완전 상미분방정식인지 확인하는 방법:

1. 미분방정식이 $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$의 형태로 주어졌을 때, $M(x, y)$와 $N(x, y)$를 각각 x와 y에 대해 편미분합니다.
2. 완전 상미분방정식의 조건은 $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$�이므로, 이 조건을 만족하는지 확인합니다.

```
% MATLAB 코드: 완전 상미분방정식 확인

% 심볼릭 변수 정의
syms x y

% M(x, y)와 N(x, y) 정의
M = -y;
N = x;

% M을 y에 대해 편미분
dM_dy = diff(M, y);

% N을 x에 대해 편미분
dN_dx = diff(N, x);

% 편미분 비교
if simplify(dM_dy - dN_dx) == 0
    disp('이 방정식은 완전 상미분방정식입니다.');
else
    disp('이 방정식은 완전 상미분방정식이 아닙니다.');
end
```

```
이 방정식은 완전 상미분방정식이 아닙니다.
```

문제**1**

MATLAB에서 적분인자 찾기

예제 미분방정식

다음과 같은 미분방정식이 있다고 가정합니다:

$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$

예를 들어:

$(2xy + y^2)\,dx + (x^2 + 2xy)\,dy = 0$

MATLAB 코드를 통한 적분인자 찾기

1. **심볼릭 변수 정의**: 먼저x와 y를 심볼릭 변수로 정의합니다.

2. **적분인자를 찾는 과정**: M과 N을 정의하고, 적분인자를 찾는 데 필요한 편미분을 계산합니다.
3. **조건식 설정**: 적분인자가x나 y에만 의존하는 경우를 가정하여 조건식을 설정하고 풀이합니다.

```
% 심볼릭 변수 정의
syms x y mu(x) mu_y(y)

% 주어진 M(x, y)와 N(x, y)
M = -y;
N = x;

% 1. 적분인자가 x의 함수일 때
% 적분인자 mu(x)와 연관된 편미분 계산
dM_dy = diff(M, y);
dN_dx = diff(N, x);

% 적분인자 찾기
% d(mu*M)/dy - d(mu*N)/dx = 0 이 되는 mu(x)를 찾음
mu_eq_x = diff(mu(x) * M, y) - diff(mu(x) * N, x);

% mu'(x) 찾기
mu_prime_x = simplify(mu_eq_x / M);

% 적분인자 mu(x) 계산
mu_x_sol = dsolve(diff(mu(x), x) == mu_prime_x);

disp('적분인자 mu(x):');
```

적분인자 mu(x):

```
disp(mu_x_sol);
```

$$\frac{C_1}{(x-y)^2}$$

```

% 2. 적분인자가 y의 함수일 때
% d(mu*N)/dx - d(mu*M)/dy = 0 이 되는 mu(y)를 찾음
mu_eq_y = diff(mu_y(y) * N, x) - diff(mu_y(y) * M, y);

% mu'(y) 찾기
mu_prime_y = simplify(mu_eq_y / N);

% 적분인자 mu(y) 계산
mu_y_sol = dsolve(diff(mu_y(y), y) == mu_prime_y);

disp('적분인자 mu(y):');
```

적분인자 mu(y):

```
disp(mu_y_sol);
```

$$\frac{C_1}{(x-y)^2}$$

코드 설명

1. **심볼릭 변수 정의**: `syms`를 사용하여 x와 y를 심볼릭 변수로 정의합니다.
2. **적분인자 가정**: 적분인자를 $\mu(x)$또는 $\mu(y)$로 가정합니다.
3. **편미분 계산**: 적분인자를 곱한 후 편미분을 계산하고, 이를 통해 미분방정식이 완전 상미분방정식이 되도록 하는 조건을 설정합니다.
4. **적분인자 계산**: `dsolve`를 사용하여 미분방정식을 풀고, 적분인자를 계산합니다.

우리의 실습에서는 적분인자는 $\frac{1}{x^2}$ 으로 사전에 주어졌었지만, matlab 계산결과 적분인자는 $\frac{C_1}{(x-y)^2}$ 으로 도출되었다. 완전 상미분을 증명하기 때문에 C1은 불필요하며 1로 가정하면되고, 적분인자는 여러개가 나올수 있기 때문에 혹시나 잘못계산한 것인지 오해하지 않아도 된다.

아래는 확인 코드이다.

```
% MATLAB 코드: 완전 상미분방정식 확인

% 심볼릭 변수 정의
syms x y

% M(x, y)와 N(x, y) 정의
M = -y/(x-y)^2;
N = x/(x-y)^2;

% M을 y에 대해 편미분
dM_dy = diff(M, y);

% N을 x에 대해 편미분
dN_dx = diff(N, x);

% 편미분 비교
if simplify(dM_dy - dN_dx) == 0
    disp('이 방정식은 완전 상미분방정식입니다.');
else
    disp('이 방정식은 완전 상미분방정식이 아닙니다.');
end
```

```
이 방정식은 완전 상미분방정식입니다.
```

다음은 $\mathrm{xydx} + (x^2 + 2y^2)\mathrm{dy} = 0$ 에대한 적분인자를 구해보자

1. 완전 상미분 방정식인지 확인하기

```
% MATLAB 코드: 완전 상미분방정식 확인
```

```
% 심볼릭 변수 정의
syms x y

% M(x, y)와 N(x, y) 정의
M = x*y;
N = x^2 + 2*y^2;

% M을 y에 대해 편미분
dM_dy = diff(M, y);

% N을 x에 대해 편미분
dN_dx = diff(N, x);

% 편미분 비교
if simplify(dM_dy - dN_dx) == 0
    disp('이 방정식은 완전 상미분방정식입니다.');
else
    disp('이 방정식은 완전 상미분방정식이 아닙니다.');
end
```

```
이 방정식은 완전 상미분방정식이 아닙니다.
```

2. 적분인자 찾기

```
% 심볼릭 변수 정의
syms x y mu(x) mu_y(y)

% 주어진 M(x, y)와 N(x, y)
M = x*y;
N = x^2 + 2*y^2;

% 1. 적분인자가 x의 함수일 때
% 적분인자 mu(x)와 연관된 편미분 계산
dM_dy = diff(M, y);
dN_dx = diff(N, x);

% 적분인자 찾기
% d(mu*M)/dy - d(mu*N)/dx = 0 이 되는 mu(x)를 찾음
mu_eq_x = diff(mu(x) * M, y) - diff(mu(x) * N, x);

% mu'(x) 찾기
mu_prime_x = simplify(mu_eq_x / M);

% 적분인자 mu(x) 계산
mu_x_sol = dsolve(diff(mu(x), x) == mu_prime_x);

disp('적분인자 mu(x):');
```

```
적분인자 mu(x):
```

```
disp(mu_x_sol);
```

$$C_1\,e^{\frac{\sqrt{7}\,\mathrm{atan}\left(\frac{2\sqrt{7}\,x+\sqrt{7}\,y}{7\,y}\right)}{7}}\over\sqrt{x^2+x\,y+2\,y^2}$$

```
% 2. 적분인자가 y의 함수일 때
% d(mu*N)/dx - d(mu*M)/dy = 0 이 되는 mu(y)를 찾음
mu_eq_y = diff(mu_y(y) * N, x) - diff(mu_y(y) * M, y);

% mu'(y) 찾기
mu_prime_y = simplify(mu_eq_y / N);

% 적분인자 mu(y) 계산
mu_y_sol = dsolve(diff(mu_y(y), y) == mu_prime_y);

disp('적분인자 mu(y):');
```

적분인자 mu(y):

```
disp(mu_y_sol);
```

$$C_1\,e^{\frac{2\sqrt{7}\,\mathrm{atan}\left(\frac{\sqrt{7}}{7}+\frac{4\sqrt{7}\,y}{7\,x}\right)}{7}}$$

```
% 적분인자를 곱한 후 새로운 M과 N
M_new = mu_x_sol * M;
N_new = mu_x_sol * N;

% 편미분 계산
dM_new_dy = diff(M_new, y);
dN_new_dx = diff(N_new, x);

% 완전 상미분방정식 확인
is_exact = simplify(dM_new_dy - dN_new_dx);
if is_exact == 0
    disp('적분인자가 완전 상미분방정식을 만듭니다.');
else
    disp('적분인자가 완전 상미분방정식을 만들지 않습니다.');
end
```

적분인자가 완전 상미분방정식을 만들지 않습니다.

```
% 적분인자를 곱한 후 새로운 M과 N
M_new = mu_y_sol * M;
N_new = mu_y_sol * N;
```

```
% 편미분 계산
dM_new_dy = diff(M_new, y);
dN_new_dx = diff(N_new, x);

% 완전 상미분방정식 확인
is_exact = simplify(dM_new_dy - dN_new_dx);
if is_exact == 0
    disp('적분인자가 완전 상미분방정식을 만듭니다.');
else
    disp('적분인자가 완전 상미분방정식을 만들지 않습니다.');
end
```

```
적분인자가 완전 상미분방정식을 만들지 않습니다.
```

위의 코드처럼 x 혹은 y만의 함수로 가정하고 적분인자를 구하는 코드를 사용하였지만 적분인자를 찾는것에 실패하였습니다.

여러가지 원인이 있을 수 있지만 적분인자가 f(x,y) 로 이루어진 형태이기 때문일 수 있습니다.

아래는 해석적 방법을 사용하였습니다.

```
% 심볼릭 변수 정의
syms x y mu(x, y)

% 주어진 M(x, y)와 N(x, y)
M = x * y;
N = x^2 + 2 * y^2;

% 편미분 계산
dM_dy = diff(M, y);
dN_dx = diff(N, x);

% 미분방정식이 완전 상미분방정식인지 확인
is_exact_original = simplify(dM_dy - dN_dx);
disp('원래 방정식이 완전 상미분방정식인지 확인:');
```

```
원래 방정식이 완전 상미분방정식인지 확인:
```

```
disp(is_exact_original);
```

$-x$

```
if is_exact_original == 0
    disp('주어진 방정식은 이미 완전 상미분방정식입니다.');
else
    disp('주어진 방정식은 완전 상미분방정식이 아닙니다.');
    % 적분인자 mu(x, y) 찾기
    % d(mu*M)/dy - d(mu*N)/dx = 0 이 되는 mu(x, y) 찾음
    mu_eq = diff(mu * M, y) - diff(mu * N, x);
```

```
    % 편미분 방정식 풀기
    [mu_sol, cond] = solve(mu_eq == 0, mu);

    % 일반화된 적분인자 mu(x, y)
    disp('일반화된 적분인자 mu(x, y):');
    disp(mu_sol);
end
```

```
주어진 방정식은 완전 상미분방정식이 아닙니다.
경고: 양함수 해를 구할 수 없습니다. 취할 수 있는 선택 사항을 보려면 도움말을 참조하십시오.
일반화된 적분인자 mu(x, y):
```

```

```

해석적 방법을 사용하였지만 해를 구할 수 없었습니다.

오류의 원인

1. 주어진 미분방정식이 너무 복잡하거나 특이한 형태로 적분인자를 갖고 있어서 심볼릭 툴이 이를 해석하지 못한 경우

2. 적분인자가 특정 함수 형태로 존재하지 않거나, 위의 제시된 조건하에서 해를 찾을 수 없는 경우

3. 적분인자가 일반화 된 형태로 복잡하게 나타날때

따라서 수치적 접근방법을 사용하였습니다.

수치적 접근 방법을 사용하기 위해서는 적분인자에 대한 개략적인 수식이 필요합니다. 하지만 해석적 방법에 의한 정보를 얻을 수 없기 때문에 위에서 사용하였던 mu(x), mu(y)를 사용하였습니다.

```
% 심볼릭 변수 정의
syms x y C1

% 주어진 M(x, y)와 N(x, y)
M = x * y;
N = x^2 + 2 * y^2;

% 주어진 복잡한 적분인자
mu = (C1 * exp(((sqrt(sym(7)) * atan((2 * sqrt(sym(7)) * x + sqrt(sym(7)) * y) / (7
* y))) / 7))) / sqrt(x^2 + x * y + 2 * y^2);

% 수치적으로 방정식이 완전한지 확인
% x, y 값의 범위를 설정합니다.
x_vals = linspace(-10, 10, 50);
y_vals = linspace(-10, 10, 50);

% 결과 저장용
is_exact_vals = zeros(length(x_vals), length(y_vals));

for i = 1:length(x_vals)
    for j = 1:length(y_vals)
```

```
        x_val = x_vals(i);
        y_val = y_vals(j);

        % 주어진 적분인자를 수치적으로 평가
        mu_val = double(subs(mu, {x, y, C1}, {x_val, y_val, 1})); % C1 = 1로 설정

        % 새로운 M과 N을 수치적으로 평가
        M_new_val = mu_val * double(subs(M, {x, y}, {x_val, y_val}));
        N_new_val = mu_val * double(subs(N, {x, y}, {x_val, y_val}));

        % 수치적 편미분 계산 (유한차분법 사용)
        dM_new_dy = (mu_val * double(subs(M, {x, y}, {x_val, y_val + 0.01})) -
M_new_val) / 0.01;
        dN_new_dx = (mu_val * double(subs(N, {x, y}, {x_val + 0.01, y_val})) -
N_new_val) / 0.01;

        % 방정식이 완전한지 확인
        is_exact_vals(i, j) = dM_new_dy - dN_new_dx;
    end
end

% 평균 차이 계산
mean_difference = mean(abs(is_exact_vals), 'all');

% 결과 출력
if mean_difference < 1e-5
    disp('주어진 적분인자가 완전 상미분방정식을 만듭니다.');
else
    disp('주어진 적분인자가 완전 상미분방정식을 만들지 않습니다.');
end
```

```
주어진 적분인자가 완전 상미분방정식을 만들지 않습니다.
```

```


% mean_difference을 사용하여 적분인자의 정확성을 확인합니다.
disp('평균 차이:');
```

```
평균 차이:
```

```
disp(mean_difference);
```

```
    0.6320
```

```
% 심볼릭 변수 정의
syms x y C1

% 주어진 M(x, y)와 N(x, y)
M = x * y;
N = x^2 + 2 * y^2;

% 주어진 복잡한 적분인자
```

```
mu = C1 * exp(((2 * sqrt(sym(7)) * atan(sqrt(sym(7))/7 + (4 * sqrt(sym(7)) * y)/(7
* x))) / 7));

% 수치적으로 방정식이 완전한지 확인
% x, y 값의 범위를 설정합니다.
x_vals = linspace(-10, 10, 50);
y_vals = linspace(-10, 10, 50);

% 결과 저장용
is_exact_vals = zeros(length(x_vals), length(y_vals));

for i = 1:length(x_vals)
    for j = 1:length(y_vals)
        x_val = x_vals(i);
        y_val = y_vals(j);

        % 주어진 적분인자를 수치적으로 평가
        mu_val = double(subs(mu, {x, y, C1}, {x_val, y_val, 1})); % C1 = 1로 설정

        % 새로운 M과 N을 수치적으로 평가
        M_new_val = mu_val * double(subs(M, {x, y}, {x_val, y_val}));
        N_new_val = mu_val * double(subs(N, {x, y}, {x_val, y_val}));

        % 수치적 편미분 계산 (유한차분법 사용)
        dM_new_dy = (mu_val * double(subs(M, {x, y}, {x_val, y_val + 0.01})) -
M_new_val) / 0.01;
        dN_new_dx = (mu_val * double(subs(N, {x, y}, {x_val + 0.01, y_val})) -
N_new_val) / 0.01;

        % 방정식이 완전한지 확인
        is_exact_vals(i, j) = dM_new_dy - dN_new_dx;
    end
end

% 평균 차이 계산
mean_difference = mean(abs(is_exact_vals), 'all');

% 결과 출력
if mean_difference < 1e-5
    disp('주어진 적분인자가 완전 상미분방정식을 만듭니다.');
else
    disp('주어진 적분인자가 완전 상미분방정식을 만들지 않습니다.');
end
```

주어진 적분인자가 완전 상미분방정식을 만들지 않습니다.

```
% mean_difference을 사용하여 적분인자의 정확성을 확인합니다.
disp('평균 차이:');
```

평균 차이:

```
disp(mean_difference);
```

```
7.0772
```

위의 방법도 제대로 된 적분인자를 찾을 수 없었습니다.

따라서 적분인자를 찾기위해 가능한 적분인자 리스트를 만들고 일일이 대입하여

올바른 적분인자가 무엇인지 확인하였습니다.

결과: $u(y) = y$

적분인자 y를 찾아내었습니다.

```
function mu = findIntegratingFactor(M, N, x, y)
    % 가능한 적분 인자 형태 목록
    muList = {
        1/x, 1/y, 1/(x*y), 1/(x^2), 1/(y^2), 1/(x^2*y), 1/(x*y^2),
        x, y, x*y, x^2, y^2, x^2*y, x*y^2,
        exp(x), exp(y), exp(x*y), sin(x), sin(y), cos(x), cos(y)
    };

    % 적분 인자를 찾는 과정
    for k = 1:length(muList)
        mu = muList{k};

        % 새로운 M과 N 정의
        M_new = mu * M;
        N_new = mu * N;

        % 정확 미분 방정식인지 확인
        exactCheck = simplify(diff(M_new, y) - diff(N_new, x));

        % 정확 미분 방정식이면 적분 인자를 반환
        if exactCheck == 0
            return;
        end
    end

    % 적분 인자를 찾지 못한 경우
    mu = []; % 빈 배열을 반환
    disp('No integrating factor found from the given list.');
end

% 주어진 M과 N
syms x y;
MExpr = x*y;
NExpr = x^2 + 2*y^2;

% 적분 인자 찾기
mu = findIntegratingFactor(MExpr, NExpr, x, y);
```

```
% 결과 출력
if isempty(mu)
    disp('No integrating factor found.');
else
    disp('Integrating factor found:');
    disp(mu);
end
```

```
Integrating factor found:
```

y

다시한번 완전 상미분방정식이 되는지 확인하였습니다.

```
syms x y;
% 주어진 M(x, y)과 N(x, y)
M = x*y;
N = x^2 + 2*y^2;

% 가정한 적분 인자
mu = y;

% 새로운 M과 N 정의
M_new = mu * M;
N_new = mu * N;

% 정확 미분 방정식인지 확인
exactCheck = diff(M_new, y) == diff(N_new, x);

% 결과 출력
if simplify(exactCheck)
    disp('The equation with the integrating factor is an exact differential
equation.');
else
    disp('The equation with the integrating factor is not an exact differential
equation.');
end
```

```
The equation with the integrating factor is an exact differential equation.
```

문제**2**

$y^2\,dx + y\,dy = 0$에 대한 적분 인자를 찾고 일반해를 구하였습니다.

```
syms x y;
% 미분 방정식 정의
P = y^2;
```

```
Q = y;

% 적분 인자 R 구하기
% R = (1/Q) * (diff(P, y) - diff(Q, x))
R = (1/Q) * (diff(P, y) - diff(Q, x));
R = simplify(R);

% 적분 인자가 x만의 함수인지 확인
if isAlways(diff(R, y) == 0)
    % 적분 인자 구하기
    integratingFactor = exp(int(R, x));
    disp('The integrating factor is:');
    disp(integratingFactor);

    % 새로운 P와 Q 정의
    P_new = simplify(integratingFactor * P);
    Q_new = simplify(integratingFactor * Q);

    % 일반해 구하기
    % 완전 미분 방정식 F(x, y) = C에서
    % F(x, y) = int(P_new, x) + int(Q_new, y) - int(dF/dy, y)
    F_x = int(P_new, x);
    dF_dy = diff(F_x, y);
    F_y = int(Q_new - dF_dy, y);

    % 완전 미분 방정식 일반해
    F = F_x + F_y;
    disp('The general solution is:');
    disp(F);
else
    disp('The integrating factor is not a function of x alone.');
end
```

The integrating factor is:

e^{2x}

The general solution is:

$$\frac{y^2 e^{2x}}{2}$$

적분인자 e^{2x} 이 맞는지 확인하였습니다.

```
syms x y C;
% 주어진 미분 방정식 정의
P = y^2;
Q = y;

% 구해진 적분 인자
integratingFactor = exp(2*x);
```

```
% 새로운 P와 Q 정의 (적분 인자를 곱한 형태)
P_new = simplify(integratingFactor * P);
Q_new = simplify(integratingFactor * Q);

% 1. 완전 미분 방정식인지 확인
exactCheck = diff(P_new, y) == diff(Q_new, x);
if isAlways(exactCheck)
    disp('The equation with the integrating factor is an exact differential
equation.');
else
    disp('The equation with the integrating factor is not an exact differential
equation.');
end
```

```
The equation with the integrating factor is an exact differential equation.
```

```
% 2. 일반해 구하기
% 적분 인자 적용 후 통합하여 해를 구함
F_x = int(P_new, x);
F_y = int(Q_new - diff(F_x, y), y);
F = simplify(F_x + F_y);

% 일반해를 C로 표현
generalSolution = F == C;
disp('The general solution F(x, y) is:');
```

```
The general solution F(x, y) is:
```

```
disp(generalSolution);
```

$$\frac{y^2 e^{2x}}{2} = C$$

적분인자를 곱해서 확인한 결과 완전상미분 방정식 임을 확인하였습니다.

따라서 올바르게 구한것을 확인하였습니다.