Derivatives

Kim Hyeonghwan

2024-04-29

Table of contents

Welcome! **9**

Chapter 3 **10**

기본 원리 . . . 10

헷징에 대한 논쟁 . . . 11

베이시스 리스크 . . . 11

교차 헷지(*Cross Hedging*) . . . 12

주가지수선물 . . . 14

스택 앤 롤(*Stack And Roll*) . . . 15

Appendix : CAPM . . . 16

Chapter 4 **17**

4.1 이자율의 종류 . . . 17

Treasury Rates . . . 17

Overnight Rates . . . 17

Repo rates or RP rates . . . 18

4.2 Reference rates . . . 18

Libor, London Inter Bank Offered Rates . . . 18

The New reference rates . . . 19

Reference rates and Credit risk . . . 19

4.3 The Risk-free rate . . . 20

4.4 Measuring interest rates . . . 20

4.5 Zero-rates . . . 21

4.6 Bond pricing 21
Bond Yield 21
Par Yield 22
4.7 Determining zero rates 22
4.8 Foward rates 22
Foward rates : furthermore 23
4.9 Forward rate agreements 23
4.10 Duration 24
Modified duration 25
Bond portfolios 25
4.11 Convexity 25
4.12 Theories of the term structure of interest rates 26

Chapter 5 **27**

5.1 투자자산 vs. 소비자산 27
5.2 공매도 27
5.3 Assumptions and Notation 28
5.4 투자자산에 대한 선도가격 28
5.5~6 기초자산의 현금흐름 30
5.7 선도계약의 가치 31
5.8 선도가격＝선물가격 ? 31
5.9~12 Cost of Carry 및 다양한 선도/선물가격 32
주가지수선물 33
선도환, 선물환 및 통화선물 33
상품선물 34
5.13 실물인수도에 따른 옵션, Delivery Options 34
5.14 선물가격과 미래 현물가격의 기대값 35
Keynes and Hicks 35
Risk and Return 36

Chapter 7 **37**

7.1 Mechanics of interest rate swaps 37

7.2 Determining Risk-Free rates 38
7.3~5 Reasons for trading Interest Rate Swaps 39
7.6~7 Valuation of Interest Rate Swaps 40
7.8 Fixed-For-Fixed Currency Swaps 41
7.9~10 Valuation of Fixed-For-Fixed Currency Swaps 41
7.11~13 Other Types of Swaps 42
CDS, Credit Default Swaps 42
Other Interest Rate Swaps 43
Quantos 43
Equity Swaps 43
Options 43
Other Swaps 44

Chapter 10 **45**
10.1~3 Types, Positions, Underlying Assets of Options 45
10.4~10 Specification of Stock Options 46

Chapter 11 **49**
11.1 Factors Affecting Option Prices 49
11.2 Assumptions and Notation 50
11.3 Upper and Lower Bounds for Option Prices 50
Upper bound 50
Lower bound for Non-dividend 50
European 50
American 51
11.4~6 Put-Call Parity 52
Parity in American options 53
Effect of Dividends 54
European 54
American 55

Chapter 13 **57**

13.1 A one-step binomial model and a no-arbitrate argument 57

13.2 Risk-Neutral Valuation 59

13.3 Two-step binomial trees 60

13.5 American Options 61

13.7 Matching Volatility with u and d 61

13.8 The Binomial Tree Formulas 63

13.11 Binomial Trees in various Options 64

Options on Stocks & Stock indices with continuous dividend 64

Options on Currencies 64

Options on Futures 64

Chapter 14 **66**

14.1 The Markov Property 66

14.2 Continuous-time Stochastic Processes 66

Wiener Process 67

Generalized Wiener Process 68

Ito's Process 70

14.3 The Process for a Stock Price 70

14.6 Ito's Lemma 71

14.7 Application of Ito's Lemma 72

Forward Contract 72

The Lognormal property 72

Chapter 15 **74**

15.1~3 Lognormal Property & Expected return 74

15.4 Volatility 75

15.5 ~ 6 The Black-Scholes-Merton differential equation 76

The idea and Assumption 76

Derivation of the Black-Scholes-Merton Differential Equation 77

15.7 Risk-Neutral Valuation 78

15.8 Black-Scholes-Merton Pricing Formulas 79

Chapter 17 **81**

17.1 Options on stock indices 81

17.2 Currency options 81

17.3 Options on stocks paying known dividend yields 82

Lower bounds for option prices 83

Put-call parity 83

Stochastic process & BSM equition and formulas 83

17.4 Valuation of european stock index options 84

17.5 Valuation of European currency options 84

17.6 American Options 85

Chapter 18 **86**

18.1 Nature of Futures Options 86

18.3~5 Pay-off, Put-call parity, Bounds for Futures Options 87

Pay-off 87

Put-call parity 87

Bounds 88

18.6~9 Valuation of a futures options 88

위험중립가치평가 89

이항모형 89

블랙숄즈모형 89

18.9 American vs. European for futures options 90

18.10 Futures-style options 90

Chapter 19 **92**

19.1 Illustration 92

19.2 Naked and Covered Positions 93

19.3 Greek Letter Calculation 94

19.4 Delta 95

Dynamic Delta Hedging 95

19.5 Theta 96

19.6 Gamma 96

19.7 Relationship between Delta, Theta, Gamma . . . 97
Taylor expansion . . . 97
BSM equation . . . 97
19.8 Vega . . . 98
19.9 Rho . . . 98
Summary . . . 99

선물옵션 HW(~midterm) **100**
Chapter3 . . . 100
Problem 3.4 (Hedging with Futures) . . . 100
Problem 3.24 (CAPM) . . . 101
Problem 3.25 (Changing Beta) . . . 101
Chapter4 . . . 102
Problem 4.2 . . . 102
Problem 4.14 . . . 103
Problem 4.29 . . . 103
Problem 4.39 . . . 104
Chapter5 . . . 105
Problem 5.1 . . . 105
Problem 5.7 . . . 106
Problem 5.10 . . . 106
Problem 5.24 . . . 107
Chapter7 : Swap . . . 108
Problem 7.1 . . . 108
Problem 7.4 . . . 109
Problem 7.8 . . . 111
Problem 7.21 . . . 112
Problem 7.22 . . . 113
Problem 7.extra1 . . . 114
Problem 7.extra2 . . . 115

Chapter10 : Mechanics of Options Markets 117
Problem 10.3, 10.13 117
Chapter11 : Properties of Stock Options 119
Problem 11.5, 18, 23, 24, 25 119

Welcome!

안녕하세요, KAIST MFE 24봄학기에 이수한 류혁선 교수님의 선물 및 옵션 과목입니다.

교재인 Options Futures and Other Derivatives(J.C. Hull, 11th)의 챕터별 요약과 연습문제 풀이를 정리해두었습니다.

Chapter 3

선물을 이용한 헷징전략
(*Hedging Strategies Using Futures*)

기본 원리

기관이나 개인이 선물을 이용하여 리스크를 헷지한다는 것은, 기본적으로 **자신이 보유한 포지션이 지닌 가격변동위험과 반대 방향의 가격변동위험을 가진 선물계약을 보유**하는 것을 의미합니다.

즉, 현재 A회사의 포지션이 원달러 환율에 의한 가격변동위험에 노출되어 있어 **향후 3개월간 달러당 환율이 1원 오를때 1억원의 손실을 입는 구조**라면 달러당 환율이 **1원 오를때 1억원의 이익이 발생하는 3개월 만기 선물계약**을 보유하면 됩니다.

이렇게 되면, 향후 3개월간 달러당 환율이 10원 올라 나의 포지션에서 10억원의 손실이 발생하더라도 선물계약에서 10억원의 이익이 발생하여 **손익이 상쇄(offset)**됩니다. 따라서 선물계약을 체결한 시점 이후의 가격변동위험은 "0"이기 때문에 **A회사가 체감하는 환율의 실질가격(realized price, effective price)은 3개월간 선물계약의 체결가격으로 고정(lock)**됩니다. 이러한 과정을 **"헷징"**이라고 합니다.

> 매도 헷지 vs. 매수 헷지
>
> 헷지 과정에서 선물을 매도하는 경우 매도 헷지(Short Hedges), 매수하는 경우 매수 헷지(Long Hedges)라고 합니다.
> **매도 헷지**는 특정 자산을 미래시점에 매도할 예정으로, 자산의 가격하락위험 회피를 목적으로 선물을 매도하여 가격이 하락하더라도 선물계약에서 이익이 발생하도록 하는 헷지 방법입니다. 주로 원자재 생산자, 수출업자 등 현재 자산을 보유하고있거나 보유할 예정으로 이를 판매할 목적인 경우 활용합니다.

매수 헷지는 특정 자산을 미래시점에 매수할 예정으로, 자산의 가격상승위험 회피를 목적으로 선물을 매수하는 헷지 방법입니다. 주로 원자재를 이용하여 상품을 제조하는 제조업자, 수입업자 등 미래에 특정 자산을 구매할 목적인 경우 활용합니다.

헷징에 대한 논쟁

회사가 본인이 직면한 리스크를 최소화할 수 있다는 점에서 **헷징의 중요성과 필요성은 명확**합니다. 파생상품을 이용하여 **적은 비용으로 리스크를 최소화하고, 본연의 경영활동에 집중**할 수 있기 때문입니다. 그러나, 실제로 헷징이 완벽하게 이루어지는 경우는 많지 않은데, 여기에는 다양한 이유들이 있습니다.

- **헷징과 주주** : 회사가 직면한 리스크에 대해서, 대개 주주들은 이를 인지하고 직접 헷지하거나 포트폴리오를 다변화하여 관리합니다. 이 경우, 회사의 리스크 헷지를 주주들이 원하지 않을 수 있습니다.
- **헷징과 경쟁자** : 산업군 내 경쟁자가 존재하고, 모든 경쟁자가 헷징을 하지 않는 경우 헷징이 경쟁에 불리하게 작용할 수 있습니다. 내가 헷징을 하지 않으면 가격변동위험에 노출되지만, 다른 경쟁사도 동일 위험에 노출되므로 경쟁력에는 영향이 없습니다. 반대로, 나만 헷징하는 경우 가격변동위험은 최소화되지만 향후 가격이 유리하게 변동하여 선물계약에서 손실이 발생한다면, 나에게만 손실이 발생하므로 경쟁력이 약화될 수 있습니다.
- **헷징과 손익** : 선물을 이용한 헷징은 미래가격을 선물가격으로 고정시켜 가격변동위험을 없애는 것입니다. 향후 가격변동으로 인해 선물계약에서 이익이 발생할 수도, 손실이 발생할 수도 있습니다. 하지만, 때때로 의사결정자 또는 주주들은 헷징으로 인해 선물에서 평가손실이 발생하면 이를 납득하지 못하곤 합니다. 모든 의사결정자와 주주가 파생상품 메커니즘을 정확히 이해하기는 어렵기 때문입니다.

베이시스 리스크

선물을 이용한 헷징은 내가 보유한 자산에 대한 선물을 내가 헷지하고자 하는 기간에 대해 내가 보유한 수량만큼 매수하거나 매도하는 방식으로 이루어집니다. 하지만, 실제로 정확한 헷징은 매우 어렵습니다.

1. 선물의 **기초자산과 보유한 자산이 완벽히 동일**해야 합니다.
2. 내가 보유한 자산을 **언제까지 헷지할 것인지 정확히 알아야** 합니다.

3. 헷징 종료일과 선물 만기일이 항상 동일하지 않습니다. 이 경우, **헷징 종료시 선물계약을 처분**해야합니다.

상기 이유들은 베이시스 리스크를 발생시키는 원인이 됩니다.

- **베이시스(Basis)** : 베이시스란, 기초자산의 가격에서 선물가격을 차감한 값을 말합니다.

  $$Basis = Spot\ price - Futures\ price$$

  선물의 본질을 고려할 때, 선물가격은 현물가격과 유사하게 형성되며 만기일에는 현물가격으로 수렴하는 것을 직관적으로 알 수 있습니다. 따라서, **베이시스**는 0을 중심으로 움직이다가, **선물 만기일이 가까워지면서 0으로 수렴**하게 됩니다.

  선물을 이용하여 헷지하는 경우, 일반적으로 선물 만기일 이전에 헷지를 종료하게 됩니다. 이때, 헷지종료시점에 선물가격(F_t)은 현물가격(S_t)과 다르므로 그 차이($B_2 = F_2 - S_2$)만큼 예기치 못한 손익이 발생합니다. 이를 **베이시스 리스크**라고 합니다.

  만약, 선물의 기초자산과 보유한 자산이 정확히 일치하지 않는 경우 헷지종료시점의 기초자산가격과 보유한 자산의 가격의 차이($S_t^* - S_t$)만큼 추가적인 손익이 발생합니다. 즉, 베이시스 리스크가 확대되며 이러한 헷지를 교차헷지라고 합니다.

- **선물계약 선택** : 베이시스 리스크 최소화를 위해서는 내가 보유한 자산과 **정확히 일치하거나 거의 유사한**($corelation \approx 1$) 기초자산의 선물을, 헷지종료시점을 기준으로 가장 가까운 만기의 선물을 선택하는 것이 유리합니다. 다만, 실제로는 선물 유동성이 최근월물 위주로 형성되므로, 최근월물을 롤오버하는 방식이 많이 사용됩니다.

교차 헷지(*Cross Hedging*)

교차 헷지는 내가 보유한 자산과 선물의 기초자산이 같지 않은 경우를 말합니다. 항공사가 항공기 제트연료 가격 헷지를 위해 등유선물을 이용하는 것을 예로 들 수 있습니다.

헷지비율($hedge\ ratio$)은 보유자산의 명목금액 대비 선물계약의 명목금액의 비율로, 일반적으로 가격변동위험 최소화를 위해 1이 되도록 설정합니다.

그러나, 교차 헷지를 해야하는 경우 헷지비율을 1로 설정해도 가격변동위험을 최소화되지 않을 수 있습니다.

이 경우, **보유 포트폴리오의 변동성이 최소화되는 헷지비율을 설정**해야 합니다.

- **헷지비율 계산** : 먼저, 보유자산의 가격을 S, 선물가격을 F, 헷지비율을 h라고 하고 S와 F간에 선형성이 존재한다고 가정하면, 가격의 증분 ΔS와 ΔF를 아래와 같이 표현할 수 있습니다.

$$\Delta S = a + b\Delta F + \epsilon$$

  이때, h만큼 매도헷지를 실행한 포트폴리오 가격의 증분은,

$$\Delta S - h\Delta F = a + (b-h)\Delta F + \epsilon$$

  포트폴리오의 변동성 최소화를 위해서는 $h = b$임을 쉽게 알 수 있습니다.
  따라서, 선형회귀분석으로 추정한 계수 b가 최적 헷지비율(h^*)이 됩니다.

$$h^* = b = \rho\frac{\sigma_S}{\sigma_F}$$

  이를 통해 보유자산과 선물 기초자산이 동일한 경우($\rho = 1, \sigma_S = \sigma_F$)의 최적헷지비율은 1이 되며, 선물의 가격이 현물의 2배 민감도로 움직일 때($\sigma_F = 2\sigma_S$) 최적헷지비율이 0.5가 되는 것을 이해할 수 있습니다.

- **최적 계약 수** : 보유자산의 수량을 Q_A, 선물 1계약의 수량을 Q_F, 최적헷지비율을 h^*라고 하면, 최적헷지를 위한 선물계약 수 N^*는,

$$N^* = \frac{h^* Q_A}{Q_F}$$

> **최적헷지비율 및 계약수 예시**
>
> 제트연료 가격의 변동성을 $\sigma_A = 0.1$, 등유선물 가격의 변동성을 $\sigma_F = 0.2$, 제트연료와 등유선물 가격간 상관계수를 $\rho = 0.8$라고 하고, 헷지대상 제트연료가 200만 갤런 및 CME등유선물이 1계약당 4만갤런이라고 하자. 그러면,
>
> $$h^* = 0.8 * \frac{0.1}{0.2} = 0.4$$
>
> $$N^* = 0.4 * \frac{2,000,000}{40,000} = 20contract$$

- **일일정산의 영향** : 현재까지는 일일정산이 없다고 가정하였으나, 실제 선물을 거래할 때는 오늘 선물의 종가로 보유선물계약을 평가하여 하루단위로 손익을 정산하고 있습니다.
  일일정산 반영을 위해 앞선 수식을 **일수익률**을 기준으로 정리해보겠습니다. 보유자산 가격의 일수익

률의 표준편차를 $\hat{\sigma}_S$, 선물가격의 일수익률의 표준편차를 $\hat{\sigma}_F$, 현물 및 선물의 일수익률간 상관계수를 $\hat{\rho}$라고 하면,

$$h^* = \rho\frac{\sigma_S}{\sigma_F} = \hat{\rho}\frac{\hat{\sigma}_S S}{\hat{\sigma}_F F}$$

$$N^* = \frac{h^* Q_A}{Q_F} = \hat{\rho}\frac{\hat{\sigma}_S S Q_A}{\hat{\sigma}_F F Q_F}$$

이제, 실제 가격변화를 사용한 최적헷지비율 h^* 대신 일수익률을 이용한 최적헷지비율을 $\hat{h}^*$ 라고 하면, 아래와 같이 정리할 수 있습니다.

$$\hat{h}^* = \hat{\rho}\frac{\hat{\sigma}_S}{\hat{\sigma}_F},\ N^* = \frac{\hat{h}^* V_A}{V_F} = \frac{\hat{h}^* A Q_A}{F Q_F}$$

최적헷지비율 및 계약수 예시2

제트연료 가격이 1.1, 등유선물 가격이 1.2, 제트연료와 등유선물 일수익률간 상관계수를 $\hat{\rho} = 0.8$ 라고 하고, 헷지대상 제트연료가 200만 갤런 및 CME등유선물이 1계약당 4만갤런이라고 하자. 그러면, 하루 헷지에 필요한 최적수량은

$$N^* = 0.8 * \frac{2,000,000 \times 1.1}{40,000 \times 1.2} = 36.67$$

주가지수선물

주가지수란, 주식 포트폴리오의 수익률을 추정하도록 설계한 지수를 말합니다. 일반적으로 구성종목을 정한 후, 동일한 비중 또는 시가총액(유통주식수*주가)비율로 비중을 정하는 방식을 차용합니다. 보통 배당은 반영하지 않아 자본손익만을 추종하며, 구성종목의 주가 변동에 따라 지수의 구성비중이 실시간 변동하는 특징이 있습니다.

- **주요 지수** : 미국의 대표적인 주가지수로는 다우존스30(DJIA), S&P500, Nasdaq100 등이 있고 중국의 CSI300 및 국내는 KOSPI200, KOSDAQ150 등이 있습니다.
- **주식 포트폴리오 헷지** : 주가지수선물을 이용하여 주식 포트폴리오를 헷지할 때, 포트폴리오의 가치를 V_A, 주가지수선물 1계약의 가치를 V_F, 해당 지수에 대한 포트폴리오 베타를 β라고 하면 최적계약수는 아래와 같습니다.

$$N^* = \beta\frac{V_A}{V_F}$$

만약 헷지기간 중 베타가 변동하는 경우, $(\beta - \beta^*) \times \frac{V_A}{V_F}$ 만큼 선물계약을 조정해야 합니다.

- **주식 포트폴리오를 헷지하는 이유** : 원문 책의 Table3.4를 참조하면, 주식포트폴리오 헷지를 통해 가격변동위험을 통제하고 나면 투자자가 얻는 수익은 무위험이자율 수준입니다.
  여기서 한가지 근원적인 의문이 발생합니다. **이자율 정도의 수익은 은행에 돈을 넣어두면 생기는데, 왜 주식포트폴리오를 매수하고 번거롭게 선물로 헷지하는 일을 해야하는거지?**
  이에 대한 답으로는 "시장 전체의 위험(market risk)는 헷지하고 포트폴리오의 초과 수익(α)만 얻고싶은" 경우, "포트폴리오를 장기간 보유할 계획이나, 단기적으로 가격변동에 대한 헷지가 필요"한 경우 등이 있습니다.

i 시장위험 헷지 예시

현재 주식 포트폴리오의 가치는 200만 달러, 베타는 1.1, CME SnP500선물 1계약의 가치는 10만 달러라고 하자.
시장 위험을 헷지하기 위한 최적계약수는 $N^* = 1.1 \times \frac{2{,}000{,}000}{100{,}000} = 22$ 이고, 22계약을 매도하여 헷징포트폴리오를 구축하였다.
선물 만기일에 S&P500지수는 20%하락, 나의 포트폴리오는 12%하락하였다면, 헷징포트폴리오는 -24만$ 및 선물에서 +44만$ 이익이 발생하여 합계 20만$의 이익이 발생한다.
즉, 시장은 전체적으로 하락하였으나 내 포트폴리오가 outperform하여 초과이익 α가 발생한 것으로 해석할 수 있다.

스택 앤 롤(*Stack And Roll*)

선물을 이용하여 헷지할 때, **헷지종료시점이 선물 만기일보다 나중**인 경우가 있습니다. 이때는 먼저 선물을 이용해 헷지한 다음, **만기일 직전에 선물 포지션을 청산함과 동시에 만기가 긴 선물로 새로운 포지션을 구축**하는 방법을 사용합니다. 이것이 스택 앤 롤 방법입니다.
물론 헷지종료시점과 정확히 일치하는 선물을 사용하는 것이 가장 좋지만, **선물의 유동성은 만기가 짧은 종목에 집중**되어 있어 원하는 만기의 선물을 거래하기 어렵습니다. 실제로는 **가장 만기가 짧은 최근월물로 헷지**하고, **만기가 도래할 때마다 다음 최근월물로 갈아타는 롤오버(*Roll-over*) 방식**이 많이 사용됩니다.

Stack and Roll의 위험성 : Metallgesellschaft 사례

Metallgesellschaft(이하, MG)는 독일의 원자재 회사로 등유와 가솔린을 판매하는 사업을 영위. 판매계약은 향후 5~10년까지 고정가격에 체결되어있어, MG는 원자재 가격상승위험 회피를 위해 선물을 매수하여 헷지 실행. 다만, 만기가 5~10년 뒤인 선물은 거래가 어려워 최근월물을 롤오버하였는데, 여기서 단기적으로 원자재의 가격이 하락하면서 선물 포지션에서 손실이 누적됨.
이를 만회하기 위해서는 판매대금을 받아야하는데, 미래시점의 판매대금을 미리 받을 수는 없어 현금흐름위험(cashflow risk)에 직면.
결국 선물 포지션이 강제청산(margin call)되면서, 막대한 손실을 입음.

Appendix : CAPM

자본자산가격결정모형(CAPM, **C**apital **A**sset **P**ricing **M**odel)은 포트폴리오의 리스크 대비 기대수익률을 측정하는 모델입니다. 리스크는 시장 전체의 리스크로 분산(diversified)할 수 없는 *Systematic risk* 와 분산할 수 있는 자산 고유의 위험인 *Nonsystematic risk*로 구성됩니다. CAPM 유도에 필요한 가정과 결과 산식은 다음과 같습니다.

1. 투자자는 기대수익률과 수익률의 표준편차만을 고려하여 투자자산을 결정한다.
2. 자산의 수익률은 시장의 수익률 대비 민감도 β로부터 산출된다.(Only one factor) 즉, 자산들간의 상관계수는 각 자산의 β의 비율과 같다.
3. 투자자는 한 투자기간에 대해서만 고려하며, 투자기간은 모든 투자자가 같다.
4. 투자자는 무위험수익률 R_f로 무한히 빌리거나 빌려줄 수 있다.
5. 세금은 고려하지 않는다.
6. 자산의 기대수익률과 표준편차, 상관계수는 모든 투자자에게 동일하다.

$$E(R_{portfolio}) = R_f + \beta(R_{market} - R_f)$$

Chapter 4

이자율 (*Interest Rates*)

파생상품과 여러 금융상품의 가치평가에 쓰이는 매우 중요한요소

4.1 이자율의 종류

이자율이란 돈을 빌린사람이 빌려준 사람에게 지급하는 돈에 적용되는 율로 주택담보, 예금수익률, 신용대출 등 수많은 이자율의 종류가 있습니다. 이자율에 영향을 주는 요소 중 하나로 신용위험(*Credit Risk*)가 있는데, 돈을 빌린사람이 디폴트 등으로 돈을 갚지 못하게 될 위험을 말합니다. 그 위험이 클수록 이자율은 증가하게 되고, 해당 이자율과 무위험이자율 간의 차이를 신용스프레드(*Credit Spread*)라 합니다.

Treasury Rates

T-bill, T-bond와 같은 국가가 발행한 채권에 투자할 때 얻는 수익률을 말합니다. 이 수익률은 결국 **해당 채권을 발행한 국가에 돈을 빌려주고 받는 이자율**을 의미합니다. 일반적으로 선진국의 국채가 파산할 위험은 거의 없기때문에, 무위험이자율로 여겨지곤 합니다. 그러나, 개발도상국의 국채를 생각해보면 파산위험이 0은 아니므로, 엄밀한 의미의 무위험이자율은 아닙니다.

Overnight Rates

각국의 시중은행은 중앙은행의 정책에 따라 지급준비금이라는 형태로 일정 비율 이상의 현금을 유지해야합니다. 매일 마감작업 이후, 지급준비금이 부족한 은행은 현금이 충분한 은행으로부터 지급준비금 부족액을 다음날까지 빌리게 되는데, 이 때 적용되는 것이 1일물 금리입니다. 대표적으로 미국 연준의 경우 *federal funds rate*를 예시로 들 수 있고, 이 금리를 이용하여 이루어진 실제 은행간 거래를 거래량 가중평

균하여 산출한 금리를 *effective federal funds rate*라고 합니다. 다른 예시로는 영국의 SONIA(*sterling overnight index average*), EU의 ESTER(*euro short-term rate*), 스위스의 SARON(*swiss average rate overnight*), 일본의 TONAR(*tokyo overnight average rate*)가 있으며, 우리나라는 콜금리가 대표적입니다.

Repo rates or RP rates

연준금리나 일반적인 1일물 금리와 달리, 담보부 금리입니다. 주로 금융기관 간에 국채나 안전자산을 담보로 짧은기간 현금을 빌릴때 이용되는 금리이며, 담보가 있는 만큼 신용 기반의 1일물 금리보다 무위험에 가깝기때문에 조금 더 낮게 형성됩니다. 일반적으로 *overnight repos*가 쓰이지만, 간혹 기간이 긴 *term repos*도 사용됩니다. 대표적으로 미국의 SOFR(*secured overnight financing rate*)가 있으며, 우리나라의 신규금리인 KOFR(*Korea overnight financing rate*)도 여기에 해당합니다.

4.2 Reference rates

기준금리는 금융시장에서 매우 중요한 역할을 담당합니다. 시장참가자간 돈을 빌리는 등 거래를 할 때, 기준금리에 일정 금리를 가산하는 식으로 주로 활용되기 때문에 합리적이고 공정한 방식으로 산출되는 것이 매우 중요합니다.

Libor, London Inter Bank Offered Rates

역사적으로 매우 중요한 기준금리로서, 런던의 글로벌 은행들 간의 거래에 적용되는 금리로 1일물부터 1년물까지 존재합니다. 글로벌 은행들의 신용은 매우 높은 수준이기 때문에, 일반적으로 무위험금리의 대용치로 많이 사용되었습니다. 대게 장외파생상품 또는 다양한 금융상품에 있어 기준금리로 활용되었기 때문에, libor에 연계된 자금규모는 수백조 달러에 육박하였습니다. 그러나, 신용 기반의 금리인 점과 은행의 호가금리에 기반한다는 치명적인 단점이 있고, 2012년 이를 이용한 Libor 조작사태가 벌어지면서 기준금리의 대규모 전환을 맞이하였고, EU벤치마크법 등 다양한 논의 끝에 현재는 다른 무위험금리로 Libor를 대체하고자 하는 추세입니다.

The New reference rates

각국은 Libor를 대체할 새로운 기준금리를 개발하였고, 상기에 서술한 KOFR, SOFR, SONIA, ESTER, SARON, TONAR 등이 여기에 해당합니다.

새로운 기준금리는 1일물 금리로 정의되며, 이를 기반으로 3개월, 6개월 등의 기간구조를 산출합니다. SOFR를 예시로 들면, n일간 SOFR금리는 다음과 같습니다.

$$[(1+r_1\hat{d}_1)(1+r_2\hat{d}_2)\ldots(1+r_n\hat{d}_n)-1]\times\frac{360}{D}$$
$$where\ \hat{d}_i=\frac{d_i}{360},\ D=\sum d_i$$

대게 d_i 는 1이며, 주말이나 휴일이 포함된 경우 해당 일을 가산합니다. 이러한 방식으로 산출 된 기준금리는 무위험금리로 여겨집니다. 1일물 금리를 compounding하여 산출하였고, 담보가 있거나 신용위험이 거의 없는 기관간 금리이기 때문입니다.

Libor와 새로운 기준금리의 또하나의 큰 차이점은 산출시점입니다. 3개월 Libor는 현재시점에서 *forward looking* 방식으로 산출되지만, 3개월 SOFR는 과거 3개월간 실현된 1일물 SOFR를 compounding하여 *backward looking* 방식으로 산출합니다.

Reference rates and Credit risk

은행간 금리의 또다른 문제점은, 평소에는 파산할 위험이 거의 없지만, 금융위기같은 극단적인 상황에서는 은행도 파산할 수 있으며, 따라서 은행의 신용위험이 증가한다는 것 입니다. 이러한 경우, 무위험금리로 여겨지던 Libor금리에 은행의 신용위험이 더해지면서 실질적으로 무위험금리+신용스프레드가 적용된 Libor금리가 형성되므로 정상적인 기준금리의 역할을 할 수 없습니다.

그러나, 새로운 기준금리는 사실상 무위험금리에 해당하므로 신용위험으로 인해 기준금리가 왜곡될 문제는 없다고 봐도 무방합니다.

4.3 The Risk-free rate

앞선 장에서, 파생상품의 프라이싱에는 무위험 포트폴리오를 구축할 수 있고, 여기에서 무위험이자율 만큼의 수익이 발생한다는 가정을 사용하였습니다. 즉, 무위험이자율은 파생상품의 프라이싱에 매우 핵심적인 역할을 하고 있습니다. 실제로 트레이더들은 국채를 이용해서 무위험 포트폴리오를 구축하는 것이 자연스러워보이나, 현실은 그렇지 않습니다. 일반적으로 국채금리는 세금 등의 규제적인 이유로 낮게 형성되기 때문입니다.

1. 대부분의 은행이 여유자본을 활용할 때, 국채에 투자하는 일은 없고 대신 다른 무위험자산을 찾는다.
2. 미국의 경우, 대부분의 주에서 국채의 이자수익에 대한 세금혜택이 존재

따라서, 무위험이자율은 앞서 살펴본 1일물 금리를 주로 사용하게 됩니다.

4.4 Measuring interest rates

예금 이자에 1년간 10%의 금리가 적용된다는 것은, 이자율의 측정방법을 무엇으로 하느냐에 따라 다른 결과가 나올 수 있습니다.

1. 단리 : 100만원을 투자하고 1년 후 110만원을 돌려받으므로 10% 수익에 해당

2. 복리 : 복리 주기에 따른 중간이자를 다시 재투자하므로, 단리보다 실질이자율이 높게 됨

   - semiannually : $100 \times 1.05 \times 1.05 = 110.25,\ 10.25\%$
   - monthly : $100 \times (1 + \frac{10\%}{12})^{12} = 110.47,\ 10.47\%$
   - 즉, $\times (1 + -)^{\times}$

3. 연속복리 : 이자를 매 순간순간 지급하고 재투자한다면,

$$\times (1 + -)^{\times} \quad \rightarrow \quad \times e^{\times}$$

$$where \quad \rightarrow \infty$$

4.5 Zero-rates

원금을 n년간 투자할 때, 중간이자 및 옵션 없이 **만기에 원금과 이자를 일시에 정산**받는다면, 이때 적용되는 이자율은 쿠폰이 없는 채권에 투자한 것과 같으므로 zero-coupon interest rate라고 할 수 있습니다. 일반적으로 이를 *n-year spot rate* 또는 *n-year zero rate*라고 합니다.

채권에 투자할 때, 일반적으로 이표채에 투자하게되므로 5년 만기 국채를 사더라도 해당 국채의 YTM이 5년짜리 zero-rate를 의미하는 것은 아닙니다. 중간에 이자수익이 발생하기 때문입니다.($Duration \neq 5$)

- 예시 : 5년 zero rate가 연속복리로 5%라면 5년후 수익은 $100 \times e^{0.05\times 5} = 128.40$

4.6 Bond pricing

채권의 가치평가는 채권의 만기까지 발생하는 이자와 원금을 각각 현재가치로 환산한 후 합하여 계산합니다. 여기에서, 각각의 이자와 원금을 현재가치로 할인하는데 쓰이는 이자율이 *zero rates*입니다.

years	Zero rates
0.5	5.0%
1.0	5.8%
1.5	6.4%
2.0	6.8%

원금이 100$이고 쿠폰이 6%인 채권이 semiannually 이자를 지급하고, 위의 zero rates를 적용하면 채권의 가격은 다음과 같습니다.

$$3e^{-0.05\times 0.5} + 3e^{-0.058\times 1.0} + 3e^{-0.064\times 1.5} + 103e^{-0.068\times 2.0} = 98.39$$

Bond Yield

채권의 수익률이란, 채권의 현금흐름과 현재 가격을 일치시키는 수익률을 말합니다. 즉, 상기 zero rates를 통해 구한 채권가격과 채권의 현금흐름에 단일 수익률을 적용하여 구한 현재가치가 같아지면 됩니다.

$$YTM\ y\ :\ 3e^{-y\times 0.5} + 3e^{-y\times 1.0} + 3e^{-y\times 1.5} + 103e^{-y\times 2.0} = 98.39$$

수치해석방법을 통해 y를 구하면, 약 6.76%임을 알 수 있습니다.

Par Yield

*par yield*란, zero rates를 통해 채권가격을 산출할 때, **채권가격이 par가 되는 coupon rate**를 말합니다. 즉, 위의 예시에서 par yield는

$$\frac{c}{2}e^{-0.05\times 0.5} + \frac{c}{2}e^{-0.058\times 1.0} + \frac{c}{2}e^{-0.064\times 1.5} + (100 + \frac{c}{2})e^{-0.068\times 2.0} = 100(par)$$
$$c \approx 6.87\%$$

4.7 Determining zero rates

실제로 zero rates는 잘 알려져있지 않으므로, 국채수익률을 이용하여 zero rates를 역산하는 방식을 주로 사용합니다. 이때 사용하는 방식을 *Bootstrap method*라고 하며, 다음과 같습니다.

1. 채권은 연 2회 이자를 지급한다고 가정
2. 3개월, 6개월, 1년, 2년, 1.5년, 2년 zero rates를 구하고자 함
3. 각 만기별 국채를 통해 만기별 채권 YTM을 산출
4. 3개월 및 6개월 국채는 잔여 이자지급이 없으므로 YTM=zero-rate
5. 6개월 zero-rate와 1년만기 국채의 가격을 통해 1년 zero-rate 산출
6. 6개월 및 1년 zero-rate와 1.5년 국채가격을 통해 1.5년 zero-rate 산출
7. 같은 방법으로 2년 zero-rate 산출

4.8 Foward rates

선도금리란, 미래시점에 적용되는 금리를 말합니다. 예를 들어 현재시점에서 1년뒤에 1년간 적용되는 선도금리를 구한다고 가정하면, 1년 zero rate와 2년 zero rate의 관계를 통해 구할 수 있습니다.

현재시점에서 원금을 2년 zero rate에 투자한 것과 1년 zer rate + 선도금리에 투자한 포트폴리오의 수익은 동일해야 하므로,

$$100e_1^z e_{12}^f = 100e^{z_2 \times 2} \rightarrow f_{12} = 2 \times z_2 = z_1$$

연속복리 수익률에서 t_0 시점에서 $t_1 \sim t_2$ 까지의 선도수익률 F_{12} 을 일반화하면,

$$F_{12} = \frac{t_2 \times z_2 - t_1 \times z_1}{t_2 - t_1}$$

$$F_{12} = z_2 + (z_2 - z_1)\frac{t_1}{t_2 - t_1} \rightarrow z + t\frac{\partial z}{\partial t}\ for\ t_2 \rightarrow t_1$$

해당 극한값은 기간이 매우 짧을때 적용할 수 있는 선도수익률로, *instantaneous forward rate*라고 합니다.

Foward rates : furthermore

*instantaneous forword rate*의 유도방법

$LetP()\ i\ a\ present\ value\ functions,\ P(t,T) = e^{-(T-t)z_T}$

$Then,\ Forward\ rate\ F(t,T,T+\delta) = F\ is,$

$\frac{e^{\delta \times F}}{P(t,T)} = \frac{1}{P(t,T+\delta)} \Rightarrow F = \frac{1}{\delta}\ln[\frac{P(t,T)}{P(t,T+\delta)}] = -\frac{\ln[P(t,T+\delta)] - \ln[P(t,T)]}{\delta}$

$$instantaneous\ forward\ rate\ \hat{F} = -\frac{\partial}{\partial T}\ln[P(t,T)]\ where\ \delta \rightarrow 0$$

4.9 Forward rate agreements

FRA는 금리파생상품의 일종으로, 계약자들은 향후 특정시점에 변동금리를 현재시점의 FRA계약금리로 고정시키고 계약만기시점에 변동금리와 고정금리를 주고받는 형태의 계약입니다.

FRA 매수자는 변동금리를 받고 고정금리(FRA계약금리)를 주며, 따라서 **변동금리가 향후 상승하면 유리**한 포지션입니다. 따라서 향후 **돈을 빌리고자 하는 사람**들이 사용합니다. 반대로 FRA매도자는 변동금리를 주고 고정금리를 받으므로, 금리 하락시 유리한 포지션입니다.

FRA는 옵션 등이 없는 계약이므로, 계약을 체결하는 시점에 매수자 및 매도자가 동등한 위치에서 계약을 체결합니다. 따라서 체결시점의 계약은 누군가에게 유리하게 체결되어서는 안되고, 이는 **계약의 가치가 0원**임을 의미합니다. 즉, **계약만기시점의 Forward rate가 일반적인 FRA의 계약금리**가 됩니다.

계약금리가 **Forward rate로 설정되지 않는다면, 차익거래기회가 발생**합니다. Forward rate보다 낮게 FRA계약이 체결된다면, 투자자는 FRA매수와 동시에 FRA원금만큼 Forward rate에 돈을 빌려줌으로써 Forward rate - FRA금리 만큼의 무위험차익을 얻을 수 있습니다.

4.10 Duration

채권의 듀레이션이란, 채권 소유자의 원금회수기간을 의미합니다. 즉, 채권이 원금(=채권가격)만큼의 현금흐름을 발생시키는데 걸리는 시간을 말합니다. 따라서 듀레이션은 채권의 각 현금흐름이 원금에서 차지하는 비율을 시간가중평균하여 산출하게 됩니다.

채권이 c_i만큼의 현금흐름을 발생시키고, 현재 가격은 B, 수익률은 y라고 하면 채권의 가격과 현금흐름은 $B = \sum c_i e^{-yt_i}$ 입니다.

이에 대한 시간가중평균인 듀레이션은 다음과 같습니다.

$$D = \frac{\sum t_i c_i e^{-yt_i}}{B} = \sum t_i [\frac{c_i e^{-yt_i}}{B}],\ \sum t_i = 1$$

간단한 미분의 성질을 활용하면, $\Delta B = \frac{dB}{dy}\Delta y = -\Delta y \sum c_i t_i e^{-yt_i} = -\Delta y \times B \times D$

즉, $\frac{\Delta B}{B} = -D\Delta y$를 유도할 수 있습니다.

이는 채권가격의 변화율 $\frac{\Delta B}{B}$가 수익률 변화분과 반대방향으로 D의 비율만큼 움직인다는 것을 의미합니다. 이러한 관점에서 듀레이션을 채권가격의 민감도라고 표현합니다.

DV01이란 수익률이 0.01%(1bp)변화할때 채권가격의 변동분을 말합니다. 즉, $DV01 = -0.0001 \times B \times D$

Modified duration

연속복리수익률을 사용하지않고 annual 등 복리수익률을 사용하는 경우, 듀레이션과 채권가격 간의 관계는 다음과 같습니다.

$$\Delta B = -\frac{BD\Delta y}{1 + y/m}$$

이러한 이자율 측정방법간 차이를 보정하기 위해 수정듀레이션을 $D^* = \frac{D}{1+y/m}$ 이라고 하며, $\Delta B = -BD^*\Delta y$를 사용합니다.

Bond portfolios

채권으로 포트폴리오를 구성할 때, 상기 듀레이션에 관한 식을 모두 적용할 수 있습니다. 다만, 유의해야할 점은 Δy는 모든 채권수익률이 변화할때를 말한다는 것 입니다. 즉, 채권의 만기에 따른 수익률 곡선이 평행하게 이동(parallel shift)할 때만 듀레이션을 이용한 계산을 적용할 수 있습니다.

금융기관은 부채와 자산간의 듀레이션을 일치시키는 방법으로 금리변화에 따른 위험을 회피할 수 있습니다. 그러나, 금리 곡선이 평행하게 이동하지 않고 가파르거나 평평하게 움직이는 것에 대한 위험은 여전히 남아있습니다.

4.11 Convexity

듀레이션을 이용한 채권가격변화분은 수익률 변화분이 커질수록 정밀도가 떨어집니다. 이때 이용하는 것이 Convexity로, non-linear한 채권 가격을 듀레이션을 통해 linear하게 추정할때, 오차분을 보정해주는 역할을 합니다.

$$C = \frac{1}{B}\frac{d^2B}{dy^2} = \frac{\sum c_i t_i^2 e^{-yt_i}}{B}$$

한편, 테일러 급수를 활용하여 2차 다항함수까지 전개한 채권가격에 듀레이션과 컨벡서티를 적용한 식은 다음과 같습니다.

$$\Delta B = \frac{dB}{dy}\Delta y + \frac{1}{2}\frac{d^2B}{dy^2}\Delta y^2 = -BD\Delta y + \frac{1}{2}BC(\Delta y)^2$$
$$\Rightarrow \frac{\Delta B}{B} = -D\Delta y + \frac{1}{2}C(\Delta y)^2$$

포트폴리오의 컨벡서티까지 0에 가깝게하는 경우(감마헷지), 이자율이 크게 변화하더라도 어느정도 보정할 수 있으나, 역시 가파르거나 평평하게 수익률 곡선이 움직이는 경우의 위험은 존재합니다.

4.12 Theories of the term structure of interest rates

제로금리 커브는 일반적으로 로그함수처럼 완만하게 우상향하는 곡선이지만, 때때로는 flat하기도, 우하향하기도 하며 심지어는 기간에따라 등락을 반복하기도 합니다. 이를 설명하는 금리의 기간구조에 대해서는 많은 이론들이 존재합니다.

1. *expectations theory* : 장기금리는 미래의 단기금리의 기대값과 동일. 현재의 선도금리가 미래의 제로금리의 기대값.
2. *market segmentation theory* : 단기, 중기, 장기금리는 각각 시장참여자가 달라 서로 큰 관계가 없으며, 각 시장별 투자자의 수급이나 전망에 따라 형성.
3. *liquidity preference theory* : 유동성 선호이론. 사람들은 현금을 보유하는 것을 선호하므로, 돈을 빌릴때 장기간으로 빌리고 싶어함. 따라서 금리는 일반적으로 우상향. 선도금리가 제로금리보다 높게 형성. 현실과 가장 부합.

Chapter 5

선도 및 선물 가격의 결정요인

(*Determination of Forward and Futures Prices*)

5.1 투자자산 vs. 소비자산

선도 및 선물계약에 있어서 기초자산이 투자자산인지 소비자산인지 구분하는 것은 매우 중요합니다. 이 챕터에서는 투자자산을 중심으로 선도/선물가격과 기초자산 가격간의 관계를 차익거래를 이용하여 서술할 예정입니다.

- 투자자산(investment asset) : 주식,채권, 금, 은과 같은 투자목적으로 주로 거래되는 자산
- 소비자산(consumption asset) : 원유, 원자재 등 주로 생산 또는 소비목적으로 거래되는 자산

> **Note**
>
> 어떠한 자산이 반드시 투자자산이나 소비자산에 속하는 것은 아닙니다. 누군가는 원유를 투자 목적으로 거래할 수 있으며, 생산목적으로 은과 같은 귀금속을 거래하기도 합니다. 주로 거래되는 목적에 따른 단순 분류임을 유의하시기 바랍니다.

5.2 공매도

공매도란 현재 가지고 있지 않은 자산을 빌려서 파는 행위를 말합니다. 주로 현재시점에서 자산을 빌려서 미리 팔고, 추후 자산을 시장가격에 구매해서 갚는 식으로 이루어집니다.

차익거래 메커니즘을 통해 선도/선물가격을 설명할 때 공매도가 자주 사용되며, 공매도를 실행할 때 자산을 빌리는 데 드는 비용(대차비용)이 존재하고 때때로 공매도가 불가능한 투자자산도 존재하지만, 대체로 **공매도가 가능하고 별도의 비용이 들지않는다는 가정**을 포함합니다.

> **공매도와 규제**
>
> 과거부터 공매도는 주식시장의 과도한 하락을 초래한다는 부정적인 인식 및 효과로 인해 규제되어왔습니다.
> 최초로 1938년 업틱룰(uptick-rule)이 소개되었는데, 이는 공매도 호가를 제출할 때 현재 매도최우선호가보다 높은 호가에 제출해야하는 규제로, 공매도로 인해 시세하락변동이 유발되지 않도록 하는 규제입니다.
> 미국의 경우 2007년 업틱룰이 폐치되고 대체 규제(alternative uptick rule)이 소개되었으며, 이는 주식이 당일 10%이상 하락하였을 때, 그날과 다음날까지 업틱룰을 적용하는 제도입니다
> 또한, 때때로 공매도는 금융시장이 불안정할때 금지되어 왔으며, 미국에서는 2008년 서프프라임 금융위기때 일시적으로 금지하였습니다. 국내의 경우 금융위기 및 코로나위기('20년), 경기침체('23.11~'24.3월현재 지속) 등 공매도를 일시적으로 중단하고 있습니다.

5.3 Assumptions and Notation

선도/선물가격을 결정할 때, 아래의 4가지 사항이 참이라고 가정합니다. 실제 거래규모가 큰 일부 기관투자자에게만 아래 가정이 적용되더라도 차익거래 메커니즘이 작동하는 데에 문제는 없습니다.

1. 모든 시장참여자는 거래비용이 0이다.
2. 모든 시장참여자는 모든 거래순이익에 대해 동일한 세율을 적용받는다.
3. 모든 시장참여자는 무위험이자율에 무한대로 자금을 빌리거나 빌려줄 수 있다.
4. 모든 시장참여자는 차익거래 기회가 생기면 이를 이용한다.

5.4 투자자산에 대한 선도가격

가장 간단한 선도계약을 예시로 들어보면, 보관비용이 없고 현금흐름을 발생시키지 않는 기초자산에 대한 선도계약으로, 배당이 없는 주식 또는 무이표채에 대한 선도를 예시로 들 수 있습니다.

현재 시점에서 3개월 뒤 만기가 도래(T)하는 선도계약의 현재가격을 F_0, 기초자산의 현재가격을 S_0, 3개월 무위험이자율을 r이라고 할 때, 현재시점의 지출 없이 T시점에 기초자산을 보유하는 방법은 두 가지로 나눌 수 있습니다.

1. 선도계약 매수하여 T시점에 선도계약가격으로 기초자산을 매수
2. 무위험이자율로 자금을 빌려 기초자산을 매수하고 T시점까지 보유

위 두가지 방법을 현재시점에 실행하고, 만기 T시점까지의 현금흐름은 다음과 같습니다.

1. T F_0

2. S_0 , $S_0(e^{rT}-1)$

위 두가지 현금흐름은 정확히 동일해야하므로, 선도/선물가격은 다음과 같습니다.

$$F_0 = S_0 e^{rT}$$

만약, 이 등식이 성립하지 않는다면 차익거래가 발생합니다.

$F_0 > S_0 e^{rT}$ 인 경우, 현재시점에 ***1.*선도계약을 매도**하고 ***2.* 무위험이자율로 자금을 빌려 기초자산을 매수**하면, T시점에 $F_0 - S_0 e^{rT}$ 만큼 무위험 차익거래가 가능합니다.

반대인 경우, 현재시점에 ***1.*선도계약을 매수**하고 ***2.* 기초자산을 공매도하고 매도대금을 무위험이자율에 투자**하면, T시점에 $S_0 e^{rT} - F_0$ 만큼 무위험 차익거래가 가능합니다.

한편, 실제 금융시장에서 공매도는 모든 기초자산에 대해 가능한 것이 아니고, 대게 비용이 발생합니다. 따라서 공매도가 제한적인 경우 선도가격이 저평가되었을 때 차익거래는 불가능할 수도 있습니다.

그러나, 기초자산을 본래 보유하고 있던 투자자는 현재시점에 ***1.*선도계약을 매수**하고 ***2.* 보유한 기초자산 매도하고 매도대금을 무위험이자율에 투자**하면, T시점에 $S_0 e^{rT} - F_0$ 만큼 무위험 차익거래가 가능하기 때문에, **공매도가 제한적이더라도 대부분의 경우에 위의 수식이 성립**합니다.

::: {.callout-warning title-"Kidder Peabody's Mistake"} 투자은행들은 종종 이표채의 현금흐름을 각각 개별 zero-coupon 채권으로 전환하는 strip이라는 기법을 사용합니다.

Kidder Peabody의 트레이더 Jett는, 컴퓨터 계산 결과 채권을 strip하여 각각을 선도계약을 통해 매도하면 약 $100m이익을 얻을 수 있다는 차익거래 기회를 포착하고 거래를 실행하였습니다.

그러나, Jett는 채권을 매수하여 strip하는 거래비용을 간과하였고, 이익 대신 총 $330m의 손실을 회사에 미치고 말았습니다. :::

5.5~6 기초자산의 현금흐름

지금까지는 배당이나 이표 등 현금흐름이 발생하지 않는 기초자산에 대해서 알아봤습니다. 만약 현금흐름이 발생하지만, 기초자산의 현재시점부터 선도/선물 만기까지의 모든 현금흐름을 정확하게 알고있다면, 동일한 방식으로 선도/선물계약 평가가 가능합니다.

1. 선도계약 매수하여 T시점에 선도계약가격으로 기초자산을 매수
2. 무위험이자율로 자금을 빌려 기초자산을 매수하고 T시점까지 보유

Discrete

T_1 시점에 기초자산에 I 만큼 현금흐름이 발생한다면, 두 경우의 만기까지 현금흐름은 아래와 같습니다.

1. T F_0

2. S_0 , T_1 I , $S_0(e^{rT}-1)$

이를 정리하면,

$$F_0 = S_0 e^{rT} - I e^{r(T-T_1)} = (S_0 - I_0) e^{rT} \; where \; I_0 = I e^{-rT_1}$$

Continuous

기초자산의 현재부터 만기까지 평균적으로 연속복리수익률 q 만큼의 현금흐름이 발생한다면, 만기시점에 S_0 를 보유하기 위해 현재 $S_0 e^{-qT}$ 만큼만 매수하면 됩니다.

1. 선도계약 매수하여 T시점에 선도계약가격으로 기초자산을 매수
2. 무위험이자율로 자금을 $S_0 e^{-qT}$ 만큼만 빌려 기초자산을 매수하고 T시점까지 보유

1. T F_0

2. $S_0 e^{-qT}$, $S_0 e^{-qT}(e^{rT} - 1)$

$$, \ F_0 = S_0 e^{(r-q)T}$$

5.7 선도계약의 가치

은행이나 기관입장에서 과거에 이루어진 선도계약의 가치평가는 매우 중요합니다. 실제로 은행 등 기관에서는 선도계약의 가치를 매일매일 평가(Marking to Market)하고 있습니다.

선도계약의 가치는 계약을 중도에 청산하고자 하는 투자자가 얻게되는 손익이므로, 기존의 선도계약과 가치가 "0"인 선도가격(즉, 현재시점의 선도가격)의 현금흐름을 비교하는 방법을 사용합니다.

과거 선도계약의 가격(delivery price)가 K, 현재 선도계약의 균형가격이 F_0, 무위험이자율이 r이면 두 계약 만기 T시점의 지출은 각각 K, F_0 입니다. 현재 선도계약은 가치가 "0"이므로 선도계약의 미래가치는 매수의 경우 $F_0 - K$, 매도의 경우 $K - F_0$가 됩니다.

이를 정리하면 선도계약의 가치 f는 다음과 같습니다.

$$f_{long} = (F_0 - K)e^{-rT} \ or \ f_{short} = (K - F_0)e^{-rT}$$

위에서 다룬 선도가격 F_0를 여기에 적용하면, 다음과 같이 표현할 수 있습니다.

$$f_{long} = (F_0 - K)e^{-rT} = S_0 - Ke^{-rT} = S_0 - I_0 - Ke^{-rT} = S_0 e^{-qT} - Ke^{-rT}$$

5.8 선도가격=선물가격 ?

선물가격과 선도가격은 대체로 동일하지만, **선물의 일일정산으로 인해 차이가 발생**합니다. 선도계약을 평가할 때, 우리는 현재와 만기시점까지 발생하는 현금흐름을 비교하였습니다.

선도는 만기까지 현금흐름이 발생하지않고 만기에 기초자산을 선도가격에 인수도함으로써 마무리됩니다. 그러나 선물가격은 일일정산이 존재하므로 매일매일 기초자산의 가격변동에 따른 현금흐름이 발생합니다. 다시 말해, **선물 매수자의 기준으로 기초자산 가격이 상승하면 (+) 현금흐름이, 가격이 하락하면 (-) 현금흐름**이 발생합니다.

이 경우, 현금흐름 발생에 따라 각 현금흐름의 미래가치를 계산하여 비교하게되는데 여기서 선도와 선물의 차이가 발생하게 됩니다. 일반적으로 주가의 향후 방향성은 예측할 수 없으므로 현재시점에 일일정산으로 인한 평가가격 차이는 없으나, 만약 **이자율과 주가간에 상관관계가 존재한다면** 이야기가 달라집니다.

이자율과 주가가 양의 상관관계인 경우, 주가 상승 및 이자율 상승시 선물 매수자에게 이익이 발생하고 이를 미래가치로 평가할 때 이자율 상승으로 인해 미래가치가 크게 상승하므로 선물 보유자에게 유리합니다. 주가 하락 및 이자율 하락시에는 선물 매수자의 손실을 미래가치로 평가할 때 손실이 적게 상승하므로 **선물 보유자에게 유리**합니다.

반대로, **이자율과 주가가 음의 상관관계**인 경우, 주가 상승 시 선물 매수자의 이익이 낮게 상승하고 주가 하락시 손실이 크게 상승하므로 **선물 보유자에게 불리**합니다.

즉, **주가와 이자율간 상관관계**에 따라 선도가격과 선물가격의 차이가 결정되며, 일반적으로 **양의 상관관계일 때 선물가격이 높게, 음의 상관관계일 때 선도가격이 높게 형성**됩니다. 이러한 차이는 만기까지의 잔존기간이 길수록 커집니다.

5.9~12 Cost of Carry 및 다양한 선도/선물가격

만기 현금흐름 비교를 통해 차익거래가 발생하지 않는 선도/선물가격을 결정하는 방법을 **보유비용모형** (***The Cost of Carry***)이라고 합니다.

지금까지 기초자산을 만기 T에 보유하는 방법으로 *1.* 선도/선물 매수, *2.* 자금 조달 및 현물 매수로 나누어 비교하였는데, 이 방식을 선도/선물 매수자입장에서 생각해보면 선도/선물계약을 만기까지 보유하는 동안 실제로 현물을 보유하지 않으므로, **현물에서 발생하는 수익은 선도/선물 매수자에게 불리**하게, **현물을 보관하는데에 드는 비용은 선도/선물 매수자에게 유리**하게 작용합니다.

즉, **선도/선물가격**은 기초자산의 현재가격에 만기 T 시점까지의 **기초자산에서 발생하는 수익을 차감하고 기초자산을 보관하는 비용을 가산**하여 결정됩니다.

$$F_0 = S_0 - Benefit + Cost = S_0 e^{(cost-yield)T} \ (Generalized)$$

투자자산에서 주식과 채권 등의 보관비용은 현금의 기회비용인 무위험이자율에 해당하므로, 일반적으로 $S_0 e^{rT}$ 로 표현된다고 해석할 수 있습니다.

주가지수선물

보유비용모형을 통해 주가지수선물 가격을 평가할 때, 고려해야할 보유비용은 현금의 기회비용인 r 및 보유수익은 배당률 d 입니다.

$$Index\ Futures\ F_0 = S_0 e^{(r-d)T}$$

지수차익거래

주가지수선물도 마찬가지로 이 등식이 성립하지 않는다면 차익거래가 발생합니다. $F_0 > S_0 e^{(r-d)T}$ 인 경우, 선물을 매도하고 자금을 빌려 주가지수 복제 포트폴리오를 매수함으로써 지수차익거래를 할 수 있습니다. 반대로 $F_0 < S_0 e^{(r-d)T}$ 인 경우 선물을 매수하고 주가지수 복제 포트폴리오를 공매도함으로써 지수차익거래를 할 수 있습니다.

선도환, 선물환 및 통화선물

해외통화의 현재환율을 S_0, 선도환율을 F_0, 자국과 해외의 무위험이자율을 각각 r, r_f 라고 한다면, 만기 T 시점에 해외통화를 보유하는 두가지 방법은,

1. Currency Forward or Futures를 F_0 에 매수
2. 자국 통화를 $S_0 e^{-r_f T}$ 만큼 빌려 해외 통화를 매입하고 만기까지 보유

만기시점까지의 현금흐름을 살펴보면,

1. $F_0 e^{r_f T}$

2. $S_0 e^{-r_f T}$, $S_0 e^{-r_f T}(e^{rT} - 1)$

즉, **?@sec-5.6con** 과 동일한 방식을 적용하여 $Currency,\ F_0 = S_0e^{(r-r_f)T}$ 를 도출할 수 있습니다. 이는, 선도환 및 통화선물을 거래할 때, 기초자산의 보유비용은 자국의 무위험이자율이며 기초자산의 보유수익은 해외통화의 무위험이자율임을 뜻합니다.

상품선물

귀금속이나 원자재 등 Comodity는 일반적으로 현물을 보유하는데에 보관비용이 발생합니다. 현재시점부터 만기까지의 보관비용을 U 만큼 선불지급한다고 하면 해당 Comodity를 만기 T시점에 보유하는 방법은,

1. Comodity Forward or Futures를 F_0 에 매수
2. 자금을 $S_0 + U$ 만큼 빌려 현물을 S_0 에 매수하고 보관비용을 U 만큼 지급

만기시점까지의 현금흐름은,

1. F_0
2. $S_0 + U$, $(S_0 + U)(e^{rT} - 1)$

즉, **?@sec-5.6dis** 과 동일한 방식으로 $F_0 = (S_0 + U)e^{rT}$ 를 도출할 수 있습니다. 만약 U 를 연속복리이자율을 적용한 S_0e^{uT} 로 표현한다면, $F_0 = S_0e^{(r+u)T}$ 라 할 수 있습니다.

추가적으로, convenience yield가 있는 상품의 경우 그 수익률을 y 라 한다면 최종적으로 다음과 같이 나타낼 수 있습니다.

$$Comodity,\ F_0 = S_0e^{(r+u-y)T}$$

5.13 실물인수도에 따른 옵션, Delivery Options

일부의 선물계약과 선도계약은 만기시점에 실제로 기초자산과 매수대금을 주고 받는 실물인수도를 최종결제방식으로 채택합니다. 이때, 선도계약은 인수도 시점에 대한 것이 명확하게 계약시점에 정해지지만, **선물계약은 일반적으로 매도자가 언제 기초자산을 인도할지에 대한 선택권**을 가지고있습니다. 정해진 인수도기간 중에, 언제 인수도가 이루어지냐에 따라서 선물계약의 가치평가에 영향을 미치게 되는 것 입니다. 물론 대부분의 선물이 만기 전 반대거래로 청산이 이루어진다고는 하지만, 알아두고 갈 필요는 있습니다.

위에서 살펴본 바와 같이, 일반적으로 선물가격은 S_0e^{rT}로 결정되며 이는 잔존만기에 따른 증가함수입니다. 이는 **?@sec-costofcarry** 관점에서 볼 때 기초자산에 보유비용이 발생한다는 의미로, **선물가격이 현물가격보다 높게 형성**된다면 선물 매도자입장에서는 **인수도기간 중 가능한 빨리 인수도를 할 유인**이 생긴다는 것을 의미합니다.

반대로, **선물가격이 현물가격보다 낮게 형성**된다면 시장상황이 기초자산에 보유이익이 발생한다는 의미로, 선물 매도자입장에서는 **가능한 늦게 인수도를 할 유인**이 생긴다는 것을 의미합니다.

5.14 선물가격과 미래 현물가격의 기대값

현재까지 **선물가격에 관한 내용은 미래 현물가격에 대한 시장의 기대가 반영된 값이 아닌, 단순히 No-Arbitrage-Rule에 따라 산출된 수학적인 값**입니다.

여기에 현물가격에 대한 시장의 기대심리 또는 기대값이 반영된다면 선물가격은 달라질 것 입니다. 시장에서 **현물이 향후 상승할 것으로 예상**된다면 **선물은 이론가격보다 높게 형성**될 것이고, **현물이 하락할 것으로 예상**된다면 **선물은 이론가격보다 낮게 형성**될 것 입니다.

Keynes and Hicks

만약 선물시장에서 위험관리를 하고자 하는 투자자는 선물 매도를 주로 하고, 방향성 투자를 하고자하는 투자자는 선물 매수를 주로 하는 경우, 선물가격은 현물가격의 미래 기대값보다 낮게 형성될 것이라고 말했습니다.

방향성 투자자는 선물을 매수할 때 위험에 대한 보상심리로 평균 이상의 수익률을 기대하기때문에 미래의 현물 기대값보다 낮은 가격에 선물을 매수하며, 위험관리 투자자는 자신의 위험을 감소시키는 것에 대한 대가로 일정 비용을 치루는 것을 감수하기 때문입니다.

따라서, 만약 위험관리 투자자가 선물 매수를 주로하고 방향성 투자자가 선물 매도를 주로 한다면 선물가격이 현물가격의 기대값보다 낮게 형성될 것 입니다.

Risk and Return

최근의 접근방법은 선물가격과 현물가격의 관계를 리스크 대비 기대수익으로 설명하고 있습니다. CAPM 등에서 투자자산의 리스크가 높다면 보다 높은 기대수익률을 가지고 있어야 합니다. **?@sec-CAPM**

선물포지션의 리스크

현재 선물가격을 F_0, 만기시점의 현물가격을 S_T, 무위험이자율을 r이라 할 때, 향후 현물가격이 상승할 것을 기대하고 선물 매수에 투자하는 방향성 투자자를 생각해봅시다. ($S_T > F_0$ 기대)

이를 위해 현재 F_0에 선물을 매수하고 자금을 $F_0 e^{-rT}$만큼 무위험이자율 r에 투자하여, 만기 T시점에 F_0에 현물을 인수도받아 즉시 S_T에 판다고 하고, 일일정산 및 거래비용 등은 없다고 가정하면 투자자의 현금흐름은 다음과 같습니다.

- : $-F_0 e^{-rT}$
- : $+S_T$

이 때, 투자자의 선물포지션에 대한 기대수익률은 k이며 현재시점의 선물계약의 가치가 0이라고 하면, 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$-F_0 e^{-rT} + E[S_T]e^{-kT} \;\Rightarrow\; F_0 = E[S_T]e^{(r-k)T}$$

여기서 k는 기초자산의 *systematic risk*에 따라 달라지며, 이에 대한 관계는 아래와 같습니다.

Underlying asset	$k \sim r$	$F_0 \sim S_T$	States
No systematic risk	$k = r$	$F_0 = E[S_T]$	-
(+) Systematic risk	$k > r$	$F_0 < E[S_T]$	Contango
(-) Systematic risk	$k < r$	$F_0 > E[S_T]$	**Normal backwardation**

특히, $k = r \;\Rightarrow\; F_0 = E[S_t]$인 경우, 선물가격은 현물의 미래 기대값에 대한 불편추정량임을 의미합니다.

Chapter 7

스왑, Swaps

최초의 스왑은 1981년 IBM과 World Bank간에 체결된 통화스왑입니다. 당시 World Bank는 독일과 스위스 통화를 직접적으로 대차할 수 없었고 IBM에게 미국달러에 대한 이자를 지급하고 독일 및 스위스 통화에 대한 이자를 수취하는 계약을 체결하였습니다.

스왑은 일정 주기마다 이자를 주고 받는 계약으로, 이자율선도 및 통화선도계약을 연속적으로 체결하는 것과 동일한 메커니즘을 가지고 있습니다.

7.1 Mechanics of interest rate swaps

이자율 스왑은 계약 당사자들끼리 **미래 특정시점**까지 **일정 주기**마다 정해둔 명목금액에 대하여 **정해둔 고정금리와 변동금리를 적용한 이자를 주고 받는 계약**입니다.

여기에 적용되는 변동금리는 최근까지 LIBOR가 널리 사용되었습니다. 그러나, LIBOR 조작 사태 이후 LIBOR 산출 중단에 따라 이를 대체하고자 하는 논의가 지속되고 있으며, 특히 과거에 체결되었던 20년 이상의 장기스왑의 경우 중도에 Reference float rate를 교체해야하므로, 미국의 경우 US LIBOR 대신 SOFR+α를 사용하는 추세입니다.

SOFR 및 영국의 SONIA 등 Overnight금리는 실제 거래기반의 담보부 금리로 LIBOR 대비 조작가능성이 낮고 안정성은 높으며, 선물을 통해 장기금리로 쉽게 치환할 수 있는 등의 장점이 있습니다. 최근에는 이러한 Overnight금리를 이용한 스왑이 널리 이용되고 있고, **이자율스왑 중 Overnight금리를 이용한 스왑을 Overnight Indexed Swaps, OIS**라 부릅니다.

LIBOR swaps vs. OISs

두 스왑은 단순히 Reference float rate를 무엇을 사용하는지에 따라 구분되는 것이나, 두 금리의 이자율 산출방식의 차이가 있음을 유의하여야 합니다.
Libor는 Forward-looking금리로, 스왑계약으로 인해 3개월마다 고정금리와 Libor를 주고 받는다면, 향후 3개월간 적용될 3-month Libor가 현재시점에 결정됩니다. 반면에 Overnight금리는 Backward-looking금리로, 향후 3개월간 적용될 3-month rate는 향후 3개월간 Overnight금리를 누적하여 산출하게 되고, 즉 금리를 주고 받을 시점이 되서야 확정할 수 있게됩니다.

7.2 Determining Risk-Free rates

OISs는 무위험이자율을 결정하는 데에 매우 중요한 역할을 맡고 있습니다. 먼저, OIS 체결시 결정되는 고정금리인 OIS rate는 현재 스왑계약의 가치가 0이되는 지점에서 결정될 것 입니다.

여기서, 만약 스왑계약 만기시점에 명목금액을 상호간에 주고 받는다고 생각해봅시다. 동일한 원금을 계약당사자간 주고 받으므로 계약의 가치에는 변동이 없습니다.

이때, 변동금리를 받는 경우와 고정금리(OIS rate)를 받는 경우의 현금흐름을 각각 생각해보면, 고정금리를 받는 경우는 OIS rate를 쿠폰으로 지급하고 원금이 스왑계약의 명목금액인 채권과 동일하며, 변동금리를 받는 경우는 Overnight rate를 쿠폰으로 지급하고 원금이 명목금액인 변동금리채권과 동일합니다.

한편, Overnight rate를 할인율로 사용한다면 Overnight rate를 쿠폰으로 지급하는 변동금리채권의 현재가치는 원금(Par value)와 동일하게 됩니다. 이제, OIS rate는 현재 스왑계약의 가치가 0이되는 지점이라고 했으므로, 변동금리채권과 OIS rate를 쿠폰으로 지급하는 채권의 가치는 동일한 Par value에서 결정됩니다. 즉, **OIS rate는 채권의 Par rate와 동일하게 됩니다.**

$$Par\ value = FRN's\ price = Value\ of\ float\ rate\ receiver =$$

$$Value\ of\ OIS\ rate\ receiver = Treasury\ bond's\ price$$

7.3~5 Reasons for trading Interest Rate Swaps

스왑을 거래하는 이유는 크게 2가지입니다.

먼저, **보유하고 있는 부채나 자산의 금리구조를 바꾸고 싶은 경우**입니다. 내가 **은행에서 변동금리로 자금을 빌렸다면,** 자금의 만기와 이자지급시기가 유사한 **스왑 매수계약** 체결을 통해 고정금리를 지급하고 변동금리를 받음으로써 **은행의 부채를 고정금리 부채로 변환하는 효과**가 있습니다. 이러한 작업은 **자산과 부채간 듀레이션을 일치**시키고자 하는 기관 등에서 주로 사용합니다.

다음으로는 **비교우위(Comparative advantage) 전략**을 이용하기 위해서 입니다. 자금을 빌리고자 할 때, **A기업은 변동금리보다 고정금리로 빌릴 때 상대적으로 비교우위**가 있고 **B기업은 변동금리로 빌릴 때 비교우위**가 있다고 가정해봅시다. **A기업이 변동금리로 자금을 빌려야 하는 경우**, 바로 빌리는 것이 아니라 비교우위가 있는 **고정금리로 먼저 자금을 차입**하고, 변동금리에 우위가 있는 B기업과 **스왑계약(A: 매도/B:매수)**한다면, **이자비용을 절약**하는 효과를 얻을 수 있습니다. 물론, 실제로는 기업에 따라 이러한 비교우위가 없을 수도 있고, 두 기업의 Default Risk가 비대칭적인 점을 고려하기 어려우며, 기업의 신용도에 따라 적용이자율이 미래에 변하기때문에 이러한 전략이 실행되기 어렵다는 비판도 존재합니다.

> The organization of swap trading
>
> 스왑 매수는 고정금리 지급 및 변동금리 수취, 스왑 매도는 고정금리 수위 및 변동금리 지급을 의미합니다.
> 실제 시장에서는 매수/매도별로 호가가 나뉘는데, 일반적으로 이 매수/매도 호가의 평균값을 *Swap rate*라고 합니다.
> 또한, 국가 및 이자율마다 적용되는 Day count convention이 다를 수 있어 유의해야 합니다. 예를 들어 SOFR나 Libor는 $\frac{actual}{360}$을 사용하지만, 고정금리의 경우 $\frac{actual}{365}$ 또는 $\frac{30}{360}$을 주로 사용해야합니다.
> 2008년 금융위기 이후 스왑계약 및 미결제약정에 대한 위험관리를 강화하고자 하는 논의가 지속되고 있으며, 현재는 대부분 CCP에서 스왑 계약들을 한데 모아 청산결제를 수행하고, 국제스왑파생상품협회(International Swaps and Derivatives Association)에서 표준계약서를 제공하며 거래내역을 보고받고 있습니다.

7.6~7 Valuation of Interest Rate Swaps

스왑의 가치평가는, 현재시점에 스왑계약의 NPV가 “0”이 되는 고정금리가 스왑의 계약금리로 결정된다는 것에서 시작합니다.

즉, 이자율 선도계약과 매우 유사합니다. 실제로 스왑계약의 만기까지의 현금흐름을 매 이자교환시기마다 구분한다면, 각각의 이자교환은 하나의 이자율선도계약에 해당합니다. 따라서, 스왑계약의 가치평가는 다음 3단계로 이루어집니다.

(1) 먼저, 각 이자지급시기에 만기가 도래하는 동일한 변동금리 기반의 선도이자율을 모두 계산한다.
(2) 해당 선도이자율은 현재시점에 NPV가 “0”이므로 미래 이자지급시기에 지급할 예정인 변동금리와 선도이자율이 동일하다고 가정하고, 스왑의 미래현금흐름을 계산한다.
(3) 스왑의 현금흐름을 현재가치로 환산한다.(계약 시작시점이라면, 동일한 현금흐름을 가지는 고정금리 (swap rate)를 산출한다.)

즉, 스왑계약의 가치는 각 이자지급시기의 선도이자율과 무위험이자율만 알고있다면 구할 수 있습니다. 앞서 설명한대로, OIS를 통해 zero rate curve를 구할 수 있고, Forward rate도 계산할 수 있으므로, 스왑계약의 가치는 스왑의 현재 가격만으로 모두 평가할 수 있습니다.

> **!** How the value changes through time
>
> 스왑계약의 가치가 “0”이라는 의미는 이자지급시기별 현금흐름의 현재가치가 모두 “0”이라는 의미가 아닙니다. 대신, 모든 현금흐름의 현재가치를 더했을 때 0이 된다는 의미입니다.
> 스왑 매수(고정 지급/변동 수취)인 상황에서 변동금리가 기간에 따라 우상향하는 형태라면, 스왑계약의 가치를 평가할 때 스왑계약 초기에 지급받는 변동금리보다 후기에 지급받는 변동금리가 크게 계산되므로, 각 이자지급시기의 NPV는 처음에는 (-)이다가 시간이 지날수록 (+)로 전환되는 구조일 것 입니다. 이 경우, 스왑계약은 시간이 흐르면서 이자지급시기가 지나면, 자연스럽게 계약의 가치가 증가하게 됩니다.
> 반대로, 변동금리기 우하향한다면 NPV는 (+)에서 (-)로 전환되고, 시간의 흐름에 따라 계약의 가치가 감소하게 됩니다.

! Difference in compounding methods

IRS의 swap rate를 valuation할 때, swap rate는 해당 스왑계약의 교환주기에 맞는 compounding method를 사용한다는 것을 유의해야 합니다.
즉, 6개월마다 교환한다면 semi-annually, 3개월마다 교환한다면 querterly, 1개월마다 교환한다면 monthly compounding 방식으로 swap rate를 산출해야합니다.
반면, 할인율로 일반적으로 사용하는 zero rate는 continuous compouding으로 산출하므로, swap rate를 zero rate로 변환할 때 유의해야 합니다.
(Table 7.3 구해보기)

7.8 Fixed-For-Fixed Currency Swaps

또 하나의 유명한 형태의 스왑으로는 고정-고정 통화스왑이 있습니다.

두가지의 다른 통화에 대해, 계약시점과 종료시점에 통화원금을 주고 받고, 계약 중에는 주기적으로 각 통화에 대한 고정금리를 주고 받는 형태입니다.

예를 들어, 달러가 필요한 A기업이 명목금액 100만달러의 5년 만기 고정통화스왑을 매수한다면, 계약시점에 100만달러를 받고 이에 상응하는 원화를 지급한 다음, 상대방에게 고정금리에 대한 달러이자를 계속 지급하다가, 만기에 다시 원금을 주고 받는 계약을 말합니다. 이 때, 원금을 주고 받는데 적용되는 환율은 통상 현재 환율을 사용합니다.

고정통화스왑도 이자율스왑과 마찬가지로 자산이나 부채를 다른 통화의 현금흐름으로 바꾸고 싶거나, 두가지의 통화에 대한 차입비용에 비교우위가 있는 경우 비교우위 전략을 사용하는 데에 활용됩니다.

7.9~10 Valuation of Fixed-For-Fixed Currency Swaps

고정통화스왑도 마찬가지로 선도계약을 이용하여 평가합니다.

(1) 먼저, 고정통화스왑의 미래 현금흐름은 고정되어있으므로, 각 이자지급시기 및 만기에 따른 현금흐름을 각 통화별로 구합니다.

(2) 현재 환율을 이용하여 각 이자지급시기별 선도환율을 계산합니다.

(3) 각 이자지급시기별 타방 통화에 대한 현금흐름을 선도환율을 이용하여 평가합니다.

(4) 각 이자지급시기별 순현금흐름을 현재가치로 환산합니다. (계약시작시점이라면, 환율 또는 고정이자율을 NPV=0이 되도록 결정합니다.)

한편, 고정통화스왑의 각 통화별 미래현금흐름은 각 통화별 채권과 동일합니다. 따라서, 고정통화스왑의 가치를 채권의 가격을 이용하여 표현할 수 있습니다.

$$V_{swap, foregin\ pay} = B_D - S_0 B_F$$

Another Currency Swaps

또다른 통화스왑으로는, Fixed-for-floating Swap, Floating-for-floating Swap이 있습니다.
원금을 처음과 마지막에 주고 받는 방식은 동일하지만, 고정통화스왑과 다르게 어느 일방의 통화 또는 양방의 통화에 적용되는 이자가 변동금리라는 차이점이 있습니다.
이러한 유형의 통화스왑의 현금흐름은, 고정통화스왑+이자율스왑과 동일하기 때문에, 가치평가를 할 때에도 두가지 스왑으로 구분한 다음, 앞서 서술한 선도계약을 이용한 평가방식을 적용하여 각 스왑을 평가하고 더해서 산출할 수 있습니다.

7.11~13 Other Types of Swaps

CDS, Credit Default Swaps

먼저, 앞서 설명하였던 Credit Risk의 관리는 파생상품계약 및 스왑계약에 있어서 매우 중요합니다. CCP를 이용하지 않고 계약 당사자간 청산결제가 이루어지는 경우, 거래상대방의 Default로 인해 예기치 못한 손실이 발생할 수 있기 때문입니다.

Market Risk vs. Credit Risk

Market Risk : 파생상품의 기초자산의 가격변동, 이자율의 변동 등으로 인해 손실을 입을 위험
Credit Risk : 거래상대방의 Default 등으로 결제불이행이 발생해 손실을 입을 위험
파생상품계약은 두 가지 위험이 항상 상존하지만, Market Risk는 다른 상품으로 Hedge할 수 있는 반면, Credit Risk는 완전히 없앨 수는 없습니다.

이러한 Credit Risk를 Market Risk처럼 관리하고자 만들어진 상품이 CDS입니다. 신용하락 또는 Default를 우려하는 A기업이 이를 Hedge하기 위해 명목금액 100만달러에 5년만기 CDS 매수를 한다면, 5년 뒤에 A기업의 회사채 신용도 하락이 없었다면 A기업은 매도자에게 100만달러$\times$ $CDS\ spread$를 지급하고, 신용도 하락 등으로 회사채 금리가 상승하였다면, 100만달러에 대한 조달비용 상승분을 매도자에게 수취하는 구조입니다.

매수자는 신용하락에 대한 보험을 가지고 이에 대한 대가를 지급하며, Default 상황이 발생하면 매도자가 손실을 보전하는 구조로 마치 보험과 같은 성격을 가지고 있습니다.

Other Interest Rate Swaps

(1) Floating-For-Floating IRS : 변동금리 간에 IRS로, 가산금리를 정해서 결정. Basis swaps
(2) Amortizing swap : 스왑의 만기까지 명목금액이 지속 감소
(3) Step-up swap : 스왑의 만기까지 명목금액이 지속 증가
(4) Forward swap : 계약 후 일정시점까지는 이자교환 없음, deferred swaps.
(5) compounding swap : 일방 or 양방의 이자를 누적하여 만기시점에 일시 교환
(6) Accrual swap : 변동금리가 일정 수준 이내일때만 고정금리 지급

Quantos

통화스왑의 일종이지만, 원금 및 이자교환을 어느 한 통화로만 결제하는 방식의 스왑계약으로, Diff swap 이라고도 함.

Equity Swaps

총수익스왑(Total Return Swap)의 일종으로, 주식에서 발생하는 자본수익, 배당 등 총수익을 미리 정해둔 고정 or 변동금리와 교환하는 스왑.

Options

(1) Extendable swap : 어느 일방에 스왑의 만기를 연장시킬 수 있는 권리가 부여된 스왑계약.
(2) Puttable swap : 어느 일방에 스왑을 조기종료시킬 수 있는 권리가 부여된 스왑계약.

(3) Swaptions : Options on swaps라고도 하며, 어느 일방에 미래 교환시기에 스왑계약에 따라 정해둔 교환을 실행할지 말지에 대한 권리가 부여된 스왑계약.

Other Swaps

(1) Comodity swap : 동일한 가격의 만기가 다른 선도계약을 연속적으로 체결하고자 하는 경우, 상품 스왑을 이용함.

(2) Volatility swap : 미리 정해둔 기초자산과 변동성에 대해, 교환시기에 해당 변동성 $\times$ 명목금액과 교환시기에 실현된 변동성(Historical volatility) $\times$ 명목금액을 교환하는 스왑계약.

Chapter 10

옵션시장의 구조

Mechanics of Options Markets

10.1~3 Types, Positions, Underlying Assets of Options

옵션의 종류는 기본적으로 무엇인가를 “살” 권리 및 “팔” 권리로 나뉩니다.

기초자산을 살 권리를 콜옵션, 팔 권리를 풋옵션이라고 하며, 추가적으로 옵션의 권리행사를 만기일 (Expiration date, Maturity date)에만 할 수 있는 옵션을 유럽형(European) 옵션, 만기일 이전에 옵션 매수자가 원하는 때에 언제나 권리행사를 할 수 있는 미국형(American) 옵션이라고 합니다.

옵션에 따른 권리는 옵션 매수자에게 있으며, 매도자는 매수자가 권리행사를 하고자 하는 경우 반드시 이에 응해야 합니다. 따라서 옵션 포지션은 총 4개로 구분됩니다.

1. 콜옵션 매수, *Long in Call*, $max(S_T - K, 0)$
2. 풋옵션 매수, *Long in Put*, $max(K - S_T, 0)$
3. 콜옵션 매도, *Short in Call*, $-max(S_T - K, 0)$
4. 풋옵션 매도, *Short in Put* $-max(K - S_T, 0)$

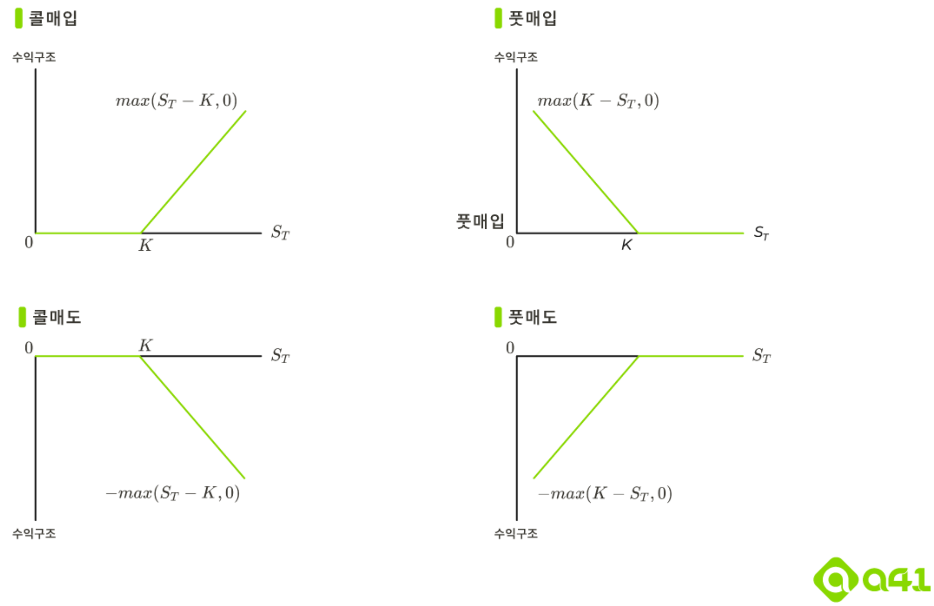


Figure 1: Options payoff, from A41

옵션의 기초자산은 매우 다양합니다. 여기서는 주식옵션(Stock Options), ETP옵션, 통화옵션, 지수옵션, 선물옵션(Futures Options)를 위주로 살펴볼 예정입니다.

10.4~10 Specification of Stock Options

대표적인 예시로, Cboe(Chicago Board Options Exchange)에서 거래되는 주식옵션(American stock option)에 대해서 알아보겠습니다.

- 만기구조 : 매월 세번째 금요일 만기 및 연속 4개월물이 상장되는 것이 기본입니다. 매주 만기가 도래하는 위클리옵션도 존재하며, 만기가 3년 이상인 LEAPS(Long term equity anticipation securities) 및 시장참여자가 자유롭게 옵션스펙을 설정하는 비표준물 옵션인 FLEX옵션도 존재합니다.
- 행사가격 : 종목별로 \$2.5, \$5, \$10으로 구분됩니다.
- 용어 : 특정 옵션에 대해서, 콜 또는 풋 어느 한종류를 지칭할 때 Option Class, 전체를 지칭할 때 Options series라고 합니다. 또한, 행사가격과 현재 기초자산가격에 따라 내재가치가 0보다 큰

옵션을 내가격(ITM, In The Money), 내재가치가 0보다 작은 옵션을 외가격(OTM, Out of The Money), 내재가치가 0인 옵션을 등가격(At The Money)라고 합니다.

- 배당 및 증자 : 일반적으로 현금배당은 미결제약정 및 행사가격 등 조정이 없으나, 주가의 10%를 초과하는 현금배당은 이사회 의결을 통해 조정해주곤 합니다. 이외의 증자 및 주식배당의 경우 그 비율만큼 옵션 미결제약정(또는 기준가격)과 행사가격을 조정하고 있습니다.
- 보유한도 : 미결제약정수량 보유한도(Position limit) 및 최대 행사가능수량(Exercise limit)가 존재하며, 기초주식에 따라 수량 상이.
- 거래제도 : 현재는 거의 모든 거래가 전산화되어있으며, 주요 종목에 양방향 호가를 공급하는 시장조성제도를 운영하고 있어 편리하게 거래가 가능하며, 반대거래를 통해 언제든지 보유한 포지션을 시장에서 해소할 수 있음.
- 거래비용 : 시장에서 옵션을 거래할 때는, 명시적 비용과 암묵적 비용이 존재합니다.
  - 명시적 비용 : 거래세, 거래수수료, 위탁수수료 등
  - 암묵적 비용 : 호가스프레드 비용, 시장충격비용 등
- 증거금
  - 매수 : 일반적으로 옵션매수자는 프리미엄(가격)을 거래시점에 전액 부담하는 것이 일반적이나, 만기가 9개월 이상 남은 장기옵션을 거래할 때는 프리미엄을 25%만 부담하고 미수로 거래하는 제도도 존재함
  - 매도 : 다른 포지션 없이 옵션 매도만을 가지고 있는 경우, Naked option이라고 하며, Cboe는 이 경우 "옵션매도대금 + 기초자산가격*20%" 수준의 증거금을 징수
- 옵션청산회사, OCC : 모든 장내옵션은 OCC를 통해서 청산되며, OCC는 청산결제 외에도 옵션매수자의 권리행사가 있는 경우, 매도자에게 공정하고 합리적으로 배정함으로써 원활히 옵션포지션이 청산될 수 있도록 관리하고 있음.
- 규제기관 : 국내는 금융위에서 모든 규제권한을 가지고 있으나, 미국의 경우 주식/주가지수/통화옵션은 SEC에서, 선물에 대한 옵션은 CFTC에서 규제를 관할하고 있음.
- 세금 : 옵션거래에 대한 세금은 매우 tricky한 면이 있음. 일반적으로는 옵션거래에서 발생하는 자본손익(capital gain/loss)에 대해서 세금을 부과하며, 옵션이 권리행사 또는 기간이 만료되거나/반대거래로 포지션이 소멸할 때 해당 수익을 인식하고 있음.
  - Wash sale rule : 주식을 팔고 30일 이내에 다시 사는 경우는 수익인식을 안하는데, 유사하게 주식을 팔고 30일 이내에 콜옵션을 매수하는 경우 수익인식 안함.

  - Constructive Sales : 숏포지션은 해당 포지션을 청산하기 전까지는 손익인식이 안돼는 점을 방지하기 위해, 즉 공매도나 파생상품 숏포지션으로 과세를 미루는 것을 막기위해 TaxRelief Act of 1997에서 (1) 공매도를 하는 경우, (2) 선도/선물계약을 하는 경우, (3) 이와 유사한 손익구조를 만드는 경우 Constructive Sales로 인식하여 세금을 부과하도록 규정하였음. 즉, 주식을 매도하지 않고 주식선물/콜옵션을 매도하거나 풋옵션을 매수하는 경우, 주식을 매도한 것으로 간주하고 세금을 부과하는 것임.

- 주식옵션의 활용
  - 워런트 : 워런트가 포함된 채권을 BW(Bond with Warrent)라고 하며, 신주인수권부사채라고도 합니다. 채권에 향후 주식을 특정가격에 매수할 수 있는 권리인 주식콜옵션이 합쳐진 형태입니다.
  - 임직원 스톡옵션 : 임직원 동기부여 및 사기진작을 위해 통상 ATM에 발행해서 향후 특정시점 이후에 권리행사할 수 있도록 만든 주식옵션입니다.
  - 전환사채 : CB(Convertible bonds)라고 하며, 채권으로 발행되지만 향후 액면가 대비 정해진 비율에 따라 주식으로 전환할 수 있는 채권입니다.

- 장외옵션 : 옵션시장은 장내보다 장외시장이 훨씬 규모가 큰 시장이며, 일반적인 장내옵션(plain vanilla) 이외에도 다양한 구조로 설계한 이색옵션(exotic options)이 거래되곤 합니다.

Chapter 11

Properties of Stock Options

11.1 Factors Affecting Option Prices

옵션 가격에 영향을 미치는 요소는 크게 6가지가 있으며, 이 변수들과 옵션 가격과의 상관관계는 다음과 같습니다.

Variable	European Call	European Put	American call	American put
Current stock price, S_0	+	-	+	-
Strike prkce, K	-	+	-	+
Time to expiration, T	?	?	+	+
Volatility, σ	+	+	+	+
Risk-free rate, r_f	+	-	+	-
Amount of future dividend, d	-	+	-	+

1. 주가 및 행사가격 : 만기 pay-off를 고려하면 쉽게 이해할 수 있습니다.
2. 만기
    - 미국형 : 언제나 행사할 수 있으므로 만기가 길수록 옵션 가치는 증가
    - 유럽형 : 일반적으로 만기가 길수록 옵션 가치가 증가하지만, 중도배당이 존재하는 경우나 Deep-ITM 풋옵션의 경우에서는 만기가 짧은 옵션이 유리한 경우도 존재함
3. 변동성 : 간단히 설명하자면, 옵션 매수자의 경우 이익은 제한이 없고 손실은 프리미엄으로 제한되어 있으므로 변동성이 클 수록 옵션 기대이익이 증가하게 되므로 변동성과 옵션가격은 항상 양의 상관관계에 있음

4. 무위험이자율 : 일반적으로 무위험이자율이 증가하면 주가의 요구수익률이 증가하게 되고, 더불어 미래 현금흐름의 현재가치가 감소하는 효과가 있음. 즉, 콜옵션의 가치는 증가하고 풋옵션의 가치는 감소하는 경향이 있음.
5. 배당 : 배당이 존재하면 배당락으로 주가가 하락함. 콜옵션의 가치는 감소하고 풋옵션의 가치는 증가함.

11.2 Assumptions and Notation

이전 챕터와 동일하게 모든 시장참가자는 거래비용이 없고, 동일한 세율을 적용받으며, 무위험이자율로 빌리거나 빌려줄 수 있다는 가정을 사용할 것 입니다.

대문자는 American option을, 소문자는 European option을 의미합니다.

11.3 Upper and Lower Bounds for Option Prices

Upper bound

기본적으로, 권리행사를 통해 행사가격을 지불하고 주식을 사거나(콜), 행사가격에 주식을 파는(콜) 옵션의 성질에 따라 콜옵션은 현재 주가보다 비쌀 수 없고, 풋옵션은 행사가격의 현재가치보다 비쌀 수 없습니다.

콜옵션이 현재 주가보다 비싸다면 콜옵션 매도+주식 매수를, 풋옵션이 행사가격의 현재가치보다 비싸다면 풋옵션 매도+무위험이자율에 투자함으로써 간단한 차익거래가 가능하기 때문입니다.

$$C \leq S_0, \;\; c \leq S_0, \;\; P \leq K, \;\; p \leq Ke^{-rT}$$

Lower bound for Non-dividend

European

두 가지 포트폴리오를 비교해보겠습니다.

1. 콜옵션 매수(c) 및 행사가격의 현재가치(Ke^{-rT})만큼 무위험이자율에 투자

2. 주식을 현재가격(S_0)에 매수

만기시점 T에 두 포트폴리오의 가치는 다음과 같습니다.

1. $max(S_T - K, 0) + K = max(S_T, K)$
2. S_T

이에 따라, 포트폴리오 1의 가치는 항상 2보다 커야하므로, $c \geq S_0 - Ke{-}rT$가 만족합니다.

마찬가지로,

1. 풋옵션 매수(p) 및 주식을 현재가격(S_0)에 매수
2. 행사가격의 현재가치(Ke^{-rT})만큼 무위험이자율에 투자

만기시점 T에 두 포트폴리오의 가치는 다음과 같습니다.

1. $max(K - S_T, 0) + S_T = max(K, S_T)$
2. K

이에 따라, $p \geq Ke{-}rT - S_0$가 만족합니다.

한편, 옵션의 가치는 항상 0보다 크거나 같아야하므로 배당이 없는 유럽형 옵션의 하한은 다음과 같습니다.

$$c \geq max(S_0 - Ke{-}rT, 0),\ p \geq max(Ke^{-rT} - S_0, 0)$$

American

먼저, 배당이 없을 때는 콜옵션의 시간가치가 항상 0보다 크거나 같으므로 미국형 콜옵션과 유럽형 콜옵션의 가격이 항상 같습니다.

> **Tip**
>
> 배당이 없다면, 조기행사의 가치는 "0"입니다.
> 만약, 만기 이전에 내재가치가 높아 미국형 콜옵션을 조기행사하고자 하는 투자자가 있다면, 조기행사 대신에 주식을 공매도하고 공매도대금을 무위험이자율에 투자함으로써 무위험차익을 얻을 수

있습니다.
직관적으로, 주식을 보유함으로써 발생하는 (+) 현금흐름이 없으므로, 미리 주식을 매수함으로써 얻는 이익은 없지만 행사가격만큼의 현금에 대한 기회비용이 발생하기 때문에 조기행사의 가치가 0 이됩니다.
반면, 풋옵션의 경우 조기행사함으로써 행사가격만큼 현금이 들어오기 때문에 조기행사할 유인이 발생할 수 있습니다.

한편, 미국형 풋옵션은 언제나 권리행사를 할 수 있으므로 $P \geq max(K - S_0, 0)$의 하한을 갖게 됩니다.

옵션의 종류별로 상한 및 하한을 정리하면 아래와 같습니다.

$$max(S_0 - Ke^{-rT}) \leq c = C \leq S_0$$

$$max(Ke^{-rT} - S_0) \leq p \leq Ke^{-rT}, \;\; max(K - S_0, 0) \leq P \leq K$$

11.4~6 Put-Call Parity

옵션 하한을 산출할 때 이용한 포트폴리오를 이용해 콜옵션과 풋옵션의 가격간에 중요한 관계를 유도할 수 있습니다.

콜옵션과 풋옵션의 포트폴리오 1을 주목해봅시다.

1. 콜옵션 매수(c) 및 행사가격의 현재가치(Ke^{-rT})만큼 무위험이자율에 투자
2. 풋옵션 매수(p) 및 주식을 현재가격(S_0)에 매수

만기시점의 포트폴리오의 가치는 다음과 같습니다.

1. $max(S_T - K, 0) + K = max(S_T, K)$
2. $max(K - S_T, 0) + S_T = max(K, S_T)$

즉, 두 포트폴리오는 만기 T 시점에 동일한 Pay-off를 가지고 있는 동일한 포트폴리오입니다.

따라서 두 포트폴리오의 가치는 동일해야하므로, 아래와 같이 Put-Call parity를 유도할 수 있습니다.

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0$$

ATM 옵션의 가격

Put-call parity에서 ATM($S_0 = K$) 옵션인 경우,

$$c + S_0 e^{-rT} = p + S_0 \Rightarrow c - p = S_0(1 - e^{-rT}) > 0$$

즉, ATM에서는 콜옵션의 가치가 풋옵션보다 높은 것을 알 수 있습니다.

Parity in American options

풋콜패리티는 유럽형 옵션에서만 성립하므로, 미국형 옵션에서는 이와 유사한 부등식을 유도할 수 있습니다.

먼저, 다음 세가지 포트폴리오를 고려해보겠습니다.

1. 콜옵션 매수(c) 및 행사가격의 현재가치(Ke^{-rT})만큼 무위험이자율에 투자
2. 풋옵션 매수(p) 및 주식을 현재가격(S_0)에 매수
3. 미국형 풋옵션 매수(P) 및 주식을 현재가격(S_0)에 매수

Put-call parity에 따라 1과 2의 가치가 같고, 미국형 옵션의 가치는 유럽형 옵션보다 항상 크거나 같으며, 배당이 없을 때는 미국형 콜옵션과 유럽형 콜옵션의 가격이 같으므로 아래와 같이 정리할 수 있습니다.

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0 \leq P + S_0 \Rightarrow c - P = C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}$$

다음으로, 두가지 포트폴리오를 고려해보겠습니다.

1. 유럽형 콜옵션 매수(C) 및 행사가격(K)만큼 현금 보유
2. 미국형 풋옵션 매수(P) 및 주식을 현재가격(S_0)에 매수

먼저, 조기행사 없이 만기보유하는 경우 두 포트폴리오의 가치는,

1. $max(S_T - K, 0) + Ke^{rT} = max(S_T, K) + K(e^{rT} - 1)$
2. $max(K - S_T, 0) + S_T = max(K, S_T)$

포트폴리오 1에서는 현금에서 무위험이자율만큼 수익이 발생하므로 포트폴리오 2보다 가치가 높게 됩니다.

다음으로, 풋옵션에서 조기행사가 발생하는 경우를 살펴보겠습니다.

조기행사가 $0 < t < T$ 인 t시점에 발생한다면, t시점에 풋옵션의 포트폴리오 2의 가치는 K가 되며 만기 T 시점에는 $Ke^{r(T-t)}$가 됩니다.

반면, T 시점에 포트폴리오 1의 가치는 옵션이 없더라도 Ke^{rT}이므로, 항상 포트폴리오 1의 가치가 크거나 같게됩니다.

즉, $C + K = c + K \geq P + S_0$가 만족하며, 상한 및 하한을 정리하면 아래와 같습니다.

$$S_0 - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}$$

Effect of Dividends

European

이제, 배당이 있는 경우를 살펴보겠습니다. 만기시점까지 주식에서 발생하는 배당금의 현재가치를 D라고 하고, 다음 포트폴리오를 살펴보겠습니다.

1. 유럽형 콜옵션 매수(c) 및 $D + Ke^{-rT}$만큼 무위험이자율에 투자
2. 주식 매수(S_0)
3. 유럽형 풋옵션 매수(p) 및 주식 매수(S_0)
4. $D + Ke^{-rT}$만큼 무위험이자율에 투자

위와 같은 방식으로 만기 T시점에 각 포트폴리오의 가치를 비교하면,

1. $max(S_T - K, 0) + De^{rT} + K = max(S_T, K) + De^{rT}$

2. $S_T + De^{rT}$
3. $max(K - S_T, 0) + S_t + De^{rT} = max(K, S_T) + De^{rT}$
4. $De^{rT} + K$

각 옵션의 하한 및 풋콜패리티를 정리하면,

$$(1) \geq (2) \Rightarrow c \geq max(S_0 - D - Ke^{-rT}, 0) = max(S_0e^{-dT} - Ke^{-rT})$$

$$(3) \geq (4) \Rightarrow p \geq max(D + Ke^{-rT} - S_0, 0) = max(Ke^{-rT} - S_0e^{-dT})$$

$$(3) \equiv (4) \Rightarrow c + D + Ke^{-rT} = p + S_0 \Rightarrow c - p = S_0 - D - Ke^{-rT} = S_0e^{-dT} - Ke^{-rT}$$

> Tip
>
> 주식의 배당이 기간 중 연속복리배당수익률 d로 주어져 있다면, 포트폴리오에서 주식을 매수할 때 S_0e^{-dT}만큼 매입하고, 배당은 주식에 재투자한다고 가정하면 등식의 마지막 결과를 얻을 수 있습니다.

American

앞서 배당이 없는 경우에서 $C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}$가 성립하는 것을 살펴보았습니다.

변수와 옵션가격 간의 관계에서, 배당은 콜옵션에서 (-), 풋옵션에서 (+)인 것을 확인하였습니다. 나중에 살펴보겠으나, 동일한 배당이 존재한다면 이 둘의 변화는 상쇄될 수 있습니다.

따라서 $C - P$ 포트폴리오에서 배당이 존재하는 경우, 두 변화분은 상쇄되므로 변동이 없게 되고, 따라서 배당이 존재하는 경우에 대해서도 위의 상한이 성립하게 됩니다.

다음으로, 두가지 포트폴리오를 고려해보겠습니다.

1. 유럽형 콜옵션 매수(c) 및 $D + K$를 무위험이자율에 투자
2. 미국형 풋옵션 매수(P) 및 주식 매수(S_0)

조기행사가 없다면 만기 T 시점의 가치는 포트폴리오 1이 항상 크거나 같습니다.

1. $max(S_T - K, 0) + (D + K)e^{rT} = max(S_T, K) + De^{rT} + K(e^{rT} - 1)$
2. $max(K - S_T) + S_T + De^{rT} = max(K, S_T) + De^{rT}$

다음으로, 배당이 발생한 후 조기행사가 $0 < t < T$ 인 t시점에 존재하는 경우, t시점의 포트폴리오 2의 가치는 $K + De^{rt}$ 이며, 만기 T 시점의 가치는 $Ke^{r(T-t)} + De^{rT}$ 입니다.

반면, 포트폴리오 1은 옵션이 없더라도 만기 T 시점에 $(K + D)e^{rT}$ 만큼의 가치가 있으므로 포트폴리오 1의 가치가 항상 크게 됩니다.

따라서, $C + D + K \geq c + D + K \geq P + S_0$ 가 성립하며, 미국형 옵션에서 배당을 반영한 부등식은 아래와 같습니다.

$$S_0 e^{-dT} - K = S_0 - D - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}$$

Chapter 13

이항모형 (Binomial Trees)

옵션의 프라이싱에 대한 가장 유명한 방법 중 하나인 이항모형을 다룹니다.

CRR모형(Cox, Ross, Rubinstein 1979)을 다룰 예정이며, 주가는 랜덤워크를 따르고 차익거래가 발생하지 않는다는 기본적인 가정을 전제합니다. 이는 BSM(Black-Sholes-Merton)모형과 함께 매우 중요한 방법론으로, 이항모형의 step이 많아질 수록 두 모형의 결과값은 동일해집니다. 이러한 성질에 대해서는 chaper15 및 21에서 보다 자세히 다룰 예정입니다.

CRR모형은 (1) 일반적인 no-arbitrage을 기반으로 하고, (2) 미국형 옵션 및 이색옵션을 가치평가하는 데에 직관적이고 유용하며, (3) 위험중립가치평가(Risk-neutral valuation)을 사용한다는 점에서 매우 중요합니다.

13.1 A one-step binomial model and a no-arbitrate argument

옵션의 만기를 T 라고 할 때, 향후 주가가 T시점까지 오르거나 내리는 단순한 구조로 되어있다고 가정하고, 현재 주가를 S_0, 주가 상승시 $S_T = S_0 \times u$ 및 하락시 $S_T = S_0 \times d$, 행사가격 K 의 유럽형 옵션의 현재가격이 f_0 로 주어져있다고 해보겠습니다.

현재시점에 주식을 Δ 만큼 매수하고, 1주에 대한 옵션을 매도하는 포트폴리오 $\Delta S_0 - f_0$ 를 만든다면, 주가 상승시 포트폴리오의 가치는 $\Delta S_0 u - f_u$ 및 하락시에는 $\Delta S_0 d - f_d$ 로 결정됩니다.

여기서, **해당 포트폴리오를 무위험포트폴리오로 만들어 옵션의 가치를 평가**할 수 있습니다. 해당 포트폴리오가 무위험이라는 의미는 주가 상승 및 하락시의 포트폴리오 가치가 동일하게 되어 변동성이 0이 된다는 것을 말합니다.

즉, $\Delta S_0 u - f_u = \Delta S_0 d - f_d \Rightarrow \Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d}$ 인 Δ를 도출하여 주식을 매수한다면 해당 포트폴리오는 위험이 0이 될 것 입니다.

13.6 Options Delta

위의 델타는 Opion Greeks 중, 기초자산가격 변동에 따른 옵션가격의 민감도인 델타(Δ)에 해당합니다.
위의 주식매수+옵션매도 포트폴리오에서 우리는 만기 pay-off를 고정시키는 델타를 산출하였으므로, 이는 현재시점에서 주식가격의 변동분과 옵션가격의 변동분이 상쇄됨을 의미합니다. 즉, 포트폴리오에서 주식의 가격이 1만큼 변할때 이에 대응되는 옵션의 가치변화는 Δ에 해당하므로, 이는 기초자산 가격에 대한 옵션가격의 민감도와 같습니다.
한편, 이렇게 옵션을 통해 주식포트폴리오의 가격변동분을 완벽히 상쇄하는 것을 델타헷지(Delta hedging)라 합니다.

따라서, 포트폴리오의 주가 상승 및 하락에 따른 가치가 $\Delta S_0 u - f_u$로 고정되며, no-arbitrage 가정에 따라 T까지의 수익률은 무위험이자율 r_f로 정해져야 합니다.

즉, 포트폴리오의 현재가치는 미래 pay-off를 무위험이자율로 할인한 현재가치와 동일해져야 하며,($\Delta S_0 - f_0 = (\Delta S_0 u - f_u)e^{-rT}$) 여기에 $\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d}$를 대입하여 정리하면, 아래와 같이 옵션의 현재가치를 평가할 수 있습니다.

$$\Rightarrow f_0 = \Delta S_0 - (\Delta S_0 u - f_u)e^{-rT} = \Delta S_0(1 - ue^{-rT}) + f_u e^{-rT}$$

$$\Rightarrow f_0 = \frac{f_u - f_d}{u-d}(1 - ue^{-rT}) + f_u e^{-rT} = \frac{f_u - f_d - f_u ue^{-rT} + f_d ue^{-rT} + (u-d) f_u e^{-rT}}{u-d}$$

$$\Rightarrow f_0 = \frac{f_u(1 - de^{-rT}) - f_d(1 - ue^{-rT})}{u-d} = e^{-rT}\frac{f_u(e^{rT} - d) + f_d(u - e^{rT})}{u-d}$$

$$\Rightarrow f_0 = e^{-rT}\frac{f_u(e^{rT} - d) + f_d(1 - (e^{rT} - d))}{u-d} = e^{-rT}(f_u \times p + f_d \times (1-p)) \; for \; p = \frac{e^{rT} - d}{u-d}$$

! Probability of stock price

위의 1-step binomial tree는 향후 주식이 상승할때의 가격과 하락할 때의 가격만을 이용하여 전개하고 있습니다.
즉, 주식이 상승할 확률과 하락할 확률은 다루고 있지 않습니다. 따라서, 상승할 확률이 0.5일때와 0.9일때의 옵션 가격은 동일합니다. 이는 매우 역설적으로 보입니다.
이러한 이유는 우리가 옵션을 평가할 때, 주식의 향후 가격을 이용해 상대적으로 평가하였기 때문입

니다. 주식의 상승 또는 하락확률은 이미 주식의 상승시 가격과 하락시 가격에 내재되어 있기 때문에, 다시 한번 확률을 고려할 필요가 없어지게 됩니다.

13.2 Risk-Neutral Valuation

위험중립가치평가란 파생상품을 프라이싱할 때, 모든 투자자가 위험중립적(*risk-neutral*)이라고 가정하는 것을 말합니다. 이는 모든 자산의 기대수익률이 무위험이자율과 동일하다는 의미이며, 이러한 투자자들만 존재하는 세상을 *risk-neutrall world*라고 합니다.

위험중립세상은 크게 두가지의 특징이 있습니다.

(1) 모든 투자자산의 기대수익률은 무위험이자율과 같다.
(2) 따라서, 투자자산의 향후 pay-off를 현재가치로 환산할 때 적용하는 할인률은 무위험이자율이다.

이제 다시, 현재 주가(S_0)는 T 시점까지 상승(S_0u)하거나 하락(S_0d)하고, 주가가 상승할 확률을 p라고 가정하면 위험중립세상에서 아래와 같이 표현할 수 있습니다.

$$E(S_T) = S_0e^{rT},\ E(S_T) = p \times S_0u + (1-p) \times S_0d$$

$$\Rightarrow S_0e^{rT} = S_0(p(u-d)+d) \Rightarrow p = \frac{e^{rT}-d}{u-d}$$

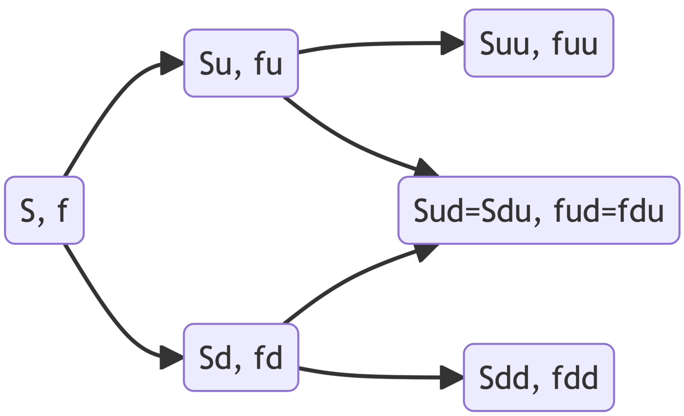
즉, 위험중립세상에서 주가의 상승확률은 $\frac{e^{rT-d}}{u-d}$와 같으며, 이는 1-step binomial tree에서 전개한 $f_0 = e^{-rT}(f_up + f_d(1-p))$의 p와 동일합니다. 즉, **옵션의 현재가치는 위험중립세상에서 주가의 상승/하락 확률에 따른 옵션의 미래 pay-off들의 합의 현재가치와 같다**는 것을 의미하며, 이를 통해 **위험중립세상에서 평가한 옵션의 가치가 실제 세상에서도 동일하게 적용**된다는 중요한 사실을 알 수 있습니다.

Tip

실제 세상에서 투자자는 위험자산에 투자할 때, 보다 높은 수익률을 기대(*risk-averse*)하기 때문에 실제 세상과 위험중립세상은 차이가 있습니다. 그러나, 1-step binomial tree와 위험중립세상에서 주가의 상승확률의 결과를 통해 위험중립세상에서 평가한 파생상품의 가치는 실제 세상에서 동일하게 적용된다는 것을 알 수 있습니다.

한편, 실제 세상($risk$-$averse$)에서 주가의 기대수익률은 무위험이자율보다 높을 것이므로 실제 세상에서 산출한 상승확률은 위험중립세상보다 클 것 입니다. 다만, 이 확률을 이용하여 옵션을 가치평가하는 경우 미래 pay-off에 적용하는 할인률을 옵션의 기대수익률로 변경해주어야 합니다.
그러나, 주식보다 위험한 자산인 옵션의 할인률을 산출하는 것은 매우 어려우므로, 위험중립세상에서 옵션을 평가하는 것이 실제 세상과 동일하다는 것은 매우 강력한 도구입니다.

13.3 Two-step binomial trees



이제, binomial tree를 확장하여 2-step model을 살펴보겠습니다. 주가가 상승하거나 하락하는 것이 2번에 걸쳐서 이루어지고, 각 기점의 시간을 Δt라고 하면, 1-step binomial tree에 따라 다음과 같이 표현할 수 있습니다.

$$f_0 = e^{-r\Delta t}(pf_u + (1-p)f_d)\ for\ p = \frac{e^{-r\Delta t} - d}{u-d}$$

또한, 이항모형의 2-step과정은 다음과 같이 표현할 수 있습니다.

$$f_u = e^{-r\Delta t}(pf_{uu} + (1-p)f_{ud})\ and\ f_d = e^{-r\Delta t}(pf_{du} + (1-p)f_{dd})$$

$$\Rightarrow f_0 = e^{-r \times 2\Delta t}(p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd})$$

13.4 Put options example

Binomial tree의 일반화된 식은 콜옵션과 풋옵션에 관계없이 적용할 수 있습니다.

13.5 American Options

Binomial Tree는 미국형옵션을 가치평가할 때 아주 유용한 모형입니다. 유럽형옵션과 동일하게 만기까지 모든 node를 전개한 후, 현재가치로 환산할 때 하나의 node씩 진행하면서 조기행사하였을 때와 비교하면 됩니다.

$$f_u = max[max(K - S_u, 0),\ e^{-r\Delta t}(pf_{uu} + (1-p)f_{ud})]$$

$$f_d = max[max(K - S_d, 0),\ e^{-r\Delta t}(pf_{du} + (1-p)f_{dd})]$$

$$f_0 = max[max(K - S_0, 0),\ e^{-r\Delta t}(pf_u + (1-p)f_d)]$$

즉, 위와 같이 만기시점부터 이전 step으로 내려오면서 bootstrapping방식으로 미국형 옵션의 가치를 산출할 수 있습니다.

13.7 Matching Volatility with u and d

앞서 무위험이자율, 주가상승/하락률, 시간의 증분이 주어졌을 때 위험중립확률 $p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$로 결정되는 것을 알아보았습니다.

이제, 주가상승률 및 하락률을 주가변동성을 이용하여 표현해보겠습니다. 주가수익률의 표준편차를 σ라고 할 때, 시간의 증분 Δt 동안의 주가수익률의 표준편차는 $\sigma\sqrt{\Delta t}$로 표현할 수 있습니다.

❗ Chapter 15 : 주요 내용

주가가 Geometric Brownian Motion을 따른다고 가정하겠습니다.($\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW_t$)
즉, 주가의 기대수익률이 μ, 표준편차가 σ 이면, 매우 짧은 시간에 대한 주가수익률이 정규분포 ($\frac{\Delta S}{S} \sim N(\mu\Delta t, \sigma^2\Delta t)$)를 따른다고 할 수 있습니다.
이때, 위험중립세상을 가정하면 $\mu = r$ 입니다.

앞서 binomial tree의 한단계의 step에서 주가의 변동성을 $E[X^2] - (E[X])^2$ 으로 표현하면 다음과 같이 정리할 수 있습니다.

$$\sigma^2\Delta t = p(u-1)^2 + (1-p)(d-1)^2 - (e^{r\Delta t} - 1)^2$$

$$= p[(u-1)^2 - (d-1)^2] + (d-1)^2 - e^{2r\Delta t} + 2e^{r\Delta t} - 1$$

$$= \frac{e^{r\Delta t} - d}{u-d}[(u+d)(u-d) - 2(u-d)] + d^2 - 2d - e^{2r\Delta t} + 2e^{r\Delta t}$$

$$= e^{r\Delta t}(u+d) - ud - d^2 - 2e^{r\Delta t} + 2d + d^2 - 2d - e^{2r\Delta t} + 2e^{r\Delta t}$$

$$= e^{r\Delta t}(u+d) - ud - e^{2r\Delta t} \cdots_{(13.13)}$$

여기서, 주가 상승 및 하락에 따른 비율을 동일하고 시간의 증분은 매우 작아 power가 1보다 크면 0으로 수렴한다고 가정하겠습니다. 즉, $(\Delta t)^k \to 0 \ for \ k > 1 \ \ \& \ \ S_0 ud = S_0 du = S_0 \Rightarrow ud = 1$

그러면, $d = \frac{1}{u}, u > d$ 이며 테일러전개를 통해 $e^{a\Delta t} = 1 + a\Delta t, \ e^{a\sqrt{\Delta t}} = 1 + a\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}a^2\Delta t$ 로 쓸 수 있습니다.

다시 (13.13)에 이를 적용해보겠습니다.

$e^{r\Delta t}(u+d) - ud - e^{2r\Delta t} = \sigma^2\Delta t$

$\Rightarrow e^{r\Delta t}(u+d) - ud = e^{2r\Delta t} + \sigma^2\Delta t$

$\Rightarrow e^{r\Delta t}(u+1/u)-1 = 1+2r\Delta t+\sigma^2\Delta t = e^{2r+\sigma^2\Delta t}$

$\Rightarrow u+\frac{1}{u}-e^{-r\Delta t} = e^{(r+\sigma^2)\Delta t}$

$\Rightarrow u^2-(e^{(r+\sigma^2)\Delta t}+e^{-r\Delta t})u+1=0$

$\Rightarrow u^2-(2+\sigma^2\Delta t)u+1=0$

$$u = \frac{2+\sigma^2\Delta t \pm \sqrt{4+4\sigma^2\Delta t+\sigma^4(\Delta t)^2_{\to 0}-4}}{2} = 1\pm\sigma\sqrt{\Delta t}+\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t = e^{\pm\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$\therefore u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}},\ d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

위 전개를 통해 얻을 수 있는 u, d가 CRR모형에서 사용하는 상승 및 하락비율입니다.

! In Real-world u&d

위의 u, d는 위험중립세상에서 산출한 상승 및 하락비율이나, real world에서도 동일하게 적용할 수 있습니다.

실제 세상에서 주가의 기대수익률을 μ, 변동성을 σ, 주가 상승확률을 $p^* = \frac{e^{\mu\Delta t}-d}{u-d}$라고 가정하고 $E[S_T^2]-(E[S_T])^2 = \sigma^2\Delta t$를 위와 동일하게 전개하면, 동일한 u, d를 얻을 수 있습니다.

한편, 위험중립세상과 실제 세상에서 변동성은 동일하다고 가정하고 있는데, 이는 걸사노프의 정리 (*Girsanov's Theorem*)를 이용한 결과입니다.

걸사노프 정리에 따르면, 위험중립세상에서 실제세상으로 전환한다는 것은 측도를 전환(*changing measure*)하는 것인데, 측도론에서 실제세상은 P-measure 및 위험중립세상은 Q-measure에 해당합니다.

측도를 전환할 때, 기대성장률은 변화하지만 변동성은 유지되는데, 이것이 위험중립세상에서 실제세상으로 전환할 때 주가의 기대수익률은 변하는 반면 변동성은 유지된다는 것을 의미합니다.

13.8 The Binomial Tree Formulas

앞선 전개식을 요약하면, 주가의 변동성(σ) 및 무위험이자율(r), 1-step의 시차(Δt)가 주어질 때, 이항모형을 적용한 옵션의 가치를 평가할 수 있습니다.

주가상승률 $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$, 주가하락률 $d = \frac{1}{u}$, 주가상승률 $p = \frac{e^{r\Delta t}-d}{u-d}$, 주가하락률 $q = 1-p$가 적용됩니다.

지금까지 1-step 또는 2-step의 간단한 이항모형만을 살펴보았으나, 실제 실무에 적용될때는 약 30-step의 이항과정이 진행되며, 이는 옵션의 만기까지 주가흐름에 대한 경우의 수가 $2^{30} \approx 10^9 = 10billions$ 이상 된다는 것을 의미합니다. 한편, 이항과정의 step이 많아질수록, Δt가 매우 작아질수록 이항모형의 결과값은 BSM모형의 결과값으로 수렴하게 됩니다.(Appendix 참조)

13.11 Binomial Trees in various Options

Options on Stocks & Stock indices with continuous dividend

주가 및 주가지수의 연속복리 배당수익률이 q로 주어진 경우입니다.

위험중립세상에서 주가 및 주가지수의 수익률은 무위험이자율과 같아야하므로, 주가의 기대수익률 k와 배당수익률 q를 합산한 수익률인 무위험이자율과 같아야합니다.

즉, $E[S_{\Delta t}] = S_0 e^{r\Delta t} = S_0 e^{k\Delta t} e^{q\Delta t}, \quad k = r - q$ 입니다.

따라서, 앞선 전개식에서 $p = \frac{e^{(r-q)\Delta t}-d}{u-d}$ 로 변경됩니다.

Options on Currencies

이전 장에서 통화선도계약 및 통화스왑의 논리를 생각해봅시다.

현재시점에서 자금을 차입하여 해외통화에 투자한다면, 기대수익률은 $e^{(r-r_f)\Delta t}$ 가 될 것입니다.

즉, $p = \frac{e^{(r-r_f)\Delta t}-d}{u-d}$ 가 적용됩니다.

Options on Futures

선물의 가격 $F_0 = S_0 e^{rT}$ 로 결정됩니다.

$F_T = S_T$ 이므로, 위험중립세상에서 $E[F_T] = E[S_T] = S_0 e^{rT}$ 이며 이항모형에서 이를 적용하면 선물의 기대수익률이 0임을 알 수 있습니다.

$$pF_0u + (1-p)F_0u = E[F_T] = E[S_T]$$

$$\Rightarrow pS_0e^{rT}u + (1-p)S_0e^{rT}d = S_0e^{rT}$$

$$\therefore p = \frac{1-d}{u-d}$$

Chapter 14

위너과정 및 이토보조정리 (*Wiener Processes and Ito's Lemma*)

시간의 흐름에 따라 불확실한 경로로 움직이는 변수를 확률과정(*stochastic process*)이라고 합니다. 시간의 흐름이 이산적으로 주어지는지, 연속적으로 주어지는지에 따라서 discrete variable와 continuous variable로 나눌 수 있으며, 앞서 살펴본 이항모형이 대표적인 discrete variable를 이용한 가치평가라고 할 수 있습니다.

이 장에서는 continuous variable을 가정하고, Wiener processes 등 중요한 확률변수를 살펴볼 것이며, 옵션의 가치평가에 매우 핵심적인 이토의 보조정리도 살펴볼 예정입니다.

14.1 The Markov Property

마코프 과정(*Markov process*)는 특수한 형태의 확률과정으로, 시간의 흐름에 따라 변하는 **변수의 미래값은 오직 현재 값에만 영향을 받는 확률과정**입니다.

즉, 일주일 단위 주가가 마코브 과정을 따른다면 다음 주의 주가는 오직 현재의 주가에만 영향을 받으며, 일주일 전의 주가는 아무런 영향을 주지 않는다는 의미입니다.

이는 효율적 시장가설(EMH, Efficient Market Hypothesis)의 weak-form을 만족한다는 의미와 유사합니다.

14.2 Continuous-time Stochastic Processes

먼저, 마코프 과정을 따르는 확률변수를 생각해보겠습니다. 현재 가격이 P_t 이고, 하루동안의 가격변화는 표준정규분포 $\phi(0,1)$를 따른다고 가정하겠습니다. 그럼 2일간의 가격변화의 분포는 어떻게 될까요?

먼저, **2일간의 가격변화는 각각 하루씩 표준정규분포를 따르는 확률변수로 분할**할 수 있습니다. 각 확률변수는 마코프 과정이므로 하루의 변화가 다음 하루의 변화에 영향을 주지않습니다. 즉, **각각 하루의 표준정규분포는 서로 독립**입니다.

따라서, 2일간의 가격변화의 평균과 분산은 각각의 평균 및 분산의 합산이므로 $\phi(0, 2)$를 따르게 될 것입니다. 이를 일반화한다면, 기간 T동안 주가의 변화가 $\phi(0, T)$를 따른다면 매우 작은 시간의 변화 Δt동안의 주가의 변화는 $\phi(0, \Delta t)$를 따른다고 할 수 있습니다.

여기서, **표준편차 σ는 기간의 누적에 $\sqrt{\ }$의 크기로 변화**한다는 사실에 주목해야합니다.

Wiener Process

위너과정은 마코프 과정의 일종으로, 평균변화율(drift rate)이 0이고 변동률(variance rate)이 1인 확률과정입니다. 이는 물리학에서 분자의 움직임을 표현하는데 쓰이기도 하며, 브라운 운동(Brownian motion)이라고도 불립니다.

확률변수 z가 위너과정을 따른다는 것은, 아래 두 성질을 만족한다는 의미입니다.

Property 1. $For\ \Delta t,\ \Delta z = \epsilon\sqrt{\Delta t}\ for\ \epsilon \sim \phi(0, 1)$이다.

Property 2. $For\ any\ \Delta t_1 \neq \Delta t_2.\ \Delta z_1\ and\ \Delta z_2\ are\ independent.$

첫번째 성질을 통해 Δz의 평균은 0, 분산은 Δt, 표준편차는 $\sqrt{\Delta t}$임을 알 수 있고, 두번째 성질을 통해 위너과정이 마코프과정의 한 종류임을 알 수 있습니다.

또한, $\sqrt{\Delta t} >> \Delta t\ for\ \Delta t \to 0$이므로 단위시간 Δt가 작아지면 작아질수록 위너과정을 따르는 확률변수 Δz의 변동성(표준편차)은 단위시간 대비 매우 커짐을 알 수 있습니다.

이는 미시세상에서 위너과정을 따르는 확률변수가 매우 복잡하게 움직이는 것을 의미하며, 이를 통해 브라운 운동의 특징 두가지를 도출할 수 있습니다.

1. 위너과정을 따르는 확률변수 z에 대해, 어떠한 구간의 시간을 관측하더라도 z의 경로의 길이의 기대값은 무한대로 발산한다.
2. 특정 값의 z에 대해, 해당 값을 가지는 횟수는 어떠한 구간의 시간을 관측하더라도 무한대로 발산한다.

Generalized Wiener Process

앞서 평균변화율(drift rate)가 0이고 변동률(variance rate)이 1인 위너과정을 살펴보았습니다.

일반화된 위너과정(GWP)이란, 단위시간에 대해 평균변화율과 변동률이 상수 a, b로 주어진 위너과정을 말합니다.

즉, $dx = a\,dt + b\,dW$ 인 확률과정 x는 GWP를 따르게 됩니다.

여기서 dW는 위너과정이므로, 단위시간 Δt가 주어져 있다면 GWP를 따르는 확률변수 x의 변화량은 $\Delta x = a\,\Delta t + b\,\epsilon\sqrt{\Delta t}$으로 표현할 수 있습니다.

따라서, Δx의 평균은 $a\,\Delta t$, 분산은 $b^2\,\Delta t$이며 변동성(표준편차)은 $b\,\sqrt{\Delta t}$가 되며, 단위시간이 충분히 작다면 $\Delta x \sim \phi(a\Delta t, b^2\Delta t)$로 근사할 수 있습니다.

> **기간 T에 대한 GWP의 분포**
>
> x가 GWP를 따른다고 가정하고, 기간 T년과 충분히 작은 단위시간 Δt, $\sum_{k=1}^{N}\Delta t = N\Delta t = T$가 주어져있다고 가정하겠습니다.
> 각각의 $\Delta x_i = a\Delta t + b\epsilon_i\sqrt{\Delta t}$도 역시 GWP를 따르게 되며, 모두 독립입니다.
> 그러면, 확률변수 x의 기간중 누적변화 $x_T - x_0 = \sum \Delta x_i$는 아래와 같이 전개할 수 있습니다.
>
> $$\sum \Delta x_i = \sum a\Delta t + \sum b\epsilon_i\sqrt{\Delta t} = a\,T + b\sqrt{\Delta t}\sum \epsilon_i$$
>
> 각각의 $\epsilon_i \sim \phi(0,1)$은 독립이므로 $\sum \epsilon_i \sim \phi(0, N)$입니다. 따라서,
>
> $$x_t - x_0 \sim \phi(aT, b^2\Delta t\,N) = \phi(aT, b^2T)$$

위너과정, $a\,dt$ 및 GWP의 경로를 도식화하면 아래와 같습니다.

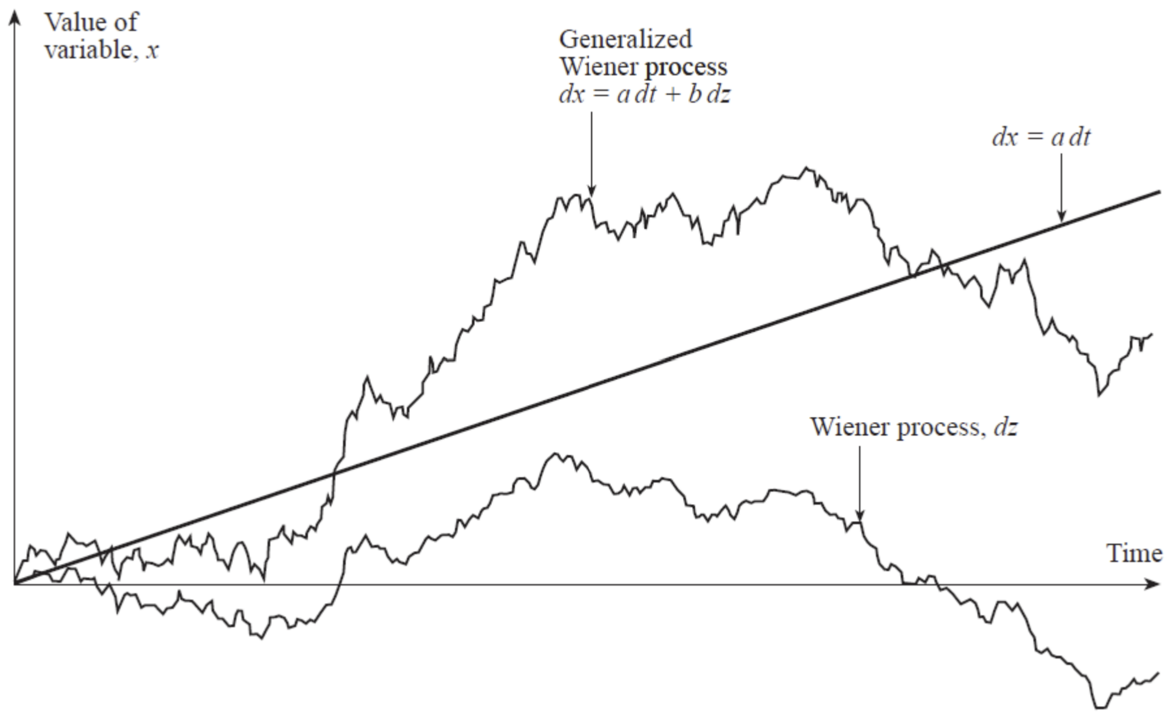


Figure 2: Path of Stochastic processes : $dW, \;\; a\,dt, \;\; a\,dt + b\,dW$

14.8 Fractional Brownian Motion

지금까지 살펴본 브라운운동(위너과정, GWP)은 마코프 과정의 특수한 형태로서 소개하였습니다. 즉, 확률변수 X가 GWP를 따른다면 각 Δt에 대해 ΔX는 독립적으로 결정됩니다. 이는 $t > s > 0$ 로 시간이 주어질 때 $X(t) - X(s)$, $X(s)$가 독립이라는 의미이므로, 다음과 같이 정리할 수 있습니다.

$$Var[X(t) - X(s)] = E[(X(t) - X(s))^2] - E[X(t) - X(s)]^2 = \sigma^2(t - s)$$

$E[X(s)X(t)] = E[X(s)^2] + E[X(s)(X(t) - X(s))] = s\sigma^2$\$

그러나, **실제 현실에서는 주가의 흐름이 마코프 과정을 따르지 않는 경우**가 발생합니다. 즉, 주가의 흐름이 과거 주가에 영향을 받는 **자기상관성**이 관측되고는 합니다.

이러한 경우를 모델링(e.g. rough volatility models)하기 위해 등장한 개념이 Fractional Brownian Motion입니다.

FBM은 브라운 운동을 일반화한 개념으로, 시간이 $t > s > 0$로 주어졌을 때, 자기상관성의 척도로 H(Hurst exponent)가 주어지며, 다음과 같이 정의됩니다.

$$E[(X(t)-X(s))^2] = \sigma^2(t-s)^{2H},\ E[X(s)X(t)] = \frac{\sigma^2}{2}(t^{2H}+s^{2H}-(t-s)^{2H})$$

$H > 0.5$ 일때 양의 자기상관성, $H < 0.5$ 일때 음의 자기상관성, $H = 0.5$ 일 때 마코프 과정(랜덤워크)을 띄게 되는 브라운 운동입니다.

Ito's Process

일반화된 위너과정에서 평균변화율과 변동률이 상수로 주어졌다면, 이토과정에서는 평균변화율과 변동률이 시간과 확률변수에 대한 함수 $a(x,t),\ b(x,t)$ 로 주어지게 됩니다. 즉,

$$dx = a(x,t)\,dt + b(x,t)\,dW,\ \ \Delta x = a(x,t)\Delta t + b(x,t)\epsilon\sqrt{\Delta t}$$

이를 통해 이토과정도 마코프과정의 한 종류임을 알 수 있습니다.

14.3 The Process for a Stock Price

이제, 배당이 없는 주식에 대해 확률과정을 모델링해보겠습니다.

먼저 **주가가 일반화된 위너과정(GWP)를 따른다고 가정**한다면, 평균변화율과 변동률이 상수인 확률과정 $dS = a\,dt + b\,dW$ 를 생각할 수 있습니다.

그러나, 이는 **주가의 변화분이 상수로 고정**되어있다는 의미인데 현실과 부합하지 않는 부분이 존재합니다. **실제 주식투자자**는 현재 주가가 높고 낮음에 관계없이 **투자자금 대비 기대수익률을 고려**하는데, 그렇다면 동일한 기대수익률 하에 **주가의 변화분이 현재 주가에 따라 달라지기 때문**입니다.

따라서, 주가 대신에 주가수익률이 GWP를 따른다고 가정하는 것이 보다 현실에 부합하게 되며 평균변화율이 μ, 변동률이 σ 로 주어져있다면 주가수익률은 다음과 같은 이토과정을 따른다고 할 수 있습니다. 이러한 **주식의 확률과정을 기하학적 브라운 운동(GBM, Geometric Brownian Motion)**이라고도 합니다.

$$dS = \mu\,S\,dt + \sigma\,S\,dW \Rightarrow$$

$$\frac{dS}{S} = \mu\, dt + \sigma\, dW, \quad \frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\Delta t}$$

단위시간 Δt에 대해 평균은 $\mu \Delta t$, 분산은 $\sigma^2 \Delta t$이며 표준편차는 $\sigma\sqrt{\Delta t}$이고, 단위시간이 충분히 작다면 $\frac{\Delta S}{S} \sim \phi(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t)$ 입니다.

즉, μ**와 는 각각 단위시간에 대한 주가의 기대수익률과 표준편차를 연율로 환산**한 것입니다.

> ⚠ Warning
>
> 단위시간에 대한 주가수익률은 정규분포로 근사할 수 있으나, 기간 T에 대한 주가 $S_T - S_0$는 평균변화율($\mu\, S_t$)이 상수로 주어져있지 않기 때문에 14.2의 GWP와 동일한 방법으로 전개할 수 없습니다.
> 대신에, 주가의 연환산 기대수익률 및 표준편차가 주어져있다면 $\frac{\Delta S}{S} \sim \phi(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t)$를 이용한 몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo Simulation)을 통해 주가 S_T를 모델링할 수 있습니다.

14.6 Ito's Lemma

앞선 장에서 우리는 **파생상품의 가격결정**이 기초자산과의 관계로부터 시작하여 **기초자산의 현재가격을 통해 결정**된다는 것을 살펴보았습니다. 즉, **파생상품의 가격은 기초자산의 가격의 함수**입니다.

여기에 확률과정을 적용하면, **파생상품의 가격은 확률변수인 기초자산의 가격과 시간에 대한 함수**형태로 표현할 수 있다는 것입니다. 그렇다면 **확률변수를 이용한 함수는 어떤 방식으로 움직이며, 어떠한 확률과정**을 따르게 되는걸까요? 여기서 **이토의 보조정리(*Ito's Lemma*)**라고 불리는 아주 중요한 개념이 등장합니다.

이토의 보조정리란, 이토과정을 따르는 확률변수 $dx = a(x,t)dt + b(x,t)dW$와 확률변수 및 시간에 대한 함수 $G = f(x,t)$가 주어져있을 때, G가 다음과 같은 확률과정을 따르게 된다는 정리입니다.

$$dG = (\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2)dt + \frac{\partial G}{\partial x}b\, dW$$

즉, 평균변화율이 $\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2$이며 변동률이 $\frac{\partial G}{\partial x}b$인 **이토과정**을 따른다는 의미입니다.

이제, 파생상품의 가격 $G = f(S,t)$와 주가의 확률과정 $dS = \mu\, S\, dt + \sigma\, S\, dW$에 이토의 보조정리를 적용하겠습니다.

$$dG = (\frac{\partial G}{\partial S}\mu\, S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma^2\, S^2)dt + \frac{\partial G}{\partial S}\sigma\, S\, dW$$

즉, **파생상품의 가격 역시 기초자산과 유사한 이토과정**을 따르게 되며, **동일한 위너과정 dW에 의해 그 경로가 결정**됩니다. 이 개념은 다음 장의 BSM(Black Sholes Merton) 모형의 결과를 도출할 때 핵심개념으로 이용됩니다.

14.7 Application of Ito's Lemma

Forward Contract

t시점의 선도가격은 $F_0 = S_0 e^{r(T-t)}$이므로, 무위험이자율이 주어져있다면 이토의 보조정리를 적용할 수 있습니다.

$$dF = (\frac{\partial F}{\partial S}\mu\, S + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}\sigma^2\, S^2)dt + \frac{\partial F}{\partial S}\sigma\, S\, dW$$

$$= (e^{r(T-t)}\mu\, S - rSe^{r(T-t)})dt + e^{r(T-t)}\sigma\, S\, dW$$

$$\therefore dF = (\mu - r)\, F\, dt + \sigma\, F\, dW$$

The Lognormal property

$G = ln\, S$라고 하면, $\frac{dG}{dS} = \frac{1}{S},\ \frac{dG}{dt} = 0,\ \frac{d^2G}{dS^2} = -\frac{1}{S^2}$

$$dG = (\frac{\partial G}{\partial S}\mu\, S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma^2\, S^2)dt + \frac{\partial G}{\partial S}\sigma\, S\, dW$$

$$= (\frac{1}{S}\mu\, S - \frac{1}{2}\frac{1}{S^2}\sigma^2 S^2)dt + \frac{1}{S}\sigma\, S\, dW$$

$$\therefore dG = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma\, dW$$

이토의 보조정리에 따라, 이토과정을 따르는 주가에 자연로그를 취하면 GWP를 따르게 됩니다. 이제, 14.2 의 전개식을 적용하면 기간 T 에 대한 주가의 로그수익률이 정규분포를 따르게 됨을 유도할 수 있습니다.

$$ln\, S_T - ln\, S_0 = ln\frac{S_t}{S_0} \sim \phi((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T, \sigma^2\, T)$$

Chapter 15

블랙-숄즈-머튼 모형

(*The Black-Scholes-Merton Model*)

1970년대 처음 소개되면서 금융시장에 큰 변화를 이끌었고, 그 공로를 인정받아 97년 노벨상까지 수상한 블랙-숄즈-머튼 모형입니다.

이 책에서는 머튼의 방식으로 공식을 유도할 것이며, 배당이 없는 유럽형 콜옵션에서부터 풋옵션, 배당이 있는 경우, 아메리칸 옵션까지 확장해나가는 방법도 소개할 예정입니다.

15.1~3 Lognormal Property & Expected return

블랙-숄즈-머튼 모형에서 사용하는 주가모형은 앞 장에서 살펴본 내용과 동일합니다.

즉, 매우 작은 시간 Δt에 대해 주가수익률은 정규분포를 따르며, 평균은 μ, 표준편차는 σ 입니다.

이는 앞서 전개한 바와 같이 주가수익률이 Generalized Wiener Process를 따른다는 의미이며, 주가는 Ito Process를 따르게 됩니다.

주가에 로그를 취한 뒤 Ito's lemma를 적용하면 다시 Generalized Wiener Process를 따르게 되며, 표현하면 아래와 같습니다.

$$\frac{dS}{S} = \mu\ dt + \sigma\ dz \ \Rightarrow\ \ln S = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma\ dz$$

$$\Rightarrow\ \ln S_T \sim \phi[\ln S_0 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T,\ \sigma^2 T]$$

주가에 자연로그를 취한 형태가 정규분포를 따른다는 의미를 자세히 살펴보겠습니다.

주가에 적용되는 연속복리수익률 x를 가정해보겠습니다.

그러면, T 시점의 주가 $S_T = S_0 e^{xT}$ 로 표현할 수 있습니다.

이를 x에 대해 정리하면 $x = \frac{1}{T}\ln\frac{S_T}{S_0}\ \phi(\mu - \frac{\sigma^2}{2},\ \sigma^2)$ 입니다.

즉, 주가의 자연로그를 취한 형태가 정규분포를 따른다면 주가의 연속복리수익률도 유사한 정규분포를 따르게 됩니다.

> **Note**
>
> 위에서 우리는 주가의 평균변화율이 주가의 기대수익률 μ로 주어져 있을 때, 주가의 연속복리수익률은 평균이 $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ 인 정규분포를 따른다는 결과를 얻었습니다. 이는 주가의 기대수익률보다 낮은 값입니다.
> 현재까지 우리는 일반적으로 T 시점의 주가의 기대값을 $E(S_T) = S_0 e^{\mu T}$ 라고 표현해왔습니다. 왜 이런 차이가 발생하는 것일까요?
> 이를 이해하기 위해서는 먼저 우리가 가정한 주가모형을 잘 이해해야합니다. 연속복리수익률의 분포를 전개하기에 앞서, 우리는 시간 Δt에 대해서 주가의 수익률이 평균이 $\mu\Delta t$ 인 정규분포를 따른다고 가정하였습니다.
> 즉, 매우 작은 시간의 간격 Δt 에서 주가수익률의 분포는 기대수익률과 동일하지만 이를 기간 T 로 확장하게 되면, 그 사이의 수많은 Δt에 대해 수익률 μ를 누적하게 됩니다.
> 이는 기하평균의 방식으로 주가수익률을 산출하는 것과 유사하며, 이에 따라 기간 T 에 대해서 주가의 연속복리수익률의 평균은 Δt에 대해 μ를 기하평균하여 산출한 $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ 가 됩니다. 산술평균한 결과인 μ 보다는 낮은 값입니다.

15.4 Volatility

다음으로, 변동성을 나타내는 주가수익률의 표준편차 σ에 대해서 알아보겠습니다.

일반적으로 σ는 15% ~ 60% 수준의 값을 가지며, 이 의미는 주가의 연변동성이 15% ~ 60%라는 의미입니다.

앞서 강조하였던 것 처럼, 표준편차는 기간에 제곱근만큼 영향을 받으며 2년이라면 $\times\sqrt{2}$, 6개월이라면 $\times 1/\sqrt{2}$ 등 시간 Δt에 대해 변동성은 $\sigma\Delta t$가 됩니다.

> **Estimating Volatility from historical data**
>
> 과거 주가를 기반으로 주가의 연변동성 σ를 추정하는 경우, 일/주/월 단위의 주가를 통해 로그수익률을 산출한 다음, 표본표준편차를 산출하여 추정하게 됩니다.
> 즉, $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{N}(u_k - \bar{u})$를 이용해 s를 산출하고, 월 단위라면 $\hat{\sigma} = \sqrt{12}s$ 및 일 단위라면 $\hat{\sigma} = \sqrt{approx.252}s$을 통해 연표준편차를 추정합니다.
> 이때, 표준편자의 표준오차는 $\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{2N}}$이 됩니다.

15.5 ~ 6 The Black-Scholes-Merton differential equation

The idea and Assumption

블랙-숄즈-머튼 미분방정식은 배당이 없는 주식에 대해서만 유효하며, 이항모형을 설명할 때 사용했던 무위험포트폴리오를 구성하는 방법과 유사한 방식을 활용할 것 입니다.

하나 다른 점은, 블랙숄즈 방정식에서는 순간적으로만 무위험포트폴리오 구성이 가능하며 이를 유지하려면 리밸런싱이 필요하다는 점 입니다.

먼저, 블랙숄즈 방정식의 7가지 가정입니다.

1. 주가수익률은 평균변화율이 μ, 변동률이 σ인 GWP를 따른다.
2. 무차입공매도는 무한정으로 허용된다.
3. 거래비용 및 세금은 없으며, 모든 주식은 무한히 나눌 수 있다.
4. 파생상품의 만기까지 배당은 없다.
5. 무위험 차익거래 기회는 없다.
6. 주식의 거래는 연속적으로 이루어진다.
7. 무위험이자율 r이 존재하며, 모든 기간에 대해 상수이다.

Derivation of the Black-Scholes-Merton Differential Equation

가정 1번에 따라 주가는 $d\,S = \mu\,S\,dt + \sigma\,S\,dz$를 따릅니다.

콜옵션의 가격을 f라고 하면, 이는 명백히 $S, \tau = T - t$의 함수이므로, 이토의 보조정리를 적용할 수 있습니다.

$$d\,f = (\frac{\partial f}{\partial S}\mu\,S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma\,S\,dz$$

이 두가지 확률과정을 이용해서, t시점에서 무위험포트폴리오를 구성해보겠습니다.

1. 주식을 $\frac{\partial f}{\partial S}$만큼 매수
2. 주식 1주에 대한 콜옵션을 매도

이 포트폴리오를 $\Pi = \frac{\partial f}{\partial S}S - f$라고 하면, 랜덤워크 dz가 사라지므로, t시점에서 순간적인 포트폴리오의 변화분은 상수가 됩니다.

$$d\Pi = \frac{\partial f}{\partial S}\,d\,S - d\,f = -(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)dt$$

그렇다면, 이 포트폴리오는 순간적으로 무위험이므로 가정 5,6에 따라 $d\Pi = r\Pi\,d\,t$입니다.

이제 순차적으로 정리하면, 블랙숄즈 미분방정식을 얻을 수 있습니다.

$$r\Pi\,d\,t = d\Pi = -(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)dt$$

$$\Rightarrow \quad r\Pi = -\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2$$

$$\Rightarrow \quad -rf + r\frac{\partial f}{\partial S}S = -\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2$$

$$\therefore\ rf \ = \ \frac{\partial f}{\partial t} \ + \ rS\frac{\partial f}{\partial S} \ + \ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2$$

Tip

boundary conditions, perpetual derivatives, tradeable derivatives 등 교재 참조

15.7 Risk-Neutral Valuation

블랙숄즈공식의 유도는 (1) 블랙숄즈 미분방정식에 물리학의 열 확산 방정식의 풀이 방법을 적용하여 편미분방정식의 특수해를 얻는 방법, (2) 위험중립세상을 가정하고 푸는 방법으로 나뉩니다.

여기서는 위험중립가정을 통해 최종적으로 공식을 유도해보겠습니다. 앞서 이항모형에서 살펴본 바와 같이, 블랙숄즈 방정식에 위험중립가정을 적용하더라도 결과값은 실제 세상과 동일하게 됩니다.

8. 모든 투자자는 Risk-neutral이며, 이에 따라 모든 자산의 기대수익률과 할인률은 무위험이자율 r 이다.

Important

블랙숄즈 미분방정식을 유도할 때, 순간적으로 무위험이 되는 포트폴리오를 구축하였습니다.
이 방법과 이항모형에서 활용한 전개방법은 동일하며, 위험중립가치평가의 방법도 동일하게 적용할 수 있습니다.
선도계약을 예시로 들어보겠습니다.
만기 T 의 선도계약의 선도가격이 K 이며, 현재의 선도계약의 가치가 f 라면 선도계약의 만기 pay-off는 $S_T - K$ 입니다.
위험중립세상에서 선도계약을 가치를 구해보겠습니다. 모든 자산의 할인률은 r 이므로, $f = e^{-rT}\hat{E}(S_T - K) = e^{-rT}\hat{E}(S_T) - Ke^{-rT}$ 입니다.
위험중립세상이므로 $\hat{E}(S_T) = S_0 e^{rT(=\mu T)}$ 를 적용하면,

$$f = S_0 - Ke^{-rT}$$

우리가 앞서 유도한 선도계약의 가치와 동일한 결과를 얻을 수 있습니다.

15.8 Black-Scholes-Merton Pricing Formulas

$$c \; = \; S_0 \, N(d_1) \; - \; K \, e^{-rT} \, N(d_2)$$

$$p \; = \; K \, e^{-rT} \, N(-d_2) \; - \; S_0 \, N(-d_1)$$

$$where \; d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \;\; d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

이제, 블랙숄즈 방정식의 가장 유명한 특수해인 유럽형 옵션의 가격공식에 대해서 알아보겠습니다.

먼저, 유럽형 콜옵션의 만기 pay-off는 $max(S_T - K, 0)$ 입니다. 따라서 위험중립세상에서 유럽형 콜옵션의 현재가격은 아래와 같이 표현할 수 있습니다.

$$c = e^{-rT} \; \hat{E}[\, max(S_T - K, 0) \,]$$

한편, $E(S_T) = S_0 e^{rT}$ 이고 만기 T까지의 변동성은 $\sigma\sqrt{T}$ 이므로, 아래 정리를 이용하면 블랙숄즈 공식을 얻을 수 있습니다.

By Theorem,

$$c \; = \; S_0 \, N(d_1) \; - \; K \, e^{-rT} \, N(d_2)$$

By using Put-call parity $c - p = S_0 - Ke^{-rT}$***,***

$$p \; = \; K \, e^{-rT} \, N(-d_2) \; - \; S_0 \, N(-d_1)$$

! Important

Thm

For lognormally distributed with the mean m & volatility w,

$$E[\, max(V - K, 0) \,] \; = \; E(V) \, N(d_1) \; - \; K \, N(d_2)$$

where $d_1 = \frac{\ln[E(V)/K]+w^2/2}{w}$, $d_2 = d_1 - w$

Proof

$E[max(V-K,0)] = \int_K^{\infty}(V-K)g(V)\,dV$

Let $Q = \frac{\ln V - m}{w}$, then $Q \sim \phi(0,1)$, $h(Q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-Q^2/2}$

We get,

$$E[max(V-K,0)] = \int_{(\ln K - m)/w}^{\infty}(e^{Qw+m} - K)h(Q)\,dQ$$

$$= \int_{(\ln K - m)/w}^{\infty} e^{Qw+m}h(Q)\,dQ - K\int_{(\ln K - m)/w}^{\infty} h(Q)\,dQ$$

Note that,

$$e^{Qw+m}h(Q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(Q^2-2wQ-2m)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}((Q-w)^2-w^2-2m)}$$

$$= e^{(w^2+2m)/2} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(Q-w)^2} = e^{(w^2+2m)/2}\; h(Q-w)$$

Therefore,

$$E[max(V-K,0)] = e^{(w^2+2m)/2}\int_{(\ln K - m)/w}^{\infty} h(Q-w)\,dQ - K\int_{(\ln K - m)/w}^{\infty} h(Q)\,dQ$$

It is obvious that $m = \ln E(V) - \frac{w^2}{2}$ & $1 - N(x) = N(-x)$,

Let $d_1 = -\frac{\ln K - m}{w} + w = \frac{\ln[E(V)/K]+w^2/2}{w}$

Now,

$$E[\,max(V-K,0)\,] \;=\; E(V)\,N(d_1) \;-\; K\,N(d_2), \because e^{(w^2+2m)/2} = e^{\ln E(V)} = E(V)$$

Chapter 17

주가지수옵션 및 통화옵션

(*Options on Stock Indices and Currencies*)

17.1 Options on stock indices

주가지수옵션도 매우 활발히 거래되는 옵션입니다.

시장 전체를 대표하는 DJIA, S&P500, Nasdaq100 등에 대한 주가지수옵션이 CBOE에서 활발히 거래되고 있으며, 각 산업섹터별로 존재하는 주가지수에 대한 옵션도 존재합니다.

주가지수옵션은 포트폴리오 보험(보호적 풋), 커버드 콜과 같은 전략적인 투자를 위해 주로 거래됩니다.

보유한 주식 포트폴리오의 베타가 1인 경우, 시장지수에 대한 주가지수옵션을 포트폴리오 보험에 활용할 수 있습니다.

포트폴리오의 가치와 동일한 만큼의 풋옵션을 매수한다면, 풋옵션의 행사가격 미만으로 지수가치가 떨어졌을때에 한하여 손실을 회피(coverage)할 수 있습니다.

베타가 1이 아닌 경우, 포트폴리오 베타를 고려한 가치만큼 풋옵션을 매수함으로써 포트폴리오 보험을 구축할 수 있습니다.

17.2 Currency options

통화옵션은 기본적으로 장외에서 활발히 거래되는 옵션입니다.

장외옵션의 특성상 행사가격도 매우 다양하고, 만기일이나 다른 상품 스펙을 계약당사자 간에 자유롭게 정할 수 있는 장점이 있습니다.

Nasdaq OMX 등 거래소에서도 통화옵션이 거래되기는 하지만, 그 규모는 장외시장 대비 매우 작습니다.

통화옵션을 이용한 대표적인 거래전략으로는 Range forwards가 있습니다.

행사가격이 낮은 풋옵션을 매수하고, 행사가격이 높은 콜옵션을 매도하면, 행사가격 사이 구간의 만기 payoff는 flat하고 나머지는 기울기가 -1인 형태가 되는데, 이를 Short range forwards라고 합니다.

Short range forwards와 현물통화를 가지고 있다면, bull call spread와 유사한 만기 payoff를 가지게 됩니다.

17.3 Options on stocks paying known dividend yields

지금까지 모든 옵션 프라이싱은 배당이 없는 경우에 한정하였습니다.

그러나 실제 세상의 주식은 대부분 배당이 있습니다.

이제 이러한 배당을 가격결정에 어떻게 적용하는지 살펴보겠습니다.

방법은 간단합니다.

주식의 배당이 연속복리 배당수익률 q로 주어져있다고 가정하는 것 입니다.

그렇다면, 주식의 기대수익률이 k일 때, 만기 T시점까지 주가의 기대값 $E(S_T) = S_0 e^{(k-q)T}$가 될 것입니다.

위험중립세상에서는 어떨까요? 동일한 방식을 적용하면 $E(S_T) = S_0 e^{(r-q)T}$가 될 것 입니다.

이제, 두가지 포트폴리오를 비교해봅시다.

1. 연속복리 배당수익률 q로 주어져있으며, 현재 가격이 S_0인 주식
2. 배당이 없으며, 현재 가격이 $S_0 e^{-qT}$인 주식

두가지 포트폴리오의 만기 T 시점의 기대값은 $S_0e^{(k-q)T}$ 로 동일합니다. 즉, 배당이 있고 현재 가격이 S_0 인 경우는, 배당이 없으며 현재 가격이 S_0e^{-qT} 인 경우와 동일합니다.

이 방식으로 전개할 때, 앞서 살펴본 옵션의 가격결정과 관련된 수식에서 S_0 를 S_0e^{-qT} 로 치환하면 배당이 있는 경우에 대한 결과를 얻을 수 있습니다.

Lower bounds for option prices

$$c \geq max(S_0e^{-qT} - Ke^{-rT}, 0),\;\; p \geq max(Ke^{-rT} - S_0e^{-qT})$$

Put-call parity

$$c - p = S_0e^{-qT} - Ke^{-rT}$$

$$S_0e^{-qT} - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}$$

Stochastic process & BSM equition and formulas

$$dS = (r-q)S\,dt + \sigma S\,dz$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (r-q)S\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf$$

$$c = S_0e^{-qT}N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)\ for\ d_1 = \frac{\ln(S_0e^{(r-q+\frac{1}{2}\sigma^2)T}) - \ln K}{\sigma\sqrt{T}},\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

17.4 Valuation of european stock index options

주가지수옵션의 가격결정공식은 무위험이자율과 배당수익률이 r, q로 주어져있을 때 위에서 살펴본 바와 동일합니다.

여기서는 선물의 이론가격 $F_0 = S_0 e^{(r-q)T}$를 이용하여 옵션가격을 결정하는 방법을 추가로 살펴보겠습니다.

위 콜옵션의 BSM공식에 선물의 이론가격을 대입하여 정리하면,

$$c = F_0 e^{-rT} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \; for \; d_1 = \frac{\ln(F_0 e^{\frac{1}{2}\sigma^2 T}) - \ln K}{\sigma\sqrt{T}}, \; d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

또한, 풋콜패리티는 $c - p = (F_0 - K)e^{-rT}$로 정리할 수 있습니다.

이를 이용해 주가 및 배당수익률을 확정하기 어려운 상황에서 선물가격을 이용해 옵션가격을 계산할 수 있습니다.

17.5 Valuation of European currency options

앞서 우리는 배당이 있는 주식은, 배당이 없고 현재가격이 $S_0 e^{-qT}$인 경우와 동일하다고 가정하고 식을 전개하였습니다.

통화옵션의 경우, 통화선물의 이론가격이 $F_0 = S_0 e^{(r-r^f)T}$임을 고려해보겠습니다.

만약 국내 무위험이자율이 r, 해외 무위험이자율이 r^f, 현재 환율이 S_0로 주어져 있다고 하면, 이는 국내 무위험이자율이 r, 해외 무위험이자율은 0, 현재 환율이 $S_0 e^{-r^f T}$로 주어져 있는 경우와 동일할 것 입니다.

이를 적용한다면 상기 전개한 배당이 적용된 옵션에 대한 수식에서, q를 r^f로 치환함으로써 통화옵션의 가격결정공식을 모두 유도할 수 있습니다. 즉, 아래와 같습니다.

$$c = S_0 e^{-r^f T} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2), \quad c - p = S_0 e^{-r^f T} - K e^{-rT}$$

17.6 American Options

미국형 옵션의 경우, Binomial Tree 모형(CRR)을 통해 마지막 노드부터 조기상환 가능성을 고려해가면서 순차적으로 현재가치로 환산한다면 그 가치를 결정할 수 있습니다.

이 때, 위험중립가치평가를 통해 주가의 상승확률 $p = \frac{e^{r\Delta T}-d}{u-d}$ 를 결정하였습니다.

배당이 있는 경우의 주식옵션, 주가지수옵션 및 통화옵션의 경우 위와 동일한 논리를 적용할 수 있고, 이에 따른 위험중립확률은 아래와 같습니다.

$$p = \frac{e^{(r-q)\Delta T} - d}{u-d} = \frac{e^{(r-r^f)\Delta T} - d}{u-d} \quad for \;\; u = e^{\sigma\sqrt{\Delta T}},\; d = 1/u$$

Chapter 18

선물옵션 및 블랙모형

(*Futures Options and Black's Model*)

지금까지 다룬 옵션은 주로 특정 현물을 기초자산으로 하는 옵션이였습니다.

기초자산이 만약 선물이면 어떨까요? "선물계약"을 사거나 파는 권리인데, 이를 선물옵션이라고 부릅니다.

이번 장에서는 선물옵션의 특징과 현물옵션과의 관계, Futures-style options가 무엇인지 알아보겠습니다.

18.1 Nature of Futures Options

선물옵션은 옵션이기때문에 의무가 아닌 "권리"입니다.

선물 콜옵션이란, 가격과 만기가 정해진 "선물"을 "매수"할 권리이며, 선물 풋옵션이란 "선물"을 "매도"할 권리입니다.

만기 Pay-off는 기초자산의 가격 S 대신 선물가격 F를 생각하면 됩니다.

선물콜옵션 : $max(F-K,0)$ 및 선물풋옵션 : $max(K-F,0)$

선물옵션을 거래할 때에는 "옵션"의 만기일과 기초자산인 "선물"의 만기일이 각각 존재함에 유의해야합니다.

일반적으로 선물옵션은 American Options이며, 옵션의 만기는 선물의 만기일보다 짧은 경우가 대부분입니다.

ℹ 18.2 Reasons for the popularity of futures options

현물에 대한 옵션 대신 선물에 대한 옵션을 거래하는 근본적인 이유는 무엇일까요?
당연하게도 선물옵션이 현물옵션 대비 장점이 있기 때문인데, 바로 "편리함"입니다.
대게 선물은 현물 대비 거래소에서 즉시 거래할 수 있으며, 유동성이 높은 경우가 많습니다.
또한, 선물은 만기일 이전에 거래소에서 반대거래로 포지션을 해소하거나 현금결제 방식으로 최종결제할 수 있어 현물을 인수도받지 않고 거래를 종결할 수 있습니다.
마지막으로, 이러한 편리함으로 인해 선물의 거래비용이 대게 현물의 거래비용보다 저렴합니다.

18.3~5 Pay-off, Put-call parity, Bounds for Futures Options

Pay-off

선물 콜옵션의 만기 pay-off는 $max(F_T - K, 0)$ 입니다.

일반적인 옵션에서 만기시점의 기초자산의 가격 S_T가 F_T로 바뀐 구조인데요, 만약 선물옵션의 만기가 기초선물의 만기와 동일하다면 $F_T = S_T$이므로, 선물옵션의 만기 pay-off는 일반 옵션과 동일하게 됩니다.

Put-call parity

풋콜패리티의 경우, 현물 대신 선물가격을 단순 치환할 수 없습니다.

이는 선물에는 현물과 달리 보유에 대한 기회비용인 무위험이자율이 적용되지 않기 때문입니다.

따라서, 옵션의 만기와 선물의 만기가 동일한 선물옵션의 풋콜패리티는 일반적인 경우와 동일하게 됩니다.

$$c - p = S_0 - Ke^{-rT} = F_0 e^{-rT} - Ke^{-rT}$$

Building portfolio

Portfolio A : a European call futures option + cash $Ke-rT$

Portfolio B: a European put futures option + long futures + cash F_0e^{-rT}

두 포트폴리오의 만기 Pay-off를 비교해보면 풋콜패리티를 유도할 수 있습니다.

Bounds

풋콜패리티를 이용하여 선물옵션의 하한을 다음과 같이 유도할 수 있습니다.

$$c \geq c - p = (F_0 - K)e^{-rT} \Rightarrow c \geq max((F_0 - K)e^{-rT}, 0)$$

$$p \geq p - c = (K - F_0)e^{-rT} \Rightarrow p \geq max((K - F_0)e^{-rT}, 0)$$

미국형 선물옵션은 언제든지 권리행사가 가능하므로, 내치가치가 하한이 됩니다.

$$C \geq max(F_0 - K, 0), \quad P \geq max(K - F_0, 0)$$

18.6~9 Valuation of a futures options

현물과 달리 선물을 보유하는데에는 초기비용이 들지 않습니다.

즉, 현물을 매수하는 것에 대한 기회비용인 무위험이자율 r이 발생하지 않는다는 의미입니다.

이를 이용하여 위에서 풋콜패리티를 유도하였고, 앞서 살펴보았던 위험중립가치평가, 이항모형, 블랙숄즈 모형을 모두 유도할 수 있습니다.

위험중립가치평가

위험중립세계를 가정해봅시다. 여기서는 모든 자산의 기대수익률이 무위험이자율 r 입니다.

선물은 어떨까요? 선물은 계약시점에 현금을 지불하지 않고 만기시점에 지불합니다.

두가지 포트폴리오를 생각해봅시다.

1. 현물 매수
2. 현물 매수 + 선물 매도

두 포트폴리오는 위험중립세계에서는 동일한 기대수익률 r을 가지게됩니다.

다시 말해, 위험중립세계에서 선물의 기대수익률은 "0" 입니다.

이항모형

위험중립세계에서 선물의 기대수익률은 0이므로, 위험중립확률은 $p = \frac{1-d}{u-d}$ 입니다.

블랙숄즈모형

위험중립세계에서 선물의 기대수익률은 0이므로, 선물은 drift rate가 0인 $dF = \sigma F\,dz$ 이토과정을 따르게 됩니다.

앞서 블랙숄즈미분방정식에 $r = 0$을 적용하면, 선물옵션에 대한 미분방정식을 얻을 수 있습니다.

$$rf \;=\; \frac{\partial f}{\partial t} \;+\; rS\frac{\partial f}{\partial S} \;+\; \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \;=\; \frac{\partial f}{\partial t} \;+\; \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2$$

동일한 방식으로 선물옵션의 블랙숄즈공식을 유도할 수 있습니다.

$$c \;=\; e^{-rT}\left(F_0\,N(d_1) \;-\; K\,N(d_2)\right)$$

$$p \;=\; e^{-rT}\left(K\,N(-d_2) \;-\; F_0\,N(-d_1)\right)$$

$$where\ d_1 = \frac{\ln(F_0/K) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

18.9 American vs. European for futures options

지금까지 선물은 현물과 달리 기회비용이 없다는 것을 이용하여 풋콜패리티 및 가치평가를 전개하였습니다.

우리는 앞서 배당이 없는 주식의 경우, 콜옵션이 조기행사될 가치가 없으므로 미국형 콜옵션의 가치는 유럽형 콜옵션과 같다는 것을 확인하였습니다.

바로 미국형 콜옵션이 조기행사되더라도, 현물을 매수하는 비용 S_t에 대한 만기까지의 기회비용 $S_t e^{r(T-t)}$가 발생하기 때문입니다.

선물옵션에서는 어떨까요?

선물은 기회비용이 없으므로 상기 논리를 적용할 수 없습니다. 따라서 배당이 없는 주식에 대한 선물 콜옵션은 조기행사될 수 있으며, 미국형 선물 콜옵션이 유럽형 선물 콜옵션보다 비싸게 될 것 입니다.

현물옵션과 비교하면 어떨까요?

이는 시장 상황이 contango($F > S$)인지 Backwardation($S > F$)인지에 따라 달라집니다.

현재 시장이 contango인 경우, 선물 가격이 현물 가격보다 높습니다. 이 경우 동일한 행사가격을 가지는 선물옵션과 현물옵션을 비교해보면, 콜옵션은 선물옵션이 더 비싸고 풋옵션은 현물옵션이 더 비싸게 형성됩니다.

반대로 Backwardation의 경우, 콜옵션은 현물옵션이 더 비싸고 풋옵션은 선물옵션이 더 비싸게 됩니다.

18.10 Futures-style options

선물식 옵션(futures style options)이란, 선물처럼 거래하는 옵션을 말합니다. 일반적으로 프리미엄을 주고받고 만기에 권리행사 유무에 따라 최종결제하는 옵션과 달리, 선물처럼 증거금만을 납입하고 옵션프리미엄의 변동에 따라 일일정산을 수행하는 옵션입니다.

따라서, 옵션의 가격변동에 배팅하는 파생상품이라고 할 수 있으며, 옵션을 기초자산으로 하는 선물이라고 할 수 있습니다.

선물의 이론가격이 미래가치인 $F_0 = S_0 e^{rT}$ 로 결정되는 점을 고려하여 선물식 옵션의 미래가치를 각각 유도할 수 있습니다.

$$Futures\ style\ options,\ F_0^c = ce^{rT} = F_0\,N(d_1)\ -\ K\,N(d_2)$$

$$F_0^p = pe^{rT} = K\,N(-d_2)\ -\ F_0\,N(-d_1)$$

이러한 미래가치를 이용하여 선물식옵션의 풋콜패리티를 최종적으로 산출할 수 있으며, 아래와 같습니다.

$$c - p = F_0 - K$$

Chapter 19

옵션 그릭스

(*The Greek Letters*)

고객에서 옵션을 판매하는 금융기관은 고객의 옵션 권리행사에 대응하기 위해 옵션 리스크를 관리하게 됩니다.

가장 기본적으로 고객에게 옵션을 판매하고, 동일한 옵션을 거래소를 통해 즉시 매수하면 보유한 리스크는 완전 헷지됩니다.

그러나 거래소에서, 또는 장외에서도 판매한 옵션과 동일한 옵션을 매수할 수 없다면 어떨까요?

아마 헷지가 훨씬 어려워질 것 입니다. 이를 효율적으로 관리하기 위한 것이 옵션 그릭스(Greeks)입니다.

그릭스란 옵션이 가지고 있는 여러 위험을 다양한 관점에서 수치화한 것이며, 이를 통제가능한 범위에서 관리함으로써 위험을 효율적으로 관리할 수 있습니다.

이 장의 마지막에서는 "합성옵션"에 대해서도 살펴볼 것 입니다. 이는 옵션의 헷지와 그릭스와 매우 밀접한 관련이 있습니다.

19.1 Illustration

이제부터 옵션 그릭스 등 여러 개념을 설명할 때, 아래와 같은 예시를 반복적으로 사용할 예정입니다.

현재 금융기관은 고객에게 무배당 A주식 100,000주에 대한 유럽형 콜옵션을 $300,000에 매도하였습니다.

만기는 20주(0.3846년)이고, 현재 주가는 $49 및 행사가격은 $50입니다.

주가의 기대수익률은 13% 및 변동성은 20%이며, 무위험이자율은 5%입니다.

$$S_0 = 49,\ K = 50,\ r = 0.05,\ \sigma = 0.2,\ T = 0.3846,\ \mu = 0.13$$

위 파라미터를 BSM에 적용하면 $c = 2.4$이며, 옵션의 전체 가치는 $240,000입니다. 즉, 금융기관은 옵션의 공정가치 대비 $60,000의 마진을 붙여서 고객에게 매도한 것 입니다.

이제, 금융기관은 해당 옵션을 적절히 헷지해서 이익을 극대화할 필요가 있습니다.

19.2 Naked and Covered Positions

금융기관이 이러한 상황에서 취할 수 있는 가장 간단한 행동은 무엇일까요?

두 가지를 소개할텐데, 첫 번째는 아무것도 하지 않는 것 입니다.

즉, **매도한 옵션을 그대로 보유**하는 것 입니다. (Naked position)

20주 후 주가의 향방에 따라 금융기관은 $300,000의 이익을 보게 될 수도, 주가의 상승에 따라 무한정 손실을 보게될 수도 있습니다.

주가가 $50 이하라면 옵션은 행사되지 않으며, 주가 상승에 따라 이익폭이 줄어들다가 $53이 되면 옵션매도금액과 권리행사로 인한 손실액이 동일해져 손익이 0이 됩니다.

두 번째 방법은, **주식을 10만주 매수해서 옵션의 권리행사에 대응**하는 것 입니다. (Covered Position)

주식 10만주를 매수하고 10만주에 대한 콜옵션을 매도(커버드콜)하면 주가 상승으로 인해 옵션이 권리행사되더라도 보유한 주식에서 발생한 이익으로 상계가 가능합니다.

그러나, 이 경우 주가하락에 따른 손실위험이 있습니다. 주가가 $49보다 하락하면 손실이 발생하며, $46이 되면 주식의 손실분과 옵션매도금액이 동일해져 손익이 0이 됩니다.

두 방법은 어떤가요?

금융기관이 손쉽게 취할 수 있는 전략이지만, 헷지했다고 볼 수 없습니다. **옵션을 판매한 이익보다 더 큰 손실이 발생할 위험이 상존**하기 때문입니다.

A Stop-Loss Strategy

만약 위 두가지 전략을 동적(Dynamic)으로 번갈아가며 취하면 어떨까요?
주가가 행사가격 K 보다 상승하면 즉시 주식을 매수하고, 주가가 K 보다 하락하면 즉시 주식을 다시 파는겁니다.
이러한 전략을 스탑&로스 전략이라고 합니다.
만약 거래비용이 없고, 주가를 정확히 K에 사고 팔 수 있다면 완전헷지(Perfect hedge)가 가능하며, 투자자는 옵션 프리미엄만큼 무위험차익을 얻게 됩니다.
그러나 현실은 어떨까요?
현실에는 수수료나 세금 등 거래비용이 있고, 주가가 상승할 때 정확히 K 에 사고 하락할 때 정확히 K 에 팔 수 없습니다.
즉, 헷지비용이 발생하게 되고 주가가 K 를 중심으로 자주 변동할 때 헷지비용이 커지게 됩니다.
따라서 현실적으로 스탑&로스 전략이 좋은 헷지성과를 내기는 어렵습니다.

19.3 Greek Letter Calculation

많은 트레이더들은 이러한 헷징의 한계를 극복하고 정교화하기 위해 그릭스(Greeks)를 활용합니다.

그릭스는 **옵션의 위험**을 기초자산, 변동성, 이자율 등 **다양한 관점에서 평가하는 도구**입니다.

따라서 각각의 그릭스는 옵션의 가격평가모델에 대하여 특정 위험에 대한 변화율로 계산하게 되며,

일반적으로 **유럽형 옵션은 BSM 모형을, 미국형 옵션은 CRR 모형을 이용하여 계산**하게 됩니다.

특정 시점에서 **그릭스를 계산**할 때 각각의 파라미터와 현재 옵션의 가격을 통해 산출한 **내재변동성을 이용**하게 되며,

이를 통해 **다른 모든 조건이 동일할 때, 특정 위험요소에 대한 옵션가격의 민감도를 측정**한다는 의미입니다.

이번 장에서는 유럽형 옵션의 BSM 모형을 이용한 그릭스 산출을 중점적으로 다루겠습니다.

19.4 Delta

델타(Δ)는 앞선 장에서도 설명한 개념입니다.

기초자산의 가격에 대한 옵션 가격의 민감도이며, $\Delta = \frac{\partial c}{\partial S}$ 입니다.

블랙숄즈모형에서 살펴보았던 것 처럼, 콜옵션에서 델타는 $\Delta = N(d_1)$으로 계산할 수 있습니다.

이와 유사하게 풋옵션에서 델타는 $\Delta = N(d_1) - 1$이며, 음수로 나타나게 됩니다.

옵션의 델타는 Deep-ITM의 경우 1에 가깝고, Deep-OTM의 경우 0에 가깝습니다.

ATM의 경우 0.5에 가까운데, 옵션의 잔존만기가 길수록 약 0.6으로 수렴하는 경향이 있습니다.

BSM에서 옵션의 권리행사 확률은 수학적으로 $N(d_2)$로 나타나지만, $N(d_1)$과 큰 차이가 없는 점을 고려할 때,

이를 직관적으로 해석하면 ITM은 만기가 가까워질 수록 권리행사 확률이 1로, OTM은 0으로, ATM은 0.5로 수렴하는 것으로 이해할 수 있습니다.

Dynamic Delta Hedging

델타 헷징이란 포트폴리오의 델타를 0으로 만들어 기초자산의 가격변동에 따른 손익이 0이 되도록 만드는 방법입니다.

앞서 살펴본 예시에서, 금융기관의 전략으로서 델타헷징을 지속적으로 수행하는 방법을 소개하겠습니다.

10만주의 주식에 대한 콜옵션을 매도한 금융기관을 생각해봅시다.

해당 옵션의 델타를 산출해보면 옵션 매도시점에서 0.522가 나옵니다.

델타를 0으로 만들기 위해서는 금융기관이 주식을 52,200주만큼 매수하면 됩니다.

그리고, 이에 따라 옵션의 델타가 변화할 때 금융기관이 주식을 사거나 팔아서(리밸린싱) 델타를 0으로 유지하는 것 입니다.

스탑&로스 전략과 마찬가지로 거래비용 없이 정확한 가격에 주식을 사고 팔 수 있다면 이 전략은 유효할 것 입니다.

그러나, 실무적으로 거래비용과 스프레드비용이 발생하므로, 주가가 변하고 리밸런싱이 잦아질 수록 헤지 비용이 발생하게 됩니다.

19.5 Theta

쎄타( )는 잔존만기의 변화에 따른 옵션 가격의 변화분으로, 아래와 같이 표현됩니다.

$$\Theta(call) = -\frac{\partial c}{\partial T} = -\frac{S_0 N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT}N(d_2)$$

$$\Theta(put) = -\frac{\partial p}{\partial T} = -\frac{S_0 N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT}N(-d_2)$$

일반적으로 시간의 감소에 따른 옵션가격 변화분, 즉 Time decay를 측정하는 지표로 사용하기 때문에 (-)를 붙여서 표현하며,

결과값은 옵션의 시간가치 감소분을 표현하게 되므로 일반적으로 음수가 됩니다.

여기서 T는 연단위 잔존만기로, 1일 단위의 시간가치 변동분을 계산하기 위해서는 $\Theta/252$ 등으로 나타낼 수 있습니다.

19.6 Gamma

앞서 델타 헷징을 설명할 때, 옵션의 델타가 지속적으로 변하기 때문에 리밸런싱이 지속적으로 필요하고, 이 때문에 헷지비용이 발생한다고 하였습니다.

이러한 옵션의 헷지비용을 어떻게 측정할 수 있을까요?

한가지 방법은 기초자산의 가격변동에 따른 옵션 델타의 변동분을 측정하여 예상되는 리밸런싱 규모를 측정하는 것 입니다.

여기에 이용하는 것이 감마( )입니다.

$$\Gamma = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2} = \frac{N'(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}}$$

즉, 델타헷징을 통해 델타를 0으로 만든 Delta-neutral 포트폴리오에서, 감마가 매우 크다면 그 포트폴리오는 델타를 0으로 만들기 위해 해야하는 리밸런싱의 규모가 상대적으로 크다는 것을 의미합니다.

만약 포트폴리오의 Gamma를 0으로 만들어 Delta-neutral 및 Gamma-neutral을 만들 수 있다면, 짧은 시간동안 기초자산의 가격이 변하더라도 델타를 0으로 유지할 수 있고, 리밸런싱 없이 완전헷지를 지속할 수 있다는 것을 의미합니다.

19.7 Relationship between Delta, Theta, Gamma

Taylor expansion

먼저, 포트폴리오의 가치는 기초자산과 시간에 대한 함수 $\Pi(S, T)$로 나타낼 수 있다고 해보겠습니다.

테일러 전개를 적용하면 아래와 같이 표현할 수 있습니다.

$$\Delta\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial S}\Delta S + \frac{\partial \Pi}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2}\Delta S^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2}\Delta t^2 + ...$$

여기서 Δt^2 및 ΔS^3부터는 무시할 정도로 미미하다고 가정하면,

$$\Delta\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial S}\Delta S + \frac{\partial \Pi}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2}\Delta S^2 = (delta)\Delta S + \Theta\Delta t + \frac{1}{2}\Gamma\Delta S^2$$

만약 Delta-neutral 포트폴리오면, $\Delta\Pi = \Theta\Delta t + \frac{1}{2}\Gamma\Delta S^2$로 나타낼 수 있습니다.

BSM equation

해당 포트폴리오에 대한 블랙숄즈 미분방정식을 그릭스를 이용하여 표현하면 아래와 같이 정리할 수 있습니다.

$$r\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial t} + rS\frac{\partial \Pi}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2} = \Theta + rS\Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\Gamma$$

만약 Delta-neutral 포트폴리오면, $r\Pi = \Theta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\Gamma$

19.8 Vega

앞서 그릭스 산출에는 현재 옵션의 시장가격에 해당하는 내재변동성을 사용한다고 했습니다.

내재변동성은 옵션의 가격과 1-1로 매칭되는 매우 중요한 파라미터인데요, 베가는 이러한 내재변동성이 변할 때 옵션의 가격이 얼마나 변하는지 측정하는 지표입니다.

$$V = \frac{\partial f}{\partial \sigma} = S_0 \sqrt{T} N'(d_1)$$

변동성과 옵션의 가격은 1-1 대응되며, 항상 양의 상관관계이기 때문에 베가의 값은 항상 양수입니다.

19.9 Rho

로는 옵션의 가격결정요인 중 마지막으로 남은 이자율과 옵션 가격에 대한 관계를 나타냅니다.

$$\rho(call) = \frac{\partial c}{\partial r} = KTe^{-rT}N(d_2)$$

$$\rho(put) = \frac{\partial p}{\partial r} = -KTe^{-rT}N(-d_2)$$

Rho in FX options

외환옵션의 경우, 이자율파라미터가 국내 및 해외 두가지입니다.

해외 이자율에 대한 rho는 아래와 같습니다.

$$\rho(call) = -Te^{-r_f T} S_0 N(d_1)$$

$$\rho(put) = Te^{-r_f T} S_0 N(-d_1)$$

Summary

$$\Delta_{call} = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1)$$

$$\Delta_{put} = \frac{\partial P}{\partial S} = N(d_1) - 1$$

$$\Gamma_{call} = \Gamma_{put} = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$v_{call} = v_{put} = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = \frac{\partial P}{\partial \sigma} = S\sqrt{T-t}N'(d_1)$$

$$\Theta_{call} = \frac{\partial C}{\partial (T-t)} = -\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$\Theta_{put} = \frac{\partial P}{\partial (T-t)} = -\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} + rKe^{-r(T-t)}N(-d_2)$$

$$\rho_{call} = \frac{\partial C}{\partial r} = K(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$\rho_{put} = \frac{\partial C}{\partial r} = -K(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2)$$

Figure 3: Options Greeks Summary

선물옵션 HW(~midterm)

Chapter3

Problem 3.4 (Hedging with Futures)

A company has a **$20 million portfolio** with **a beta of 1.2**. It would like to use futures contracts on a stock index to hedge its risk. The index **futures price currently stading at 1080**, and each contract is for delivery of **$250 times** the index.

(1) what is the hedge that minimizes risk?

(2) what should the company do if it wants to reduce the beta of the portfolio to 0.6?

Solving

먼저, 선물 1계약의 가치는 $1,080 \times 250USD = 270,000USD$ 입니다.

리스크 최소화를 위한 최적 헷지비율은 $\hat{h}^* = \beta \times \frac{V_{portfolio}}{V_{futurescontract}}$ 이므로,

(1) 리스크 최소화를 위해서는 $\hat{h}^* = 1.2 \times \frac{20,000,000}{270,000} = 88.89 \approx 89$ 을 매도하면 된다.

(2) 베타를 0.6으로 줄이기 위해서는 포트폴리오 베타를 0.6만큼 헷지하면 된다. $h = 0.6 \times \frac{20,000,000}{270,000} = 44.44 \approx 44$ 을 매도하면 된다.

Problem 3.24 (CAPM)

A portfolio manager has maintained an **actively managed portfolio with a beta of 0.2**. During the last year, the **risk-free rate was 5%** and **equities performed very badly providing a return of -30%**. The portfolio manager produced **a return of -10%** and claims that in the circumstances **it was a good performance**. Discuss this claim.

Solving

CAPM에 근거하여 수익률을 산출할 때, **매니저의 주장은 옳지 않다.**

먼저, CAPM에 근거한 포트폴리오 수익률은 $R_{portfolio} = r_f + \beta(r_{market} - r_f)$이며, 여기에 따르면 베타가 0.2인 주식포트폴리오의 기대수익률은 무위험자산 : 시장 = 8:2로 투자한 시장포트폴리오의 수익률인 $5\% + 0.2(-30\% - 5\%) = -2\%$이다.

즉, 매니저가 good performance라는 의미는 -2%보다 높은 수익률을 달성해서 시장포트폴리오를 out-perform한다는 의미인데, 이를 8%나 하회하는 -10%의 성적을 거두었으니 좋은 성과를 냈다고 볼 수 없다.

> ⚠ 잘못푼 예시
>
> 시장 전체의 수익률이 -30%일 때, 베타가 0.2인 주식포트폴리오가 시장을 beat하는 수익률은 $0.2 \times -30\% = -6\%$이다. 포트폴리오가 good performance라는 것은 보통 시장을 out-perform 한 경우를 의미하는데, 수익률이 -6%를 하회하는 -10%이므로 좋은 성과를 냈다고 보기 어렵다.

Problem 3.25 (Changing Beta)

It is July 16. A company has **a portfolio of stocks worth $100million**. The **beta of the portfolio is 1.2**. The company would like to use the December futures contract on a stock index to **change beta of the portfolio to 0.5** during the period July 16 to November 16. The **index is currently 2,000** and each contract is on **$250 times** the index.

(1) What position should the company take?

(2) Suppose that the company changes its mind and decides to increase the beta of the portfolio from 1.2 to 1.5. What position in futures contracts should it take?

Solving

*Problem 3.4*와 동일한 방식이다. 먼저, 선물 1계약의 가치는 $2,000 \times 250USD = 500,000USD$이며,

(1) 포트폴리오 베타를 0.5로 줄이려면 베타를 0.7만큼 헷지하면 된다. $h = 0.7 \times \frac{100,000,000}{500,000} = 140$ 을 매도 하면 된다.

(2) 포트폴리오 베타를 1.5로 늘리려면 베타를 -0.3만큼 헷지하면 된다. 즉, 매도헷지 대신 선물매수를 통해 베타를 0.3만큼 늘리면 된다. $h = -0.3 \times \frac{100,000,000}{500,000} = -60 \quad = 60$ 하면 된다.

Chapter4

Problem 4.2

1. Problem 4.2 (face value $100)

The 6-month and 1-year zero rates are both 5% per annum. For a bond that has a life of 18 months and pays a coupon of 4% per annum (with semiannual payments and one having just been made), the yield is 5.2% per annum. What is the bond's price? What is the 18-month zero rate? All rates are quoted with semiannual compounding.

Figure 4: Chapter4-2

Solving

$$Price = \frac{2}{(1+5.2\%/2)^1} + \frac{2}{(1+5.2\%/2)^2} + \frac{102}{(1+5.2\%/2)^3} = 98.29$$

$$\frac{2}{(1+5\%/2)^1} + \frac{2}{(1+5\%/2)^2} + \frac{102}{(1+z_{1.5}/2)^3}, \ z_{1.5} = 5.204\%$$

Problem 4.14

2. Problem 4.14

A 10-year 8% coupon bond currently sells for $90. A 10-year 4% coupon bond currently sells for $80. What is the 10-year zero rate? (Hint: Consider taking a long position in two of the 4% coupon bonds and a short position in one of the 8% coupon bonds.)

Figure 5: Chapter4-14

Solving

4% 쿠폰 채권을 액면 $200만큼 매수한다면, 액면 $100의 8% 쿠폰 채권과 액면 $100의 10년 무이표채 채권을 매수한 것과 동일한 현금흐름이 발생한다.

이 경우, 10년 무이표채 채권의 가격은 $160-$90=$70이며 10-year zero rate는 다음과 같다.

$$70 = \frac{100}{(1+z_{10})^{10}},\ z_{10} \approx 3.63\%$$

Problem 4.29

3. (Extra Problem 9ed. 4.29)

A bank can borrow or lend at LIBOR. The two-month LIBOR rate is 0.28% per annum with continuous compounding. Assuming that interest rates cannot be negative, what is the arbitrage opportunity if the three-month LIBOR rate is 0.1% per year with continuous compounding? How low can the three-month LIBOR rate become without an arbitrage opportunity being created?

Figure 6: Chapter4-29, 9ed.

Solving

먼저, 2개월 후 1개월간 Libor Foward rate는 다음과 같다.

$$F_{2m,1m} = \frac{\frac{3}{12}0.1\% - \frac{2}{12}0.28\%}{\frac{1}{12}} = 0.3\% - 0.56\% = -0.26\%$$

그러나, 이자율은 음수가 될 수 없으므로 선도이자율은 0%이다. 빌려주는 사람 입장에서, 안빌려주고 현금을 보유하면 이자율은 0%이므로 이는 자연스러운 현상이다.

이 때, Libor금리로 3개월간 자금을 빌리고 2개월간 Libor로 빌려준 다음 3개월까지는 현금을 보유(또는 0%에 빌려줌)한다면 무위험 차익을 얻을 수 있다.

차익거래가 발생하지 않으려면, 선도이자율의 균형가격이 0%까지 상승해야 한다.

$$F_{2m,1m} = 0\% = \frac{\frac{3}{12}Libor_{3m} - \frac{2}{12}0.28\%}{\frac{1}{12}} \Rightarrow Libor_{3m} \approx 0.1867\%$$

그러기 위해서는 약 0.1867%까지 3개월 Libor가 상승해야 한다.

Problem 4.39

4. (Extra Problem 9ed. 4.30)

A bank can borrow or lend at LIBOR. Suppose that the six-month rate is 5% and the nine-month rate is 6%. The rate that can be locked in for the period between six months and nine months using an FRA is 7%. What arbitrage opportunities are open to the bank? All rates are continuously compounded

Figure 7: Chapter4-39, 9ed.

Solving

먼저, 6개월 및 9개월 금리로부터 $F_{6m,3m}$의 균형가격을 산출하면,

$$F_{6m,3m} = \frac{\frac{9}{12}6\% - \frac{6}{12}5\%}{\frac{3}{12}} = 8\%$$

그러나, 현재 FRA 계약금리는 7%이므로 1%p만큼 저평가되어있다.

따라서,

1. 6개월간 5%로 자금을 빌리고
2. 9개월간 6%에 자금을 빌려주고,
3. FRA 매수계약(변동금리 수취 및 고정금리 지급)을 동일한 명목금액만큼 체결 -> 6개월 후 9개월까지 3개월간 Libor금리로 자금을 빌리면 FRA 계약금리인 7%로 빌리는 효과

9개월간 effective rate는 $\frac{12}{9}(\frac{6}{12}5\% + \frac{3}{12}7\%) \approx 5.6667\%$이므로, 0.333%만큼 무위험 차익을 만들 수 있다.

Chapter5

Problem 5.1

1. Problem 5.1. What is the difference between the forward price and the value of a forward contract?

Figure 8: Chapter5-1

Forward price : 선도가격

선도계약 체결시 계약당사자가 합의한 기초자산의 인도가격을 말하며, 기초자산의 현재가격과 선도계약 만기까지 기초자산을 보유하면서 발생하는 비용과 수익을 통해 이론적으로 산출할 수 있습니다.

Value of a forward contract : 선도계약의 가치

과거에 체결된 선도계약을 현재시점에서 평가할 때, 현재시점에서 동일한 선도계약을 체결한다면 예상되는 선도가격과 과거 체결시점의 선도가격의 차이로부터 산출되는 계약의 가치입니다. 즉, 과거의 선도계약을 현재시점에서 반대거래를 통해 청산하고자 할 때 예상되는 손익과 같습니다.

이를 통해, 현재시점에서 선도계약의 가치를 "0"으로 만드는 가격이 이론적으로 산출되는 선도가격임을 알 수 있습니다.

Problem 5.7

2. Problem 5.7. A 1-year long forward contract on a non-dividend-paying stock is entered into when the stock price is $40 and the risk-free rate of interest is 5% per annum with continuous compounding.

(a) What are the forward price and the initial value of the forward contract?

(b) Six months later, the price of the stock is $45 and the risk-free interest rate is still 5%. What are the forward price and the value of the forward contract?

Figure 9: Chapter5-7

(a) 선도가격 $F = S_0 e^{rT} = 40e^{0.05} = 42.05$, 현재시점의 선도계약의 가치 "0"

(b) 6개월 후의 선도가격 $F = 45e^{0.05\times 0.5} = 46.14$, 이 때 매수선도계약의 가치는 $V_t - F_t = 4.09$

Problem 5.10

3. Problem 5.10. Suppose that the risk-free interest rate is 6% per annum with continuous compounding and that the dividend yield on a stock index is 4% per annum. The index is standing at 400, and the futures price for a contract deliverable in four months is 405. What arbitrage opportunities does this create?

Figure 10: Chapter5-10

무위험이자율 $r_f = 0.06$, 배당률 $d = 0.04$, 현재 지수가 400인 경우의 4개월 뒤 만기가 도래하는 주가지수선물의 이론가격은 $F = 400e^{\frac{4}{12}(0.06-0.04)} = 402.68$입니다.

그러나, 현재 주가지수선물의 시장가격은 405로 다소 고평가된 가격에 거래되고 있습니다. 따라서,

(1) 현재시점에서 주가지수선물을 405에 매도하고

(2) 400만큼 무위험이자율에 자금을 차입하여,

(3) 해당 지수를 복제한 주식포트폴리오를 400에 매수한다면,

4개월 뒤에 선물 만기도래시 주식포트폴리오를 405에 매도할 수 있고, 차입금에 대한 이자비용, 주식포트폴리오의 보유기간 동안 배당수익을 모두 합산하면 $405 - 402.68 = 2.32$만큼의 무위험 차익거래를 할 수 있습니다.

Problem 5.24

4. Problem 5.24. Suppose the current USD/euro exchange rate is 1.2000 dollar per euro. The six-month forward exchange rate is 1.1950. The six-month USD interest rate is 1% per annum continuously compounded. Estimate the six-month euro interest rate.

Figure 11: Chapter5-24

$S_0 = 1.2USD/EUR,\ F_0 = 1.195,\ r_{domestic} = 0.01$이면, 선도가격 수식을 통해 아래와 같이 산출가능합니다.

$$F_0 = S_0 e^{(r^d - r^f)T} \ \Rightarrow\ 1.195 = 1.2e^{(0.01 - r^f)0.5} \ \Rightarrow\ r^f = 0.0184$$

Chapter7 : Swap

Problem 7.1

1. **Problem 7.1.** Companies A and B have been offered the following rates per annum on a \$20 million five-year loan:

	Fixed rate	*Floating rate*
Company A	5.0%	SOFR + 0.1%
Company B	6.4%	SOFR + 0.6%

Company A requires a floating-rate loan; Company B requires a fixed-rate loan. Design a swap that will net a bank, acting as intermediary, 0.1% per annum and that will appear equally attractive to both companies.

Figure 12: Chapter7-1

두 회사를 비교하면 A는 Fixed rate에서 1.4%만큼, Floating rate에서 0.5%만큼 절대우위에 있습니다.

이를 다시이야기하면, A는 Fixed rate에서 비교우위가 있고 B는 Floating rate에서 비교우위가 있다는 뜻과 같습니다.

A가 변동금리로 자금을 조달하고자 한다면 비교우위를 이용해서 고정금리로 먼저 돈을 빌리고, B와 스왑계약을 체결하면 됩니다. (A=매도=고정금리수취,변동금리지급)

이 스왑계약이 SOFR와 Swap rate를 주고 받는 스왑이라면, A가 본인이 직접 변동금리로 조달하는 것보다 이익이 발생하는 swap rate는 4.9%보다 크거나 같아야 합니다.

한편, B가 변동금리로 돈을 빌려서 스왑계약을 맺는 경우 B의 이익이 발생하는 swap rate는 5.8% 보다 작거나 같아야합니다.

즉, Swap rate의 범위는 4.9% ~ 5.8%입니다. 여기서 은행이 양 회사를 중개하고 swap rate의 0.1%를 수수료로 받는다면 Swap rate는 5.0% ~ 5.8%에서 결정될 것 입니다.

예를 들어, Swap rate가 5.4%에서 결정되는 경우,

A는 고정금리 5%로 자금을 조달해서 SOFR를 지급하고 5.3% 고정금리를 수취(0.1%는 중개수수료)한다면 SOFR-0.3%에 자금을 조달하는 효과로 0.4%를 아낄 수 있고,

B는 변동금리 SOFR+0.6%에 자금을 조달해서 5.4%를 지급하고 SOFR를 수취한다면, 6.0%에 자금을 조달하는 효과로, 0.4%를 아낄 수 있습니다.

마지막으로, 비교우위간 차분인 0.9%는 스왑을 이용한 비교우위전략으로 누릴 수 있는 총 효용으로 예시에서는 A가 0.4%, B가 0.4%, 중개기관이 0.1%를 나눠서 누리게 됩니다.

Problem 7.4

2. Problem 7.4. A currency swap has a remaining life of 15 months. It involves exchanging interest at 10% on £20 million for interest at 6% on $30 million once a year. The term structure of risk-free interest rates in the United Kingdom is flat at 7% and the term structure of risk free interest rates in the United States is flat at 4% (both with annual compounding). The current exchange rate (dollars per pound sterling) is 1.5500. What is the value of the swap to the party paying sterling? What is the value of the swap to the party paying dollars?

Figure 13: Chapter7-4

해당 스왑계약은 Fixed-fixed currency swap이며, 현재 스왑계약의 잔존 현금흐름을 살펴보면, 3개월 뒤에 이자교환 + 9개월 뒤에 이자 교환 + 15개월 뒤에 원금과 이자 교환이 남았습니다.

미국을 자국, 영국을 타국으로 보면 $S_0 = 1.55,\ r_f^d = 0.04,\ r_f^f = 0.07$와 같고, 해당 스왑계약의 가치는 두가지 방법으로 평가할 수 있습니다.

(1) 선도환율을 이용한 현금흐름 방식

먼저 3개월/9개월/15개월 뒤의 선도환율을 각각 계산해보겠습니다.

$$f_{3m}=1.55e^{ln\frac{1.04}{1.07}\times\frac{3}{12}},\ f_{9m}=1.55e^{ln\frac{1.04}{1.07}\times\frac{9}{12}},\ f_{15m}=1.55e^{ln\frac{1.04}{1.07}\times\frac{15}{12}}$$

! Interest Compounding method

문제의 이자율은 annual compounding이므로, 연속복리이자율을 사용해서 선도환율을 구하려면 continuous compounding으로 치환해서 이용해야 합니다.

즉, $1+r_{annual}=e^{r_{continuous}}\ \Rightarrow\ ln(1+r_{annual})=r_{continuous}$

이제, 기간별 sterling payer의 현금흐름을 살펴보면 아래와 같습니다.

구분	Cash-Inflow	Cash-Outflow	forward rate	Outflow($)	Net
3month	$1.8m	S2m	1.54	3.08	-1.278
15month	$31.8m	S22m	1.50	32.91	-1.109

마지막으로, Net의 현재가치 -$2.32m가 Sterling payer의 스왑계약 가치가 되며, Dollar payer의 가치는 정확히 반대가 됩니다.

(2) 채권 방식

위의 현금흐름표를 보면, 각 통화의 현금흐름은 채권으로 환산하여 계산할 수 있습니다.

달러채권과 스털링채권의 현재공정가치를 각각 계산하면 아래와 같습니다.

$$Bond_{usd}=\frac{1.8}{(1+0.04)^{\frac{3}{12}}}+\frac{31.8}{(1+0.04)^{\frac{15}{12}}}$$

$$Bond_{sterling}=\frac{2}{(1+0.07)^{\frac{3}{12}}}+\frac{22}{(1+0.07)^{\frac{15}{12}}}$$

Sterling payer의 현금흐름은 달러채권을 사고 스털링채권을 발행하는 것과 동일하므로, 스왑의 가치는 $B_{usd}-1.55\times B_{sterling}=32.061-1.55\times 22.182=-\$2.321m$과 같습니다.

Problem 7.8

3. Problem 7.8. Companies X and Y have been offered the following rates per annum on a $5 million 10-year investment:

	Fixed rate	*Floating rate*
Company X	8.0%	LIBOR
Company Y	8.8%	LIBOR

Company X requires a fixed-rate investment; company Y requires a floating-rate investment. Design a swap that will net a bank, acting as intermediary, 0.2% per annum and will appear equally attractive to X and Y.

Figure 14: Chapter7-8

Problem 7-1과 동일한 풀이방법입니다.

고정금리는 X가 0.8%만큼 절대우위에 있고, 변동금리는 동일하므로 자금을 차입할 때의 비교우위는 X가 고정금리에, Y가 변동금리에 있습니다.

해당 상황은 투자이므로, 비교우위 활용은 X가 변동금리에 투자하고 Y와 스왑계약을 맺는 방법으로 이루어집니다.(X=매도=고정수취,변동지급)

스왑계약의 swap rate는 8%~8.8%에서 이루어질 수 있으며, 수수료 0.2%를 감안하면 8.2%~8.8%에서 이루어질 것 입니다.

예를 들어, 8.5%에서 이루어진다면

X는 Libor에 투자하고 (Libor지급-8.3%수취) 스왑계약을 체결한다면 8.3%인 고정금리에 투자하는 효과가 있어 0.3%의 이익이 발생합니다.

마찬가지로 Y는 고정금리 8.8%에 투자하고 (Libor수취-8.5%지급) 스왑계약을 체결한다면 Libor+0.3%에 투자하는 효과가 있어 0.3%의 이익이 발생합니다.

총 효용인 0.8%는 매수자(Y) 0.3%, 매도자(X) 0.3%, 중개인 0.2%로 나누어 가집니다.

Problem 7.21

4. Problem 7.21. A financial institution has entered into a swap where it agreed to receive quarterly payments at a rate of 2% per annum and pay the SOFR three-month reference rate on a notional principal of $100 million. The swap now has a remaining life of 10 months. Assume the risk-free rates with continuous compounding (calculated from SOFR) for 1 month, 4 months, 7 months, and 10 months are 1.4%, 1.6%, 1.7%, and 1.8%, respectively. Assume also that the continuously compounded risk-free rate observed for the last two months is 1.1%. Estimate the value of the swap.

Figure 15: Chapter7-21

해당 OIS는 OIS rate=2% 및 SOFR를 3개월 주기로 명목금액 $100m에 대해 교환하는 스왑계약입니다.

해당 스왑계약의 가치를 평가하기 위해서는 OIS를 SOFR를 지급하는 FRN과 2%를 지급하는 채권으로 나누어서 각각 평가할 수 있습니다.

SOFR-FRN의 경우, 1개월 뒤 이자를 지급받은 직후에 가격이 Par value로 형성되어야 하는데 이를 이용해서 가치를 평가할 수 있습니다. 1개월 뒤 지급받을 이자는 $0.3m이며 이자지급 직후 SOFR-FRN의 가격은 Par이므로, 현재가치는 $100.3e^{-0.014\times\frac{1}{12}} = 100.1831$

2% 지급 채권의 경우, $0.5\sum_{k=1}^{4} e^{-r_i\times\frac{3k-2}{12}} + 100e^{-r_4\times\frac{10}{12}} = 100.4956$

해당 기관은 스왑매도(고정금리 수취, 변동금리 지급)이므로, FRN을 발행하고 2% 채권을 매수한 것과 같습니다. 따라서 스왑계약의 가치는 아래와 같습니다.

$$Value_{OIS} = Bond_{2\%} - FRN = 100.4956 - 100.1831 = \$0.3124m$$

OIS vs. Libor-IRS

Libor와 달리 Backward-looking 방식으로 산출되는 SOFR average rate를 이용하여 OIS를 체결하는 경우, 향후 변동금리는 현재시점에서 결정되지 않고 이자지급시점으로부터 과거 3개월간 SOFR를 누적하여 산출합니다.
즉, 10개월이 남은 현재 남은 이자지급시기는 1/4/7/10개월까지 4개인데, 1개월 뒤에 받게 될 변동금리는 과거 2개월 및 주어진 1개월간 SOFR 금리를 누적하여 산출됩니다.

$$e^{0.011\times\frac{2}{12}}\times e^{0.014\times\frac{1}{12}} \Rightarrow SOFR_{3month} = \frac{0.022+0.014}{3} = 1.2\%$$

Problem 7.22

5. Problem 7.22. Company A, a British manufacturer, wishes to borrow U.S. dollars at a fixed rate of interest. Company B, a U.S. multinational, wishes to borrow sterling at a fixed rate of interest. They have been quoted the following rates per annum:

	Sterling	*U.S. Dollars*
Company A	11.0%	7.0%
Company B	10.6%	6.2%

(Rates have been adjusted for differential tax effects.) Design a swap that will net a bank, acting as intermediary, 10 basis points per annum and that will produce a gain of 15 basis points per annum for each of the two companies.

Figure 16: Chapter7-22

Fixed-fixed Currency swap

A는 USD payer, USD 6.85% pay / Sterling 11.0% receive

B는 Sterling payer, Sterling 10.45% pay / USD 6.2% receive

And, 중개기관은 USD에서 0.65% 이익 / Sterling에서 0.55% 손실 - 0.1% 차익 발생

Problem 7.extra1

(Extra Problem 1) Under the terms of an interest rate swap, a financial institution has agreed to pay 10% per annum and receive three-month LIBOR in return on a notional principal of \$100 million with payments being exchanged every three months. The swap has a remaining life of 14 months. The average of the bid and offer fixed rates currently being swapped for three-month LIBOR is 12% per annum for all maturities. The three-month LIBOR rate one month ago was 11.8% per annum. All rates are compounded quarterly. What is the value of the swap?

Figure 17: Chapter7-E1

먼저, Libor-IRS의 구조를 Libor만큼 쿠폰을 지급하는 FRN과 Swap rate만큼 쿠폰을 지급하는 채권으로 구분한다면, 스왑계약 개시시점에서 FRN의 가치는 항상 Par value입니다.

개시시점에서 스왑계약의 가치는 0이므로, Swap rate만큼 쿠폰을 지급하는 채권의 가치도 par value가 되어야합니다. 즉, Swap rate는 스왑 개시시점에서 Par rate가 되므로, 이는 동일한 듀레이션을 가지는 채권의 YTM이 됩니다.

현재 bid-offer 중간값이 12%라는 것은 swap rate가 모든 기간에 대해 12%라는 뜻입니다. 즉, 채권의 yield curve가 12%로 flat하다는 의미입니다. 이는 quarterly-compounding 금리로, 연속복리로 표현하면 $(1+0.12/4)^4 = e^r \;\Rightarrow\; r = 0.1182$로 쓸 수 있습니다.

이제, 1개월 전 11.8%에 체결된 스왑은 현재시점의 매수자(Swap rate지급, Libor 수취) 입장에서 평가해보면, 14개월 남은 FRN과 11.8% 쿠폰의 채권을 할인율 0.1182를 적용하여 비교하면 됩니다.

현재 FRN의 가치는 par value를 활용해 구할 수 있습니다. 2개월 후 쿠폰이 지급되고 난 직후 FRN의 가치는 par value가 될 것 입니다. 즉, 2개월 후 FRN의 가치는 100+2.95(쿠폰)입니다.

이를 현재가치로 환산하면 $102.95e^{-0.1182\times\frac{2}{12}} = 100.941$

11.8% 쿠폰의 채권의 현재가치는 아래와 같습니다.

$$2.5(e^{-0.1182\times\frac{2}{12}} + e^{-0.1182\times\frac{5}{12}} + e^{-0.1182\times\frac{8}{12}} + e^{-0.1182\times\frac{11}{12}})$$

$$+102.5e^{-0.1182\times\frac{14}{12}} = 98.678$$

해당 기관은 Fixed rate payer이므로, FRN을 사고 11.8% 쿠폰의 채권을 매도한 것과 같습니다. 즉, 스왑계약의 가치는 $FRN - 11.8\%\ Note = 100.941 - 98.678 = \$2.263m$

> **직관적인 풀이방법**
>
> 한편, Swap rate가 현재 12%라는 것은 현재시점에서 동일한 스왑계약을 체결하면 고정금리가 12%가 된다는 의미입니다.
> 즉, 1개월 전에 10%를 지급하는 스왑계약을 현재시점에서 다시 체결한다면 12%로 체결해야하므로, 2%만큼 더 지급해야한다는 뜻입니다.
> 이러한 초과지급분을 모두 현재가치로 환산하면 현재 스왑의 가치가 될 것 입니다. 다만, 2개월 뒤 있을 최초 이자교환분은 이미 1개월 전에 11.8%로 결정되었으므로 초과지급분은 1.8%입니다.
>
> $$0.45e^{-0.1182\times\frac{2}{12}} + 0.5(e^{-0.1182\times\frac{5}{12}} + e^{-0.1182\times\frac{8}{12}} + e^{-0.1182\times\frac{11}{12}} + e^{-0.1182\times\frac{14}{12}})$$

Problem 7.extra2

(Extra Problem 2) Suppose that the term structure of interest rates is flat in the United States and Australia. The USD interest rate is 7% per annum and the AUD rate is 9% per annum. The current value of the AUD is 0.62 USD. In a swap agreement, a financial institution pays 8% per annum in AUD and receives 4% per annum in USD. The principals in the two currencies are $12 million USD and 20 million AUD. Payments are exchanged every year, with one exchange having just taken place. The swap will last two more years. What is the value of the swap to the financial institution? Assume all interest rates are continuously compounded.

Figure 18: Chapter7-E2

Continuous compounding 금리이므로, 선도환율을 이용하여 현금흐름을 할인하는 방식으로 스왑계약을 평가하겠습니다.

먼저, $S_0 = 0.62,\ r_f^d = 0.07,\ r_f^f = 0.09$ 이고 잔여 현금흐름은 1년뒤 이자교환 및 2년뒤 이자+원금교환 입니다.

선도환율은 다음과 같습니다.

$$f_{1y} = 0.62e^{0.07-0.09},\ f_{2y} = 0.62e^{-0.02\times 2}$$

현금흐름을 정리하면 아래와 같습니다.

구분	Cash-Inflow	Cash-Outflow	forward rate	Outflow($)	Net
1year	$0.48m	AUD 1.6m	0.608	0.972	-0.492
2year	$12.48m	AUD 21.6m	0.596	12.867	-0.387

달러로 표시된 Net의 현재가치 -$0.795m가 스왑계약의 가치가 됩니다.

Chapter10 : Mechanics of Options Markets

Problem 10.3, 10.13

1. Problem 10.3 *An investor sells a European call option with strike price of K and maturity T and buys a put with the same strike price and maturity. Describe the investor's position.*

2. Problem 10.13 *Consider an exchange-traded call option contract to buy 500 shares with a strike price of $40 and maturity in four months. Explain how the terms of the option contract change when there is*

- *a) A 10% stock dividend*
- *b) A 10% cash dividend*
- *c) A 4-for-1 stock split*

(Extra) *Explain carefully the difference between writing a put option and buying a call option*

Figure 19: Chapter10

10.3

만기 T, 행사가격 K의 유럽형 콜옵션을 매도하고 풋옵션을 매수하는 경우 만기 Pay-off를 정리하면 아래와 같습니다.

$$-Max(S_T - K, 0) + Max(K - S_T, 0) = K - S_T$$

즉, 현재시점에서 액면 K의 무이표채에 투자하고 현물을 공매도하는 것과 동일한 포트폴리오입니다.

> Tip
>
> Put-call parity : $c + Ke^{-rT} = p + S_0 \Rightarrow p - c = Ke^{-rT} - S_0$ 이므로, 위와 동일한 결과를 얻을 수 있습니다.

10.13

문제의 옵션은 만기는 4개월, 행사가격 40usd 및 거래승수 500에 대한 유럽형 콜옵션입니다.

(a) 만기 내 주식배당이 발생하는 경우, 행사가격 및 거래승수 변경을 통해 옵션 보유자의 손익을 보전합니다. 10%의 주식배당이 있으므로 콜옵션의 행사가격은 $40 \times \frac{10}{11}$, 거래승수는 $500 \times \frac{11}{10}$으로 조정되고 손익에는 영향이 없습니다.

(b) 만기 내 10%의 현금배당이 있는 경우, 별도의 옵션포지션 조정은 없으며 배당락으로 주가가 10% 만큼 하락할 것 입니다. 따라서 콜옵션의 가치는 하락합니다.

(c) 만기 내 4-for-1 주식분할이 발생하는 경우, 행사가격 및 거래승수 변경을 통해 옵션 보유자의 손익을 보전합니다. 주식 보유자는 3주를 추가로 받게되므로, 행사가격은 $40/4 = 10$, 거래승수는 $500 * 4 = 2000$이 됩니다. 손익에는 영향이 없습니다.

Extra

콜매수와 풋매도는 모두 주가 상승시 포지션의 가치가 상승하는 구조입니다. 그러나 두 포지션은 근본적으로 권리를 가지고 있는지, 권리가 상대방에게 있어 계약이행의무만 있는지에 대한 차이가 있습니다.

콜옵션 매수 포지션은 권리를 가지고 있으며, 이에 따라 옵션 매수시 가격(프리미엄)을 매도자에게 지급하므로 초기비용이 발생합니다. 주식 가격이 상승하면 권리를 행사하여 이익을 실현할 것이고, 주식 가격이 행사가격보다 낮으면 권리를 포기함으로써 손실을 회피할 것 이므로 손실의 최대폭은 매수시 지불한 프리미엄으로 한정됩니다.

풋옵션 매도 포지션은 계약이행의무만 있으며, 이에 따라 옵션 매도시 프리미엄을 받게 되므로 초기수익이 발생합니다. 주식 가격이 상승하면 계약상대방은 권리행사를 포기하므로 프리미엄만큼 확정이익이 발생하고, 주식 가격이 행가가격보다 하락하면 계약상대방이 권리행사를 하게되므로, 손실이 발생합니다. 이익은 프리미엄으로 상한이 있으나 주가 상승에 따른 손실은 하방이 없습니다.

Chapter11 : Properties of Stock Options

Problem 11.5, 18, 23, 24, 25

1. Problem 11.5. *Why is an American call option on a dividend-paying stock is always worth at least as much as its intrinsic value. Is the same true of a European call option? Explain your answer.*

2. Problem 11.18. *Prove the result in equation (11.11)*

3. Problem 11.23. *The prices of European call and put options on a non-dividend-paying stock with an expiration date in 12 months and a strike price of $120 are $20 and $5, respectively. The current stock price is $130. What is the implied risk-free rate?*

4. Problem 11.24. *A European call option and put option on a stock both have a strike price of $20 and an expiration date in three months. Both sell for $3. The risk-free interest rate is 10% per annum, the current stock price is $19, and a $1 dividend is expected in one month. Identify the arbitrage opportunity open to a trader.*

5. Problem 11.25. *Suppose that c1, c2, and c3 are the prices of European call options with strike prices K1, K2, and K3, respectively, where K3 > K2 > K1 and K3 - K2 = K2 - K1. All options have the same maturity. Show that c2 ≤ 0.5(c1 + c3).*

Figure 20: Chapter11

11.5

내재가치(intrinsic value)는 옵션을 현재시점에 권리행사한다면 얻을 수 있는 이익입니다. 따라서, 현재시점을 t 라고 하면, 콜옵션의 내재가치는 $max(S_t - K)$ 입니다.

미국형 옵션은 옵션매수자가 원하는 때에 권리행사를 할 수 있으므로, 즉시 권리행사를 한다면 항상 내재가치만큼의 이익을 실현할 수 있습니다. 따라서 내재가치가 옵션가치의 하한이 됩니다.

한편, 유럽형 옵션은 만기시점에만 권리행사를 할 수 있으므로 기초자산에서 배당과 같은 중도현금흐름이 발생하면 옵션의 시간가치가 (-)로 형성될 수 있고, 이에 따라 내재가치보다 낮게 형성될 수 있습니다.

예를 들어, 다음달 배당이 예정된 주식에 대한 만기 2개월의 콜옵션을 보유하고 있다면 배당락이 발생하기 전에 권리행사를 통해 내재가치만큼 이익을 얻고, 배당수익도 누리는 것이 최적의 선택일 것입니다. 그러나, 유럽형 옵션은 만기까지 권리행사할 수 없으므로 이러한 콜옵션의 가격은 현재 내재가치보다 낮게 형성될 것 입니다.

11.18

?@sec-AmericanParity

11.23

각 파라미터는 $T = 1,\ S_0 = 130,\ K = 120,\ c = 20,\ p = 5$이므로, 풋콜패리티를 이용하면 다음과 같이 정리할 수 있습니다.

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0 \ \Rightarrow\ 20 + 120e^{-r} = 5 + 130 \Rightarrow r = \ln\frac{120}{145} \approx 4.26\%$$

11.24

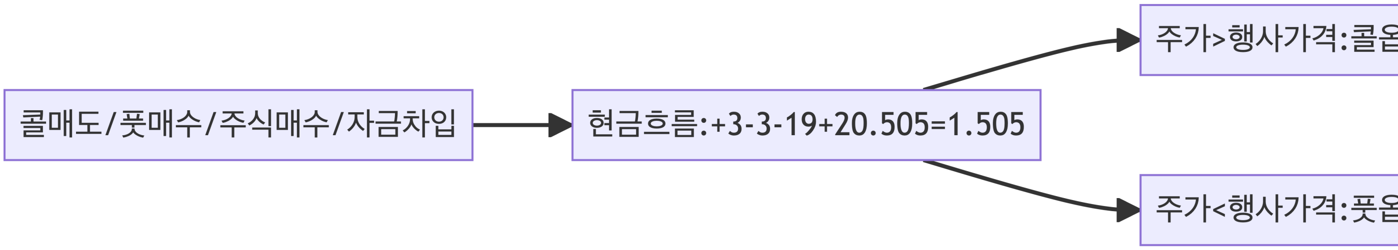
각 파라미터는 $T = \frac{1}{4},\ K = 20,\ r = 0.1,\ S_0 = 19,\ D = 1e^{-0.1/12},\ c = 3,\ p = 3$입니다.

풋콜패리티를 이용하여 콜옵션의 가치를 평가해보면,

$$c + Ke^{-rT} + D = p + S_0 \ \Rightarrow\ c + 20e^{-0.025} + e^{-0.1/12} = 3 + 19 \ \Rightarrow\ c \approx 1.495$$

그러나, 현재 콜옵션의 시장가격이 3이므로 고평가되어있는 상태입니다.

따라서, (1) 콜옵션을 매도하고, 이와 동시에 (2) 풋옵션과 주식을 매수, 행사가격과 배당의 현재가치 $(Ke^{-rT} + D)$만큼의 무이표채권을 발행(자금을 차입)한다면, 현재시점에 1.505만큼 무위험차익을 얻을 수 있습니다.



즉, 현재시점에 1.505만큼 수익이 발생하고 만기시점의 pay-off는 0이 됩니다.

11.25

만기 Payoff를 살펴보면 확인 가능합니다.