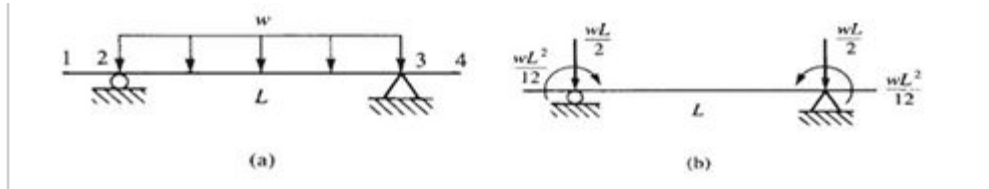


## 제8장: 보 방정식(2) - 분포하중과 관련된 이론

### 8.1 분포하중

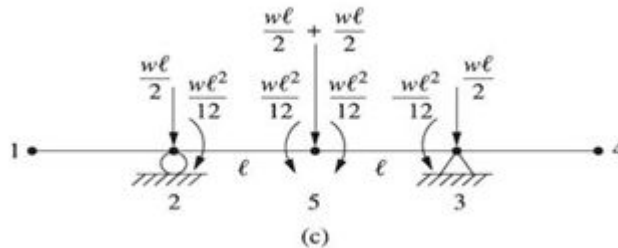
- **개념:** 보 부재는 집중 하중처럼 분포하중을 지지할 수 있습니다.
- 실제로 분포된 하중은 보 전체에 고르게 또는 불균일하게 작용할 수 있으며, 이러한 분포하중은 보에 작용하는 힘과 모멘트의 분포를 야기합니다.



#### 그림 설명

- 그림 (a)에서 보의 양 끝은 고정되어 있고, 보 위에는 분포하중  $w$ 가 작용하고 있습니다.
- $wL/2$ : 절점에서 발생하는 반력의 값
- $wL^2/12$ : 절점에서 발생하는 모멘트의 값
- **분포하중을 고려한 보의 반력과 모멘트:**
- 보에 작용하는 분포하중은 보 전체 길이에 걸쳐 균일하게 작용하며, 이를 집중 하중으로 간주하여 계산할 수 있습니다.
- 이러한 분포하중을 집중하중과 모멘트로 대체하면, 해석적으로 동일한 효과를 얻을 수 있습니다.

#### 분포하중을 집중하중 및 모멘트로 변환



- 분포하중  $w$ 를 받는 보를 이를 등가의 집중하중으로 변환하여 계산할 수 있습니다.
- 예를 들어, 균일한 분포하중  $w$ 는 그 크기와 작용점에 따라 각 절점에서 다음과 같이 변환됩니다:
- $\frac{wL}{2}$ : 양쪽에 작용하는 등가 집중하중
- $\frac{wL^2}{12}$ : 등가 모멘트로 변환된 값

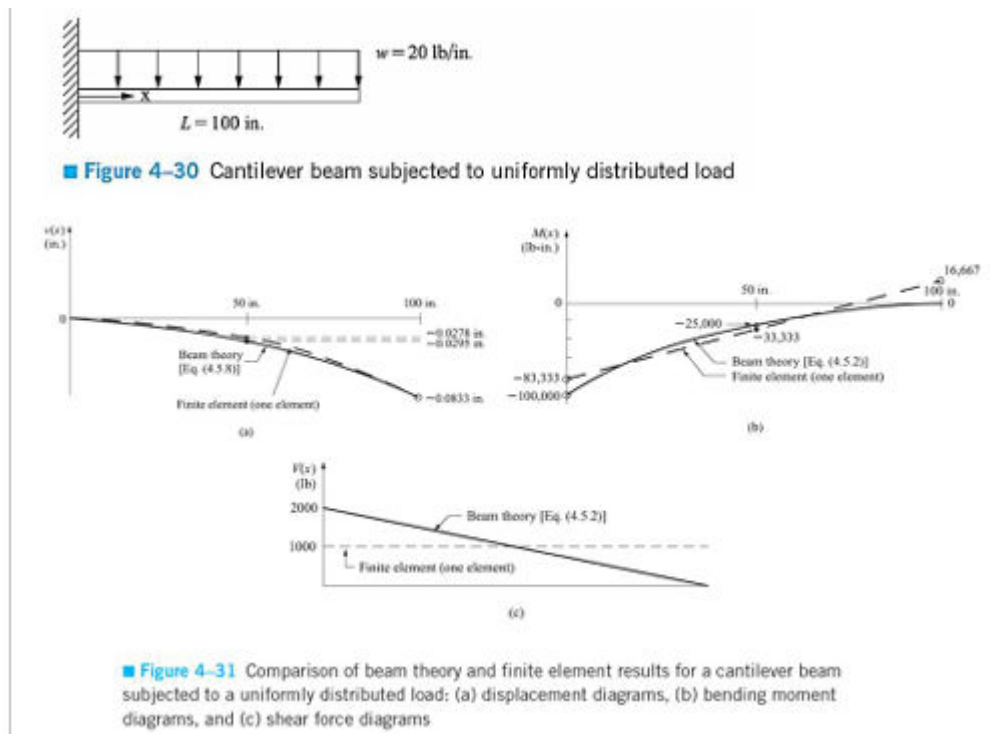
### 8.2 등가 절점

- **기본 개념:** 일반적인 구조 해석에서는 보에 작용하는 하중이 집중하중 또는 분포하중으로 주어질 수 있습니다.
- **등가 절점 하중 적용:**  $\{F\} = [K]\{d\} - \{F_0\}$

- 여기서  $\{F\}$ 는 집중 절점 하중,  $\{F_0\}$ 는 전체 좌표계에서 나타난 등가 절점 하중입니다.
- 표현 방식의 의미:
- 이러한 등가 절점 하중은 보의 실제 분포하중을 분석할 때 국지적인 분석 대신 전체 구조 분석에 적용할 수 있는 개념입니다.
- 구조적인 해석을 더욱 쉽게 하기 위해 집중하중으로 변환하는 방법입니다.

### 8.3 유한요소해와 보에 대한 정확한 해 비교

- 분포하중을 받는 외팔보 해석: 그림 4-30에서 보여준 것처럼 길이 100인 외팔보가 분포하중  $w = 20\text{lb/in}$ 을 받고 있습니다.
- 보 이론과 유한요소해의 비교:
- 가장 정확한 고전적 보 이론을 유한요소법과 비교한 결과를 그림 4-31에서 확인할 수 있습니다.
- 그림은 각각의 경우에 대해 변위, 굽힘 모멘트, 그리고 전단력의 차이를 나타냅니다.



### 그래프 분석

#### 1. (a) 변위 다이어그램:

- 고전적 보 이론과 유한요소법 해석 결과 간에 약간의 차이가 나타나지만, 전체적인 경향은 유사합니다.
- 이는 유한요소법이 고전적 이론과 비교해 정확한 해석을 제공할 수 있음을 의미합니다.

#### 1. (b) 굽힘 모멘트 다이어그램:

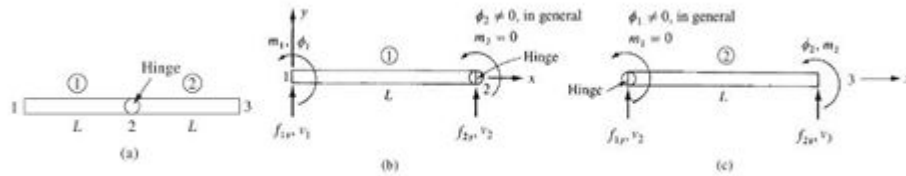
- 분포하중이 작용하는 구간에서의 굽힘 모멘트를 보여주며, 이 역시 유한요소해와 고전 보 이론 사이의 큰 차이는 나타나지 않습니다.

## 1. (c) 전단력 다이어그램:

- 외팔보의 단순한 구조에서 전단력 분포를 정확하게 나타내며, 유한요소해와 고전 이론 모두 매우 유사한 결과를 제공합니다.

## 8.4 절점 힌지를 갖춘 보 요소개념 설명

- 내부 힌지의 효과:
- 내부 힌지는 힌지에서의 처짐곡선의 기울기 또는 회전에서 불연속성을 발생시킵니다.
- 따라서 힌지가 포함된 보 구조물은 일반적인 보와 다른 변형 특성을 보입니다.
- 힌지를 모델링하는 방법:
- 요소 1의 오른쪽 끝이나 요소 2의 왼쪽 끝에 힌지가 놓여있을 경우, 두 요소의 절점 위치를 고려해야 합니다.
- 그림에서 보이는 3가지 상황은 다음과 같습니다:



1. 힌지가 2번 요소와 절점 힌지를 갖는 경우 (그림 b)
2. 요소 1의 오른쪽 끝을 고려한 힌지 (그림 c)
3. 요소 2의 왼쪽 끝을 고려한 힌지 (그림 d)

- 이러한 힌지 위치는 구조물의 회전 및 변위 계산에 큰 영향을 주게 됩니다.

## 8.5 보 요소 방정식을 유도하기 위한 포텐셜 에너지포텐셜 에너지의 중요성

- 전체 포텐셜 에너지: 보 구조물의 변형 및 외력에 대한 에너지 변화를 나타냅니다.
- 보에 대한 일반적인 일차원 변형:
- 외력에 의한 변형 에너지, 내부 변형 에너지, 잠재적 에너지 등을 모두 고려하여 에너지 방정식을 구성합니다.
- 단순 요소에서의 포텐셜 에너지 공식:
- 포텐셜 에너지  $\Omega$ 는 다음과 같이 표현됩니다:

$$\Omega = \int \int \tau_{yy} e_{xx} dS - \sum P_y v_i - \sum m_i \phi_i$$

- 여기서,
- $\tau_{yy}$ : 보에 작용하는 횡응력
- $e_{xx}$ : 변형률
- $P_y$ : 집중력
- $m_i$ : 모멘트

- $v_i$ : 변위,  $\phi_i$ : 회전각

### 세 가지 항의 의미

1. 첫 번째 항: 횡포텐셜 에너지의 분포를 나타냅니다.
2. 두 번째 항: 절점에 작용하는 집중력에 의한 일
3. 세 번째 항: 모멘트에 의한 일

### 포텐셜 에너지와 강성행렬 유도 과정에 대한 상세 설명

#### 1. 전체 포텐셜 에너지의 표현

- 미소 체적과 미소 면적에 대해 포텐셜 에너지를 표현하면 다음과 같습니다.
- $b$ : 일정한 너비
- 전체 포텐셜 에너지는:  $dV = b dA dx$  및  $dS = b dx$

#### 2. 절점 변위와 회전에 의한 변형

- 포텐셜 에너지 표현에 의해, 전체 일차 포텐셜 에너지  $\Pi_p$ 는 다음과 같이 정의됩니다:

$$\Pi_p = \int_0^L \int \sigma_{xx} e_{xx} dx - \int_0^L b P_y v_i + m_i \phi_i$$

- 여기서  $\sigma_{xx}$ 는 응력이고  $e_{xx}$ 는 변형률입니다.

#### 3. 응력/변형률의 관계식을 얻기 위해

- $\{e_i\}$ 의 정의는 다음과 같습니다:

$$\{e\} = \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} & \frac{-12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} \\ \frac{-6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ \frac{-12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{-6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \{d\}$$

- 여기서  $[D]$ : 탄성 계수,  $[B]$ : 경사 행렬,  $\{d\}$ : 절점 변위

#### 4. 전체 포텐셜 에너지의 수식을 작성하면

$$\Pi_p = \frac{EI}{2} \int_0^L \{d^T\} [B^T] [D] [B] \{d\} dx - \int_0^L w(x) [N^T] \{d\} dx - \{d\}^T \{P\}$$

## 5. 최소화 조건에 따른 방정식 유도

- $V_1, \phi_1, V_2, \phi_2$ 에 대한 전체 포텐셜 에너지를 미분하여 각 항을 최소화시키기 위해 식을 정리하고 행렬 형태로 변환하면 다음과 같은 요소 방정식을 얻습니다:

$$EI \left[ \int_0^L [B^T][B] dx \right] \{d\} - \int_0^L w(x)[N^T] dx = \{P\}$$

## 6. 강성행렬의 최종 형태

- 최종적으로 절점력 행렬을 절점 변위 행렬로 나타내면 다음과 같이 강성행렬의 형태를 유도할 수 있습니다.

$$\{f\} = [k]\{d\}$$

- 강성행렬  $[k] = EI \left[ \int_0^L [B^T][B] dx \right]$

## 7. 강성행렬의 평가

- 식을 통해 유도된 강성행렬은 다음과 같은 형태를 가지게 됩니다:

$$[k] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

```
% Given parameters
E = 210e9; % Young's modulus in Pa
I = 4e-4; % Moment of inertia in m^4
L = 6; % Total length of the beam in m
w = 1000; % Uniformly distributed load in N/m

% Increase the number of elements for better accuracy
num_elements = 10; % Increased from 2 to 10 for more accurate results
element_length = L / num_elements;

% Initialize the global stiffness matrix
K_global = zeros(2 * num_elements + 2, 2 * num_elements + 2);

% Element stiffness matrix for a beam element
k_element = (E * I / element_length^3) * ...
    [12, 6*element_length, -12, 6*element_length;
     6*element_length, 4*element_length^2, -6*element_length, 2*element_length^2;
     -12, -6*element_length, 12, -6*element_length;
     6*element_length, 2*element_length^2, -6*element_length, 4*element_length^2];

% Assembly of the global stiffness matrix
```

```

for i = 1:num_elements
    idx = 2 * (i - 1) + 1;
    K_global(idx:idx+3, idx:idx+3) = K_global(idx:idx+3, idx:idx+3) + k_element;
end

% Load vector due to the distributed load w
f_element = (w * element_length / 2) * [1; element_length/6; 1; -element_length/6];
F_global = zeros(2 * num_elements + 2, 1);

% Assembly of global force vector
for i = 1:num_elements
    idx = 2 * (i - 1) + 1;
    F_global(idx:idx+3) = F_global(idx:idx+3) + f_element;
end

% Apply boundary conditions (Simply supported beam at both ends)
K_reduced = K_global(3:end-2, 3:end-2);
F_reduced = F_global(3:end-2);

% Solve for displacements
displacements = K_reduced \ F_reduced;

% Full displacement vector including boundary conditions
full_displacements = [0; 0; displacements; 0; 0];

% Analytical solution for deflection and bending moment
x_analytical = linspace(0, L, 100);
deflection_analytical = (w * x_analytical.^2 .* (L - x_analytical).^2) / (24 * E * I);
moment_analytical = (w / 2) * (L * x_analytical - x_analytical.^2);

% FEM Deflection and bending moment calculation
deflection_fem = [];
moment_fem = [];
x_fem = [];

for i = 1:num_elements
    idx = 2 * (i - 1) + 1;
    x_local = linspace(i * element_length, (i + 1) * element_length, 50); % x-
    coordinates within the current element

    % Calculate local deflection using linear interpolation between nodes
    local_deflection = linspace(0, element_length, 50) * (full_displacements(idx +
2) - full_displacements(idx)) / element_length ...
        + full_displacements(idx);
    deflection_fem = [deflection_fem; local_deflection'];
    x_fem = [x_fem, x_local];

    % Calculate bending moment using the formula  $M = E * I * (d^2v/dx^2)$ 

```

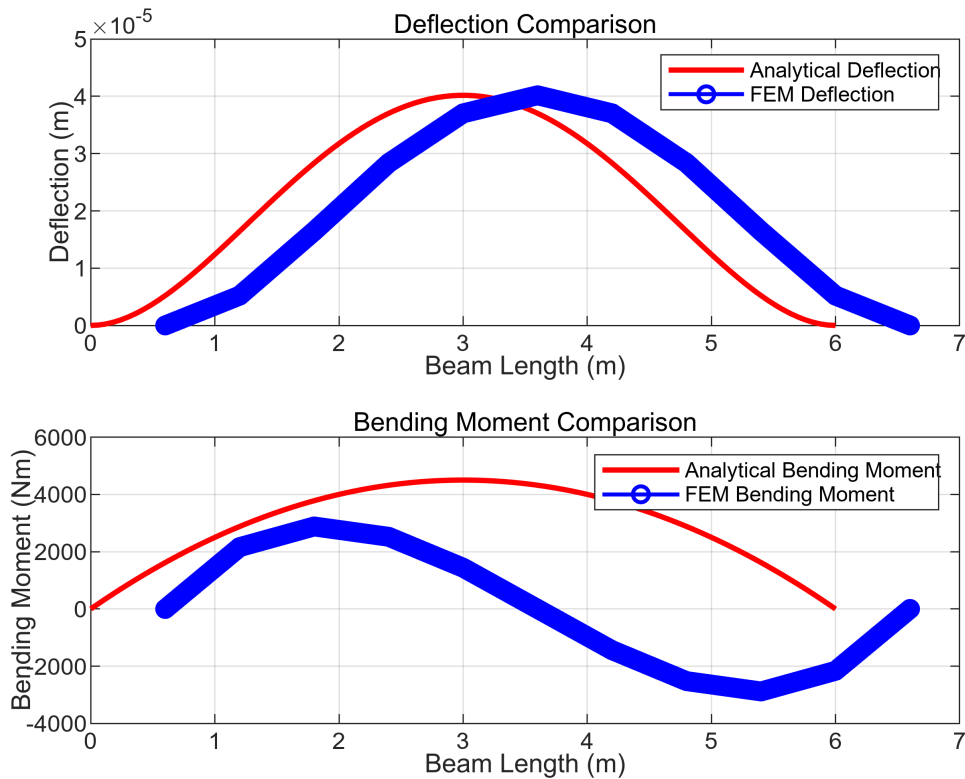
```

    M1 = E * I * (full_displacements(idx + 1)) / element_length; % Moment at first
node
    M2 = E * I * (full_displacements(idx + 3)) / element_length; % Moment at second
node
    local_moment = M1 + (M2 - M1) * (x_local - (i * element_length)) /
element_length; % Linear interpolation
    moment_fem = [moment_fem; local_moment'];
end

% Plotting results
figure;
subplot(2, 1, 1);
plot(x_analytical, deflection_analytical, 'r-', 'LineWidth', 2, 'DisplayName',
'Analytical Deflection');
hold on;
plot(x_fem, deflection_fem, 'bo-', 'LineWidth', 1.5, 'DisplayName', 'FEM
Deflection');
title('Deflection Comparison');
xlabel('Beam Length (m)');
ylabel('Deflection (m)');
legend;
grid on;

subplot(2, 1, 2);
plot(x_analytical, moment_analytical, 'r-', 'LineWidth', 2, 'DisplayName',
'Analytical Bending Moment');
hold on;
plot(x_fem, moment_fem, 'bo-', 'LineWidth', 1.5, 'DisplayName', 'FEM Bending
Moment');
title('Bending Moment Comparison');
xlabel('Beam Length (m)');
ylabel('Bending Moment (Nm)');
legend;
grid on;

```



```
% Calculate relative errors
deflection_error = abs((deflection_fem - interp1(x_analytical,
deflection_analytical, x_fem)) ./ interp1(x_analytical, deflection_analytical,
x_fem)) * 100;
moment_error = abs((moment_fem - interp1(x_analytical, moment_analytical,
x_fem)) ./ interp1(x_analytical, moment_analytical, x_fem)) * 100;

% Plotting relative errors
figure;
subplot(2, 1, 1);
plot(x_fem, deflection_error, 'b-', 'LineWidth', 1.5);
title('Relative Error in Deflection');
xlabel('Beam Length (m)');
ylabel('Error (%)');
grid on;

subplot(2, 1, 2);
plot(x_fem, moment_error, 'b-', 'LineWidth', 1.5);
title('Relative Error in Bending Moment');
xlabel('Beam Length (m)');
ylabel('Error (%)');
grid on;
```



