칼만 필터(Kalman Filter)의 이론과 작동 원리

칼만 필터는 **선형 역학 시스템**에서 **측정된 값**과 **시스템 모델**을 이용하여 **최적의 상태 추정값**을 계산하는 알고리즘입니다. 특히, **실시간 데이터**가 주어졌을 때 **잡음을 포함한 데이터**를 필터링하여 정확한 상태를 추정하는 데 매우 유용합니다. 칼만 필터는 주로 **신호 처리**, **로봇 제어**, **항공기 추적**, **경제 데이터 분석** 등에서 널리 사용됩니다.

1. 칼만 필터의 기본 이론

칼만 필터는 **시계열 데이터**에서 시스템의 상태를 **예측**하고, **측정값**을 기반으로 이를 **갱신**하는 알고리즘입니다. **상태 공간 모델**을 기반으로 작동하며, 시스템의 현재 상태를 추정할 뿐만 아니라 **잡음**(과정 잡음, 측정 잡음)이 포함된 상황에서도 최적의 추정값을 제공합니다.

주요 특징:

- **실시간 데이터 처리**에 적합.
- **잡음이 포함된 신호**에서 최적의 상태 추정 가능.
- 상태 예측과 측정값 갱신의 반복적인 **재귀적** 과정.

2. 칼만 필터의 시스템 모델

칼만 필터는 **시스템 모델**과 **측정 모델**을 기반으로 작동합니다.

- **시스템 모델** (State Transition Model): 시스템이 시간에 따라 어떻게 변하는지를 설명합니다.
- **상태 추정 방정식** :

$$\widehat{x_k} = \mathrm{A}\widehat{x_{k-1}} + \mathrm{B}u_{k-1} + w_{k-1}$$

  - $\widehat{\mathrm{x_k}}$: 시간 k에서의 추정된 상태 벡터
  - $\widehat{x_{k-1}}$: 시간 $k-1$에서의 추정된 상태 벡터
  - A: 시스템 행렬, 이전 상태를 현재 상태로 전환하는 역할
  - B: 입력 행렬, 시스템 입력이 상태에 미치는 영향을 나타냄
  - u_{k-1}: 시간 $k-1$에서의 제어 입력
  - w_{k-1}: 시간 $k-1$에서의 프로세스 잡음 또는 모델 불확실성

- **측정 모델** (Measurement Model): 측정된 값이 시스템 상태와 어떻게 연결되는지 설명합니다.
- **관측 방정식(Measurement Equation):**

$$z_k = H\widehat{x_k} + v_k$$

  - z_k: 시간 k에서의 실제 관측값 또는 측정값
  - H: 관측 행렬, 상태 벡터를 관측값으로 매핑하는 역할
  - $\widehat{x_k}$: 시간 k에서의 추정된 상태 벡터
  - v_k: 시간 k에서의 측정 잡음 또는 관측 오차, 측정 잡음

잡음:

- **과정 잡음** w_k: 시스템의 불확실성을 나타내는 잡음으로, 공분산 행렬 Q로 표현됩니다.
- **측정 잡음** v_k: 측정값에 포함된 잡음으로, 공분산 행렬 R로 표현됩니다.

3. 칼만 필터 알고리즘

칼만 필터는 두 가지 단계로 나누어집니다: **예측(Prediction)**과 **갱신(Update)**. 이 과정은 반복적으로 이루어지며, 각 단계에서 상태와 오차 공분산을 갱신합니다.

1) 예측 단계 (Prediction)

예측 단계는 시스템 모델을 기반으로 현재 상태를 사용하여 **다음 상태**를 예측합니다.

- **상태 예측**: $\widehat{x_{k|k-1}} = A\widehat{x_{k-1}} + Bu_{k-1}$
- **오차 공분산 예측**: $P_{k|k-1} = AP_{k-1}A^T + Q$
- 여기서 $P_{k|k-1}$는 예측된 오차 공분산으로, 시스템의 불확실성을 나타냅니다.

2) 갱신 단계 (Update)

갱신 단계에서는 **측정값**을 사용하여 예측된 상태를 보정합니다.

- **칼만 이득(Kalman Gain) 계산식**: 측정값과 예측값 사이의 차이를 얼마나 반영할지 결정하는 가중치.

$$K_k = P_{k|k-1}H^T(HP_{k|k-1}H^T + R)^{-1}$$

  - K_k: 시간 k에서의 **칼만 이득 행렬**

- $P_{k|k-1}$: 시간 k에서의 **예측 오차 공분산 행렬**
- H: **관측 행렬**, 상태 벡터를 관측값 공간으로 변환하는 역할
- H^T: 관측 행렬 H의 **전치 행렬**
- R: **관측 잡음 공분산 행렬**, 측정 과정에서 발생하는 잡음의 불확실성을 나타냄

- **상태 추정값 갱신(상태 업데이트(Update Step) 방정식)**:

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + K_k(z_k - H\hat{x}_{k|k-1})$$

  - $\hat{x}_k$: 시간 k에서의 **업데이트된 상태 추정치**
  - $\hat{x}_{k|k-1}$: 시간 k에서의 **사전 예측 상태**
  - K_k: 시간 k에서의 **칼만 이득**
  - z_k: 시간 k에서의 실제 관측값
  - H: **관측 행렬**
  - $(z_k - H\hat{x}_{k|k-1})$: **관측 혁신(Innovation)** 또는 **관측 오차, 측정값과 예측값의 차이**(Residual)

- **오차 공분산 갱신(Update Step)**:

$$P_k = (I - K_k H)P_{k|k-1}$$

  - P_k: 시간 k에서의 **업데이트된 오차 공분산 행렬**
  - I : 항등 행렬 (Identity Matrix), 시스템의 차원에 맞는 단위 행렬
  - K_k: 시간 k에서의 **칼만 이득**
  - H : **관측 행렬**, 상태 벡터를 관측값 공간으로 매핑
  - $P_{k|k-1}$: 시간 k에서의 **예측 오차 공분산 행렬**

이는 갱신된 오차 공분산으로, 측정값에 의해 조정된 불확실성을 나타냅니다.

4. 칼만 필터의 작동 원리

1. **초기화**:
   - 초깃값 $\widehat{x_0}$와 오차 공분산 P_0를 설정합니다.

2. **예측 단계**:
   - 이전 상태와 오차 공분산을 사용하여 다음 상태와 오차 공분산을 예측합니다.
3. **갱신 단계**:
   - 새로운 측정값이 들어오면, 이를 사용해 예측값을 보정하고, 오차 공분산을 갱신합니다.
4. **반복**:
   - 예측과 갱신 과정이 반복되며, 시스템 상태가 실시간으로 추정됩니다.

---

5. 칼만 필터 계산 과정 요약

1. **예측**:
   - 상태와 오차 공분산을 예측합니다.

$$\widehat{x_{k|k-1}} = A\widehat{x_{k-1}} + Bu_{k-1}$$

$$P_{k|k-1} = AP_{k-1}A^T + Q$$

2. **칼만 이득 계산**:
   - 예측값과 측정값 사이의 차이를 얼마나 반영할지 결정하는 가중치를 계산합니다.

$$K_k = P_{k|k-1}H^T(HP_{k|k-1}H^T + R)^{-1}$$

3. **상태 추정값 갱신**:
   - 칼만 이득을 사용하여 상태 추정값을 갱신합니다.

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + K_k(z_k - H\hat{x}_{k|k-1})$$

4. **오차 공분산 갱신**:
   - 오차 공분산을 갱신하여, 측정값을 반영한 시스템의 불확실성을 업데이트합니다.

$$P_k = (I - K_kH)P_{k|k-1}$$

---

6. 칼만 필터의 실제 적용 예

칼만 필터는 다양한 분야에서 사용됩니다. 예를 들어:

- **로봇 공학**: 로봇의 위치와 속도를 추정하는 데 사용됩니다.
- **항공기 추적**: 항공기의 위치를 정확하게 추적하고 예측할 수 있습니다.
- **주식 시장 분석**: 금융 데이터의 잡음을 제거하고, 주식 가격의 추세를 분석하는 데 사용됩니다.

결론

칼만 필터는 **실시간 데이터**에서 **잡음을 제거**하고 **최적의 상태 추정값**을 계산하는 매우 강력한 알고리즘입니다. 예측과 갱신을 반복하는 과정에서 **최소 제곱 오차**를 줄이면서 상태를 정확하게 추정할 수 있습니다. 칼만 필터는 **시스템 모델**과 **측정 모델**의 정확성에 따라 성능이 좌우되며, **시계열 데이터 처리**에 매우 적합한 알고리즘입니다.