공업수학1-8주차-1

생성자	재 재환 김
태그	엔지니어링

1. 고계 선형 상미분방정식의 기본 형태

1. **일반적 형태**:$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$
    - 이 식은 y와 그 미분(예:$y', y'', \ldots, y^{(n)}$)을 포함하여 x와의 관계를 나타내는 미분방정식입니다.
    - 이 식에서 F는 함수로, 미분항의 결합으로 정의됩니다. 그러나 이 자체로는 구체적인 형태를 나타내지는 않으므로, 문제에 맞춰 특정 형태로 변형해야 합니다.
2. **표준형**:$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x)$
    - 이 식은 고계 선형 상미분방정식을 표준형으로 나타낸 것입니다.
    - 여기서 **고계**란 미분 차수가 높다는 의미로, 일반적으로 n차 미분까지 포함하는 방정식을 말합니다.

      nn
    - 각 계수 $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x)$는 미분 항 앞에 곱해지는 x의 함수로, 이들은 방정식이 **선형**일 때 x에 대한 함수 형태로 유지됩니다.
    - r(x)는 독립변수인 x의 함수로, 외부 입력이나 강제 항을 나타냅니다.

---

2. 선형과 비선형 방정식의 구분

- **선형 상미분방정식**:
    - 선형 방정식은 미분항들이 상수 계수 또는 독립변수 x의 함수와 곱해진 형태로, 더해지거나 차감되는 방식으로 나타납니다.
    - 예를 들어, $y^{(2)} + p(x)y' + q(x)y = 0$는 선형 방정식입니다.
    - 미분항들이 서로 곱해지거나, y의 비선형 형태 (예:$y^2, \sin(y)$)가 포함되지 않아야 선형성을 유지합니다.
- **비선형 상미분방정식**:
    - 비선형 방정식에서는 미분항들이 곱해지거나 y의 비선형 함수 형태가 포함됩니다.

- 예를 들어 $y'' + y(y')^2 = 0$는 비선형 방정식입니다.
- 비선형 방정식의 해를 구하는 것은 일반적으로 더 복잡하며, 특수한 해석적 방법이나 수치적 접근이 필요할 수 있습니다.

---

3. 제차와 비제차 미분방정식

1. **제차(Homogeneous) 미분방정식**: $y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$
   - 제차 방정식에서는 $r(x) = 0$이며, 이는 외부의 강제 항이나 입력이 없는 순수한 시스템을 나타냅니다.
   - 이 경우, 방정식의 해는 시스템의 **고유 해**로 구성되며, 예를 들어 자유 진동 시스템이나 단순 전기 회로에서 발생합니다.
   - 제차 방정식의 해는 주로 **특성 방정식**을 통해 구하며, 이 과정에서 고유값과 고유벡터가 중요한 역할을 합니다.
2. **비제차(Nonhomogeneous) 미분방정식**:$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x)$
   - 비제차 방정식에서는$r(x) \neq 0$이며, 이는 시스템에 외부에서 작용하는 입력이나 강제 항이 있는 경우를 나타냅니다.
   - 예를 들어 진동 시스템에 외력이 작용하거나, 전기 회로에 외부 전압이 인가되는 경우가 이에 해당합니다.
   - 비제차 방정식의 해는 **일반해**로, 제차 방정식의 **고유 해**와 비제차 항에 따른 **특수 해**의 합으로 구성됩니다.

---

4. 예시를 통한 설명

제차 방정식 예시:

- 방정식: $y'' + 3y' + 2y = 0$
- 특성 방정식: $r^2 + 3r + 2 = 0 \rightarrow (r+1)(r+2) = 0$
- 고유 해: $y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$
- **이 방정식은 외부 입력이 없는 상태의 자연 응답을 나타내며**, 예를 들어 감쇠된 진동 시스템의 자유 진동 해를 구하는 데 사용됩니다.

비제차 방정식 예시:

- 방정식: $y'' + 3y' + 2y = e^x$
- 고유 해: $y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$
- 특수 해: $y_p = Ae^x$을 가정하여 대입 후 계수를 비교해 특수 해 구하기
- 일반해: $y = y_h + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + Ae^x$
- **이 방정식은 외부에서 입력된 강제 진동을 포함하는 경우의 해를 나타내며**, 예를 들어 외력에 의해 진동하는 시스템의 응답을 나타낼 수 있습니다.

---

5. 1계 선형 상미분방정식

1. **방정식의 일반적 형태**:$F(x, y, y') = 0$
    - 이는 y와 그 1계 도함수 y′을 포함하는 형태의 1계 상미분방정식입니다.
2. **표준형**:$y' + py = r(x)$
    - 이 형태는 1계 비제차 선형 상미분방정식을 나타내는 표준형입니다.
    - 여기서 p는 상수 또는 x의 함수일 수 있고, r(x)는 x에 대한 외부 입력을 나타내는 함수입니다.
    - 비제차 방정식에서 r(x)이 0이 아닌 경우 외부 입력에 의한 영향을 받게 됩니다.

---

6. 2계 선형 상미분방정식

1. **방정식의 일반적 형태**:$F(x, y, y', y'') = 0$
    - 이 경우 2계 도함수 y″까지 포함된 2계 상미분방정식을 나타냅니다.
2. **표준형**:$y'' + py' + qy = r(x)$
    - 이 방정식은 2계 비제차 선형 상미분방정식을 나타냅니다.
    - 여기서 p와 q는 상수 또는 x의 함수일 수 있으며, r(x)는 외부 입력을 나타냅니다.
3. **해의 형태**:
    - 비제차 방정식의 일반해 y는 고유 해 y_h와 특수 해 y_p의 합으로 나타낼 수 있습니다:

    $$y = y_h + y_p$$

    - 고유 해 y_h는 동차(제차) 방정식 $y'' + py' + qy = 0$의 해로, 외부 입력이 없을 때의 자연스러운 시스템 반응을 나타냅니다.

- 특수 해 y_p는 비제차 방정식의 특정한 해로, 외부 입력에 의한 강제 반응을 나타냅니다.

---

3. 특성 방정식

- 제차 방정식 $y\prime\prime + py\prime + qy = 0$의 해를 구하기 위해 **특성 방정식**을 사용합니다.
- 특성 방정식은 다음과 같이 설정됩니다:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

- 특성 방정식의 해인 λ 값에 따라 제차 방정식의 고유 해가 결정됩니다.
  - 예를 들어, $\lambda = -p$와 같은 값이 구해지면, 이를 이용하여 고유 해의 형태를 결정하게 됩니다.

7. 1계 제차 상미분방정식

1. **방정식의 형태**: $y' + p_0 y = 0$
   - 이 방정식은 1계 제차 상미분방정식입니다.
   - y와 그 도함수 y′가 선형적으로 결합된 형태이며, 외부 입력 항이 없는 제차 방정식입니다.
2. **해 구하기**:
   - 이 방정식의 일반해는 상수 C_1와 함수 $y_1(x)$로 표현됩니다.
   - 이 경우, 해는 다음과 같은 형태로 주어집니다:

   $$y_h(x) = C_1 y_1(x)$$

   - 여기서 $y_1(x)$는 이 방정식의 기저 함수로, 보통 $y = e^{-p_0 x}$와 같이 지수 함수 형태가 됩니다.

---

8. 2계 제차 상미분방정식

1. **방정식의 형태**:$y'' + p_1 y' + p_0 y = 0$
   - 이 방정식은 2계 제차 상미분방정식입니다.
   - 2계 도함수 y″, 1계 도함수 y′, 그리고 함수 y가 결합된 형태로, 역시 외부 입력이 없는 제차 방정식입니다.
2. **특성 방정식 설정**:

- 2계 방정식의 해를 구하기 위해 특성 방정식을 설정합니다:

$$\lambda^2 + p_1\lambda + p_0 = 0$$

- 이 방정식의 해를 구하면 λ1과 λ2라는 두 근이 나오며, 이는 다음과 같은 경우로 나뉩니다:
  - **실근**: 두 근이 실수일 경우 $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$와 $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$로 해가 구성됩니다.
  - **중근**: 두 근이 동일한 경우 특수한 형태의 해를 구성해야 하며, 일반적으로 $y_1(x) = e^{\lambda x}$와 $y_2(x) = xe^{\lambda x}$가 됩니다.
  - **복소수 근**: 두 근이 복소수일 경우 $y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$와 $y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$로 해가 구성됩니다.

3. **일반해 표현**:
   - 특성 방정식에서 구한 근을 통해 기저 함수 $y_1(x), y_2(x)$를 얻으면, 일반해는 다음과 같이 표현됩니다:

   $$y_h(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

   - 여기서 C_1과 C_2는 임의의 상수로, 초기 조건에 따라 값을 결정할 수 있습니다.

예시

1. **실근의 경우**:
   - 특성 방정식이 $\lambda 2 - 3\lambda + 2 = 0$이라면, 두 근은 $\lambda_1 = 1$과 $\lambda_2 = 2$가 됩니다.
   - 이에 따라 해는 $y_h(x) = C_1e^x + C_2e^{2x}$로 표현됩니다.
2. **중근의 경우**:
   - 특성 방정식이 $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$이라면, 근은 $\lambda = 1$로 중근입니다.
   - 해는 $y_h(x) = (C_1 + C_2x)e^x$로 표현됩니다.
3. **복소수 근의 경우**:
   - 특성 방정식이 $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$이라면, 두 근은 $\lambda = -1 \pm 2i$가 됩니다.
   - 해는 $y_h(x) = e^{-x}(C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x))$로 표현됩니다.

9. 고계 제차 선형 상미분방정식의 일반적인 형태

- 방정식 형태:

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

  - 이 식은 n계 제차 선형 상미분방정식으로, 가장 높은 차수의 도함수 $y^{(n)}$부터 시작하여 점차 낮은 차수의 도함수들이 결합된 형태입니다.
  - 방정식의 우변이 0이므로 외부 입력이나 강제 항이 없는 제차 방정식입니다.

---

10. 일반해와 특수해

1) 일반해의 형태

- 일반해는 방정식의 **모든 가능한 해**를 나타내며, 이는 다음과 같은 형태로 표현됩니다:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

  - 여기서 $c_1, \ldots, c_n$은 상수입니다. 이 상수들은 초기 조건이나 경계 조건에 따라 결정됩니다.
  - 함수$y_1(x), \ldots, y_n(x)$은 방정식의 기저(basis)를 형성하는 해들입니다. 이는 서로 독립적인 해들로 구성되어, 모든 가능한 해를 결합하여 표현할 수 있는 기저 역할을 합니다.

2) 기저(Basis) 해의 특성

- $y_1(x), \ldots, y_n(x)$은 방정식의 선형 독립 해들로, 각 해가 다른 해들로 표현될 수 없습니다. 이 독립성 덕분에 방정식의 모든 해를 이들 해들의 선형 결합으로 나타낼 수 있습니다.
- 예를 들어, 2계 방정식이라면 기저가 되는 두 개의 독립 해가 필요하고, 3계 방정식이라면 세 개의 독립 해가 필요합니다.

3) 특수해

- 특수해는 일반해에서 특정한 상수 $c_1, \ldots, c_n$의 값을 대입하여 얻어지며, 주어진 문제의 초기 조건이나 경계 조건에 맞춰 고유한 해를 나타냅니다.
- 열린 구간에서 특정 상수들이 정해지면, 이를 **특수해**라고 부릅니다.

---

3. 예시를 통한 설명

예시 1: 2계 제차 상미분방정식

- 방정식: $y'' - 3y' + 2y = 0$
- 특성 방정식을 풀어 두 개의 실근 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$을 얻습니다.
- 일반해:

  $$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

  - 여기서 e^x와 e^{2x}는 독립적인 기저 해들입니다.
- 특정 초기 조건이 주어지면 c_1과 c_2의 값이 결정되어 특수해가 됩니다.

예시 2: 3계 제차 상미분방정식

- 방정식: $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$
- 특성 방정식의 근이 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$로 구해집니다.
- 일반해:

  $$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$$

  - 세 개의 기저 함수e^x, e^{2x}, e^{3x}가 방정식의 모든 해를 표현하는 기저 역할을 합니다.

11. 1차 독립 (Linearly Independent)

1. **정의**:
   - 함수$y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$이 어떤 구간에서 **1차 독립**이라는 것은, 이 함수들이 다음 조건을 만족한다는 뜻입니다:

     $$k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \cdots + k_n y_n(x) = 0$$
     이 방정식이 모든 x에 대해 성립할 때, 모든 상수 $k_1, k_2, \ldots, k_n$이 모두 0인 경우에만 성립하는 상황입니다.
2. **의미**:
   - 상수 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 중 하나라도 0이 아닌 값으로 방정식을 만족할 수 없다면, 이 함수들은 1차 독립입니다.
   - 즉, $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$일 때만 위의 선형 결합이 0이 될 수 있어야 1차 독립 조건이 성립합니다.
   - 1차 독립인 함수들은 서로 독립적인 해들로 구성되며, 이 함수들로 구성된 선형 결합은 해당 방정식의 모든 해를 나타낼 수 있는 기저(basis)를 형성합니다.

3. **예시**:

  - 예를 들어, 함수 e^x와 e^{2x}가 1차 독립이라는 것은 $k_1e^x + k_2e^{2x} = 0$이 모든 x에 대해 성립할 때 $k_1 = 0$ 그리고 $k_2 = 0$일 때만 성립함을 의미합니다.
  - 이는 e^x와 e^{2x}가 서로 독립적이라는 것을 나타냅니다.

---

12. 종속 (Dependent)

1. **정의**:

  - 함수 $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)kik_i$이 어떤 구간에서 **종속**이라는 것은, 다음 방정식에서 적어도 하나의 상수 ki가 0이 아닐 때 성립함을 의미합니다:

  $$k_1y_1(x) + k_2y_2(x) + \cdots + k_ny_n(x) = 0$$

  - 즉, 이 방정식이 모든 x에 대해 성립할 때, 상수들 중 적어도 하나는 0이 아닐 수 있다는 뜻입니다.

2. **의미**:

  - 종속이라는 것은 하나의 함수가 다른 함수들의 선형 결합으로 표현될 수 있음을 의미합니다.
  - 이 경우, 해당 함수들은 서로 독립적이지 않으며, 따라서 이러한 종속 관계가 존재하는 함수들은 **기저를 형성할 수 없습니다**.
  - 예를 들어, 특정 함수가 다른 함수들의 선형 결합으로 표현 가능하다면, 그 함수는 나머지 함수들에 대해 종속적이라고 할 수 있습니다.

3. **예시**:

  - 예를 들어, 함수 x와 2x는 종속적입니다. 왜냐하면 2x는 x의 상수 배로 표현될 수 있기 때문입니다.
  - 따라서, $k_1x + k_2(2x) = 0$이 성립할 때 k_1과 k_2 중 하나가 0이 아닌 값으로도 성립할 수 있습니다.

13. 초기값 문제 (Initial Value Problem)

정의와 의미

- 고계 상미분방정식에서 해를 구할 때, 특정 시점 $x = x_0$에서 함수 y(x)와 그 도함수들의 값이 주어지면, 그 값을 만족하는 **유일한 해**를 찾을 수 있습니다.

- 이러한 문제를 **초기값 문제**라고 합니다. 이는 해를 구체적으로 특정하는 데 중요한 역할을 합니다.

n계 상미분방정식에서 초기 조건의 필요성

- n계 상미분방정식의 경우, $y(x), y\prime(x), y\prime\prime(x), ..., y^{(n-1)}(x)$에 대한 **n개의 초기 조건**이 필요합니다.
- 예를 들어, 2계 방정식이라면 y(x)와 y′(x)에 대한 초기 조건이 주어져야 합니다. 3계 방정식이라면$y(x), y\prime(x), y\prime\prime(x)$에 대한 초기 조건이 필요합니다.
- 초기 조건이 없으면 해가 여러 개가 될 수 있기 때문에, 이 조건을 통해 해를 유일하게 특정할 수 있습니다.

초기 조건의 일반적인 표현

- 초기 조건은 다음과 같이 주어집니다:

  $$y(x_0) = C_0, \quad y'(x_0) = C_1, \quad y^{(2)}(x_0) = C_2, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = C_{n-1}$$

  - 여기서 x_0는 초기 조건이 주어지는 점이고, $C_0, C_1, \dots, C_{n-1}$는 각각의 함수 값과 도함수 값에 대한 상수입니다.
  - 이 초기 조건을 이용하여 상미분방정식의 해를 고유하게 결정할 수 있습니다.

초기값 문제의 예

- 예시로 2계 상미분방정식을 생각해보겠습니다:

  $$y'' - 3y' + 2y = 0$$

  초기 조건이 다음과 같이 주어진 경우:

  $$y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$$

  이 초기 조건을 만족하는 유일한 해를 구할 수 있으며, 이 해는 방정식과 초기 조건을 동시에 만족합니다.

---

14. 존재성 및 유일성 정리 (Existence and Uniqueness Theorem)

개요

- 존재성 및 유일성 정리는 초기 조건이 주어졌을 때, 상미분방정식의 해가 **특정 구간 내에서 유일하게 존재**함을 보장하는 이론입니다.

- 이 정리는 해가 실제로 존재하며, 초기 조건을 통해 유일하게 결정된다는 점을 확인시켜 줍니다.

존재성 및 유일성 정리의 조건

- 고계 제차 선형 상미분방정식:

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

- 이 방정식에서 존재성과 유일성이 보장되기 위해 다음과 같은 조건이 필요합니다:
  - 계수 함수 $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x)$가 주어진 구간에서 **연속**이어야 합니다.
  - 초기값 x_0가 이 구간 내에 있어야 합니다.
- 이러한 조건이 만족되면, 초기 조건을 만족하는 **유일한 해**가 주어진 구간 내에 존재하게 됩니다.

왜 연속성이 중요한가?

- 상미분방정식에서 계수 함수가 연속이면, 해가 갑작스러운 변화 없이 매끄럽게 정의될 수 있습니다.
- 만약 계수 함수가 불연속이거나 특이점이 있다면, 해가 존재하지 않거나 여러 개가 될 수 있습니다. 따라서, 연속성은 해의 유일성을 보장하는 중요한 조건입니다.

예시: 존재성과 유일성 정리 적용

- 예를 들어, 다음과 같은 2계 상미분방정식을 고려해 보겠습니다:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

- 이 방정식에서 p(x)와 q(x)가 구간 [a,b]에서 연속이고, 초기 조건이 $x_0 \in [a, b]$에서 주어진다면, 이 구간에서 초기 조건을 만족하는 **유일한 해**가 존재합니다.
- 즉, 초기 조건을 만족하는 유일한 해를 구할 수 있다는 것이 보장됩니다.

15. Wronskian

Wronskian 정의

- n계 제차 선형 상미분방정식의 해 $y_1, y_2, \ldots, y_n$의 **선형 독립성**을 판별하기 위해 **Wronskian 행렬식**을 사용합니다.
- 주어진 함수들이 선형 독립인지 확인하기 위한 중요한 도구로, **선형 독립성**을 보장하는 조건이 됩니다.

Wronskian의 행렬식 표현

- $y_1, y_2, \ldots, y_n$이 n계 상미분방정식의 해일 때, 이들의 Wronskian W은 다음과 같이 정의됩니다:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

  - 이 행렬식은 주어진 함수들의 각 미분(도함수)을 행으로 갖는 행렬의 행렬식을 구하는 방식입니다.

Wronskian을 통한 선형 독립성 판별

- $W(x) \neq 0$인 경우, 함수 $y_1, y_2, \ldots, y_n$은 선형 독립입니다.
- 반대로 W(x)=0인 경우, 함수들이 선형 종속일 가능성이 있습니다.
- Wronskian은 특정 구간에서 연속적으로 계산되며, 이를 통해 해당 구간 내에서 해들의 독립성을 판별할 수 있습니다.

---

16. 예제 문제 풀이

예제 1: y′′′−4y′′−y′+4y=0

1. 방정식의 형태

- 이 방정식은 **3계 상미분방정식**이며, 제차(우변이 0) 선형 상미분방정식입니다.
- 일반해를 구하기 위해 **특성 방정식**을 설정합니다.

2. 특성 방정식 설정

- 3계 방정식이므로, 다음과 같은 특성 방정식을 세웁니다:

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 - \lambda + 4 = 0$$

3. 특성 방정식의 해 구하기

- 특성 방정식을 인수분해하거나 근을 찾아야 합니다.
- 인수분해 방법을 사용할 수 있으며, 이 경우 한 개의 실근을 먼저 찾고, 이후 나머지 부분을 인수분해합니다.

- 예를 들어, λ=1이 근임을 확인한 후, 이를 이용하여 나머지를 분해하면 다음과 같은 형태로 표현됩니다:

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0$$

- 이후 $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$을 추가로 인수분해하면,

$$(\lambda - 1)(\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$$

- 따라서, λ=1, λ=4, λ=−1이 특성 방정식의 근입니다.

4. 일반해 구하기

- 각 근에 대해 해를 구하면, 각각의 근이 실수이므로 해는 다음과 같은 형태를 가집니다:

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{4x} + C_3 e^{-x}$$

- 여기서 C_1, C_2, C_3는 상수로, 초기 조건이 주어지면 값을 정할 수 있습니다.

예제 2: y‴−y″+y′−y=0과 초기 조건

1. 방정식의 형태

- 이 방정식도 **3계 상미분방정식**이며, 우변이 0인 제차 방정식입니다.
- 초기 조건이 주어졌으므로, 특정 해를 구할 수 있습니다.

2. 초기 조건

- y(0)=2, y′(0)=10, y″(0)=−4
- 이 초기 조건은 해를 유일하게 결정하는 데 사용됩니다.

3. 특성 방정식 설정

- 특성 방정식은 다음과 같습니다:

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

4. 특성 방정식의 해 구하기

- 이 방정식을 인수분해하여 근을 구해보겠습니다.
- $\lambda = 1$이 근임을 확인할 수 있으며, 이를 사용해 나머지 인수로 나누면 다음과 같이 표현됩니다:

$$(\lambda-1)(\lambda^2+1)=0$$

- $\lambda^2+1=0$에서 두 개의 허근을 찾을 수 있으며, 이들은 각각 λ=i와 λ=−i입니다.
- 따라서, 세 개의 근은 λ=1, λ=i, λ=−i입니다.

5. 일반해 구하기

- 각 근에 대해 일반해를 구성합니다:
    - 실근 λ=1에 대해 e^x형태의 해를 얻습니다.
    - 허근 λ=i와 λ=−i에 대해 $e^{0\cdot x}\cos(x)=\cos(x)$와 $e^{0\cdot x}\sin(x)=\sin(x)$ 형태의 해를 얻습니다.
- 따라서, 방정식의 일반해는 다음과 같습니다:

$$y(x)=C_1e^x+C_2\cos(x)+C_3\sin(x)$$

6. 초기 조건을 이용하여 상수 C_1, C_2, C_3구하기

1. $y(0)=2$ 대입:

$$y(0)=C_1e^0+C_2\cos(0)+C_3\sin(0)=C_1+C_2=2$$

2. $y'(0)=10$ 대입:

$$y'(x)=C_1e^x-C_2\sin(x)+C_3\cos(x)$$
$$y'(0)=C_1-0+C_3=10$$

3. $y''(0)=-4$대입:

$$y''(x)=C_1e^x-C_2\cos(x)-C_3\sin(x)$$
$$y''(0)=C_1-C_2=-4$$

이 세 가지 조건을 풀어 C_1, C_2, C_3의 값을 찾고, 이를 일반해에 대입하여 **특수해**를 구할 수 있습니다.

이렇게 초기 조건을 이용해 상수를 구하는 과정을 통해 유일한 해를 구하게 됩니다.

연립 방정식을 풀어 상수 C_1, C_2, C_3의 값을 다음과 같이 구했습니다:

- $C_1=-1$

- $C_2 = 3$
- $C_3 = 1$

따라서 주어진 초기 조건을 만족하는 특수해는 다음과 같습니다:

$y(x) = -e^x + 3\cos(x) + 11\sin(x)$

이 해가 방정식과 초기 조건을 모두 만족하는 유일한 특수해입니다.

17. 미정계수법 (Method of Undetermined Coefficients)

미정계수법은 비제차 선형 상미분방정식의 특정한 형태에서 특수해를 구하는 방법으로, **비제차 항의 형태**에 따라 적절한 함수 형태를 가정하여 특수해를 찾는 방식입니다. 비제차 상미분방정식은 다음과 같은 형태를 갖습니다.

$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

여기서:

- $y_h(x)$: 동차 방정식의 일반해 (즉, 제차 방정식의 해)
- $y_p(x)$: 비제차 방정식의 특수해

미정계수법의 단계

1. **동차 방정식의 해 $y_h(x)$ 구하기**:
   - 우선 r(x)=0인 제차 방정식에 대해 특성 방정식을 풀어 일반해 $y_h(x)$를 구합니다.
2. **비제차 항 r(x)의 형태에 따라 특수해 $y_p(x)$ 가정**:
   - 비제차 항 r(x)의 형태에 따라 적절한 함수 형태를 선택하여 특수해 $y_p(x)$를 가정합니다.
   - 예를 들어,$r(x) = e^{ax}$일 경우 $y_p(x) = Ae^{ax}$로 가정하고, $r(x) = \cos(bx)$ 또는 $r(x) = \sin(bx)$일 경우 $y_p(x) = A\cos(bx) + B\sin(bx)$로 가정합니다.
3. **미정 계수 결정**:
   - 가정한 $y_p(x)$를 방정식에 대입하여 계수를 비교하고, 미정 계수 A, B 등을 결정합니다.

미정계수법 적용 예시

비제차 항의 유형에 따라 다음과 같은 특수해 $y_p(x)$를 가정할 수 있습니다.

- $r(x) = k$: 상수 k일 경우, $y_p(x) = A$로 가정.
- $r(x) = e^{ax}$: 지수 함수일 경우, $y_p(x) = Ae^{ax}$로 가정.

- $r(x) = \sin(bx)$ 또는 $\cos(bx)$: 삼각 함수일 경우, $y_p(x) = A\cos(bx) + B\sin(bx)$로 가정.
- $r(x) = x^n$: 다항식일 경우, $y_p(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_0$로 가정.

---

18. 차수추가법 (Method of Annihilation or Superposition of Order)

차수추가법은 미정계수법을 적용할 때, **특수해의 형태가 동차 방정식의 해와 겹치는 경우** 사용하는 보완 방법입니다. 동차 방정식의 해와 특수해가 겹치는 경우, 단순한 형태로는 독립적인 해를 만들 수 없기 때문에 **차수를 높여 겹치지 않는 형태의 특수해를 설정**해야 합니다.

차수추가법의 원리

1. 비제차 항의 형태가 동차 방정식의 해의 형태와 겹치는 경우, 가정한 특수해에 차수를 추가하여 x의 곱을 증가시킵니다.
2. 이렇게 하면 특수해와 동차 방정식의 해가 선형 독립성을 유지할 수 있어, 전체 방정식의 해를 구성할 때 문제가 발생하지 않습니다.

차수추가법의 적용 예시

- **예시 1**: 만약 동차 방정식의 해 중 하나가 $y_h(x) = e^{ax}$이고, 비제차 항이 $r(x) = e^{ax}$인 경우:
  - 원래는 $y_p(x) = Ae^{ax}$로 가정할 수 있지만, $y_h(x)$와 겹치므로 이 가정으로는 해결할 수 없습니다.
  - 따라서 **차수를 추가**하여 $y_p(x) = Axe^{ax}$로 가정합니다.
- **예시 2**: 동차 방정식의 해가 $y_h(x) = x^2$일 때, 비제차 항이 $r(x) = x^2$인 경우:
  - 원래는 $y_p(x) = Ax^2$로 가정해야 하지만, 이것은 동차 해와 겹칩니다.
  - 따라서 **차수를 한 단계 더 높여** $y_p(x) = Ax^3$로 가정합니다.

차수추가법 적용 요약

- 동차 방정식의 해와 겹치는 비제차 항이 있을 때 x의 차수를 추가하는 것이 핵심입니다.
- 이 과정을 통해 특수해가 동차 방정식의 해와 선형 독립이 되도록 조정할 수 있습니다.

예시 문제로 적용해 보기

비제차 상미분방정식을 예로 들어 미정계수법과 차수추가법을 적용해 보겠습니다.

문제 예시

$y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$

1. **동차 방정식의 해 $y_h(x)$구하기**:
   - 제차 방정식은 $y'' - 3y' + 2y = 0$입니다.
   - 특성 방정식은 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, 해는 $\lambda = 1, 2$입니다.
   - 따라서, 동차 방정식의 일반해는 $y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$입니다.
2. **비제차 항의 형태에 따른 특수해 $y_p(x)$ 가정**:
   - 비제차 항이 e^{2x}이므로, $y_p(x) = Ae^{2x}$로 가정합니다.
3. **차수추가법 적용**:
   - 여기서 문제가 발생하는데, e^{2x}는 동차 방정식의 해 $y_h(x)$의 일부와 겹칩니다.
   - 따라서 차수추가법을 사용하여 $y_p(x) = Axe^{2x}$로 변경하여 가정합니다.
4. **미정 계수 결정**:
   - $y_p(x) = Axe^{2x}$를 원래 방정식에 대입하여 A의 값을 구하고, 이를 통해 특수해를 완성합니다.

1. 비제차 선형 상미분방정식의 기본 형태

비제차 선형 상미분방정식은 다음과 같은 형태를 가집니다:

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x)$$

- 이 방정식에서:
  - $y^{(n)}$: y의 n계 도함수.
  - $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x)$: x의 함수로 주어진 계수들.
  - $r(x)$: 독립 변수 x에 대한 함수로, 이 방정식의 **비제차 항**입니다.

---

2. 일반해 (General Solution)

비제차 선형 상미분방정식의 **일반해**는 다음과 같은 형태로 나타낼 수 있습니다:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

- 여기서:
  - $y_h(x)$: **동차(제차) 상미분방정식의 일반해**로, $r(x) = 0$일 때의 해를 의미합니다.
  - $y_p(x)$: **비제차 상미분방정식의 특수해**로, $r(x) \neq 0$일 때 방정식을 만족하는 하나의 특정한 해입니다.

일반해 구성 방식

- 비제차 상미분방정식의 해는 동차 상미분방정식의 해와 비제차 상미분방정식의 특정한 해의 합으로 이루어집니다.
- 따라서, 비제차 방정식의 해 전체를 구하려면 **동차 방정식의 일반해**와 **비제차 방정식의 특수해**를 모두 구해야 합니다.

---

3. 특수해 (Particular Solution)

특수해 $y_p(x)$는 주어진 비제차 상미분방정식을 만족하는 하나의 특정한 해입니다.

특수해 구하는 방법

- 비제차 방정식의 비제차 항 r(x)의 형태에 따라, **미정계수법**이나 **차수추가법**을 사용하여 특수해를 찾습니다.
- $r(x)$의 형태에 따라 적절한 함수 형태를 가정하고, 이 가정한 함수의 계수를 결정함으로써 $y_p(x)$를 구할 수 있습니다.

특수해의 역할

- 특수해는 비제차 항 r(x)에 의해 나타나는 강제 진동이나 외부 입력의 효과를 나타냅니다.
- $y_p(x)$는 방정식의 비제차성을 반영하므로, 이를 통해 비제차 방정식의 전체적인 해를 구성할 수 있게 됩니다.

---

4. 전체 해 (General Solution with Initial Conditions)

비제차 방정식의 전체 해는 일반해 $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$로 나타낼 수 있습니다.

- **초기 조건**이 주어진 경우, 일반해에서 상수들을 결정하여 **특정한 해**를 찾을 수 있습니다.
- 초기 조건이 없다면, 일반해 자체가 전체 해가 되며, 초기 조건을 통해 상수 값이 결정되면 그때서야 **유일한 특수해**가 결정됩니다.

예시로 이해하기

비제차 상미분방정식:

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$$

1. **동차 방정식의 해 $y_h(x)$ 구하기**:
   - 동차 방정식: $y'' - 3y' + 2y = 0$

- 특성 방정식: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$으로, 해는 $\lambda = 1, 2$입니다.
- 따라서 동차 방정식의 일반해는 $y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$입니다.

2. **비제차 방정식의 특수해 $y_p(x)$ 가정**:
   - 비제차 항이 e^{2x} 형태이므로, $y_p(x) = Axe^{2x}$로 가정하고 대입하여 A의 값을 구합니다.
3. **전체 해 구성**:
   - 구한 $y_h(x)$와 $y_p(x)$를 합하여 전체 해 $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$를 구합니다.

문제 분석

주어진 방정식은 비제차 선형 상미분방정식입니다:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 3e^x$$

이를 풀기 위해 **일반해**를 구해야 하며, 일반해는 동차 방정식의 해 $y_h(x)$와 비제차 항을 고려한 특수해 $y_p(x)$의 합으로 표현됩니다:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

---

1. 동차 방정식의 해 $y_h(x)$구하기

동차 방정식은 다음과 같습니다:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

1-1. 특성 방정식 설정

이 방정식의 특성 방정식을 세워서 풀어보겠습니다:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

이 방정식을 인수분해하면,

$$(\lambda - 1)^3 = 0$$

즉, $\lambda = 1$이 **삼중근**(triple root)임을 알 수 있습니다.

1-2. 동차 방정식의 일반해 $y_h(x)$ 구하기

삼중근 $\lambda = 1$에 따라 동차 방정식의 일반해는 다음과 같은 형태를 가집니다:

$$y_h(x) = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^x$$

여기서 C_1, C_2, C_3는 임의의 상수입니다.

---

2. 비제차 방정식의 특수해 $y_p(x)$ 구하기

비제차 항 $r(x) = 3e^x$에 대해 특수해 $y_p(x)$를 구해야 합니다.

2-1. 특수해의 초기 가정

비제차 항 $3e^x$는 동차 방정식의 해 $y_h(x)$에 포함된 e^x와 겹칩니다. 따라서 **차수추가법**을 적용하여, 특수해 $y_p(x)$를 겹치지 않는 형태로 가정해야 합니다.

동차 방정식의 해가 e^x를 포함하고 있으므로, 특수해 $y_p(x)$를 x**의 차수를 추가하여** 다음과 같이 가정합니다:

$$y_p(x) = Ax^3e^x$$

여기서 A는 미정계수입니다.

2-2. 특수해의 미정계수 결정하기

가정한 특수해 $y_p(x) = Ax^3e^x$를 방정식에 대입하여, 미정계수 A의 값을 구하겠습니다.

특수해의 도함수 계산 정리

1. **특수해**: $y_p(x) = Ax^3e^x$
2. **첫 번째 도함수**: $y_p'(x) = Ae^x(3x^2 + x^3) = Ax^3e^x + 3Ax^2e^x$
3. **두 번째 도함수**:$y_p''(x) = Ae^x(6x + 6x^2 + x^3) = Ax^3e^x + 6Ax^2e^x + 6Axe^x$
4. **세 번째 도함수**:$y_p'''(x) = Ae^x(6 + 18x + 6x^2 + x^3) = Ax^3e^x + 9Ax^2e^x + 18Axe^x + 6Ae^x$

방정식에 도함수 대입

주어진 방정식:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 3e^x$$

1. **왼쪽 항에 도함수 대입**:$\left(Ax^3e^x + 9Ax^2e^x + 18Axe^x + 6Ae^x\right) - 3\left(Ax^3e^x + 6Ax^2e^x + 6Axe^x\right) + 3\left(Ax^3e^x + 3Ax^2e^x\right) - Ax^3e^x$
2. **같은 항끼리 정리**:
   계산을 통해 각 항의 계수를 비교하고, 최종적으로 비제차 항
   $3e^x$와 같아지도록 A를 결정할 수 있습니다.

미정계수 A의 값은 $A = \frac{1}{2}$로 구해졌습니다.

따라서, 특수해 $y_p(x)$는 다음과 같습니다:

$y_p(x) = \frac{1}{2}x^3e^x$

최종 일반해

비제차 상미분방정식의 전체 해는 동차 방정식의 해 $y_h(x)$와 비제차 방정식의 특수해 $y_p(x)$의 합으로 주어집니다:

$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

이를 정리하면,

$y(x) = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^x + \frac{1}{2}x^3e^x$

여기서 C_1, C_2, C_3는 상수입니다.

문제 개요

들보가 하중을 받으면 변형이 발생하며, 이 변형은 다음 두 가지 조건에 따라 설명됩니다.

1. **들보의 변위** y(x)의 2차 도함수는 휨모멘트 m(x)와 비례한다.
2. **단위 길이당 하중** F(x)는 휨모멘트 m의 2차 도함수와 같다.

조건을 바탕으로 한 수식 유도

1. 첫 번째 조건: 변위와 휨모멘트의 관계

주어진 조건에 따르면, 변위 y(x)의 2차 도함수 y′′(x)가 휨모멘트 m(x)와 비례합니다.

$y''(x) \propto m(x)$

이를 비례 상수 k를 사용하여 식으로 표현하면,

$y''(x) = k \cdot m(x)$

2. 두 번째 조건: 하중과 휨모멘트의 관계

두 번째 조건에 따르면, 하중 F(x)는 휨모멘트 m(x)의 2차 도함수와 같습니다.

$F(x) = m''(x)$

이를 통해 m(x)와 y(x)의 관계를 바탕으로, 하중과 변위의 관계를 유도할 수 있습니다.

3. 휨모멘트를 변위로 표현하기

첫 번째 조건에서 $y'' = k \cdot m$이므로, m을 변위의 도함수로 나타낼 수 있습니다:

$m = \frac{y''}{k}$

이를 두 번째 조건에 대입하면,

$F(x) = m'' = \frac{1}{k}y^{(4)}(x)$

따라서, 들보의 하중과 변위 사이의 관계를 나타내는 미분방정식은 다음과 같이 4차 미분방정식으로 표현됩니다:

$y^{(4)}(x) = kF(x)$

예제에서의 해법

주어진 그림에서는 하중이 $F(x) = F_0$(상수)로 일정하다고 가정하고 있습니다. 따라서, 미분방정식은 다음과 같은 형태가 됩니다.

$y^{(4)}(x) = kF_0$

이제 이 4차 미분방정식을 풀어 해를 구하는 과정입니다.

미분방정식 풀기

주어진 방정식 $y^{(4)} = kF_0$을 풀기 위해, 양변을 적분하면서 각 적분에서 상수 C_1, C_2, C_3, C_4를 추가해 줍니다.

1. **첫 번째 적분**: $y'''(x) = kF_0x + C_1$
2. **두 번째 적분**:$y''(x) = \frac{kF_0}{2}x^2 + C_1x + C_2$
3. **세 번째 적분**:$y'(x) = \frac{kF_0}{6}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$
4. **네 번째 적분**:$y(x) = \frac{kF_0}{24}x^4 + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3x + C_4$

최종 해

따라서, 미분방정식의 해는 다음과 같이 표현됩니다:

$y(x) = \frac{kF_0}{24}x^4 + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3x + C_4$

여기서 C_1, C_2, C_3, C_4는 초기 조건에 따라 결정되는 상수입니다. 이 상수들은 들보의 양 끝의 고정 조건, 혹은 경계 조건에 따라 달라집니다.