Organisation

Chefassistent: Andrea Nützi, andrea.nuetzi@math.ethz.ch

Für gelöste Übungen gibt es einen Notenbonus von bis zu 0.25 Noten falls mehr als 40% sinnvoll bearbeitet sind.
In der MMP I werden vorallem Analytische Methoden der mathematischen Physik behandelt. Genauer werden folgende Themen besprochen:

- Masstheorie, Lebesgue Integral (Skizzenhaft, d.h. viele Beweise werden ausgelassen)
- Fouriertheorie
- Hilberträume, Eigenwertprobleme + spezielle Funktionen
- Distributionen
- Randwertprobleme, Dirichletproblem

In der MMP II werden vorallem Algebraische Methoden betrachtet, das an Gruppen- und Darstellungstheorie anscheidet. Dort geht es darum, Symmetrien auszunutzen um nützliche Aussagen über Physikalische Probelme zu machen.
Immer wieder werden wir Beispiele aus der Physik anschauen.
Als Hautpreferenz ist der Skript von G. Felder

1 Mass- und Integrationstheorie

1.1 Masstheorie

Diese Thema befasst sicht damit, Teilmengen von einer Mengen ein "Volumen". Leider ist es nicht immer möglich, jeder Teilmenge ein gescheites Volumen zuzuordnen und man muss sich darauf beschränken, nur geweisse Teilmenge anzuschauen. Dazu dient die erste Definition

Definition σ-Algebra

Sei X eine Menge. Eine Teilmange $\mathcal{A} \neq 0$ von $\mathcal{P}(X)$ heisst **σ-Algebra**, falls gilt

- $A \in \mathcal{A} \implies A^c := X \setminus A \in \mathcal{A}$
- Für jede Folge $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ in $\mathcal{A}$ ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Bemerkung: Damit gilt auch für beliebige $A, B \in \mathcal{A}$

- $A \cup B \in \mathcal{A}$, und $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{A}$
- $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$
- $\bigcap n = 1^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, falls $A_n \in \mathcal{A}, \forall n$

Definition Mass

Ein Mass auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ ist eine Funktion $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, sodass gilt

- $\mu(\emptyset) = 0$
- Für jede Folge $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $A_i \in \mathcal{A} \forall j$, und $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$ gilt

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Beispiel: (Zählmass). Sei $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X) = \{A | A \subseteq X\}$. Dann ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra und

$$\mu : \mathcal{A} \to [0, 1], \mu(A) = \begin{cases} |A|, \text{falls} A \text{endlich} \\ \infty, \text{sonst} \end{cases}$$

Ist ein Mass.

Lemma

Sei μ ein Mass auf der σ-Algebra $\mathcal{A}$. Dann gilt:

(i) $A, B \in \mathcal{A}, A \subseteq B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$

(ii) Sei $(A_i)_{i \geq 1}$ eine Folge in $\mathcal{A}$, dann ist $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

Für einen Quader $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ definieren wir das **Volumen**

$$|R| := (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n)$$

Definition

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Dann heist

$$\mu^*(A) := \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} |R_i| | R_i \subseteq \mathbb{R}^n \text{ Quader mit } \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \supseteq A\}$$

das **Lebesgue'sche äussere Mass** von A.

Achtung: μ^* ist kein Mass, sonder etwas schwächeres. Ein äussere Mass welches folgende Axiome erfüllt:

- $\mu^*(\emptyset) = 0$
- $A \subseteq B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
- $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$

Es ist möglich um von einem äusseren Mass ein Mass zu bekommen. Dazu definieren wir folgendes:

Definition Lebesgue-Nullmenge

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst **(Lebesgue-)Nullmenge**, falls $\mu^*(A) = 0$.
Wir sagen eine Eigenschaft $P(x)$ von Punkten $x \in \mathbb{R}^n$ gilt **fast überall**, (f.ü.), falls

$$\mu^* \left(\{x \in \mathbb{R}^n | \neg P(x)\}\right) = 0$$

Definition Lebesgue-mesbar

Eine Menge $E \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst **(Lebesgue-)messbar**, falls für alle $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

Satz

(i) Die Lebesgue messbaren Menge bilden eine σ-Algebra $\mathcal{A}$.

(ii) Die Einschränkung von μ^* auf $\mathcal{A}$ ist ein Mass, das **Lebesgue'sche Mass** μ

(iii) Alle offenen und alle abgeschlossenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ sind Lebesgue-messbar und $\mu(R) = |R|$ für alle Quader $R \subseteq \mathbb{R}^n$.

(iv) Nullmengen sind messbar und haben Mass 0.

(v) Ist $E \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar, so ist die Einschränkung von μ auf die messbaren Teilmenge von E wieder ein Mass, das Lebesgue'sche Mass auf E.

Beweis Übung!

2 Das Lebesgue'sche Integral

Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und μ das Lebesgue'sche Mass auf E.

Definition

Wir sagen eine Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ heisst **messbar**, falls für jedes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$

$$f^{-1}(I) = \{x \in E | f(x) \in I\} \subseteq E$$

messbar ist. Analog im komplexen heisst $f : E \to C$ messbar, falls $\mathrm{Re}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$ messbar sind.

Wie beim Riemann integral möchten wir zuerst die Treppenfunktionen anschauen und diese verallgemeinern.

Definition

Die **charakteristische Funktion** einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die Funktion $\chi_A : \mathbb{R}^n \to \{0, 1\}$ gegeben durch

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad x \in A, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Funktionen der Form $\varphi(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \chi_{E_i}(x)$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$ mit $E_i \subseteq \mathbb{R}^n$ *mesbar* heissen **einfach**.

Definition

Sei $\varphi(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \chi_{E_i}(x)$ eine einfache Funktion mit $\mu(E_i) < \infty, \forall i$, dann definieren wir mit $E := \bigcup_{i=1}^m E_i$ das **Integral** von φ als

$$\int_E \varphi(x)dx := \sum_{i=1}^m \lambda_i \mu(E_i)$$

Falls alle $\lambda_i > 0$ sind und ein $\mu(E_i) = \infty$, dann setzen wir $\int_E \varphi(x)dx := \infty$.

Hier muss man aufpassen, dass diese Definition unabhängig von der Darstellung von φ, bzw. der Zerlegung in die E_i abhängig ist.
Es sei bemerkt, dass Treppenfunktionen im Sinne von Analysis I/II einfache Funktionen sind. Sei $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfeunktion, $\varphi = \sum_{i=1}^m \lambda_i \chi_{[a_i,b_i]}$. Dann ist

$$\int_{[a,b]} \varphi(x)dx = \sum_{i=1}^m \lambda_i(b_i - a_i)$$

also gleich dem Riemann'schen Integral von φ.
Daraus folgt auch, dass alle Riemann-Integrierbare Funktionen auch Lebesgue-Integrierbar sind. Umgekehrt aber, gibt es aber Funktionen, die jetzt neu Lesbesgue-Integrierbar sind.

Ein Punkt ist ein Quader mit Seitenlänge 0, also ist $\{x\} \subseteq \mathbb{R}$ messbar mit Mass 0. Insbesondere ist jede abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ messbar.
Weil eben $\mu(\mathbb{Q}) = 0$ ist, haben wir, dass die Dirichelet-Funktion, welche gleich $\chi_{\mathbb{Q}}$ integrierbar ist (mit Integral gleich Null).

Lemma

Seind $\varphi_1, \varphi_2 : E \to \mathbb{R}$ einfach mit $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x), \forall x \in E$, so ist

$$\int_E \varphi_1(x)dx \leq \int_E \varphi_2(x)dx$$

Definition

Sei $f : E \to [0, \infty]$ messbar. Dann existiert eine Folge $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ von einfachen Funktionen mit $0 \geq \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq \ldots, \forall x \in E$ mit $\lim i \to \infty(x)\varphi_i(x) = f(x), \forall x \in E$.
Wegen der Monotonie des Integrals ist dann auch die Folge der Integrale monoton. In diesem Fall ist dieser Grenzwert

$$\int_E f(x)dx := \lim i \to \infty \int_E \varphi_i(x)dx \in [0, \infty]$$

unabhängig von der Wahl der Folge φ_i. Falls $\int_E f(x)dx < \infty$, so heisst f **Lebesgue-integrierbar**, und wir nennen $\int_E f(x)dx$ das **Lebesgue-integral** von f.

Um auch Funktionen, die negative Werte annehmen, zu integrieren erweitern wir den Begriff wie folgt:

Definition

Sei $f : E \to \mathbb{R}$ messbar und seien $f_\pm := \max\{0, \pm f(x)\}$, so dass $f = f_+ - f_-$. Dann heisst f **Lebesgue-integrierbar**, falls f_+ und f_- Lesbesgue integrierbar sind und wir schreiben für sein Lebesgue integral:

$$\int_E f(x)dx := \int_E f_+(x)dx - \int_E f_-(x)dx$$

Komplex-wertige Funktionen $f : E \to \mathbb{C}$ heissen integirerbar, falls $\mathrm{Re}f$ und $\mathrm{Im}f$ integierbar sind und wir definieren wir das Integral als

$$\int_E f(x)dx := \int_E \mathrm{Re}f(x)dx + i\int_E \mathrm{Im}f(x)dx$$

Lemma

Sei $f : E \to \mathbb{C}$ messbar. Dann ist $|f| : E \to \mathbb{R}$ messbar und f ist genau dann integrierbar, wenn $|f|$ integrierbar ist, also

$$\int_E |f(x)|dx < \infty$$

Es gibt wie immer verschiedene Arten das Integral zu schreiben. Hier sind verschiedene wege aufgelistet:

$$\int_E f(x)dx = \int_E f dx = \int_E f = \int_E f(x_1, \dots, x_n)d^n x = \int_e f(x_1, \dots, x_n)d(x_1, \dots, x_n)$$

Die Rechenregeln des Lebesgue-integrals sind ähnlich wie beim Riemann-integral:

Satz Rechenregeln Lesbesgue-Integral

Seien $f, g : E \to \mathbb{C}$ integrierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann gilt

(i) $\alpha f + \beta g$ ist integrierbar und $\int_E(\alpha f + \beta g) = \alpha \int_E f + \beta \int_E g$

(ii) $f \leq g \implies \int_E f \leq \int_E g$

(iii) $f(x) = g(x)$ fast überall $\implies \int_E f = \int_E g$

(iv) $\int_E |f(x)|dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ fast überall.

(v) $|\int_E f(x)dx| \leq \int_E |f(x)|dx$

(vi) Ist $D \subseteq E$ messbar, so ist die Einschränkung $f|_D$ messbar und $\int_D f(x)dx = \int_E f(x)\chi_D(x)dx$

(vii) Ist f Riemann-integrierbar auf einem kompakten Intervall $[a, b]$, so ist f auch Lebesgue-integrierbar und ihre Integrale sind gleich.

(viii) Sei $x \mapsto Ax+b$ eine affin lineare Transformation des $\mathbb{R}^n$, mit $A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$. Dann ist $x \mapsto f(Ax+b)$ integierbar und $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = |\det A| \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax + b)dx$

2.1 Konvergenzsätze

Satz der monotonen Konvergenz

Sei $(f_i)_{i=1}^{\infty}$ eine Folge von integrierbaren Funktionen auf E mit $0 \leq f_1(x) \leq f_2 \leq \dots$ und $f_i(x) \to f(x)$ konvergiert punktweise für alle $x \in E$.
Ist die Folge $\int_E f_i(x)dx$ beschränkt, so ist $f(x)$ integrierbar und es gilt

$$\lim_{i\to\infty} \int_E f_i(x)dx = \int_E \lim_{i\to\infty} f_i(x)dx = \int_E f(x)dx$$

Der folgende Satz, im Englischen "Dominated Convergence Theorem (DCT)" genannt, wird Lebesgue zugeschrieben.

Satz von der majorisierten Konvergenz

Sei $(f_i)_{i=1}^{\infty}$ eine Folge integrierbarer Funktionen auf E mit $\lim_{i\to\infty} f_i(x) = f(x), \forall x \in E$ und es existiere eine integierbare Funktion (**Majorante** genannt) g mit $|f_i(x)| \leq g(x), \forall x \in E, i \in \mathbb{N}$.
Dann ist f integrierbar und es gilt

$$\lim_{i\to\infty} \int_E f_i(x)dx = \int_E \lim_{i\to\infty} f_i(x)dx = \int_E f(x)dx$$

Beispiel: Berechne $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt[n]{x}}$. Hier kann man die Majorante $g(x) = 1$ benutzen und somit den Limes in das Integral reinziehen:

$$\lim_{i\to\infty} \int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt[n]{x}} = \int_0^1 \lim_{i\to\infty} \frac{1}{1+\sqrt[n]{x}} dx = \frac{1}{2}$$

2.2 Satz von Fubini

Seien $E \subseteq \mathbb{R}^n, F \subseteq \mathbb{R}^m$ messbar.

Lemma

Sei f eine messbare Funktion auf $E \times F$. Dann sind die Funktionen $f_y : x \in E \mapsto f(x,y)$, bzw. $f_x : y \mapsto f(x,y)$ für fast alle y bzw. x messbar und

Wir können also, falls $f \geq 0$ die Integrale über x bzw y betrachten

$$\varphi(y) = \int_E f(x,y)dx \quad \text{und} \quad \psi(x) = \int_F f(x,y)dy$$

zumindest für fast alle y bzw. x.

Satz Fubini

Sei f eine messbare Funktion auf $E \times F$.

(i) Falls $f \geq 0$, so sind $\varphi(y), \psi(x)$ messbar und es gilt

$$\int_F \varphi(y)dy = \int_F \int_E f(x,y)dxdy = \int_E \int_F f(x,y)dydx = \int_E \psi(x)dx \quad \in [0,\infty]$$

(ii) Ist f komplexwertig und ist

$$\int_E \left(\int_F |f(x,y)|dy \right) dx < \infty \quad \text{oder} \quad \int_F \left(\int_E |f(x,y)|dx \right) dy < \infty$$

so ist f integrierbar und

$$\int_{E\times F} |f(x,y)|dxdy < \infty$$

(iii) Ist f komplexwertig und über $E \times F$ integrierbar, so ist f_x, bzw. f_y für fast alle x, bzw. y integrierbar und φ und ψ sind integrierbar und es gilt

$$\int_F \varphi(y)dy = \int_F \int_E f(x,y)dxdy = \int_E \int_F f(x,y)dydx = \int_E \psi(x)dx \quad \in [0,\infty]$$

Bemerkung: Insbesondere ist z.B.

$$\int_{R^n} f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n = \int_R \dots \left(\int_R f(x_1,\dots,x_n)dx_1 \right) \dots dx_n$$

falls f auf $\mathbb{R}^n$ integrierbar ist.

2.3 L^p Räume

Wir möchten alle integrierbaren Funktionen nehmen und sie als Vektorraum betrachten.

Definition

Zwei integrierbare Funktion $f, g : E \to \mathbb{C}$ mit $E \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar, heissn **äquivalent** (schreibe $f \sim g$, falls für fast alle $x \in E$ gilt $f(x) = g(x)$.

Dies ist eine Äquivalenzrelation und die Menge der Äquivalenzklassen heisst

$$L^1(E) = \{f \text{ messbar} | \int_E |f(x)|dx < \infty\}_{/\sim}$$

Allgemeiner definiern wir für $p \geq 1$ die Menge

$$L^p(E) := \{f \text{ messbar} | \int_E |f(x)|^p dx < \infty\}_{/\sim}$$

Lemma

Für $f, g \in L^p(E), \lambda \in \mathbb{C}$ ist $f + \lambda g \in L^p(E)$. ALso bildet $L^p(E)$ einen Vektorraum.

Der Grund wieso man die äquivalenten Funktionen herausteilen möchte, ist damit man einen gescheiten Normbegriff haben. Dieser wird für die positive Definitheit gebraucht.

Satz

Der $L^p(E)$ Raum mit der Norm

$$\|f\|_p := \left(\int_E |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

ist ein normierter **Vektorraum**

Erinnerung Analysis:

- Eine Folge (f_i) in einem normierten Vektorraum V konvergiert gegen $f \in V$, falls $\lim_{i\to\infty} \|f_i - f\| = 0$.
- Die Folge heisst **Cauchy-Folge** , falls $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ mit $\|f_i - f_j\| < \epsilon, \forall i, j > N$
- V heisst **vollständig** oder **Banachraum** , falls jede Cauchyfolge konvergiert.

Satz Fischer-Riesz

Für alle $p \geq 1$ ist $L^p(E)$ ein Banachraum.

In der Physik ist der Fall für $p = 2$ sehr wichtig, da $L^2(E)$ ein Hilbertraum bildet, und in der Physik sehr viele Dinge durch Hilberträume beschrieben werden.

Wir möchten die integrierbaren Funktion durch stetige Funktionen anhähern. Wir werden später noch zeigen, dass die stetigen Funktionen mit kompakten Träger dicht sind in $L^p(E)$.

Da in der Physik die meisten zu betrachtenden Mengen "schön" sind, werden wir der Menge E einige Eigenschaften zuschreiben. Sei von nun $E \subseteq \mathbb{R}^n$ lokal kompakt, d.h. jeder Punkt von E hat eine kompakte Umgebung, d.h. $x \in U \subseteq K \subseteq E$ für U offen, K kompakt.

Zum Beispiel sind endliche Durchschnitte und Vereinigungen von offenen oder Abgeschlossenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ lokal kompakt. Aber zum Beispiel ist $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ nicht lokal kompakt.

Definition

Der **Träger** (engl. *suppport*) einer Funktion $f : E \to \mathbb{C}$ ist die Menge

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in E | f(x) \neq 0\}}$$

Wir schreiben $C_0(E)$ für die Menge aller stetigen Funktionen $f : E \to \mathbb{C}$ mit kompakten Träger.

Satz

Für lokal kompakte $E \subseteq \mathbb{R}^n$ (messbar) und $1 \leq p < \infty$ ist $C_0(E)$ dicht in $L^p(E)$, d.h. $\forall \epsilon > 0 \exists g \in C_0(E)$ mit $\|f-g\| < \epsilon$

3 Fourierreihen

3.1 Definitionen, Darstellungssatz

Sei $L > 0$ fix. **Fourierreihen** sind Reihen der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{\frac{2\pi i n}{L}x}, \quad f_n \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}$$

Konvergiert die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$, so ist die Summe $f(x)$ L-periodisch, also $f(x+L) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Man kann sich sicher folgende Fragen stellen.

- Wann konvergiert diese Reihe?
- Welche L-periodischen Funktionen lassen sich durch eine Fourierreihe darstellen und wie erhält man die Fourierkoeffiziente f_n?
- Welche Anwendungen und welche Intuition hat man über die Fourierreihe?

Satz

Sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ so, dass $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n| < \infty$. Dann konvergiert auch die Fourierreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{\frac{2\pi i n}{L}x}$ absolut und gleichmässig (in der $\|\cdot\|_\infty$-Norm) gegen eine L-periodische stetige Funktion f. Weiter gilt

$$\boxed{f_n = \frac{1}{L}\int_0^L e^{-\frac{2\pi i n}{L}x} f(x)dx}$$

Beweis: Die Absolute konvergenz folgt, da $|e^{\frac{2\pi i n}{L}x}| = 1$. Die Gleichmässige Konvergenz folgt aus

$$|f(x) - \sum_{|n|\leq N} f_n e^{\frac{2\pi i n}{L}x}| = |\sum_{|n|\geq N} f_n e^{\frac{2\pi i n}{L}x}| \leq \sum_{|n|\leq N} |f_n| \to_{n\to\infty} 0$$

gleichmässig in x. Da $f(x)$ der gleimässige Grenzwert von einer folge von stetigen Funktion $f_N(x)$ ist, ist f auch selber stetig.
Zuletzt berechnen wir

$$\frac{1}{L}\int_0^L e^{-\frac{2\pi i n}{L}x} \lim_{N\to\infty} \sum_{|k|\leq N} f_k e^{\frac{2\pi i k}{L}x} dx = (\dots)$$

Betrachten wir die einzelnen Glieder der folge in N, so sieht man, dass sie majorisiert wird durch $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k| < \infty$. Also können wir den Limes und das Integral austauschen und erhalten

$$(\dots) = \lim_{N\to\infty} \sum_{|k|\leq N} f_n \frac{1}{L}\int_0^1 e^{\frac{2\pi i}{L}x(k-n)} dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{|k|\leq N} f_n \delta_{k,n} = f_n$$

Beispiel: Für $|z| < 1$ so ist die folgende Reihe absolut konvergent

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{|n|} e^{inx}$$

Die Summe ist die geometrische Reihe und wir haben

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{|n|} e^{inx} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(ze^{ix}\right)^n + \sum_{n=-\infty}^{0} \left(\frac{1}{z} e^{ix}\right)^n - 1 \\ &= \frac{1}{1 - ze^{ix}} + \frac{1}{1 - ze^{-ix}} - 1 = \frac{1 - z^2}{12z \cos x + z^2}\end{aligned}$$

Was uns den Koeffizient f_n liefert:

$$f_n = z^{|n|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - z^2)e^{inx}}{1 - 2z \cos x + z^2} dx$$

3.2 Riemann-Lebesgue Lemma (allgemeine Version

Satz Riemann-Lebesgue Lemma

Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\lim_{k \to \pm\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{ikx} dx = 0$$

Zum Beweis brauchen wir folgendes Lemma:

Lemma

Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\lim_{t \to 0} \int_R |f(x + t) - f(x)| dx = 0$$

Sie besagt, dass die um t verschobene Funktion gegen f konvergiert (in der $\|\cdot\|_1$.
Beweis Lemma: Wir machen das in zwei Schritten. Zuerst betrachten wir eine schwache version und nehmen an, f sei stetig und mit kompakten Träger.
Sei nun $M = \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ (wohldefiniert da stetig, kompakter träger) und $\mathrm{supp}(f) \subseteq [-R, R]$. Dann gilt

- $|f(x + t) - f(x)| < 2M$
- $|f(x + t) - f(x)| = 0$ für $|x| > 2R$, falls $t < R$.

Dann wird also die Funktion majorisiert durch $2M\chi_{[-2R,2R]} \in L^1(\mathbb{R})$ und nach dem Satz der majorisierten Konvergenz haben wir

$$\lim_{t \to 0} \int_R |f(x + t) - f(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{t \to 0} |f(x + t) - f(x)| dx = 0$$

da f stetig ist.
Als nächstes zeigen wir es auch für beliebige Funktionen in $L^1(\mathbb{R})$. Sei nun $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $\epsilon > 0$ gegeben.

Da die stetigen Funktionen mit kompakten Träger dicht sind in $L^1(\mathbb{R})$, gibt es ein $g \in C_0(\mathbb{R})$ sodass $\|f-g\|_1 < \epsilon$. Dann gilt

$$\int_R |f(x+t)-f(x)|dx = \|f_t - f\|_1 \leq \underbrace{\|f_t - g_t\|_1}_{=\|f-g\|_1<\epsilon} + \underbrace{\|g_t - g\|_1}_{\text{Beweis für } C_0(\mathbb{R})} + \|g-f\|_1 < 3\epsilon$$

Nun kommen wir zum Beweis vom Riemann-Lebesgue Lemma. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_R f(x)e^{ikx}dx &= -\int_R f(x)e^{i(kx-\pi)}dx \\ &\overset{k\neq 0}{=} -\int_R f(x)e^{ik(x-\frac{\pi}{k}}dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}} f(x+\frac{\pi}{k})e^{ikx}dx\end{aligned}$$

Nun verwenden wir einmal die Form am Anfang und einmal die Form am schluss der Obigen gleichungen und erhalten

$$|2\int_R f(x)e^{ikx}dx| = |\int_{\mathbb{R}} e^{ikx}\left(f(x) - f(x+\frac{\pi}{k}\right)dx| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f(x+\frac{\pi}{k})|dx \to 0$$

nach dem Lemma.

Die Intuition des Beweises ist das wenn das k gross wird, oszilliert der Integrand sehr schnell und man addiert und subtrahiert praktisch gleich viel.

3.3 Dirichlet Kern, erste Konvergenzsätze

Sei nun f eine Integrierbare Funktion auf $[0, L]$ Dann definieren Wir die Fourierkoeffizienten:

$$f_n := \frac{1}{L} \int_0^L e^{-\frac{2\pi i n}{L} x} f(x) dx$$

Variante des Riemann-Lebesgue Lemmas (Korollar)

Es gilt für alle integrierbaren f wie oben, dass

$$f_n \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \pm\infty$$

Beweis: Wende das Riemann-Lebesgue Lemma oben auf die erweiterte Funktion

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, L], \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Korollar

Sei $f \in C^k([\mathbb{R}/L\mathbb{Z}])$, d.h. L periodisch und k-fach stetig diffbar.
Dann gilt für die Fourierkoeffizienten

$$|n|^k |f_n| \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \pm\infty$$

Beweis: Durch k-fache partielle Integration, wobei bei 0 und L wegen der Periodizät ignoriert werden können. Für $n \geq 0$ haben wir

$$f_n = \frac{1}{L} \int_0^L e^{-\frac{2\pi i n}{L} x} f(x) dx = \frac{(-1)^k}{L} \left(-\frac{L}{2\pi i n}\right)^k \int_0^L e^{-\frac{2\pi i n}{L} x} f^{(k)}(x) dx = \left(\frac{L}{2\pi i n}\right)^k g_n$$

mit g_n dem n-ten Fourierkoffizieten von $f^{(k)}$. Also haben wir nach dem Riemann Lebesgue Lemma, dass

$$|n|^k |f_n| = |\frac{L^k}{(2\pi)^k}||g_n| \to 0$$

Wir betrachten nun die Konvergenz der Fourierreihe und dazu die Partialsummen

$$(S_N f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} f_n e^{\frac{2\pi i n}{L} x} = \frac{1}{L} \int_0^L f(y) \sum_{n=-N}^{N} e^{\frac{2\pi i n}{L}(x-y)} dy$$

Wir wollen du Summe im Integranden genauer betrachten:

Definition Dirichletkern

Die Funktion $D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{2\pi i n t}$ heisst **Dirichletkern**.

Lemma

D_n erfüllt

(i) $D_N(t+1) = D_N(t) = D_N(-t)$

(ii) $\int_0^1 D_N(t)dt = 1$

(iii) $D_N(t) = \begin{cases} 2N+1 & t \in \mathbb{Z} \\ \frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)} & t \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

Beweis, die ersten beiden Aussagen sind klar. Die dritte Aussage ist für $t \in \mathbb{Z}$ klar. Für $t \notin \mathbb{Z}$ hat man die geometrische Summe

$$\begin{aligned} D_N &= e^{-2\pi i N t} \sum_{n=0}^{2N} e^{2\pi i n t} \\ &= e^{2\pi i N t} \frac{1 - \left(2^{2\pi i t}\right)^{2N+1}}{1 - e^{2\pi i t}} \\ &= \frac{e^{-2\pi i N t} - e^{2\pi i (N+1) t}}{1 - e^{2\pi i t}} \\ &= \frac{e^{-\pi i t (2N+1) t} - e^{\pi i t (2N+1)}}{e^{-\pi i t} - e^{\pi i t}} \\ &= \frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)} \end{aligned}$$

Wir können uns den Dirichletken D_N als oszillierende Funktion vorstellen, die im Limes $N \to \infty$ gegen die Dirichlet delta distribution konvergiert.

Satz

Sei $f \in C^1(\mathbb{R}/L\mathbb{Z})$ unf f_n die Fourierkoeffizienten von f. Dann konvergiert die Fourierreihe punktweise gegen die Funktion, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} f_n e^{\frac{2\pi i n}{L} x}$$

Beweis: Wir schreiben

$$\begin{aligned} (s_n f)(x) - f(x) &= \frac{1}{L} \int_0^L D_n \left(\frac{x-y}{L} \right) f(y) dy - f(x) \\ &= \frac{1}{L} \int_0^L D_n \left(\frac{x-y}{L} \right) (f(y) - f(x)) dy \\ &= \frac{1}{L} \int_0^L \sin \left((2N+1)\pi \frac{x-y}{L} \right) \frac{f(y) - f(x)}{\sin\left(\pi - \frac{x-y}{L}\right)} dy \\ &= \frac{1}{L} \int_0^L \frac{e^{(2N+1)\pi i \frac{x-y}{L}} - e^{-(2N+1)\pi i \frac{x-y}{L}}}{2i} \frac{f(y) - f(x)}{\sin\left(\pi - \frac{x-y}{L}\right)} dy \end{aligned}$$

Wir müssen noch prüfen ob $\sin\left(\pi - \frac{x-y}{L}\right)$ integrierbar ist. Sie kann man in den Stellen $\frac{x-y}{L} \in \mathbb{Z}$ zu einer stetigen Funktion fortsetzen. Also zeigen wir, dass der Grenzwer

$$\begin{aligned}\lim_{y\to x-nL} \frac{f(y)-f(x)}{\sin\left(\pi - \frac{x-y}{L}\right)} &\overset{L.H}{=} \lim_{y\to x-nL} \frac{f'(y)}{\cos\left(\pi\frac{x-y}{L}\right)} \\ &= \frac{f'(y)}{\cos(n\pi)}\left(-\frac{L}{\pi}\right) = (-1)^{n+1}\frac{L}{\pi}f'(x)\end{aligned}$$

exisitiert. Somit ist die Funktion stetig und insbesondere integrierbar. Also kann man das Riemann-Lebesgue Lemma verwenden und schliessen, dass $(s_N f)(x) - f(x) \to 0$ für $N \to \infty$.

Bemerkung: Der gleiche Beweis zeigt sogar, dass die Fourierreihe einer stetigen Funktion f gegen f in allen Punkten, an denen f diffbar ist konvergiert.

Wir zitieren ohne Beweis noch das folgende stärkere Resultat:
Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ heisst **von beschränkter Variation** falls es eine Konstante V gibt, sodass

$$\sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1} - f(x_i)| < V$$

für alle Einteilungen $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.
Zum Beispiel sind stückweise stetig differenzierbare Funktionen, die rechts und linksseitige Limites haben sind von beschränkter Variation mit

$$V = \int_a^b |f'(x)|dx + \sum_{x\in[a,b] \text{ Sprungstelle}} \text{Sprungdistanz}$$

Im Allgemeinen existieren für Funktionen von beschränkter Variation die einseitige Limites für alle $c \in [a,b]$

$$f(c+0) := \lim_{x\to a, x>c} f(x) \quad \text{und} \quad f(c-0) := \lim_{x\to c, x<c} f(x)$$

Satz

Sei f L-periodisch und von beschränkter Variation auf $[a,b]$. Dann gilt

(i) $\lim_{N\to\infty} s_n f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x+0) + f(x-0)\right)$

(ii) Die Konvergenz ist gleichmässig auf jedem abgeschlossenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, sofern f in jedem $x \in I$ stetig ist.

Gibs-Phänomen

Achtung: In der Nähe von Sprungstellen ist die Konvergenz nicht gleichmässig.
Nach dem Gibbs-Phänomen nehmen die $s_N(f)$ für beliebig hohe N nahe an der Sprungstelle einen Wert an, der sich c.a. 9% vom einseitigen Grenzwert unterscheidet

Als Beispiel betrachte man die Sägezahlfunktion

$$f(x) = \frac{1}{2} - x \text{auf } [0,1) \text{ periodisch fortgesetzt}$$

Dort sieht man sehr nahe bei der Sprungstelle immer diese Überschüsse immer ungefähr 9% von der Sprunggrösse überschiessen.

Die Fourierkoeffiziente für die Sägezahlfunktion sind dann

$$f_0 = 0, \quad f_n = \frac{1}{2\pi i n}, n \neq 0$$

Wir berechnen

$$g(x) = s_N f(x) - f(x) = \sum_{n=-N, n\neq 0}^{N} \frac{1}{2\pi i n} e^{2\pi i n x} - (\frac{1}{2} - x)$$

Die Maxima finden wir durch ableiten:

$$g'(x) = \sum_{n=-N, n\neq 0}^{N} e^{2\pi i n x} + 1 = D_n(x) = \frac{\sin((2N+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}$$

Die erste Nullstellle ist bei $x_1 = \frac{1}{2N+1}$. Nach dem Hauptsatz gilt dann

$$\begin{aligned} g(x_1) &= g(0) + \int_0^{x_1} g'(x) = -\frac{1}{2} + \int_0^{\frac{1}{2n+1}} \frac{\sin((2N+1)\pi x)}{\sin(\pi x)} dx \\ &= -\frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)\frac{\pi x}{2N+1}}{\pi x \sin\left(\frac{\pi x}{2N+1}\right)} dx \simeq 0.0895... + \mathcal{O}(\frac{1}{N}) \end{aligned}$$

3.4 Reellwertige Darstellung der Fourierriehen

Sei $f \in C^1(\mathbb{R}/L\mathbb{Z})$ reellwertig. Dann

$$f_n = \overline{\frac{1}{L}\int_0^L f(x) e^{+\frac{2\pi i n}{L}x} dx} = \overline{f}_{-n}$$

Definiere $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{2}(a_n - i b_n) \quad \text{für } n \geq 0 \\ \implies f_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + i b_n) \end{aligned}$$

Beachte $f_0 = \overline{f_0} \implies b_0 = 0$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{\frac{2\pi i n x}{L}} \\ &= f_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - i b_n)\left(\cos\frac{2\pi n}{L}x + i \sin\frac{2\pi n}{L}x\right) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + i b_n)\left(\cos\frac{2\pi n}{L}x - i\sin\frac{2\pi n}{L}x\right) \\ &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)\right) \end{aligned}$$

Es gilt ausserdem:

$$a_n = 2\mathrm{Re} f_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)dx$$
$$b_n = -2\,\mathrm{Im}\, f_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)dx$$

3.5 Poissonsche Summationsformel

Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ sodass $|f|, |f'| \leq \frac{c}{1+x^2}$ für ein $c > 0$ und sei

$$g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+kL)$$

Dann ist $g(x+L) = g(x)$ (L-periodisch). Ausserdem konvergiert die Reihe gleichmässig auf $[0, L]$, denn

$$|g(x) - \sum_{k\leq\mathbb{N}} f(x+kL)| \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} |f(x+kL| \leq \sum_{|k|>N} \frac{c}{1+(x+kL)^2} \leq \sum_{|k|>N} \frac{c}{(|x|-1)^2L^2} \to_{N\to\infty} 0$$

Also ist g stetig, da es ein gleichmässiger Limes stetiger Funktionen ist. Ebenso betrachtet man f' und erhält, dass g auch stetig differenzierbar ist. ($g \in C^1(\mathbb{R}/L\mathbb{Z})$).

Betrachtet man die Fourierkoeffizienten, so erhält man

$$\begin{aligned} g_n &= \frac{1}{L}\int_0^L \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+kL)e^{-\frac{2\pi in}{L}x}dx \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{L}\int_0^L f(x+kL)e^{-\frac{2\pi in}{L}x}dx \\ &== \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{L}\int_{kL}^{(k+1)L} f(x)e^{-\frac{2\pi in}{L}x}dx \\ &= \frac{1}{L}\int_R f(x)e^{-\frac{2\pi in}{L}x}dx \end{aligned}$$

Definition Fourier-transformation

Die **Fouriertransformation** von einer Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$ ist

$$\hat{f}(k) = \int_R f(x)e^{-ikx}dx$$

Also gilt

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+nL) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n e^{\frac{2\pi in}{L}x} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{L}\hat{f}\left(\frac{2\pi n}{L}\right)e^{\frac{2\pi in}{L}x}$$

Für $x = 0$ erhält man insbesondere die Poissonsche Summationsformel

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nL) = \frac{1}{L}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}\left(\frac{2\pi n}{L}\right)$$

3.6 Vertauschen von lim und $\int$ mit Ableitungen

Sei $f_n : X \to \mathbb{C}$ Funktionen auf X. Wir sagen die Funktionen konvergieren gleichmässig gegen eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$, falls sie in der Supremumsnorm konvergiert. Also

$$\|f_n - f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \to_{n\to\infty} 0$$

Ein Beispiel von gleichmässiger Konvergenz sind konvergenze Reihen bei dem die Funktionen durch die Partialsummen gegeben sind:

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} h_k, \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \|h_k\|_\infty < \infty$$

für $h_k : X \to \mathbb{C}$ Funktionen.

Satz

(i) Sei $(f_n : X \to \mathbb{C})$ eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmässig gegen eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dan ist f wieder stetig.

(ii) Sei $X \subseteq R^n$ offen, und $(f_n : X \to \mathbb{C})$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen, die *punktweise* gegen eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ konvergiert. Konvergieren die partiellen ableitungen $\partial_j f_n$ *gleichmässig*, so darf man die Ableitung in den Limes ineinziehen, d.h.

$$\partial_j \lim_{n\to\infty} f_n = \partial_j f = \lim_{n\to\infty} \partial_j f_n$$

Beweis Analysis I/II.

Satz

Sei X ein metrischer Raum, $E \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und $f : X \times E \to \mathbb{C}$. Seien $x \mapsto f(x, y)$ stetig, $y \mapsto f(x, y)$ integrierbar und setze $F(x) = \int_E f(x, y)dy$. Dann gilt:

(i) Existiert eine majorante $g \geq 0$ auf E, integerierbar mit

$$|f(x, y)| \leq g(y), \forall x, y$$

so ist F stetig.

(ii) Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und die Funktionen $x \mapsto f(x, y)$ stetig differenzierbar für alle y. Gibt es eine majorante $g \geq 0$ integrierbar auf E, mit

$$|\partial_j f(x, y)| \leq g(y) \forall x, y, j$$

Dann ist F stetig differenzierbar und man kann die Ableitung in das Integral ziehen:

$$\partial_j \int_E f(x, y)dy = \partial_j F = \int_E \partial_j f(x, y)dy$$

Beweis:

(i) Wir haben mit dem Satz der majorisierten Konvergenz, dass

$$\lim_{x\to x_0} F(x) = \lim_{x\to x_0} \int_E f(x,y)dy = \int_E \lim_{x\to x_0} f(x,y)dy = \int_E f(x_0,y)dy = F(x_0)$$

(ii) Definiere die Funktion für ein h glein genug.

$$\varphi(x,y,h) := \frac{f(x+he_j,y) - f(x,y)}{h}$$

Der Grenzwert für $h \to 0$ ist die partielle Ableitung von f. Weil φ Integrierbar ist über y, und wegen dem Mittelwertsatzes gilt $|\varphi(x,y,h)| \leq g(y)$, so haben wir

$$\partial_j F(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+he_j) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \int_E \varphi(x,y,h)dy \overset{DCT}{=} \int_E \lim_{h\to 0} \varphi(x,y,h)dy = \int_E \partial_j f(x,y)dy$$

Die Stetigkeit folgt aus dem ersten Teil des Satzes.

3.7 Wärmeleitungsgleichung auf einem Ring

Wir stellen uns einen idealisierten eindimensionalen Ring mit Länge L vor wo eine Temperaturverteilung drauf liegt und wir sind daran interessiert, wie sich die Temperaturverteilung mit der Zeit ändert.

Sie die Temperaturverteilung zur Zeit t durch die Funktion $u(x,t)$ gegeben. Zunächst für $x \in [0, L]$, weil wir periodisch fortsetzen auf $x \in \mathbb{R}$.
Die Funktion erfüllt dann die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

wobei D eine positive Konstante ist. Weiterhin sei die Anfangsbedingung $u(x,0) = f(x)$ vorgegen. Wir wollen dann eine Lösung für alle t Lösen.

Durch geeignete re-skalierung der Koordinaten können wir immer davon Ausgehen, dass $L = 2\pi$ und $D = 1$. Unser Anfangswertproblem wird dann zu

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad u(x,0) = f(x)$$

Wir nehmen zusätzlich an, dass $f \in C^\infty(R/2\pi\mathbb{Z})$ und suchen Lösungen $u \in C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times (0,\infty))$ und wollen sie noch stetig am Rand fortsetzen.

Sei $u(x,t)$ eine solche Lösung des Anfangswertproblems. Dann entwickle sie in Fourierreihen:

$$u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n e^{inx}, \quad \text{mit} \quad u_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x,t)e^{-inx}dx$$

Zunächst bemerken wir, dass $u_n \in \mathbb{C}^\infty((0,\infty)) \cap C^0([0,\infty))$. Das folgt direkt da man die Ableitung in das Integral nehmen kann, weil eine Majorante existiert, da wir ein kompaktes Intervall hat und somit ein Maximum annimmt, also man nimmt

$$\sup_{(x,t)\in[0,2\pi]\times[a,b]} |\partial_t^p u(x,t)|$$

Es gilt ausserdem, dass

$$\partial_t u_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \partial_t u(x,t)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\partial_t^2 u(x,t)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x,t)(-in)^2 e^{-inx}dx = -n^2 u_n(t)$$

Und $u_n(0) = f - N$. Die (eindeutige Lösung) dieser gewöhnlichen DGL ist

$$u_n(t) = e^{-tn^2} f_n \implies u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-tn^2+inx} f_n$$

Umgekehrt müssen wir noch zeigen, dass u wie oben wirklich eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist.

(i) Die Funktion u ist C^∞ in $\mathbb{R} \times (0,\infty)$ und die partiellen Ableitungen sind

$$\partial_t^j \partial_x^k u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-n^2)^j (in)^k e^{-tn^2+inx} fn$$

Damit wir den Satz benutzen dürfen, müssen wir zeigen, dass die partiellen Ableitungen gleichmässig konvergieren. Da stimmt, dass die Reihe oben normal konvergiert auf $\mathbb{R} \times [a,b]$ mit $a > 0$, denn es gilt

$$\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ t\in[a,b]}} |(-n^2)^j (in)^k e^{-tn^2+inx} f_n| = n^{2j+k} \sup_{t\in[a,b]} |e^{-tn^2}| = e^{-an^2} n^{2j+k} |f_n| \to 0$$

und die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-an^2} n^{2j+k} |f_n|$ konvergiert.