الف.

اگر فراوانی را نرمال کنیم، به تابع چگالی که یک تابع با انتگرال ۱ است، می رسیم. این تابع انواع با پارامتر و بدون پارامتر دارد.

- با پارامتر: برای محاسبه تابع چگالی، از تابع گوسی استفاده می کنیم. در این تابع از میانگین (μ) و انحراف معیار (δ) استفاده می کنیم. برای محاسبه انحراف معیار از فرمول $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}{n}$ استفاده می کنیم و ریشه درجه دو آن یعنی همان انحراف معیار، میزان پراکندگی داده ها را نشان می دهد. (مقدار کمتر، تابع بیشتر نزدیک مقدار μ مقدار داشته و کمتر کشیده است.) همچنین $(x-\mu)^2$ مقدار فاصله قله را نشان می دهد.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- بدون پارامتر: اگر توابع داده شده به صورت گوسی نباشند، از $\delta_\Delta(t)$ استفاده می کنیم. پس چگالی به صورت زیر محاسبه می شود.

$$f(x) = \frac{\delta_\Delta(x-x_1) + \delta_\Delta(x-x_2) + \cdots + \delta_\Delta(x-x_n)}{n}$$

بنابراین در حالت پیوسته می توان به جای $\delta_\Delta(t)$ از کرنل گوسی استفاده کرد که تابع با توجه به اینکه باید انتگرال برابر ۱ داشته باشد به صورت زیر آپدیت می شود:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma n}} \sum_{k=1}^{n} e^{-\frac{(x-\mu_k)^2}{2\sigma^2}}$$

حال با توجه به اینکه در صورت سوال گفته شده مقادیر در فضای گسسته هستند، از تابع چگالی با پارامتر و حالت اول بیان شده استفاده می کنیم و با بدست آوردن مقادیر مورد نظر، مقدار فراوانی نرمالایز شده را به دست می آوریم.

ب.

آنتروپی به معنای بی نظمی بوده و تابعی است که مقدار آن را محاسبه می کند. طبق نحوه محاسبه این تابع، هرچه هرج و مرج بیشتر باشد، تابع مقدار بیشتری را بر می گرداند. برای محاسبه تابع ابتدا خبر را به صورت $I = -\log f(x)$ تعریف کرده و میانگین آن را در یک بازه حساب می کنیم.

پس در نهایت به فرمول های زیر با توجه به فضای گسسته یا پیوسته می رسیم:

$$E\{-\log f(x)\} = -\int f(x)\log f(x)\ dx$$

$$E\{-\log f(x)\} = -\sum f(x)\log f(x)$$

ج.

با توجه به فرمول و جایگذاری مناسب داریم:

$$E = -\sum_{k=-5}^{5} f(k)\log f(k)$$

$$= -(f(-5)\log f(-5) + f(-4)\log f(-4) + f(-3)\log f(-3) + f(-2)\log f(-2)$$
$$+ f(-1)\log f(-1) + f(0)\log f(0) + f(1)\log f(1) + f(2)\log f(2) + f(3)\log f(3)$$
$$+ f(4)\log f(4) + f(5)\log f(5))$$
$$= -(100\log 100 + 70\log 70 + 120\log 120 + 45\log 45 + 92\log 92 + 11\log 11 + 0\log 0$$
$$+ 25\log 25 + 42\log 42 + 1\log 1 + 190\log 190)$$
$$= -(200 + 129.15 + 249.50 + 74.39 + 180.67 + 11.45 + invalid(0) + 34.95 + 68.17$$
$$+ 0 + 432.96) = 1381.24$$