6.3 봉 요소 방정식을 유도하기 위한 포텐셜 에너지 접근법에서는

- 전체 포텐셜 에너지가 $\Pi_p = U + \Omega$로 정의되며, 여기서 U는 내부 변형에너지, Ω는 외부 힘의 일에 해당합니다.
- 봉의 변형에너지를 평가하기 위해 내부 힘에 의한 일을 고려하고 있습니다.

변형에너지 계산 과정:

- 주어진 식에서 $dU = \sigma_x(\Delta y)(\Delta z)(\Delta x)d\epsilon_x$로 미소 단위에서 변형에너지를 구하는 과정을 설명하고 있습니다.
- 요소의 체적을 0에 접근시키고 전체 봉에 대해 적분한다.
- 선형 탄성재료의 경우(후크의 법칙)와 x좌표에 의한 응력/변형이 있는 일정한 단면적 A를 단순화한다.

$$U = \int\int\int \{ \int_0^{\epsilon_x} \sigma_x\epsilon_x \}dV$$

- 여기서 σ_x는 응력, $d\epsilon_x$는 변형률을 나타냅니다.
- 전체 봉에 대한 변형에너지는 미소 단위의 체적 요소를 dV로 두고 적분하여 구합니다.
- 변형에너지는 응력 σ_x와 변형률 $d\epsilon_x$의 곱을 통해 표현됩니다.
- 선형 탄성 재료에서, 응력-변형 관계는 훅의 법칙을 따르므로 $\sigma_x = E\epsilon_x$로 표현됩니다.
- 여기서 E는 탄성계수, A는 단면적입니다.
- 단면적 A와 길이 L을 고려하여, $U = \frac{A}{2}\int_0^L \sigma_x\epsilon_x dx$로 계산됩니다.
- 응력/ 변형 곡선에서 변형에너지가 면적인 적분으로 부터 알 수 있습니다.

외부 힘에 의한 포텐셜 에너지 Ω는 다음과 같이 정의됩니다:

$$\Omega = -\int\int\int_V X_b u dV - \int\int_{S_t} T_x u dS - \sum_{i=1}^{M} f_i x u_i$$

- 첫 번째 항은 체적력, 두 번째 항은 표면력, 세 번째 항은 절점 변위를 통해 나온 절점 집중하중을 의미합니다.

두 가지 포텐셜 에너지 요소를 결합하면 전체 포텐셜 에너지Π_p는 다음과 같이 표현됩니다:

$$\Pi_p = \frac{A}{2}\int_0^L \sigma_x\epsilon_x dx - f_{1x}u_1 - f_{2x}u_2 - \int_{S_t} T_x u dS - \int\int\int_V u X_b dV$$

여기서 $\{P\}$를 집중된 절점력의 행렬 형태로 표현하면,

$$\Pi_p = \frac{A}{2}\{\sigma_x\}^T\{\epsilon_x\}dx - \{f\}^T\{u\} - \int_{S_t}\{t_x\}\{u\}ds - \int\int\int_V \{f_x\}\{u\}dV$$

또한 축 방향 변위함수를 형태함수와 절점변위에 의해 결합하면,

집중된 절점력의 행렬 형태로 표현된 포텐셜 에너지 Π_p

- 전체 포텐셜 에너지 식은 다음과 같습니다:

$$\Pi_p = \frac{A}{2}\int_0^L \{\sigma_x\}^T\{\epsilon_x\}dx - \{d\}^T\{P\} - \int_{S_t}\{u_s\}^T\{T_x\}ds - \int\int\int_V \{u\}^T\{X_b\}dV$$

- 여기서 각 기호의 의미는 다음과 같습니다:
- $\{\sigma_x\}$: 응력 벡터
- $\{\epsilon_x\}$: 변형률 벡터
- $\{d\}$: 변위 벡터
- $\{P\}$: 집중된 외력
- $\{u_s\}, \{T_x\}$: 표면에서의 변위 및 표면력
- $\{u\}, \{X_b\}$: 체적에서의 변위 및 체적력

축 방향 변위함수를 형태함수와 결점변위에 의해 결합한 식

- 이를 좀 더 구체화하여 축 방향 변위함수를 사용하면,

$$\Pi_p = \frac{A}{2}\int_0^L \{d\}^T[B]^T[D][B]\{d\}dx - \{d\}^T\{P\} - \int_{S_t}\{d\}^T[N_s]^T\{T_x\}ds - \int\int\int_V \{d\}^T[N]^T\{X_b\}dV$$

- 여기서:
- $[B]$: 변형률-변위 행렬
- $[D]$: 재료의 강성 행렬
- $[N_s], [N]$: 형태 함수 행렬

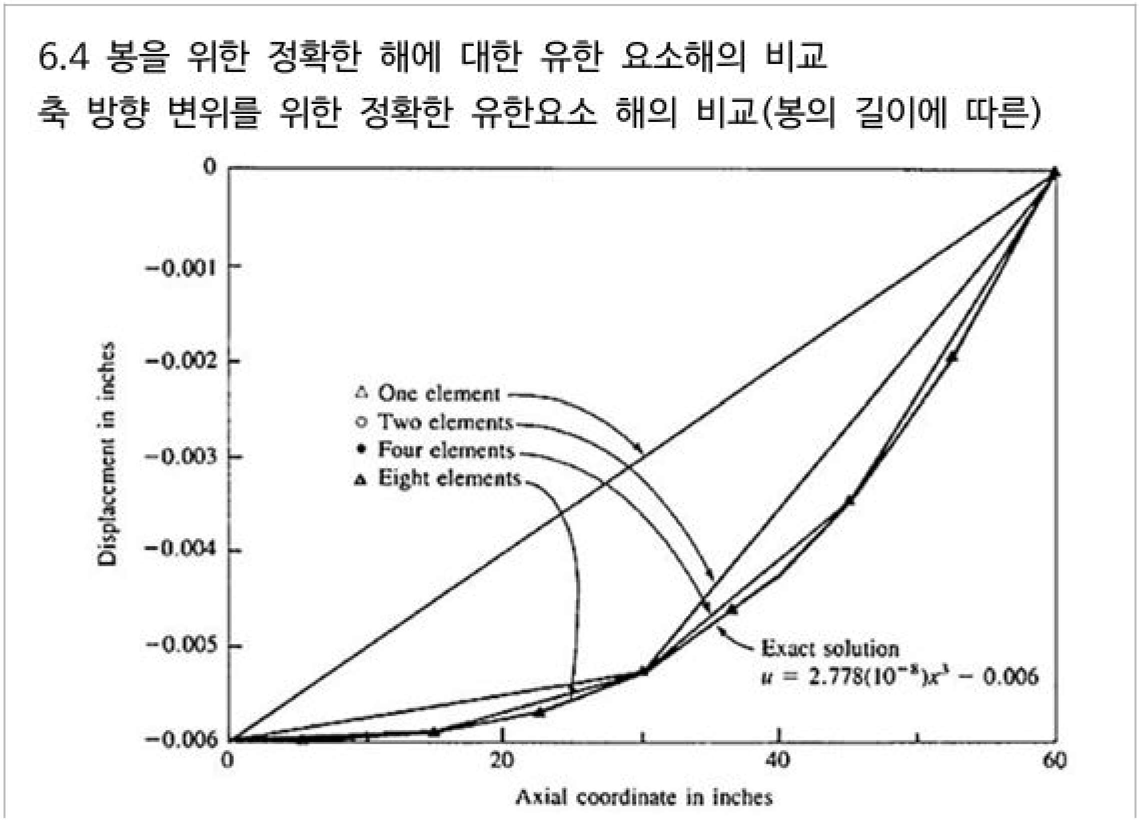
포텐셜 에너지의 최소화 조건은 다음과 같습니다:

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial u_1} = 0 \quad \text{및} \quad \frac{\partial \Pi_p}{\partial u_2} = 0$$

이를 재정리하면,

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial u_1} = \frac{AL}{2}\left[\frac{E}{L^2}(2u_1 - 2u_2)\right] - f_{x1} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial u_2} = \frac{AL}{2}\left[\frac{E}{L^2}(-2u_1 + 2u_2)\right] - f_{x2} = 0$$



6.4 봉을 위한 정확한 해에 대한 유한 요소해의 비교

- 그림에서는 봉의 축 방향 변위를 위한 정확한 유한요소 해의 결과를 보여주고 있습니다.
- 다양한 요소 수(1개, 2개, 4개, 8개)를 사용하여 해석한 결과가 표시되어 있으며, 각 요소 수가 많아질수록 실제 정확한 해(Exact solution)에 점차 수렴하는 모습을 보입니다.
- 봉의 길이에 따른 변위는 정확한 해와 비교할 때 유한 요소의 분해 능력이 높을수록 오차가 줄어드는 것을 확인할 수 있습니다.
- 즉, 요소 수를 늘림에 따라 유한 요소 해법이 점점 더 정확한 결과를 제공한다는 것을 알 수 있습니다.

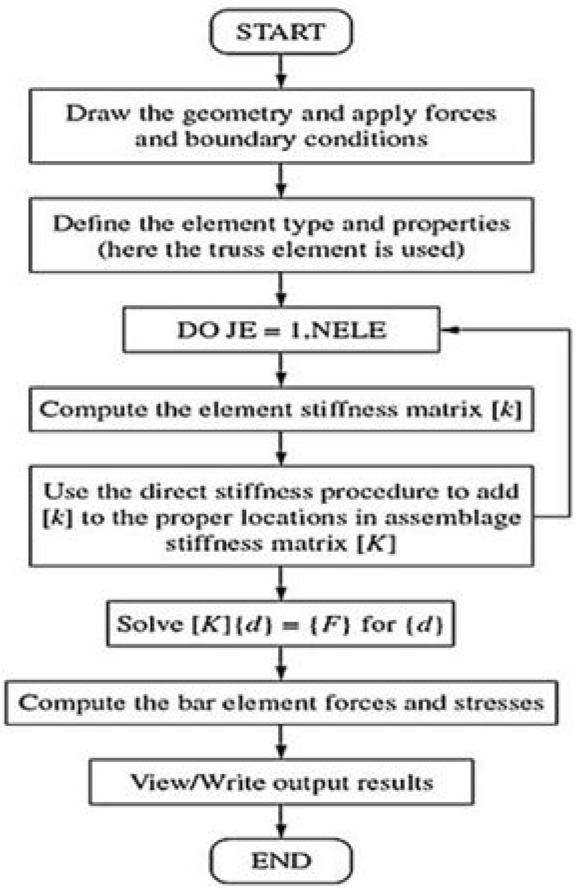
6.5 가장 잔여법 **(Least-Residual Method)**

- 가장 잔여법 정의:
- 가장 잔여법은 유한요소 방정식을 전개하는 데 사용되는 미분방정식에 대해 직접 적용되는 해법입니다.
- 주어진 미분방정식의 잔여(Residual)를 최소화하는 방식으로 해를 찾는 방법입니다.
- 적용 과정:
- 가장 잔여법에서, 시도 함수(Trial Function) 또는 근사 함수는 미분방정식에 의해 정의된 문제에서 변위 또는 온도와 같은 독립변수를 근사화하기 위해 선택됩니다.
- 이때, 잔여 값은 전체 영역을 통합한 값이 최소가 되도록 하는 것이 목표입니다.
- 잔여 가중치:
- 잔여 가중치는 전체 영역을 넘어 최소치가 되는 것이 요구됩니다.
- 가중 잔여 적분의 일반적인 형태는 다음과 같습니다:

$$\int\int\int_V RW\,dV = 0$$

• 여기서 R은 잔여(Residual), W는 가중 함수(Weight Function)를 나타냅니다.

6.6 3차원 트러스 문제의 해에 대한 전산 흐름도



전산 흐름도 단계별 설명

1. START:

- 해석이 시작되는 지점입니다.

2. Draw the geometry and apply forces and boundary conditions:

- 구조물의 형상을 그리고 하중 및 경계 조건을 적용하는 단계입니다.
- 이 단계에서 트러스 구조물의 전체적인 형상, 각 요소의 연결 및 경계 조건을 설정합니다.

3. Define the element type and properties (here the truss element is used):

- 유한요소 모델에서 사용할 요소의 종류와 특성을 정의합니다.
- 여기서는 트러스 요소를 사용하며, 각 요소의 재료 특성, 단면적, 길이 등의 물리적 특성을 지정합니다.

4. DO JE = 1, NELE:

- 반복 루프를 통해 각 요소에 대한 계산을 수행합니다.
- NELENELENELE는 전체 요소의 수를 나타내며, JE는 현재 계산 중인 요소를 의미합니다.

5. Compute the element stiffness matrix [k]:

- 각 트러스 요소에 대한 강성행렬 $[k]$를 계산하는 단계입니다.
- 강성행렬은 해당 요소의 기계적 특성을 나타내며, 외부 하중에 대한 저항 능력을 나타냅니다.

6. Use the direct stiffness procedure to add [k] to the proper locations in assemblage stiffness matrix [K]:

- 각 요소의 강성행렬 [k]를 전체 구조물의 강성행렬 [K]에 통합하는 단계입니다.
- 이 단계는 전체 구조의 조립(Assemblage) 과정을 통해 이루어지며, 전체 시스템의 거동을 나타내는 통합된 강성행렬을 구축합니다.

7. Solve [K]{d} = {F} for {d}:

- 시스템 방정식 $[K]\{d\} = \{F\}$를 해결하여 변위 {d}를 구하는 단계입니다.
- 여기서 $[K]$는 전체 강성행렬, {d}는 절점 변위 벡터, {F}는 외부 하중 벡터를 나타냅니다.

8. Compute the bar element forces and stresses:

- 구한 변위를 바탕으로 각 요소의 내부 힘과 응력을 계산합니다.
- 이는 각 트러스 요소가 외부 하중에 어떻게 반응하는지, 그리고 내부 응력 상태가 어떻게 변하는지를 보여줍니다.

9. View/Write output results:

- 해석 결과를 확인하고 출력하는 단계입니다.
- 각 요소의 변위, 응력, 반력 등이 이 단계에서 검토됩니다.

10. END: