양함수형 1계 상미분방정식

- 형태: $y'(x) = f(x, y)$
- 예시:
- $y' = 5x^2y^2 + 3$
- $y' = \frac{1}{5}y + 3x$

예시 1: $y' = 5x^2y^2 + 3$

```
syms x y(x)
% 미분방정식 정의
ode1 = diff(y, x) == 5*x^2*y^2 + 3;

% 일반 해 구하기
sol1 = dsolve(ode1);
disp(sol1);
```

$$-\frac{\sqrt{15}\,\mathrm{Y}_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\sqrt{15}\,x^2}{2}\right) + \sqrt{15}\,C_1\,\mathrm{J}_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\sqrt{15}\,x^2}{2}\right)}{5\,\left(x\,\mathrm{Y}_{\frac{3}{4}}\left(\frac{\sqrt{15}\,x^2}{2}\right) + C_1\,x\,\mathrm{J}_{\frac{3}{4}}\left(\frac{\sqrt{15}\,x^2}{2}\right)\right)}$$

예시 2: $y' = \frac{1}{5}y + 3x$

```
syms x y(x)
% 미분방정식 정의
ode2 = diff(y, x) == (1/5)*y + 3*x;

% 일반 해 구하기
sol2 = dsolve(ode2);
disp(sol2);
```

$$C_1\,\mathrm{e}^{x/5} - 15\,x - 75$$

```
```

음함수형 1계 상미분방정식

- 형태: $F(x, y, y') = 0$
- 예시:
- $y' - 5x^2y^2 - 1 = 0$
- $3y' - 5y + 5 = 0$

예시 1: $y' - 5x^2y^2 - 1 = 0$

```
syms x y(x)
% 미분방정식 정의
ode3 = diff(y, x) - 5*x^2*y^2 - 1 == 0;

% 일반 해 구하기
sol3 = dsolve(ode3);
disp(sol3);
```

$$-\frac{\sqrt{5}\,Y_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\sqrt{5}\,x^2}{2}\right)+\sqrt{5}\,C_1\,J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\sqrt{5}\,x^2}{2}\right)}{5\,\left(x\,Y_{\frac{3}{4}}\left(\frac{\sqrt{5}\,x^2}{2}\right)+C_1\,x\,J_{\frac{3}{4}}\left(\frac{\sqrt{5}\,x^2}{2}\right)\right)}$$

```

```

예시 2: $3y' - 5y + 5 = 0$

```
syms x y(x)
% 미분방정식 정의
ode4 = 3*diff(y, x) - 5*y + 5 == 0;

% 일반 해 구하기
sol4 = dsolve(ode4);
disp(sol4);
```

$$C_1\,e^{\frac{5x}{3}}+1$$

변수분리형 1계 상미분방정식의 일반형:

$g(y)y' = f(x)$

이 방정식은 x와 y가 각각 분리될 수 있는 형태입니다.

y′=−yx

```
syms x y(x)
% 미분방정식 정의
ode1 = diff(y, x) == -y*x;

% 일반 해 구하기
sol1 = dsolve(ode1);
disp(sol1);
```

$$C_1\,e^{-\frac{x^2}{2}}$$

y′sin(x)−ycos(x)=0

```
syms x y(x)
```

```
% 미분방정식 정의
ode2 = diff(y, x)*sin(x) - y*cos(x) == 0;

% 일반 해 구하기
sol2 = dsolve(ode2);
disp(sol2);
```

$C_1 \sin(x)$

변수분리형 미분방정식의 해법

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + c$$

이는 변수 y와 x를 각각 분리하여 적분하는 방식입니다.

예시 문제

주어진 미분방정식은 다음과 같습니다:

$$y' - \frac{(t+1)}{y} = 0, \quad y(0) = 1$$

```
syms y(t)
% 미분방정식 정의
ode = diff(y, t) == (t + 1) / y;

% 초기 조건 정의
cond = y(0) == 1;

% 미분방정식 풀기
sol = dsolve(ode, cond);
disp(sol);
```

$\sqrt{t^2 + 2\,t + 1}$

```

```

1. 뉴턴의 냉각 법칙

- 물체의 온도가 시간에 따라 변하는 속도는 물체의 온도와 주변 매질의 온도 차이에 비례한다는 법칙입니다.
- 수식 형태: $\frac{dT}{dt} = k(T - T_{ext})$ 여기서 k는 시간에 대한 비례 상수로, 단위는 s^{-1} 입니다.

2. 자유낙하 계수와 차수

- 공기 저항을 무시한 상태에서 질량 m인 공이 자유낙하할 때, 공의 속도 v를 시간 t에 대해 나타내는 문제입니다.

- 중력 가속도만을 고려한 자유낙하 속도는 시간에 비례하여 증가합니다. 즉, 속도 v는 t와 선형 관계를 가지며, 일반적으로: $v = gt$ 여기서 g는 중력 가속도입니다.

1. 뉴턴의 냉각 법칙

```
syms T(t) T_ext k
% 미분방정식 정의
ode1 = diff(T, t) == k*(T - T_ext);

% 일반 해 구하기
sol1 = dsolve(ode1);
disp(sol1);
```

$$T_{\mathrm{ext}} + C_1\, \mathrm{e}^{k\,t}$$

2. 자유낙하 속도 방정식

```
syms v(t) g
% 자유낙하 속도 방정식
v_eqn = diff(v, t) == g;

% 일반 해 구하기
sol2 = dsolve(v_eqn);
disp(sol2);
```

$$C_1 + g\,t$$

C1 은 초기 속도인 v0임을 알수 있다.

3. 옴의 법칙

저항이 R인 저항기에 전압 E를 인가할 때, 저항기를 통해 흐르는 전류 I를 시간 t에 대해 나타내는 문제입니다.

옴의 법칙은 다음과 같이 표현됩니다: $I(t) = \frac{E}{R}$

여기서 I(t)는 시간 t에 따른 전류, E는 전압, R은 저항입니다.

```
syms I(t) E R Q0
% 옴의 법칙 정의
I_eqn = I(t) == (E / R)*t + Q0;

% 식 출력
disp(I_eqn);
```

$$\mathrm{I}(t) = Q_0 + \frac{\mathrm{E}\,t}{R}$$

Q0은 초기 전하량이다.

문제:

주위의 온도가 20℃인 환경에서 60℃의 커피잔을 놔두었더니, 5분 후 커피의 온도가 40℃가 되었다. 10분 후 커피의 온도는 얼마인가?

```
% 주어진 값 설정
T_ext = 20;   % 주변 온도 (20도)
T0 = 60;      % 초기 커피 온도 (60도)
T_5 = 40;     % 5분 후 커피 온도 (40도)
time_span_5 = [0 5];  % 시간 범위 (0분에서 5분까지)

% 뉴턴의 냉각 법칙 미분방정식 정의
cooling_law = @(t, T, k) -k*(T - T_ext);

% 냉각 상수 k 추정하기 위한 함수
estimate_k = @(k) ode45(@(t, T) cooling_law(t, T, k), time_span_5, T0);

% 수치적 추정 함수로 k 계산
[~, T_est] = estimate_k(0.1);  % k 값을 임의로 설정
T_final_5 = T_est(end);

% k 값을 조정해 5분 후 온도가 40도에 근접하도록 함
options = optimset('Display', 'off');  % 출력 없이 최적화
k = fminsearch(@(k) abs(T_final_5 - T_5), 0.1);  % 최적화 수행

% 최적화된 k 값 출력
disp(['최적화된 k 값: ', num2str(k)]);
```

```
최적화된 k 값: 0.1
```

```
% 최적화된 k 값으로 10분 후의 온도 계산
time_span_10 = [0 10];  % 0분에서 10분까지 시간 범위
[t, T] = ode45(@(t, T) cooling_law(t, T, k), time_span_10, T0);

% 10분 후 커피의 온도 출력
T_10 = T(end);
disp(['10분 후 커피의 온도는 ', num2str(T_10), '도입니다.']);
```

```
10분 후 커피의 온도는 34.7152도입니다.
```

- `integral` 함수 대신 ode45를 사용하여 직접 미분방정식을 풀고, 최적화(fminsearch)로 냉각 상수 k를 찾습니다.
- `fminsearch`를 사용하여 k 값을 추정하며, 이를 통해 5분 후 온도 조건에 맞는 냉각 상수를 계산합니다.
- 계산된 k 값을 사용하여 10분 후 커피의 온도를 계산합니다.
- k 값을 구한 방식은 최적화 함수인 `fminsearch`를 사용하여, kkk 값을 조정함으로써 5분 후의 커피 온도가 주어진 값(40도)에 가장 가깝게 맞춰지는 k를 찾는 방법

- 뉴턴의 냉각 법칙을 수식으로 풀기

뉴턴의 냉각 법칙은 다음과 같이 주어집니다:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{ext})$$

이 방정식을 풀면 일반 해는 다음과 같습니다:

$$T(t) = T_{ext} + (T_0 - T_{ext})e^{-kt}$$

여기서:

- T_0는 초기 온도 (60도),
- T_{ext}는 주변 온도 (20도),
- k는 냉각 상수입니다.

5분 후의 온도 $T(5) = 40^{\circ}C$를 이용해 k를 구할 수 있습니다: $40 = 20 + (60 - 20)e^{-5k}$

```
% 주어진 값 설정
T_ext = 20;   % 주변 온도 20도
T0 = 60;      % 초기 커피 온도 60도
T_5 = 40;     % 5분 후 커피 온도 40도
t_5 = 5;      % 5분

% 방정식 풀기: T(t) = T_ext + (T0 - T_ext) * exp(-k*t)
% 5분 후 온도를 이용해 k 값을 구하는 방정식
syms k
eqn = T_5 == T_ext + (T0 - T_ext) * exp(-k * t_5);

% k 값 계산
k_solution = solve(eqn, k);
disp(['계산된 k 값: ', char(k_solution)]);
```

```
계산된 k 값: log(2)/5
```

```

% 최적의 k 값을 사용하여 10분 후 온도 계산
t_10 = 10;  % 10분
T_10 = T_ext + (T0 - T_ext) * exp(-k_solution * t_10);
disp(['10분 후 커피의 온도는 ', num2str(double(T_10)), '도입니다.']);
```

```
10분 후 커피의 온도는 30도입니다.
```

`fminsearch` 방식과 정확한 수식의 차이

```
% 실제 k 값
k_exact = log(2) / 5;

% 근사 k 값
k_approx = 0.1;
```

```
% 두 값의 차이 계산
difference = abs(k_exact - k_approx);

% 결과 출력
disp(['정확한 k 값: ', num2str(k_exact)]);
```

```
정확한 k 값: 0.13863
```

```
disp(['근사한 k 값: ', num2str(k_approx)]);
```

```
근사한 k 값: 0.1
```

```
disp(['두 값의 차이: ', num2str(difference)]);
```

```
두 값의 차이: 0.038629
```