.۱

$$\int x(t).y^*(t) = \langle x(t), y(t)\rangle = \langle \sum \beta_k \Psi_k , \sum \alpha_l \Psi_l \rangle$$

$$\xRightarrow{\langle \sum \alpha_n x_n, y\rangle = \sum \alpha_n \langle x_n, y\rangle} \sum \beta_k \langle \Psi_k, \sum \alpha_l \Psi_l \rangle$$

$$\xRightarrow{\text{خاصیت جابجایی}} \sum \beta_k \overline{\sum \alpha_l} \langle \Psi_k, \Psi_l \rangle \begin{cases} k \neq l \xRightarrow{\Psi \text{ is orthogonal and } \langle \Psi_k(t), \Psi_l(t)\rangle = 0} 0 \\ k = l \xRightarrow{\langle \varphi(t), \varphi(t)\rangle = E_\varphi} \sum \beta_k \sum \alpha_k . E_{\Psi_k} \end{cases}$$

.۳

$$\Psi = \{e^{jk\omega_0 t}; k \in z\}$$

برای بررسی تعامد لازم است تا ضرب داخلی $e^{jk\omega_0 t}$ و $e^{jl\omega_0 t}$ را بدست آوریم. اگر این مقدار برابر با صفر شد پس این مجموعه، یک مجموعه متعامد است:

$$\langle e^{jk\omega_0 t}, e^{jl\omega_0 t} \rangle = \int_T e^{jk\omega_0 t}\left(e^{jl\omega_0 t}\right)^* dt = \int_T e^{jk\omega_0 t} e^{-jl\omega_0 t} dt$$

$$= \int_T e^{j\omega_0 t(k-l)} \ dt = \int_T \cos(k-l)\,\omega_0 t + j \sin(k-1)\,\omega_0 t \ dt$$

$$= \int_T \cos(k-l)\,\omega_0 t \, dt + j \int_T \sin(k-1)\omega_0 t \ dt$$

با توجه به اینکه انتگرال سینوس و کسینوس در یک تناوب برابر صفر است، بنابراین نتیجه کلی صفر بوده و مجموعه ارتوگونال یا متعامد است.

حال انرژی مجموعه را با محاسبه ضرب داخلی آن در خودش بدست می آوریم:

$$E_\Psi = \int_T \cos \omega_0 t \, dt + j \int_T \sin \omega_0 t \ dt = \int_T 1 \, dt = t|_0^T = T$$

حال باید با استفاده از رابطه زیر ضرایب را محاسبه کنیم:

$$\alpha_k = \frac{1}{E_{\varphi_k}} \int_T x(t).\varphi_k^*(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\,dt$$

با توجه به نمودار $x(t)$ دوره تناوب ۳ بوده و فرمول ضرایب را در یک تناوب بدست می آوریم:

$$\alpha_k = \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{3}\int_0^1 2\, e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{2}{-3jk\omega_0}\, e^{-jk\omega_0 t}\Big|_0^1$$

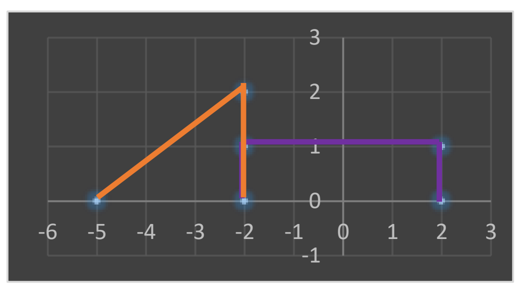
$$= \frac{2\,(e^{-jk\omega_0}-1)}{-3jk\omega_0} \Rightarrow x(t) = \sum \frac{2\,(e^{-jk\omega_0}-1)}{-3jk\omega_0}\, e^{jk\omega_0 t}$$

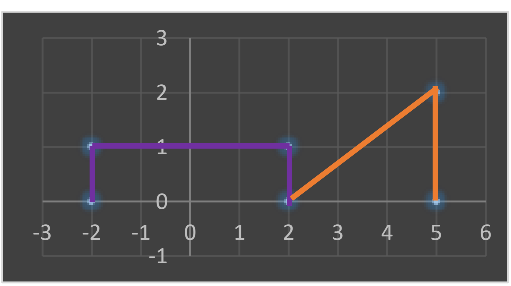
۴.

با توجه به خاصیت جابجایی می توانیم هر کدام از نمودار ها را به صورت دلخواه انتخاب کرده و شیفت زمانی دهیم. بنابراین نمودار $\mathrm{h(t)}$ را برای شیفت دادن انتخاب می کنیم.

برای حل این سوال از روش حل گرافیکی استفاده می کنیم. با توجه به اینکه سیگنال ها ممکن است با هم اصلا تداخل نداشته باشند یا در بخشی یا به صورت کامل متداخل باشند، بنابراین حالت های زیر را در نظر می گیریم:

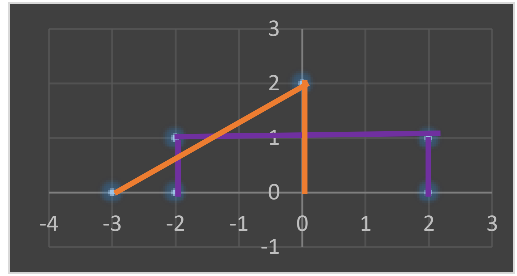
۱. اصلا تداخل نداشته باشند:

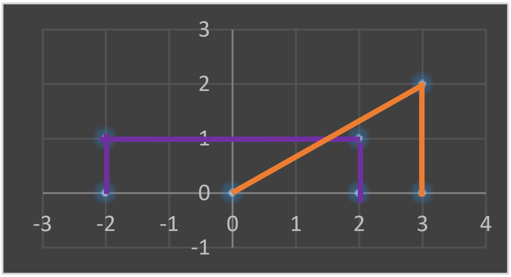




در این حالت حاصل کانولوشن صفر خواهد بود.

۲. بخشی از آنها تداخل داشته باشند:

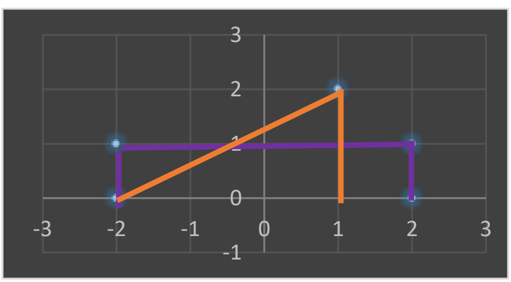




$$0 \le \mathrm{t} \le 2 \Rightarrow \int_0^t 1 \times \frac{2}{3}(t-\tau)d\tau = \frac{2t}{3} \times -\frac{t^2}{3}\bigg|_0^t = \frac{2t}{3} \times -\left(\frac{t^2}{3} - 0\right) = \frac{-2t^3}{9}$$

$$-5 \le \mathrm{t} \le -3 \Rightarrow \int_t^{-3} 1 \times \frac{2}{3}(t-\tau)d\tau = \frac{2t}{3} \times -\frac{t^2}{3}\bigg|_t^{-3} = \frac{2t}{3} \times -\left(\frac{9}{3} - \frac{t^2}{3}\right) = \frac{2t^3}{9} - 2t$$

۳. تمام h در x قرار گیرد:



$$-2 \le \mathrm{t} \le -1 \Rightarrow \int_{-2}^{-1} 1 \times \frac{2}{3}(t-\tau)d\tau = \frac{2t}{3} \times -\frac{t^2}{3}\bigg|_{-2}^{-1} = \frac{2t}{3} \times -\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3}\right) = \frac{2t}{3}$$

جواب کلی:

$$x(t) * h(t) = \begin{cases} t \ge 2 \ \Rightarrow 0 \\ 0 \le t < 2 \ \Rightarrow \dfrac{-2t^3}{9} \\ -3 < t < 0 \ \Rightarrow \dfrac{2t}{3} \\ -5 < t \le -3 \ \Rightarrow \dfrac{2t^3}{9} - 2t \\ t \le 5 \ \Rightarrow 0 \end{cases}$$

.۵

$$x(t) = 2y(t) + y'(t) \Rightarrow \delta(t) = 2h(t) + h'(t) \xRightarrow{t>0 \Rightarrow \delta(t)=0} 2 + S = 0$$
$$\Rightarrow S = -2 \Rightarrow h(t) = \alpha_1 e^{-2t}$$

.۶

$$y[n] - \frac{1}{2}\, y[n-1] = x[n] \Rightarrow z^n - \frac{1}{2}\, z^{n-1} = 0 \Rightarrow z^n \left(1 - \frac{1}{2}\, z^{-1}\right) \xRightarrow{\frac{2z-1}{2z}} z = \frac{1}{2}$$
$$\xRightarrow{h(n)=Az^n} h(n) = A\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

.۷

$$y[n] - \frac{1}{6}\, y[n-1] - \frac{1}{6}\, y[n-2] = x[n] \Rightarrow z^n - \frac{1}{6}\, z^{n-1} - \frac{1}{6}\, z^{n-2} = 0$$
$$\Rightarrow z^n \left(1 - \frac{1}{6}\, z^{-1} - \frac{1}{6}\, z^{-2}\right) \xRightarrow{\frac{6z^2-z-1}{6z^2} \Rightarrow \Delta = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{12}} z = \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}$$
$$\xRightarrow{h(n)=A{z_1}^n + B{z_2}^n} h(n) = A\left(\frac{1}{2}\right)^n + B\left(\frac{-1}{3}\right)^n$$

.۸

$$y[n] + \frac{1}{2}(\, y[n-1] + y[n+1]) = x[n] \Rightarrow z^n + \frac{1}{2}\left(z^{n-1} + \frac{1}{2}\, z^{n+1}\right) = 0$$

$$\Rightarrow z^n \left(1 + \frac{1}{2}\, z^{-1} + \frac{1}{2}\, z^{1}\right) \xRightarrow{\frac{z^2+2z+1}{2z}} z = -1 \xRightarrow{h(n)=Az^n} h(n) = A(-1)^n$$

بررسی خواص سیستم:

- علیت یا Causality: چون خروجی به آینده ارتباطی ندارد بنابراین سیستم یک سیستم علی است.

- پایداری یا Stability: $\sum_0^{+\infty} |A(-1)^n| = A + A + A + \cdots = \infty$ (سیستم گسسته)

بنابراین چون کران ندارد پس پایدار نیست.

۹.

$$y''(t) + 2y'(t) = x'(t) + 2x(t) \Rightarrow h''(t) + 2h'(t) = \delta'(t) + 2\delta(t)$$
$$\Rightarrow\ h''_a(t) + 2h'_a(t) = \delta(t) \Rightarrow\ S^2 + S = 0\ \Rightarrow S = 0, S = -2$$
$$\Rightarrow h_a(t) = \alpha_1 e^{0t} + \alpha_2 e^{-2t} = \alpha_1 + \alpha_2 e^{-2t}$$

چون سیستم خطی است بنابراین داریم:

$$\delta'(t) \to h_a{}'(t)\ , 2\delta(t) \to 2h_a(t)$$

پس برای جواب کلی داریم:

$$h(t) = h_a{}'(t) + 2h_a(t) = 0 - 2\alpha_2 e^{-2t} + 2\alpha_1 + 2\alpha_2 e^{-2t} = 2\alpha_1 = \alpha$$

بررسی خواص سیستم:

- علیت یا Causality: چون خروجی عدد ثابت است و به آینده ارتباطی ندارد بنابراین سیستم یک سیستم علی است.

- پایداری یا Stability:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, u(t)\, dt = \int_0^{+\infty} |h(t)|\, dt = \int_0^{+\infty} \alpha\, dt = \alpha t|_0^{+\infty} = \infty - 0 = \infty$$

با توجه به اینکه کران ندارد پس پایدار هم نیست.

- بی حافظه یا memory less: چون سیستم به فرم $k\delta(\lambda)$ نیست و برای همه مقادیر λ مقدار α را دارد پس دارای حافظه است.