1. 키르히호프의 전압법칙 **(Kirchhoff's Voltage Law, KVL)**

1.1. 기본 원리

- **정의**: 폐회로를 따라 이동할 때, 모든 전기요소(저항, 커패시터, 인덕터 등)를 거쳐 전압을 더한 값의 합은 항상 0입니다.
- 이는 에너지 보존 법칙에 근거하며, 회로의 한 루프를 따라서 이동하는 동안 전압의 증가와 감소가 균형을 이루어야 한다는 의미입니다.

1.2. 수식 표현

- 수학적으로 표현하면: $\sum_{i=1}^{n} V_i = 0$여기서 V_i는 회로의 각 요소에서의 전압입니다. 각 전압은 부호를 가지고 있으며, 전압원(배터리)의 경우 양(+) 또는 음(-)의 방향에 따라 전압이 결정됩니다.

1.3. 예시와 적용 방법

- 간단한 직류 회로에서 저항 3개와 전압원이 있다고 가정하겠습니다. 예를 들어, 전압원이 $10V$이고 저항의 전압강하가 각각$V_1 = 2V, V_2 = 3V, V_3 = 5V$라고 하면: $V_{\text{source}} - V_1 - V_2 - V_3 = 10V - 2V - 3V - 5V = 0$이렇게 폐회로를 따라 모든 전압의 합이 0이 되는 것을 확인할 수 있습니다.

1.4. KVL 적용시 유의사항

- **전압의 부호 결정**: 전류의 방향에 따라 저항 등의 전압강하를 부호로 표시해야 합니다. 즉, 전류의 진행 방향에 따라 저항을 지날 때 전압강하는 음(-)으로, 전압원을 지날 때는 양(+)으로 표시됩니다.
- **다수의 루프가 있는 경우**: 복잡한 회로에서는 여러 개의 폐회로를 따라 KVL을 적용하며, 각 폐회로의 전압합이 0임을 확인해야 합니다.

2. 키르히호프의 전류법칙 **(Kirchhoff's Current Law, KCL)**

2.1. 기본 원리

- **정의**: 회로의 특정 노드에서 유입되는 전류의 총합은 그 노드에서 유출되는 전류의 총합과 같습니다.
- 이는 전하 보존 법칙에 기반하며, 전류가 노드에 모이거나 사라질 수 없음을 의미합니다.

2.2. 수식 표현

- 수학적으로 표현하면: $\sum_{i=1}^{n} I_i = 0$여기서 I_i는 노드로 유입 또는 유출되는 각 전류입니다. 유입 전류는 양(+), 유출 전류는 음(-) 부호로 나타냅니다.

2.3. 예시와 적용 방법

- 예를 들어, 노드에 세 개의 전류가 있다고 가정합시다. 전류 $I_1 = 5A$와 $I_2 = 3A$는 노드로 들어가고,I_3가 노드에서 나간다고 하면: $I_1 + I_2 - I_3 = 0,\ \ 5 + 3 - I_3 = 0$ 따라서 $I_3 = 8A$임을 알 수 있습니다.

2.4. KCL 적용시 유의사항

- **전류의 방향 결정**: 전류의 방향이 처음에 잘못 설정되더라도, 해석 과정에서 음(-)의 부호로 나타나 수정됩니다. 따라서 KCL 적용 시 전류 방향을 임의로 설정해도 됩니다.
- **복잡한 회로**: 회로에 여러 개의 노드가 있는 경우, 각 노드마다 KCL을 적용하여 시스템의 전체 전류 관계를 해석합니다.

3. 두 법칙의 차이와 통합적인 적용

- **KVL**과 **KCL**의 차이점:
- **KVL**은 폐회로에서 전압을 분석하는 것이며, 에너지 보존에 관한 원리를 다룹니다.
- **KCL**은 노드에서 전류를 분석하는 것이며, 전하 보존 원리에 근거합니다.

1. 회로 분석과 키르히호프의 전압법칙 **(KVL)** 적용주어진 회로 요소**:**

- 전압원 $e = 10\,V$
- 저항 $R = 10\,\Omega$
- 커패시턴스 $C = 0.5\,F$
- 시간 $t = 0$에서 전하량 $q(0) = 0\,C$

회로에 적용된 **KVL**

키르히호프의 전압법칙에 따르면, 회로를 따라 전압의 합은 0이어야 합니다. 따라서 다음 식이 성립합니다:

$$10 - V_C - V_R = 0$$

여기서:

- V_C는 커패시터에 걸리는 전압
- V_R은 저항에 걸리는 전압

2. 각 전압의 표현

- 커패시터에 걸리는 전압 V_C는 전하량 q와 커패시턴스 C의 관계에 의해 $V_C = \frac{q}{C}$로 표현됩니다.
- 저항에 걸리는 전압 V_R는 옴의 법칙에 의해 $V_R = iR$로 표현됩니다. 여기서 i는 저항을 지나는 전류이고, 이는 $i = \frac{dq}{dt}$입니다.

3. 방정식 정리

위의 관계식을 이용하여 KVL 식을 정리하면 다음과 같습니다:

$$10 - \frac{q}{C} - \frac{dq}{dt} \cdot R = 0$$

이 식에 $C = 0.5\,F$, $R = 10\,\Omega$를 대입하면:

$$10 - \frac{q}{0.5} - 10\frac{dq}{dt} = 0$$

$$10 - 2q - 10\frac{dq}{dt} = 0$$

이를 정리하면:

$$10\frac{dq}{dt} + 2q = 10$$

또는

$$5\frac{dq}{dt} + q = 5$$

4. 미분방정식 풀이

미분방정식은 다음과 같습니다:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{5}q = 1$$

적분인자를 사용하여 해를 구합니다:

적분인자 $\mu(t)$는:

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{5}dt} = e^{\frac{t}{5}}$$

이 적분인자를 원래 식에 곱하면:

$$e^{\frac{t}{5}}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{5}e^{\frac{t}{5}}q = e^{\frac{t}{5}}$$

이는

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{t}{5}}q\right) = e^{\frac{t}{5}}$$

와 같습니다. 양변을 적분하면:

$$e^{\frac{t}{5}}q = 5e^{\frac{t}{5}} + C$$

따라서

$$5q(t) = 5 + Ce^{-\frac{t}{5}}$$

초기 조건을 적용

- $q(0) = 0$ 이므로, $0 = 5 + C \rightarrow C = -5$

따라서 $q(t) = 5(1 - e^{-\frac{t}{5}})$

5. 10초 후의 전하량 계산

$t = 10$일 때,

$$q(10) = 5(1 - e^{-2})$$

$e^{-2} \approx 0.1353$이므로

$$q(10) \approx 5(1 - 0.1353) \approx 4.32\ C$$

문제

- 초기 조건: 1000L의 물에 설탕 50g이 녹아있다.
- 들어오는 양: 1분당 10g의 설탕을 포함한 설탕물이 분당 10L씩 수조 안으로 들어온다.
- 나가는 양: 수조에서 혼합된 설탕물이 분당 10L씩 유출된다.

목표

- 임의의 시간 t에서 수조 안에 있는 전체 설탕의 양 $S(t)$를 구하라.

1. 미분방정식 세우기

- $S(t)$: 시간 t에서 수조에 있는 설탕의 양 (g)
- 들어오는 설탕의 농도: 1L당 1g이므로, 분당 들어오는 설탕의 양은 $10 \times 1 = 10\,g$
- 나가는 설탕의 농도: 시간t에서 수조에 있는 설탕의 농도는 $\frac{S(t)}{1000} g/L$. 분당 나가는 설탕의 양은 $10 \times \frac{S(t)}{1000} = \frac{S(t)}{100} g$

따라서, 설탕의 변화율에 대한 미분방정식은 다음과 같습니다:

$$\frac{dS}{dt} = 10 - \frac{S(t)}{100}$$

2. 미분방정식 풀이

위의 방정식은 1계 선형 상미분방정식이며 다음과 같이 정리됩니다:

$$\frac{dS}{dt} + \frac{1}{100}S = 10$$

2.1. 적분인자 구하기

적분인자 $\mu(t)$는 다음과 같습니다:

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{100} dt} = e^{\frac{t}{100}}$$

양변에 적분인자를 곱하면:

$$e^{\frac{t}{100}} \frac{dS}{dt} + \frac{1}{100} e^{\frac{t}{100}} S = 10e^{\frac{t}{100}}$$

이는 다음과 같이 표현할 수 있습니다:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{t}{100}} S\right) = 10e^{\frac{t}{100}}$$

양변을 적분하면:

$$e^{\frac{t}{100}} S = 1000e^{\frac{t}{100}} + C$$

따라서,

$$S(t) = 1000 + Ce^{-\frac{t}{100}}$$

2.2. 초기 조건 적용

초기 조건 $S(0) = 50$을 적용하면:

$$50 = 1000 + C \rightarrow C = -950$$

따라서, 전체적인 해는

$$S(t) = 1000 - 950e^{-\frac{t}{100}}$$

일반해 구하기

시간 t에서 수조 안에 있는 전체 설탕의 양은

$$S(t) = 1000 - 950e^{-\frac{t}{100}} (g)$$

3. 완전 상미분방정식으로 변환하기

비제차 항(여기서는 상수인 10)이 있는 경우, 방정식은 완전 상미분방정식이 아닙니다. 완전 상미분방정식으로 만들기 위해서는 다음 두 가지 방법 중 하나를 적용할 수 있습니다.

방법 **1:** 새로운 변수를 도입하여 제차 미분방정식으로 변환

일반적으로, 완전 상미분방정식은 비제차 항이 없는 형태여야 합니다. 그러므로 새로운 변수를 사용하여 비제차 항을 제거합니다.

3.1. 새로운 변수의 도입

우리는 새로운 변수 $u(t)$를 다음과 같이 정의할 수 있습니다:

$$S(t) = u(t) + 1000$$

여기서1000은 원래 방정식의 상수해 $S_p = 1000$입니다.

미분해보면$\frac{dS}{dt} = \frac{du}{dt}$

원래 방정식에 이 값을 대입하면

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{100}(u + 1000) = 10$$

즉,

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{100}u = 0$$

이 식은 이제 **완전 상미분방정식**의 형태입니다.

4. 완전 상미분방정식의 검증

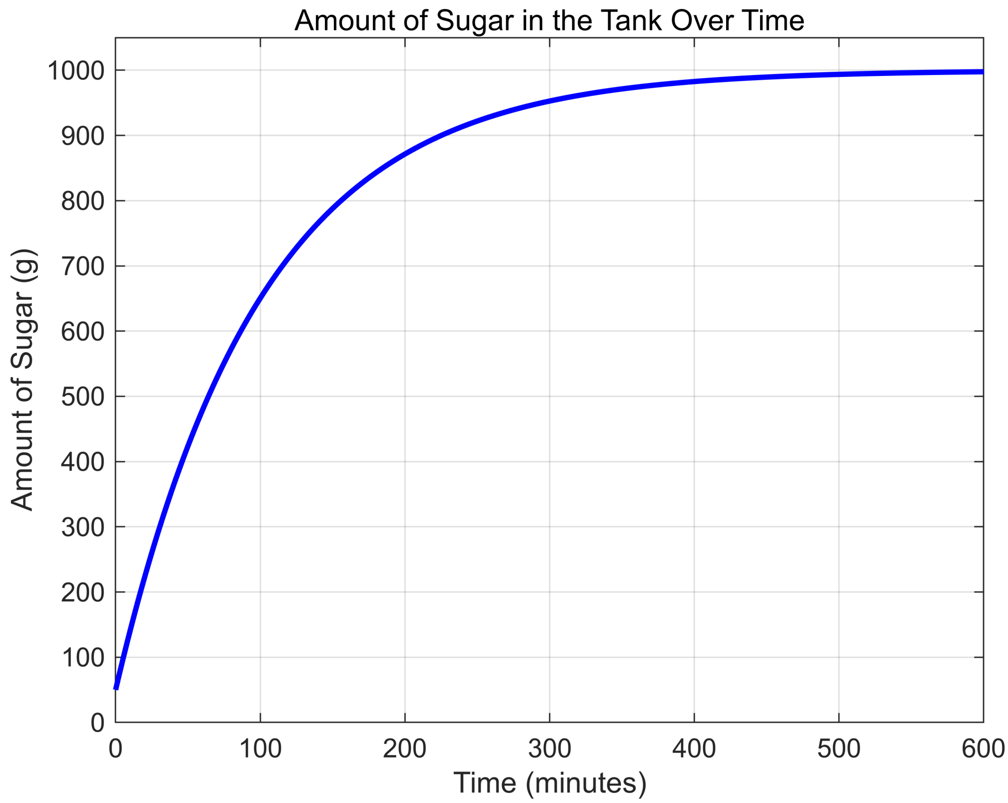
변환된 식

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{100}u = 0$$

이 형태의 미분방정식은 완전 상미분방정식의 조건을 만족합니다. 따라서, 이 변환을 통해 주어진 문제를 완전 상미분방정식의 형태로 만들 수 있습니다.

```
% 매개변수 설정
t = linspace(0, 600, 1000);  % 시간 범위: 0에서 600분 (10시간까지), 점 개수는 1000개로 설정
S = 1000 - 950 * exp(-t / 100);  % 일반해 식

% 그래프 그리기
figure;
plot(t, S, 'b-', 'LineWidth', 2);
xlabel('Time (minutes)');
ylabel('Amount of Sugar (g)');
title('Amount of Sugar in the Tank Over Time');
grid on;
xlim([0, 600]);  % x축 범위 설정
ylim([0, 1050]); % y축 범위 설정
```



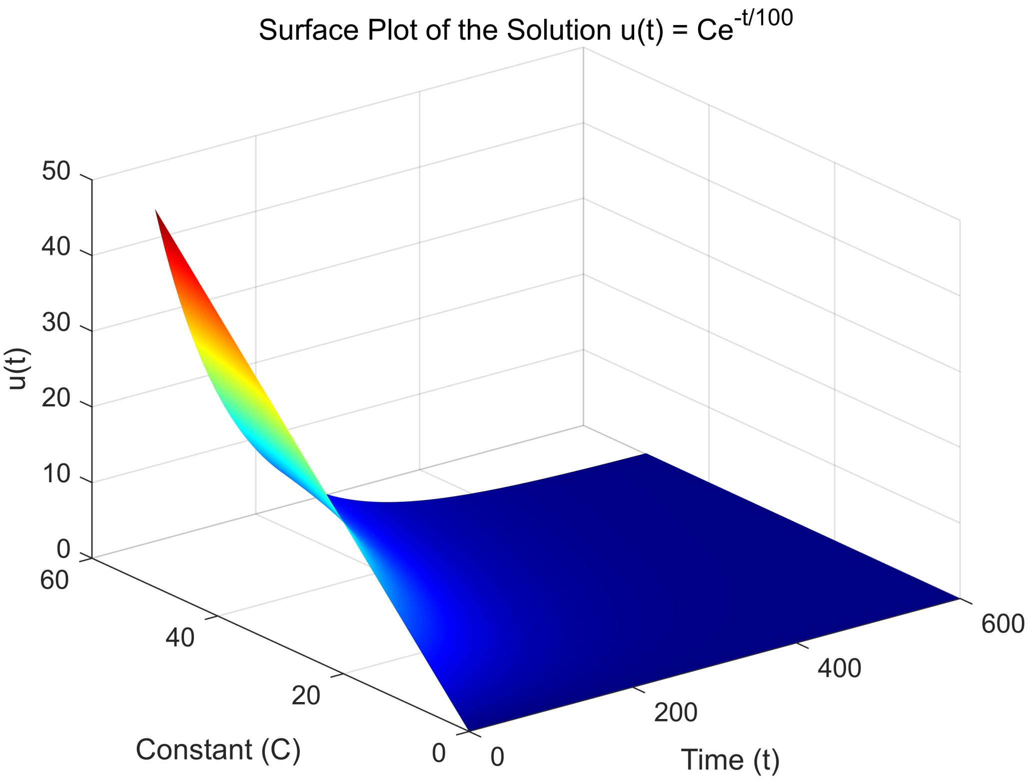
시간 $t \to \infty$일 때, 설탕의 양은 1000g에 가까워지며 거의 변화가 없어집니다. 이 상태를 **평형 상태**라고 합니다.

```
% 시간 범위 및 상수 범위 설정
t = linspace(0, 600, 100);    % 시간 t의 범위: 0에서 600까지 (단위: 초)
C = linspace(0, 50, 100);     % 상수 C의 범위: 0에서 50까지

% 그리드 생성
[T, C_grid] = meshgrid(t, C);  % T와 C의 그리드 생성

% 일반해 계산
U = C_grid .* exp(-T / 100);   % u(t) = C * exp(-t/100)

% Surface Plot 그리기
figure;
surf(T, C_grid, U);
xlabel('Time (t)');
ylabel('Constant (C)');
zlabel('u(t)');
title('Surface Plot of the Solution u(t) = Ce^{-t/100}');
colormap jet;
shading interp;
grid on;
```



이 그래프는 시스템이 시간이 지남에 따라 어떻게 안정화되는지를 보여줍니다. 초기값이 다르더라도, 미분방정식이 지수적으로 감쇠하는 시스템을 나타낸다는 것을 의미합니다. 즉, 시간이 지남에 따라 $u(t)$는 지속적으로 감소하고, 결국 0에 수렴하는 것을 보여줍니다.