

# CUỘC THI TOÁN MÔ HÌNH 2024 VÒNG 1



21 tháng 07 - 30 tháng 07, 2024

**Đội:** Peppa Pig

**Bảng:** THPT

**Thành viên:**

1. Phạm Ánh Bình Minh - THPT Chuyên Trần Đại Nghĩa
2. Trần Thị Hải Vân - THPT Chuyên Lê Hồng Phong TPHCM
3. Lý Thành Hưng - THPT Chuyên Trần Đại Nghĩa

Mục lục	Trang
<b>1 Tóm tắt bài toán</b>	<b>3</b>
<b>2 Bài toán được đưa về mô hình toán học như thế nào?</b>	<b>3</b>
<b>3 Điều kiện không thể vi phạm (Hard constraint)</b>	<b>4</b>
3.1 Những điều kiện không thể vi phạm . . . . .	4
3.2 Mô hình hóa những điều kiện không thể vi phạm . . . . .	4
<b>4 Giải bài toán với những điều kiện không thể vi phạm</b>	<b>5</b>
4.1 Phương pháp giải . . . . .	5
4.2 Một lịch trình thỏa mãn những điều kiện trên (Kết quả của phương pháp giải) . . .	6
<b>5 Giải quyết những mong muốn của nhân viên (Soft constraint)</b>	<b>6</b>
5.1 Những mong muốn của nhân viên . . . . .	6
5.2 Mô hình hóa những mong muốn của nhân viên . . . . .	7
<b>6 Giải quyết bài toán gồm cả điều kiện không thể vi phạm và những mong muốn của nhân viên</b>	<b>7</b>
6.1 Bổ sung ràng buộc về mong muốn của nhân viên vào bài toán ban đầu (đã giải ở mục 4) . . . . .	7
6.2 Giải bài toán và hiển thị kết quả . . . . .	8
<b>7 Đánh giá mô hình giải quyết bài toán</b>	<b>8</b>
7.1 Ưu điểm . . . . .	8
7.2 Nhược điểm . . . . .	8
<b>8 Mở rộng bài toán và định hướng phát triển mô hình</b>	<b>9</b>
<b>9 Kết luận</b>	<b>9</b>
<b>10 Tài liệu tham khảo và Phụ lục</b>	<b>10</b>
<b>11 Lời cảm ơn</b>	<b>10</b>

## 1 Tóm tắt bài toán

Trạm xá nhỏ gồm 8 nhân viên điều dưỡng:

- An, bình, Châu và Dương làm việc toàn thời gian (full-time) 36 giờ/ tuần
- Linh, Kiệt, Giang và Hiếu thực tập bán thời gian (part-time) 20 giờ/ tuần

⇒ **Vấn đề cần giải quyết:** Tìm ra phương án (mô hình toán) sắp xếp các ca trực cho trạm xá trong 28 ngày (từ ngày 05/08/2024 đến 01/09/2024), biết:

- Mỗi ngày trạm xá có 2 ca làm việc: Ca ngày (S) và Ca đêm (T) (Mỗi ca 8 tiếng)
- Ca ngày cần 3 nhân viên và ca đêm cần 1 nhân viên
- Quy ước: khi xếp lịch ca đêm sẽ tính từ ngày bắt đầu ca
- Ngoài ra: Có những dữ liệu về mong muốn của nhân viên

## 2 Bài toán được đưa về mô hình toán học như thế nào?

Để mô hình hóa bài toán lập lịch cho nhân viên trạm xá như yêu cầu, chúng ta có thể tiếp cận bài toán bằng phương pháp **lập trình ràng buộc** (CP-Constraints Programming): Đưa bài toán về tập hợp các biến, miền của biến, và các điều kiện ràng buộc biến theo các bước như sau:

- Bước 1: Xác định biến

Tên biến	Đơn vị	Định nghĩa
$x_{ijk}$	—	$= 1$ Nếu nhân viên $i$ có làm việc vào ca $j$ ngày $k$ , ngược lại $x_{ijk} = 0$ .
$i$	—	Chỉ số nhân viên $i$ với $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ lần lượt tương ứng với An, Bình, Châu, Dương, Linh, Kiệt, Giang, Hiếu.
$j$	—	Chỉ số ca $j$ với $j = 0, 1$ lần lượt tương ứng với ca sáng (S) và đêm (T).
$k$	—	Chỉ số ngày $k$ với $k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots, 27$ .
$t$	giờ	Thời gian làm việc trong 1 tuần của 1 nhân viên.
$s$	ca	Số ca làm việc của một nhân viên.
$w$	—	Chỉ số tuần với $w = 0, 1, 2, 3$ (do tổng số ngày là 28 tương đương với 4 tuần).
$n_d$	ngày	Tổng thời gian cần sắp xếp lịch cho nhân viên.
$l$	—	Chỉ số về thứ tự của chuỗi ( $l = 0, 1, 2, \dots$ ) với độ dài chuỗi của nhân viên full-time là 6 ngày và part-time là 3 ngày.

→ Trong đó:  $x_{ijk}$  là biến quyết định.

- Bước 2: Xác định các ràng buộc:
  - Điều kiện ràng buộc bắt buộc (Hard constraint)
  - Điều kiện ràng buộc dựa trên mong muốn của nhân viên (Soft constraint)
- Bước 3: Xác định mục tiêu:
  - Tìm các sắp xếp lịch làm việc cho các nhân viên ở trạm xá sao cho thỏa mãn đủ (hoặc thỏa mãn hầu hết) các điều kiện ràng buộc.
- Bước 4: Giải mô hình bằng CP (Constraint Programming) của Google OR-Tools và hiển thị kết quả

### 3 Điều kiện không thể vi phạm (Hard constraint)

#### 3.1 Những điều kiện không thể vi phạm

Số lượng nhân viên cần thiết cho mỗi ca:

- Ca ngày (S): 3 nhân viên.
- Ca đêm (T): 1 nhân viên.
- Số lượng ca làm việc của mỗi nhân viên trong  $n_d$  ngày:

$$\text{CT: } s = \frac{t \times n_d}{7 \times 8} = \frac{t \times n_d}{56}$$

- Nhân viên điều dưỡng full-time:  $\frac{36 \times 28}{56} = 18$  ca/ nhân viên.
- Nhân viên điều dưỡng part-time:  $\frac{20 \times 28}{56} = 10$  ca/ nhân viên.
- Mỗi nhân viên không thể làm quá 1 ca trong một ngày

#### 3.2 Mô hình hóa những điều kiện không thể vi phạm

- (1) Số lượng nhân viên/ca/ngày:
  - Ca ngày (S):  $\sum_{i=0}^{n_d-1} = 3 \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots, 27$
  - Ca đêm (T):  $\sum_{i=0}^{n_d-1} = 1 \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots, 27$
- Số lượng ca làm việc của một nhân viên trong  $n_d$  ngày

- Full-time:  $\sum_{k=0}^{n_d-1} \sum_{j=0}^1 (x_{ijk}) = 18 \forall i = 0, 1, 2, 3.$
- Part-time:  $\sum_{k=0}^{n_d-1} n_d - 1 \sum_{j=0}^1 (x_{ijk}) = 10 \forall i = 4, 5, 6, 7.$

- Mỗi nhân viên không làm quá 1 ca/ngày:

$$x_{i0k} + x_{i1k} \leq 1 \forall i = 0, 1, 2, \dots, 7, \forall k = 0, 1, 2, \dots, 27$$

## 4 Giải bài toán với những điều kiện không thể vi phạm

### 4.1 Phương pháp giải

Giải bài toán bằng phương pháp **lập trình ràng buộc** với:

Biến quyết định:  $x_{ijk}$

Các ràng buộc:

- $\sum_{i=0}^{n_d-1} = 3 \forall k = 0, 1, 2, \dots, 27$
- $\sum_{i=0}^{n_d-1} = 1 \forall k = 0, 1, 2, \dots, 27$
- $\sum_{k=0}^{n_d-1} \sum_{j=0}^1 (x_{ijk}) = 18 \forall i = 0, 1, 2, 3.$
- $\sum_{k=0}^{n_d-1} n_d - 1 \sum_{j=0}^1 (x_{ijk}) = 10 \forall i = 4, 5, 6, 7.$
- $x_{i0k} + x_{i1k} \leq 1 \forall i = 0, 1, 2, \dots, 7, \forall k = 0, 1, 2, \dots, 27$

Sử dụng chương trình giải CP của Google OR-Tools để giải bài toán với các ràng buộc trên

#### 4.2 Một lịch trình thỏa mãn những điều kiện trên (Kết quả của phương pháp giải)

Day	Only Hard Constraints							
	An	Binh	Chau	Duong	Linh	Kiet	Giang	Hieu
1	T					S	S	S
2					T	S	S	S
3					S	T	S	S
4					S	S	S	T
5					S	S	S	T
6					S	S	S	T
7					S	S	T	S
8		S				S	S	T
9			S			S	S	T
10	T					S	S	S
11	T	S	S	S				
12	T	S	S	S				
13		S	S	S	T			
14		S	S	S	T			
15	T	S		S	S			
16	T	S	S	S				
17	T	S	S	S				
18	T	S	S	S				
19	T	S	S	S				
20	T	S	S	S				
21	T	S	S	S				
22	T		S	S	S			
23	T	S	S	S				
24	T	S	S	S				
25	T	S	S	S				
26	T	S	S	S				
27	T	S	S	S				
28	T	S	S	S				

### 5 Giải quyết những mong muốn của nhân viên (Soft constraint)

#### 5.1 Những mong muốn của nhân viên

- Số ca làm việc trong 1 tuần của một nhân viên:
  - Nhân viên full-time: 4-5 ca/tuần.
  - Nhân viên part-time: 2-3 ca/tuần.
- Chuỗi ngày làm việc liên tiếp của mỗi nhân viên:

- Nhân viên full-time: 4-6 ngày.
- Nhân viên part-time: 2-3 ngày.

## 5.2 Mô hình hóa những mong muốn của nhân viên

- Số ca làm việc của một nhân viên trong 1 tuần:
  - Nhân viên full-time:  $4 \leq \sum_{k=7w+1}^{7(w+1)} \sum_{j=0}^1 (x_{ijk}) \leq 6 \forall i = 0, 1, 2, 3, \forall w = 0, 1, 2, 3.$
  - Nhân viên part-time:  $2 \leq \sum_{k=7w+1}^{7(w+1)} \sum_{j=0}^1 (x_{ijk}) \leq 3 \forall i = 4, 5, 6, 7, \forall w = 0, 1, 2, 3.$
- Chuỗi làm việc của nhân viên:
  - Nhân viên full-time:  $4 \leq \sum_{j=0}^1 \sum_{l=k}^{k+5} (x_{ijl}) \leq 6 \forall k = 0, 1, 2, \dots, 22, \forall i = 0, 1, 2, 3.$
  - Nhân viên part-time:  $2 \leq \sum_{j=0}^1 \sum_{l=k}^{k+5} (x_{ijl}) \leq 3 \forall k = 0, 1, 2, \dots, 25, \forall i = 4, 5, 6, 7.$

## 6 Giải quyết bài toán gồm cả điều kiện không thể vi phạm và những mong muốn của nhân viên

### 6.1 Bổ sung ràng buộc về mong muốn của nhân viên vào bài toán ban đầu (đã giải ở mục 4)

#### Ràng buộc cứng (Hard constraints)

- $\sum_{i=0}^{n_d-1} = 3 \forall k = 0, 1, 2, \dots, 27$
- $\sum_{i=0}^{n_d-1} = 1 \forall k = 0, 1, 2, \dots, 27$
- $\sum_{k=0}^{n_d-1} \sum_{j=0}^1 (x_{ijk}) = 18 \forall i = 0, 1, 2, 3.$
- $\sum_{k=0}^{n_d-1} n_d - 1 \sum_{j=0}^1 (x_{ijk}) = 10 \forall i = 4, 5, 6, 7.$
- $x_{i0k} + x_{i1k} \leq 1 \forall i = 0, 1, 2, \dots, 7, \forall k = 0, 1, 2, \dots, 27$

#### Ràng buộc mềm (Soft constraints)

- $4 \leq \sum_{k=7w+1}^{7(w+1)} \sum_{j=0}^1 (x_{ijk}) \leq 6 \forall i = 0, 1, 2, 3, \forall w = 0, 1, 2, 3.$
- $2 \leq \sum_{k=7w+1}^{7(w+1)} \sum_{j=0}^1 (x_{ijk}) \leq 3 \forall i = 4, 5, 6, 7, \forall w = 0, 1, 2, 3.$
- $4 \leq \sum_{j=0}^1 \sum_{l=k}^{k+5} (x_{ijl}) \leq 6 \forall k = 0, 1, 2, \dots, 22, \forall i = 0, 1, 2, 3.$
- $2 \leq \sum_{j=0}^1 \sum_{l=k}^{k+5} (x_{ijl}) \leq 3 \forall k = 0, 1, 2, \dots, 25, \forall i = 4, 5, 6, 7.$

## 6.2 Giải bài toán và hiển thị kết quả

Sau khi sử dụng chương trình giải bài toán CP của Google OR-Tools, kết quả hiển thị:

Day	Both Hard and Soft Constraints							
	An	Binh	Chau	Duong	Linh	Kiet	Giang	Hieu
1	S				S	T	S	
2	S			S	S			T
3		S		S		S	T	
4	S	S	T		S			
5		S	S	S				T
6			S			S	S	T
7	S	S	S	T				
8					S	S	S	T
9					S	S	T	S
10		T		S		S	S	
11	T	S	S	S				
12	S	T	S	S				
13	S	S	T	S				
14	S	S	S	T				
15					S	S	S	T
16					T	S	S	S
17	T	S	S	S				
18	S	T	S	S				
19	S	S	T	S				
20	S	T	S	S				
21	S	S	S	T				
22					S	S	S	T
23					T	S	S	S
24	S		T	S	S			
25	S	T	S	S				
26	S	T	S	S				
27	S	T	S	S				
28	S	S	S					T

## 7 Đánh giá mô hình giải quyết bài toán

### 7.1 Ưu điểm

- Giải quyết được tất cả những điều kiện ràng buộc cứng.
- Bài toán được giải theo phương pháp tiếp cận Constraint Programming đơn giản, dễ hiểu, dễ thực thi.

### 7.2 Nhược điểm

- Kết quả của phương pháp này chưa phải là một lịch làm việc tối ưu cho trạm xá.



- Đối với dữ liệu lớn hơn, phương pháp này sẽ không phải là một phương pháp phù hợp và đem lại kết quả tối ưu.

## 8 Mở rộng bài toán và định hướng phát triển mô hình

**Mở rộng bài toán:** Bài toán này là bài toán gồm những đặc trưng cơ bản của những bài toán sắp xếp lịch trình. Như vậy, để mở rộng bài toán, chúng ta có thể thêm những dữ liệu đầu vào như: Chuyên môn của bác sĩ, Các khoa khác nhau trong bệnh viện, Những yêu cầu về sức khỏe,... Bên cạnh đó, với phương pháp tiếp cận Constraint Programming, chúng ta cũng có thể giải quyết những vấn đề về việc sắp xếp lịch đối với các doanh nghiệp có điều kiện không quá phức tạp và số lượng nhân viên không quá lớn.

**Định hướng mô hình:** Để mô hình có thể phát triển và đem lại hiệu quả (kết quả lịch trình tối ưu) hơn thì đội có đề xuất về việc sử dụng các mô hình tối ưu khác có độ phức tạp cao hơn như Genetic Algorithms (Thuật toán di truyền), Thuật toán tô màu đồ thị,...

## 9 Kết luận

Mô hình đội đề xuất dựa trên quy mô nhân sự của trạm xá. Mô hình có thể chưa đưa ra lịch làm việc tối ưu nhất cho các nhân viên điều dưỡng của trạm xá nhưng đơn giản, dễ hiểu và đã đáp ứng khá đầy đủ các yêu cầu về những điều kiện bắt buộc và mong muốn của nhân viên.

## 10 Tài liệu tham khảo và Phụ lục

- Tài liệu tham khảo: Google OR-Tools
- Phụ lục: (Link Collab):
  - Code - Solve Hard Constraints
  - Code - Solve Both Hard and Soft Constraints

## 11 Lời cảm ơn

Lời đầu tiên, đội thi xin chân thành cảm ơn ban tổ chức, quý bạn đọc đã giành thời gian quý báu của mình để đọc bài trình bày của đội về phương pháp tiếp cận và giải bài toán sắp xếp lịch cho nhân viên y tế. Lời giải của nhóm không quá phức tạp, dễ hiểu, dễ ứng dụng và có thể ứng dụng đa dạng trong các hoàn cảnh sắp xếp lịch khác nhau. Song lời giải của đội vẫn còn một số nhược điểm nhất định về tính tối ưu của kết quả.

Đội thi thực sự trân trọng công sức và tâm huyết của Ban Tổ chức trong việc chuẩn bị, tổ chức và điều hành cuộc thi. Sự chuyên nghiệp và tận tình của mọi người đã góp phần tạo nên thành công rực rỡ cho cuộc thi này.

Bên cạnh đó, đội thi cũng xin gửi lời cảm ơn sâu sắc đến ban tổ chức vì đã tạo ra một sân chơi lành mạnh cho học sinh, sinh viên được tiếp xúc với ứng dụng thực tiễn của toán trong đời sống, đem toán đến gần hơn với mọi người. Trong quá trình làm bài, đội đã cố gắng thật tỉ mỉ, song việc còn tồn tại một số sai sót là không thể tránh khỏi. Chúng em rất mong nhận được sự góp ý và mong mọi người có thể bỏ qua những lỗi sai nhỏ.

Đội thi xin chân thành cảm ơn!