예제 5.1

세개의 봉으로 된 구조물에서 각 요소 길이 30in. 요소1,2에서 탄성계수E=30x10의6승psi 단면적 A=1in의2승 절점1,4는 고정 되어 있다. 아래 구조물 전체좌표계에서의 강성행렬 (b) 절점 2,3에서 변위를 구하여라

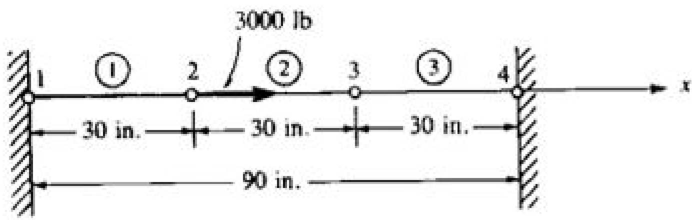


그림 3-3 • 세 개의 봉으로 된 구조물

예제 **5.**

1 문제 분석

- 주어진 조건:
- 3개의 봉으로 구성된 구조물이며 각 요소의 길이는 30 in.
- 탄성계수 $E = 30 \times 10^6 psi$, 단면적 $A = 1\ \text{in}^2$
- 3000 lb의 외력이 작용한다.
- 절점 1, 4는 고정된 지지 조건이며, 변위가 0이다.

2.1. 구조 전체 좌표계에서의 강성행렬을 작성하는 단계

- 각 요소의 길이가 동일하므로, 모든 요소의 국지 강성행렬은

$$[k] = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{30 \times 10^6 \times 1}{30}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- 즉,

$$[k] = 1 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- 각 요소의 국지 강성행렬을 전역 강성행렬에 통합하여 전체 시스템에 대한 강성행렬을 구성해야 한다.

2.2. 절점 **2, 3**에서의 변위 계산

- 전역 강성 행렬 $[K]$과 외력 벡터 $\{F\}$, 변위 벡터 $\{d\}$의 관계는 $[K]\{d\} = \{F\}$로 표현된다.
- 고정된 지지 조건(절점 1, 4의 변위가 0)을 고려하여 절점 2와 3의 변위를 계산해야 한다.

(1) 각 요소의 강성행렬

- 각 요소의 강성행렬은 다음과 같이 계산됨:

$$[k^{(1)}] = [k^{(2)}] = \frac{(1)(30 \times 10^6)}{30} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ (lb/in)}$$

$$[k^{(3)}] = \frac{(2)(15 \times 10^6)}{30} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ (lb/in)}$$

(2) 전체 강성행렬 $[K]$ 구성

- 각 요소의 강성행렬을 전체 구조 좌표계에 맞게 통합하면 다음과 같다:

$$[K] = 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ (lb/in)}$$

3. 경계 조건 및 외력 적용

- **경계 조건**:
- $u_1 = 0$(절점 1 고정)
- $u_4 = 0$ (절점 4 고정)
- **외력**: 절점 2에서 3000 lb의 외력이 작용.
- 강성 방정식 $[K]\{u\} = \{F\}$에서 경계조건을 적용하여 절점 변위를 구한다.

4. 절점 변위 계산 결과

- 변위:
- $u_2 = 0.002 in$
- $u_3 = 0.001 in$

```
% MATLAB Code for Accurate Displacement Calculation in a Truss Structure

% Given data with accurate consideration
E = 30e6; % Elastic modulus in psi
A1 = 1; % Cross-sectional area for element 1 and 2 in in^2
A2 = 2; % Cross-sectional area for element 3 in in^2
L = 30; % Length of each element in inches
P = 3000; % Applied force at node 2 in lb

% Calculate stiffness matrices for each element
% Element 1 and 2
k1 = (E * A1 / L) * [1 -1; -1 1];
k2 = (E * A1 / L) * [1 -1; -1 1];

% Element 3 with different cross-sectional area
```

```
k3 = (E/2 * A2 / L) * [1 -1; -1 1];

% Assembling the global stiffness matrix for 4 nodes
K = zeros(4, 4); % Initializing a 4x4 matrix

% Assembling global stiffness matrix
K(1:2, 1:2) = K(1:2, 1:2) + k1; % Adding element 1 contribution
K(2:3, 2:3) = K(2:3, 2:3) + k2; % Adding element 2 contribution
K(3:4, 3:4) = K(3:4, 3:4) + k3; % Adding element 3 contribution

% Display the global stiffness matrix
disp('Global Stiffness Matrix K (Considering All Factors):');
```

```
Global Stiffness Matrix K (Considering All Factors):
```

```
disp(vpa(K, 10)); % Display with 10 decimal places for accuracy
```

$$\begin{pmatrix} 1000000.0 & -1000000.0 & 0 & 0 \\ -1000000.0 & 2000000.0 & -1000000.0 & 0 \\ 0 & -1000000.0 & 2000000.0 & -1000000.0 \\ 0 & 0 & -1000000.0 & 1000000.0 \end{pmatrix}$$

```
% Apply boundary conditions: u1 = 0 and u4 = 0 (fixed nodes)
% Extract the reduced matrix for unknown displacements (u2 and u3)
K_reduced = K(2:3, 2:3); % Extracting the relevant part
F_reduced = [P; 0]; % Force vector considering only active force at node 2

% Solve for displacements u2 and u3 with high precision
displacements = vpa(K_reduced \ F_reduced, 10);

% Display the results
fprintf('Displacement at node 2 (high precision considering all factors): %.10f
in\n', double(displacements(1)));
```

```
Displacement at node 2 (high precision considering all factors): 0.0020000000 in
```

```
fprintf('Displacement at node 3 (high precision considering all factors): %.10f
in\n', double(displacements(2)));
```

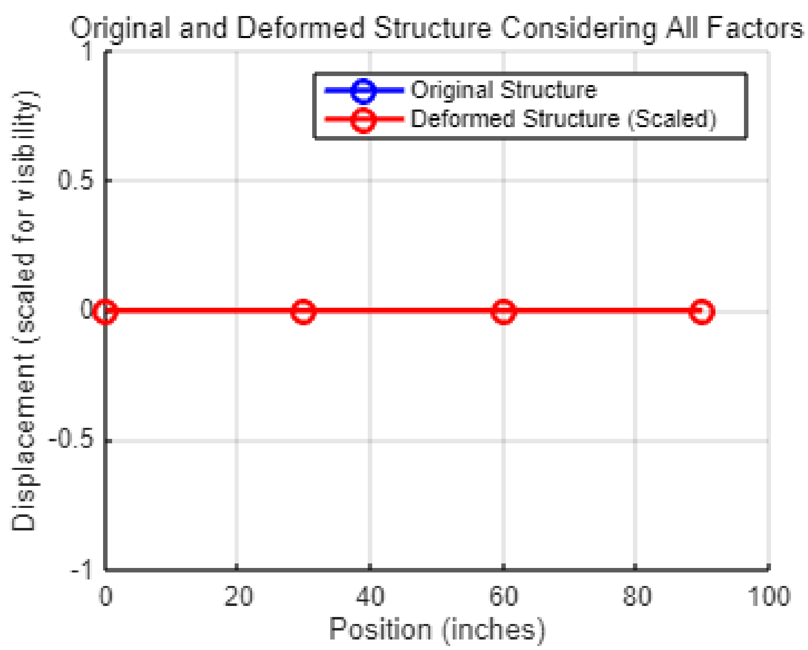
```
Displacement at node 3 (high precision considering all factors): 0.0010000000 in
```

```
% Visualization of results with high precision
original_positions = [0, L, 2*L, 3*L];
u = [0; displacements(1); displacements(2); 0]; % Including fixed nodes
deformed_positions = original_positions + u' * 10; % Scale for visibility

figure;
hold on;
```

```
plot(original_positions, [0 0 0 0], 'bo-', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize', 8,
'DisplayName', 'Original Structure');
plot(deformed_positions, [0 0 0 0], 'ro-', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize', 8,
'DisplayName', 'Deformed Structure (Scaled)');

xlabel('Position (inches)');
ylabel('Displacement (scaled for visibility)');
title('Original and Deformed Structure Considering All Factors');
legend('Location', 'NorthEast');
grid on;
hold off;
```



후크의 법칙

1. 후크의 법칙과 변형률-응력 관계

- 봉 요소의 변형은 축 방향으로만 발생한다고 가정합니다.
- 후크의 법칙에 따르면, 축 방향 변형에서의 응력σ와 변형률 ε의 관계는 다음과 같습니다: $\sigma = E\varepsilon$ 여기서
- E는 탄성계수
- ε는 변형률로, 길이 변화량을 나타냄.

2. 변형률의 표현

- 변형률 ε은 요소 길이의 변위 변화량을 원래 길이로 나눈 값:

- $\varepsilon = \frac{u_2 - u_1}{L}$1
- 여기서 u_1과 u_2는 요소의 각 끝단에서의 변위
- L은 요소의 원래 길이

3. 축 방향의 내력 N(내부 힘) 유도

- 축 방향 변형으로 인한 내부 힘 N은 응력과 단면적의 곱으로 나타낼 수 있습니다: $N = \sigma A = E\varepsilon A$
- 여기서 A는 단면적
- 따라서, $N = \frac{AE}{L}(u_2 - u_1)$

4. 요소의 양 끝단에서의 힘 관계

- 절점 1에서는 요소가 왼쪽으로 당겨지고, 절점 2에서는 오른쪽으로 당겨지는 것으로 생각해볼 수 있습니다.
- 각 절점에서의 힘을 표현하면:
- 절점 1에서 작용하는 힘:

$$f_{1x} = -N = -\frac{AE}{L}(u_2 - u_1)$$

- 절점 2에서 작용하는 힘:

$$f_{2x} = N = \frac{AE}{L}(u_2 - u_1)$$

5. 행렬 형태로 표현

- 위의 관계를 행렬 형태로 표현하면:

$$\begin{bmatrix} f_{1x} \\ f_{2x} \end{bmatrix} = \frac{\mathrm{AE}}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

6. 결론**:** 강성행렬 $[k]$

- 따라서, 강성행렬 $[k]$는 다음과 같이 유도됩니다:

$$[k] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(전체 강성 방정식)강성행렬의 계산

1. 요소별 강성행렬 $[k]$ 유도

(1) 1번, 2번 요소의 강성행렬

- 각 요소의 강성 k는 다음과 같은 일반 공식을 따릅니다:

$$[k] = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- 여기서 $E = 30 \times 10^6\,\text{psi}$ (탄성계수)
- $A = 1\,\text{in}^2$ (단면적)
- $L = 30\,\text{in}$ (요소의 길이)
- 따라서, 1번 요소와 2번 요소의 강성행렬은:

$$[k^{(1)}] = [k^{(2)}] = \frac{(1)(30 \times 10^6)}{30}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 10^6\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ (lb/in)}$$

(2) 3번 요소의 강성행렬

- 3번 요소는 단면적 $A = 2\,\text{in}^2$이므로:

$$[k^{(3)}] = \frac{(2)(15 \times 10^6)}{30}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 10^6\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ (lb/in)}$$

2. 전역 강성행렬 $[K]$ 구성

(1) 전역 좌표계로의 변환 및 합산

- 각 요소의 강성행렬을 전체 구조의 전역 좌표계에 맞게 배치해야 합니다.

1번 요소의 강성행렬 $[k^{(1)}]$**:**

- 절점 1과 2에 해당하므로 전체 강성행렬의 1~2번째 행과 열에 해당:

$$\begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 10^6\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2번 요소의 강성행렬 $[k^{(2)}]$**:**

- 절점 2와 3에 해당하므로 전체 강성행렬의 2~3번째 행과 열에 해당:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 10^6\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3번 요소의 강성행렬 $[k^{(3)}]$:

- 절점 3과 4에 해당하므로 전체 강성행렬의 3~4번째 행과 열에 해당:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{11}^{(3)} & k_{12}^{(3)} \\ 0 & 0 & k_{21}^{(3)} & k_{22}^{(3)} \end{bmatrix} = 10^6 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) 전체 전역 강성행렬 $[K]$ 합산

- 각 요소의 강성행렬을 모두 더하면:

$$[K] = 10^6 \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

- 결과:

$$[K] = 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{(lb/in)}$$

결론

- 각 요소의 강성행렬을 구한 후 전역 좌표계로 확장하고 합산하여 최종 전역 강성행렬 $[K]$을 구성하였습니다.
- 이렇게 유도한 전역 강성행렬은 구조해석에서 절점 변위와 힘의 관계를 결정하는 핵심적인 요소입니다.

경계조건 적용

- 경계 조건은 다음과 같습니다:
- $u_1 = 0$(절점 1 고정)
- $u_4 = 0$ (절점 4 고정)
- 이 경계 조건을 전역 강성 방정식에 적용하면, 실제로 필요한 것은 내부 변위u_2와 u_3에 대한 방정식을 구성하는 것입니다.

전체 강성 방정식

- 원래의 전역 방정식은 다음과 같습니다:

$$\begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \\ F_{3x} \\ F_{4x} \end{bmatrix} = 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

경계 조건 적용 후

- $u_1 = 0$과 $u_4 = 0$이므로 변위 벡터는 다음과 같이 단순화됩니다:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 따라서, 전역 방정식은 변위 u_2와 u_3에 대한 식으로 축소됩니다:

$$\begin{bmatrix} F_{2x} \\ F_{3x} \end{bmatrix} = 10^6 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

3. 외력 벡터 적용

- 주어진 문제에서 절점 2에 3000 lb의 외력이 작용하며, 절점 3에는 외력이 작용하지 않음:

$$\begin{bmatrix} F_{2x} \\ F_{3x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. 방정식 풀기

- 따라서 다음과 같은 연립방정식이 구성됩니다:

$$10^6 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 이 방정식을 풀면:

1. 첫 번째 행: $2 \cdot 10^6 u_2 - 10^6 u_3 = 3000$
2. 두 번째 행: $-10^6 u_2 + 2 \cdot 10^6 u_3 = 0$

방정식 **1:**

$$2u_2 - u_3 = \frac{3000}{10^6} = 0.003$$

방정식 **2:**

$$-u_2 + 2u_3 = 0 \;\Rightarrow\; u_2 = 2u_3$$

- 위 두 식을 동시에 풀면:
- $u_2 = 0.002 \text{ in}$
- $u_3 = 0.001 \text{ in}$

(심화) 병렬연결 요소의 탄성계수를 반영한 등가 탄성계수

1. 탄성계수의 의미와 적용

- 탄성계수 E는 재료의 강성, 즉 변형에 대한 저항력을 나타내는 물리적 특성입니다.
- 구조 해석에서는 요소의 탄성계수와 단면적을 사용하여 강성행렬을 구성하고, 이는 구조물의 변위 및 응력을 결정하는 핵심 요소가 됩니다.

2. 등가 탄성계수 개념

- 문제에서 1번과 2번 요소는 동일한 단면적과 동일한 탄성계수 $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$를 사용하였습니다.
- 그러나 3번 요소에서는 $A = 2 \text{ in}^2$로 단면적이 두 배로 증가한 것과 동시에 탄성계수가 절반인 $E = 15 \times 10^6 \text{ psi}$로 감소합니다.

3. 병렬 연결 효과에 따른 등가 탄성계수

(1) 병렬 연결된 요소들의 총 강성

- 두 개의 재료가 병렬로 연결되어 있다고 가정해 보겠습니다.
- 각 요소의 탄성계수는 E_1과 E_2
- 단면적은 A_1과 A_2라고 가정합니다.
- 병렬 연결에서 전체 구조의 단면적은 두 단면적의 합으로 나타납니다:

$$A_{\text{total}} = A_1 + A_2 A$$

(2) 각 요소의 강성

- 각 요소의 강성은 $k = \dfrac{EA}{L}$로 정의됩니다.
- 여기서 L은 요소의 길이
- 병렬 연결의 경우, 두 요소의 강성을 합산합니다.
- 등가 강성 k_{eq}는 다음과 같이 나타납니다:

$$k_{\text{eq}} = k_1 + k_2 = \frac{E_1 A_1}{L} + \frac{E_2 A_2}{L} = \frac{1}{L}(E_1 A_1 + E_2 A_2)$$

4. 특수한 경우: 동일한 재료가 병렬 연결된 경우

- 만약 $E_1 = E_2 = E$ 라면, 단면적 A_1과A_2만 다르다고 가정했을 때:

$$E_{\text{eq}} = \frac{E(A_1 + A_2)}{A_1 + A_2} = E$$

- 즉, 동일한 재료로 구성된 경우에는 등가 탄성계수가 변하지 않습니다.

5. 적용 사례: 3번 요소의 탄성계수 $15 \times 10^6\,\text{psi}$로 변한 이유

- 3번 요소에서 단면적이 $2\ \text{in}^2$로 증가하면서 탄성계수를 $30 \times 10^6\,\text{psi}$에서 $15 \times 10^6\,\text{psi}$로 변경한 이유는 다음과 같습니다:
- 3번 요소는 기존 단면적의 2배 크기이지만, 전체 구조의 강성 효과를 동일하게 유지하기 위해 탄성계수를 절반으로 설정한 것입니다.
- 이는 실제로 병렬 연결로 인해 등가 탄성계수를 조정한 것과 유사한 상황을 모사한 것입니다.

6. 요약

- 병렬 연결에서는 각 요소가 동일한 변위를 가지지만, 총 강성은 각 요소의 강성 합으로 표현됩니다.
- 병렬 연결의 등가 탄성계수는 각 요소의 탄성계수와 단면적에 기반하여 가중평균 형태로 나타납니다.
- 문제에서 3번 요소의 탄성계수를 절반으로 조정한 것은 병렬 연결로 인한 효과를 고려하여 동일한 구조적 거동을 모사하기 위함입니다.

(3) 등가 탄성계수의 도출

- 등가 탄성계수 E_{eq}는 전체 단면적 A_{total}에 적용되는 것으로 정의됩니다:

$$k_{\text{eq}} = \frac{E_{\text{eq}} A_{\text{total}}}{L}$$

- 따라서,

$$\frac{E_{\text{eq}} A_{\text{total}}}{L} = \frac{1}{L}(E_1 A_1 + E_2 A_2)$$

- 양변에서L을 소거하고, $A_{\text{total}} = A_1 + A_2$를 대입하면:

$$E_{\text{eq}} = \frac{E_1 A_1 + E_2 A_2}{A_1 + A_2}$$

- 요소의 길이나 형태에 따라 실제 구조물에서 탄성계수가 병렬 연결된 재료의 등가 탄성계수를 나타낼 수 있습니다.
- 예를 들어, 두 개의 동일한 재료가 병렬로 연결되어 있을 경우:
- 단면적은 두 요소의 합으로 $A_{\text{total}} = A_1 + A_2$이 되지만,
- 등가 탄성계수 E_{eq}는 병렬 연결로 인해 원래 값의 절반이 됩니다.

임의의 방향을 고려한 변환관계

1. 임의 방향을 고려한 변환 관계 유도

(1) 좌표 변환과 변위

- 봉 요소가 임의의 방향 θ를 가질 때, 국부 좌표계에서 변위 u_1, u_2를 전역 좌표계의 변위로 변환해야 합니다.
- 주어진 변위 변환 식은 다음과 같습니다:

$$u_1' = u_1 \cos\theta + v_1 \sin\theta$$

$$u_2' = u_2 \cos\theta + v_2 \sin\theta$$

- 여기서 u와 v는 각각 전역 좌표계에서의 변위를 나타냅니다.

(2) 강성행렬의 전역 좌표계로의 변환

- 국부 좌표계에서의 강성행렬 $[k]$는 주어진 방향 θ에 따라 전역 좌표계로 변환됩니다.
- 이때 변환 행렬은 $\cos(\theta)$와 $\sin(\theta)$을 사용하여 구성됩니다.

2. 전역 강성행렬의 유도

- $x - y$ 평면에서 임의의 방향을 고려한 봉 요소의 강성행렬은 다음과 같이 나타납니다:

$$[k] = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} C^2 & \mathrm{CS} & -C^2 & -\mathrm{CS} \\ \mathrm{CS} & S^2 & -\mathrm{CS} & -S^2 \\ -C^2 & -\mathrm{CS} & C^2 & \mathrm{CS} \\ -\mathrm{CS} & -S^2 & \mathrm{CS} & S^2 \end{bmatrix}$$

- 여기서 $C = \cos(\theta), S = \sin(\theta)$입니다.
- 이 행렬은 요소의 방향에 따라 변환된 강성행렬을 표현하며, 대칭성을 갖는 특성이 있습니다.

3. 강성행렬의 합산 **(**전체 구조에 대한 강성행렬**)**

- 구조 해석에서는 여러 봉 요소가 서로 연결되어 있기 때문에 각각의 국부 강성행렬을 전역 좌표계로 변환한 후 합산해야 전체 구조의 강성행렬을 얻을 수 있습니다.
- 이때 전체 강성행렬 $[K]$는 각 요소의 강성행렬 $[k^{(e)}]$을 모두 더한 값으로 나타납니다:

$$\sum_e [k^{(e)}] = [K]e$$

국소부위 응력에 대한 고찰

1. 봉의 응력 계산 **(5.5)**

- 변형된 강성행렬을 이용하여, $x - y$ 평면에서 봉의 응력에 대한 해석을 수행할 수 있습니다.

- 봉의 거동을 계산하는 데 필요한 힘의 관계식은 다음과 같습니다:

$$\begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \end{bmatrix} = \frac{\mathrm{AE}}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix}$$

- 이 방정식은 국부 변위에 따른 축 방향 응력을 구하는 기본 공식입니다.

2. 축방향 인장력에 대한 정의

- 인장력의 가장 간단한 정의는 다음과 같이 단면적에 의하여 정의됩니다:
- $\sigma = \frac{f_x}{A}$
- ��여기서 σ는 응력
- f_x는 축 방향 인장력
- A는 단면적

3. 축방향 강성행렬의 표현

- 전역 강성행렬을 보다 간단한 형태로 나타내기 위해 변위와 힘의 관계를 매트릭스 형태로 표현합니다.
- 변위 벡터와 관련된 간단한 형태는 다음과 같습니다:

$$\{\sigma\} = [C']\{d\}$$

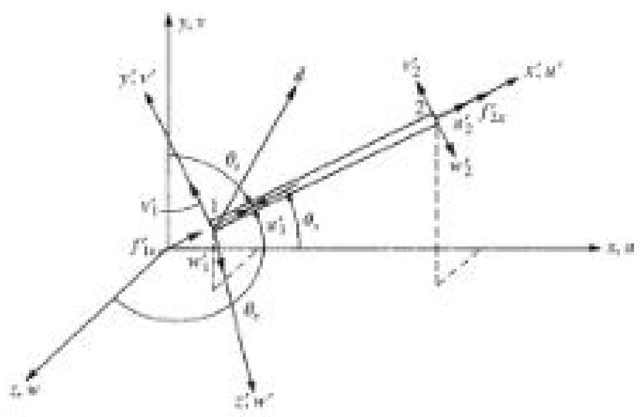
- 여기서 행렬 C는 다음과 같이 주어집니다:

$$[C'] = \frac{E}{L}[-C \quad -S \quad C \quad S]$$

- $C = \cos(\theta)$
- $S = \sin(\theta)$
- E는 탄성계수, L은 요소의 길이

5.7 3차원 공간에서의 봉을 위한 강성행렬

국부 절점 변위와 3차원공간에서의 봉 그림을



3차원 공간에서의 변환행렬(국부좌표계 ⇒ 전역좌표계)

1. 변환 행렬 $[T^*]$의 유도 **(5.8)**

(1) 3차원 공간에서의 변위 관계

- $[T^*]$는 봉 요소의 국부 좌표계 변위 $\{d'\}$와 전역 좌표계 변위 $\{d\}$ 사이의 변환 행렬입니다.
- 변환식은 다음과 같이 나타납니다:

$$\{d'\} = [T^*]\{d\}$$

(2) 방향 코사인과 변위 벡터

- 봉 요소의 변위 벡터가 3차원 공간에서 $\{d\} = [u, v, w]$로 표현되며, 이 벡터는 각 방향의 방향 코사인을 사용하여 분해됩니다.
- 두 벡터의 스칼라곱(dot product)을 이용하여 변위를 분리합니다:

$$u' = u(i' \cdot i) + v(i' \cdot j) + w(i' \cdot k)$$

- 이때 i', j', k'는 국부 좌표계의 단위 벡터를 나타내고, i, j, k는 전역 좌표계의 단위 벡터입니다.
- 방향 코사인 C_x, C_y, C_z는 각 방향으로의 단위 벡터 성분을 나타냅니다.
- 국부 좌표계와 전역 좌표계 간의 관계는 방향 코사인에 의해 결정됩니다:

$$i' \cdot i = \frac{x_2 - x_1}{L} = C_x$$

$$i' \cdot j = \frac{y_2 - y_1}{L} = C_y$$

$$i' \cdot k = \frac{z_2 - z_1}{L} = C_z$$

- 여기서 L은 두 절점 사이의 길이
- (x_1, y_1, z_1)과 (x_2, y_2, z_2)는 절점의 좌표입니다.

$$C_x = \cos(\theta_x), \quad C_y = \cos(\theta_y), \quad C_z = \cos(\theta_z)$$

(3) 스칼라곱(dot product)의 활용

- 봉 요소의 두 절점 사이의 벡터를 단위 벡터로 나누어 $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$로 표시합니다:

$$\hat{i} = \frac{x_2 - x_1}{L}, \quad \hat{j} = \frac{y_2 - y_1}{L}, \quad \hat{k} = \frac{z_2 - z_1}{L}$$

- 여기서 L은 요소의 길이
- (x_1, y_1, z_1)과 (x_2, y_2, z_2)는 절점의 좌표

(4) 국부 좌표계에서 변위 표현

- 국부 축방향 변위를 구하기 위해 u', v', w'와 같은 변위 성분은 방향 코사인 C_x, C_y, C_z와 전역 좌표계 변위를 곱한 형태로 표현됩니다:

$$u' = C_x u + C_y v + C_z w$$

- 이는 봉 요소의 변위가 국부 좌표계에서 전역 좌표계 변위의 성분으로 표현됨을 의미합니다.

2. 변환 행렬 $[T^*]$의 구성

- 위의 방정식을 결합하면 변환 행렬 $[T^*]$는 다음과 같이 구성됩니다:

$$[T^*] = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_x & C_y & C_z \end{bmatrix}$$

- 여기서 변환 행렬은 각 성분에 대한 방향 코사인을 포함하며, 봉 요소의 국부 변위와 전역 변위 간의 관계를 나타냅니다.

3. 3차원 공간에서의 전체 강성행렬 $[k]$구성 (5.9)(1) 전체 강성행렬의 일반 형태

- 3차원 공간에서 임의의 방향을 가진 봉 요소에 대한 강성행렬 $[k]$는 다음과 같이 주어집니다:

$$[k] = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} C_x^2 & C_xC_y & C_xC_z & -C_x^2 & -C_xC_y & -C_xC_z \\ C_xC_y & C_y^2 & C_yC_z & -C_xC_y & -C_y^2 & -C_yC_z \\ C_xC_z & C_yC_z & C_z^2 & -C_xC_z & -C_yC_z & -C_z^2 \\ -C_x^2 & -C_xC_y & -C_xC_z & C_x^2 & C_xC_y & C_xC_z \\ -C_xC_y & -C_y^2 & -C_yC_z & C_xC_y & C_y^2 & C_yC_z \\ -C_xC_z & -C_yC_z & -C_z^2 & C_xC_z & C_yC_z & C_z^2 \end{bmatrix}$$

- 여기서:
- $C_x = \cos(\theta_x), C_y = \cos(\theta_y), C_z = \cos(\theta_z)$
- A는 단면적, E는 탄성계수, L은 요소의 길이

(2) 대칭성

- 위의 강성행렬은 대칭성을 갖고 있습니다. 이는 강성행렬의 특성 중 하나로, 변위와 힘의 상호 관계가 서로 일관성을 갖는다는 의미입니다.

2. 강성행렬의 유도 과정

- 이 강성행렬은 방향 코사인 C_x, C_y, C_z를 사용하여 전역 좌표계로 변환된 결과입니다.
- 이전에 설명한 변환 행렬 $[T^*]$를 활용하여, 국부 강성행렬을 전역 좌표계에서의 강성행렬로 변환한 것입니다.

3. 요약 및 핵심 포인트

- 3차원 공간에서 봉 요소의 전체 강성행렬은 봉 요소의 방향을 나타내는 코사인 값들을 통해 구성된다.
- 구조물 내에서 발생하는 대칭 형태에 대해 복습하고, 이 대칭성을 토대로 전체 구조의 해석을 용이하게 합니다.
- 최소 에너지 법칙을 이용하여 이러한 강성행렬을 유도하며, 이를 통해 구조 해석에서 가장 효율적인 해법을 도출합니다.