V, so gibt es zu W einen (im allgemeinen nicht eindeutig bestimmten) Untervektorraum $W' \subseteq V$, sodass $V = W \oplus W'$

> Ein Vektorraum V heisst **direkte Summe** von Untervektorräumen $W_1, \ldots, W_n \subseteq V$, geschrieben $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_n$ wenn gilt
>
> DS1) $V = W_1 + \ldots + W_n$
>
> DS2) Sind $w_1 \in W_1, \ldots, w_n \in W_n$ mit $w_1 + \ldots + w_n = 0$ so folgt $w_1 = \ldots = w_n = 0$

Achtung: DS2) ist nicht äquivalent zu: $w_i \cap w_j = \{0\}, i \neq j$
Satz Sind $W_1, \ldots, W_n$ Untervektorräume eines endlich dimensionalen Vektorraumes V, so sind äquivalent:

(i) $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_n$

(ii) Sind für alle Untervektorräume W_i eine Basis $(w_1^{(i)}, \ldots w_{r_i}^{(i)})$ gegeben, so ist $B = (w_1^{(1)}, \ldots w_{r_1}^{(1)}, w_1^{(2)} \ldots, w_{r_2}^{(2)}, \ldots, w_1^{(n)}, \ldots w_{r_n}^{(n)})$ eine Basis von V.

(iii) $V = W_1 + \ldots W_k$ und $\dim V = \dim W_1 + \ldots + \dim W_k = r_1 + \ldots + r_n$

3 Lineare Abbildungen

> Eine Abbildung $F : V \to W$ zwischen zwei K-Vektorräumen V und W heisst **K-linear** oder *Vektorraumhomomorphismus*, falls $\forall u, v \in V, \lambda, \mu \in K$ gilt:
>
> L1) $F(u + v) = F(u) + F(v)$
>
> L2) $F(\lambda \cdot v) = \lambda F(v)$
>
> Die Abbildung heisst auch:
>
> - **Isomorphismus**, falls sie bijektiv ist.
> - **Endomorphismus**, falls $F : V \to V$
> - **Automorphismus**, falls sie ein Isomorphismus und ein Endomorphismus ist.

Bemerkung Ist $F : V \to W$ linear, so gilt

(a) $F(0) = 0$ und $F(-v) = -F(v)$

(b) Sind (v_i) in V linear abhängig, so sind $F(v_i)$ auch linear unabhängig in W.

(c) Sind $V' \subseteq V, W' \subseteq W$ Untervektorräume, dann sind

$$F(V') := \{F(v) \big| v \in V\} \subseteq W \quad \text{ und } \quad F^{-1}(W') := \{v \in V \big| F(v) \in W'\} \subseteq V$$

auch Untervektorräume.

(d) $\dim F(V) \leq \dim V$

(e) Ist F ein Isomorophismus, so ist auch $F^{-1} : W \to V$ linear.

(f) Die Komposition von linearen Abbildungen ist linear.

Satz End(V) ist ein Ring. (Genannt Endomorphismenring)

Sei $F : V \to W$ linear, so sind:

- Im$(F) := F(V)$ das **Bild** von F
- $F^{-1}(w) := \{v \in V \big| F(v) = w\}$ die **Faser** von F über w.
- Ker$(F) := \{v \in V \big| F(v) = 0\}$ der **Kern** von F
- rang $F := \dim$ Im F der **Rang**
- nullity $F := \dim \text{Ker} F$ **Nullity**

(a) Im$F \subseteq W$ und Ker$(F) \subseteq V$ sind Untervektorräume

(b) F surjektiv $\Leftrightarrow$ Im$F = W$

(c) F injektiv $\Leftrightarrow$ Ker$F = \{0\}$

(d) Ist F injektiv und sind $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig, so sind $F(v_1), F(v_n)$ linear unabhängig.

Sei $w \in$ ImF, und $u \in F^{-1}(w)$ belieig, so ist $F^{-1}(u) = u +$ Ker$F := \{u + v \big| v \in \text{Ker}F\}$

Dimensionsformel Sei $F : V \to W$ linear und V endlich dimensional. Ist $(v_1, \ldots, v_k)$ eine Basis von Ker$F$ und $(w_,1 \ldots, w_r)$ eine Basis von ImF seien weiterhin $u_1 \in F^{-1}(w_1), \ldots, u_r \in F^{-1}(w_r)$ beliebig, so ist $A = (u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_k)$ eine Basis von V und es gilt

$$\dim V = \dim \text{Im} F + \dim \text{Ker} F = \text{rang} F + \text{nullity } F$$

Korollar

(a) Ist v endlich dimensional, $F : V \to W$ linear, so gilt für alle <u>nicht-leeren</u> Fasern $\dim F^{-1}(w) = \dim V - \text{rang} F$

(b) Zwischen zwei endlich dimensionalen Vektorräumen V und W gibt es genau dann einen Isomorphismus, wenn $\dim V = \dim W$

(c) Seien $\dim V = \dim W < \infty$, $F : V \to V$ linear. Dann sind äquivalent:

   (i) F ist injektiv

   (ii) F ist surjektiv

   (iii) F ist bijektiv

Sei V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge $X \subseteq V$ heisst **affiner Raum** falls es ein $u \in V$ und ein Untervektorraum $W \subseteq V$ gibt, sodass $X = u + W := \{v \in V \big| \exists w \in W : v = u + w\}$.
Die Dimensionen eines Affinen Raumes $X = v + W$ ist gegeben durch $\dim X := \dim W$

Ist $v + W = v' + W'$, so ist $W = W'$ und $v - v' \in W$

Faktorisiserungssatz: Sei $F : V \to W$ linear und $A = (u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_k)$ eine Basis von V mit $\text{Ker}F = \text{span}(v_1, \dots, v_k)$ und definiere $U := \text{span}(u_1, \dots, u_r)$, dann gilt

(1.) $V = U \oplus \text{Ker}F$

(2.) $F|_u : U \to \text{Im}F$ ist ein Isomorphismus

(3.) Sei $\rho : V = U \oplus \text{Ker}F \to U, v = u + v' \mapsto u$ die Projektion auf U. So ist $F = (F|_u) \circ \rho$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"'] \arrow[d, "\rho"] & \mathrm{Im}(F) \subseteq W \\ U \arrow[ur, "F|_U"'] & \end{tikzcd}$$

Insbesondere hat jede nicht-leere Faser $F^{-1}(w)$ mit U genau einen Schnittpunkt $P(v) = F^{-1}(F(v)) \cap U$. Man kann also $F : V \to W$ in drei Teile zerlegen.
Eine Projektion, einen Isomorphismus und eine Inklusion des Bildes. Die Umkehrung $(F|_u)^{-1} : \text{Im}F \to U$ heisst **Schnitt**. Sie schneidet aus jeder Faser genau einen Punkt $u \in v + \text{Ker}F \subseteq V$

Quotientenräume: Sei V ein K-Vektorraum, $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Für $v, v' \in V$ definieren wir die Äquivalenz modulo u: $v \sim_U v' \Leftrightarrow v - v' \in U$.
Für einen Vektor $v \in V$ ist die Äquivalenzklasse $[v]_{\sim_U}$ ein affiner Raum.

$$[v]_{\sim_u} = \{v' \in V \big| v' \sim_u V\} = v + U$$

Die Menge der Äquivalenzklassen $V_{/U} = \{[v]_{\sim_U} \big| v \in V\} = \{v + U \big| v \in V\}$ heisst **Quotientenraum**

Die **kanonische Abbildung** sei $\rho : V \to V_{/U}, v \mapsto v + U$
Satz Sei V ein V-Vektorraum, U ein Untervektorraum von V. Dann kann man $V_{/U}$ auf genau eine Weise so zu einem K-Vektorraum machen, dass die Kanonische Abbildung $\rho : V \to V_{/U}$ linear wird.

(1.) ρ ist surjektiv

(2.) $\text{Ker}\rho = U$

(3.) $\dim \left(V_{/U}\right) = \dim V - \dim U$ (Für V endlich dimensional.)

(4.) $V_{/U}$ hat die **universelle Eigenschaft:**
Ist $F : V \to W$ linear mit $U \subseteq \text{Ker}F$, so gibt es <u>genau eine</u> lineare Abbildung $\overline{F} : V_{/U} \to W$ mit $F = \overline{F} \circ \rho$
Weiter ist $\text{Ker}\overline{F} = (\text{Ker}F)_{/U}$ und Addition bzw. Multiplikation in $\overline{F}$ wohldefiniert. (Unabhängig von der Wahl des Repräsentanten.)

Satz Sei $V = V_1 \oplus V_2$ und $\rho : V \to V_{/V_2}$ die kanonische Abbildung. Dann ist $\rho' := \rho|_{V_1} : V_1 \to V_{/V_2}$ Iso.

4 Transformationen & Matrizen

Betrachte $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, K)$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in M(m \times 1, K)$

$$(*) : \quad A \cdot x = b \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \forall i \in \{1, \dots m\}$$

man nennt $A \cdot x = 0$ das zu $(*)$ gehörige **homogene System**. Ist $b \neq 0$, so ist $(*)$ **inhomogen**. Die Menge $\text{Lös}(A, b) = \{x \in K^n \big| A \cdot x = b\}$ heisst **Lösungsraum**.

Bezeichnung zu der durch A definierten Linearen Abbildung: $L_A = A = F_A : K^n \to K^m, x \mapsto A \cdot x$ ist $\textbf{Lös}(A, b) = L_A^{-1}(b) =$ Faser über b. Ist $b = 0$, so ist $\text{Lös}(A, b) = \text{Ker} L_A$
Diese zugehörige Lineare Abbildung vererbt den Rangbegriff der Matrix: $r = \text{rang} L_A := \text{rang} A$
Korollar:

(1.) $\textbf{Lös}(A, 0)$ ist ein Untervektorraum der Dimension $n - r$.

(2.) $\textbf{Lös}(A, b)$ ist ein affiner Raum der Dimension $n - r$. Ist $v \in \textbf{Lös}(A, b)$ belibig, so gilt:

$$\textbf{Lös}(A, b) = v + \textbf{Lös}(A, 0)$$
$$\text{Allgemeine Lösung } = \text{partikuläre Lösung } + \text{ homogene Lösung}$$

Satz $\text{Lös}(A, b) \neq 0 \Leftrightarrow \text{rang} A = \text{rang}(A, b)$
Satz Sei (A, b) in Zeilen-Stufen-Form, $\text{rang} A = r, b \in K^m$. Dann hat die Parametrisierung $\Phi_b : K^{n-r} \to \text{Lös}(A, b) \subseteq K^n$ folgende Eigenschaften

(1.) $\Phi_0 : K^{n-r} \to \text{Ker} A$ ist Iso.

(2.) $\Phi_b : K^{n-r} \to \text{Lös}(A, b)$ ist bijektiv

(3.) Es gibt einen homomorphismus $\phi : K^r \to K^n$, sodass $\forall b \in K^n$ gilt

$$\Phi_b = \phi(b) + \Phi_0 \text{ mit } \text{Lös}(A, b) = \phi(b) + \text{Lös}(A, b)$$

Sucht man die allgemeine Lösung eines linearen Gleichugnssystems, so ist die Parametrisierung wie folgt gegeben:

$$\Phi_b \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = D \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} + C \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$$

wobei d_{ij} Koeffizienten von b_j bei x_i sind und c_{ij} die Koeffizienten von λ_i bei x_i sind. Die Spalten von C werden **Fundamentalsystem** (Basis von $\text{Lös}(A, 0)$) genannt und $D \cdot b$ ist eine partikuläre Lösung.
Spezialfälle: Sei $A \in M(m \times n, K), b \in K^m$, so sind äquivalent:

(i) Das Lineare Gleichungsystem hat genau eine Lösung

(ii) $\text{rang} A = \text{rang}(A, b) = n$

Falls $m = n$, ist die eindeutige Lösung $x = A^{-1} \cdot b$ und $A \cdot x = 0$ hat nur die triviale Lösung $x = 0$.
Ist $\text{rang} A = m$, so ist $A : K^m \to K^m$ surjektiv und $\text{Lös}(A, b)$ ist nicht-leer für alle $b \in K^m$

Satz Seien V, W endlich Dimensionale K-Vektorräume und $v_1, \dots, v_n \in V, w_1, \dots, w_n \in W$, dann gilt

(1.) Sind $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig, so gibt es mindestens eine Lineare Abbildung $F : V \to W$ mit $F(v_i) = w_i$

(2.) Ist $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V, so ist dieses F eindeutig bestimmt und es erfüllt:

(a) $\text{Im} F = \text{span}(w_1, \dots, w_n)$

(b) F injektiv $\Leftrightarrow w_1, \dots, w_n$ sind linear unabhängig.

Korollar

(a) Hat V eine Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$, so gibt es genau einen Isomorphismus $\Phi_B : K^n \to V$ mit $\Phi_B(e_i) = v_i$

(b) Zu jeder Linearen Abbildung $F : K^n \to K^m$ gibt es genau eine Matrix $A \in M(m \times n, K)$ sodass $F(x) = A \cdot x, \forall x \in K^n$ und $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ F(e_1) & \dots & F(e_n) \\ | & & | \end{pmatrix}$

Satz (Matrizendarstellung von Linearen Abbildungen)
Gebeben seien zwei K-Vektorräume V, W mit jeweiliger Basis $A = (v_1, \dots, v_n) \subseteq V$, $B = w_1, \dots, w_m) \subseteq W$. Dann gibt es zu jeder linearen Abbildung $F \in \text{Hom}_K(V, W)$ eine Matrix $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, K)$ sodass $F(v_j) = \sum_{i=0}^{m} a_{ij} w_j$
Man drückt $F(v_j)$ durch die Vektoren $w_1, \dots, w_m$ aus und schreibt die Koeffizienten der Linearkombination in der j-ten Spalte von A auf.

$$A = \begin{pmatrix} | & & | \\ [F(v_1)]_B & \dots & [F(v_n)]_B \\ | & & | \end{pmatrix} \qquad [\cdot]_B = \Phi_B^{-1}$$

die so erhaltene Abbildung $M_B^A : \text{Hom}(V, W) \to M(m \times n, K), F \mapsto A = M_B^A(F)$ ist iso.
M_B^A ist die Darstellungsmatrix von F bezüglich den Basen A und B.
Sei dazu $F_i^j : V \to W$ durch

$$F_i^j(v_k) := \begin{cases} w_i, & \text{für } k = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{also } F_i^j(v_k) = \delta_{kj} w_i$$

Dann ist $M_B^A(F_i^j) = E_{ij} =$ die Matrix mit 1 in $i - j$-ten Einträgen.
Die $m \cdot n$ vielen Abbildungen bilden eine Basis von $\text{Hom}(V, W)$.
Korollar Sei $F : V \to W$ linear, $\dim V = n, \dim W = m, r = \text{rang} F$.
Dann gibt es Basen A und B, sodass $M_B^A(F) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ die Normalform annimmt.
Lemma Ist $A \in M(m \times n, K), B \in M(n \times r, K)$, so gilt

$$\text{rang} A + \text{rang} B - n \leq \text{rang} A \cdot B \leq \min\{\text{rang} A, \text{rang} B\}$$

Seien $A \in M(m \times n, K)$ und $B \in M(n \times r, K)$. Dann hat das **Matrizenprodukt** (c_{ij}) die Einträge

$$\times : M(m \times n, K) \times M(n \times r, K) \to M(m \times r, K)$$
$$A \times B \mapsto C, \text{ mit } c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Eine Matrix $A \in M(n \times n, K)$ ist **invertierbar** wenn es eine Matrix $A^{-1} \in M(n \times n, K)$ gibt, mit $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n$

Die Menge aller invertierbaren $n \times n$ Matrizen: $GL(n, K)$ ist zusammen mit der Matrizenmultiplikation $\cdot$ eine Gruppe und es gilt $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
Es sind äquivalent:

(i) A ist invertierbar

(ii) A^T ist invertierbar

(iii) $n =$ Spaltenrang

(iv) $n = \text{ZR}(A)$

Koordinatentransformation: Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $A = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\Phi_A : K^n \to V, \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1v_1 + \ldots + x_nv_n$.
Man nennt $\Phi_A^{-1}(v) = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ die **Koordinaten** von $v = x_1v_1 + \ldots + x_nv_n \in V$ bezüglich A.
Sei $B = (w_1, \ldots, w_n)$ eine weitere Basis von V. Dann ist die **Transformationsmatrix** (des Basiswechsels von A nach B) $T_B^A : K^n \to K^n = {\Phi_B}^{-1} \circ \Phi_A$

$$\begin{tikzcd}
K_A^n \arrow[d, "\Phi_B^{-1} \cdot \Phi_A =: T_B^A"'] \arrow[dr, "\Phi_A"] & \\
K_B^n \arrow[r, "\Phi_B"'] & V
\end{tikzcd}$$

Ist $v = x_1v_1 + \ldots + x_nv_n = y_1w_1 + \ldots + y_nw_n$, so gilt

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = T_B^A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Analog, falls $w_j = s_{1j}v_1 + \ldots + s_{nj}v_n$ und $s_i = (s_{ij}) \in M(n \times n, K)$, dann gilt $\Phi_B = \Phi_A \circ S$, daraus folgt

$$S = {\Phi_A}^{-1} \circ \Phi_B = {T_B^A}^{-1} = T_A^B, \quad \text{bzw. } T_B^A = S^{-1}$$

Sei $F : V \to W$ linear, A, B Basen, dann kommutiert folgendes Diagramm und es gilt:

$$\Phi_B \circ M_B^A(F) = F \circ \Phi_A, \quad \text{also } M_B^A(F) = {\Phi_B}^{-1} \circ F \circ \Phi_A$$

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[r, "\Phi_A"] \arrow[d, "M_B^A(F)"'] & V \arrow[d, "F"] \\
K^m \arrow[r, "\Phi_B"] & W
\end{tikzcd}$$

M_B^A ist die Verallgemeinerte Form der Transformationsmatrix, da falls $V = W$, $F = \text{id}$ ist und somit $M_B^A(\text{id}_V) = T_B^A$

Satz Seien U, V, W K-Vektorräume mit jeweiligen Basen A, B, C und seien $G : U \to V, F : V \to W$ linear. Dann gilt

$$M_C^A(F \circ G) = M_C^B(F) \cdot M_B^A(G)$$

und folgendes Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
K^r \arrow[r, "\Phi_A"] \arrow[d, "M_B^A(G)"] \arrow[dd, bend right, "M_C^A(F\circ G)"'] & U \arrow[d, "G"'] \arrow[dd, bend left, "F\circ G"] \\
K^m \arrow[r, "\Phi_B"] \arrow[d, "M_C^B(F)"] & V \arrow[d, "F"'] \\
K^n \arrow[r, "\Phi_C"'] & W
\end{tikzcd}$$

Transformationsformel: Ist $F : V \to W$ linear, A, A' Basen von V, B, B' Basen von W, so kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[r, "M_B^A(F)"] \arrow[d, "\Phi_A"] \arrow[dd, bend right, "T_{A'}^A"'] & K^m \arrow[d, "\Phi_B"'] \arrow[dd, bend left, "T_{B'}^B"] \\
V \arrow[r, "F"] & W \\
K^n \arrow[r, "M_{B'}^{A'}"] \arrow[u, "\Phi_{A'}"] & K^m \arrow[u, "\Phi_{B'}"']
\end{tikzcd}$$

$$M_{B'}^{A'}(F) = T_{B'}^{B} \cdot M_B^A(F) \cdot {T_{A'}^{A}}^{-1}$$
$$[F]_{B'}^{A'} = [\mathrm{id}_W]_{B'}^{B} \cdot [F]_B^A \cdot [\mathrm{id}_V]_A^{A'}$$

Zwei Matrizen heissen **äquivalent** wenn es $S \in GL(m,K), T \in GL(n,K)$ gibt, sodass $B = SAT^{-1}$ (Bildet auch eine Äquivalenzrelation)
Ist B in Normalform, so findet man S durch Zeilenumformung von $(\mathbb{1}_m, A)$ und T durch Spaltenumformung von $(A, \mathbb{1}_n)$ Zwei Matrizen heissen **ähnlich**, wenn es ein $S \in GL(m,K)$ gibt, sodass $B = SAS^{-1}$.
Lemma 2 Matrizen sind äquivalent, wenn $\mathrm{rang} A = \mathrm{rang} B$. Und jede Matrix mit $\mathrm{rang} A = n$ ist äquivalent zu $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Die Matrizen in Normalform repräsentieren die Äquivalenzklassen.
Satz Jede invertierbare Matrix ist das Produkt von endlich vielen Elementarmatrizen, d.h. die Elementarmatrizen erzeugen $GL(n,K)$

Die m-reihigen **Elementarmatrizen** sind definiert wie folgt:

$$S_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda_{i,i} & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad Q_i^j(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & \lambda_{ij} & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad P_i^j = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0_{ii} & \dots & 1_{ij} & \\ & \vdots & 1 & \vdots & \\ & 1_{ji} & \dots & 0_{jj} & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

- $S_i(\lambda)$ = Multiplikation der i-ten Zeile mit λ.
- $Q_i^j(\lambda)$ = Addition des λ-fachen der j-ten Zeile zur i-ten Zeile.
- P_i^j = Vertauschung der i-ten und j-ten Zeile.
- Multiplikation von links ergibt **Zeilen**-Umformungen. Multiplikation von rechts ergibt **Spalten**-Umformungen.

5 Determinante

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}^*$. Eine Abbildung

$$\begin{aligned} \det : M(n \times n, K) &\to K \\ A &\mapsto \det A \end{aligned}$$

heisst **Determinante**, wenn gilt

D1) det ist linear in jeder Zeile (multilinear): $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ $A = \begin{pmatrix} --a_1-- \\ \vdots \\ --a_n-- \end{pmatrix}$ Ist $a_i = b_i + c_i$, so ist

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ --a_i-- \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ --b_i-- \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ --c_i-- \\ \vdots \end{pmatrix}$$

D2) det ist alternierend. Sind zwei Zeilen gleich, so ist $\det A = 0$

D3) det ist normiert: $\det E_n = 1$

Weiterhin gelten folgende Rechenregeln:

D4) $\forall \lambda \in K : \det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det A$

D5) Ist eine Zeile $= 0$, so ist $\det A = 0$

D6) Entsteht B durch das Vertauschen zweier Zeilen, so ist $\det B = -\det A$

D7) Ist $\lambda \in K$ und ensteht A durch Addition des λ-fachen der j-ten Zeile zur i-ten Zeile, $i \neq j$, so ist $\det B = \det A$

D8) $\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$

D9) Ist $n \geq 2$ und besteht $A = \begin{pmatrix} A_1 & C \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ aus quadratischen Blöcken A_1, A_2, so ist $\det A = \det A_1 \cdot A_2$

D10) $\det A = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rang} A < n \Leftrightarrow A$nicht invertierbar

D11) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B), \quad \det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

In der Symmetrischen Gruppe S_n heisst eine Permutation $\tau \in S_n$ *Transposition*, falls τ zwei Elemente vertauscht und alle übrigen festlässt.
Lemma Ist $n \geq 2$, so existieren für alle $\sigma \in S_n$ Transpositionen $\tau_1, \dots, \tau_k$, sodass $\sigma = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_k$ (Nicht eindeutig bestimmt).
Ist $\sigma \in S_n$, so heisst jedes Paar (i, j), mit $i < j \in 1, \dots, n$ **Fehlstand** von σ, wenn gilt $\sigma(i) > \sigma(j)$.

$$\operatorname{sign}(\sigma) = \begin{cases} +1, & \#\text{ Fehlstände gerade} \implies \sigma \text{ gerade} \\ -1, & \#\text{ Fehlstände ungerade,} \implies \sigma \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\textbf{Lemma:} \qquad \forall \sigma \in S_n : \quad \operatorname{sign}(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^{n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

$$\textbf{Satz:} \qquad \forall \sigma, \tau \in S_n: \quad \text{sign}(\sigma \circ \tau) = \text{sign}(\sigma) \cdot \text{sign}(\tau), \text{sign}(\sigma^{-1}) = \text{sign}(\sigma)$$

Das macht sign : $(S_n, \circ) \to (\pm 1, \cdot)$ eine Gruppenhomomorphismus

$$\textbf{Korollar:} \qquad \forall \sigma \in S_n: \quad \det \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ e_{\sigma(n)} \end{pmatrix} = \text{sign}(\sigma)$$

Für $n \geq 2$ gilt:

(1.) Für jede Transposition $\tau \in S_n$ ist $\text{sign}(\tau) = -1$

(2.) Ist $\sigma \in S_n$ und ist $\sigma = \tau_1, \dots, \tau_k$, so ist $\text{sign}(\sigma) = (-1)^k$

Leibnitz Formel: Ist K ein Körper, $n \geq 1$, so gibt es genau eine Determinante $\det : M(n \times n, K) \to K$ und es gilt:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

Satz: $\det A^T = \det A$, also gelten alle Regeln der Determinante, die für Zeilen gelten, auch für Spalten.
Man kann $\det : K^(n \times n) \to K$ als Polynom mit n^2 Variablen anschauen. Die Abbildung ist stetig und differenzierbar, falls $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Entwicklungssatz von Laplace: Ist $n \geq 2, A \in M(n \times n, K)$, so gilt für alle i oder $j \in 1, \dots, n$

$$\det A = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A'_{ij} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A'_{ij}, \quad \text{mit } A'_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \iddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \iddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$A'_{ij} \in M(n-1 \times n-1, K)$ ist eine **Streichungsmatrix** von A

Satz Sei $A \in GL(n, K)$, Sei $C = (c_{ij}) \in M(m \times n, K)$ mit $c_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det A'_{ij}$, so ist $A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^T$

Cramer'sche Regel: Sei $A \in GL(n, K), b \in K^n, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$. Die Eindeutig bestimmte Lösung von $A \cdot x = b$ mit $x = A^{-1} \cdot b$ und $A = \left(a^1 | \dots | a^n\right)$, dann gilt $\forall i \in 1, \dots, n$

$$x_i = \frac{\det \left(a^1 | \dots | a^{i-1} | b | a^{i+1} | \dots | a^n\right)}{\det A}$$

Ist $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, so hängt x stetig von A und b ab.

Sei $A \in M(m \times n, K), k \leq \min\{m, n\}$, so heisst $A' \in M(k \times k, K)$ **k-reihige Teilmatrix** von A, wenn A' durch Streichen von Zeilen und Spalten von A enstanden ist. Dann ist $\det A'$ ein **k-reihiger Minor** von A. Durch Zeilen und Spaltenumformungen kann A kann auf die Form $\begin{pmatrix} A' & * \\ * & * \end{pmatrix}$ gebracht werden.

Die zu $A \in M(n \times n, K)$ **Komplementäre Matrix** $A^{\#} = \left(a_{ij}^{\#}\right) \in M(n \times n, K)$ ist definiert durch
$a_{ij}^{\#} := (-1)^{i+j} \cdot \det A'_{ji} =: \det A_{ji}$ Und es gilt $A \cdot A^{\#} = A^{\#} \cdot A = \det A \cdot E_n$, da $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^{\#} a_{jk} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{jk} \det A_{ji}$

Satz: Sei $A \in M(m \times n, K), 0 < r \leq \min\{m, n\}$. Dann sind äquivalent

(i) $r = \text{rang} A$

(ii) Es gibt einen r-reihigen Minor $\neq 0$ und für $k > r$ ist jeder k-reihiger Minor $= 0$
Diese r-reihigen Minoren erlauben uns, die Eigenschaft $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ auf nicht-quadratische Matrizen zu erweitern.

Sei V ein K-Vektorraum, $A = (v_1, \ldots, v_n), B = (w_1, \ldots, w_n)$ Basen von V und $F \in \text{End}(V)$ der eindeutig bestimmte Endomorphismus, so dass $F(v_i) = w_i$.
Dann heissen A und B **gleichorientiert**, wenn $\det F > 0$. Die **Orientierung** der kanonischen Basis wird als positiv bezeichnet.

Sei V ein K-Vektorraum, $F \in \text{End}(V)$. Ein $\lambda \in K$ heisst **Eigenwert** von F, wenn es einen Vektor $v \in V, v \neq 0$ gibt, sodass $F(v) = \lambda \cdot v$. v ist dann ein **Eigenvektor** von F. ($\lambda = 0$ ist erlaubt, $v = 0$ nicht.)
$F \in \text{End}(V)$ heisst **diagonalisierbar**, wenn es eine Basis von V aus Eigenvektoren von F gibt.
Entsprechend gilt für Matrizen: $A \in M(n \times n, K)$ heisst diagonalisierbar, wenn es eine Matrix $S \in GL(n, K)$ gibt, sodass SAS^{-1} eine Diagonalmatrix ist.

Ist $\dim V < \infty$, so ist $F \in \text{End}(V)$ genau dann diagonaliserbar, wenn es eine Basis $B = (v_1, \ldots, v_n)$ gibt, sodass $M_B(F)(= [F]_B)$ eine Diagonalmatrix ist mit Einträgen $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die zu den Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_n$ zugehörigen Eigenwerte sind.
Satz: Sei $F \in \text{End}(V)$ mit paarweise verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, n = \dim V$ Dann ist F diagonaliserbar.
Lemma: Sei $F \in \text{End}(V)$ mit Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_n$ zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, dann sind $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig.

Sei $F \in \text{End}(V), \lambda \in K$ dann ist der **Eigenraum** von F bezüglich λ:

$$\text{Eig}(F; \lambda) := \{v \in V \big| F(v) = \lambda \cdot v\} \subseteq V$$

(a) $\text{Eig}(F; \lambda)$ ist ein Untervektorraum

(b) λ ist ein Eigenwert $\Leftrightarrow \text{Eig}(F; \lambda) \neq \{0\}$

(c) $\text{Eig}(F; \lambda) \backslash \{\mathbf{0}\}$ ist die Menge aller Eigenvektoren von F

(d) $\text{Eig}(F; \lambda) = \text{Ker}(F - \lambda \cdot id_V)$

(e) Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ paarweise verscheiden, so ist $\text{Eig}(F; \lambda_i) \cap \text{Eig}(F; \lambda_j) = \{0\}$

Sei $F \in \text{End}(V), \lambda \in K$. Dann sind äquivalent

(i) λ ist ein Eigenwert von F

(ii) $\det(F - \lambda \cdot id_V) = 0$

Also sind die Eigenwerte die Nullstellen des **Charakteristischen Polynoms**

$$p_F : K \to K \quad \lambda \mapsto \det(F - \lambda \cdot id_V)$$

Lemma Ähnliche Matrizen haben das gleiche charakteristische Polynom und das charakteristische Polynom $p_F(t) = p_{M(F)}(t) = \det(M_A(F) - t \cdot E_n)$ ist unabhängig von der Wahl der Basis.

Satz: Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim V = n < \infty$ und $F \in \text{End}(V)$. Dann hat das charakteristische Polynom folgende Eigenschaften.

(a) Der Grad von $p_F(t) = n$

(b) Die Nullstellen von $p_F(t)$ sind die Eigenwerte von F

(c) Ist $A = M_A(F)$, so ist $p_F(t) = \det(A - t \cdot E_n)$

(d) Ist $A \in \text{End}(K^n)$ durch $A \in M(m \times n, K)$ beschrieben, so ist

$$\text{Eig}(A; \lambda) = \text{Lös}(A - \lambda \cdot E_n, 0) = \text{Ker}(A - \lambda \cdot E_n) = \{x \in K^n \,|\, (A - \lambda \cdot E_n) \cdot x = 0\}$$

Diagonalisierung: Sei $F \in \text{End}(V), \dim V = n < \infty$

(a) Ist F diagonaliserbar, so zerfällt das Charakteristische Polynom in Linearfaktoren: $p_F = \pm(t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n)$.

(b) Ist $p_F(t) = \pm(t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n)$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$, so ist F diagonalisierbar.

(c) Schreibe $r_i = \mu(p_F, \lambda_i)$ für die Vielfachheit der Nullstelle von λ_i
Dann lässt sich das Charakteristische Polynom schreiben als: $p_F = (t - \lambda_1)^{r_1} \cdots (t - \lambda_k)^{r_k}$ mit $1 \leq r_i \leq n$ und $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$

(d) Ist λ ein Eigenwert von F, so gilt

$$1 \leq \underbrace{\dim(\text{Eig}(F; \lambda))}_{\text{geometrische Vielfachheit}} \leq \underbrace{\mu(p_F, \lambda)}_{\text{algebraische Vielfachheit}}$$

Es sind äquivalent:

(i) F ist diagonalisierbar

(ii) p_F zerfällt in Linearfaktoren und geometrische Vielfachheit = algebraische Vielfachheit

(iii) Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die Paarweise verschiedenen Eigenwerte von F, so ist $V = \bigoplus_{i=1}^{k} \text{Eig}(F; \lambda_i)$

Diagonalisierung von F

(1.) Wähle eine Basis A von V

(2.) Berechne das charakteristische Polynom p_F

(3.) Finde die Nullstellen. Wenn es keine gibt, so ist F *nicht* diagonalisierbar

(4.) Für jeden Eigenwert, bestimme die Eigenräume $\text{Eig}(F; \lambda) = \text{Ker}(A - \lambda_i \cdot E_n)$
Falls $\dim \text{Eig}(F; \lambda) = \mu(p_F, \lambda_i)$, so ist F diagonaliserbar.

(5.) Die Basen der Eigenräume bilden eine Eigenbasis B von V. Dann ist

$$M_B(F) = [F]_B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [F(v_1)]_B & \ldots & [F(v_n)]_B \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Zwei diagonaliserbare Endomorphismen $F, G \in \text{End}(V)$ heissen **simultan diagonalisierbar**, wenn es eine Basis B von V gibt, sodass $[F]_B = M_B(F)$ und $[G]_B = M_B(G)$ diagonal sind.
Satz: Das ist genau dann der Fall, wenn $F \circ G = G \circ F$ ist.

Sei $P(t) = \alpha_r t^r + \alpha_{r-1}t^{r-1} + \ldots + \alpha_1 t + \alpha_0 \in K[t]$ ein Polynom und $F \in \text{End}(V)$. Dann gibt

$$P(F) = \alpha_r \underbrace{F^r}_{F\circ F\circ\ldots\circ F} + \ldots + \alpha_1 F + \alpha_0 id_V \in \text{End}(V)$$

eine Abbildung

$$\begin{aligned}\Phi_F : K[t] &\to \text{End}(V)\\ p &\mapsto P(F)\end{aligned}$$

Das ist ein Homomorphismus von Ringen und von K-Vektorräume mit

- Bild $K[F] := \{P(F) \big| P \in K[t]\} \subseteq \text{End}(V)$
- Kern $I_F := \{P(t) \in K[t] \big| P(F) = 0\} \subseteq K[t]$ heisst **Ideal** von F

Satz von Cayley-Hamilton: Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum, $F \in \text{End}(V)$ und P_F das charakteristische Polyom von F. Dann gilt $P(F) = 0$. Also ist $P_F \in I_F$ und $P_A(A) = 0, \forall A \in M(n \times n, K)$

Sei $(R, +, \cdot, 0)$ ein kommutativer Ring. Eine nichtleere Teilmenge $I \subseteq R$ heisst **Ideal**, falls gilt

I1) $\forall P, Q \in I : P + Q \in I$

I2) $\forall P \in I, \forall Q \in \mathbb{R} : P \cdot Q = Q \cdot P \in I$

Sei $I \subseteq R$ ein Ideal, dann ist der Quotientenring $R_{/I}$ definiert durch die Äquivalenzrelation $x \sim y$, falls $x - y \in I$. $R_{/I}$ ist ein Kommutativer Ring.

Satz: Zu jedem Ideal $I \subseteq K[t]$ mit $I \neq \{0\}$ gibt es ein eindeutiges Polynom $M \in K[t]$, sodass

(a) M ist normiert (d.h. $M(t) = 1 \cdot t^d + \ldots$)

(b) $\forall P \in I$ gibt es ein $Q \in K[t]$, sodass $P = M \cdot Q$

M heisst **Minimalpolynom** von I
Satz: Sei $\dim V = n < \infty$, $F \in \text{End}(V)$. Dann gilt

(a) M_F teilt P_F

(b) P_F teilt M_F^n für $K = \mathbb{C}$

6 Beispiele

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \qquad \det A = a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - g \cdot e \cdot c - h \cdot f \cdot a - i \cdot d \cdot b \quad \left(\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} +\det\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} b & c \\ h & i \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} a & c \\ g & i \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} a & c \\ d & f \end{pmatrix} \\ +\det\begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} a & b \\ g & h \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}, \qquad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i \cdot b^{(n-i)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \frac{n^2(n+2)^2)}{4}$$

$$\prod_{i=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^i = \frac{n^n}{n!}$$

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}$$

$$A \in GL(m, K), B \in M(m \times n, K), C \in M(n \times m, K), D \in GL(n, K)$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & \mathbb{1}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_m & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_m & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ D^{-1}C & \mathbb{1}_n \end{pmatrix}$$

$$\implies \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(D - CA^{-1}B) = \det(D) \cdot \det(A - BD^{-1}C)$$

Vandermonde Determinante

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\det V(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$