1계 비제차 선형 상미분방정식

1. 1계 비제차 선형 상미분방정식의 형태

- 일반적인 형태: $y' + p(x)y = r(x)$
- 여기서 $r(x) \neq 0$일 때, 이 방정식을 비제차 상미분방정식(Nonhomogeneous, 비동차)라고 합니다.

2. 1계 비제차 선형 상미분방정식의 특성

- $r(x)$는 입력으로 작용하며, 이 입력이 응답(또는 출력)인 $y(x)$와 그 변화율에 영향을 줍니다.
- 입력 $r(x)$와 응답 $y(x)$사이에는 비례 관계가 존재합니다.

이를 이해하기 위해 간단한 예를 들어보겠습니다.

예시

- 미분방정식: $y' + 2y = 4$
- 여기서 $p(x) = 2, r(x) = 4$입니다.
- 이 방정식은 비제차 형태이며,$r(x) = 4 \neq 0$이므로 입력이 출력에 영향을 줍니다.
- 이 경우, 일반해는

$$y(x) = Ce^{-2x} + 2$$

- C는 상수입니다.

해법 - (일반해)

1. 일반해 유도 과정

- 주어진 방정식: $y' + p(x)y = r(x)$

1) 적분인자 찾기

- 적분인자는$F(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^h$입니다.
- 여기서 $\int p(x)\,dx = h$ 라고 가정하고, $h' = p(x)$ 라고 가정합니다.
- 원식을 미분하면 $F'(x) = (e^{\int p(x)\,dx})' = h'e^h$ 이고
- $h' = p(x)$ 이기 때문에 $F' = pe^h$ 입니다.

2) 방정식 정리

- 적분인자를 원래의 식의 양변에 곱해줍니다.
- $Fy' + Fpy = Fr$가 됩니다.

- 즉, $e^h y' + e^h py = e^h r$ 로 표현됩니다.
- 이때, $F' = pe^h$ 이므로 방정식은

$$e^h y' + (e^h p)y = e^h r$$

$$e^h y' + (e^h)' y = e^h r$$

- 미분의 곱셈 공식에 따르면:

$$\frac{d}{dx}(e^h y) = e^h y' + (e^h)' y$$

$$(e^h y)' = e^h r$$

$$\text{즉, } (Fy)' = Fr$$

- 로 정리됩니다.

3) 양변을 적분

- 양변을 적분하면

$$e^h y = \int e^h r\, dx + c$$

여기서 c는 적분 상수입니다.

4) 해 구하기

- 최종적으로 양변을 e^h 로 나누면

$$y(x) = e^{-h}\left(\int e^h r\, dx + c\right)$$

이 됩니다.

적분인자 유도과정(자세히)

1. 적분인자 방법을 통한 적분인자 구하기

먼저 적분인자 방법을 사용해 보겠습니다.

1) 방정식을 적분인자 형태로 변환

- 주어진 방정식은 다음과 같습니다.

$$y' + p(x)y = r(x)$$

- 적분인자를 $\mu(x)$라 하겠습니다.
- 양변에 적분인자 $\mu(x)$를 곱해줍니다.

$$\mu(x)y' + \mu(x)p(x)y = \mu(x)r(x)$$

2) 좌변을 완전 미분 형태로 변환

- 적분인자 $\mu(x)$를 곱한 식의 좌변을 살펴봅시다.

$$\mu(x)y' + \mu(x)p(x)y$$

- 미분의 곱셈 공식에 따르면, 다음이 성립합니다:

$$\frac{d}{dx}(\mu(x)y) = \mu(x)y' + \mu'(x)y$$

- 그런데 $\mu(x)$는 적분인자이기 때문에,

$$\mu'(x) = \mu(x)p(x)$$

- $\mu(x)$를 곱한 식의 좌변이 완전 미분이 되려면,

$$\frac{d}{dx}(\mu(x)y) = \mu(x)y' + \mu(x)p(x)y$$

$$\mu(x)y' + \mu(x)p(x)y = \frac{d}{xd}(\mu(x)y)$$

- 따라서, $\mu(x)$가 다음 조건을 만족해야 합니다.

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = \mu(x)p(x)dx$$

3) 적분인자 $\mu(x)$ 찾기

- 양변을 x에 대해 적분하면,

$$\frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = p(x)\,dx$$

$$\ln|\mu(x)| = \int p(x)\,dx$$

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$$

- 따라서, 적분인자는 $\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$입니다.

2. 변수분리법을 통한 적분인자 구하기

이번에는 변수분리법을 사용하여 적분인자를 구해보겠습니다.

1) 방정식을 변수분리 형태로 변환

- 주어진 방정식은 $y' + p(x)y = r(x)$이고, 이를 정리하면 $y' = r(x) - p(x)y$형태가 됩니다.
- 양변을

$$\frac{dy}{dx} = r(x) - p(x)y$$

- 로 표현하면:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = r(x)$$

2) 변수분리법 적용

- 먼저 $r(x) = 0$인 동차 방정식을 고려하면, $y' + p(x)y = 0$즉,

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y$$

- 이 식은 변수 분리 형태로 표현됩니다.

$$\frac{dy}{y} = -p(x)\,dx$$

- 양변을 적분하면,

$$\ln|y| = -\int p(x)\,dx$$

- 따라서,

$$y = Ce^{-\int p(x)\,dx}$$

3) 적분인자 확인

- 일반적으로 적분인자는 $\frac{1}{y} = e^{\int p(x)\,dx}$와 같이 표현됩니다.
- 따라서, 이 역시 적분인자 $\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$임을 확인할 수 있습니다.

결론

두 가지 방법을 통해 적분인자를 구한 결과는 동일합니다:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$$

1계 비제차 선형 미분방정식의 일반해(결론)

방정식의 형태

주어진 방정식은 다음과 같습니다:

$$y' + p(x)y = r(x)$$

일반해 구하기

1. 적분인자 $\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^h$를 곱하여 방정식을 완전 미분 형태로 만듭니다.
2. 식은 다음과 같이 변환됩니다:

$$e^h y' + e^h p(x)y = e^h r(x)$$

즉, 좌변은

$$(e^h y)' = e^h r(x)$$

1. 이 식을 양변에 대해 x에 대해 적분하면,

$$e^h y = \int e^h r(x)\,dx + C$$

이 됩니다.

1. 따라서, y에 대한 일반해는

$$y(x) = e^{-h}\left(\int e^h r(x)\,dx + C\right)$$

로 표현됩니다.

최종 일반해

$$y(x) = e^{-\int p(x)\,dx}\left(\int e^{\int p(x)\,dx} r(x)\,dx + C\right)$$

예제

예제 1: $\dfrac{dy}{dt} - y = e^t, \quad y(0) = 3$

```
syms y(t) C  % y(t)와 상수 C를 기호적으로 정의

% 미분 방정식 정의
ode1 = diff(y, t) - y == exp(t);

% 일반해를 구함
general_solution1 = dsolve(ode1);

% 초기 조건을 적용하여 특정 해를 구함
initial_condition1 = y(0) == 3;
particular_solution1 = dsolve(ode1, initial_condition1);

% 결과 출력
fprintf('일반해 y(t): \n');
```

일반해 y(t):

```
disp(general_solution1);
```

$C_1 \, e^t + t \, e^t$

```


fprintf('특정해 y(t) (초기 조건 적용): \n');
```

특정해 y(t) (초기 조건 적용):

```
disp(particular_solution1);
```

$3 \, e^t + t \, e^t$

예제 2: $\frac{dy}{dx} = 2x^2 - \frac{y}{x}, \quad y(1) = 5$

```
syms y(x) C  % y(x)와 상수 C를 기호적으로 정의

% 미분 방정식 정의
ode2 = diff(y, x) == 2*x^2 - y/x;

% 일반해를 구함
general_solution2 = dsolve(ode2);

% 초기 조건을 적용하여 특정 해를 구함
initial_condition2 = y(1) == 5;
particular_solution2 = dsolve(ode2, initial_condition2);

% 결과 출력
fprintf('일반해 y(x): \n');
```

일반해 y(x):

```
disp(general_solution2);
```

$$\frac{C_1}{x}+\frac{x^3}{2}$$

```
fprintf('특정해 y(x) (초기 조건 적용): \n');
```

```
특정해 y(x) (초기 조건 적용):
```

```
disp(particular_solution2);
```

$$\frac{x^4+9}{2\,x}$$

뉴턴의 방정식

$$F = m\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}}$$

$$\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = \frac{F}{m}$$

$$v' = \frac{F}{m}$$

$v' + v_0 = \dfrac{F}{m}$ 이므로 1계 미분 선형방정식의 형태로 만들수 있다.

$v_0 = p(x)$, $\dfrac{F}{m} = r(x)$ 로 놓고 풀면 되지만 p(x)가 0이기 때문에 너무 간단하여 굳이 이렇게 구하는 것보다는 일반적인 방법으로 푸는것이 더 좋다.

마찰력 혹은 다른 외력이 들어가면 수식이 더 복잡해져서 이러한 형태로 분석을 하는 것이 좋다.

문제

$$y' - xy = sinx$$

1. 적분인자를 곱하여 방정식을 완전 미분 형태로 만들기

적분인자 찾기

일반적인 1계 선형 미분방정식의 형태는

$$y' + p(x)y = r(x)$$

입니다. 따라서, 주어진 방정식을 이 형태에 맞추면

$$y' + (-x)y = \sin x$$

여기서 $p(x) = -x$이고 $r(x) = \sin x$입니다.

적분인자는 다음과 같이 정의됩니다:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int -x\,dx}$$

적분 수행

$$\int -x\,dx = -\frac{x^2}{2}$$ �

따라서 적분인자는

$$\mu(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$ �

주어진 미분방정식의 적분인자는

$$\mu(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$ �

방정식의 양변에 적분인자 $\mu(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ �를 곱합니다:

$$e^{-\frac{x^2}{2}}y' - xe^{-\frac{x^2}{2}}y = e^{-\frac{x^2}{2}}\sin x$$

이때, 좌변은 완전 미분 형태가 됩니다:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}y\right) = e^{-\frac{x^2}{2}}\sin x$$

2. 양변을 x에 대해 적분

$$e^{-\frac{x^2}{2}}y = \int e^{-\frac{x^2}{2}}\sin x\,dx + C$$

여기서 C는 적분 상수입니다.

3. 해의 표현

일반해를 y에 대해 표현하면:

$$y = e^{\frac{x^2}{2}}\left(\int e^{-\frac{x^2}{2}}\sin x\,dx + C\right)$$

결론

주어진 미분방정식의 일반해는 다음과 같습니다:

$$y = e^{\frac{x^2}{2}}\left(\int e^{-\frac{x^2}{2}} \sin x \, dx + C \right)$$

위의 식은 해석적 해로 직접 풀기는 어렵습니다. 따라서 수치적 접근법으로 근사하여 해를 구하면 다음과 같습니다.

```
% Define the function to be integrated
f = @(x) exp(-x.^2 / 2) .* sin(x);

% Set the limits of integration (you can change the limits as needed)
x_start = 0; % Lower limit of integration
x_end = 2;   % Upper limit of integration (example)

% Perform the numerical integration using the integral function
result = integral(f, x_start, x_end);

% Display the result
fprintf('Numerical integration result: %.4f\n', result);
```

```
Numerical integration result: 0.6869
```

$\frac{dx}{dy} + y = e^{2x}$

1. 적분인자 찾기

일반적인 1계 선형 미분방정식의 형태는

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = r(x)$$

입니다. 여기서 $p(x) = 1$이고 $r(x) = e^{2x}$입니다.

적분인자는 다음과 같이 정의됩니다:

$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int 1\,dx} = e^x$

2. 방정식에 적분인자 곱하기

주어진 방정식의 양변에 e^x를 곱합니다:

$$e^x \frac{dy}{dx} + e^x y = e^x e^{2x}$$

좌변은 완전 미분 형태가 되어

$$\frac{d}{dx}(e^x y) = e^{3x}$$

3. 양변을 적분

$$e^x y = \int e^{3x}\, dx$$

우변을 적분하면

$$e^x y = \frac{1}{3}e^{3x} + C$$

여기서 C는 적분 상수입니다.

4. y에 대한 식 정리

$$y = \frac{1}{3}e^{2x} + Ce^{-x}$$

최종 일반해

주어진 미분방정식의 일반해는

$$y = \frac{1}{3}e^{2x} + Ce^{-x}$$

```
% Define the range of x values
x_values = linspace(0, 5, 100); % x의 범위: 0부터 5까지 100개의 점을 생성

% Define the initial condition y(0) = y0
y0 = 0;  % 초기 조건

% Solve for the constant C using the initial condition y(0) = 0
C = y0 - (1/3);

% Calculate the analytical solution y for each x value
y_values = (1/3) * exp(2 * x_values) + C * exp(-x_values);

% Display the results
results = table(x_values', y_values', 'VariableNames', {'x', 'y_analytical'});
disp(results);
```

```
       x        y_analytical
    ________    ____________

           0             0
    0.050505      0.051846
     0.10101       0.10665
     0.15152       0.16485
     0.20202       0.22693
     0.25253       0.29341
     0.30303       0.36487
```

0.35354	0.44195
0.40404	0.52533
0.45455	0.61578
0.50505	0.71413
0.55556	0.82133
0.60606	0.93837
0.65657	1.0664
0.70707	1.2066
0.75758	1.3604
0.80808	1.5293
0.85859	1.715
0.90909	1.9193
0.9596	2.1441
1.0101	2.3919
1.0606	2.665
1.1111	2.9662
1.1616	3.2985
1.2121	3.6654
1.2626	4.0704
1.3131	4.5177
1.3636	5.0118
1.4141	5.5578
1.4646	6.1611
1.5152	6.8279
1.5657	7.565
1.6162	8.3799
1.6667	9.2809
1.7172	10.277
1.7677	11.379
1.8182	12.597
1.8687	13.944
1.9192	15.435
1.9697	17.083
2.0202	18.906
2.0707	20.922
2.1212	23.152
2.1717	25.619
2.2222	28.348
2.2727	31.367
2.3232	34.706
2.3737	38.4
2.4242	42.486
2.4747	47.006
2.5253	52.007
2.5758	57.539
2.6263	63.659
2.6768	70.428
2.7273	77.918
2.7778	86.203
2.8283	95.368
2.8788	105.51
2.9293	116.73
2.9798	129.13
3.0303	142.86
3.0808	158.05
3.1313	174.85
3.1818	193.44
3.2323	214
3.2828	236.75
3.3333	261.91
3.3838	289.75
3.4343	320.55
3.4848	354.62
3.5354	392.32

```
    3.5859       434.02
    3.6364       480.15
    3.6869       531.18
    3.7374       587.64
    3.7879        650.1
    3.8384        719.2
    3.8889       795.65
    3.9394       880.22
    3.9899       973.77
    4.0404       1077.3
    4.0909       1191.8
    4.1414       1318.4
    4.1919       1458.6
    4.2424       1613.6
    4.2929       1785.1
    4.3434       1974.9
    4.3939       2184.8
    4.4444         2417
    4.4949       2673.9
    4.5455       2958.1
     4.596       3272.5
    4.6465       3620.3
     4.697       4005.1
    4.7475       4430.8
     4.798       4901.7
    4.8485       5422.7
     4.899       5999.1
    4.9495       6636.7
         5       7342.2
```

```
% Plot the analytical solution
figure;
plot(x_values, y_values, 'r-', 'LineWidth', 2);
xlabel('x');
ylabel('y (Analytical Solution)');
title('Analytical Solution of dy/dx + y = e^{2x}');
grid on;
```