

공업수학1-8주차-1

👤 생성자	👤 재환 김
🏷 태그	엔지니어링

1. 고계 선형 상미분방정식의 기본 형태

1. 일반적 형태: $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$

- 이 식은 y 와 그 미분(예: $y', y'', \dots, y^{(n)}$)을 포함하여 x 와의 관계를 나타내는 미분 방정식입니다.
- 이 식에서 F 는 함수로, 미분항의 결합으로 정의됩니다. 그러나 이 자체로는 구체적인 형태를 나타내지는 않으므로, 문제에 맞춰 특정 형태로 변형해야 합니다.

2. 표준형: $y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x)$

- 이 식은 고계 선형 상미분방정식을 표준형으로 나타낸 것입니다.
- 여기서 **고계**란 미분 차수가 높다는 의미로, 일반적으로 n 차 미분까지 포함하는 방정식을 말합니다.

nn

- 각 계수 $p_0(x), p_1(x), \dots, p_{n-1}(x)$ 는 미분 항 앞에 곱해지는 x 의 함수로, 이들은 방정식이 **선형**일 때 x 에 대한 함수 형태로 유지됩니다.
- $r(x)$ 는 독립변수인 x 의 함수로, 외부 입력이나 강제 항을 나타냅니다.

2. 선형과 비선형 방정식의 구분

• 선형 상미분방정식:

- 선형 방정식은 미분항들이 상수 계수 또는 독립변수 x 의 함수와 곱해진 형태로, 더 해지거나 차감되는 방식으로 나타납니다.
- 예를 들어, $y^{(2)} + p(x)y' + q(x)y = 0$ 는 선형 방정식입니다.
- 미분항들이 서로 곱해지거나, y 의 비선형 형태 (예: $y^2, \sin(y)$)가 포함되지 않아야 선형성을 유지합니다.

• 비선형 상미분방정식:

- 비선형 방정식에서는 미분항들이 곱해지거나 y 의 비선형 함수 형태가 포함됩니다.

- 예를 들어 $y'' + y(y')^2 = 0$ 는 비선형 방정식입니다.
- 비선형 방정식의 해를 구하는 것은 일반적으로 더 복잡하며, 특수한 해석적 방법이나 수치적 접근이 필요할 수 있습니다.

3. 제차와 비제차 미분방정식

1. **제차(Homogeneous) 미분방정식:** $y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$

- 제차 방정식에서는 $r(x) = 0$ 이며, 이는 외부의 강제 항이나 입력이 없는 순수한 시스템을 나타냅니다.
- 이 경우, 방정식의 해는 시스템의 **고유 해**로 구성되며, 예를 들어 자유 진동 시스템이나 단순 전기 회로에서 발생합니다.
- 제차 방정식의 해는 주로 **특성 방정식**을 통해 구하며, 이 과정에서 고유값과 고유벡터가 중요한 역할을 합니다.

2. **비제차(Nonhomogeneous) 미분방정식:** $y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x)$

- 비제차 방정식에서는 $r(x) \neq 0$ 이며, 이는 시스템에 외부에서 작용하는 입력이나 강제 항이 있는 경우를 나타냅니다.
- 예를 들어 진동 시스템에 외력이 작용하거나, 전기 회로에 외부 전압이 인가되는 경우가 이에 해당합니다.
- 비제차 방정식의 해는 **일반해**로, 제차 방정식의 **고유 해**와 비제차 항에 따른 **특수 해**의 합으로 구성됩니다.

4. 예시를 통한 설명

제차 방정식 예시:

- 방정식: $y'' + 3y' + 2y = 0$
- 특성 방정식: $r^2 + 3r + 2 = 0 \rightarrow (r + 1)(r + 2) = 0$
- 고유 해: $y_h = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$
- 이 방정식은 외부 입력이 없는 상태의 자연 응답을 나타내며, 예를 들어 감쇠된 진동 시스템의 자유 진동 해를 구하는 데 사용됩니다.

비제차 방정식 예시:

- 방정식: $y'' + 3y' + 2y = e^x$
- 고유 해: $y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$
- 특수 해: $y_p = A e^x$ 을 가정하여 대입 후 계수를 비교해 특수 해 구하기
- 일반해: $y = y_h + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + A e^x$
- 이 방정식은 외부에서 입력된 강제 진동을 포함하는 경우의 해를 나타내며, 예를 들어 외력에 의해 진동하는 시스템의 응답을 나타낼 수 있습니다.

5. 1계 선형 상미분방정식

1. 방정식의 일반적 형태: $F(x, y, y') = 0$

- 이는 y 와 그 1계 도함수 y' 을 포함하는 형태의 1계 상미분방정식입니다.

2. 표준형: $y' + py = r(x)$

- 이 형태는 1계 비제차 선형 상미분방정식을 나타내는 표준형입니다.
- 여기서 p 는 상수 또는 x 의 함수일 수 있고, $r(x)$ 는 x 에 대한 외부 입력을 나타내는 함수입니다.
- 비제차 방정식에서 $r(x)$ 이 0이 아닌 경우 외부 입력에 의한 영향을 받게 됩니다.

6. 2계 선형 상미분방정식

1. 방정식의 일반적 형태: $F(x, y, y', y'') = 0$

- 이 경우 2계 도함수 y'' 까지 포함된 2계 상미분방정식을 나타냅니다.

2. 표준형: $y'' + py' + qy = r(x)$

- 이 방정식은 2계 비제차 선형 상미분방정식을 나타냅니다.
- 여기서 p 와 q 는 상수 또는 x 의 함수일 수 있으며, $r(x)$ 는 외부 입력을 나타냅니다.

3. 해의 형태:

- 비제차 방정식의 일반해 y 는 고유 해 y_h 와 특수 해 y_p 의 합으로 나타낼 수 있습니다:

$$y = y_h + y_p$$

- 고유 해 y_h 는 동차(제차) 방정식 $y'' + py' + qy = 0$ 의 해로, 외부 입력이 없을 때의 자연스러운 시스템 반응을 나타냅니다.

- 특수 해 y_p 는 비제차 방정식의 특정한 해로, 외부 입력에 의한 강제 반응을 나타냅니다.

3. 특성 방정식

- 제차 방정식 $y'' + py' + qy = 0$ 의 해를 구하기 위해 **특성 방정식**을 사용합니다.
- 특성 방정식은 다음과 같이 설정됩니다:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

- 특성 방정식의 해인 λ 값에 따라 제차 방정식의 고유 해가 결정됩니다.
 - 예를 들어, $\lambda = -p$ 와 같은 값이 구해지면, 이를 이용하여 고유 해의 형태를 결정하게 됩니다.

7. 1계 제차 상미분방정식

1. 방정식의 형태: $y' + p_0y = 0$

- 이 방정식은 1계 제차 상미분방정식입니다.
- y 와 그 도함수 y' 가 선형적으로 결합된 형태이며, 외부 입력 항이 없는 제차 방정식입니다.

2. 해 구하기:

- 이 방정식의 일반해는 상수 C_1 와 함수 $y_1(x)$ 로 표현됩니다.
- 이 경우, 해는 다음과 같은 형태로 주어집니다:

$$y_h(x) = C_1 y_1(x)$$

- 여기서 $y_1(x)$ 는 이 방정식의 기저 함수로, 보통 $y = e^{-p_0x}$ 와 같이 지수 함수 형태가 됩니다.

8. 2계 제차 상미분방정식

1. 방정식의 형태: $y'' + p_1y' + p_0y = 0$

- 이 방정식은 2계 제차 상미분방정식입니다.
- 2계 도함수 y'' , 1계 도함수 y' , 그리고 함수 y 가 결합된 형태로, 역시 외부 입력이 없는 제차 방정식입니다.

2. 특성 방정식 설정:

- 2계 방정식의 해를 구하기 위해 특성 방정식을 설정합니다:

$$\lambda^2 + p_1\lambda + p_0 = 0$$

- 이 방정식의 해를 구하면 λ_1 과 λ_2 라는 두 근이 나오며, 이는 다음과 같은 경우로 나뉩니다:
 - **실근:** 두 근이 실수일 경우 $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ 와 $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ 로 해가 구성됩니다.
 - **중근:** 두 근이 동일한 경우 특수한 형태의 해를 구성해야 하며, 일반적으로 $y_1(x) = e^{\lambda x}$ 와 $y_2(x) = xe^{\lambda x}$ 가 됩니다.
 - **복소수 근:** 두 근이 복소수일 경우 $y_1(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ 와 $y_2(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ 로 해가 구성됩니다.

3. 일반해 표현:

- 특성 방정식에서 구한 근을 통해 기저 함수 $y_1(x), y_2(x)$ 를 얻으면, 일반해는 다음과 같이 표현됩니다:

$$y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

- 여기서 C_1 과 C_2 는 임의의 상수로, 초기 조건에 따라 값을 결정할 수 있습니다.

예시

1. 실근의 경우:

- 특성 방정식이 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ 이라면, 두 근은 $\lambda_1 = 1$ 과 $\lambda_2 = 2$ 가 됩니다.
- 이에 따라 해는 $y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ 로 표현됩니다.

2. 중근의 경우:

- 특성 방정식이 $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ 이라면, 근은 $\lambda = 1$ 로 중근입니다.
- 해는 $y_h(x) = (C_1 + C_2 x)e^x$ 로 표현됩니다.

3. 복소수 근의 경우:

- 특성 방정식이 $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ 이라면, 두 근은 $\lambda = -1 \pm 2i$ 가 됩니다.
- 해는 $y_h(x) = e^{-x}(C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x))$ 로 표현됩니다.

9. 고계 제차 선형 상미분방정식의 일반적인 형태

- 방정식 형태:

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

- 이 식은 n계 제차 선형 상미분방정식으로, 가장 높은 차수의 도함수 $y^{(n)}$ 부터 시작하여 점차 낮은 차수의 도함수들이 결합된 형태입니다.
- 방정식의 우변이 0이므로 외부 입력이나 강제 항이 없는 제차 방정식입니다.

10. 일반해와 특수해

1) 일반해의 형태

- 일반해는 방정식의 **모든 가능한 해**를 나타내며, 이는 다음과 같은 형태로 표현됩니다:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

- 여기서 c_1, \dots, c_n 은 상수입니다. 이 상수들은 초기 조건이나 경계 조건에 따라 결정됩니다.
- 함수 $y_1(x), \dots, y_n(x)$ 은 방정식의 기저(basis)를 형성하는 해들입니다. 이는 서로 독립적인 해들로 구성되어, 모든 가능한 해를 결합하여 표현할 수 있는 기저 역할을 합니다.

2) 기저(Basis) 해의 특성

- $y_1(x), \dots, y_n(x)$ 은 방정식의 선형 독립 해들로, 각 해가 다른 해들로 표현될 수 없습니다. 이 독립성 덕분에 방정식의 모든 해를 이들 해들의 선형 결합으로 나타낼 수 있습니다.
- 예를 들어, 2계 방정식이라면 기저가 되는 두 개의 독립 해가 필요하고, 3계 방정식이라면 세 개의 독립 해가 필요합니다.

3) 특수해

- 특수해는 일반해에서 특정한 상수 c_1, \dots, c_n 의 값을 대입하여 얻어지며, 주어진 문제의 초기 조건이나 경계 조건에 맞춰 고유한 해를 나타냅니다.
- 열린 구간에서 특정 상수들이 정해지면, 이를 **특수해**라고 부릅니다.

3. 예시를 통한 설명

예시 1: 2계 제차 상미분방정식

- 방정식: $y'' - 3y' + 2y = 0$
- 특성 방정식을 풀어 두 개의 실근 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ 을 얻습니다.
- 일반해:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

- 여기서 e^x 와 e^{2x} 는 독립적인 기저 해들입니다.
- 특정 초기 조건이 주어지면 c_1 과 c_2 의 값이 결정되어 특수해가 됩니다.

예시 2: 3계 제차 상미분방정식

- 방정식: $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$
- 특성 방정식의 근이 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ 로 구해집니다.
- 일반해:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$$

- 세 개의 기저 함수 e^x, e^{2x}, e^{3x} 가 방정식의 모든 해를 표현하는 기저 역할을 합니다.

11. 1차 독립 (Linearly Independent)

1. 정의:

- 함수 $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ 이 어떤 구간에서 **1차 독립**이라는 것은, 이 함수들이 다음 조건을 만족한다는 뜻입니다:

$$k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \dots + k_n y_n(x) = 0$$

이 방정식이 모든 x 에 대해 성립할 때, 모든 상수

k_1, k_2, \dots, k_n 이 모두 0인 경우에만 성립하는 상황입니다.

2. 의미:

- 상수 k_1, k_2, \dots, k_n 중 하나라도 0이 아닌 값으로 방정식을 만족할 수 없다면, 이 함수들은 1차 독립입니다.
- 즉, $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$ 일 때만 위의 선형 결합이 0이 될 수 있어야 1차 독립 조건이 성립합니다.
- 1차 독립인 함수들은 서로 독립적인 해들로 구성되며, 이 함수들로 구성된 선형 결합은 해당 방정식의 모든 해를 나타낼 수 있는 기저(basis)를 형성합니다.

3. 예시:

- 예를 들어, 함수 e^x 와 e^{2x} 가 1차 독립이라는 것은 $k_1 e^x + k_2 e^{2x} = 0$ 이 모든 x 에 대해 성립할 때 $k_1 = 0$ 그리고 $k_2 = 0$ 일 때만 성립함을 의미합니다.
- 이는 e^x 와 e^{2x} 가 서로 독립적이라는 것을 나타냅니다.

12. 종속 (Dependent)

1. 정의:

- 함수 $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ 이 어떤 구간에서 **종속**이라는 것은, 다음 방정식에서 적어도 하나의 상수 k_i 가 0이 아닐 때 성립함을 의미합니다:

$$k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \dots + k_n y_n(x) = 0$$

- 즉, 이 방정식이 모든 x 에 대해 성립할 때, 상수들 중 적어도 하나는 0이 아닐 수 있다는 뜻입니다.

2. 의미:

- 종속이라는 것은 하나의 함수가 다른 함수들의 선형 결합으로 표현될 수 있음을 의미합니다.
- 이 경우, 해당 함수들은 서로 독립적이지 않으며, 따라서 이러한 종속 관계가 존재하는 함수들은 **기저를 형성할 수 없습니다**.
- 예를 들어, 특정 함수가 다른 함수들의 선형 결합으로 표현 가능하다면, 그 함수는 나머지 함수들에 대해 종속적이라고 할 수 있습니다.

3. 예시:

- 예를 들어, 함수 x 와 $2x$ 는 종속적입니다. 왜냐하면 $2x$ 는 x 의 상수 배로 표현될 수 있기 때문입니다.
- 따라서, $k_1 x + k_2 (2x) = 0$ 이 성립할 때 k_1 과 k_2 중 하나가 0이 아닌 값으로도 성립할 수 있습니다.

13. 초기값 문제 (Initial Value Problem)

정의와 의미

- 고계 상미분방정식에서 해를 구할 때, 특정 시점 $x = x_0$ 에서 함수 $y(x)$ 와 그 도함수들의 값이 주어지면, 그 값을 만족하는 **유일한 해**를 찾을 수 있습니다.

- 이러한 문제를 **초기값 문제**라고 합니다. 이는 해를 구체적으로 특정하는 데 중요한 역할을 합니다.

n계 상미분방정식에서 초기 조건의 필요성

- n계 상미분방정식의 경우, $y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x)$ 에 대한 **n개의 초기 조건**이 필요합니다.
- 예를 들어, 2계 방정식이라면 $y(x)$ 와 $y'(x)$ 에 대한 초기 조건이 주어져야 합니다. 3계 방정식이라면 $y(x), y'(x), y''(x)$ 에 대한 초기 조건이 필요합니다.
- 초기 조건이 없으면 해가 여러 개가 될 수 있기 때문에, 이 조건을 통해 해를 유일하게 특정할 수 있습니다.

초기 조건의 일반적인 표현

- 초기 조건은 다음과 같이 주어집니다:

$$y(x_0) = C_0, \quad y'(x_0) = C_1, \quad y^{(2)}(x_0) = C_2, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = C_{n-1}$$

- 여기서 x_0 는 초기 조건이 주어지는 점이고, C_0, C_1, \dots, C_{n-1} 는 각각의 함수 값과 도함수 값에 대한 상수입니다.
- 이 초기 조건을 이용하여 상미분방정식의 해를 고유하게 결정할 수 있습니다.

초기값 문제의 예

- 예시로 2계 상미분방정식을 생각해보겠습니다:

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

초기 조건이 다음과 같이 주어진 경우:

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$$

이 초기 조건을 만족하는 유일한 해를 구할 수 있으며, 이 해는 방정식과 초기 조건을 동시에 만족합니다.

14. 존재성 및 유일성 정리 (Existence and Uniqueness Theorem)

개요

- 존재성 및 유일성 정리는 초기 조건이 주어졌을 때, 상미분방정식의 해가 **특정 구간 내에서 유일하게 존재함**을 보장하는 이론입니다.

- 이 정리는 해가 실제로 존재하며, 초기 조건을 통해 유일하게 결정된다는 점을 확인시켜 줍니다.

존재성 및 유일성 정리의 조건

- 고계 제차 선형 상미분방정식:

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

- 이 방정식에서 존재성과 유일성이 보장되기 위해 다음과 같은 조건이 필요합니다:
 - 계수 함수 $p_0(x), p_1(x), \dots, p_{n-1}(x)$ 가 주어진 구간에서 **연속**이어야 합니다.
 - 초기값 x_0 가 이 구간 내에 있어야 합니다.
- 이러한 조건이 만족되면, 초기 조건을 만족하는 **유일한 해**가 주어진 구간 내에 존재하게 됩니다.

왜 연속성이 중요한가?

- 상미분방정식에서 계수 함수가 연속이면, 해가 갑작스러운 변화 없이 매끄럽게 정의될 수 있습니다.
- 만약 계수 함수가 불연속이거나 특이점이 있다면, 해가 존재하지 않거나 여러 개가 될 수 있습니다. 따라서, 연속성은 해의 유일성을 보장하는 중요한 조건입니다.

예시: 존재성과 유일성 정리 적용

- 예를 들어, 다음과 같은 2계 상미분방정식을 고려해 보겠습니다:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

- 이 방정식에서 $p(x)$ 와 $q(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고, 초기 조건이 $x_0 \in [a, b]$ 에서 주어진다면, 이 구간에서 초기 조건을 만족하는 **유일한 해**가 존재합니다.
- 즉, 초기 조건을 만족하는 유일한 해를 구할 수 있다는 것이 보장됩니다.

15. Wronskian

Wronskian 정의

- n 계 제차 선형 상미분방정식의 해 y_1, y_2, \dots, y_n 의 **선형 독립성**을 판별하기 위해 **Wronskian 행렬식**을 사용합니다.
- 주어진 함수들이 선형 독립인지 확인하기 위한 중요한 도구로, **선형 독립성**을 보장하는 조건이 됩니다.

Wronskian의 행렬식 표현

- y_1, y_2, \dots, y_n 이 n 계 상미분방정식의 해일 때, 이들의 Wronskian W 은 다음과 같이 정의됩니다:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

- 이 행렬식은 주어진 함수들의 각 미분(도함수)을 행으로 갖는 행렬의 행렬식을 구하는 방식입니다.

Wronskian을 통한 선형 독립성 판별

- $W(x) \neq 0$ 인 경우, 함수 y_1, y_2, \dots, y_n 은 선형 독립입니다.
- 반대로 $W(x)=0$ 인 경우, 함수들이 선형 종속일 가능성이 있습니다.
- Wronskian은 특정 구간에서 연속적으로 계산되며, 이를 통해 해당 구간 내에서 해들의 독립성을 판별할 수 있습니다.

16. 예제 문제 풀이

예제 1: $y''' - 4y'' - y' + 4y = 0$

1. 방정식의 형태

- 이 방정식은 **3계 상미분방정식**이며, 제차(우변이 0) 선형 상미분방정식입니다.
- 일반해를 구하기 위해 **특성 방정식**을 설정합니다.

2. 특성 방정식 설정

- 3계 방정식이므로, 다음과 같은 특성 방정식을 세웁니다:

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 - \lambda + 4 = 0$$

3. 특성 방정식의 해 구하기

- 특성 방정식을 인수분해하거나 근을 찾아야 합니다.
- 인수분해 방법을 사용할 수 있으며, 이 경우 한 개의 실근을 먼저 찾고, 이후 나머지 부분을 인수분해합니다.

- 예를 들어, $\lambda=1$ 이 근임을 확인한 후, 이를 이용하여 나머지를 분해하면 다음과 같은 형태로 표현됩니다:

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0$$

- 이후 $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$ 을 추가로 인수분해하면,

$$(\lambda - 1)(\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$$

- 따라서, $\lambda=1, \lambda=4, \lambda=-1$ 이 특성 방정식의 근입니다.

4. 일반해 구하기

- 각 근에 대해 해를 구하면, 각각의 근이 실수이므로 해는 다음과 같은 형태를 가집니다:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{4x} + C_3 e^{-x}$$

- 여기서 C_1, C_2, C_3 는 상수로, 초기 조건이 주어진다면 값을 정할 수 있습니다.

예제 2: $y''' - y'' + y' - y = 0$ 과 초기 조건

1. 방정식의 형태

- 이 방정식도 **3계 상미분방정식**이며, 우변이 0인 제차 방정식입니다.
- 초기 조건이 주어졌으므로, 특정 해를 구할 수 있습니다.

2. 초기 조건

- $y(0)=2, y'(0)=10, y''(0)=-4$
- 이 초기 조건은 해를 유일하게 결정하는 데 사용됩니다.

3. 특성 방정식 설정

- 특성 방정식은 다음과 같습니다:

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

4. 특성 방정식의 해 구하기

- 이 방정식을 인수분해하여 근을 구해보겠습니다.
- $\lambda = 1$ 이 근임을 확인할 수 있으며, 이를 사용해 나머지 인수로 나누면 다음과 같이 표현됩니다:

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$

- $\lambda^2 + 1 = 0$ 에서 두 개의 허근을 찾을 수 있으며, 이들은 각각 $\lambda=i$ 와 $\lambda=-i$ 입니다.
- 따라서, 세 개의 근은 $\lambda=1, \lambda=i, \lambda=-i$ 입니다.

5. 일반해 구하기

- 각 근에 대해 일반해를 구성합니다:
 - 실근 $\lambda=1$ 에 대해 e^x 형태의 해를 얻습니다.
 - 허근 $\lambda=i$ 와 $\lambda=-i$ 에 대해 $e^{0 \cdot x} \cos(x) = \cos(x)$ 와 $e^{0 \cdot x} \sin(x) = \sin(x)$ 형태의 해를 얻습니다.
- 따라서, 방정식의 일반해는 다음과 같습니다:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 \cos(x) + C_3 \sin(x)$$

6. 초기 조건을 이용하여 상수 C_1, C_2, C_3 구하기

1. $y(0) = 2$ 대입:

$$y(0) = C_1 e^0 + C_2 \cos(0) + C_3 \sin(0) = C_1 + C_2 = 2$$

2. $y'(0) = 10$ 대입:

$$y'(x) = C_1 e^x - C_2 \sin(x) + C_3 \cos(x)$$

$$y'(0) = C_1 - 0 + C_3 = 10$$

3. $y''(0) = -4$ 대입:

$$y''(x) = C_1 e^x - C_2 \cos(x) - C_3 \sin(x)$$

$$y''(0) = C_1 - C_2 = -4$$

이 세 가지 조건을 풀어 C_1, C_2, C_3 의 값을 찾고, 이를 일반해에 대입하여 **특수해**를 구할 수 있습니다.

이렇게 초기 조건을 이용해 상수를 구하는 과정을 통해 유일한 해를 구하게 됩니다.

나의 말:

세가지 조건을 풀어서 C_1, C_2, C_3 의 값을 찾고 특수해를 구해줘

ChatGPT의 말:

ChatGPT

연립 방정식을 풀어 상수 C_1, C_2, C_3 의 값을 다음과 같이 구했습니다:

- $C_1 = -1$
- $C_2 = 3$
- $C_3 = 1$

따라서 주어진 초기 조건을 만족하는 특수해는 다음과 같습니다:

$$y(x) = -e^x + 3 \cos(x) + 11 \sin(x)$$

이 해가 방정식과 초기 조건을 모두 만족하는 유일한 특수해입니다.

17. 미정계수법 (Method of Undetermined Coefficients)

미정계수법은 비제차 선형 상미분방정식의 특정한 형태에서 특수해를 구하는 방법으로, **비제차 항의 형태**에 따라 적절한 함수 형태를 가정하여 특수해를 찾는 방식입니다. 비제차 상미분방정식은 다음과 같은 형태를 갖습니다.

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

여기서:

- $y_h(x)$: 동차 방정식의 일반해 (즉, 제차 방정식의 해)
- $y_p(x)$: 비제차 방정식의 특수해

미정계수법의 단계

1. 동차 방정식의 해 $y_h(x)$ 구하기:

- 우선 $r(x)=0$ 인 제차 방정식에 대해 특성 방정식을 풀어 일반해 $y_h(x)$ 를 구합니다.

2. 비제차 항 $r(x)$ 의 형태에 따라 특수해 $y_p(x)$ 가정:

- 비제차 항 $r(x)$ 의 형태에 따라 적절한 함수 형태를 선택하여 특수해 $y_p(x)$ 를 가정합니다.
- 예를 들어, $r(x) = e^{ax}$ 일 경우 $y_p(x) = Ae^{ax}$ 로 가정하고, $r(x) = \cos(bx)$ 또는 $r(x) = \sin(bx)$ 일 경우 $y_p(x) = A \cos(bx) + B \sin(bx)$ 로 가정합니다.

3. 미정 계수 결정:

- 가정한 $y_p(x)$ 를 방정식에 대입하여 계수를 비교하고, 미정 계수 A, B 등을 결정합니다.

미정계수법 적용 예시

비제차 항의 유형에 따라 다음과 같은 특수해 $y_p(x)$ 를 가정할 수 있습니다.

- $r(x) = k$: 상수 k 일 경우, $y_p(x) = A$ 로 가정.
- $r(x) = e^{ax}$: 지수 함수일 경우, $y_p(x) = Ae^{ax}$ 로 가정.
- $r(x) = \sin(bx)$ 또는 $\cos(bx)$: 삼각 함수일 경우, $y_p(x) = A \cos(bx) + B \sin(bx)$ 로 가정.
- $r(x) = x^n$: 다항식일 경우, $y_p(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_0$ 로 가정.

18. 차수추가법 (Method of Annihilation or Superposition of Order)

차수추가법은 미정계수법을 적용할 때, 특수해의 형태가 동차 방정식의 해와 겹치는 경우 사용하는 보완 방법입니다. 동차 방정식의 해와 특수해가 겹치는 경우, 단순한 형태로는 독립적인 해를 만들 수 없기 때문에 차수를 높여 겹치지 않는 형태의 특수해를 설정해야 합니다.

차수추가법의 원리

1. 비제차 항의 형태가 동차 방정식의 해의 형태와 겹치는 경우, 가정한 특수해에 차수를 추가하여 x 의 곱을 증가시킵니다.
2. 이렇게 하면 특수해와 동차 방정식의 해가 선형 독립성을 유지할 수 있어, 전체 방정식의 해를 구성할 때 문제가 발생하지 않습니다.

차수추가법의 적용 예시

- **예시 1:** 만약 동차 방정식의 해 중 하나가 $y_h(x) = e^{ax}$ 이고, 비제차 항이 $r(x) = e^{ax}$ 인 경우:
 - 원래는 $y_p(x) = Ae^{ax}$ 로 가정할 수 있지만, $y_h(x)$ 와 겹치므로 이 가정으로는 해결할 수 없습니다.
 - 따라서 차수를 추가하여 $y_p(x) = Axe^{ax}$ 로 가정합니다.
- **예시 2:** 동차 방정식의 해가 $y_h(x) = x^2$ 일 때, 비제차 항이 $r(x) = x^2$ 인 경우:
 - 원래는 $y_p(x) = Ax^2$ 로 가정해야 하지만, 이것은 동차 해와 겹칩니다.
 - 따라서 차수를 한 단계 더 높여 $y_p(x) = Ax^3$ 로 가정합니다.

차수추가법 적용 요약

- 동차 방정식의 해와 겹치는 비제차 항이 있을 때 x 의 차수를 추가하는 것이 핵심입니다.
- 이 과정을 통해 특수해가 동차 방정식의 해와 선형 독립이 되도록 조정할 수 있습니다.

예시 문제로 적용해 보기

비제차 상미분방정식을 예로 들어 미정계수법과 차수추가법을 적용해 보겠습니다.

문제 예시

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$$

1. 동차 방정식의 해 $y_h(x)$ 구하기:

- 제차 방정식은 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 입니다.
- 특성 방정식은 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, 해는 $\lambda = 1, 2$ 입니다.
- 따라서, 동차 방정식의 일반해는 $y_h(x) = C_1e^x + C_2e^{2x}$ 입니다.

2. 비제차 항의 형태에 따른 특수해 $y_p(x)$ 가정:

- 비제차 항이 e^{2x} 이므로, $y_p(x) = Ae^{2x}$ 로 가정합니다.

3. 차수추가법 적용:

- 여기서 문제가 발생하는데, e^{2x} 는 동차 방정식의 해 $y_h(x)$ 의 일부와 겹칩니다.
- 따라서 차수추가법을 사용하여 $y_p(x) = Axe^{2x}$ 로 변경하여 가정합니다.

4. 미정 계수 결정:

- $y_p(x) = Axe^{2x}$ 를 원래 방정식에 대입하여 A의 값을 구하고, 이를 통해 특수해를 완성합니다.

1. 비제차 선형 상미분방정식의 기본 형태

비제차 선형 상미분방정식은 다음과 같은 형태를 가집니다:

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x)$$

- 이 방정식에서:
 - $y^{(n)}$: y의 n계 도함수.
 - $p_0(x), p_1(x), \dots, p_{n-1}(x)$: x의 함수로 주어진 계수들.
 - $r(x)$: 독립 변수 x에 대한 함수로, 이 방정식의 **비제차 항**입니다.

2. 일반해 (General Solution)

비제차 선형 상미분방정식의 **일반해**는 다음과 같은 형태로 나타낼 수 있습니다:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

- 여기서:
 - $y_h(x)$: 동차(제차) 상미분방정식의 일반해로, $r(x) = 0$ 일 때의 해를 의미합니다.
 - $y_p(x)$: 비제차 상미분방정식의 특수해로, $r(x) \neq 0$ 일 때 방정식을 만족하는 하나의 특정한 해입니다.

일반해 구성 방식

- 비제차 상미분방정식의 해는 동차 상미분방정식의 해와 비제차 상미분방정식의 특정한 해의 합으로 이루어집니다.
- 따라서, 비제차 방정식의 해 전체를 구하려면 **동차 방정식의 일반해와 비제차 방정식의 특수해**를 모두 구해야 합니다.

3. 특수해 (Particular Solution)

특수해 $y_p(x)$ 는 주어진 비제차 상미분방정식을 만족하는 하나의 특정한 해입니다.

특수해 구하는 방법

- 비제차 방정식의 비제차 항 $r(x)$ 의 형태에 따라, **미정계수법**이나 **차수추가법**을 사용하여 특수해를 찾습니다.
- $r(x)$ 의 형태에 따라 적절한 함수 형태를 가정하고, 이 가정한 함수의 계수를 결정함으로써 $y_p(x)$ 를 구할 수 있습니다.

특수해의 역할

- 특수해는 비제차 항 $r(x)$ 에 의해 나타나는 강제 진동이나 외부 입력의 효과를 나타냅니다.
- $y_p(x)$ 는 방정식의 비제차성을 반영하므로, 이를 통해 비제차 방정식의 전체적인 해를 구성할 수 있게 됩니다.

4. 전체 해 (General Solution with Initial Conditions)

비제차 방정식의 전체 해는 일반해 $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ 로 나타낼 수 있습니다.

- 초기 조건**이 주어진 경우, 일반해에서 상수들을 결정하여 **특정한 해**를 찾을 수 있습니다.
- 초기 조건이 없다면, 일반해 자체가 전체 해가 되며, 초기 조건을 통해 상수 값이 결정되면 그때서야 **유일한 특수해**가 결정됩니다.

예시로 이해하기

비제차 상미분방정식:

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$$

1. 동차 방정식의 해 $y_h(x)$ 구하기:

- 동차 방정식: $y'' - 3y' + 2y = 0$
- 특성 방정식: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ 으로, 해는 $\lambda = 1, 2$ 입니다.
- 따라서 동차 방정식의 일반해는 $y_h(x) = C_1e^x + C_2e^{2x}$ 입니다.

2. 비제차 방정식의 특수해 $y_p(x)$ 가정:

- 비제차 항이 e^{2x} 형태이므로, $y_p(x) = Axe^{2x}$ 로 가정하고 대입하여 A의 값을 구합니다.

3. 전체 해 구성:

- 구한 $y_h(x)$ 와 $y_p(x)$ 를 합하여 전체 해 $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ 를 구합니다.

문제 분석

주어진 방정식은 비제차 선형 상미분방정식입니다:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 3e^x$$

이를 풀기 위해 **일반해**를 구해야 하며, 일반해는 동차 방정식의 해 $y_h(x)$ 와 비제차 항을 고려한 특수해 $y_p(x)$ 의 합으로 표현됩니다:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

1. 동차 방정식의 해 $y_h(x)$ 구하기

동차 방정식은 다음과 같습니다:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

1-1. 특성 방정식 설정

이 방정식의 특성 방정식을 세워서 풀어보겠습니다:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

이 방정식을 인수분해하면,

$$(\lambda - 1)^3 = 0$$

즉, $\lambda = 1$ 이 **삼중근**(triple root)임을 알 수 있습니다.

1-2. 동차 방정식의 일반해 $y_h(x)$ 구하기

삼중근 $\lambda = 1$ 에 따라 동차 방정식의 일반해는 다음과 같은 형태를 가집니다:

$$y_h(x) = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^x$$

여기서 C_1, C_2, C_3 는 임의의 상수입니다.

2. 비제차 방정식의 특수해 $y_p(x)$ 구하기

비제차 항 $r(x) = 3e^x$ 에 대해 특수해 $y_p(x)$ 를 구해야 합니다.

2-1. 특수해의 초기 가정

비제차 항 $3e^x$ 는 동차 방정식의 해 $y_h(x)$ 에 포함된 e^x 와 겹칩니다. 따라서 **차수추가법**을 적용하여, 특수해 $y_p(x)$ 를 겹치지 않는 형태로 가정해야 합니다.

동차 방정식의 해가 e^x 를 포함하고 있으므로, 특수해 $y_p(x)$ 를 x 의 **차수를 추가하여** 다음과 같이 가정합니다:

$$y_p(x) = Ax^3e^x$$

여기서 A 는 미정계수입니다.

2-2. 특수해의 미정계수 결정하기

가정한 특수해 $y_p(x) = Ax^3e^x$ 를 방정식에 대입하여, 미정계수 A 의 값을 구하겠습니다.

특수해의 도함수 계산 정리

1. 특수해: $y_p(x) = Ax^3e^x$
2. 첫 번째 도함수: $y'_p(x) = Ae^x(3x^2 + x^3) = Ax^3e^x + 3Ax^2e^x$
3. 두 번째 도함수: $y''_p(x) = Ae^x(6x + 6x^2 + x^3) = Ax^3e^x + 6Ax^2e^x + 6Axe^x$
4. 세 번째 도함수: $y'''_p(x) = Ae^x(6 + 18x + 6x^2 + x^3) = Ax^3e^x + 9Ax^2e^x + 18Axe^x + 6Ae^x$

방정식에 도함수 대입

주어진 방정식:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 3e^x$$

1. 왼쪽 항에 도함수 대입: $(Ax^3e^x + 9Ax^2e^x + 18Axe^x + 6Ae^x) - 3(Ax^3e^x + 6Ax^2e^x + 6Axe^x) + 3(Ax^3e^x + 3Ax^2e^x) - Ax^3e^x$

2. 같은 항끼리 정리:

계산을 통해 각 항의 계수를 비교하고, 최종적으로 비제차 항 $3e^x$ 와 같아지도록 A를 결정할 수 있습니다.

미정계수 A의 값은 $A = \frac{1}{2}$ 로 구해졌습니다.

따라서, 특수해 $y_p(x)$ 는 다음과 같습니다:

$$y_p(x) = \frac{1}{2}x^3 e^x$$

최종 일반해

비제차 상미분방정식의 전체 해는 동차 방정식의 해 $y_h(x)$ 와 비제차 방정식의 특수해 $y_p(x)$ 의 합으로 주어집니다:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

이를 정리하면,

$$y(x) = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^x + \frac{1}{2}x^3 e^x$$

여기서 C_1, C_2, C_3 는 상수입니다.

문제 개요

들보가 하중을 받으면 변형이 발생하며, 이 변형은 다음 두 가지 조건에 따라 설명됩니다.

1. 들보의 변위 $y(x)$ 의 2차 도함수는 휨모멘트 $m(x)$ 와 비례한다.
2. 단위 길이당 하중 $F(x)$ 는 휨모멘트 m 의 2차 도함수와 같다.

조건을 바탕으로 한 수식 유도

1. 첫 번째 조건: 변위와 휨모멘트의 관계

주어진 조건에 따르면, 변위 $y(x)$ 의 2차 도함수 $y''(x)$ 가 휨모멘트 $m(x)$ 와 비례합니다.

$$y''(x) \propto m(x)$$

이를 비례 상수 k 를 사용하여 식으로 표현하면,

$$y''(x) = k \cdot m(x)$$

2. 두 번째 조건: 하중과 휨모멘트의 관계

두 번째 조건에 따르면, 하중 $F(x)$ 는 휨모멘트 $m(x)$ 의 2차 도함수와 같습니다.

$$F(x) = m''(x)$$

이를 통해 $m(x)$ 와 $y(x)$ 의 관계를 바탕으로, 하중과 변위의 관계를 유도할 수 있습니다.

3. 힘모멘트를 변위로 표현하기

첫 번째 조건에서 $y'' = k \cdot m$ 이므로, m 을 변위의 도함수로 나타낼 수 있습니다:

$$m = \frac{y''}{k}$$

이를 두 번째 조건에 대입하면,

$$F(x) = m'' = \frac{1}{k}y^{(4)}(x)$$

따라서, 들보의 하중과 변위 사이의 관계를 나타내는 미분방정식은 다음과 같이 4차 미분방정식으로 표현됩니다:

$$y^{(4)}(x) = kF(x)$$

예제에서의 해법

주어진 그림에서는 하중이 $F(x) = F_0$ (상수)로 일정하다고 가정하고 있습니다. 따라서, 미분방정식은 다음과 같은 형태가 됩니다.

$$y^{(4)}(x) = kF_0$$

이제 이 4차 미분방정식을 풀어 해를 구하는 과정입니다.

미분방정식 풀기

주어진 방정식 $y^{(4)} = kF_0$ 을 풀기 위해, 양변을 적분하면서 각 적분에서 상수 C_1, C_2, C_3, C_4 를 추가해 줍니다.

1. 첫 번째 적분: $y'''(x) = kF_0x + C_1$
2. 두 번째 적분: $y''(x) = \frac{kF_0}{2}x^2 + C_1x + C_2$
3. 세 번째 적분: $y'(x) = \frac{kF_0}{6}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$
4. 네 번째 적분: $y(x) = \frac{kF_0}{24}x^4 + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3x + C_4$

최종 해

따라서, 미분방정식의 해는 다음과 같이 표현됩니다:

$$y(x) = \frac{kF_0}{24}x^4 + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3x + C_4$$

여기서 C_1, C_2, C_3, C_4 는 초기 조건에 따라 결정되는 상수입니다. 이 상수들은 들보의 양 끝의 고정 조건, 혹은 경계 조건에 따라 달라집니다.