.۱

الف)

$$P(t) = a_k(t-n_k)^3 + b_k(t-n_k)^2 + c_k(t-n_k) + d_k$$
$$P(n_k) = a_k(n_k-n_k)^3 + b_k(n_k-n_k)^2 + c_k(n_k-n_k) + d_k = d_k = y_k$$

ب)

$$P(t) = a_k(t-n_k)^3 + b_k(t-n_k)^2 + c_k(t-n_k) + d_k$$
$$P'(t) = 3a_k(t-n_k)^2 + 2b_k(t-n_k) + c_k$$
$$p''(t) = 6a_k(t-n_k) + 2b_k$$

می دانیم که $D_k = P_k''(n_k)$ و $E_k = P_k''(n_{k+1})$ پس داریم:

$$D_k = P_k''(n_k) = 6a_k(n_k-n_k) + 2b_k = 2b_k$$
$$E_k = P_k''(n_{k+1}) = 6a_k(n_{k+1}-n_k) + 2b_k = 6a_k(n_{k+1}-n_k) + D_k$$

پس در نهایت داریم:

$$a_k = \frac{E_k - D_k}{6(n_{k+1}-n_k)}$$
$$b_k = \frac{D_k}{2}$$

۲.

الف)

$$E_\infty = \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{4jt+\frac{\pi j}{2}}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{4jt}e^{\frac{\pi j}{2}}\,dt$$

چون $e^{\frac{\pi j}{2}}$ یک عدد است می توان آن را از زیر انتگرال بیرون آورد:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{4jt}e^{\frac{\pi j}{2}}\,dt = e^{\frac{\pi j}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{4jt}\,dt$$

با توجه به $\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}$ داریم:

$$e^{\frac{\pi j}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{4jt}\,dt = e^{\frac{\pi j}{2}}\left.\frac{e^{4jt}}{4j}\right|_{-\infty}^{\infty} = e^{\frac{\pi j}{2}}\frac{e^{4j\infty}}{4j} - e^{\frac{\pi j}{2}}\frac{e^{-4j\infty}}{4j} = \infty - 0 = \infty$$

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2\,dt = \int_{-T}^{T}|x(t)|^2\,dt = \int_{-T}^{T} e^{4jt+\frac{\pi j}{2}}\,dt = \int_{-T}^{T} e^{4jt}e^{\frac{\pi j}{2}}\,dt$$

$$= e^{\frac{\pi j}{2}}\int_{-T}^{T} e^{4jt}\,dt = e^{\frac{\pi j}{2}}\left.\frac{e^{4jt}}{4j}\right|_{-T}^{T} = e^{\frac{\pi j}{2}}\frac{e^{4Tj}}{4j} - e^{\frac{\pi j}{2}}\frac{e^{-4Tj}}{4j} = \frac{e^{\frac{\pi j}{2}}}{4j}\left(e^{4Tj} - e^{-4Tj}\right)$$

چون $e^{j\omega_0 tk} = \cos k\omega_0 t + j\sin k\omega_0 t$ پس داریم:

$$\frac{e^{\frac{\pi j}{2}}}{4j}\left(e^{4Tj} - e^{-4Tj}\right) = \frac{\cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}}{4j}\left(\cos 4T + j\sin 4T - \cos -4T - j\sin -4T\right)$$

حال با توجه به اینکه $\cos -a = \cos a$ و $\sin -a = -\sin a$ داریم:

$$\frac{0 + j\times 1}{4j}\left(\cos 4T + j\sin 4T - \cos 4T + j\sin 4T\right) = \frac{2j\sin 4T}{4}$$

ب)

$$E_\infty = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}|x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\cos\frac{\pi}{4}n\right|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos\frac{\pi}{4}n^{2} = \infty$$

$$P_\infty = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}|x[n]|^2 = \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\left|\cos\frac{\pi}{4}n\right|^2 = \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\cos\frac{\pi}{4}n^{2} = \frac{N}{2N+1} = \frac{1}{2}$$

.۳

برای بررسی ارتوگونال یا ارتونورمال بودن مجموعه $\Psi = \{\cos kt\cdot\sin kt\,;\,k\in z\}$ ابتدا ضرب داخلی آن را محاسبه می کنیم: ($\cos kt\cdot\sin kt = \frac{1}{2}\sin 2\,kt$)

$$\left\langle\frac{1}{2}\sin 2kt\,,\frac{1}{2}\sin 2lt\right\rangle = \int_T\frac{1}{2}\sin 2kt\left(\frac{1}{2}\sin 2lt\right)^{*}dt = \frac{1}{4}\int_T\sin 2kt\,.\sin 2lt\,dt$$

با توجه به $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$ داریم:

$$\frac{1}{4}\int_T\sin 2kt\,.\sin 2lt\,dt = \frac{1}{4}\int_T\frac{1}{2}[\cos(2kt-2lt)-\cos(2kt+2lt)]$$

$$= \frac{1}{8}\int_T\cos(2kt-2lt) - \frac{1}{8}\int_T\cos(2kt+2lt)$$

می دانیم که انتگرال سینوس و کسینوس در یک دوره تناوب صفر است بنابراین ضرب داخلی صفر خواهد بود.

حال برای تشخیص ارتوگونال یا ارتونورمال بودن مجموعه نیاز است تا انرژی آن را نیز محاسبه کنیم:

$$E = \left\langle\frac{1}{2}\sin 2kt\,,\frac{1}{2}\sin 2kt\right\rangle = \int_T\frac{1}{2}\sin 2kt\left(\frac{1}{2}\sin 2kt\right)^{*}dt = \frac{1}{4}\int_T\sin 2kt^2\,dt$$

با توجه به اینکه انتگرال سینوس و کسینوس در یک دوره تناوب صفر است بنابراین انرژی نیز صفر خواهد بود و برابر با ۱ که شرط ارتونورمال بودن است نمی باشد. پس نتیجه می گیریم که مجموعه ارتوگونال است.