

## 제9장: 프레임과 격자 구조물의 강성 해석 (1)

### 9.1 2차원에서 임의의 방향에 위치한 보 요소의 강성 행렬

#### 학습목표:

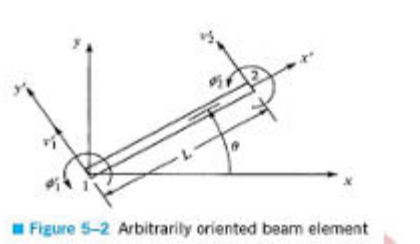
- 2차원에서 임의의 방향을 갖는 보 요소의 강성 행렬을 유도하는 방법을 이해하고 적용합니다.
- 직교 좌표계에서 강성 행렬을 얻는 과정을 통해 전체 구조에 대한 해석 능력을 키웁니다.
- 경사진 지지점을 가진 문제를 효과적으로 다루는 방법을 습득합니다.
- 격자 구조물의 강성 행렬 및 방정식을 체계적으로 이해하고 유도하는 과정을 학습합니다.

#### 프레임과 격자 구조

- **프레임(그리드):** 구조물의 주요 부분으로 빌딩이나 교량과 같은 구조물에서 사용됩니다.
- 프레임은 일반적으로 직교하는 구조물로, 다양한 방향에서 작용하는 하중을 견디는 데 사용됩니다.
- **격자 구조물:** 격자는 다수의 부재가 격자처럼 교차하는 구조를 이루며, 하중이 여러 방향으로 전달됩니다.

### 9.1의 핵심: 임의의 방향에 위치한 보 요소의 강성 행렬

- **강성 행렬**은 각 요소가 구조물의 변위에 대해 얼마나 저항하는지를 나타냅니다.
- 2차원에서 임의의 방향에 놓인 보 요소는 국지 좌표계와 전체 좌표계 사이의 변환을 통해 강성 행렬을 얻을 수 있습니다.



#### 1. 변환 관계에 대한 이해

- 임의의 방향의 보를 전체 좌표계로 변환할 때 각도  $\theta$ 에 따른 변환 행렬  $[T]$ 를 사용합니다.
- 국지 좌표계에서의 변위를  $u', v'$ 로 나타내고, 이를 전체 좌표계의 변위  $u, v$ 와 관계시켜야 합니다.
- 변환 행렬  $[T]$ 는 보 요소의 회전 방향을 고려해 다음과 같이 구성됩니다.

$$[T] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}$$

여기서  $c = \cos(\theta), s = \sin(\theta)$ 입니다.

#### 2. 국지 좌표계에서의 강성 행렬 $[k][k'][k'']$

- 국지 좌표계에서 보 요소의 강성 행렬은 보의 축방향 변형 및 휨에 따른 강성을 나타냅니다.

- 보 요소의 각 부재는 그 축에 따라 각각의 강성 효과를 나타내며 이를 국지 좌표계 강성 행렬  $[k']$ 로 나타낼 수 있습니다.

### 3. 전체 좌표계에서의 강성 행렬 유도

- 국지 좌표계에서 유도된 강성 행렬  $[k']$ 을 전체 좌표계로 변환하기 위해서는 변환 행렬  $[T]$ 를 사용하여 다음과 같은 관계식을 사용합니다.

$$[k] = [T]^T [k'] [T]$$

- 이를 통해 임의의 방향을 갖는 보 요소에 대한 전체 구조물의 강성 행렬을 얻을 수 있습니다.

## 2차원에서 임의의 방향에 위치한 보 요소의 강성 행렬에 대한 상세 설명

### 1. 전체 요소 강성 행렬 유도 과정

- 전체 좌표계와 국지 좌표계의 관계
- 보 요소는 임의의 방향을 가지기 때문에 전체 좌표계와 국지 좌표계 간의 변환이 필요합니다.
- 이를 위해 변환 행렬  $[T]$ 을 사용하여 전체 좌표계에서의 강성 행렬을 국지 좌표계의 강성 행렬로 변환합니다.
- 변환 행렬의 유도
- 변환 행렬  $[T]$ 는 국지 좌표계에서의 변위와 전체 좌표계에서의 변위 사이의 관계를 나타냅니다.
- 변환 행렬은 다음과 같습니다.

$$[T] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}$$

- 여기서  $c = \cos(\theta)$ ,  $s = \sin(\theta)$ 입니다.

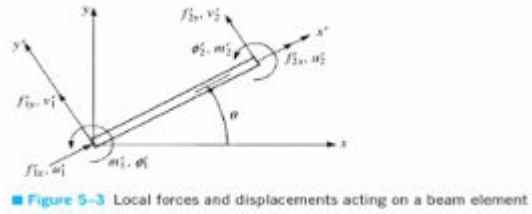
- 전체 좌표계에서의 강성 행렬  $[k]$  유도
- 국지 좌표계의 강성 행렬  $[k']$ 을 전체 좌표계로 변환하면,

$$[k] = [T]^T [k'] [T]$$

- 이 식은 강성 행렬의 변환에 있어 매우 중요한 공식이며, 전체 구조물의 강성 행렬을 정확하게 유도하는 데 사용됩니다.

### 2. 국지 좌표계에서의 보 요소 분석

- 임의 방향의 보에 대한 고려



- 보 요소의 국지 좌표계에서의 변위 및 힘을 고려하여 강성 행렬을 도출합니다.
- 그림에서 보이듯이, 보 요소는 임의의 각도  $\theta$ 를 가지며 이에 따라 힘과 변위가 결정됩니다.
- **축 효과 재고찰**
- 보 요소의 강성은 축방향 인장/압축 효과와 휨 효과로 구분됩니다.
- 축 효과는 아래와 같이 간단한 형태로 표현됩니다.

$$\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- **휨 효과와의 결합**
- 국지 좌표계에서 전달응력과 주 굽힘모멘트를 갖는 축 효과를 결합하면 최종적인 강성 행렬  $[k']$ 을 얻을 수 있습니다.

### 3. 강성 행렬 $[k']$ 의 구성 요소

- 국지 좌표계에서의 강성 행렬  $[k']$ 은 다음과 같이 구성됩니다.

$$[k'] = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & -C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 12C_2 & 6C_2L & 0 & -12C_2 & 6C_2L \\ 0 & 6C_2L & 4C_2L^2 & 0 & -6C_2L & 2C_2L^2 \\ -C_1 & 0 & 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & -12C_2 & -6C_2L & 0 & 12C_2 & -6C_2L \\ 0 & 6C_2L & 2C_2L^2 & 0 & -6C_2L & 4C_2L^2 \end{bmatrix}$$

- 여기서,
- $C_1 = \frac{AE}{L}$
- $C_2 = \frac{EI}{L^3}$

## 9.1 전체 변위에 대해 국지 변위를 관계화하는 보 요소의 강성 행렬에 대한 상세 설명

### 1. 국지 좌표계와 전체 좌표계의 관계

- 구조물의 보 요소가 임의의 방향으로 배치되어 있을 때, 국지 좌표계(Local Coordinate System)에서 정의된 강성 행렬을 전체 좌표계(Global Coordinate System)로 변환해야 합니다.

- 변환 행렬  $[T]$ 은 이러한 변환을 수행하는 데 사용되며, 국지 좌표계에서의 변위를 전체 좌표계로 변환하는 역할을 합니다.
- 변환 행렬은 다음과 같이 구성됩니다.

- 여기서  $c = \cos(\theta)$ ,  $s = \sin(\theta)$ 이며  $\theta$ 는 보 요소의 방향 각도를 나타냅니다.

## 2. 전체 강성 행렬 $[k]$ 의 유도

- 국지 좌표계에서의 강성 행렬  $[k']$ 을 전체 좌표계로 변환하기 위해 다음의 변환식을 사용합니다.

$$[k] = [T]^T [k'] [T]$$

- 이 식은 변환 행렬을 이용하여 국지 좌표계의 강성 행렬을 전체 좌표계로 변환하여 전체 구조에 적용할 수 있는 강성 행렬을 얻는 과정입니다.

## 3. 강성 행렬 $[k]$ 의 구성

- 변환된 강성 행렬  $[k]$ 는 각 요소가 가진 축력, 전단력, 굽힘 모멘트 등의 물리적 특성을 모두 포함합니다.
- 주어진 식을 통해 유도된 강성 행렬은 복잡하지만, 전체적인 구조 해석에서 정확한 결과를 얻기 위해 중요한 역할을 합니다.
- 강성 행렬의 구성은 다음과 같이 나타냅니다.

$$[k] = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} AC + \frac{12IS^2}{L^2} & \left(\frac{12I}{L^2} - AC\right)SC & -\frac{6IS}{L} & -AC - \frac{12IS^2}{L^2} & -\left(\frac{12I}{L^2} - AC\right)SC & -\frac{6IS}{L} \\ \left(\frac{12I}{L^2} - AC\right)SC & ACS^2 + \frac{4I}{L^2} & -\frac{6IC}{L} & -\left(\frac{12I}{L^2} - AC\right)SC & -ACS^2 - \frac{4I}{L^2} & \frac{6IC}{L} \\ -\frac{6IS}{L} & -\frac{6IC}{L} & \frac{4I}{L} & \frac{6IS}{L} & \frac{6IC}{L} & \frac{2I}{L} \\ -AC - \frac{12IS^2}{L^2} & -\left(\frac{12I}{L^2} - AC\right)SC & \frac{6IS}{L} & AC + \frac{12IS^2}{L^2} & \left(\frac{12I}{L^2} - AC\right)SC & \frac{6IS}{L} \\ -\left(\frac{12I}{L^2} - AC\right)SC & -ACS^2 - \frac{4I}{L^2} & \frac{6IC}{L} & \left(\frac{12I}{L^2} - AC\right)SC & ACS^2 + \frac{4I}{L^2} & -\frac{6IC}{L} \\ -\frac{6IS}{L} & \frac{6IC}{L} & \frac{2I}{L} & \frac{6IS}{L} & -\frac{6IC}{L} & \frac{4I}{L} \end{bmatrix}$$

## 9.2 강성 평면 프레임에 대한 분석

### 1. 강성 평면 프레임의 정의 및 특징

- 강성 평면 프레임은 여러 보 요소들이 서로 연결되어 이루어진 구조물입니다.
- 각 연결 지점에서의 모멘트 연속성이 중요하며, 각 보 요소의 강성 행렬을 고려하여 전체 구조의 변형을 해석해야 합니다.

## 1. 유도된 강성 매트릭스의 적용

- 유도된 강성 행렬은 각 보 요소의 강성 평면 프레임의 해석에 적용됩니다.
- 즉, 각 보 요소의 국지 강성 행렬을 변환 행렬을 통해 전체 좌표계로 변환하여, 프레임 구조의 해석에 사용합니다.

## 1. 컴퓨터 프로그램을 활용한 분석

- 이러한 강성 평면 프레임의 해석은 많은 수의 계산이 필요하므로, 컴퓨터 프로그램을 통해 보 요소들의 강성 행렬을 조합하고 전체 구조를 해석하는 것이 효율적입니다.

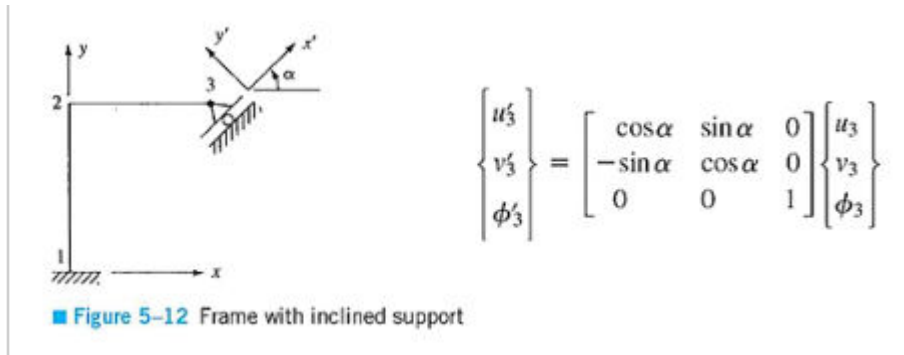
## 경사진 지지점을 가진 프레임 요소에 대한 상세 설명

### 1. 경사진 지지점을 가진 프레임 요소의 특징

- 프레임 구조에서 지지점이 경사진 경우, 변위 및 회전이 일반적인 프레임 요소와 다르게 작용합니다.
- 이러한 경사진 지지점에서의 해석을 위해서는 국지 좌표계와 전체 좌표계 사이의 변환을 통해 정확한 변위 및 강성 관계를 정의해야 합니다.

### 2. 변환 행렬 $T$ 의 사용

- 경사진 지지점이 있는 경우, 프레임 요소의 변위와 힘을 전체 좌표계로 변환하기 위해 변환 행렬  $T$ 를 사용합니다.



- 그림에서 보이는 변환 행렬은 각도  $\alpha$ 에 따라 다음과 같이 정의됩니다.

$$T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 여기서  $\alpha$ 는 프레임 요소의 경사각을 나타내며, 이 각도를 통해 국지 좌표계에서의 변위가 전체 좌표계로 변환됩니다.

### 3. 경사진 프레임 요소의 변위 및 힘 해석

- 변환 행렬  $T$ 을 사용하여 국지 좌표계에서 얻은 강성 행렬  $[k']$ 을 전체 좌표계로 변환하여  $[k] = T^T[k']T$ 을 구합니다.
- 이를 통해 경사진 지지점을 가진 프레임 요소에 대한 정확한 변위와 힘을 계산할 수 있습니다.

### 4. 구조 해석에의 활용

- 실제 구조물에서 지지점이 경사진 경우가 많기 때문에, 이와 같은 변환 행렬을 통해 해석하는 것이 중요합니다.
- 경사진 지지점을 고려하지 않고 단순한 수직 지지점으로 가정하면 부정확한 결과를 얻을 수 있으므로 변환 행렬  $T$ 의 사용이 필수적입니다.

**% MATLAB 코드: 경사진 지지점을 가진 프레임 요소의 강성 행렬 계산 및 시각화**

**% 보 요소의 기본 파라미터 설정**

```
E = 210e9;      % 탄성계수 (Pa)
A = 0.01;      % 단면적 (m^2)
L = 5;         % 보 요소의 길이 (m)
I = 8.33e-6;   % 단면 2차 모멘트 (m^4)
alpha = 30;    % 경사진 지지점의 각도 (degrees)
```

**% alpha를 라디안으로 변환**

```
alpha_rad = deg2rad(alpha);
```

**% 변환 행렬 T 생성**

```
c = cos(alpha_rad);
s = sin(alpha_rad);
T = [ c  s  0  0  0  0;
      -s  c  0  0  0  0;
        0  0  1  0  0  0;
        0  0  0  c  s  0;
        0  0  0 -s  c  0;
        0  0  0  0  0  1];
```

**% 국지 좌표계에서의 강성 행렬 [k'] 생성**

```
C1 = E * A / L;
C2 = E * I / L^3;
```

```
k_local = [ C1    0    0   -C1    0    0;
            0  12*C2  6*C2*L    0  -12*C2  6*C2*L;
            0   6*C2*L  4*C2*L^2    0  -6*C2*L  2*C2*L^2;
           -C1    0    0    C1    0    0;
            0  -12*C2 -6*C2*L    0  12*C2  -6*C2*L;
            0   6*C2*L  2*C2*L^2    0  -6*C2*L  4*C2*L^2];
```

```
0    6*C2*L    2*C2*L^2    0    -6*C2*L    4*C2*L^2];
```

```
% 전체 좌표계로 변환된 강성 행렬 [k] 계산
```

```
k_global = T' * k_local * T;
```

```
% 결과 출력
```

```
disp('국지 좌표계의 강성 행렬 [k']');
```

국지 좌표계의 강성 행렬 [k']

```
disp(k_local);
```

```
1.0e+08 *
```

```
4.2000    0    0    -4.2000    0    0
    0    0.0017    0.0042    0    -0.0017    0.0042
    0    0.0042    0.0140    0    -0.0042    0.0070
-4.2000    0    0    4.2000    0    0
    0   -0.0017   -0.0042    0    0.0017   -0.0042
    0    0.0042    0.0070    0   -0.0042    0.0140
```

```
disp('전체 좌표계의 강성 행렬 [k]');
```

전체 좌표계의 강성 행렬 [k]

```
disp(k_global);
```

```
1.0e+08 *
```

```
3.1504    1.8179   -0.0021   -3.1504   -1.8179   -0.0021
1.8179    1.0513    0.0036   -1.8179   -1.0513    0.0036
-0.0021    0.0036    0.0140    0.0021   -0.0036    0.0070
-3.1504   -1.8179    0.0021    3.1504    1.8179    0.0021
-1.8179   -1.0513   -0.0036    1.8179    1.0513   -0.0036
-0.0021    0.0036    0.0070    0.0021   -0.0036    0.0140
```

```
% 시각화 부분
```

```
figure;
```

```
% 1. 보 요소의 국지 좌표계 및 전체 좌표계의 시각화
```

```
subplot(2,2,1);
```

```
quiver([0, 0], [0, 0], [1, c], [0, s], 0, 'LineWidth', 2, 'Color', 'b');
```

```
hold on;
```

```
quiver(0, 0, c, s, 0, 'LineWidth', 2, 'Color', 'r');
```

```
text(1.1, 0, 'Global X-axis', 'Color', 'b', 'FontSize', 10);
```

```
text(c + 0.1, s, 'Element Direction', 'Color', 'r', 'FontSize', 10);
```

```
title('국지 좌표계와 전체 좌표계 비교');
```

```
xlabel('X-axis');
```

```
ylabel('Y-axis');
```

```
axis equal;
```

```
grid on;
```

```
legend('Global X-axis', 'Element Direction');
```

```
% 2. 강성 행렬의 히트맵 (Heatmap) 시각화
```

```

subplot(2,2,2);
imagesc(k_local);
colorbar;
title('국지 좌표계의 강성 행렬 [k'']');
xlabel('Column Index');
ylabel('Row Index');
axis equal;
grid on;

% 3. 변환된 강성 행렬의 히트맵 시각화
subplot(2,2,3);
imagesc(k_global);
colorbar;
title('전체 좌표계의 강성 행렬 [k]');
xlabel('Column Index');
ylabel('Row Index');
axis equal;
grid on;

% 4. 보 요소의 변형 시각화
subplot(2,2,4);
x = [0 L*c];
y = [0 L*s];
plot(x, y, '-ok', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize', 10, 'MarkerFaceColor', 'r');
hold on;
plot([0, L], [0, 0], '--b', 'LineWidth', 1);
title('보 요소의 변형 시각화');
xlabel('X');
ylabel('Y');
axis equal;
grid on;
legend('Transformed Beam', 'Original Position');

sgtitle('경사진 지지점을 가진 프레임 요소의 시각화');

```



## 경사진 지지점을 가진 프레임 요소의 시각화

