۱.

۱. محاسبه همگرایی:

$$\int_{-\infty}^{t} e^{-at}\, u(t)\, e^{-\sigma t}\, dt = \int_{0}^{t} e^{-at}\, e^{-\sigma t}\, dt \Rightarrow -a-\sigma < 0 \Rightarrow \sigma > -a$$

$$\Rightarrow ROC: Re\{s\} > -a$$

۲. محاسبه انتگرال:

$$Y(t) = \int_{0}^{t} e^{-at}\, e^{-st}\, dt = \int_{0}^{t} e^{-(a+s)t}\, dt = \frac{1}{s+a}$$

۲.

الف)

$$\frac{1}{(s+2)(s-1)} = \frac{\alpha_1}{(s+2)} + \frac{\alpha_2}{(s-1)} \Rightarrow (\alpha_1+\alpha_2)s + (-\alpha_1+2\alpha_2) = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{-1}{3} \\ \alpha_2 = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{\frac{-1}{3}}{(s+2)} + \frac{\frac{1}{3}}{(s-1)} = \frac{-1}{3} e^{-2t}\, u(t) + \frac{1}{3} e^{t}\, u(t)$$

ب)

$$H_{new}(s) = \frac{H_{old}(s)}{1+G(s)\, H_{old}(s)} = \frac{\frac{1}{(s+2)(s-1)}}{1+G(s)\, \frac{1}{(s+2)(s-1)}}$$

$$= \frac{1}{(s+2)(s-1)+G(s)} = \frac{1}{s^2+s-2+G(s)}$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(G(s)-2)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9-4G(s)}}{2}$$

$$\Rightarrow 4G(s) > 9 \Rightarrow G(s) > 2.25$$

تبدیل معکوس لاپلاس $\frac{s^3+1}{s^2+3s+2}$:

چون درجه صورت از مخرج بیشتر است، صورت را بر مخرج تقسیم می کنیم. در این تقسیم خارج قسمت $s-3$ و باقی مانده $11s+7$ محاسبه می شود.

$$\frac{s^3+1}{s^2+3s+2} = s-3+\frac{11s+7}{s^2+3s+2} \Rightarrow s-3 = \delta'(t)-3\delta(t)$$

$$\frac{11s+7}{s^2+3s+2} = \frac{\alpha_1}{(s+2)}+\frac{\alpha_2}{(s+1)} \Rightarrow (\alpha_1+\alpha_2)s+(\alpha_1+2\alpha_2) = 11s+7$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha_1 = 15 \\ \alpha_2 = -4\end{cases} \Rightarrow \frac{15}{(s+2)}+\frac{-4}{(s+1)} = 15e^{-2t}\,u(t)-4e^{-t}\,u(t)$$

۳.

الف)

$$H(z) = \frac{z^{-1}+2z}{z^2+3z+2} \Rightarrow \frac{H(z)}{z} = \frac{z^{-2}+2}{z^2+3z+2} = \frac{z^{-2}}{z^2+3z+2}+\frac{2}{z^2+3z+2}$$

$$= z^{-2}\frac{1}{(z+2)(z+1)}+\frac{2}{(z+2)(z+1)}$$

$$\Rightarrow H(z) = z^{-2}\frac{z}{(z+2)(z+1)}+\frac{2z}{(z+2)(z+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{z}{(z+2)(z+1)} = \frac{\alpha_1 z}{(z+2)}+\frac{\alpha_2 z}{(z+1)} \Rightarrow (\alpha_1+\alpha_2)z+(\alpha_1+2\alpha_2) = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = 1\end{cases} \Rightarrow \frac{-z}{(z+2)}+\frac{z}{(z+1)} = -(-2)^{(n)}u[n]+(-1)^{(n)}u[n]$$

$$\Rightarrow \frac{2z}{(z+2)(z+1)} = \frac{\alpha_1 z}{(z+2)}+\frac{\alpha_2 z}{(z+1)} \Rightarrow (\alpha_1+\alpha_2)z+(\alpha_1+2\alpha_2) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha_1 = -2 \\ \alpha_2 = 2\end{cases} \Rightarrow \frac{-2z}{(z+2)}+\frac{2z}{(z+1)} = -2(-2)^{(n)}u[n]+2(-1)^{(n)}u[n]$$

$$H(z) = -z^{-2}(-2)^{(n)}u[n]+z^{-2}(-1)^{(n)}u[n]+2(-2)^{(n)}u[n]+2(-1)^{(n)}u[n]$$

$$= -(-2)^{(n-2)}u[n-2]+(-1)^{(n-2)}u[n-2]+2(-2)^{(n)}u[n]+2(-1)^{(n)}u[n]$$

ب)

برای حل این سوال، از اسلاید ۹۰ این لینک استفاده شده است.

$$H(z) = 1 + \ln\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right) \Rightarrow 1 = \delta(t)$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right) \Rightarrow n\,x[n] \overset{z}{\leftrightarrow} -z\frac{dX(z)}{dz} = \frac{1}{2}z^{-1}\frac{1}{1+z^{-1}}$$

$$\Rightarrow n\,x[n] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] \Rightarrow x[n] = \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

$$H(z) = \delta(t) + \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

ج)

$$H(z) = \frac{1}{z-1} = z^{-1}\frac{z}{z-1} = z^{-1}(1)^n\,u[n] = (1)^{n-1}\,u[n-1]$$

د)

چون درجه صورت از مخرج بیشتر است، صورت را بر مخرج تقسیم می کنیم. در این تقسیم خارج قسمت 1 و باقی مانده $3z-2$ محاسبه می شود.

$$H(z) = \frac{z^3}{z^2-3z+2} \Rightarrow \frac{H(z)}{z} = \frac{z^2}{z^2-3z+2} = 3z - 2 + \frac{1}{z^2-3z+2}$$

$$\Rightarrow H(z) = 3z^2 - 2z + \frac{z}{z^2-3z+2} \Rightarrow 3z^2 - 2z = 3\delta''(t) - 2\delta(t)$$

$$\Rightarrow \frac{z}{z^2-3z+2} = \frac{\alpha_1 z}{(z-1)} + \frac{\alpha_2 z}{(z-2)} \Rightarrow (\alpha_1+\alpha_2)z + (-2\alpha_1-\alpha_2) = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = 1\end{cases} \Rightarrow \frac{-z}{(z-1)} + \frac{z}{(z-2)} = -(1)^{(n)}u[n] + (2)^{(n)}u[n]$$