개요

1. 형태

- **방정식 형태**:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

- y'': y의 두 번째 미분
- $p(x)$, $q(x)$: 미분 방정식의 계수로, 함수 x의 함수입니다.
- $r(x)$: 입력 함수(우변의 함수)
- $y(x)$: 출력 함수(해를 구해야 하는 함수)
- **차수와 선형성**:
- y와 y'의 차수는 각각 1차와 2차입니다.
- 차수가 1, 2인 도함수의 조합이 있을 때, 이 방정식은 **선형**이라 합니다.
- 그렇지 않은 경우, 즉 비선형성이 포함된 경우에는 **비선형 방정식**이라 합니다.

2. 종류

- **제차 (Homogeneous)**:
- 방정식의 형태:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

- 이 경우 $r(x) = 0$일 때, 즉 우변이 0인 경우를 제차 방정식이라고 합니다.
- **해의 구조**: 제차 방정식의 해는 일반적으로 특성 방정식을 통해 구합니다.
- **비제차 (Nonhomogeneous)**:
- 방정식의 형태:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

- 이 경우 $r(x) \neq 0$일 때, 즉 우변이 0이 아닌 경우를 비제차 방정식이라고 합니다.
- **해의 구조**: 비제차 방정식의 해는 제차 방정식의 해에 특정 해(특별한 해)를 추가하여 구할 수 있습니다.

방정식의 해 구하기

1. 제차 방정식 해 구하기:

- 특성 방정식 $r^2 + p(x)r + q(x) = 0$을 설정합니다.
- 근의 성질에 따라 해의 형태가 결정됩니다(실수 해, 복소수 해 등).

2. 비제차 방정식 해 구하기:

- 먼저 제차 방정식의 일반 해 y_h를 구합니다.
- 이후 비제차 항에 대한 특정 해 y_p를 찾아 $y = y_h + y_p$로 전체 해를 구합니다.

예시

- **제차 방정식 예시:**
- $y'' + 3y' + 2y = 0$
- 특성 방정식: $r^2 + 3r + 2 = 0$의 근을 구하여 $r = -1, -2$인 경우, 해는 $y_h = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t}$입니다.
- **비제차 방정식 예시:**
- $y'' + 3y' + 2y = e^{2x}$
- 제차 해 y_h를 구한 후, y_p는 특정 해를 찾아 $y = y_h + y_p$ 형태로 구합니다.

3. 해의 개념

- **열린 구간**에서 $h(x)$가 정의됩니다.
- **구간의 두 번 미분 가능:** $h(x)$가 해당 구간 내에서 두 번 미분이 가능하다는 것을 의미합니다. 이는 해의 부드러움과 연속성을 나타냅니다.
- **원식에 대입할 때 미분방정식의 항등식:**
- $h(x)$는 미분방정식의 해가 되어야 합니다.
- 이는 해당 해가 미분방정식을 만족해야 함을 의미합니다.
- **제차 선형 상미분방정식에서의 해:**
- 제차 선형 상미분방정식은 열린 구간 내에서 해가 존재함을 보장합니다.
- **두 개 해의 일차결합:**
- 두 개의 해 $h_1(x)$와 $h_2(x)$가 있을 때, 이들의 일차결합인 $C_1h_1(x) + C_2h_2(x)$ 형태로도 해가 됩니다.
- 여기서 C_1과 C_2는 임의의 상수입니다.

4. 초기값 문제

- **초기값 문제의 정의:**
- 다음 두 개의 초기 조건을 만족하는 해를 찾는 문제: $y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$
- 여기서 K_0와 K_1은 주어진 상수입니다.
- **특수해:**
- 위의 초기 조건을 만족하는 해를 **특수해**라고 합니다.
- 이 문제는 주어진 초기 조건을 만족하는 해를 찾는 것으로, 일반적인 해에서 특정 상수 값을 조정하여 얻습니다.

상수계수 경우

1. 형태

- **제차 선형 상미분방정식**의 일반적인 형태는 다음과 같습니다: $y'' + ay' + by = 0$
- 여기서 a와 b는 상수입니다.
- 이 방정식은 두 번째 미분 y''와 첫 번째 미분 y' 그리고 함수 y의 선형 조합으로 구성되어 있습니다.

2. 특성방정식 **(Characteristic Equation)**

- **특성방정식의 정의**: $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$
- 이 방정식은 주어진 제차 선형 상미분방정식의 해를 구하기 위해 유도됩니다.
- **해를 $y = e^{\lambda x}$로 가정**:
- y를 $e^{\lambda x}$ 형태로 가정하여 미분방정식에 대입합니다.
- 그 결과 방정식이 특성방정식으로 변환됩니다.

3. 특성방정식 해

- 특성방정식의 해는 다음과 같이 주어집니다:

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

- **해의 종류**:
- **실수 해**: $a^2 - 4b > 0$인 경우 두 개의 서로 다른 실수 해가 존재합니다.
- **중복 해**: $a^2 - 4b = 0$인 경우 중복된 실수 해가 존재합니다.
- **복소수 해**: $a^2 - 4b < 0$인 경우 복소수 해가 존재합니다.

4. 특성방정식의 근이 두 실근인 경우

- **조건**: 두 실근 $a^2 - 4b > 0$
- 이 조건은 특성방정식이 두 개의 서로 다른 실수 해를 가진다는 것을 의미합니다.
- **근의 형태**:
- 두 개의 근은 다음과 같이 주어집니다:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

- 여기서 λ_1과 λ_2는 특성방정식의 두 해입니다.
- **일반 해**:
- 일반 해는 두 해의 선형 조합으로 표현할 수 있습니다:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

- 여기서 c_1과 c_2는 임의의 상수입니다.

예제

- **예제 방정식:** $y'' + y' - 6 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2$
- **해:**
- 이 방정식의 해는 다음과 같습니다:

$$y(x) = \frac{4}{5}e^{-3x} + \frac{1}{5}e^{2x}$$

```
% 매개변수 설정
a = 1; % 상수 a
b = -6; % 상수 b

% 특성 방정식의 해 계산
lambda1 = (-a + sqrt(a^2 - 4*b)) / 2;
lambda2 = (-a - sqrt(a^2 - 4*b)) / 2;

% 결과 출력
fprintf('특성 방정식의 해:\n');
```

```
특성 방정식의 해:
```

```
fprintf('lambda1 = %.2f\n', lambda1);
```

```
lambda1 = 2.00
```

```
fprintf('lambda2 = %.2f\n\n', lambda2);
```

```
lambda2 = -3.00
```

```

% 일반 해의 형태
syms c1 c2 x;
y_general = c1 * exp(lambda1 * x) + c2 * exp(lambda2 * x);

% 초기 조건
% y(0) = 1
% y'(0) = -2

% y를 c1, c2에 대해 미분
y_prime = diff(y_general, x);

% 초기 조건 대입
eq1 = subs(y_general, x, 0) == 1; % y(0) = 1
eq2 = subs(y_prime, x, 0) == -2; % y'(0) = -2

% 방정식 시스템 설정
[sol_c1, sol_c2] = solve([eq1, eq2], [c1, c2]);

% 특정 해 구하기
y_specific = subs(y_general, {c1, c2}, {sol_c1, sol_c2});
```

```
% 결과 출력
fprintf('특정 해: y(x) = %.2f * e^(%.2f * x) + %.2f * e^(%.2f * x)\n', ...
        double(sol_c1), double(lambda1), double(sol_c2), double(lambda2));
```

```
특정 해: y(x) = 0.20 * e^(2.00 * x) + 0.80 * e^(-3.00 * x)
```

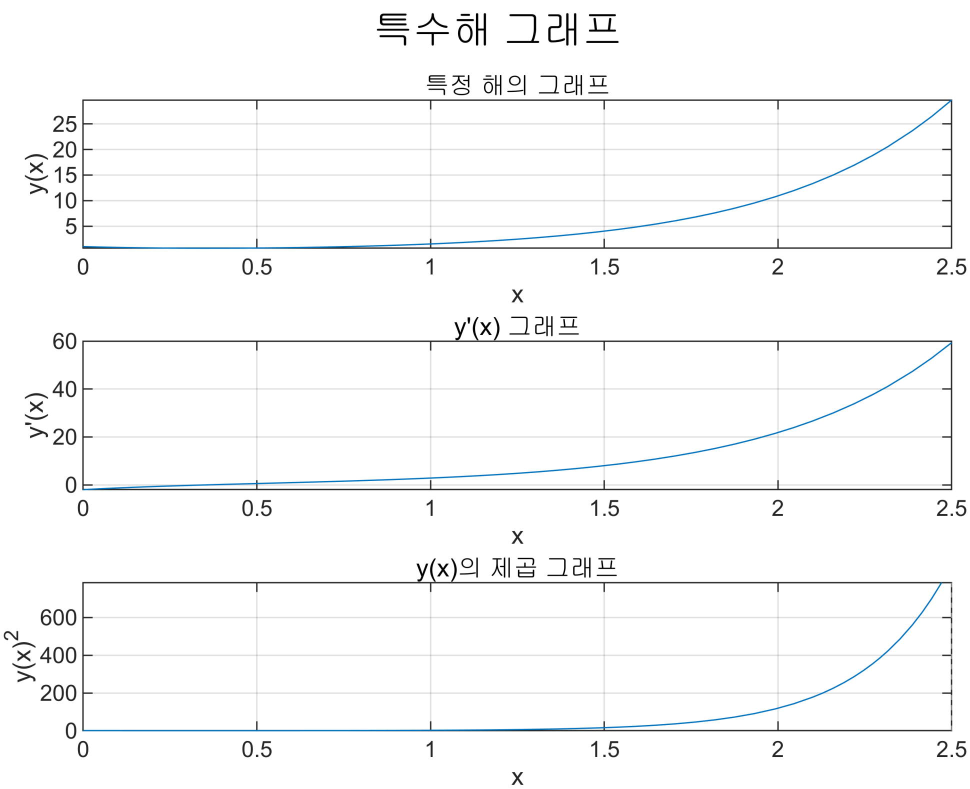
```
% 그래프 그리기
figure;

% 원래 그래프
subplot(3,1,1);
fplot(y_specific, [0, 2.5]);
title('특정 해의 그래프');
xlabel('x');
ylabel('y(x)');
grid on;

% 해의 미분 그래프
subplot(3,1,2);
y_derivative = diff(y_specific, x);
fplot(y_derivative, [0, 2.5]);
title('y''(x) 그래프');
xlabel('x');
ylabel('y''(x)');
grid on;

% 해의 제곱 그래프
subplot(3,1,3);
fplot(y_specific^2, [0, 2.5]);
title('y(x)의 제곱 그래프');
xlabel('x');
ylabel('y(x)^2');
grid on;

% 전체 레이아웃 조정
sgtitle('특수해 그래프');
```



두 해의 구조 비교

1. **첫 번째 해:** $y(x) = 0.20e^{2.00x} + 0.80e^{-3.00x}$

- 여기서 $c_1 = 0.20, c_2 = 0.80$입니다.

1. **두 번째 해:** $y(x) = \frac{5}{4}e^{-3x} + \frac{5}{1}e^{2x}$

- 여기서 $c_1 = \frac{5}{1} = 5, c_2 = \frac{5}{4}$입니다.

해의 표현 차이

- 두 해는 기본적인 구조는 같지만, 상수 c_1과 c_2의 값이 다르기 때문에 다른 형태로 보일 수 있습니다.
- **상수의 배수 관계:**
- 첫 번째 해에서 c_1과 c_2의 합이 1로 주어졌다면, 두 번째 해의 상수들은 비율로 표현되고 다르게 나타날 수 있습니다.
- 예를 들어, 두 번째 해를 보았을 때, $c_1 = 5$와 $c_2 = \frac{5}{4}$는 비율에 따라 조정된 것이며, 이 값들을 적절히 조정하면 첫 번째 해와 일치할 수 있습니다.

해를 일치시키기

- 두 해를 비교하기 위해, 각 해를 동일한 형태로 변환할 수 있습니다.
- 예를 들어, 두 번째 해에서 5를 전체 해에서 나누면 $5\left(e^{2x}+\frac{1}{4}e^{-3x}\right)$로 바꿀 수 있습니다.

위의 서로 다른 두 실근의 증명과정

선형 미분 방정식은 **superposition principle(중첩 원리)**를 따릅니다. 즉, 두 개의 해를 더한 것도 원래 방정식의 해가 됩니다.

특성 방정식의 해가 서로 다른 두 실근 λ_1과 λ_2인 경우, 각 해는 다음과 같이 나타납니다:$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}$

선형 결합의 필요성

- **일반 해의 필요성**:
- 특정 미분 방정식에 대해 하나의 해만으로는 모든 초기 조건을 만족하는 해를 찾는 데 한계가 있습니다.
- 서로 다른 두 해가 있기 때문에, 이 두 해의 **선형 결합**으로 해를 표현해야 합니다.

선형 조합의 의미

- y_1과 y_2는 서로 다른 방향으로 증가 또는 감소하는 지수 함수입니다.
- 이 두 해의 조합은 새로운 해를 생성할 수 있습니다.
- 즉, C_1과 C_2는 적분 상수이며, 이들은 각 해의 기여도를 조절하는 역할을 합니다. 다양한 C_1과 C_2 값을 사용하여 미분 방정식의 모든 가능한 해를 얻을 수 있습니다.

해의 유도 과정

- **중첩 원리에 따라**:
- 만약 y_1과 y_2가 모두 이 방정식의 해라면, $y = C_1y_1 + C_2y_2$도 방정식의 해입니다. 이는 다음과 같이 표현됩니다:

$$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$$

- 이 식은 주어진 미분 방정식이 선형적이기 때문에 성립합니다.

중첩 원리의 증명 과정

1. 선형성의 정의

중첩 원리를 증명하기 위해 먼저 선형 시스템의 정의를 명확히 하겠습니다.

- **선형 시스템**: 시스템이 선형일 때, 다음의 두 조건을 만족해야 합니다:

1. 동차성 (Homogeneity):

$$\text{If } y = T(x) \text{ then } T(kx) = kT(x) \text{ for any scalar } k.$$

- 즉, 입력 x의 스칼라 배수 kx를 주었을 때, 출력도 같은 스칼라 k로 배수됩니다.

1. 가법성 (Additivity):

$$T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2).$$

- 즉, 두 입력 x_1과 x_2를 주었을 때, 시스템의 출력은 각 입력의 출력의 합이 됩니다.

2. 중첩 원리의 증명

- **입력 x_1과 x_2에 대한 출력**:
- 입력 x_1에 대한 출력은 다음과 같습니다:

$$y_1 = T(x_1)$$

- 입력 x_2에 대한 출력은 다음과 같습니다:

$$y_2 = T(x_2)$$

- **입력 $x_1 + x_2$에 대한 출력**:
- 가법성을 사용하여 두 입력의 합을 계산합니다:

$$T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$$

$$T(x_1 + x_2) = y_1 + y_2$$

- **입력 kx에 대한 출력**:
- 동차성을 사용하여 스칼라 배수를 고려합니다:

$$T(kx) = kT(x) \text{ for any scalar } k.$$

- **결과**:
- 따라서, 위의 두 조건을 결합하면:

$$T(x_1 + x_2) = y_1 + y_2$$

- 이는 중첩 원리가 성립함을 의미합니다. 즉, 선형 시스템에서 두 개의 입력에 대한 출력은 각 입력에 대한 출력을 합친 것과 같다는 것을 보여줍니다.

5. 특성 방정식의 근이 이중근인 경우

- **조건**: 이중근 $a^2 - 4b = 0$
- 이 경우, 특성 방정식은 중복된 두 근을 갖게 됩니다. 이 중복된 근은 동일한 값을 가지므로 해의 형태가 다르게 나타납니다.

해의 형태

- **일반 해**:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{-\frac{a}{2}x}$$

- 여기서 C_1과 C_2는 임의의 상수입니다.
- $e^{-\frac{a}{2}x}$는 이중근에 해당하는 해의 공통 부분입니다.
- **차수축소법**:
- $y_2 = uy_1$의 형태로 y_2를 정의하고, 이를 원식에 대입하여 정리합니다. 이 방법은 이중근의 경우에 적용하여 새로운 해를 유도하는 데 사용됩니다.

예시 방정식

- **예제 방정식**: $y'' - 2y' + 1 = 0$
- **해**:
- 이 방정식의 해는 다음과 같이 주어집니다:

- 풀이 :

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0\,, \quad \lambda = 1 \ \text{ 이므로}$$

$$y_1(x) = e^x \ , \ y_2(x) = x \cdot e^x \ \text{ 이므로}$$

$$y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x \cdot e^x$$

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^x$$

일반해 유도과정

1. 특성 방정식

2계 선형 상미분방정식의 특성 방정식은 다음과 같습니다:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

2. 이중근의 조건

이중근이 성립하기 위한 조건은 다음과 같습니다:

$$a^2 - 4b = 0$$

이 식을 변형하면 b를 다음과 같이 표현할 수 있습니다:

$$b = \frac{a^2}{4}$$

3. 특성 방정식 해 구하기

이제 특성 방정식 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$에 위에서 찾은 b 값을 대입하겠습니다:

$$\lambda^2 + a\lambda + \frac{a^2}{4} = 0$$

이제 이 방정식을 풀어보겠습니다. 이를 일반적인 이차 방정식의 근의 공식을 사용하여 해를 구할 수 있습니다. 이차 방정식의 해는 다음과 같습니다:

$$\lambda = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

여기서 $A = 1, B = a, C = \frac{a^2}{4}$입니다. 그러므로:

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{a^2}{4}}}{2 \cdot 1}$$

4. 판별식 계산

판별식 $B^2 - 4AC$을 계산하면:

$$a^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{a^2}{4} = a^2 - a^2 = 0$$

따라서, 판별식이 0이므로 중복된 근이 존재합니다. 이때 해는 다음과 같이 됩니다:

$$\lambda = \frac{-a}{2}$$

5. 일반 해의 형태

이중근이 있는 경우, 일반 해는 다음과 같은 형태로 주어집니다:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x}$$

여기서 λ는 특성 방정식의 중복된 해입니다.

- C_1과 C_2는 적분 상수입니다.
- x 항이 추가된 이유는 중복된 해를 고려한 것으로, 미분 시 새로운 해를 생성하는 역할을 합니다.

6. 해의 유도

- $y_1 = e^{\lambda x}$를 첫 번째 해로 하고, 두 번째 해를 $y_2 = uy_1$ 형태로 가정합니다.
- 여기서 u는 새로운 함수입니다.

7.1 y_1의 유도

$y_1 = e^{-\frac{a}{2}x}$

7.2 두 번째 해 y_2의 유도

$$y_2 = uy_1 = ue^{-\frac{a}{2}x}$$

- 이 식을 원래 방정식에 대입하여 u를 찾아야 합니다.
- y_2를 미분하면:

$$y_2' = u'e^{-\frac{a}{2}x} + u\left(-\frac{a}{2}e^{-\frac{a}{2}x}\right)$$

$$y_2'' = u''e^{-\frac{a}{2}x} + u'\left(-\frac{a}{2}e^{-\frac{a}{2}x}\right) + u'\left(-\frac{a}{2}e^{-\frac{a}{2}x}\right) + u\left(\frac{a^2}{4}e^{-\frac{a}{2}x}\right)$$

이러한 과정을 통해 두 번째 해를 찾게 됩니다.

8. 일반 해

최종적으로, 일반 해는 다음과 같은 형태로 표현됩니다:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{-\frac{a}{2}x}$$

여기서 C_1과 C_2는 초기 조건에 따라 결정되는 상수입니다.

(심화) 이중근 형태 유도

1. 선형 미분 방정식의 해

2계 선형 상미분방정식의 일반적인 형태는 다음과 같습니다:

$$y'' + ay' + by = 0$$

이 방정식의 특성 방정식은 다음과 같습니다:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

2. 특성 방정식의 해

- 특성 방정식의 해는 다음과 같이 구할 수 있습니다:

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

3. 해의 종류

1. 서로 다른 두 실근:

- $a^2 - 4b > 0$인 경우 두 개의 서로 다른 해가 존재합니다.
- 해의 형태는: $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

1. 이중근:

- $a^2 - 4b = 0$인 경우 이중근이 발생합니다.
- 해의 형태는: $y = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x}$
- 여기서 $\lambda = \frac{-a}{2}$입니다.

4. 이중근의 경우 해의 독립성 증명

이중근의 경우, 해의 독립성을 증명하기 위해서는 다음의 점을 확인해야 합니다:

- 두 개의 해가 **선형 독립**인지 확인하는 것입니다.
- 선형 독립성은 Wronskian 행렬을 통해 검증할 수 있습니다.

Wronskian을 통한 독립성 검증

주어진 두 해 y_1과 y_2에 대해 Wronskian을 계산합니다:

$$W(y_1, y_2) = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{bmatrix} = y_1 y'_2 - y_2 y'_1$$

이 경우:

- $y_1 = e^{\lambda x}$
- $y_2 = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x}$

1. 첫 번째 해의 도함수:

- $y'_1 = \lambda e^{\lambda x}$

1. 두 번째 해의 도함수:

- $y'_2 = C_2 e^{\lambda x} + (C_1 + C_2 x)\lambda e^{\lambda x}$

Wronskian의 계산

$$W(y_1, y_2) = \begin{bmatrix} e^{\lambda x} & (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & (C_2 + \lambda(C_1 + C_2 x))e^{\lambda x} \end{bmatrix}$$

- Wronskian의 값을 계산하면:

$$W(y_1, y_2) = e^{\lambda x}\Big((C_1 + C_2 x)(\lambda e^{\lambda x}) - e^{\lambda x}(C_2 + \lambda(C_1 + C_2 x))\Big)$$

이 Wronskian의 값이 0이 아니면 두 해는 선형 독립입니다. 이중근이 발생하는 경우, C_2가 존재하므로 x가 포함된 해는 독립적입니다.

선형 독립성과 선형 종속성

1. 선형 독립 **(Linear Independence)**

- **정의**: 벡터(또는 함수) 집합이 선형 독립이라고 할 때, 이 집합의 벡터들 중 어떤 벡터도 나머지 벡터들의 선형 조합으로 표현할 수 없는 경우를 말합니다.
- **수학적 표현**:
- 벡터 $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$가 주어졌을 때, 이들이 선형 독립이라면 다음 조건을 만족해야 합니다:

$$c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + \cdots + c_n\mathbf{v_n} = 0$$

이 때, 모든 계수 $c_1, c_2, \ldots, c_n$가 **0**이어야 합니다. 즉, 유일한 해가 존재합니다.

- **의미**: 선형 독립인 벡터 집합은 서로 다른 방향을 가리키며, 해당 집합의 벡터들이 어떤 조합으로도 다른 벡터를 생성할 수 없다는 것을 의미합니다.

2. 선형 종속 **(Linear Dependence)**

- **정의**: 벡터(또는 함수) 집합이 선형 종속이라고 할 때, 이 집합의 벡터들 중 적어도 하나는 다른 벡터들의 선형 조합으로 표현될 수 있는 경우를 말합니다.
- **수학적 표현**:
- 벡터 $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$가 선형 종속이라면 다음과 같은 비영렬 해가 존재합니다:

$$c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + \cdots + c_n\mathbf{v_n} = 0$$

이때, 최소한 하나의 계수 c_i가 0이 아닌 경우가 있습니다.

- **의미**: 선형 종속인 벡터 집합은 서로 겹치는 방향을 가지며, 한 벡터가 다른 벡터들의 조합으로 표현될 수 있음을 의미합니다.

차수 축소법**(Reduction of Order)**의 적용과정

1. 문제 설정

주어진 2계 선형 상미분방정식의 일반적인 형태는 다음과 같습니다:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

여기서 $p(x)$와 $q(x)$는 x에 대한 함수입니다. 이 방정식의 한 해를 y_1이라고 가정합시다.

2. 두 번째 해의 가정

두 번째 해 y_2를 다음과 같이 가정합니다:

$$y_2 = u(x)y_1$$

여기서 $u(x)$는 찾고자 하는 함수입니다. 이 가정은 두 번째 해가 첫 번째 해의 함수로 구성되어 있다는 것을 의미합니다.

3. 미분

가정한 두 번째 해 y_2를 미분합니다:

1. 첫 번째 미분:

$$y_2' = u'y_1 + uy_1'$$

1. 두 번째 미분:

$$y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$$

4. 원래 방정식에 대입

위에서 구한 y_2, y_2', y_2''를 원래 방정식에 대입합니다:

$$u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' + p(x)(u'y_1 + uy_1') + q(x)(uy_1) = 0$$

5. 정리

이제 이 식을 정리합니다. y_1이 0이 아닌 해이기 때문에, 다음과 같이 나눌 수 있습니다:

1. y_1 항을 정리:

- y_1의 계수들을 모은 후, 나머지 항을 정리합니다. 이를 통해 y_1이 포함된 항을 제거하고 u와 관련된 항만 남게 됩니다.

1. 항 정리 후:

$$u'' + (2\frac{y_1'}{y_1} + p(x))u' = 0$$

- 이 결과는 u에 대한 1계 미분 방정식입니다.

6. 1계 미분 방정식 해결

위에서 유도한 1계 미분 방정식:

$$u'' + (2\frac{y_1'}{y_1} + p(x))u' = 0$$

- 이 식을 해결하여 u'를 구할 수 있습니다.
- 그런 다음 u를 적분하여 $u(x)$를 얻습니다.

7. 최종 해의 구하기

- $u(x)$를 구한 후, 두 번째 해 y_2를 다음과 같이 구할 수 있습니다:

$$y_2 = u(x)y_1$$

적용 범위

1. 2계 선형 상미분방정식에서의 적용

- **주요 적용 분야:**
- 차수 축소법은 2계 선형 상미분방정식에서 주로 사용되며, 이미 알고 있는 한 해를 사용하여 두 번째 해를 찾는 데 유용합니다.
- 이 경우, 해가 독립적일 때(예: 두 해가 서로 다른 경우)와 이중근이 존재할 때 모두 적용할 수 있습니다.

2. 고차 선형 미분방정식에서의 적용

- **고차 선형 미분방정식:**
- 차수 축소법은 고차 선형 미분방정식에서도 사용될 수 있습니다. 예를 들어, 3계 또는 4계 선형 상미분방정식에서도 적용할 수 있습니다.
- **일반적인 형태:**
- 고차 선형 미분방정식의 경우에도 알고 있는 해를 기반으로 새로운 해를 찾기 위해 차수 축소법을 사용할 수 있습니다.
- 예를 들어, 3계 미분방정식 $y^{(3)} + p(x)y' + q(x)y = 0$의 경우, 이미 알고 있는 하나의 해 y_1을 알고 있을 때, 차수 축소법을 사용하여 두 번째 해 y_2를 다음과 같이 유도할 수 있습니다: $y_2 = uy_1$

3. 비선형 미분방정식에서의 적용

- **비선형 미분방정식:**
- 차수 축소법은 비선형 미분방정식에서는 일반적으로 적용되지 않지만, 특정 경우에는 사용될 수 있습니다.
- 비선형 방정식의 경우 해의 구조가 복잡해지기 때문에 해를 구하기가 더 어려울 수 있습니다.

방정식

주어진 방정식은 다음과 같습니다:

$$y'' + 4y' + 4 = 0$$

초기 조건

- $y(0) = 1$
- $y'(0) = -3$

1. 특성 방정식 구하기

$$\lambda 2 + 4\lambda + 4 = 0$$

2. 특성 방정식의 해 구하기

이 방정식을 인수분해합니다:

$$(\lambda + 2)^2 = 0$$

따라서, 중복근 $\lambda = -2$를 얻습니다.

3. 일반 해 구하기

이중근이 있으므로, 일반 해는 다음과 같은 형태로 주어집니다:

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$$

4. 초기 조건을 이용하여 상수 구하기

주어진 초기 조건을 사용하여 C_1과 C_2를 구합니다.

4.1 $y(0) = 1$

$$y(0) = (C_1 + C_2 \cdot 0)e^{-2 \cdot 0} = C_1 = 1$$

4.2 $y'(0) = -3$

먼저 $y'(x)$를 구합니다:

$$y'(x) = \frac{d}{dx}\left((C_1 + C_2 x)e^{-2x}\right)$$

- 곱의 미분법을 사용합니다:

$$y' = (C_2)e^{-2x} + (C_1 + C_2 x)(-2e^{-2x})$$

$$= e^{-2x}(C_2 - 2C_1 - 2C_2 x)$$

이제 $y'(0)$을 구합니다:

$$y'(0) = e^0(C_2 - 2C_1) = C_2 - 2C_1$$

이 식에 $y'(0) = -3$을 대입하면:

$$C_2 - 2 \cdot 1 = -3$$

따라서,

$$C_2 = -3 + 2 = -1$$

5. 최종 해 구하기

최종적으로, C_1과 C_2의 값을 대입하면:

$$y(x) = (1 - x)e^{-2x}$$

결론

따라서 주어진 방정식의 해는 다음과 같습니다:

$$y(x) = (1 - x)e^{-2x}$$

```
% 매개변수 설정
syms y(x)

% 방정식 정의
Dy = diff(y, x); % y'의 정의
D2y = diff(Dy, x); % y''의 정의

% 방정식 설정
ode = D2y + 4*Dy + 4 == 0;

% 일반 해 구하기
yGeneral = dsolve(ode);

% 초기 조건을 위한 함수 정의
cond1 = y(0) == 1;   % y(0) = 1
cond2 = subs(diff(y, x), x, 0) == -3; % y'(0) = -3

% 초기 조건을 포함하여 해를 구하기
ySolution = dsolve(ode, [cond1, cond2]);

% 결과 출력
disp('방정식의 해는:');
```

```
방정식의 해는:
```

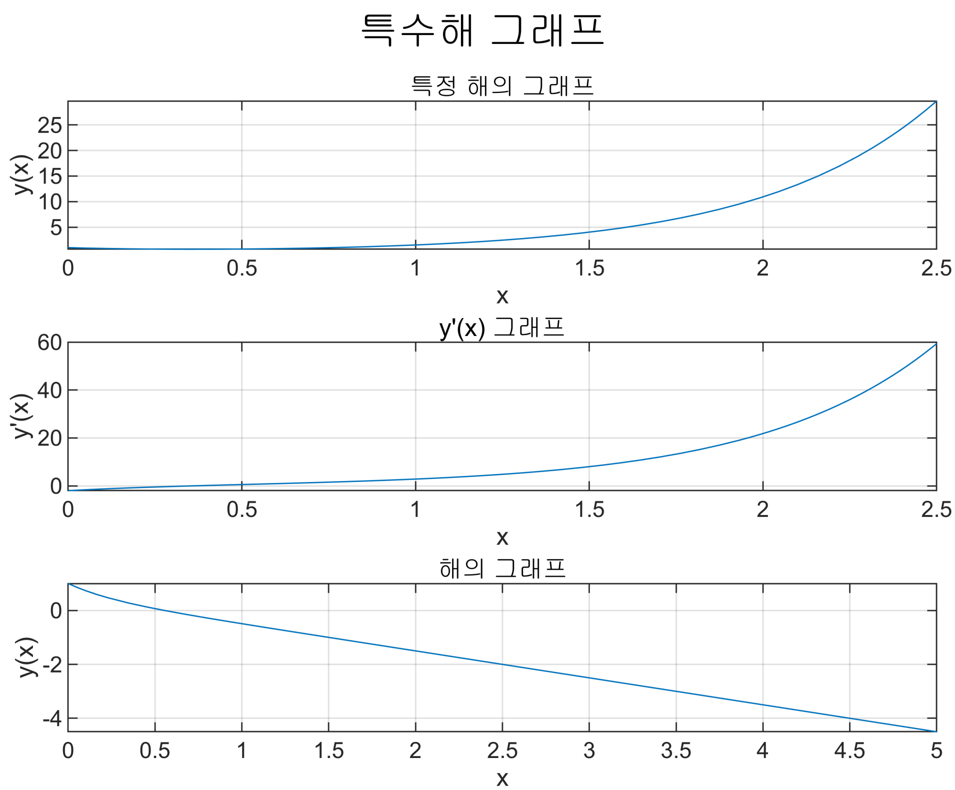
```
pretty(ySolution)
```

```
exp(-4 x)         1
--------- - x + -
    2             2
```

```

% 해의 그래프 그리기
fplot(ySolution, [0, 5]); % 0부터 5까지의 범위
```

```
title('해의 그래프');
xlabel('x');
ylabel('y(x)');
grid on;
```



1. 방정식

주어진 방정식은 다음과 같습니다:

$$y'' + 4y' + 4 = 0$$

2. 해의 형태

주어진 해를 정리하면:

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{-4x} - x + \frac{1}{2}$$

3. 해의 미분

해의 도함수를 구해보겠습니다.

- **1**차 미분:

$$y'(x) = -2e^{-4x} - 1$$

- **2**차 미분:

$$y''(x) = 8e^{-4x}$$

4. 방정식에 대입하기

이제 미분한 값을 원래 방정식에 대입합니다:

$$y'' + 4y' + 4 = 0$$

대입하면:

$$8e^{-4x} + 4(-2e^{-4x} - 1) + 4 = 0$$

5. 정리

이 식을 정리하면:

$$8e^{-4x} - 8e^{-4x} - 4 + 4 = 0$$

이 결과는 항상 0이 됩니다.

6. 초기 조건 확인

이제 주어진 초기 조건을 확인하겠습니다:

1. $y(0) = 1$:

$$y(0) = \frac{1}{2}e^{0} - 0 + \frac{1}{2} = 1$$

- 초기 조건 $y(0) = 1$이 만족됩니다.

1. $y'(0) = -3$:

$$y'(0) = -2e^{0} - 1 = -2 - 1 = -3$$

- 초기 조건 y′(0)=−3y'(0) = -3y′(0)=−3도 만족됩니다.

결론

주어진 해:

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{-4x} - x + \frac{1}{2}$$

은 주어진 방정식과 초기 조건을 모두 만족합니다. 따라서 이 해는 맞습니다.

주어진 두 해의 형태가 다른 이유

1. 방정식의 해 구조

2계 선형 상미분방정식의 일반 해는 다음과 같은 형태를 가집니다:

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x}$$

여기서 λ는 특성 방정식에서 나온 해입니다. 이 경우, 중복 근이 존재하면 해는

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-\frac{a}{2}x}$$

의 형태로 표현됩니다.

2. 해의 형태가 다른 이유

a. 다항식과 지수 함수

- 첫 번째 해는 특정 상수 C_1과 C_2를 포함하는 지수 함수와 다항식의 조합으로 나타나는 경우입니다.
- 두 번째 해는e^{-4x}와 같은 지수 함수가 포함되어 있으며, 다항식과 상수항을 포함할 수 있습니다.

b. 초기 조건의 차이

- 초기 조건에 따라 해의 상수값이 달라질 수 있습니다. 예를 들어, 동일한 방정식이더라도 초기 조건이 다르면 해의 상수값이 다르게 계산되어 형태가 달라질 수 있습니다.

3. 여러 해의 형태

해의 형태는 다음과 같이 나타날 수 있습니다:

1. 일반 해:

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-\frac{a}{2}x}$$

- 이 형태는 방정식의 일반적인 해이며, 상수 C_1과 C_2는 초기 조건을 통해 결정됩니다.

1. 특정 해:

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{-4x} - x + \frac{1}{2}$$

- 이 해는 특정 상수값이 주어진 초기 조건에 맞춰 결정된 경우입니다. 지수 함수의 계수와 상수 항이 다르게 설정될 수 있습니다.

4. 결론

결국, 두 해의 형태가 다른 이유는 초기 조건에 따라 상수값이 달라지기 때문입니다. 동일한 방정식의 해라도 초기 조건에 따라 여러 형태로 나타날 수 있으며, 이는 지수 함수와 다항식의 조합에 의해 결정됩니다.