

홉필드 네트워크의 이징모형

👤 생성자	👤 재환 김
🏷️ 태그	엔지니어링

1. 이징 모형(Ising Model)

이징 모형의 기본 구조

이징 모형은 1920년대에 물리학자 에른스트 이징에 의해 도입된 모델로, 자성 물질의 자화 상태를 설명하기 위해 고안되었습니다. 이 모델에서 물질을 구성하는 각각의 입자들은 스핀 (spin)이라고 불리는 **+1** 또는 **-1**의 값을 가지며, 이는 입자가 자화되는 방향을 나타냅니다.

이징 모형은 **격자 구조**로 나타낼 수 있으며, 각 스핀은 자신과 인접한 스핀들과 상호작용합니다. 이 모형에서의 주요 목표는 전체 시스템의 에너지를 최소화하는 스핀 배열을 찾는 것입니다.

이징 모형의 에너지 함수

이징 모형의 에너지 함수는 다음과 같이 정의됩니다.

$$E = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j - h \sum_i s_i$$

- E: 전체 에너지.
- J: 스핀 간의 상호작용 강도, 보통 상수로 설정되며 **+1**일 때 서로 같은 방향으로 정렬하려는 경향이 있습니다.
- s_i : i번째 스핀의 상태(**+1** 또는 **1**).
- h: 외부 자기장에 해당하는 상수.
- $\langle i, j \rangle$: i와 j가 인접한 스핀이라는 것을 나타냅니다.

이 모델에서의 목적은 모든 스핀들이 상호작용하면서 **에너지가 최소화되는 상태로** 정렬되는 것입니다.

이징 모형의 최적화 원리

이징 모형은 **주변 스핀과의 상호작용**을 통해 전체 시스템의 에너지를 최소화하려고 합니다. 예를 들어, 두 스핀이 서로 같은 방향(**+1**과 **+1** 또는 **-1**과 **-1**)으로 정렬되면 상호작용 에너지가 낮아지고, 다른 방향으로 정렬되면 에너지가 증가합니다. 이 원리로 인해 전체 시스템이 최적화되어 **안정된 상태로** 수렴합니다.

2. 홉필드 네트워크(Hopfield Network)와 이징 모형의 연관성

홉필드 네트워크는 인공 뉴런들로 구성된 에너지 기반 네트워크로, 이징 모형과 비슷하게 전체 시스템의 에너지를 최소화하는 패턴을 찾습니다. 홉필드 네트워크는 **패턴 복원과 기억**을 목적으로 개발되었으며, 이징 모형의 개념을 기반으로 시스템의 최적화 과정을 수행합니다.

홉필드 네트워크의 구조

홉필드 네트워크의 각 뉴런은 **이진 상태**(**+1** 또는 **-1**)를 가지며, 네트워크 전체는 뉴런 간의 연결 가중치를 통해 특정 패턴을 기억하고 복원하는 기능을 합니다. 홉필드 네트워크는 모든 뉴런 간의 연결을 가지며, 각 뉴런의 상태는 모든 다른 뉴런과의 상호작용을 통해 결정됩니다. 이는 이징 모형의 격자 구조와는 다른 **완전 연결 구조**입니다.

홉필드 네트워크의 에너지 함수

홉필드 네트워크의 에너지 함수는 다음과 같습니다.

$$E = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} w_{ij} s_i s_j + \sum_i \theta_i s_i$$

- w_{ij} : 뉴런 i와 j 간의 가중치, 패턴 학습에 따라 결정됩니다.
- s_i : 뉴런 i의 상태 (**+1** 또는 **1**).
- θ_i : 각 뉴런에 대한 바이어스 항, 외부 자장과 유사한 역할을 합니다.

이 에너지 함수는 홉필드 네트워크가 안정적인 패턴을 찾을 때까지 반복적으로 뉴런 상태를 갱신하여 **에너지를 최소화**하는 방식으로 학습된 패턴을 복원하도록 합니다.

3. 홉필드 네트워크의 학습과 에너지 최소화

홉필드 네트워크에서 **학습**은 기억하려는 패턴의 외적을 통해 가중치 행렬을 업데이트하는 방식으로 이루어집니다. 예를 들어, 패턴이 **P** 개 있다고 할 때, 각 패턴 \mathbf{x}^p 에 대해 다음과 같이 가중치 행렬을 설정합니다.

$$w_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^P x_i^p x_j^p$$

- N : 뉴런의 개수.
- x_i^p : 패턴 p에서 뉴런 i의 값.

이 과정을 통해 패턴이 가중치 행렬에 저장되며, 네트워크는 학습된 패턴에 가까운 초기 입력을 받으면 **안정된 패턴**으로 수렴하게 됩니다.

4. 이징 모형과 홉필드 네트워크의 차이점과 응용 사례

차이점

- **상호작용 범위:** 이징 모형은 인접한 스핀 간의 상호작용만 고려하는 **지역적 상호작용** 모델입니다. 반면, 홉필드 네트워크는 모든 뉴런이 서로 상호작용하는 **완전 연결** 모델입니다.
- **목적:** 이징 모형은 물리학적 자성 문제를 설명하기 위한 모델로 출발했으며, 홉필드 네트워크는 인공지능에서 패턴 복원과 기억 문제를 해결하기 위해 개발되었습니다.
- **상태 갱신 방식:** 홉필드 네트워크는 비동기적으로 뉴런 상태를 갱신하면서 최적화를 수행할 수 있지만, 이징 모형은 보통 동기적 상태 갱신을 가정합니다.

응용 사례

- **패턴 복원 및 기억:** 홉필드 네트워크는 이징 모형을 활용해 다양한 패턴을 학습한 후, 손상된 패턴을 원래 상태로 복원할 수 있습니다.
- **이미지 복원 및 완성:** 홉필드 네트워크의 패턴 복원 기능은 손상된 이미지 데이터를 복원하거나 원본 이미지로 완성하는 데 사용됩니다.
- **최적화 문제:** 홉필드 네트워크는 이징 모형처럼 조합 최적화 문제, 예를 들어 ****여행자 문제(TSP)****나 **그래프 색칠하기 문제** 같은 최적화 문제에 응용될 수 있습니다.