Wronskian

생성자	재 재환 김
태그	엔지니어링

1. Wronskian의 정의

Wronskian은 주어진 함수 $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$이 어떤 구간에서 선형 독립인지 확인하기 위해 사용됩니다.

- **Wronskian 행렬식** $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x)$은 다음과 같이 정의됩니다:

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

  - 여기서 $yi(j)(x)$는 $yi(x)$의 j차 도함수를 의미합니다.
  - 이 행렬의 각 행은 주어진 함수의 도함수로 이루어져 있으며, 마지막 행은 (n−1)계 도함수로 구성됩니다.

2. Wronskian의 선형 독립성 판별 방법

Wronskian 행렬식을 계산하여 얻은 값이 0인지 아닌지에 따라 함수들의 선형 독립성을 판별할 수 있습니다.

- **Wronskian** $W(x) \neq 0$ 인 경우:
  - 주어진 함수 $y_1, y_2, \ldots, y_n$은 선형 독립입니다.
  - 선형 독립이라는 것은, 임의의 상수 $c_1, c_2, \ldots, c_n$에 대해 $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) = 0$이 모든 x에서 성립할 때, $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$인 경우에만 성립한다는 것을 의미합니다.
- **Wronskian** $W(x) = 0$ 인 경우:
  - 주어진 함수들이 선형 종속일 가능성이 있습니다. 즉, 함수들 중 하나가 나머지 함수들의 선형 결합으로 표현될 수 있다는 의미입니다.
  - 하지만 W(x)=0이라고 해서 반드시 선형 종속이라는 것을 의미하지는 않습니다. 일부 특수한 경우에 Wronskian이 0이더라도 함수들이 선형 독립일 수 있습니다. 그

러나 일반적인 상미분방정식 해석에서는 W(x)=0이면 선형 종속인 것으로 간주합니다.

3. Wronskian의 성질

Wronskian은 몇 가지 중요한 성질을 갖고 있으며, 이러한 성질을 통해 상미분방정식의 해석에 유용하게 활용됩니다.

(1) Wronskian의 미분 방정식

- 만약 주어진 함수들이 n계 선형 상미분방정식의 해라면, Wronskian은 다음 미분 방정식을 만족합니다:

  $$W'(x) = p(x)W(x)$$

  여기서 p(x)는 상미분방정식의 계수 함수 중 하나로 결정되며, W(x)는 Wronskian 값입니다.
- 이 식을 통해 Wronskian의 값이 특정 구간에서 0이 아닌 경우, 그 구간 내에서 함수들이 선형 독립임을 알 수 있습니다.

(2) Abel의 정리 (Abel's Theorem)

- **Abel의 정리**는 상미분방정식에서 Wronskian의 거동을 설명하는 중요한 정리입니다.
- 만약 $y_1, y_2, ..., y_n$이 n계 선형 상미분방정식의 해라면, Wronskian W(x)은 다음과 같이 표현됩니다:

  $$W(x) = W(x_0) \exp\left(\int_{x_0}^{x} p(t)\, dt\right)$$

  여기서
  $W(x_0)$는 x_0에서의 Wronskian 값이고, $p(t)$는 방정식의 계수 함수입니다.
- 이 정리로 인해, 만약 $W(x_0) \neq 0$이라면 W(x)는 절대로 0이 되지 않으므로, 함수들이 해당 구간에서 선형 독립임을 보장합니다.

4. Wronskian의 계산 예제

Wronskian을 직접 계산하는 예제를 통해 더 구체적으로 이해해 보겠습니다.

예제: 두 함수 $y_1(x) = e^x$와 $y_2(x) = e^{2x}$의 Wronskian 계산

1. **Wronskian 정의**:

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

2. 각 함수의 도함수 계산:
   - $y_1(x) = e^x, y_1'(x) = e^x$
   - $y_2(x) = e^{2x}, y_2'(x) = 2e^{2x}$
3. Wronskian 계산:

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = e^x \cdot 2e^{2x} - e^{2x} \cdot e^x = 2e^{3x} - e^{3x} = e^{3x} \neq 0$$

4. **결과**:
   - $W(x) = e^{3x} \neq 0$이므로, 함수 $y_1(x) = e^x$와 $y_2(x) = e^{2x}$는 선형 독립입니다.

---

5. Wronskian의 응용

Wronskian은 상미분방정식의 해의 성질을 이해하고, 해가 특정 구간 내에서 유일하게 결정되는지 확인하는 데 유용합니다.

- **선형 독립성 확인**: 여러 해를 가진 상미분방정식에서 해들이 독립적인지 확인할 때 Wronskian을 사용합니다.
- **해의 기저 형성**: 상미분방정식의 해가 선형 독립이면, 이들 해는 전체 해 공간의 기저(basis)를 형성하게 되며, 이를 통해 전체 해를 선형 결합으로 표현할 수 있습니다.
- **존재성 및 유일성 보장**: Wronskian이 0이 아닌 경우, 주어진 구간에서 상미분방정식의 해는 유일하게 결정됩니다.