۱.

الف) $x(t) = |t-2| \cdot u(t-2) - u(t-12)$

این نمودار شامل عملیات روی دامنه و زمان است. بنابراین داریم:

- عملیات ضرب $|t-2|$: یک عدد همواره نا منفی در تابع ضرب شده است. با اینکه عدد منفی نبوده و باعث انعکاس نسبت به محور t نمی شود، باز هم ممکن است حالت های زیر را برای نمودار ایجاد کند:

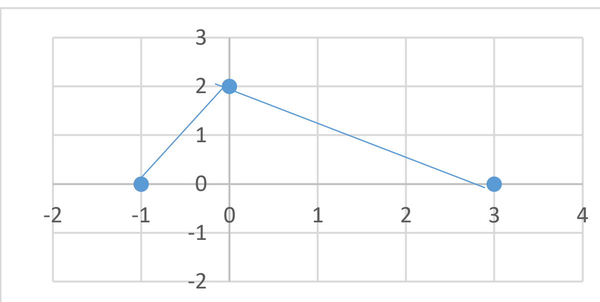
$$\begin{cases} |t-2| = 0 \Rightarrow 0 \\ 0 < |t-2| < 1 \Rightarrow \text{فشرده} \\ 1 < |t-2| \Rightarrow \text{گسترده} \end{cases}$$

- عملیات ضرب -1: انعکاس نسبت به محور t

- عملیات $-a$ و $a > 0$: شیفت به راست به اندازه a

مثال:

نمودار $u(t)$ را به این صورت در نظر می گیریم:



- محاسبه نمودار $|t-2| \cdot u(t-2)$:

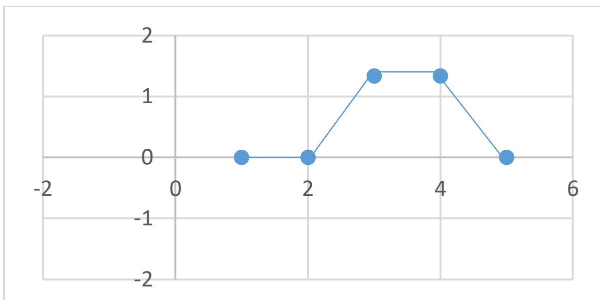
در $u(t)$ نقاط زیر را داریم:

$$(t,u) = \begin{cases} (-1,0) \\ (0\,,2) \\ \left(1\,,\frac{4}{3}\right) \\ \left(2\,,\frac{2}{3}\right) \\ (3\,,0) \end{cases}$$

پس خواهیم داشت:

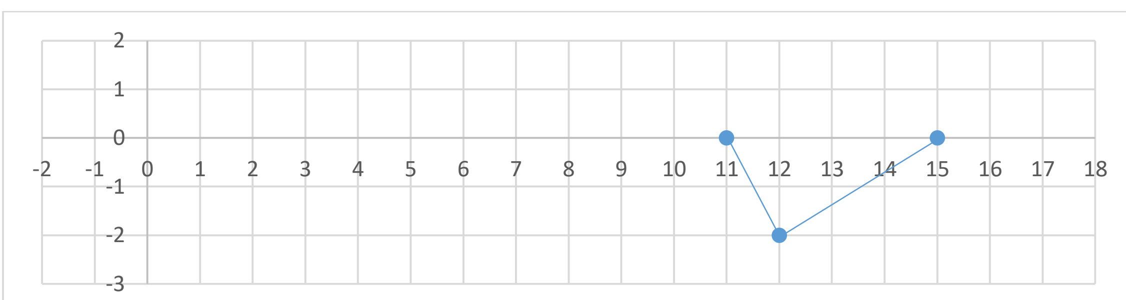
$$|t-2|\cdot u(t-2)=\begin{cases} t-2=-1 \Rightarrow t=1 \Rightarrow (1,0) \\ t-2=\ \ 0 \Rightarrow t=2 \Rightarrow (2,0) \\ t-2=\ \ 1 \Rightarrow t=3 \Rightarrow \left(3,\frac{4}{3}\right) \\ t-2=\ \ 2 \Rightarrow t=4 \Rightarrow \left(4,\frac{4}{3}\right) \\ t-2=\ \ 3 \Rightarrow t=5 \Rightarrow (5,0) \end{cases}$$

پس در نهایت نمودار به صورت زیر خواهد بود:



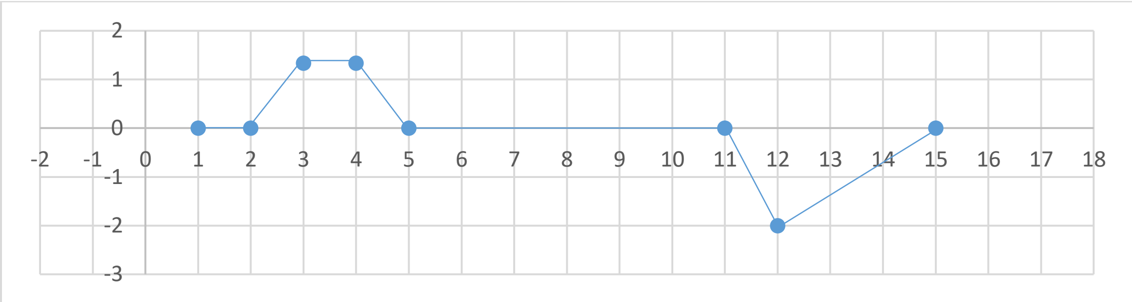
- محاسبه نمودار $-u(t-12)$:

برای محاسبه کافیست نمودار $u(t)$ را ۱۲ واحد به راست شیفت دهیم و نسبت به محور t قرینه کنیم:



- محاسبه نمودار $x(t) = |t-2| \cdot u(t-2) - u(t-12)$:

کافیست دو نمودار بالا را با هم جمع کنیم:



ب) $x(t) = u(-t+2) + u(3-t) + u(3)$

این نمودار شامل عملیات روی دامنه و زمان است. بنابراین داریم:

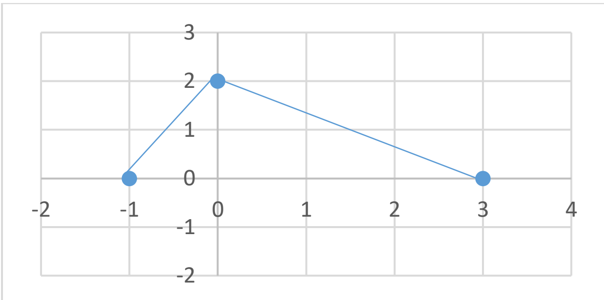
- عملیات $+a$ و $a > 0$: شیفت به چپ به اندازه a

- عملیات وارون سازی زمانی: معکوس کردن نمودار نسبت به y

توجه: ابتدا عملیات وارون سازی و سپس شیفت را انجام می دهیم.

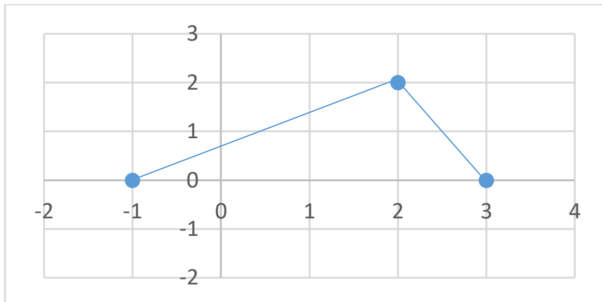
مثال:

نمودار $u(t)$ را به صورت زیر در نظر می گیریم:



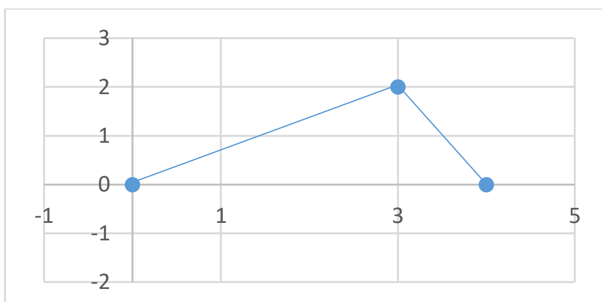
- محاسبه نمودار $u(-t+2)$:

کافیست نسبت به محور u معکوس کرده و ۲ واحد به چپ شیفت دهیم:



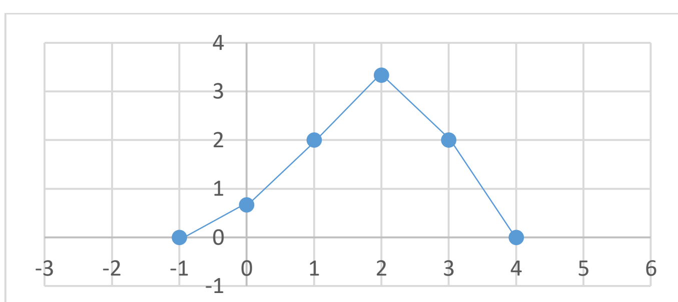
- محاسبه نمودار $u(3-t)$:

کافیست نسبت به محور u معکوس کرده و ۳ واحد به چپ شیفت دهیم:



- محاسبه نمودار $x(t) = u(-t+2) + u(3-t) + u(3)$:

کافیست دو نمودار بالا را به همراه نمودار $u(3)$ که نقطه $(3, 0)$ است با هم جمع کنیم:



۲.

برای بررسی ارتوگونال بودن مجموعه $\Psi = \{cos\,kt\,; k \in z\}$ ضرب داخلی آن را محاسبه می کنیم:

$$\langle cos\,kt\,, cos\,lt\rangle = \int_T cos\,kt\,(cos\,lt)^*\,dt\; = \int_T cos\,kt\,.\,cos\,lt\,dt$$

با توجه به اینکه انتگرال کسینوس در یک دوره تناوب صفر است بنابراین ضرب داخلی صفر خواهد بود و مجموعه متعامد است.

۳.

بسط مکلورن به صورت زیر تعریف می شود:

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots + a_k t^k + \cdots$$

که برای محاسبه ضرایب فرمول زیر را داریم:

$$a_k = \frac{x^{(k)}(0)}{k!}$$

بنابراین داریم:

$$a_0 = \frac{x^{(0)}(0)}{0!} = \frac{\cos(\omega \times 0 + \varphi)}{1} = \cos(\varphi)$$

$$a_1 = \frac{x^{(1)}(0)}{1!} = \frac{-\omega\sin(\omega \times 0 + \varphi)}{1} = -\omega\sin(\varphi)$$

$$a_2 = \frac{x^{(2)}(0)}{2!} = \frac{-\omega^2\cos(\omega \times 0 + \varphi)}{2} = -\omega^2\cos(\varphi)$$

$$a_3 = \frac{x^{(3)}(0)}{3!} = \frac{-\omega^3\sin(\omega \times 0 + \varphi)}{6} = -\omega^3\sin(\varphi)$$

و بقیه ضرایب به همین صورت محاسبه می شوند.

۴.

با توجه به نمودار، تابع $\delta_\Delta(t)$ به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\delta_\Delta(t) = -\frac{2}{\Delta^2}t + \frac{2}{\Delta}$$

پس تابع $\delta_\Delta(t-k\Delta)$ به صورت زیر و با استفاده از تابع بالا محاسبه می شود:

$$\delta_\Delta(t-k\Delta) = -\frac{2}{\Delta^2}(t-k\Delta) + \frac{2}{\Delta} = -\frac{2}{\Delta^2}t + \frac{2k+2}{\Delta}$$

حال برای بررسی ارتوگونال بودن مجموعه $\Psi = \{\delta_\Delta(t-k\Delta); k \in z\}$ ابتدا ضرب داخلی آن را محاسبه می کنیم:

$$\langle \delta_\Delta(t-k\Delta), \delta_\Delta(t-l\Delta)\rangle = \left\langle -\frac{2}{\Delta^2}t + \frac{2k+2}{\Delta}, -\frac{2}{\Delta^2}t + \frac{2l+2}{\Delta} \right\rangle =$$

$$\int_T -\frac{2}{\Delta^2}t + \frac{2k+2}{\Delta}\left(-\frac{2}{\Delta^2}t + \frac{2l+2}{\Delta}\right)^* dt$$

با توجه به اینکه $-\frac{2}{\Delta^2}t + \frac{2l+2}{\Delta}$ مقدار حقیقی دارد، بنابراین مزدوج آن با خودش برابر است:

$$\int_T -\frac{2}{\Delta^2}t + \frac{2k+2}{\Delta}\left(-\frac{2}{\Delta^2}t + \frac{2l+2}{\Delta}\right) dt$$

$$= \int_T \frac{4}{\Delta^4}t^2 - \frac{2}{\Delta^2}\left(\frac{2k+2}{\Delta} + \frac{2l+2}{\Delta}\right)t + \left(\frac{2k+2}{\Delta}\right)\left(\frac{2l+2}{\Delta}\right) dt$$

$$= \int_T \frac{4}{\Delta^4}t^2 - \frac{2}{\Delta^2}\left(\frac{2k+2l+2}{\Delta}\right)t + \left(\frac{(2k+2)(2l+2)}{\Delta^2}\right) dt$$

$$= \frac{4}{3\Delta^4}t^3\Big|_T - \frac{1}{\Delta^2}\left(\frac{2k+2l+2}{\Delta}\right)t^2\Big|_T - \left(\frac{(2k+2)(2l+2)}{\Delta^2}\right)t\Big|_T \neq 0$$

بنابراین مجموعه متعامد نیست.

حال برای بررسی انرژی مقدار ضرب داخلی آن را در خودش محاسبه می کنیم:

$$\langle \delta_\Delta(t-k\Delta), \delta_\Delta(t-k\Delta)\rangle = \left\langle -\frac{2}{\Delta^2}t + \frac{2k+2}{\Delta}, -\frac{2}{\Delta^2}t + \frac{2k+2}{\Delta}\right\rangle =$$

$$\int_T -\frac{2}{\Delta^2}t + \frac{2k+2}{\Delta}\left(-\frac{2}{\Delta^2}t + \frac{2k+2}{\Delta}\right)^* dt$$

با توجه به اینکه $-\frac{2}{\Delta^2}t + \frac{2k+2}{\Delta}$ مقدار حقیقی دارد، بنابراین مزدوج آن با خودش برابر است:

$$\int_T \left(-\frac{2}{\Delta^2}t + \frac{2k+2}{\Delta}\right)^2 dt$$

$$= \int_T \frac{4}{\Delta^4}t^2 - \frac{4}{\Delta^2}\left(\frac{2k+2}{\Delta}\right)t + \left(\frac{2k+2}{\Delta}\right)^2 dt$$

$$= \int_T \frac{4}{\Delta^4}t^2 - \frac{8(k+1)}{\Delta^3}t + \frac{4(k+1)^2}{\Delta^2} dt$$

$$= \frac{4}{3\Delta^4}t^3\Big|_T - \frac{4(k+1)}{\Delta^3}t^2\Big|_T + \frac{4(k+1)^2}{\Delta^2}t\Big|_T$$

$$= \frac{4}{\Delta^2}\left(\frac{T^3}{\Delta^2} - \frac{(k+1)T^2}{\Delta} + (k+1)^2T\right)$$

$$\Rightarrow E_{\varphi_k} = \frac{4}{\Delta^2}\left(\frac{T^3}{\Delta^2} - \frac{(k+1)T^2}{\Delta} + (k+1)^2T\right)$$