2계 제차 선형 상미분방정식의 복소근의 경우**:** 특성 방정식 및 해

주어진 예제 방정식

방정식

$$y'' + 2y' + 5 = 0$$

초기 조건

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$$

1. 특성 방정식

- 주어진 방정식의 특성 방정식은 다음과 같습니다:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

- 여기서 $a^2 - 4b < 0$일 때, 두 개의 복소근이 존재합니다.

2. 복소근

- 복소근의 형태는 다음과 같습니다:

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

- 이 경우 두 개의 복소근은 다음과 같이 주어집니다:

$$\lambda_1 = -\frac{a}{2} + i\omega, \quad \lambda_2 = -\frac{a}{2} - i\omega$$

여기서 $\omega = \dfrac{\sqrt{4b - a^2}}{2}$입니다.

3. 일반 해의 형태

- 복소근에 해당하는 두 해는 다음과 같이 주어집니다:

$$y_1 = e^{-\frac{a}{2}x}\cos(\omega x), \quad y_2 = e^{-\frac{a}{2}x}\sin(\omega x)$$

- 일반 해는 다음과 같이 표현됩니다:

$$y = e^{-\frac{a}{2}x}(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))$$

4. 예제 방정식

- 주어진 예제:

$$y'' + 2y' + 5 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$$

5. 해 구하기

- 특성 방정식을 풀면 복소근을 얻습니다:

$$\lambda = -1 \pm 2i$$

- 따라서, 일반 해는 다음과 같습니다:

$$y(x) = e^{-x}(A\cos(2x) + B\sin(2x))$$

6. 초기 조건을 이용한 상수 결정초기 조건 $y(0) = 1$

$$y(0) = e^{0}(A\cos(0) + B\sin(0)) = A = 1$$

초기 조건 $y'(0) = 3$

1. $y'(x)$을 미분합니다:

$$y'(x) = e^{-x}(-A\cos(2x) - 2A\sin(2x) + B \cdot 2\cos(2x) + B \cdot (-\sin(2x)))$$

1. $y'(0)$을 대입합니다:

$$y'(0) = -e^{0}(A \cdot 0 + 2B) = -1 + 2B$$

이 식에 $y'(0) = 3$을 대입하면:

$$-1 + 2B = 3$$

따라서,

$$2B = 4 \implies B = 2$$

7. 최종 해

모든 상수를 대입하면 최종 해는 다음과 같습니다:

$$y(x) = e^{-x}(\cos(2x) + 2\sin(2x))$$

```
% 매개변수 설정
syms y(x) A B

% 방정식 정의
Dy = diff(y, x); % y'의 정의
D2y = diff(Dy, x); % y''의 정의

% 방정식 설정
ode = D2y + 2*Dy + 5 == 0;
```

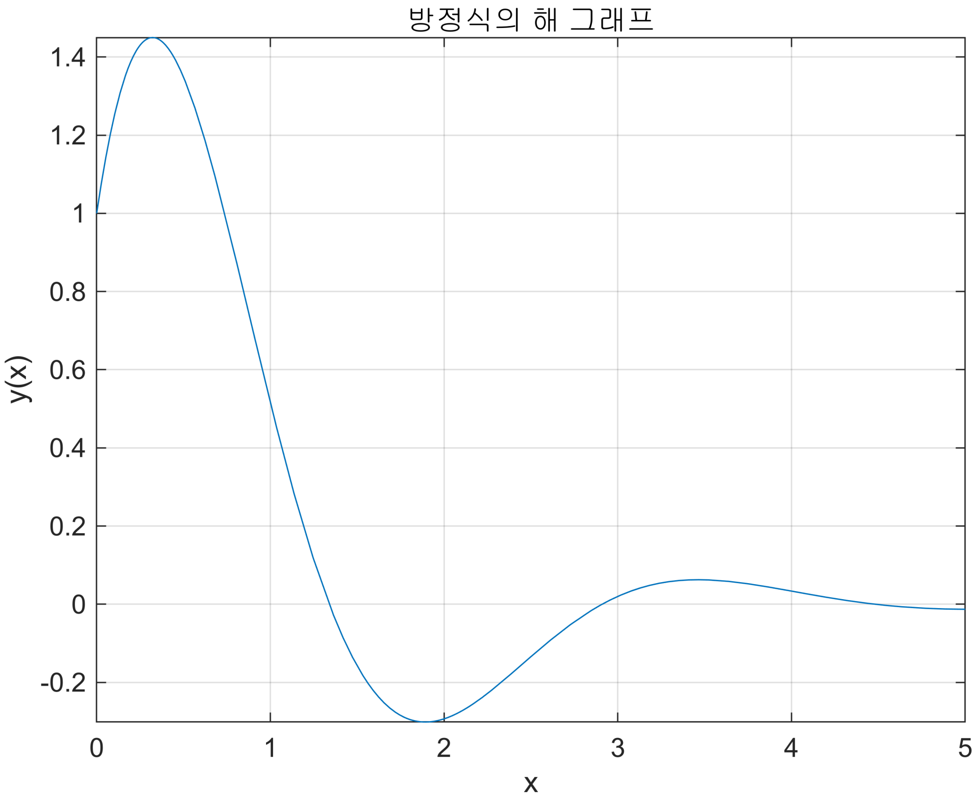
```
% 일반 해 구하기
yGeneral = dsolve(ode);

% 초기 조건을 위한 A와 B 설정
A = sym('A');
B = sym('B');

% 일반 해의 형태
yGeneral = exp(-x) * (A * cos(2*x) + B * sin(2*x));

% 초기 조건 설정
% y(0) = 1
% y'(0) = 3
cond1 = subs(yGeneral, x, 0) == 1;   % 첫 번째 초기 조건
cond2 = subs(diff(yGeneral, x), x, 0) == 3; % 두 번째 초기 조건

% 초기 조건을 포함하여 해를 구하기
[A_value, B_value] = solve([cond1, cond2], [A, B]);

% A와 B를 yGeneral에 대입하여 최종 해 구하기
ySolution = subs(yGeneral, {A, B}, {A_value, B_value});

% 결과 출력
disp('방정식의 해는:');
```

방정식의 해는:

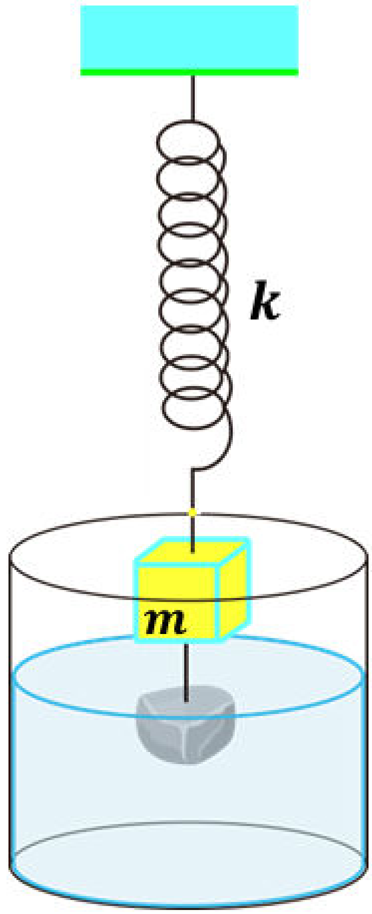
```
pretty(ySolution)
```

exp(-x) (cos(2 x) + sin(2 x) 2)

```

% 해의 그래프 그리기
fplot(ySolution, [0, 5]); % 0부터 5까지의 범위
title('방정식의 해 그래프');
xlabel('x');
ylabel('y(x)');
grid on;
```


방정식의 해 그래프
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
y(x)
0
1
2
3
4
5
x

[예] 용수철 상수가 k인 용수철에 질량 m인 물체를 달고 점성이 있는 유체에 담가 저항력이 작용하게 할 때 이 물체의 시간에 따른 위치함수 $x(t)$는?



질량-댐퍼-스프링 시스템 모델링

1. 뉴턴의 법칙

- 운동 방정식:

$$F = mx''$$

여기서 F는 물체에 작용하는 총 힘이며, m은 질량, x''는 위치의 두 번째 미분(가속도)을 나타냅니다.

2. 용수철 힘

- 용수철의 힘:

$$F_s = -kx$$

- 여기서 k는 용수철 상수(N/m)로, 스프링의 강도를 나타내며, x는 용수철의 변위를 나타냅니다.

- 이 힘은 후크의 법칙을 따르며, 스프링의 변위에 비례하여 작용합니다.

3. 점성이 있는 유체에 의한 감쇠력

- **감쇠력**:

$$F_d = -cy'$$

- 여기서 c는 감쇠 상수로, 유체의 점성을 나타냅니다.
- y' 는 위치의 첫 번째 미분(속도)로, 물체의 속도에 비례하여 작용하는 힘입니다.

4. 전체 시스템의 운동 방정식

위의 힘들을 모두 고려하면, 전체 운동 방정식은 다음과 같이 표현할 수 있습니다:

$$mx'' + cx' + kx = 0$$

이 방정식은 질량-댐퍼-스프링 시스템의 동역학을 설명합니다. 여기서 각 항은 질량에 의한 관성력, 감쇠력, 그리고 스프링의 힘을 나타냅니다.

5. 미분방정식 구조

미분방정식

- 질량 m, 감쇠 상수 c, 스프링 상수 k를 고려하여 미분방정식은 다음과 같이 표현됩니다:

$$my'' + cy' + ky = 0$$

- 여기서:
- y'' 는 위치 y에 대한 두 번째 미분 (가속도)
- y' 는 위치 y에 대한 첫 번째 미분 (속도)
- y는 질량의 위치를 나타냅니다.

6. 특성방정식

- 주어진 미분방정식의 특성방정식은 다음과 같이 설정할 수 있습니다:

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

- 여기서 λ 는 고유값으로 시스템의 동적 특성을 나타냅니다.

고유값

- 고유값은 다음과 같이 계산됩니다:

$$\lambda_1 = -\alpha + \beta, \quad \lambda_2 = -\alpha - \beta$$

여기서,

$$\alpha = \frac{c}{2m}, \quad \beta = \frac{1}{2m}\sqrt{c^2 - 4mk}$$

7. 해의 종류

- **과도 감쇠**: $c^2 > 4mk$일 때, 두 개의 서로 다른 실근이 존재합니다.
- **임계 감쇠**: $c^2 = 4mk$일 때, 중복된 실근이 존재합니다.
- **부족 감쇠**: $c^2 < 4mk$일 때, 두 개의 복소근이 존재합니다.

(1) 과감쇠 **(Overdamping)**

- **조건**:

$$c^2 > 4mk$$

- 이 조건이 만족될 때, 두 개의 서로 다른 실근이 존재합니다.
- **해의 형태**:

$$y(t) = c_1 e^{-(\alpha-\beta)t} + c_2 e^{-(\alpha+\beta)t}$$

- 여기서 c_1과 c_2는 초기 조건에 따라 결정되는 상수이며, α\alphaα와 β\betaβ는 각각 감쇠 계수 및 스프링의 주파수를 나타냅니다.

(2) 임계감쇠 **(Critical Damping)**

- **조건**:

$$c^2 = 4mk$$

- 이 조건이 만족될 때, 중복된 실근이 존재합니다.
- **해의 형태**:

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\alpha t}$$

- 이 경우, 감쇠가 최대화되어 시스템이 최단 시간에 정지하게 됩니다. 초기 조건에 따라 c_1과 c_2를 결정합니다.

(3) 저감쇠 **(Underdamping)**조건

- **조건**:

$$c^2 < 4mk$$

- 이 조건이 만족될 때, 시스템은 복소근을 갖게 되어 진동을 합니다.

해의 형태

- **위치 함수:**

$$y(t) = e^{-\alpha t}(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))$$

- 여기서:
- $e^{-\alpha t}$는 감쇠 항으로, 시간에 따라 진폭이 감소함을 나타냅니다.
- A와 B는 초기 조건에 따라 결정되는 상수입니다.

주파수 ω

- **주파수 정의:**

$$\omega = \frac{1}{2m}\sqrt{4mk - c^2}$$

- 주파수 ω는 시스템의 진동 주기를 결정하며, 스프링 상수와 감쇠 계수에 따라 달라집니다.

사례:

- 질량 $m = 1500\,\mathrm{kg}$ (차량의 무게)
- 감쇠 계수 $c = 1000\,\mathrm{Ns/m}$ (댐퍼의 감쇠 성능)
- 스프링 상수 $k = 20000\,\mathrm{N/m}$ (스프링의 강도)

1. 과감쇠 **(Overdamping)**

- 조건: $c^2 > 4mk$

```
% 과감쇠 시스템 매개변수 설정
m = 1500; % 질량 (kg)
k = 20000; % 스프링 상수 (N/m)
c = 5000; % 감쇠 계수 (Ns/m), c^2 > 4mk

% 미분방정식
fprintf('과감쇠 미분방정식: m*y'''' + c*y'' + k*y = 0\n');
```

```
과감쇠 미분방정식: m*y'' + c*y' + k*y = 0
```

```
% 특성방정식
fprintf('과감쇠 특성방정식: lambda^2 + (c/m)*lambda + (k/m) = 0\n');
```

```
과감쇠 특성방정식: lambda^2 + (c/m)*lambda + (k/m) = 0
```

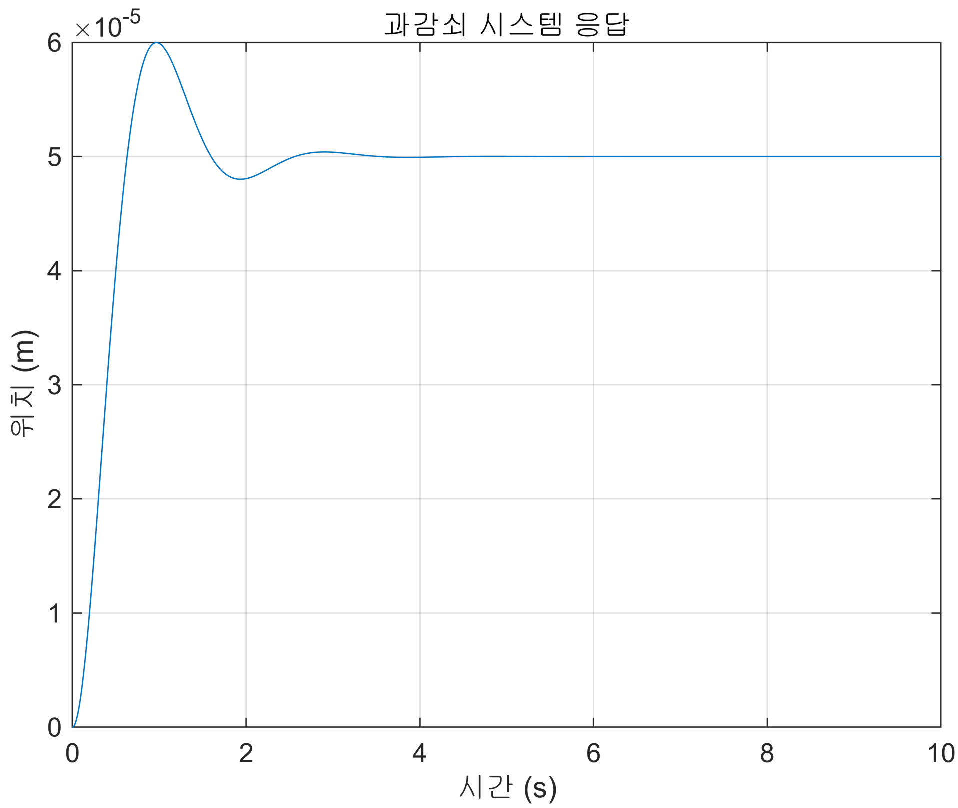
```
% 특정해
fprintf('과감쇠 특정해: y(t) = c_1*e^{-(alpha - beta)*t} + c_2*e^{-(alpha + beta)*t}
\n');
```

```
과감쇠 특정해: y(t) = c_1*e^{-(alpha - beta)*t} + c_2*e^{-(alpha + beta)*t}
```

```
fprintf('여기서 alpha = c/(2*m), beta = sqrt(c^2 - 4*m*k)/(2*m)\n\n');
```

```
여기서 alpha = c/(2*m), beta = sqrt(c^2 - 4*m*k)/(2*m)
```

```

% 상태 공간 표현
A = [0 1; -k/m -c/m];
B = [0; 1/m];
C = [1 0]; % 출력은 위치
D = 0;

% 시스템 생성
sys = ss(A, B, C, D);

% 시간 설정
t = 0:0.01:10; % 0에서 10초까지, 0.01초 간격

% 초기 조건 설정 (y(0) = 0, y'(0) = 0)
initial_conditions = [0; 0];

% 입력으로 단위 계단 함수 추가
u = ones(size(t)) * 1; % 1N의 힘이 1초 동안 작용한다고 가정

% 시스템 응답 시뮬레이션
[y, t, x] = lsim(sys, u, t, initial_conditions);

% 그래프 출력
figure;
plot(t, y);
title('과감쇠 시스템 응답');
xlabel('시간 (s)');
ylabel('위치 (m)');
grid on;
```




```

```

2. 임계감쇠 (Critical Damping)

- 조건: $c^2 = 4mk$

```
% 임계감쇠 시스템 매개변수 설정
m = 1500; % 질량 (kg)
k = 20000; % 스프링 상수 (N/m)
c = 2449.49; % 감쇠 계수 (Ns/m), c^2 = 4mk

% 미분방정식
fprintf('임계감쇠 미분방정식: m*y'''' + c*y'' + k*y = 0\n');
```

```
임계감쇠 미분방정식: m*y'' + c*y' + k*y = 0
```

```
% 특성방정식
fprintf('임계감쇠 특성방정식: lambda^2 + (c/m)*lambda + (k/m) = 0\n');
```

```
임계감쇠 특성방정식: lambda^2 + (c/m)*lambda + (k/m) = 0
```

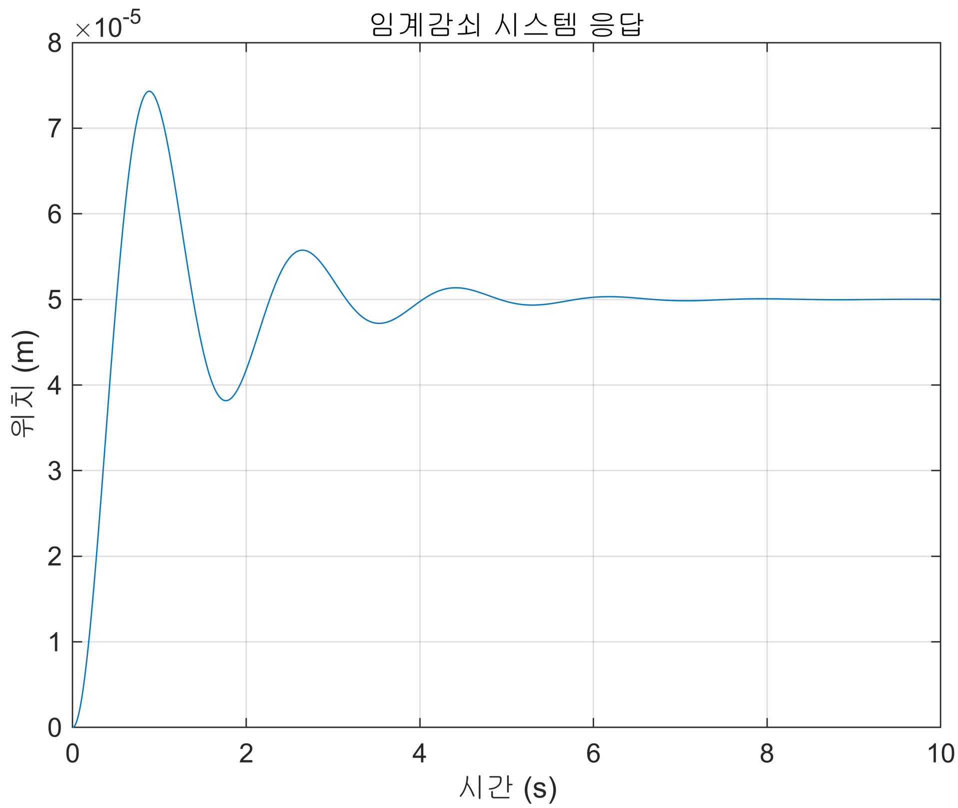
```
% 특정해
fprintf('임계감쇠 특정해: y(t) = (c_1 + c_2*t)e^{-alpha*t}\n');
```

```
임계감쇠 특정해: y(t) = (c_1 + c_2*t)e^{-alpha*t}
```

```
fprintf('여기서 alpha = c/(2*m)\n\n');
```

```
여기서 alpha = c/(2*m)
```

```

% 상태 공간 표현
A = [0 1; -k/m -c/m];
B = [0; 1/m];
C = [1 0]; % 출력은 위치
D = 0;

% 시스템 생성
sys = ss(A, B, C, D);

% 시간 설정
t = 0:0.01:10; % 0에서 10초까지, 0.01초 간격

% 초기 조건 설정 (y(0) = 0, y'(0) = 0)
initial_conditions = [0; 0];

% 입력으로 단위 계단 함수 추가
u = ones(size(t)) * 1; % 1N의 힘이 1초 동안 작용한다고 가정

% 시스템 응답 시뮬레이션
[y, t, x] = lsim(sys, u, t, initial_conditions);

% 그래프 출력
figure;
plot(t, y);
title('임계감쇠 시스템 응답');
xlabel('시간 (s)');
ylabel('위치 (m)');
grid on;
```



3. 저감쇠 (Underdamping)

- 조건: $c^2 < 4mk$

```
% 저감쇠 시스템 매개변수 설정
m = 1500; % 질량 (kg)
k = 20000; % 스프링 상수 (N/m)
c = 500; % 감쇠 계수 (Ns/m), c^2 < 4mk

% 미분방정식
fprintf('저감쇠 미분방정식: m*y'''' + c*y'' + k*y = 0\n');
```

```
저감쇠 미분방정식: m*y'' + c*y' + k*y = 0
```

```
% 특성방정식
fprintf('저감쇠 특성방정식: lambda^2 + (c/m)*lambda + (k/m) = 0\n');
```

```
저감쇠 특성방정식: lambda^2 + (c/m)*lambda + (k/m) = 0
```

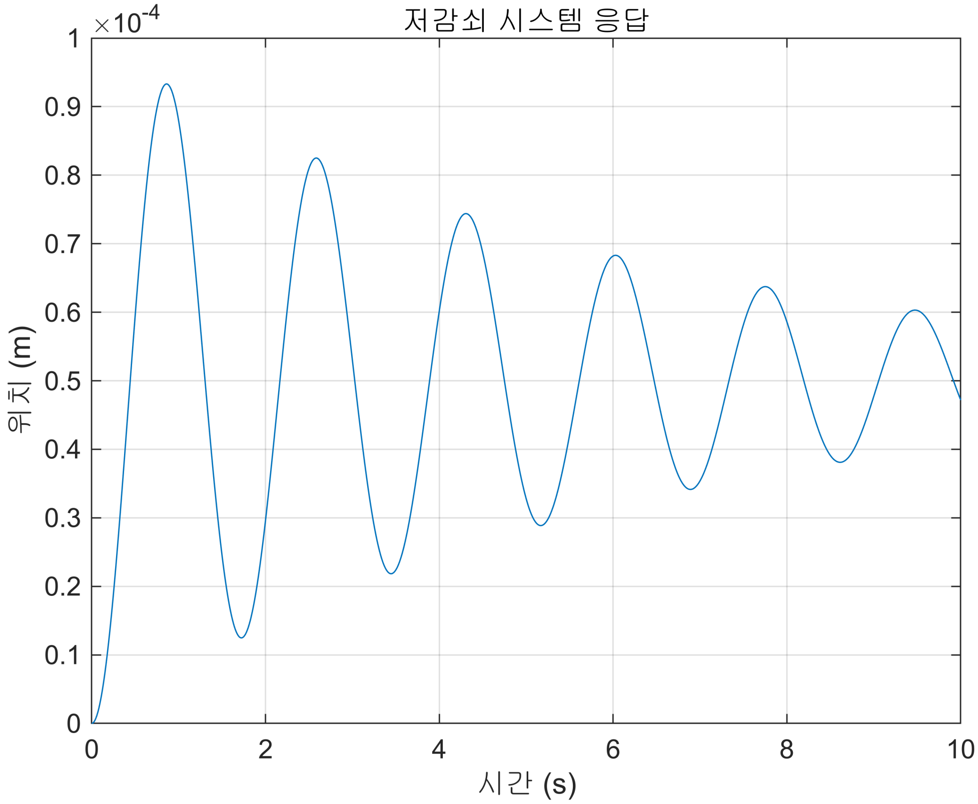
```
% 특정해
fprintf('저감쇠 특정해: y(t) = e^{-alpha*t}(A cos(omega*t) + B sin(omega*t))\n');
```

```
저감쇠 특정해: y(t) = e^{-alpha*t}(A cos(omega*t) + B sin(omega*t))
```

```
fprintf('여기서 alpha = c/(2*m), omega = 1/(2*m)*sqrt(4*m*k - c^2)\n\n');
```

```
여기서 alpha = c/(2*m), omega = 1/(2*m)*sqrt(4*m*k - c^2)
```

```
% 상태 공간 표현
A = [0 1; -k/m -c/m];
B = [0; 1/m];
C = [1 0]; % 출력은 위치
D = 0;

% 시스템 생성
sys = ss(A, B, C, D);

% 시간 설정
t = 0:0.01:10; % 0에서 10초까지, 0.01초 간격

% 초기 조건 설정 (y(0) = 0, y'(0) = 0)
initial_conditions = [0; 0];

% 입력으로 단위 계단 함수 추가
u = ones(size(t)) * 1; % 1N의 힘이 1초 동안 작용한다고 가정

% 시스템 응답 시뮬레이션
[y, t, x] = lsim(sys, u, t, initial_conditions);

% 그래프 출력
figure;
plot(t, y);
title('저감쇠 시스템 응답');
xlabel('시간 (s)');
ylabel('위치 (m)');
grid on;
```



시스템 매개변수

- 질량 $m = 2\,\mathrm{kg}$
- 스프링 상수 $k = 200\,\mathrm{N/m}$
- 감쇠 계수 $c = 0\,\mathrm{Ns/m}$ (마찰이나 점성이 없다고 가정)
- 초기 조건:
- $x(0) = 0.1\,\mathrm{m}$
- $x'(0) = 0$

1. 미분 방정식

마찰이 없는 경우, 미분 방정식은 다음과 같이 표현됩니다:

$$mx'' + kx = 0$$

이를 변형하면:

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0$$

2. 특성 방정식

특성 방정식은 다음과 같습니다:

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$$

여기서 λ\lambdaλ는 고유값입니다.

3. 해 구하기

주어진 파라미터에 따라 ω를 계산합니다:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200}{2}} = 10\,\text{rad/s}$$

이 경우의 해는 다음과 같은 형태를 가집니다:

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

4. 초기 조건 적용

주어진 초기 조건을 사용하여 A와 B를 구합니다.

1. $x(0) = 0.1$:

$$x(0) = A \cdot \cos(0) + B \cdot \sin(0) = A = 0.1$$

1. $x'(0) = 0$:

$$x'(t) = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$$

$$x'(0) = -A \cdot 10 \cdot 0 + B \cdot 10 \cdot 1 = 10B$$

$$10B = 0 \Longrightarrow B = 0$$

5. 최종 해

따라서 최종 해는 다음과 같습니다:

$$x(t) = 0.1\cos(10t)$$

진동수 계산

주어진 파라미터에 따라 진동수 f는 다음과 같이 계산됩니다:

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10$$

$$f = \frac{10}{2\pi} = \frac{5}{\pi}\ (H_z)$$

```
% 시스템 매개변수 설정
m = 2; % 질량 (kg)
k = 200; % 스프링 상수 (N/m)
c = 0; % 감쇠 계수 (Ns/m)

% 미분방정식 출력
```

```
fprintf('미분방정식: m*x'''' + k*x = 0\n');
```

```
미분방정식: m*x'' + k*x = 0
```

```
% 특성방정식 출력
fprintf('특성방정식: lambda^2 + (k/m) = 0\n');
```

```
특성방정식: lambda^2 + (k/m) = 0
```

```
% 주파수 계산
omega = sqrt(k/m);
fprintf('진동수 omega: %.2f rad/s\n', omega);
```

```
진동수 omega: 10.00 rad/s
```

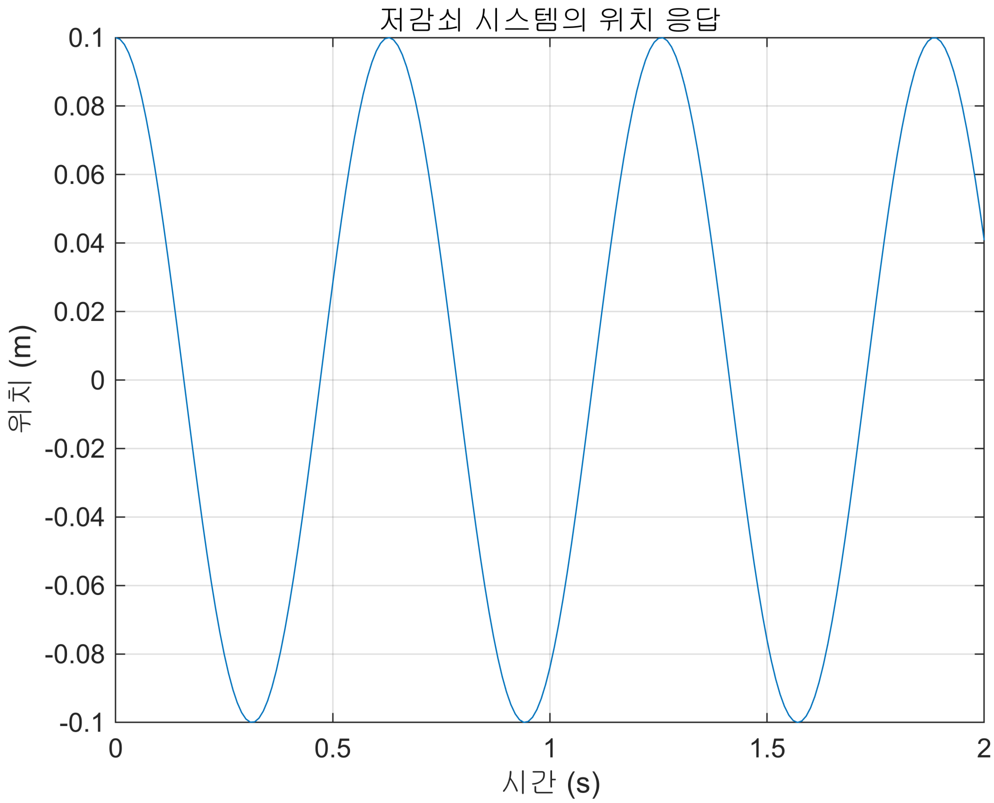
```
fprintf('진동수 f: %.2f Hz\n', omega/(2*pi)); % 주파수 (Hz) 계산
```

```
진동수 f: 1.59 Hz
```

```
% 초기 조건 설정
x0 = 0.1; % x(0) = 0.1m
v0 = 0;   % x'(0) = 0

% 해의 형태 정의
syms t A B
A = x0; % A는 초기 위치
B = (v0 / omega); % B는 초기 속도에 따라 계산

% 최종 해
y = A * cos(omega * t); % 최종 해

% 결과 출력
fprintf('해: x(t) = %.2f * cos(%.2f * t)\n', x0, omega);
```

```
해: x(t) = 0.10 * cos(10.00 * t)
```

```
% 해의 그래프 그리기
t_vals = 0:0.01:2; % 0부터 2초까지
x_vals = double(subs(y, t, t_vals)); % y(t)를 계산

figure;
plot(t_vals, x_vals);
title('저감쇠 시스템의 위치 응답');
xlabel('시간 (s)');
ylabel('위치 (m)');
grid on;
```



저감쇠 시스템의 위치 응답
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
-0.06
-0.08
-0.1
위치 (m)
0
0.5
1
1.5
2
시간 (s)